

LAJES RETANGULARES DE EDIFÍCIOS:
ASSOCIAÇÃO DO CÁLCULO ELÁSTICO COM
A TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS

AUTORA: ENG^o. PATRÍCIA MENEZES RIOS
ORIENTADOR: PROF. DR. LIBÂNIO MIRANDA PINHEIRO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
ÁREA DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

LAJES RETANGULARES DE EDIFÍCIOS:
ASSOCIAÇÃO DO CÁLCULO ELÁSTICO COM
A TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS

ENG^o. PATRÍCIA MENEZES RIOS

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

ORIENTADOR:
PROF. DR. LIBÂNIO MIRANDA PINHEIRO

SÃO CARLOS - SP, FEVEREIRO DE 1991

À Marcelo,

a meus pais, Jussara e Moacyr

e a meu avô, Arthur.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Libânio Miranda Pinheiro, orientador dedicado e competente, por sua colaboração, pela capacidade de análise dos problemas de engenharia e, especialmente, por sua amizade que sempre me incentivou.

À Profª. Helena Maria C. Carmo Antunes por sua colaboração experiente e segura.

Ao meu esposo, Marcelo, que tanto me transmitiu segurança, contribuindo com valiosas sugestões para a aplicação prática deste trabalho.

Ao Prof. Moacyr Schwab de Souza Menezes, meu pai, pela cuidadosa revisão do texto.

A Francisco Carlos de Brito pela presteza e pela excelente qualidade dos desenhos.

A Maria Nadir Minatel pelo capricho com que desenvolve sua atividade de bibliotecária.

Ao Prof. Noberto Costardi pela dedicação ao seu trabalho junto ao Laboratório de Computação.

A Tânia, Tatiana, Marita e Libânio pelo carinho e apoio que me concederam.

Ao Prof. Hernani Sobral por ter aberto o caminho do meu mestrado em São Carlos.

Aos demais professores e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC - USP, aos colegas e amigos pelo convívio e amizade.

À CAPES pelo auxílio financeiro prestado, através da concessão de bolsa de estudos.

RESUMO

Os objetivos principais deste trabalho são a sistematização e a automatização do cálculo de lajes de edifícios. A análise engloba as lajes retangulares simplesmente apoiadas, engastadas ou com bordas livres.

A determinação dos momentos fletores é feita com base na teoria das charneiras plásticas, onde são fixados os momentos negativos e a relação entre os momentos positivos. Desenvolve-se, também, uma formulação para a obtenção dos comprimentos das armaduras negativas, baseada no cálculo plástico. O cálculo elástico é utilizado para fornecer os dados iniciais, de modo que essa escolha não viole o comportamento da laje em serviço. A associação do cálculo plástico com o elástico traz uma economia significativa.

Um procedimento para a verificação do estado de deformação excessiva é apresentado, propondo-se uma marcha de cálculo para a determinação das flechas nas lajes, considerando a diminuição da rigidez devida à fissuração e os efeitos dependentes do tempo, decorrentes da deformação lenta e da retração.

ABSTRACT

The main aim of this work is to systematize, through a computer program, the design of building slabs. Rectangular slabs, simply supported, continuous or with free edges, are studied.

Yield line analysis is used to calculate the moments, where negative bending moments and the relation between positive bending moments are previously established. The formulation necessary to obtain the extent of top reinforcement is also developed, based on plastic analysis. The plate elastic theory is associated to the yield line theory in determining the initial data, in order to make them compatible with the in service behaviour of the slab. The association of plastic and elastic theory leads to a significant economy.

A procedure for computing deflections is proposed; it includes the determination of the immediate elastic deflection, the consideration of the reduction of rigidity due to cracking and time dependent effects due to creep and shrinkage.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

1.1. GENERALIDADES	1
1.2. OBJETIVOS	3
1.3. ETAPAS DO TRABALHO	4

2. CONSIDERAÇÕES SOBRE O CÁLCULO DE LAJES

2.1. VÃO TEÓRICO	6
2.2. VINCULAÇÃO	7
2.3. PRÉ-DIMENSIONAMENTO	8
2.3.1. Norma Brasileira NBR-6118	8
2.3.2. Comité Euro-International du Béton CEB-124/125F	10
2.3.3. American Concrete Institute ACI-318M/83	11
2.4. CARGAS	12
2.4.1. Carga permanente	12
2.4.2. Carga acidental ou sobrecarga	13
2.5. REAÇÕES DE APOIO	14

3. CÁLCULO ELÁSTICO

3.1. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA LINHA ELÁSTICA	17
3.2. MOMENTOS E COMPATIBILIZAÇÃO	26

4. FLECHAS

4.1. GENERALIDADES	29
4.2. ESTADOS LIMITES	29
4.2.1. Estados limites últimos	30
4.2.2. Estados limites de utilização	30
4.3. TIPOS DE DEFORMAÇÕES	31
4.3.1. Deformações que dependem do carregamento	31
4.3.2. Deformações independentes do carregamento	32
4.4. VALORES LIMITES DAS FLECHAS	33
4.4.1. Norma Brasileira NBR-6118	33
4.4.2. Comité Euro-International du Béton CEB-158E	33
4.4.3. American Concrete Institute ACI-318M/83	34
4.5. DETERMINAÇÃO DA FLECHA	35
4.6. FLECHA ELÁSTICA INICIAL	35
4.6.1. Equação diferencial da linha elástica	35
4.6.2. Momento de inércia à flexão	39
4.6.3. Carga de utilização	47
4.7. FLECHA DECORRENTE DA DEFORMAÇÃO LENTA	49
4.7.1. Coeficiente de fluência rápida	52
4.7.2. Coeficiente de deformação lenta irreversível	52
4.7.3. Coeficiente de deformação lenta reversível	53
4.7.4. Idade fictícia do concreto	54
4.7.5. Espessura fictícia da peça	54
4.7.6. Deformações específicas do concreto e do aço	55
4.7.7. Cálculo de ϵ_{cc}	58

4.8. FLECHA DECORRENTE DA RETRAÇÃO	58
4.9. MARCHA DE CÁLCULO	63
4.9.1. Momentos	63
4.9.2. Momento de inércia à flexão	64
4.9.3. Flecha elástica inicial	65
4.9.4. Flecha decorrente da deformação lenta	65
4.9.5. Flecha decorrente da retração	66
4.9.6. Flecha total	67

5. NOÇÕES SOBRE A TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS

5.1. TEOREMAS FUNDAMENTAIS	68
5.1.1. Teorema estático ou do limite inferior	68
5.1.2. Teorema cinemático ou do limite superior	68
5.2. HIPÓTESES DE CÁLCULO	69
5.3. CONFIGURAÇÕES DAS CHARNEIRAS	71
5.4. FORÇAS NODAIS	74
5.4.1. Convenções	74
5.4.2. Critério de plastificação "en escada" de Johansen	75
5.4.3. Esforços internos	79
5.4.4. Determinação das forças nodais	82
5.4.5. Restrições ao uso da equação (5.4.6) de forças nodais	91
5.5. MÉTODO DO EQUILÍBRIO	93
5.5.1. Exemplos de aplicação	95
5.6. MÉTODO DA ENERGIA	103
5.6.1. Trabalho das forças externas	104
5.6.2. Trabalho das forças internas	106
5.6.3. Exemplos de aplicação	109

5.7. AFINIDADE	114
5.7.1. Regras de transformação	114
5.7.2. Exemplo	121

6. CÁLCULO DE LAJES PELA TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS

6.1. GENERALIDADES	124
6.2. CÁLCULO DE LAJES FIXANDO-SE AS RELAÇÕES ENTRE OS MOMENTOS NEGATIVOS E POSITIVOS	126
6.2.1. Laje retangular engastada ou simplesmente apoiada em seu contorno	126
6.2.2. Laje retangular com uma borda livre ...	131
6.2.3. Laje retangular com duas bordas adjacentes livres	138
6.2.4. Laje retangular com duas bordas opostas livres	143
6.3. CÁLCULO DE LAJES FIXANDO-SE O VALOR DOS MOMENTOS NEGATIVOS	145
6.3.1. Laje retangular engastada ou simplesmente apoiada	145
6.3.2. Laje retangular com uma borda livre ...	151
6.3.3. Laje retangular com duas bordas adjacentes livres	157
6.3.4. Laje retangular com duas bordas opostas livres	160
6.4. PONTO DE INTERRUPTÃO DA ARMADURA NEGATIVA	163
6.4.1. Laje retangular engastada ou simplesmente apoiada	164
6.4.2. Laje retangular com uma borda livre ...	166
6.4.3. Laje retangular com duas bordas adjacentes livres	169
6.4.4. Laje retangular com duas bordas opostas livres	173

6.5. MARCHA DE CÁLCULO	174
6.5.1. Dados do problema	174
6.5.2. Valores de m e μ	174
6.5.3. Laje retangular engastada ou simplesmente apoiada em seu contorno	174
6.5.4. Laje retangular com uma borda livre ...	177
6.5.5. Laje retangular com duas bordas adjacentes livres	179
6.5.6. Laje retangular com duas bordas opostas livres	182

7. PROGRAMA PARA CÁLCULO AUTOMÁTICO

7.1. INSTALAÇÃO DO PROGRAMA	184
7.1.1. Instalação dos dados gerais	184
7.1.2. Instalação dos dados para o cálculo de flechas	187
7.2. ENTRADA DE DADOS	188
7.3. UNIDADES	193
7.4. RESOLUÇÃO	194
7.5. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	196

8. EXEMPLOS

8.1. EXEMPLO Nº1	197
8.1.1. Cálculo elástico	199
8.1.2. Cálculo pela TCF	200
8.1.3. Comparação dos resultados	202
8.1.4. Flechas	205
8.1.5. Programa	205
8.2. EXEMPLO Nº2	213
8.2.1. Cálculo elástico	215

8.2.2. Cálculo pela TCP	216
8.2.3. Comparação dos resultados	218
8.2.4. Flechas	220
8.2.5. Programa	220

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

9.1. ANÁLISE DOS RESULTADOS DOS EXEMPLOS	231
9.2. CONCLUSÕES	232
9.3. NOVAS PESQUISAS	235

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

237

11. BIBLIOGRAFIA

244

1. INTRODUÇÃO

1.1. GENERALIDADES

No passado, e de certa forma até hoje, a maioria das estruturas era analisada com base na teoria da elasticidade. Apesar disso, entretanto, o método elástico tem suas limitações.

O cálculo elástico não permite uma determinação precisa da carga de ruína, pois, nessa condição, os materiais podem estar comportando-se plasticamente e, conseqüentemente, a estrutura não mais se comporta linearmente. Dessa forma, as bases da teoria da elasticidade estariam sendo violadas e não se teria uma verdadeira indicação da distribuição de momentos na estrutura.

Mesmo assim, o cálculo em regime elástico é, sem dúvida alguma, fundamental, pois, além de servir de base para o cálculo plástico, é indispensável para a análise da estrutura em serviço.

Já o cálculo plástico é mais coerente com o dimensionamento no estado limite último, interpreta mais fielmente o comportamento da estrutura na ruína. Pode-se observar ainda que a teoria das charneiras plásticas, aqui também referida através de suas iniciais TCF, requer um tratamento matemático mais simples.

Enfim, o cálculo elástico e o cálculo plástico se completam e cada qual serve a um propósito distinto. O

cálculo elástico descreve bem o comportamento da estrutura em serviço, sendo o mais apropriado para o estudo das deformações e dos problemas de fissuração; enquanto o cálculo plástico permite a obtenção mais racional da carga última.

O cálculo elástico das lajes de concreto armado baseia-se na teoria das placas delgadas, cuja origem remonta a Lagrange que, em 1816, estabeleceu a equação diferencial da deformada elástica.

A teoria das charneiras plásticas foi imaginada por INGERSLEV⁽⁰¹⁾, num trabalho publicado em 1921, em dinamarquês e, dois anos depois, em inglês. No seu trabalho, Ingerslev, ao estudar o equilíbrio de cada região da laje delimitada pelas charneiras, assumia existirem apenas os momentos ao longo das linhas de plastificação.

JOHANSEN⁽⁰²⁾, porém, deu um tratamento mais correto à teoria, fazendo com que essa ficasse conhecida como a teoria de Johansen. Engenhosamente, ele criou o conceito de forças nodais, ou seja, forças que atuavam nas interseções das linhas de plastificação e eram estaticamente equivalentes às forças cortantes atuantes ao longo das charneiras. Nos ensaios realizados em 1941, com lajes de tamanho natural e nos quais a carga foi mantida por muito tempo, a configuração de ruína e o valor do momento de plastificação estiveram em ótimo acordo com a teoria de Johansen.

Até 1950, pouco desenvolvimento foi dado à teoria, salientando-se, nesse período, os trabalhos de GVCZDEV⁽⁰³⁾⁽⁰⁴⁾⁽⁰⁵⁾⁽⁰⁶⁾⁽⁰⁷⁾⁽⁰⁸⁾ na União Soviética, os do próprio JOHANSEN⁽⁰⁹⁾⁽¹⁰⁾ e de CHAMECKI⁽¹¹⁾, esse último no Brasil.

A teoria das charneiras plásticas somente começou a tomar impulso, após 1950, com inúmeros trabalhos publicados, destacando-se os de MANSFIELD⁽¹²⁾, WOOL⁽¹³⁾,

JONES⁽¹⁴⁾ e LANGENDONCK⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾.

Apesar disso, sua utilização na prática ainda não é ampla. Falta uma maior divulgação de processos que permitam ao engenheiro enfrentar os casos reais da prática, que são as lajes anisótropas contínuas.

Com o intuito de facilitar o uso da teoria, AMARAL⁽¹⁸⁾ propôs fórmulas simples e diretas, onde os próprios momentos negativos eram fixados. PINHEIRO⁽¹⁹⁾ fixou as relações entre os momentos negativos e positivos, conduzindo a um cálculo iterativo, uma vez que, nos vínculos das lajes onde há continuidade, aparecem momentos diferentes. O trabalho recentemente apresentado por SANTOS⁽²⁰⁾, segue a mesma linha de Amaral, sugerindo alguns aprimoramentos.

1.2. OBJETIVOS

Neste trabalho, pretende-se sistematizar e automatizar o cálculo de lajes retangulares de edifícios, utilizando-se tanto o cálculo elástico quanto o cálculo plástico.

Apresenta-se uma formulação para o cálculo dos momentos de plastificação e dos comprimentos das armaduras negativas, para lajes retangulares simplesmente apoiadas, engastadas ou com bordas livres, sujeitas a carga uniformemente distribuída e, quando houver borda livre, carga linear ao longo da mesma. Esta formulação é baseada na teoria das charneiras plásticas, onde são fixados os momentos negativos e a relação entre os momentos positivos, sendo estes dados iniciais fornecidos pelo cálculo elástico.

Apesar de, em alguns casos, ser necessário um

cálculo iterativo, deve-se ressaltar que o processo de iteração é feito uma só vez em cada laje, não interferindo nas demais.

A utilização da TCP para o cálculo das lajes, por, em geral, conduzir a momentos fletores inferiores aos do cálculo elástico, permite o uso de espessuras menores. Torna-se, então, conveniente e até necessária, a determinação da flecha da laje, para verificar se esta atende às condições de utilização. A verificação do estado limite de deformação excessiva é feita em regime elástico, já que, em serviço, a estrutura comporta-se elasticamente.

O cálculo das flechas nas lajes, considerando apenas a flecha elástica instantânea, leva a uma estimativa muito aquém da flecha real. Este trabalho engloba o cálculo da flecha imediata, considerando a diminuição da rigidez devida à fissuração e mais os efeitos dependentes do tempo, decorrentes da deformação lenta e da retração. O valor da flecha total, incluindo todos esses fatores, é muito maior que o valor da flecha elástica inicial (em torno de quatro vezes maior).

1.3. ETAPAS DO TRABALHO

Algumas considerações gerais sobre o cálculo de lajes são expostas no capítulo 2, incluindo recomendações das normas. As noções gerais sobre o cálculo elástico, são apresentadas no capítulo 3, onde é feita uma descrição concisa dos fundamentos da teoria das placas delgadas. Ainda neste capítulo, analisa-se o cálculo dos momentos nas lajes, incluindo sugestões de um novo critério de compatibilização dos momentos.

Um procedimento para a verificação do estado de deformação excessiva é apresentado no capítulo 4,

propondo-se uma marcha de cálculo para a determinação das flechas nas lajes. O cálculo das flechas inclui a consideração da fissuração e mais os efeitos de deformação lenta e retração.

Os fundamentos da teoria das charneiras plásticas são apresentados no capítulo 5, juntamente com uma descrição do método do equilíbrio e da energia. A formulação para a obtenção dos momentos de plastificação e dos comprimentos das armaduras negativas é desenvolvida no capítulo 6.

No capítulo 7, o programa é sumariamente descrito, mostrando-se com que simplicidade é feita a entrada de dados. Finalmente, no capítulo 8, são mostrados dois exemplos completos do cálculo de pavimentos de lajes. As conclusões e sugestões para novas pesquisas são expostas no capítulo 9.

2. CONSIDERAÇÕES SOBRE O CÁLCULO DE LAJES

2.1. VÃO TEÓRICO

As especificações da Norma Brasileira NBR-6118²¹ (item 3.3.2.3), a respeito de vão teórico, são apresentadas a seguir.

"O vão teórico é a distância entre os centros dos apoios, não sendo necessário adotar valores maiores que:

a) em laje isolada: o vão livre acrescido da espessura da laje no meio do vão;

b) em laje contínua, vão extremo: o vão livre acrescido da semi-largura do apoio interno e da semi-espessura da laje no meio do vão.

Nas lajes em balanço, o comprimento teórico é o comprimento da extremidade até o centro do apoio, não sendo necessário considerar valores superiores ao comprimento livre acrescido da metade da espessura da laje junto ao apoio."

Na maioria dos casos da prática, a diferença entre a espessura da laje e a largura dos apoios é pequena em relação à distância entre os centros dos mesmos, sendo usual adotar-se, como vão teórico, simplesmente a distância entre eixos de apoios.

2.2. VINCULAÇÃO

Nas estruturas correntes de concreto armado, as lajes estão, quase sempre, ligadas monoliticamente às vigas que as suportam (figura 2.1-a). No entanto, a consideração desse monolitismo, no cálculo estrutural, levaria a uma complexidade tal, que o tornaria inexequível. Usualmente, é feita uma divisão virtual dos elementos estruturais e, desse modo, as lajes são consideradas placas apoiadas sobre as vigas, interagindo somente com as lajes vizinhas (figura 2.1-b). As vigas são admitidas como apoios indeslocáveis, mesmo sabendo-se que, sob a ação das cargas, elas também se deformam; este fato é desprezado nos casos da prática corrente. Um estudo mais aprofundado deveria levar em conta essa flexibilidade dos apoios, conforme demonstra MAZZILLI⁽²²⁾. Com base nessas hipóteses, têm-se as condições de contorno usuais da Teoria das Placas.

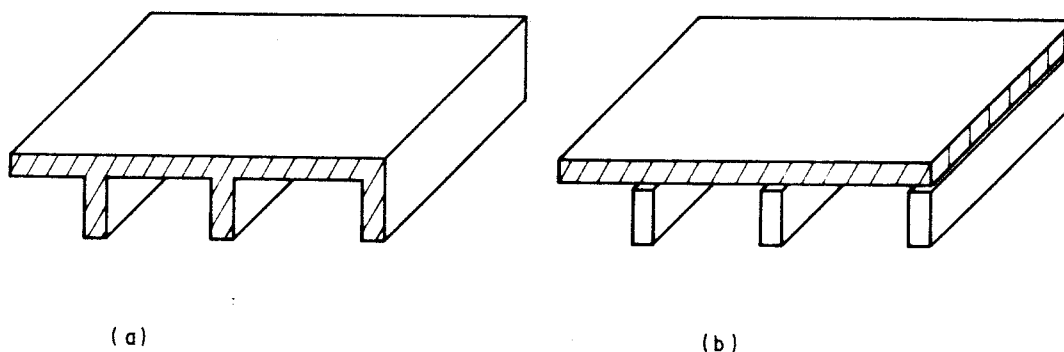


FIGURA 2.1. - Ligação entre lajes e vigas

É importante chamar a atenção para o caso das lajes contínuas, pois o cálculo é feito considerando as lajes isoladas. Em geral, obtêm-se momentos diferentes nos apoios entre lajes vizinhas, seguindo-se, então, a compatibilização dos mesmos.

2.3. PRÉ-DIMENSIONAMENTO

Para a determinação da espessura da laje, podem-se adotar valores de acordo com a experiência ou seguir recomendações das normas.

2.3.1. Norma Brasileira NBR-6118

A Norma Brasileira NBR-6118^[21] (item 4.2.3.1-C) prefixa a espessura da laje para que sejam consideradas atendidas as condições de esbeltez máxima, sem que haja necessidade de verificar as flechas. Para isso, a altura útil da laje não deve ser inferior a $\frac{\ell}{\psi_2 \psi_3}$, sendo ℓ o menor vão e os valores de ψ_2 e ψ_3 expostos a seguir.

- Lajes armadas em uma direção:

	Valores de ψ_2
simplesmente apoiadas.....	1,0
contínuas.....	1,2
duplamente engastadas.....	1,7
em balanço.....	0,5

- Lajes armadas em cruz:

os valores de ψ_2 são obtidos na tabela 2.1. Sua notação foi modificada, para ficar de acordo com a usada neste trabalho:

ℓ_x = vão menor,

ℓ_y = vão maior,

número superior: ψ_2 para $\frac{\ell_y}{\ell_x} = 1$,

número inferior: ψ_2 para $\frac{\ell_y}{\ell_x} = 2$, podendo usar-se, também, para razão entre os lados maior que 2, exceto nos casos assinalados com asterisco,

para $1 < \frac{l_y}{l_x} < 2$: interpolar linearmente.

TABELA 2.1. - VALORES DE ψ_2

$\frac{l_y}{l_x}$					
	$\begin{matrix} 2,2 \\ 1,7 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2,0 \\ 1,7 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,9 \\ 1,7 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,7 \\ 1,7 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,7 \\ 1,7 \end{matrix}$
	$\begin{matrix} 2,0 \\ 1,4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,8 \\ 1,4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,7 \\ 1,4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,4 \\ 1,3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,3 \\ 1,3 \end{matrix}$
	$\begin{matrix} 1,9 \\ 1,2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,7 \\ 1,1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,5 \\ 1,1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,1 \\ 1,0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,0 \\ 1,0 \end{matrix}$
	$\begin{matrix} 1,7 \\ 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,4 \\ 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,1 \\ 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,7 \\ 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,6 \\ 0,5 \end{matrix}$
	$\begin{matrix} *1,7 \\ 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} *1,3 \\ 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} *1,0 \\ 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} *0,6 \\ 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} *0,6 \\ 0,3 \end{matrix}$

Tensão na armadura para a solicitação de cálculo (σ_{ed})

Valores de ψ_3 (lajes maciças)

215 MPa.....	35
280 MPa.....	33
350 MPa.....	30
435 MPa.....	25
520 MPa.....	20

Estes valores de σ_{ed} correspondem aos valores aproximados de f_{yd} dos aços CA-25, CA-32, CA-40, CA-50 e CA-60, respectivamente, considerando $\gamma_s = 1,15$.

Para as lajes, com mais de 4 m de vão teórico, que suportarem paredes, na direção do vão, suscetíveis de fissuração, as alturas úteis mínimas, calculadas segundo o exposto nas páginas anteriores, deverão ser multiplicadas por $\frac{l}{4}$ (l em metro).

A referida norma (item 6.1.1.1) também fixa os valores mínimos, que devem ser adotados para a espessura das lajes.

Espessura mínima

- lajes de cobertura não em balanço 5 cm
- lajes de piso e lajes em balanço 7 cm
- lajes destinadas à passagem de veículos ..12 cm

2.3.2. Comité Euro-International du Béton CEB-124/125F

Segundo o CEB^[23] (item 16.2.4), a verificação de flechas não é necessária para os casos em que as deformações não excedam certos valores e nem ofereçam riscos de danos para os revestimentos.

A título indicativo, a verificação de deformação pode ser omitida nos seguintes casos:

- a) lajes com vãos que não excedam 5 m;
- b) lajes com a razão $\frac{\alpha l}{h} \leq 30$.

onde,

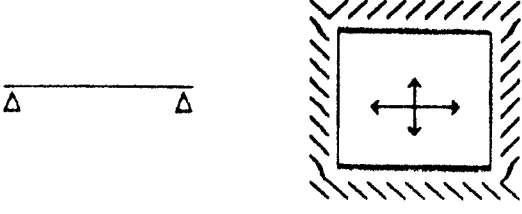
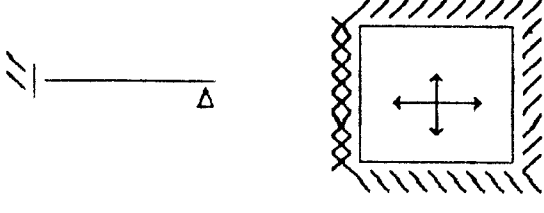
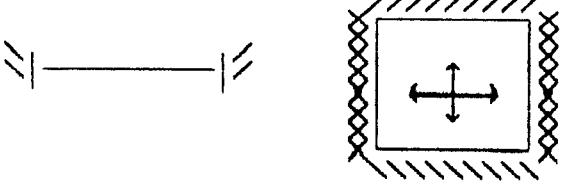
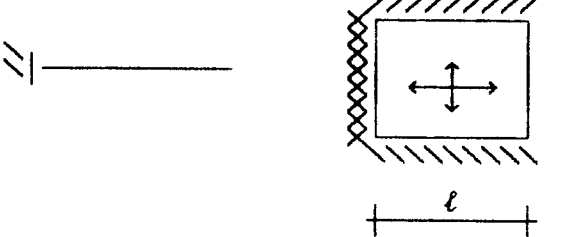
h = espessura da laje,

l = vão da laje,

α = obtido na tabela 2.2.

Para as lajes que suportam paredes ou divisórias, que podem ser afetadas pelas deformações, a razão $\frac{\alpha l}{h}$ não deve ultrapassar $\frac{150}{\alpha l}$ (l em metro).

TABELA 2.2. - VALORES DE α

Esquema de Vinculação	Valores de α
	1,0
	0,8
	0,6
	2,4

2.3.3. American Concrete Institute ACI-318M/83

O ACI⁽²⁴⁾ (item 9.5) também estipula espessuras mínimas para as lajes, que serão expostas a seguir. Logicamente, esses valores podem ser violados, desde que seja feita a verificação de deformação.

Para as lajes armadas em uma direção, que não estejam ligadas ou suportando elementos que possam ser danificados pelas deformações, as espessuras mínimas são:

	Valores de h
- simplesmente apoiada	$\frac{l}{20}$
- um lado contínuo	$\frac{l}{24}$
- dois lados contínuos	$\frac{l}{28}$
- em balanço	$\frac{l}{10}$

sendo l o vão da laje (em milímetro).

Para as lajes armadas em cruz, o método proposto pelo ACI é bastante complexo, uma vez que leva em conta a largura colaborante da laje na seção da viga, a rigidez à flexão e a rigidez à torção da viga. Desta forma, seu uso não se justifica para o pré-dimensionamento.

Essas recomendações, tanto da Norma Brasileira, como do CEB e do ACI, geralmente conduzem a valores exagerados, sendo possível adotar-se espessuras menores, seguidas da verificação de flecha.

2.4. CARGAS

As cargas que atuam nas lajes podem ser permanentes ou acidentais. Elas são determinadas com base no projeto arquitetônico e devem estar de acordo com as especificações das Normas Brasileiras NBR-6120⁽²⁵⁾ e NBR-6118⁽²¹⁾.

2.4.1. Carga permanente

Compõe-se basicamente de peso próprio, revestimento, pavimentação, enchimento e peso de parede.

O peso próprio é calculado a partir de uma estimativa da espessura da laje (ver item 2.3) e

adotando-se o peso específico do concreto armado igual a 25 kN/m^3 , conforme a NBR-6120.

Para o cálculo do peso das paredes, a NBR-6120 fornece o peso específico dos materiais envolvidos. A carga das paredes é uma carga linear; porém, em muitos casos, pode ser suposta uniformemente distribuída. É uma simplificação grosseira, justificável para lajes com vãos não muito grandes e carga de parede pequena em relação à carga total da laje.

2.4.2. Carga accidental ou sobrecarga

É constituída do peso dos móveis, objetos e pessoas. As sobrecargas foram estabelecidas pela NBR-6120, com base em critérios estatísticos e de acordo com a finalidade a que se destinam as lajes.

A seguir, transcrevem-se alguns valores das sobrecargas, recomendados pela NBR-6120.

a) Edifícios residenciais:

- dormitórios, sala, copa, cozinha e banheiro .. $1,5 \text{ kN/m}^2$
- despensa, área de serviço e lavanderia $2,0 \text{ kN/m}^2$

b) Escritórios:

- salas de uso geral e banheiro $2,0 \text{ kN/m}^2$

c) Forros:

- sem acesso a pessoas $0,5 \text{ kN/m}^2$

d) Garagens e estacionamentos:

- para veículos de passageiros ou semelhantes
com carga máxima de 25 kN por veículo $3,0 \text{ kN/m}^2$

2.5. REAÇÕES DE APOIO

Considere-se uma placa retangular simplesmente apoiada no seu perímetro (figura 2.2-a). Admita-se que os apoios forneçam vínculos unilaterais, isto é, que os apoios somente mobilizem reações dirigidas de baixo para cima.

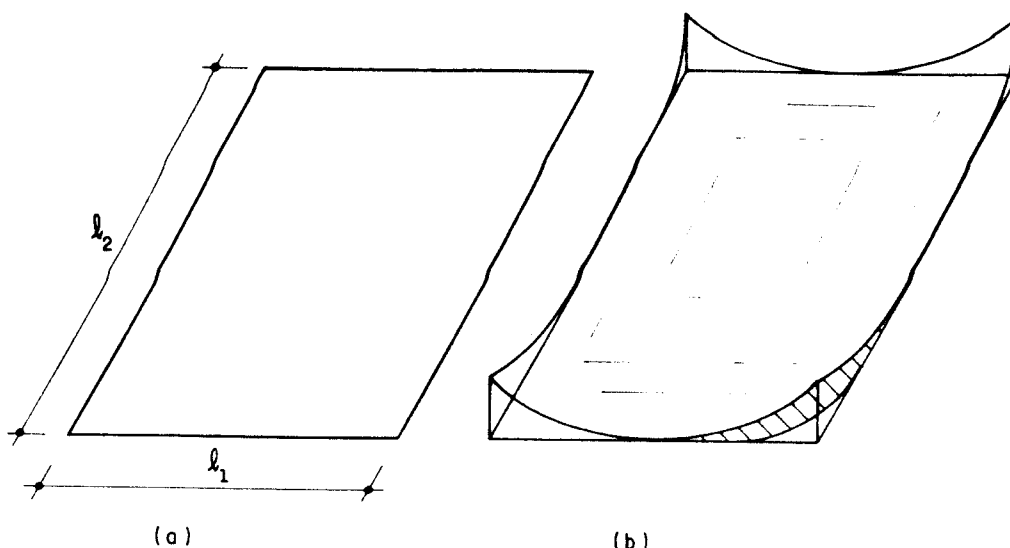


FIGURA 2.2. - Laje retangular simplesmente apoiada

Sob a ação de um carregamento qualquer uniformemente distribuído, dirigido de cima para baixo, por exemplo, verifica-se que os cantos das placas deslocam-se dos apoios (figura 2.2-b).

Nas lajes de concreto, devido ao monolitismo existente entre lajes e vigas, verifica-se que as bordas permanecem retilíneas. Isto significa que os apoios forneceram vínculos bilaterais, ou seja, ao longo das bordas mobilizaram reações nos dois sentidos.

Convencionando-se as reações dirigidas de 'baixo para cima como positivas, junto aos cantos da placa haverá

reações negativas. O diagrama das reações de apoio ao longo de uma borda de uma placa retangular, sob a ação de uma carga uniformemente distribuída, é ilustrado na figura 2.3-a.

No entanto, aplicando-se a Teoria das Placas Delgadas, com a sua formulação usual, em lugar das reações negativas, distribuídas junto aos cantos (figura 2.3-a), obtém-se a distribuição aproximada, indicada na figura 2.3-b (FUSCO^[26]).

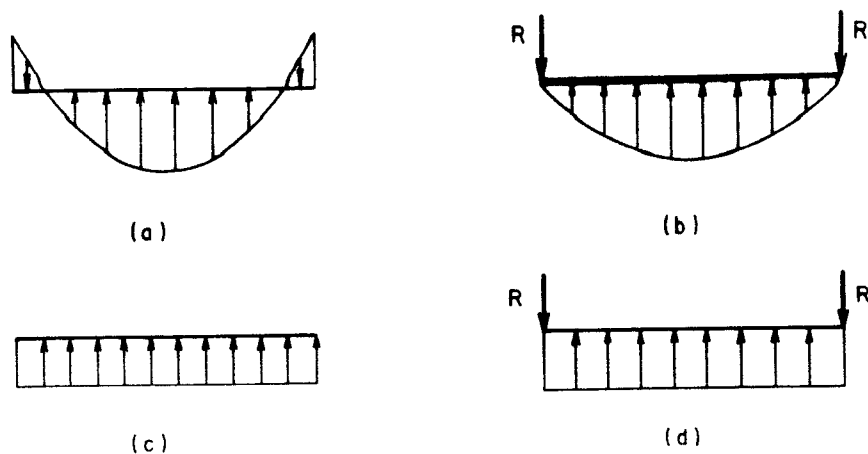


FIGURA 2.3. - Distribuição das reações de apoio

Para o cálculo manual das vigas de apoio, seria extremamente trabalhoso adotar-se o diagrama indicado na figura 2.3-b. Usualmente, partindo-se de uma simplificação, admite-se uma distribuição uniforme, ou seja, consideram-se reações médias, sem as reações de canto (figura 2.3-c). Esta simplificação conduz a resultados contra a segurança para o apoio em questão. Uma alternativa que se aproxima bastante da distribuição correta é ilustrada na figura 2.3-d, onde são levadas em conta as reações de canto e, em relação ao procedimento usual, o trabalho de cálculo não é aumentado praticamente.

Para a determinação exata da distribuição das reações de apoio da placa, deve-se levar em conta a

flexibilidade das vigas de apoio, o que pode ser feito empregando-se o processo dos elementos finitos ou dos elementos de contorno, por exemplo.

O cálculo das reações de apoio das lajes, baseado na Norma Brasileira NBR-6118⁽²¹⁾ (item 3.3.2.9), cujo texto é exposto a seguir, é feito a partir da determinação aproximada das linhas de plastificação.

"Permite-se calcular as reações de apoio de lajes retangulares, com cargas uniformemente distribuídas, considerando-se para cada apoio carga correspondente aos triângulos ou trapézios obtidos traçando-se, a partir dos vértices, na planta da laje, retas inclinadas de:

45° entre dois apoios de mesmo tipo;

60° a partir do apoio engastado quando o outro for livremente apoiado;

90° a partir do apoio quando a borda vizinha for livre."

Este procedimento, sugerido pela norma, é inspirado no comportamento da laje em regime plástico. Para um refinamento de cálculo, a determinação das reações de apoio deve ser feita em regime elástico, uma vez que as cargas, geralmente, se transferem das lajes para as vigas com a estrutura trabalhando elasticamente.

3. CÁLCULO ELÁSTICO

Mesmo sendo o cálculo plástico mais adequado para o dimensionamento das lajes de concreto armado, o cálculo elástico é indispensável. Sabe-se que, nas condições de serviço, a laje comporta-se elasticamente, devendo-se fazer a verificação dos estados limites de utilização em regime elástico. O cálculo elástico é utilizado também no pré-dimensionamento para o cálculo plástico, na avaliação do índice de ortotropia da laje e na escolha da relação entre os momentos negativos e positivos ou dos próprios momentos negativos.

3.1. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA LINHA ELÁSTICA

A teoria clássica de placas delgadas, baseada na teoria de Kirchhoff, interpreta suficientemente bem o comportamento das lajes que apresentam relação espessura/menor vão entre 1/5 e 1/100. As lajes usuais de edifícios possuem essa relação entre 1/40 e 1/60, atingindo até 1/80. Uma descrição concisa dos fundamentos do método é apresentada neste capítulo. Para uma análise mais detalhada deste assunto, existe uma ampla bibliografia, encontrando em TIMOSHENKO^[27] sua obra clássica.

Supõe-se que a placa é constituída de material homogêneo e isótropo e comporta-se linearmente (segue a

lei de Hooke). A carga $p(x,y)$, normal ao plano da placa, pode ser distribuída com qualquer lei, sobre toda ou parte da placa. A deformada da placa pode ser definida pela função $w(x,y)$, que determina os deslocamentos verticais dos pontos (x,y) do plano médio da mesma. Desta forma, admite-se que os pontos do referido plano médio sofrem apenas deslocamentos verticais, pequenos em relação à espessura da placa, e que as retas normais ao plano médio permanecem perpendiculares à superfície deformada do mesmo (os deslocamentos horizontais são desprezíveis).

A convenção adotada supõe tensões normais positivas, quando provocam tração na face inferior do elemento, e tensões tangenciais positivas (sempre tomando a face inferior como referência), se coincidem com o sentido positivo dos eixos. Os esforços são considerados positivos quando os momentos fletores provocam tração nas fibras inferiores, os momentos volventes têm seu vetor emergente da face considerada e os esforços cortantes tendem a girar o elemento no sentido horário, olhando o eixo da esquerda para direita.

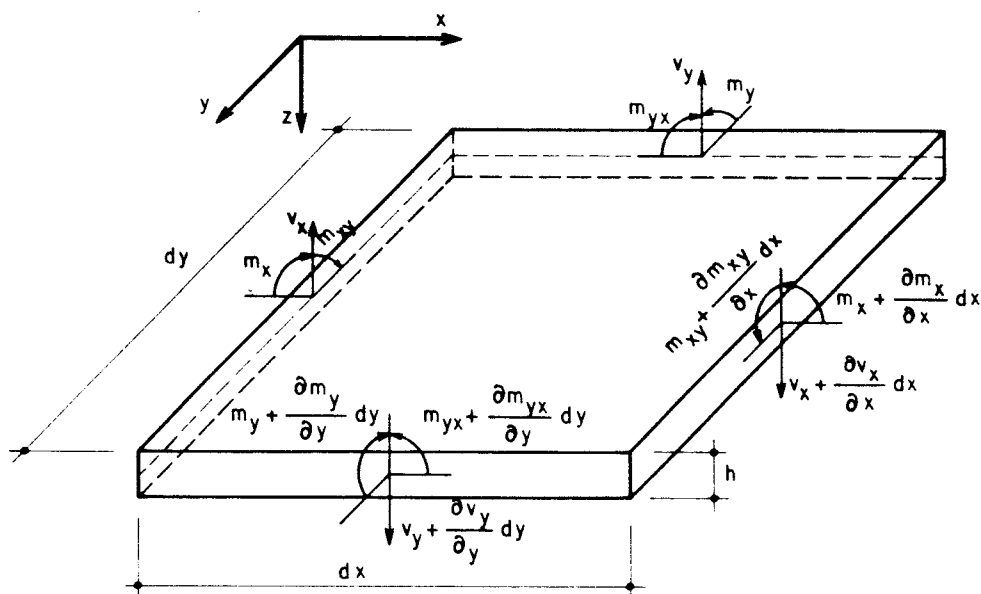


FIGURA 3.1. - Esforços em um elemento de placa

Os esforços atuantes num elemento genérico da placa estão indicados na figura 3.1, com

$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} . dz = \text{força cortante por unidade de comprimento da seção da placa perpendicular ao eixo X,}$$

$$v_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} . dz = \text{força cortante por unidade de comprimento da seção da placa perpendicular ao eixo Y,}$$

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x . z . dz = \text{momento fletor por unidade de comprimento da seção da placa perpendicular ao eixo X (em torno de Y),}$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y . z . dz = \text{momento fletor por unidade de comprimento da seção da placa perpendicular ao eixo Y (em torno de X),}$$

$$m_{yx} = -m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} . z . dz = \text{momento torçor por unidade de comprimento.}$$

Fazendo-se o equilíbrio das forças verticais, obtém-se

$$p . dx . dy - v_x dy + \left[v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right] . dy - v_y dx + \left[v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right] . dx = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}^x + \frac{\partial v}{\partial y}^y = - p \quad (3.1.1)$$

Da condição de equilíbrio de momentos em torno do eixo X, resulta

$$\begin{aligned} p \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dy}{2} - v_x \cdot dy \cdot \frac{dy}{2} + \left[v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right] \cdot dy \cdot \frac{dy}{2} + \\ + \left[v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right] \cdot dx \cdot dy + m_y \cdot dx - \left[m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy \right] \cdot dx + \\ - m_{xy} \cdot dy + \left[m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx \right] \cdot dy = 0 \end{aligned}$$

$$v_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (3.1.2)$$

Analogamente, para o equilíbrio de momentos em torno de Y,

$$v_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad (3.1.3)$$

Agrupando-se as três equações acima numa só, encontra-se uma equação que relaciona momentos e carga:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = - p \quad (3.1.4)$$

É interessante relacionar os deslocamentos com a carga. Para tal, é necessário encontrar as expressões que ligam os momentos com as curvaturas $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ e com a torção $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$. Pode-se iniciar analisando-se as deformações, a partir de um elemento genérico de placa, que sofre uma deformação elástica. Indicam-se por u e v as componentes do deslocamento de um ponto genérico, segundo as direções X e Y, respectivamente. A partir da figura

3.2, sendo u_0 e v_0 as componentes do deslocamento do ponto O e $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$ o acréscimo infinitesimal (de ordem superior), da função u , devido ao incremento dx da variável x , a deformação relativa ϵ_x resulta,

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.1.5)$$

Analogamente, chega-se a

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.1.6)$$

A variação do ângulo reto, formado pelos segmentos \overline{OP} e \overline{OR} , vale

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.1.7)$$

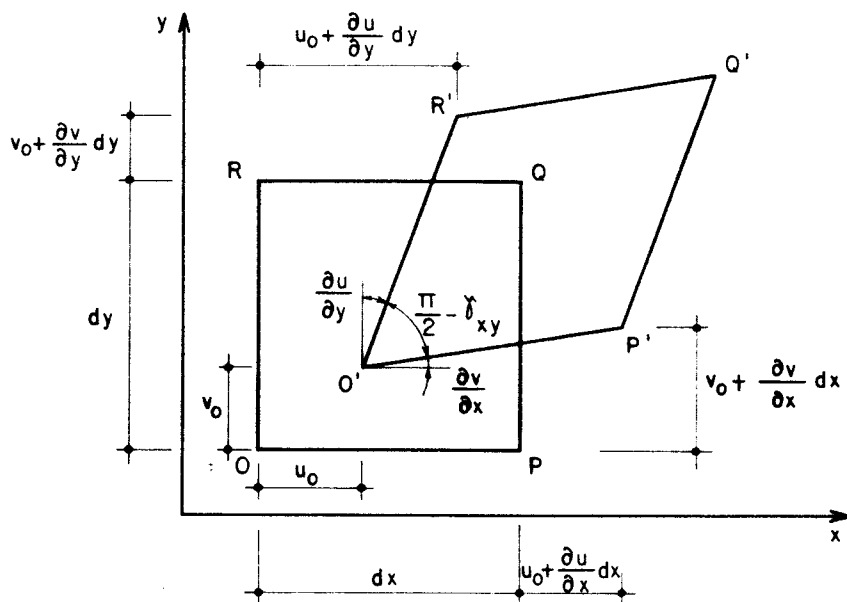


FIGURA 3.2. - Componentes do deslocamento segundo as direções x e y

Nota-se que os deslocamentos de um ponto genérico da placa são funções da cota z considerada

(figura 3.3) e, em consequência da flexão, valem

$$\begin{aligned} u &= -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

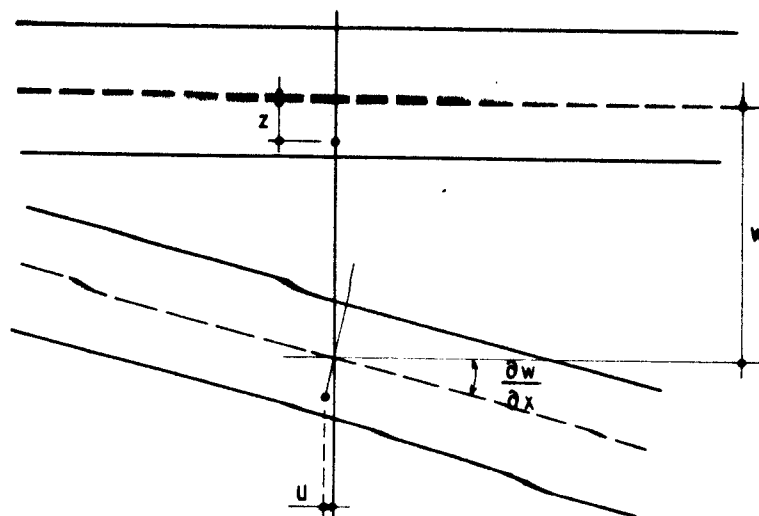


FIGURA 3.3. - Deslocamento de um ponto genérico da placa

Voltando às expressões das deformações, obtêm-se

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Sabendo-se que o material é isótropo, com módulo de deformação longitudinal E e coeficiente de Poisson ν , têm-se as seguintes relações entre tensões e deformações:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

ou

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G.\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}\end{aligned}\tag{3.1.11}$$

Substituindo-se os valores das deformações dadas pelas equações (3.1.9), resultam

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] .z \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] .z \\ \tau_{xy} &= -\frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot z\end{aligned}\tag{3.1.12}$$

Basta introduzir os valores das tensões, dados pelas equações (3.1.12), nas expressões que definem os esforços, para relacionar os momentos fletores e volventes com as curvaturas da placa.

$$\begin{aligned}m_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz = \int_{-h/2}^{h/2} -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \cdot z^2 dz \\ m_x &= -D \cdot \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]\end{aligned}\tag{3.1.13}$$

$$\begin{aligned}m_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz = \int_{-h/2}^{h/2} -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \cdot z^2 dz \\ m_y &= -D \cdot \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]\end{aligned}\tag{3.1.14}$$

$$m_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz = - \int_{-h/2}^{h/2} - \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot z^2 dz$$

$$m_{xy} = D \cdot (1-\nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.1.15)$$

com,

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ = rigidez à flexão da placa, equivalente à rigidez EI das vigas,
 E = módulo de deformação longitudinal,
 h = espessura,
 ν = coeficiente de Poisson.

As forças cortantes podem ser relacionadas com as curvaturas, utilizando-se as expressões (3.1.2) e (3.1.3), onde substituem-se os valores dos momentos.

$$v_x = - D \cdot \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - D \cdot (1-\nu) \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

$$v_x = - D \cdot \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (3.1.16)$$

$$v_y = - D \cdot \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - D \cdot (1-\nu) \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$$

$$v_y = - D \cdot \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (3.1.17)$$

Substituindo-se as expressões dos momentos fletores (3.1.13), (3.1.14) e (3.1.15) na equação (3.1.4), resulta a conhecida equação de Lagrange ou equação das placas:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (3.1.18)$$

As condições de contorno da equação diferencial (3.1.18) dependem dos diferentes tipos de apoio. Assim, por exemplo, quando se trata de uma borda reta paralela ao eixo Y , ter-se-á, em função das condições dessa borda, as seguintes condições de contorno:

a) borda engastada - o deslocamento vertical e a rotação são nulos:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

b) borda simplesmente apoiada - o deslocamento vertical e o momento são nulos:

$$w = 0, \quad m_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0;$$

c) borda livre - o momento e a reação na borda são nulos:

$$m_x = 0, \quad v_x - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0.$$

Obtida a função w , os esforços são calculados pelas equações (3.1.13) a (3.1.17).

Normalmente, não é fácil encontrar uma função $w(x,y)$ que satisfaça a equação diferencial das placas e atenda às condições de contorno. Para tal, recorre-se a soluções aproximadas, obtendo-se w como uma soma de funções elementares que satisfaçam as condições de contorno.

O processo de integração da Equação de Lagrange só pode ser aplicado a alguns poucos casos de formas de placas e condições de contorno. Uma alternativa mais geral é o uso de diferenças finitas para a integração numérica, conduzindo à resolução de um sistema de equações lineares.

Tais métodos foram bastante utilizados para a confecção de tabelas (ver, por exemplo, BARES^[28]). Para o caso de placas com formas mais complexas, com regiões de diferentes espessuras, com aberturas, com carregamentos de distribuição não usual, ou com condições de apoio variadas, os métodos anteriores não possuem, em geral, aplicação prática. Pode-se recorrer, então, ao método dos elementos finitos (BREBBIA^[29], ZIENKIEWICZ^[30], COOK^[31]), elementos de contorno (PAIVA^[32], BREBBIA^[33]) ou analogia de grelha (TAKEYA^[34], ANTUNES^[35]).

3.2. MOMENTOS E COMPATIBILIZAÇÃO

A determinação dos momentos fletores numa placa, pela Teoria da Elasticidade, é bastante trabalhosa. No entanto, há várias tabelas já elaboradas, destacando-se as de CZERNY^[36], BARES^[28] e KALMANOCK^[37].

Quando se analisa um pavimento composto por várias lajes, as dificuldades que se apresentam no estudo do funcionamento das lajes contínuas residem, basicamente, na consideração do engastamento nos apoios internos, onde há continuidade. Nesses apoios, o engaste não é rigorosamente perfeito; na verdade, ocorrem engastamentos parciais.

Nos casos usuais, pode-se supor as lajes contínuas perfeitamente engastadas nas lajes adjacentes. Em geral, porém, as lajes de um pavimento diferem nas condições de apoio, nos vãos ou nos carregamentos, resultando em momentos negativos diferentes, em um mesmo vínculo. Deve-se proceder a compatibilização dos momentos. Alguns autores (SANTOS^[38], POLILLO^[39], PINHEIRO^[19]) recomendam adotar, para esse momento negativo, o maior valor entre a média dos dois momentos e 80% do maior. Este

critério é razoável quando os momentos negativos, entre as lajes vizinhas, são de mesma ordem de grandeza.

Os momentos resultantes do cálculo elástico servem de base para o cálculo plástico. Os momentos positivos encontrados a partir do cálculo plástico são, em geral, bem menores que os do cálculo elástico. Desta forma, os momentos nos vãos resultam muito pequenos. Tendo em vista a má qualidade da execução da concretagem que, conseqüentemente, sobrecarrega as barras inferiores, aliado ao fato de que, em última instância, as armaduras positivas são as responsáveis pela segurança da laje, vê-se a necessidade de diminuir os valores dos momentos negativos usualmente adotados. Do ponto de vista econômico, resultam em menores espessuras de lajes e armaduras mais balanceadas.

Sugere-se que, no cálculo elástico, seja adotado um novo critério de compatibilização, onde o momento negativo é o menor valor entre a média e 1,2 vezes o menor. Além disso, para o cálculo plástico, recomenda-se que haja uma redução no valor desses momentos negativos já compatibilizados. SANTOS⁽²⁰⁾ sugere que sejam adotados, como valores de cálculo, os momentos elásticos divididos por 1,4, ou seja, os valores majorados por γ_f , dos momentos negativos no cálculo plástico, são iguais aos valores de serviço do cálculo elástico. PINHEIRO⁽¹⁹⁾ apresenta um outro critério, onde a razão entre os momentos nos apoios e nos vãos, utilizada no cálculo plástico, é proveniente do cálculo elástico dividindo-se por 1,61, que corresponde ao produto do coeficiente de ponderação das ações e do coeficiente de minoração da resistência do aço.

Após a compatibilização dos momentos negativos, deve-se corrigir os momentos positivos relativos à mesma direção. Para que em serviço, o comportamento da laje seja o mais próximo possível do relativo ao regime elástico, a correção dos momentos positivos é feita integralmente, ou

seja, os momentos no centro da laje devem ser aumentados ou diminuídos adequadamente, de acordo com a variação do respectivo momento negativo, após a compatibilização.

4. FLECHAS

4.1. GENERALIDADES

Quando se adota a espessura de uma laje, para que esta atenda às exigências das normas, quanto à espessura mínima e quanto ao limite de deformabilidade da laje (ver item 2.3), geralmente se chega a valores excessivos da espessura.

O cálculo das lajes, baseado na teoria das charneiras plásticas, por em geral conduzir a momentos fletores menores que os provenientes do cálculo elástico, permite a utilização de espessuras menores. Torna-se, então, conveniente e até necessária, a determinação da flecha da laje, para verificar se esta atende às condições de utilização.

4.2. ESTADOS LIMITES

As estruturas de concreto armado devem ser projetadas, não só para atender aos critérios de verificação de segurança contra a ruína, como também satisfazer às condições de utilização.

De acordo com as normas brasileiras NBR-6118⁽²¹⁾ e NBR-8681⁽⁴⁰⁾, definem-se estados limites como sendo os

estados a partir dos quais a estrutura apresenta desempenho inadequado às finalidades da construção. Os estados limites podem ser estados limites últimos ou estados limites de utilização.

4.2.1. Estados limites últimos

São estados que, por sua simples ocorrência, determinam a paralização, no todo ou em parte, do uso da construção.

No projeto, usualmente devem ser considerados os estados limites últimos, caracterizados por:

- a) perda de equilíbrio, global ou parcial, admitida a estrutura como corpo rígido;
- b) ruptura ou deformação plástica excessiva dos materiais;
- c) transformação da estrutura, no todo ou em parte, em sistema hipostático;
- d) instabilidade por deformação;
- e) instabilidade dinâmica.

4.2.2. Estados limites de utilização

São estados que, por sua ocorrência, repetição ou duração, causam efeitos estruturais que não respeitam as condições especificadas para o uso normal da construção, ou que são indícios de comprometimento da durabilidade da estrutura.

No período de vida da estrutura, usualmente são considerados estados limites de utilização, aqueles caracterizados por:

- a) danos ligeiros ou localizados, que

comprometam o aspecto estético da construção ou a durabilidade da estrutura;

b) deformações excessivas, que afetem a utilização normal da construção ou seu aspecto estético;

c) vibrações de amplitude excessiva;

d) estados de formação de fissuras ou de fissuração inaceitável.

4.3. TIPOS DE DEFORMAÇÃO

Pode-se classificar as deformações do concreto em deformações que dependem do carregamento e deformações independentes do carregamento, conforme exposto a seguir e baseado em RUSCH⁽⁴¹⁾.

4.3.1. Deformações que dependem do carregamento

Este tipo de deformação tem direção definida, destacando-se a deformação elástica instantânea, a deformação elástica retardada e a fluência.

Entende-se por deformação elástica instantânea aquela que ocorre por ocasião da aplicação da carga e é reversível. É difícil observar o verdadeiro comportamento elástico do concreto, pois, logo após o carregamento, ocorrem deformações plásticas, que não podem ser facilmente separadas em ensaios.

A deformação elástica retardada, que é uma deformação reversível, ocorre com o passar do tempo, enquanto o carregamento estiver aplicado, se confundindo com a fluência. A fluência é definida como aumento de deformação sob tensão constante, sendo uma deformação

plástica. Por uma questão de simplificação, a deformação elástica retardada e a fluência são tratadas juntas, sob a designação de deformação lenta.

A deformação lenta do concreto é atribuída à migração de moléculas de água, causada pela carga externa, para as camadas de água adsorvida da estrutura do gel, bem como ao efeito das tensões capilares.

4.3.2. Deformações independentes do carregamento

Estas deformações não tem direção definida, por isto, são freqüentemente chamadas de variação de volume.

A retração ocorre quando uma peça de concreto, em contato com o ar livre, perde parte da água quimicamente dissociada durante a secagem. No processo de retração, a água é inicialmente expulsa das fibras externas, criando deformações diferenciais entre a periferia e o miolo, o que gera tensões próprias, auto-equilibradas em seu conjunto.

Um fenômeno análogo ao da retração, porém inverso, é o da expansão. Este ocorre quando a peça é imersa em água, absorvendo água adicional e aumentando de volume.

A retração e a expansão são tanto mais intensas quanto menos espessa for a peça, maior o teor de cimento no concreto e maior o fator água-cimento. A umidade do meio ambiente é outro fator importante que influencia diretamente a retração e a expansão.

A outra causa deste tipo de deformação é a variação de temperatura. A NBR-6118 fixa o coeficiente de dilatação térmica do concreto armado em $10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ e supõe que esta variação seja uniforme na estrutura, salvo em casos especiais, tais como chaminés, altos-fornos, frigoríficos e outros.

4.4. VALORES LIMITES DAS FLECHAS

4.4.1. Norma Brasileira NBR-6118

A NBR-6118⁽²¹⁾ (item 4.2.3.1-C) limita as flechas a $\frac{1}{300}$ do vão teórico, exceto no caso de balanços, para os quais o limite é $\frac{1}{150}$ do seu comprimento teórico. Além disso, o deslocamento causado pelas cargas acidentais não deve ser superior a $\frac{1}{500}$ do vão teórico e $\frac{1}{250}$ do comprimento teórico dos balanços.

4.4.2. Comité Euro-International du Béton CEB-158E

O CEB-158E⁽⁴²⁾ não define limites para as deformações, pois, segundo o mesmo, esses limites devem ser escolhidos pelo projetista, de acordo com a natureza da estrutura e o uso que lhe será dado. Apenas fornece algumas indicações sobre o nível de deformações que podem causar problemas, frisando que estas só devem ser consideradas como exemplos.

Para os casos em que as deformações podem trazer problemas estéticos, é sugerido que a flecha não ultrapasse $\frac{1}{250}$ do vão.

Quando as deformações podem causar danos a elementos não estruturais, tais como divisórias, paredes etc, o limite mais comumente especificado é $\frac{1}{500}$ do vão ou 10 mm, sendo que estes limites devem ser considerados uma indicação e não uma garantia de um desempenho adequado da laje.

4.4.3. American Concrete Institute ACI-318M/83

O ACI-318M/83⁽²⁴⁾ (item 9.5) propõe alguns limites para as flechas, conforme exposto a seguir.

Valores limites
para as flechas

- Lajes de forro planas que não suportam ou não estão ligadas a elementos não estruturais sensíveis a grandes deformações $\frac{l}{180}$
- Lajes de piso que não suportam ou não estão ligadas a elementos não estruturais sensíveis a grandes deformações $\frac{l}{360}$
- Lajes que suportam ou estão ligadas a elementos não estruturais sensíveis a grandes deformações $\frac{l}{480}$
- Lajes que suportam ou estão ligadas a elementos não estruturais que não são sensíveis a grandes deformações $\frac{l}{240}^*$

A deformação a ser considerada, nos dois primeiros casos, é a flecha imediata devida à carga acidental. Nos dois últimos casos, deve-se levar em conta a parte da deformação total que ocorre após a colocação dos elementos não estruturais, ou seja, deve-se somar a flecha decorrente da deformação lenta, relativa a todas as cargas permanentes, e a flecha imediata devida a qualquer carga acidental que possa ser aplicada.

Para o caso marcado com asterisco, o valor da deformação não pode ultrapassar a tolerância dos elementos não estruturais.

Como se pode notar, o ACI-318 não limita, pelo menos diretamente, o valor da flecha total.

4.5. DETERMINAÇÃO DA FLECHA

O cálculo das flechas nas lajes, considerando apenas a flecha elástica instantânea, leva a uma estimativa muito reduzida da flecha real. Uma análise mais adequada deve levar em conta a diminuição da rigidez devida à fissuração e os efeitos dependentes do tempo, decorrentes basicamente da deformação lenta e da retração.

Para tal, a flecha final de uma laje teria a seguinte expressão:

$$a_t = \varphi_{cc} \cdot a_i + a_{cs} \quad (4.5.1)$$

onde,

a_t = flecha resultante na idade t ,

a_i = flecha elástica inicial, para carga de curta duração,

φ_{cc} = coeficiente de deformação lenta,

a_{cs} = flecha decorrente da retração.

4.6. FLECHA ELÁSTICA INICIAL

4.6.1. Equação diferencial da linha elástica

Seja o caso de uma barra solicitada à flexão pura, por exemplo uma viga submetida a um momento fletor positivo M , constante. Supõe-se que o material da viga é isotrópico e segue a lei de Hooke, com módulos de elasticidade à tração e à compressão iguais. Admite-se que os planos normais ao eixo médio da seção transversal, ao girarem, conservam-se normais ao eixo, agora curvo (seções planas permanecem planas). A figura 4.1-a mostra uma viga antes do carregamento e na sua posição deformada.

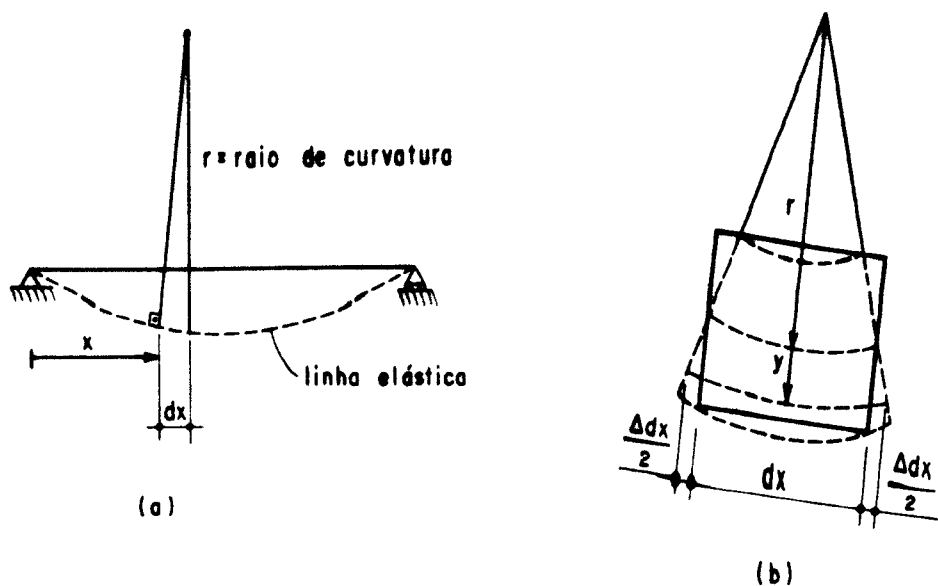


FIGURA 4.1. - Deformação de uma viga fletida

Uma fibra que se encontra a uma distância y da fibra média, sofre um alongamento Δdx . Sua deformação ϵ pode ser definida como:

$$\epsilon = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (4.6.1)$$

A deformação também pode ser expressa em função do raio de curvatura r e da ordenada y da fibra em questão. A partir da figura 4.1-b, obtém-se, por semelhança de triângulos:

$$\frac{r}{dx} = \frac{y}{\Delta dx}$$

donde,

$$\epsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{y}{r} \quad (4.6.2)$$

Tendo-se admitido que o material obedece à lei de Hooke, pode-se calcular facilmente as tensões nas fibras situadas numa cota genérica y .

$$\sigma = E \cdot \epsilon = E \frac{y}{r} \quad (4.6.3)$$

É interessante relacionar momento com curvatura. Para tal, pode-se utilizar a expressão que fornece o valor das tensões ao longo de uma seção transversal,

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y$$

e substituir o valor de σ na equação (4.6.3), resultando

$$\frac{M}{I} \cdot y = E \frac{y}{r}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad (4.6.4)$$

onde,

I = momento de inércia a flexão,

E = módulo de deformação longitudinal.

Como se sabe, dada a curva de deslocamento da viga $v = v(x)$, a curvatura e as derivadas de $v(x)$ possuem a seguinte relação:

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Utilizando-se a equação (4.6.4), chega-se a

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{EI} \quad (4.6.5)$$

A curvatura $\frac{1}{r}$ da elástica é proporcional ao momento fletor e inversamente proporcional ao produto EI , chamado rigidez à flexão.

A determinação da elástica, com a equação (4.6.5), levaria a cálculos complicadíssimos; no entanto, na expressão da curvatura, pode-se desprezar a primeira derivada em relação à unidade, uma vez que os

deslocamentos v são muito pequenos.

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \approx \pm \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (4.6.6)$$

Deve-se chamar a atenção para a convenção de sinais: o momento fletor M é positivo quando produz tração nas fibras inferiores e a ordenada v é positiva quando o ponto considerado desloca-se para baixo. Desta forma, um momento fletor positivo produz uma curvatura que provoca uma diminuição da inclinação (dv/dx) da elástica, ou seja, um valor negativo da segunda derivada (d^2v/dx^2). A equação diferencial que rege o problema de deformação por flexão é:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{M}{EI} \quad (4.6.7)$$

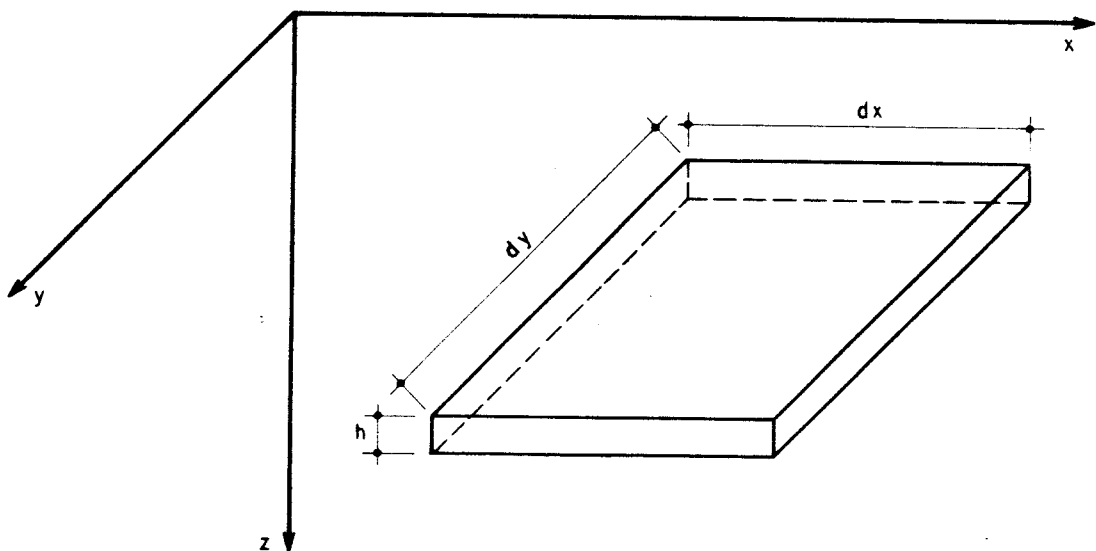


FIGURA 4.2. - Elemento de laje

Para o caso de laje (figura 4.2), a equação diferencial da elástica é muito mais complexa, conforme mostrado no item 3.1, tomando a forma

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (4.6.8)$$

onde D é o módulo de rigidez à flexão, cujo valor é

$$D = \frac{EI}{(1-\nu^2)} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.6.9)$$

sendo,

I = momento de inércia à flexão da placa.

h = espessura da placa,

E = módulo de deformação longitudinal,

ν = coeficiente de Poisson.

É imediato perceber que o cálculo de flechas para as lajes, utilizando a equação diferencial da elástica, é muito laborioso; por isso recorre-se a tabelas que, em geral, utilizaram diferenças finitas ou série de funções. Pode-se também utilizar processos numéricos, tais como elementos de contorno ou elementos finitos.

4.6.2. Momento de inércia à flexão

Geralmente, as estruturas de concreto armado comportam-se entre o estágio I (o concreto não está fissurado na zona tracionada, absorvendo as forças de tração) e o estágio II (o concreto está bastante fissurado na zona tracionada e as forças de tração são totalmente absorvidas pela armadura, desprezando-se a colaboração do concreto nesta zona). O que ocorre, na realidade, é que a seção onde aparece a fissura encontra-se no estágio II, na qual só trabalham o concreto comprimido e a armadura. À

medida que se afasta da seção fissurada, o comportamento aproxima-se do estágio I, uma vez que o concreto retoma a capacidade de absorver o esforço de tração.

Desta forma, pretende-se calcular a flecha elástica inicial com o momento de inércia correspondente. Para isto, baseando-se na NBR-6118, define-se uma solicitação resistente, com a qual haverá grande probabilidade de iniciar-se a formação de fissuras normais à armadura longitudinal, chamada momento de fissuração.

Quando o momento de serviço for menor que o momento de fissuração, supõe-se que a peça está trabalhando no estágio I. Segundo LEONHARDT^[43], no caso de seções retangulares com percentagens de armadura menores que 0,5%, pode-se calcular o momento de inércia apenas com a seção de concreto. Para seções mais armadas, a influência já é perceptível, devendo-se adotar a seção homogeneizada, com o momento de inércia calculado para $A_c + (\alpha_s - 1) \cdot A_s$, conforme será exposto no item 4.6.2-b.

No caso do momento de serviço ultrapassar o momento de fissuração, o cálculo será feito com o momento de inércia efetivo, conforme item 4.6.2-d. No estágio II, despreza-se a contribuição do concreto tracionado. Os momentos de inércia, assim calculados, conduziriam a deformações acima das reais, uma vez que o concreto entre as fissuras colabora e as distâncias entre as fissuras podem ser grandes (conforme o grau de solicitação). Desta forma, o cálculo do momento de inércia efetivo será feito com o uso da fórmula fornecida pelo ACI^[24] (item 9.5.2.3). Esta fórmula empírica baseia-se em estudos feitos por BRANSON & TROST^[44], sendo função do momento fletor, propriedades da seção transversal e resistência do concreto (de uma forma que inclui o efeito da extensão da fissuração).

a) Momento de fissuração

O momento fletor que conduz à formação da primeira fissura é chamado de momento de ruptura à tração ou simplesmente de momento de fissuração.

A NBR-6118 (item 4.2.1) define as hipóteses que são as bases para o cálculo do momento de fissuração, a saber:

- a deformação de ruptura à tração do concreto é

$$\epsilon_{ct} = 2,7 \frac{f_{tk}}{E_c}$$

onde,

item 5.2.1.2 $f_{tk} = \frac{f_{ck}}{10}$ para $f_{ck} \leq 18$ MPa

$$f_{tk} = 0,06f_{ck} + 0,7 \text{ MPa para } f_{ck} > 18 \text{ MPa}$$

item 8.2.5 $E_c = 6600 \cdot \sqrt{f_{ck} + 3,5}$ MPa;

- na flexão, o diagrama de tensões de compressão no concreto é triangular; a tensão na zona tracionada é uniforme e igual a f_{tk} , multiplicando-se a deformação de ruptura à tração do concreto por 1,5:

$$\epsilon_{ct} = 1,5 \times 2,7 \frac{f_{tk}}{E_c};$$

- seções planas permanecem planas;

- deve-se levar em conta o efeito da retração que, para as condições correntes, pode, simplificadaamente, ser considerado supondo-se a tensão de tração igual a $0,75 \cdot f_{tk}$ desprezando-se a armadura:

$$\sigma_{ct} = 0,75 \cdot f_{tk}$$

Desta maneira, têm-se os diagramas de tensão e deformação da figura 4.3, sendo

$$\epsilon_{ct} = 1,5 \times 2,7 \times 0,75 \frac{f_{tk}}{E_c} = 3,0375 \frac{f_{tk}}{E_c} \quad (4.6.10)$$

Estabelecendo-se a equação de equilíbrio,

$$\frac{x \cdot \sigma_c}{2} \cdot b = (h-x) \cdot \sigma_{ct} \cdot b$$

$$\frac{x \cdot \sigma_c}{2} = (h-x) \cdot 0,75 \cdot f_{tk} \quad (4.6.11)$$

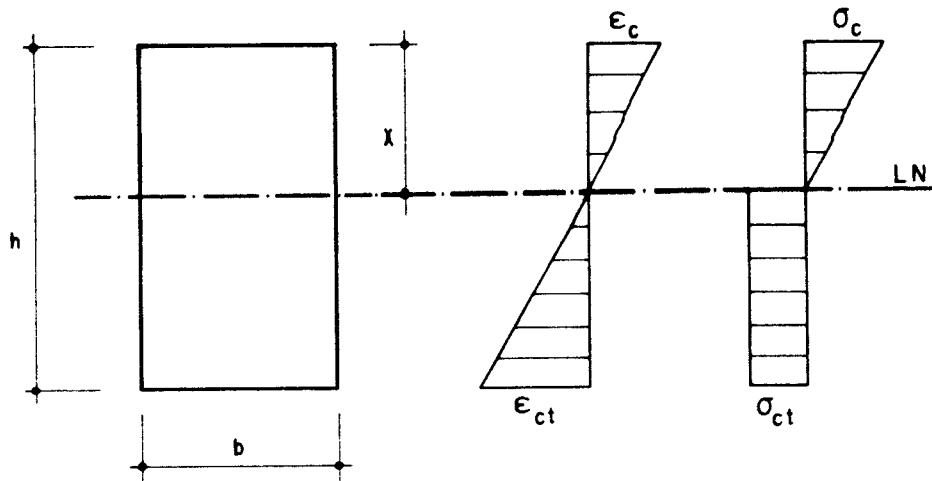


FIGURA 4.3. - Diagramas de tensão e deformação

Fazendo-se a compatibilidade das deformações,

$$\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_{ct}}{h-x} \quad (4.6.12)$$

sendo $\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c}$ e $\epsilon_{ct} = 3,0375 \frac{f_{tk}}{E_c}$, tem-se:

$$\frac{\sigma_c}{E_c x} = \frac{3,0375 \cdot f_{tk}}{(h-x) \cdot E_c}$$

donde,

$$\sigma_c = \frac{3,0375 \cdot x \cdot f_{tk}}{(h-x)} \quad (4.6.13)$$

Substituindo-se a equação (4.6.13) em (4.6.11) resulta

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{3,0375 \cdot x \cdot f_{tk}}{(h-x)} = (h-x) \cdot 0,75 \cdot f_{tk}$$

$$3,0375x^2 = 1,5h^2 - 3,0hx + 1,5x^2$$

$$1,5375x^2 + 3,0hx - 1,5h^2 = 0$$

$$x = 0,413 \cdot h \quad (4.6.14)$$

O momento de fissuração é

$$M_r = \frac{\sigma_c \cdot x}{2} \cdot b \cdot \left(\frac{h-x}{2} + \frac{2x}{3} \right) \quad (4.6.15)$$

Substituindo-se os valores de σ_c e de x , dados pelas equações (4.6.13) e (4.6.14), respectivamente, obtém-se,

$$M_r = \frac{3,0375 \cdot f_{tk}}{(h-0,413h)} \cdot \frac{(0,413h)^2}{2} \cdot b \cdot \left[\frac{(h-0,413h)}{2} + \frac{0,826h}{3} \right]$$

$$M_r = 0,2505 \cdot bh^2 \cdot f_{tk} \quad (4.6.16)$$

O ACI⁽²⁴⁾ propõe um outro valor para o momento de fissuração:

$$M_r = \frac{0,7 \sqrt{f_{ck}} \cdot bh^3}{h/2 \cdot 12}$$

$$M_r = \frac{0,7 \sqrt{f_{ck}} \cdot bh^2}{6} \quad (4.6.17)$$

Comparando-se os valores do momento de fissuração obtidos a partir da NBR e do ACI (conforme indicado na tabela 4.1), observa-se que a diferença é pequena. Nota-se, ainda, que os valores obtidos a partir

da NBR são menores, para as classes de concreto mais utilizadas.

TABELA 4.1. - MOMENTOS DE FIBURAÇÃO

f_{ck} (MPa)	NBR	ACI	diferença
15	$0,376bh^2$	$0,452bh^2$	17%
18	$0,451bh^2$	$0,495bh^2$	9%
20	$0,476bh^2$	$0,522bh^2$	9%
25	$0,551bh^2$	$0,583bh^2$	5%
30	$0,626bh$	$0,639bh$	2%
35	$0,701bh^2$	$0,690bh^2$	-2%
40	$0,777bh^2$	$0,738bh^2$	-5%

b) Momento de inércia no estágio I

Seja a seção retangular, conforme indica a figura 4.4.

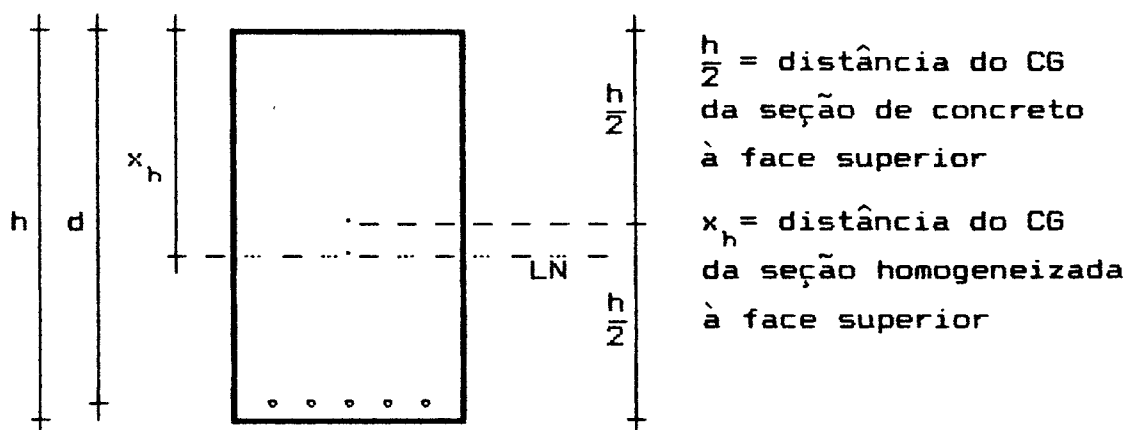


FIGURA 4.4. - Seção homogeneizada

O valor de x_h pode ser calculado fazendo-se o momento estático em relação à linha neutra igual a zero.

$$x_h \cdot b \cdot \frac{x_h}{2} - (h-x_h) \cdot b \cdot \frac{h-x_h}{2} - (\alpha_e - 1) A_e (d-x_h) = 0$$

$$\frac{b}{2} \cdot x_h^2 - \frac{b}{2} \cdot h^2 + bhx_h - \frac{b}{2} \cdot x_h^2 - (\alpha_e - 1) A_e d + (\alpha_e - 1) A_e x_h = 0$$

$$x_h = \frac{0,5bh^2 + (\alpha_e - 1) A_e d}{bh + (\alpha_e - 1) A_e} \quad (4.6.18)$$

onde,

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c} \quad (4.6.19)$$

com,

A_e = área de armadura por unidade de comprimento,

E_c = módulo de deformação longitudinal do concreto,

E_s = módulo de deformação longitudinal do aço.

e, de acordo com a NBR-6118 item 4.2.3.1-A e item 7.2,

$$E_c = 0,9 \times 6600 \cdot \sqrt{f_{ck} + 3,5} \quad (\text{MPa}) \quad (4.6.20)$$

$$E_s = 210000 \text{ MPa.}$$

O momento de inércia da seção homogeneizada é

$$I_h = \frac{bh^3}{12} + bh(x_h - \frac{h}{2})^2 + (\alpha_e - 1)n \frac{\pi \Phi^4}{64} + (\alpha_e - 1) A_e (d - x_h)^2$$

com,

Φ = diâmetro da armadura,

n = número de barras por unidade de comprimento.

Desprezando-se a parcela $(\alpha_e - 1)n \frac{\pi \Phi^4}{64}$, por ser um número muito pequeno, obtém-se

$$I_h = \frac{bh^3}{12} + bh(x_h - \frac{h}{2})^2 + (\alpha_e - 1) A_e (d - x_h)^2 \quad (4.6.21)$$

c) Momento de inércia no estágio II

Desprezando-se a colaboração do concreto na região tracionada, uma vez que a peça está fissurada, determinam-se as partes efetivas da seção transversal, a partir da linha neutra.

Sendo o momento estático em relação à linha neutra zero, calcula-se o valor de x_{II} (figura 4.5).

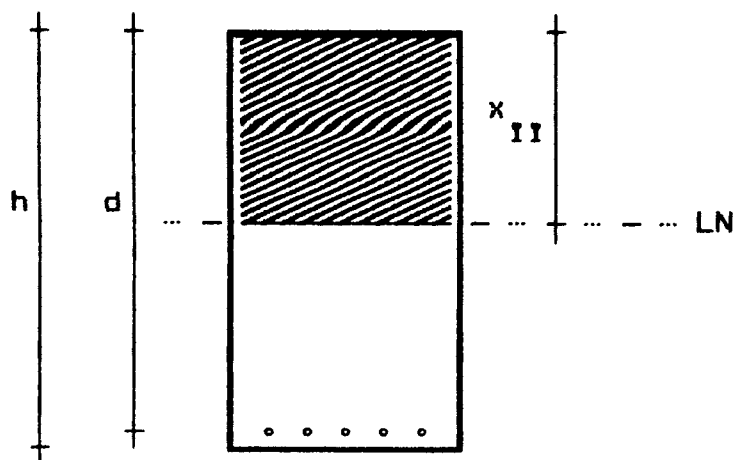


FIGURA 4.5. - Seção fissurada

$$x_{II} \cdot b \cdot \frac{x_{II}}{2} - \alpha_e A_s (d - x_{II}) = 0$$

$$0,5bx_{II}^2 + \alpha_e A_s x_{II} - \alpha_e A_s d = 0$$

$$x_{II} = \frac{-\alpha_e A_s + \sqrt{\alpha_e^2 A_s^2 + 2\alpha_e A_s b d}}{b} \quad (4.6.22)$$

Calcula-se então o valor do momento de inércia no estágio II.

$$I_{II} = \frac{bx_{II}^3}{12} + bx_{II} \left(\frac{x_{II}}{2}\right)^2 + \alpha_e n \frac{\pi \Phi^4}{64} + \alpha_e A_s (d - x_{II})^2$$

Desprezando-se a parcela $\alpha_e n \frac{\pi \Phi^4}{64}$, por ser um número muito pequeno, resulta

$$I_{II} = \frac{bx_{II}^3}{3} + \alpha_e A_s (d - x_{II})^2 \quad (4.6.23)$$

d) Momento de inércia efetivo

O ACI^[24] propõe que se calcule a flecha inicial com um momento de inércia efetivo, dado pela fórmula a seguir (ver BRANSON & TROST^[44]).

$$I_e = \left(\frac{M_r}{M}\right)^3 \cdot I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M}\right)^3\right] \cdot I_{II} \leq I_c \quad (4.6.24)$$

$$x_e = \left(\frac{M_r}{M}\right)^{2,5} \cdot x_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M}\right)^{2,5}\right] \cdot x_{II} \leq x_c \quad (4.6.25)$$

onde,

M_r = momento de fissuração,

M = momento de serviço,

I_c = momento de inércia no estágio I, desprezando-se a armadura $\Rightarrow I_c = \frac{bh^3}{12}$,

I_{II} = momento de inércia da seção fissurada,

x_c = distância do CG da seção no estágio I à face superior, desprezando-se a armadura $\Rightarrow x_c = \frac{h}{2}$,

x_{II} = distância do CG da seção fissurada à face superior.

4.6.3. Carga de utilização

O valor da carga p , utilizado para o cálculo da flecha, deve estar de acordo com a Norma Brasileira de Ações e Segurança nas Estruturas (NBR-8681^[40]).

Vale a pena ressaltar que o estudo aqui desenvolvido visa ao cálculo de lajes de edifícios. No caso de lajes de pontes, ou qualquer outro tipo de laje sujeita a ações diferentes das especificadas no item 2.4, as ações devem ser computadas de acordo com a NBR-8681, item 4.1.2.2.

Segundo o item 4.2.3 da mesma norma, os valores de cálculo F_d , das ações, são obtidos a partir dos valores representativos, multiplicando-os pelos respectivos coeficientes de ponderação γ_f .

Os valores representativos, para os estados limites de utilização, são os valores reduzidos de utilização, definidos pelo item 4.2.2.2 (NBR-8681).

Os valores reduzidos de utilização são determinados, a partir dos valores característicos, pela expressão $\psi_2 F_k$ e são empregados na verificação da segurança em relação aos estados limites de utilização, decorrentes de ações de longa duração. Esses valores reduzidos $\psi_2 F_k$ são designados por valores quase-permanentes das ações variáveis.

Os coeficientes de ponderação das ações, para os estados limites de utilização, são tomados com valor $\gamma_f=1$.

As combinações quase-permanentes de utilização são as que podem atuar durante grande parte do período de vida da estrutura, da ordem da metade desse período. Resulta, então, a seguinte expressão:

$$F_{d,uti} = \sum_{i=1}^m F_{gi,k} + \sum_{j=1}^n \psi_{2j} \cdot F_{qj,k} \quad (4.6.26)$$

Os valores de ψ_2 são expostos a seguir, para as cargas acidentais de edifícios.

- Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas $\Rightarrow \psi_2 = 0,2$.

- Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevadas concentrações de pessoas $\Rightarrow \psi_2 = 0,4$.

- Bibliotecas, arquivos, oficinas e garagens $\Rightarrow \psi_2 = 0,6$.

Desta forma, a expressão (4.6.25), para a maioria das lajes de edifícios, reduz-se a

$$P_{uti} = g + 0,2q \quad (4.6.27)$$

4.7. FLECHA DECORRENTE DA DEFORMAÇÃO LENTA

Para levar em conta o efeito da deformação lenta, a NBR-6118^[21] (item 4.2.3.1-B) permite avaliar a flecha final, devida às ações de longa duração, como o produto do valor da flecha imediata respectiva pela relação das curvaturas final e inicial na seção de maior momento em valor absoluto. Desta forma, define-se o coeficiente ρ_{cc} :

$$\rho_{cc} = \frac{(1/r)_t}{(1/r)_o} \quad (4.7.1)$$

com,

$(1/r)_t$ = curvatura final,

$(1/r)_o$ = curvatura inicial.

O valor da curvatura, segundo essa norma, deve ser calculado através da expressão

$$\frac{1}{r} = \frac{|\varepsilon_c| + \varepsilon_s}{d}, \quad (4.7.2)$$

fazendo-se ε_c final igual a três vezes o valor de ε_c inicial e ε_s constante e igual ao seu valor inicial. A norma ainda permite tomar o valor de ε_c final igual a duas vezes o valor inicial, no caso de ações de longa duração aplicadas seis meses ou mais após a concretagem. O caso mais usual é a aplicação das cargas antes de atingir seis meses após a concretagem; desta forma, adota-se ε_c final igual a três vezes seu valor inicial.

$$\rho_{cc} = \frac{|\varepsilon_{ct}| + \varepsilon_{st}}{|\varepsilon_{co}| + \varepsilon_{so}}$$

como

$$\varepsilon_{st} = \varepsilon_{so} = \varepsilon_s \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ct} = 3\varepsilon_{co} = 3\varepsilon_c$$

VEM

$$\rho_{cc} = \frac{3|\varepsilon_c| + \varepsilon_s}{|\varepsilon_c| + \varepsilon_s} \quad (4.7.3)$$

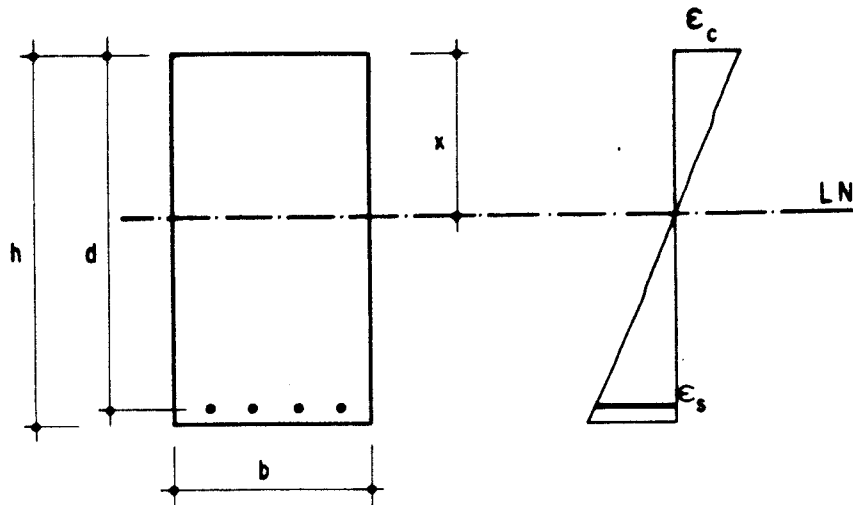


FIGURA 4.6. - Diagrama de deformações

De acordo com o diagrama de deformações (figura 4.6), tem-se uma condição de compatibilidade:

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_s}{d-x}$$

donde,

$$\varepsilon_c = \frac{x \cdot \varepsilon_s}{d-x} \quad (4.7.4)$$

O valor de x é fornecido pelas expressões (4.6.18) ou (4.6.25), dependendo do momento de serviço ser inferior ou não ao momento de fissuração.

Substituindo-se o valor de ε_c dado por (4.7.4) na equação (4.7.3), resulta

$$\rho_{cc} = \frac{\frac{3x\varepsilon_s}{d-x} + \varepsilon_s}{\frac{x\varepsilon_s}{d-x} + \varepsilon_s}$$

$$\phi_{cc} = \frac{3x\varepsilon_s + (d-x)\varepsilon_s}{x\varepsilon_s + (d-x)\varepsilon_s}$$
$$\phi_{cc} = \frac{2x + d}{d} \quad (4.7.5)$$

A Norma Brasileira para Projeto de Estruturas de Concreto Protendido (NBR-7197)^[45] apresenta um procedimento um pouco mais refinado para o cálculo da deformação por fluência. Segundo essa norma, a deformação por fluência do concreto (ε_{cc}) compõe-se de duas partes, uma rápida e a outra lenta. A fluência rápida (ε_{cca}) é irreversível e ocorre durante as primeiras 24 horas após a aplicação da carga que a originou. A fluência lenta é composta, por sua vez, por duas outras parcelas: a deformação lenta irreversível (ε_{ccf}) e a deformação lenta reversível (ε_{ccd}).

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{cca} + \varepsilon_{ccf} + \varepsilon_{ccd} \quad (4.7.6)$$

$$\varepsilon_{c, total} = \varepsilon_c + \varepsilon_{cc} = \varepsilon_c \cdot (1 + \phi)$$

O coeficiente de fluência pode ser definido como a soma de três parcelas:

$$\phi(t, t_0) = \phi_a + \phi_f + \phi_d \quad (4.7.7)$$

onde,

t = idade fictícia do concreto no instante considerado (em dias),

t₀ = idade fictícia do concreto ao ser feito o carregamento (em dias); será considerado t₀ = 28 dias,

φ_a = coeficiente de fluência rápida,

φ_f = coeficiente de deformação lenta irreversível,

φ_d = coeficiente de deformação lenta reversível.

4.7.1. Coeficiente de fluência rápida

O coeficiente de fluência rápida é determinado pela expressão:

$$\phi_a = 0,8 \left[1 - \frac{f_c(t_o)}{f_c(t_\infty)} \right] \quad (4.7.8)$$

com,

$$\frac{f_c(t)}{f_c(t_\infty)} = \frac{9t(t+42)}{(9t+40)(t+61)} \quad (4.7.9)$$

sendo ϕ_a dependente da função de crescimento da resistência do concreto com a idade, para $t = t_o$ (idade fictícia em dias, definida no item 4.7.4).

4.7.2. Coeficiente de deformação lenta irreversível

Seu valor é

$$\phi_f = \phi_{f\alpha} \cdot [\beta_f(t) - \beta_f(t_o)] \quad (4.7.10)$$

com,

$$\phi_{f\alpha} = \phi_{1c} \cdot \phi_{2c} \quad (4.7.11)$$

O coeficiente ϕ_{1c} depende da umidade relativa do ambiente ($U\%$) e da consistência do concreto. Para $U \leq 90\%$ e aberturas de 5 cm a 9 cm, tem-se

$$\phi_{1c} = 4,45 - 0,035U \quad (4.7.12)$$

O coeficiente ϕ_{2c} é dependente da espessura fictícia da peça (em metros), definida no item 4.7.5:

$$\phi_{2c} = \frac{0,42 + h_{f1c}}{0,20 + h_{f1c}} \quad (4.7.13)$$

O coeficiente β_f é relativo à deformação lenta irreversível, sendo função da idade do concreto.

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D} \quad (4.7.14)$$

com,

$$\begin{aligned} A &= 42h_{fvc}^3 - 350h_{fvc}^2 + 588h_{fvc} + 117 \\ B &= 768h_{fvc}^3 - 3060h_{fvc}^2 + 3234h_{fvc} - 23 \\ C &= -200h_{fvc}^3 + 13h_{fvc}^2 + 1050h_{fvc} + 183 \\ D &= 7579h_{fvc}^3 - 31916h_{fvc}^2 + 35343h_{fvc} + 1931 \end{aligned} \quad (4.7.15)$$

onde h_{fvc} deve estar em metros.

4.7.3. Coeficiente de deformação lenta reversível

Calcula-se o seu valor a partir da expressão:

$$\phi_d = \phi_{d\infty} \cdot \beta_d \quad (4.7.16)$$

onde,

$\phi_{d\infty}$ = valor final do coeficiente de deformação lenta reversível, considerado igual a 0,4,

β_d = coeficiente relativo à deformação lenta reversível, função do tempo $(t-t_0)$ decorrido após o reparamento.

$$\beta_d = \frac{t - t_c + 20}{t - t_o + 70} \quad (4.7.17)$$

4.7.4. Idade fictícia do concreto

A idade a ser considerada é a idade fictícia $\alpha \cdot t_{ef}$, em dias, quando o endurecimento se faz à temperatura ambiente de 20°C e, nos demais casos, quando não houver cura térmica, a idade fictícia é dada por

$$t = \alpha \sum_i \frac{T_i + 10}{30} \cdot \Delta t_{ef,i} \quad (4.7.18)$$

com,

t = idade fictícia (em dias),

α = coeficiente dependente da velocidade de endurecimento do cimento; na falta de dados experimentais permite-se o emprego dos valores constantes na tabela 4.2,

T_i = temperatura média diária do ambiente (°C),

$\Delta t_{ef,i}$ = período em dias, durante o qual a temperatura média diária do ambiente pode ser admitida constante.

TABELA 4.2. - VALORES DE α

Cimento	Coeficiente α	
	Fluência	Retração
De endurecimento lento	1	1
De endurecimento normal	2	
De endurecimento rápido	3	

4.7.5. Espessura fictícia da peça

Define-se como espessura fictícia o seguinte valor:

$$D_{fict} = \gamma \frac{2f_c}{K_{or}} \quad (4.7.19)$$

com,

γ = coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente (U%), dado pela expressão (4.7.20),

A_c = área de seção transversal da peça,

μ_{ar} = parte do perímetro externo da seção transversal da peça em contato com o ar.

$$\gamma = 1 + e^{(-7,8+0,1U)} \quad (4.7.20)$$

4.7.6. Deformações específicas do concreto e do aço

SANTOS⁽⁴⁶⁾ fez um estudo mostrando que tanto a tensão de compressão quanto o módulo de deformação longitudinal do concreto variam ao longo do tempo. Fluência, por definição, é aumento de deformação com o tempo, permanecendo constante a tensão. Dessa forma, ele sugere que o tempo seja dividido em intervalos, supondo tensão constante dentro do intervalo, mas variável de um intervalo a outro. Será utilizado o método da tensão média com módulo de deformação longitudinal do concreto variável.

Sugere-se que o tempo seja dividido em doze intervalos; porém deve-se considerar treze valores, uma vez que para $t = t_0$, serão computados dois valores para o coeficiente de fluência ϕ : $\phi = \phi_0$ no instante do carregamento e $\phi = \phi(1)$ no mesmo dia, principalmente devido a fluência rápida.

a) Módulo de deformação longitudinal

A variação do módulo de deformação longitudinal do concreto pode ser determinada utilizando a expressão (4.7.9).

$$\frac{f_c(t)}{f_c(t_0)} = \frac{9t(t+40)}{(9t+40).(t+8)}$$

$$\frac{f_{c,28}}{f_{c,t_{\infty}}} = \frac{9 \times 28(28+42)}{(9 \times 28+40) \cdot (28+61)} = 0,679 \quad (4.7.21)$$

$$\frac{f_{ck,j}}{f_{ck,28}} = \frac{\frac{f_{ck,j}}{f_{ck,t_{\infty}}}}{\frac{f_{ck,28}}{f_{ck,t_{\infty}}}} = \frac{9t(t+42)}{0,679 \times (9t+40)(t+61)}$$

donde,

$$f_{ck,j} = \frac{9t(t+42)}{0,679 \times (9t+40)(t+61)} \cdot f_{ck,28} \quad (4.7.22)$$

$$E_{c,j} = 0,9 \times 6600 \sqrt{f_{ck,j} + 3,5} \text{ MPa} \quad (4.7.23)$$

$$E_{c,o} = 0,9 \times 6600 \sqrt{f_{ck} + 3,5} \text{ MPa}$$

b) Deformações ao longo do tempo

A seguir apresenta-se o roteiro para o cálculo das deformações do concreto e do aço ao longo do tempo j ($j=0$ a 12).

- Para $j = 0$ ($\phi_0 = 0$)

$$\alpha_{e,o} = \frac{E_s}{E_{c,o}}$$

O valor de x_0 e I_0 são fornecidos pelas expressões (4.6.18) e (4.6.21) ou (4.6.25) e (4.6.24), dependendo do momento de serviço ser inferior ou não ao momento de fissuração.

$$\sigma_{c,o} = \frac{M_d}{I_0} \cdot x_0$$

$$\varepsilon_{c,o} = \frac{\sigma_{c,o}}{E_{c,o}}$$

$$\sigma_{s,0} = \alpha_{s,0} \cdot \frac{d-x_0}{x_0} \cdot \sigma_{c,0}$$

$$\varepsilon_{s,0} = \frac{\sigma_{s,0}}{E_s}$$

- Para $j = 1$ a 12 :

$$\sigma_{c,j} = \sigma_{c,j-1}$$

$$\varepsilon_{cc,j} = \frac{\sigma_{c,j}}{E_{c,0}} \cdot (\phi_j - \phi_{j-1})$$

$$\varepsilon_{c,j} = \varepsilon_{c,j-1} + \varepsilon_{cc,j}$$

$$E_{cfic,j} = \frac{\sigma_{c,j}}{\varepsilon_{c,j}}$$

$$\alpha_{e,j} = \frac{E_s}{E_{cfic,j}}$$

Os valores de x_j e I_j são fornecidos pelas expressões (4.6.18) e (4.6.21) ou (4.6.25) e (4.6.24), dependendo do momento de serviço ser inferior ou não ao momento de fissuração. O cálculo das deformações é feito utilizando-se o método da tensão média com E_c variável, conforme exposto em SANTOS^[46].

$$\sigma_{c,j} = \frac{M_d}{I_j} \cdot x_j$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{c,j} = & \epsilon_{c,j-1} + \frac{\sigma_{c,j-1} + \sigma_{c,j}}{2 \cdot E_{c,o}} \left[\phi_j - \phi_{j-1} \right] + \\ & + \frac{\sigma_{c,j} - \sigma_{c,j-1}}{2} \cdot \left[\frac{1}{E_{c,j}} + \frac{1}{E_{c,j-1}} \right] \end{aligned}$$

$$\sigma_{s,j} = \alpha_{e,j} \cdot \frac{d-x_j}{x_j} \cdot \sigma_{c,j}$$

$$\epsilon_{s,j} = \frac{\sigma_{s,j}}{E_s}$$

4.7.7. Cálculo de φ_{cc}

De acordo com as expressões (4.7.1) e (4.7.2), o coeficiente φ_{cc} é

$$\varphi_{cc} = \frac{|\epsilon_{c,t}| + \epsilon_{s,t}}{|\epsilon_{c,o}| + \epsilon_{s,o}} \quad (4.7.24)$$

com os valores das deformações calculados conforme exposto no item 4.7.6.

4.8. FLECHA DECORRENTE DA RETRAÇÃO

De acordo com a NBR-6118⁽²¹⁾, item 4.2.3, a flecha total deve incluir o efeito da retração. Entretanto, a citada norma não apresenta recomendações de como a retração deve ser considerada.

Um procedimento para se considerar o empenamento devido à retração é descrito a seguir, baseado no

ACI-209⁽⁴⁷⁾. Na realidade, o procedimento do ACI-209 refere-se às vigas. Nas lajes, a retração é significativa em todas as direções. Certamente, a distribuição não uniforme das deformações por retração ao longo da seção transversal da laje, influi no valor da flecha. No entanto, os dados experimentais disponíveis são insuficientes para que sejam feitas recomendações específicas, para o cálculo do efeito da retração nas lajes. Um procedimento simplificado, consiste em se considerar o efeito da retração somente na direção dos maiores momentos, considerando-o como independente do efeito na direção perpendicular. Outra alternativa, refere-se ao cálculo independente em cada uma das direções perpendiculares, adotando-se a média dos resultados obtidos.

Para cada direção, a flecha decorrente da retração é dada por

$$a_{cs} = k \cdot \phi_{cs} \cdot l^2 \quad (4.8.1)$$

onde,




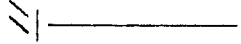
k = coeficiente dependente da vinculação.

ϕ_{cs} = curvatura decorrente da retração,

l = vão.

O valor de k pode ser obtido na tabela 4.3.

TABELA 4.3. - VALORES DE k

Sistema Estrutural	Valores de k
	$\frac{1}{16}$
	$\frac{11}{128}$
	$\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{2}$

A curvatura é obtida a partir de uma fórmula empírica, baseada no tipo de armadura (ACI-209). Para armadura simples

$$d_{cs} = 0.7 \epsilon_{cs} \cdot \frac{\rho^{1/3}}{h} \quad (4.8.2)$$

com:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \text{taxa de armadura (em percentagem),}$$

ϵ_{cs} = deformação específica de retração.

Segundo o ACI, a deformação específica de retração é

$$\epsilon_{ce} = \frac{t}{f+t} \cdot \epsilon_{cs,u} \quad (4.8.3)$$

sendo,

t = tempo em dias do fim da cura inicial do concreto,

f = 35 para cura úmida e f = 55 para cura a vapor,

$\epsilon_{cs,u}$ = deformação última de retração.

Para as condições padrão, relacionadas a seguir,

$$\epsilon_{cs,u} = 0,78 \times 10^{-3}$$

Condições padrão:

- Tipo de cimento: Tipo I (normal) e III (alta resistência inicial)
- Agregado fino: 50%
- Umidade relativa do ar : 40%
- Espessura mínima: 15 cm
- Cura úmida: 7 dias, $23 \pm 2^\circ\text{C}$
- Cura a vapor: 1-3 dias, $\leq 100^\circ\text{C}$.

Supondo que o tempo de cura é de sete dias ($t=7$) e que a cura é úmida ($f=35$), resulta

$$\epsilon_{ce} = \frac{7}{35+7} \cdot 0,78 \times 10^{-3} = 13 \times 10^{-5} \quad (4.8.4)$$

Como foi dito anteriormente, o valor da deformação última dado é para as condições padrão. Se a situação não for a especificada, o valor de $\epsilon_{cs,u}$ deve ser multiplicado por fatores de correção. Os principais fatores estão relacionados com a umidade relativa do ar e com as dimensões da peça.

O fator de correção da umidade relativa do ar é dado por

$$\begin{aligned} c_U &= 1,40 - 0,01U (\%), \text{ para } 40\% < U \leq 80\% \\ c_U &= 3,00 - 0,03U (\%), \text{ para } 80\% < U \leq 100\% \end{aligned} \quad (4.8.5)$$

com,

U = umidade relativa do ar.

Para espessuras menores que 15 cm, o fator de correção pode ser retirado da tabela 4.4.

TABELA 4.4. - FATOR DE CORREÇÃO PARA $h < 15$ cm

h (in)	h (cm)	c_h
2	5,1	1,35
3	7,6	1,25
4	10,4	1,17
5	12,7	1,08

Analisando-se uma laje de espessura igual a 9 cm num local onde a umidade relativa do ar é 50%, os fatores de correção resultam

$$c_U = 1,40 - 0,10 \times 50 = 0,9$$

$$c_h = 1,21 \quad (\text{interpolando linearmente})$$

Nessas condições, a deformação específica de retração é

$$\epsilon_{cs} = 1,21 \times 0,9 \times 13 \times 10^{-5} = 14,2 \times 10^{-5}$$

A NBR-6118 (item 3.1.1.5) permite que se adote a deformação específica de retração para as peças de concreto armado, nos casos correntes igual a 15×10^{-5} . Observa-se que este valor está próximo do proveniente do ACI. Como uma simplificação, pode-se adotá-lo, transformando a equação (4.8.1) em

$$a_{cs} = k \times 0,7 \times 15 \times 10^{-5} \times \frac{\rho^{1/3}}{h} \times l^2$$
$$a_{cs} = 10,5 \times 10^{-5} \times k \times \frac{\rho^{1/3}}{h} \times l^2 \quad (4.8.6)$$

4.9. MARCHA DE CÁLCULO

Apresenta-se uma marcha de cálculo para as flechas, supondo-se conhecidas as cargas permanentes e acidentais, o fator de redução referente à combinação de utilização e a espessura da laje.

4.9.1. Momentos

O momento de fissuração da laje é dado por:

$$M_r = 0,2505 \cdot b h^2 f_{tk} \quad (4.9.1)$$

com:

$$f_{tk} = \frac{f_{ck}}{10} \quad \text{para } f_{ck} \leq 18 \text{ MPa}$$

$$f_{tk} = 0,06 f_{ck} + 0,7 \text{ MPa} \quad \text{para } f_{ck} > 18 \text{ MPa}$$

Calculam-se os momentos de serviço da laje em regime elástico, para carga de utilização.

$$p_{uti} = g + \psi_2 \cdot q \quad (4.9.2)$$

onde, para a maioria dos casos, $\psi_2 = 0,2$ (ver item 4.6.3).

4.9.2. Momento de inércia à flexão

a) Momento de serviço é menor que o momento de fissuração

O momento de inércia a ser adotado é o da seção homogeneizada.

$$I_h = \frac{bh^3}{12} + bh\left(x_h - \frac{h}{2}\right)^2 + (\alpha_e - 1)A_s(d - x_h)^2 \quad (4.9.3)$$

com,

$$x_h = \frac{0,5bh^2 + (\alpha_e - 1)A_s d}{bh + (\alpha_e - 1)A_s} \quad (4.9.4)$$

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c}$$

$$E_c = 0,9 \times 6600 \cdot \sqrt{f_{ck} + 3,5} \text{ MPa}$$

$$E_s = 210000 \text{ MPa.}$$

b) Momento de serviço é igual ou superior ao momento de fissuração

Calcula-se o momento de inercia efetivo, dado por:

$$I_e = \left(\frac{M_r}{M}\right)^3 \cdot I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M}\right)^3\right] \cdot I_{II} \leq I_c \quad (4.9.5)$$

e

$$x_c = \left(\frac{M_r}{M}\right)^{2,5} \cdot x_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M}\right)^{2,5}\right] \cdot x_{II} \leq x_c \quad (4.9.6)$$

com,

$$I_{II} = \frac{bx_{II}^3}{3} + \alpha_e A_s (d - x_{II})^2$$

$$x_{II} = \frac{-\alpha_e A_s + \sqrt{\alpha_e^2 A_s^2 + 2\alpha_e A_s b d}}{b}$$

$$I_c = \frac{bh^3}{12}$$

$$x_c = \frac{h}{2}$$

4.9.3. Flecha elástica inicial

A flecha elástica inicial, para carga de curta duração, é calculada adotando-se o momento de inércia à flexão correspondente.

4.9.4. Flecha decorrente da deformação lenta

O coeficiente de deformação lenta é dado por:

$$\varphi_{cc} = \frac{|\varepsilon_{c,t}| + \varepsilon_{s,t}}{|\varepsilon_{c,o}| + \varepsilon_{s,o}} \quad (4.9.7)$$

As deformações específicas devem ser calculadas de acordo com o item 4.7.6, que utiliza um método simplificado para levar em conta a variação da tensão no concreto e a variação do módulo de deformação longitudinal.

O cálculo da deformação por fluência do concreto baseia-se na Norma Brasileira para Estruturas de Concreto

Protendido (NBR-7197)^[45].

Sugere-se que o tempo seja dividido em doze intervalos:

$$t_0 = 28 \text{ dias (para } \phi = 0)$$

$$t_1 = 28 \text{ dias}$$

$$t_2 = 45 \text{ dias}$$

$$t_3 = 60 \text{ dias}$$

$$t_4 = 90 \text{ dias}$$

$$t_5 = 150 \text{ dias}$$

$$t_6 = 200 \text{ dias}$$

$$t_7 = 300 \text{ dias}$$

$$t_8 = 500 \text{ dias}$$

$$t_9 = 1000 \text{ dias}$$

$$t_{10} = 2000 \text{ dias}$$

$$t_{11} = 5000 \text{ dias}$$

$$t_{12} = \infty$$

4.9.5. Flecha decorrente da retração

A flecha decorrente da retração é

$$a_{cs} = 10,5 \times 10^{-5} \cdot k \cdot \frac{\rho^{1/3}}{h} \cdot l^2 \quad (4.9.8)$$

onde,

k = coeficiente obtido na tabela 4.3,

ρ = percentagem de armadura.

4.9.6. Flecha total

A flecha resultante é proveniente da multiplicação da flecha elástica inicial pelo coeficiente decorrente da deformação lenta, somada com a flecha decorrente da retração.

$$a_l = \varphi_{cc} \cdot \tilde{a}_l + a_{ce} \quad (4.9.9)$$

5. NOÇÕES SOBRE A TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS

5.1. TEOREMAS FUNDAMENTAIS

5.1.1. Teorema estático ou do limite inferior

Todo carregamento, para o qual houver possibilidade de achar-se uma distribuição de esforços estaticamente possível e segura, é menor ou igual ao que provoca a ruína.

Denomina-se distribuição de esforços estaticamente possível e segura aquela que satisfaça as condições de equilíbrio com as cargas e que, em nenhum ponto, ultrapasse a capacidade resistente da laje.

O teorema estático fornece um limite inferior para a carga de ruína, uma vez que a carga efetiva de ruína é maior ou igual ao valor obtido através do mesmo, tendo-se, então, um cálculo a favor da segurança.

5.1.2. Teorema cinemático ou do limite superior

Todo carregamento que corresponder a um mecanismo é igual ou superior ao que provoca a ruína.

Um mecanismo equivale a qualquer configuração de ruína cinematicamente admissível. A carga obtida com a aplicação do teorema cinemático é contra a segurança, sendo então, um limite superior.

A teoria das charneiras plásticas é uma aplicação desse teorema, fornecendo, portanto, um valor de carga igual ou superior à carga de ruína. Contudo, resultados experimentais demonstram que a carga efetiva de ruína é, em geral, maior que a obtida pela teoria das charneiras plásticas. Esta reserva de resistência decorre, sobretudo, dos efeitos de arqueamento e de membrana, conforme explica PINHEIRO⁽¹⁹⁾, por exemplo.

5.2. HIPÓTESES DE CÁLCULO

As hipóteses fundamentais (ver CHAMECKI⁽⁴⁸⁾), que constituem as bases da Teoria das Charneiras Plásticas, são enunciadas a seguir.

a) As partes da laje, que são as partes limitadas pelas linhas de plastificação e bordas das lajes, são consideradas planas. Isto equivale a admitir que a laje é constituída por um material rígido-plástico (figura 5.1), ou seja, as deformações elásticas são desprezadas em presença das deformações plásticas nas charneiras. Desta forma, a superfície média da laje plastificada é poliédrica e as partes entre as linhas de plastificação permanecem planas.

b) As linhas de plastificação são consideradas retas. As únicas deformações consideradas são as rotações ao longo das charneiras, decorrentes das rotações das partes das lajes em torno dos eixos de rotação, definidos pela forma da laje e por suas condições de apoio.

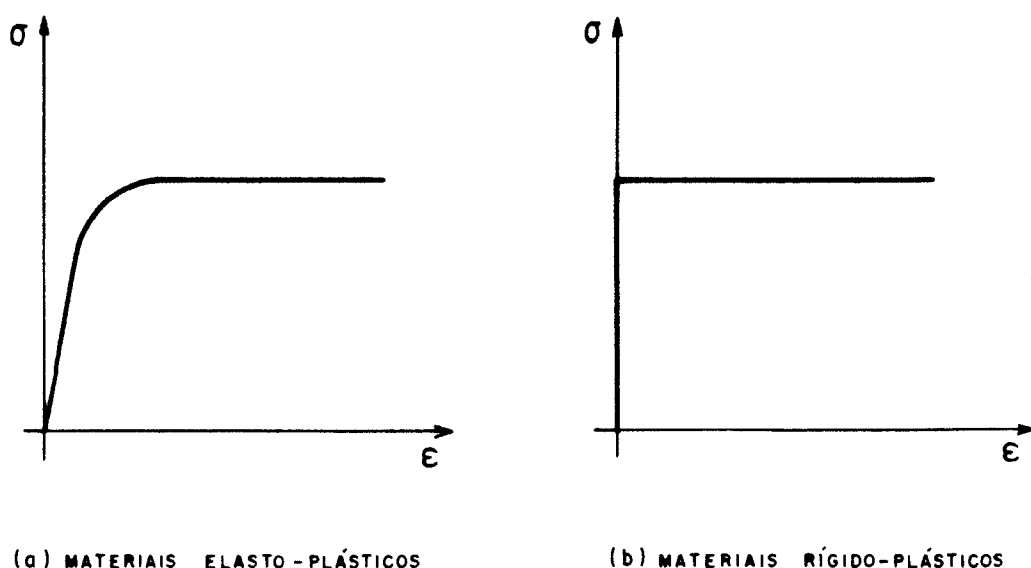


FIGURA 5.1. - Materiais elasto-plásticos e rígido-plásticos

c) Ao longo e nas vizinhanças de cada charneira, o momento fletor, por unidade de comprimento, é constante e igual ao momento máximo que a laje pode resistir. A laje deve ser subarmada, de modo que, no estado de ruína, a armadura atinja seu limite de escoamento na linha de plastificação. O fenômeno de redistribuição dos momentos começa então a ocorrer. Quando a parte mais solicitada da laje alcança o estado de plastificação, essa região deixa de absorver tensões adicionais, porém continua a deformar-se. Nesse ponto, foi atingido o momento fletor máximo que a laje pode resistir. Continuando a crescer a solicitação, as regiões vizinhas passam a receber os acréscimos de tensão até entrarem, por sua vez, em estado plástico. Os acréscimos, agora, são recebidos pelas regiões adjacentes, repetindo-se o fenômeno, isto é, provocando-se uma propagação de estado plástico de região para região. Ora, em cada ponto da charneira em que é atingido o estado plástico, foi desenvolvido o momento fletor máximo, cujo valor não é mais ultrapassado, permanecendo portanto, aproximadamente constante em toda extensão dessa linha. Esse fenômeno também ocorre, dentro de certos limites, de seção para seção, de modo que, nas

proximidades da linha de plastificação, o momento máximo também é desenvolvido.

d) Supõe-se que não haverá ruína prematura por cisalhamento ou por punção. A ruína da estrutura ocorrerá quando, pelo efeito da plastificação, ela se tornar hipostática, ou seja, quando se formar um mecanismo livremente deformável.

e) A influência do efeito de membrana, proveniente das restrições para os deslocamentos no plano da laje (decorrentes da rigidez lateral das vigas de borda ou da continuidade com as lajes vizinhas) é desprezada.

5.3. CONFIGURAÇÃO DAS CHARNEIRAS

Duas proposições básicas permitem a obtenção das configurações de ruína para os diferentes casos de lajes.

a) A linha de plastificação entre duas partes de uma laje passa pelo ponto de interseção dos respectivos eixos de rotação.

No caso de borda livremente apoiada ou engastada, o eixo de giro, da parte adjacente a essa borda, coincide com a linha de apoio; caso seja um apoio isolado, o eixo de rotação passa pelo ponto de apoio, porém sua direção é indeterminada; se houver uma borda livre, o eixo de giro é desconhecido, uma vez que a rotação é livre. Temos ainda que, ao longo de um contorno engastado, forma-se uma charneira superior, correspondente ao momento negativo (figura 5.2).

Convenções:

—————	borda livre
///////	borda simplesmente apoiada
XXXXXXXXXX	borda engastada
~~~~~	charneira
- . - . - .	eixo de rotação
■	apoio pontual

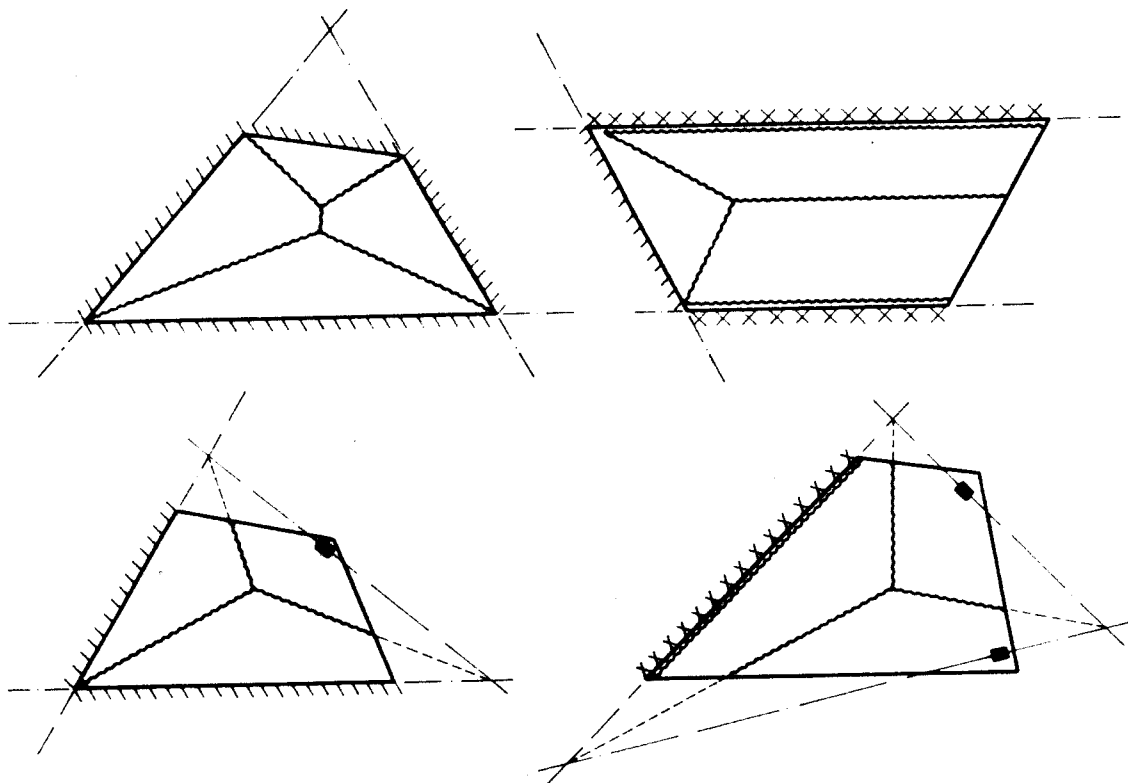


FIGURA 5.2. - Configurações possíveis de charneiras

b) A configuração de ruína é determinada pelos eixos de rotação das partes da laje em colapso e pelas relações dos ângulos de rotação entre eles.

Se a laje está dividida em  $n$  partes e todos os seus eixos de giro são conhecidos, então a configuração de ruína depende apenas das  $n-1$  relações entre as rotações.

Seja uma laje trapezoidal (figura 5.3-a) apoiada em dois lados consecutivos e com um apoio pontual.

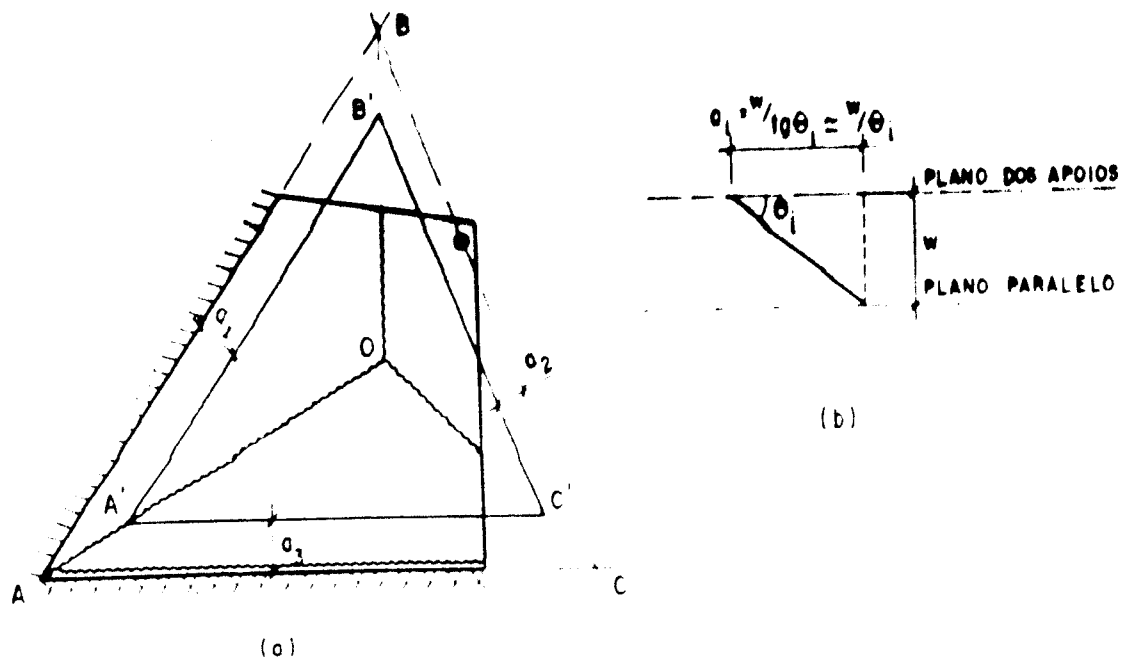


FIGURA 5.3. - Determinação da configuração de ruína

Existem três eixos de rotação  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  e quatro linhas de plastificação, que dividem a laje em três partes planas que giram em torno de seus eixos de rotação. Supondo conhecidos os eixos de giro e as rotações relativas de cada parte da laje  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$ , ao cortar a laje deformada por um plano paralelo ao plano dos apoios e com afastamento vertical  $w$  (figura 5.3-b), obtém-se uma curva de nível  $A'B'C'$  constituída por segmentos retilíneos paralelos aos eixos de rotação. As distâncias horizontais  $a_i$ , entre os eixos de rotação e os respectivos segmentos da curva de nível, são iguais às relações de rotações  $\frac{w}{\theta_i}$ , substituindo-se a tangente pelo ângulo, uma vez que o ângulo é muito pequeno.

$$a_1 = \frac{w}{\theta_1} \quad , \quad a_2 = \frac{w}{\theta_2} \quad , \quad a_3 = \frac{w}{\theta_3}$$

A fim de obter-se as linhas de plastificação, basta unir os vértices da curva de nível com os pontos de interseção dos eixos de rotação.

## 5.4. FORÇAS NODAIS

### 5.4.1. Convenções

Ao longo de uma linha de plastificação há momentos torçores e forças cortantes, além dos momentos fletores. Essas forças e momentos, que agem no elemento num lado da charneira, são iguais e opostos àqueles que agem no elemento do outro lado da charneira (figura 5.4).

A convenção adotada é que forças cortantes agindo para cima e momento fletor que provoca tração na face inferior da laje são considerados positivos. A figura 5.4 mostra o sentido positivo dos momentos fletores, torçores e das forças cortantes.

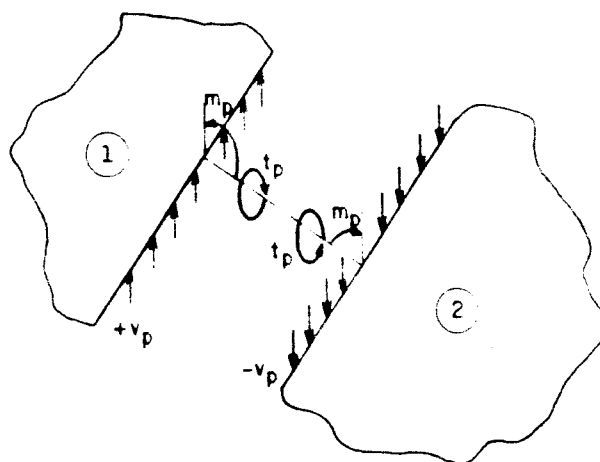


FIGURA 5.4. - Esforços ao longo de uma charneira

A notação vetorial é utilizada para representar os momentos, conforme ilustra a figura 5.5, que mostra momentos positivos, ou seja, corresponde a uma charneira positiva. O sentido dos vetores será o oposto ao da figura 5.5, quando a charneira for negativa.

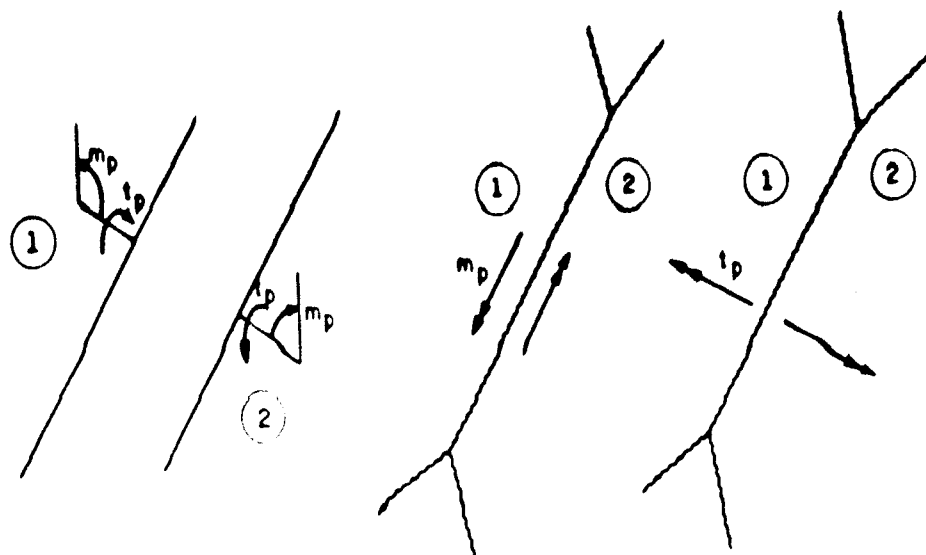


FIGURA 5.5. - Momentos fletores e torçores ao longo de uma charneira positiva

#### 5.4.2. Critério de plastificação "em escada" de JOHANSEN

Embora haja outros critérios para a determinação do valor do momento fletor numa linha de plastificação, o de JOHANSEN ainda é o mais utilizado.

Admite-se que todas as armaduras que cortam a charneira entrem em escoamento e mantenham as posições iniciais, ou seja, as duas partes de uma mesma barra, separadas pela linha de plastificação, fiquem alinhadas enquanto as duas regiões da laje efetuam suas rotações.

Considere-se a linha de plastificação mostrada na figura 5.6 e, inicialmente, uma única direção das armaduras. Seja  $m_i$  o momento de plastificação da armadura  $i$ , por unidade de comprimento, representado por um vetor situado no plano da laje e ortogonal à direção da armadura, e  $\theta_i$  o ângulo entre o vetor-momento  $m_i$  e a charneira, medido positivamente no sentido anti-horário, a partir da direção do vetor-momento para a da charneira.

Este critério prevê que, para cada direção de armadura  $i$ , a linha de plastificação pode ser considerada como constituída por uma infinidade de elementos retos,

ortogonais ou paralelos à direção da armadura  $i$  considerada, ou seja, dispostos em "degraus de escada". Nos degraus perpendiculares à armadura, atua o próprio momento  $m_i$ , enquanto que, nos degraus paralelos à armadura, não há momento algum, uma vez que o momento de plastificação da laje nessa direção é zero. Desta forma, os momentos fletor e torçor na charneira correspondem às componentes do momento de plastificação  $m_i$ .

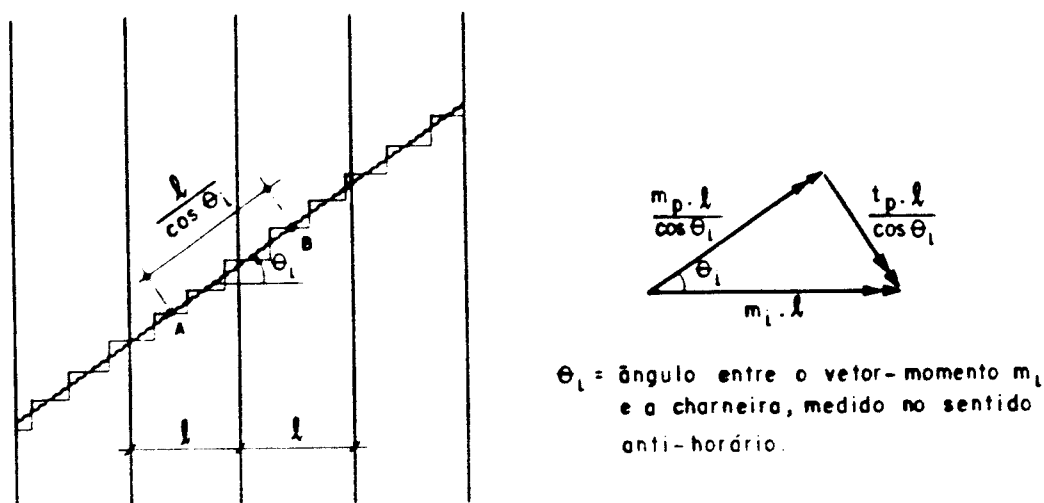


FIGURA 5.6. - Armadura na direção  $i$ .

Tomando-se o elemento AB, da linha de plastificação, de comprimento  $\frac{l}{\cos \theta_i}$ , atuam, nesse trecho, momentos fletor e torçor de valores  $m_p \cdot \frac{l}{\cos \theta_i}$  e  $t_p \cdot \frac{l}{\cos \theta_i}$  respectivamente ( $m_p$  e  $t_p$  momentos atuantes ao longo da linha de plastificação, por unidade de comprimento).

Supondo-se que todas as barras que cortam a charneira de comprimento AB plastifiquem-se, ao projetar-se o momento  $m_i$  na direção de  $m_p$  e  $t_p$ , obtêm-se

$$m_p \cdot \frac{l}{\cos \theta_i} = m_i \cdot l \cdot \cos \theta_i$$

$$t_p \cdot \frac{l}{\cos \theta_i} = m_i \cdot l \cdot \sin \theta_i$$



resultando em:

$$m_p = m_i \cdot \cos^2 \theta_i$$

$$t_p = m_i \cdot \cos \theta_i \cdot \operatorname{sen} \theta_i$$

Para o caso geral da linha de plastificação ser cortada por várias armaduras com direções distintas, representadas pelos ângulos  $\theta_i$ , os efeitos são simplesmente superpostos.

$$m_p = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \cos^2 \theta_i \quad (5.4.1)$$

$$t_p = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \cos \theta_i \cdot \operatorname{sen} \theta_i$$

No caso de uma laje ortótropa, ou seja, com armaduras dispostas em direções ortogonais, cujos momentos de plastificação são  $m$  e  $\mu m$ , os momentos fletor e torção ao longo da charneira são

$$m_p = m \cdot \cos^2 \theta + \mu m \cdot \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) = m \cdot \cos^2 \theta + \mu m \operatorname{sen}^2 \theta \quad (5.4.2)$$

$$\begin{aligned} t_p &= m \cdot \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \theta + \mu m \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) = \\ &= m \cdot \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \theta - \mu m \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta = m(1-\mu) \cdot \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

Quando a laje é armada isotropicamente, ou seja, com momento de plastificação igual segundo duas direções ortogonais ( $\mu=1$ ), resulta o mesmo momento fletor  $m$ , ao longo da linha de plastificação, e momento torção nulo:

$$\begin{aligned} m_p &= m \cdot (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = m \\ t_p &= m \cdot (1-\mu) \cdot \cos \theta \cdot \operatorname{sen} \theta = 0 \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

É importante salientar que o critério anteriormente exposto nem sempre é satisfeito, conduzindo

a valores incorretos; por exemplo, em um nó onde convergem três charneiras governadas por armaduras diferentes, este critério é violado no ponto de interseção, conforme é demonstrado no CEB^[49]. Vários estudos foram desenvolvidos, propondo soluções para os casos onde este critério não é satisfeito, destacando-se, entre eles, NIELSEN^[50], KEMP^[51], MORLEY^[52], WOOD^[53] e JONES^[54].

Apesar disso, ensaios realizados por KWIECINSKI^{[55][56][57]} e na Universidade de Illinois por SOZEN e LENSCHOW (CEB^[49]), mostram que o critério de Johansen conduz, em todos os casos estudados, a momentos fletores inferiores aos momentos resistentes reais. Esta conclusão é confirmada pelos primeiros resultados da pesquisa sistemática realizada na Universidade de Liège, sob a direção de MASSONNET (CEB^[49]). Desta feita, o momento fletor a ser adotado é  $m_p = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \cos^2 \theta_i$ , uma vez que os ensaios já realizados mostram que a aplicação deste critério conduz a resultados a favor da segurança, em relação aos resultados experimentais.

Entretanto, o valor indicado para o momento torçor não deve ser simplesmente adotado. Pode-se estudar o equilíbrio da laje, sem o conhecimento da distribuição exata dos esforços ao longo das charneiras, determinando-se as equações de equilíbrio a partir de forças concentradas equivalentes, conforme explica o item 5.4.3. Desta forma, o equilíbrio de cada região da laje é estabelecido a partir das forças externas, dos momentos fletores, dos momentos torçores, segundo o critério de Johansen, e de forças equivalentes às forças cortantes e à diferença entre os momentos torçores reais e os do critério de Johansen.

Outro procedimento para o cálculo das forças nodais é o "critério do momento normal", que adota o momento fletor conforme a equação (5.4.1), porém não especifica o momento de torção. Esta solução é utilizada

por KEMP⁽⁵¹⁾ e MORLEY⁽⁵²⁾. Existe ainda o conceito de "zonas perturbadas", que mantém o critério de Johansen e admite que, nas vizinhanças do ponto de interseção das linhas de plastificação, existe uma pequena região onde este critério é violado. Esta segunda solução foi adotada implicitamente por JONES⁽¹⁴⁾ e explicitamente por NIELSEN⁽⁵⁰⁾.

### 5.4.3. Esforços internos

Se uma região da laje é considerada isoladamente, nota-se que ela está em equilíbrio sob a ação das cargas externas e sob o sistema de forças e momentos que atuam no seu contorno (figura 5.7).

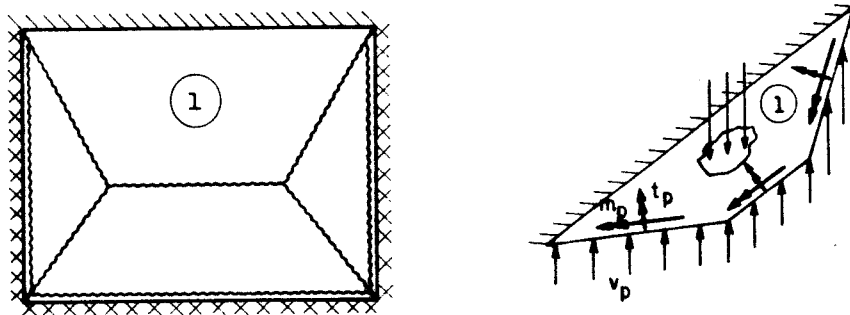


FIGURA 5.7. - Equilíbrio de uma região de laje

Para que o equilíbrio da região possa ser especificado, é necessário o conhecimento das forças cortantes e dos momentos torçores. Esses esforços podem ser considerados conjuntamente e substituídos por forças concentradas transversais, nos extremos das charneiras. Esses pares estaticamente equivalentes são pares de forças de transmissão, formados por duas forças iguais e de sentidos opostos (figura 5.8-a).

Esta substituição se justifica, uma vez que, para o estabelecimento das equações de equilíbrio, não é necessário o conhecimento da distribuição exata dos esforços ao longo das linhas de plastificação, bastando que os esforços internos equilibrem as forças externas.

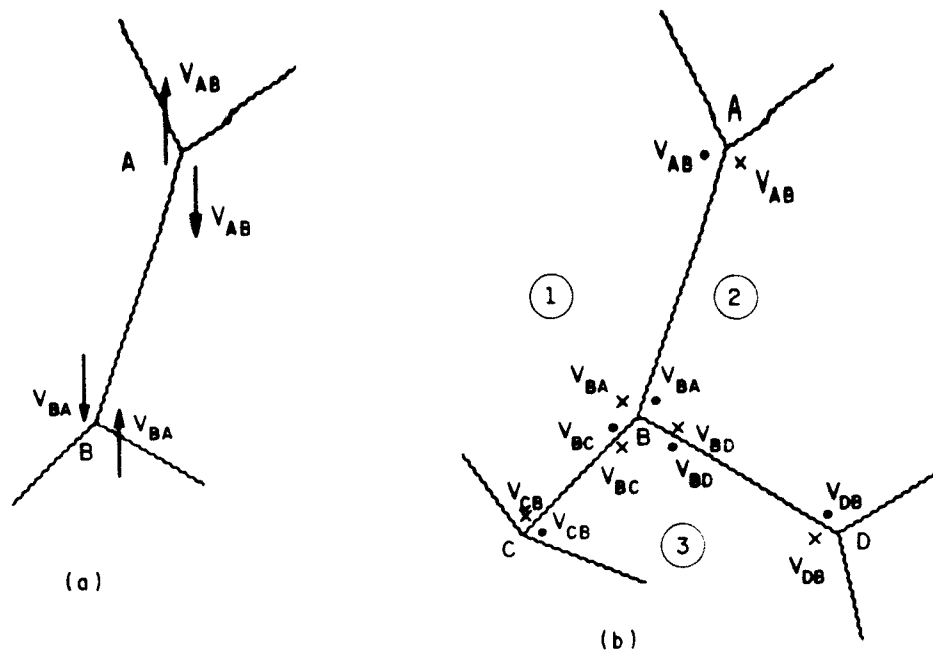


FIGURA 5.8. - Forças de transmissão

No entanto, supõe-se que as forças de transmissão equivalham às forças cortantes e à diferença entre os momentos torçores reais e os momentos torçores determinados pela equação (5.4.1). Assim, o equilíbrio de cada região é especificado a partir das forças externas, dos momentos fletores, dos momentos torçores segundo o critério de Johansen e das forças de transmissão. De agora em diante, fica implícito que as forças de transmissão equivalem às forças cortantes e à diferença entre os momentos torçores reais e os do critério de Johansen.

Considerem-se três partes da placa, 1, 2 e 3, limitadas pelas linhas de plastificação AB, BC e BD (figura 5.8-b). Tomando-se a linha AB, sabe-se que, nela atuam forças cortantes e momentos torçores, que são

substituídos por pares estaticamente equivalentes,  $V_{AB}$  e  $V_{BA}$ , atuando nos nós. Convencionou-se que os pontos (.) indicam forças para cima e o sinal (x) forças para baixo.

Percorrendo-se o contorno de cada região da laje, no sentido horário, as forças de transmissão podem ser consideradas positivas e voltadas para cima, no início de cada segmento de charneira; sendo negativas e para baixo, no final de cada segmento.

Para o nó B, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} K_{B1} &= V_{BC} - V_{BA} \\ K_{B2} &= V_{BA} - V_{BD} \\ K_{B3} &= V_{BD} - V_{BC} \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

As forças  $K_{B1}$ ,  $K_{B2}$  e  $K_{B3}$  são denominadas forças nodais, sendo que o primeiro índice indica o nó que está sendo considerado e o segundo, a correspondente região da laje.

A partir desta definição, pode-se enunciar:

A SOMA ALGÉBRICA DAS FORÇAS NODAIS, EM UM NÓ QUALQUER, É IGUAL A ZERO.

Demonstra-se facilmente o exposto acima, a partir do somatório das forças nodais no nó B:

$$K_{B1} + K_{B2} + K_{B3} = V_{BC} - V_{BA} + V_{BA} - V_{BD} + V_{BD} - V_{BC} = 0$$

Este resultado pode ser generalizado para nós com qualquer número de linhas de plastificação e independe da convenção de sinais.

#### 5.4.4. Determinação das forças nodais

O cálculo das forças nodais é baseado no processo estabelecido por Johansen, porém desenvolvido para uma forma mais geral.

Sejam duas linhas de plastificação, conforme indica a figura 5.9-a, formando entre si um ângulo  $\phi$ , medido no sentido anti-horário. Neste estágio, supõe-se que as linhas de plastificação são positivas. Supõe-se ainda que a charneira  $OA$  é governada pela malha de armadura 1, cujos momentos são  $m_1$  e  $\mu_1 m_1$ , e a charneira  $OB$  pela malha 2, de momentos  $m_2$  e  $\mu_2 m_2$ , cujas direções foram arbitradas. A numeração das linhas de plastificação deve ser no sentido anti-horário, para a região em estudo (no caso, região 1).

Considerando-se um pequeno triângulo  $OAC$ , que delimita a região  $I'$ , supõe-se que, ao longo de  $AC$ , também se atinge o momento de plastificação. A suposição de que, nas proximidades das linhas de plastificação, o momento máximo também é desenvolvido, é bastante razoável, conforme afirmam KEMP^[51], MORLEY^[52] e NIELSEN^[50].

No nó  $O$ , as forças de transmissão,  $V_{OA}$  e  $V_{OC}$ , são estaticamente equivalentes às forças cortantes e aos momentos torçores, conforme definidos no item 5.4.3, ao longo de  $OA$  e  $OC$ , respectivamente. Desta forma, a força nodal  $K_{O1}$  tem o valor

$$K_{O1} = V_{OC} - V_{OA}$$

É importante chamar a atenção para o fato de que esta não é a força nodal total, desde que só contém esforços de parte da charneira  $OB$ .

Analisando-se o equilíbrio da região  $I'$ , pode-se utilizar o critério de plastificação "em escada", mostrado no item 5.4.2. As linhas  $OA$  e  $AC$  são escalonadas na direção de  $m_1$  e de  $\mu_1 m_1$ , sendo os valores dos momentos

fletores e torçores, nessas linhas, equivalentes aos momentos  $\vec{DO}m_1$  e  $\vec{CD}\mu_1 m_1$ . Os momentos atuam no sentido dos vetores mostrados na figura 5.9-a, uma vez que  $\vec{DO}$  é a soma vetorial dos degraus na direção de  $m_1$  e  $\vec{CD}$  na direção de  $\mu_1 m_1$ . O mesmo resultado seria encontrado caso o trajeto fosse feito diretamente de  $C$  para  $O$ , em vez de fazê-lo de  $C$  para  $A$  e de  $A$  para  $O$ .

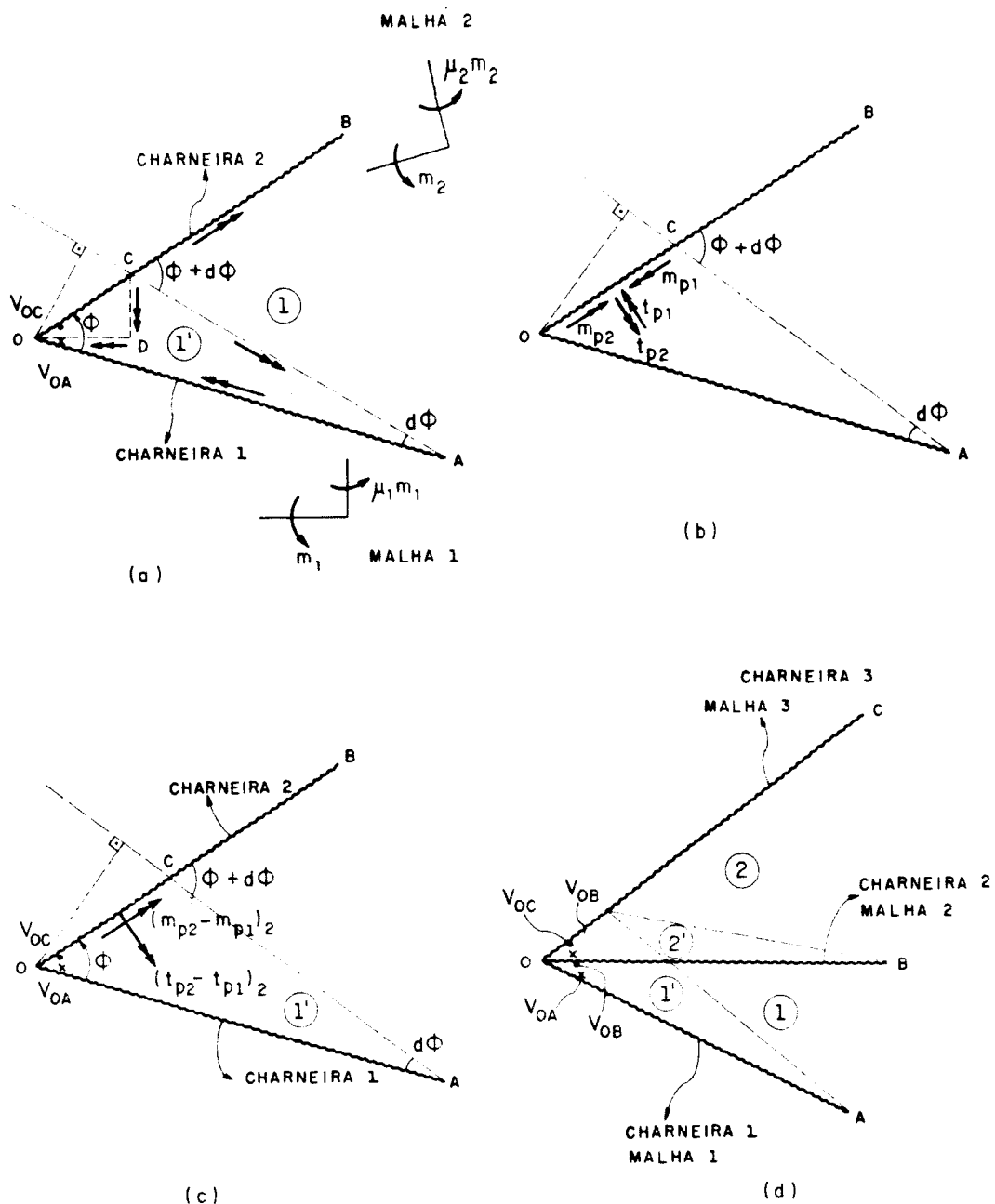


FIGURA 5.9. - Determinação das forças nodais

Os momentos resultantes  $\vec{DD}m_1$  e  $\vec{CD}\mu_1 m_1$  são equivalentes aos momentos fletor e torçor ao longo de  $CO$ , ou seja, o efeito dos momentos ao longo de  $OA$  e  $AC$  é o mesmo que o dos momentos fletor  $m_{p1}$  e torçor  $t_{p1}$ , agindo ao longo de  $CO$  devido à malha de armadura 1.

Considerando-se, agora, os momentos fletor e torçor que agem ao longo da charneira  $OC$ , devido à malha de armadura 2, obtêm-se  $m_{p2}$  e  $t_{p2}$ , conforme indicado na figura 5.9-b.

Por conseguinte, o efeito resultante dos momentos fletores e torçores, ao longo de  $OA$ ,  $OC$  e  $AC$  do elemento  $I'$ , é um momento fletor  $(m_{p2} - m_{p1})_2$  e um momento torçor  $(t_{p2} - t_{p1})_2$ , ao longo de  $OC$  (figura 5.9-c), onde o primeiro índice indica a malha de armadura envolvida e o segundo a direção da charneira ao longo da qual os momentos devem ser calculados.

Fazendo-se o equilíbrio de momentos em torno de  $AC$ , para o pequeno triângulo  $I'$ , resulta

$$(V_{OC} - V_{OA}) \cdot \overline{OC} \cdot \text{sen}(\phi + d\phi) = (m_{p2} - m_{p1})_2 \cdot \overline{OC} \cdot \text{cos}(\phi + d\phi) + (t_{p2} - t_{p1})_2 \cdot \overline{OC} \cdot \text{sen}(\phi + d\phi) + \frac{1}{2} \cdot p \cdot \overline{AC} \cdot \overline{OC} \cdot \text{sen}(\phi + d\phi) \cdot (\overline{OC} \cdot \text{sen}(\phi + d\phi))$$

onde,

$p$  = carga uniformemente distribuída,

$\zeta \cdot \overline{OC} \cdot \text{sen}(\phi + d\phi)$  = distância do centro de gravidade do triângulo  $OAC$  até a charneira  $AC$ .

Dividindo-se por  $\overline{OC} \cdot \text{sen}(\phi + d\phi)$ , fazendo-se  $d\phi \rightarrow 0$  ( $\overline{OC} = dx$ ) e desprezando-se o termo que contém a carga  $p$ , por ser um infinitésimo de ordem superior, encontra-se

$$K_{o1'} = V_{OC} - V_{OA}$$



$$K_{o1'} = (m_{p2} - m_{p1})_2 \cdot \cotg\phi_{12} + (t_{p2} - t_{p1})_2 \quad (5.4.5)$$

onde o índice 12 foi colocado em  $\phi$  para indicar que é o ângulo entre as charneiras 1 e 2, medido no sentido anti-horário a partir da região 1.

Finalmente, a partir da equação (5.4.5), pode-se calcular as forças nodais. Considerem-se três linhas de plastificação, encontrando-se no ponto O, e seus respectivos momentos de plastificação, governados pelas malhas de armaduras 1, 2 e 3, conforme mostrado na figura 5.9-d.

Para o equilíbrio da região 1', tem-se que as charneiras 1 (OA) e 3 (OC) contornam este elemento, resultando

$$K_{o1'} = V_{oc} - V_{oa}$$

$$K_{o1'} = (m_{p3} - m_{p1})_3 \cdot \cotg\phi_{13} + (t_{p3} - t_{p1})_3 \quad (5.4.6)$$

Considerando-se agora o equilíbrio da região 2',

$$K_{o2'} = V_{oc} - V_{ob}$$

$$K_{o2'} = (m_{p3} - m_{p2})_3 \cdot \cotg\phi_{23} + (t_{p3} - t_{p2})_3 \quad (5.4.7)$$

Utilizando-se as equações (5.4.6) e (5.4.7), chega-se ao valor da força nodal  $K_{o1'}$ .

$$K_{o1'} = V_{ob} - V_{oa}$$

$$K_{o1'} = [V_{oc} - (m_{p3} - m_{p2})_3 \cdot \cotg\phi_{23} - (t_{p3} - t_{p2})_3] + \\ - [V_{oc} - (m_{p3} - m_{p1})_3 \cdot \cotg\phi_{13} - (t_{p3} - t_{p1})_3]$$

$$K_{O1} = (m_{p3} - m_{p1})_3 \cdot \cotg \phi_{13} - (m_{p3} - m_{p2})_3 \cdot \cotg \phi_{23} + (t_{p2} - t_{p1})_3 \quad (5.4.8)$$

Vale enfatizar que:

- $(m_{p1})_3$  = momento fletor agindo na direção da charneira 3, devido à malha de armadura 1;
- $(m_{p2})_3$  = momento fletor agindo na direção da charneira 3, devido à malha de armadura 2;
- $(m_{p3})_3$  = momento fletor agindo na direção da charneira 3, devido à malha de armadura 3;
- $(t_{p1})_3$  = momento torçor agindo na direção da charneira 3, devido à malha de armadura 1;
- $(t_{p2})_3$  = momento torçor agindo na direção da charneira 3, devido à malha de armadura 2;
- $\phi_{13}$  = ângulo entre as charneiras 1 e 3, medido no sentido anti-horário, a partir da região 1;
- $\phi_{23}$  = ângulo entre as charneiras 2 e 3, medido no sentido anti-horário, a partir da região 2;
- $K_{O1}$  = força no nó O, na região 1, o que equivale, de acordo com a figura 5.9-d, à força nodal entre as charneiras 1 e 2.

Para esclarecer como os valores típicos  $(m_{p1})_3$ ,  $(m_{p2})_3$  e  $(t_{p1})_3$ ,  $(t_{p2})_3$  são calculados, pode-se acompanhar o exemplo apresentado a seguir.

A figura 5.10 ilustra o caso de três charneiras convergindo para um nó, onde se deseja calcular os momentos fletores e torçores na direção da linha de plastificação 3, devidos às armaduras a e b das charneiras 1 e 2. Os ângulos  $\theta_a$  e  $\theta_b$  são medidos no sentido anti-horário, a partir da direção de  $m_a$  e  $m_b$ , respectivamente, até a charneira 3.

Utilizando-se as equações (5.4.2), pode-se

calcular os momentos.

$$(m_{p1})_3 = m_a \cdot \cos^2 \theta_a + \mu_a m_a \cdot \sin^2 \theta_a$$

$$(t_{p1})_3 = m_a (1 - \mu_a) \cdot \cos \theta_a \cdot \sin \theta_a$$

$$(m_{p2})_3 = m_b \cdot \cos^2 \theta_b + \mu_b m_b \cdot \sin^2 \theta_b$$

$$(t_{p2})_3 = m_b (1 - \mu_b) \cdot \cos \theta_b \cdot \sin \theta_b$$

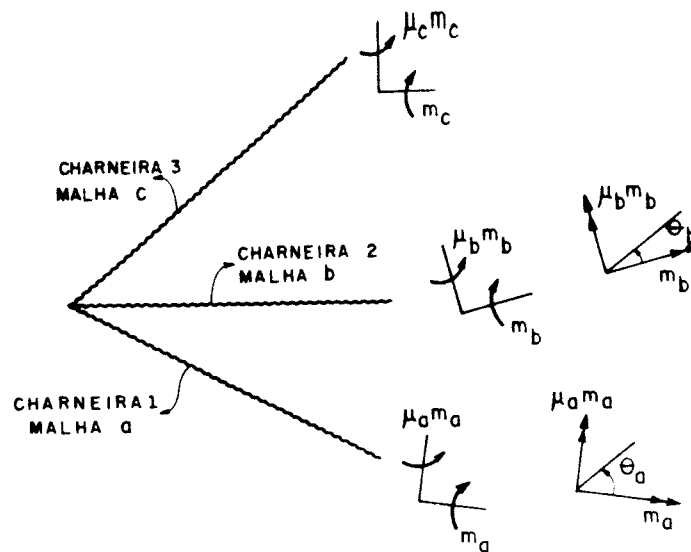


FIGURA 5.10. - Charneiras com armaduras diferentes

A equação (5.4.8) pode ser simplificada, para alguns casos muito comuns na prática, conforme demonstrado a seguir.

a) Charneiras que possuem a mesma armadura

Todas as linhas de plastificação são governadas pela mesma malha de armadura, ou seja, possuem os mesmos momentos.

$$m_a = m_b = m_c \quad \text{e} \quad \mu_a = \mu_b = \mu_c$$

portanto,

$$(m_{p1})_3 = (m_{p2})_3 = (m_{p3})_3$$

$$(t_{p1})_3 = (t_{p2})_3$$

Desta forma, os momentos fletores e torçores que agem na direção de uma certa charneira, devidos a cada malha de armadura, são todos iguais. Portanto, considerando a equação (5.4.8), todas as forças nodais são nulas.

Pode-se enunciar:

SE EM UM NÓ CONCORREM VÁRIAS CHARNEIRAS DE MESMO SINAL E MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO IGUAIS, TODAS AS FORÇAS NODAIS NESSE NÓ SÃO NULAS.

b) Charneira interceptando uma borda livre

Uma charneira encontrando uma borda livre pode ser analisada como uma linha de plastificação interceptando duas outras linhas de momentos nulos.

De acordo com a figura 5.11-a e fazendo uma analogia com a equação (5.4.8), pode-se calcular as forças nodais  $K_{o1}$  e  $K_{o2}$ .

$$K_{o1} = (m_{p3} - m_{p1})_3 \cdot \cotg\phi_{13} - (m_{p3} - m_{p2})_3 \cdot \cotg\phi_{23} + (t_{p2} - t_{p1})_3$$

$$K_{o2} = (m_{p1} - m_{p2})_1 \cdot \cotg\phi_{12} - (m_{p1} - m_{p3})_1 \cdot \cotg\phi_{13} + (t_{p3} - t_{p2})_1$$

Sendo nulos os momentos ao longo da borda, tem-se que  $m_{p1} = t_{p1} = m_{p3} = t_{p3} = 0$ , do que resulta,

$$K_{o1} = (m_{p2})_3 \cdot \cotg\phi_{23} + (t_{p2})_3$$

$$K_{o2} = -(m_{p2})_1 \cdot \cotg\phi_{12} - (t_{p2})_1$$

onde,

$$\cotg\phi_{23} = \cotg\phi,$$

$$\cotg\phi_{12} = \cotg(\pi+\phi) = \cotg\phi.$$

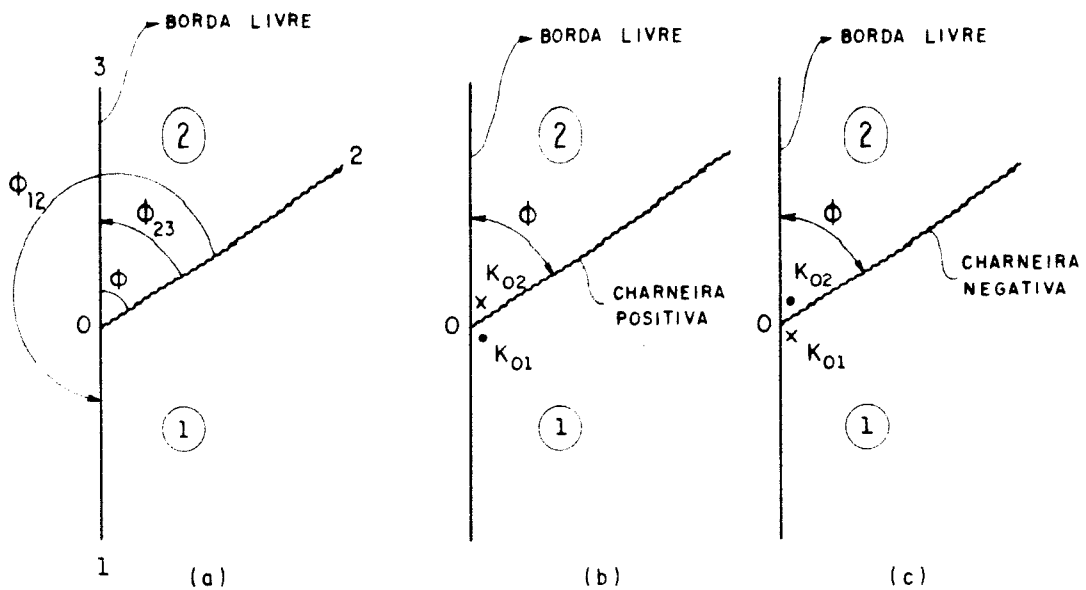


FIGURA 5.11. - Charneira interceptando uma borda livre

Porém, neste caso particular, só há uma charneira (linha 2), podendo assim o índice 2 ser omitido e, desde que as direções 1 e 3 correspondam à bordas, estes índices podem ser substituídos pelo índice *b*.

$$K_{01} = m_{pb} \cdot \cotg\phi + t_{pb} \quad (5.4.9)$$

$$K_{02} = -m_{pb} \cdot \cotg\phi - t_{pb}$$

Verifica-se que a soma das forças nodais, no nó *O*, é zero, pois  $K_{01} = -K_{02}$ .

Para o caso mais comum, onde a armadura é ortótropa e cujas direções são paralela e perpendicular à borda livre, os momentos na direção da borda são (de acordo com a equação 5.4.2):

$$m_{pb} = m \cdot \cos^2 \theta + \mu m \cdot \sin^2 \theta = m \quad (5.4.10)$$

$$t_{pb} = m(1-\mu) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta = 0$$

onde  $m$  é o momento cujo vetor é paralelo à borda e  $\mu m$  perpendicular.

Substituindo-se os valores dos momentos  $m_{pb}$  e  $t_{pb}$ , dados por (5.4.10), na equação (5.4.9), obtêm-se os valores das forças nodais para este caso.

$$K_{01} = m \cdot \cotg \phi \quad (5.4.11)$$

$$K_{02} = -m \cdot \cotg \phi$$

Finalmente, de acordo com a figura 5.11-b e c, pode-se enunciar:

EM UM NÓ FORMADO POR UMA BORDA LIVRE E UMA CHARNEIRA PLÁSTICA, SUPONDO SER A ARMADURA ORTÓTROPA, PARALELA E PERPENDICULAR À BORDA, TÊM-SE DUAS FORÇAS NODAIS, IGUAIS E OPOSTAS, COM VALOR IGUAL AO PRODUTO DO MOMENTO DE PLASTIFICAÇÃO, CUJO VETOR É PARALELO À BORDA, PELA COTANGENTE DO ÂNGULO AGUDO, SENDO A DESTE DIRIGIDA PARA BAIXO SE A CHARNEIRA FOR POSITIVA E PARA CIMA NO CASO CONTRÁRIO.

Na realidade, as linhas de plastificação, ao se aproximarem de uma borda livre, encurvam-se rapidamente, para atingi-la em ângulo reto. A razão é que uma charneira é uma linha de momentos principais e na borda os momentos de flexão e torção são nulos. As forças dadas por (5.4.11) representam, portanto, pares estaticamente equivalentes corretivos da consideração da linha de plastificação reta até a borda (CHAMECKI^[48]).

### 5.4.5. Restrições ao uso da equação (5.4.8) de forças nodais

A equação (5.4.8) não pode ser usada para o cálculo das forças nodais em todos os tipos de nó. O próprio Johansen insinuou que havia circunstâncias em que suas forças nodais não podiam ser usadas; no entanto, somente com os trabalhos de KEMP^[51], MORLEY^[52] e WOOD^[53], esta situação foi esclarecida.

Serão apenas citados os casos onde a equação (5.4.8) não pode ser utilizada, uma vez que aprofundar-se neste assunto está fora do escopo deste trabalho e maiores esclarecimentos podem ser encontrados em JONES & WOOD^[58].

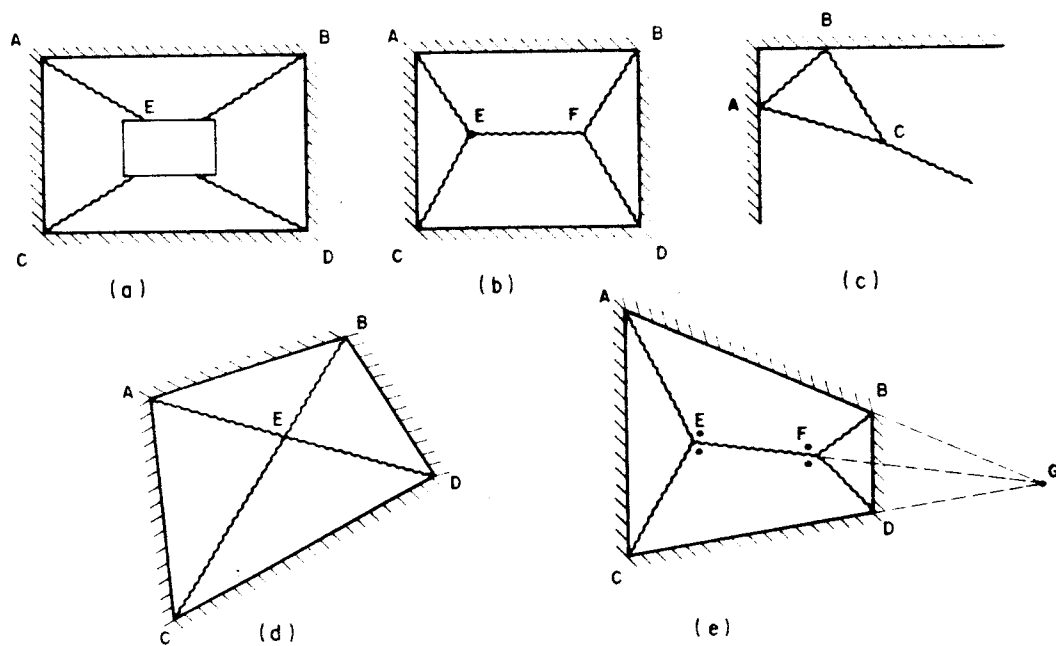


FIGURA 5.12. - Forças nodais

a) Se um nó é um ponto fixo na configuração das charneiras, então a equação (5.4.8) não pode ser usada para o cálculo das forças nodais nesse nó.

Um exemplo desta situação é o nó  $A$  da figura 5.12-a, onde a charneira  $AE$  é fixa em  $A$ . No caso de uma carga pontual (figura 5.12-b), pretende-se manter o nó  $E$  sob a carga; desta forma, a força nodal neste nó não pode ser obtida a partir de equação (5.4.8).

b) A equação (5.4.8) não pode ser usada para a determinação da força nodal entre uma linha de plastificação e uma borda apoiada.

Esta situação é ilustrada pelo nó  $A$  da figura 5.12-c. Essas forças não são necessárias para o cálculo do valor do momento de plastificação, de forma que este fato não traz problemas.

c) Quando os momentos de plastificação são diferentes para as charneiras que se interceptam em um nó, a equação (5.4.8) só é válida para nós onde três linhas de plastificação se encontram.

Esse tipo de nó é representado pelo nó  $E$  da figura 5.12-d.

d) Quando uma das charneiras, que se encontram em um nó, gira em torno de um ponto contido na própria linha de plastificação, então as forças nodais associadas a esta linha só podem ser usadas nas equações de momentos em torno de eixos passando por esse ponto.

Na verdade, essa restrição geralmente é atendida, pois, conforme mostra a figura 5.12-e, é usual tomar os momentos em torno de  $AE$  e  $CD$ , que realmente passam pelo ponto  $G$  (as forças nodais envolvidas neste caso foram marcadas com um ponto).



## 5.5. MÉTODO DO EQUILÍBRIO

Consiste em estabelecer as equações de equilíbrio de cada região da laje, delimitada pelas linhas de plastificação. Cada região considerada está em equilíbrio sob a ação das forças nodais, dos momentos ao longo das charneiras e das cargas externas. Assim, para cada parte da laje, têm-se três equações de equilíbrio estático; por exemplo, duas equações de momentos em torno de eixos situados no plano da laje e uma equação de equilíbrio de forças verticais. Se a laje possuir  $n$  regiões, têm-se  $3n$  equações e  $3n$  incógnitas. As incógnitas são:

- o momento de plastificação, para o caso onde a carga é dada; ou a carga de ruína, se o momento de plastificação é conhecido;
- $n-1$  relações entre os ângulos de rotação;
- $2n$  incógnitas provenientes dos eixos de rotação e reações de apoio.

As  $2n$  incógnitas citadas acima podem decorrer de três situações distintas:

a) Parte da laje de borda simplesmente apoiada ou engastada - o eixo de rotação é conhecido, uma vez que coincide com a própria linha de apoio, porém a posição e intensidade da reação são desconhecidas, totalizando duas incógnitas;

b) Parte da laje de borda livre - não existe reação de apoio, no entanto o eixo de rotação é completamente desconhecido, resultando assim duas incógnitas;

c) Parte da laje com apoio pontual - o eixo de giro passa pelo apoio, porém sua direção é desconhecida; a reação de apoio coincide com o ponto e sua intensidade deve ser determinada; novamente têm-se duas incógnitas.

O total de incógnitas sempre é:

$$1 + (n - 1) + 2n = 3n$$

estando de acordo com o número de equações de equilíbrio disponíveis e sendo o problema determinado.

Nos casos em que há simetria na laje, ou quando as regiões são adjacentes às linhas de apoio, há uma redução no número de equações a serem resolvidas.

Ao se estabelecer as equações de equilíbrio de momentos, não há dificuldade alguma em calcular os momentos devidos às forças nodais e à carga externa. Porém, deve-se tomar um certo cuidado ao avaliar as componentes devidas aos momentos fletores e torçores, que atuam ao longo das linhas de plastificação.

Vale chamar a atenção para o fato de que as forças nodais foram calculadas com base nos momentos fletores e torçores ao longo das charneiras, dados por (5.4.1). Uma vez que, nestas equações, os momentos são funções dos momentos de plastificação, torna-se mais fácil imaginar as charneiras como escalonadas nas direções dos momentos de plastificação. Enfim, ao analisar o equilíbrio de cada região da laje, em lugar de tomar os momentos fletores e torçores ao longo das charneiras, estes serão escalonados e o equilíbrio será feito com os momentos de plastificação da laje.

### 5.5.1. Exemplos de aplicação

a) Laje quadrada isótropa, simplesmente apoiada nas quatro bordas e submetida a uma carga  $p$  uniformemente distribuída (figura 5.13).

Incógnitas:

- momento de plastificação  $m$ ;
- $n-1 = 3$  relações entre os ângulos de rotação;
- $2n = 8$  incógnitas provenientes dos eixos de rotação e reações de apoio.

Devido à simetria de forma e de carregamento, pode-se concluir que as charneiras coincidem com as diagonais, determinando assim as três relações entre os ângulos de rotação. Uma vez que as partes da laje são de bordas simplesmente apoiadas, os eixos de rotação coincidem com as linhas de apoio e pode-se eliminar as oito incógnitas provenientes das reações, tomando-se como eixo, para anular os momentos, o próprio eixo de rotação. Desta forma, tem-se apenas uma incógnita, que é o momento de plastificação.

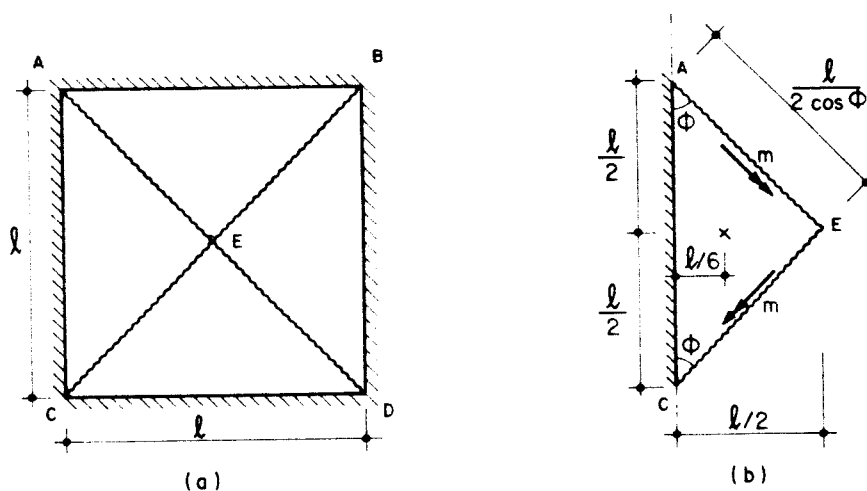


FIGURA 5.13. - Laje quadrada com carga uniforme

Tomando-se a região típica  $AEC$  (figura 5.13-b), os momentos resultantes ao longo das charneiras  $AE$  e  $EC$  têm o mesmo valor  $\frac{m \cdot l}{2 \cos \phi}$ . Fazendo-se o equilíbrio de momentos em torno do eixo de rotação, que coincide com a borda  $AC$ , conforme exposto acima, tem-se

$$\frac{m \cdot l}{2 \cos \phi} \cdot \cos \phi + \frac{m \cdot l}{2 \cos \phi} \cdot \cos \phi = \frac{p \cdot l^2}{4} \cdot \frac{l}{b} \quad (5.5.1)$$

$$m = \frac{p \cdot l^2}{24} \quad (5.5.2)$$

Nota-se, a partir da equação (5.5.1), que não há necessidade de calcular o momento resultante na charneira e depois calcular sua projeção em relação ao eixo de rotação; basta, apenas, multiplicar o momento de plastificação pelo comprimento das projeções das charneiras sobre o eixo de giro.

b) Laje poligonal com  $n$  lados, isotropa, engastada em seu contorno e sujeita a uma carga  $p$  uniformemente distribuída (figura 5.14).

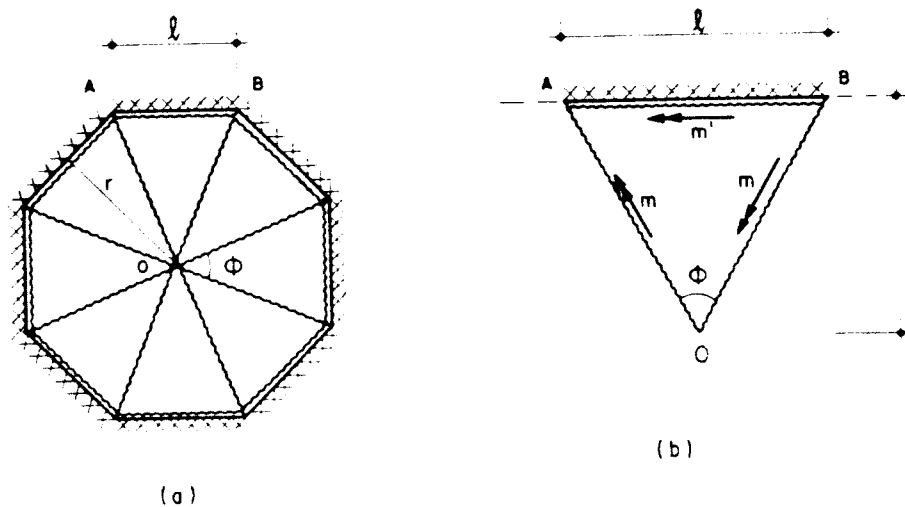


FIGURA 5.14. - Laje poligonal de  $n$  lados com carga uniforme

De acordo com a figura 5.14-b, sendo  $r$  o raio do círculo inscrito, tem-se

$$\phi = \frac{2\pi}{n} \quad (5.5.3)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = \frac{\ell}{2r} \quad (5.5.4)$$

donde,

$$r = \frac{\ell}{2 \operatorname{tg} \pi/n} \quad (5.5.5)$$

Fazendo-se o equilíbrio de momentos em relação à borda típica  $AB$ , por exemplo, resulta

$$m \cdot \ell + m' \cdot \ell = p \cdot \frac{\ell r}{2} \cdot \frac{r}{3}$$

$$m + m' = \frac{pr^2}{6} \quad (5.5.6)$$

ou, considerando-se (5.5.5)

$$m + m' = \frac{p\ell^2}{24 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}} \quad (5.5.7)$$

Para  $n = 3$  (laje triangular equilátera),

$$m + m' = \frac{p\ell^2}{72}$$

Para  $n = 4$  (laje quadrada),

$$m + m' = \frac{p\ell^2}{24}$$

valor que coincide com o exemplo anterior (equação 5.5.2), tomando-se  $m' = 0$ .

Para uma laje circular, o círculo inscrito é a própria laje, sendo então o momento de plastificação dado pela equação (5.5.6).

c) Laje retangular ortótropa, com uma borda maior livre e as outras simplesmente apoiadas, submetida a uma carga linear  $p_l$  ao longo da borda livre (figura 5.15).

As forças nodais, nos nós E e F, são calculadas a partir da equação (5.4.11).

$$K_{E1} = K_{F1} = -1,5m \cdot \cotg\phi = -1,5m \cdot \frac{x}{3}$$

$$K_{E2} = K_{F2} = 1,5m \cdot \cotg\phi = 1,5m \cdot \frac{x}{3}$$

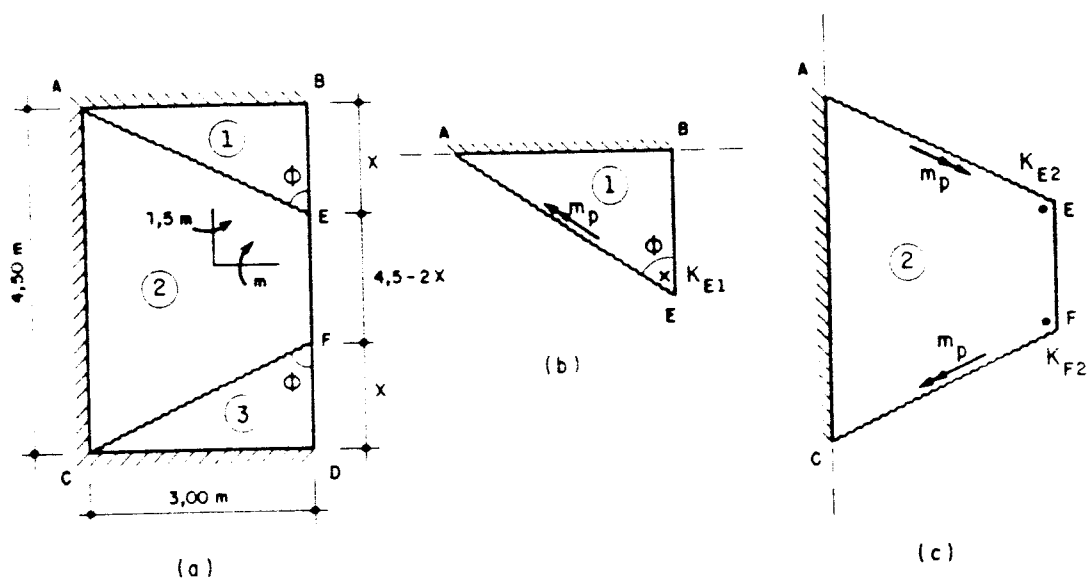


FIGURA 5.15 - Laje retangular com carga linear

Fazendo-se o equilíbrio da região 1 (figura 5.15-b), resulta

$$\sum m = K_{E1} \cdot x + p_l \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$\sum m = 1,5m \cdot \frac{x}{3} \cdot x + p_l \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$m = \frac{p_l \cdot x^2}{6} \quad (5.5.8)$$

A partir do equilíbrio da região 2 (figura 5.15-c), obtém-se

$$1,5m \cdot 2x + (K_{E2} + K_{F2}) \cdot 3 = p_1 \cdot (4,5 - 2x) \cdot 3$$

$$3xm + 2 \cdot \frac{1,5mx}{3} \cdot 3 = p_1 \cdot (13,5 - 6x)$$

$$m = p_1 \cdot \frac{4,5 - 2x}{2x} \quad (5.5.9)$$

Igualando-se os valores de  $m$ , obtidos com as equações (5.5.8) e (5.5.9), calcula-se o valor de  $x$ .

$$x = 1,455 \text{ metros} \quad (5.5.10)$$

Substituindo-se o valor de  $x$  em uma das equações (5.5.8) ou (5.5.9), calcula-se o valor de  $m$ .

$$m = 0,546 \cdot p_1 \quad (5.5.11)$$

d) Laje circular isótropa, com apoios pontuais ao longo do contorno e carga  $p$  uniformemente distribuída (figura 5.16).

Admitindo-se que os apoios estejam dispostos simetricamente, os eixos de rotação formam um polígono regular e as charneiras estão sobre as diagonais do mesmo.

Se  $r$  o raio do círculo e  $d$  a distância do centro de gravidade do setor circular para o centro  $O$ , têm-se:

$$d = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{\text{sen}(\phi/2)}{\phi/2} \quad (5.5.12)$$

$$\phi = \frac{2\pi}{n} \quad (5.5.13)$$

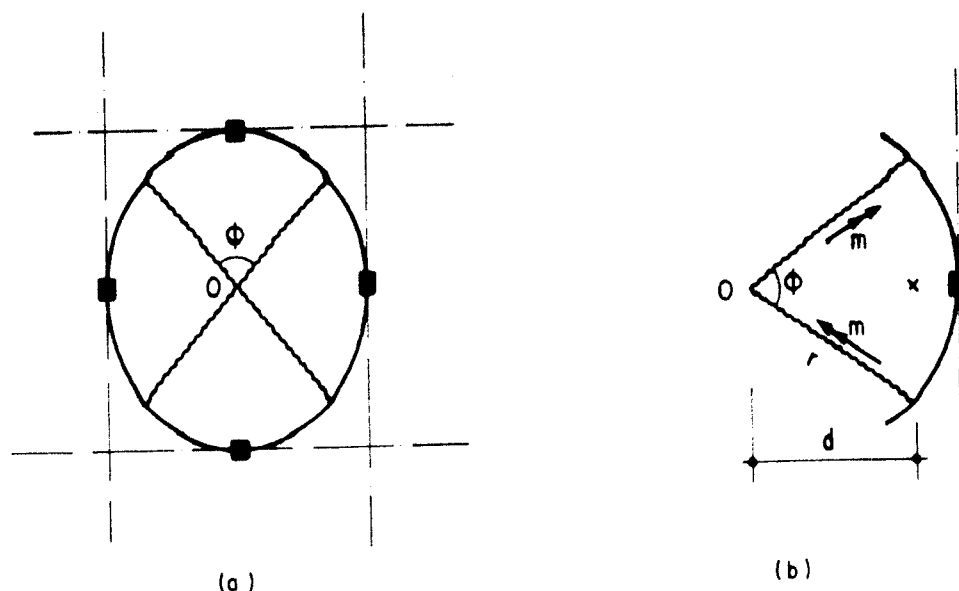


FIGURA 5.16. - Laje circular com apoios pontuais

Tomando-se o setor circular da figura 5.16-b, a equação de momentos em torno do eixo de giro fornece

$$2 \cdot m \cdot r \cdot \text{sen} \frac{\phi}{2} = p \cdot \frac{\phi r^2}{2} \cdot (r-d) \quad (5.5.14)$$

Substituindo-se os valores de  $d$  e  $\phi$ , dados pelas equações (5.5.12) e (5.5.13), na equação (5.5.14), resulta

$$2 \cdot m \cdot r \cdot \text{sen} \left( \frac{2\pi}{2n} \right) = p \cdot \frac{2\pi r^2}{2n} \cdot \left[ r - \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{\text{sen} \left( \frac{2\pi}{2n} \right)}{2\pi/2n} \right]$$

$$m = \frac{p\pi r^2}{2n \text{sen}(\pi/n)} \cdot \left[ 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\text{sen}(\pi/n)}{\pi/n} \right] \quad (5.5.15)$$

$$\text{Para } n = 3 \Rightarrow m = \frac{pr^2}{3,69}$$

$$\text{Para } n = 4 \Rightarrow m = \frac{pr^2}{4,50}$$

⋮

$$\text{Para } n = \infty \Rightarrow m = \frac{pr^2}{6}$$



que corresponde a uma laje circular simplesmente apoiada no contorno. A resposta, obviamente, coincide com a equação (5.5.6), com  $m'=0$ .

e) Laje retangular isotrópica, com uma borda maior livre e as outras engastadas, com  $m'=2m$  e carga  $p$  uniformemente distribuída (figura 5.17).

As incógnitas deste exemplo são a distância  $x$ , que determina a configuração de ruína, e o momento de plastificação  $m$ . As forças nodais, existentes nos nós formados pelas charneiras e pela borda livre, podem ser calculadas com a expressão (5.4.11).

$$K_{E1} = -m \cdot \cotg\phi = -\frac{m \cdot x}{3} \quad (5.5.16)$$

$$K_{E2} = K_{F2} = m \cdot \cotg\phi = \frac{m \cdot x}{3}$$

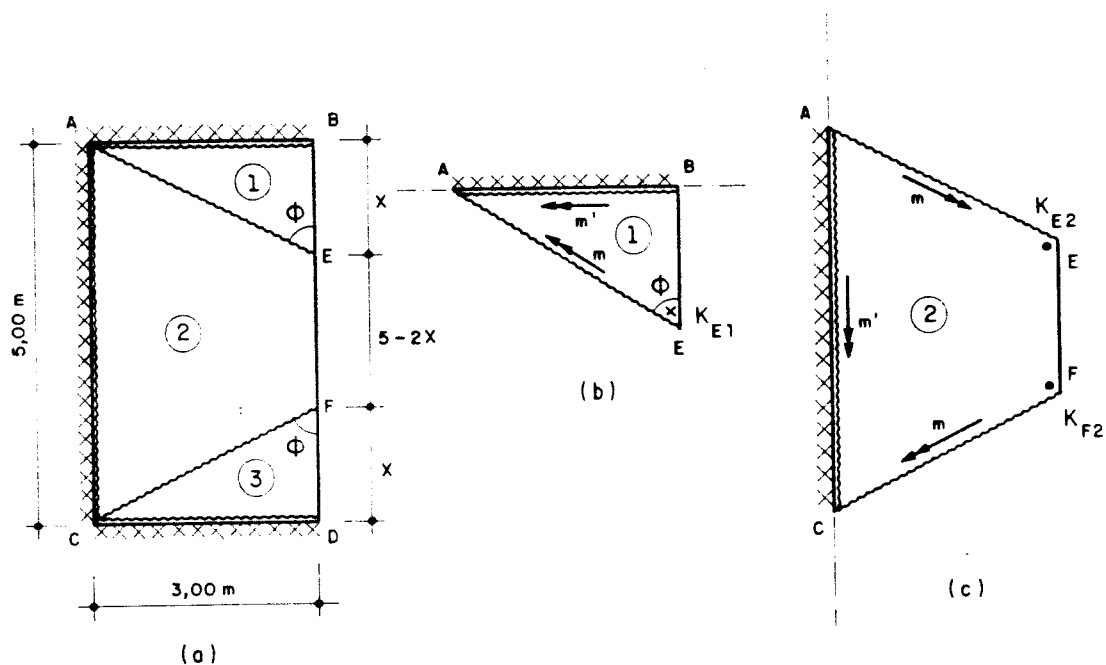


FIGURA 5.17. - Laje retangular com uma borda livre

Fazendo-se o equilíbrio da região 1 (figura 5.17-b), obtém-se

$$m \cdot 3 + m' \cdot 3 = K_{E1} \cdot x + p \cdot \frac{3 \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3}$$

$$3m + 3 \cdot 2m = \frac{m \cdot x}{3} \cdot x + p \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$m = p \cdot \frac{3x^2}{54 - 2x^2} \quad (5.5.17)$$

Fazendo-se o equilíbrio da região 2 (figura 5.17-c), obtém-se

$$m \cdot 2x + m' \cdot 5 + (K_{E2} + K_{F2}) \cdot 3 = p \cdot \left[ \frac{3 \cdot x}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot 2 + 3 \cdot (5 - 2x) \cdot \frac{3}{2} \right]$$

$$2mx + 2m \cdot 5 + \left[ \frac{m \cdot x}{3} + \frac{m \cdot x}{3} \right] \cdot 3 = p \cdot \left[ 3x + (5 - 2x) \cdot \frac{9}{2} \right]$$

$$m = p \cdot \frac{22,5 - 6x}{4x + 10} \quad (5.5.18)$$

Igualando-se (5.5.17) a (5.5.18) e resolvendo-se a equação daí decorrente, resulta:

$$x = 2,408 \text{ metros}$$

Substituindo-se este valor de x em (5.5.16) ou (5.5.17), encontra-se o valor de m:

$$m = 0,410 \cdot p$$

## 5.6. MÉTODO DA ENERGIA

O método da energia, também chamado método do trabalho, nada mais é que uma aplicação do princípio dos trabalhos virtuais. Assume-se que na ruína não há perda de energia, enquanto a laje deforma-se.

Uma vez determinada a configuração de ruína, dá-se a um ponto da laje, convenientemente escolhido, um deslocamento virtual. A equação de trabalho é obtida igualando-se o trabalho das forças externas ( $T_e$ ) ao trabalho das forças internas ( $T_i$ ), ou seja, a energia gasta pelas forças externas durante a deformação virtual da laje é igual à energia consumida pelas charneiras para efetuarem uma rotação compatível.

Caso a configuração de ruína dependa de alguns parâmetros ( $x_1, x_2, \dots$ ), observa-se que o momento resistente da laje é função desses parâmetros e da carga  $p$ .

$$m = F(x_1, x_2, \dots, p)$$

Utilizando-se o teorema cinemático da teoria da plasticidade, constata-se que o valor do momento de plastificação é o maior entre os correspondentes às diversas configurações possíveis. Os valores dos parâmetros ( $x_1, x_2, \dots$ ) são aqueles que conduzem ao máximo da função  $m$ , podendo ser obtidos por aproximações sucessivas ou pelas condições de máximo.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \dots$$

### 5.6.1. Trabalho das forças externas

Analisando-se uma região qualquer da laje, a energia dispendida pela carga externa, num pequeno elemento de dimensões  $dx$  e  $dy$ , ao sofrer um deslocamento  $w$  é  $p.w.dx.dy$ . A perda de energia devida à deformação em toda região é

$$\iint p.w.dx.dy,$$

com a integral sobre toda região.

Uma vez que a laje é composta de várias regiões, o trabalho total das forças externas é o somatório das integrais, calculadas para cada região.

$$T_e = \sum \left[ \iint p.w.dx.dy \right]_{\text{região}} \quad (5.6.1)$$

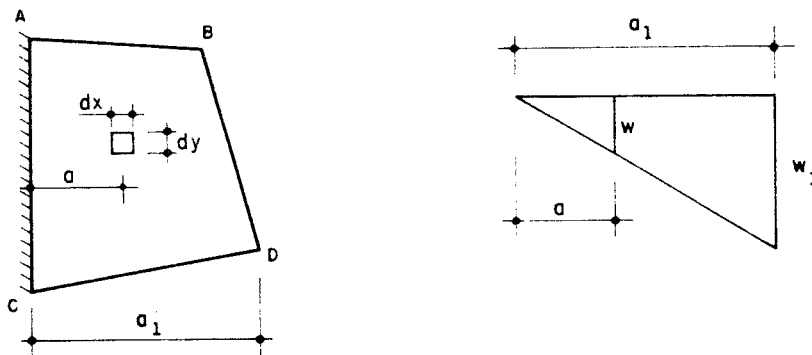


FIGURA 5.18. - Deslocamentos de uma região

Para o cálculo da energia gasta pelas forças externas numa certa região, tal como a mostrada na figura 5.18, supõe-se conhecido o deslocamento no ponto  $D$  e de valor  $w_1$ . Se o pequeno elemento de dimensões  $dx$  e  $dy$  possui área  $dA$ , a carga sobre o elemento é  $p.dA$ . O trabalho da carga  $p$  no pequeno elemento é

$$p \cdot w \cdot dA = p \frac{a}{a_1} w_1 \cdot dA$$

O trabalho total das cargas na região 1 é obtido integrando-se em toda região.

$$T_{e1} = \frac{w_1}{a_1} \int_A p \cdot a \cdot dA \quad (5.6.2)$$

Entretanto, supondo-se que o centro de gravidade das cargas na região está a uma distância  $\bar{a}$  do eixo AC, pela definição de centro de gravidade, vem

$$\bar{a} = \frac{\int_A a \cdot dA}{\int_A dA} = \frac{\int_A p \cdot a \cdot dA}{\int_A p \cdot dA}$$

logo,

$$\int_A p \cdot a \cdot dA = \bar{a} \int_A p \cdot dA \quad (5.6.3)$$

Substituindo-se a equação (5.6.3) na equação (5.6.2), resulta

$$T_{e1} = \frac{w_1}{a_1} \bar{a} \cdot \int_A p \cdot dA \quad (5.6.4)$$

onde  $\frac{w_1}{a_1} \cdot \bar{a}$  é o deslocamento do centro de gravidade das cargas na região e  $\int_A p \cdot dA$  é a carga total sobre a região, de forma que

$$T_e = \sum \left[ \int_A p \cdot w \cdot dA \right]_{\text{região}} = \sum \left[ \left[ \begin{array}{l} \text{deslocamento do} \\ \text{C.G. das cargas} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \text{carga} \\ \text{total} \end{array} \right] \right]_{\text{região}} \quad (5.6.5)$$

A equação (5.6.5) pode ser desdobrada em três termos, correspondentes à carga concentrada, à carga linear e à carga uniformemente distribuída.

$$T_o = \sum \left[ P_i w_i + \int p_i w_i ds + \int_A p \cdot w \cdot dA \right]_{\text{região}} \quad (5.6.6)$$

onde,

$P_i$  = carga concentrada,

$w_i$  = deslocamento da carga concentrada,

$p_i$  = carga linear,

$w_i$  = deslocamento da carga linear (função da posição do CG do elemento  $ds$  sob a carga  $p_i$ ),

$p$  = carga uniformemente distribuída,

$w$  = deslocamento da carga uniformemente distribuída (função da posição do CG do elemento  $dA$  sob a carga  $p$ ).

### 5.6.2. Trabalho das forças internas

Enquanto a laje deforma-se, há rotações compatíveis das linhas de plastificação. A energia dissipada numa charneira é o produto de sua rotação  $\theta$  pelo seu momento de plastificação  $m_p$ .

$$T_i = \sum \left[ \theta \cdot \int m_p ds \right]_{\text{charneira}} \quad (5.6.7)$$

Sendo o momento de plastificação constante, ao longo de uma charneira, a equação (5.6.7) reduz-se a

$$T_i = \sum \left[ m_p \cdot \ell \cdot \theta \right]_{\text{charneira}} \quad (5.6.8)$$

com,

$\ell$  = comprimento da charneira.

O valor de  $m_p$  depende da armadura e da direção da charneira, sendo calculado com a equação (5.4.1). O valor da rotação  $\theta$  é obtido com a construção de uma linha normal à charneira e passando por um ponto cujo

deslocamento é conhecido ou facilmente calculado. Essa linha deve passar pelos eixos de rotação das regiões, uma vez que os deslocamentos nesses pontos são nulos. De acordo com a figura 5.19, calcula-se o valor da rotação  $\theta$ .

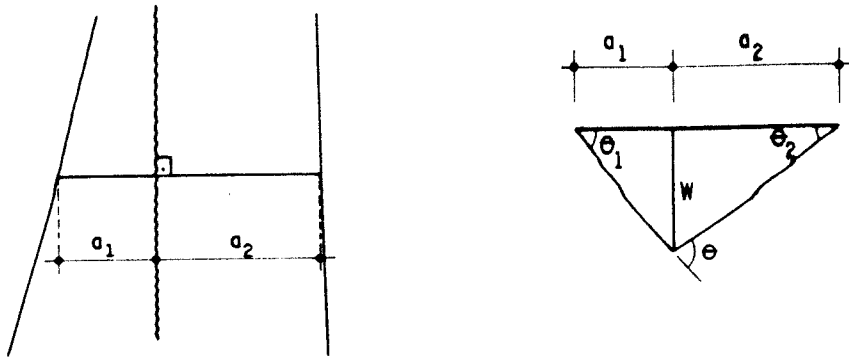


FIGURA 5.19. - Rotação de uma charneira

$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

onde,

$$\theta_1 = \frac{w}{a_1} \quad \text{e} \quad \theta_2 = \frac{w}{a_2}$$

$$\theta = w \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right)$$

com  $w$ ,  $a_1$  e  $a_2$  conhecidos.

Em lugar de utilizar o momento e a rotação normais à linha de plastificação (conforme exposto anteriormente), para calcular a energia absorvida pelas charneiras, pode-se usar as componentes desses vetores sobre eixos arbitrados. Esta alternativa, descrita por JONES & WOOD⁽⁵⁸⁾, chamada de método das componentes vetoriais, geralmente conduz a cálculos mais simples.

O valor do trabalho interno pode ser calculado pela expressão

$$T_i = m_p \dot{\theta} = m_x \dot{\theta}_x + m_y \dot{\theta}_y \quad (5.6.9)$$

onde os índices  $x$  e  $y$  representam as componentes nas direções dos eixos arbitrados  $X$  e  $Y$ .

No caso de uma laje ortótropa ou esconsa, os eixos escolhidos devem coincidir com as direções dos momentos de plastificação, para facilitar o cálculo.

Porém, uma forma melhor de apresentar esse método, consiste em utilizar a equação (5.6.9) para o cálculo da energia dissipada em cada região, resultando

$$T_i = \sum \left( m_x \dot{\theta}_x + m_y \dot{\theta}_y \right)_{\text{região}} \quad (5.6.10)$$

que significa que as componentes são calculadas para as charneiras contornando cada região e os valores são somados. Os eixos  $X$  e  $Y$  devem ser convenientemente escolhidos para cada região, podendo variar entre as mesmas, lembrando que, para lajes ortótropas ou esconsas, os eixos devem ter as mesmas direções que os momentos de plastificação.

### 5.6.3. Exemplos de aplicação

a) Laje quadrada isótropa, simplesmente apoiada nas quatro bordas e submetida a uma carga  $p$  uniformemente distribuída (figura 5.20).

Supondo-se que o ponto  $E$  sofra um deslocamento virtual unitário, de acordo com a figura 5.20, pode-se analisar a região  $I$  da laje.

$$T_{i1} = m_x \dot{\theta}_x + m_y \dot{\theta}_y$$



Sendo  $\theta_x = 0$ ,  $m_y = m$ ,  $l_y = l$  e  $\theta_y = \theta$ , resulta

$$T_{i1} = m l \theta$$

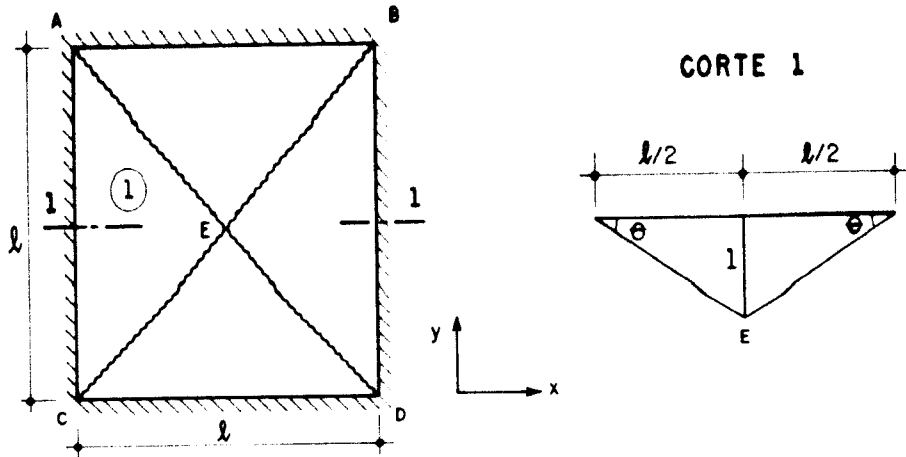


FIGURA 5.20. - Laje quadrada com carga uniforme

O valor de  $\theta$  pode ser obtido com base no corte 1 da figura 5.20.

$$\theta = \frac{1}{l/2} = \frac{2}{l}$$

resultando

$$T_{i1} = m l \frac{2}{l} = 2m$$

O mesmo valor do trabalho interno é obtido para as outras regiões, de forma que

$$T_i = 4T_{i1}$$

$$T_i = 8m \quad (5.6.11)$$

Aplicando-se a equação (5.6.6), calcula-se o trabalho das forças externas.

$$T_e = 4 \cdot p \cdot \frac{l \cdot l/2}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\tau_{\bullet} = \frac{\rho \ell^2}{3} \quad (5.6.12)$$

Igualando-se as equações (5.6.11) e (5.6.12), obtém-se o valor de  $m$ .

$$\begin{aligned} 8m &= \frac{\rho \ell^2}{3} \\ m &= \frac{\rho \ell^2}{24} \end{aligned} \quad (5.6.13)$$

Este valor coincide, logicamente, com o obtido pelo método do equilíbrio (equação 5.5.2).

b) Laje poligonal com  $n$  lados, isótropa, engastada em seu contorno e sujeita a uma carga  $p$  uniformemente distribuída (figura 5.21).

De acordo com a figura 5.21, sendo  $r$  o raio do círculo inscrito, tem-se que:

$$\phi = \frac{2\pi}{n}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = \frac{\ell}{2r}$$

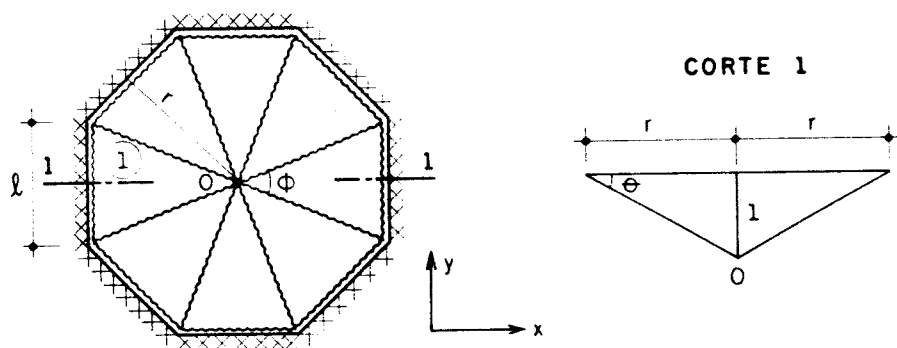


FIGURA 5.21. - Laje poligonal com  $n$  lados e carga uniforme

donde,

$$r = \frac{\ell}{2 \operatorname{tg} \pi / n} \quad (5.6.14)$$

Supondo-se que o ponto  $O$  sofra um deslocamento virtual unitário, de acordo com a figura 5.21, obtém-se

$$T_i = n(m \ell_x \theta_x + m \ell_y \theta_y + m' \ell_x \theta_x + m' \ell_y \theta_y)$$

Para a região 1, com  $\theta_x = 0$ ,  $\theta_y = 1/r$ ,  $\ell_y = \ell$ ,  $m_y = m$ ,  $m'_y = m'$ , tem-se

$$T_{i1} = (m + m') \cdot \frac{\ell}{r}$$

Para a laje toda, resulta

$$T_i = (m + m') \cdot \frac{n\ell}{r} \quad (5.6.15)$$

O valor do trabalho externo é

$$T_e = n \cdot p \cdot \frac{\ell r}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$T_e = \frac{np\ell r}{6} \quad (5.6.16)$$

Igualando-se o trabalho interno (5.6.15) ao trabalho externo (5.6.16), obtém-se

$$(m + m') \cdot \frac{n\ell}{r} = \frac{np\ell r}{6}$$

$$(m + m') = \frac{pr^2}{6} \quad (5.6.17)$$

Substituindo-se o valor de  $r$ , dado pela equação (5.6.14), encontra-se o mesmo resultado dado pela equação (5.5.7).

$$(m + m') = \frac{p\ell^2}{24 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}} \quad (5.6.18)$$

c) Laje retangular ortótropa, com uma borda maior livre e as outras simplesmente apoiadas, submetida a uma carga linear  $p_1$  ao longo da borda livre (figura 5.22).

Uma vez que a armadura é ortótropa, os eixos X e Y devem ter as mesmas direções das armaduras. Para a região 1, tem-se que

$$T_{i1} = m \ell_x \theta_x + m \ell_y \theta_y$$

com  $\theta_x = 1/x$ ,  $m_x = m$ ,  $\ell_x = 3$  e  $\theta_y = 0$ , vem

$$T_{i1} = \frac{3m}{x}$$

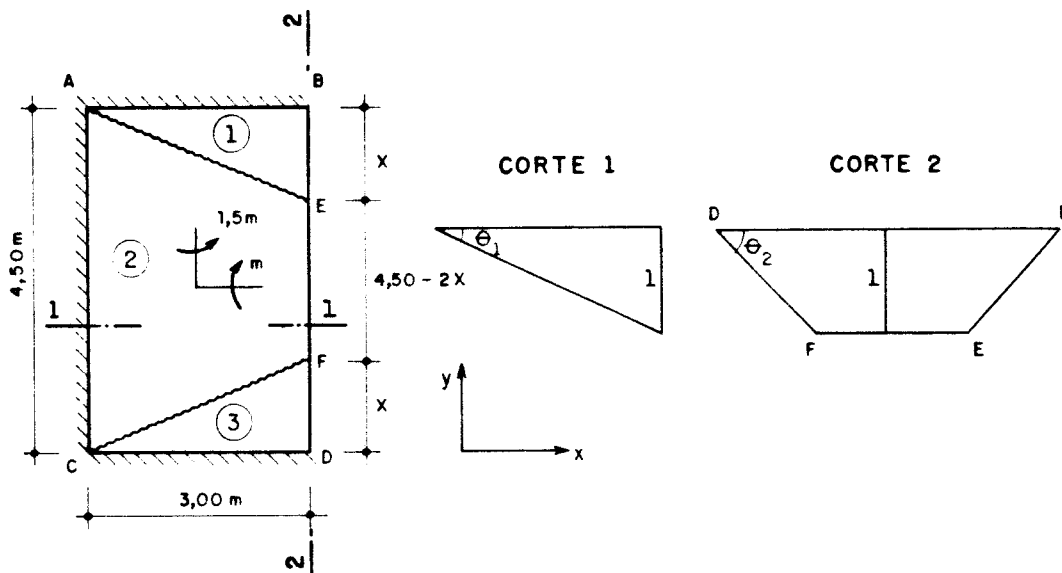


FIGURA 5.22. - Laje retangular com carga linear

Para a região 2, tem-se que  $\theta_x = 0$ ,  $\theta_y = 1/3$ ,  $m_y = 1,5m$ ,  $\ell_y = 2x$ . Assim

$$T_{i2} = 1,5m \cdot 2x \cdot \frac{1}{3}$$

$$T_{i2} = mx$$

A região 3 é similar à região 1, resultando num trabalho total

$$T_i = \frac{3m}{x} + \frac{3m}{x} + mx$$
$$T_i = \frac{m}{x} \cdot (6 + x^2) \quad (5.6.19)$$

O trabalho das forças externas é

$$T_e = 2 \cdot p_l \cdot x \cdot \frac{1}{2} + p_l \cdot (4,5 - 2x) \cdot 1$$
$$T_e = p_l \cdot (4,5 - x) \quad (5.6.20)$$

Igualando-se o trabalho interno ao externo, resulta

$$\frac{m}{x} \cdot (6 + x^2) = p_l \cdot (4,5 - x)$$
$$m = p_l \cdot \frac{4,5x - x^2}{(6 + x^2)} \quad (5.6.21)$$

O valor do momento  $m$  corresponde ao máximo valor dado pela equação (5.6.21), que é obtido derivando-se em relação a  $x$  e igualando-se a zero essa derivada.

$$\frac{dm}{dx} = p_l \cdot \frac{(4,5 - 2x)(6 + x^2) - (4,5x - x^2)(2x)}{(6 + x^2)^2} = 0$$

$$1,5x^2 + 4x - 9 = 0$$

$$x = 1,455 \text{ metros} \quad (5.6.22)$$

Substituindo-se o valor da  $x$  na equação (5.6.21), encontra-se o mesmo valor de  $m$  dado por (5.5.11).

$$m = 0,546 \cdot p_l \quad (5.6.23)$$

## 5.7. AFINIDADE

Ao analisar uma laje ortótropa e uma isótropa de forma similar, percebe-se que há algumas semelhanças nas expressões obtidas em estágios equivalentes. Essas similaridades foram observadas por JOHANSEN, que criou o conceito de afinidade entre lajes ortótropas e isótropas.

Uma laje afin é uma laje isótropa obtida transformando-se a forma e a carga da laje ortótropa, de acordo com certas regras. Para efeito de análise, a laje afin é equivalente à laje ortótropa original, fornecendo as mesmas soluções que esta, ou seja, mesmo valor do momento de plastificação. Lajes com armaduras esconas também podem ser transformadas em lajes isótropas afins.

A grande vantagem da afinidade é conduzir a uma análise mais simples.

### 5.7.1. Regras de transformação

A fim de efetuar a transformação, a equação de trabalho é estabelecida para uma laje esconsa em sua forma geral. A seguir, uma laje isótropa, com certa forma e tamanho, porém com as mesmas vinculações, é estudada e sua equação de trabalho formulada. As duas equações são comparadas e então verificam-se as relações que devem existir entre elas, ou seja, que modificações devem ser feitas nas dimensões e cargas para obter-se o mesmo momento. Uma característica importante é que os deslocamentos de todos os pontos correspondentes devem ser os mesmos.

Algumas hipóteses básicas devem ser satisfeitas:

a) As direções das armaduras superiores são as mesmas que as das armaduras inferiores.

b) A relação entre os momentos de plastificação da armadura superior é a mesma que a da armadura inferior. Por conseguinte, se os momentos positivos são  $m$  e  $\mu m$ , a razão é  $\mu$ , e os momentos negativos devem ter a mesma relação  $\mu$ .

Considere-se a região típica de uma laje esconsa, que gira em torno da borda engastada  $AE$ , como mostra a figura 5.23. Os momentos positivos são  $m$  e  $\mu m$  e os momentos negativos, de mesmas direções que  $m$  e  $\mu m$ , têm valores  $-m$  e  $-\mu m$ . Seja também a borda livre  $DE$ .

Os eixos  $X$  e  $Y$  possuem as mesmas direções que as armaduras e formam entre si um ângulo  $\beta$ . Todas as coordenadas da laje devem ser referidas a esses eixos. Para a laje isótropa afim, suas coordenadas serão localizadas nos eixos ortogonais  $X'$  e  $Y'$ , sendo que a plica (') será usada quando a laje afim for considerada.

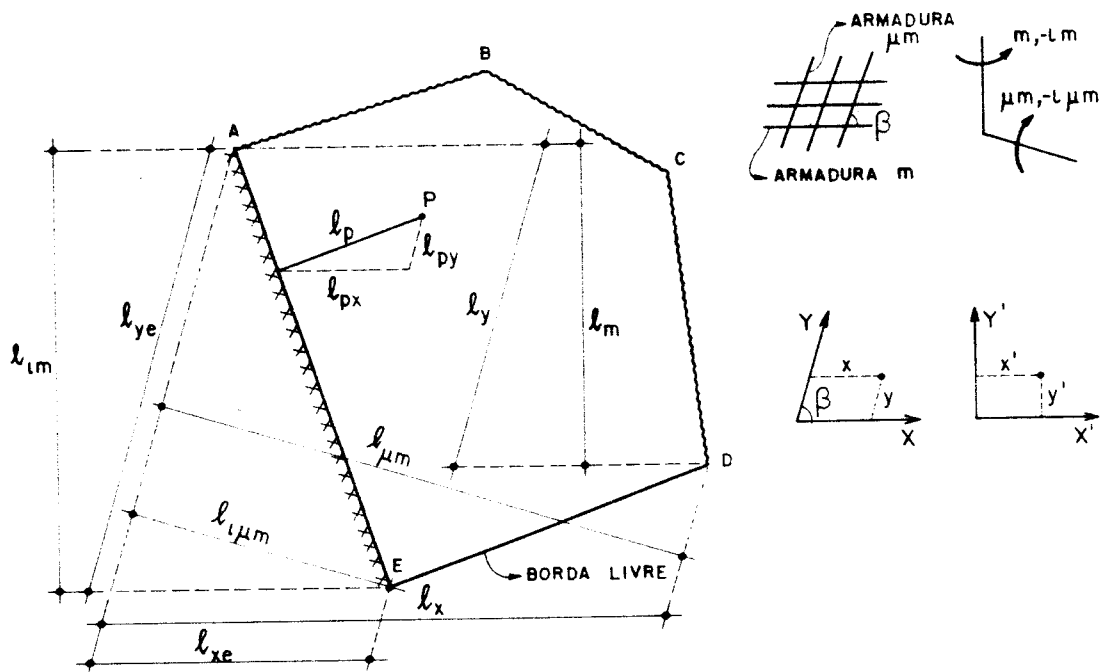


FIGURA 5.23. - Região de uma laje esconsa

A dedução será feita para uma carga concentrada  $P$ , a uma distância  $l_p$  da borda, uma vez que cargas lineares ou distribuídas podem ser consideradas como um conjunto de cargas concentradas em pequenos trechos ou regiões.

De acordo com a figura 5.23, pode-se escrever as equações de trabalho.

$$T_e = \sum P \cdot w$$

Sendo  $w = \theta_p l_p = \theta_{px} l_{px} + \theta_{py} l_{py}$ , onde  $\theta_{px}$  e  $\theta_{py}$  são as inclinações nas direções de  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

$$T_e = \sum P(\theta_{px} l_{px} + \theta_{py} l_{py}) \quad (5.7.1)$$

$$T_i = \sum m l_m \theta_m + \mu m l_{\mu m} \theta_{\mu m} + \iota m l_{\iota m} \theta_m + \iota \mu m l_{\iota \mu m} \theta_{\mu m} \quad (5.7.2)$$

onde  $l_{px}$  e  $l_{py}$  são as componentes da distância  $l_p$  da carga  $P$  à borda  $AE$  e, por exemplo,  $l_m$  é a soma das projeções das charneiras positivas na direção do vetor-momento  $m$  e  $\theta_m$  a rotação da região em torno da direção do momento  $m$ . A somatória indica que operações similares devem ser feitas para todas as regiões da laje e os resultados superpostos. Observa-se ainda que, para o cálculo do trabalho interno, foi utilizada a técnica das componentes vetoriais, decompondo-se nas direções dos momentos de plastificação.

Supondo-se que as charneiras positivas possuem comprimentos totais  $l_x$  e  $l_y$  e a borda  $AE$ ,  $l_{xe}$  e  $l_{ye}$ , todos nas direções dos eixos  $X$  e  $Y$ , tem-se que

$$\begin{aligned} l_m &= l_y \operatorname{sen} \beta \\ l_{\mu m} &= l_x \operatorname{sen} \beta \\ l_{\iota m} &= l_{ye} \operatorname{sen} \beta \\ l_{\iota \mu m} &= l_{xe} \operatorname{sen} \beta \end{aligned} \quad (5.7.3)$$



Substituindo-se esses valores na equação (5.7.2) e igualando-se o trabalho interno ao trabalho externo, resulta

$$m \cdot \text{sen} \beta \sum \left[ \epsilon_m (l_y + \nu l_{ye}) + \mu \epsilon_{\mu m} (l_x + \nu l_{xe}) \right] = P (\epsilon_{px} l_{px} + \epsilon_{py} l_{py}) \quad (5.7.4)$$

Quanto à laje isótropa afim, mantêm-se as mesmas dimensões na direção do eixo  $X'$ , ou seja, na direção da armadura  $m$ . Porém, na direção de  $Y'$ , todos os comprimentos são multiplicados por uma constante  $\kappa$ . Lembrando que os deslocamentos em pontos correspondentes permanecem inalterados, essas modificações conduzem a

$$\begin{aligned} l'_{px} &= l_{px} \\ l'_{py} &= \kappa l_{py} \\ \epsilon'_{px} &= \epsilon_{px} \\ \epsilon'_{py} &= \epsilon_{py} / \kappa \\ \epsilon'_m &= \epsilon_m \\ \epsilon'_{\mu m} &= \epsilon_{\mu m} / \kappa \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

A carga concentrada também é multiplicada por uma outra constante  $\kappa_1$ .

$$P' = \kappa_1 P$$

Introduzindo-se todas essas modificações na equação (5.7.4), vem

$$\begin{aligned} m \cdot \text{sen} \beta \sum \left[ \epsilon'_m \cdot \left( l'_y / \kappa + \nu l'_{ye} / \kappa \right) + \epsilon'_{\mu m} \mu \kappa \cdot \left( l'_x + \nu l'_{xe} \right) \right] &= \\ = \sum \frac{P'}{\kappa_1} \cdot \left( \epsilon'_{px} l'_{px} + \epsilon'_{py} l'_{py} \right) & \quad (5.7.6) \end{aligned}$$

A equação de trabalho da laje isótropa afim pode

ser escrita diretamente, sabendo-se que os momentos de plastificação em qualquer direção são  $m$  e  $-\mu m$ .

$$m \sum \left[ \theta'_m \cdot (l'_y + \mu l'_{y\theta}) + \theta'_{\mu m} \cdot (l'_x + \mu l'_{x\theta}) \right] =$$

$$= \sum P' \cdot \left( \theta'_{px} l'_{px} + \theta'_{py} l'_{py} \right) \quad (5.7.7)$$

As equações (5.7.6) e (5.7.7) devem ser iguais; logo, multiplicando-se a equação (5.7.6) por  $\kappa_1$  e comparando-se os termos correspondentes, obtém-se

$$\frac{\kappa_1 \text{sen} \beta}{\kappa} = 1$$

e

$$\mu \kappa \kappa_1 \text{sen} \beta = 1$$

donde,

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{\text{sen} \beta \sqrt{\mu}} \quad (5.7.8)$$

Enfim, lajes com armaduras constantes em duas direções, formando um ângulo  $\beta$ , de modo que a razão entre os momentos de plastificação devido às armaduras positivas e negativas, tomadas separadamente, é constante ao longo da laje, podem ser transformadas numa laje isótropa afim, do seguinte modo:

- Sendo os momentos de plastificação, em qualquer ponto da laje,  $m$  e  $\mu m$ , na laje isótropa afim, o momento em todas as direções é  $m$  para o ponto correspondente.

- Na direção da armadura  $m$ , todas as dimensões da laje permanecem iguais, sendo esta direção chamada de "primeiro eixo de coordenadas" e sendo comum às duas lajes.

- O "segundo eixo de coordenadas", para a laje original, corresponde à direção da armadura  $\mu$  e todas as distâncias devem ser referidas a este eixo. Porém o segundo eixo de coordenadas para a laje afim forma um ângulo reto com o primeiro, ou seja, com a direção da armadura  $m$ . Todas as distâncias para a laje afim, na direção do segundo eixo, são obtidas dividindo-se os comprimentos correspondentes na laje original por  $\sqrt{\mu}$ .

- Todas as cargas totais na laje afim são obtidas dividindo-se as cargas correspondentes originais por  $\sqrt{\mu} \cdot \text{sen}\beta$ .

Como pode-se observar, deve-se trabalhar com as cargas totais, não importando se estas são concentradas, lineares ou uniformemente distribuídas, já que uma simples regra aplica-se a todas elas.

#### a) Carga uniformemente distribuída

Considere-se uma carga  $p$  uniformemente distribuída e um pequeno elemento da laje de dimensões  $dx$ ,  $dy$ . A área deste elemento é  $dx \cdot dy \cdot \text{sen}\beta$  e, para a laje afim,  $dx \cdot dy / \sqrt{\mu}$ . Segundo a regra de afinidade, tem-se que

$$\frac{p \cdot dx \cdot dy \cdot \text{sen}\beta}{\sqrt{\mu} \cdot \text{sen}\beta} = p' \cdot \frac{dx \cdot dy}{\sqrt{\mu}}$$

$$p = p'$$

A intensidade da carga distribuída permanece a mesma.

#### b) Carga linear

Seja a carga linear  $p_l$  e seu comprimento de coordenadas  $x$ ,  $y$  na laje esconsa. De acordo com a figura 5.24, a carga total é

$$p_l \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \beta}$$

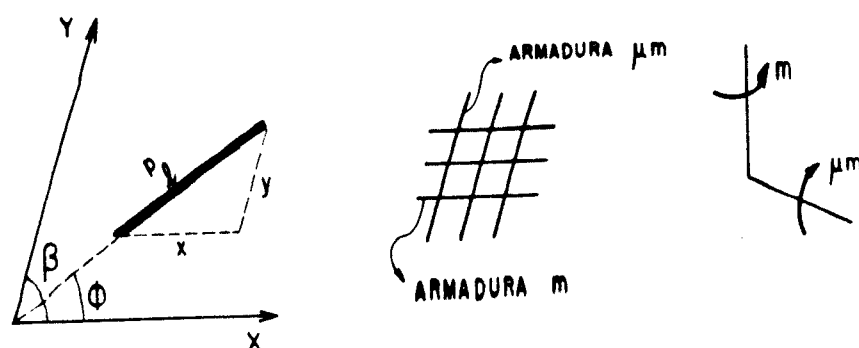


FIGURA 5.24. - Carga linear

A carga total na laje afim é

$$p'_l \cdot \sqrt{x^2 + y^2} / \mu = p_l \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \beta}}{\sqrt{\mu} \sin \beta}$$

donde,

$$p'_l = \frac{1}{\sin \beta} \cdot \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 2xy \cos \beta}{\mu x^2 + y^2}} \cdot p_l \quad (5.7.9)$$

Para a laje ortótropa ( $\beta=90^\circ$ ), a equação (5.7.9) reduz-se a

$$p'_l = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{\mu x^2 + y^2}} \cdot p_l$$

Sendo  $l$  o comprimento da carga linear e  $\phi$  o ângulo entre a carga linear e o primeiro eixo de coordenadas, ou seja, a direção da armadura  $m$  (figura 5.24), tem-se que  $x=l \cos \phi$  e  $y=l \sin \phi$ , o que resulta

$$p'_l = \frac{1}{\sqrt{\mu \cos^2 \phi + \sin^2 \phi}} \cdot p_l$$

c) Carga concentrada

$$p' = \frac{P}{\sqrt{\mu} \operatorname{sen} \beta}$$

Para lajes ortótropas ( $\beta = 90^\circ$ ),

$$p' = \frac{P}{\sqrt{\mu}}$$

5.7.2. Exemplo

a) Laje retangular ortótropa, com uma borda maior livre e as outras simplesmente apoiadas, submetida a uma carga linear  $p_l$  atuando ao da borda livre (figura 5.25).

A laje isótropa afim tem a mesma dimensão vertical (direção da armadura  $m$ ) e dimensão horizontal  $\frac{3}{\sqrt{\mu}} = \frac{3}{\sqrt{1,5}}$  (figura 5.25-b). A carga linear  $p'_l$  da laje afim é

$$p'_l = \frac{1}{\sqrt{\mu \cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi}} \cdot p_l = \frac{p_l}{\sqrt{1,5}}$$

As forças nodais são

$$K_{E1} = K_{F1} = -m \cdot \operatorname{cotg} \beta = -\frac{m \times \sqrt{1,5}}{3}$$

$$K_{E2} = K_{F2} = m \cdot \operatorname{cotg} \beta = \frac{m \times \sqrt{1,5}}{3}$$

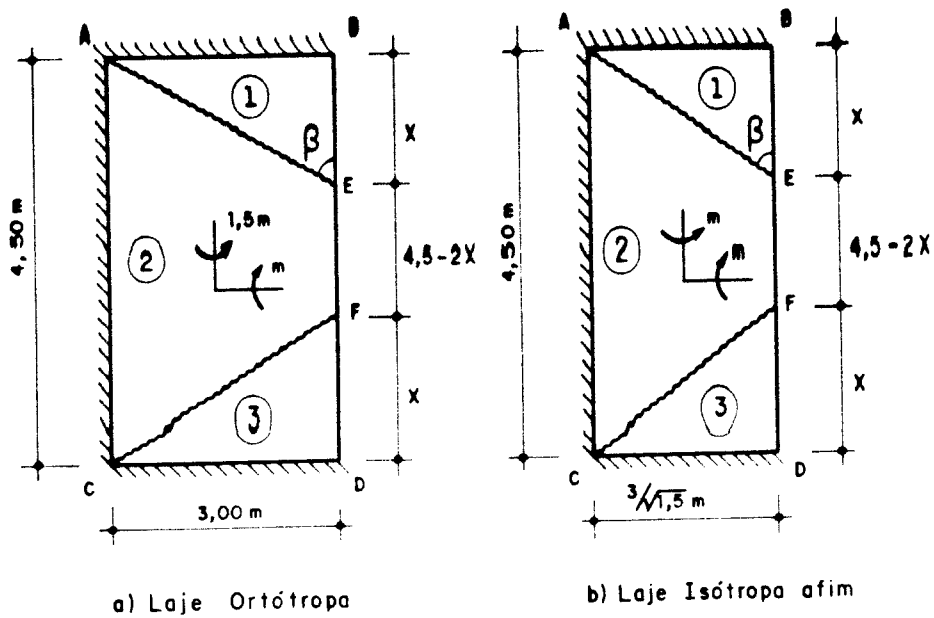


FIGURA 5.25. - Laje retangular com carga linear

Fazendo-se o equilíbrio das regiões 1 e 2, respectivamente,

$$\frac{3}{\sqrt{1,5}} \cdot m = \frac{m \times \sqrt{1,5}}{3} \cdot x + \frac{P_l}{\sqrt{1,5}} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$m = P_l \cdot \frac{x^2}{(6 - x^2)} \quad (5.7.10)$$

e

$$m \cdot 2x + 2 \cdot \frac{m \times \sqrt{1,5}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{1,5}} = \frac{P_l}{\sqrt{1,5}} \cdot (4,5 - 2x) \cdot \frac{3}{\sqrt{1,5}}$$

$$m = P_l \cdot \frac{(4,5 - 2x)}{2x} \quad (5.7.11)$$

Igualando-se (5.7.10) a (5.7.11), obtém-se o valor de x.

$$x = 1,455 \text{ metros}$$

Substituindo-se o valor de  $x$  em uma das equações (5.7.10) ou (5.7.11), calcula-se o valor de  $m$ .

$$m = 0,546$$

## 6. CÁLCULO DE LAJES PELA T.C.P.

### 6.1. GENERALIDADES

Apesar da Teoria das Charneiras Plásticas datar dos anos 20, sua utilização na prática ainda não é ampla. Um dos motivos que restringem seu emprego é a falta de divulgação de processos que permitam ao engenheiro enfrentar os casos reais da prática, que são as lajes anisótropas contínuas.

As soluções até então divulgadas tratam, basicamente, do caso de lajes retangulares simplesmente apoiadas ou engastadas em seu contorno, ou de lajes retangulares contínuas sem borda livre.

PINHEIRO^[19] apresenta uma formulação onde devem ser fixadas relações entre os momentos negativos e positivos e uma relação entre os dois momentos positivos. Para o caso de lajes contínuas, há necessidade de compatibilização dos momentos negativos, conduzindo a um cálculo iterativo.

AMARAL^[18] foi o primeiro a abordar o problema do emprego das relações entre os momentos negativos e positivos, propondo uma solução que conduz a fórmulas simples e diretas.

O estudo apresentado por SANTOS^[20] trabalha na mesma linha de Amaral, sugerindo alguns aprimoramentos. O processo por ele proposto é iterativo, conduzindo a uma solução prática para as lajes retangulares contínuas de



edifícios, sem borda livre.

Neste capítulo, apresenta-se o cálculo das lajes pela teoria das charneiras plásticas, utilizando-se o método do equilíbrio, sem a consideração de leques das charneiras nos cantos da laje. O cálculo é feito para lajes retangulares sujeitas a carga uniformemente distribuída e, quando houver borda livre, carga linear ao longo da mesma.

No item 6.2, o cálculo é feito fixando-se as relações entre os momentos negativos e positivos e a relação entre os momentos positivos. Esta formulação é mais indicada para o caso de uma laje isolada, onde não há compatibilização de momentos negativos entre lajes vizinhas.

No item 6.3, apresenta-se a formulação que foi utilizada para a elaboração do programa que visa à resolução de um pavimento composto de lajes retangulares. Neste caso, admitem-se, como dados do problema, os próprios momentos negativos e a relação entre os positivos, obtidos a partir do cálculo elástico.

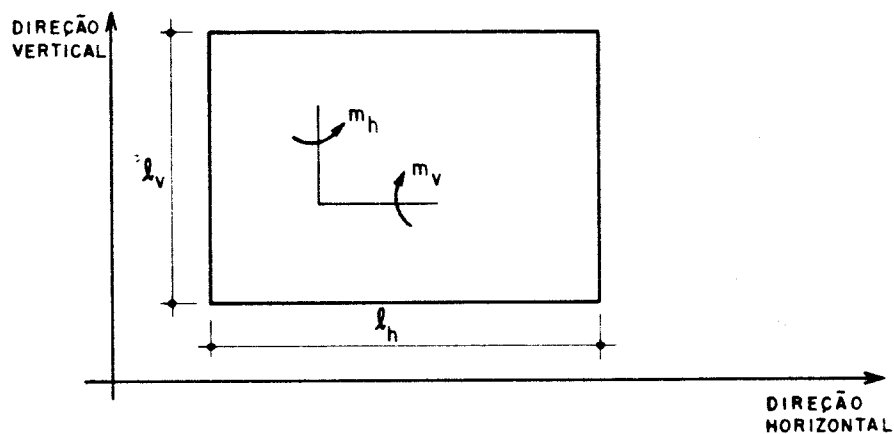


FIGURA 6.1. - Notação

A notação a ser utilizada determina que  $l_h$  seja o vão na direção "horizontal" e  $l_v$  na direção "vertical". Os símbolos  $m_h$  e  $m_v$  representam os momentos que determinam a armadura horizontal e vertical respectivamente, ou seja, o índice indica a direção da armadura determinada pelo momento. Desta forma,  $m_h$  é o momento em torno do eixo vertical e  $m_v$  em torno do eixo horizontal. Os termos horizontal e vertical não se referem à situação real; é apenas uma maneira intuitiva de representar os vãos e os momentos, conforme mostrado na figura 6.1.

## 6.2. CÁLCULO DE LAJES FIXANDO-SE AS RELAÇÕES ENTRE OS MOMENTOS NEGATIVOS E POSITIVOS

### 6.2.1. Laje retangular engastada ou simplesmente apoiada em seu contorno

A figura 6.2 apresenta a notação adotada, onde está representada uma laje engastada em seu contorno. No caso de bordas simplesmente apoiadas, basta fazer  $\nu=0$  para estas bordas.

Inicialmente, supõe-se a configuração de ruína com a charneira central paralela ao lado horizontal. A dimensão  $a$  é sempre perpendicular à charneira central, sendo então, nesta primeira etapa, igual ao lado vertical. Define-se também  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  e  $\nu_4$  como sendo, respectivamente, a relação entre o momento negativo da esquerda, direita, superior e inferior e o momento positivo e  $\mu$  como sendo a relação entre  $m_h$  e  $m_v$ .

Desta maneira, tem-se que

$$a = l_v \quad b = l_h \quad m_a = m_v = m \quad m_b = m_h = \mu m$$

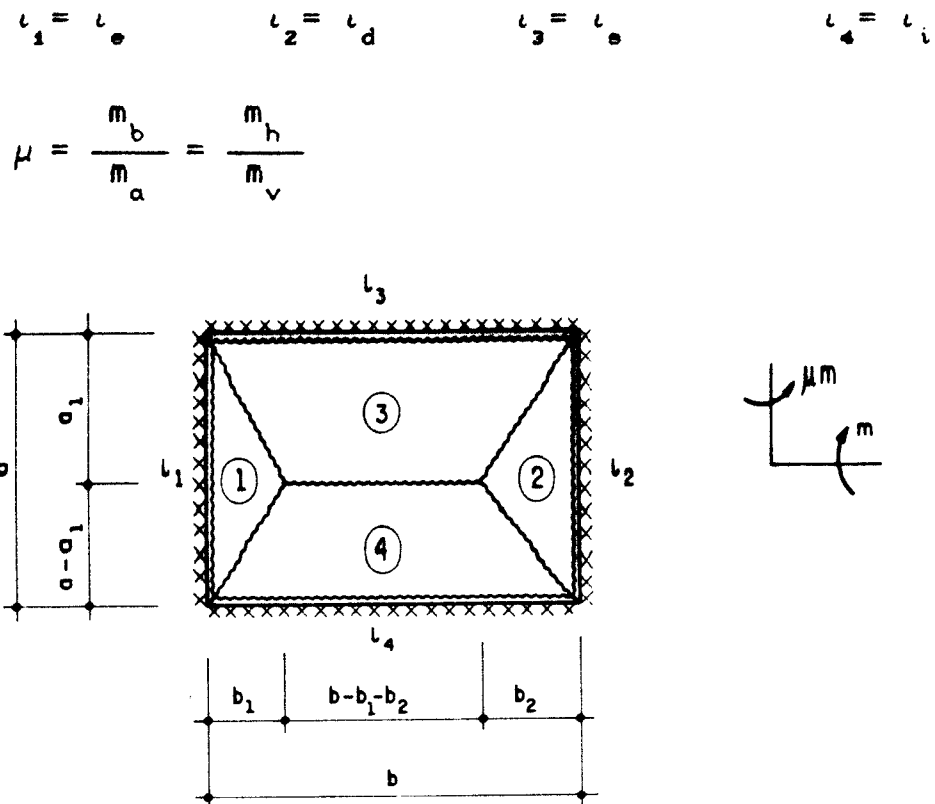


FIGURA 6.2. - Laje retangular engastada em seu contorno

Fazendo-se o equilíbrio de momentos de cada região, em torno da borda adjacente, obtêm-se

Região 1:

$$\mu m a + l_1 \mu m a = p \cdot \frac{a b_1}{2} \cdot \frac{b_1}{3}$$

$$\mu m (1 + l_1) = p \cdot \frac{b_1^2}{6} \quad (6.2.1)$$

Região 2:

$$\mu m a + l_2 \mu m a = p \cdot \frac{a b_2}{2} \cdot \frac{b_2}{3}$$

$$\mu m (1 + l_2) = p \cdot \frac{b_2^2}{6} \quad (6.2.2)$$

Região 3:

$$mb + \iota_3 mb = p \left[ \frac{a_1 b_1}{2} \cdot \frac{a_1}{3} + \frac{a_1 b_2}{2} \cdot \frac{a_1}{3} + a_1 (b - b_1 - b_2) \cdot \frac{a_1}{2} \right]$$

$$m(1 + \iota_3) = p \cdot \frac{a_1^2}{6b} \cdot (3b - 2b_1 - 2b_2) \quad (6.2.3)$$

Região 4:

$$mb + \iota_4 mb = p \cdot \left[ \frac{(a - a_1) b_1}{2} \cdot \frac{(a - a_1)}{3} + \frac{(a - a_1) b_2}{2} \cdot \frac{(a - a_1)}{3} + (a - a_1) \cdot (b - b_1 - b_2) \cdot \frac{(a - a_1)}{2} \right]$$

$$m(1 + \iota_4) = p \cdot \frac{(a - a_1)^2}{6b} \cdot (3b - 2b_1 - 2b_2) \quad (6.2.4)$$

Das equações (6.2.1) e (6.2.2), resulta

$$\frac{b_1^2}{1 + \iota_1} = \frac{b_2^2}{1 + \iota_2}$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{1 + \iota_1}}{\sqrt{1 + \iota_2}} \cdot b_2 \quad (6.2.5)$$

Comparando-se as equações (6.2.3) e (6.2.4), encontra-se o valor de  $a_1$ .

$$\frac{a_1^2}{1 + \iota_3} = \frac{(a - a_1)^2}{1 + \iota_4}$$

$$\sqrt{1 + \iota_4} \cdot a_1 = \sqrt{1 + \iota_3} \cdot a - \sqrt{1 + \iota_3} \cdot a_1$$

Fazendo-se

$$\eta_{34} = \sqrt{1 + \iota_3} + \sqrt{1 + \iota_4} \quad (6.2.6)$$

resulta

$$a_1 = \frac{\sqrt{1+l_3}}{\eta_{34}} \cdot a \quad (6.2.7)$$

Substituindo-se os valores de  $a_1$  e  $b_1$ , dados, respectivamente, por (6.2.7) e (6.2.5), na equação (6.2.3), obtém-se

$$m(1+l_3) = \rho \cdot \frac{(1+l_3)}{\eta_{34}^2} \cdot \frac{a^2}{6b} \cdot \left( 3b - 2 \frac{\sqrt{1+l_1}}{\sqrt{1+l_2}} b_2 - 2b_2 \right)$$

$$m = \frac{\rho a^2}{6b\eta_{34}^2} \cdot \left( 3b - \frac{2\sqrt{1+l_1} \cdot b_2 + 2\sqrt{1+l_2} \cdot b_2}{\sqrt{1+l_2}} \right)$$

Fazendo-se

$$\eta_{12} = \sqrt{1+l_1} + \sqrt{1+l_2} \quad (6.2.8)$$

resulta

$$m = \frac{\rho a^2}{6b\eta_{34}^2} \cdot \left( 3b - \frac{2b_2 \eta_{12}}{\sqrt{1+l_2}} \right) \quad (6.2.9)$$

Substituindo-se o valor de  $m$ , dado pela equação (6.2.9), na equação (6.2.2), calcula-se o valor de  $b_2$ .

$$\frac{b_2^2}{\mu(1+l_2)} = \frac{a^2}{b\eta_{34}^2} \cdot \left( 3b - \frac{2b_2 \eta_{12}}{\sqrt{1+l_2}} \right)$$

$$\frac{b\eta_{34}^2}{a^2 \mu(1+l_2)} \cdot b_2^2 + \frac{2\eta_{12}}{\sqrt{1+l_2}} \cdot b_2 - 3b = 0$$

$$b_2 = \frac{-\frac{2\eta_{12}}{\sqrt{1+\iota_2}} + \frac{2\eta_{34}}{a\sqrt{1+\iota_2}} \sqrt{\left(\frac{a\eta_{12}}{\eta_{34}}\right)^2 + \frac{3b^2}{\mu}}}{\frac{2b\eta_{34}^2}{a^2\mu(1+\iota_2)}}$$

$$b_2 = \frac{a\mu\sqrt{1+\iota_2}}{b\eta_{34}} \cdot \left[ -\frac{a\eta_{12}}{\eta_{34}} + \sqrt{\left(\frac{a\eta_{12}}{\eta_{34}}\right)^2 + \frac{3b^2}{\mu}} \right] \quad (6.2.10)$$

Conhecido  $b_2$ , determina-se  $b_1$  com a equação (6.2.5). Para que a configuração de ruína seja a admitida (charneira central paralela ao lado horizontal), é indispensável que  $(b_1 + b_2) \leq b$ . Se esta desigualdade for verificada, encontra-se o valor de  $m$ , substituindo-se o valor de  $b_2$  na equação (6.2.2).

$$m = \frac{p}{6\mu(1+\iota_2)} \cdot \frac{a^2\mu^2(1+\iota_2)}{b^2\eta_{34}^2} \cdot \left[ -\frac{a\eta_{12}}{\eta_{34}} + \sqrt{\left(\frac{a\eta_{12}}{\eta_{34}}\right)^2 + \frac{3b^2}{\mu}} \right]^2$$

$$m = p \cdot \frac{a^2\mu}{6b^2\eta_{34}^2} \left[ -\frac{a\eta_{12}}{\eta_{34}} + \sqrt{\left(\frac{a\eta_{12}}{\eta_{34}}\right)^2 + \frac{3b^2}{\mu}} \right]^2 \quad (6.2.11)$$

Caso a desigualdade  $(b_1 + b_2) \leq b$  não ocorra, deve-se verificar a outra configuração, onde a charneira central é paralela ao lado vertical. Pode-se utilizar as equações anteriores, com as seguintes modificações:

$$a = \ell_h \quad b = \ell_v \quad m_a = m_h = m \quad m_b = m_v = \mu m$$

$$\iota_1 = \iota_s \quad \iota_2 = \iota_i \quad \iota_3 = \iota_e \quad \iota_4 = \iota_d$$

$$\mu = \frac{m_b}{m_a} = \frac{m_v}{m_h}$$

### 6.2.2. Laje retangular com uma borda livre

Apresenta-se o cálculo de lajes retangulares com uma borda livre, onde  $a$  e  $m_a$  são a dimensão e o momento que determina a armadura perpendicular à borda livre, enquanto  $b$  e  $m_b$  correspondem à direção paralela à mesma. Tem-se que  $\iota_1$  e  $\iota_2$  referem-se aos lados perpendiculares à borda livre e  $\iota_3$  ao lado oposto à mesma. A carga  $p$  é uniformemente distribuída e  $p_l$  é uma carga linear ao longo da borda livre. Estas convenções estão indicadas na figura 6.3, onde  $m_a = m$  e  $m_b = \mu m$ .

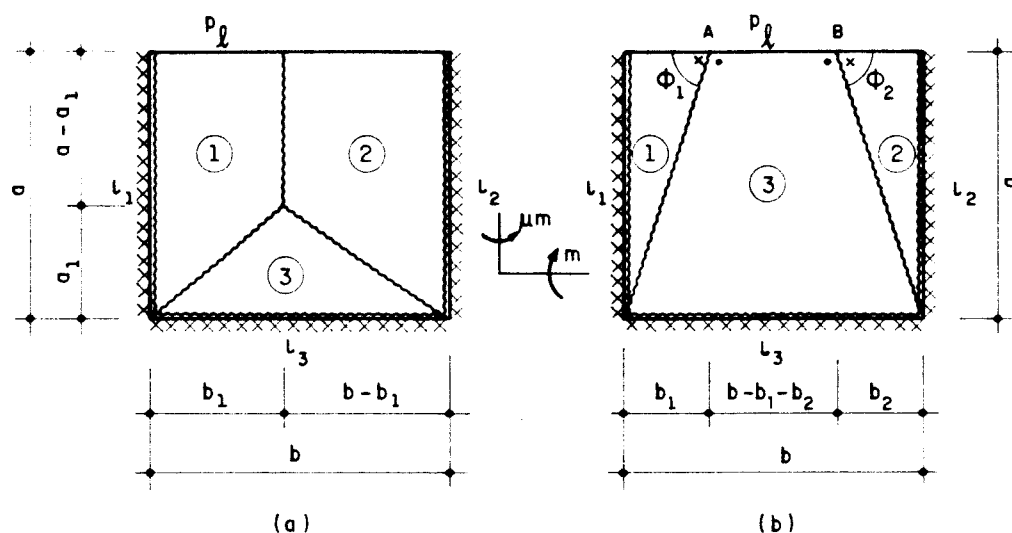


FIGURA 6.3. - Laje retangular com uma borda livre

Assim,

$a$  = dimensão perpendicular à borda livre,

$b$  = dimensão paralela à borda livre,

$m_a$  = momento que determina a armadura perpendicular à borda livre,

$m_b$  = momento que determina a armadura paralela à borda livre,

$\iota_1$  e  $\iota_2$  = relação entre os momentos negativos ao longo dos lados perpendiculares à borda livre e o momento positivo,

$\iota_3$  = relação entre o momento negativo ao longo do lado paralelo à borda livre e o momento positivo,

$$\mu = \frac{m_b}{m_a}$$

Supõe-se, inicialmente, a configuração de ruína mostrada na figura 6.3-a.

Fazendo-se o equilíbrio de momentos para cada região, em torno das bordas adjacentes, obtêm-se

Região 1:

$$\mu m a + \iota_1 \mu m a = p \cdot \left[ \frac{a_1 b_1}{2} \cdot \frac{b_1}{3} + (a - a_1) b_1 \cdot \frac{b_1}{2} \right] + p_l \cdot b_1 \cdot \frac{b_1}{2}$$

$$\mu m (1 + \iota_1) = \frac{b_1^2}{6a} \cdot \left[ p \cdot (3a - 2a_1) + 3p_l \right] \quad (6.2.12)$$

Região 2:

$$\mu m a + \iota_2 \mu m a = p \cdot \left[ \frac{a_1 (b - b_1)}{2} \cdot \frac{(b - b_1)}{3} + (a - a_1) \cdot (b - b_1) \cdot \frac{(b - b_1)}{2} \right] + p_l \cdot (b - b_1) \cdot \frac{(b - b_1)}{2}$$

$$\mu m (1 + \iota_2) = \frac{(b - b_1)^2}{6a} \cdot \left[ p \cdot (3a - 2a_1) + 3p_l \right] \quad (6.2.13)$$

Região 3:

$$m b + \iota_3 m b = p \cdot \frac{a_1 b}{2} \cdot \frac{a_1}{3}$$

$$m (1 + \iota_3) = p \cdot \frac{a_1^2}{6} \quad (6.2.14)$$

A partir das equações (6.2.12) e (6.2.13), encontra-se o valor de  $b_1$ .



$$\frac{b_1^2}{1+\iota_1} = \frac{(b-b_1)^2}{1+\iota_2}$$

Fazendo-se

$$\begin{aligned} \eta_1^2 &= 1 + \iota_1 \\ \eta_2^2 &= 1 + \iota_2 \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

resulta

$$\begin{aligned} \eta_2 b_1 &= \eta_1 b - \eta_1 b_1 \\ b_1 &= \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \cdot b \end{aligned} \tag{6.2.16}$$

Substituindo-se o valor de  $b_1$  encontrado acima, na equação (6.2.12), obtém-se

$$\begin{aligned} \mu m \eta_1^2 &= \frac{\eta_1^2}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \cdot \frac{b^2}{6a} \cdot [p \cdot (3a - 2a_1) + 3p_l] \\ m &= \frac{b^2}{6\mu a (\eta_1 + \eta_2)^2} \cdot [3(pa + p_l) - 2pa_1] \end{aligned} \tag{6.2.17}$$

Substituindo-se este valor de  $m$  na equação (6.2.14), calcula-se o valor de  $a_1$ .

$$\begin{aligned} \frac{b^2(1+\iota_3)}{6\mu a (\eta_1 + \eta_2)^2} \cdot [3(pa + p_l) - 2pa_1] &= p \cdot \frac{a_1^2}{6} \\ \frac{p\mu a (\eta_1 + \eta_2)^2}{b^2(1+\iota_3)} \cdot a_1^2 + 2p \cdot a_1 - 3(pa + p_l) &= 0 \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{-2p + 2p \sqrt{1 + \frac{3\mu a(p_1 + p_2)(\eta_1 + \eta_2)^2}{pb^2(1+\nu_3)}}}{2p \cdot \frac{\mu a(\eta_1 + \eta_2)^2}{b^2(1+\nu_3)}}$$

$$a_1 = \frac{b^2(1+\nu_3)}{\mu a(\eta_1 + \eta_2)^2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{3\mu a(p_1 + p_2)(\eta_1 + \eta_2)^2}{pb^2(1+\nu_3)}} \right] \quad (6.2.18)$$

A fim de que a configuração de ruína seja a admitida (figura 6.3-a), é indispensável que  $a_1 \leq a$ . Se esta desigualdade for verificada, calcula-se o valor de  $m$ , substituindo-se este valor de  $a_1$  na equação (6.2.17).

$$m = \frac{b^2}{3\mu^2 a^2 (\eta_1 + \eta_2)^2} \cdot \left[ \frac{3\mu a(p_1 + p_2)}{2} + \frac{2pb^2(1+\nu_3)}{2(\eta_1 + \eta_2)^2} + \frac{pb^2(1+\nu_3)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \cdot \sqrt{\frac{pb^2(1+\nu_3) + 3\mu a(p_1 + p_2)(\eta_1 + \eta_2)^2}{pb^2(1+\nu_3)}} \right]$$

Fazendo-se

$$C = 3\mu a \cdot (p_1 + p_2) \cdot (\eta_1 + \eta_2)^2 + pb^2 \cdot (1+\nu_3) \quad (6.2.19)$$

resulta

$$m = \frac{b^2}{3\mu^2 a^2 (\eta_1 + \eta_2)^2} \left[ \frac{C + pb^2(1+\nu_3)}{2(\eta_1 + \eta_2)^2} - \frac{b}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \sqrt{Cp(1+\nu_3)} \right] \quad (6.2.20)$$

Deve-se verificar também a configuração de ruína mostrada na figura 6.3-b. As forças nodais podem ser calculadas com o auxílio da equação (5.4.11). A seguir, deve-se fazer o equilíbrio de momentos para cada região novamente.

$$K_{A1} = -m \cdot \cotg \phi_1$$

$$K_{A1} = -m \frac{b_1}{a} \quad \text{e} \quad K_{A3} = m \frac{b_1}{a}$$

$$K_{B2} = -m \cdot \cotg \phi_2$$

$$K_{B2} = -m \frac{b_2}{a} \quad \text{e} \quad K_{B3} = m \frac{b_2}{a}$$

Região 1:

$$\begin{aligned} \mu ma + \iota_1 \mu ma - m \frac{b_1}{a} \cdot b_1 &= p \cdot \frac{ab_1}{2} \cdot \frac{b_1}{3} + p_l \cdot b_1 \cdot \frac{b_1}{2} \\ m \left( \mu + \iota_1 \mu - \frac{b_1^2}{a^2} \right) &= \frac{b_1^2}{6a} \cdot (pa + 3p_l) \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

Região 2:

$$\begin{aligned} \mu ma + \iota_2 \mu ma - m \frac{b_2}{a} \cdot b_2 &= p \cdot \frac{ab_2}{2} \cdot \frac{b_2}{3} + p_l \cdot b_2 \cdot \frac{b_2}{2} \\ m \left( \mu + \iota_2 \mu - \frac{b_2^2}{a^2} \right) &= \frac{b_2^2}{6a} \cdot (pa + 3p_l) \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

Região 3:

$$\begin{aligned} mb_1 + mb_2 + \iota_3 mb + m \frac{b_1}{a} \cdot a + m \frac{b_2}{a} \cdot a &= p \left[ \frac{ab_1}{2} \cdot \frac{a}{3} + \right. \\ &+ \left. \frac{ab_2}{2} \cdot \frac{a}{3} + a \cdot (b - b_1 - b_2) \cdot \frac{a}{2} \right] + p_l \cdot (b - b_1 - b_2) \cdot a \\ m(\iota_3 b + 2b_1 + 2b_2) &= p \cdot \frac{a^2}{6} \cdot (3b - 2b_1 - 2b_2) + p_l a \cdot (b - b_1 - b_2) \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

Comparando-se as equações (6.2.21) e (6.2.22) e com o auxílio das (6.2.15), resulta

$$\frac{b_1^2}{\mu + \iota_1 \mu - b_1^2/a^2} = \frac{b_2^2}{\mu + \iota_2 \mu - b_2^2/a^2}$$

$$\eta_2^2 \mu b_1^2 - \frac{b_1^2 b_2^2}{a^2} = \eta_1^2 \mu b_2^2 - \frac{b_1^2 b_2^2}{a^2}$$

$$b_1 = \frac{\eta_1}{\eta_2} b_2 \quad (6.2.24)$$

A partir da equação (6.2.22), obtém-se

$$m = \frac{\frac{b_2^2}{6a} (pa + 3p_l)}{\mu + \iota_2 \mu - b_2^2/a^2}$$

$$m = \frac{b_2^2 (pa + 3p_l)}{6\mu\eta_2^2 a - 6b_2^2/a} \quad (6.2.25)$$

Substituindo-se os valores de  $b_1$  e  $m$ , dados por (6.2.24) e (6.2.25), na equação (6.2.23), resulta

$$\begin{aligned} & \frac{b_2^2 (pa + 3p_l)}{6\mu\eta_2^2 a - 6b_2^2/a} \cdot (\iota_3 b + 2 \frac{\eta_1}{\eta_2} b_2 + 2b_2) = \frac{pa^2}{6} \cdot (3b + \\ & - 2 \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2} b_2 - 2b_2) + p_l a \cdot (b - \frac{\eta_1}{\eta_2} b_2 - b_2) \\ & p \iota_3 a b b_2^2 + 2p \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot a b_2^3 + 2p a b_2^3 + 3p_l \iota_3 b b_2^2 + 6p_l \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot b_2^3 + \\ & 6p_l b_2^3 = 3p\mu\eta_2^2 a^3 b - 2p\mu\eta_1\eta_2 a^3 b_2 - 2p\mu\eta_2^2 a^3 b_2 - 3p a b b_2^2 + \\ & + 2p \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot a b_2^3 + 2p a b_2^3 + 6p_l \mu \eta_2^2 a^2 b - 6p_l \mu \eta_1 \eta_2 a^2 b_2 - 6p_l \mu \eta_2^2 a^2 b_2 + \\ & - 6p_l b b_2^2 + 6p_l \cdot \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot b_2^3 + 6p_l b_2^3 \\ & b \cdot (\iota_3 pa + \iota_3 3p_l + 3pa + 6p_l) \cdot b_2^2 + 2\mu\eta_2 a^2 \cdot (\eta_1 pa + \\ & + \eta_2 pa + 3\eta_1 p_l + 3\eta_2 p_l) \cdot b_2 - 3\mu\eta_2^2 a^2 b \cdot (pa + 2p_l) = 0 \end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned} c_1 &= pa + 3p_l \\ c_2 &= pa + 2p_l \end{aligned} \quad (6.2.26)$$

resulta

$$b(\iota_3 c_1 + 3c_2)b_2^2 + 2\mu\eta_2 a^2 (\eta_1 + \eta_2)c_1 b_2 - 3\mu\eta_2^2 a^2 b c_2 = 0$$

$$b_2 = \frac{-\mu\eta_2 a^2 (\eta_1 + \eta_2)c_1 + \mu\eta_2 a^2 \sqrt{(\eta_1 + \eta_2)^2 c_1^2 + \frac{3}{\mu} \left(\frac{b}{a}\right)^2 c_2 (\iota_3 c_1 + 3c_2)}}{b \cdot (\iota_3 c_1 + 3c_2)}$$

Fazendo-se

$$c_3 = (\eta_1 + \eta_2)^2 c_1^2 + \frac{3b^2}{\mu a^2} c_2 (\iota_3 c_1 + 3c_2) \quad (6.2.27)$$

obtem-se

$$b_2 = \frac{\mu\eta_2 a^2}{b} \cdot \frac{[\sqrt{c_3} - (\eta_1 + \eta_2)c_1]}{(\iota_3 c_1 + 3c_2)} \quad (6.2.28)$$

Uma vez encontrado o valor de  $b_2$ , calcula-se o valor de  $b_1$ , utilizando-se a equação (6.2.24). Na configuração que está sendo estudada (figura 6.3-b), a desigualdade  $(b_1 + b_2) \leq b$  deve ser verificada. Se isto ocorrer, encontra-se o valor de  $m$ , substituindo-se o valor anterior de  $b_2$  na equação (6.2.25).

$$m = \frac{\frac{\mu^2 \eta_2^2 a^4}{b^2} \cdot \frac{[\sqrt{c_3} - (\eta_1 + \eta_2)c_1]^2}{(\iota_3 c_1 + 3c_2)^2} \cdot (pa + 3p_l)}{6\mu\eta_2^2 a - \frac{6}{a} \cdot \frac{\mu^2 \eta_2^2 a^4}{b^2} \cdot \frac{[\sqrt{c_3} - (\eta_1 + \eta_2)c_1]^2}{(\iota_3 c_1 + 3c_2)^2}}$$

$$m = \frac{\frac{\mu^2 \eta_2^2 a^4}{b^2} \cdot \frac{[\sqrt{c_3} - (\eta_1 + \eta_2)c_1]^2}{(l_3 c_1 + 3c_2)^2} \cdot c_1}{\mu \eta_2^2 a^2 \left\{ \frac{6b^2}{a} (l_3 c_1 + 3c_2)^2 - 6\mu a [\sqrt{c_3} - (\eta_1 + \eta_2)c_1]^2 \right\}} \cdot c_1$$

$$m = \frac{a^2 \mu c_1 [\sqrt{c_3} - (\eta_1 + \eta_2)c_1]^2}{\frac{6b^2}{a} (l_3 c_1 + 3c_2)^2 - 6\mu a [\sqrt{c_3} - (\eta_1 + \eta_2)c_1]^2} \quad (6.2.29)$$

### 6.2.3. Laje retangular com duas bordas adjacentes livres

Neste caso, conforme ilustra a figura 6.4, adota-se inicialmente  $a$  como sendo o lado vertical e  $b$  o horizontal. A carga linear, atuando ao longo da borda livre horizontal, é chamada  $p_{l1}$  e, ao longo da vertical,  $p_{l2}$ .

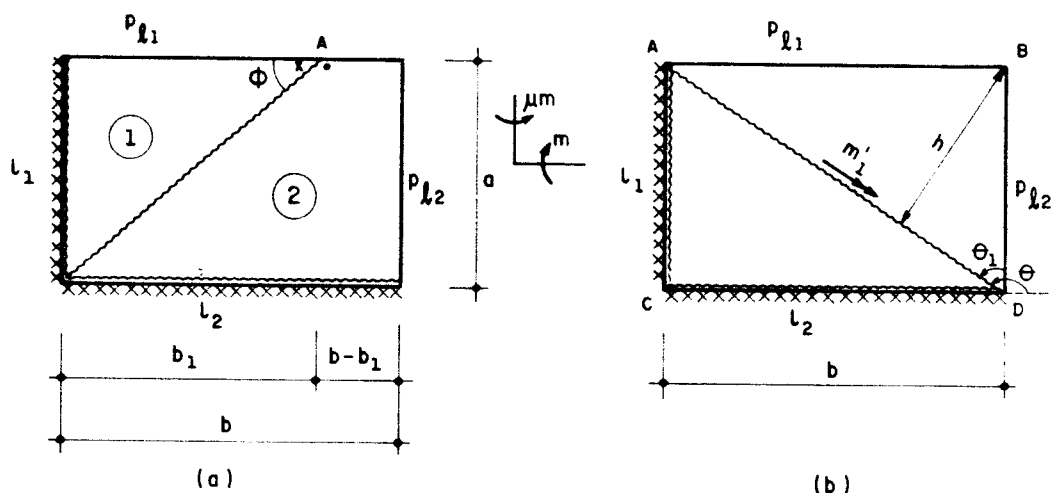


FIGURA 6.4. - Laje retangular com duas bordas adjacentes livres

De acordo com as equações (5.4.11) e com a figura 6.4-a, calculam-se as forças nodais.

$$K_{A1} = -m \cdot \cotg \phi$$

$$K_{A1} = -m \frac{b_1}{a} \quad \text{e} \quad K_{A2} = m \frac{b_1}{a}$$

Fazendo-se o equilíbrio de cada região,

Região 1:

$$\begin{aligned} \mu ma + \iota_1 \mu ma - m \frac{b_1}{a} b_1 &= p \cdot \frac{ab_1}{2} \cdot \frac{b_1}{3} + p_{l1} b_1 \cdot \frac{b_1}{2} \\ m \left( \mu + \iota_1 \mu - \frac{b_1^2}{a^2} \right) &= p \cdot \frac{b_1^2}{6} + p_{l1} \cdot \frac{b_1^2}{2a} \end{aligned} \quad (6.2.30)$$

Região 2:

$$\begin{aligned} mb_1 + \iota_2 mb + m \frac{b_1}{a} a &= p \cdot \left[ \frac{ab_1}{2} \cdot \frac{a}{3} + a \cdot (b-b_1) \cdot \frac{a}{2} \right] + \\ + p_{l1} \cdot (b-b_1) \cdot a + p_{l2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \\ m \left( \iota_2 b + 2b_1 \right) &= p \cdot \frac{a^2}{6} \cdot (3b-2b_1) + p_{l1} \cdot a(b-b_1) + p_{l2} \cdot \frac{a^2}{2} \end{aligned} \quad (6.2.31)$$

Comparando-se (6.2.30) e (6.2.31) e com o auxílio da equação (6.2.15), obtém-se

$$\frac{p \frac{b_1^2}{6} + p_{l1} \frac{b_1^2}{2a}}{\mu + \iota_1 \mu - b_1^2/a^2} = \frac{p \frac{a^2}{6} (3b-2b_1) + p_{l1} a(b-b_1) + p_{l2} \frac{a^2}{2}}{\iota_2 b + 2b_1}$$

$$\begin{aligned} & \mu\eta_1^2 p \cdot \frac{a^2 b}{2} - \mu\eta_1^2 p \cdot \frac{a^2 b_1}{3} + \mu\eta_1^2 p_{l_1} ab - \mu\eta_1^2 p_{l_1} ab_1 + \\ & + \mu\eta_1^2 p_{l_2} \frac{a^2}{2} - p \frac{bb_1^2}{2} + p \frac{b_1^3}{3} - p_{l_1} \frac{bb_1^2}{a} + p_{l_1} \frac{b_1^3}{a} - p_{l_2} \frac{b_1^2}{2} = \\ & = p_{l_2} \frac{bb_1^2}{6} + p \frac{b_1^3}{3} + p_{l_1} \frac{bb_1^2}{2a} + p_{l_1} \frac{b_1^3}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( 3pab + 6p_{l_1} b + 3p_{l_2} a + l_2 pab + 3l_2 p_{l_1} b \right) \cdot b_1^2 + 2\mu\eta_1^2 a^2 \cdot \\ & \cdot \left( pa + 3p_{l_1} \right) \cdot b_1 - 3\mu\eta_1^2 a^2 \left( pab + 2p_{l_1} b + p_{l_2} a \right) = 0 \end{aligned}$$

Fazendo-se

$$\begin{aligned} c_1 &= pa + 3p_{l_1} \\ c_2 &= pa + 2p_{l_1} \end{aligned} \quad (6.2.32)$$

resulta

$$\left( 3bc_2 + 3p_{l_2} a + l_2 bc_1 \right) b_1^2 + 2\mu\eta_1^2 a^2 c_1 b_1 - 3\mu\eta_1^2 a^2 \left( bc_2 + p_{l_2} a \right) = 0$$

donde,

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{-2\mu\eta_1^2 a^2 c_1}{2(3bc_2 + 3p_{l_2} a + l_2 bc_1)} + \\ & + \frac{2\mu\eta_1^2 a \cdot \sqrt{a^2 c_1^2 + \frac{3}{(\mu\eta_1^2)} \cdot (bc_2 + p_{l_2} a) \cdot (l_2 bc_1 + 3bc_2 + 3p_{l_2} a)}}{2(3bc_2 + 3p_{l_2} a + l_2 bc_1)} \\ b_1 &= \frac{\mu\eta_1^2 a (\sqrt{c_3} - ac_1)}{3bc_2 + 3p_{l_2} a + l_2 bc_1} \end{aligned} \quad (6.2.33)$$

com,

$$c_3 = a^2 c_1^2 + \frac{3}{\mu\eta_1^2} \left( bc_2 + p_{l_2} a \right) \cdot \left( l_2 bc_1 + 3bc_2 + 3p_{l_2} a \right) \quad (6.2.34)$$



Se  $b_1 \leq b$ , a configuração em estudo, onde a charneira positiva corta a borda livre horizontal (figura 6.4-a), pode ocorrer. Substituindo-se o valor de  $b_1$ , dado por (6.2.33), na equação (6.2.30), calcula-se o valor de  $m$ .

$$m \cdot \left[ \mu \eta_1^2 - \frac{\mu^2 \eta_1^4 a^2 (\sqrt{c_3} - ac_1)^2}{a^2 (3bc_2 + 3p_{l2} a + l_2 bc_1)^2} \right] = \left( \frac{p}{6} + \frac{p_{l1}}{2a} \right) \cdot \frac{\mu^2 \eta_1^4 a^2 (\sqrt{c_3} - ac_1)^2}{(3bc_2 + 3p_{l2} a + l_2 bc_1)^2}$$

$$m \mu \eta_1^2 \cdot \left[ (3bc_2 + 3p_{l2} a + l_2 bc_1)^2 - \mu \eta_1^2 (\sqrt{c_3} - ac_1)^2 \right] = \frac{pa + 3p_{l1}}{6a} \cdot \mu^2 \eta_1^4 a^2 \cdot (\sqrt{c_3} - ac_1)^2$$

$$m = \frac{\mu \eta_1^2 ac_1}{6} \cdot \frac{(\sqrt{c_3} - ac_1)^2}{(3bc_2 + 3p_{l2} a + l_2 bc_1)^2 - \mu \eta_1^2 (\sqrt{c_3} - ac_1)^2} \quad (6.2.35)$$

Existe a possibilidade de se formar uma charneira negativa  $\overline{AD}$ , conforme ilustra a figura 6.4-b. Neste caso, o funcionamento é semelhante ao de uma laje triangular ( $ABD$ ) em balanço. Fazendo-se o equilíbrio de momentos em torno da charneira  $\overline{AD}$ , obtém-se

$$m'_1 \sqrt{a^2 + b^2} = p \cdot \frac{ab}{2} \cdot \frac{h}{3} + p_{l1} b \cdot \frac{h}{2} + p_{l2} a \cdot \frac{h}{2}$$

$$m'_1 \sqrt{a^2 + b^2} = p \cdot \frac{ab}{6} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} + p_{l1} \frac{b}{2} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} + p_{l2} \frac{a}{2} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$m'_1 = \frac{ab}{2(a^2 + b^2)} \left( \frac{pab}{3} + p_{l1} b + p_{l2} a \right) \quad (6.2.36)$$

Para o caso de armaduras negativas paralelas aos lados das lajes, deve-se utilizar a equação (5.4.2) para o cálculo dos momentos de plastificação  $m'$  e  $\mu m'$ .

$$m'_1 = m' \cdot \cos^2 \theta + \mu m' \cdot \sin^2 \theta$$

$$m'_1 = m' \sin^2 \theta_1 + \mu m' \cos^2 \theta_1$$

$$m' = \frac{m'_1}{\sin^2 \theta_1 + \mu \cos^2 \theta_1}$$

Substituindo-se o valor de  $m'_1$ , dado pela equação (6.2.36), e os valores do  $\text{sen} \theta_1$  e do  $\text{cose} \theta_1$ , resulta

$$m' = \frac{\frac{ab}{2(a^2+b^2)} \left( \frac{pab}{3} + p_{l1} b + p_{l2} a \right)}{\frac{b^2}{a^2+b^2} + \mu \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2}}$$

$$m' = \frac{ab}{2(\mu a^2 + b^2)} \cdot \left( \frac{pab}{3} + p_{l1} b + p_{l2} a \right) \quad (6.2.37)$$

A configuração análoga a da figura 6.4-a, porém com a charneira positiva chegando na borda livre vertical, também deve ser estudada. Para tal, deve-se fazer as modificações a seguir e pode-se utilizar as equações (6.2.30) a (6.2.35).

$$\begin{array}{lll} a = \ell_h & \iota_1 = \iota_s \text{ ou } \iota_i & m_a = m_h = m \\ b = \ell_v & \iota_2 = \iota_e \text{ ou } \iota_d & m_b = m_v = \mu m \\ \mu = \frac{m_b}{m_a} = \frac{m_v}{m_h} & p_{l1} = p_{lv} & p_{l2} = p_{lh} \end{array}$$

6.2.4. Laje retangular com duas bordas opostas livres

Sendo  $a$  a dimensão perpendicular à borda livre e  $b$  a dimensão paralela à mesma, tem-se a configuração de ruína mostrada na figura 6.5. As cargas lineares ao longo das bordas livres são representadas por  $p_{l1}$  e  $p_{l2}$ .

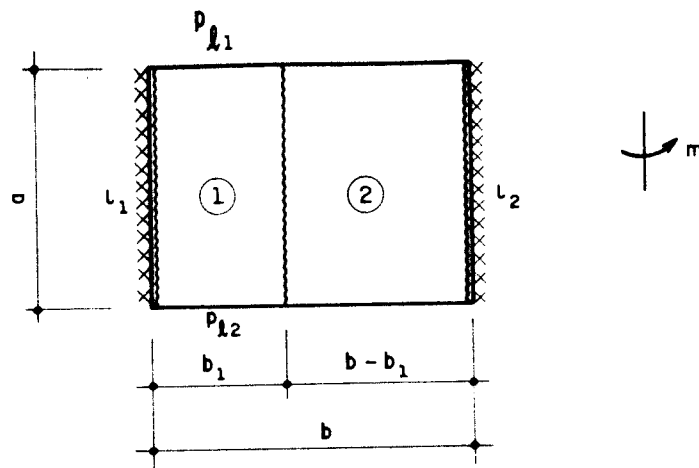


FIGURA 6.5. - Laje retangular com duas bordas opostas livres

Região 1:

$$\begin{aligned}
 ma + l_1 ma &= pab_1 \cdot \frac{b_1}{2} + p_{l1} b_1 \cdot \frac{b_1}{2} + p_{l2} b_1 \cdot \frac{b_1}{2} \\
 m(1+l_1) &= \frac{b_1^2}{2} \cdot \left( p + \frac{p_{l1}}{a} + \frac{p_{l2}}{a} \right) \quad (6.2.38)
 \end{aligned}$$

Região 2:

$$\begin{aligned}
 ma + l_2 ma &= pa \cdot (b-b_1) \cdot \frac{(b-b_1)}{2} + p_{l1} (b-b_1) \cdot \frac{(b-b_1)}{2} + \\
 &+ p_{l2} (b-b_1) \cdot \frac{(b-b_1)}{2}
 \end{aligned}$$

$$m(1+\iota_2) = \frac{(b-b_1)^2}{2} \cdot \left( p + \frac{p_{l1}}{a} + \frac{p_{l2}}{a} \right) \quad (6.2.39)$$

Igualando-se as equações (6.2.38) e (6.2.39) e utilizando-se as equações (6.2.15), resulta

$$\frac{b_1^2}{1+\iota_1} = \frac{(b-b_1)^2}{1+\iota_2}$$

$$\frac{b_1}{\sqrt{1+\iota_1}} = \frac{(b-b_1)}{\sqrt{1+\iota_2}}$$

$$\eta_2 b_1 = \eta_1 b - \eta_1 b_1$$

$$b_1 = \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \cdot b \quad (6.2.40)$$

Substituindo-se a equação (6.2.40) em (6.2.38), obtém-se o valor de  $m$ .

$$m\eta_1^2 = \frac{\eta_1^2}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \cdot \frac{b^2}{2} \cdot \left( p + \frac{p_{l1}}{a} + \frac{p_{l2}}{a} \right)$$

$$m = \frac{b^2 (pa + p_{l1} + p_{l2})}{2a (\eta_1 + \eta_2)^2} \quad (6.2.41)$$

### 6.3. CÁLCULO DE LAJES FIXANDO-SE OS VALORES DOS MOMENTOS NEGATIVOS

A notação aqui utilizada é equivalente àquela adotada no item anterior (item 6.2); porém, em lugar da relação entre os momentos negativos e os positivos ( $\mu$ ), é fixado o próprio momento negativo ( $m$ ).

#### 6.3.1. Laje retangular engastada ou simplesmente apoiada

A figura 6.6 apresenta a notação adotada e representa uma laje engastada em seu contorno.

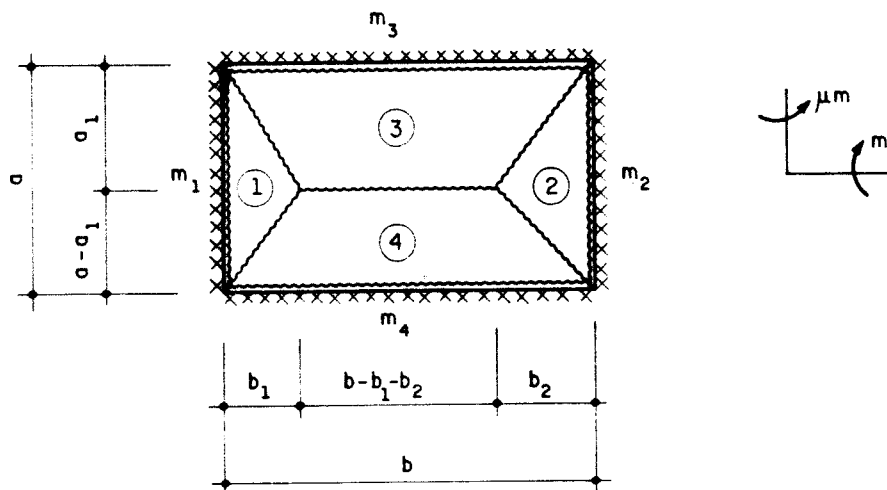


FIGURA 6.6. - Laje retangular engastada em seu contorno

A partir da figura 6.6 e promovendo-se o equilíbrio de momentos de cada região, em torno da borda adjacente, obtêm-se

Região 1:

$$\mu m a + m_1 a = p \cdot \frac{ab_1}{2} \cdot \frac{b_1}{3}$$

$$\mu m + m_1 = p \cdot \frac{b_1^2}{6} \quad (6.3.1)$$

Região 2:

$$\mu m a + m_2 a = p \cdot \frac{ab_2}{2} \cdot \frac{b_2}{3}$$

$$\mu m + m_2 = p \cdot \frac{b_2^2}{6} \quad (6.3.2)$$

Região 3:

$$mb + m_3 b = p \cdot \left[ \frac{a_1 b_1}{2} \cdot \frac{a_1}{3} + \frac{a_1 b_2}{2} \cdot \frac{a_1}{3} + a_1 (b - b_1 - b_2) \cdot \frac{a_1}{2} \right]$$

$$m + m_3 = p \cdot \frac{a_1^2}{6b} \cdot \left[ 3b - 2(b_1 + b_2) \right] \quad (6.3.3)$$

Região 4:

$$mb + m_4 b = p \cdot \left[ \frac{(a-a_1)b_1}{2} \cdot \frac{(a-a_1)}{3} + \frac{(a-a_1)b_2}{2} \cdot \frac{(a-a_1)}{3} + (a-a_1) \cdot (b-b_1-b_2) \cdot \frac{(a-a_1)}{2} \right]$$

$$m + m_4 = p \cdot \frac{(a-a_1)^2}{6b} \cdot \left[ 3b - 2(b_1 + b_2) \right] \quad (6.3.4)$$

Das equações (6.3.1) e (6.3.2), resultam, respectivamente,

$$b_1 = \sqrt{\frac{6(\mu m + m_1)}{p}} \quad (6.3.5)$$

e

$$b_2 = \sqrt{\frac{6(\mu m + m_2)}{p}} \quad (6.3.6)$$

Substituindo-se estes valores de  $b_1$  e  $b_2$  nas equações (6.3.3) e (6.3.4), resulta

$$m + m_3 = p \frac{a_1^2}{6b} \left[ 3b - 2\sqrt{\frac{6}{p}} \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right) \right]$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{6b(m + m_3)}{3bp - 2\sqrt{6p} \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right)}} \quad (6.3.7)$$

e

$$m + m_4 = p \frac{(a - a_1)^2}{6b} \left[ 3b - 2\sqrt{\frac{6}{p}} \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right) \right]$$

$$a - a_1 = \sqrt{\frac{6b(m + m_4)}{3bp - 2\sqrt{6p} \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right)}} \quad (6.3.8)$$

Somando-se as equações (6.3.7) e (6.3.8), obtém-se

$$a = \frac{\sqrt{6b} \left( \sqrt{m + m_3} + \sqrt{m + m_4} \right)}{\sqrt{3bp - 2\sqrt{6p} \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right)}}$$

$$\sqrt{m + m_3} + \sqrt{m + m_4} = \frac{a}{\sqrt{6b}} \sqrt{3bp - 2\sqrt{6p} \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right)} \quad (6.3.9)$$

A equação (6.3.9) só é função de  $m$  e pode ser resolvida iterativamente. Adota-se

$$f_1(m) = \sqrt{m+m_3} + \sqrt{m+m_4} \quad (6.3.10)$$

$$f_2(m) = \frac{a}{\sqrt{6b}} \sqrt{3bp - 2\sqrt{6p} \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right)} \quad (6.3.11)$$

Analisando-se as expressões (6.3.10) e (6.3.11) e sabendo-se, de antemão, que os momentos  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  e  $m_4$  são dados em valor absoluto, nota-se que apenas na equação (6.3.11) deve ser imposta uma restrição para atender ao domínio de validade, ou seja,

$$3bp - 2\sqrt{6p} \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right) \geq 0$$

$$\sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \leq \frac{3b}{2} \cdot \sqrt{\frac{p}{b}} \quad (6.3.12)$$

No entanto, para que a configuração de ruína seja a que está em estudo, uma outra condição deve ser cumprida.

$$b_1 + b_2 \leq b$$

$$\sqrt{\frac{b}{p}} \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right) \leq b$$

$$\sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \leq b \cdot \sqrt{\frac{p}{b}} \quad (6.3.13)$$

A condição (6.3.13) engloba a condição (6.3.12), logo é necessário e suficiente que ela se verifique. Antes, porém, deve-se ressaltar que, uma vez que  $m$  é admitido ser sempre um valor positivo, esta inequação deve ser válida para  $m = 0$ .

$$\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} \leq b \cdot \sqrt{\frac{p}{b}} \quad (6.3.14)$$



Se esta condição não for satisfeita, pode-se garantir que a configuração de ruína não é a adotada. No caso dela ser atendida, determina-se um limite superior ( $\ell_s$ ), para  $m$ , a partir da equação (6.3.13).

$$\sqrt{\mu m + m_1} \leq b \cdot \sqrt{\frac{p}{6}} - \sqrt{\mu m + m_2}$$

$$\mu m + m_1 \leq b^2 \cdot \frac{p}{6} - 2b \sqrt{\frac{p}{6}} \sqrt{\mu m + m_2} + \mu m + m_2$$

$$\frac{4b^2 p}{6} (\mu m + m_2) \leq \left( \frac{b^2 p}{6} + m_2 - m_1 \right)^2$$

$$m \leq \left[ \left( \frac{b^2 p}{6} + m_2 - m_1 \right)^2 \cdot \frac{3}{2b^2 p} - m_2 \right] \cdot \frac{1}{\mu}$$

Sendo

$$\ell_s = \frac{1}{\mu} \cdot \left[ \frac{3}{2b^2 p} \cdot \left( \frac{b^2 p}{6} + m_2 - m_1 \right)^2 - m_2 \right] \quad (6.3.15)$$

$$0 \leq m \leq \ell_s$$

Voltando às expressões (6.3.10) e (6.3.11), percebe-se que  $f_1(m)$  é uma função crescente e  $f_2(m)$  é decrescente, conforme mostra o gráfico da figura 6.7, que foi feito para  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1,2$ ,  $\mu = 0,8$  e  $p = 1$ . Para que a equação (6.3.9) tenha solução em  $0 \leq m \leq \ell_s$ , duas condições devem ser satisfeitas.

$$f_1 \leq f_2 \quad \text{para } m = 0$$

$$f_1 \geq f_2 \quad \text{para } m = \ell_s$$

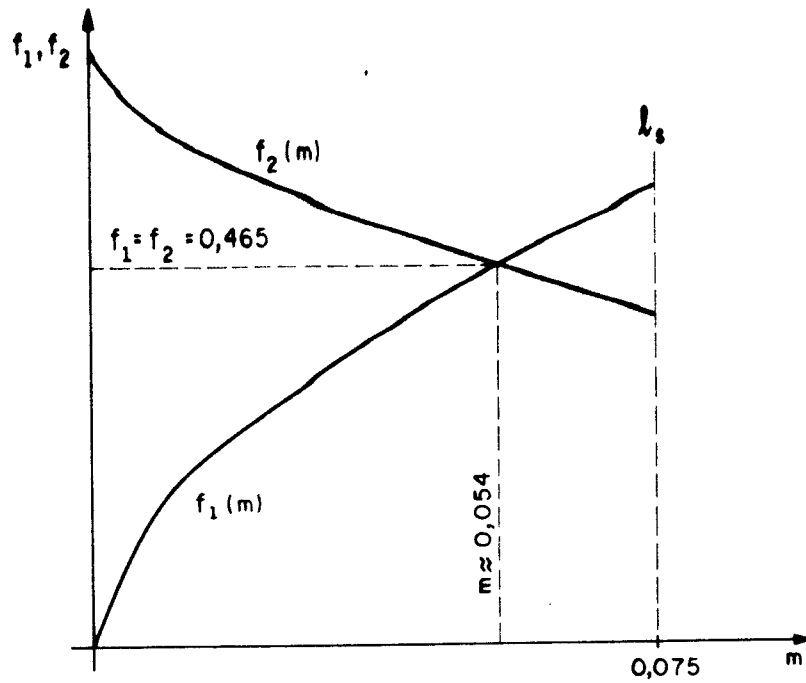


FIGURA 6.7. - Gráfico típico das funções  $f_1$  e  $f_2$

Caso as condições acima não sejam atendidas, deve-se analisar o caso da charneira central ser paralela ao lado vertical. Pode-se utilizar as mesmas equações, com as seguintes modificações:

$$a = l_h \quad b = l_v \quad m_a = m_h = m \quad m_b = m_v = \mu m$$

$$m_1 = m_s \quad m_2 = m_i \quad m_3 = m_e \quad m_4 = m_d$$

$$\mu = \frac{m_b}{m_a} = \frac{m_v}{m_h}$$

### 6.3.2. Laje retangular com uma borda livre

Da mesma forma que no item 6.2.2, supõe-se inicialmente a configuração de ruína mostrada na figura 6.8-a.

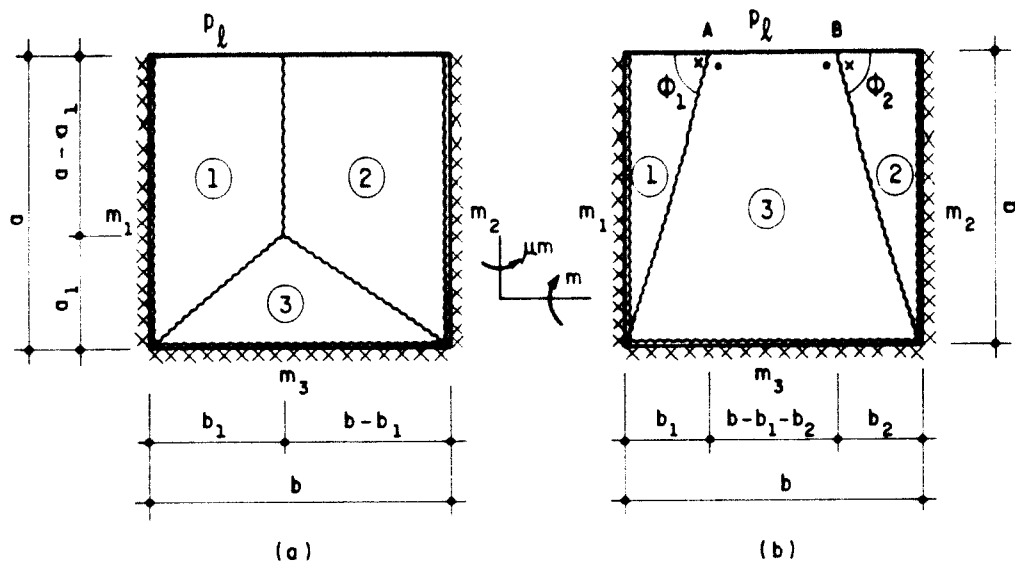


FIGURA 6.8. - Laje retangular com uma borda livre

Região 1:

$$\begin{aligned} \mu m a + m_1 a &= p \cdot \left[ \frac{b_1 a_1}{2} \cdot \frac{b_1}{3} + b_1 (a - a_1) \frac{b_1}{2} \right] + p_l \cdot b_1 \cdot \frac{b_1}{2} \\ \mu m + m_1 &= \frac{b_1^2}{6a} \cdot \left[ p \cdot (3a - 2a_1) + 3p_l \right] \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

Região 2:

$$\begin{aligned} \mu m a + m_2 a &= p \cdot \left[ \frac{(b - b_1) a_1}{2} \cdot \frac{(b - b_1)}{3} + (b - b_1) \cdot (a - a_1) \cdot \right. \\ &\left. \frac{(b - b_1)}{2} \right] + p_l \cdot (b - b_1) \cdot \frac{(b - b_1)}{2} \\ \mu m + m_2 &= \frac{(b - b_1)^2}{6a} \cdot \left[ p \cdot (3a - 2a_1) + 3p_l \right] \end{aligned} \quad (6.3.17)$$

Região 3:

$$mb + m_3 b = p \cdot \frac{a_1 b}{2} \cdot \frac{a_1}{3}$$

$$m + m_3 = p \cdot \frac{a_1^2}{6} \quad (6.3.18)$$

A partir das equações (6.3.16) e (6.3.17), encontra-se o valor de  $b_1$  em função de  $m$ .

$$\frac{b_1^2}{\mu m + m_1} = \frac{(b - b_1)^2}{\mu m + m_2}$$

$$\sqrt{\mu m + m_2} \cdot b_1 = \sqrt{\mu m + m_1} \cdot b - \sqrt{\mu m + m_1} \cdot b_1$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{\mu m + m_1}}{\sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2}} \cdot b \quad (6.3.19)$$

Da equação (6.3.18) encontra-se

$$a_1 = \sqrt{\frac{6(m + m_3)}{p}} \quad (6.3.20)$$

Substituindo-se estes valores de  $a_1$  e  $b_1$  na equação (6.3.16), obtém-se

$$\mu m + m_1 = \frac{(\mu m + m_1) \cdot b^2}{6e \left[ \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right]^2} \left[ p \left( 3e - 2 \sqrt{\frac{6(m + m_3)}{p}} \right) + 3p_1 \right]$$

$$\sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} = \sqrt{\frac{b^2}{6e} \cdot \left[ 3(pa + p_1) - 2p \sqrt{\frac{6(m + m_3)}{p}} \right]} \quad (6.3.21)$$

Adota-se:

$$f_1(m) = \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2}$$

$$f_2(m) = \sqrt{\frac{b^2}{6a} \left[ 3(pa + p_l) - 2p \sqrt{\frac{\delta(m+m_3)}{p}} \right]}$$

Observa-se que  $f_1(m)$  é uma função crescente e  $f_2(m)$  é decrescente. Desta forma, para que exista um valor de  $m$  positivo, que satisfaça a igualdade, deve-se ter

$$f_1 \leq f_2 \quad \text{para } m = 0$$

$$f_1 \geq f_2 \quad \text{para } m = \ell_s$$

O limite superior ( $\ell_s$ ), de  $m$ , é calculado a partir de duas condições.

1ª condição: para atender ao domínio de validade

$$3(pa + p_l) - 2p \sqrt{\frac{\delta(m+m_3)}{p}} \geq 0$$

$$24p(m+m_3) \leq 9(pa + p_l)^2$$

$$m \leq \frac{3(pa + p_l)^2}{8p} - m_3 \quad (6.3.22)$$

2ª condição:  $a_1 \leq a$

$$\sqrt{\frac{\delta(m+m_3)}{p}} \leq a$$

$$m \leq \frac{pa^2}{\delta} - m_3 \quad (6.3.23)$$

donde,

$$\ell_s = \frac{pa^2}{\delta} - m_3$$

Verifica-se que é necessário e suficiente que a segunda condição seja atendida. De forma semelhante ao item 6.3.1, a inequação (6.3.23) deve ser satisfeita para  $m = 0$ , resultando

$$m_3 \leq \frac{\rho a^2}{6}$$

Para a verificação da configuração mostrada na figura 6.8-b, faz-se o equilíbrio de momentos para cada região novamente, utilizando-se os valores das forças nodais calculadas no item 6.2.2.

Região 1:

$$\begin{aligned} \mu m a + m_1 a - m \frac{b_1}{a} \cdot b_1 &= p \cdot \frac{ab_1}{2} \cdot \frac{b_1}{3} + p_l \cdot b_1 \cdot \frac{b_1}{2} \\ a(\mu m + m_1) - m \frac{b_1^2}{a} &= \frac{b_1^2}{6} (pa + 3p_l) \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

Região 2:

$$\begin{aligned} \mu m a + m_2 a - m \frac{b_2}{a} \cdot b_2 &= p \cdot \frac{ab_2}{2} \cdot \frac{b_2}{3} + p_l \cdot b_2 \cdot \frac{b_2}{2} \\ a(\mu m + m_2) - m \frac{b_2^2}{a} &= \frac{b_2^2}{6} (pa + 3p_l) \end{aligned} \quad (6.3.25)$$

Região 3:

$$\begin{aligned} mb_1 + mb_2 + m_3 b + m \frac{b_1}{a} \cdot a + m \frac{b_2}{a} \cdot a &= p \left[ \frac{ab_1}{2} \cdot \frac{a}{3} + \right. \\ &+ \left. \frac{ab_2}{2} \cdot \frac{a}{3} + a \cdot (b - b_1 - b_2) \cdot \frac{a}{2} \right] + p_l \cdot (b - b_1 - b_2) \cdot a \\ 2m(b_1 + b_2) + m_3 b &= p \frac{a^2}{6} \left[ 3b - 2(b_1 + b_2) \right] + p_l a \left[ b - (b_1 + b_2) \right] \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

Das equações (6.3.24) e (6.3.25) obtêm-se, respectivamente:

$$\left( \frac{pa + 3p_1}{6} + \frac{m}{a} \right) b_1^2 = a (\mu m + m_1)$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{6a^2 (\mu m + m_1)}{pa^2 + 3p_1 a + 6m}} \quad (6.3.27)$$

e

$$\left( \frac{pa + 3p_1}{6} + \frac{m}{a} \right) b_2^2 = a (\mu m + m_2)$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{6a^2 (\mu m + m_2)}{pa^2 + 3p_1 a + 6m}} \quad (6.3.28)$$

Substituindo-se os valores de  $b_1$  e  $b_2$ , dados pelas expressões acima, na equação (6.3.26), resulta

$$\begin{aligned} & 2ma \cdot \sqrt{\frac{6}{pa^2 + 3p_1 a + 6m}} \cdot \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right) + m_3 b = \\ & = \frac{pa^2}{6} \cdot \left[ 3b - 2a \cdot \sqrt{\frac{6}{pa^2 + 3p_1 a + 6m}} \cdot \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right) \right] + \\ & + p_1 a \left[ b - a \sqrt{\frac{6}{pa^2 + 3p_1 a + 6m}} \cdot \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right) \right] \\ & \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right) \cdot \left( 2ma + \frac{pa^3}{3} + p_1 a^2 \right) = \\ & = \left( \frac{pa^2 b}{2} + p_1 ab - m_3 b \right) \cdot \sqrt{\frac{pa^2 + 3p_1 a + 6m}{6}} \end{aligned}$$

$$\left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right) = a \cdot \left( \frac{pab}{2} + p_1 b - \frac{m_3 b}{a} \right).$$

$$\sqrt{\frac{pa^2 + 3p_1 a + 6m}{6}} \cdot \frac{3}{a(pa^2 + 3p_1 a + 6m)}$$

$$\sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} = \left( \frac{pab}{2} + p_1 b - \frac{m_3 b}{a} \right) \sqrt{\frac{3}{2(pa^2 + 3p_1 a + 6m)}} \quad (6.3.29)$$

Adotando-se

$$f_1 = \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2}$$

$$f_2 = \left( \frac{pab}{2} + p_1 b - \frac{m_3 b}{a} \right) \cdot \sqrt{\frac{3}{2(pa^2 + 3p_1 a + 6m)}}$$

calcula-se o valor de  $m$  por iteração, uma vez que  $f_1(m)$  é crescente e  $f_2(m)$  é decrescente. Porém, deve-se estar atento para algumas restrições que devem ser respeitadas:

1ª restrição:  $f_1 \leq f_2$  para  $m = 0$

$$\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} \leq \left( \frac{pab}{2} + p_1 b - \frac{m_3 b}{a} \right) \cdot \sqrt{\frac{3}{2(pa^2 + 3p_1 a)}}$$

2ª restrição:  $f_2 \geq 0$

$$\frac{pab}{2} + p_1 b - \frac{m_3 b}{a} \geq 0$$

$$m_3 \leq \frac{pa^2}{2} + p_1 a$$

3ª restrição:  $b_1 + b_2 \leq b$

$$\sqrt{\frac{6a^2}{pa^2 + 3p_1 a + 6m}} \cdot \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right) \leq b$$



6.3.3. Laje retangular com duas bordas adjacentes livres

Com o auxílio das equações (5.4.11) e de acordo com a figura 6.9-a, calculam-se as forças nodais.

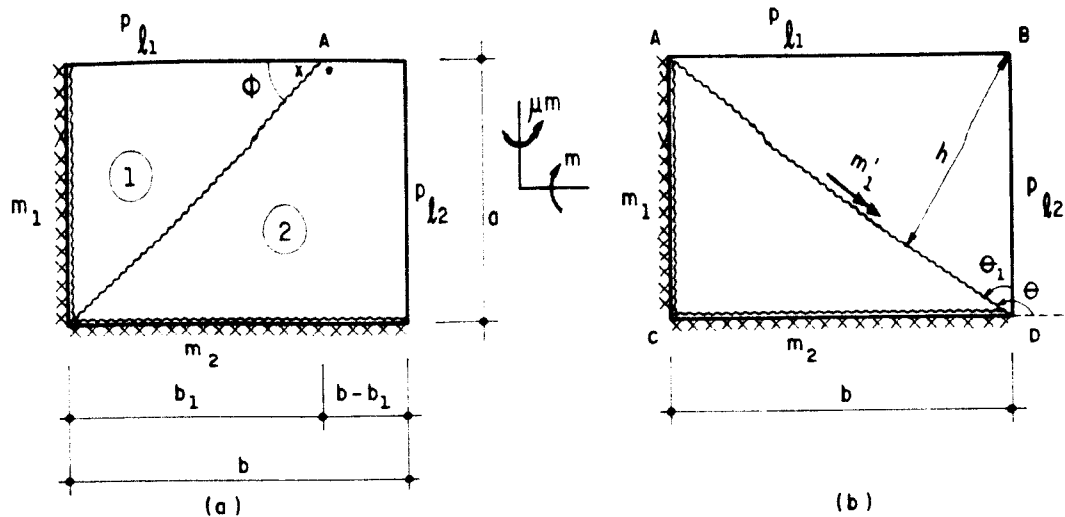


FIGURA 6.9. - Laje retangular com duas bordas adjacentes livres

$$K_{A1} = -m \cdot \cotg \phi$$

$$K_{A1} = -m \frac{b_1}{a} \quad \text{e} \quad K_{A2} = m \frac{b_1}{a}$$

Considera-se, em seguida, o equilíbrio de cada região.

Região 1:

$$\mu m a + m_1 a - m \frac{b_1}{a} b_1 = p \frac{a b_1}{2} \cdot \frac{b_1}{3} + p_{l1} b_1 \cdot \frac{b_1}{2}$$

$$(\mu m + m_1) a - m \frac{b_1^2}{a} = \frac{b_1^2}{6} (p a + 3 p_{l1}) \quad (6.3.30)$$

Região 2:

$$\begin{aligned}
 mb_1 + m_2 b + m \frac{b_1}{a} a &= p \left[ \frac{ab_1}{2} \cdot \frac{a}{3} + a \cdot (b-b_1) \cdot \frac{a}{2} \right] + \\
 + p_{l1} (b-b_1) \cdot a + p_{l2} a \cdot \frac{a}{2} \\
 2mb_1 + m_2 b &= p \frac{a^2}{6} (3b-2b_1) + p_{l1} a(b-b_1) + p_{l2} \frac{a^2}{2}
 \end{aligned}
 \tag{6.3.31}$$

A partir da equação (6.3.30), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{pa+3p_{l1}}{6} + \frac{m}{a} \right) b_1^2 &= (\mu+m_1)a \\
 b_1 &= \sqrt{\frac{6a^2(\mu+m_1)}{6m+pa^2+3p_{l1}a}}
 \end{aligned}
 \tag{6.3.32}$$

Substituindo-se o valor de  $b_1$ , dado pela equação acima, na equação (6.3.31), vem

$$\begin{aligned}
 2ma \sqrt{\frac{6(\mu+m_1)}{6m+pa^2+3p_{l1}a}} + m_2 b &= \frac{pa^2}{6} \left[ 3b-2a \sqrt{\frac{6(\mu+m_1)}{6m+pa^2+3p_{l1}a}} \right] + \\
 + p_{l1} a \cdot \left[ b - a \cdot \sqrt{\frac{6(\mu+m_1)}{6m+pa^2+3p_{l1}a}} \right] + p_{l2} \frac{a^2}{2} \\
 2m \sqrt{\frac{6(\mu+m_1)}{6m+pa^2+3p_{l1}a}} + m_2 \cdot \frac{b}{a} &= \frac{pab}{2} + p_{l1} \cdot b + p_{l2} \cdot \frac{a}{2} + \\
 - \left( \frac{pa^2}{3} + p_{l1} a \right) \cdot \sqrt{\frac{6(\mu+m_1)}{6m+pa^2+3p_{l1}a}}
 \end{aligned}
 \tag{6.3.33}$$

Sendo

$$f_1(m) = 2m \cdot \sqrt{\frac{6(\mu m + m_1)}{6m + pa^2 + 3p_{l_1}a}} + m_2 \cdot \frac{b}{a}$$

e

$$f_2(m) = \frac{pab}{2} + p_{l_1} \cdot b + p_{l_2} \cdot \frac{a}{2} - \left( \frac{pa^2}{3} + p_{l_1}a \right) \cdot$$

$$\sqrt{\frac{6(\mu m + m_1)}{6m + pa^2 + 3p_{l_1}a}}$$

Tem-se uma condição geométrica que determina um limite para  $m$ .

$$b_1 \leq b$$

$$\sqrt{\frac{6a^2(\mu m + m_1)}{6m + pa^2 + 3p_{l_1}a}} \leq b$$

$$6a^2\mu m + 6a^2m_1 \leq 6mb^2 + pa^2b^2 + 3p_{l_1}ab^2$$

$$(6a^2\mu - 6b^2)m \leq pa^2b^2 + 3p_{l_1}ab^2 - 6a^2m_1$$

$$\text{Se } \mu > \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow m \leq \frac{pa^2b^2 + 3p_{l_1}ab^2 - 6a^2m_1}{6(a^2\mu - b^2)}$$

$$\text{Se } \mu < \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow m \geq \frac{pa^2b^2 + 3p_{l_1}ab^2 - 6a^2m_1}{6(a^2\mu - b^2)}$$

Só há um limite superior quando  $\mu > \frac{b^2}{a^2}$  :

$$\ell_e = \frac{pa^2b^2 + 3p_{l1}ab^2 - 6a^2m_1}{6a^2\mu - 6b^2}$$

Tem-se ainda que

$$f_1 < f_2 \quad \text{para } m = 0$$

A configuração de ruína com uma charneira negativa unindo os vértices  $AD$  (figura 6.9-b), é estudada da mesma maneira que no item 6.2.3. O momento negativo que determina a armadura paralela ao lado horizontal é

$$m' = \frac{ab}{2(\mu a^2 + b^2)} \left( \frac{pab}{3} + p_{l1}b + p_{l2}a \right) \quad (6.3.34)$$

Finalmente, deve-se verificar a configuração onde a charneira positiva corta o lado vertical. Pode-se agir de forma semelhante ao feito no início deste item, utilizando as equações (6.3.30) a (6.3.33), porém com as seguintes modificações:

$$\begin{aligned} a &= \ell_h & m_1 &= m_s \text{ ou } m_l & m_a &= m_h = m \\ b &= \ell_v & m_2 &= m_e \text{ ou } m_d & m_b &= m_v = \mu m \\ \mu &= \frac{m_b}{m_a} = \frac{m_v}{m_h} & p_{l1} &= p_{lv} & p_{l2} &= p_{lh} \end{aligned}$$

#### 6.3.4. Laje retangular com duas bordas opostas livres

Sendo  $a$  a dimensão perpendicular à borda livre e  $b$  a dimensão paralela à mesma, tem-se a configuração de ruína mostrada na figura 6.10. Para que sejam satisfeitas as condições de equilíbrio, tem-se:

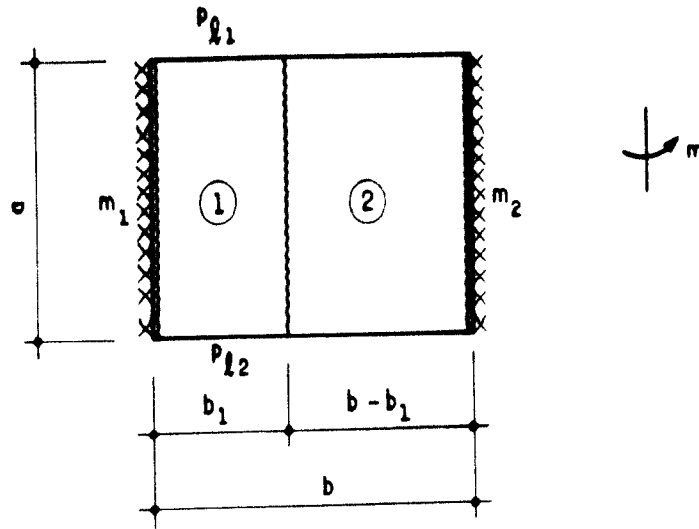


FIGURA 6.10. - Laje retangular com duas bordas opostas livres

Região 1:

$$ma + m_1 a = p a b_1 \cdot \frac{b_1}{2} + p_{l1} b_1 \cdot \frac{b_1}{2} + p_{l2} b_1 \cdot \frac{b_1}{2}$$

$$m + m_1 = \frac{b_1^2}{2} \cdot \left( p + \frac{p_{l1}}{a} + \frac{p_{l2}}{a} \right) \quad (6.3.35)$$

Região 2:

$$ma + m_2 a = p a (b-b_1) \cdot \frac{(b-b_1)}{2} + p_{l1} (b-b_1) \cdot \frac{(b-b_1)}{2} + p_{l2} (b-b_1) \cdot \frac{(b-b_1)}{2}$$

$$m + m_2 = \frac{(b-b_1)^2}{2} \cdot \left( p + \frac{p_{l1}}{a} + \frac{p_{l2}}{a} \right) \quad (6.3.36)$$

Igualando-se as equações (6.3.35) e (6.3.36), resulta

$$\frac{b_1^2}{m+m_1} = \frac{(b-b_1)^2}{m+m_2}$$

$$\sqrt{m+m_2} \cdot b_1 = \sqrt{m+m_1} \cdot b - \sqrt{m+m_1} \cdot b_1$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{m+m_1}}{\sqrt{m+m_1} + \sqrt{m+m_2}} \cdot b \quad (6.3.37)$$

Substituindo-se o valor de  $b_1$  na equação (6.3.35), calcula-se o valor de  $m$ .

$$m+m_1 = \frac{(m+m_1)b^2}{2 \left[ (m+m_1) + 2\sqrt{m+m_1}\sqrt{m+m_2} + (m+m_2) \right]} \left( p + \frac{P_{l1}}{a} + \frac{P_{l2}}{a} \right)$$

$$4\sqrt{m+m_1}\sqrt{m+m_2} = b^2 \left( p + \frac{P_{l1}}{a} + \frac{P_{l2}}{a} \right) - (4m + 2m_1 + 2m_2)$$

$$16 \cdot (m^2 + mm_2 + mm_1 + m_1m_2) = b^4 \cdot \left( p + \frac{P_{l1}}{a} + \frac{P_{l2}}{a} \right)^2 +$$

$$- 2b^2 \cdot \left( p + \frac{P_{l1}}{a} + \frac{P_{l2}}{a} \right) \cdot (4m + 2m_1 + 2m_2) + (16m^2 + 4m_1^2 +$$

$$+ 4m_2^2 + 16mm_1 + 16mm_2 + 8m_1m_2)$$

Fazendo-se

$$c = p + \frac{P_{l1}}{a} + \frac{P_{l2}}{a} \quad (6.3.38)$$

resulta

$$8b^2cm = b^4c^2 - 4b^2c(m_1+m_2) + 4(m_1+m_2)^2 - 16m_1m_2$$

$$m = \frac{\left[ b^2c - 2(m_1+m_2) \right]^2 - 16m_1m_2}{8b^2c} \quad (6.3.39)$$

#### 6.4. PONTO DE INTERRUÇÃO DA ARMADURA NEGATIVA

Observa-se que, se armadura negativa da laje não tiver comprimento adequado, um tipo de ruína localizada pode ocorrer, conforme ilustra a figura 6.11. No local onde a armadura é interrompida, forma-se uma linha de plastificação negativa; porém, como não há mais armadura e a resistência do concreto à tração é desprezada, o momento de plastificação nessa charneira é nulo.

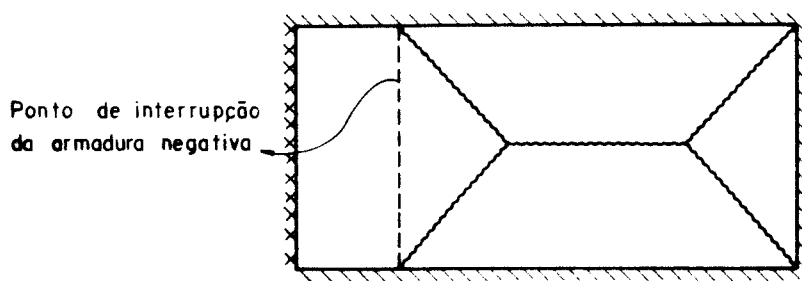


FIGURA 6.11. - Extensão da armadura negativa

Para a determinação teórica do ponto de interrupção da armadura negativa, pode-se empregar o seguinte procedimento: determina-se uma linha ao longo dos pontos onde a armadura será interrompida. Esta linha delimita uma nova laje (figura 6.11), suposta apoiada ao longo da mesma e que deve resistir aos mesmos esforços que a laje original, pois, do contrário, se produzirá a ruína da placa, formando-se uma charneira negativa ao longo dos pontos onde a armadura foi interrompida.

6.4.1. Laje retangular engastada ou simplesmente apoiada

Supõe-se, inicialmente, que a configuração de ruína é a indicada nas figuras 6.12-a e 6.12-b, onde

$$\begin{array}{cccc}
 a = \ell_v & b = \ell_h & m = m_v & \mu m = m_h \\
 m_1 = m_e & m_2 = m_d & m_3 = m_e & m_4 = m_i
 \end{array}$$

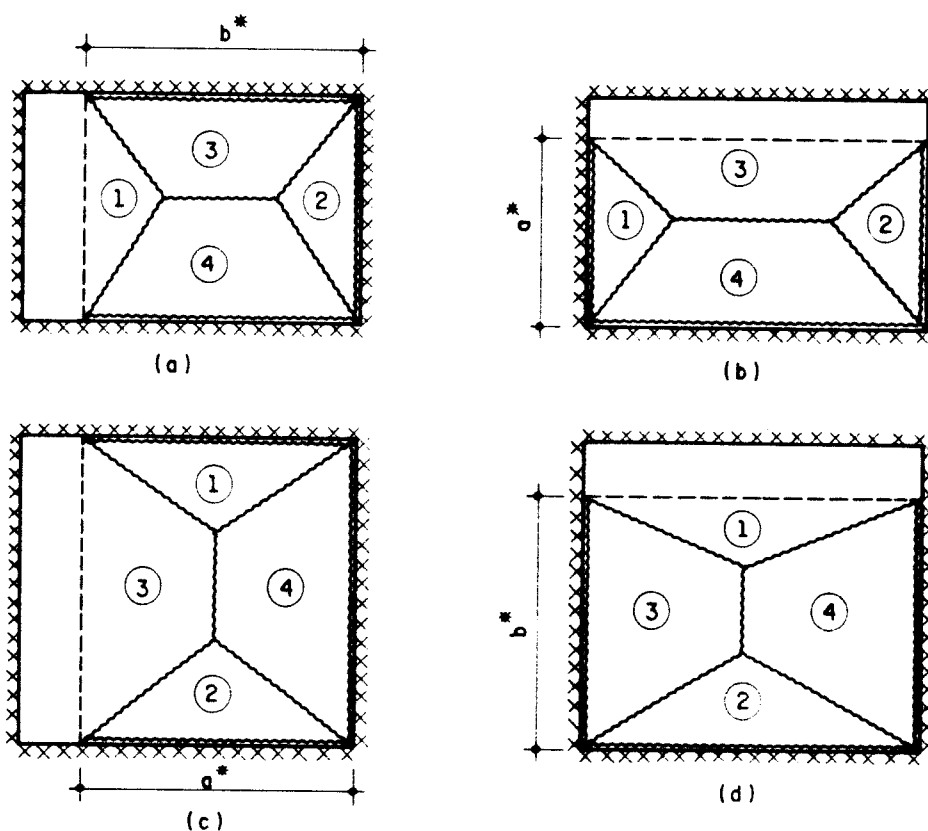


FIGURA 6.12. - Laje retangular engastada em seu contorno

Para o cálculo do ponto de interrupção da armadura negativa ao longo do lado esquerdo ou direito (figura 6.12-a), deve-se determinar o valor de  $b^*$ , utilizando-se a equação (6.3.9).



$$\sqrt{m+m_3} + \sqrt{m+m_4} = \frac{a}{\sqrt{6b^*}} \sqrt{3b^*p - 2\sqrt{6p} \left( \sqrt{\mu m+m_1} + \sqrt{\mu m+m_2} \right)}$$

$$\left[ 6 \cdot \left( \sqrt{m+m_3} + \sqrt{m+m_4} \right)^2 - 3pa^2 \right] \cdot b^* = -2a^2 \sqrt{6p} \cdot \left( \sqrt{\mu m+m_1} + \sqrt{\mu m+m_2} \right)$$

$$b^* = \frac{2a^2 \sqrt{6p} \cdot \left( \sqrt{\mu m+m_1} + \sqrt{\mu m+m_2} \right)}{3pa^2 - 6 \cdot \left( \sqrt{m+m_3} + \sqrt{m+m_4} \right)^2} \quad (6.4.1)$$

Chamando-se de  $x_e$  e  $x_d$  o ponto de interrupção da armadura negativa ao longo do lado esquerdo e direito, respectivamente, e sabendo-se que o momento negativo, ao longo do lado que delimita a nova laje, é nulo (este lado é suposto simplesmente apoiado), obtêm-se

$$x_e = b - b^*, \text{ para } m_1 = 0$$

$$x_d = b - b^*, \text{ para } m_2 = 0$$

Analogamente para as armaduras ao longo dos lados superior ( $x_s$ ) e inferior ( $x_i$ ), determina-se o valor de  $a^*$ , a partir da equação (6.3.9).

$$\sqrt{m+m_3} + \sqrt{m+m_4} = \frac{a^*}{\sqrt{6b}} \sqrt{3bp - 2\sqrt{6p} \left( \sqrt{\mu m+m_1} + \sqrt{\mu m+m_2} \right)}$$

$$a^* = \frac{\sqrt{6b} \cdot \left( \sqrt{m+m_3} + \sqrt{m+m_4} \right)}{\sqrt{3bp - 2\sqrt{6p} \left( \sqrt{\mu m+m_1} + \sqrt{\mu m+m_2} \right)}} \quad (6.4.2)$$

resultando

$$x_s = a - a^*, \text{ para } m_3 = 0$$

$$x_i = a - a^*, \text{ para } m_4 = 0$$

Deve-se verificar se a pior situação não ocorre para a configuração de ruína mostrada nas figuras 6.12-c e 6.12-d, para as quais deve-se fazer as seguintes modificações:

$$a = l_h \qquad b = l_v \qquad m = m_h \qquad \mu m = m_v$$

$$m_1 = m_s \qquad m_2 = m_l \qquad m_3 = m_e \qquad m_4 = m_d$$

$$x_e = a - a^* \text{ , para } m_3 = 0$$

$$x_d = a - a^* \text{ , para } m_4 = 0$$

$$x_s = b - b^* \text{ , para } m_1 = 0$$

$$x_l = b - b^* \text{ , para } m_2 = 0$$

#### 6.4.2. Laje retangular com uma borda livre

Com base na configuração de ruína mostrada nas figuras 6.13-a e 6.13-b, calculam-se os valores de  $b^*$  e  $a^*$ , para as armaduras ao longo dos lados perpendiculares à borda livre e ao longo do lado oposto à mesma, a partir da equação (6.3.21).

$$\sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} = \sqrt{\frac{b^{*2}}{6a} \left[ 3(pa + p_l) - 2p \sqrt{\frac{6(m+m_3)}{p}} \right]}$$

$$b^* = \frac{\sqrt{6a} \cdot \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right)}{\sqrt{3(pa + p_l) - 2p \sqrt{\frac{6(m+m_3)}{p}}}} \quad (6.4.3)$$

Para o cálculo do valor de  $a^*$ , deve-se fazer  $m_3 = 0$ .

$$\sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} = \sqrt{\frac{b^2}{6a^*} \left[ 3(p a^* + p_l) - 2p \sqrt{\frac{6(m+m_3)}{p}} \right]}$$

$$\left[ 6 \cdot \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right)^2 - 3pb^2 \right] \cdot a^* = 3p_l b^2 - 2pb^2 \cdot \sqrt{\frac{6m}{p}}$$

$$a^* = \frac{3p_l b^2 - 2pb^2 \cdot \sqrt{\frac{6m}{p}}}{6 \cdot \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right)^2 - 3pb^2} \quad (6.4.4)$$

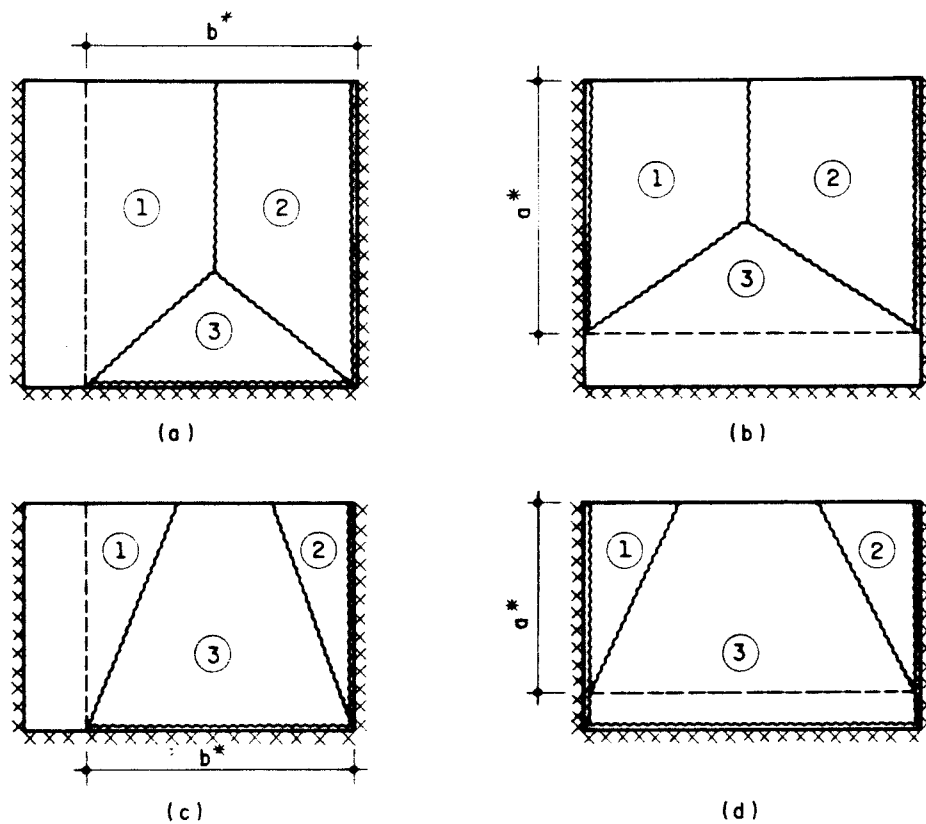


FIGURA 6.13. - Laje retangular com uma borda livre

Deve-se verificar se a configuração de ruína não é a apresentada nas figuras 6.13-c e 6.13-d. Para tal, utiliza-se a equação (6.3.29).

$$\sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} = \left( \frac{pab^*}{2} + p_l b^* - \frac{m_3 b^*}{a} \right) \sqrt{\frac{3}{2(pa^2 + 3p_l a + 6m)}}$$

$$\left( \frac{pa}{2} + p_l - \frac{m_3}{a} \right) \cdot b^* = \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right) \cdot$$

$$\sqrt{\frac{2(pa^2 + 3p_l a + 6m)}{3}}$$

$$b^* = \frac{\sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2}}{\frac{pa}{2} + p_l - \frac{m_3}{a}} \cdot \sqrt{\frac{2(pa^2 + 3p_l a + 6m)}{3}} \quad (6.4.5)$$

Com a mesma equação (6.3.29), calcula-se o valor de  $a^*$ , onde  $m_3 = 0$ .

$$\sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} = \left( \frac{pa^* b}{2} + p_l b \right) \cdot \sqrt{\frac{3}{2(pa^{*2} + 3p_l a^* + 6m)}}$$

Sendo

$$f_1 = \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \quad (6.4.6)$$

resulta

$$f_1^2 = \frac{b^2}{4} \cdot \left( p^2 a^{*2} + 4pp_l a^* + 4p_l^2 \right) \cdot \frac{3}{2(pa^{*2} + 3p_l a^* + 6m)}$$

$$8pa^{*2} f_1^2 + 24p_l a^* f_1^2 + 48mf_1^2 = 3p^2 a^{*2} b^2 + 12pp_l a^* b^2 + 12p_l^2 b^2$$

$$(8pf_1^2 - 3p^2 b^2) a^{*2} + (24p_l f_1^2 - 12pp_l b^2) a^* + 48mf_1^2 - 12p_l^2 b^2 = 0$$

$$a^* = \frac{12pp_l b^2 - 24p_l f_1^2 \pm 8f_1 \sqrt{3p_l^2 (3f_1^2 - pb^2) - 3mp(8f_1^2 - 3pb^2)}}{2p \cdot (8f_1^2 - 3pb^2)}$$

$$a^* = \frac{6p_l(pb^2 - 2f_1^2) \pm 4f_1 \sqrt{3p_l^2(3f_1^2 - pb^2) - 3mp(8f_1^2 - 3pb^2)}}{p \cdot (8f_1^2 - 3pb^2)} \quad (6.4.7)$$

Chamando-se  $x_1$  e  $x_2$  os pontos de interrupção das armaduras, ao longo dos lados perpendiculares à borda livre e  $x_3$  do lado paralelo à mesma, obtêm-se

$$x_1 = b - b^*, \text{ para } m_1 = 0$$

$$x_2 = b - b^*, \text{ para } m_2 = 0$$

$$x_3 = a - a^*, \text{ para } m_3 = 0$$

#### 6.4.3. Laje retangular com duas bordas adjacentes livres

Fazendo-se inicialmente

$$a = \ell_v \quad m = m_v \quad \mu m = m_h$$

$$m_1 = 0 \quad m_2 = m_s \text{ ou } m_l \quad P_{l1} = P_{lh} \quad P_{l2} = P_{lv}$$

pode-se calcular o valor de  $b^*$ , a partir da equação (6.3.33), para a determinação do ponto de interrupção da armadura negativa, ao longo do lado vertical (figura 6.14-a).

$$2m \cdot \sqrt{\frac{\delta(\mu m + m_1)}{\delta m + pa^2 + 3p_{l1}a}} + m_2 \cdot \frac{b^*}{a} = \frac{pab^*}{2} + P_{l1} \cdot b^* + P_{l2} \cdot \frac{a}{2} - \left( \frac{pa^2}{3} + P_{l1}a \right) \cdot \sqrt{\frac{\delta(\mu m + m_1)}{\delta m + pa^2 + 3p_{l1}a}}$$

$$\left( \frac{pa}{2} + p_{l1} - \frac{m_2}{a} \right) \cdot b^* = \sqrt{\frac{6\mu m}{6m + pa^2 + 3p_{l1}a}} \cdot \left( \frac{pa^2}{3} + p_{l1}a + 2m \right) - p_{l2} \frac{a^2}{2}$$

$$b^* = \frac{\sqrt{\frac{6\mu m}{6m + pa^2 + 3p_{l1}a}} \cdot (2pa^2 + 6p_{l1}a + 12m) - 3p_{l2}a}{3pa + 6p_{l1} - \frac{6m_2}{a}} \quad (6.4.8)$$

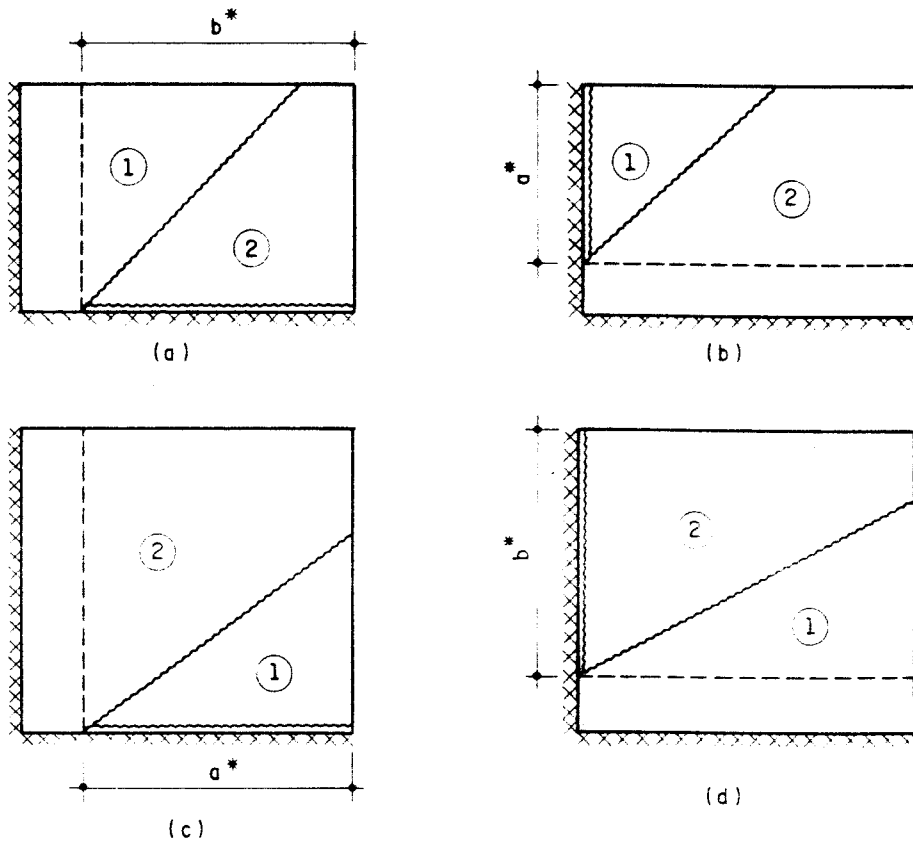


FIGURA 6.14. - Laje retangular com duas bordas adjacentes livres

Para a armadura ao longo do lado horizontal, deve-se calcular o valor de  $a^*$ , com

$$b = l_h \quad m = m_v \quad \mu m = m_h$$

$$m_1 = m_e \text{ ou } m_d \quad m_2 = 0 \quad p_{l1} = p_{lh} \quad p_{l2} = p_{lv}$$

$$2m \sqrt{\frac{6(\mu m + m_1)}{6m + pa^{*2} + 3p_{l1}a^*}} + m_2 \cdot \frac{b}{a^*} = \frac{pa^*b}{2} + p_{l1} \cdot b + p_{l2} \cdot \frac{a^*}{2} +$$

$$- \left( \frac{pa^{*2}}{3} + p_{l1}a^* \right) \cdot \sqrt{\frac{6(\mu m + m_1)}{6m + pa^{*2} + 3p_{l1}a^*}}$$

$$\sqrt{\frac{6(\mu m + m_1)}{6m + pa^{*2} + 3p_{l1}a^*}} \cdot \left( \frac{pa^{*2}}{3} + p_{l1}a^* + 2m \right) =$$

$$\left( \frac{pa^*b}{2} + p_{l1}b + \frac{p_{l2}a^*}{2} \right)$$

$$\frac{6(\mu m + m_1)}{6m + pa^{*2} + 3p_{l1}a^*} \cdot \left( \frac{pa^{*2} + 3p_{l1}a^* + 6m}{3} \right)^2 = \left( \frac{pa^*b + 2p_{l1}b + p_{l2}a^*}{2} \right)^2$$

$$24(\mu m + m_1) \cdot \left( \frac{pa^{*2} + 3p_{l1}a^* + 6m}{9} \right) = p^2 a^{*2} b^2 + 4p_{l1}^2 b^2 +$$

$$+ p_{l2}^2 a^{*2} + 4pp_{l1}a^*b^2 + 2pp_{l2}a^{*2}b + 4p_{l1}p_{l2}a^*b$$

$$\left[ 8p(\mu m + m_1) - 3p^2b^2 - 3p_{l2}^2 - 6pp_{l2}b \right] \cdot a^{*2} + \left[ 24p_{l1}(\mu m + m_1) + \right.$$

$$\left. - 12pp_{l1}b^2 - 12p_{l1}p_{l2}b \right] \cdot a^* + 48m(\mu m + m_1) - 12p_{l1}^2b^2 = 0$$

Fazendo-se

$$c = 8p(\mu m + m_1) - 3p^2 b^2 - 3p_{l2}^2 - 6pp_{l2}b \quad (6.4.9)$$

obtem-se

$$a^* = \frac{6p_{l1} \cdot [pb^2 + p_{l2}b - 2(\mu m + m_1)]}{c} + \pm \frac{4\sqrt{3(\mu m + m_1) \left\{ p_{l1}^2 \left[ 3(\mu m + m_1) - pb^2 - 3p_{l2}b \right] - mc \right\}}}{c} \quad (6.4.10)$$

De posse dos valores de  $a^*$  e  $b^*$ , pode-se calcular os comprimentos das armaduras negativas.

$$x_e \text{ ou } x_d = b - b^*, \text{ para } m_1 = 0$$

$$x_s \text{ ou } x_t = a - a^*, \text{ para } m_2 = 0$$

Pode ocorrer ainda a configuração de ruína das figuras 6.14-c e 6.14-d, para a qual basta fazer as seguintes alterações:

$$a = \ell_h \quad b = \ell_v \quad m = m_h \quad \mu m = m_v$$

$$m_1 = m_s \text{ ou } m_t \quad m_2 = m_e \text{ ou } m_d$$

$$p_{l1} = p_{lv} \quad p_{l2} = p_{lh}$$

$$x_e \text{ ou } x_d = a - a^*, \text{ para } m_2 = 0$$

$$x_s \text{ ou } x_t = b - b^*, \text{ para } m_1 = 0$$



6.4.4. Laje retangular com duas bordas opostas livres

Com base na equação (6.3.39), calculam-se os comprimentos necessários das armaduras negativas (figura 6.15).

$$m = \frac{\left[ b^{*2}c - 2(m_1 + m_2) \right]^2 - 16m_1 m_2}{8b^{*2}c}$$

$$8b^{*2}cm = b^{*4}c^2 - 4b^{*2}c(m_1 + m_2) + 4(m_1 + m_2)^2 - 16m_1 m_2$$

$$c^2 b^{*4} - \left[ 4c(m_1 + m_2) + 8cm \right] \cdot b^{*2} + 4m_1^2 + 8m_1 m_2 + 4m_2^2 - 16m_1 m_2 = 0$$

$$b^* = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2 + 2m) \pm 4\sqrt{m_1 m_2 + mm_1 + mm_2 + m^2}}{c}} \quad (6.4.11)$$

com,

$$c = p + \frac{P_{l1}}{a} + \frac{P_{l2}}{a} \quad (6.4.12)$$

$$x_1 = b - b^*, \text{ para } m_1 = 0$$

$$x_2 = b - b^*, \text{ para } m_2 = 0$$

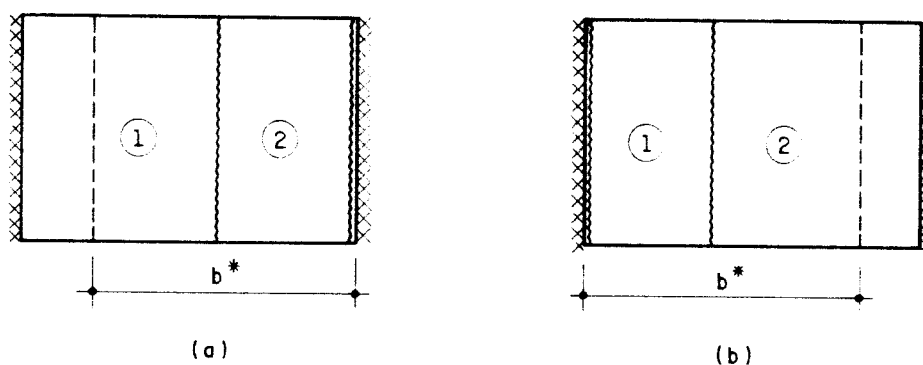


FIGURA 6.15. - Laje retangular com duas bordas opostas livres

## 6.5. MARCHA DE CÁLCULO

Apresenta-se a marcha de cálculo para a determinação dos momentos nas lajes e dos comprimentos das armaduras negativas, pela teoria das charneiras plásticas. Supõe-se que as cargas permanentes e acidentais são conhecidas.

### 6.5.1. Dados do problema

De início são conhecidos:

$\ell_h$  = lado horizontal,

$\ell_v$  = lado vertical,

$p$  = carga uniformemente distribuída,

$p_l$  = carga linear (ao longo da borda livre)

### 6.5.2. Valores de $\mu$ e $m$

Sugere-se que seja feito o cálculo elástico, seguido da compatibilização dos momentos negativos entre as lajes vizinhas e da redução desses valores (ver item 3.2) e, então, a compatibilização dos momentos positivos. Finalmente, pode-se arbitrar os valores de  $\mu$  e  $m_l$  (momentos negativos).

### 6.5.3. Laje retangular engastada ou simplesmente apoiada em seu contorno

Adota-se inicialmente:

$$\begin{array}{llll} a = \ell_v & b = \ell_h & \mu = \frac{m_h}{m_v} & \\ m_1 = m_e & m_2 = m_d & m_3 = m_s & m_4 = m_l \end{array}$$

Deve-se verificar se a configuração de ruína é a adotada (charneira central paralela ao lado horizontal). Para isso, deve ocorrer

$$\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} \leq b \cdot \sqrt{\frac{p}{6}} \quad (6.5.1)$$

$$l_s = \frac{1}{\mu} \cdot \left[ \frac{3}{2b^2 p} \cdot \left( \frac{b^2 p}{6} + m_2 - m_1 \right)^2 - m_2 \right] > 0 \quad (6.5.2)$$

$$\begin{aligned} f_1 &\leq f_2 \quad \text{para } m = 0 \\ f_1 &\geq f_2 \quad \text{para } m = l_s \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

com,

$$f_1(m) = \sqrt{m+m_3} + \sqrt{m+m_4} \quad (6.5.4)$$

$$f_2(m) = \frac{a}{\sqrt{6b}} \sqrt{3bp - 2\sqrt{6p} \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right)} \quad (6.5.5)$$

Se todas estas condições forem atendidas, deve-se calcular  $m$  por iteração, para que  $f_1 = f_2$ . Como resultado, obtém-se

$$m_v = m \qquad m_h = \mu m$$

Se uma das condições (6.5.1) a (6.5.3) não for atendida, pode-se seguir os mesmos passos, porém com as seguintes alterações:

$$\begin{aligned} a &= l_h & b &= l_v & \mu &= \frac{m_v}{m_h} \\ m_1 &= m_s & m_2 &= m_i & m_3 &= m_e & m_4 &= m_d \end{aligned}$$

obtendo-se

$$m_h = m \qquad m_v = \mu m$$

Sendo (ver item 6.4.1)

$$b^* = \frac{2a^2 \sqrt{6p} \cdot \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right)}{3pa^2 - 6 \cdot \left( \sqrt{m + m_3} + \sqrt{m + m_4} \right)^2} \quad (6.5.6)$$

e

$$a^* = \frac{\sqrt{6b} \cdot \left( \sqrt{m + m_3} + \sqrt{m + m_4} \right)}{\sqrt{3bp - 2\sqrt{6p} \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right)}} \quad (6.5.7)$$

os comprimentos das armaduras negativas são calculados, inicialmente, fazendo-se

$$a = l_v \quad b = l_h \quad m = m_v \quad \mu m = m_h$$

$$m_1 = m_e \quad m_2 = m_d \quad m_3 = m_s \quad m_4 = m_i$$

$$x_e = b - b^*, \text{ para } m_1 = 0$$

$$x_d = b - b^*, \text{ para } m_2 = 0$$

$$x_s = a - a^*, \text{ para } m_3 = 0$$

$$x_i = a - a^*, \text{ para } m_4 = 0$$

A seguir, deve-se verificar para

$$a = l_h \quad b = l_v \quad m = m_h \quad \mu m = m_v$$

$$m_1 = m_s \quad m_2 = m_i \quad m_3 = m_e \quad m_4 = m_d$$

$$x_e = a - a^*, \text{ para } m_3 = 0$$

$$x_d = a - a^*, \text{ para } m_4 = 0$$

$$x_s = b - b^*, \text{ para } m_1 = 0$$

$$x_i = b - b^*, \text{ para } m_2 = 0$$

Os comprimentos das armaduras negativas a serem adotados, são os maiores valores entre os relativos às duas situações consideradas.

#### 6.5.4. Laje retangular com uma borda livre

A notação a ser adotada está relacionada com a posição da borda livre. Se a borda livre for horizontal, tem-se

$$\begin{aligned} a &= l_v & b &= l_h & \mu &= \frac{m_h}{m_v} \\ m_1 &= m_e & m_2 &= m_d & m_3 &= m_s \text{ OU } m_i \\ x_1 &= x_e & x_2 &= x_d & x_3 &= x_s \text{ OU } x_i \end{aligned}$$

No caso da borda livre ser vertical, resulta

$$\begin{aligned} a &= l_h & b &= l_v & \mu &= \frac{m_v}{m_h} \\ m_1 &= m_s & m_2 &= m_i & m_3 &= m_e \text{ OU } m_d \\ x_1 &= x_s & x_2 &= x_i & x_3 &= x_e \text{ OU } x_d \end{aligned}$$

Verificando-se, inicialmente, a configuração de ruína da figura 6.8-a, tem-se

$$m_3 \leq \frac{pa^2}{b} \quad (6.5.8)$$

$$\begin{aligned} f_1 &\leq f_2 \text{ para } m = 0 \\ f_1 &\geq f_2 \text{ para } m = l_s \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

com,

$$f_1(m) = \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \quad (6.5.10)$$

$$f_2(m) = \sqrt{\frac{b^2}{6a} \left[ 3 \cdot (pa + p_l) - 2p \sqrt{\frac{6(m+m_3)}{p}} \right]} \quad (6.5.11)$$

e

$$l_s = \frac{pa^2}{b} - m_3 \quad (6.5.12)$$

A configuração de ruína da figura 6.8-b resulta em novas funções:

$$f_1(m) = \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \quad (6.5.13)$$

$$f_2(m) = \left( \frac{pab}{2} + p_l b - \frac{m_3 b}{a} \right) \cdot \sqrt{\frac{3}{2(pa^2 + 3p_l a + 6m)}} \quad (6.5.14)$$

Para este caso, tem-se que

$$\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} \leq \left( \frac{pab}{2} + p_l b - \frac{m_3 b}{a} \right) \cdot \sqrt{\frac{3}{2(pa^2 + 3p_l a)}} \quad (6.5.15)$$

$$m_3 \leq \frac{pa^2}{2} + p_l a \quad (6.5.16)$$

Calcula-se o valor de  $m$  por iteração, obtendo-se

$$m_v = m \text{ e } m_h = \mu m \text{ se a borda livre for horizontal}$$

$$m_h = m \text{ e } m_v = \mu m \text{ se a borda livre for vertical}$$

Deve-se verificar ainda se  $b_1 + b_2 \leq b$ :

$$\sqrt{\frac{6a^2}{pa^2 + 3p_l a + 6m}} \cdot \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right) \leq b \quad (6.5.17)$$

Os pontos de interrupção das armaduras negativas são:

$$x_1 = b - b^*, \text{ para } m_1 = 0$$

$$x_2 = b - b^*, \text{ para } m_2 = 0$$

$$x_3 = a - a^*, \text{ para } m_3 = 0$$

com  $a^*$  e  $b^*$  os menores valores entre os seguintes:

$$b^* = \frac{\sqrt{6a} \cdot \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right)}{\sqrt{3(pa + p_l) - 2p \sqrt{\frac{6(m+m_3)}{p}}}} \quad (6.5.18)$$

ou

$$b^* = \frac{\sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2}}{\frac{pa}{2} + p_l - \frac{m_3}{a}} \cdot \sqrt{\frac{2(pa^2 + 3p_l a + 6m)}{3}} \quad (6.5.19)$$

e

$$a^* = \frac{3p_l b^2 - 2pb^2 \cdot \sqrt{\frac{6m}{p}}}{6 \cdot \left( \sqrt{\mu m + m_1} + \sqrt{\mu m + m_2} \right)^2 - 3pb^2} \quad (6.5.20)$$

ou

$$a^* = \frac{6p_l(pb^2 - 2f_1^2) \pm 4f_1 \sqrt{3p_l^2(3f_1^2 - pb^2) - 3mp(8f_1^2 - 3pb^2)}}{p \cdot (8f_1^2 - 3pb^2)} \quad (6.5.21)$$

### 6.5.5. Laje retangular com duas bordas adjacentes livres

Adota-se, inicialmente,

$$\begin{aligned} a &= \ell_v & b &= \ell_h & \mu &= \frac{m_h}{m_v} \\ m_1 &= m_e \text{ ou } m_d & m_2 &= m_s \text{ ou } m_l \\ P_{l1} &= P_{lh} & P_{l2} &= P_{lv} \end{aligned}$$

A seguir, verifica-se se a configuração de ruína é a adotada (figura 6.9-a), onde a charneira corta o lado horizontal, com base nas seguintes condições:

$$f_1 \leq f_2 \text{ para } m = 0 \quad (6.5.22)$$

$$\text{Se } \mu > \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow l_0 = \frac{pa^2b^2 + 3p_{l1}ab^2 - 6a^2m_1}{6a^2\mu - 6b^2}$$

donde

$$f_1 \geq f_2 \text{ para } m = l_0 \quad (6.5.23)$$

com,

$$f_1(m) = 2m \cdot \sqrt{\frac{6(\mu m + m_1)}{6m + pa^2 + 3p_{l1}a}} + m_2 \cdot \frac{b}{a} \quad (6.5.24)$$

e

$$f_2(m) = \frac{pab}{2} + p_{l1} \cdot b + p_{l2} \cdot \frac{a}{2} - \left[ \frac{pa^2}{3} + p_{l1}a \right] \cdot \sqrt{\frac{6(\mu m + m_1)}{6m + pa^2 + 3p_{l1}a}} \quad (6.5.25)$$

Novamente, o cálculo do momento é feito iterativamente, resultando em  $m_v = m$  e  $m_h = \mu m$ . Deve-se verificar se  $b_1 \leq b$ :

$$\sqrt{\frac{6a^2(\mu m + m_1)}{6m + pa^2 + 3p_{l1}a}} \leq b \quad (6.5.26)$$

O momento negativo, da configuração de ruína da figura 6.9-b, é dado por

$$m' = \frac{ab}{2(\mu a^2 + b^2)} \left[ \frac{pab}{3} + p_{l1}b + p_{l2}a \right] \quad (6.5.27)$$

Para a configuração de ruína, onde a charneira positiva corta o lado vertical, deve-se seguir os mesmos passos dados por (6.5.22) a (6.5.26), com as seguintes modificações:



$$\begin{aligned}
 a &= l_h & b &= l_v & \mu &= \frac{m_v}{m_h} \\
 m_1 &= m_e \text{ ou } m_i & m_2 &= m_e \text{ ou } m_d \\
 p_{l1} &= p_{lv} & p_{l2} &= p_{lh}
 \end{aligned}$$

e resultando

$$m_h = m \quad m_v = \mu m$$

Os valores de  $a^*$  e  $b^*$  são dados por

$$\begin{aligned}
 a^* &= \frac{6p_{l1} \cdot [pb^2 + p_{l2}b - 2(\mu m + m_1)]}{c} + \\
 &+ \frac{4\sqrt{3(\mu m + m_1) \left\{ p_{l1}^2 [3(\mu m + m_1) - pb^2 - 3p_{l2}b] - mc \right\}}}{c} \quad (6.5.28)
 \end{aligned}$$

com,

$$c = 8p(\mu m + m_1) - 3p^2 b^2 - 3p_{l2}^2 - 6pp_{l2}b \quad (6.5.29)$$

e

$$b^* = \frac{\sqrt{\frac{6\mu m}{6m + pa^2 + 3p_{l1}a} \cdot (2pa^2 + 6p_{l1}a + 12m) - 3p_{l2}a}}{3pa + 6p_{l1} - \frac{6m}{a}} \quad (6.5.30)$$

A partir dos valores de  $a^*$  e  $b^*$ , os comprimentos das armaduras negativas podem ser calculados. Adotam-se os maiores valores, dentre os fornecidos a seguir. Faz-se

$$\begin{aligned}
 a &= l_v & b &= l_h & m &= m_v & \mu m &= m_h \\
 m_1 &= m_e \text{ ou } m_d & m_2 &= m_s \text{ ou } m_i \\
 p_{l1} &= p_{lh} & p_{l2} &= p_{lv}
 \end{aligned}$$

resultando em

$$x_e \text{ ou } x_d = b - b^*, \text{ para } m_1 = 0$$

$$x_s \text{ ou } x_i = a - a^*, \text{ para } m_2 = 0$$

A seguir, deve-se verificar para

$$a = l_h \quad b = l_v \quad m = m_h \quad \mu m = m_v$$

$$m_1 = m_s \text{ ou } m_i \quad m_2 = m_e \text{ ou } m_d$$

$$P_{l1} = P_{lv} \quad P_{l2} = P_{lh}$$

resultando em

$$x_e \text{ ou } x_d = a - a^*, \text{ para } m_2 = 0$$

$$x_s \text{ ou } x_i = b - b^*, \text{ para } m_1 = 0$$

#### 6.5.6. Laje retangular com duas bordas opostas livres

A notação a ser adotada está relacionada com a posição das bordas livres. Se as bordas livres forem horizontais, tem-se

$$a = l_v \quad b = l_h$$

$$m_1 = m_e \quad m_2 = m_d$$

$$x_1 = x_e \quad x_2 = x_d$$

No caso das bordas livres serem verticais, resulta

$$a = \ell_h \qquad b = \ell_v$$

$$m_1 = m_s \qquad m_2 = m_i$$

$$x_1 = x_s \qquad x_2 = x_i$$

O cálculo do momento é feito diretamente,

$$m = \frac{\left[ b^2 c - 2(m_1 + m_2) \right]^2 - 16m_1 m_2}{8b^2 c} \qquad (6.5.30)$$

com,

$$c = p + \frac{P_{L1}}{a} + \frac{P_{L2}}{a} \qquad (6.5.31)$$

Os valores dos comprimentos das armaduras negativas são dados por

$$x_1 = b - b^*, \text{ para } m_1 = 0$$

$$x_2 = b - b^*, \text{ para } m_2 = 0$$

onde,

$$b^* = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2 + 2m) \pm 4\sqrt{m_1 m_2 + mm_1 + mm_2 + m^2}}{c}} \qquad (6.5.32)$$

## 7. PROGRAMA PARA CÁLCULO AUTOMÁTICO

Com o intuito de automatizar o cálculo de lajes retangulares de um pavimento, foi elaborado um programa em linguagem TURBO PASCAL, para utilização em micro computadores da linha IBM PC-XT e seus compatíveis.

O programa tem por finalidade calcular todas as lajes de um pavimento conjuntamente, tornando-se uma ferramenta bastante útil na prática.

### 7.1. INSTALAÇÃO DO PROGRAMA

O programa possui uma espécie de "install", para que o usuário possa modelar o programa de acordo com os critérios de sua preferência (figuras 7.1 e 7.2).

#### 7.1.1. Instalação dos dados gerais

a) Tipo de aço: CA-25, CA-32, CA-40A, CA-40B, CA-50A, CA-50B, CA-60.

b) Coeficiente de Poisson: valores entre 0 e 1.

c) Cobrimento das armaduras: deve estar de acordo com o item 6.3.3.1 da NBR-6118^[21]. O programa adota  $d' = \text{cobrimento} + 0,5 \text{ cm}$ .

1 - Aço CA-50B
2 - Poisson = 0,20
3 - Cobrimento (cm) = 0,5
4 - % Engaste = 80
5 - % Momento = 67
6 - Compatibilização = Critério 1
7 - Momento Negativo = Critério 1
8 - Redução = 0,621
9 - Impressão = Total
0 - Retorna
Opção →

FIGURA 7.1. - Instalação dos dados gerais

d) Percentagem de engaste: o cálculo das lajes é feito supondo engastamento perfeito nos lados em que há continuidade; porém, há casos em que só há continuidade em um trecho de um lado da laje. Este item permite definir quando esse lado deve ser considerado como engastado, ou seja, a percentagem de engaste é a percentagem que o lado de uma laje deve ter de continuidade, para que esse vínculo seja considerado como engaste.

e) Percentagem de momento: após feita a compatibilização dos momentos provenientes do cálculo elástico, deve-se escolher um único momento negativo para cada lado da laje. Esta percentagem define o comprimento mínimo, em relação ao comprimento ao respectivo lado da laje, ao longo do qual um momento deve ocorrer para que ele seja o momento negativo escolhido, para esse lado.

f) Critério de compatibilização dos momentos negativos:

- critério 1 = menor valor entre a média e 1,2 vezes o menor momento,
- critério 2 = 1,2 vezes o menor momento,
- critério 3 = média entre os dois momentos,
- critério 4 = maior valor entre a média e 80% do maior momento,
- critério 5 = 80% do maior momento.

g) Momento negativo para o cálculo plástico: de acordo com o que foi exposto na letra e, deve-se escolher um momento negativo para cada lado da laje. No caso de nenhum momento ocorrer ao longo de um trecho do lado, de comprimento suficiente para que ele seja o escolhido, deve-se estabelecer um critério para a escolha do mesmo. Este item fornece dois critérios para a escolha do momento negativo:

- critério 1 = média ponderada entre os momentos,
- critério 2 = menor momento negativo.

h) Fator de redução do momento negativo para o cálculo plástico: após feita a compatibilização dos momentos negativos, pode-se fazer uma redução nesses valores, de acordo com o item 3.2.

i) Impressão: o usuário pode escolher se, além dos dados, serão impressos todas as etapas do cálculo das lajes, ou apenas os resultados finais.

### 7.1.2. Instalação dos dados para o cálculo de flechas

a) Fator de redução referente à combinação de utilização: este fator é proveniente da NBR-8681, baseado no tipo de carregamento que a laje suporta:

- locais em que não há predominância de peso de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas => 0,2

- locais em que há predominância de peso de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevadas concentrações de pessoas => 0,4

- bibliotecas, arquivos, oficinas e garagens => 0,6.

<p style="text-align: center;">DADOS PARA O CÁLCULO DE FLECHAS</p> <p>1 - Fator de Utilização = 0,2</p> <p>2 - Umidade Relativa = 70%</p> <p>3 - SLUMP = 5 - 9 cm</p> <p>0 - Retorna</p> <p style="text-align: center;">Opção →</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

FIGURA 7.2. - Instalação para o cálculo de flechas

b) Umidade relativa do ambiente (em percentagem)

c) Consistência do concreto: abatimento de acordo com a NBR 7223.

## 7.2. ENTRADA DE DADOS

A entrada dos dados é feita via teclado, de maneira muito simples. Nenhum dado é pedido pelo programa, o usuário insere aquilo que é conveniente, apertando a tecla correspondente à inserção. Cada tela pode ser vista com parte dos dados, sem que seja necessário inserir ou modificar alguma coisa. Qualquer dado pode ser alterado a qualquer momento. Os menus têm sempre uma opção de retorno para o menu de ordem superior.

Os menus podem ser de dois tipos:

- a) Menus de barras - são aqueles onde as setas para cima ( $\uparrow$ ) e para baixo ( $\downarrow$ ) funcionam para mudar a opção. A tecla *ENTER* torna a opção verdadeira. No caso de escolha errada, basta retornar ao mesmo menu;
- b) Menus de rodapé - são aqueles que aparecem em telas de dados, onde as opções são escolhidas por números. O número *ZERO* e a tecla *ESC* correspondem ao retorno para o menu anterior.

O *ZERO* corresponde também ao retorno na inserção de dados, como por exemplo: para inserir os comprimentos dos tramos das vigas, se for colocado *ZERO* no número da viga, o retorno ocorre automaticamente.

Os dados são divididos em três partes: dados iniciais, dados das vigas e dados das lajes.

Os dados iniciais são: o número de lajes, o número de vigas e o  $f_{ck}$ . A figura 7.3 ilustra a tela feita pelo programa para a entrada dos dados gerais. Nela estão representados os dados correspondentes à figura 7.4.



nome do  
arquivo

EXEMPLO1

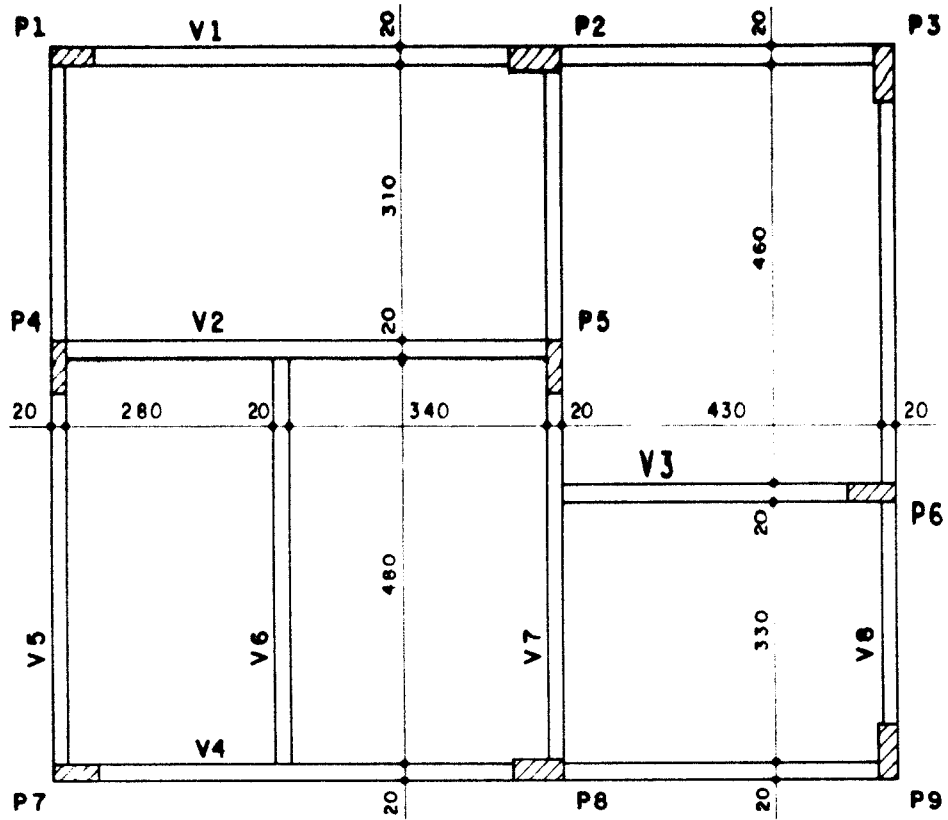
DADOS INICIAIS	
1 - NÚMERO DE LAJES	NL = 5
2 - NÚMERO DE VIGAS	NV = 6
3 - $f_{ck}$	$f_{ck} = 18.0$ MPa
4 - TÍTULO = <i>Exemplo 1</i>	
0 - RETORNA	

Opção →

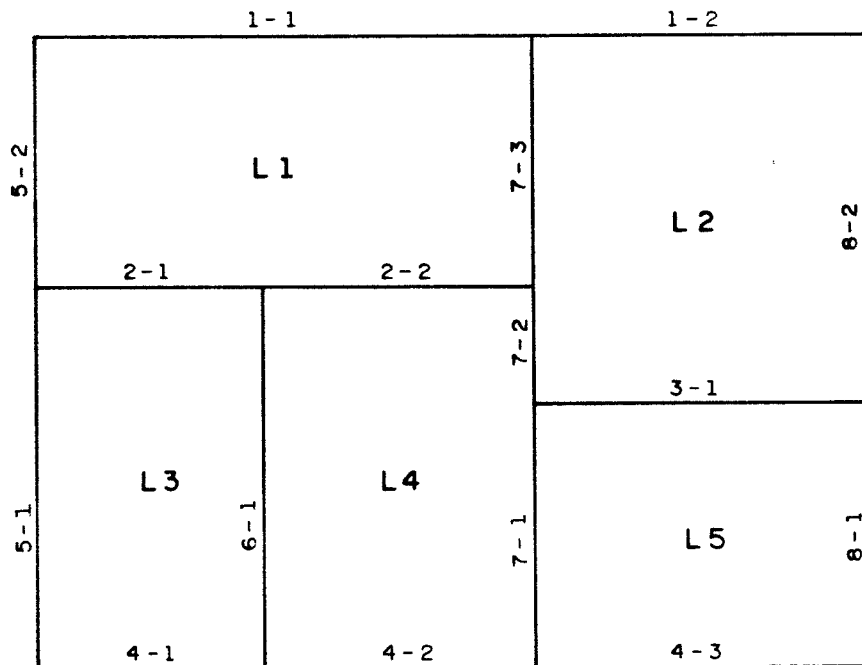
FIGURA 7.3. - Dados gerais

Os dados das vigas são os comprimentos de cada tramo de viga. Aqui a noção de *tramo* não está relacionada com o vão da viga; um tramo é definido a partir dos nós que delimitam as lajes.

Analisando-se a planta baixa da figura 7.4-a, observa-se que a viga V4 tem dois vãos, porém possui três tramos. Dessa forma, as vigas são identificadas por dois números (figura 7.4-b), onde o primeiro é o número da viga e o segundo indica qual o tramo. A figura 7.5 apresenta os tramos das vigas e seus respectivos comprimentos, referentes à figura 7.4.



(a)



(b)

FIGURA 7.4. - Lajes e vigas de um pavimento

VIGAS (cm)							EXEMPLO1	
Viga	N.Tr	Tr.1	Tr.2	Tr.3	Tr.4	Tr.5	Tr.6	Tr.7
1	2	660	450					
2	2	300	360					
3	1	450						
4	3	300	360	450				
5	2	500	330					
6	1	500						
7	3	350	150	330				
8	2	350	480					

Setas, PgUp, PgDn, Home e End para mover a tela

1.Ant. 2.Post. 3.Insere 4.Modifica 0.Retorna

FIGURA 7.5. - Dados das vigas

No caso das lajes, deve-se primeiro definir os lados da mesma, conforme mostra a figura 7.6. Cada lado possui  $n$  trechos, sendo cada trecho identificado pelo número da viga e do tramo. O programa calcula os comprimentos dos lados e verifica, automaticamente, se os lados 1 e 2, 3 e 4 possuem o mesmo comprimento.

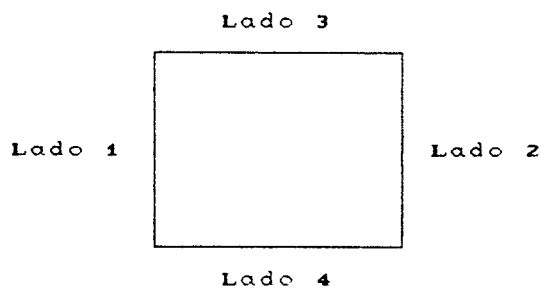


FIGURA 7.6. - Lados de uma laje

Com base na figura 7.4, pode-se construir a tabela 7.1, contendo os trechos das lajes.

TABELA 7.1. - IDENTIFICAÇÃO DAS LAJES

	Lado	N. Trechos	Trecho 1		Trecho 2	
			V	T	V	T
Laje 1	1	1	5	2		
	2	1	7	3		
	3	1	1	1		
	4	2	2	1	2	2
Laje 2	1	2	7	2	7	3
	2	1	8	2		
	3	1	1	2		
	4	1	3	1		
Laje 3	1	1	5	1		
	2	1	6	1		
	3	1	2	1		
	4	1	4	1		
Laje 4	1	1	6	1		
	2	2	7	1	7	2
	3	1	2	2		
	4	1	4	2		
Laje 5	1	1	7	1		
	2	1	8	1		
	3	1	3	1		
	4	1	4	3		

Tem-se ainda como dados das lajes, os carregamentos e as espessuras das mesmas. A figura 7.7 representa a tela onde são mostrados os dados de cada laje.

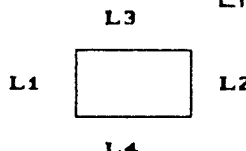
DADOS DA LAJE 1						EXEMPLO1	
Lado	N.Tch.	Trechos					
1	1	5-2					
2	1	7-3					
3	1	1-1					
4	2	2-1	2-2				
Cargas				Lv(cm) = 330			
Permanente = 3.50 kN/m				Lh(cm) = 660			
Acidental = 2.00 kN/m							
Espessura							
h (cm) = 10							
1 - Anterior		3 - Trechos		5 - Espessura			
2 - Posterior		4 - Cargas		0 - Retorna			

FIGURA 7.7. - Dados das lajes

### 7.3. UNIDADES

O programa oferece seis combinações de unidades. (figura 7.8). Uma vez feita a escolha, a combinação é valida até que seja trocada novamente, quando ocorre, automaticamente, a transformação de todos os valores para as novas unidades.

UNIDADES			
Cargas (kN), Vãos (m), $f_{ck}$ (MPa),	Momentos(kN. m/m)		
►Cargas (kN), Vãos(cm), $f_{ck}$ (MPa),	Momentos(kN.cm/m)		
Cargas (tf), Vãos (m), $f_{ck}$ (kgf/cm ² ),	Momentos(tf.cm/m)		
Cargas (tf), Vãos(cm), $f_{ck}$ (kgf/cm ² ),	Momentos(tf.cm/m)		
Cargas(kgf), Vãos (m), $f_{ck}$ (kgf/cm ² ),	Momentos(kgf.m/m)		
Cargas(kgf), Vãos(cm), $f_{ck}$ (kgf/cm ² ),	Momentos(kgf.m/m)		

FIGURA 7.8. - Unidades

#### 7.4. RESOLUÇÃO

Faz-se, primeiramente, o cálculo elástico de cada laje, supondo engastamento perfeito nos lados onde há continuidade. De posse dos momentos elásticos, é feita a compatibilização dos momentos negativos entre as lajes vizinhas, utilizando-se o critério definido pelo usuário (item 7.1-f).

Uma vez que o cálculo plástico utiliza um único momento negativo, ao longo de cada lado da laje, o programa determina um momento negativo para cada lado, da seguinte forma: primeiro verifica se existe um trecho do lado cujo comprimento seja igual ou superior a uma porcentagem desse mesmo lado, chamada de porcentagem de momento (item 7.1-e). Em caso afirmativo, o momento negativo, ao longo do lado em questão, é o próprio momento que ocorre ao longo desse trecho. Caso contrário, a escolha do momento é feita de acordo com o critério definido pelo usuário (item 7.1-g).

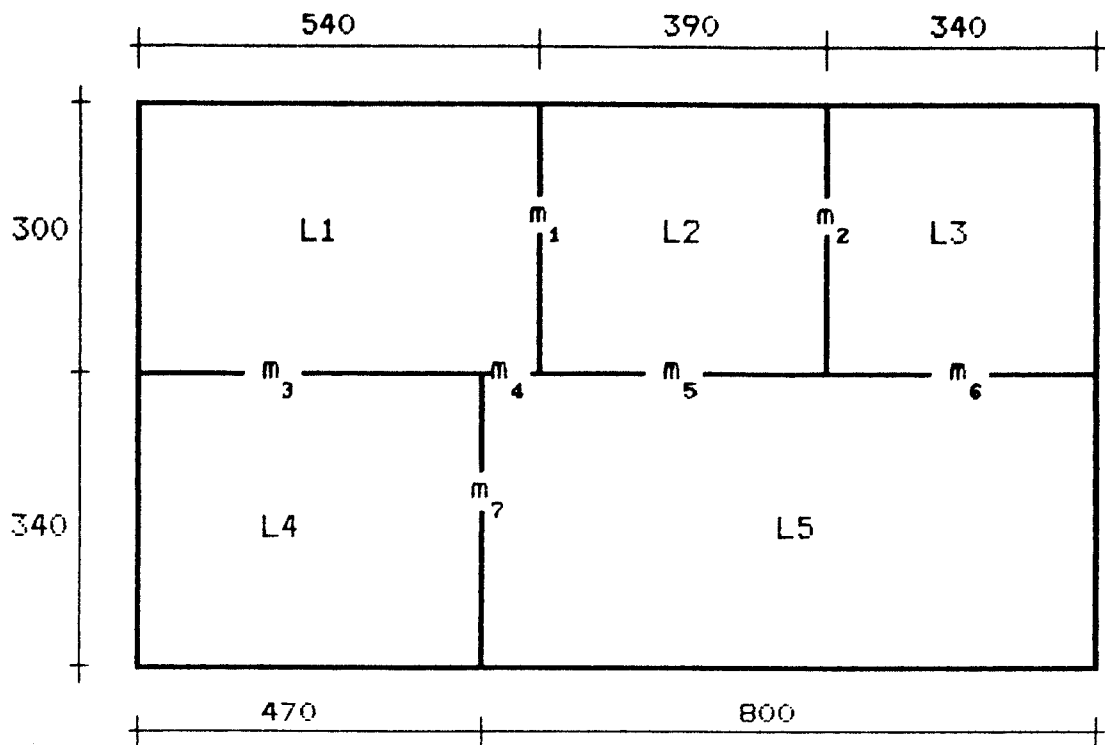


FIGURA 7.9. - Momentos negativos compatibilizados

Seja o esquema da figura 7.9, onde os momentos  $m_i$  indicam os momentos negativos já compatibilizados. Supõe-se que a percentagem de momento é 80% e o critério para escolha do momento negativo para o cálculo plástico é a média ponderada entre os momentos. As lajes L1 e L5, por exemplo, teriam os seguintes momentos negativos:

LAJE L1

- lado 2  $\Rightarrow m_1$
- lado 4  $\Rightarrow m_3$

LAJE L5

- lado 1  $\Rightarrow m_7$
- lado 3  $\Rightarrow \frac{m_4 \cdot 70 + m_5 \cdot 390 + m_6 \cdot 340}{800}$

Os momentos negativos, para o cálculo plástico, são esses momentos multiplicados pelo fator de redução do momento negativo. Só então, é feita a compatibilização dos momentos positivos e o cálculo da relação  $\mu$  entre os momentos positivos. Com esses valores pode-se fazer o cálculo das lajes pela teoria das charneiras plásticas, conforme marcha de cálculo descrita no item 6.5. A seguir,

as lajes são dimensionadas e o programa fornece algumas alternativas para a escolha das armaduras. Finalmente, faz-se o cálculo das flechas, com base na marcha de cálculo do item 4.9.

A figura 7.10 mostra a tela que o programa compõe durante a resolução.

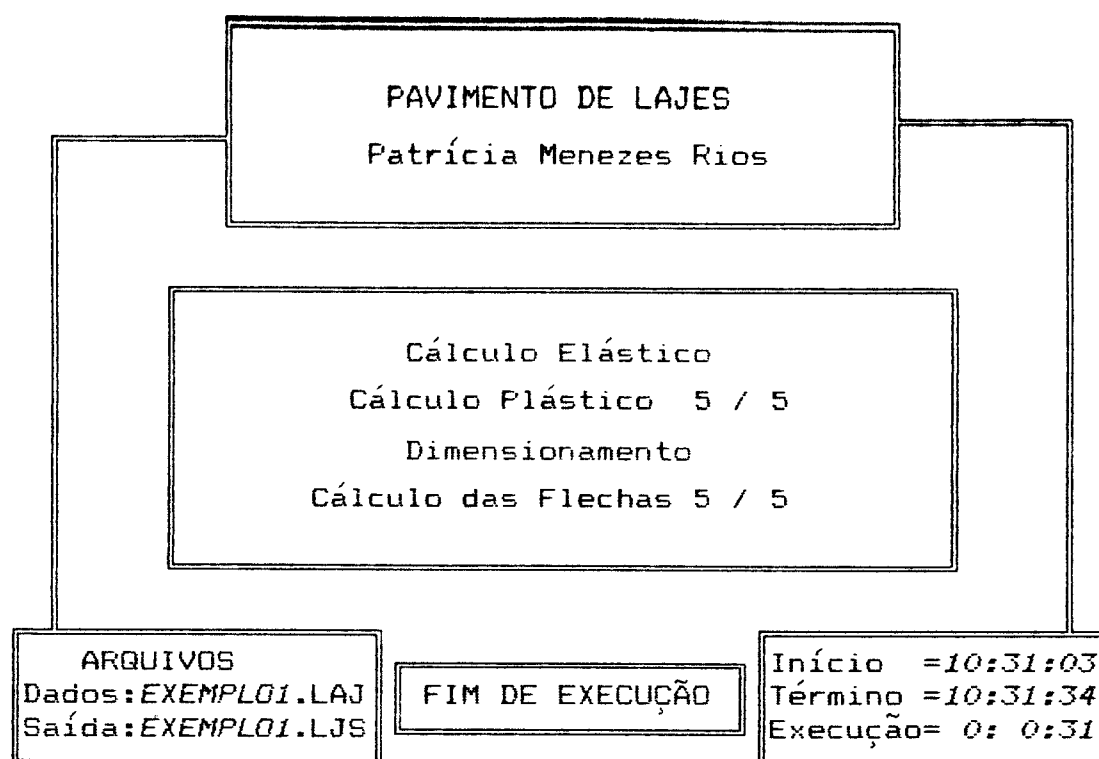


FIGURA 7.10. - Tela de resolução

#### 7.5. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Os resultados do cálculo das lajes podem ser obtidos tanto via video, quanto através da impressora.



## 8. EXEMPLOS

O presente capítulo tem por objetivo apresentar alguns exemplos, com o intuito de comparar resultados e evidenciar as potencialidades do programa. É feita a comparação entre o cálculo elástico e o cálculo plástico, mostrando a economia que o cálculo pela teoria das charneiras plásticas pode trazer.

### 8.1. EXEMPLO Nº1

Apresenta-se o mesmo exemplo dado por PINHEIRO^[19], que é constituído por um piso de concreto armado, formado por nove lajes destinadas a laboratórios e salas de aulas. A planta de fôrmas é mostrada na figura 8.1.

A fim de uma comparação, é feito o cálculo das lajes em regime elástico e pela TCF.

Os vãos, as espessuras e as cargas encontram-se indicados na tabela 8.1.

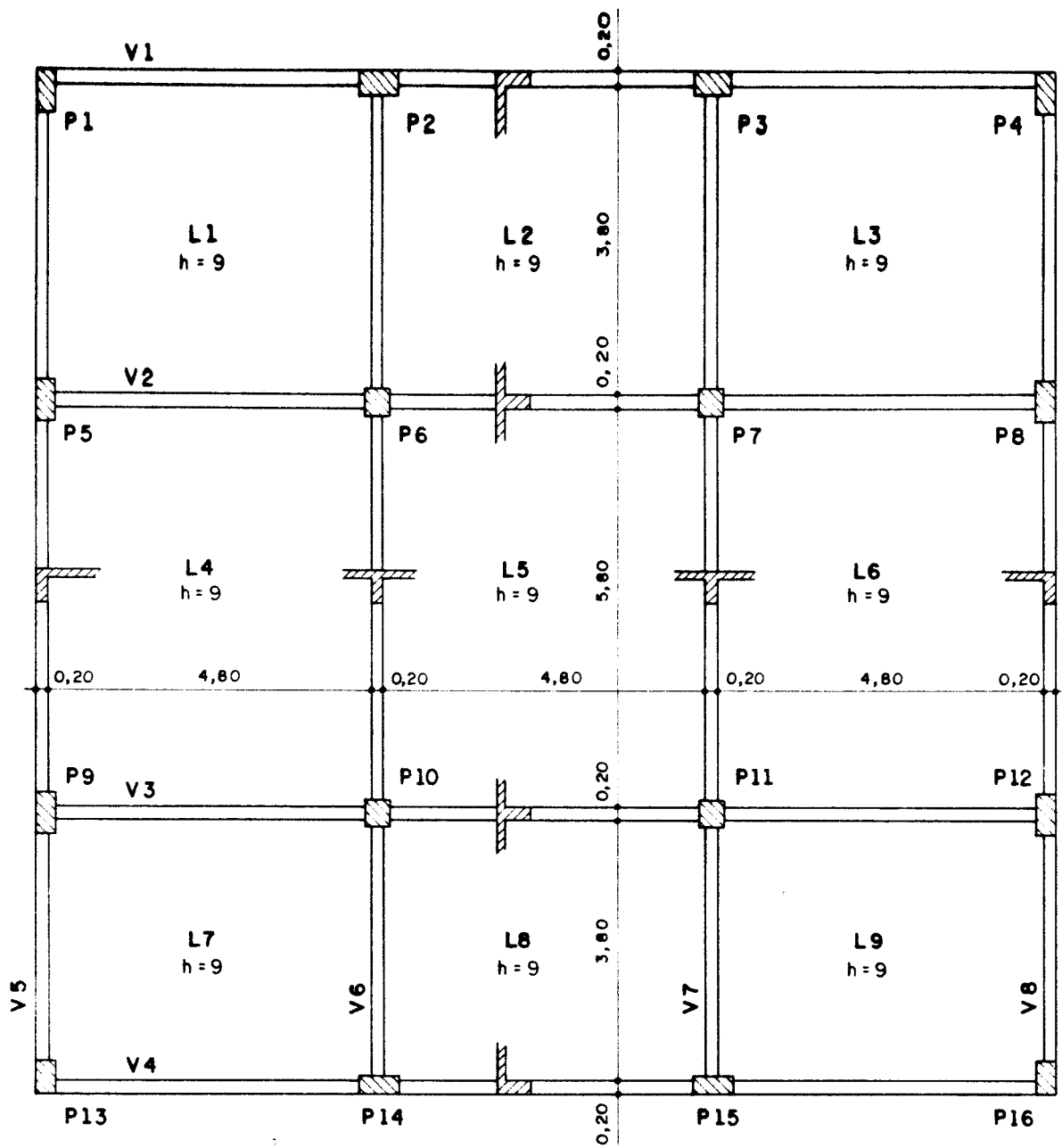


FIGURA 8.1. - Planta de forma do exemplo n:1

TABELA 8.1. - CARACTERÍSTICAS E CARGAS

LAJE		L1=L3= L7=L9	L2=L8	L4=L6	L5
Características	$l_h$ (m)	5,00	5,00	5,00	5,00
	$l_v$ (m)	4,00	4,00	6,00	6,00
	h (cm)	9	9	9	9
Cargas (kN/m ² )	p.p.	2,25	2,25	2,25	2,25
	piso + revest.	1,25	1,25	1,25	1,25
	diviso- rias	1,50	1,50	1,50	1,50
	g	5,00	5,00	5,00	5,00
	q	3,00	3,00	3,00	3,00
	p	8,00	8,00	8,00	8,00

### 8.1.1. Cálculo elástico

O cálculo dos momentos elásticos é feito utilizando as funções aproximadoras apresentadas por PINHEIRO^[19]. O critério de compatibilização dos momentos negativos é o maior valor entre a média e 80% do maior momento.

Os valores dos momentos elásticos e dos momentos compatibilizados (dentro dos retângulos) estão indicados na figura 8.2.

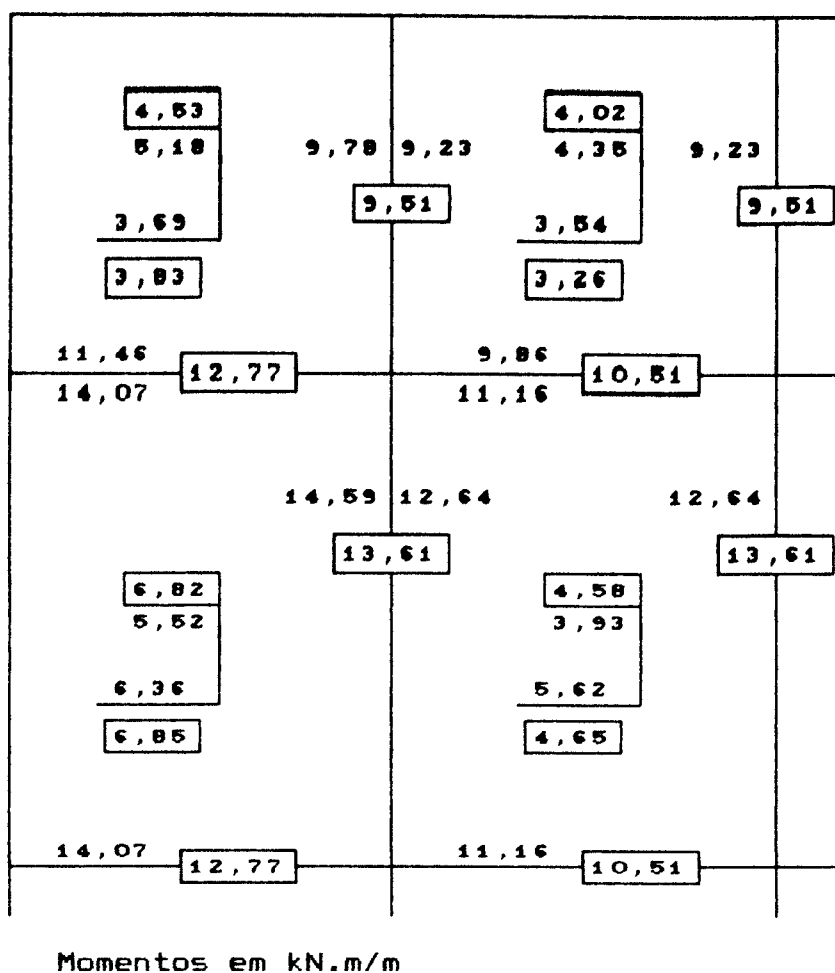


FIGURA B.2. - Momentos elásticos e compatibilizados

### 8.1.2. Cálculo pela TCP

No pré-dimensionamento utilizam-se os momentos elásticos do item anterior e o mesmo critério de compatibilização dos momentos negativos.

Os momentos negativos, adotados para o cálculo plástico, são os provenientes do cálculo elástico reduzidos, ou seja, multiplicados por 0,621. Na figura 8.3 são mostrados os momentos usados como dados para o cálculo plástico.

<p>6,95</p> <hr/> <p>5,63</p>	<p>5,90</p>	<p>5,90</p>	<p>6,01</p> <hr/> <p>6,87</p>	<p>5,90</p>
<p>7,93</p> <hr/> <p>7,93</p>			<p>6,53</p> <hr/> <p>6,53</p>	
<p>11,66</p> <hr/> <p>9,43</p>	<p>8,45</p>	<p>8,45</p>	<p>8,56</p> <hr/> <p>9,80</p>	<p>8,45</p>
<p>7,93</p>			<p>6,53</p>	

Momentos em kN.m/m

FIGURA B.3. - Momentos para o cálculo plástico

Os momentos resultantes do cálculo pela TCP estão indicados na figura B.4. Estes momentos servirão de base para comparação entre o cálculo elástico e o cálculo plástico.

<p>3,80</p> <hr/> <p>3,08</p>	5,90	5,90	<p>2,40</p> <hr/> <p>2,74</p>	5,90
7,93			6,53	
7,93			6,53	
	8,45	8,45		8,45
<p>5,01</p> <hr/> <p>4,05</p>			<p>2,11</p> <hr/> <p>2,41</p>	
7,93			6,53	

Momentos em kN.m/m

FIGURA 8.4. - Momentos provenientes do cálculo plástico

### 8.1.3. Comparação dos resultados

Comparando-se as figuras 8.2 e 8.4, pode-se observar que os momentos resultantes do cálculo plástico são menores que os provenientes do cálculo elástico.

A fim de quantificar a economia que o cálculo pela TCP oferece, a tabela 8.2 apresenta os momentos e as armaduras resultantes em ambos os casos (adotou-se  $d'=1cm$ ). Para facilitar a organização dos cálculos, a figura 8.5 mostra, de maneira esquematizada, a numeração das armaduras (os comprimentos das armaduras negativas não incluem a ancoragem das mesmas).

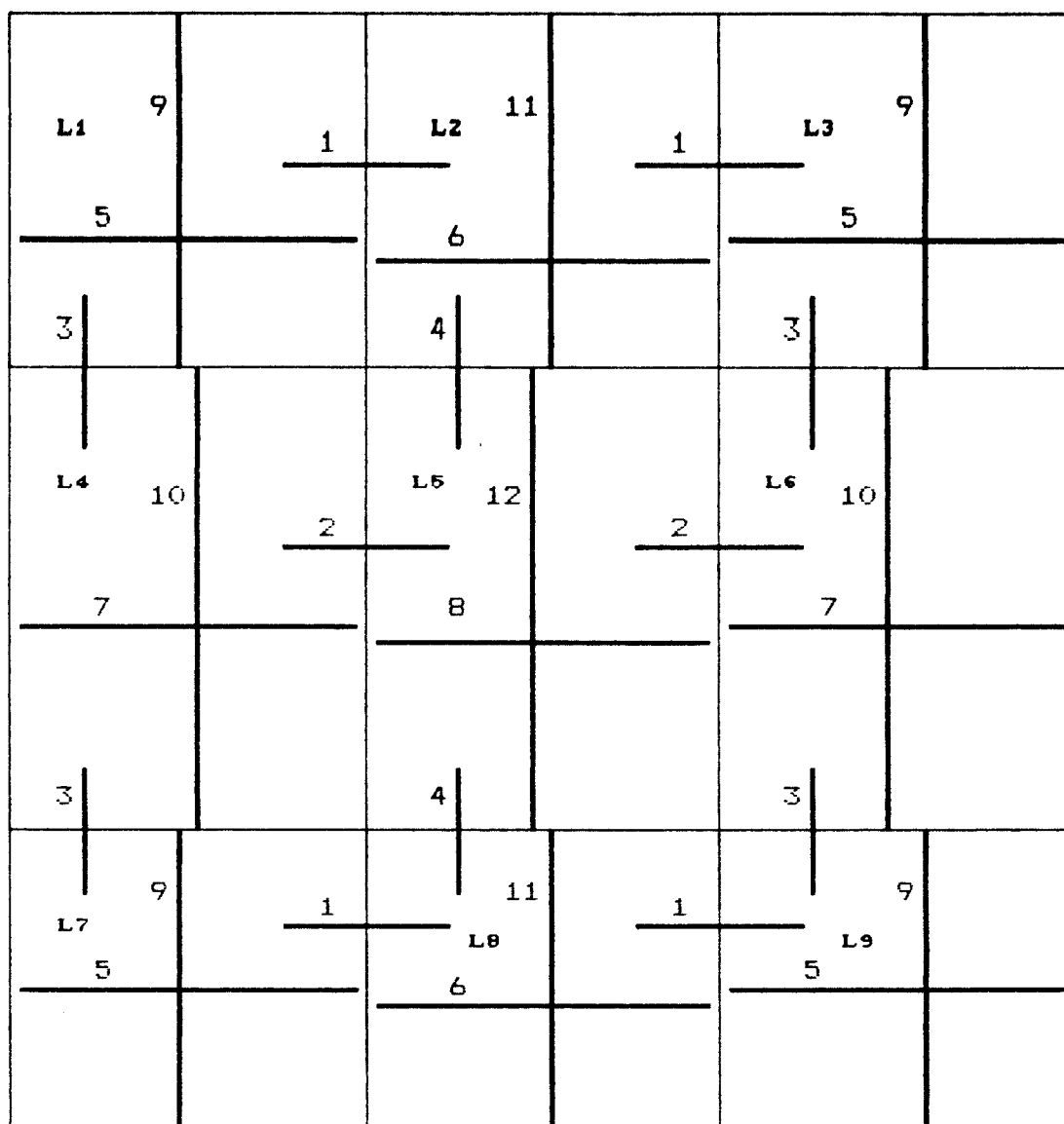


FIGURA 8.5. - Desenho esquemático das armaduras

TABELA 8.2.- CONSUMO DE AÇO

Nº	Q	b	CÁLCULO ELÁSTICO				CÁLCULO PLÁSTICO			
			$m_k$	$A_e$	$l$	V	$m_k$	$A_e$	$l$	V
1	4	380	9,51	4,28	200	13,0	5,90	2,54	240	9,3
2	2	580	13,61	6,54	250	19,0	8,45	3,75	275	11,9
3	4	480	12,77	6,05	250	29,0	7,93	3,49	225	15,1
4	2	480	10,51	4,80	250	11,5	6,53	2,82	275	7,4
5	4	380	3,83	1,61	500	12,2	3,08	1,35	500	10,3
6	2	380	3,26	1,36	500	5,2	2,74	1,35	500	5,1
7	2	580	6,85	2,98	500	17,3	4,05	1,70	500	9,9
8	1	580	4,65	1,97	500	5,7	2,41	1,35	500	3,9
9	4	480	4,53	1,91	400	14,7	3,80	1,59	400	12,2
10	2	480	6,82	2,96	600	17,0	5,01	2,13	600	12,3
11	2	480	4,02	1,69	400	6,5	2,40	1,35	400	5,2
12	1	480	4,58	1,94	600	5,6	2,11	1,35	600	3,9
Volume de aço			$V_1 = 156,7$				$V_2 = 106,5$			
Unidades: $m_k$ (kN.m/m), $A_e$ (cm ² /m), V (dm ³ ), $l$ e $b$ (cm) Nº = número da barra Q = número de repetições de cada tipo de barra b = largura em que se distribui cada tipo de barra $l$ = comprimento da barra V = volume de aço das barras										



#### 8.1.4. Flechas

Os valores das flechas máximas das lajes e os limites estabelecidos pela NBR-6118 (item 4.2.3.1) encontram-se na tabela 8.3. Observa-se que as flechas totais das lajes 4 e 6 são maiores que a flecha limite calculada de acordo com a NBR-6118.

TABELA 8.3. - FLECHAS

Laje	Flechas (cm)				Limite da NBR
	elástica inicial	final d. lenta	retração	total	
1=3=7=9	0,248	0,875	0,133	1,008	1,333
2 = 8	0,209	0,735	0,097	0,832	1,333
4 = 6	0,802	2,570	0,144	2,714	1,667
5	0,420	1,478	0,097	1,575	1,667

#### 8.1.5. Programa

O esquema de numeração das lajes e vigas utilizado para a entrada de dados no programa é mostrado na figura 8.6. No caso das vigas, o primeiro número corresponde ao número da viga, enquanto que o segundo indica o tramo.

1-1		1-2		1-3		
5-3	L1	6-3	L2	7-3	L3	8-3
2-1		2-2		2-3		
5-2	L4	6-2	L5	7-2	L6	8-2
3-1		3-2		3-3		
5-1	L7	6-1	L8	7-1	L9	8-1
4-1		4-2		4-3		

FIGURA 8.6. - Esquema de numeração das vigas e lajes

A seguir apresenta-se a saída fornecida pelo programa.





**L A J E S - Calculo das lajes de um pavimento**

**Autora : Patricia Menezes Rios**

**Obra : Exemplo 1**

=====

**** RESULTADOS ****

**Momentos provenientes do CALCULO ELASTICO**

Laje 1	Mh = 3.69	Mv = 5.18	Xh = 9.78	Xv = 11.46
Laje 2	Mh = 3.54	Mv = 4.35	Xh = 9.23	Xv = 9.86
Laje 3	Mh = 3.69	Mv = 5.18	Xh = 9.78	Xv = 11.46
Laje 4	Mh = 6.36	Mv = 5.52	Xh = 14.59	Xv = 14.07
Laje 5	Mh = 5.62	Mv = 3.93	Xh = 12.64	Xv = 11.16
Laje 6	Mh = 6.36	Mv = 5.52	Xh = 14.59	Xv = 14.07
Laje 7	Mh = 3.69	Mv = 5.18	Xh = 9.78	Xv = 11.46
Laje 8	Mh = 3.54	Mv = 4.35	Xh = 9.23	Xv = 9.86
Laje 9	Mh = 3.69	Mv = 5.18	Xh = 9.78	Xv = 11.46

**Momentos negativos apos a COMPATIBILIZACAO**

VIGA	M 1	M 2	M 3	M 4	M 5	M 6	M 7	M 8	M 9	M 10
1	0.00	0.00	0.00							
2	12.77	10.51	12.77							
3	12.77	10.51	12.77							
4	0.00	0.00	0.00							
5	0.00	0.00	0.00							
6	9.51	13.61	9.51							
7	9.51	13.61	9.51							
8	0.00	0.00	0.00							

**Momentos para o CALCULO PLASTICO**

<b>Laje 1</b>				
Pos.	Mh = 5.63	Mv = 6.95		
Neg.	M1 = 0.00	M2 = 5.90	M3 = 0.00	M4 = 7.93
<b>Laje 2</b>				
Pos.	Mh = 6.87	Mv = 6.01		
Neg.	M1 = 5.90	M2 = 5.90	M3 = 0.00	M4 = 6.53
<b>Laje 3</b>				
Pos.	Mh = 5.63	Mv = 6.95		
Neg.	M1 = 5.90	M2 = 0.00	M3 = 0.00	M4 = 7.93
<b>Laje 4</b>				
Pos.	Mh = 9.43	Mv = 11.66		
Neg.	M1 = 0.00	M2 = 8.45	M3 = 7.93	M4 = 7.93
<b>Laje 5</b>				
Pos.	Mh = 9.80	Mv = 8.56		
Neg.	M1 = 8.45	M2 = 8.45	M3 = 6.53	M4 = 6.53
<b>Laje 6</b>				
Pos.	Mh = 9.43	Mv = 11.66		
Neg.	M1 = 8.45	M2 = 0.00	M3 = 7.93	M4 = 7.93
<b>Laje 7</b>				
Pos.	Mh = 5.63	Mv = 6.95		
Neg.	M1 = 0.00	M2 = 5.90	M3 = 7.93	M4 = 0.00
<b>Laje 8</b>				
Pos.	Mh = 6.87	Mv = 6.01		
Neg.	M1 = 5.90	M2 = 5.90	M3 = 6.53	M4 = 0.00

**L A J E S - Calculo das lajes de um pavimento**  
**Autora : Patricia Menezes Rios**  
**Obra : Exemplo 1**

**Laje 9**

Pos. Mh = 5.63 Mv = 6.95  
 Neg. M1 = 5.90 M2 = 0.00 M3 = 7.93 M4 = 0.00

**Momentos provenientes do CALCULO PLASTICO**

**Laje 1**

Pos. Mh = 3.08 Mv = 3.80  
 Neg. M1 = 0.00 M2 = 5.90 M3 = 0.00 M4 = 7.93

**Laje 2**

Pos. Mh = 2.74 Mv = 2.40  
 Neg. M1 = 5.90 M2 = 5.90 M3 = 0.00 M4 = 6.53

**Laje 3**

Pos. Mh = 3.08 Mv = 3.80  
 Neg. M1 = 5.90 M2 = 0.00 M3 = 0.00 M4 = 7.93

**Laje 4**

Pos. Mh = 4.05 Mv = 5.01  
 Neg. M1 = 0.00 M2 = 8.45 M3 = 7.93 M4 = 7.93

**Laje 5**

Pos. Mh = 2.41 Mv = 2.11  
 Neg. M1 = 8.45 M2 = 8.45 M3 = 6.53 M4 = 6.53

**Laje 6**

Pos. Mh = 4.05 Mv = 5.01  
 Neg. M1 = 8.45 M2 = 0.00 M3 = 7.93 M4 = 7.93

**Laje 7**

Pos. Mh = 3.08 Mv = 3.80  
 Neg. M1 = 0.00 M2 = 5.90 M3 = 7.93 M4 = 0.00

**Laje 8**

Pos. Mh = 2.74 Mv = 2.40  
 Neg. M1 = 5.90 M2 = 5.90 M3 = 6.53 M4 = 0.00

**Laje 9**

Pos. Mh = 3.08 Mv = 3.80  
 Neg. M1 = 5.90 M2 = 0.00 M3 = 7.93 M4 = 0.00

**ARMADURA NEGATIVA (cm²/m)**

**Viga 2**

Tramo 1 As = 3.49 L 1= 110 L 4= 115  
 56 ø 6.3 c. 9 36 ø 8.0 c.14  
 Tramo 2 As = 2.82 L 2= 125 L 5= 150  
 46 ø 6.3 c.11 30 ø 8.0 c.17  
 Tramo 3 As = 3.49 L 3= 110 L 6= 115  
 56 ø 6.3 c. 9 36 ø 8.0 c.14

**Viga 3**

Tramo 1 As = 3.49 L 4= 115 L 7= 110  
 56 ø 6.3 c. 9 36 ø 8.0 c.14  
 Tramo 2 As = 2.82 L 5= 150 L 8= 125  
 46 ø 6.3 c.11 30 ø 8.0 c.17  
 Tramo 3 As = 3.49 L 6= 115 L 9= 110  
 56 ø 6.3 c. 9 36 ø 8.0 c.14

**L A J E S - Calculo das lajes de um pavimento**  
**Autora : Patricia Menezes Rios**  
**Obra : Exemplo 1**

**Viga 6**

Tramo 1 As = 2.54 L 7= 130 L 8= 110  
34 ø 6.3 c.12 20 ø 8.0 c.20  
Tramo 2 As = 3.75 L 4= 140 L 5= 135  
75 ø 6.3 c. 8 46 ø 8.0 c.13  
Tramo 3 As = 2.54 L 1= 130 L 2= 110  
34 ø 6.3 c.12 20 ø 8.0 c.20

**Viga 7**

Tramo 1 As = 2.54 L 8= 110 L 9= 130  
34 ø 6.3 c.12 20 ø 8.0 c.20  
Tramo 2 As = 3.75 L 5= 135 L 6= 140  
75 ø 6.3 c. 8 46 ø 8.0 c.13  
Tramo 3 As = 2.54 L 2= 110 L 3= 130  
34 ø 6.3 c.12 20 ø 8.0 c.20

**ARMADURA POSITIVA (cm²/m)**

**Laje 1**

Ash = 1.35 29 ø 5.0 c.14  
Asv = 1.59 42 ø 5.0 c.12 27 ø 6.3 c.19

**Laje 2**

Ash = 1.35 29 ø 5.0 c.14  
Asv = 1.35 36 ø 5.0 c.14

**Laje 3**

Ash = 1.35 29 ø 5.0 c.14  
Asv = 1.59 42 ø 5.0 c.12 27 ø 6.3 c.19

**Laje 4**

Ash = 1.70 55 ø 5.0 c.11 34 ø 6.3 c.18  
Asv = 2.13 56 ø 5.0 c. 9 36 ø 6.3 c.14

**Laje 5**

Ash = 1.35 43 ø 5.0 c.14  
Asv = 1.35 36 ø 5.0 c.14

**Laje 6**

Ash = 1.70 55 ø 5.0 c.11 34 ø 6.3 c.18  
Asv = 2.13 56 ø 5.0 c. 9 36 ø 6.3 c.14

**Laje 7**

Ash = 1.35 29 ø 5.0 c.14  
Asv = 1.59 42 ø 5.0 c.12 27 ø 6.3 c.19

**Laje 8**

Ash = 1.35 29 ø 5.0 c.14  
Asv = 1.35 36 ø 5.0 c.14

**Laje 9**

Ash = 1.35 29 ø 5.0 c.14  
Asv = 1.59 42 ø 5.0 c.12 27 ø 6.3 c.19

**L A J E S - Calculo das lajes de um pavimento**  
**Autora : Patricia Menezes Rios**  
**Obra : Exemplo 1**

=====

<u>FLECHAS (cm)</u>				
<b>Laje 1</b>				
Aih = 0.248	Acc = 0.875	Acs = 0.133	Ath = 1.008	
Aiv = 0.248	Acc = 0.866	Acs = 0.090	Atv = 0.956	
<b>Laje 2</b>				
Aih = 0.209	Acc = 0.735	Acs = 0.097	Ath = 0.832	
Aiv = 0.209	Acc = 0.735	Acs = 0.085	Atv = 0.821	
<b>Laje 3</b>				
Aih = 0.248	Acc = 0.875	Acs = 0.133	Ath = 1.008	
Aiv = 0.248	Acc = 0.866	Acs = 0.090	Atv = 0.956	
<b>Laje 4</b>				
Aih = 0.802	Acc = 2.570	Acs = 0.144	Ath = 2.713	
Aiv = 0.555	Acc = 1.957	Acs = 0.162	Atv = 2.120	
<b>Laje 5</b>				
Aih = 0.420	Acc = 1.478	Acs = 0.097	Ath = 1.575	
Aiv = 0.337	Acc = 1.188	Acs = 0.139	Atv = 1.328	
<b>Laje 6</b>				
Aih = 0.802	Acc = 2.570	Acs = 0.144	Ath = 2.713	
Aiv = 0.555	Acc = 1.957	Acs = 0.162	Atv = 2.120	
<b>Laje 7</b>				
Aih = 0.248	Acc = 0.875	Acs = 0.133	Ath = 1.008	
Aiv = 0.248	Acc = 0.866	Acs = 0.090	Atv = 0.956	
<b>Laje 8</b>				
Aih = 0.209	Acc = 0.735	Acs = 0.097	Ath = 0.832	
Aiv = 0.209	Acc = 0.735	Acs = 0.085	Atv = 0.821	
<b>Laje 9</b>				
Aih = 0.248	Acc = 0.875	Acs = 0.133	Ath = 1.008	
Aiv = 0.248	Acc = 0.866	Acs = 0.090	Atv = 0.956	



## 8.2. EXEMPLO Nº2

Este exemplo é mais complexo que o primeiro, procurando assim, evidenciar toda a sistemática adotada pelo programa.

A figura 8.7 mostra a planta de fôrmas do pavimento, que é constituído por quatorze lajes destinadas a escritórios.

Novamente, é feito o cálculo elástico e o cálculo plástico, para comparação do consumo de aço.

Os vãos, as espessuras e as cargas encontram-se indicados na tabela 8.4.

TABELA 8.4. - CARACTERÍSTICAS E CARGAS

		L1= L12	L2= L13	L3= L14	L4= L9	L5= L10	L6= L11	L7	L8
Carac- terís- ticas	$l_h$ (cm)	500	480	520	500	480	520	520	480
	$l_v$ (cm)	600	530	730	550	550	350	500	500
	h (cm)	10	8	10	10	8	8	8	8
Cargas (kN/m ² )	p.p.	2,50	2,00	2,50	2,50	2,00	2,00	2,00	2,00
	piso + reves.	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	diviso- rias	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50
	g	5,00	4,50	5,00	5,00	4,50	4,50	4,50	4,50
	q	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
	p	7,00	6,50	7,00	7,00	6,50	6,50	6,50	6,50

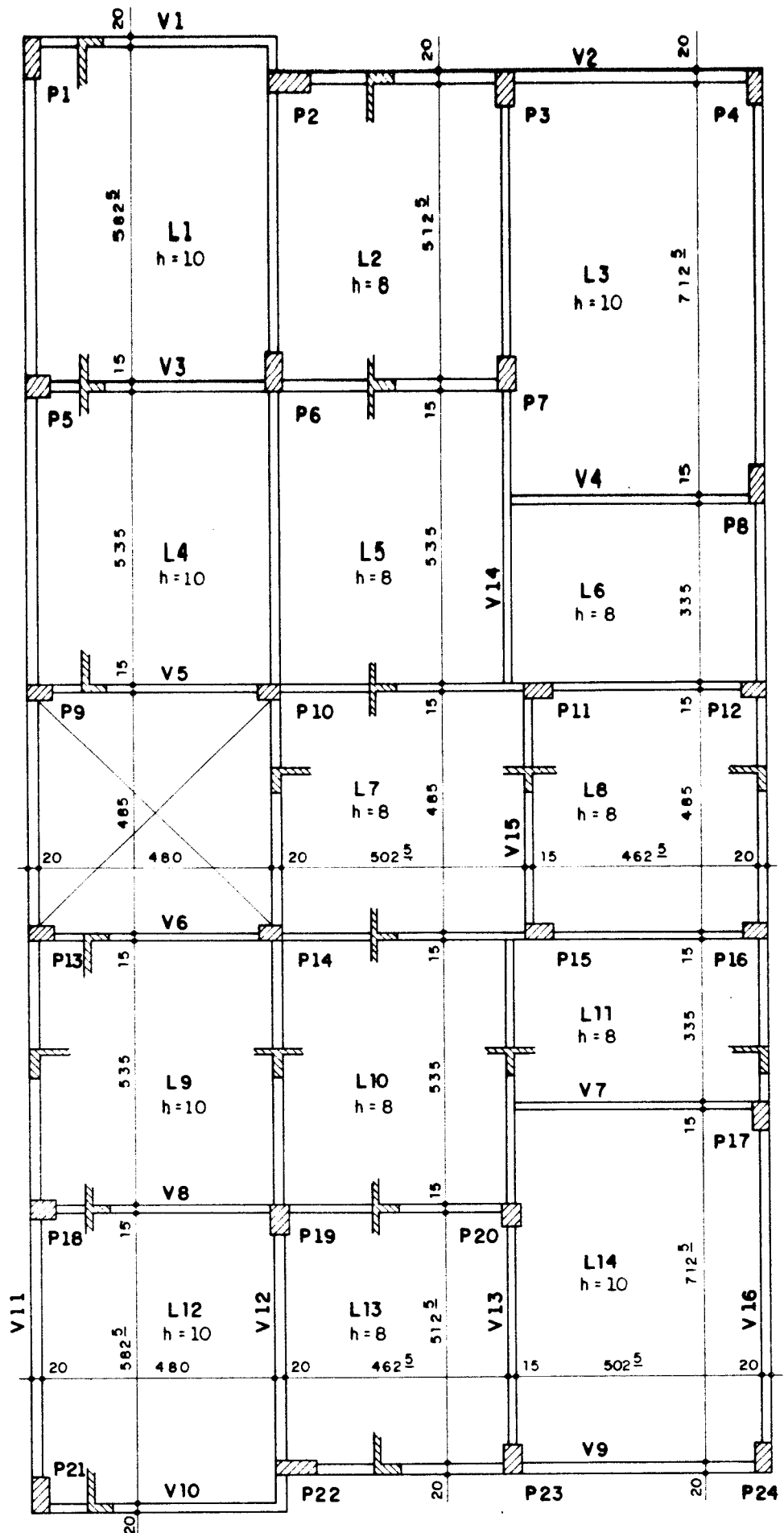
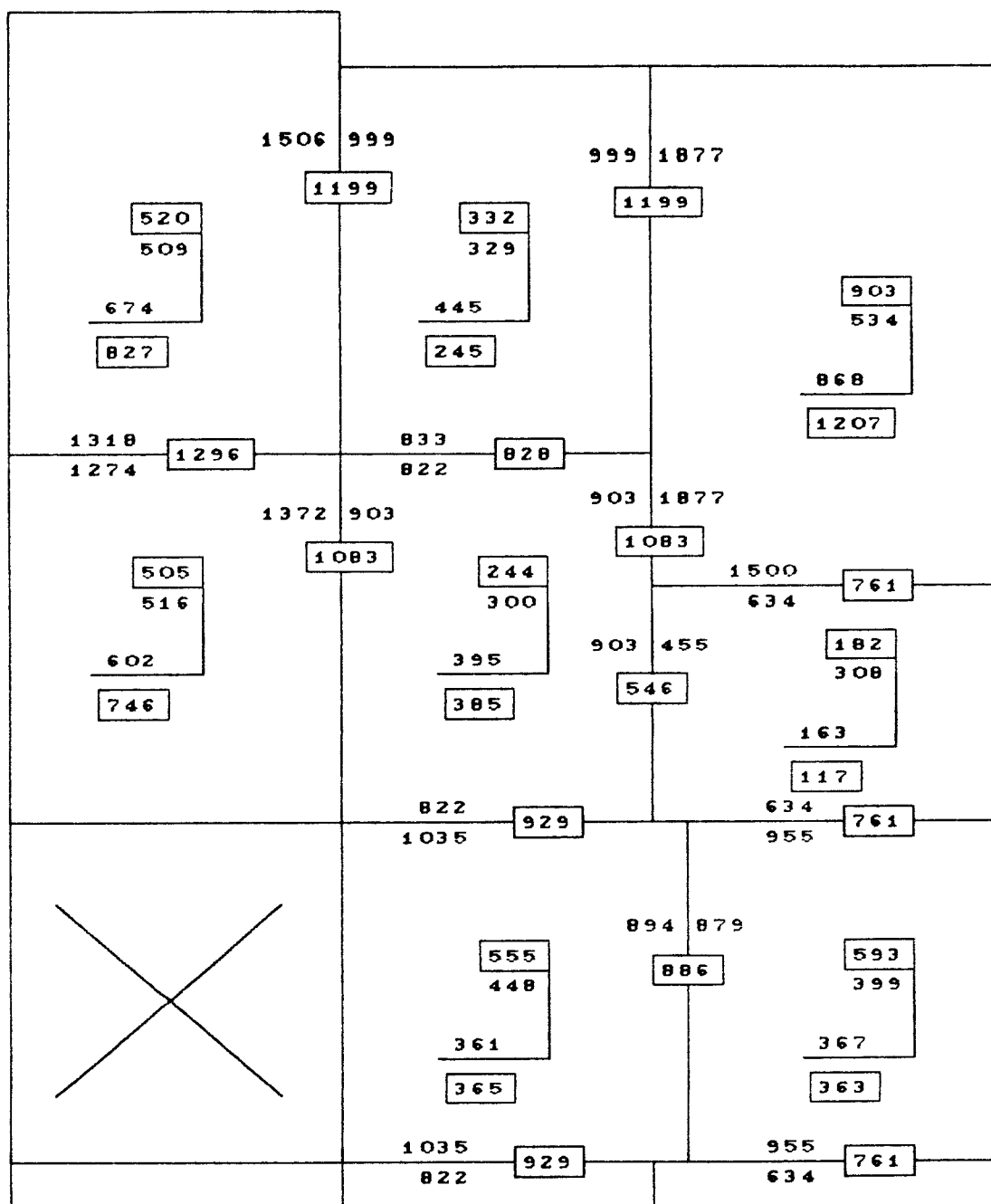


FIGURA 8.7. - Planta de forma do exemplo n:2

8.2.1. Cálculo elástico

Os valores dos momentos elásticos e dos momentos compatibilizados (dentro de retângulos) encontram-se na figura 8.8. O critério de compatibilização utilizado é o menor valor entre a média e 1,2 vezes o menor momento.

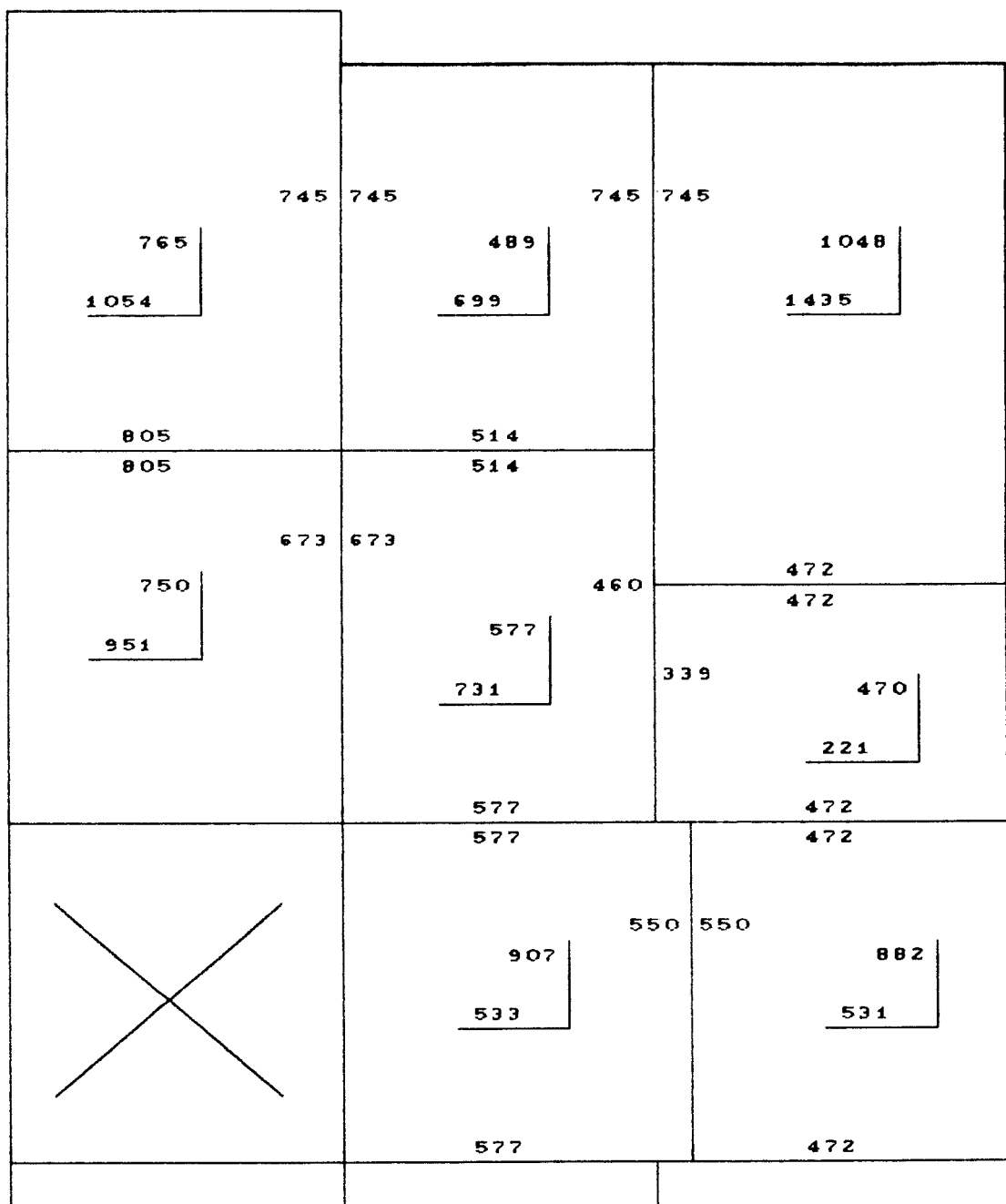


Momentos em kN.cm/m

FIGURA 8.8. - Momentos elásticos e compatibilizados

8.2.2. Cálculo pela TCP

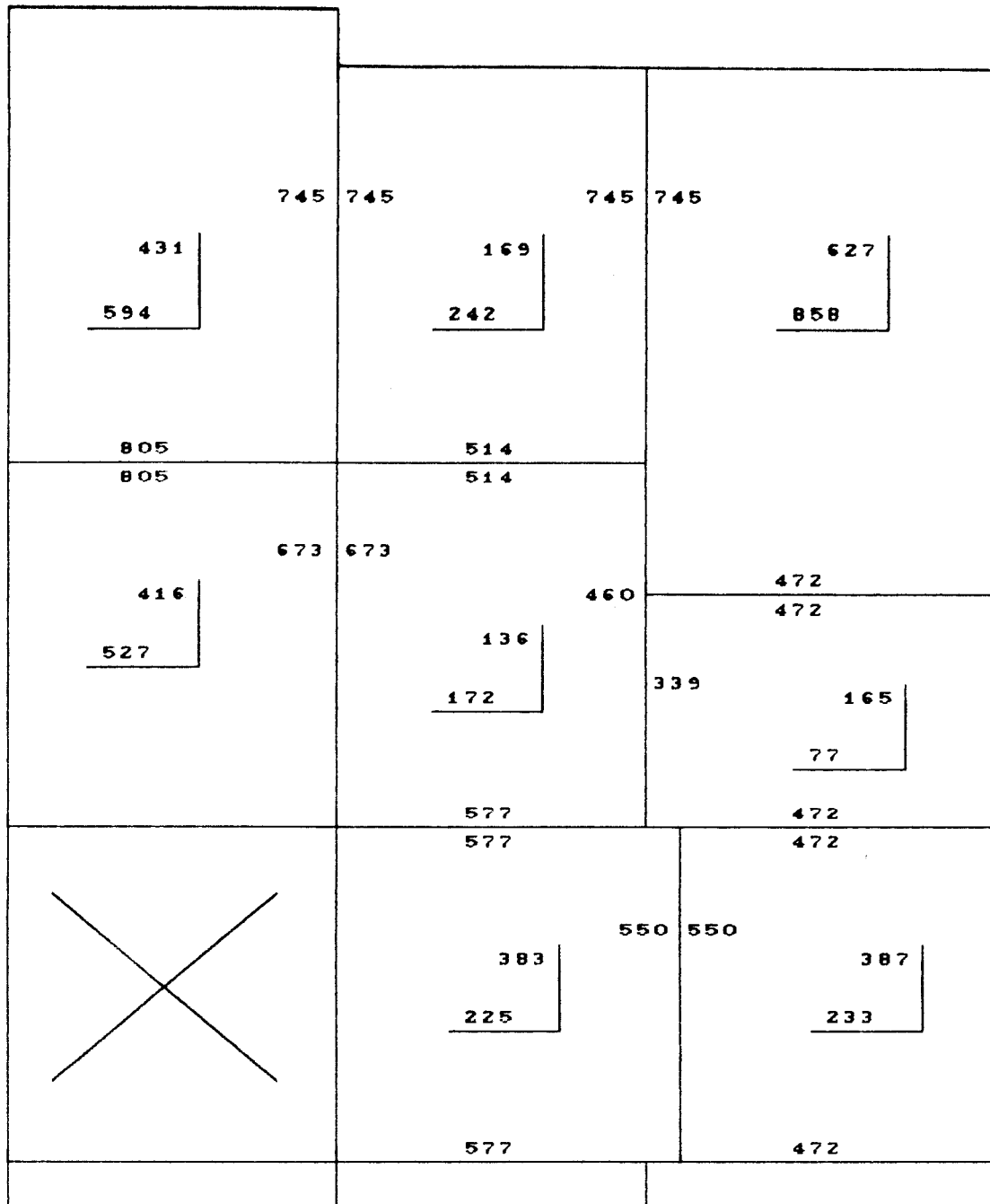
Os momentos negativos usados pelo cálculo plástico são os provenientes do cálculo elástico reduzidos, ou seja, multiplicados por 0,621. A figura 8.9 mostra os momentos utilizados pelo cálculo plástico.



Momentos em kN.cm/m

FIGURA 8.9. - Momentos para o cálculo plástico

Os momentos finais, resultantes do cálculo pela TCP, estão indicados na figura B.10.



Momentos em kN.cm/m

FIGURA B.10. - Momentos provenientes do cálculo plástico

### 8.2.3. Comparação dos resultados

A tabela 8.5 mostra os momentos provenientes do cálculo elástico e plástico e as armaduras resultantes (adotou-se  $d'=1cm$ ). O esquema das armaduras encontra-se na figura 8.11. Vale ressaltar que os comprimentos das armaduras negativas não incluem a ancoragem das mesmas.

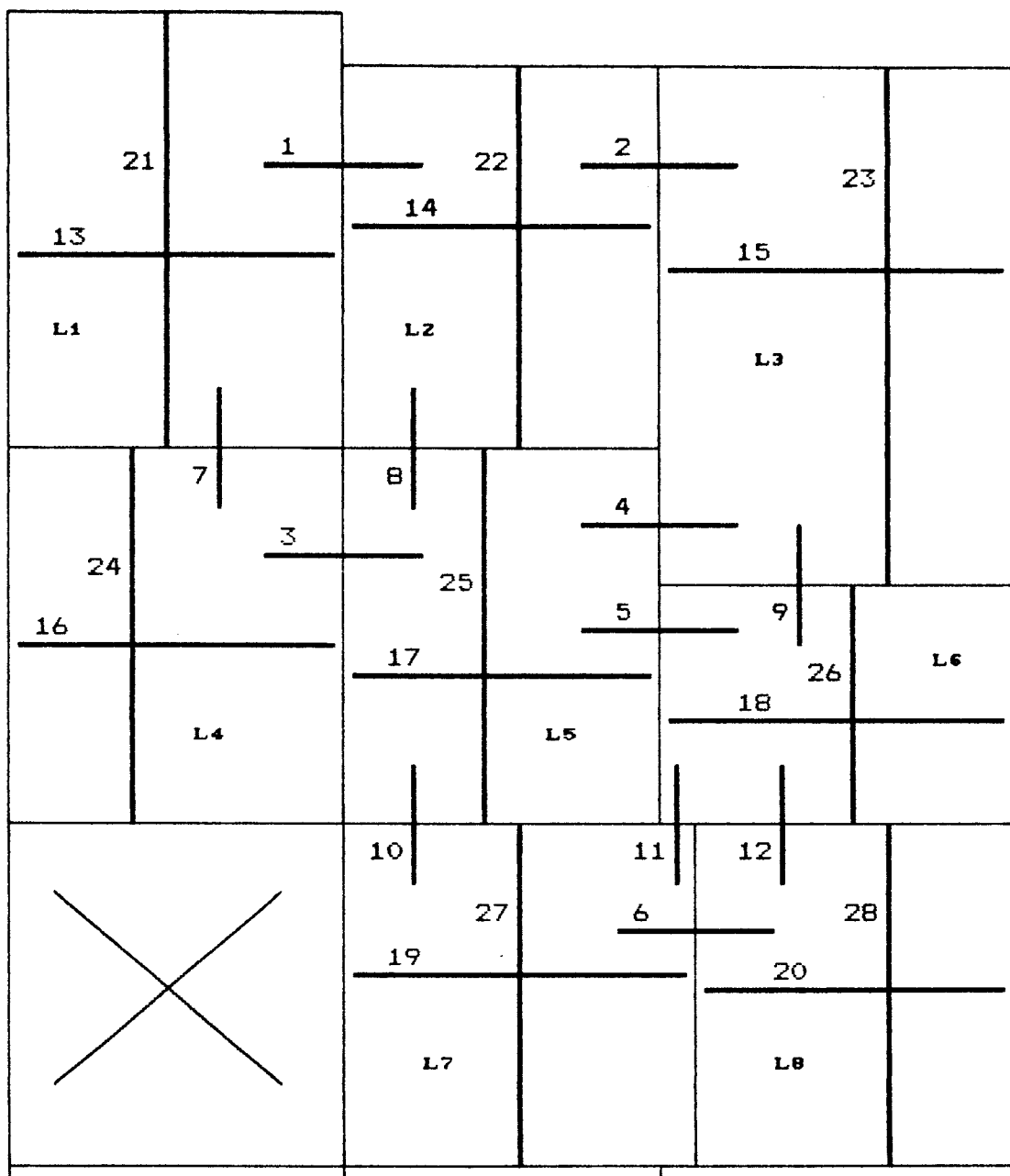


FIGURA 8.11. - Esquema das armaduras

TABELA B.5.- CONSUMO DE AÇO

Nº	Q	b	CÁLCULO ELÁSTICO				CÁLCULO PLÁSTICO			
			$m_k$	$A_s$	$l$	V	$m_k$	$A_s$	$l$	V
1	2	513	1199	6,65	250	17,1	745	3,79	220	8,6
2	2	513	1199	6,65	260	17,7	745	3,79	200	7,8
3	2	535	1083	5,86	250	15,7	673	3,39	240	8,7
4	2	185	1083	5,86	260	5,6	745	2,82	185	1,9
5	2	335	546	2,70	240	4,4	460	2,25	310	4,7
6	1	485	886	4,62	250	5,6	550	2,72	295	3,9
7	2	480	1296	5,17	250	12,4	805	3,07	300	8,8
8	2	463	828	4,28	240	9,5	514	2,53	325	7,6
9	2	503	761	3,89	260	10,2	472	2,31	185	4,3
10	2	463	929	4,88	250	11,3	577	2,86	255	6,7
11	2	25	761	3,89	250	0,5	577	2,86	180	0,3
12	2	463	761	3,89	240	8,6	472	2,31	170	3,6
13	2	583	827	3,16	500	18,4	594	2,22	500	12,9
14	2	513	245	1,20	480	5,9	242	1,20	480	5,9
15	2	713	1207	4,77	520	35,3	858	3,29	520	24,4
16	2	535	746	2,83	500	15,1	527	1,96	500	10,5
17	2	535	385	1,86	480	9,6	172	1,20	480	6,2
18	2	335	117	1,20	520	4,2	77	1,20	520	4,2
19	1	485	365	1,76	520	4,4	225	1,20	520	3,0
20	1	485	363	1,75	480	4,1	233	1,20	480	2,8
21	2	480	520	1,93	600	11,1	431	1,59	600	9,2
22	2	463	332	1,59	530	7,8	169	1,20	530	5,9
23	2	503	903	3,47	730	25,5	627	2,35	730	17,2
24	2	480	505	1,88	550	9,9	416	1,53	550	8,1
25	2	463	244	1,20	550	6,1	136	1,20	550	6,1
26	2	503	182	1,20	350	4,2	165	1,20	350	4,2
27	1	503	555	2,75	500	6,9	383	1,85	500	4,6
28	1	463	593	2,95	500	6,8	387	1,87	500	4,3
Volume aço			$V_1 = 293,9$				$V_2 = 196,4$			
Unidades: $m_k$ (kN.cm/m), $A_s$ (cm ² /m), V (dm ³ ), $l$ e b (cm)										
Nº = número da barra										
Q = número de repetições de cada tipo de barra										
b = largura em que se distribui cada tipo de barra										
$l$ = comprimento da barra										
V = volume de aço das barras										

#### 8.2.4. Flechas

Os valores das flechas máximas das lajes e os limites estabelecidos pela NBR-6118 (item 4.2.3.1) encontram-se na tabela 8.6. Deve-se chamar atenção para o fato de que, em algumas lajes, as flechas totais ultrapassam os limites fornecidos pela NBR-6118.

TABELA 8.6. - FLECHAS

Laje	Flechas (cm)				Limite da NBR
	elástica inicial	final d. lenta	retração	total	
1 = 12	0,491	1,688	0,137	1,825	1,667
2 = 13	0,466	1,632	0,100	1,732	1,600
3 = 14	1,199	3,186	0,168	3,354	1,733
4 = 9	0,334	1,168	0,146	1,315	1,667
5 = 10	0,320	1,137	0,132	1,268	1,600
6 = 11	0,131	0,466	0,162	0,628	1,167
7	0,515	1,766	0,126	1,892	1,667
8	0,349	1,241	0,138	1,379	1,600

#### 8.2.5. Programa

O esquema para a entrada de dados no programa encontra-se na figura 8.12. e os resultados fornecidos pelo programa são apresentados a seguir.



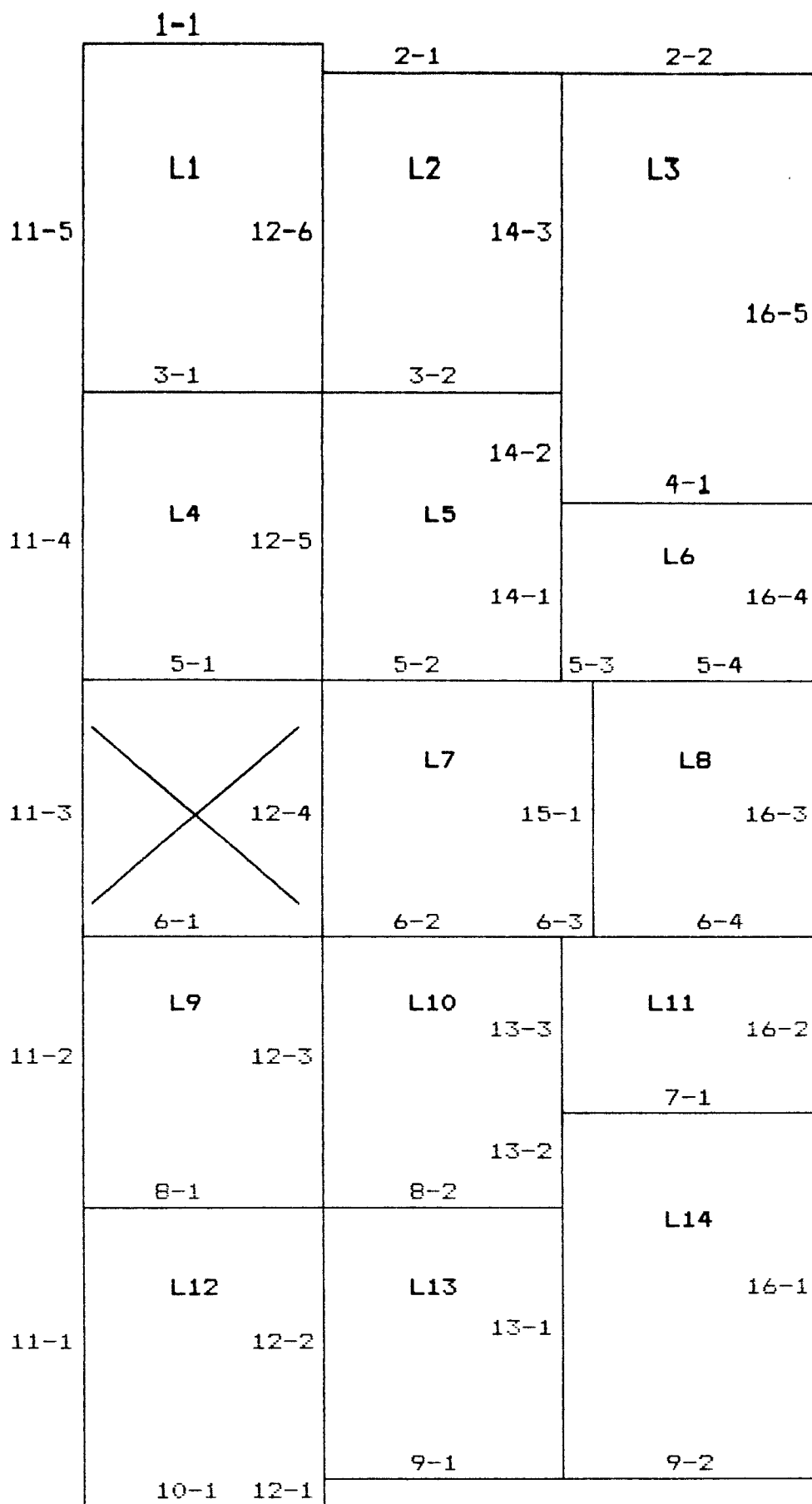


FIGURA 8.12. - Numeração de lajes e vigas



L A J E S - Calculo das lajes de um pavimento

Autora : Patricia Menezes Rios

Obra : Exemplo 2

=====

Laje 2	Lh = 480	Lv = 530	H = 8	G = 4.50	Q = 2.00					
Lado N.Tchs	Tch 1	Tch 2	Tch 3	Tch 4	Tch 5	Tch 6	Tch 7	Tch 8	Tch 9	Tch10
1	1	12 - 6								
2	1	14 - 3								
3	1	2 - 1								
4	1	3 - 2								

Laje 3	Lh = 520	Lv = 730	H = 10	G = 5.00	Q = 2.00					
Lado N.Tchs	Tch 1	Tch 2	Tch 3	Tch 4	Tch 5	Tch 6	Tch 7	Tch 8	Tch 9	Tch10
1	2	14 - 2	14 - 3							
2	1	16 - 5								
3	1	2 - 2								
4	1	4 - 1								

Laje 4	Lh = 500	Lv = 550	H = 10	G = 5.00	Q = 2.00					
Lado N.Tchs	Tch 1	Tch 2	Tch 3	Tch 4	Tch 5	Tch 6	Tch 7	Tch 8	Tch 9	Tch10
1	1	11 - 4								
2	1	12 - 5								
3	1	3 - 1								
4	1	5 - 1								

Laje 5	Lh = 480	Lv = 550	H = 8	G = 4.50	Q = 2.00					
Lado N.Tchs	Tch 1	Tch 2	Tch 3	Tch 4	Tch 5	Tch 6	Tch 7	Tch 8	Tch 9	Tch10
1	1	12 - 5								
2	2	14 - 1	14 - 2							
3	1	3 - 2								
4	1	5 - 2								

Laje 6	Lh = 520	Lv = 350	H = 8	G = 4.50	Q = 2.00					
Lado N.Tchs	Tch 1	Tch 2	Tch 3	Tch 4	Tch 5	Tch 6	Tch 7	Tch 8	Tch 9	Tch10
1	1	14 - 1								
2	1	16 - 4								
3	1	4 - 1								
4	2	5 - 3	5 - 4							

Laje 7	Lh = 520	Lv = 500	H = 8	G = 4.50	Q = 2.00					
Lado N.Tchs	Tch 1	Tch 2	Tch 3	Tch 4	Tch 5	Tch 6	Tch 7	Tch 8	Tch 9	Tch10
1	1	12 - 4								
2	1	15 - 1								
3	2	5 - 2	5 - 3							
4	2	6 - 2	6 - 3							

Laje 8	Lh = 480	Lv = 500	H = 8	G = 4.50	Q = 2.00					
Lado N.Tchs	Tch 1	Tch 2	Tch 3	Tch 4	Tch 5	Tch 6	Tch 7	Tch 8	Tch 9	Tch10
1	1	15 - 1								
2	1	16 - 3								
3	1	5 - 4								
4	1	6 - 4								

**L A J E S - Calculo das lajes de um pavimento**  
**Autora : Patricia Menezes Rios**  
**Obra : Exemplo 2**

=====

Laje 9	Lh = 500	Lv = 550	H = 10	B = 5.00	Q = 2.00						
Lado	N.Tchs	Tch 1	Tch 2	Tch 3	Tch 4	Tch 5	Tch 6	Tch 7	Tch 8	Tch 9	Tch10
1	1	11 - 2									
2	1	12 - 3									
3	1	6 - 1									
4	1	8 - 1									

Laje 10	Lh = 480	Lv = 550	H = 8	B = 4.50	Q = 2.00						
Lado	N.Tchs	Tch 1	Tch 2	Tch 3	Tch 4	Tch 5	Tch 6	Tch 7	Tch 8	Tch 9	Tch10
1	1	12 - 3									
2	2	13 - 2	13 - 3								
3	1	6 - 2									
4	1	8 - 2									

Laje 11	Lh = 520	Lv = 350	H = 8	B = 4.50	Q = 2.00						
Lado	N.Tchs	Tch 1	Tch 2	Tch 3	Tch 4	Tch 5	Tch 6	Tch 7	Tch 8	Tch 9	Tch10
1	1	13 - 3									
2	1	16 - 2									
3	2	6 - 3	6 - 4								
4	1	7 - 1									

Laje 12	Lh = 500	Lv = 600	H = 10	B = 5.00	Q = 2.00						
Lado	N.Tchs	Tch 1	Tch 2	Tch 3	Tch 4	Tch 5	Tch 6	Tch 7	Tch 8	Tch 9	Tch10
1	1	11 - 1									
2	2	12 - 1	12 - 2								
3	1	8 - 1									
4	1	10 - 1									

Laje 13	Lh = 480	Lv = 530	H = 8	B = 4.50	Q = 2.00						
Lado	N.Tchs	Tch 1	Tch 2	Tch 3	Tch 4	Tch 5	Tch 6	Tch 7	Tch 8	Tch 9	Tch10
1	1	12 - 2									
2	1	13 - 1									
3	1	8 - 2									
4	1	9 - 1									

Laje 14	Lh = 520	Lv = 730	H = 10	B = 5.00	Q = 2.00						
Lado	N.Tchs	Tch 1	Tch 2	Tch 3	Tch 4	Tch 5	Tch 6	Tch 7	Tch 8	Tch 9	Tch10
1	2	13 - 1	13 - 2								
2	1	16 - 1									
3	1	7 - 1									
4	1	9 - 2									

**** RESULTADOS ****

**Momentos provenientes do CALCULO ELASTICO**

Laje 1	Mh = 674	Mv = 509	Xh = 1506	Xv = 1318
Laje 2	Mh = 445	Mv = 329	Xh = 999	Xv = 803
Laje 3	Mh = 868	Mv = 534	Xh = 1877	Xv = 1500

**L A J E S - Calculo das lajes de um pavimento**  
**Autora : Patricia Menezes Rios**  
**Obra : Exemplo 2**

```

=====
Laje 4  Mh = 602  Mv = 516  Xh = 1372  Xv = 1274
Laje 5  Mh = 395  Mv = 300  Xh = 903  Xv = 822
Laje 6  Mh = 163  Mv = 308  Xh = 455  Xv = 634
Laje 7  Mh = 361  Mv = 448  Xh = 894  Xv = 1035
Laje 8  Mh = 367  Mv = 399  Xh = 879  Xv = 955
Laje 9  Mh = 602  Mv = 516  Xh = 1372  Xv = 1274
Laje 10 Mh = 395  Mv = 300  Xh = 903  Xv = 822
Laje 11 Mh = 163  Mv = 308  Xh = 455  Xv = 634
Laje 12 Mh = 674  Mv = 509  Xh = 1506  Xv = 1318
Laje 13 Mh = 445  Mv = 329  Xh = 999  Xv = 833
Laje 14 Mh = 868  Mv = 534  Xh = 1877  Xv = 1500
    
```

**Momentos negativos apos a COMPATIBILIZACAO**

VIGA	M 1	M 2	M 3	M 4	M 5	M 6	M 7	M 8	M 9	M 10
1	0									
2	0	0								
3	1296	828								
4	761									
5	0	929	761	761						
6	0	929	761	761						
7	761									
8	1296	828								
9	0	0								
10	0									
11	0	0	0	0	0					
12	0	1199	1083	0	1083	1199	0			
13	1199	1083	546							
14	546	1083	1199							
15	886									
16	0	0	0	0	0					

**Momentos para o CALCULO PLASTICO**

```

Laje 1
  Pos.  Mh = 1054  Mv = 765
  Neg.  M1 = 0      M2 = 745  M3 = 0      M4 = 805
Laje 2
  Pos.  Mh = 699  Mv = 489
  Neg.  M1 = 745  M2 = 745  M3 = 0      M4 = 514
Laje 3
  Pos.  Mh = 1435 Mv = 1047
  Neg.  M1 = 745  M2 = 0     M3 = 0      M4 = 472
Laje 4
  Pos.  Mh = 951  Mv = 750
  Neg.  M1 = 0     M2 = 673  M3 = 805    M4 = 0
Laje 5
  Pos.  Mh = 731  Mv = 577
  Neg.  M1 = 673  M2 = 460  M3 = 514    M4 = 577
    
```

**L A J E S - Calculo das lajes de um pavimento**

**Autora : Patricia Menezes Rios**

**Obra : Exemplo 2**

=====

**Laje 6**

Pos. Mh = 221 Mv = 470  
Neg. M1 = 339 M2 = 0 M3 = 472 M4 = 472

**Laje 7**

Pos. Mh = 533 Mv = 907  
Neg. M1 = 0 M2 = 550 M3 = 577 M4 = 577

**Laje 8**

Pos. Mh = 531 Mv = 882  
Neg. M1 = 550 M2 = 0 M3 = 472 M4 = 472

**Laje 9**

Pos. Mh = 951 Mv = 750  
Neg. M1 = 0 M2 = 673 M3 = 0 M4 = 805

**Laje 10**

Pos. Mh = 731 Mv = 577  
Neg. M1 = 673 M2 = 460 M3 = 577 M4 = 514

**Laje 11**

Pos. Mh = 221 Mv = 470  
Neg. M1 = 339 M2 = 0 M3 = 472 M4 = 472

**Laje 12**

Pos. Mh = 1054 Mv = 765  
Neg. M1 = 0 M2 = 745 M3 = 805 M4 = 0

**Laje 13**

Pos. Mh = 699 Mv = 489  
Neg. M1 = 745 M2 = 745 M3 = 514 M4 = 0

**Laje 14**

Pos. Mh = 1435 Mv = 1047  
Neg. M1 = 745 M2 = 0 M3 = 472 M4 = 0

**Momentos provenientes do CALCULO PLASTICO**

**Laje 1**

Pos. Mh = 594 Mv = 431  
Neg. M1 = 0 M2 = 745 M3 = 0 M4 = 805

**Laje 2**

Pos. Mh = 242 Mv = 169  
Neg. M1 = 745 M2 = 745 M3 = 0 M4 = 514

**Laje 3**

Pos. Mh = 858 Mv = 627  
Neg. M1 = 745 M2 = 0 M3 = 0 M4 = 472

**Laje 4**

Pos. Mh = 527 Mv = 416  
Neg. M1 = 0 M2 = 673 M3 = 805 M4 = 0

**Laje 5**

Pos. Mh = 172 Mv = 136  
Neg. M1 = 673 M2 = 460 M3 = 514 M4 = 577

**Laje 6**

Pos. Mh = 77 Mv = 165  
Neg. M1 = 339 M2 = 0 M3 = 472 M4 = 472

**L A J E S - Calculo das lajes de um pavimento**

**Autora : Patricia Menezes Rios**

**Obra : Exemplo 2**

=====

**Laje 7**

Pos. Mh = 225 Mv = 383  
 Neg. M1 = 0 M2 = 550 M3 = 577 M4 = 577

**Laje 8**

Pos. Mh = 233 Mv = 387  
 Neg. M1 = 550 M2 = 0 M3 = 472 M4 = 472

**Laje 9**

Pos. Mh = 527 Mv = 416  
 Neg. M1 = 0 M2 = 673 M3 = 0 M4 = 805

**Laje 10**

Pos. Mh = 172 Mv = 136  
 Neg. M1 = 673 M2 = 460 M3 = 577 M4 = 514

**Laje 11**

Pos. Mh = 77 Mv = 165  
 Neg. M1 = 339 M2 = 0 M3 = 472 M4 = 472

**Laje 12**

Pos. Mh = 594 Mv = 431  
 Neg. M1 = 0 M2 = 745 M3 = 805 M4 = 0

**Laje 13**

Pos. Mh = 242 Mv = 169  
 Neg. M1 = 745 M2 = 745 M3 = 514 M4 = 0

**Laje 14**

Pos. Mh = 658 Mv = 627  
 Neg. M1 = 745 M2 = 0 M3 = 472 M4 = 0

**ARMADURA NEGATIVA (cm²/m)**

**Viga 3**

Tramo 1 As = 3.07 L 1= 155 L 4= 145  
 50 ø 6.3 c.10 31 ø 8.0 c.16  
 Tramo 2 As = 2.53 L 2= 160 L 5= 145  
 40 ø 6.3 c.12 24 ø 8.0 c.20

**Viga 4**

Tramo 1 As = 2.31 L 3= 100 L 6= 85  
 40 ø 6.3 c.13

**Viga 5**

Tramo 2 As = 2.86 L 5= 160 L 7= 95  
 44 ø 6.3 c.11 28 ø 8.0 c.17  
 Tramo 3 As = 2.86 L 6= 85 L 7= 95  
 4 ø 6.3 c.11 3 ø 8.0 c.17  
 Tramo 4 As = 2.31 L 6= 85 L 8= 85  
 37 ø 6.3 c.13

**Viga 6**

Tramo 2 As = 2.86 L 7= 95 L10= 160  
 44 ø 6.3 c.11 28 ø 8.0 c.17  
 Tramo 3 As = 2.86 L 7= 95 L11= 85  
 4 ø 6.3 c.11 3 ø 8.0 c.17  
 Tramo 4 As = 2.31 L 8= 85 L11= 85  
 37 ø 6.3 c.13

**L A J E S - Calculo das lajes de um pavimento**  
**Autora : Patricia Menezes Rios**  
**Obra : Exemplo 2**

**Viga 7**

Tramo 1 As = 2.31 L11= 85 L14= 100  
 40 ø 6.3 c.13

**Viga 8**

Tramo 1 As = 3.07 L 9= 145 L12= 155  
 50 ø 6.3 c.10 31 ø 8.0 c.16  
 Tramo 2 As = 2.53 L10= 145 L13= 180  
 40 ø 6.3 c.12 24 ø 8.0 c.20

**Viga 12**

Tramo 2 As = 3.79 L12= 100 L13= 120  
 66 ø 6.3 c. 8 41 ø 8.0 c.13  
 Tramo 3 As = 3.39 L 9= 100 L10= 140  
 61 ø 6.3 c. 9 37 ø 8.0 c.15  
 Tramo 5 As = 3.39 L 4= 100 L 5= 140  
 61 ø 6.3 c. 9 37 ø 8.0 c.15  
 Tramo 6 As = 3.79 L 1= 100 L 2= 120  
 66 ø 6.3 c. 8 41 ø 8.0 c.13

**Viga 13**

Tramo 1 As = 3.79 L13= 120 L14= 80  
 66 ø 6.3 c. 8 41 ø 8.0 c.13  
 Tramo 2 As = 2.82 L10= 105 L14= 80  
 18 ø 6.3 c.11 11 ø 8.0 c.18  
 Tramo 3 As = 2.25 L10= 105 L11= 205  
 25 ø 6.3 c.14

**Viga 14**

Tramo 1 As = 2.25 L 5= 105 L 6= 205  
 25 ø 6.3 c.14  
 Tramo 2 As = 2.82 L 3= 80 L 5= 105  
 18 ø 6.3 c.11 11 ø 8.0 c.18  
 Tramo 3 As = 3.79 L 2= 120 L 3= 80  
 66 ø 6.3 c. 8 41 ø 8.0 c.13

**Viga 15**

Tramo 1 As = 2.72 L 7= 155 L 8= 140  
 46 ø 6.3 c.11 28 ø 8.0 c.18

**ARMADURA POSITIVA (cm²/m)**

**Laje 1**

As_h = 2.22 67 ø 5.0 c. 9 43 ø 6.3 c.14  
 As_v = 1.59 42 ø 5.0 c.12 27 ø 6.3 c.19

**Laje 2**

As_h = 1.20 33 ø 5.0 c.16  
 As_v = 1.20 30 ø 5.0 c.16

**Laje 3**

As_h = 3.29 81 ø 6.3 c. 9 49 ø 8.0 c.15  
 As_v = 2.35 65 ø 5.0 c. 8 40 ø 6.3 c.13

**Laje 4**

As_h = 1.96 55 ø 5.0 c.10 35 ø 6.3 c.16  
 As_v = 1.53 42 ø 5.0 c.12 25 ø 6.3 c.20



**L A J E S - Calculo das lajes de um pavimento**  
**Autora : Patricia Menezes Rios**  
**Obra : Exemplo 2**

<b>Laje 5</b>			
Ash = 1.20	35	∅ 5.0	c.16
Asv = 1.20	30	∅ 5.0	c.16
<b>Laje 6</b>			
Ash = 1.20	22	∅ 5.0	c.16
Asv = 1.20	33	∅ 5.0	c.16
<b>Laje 7</b>			
Ash = 1.20	31	∅ 5.0	c.16
Asv = 1.85	52	∅ 5.0	c.10
		31	∅ 6.3 c.17
<b>Laje 8</b>			
Ash = 1.20	31	∅ 5.0	c.16
Asv = 1.87	48	∅ 5.0	c.10
		30	∅ 6.3 c.16
<b>Laje 9</b>			
Ash = 1.96	55	∅ 5.0	c.10
Asv = 1.53	42	∅ 5.0	c.12
		35	∅ 6.3 c.16
		25	∅ 6.3 c.20
<b>Laje 10</b>			
Ash = 1.20	35	∅ 5.0	c.16
Asv = 1.20	30	∅ 5.0	c.16
<b>Laje 11</b>			
Ash = 1.20	22	∅ 5.0	c.16
Asv = 1.20	33	∅ 5.0	c.16
<b>Laje 12</b>			
Ash = 2.22	67	∅ 5.0	c. 9
Asv = 1.59	42	∅ 5.0	c.12
		43	∅ 6.3 c.14
		27	∅ 6.3 c.19
<b>Laje 13</b>			
Ash = 1.20	33	∅ 5.0	c.16
Asv = 1.20	30	∅ 5.0	c.16
<b>Laje 14</b>			
Ash = 3.29	81	∅ 6.3	c. 9
Asv = 2.35	65	∅ 5.0	c. 8
		49	∅ 8.0 c.15
		40	∅ 6.3 c.13

**FLECHAS (cm)**

<b>Laje 1</b>			
Aih = 0.491	Acc = 1.688	Acs = 0.137	Ath = 1.825
Aiv = 0.384	Acc = 1.342	Acs = 0.176	Atv = 1.518
<b>Laje 2</b>			
Aih = 0.466	Acc = 1.632	Acs = 0.100	Ath = 1.732
Aiv = 0.354	Acc = 1.256	Acs = 0.168	Atv = 1.424
<b>Laje 3</b>			
Aih = 1.199	Acc = 3.186	Acs = 0.168	Ath = 3.354
Aiv = 0.548	Acc = 1.881	Acs = 0.297	Atv = 2.177
<b>Laje 4</b>			
Aih = 0.332	Acc = 1.151	Acs = 0.131	Ath = 1.282
Aiv = 0.334	Acc = 1.169	Acs = 0.146	Atv = 1.315
<b>Laje 5</b>			
Aih = 0.320	Acc = 1.136	Acs = 0.100	Ath = 1.237
Aiv = 0.320	Acc = 1.136	Acs = 0.132	Atv = 1.268

**L A J E S - Calculo das lajes de um pavimento**  
**Autora : Patricia Menezes Rios**  
**Obra : Exemplo 2**

=====

<b>Laje 6</b>				
Aih = 0.131	Acc = 0.466	Acs = 0.162	Ath = 0.628	
Aiv = 0.131	Acc = 0.466	Acs = 0.053	Atv = 0.520	
<b>Laje 7</b>				
Aih = 0.387	Acc = 1.375	Acs = 0.162	Ath = 1.537	
Aiv = 0.515	Acc = 1.766	Acs = 0.126	Atv = 1.892	
<b>Laje 8</b>				
Aih = 0.349	Acc = 1.241	Acs = 0.138	Ath = 1.379	
Aiv = 0.346	Acc = 1.208	Acs = 0.126	Atv = 1.334	
<b>Laje 9</b>				
Aih = 0.332	Acc = 1.151	Acs = 0.131	Ath = 1.282	
Aiv = 0.334	Acc = 1.169	Acs = 0.146	Atv = 1.315	
<b>Laje 10</b>				
Aih = 0.320	Acc = 1.136	Acs = 0.100	Ath = 1.237	
Aiv = 0.320	Acc = 1.136	Acs = 0.132	Atv = 1.268	
<b>Laje 11</b>				
Aih = 0.131	Acc = 0.466	Acs = 0.162	Ath = 0.628	
Aiv = 0.131	Acc = 0.466	Acs = 0.053	Atv = 0.520	
<b>Laje 12</b>				
Aih = 0.491	Acc = 1.688	Acs = 0.137	Ath = 1.825	
Aiv = 0.384	Acc = 1.342	Acs = 0.176	Atv = 1.518	
<b>Laje 13</b>				
Aih = 0.466	Acc = 1.632	Acs = 0.100	Ath = 1.732	
Aiv = 0.354	Acc = 1.256	Acs = 0.168	Atv = 1.424	
<b>Laje 14</b>				
Aih = 1.199	Acc = 3.186	Acs = 0.168	Ath = 3.354	
Aiv = 0.548	Acc = 1.881	Acs = 0.297	Atv = 2.177	

## 9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 9.1. ANÁLISE DOS RESULTADOS DOS EXEMPLOS

No cálculo pela TCP, onde os momentos negativos e a relação entre os positivos são fixados, não é necessário que seja feito um cálculo iterativo entre as lajes vizinhas. Convém ressaltar que, quando um lado de uma laje está conectado com duas lajes diferentes (vide lajes L3 e L5 do exemplo 2), os momentos negativos, adotados para as lajes, podem ser diferentes ao longo do mesmo tramo de viga. Cada laje é dimensionada para seu respectivo momento negativo, levando-se em conta sua espessura, e adotando-se a maior armadura. Esta simplificação não compromete os resultados finais, estando a favor da segurança.

Do cálculo dos comprimentos das armaduras negativas, segundo o que a NBR-6118⁽²¹⁾ (item 3.3.2.7) especifica e seguindo o sugerido no capítulo 6, podem resultar valores bastante diferentes. O cálculo sugerido pela NBR-6118 supõe diagrama triangular de momentos negativos, o que refere-se a hipóteses elásticas, sendo isso um fator para acentuar a diferença.

Fartindo das tabelas 8.2 e 8.5, pode-se concluir que a economia que o cálculo, pela teoria das charneiras plásticas, pode trazer é significativa. No exemplo 1, o cálculo plástico resultou numa economia de 32,0% no consumo de aço, enquanto, no exemplo 2, este valor foi de

33,2%.

Em relação às flechas, observa-se que a flecha total, incluindo os efeitos de deformação lenta e retração, é muito maior que o valor da flecha elástica inicial. A consideração desses dois efeitos, dependentes do tempo, conduz a uma flecha final da ordem de quatro vezes o valor da flecha inicial. Nota-se ainda que existe uma diferença entre as flechas nas duas direções, resultante das simplificações ao se analisar cada direção isoladamente. A título de comparação com os valores limites sugeridos pelas normas, o critério que considera a maior delas é razoável para as lajes com relação entre lados próximo de um, estando a favor da segurança. Pode-se também adotar a flecha na direção dos maiores momentos. Seriam necessários dados experimentais, para que um critério mais apurado pudesse ser sugerido.

Os exemplos apresentam apenas as lajes sem bordas livres, uma vez que a elaboração de funções aproximadas para o cálculo de momentos fletores e flechas está fora do escopo deste trabalho. Essas funções podem ser desenvolvidas e facilmente acopladas ao programa. O trabalho de PINHEIRO^[19] apresenta funções para o caso das lajes retangulares simplesmente apoiadas ou engastadas em seu contorno, que foram utilizadas no programa.

## 9.2. CONCLUSÕES

Não há dúvida alguma de que o cálculo plástico é o mais adequado para o dimensionamento das lajes comuns de edifícios de concreto armado.

O cálculo pela teoria das charneiras plásticas, onde são fixados os próprios momentos negativos e a relação entre os positivos, é bastante vantajoso para o

cálculo de pavimentos, já que não há necessidade de fazer um cálculo iterativo entre as lajes vizinhas. A iteração é feita uma só vez para cada laje isoladamente, sendo bastante simples.

Um estudo sobre o comportamento das funções  $f_1(m)$  e  $f_2(m)$  havia sido desenvolvido por RODRIGUES & REAME JUNIOR⁽⁵⁹⁾, porém só considerava o caso de lajes retangulares simplesmente apoiadas ou engastadas em seu contorno. Neste trabalho, essa análise foi estendida para as lajes retangulares com bordas livres.

A automação do cálculo pode ser feita com facilidade, utilizando as expressões fornecidas no capítulo 6, e tornando-se uma ferramenta muito útil para o engenheiro. A formulação desenvolvida no capítulo 6, além de lajes retangulares simplesmente apoiadas ou engastadas em seu contorno, abrange as lajes retangulares com bordas livres e com cargas lineares ao longo das mesmas. É importante, também, o cálculo do ponto de interrupção da armadura negativa, baseado na teoria das charneiras plásticas, uma vez que o procedimento, sugerido pela NBR-6118, adota algumas hipóteses elásticas.

O programa que foi desenvolvido é bastante flexível, pois oferece a possibilidade do usuário escolher, entre outros, o critério de compatibilização dos momentos negativos, o fator de redução do momento negativo, etc (ver item 3.2). Apesar disso, conforme foi mostrado no capítulo 7, sua utilização é muito simples e fácil.

Mesmo sabendo-se que o cálculo de lajes pela TCP, geralmente conduz a momentos fletores menores que os resultantes do cálculo elástico, deve-se ter em mente que o cálculo elástico é imprescindível. A escolha dos momentos negativos e da relação entre os momentos positivos, baseados na teoria da elasticidade, não violenta o comportamento das lajes em serviço, permitindo

uma distribuição mais racional das armaduras.

Uma vez que é recomendado que seja efetuado, previamente, o cálculo elástico, sua automatização pode ser feita substituindo-se as tabelas por funções aproximadas, como fez PINHEIRO⁽¹⁹⁾. Para efeito de programação, esta substituição é muito prática e conduz a bons resultados.

Quanto aos momentos negativos, deve-se ressaltar que, no cálculo plástico, recomenda-se que sejam adotados como valores de serviço os do cálculo elástico reduzidos, de forma que os momentos positivos finais não resultem muito pequenos. Isto é interessante, tanto do ponto de vista econômico quanto do ponto de vista prático. Sabe-se que, em última instância, as armaduras inferiores são as responsáveis pela segurança da laje, não sendo conveniente que essas armaduras apresentem pequena capacidade resistente, tendo em conta a má execução da concretagem. Ao mesmo tempo, resultam em armaduras mais balanceadas, o que permite a adoção de espessuras menores.

A redução da espessura da laje direciona uma maior atenção aos problemas de deformação. A verificação da possibilidade de ser atingido o estado de deformação excessiva deve ser mais cuidadosa, conduzindo a um cálculo mais apurado das flechas.

O cálculo das flechas nas lajes, considerando apenas a flecha elástica instantânea, leva a uma estimativa muito reduzida da flecha real. Pode-se observar que a consideração da deformação lenta, da retração e da diminuição da rigidez devida à fissuração, resulta em valores muito superiores ao da flecha elástica inicial. Sabendo-se que a laje comporta-se elasticamente, em serviço, o cálculo elástico é, novamente, fundamental para a verificação dos estados limites de utilização.

Com relação à teoria das charneiras plásticas, este trabalho apresenta uma dedução mais geral para o cálculo das forças nodais e uma demonstração mais

abrangente do teorema da afinidade.

### 9.3. NOVAS PESQUISAS

Tendo em vista as vantagens que o cálculo plástico pode proporcionar, é interessante que sejam analisadas outras formas de lajes, tais como lajes em L, esconsas, triangulares, etc. Este trabalho também pode ser estendido para as lajes-cogumelo.

Pode-se fazer um estudo mais apurado dos estados limites de utilização, incluindo-se a verificação de fissuração. Seria muito interessante que fosse desenvolvida uma pesquisa experimental nesse sentido.

É ainda conveniente que sejam analisados procedimentos que permitam a sistematização do pré-dimensionamento das lajes, no que diz respeito à determinação da espessura. Os valores sugeridos pelas normas são, em geral, exagerados, sobretudo por serem valores que dispensam a verificação das deformações.

No que toca à economia trazida pelo cálculo plástico em relação ao cálculo elástico, deve-se assinalar que um dos fatores é o fato de serem utilizados momentos máximos no cálculo elástico. Caso fossem usados momentos médios, a diferença seria menor. Uma pesquisa neste sentido será proveitosa.

Conforme foi comentado no capítulo 2, o cálculo das reações de apoio das lajes, pela NBR-6118⁽²¹⁾, é inspirado no comportamento da laje em regime plástico. No entanto, geralmente, as cargas transferem-se das lajes para seus apoios com a estrutura trabalhando elasticamente. Será de grande utilidade preparar funções aproximadas para a determinação das reações de apoio em regime elástico. É ainda necessário que sejam determinadas funções para

outros tipos de vinculação e de carregamentos. Isso poderá, facilmente, ser introduzido no programa aqui desenvolvido.

Finalizando, o trabalho realizado apresenta uma evidente contribuição ao cálculo de lajes de edifícios e as pesquisas sugeridas podem trazer um aprimoramento ainda maior.



## 10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] INGERSLEV, A. The strength of rectangular slabs. *The Institution of Structural Engineer's Journal*, Jan. 1923.
- [02] JOHANSEN, K. W. Bruchmoment der Kreuzweise bewehrten Platten. *Mémoires, Association Internationale des Ponts et Charpents*: 277-296, 1932.
- [03] GVOZDEV, A. A. *Determinación del valor de la carga de rotura para los sistemas estáticamente indeterminados*. Proyecto y Norma nº 8, 1934.
- [04] GVOZDEV, A. A. *Determinación del valor de la carga de rotura para los sistemas estáticamente indeterminados que sufren deformaciones plásticas*. Trabajos de las Conferencias sobre Deformaciones Plásticas, Academia de Ciencias de la URSS, Departamento de Ciências Técnicas, Moscú, 1938.
- [05] GVOZDEV, A. A. Fundamentación del § 33 de las normas para el proyecto de las estructuras de hormigón armado. *Industria de la Construcción*, (3), 1939.
- [06] GVOZDEV, A. A. *Acerca del equilibrio límite*. In: MANUAL del Ingeniero, 1948. v.5.
- [07] GVOZDEV, A. A. *Cálculo de la capacidad portante de las estructuras por el método del equilibrio límite*. Moscú, Striizdat, 1949.

- [08] GVOZDEV, A. A. *Metodo del equilibrio límite y su aplicación al cálculo de estructuras de hormigón armado*. In: MANUAL del Ingeniero. 2.ed., 1949. v.5.
- [09] JOHANSEN, K. W. *Brudlinieteorier*. Genoptrykt, Polyteknisk Forening, 1943. 189p.
- [10] JOHANSEN, K. W. *Pladeformler*. 2.ed., Kobenkavn, Polyteknisk Forening, 1949. 172p.
- [11] CHAMECKI, Samuel *Cálculo, no regime de ruptura, das lajes de concreto armadas em cruz*. Curitiba, Guaíra, 1948. 106p.
- [12] MANSFIELD, E. H. Studies in collapse analysis of rigid-plastic plates with a square yield diagram. *Proceedings of the Royal Society*: 211-338, London, 1957.
- [13] WOOD, R. H. *Plastic and elastic design of slabs and plates*. London, Thames & Hudson, 1961.
- [14] JONES, L. L. *Ultimate load analysis of reinforced and prestressed concrete structures*. New York, Frederick Ungar Publishing Co., 1966. 248p.
- [15] LANGENDONCK, Telemaco V. *Charneiras plásticas em lajes de edifícios*. São Paulo, ABCP, 1966. 81p.
- [16] LANGENDONCK, Telemaco V. *Teoria elementar das charneiras plásticas*. São Paulo, ABCP, 1970. v.1. 414p.
- [17] LANGENDONCK, Telemaco V. *Teoria elementar das charneiras plásticas*. São Paulo, ABCP, 1975. v.2. 520p.
- [18] AMARAL, Otávio C. do *Sobre as lajes contínuas*. *Revista da Escola de Engenharia da UFMG*, Belo Horizonte, 3 (6): 133-161, nov. 1964.

- [19] PINHEIRO, Libânio M. *Análise elástica e plástica de lajes retangulares de edifícios*. São Carlos, 1988. 303p. (Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos/USP).
- [20] SANTOS, Lauro M. Cálculo plástico de lajes contínuas de edifícios de concreto armado. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, I. São Paulo, 22 a 24 de ago. 1989. *Anais*. São Paulo, NEP/EPUSP, 1989. v.2 p.577-608.
- [21] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto e execução de obras de concreto armado: NBR-6118*. Rio de Janeiro, ABNT, 1978. 76p.
- [22] MAZZILLI, Antônio R. P. & FUSCO, Péricles B. *Influência da flexibilidade das vigas de apoio no cálculo de estruturas de edifícios*. São Paulo, s.ed., 1988. 29p.
- [23] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON *Code-modèle CEB-FIP pour les structures en béton*. Paris, CEB, 1978. v.2. (Bulletin d'information n° 124/125-F).
- [24] AMERICAN CONCRETE INSTITUTE *Building code requirements for reinforced concrete (ACI 318M-83)*. Detroit, ACI, 1985.
- [25] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Cargas para o cálculo de estruturas de edificações: NBR-6120*. Rio de Janeiro, ABNT, 1980. 6p.
- [26] FUSCO, Péricles B. *Estruturas de concreto; fundamentos do projeto estrutural*. São Paulo, McGraw Hill/Universidade de São Paulo, 1976. 298p.
- [27] TIMOSHENKO, S. *Theory of plates and shells*. New York, McGraw Hill, 1940. 429p.
- [28] BARES, R. *Tablas para el calculo de placas y vigas pared*. Barcelona, Gustavo Gili, 1972.

- [29] BREBBIA, C. A. & CONNOR, J. *Metodos de los elementos finitos en la ingenieria civil*. Madrid, CPPE, 1975. 260p.
- [30] ZIENKIEWICZ, D. C. *El metodo de los elementos finitos*. Barcela, 3.ed., Editorial Reverté S.A., 1980. 903p.
- [31] COOK, Robert D. *Concepts and applications of the finite element analysis*. New York, John Wiley & Sons, 1974. 402p.
- [32] PAIVA, J. B. *Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas*. São Carlos, 1988. (Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos/USP).
- [33] BREBBIA, C. A. *The boundary element method for engineers*. London, Pentech Press, 1978.
- [34] TAKEYA, T. et alii *Recomendações para o projeto e a execução da estrutura em lajes-cogumelo pertencentes às unidades básicas de saúde do plano metropolitano de saúde*. São Carlos, Departamento de Estruturas da EESC-USP, 1985. (Relatório Técnico).
- [35] ANTUNES, H. M. C. C. & MAGRI, J. A. Sistema para cálculo de placas e chapas utilizando microcomputadores. In: CONGRESSO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA INGENIERÍA, VI, Santa Fé, Argentina, 1985. p.342-356.
- [36] CZERNY, F. Tafeln für vierseitig und dreiseitig gelagerte Rechteckplatten (Tabelas para placas retangulares apoiadas em quatro e em três lados). *Beton-kalender*, Berlin, 65 (1): 305-381, 1976.
- [37] KALMANOCK, A. S. *Manual para cálculo de placas*. Montevideo, Inter Ciência, 1961. 285p.

- [38] SANTOS, Lauro M. dos *Edifícios de concreto armado; generalidades, lajes. s.l.,* FDTE-EPUSP-IPT, 1984. v.1. (mimeografado).
- [39] POLILLO, Adolpho. *Dimensionamento de concreto armado. 2.ed.,* Rio de Janeiro, Científica, 1974. v.2.
- [40] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Ações e segurança nas estruturas: NBR-8681.* Rio de Janeiro, ABNT, 1984. 21p.
- [41] RÜSCH, Hubert. *Concreto armado e protendido; propriedades dos materiais e dimensionamento.* Rio de Janeiro, Campus, 1981. 396p.
- [42] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON *Cracking and deformations.* Lausanne, CEB, 1985 (Bulletin d'information n° 158-E).
- [43] LEONHARDT, F. *Construções de concreto; verificação da capacidade de utilização. 2.ed.,* Rio de Janeiro, Interciência, 1979. v.4. 210p.(Traduzido do original alemão: Vorlesungen über massivbau - vierter teil).
- [44] BRANSON, Dan E & TROST, Heinrich. Unified procedures for predicting the deflections and centroidal axis location of partially cracked nonprestressed and prestressed concrete members. *Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 79 (2):* 119-130, march-april, 1982.
- [45] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de estruturas de concreto protendido: NBR-71.* Rio de Janeiro, ABNT, 1989. 71p.
- [46] SANTOS, Lauro M. Flechas de vigas de concreto armado levando em conta o efeito da fluência. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, I. São Paulo, 22 a 24 de ago. 1989. *Anais.* São Paulo, NEP/EPUSP, 1989. v.2 p.633-658.

- [47] AMERICAN CONCRETE INSTITUTE *Prediction of creep, shrinkage and temperature effects in concrete structures. Designing for creep and shrinkage in concrete structures (ACI 209)*. Detroit, ACI, 1982. pp 193-300 (SP-76).
- [48] CHAMECKI, Samuel. *Cálculo das lajes no regime de ruptura*. s.l., Enciclopédia Técnica Universal Globo, s.d. v.6. 171p.
- [49] COMITÉ EUROPÉEN DU BÉTON. *Dalles et structures planes. Annexes aux recommandations internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton*. Roma, Associazione Italiana Tecnico-Economica del Cemento (AITEC), 1972. Tome 3, 196p.
- [50] NIELSEN, M. P. A new nodal-force theory. In: *Recent developments in yield-line theory*. London, Cement and Concrete Association, 1965. (M.C.R. Special Publication).
- [51] KEMP, K. O. The evaluation of nodal and edge forces in yield-line theory. In: *RECENT developments in yield-line theory*. London, Cement and Concrete Association, 1965. (M.C.R. Special Publication).
- [52] MORLEY, C. T. Equilibrium methods for least upper bounds of rigid-plastic plates. In: *RECENT developments in yield-line theory*. London, Cement and Concrete Association, 1965. (M.C.R. Special Publication).
- [53] WOOD, R. H. New techniques in nodal-force theory for slabs. In: *RECENT developments in yield-line theory*. London, Cement and Concrete Association, 1965. (M.C.R. Special Publication).

- [54] JONES, L. L. The use of nodal forces in yield-line analysis. In: RECENT developments in yield-line theory. London, Cement and Concrete Association, 1965. (M.C.R. Special Publication).
- [55] KWIECYNISKI, M. W. Yield criterion for initially isotropic reinforced slab. *Magazine of Concrete Research*, London, 17 (51): 97-100, jun. 1965.
- [56] KWIECYNISKI, M. W. Some tests on the yield criterion for a reinforced slab. *Magazine of Concrete Research*, London, 17 (52): 135-138, sept. 1965.
- [57] KWIECYNISKI, M. W. Yield criterion for an orthotropically reinforced slab. *International Journal of Solids and Structures*, 1 (4).
- [58] JONES, L. L. & WOOD, R. H. *Yield-line analysis of slabs*. London, Thames & Hudson / Chatto & Windus, 1967. 405p.
- [59] RODRIGUES, Rogério O. & REAME JUNIOR, Cleiner Contribuição ao cálculo de lajes retangulares pela teoria das charneiras plásticas. In: PINHEIRO, Libânio M., coord. *II Seminário sobre teoria das charneiras plásticas*. São Carlos, Departamento de Estruturas - EESC/USP, 1988. 35p.

## 11. BIBLIOGRAFIA

- BAUER, D. & REDWOOD, R. G. Numerical yield-line analysis. *Computers & Structures*, 26, (4): 587-596, 1987.
- BRANSON, Dan E. Deflections of reinforced concrete flexural members. *Journal of the American Concrete Institute*, Detroit, 63: 637-674, june, 1966.
- CÁMPORA, G. Fratelli de. *Cálculo plástico; análisis y diseño límite de sistemas estructurales planos*. Buenos Aires, 1967. 428p.
- COPE, R. J. & CLARK, L. A. *Concrete slabs; analysis and design*. London - New York, Elsevier Applied Science Publishers, 1984. 502p.
- DAS, Manoranjan; MALAIVONGS, Kanchit & SMITH, R. B. L. Yield-line analysis of reinforced concrete slabs using a digital computer. *American Concrete Institute*, Detroit, 1972. p.259-281 (SP-33).
- DICKENS, J. G. & JONES, L. L. A general computer program for the yield-line solution of edge supported slabs. *Computers & Structures*, 30, (3): 465-476, 1988.
- DUBINSKY, A. M. *Calculo de losas por el metodo de las lineas de rotura*. Montevideo, Tecni Ciencia, 1964. 237p.
- GIONGO, José S. Exemplo práctico de dimensionamento. In: CURSO básico intensivo de argamassa armada, São Paulo, ABCP, 1988. 23p.



- GOBETTI, Leda C. W. *Determinação de momentos e deformações em lajes retangulares maciças sob carregamento linear*. Porto Alegre, Escola de Engenharia da UFRGS, 1986 (Caderno técnico CT-68).
- JOHANSEN, K. W. *Linhas de ruptura: teoria e prática*. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1962. 380p. (Traduzido e adaptado dos originais dinamarqueses: Brudlinieteorier e Pladeformler).
- LEONHARDT, F. & MÖNNIG, E. *Construções de concreto; princípios básicos sobre a armação de estruturas de concreto armado*. 3.ed. Rio de Janeiro, Interciência, 1978. v.3. 273p. (Traduzido do original alemão: Vorlesungen über massivbau - dritter teil).
- MACHADO, Claudinei P. Sugestões para um aprimoramento do método aproximado de avaliação de flechas de peças de concreto armado da NBR-6118-78. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, I. São Paulo, 22 a 24 de ago. 1989. *Anais*. São Paulo, NEP/EPUSP, 1989. v.2 p.659-689.
- MARCELINO, Narbal & FURLAN JUNIOR, Sidney. Fissuração e cálculo das flechas. In: PINHEIRO, Libânio M., coord. *II Seminário sobre teoria das charneiras plásticas*. São Carlos, Departamento de Estruturas - EESC/USP, 1988. 42p.
- MARTINELLI, Dante A. O., MONTANARI, Ilio & SAVASSI, Walter *Placas elásticas*. São Carlos, EESC-USP, 1986. 114p.
- MONTOYA, P. J. et alii. *Hormigón armado*. 7.ed. Barcelona, Gustavo Gili, 1973. v.1. 705p.
- PALMER, Andrew C. Application of mathematical programming to yield-line analysis. *Magazine of Concrete Research*, 22, (73): 227-231, dez 1970.

- PINHEIRO, Libânio M. *Charneiras plásticas em lajes com forma de T; estudo experimental*. São Carlos, 1980. (Dissertação de Mestrado - Escola de Engenharia de São Carlos/USP).
- ROCHA, Aderson M. *Novo curso prático de concreto armado*. 13.ed. Rio de Janeiro, Científica, 1972. v.1.
- SCHIEL, Frederico. *Introdução à resistência dos materiais*. São Paulo, Harper e Row do Brasil, 1984. 395p.
- SUSSEKIND, José C. *Curso de concreto; concreto armado*. 2.ed. Porto Alegre - Rio de Janeiro, Globo, 1981. v.1. 376p.
- TIMOSHENKO, Stephen P. *History of strength of materials*. New York, McGraw Hill, 1953. 452p.