

**ANÁLISE DE PLACAS DE BORDA CURVA PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

AUTOR: ENG. LUTTGARDES DE OLIVEIRA NETO

ORIENTADOR: PROF.DR. JOÃO BATISTA DE PAIVA

**DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ANÁLISE DE PLACAS DE BORDA CURVA
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO

AUTOR : ENG. LUTTGARDES DE OLIVEIRA NETO

ORIENTADOR : PROF. DR. JOÃO BATISTA DE PAIVA

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

COMISSÃO EXAMINADORA:

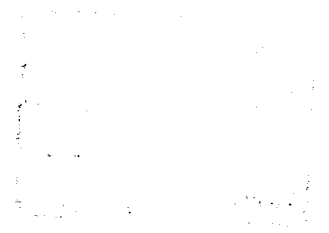
Prof. Assoc. Wilson Sérgio Venturini

(Orientador Designado) - EESC - USP

Prof. Assoc. José Alberto Cuminato - ICMSC - USP

Prof. Dr. Marcio Antonio Ramalho - EESC - USP

São Carlos
FEVEREIRO 1991



Aos meus pais,
Luttgardes e Thelma

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

ao orientador Prof. Dr. João Batista de Paiva, pelo incentivo;

ao Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini, pela colaboração;
à Lucy Gonçalves de Oliveira, pelo amor, companheirismo e dedicação;

aos amigos, pela paciência e pelo incentivo;

ao Centro de Processamento de Dados da Escola de Engenharia de São Carlos, pela utilização de seus equipamentos;

à Sra. Maria Nadir Minatel, pela colaboração na pesquisa bibliográfica;

à Sra. Sylvia H. M. Villani, pelos desenhos;

ao CNPq, pela pontualidade em suas atribuições;

a todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Placas Elástico-Isótropas com Contorno Curvo. Neste estudo o contorno da placa é aproximado, a nível de cada elemento, por um polinômio do segundo grau ou por um arco de circunferência, a critério do usuário, de maneira a melhor representar o contorno real.

A integração numérica, para elemento vizinho ou não ao "load point", é feita pela transformação auto-adaptativa de coordenadas proposta por Telles [1]. Nesta formulação utiliza-se uma transformação polinomial de terceiro grau que produz uma nova distribuição dos pontos de Gauss. Também faz-se uso da formulação apresentada por Paiva [2], onde a força cortante equivalente é admitida como esforço concentrado nos nós do contorno. Alguns exemplos numéricos ilustrativos atestam a melhor precisão permitida pela integração, assim como sua simples implementação a programas computacionais pelo Método dos Elementos de Contorno.

ABSTRACT

The aim of this work is to present a formulation of Boundary Element Method to analyse elastic-isotropic plates with curved boundary. In this study the plate boundary is approximated, along each element, by a second degree polynomial relation or by a arch of circumference, according the user criterion, in order to better represent the real boundary. The numerical integration is performed by self-adaptive co-ordinate transformation proposed by Telles [1]. The effective shear forces is approached by concentrated reactions applied at the bounday element nodes, the alternative formulation introduced by Paiva [2]. Some examples are presented to demonstrate the better accuracy obtained by the integration and by those elements, well as their easy implementation into Boundary Element codes.

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	1
2.	FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS DELGADAS.....	5
2.1.	Introdução.....	5
2.2.	Hipóteses básicas.....	6
2.3.	Relações básicas para placas isotrópicas.....	6
2.4.	Equações de placas em coordenadas polares.....	15
2.5.	Soluções fundamentais de placas.....	19
3.	EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO EM PLACAS.....	27
3.1.	Introdução.....	27
3.2.	Equação integral para um ponto do domínio.....	27
3.3.	Equação integral para um ponto do contorno.....	36
3.4.	Integrais de domínio para o carregamento.....	45
4.	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO :	
	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA.....	49
4.1.	Introdução.....	49
4.2.	Discretização das equações integrais.....	50
4.2.1.	Elemento Quadrático Contínuo.....	51
4.2.2.	- Elemento Circular Contínuo.....	54
4.2.3.	- Equações Matriciais.....	58
4.2.4.	- Deslocamentos para pontos internos.....	64
4.2.5.	- Esforços para pontos internos.....	65

4.3.	Montagem das Matrizes H e G.....	72
4.3.1	- Integração sobre os elementos.....	72
4.3.2	- Transformação Auto-Adaptativa de Coordenadas.....	81
4.3.2	- Contribuição de canto na Matriz H..	84
4.3.4	- Força Cortante Equivalente Pontual..	89
4.3.5	- Propriedades da Matriz H.....	92
5.	EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	95
5.1.	Introdução.....	95
5.2.	Exemplo 1: Placa circular engastada com carregamento uniformemente distribuído..	95
5.3.	Exemplo 2: Placa circular engastada ; análise de simetria.....	97
5.4.	Exemplo 3: Placa circular engastada com carga concentrada no ponto central..	99
5.5.	Exemplo 4: Placa circular apoiada em três apoios discretos.....	100
5.6.	Exemplo 5: Placa anular apoiada no contorno interno e com a borda externa livre....	101
5.7.	Exemplo 6: Placa elíptica simplesmente apoiada.....	103
6.	ESTRUTURA DO PROGRAMA.....	105
6.1.	Introdução.....	105
6.2.	Fluxograma.....	105
6.2.1.	Sub-rotina INPUT.....	106
6.2.2.	Sub-rotina MATRIZ.....	106
6.2.3.	Sub-rotina INTEGR.....	106
6.2.4.	Sub-rotinas CARAC e CIRC.....	107
6.2.5.	Sub-rotina GAUSS.....	107
6.2.6.	Sub-rotina OUTPUT.....	107
6.2.7.	Sub-rotina MOMINT.....	108
6.2.8.	Sub-rotina INTEG1.....	108
7.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	109

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....111

9. BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR.....116

APÊNDICES

- A.1. Sub-rotina INTEGR.....A1
- A.2. Sub-rotina CARAC.....B1
- A.3. Sub-rotina CIRC.....C1

1. INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos de Contorno tem sido uma ferramenta útil na solução de problemas práticos em engenharia. Várias formulações já foram desenvolvidas, analisando-se problemas bi-dimensionais, tri-dimensionais e axissimétricos.

O método é formulado usando-se equações integrais de contorno, ao contrário dos demais métodos numéricos conhecidos que apresentam incógnitas no domínio e no contorno. Esta característica faz com que sua formulação se apresente em uma dimensão menor que a do problema real. Por exemplo, nos problemas bi-dimensionais a análise recai sobre seu contorno uni-dimensional.

As equações integrais são conhecidas desde o século XIX e foram aplicadas à teoria clássica da elasticidade pela primeira vez por BETTI [3] em 1872. SOMIGLIANA e CERRUTI apresentaram trabalhos para elasticidade plana por volta de 1880. A elasticidade bi-dimensional também foi assunto estudado por matemáticos russos como MUSKHELISHVILI [4] (1953) e MIKHLIN [5] (1957). KUPRADZE [6] (1965), pelo chamado Método Indireto, apresentou a primeira formulação dos chamados métodos de contorno utilizando equações integrais cujas variáveis envolvidas não eram as variáveis físicas do problema estudado. Já em 1967, RIZZO [7] apresentou, ainda para a elasticidade bi-dimensional, o

método na sua forma direta

Os métodos de contorno consistem na discretização do contorno em segmentos, onde as variáveis nodais são aproximadas por funções interpoladoras. CRUSE [8] inicialmente utilizou-se da função constante introduzindo posteriormente a função linear para problemas de elasticidade tri-dimensional [9], assim como RICARDELLA [10] apresentou para problemas bi-dimensionais. Posteriormente, LACHAT [11] desenvolveu elementos com funções interpoladoras de ordem superior.

Em 1976, HANSEN [12] introduziu a formulação direta do método para análise de placas infinitas com furo escrevendo equações integrais do deslocamento transversal w e de sua variação $\frac{\partial w}{\partial m}$.

A técnica dos Resíduos Ponderados foi utilizada por BREBBIA [13] para escrever uma nova formulação para o método, com novas bases matemáticas, permitindo uma maior generalização na sua aplicação em engenharia. A formulação direta para placas finitas com quaisquer condições de contorno foi apresentada por BEZINE [14] e STERN [15], simultaneamente em 1978. Em 1982, VAN DER WEEN [16] expôs uma formulação para análise de placas espessas baseada na teoria de REISSNER [17], onde utilizam-se 3 equações integrais para cada nó do contorno. BEZINE [18], KAMIYA [19], TANAKA [20], PAIVA [21] e outros apresentaram posteriormente trabalhos com análises diversas de placas.

Para a resolução numérica das equações integrais pelos métodos de contorno, essas equações são transformadas em equações algébricas, visando formar um sistema para a determinação de suas incógnitas. Para isto, faz-se a discretização do contorno da placa em elementos, onde as variáveis são aproximadas.

Quanto à divisão do contorno, a grande maioria dos trabalhos publicados utiliza, na análise de placas delgadas, elementos lineares. No caso de placas espessas, KARAM [22] utilizou elementos quadráticos para aproximar o contorno, obtendo resultados eficazes.

Obviamente, para os contornos não retilíneos, a utilização do elemento de contorno isoparamétrico quadrático é fundamental para se obter bons resultados. Entretanto, esse elemento, por não ter garantida a continuidade de sua derivada tangencial no ponto comum a dois elementos consecutivos, leva a pequenas perturbações nos resultados, caso não seja incluída no cálculo.

Assim seria necessário prever reações de canto e nós duplos em todas as extremidades destes elementos. Isto ocorre principalmente em placas de contorno circular que, pela sua natureza, é mais difícil de ser aproximado por uma parábola. Seria então necessário desenvolver elementos próprios para a aproximação de contornos circulares. Foi desenvolvido, por isto, um elemento em forma de arco de circunferência com aproximação quadrática das variáveis de contorno em seu domínio.

O objetivo deste trabalho é apresentar elementos de contorno quadráticos e circulares, de maneira a se obter uma melhor representação geométrica do contorno para problemas bi-dimensionais. O trabalho é realizado analisando-se placas delgadas elásticas, segundo a teoria de Kirchhoff.

O sistema de equações algébricas é obtido considerando-se, para cada ponto do contorno, duas equações integrais, referentes ao deslocamento transversal w e à sua derivada direcional $\frac{\partial w}{\partial m}$. Para se evitar integrais singulares sobre os elementos, os pontos do contorno são deslocados para fora do domínio da placa.

A integração numérica sobre os elementos é feita utilizando-se a quadratura de Gauss, onde é aplicada uma transformação auto-adaptativa de coordenadas proposta por TELLES [1] visando-se obter uma melhor apuração nos resultados. Também faz-se uso da formulação apresentada por PAIVA [2] onde a força cortante equivalente é admitida como esforço concentrado nos nós do contorno.

O capítulo 2 consiste de um resumo da teoria de Kirchhoff de placas delgadas pela qual obtêm-se as expressões dos esforços internos em função do deslocamento

transversal w . Em seguida são obtidas as soluções fundamentais de placas, ou seja, deslocamentos e esforços para uma placa infinita sujeita a um carregamento transversal unitário.

No capítulo 3 obtém-se as equações integrais do deslocamento transversal w e de sua variação $\frac{\partial w}{\partial m}$ para pontos do contorno e do domínio, a partir das soluções fundamentais. A integral de domínio é transformada em integral sobre o contorno do carregamento transversal atuante na placa.

No capítulo 4, com a discretização do contorno em elementos onde as variáveis, deslocamentos e esforços, são aproximadas por funções interpoladoras, obtém-se a transformação das equações integrais em equações algébricas. Estas equações, escritas para todos os nós do contorno, formam um sistema que, impostas as condições de contorno, fornece os seus valores incógnitos. São apresentados aí os elementos de contorno quadrático e circular formulados e analisados neste trabalho. As equações matriciais obtidas das equações integrais e da discretização do contorno são desenvolvidas, tanto para pontos do contorno como para pontos internos, a partir das quais são desenvolvidas ainda as equações para quantificação dos esforços para pontos internos. São apresentadas as montagens das matrizes, cujos termos são as integrais sobre os elementos, e a transformação de coordenadas utilizada na quadratura de Gauss para a integração numérica.

No capítulo 5 apresentam-se alguns exemplos numéricos do método com as formulações propostas e os resultados comparados com resultados analíticos.

No capítulo 6 mostram-se a estrutura do programa computacional e os fluxogramas tanto das rotinas de cálculo dos elementos de contorno propostos como da integração numérica com a transformação de coordenadas utilizada. Este capítulo permite uma visão global do método e uma fácil compreensão do cálculo dos elementos formulados e da rotina de integração.

2. FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS DELGADAS

2.1. Introdução

Os elementos estruturais são classificados conforme a relação entre suas dimensões, e são denominados lineares (ou de barras), de superfícies (ou laminares) e tri-dimensionais (ou blocos) conforme apresentem, respectivamente, duas, uma ou nenhuma dimensão pequena, quando comparada com as demais.

Placas são, por definição, elementos estruturais de superfície, simétricos em relação a um plano médio, cuja dimensão menor está na direção normal a este plano e é denominada espessura, h , da placa. O carregamento é transversal ao plano médio.

Também nessa categoria, onde as placas estão inseridas, temos na prática, por exemplo, pisos de edifício, paredes de reservatórios, etc..

De acordo com o material do qual é constituída a placa ela pode ser classificada como: anisótropa, com propriedades diferentes em qualquer direção, ortótropa, com propriedades diferentes em duas direções perpendiculares, ou isotropa, com propriedades iguais em todas as direções. Ainda de acordo com a espessura, a placa pode ser classificada como muito delgada ($se, h/a < 1/80$), delgada ($se, 1/80 < h/a < 1/5$) ou espessa ($se, h/a > 1/5$). Neste trabalho serão consideradas apenas as placas delgadas e isotropas, submetidas a

carregamento transversal e ortogonal ao plano médio, e será baseado na teoria de Kirchhoff, que interpreta bem o comportamento de placas com relação espessura/menor dimensão, h/a , entre 1/5 e 1/80, segundo [23], para o concreto.

2.2. Hipóteses básicas

As hipóteses da teoria de placas delgadas são:

- a placa é constituída de material elástico-linear e, portanto, segue a lei de Hooke;
- os deslocamentos transversais são pequenas em relação a espessura, h , da placa;
- não há deformação no plano médio da placa;
- as deformações na placa, devidas à flexão, variam linearmente com a distância ao plano médio desta placa, ao longo de sua espessura, o que equivale dizer que as tensões normais, paralelas ao plano médio, também variam linearmente com a espessura;
- as tensões normais na superfície da placa são desprezíveis em comparação com as tensões normais devidas à flexão.

2.3. Relações básicas para placas isotrópicas

Considere-se inicialmente o elemento de placa da figura 2.1.a onde estão indicadas as tensões solicitantes devidas a um carregamento transversal, g , distribuído. As resultantes destas tensões (figura 2.1.b), momentos de flexão e de torção e força cortante, são obtidas das seguintes integrações sobre a espessura, h , do elemento:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz \quad (2.1.a)$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz \quad (2.1 \text{ b})$$

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz \quad (2.1 \text{ c})$$

$$q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \, dz \quad (2.1 \text{ d})$$

$$q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \, dz \quad (2.1 \text{ e})$$

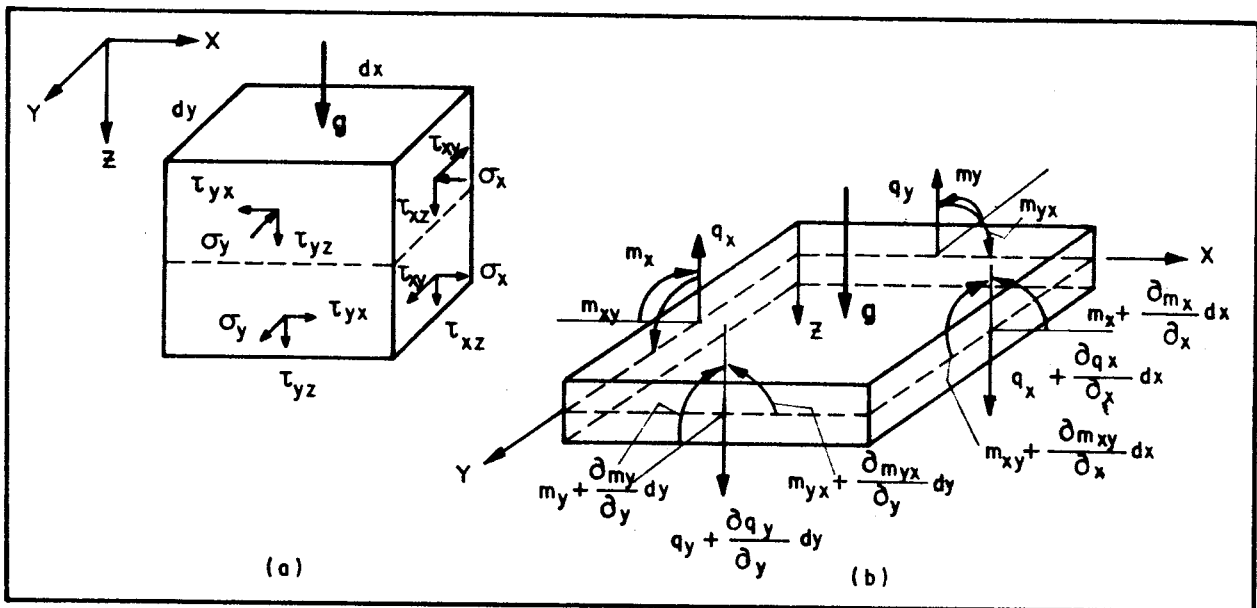


FIGURA 2.1 - Elementos de placa com tensões e esforços internos atuantes devido à flexão

Das condições de equilíbrio de forças verticais e de momentos em torno dos eixos x e y, obtêm-se as seguintes expressões:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + g = 0 \quad (2.2. a)$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = q_x \quad (2.2.b)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} = q_y \quad (2.2.c)$$

Agrupando-se as equações de equilíbrio numa só equação e considerando-se $m_{xy} = m_{yx}$, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -g \quad (2.3)$$

Considere-se agora o elemento de placa da figura 2.2.a com seu plano médio delimitado pelos pontos A,B,C e D e um plano qualquer paralelo ao plano médio, a uma distância z deste, representado pelos pontos E,F,G e H. Devido à flexão da placa, os pontos E,F,G e H se deslocam para as posições E',F',G' e H' representando a posição deformada do plano, mostrada na figura 2.2.b. Os valores u_0 e v_0 representam as componentes do deslocamento do ponto E nas direções x e y, respectivamente.

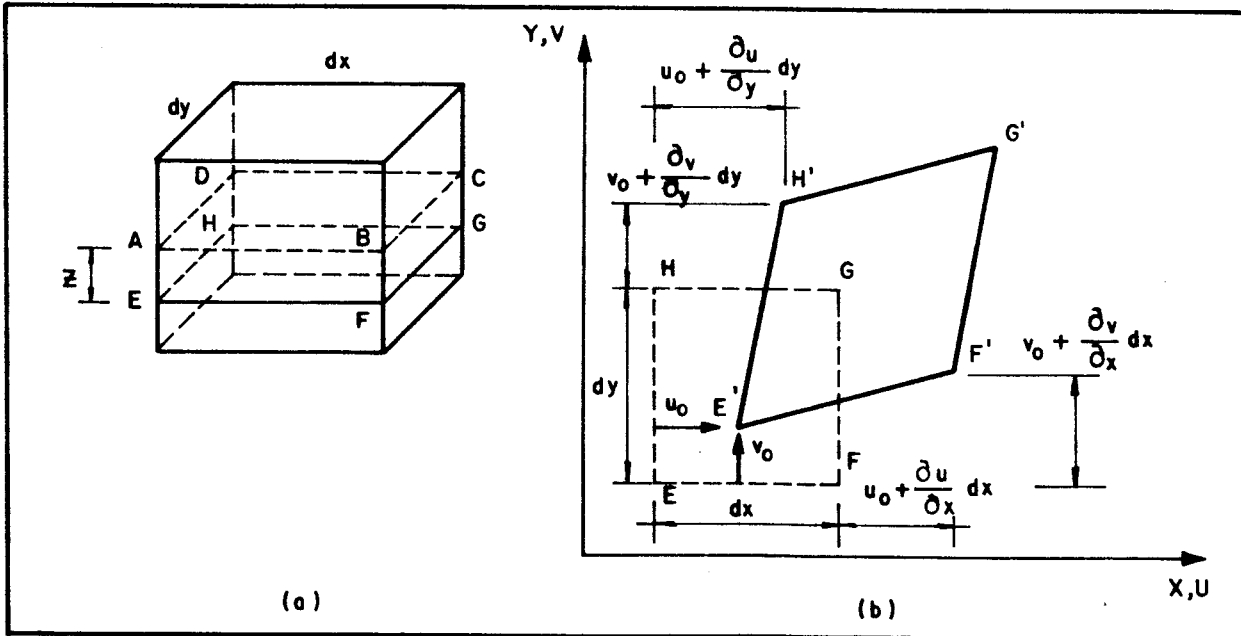


FIGURA 2.2 - Elemento de placa com posição deformada da seção EFGH na flexão

Assim pode-se obter o deslocamento do ponto F na

direção x como sendo:

$$u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (2.4)$$

onde $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ é a variação do comprimento do lado dx em relação à direção x. Pode-se escrever, portanto, que a deformação relativa ϵ_x , em relação à direção x, é

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.5.a)$$

Analogamente, para a direção y,

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.5.b)$$

e a variação do ângulo reto de vértice E do elemento não deformado, chamada distorção, vale

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.5.c)$$

Deve-se observar ainda que, na flexão da placa, os deslocamentos de um ponto também ocorrem na direção do eixo z, conforme mostra a figura 2.3, que representa um corte no elemento ao longo de sua espessura e os pontos do plano médio, A e B e do plano paralelo, E e F nas posições inicial e deformada.

Assim, devido à rotação $\frac{\partial w}{\partial x}$ do elemento de placa, o deslocamento do ponto E, situado a uma distância z do plano médio, na direção do eixo z, é

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.6.a)$$

Analogamente, na direção y,

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.6.b)$$

A partir de 2.5 e 2.6 pode-se obter as expressões das deformações em função das curvaturas:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.7.a)$$

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.7.b)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.7.c)$$

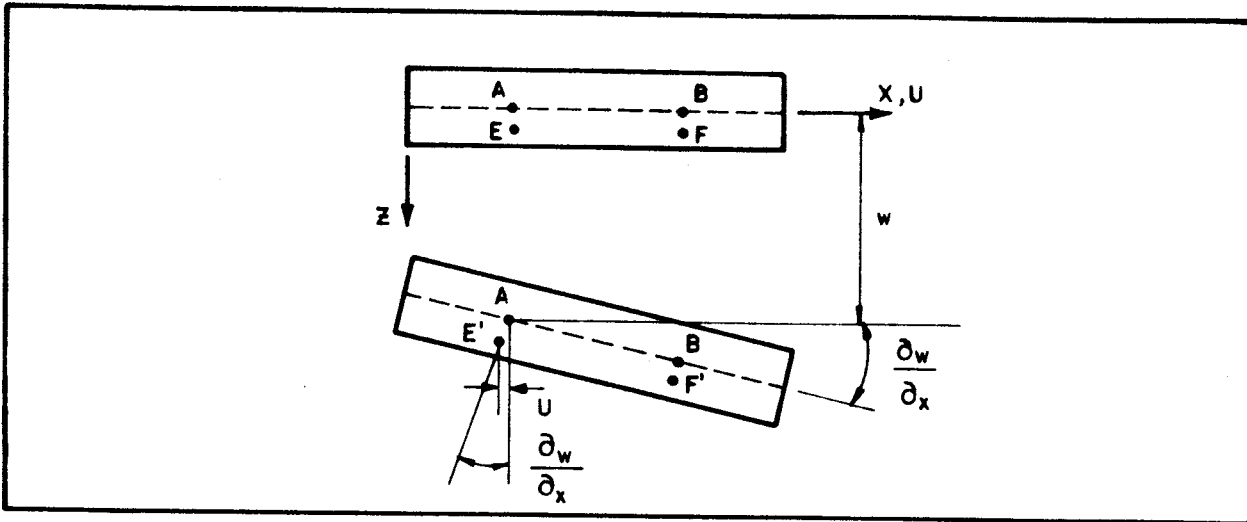


FIGURA 2.3 - Elemento de placa com deslocamento na direção z

Obtidas as deformações de um ponto da placa têm-se, através da lei de Hooke, as tensões correspondentes neste ponto:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad (2.8.a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \quad (2.8.b)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (2.8.c)$$

onde,

E : módulo de elasticidade longitudinal

ν : coeficiente de Poisson

G : módulo de elasticidade transversal

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.9)$$

Substituindo-se em 2.8 as expressões 2.7 obtêm-se também as tensões em função do deslocamento transversal w:

$$\sigma_x = \frac{-E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] z \quad (2.10.a)$$

$$\sigma_y = \frac{-E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] z \quad (2.10.b)$$

$$\tau_{xy} = -2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.10.c)$$

Retornando-se às expressões 2.1 dos valores das resultantes das tensões e substituindo-as nas expressões 2.10, resultam

$$m_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] z \quad (2.11.a)$$

$$m_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] z \quad (2.11.b)$$

$$m_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.11.c)$$

onde,

D , rigidez à flexão, é dado por:

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.12)$$

A equação 2.3 pode ser reescrita em função do deslocamento transversal w a partir de 2.11, resultando na equação diferencial de placas:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (2.13)$$

Utilizando-se o operador de Laplace,

$$\nabla^2 = \Delta = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} \quad (2.14)$$

a última equação resulta,

$$\Delta \Delta w = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = \frac{q}{D} \quad (2.15)$$

e ainda,

$$q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \quad (2.16.a)$$

$$q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \quad (2.16.b)$$

Para a resolução da equação diferencial de placas deve-se impor condições de contorno relativas ao deslocamento w , ao giro $\frac{\partial w}{\partial m}$ e aos esforços (momento fletor, momento volvente e força cortante, por unidade de comprimento). Porém, Kirchhoff [24] demonstrou que pode-se escrever as condições de contorno relativas à cortante e ao momento volvente numa única condição. Para entender esta proposição, considera-se um ponto genérico, P, na borda da placa e dois elementos de comprimento ds , adjacentes a este ponto, conforme mostra a figura 2.4.

Também pode-se observar que estes elementos apresentam momentos volventes resultantes de valores m_{ns} e

$\left(m_{ns} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} ds \right) ds$. Interpretam-se estes momentos como resultantes de binários de forças atuando agora nas laterais dos elementos de contorno, de tal forma que surja uma resultante final no ponto P de valor $\frac{\partial m_{ns}}{\partial s} ds$.

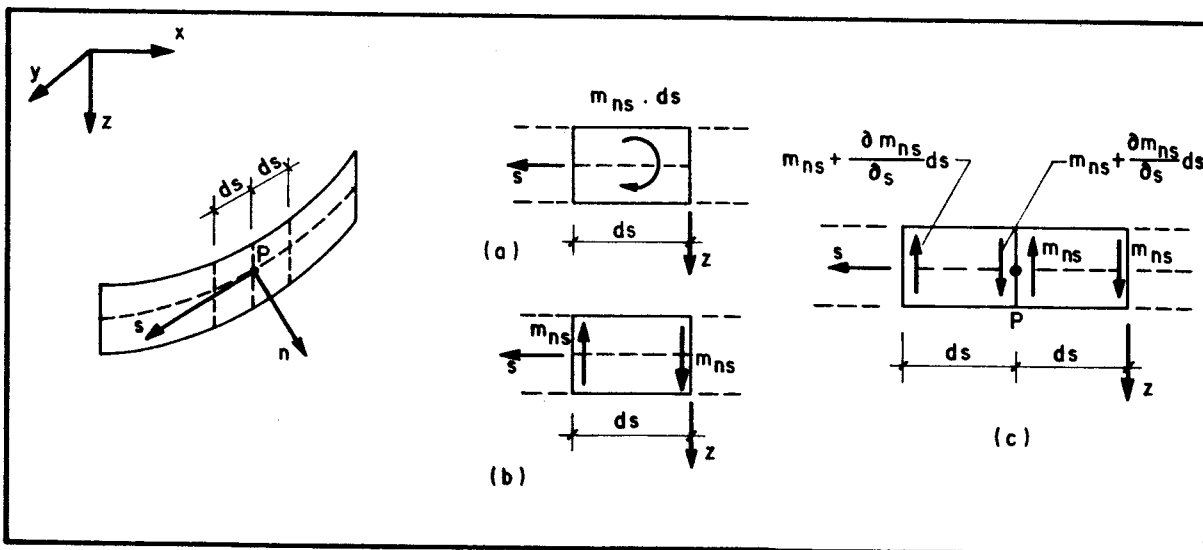


FIGURA 2.4 - Resultante do momento volvente em um ponto P do contorno da placa

O esforço resultante da soma desta força com a força cortante q_x (ou q_y) é denominado força cortante equivalente, por unidade de comprimento, e vale:

$$V_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad (2.17.a)$$

$$V_y = q_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (2.17.b)$$

Algumas condições de contorno de placas devem ser observadas a fim de se analisar as reações dos vínculos para cada situação. Analisando-se a borda paralela ao eixo y , no elemento de placa da figura 2.1.b, têm-se:

- para borda simplesmente apoiada:

$$w = 0 \quad \text{e} \quad m_x = 0$$

Esta última condição de contorno equivale a,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

que, devido ao fato de que $w = 0$ no contorno, resulta em,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

- para borda perfeitamente engastada:

$$w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial m} = 0$$

- para borda livre:

$$m_x = 0 \quad \text{e} \quad V_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0$$

Podem-se escrever agora as componentes de tensões e esforços para um sistema genérico de coordenadas (n,s) , onde o eixo n forma um ângulo α com o semi-eixo positivo x .

Considere-se o elemento de placa 123 apresentado na figura 2.5, cujos lados $\overline{12}$ e $\overline{13}$ são paralelos aos eixos x e y , respectivamente.

Podem-se escrever as relações das tensões e dos esforços referentes ao lado $\overline{32}$ nas direções n e s , utilizando-se as equações 2.11 e 2.17. Assim têm-se,

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.18.a)$$

$$\tau_{ns} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (2.18.b)$$

$$m_n = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + 2 m_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.18.c)$$

$$m_{ns} = (m_y - m_x) \sin \alpha \cos \alpha + m_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (2.18.d)$$

$$m_s = m_x \sin^2 \alpha + m_y \cos^2 \alpha - 2 m_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.18.e)$$

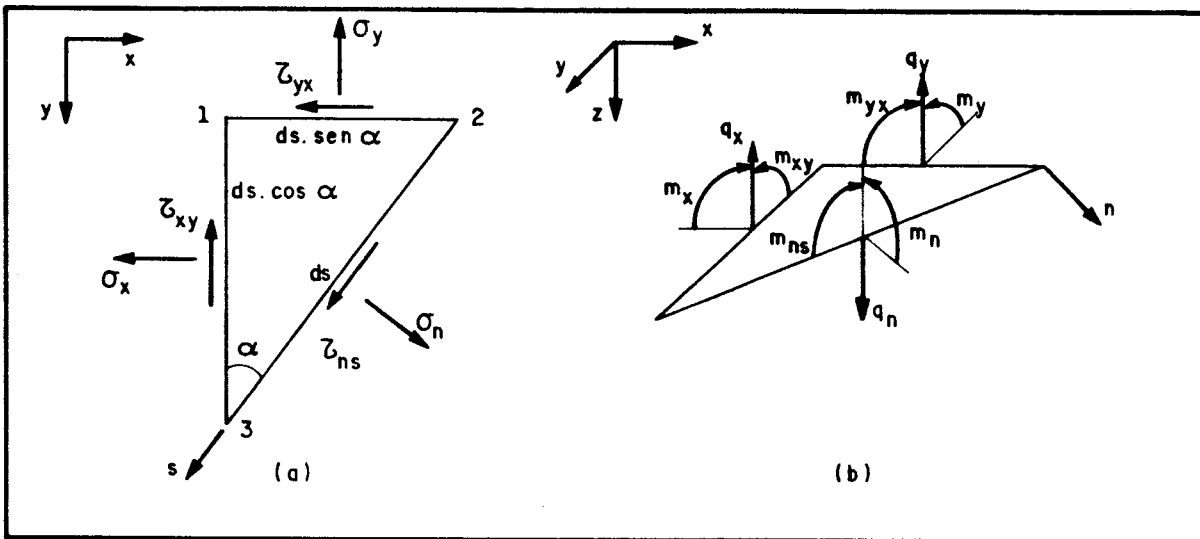


FIGURA 2.5 - Tensões e esforços resultantes no elemento de placa 123

Já as relações das cortantes q_n e q_s são obtidas pelo equilíbrio de forças verticais do elemento. Então,

$$q_n ds = q_x ds \cos \alpha + q_y ds \sin \alpha$$

ou

$$q_n = q_x \cos \alpha + q_y \sin \alpha \quad (2.19.a)$$

$$q_s = -q_x \sin \alpha + q_y \cos \alpha \quad (2.19.b)$$

Retomando-se as expressões 2.17 pode-se escrever a força cortante equivalente, por unidade de comprimento, como:

$$V_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} \quad (2.20)$$

2.4. Equações de placas em coordenadas polares

Tendo em vista que neste trabalho a equação diferencial de placas é aplicada a um domínio infinito para a obtenção das soluções fundamentais, torna-se necessário escrever as equações das placas em coordenadas polares.

O sistema de coordenadas da figura 2.6 mostra a relação entre as coordenadas cartesianas e polares e suas componentes.

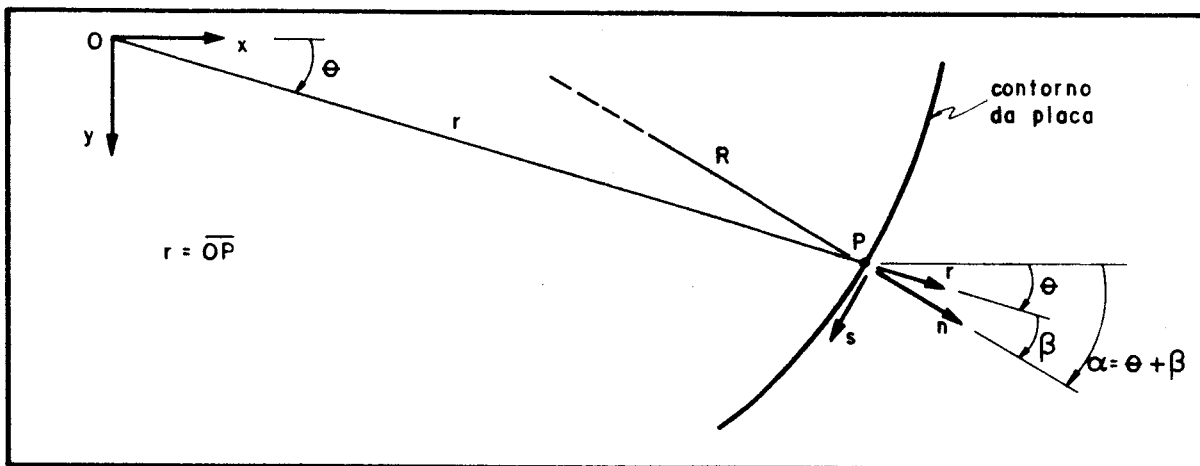


FIGURA 2.6 - Contorno da placa com direções de r , n e s , em referência às coordenadas cartesianas (x, y) e polares (r, θ) , para um ponto P genérico

O ponto P de coordenadas cartesianas (x, y) passa a ter novas coordenadas (r, θ) , onde r é a distância de P à origem O do sistema de coordenadas e θ o ângulo formado pela direção de r e o semi-eixo positivo x . Assim as relações entre os dois sistemas ficam determinadas por:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (2.21)$$

ou ainda,

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (2.22.a)$$

$$\theta = \arctg \frac{y}{x} \quad (2.22.b)$$

Com estas relações pode-se obter suas respectivas derivadas em relação ao sistema cartesiano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \theta \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-y}{r^2} = \frac{-\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}\end{aligned}\quad (2.23)$$

Escrevendo-se agora as derivadas do deslocamento transversal w em coordenadas (x, y) para se obter a equação diferencial, tem-se, na direção x :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.24)$$

ou

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \left(\frac{-\sin \theta}{r} \right) \quad (2.25.a)$$

Analogamente, na direção y , tem-se:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \quad (2.25.b)$$

As derivadas de segunda ordem resultam:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \\ &+ \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\quad (2.26.a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ &+ 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\quad (2.26.b)$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= -\sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + \\ &+ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\quad (2.27)$$

Somando-se as duas equações 2.26 obtém-se a representação do operador diferencial de Laplace expresso em coordenadas polares:

$$\Delta w = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] w = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] w \quad (2.28)$$

Portanto, a equação diferencial de placas, em coordenadas polares resulta:

$$\Delta^2 w = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] = \frac{q}{D} \quad (2.29)$$

Substituindo-se as equações 2.26 e 2.27 nas relações 2.11, têm-se:

$$m_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) - 2 \cos \theta \sin \theta (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \right] \quad (2.30.a)$$

$$m_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) + 2 \cos \theta \sin \theta (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \right] \quad (2.30.b)$$

$$m_{xy} = -D(1-\nu) \left[\sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \right] \quad (2.30.c)$$

$$q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w = -D \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \Delta w - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w \right] \quad (2.30.d)$$

$$q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w = -D \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \Delta w + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w \right] \quad (2.30.e)$$

Com estas expressões deduz-se, também para coordenadas polares, as referentes aos esforços m_n , m_{ns} e V_n em um ponto genérico P do contorno da placa. Estes esforços têm como referência um sistema local de coordenadas cartesianas (n,s), onde n é a direção normal e s a direção tangencial ao contorno neste ponto, como pode-se observar na figura 2.6. Ainda nessa figura estão o ângulo β , entre os versores r e n e o raio de curvatura R do contorno da placa no ponto P.

Pode-se obter os esforços em P substituindo-se nas equações 2.18 o valor de $\alpha = \theta + \beta$ (figura 2.6), resultando:

$$m_n = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) + 2 \cos \beta \sin \beta (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \right] \quad (2.31.a)$$

$$m_s = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) - 2 \cos \beta \sin \beta (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \right] \quad (2.31.b)$$

$$m_{ns} = -D(1-\nu) \left[\sin \beta \cos \beta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \right] \quad (2.31.c)$$

Para se chegar à expressão da força cortante equivalente V_n , em coordenadas polares, deve-se derivar m_{ns} (equação 2.31.c) em relação a s. Para a cortante tem-se:

$$q_n = q_x \cos(\theta+\beta) + q_y \sin(\theta+\beta) \quad (2.32)$$

Substituindo-se q_x e q_y pelas equações 2.30, resulta

$$q_n = -D \left[\cos \beta \frac{\partial}{\partial r} \Delta w + \frac{\sin \beta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w \right] \quad (2.33)$$

A derivada de m_{ns} em relação à coordenada s vale:

$$\frac{\partial m_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial m_{ns}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} \quad (2.34)$$

O termo $\frac{\partial r}{\partial s}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \cos \theta (- \operatorname{sen} \alpha) + \operatorname{sen} \theta \cos \alpha$$

Então,

$$\frac{\partial r}{\partial s} = - \operatorname{sen} \beta \quad (2.35)$$

e analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial s} &= \frac{-\operatorname{sen} \theta}{r} (- \operatorname{sen} \alpha) + \frac{\cos \theta}{r} \cos \alpha \\ \frac{\partial \theta}{\partial s} &= \frac{1}{r} \cos \beta \end{aligned} \quad (2.36)$$

Sabe-se ainda que

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \quad (2.37)$$

onde R é o raio de curvatura do contorno no ponto P. Substituindo-se as equações 2.35, 2.36 e 2.37 na equação 2.34, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} &= \frac{\partial m_{ns}}{\partial r} (- \operatorname{sen} \beta) + \frac{\partial m_{ns}}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \beta + \\ &+ \frac{\partial m_{ns}}{\partial \beta} \left[\frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

Agora escrevendo-se V_n com os valores obtidos de q_n e $\frac{\partial m_{ns}}{\partial s}$, tem-se:

$$\begin{aligned} V_n &= \left[- D \frac{\partial}{\partial r} \Delta w + \frac{1}{r} \frac{\partial m_{ns}}{\partial \theta} \right] \cos \beta + \\ &- \left[D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w + \frac{\partial m_{ns}}{\partial r} \right] \operatorname{sen} \beta + \left[\frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \right] \frac{\partial m_{ns}}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.5. Soluções fundamentais de placas

A solução fundamental de placas é definida como o deslocamento transversal w^* , representando a resposta em um ponto, p, genérico de coordenadas $[x(p), y(p)]$ no domínio

fundamental da placa, geralmente infinito, devida a uma carga unitária aplicada em um ponto q , ponto de carregamento, de coordenadas $[x(q), y(q)]$ deste mesmo domínio.

A solução fundamental w^* é obtida a partir da seguinte equação:

$$\Delta \Delta w^* = \delta(q, p) / D \quad (2.40)$$

onde,

$\delta(q, p)$ - distribuição delta de Dirac

Essa distribuição apresenta as seguintes propriedades:

$$\delta(q, p) = 0 \quad \text{se, } p \neq q \quad (2.41.a)$$

$$\delta(q, p) = \infty \quad \text{se, } p = q \quad (2.41.b)$$

e

$$\int_{\Omega} \psi(p) \delta(q, p) d\Omega = \psi(q) \quad (2.41.c)$$

onde $\psi(p)$ é uma função qualquer definida no domínio Ω . Assim, pode-se escrever que

$$\int_{\Omega} \delta(q, p) d\Omega = 1 \quad (2.42)$$

mostrando-se que a distribuição delta de Dirac, integrada no domínio, representa uma carga unitária resultante do carregamento transversal aplicado à placa no ponto q .

A solução fundamental de placas é obtida, então, a partir da equação diferencial aplicada a todos os pontos do domínio da placa, exceto o ponto de carga q , resultando

$$\Delta \Delta w^* = 0 \quad (2.43)$$

Para um sistema de coordenadas polares com origem em q e observando-se a simetria do problema em relação a este ponto, o que elimina a dependência em relação à coordenada θ , a equação 2.43 passa a ser escrita como:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} \right) = 0 \quad (2.44)$$

Efetuando-se as derivações, pode-se reescrevê-la como:

$$\frac{d^4 w^*}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w^*}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw^*}{dr} = 0 \quad (2.45)$$

A solução desta equação diferencial, já conhecida, é

$$w^* = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D \quad (2.46)$$

Considerando-se a simetria do problema pode-se afirmar que a derivada $\frac{dw^*}{dr}$ para o ponto q é nula, resultando

$$A = 0 \quad (2.47)$$

Para se obter a constante B admite-se um círculo de raio r com centro em q, sendo q o ponto de aplicação da carga unitária (figura 2.7), onde surgirá, em seus limites, uma força cortante equivalente V_n uniformemente distribuída para manter seu equilíbrio. Assim,

$$V_n = \frac{-1}{2\pi r} \quad (2.48)$$

Para este valor, portanto, a expressão de V_n 2.39, agora escrita apenas em função de r (e para $\beta = 0$) resulta:

$$V_n = -D \frac{d}{dr} \Delta w^* = \frac{-1}{2\pi r} \quad (2.49)$$

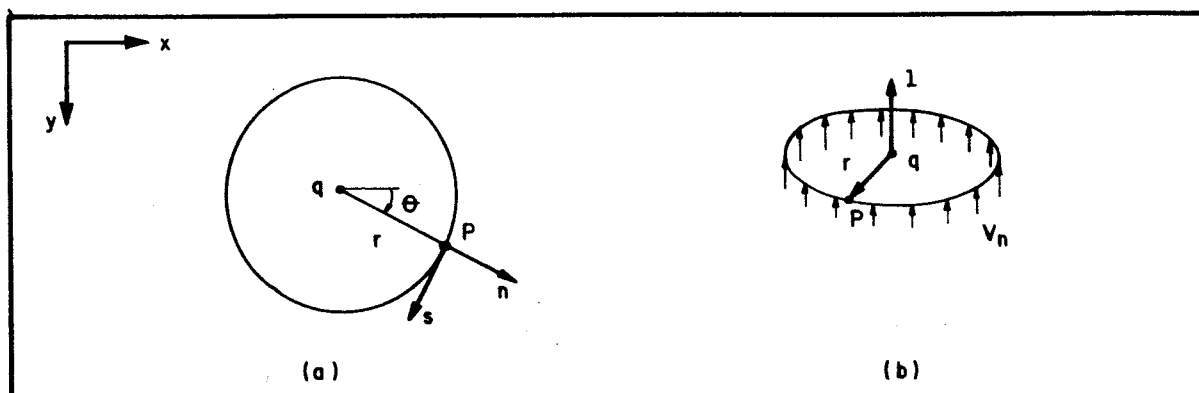


FIGURA 2.7 - Força cortante equivalente atuante num círculo de raio r devida à carga unitária aplicada em q

Substituindo-se a equação 2.46 em 2.49 obtém-se a constante B:

$$B = \frac{1}{8\pi D} \quad (2.50)$$

Assim a equação de w^* passa a ter a forma

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r + C r^2 + D \quad (2.51)$$

As constantes C e D são obtidas a partir de condições de contorno da placa estudada; porém, para o caso da placa fundamental de raio infinito em questão, essas condições podem ser quaisquer.

STERN [15] e BEZINE [14] adotam

$$C = D = 0 \quad (2.52)$$

resultando,

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad (2.53)$$

DANSON [25] adota

$$C = \frac{-1}{16\pi D} \quad \text{e} \quad D = 0 \quad (2.54)$$

obtendo,

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (2.55)$$

Pode-se obter ainda as expressões da sua derivada e dos esforços fundamentais. São determinadas também as derivadas destas soluções fundamentais em relação à coordenada m de um sistema de referência cartesiano (m,u) com origem em q , conforme mostra a figura 2.8.

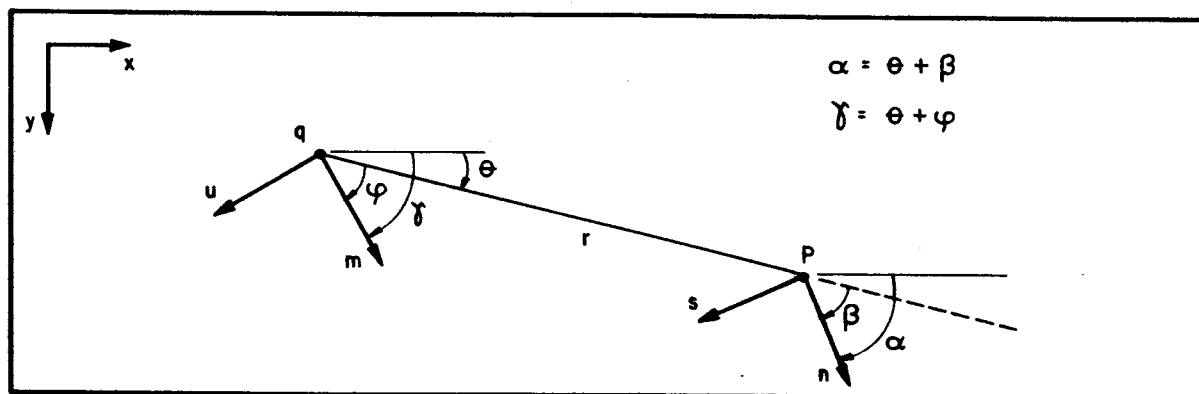


FIGURA 2.8 - Sistemas de coordenadas (m,u) e (n,s)

A derivada do deslocamento no ponto P é dada por:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{\partial w^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.56)$$

onde,

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x(p)} \frac{\partial x(p)}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y(p)} \frac{\partial y(p)}{\partial n} \quad (2.57)$$

As derivadas de r em relação às coordenadas x e y, admitindo-se que $r(q,p) = \left[(x(p)-x(q))^2 + (y(p)-y(q))^2 \right]^{1/2}$, são dadas por:

$$\frac{\partial r}{\partial x(p)} = r_{,x} = \frac{x(p)-x(q)}{r} = \cos \theta \quad (2.58.a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y(p)} = r_{,y} = \frac{y(p)-y(q)}{r} = \sin \theta \quad (2.58.b)$$

As demais derivadas, de segunda ordem, são:

$$\frac{\partial r_{,x}}{\partial x(p)} = \frac{1-r^2}{r} \quad (2.59.a)$$

$$\frac{\partial r_{,y}}{\partial x(p)} = - \frac{r_{,x} r_{,y}}{r} \quad (2.59.b)$$

$$\frac{\partial r_{,x}}{\partial y(p)} = - \frac{r_{,x} r_{,y}}{r} \quad (2.59.c)$$

$$\frac{\partial r_{,y}}{\partial y(p)} = \frac{1-r^2}{r} \quad (2.59.d)$$

ou, se escritas na forma indicial,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(p)} = r_{,i} = \frac{x_i(p)-x_i(q)}{r} \quad (2.60.a)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i(p) \partial y_j(p)} = r_{,ij} = \frac{\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}}{r} \quad (2.60.b)$$

onde,

δ_{ij} : delta de Kronecker

cujo valor é dado por:

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad (2.61.a)$$

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{para } i = j \quad (2.61.b)$$

As derivadas em relação a n valem:

$$\frac{\partial x(p)}{\partial n} = \cos \alpha \quad (2.62.a)$$

$$\frac{\partial y(p)}{\partial n} = \text{sen } \alpha \quad (2.62.b)$$

Combinando-se as equações 2.58, 2.59 e 2.62 em 2.57, tem-se:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \cos \theta \cos \alpha + \text{sen } \theta \text{ sen } \alpha = \cos \beta \quad (2.63)$$

portanto,

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r \cos \beta \quad (2.64)$$

Considerando-se \vec{r} o versor associado a r , tem-se

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r (\vec{n} \cdot \vec{r}) = \frac{r}{4\pi D} \ln r (n_{,x} r_{,x} + n_{,y} r_{,y}) \quad (2.65)$$

ou usando-se a notação indicial, tem-se,

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r (n_i r_i) \quad (2.66)$$

As expressões 2.31 e 2.39 dos esforços fundamentais m_n^* , m_{ns}^* e V_n^* são obtidas a partir de 2.55 e são dadas por:

$$m_n^* = \frac{-1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r + (1-\nu) \cos^2 \beta + \nu \right] \quad (2.67)$$

$$m_{ns}^* = \frac{1-\nu}{8\pi} \text{sen } 2\beta \quad (2.68)$$

$$V_n^* = \frac{\cos \beta}{4\pi r} \left[2(1-\nu) \text{sen}^2 \beta - 3 + \nu \right] + \frac{1-\nu}{4\pi R} \cos 2\beta \quad (2.69)$$

onde,

$$\cos \beta = \vec{n} \cdot \vec{r} = n_{,x} r_{,x} + n_{,y} r_{,y} = n_i r_i$$

$$\text{sen } \beta = -\vec{s} \cdot \vec{r} = -s_{,x} r_{,x} - s_{,y} r_{,y} = -s_i r_i$$

As derivadas dos deslocamentos e dos esforços fundamentais em relação à direção m no ponto q é feita de forma análoga a do ponto p , isto é:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{\partial w^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial m} \quad (2.70)$$

onde,

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial x(q)} \frac{\partial x(q)}{\partial m} + \frac{\partial r}{\partial y(q)} \frac{\partial y(q)}{\partial m} \quad (2.71)$$

As derivadas de r em relação às coordenadas x e y são dadas por :

$$\frac{\partial r}{\partial x(q)} = -r_{,x} = -\frac{x(p)-x(q)}{r} = -\cos \theta \quad (2.72.a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y(q)} = -r_{,y} = -\frac{y(p)-y(q)}{r} = -\sin \theta \quad (2.72.b)$$

As demais derivadas, de segunda ordem, são

$$\frac{\partial r_{,x}}{\partial x(q)} = -\frac{1-r^2}{r^3} \quad (2.73.a)$$

$$\frac{\partial r_{,y}}{\partial x(q)} = \frac{r_{,x} r_{,y}}{r} \quad (2.73.b)$$

$$\frac{\partial r_{,x}}{\partial y(q)} = \frac{r_{,x} r_{,y}}{r} \quad (2.73.c)$$

$$\frac{\partial r_{,y}}{\partial y(q)} = -\frac{1-r^2}{r^3} \quad (2.73.d)$$

ou, usando-se a notação indicial, tem-se,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(q)} = -r_{,i} = -\frac{x_i(p)-x_i(q)}{r} \quad (2.74.a)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i(q) \partial y_j(q)} = -r_{,ij} = -\frac{\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}}{r} \quad (2.74.b)$$

As derivadas em relação a m são dadas por :

$$\frac{\partial x(q)}{\partial m} = \cos \gamma = m_x \quad (2.75.a)$$

$$\frac{\partial y(q)}{\partial m} = \sin \gamma = m_y \quad (2.75.b)$$

Agrupando-se as equações 2.72, 2.73 e 2.75 em 2.71, tem-se,

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \cos \gamma (-\cos \theta) + \sin \gamma (-\sin \theta) = -\cos \varphi \quad (2.76)$$

portanto,

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{r}{4\pi D} \ln r (-\cos \varphi) \quad (2.77)$$

Pode-se escrever

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{r}{4\pi D} \ln r (\vec{m} \cdot \vec{r}) = \frac{r}{4\pi D} \ln r (m_x r_x + m_y r_y) \quad (2.78)$$

ou ainda, usando-se a notação indicial, tem-se,

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{r}{4\pi D} \ln r (m_i r_i) \quad (2.79)$$

As demais expressões de $\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \right)$, $\frac{\partial m_n^*}{\partial m}$, $\frac{\partial m_{ns}^*}{\partial m}$ e $\frac{\partial v_n^*}{\partial m}$ são escritas na forma indicial para melhor visualização:

$$\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \right) = \frac{-1}{4\pi D} \left[(m_i r_i)(n_i r_i) + (m_i n_i) \ln r \right] \quad (2.80)$$

onde se aplica $\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \right) \frac{\partial r}{\partial m}$ na equação 2.65.

Na sequência,

$$\frac{\partial m_n^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r} \left\{ (1+\nu)(m_i r_i) + 2(1-\nu)(n_i r_i) \left[(m_i n_i) + (m_i r_i)(n_i r_i) \right] \right\} \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial m_{ns}^*}{\partial m} = \frac{1-\nu}{4\pi r} \left[(m_i n_i)(s_i r_i) + (m_i s_i)(n_i r_i) + 2(m_i r_i)(n_i r_i)(s_i r_i) \right] \quad (2.82)$$

e,

$$\frac{\partial v_n^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu)(s_i r_i) \left[4(s_i r_i)(m_i r_i)(n_i r_i) + 2(m_i s_i)(n_i r_i) - (s_i r_i)(m_i n_i) \right] + (3+\nu) \left[(m_i n_i) + 2(m_i r_i)(n_i r_i) \right] + \frac{(1-\nu)}{\pi R r} (s_i r_i) \left[(m_i s_i) - (m_i r_i)(r_i s_i) \right] \right\} \quad (2.83)$$

3. EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO DE PLACAS

3.1. Introdução

Neste capítulo serão obtidas as equações integrais, envolvendo as soluções fundamentais do capítulo anterior, para a formulação do Método dos Elementos de Contorno para placas. Conforme já comentado, estas equações integrais são referentes ao deslocamento transversal $w(q)$ e à sua derivada direcional $\frac{\partial w}{\partial m}(q)$ de um ponto do domínio, relacionados a deslocamentos e esforços no contorno.

Estas equações serão obtidas utilizando-se o primeiro teorema de Betti, ou teorema da reciprocidade, em uma placa sujeita a dois carregamentos distintos, g e g^* , que resultam em dois estados de tensão e de deslocamento correspondentes. A partir de integrações por partes sobre a expressão resultante da aplicação do teorema de Betti, obtêm-se as equações integrais desejadas.

3.2. Equação integral para um ponto do domínio

Seja uma placa isótropa qualquer, de contorno Γ e

domínio Ω , contida em uma placa infinita de contorno Γ_∞ e domínio Ω_∞ , conforme mostra a figura 3.1.

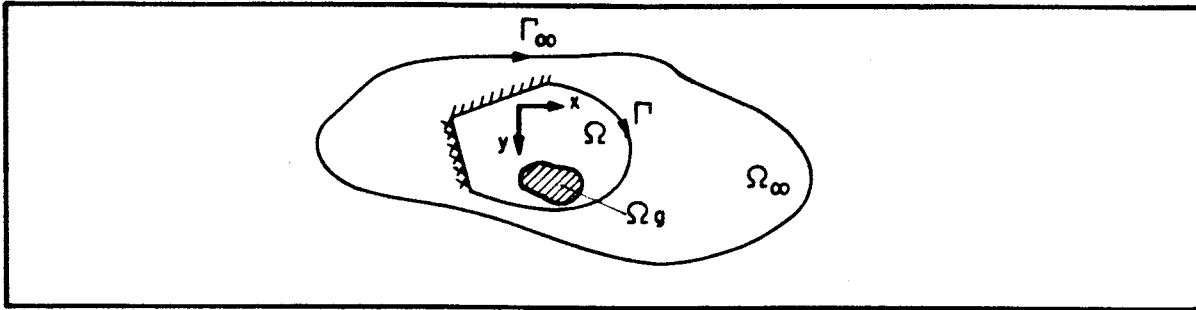


FIGURA 3.1 - Placa finita contida em placa infinita

Aplicando-se à placa infinita dois carregamentos distintos, g distribuído em uma região de área Ω_g , e g^* carregamento correspondente à solução fundamental, obtêm-se dois estados de tensão, σ_{ij} e σ_{ij}^* , e dois de deformação, ϵ_{ij} e ϵ_{ij}^* , correspondentes.

O teorema da reciprocidade de Betti fornece a seguinte igualdade:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dV \quad \text{com } i, j = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

O termo da direita, denominado aqui de U , pode ser escrito explicitando-se os índices do produto tensorial.

$$U = \int_V \left[\sigma_x \epsilon_x^* + \sigma_y \epsilon_y^* + \sigma_z \epsilon_z^* + 2 \left(\sigma_{xy} \epsilon_{xy}^* + \sigma_{xz} \epsilon_{xz}^* + \sigma_{yz} \epsilon_{yz}^* \right) \right] dV \quad (3.2)$$

Desprezando-se as tensões relativas à direção z , normal ao plano da placa, tem-se:

$$U = \int_V \left(\sigma_x \epsilon_x^* + \sigma_y \epsilon_y^* + 2 \sigma_{xy} \epsilon_{xy}^* \right) dV \quad (3.3)$$

Substituindo-se agora os valores de tensões e deformações dados pelas equações 2.7 e 2.10, onde

desprezam-se os infinitésimos de ordem superior dos deslocamentos tangenciais u , v , u^* e v^* , tem-se a integral do primeiro termo de U da seguinte forma:

$$\int_V \sigma_x \varepsilon_x^* dV = \int_V \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ -z \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial u^*}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right] + z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right\} dV \quad (3.4)$$

Realizando-se a integração desta equação na espessura, a integral transforma-se em integral sobre o domínio Ω :

$$\int_V \sigma_x \varepsilon_x^* dV = \int_{\Omega} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega \quad (3.5)$$

onde,

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

De forma análoga pode-se trabalhar com os dois termos restantes da equação 3.3, resultando-se:

$$U = \int_{\Omega} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + 2 D (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right] d\Omega \quad (3.6)$$

Com as equações 2.11 em vista, pode-se reescrever

$$U = \int_{\Omega} \left(-m_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} - m_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} - 2 m_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right) d\Omega \quad (3.7)$$

que é a integral de volume 3.3 transformada em integral sobre o domínio Ω . Pode-se agora transformá-la em integral sobre o contorno trabalhando-se com cada parcela individualmente. Integrando-se por partes a primeira parcela de 3.7, na direção x , tem-se:

$$- \int_{\Omega} m_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = - \int_{\Gamma} m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \eta_x d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial m_x}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} d\Omega \quad (3.8)$$

onde,

η_x : co-seno diretor do vetor normal ao contorno na direção x, conforme a figura 3.2.

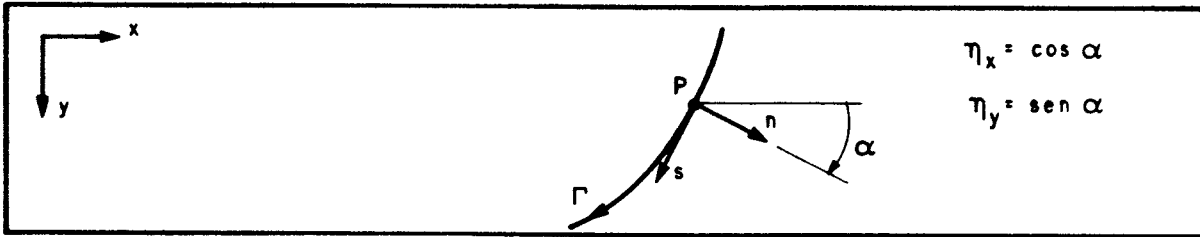


FIGURA 3.2 - Sistema de coordenadas (n,s) em um ponto do contorno

Integrando-se por partes a segunda parcela da equação 3.8, obtém-se:

$$- \int_{\Omega} m_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = \int_{\Gamma} \left[- m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial m_x}{\partial x} w^* \cos \alpha \right] d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} w^* d\Omega \quad (3.9)$$

Integrando-se por partes agora a segunda parcela da equação 3.7, de forma análoga, na direção y, tem-se:

$$- \int_{\Omega} m_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} d\Omega = - \int_{\Gamma} m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \eta_y d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial m_y}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial y} d\Omega \quad (3.10)$$

Integrando-se novamente por partes a segunda parcela da equação 3.10, obtém-se finalmente:

$$- \int_{\Omega} m_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} d\Omega = \int_{\Gamma} \left[m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sen \alpha + \frac{\partial m_y}{\partial y} w^* \sen \alpha \right] d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} w^* d\Omega \quad (3.11)$$

Reescrevendo-se agora a terceira parcela da equação 3.7, tem-se:

$$-2 \int_{\Omega} m_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega = - \int_{\Omega} m_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega - \int_{\Omega} m_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega \quad (3.12)$$

Integrando-se por partes as duas parcelas, em relação às direções x e y, obtém-se:

$$\begin{aligned} -2 \int_{\Omega} m_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega &= - \int_{\Gamma} m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial y} \\ d\Omega - \int_{\Gamma} m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha d\Gamma &+ \int_{\Omega} \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial x} d\Omega \end{aligned} \quad (3.13)$$

Integrando-se por partes as integrais de domínio, tem-se

$$\begin{aligned} -2 \int_{\Omega} m_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega &= \int_{\Gamma} \left[- m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha - m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} w^* \sin \alpha + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} w^* \cos \alpha \right] d\Gamma - \int_{\Omega} 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} w^* d\Omega \end{aligned} \quad (3.14)$$

Com as equações 3.9, 3.11 e 3.14 pode-se reescrever U como:

$$\begin{aligned} U &= - \int_{\Gamma} \left[m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha + \right. \\ &+ \left. m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) \cos \alpha + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) \sin \alpha \right] w^* d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} \right] w^* \\ &d\Omega \end{aligned} \quad (3.15)$$

Retomando-se as relações 2.11, 2.12, 2.13 e 2.19 pode-se escrever:

$$U = - \int_{\Gamma} \left[m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \operatorname{sen} \alpha \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.16)$$

Tem-se que:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \operatorname{sen} \alpha \quad (3.17.a)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial y} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \operatorname{sen} \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha \quad (3.17.b)$$

Substituindo-se as equações 3.17 na equação 3.16 e agrupando-se os termos $\frac{\partial w^*}{\partial n}$ e $\frac{\partial w^*}{\partial s}$, tem-se:

$$U = - \int_{\Gamma} \left\{ \left[m_x \cos^2 \alpha + m_y \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 m_{xy} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \right] \frac{\partial w^*}{\partial n} + \left[\left[m_y - m_x \right] \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + m_{xy} \left[\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \right] \right] \frac{\partial w^*}{\partial s} \right\} d\Gamma + \int_{\Gamma} q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.18)$$

Assim, a partir da equação 2.18 pode-se simplificar U como:

$$U = - \int_{\Gamma} \left(m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - q_n w^* \right) d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.19)$$

Integrando-se por partes o termo de m_{ns} , obtém-se:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = m_{ns} w^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (3.20)$$

onde Γ_1 e Γ_2 são os limites do contorno onde se faz a integração. Para um contorno fechado e sem apresentar cantos, a primeira parcela se anula. Existindo cantos, surgirão as reações de canto, denominadas aqui de R_c .

Na figura 3.3 pode-se observar uma placa com diversos

cantos onde estão representados os respectivos momentos volventes resultantes.

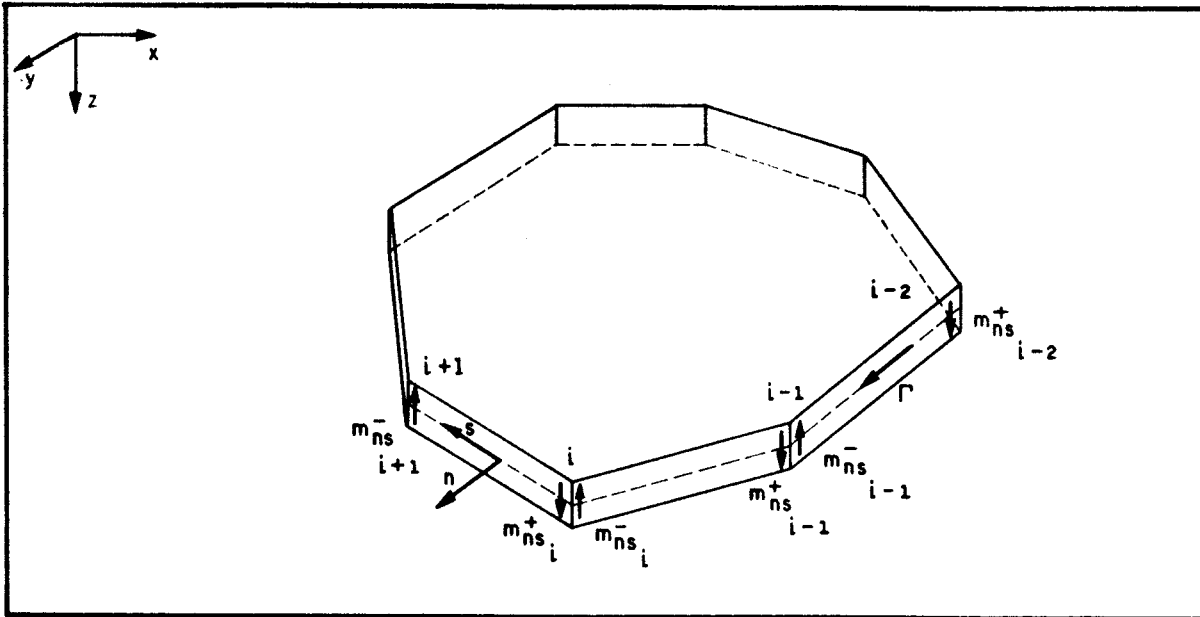


FIGURA 3.3 - Canto i da placa e momentos volventes resultantes

Admitindo-se o primeiro termo da equação 3.20 como uma somatória para todos os lados da placa, e tomando-se apenas dois lados desta para demonstração, tem-se:

$$\left[m_{ns_i}^- w_i^* - m_{ns_{i-1}}^+ w_{i-1}^* \right] + \left[m_{ns_{i+1}}^- w_{i+1}^* - m_{ns_i}^+ w_i^* \right] \quad (3.21)$$

Para o canto i tem-se:

$$- \left[m_{ns_i}^+ - m_{ns_i}^- \right] w_i^* = - R_{c_i} w_i^* \quad (3.22)$$

Com isto pode-se escrever o primeiro termo da equação 3.20, antes expresso em termos de somatória dos lados da placa, em somatória de seus cantos, a partir de 3.22:

$$\sum_{l=1}^{N_l} m_{ns_l} w_l^* \Big|_{\Gamma_{l1}}^{\Gamma_{l2}} = - \sum_{i=1}^{N_c} \left[m_{ns_i}^+ - m_{ns_i}^- \right] w_{c_i}^* = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* \quad (3.23)$$

onde,

N_l : número de lados da placa

N_c : número de cantos da placa

$w_{c_i}^*$: deslocamento fundamental no canto i

$\Gamma_{l_1}, \Gamma_{l_2}$: limites de cada lado da placa

Portanto a expressão 3.20 pode ser escrita como

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (3.24)$$

que, substituindo-se na equação 3.19, resulta:

$$U = \int_{\Gamma} \left[q_n w^* + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.25)$$

Utilizando-se a equação 2.20, tem-se:

$$U = \int_{\Gamma} \left[v_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (3.26)$$

onde admite-se a carga g atuando em um domínio Ω_g .

Analogamente, obtém-se o termo da esquerda da equação 3.1 como:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} dV = \int_{\Gamma} \left[v_n w^* - m_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^* w_{c_i} + \int_{\Omega_g} g^* w d\Omega_g \quad (3.27)$$

Assim, reunindo-se as equações 3.26 e 3.27, a expressão do teorema de Betti aplicado a placas resulta:

$$\int_{\Gamma} \left[v_n^* w - m_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^* w_{c_i} + \int_{\Omega_g} g^* w d\Omega_g =$$

$$= \int_{\Gamma} \left[V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right] d\Gamma + \sum_{i=1}^N R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (3.28)$$

Ao reescrevê-la de forma a relacionar cada variável como função dos pontos na placa, observa-se:

a) os esforços e os deslocamentos correspondentes ao carregamento g dependem apenas do ponto de deslocamento P ;

b) a carga unitária g^* aplicada no ponto q do domínio da placa é representada pela função delta de Dirac $\delta(q,P)$ e, portanto, é função dos pontos de aplicação de carga q e de deslocamento P ;

c) os esforços e os deslocamentos correspondentes à carga g^* dependem dos pontos de carga q e de deslocamento P .

Assim, reescrevendo-se a equação 3.28, resulta:

$$\int_{\Gamma} \left[V_n^*(q,P) w(P) - m_n^*(q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^N R_{c_i}^*(q,P) w_{c_i}(P) + \int_{\Omega_g} g^*(q,P) w(P) d\Omega_g(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(q,P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^N R_{c_i}(P) w_{c_i}^*(q,P) + \int_{\Omega_g} g(P) w^*(q,P) d\Omega_g(P) \quad (3.29)$$

Conforme já mencionado, a terceira propriedade da distribuição delta de Dirac (2.41.c) garante que

$$\int_{\Omega_g} \delta(q,P) w(P) d\Omega_g(P) = w(q) \quad (3.30)$$

Com isto a expressão do teorema de Betti aplicado a placas fica:

$$w(q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(q,P) w(P) - m_n^*(q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^N R_{C_i}^*(q, P) w_{C_i}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(q, P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \\
 & d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^N R_{C_i}(P) w_{C_i}^*(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Tem-se, portanto, a equação integral do deslocamento transversal w de um ponto q do domínio da placa, expressa em função dos esforços $V_n(P)$ e $m_n(P)$ e dos deslocamentos $w(P)$ e $\frac{\partial w}{\partial n}(P)$ de pontos do contorno, utilizando-se as soluções fundamentais obtidas no capítulo anterior.

Derivando-se a equação 3.31 em relação à direção m , obtém-se a equação integral $\frac{\partial w}{\partial m}(q)$ para um ponto q do domínio da placa:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial w}{\partial m}(q) + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^N \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial m}(q, P) w_{C_i}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) - m_n(P) \right. \\
 & \left. \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^N R_{C_i}(P) \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial m}(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) \\
 & d\Omega_g(p) \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

3.3. Equação integral para um ponto do contorno

As equações 3.31 e 3.32 são escritas para pontos q do domínio da placa, porém, para a aplicação do método aos problemas de flexão de placas, deve-se escrever as equações integrais para pontos Q do contorno. Para isto, considere-se a figura 3.4 onde um ponto Q do contorno passa a pertencer ao domínio com o acréscimo Γ_{ξ} do contorno, de raio ξ e com novos cantos λ^+ e λ^- .

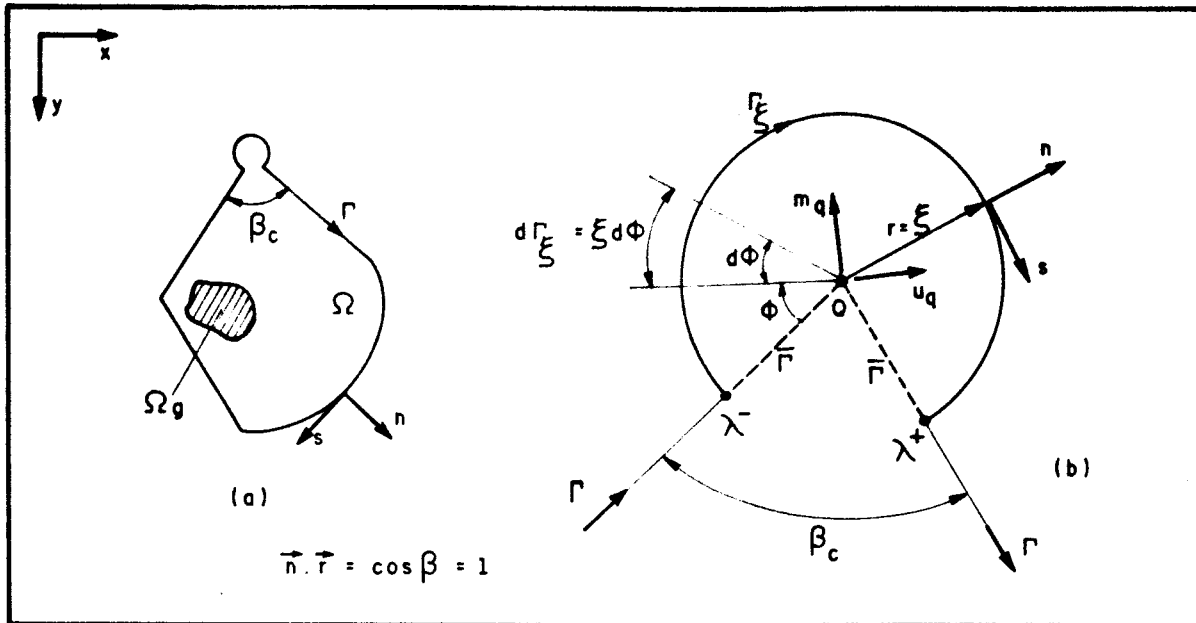


FIGURA 3.4 - Contorno circular acrescido ao canto Q da placa

Com o acréscimo do contorno, a equação 3.31 escrita para o ponto Q do contorno da placa resulta:

$$\begin{aligned}
 & w(Q) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n^*(Q,P) w(P) - m_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q,P) w(P) - m_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^N R_{c_i}^*(Q,P) w_{c_i}(P) + R_{c_i}^*(Q,P) w_{c_i}(P) + R_{c_i}^*(Q,P) w_{c_i}(P) = \\
 & = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n(P) w^*(Q,P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(P) \right. \\
 & \left. w^*(Q,P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^N R_{c_i}(P) w_{c_i}^*(Q,P) + \\
 & + R_{c_i}(P) w_{c_i}^*(Q,P) + R_{c_i}(P) w_{c_i}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega_g(p) \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

Na condição limite, quando ξ tende a zero, o ponto Q pertencerá ao contorno. Assim:

$$\begin{aligned}
 & w(Q) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^N R_{C_i}^*(Q, P) w_{C_i}(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[R_{C_i}^*(Q, P) w_{C_i}(P) + R_{C_i}^*(Q, P) w_{C_i}(P) \right] = \\
 & = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n(P) w^*(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(P) w^*(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^N R_{C_i}(P) w_{C_i}^*(Q, P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[R_{C_i}(P) w_{C_i}^*(Q, P) + R_{C_i}(P) w_{C_i}^*(Q, P) \right] + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(P) w^*(Q, P) d\Omega_g(P) \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

Os limites das integrais sobre $\Gamma - \bar{\Gamma}$ indicadas na equação 3.34, por definição, representam o valor principal das mesmas, conforme [21]. Assim,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n(P) w^*(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) =$$

$$= \int_{\Gamma} \left[v_n(P) w^*(Q,P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) \quad (3.36)$$

Segundo PAIVA [21] pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \left[v_n^*(Q,P) w(P) - m_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_{\xi}(P) = \\ & = - \frac{2\pi - \beta_c}{2\pi} w(Q) \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde

β_c : ângulo interno do canto Q da placa

Ainda segundo PAIVA [21] os demais limites sobre ξ , incluindo-se as parcelas correspondentes às reações de canto, se anulam, de onde a equação 3.34 resulta:

$$\begin{aligned} & K(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left[v_n^*(Q,P) w(P) - m_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{i=1}^N R_{c_i}^*(Q,P) w_{c_i}(P) = \int_{\Gamma} \left[v_n(P) w^*(Q,P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] \\ & d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^N R_{c_i}(P) w_{c_i}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(P) w^*(Q,P) d\Omega_g(P) \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde,

$$K(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \quad (3.39)$$

Para um ponto Q não pertencente a um canto da placa a constante K(Q) resulta:

$$K(Q) = \frac{1}{2} \quad (3.40)$$

Escrevendo-se agora a equação integral 3.32 da derivada direcional $\frac{\partial w}{\partial m}(Q)$ para o ponto Q da figura 3.4, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q,P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \int_{\Gamma_\xi} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q,P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial m}(Q,P) w_{C_i}(P) + \frac{\partial R_{C_{\lambda^-}}^*}{\partial m}(Q,P) w_{C_{\lambda^-}}(P) + \frac{\partial R_{C_{\lambda^+}}^*}{\partial m}(Q,P) w_{C_{\lambda^+}}(P) = \\
 & = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^N R_{C_i}(P) \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial m}(Q,P) + R_{C_{\lambda^-}}(P) \frac{\partial w_{C_{\lambda^-}}^*}{\partial m}(Q,P) + R_{C_{\lambda^+}}(P) \frac{\partial w_{C_{\lambda^+}}^*}{\partial m}(Q,P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) d\Omega_g(P) \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

No limite, para ξ tendendo a zero, o ponto Q pertence ao contorno. Assim, a equação 3.41 resulta:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q,P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] \\
 & d\Gamma(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q,P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^N \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial m}(Q,P) w_{C_i}(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{\partial R_{C_{\lambda^-}}^*}{\partial m}(Q,P) w_{C_{\lambda^-}}(P) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left. \frac{\partial R_{C\lambda^+}^*}{\partial m} (Q, P) w_{C\lambda^+}(P) \right] = \\
 & = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^N R_{C_i}(P) \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial m}(Q, P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[R_{C\lambda^-}(P) \frac{\partial w_{C\lambda^-}^*}{\partial m}(Q, P) + \right. \\
 & \left. + R_{C\lambda^+}(P) \frac{\partial w_{C\lambda^+}^*}{\partial m}(Q, P) \right] + \int_{\Omega_g} g(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) d\Omega_g(P) \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

Os limites das integrais sobre $\Gamma - \bar{\Gamma}$ são os valores principais das integrais sobre Γ . Realizando-se um deslocamento vertical de corpo rígido com a placa igual a $-w(Q)$, pode-se eliminar as singularidades que aparecem na equação 3.42 quando $\xi \rightarrow 0$, conforme [21]. Assim a equação 3.42 resulta:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) [w(P) - w(Q)] - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} \\
 & d\Gamma(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) [w(P) - w(Q)] - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} \\
 & d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial m}(Q, P) [w_{C_i}(P) - w(Q)] + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial R_{C\lambda^-}^*}{\partial m}(Q, P) \right. \\
 & \left. [w_{C\lambda^-}(P) - w(Q)] + \frac{\partial R_{C\lambda^+}^*}{\partial m}(Q, P) [w_{C\lambda^+}(P) - w(Q)] \right\} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Gamma} \left[V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) \right] d\Gamma(P) + \\
 &+ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \left[V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) \right] d\Gamma_{\xi}(P) + \\
 &+ \sum_{i=1}^N R_{C_i}(P) \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial m}(Q,P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[R_{C_{\lambda^-}}(P) \frac{\partial w_{C_{\lambda^-}}^*}{\partial m}(Q,P) + \right. \\
 &\left. + R_{C_{\lambda^+}}(P) \frac{\partial w_{C_{\lambda^+}}^*}{\partial m}(Q,P) \right] + \int_{\Omega_g} g(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) d\Omega_g(P) \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

Os limites, quando $\xi \rightarrow 0$, resultam, segundo [21]:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q,P) [w(P) - w(Q)] - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma_{\xi}(P) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-1}{4\pi} \left\{ \left[(4\pi - 2\beta_c) + \text{sen } 2(\gamma + \beta_c) - \text{sen } 2\gamma \right] \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \right. \\
 &\left. + \left[\cos 2(\gamma + \beta_c) - \cos 2\gamma \right] \frac{\partial w}{\partial u}(Q) \right\} \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial R_{C_{\lambda^-}}^*}{\partial m}(Q,P) [w_{C_{\lambda^-}}(P) - w(Q)] + \frac{\partial R_{C_{\lambda^+}}^*}{\partial m}(Q,P) [w_{C_{\lambda^+}}(P) - w(Q)] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1-\nu}{4\pi} \left\{ - \left[\text{sen } 2\gamma - \text{sen } 2(\gamma + \beta_c) \right] \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \right. \\
 &\left. + \left[\cos 2(\gamma + \beta_c) - \cos 2\gamma \right] \frac{\partial w}{\partial u}(Q) \right\} \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

onde,

γ : ângulo entre os sistemas de coordenadas (n, s) e (m, u) , conforme mostra a figura 3.5.

Os demais limites dependentes de ξ da equação 3.43 são nulos, conforme [21].

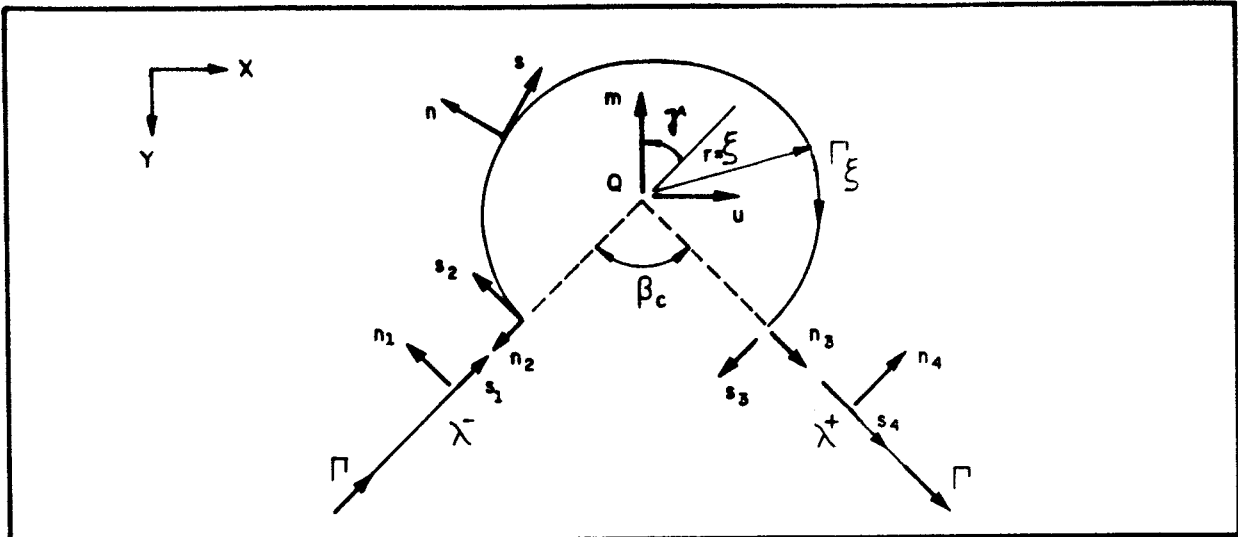


FIGURA 3.5 - Sistema de coordenadas referentes aos pontos anterior e posterior aos cantos λ^- e λ^+

Após as substituições feitas na equação 3.43 obtém-se a expressão da derivada da equação integral em um canto do contorno

$$\begin{aligned}
 & k_1 \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + k_2 \frac{\partial w}{\partial u}(Q) + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) [w(P) - w(Q)] + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial m}(Q, P) w_{c_i}(P) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^N R_{c_i}(P) \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial m}(Q, P) + \int_{\Omega_g} g(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) d\Omega_g(P) \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

onde,

$$k_1 = \frac{\beta_c}{2\pi} + \frac{\nu}{4\pi} \left[\text{sen } 2\gamma - \text{sen } 2(\gamma + \beta_c) \right] \quad (3.47)$$

$$k_2 = \frac{\nu}{4\pi} \left[\text{cos } 2\gamma - \text{cos } 2(\gamma + \beta_c) \right] \quad (3.48)$$

Indicando-se por k_w a seguinte expressão:

$$k_w = k_1 \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + k_2 \frac{\partial w}{\partial u}(Q) \quad (3.49)$$

e admitindo-se que a coordenada m coincide com a direção normal n_1 , conforme a figura 3.5, obtém-se:

$$k_w = \frac{\beta_c}{2\pi} \frac{\partial w}{\partial n_1}(Q) + \frac{\nu}{2\pi} \text{sen } \beta_c \frac{\partial w}{\partial n_4}(Q) \quad (3.50)$$

e para $m = n_4$:

$$k_w = \frac{\nu}{2\pi} \text{sen } \beta_c \frac{\partial w}{\partial n_1}(Q) + \frac{\beta_c}{2\pi} \frac{\partial w}{\partial n_4}(Q) \quad (3.51)$$

Portanto pode-se escrever, para cada ponto Q do contorno, duas equações integrais para as derivadas do deslocamento, correspondentes às duas direções normais definidas junto ao canto. Estas duas equações são escritas em relação aos pontos anterior e posterior ao canto, substituindo-se respectivamente as equações 3.50 e 3.51 em 3.46. Para pontos do contorno com uma única tangente, isto é, uma única normal, tem-se $\beta_c = \pi$, tornando-se idênticas estas duas equações e, portanto, a equação integral da derivada do deslocamento w deste ponto em relação à direção normal ao contorno resulta:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial v_n^*}{\partial m}(Q,P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial m}(Q,P) w_{c_i}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) - m_n(P) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n} (Q, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^N R_{C_i}(P) \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial m} (Q, P) + \int_{\Omega_g} g(P) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) d\Omega_g(P) \quad (3.52)$$

3.4. Integrais de domínio para o carregamento

As integrais de domínio das equações 3.31, 3.32, 3.46 e 3.52 serão transformadas em integrais sobre o contorno da região carregada Ω_g . As integrais do domínio são:

$$\int_{\Omega_g} g(P) w^*(q, P) d\Omega_g(P) \quad (3.53.a)$$

$$\int_{\Omega_g} g(P) \frac{\partial w^*}{\partial m} (q, P) d\Omega_g(P) \quad (3.53.b)$$

onde,

$$w^* = \frac{r^2}{8\pi D} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (3.54.a)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{-r}{4\pi D} \ln r \cos \varphi \quad (3.54.b)$$

Considere-se a figura 3.6 que mostra a região carregada Ω_g com contorno Γ_g , além do ponto de carregamento q , onde admite-se a carga g variando linearmente em seu domínio. Com isto pode-se escrever, em relação ao sistema de coordenadas (x, y) :

$$g = A x(P) + B y(P) + C \quad (3.55)$$

Em relação ao sistema de coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) , de origem em q (figura 3.6), têm-se:

$$x(P) = x(q) + \bar{x}(P) \quad (3.56.a)$$

$$y(P) = y(q) + \bar{y}(P) \quad (3.56.b)$$

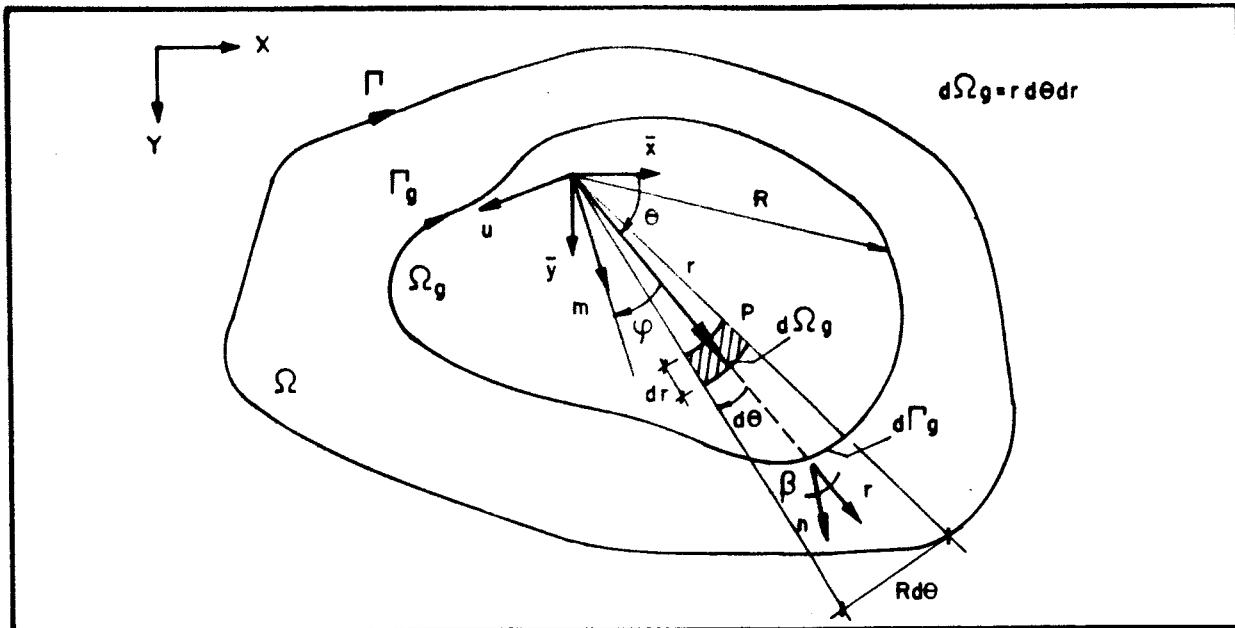


FIGURA 3.6 - Região carregada Ω_g

Reescrevendo-se a equação 3.55 tem-se:

$$\begin{aligned}
 g &= A x(q) + B y(q) + C + A \bar{x}(p) + B \bar{y}(p) = \\
 &= g(q) + A \bar{x}(p) + B \bar{y}(p) \quad (3.57)
 \end{aligned}$$

onde,

$g(q)$: valor da carga g no ponto q .

Substituindo-se a equação 3.57, escrita em coordenadas polares, na equação 3.53.a, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) &= \int_{\Omega_g} \left[g(q) + A r \cos \theta + \right. \\
 &\left. + B r \sin \theta \right] w^*(q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.58)
 \end{aligned}$$

Substituindo-se a equação 3.54.a na equação 3.58, lembrando-se que $g(q)$ é uma constante e $d\Omega = r dr d\theta$ (figura 3.6), tem-se:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega_g(p) = \frac{g(q)}{8\pi D} \int_{\theta} \left[\int_0^R r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) dr \right] d\theta + \frac{1}{8\pi D} \int_{\theta} \left[\int_0^R (A \cos \theta + B \sin \theta) r^4 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) dr \right] d\theta \quad (3.59)$$

Fazendo-se a integração em r, com o ângulo θ constante,

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega_g(p) = \frac{g(q)}{32\pi D} \int_{\theta} R^4 \left(\ln R - 0,75 \right) d\theta + \frac{1}{40\pi D} \int_{\theta} R^5 (A \cos \theta + B \sin \theta) \left(\ln R - 0,70 \right) d\theta \quad (3.60)$$

Da figura 3.6 pode-se escrever:

$$d\Gamma_g \cos \beta = R d\theta \quad (3.61.a)$$

ou,

$$d\theta = \frac{d\Gamma_g \cos \beta}{R} \quad (3.61.b)$$

Substituindo-se a equação 3.61 na equação 3.60 obtém-se a integral de domínio, transformada numa integral sobre o contorno do carregamento Γ_g :

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega_g(p) = \frac{1}{40\pi D} \int_{\Gamma_g} R^4 (A \cos \theta + B \sin \theta) \left(\ln R - 0,70 \right) \cos \beta d\Gamma_g + \frac{g(q)}{32\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 \left(\ln R - 0,75 \right) \cos \beta d\Gamma_g \quad (3.62)$$

Analogamente, para a integral de domínio expressa na equação 3.53.b :

$$\int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, p) d\Omega_g(p) = \frac{-1}{16\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 (A \cos \theta + B \sin \theta)$$

$$(\ln r - 0,25) \cos \varphi \cos \beta d\Gamma_g - \frac{g(q)}{12\pi D} \int_{\Gamma_g} R^2 (\ln R - \frac{1}{3}) \cos \varphi$$

$$\cos \beta d\Gamma_g$$

(3.63)

4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO : IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

4.1. Introdução

Neste capítulo será apresentada a solução numérica das equações integrais obtidas no capítulo anterior dos deslocamentos transversais e de suas derivadas direcionais, relacionados aos deslocamentos e esforços no contorno.

A transformação dessas equações integrais em equações algébricas para a solução numérica é feita utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno. Neste método divide-se o contorno em segmentos, chamados elementos de contorno, onde as variáveis nodais correspondentes, os deslocamentos w e $\frac{\partial w}{\partial n}$ e os esforços V_n e m_n , são aproximados por funções interpoladoras.

As equações algébricas resultantes dessa transformação, escritas para todos os pontos do contorno, formam um sistema de equações lineares. O sistema é resolvido após a imposição das condições de contorno para cada problema, podendo-se obter posteriormente valores de deslocamentos e esforços para pontos do domínio.

Ainda neste capítulo serão apresentados os elementos utilizados no programa para aproximação da geometria, procedimentos utilizados em casos de descontinuidade da

normal ou das condições de contorno e na aplicação da reação V_n pontual. Serão ainda comentadas as integrações numéricas utilizadas a nível de cada elemento, com transformação auto-adaptativa de coordenadas.

4.2. Discretização das equações integrais

A discretização do contorno de uma placa de forma qualquer deve ser feita de modo que o contorno real seja melhor representado. Para isto adotam-se elementos de geometria reta ou curva.

A figura 4.1 mostra uma placa cujo contorno Γ é dividido em elementos de contorno Γ_j , onde alguns são admitidos curvos com este objetivo. Para o elemento quadrático são necessários 3 nós, ou pontos nodais, para sua definição geométrica, dois deles em suas extremidades e um central. As variáveis de contorno serão aproximadas por funções polinomiais interpoladoras de ordem quadrática, também definidas para os 3 pontos nodais correspondentes a cada elemento.

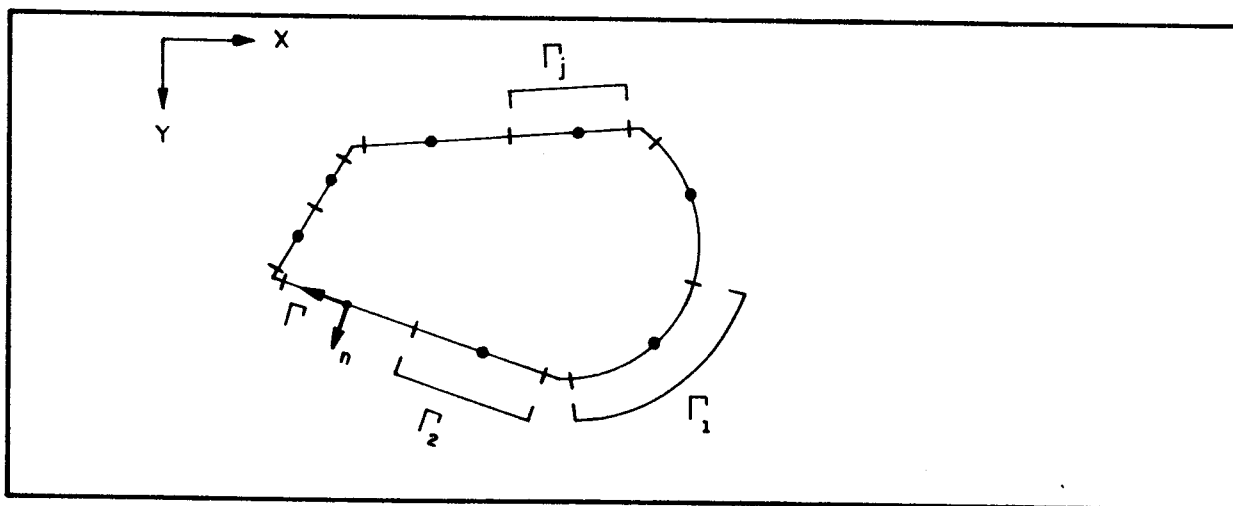


FIGURA 4.1 - Discretização do contorno Γ da placa

Os elementos utilizados são elementos quadráticos

contínuos e elementos circulares contínuos, onde o usuário tem a opção de definir qual o tipo de elemento que melhor representa o contorno real. Os elementos são ditos contínuos por garantir a continuidade das variáveis entre elementos adjacentes. Em casos de descontinuidade da normal ao contorno ou de esforços serão utilizados nós duplos, de iguais coordenadas, onde cada nó assumirá valores nodais diferentes na descontinuidade.

Esta situação ocorre, por exemplo, em um canto de placa, onde há uma mudança brusca da direção normal ao contorno, ou ainda condições de contorno de deslocamentos ou de esforços diferentes, como um lado da placa engastado e outro simplesmente apoiado, ou livre.

A figura 4.2 mostra o nó duplo em um canto de placa, cada nó pertencendo a um elemento adjacente a este canto, com direções normais ao contorno distintas.

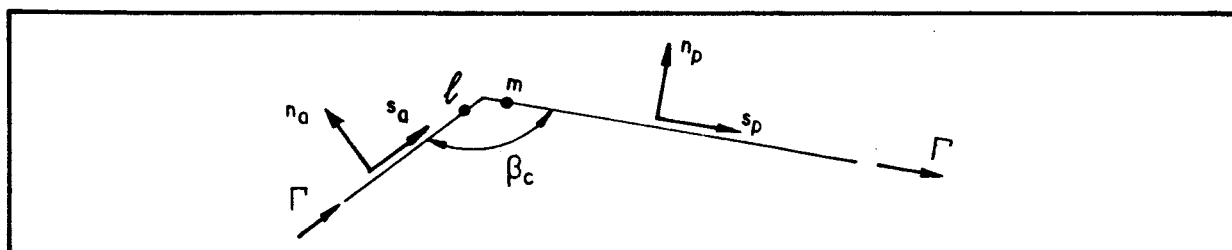


FIGURA 4.2 - Nó duplo em canto de placa

4.2.1. Elemento Quadrático Contínuo

A aproximação da geometria deste elemento, assim como dos deslocamentos e esforços no contorno, é feita pelas funções interpoladoras quadráticas ϕ .

As funções aproximadoras ϕ são expressas em função da coordenada local isoparamétrica ξ , correspondente a cada elemento, conforme pode-se observar na figura 4.3. As coordenadas de um ponto, k , qualquer do elemento são obtidas, portanto, em função das coordenadas dos 3 pontos nodais que definem este elemento.

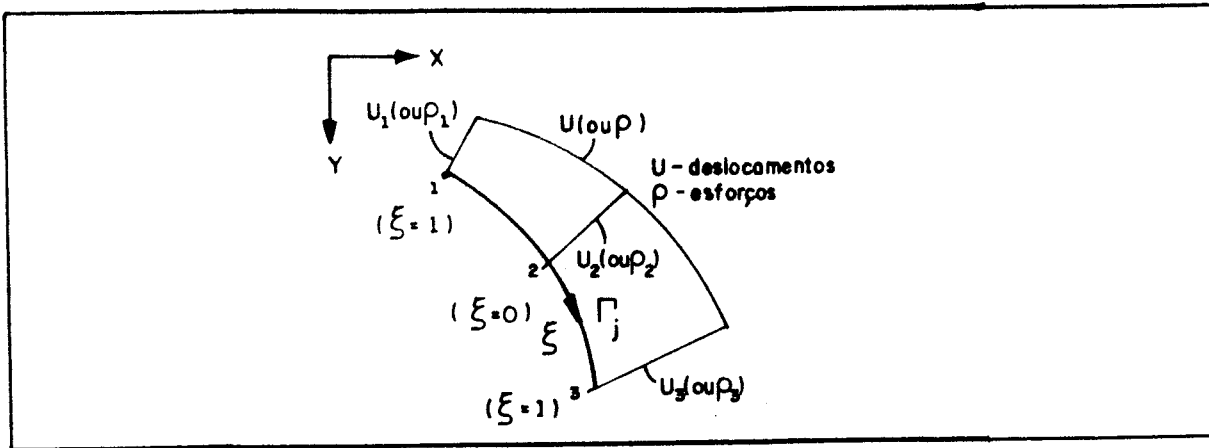


FIGURA 4.3 - Coordenada local isoparamétrica ξ e coordenada curvilínea no contorno Γ_j

As funções aproximadoras ϕ são:

$$\phi^1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \quad (4.1.a)$$

$$\phi^2 = (1 - \xi)(1 + \xi) \quad (4.1.b)$$

$$\phi^3 = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \quad (4.1.c)$$

e assumem valores unitários nos respectivos nós e zero nos demais.

Assim, as coordenadas de um ponto k interno ao elemento j podem ser escritas como:

$$x_i(\xi_k) = \phi^1(\xi_k) x_i^1 + \phi^2(\xi_k) x_i^2 + \phi^3(\xi_k) x_i^3 \quad (4.2)$$

onde,

$i = 1, 2$: índices que indicam as coordenadas (x_1, x_2) substituindo (x, y) .

O Jacobiano da transformação da coordenada no contorno Γ para a coordenada adimensional ξ é obtida da equação 4.2 resultando:

$$J = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad (4.3)$$

Para a utilização da integração numérica sobre o elemento de contorno é necessária ainda a obtenção dos versores normal e tangencial ao contorno e o raio de curvatura no ponto k pertencente a este elemento, além de seu comprimento total. A geometria diferencial fornece as seguintes expressões baseadas nas equações 4.2 e 4.3:

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} d\xi \quad (4.4)$$

$$K(\xi_k) = \frac{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right) \left(\frac{d^2x_2}{d\xi^2}\right) - \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right) \left(\frac{d^2x_1}{d\xi^2}\right)}{\left[\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (4.5)$$

$$R(\xi_k) = \frac{1}{K(\xi_k)} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial n}{\partial x_1}(\xi_k) = \frac{\frac{dx_2}{d\xi}}{J_k} \quad (4.7.a)$$

$$\frac{\partial n}{\partial x_2}(\xi_k) = -\frac{\frac{dx_1}{d\xi}}{J_k} \quad (4.7.b)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_1}(\xi_k) = -\frac{\partial n}{\partial x_2}(\xi_k) \quad (4.8.a)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2}(\xi_k) = \frac{\partial n}{\partial x_1}(\xi_k) \quad (4.8.b)$$

onde,

$\frac{dx_1}{d\xi}$, $\frac{d^2x_1}{d\xi^2}$, $\frac{dx_2}{d\xi}$, $\frac{d^2x_2}{d\xi^2}$: derivadas da equação 4.2 em

relação à coordenada local ξ ;

L : comprimento do elemento de contorno;

$K(\xi_k)$: curvatura do contorno no ponto ξ_k ;

$R(\xi_k)$: raio de curvatura no ponto,

$\frac{\partial n}{\partial x_1}(\xi_k)$, $\frac{\partial n}{\partial x_2}(\xi_k)$: co-senos diretores da direção normal ao contorno no ponto, em relação ao sistema de coordenadas (x_1, x_2) ;

$\frac{\partial s}{\partial x_1}(\xi_k)$, $\frac{\partial s}{\partial x_2}(\xi_k)$: co-senos diretores da direção tangencial ao contorno no ponto, em relação ao sistema de coordenadas (x_1, x_2) .

A figura 4.4 mostra um ponto k qualquer no contorno e as respectivas direções normal e tangencial representadas pelos versores \vec{n}_k e \vec{s}_k .

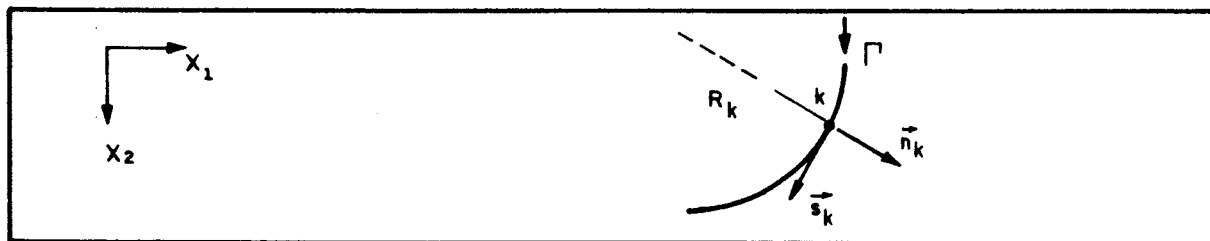


FIGURA 4.4 - Direções tangencial s e normal n ao contorno

4.2.2. Elemento Circular Contínuo

Para representação exata de um contorno circular, pode-se utilizar o elemento circular onde apenas a geometria é definida por novas expressões, enquanto as variáveis nodais deslocamentos e esforços continuam sendo aproximadas pelas funções interpoladoras ϕ das equações 4.1.

Primeiramente, para este tipo de elemento, pode-se obter o centro da circunferência por suas coordenadas x_1^0 e x_2^0 e seu raio de curvatura R como função dos pontos nodais 1, 2 e 3, que definem o elemento, conforme as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 x_1^0 = & \left\{ \left(x_1^1 \right)^3 \left(x_2^3 - x_2^2 \right) + \left(x_1^2 \right)^3 \left(x_2^3 - x_2^1 \right) + \left(x_1^1 \right)^2 x_1^2 \left(x_2^2 - x_2^3 \right) + \right. \\
 & + \left. \left(x_1^2 \right)^2 x_1^1 \left(x_2^1 - x_2^3 \right) + \left(x_1^3 \right)^2 \left[x_1^1 \left(x_2^2 - x_2^1 \right) + x_1^2 \left(x_2^1 - x_2^2 \right) \right] + \right. \\
 & + \left. \left(x_1^1 \right) \left[x_1^1 \left(x_2^3 - x_2^2 \right) + x_1^2 \left(x_2^2 - x_2^3 \right) \right] + \right. \\
 & + \left. \left(x_1^2 \right)^2 \left[x_1^1 \left(x_2^1 - x_2^3 \right) + x_1^2 \left(x_2^3 - x_2^1 \right) \right] + \right. \\
 & + \left. \left(x_1^3 \right)^2 \left[x_1^1 \left(x_2^2 - x_2^1 \right) + x_1^2 \left(x_2^1 - x_2^2 \right) \right] \right\} / \\
 & / \left\{ 2 \left(x_1^1 - x_1^2 \right) \left[x_2^3 \left(x_1^1 - x_1^2 \right) + x_2^2 \left(x_1^3 - x_1^1 \right) + x_2^1 \left(x_1^2 - x_1^3 \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

(4.9.a)

$$\begin{aligned}
 x_2^0 = & \left\{ \left[\left(x_1^3 \right)^2 + \left(x_2^3 \right)^2 \right] \left(x_1^1 - x_1^2 \right) + \left[\left(x_1^2 \right)^2 + \left(x_2^2 \right)^2 \right] \left(x_1^3 - x_1^1 \right) + \right. \\
 & + \left. \left[\left(x_1^1 \right)^2 + \left(x_2^1 \right)^2 \right] \left(x_1^2 - x_1^3 \right) \right\} / \\
 & / \left\{ 2 \left[x_2^3 \left(x_1^1 - x_1^2 \right) + x_2^2 \left(x_1^3 - x_1^1 \right) + x_2^1 \left(x_1^2 - x_1^3 \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

(4.9.b)

$$R = \sqrt{\left(x_1^2 - x_1^0 \right)^2 + \left(x_2^2 - x_2^0 \right)^2}$$

(4.10)

Para obterem-se as coordenadas de um ponto k qualquer do elemento circular são utilizadas coordenadas locais z_1 e z_2 , posicionadas no centro da circunferência, onde a direção z_1 passa pelo ponto 2, intermediário ao elemento, conforme mostra a figura 4.5.

As novas coordenadas são obtidas por rotação e translação de eixos (figura 4.5) e são expressas por:

$$z_1 = \left[x_1 - x_1^0 \right] \cos \alpha + \left[x_2 - x_2^0 \right] \operatorname{sen} \alpha \quad (4.11 \text{ a})$$

$$z_2 = \left[x_2 - x_2^0 \right] \cos \alpha + \left[x_1 - x_1^0 \right] \operatorname{sen} \alpha \quad (4.11 \text{ b})$$

ou ainda,

$$x_1 = z_1 \cos \alpha - z_2 \operatorname{sen} \alpha + x_1^0 \quad (4.12 \text{ a})$$

$$x_2 = z_1 \operatorname{sen} \alpha + z_2 \cos \alpha + x_2^0 \quad (4.12 \text{ b})$$

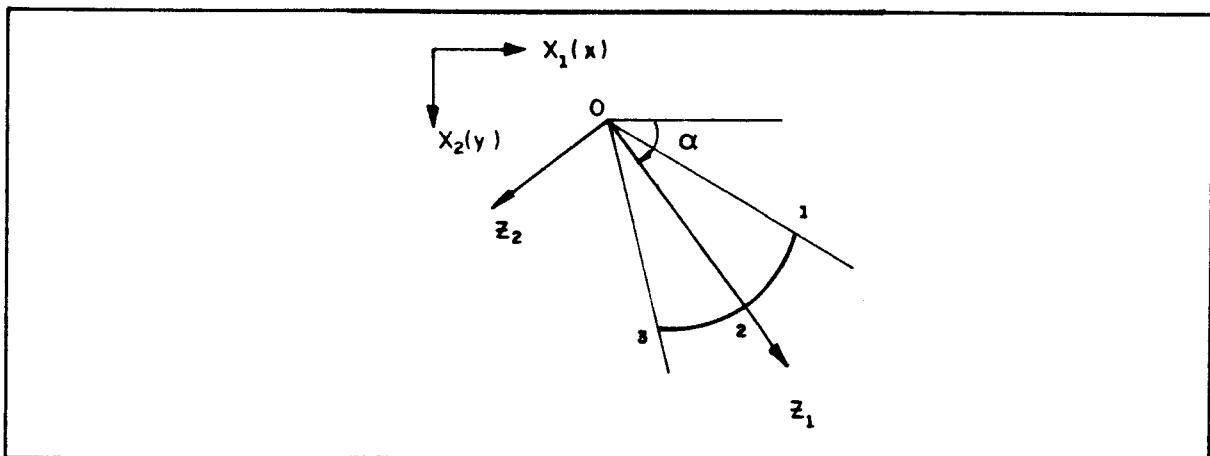


FIGURA 4.5 - Coordenadas global e local ao elemento de contorno circular

Para utilização da integração numérica sobre o elemento introduz-se a coordenada adimensional ξ , o que requer a transformação da coordenada local z em coordenadas polares (r, θ) .

Com r constante e igual a R adota-se a coordenada θ positiva no sentido horário a partir do semi-eixo positivo z_1 , resultando:

$$z_1 = R \cos \theta \quad (4.13. \text{a})$$

$$z_2 = R \operatorname{sen} \theta \quad (4.13. \text{b})$$

A figura 4.6 mostra esta nova transformação de coordenadas locais, com as coordenadas θ e ξ e o ângulo θ_1 do setor formado pelo elemento circular.

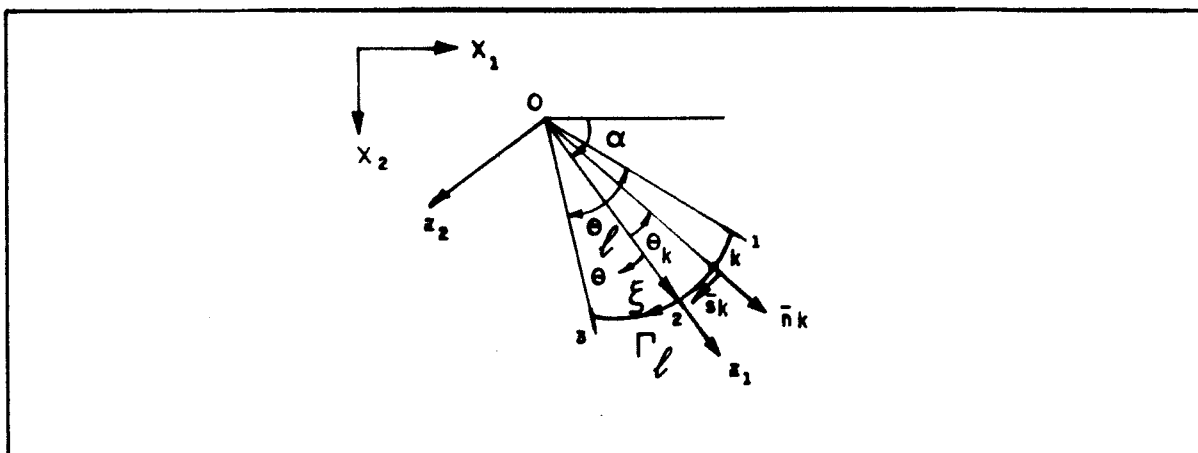


FIGURA 4.6 - Coordenadas locais do elemento circular

A posição de um ponto k deste elemento, em relação às coordenadas apresentadas, é dada por:

$$\theta_k = \frac{\theta_l}{2} \xi_k \quad (4.14)$$

onde,

$$-1 \leq \xi_k \leq 1$$

e

$$-\frac{\theta_l}{2} \leq \theta_k \leq \frac{\theta_l}{2} \quad (4.15)$$

Assim, durante a integração numérica sobre o elemento, dado um ponto k genérico deste pela coordenada adimensional ξ , obtêm-se suas coordenadas em relação aos eixos x_1 e x_2 pelas seguintes expressões, obtidas a partir das expressões 4.12, 4.13 e 4.14:

$$x_1^k = R \cos(\theta_k) \cos\alpha - R \sin(\theta_k) \sin\alpha + x_1^o \quad (4.16.a)$$

$$x_2^k = R \cos(\theta_k) \sin\alpha + R \sin(\theta_k) \cos\alpha + x_2^o \quad (4.16.b)$$

Para o elemento circular, assim como foi feito para o quadrático, é necessária a obtenção dos versores normal e tangencial ao contorno no ponto k , cujos co-senos diretores são dados pelas expressões:

$$\frac{\partial n}{\partial x_1} (\xi_k) = \frac{x_1^k - x_1^o}{R} \quad (4.17 a)$$

$$\frac{\partial n}{\partial x_2} (\xi_k) = \frac{x_2^k - x_2^o}{R} \quad (4.17 b)$$

$$-\frac{\partial s}{\partial x_1} (\xi_k) = -\frac{\partial n}{\partial x_2} (\xi_k) \quad (4.18 a)$$

$$-\frac{\partial s}{\partial x_2} (\xi_k) = \frac{\partial n}{\partial x_1} (\xi_k) \quad (4.18 b)$$

O comprimento do elemento é dado por:

$$L = R \cdot \theta_l \quad (4.19)$$

4.2.3. Equações Matriciais

As equações integrais de placas obtidas no capítulo anterior apresentam integrais sobre o contorno Γ e as aproximações da geometria e variáveis sobre os elementos que o discretizam são funções da variável adimensional ξ , cuja transformação de coordenadas é dada pelo determinante jacobiano J da equação 4.3.

As coordenadas de um ponto k qualquer pertencente a um elemento de contorno, escritas em função das coordenadas dos pontos nodais do elemento e das funções aproximadoras ϕ resultam na expressão:

$$x_i (\xi_k) = \phi^1 (\xi_k) x_i^1 + \phi^2 (\xi_k) x_i^2 + \phi^3 (\xi_k) x_i^3 \quad (4.20)$$

com, $i = 1, 2$

Escrevendo-se na forma matricial resulta:

$$\underset{\sim}{X}(k) = \underset{\sim}{\phi} (\xi_k) \underset{\sim}{X} \quad (4.21)$$

$$\tilde{X}(k) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^k \quad (4.22)$$

$$\tilde{\phi} = \left\{ \phi^1 \quad \phi^2 \quad \phi^3 \right\}$$

$$\tilde{\phi}(\xi_k) = \begin{bmatrix} \tilde{\phi} & 0 \\ 0 & \tilde{\phi} \end{bmatrix}^k \quad (4.23)$$

$$\tilde{X}^T = \left\{ x_1^1 \quad x_1^2 \quad x_1^3 \quad x_2^1 \quad x_2^2 \quad x_2^3 \right\} \quad (4.24)$$

Reescrevendo-se a expressão 4.20, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^k = \left[\begin{bmatrix} \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \phi^1 & 0 & \phi^3 \\ \phi^2 & \phi^2 & \phi^3 \end{bmatrix}^k \right] \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \\ x_2^3 \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

Procedendo-se de forma análoga com relação às variáveis deslocamentos e esforços, obtêm-se as expressões:

$$\tilde{U}(k) = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^k = \left[\begin{bmatrix} \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \phi^1 & 0 & \phi^3 \\ \phi^2 & \phi^2 & \phi^3 \end{bmatrix}^k \right] \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_1^3 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \\ U_2^3 \end{Bmatrix} \quad (4.26.a)$$

$$\tilde{P}(k) = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \left[\begin{matrix} \phi^1 & \phi^2 & \phi^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right]^k & \left[\begin{matrix} \phi^1 & 0 & \phi^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right]^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_1^3 \\ P_2^1 \\ P_2^2 \\ P_2^3 \end{Bmatrix} \quad (4.26.b)$$

onde os índices 1 e 2 nos deslocamentos u e nos esforços P representam:

$$u_1(k) = w(k) \quad , \quad u_2(k) = \frac{\partial w}{\partial n}(k) \quad (4.27.a)$$

$$P_1(k) = V_n(k) \quad , \quad P_2(k) = m_n(k) \quad (4.27.b)$$

Desta forma, podem-se escrever as equações integrais dos deslocamentos w e $\frac{\partial w}{\partial n}$ para um ponto Q do contorno, agrupadas numa única equação como:

$$\begin{aligned} & \tilde{C}(Q) \tilde{U}(Q) + \int_{\Gamma} \tilde{P}^*(Q,P) \tilde{U}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \tilde{R}_{c_i}^*(Q,P) \tilde{U}_{c_i}(P) = \\ & = \int_{\Gamma} \tilde{U}^*(Q,P) \tilde{P}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \tilde{R}_{c_i}(P) \tilde{U}_{c_i}^*(Q,P) + \\ & + \int_{\Omega_g} g(P) \tilde{U}^*(Q,P) d\Omega_g(P) \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde,

$$\tilde{C}(Q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\tilde{U}(Q) = \begin{Bmatrix} u_1(Q) \\ u_2(Q) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(Q) \\ \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\tilde{U}(P) = \begin{Bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(P) \\ \frac{\partial w}{\partial n}(P) \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\underset{\sim}{P}(Q) = \begin{Bmatrix} P_1(Q) \\ P_2(Q) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_n(Q) \\ m_n(Q) \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\underset{\sim}{P}(P) = \begin{Bmatrix} P_1(P) \\ P_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_n(P) \\ m_n(P) \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\underset{\sim}{U}(Q,P) = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^*(Q,P) & -\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \\ \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) & -\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\underset{\sim}{P}(Q,P) = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_n^*(Q,P) & -m_n^*(Q,P) \\ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q,P) & -\frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q,P) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\underset{\sim}{R}_{c_i}^*(Q,P) = \begin{Bmatrix} R_{c_i}^*(Q,P) \\ \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial m}(Q,P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{c_{i1}}^* \\ R_{c_{i2}}^* \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\underset{\sim}{u}_{c_i}^*(Q,P) = \begin{Bmatrix} w_{c_i}^*(Q,P) \\ \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial m}(Q,P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{c_{i1}}^* \\ u_{c_{i2}}^* \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\underset{\sim}{u}_g^*(Q,P) = \begin{Bmatrix} w^*(Q,P) \\ \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{g1}^* \\ u_{g2}^* \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Com a discretização do contorno (figura 4.1) as integrais da equação 4.28 podem ser reescritas como uma somatória dos valores das integrais sobre os elementos de contorno, resultando:

$$\underset{\sim}{C}(Q) \underset{\sim}{U}(Q) + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} \underset{\sim}{P}^*(Q,P) \underset{\sim}{U}(P) d\Gamma_j(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \underset{\sim}{R}_{c_i}^*(Q,P) \underset{\sim}{u}_{c_i}(P) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} U^*(Q,P) P(P) d\Gamma_j(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) U_{c_i}^*(Q,P) + \\
 &+ \int_{\Omega_g} g(P) U_g^*(Q,P) d\Omega_g(P) \quad (4.39)
 \end{aligned}$$

onde,

N_e : número de elementos de contorno da discretização.

Explicitando-se os vetores $U(P)$ e $P(P)$ das equações 4.26, com valores aproximados em função dos valores nodais e substituindo-os na equação 4.39, tem-se:

$$\begin{aligned}
 &\underline{U}(Q) \underline{U}(Q) + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{-1}^1 |J| \phi(P) P^*(Q,P) d\xi(P) \underline{U}_j + \\
 &+ \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q,P) \underline{U}_{c_i}(P) = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{-1}^1 |J| \phi(P) \underline{U}^*(Q,P) d\xi(P) \underline{P}_j + \\
 &+ \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) \underline{U}_{c_i}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(P) \underline{U}_g^*(Q,P) d\Omega_g(P) \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

Como os valores nodais são independentes de Γ , a equação integral 4.40 transforma-se em equação algébrica na forma:

$$a_{ij} w_j + b_{ij} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_j = c_{ij} v_{n_j} + d_{ij} m_{n_j} + e_{ik} R_{c_k} + f_i$$

com,

$$i = 1,2 \quad ; \quad j = 1, \text{NOCONT} \quad ; \quad k = 1, \text{nc} \quad (4.41)$$

onde,

os índices repetidos indicam somatório;

NOCONT : número de nós no contorno;

nc : número de cantos da placa;

i : representa as equações do deslocamento ($i=1$) e de sua derivada direcional ($i=2$).

Aplicando-se a equação 4.41 para todos os pontos nodais obtém-se um sistema de equações lineares, de ordem igual a duas vezes o número de nós no contorno. O sistema obtido pode ser escrito na forma matricial.

$$\underset{\sim}{H}' \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{R}_c + \underset{\sim}{F} \quad (4.42)$$

onde,

$\underset{\sim}{H}'$ e $\underset{\sim}{G}$ - matrizes quadradas de ordem igual ao dobro do número de nós no contorno ($2 \times \text{NOCONT}$), cujos termos são obtidos das integrais de contorno;

$\underset{\sim}{U}$ e $\underset{\sim}{P}$ - vetores dos deslocamentos e dos esforços, respectivamente, de todos os pontos nodais do contorno, vetores de ordem $2 \times \text{NOCONT}$;

$\underset{\sim}{F}$ - vetor resultante da integração sobre a região carregada Ω_g , vetor de ordem $2 \times \text{NOCONT}$.

Com as condições de contorno impostas por um problema com uma placa em equilíbrio, serão conhecidas, para cada nó do contorno, duas das quatro variáveis nodais (w , $\frac{\partial w}{\partial n}$, V_n , m_n) enquanto as demais serão incógnitas. Neste caso, o sistema 4.42 terá $2 \times \text{NOCONT}$ variáveis incógnitas e $2 \times \text{NOCONT}$ variáveis conhecidas. Efetuando-se as contribuições dos termos da matriz $\underset{\sim}{E}$, referentes às reações de canto, na matriz $\underset{\sim}{H}'$ e então levando-se as variáveis conhecidas para o segundo membro da equação 4.42, esta pode ser reescrita como:

$$\{A\} \{X\} = \{B\} \quad (4.43)$$

sendo,

$\{X\}$ - vetor das variáveis nodais incógnitas.

Após a resolução do sistema são conhecidos todos os valores nodais podendo-se obter os deslocamentos e curvaturas dos pontos internos aplicando-se as equações integrais 3.31 e 3.32. A partir dos deslocamentos e curvaturas dos pontos internos pode-se calcular os momentos fletores e volventes e força cortante nestes pontos.

Posteriormente serão discutidas as contribuições das reações de canto, assim como a introdução do cálculo da reação V_n pontual e suas melhorias em comparação com a formulação usual de cálculo deste esforço.

4.2.4. Deslocamentos para pontos internos

Calculadas as incógnitas do contorno após a resolução do sistema 4.43 pode-se obter os deslocamentos $w(q)$, as derivadas direcionais $\frac{\partial w}{\partial m}(q)$ e as curvaturas em relação a uma direção m , qualquer, para pontos do domínio. Para isto utilizam-se as equações 3.31 e 3.32, respectivamente, aplicadas a todos os pontos internos.

Desta forma obtém-se a seguinte equação matricial, semelhante à já obtida para pontos do contorno 4.41:

$$\tilde{U}(q) + \tilde{H}^i \tilde{U} = \tilde{G}^i \tilde{P} + \tilde{F}^i \quad (4.44)$$

onde,

$$\tilde{U}^T(q) = \left\{ w_1 \quad \frac{\partial w}{\partial m}^1 \quad w_2 \quad \frac{\partial w}{\partial m}^2 \quad \dots \quad w_{NPI} \quad \frac{\partial w}{\partial m}^{NPI} \right\} \quad (4.45)$$

sendo,

NPI - número de pontos internos;

\tilde{H}^i e \tilde{G}^i - matrizes semelhantes a \tilde{H} e \tilde{G} , obtidas para pontos internos, onde \tilde{H}^i já contém as contribuições de reações de canto, obtidas de forma análoga à realizada para pontos do contorno;

\tilde{U} e \tilde{P} - vetores dos deslocamentos e dos esforços dos nós do contorno, respectivamente;

\tilde{F}^i - vetor resultante da integração sobre a região carregada Ω_g para os pontos internos (semelhante ao vetor \tilde{F} da equação 4.41).

As matrizes \tilde{H}^i e \tilde{G}^i terão duas ou mais linhas para cada ponto interno, dependendo de quantas direções m serão escolhidas para o cálculo das derivadas $\frac{\partial w}{\partial m}(q)$.

4.2.5. Esforços para pontos internos

Os momentos fletores e volventes e a força cortante nestes pontos são dados pelas equações abaixo, expressas na forma indicial:

$$M_{ij} = -D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_l \partial x_l} + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad (2.11.a)$$

$$Q_i = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_l \partial x_l} \quad (2.11.d)$$

com $i, j = 1, 2$

Substituindo-se a expressão 3.38 da equação integral do deslocamento w nas equações acima e realizando-se as integrações necessárias, obtêm-se as equações integrais para momentos e força cortante para pontos internos:

$$\begin{aligned} M_{ij}(q) = & - \int_{\Gamma} \left[V_{n_{ij}}^*(q, P) w(P) - m_{n_{ij}}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ & - \sum_{c=1}^{N_c} R_{c_{ij}}^*(q, P) w_c(P) + \int_{\Gamma} \left[w_{ij}^*(q, P) V_n(P) - \frac{\partial w^*}{\partial n}{}_{ij}(q, P) m_n(P) \right] \\ & d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{N_c} w_{c_{ij}}^*(q, P) R_{c_{ij}}(P) + \int_{\Omega_g} g(P) w_{ij}^*(q, P) d\Omega_g(P) \quad (4.46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_i(q) = & - \int_{\Gamma} \left[V_{n_i}^*(q, P) w(P) - m_{n_i}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ & - \sum_{c=1}^{N_c} R_{c_i}^*(q, P) w_c(P) + \int_{\Gamma} \left[w_i^*(q, P) V_n(P) - \frac{\partial w^*}{\partial n}{}_i(q, P) m_n(P) \right] \\ & d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{N_c} w_{c_i}^*(q, P) R_{c_i}(P) + \int_{\Omega_g} g(P) w_i^*(q, P) d\Omega_g(P) \quad (4.47) \end{aligned}$$

onde,

$$V_{n_{ij}}^*(q, P) = -D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_l \partial x_l}(q, P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \quad (4.48.a)$$

$$m_{n_{ij}}^*(q, P) = - D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_l \partial x_l}(q, P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \quad (4.48.b)$$

$$w_{ij}^*(q, P) = - D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_l \partial x_l}(q, P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \quad (4.48.c)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) = - D \left\{ \nu \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \right\} \quad (4.48.d)$$

$$R_{c_{ij}}^*(q, P) = - D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_l \partial x_l}(q, P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \quad (4.48.e)$$

$$V_{n_i}^*(q, P) = - D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_l \partial x_l}(q, P) \right] \quad (4.49.a)$$

$$m_{n_i}^*(q, P) = - D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_l \partial x_l}(q, P) \right] \quad (4.49.b)$$

$$w_i^*(q, P) = - D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_l \partial x_l}(q, P) \right] \quad (4.49.c)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) = - D \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \right\} \quad (4.49.d)$$

$$R_{c_i}^*(q, P) = - D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_l \partial x_l}(q, P) \right] \quad (4.49.e)$$

As derivadas parciais das soluções fundamentais (expressas no capítulo 2) envolvidas nas equações 4.48 e 4.49 são obtidas em relação a um eixo x_i , com $i = 1, 2$, conforme indicado na figura 4.7.

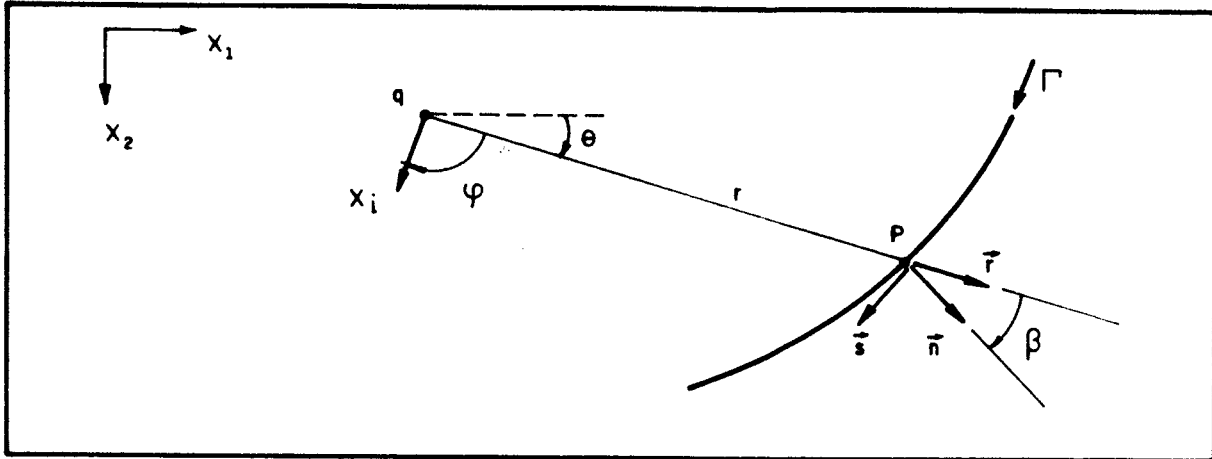


FIGURA 4.7 - Vetores $\vec{n}(P)$, $\vec{s}(P)$, $\vec{r}(q,P)$ e $\vec{x}_i(q)$

Suas expressões são apresentadas a seguir:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x_i}(q,P) = -\frac{r}{4\pi D} \ln r r_i \quad (4.50.a)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,P) = \frac{1}{4\pi D} [r_i r_j + \delta_{ij} \ln r] \quad (4.50.b)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_i}(q,P) = \frac{1}{4\pi D} [1 + 2 \ln r] \quad (4.50.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_l \partial x_l}(q,P) \right] = \frac{-1}{2\pi r D} r_i \quad (4.50.d)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right) = -\frac{1}{4\pi D} [r_i (n_k r_k) + n_i \ln r] \quad (4.51.a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right) = \frac{-1}{4\pi r D} [(2r_i r_j - \delta_{ij})(n_k r_k) - n_i r_j + n_j r_i] \quad (4.51.b)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right] = \frac{1}{2\pi r D} (n_k r_k) \quad (4.51.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right] \right\} = \frac{1}{2\pi r^2 D} (2r_i r_k n_k - n_i) \quad (4.51.d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^*}{\partial x_i} (q, P) &= \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu) (s_l r_l)^2 \left[4r_i (n_k r_k) - n_i \right] + \right. \\ &\left. - 4(1-\nu) (s_l r_l) (n_k r_k) s_i + (3-\nu) \left[n_i - 2r_i (n_k r_k) \right] \right\} \quad (4.52.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j} (q, P) &= \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 2(1-\nu) (s_l r_l)^2 \left\{ 24r_i r_j (n_k r_k) + \right. \right. \\ &- 4 \left[n_i r_j + n_j r_i + \delta_{ij} (n_k r_k) \right] \left. \right\} + 2(1-\nu) (s_l r_l) \left[2(n_i s_j + n_j s_i) + \right. \\ &- 8(n_k r_k) (s_i r_j + s_j r_i) \left. \right] + 4(1-\nu) (s_i s_j) (n_k r_k) + \\ &\left. + (3-\nu) \left[2 \delta_{ij} (n_k r_k) - 8r_i r_j (n_k r_k) + 2(n_i r_j + n_j r_i) \right] \right\} \quad (4.52.b) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_l \partial x_l} (q, P) = \frac{1}{\pi r^3} \left\{ (1-\nu) (n_k r_k) \left[4(s_l r_l)^2 - 1 \right] \right\} \quad (4.52.c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_l \partial x_l} (q, P) \right] &= - \frac{1-\nu}{\pi r^4} \left\{ (s_l r_l)^2 \left[24r_i (n_k r_k) - 4n_i \right] + \right. \\ &\left. - (n_k r_k) \left[8s_i (s_l r_l) - 4r_i \right] + n_i \right\} \quad (4.52.d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m^*}{\partial x_i} (q, P) &= \frac{1}{4\pi r} \left\{ (1+\nu) r_i - 2(1-\nu) (n_k r_k) \left[r_i (n_k r_k) - n_i \right] \right\} \\ &\quad (4.53.a) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) = \frac{-1}{4\pi r^2} \left\{ (1+\nu)(\delta_{ij} - 2r_i r_j) + 2(1-\nu) \right. \\ \left. \left\{ n_i n_j - 2n_i r_j (n_k r_k) - (\delta_{ij} - 2r_i r_j)(n_k r_k)^2 - 2r_i (n_k r_k) \right. \right. \\ \left. \left. \left[n_j - r_j (n_k r_k) \right] \right\} \right\} \quad (4.53.b)$$

$$\frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_l \partial x_l}(q, P) = \frac{-1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu) \left[1 - 2(n_k r_k)^2 \right] \right\} \quad (4.53.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_l \partial x_l}(q, P) \right] = - \frac{1-\nu}{\pi r^3} \left[r_i + 2n_i (n_k r_k) - 4r_i (n_k r_k)^2 \right] \quad (4.53.d)$$

$$\frac{\partial m_{ns}^*}{\partial x_i}(q, P) = - \frac{1-\nu}{4\pi r} \left[2r_i (n_k r_k) (s_l r_l) - n_i (s_l r_l) + \right. \\ \left. - s_i (n_k r_k) \right] \quad (4.54.a)$$

$$\frac{\partial^2 m_{ns}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) = \frac{1-\nu}{4\pi r^2} \left\{ 2 \left[(s_l r_l) (n_i r_j - n_j r_i) + (n_k r_k) \right. \right. \\ \left. \left. (s_i r_j + s_j r_i) \right] + 2(n_k r_k) (s_l r_l) (\delta_{ij} - 4r_i r_j) - n_i s_j - n_j s_i \right\} \quad (4.54.b)$$

$$\frac{\partial^2 m_{ns}^*}{\partial x_l \partial x_l}(q, P) = \frac{1-\nu}{\pi r^2} \left[(n_k r_k) (s_l r_l) \right] \quad (4.54.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 m_{ns}^*}{\partial x_l \partial x_l}(q, P) \right] = \frac{1-\nu}{\pi r^3} \left[4r_i (n_k r_k) (s_l r_l) - n_i (s_l r_l) + \right. \\ \left. - s_i (n_k r_k) \right] \quad (4.54.d)$$

com $i, j = 1, 2$

e onde,

$$r_1 = r_x = \cos \theta \quad (4.55.a)$$

$$r_2 = r_y = \sin \theta \quad (4.55.b)$$

$$n_1 = n_x = \cos \alpha \quad (4.56.a)$$

$$n_2 = n_y = \sin \alpha \quad (4.56.b)$$

$$s_1 = s_x = \cos (\alpha + 90^\circ) = -\sin \alpha \quad (4.57.a)$$

$$s_2 = s_y = \sin (\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha \quad (4.57.b)$$

$$n_k r_k = n_x r_x + n_y r_y = \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta = \cos \beta \quad (4.58)$$

$$s_l r_l = s_x r_x + s_y r_y = -\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta = -\sin \beta \quad (4.59)$$

Com a discretização do contorno e a utilização das funções aproximadoras ϕ , equações 4.1 e 4.23, para interpolação dos valores nodais das expressões 4.26 obtêm-se as equações discretizadas para as equações integrais 4.46 e 4.47 de esforços internos:

$$M_{ij}(q) = - \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 |J| \left[v_{n_{ij}}^*(q, P) - m_{n_{ij}}^*(q, P) \right] \phi(P) d\xi(P) U_k +$$

$$- \sum_{c=1}^{N_c} R_{c_{ij}}^*(q, P) w_c(P) + \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 |J| \left[w_{ij}^*(q, P) - \frac{\partial w^*}{\partial n}{}_{ij}(q, P) \right] \phi(P)$$

$$d\xi(P) P_k + \sum_{c=1}^{N_c} w_{c_{ij}}^*(q, P) R_c(P) + \int_{\Omega_g} g(P) w_{ij}^*(q, P) d\Omega_g(P) \quad (4.60)$$

$$Q_i(q) = - \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 |J| \left[v_{n_i}^*(q, P) - m_{n_i}^*(q, P) \right] \phi(P) d\xi(P) U_k +$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{c=1}^{N_c} R_{c_i}^*(q, P) w_c(P) + \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 |J| \left[w_{k_i}^*(q, P) - \frac{\partial w_{k_i}^*}{\partial n}(q, P) \right] \phi(P) \\
 d\xi(P) P_{k_i} & + \sum_{c=1}^{N_c} w_{c_i}^*(q, P) R_c(P) + \int_{\Omega_g} g(P) w_{k_i}^*(q, P) d\Omega_g(P) \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

Aplicando-se as equações acima a todos os pontos internos obtém-se um sistema de equações que, escrito na forma matricial, resulta:

$$\tilde{M}(q) = - \tilde{Q} \tilde{U} + \tilde{R} \tilde{P} + \tilde{F}^m \quad (4.62)$$

onde,

$$\tilde{M}^T(q) = \left\{ \begin{matrix} \tilde{M}_1 & \tilde{M}_2 & \dots & \tilde{M}_i & \dots & \tilde{M}_{NPI} \end{matrix} \right\} \quad (4.63)$$

$$\tilde{M}_i^T = \left\{ \begin{matrix} M_x & M_{xy} & M_y & Q_x & Q_y \end{matrix} \right\}_i \quad (4.64)$$

sendo,

NPI : número de pontos internos;

\tilde{Q} e \tilde{R} : matrizes cujos termos são obtidos das integrais de contorno das equações 4.46 e 4.47;

\tilde{U} e \tilde{P} : vetores dos valores nodais do contorno, deslocamentos e esforços, respectivamente;

\tilde{F}^m : vetor resultante da integração sobre a região carregada Ω_g para os pontos internos (semelhante ao vetor F da equação 4.41).

As contribuições relativas às reações de canto também são levadas à matriz \tilde{Q} , como é feito com a matriz \tilde{H} em relação aos pontos do contorno.

4.3. Montagem das Matrizes \tilde{H} e \tilde{G}

4.3.1. Integração sobre os elementos

O sistema de equações lineares, representado pela equação 4.39, define matrizes cujos termos resultam do cálculo de integrais sobre cada elemento de contorno, relacionando deslocamentos e esforços dos nós do contorno. Assim, para cada elemento são obtidas integrais do tipo:

$$I = \int_{\Gamma_k} \phi(P) f^*(Q,P) d\Gamma_k(P) \quad (4.65)$$

onde,

$\phi(P)$ - função aproximadora dos deslocamentos e dos esforços no contorno;

$f^*(Q,P)$ - solução fundamental.

Para se calcular numericamente esta integral, empregando-se a quadratura de Gauss [27], é feita a mudança da coordenada no contorno Γ para a coordenada isoparamétrica ξ , e a equação 4.65 resulta:

$$I = \int_{-1}^1 J(P) \phi(P) f^*(Q,P) d\xi(P) = \sum_{i=1}^n w_i J(\xi_i) \phi(\xi_i)$$

$$f^*(Q, \xi_i) \quad (4.66)$$

onde,

n - número de pontos de integração;

ξ_i - coordenada adimensional do i -ésimo ponto de integração, função de n ;

w_i - fator ponderador, função de n ;

$J(P)$ - Jacobiano da transformação de coordenadas.

As soluções fundamentais obtidas no capítulo 2 são funções do vetor \vec{r} , que define a posição do ponto P, relacionada à coordenada local ξ , em relação ao ponto de carga Q. Desta forma, as integrais dadas pela equação 4.65 admitem duas situações distintas, mostradas na figura 4.8 que indicam o ponto de carga Q e o elemento de contorno j onde realiza-se a integração.

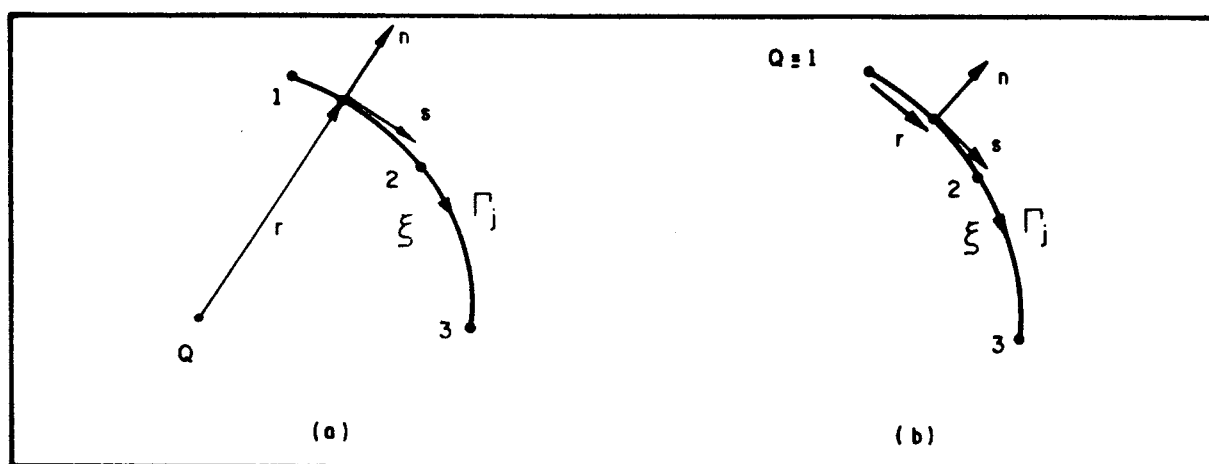


FIGURA 4.8 - Posições possíveis do ponto Q:

- a) fora do elemento;
- b) coincidente com um dos nós do elemento

Quando o ponto de carga Q não coincide com um dos nós do elemento, não há singularidade com relação a r e as integrais podem ser calculadas no sentido usual de integração. Já quando o ponto Q pertence ao elemento surgem singularidades do tipo $\ln r$, $1/r$ e $1/r^2$ que podem ser calculadas apenas no sentido de valor principal de Cauchy, segundo [21]. No caso de elemento linear (não quadrático), onde apenas o vetor posição \vec{r} depende da coordenada ξ , pode-se calcular a integral singular numérica ou analiticamente, sendo mais conveniente a integração analítica. Porém, no caso de elemento quadrático, onde não apenas o vetor \vec{r} mas também os vetores \vec{n} e \vec{s} variam com ξ , torna-se inviável a integração analítica.

Desta forma, com a utilização do elemento quadrático onde a direção normal ao contorno varia a cada ponto, as integrais dadas pelas equações 4.44 serão calculadas numericamente, tanto as não singulares como as singulares.

Uma alternativa para que as singularidades sejam evitadas é escreverem-se as equações integrais para pontos fora do domínio. Assim, deve-se reescrever a equação 4.28, válida para um ponto Q do contorno, agora para um ponto Q' fora do domínio, obtendo-se um número suficiente para a solução do sistema de equações. Utilizando-se o carregamento fundamental g^* , representado pela função delta de Dirac, pode-se escrever, para este ponto externo:

$$\int_{\Omega} g^*(Q', P) w(P) d\Omega(P) = 0 \quad (4.67)$$

Assim a equação integral para um ponto fora do domínio fica:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \tilde{P}^*(Q', P) \tilde{U}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{C_i}^*(Q', P) U_{C_i}(P) = \\ & = \int_{\Gamma} \tilde{U}^*(Q', P) \tilde{P}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{C_i}(P) U_{C_i}^*(Q', P) + \\ & + \int_{\Omega_g} g(P) U_g^*(Q', P) d\Omega_g(P) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Com a discretização do contorno escreve-se a equação acima na sua forma algébrica, de maneira semelhante à obtida para pontos do contorno, com $\tilde{C}(Q') = 0$.

Assim, cada integração feita sobre os elementos de contorno será realizada numericamente, não contendo singularidades com relação a r, pois o ponto singular Q' não coincidirá com nenhum ponto pertencente ao elemento integrado.

Considere-se a figura 4.9 onde estão indicados uma placa com seu contorno já discretizado e os pontos externos ao seu domínio, correspondentes a cada nó definido neste contorno.

As posições dos pontos externos são obtidas a partir da direção, m , normal ao contorno em cada ponto do contorno. A distância, d , do contorno é dada por:

$$d = a l_m \quad (4.69)$$

onde,

a : coeficiente positivo qualquer;

l_m : comprimento médio dos elementos adjacentes ao nó do contorno ou, no caso de nó central ao elemento, o comprimento deste.

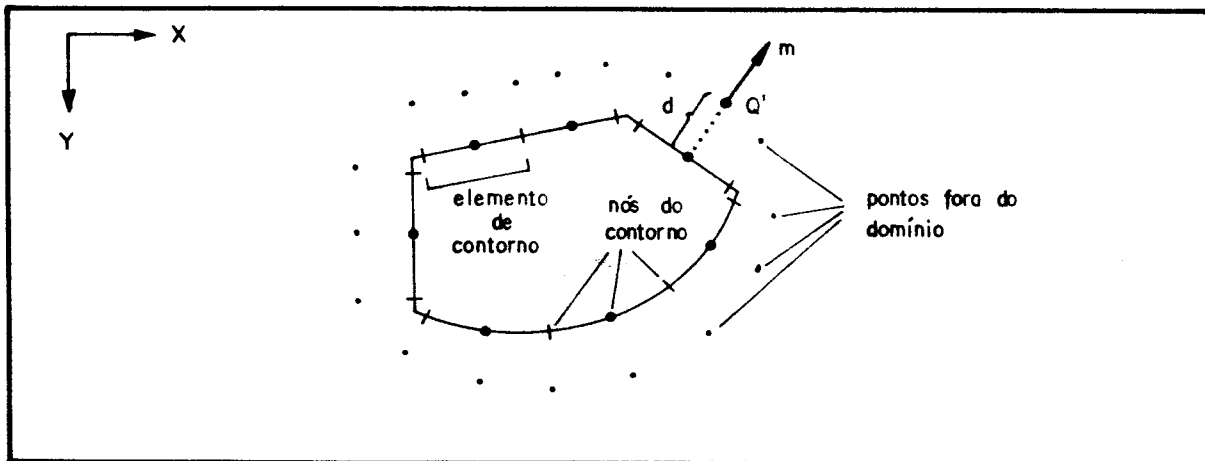


FIGURA 4.9 - Discretização do contorno e definição dos pontos externos ao domínio

Para obtenção de resultados numéricos aceitáveis é aconselhável trabalhar-se com valores para a entre 0,5 e 1,5, segundo [21].

Para a obtenção do sistema com um número de equações suficientes para sua resolução pode-se proceder de duas

maneiras convenientes. A primeira consiste em se escrever as equações de deslocamento transversal w e da derivada direcional $\frac{\partial w}{\partial m}$ para o ponto externo Q' . A segunda alternativa é escrever apenas a equação do deslocamento transversal w para o ponto do contorno Q e para o ponto externo Q' , conforme [28]. Esta alternativa leva a singularidades para o ponto Q coincidente com o elemento integrado, porém são singularidades fracas e que não afetam significativamente a análise.

Ambas alternativas fornecem o número de equações algébricas que tornam o sistema determinado ($2 \times \text{NOCONT}$), estabelecendo-se um número de equações igual ao de incógnitas nodais.

No próximo item será apresentada uma maneira de amenizarem-se, ou mesmo eliminarem-se as singularidades das integrais, a qual será adotada neste trabalho.

Antes, porém, deve-se entender a montagem das matrizes \tilde{H} e \tilde{G} a partir da integral dada pela equação 4.66 analisando-se a forma de distribuição de cada termo em suas respectivas posições.

Reescrevendo-se a integral dada pela equação 4.66 com os termos das matrizes \tilde{H} e \tilde{G} da equação discretizada 4.39, obtém-se:

$$h_{ik}^l(Q) = \int_{-1}^1 J_l(P) \phi^l(P) p_{ik}^*(Q,P) d\xi(P) \quad (4.70.a)$$

$$g_{ik}^l(Q) = \int_{-1}^1 J_l(P) \phi^l(P) u_{ik}^*(Q,P) d\xi(P) \quad (4.70.b)$$

onde,

Q : nó singular, ou ponto onde é aplicada a carga unitária, para o qual se escrevem as equações;

P : ponto pertencente ao elemento a ser integrado;

i : indica o tipo de ação atuante em Q e, portanto,

qual das equações está sendo obtida:

para $i = 1$, carga unitária e equação de $w(Q)$;

para $i = 2$, momento unitário e equação de $\frac{\partial w}{\partial m}(Q)$;

k : indica o tipo de resposta ao carregamento obtida em P.

para $k = 1$, as respostas fundamentais são o deslocamento transversal w^* e a força cortante equivalente V_n^* ;

para $k = 2$, as respostas fundamentais são a derivada direcional do deslocamento transversal $\frac{\partial w^*}{\partial n}$ e o momento fletor m_n^* correspondente;

l : indica o nó do elemento onde obtêm-se as respostas fundamentais:

para elemento linear, $l = 1, 2$;

para elemento quadrático, $l = 1, 3$.

Substituindo-se as soluções fundamentais obtidas no capítulo 2 nas equações 4.67 com seus respectivos índices, obtêm-se:

$$h_{11}^l(Q) = \int_{-1}^1 J_l(P) \phi^l(P) V_n^*(Q,P) d\xi(P) \quad (4.71.a)$$

$$h_{12}^l(Q) = \int_{-1}^1 J_l(P) \phi^l(P) m_n^*(Q,P) d\xi(P) \quad (4.71.b)$$

$$h_{21}^l(Q) = \int_{-1}^1 J_l(P) \phi^l(P) \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q,P) d\xi(P) \quad (4.71.c)$$

$$h_{22}^l(Q) = \int_{-1}^1 J_l(P) \phi^l(P) \frac{\partial m_n^*}{\partial m}(Q,P) d\xi(P) \quad (4.71.d)$$

$$g_{11}^l(Q) = \int_{-1}^1 J_l(P) \phi^l(P) w^*(Q,P) d\xi(P) \quad (4.72.a)$$

$$g_{12}^l(Q) = \int_{-1}^1 J_l(P) \phi^l(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) d\xi(P) \quad (4.72.b)$$

$$g_{21}^l(Q) = \int_{-1}^1 J_l(P) \phi^l(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) d\xi(P) \quad (4.72.c)$$

$$g_{22}^l(Q) = \int_{-1}^1 J_l(P) \phi^l(P) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d\xi(P) \quad (4.72.d)$$

Têm-se, portanto, para as matrizes \tilde{H} e \tilde{G} , quatro contribuições para o ponto P coincidente com cada nó do elemento integrado, variando-se as funções ϕ^l correspondentes. Assim, para cada elemento integrado são calculadas 12 contribuições por matriz.

Com os índices i e k pode-se determinar as posições dos termos nas equações 4.71 e 4.72 nas respectivas matrizes. Para isto deve-se observar que as colunas ímpares da matriz \tilde{H} contêm os termos correspondentes aos deslocamentos transversais w, e as pares os termos correspondentes às derivadas direcionais $\frac{\partial w}{\partial n}$. O mesmo ocorre com a matriz \tilde{G} onde as colunas ímpares contêm os termos correspondentes aos esforços V_n , e as pares os correspondentes aos esforços m_n .

A figura 4.10.a mostra a sub-matriz \tilde{H} obtida das expressões 4.71 para os pontos de carga Q e de resposta P. Integrando-se um elemento j, definido aqui pelos nós a, b e c, em relação a um ponto de carga q, obtêm-se as doze contribuições e suas respectivas posições na matriz \tilde{H} , conforme mostra a figura 4.10.b.

$$\begin{matrix} w(Q) \\ \frac{\partial w}{\partial m}(Q) \end{matrix} \begin{bmatrix} \overbrace{h_{11}^l(Q)}^{(w)} & \overbrace{h_{12}^l(Q)}^{(\frac{\partial w}{\partial n})} \\ \overbrace{h_{21}^l(Q)}^{(w)} & \overbrace{h_{22}^l(Q)}^{(\frac{\partial w}{\partial n})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 J_l \phi^l V_n^* d\xi & \int_{-1}^1 J_l \phi^l M_n^* d\xi \\ \int_{-1}^1 J_l \phi^l \frac{\partial V_n^*}{\partial m} d\xi & \int_{-1}^1 J_l \phi^l \frac{\partial M_n^*}{\partial m} d\xi \end{bmatrix} \quad (a)$$

ELEMENTO QUADRÁTICO j

$$\begin{matrix} w(q) \\ \frac{\partial w}{\partial m}(q) \end{matrix} \begin{bmatrix} \overbrace{h_{2q-1, 2a-1}^1}^{(\phi^1)} & \overbrace{h_{2q-1, 2a}^1}^{(\phi^1)} & \overbrace{h_{2q-1, 2b-1}^2}^{(\phi^2)} & \overbrace{h_{2q-1, 2b}^2}^{(\phi^2)} & \overbrace{h_{2q-1, 2c-1}^3}^{(\phi^3)} & \overbrace{h_{2q-1, 2c}^3}^{(\phi^3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (b)$$

com $h_{i,k}^l$ - termo da matriz H obtido da integração sobre o elemento j
 onde l - função ϕ , relativo aos nós do elemento
 i - tipo de carga em q (correspondente à linha)
 k - tipo de resposta em p (correspondente à coluna)

FIGURA 4.10 - Disposição dos termos da matriz H para um elemento de contorno j

A figura 4.11 mostra as mesmas informações fornecidas pela figura 4.10, agora para a matriz G , com seus termos e posições.

$$\begin{matrix} w(Q) \\ \frac{\partial w}{\partial m}(Q) \end{matrix} \begin{bmatrix} \overbrace{g_{11}^l(Q)}^{(V_n)} & \overbrace{g_{12}^l(Q)}^{(m_n)} \\ \overbrace{g_{21}^l(Q)}^{(V_n)} & \overbrace{g_{22}^l(Q)}^{(m_n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 J_l \phi^l w^* d\xi & \int_{-1}^1 J_l \phi^l \frac{\partial w^*}{\partial n} d\xi \\ \int_{-1}^1 J_l \phi^l \frac{\partial w^*}{\partial m} d\xi & \int_{-1}^1 J_l \phi^l \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\xi \end{bmatrix} \tag{a}$$

ELEMENTO QUADRÁTICO j

$$\begin{matrix} w(q) \\ \frac{\partial w}{\partial m}(q) \end{matrix} \begin{bmatrix} \overbrace{g_{2q-1, 2\alpha-1}^1}^{(\phi^1)} & \overbrace{g_{2q-1, 2\alpha}^1}^{(m_n)} & \overbrace{g_{2q-1, 2b-1}^2}^{(\phi^2)} & \overbrace{g_{2q-1, 2b}^2}^{(m_n)} & \overbrace{g_{2q-1, 2c-1}^3}^{(\phi^3)} & \overbrace{g_{2q-1, 2c}^3}^{(m_n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{b}$$

com $g_{i,k}^l$ - termo da matriz \tilde{G} obtido da integração sobre o elemento j
 onde, l - função ϕ , relativo aos nós do elemento
 i - tipo de carga em q (correspondente à linha)
 k - tipo de resposta em p (correspondente à coluna)

FIGURA 4.11 - Disposição dos termos da matriz \tilde{G} para um elemento de contorno j

No caso de um mesmo ponto pertencer a dois elementos adjacentes, as contribuições referentes ao nó inicial 1 do elemento posterior (j+1) serão somadas às já obtidas para o nó final 3 do elemento anterior (j). Esta superposição ocorre, portanto, nas colunas correspondentes a todos os nós

extremos dos elementos de contorno que pertençam a dois elementos conjuntamente

As contribuições dos somatórios referentes às reações de canto serão analisadas posteriormente.

4.3.2. Transformação Auto-adaptativa de Coordenadas

Uma alternativa para o cálculo das integrais, singulares ou não, foi apresentada por TELLES [1] utilizando-se uma transformação cúbica envolvendo a coordenada isoparamétrica η com a coordenada ξ dos pontos de integração da quadratura de Gauss, na forma:

$$\eta(\xi) = a \xi^3 + b \xi^2 + c \xi + d \quad (4.73)$$

de maneira que as seguintes condições sejam obedecidas:

$$\eta(1) = 1 \quad (4.74.a)$$

$$\eta(-1) = -1 \quad (4.74.b)$$

$$J_2(\bar{\xi}) = \left. \frac{d\eta}{d\xi} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (4.74.c)$$

$$\left. \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (4.74.d)$$

A última condição implica que o jacobiano da transformação tenha um valor mínimo no ponto singular $\bar{\eta}$. A solução do problema fornece os valores das constantes:

$$a = \frac{1}{Q} \quad (4.75.a)$$

$$b = \frac{-3\bar{\xi}}{Q} \quad (4.75.b)$$

$$c = \frac{3\bar{\xi}^2}{Q} \quad (4.75.c)$$

$$d = -b \quad (4.75.d)$$

$$Q = 1 + 3\bar{\xi}^2 \quad (4.75.e)$$

$$\bar{\eta} = \eta(\bar{\xi}) \quad (4.75.f)$$

Assim,

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \int_{-1}^1 f \left\{ \frac{[(\xi - \bar{\xi})^3 + \bar{\xi}(\bar{\xi}^2 + 3)]}{(1+3\bar{\xi}^2)} \right\} \frac{3(\xi - \bar{\xi})^2}{(1+3\bar{\xi}^2)} d\xi \quad (4.76)$$

onde,

$$\eta(\xi) = \frac{(\xi - \bar{\xi})^3 + \bar{\xi}(\bar{\xi}^2 + 3)}{(1+3\bar{\xi}^2)} \quad (4.77)$$

$$J_2(\xi) = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3(\xi - \bar{\xi})^2}{(1+3\bar{\xi}^2)} d\xi \quad (4.78)$$

e válido para qualquer posição do ponto singular, dentro ou fora do intervalo de integração. Para o elemento quadrático contínuo utilizado neste trabalho, os pontos singulares coincidem com os nós que o definem geometricamente, ou seja, dois extremos e um centrado. Desta forma, a constante $\bar{\xi}$ assume respectivamente valores -1 , 1 e 0 para cada ponto citado.

Também é possível a utilização dessa transformação para o caso do ponto singular estar situado fora do eixo η , a uma distância d deste. Para isto impõe-se um valor diferente de zero para o jacobiano em $\bar{\eta}$. Assim, a expressão 4.74.c resulta:

$$J_2(\bar{\xi}) = \left. \frac{d\eta}{d\xi} \right|_{\bar{\eta}} = \bar{r} \quad (4.79)$$

onde,

\bar{r} - parâmetro função de d .

Admitindo-se um valor mínimo para o jacobiano no ponto singular $\bar{\eta}$ e as mesmas condições 4.74, tem-se a transformação da seguinte forma:

$$\eta(\xi) = a \xi^3 + b \xi^2 + c \xi + d \quad (4.80)$$

$$J_2(\xi) = 3a \xi^2 + 2b \xi + c \quad (4.81)$$

$$a = \frac{(1-\bar{r})}{0} \quad (4.82.a)$$

$$b = \frac{-3(1-\bar{r})\bar{\xi}}{0} \quad (4.82.b)$$

$$c = \frac{(\bar{r} + 3\bar{\xi}^2)}{0} \quad (4.82.c)$$

$$d = -b \quad (4.82.d)$$

$$Q = 1 + 3\bar{\xi}^2 \quad (4.82.e)$$

Otimizando-se a função $\bar{r}(d)$ para a utilização em uma mesma rotina de integração com os diferentes tipos de singularidades já observadas, obtêm-se:

$$\begin{aligned} r(d) &= 2,62 D & (0 \leq D < 0,05) \\ r(d) &= 0,85 + 0,24 \ln D & (0,05 \leq D < 1,3) \\ r(d) &= 0,893 + 0,0823 \ln D & (1,3 \leq D < 3,618) \\ r(d) &= 1,0 & (3,618 \leq D) \end{aligned} \quad (4.83)$$

onde,

$$D = \frac{2 \cdot d}{L} \quad (4.84)$$

sendo,

L - comprimento real do elemento de contorno.

Aplica-se, então, a quadratura de Gauss padrão à integral:

$$\int_{-1}^1 f[\eta(\xi)] J_2(\xi) d\xi \quad (4.85)$$

Esta transformação é facilmente aplicável a programas que utilizam o Método dos Elementos de Contorno, além de apresentar duas características importantes para melhorar-se a precisão no cálculo das integrais:

- o jacobiano da transformação cancela, ou diminui, o grau das singularidades nas integrais;

- produz uma concentração dos pontos de integração em torno da singularidade, melhorando com isto a representação numérica das funções aproximadoras onde apresentam maiores inclinações, conforme pode-se observar na figura 4.12.

Nota-se que o jacobiano da transformação apresenta valores diferentes a cada ponto de integração. Quanto mais próximo estiver o ponto de integração do ponto singular, menor é o valor do jacobiano, de maneira a amenizar a singularidade imposta pela variável r às funções integradas.

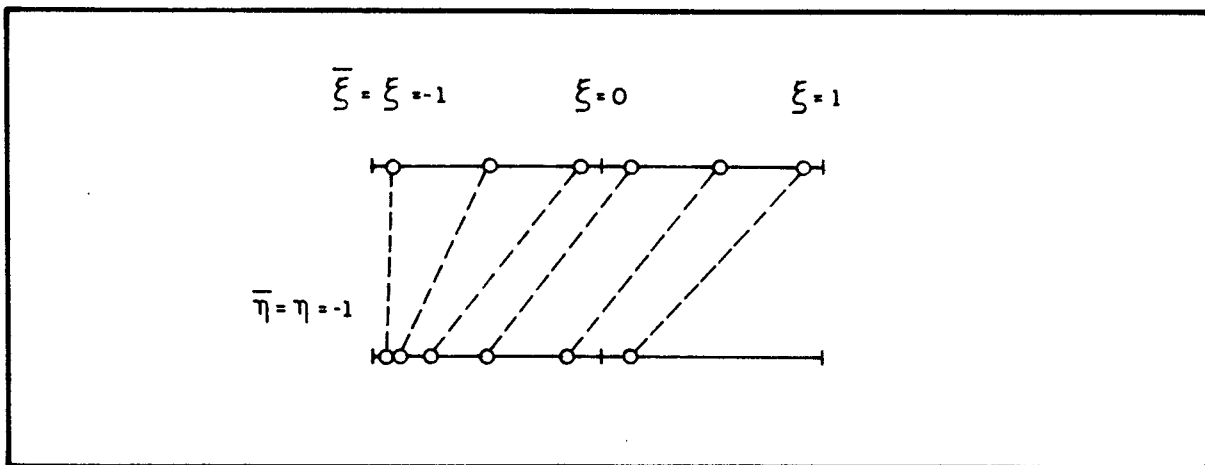


FIGURA 4.12 - Redistribuição dos pontos de integração produzida pela transformação de coordenadas

4.3.3. Contribuição de canto na Matriz \tilde{H}

Conforme já visto anteriormente, as reações de canto da placa são incógnitas do sistema 4.41 tornando-o indeterminado. Uma das alternativas é escrevê-las em função das variáveis nodais. Retornando-se à equação 4.39, têm-se os dois somatórios referentes às reações de canto, que são:

$$\sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q,P) U_{c_i} \quad (4.86)$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(P) U_{c_i}^*(Q,P) \quad (4.87)$$

Pode-se reescrever o vetor $R_{c_i}^*(Q,P)$ da equação 4.33 a partir da equação 3.22:

$$R_{c_i}^*(Q,P) = \begin{Bmatrix} R_{c_i}^*(Q,P) \\ \frac{\partial R_{c_i}^*(Q,P)}{\partial m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{ns_i}^{*+} & - m_{ns_i}^{*-} \\ \frac{\partial m_{ns_i}^{*+}}{\partial m} & - \frac{\partial m_{ns_i}^{*-}}{\partial m} \end{Bmatrix} \quad (4.88)$$

sendo que $m_{ns_i}^*$ e $\frac{\partial m_{ns_i}^*}{\partial m}$ estão definidos nas equações 2.68 e 2.82.

Devido à utilização do nó duplo em cantos pelos motivos já observados, os deslocamentos w_{c_i} da equação 4.86 devem corresponder aos nós j e k , anterior e posterior ao canto, respectivamente. Desta forma pode-se reescrever a equação 4.88 considerando-se os deslocamentos $w_{c_i}^j$ e $w_{c_i}^k$ independentes, como:

$$\sum_{i=1}^{N_c} \left[\begin{Bmatrix} m_{ns_i}^{*+} \\ \frac{\partial m_{ns_i}^{*+}}{\partial m} \end{Bmatrix} w_{c_i}^k - \begin{Bmatrix} m_{ns_i}^{*-} \\ \frac{\partial m_{ns_i}^{*-}}{\partial m} \end{Bmatrix} w_{c_i}^j \right] \quad (4.89)$$

Nota-se, portanto, que as contribuições de canto na matriz H para a equação 4.86 ocuparão as colunas ímpares $(2j-1)$ e $(2k-1)$, referentes aos nós de canto, para todas as equações integrais escritas do sistema. Repete-se o procedimento para todos os cantos do contorno da placa.

A expressão 4.87 pode ser escrita como:

$$\sum_{i=1}^{N_c} (m_{ns_i}^{*+} - m_{ns_i}^{*-}) \begin{Bmatrix} w_{c_i}^*(Q,P) \\ \frac{\partial w_{c_i}^*(Q,P)}{\partial m} \end{Bmatrix} \quad (4.90)$$

sendo que $w_{c_i}^*$ e $\frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial m}$ estão definidas nas equações 2.55 e 2.79 .

A partir de 2.31 os valores de m_{ns} ficam

$$m_{ns} = - D (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) \quad (4.91)$$

onde (n,s) é o sistema de coordenadas das direções normal e tangencial ao contorno. Com isto pode-se expressar a reação de canto em função do deslocamento $\frac{\partial w}{\partial n}$ e, portanto, levá-lo como contribuição da matriz H, ocupando as colunas pares. A alternativa utilizada neste trabalho é a de calcular esta contribuição por diferenças finitas, utilizando-se uma função interpoladora de segundo grau para a derivada $\frac{\partial w}{\partial n}$.

Considere-se o canto de placa da figura 4.13 com os elementos de contorno adjacentes e seus nós correspondentes, e coordenadas locais localizadas nos nós iniciais de cada elemento.

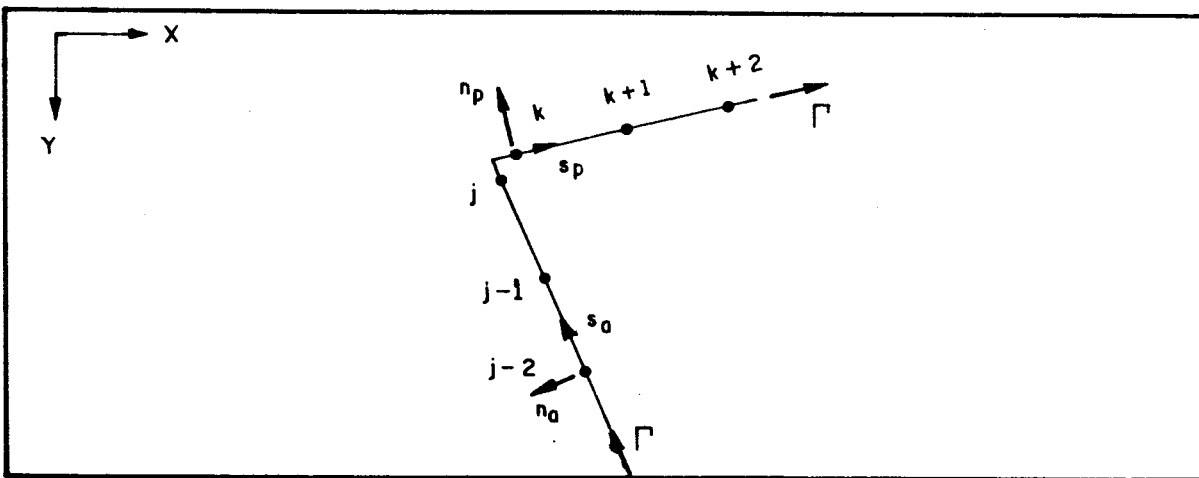


FIGURA 4.13 - Canto de placa e nós vizinhos

A função interpoladora é dada por:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = A s^2 + B s + C \quad (4.92)$$

Os valores das constantes são escritas em função dos parâmetros nodais impondo-se que, para o lado anterior ao canto, têm-se:

$$s_a = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial n_a} = \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{j-2} \quad (4.93.a)$$

$$s_a = s_{j-1} \quad \frac{\partial w}{\partial n_a} = \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{j-1} \quad (4.93.b)$$

$$s_a = s_j \quad \frac{\partial w}{\partial n_a} = \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_j \quad (4.93.c)$$

Com isto, as constantes resultam:

$$A_a = \frac{\left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{j-1} - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{j-2} \right] s_j - \left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_j - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{j-2} \right] s_{j-1}}{s_{j-1} s_j (s_{j-1} - s_j)} \quad (4.94.a)$$

$$B_a = \frac{\left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_j - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{j-2} \right] s_{j-1}^2 - \left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{j-1} - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{j-2} \right] s_j^2}{s_{j-1} s_j (s_{j-1} - s_j)} \quad (4.94.b)$$

$$C_a = \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{j-2} \quad (4.94.c)$$

De forma análoga pode-se escrever as constantes para o lado posterior ao canto:

$$A_p = \frac{\left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{k+1} - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_k \right] s_{k+2} - \left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{k+2} - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_k \right] s_{k+1}}{s_{k+1} s_{k+2} (s_{k+1} - s_{k+2})} \quad (4.95.a)$$

$$B_p = \frac{\left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{k+2} - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_k \right] s_{k+1}^2 - \left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{k+1} - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_k \right] s_{k+2}^2}{s_{k+1} s_{k+2} (s_{k+1} - s_{k+2})} \quad (4.95.b)$$

$$C_p = \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_k \quad (4.95.c)$$

A expressão da reação de canto para o nó duplo da figura 4.12 é:

$$R_C = -D(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n_p \partial s_p} \right)_k - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n_a \partial s_a} \right)_j \right] w_C^*(Q,P) \quad (4.96)$$

As derivadas da equação 4.96 são obtidas a partir da equação 4.92, para os lados anterior e posterior ao canto, que resultam em:

$$R_C = -D(1-\nu) \left[B_p - 2A_a s_j - B_a \right] w_C^*(Q,P) \quad (4.97)$$

Substituindo-se as expressões das constantes 4.94 e 4.95 na equação 4.97, obtém-se:

$$R_C = -D(1-\nu) \left[K_1^* \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_j + K_2^* \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{j-1} + K_3^* \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{j-2} + K_4^* \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_k + K_5^* \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{k+1} + K_6^* \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{k+2} \right] w_C^*(Q,P) \quad (4.98)$$

onde,

$$K_1^* = - \frac{s_{j-1}^{-2} s_j}{s_j (s_{j-1} - s_j)} \quad (4.99.a)$$

$$K_2^* = - \frac{s_j}{s_{j-1} (s_{j-1} - s_j)} \quad (4.99.b)$$

$$K_3^* = \frac{s_{j-1} - s_j}{s_{j-1} s_j} \quad (4.99.c)$$

$$K_4^* = - \frac{s_{k+2} + s_{k+1}}{s_{k+2} s_{k+1}} \quad (4.99.d)$$

$$K_5^* = - \frac{s_{k+2}}{s_{k+1} (s_{k+1} - s_{k+2})} \quad (4.99.e)$$

$$K_6^* = - \frac{s_{k+1}}{s_{k+2} (s_{k+1} - s_{k+2})} \quad (4.99.f)$$

Deve-se observar ainda que esta parcela da reação de canto está em lado oposto às integrais que formam a matriz H na equação integral. Portanto, para se levar as contribuições à matriz, deve-se fazer com o sinal trocado e nas colunas pares correspondentes aos seis nós adjacentes ao canto. A conferir:

$$2(j-2), 2(j-1), 2j, 2k, 2(k+1), 2(k+2)$$

Repete-se o procedimento para todos os cantos do contorno.

4.3.4. Força Cortante Equivalente Pontual

Uma formulação alternativa para a aproximação das reações de contorno em bordas de placa foi apresentada por PAIVA [2] e que consiste em se admitir que o esforço V_n seja dado por uma série de forças pontuais nos nós do elemento, de maneira a melhorar sua distribuição ao longo da borda em determinados casos da prática. A formulação usual do método, segundo a teoria de Kirchhoff para placas delgadas, apresenta para certos problemas singularidades nas forças cortantes equivalentes em cantos de placa, segundo [29,30]. Isto ocorre em casos de vinculações diferentes em lados adjacentes ao canto ou em cantos que formam ângulos entre determinados valores.

Como foi visto anteriormente, as reações que surgem nos cantos são incógnitas do problema. Com a formulação proposta a reação de canto já é obtida diretamente. Outra vantagem alcançada com a nova formulação é a diminuição das oscilações que ocorrem com os valores das reações V_n em problemas com singularidades neste esforço.

Retomando-se a equação 4.39 e reescrevendo-a apenas para o deslocamento transversal $w(Q)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & C(Q)w(Q) + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} \left[V_n^*(Q,P) w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & - \sum_{i=1}^{N_c} R_{C_i}^*(Q,P) w_{C_i}(P) = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} \left[w^*(Q,P) V_n(P) - \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) M_n(P) \right] \\
 & d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} w_{C_i}^*(Q,P) R_{C_i}(P) + \int_{\Omega_g} g(P) w^*(Q,P) d\Omega_g(P) \quad (4.100)
 \end{aligned}$$

Adotando-se para a força cortante equivalente, V_n , uma distribuição discreta, representada por forças concentradas nos nós dos elementos de contorno, deixa-se de escrevê-las como função dos valores nodais e de aproximá-las pelas funções interpoladoras ϕ (4.1). Desta forma, pode-se reescrever 4.100 eliminando-se a integral relativa à força cortante equivalente como:

$$\begin{aligned}
 & C(Q)w(Q) + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} \left[V_n^*(Q,P) w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & - \sum_{i=1}^{N_c} R_{C_i}^*(Q,P) w_{C_i}(P) = \sum_{l=1}^{NOCONT} w^*(Q,l) R_l - \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) M_n(P) \right] \\
 & d\Gamma(P) + \int_{\Omega_g} g(P) w^*(Q,P) d\Omega_g(P) \quad (4.101)
 \end{aligned}$$

onde,

R_l : reação pontual no nó l .

As reações de canto ficam embutidas nos valores da reação V_n nos respectivos nós. O mesmo ocorre com a equação da derivada direcional do deslocamento transversal $\frac{\partial w}{\partial m}(Q)$, com a eliminação da integração do termo correspondente à força cortante equivalente V_n , tornando-se apenas o

somatório:

$$\sum_{l=1}^N \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q.l) R_l \quad (4.102)$$

As equações formam o mesmo sistema 4.43, após a imposição das condições de contorno, de onde serão obtidas as incógnitas. Para comparação dos resultados obtidos pela nova formulação com os obtidos pela formulação usual deve-se distribuir a reação em cada nó pelos elementos adjacentes a ele.

Para o elemento linear a distribuição é feita conforme a figura 4.14 para os casos possíveis que possam ocorrer:

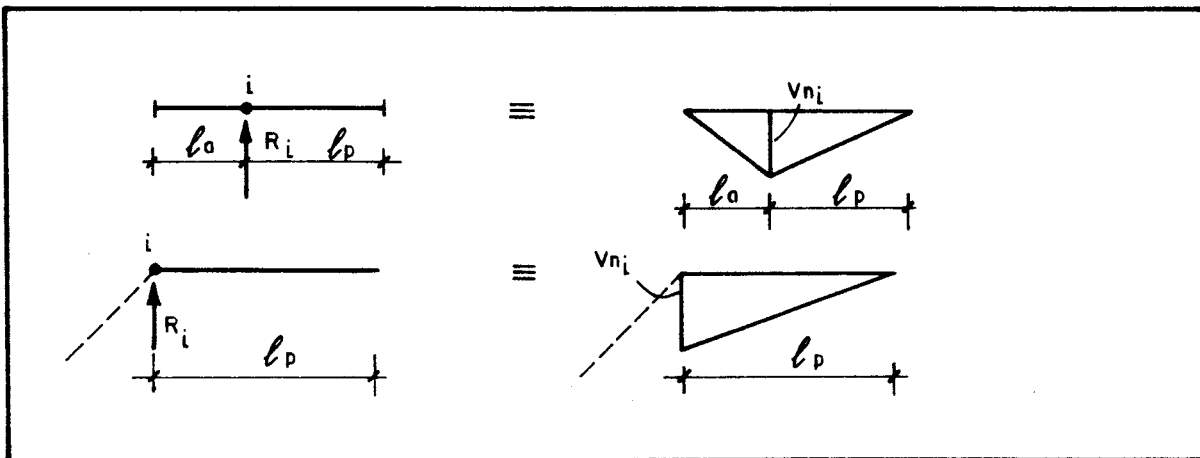


FIGURA 4.14 - Reação pontual R_i e reação equivalente no contorno - elemento linear

Para o caso do nó pertencente a dois elementos o valor de V_{n_i} vale

$$V_{n_i} = \frac{2 R_i}{(l_a + l_p)} \quad (4.103)$$

enquanto que para o caso de nó duplo, cada qual pertencendo a apenas um elemento, tem-se:

$$V_{n_i} = \frac{2 R_i}{l_p} \quad (4.104)$$

Já para o elemento quadrático a distribuição deve ser feita para metade do elemento pois este possui três nós, cada qual com suas respectivas influências, conforme mostra a figura 4.15.

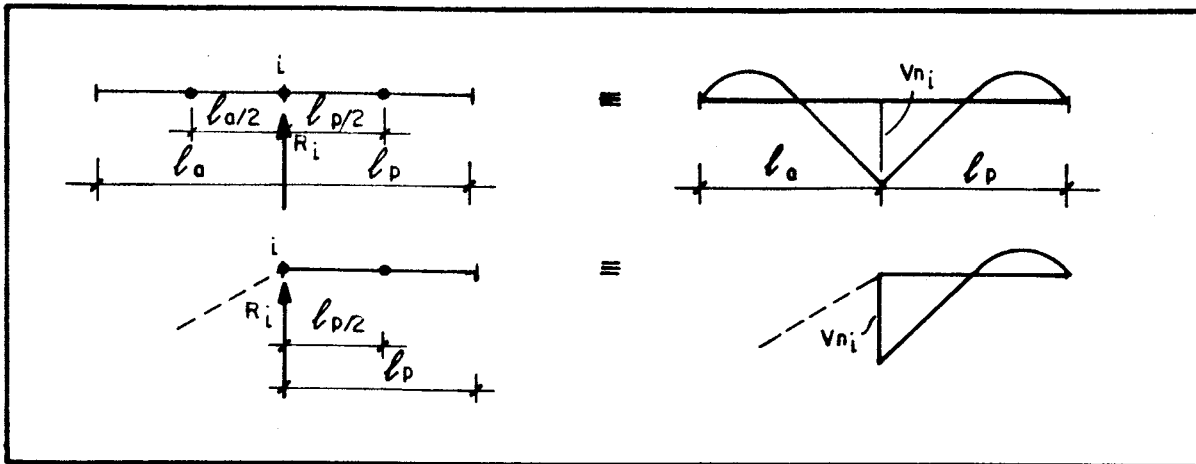


FIGURA 4.15 - Reação pontual R_i e reação equivalente no contorno - elemento quadrático

Para o nó pertencente a dois elementos, ou para o nó central ao elemento, o valor de V_{n_i} fica

$$V_{n_i} = \frac{4 R_i}{(l_a + l_p)} \quad \text{ou} \quad V_{n_i} = \frac{2 R_i}{l} \quad (4.105)$$

enquanto para o nó duplo tem-se:

$$V_{n_i} = \frac{4 R_i}{l_p} \quad (4.106)$$

4.3.5. Propriedades da Matriz \tilde{H}

Algumas propriedades apresentadas pela matriz \tilde{H} são úteis para sua verificação e para a obtenção, se necessária, dos elementos de sua diagonal principal, correspondentes às integrais singulares. Essas propriedades correspondem aos

movimentos de corpo rígido de uma placa, deslocamento transversal e rotação em torno de um eixo qualquer.

Considerando-se a placa da figura 4.16, já discretizada em elementos de contorno, com carregamento transversal admitido nulo, têm-se os vetores da integração sobre a região carregada \tilde{F} e dos esforços nodais \tilde{P} também nulos

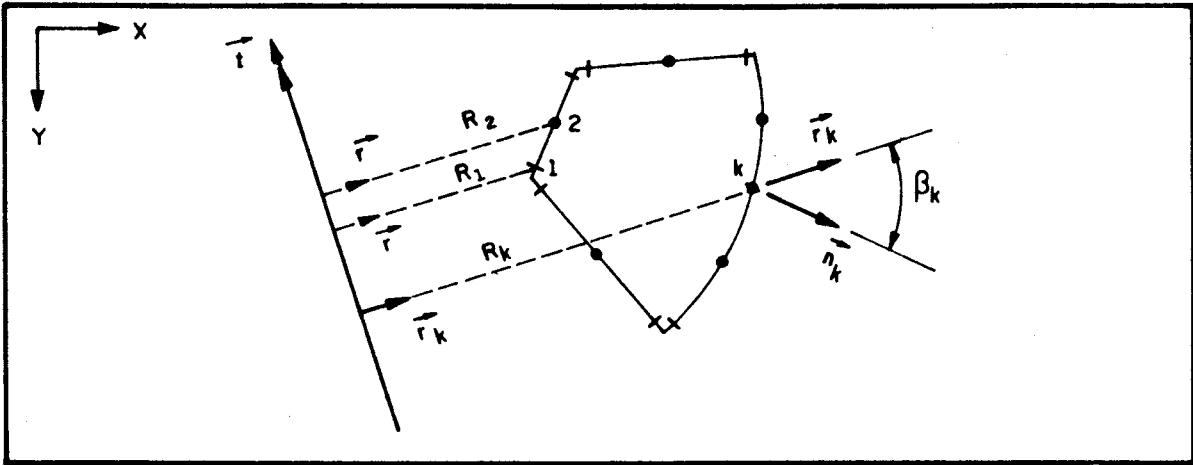


FIGURA 4.16 - Placa com carregamento transversal nulo

Desta forma o sistema 4.41 resulta em:

$$\tilde{H} \tilde{U} = \tilde{0} \quad (4.107)$$

que admite soluções não triviais correspondentes aos movimentos de corpo rígido.

Admitindo-se o deslocamento transversal de corpo rígido w_0 tem-se o vetor de deslocamentos \tilde{U} na forma:

$$\tilde{U}^T = \left\{ w_0 \ 0 \ w_0 \ 0 \ \dots \ w_0 \ 0 \right\} \quad (4.108)$$

de maneira que, substituindo-o na equação 4.41, pode-se escrever a primeira propriedade, referente às colunas ímpares da matriz \tilde{H} , como:

NOCONT

$$\sum_{j=1}^{NOCONT} h_{i,2j-1} = 0 \quad i = 1, 2 \times NOCONT \quad (4.109)$$

Considerando-se agora uma rotação, α , positiva, de corpo rígido em torno de um eixo t (figura 4.16), tem-se o vetor \tilde{U} da seguinte forma:

$$\tilde{U}^T = \left\{ \alpha \cdot R_1 \quad \alpha \cdot \cos\beta_1 \quad \alpha \cdot R_2 \quad \alpha \cdot \cos\beta_2 \quad \dots \quad \alpha \cdot R_{NC} \quad \alpha \cdot \cos\beta_{NC} \right\} \quad (4.110)$$

onde,

R_k : distância do nó k ao eixo t

$$\cos\beta_k = \vec{n}_k \cdot \vec{r}_k$$

NC : número total de nós no contorno

Levando-se a expressão 4.110 à equação 4.41 obtém-se a segunda propriedade para os elementos da matriz \tilde{H} :

NOCONT

$$\sum_{j=1}^{NOCONT} \left(h_{i,2j-1} \cdot R_j + h_{i,2j} \cdot \cos\beta_j \right) = 0 \quad (4.111)$$

5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos numéricos utilizando-se as formulações propostas e os resultados são comparados com resultados analíticos.

5.2. Exemplo 1: Placa circular engastada com carregamento uniformemente distribuído

Para se avaliar os resultados obtidos pelos elementos apresentados foi analisada inicialmente uma placa circular engastada no contorno e uniformemente carregada (figura 5.1), para várias discretizações do contorno. Os elementos têm o mesmo comprimento e são utilizados 6 pontos de Gauss para a integração numérica.

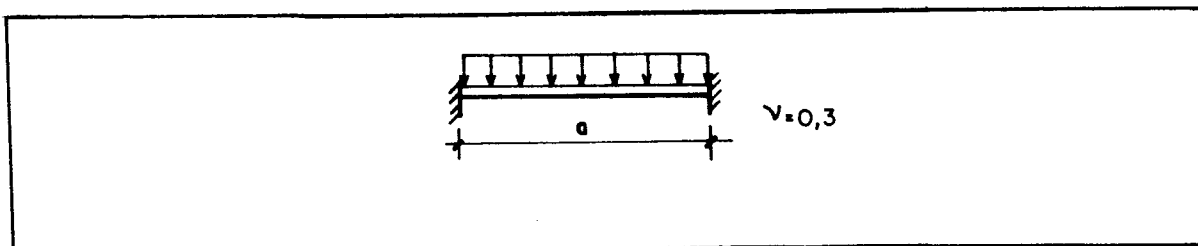


FIGURA 5.1 - Placa circular engastada no contorno

Nos resultados apresentados foi adotada a representação de V_n por forças concentradas nos nós do contorno por apresentarem maior precisão.

A tabela 5.1 indica os resultados de esforços e deslocamentos obtidos para o ponto central da placa e de esforços no contorno.

Para o elemento quadrático, houve uma variação dos valores no contorno entre os nós extremos e o nó central (números entre parênteses) dos elementos, o que não ocorre com o elemento circular cujos valores se apresentam constantes. Isto ocorre, conforme comentado, devido a não garantia da continuidade da derivada tangencial no contorno no ponto comum a dois elementos consecutivos, gerando estas perturbações nos resultados. Não ocorrendo isto com o elemento circular, mostra a excelente aproximação do contorno real por este tipo de elemento neste caso, pois os valores das variáveis de contorno se apresentam constantes.

TABELA 5.1 - Esforços e deslocamentos para placa circular engastada sob carregamento uniforme

Nº Total de Elementos	$w / (\frac{qa^4}{16D})$		$M_x / (\frac{qa^2}{16})$		$V_n / (\frac{-qa}{2})$		$M_n / (\frac{-qa^2}{16})$	
	QUADR.	CIRC.	QUADR.	CIRC.	QUADR.	CIRC.	QUADR.	CIRC.
4	1,1712	1,0109	1,2796	1,3005	0,9811 (1,0169)	0,9936	1,9636 (2,1350)	2,0006
8	1,0001	1,0001	1,2915	1,3005	0,9896 (0,9984)	0,9936	1,9942 (2,1047)	2,0006
16	1,0001	1,0001	1,2992	1,2992	0,9928 (0,9944)	0,9936	1,9994 (2,0019)	2,0006
Valores Analíticos [31]	$1,000 \frac{qa^4}{16D}$		$1,3000 \frac{qa^2}{16}$		$1,000 (\frac{-qa}{2})$		$2,000 (\frac{-qa^2}{16})$	

Deve-se notar também os ótimos resultados obtidos pelo elemento circular, mesmo para uma divisão mínima do contorno como a discretização por quatro elementos, enquanto que para o elemento quadrático os valores de contorno são apresentados por uma média dos resultados obtidos.

5.3. Exemplo 2: Placa circular engastada ; análise por simetria

A figura 5.2 mostra a mesma placa circular engastada no contorno, porém agora utilizando-se da simetria do problema para sua análise. Desta forma são obtidos os deslocamentos transversais w e os momentos fletores M_θ nos pontos internos, representados nos trechos retos.

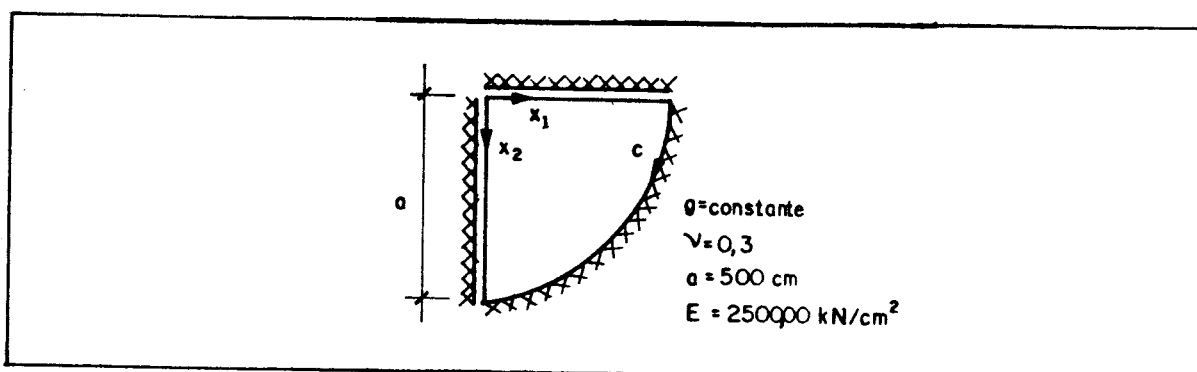


FIGURA 5.2 - Quadrante de placa circular engastada para análise de simetria

Os valores de esforços no contorno circular engastado apresentam variações, para os dois tipos de elemento, da ordem de 0,7% dos valores analíticos, conforme pode-se observar na tabela 5.2.

TABELA 5.2 - Esforços no contorno, análise por simetria

$c / \frac{\pi a}{2}$		0	0,125	0,25	0,375	0,50	0,625	0,75	0,875	1,0	Resul. Analit. [31]
$\frac{V_n}{(\frac{q a}{2})}$	Quadr.	0,9872	0,9960	0,9952	0,9912	0,9960	0,9912	0,9952	0,9960	0,9872	1,0000 $(\frac{-q a}{2})$
	Circ.	0,9864	0,9976	0,9944	0,9920	0,9952	0,9920	0,9944	0,9976	0,9864	
$\frac{M_n}{(\frac{-q a^2}{16})}$	Quadr.	1,9917	2,0019	2,0032	1,9981	2,0045	1,9981	2,0032	2,0019	1,9917	2,0000 $(\frac{-q a^2}{16})$
	Circ.	1,9904	2,0019	2,0019	1,9981	2,0019	1,9981	2,0019	2,0019	1,9904	

Isto ocorre devido à análise de uma placa com cantos, que na realidade não existem, gerando perturbações inerentes à teoria simplificada de placas delgadas utilizada neste trabalho. A representação dos esforços V_n como forças concentradas nos nós do contorno absorveu estas possíveis perturbações.

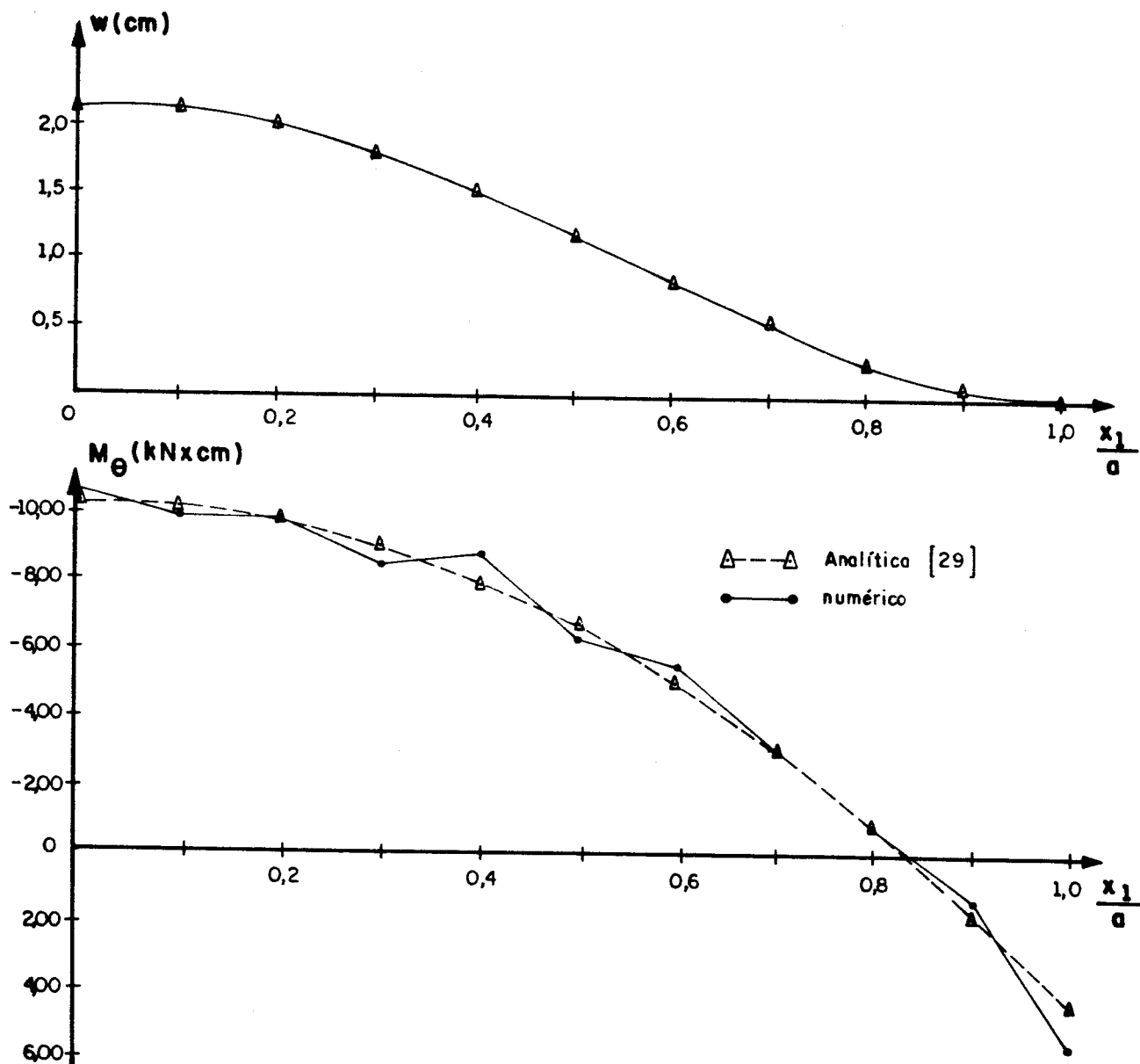


FIGURA 5.3 - Deslocamentos e esforços de pontos internos à placa analisada por simetria

A figura 5.3 fornece valores de deslocamento w e momento fletor M_θ obtidos para os pontos internos da placa (trecho reto), comparados com valores analíticos, conforme [31].

Os resultados obtidos da figura 5.3 são tanto do elemento circular quanto do quadrático. Foram utilizados 6 pontos de integração para este exemplo.

5.4. Exemplo 3: Placa circular engastada com carregamento concentrado no ponto central

Submetendo-se a mesma placa circular, engastada em seu contorno, a um carregamento concentrado no seu ponto central, com as mesmas discretizações utilizadas no primeiro exemplo, obtêm-se respostas semelhantes quanto aos melhores resultados obtidos pelo elemento circular. Também para uma discretização mínima do contorno da placa o elemento circular apresenta excelentes resultados, o que não se obteve com o elemento quadrático. A tabela 5.3 mostra os resultados obtidos para deslocamento no ponto central da placa e os esforços no contorno, para $\nu = 0,25$. Também para este caso foram utilizados 6 pontos de integração.

TABELA 5.3 - Esforços e deslocamentos para placa circular engastada com carga concentrada

Nº Total de Elementos	$w / (\frac{pa^2}{16\pi D})$		$M_n / (\frac{-p}{4\pi})$		$V_n / (\frac{-p}{2\pi a})$	
	Q	C	Q	C	Q	C
4	1,1290	0,9993	1,0379 (0,9693)	0,9999	1,0627 (0,9797)	1,0000
8	0,9989	0,9996	1,0071 (0,9964)	1,0000	1,0314 (0,9848)	1,0000
16	0,9993	0,9993	1,0009 (0,9995)	0,9999	1,0021 (0,9979)	1,0000
Valores Analíticos [32]	$1,0000 (\frac{pa^2}{16\pi D})$		$1,0000 (\frac{-p}{4\pi})$		$1,0000 (\frac{-p}{2\pi a})$	

5.5. Exemplo 4: Placa circular apoiada em três apoios discretos sob carregamento uniforme

Um outro exemplo visa mostrar uma vantagem obtida pelo cálculo da reação V_n como força concentrada nos nós do contorno. A figura 5.4 mostra uma placa circular apoiada discretamente em três pontos, sob carregamento uniformemente distribuído ($\nu = 0,25$).

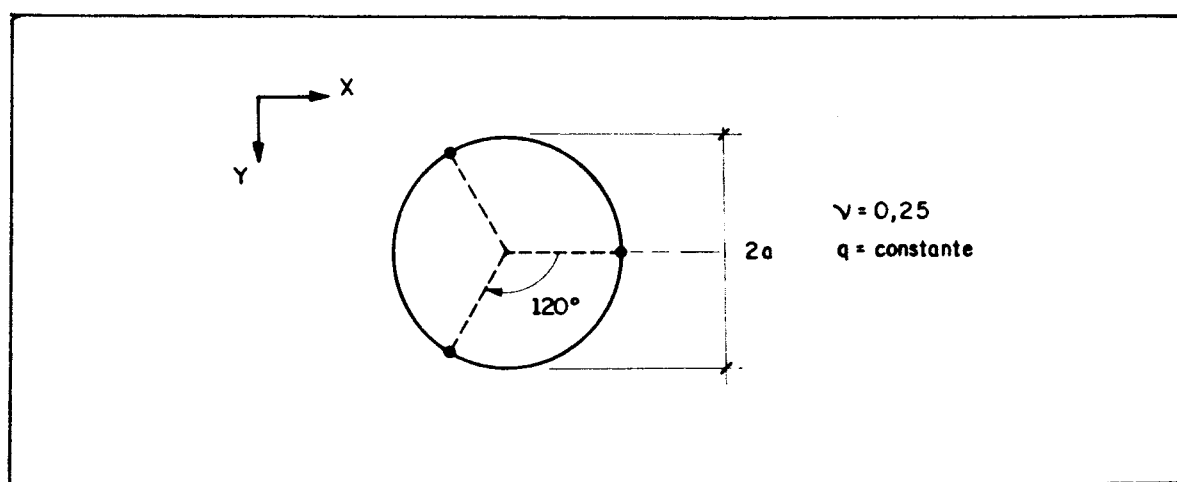


FIGURA 5.4 - Placa circular apoiada em três pontos discretos sob carregamento uniforme

O contorno foi discretizado em doze elementos e foi calculado de duas maneiras: calculando-se as reações V_n como pontuais e, como usualmente se faz, interpolando-se pelos elementos adjacentes. Os resultados obtidos são mostrados na tabela 5.4. Neste exemplo foram utilizados 6 pontos de integração para a resolução numérica.

Observa-se uma melhoria nos resultados dos deslocamentos no ponto central da placa com o cálculo por V_n pontual em comparação com a alternativa usual, podendo-se melhorar os resultados com uma melhor discretização do contorno da placa e com a utilização de um maior número de pontos de integração, considerando-se que os exemplos foram feitos com 8 pontos.

TABELA 5.4 - Reações nos apoios e deslocamento no ponto central de placa circular apoiada em três pontos discretos (carregamento uniforme)

Nº Total de Elementos		$w_0 / (\frac{\pi q a^4}{D})$		$R_{\text{apoio}} / (\frac{-q \pi a^2}{3})$	
		Q	C	Q	C
12	V_n Pontual	0,03809	0,03757	0,9936	0,9936
	V_n por interpolação	0,03968	0,03961	0,9936	0,9936
Valores Analíticos [32]		$0,0362 \frac{\pi q a^4}{D}$		$1,0000 (\frac{-q \pi a^2}{3})$	

5.6. Exemplo 5: Placa anular apoiada no contorno interno e com a borda externa livre

Um exemplo interessante é o de uma placa anular, conforme mostra a figura 5.5, onde a borda interna é apoiada e a borda externa livre e submetida a uma carga constante distribuída ao longo de sua extensão.

Foram feitos três tipos de discretização, onde procurou-se manter um número constante de elementos na borda interna (12) a fim de não se permitir grandes perdas na precisão dos resultados, que poderiam ocorrer devido a uma discretização muito pobre em um contorno mais crítico. Assim, a discretização variou no contorno externo, com 4, 8 e 16 elementos. Foram utilizados 6 pontos de integração.

Os resultados dos deslocamentos nos pontos O e P (figura 5.5) e das reações no apoio da placa estão na tabela 5.5.

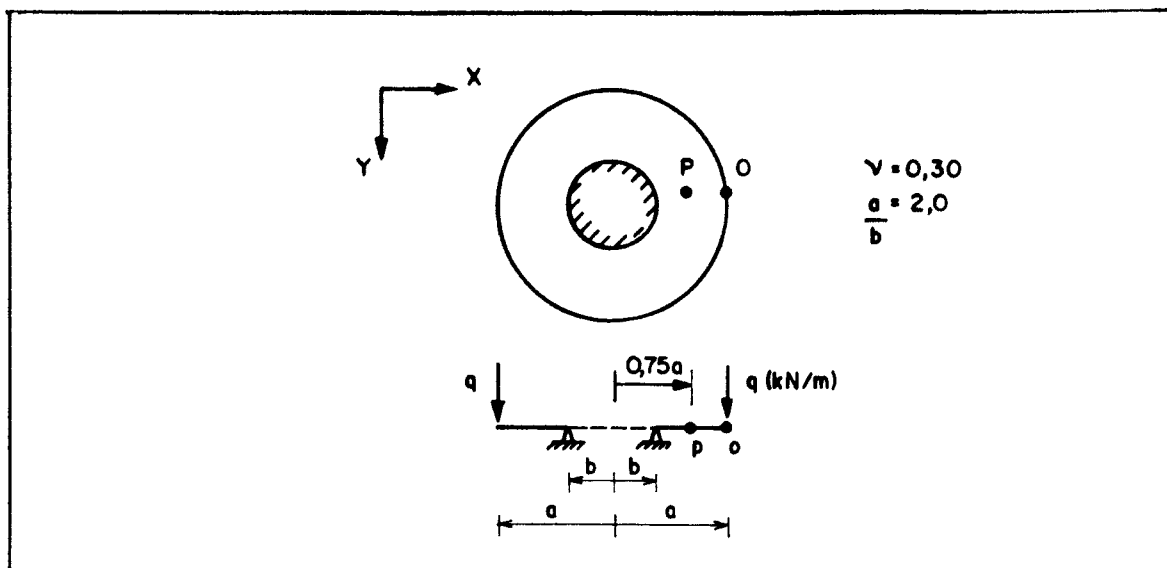


FIGURA 5.5 - Placa anular apoiada em seu contorno interno e linearmente carregada no externo

TABELA 5.5 - Deslocamentos e reação de apoio de placa anular apoiada em sua borda interna e linearmente carregada na borda externa

Nº Total de Elementos	$w_o / (\frac{qa^3}{8D})$		$w_p / (\frac{qa^3}{8D})$		$V_n / (\frac{-qa}{b})$	
	Q	C	Q	C	Q	C
16	2,99575 (2,70797)	3,09359	1,54389	1,61066	1,81842 (0,49515)	1,01520 (0,98284)
20	3,05245 (3,00253)	3,09360	1,57870	1,61067	1,04582 (0,88139)	1,01624 (0,98161)
28	3,07903 (3,07209)	3,09350	1,60143	1,61063	1,08504 (0,9160)	1,010 (0,9885)
Valores Analíticos [31]	$3,09351 \frac{qa^3}{8D}$		1,61064	$\frac{qa^3}{8D}$	$1,0000 (\frac{-qa}{b})$	

Aí também observa-se uma excelente aproximação dos resultados obtidos pelo elemento circular, mesmo para a pior discretização, apesar de uma pequena oscilação dos valores de V_n nos apoios, o que já vinha ocorrendo com o elemento quadrático nos exemplos anteriores para valores no contorno.

5.7. Exemplo 6: Placa elíptica simplesmente apoiada

Outro exemplo apresentado é o de uma placa elíptica, simplesmente apoiada em seu contorno sob um carregamento uniformemente distribuído, conforme mostra a figura 5.6.

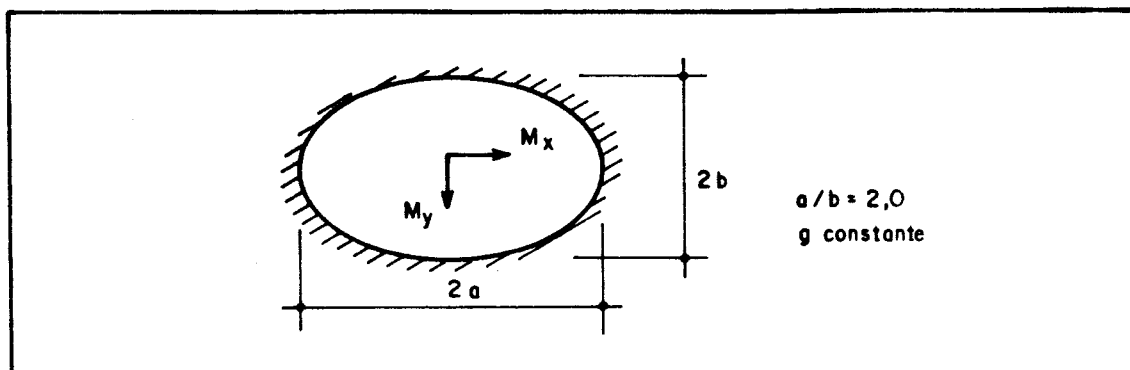


FIGURA 5.6 - Placa elíptica simplesmente apoiada

São utilizados elementos quadráticos de maneira a obtê-los com comprimentos próximos eliminando-se possíveis problemas de aproximação numérica.

Usando-se a relação a/b igual a 2,0 obtêm-se, para várias discretizações do contorno, os valores dos momentos fletores no centro da placa mostrados na tabela 5.6.

TABELA 5.6 - Momentos fletores no centro da placa elíptica simplesmente apoiada

Nº Total de Elementos	8	12	16	24	Resultados Analíticos [32]
$M_x/(qb^2)$	0,2048	0,2048	0,2048	0,2048	0,21 (qb^2)
$M_y/(qb^2)$	0,3757	0,3757	0,3757	0,3757	0,379 (qb^2)
$w/(\frac{qb^4}{Eh^3})$	1,55786	1,55512	1,55465	1,55438	1,58 ($\frac{qb^4}{Eh^3}$)

Observa-se que os resultados apresentam erros menores que 3% nos valores de momento e deslocamento no domínio,

comparados com os resultados analíticos, segundo [32]. Neste caso também foram utilizados 6 pontos de integração para a resolução numérica.

Os valores no ponto central da placa não apresentaram diferenças consideráveis para as diversas discretizações do contorno, o que mostra a excelente aproximação obtida pelos elementos utilizados. Porém, como era de se esperar, os valores de contorno são mais satisfatórios com um maior refinamento da malha, utilizando-se um maior número de elementos.

Os trechos de maior curvatura também foram aproximados pelo elemento circular por apresentarem raios de curvatura praticamente constantes, não surgindo diferenças significativas nos resultados. Já os trechos de menor curvatura foram considerados lineares pela rotina de cálculo das características dos elementos por apresentarem raios de curvatura maiores que $5,0 \times 10^8$ m, limite imposto ao programa para o cálculo do elemento geometricamente curvo (vide apêndice B).

6. ESTRUTURA DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

6.1. Introdução

Mostra-se neste capítulo o fluxograma do programa computacional realizado para a resolução numérica utilizando a formulação apresentada. São comentadas cada subrotina utilizada a fim de tornar simples a visualização global do programa e a compreensão do cálculo dos elementos formulados e da rotina de integração.

6.2. Fluxograma

O programa é dividido de maneira a se obter uma estruturação em blocos de operações interrelacionados visando maior agilidade no cálculo computacional e melhor visualização do método.

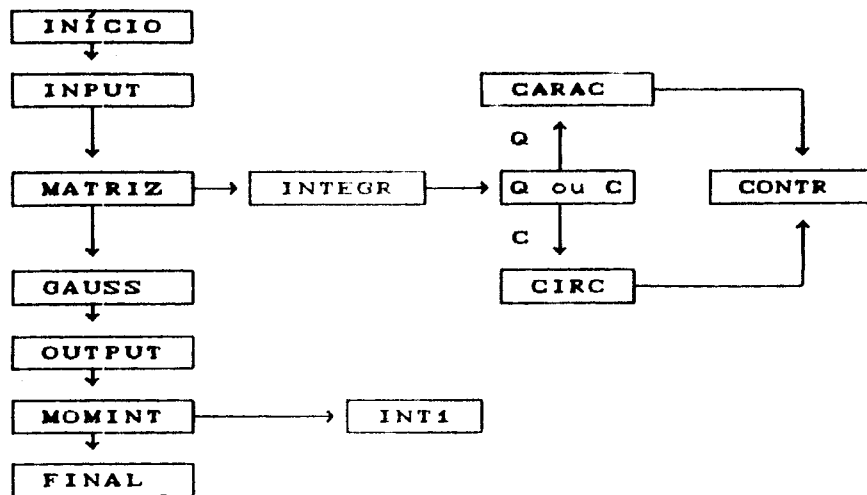


FIGURA 6.1 - Fluxograma o programa

6.2.1. Sub-rotina INPUT

Realiza a leitura e impressão dos dados como título do problema, características da placa, coordenadas globais dos nós, condições de contorno, e calcula as características dos elementos de contorno como tipo, comprimento, co-senos diretores da direção normal aos pontos que os definem geometricamente.

6.2.2. Sub-rotina MATRIZ

Realiza a montagem da matrizes \tilde{H} e \tilde{G} e do vetor independente de cargas após o cálculo dos termos realizado pela sub-rotina INTEGR através da quadratura de Gauss.

6.2.3. Sub-rotina INTEGR

Realiza o cálculo das integrais sobre os elementos de

contorno utilizando a quadratura de Gauss onde faz-se a transformação de coordenadas sobre os pontos de integração. As características dos elementos de contorno são calculadas de acordo com cada tipo de elemento, quadrático (sub-rotina CARAC) ou circular (sub-rotina CIRC) .

O apêndice A mostra um fluxograma da transformação de coordenadas feita sobre os pontos de integração que pode ser facilmente implementada à quadratura de Gauss. O usuário fornece ao programa o tipo de elemento que melhor aproxima o contorno real, a seu critério.

6.2.4. Sub-rotinas CARAC e CIRC

Calculam as características dos elementos de contorno, onde são realizadas as integrações, como jacobiano da transformação da coordenada Γ para a coordenada adimensional ξ , comprimento, co-senos diretores das direções normal e tangencial ao contorno e raio de curvatura em cada ponto de integração. Os apêndices B e C mostram os fluxogramas de cada sub-rotina.

6.2.5. Sub-rotina GAUSS

Calcula as incógnitas do sistema de equações $A \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{B}$ pelo método de Gauss.

6.2.6. Sub-rotina OUTPUT

Reorganiza os vetores de valores prescritos com o vetor obtido da solução do sistema e imprime os valores dos deslocamentos e dos esforços dos pontos nodais do contorno.

6.2.7. Sub-rotina MOMINT

Calcula e imprime os deslocamentos e os esforços dos pontos internos montando a matriz \tilde{H}' cujos termos são calculados pela sub-rotina INTEG1 com a integração sobre os elementos de contorno.

6.2.8. Sub-rotina INTEG1

Realiza o cálculo das integrais das funções de momento dos pontos internos sobre os elementos de contorno, também utilizando a transformação de coordenadas sobre os pontos de integração da quadratura de Gauss.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo básico deste trabalho foi apresentar uma formulação utilizando o M.E.C. para a análise de placas delgadas com geometria curva. Neste estudo o contorno da placa foi aproximado, a nível de cada elemento, por um polinômio de segundo grau ou por um arco de circunferência, de maneira a melhor representar o contorno real.

Na formulação apresentada, os pontos do contorno foram retirados para fora do domínio da placa com o objetivo de se evitar singularidades nas integrais sobre o contorno. As integrações são realizadas numericamente, onde foi utilizada a transformação cúbica de coordenadas proposta por TELLES [1], que mostrou-se eficiente e tem a vantagem de se utilizar uma única rotina de integração em todas as integrais. Ela ainda permitiu uma melhor apuração nos resultados obtidos, havendo uma pequena perturbação com relação aos valores de canto.

Estas perturbações foram amenizadas com a utilização da formulação apresentada por PAIVA [2] onde a força cortante equivalente é admitida como esforço concentrado nos nós do contorno.

Os elementos de contorno apresentados, assim como as formulações da transformação de coordenadas e da força cortante equivalente pontual são facilmente implementadas em

programas computacionais do M.E.C..

Da análise dos exemplos apresentados verificou-se a obtenção de resultados satisfatórios, quando comparados com as soluções analíticas, com a utilização dos elementos de contorno propostos para a aproximação do contorno.

O elemento circular, de simples aplicação prática, apresentou resultados excelentes, tanto na aproximação geométrica quanto nos esforços e deslocamentos dos problemas, praticamente eliminando as perturbações que surgem quando um contorno circular é aproximado por elementos quadráticos.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] TELLES, J.F.C. A self adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. Int. J. Numer. Methods Eng., 24, 937-959, 1987.

- [2] PAIVA, J.B. Formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno quanto à distribuição das reações de contorno em bordas de placas. MECOM-89, Vol.1, A-31-A-46, 1989.

- [3] LOVE, A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4th ed. New York, Dover, 1944.

- [4] MUSKHELISHVILI, N.I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Groningen Holand, Noordhoff, 1953.

- [5] MIKHLIN, S.G. Integral equations. London, Pergamon Press, 1957. (International series of monographs in pure and applied mathematics).

- [6] KUPRADZE, V.D. Potential methods in the theory of elasticity. Jerusalem, Israel Program for

Scientific Translation, 1965.

- [7] RIZZO, F.J. An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics Quarterly of Applied Mathematics, 25, (1): 83-92, 1967

- [8] CRUSE, T.A. Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. Int. Journal of Solids and Structures, 5: 1259-1274, 1969.

- [9] CRUSE, T.A. An improved boundary integral equation method for three-dimensional elastic stress analysis. Computers & Structures, 4: 741-754, 1974.

- [10] RICARDELLA, P.C. An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elasto-plasticity. Carnegie-Mellon University, 1973 (Ph.D.Thesis).

- [11] LACHAT, J.A. A further development of the boundary integral technique for elastostatic. Southampton, University of Southampton, 1975. (Ph.D.Thesis).

- [12] HANSEN, E.B. Numerical solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems. Journal of Elasticity, 6 (1): 39-56, 1976.

- [13] BREBBIA, C.A. The boundary element method for engineers. London, Pentech Press, 1978.

- [14] BÉZINE, G. Boundary integral formulation for Plate flexure with arbitrary boundary conditions. Mechanics Research Communications, 5 (4): 197-206, 1978.

- [15] STERN, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. Int. J. Solids Structures, 15: 769-782, 1979.
- [16] VANDERWEEËN, F. Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model. In: BREBBIA, C.A., ed Boundary Element Methods in Engineering: Proceedings of the Fourth International Seminar, Southampton, England, sept 1982.
- [17] REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech., 12: A69-A77, 1945.
- [18] BÉZINE, G. A mixed boundary integral: finite element approach to plate vibration problems. Mechanics Research Communications, 7 (3): 141-150, 1980.
- [19] KAMIYA, N. et al. An approximate finite deflection analysis of a heated elastic plate by the boundary element method. Appl. Math. Modelling, 6 (1): 23-27, feb. 1982.
- [20] TANAKA, M. Large deflection analysis of thin elastic plates. In: BANERJEE, P.K. & MUKHERJEE, S., eds. Developments in boundary element methods-3. London, Elsevier, 1984.
- [21] PAIVA, J.B. Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1987. (Tese de Doutorado).
- [22] KARAM, V.J. Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas. COPPE, UFRJ, 1986. (Dissertação de

Mestrado).

- [23] MARTINELLI, D.A.D.; MONTANARI, I.; SAVASSI, W.
Placas Elásticas. Equações Gerais e Placas Retangulares. Conceituação Teórica. Método das Diferenças Finitas e dos Elementos Finitos. São Carlos, EESC-USP, 1986.
- [24] KIRCHHOFF, G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. J. Math., Crelle, **40**: 51-58, 1850.
- [25] DANSON, D.J. Analysis of plate bending problems by direct boundary element method. Southampton, University of Southampton, 1979. (M.Sc. Dissertation).
- [26] PISKUNOV, N. Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Mir, Moscú, 1977.
- [27] STROUD, A.H. & SECREST, D. Gaussian quadrature formulas. New York, Prentice-Hall, 1966.
- [28] VENTURINI, W.S. Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia. São Carlos, EESC-USP, 1988. (Tese de Livre-Docência).
- [29] WILLIAMS, M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. J. Appl. Mech., **19**: 526-528, 1952.
- [30] HARTMANN, F. & ZOTEMANTEL, R. The direct boundary element method in plate bending. Int. J. Num. Meth. Eng., **23**: 2049-2069, 1986.

- [31] BARES, R. Tablas para el calculo de placas y vigas pared. Barcelona, G.Gili, 1972.
- [32] TIMOSHENKO, S. & WOINOWSKY-KRIEGER, S., Teoria de placas y laminas. Trad. F.J. Medina Salanova, Bilbao, Espanha, ediciones URMO (1970)

9. BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- [1] ADEY, R.A. & BREBBIA, C.A. Basic Computational techniques for Engineers. London, Pentech Press, 1983.
- [2] BARRETO, S.F.A. Aplicação do Método dos Elementos Finitos na análise de placas com deformação por cortante. EESC-USP, 1990. (Dissertação de Mestrado).
- [3] BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WRÖBEL, L.C. Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1984.
- [4] CERROLAZA, M. & ALARCON, E. A bi-cubic transformation for the numerical evaluation of the Cauchy principal value integrals in boundary methods. Int. J. Num. Meth. Eng., 28, 987-999, 1989.
- [5] GUIGGIANI, M. Letters to the editor - A self adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. Int. J. Numer. Methods Eng., 26, 1683-1684, 1988.

- [6] GUIGGIANI, M. & CASALINI, P. Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements, Int. J. Numer. Methods Eng., 24, 1711-1720, 1987.
- [7] GUIGGIANI, M. & CASALINI, P. Rigid-body translation with curved boundary elements. Appl. Math. Modelling, 13: 365-368, 1989.
- [8] HALL, W. Integration method for singular boundary element integrands. Boundary Elements X, vol.1 in: Brebbia, C.A. ed., Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [9] HAYAMI, K. & BREBBIA, C.A. A new co-ordinate transformation method for singular and nearly singular integrals over general curved boundary elements. Boundary Elements IX, vol.1 in: Brebbia, C.A. ed., Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [10] HAYAMI, K. & BREBBIA, C.A. Quadrature methods for singular and nearly singular integrals in 3-D boundary elements method. Boundary Elements X, vol.1 in: Brebbia, C.A. ed., Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [11] HUNTER, D.B. Some Gauss-Type formulae for the evaluation of Cauchy principal values of integrals. Numer. Math., 19, 419-424, 1972.
- [12] HUNTER, D.B. The numerical evaluation of Cauchy principal values of integrals by Romberg integration. Numer. Math., 21, 185-192, 1973.

- [13] JENG, C & WEXLER, A. Isoparametric finite element variational solution of integral equations for three-dimensional fields. Int. J. Numer. Methods Eng., 11, 1455-1471, 1977.
- [14] KUTT, H.R. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration. Numer. Math., 24, 205-210, 1975.
- [15] LACHAT, J.C. & WATSON, J.O. Progress in the use of boundary integral equations, illustrated by examples. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 10, 273-289, 1977.
- [16] LEAN, M.H. & WEXLER, A. Accurate numerical integration of singular boundary element kernels over boundaries with curvature. Int. J. Numer. Methods Eng., 21, 211-228, 1985.
- [17] PAGET, D.F. & ELLIOTT, D. An algorithm for the numerical evaluation of certain Cauchy principal value integrals. Numer. Math., 19, 373-385, 1972.
- [18] RIBEIRO, J.R.M. Estudo da validade da hipótese de Kirchhoff-Love na teoria de placas. COPPE, UFRJ, 1976. (Dissertação de Mestrado).
- [19] SILVA, N.A. Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas sobre fundações elásticas. EESC-USP, 1987. (Dissertação de Mestrado).

APÊNDICE A

Fluxograma do cálculo do polinômio do terceiro grau da transformação de coordenadas aplicada aos pontos de integração da quadratura de Gauss.

RMIN - distância mínima do 'Load Point' ao elemento de contorno integrado;

D1 - relação entre RMIN e o comprimento do elemento;

RTR - parâmetro livre, função de D1;

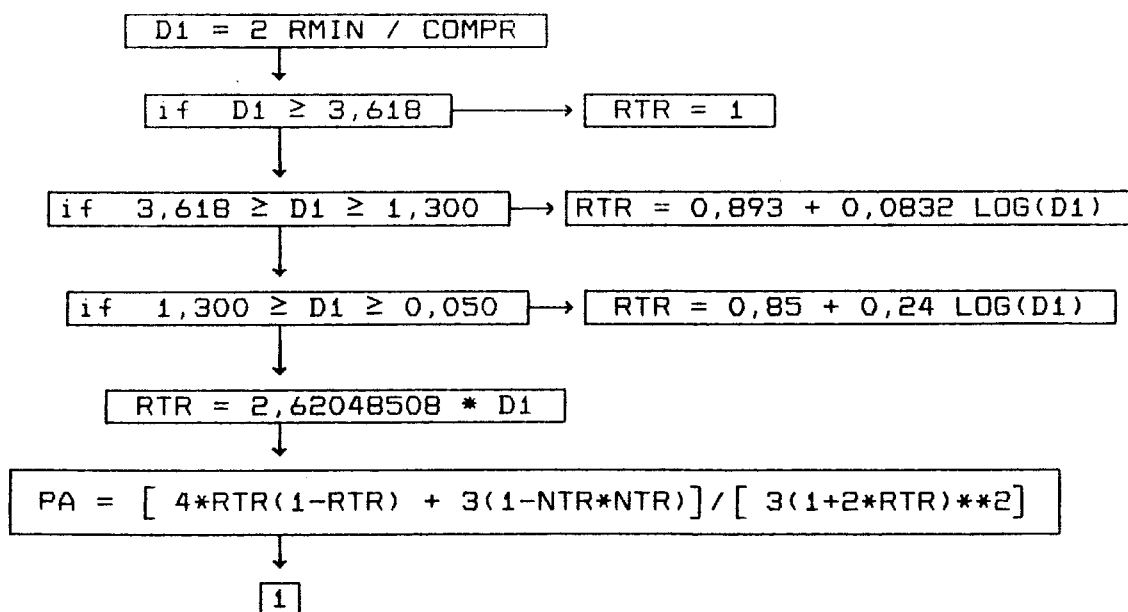
GTR - coordenada do ponto singular sem a transformação;

NTR - nova coordenada do ponto singular, com a transformação;

AN, BN, CN e DN - termos constantes do polinômio da transformação;

ETA - coordenada transformada obtida a partir do polinômio aplicado sobre os pontos de integração;

CJ - jacobiano da transformação de coordenadas.



1

$$QA = \left\{ \frac{[NTR(3-2*RTR) - 2*NTR**3 / (1+2*NTR)]}{(1+2*NTR) - NTR} \right\} / [2(1-2*RTR)]$$

$$EXPO = 1/3$$

$$GTR = [-QA + \text{SQRT}(QA**2 + PA**3)]**EXPO + [-QA - \text{SQRT}(QA**2 + PA**3)]**EXPO + NTR/(1 + 2*RTR)$$

do I = NG1,NG2

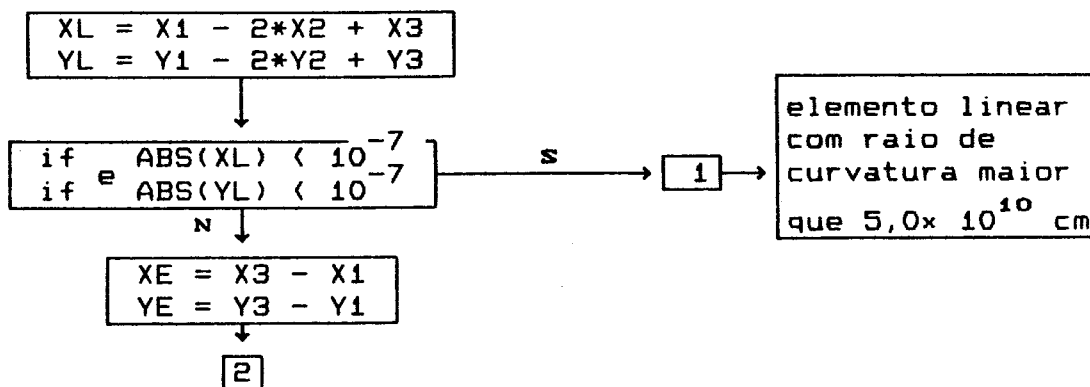
$$\begin{aligned} QN &= 1 + 3*GTR*GTR \\ AN &= (1 - RTR)/QN \\ BN &= -3(1 - RTR)GTR/QN \\ CN &= (RTR + 3*GTR*GTR)/QN \\ DN &= -BN \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ETA &= AN*GI(I)**3 + BN*GI(I)**2 + CN*GI(I) + DN \\ CJ &= 3*AN*GI(I)**2 + 2*BN*GI(I) + CN \end{aligned}$$

APÊNDICE B

Fluxograma da sub-rotina CARAC, com o cálculo das características do elemento de contorno quadrático.

1,2,3 - pontos que definem geometricamente o elemento;
X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3 - coordenadas dos pontos que definem geometricamente o elemento;
GI(I) - coordenada adimensional local do ponto de integração;
X,Y - coordenadas globais do ponto de integração;
COMPR - comprimento do elemento;
XL,YL,XE,YE,A,B,C - constantes características do elemento;
DELTA,XLIN,YLIN - parâmetros referentes ao ponto de integração para definição das direções normal e tangencial ao contorno e do raio de curvatura nesse ponto;
CX,CY,NX,NY - co-senos diretores das direções tangencial (c) e normal (n) ao contorno no ponto de integração;
R - raio de curvatura no ponto de integração;
CJ - jacobiano da transformação da coordenada no contorno Γ para a coordenada adimensional ξ .



2

A = XL*XL + YL*YL
B = XL*XE + YL*YE
C = 0,25*(XE*XE + YE*YE)

COMPR = [(2*A+B)*SQRT(A+B+C) - (B-2*A)*SQRT(A-B+C)]/(4*A)+
+ (4*A*C-B*B)*LOG(SQRT[4*A*(A+B+C)] + 2*A + B) /
/(B*SQRT[4*A*(A-B+C) - 2*A + B]*SQRT(A**3))

do I = NG1, NG2

X = 0,5*GI(I)*GI(I)*XL + 0,5*GI(I)*XE + X2
Y = 0,5*GI(I)*GI(I)*YL + 0,5*GI(I)*YE + Y2

DELTA = SQRT[A*GI(I)**2 + B*GI(I) + C]
XLIN = GI(I)*XL + 0,5*XE
YLIN = GI(I)*YL + 0,5*YE

CX = XLIN/DELTA
CY = YLIN/DELTA
NX = CY
NY = -CX

R = ABS[(2*DELTA**3)/(XE*YL - YE*XL)]
CJ = SQRT(XLIN**2 + YLIN**2)

APÊNDICE C

Fluxograma da sub-rotina CIRC, com o cálculo das características do elemento de contorno circular.

1,2,3 - pontos que definem geometricamente o elemento;
X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3 - coordenadas dos pontos que definem geometricamente o elemento;
X0,Y0 - coordenadas globais do centro do arco de circunferência;
ALFA1,ALFA2,ALFA3 - ângulos referentes aos raios de cada nó em relação ao semi-eixo positivo x;
TETAL - ângulo do setor formado pelo elemento circular;
OI(I) - coordenada adimensional local do ponto de integração;
X,Y - coordenadas globais do ponto de integração;
COMPR - comprimento do elemento;
CX,CY,NX,NY - co-senos diretores das direções tangencial (c) e normal (n) ao contorno no ponto de integração;
TETAP - coordenada angular local do ponto de integração;
R - raio de curvatura no ponto de integração;
CJ - jacobiano da transformação da coordenada angular local θ para a coordenada adimensional ξ .

$$\text{DIV} = 2 * [Y3 * (X1 - X2) + Y2 * (X3 - X1) + Y1 * (X2 - X3)]$$

$$X0 = \frac{((Y3 - Y2) * X1 ** 3 + (Y3 - Y1) * X2 ** 3 + (Y2 - Y3) * X2 * X1 ** 2 + (Y1 - Y3) * X1 * X2 ** 2 + [X1 * (Y2 - Y1) + X2 * (Y1 - Y2)] * X3 ** 2 + [X1 * (Y3 - Y2) + X2 * (Y2 - Y3)] * Y1 ** 2 + [X1 * (Y1 - Y3) + X2 * (Y3 - Y1)] * Y2 ** 2 + [X1 * (Y2 - Y1) + X2 * (Y1 - Y2)] * Y3 ** 2)}{[DIV * (X1 - X2)]}$$
$$Y0 = \frac{[(X3 ** 2 + Y3 ** 2) * (X1 - X2) + (X2 ** 2 + Y2 ** 2) * (X3 - X1) + (X1 ** 2 + Y1 ** 2) * (X2 - X3)]}{DIV}$$

$$R = \text{SQRT}[(Y1 - Y0) ** 2 + (X1 - X0) ** 2]$$

$$\text{ALFA1} = \text{TANG}[(Y1 - Y0) / R ; (X1 - X0) / R]$$
$$\text{ALFA2} = \text{TANG}[(Y2 - Y0) / R ; (X2 - X0) / R]$$
$$\text{ALFA3} = \text{TANG}[(Y3 - Y0) / R ; (X3 - X0) / R]$$

$$\text{TETAL} = \text{ALFA3} - \text{ALFA1}$$
$$\text{CJ} = 0,5 * \text{TETAL} * R$$
$$\text{COMPR} = \text{TETAL} * R$$

do I = NG1, NG2

$$X = R * \text{COS}(\text{TETAP}) * \text{COS}(\text{ALFA2}) - R * \text{SEN}(\text{TETAP}) * \text{SEN}(\text{ALFA2}) + X0$$
$$Y = R * \text{COS}(\text{TETAP}) * \text{SEN}(\text{ALFA2}) + R * \text{SEN}(\text{TETAP}) * \text{COS}(\text{ALFA2}) + Y0$$

$$\text{NX} = (X - X0) / R$$
$$\text{NY} = (Y - Y0) / R$$
$$\text{CX} = -\text{NY}$$
$$\text{CY} = \text{NX}$$