

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

PROBLEMAS DE ANÁLISE E SÍNTESE
NO MÉTODO DAS RÓTULAS PLÁSTICAS

ENGº . LUIZ HUMBERTO CAMILO

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

COMISSÃO EXAMINADORA :

PROF. DR. JOÃO C. ANTUNES DE O. E SOUZA (ORIENTADOR)
PROF. DR. LIBÂNIO MIRANDA PINHEIRO
PROF. DR. MARCOS NEREU ARENALES

SUPLENTE :

PROF. DR. JOSÉ ELIAS LAIER
PROF. DR. TIOETURO YAGUI

SÃO CARLOS, MARÇO DE 1991

Aos meus pais, responsáveis diretos por
este trabalho,

JOAQUIM & BLANDINA

Ao meu irmão, pela alegre convivência,

ENIO HUMBERTO

À minha esposa, pelo incentivo e apoio
constante.

SÍLVIA MARIA

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. João Carlos Antunes de Oliveira e Souza, com capacidade, abnegação e efetivo apoio orientou e forneceu valiosas sugestões para o desenvolvimento deste trabalho.

À Prof^a. Dra. Helena M. Cunha do Carmo Antunes pela atenção e colaboração durante a realização deste trabalho.

Aos professores Dr. Sérgio Persival B. Proença e Dr. Marcos Nereu Arenales, pelas valiosas sugestões.

Ao Prof. Norberto Costardi, pela eficiência e presteza com que desenvolve seu trabalho junto ao Laboratório de Computação do Departamento de Estruturas da EESC-USP.

A Sra. Nadir Minatel, bibliotecária do Departamento de Estruturas da EESC-USP, pela dedicação e ajuda no levantamento bibliográfico.

A Sra. Rosi Aparecida Jordão Rodrigues, secretária do Departamento de Estruturas da EESC-USP, pela dedicação com que desenvolve seu trabalho.

A Francisco Carlos G. de Brito pela eficiência e qualidade dos desenhos.

Aos colegas e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC-USP, pela convivência, amizade e apoio constante.

Ao CNPq, pela bolsa concedida durante a elaboração deste trabalho.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

A Deus, companheiro incansável de todas as horas.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo dos problemas de análise e síntese no método das rótulas plásticas aplicado a pórticos planos metálicos de nós rígidos.

Em primeiro lugar, é feita uma abordagem de alguns conceitos e hipóteses básicas do método das rótulas plásticas; em seguida, são introduzidos os diversos problemas em estudo.

Enfatiza-se a formulação matricial necessária para a geração automática das relações independentes de equilíbrio, envolvendo somente momentos fletores e cargas externas, e são discutidas as noções básicas de programação linear, necessárias para o entendimento da formulação dos problemas. A formulação matemática desses problemas está baseada nos teoremas estáticos do método das rótulas plásticas. A partir dessa formulação, desenvolveu-se um programa para microcomputadores em linguagem FORTRAN-77.

São apresentados alguns exemplos que mostram a eficiência da utilização da programação linear na solução dos problemas propostos, possibilitando uma avaliação do programa desenvolvido.

Finalmente, são apresentados alguns temas para dar continuidade a este trabalho.

ABSTRACT

This work presents a study about problems of structural analysis and structural synthesis, with the plastic hinges method, applied to low-rise steel plane frames.

First of all, a study of some concepts and basic hypothesis of the plastic hinges method is developed; the several problems concerned to it are then presented.

Emphasis is given to the necessary matrix formulation for automatic generation of the independent equations of equilibrium, involving bending moments and applied loads, and to the basic concepts of linear programming. The mathematical formulation of these problems is based on static theorems of the plastic hinges method. With this formulation a software for digital computers is then developed, by using the FORTRAN-77 language.

Several examples are also presented. Those examples show the efficiency of the application of linear programming in the solution of the proposed problems and enable an evaluation of the developed software.

Finally, several future research topics, for the continuity of this work, are suggested.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO.....	01
2	CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE O MÉTODO DAS RÓTULAS PLÁSTICAS.....	06
2.1	Conceitos importantes.....	06
2.2	Hipóteses básicas.....	14
2.3	Exemplo simples de colapso plástico.....	15
3	OS DIVERSOS PROBLEMAS EM ESTUDO.....	24
3.1	O problema de análise sob carregamento único.....	24
3.2	O problema de síntese sob carregamento único.....	35
3.3	O problema de análise sob carregamento variável.....	41
3.4	O problema de síntese sob carregamento variável.....	54
4	RELAÇÕES INDEPENDENTES DE EQUILÍBRIO.....	57
4.1	Considerações iniciais.....	57
4.2	Formulação matricial para obtenção das relações de equilíbrio.....	59
4.3	Estudo de uma barra para pórticos planos...	63
4.4	Obtenção da matriz [E].....	73
4.5	Estudo das relações de equilíbrio gerais para um pórtico plano.....	78
4.5.1	Definição da estrutura.....	78
4.5.2	Numeração das coordenadas locais das barras para as componentes do vetor $\{P\}_i$	81

4.5.3	Determinação da matriz $[\beta_g]$	82
4.5.4	Determinação da matriz $[M]$	83
4.5.5	Determinação da matriz $[N]$	85
4.5.6	Exemplo de aplicação.....	86
4.6	Obtenção das relações independentes de equi- librio.....	92
5	NOÇÕES BÁSICAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR.....	101
5.1	Considerações iniciais.....	101
5.2	Modelagem de um problema de programação linear.....	102
5.2.1	Definições básicas.....	104
5.3	Solução geométrica de um PPL.....	106
5.3.1	Identificação geométrica das solu- ções possíveis para um PPL.....	110
5.4	Estudo da forma padrão de um PPL.....	113
5.4.1	Transformação de um PPL na forma geral para a forma padrão.....	113
5.4.2	Notação matricial de um PPL na sua forma padrão.....	115
5.5	O método simplex.....	117
5.5.1	Solução viável básica e a sua corres- pondência com o ponto externo.....	117
5.5.2	Como melhorar uma solução viável básica.....	121
5.5.3	Identificação algébrica das soluções possíveis para um PPL.....	127
5.5.4	O algoritmo simplex.....	128
5.6	Solução inicial para o método simplex - va- riáveis artificiais.....	134
5.6.1	Método das duas fases.....	135
6	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DOS PROBLEMAS PROPOSTOS...	137
6.1	O problema de análise sob carregamento único.....	139
6.2	O problema de síntese sob carregamento único.....	150
6.3	O problema de análise sob carregamento	

variável.....	156
6.4 O problema de síntese sob carregamento variável.....	166
7 APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA.....	172
7.1 Comentários iniciais.....	172
7.2 Descrição das variáveis, vetores e matrizes utilizadas no programa.....	174
7.3 Informações sobre a entrada de dados.....	183
7.4 Esquema da estrutura do programa.....	186
7.5 Listagem do programa "PASM RP.FOR".....	188
8 EXEMPLOS.....	212
9 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	250
10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS E BIBLIOGRAFIA.....	252
10.1 Referências bibliográficas.....	252
10.2 Bibliografia.....	255
APÊNDICE A: RELAÇÃO ENTRE O MOMENTO DE INÉRCIA E O MOMENTO DE PLASTIFICAÇÃO TOTAL PARA OS DIVERSOS TIPOS DE SECÇÕES TRANSVERSAIS USUAIS.....	259
APÊNDICE B: ENVOLTÓRIA ELÁSTICA DOS MOMENTOS FLETO- RES.....	269

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Atualmente, observa-se que a produção de estruturas metálicas vem aumentando em ritmo acelerado e encontrando cada vez maior aplicação a nível nacional, principalmente em edifícios industriais. Isto está desencadeando um interesse maior dos pesquisadores nessa área a fim de adquirir conhecimentos que visem racionalizar e tornar mais competitivo o uso da estrutura metálica no país.

Procurou-se dar uma contribuição neste campo, apresentando este trabalho sobre o estudo dos problemas de análise e síntese no método das rótulas plásticas, voltado para pórticos planos metálicos de nós rígidos, buscando não só discutir esses problemas mas também resolvê-los através de um programa desenvolvido para microcomputadores, em linguagem FORTRAN-77.

O presente trabalho tem como objetivos:

- 1) Discutir os problemas de análise e síntese no método das rótulas plásticas, apresentando para cada problema proposto uma formulação matemática que possibilite a sua programação.
- 2) Desenvolver um programa para microcomputadores para análise de estruturas metálicas em regime elastoplástico, evitando-se com isto a dependência de softwares importados;

dentro desse objetivo merecem destaque dois softwares desenvolvidos durante a composição do programa principal, um visando a geração automática das relações independentes de equilíbrio para pórticos planos e outro a solução de problemas de programação linear através do método simplex.

3) Mostrar, através dos exemplos propostos, a viabilidade de se estudar os problemas de síntese sob carregamento variável através de um processo iterativo, graças ao desenvolvimento atual das máquinas de hoje.

4) Espera-se que este texto venha a servir como texto auxiliar básico àqueles que pretendem se dedicar ao estudo de estruturas lineares de aço em regime plástico.

Definido o tema do trabalho, fez-se um levantamento bibliográfico sobre o uso da programação linear na solução de problemas estruturais e a análise de estruturas em regime elastoplástico. Numa primeira fase, esse levantamento constou de uma pesquisa de artigos escritos sobretudo nas publicações da década de 80.

De posse desse material, selecionou-se aqueles artigos que englobavam os dois tópicos acima. Dentre esses artigos merecem destaque o trabalho de DOMASZEWSKI & SAMP-STANISLAWSKA^[1] que apresentam um modelo matemático para o problema de acomodação com peso mínimo através da programação linear e os dois trabalhos de GURALNICK et alii^{[2],[3]} que tratam do estudo do colapso plástico, acomodação e histerese.

Numa segunda fase, buscou-se um levantamento bibliográfico em termos de livros, dissertações e publicações para complementação do embasamento teórico do assunto escolhido. Esse levantamento constou de uma pesquisa de livros que tratassem dos problemas de análise e síntese no método das rótulas plásticas, onde os mais interessantes foram BAKER^[4], BAKER & HEYMAN^[5], BEEDLE^[6], HEYMAN^[7], KÄNIG^[8], MOY^[9] e NEAL^[10]; dos livros sobre programação linear, merecem destaque os de BAZARAA & JARVIS^[11], LUENBERGER^[12] e PUCCINI & PIZZOLATO^[13] ;

foram utilizados livros sobre processos elásticos de cálculo estrutural baseados nos processos dos deslocamentos e dos esforços, onde os básicos foram GERE & WEAVER^[14] e PRZEMIENIECKI^[15]. Além desses livros foram consultadas a dissertação de SOUZA^[16] e a publicação de ANTUNES & SOUZA^[17].

Paralelamente às linhas de pesquisa bibliográfica citadas, foram levantados outros artigos anteriores à década de 80 que faziam parte das referências bibliográficas dos trabalhos publicados nesta década ou dos livros consultados. Desses artigos destacam-se o trabalho de HEYMAN^[18], sobre projetos de peso mínimo sob carregamento fixo e variável, e o de PRZEMIENIECKI & DENKE^[19] sobre métodos de análise matricial de subestruturas pelo processo dos esforços.

Deve-se ressaltar que as referências bibliográficas indicadas neste capítulo foram aquelas consideradas como as mais significativas para o desenvolvimento teórico e computacional da dissertação. No final deste trabalho está indicada uma vasta bibliografia que complementa essas referências.

A partir desse levantamento bibliográfico foi possível identificar o que já se tinha feito dentro do assunto escolhido, o que precisava ter prosseguimento e o que ainda não havia sido tratado com maior rigor, como é o caso da obtenção de uma solução iterativa para o problema de síntese sob carregamento variável e a geração automática das relações independentes de equilíbrio; a seguir é descrita a estruturação dos capítulos desta dissertação.

No capítulo 2 é feita uma abordagem de alguns conceitos importantes e das hipóteses básicas do método das rótulas plásticas. No final do capítulo, é feito um estudo passo-a-passo do comportamento elastoplástico de uma viga bi-engastada.

Os diversos problemas abordados por este trabalho são apresentados no capítulo 3. Cada problema proposto é ilustrado através de um exemplo simples de pórtico plano, cuja solução é obtida geometricamente e através dos

teoremas do método das rótulas plásticas.

No capítulo 4 é apresentado um processo apropriado para a geração automática das relações independentes de equilíbrio. A partir de uma formulação matricial para obtenção das relações gerais de equilíbrio, desenvolveu-se um algoritmo, baseado na eliminação de Gauss, através do qual se consegue obter dessas relações aquelas que só envolvem o equilíbrio entre os momentos fletores e o carregamento externo.

No capítulo 5 são dadas as noções básicas envolvidas na programação linear, objetivando tanto familiarizar o leitor com a nomenclatura própria da programação linear quanto reunir informações que possibilitem a programação do método simplex, processo utilizado para solução dos problemas de programação linear neste trabalho.

No capítulo 6 é feita a formulação matemática dos problemas apresentados no capítulo 3. São apresentados também esquemas de armazenamento dos coeficientes das restrições lineares de cada problema, visando a programação computacional.

O capítulo 7 reúne todas as informações a respeito do programa desenvolvido. No capítulo 8 são apresentados exemplos selecionados da bibliografia consultada e alguns propostos. No capítulo 9 são feitas algumas considerações finais sobre o trabalho e no capítulo 10 são apresentadas as referências bibliográficas e a bibliografia.

Complementam este trabalho dois apêndices. No apêndice A é mostrado como obter a constante "c" e o expoente γ da relação entre o momento de inércia e o momento de plastificação total para os diversos tipos de seções transversais usuais. O apêndice B contém a formulação necessária para o cálculo da envoltória elástica dos momentos fletores.

Com relação à disposição dos assuntos conforme os capítulos comentados acima, objetivou-se tornar o texto, na medida do possível, acessível àqueles que ainda não possuem

um conhecimento mais sólido sobre o assunto. Por isso, a princípio pode-se achar que a parte teórica esteja demasiado extensa, mas, por essa disposição, é perfeitamente possível acompanhar todos os passos teóricos necessários para se chegar ao desenvolvimento e uso do software apresentado no capítulo 7.

CAPÍTULO 2

CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE O MÉTODO DAS RÓTULAS PLÁSTICAS

2.1 Conceitos importantes

O comportamento plástico de um material é caracterizado pelo surgimento de deformações permanentes, ou residuais, irreversíveis quando for anulada a sollicitação a que o corpo estiver sujeito. As deformações plásticas aparecem quando as tensões normais excedem um determinado limite, denominado de limite de escoamento.

A figura 2.1.a mostra o diagrama da tensão normal contra a deformação específica para um corpo de prova de aço com baixo teor de carbono, submetido ao ensaio de tração simples. Segundo esse diagrama, quando o corpo é sollicitado além do regime elástico (trecho OA), ele entra em escoamento plástico através do patamar BD, num fenômeno típico de deslizamento interno de cristais.

Admitindo-se que ao se alcançar o nível de deformação do ponto C o corpo sofra uma descarga com ciclo completo de tensão, nota-se o surgimento de uma deformação residual, denominada de deformação plástica. Portanto, a deformação total correspondente a C pode ser considerada como composta por uma parcela elástica (ϵ^E), recuperável, e outra plástica (ϵ^P), irreversível.

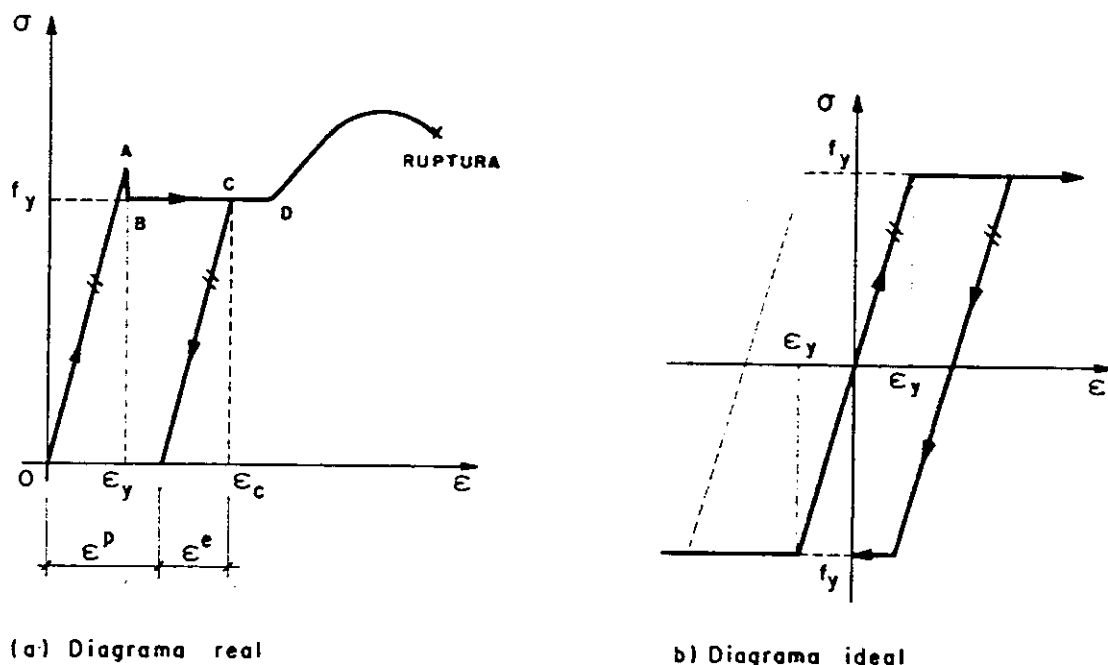


Fig. 2.1 Diagramas tensão-deformação

O trecho OABD da figura 2.1.a é o de maior interesse do ponto de vista da teoria plástica.

O diagrama idealizado da figura 2.1.b corresponde a um material elastoplástico ideal para o qual admite-se comportamento igual tanto na tração quanto na compressão; é desprezada a instabilidade interna caracterizada pelo trecho AB da figura 2.1.a, o encruamento, o efeito Bauschinger e qualquer possível decréscimo de tensão com o acréscimo de deformação, conforme será estabelecido na seção 2.2.

Considere-se uma viga bi-apoiada, cujas dimensões, características geométricas e carregamento estão apresentados na figura 2.2.

À medida que se aumenta a carga W , as tensões normais na seção central, a mais solicitada, vão aumentando; para um carregamento inicial, ainda em regime elástico, seus valores máximos ocorrem nas fibras extremas A e B da seção transversal mostrada na figura 2.2.c.

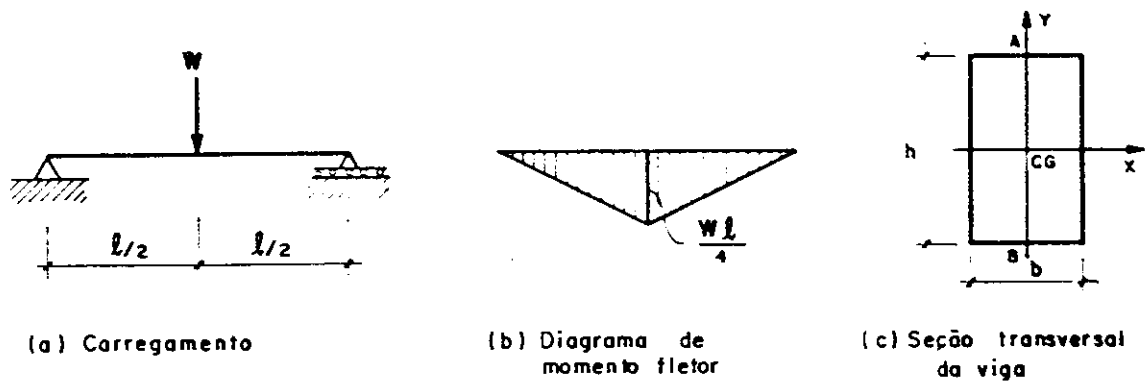


Fig. 2.2 Viga bi-apoiada

A viga responderá elasticamente até W atingir um determinado valor, denominado de carga de início de escoamento W_y , quando as tensões máximas atingem a tensão de escoamento f_y ; o momento fletor correspondente é o momento de início de escoamento M_y .

Após as tensões das fibras extremas da seção transversal central atingirem a tensão de escoamento, aumentos de cargas continuarão aumentando o momento fletor nessa seção e o conseqüente espalhamento da plastificação para o centro da seção, conforme figura 2.3.

O momento fletor M da figura 2.3.c, depois de iniciada a plastificação, é facilmente calculável e dado por:

$$M = \frac{b}{12} \left(3h^2 - 4y^2 \right) f_y \quad (2.1)$$

Para $y = h/2$, a seção transversal central está no limite elástico. As tensões nas suas fibras extremas acabaram de atingir a tensão de escoamento. Substituindo-se este valor em (2.1), tem-se:

$$M_y = \frac{bh^2}{6} f_y \quad (2.2)$$

é comum, na resistência clássica dos materiais, fazer:

$$M_y = Z f_y \quad (2.3)$$

onde Z é dito módulo elástico de resistência e vale:

$$Z = \frac{bh^2}{6} \quad (2.4)$$

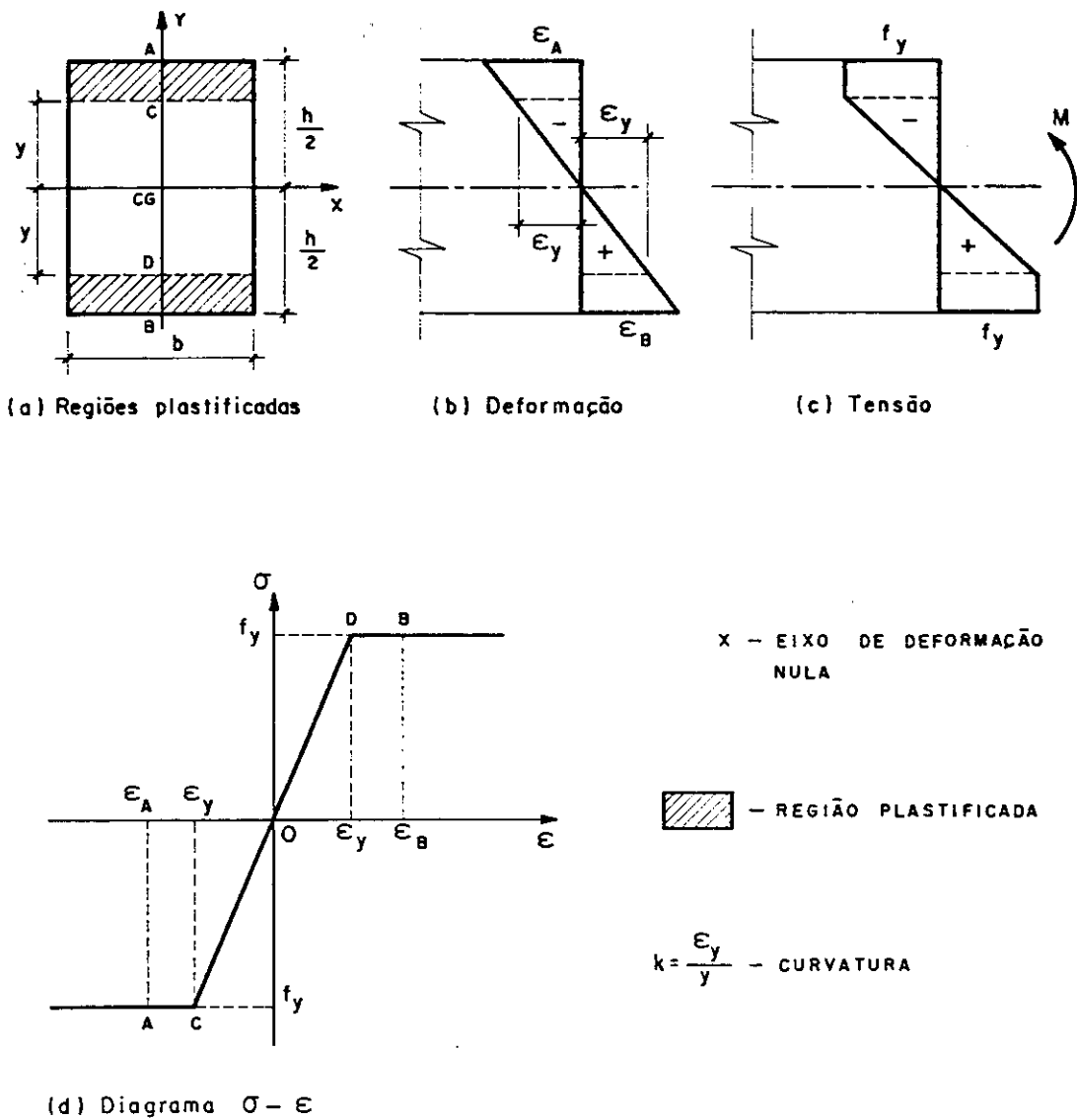


Fig. 2.3 Comportamento da seção transversal central

A carga W_y pode ser obtida igualando-se o momento fletor máximo do diagrama da figura 2.2.b com o momento de início de escoamento M_y ; assim:

$$W_y = \frac{4M_y}{l} \quad (2.5)$$

À medida que o núcleo elástico de altura $2y$ da figura 2.3.a vai diminuindo, a curvatura k da seção transversal central aumenta consideravelmente, conforme figura 2.3.b.

Com acréscimos ainda maiores no valor da carga W , a seção central tende a atingir a plastificação total, a curvatura tende a um valor muito grande e o raio de curvatura tende a zero; tudo se passa, desde que não haja inversão de deformação, como se aí houvesse se formado uma articulação; chamada de rótula plástica.

A formação dessa rótula será assumida como teoricamente aceitável ainda que, na prática, ela seja apenas uma idealização. A condição de plastificação total supõe que, para um y finito se tenha ϵ_y infinito o que é inaceitável para qualquer material. Assumir, entretanto, a formação de uma rótula, leva a resultados bastante simples e perfeitamente concordantes com resultados experimentais.

O momento fletor na seção central, no instante em que se formou a rótula plástica, é denominado momento de plastificação total M_p . Seu valor é obtido de (2.1), para $y = 0$:

$$M_p = \frac{bh^2}{4} f_y \quad (2.6)$$

Analogamente ao caso elástico, pode-se fazer:

$$M_p = Z_p f_y \quad (2.7)$$

onde Z_p , módulo plástico de resistência, vale:

$$Z_P = \frac{bh^2}{4} \quad (2.8)$$

A razão entre os módulos de resistência plástico e elástico recebe o nome de fator de forma ν :

$$\nu = \frac{Z_P}{Z} \quad (2.9)$$

Com o aumento progressivo da rotação na seção central, sob carga constante, há também acréscimos indefinidos no deslocamento vertical desta seção. Diz-se que a estrutura está em colapso plástico.

A carga W , correspondente ao início do colapso plástico, é denominada de carga de colapso plástico W_C . Seu valor é obtido, igualando-se o momento fletor máximo da figura 2.2.b com o momento de plastificação total M_P :

$$W_C = \frac{4M_P}{l} \quad (2.10)$$

O comportamento da viga antes e depois de atingida a carga de colapso W_C é ilustrado na figura 2.4.

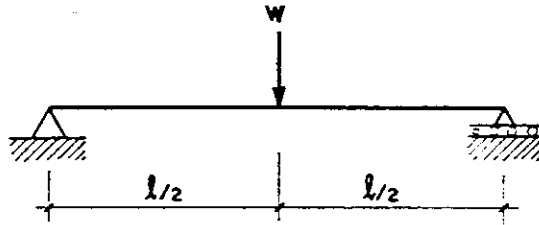
A curva (I) da figura 2.4.b representa a configuração da viga na iminência do colapso, ou seja, com $W = W_C$.

Considerando-se um fator de forma unitário, o deslocamento vertical central na iminência do colapso, δ_C , pode ser obtido com a flecha elástica central, empregando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais ou tabelas da estática clássica, e vale:

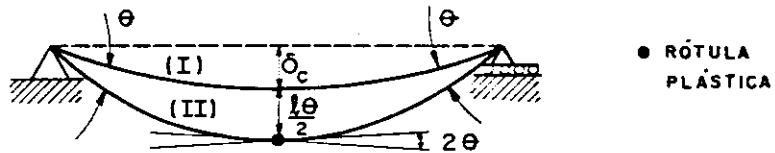
$$\delta_C = \frac{W_C l^3}{48EI} \quad (2.11)$$

ou então, com a (2.10):

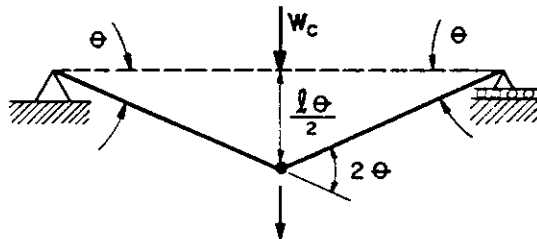
$$\delta_c = \frac{M_p l^2}{12EI} \quad (2.12)$$



(a) Viga com o carregamento inicial



(b) Deslocamentos verticais elásticos e plásticos



(c) Mecanismo de viga

Fig. 2.4 Configuração da viga antes e durante o colapso plástico

A curva (II), representa o acréscimo na deformada da viga, com momentos fletores constantes, portanto, sem mudanças de curvatura para as seções diferentes da central. Para essa seção, a rótula plástica que aí se formou sofreu uma rotação arbitrária de 2θ , coerente com o deslocamento de um mecanismo de viga.

Na figura 2.4.c, são mostrados os deslocamentos correspondentes à diferença entre as curvas (II) e (I),

isto é, os ocorridos durante o colapso plástico. Cada metade da viga é representada por linhas retas já que não houve variação de curvatura pois carga e momentos fletores são constantes durante o colapso plástico. Essas mudanças nos deslocamentos são devidas, unicamente, à rotação da rótula plástica.

Esses deslocamentos são coerentes com os de um mecanismo, denominado mecanismo de colapso. A viga, antes isostática, tornou-se hipostática para acréscimos de carga.

O diagrama carga-deslocamento para a seção transversal central é mostrado na figura 2.5.

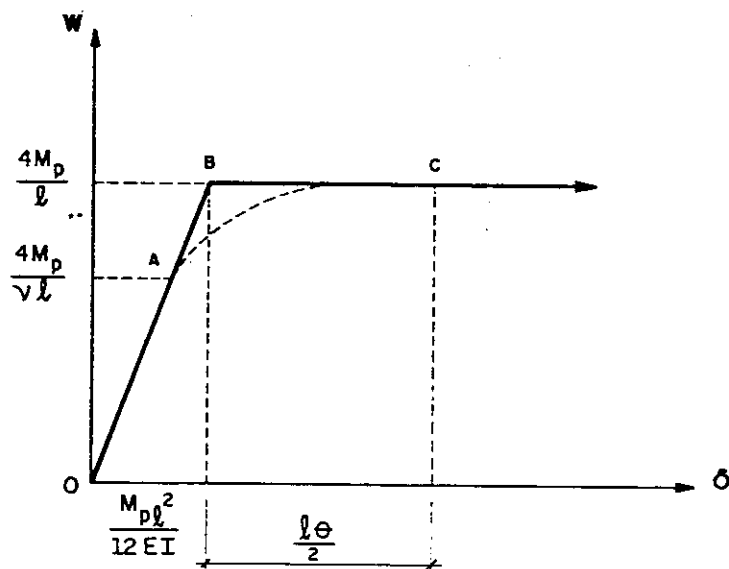


Fig. 2.5 Diagrama carga contra deslocamento para a seção transversal central

A curva tracejada da figura 2.5, começando no ponto A , mostra o que ocorreria se fosse considerado um ν diferente de um, isto é, evidencia o efeito do espalhamento da plastificação ao longo da seção transversal.

O comportamento totalmente elástico cessaria na carga de início de escoamento W_y , correspondente a ser atingido o momento fletor M_y no centro.

Com (2.7), (2.3) e (2.9) na (2.5) tem-se:

$$W_y = \frac{4M_p}{\nu \ell} \quad (2.13)$$

que é o valor da carga para o ponto A.

2.2 Hipóteses básicas

As hipóteses básicas do método das rótulas plásticas são:

a) Diagrama momento fletor-curvatura

Admite-se que o momento fletor M em qualquer seção transversal varie dentro do intervalo abaixo:

$$-M_p \leq M \leq M_p \quad (2.14)$$

À medida que o momento fletor tende para os limites $\pm M_p$, a curvatura k tende a valores infinitos ($\pm \infty$), com a conseqüente formação de uma rótula plástica.

Para uma determinada seção transversal, se o seu momento fletor sofrer uma variação, positiva ou negativa, em seu valor, haverá uma variação correspondente para a sua curvatura, de mesmo sinal. Portanto,

$$\frac{\delta M}{\delta k} \geq 0 \quad (2.15)$$

Para a viga estudada na seção anterior, o diagrama momento fletor-curvatura para a seção transversal central é mostrado na figura 2.6. A curva tracejada mostra o diagrama para ν diferente de um, caracterizando-se o espalhamento da plastificação.

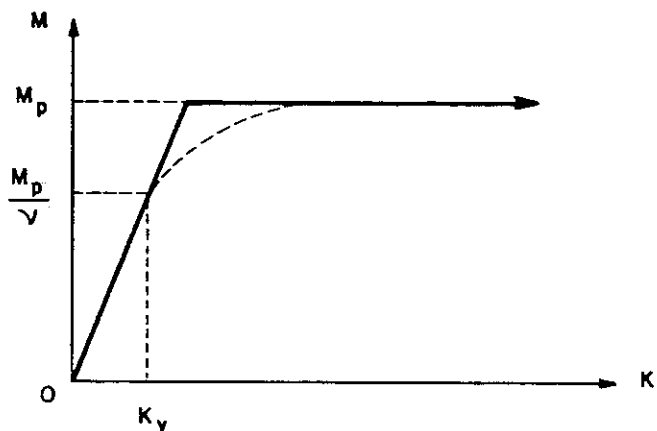


Fig. 2.6 Diagrama momento fletor-curvatura

b) Flexão exclusiva no cálculo dos momentos de plastificação total

Desprezam-se os efeitos dos esforços axiais e cortantes no cálculo dos momentos de plastificação total. Esses esforços reduzem os momentos plásticos para valores abaixo de $Z_p f_y$, mas, em inúmeros tipos de pórticos usuais, essa redução não é significativa.

c) Teoria de primeira ordem

O método das rótulas plásticas assume que os deslocamentos desenvolvidos em uma estrutura, antes do colapso plástico, sejam pequenos a ponto de não alterarem sensivelmente a sua geometria. As relações de equilíbrio podem ser ainda escritas em relação à posição indeformada da estrutura.

2.3 Exemplo simples de colapso plástico

Nesta seção, será feito o estudo detalhado do

comportamento elastoplástico da viga bi-engastada mostrada na figura 2.7, com seção transversal uniforme, rigidez à flexão EI e momento de plastificação total M_p .

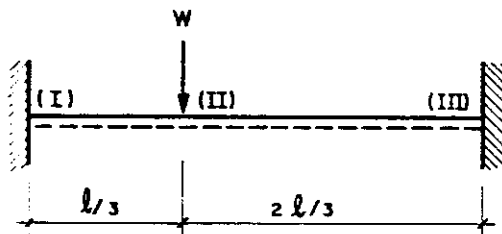


Fig. 2.7 Viga bi-engastada

Esta figura mostra também as três seções transversais críticas e a convenção de sinais para momentos fletores e rotações das rótulas plásticas, que serão considerados positivos quando provocarem tração e alongamentos, respectivamente, nas fibras do lado tracejado da viga.

Será suposto um fator de forma unitário. A carga W será aumentada progressivamente, a partir de zero, até o início do colapso plástico.

Nos cálculos que se seguem, não serão detalhadas as equações para se obterem momentos fletores, rotações e deslocamentos verticais. Trata-se de uma viga simples, onde todos estes valores são facilmente obtidos com técnicas elementares da estática clássica.

Para um acréscimo inicial ΔW_1 de carga, toda a viga comporta-se elasticamente, com os momentos fletores, nas três seções críticas, não ultrapassando M_p ; assim, com o esquema estrutural da figura 2.8.a, admita-se que a carga W seja aumentada até ΔW_1 . Esse aumento será suficiente para se formar a primeira rótula plástica. O diagrama de momentos fletores (DMF) correspondente a esse ΔW_1 é mostrado na figura 2.8.b.

O maior momento fletor, em módulo, ocorre na seção (I) e, portanto, a primeira rótula plástica irá se

formar nessa seção. Igualando-se este momento fletor a $-M_p$, obtém-se ΔW_1 , que vale:

$$\Delta W_1 = \frac{27}{4} \left(\frac{M_p}{\ell} \right)$$

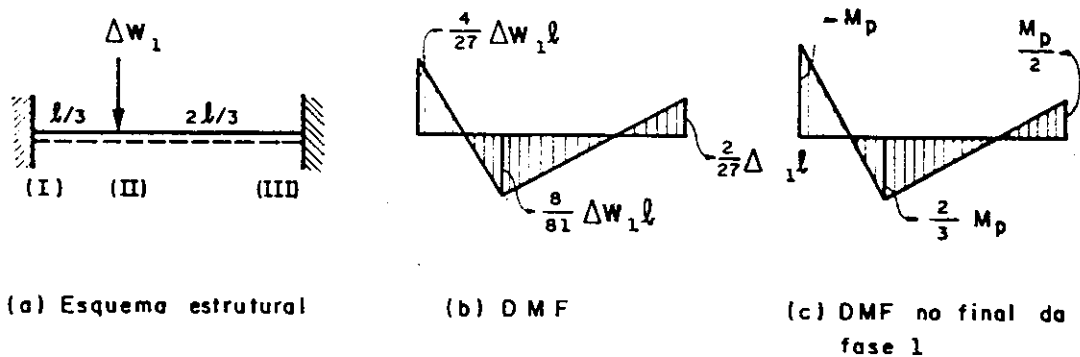


Fig. 2.8 Comportamento elástico inicial para o acréscimo ΔW_1

Conhecido ΔW_1 , o diagrama de momentos fletores para a viga, no final desta primeira fase de carregamento, é mostrado na figura 2.8.c. Como a rótula plástica em (I) acabou de se formar, não há nenhuma rotação plástica na viga.

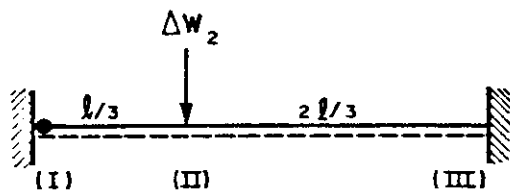
O acréscimo no deslocamento vertical da seção (II) é:

$$\Delta \delta_{II,1} = \frac{2}{81} \left(\frac{M_p \ell^2}{EI} \right)$$

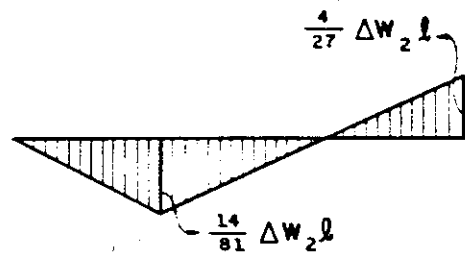
Numa segunda fase, é dado um novo acréscimo, ΔW_2 , na carga, suficiente para se formar a segunda rótula plástica.

Após o final da fase 1 de carregamento, a viga absorve o acréscimo de carga de acordo com o esquema

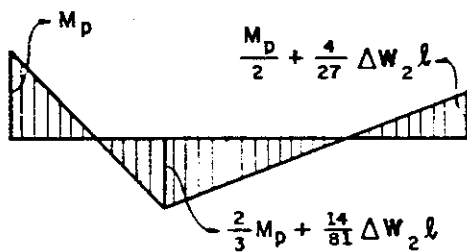
estrutural da figura 2.9.a. O momento fletor em (I) não sofre nenhum acréscimo, permanecendo constante em $-M_p$. Surge rotação na rótula plástica, formada na fase anterior.



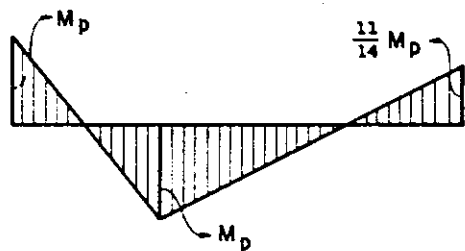
(a) Esquema estrutural para a fase 2



(b) DMF devido a ΔW_2



(c) DMF acumulado até à fase 2



(d) DMF no final da fase 2

Fig. 2.9 Comportamento após à formação da primeira rótula plástica

Procedendo-se analogamente à primeira fase, conforme a figura 2.9.c, a próxima rótula plástica se formará na seção (II), quando o momento fletor correspondente atingir M_p . Os valores dos acréscimos ΔW_2 , deslocamento vertical em (II) e rotação plástica em (I) valem, respectivamente:

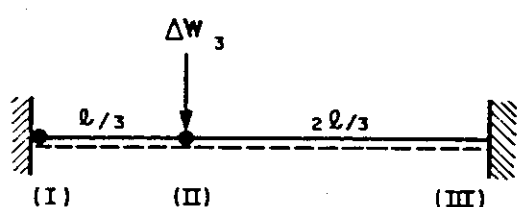
$$\Delta W_2 = \frac{27}{14} \left(\frac{M_p}{l} \right)$$

$$\Delta \delta_{II,2} = \frac{10}{567} \left(\frac{M_p l^2}{EI} \right)$$

$$\Delta\phi_{I,2} = \frac{-1}{14} \left[\frac{M_p l}{EI} \right]$$

Para que a viga atinja o mecanismo de colapso, será dado um novo acréscimo ΔW_3 na carga, ocasionando-se o surgimento da terceira rótula plástica em (III)

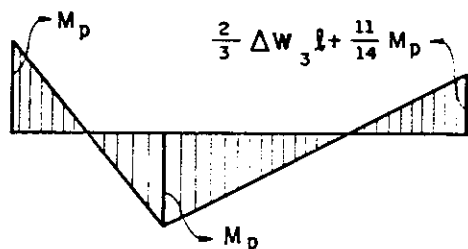
Pela figura 2.10, nesta fase os momentos fletores das seções (I) e (II) permanecem constantes em $-M_p$ e M_p , respectivamente. Vão haver acréscimos nas rotações plásticas dessas seções.



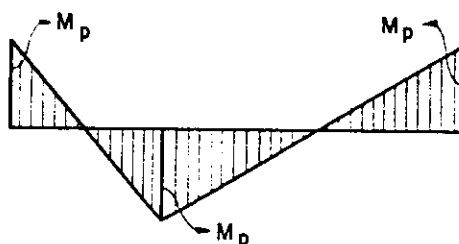
(a) Esquema estrutural para a fase 3



(b) DMF devido a ΔW_3



(c) DMF acumulado até à fase 3



(d) DMF no final da fase 3

Fig. 2.10 Comportamento após à formação da segunda rótula plástica

Para esta fase do carregamento, os acréscimos ΔW_3 , deslocamento vertical em (II), rotações nas rótulas

plásticas em (I) e (II) são, respectivamente:

$$\Delta W_3 = \frac{9}{28} \left(\frac{M_P}{\ell} \right) \qquad \Delta \delta_{II,3} = \frac{2}{63} \left(\frac{M_P \ell^2}{EI} \right)$$
$$\Delta \phi_{I,3} = \frac{-2}{21} \left(\frac{M_P \ell}{EI} \right) \qquad \Delta \phi_{II,3} = \frac{1}{6} \left(\frac{M_P \ell}{EI} \right)$$

Neste ponto, a viga está na iminência do colapso plástico. A carga de colapso W_c correspondente é dada pela soma dos acréscimos ΔW_1 , ΔW_2 e ΔW_3 :

$$W_c = 9 \left(\frac{M_P}{\ell} \right)$$

Analogamente, o deslocamento vertical em (II) e as rotações nas rótulas plásticas até esse instante são:

$$\delta_{II} = \frac{2}{27} \left(\frac{M_P \ell^2}{EI} \right) \qquad \phi_I = \frac{-1}{6} \left(\frac{M_P \ell}{EI} \right)$$
$$\phi_{II} = \frac{1}{6} \left(\frac{M_P \ell}{EI} \right) \qquad \phi_{III} = 0$$

Observe-se que os sinais das variações das rotações coincidem com os sinais das respectivas variações dos momentos fletores nas três seções mais solicitadas.

Após a formação da terceira rótula plástica, tem-se o mecanismo de colapso plástico ilustrado pela figura 2.11.c, onde se admitiu uma rotação de $-\theta$ para a rótula plástica em (III).

Observa-se que, para esse mecanismo, os sinais das rotações nas rótulas plásticas estão de acordo com os respectivos sinais dos momentos fletores nessas rótulas.

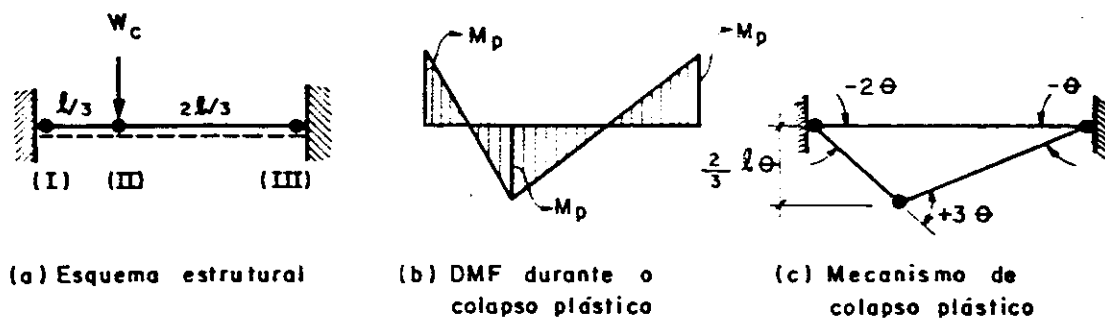


Fig. 2.11 Comportamento durante o colapso plástico

O comportamento de toda a viga pode ser melhor ilustrado através do diagrama carga-deslocamento vertical para a seção (II), conforme a figura 2.12.

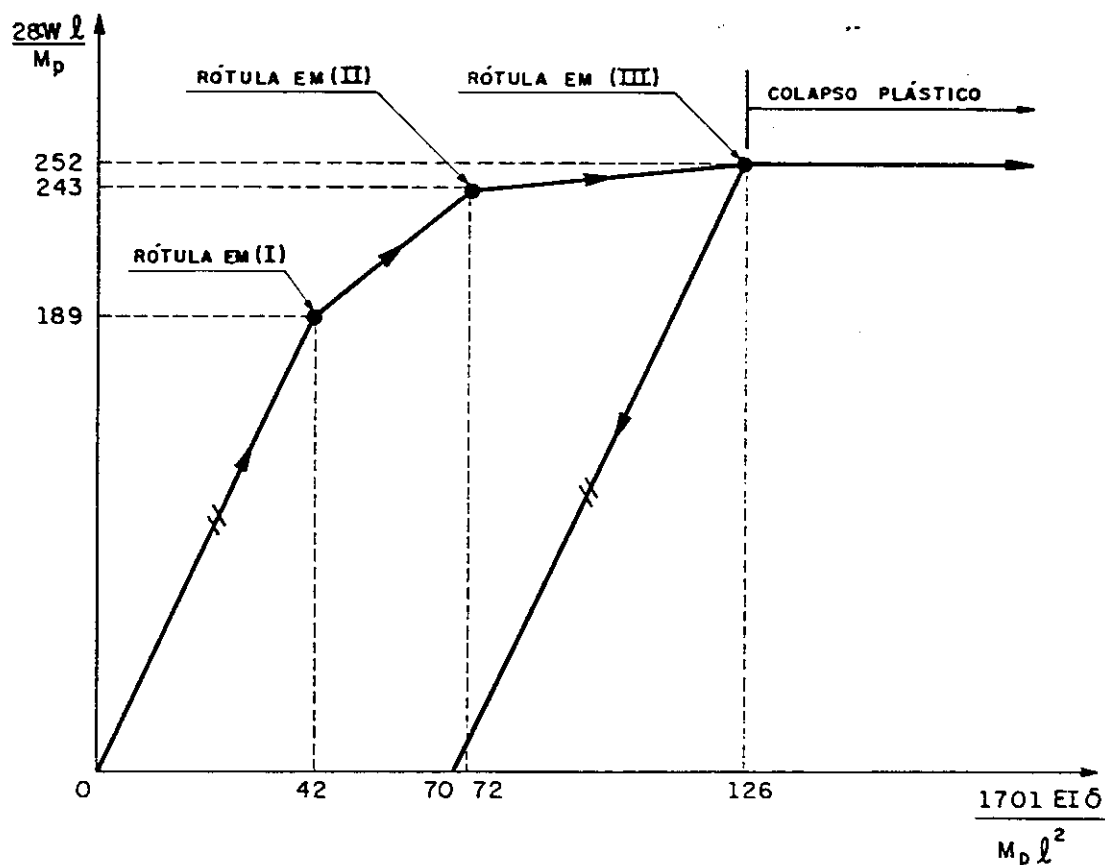


Fig. 2.12 Diagrama carga-deslocamento vertical da seção (II)

Com a exploração da estrutura além do limite elástico, obteve-se um acréscimo de 33% na carga, conseguido, entretanto, com um acréscimo de 200% no deslocamento vertical da seção (II).

Esse diagrama também ilustra o comportamento da viga para uma descarga a partir da iminência do colapso, a descarga é feita aplicando-se uma variação de carga ΔW_4 igual a W_c , mas no sentido indicado pela figura 2.13.a.

Inicialmente a descarga é elástica. Neste exemplo, ela será toda elástica, correspondente à variação de momentos fletores da figura 2.13.b.

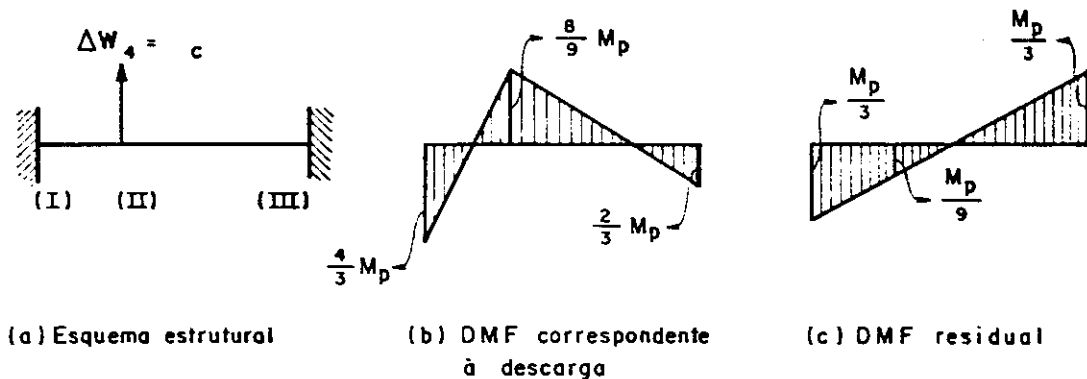


Fig. 2.13 Comportamento na descarga

Somando-se algebricamente os diagramas das figuras 2.10.d e 2.13.b, tem-se a distribuição de momentos fletores residuais da figura 2.13.c.

O deslocamento vertical em (II) na descarga vale :

$$\Delta\delta_{II,4} = \frac{-8}{243} \left(\frac{M_p \ell^2}{EI} \right)$$

O deslocamento vertical residual $\delta_{II,R}$ é a soma algébrica do deslocamento δ_{II} , na iminência do colapso, com $\Delta\delta_{II,4}$ e vale:

$$\delta_{II,R} = \frac{10}{243} \left(\frac{M_P \ell^2}{EI} \right)$$

Após o descarregamento, promovendo-se um novo carregamento, observa-se que a viga absorverá todo este carregamento elasticamente, ou seja, a recarga será feita através da mesma linha do descarregamento do diagrama da figura 2.12. As três rótulas se formarão simultaneamente no ponto de iminência do colapso.

Para quaisquer novos ciclos de descarga e recarga, a viga irá responder como descrito acima. Esse comportamento é conhecido como acomodação estrutural. Ele é devido aos momentos fletores residuais presentes na viga após o descarregamento, possibilitando que os carregamentos seguintes sejam resistidos elasticamente.

No próximo capítulo, será feito um estudo melhor sobre a acomodação estrutural em regime elastoplástico sob vários carregamentos, variáveis e repetidos.

A carga W_c pode ser obtida diretamente sempre que, como no caso, for conhecido o mecanismo de colapso. W_c é obtido com uma equação de trabalho oriunda da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, dispensando o procedimento passo-a-passo; com isso, se perde qualquer informação relativa aos deslocamentos.

Assim, impondo-se um estado de deslocamento típico do descrito na figura 2.11.c, posterior ao colapso, a um estado de forças em equilíbrio com a carga W_c no colapso e momentos de plastificação com sinais coerentes com os das rotações, tem-se:

$$W_c \frac{2}{3} \ell \theta = \delta M_P \theta$$

ou,

$$W_c = 9 \left(\frac{M_P}{\ell} \right) = \frac{252}{28} \left(\frac{M_P}{\ell} \right)$$

CAPÍTULO 3

OS DIVERSOS PROBLEMAS EM ESTUDO

Pretende-se neste capítulo apresentar os diversos problemas abordados por este trabalho, envolvendo a análise e a síntese de estruturas em regime elastoplástico.

3.1 O problema de análise sob carregamento único

O carregamento único presente em uma estrutura será formado por cargas cujos valores característicos serão multiplicados por um fator comum λ , positivo, denominado fator de carga. A cada acréscimo dado em λ , todas as cargas sofrerão aumentos proporcionais.

O fator λ é aumentado até atingir um determinado valor sob o qual a estrutura fica na iminência do colapso plástico. Esse valor é conhecido como fator de carga de colapso plástico, indicado por λ_c .

O problema de análise sob esse tipo de carregamento resume-se na determinação do fator de carga de colapso plástico para uma estrutura em que os momentos de plastificação total de suas barras são conhecidos. Exemplos muito simples desse tipo de problema foram dados no capítulo 2, ao se analisar as vigas das figuras 2.2 e 2.7.

Para que ocorra o colapso plástico de uma estrutura, são necessárias três condições:

a) Condição de mecanismo: - O número de rótulas plásticas formadas seja suficiente para que toda a estrutura, ou parte dela, se torne um mecanismo.

b) Condição de equilíbrio: - A distribuição de momentos fletores ao longo da estrutura deve estar em equilíbrio com as cargas externas. Para isso, os momentos fletores devem satisfazer as relações independentes de equilíbrio. Quando isto ocorrer, diz-se que a distribuição de momentos fletores é estaticamente admissível.

c) Condição de escoamento: - A distribuição de momentos fletores deve ser tal que em nenhuma seção transversal da estrutura o módulo do momento fletor seja maior que o correspondente momento de plastificação total. Quando esta condição é obedecida, a distribuição de momentos fletores é dita segura.

A determinação do mecanismo de colapso real e, conseqüentemente, do seu fator de carga λ_c , torna-se mais fácil com os teoremas fundamentais da análise plástica. A seguir, serão apresentados esses teoremas cujas demonstrações não serão dadas aqui; elas poderão ser encontradas em [10] ou em [4].

Os enunciados dos teoremas fundamentais são:

a) Teorema estático:

"Se, para uma estrutura sujeita a um carregamento definido por um fator de carga λ positivo, for possível determinar uma distribuição qualquer de momentos fletores que satisfaça as condições de equilíbrio e de escoamento, então λ é menor ou igual ao fator de carga de colapso plástico λ_c ".

b) Teorema cinemático:

"Para uma estrutura sujeita a um carregamento único, o valor de λ correspondente a qualquer mecanismo suposto como sendo o de colapso plástico, deve ser maior ou igual ao fator de carga de colapso plástico λ_c ".

c) Teorema da unicidade:

"Se, para uma estrutura sujeita a um carregamento único, for possível encontrar para um fator de carga λ positivo uma distribuição de momentos fletores que satisfaça as três condições de ocorrência de colapso plástico, então λ é igual ao fator de carga de colapso plástico λ_c ".

Estes teoremas podem ser resumidos no esquema seguinte:

$$\lambda = \lambda_c \left\{ \begin{array}{l} \text{Condição de equilíbrio} \\ \text{Condição de escoamento} \\ \text{Condição de mecanismo} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda \leq \lambda_c \\ \lambda \geq \lambda_c \end{array}$$

O entendimento destes teoremas torna-se mais fácil através de um exemplo. Considere-se um pórtico plano retangular cujas dimensões, carregamento, seções críticas e convenção de sinais para momentos fletores e rotações estão indicados na figura 3.1.a. Todas as barras do pórtico têm um momento de plastificação total igual a 20 kNm.

As duas relações independentes de equilíbrio podem ser obtidas através do Princípio dos Trabalhos Virtuais, usando-se sistemas de deslocamentos virtuais semelhantes aos dos mecanismos independentes das figuras 3.1.b e 3.1.c. Para estes dois mecanismos, tem-se:

$$-M_1 + 2M_2 - M_3 = 40\lambda \quad (3.1)$$

$$M_1 - M_3 = 60\lambda \quad (3.2)$$

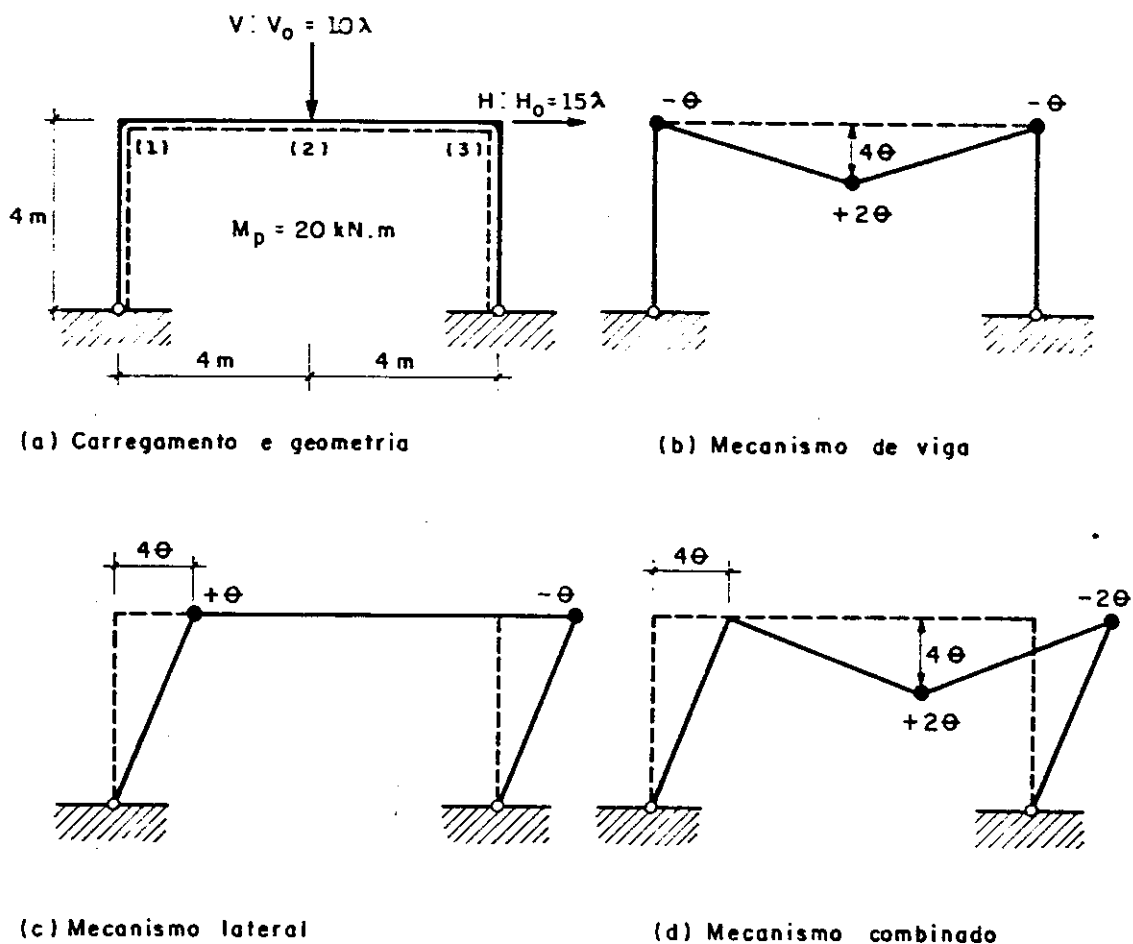


Fig. 3.1 Pórtico plano retangular

Inicialmente, será feita uma análise cinemática do mecanismo de viga da figura 3.1.b, considerando-o como se fosse o mecanismo de colapso real do pórtico. Igualando-se o trabalho externo realizado pela carga V_0 com o trabalho interno absorvido nas três seções críticas, tem-se:

$$V_0 = 20 \text{ KN} \tag{3.3}$$

Substituindo-se em (3.3) V_0 por 10λ , obtém-se o valor do fator de carga para este mecanismo; que é:

$$\lambda_{(b)} = 2$$

Pelo teorema cinemático,

$$\lambda_c \leq 2$$

O próximo passo é fazer uma análise estática do mecanismo de viga da figura 3.1.b, cujos momentos fletores nas três seções críticas são:

$$M_1 = -20 \text{ KNm} \quad M_2 = +20 \text{ KNm} \quad M_3 = -20 \text{ KNm}$$

Substituindo-se esses valores e o valor de λ dado por $\lambda_{(b)} = 2$ nas duas relações independentes de equilíbrio acima, observa-se que a relação (3.1) é satisfeita identicamente, enquanto que (3.2) resulta numa desigualdade. Portanto, esta distribuição de momentos fletores é estaticamente inadmissível para $\lambda = 2$; assim sendo, o mecanismo de viga não pode ser o mecanismo de colapso real.

Supondo-se que o mecanismo de colapso real seja o mecanismo combinado da figura 3.1.d, procedendo-se analogamente ao caso do mecanismo de viga, obtém-se sua equação de trabalho e seu fator de carga que valem, respectivamente:

$$V_o + H_o = 20 \quad (3.4)$$

$$\lambda_{(d)} = 0,80$$

Pelo teorema cinemático,

$$\lambda_c \leq 0,80$$

Os momentos fletores nas seções (2) e (3) são, respectivamente:

$$M_2 = +20 \text{ KNm} \quad M_3 = -20 \text{ KNm}$$

Completando-se a análise estática do mecanismo combinado, o momento fletor na seção (1) pode ser obtido tanto pela equação (3.1) quanto por (3.2) e vale:

$$M_1 = +28 \text{ KNm}$$

Esta nova distribuição de momentos fletores é estaticamente admissível para $\lambda = 0,80$; porém, não é segura, pois o momento fletor em (1) é superior ao momento de plastificação total do pórtico. Portanto, este também não é o mecanismo de colapso real.

Com a finalidade de se estabelecer um intervalo para λ_c , os três momentos fletores e o fator de carga $\lambda_{(d)}$ podem ser multiplicados por 5/7, resultando:

$$M_1 = +20 \text{ KNm}$$

$$M_2 = 14,286 \text{ KNm}$$

$$M_3 = -14,286 \text{ KNm}$$

$$\lambda_{(d)} = 0,571$$

Essa distribuição de momentos fletores satisfaz as condições de equilíbrio e de escoamento para $\lambda_{(d)} = 0,571$; entretanto, a condição de mecanismo deixa de existir. Pelo teorema estático,

$$\lambda_c \geq 0,571$$

Combinando-se este valor com o limite superior dado pelo teorema cinemático, pode-se estabelecer o seguinte intervalo:

$$0,571 \leq \lambda_c \leq 0,80$$

Finalmente, o mecanismo lateral da figura 3.1.c será analisado. Sua equação de trabalho é:

$$H_0 = 10 \text{ KN} \tag{3.5}$$

Conforme foi feito para os dois mecanismos anteriores, o valor do fator de carga λ e dos momentos fletores para a análise estática são:

$$\lambda_{(c)} = 0,667$$

$$M_1 = +20 \text{ KNm}$$

$$M_2 = +13,333 \text{ KNm}$$

$$M_3 = -20 \text{ KNm}$$

Para o valor de $\lambda = \lambda_{(c)} = 0,667$, as condições dos teoremas estático e cinemático são verificadas simultaneamente. Portanto, pelo teorema da unicidade,

$$\lambda_c = 0,667$$

e o mecanismo de colapso real é o mecanismo lateral da figura 3.1.c.

Este mesmo problema pode ser resolvido geometricamente. As equações (3.3), (3.4) e (3.5) podem ser lançadas em um diagrama de V_o contra H_o , como mostra a figura 3.2.

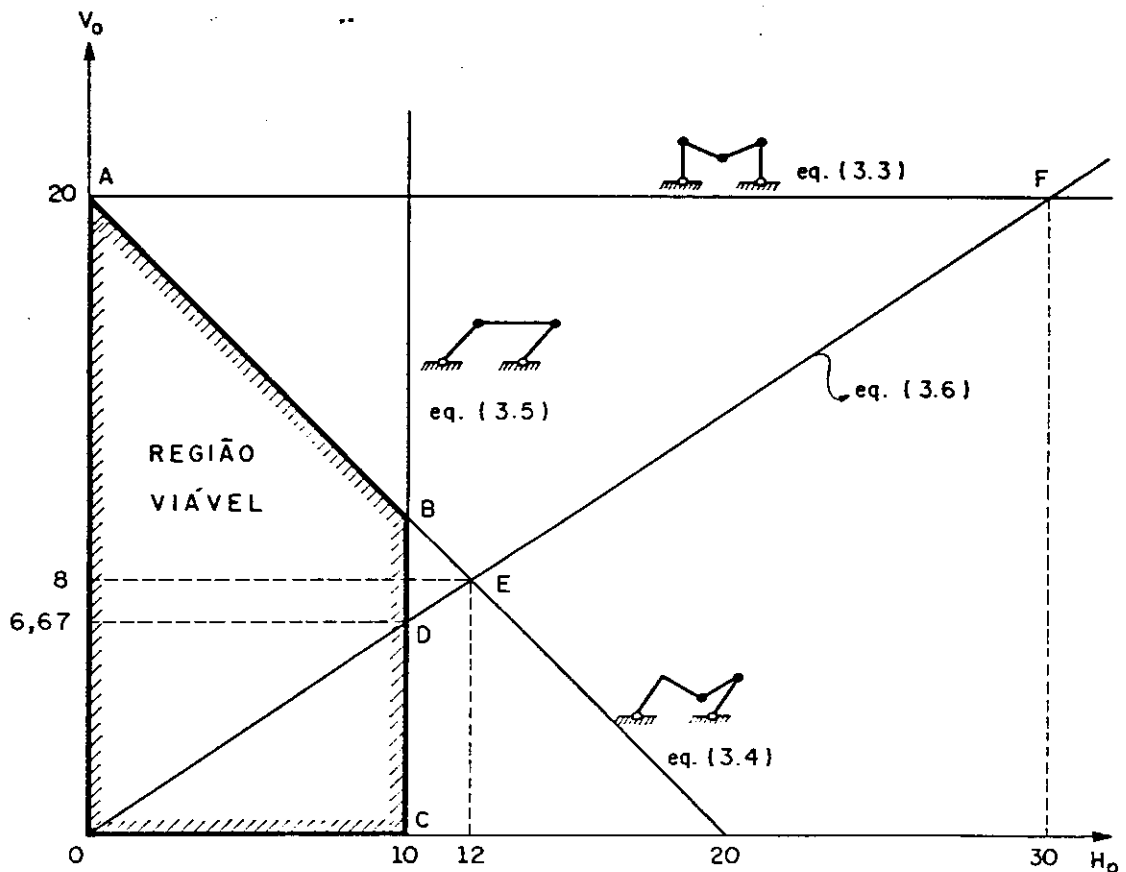


Fig. 3.2 Diagrama de V_o contra H_o em KN

A região destacada no diagrama, chamada de região viável ou admissível, indica combinações das cargas externas V_o e H_o que são seguras do ponto de vista do colapso plástico. Um ponto situado dentro desta região, representa valores de cargas para as quais a estrutura não atinge o colapso plástico. Os pontos situados no contorno ABC, denominado de superfície de escoamento, representam combinações de cargas que levam a estrutura ao estado de iminência de colapso plástico pelo mecanismo da figura 3.1.d, se o ponto estiver no segmento de reta AB, ou pelo mecanismo da figura 3.1.c, se o ponto estiver no segmento de reta BC; as três condições para que se tenha o colapso plástico só serão satisfeitas para pontos situados no contorno ABC da região viável. Um ponto fora dessa região, indica uma combinação de cargas que a estrutura não suporta.

Para o problema em análise, os valores das cargas V_o e H_o valem, respectivamente, 10λ e 15λ . A relação entre elas é:

$$V_o = \frac{2}{3} H_o \quad (3.6)$$

o que acaba por definir uma reta que passa pela origem dos eixos do diagrama da figura 3.2.

Para a relação (3.6), a região viável limita-se ao segmento de reta OD. O ponto de iminência de colapso plástico corresponde ao ponto D e o mecanismo de colapso plástico é o lateral. O valor do fator de carga de colapso plástico referente a esse ponto pode ser obtido igualando-se qualquer uma de suas coordenadas à respectiva carga proporcional, como por exemplo:

$$H_o = 15\lambda_c = 10$$

o que resulta,

$$\lambda_c = 0,667$$

que é o mesmo resultado obtido através dos teoremas fundamentais.

Os valores do fator de carga para os pontos E e F podem ser obtidos de uma maneira idêntica àquela utilizada para o ponto D; eles valem, respectivamente:

$$\lambda_{(E)} = 0,80$$

$$\lambda_{(F)} = 2$$

Observe-se que estes valores foram obtidos ao analisar-se os mecanismos combinado e de viga, respectivamente. Pela figura 3.2, nota-se que o mecanismo de colapso plástico não pode ser nenhum destes dois mecanismos pois as interseções de suas equações de trabalho com a equação (3.6) se dão fora da região viável. Para os pontos E e F, somente a condição de mecanismo é verificada.

Um problema inverso do apresentado acima é o de se determinar os momentos de plastificação total de uma estrutura, dados em função de um único parâmetro positivo T, para que a mesma suporte um carregamento conhecido. Para ilustrá-lo, considere-se o pórtico plano da figura 3.3.a onde os momentos de plastificação total M_A e M_B estão expressos em função do parâmetro positivo T. O objetivo é determinar o menor valor de T para que o pórtico suporte as cargas dadas, obedecendo-se as três condições para que ocorra o colapso plástico.

A solução deste problema pode ser obtida através dos teoremas fundamentais, adequando-os para o caso em estudo. Com a finalidade de se tirar algumas conclusões nos capítulos seguintes, este problema será também resolvido geometricamente de uma forma análoga ao pórtico da figura 3.1.a.

Inicialmente, admita-se que possa haver qualquer relação entre os momentos de plastificação total M_A e M_B . Com isto, os possíveis mecanismos de colapso plástico são aqueles mostrados nas figuras de 3.3.b a 3.3.g, com suas respectivas equações de trabalho.

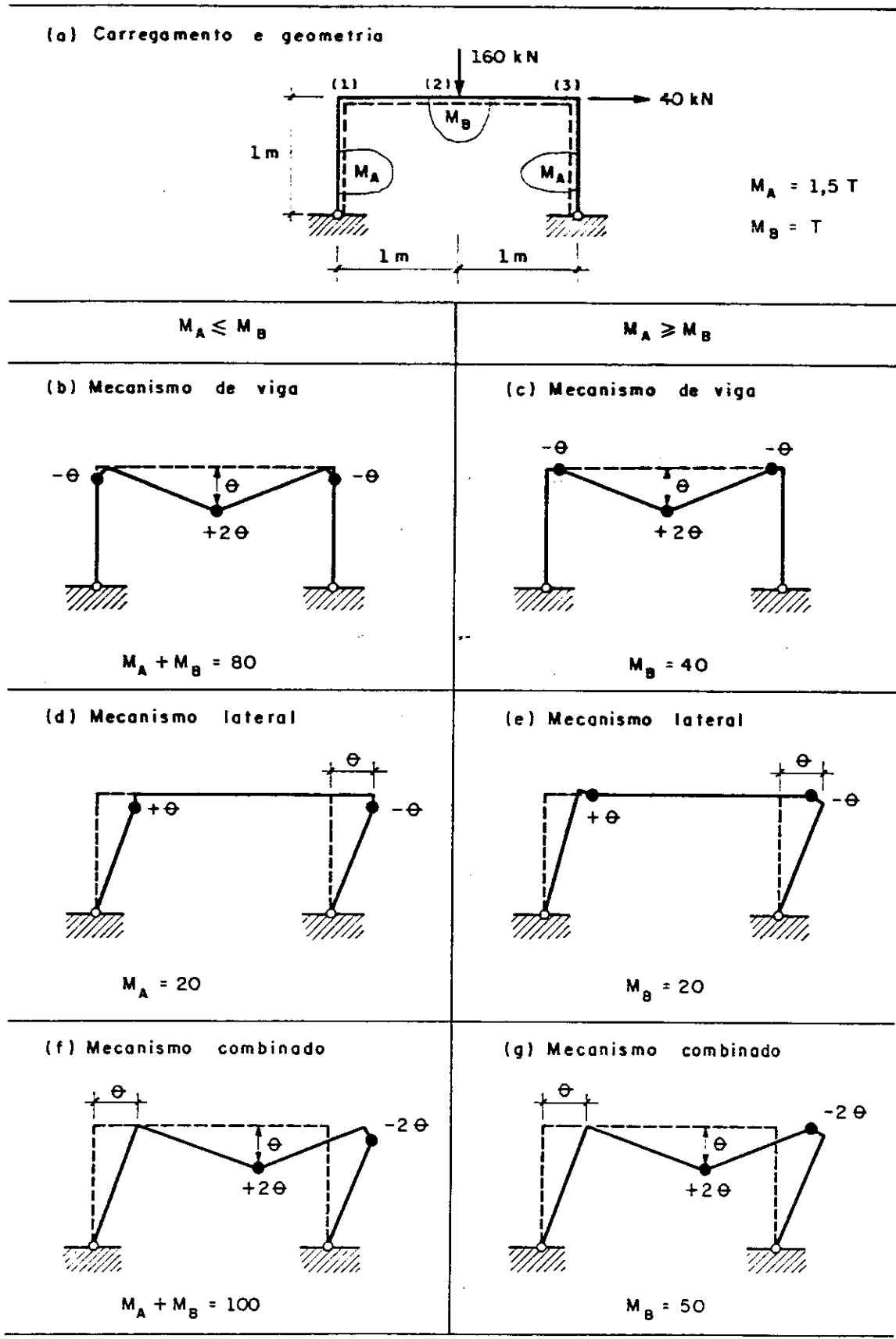


Fig. 3.3 Pórtico plano

A figura 3.4 mostra estas equações de trabalho lançadas em um diagrama de M_A contra M_B . A região destacada corresponde à região viável para projetos com uma relação qualquer entre M_A e M_B . Esta região, que tem uma forma inversa da região da figura 3.2, é convexa em relação à origem dos eixos e qualquer ponto dentro dela representa um projeto seguro para o carregamento dado. Um ponto no contorno da região viável representa um projeto de estrutura na iminência do colapso plástico; o modo de colapso vai depender da parte do contorno onde o ponto estiver localizado. Um ponto fora da região viável representa valores de M_A e M_B para os quais a estrutura não suporta o carregamento da figura 3.3.a. Portanto, os pontos do contorno deverão ser investigados a fim de se obter a solução do problema.

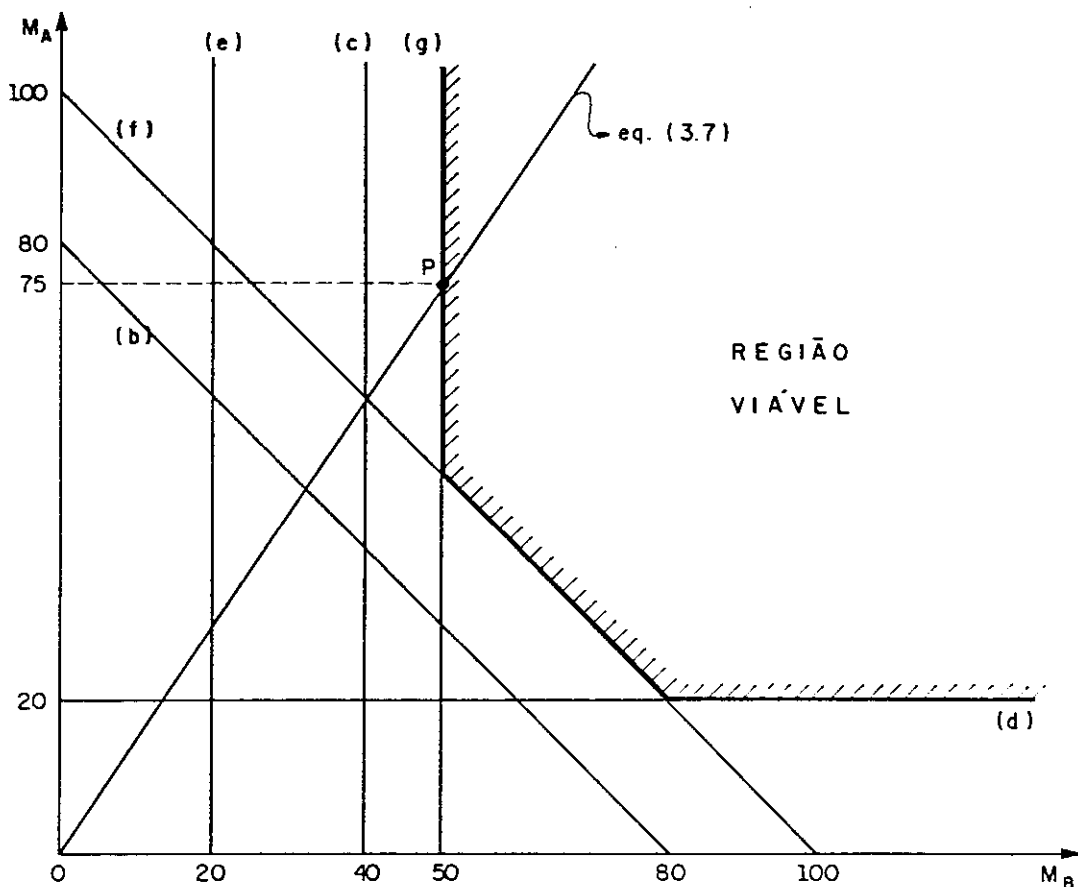


Fig. 3.4 Diagrama de M_A contra M_B em KNm

Seja agora definida, conforme a figura 3.3.a, a relação entre os momentos de plastificação total das barras como:

$$M_A = 1,5M_B \quad (3.7)$$

que representa uma reta que passa pela origem dos eixos da figura 3.4.

Lançando-se a equação (3.7) no diagrama da figura 3.4, obtém-se a região viável para a relação dada entre os momentos de plastificação total das barras; esta região é representada pelo segmento de reta infinito com origem em P.

O ponto P representa a solução do problema com o mecanismo de colapso real sendo o mecanismo combinado da figura 3.3.g. Igualando-se qualquer uma das coordenadas de P com o correspondente valor proporcional do momento de plastificação total, tem-se o parâmetro T procurado, cujo valor é:

$$T = 50$$

Observe-se que as três condições para que ocorra o colapso plástico são verificadas para o ponto P. A condição de mecanismo é evidente pela figura 3.4, pois este ponto pertence ao contorno da região viável, formado por possíveis mecanismos de colapso plástico. As outras duas condições, equilíbrio e escoamento, podem ser verificadas através de uma análise estática do mecanismo combinado da figura 3.3.g.

3.2 O problema de síntese sob carregamento único

Entre os vários itens que influenciam no custo final de uma construção, pode-se citar o consumo de material em sua estrutura. O objetivo desta seção é fazer um estudo em regime elastoplástico do problema de

minimização do peso total de material de uma estrutura de geometria conhecida, sob a ação de cargas especificadas.

Além das hipóteses já estabelecidas, são admitidas as seguintes hipóteses adicionais:

a) A estrutura é composta por barras prismáticas com seções transversais uniformes.

b) Pode-se estabelecer uma correlação, definida por uma função contínua e crescente, entre o peso por unidade de comprimento g e o momento de plastificação total M_p para as barras da estrutura, tendo a forma:

$$g = f(M_p) \quad (3.8)$$

onde, em geral:

$$g = c(M_p)^\alpha \quad (3.9)$$

com c e α constantes.

c) A função (3.9) pode ser representada por uma função linear do tipo:

$$g = a + b(M_p) \quad (3.10)$$

onde a e b são constantes, com b positivo já que g é crescente.

Os erros cometidos devido à linearização da função (3.9) são pequenos como enfatizado por Neal em [10]. As constantes a e b da equação (3.10) podem ser tabeladas para os diversos perfis, conforme a tabela 5.2 apresentada por Moy em [9].

Estabelecidas essas hipóteses adicionais, o peso total X do material de uma estrutura pode ser dado por:

$$X = \sum_{i=1}^n g_i l_i \quad (3.11)$$

onde n é o número de barras e ℓ_i é o comprimento da barra genérica i .

Substituindo-se (3.10) em (3.11), tem-se a equação geral do peso total X :

$$X = a \sum_{i=1}^n \ell_i + b \sum_{i=1}^n (M_p)_i \ell_i \quad (3.12)$$

Para uma estrutura de geometria conhecida, o primeiro somatório é sempre constante. No processo de minimização de X , esse termo pode ser esquecido. Da mesma forma, a constante b é um fator escalar positivo que não afeta o processo de minimização. Essa constante pode ser também esquecida. Feitas essas considerações, minimizar X significa minimizar a função

$$x = \sum_{i=1}^n (M_p)_i \ell_i \quad (3.13)$$

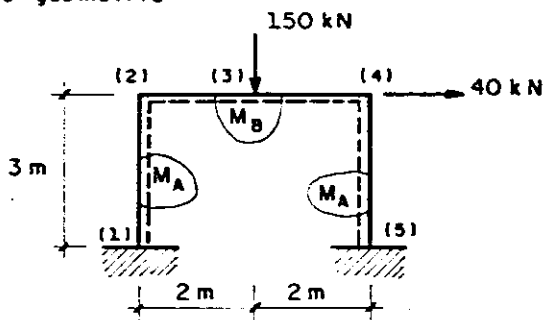
denominada doravante como função peso.

O problema de síntese resume-se em minimizar a função peso dada por (3.13), para uma estrutura sob um carregamento único conhecido, sujeita às condições impostas pela teoria plástica para que ocorra o colapso plástico, ou seja, o projeto de peso mínimo deve satisfazer as condições de mecanismo, equilíbrio e escoamento.

Esse tipo de problema tem uma semelhança muito grande com aquele descrito no final da seção 3.1. Aqui, o que se procura minimizar é uma função que envolve os momentos de plastificação total das barras, enquanto que lá, procurou-se minimizar um parâmetro positivo T comum a todos os M_p .

Para ilustrar o problema, considere-se o pórtico plano retangular da figura 3.5.a. Deseja-se determinar os momentos de plastificação total M_A e M_B para o carregamento dado, visando-se o mínimo consumo de material. Esse problema será resolvido geometricamente.

(a) Carregamento e geometria

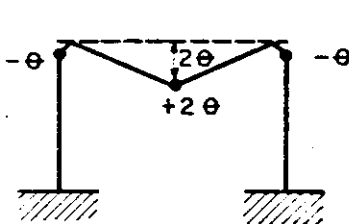
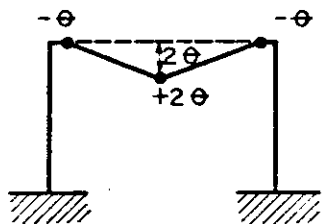


$M_A \geq M_B$

$M_A \leq M_B$

(b) Mecanismo de viga

(c) Mecanismo de viga

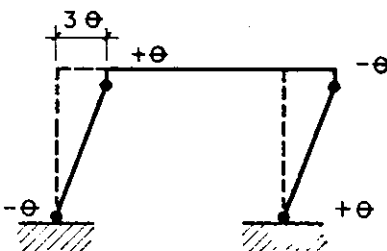
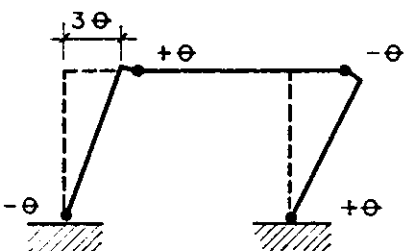


$M_B = 75$

$M_A + M_B = 150$

(d) Mecanismo lateral

(e) Mecanismo lateral

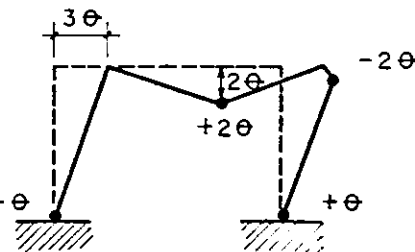
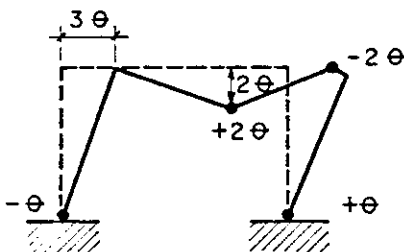


$M_A + M_B = 60$

$M_A = 30$

(f) Mecanismo combinado

(g) Mecanismo combinado



$M_A + 2M_B = 210$

$2M_A + M_B = 210$

Fig. 3.5 Pórtico plano retangular

Como inicialmente não se sabe se $M_A \leq M_B$ ou $M_A \geq M_B$, as figuras de 3.5.b a 3.5.g mostram os possíveis mecanismos de colapso e suas respectivas equações de trabalho. Essas equações podem ser lançadas em um diagrama de M_A contra M_B , como mostra a figura 3.6. Elas definem uma região viável ilimitada e convexa em relação à origem, semelhante à da figura 3.4.

Os projetos viáveis que estão na iminência do colapso plástico sob o carregamento aplicado localizam-se nas linhas retas que formam o contorno da região viável. Esses projetos devem ser investigados para que se possa chegar ao projeto ótimo, ou seja, o de menor peso possível.

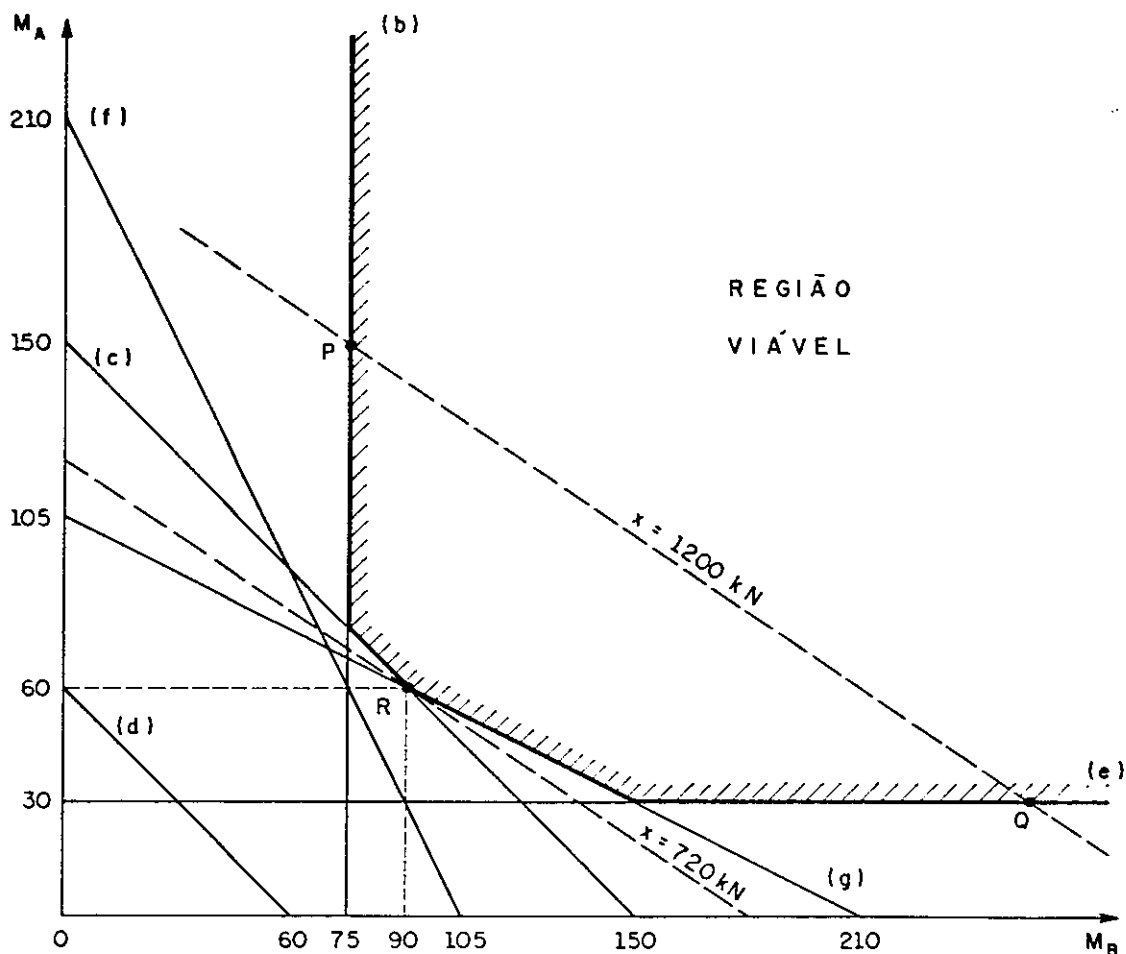


Fig 3.6 Diagrama de M_A contra M_B em KNm

A função peso, de acordo com (3.13), é:

$$x = 6M_A + 4M_B \quad (3.14)$$

A equação (3.14) representa uma equação de uma família de linhas retas paralelas. Admitindo-se um peso $x = 1200$ KN, todos os correspondentes projetos viáveis estão localizados no segmento de reta PQ do diagrama da figura 3.6.

Qualquer projeto em que $x \neq 1200$ KN será representado por uma reta paralela a PQ. Portanto, a reta, chamada de linha peso-tangente, correspondente ao projeto ótimo que minimiza a função peso e satisfaz as três condições de colapso plástico, deve tangenciar o contorno da região viável. No caso em estudo, a figura 3.6 mostra que essa reta tangencia a região viável no ponto R, denominado de ponto de peso mínimo. As coordenadas de R são os momentos de plastificação total procurados. O valor desses momentos e da função peso, equação (3.14), são:

$$M_A = 60 \text{ KNm} \quad M_B = 90 \text{ KNm} \quad x = 720 \text{ KN}$$

O ponto R é a interseção das linhas correspondentes às equações de trabalho dos mecanismos de colapso das figuras 3.5.c e 3.5.g. Isso significa que, para o ponto de peso mínimo, esses dois mecanismos ocorrem simultaneamente. Portanto, quando $M_A = 60$ KNm e $M_B = 90$ KNm, um mecanismo de colapso plástico com dois graus de liberdade pode ser obtido, como mostra a figura 3.7. Esse mecanismo tem a soma dos graus de liberdade dos mecanismos de colapso plástico das figuras 3.5.c e 3.5.g; como não precisa haver uma relação entre as rotações plásticas destes dois mecanismos, substituiu-se suas rotações θ por ϕ e ψ , respectivamente.

Observe-se que as três condições de colapso plástico são satisfeitas pelo mecanismo da figura 3.7. As condições de mecanismo e escoamento são evidentes. A condição de equilíbrio é facilmente verificada ao se fazer

a análise estática desse mecanismo.

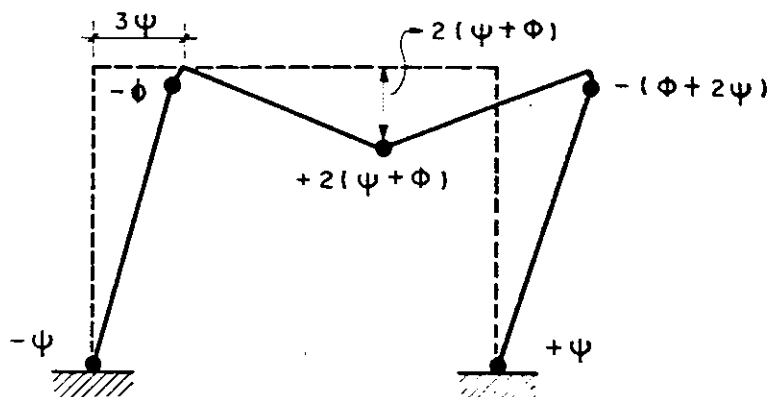


Fig. 3.7 Mecanismo de colapso plástico com dois graus de liberdade

3.3 O problema de análise sob carregamento variável

Os métodos de análise vistos até aqui se restringem a carregamentos únicos onde os valores das cargas são fixos e estão multiplicados por um único parâmetro positivo, o fator de carga λ . Na prática, as estruturas frequentemente estão sujeitas a cargas que podem variar dentro de certos limites, independentemente umas das outras, em ciclos de carregamentos, por exemplo, as sobrecargas e as forças devidas aos efeitos do vento. Tais carregamentos serão chamados de carregamentos variáveis.

Nesta seção, será feita a análise de estruturas sob modelos de carregamentos cujas várias cargas podem atuar aleatória e independentemente dentro de seus limites; trabalha-se com intervalos de valores para as cargas em vez de valores fixos.

Será admitido um carregamento variável proporcional onde as cargas de uma estrutura estão multiplicadas por um fator de carga λ . Portanto, a carga aplicada em um determinado ponto i da estrutura, numa certa

direção, será λF_i , podendo variar independentemente das outras cargas no intervalo $\lambda F_i^{\min} \leq \lambda F_i \leq \lambda F_i^{\max}$, onde os valores característicos F_i^{\min} e F_i^{\max} são conhecidos.

Quando uma estrutura está sob carregamento variável, ela pode atingir o estado de ruína por colapso simples, por plastificação alternada ou por colapso incremental.

A análise do efeito da plastificação alternada é bem simples. Considere-se que sob certa combinação das cargas de um carregamento variável proporcional haverá escoamento plástico em uma determinada seção transversal da estrutura num certo sentido, podendo até haver a formação de uma rótula plástica. Em um outro instante, sob uma nova combinação das cargas, admita-se que esta mesma seção transversal escoará, mas com o momento fletor agindo no sentido oposto. Esta inversão de plastificação em uma ou mais seções transversais pode não ser muito prejudicial se o número de ciclos for razoavelmente pequeno; caso contrário, ela pode levar a estrutura à ruptura por fadiga de baixa resistência, [10], também chamada por Domaszewski, em [1], de fadiga de baixo ciclo. Esse comportamento é conhecido como plastificação alternada. Ele ocorrerá quando o fator de carga λ for maior que um valor λ_a , denominado de fator de carga de plastificação alternada.

Quando uma estrutura está sujeita a um carregamento variável, em diversas combinações de cargas podem haver a formação de algumas rótulas plásticas em seções transversais distintas, de forma que o número de rótulas plásticas não seja suficiente para levar a estrutura ao colapso plástico. Em cada seção onde se forma uma rótula plástica, vai haver rotações plásticas que irão sendo acumuladas, sempre no mesmo sentido, todas as vezes que o ciclo de carregamento for repetido; conseqüentemente, vão haver também acúmulos de deslocamentos o que ocasionará, com o aumento do número de ciclos, um estado de colapso semelhante ao descrito para o caso da análise sob carregamento único, conhecido como de

colapso incremental. Haverá o colapso incremental quando o fator de carga λ for maior que o valor λ_I , denominado de fator de carga de colapso incremental.

Embora não ocorra colapso plástico sob nenhuma combinação de cargas, pois o seu número de rótulas plásticas é menor do que o necessário para se formar um mecanismo de colapso completo, poder-se-ia supor que se todas as rótulas plásticas, formadas em cada combinação de cargas, ocorressem simultaneamente, formar-se-ia um mecanismo, chamado de mecanismo de colapso incremental.

O objetivo da análise sob carregamento variável é buscar um estado em que a estrutura sofrerá plastificação apenas nos primeiros ciclos de carregamento; os acréscimos nas rotações das rótulas plásticas devem tornar-se progressivamente menores até que se atinja um ponto em que se admite não haver mais nenhuma mudança nas rotações plásticas e, durante os carregamentos seguintes, a estrutura absorverá elasticamente qualquer combinação de cargas. Atingido este ponto, diz-se que a estrutura acomodou-se e o fator de carga λ correspondente é chamado de fator de carga de acomodação, indicado por λ_s . Acima desse fator, a estrutura não se acomodará, havendo escoamento plástico contínuo, por plastificação alternada ou por colapso incremental. Portanto,

$$\lambda_s = \begin{cases} \lambda_a \Rightarrow \text{Estrutura na iminência da possibilidade} \\ \text{de plastificação alternada} \\ \lambda_I \Rightarrow \text{Estrutura na iminência da possibilidade} \\ \text{de colapso incremental} \end{cases}$$

As rotações plásticas que ocorrem nos ciclos de carregamentos iniciais introduzem na estrutura momentos fletores residuais. São esses momentos fletores que permitem à estrutura resistir elasticamente às combinações de cargas nos ciclos seguintes. Um exemplo bem simples de acomodação foi dado no final do capítulo 2 para a viga

bi-engastada da figura 2.7. Neal em [10] apresenta exemplos de plastificação alternada, colapso incremental e acomodação, calculados passo-a-passo.

A análise da acomodação está relacionada com a solução elástica convencional e com os momentos fletores residuais. A solução elástica convencional trata do cálculo elástico dos momentos fletores nas seções transversais críticas, para as diversas combinações de cargas. Lembrando que as cargas podem variar dentro de certos limites conhecidos, torna-se necessário determinar para cada seção transversal crítica os valores extremos destes momentos fletores; isso corresponde à determinação da envoltória elástica dos momentos fletores. Os momentos fletores residuais devem satisfazer às relações independentes de equilíbrio com carregamento externo nulo.

Assim como ocorreu na análise sob carregamento único, a análise sob carregamento variável é realizada com a utilização de alguns teoremas. Antes de enunciá-los, considere-se as seguintes notações, para uma seção transversal i qualquer de uma estrutura:

M_i : - Momento fletor atuante na seção i para uma combinação de cargas.

μ_i : - Momento fletor na seção i para a mesma combinação de cargas aplicada elasticamente.

μ_i^{\min} , μ_i^{\max} : - valores mínimo e máximo, respectivamente, para o momento fletor elástico μ_i , considerando-se todas as combinações de cargas possíveis; lembrando-se que o carregamento é dado em função de um fator de carga positivo λ , estes valores extremos podem ser melhor indicados por $\lambda\mu_i^{\min}$ e $\lambda\mu_i^{\max}$.

$m_i = M_i - \mu_i$: - Momento fletor residual na seção i .

Os teoremas da acomodação, assim como os teoremas fundamentais da seção 3.1, não serão demonstrados neste trabalho; as provas dos mesmos podem ser encontradas em [10]. Esses teoremas são:

a) Teorema estático da acomodação:

"Se existir uma distribuição qualquer de momento fletor residual m ao longo de uma estrutura que seja estaticamente admissível com as cargas externas nulas e que satisfaça, para qualquer seção transversal i , as condições

$$m_i + \lambda \mu_i^{\max} \leq +(M_p)_i \quad (3.15)$$

$$m_i + \lambda \mu_i^{\min} \geq -(M_p)_i \quad (3.16)$$

$$\lambda (\mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}) \leq 2(M_y)_i \quad (3.17)$$

então, o valor de λ será menor ou igual ao fator de carga de acomodação λ_s ".

As condições (3.15), (3.16) e (3.17) são conhecidas como as condições estáticas da acomodação. Se apenas as duas primeiras condições forem satisfeitas, a ruptura da estrutura se dará por plastificação alternada; caso contrário, ela se dará por colapso incremental.

b) Teorema cinemático da acomodação:

"O valor de λ correspondente a qualquer mecanismo suposto como sendo o de plastificação alternada ($\lambda = \lambda_a$) ou o de colapso incremental ($\lambda = \lambda_I$), deve ser maior ou igual ao fator de carga de acomodação λ_s ".

A plastificação alternada vai ocorrer na seção transversal que tiver a menor relação entre duas vezes o momento de início de escoamento e o intervalo $(\mu_i^{\max} - \mu_i^{\min})$ para o momento fletor elástico. Admitindo-se que esta seção seja a de índice j , o fator de plastificação alternada será dado por:

$$\lambda_a (\mu_j^{\max} - \mu_j^{\min}) = 2(M_y)_j \quad (3.18)$$

Suponha-se que a rotação plástica numa seção transversal i qualquer, durante um pequeno movimento de um suposto mecanismo de colapso incremental de fator λ_I , seja θ_i . Valores positivo e negativo para a rotação θ_i serão indicados por θ_i^+ e θ_i^- , respectivamente. O momento fletor residual na seção transversal i , quando a estrutura se acomodar, pode ser obtido por uma das duas equações abaixo:

$$m_i + \lambda_I \mu_i^{\max} = +(M_p)_i \quad \text{se } \theta_i = \theta_i^+ \quad (3.19)$$

$$m_i + \lambda_I \mu_i^{\min} = -(M_p)_i \quad \text{se } \theta_i = \theta_i^- \quad (3.20)$$

A escolha da equação correta vai depender do sinal da rotação plástica na seção transversal i do mecanismo a ser analisado.

Como os momentos fletores residuais são estaticamente admissíveis com as cargas externas nulas, segue-se do Princípio dos Trabalhos Virtuais que:

$$\sum m_i \theta_i = 0 \quad (3.21)$$

onde o somatório abrange todas as possíveis posições de rótulas plásticas.

A equação (3.21) pode ser reescrita como se segue:

$$\sum (m_i \theta_i^+ + m_i \theta_i^-) = 0 \quad (3.22)$$

ressaltando-se que, conforme a convenção de sinais para as rotações plásticas estabelecidas acima, em cada seção transversal crítica i uma das rotações da equação (3.22), θ_i^+ ou θ_i^- , será nula.

Isolando-se os momentos fletores residuais m_i nas equações (3.19) e (3.20) e substituindo-os adequadamente em

(3.22), tem-se a equação que dá o valor do fator de carga λ_I para qualquer mecanismo suposto como sendo o de colapso incremental:

$$\lambda_I \sum (\mu_i^{\max} \theta_i^+ + \mu_i^{\min} \theta_i^-) = \sum (M_p)_i |\theta_i| \quad (3.23)$$

As equações (3.18) e (3.23) são conhecidas como as condições cinemáticas da acomodação.

c) Teorema da unicidade para a acomodação:

"Se as condições estáticas e cinemáticas dos teoremas da acomodação forem satisfeitas, então λ deve ser igual ao fator de carga de acomodação λ_S ".

Como exemplo de aplicação dos teoremas da acomodação, considere-se o pórtico plano da figura 3.1.a, analisado na seção 3.1. A única mudança é com relação às cargas, vertical V e horizontal H , que agora poderão variar aleatória e independentemente dentro dos limites estabelecidos na figura 3.8. Será suposto, no exemplo, um fator de forma unitário e EI constante.

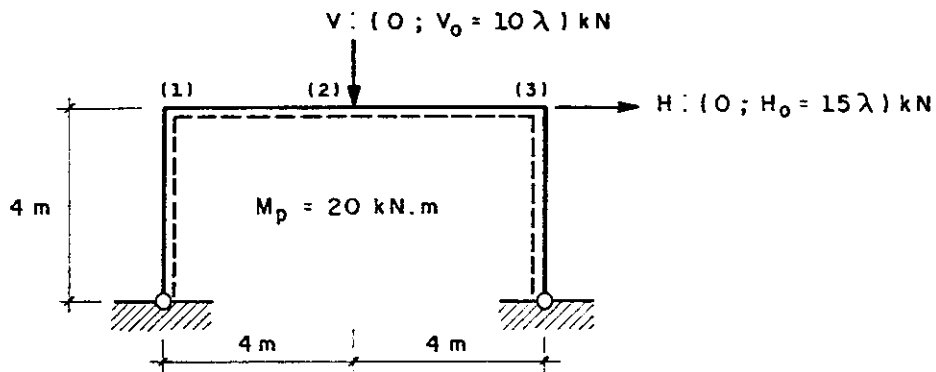


Fig. 3.8 Pórtico plano sob carregamento variável

A primeira providência é a obtenção da envoltória elástica dos momentos fletores. Nas figuras 3.9.a e 3.9.b são mostrados os diagramas de momentos fletores para o pórtico, considerando-se as cargas unitárias $V = 1 \text{ kN}$ e

$H = 1 \text{ kN}$ aplicadas separadamente; estes diagramas podem ser obtidos por qualquer processo da estática clássica.

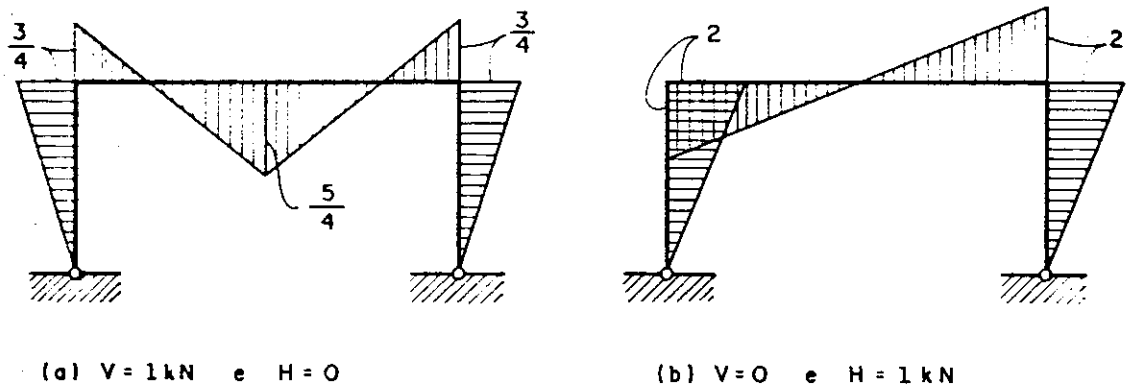


Fig. 3.9 Diagramas de momentos fletores elásticos em KNm para carregamentos unitários

Com os limites das cargas V e H dados na figura 3.8 e os diagramas da figura 3.9, a envoltória elástica dos momentos fletores é facilmente obtida, sendo apresentada na tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Envoltória elástica dos momentos fletores

SECÇÃO i	(1)	(2)	(3)
μ_i^{\max}	$2H_o$	$1,25V_o$	0
μ_i^{\min}	$-0,75V_o$	0	$-0,75V_o - 2H_o$
$\lambda\mu_i^{\max}$	30λ	$12,5\lambda$	0
$\lambda\mu_i^{\min}$	$-7,5\lambda$	0	$-37,5\lambda$
$\lambda(\mu_i^{\max} - \mu_i^{\min})$	$37,5\lambda$	$12,5\lambda$	$37,5\lambda$

O fator de carga de plastificação alternada, λ_a , é obtido considerando-se o maior intervalo elástico da última linha da tabela 3.1, que é $37,5\lambda$. Portanto, a plastificação alternada poderá ocorrer nas seções (1) e (3). Substituindo-se $37,5\lambda$ em (3.18) e lembrando-se que $\nu = 1$, tem-se:

$$\lambda_a = 1,067$$

A análise sob carregamento variável envolve as relações independentes de equilíbrio com carga externa nula, para momentos fletores residuais. Essas relações podem ser obtidas diretamente das equações (3.1) e (3.2), considerando-se que o carregamento externo é nulo e substituindo-se os momentos fletores daquelas equações pelos correspondentes momentos fletores residuais, resultando em:

$$-m_1 + 2m_2 - m_3 = 0 \quad (3.24)$$

$$m_1 - m_3 = 0 \quad (3.25)$$

Os possíveis mecanismos de colapso incremental são aqueles das figuras 3.1.b, 3.1.c e 3.1.d. Cada um desses mecanismos pode dar origem a uma equação semelhante à (3.23).

Com o objetivo de facilitar a obtenção da solução geométrica do problema, que será dada logo a seguir, será feita uma mudança na equação (3.23). Em vez de se trabalhar com os momentos fletores elásticos em função do parâmetro positivo λ , pode-se trabalhar com eles em função de V_0 e H_0 . Com isto, a equação (3.23) é reescrita na forma:

$$\sum (\mu_i^{\max} \theta_i^+ + \mu_i^{\min} \theta_i^-) = \sum (M_p)_i |\theta_i| \quad (3.26)$$

onde μ_i^{\max} e μ_i^{\min} são tirados da tabela 3.1.

Considerando-se que o mecanismo de colapso incremental seja o mecanismo de viga da figura 3.1.b, a equação (3.26) para este mecanismo torna-se:

$$(-0,75V_o)(-\theta) + (1,25V_o)(+2\theta) + (-0,75V_o - 2H_o)(-\theta) = 20(4\theta)$$

ou, efetuando-se as operações:

$$2V_o + H_o = 40 \quad (3.27)$$

Da mesma forma, as equações para os mecanismos das figuras 3.1.c e 3.1.d são, respectivamente:

$$3V_o + 16H_o = 160 \quad (3.28)$$

$$V_o + H_o = 20 \quad (3.29)$$

Substituindo-se V_o por 10λ e H_o por 15λ nas equações (3.27), (3.28) e (3.29), obtém-se os fatores de carga de colapso incremental para os mecanismos das figuras 3.1.b, 3.1.c e 3.1.d; cujos valores valem, respectivamente:

$$\lambda_{I,(b)} = 1,143 \quad \lambda_{I,(c)} = 0,593 \quad \lambda_{I,(d)} = 0,80$$

Os valores de λ_a , $\lambda_{I,(b)}$, $\lambda_{I,(c)}$ e $\lambda_{I,(d)}$ são limites superiores para o fator de carga de acomodação λ_s . Como foram analisados todos os possíveis mecanismos de colapso incremental e de plastificação alternada, segue-se, do teorema cinemático da acomodação, que:

$$\lambda_s = \lambda_{I,(c)} = 0,593$$

O colapso plástico do pórtico será incremental, referente ao mecanismo lateral da figura 3.1.c.

A análise fica completa determinando-se uma distribuição de momentos fletores residuais estaticamente admissível para $\lambda = \lambda_s = 0,593$, visando-se o teorema da unicidade da acomodação. Os momentos fletores residuais,

quando a estrutura estiver na iminência de atingir o colapso incremental da figura 3.1.c, podem ser obtidos usando-se as equações (3.19) e (3.20), obtendo-se:

$$m_1 + \lambda_I \mu_1^{\max} = +20 \quad \text{para } \theta_1 = +\theta$$

$$m_3 + \lambda_I \mu_3^{\min} = -20 \quad \text{para } \theta_3 = -\theta$$

para $\lambda_s = \lambda_{I,(c)} = 0.593$, μ_1^{\max} e μ_3^{\min} dados pela tabela 3.1, tem-se:

$$m_1 = 2,222 \text{ KNm} \quad m_3 = 2,222 \text{ KNm}$$

Substituindo-se estes valores em (3.24), obtém-se o momento fletor residual em (2); que vale:

$$m_2 = 2,222 \text{ KNm}$$

Com esta distribuição de momentos fletores residuais e com a tabela 3.1, pode-se montar a tabela 3.2 que será útil na verificação do teorema estático da acomodação.

Por essa tabela, observa-se que as condições do teorema estático da acomodação, inequações (3.15), (3.16) e (3.17), são satisfeitas, como mostram as suas três últimas linhas. Portanto, pelo teorema da unicidade da acomodação:

$$\lambda_s = 0,593$$

Tabela 3.2 - Momentos fletores em kNm para $\lambda = \lambda_s = 0,593$

SECÇÃO TRANSVERSAL i	(1)	(2)	(3)
m_i	2,222	2,222	2,222
$\lambda_s \mu_i^{\max}$	17,778	7,407	0
$\lambda_s \mu_i^{\min}$	- 4,444	0	- 22,222
$M_i^{\max} = m_i + \lambda_s \mu_i^{\max}$	20	9,630	2,222
$M_i^{\min} = m_i + \lambda_s \mu_i^{\min}$	- 2,222	2,222	- 20
$M_i^{\max} - M_i^{\min}$	22,222	7,407	22,222

Este mesmo problema pode ser resolvido geometricamente. Lançando-se as equações (3.27), (3.28) e (3.29), dos possíveis mecanismos de colapso incremental, em um diagrama de V_o contra H_o , obtém-se a região viável destacada no diagrama da figura 3.10.

A relação entre as cargas V_o e H_o continua sendo a mesma da equação (3.6), ou seja:

$$V_o = \frac{2}{3} H_o$$

Lançando-se esta equação no diagrama da figura 3.10, obtém-se uma reta que passa pela origem dos eixos e que intercepta as equações dos possíveis mecanismos de colapso incremental nos pontos P, Q e R. O segmento de reta OP representa a região viável para a relação entre as cargas dada por (3.6). A solução do problema é representada pelo ponto P, com o mecanismo de colapso incremental sendo o mecanismo lateral. O fator de carga de colapso incremental correspondente a P pode ser obtido igualando-se qualquer uma de suas coordenadas ao respectivo valor da carga ; seu valor é:

$$\lambda_I = 0,593$$

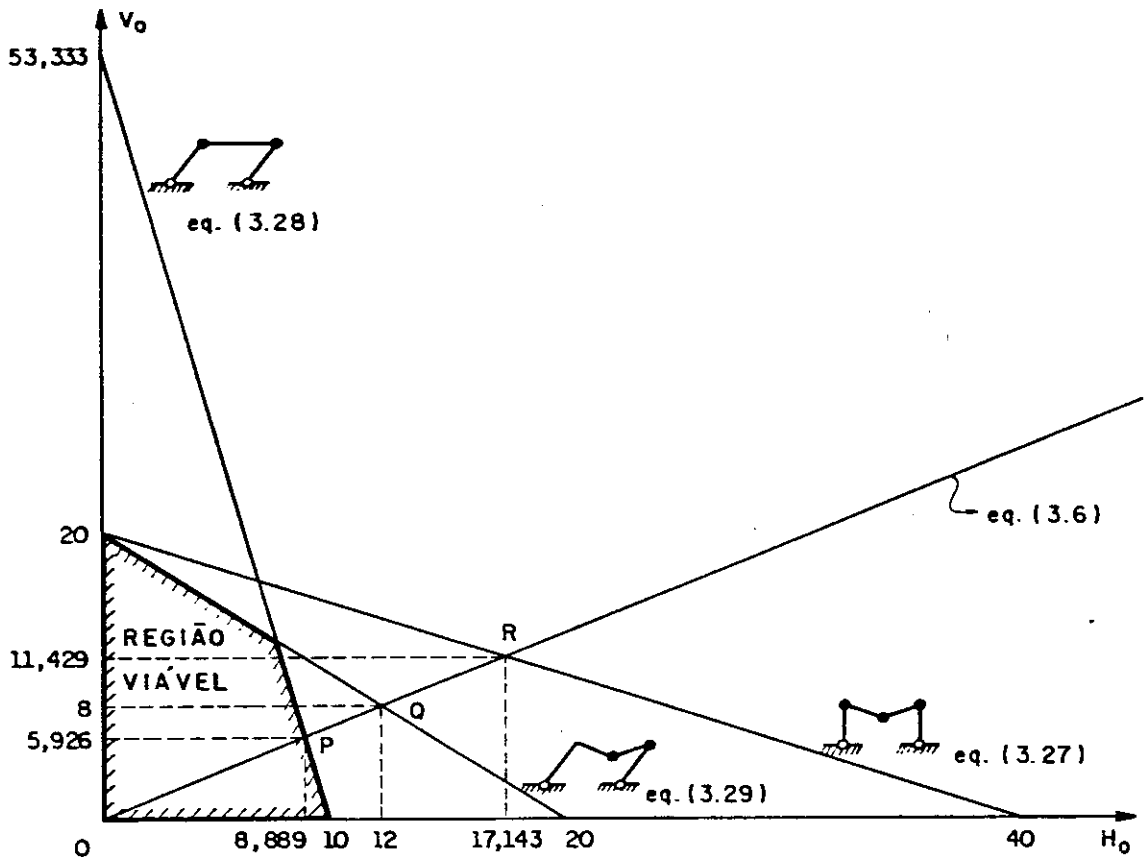


Fig. 3.10 Diagrama de V_0 contra H_0 em KN

Comparando-se esse valor com o fator de carga de plastificação alternada ($\lambda_a = 1,067$), obtido anteriormente, conclui-se que o fator de carga de acomodação é:

$$\lambda_s = 0,593$$

e que o colapso para $\lambda > \lambda_s$ será incremental, segundo o mecanismo lateral da figura 3.1.c.

Os valores do fator de carga de colapso incremental para os pontos Q e R podem ser obtidos de uma forma análoga ao ponto P e valem, respectivamente:

$$\lambda_{(Q)} = 0,80$$

$$\lambda_{(R)} = 1,143$$

Esses valores são os mesmos obtidos quando se fez a análise dos mecanismos combinado e de viga, admitindo-se que fossem mecanismos de colapso incremental reais. Pelo diagrama da figura 3.10, nota-se que tanto Q quanto R representam pontos que estão fora da região viável e portanto representam combinações de cargas V_0 e H_0 que o pórtico não suporta.

Pode-se fazer uma comparação entre o fator de carga de colapso plástico obtido na seção 3.1 ($\lambda_c = 0,667$) para o carregamento único da figura 3.1 com o fator de carga de acomodação ($\lambda_s = 0,593$) obtido nesta seção para o carregamento variável da figura 3.8. Observe-se que λ_s é menor que λ_c em aproximadamente 11%. Heyman em [7] demonstra que λ_s é sempre menor ou igual a λ_c . Essa relação entre os fatores de carga pode ser constatada pelas regiões admissíveis dadas pelas figuras 3.2 e 3.10; esta, é mais restritiva do que aquela, o que pode ser confirmado observando-se o trecho do contorno das regiões viáveis referentes ao mecanismo lateral.

3.4 O problema de síntese sob carregamento variável

O problema consiste em dimensionar as seções transversais das barras de uma estrutura submetida a um carregamento variável conhecido, visando o menor consumo de material; ele envolve os conhecimentos da análise da acomodação estudados na seção anterior. Como foi visto, a acomodação prevê a possibilidade de uma resposta elástica da estrutura, quando esta estiver submetida às diversas combinações de cargas.

Como inicialmente não são conhecidas as dimensões das seções transversais das barras que compõem a estrutura e, da seção 3.3, sabe-se que a análise dessa resposta elástica exige o conhecimento prévio da envoltória dos momentos fletores, para cuja definição é necessário que se conheçam os valores relativos entre as rigidezes EI das

barras; recai-se num círculo vicioso, já que o objetivo é projetar as seções transversais e essas rigidezes não são conhecidas de início. Assim, então, as dimensões das barras precisam ser conhecidas para que se possa ter as rigidezes relativas e, conseqüentemente, a envoltória elástica dos momentos fletores; por sua vez, essa envoltória elástica precisa ser conhecida para que se possa dimensionar as seções transversais das barras, visando-se minimizar o consumo total de material para que a estrutura suporte os carregamentos variáveis dados.

A solução para se quebrar este círculo vicioso é adotar-se um método iterativo. Antes de expô-lo, além das hipóteses já mencionadas, são feitas as seguintes hipóteses adicionais:

a) A função peso continua sendo a mesma função linearizada da seção 3.2, dada pela equação (3.13), ou seja:

$$x = \sum_{i=1}^n (M_p)_i l_i$$

b) Existe uma relação entre o momento de inércia e o momento de plastificação total de cada barra, dada por:

$$I = f(M_p) \quad (3.30)$$

Esta relação pode ser colocada na seguinte forma geral:

$$I = c(M_p)^\gamma \quad (3.31)$$

onde a constante c e o expoente γ dependem das seções transversais utilizadas; estes valores podem ser obtidos para as diversas seções transversais usualmente empregadas nas construções de aço, conforme é feito no Apêndice A.

O problema de síntese sob carregamento variável pode ser colocado como sendo o de minimizar a função peso, equação (3.13), obedecendo-se as condições do teorema

estático da acomodação.

Para se quebrar o círculo vicioso estabelecido, será utilizado um método iterativo. Inicialmente, define-se as formas das seções transversais a serem utilizadas no projeto. Definidas estas formas, obtém-se as constantes c e os expoentes γ da equação (3.31), conforme o Apêndice A. O próximo passo é admitir valores iniciais para os momentos de plastificação total das barras. Com os M_p admitidos, através da equação (3.31), obtém-se os momentos de inércia das barras. Com isto, têm-se as rigidezes relativas e , conseqüentemente, chega-se à envoltória elástica dos momentos fletores por qualquer processo da estática clássica.

Conhecida essa envoltória, o problema torna-se muito semelhante ao de análise sob carregamento variável. Tomando-se como base o teorema estático da acomodação, o problema pode ser colocado como sendo o de se procurar uma distribuição de momentos fletores residuais estaticamente admissível com as cargas externas nulas e que, além de minimizar a função peso, satisfaça, para qualquer seção transversal i da estrutura, as condições:

$$m_i + \mu_i^{\max} \leq +(M_p)_i \quad (3.32)$$

$$m_i + \mu_i^{\min} \geq -(M_p)_i \quad (3.33)$$

As incógnitas do problema são os m_i e agora também os $(M_p)_i$. Ao resolvê-lo, obtém-se os valores calculados dos momentos de plastificação total, exigidos pela estrutura. A seguir, os M_p calculados são comparados com os M_p admitidos, utilizados no cálculo dos momentos de inércia. Se a diferença entre eles não estiver dentro de certa tolerância, previamente estabelecida, é feita uma nova iteração onde os valores iniciais dos M_p para essa nova iteração são aqueles calculados na iteração anterior. O processo é repetido até que se atinja a convergência.

CAPÍTULO 4

RELAÇÕES INDEPENDENTES DE EQUILÍBRIO

4.1 Considerações iniciais

Pela apresentação, feita no capítulo 3, dos diversos problemas que são objeto de estudo neste trabalho, observa-se que um dos pontos básicos na análise e síntese de estruturas em regime elastoplástico é a determinação das relações independentes de equilíbrio envolvendo os momentos fletores das seções transversais críticas; através dessas relações esses momentos fletores se relacionam entre si e com eventual carregamento externo.

Nos problemas de análise e síntese sob carregamento único, uma das condições a ser satisfeita é que a distribuição de momentos fletores ao longo de uma estrutura esteja em equilíbrio com as cargas externas; nos problemas de análise e síntese sob carregamento variável uma distribuição de momentos fletores residuais é que deve estar em equilíbrio com cargas externas nulas. Em outras palavras, qualquer distribuição de momentos fletores, residual ou não, deve satisfazer as relações independentes de equilíbrio com carregamento externo nulo ou não.

Uma das maneiras de se obter tais relações de equilíbrio é através do Princípio dos Trabalhos Virtuais,

usando-se sistemas de deslocamentos virtuais compatíveis, correspondentes a mecanismos independentes, conforme foi feito ao analisar-se o pórtico da figura 3.1. Entretanto, visando-se a automatização do cálculo, este não é o meio mais eficiente, por exigir o conhecimento prévio desses mecanismos independentes, que em alguns casos de estruturas mais complexas são difíceis de se obter.

Pretende-se neste capítulo apresentar um processo alternativo apropriado para a geração automática dessas relações independentes de equilíbrio. Todo o presente estudo está baseado em [15], [17] e [19]. Ao tratar da análise de estruturas pelo processo dos esforços, [15] e [19], Przemieniecki apresenta um equacionamento matricial para a obtenção das relações de equilíbrio de uma estrutura, necessárias durante o desenvolvimento do processo. Entretanto, essas relações são gerais, ou seja, além de incluírem todas as relações de equilíbrio, dependentes e independentes, elas envolvem reações de apoio, esforços axiais, momentos fletores e carregamento externo.

No estudo da análise e síntese de estruturas em regime elastoplástico o maior interesse recai nas relações independentes de equilíbrio expressas somente em termos de momentos fletores e carregamentos externos. No final deste capítulo é discutido um algoritmo, baseado na eliminação de Gauss, através do qual se pode chegar a essas relações independentes a partir das relações gerais de equilíbrio. As outras relações de equilíbrio podem ser usadas, por exemplo, para o cálculo dos esforços axiais e reações de apoio.

Todo o estudo desenvolvido aqui está voltado para estruturas planas, mais especificamente pórticos planos, objeto de análise neste trabalho. Entretanto, a obtenção das relações gerais de equilíbrio pode ser facilmente estendida a outros tipos de estruturas, planas ou espaciais; para isto, basta trabalhar com sistemas de coordenadas adequados para cada caso.

4.2 Formulação matricial para obtenção das relações de equilíbrio

Segundo Przemieniecki, [15], o primeiro passo na análise de estruturas pelo processo dos esforços é a obtenção das relações de equilíbrio expressas em termos dos esforços e ações atuantes nas estruturas. De acordo com esse autor, essas relações podem ser obtidas somando-se algebricamente as componentes dos esforços nas extremidades das barras segundo as direções dos graus de liberdade dos nós da estrutura e igualando-se estas componentes às correspondentes componentes das ações.

Procede-se desta forma para todos os nós, incluindo-se aqueles ligados ao sistema de apoio. As reações de apoio, quer sejam estaticamente determinadas quer sejam redundantes, fazem parte das relações de equilíbrio como "forças internas" que a estrutura aplica em seus apoios. Em [15] e [19], Przemieniecki chamou estas forças de forças complementares das reações ou, simplesmente, reações complementares. Em outras palavras, o que se convencionou chamar de reação complementar nada mais é do que a reação de apoio com o sinal contrário, evidenciando-se que é a força que a estrutura faz sobre o sistema de apoio. Esta consideração feita para as reações de apoio facilita a análise estrutural com subestruturas, desenvolvida em [19] e estendida para o processo dos esforços em [15]. Como este capítulo está intimamente relacionado a esses dois trabalhos de Przemieniecki, optou-se por continuar com esta nomenclatura, o que facilitará a sua ligação com a referida bibliografia.

Para ilustrar este tipo de análise estrutural, seja uma treliça plana composta de três barras unidas entre si por três nós, carregada conforme a figura 4.1.

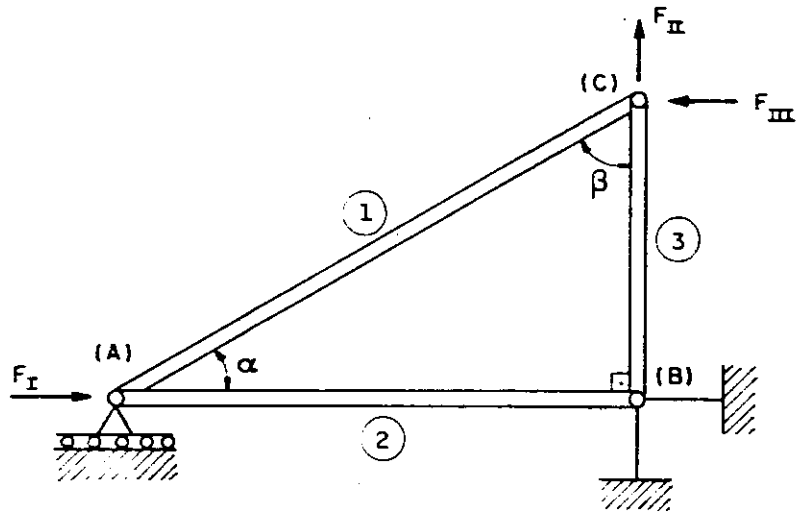


Fig. 4.1 Treliça plana - geometria e carregamento

A figura 4.2 mostra os esforços e as ações atuantes em cada nó da treliça da figura 4.1. Tomando-se o nó (A) como exemplo, observe-se que nele atuam a ação F_I , dois esforços axiais, os das barras 1 e 2, P_1 e P_2 , respectivamente, e a reação complementar F_{r1} . Nessa figura, também está indicado o sistema global de referência $O \bar{X} \bar{Y}$, onde o eixo \bar{X} tem a mesma direção do eixo horizontal da barra 2. A treliça está situada no plano $O \bar{X} \bar{Y}$. Cada nó terá duas coordenadas globais, numeradas sequencialmente, cujas direções coincidem com as dos eixos \bar{X} e \bar{Y} . As relações de equilíbrio serão escritas segundo essas coordenadas.

A figura 4.3 mostra a decomposição dos esforços, da reação complementar e da ação atuantes no nó (A), segundo as direções das coordenadas globais 1 e 2, definidas na figura 4.2. As duas relações de equilíbrio para este nó são obtidas igualando-se as componentes de cada coordenada da figura 4.3.a com as correspondentes componentes das ações da figura 4.3.b. Desta forma, ao se fazer o correspondente equilíbrio segundo as direções 1 e 2 tem-se, respectivamente:

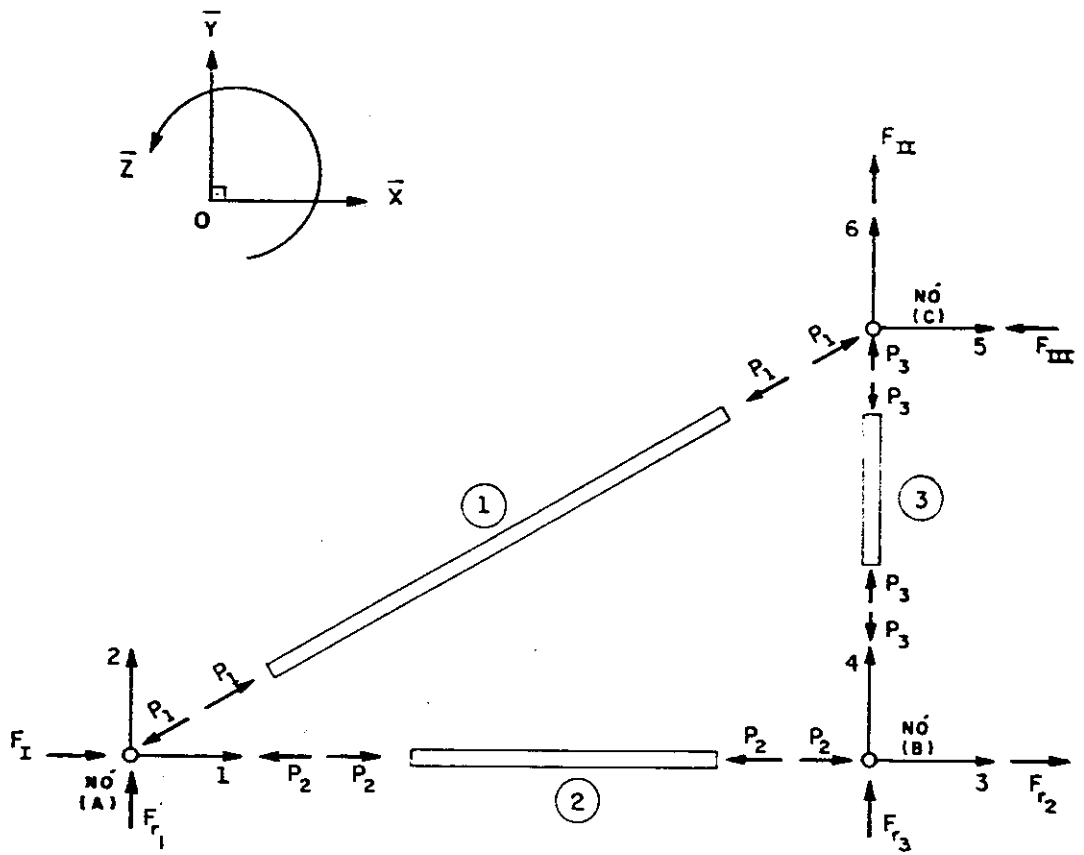


Fig. 4.2 Treliça discretizada e o seu sistema global de referência

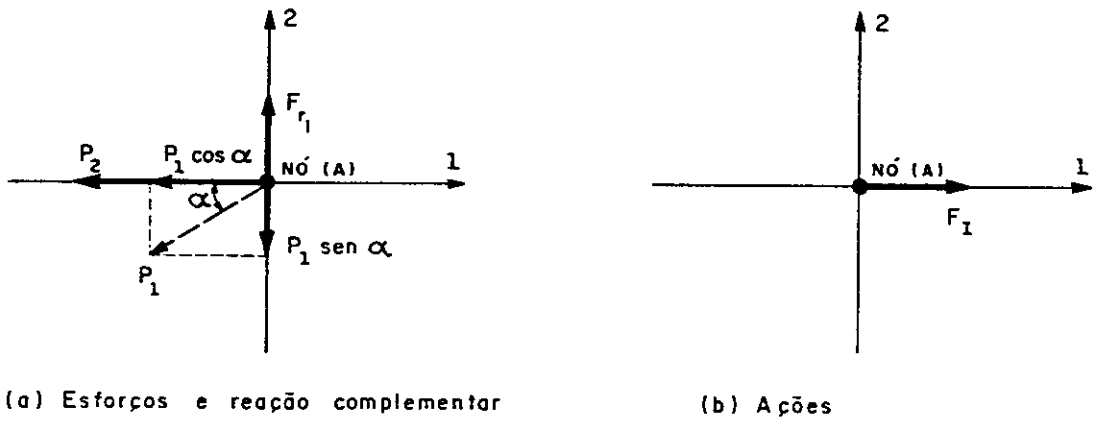


Fig. 4.3 Decomposição dos esforços e ações atuantes no nó (A) segundo as direções das coordenadas globais 1 e 2.

$$-P_1 \cos \alpha - P_2 = F_I \quad (4.1)$$

$$-P_1 \sin \alpha + F_{r_1} = 0 \quad (4.2)$$

Procedendo-se analogamente para os nós (B) e (C), obtém-se as outras quatro relações de equilíbrio; estas são:

a) Para o nó (B):

$$P_2 + F_{r_2} = 0 \quad (4.3)$$

$$-P_3 + F_{r_3} = 0 \quad (4.4)$$

b) Para o nó (C):

$$P_1 \sin \beta = -F_{III} \quad (4.5)$$

$$P_1 \cos \beta + P_3 = F_{II} \quad (4.6)$$

As relações de (4.1) a (4.6) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -\cos \alpha & -1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin \beta & 0 & 0 \\ \cos \beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{r_1} \\ F_{r_2} \\ F_{r_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F_{III} \\ F_{II} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

De uma maneira geral, as relações de equilíbrio (4.7) podem ser representadas matricialmente por:

$$[M] \{P\} + [N] \{F_r\} = \{F\} \quad (4.8)$$

onde se tem:

[M] e [N]: - Matrizes retangulares cujos coeficientes envolvem os cossenos diretores usados na decomposição tanto dos esforços nas extremidades das barras como das reações complementares, segundo as direções do sistema de referência global.

{P} : - Vetor dos esforços nas extremidades das barras

{F_r} : - Vetor das reações complementares

{F} : - Vetor das ações aplicadas externamente nas direções dos graus de liberdade dos nós

A equação (4.8) pode ser reescrita de uma forma mais condensada como:

$$[E] \{P^*\} = \{F\} \quad (4.9)$$

onde

$$[E] = [[M] \quad [N]] \quad (4.10)$$

$$\{P^*\} = \left\{ \begin{array}{l} \{P\} \\ \{F_r\} \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

4.3 Estudo de uma barra para pórticos planos

Pretende-se nesta seção estudar detalhadamente as barras que constituem os pórticos planos. Serão definidos para o elemento-barra sistemas locais de referência apropriados para os processos dos esforços e dos deslocamentos, através dos quais serão adotadas coordenadas onde estarão basicamente aplicados os esforços. Objetivando-se a obtenção da matriz [E], definida pela

equação (4.10), serão estabelecidas as matrizes de incidência estática e cinemática que relacionarão os esforços dados pelos dois processos e os deslocamentos referentes aos dois sistemas locais de referência a serem definidos oportunamente.

Seja uma barra genérica i , com módulo de elasticidade E , momento de inércia I , formando um ângulo α_i com a horizontal e com extremidades que se associam aos nós J e K de um pórtico plano; J e K , por convenção, constituem os seus nós inicial e final, respectivamente. Ao se estudar esta barra, torna-se conveniente estabelecer um sistema local de referência a partir do qual serão definidas coordenadas nas extremidades J e K com o objetivo tanto de introduzir dados quanto de manusear resultados.

Estando a barra i contida no plano $O\bar{X}\bar{Y}$ do pórtico, esse sistema será composto de três eixos X , Y e Z ; a direção do eixo X coincidirá com a do eixo da barra e seu sentido orientado da extremidade inicial J para a extremidade final K ; o eixo Z terá orientação igual à do eixo \bar{Z} do sistema global a ser definido posteriormente e perpendicular ao plano da barra e do pórtico. Este sistema, assim definido, será identificado como sendo o sistema local de referência associado à barra, conforme a figura 4.4.

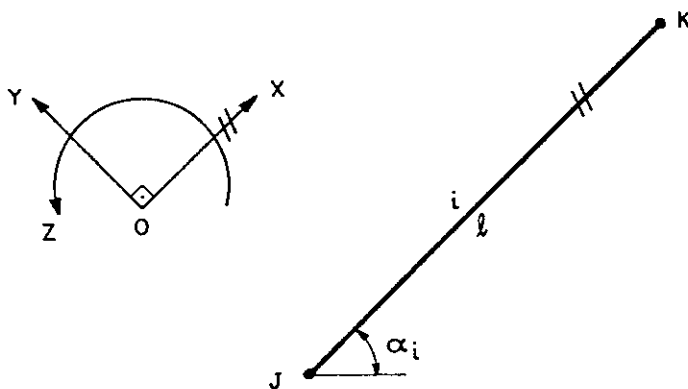


Fig. 4.4 Barra genérica i e o seu sistema local de referência associado à barra.

No processo dos esforços, ao se estabelecer as relações de flexibilidade, as coordenadas locais devem ser estaticamente independentes. Como os problemas de análise e síntese de estruturas pelo método das rótulas plásticas estão diretamente relacionados ao equilíbrio dos momentos fletores das barras com o carregamento externo, o sistema independente de coordenadas locais associadas à barra mais adequado para o estudo destes problemas é aquele apresentado na figura 4.5.a. A primeira coordenada relaciona-se com o esforço axial P_1 na extremidade K e as outras duas relacionam-se com os momentos fletores nas extremidades inicial, P_2 , e final, P_3 , como mostra a figura 4.5.b. A justificativa para a numeração das coordenadas locais conforme a figura 4.5.a será deixada para mais tarde; ela está ligada ao melhor armazenamento dos elementos da matriz [E].

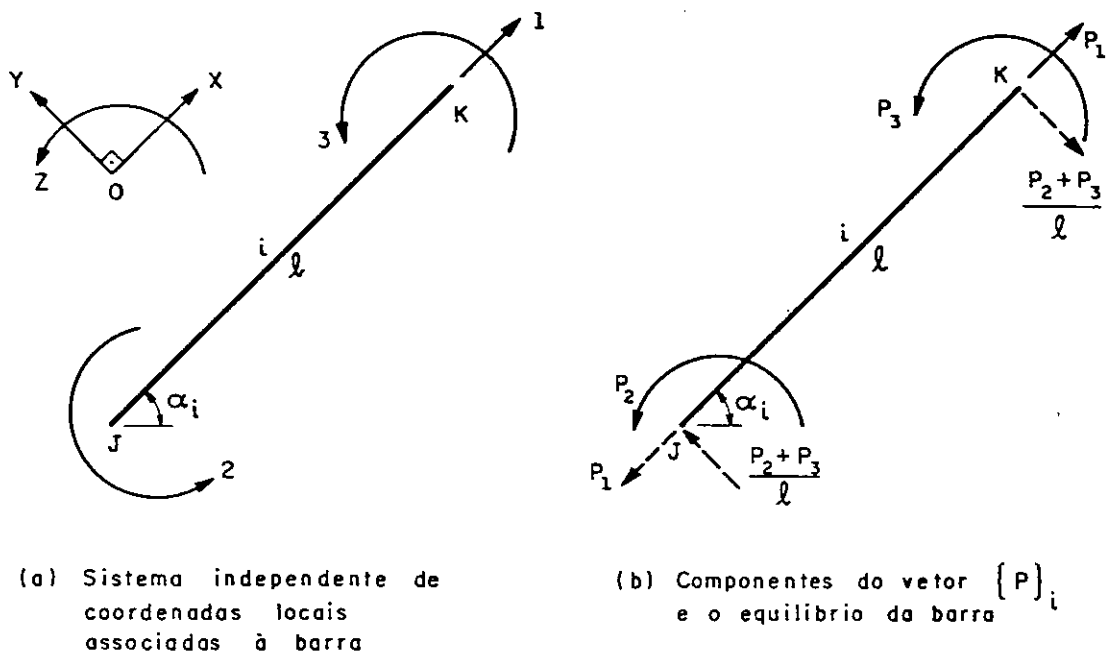


Fig. 4.5 Estudo da barra genérica i através do processo dos esforços.

Os esforços P_1 , P_2 e P_3 , representados por setas cheias na figura 4.5.b, são as componentes do vetor $\{P\}_i$.

que será denominado de vetor dos esforços nas coordenadas locais associadas à barra para o processo dos esforços. Os esforços referentes às setas tracejadas da figura 4.5 b são aqueles necessários para se estabelecer o equilíbrio da barra i ao aplicar-se as componentes do vetor $\{P\}_i$.

Em se tratando do processo dos deslocamentos, o sistema independente de coordenadas locais associadas à barra será formado por seis coordenadas, onde as três primeiras associam-se à extremidade inicial da barra e as outras três à extremidade final, numeradas conforme a figura 4.6.a. Assim como estabelecido no processo dos esforços, a figura 4.6.b mostra as seis componentes do vetor $\{P_e\}_i$, denominado de vetor dos esforços nas coordenadas locais associadas à barra para o processo dos deslocamentos.

Visando-se estudos futuros, é importante estabelecer uma relação entre os esforços nas extremidades da barra i dados através dos processos dos deslocamentos e dos esforços, ou seja, é importante relacionar os vetores $\{P_e\}_i$ e $\{P\}_i$. Os esforços nas extremidades da barra i da figura 4.6.b podem ser escritos em função dos esforços da figura 4.5.b, obtendo-se as relações:

$$\begin{aligned} P_{e_1} &= -P_1 \\ P_{e_2} &= \frac{P_2 + P_3}{l} \\ P_{e_3} &= P_2 \\ P_{e_4} &= P_1 \\ P_{e_5} &= \frac{-(P_2 + P_3)}{l} \\ P_{e_6} &= P_3 \end{aligned} \tag{4.12}$$

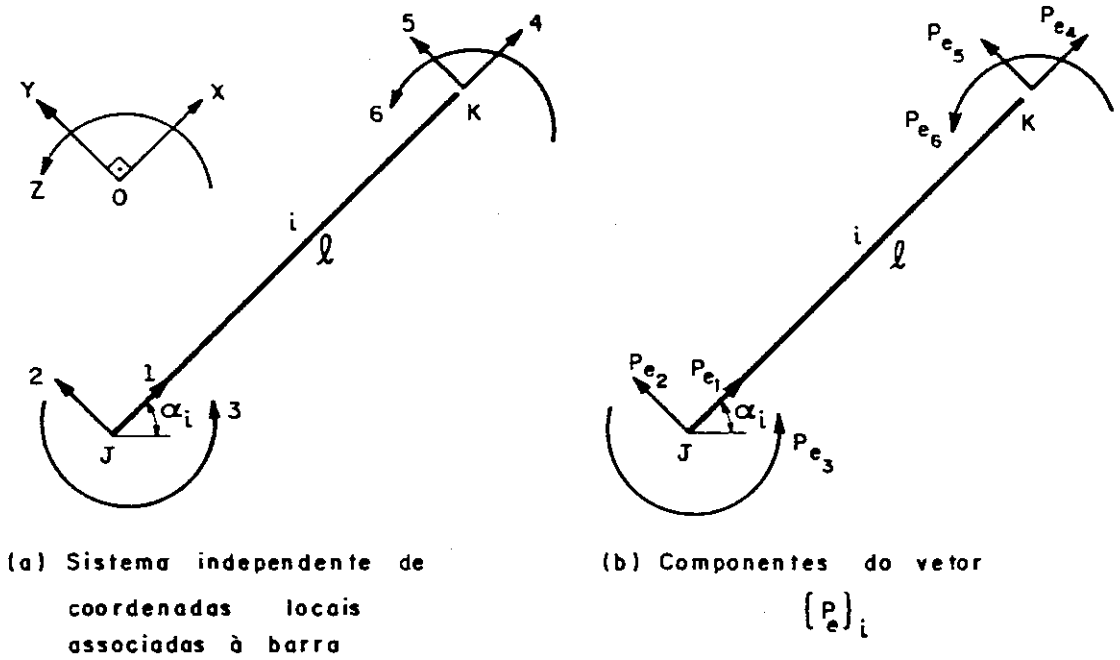


Fig. 4.6 Estudo da barra genérica i através do processo dos deslocamentos.

Escrevendo-se as equações (4.12) matricialmente, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} P_{e1} \\ P_{e2} \\ P_{e3} \\ P_{e4} \\ P_{e5} \\ P_{e6} \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{l} & \frac{-1}{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}_i \quad (4.13)$$

De uma forma geral, a relação procurada pode ser estabelecida pela equação matricial:

$$\{P_e\}_i = [\gamma_e]_i \{P\}_i \quad (4.14)$$

onde:

$$[\gamma_e]_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{l} & \frac{-1}{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \quad (4.15)$$

é uma matriz de incidência estática que relaciona os esforços nas extremidades da barra i dados pelo processo dos deslocamentos, figura 4.6.b, com aqueles dados pelo processo dos esforços, figura 4.5.b.

O estudo feito até agora está baseado no sistema local de referência associado à barra, definido na figura 4.4, através do qual os vetores $(P_e)_i$ e $(P)_i$ foram escritos. Além desse sistema de referência, há um outro muito importante que é o sistema global de referência; este, servirá tanto para a definição da estrutura, como será visto na seção 4.5.1, quanto para se expressarem as relações de equilíbrio, como foi feito para a treliça da figura 4.1.

A nível da barra genérica i será estabelecido um segundo sistema local de referência que irá associar-se com o sistema global. A figura 4.7 mostra este novo sistema que é formado pelos eixos globais \bar{X} , \bar{Y} e \bar{Z} , onde o eixo \bar{X} forma com o eixo da barra um ângulo α_i ; a barra está situada no plano $O \bar{X} \bar{Y}$. A figura 4.7 mostra também as seis coordenadas locais independentes para o processo dos deslocamentos relacionadas a este novo sistema de referência.

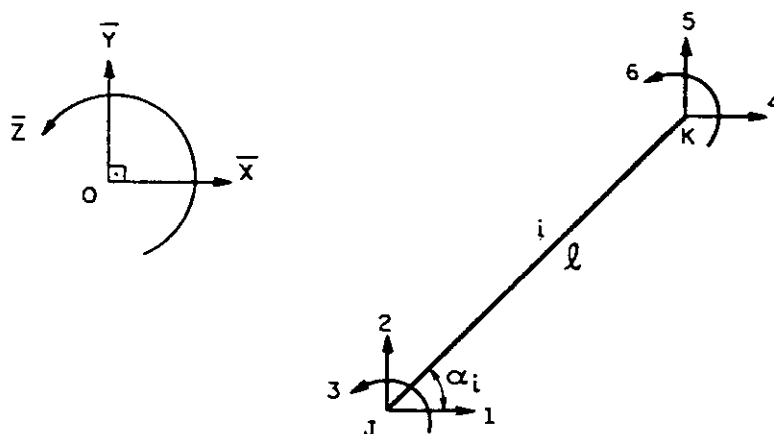


Fig 4.7 Sistema de coordenadas locais associadas ao sistema global \bar{X} , \bar{Y} e \bar{Z} para o processo dos deslocamentos.

Um outro passo importante é estabelecer uma relação entre os deslocamentos nas extremidades da barra "i dados segundo as coordenadas locais da figura 4.6.a, vetor $\{\delta_e\}_i$, com os deslocamentos locais dados de acordo com o sistema de coordenadas da figura 4.7, vetor $\{\delta_g\}_i$. Essa relação é expressa pela equação matricial:

$$\{\delta_e\}_i = [\beta_e]_i \{\delta_g\}_i \quad (4.16)$$

onde:

- $\{\delta_e\}_i$: - Deslocamentos nas coordenadas locais associadas à barra.
- $[\beta_e]_i$: - Matriz de incidência cinemática.
- $\{\delta_g\}_i$: - Deslocamentos nas coordenadas locais associadas ao sistema global de referência.

Para se obter a matriz $[\beta_e]_i$, veja a figura 4.8. Na figura 4.8.a estão representadas as seis componentes do vetor $\{\delta_e\}_i$ e na figura 4.8.b as seis componentes do vetor $\{\delta_g\}_i$; a figura 4.8.c traz as projeções das componentes de $\{\delta_g\}_i$ segundo os eixos do sistema local de referência.

associado à barra.

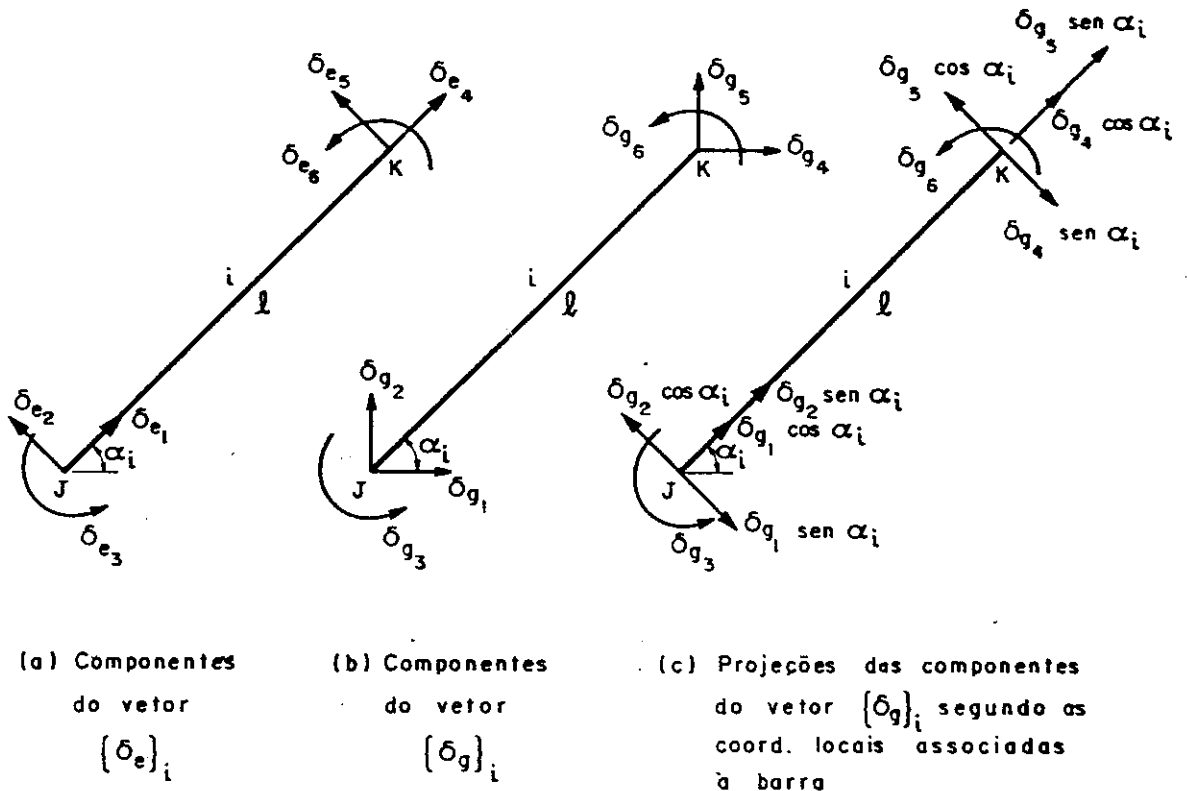


Fig. 4.8 Componentes dos vetores deslocamentos para os dois sistemas locais.

Relacionando-se as componentes do vetor $\{\delta_e\}_i$ da figura 4.8.a com as projeções da figura 4.8.c, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \delta_{e_1} &= \delta_{g_1} \cos \alpha_i + \delta_{g_2} \operatorname{sen} \alpha_i \\
 \delta_{e_2} &= -\delta_{g_1} \operatorname{sen} \alpha_i + \delta_{g_2} \cos \alpha_i \\
 \delta_{e_3} &= \delta_{g_3} \\
 \delta_{e_4} &= \delta_{g_4} \cos \alpha_i + \delta_{g_5} \operatorname{sen} \alpha_i \\
 \delta_{e_5} &= -\delta_{g_4} \operatorname{sen} \alpha_i + \delta_{g_5} \cos \alpha_i \\
 \delta_{e_6} &= \delta_{g_6}
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

As relações (4.17) podem ser escritas na seguinte notação matricial

$$\begin{Bmatrix} \delta_{e_1} \\ \delta_{e_2} \\ \delta_{e_3} \\ \delta_{e_4} \\ \delta_{e_5} \\ \delta_{e_6} \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & \text{sen}\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_i & \text{sen}\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{g_1} \\ \delta_{g_2} \\ \delta_{g_3} \\ \delta_{g_4} \\ \delta_{g_5} \\ \delta_{g_6} \end{Bmatrix}_i \quad (4.18)$$

Comparando-se (4.16) e (4.18), obtém-se a matriz de incidência cinemática procurada, que é:

$$[\beta_e]_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & \text{sen}\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_i & \text{sen}\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Um outro vetor importante é $\{P_g\}_i$, denominado de vetor dos esforços nas coordenadas locais associadas ao sistema global de referência para o processo dos deslocamentos. Os vetores $\{P_g\}_i$ e $\{P_e\}_i$ correspondem a um mesmo estado de forças em equilíbrio, referidos aos seus respectivos sistemas de coordenadas. Sejam os vetores $\{\delta_g\}_i$

e $(\delta_{e,i})$ que compõem um estado de deslocamentos virtuais, segundo o sistema de coordenadas independentes em que cada vetor é definido, e compatíveis, sendo portanto relacionáveis através da equação (4.16). Impondo-se este estado de deslocamentos ao estado de forças, tem-se do Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$(\delta_g)_i^t (P_g)_i = (\delta_e)_i^t (P_e)_i \quad (4.20)$$

Substituindo-se (4.16) em (4.20),

$$(\delta_g)_i^t (P_g)_i = (\delta_g)_i^t [\beta_e]_i^t (P_e)_i \quad (4.21)$$

de onde se obtém:

$$(P_g)_i = [\beta_e]_i^t (P_e)_i \quad (4.22)$$

De (4.14) em (4.22), tem-se:

$$(P_g)_i = [\beta_e]_i^t [\gamma_e]_i (P)_i \quad (4.23)$$

A equação (4.23) pode ser reescrita na forma seguinte:

$$(P_g)_i = [\gamma_g]_i (P)_i \quad (4.24)$$

onde:

$$[\gamma_g]_i = [\beta_e]_i^t [\gamma_e]_i \quad (4.25)$$

é uma matriz de incidência estática que relaciona os esforços nas extremidades da barra i dados pelo processo dos deslocamentos segundo as coordenadas locais da figura 4.7 com aqueles dados pelo processo dos esforços, figura 4.5.b.

Os termos do segundo membro de (4.25) já são conhecidos; portanto, de (4.19) e (4.15) tem-se:

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\
 [\gamma_g]_i = & \begin{bmatrix}
 -\cos\alpha_i & \frac{-\text{sen}\alpha_i}{l} & \frac{-\text{sen}\alpha_i}{l} \\
 -\text{sen}\alpha_i & \frac{\cos\alpha_i}{l} & \frac{\cos\alpha_i}{l} \\
 0 & 1 & 0 \\
 \cos\alpha_i & \frac{\text{sen}\alpha_i}{l} & \frac{\text{sen}\alpha_i}{l} \\
 \text{sen}\alpha_i & \frac{-\cos\alpha_i}{l} & \frac{-\cos\alpha_i}{l} \\
 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \end{matrix} \quad (4.26)$$

Os números colocados acima das colunas de (4.26) indicam os índices das componentes do vetor $(P)_i$ associados a cada coluna. Por exemplo, todos os elementos da coluna de número 1 multiplicam o esforço P_1 ao fazer a incidência dos esforços da figura 4.5.b nas coordenadas da figura 4.7. Essa numeração será importante ao se levar em consideração a contribuição da barra i para a formação da matriz $[M]$, como será visto na seção 4.5.3.

4.4 Obtenção da matriz $[E]$

Considerando-se a estrutura como um todo, constituída por m barras unidas entre si por n nós, será introduzido o vetor (u) cujas componentes serão os deslocamentos nas $3n$ coordenadas do sistema global de referência a ser definido na próxima seção.

Torna-se conveniente relacionar os deslocamentos das barras nas suas coordenadas locais associadas ao sistema global de referência com os deslocamentos nas coordenadas globais. Esta relação é dada por:

$$\{\delta_g\} = [\beta_g] \{u\} \quad (4.27)$$

onde

$$\{\delta_g\} = \left\{ \begin{array}{c} (\delta_g)_1 \\ \vdots \\ (\delta_g)_i \\ \vdots \\ (\delta_g)_m \end{array} \right\} \quad (4.28)$$

$$[\beta_g] = \left[\begin{array}{c} [\beta_g]_1 \\ \vdots \\ [\beta_g]_i \\ \vdots \\ [\beta_g]_m \end{array} \right] \quad (4.29)$$

$$\{u\} = \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_l \\ \vdots \\ u_{3n} \end{array} \right\} \quad (4.30)$$

sendo que u_l representa o deslocamento na l -ésima coordenada global.

A matriz de incidência cinemática $[\beta_g]$ de (4.27) é facilmente gerável como será visto na seção 4.5.3. Ela é uma matriz retangular que tem a função de posicionar as barras, ou suas coordenadas locais associadas ao sistema global de referência, na estrutura, ou nas coordenadas globais.

O carregamento externo correspondente a cada uma das coordenadas globais onde foram definidas as componentes de $\{u\}$, será indicado pelo vetor $\{F\}$, tal que:

$$(F) = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_l \\ \vdots \\ F_{3n} \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

onde F_l representa a ação aplicada na direção do deslocamento global u_l .

Lembrando-se que as reações de apoio são consideradas aqui como "forças internas" ou reações complementares, seja o estado de forças, em equilíbrio, com (F) e (F_r^*) aplicados segundo as coordenadas globais e com (P_g) segundo as coordenadas locais associadas ao sistema global:

$$(F_r^*) = \begin{Bmatrix} F_{r1} \\ \vdots \\ F_{rl} \\ \vdots \\ F_{r3n} \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

$$(P_g) = \begin{Bmatrix} (P_g)_1 \\ \vdots \\ (P_g)_i \\ \vdots \\ (P_g)_m \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

O vetor (F_r^*) é o vetor das reações complementares expandido para corresponder a todas as coordenadas globais.

Vale ressaltar que este vetor inclui as reações complementares teoricamente nulas referentes às coordenadas globais não vinculadas e que, portanto, não possuem reações de apoio aplicadas.

A esse estado de forças, pode-se aplicar um estado de deslocamentos, virtual, com $\{u\}$ segundo as coordenadas globais e $\{\delta_g\}$ segundo as coordenadas locais associadas ao sistema global, compatível, valendo portanto a equação (4.27).

Do Princípio dos Trabalhos Virtuais, tem-se:

$$\{u\}^t \{ \{F\} - \{F_r^*\} \} = \{\delta_g\}^t \{P_g\} \quad (4.34)$$

onde o sinal negativo do primeiro membro de (4.34) foi colocado devido à definição de reação complementar dada no início da seção 4.2.

Com (4.27) em (4.34),

$$\{u\}^t \{ \{F\} - \{F_r^*\} \} = \{u\}^t [\beta_g]^t \{P_g\} \quad (4.35)$$

de onde se tira que

$$\{F\} = [\beta_g]^t \{P_g\} + \{F_r^*\} \quad (4.36)$$

A equação (4.36) representa as relações de equilíbrio entre as ações aplicadas nas coordenadas globais, os esforços nas extremidades das barras aplicados nas coordenadas locais associadas ao sistema global de referência e as reações complementares. O vetor $\{F_r^*\}$ pode ser dado por:

$$\{F_r^*\} = [N] \{F_r\} \quad (4.37)$$

onde:

[N] : - Matriz retangular que posiciona as componentes de $\{F_r\}$ nas coordenadas globais.

e o vetor $\{F_r\}$ corresponde apenas aos vínculos existentes, conforme exemplificado através da treliça da figura 4.1; ele é dado por:

$$\{F_r\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{r1} \\ \vdots \\ F_{r_{NCV}} \end{array} \right\} \quad (4.38)$$

em que NCV é o número de coordenadas globais vinculadas.

As reações complementares, vetor $\{F_r\}$, estão aplicadas nas direções das coordenadas globais. Desta forma, a matriz $[N]$ é facilmente gerável; de (4.37) tira-se que o seu número de linhas é igual ao número de coordenadas globais e o número de colunas igual ao número de coordenadas globais vinculadas. Cada coluna será composta de elementos nulos com exceção de uma posição que será unitária e identificada pelo número da coordenada global vinculada. Portanto, conhecendo-se os nós que estão ligados ao sistema de apoio e a vinculação de suas coordenadas globais, determina-se $[N]$ como será visto mais adiante, em exemplos.

A equação (4.24), dada em termos da barra genérica i , pode ser reescrita para a estrutura como um todo, tornando-se:

$$\{P_g\} = [\gamma_g] \{P\} \quad (4.39)$$

onde:

$$[\gamma_g] = \begin{bmatrix} [\gamma_g]_1 & \dots & [0] & \dots & [0] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [0] & \dots & [\gamma_g]_i & \dots & [0] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [0] & \dots & [0] & \dots & [\gamma_g]_m \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} (P)_1 \\ \vdots \\ (P)_i \\ \vdots \\ (P)_m \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

Substituindo-se (4.37) e (4.39) em (4.36), tem-se:

$$[\beta_g]^t [\gamma_g] \{P\} + [N] \{F_r\} = \{F\} \quad (4.42)$$

Esta equação é idêntica à (4.8), onde a matriz [M] vale:

$$[M] = [\beta_g]^t [\gamma_g] \quad (4.43)$$

Desta forma, a matriz [E], dada por (4.10), fica determinada e, conseqüentemente, tem-se as relações de equilíbrio gerais para toda a estrutura.

4.5 Estudo das relações de equilíbrio gerais para um pórtico plano

Aproveitando-se todo o desenvolvimento teórico feito nas seções anteriores para a barra genérica i , o passo seguinte é extendê-lo ao estudo dos pórticos planos, visando-se, num último instante, obter suas relações independentes de equilíbrio.

4.5.1 Definição da estrutura

Todo este trabalho está baseado no estudo de estruturas formadas por pórticos planos de nós rígidos.

Cada pórtico é constituído por um conjunto de elementos, denominados de barras, unidos entre si. Os pontos da barra possíveis de se unirem a outras barras são chamados de extremidades. Os pontos de união entre barras são denominados de nós da estrutura. As extremidades das barras que estão ligadas ao sistema de apoio do pórtico serão também identificadas como nós.

Supondo-se que a estrutura, contínua e de nós rígidos, seja constituída de m barras e n nós, numerados sequencialmente a partir de 1, defini-la implicaria em determinar a posição dos n nós no plano da estrutura, a incidência das m barras que unem os seus nós, a vinculação externa e as coordenadas globais carregadas.

Para facilitar a definição da posição dos nós, será estabelecido um sistema global de referência, $O \bar{X} \bar{Y} \bar{Z}$, dextrorso, com uma origem O qualquer. Este sistema é o mesmo citado na seção 4.3 quando do estudo da barra i ; veja figura 4.7. Admite-se que a estrutura esteja contida no plano $O \bar{X} \bar{Y}$. A posição dos n nós será definida pelas suas coordenadas segundo os eixos \bar{X} e \bar{Y} do sistema global de referência.

Conhecidas as posições dos nós, torna-se fácil definir a incidência das m barras; para isto, é necessário que se identifique os índices dos nós associados a cada uma das extremidades das barras. Com o objetivo de facilitar a programação, cada barra terá uma orientação, isto é, será definindo um nó inicial e um nó final. Desta forma, para uma barra genérica i o seu nó inicial será identificado por J e o seu nó final por K .

A figura 4.9 mostra um pórtico plano genérico, constituído por m barras e n nós. Localizando-se este pórtico no plano $O \bar{X} \bar{Y}$, torna-se extremamente simples defini-lo quanto à posição dos nós, incidência e orientação das barras.

Cada nó terá três coordenadas globais correspondentes aos seus três graus de liberdade. A numeração destas coordenadas obedecerá à mesma sequência de numeração dos nós; a primeira coordenada é aquela cuja

orientação é idêntica à do eixo \bar{X} , a segunda à do eixo \bar{Y} e a terceira à do eixo \bar{Z} . Tomando-se como exemplo a barra i da figura 4.9, os índices das coordenadas globais referentes aos nós J e K de suas extremidades são mostrados na tabela 4.1.

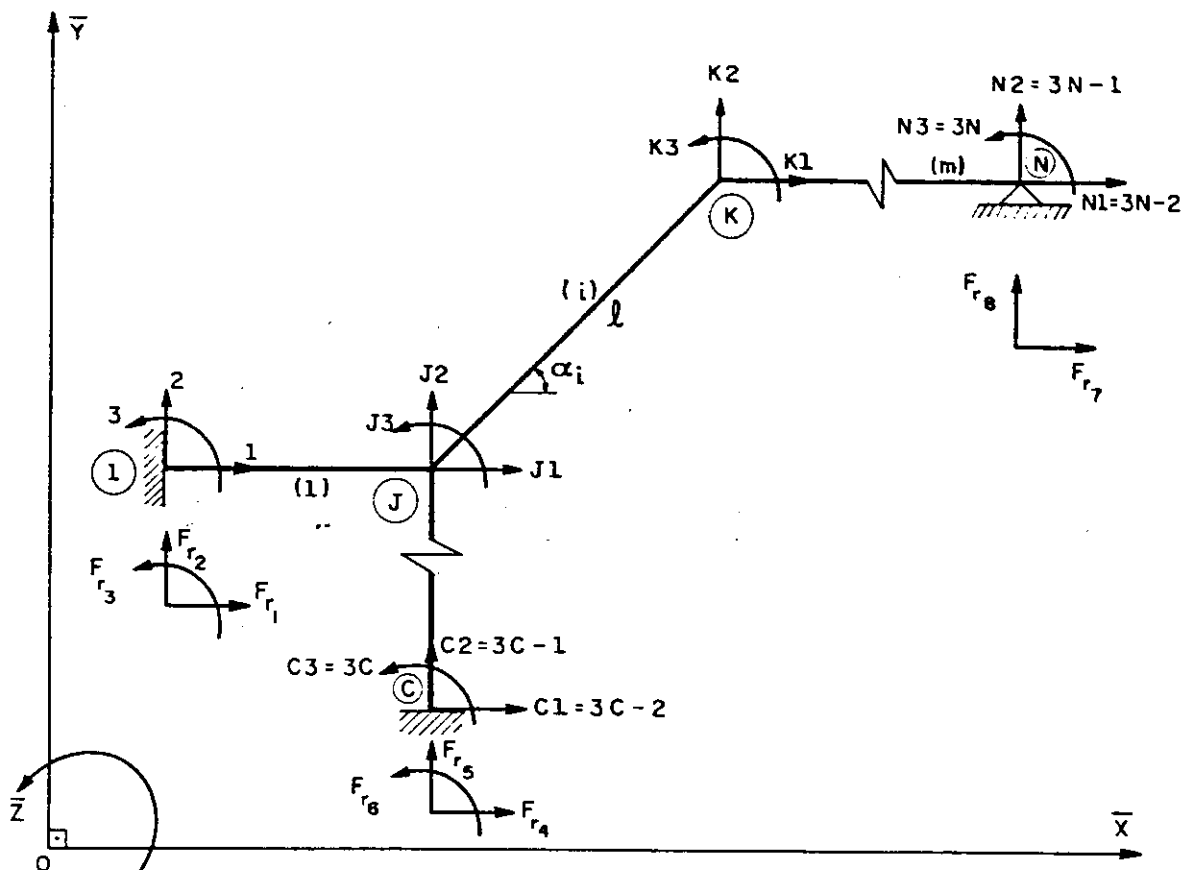


Fig. 4.9 Pórtico plano qualquer.

Tabela 4.1 índices das coordenadas globais para os nós da barra i .

DIREÇÃO SEGUNDO O EIXO GLOBAL	Nó J	Nó K
\bar{X}	$J1 = 3J - 2$	$K1 = 3K - 2$
\bar{Y}	$J2 = 3J - 1$	$K2 = 3K - 1$
\bar{Z}	$J3 = 3J$	$K3 = 3K$

4.5.2 Numeração das coordenadas locais das barras para as componentes do vetor $(P)_i$.

No início da seção 4.3, figura 4.5.a, estabeleceu-se para a barra i o sistema independente de coordenadas locais associadas à barra no qual foram escritas as componentes do vetor $(P)_i$.

Cada barra terá três coordenadas locais localizadas de acordo com a figura 4.5.a. Para facilitar o algoritmo que obterá as relações independentes de equilíbrio, primeiro serão numeradas todas as coordenadas locais relacionadas aos esforços axiais. Essa numeração obedecerá a mesma sequência de numeração das barras, indo de $\underline{1}$ a \underline{m} . Em seguida, serão numeradas as duas outras coordenadas que relacionam-se com os momentos fletores, sendo que a primeira delas corresponderá ao nó inicial da barra e a segunda ao seu nó final. Dessa forma, os índices dos três esforços para a barra genérica i da figura 4.9 serão:

$$\begin{aligned} i_1 &= i \\ i_2 &= 2i + m - 1 \\ i_3 &= 2i + m \end{aligned} \quad (4.44)$$

A figura 4.10 mostra as respectivas posições das componentes de $(P)_i$ para a barra i .

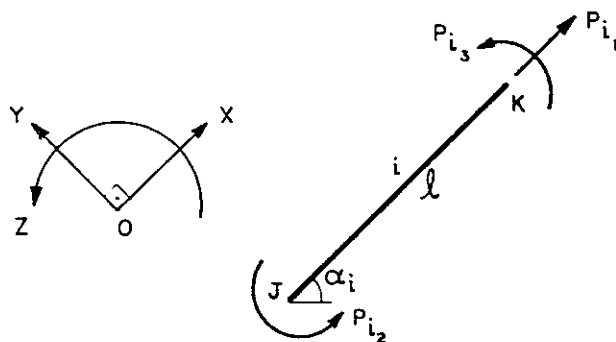


Fig. 4.10 Posições das componentes do vetor $(P)_i$.

4.5.3 Determinação da matriz $[\beta_g]$

A matriz de incidência cinemática $[\beta_g]$ foi introduzida no início da seção 4.4; ela relaciona os deslocamentos nas coordenadas locais associadas ao sistema global de referência com os deslocamentos nas coordenadas globais, conforme (4.27).

Com a estrutura definida, torna-se extremamente simples gerar a matriz $[\beta_g]$. Essa matriz pode ser subdividida em n submatrizes como mostra (4.29). Tomando-se a barra i da figura 4.9 como exemplo, de (4.27) obtém-se:

$$(\delta_g)_i = [\beta_g]_i \{u\} \quad (4.45)$$

Nota-se que a ordem de $[\beta_g]_i$ é $(6 \times 3n)$. Observando-se as figuras 4.7 e 4.9, pode-se gerar esta matriz que é dada por:

$$[\beta_g]_i = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & J_1 & J_2 & J_3 & & K_1 & K_2 & K_3 & & N_1 & N_2 & N_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_i \end{matrix}$$

$\overline{\hspace{2cm}}$
Nó 1

$\overline{\hspace{2cm}}$
Nó J

$\overline{\hspace{2cm}}$
Nó K

$\overline{\hspace{2cm}}$
Nó N

(4.46)

Procedendo-se analogamente para todas as outras barras, tem-se a matriz $[\beta_g]$ da estrutura. Observa-se de (4.46) que é muito importante conhecer os índices das coordenadas globais dos nós inicial e final de cada barra; estes são dados na tabela 4.1.

4.5.4 Determinação da matriz [M]

A matriz [M] foi obtida no final da seção 4.4, sendo dada por (4.43). De (4.29) e (4.40) em (4.43), tem-se:

$$[M] = \begin{bmatrix} [\beta_g]_1^t & \dots & [\beta_g]_i^t & \dots & [\beta_g]_m^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\gamma_g]_1 & \dots & [0] & \dots & [0] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [0] & \dots & [\gamma_g]_i & \dots & [0] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [0] & \dots & [0] & \dots & [\gamma_g]_m \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

e, portanto,

$$[M] = \sum_{s=1}^m [\beta_g]_s^t [\gamma_g]_s \quad (4.48)$$

A ordem de [M] é (3n X 3m). Essa matriz é obtida somando-se as contribuições de cada barra, de acordo com a (4.48). A contribuição da barra \underline{s} para a geração da matriz [M] é dada por (4.48) ao multiplicar-se a transposta de $[\beta_g]_s$, da (4.46), por $[\gamma_g]_s$, da (4.26); observe-se que os índices 1, 2 e 3 que aparecem acima das colunas, em (4.26), são substituídos, respectivamente, por i_1 , i_2 e i_3 dados pelas (4.44); esses índices indicam as colunas de [M] onde serão colocados os elementos de $[\gamma_g]_i$ nas linhas correspondentes às coordenadas globais dos nós J e K da barra i , como mostra o esquema a seguir:

Observe-se pela figura 4.9 que a numeração das reações complementares deve seguir a mesma sequência de numeração das coordenadas globais, ou seja, o primeiro índice corresponde à direção global \bar{X} , o segundo à \bar{Y} e o terceiro à \bar{Z} .

4.5.6 Exemplo de aplicação

Para finalizar este estudo das relações de equilíbrio gerais, pretende-se nesta seção obter tais relações para um pórtico plano simples com o objetivo de aplicar os conhecimentos adquiridos nas seções anteriores. Várias considerações que serão feitas aqui servirão para a próxima seção onde se descreve o algoritmo para obtenção das relações independentes de equilíbrio.

Antes de partir para o exemplo, seja a barra genérica i da figura 4.9. Posicionando-a no sistema de eixos globais através das coordenadas de seus nós J e K , torna-se fácil obter as equações dos seus cossenos diretores e do seu comprimento l como mostra a figura 4.11.

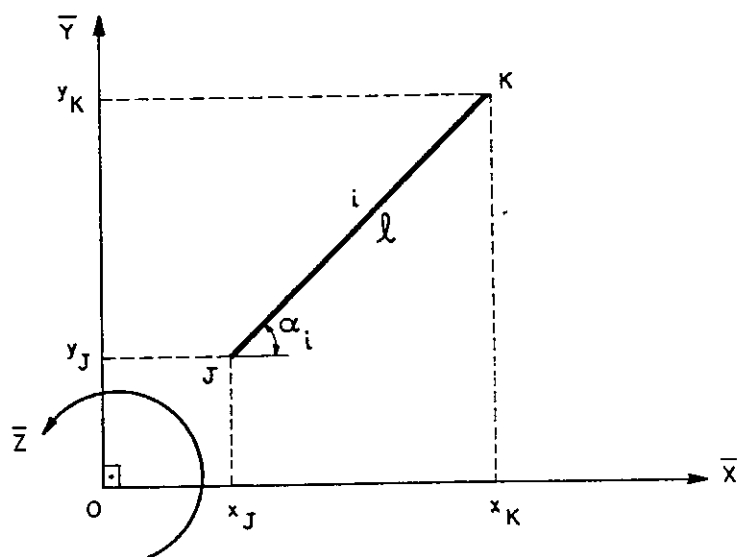


Fig. 4.11 Posicionamento da barra i no sistema global de referência.

Pela figura 4.11 tem-se:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_i &= \frac{x_K - x_J}{l} \\ \sin \alpha_i &= \frac{y_K - y_J}{l} \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$l = \sqrt{(x_K - x_J)^2 + (y_K - y_J)^2}$$

Seja o pórtico plano da figura 3.3.a, analisado na seção 3.1 e transcrito para a figura 4.12. O objetivo é determinar as suas relações de equilíbrio gerais.

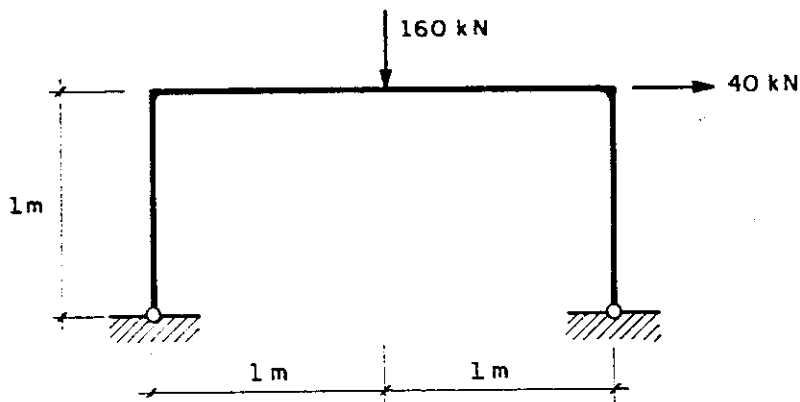


Fig 4.12 Pórtico plano analisado na seção 3.1.

A figura 4.13 mostra o posicionamento do pórtico da figura 4.12 no plano $O \bar{X} \bar{Y}$. O número de barras é igual a 4 e o de nós igual a 5, correspondendo aos possíveis pontos onde poderão formar-se rótulas plásticas. O vetor $(P)_i$ definido na figura 4.5.b possui duas componentes que se relacionam com os momentos fletores nas extremidades da barra i . Desta forma, inicialmente considera-se que haja duas posições possíveis de se formar rótulas plásticas para cada barra; uma por extremidade. Já objetivando a programação, inicialmente suponha-se que haja momentos

fletores nas extremidades das barras (1) e (4) ligadas ao sistema de apoio, como se verá, existirão duas relações de equilíbrio que indicarão que os momentos flectores nessas posições serão nulos. As relações de equilíbrio serão escritas segundo as 15 coordenadas globais definidas na figura 4.13.

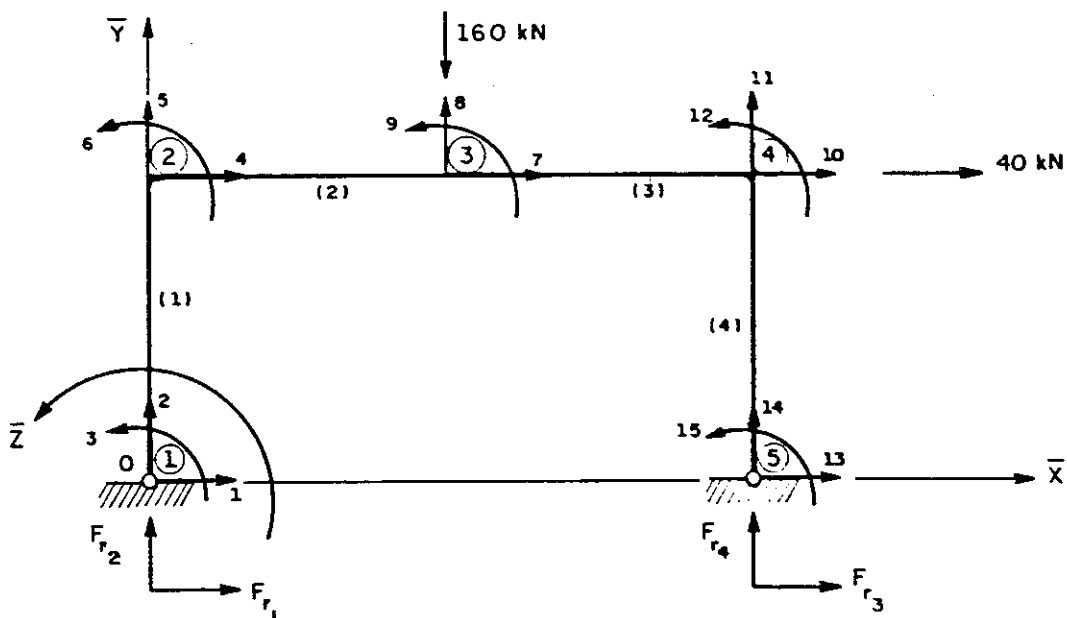


Fig. 4.13 Posição do pórtico no plano $O \bar{X} \bar{Y}$.

As componentes do vetor (P) são mostradas na figura 4.14 por setas cheias, nas suas respectivas posições, conforme estabelecido na seção 4.5.2. As setas em tracejado representam os esforços resultantes do equilíbrio de cada barra devidos à aplicação destas componentes.

Definida a estrutura, o próximo passo é a determinação da matriz $[\gamma_g]_i$ dada por (4.26) para cada barra. Tomando-se a barra (1) como exemplo, os seus nós inicial e final são 1 e 2, respectivamente, conforme figura 4.14; com isto, de (4.51) tem-se:

$$\cos \alpha_1 = 0 \qquad \sin \alpha_1 = 1 \qquad l = 1$$

De (4.26) obtém-se:

$$[\gamma_g]_2 = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & \\ J1 & \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] & \left. \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \right\} \\ K1 & & & & 7 \\ K2 & & & & 8 \\ K3 & & & & 9 \\ & 2 & 7 & 8 & \end{matrix}$$

$$[\gamma_g]_3 = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & \\ J1 & \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] & \left. \begin{array}{l} 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \right\} \\ K1 & & & & 10 \\ K2 & & & & 11 \\ K3 & & & & 12 \\ & 3 & 9 & -10 & \end{matrix}$$

$$[\gamma_g]_4 = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & \\ J1 & \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] & \left. \begin{array}{l} 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \right\} \\ K1 & & & & 13 \\ K2 & & & & 14 \\ K3 & & & & 15 \\ & 4 & 11 & 12 & \end{matrix}$$

Desta forma, a matriz [M] fica determinada. Já a matriz [N] é facilmente obtida, conforme a seção 4.5.5, ao observar-se na figura 4.13 quais são as coordenadas globais que recebem as reações complementares. Da mesma forma, o vetor {F} é obtido identificando-se quais as coordenadas globais que têm ações aplicadas; as demais posições deste vetor são nulas. De (4.9), tem-se que as relações de equilíbrio gerais são expressas matricialmente por:

COEFICIENTES QUE MULTIPLICAM:																
ESFORÇOS AXIAIS				MOMENTOS FLETORES								REAÇÕES COMPL.				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	-1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	1	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
11	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	1	0
14	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

[M]

[E]

[N]

(P*)

P₁

P₂

P₃

P₄

P₅

P₆

P₇

P₈

P₉

P₁₀

P₁₁

P₁₂

F_{r1}

F_{r2}

F_{r3}

F_{r4}

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -160 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4.52)

Os elementos da matriz $[M]$ destacados na equação (4.52) são aqueles das matrizes $[\gamma_g]_{(i)}$ calculados acima. Essa disposição dos elementos da matriz $[E]$ guarda certas características importantes que serão exploradas na elaboração do programa apresentado no final deste trabalho.

Observe-se que a terceira e a décima quinta relações de equilíbrio de (4.52) expressam a nulidade dos momentos fletores nos nós 1 e 5, respectivamente.

Analisando-se as figuras 4.13 e 4.14, pode-se entender melhor todo este procedimento de obtenção das relações de equilíbrio feito neste capítulo. Por exemplo, tomando-se a coordenada global de número 8, a relação de equilíbrio escrita segundo esta direção expressa o equilíbrio dos esforços cortantes $(P_7 + P_8)$ e $(P_9 + P_{10})$ nas extremidades das barras (2) e (3), respectivamente, conforme figura 4.14, com a ação de 160 KN, conforme figura 4.13. Desta forma, somando-se algebricamente as componentes dos esforços nas extremidades das barras segundo as direções das coordenadas globais, com as reações complementares aplicadas nestas coordenadas globais e igualando-as às correspondentes componentes das ações, obtém-se as relações de equilíbrio da estrutura, como já frisado no início da seção 4.2.

4.6 Obtenção das relações independentes de equilíbrio

Nas seções anteriores foram vistos todos os procedimentos necessários para a obtenção das relações de equilíbrio gerais. De posse dessas relações, o objetivo final é extrair delas as relações independentes de equilíbrio envolvendo apenas as ações e os momentos fletores nas seções transversais críticas. Pretende-se nesta seção dar o desenvolvimento teórico do algoritmo que obtém essas relações independentes de equilíbrio.

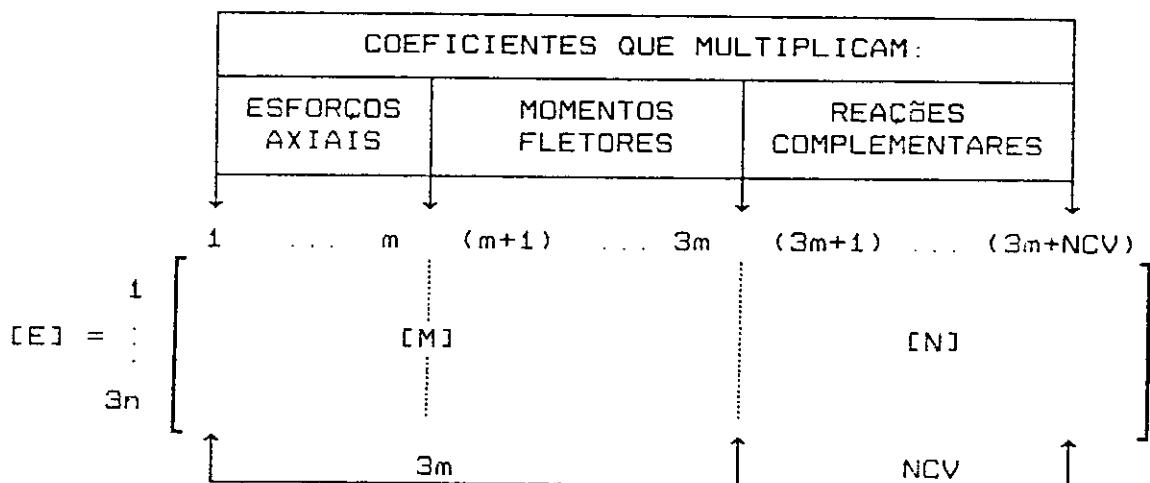
Supondo-se um pórtico plano com um grau hiperestático h e com n_r posições possíveis de se formarem rótulas plásticas, o número n_i de relações independentes de

equilíbrio deste pórtico é dado por:

$$n_i = n_r - h \quad (4.53)$$

Estas n_i relações envolvem o equilíbrio dos momentos fletores nas possíveis posições de se formarem rótulas plásticas com o carregamento externo. Elas expressam equações de trabalho de mecanismos independentes de nós, de vigas e laterais, como foi visto nos exemplos dados no capítulo 3. Aplicando-se (4.53) ao pórtico da figura 4.12, tem-se que $n_i = 7$.

Seja um pórtico plano com m barras e n nós. Devido aos sistemas de coordenadas definidos anteriormente, os elementos da matriz $[E]$, equação (4.10), possuem certas características de armazenamento muito importantes. Os coeficientes que multiplicam os esforços axiais, momentos fletores e reações complementares ocupam posições bem definidas dentro de $[E]$, como pode ser visto em (4.52). De uma forma geral, tem-se o esquema da figura 4.15.



onde NCV é o número de coordenadas globais vinculadas.

Fig. 4.15 Esquema de armazenamento da matriz $[E]$

As $3n$ relações de equilíbrio podem ser reunidas em três grupos de acordo com os tipos de esforços que elas envolvem. Tomando-se como base o exemplo da seção 4.5.6, de (4.52), estes grupos são

a) Grupo I:

Características principais.

- Envolvem o equilíbrio dos momentos fletores atuantes nos nós.
- As únicas componentes do vetor $\{P^*\}$ que aparecem são aquelas correspondentes aos momentos fletores nas extremidades das barras.
- Os elementos da matriz $[E]$ para as relações deste grupo estão localizados nas colunas que vão desde $(m+1)$ até $(3m)$; os elementos relacionados aos esforços axiais e reações complementares são todos nulos.
- Todas as relações de equilíbrio pertencentes a este grupo já fazem parte das relações independentes de equilíbrio e correspondem a mecanismos independentes de nós.

De acordo com a sequência de numeração das coordenadas globais, apresentada na seção 4.5.1, a identificação das relações de equilíbrio deste grupo é imediata. Cada linha de $[E]$ associa-se a uma coordenada global segundo a qual é escrita uma relação de equilíbrio; portanto, para um nó J genérico não vinculado, basta selecionar a linha correspondente à sua coordenada global cuja direção coincide com a do eixo global \bar{Z} . Pela tabela 4.1, esta coordenada é dada por $3J$. Desta forma, para o exemplo da seção 4.5.6 tem-se de (4.52) que as relações de equilíbrio correspondentes às linhas 6, 9 e 12 são independentes e dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} P_6 + P_7 &= 0 \\ P_8 + P_9 &= 0 \\ P_{10} + P_{11} &= 0 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Se o nó J estiver ligado a algum apoio, é necessário verificar a vinculação de sua terceira coordenada global. Caso esta coordenada seja vinculada, a relação de equilíbrio correspondente não fará parte deste grupo, do contrário, a relação de equilíbrio pertencerá ao grupo I e será independente. No exemplo da figura 4.13, as coordenadas globais 3 e 15, correspondentes aos nós 1 e 5, respectivamente, não são vinculadas; portanto, as relações de equilíbrio 3 e 15 de (4.52) são independentes, sendo dadas por:

$$\begin{aligned} P_3 &= 0 \\ P_{12} &= 0 \end{aligned} \tag{4.55}$$

b) Grupo II:

Características principais:

- Relações de equilíbrio que envolvem somente as componentes do vetor $\{P\}$, ou seja, esforços axiais e momentos fletores.
- Os elementos de $[N]$ correspondentes às relações de equilíbrio deste grupo são nulos.
- As relações de equilíbrio são escritas segundo as coordenadas globais cujas direções coincidem com os eixos globais \bar{X} e \bar{Y} .

A identificação das relações de equilíbrio deste grupo é muito simples de relacionar à numeração das coordenadas globais. Os números das coordenadas globais cujas direções coincidem com os eixos \bar{X} e \bar{Y} para um determinado nó J são $(3J-2)$ e $(3J-1)$, respectivamente, conforme a tabela 4.1. Sendo o nó J não vinculado, as duas relações de equilíbrio segundo os eixos \bar{X} e \bar{Y} fazem parte do grupo II. Desta forma, para o exemplo proposto anteriormente, tem-se, de (4.52):

$$\begin{aligned} \text{Nó } 2 & \begin{cases} -P_2 + P_5 + P_6 = 0 \\ P_1 + P_7 + P_8 = 0 \end{cases} \\ \text{Nó } 3 & \begin{cases} P_2 - P_3 = 0 \\ -P_7 - P_9 + P_9 + P_{10} = -160 \end{cases} \quad (4.56) \\ \text{Nó } 4 & \begin{cases} P_3 + P_{11} + P_{12} = 40 \\ P_4 - P_9 - P_{10} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Se o nó J for vinculado, torna-se necessário verificar a vinculação de suas coordenadas globais (3J-2) e (3J-1). Caso estas coordenadas não sejam vinculadas, as relações de equilíbrio correspondentes farão parte do grupo II; do contrário, não pertencerão a este grupo.

c) Grupo III:

Características principais:

- Relações de equilíbrio que envolvem tanto as componentes do vetor (P) quanto de (F_r).
- São as relações de equilíbrio correspondentes às coordenadas globais vinculadas.

Conhecendo-se os nós ligados aos apoios e as suas vinculações segundo as coordenadas globais, a identificação das relações de equilíbrio deste grupo é imediata. Se houver vínculo segundo uma determinada coordenada global, a correspondente relação de equilíbrio fará parte do grupo III; caso contrário, esta relação já pertencerá a um dos grupos anteriores. Para o exemplo da figura 4.13, tem-se de (4.52):

$$\begin{aligned} \text{Nó } 1 & \begin{cases} -P_5 - P_6 + F_{r1} = 0 \\ -P_1 + F_{r2} = 0 \end{cases} \quad (4.57) \end{aligned}$$

ou, de forma geral,

$$[A] \{P^*\} = \{B1\} \quad (4.60)$$

onde $[A]$ e $\{B1\}$ estão definidos em (4.59).

Observe-se que os elementos da matriz auxiliar $[A]$ guardam as mesmas características de armazenamento dos da matriz $[E]$ esquematizada na figura 4.15.

Como as relações independentes de equilíbrio necessárias para o estudo do método das rótulas plásticas só envolvem momentos fletores e ações, torna-se necessário trabalhar com as relações (4.59) de tal forma que se consigam as relações independentes de equilíbrio restantes.

Pela disposição dos coeficientes das relações de equilíbrio do grupo II em (4.59), se for possível isolar nessas relações cada esforço axial em função dos momentos fletores e substituindo-o nas demais relações de equilíbrio, vai-se chegar a uma determinada situação em que se terá três conjuntos de relações de equilíbrio: um, em que só estarão envolvidos esforços axiais e momentos fletores; outro, que relacionará somente momentos fletores e, por fim, um conjunto de relações de equilíbrio que envolverá momentos fletores e reações complementares. As relações que só envolvem momentos fletores são as que faltavam para completar as relações independentes de equilíbrio.

Esta nova divisão das relações de equilíbrio dos grupos II e III é obtida ao aplicar-se a eliminação de Gauss em (4.59) até atingir a m -ésima coluna de $[A]$. Se numa determinada coluna o elemento pivô for nulo, faz-se uma pesquisa nos elementos desta coluna localizados nas linhas abaixo da posição do pivô e encontrando-se um elemento não nulo procede-se uma troca de linhas. No caso do exemplo dado, para iniciar-se a eliminação de Gauss é necessário trocar a primeira linha de (4.59) pela segunda; no final, terminada a eliminação de Gauss, tem-se a seguinte disposição de relações de equilíbrio:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \dots & 13 & 14 & 15 & 16 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 P_1 \\
 P_2 \\
 P_3 \\
 P_4 \\
 P_5 \\
 P_6 \\
 P_7 \\
 P_8 \\
 P_9 \\
 P_{10} \\
 P_{11} \\
 P_{12} \\
 F_{r1} \\
 F_{r2} \\
 F_{r3} \\
 F_{r4}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \boxed{40} \\
 \boxed{-160} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}
 \tag{4.61}$$

Observe-se que os três conjuntos de relações de equilíbrio citados a pouco estão bem identificados em (4.61), ou seja, as quatro relações iniciais envolvem somente esforços axiais e momentos fletores; as duas relações destacadas só envolvem momentos fletores e, por fim, nas quatro últimas relações aparecem somente momentos fletores e reações complementares. Portanto, o conjunto de relações de equilíbrio destacadas em (4.61) são as duas relações independentes de equilíbrio que faltavam para o

exemplo em estudo; são elas.

$$\begin{aligned} P_5 + P_6 + P_{11} + P_{12} &= 40 \\ -P_7 - P_8 + P_9 + P_{10} &= -160 \end{aligned} \quad (4.62)$$

Observe-se que estas relações saíram do grupo II após a aplicação da eliminação de Gauss. Em termos de programação para computador dos problemas envolvendo o método das rótulas plásticas, não será necessário trabalhar-se com as relações de equilíbrio do grupo III para a obtenção das relações independentes de equilíbrio. Com (4.54), (4.55) e (4.62) têm-se as 7 relações independentes de equilíbrio para o pórtico da figura 4.12.

De uma forma geral, as relações independentes de equilíbrio de um pórtico plano serão obtidas como descrito para o exemplo acima. Toda esta teoria desenvolvida neste capítulo é requisito fundamental para a automatização da resolução dos problemas de análise e síntese no método das rótulas plásticas. O algoritmo descrito teoricamente nesta seção para a obtenção das relações independentes de equilíbrio do pórtico plano da figura 4.12 faz parte do software apresentado no final deste trabalho, correspondendo à sub-rotina EQUIL.

CAPÍTULO 5

NOÇÕES BÁSICAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

5.1 Considerações iniciais

A programação linear é uma área da otimização largamente empregada na formulação de problemas de decisão, nas áreas econômica, financeira, administrativa e da organização em geral, os quais podem ser modelados matematicamente através de expressões lineares. Sua grande difusão se deve tanto à versatilidade que essa área possui em representar um amplo conjunto de problemas reais, bem como eficientes métodos numéricos de resolução, por exemplo o método simplex.

Além das áreas já citadas, a otimização de alguns problemas estruturais podem ser formulados como problemas de programação linear, entre eles, os problemas de análise e síntese no método das rótulas plásticas, objeto de estudo deste trabalho. Pretende-se neste capítulo dar as noções básicas que envolvem a programação linear para, no próximo, mostrar que cada um dos problemas apresentados no capítulo 3 resume-se num problema de programação linear. As formulações e os conceitos desenvolvidos aqui são requisitos fundamentais para o entendimento do programa apresentado no final do trabalho; a sub-rotina SIMPLEX está toda baseada neste capítulo.

Desta forma, o objetivo principal deste capítulo é tanto familiarizar o leitor com a nomenclatura própria da programação linear, como apresentar um processo de resolução de um problema de programação linear, método simplex, para posterior programação em computadores. Todo o estudo desenvolvido aqui está baseado em [11] e [12].

5.2 Modelagem de um problema de programação linear

Um Problema de Programação Linear (PPL) apresenta-se na forma de minimização ou maximização de uma função linear sujeita a restrições lineares do tipo inequações e/ou equações.

Um exemplo típico de um PPL é o problema de se determinar uma dieta alimentar econômica. Seja o exemplo dado por Puccini em [13] em que uma determinada pessoa é forçada pelo seu médico a fazer uma dieta alimentar que forneça, diariamente, pelo menos as seguintes quantidades de vitaminas A, B, C e D:

VITAMINAS	QUANTIDADE MÍNIMA DIÁRIA (mg)
A	80
B	70
C	100
D	60

A dieta deverá incluir leite, arroz, feijão e carne, que contêm os seguintes miligramas de vitaminas em cada uma das suas unidades de medidas:

VITAMINAS	ALIMENTOS			
	LEITE (ℓ)	ARROZ (Kg)	FEIJÃO (Kg)	CARNE (Kg)
A	10	5	9	10
B	8	7	6	6
C	15	3	4	7
D	20	2	3	9

Os custos unitários desses alimentos são os seguintes:

- Leite - \$ 1,00/ℓ
- Arroz - \$ 0,80/Kg
- Feijão - \$ 1,20/Kg
- Carne - \$ 3,50/Kg

Deseja-se saber o consumo diário de cada um desses alimentos de tal maneira que a dieta satisfaça as prescrições médicas e seja a de menor custo possível.

O primeiro passo para a solução do problema consiste em escrevê-lo em linguagem matemática. Sejam x_j ($j = 1, 2, 3, 4$) as quantidades de leite, arroz, feijão e carne, respectivamente, que devem entrar diariamente na dieta prescrita acima. Este problema pode ser modelado como se segue:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & x_1 + 0,8x_2 + 1,2x_3 + 3,5x_4 \\ \text{Sujeito a } & 10x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 \geq 80 \\ & 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 6x_4 \geq 70 \\ & 15x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \geq 100 \\ & 20x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 \geq 60 \\ & x_j \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

De uma maneira geral, um PPL com m restrições lineares e n variáveis pode ser modelado na forma seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ \text{Sujeito a } & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.2.1 Definições básicas

Com a modelagem de um PPL dada em termos gerais por (5.1) e convencionando-se que as matrizes e vetores serão destacados no texto em **negrito**, reservando-se as letras maiúsculas para matrizes e as minúsculas para vetores, tem-se as seguintes definições básicas que serão amplamente usadas ao longo deste capítulo:

a) **Função objetivo:** - É a função linear a ser minimizada ou maximizada, sendo indicada por Z . Identificando-se Z em (5.1), tem-se:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \tag{5.2}$$

b) **Custos:** - São os coeficientes c_1, c_2, \dots, c_n que aparecem na função objetivo dada por (5.2). Eles devem ser conhecidos previamente e constituem as componentes do vetor custo, indicado por C , ou seja:

$$C = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

c) Variáveis: - São as incógnitas do problema a serem determinadas. Elas formam um vetor, denominado vetor das variáveis, indicado por x . Para o problema (5.1), tem-se:

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

d) Restrições: - Constituem um sistema linear de igualdades e/ou desigualdades que devem ser verificadas pelos valores das variáveis. A i -ésima restrição de (5.1) pode ser indicada por:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (5.5)$$

e) Coeficientes tecnológicos: - São os coeficientes a_{ij} de (5.5). Estes coeficientes formam uma matriz, denominada matriz dos coeficientes, indicada por A , sendo dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

f) Vetor B : - é o vetor cujas componentes são os coeficientes independentes b_i de (5.1) que representam as exigências mínimas deste problema, B é dado por:

$$B = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

g) Restrições de não negatividade: - São as exigências de que as variáveis do problema devem ser positivas, ou seja:

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.8)$$

h) Ponto (ou vetor) viável: - É um conjunto de variáveis x_1, x_2, \dots, x_n que satisfazem todas as restrições. Cada ponto com esta característica constitui uma solução viável para o problema.

i) Região (ou espaço) viável: - É o conjunto de todos os pontos, ou soluções, viáveis.

j) Solução ótima: - É a melhor de todas as soluções, isto é, além de verificar as restrições, ela minimiza ou maximiza a função objetivo.

5.3 Solução geométrica de um PPL

Pretende-se nesta seção ilustrar o procedimento geométrico para solução de um PPL. Desde já, vale ressaltar que o processo de solução geométrica de um PPL é restrito a poucos problemas, devido à dificuldade de representação geométrica, como se verá ao longo da seção. Entretanto, algumas observações, que podem ser tiradas mesmo quando da solução geométrica de um problema simples, serão de grande

valia na compreensão da solução algébrica de um PPL a ser desenvolvida adiante.

Seja o PPL seguinte,

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \quad (a) \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \quad (b) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

As restrições e a região viável do problema (5.9) estão ilustradas na figura 5.1. Os pontos desta figura situados nos lados indicados pelas setas das linhas (a) e (b) representam a primeira e a segunda restrições de (5.9), respectivamente. Devido às restrições de não negatividade, as soluções viáveis limitam-se ao primeiro quadrante da figura 5.1.

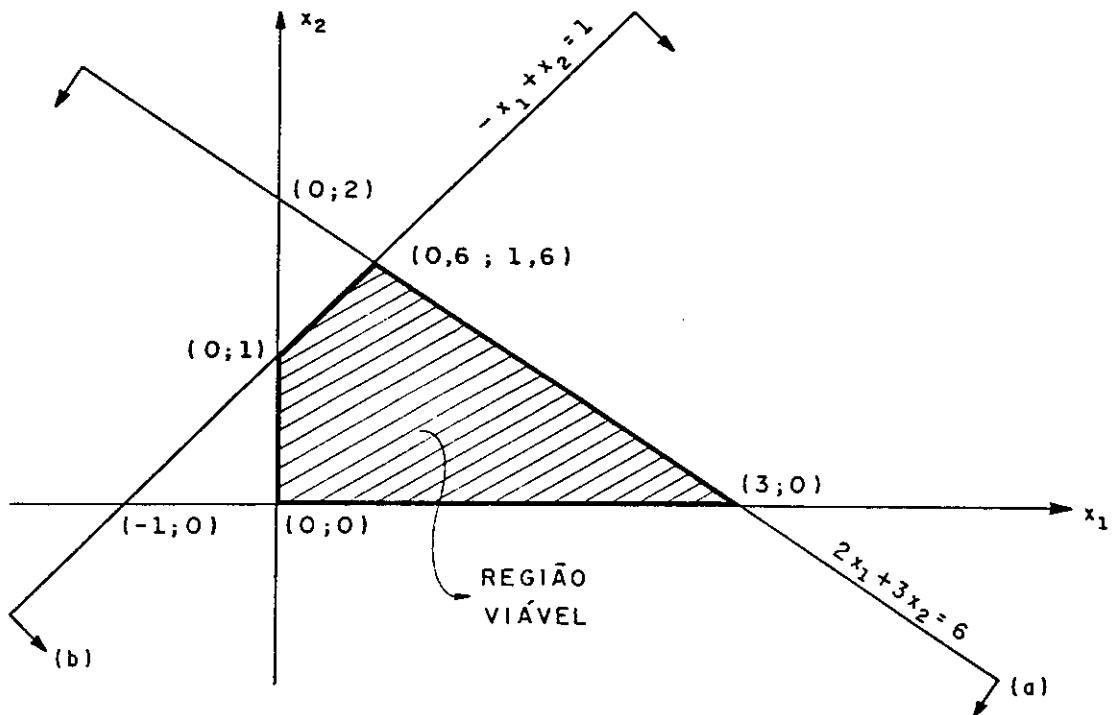


Fig. 5.1 Representação gráfica do PPL (5.9)

De (5.9), tem-se que a função objetivo a ser minimizada é:

$$Z = -x_1 - 3x_2 \quad (5.10)$$

O problema de otimização consiste em determinar um ponto pertencente à região viável da figura 5.1 que minimize a função objetivo (5.10). Este ponto será determinado geometricamente. Vale ressaltar que para alguns problemas a solução ótima pode ocorrer em infinitos pontos, como se verá oportunamente.

Seja o vetor da derivada parcial de Z em relação a cada componente do vetor x , dado por:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \left[\frac{\partial Z}{\partial x_1}, \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right] \quad (5.11)$$

De (5.10), tem-se

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = (-1, -3) = C^t \quad (5.12)$$

Como Z é uma função das componentes do vetor x , $\partial Z / \partial x$ é o seu gradiente; o vetor $(-1, -3)$ indica a direção de maior acréscimo na função Z. Observe-se de (5.12) que o gradiente é igual ao transposto do vetor custo.

Os pontos que possuem o mesmo valor para a função objetivo devem satisfazer a equação (5.2). Como se pretende minimizar Z, então o hiperplano $Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$, que no caso do problema em estudo é uma reta dada por (5.10), deve se mover, assumindo posições paralelas, tanto quanto possível na direção contrária à definida pelo gradiente, dada por (5.12). Este processo é ilustrado na figura 5.2, onde está representada a mesma região viável obtida na figura 5.1.

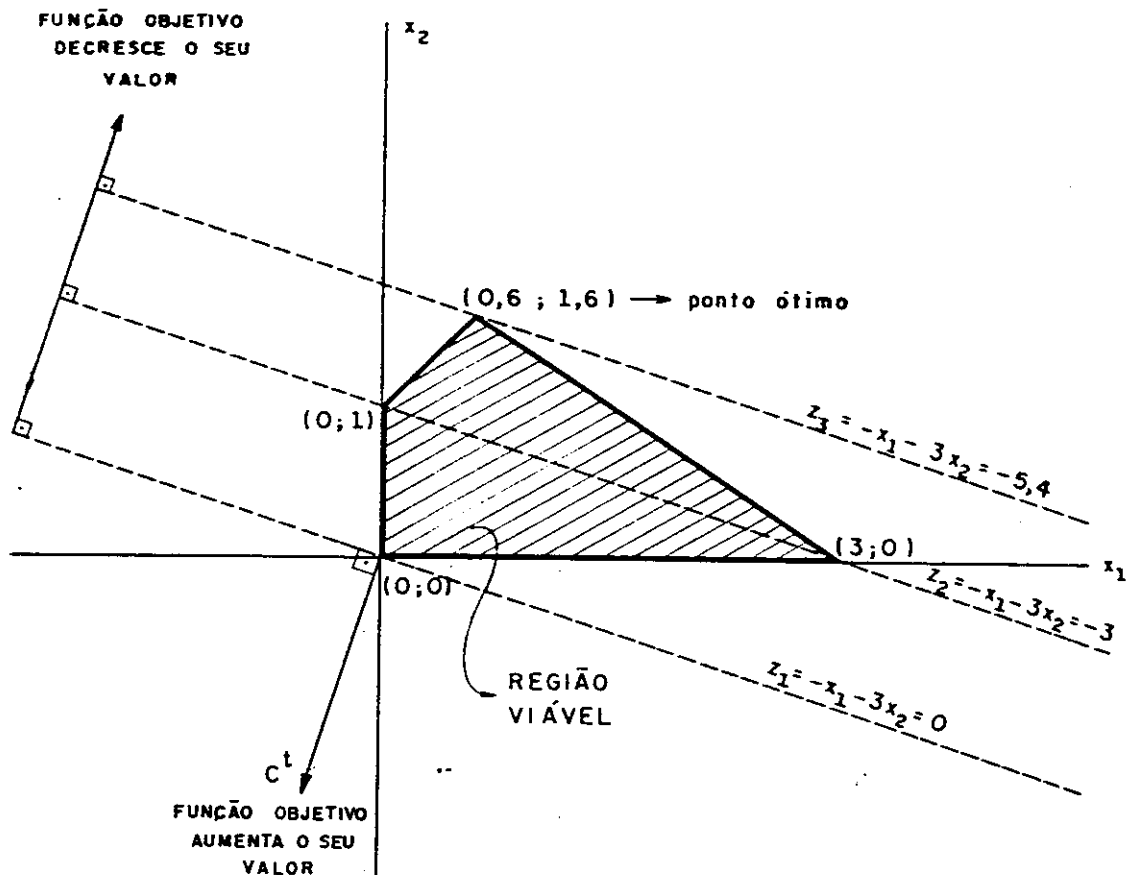


Fig. 5.2 Solução geométrica do PPL (5.9)

Pela figura 5.2, a solução ótima do problema proposto é representada pelo ponto $(0,6 ; 1,6)$, denominado ponto ótimo, que dá o valor mínimo de $-5,4$ para a função objetivo.

Observe-se que a solução ótima ocorreu num dos vértices do contorno da região viável. Isso não aconteceu por acaso. O conjunto de restrições de um PPL é um conjunto convexo. Os vértices deste conjunto, denominados pontos extremos e resultantes das interseções dos hiperplanos que delimitam a região viável, desempenham uma função importante no estudo de um PPL. Dado um PPL, se existir solução ótima, sempre existirá um ponto extremo ótimo correspondente. Geometricamente isto pode ser observado na figura 5.2. É possível demonstrar algebricamente tal

relação; entretanto, esta demonstração não será feita aqui, podendo ser encontrada em [11,12,13].

Esse processo geométrico é conveniente para problemas com duas variáveis, tornando-se impraticável para problemas com três ou mais variáveis; nesse caso é necessário um processo mais eficiente, que não envolva a representação gráfica dos problemas; um processo será dado na seção 5.5.

5.3.1 Identificação geométrica das soluções possíveis para um PPL

Para o PPL resolvido geometricamente acima, a sua solução ótima, conforme figura 5.2, deu-se num único ponto extremo. Dependendo da estrutura do problema, podem ocorrer outros casos de soluções. Todos os casos possíveis para um problema de minimização podem ser resumidos em:

a) Solução ótima única:

A solução ótima restringe-se a um único ponto extremo. Este tipo de solução é ilustrado pela figura 5.3 para região viável limitada ou ilimitada.

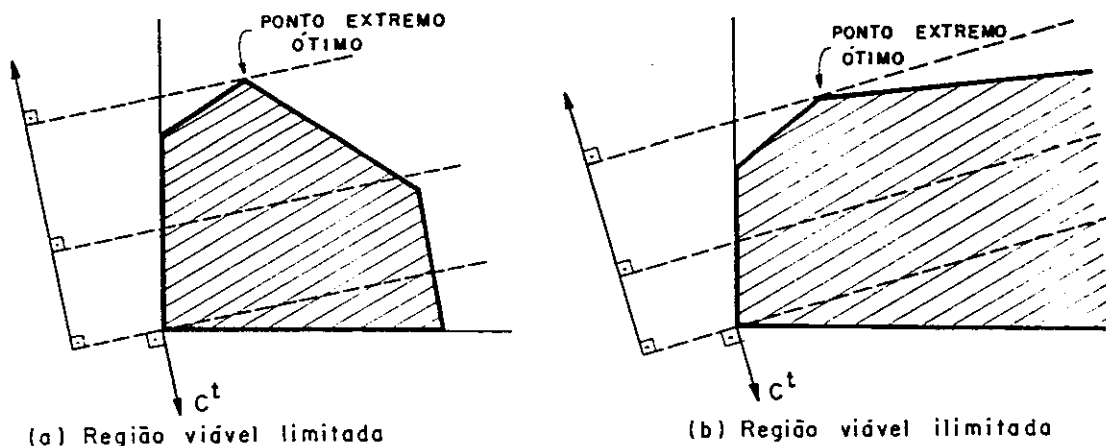


Fig. 5.3 Solução ótima única

b) Soluções ótimas múltiplas ou alternativas:

São aqueles casos em que o valor ótimo da função objetivo ocorre em infinitos pontos do contorno da região viável. A figura 5.4 ilustra este tipo de solução para região limitada ou ilimitada.

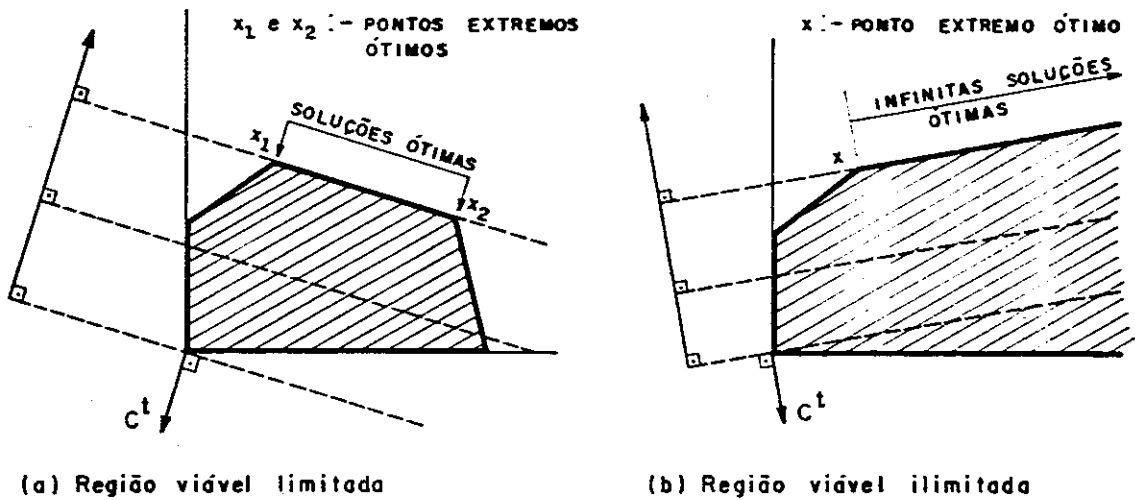


Fig. 5.4 Soluções ótimas múltiplas

c) Solução ótima ilimitada ou infinita:

Este caso é ilustrado na figura 5.5, onde tanto a região viável quanto a solução ótima são ilimitadas. O valor de Z tende a $-\infty$.

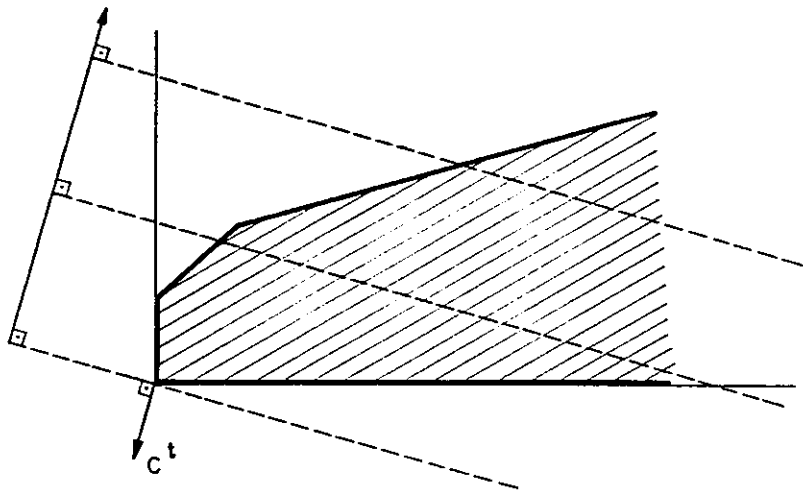


Fig. 5.5 Solução ótima ilimitada

d) Região viável vazia:

Neste caso, o sistema de equações e/ou inequações que define a região viável é inconsistente. Como exemplo, considere o PPL seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & -2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a } & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad (a) \\ & 2x_1 - x_2 \leq 3 \quad (b) \quad (5.13) \\ & x_2 \geq 4 \quad (c) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

A figura 5.6 ilustra a inconsistência do problema (5.13). Observe-se que as restrições não definem nenhuma região viável.

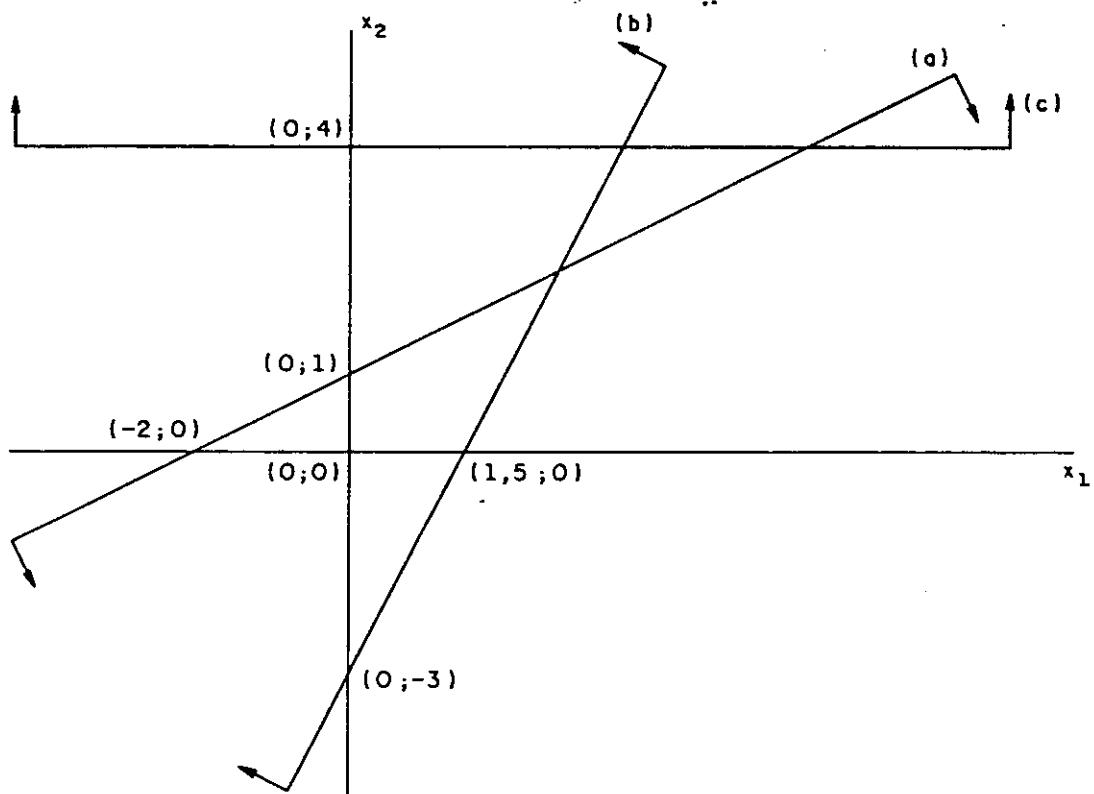


Fig. 5.6 Região viável vazia

5.4 Estudo da forma padrão de um PPL

Para a resolução de um problema existem dois passos fundamentais: o primeiro é a modelagem do problema, que se resume em escrevê-lo numa linguagem matemática, tal como foi feito para o problema da dieta dado no início da seção 5.2; o segundo é a escolha da técnica a ser utilizada para determinar, algebricamente, a solução ótima de tal modelo. Os problemas aqui examinados são modelados como um PPL e o método a ser utilizado, para resolução de tais problemas, será o método simplex, descrito na seção 5.5.

Por conveniência de desenvolvimento teórico do método simplex, assume-se que um PPL esteja no seu formato padrão. Um problema de programação linear é dito estar na forma padrão se todas as restrições são equações e todas as variáveis, bem como as componentes do vetor B , são não negativas.

5.4.1 Transformação de um PPL na forma geral para a forma padrão

Nem sempre os problemas são encontrados na forma padrão, prontos para se aplicar o método simplex. Visando-se prepará-los para a aplicação deste método, serão dados a seguir alguns procedimentos para transformar um PPL dado de uma forma geral, em um PPL na forma padrão. Estes procedimentos são:

a) Desigualdade do tipo menor ou igual:

Uma inequação do tipo menor ou igual pode ser transformada em uma equação pela introdução de uma variável de folga não negativa. Como exemplo, seja uma restrição i qualquer dada por:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$$

Introduzindo-se uma variável de folga, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i$$

onde $x_{n+1} \geq 0$.

b) Desigualdade do tipo maior ou igual:

Uma inequação do tipo maior ou igual pode ser transformada em uma equação pela introdução de uma variável de excesso não negativa. Para ilustrar, considere uma restrição i qualquer dada por:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$$

Introduzindo-se uma variável de excesso, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+1} = b_i$$

onde $x_{n+1} \geq 0$.

c) Variável sem restrição de sinal ou variável livre:

Toda variável irrestrita quanto a sinal pode ser substituída por duas outras variáveis não negativas. Suponha-se que x_j não tenha restrição de sinal, esta variável pode ser substituída por:

$$x_j = x'_j - x''_j$$

onde $x'_j, x''_j \geq 0$.

d) Termo independente negativo:

Se a i -ésima componente do vetor B for negativa, ($b_i < 0$), basta multiplicar a i -ésima restrição por -1 .

e) Equivalência entre maximização e minimização:

Para converter um problema de maximização em um

de minimização basta trocar os sinais dos coeficientes de custos da função objetivo; completada a otimização deste novo problema, o valor ótimo do problema original é igual ao valor ótimo do novo problema com o sinal trocado, ou seja:

$$\text{Máximo } \sum_{j=1}^n c_j x_j = - \text{Mínimo } \sum_{j=1}^n -c_j x_j$$

Vale ressaltar que um PPL na sua forma padrão pode ser resolvido minimizando ou maximizando a função objetivo. Visando-se estudos posteriores, considerar-se-á neste trabalho que sempre se tenha um problema de minimização; se surgir um problema de maximização, faz-se a equivalência acima e procede-se normalmente, como se ele fosse um problema de minimização. Esta consideração visa tão somente facilitar a apresentação e a programação computacional dos passos do método simplex a serem dados na seção 5.5.

Como exemplo de aplicação dos procedimentos acima, seja o PPL (5.9). Colocando-o na forma padrão, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & -x_1 - 3x_2 \\ \text{Sujeito a } & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

onde, x_3 e x_4 são as variáveis de folga necessárias para transformar as inequações em equações.

5.4.2 Notação matricial de um PPL na sua forma padrão

Um problema de programação linear pode ser escrito numa forma mais conveniente, usando-se a notação

matricial. A forma padrão de um PPL com m restrições e n variáveis, onde os coeficientes b_i do vetor B são necessariamente não negativos, pode ser representada por:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{Sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.15)$$

Usando-se a notação matricial, o problema (5.15) pode ser escrito na forma seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & C^t x \\ \text{Sujeito a} \quad & A x = B \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde C , x , A e B são dados, respectivamente, por (5.3), (5.4), (5.6) e (5.7); 0 é o vetor nulo.

Para o PPL (5.14), a matriz e os vetores de (5.16) são identificados por:

$$C^t = (-1, -3, 0, 0) \quad (5.17)$$

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

$$B = \begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

$$A = [A_1, A_2, A_3, A_4] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

onde A_j ($j = 1, \dots, 4$) são os vetores correspondentes às colunas da matriz A .

5.5 O método simplex

Como já mencionado no início da seção 5.4, o método simplex será o processo a ser utilizado para a resolução dos problemas de programação linear neste trabalho.

A noção de ponto extremo introduzida na seção 5.3, quando da solução do PPL de (5.9), é uma noção geométrica. Do ponto de vista computacional, torna-se extremamente importante caracterizar algebricamente os pontos extremos. Pretende-se nesta seção introduzir as soluções viáveis básicas e mostrar que elas correspondem aos pontos extremos da região viável. Serão descritos os procedimentos do método simplex para encontrar soluções melhores, até que a solução ótima seja alcançada ou se conclua que o valor ótimo é ilimitado.

5.5.1 Solução viável básica e a sua correspondência com o ponto extremo

Dado o sistema $Ax = B$ e $x \geq 0$, onde A é uma matriz $m \times n$ e B um vetor de m componentes, suponha que o posto ou "rank" de $(A, B) = \text{posto}(A) = m$. Prevendo-se a possibilidade de haver um reagrupamento das colunas de A , considere-se que $A = [B, N]$, onde B é uma matriz inversível $m \times m$, isto é, $(\det. B \neq 0)$ e N uma matriz $m \times (n-m)$. Feitas essas considerações, tem-se as seguintes definições:

a) Solução básica do sistema: é dada por

$$x = \begin{Bmatrix} x_B \\ x_N \end{Bmatrix}$$

onde:

$$x_B = B^{-1} b$$

e

$$x_N = 0$$

b) Solução viável básica do sistema:

É a solução básica na qual o vetor $x_B \geq 0$.

c) Matriz básica ou base:

É a matriz B de ordem igual ao posto (A) .

d) Matriz não básica:

É a matriz N formada pelas colunas de A que não fazem parte da matriz básica.

e) Variáveis básicas:

São as componentes do vetor x_B .

f) Variáveis não básicas:

São as componentes do vetor x_N .

g) Solução viável básica não degenerada:

Quando todas as componentes do vetor x_B são estritamente positivas, ou seja, $x_{b_i} > 0$ ($i=1, \dots, m$).

h) Solução viável básica degenerada:

Quando pelo menos uma componente de x_B é nula.

A título de ilustração, considere-se o PPL dado por (5.14), já na sua forma padrão. A matriz A e os vetores x e b são dados por (5.20), (5.18) e (5.19), respectivamente. O posto $(A) = m = 2$. Pelas definições acima, as soluções básicas do problema são obtidas determinando matrizes quadradas B , de ordem 2, de A , fazendo $x_B = B^{-1} b$ e $x_N = 0$. As matrizes B que se podem extrair de A são:

$$(1) B = [A_1, A_2] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = B^{-1}b = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0, b \\ 1, b \end{Bmatrix}$$

$$x_N = \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2) B = [A_1, A_3]$$

$$x_B = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 8 \end{Bmatrix}, \quad x_N = \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(3) B = [A_1, A_4]$$

$$x_B = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}, \quad x_N = \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(4) B = [A_2, A_3]$$

$$x_B = \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}, \quad x_N = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(5) B = [A_2, A_4]$$

$$x_B = \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad x_N = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(6) B = [A_3, A_4]$$

$$x_B = \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad x_N = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Observe-se que os pontos referentes aos casos (1), (3), (4) e (6) acima correspondem a soluções viáveis básicas. Já os pontos referentes aos casos (2) e (5) são soluções básicas mas não viáveis, já que violam a restrição de não negatividade das variáveis.

As quatro soluções viáveis básicas do problema são:

$$x_1 = \begin{Bmatrix} 0,6 \\ 1,6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad x_2 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} ; \quad x_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad x_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{Bmatrix} ..$$

Com a introdução das variáveis de folga x_3 e x_4 , o problema (5.9) ficou com quatro variáveis, conforme (5.14); os pontos acima pertencem, portanto, ao espaço E^4 . Essas soluções viáveis básicas, quando projetadas no espaço E^2 , isto é, no espaço (x_1, x_2) , dão, respectivamente, os quatro pontos seguintes:

$$\begin{Bmatrix} 0,6 \\ 1,6 \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Note-se que esses quatro pontos correspondem aos quatro pontos extremos da região viável da figura 5.2, obtidos quando da solução geométrica do mesmo problema.

Como se acabou de ver, cada ponto extremo de uma região viável corresponde a uma solução viável básica. Esta

é a caracterização algébrica dos pontos extremos, citada anteriormente e que se queria buscar. Esta correspondência entre solução viável básica e ponto extremo pode ser comprovada algebricamente; tal comprovação pode ser encontrada em [11,12,13].

5.5.2 Como melhorar uma solução viável básica

Como visto no exemplo anterior, o número de soluções viáveis básicas de um PPL é limitado por:

$$C_m^n = \frac{n!}{m! (n-m)!}$$

que representa todas as combinações possíveis de se retirar m colunas das n colunas de A para se formar a matriz B .

Um dos meios de se resolver um PPL seria obter todas as possíveis soluções viáveis básicas e, usando-se a função objetivo, determinar aquela solução que daria um menor valor para ela. Isto porém, não é conveniente por algumas razões: primeiro, o número de soluções viáveis básicas na maioria dos problemas é muito grande; segundo, este procedimento não diz se o problema tem ou não solução ótima ilimitada; por último, se a região viável for vazia, ao se aplicar este procedimento, só se descobrirá que não há solução viável depois de esgotadas todas as possibilidades de escolha das colunas da matriz B , o que ocasionará uma enorme perda de tempo.

O método simplex evita todos esses inconvenientes. Através desse método, parte-se de uma solução viável básica inicial para obter uma outra solução viável básica, sendo que nessa mudança de soluções, o valor da função objetivo nunca é pior do que o valor anterior. Procede-se desta forma até que se atinja a solução ótima ou se chegue à conclusão que o problema tem solução ótima ilimitada. Este é o fundamento principal do método simplex

que se pretende mostrar nesta seção.

Seja o problema:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } C^t x \\ & \text{Sujeito a } \quad A x = B \\ & \quad \quad \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

onde A é uma matriz $m \times n$ de posto m .

Seja uma solução viável básica inicial dada por:

$$x = \begin{Bmatrix} B^{-1} B \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

O valor correspondente para a função objetivo será indicado por Z_0 , sendo expresso por:

$$Z_0 = C^t x = \left\{ C_B^t, C_N^t \right\} x \quad (5.22)$$

Com (5.21) em (5.22), tem-se:

$$Z_0 = C_B^t B^{-1} B \quad (5.23)$$

ou, de uma forma mais compacta,

$$Z_0 = C_B^t \bar{B} \quad (5.24)$$

onde:

$$\bar{B} = B^{-1} B \quad (5.25)$$

Suponha agora uma solução viável arbitrária dada por:

$$x = \begin{Bmatrix} x_B \\ x_N \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

onde $x_B \geq 0$ e $x_N \geq 0$.

Substituindo-se a solução (5.26) nas restrições $A x = B$, com $A = [B , N]$, tem-se:

$$B x_B + N x_N = B \quad (5.27)$$

Multiplicando-se (5.27) por B^{-1} e isolando-se x_B , tem-se:

$$x_B = B^{-1} B - B^{-1} N x_N \quad (5.28)$$

ou, de uma forma mais explícita,

$$x_B = B^{-1} B - \sum_{j \in R} B^{-1} A_j x_j \quad (5.29)$$

onde R representa o conjunto dos índices das variáveis não básicas.

A equação (5.29) pode ser reescrita de uma outra maneira, usando-se (5.25):

$$x_B = \bar{B} - \sum_{j \in R} Y_j x_j \quad (5.30)$$

onde:

$$Y_j = B^{-1} A_j \quad ; \quad (j \in R). \quad (5.31)$$

O valor correspondente para a função objetivo é:

$$z = C^t x = \left\{ C_B^t , C_N^t \right\} \begin{Bmatrix} x_B \\ x_N \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

Efetuada-se o produto de (5.32) e com (5.28), tem-se, após o agrupamento dos termos semelhantes:

$$Z = c_B^t B^{-1} B - \left(c_B^t B^{-1} N - c_N^t \right) x_N \quad (5.33)$$

ou, de uma forma explícita,

$$Z = c_B^t B^{-1} B - \sum_{j \in R} \left(c_B^t B^{-1} A_j - c_j \right) x_j \quad (5.34)$$

Com (5.23) em (5.34), tem-se:

$$Z = Z_0 - \sum_{j \in R} \left(Z_j - c_j \right) x_j \quad (5.35)$$

onde:

$$Z_j = c_B^t B^{-1} A_j, \quad (j \in R) \quad (5.36)$$

A equação (5.35) serve como referência para se melhorar uma solução viável básica. Como o objetivo é minimizar Z , conclui-se que é possível obter uma solução melhor que a anterior desde que exista $Z_j - c_j > 0$, pois, as variáveis x_j só podem assumir valores não negativos.

Tomando-se como base (5.30) e (5.35), pode-se estabelecer a seguinte regra que procura melhorar uma solução viável básica:

- Uma nova base será obtida, trocando-se uma variável básica atual por uma variável não básica. Fixa-se cada variável não básica x_j ($j \in R$) como igual a zero, exceto uma delas, indicada por x_k , onde $k \in R$. A variável não básica x_k deverá sair do nível zero em que se encontra e atingir um determinado valor positivo, devendo entrar na base. A escolha deste índice k será orientada de modo que a função objetivo seja melhorada, ou em outras palavras, tenha o seu valor diminuído. Uma escolha usual para k , é

tal que k corresponda ao índice que tenha o máximo valor positivo entre todos os $Z_j - c_j$, ou seja:

$$Z_k - c_k = \underset{j \in R}{\text{Máximo}} (Z_j - c_j) \quad (5.37)$$

se $Z_k - c_k \leq 0$, então a solução básica atual é ótima.

De (5.35), tem-se o novo valor Z para a função objetivo, dado por:

$$Z = Z_o - (Z_k - c_k) x_k \quad (5.38)$$

À medida que a variável x_k vai sendo aumentada, as variáveis básicas têm seus valores alterados de acordo com (5.30), que pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Br} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{Bmatrix} x_k \quad (5.39)$$

De (5.38), observa-se que seria vantajoso aumentar x_k tanto quanto possível já que isto diminuiria o valor de Z , pois, $Z_k - c_k > 0$. Mas o aumento de x_k pode levar as variáveis básicas atuais a valores negativos, o que violaria a condição de não negatividade; para que isto ocorra, basta que alguma componente do vetor y_k seja positiva, conforme (5.39).

Se $y_{ik} \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), então x_{Bi} mantém-se sempre positivo, quando x_k for aumentado de algum valor. Se existir pelo menos uma componente de y_k maior que zero, o aumento de x_k é bloqueado por alguma variável básica que atinge um valor nulo. De (5.39), a variável básica que primeiro chega a zero corresponde ao mínimo dos \bar{b}_i / y_{ik} para y_{ik} positivo. Chamando-se o índice desta

variável de r , tem-se:

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \text{Mínimo}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} \quad (5.40)$$

Além de definir o índice r da variável básica x_{Br} , que deve deixar a base por ter atingido um nível nulo, dando lugar para a variável não básica x_k , a expressão (5.40) fornece também o valor de x_k . Na ausência de degeneração, $\bar{b}_r > 0$ e, portanto, de (5.40), $x_k > 0$. Com isto, de (5.38), tem-se que a nova solução é melhor que a anterior por ser $Z < Z_0$.

Os novos valores das variáveis básicas são dados por (5.39), ou seja:

$$x_{Bi} = \bar{b}_i - y_{ik} \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.41)$$

onde:

$$x_{Br} = 0 \quad \text{e} \quad x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

A regra descrita acima constitui o fundamento do método simplex. Resumindo-se, os procedimentos há pouco descritos fazem com que se caminhe de uma solução viável básica para uma outra solução viável básica, deslocando-se de um ponto extremo para outro, percorrendo o contorno. Isto é feito aumentando-se o valor de uma variável não básica x_k , sendo que $Z_k - c_k$ é o maior valor positivo entre os $Z_j - c_j$, e ajustando-se as variáveis básicas atuais. No processo, a variável básica x_{Br} atinge um valor nulo, deixando a base e colocando-se no seu lugar a variável x_k .

O valor da função objetivo nunca é pior do que o valor anterior. Como há um número finito de soluções básicas, o processo terminará em um número finito de passos, atingindo-se a solução ótima ou chegando-se à conclusão que o ótimo é ilimitado.

5.5.3 Identificação algébrica das soluções possíveis para um PPL

Na seção 5.3.1, foram identificados geometricamente todos os casos possíveis de soluções para um problema de minimização. Pretende-se agora identificar esses casos algebricamente, tomando-se como base os conhecimentos adquiridos na seção anterior. Os casos a serem identificados são:

a) Solução ótima única:

Vai ocorrer quando $Z_j - c_j < 0$ para todo $j \in R$. Com isto, de (5.35) tem-se que nenhuma variável não básica irá melhorar a solução atual; esta é, portanto, a solução ótima que ocorrerá em um único ponto extremo.

b) Soluções ótimas múltiplas:

Ocorre quando $Z_j - c_j \leq 0$ para $j \in R$, onde pelo menos uma variável não básica x_k possui $Z_k - c_k = 0$. Quando a variável x_k é aumentada progressivamente, na ausência de degeneração, obtém-se pontos distintos dos anteriores, de acordo com (5.39); entretanto, o valor da função objetivo mantém-se constante, conforme (5.38). O valor da variável x_k vai aumentando até ser bloqueado por alguma variável básica, obtendo-se assim um número infinito de soluções ótimas.

c) Solução ótima ilimitada:

Suponha-se que a variável não básica x_k tenha sido escolhida para entrar na base de acordo com a (5.37). Se o vetor y_k não possuir nenhuma componente maior que

zero, isto é, $y_k \leq 0$, a variável x_k pode ser aumentada indefinidamente sem que seja bloqueada por alguma variável básica, conforme (5.39). Desta forma, x_k tende a $+\infty$ e o valor de Z tende a $-\infty$, ou seja, a solução ótima é ilimitada.

d) Região viável vazia:

Neste caso, não se consegue obter nenhuma base viável para dar início ao método simplex. O procedimento para determinar uma solução viável básica inicial (condição para aplicar o método simplex) será discutido na seção 5.6.

5.5.4 O algoritmo simplex

Pelo exposto anteriormente, o método simplex é um processo de resolução dos problemas de programação linear que parte de uma solução viável básica, obtendo outra melhorada, introduzindo-se uma variável não básica na base e retirando-se dela uma das variáveis básicas. Repete-se esse processo até atingir a solução viável básica ótima ou até que se conclua que a solução ótima é ilimitada.

O método simplex, para um problema de minimização, pode ser resumido no algoritmo que se segue:

a) Passo inicial:

Escolher uma solução viável básica inicial. Na seção 5.6, serão dados alguns procedimentos para a obtenção dessa solução.

b) Passos principais:

b.1 - Resolver o sistema

$$B x_B = \bar{b}$$

cuja solução única é dada por:

$$x_B = B^{-1} \bar{b} = \bar{b} \quad x_N = 0$$

- A função objetivo é dada por:

$$Z = C_B^t X_B$$

b.2 - Resolver o sistema

$$B^t W = C_B$$

cuja solução única é dada por:

$$W = [B^t]^{-1} C_B$$

- Calcular

$$Z_j - c_j = W^t A_j - c_j \quad \text{para } j \in R$$

onde R é o conjunto atual dos índices das variáveis não básicas.

- Determinar o índice da variável não básica escolhida para entrar na base através da pesquisa:

$$Z_k - c_k = \underset{j \in R}{\text{Máximo}} Z_j - c_j$$

- Analisar se:

$$Z_k - c_k \begin{cases} \leq 0 \Rightarrow \text{pare; a solução viável básica atual é a solução ótima.} \\ > 0 \Rightarrow \text{vá para o passo b.3.} \end{cases}$$

b.3 - Resolver o sistema

$$B Y_k = A_k$$

cuja solução única é dada por:

$$Y_k = B^{-1} A_k$$

- Analisar se

$$Y_k \begin{cases} \leq 0 \Rightarrow \text{pare; a solu\c{c}\~{a} \acute{o}tima \acute{e} ilimitada.} \\ \text{se tiver pelo menos uma componente maior que} \\ \text{zero, v\~{a} para o passo b.4.} \end{cases}$$

b.4 - Determinar o \u00edndice r da vari\u00e1vel b\u00e1sica que vai deixar a base e o valor de x_k atrav\u00e9s do teste da raz\u00e3o m\u00ednima seguinte:

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{M\u00ednimo}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

- Atualizar:
 - os \u00edndices b\u00e1sicos e n\u00e3o b\u00e1sicos.
 - a matriz B , colocando-se A_k no lugar de A_{Br} .

- Repetir o passo b.1

Para ilustrar o algoritmo acima, seja o PPL de (5.9) cuja forma padr\u00e3o \u00e9 apresentada em (5.14) e que foi resolvido geometricamente na figura 5.2. De (5.17) a (5.20) tem-se os elementos necess\u00e1rios para a aplica\u00e7\u00e3o do algoritmo.

Itera\u00e7\u00e3o 1

$$b.1 - B = \begin{bmatrix} A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad X_B = \begin{Bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

$$X_N = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad C_B^t = (0, 0)$$

- Resolvendo-se o sistema $B x_B = B$, tem-se:

$$x_B = \bar{B} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$- Z = C_B^t x_B = 0$$

b.2 - Resolvendo-se o sistema $B^t w = C_B$, tem-se:

$$w = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$- Z_1 - c_1 = w^t A_1 - c_1 = 1$$

$$Z_2 - c_2 = w^t A_2 - c_2 = 3$$

- índice $k = 2$

b.3 - Resolvendo-se o sistema $B y_2 = A_2$, tem-se:

$$y_2 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$b.4 - \text{Mínimo} \left\{ \frac{\bar{b}_1}{y_{12}}, \frac{\bar{b}_2}{y_{22}} \right\} = \text{Mínimo} \left\{ \frac{6}{3}, \frac{1}{1} \right\} = 1$$

- O índice $r = 2$, portanto, $x_{Br} = x_4$ deixa a base.

$$- x_2 = 1$$

De forma análoga são feitas as outras iterações.

Iteração 2

$$b.1 - B = [A_3, A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; x_B = \begin{Bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$x_N = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$C_B^t = (0, -3)$$

$$- x_B = \bar{B} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$- Z = -3$$

$$b.2 \quad - W = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

$$- Z_1 - c_1 = 4$$

$$Z_4 - c_4 = -3$$

$$- \text{índice } k = 1.$$

$$b.3 \quad - Y_1 = \begin{Bmatrix} 5 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$b.4 \quad - \text{Mínimo} \left\{ \frac{\bar{b}_1}{y_{11}} \right\} = \left\{ \frac{3}{5} \right\} = 0,6$$

- O índice $r = 1$, portanto, $x_{Br} = x_3$ deixa a base.

$$- x_1 = 0,6.$$

Iteração 3

$$b.1 \quad - B = [A_1, A_2] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad X_B = \begin{Bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$X_N = \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$C_B^t = (-1, -3)$$

$$- x_B = \bar{B} = \begin{Bmatrix} 0,6 \\ 1,6 \end{Bmatrix}$$

$$- Z = -5,4$$

$$b.2 \quad - W = \begin{Bmatrix} -0,8 \\ -0,6 \end{Bmatrix}$$

$$- Z_3 - c_3 = -0,8$$

$$Z_4 - c_4 = -0,6$$

$$- Z_k - c_k = Z_4 - c_4 = -0,6 < 0$$

Portanto, a solução atual é a ótima, sendo dada por:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,6 \\ 1,6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

com $Z = -5,4$.

A figura 5.7 mostra o caminho percorrido pelo método simplex no espaço (x_1, x_2) até atingir o ponto extremo ótimo. Observe-se que este ponto é o mesmo obtido graficamente na figura 5.2.

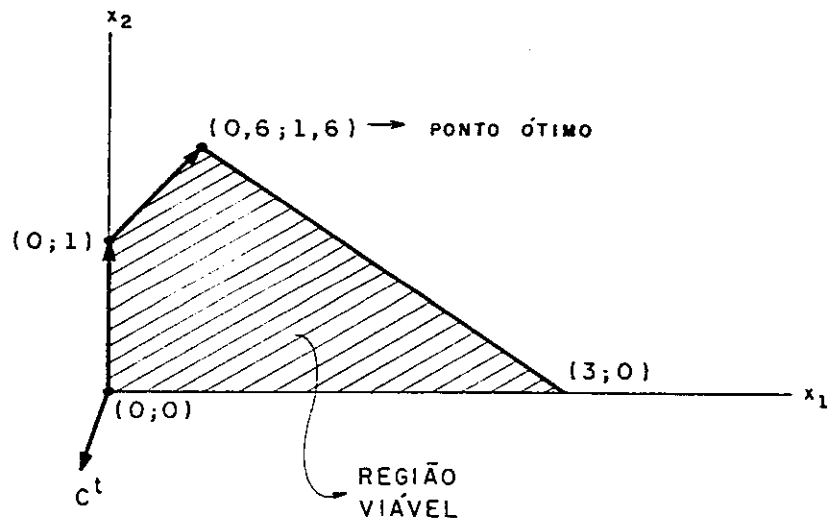


Fig. 5.7 Caminho percorrido pelo método simplex no espaço (x_1, x_2)

5.6 Solução inicial para o método simplex - variáveis artificiais

Na seção 5.5.4 foi descrito o algoritmo simplex. Este algoritmo parte do princípio de que seja conhecida uma solução viável básica inicial. Considerando-se um caso geral, não se tem, de início, qualquer parâmetro que possa orientar na determinação dessa solução. Se o sistema de equações correspondente às restrições de um PPL na forma padrão estiver na forma canônica, uma solução viável básica inicial é facilmente obtida, com a base B sendo formada pela submatriz identidade do sistema.

Com o objetivo de se determinar essa base inicial, caso ela exista, será mostrado nesta seção um processo bastante eficiente que consiste em acrescentar ao sistema de equações variáveis básicas não negativas, denominadas artificiais, de maneira a que o sistema esteja na forma canônica, obtendo-se com isso uma solução viável básica inicial, cuja base será definida por essas variáveis. Tal processo é denominado processo das variáveis artificiais ou método das duas fases.

Suponha-se que um PPL na sua forma padrão seja escrito como se segue:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } C^t x \\ & \text{Sujeito a } Ax = B \\ & \quad \quad \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{5.42}$$

onde $B \geq 0$ e A uma matriz $m \times n$.

Visando-se encontrar uma solução viável básica para o problema (5.42), suponha-se que seja necessário introduzir m variáveis artificiais. Com isso, pode ser escrito um novo problema, denominado artificial, com a forma seguinte:

Supondo-se o problema original e o artificial apresentados em (5.42) e (5.43), respectivamente, o método das duas fases é dividido em:

Obtida a solução ótima do problema (5.43), se o correspondente valor da função objetivo artificial for diferente de zero, então o problema original não possui soluções viáveis. Se, por outro lado, o valor da função objetivo artificial for nulo, então essa solução será a solução inicial que se procura para o problema original. Neste caso, antes de ir para a fase II, faz-se uma verificação nessa solução para ver se ainda existem variáveis artificiais na base com valores nulos; caso se confirme a degeneração da solução, as variáveis artificiais nulas que ainda permanecem na base podem ser trocadas por variáveis não básicas originais que passam a fazer parte da base com valores nulos. Esta troca de variáveis não altera o valor da função objetivo artificial que continua nulo.

b) Fase II

Consiste em minimizar a função objetivo original através do algoritmo simplex já exposto anteriormente, partindo-se da solução viável básica obtida no final da fase I. Durante a fase II, as variáveis artificiais e a função objetivo artificial não são mais consideradas; o problema só envolve variáveis originais.

CAPÍTULO 6

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

O propósito deste capítulo é discutir os meios de solução dos problemas de análise e síntese apresentados no capítulo 3. Esses problemas serão formulados matematicamente, o que possibilitará a programação computacional dos mesmos, através do software apresentado no final deste trabalho.

Da apresentação, feita no capítulo 3, dos problemas que se propôs que este trabalho abrangesse, observa-se, com os conhecimentos adquiridos no capítulo 5, que cada um deles se constitui num problema de programação linear. Esta constatação torna-se evidente ao se analisar as soluções geométricas dos exemplos propostos no capítulo 3, com as noções básicas de programação linear dadas no capítulo 5.

Desta forma, o método simplex, apresentado anteriormente como o processo de solução dos problemas de programação linear, será utilizado na solução dos problemas envolvendo o método das rótulas plásticas. Como frisado na seção 5.4 do capítulo 5, para que se possa aplicar o simplex é necessário que os problemas estejam na forma padrão. Além da modelagem dos problemas em regime elastoplástico, este capítulo propõe-se a apresentar as suas correspondentes formas padrão, bem como esquemas de armazenamento computacional dos coeficientes de suas

restrições lineares, objetivando-se a programação futura.

Por conveniência, considere-se a seguinte notação que será utilizada ao longo deste capítulo:

- b: - Número de barras
- e: - Número de relações independentes de equilíbrio
- ℓ_k : - Comprimento da k-ésima barra
- $(M_y)_j$: - Momento de início de escoamento para a j-ésima seção transversal crítica
- p: - Número de parâmetros referentes aos momentos de plastificação total de cada problema
- r: - Número de rótulas plásticas possíveis
- B: - Vetor dos elementos do segundo membro das relações independentes de equilíbrio, cujas componentes são os B_i ($i = 1, \dots, e$)
- C: - Matriz dos coeficientes das relações independentes de equilíbrio de ordem $(e \times r)$.
- I: - Matriz identidade
- L: - Vetor dos comprimentos das barras, cujas componentes são os ℓ_k ($k = 1, \dots, b$)
- M: - Vetor dos momentos fletores nas seções transversais críticas, cujas componentes são os M_j ($j = 1, \dots, r$)
- M^{\max}, M^{\min} : - Vetores dos momentos fletores elásticos máximo e mínimo nas seções transversais críticas, respectivamente, cujas componentes são os μ_j^{\max} e μ_j^{\min} ($j = 1, \dots, r$)
- m: - Vetor dos momentos fletores residuais nas seções transversais críticas, cujas componentes são os m_j ($j = 1, \dots, r$)
- M_p : - Vetor dos momentos de plastificação total das seções transversais críticas, cujas componentes são os $(M_p)_j$ ($j = 1, \dots, r$)
- M_p^* : - Vetor dos momentos de plastificação total das barras, cujas componentes são os $(M_p^*)_k$ para ($k = 1, \dots, b$)
- O: - Matriz ou vetor nulo

6.1 O problema de análise sob carregamento único

Seja o problema ilustrado na figura 3.3.a e resolvido geometricamente com a figura 3.4. Este problema de análise pode ser apresentado na forma seguinte:

- Dada uma estrutura, com os momentos de plastificação total conhecidos a menos de um único parâmetro multiplicador positivo T , e com um carregamento dado, determinar o menor valor de T para que, atingido o ponto de iminência do colapso plástico, as relações de equilíbrio sejam obedecidas e a distribuição de momentos fletores seja segura.

Como o problema só envolve equações e inequações lineares e visa minimizar um parâmetro T , pode-se escrevê-lo matematicamente como um problema de programação linear na forma:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } T \\ & \text{Sujeito a} \\ & -(M_p)_j \leq M_j \leq (M_p)_j \quad ; j = 1, \dots, r \\ & \sum_{j=1}^r C_{ij} M_j = B_i \quad ; i = 1, \dots, e \\ & T \geq 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde:

a) as inequações correspondem à condição de escoamento nas r seções transversais críticas e as e equações representam as relações independentes de equilíbrio,

b) os momentos de plastificação total $(M_p)_j$ estão em função do parâmetro positivo T ,

c) os coeficientes B_i são não negativos; se ao gerar uma determinada relação independente de equilíbrio o correspondente B_i for negativo, deve-se multiplicar essa relação por -1 , conforme já estabelecido anteriormente.

O problema (6.1) pode ser dado em termos da seguinte notação matricial:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && T \\ & \text{Sujeito a} && \\ & && -M_p \leq M \leq M_p \quad (6.2) \\ & && CM = B \\ & && T \geq 0 \end{aligned}$$

Para que o problema (6.1) possa ser resolvido pelo método simplex, é necessário colocá-lo na forma padrão. As inequações devem ser transformadas em equações e as variáveis livres substituídas por variáveis não negativas. Supondo-se uma posição de rótula plástica arbitrária k , a inequação que define a condição de momento fletor seguro é expressa, conforme (6.1), por:

$$-(M_p)_k \leq M_k \leq (M_p)_k \quad (6.3)$$

que resulta em duas inequações da forma

$$M_k + (M_p)_k \geq 0 \quad (6.4)$$

$$M_k - (M_p)_k \leq 0 \quad (6.5)$$

A variável $(M_p)_k$ é dada em função do parâmetro positivo T , portanto, sendo não negativa. A variável M_k é irrestrita quanto a sinal. Definindo-se uma nova variável x_k , tal que,

$$x_k = M_k + (M_p)_k \quad (6.6)$$

as inequações (6.4) e (6.5) podem ser substituídas por:

$$x_k \geq 0 \quad (6.7)$$

$$x_k - 2(M_p)_k \leq 0 \quad (6.8)$$

onde, de (6.6), tem-se que:

$$M_k = x_k - (M_p)_k \quad (6.9)$$

Com isso, as variáveis que envolvem as inequações (6.7) e (6.8) são todas não negativas. A inequação (6.8) pode ser transformada em uma equação pela introdução de uma variável de folga x_f , ou seja:

$$x_k - 2(M_p)_k + x_f = 0 \quad (6.10)$$

Em termos gerais, tomando-se como base (6.7) e (6.10), as inequações de (6.1) podem ser transformadas nas seguintes equações:

$$x_j - 2(M_p)_j + x_{r+1+j} = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, r \quad (6.11)$$

onde:

a) $x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, r, r+2, \dots, 2r+1$

b) x_{r+1+j} ($j = 1, \dots, r$) representam as variáveis de folga introduzidas em cada inequação do tipo (6.8); os índices ($r+1+j$) indicam os índices correspondentes dessas variáveis dentro do problema; tal consideração ficará mais clara com o exemplo dado a seguir e visa facilitar a programação computacional futura.

As equações (6.11) foram obtidas através de mudanças, semelhantes às de (6.9), das variáveis livres do problema original, e serão dadas em termos gerais por:

$$M_j = x_j - (M_p)_j \quad ; \quad j = 1, \dots, r \quad (6.12)$$

As equações referentes às relações independentes de equilíbrio do problema (6.1) devem ser modificadas por causa das mudanças das variáveis livres. Substituindo-se os seus M_j pelas equações (6.12), tem-se:

$$\sum_{j=1}^r C_{ij} x_j - \sum_{j=1}^r C_{ij} (M_p)_j = B_i \quad ; i = 1, \dots, e \quad (6.13)$$

Com (6.11) e (6.13), o problema (6.1) pode ser reescrito na forma padrão seguinte:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } T && (6.14) \\ & \text{Sujeito a} \\ & x_j - 2(M_p)_j + x_{r+1+j} = 0 \quad ; j = 1, \dots, r \\ & \sum_{j=1}^r C_{ij} x_j - \sum_{j=1}^r C_{ij} (M_p)_j = B_i \quad ; i = 1, \dots, e \\ & T \geq 0 \\ & x_j \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, r, r+2, \dots, 2r+1 \end{aligned}$$

Obtida a solução ótima para o problema (6.14), basta voltar com as variáveis x_j ($j = 1, \dots, r$) e com o valor de T nas equações (6.12) para se obter os momentos fletores do problema (6.1).

Observando-se o problema (6.14), nota-se que ao se introduzir e variáveis artificiais nas equações referentes às relações independentes de equilíbrio, o sistema de equações fica na forma canônica e, com isso, tem-se uma base inicial para a fase I do método das duas fases, aquela que procurará uma base viável para o problema (6.14). Desta forma, o problema artificial é dado por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \sum_{i=1}^e x_{2r+1+i} && (6.15) \\ & \text{Sujeito a} \\ & x_j - 2(M_p)_j + x_{r+1+j} = 0 \quad ; j = 1, \dots, r \\ & \sum_{j=1}^r C_{ij} x_j - \sum_{j=1}^r C_{ij} (M_p)_j + x_{2r+1+i} = B_i \quad ; i = 1, \dots, e \\ & T \geq 0 \\ & x_j \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, r, r+2, \dots, 2r+1+e \end{aligned}$$

Para que se possa visualizar melhor os coeficientes das equações do problema artificial (6.15) e suas posições de armazenamento, seja o esquema da figura 6.1. Este esquema será de grande utilidade na hora de se programar os diversos problemas.

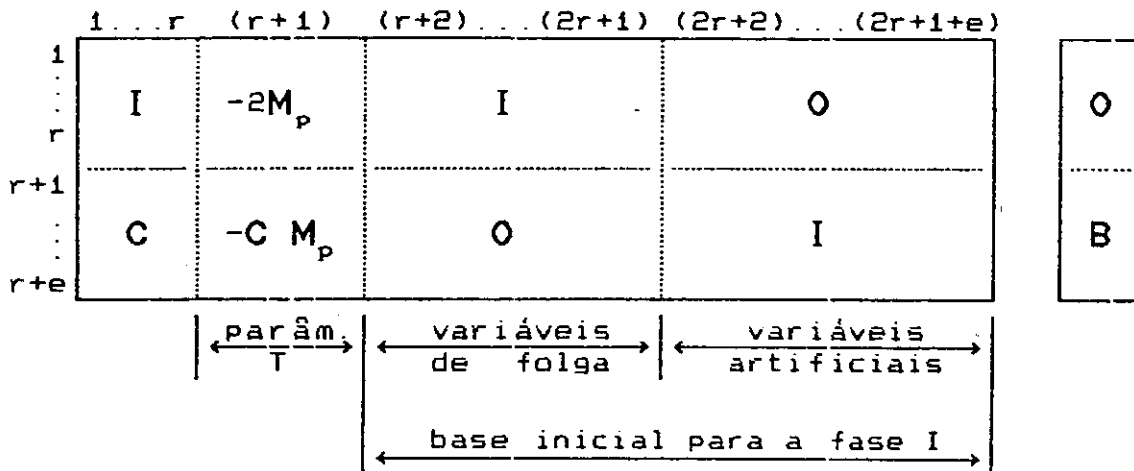


Fig. 6.1 Esquema do posicionamento dos coeficientes das equações do problema artificial (6.15)

Com procedimento já discutido no capítulo 5, chega-se então à solução do problema original. Como exemplo, seja o pórtico da figura 3.3.a, cujas relações independentes de equilíbrio foram obtidas na seção 4.6 do capítulo 4. A figura 6.2 mostra este pórtico com a numeração das r posições possíveis de ocorrerem rótulas plásticas.

Vale ressaltar que essa numeração, correspondente aos índices dos momentos fletores, difere daquela da figura 4.14. Os índices dos momentos fletores da figura 4.14 foram diminuídos de quatro unidades correspondentes aos quatro esforços axiais que não fazem parte das relações independentes de equilíbrio; esta renumeração é apenas por mera questão de apresentação já que nessas relações só aparecem momentos fletores. Uma outra mudança quanto à apresentação é que em vez de indicar os momentos fletores

pela letra P, como foi feito no capítulo 4, neste capítulo será utilizada a letra M.

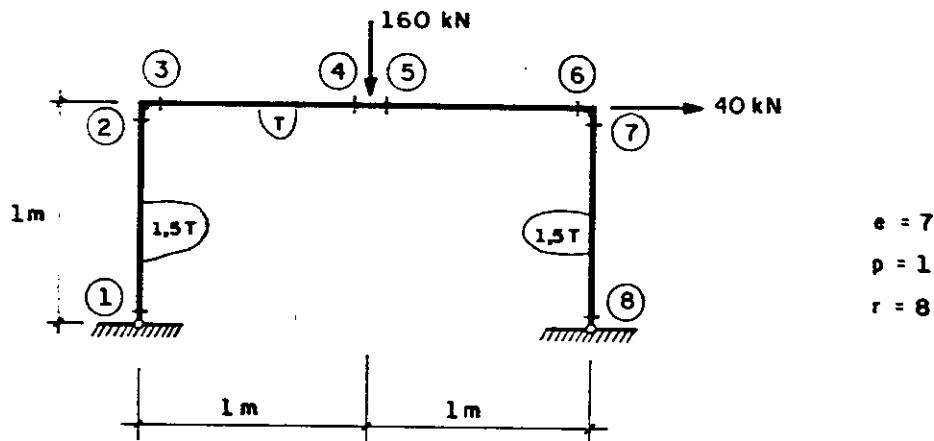


Fig. 6.2 Pórtico plano analisado na seção 3.1

As 7 relações independentes de equilíbrio para o pórtico da figura 6.2 já foram obtidas no capítulo 4, sendo dadas por (4.54), (4.55) e (4.62), isto é:

$$\begin{aligned}
 M_2 + M_3 &= 0 \\
 M_4 + M_5 &= 0 \\
 M_6 + M_7 &= 0 \\
 M_1 &= 0 \\
 M_8 &= 0 \\
 M_1 + M_2 + M_7 + M_8 &= 40 \\
 M_3 + M_4 - M_5 - M_6 &= 160
 \end{aligned}
 \tag{6.16}$$

onde os momentos fletores, antes representados por P, são agora indicados por M e os seus índices alterados de acordo com a observação acima; a última relação de (4.62) já foi multiplicada por -1.

De (6.16), obtém-se a matriz C e o vetor B, que são dados por:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 160 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Modelando-se o problema conforme (6.1), tem-se:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & T \\ \text{Sujeito a} & \\ & -1,5T \leq M_1 \leq 1,5T \\ & -1,5T \leq M_2 \leq 1,5T \\ & -T \leq M_3 \leq T \\ & -T \leq M_4 \leq T \\ & -T \leq M_5 \leq T \\ & -T \leq M_6 \leq T \\ & -1,5T \leq M_7 \leq 1,5T \\ & -1,5T \leq M_8 \leq 1,5T \\ & M_2 + M_3 = 0 \\ & M_4 + M_5 = 0 \\ & M_6 + M_7 = 0 \\ & M_1 = 0 \\ & M_8 = 0 \\ M_1 + M_2 + M_7 + M_8 & = 40 \\ M_3 + M_4 - M_5 - M_6 & = 160 \\ & T \geq 0 \end{array} \quad (6.19)$$

De acordo com (6.12), as mudanças de variáveis a serem feitas são:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= x_1 - 1,5T & M_5 &= x_5 - T \\
 M_2 &= x_2 - 1,5T & M_6 &= x_6 - T \\
 M_3 &= x_3 - T & M_7 &= x_7 - 1,5T \\
 M_4 &= x_4 - T & M_8 &= x_8 - 1,5T
 \end{aligned}
 \tag{6.20}$$

Com (6.14), tem-se que o problema (6.19) pode ser colocado na forma padrão seguinte:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize } T && \tag{6.21} \\
 &\text{Sujeito a} \\
 & & x_1 - 3T + x_{10} &= 0 \\
 & & x_2 - 3T + x_{11} &= 0 \\
 & & x_3 - 2T + x_{12} &= 0 \\
 & & x_4 - 2T + x_{13} &= 0 \\
 & & x_5 - 2T + x_{14} &= 0 \\
 & & x_6 - 2T + x_{15} &= 0 \\
 & & x_7 - 3T + x_{16} &= 0 \\
 & & x_8 - 3T + x_{17} &= 0 \\
 & & x_2 + x_3 - 2,5T &= 0 \\
 & & x_4 + x_5 - 2T &= 0 \\
 & & x_6 + x_7 - 2,5T &= 0 \\
 & & x_1 - 1,5T &= 0 \\
 & & x_8 - 1,5T &= 0 \\
 x_1 + x_2 + x_7 + x_8 &- 6T &= 40 \\
 x_3 + x_4 - x_5 - x_6 &&= 160 \\
 T &\geq 0 \\
 x_j &\geq 0 \quad ; j = 1, \dots, 8, 10, \dots, 17
 \end{aligned}$$

Finalmente, de (6.15), tem-se o problema artificial, dado por:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} && x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \\
 &\text{Sujeito a} && \\
 &&& x_1 - 3T + x_{10} = 0 \\
 &&& x_2 - 3T + x_{11} = 0 \\
 &&& x_3 - 2T + x_{12} = 0 \\
 &&& x_4 - 2T + x_{13} = 0 \\
 &&& x_5 - 2T + x_{14} = 0 \\
 &&& x_6 - 2T + x_{15} = 0 \\
 &&& x_7 - 3T + x_{16} = 0 \\
 &&& x_8 - 3T + x_{17} = 0 \quad (6.22) \\
 &&& x_2 + x_3 - 2,5T + x_{18} = 0 \\
 &&& x_4 + x_5 - 2T + x_{19} = 0 \\
 &&& x_6 + x_7 - 2,5T + x_{20} = 0 \\
 &&& x_1 - 1,5T + x_{21} = 0 \\
 &&& x_8 - 1,5T + x_{22} = 0 \\
 &x_1 + x_2 + x_7 + x_8 - 6T + x_{23} = 40 \\
 &x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + x_{24} = 160 \\
 &&& T \geq 0 \\
 &&& x_j \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, 8, 10, \dots, 24
 \end{aligned}$$

De (6.22), tem-se que a base inicial para a fase I será formada pelas variáveis x_j ($j = 10, \dots, 24$). Resolvido o problema artificial (6.22), através da fase I, tem-se a base para iniciar a fase II, com o problema original (6.21), procurando a solução ótima. Como esta solução será dada em função das variáveis T e x_j , usando-se (6.20), obtém-se os momentos fletores nas seções transversais críticas do pórtico da figura 6.2.

Devido ao grande número de variáveis envolvidas nos problemas (6.21) e (6.22), esses problemas, bem como os demais exemplos a serem dados ao longo deste capítulo, não serão resolvidos manualmente, deixando-os para serem resolvidos através do programa apresentado no final deste trabalho.

Um outro tipo de problema de análise sob carregamento único, apresentado na seção 3.1 e que se apresenta como um problema inverso do esquematizado acima, é o de se determinar o fator de carga de colapso plástico de um pórtico plano em que os momentos de plastificação total de suas barras são conhecidos. Como exemplo, considere-se o pórtico da figura 3.1.a, analisado no capítulo 3. O problema referente a este pórtico pode ser colocado como se segue:

- Dada uma estrutura com o carregamento conhecido a menos de um único fator de carga λ positivo e dados os momentos de plastificação total de suas barras, determinar o mínimo valor de λ que levará a estrutura ao colapso plástico, ou seja, deseja-se obter λ_c .

Pela solução geométrica do problema referente ao pórtico da figura 3.1.a, mostrada na figura 3.2, observa-se que o valor de λ_c pode ser determinado como um problema de programação linear. Na realidade, este problema pode ser resolvido considerando-o como um problema semelhante ao do caso dos momentos de plastificação total desconhecidos, que foi desenvolvido há pouco. Pode-se calcular o valor mínimo de um parâmetro positivo T que multiplica os momentos de plastificação total das barras do pórtico para que o mesmo suporte um carregamento definido por um λ unitário. Supondo-se que após a otimização deste problema o valor ótimo do parâmetro T seja T^* , o valor de λ_c será calculado como sendo:

$$\lambda_c = \frac{1}{T^*} \quad (6.23)$$

Considerando-se o pórtico da figura 3.1.a, a estrutura inicial a ser resolvida é ilustrada na figura 6.3.a onde procura-se o valor mínimo do seu fator de carga λ que a levará ao ponto de iminência do colapso plástico. A figura 6.3.b mostra uma estrutura equivalente à da figura 6.3.a onde procura-se minimizar o parâmetro T dos momentos de plastificação total para um $\lambda = 1$.

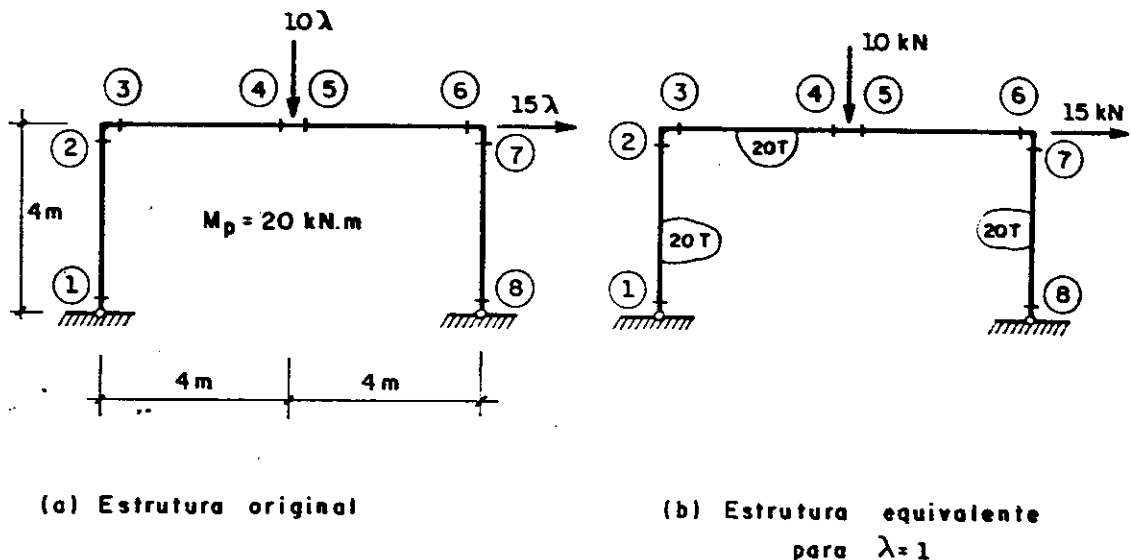


Fig. 6.3 Pórtico plano analisado na seção 3.1

O problema referente à figura 6.3.b apresenta-se idêntico ao resolvido na figura 6.2 através da programação linear. Portanto, o valor ótimo T^* e a distribuição de momentos fletores para o pórtico desta figura podem ser determinados de uma maneira análoga ao problema de análise formulado anteriormente. Devido a essa semelhança, não será apresentada aqui a formulação matemática do problema da figura 6.3.b. Com T^* determinado, de (6.23) obtém-se λ_c . A distribuição de momentos fletores para o pórtico original da figura 6.3.a é a mesma obtida quando da otimização do pórtico da figura 6.3.b multiplicada pelo valor de λ_c , dado por (6.23).

6.2 O problema de síntese sob carregamento único

Considere-se o problema ilustrado na figura 3.5.a, resolvido geometricamente na figura 3.6. Este problema de síntese resume-se em minimizar a função peso, dada por (3.14), para o pórtico sob o carregamento único conhecido, sujeito às condições impostas pela teoria plástica para que ocorra o colapso plástico, ou seja, o projeto de peso mínimo deve satisfazer as condições de mecanismo, equilíbrio e escoamento.

O problema de síntese sob carregamento único possui uma grande semelhança com o problema de análise descrito no início da seção 6.1. Enquanto que lá os momentos de plastificação total das barras foram dados em função de um único parâmetro positivo T que foi minimizado, aqui estes momentos são dados em função de p parâmetros, presentes na função peso a ser minimizada. Dessa forma, esses problemas também podem ser resolvidos com o uso da programação linear. Através da figura 3.6, que mostra a solução geométrica do problema referente à figura 3.5.a, pode-se observar a semelhança que há entre os problemas de síntese sob carregamento único e os problemas de programação linear dados no capítulo anterior.

De uma maneira geral, os problemas de síntese sob carregamento único podem ser formulados como problemas de programação linear usando-se as condições de escoamento e equilíbrio para que ocorra o colapso plástico. Estes problemas podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} && \sum_{k=1}^b (M_p^*)_k \ell_k \\
 &\text{Sujeito a} && \\
 & && -(M_p)_j \leq M_j \leq (M_p)_j ; j = 1, \dots, r \\
 & && \sum_{j=1}^r c_{ij} M_j = B_i ; i = 1, \dots, e \quad (6.24) \\
 & && (M_p^*)_k \geq 0 ; k = 1, \dots, b \\
 & && (M_p)_j \geq 0 ; j = 1, \dots, r
 \end{aligned}$$

onde:

a) os momentos de plastificação total $(M_p^*)_k$ e $(M_p)_j$ estão em função dos p parâmetros positivos,

b) os B_i ($i = 1, \dots, e$) das relações independentes de equilíbrio são considerados não negativos; se ao gerar estas relações existir algum B_i negativo, deve-se multiplicar a relação correspondente por -1.

Em notação matricial, o problema (6.24) é dado por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad (M_p^*)^t L \\ & \text{Sujeito a} \\ & \quad -M_p \leq M \leq M_p \quad (6.25) \\ & \quad CM = B \\ & \quad M_p^*, M \geq 0 \end{aligned}$$

Observe-se que as restrições do problema (6.1) são idênticas às do problema (6.24); a única diferença, é que neste os $(M_p)_j$ estão em função de p parâmetros positivos, enquanto que naquele, os $(M_p)_j$ estão em função de um único parâmetro positivo T. Portanto, todos os procedimentos realizados na seção 6.1 para transformar o problema (6.1) na forma padrão são válidos para o problema (6.24).

Com isso, tomando-se como base (6.14), a forma padrão para um problema geral de síntese sob carregamento único com p parâmetros para os momentos de plastificação total, tal como apresentado em (6.24), é dada por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \sum_{k=1}^b (M_p^*)_k \ell_k \\ & \quad (6.26) \end{aligned}$$

Sujeito a

$$\begin{aligned} & x_j - 2(M_p)_j + x_{r+p+j} = 0 \quad ; j = 1, \dots, r \\ & \sum_{j=1}^r C_{ij} x_j - \sum_{j=1}^r C_{ij} (M_p)_j = B_i \quad ; i = 1, \dots, e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (M_p^*)_k &\geq 0 && ; k = 1, \dots, b \\
 x_j &\geq 0 && ; j = 1, \dots, r, r+p+1, \dots, 2r+p \\
 (M_p)_j &\geq 0 && ; j = 1, \dots, r
 \end{aligned}$$

(6.26 cont.)

As mudanças de variáveis feitas para se chegar à forma padrão (6.26) são semelhantes às dadas por (6.12).

O problema artificial referente a (6.26) pode ser obtido de uma forma análoga a (6.15), sendo dado por:

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^e x_{2r+p+i} \tag{6.27}$$

Sujeito a

$$\begin{aligned}
 x_j - 2(M_p)_j + x_{r+p+j} &= 0 && ; j = 1, \dots, r \\
 \sum_{j=1}^r C_{ij} x_j - \sum_{j=1}^r C_{ij} (M_p)_j + x_{2r+p+i} &= B_i && ; i = 1, \dots, e \\
 (M_p)_j &\geq 0 && ; j = 1, \dots, r \\
 x_j &\geq 0 && ; j = 1, \dots, r, r+p+1, \dots, 2r+p+e
 \end{aligned}$$

Os coeficientes das equações do problema artificial (6.27) podem ser esquematizados de acordo com a figura 6.4. As posições que estes coeficientes ocupam dentro deste esquema serão amplamente exploradas na hora da programação, como já enfatizado.

Tomando-se como exemplo o pórtico da figura 3.5.a, seja a figura 6.5 que mostra tanto as posições onde poderão ocorrer rótulas plásticas quanto o carregamento na estrutura. Observe-se que os momentos de plastificação M_A e M_B da figura 3.5.a foram substituídos, respectivamente, pelos parâmetros T_1 e T_2 apenas por questão de apresentação da formulação matemática do problema. Os números dentro dos quadrados da figura 6.5 representam a numeração das barras.

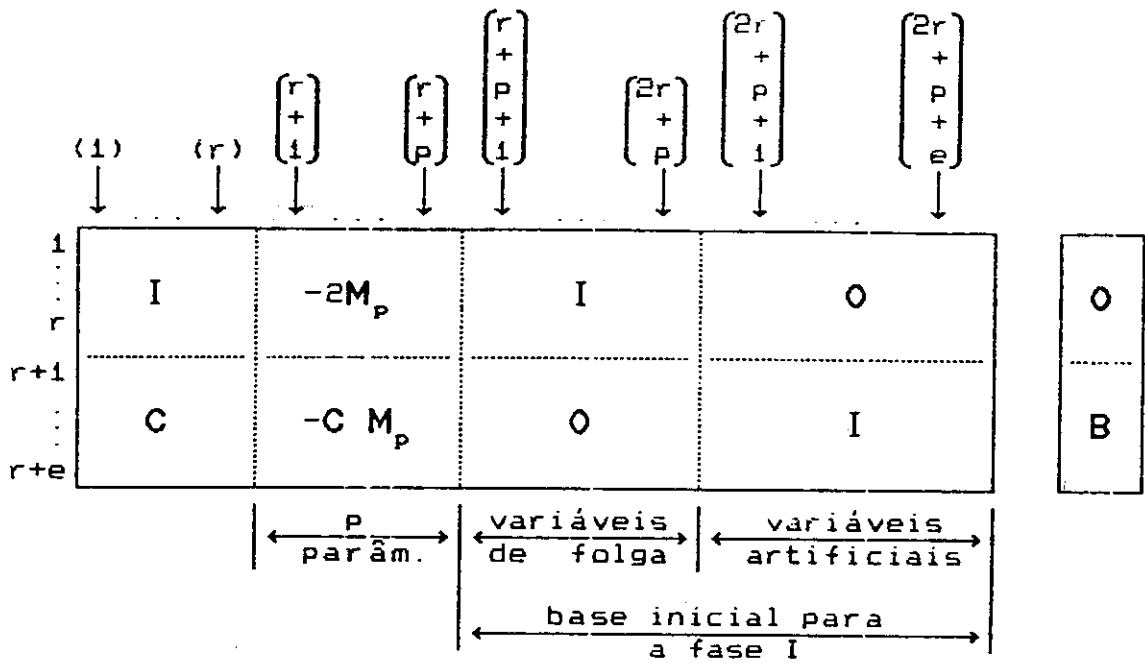


Fig. 6.4 Esquema do posicionamento dos coeficientes das equações do problema artificial (6.27)

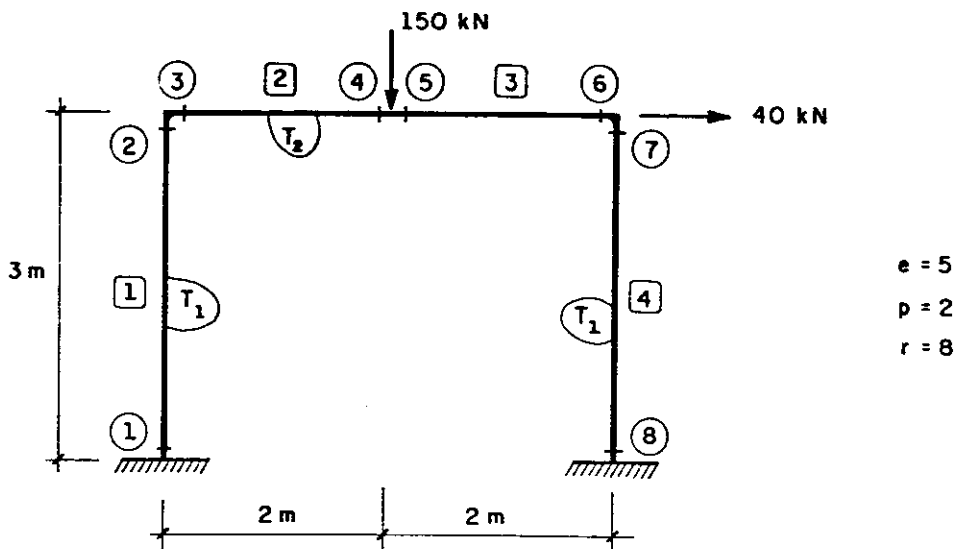


Fig. 6.5 Pórtico plano estudado na seção 3.2

As 5 relações independentes de equilíbrio para o pórtico da figura 6.5 podem ser determinadas de acordo com

os procedimentos apresentados no capítulo 4, sendo dadas por:

$$\begin{aligned}
 M_2 + M_3 &= 0 \\
 M_4 + M_5 &= 0 \\
 M_6 + M_7 &= 0 \quad (6.28) \\
 0,33M_1 + 0,33M_2 + 0,33M_7 + 0,33M_8 &= 40 \\
 0,50M_3 + 0,50M_4 - 0,50M_5 - 0,50M_6 &= 150
 \end{aligned}$$

de onde são tirados os elementos da matriz **C** e do vetor **B**.

Conforme (6.24), tem-se que a modelagem do problema é expressa por:

$$\text{Minimize } 6T_1 + 4T_2$$

Sujeito a

$$\begin{aligned}
 -T_1 &\leq M_1 \leq T_1 \\
 -T_1 &\leq M_2 \leq T_1 \\
 -T_2 &\leq M_3 \leq T_2 \\
 -T_2 &\leq M_4 \leq T_2 \\
 -T_2 &\leq M_5 \leq T_2 \\
 -T_2 &\leq M_6 \leq T_2 \\
 -T_1 &\leq M_7 \leq T_1 \\
 -T_1 &\leq M_8 \leq T_1 \quad (6.29) \\
 M_2 + M_3 &= 0 \\
 M_4 + M_5 &= 0 \\
 M_6 + M_7 &= 0 \\
 0,33M_1 + 0,33M_2 + 0,33M_7 + 0,33M_8 &= 40 \\
 0,50M_3 + 0,50M_4 - 0,50M_5 - 0,50M_6 &= 150 \\
 T_1, T_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

De acordo com (6.12), as mudanças de variáveis a serem realizadas para transformar o problema (6.29) na

forma padrão são:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= x_1 - T_1 & M_5 &= x_5 - T_2 \\
 M_2 &= x_2 - T_1 & M_6 &= x_6 - T_2 \\
 M_3 &= x_3 - T_2 & M_7 &= x_7 - T_1 \\
 M_4 &= x_4 - T_2 & M_8 &= x_8 - T_1
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

De (6.26) tem-se que a forma padrão do problema (6.29) é:

$$\text{Minimize } 6T_1 + 4T_2 \tag{6.31}$$

Sujeito a

$$\begin{aligned}
 x_1 - 2T_1 + x_{11} &= 0 \\
 x_2 - 2T_1 + x_{12} &= 0 \\
 x_3 - 2T_2 + x_{13} &= 0 \\
 x_4 - 2T_2 + x_{14} &= 0 \\
 x_5 - 2T_2 + x_{15} &= 0 \\
 x_6 - 2T_2 + x_{16} &= 0 \\
 x_7 - 2T_1 + x_{17} &= 0 \\
 x_8 - 2T_1 + x_{18} &= 0 \\
 x_2 + x_3 - T_1 - T_2 &= 0 \\
 x_4 + x_5 - 2T_2 &= 0 \\
 x_6 + x_7 - T_1 - T_2 &= 0 \\
 0,33x_1 + 0,33x_2 + 0,33x_7 + 0,33x_8 - 1,32T_1 &= 40 \\
 0,50x_3 + 0,50x_4 - 0,50x_5 - 0,50x_6 &= 150 \\
 x_i &\geq 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, 8, 11, \dots, 18 \\
 T_1, T_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Finalmente, de (6.27), obtém-se o problema artificial, dado por:

$$\text{Minimize } x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \quad (6.32)$$

Sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 - 2T_1 + x_{11} &= 0 \\ x_2 - 2T_1 + x_{12} &= 0 \\ x_3 - 2T_2 + x_{13} &= 0 \\ x_4 - 2T_2 + x_{14} &= 0 \\ x_5 - 2T_2 + x_{15} &= 0 \\ x_6 - 2T_2 + x_{16} &= 0 \\ x_7 - 2T_1 + x_{17} &= 0 \\ x_8 - 2T_1 + x_{18} &= 0 \\ x_2 + x_3 - T_1 - T_2 + x_{19} &= 0 \\ x_4 + x_5 - 2T_2 + x_{20} &= 0 \\ x_6 + x_7 - T_1 - T_2 + x_{21} &= 0 \\ 0,33x_1 + 0,33x_2 + 0,33x_7 + 0,33x_8 - 1,32T_1 + x_{22} &= 40 \\ 0,50x_3 + 0,50x_4 - 0,50x_5 - 0,50x_6 + x_{23} &= 150 \\ x_i &\geq 0 \quad ; i = 1, \dots, 8, 11, \dots, 23 \\ T_1, T_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

O problema (6.32) está pronto para se aplicar o algoritmo simplex. A base inicial para a fase I é constituída pelas variáveis x_j ($j = 11, \dots, 23$). Após a otimização do problema original (6.31), feita na fase II, a distribuição de momentos fletores ao longo do pórtico pode ser encontrada através das equações de (6.30).

6.3 O problema de análise sob carregamento variável

O problema de análise sob carregamento variável foi introduzido na seção 3.3 do capítulo 3 e exemplificado através do pórtico plano da figura 3.8. A análise da acomodação está relacionada com a solução elástica

e com os momentos fletores residuais.

Tomando-se como base o teorema estático da acomodação, este problema de análise será dividido em duas partes: a primeira, corresponde a determinar o fator de carga de plastificação alternada e, a segunda, calcular o fator de carga de colapso incremental. De posse desses dois fatores, sabe-se que o fator de carga de acomodação corresponderá ao menor deles.

O fator de carga de plastificação alternada λ_a é calculado na seção transversal crítica que possui a menor relação entre duas vezes o momento de início de escoamento e o intervalo $(\mu_j^{\max} - \mu_j^{\min})$ para o momento fletor elástico. Considerando-se que esta seção seja a de índice k , λ_a é obtido de (3.18), ou seja,

$$\lambda_a (\mu_k^{\max} - \mu_k^{\min}) = 2(M_y)_k \quad (6.33)$$

Já o cálculo do fator de carga de colapso incremental λ_I pode ser colocado como sendo o problema seguinte:

- Determinar o maior valor do fator de carga λ para o qual exista uma distribuição de momento fletor residual m ao longo da estrutura que seja estaticamente admissível com o carregamento externo nulo e que satisfaça, para qualquer seção transversal crítica j , as condições:

$$\begin{aligned} m_j + \lambda \mu_j^{\max} &\leq (M_p)_j \\ m_j + \lambda \mu_j^{\min} &\geq -(M_p)_j \end{aligned} \quad (6.34)$$

Um exemplo deste tipo de análise foi dado na figura 3.8, cuja solução geométrica está na figura 3.10. Analisando-se esta figura, observa-se a semelhança que há entre esse problema e um problema de programação linear apresentado no capítulo anterior. Desta forma, o cálculo de λ_I de um problema genérico de análise sob carregamento variável pode ser modulado matematicamente conforme o problema seguinte:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } \lambda && (6.35) \\
 & \text{Sujeito a} \\
 & m_j + \lambda \mu_j^{\max} \leq (M_p)_j, && j = 1, \dots, r \\
 & m_j + \lambda \mu_j^{\min} \geq -(M_p)_j \\
 & \sum_{j=1}^r C_{ij} m_j = 0 && ; i = 1, \dots, e \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned}$$

onde os $(M_p)_j$, μ_j^{\max} e μ_j^{\min} ($j = 1, \dots, r$) são conhecidos previamente; no software apresentado no final deste trabalho, os momentos fletores elásticos μ_j^{\max} e μ_j^{\min} são calculados na sub-rotina ENVOLT e a formulação necessária para obtenção desses momentos fletores apresentada no apêndice B.

Em termos matriciais, o problema (6.35) é dado por:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } \lambda \\
 & \text{Sujeito a} \\
 & M + \lambda M^{\max} \leq M_p && (6.36) \\
 & M + \lambda M^{\min} \geq -M_p \\
 & C M = 0 \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned}$$

Para que o problema (6.35) possa ser resolvido através do algoritmo simplex apresentado no capítulo anterior, é necessário colocá-lo na sua forma padrão. Considerando-se uma posição de rótula arbitrária k , as inequações para esta posição que assegura a acomodação são dadas, de acordo com (6.35), por:

$$m_k + \lambda \mu_k^{\max} - (M_p)_k \leq 0 \quad (6.37)$$

$$m_k + \lambda \mu_k^{\min} + (M_p)_k \geq 0 \quad (6.38)$$

onde a variável m_k é irrestrita quanto a sinal

Definindo-se uma nova variável x_k , tal que,

$$x_k = m_k + \lambda \mu_k^{\min} + (M_p)_k \quad (6.39)$$

as inequações (6.37) e (6.38) podem ser substituídas, respectivamente, por:

$$x_k + \lambda(\mu_k^{\max} - \mu_k^{\min}) \leq 2(M_p)_k \quad (6.40)$$

$$x_k \geq 0 \quad (6.41)$$

onde, de (6.39), tem-se que:

$$m_k = x_k - \lambda \mu_k^{\min} - (M_p)_k \quad (6.42)$$

Com essa mudança de variável, as inequações (6.40) e (6.41) envolvem somente variáveis não negativas. A inequação (6.40) pode ser colocada em forma de equação com a introdução de uma variável de folga x_f , ou seja,

$$x_k + \lambda(\mu_k^{\max} - \mu_k^{\min}) + x_f = 2(M_p)_k \quad (6.43)$$

Em termos gerais, conforme (6.43), as inequações do problema (6.35) podem ser transformadas nas seguintes equações:

$$x_j + \lambda(\mu_j^{\max} - \mu_j^{\min}) + x_{r+1+j} = 2(M_p)_j, \quad j = 1, \dots, r \quad (6.44)$$

onde $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, r, r+2, \dots, 2r+1$

As equações (6.44) foram obtidas através de mudanças das variáveis livres do problema original, tal como (6.42), que em termos gerais são dadas por:

$$m_j = x_j - \lambda \mu_j^{\min} - (M_p)_j, \quad j = 1, \dots, r \quad (6.45)$$

Substituindo-se (6.45) nas equações de (6.35), referentes às relações independentes de equilíbrio com carga externa nula, tem-se:

$$\sum_{j=1}^r C_{ij} x_j - \lambda \sum_{j=1}^r C_{ij} \mu_j^{\min} = \sum_{j=1}^r C_{ij} (M_p)_j ; i = 1, \dots, e \quad (6.46)$$

onde se supõe que os elementos do segundo membro dessas equações sejam não negativos; se existirem elementos negativos, basta multiplicar as equações correspondentes por -1 .

Com (6.44) e (6.46), o problema (6.35) pode ser colocado na forma padrão seguinte

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad -\lambda \\ &\text{Sujeito a} \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$x_j + \lambda(\mu_j^{\max} - \mu_j^{\min}) + x_{r+1+j} = 2(M_p)_j \quad ; j = 1, \dots, r$$

$$\sum_{j=1}^r C_{ij} x_j - \lambda \sum_{j=1}^r C_{ij} \mu_j^{\min} = \sum_{j=1}^r C_{ij} (M_p)_j \quad ; i = 1, \dots, e$$

$$x_j \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, r, r+2, \dots, 2r+1$$

$$\lambda \geq 0$$

onde o problema, antes de maximização, foi transformado num problema de minimização, conforme os procedimentos de redução à forma padrão dados na seção 5.4.1 do capítulo 5.

Para que se tenha uma base inicial para a fase I do método das duas fases, é necessário acrescentar as variáveis artificiais nas últimas e equações de (6.47), com isso, o problema artificial é dado por

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^e x_{2r+1+i} \quad (6.48)$$

Sujeito a

$$x_j + \lambda(\mu_j^{\max} - \mu_j^{\min}) + x_{r+1+j} = 2(M_p)_j \quad ; j=1, \dots, r$$

$$\sum_{j=1}^r C_{ij} x_j - \lambda \sum_{j=1}^r C_{ij} \mu_j^{\min} + x_{2r+1+i} = \sum_{j=1}^r C_{ij} (M_p)_j \quad ; i=1, \dots, e$$

$$x_j \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, r, r+2, \dots, 2r+1+e$$

$$\lambda \geq 0$$

A figura 6.6 mostra o esquema do posicionamento dos coeficientes das equações (6.48), conforme estabelecido para os problemas anteriores:

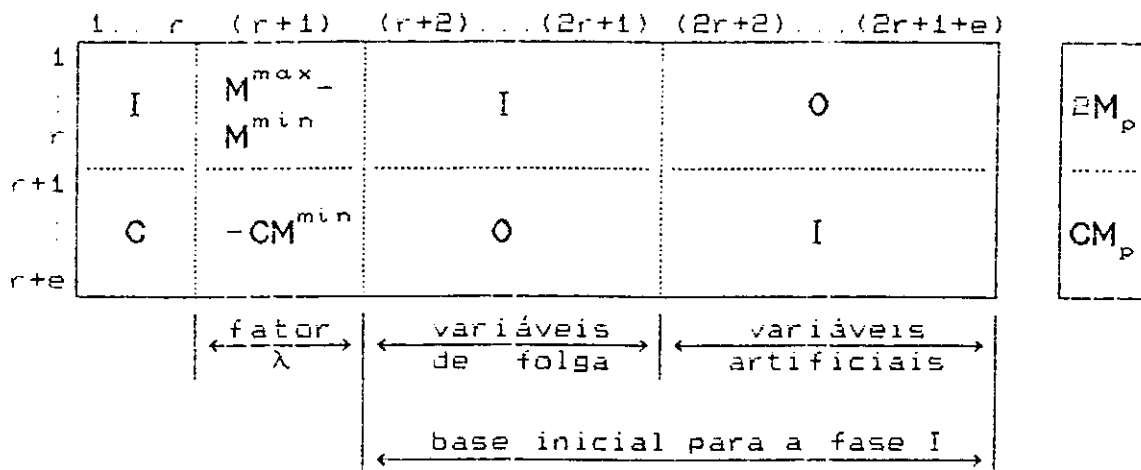


Fig. 6.6 Esquema do posicionamento dos coeficientes das equações do problema artificial (6.48)

Para exemplificar, seja a figura 6.7 que mostra o pórtico plano analisado na figura 3.8 com as posições onde é possível ocorrer rótulas plásticas e o carregamento correspondente.

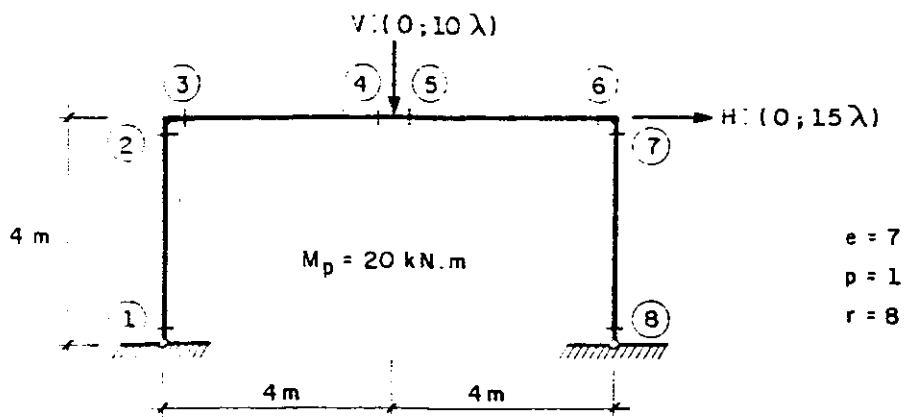


Fig. 6.7 Pórtico plano analisado na seção 3.3

A envoltória elástica dos momentos fletores do pórtico da figura 6.7 pode ser obtida através das figuras 3.9.a e 3.9.b, essa envoltória é apresentada na tabela 6.1. Convém ressaltar que os sinais dos momentos fletores dessa tabela estão de acordo com o sistema de referência global definido na seção 4.5.1.

Tabela 6.1 Envoltória elástica dos momentos fletores

SEÇÃO j	$\lambda \mu_j^{\max}$	$\lambda \mu_j^{\min}$	$\lambda (\mu_j^{\max} - \mu_j^{\min})$
1	0	0	0
2	30λ	$-7,5\lambda$	$37,5\lambda$
3	$7,5\lambda$	-30λ	$37,5\lambda$
4	$12,5\lambda$	0	$12,5\lambda$
5	0	$-12,5\lambda$	$12,5\lambda$
6	0	$-37,5\lambda$	$37,5\lambda$
7	$37,5\lambda$	0	$37,5\lambda$
8	0	0	0

As 8 relações independentes de equilíbrio para os momentos fletores residuais com carregamento externo nulo são obtidas conforme descrito no capítulo 4 e valem:

$$\begin{aligned} m_2 + m_9 &= 0 \\ m_4 + m_5 &= 0 \\ m_6 + m_7 &= 0 \\ m_1 &= 0 \\ m_8 &= 0 \\ 0,25m_1 + 0,25m_2 + 0,25m_7 + 0,25m_8 &= 0 \\ -0,25m_9 - 0,25m_4 + 0,25m_5 + 0,25m_6 &= 0 \end{aligned} \tag{6.49}$$

de onde se obtém os elementos da matriz C e do vetor B.

O problema pode ser modelado conforme (6.35), sendo dado por:

Maximize λ
Sujeito a

$$\begin{aligned} m_1 &\leq 20 \\ m_1 &\geq -20 \\ m_2 + 30\lambda &\leq 20 \\ m_2 - 7,5\lambda &\geq -20 \\ m_9 + 7,5\lambda &\leq 20 \\ m_9 - 30\lambda &\geq -20 \\ m_4 + 12,5\lambda &\leq 20 \\ m_4 &\geq -20 \\ m_5 &\leq 20 \\ m_6 - 12,5\lambda &\geq -20 \\ m_6 &\leq 20 \\ m_6 - 37,5\lambda &\geq -20 \\ m_7 + 37,5\lambda &\leq 20 \end{aligned} \tag{6.50}$$

$$\begin{aligned}
 m_7 & \geq -20 \\
 m_6 & \leq 20 \\
 m_8 & \geq -20 \\
 m_2 + m_3 & = 0 \\
 m_4 + m_5 & = 0 \quad \left[\begin{array}{l} 6.50 \\ \text{cont.} \end{array} \right] \\
 m_6 + m_7 & = 0 \\
 m_1 & = 0 \\
 m_8 & = 0 \\
 0,25m_1 + 0,25m_2 + 0,25m_7 + 0,25m_8 & = 0 \\
 -0,25m_3 - 0,25m_4 + 0,25m_5 + 0,25m_6 & = 0 \\
 \lambda & \geq 0
 \end{aligned}$$

As mudanças de variáveis necessárias para transformar o problema (6.50) na sua forma padrão são, conforme (6.45):

$$\begin{aligned}
 m_1 = x_1 - 20 & & m_5 = x_5 + 12,5\lambda - 20 \\
 m_2 = x_2 + 7,5\lambda - 20 & & m_6 = x_6 + 37,5\lambda - 20 \quad (6.51) \\
 m_3 = x_3 + 30\lambda - 20 & & m_7 = x_7 - 20 \\
 m_4 = x_4 - 20 & & m_8 = x_8 - 20
 \end{aligned}$$

Com (6.47), tem-se a forma padrão do problema (6.50), sendo dada por:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize } -\lambda & & (6.52) \\
 \text{Sujeito a} & &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_{10} & = 40 \\
 x_2 + 37,5\lambda + x_{11} & = 40 \\
 x_3 + 37,5\lambda + x_{12} & = 40 \\
 x_4 + 12,5\lambda + x_{13} & = 40 \\
 x_5 + 12,5\lambda + x_{14} & = 40 \\
 x_6 + 37,5\lambda + x_{15} & = 40
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_7 + 37,5\lambda + x_{16} = 40 \\
 & + x_{17} = 40 \\
 & x_2 + x_3 + 37,5\lambda = 40 \\
 & x_4 + x_5 + 12,5\lambda = 40 \\
 & x_6 + x_7 + 37,5\lambda = 40 \\
 & x_1 = 20 \\
 & x_8 = 20 \\
 & 0,25 x_1 + 0,25 x_2 + 0,25 x_7 + 0,25 x_8 - 1,875\lambda = 20 \\
 & -0,25 x_3 - 0,25 x_4 + 0,25 x_5 + 0,25 x_6 = 0 \\
 & \lambda \geq 0 \\
 & x_j \geq 0 \quad , j = 1, \dots, 8, 10, \dots, 17
 \end{aligned}$$

(6.52 cont.)

Com (6.48), chega-se ao correspondente problema artificial, sendo expresso por:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \\
 & \text{Sujeito a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 + x_{10} = 40 \\
 & x_2 + 37,5\lambda + x_{11} = 40 \\
 & x_3 + 37,5\lambda + x_{12} = 40 \\
 & x_4 + 12,5\lambda + x_{13} = 40 \\
 & x_5 + 12,5\lambda + x_{14} = 40 \\
 & x_6 + 37,5\lambda + x_{15} = 40 \\
 & x_7 + 37,5\lambda + x_{16} = 40 \\
 & x_8 + x_{17} = 40 \\
 & x_2 + x_3 + 37,5\lambda + x_{18} = 40 \\
 & x_4 + x_5 + 12,5\lambda + x_{19} = 40 \\
 & x_6 + x_7 + 37,5\lambda + x_{20} = 40 \\
 & x_1 + x_{21} = 20
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_8 + x_{22} = 20 \\
 0,25 x_1 + 0,25 x_2 + 0,25 x_7 + 0,25 x_8 - 1,875\lambda + x_{23} &= 20 \\
 -0,25 x_3 - 0,25 x_4 + 0,25 x_5 + 0,25 x_6 + x_{24} &= 0 \\
 \lambda &\geq 0 \\
 x_j &\geq 0 \quad ; j = 1, \dots, 8, 10, \dots, 24
 \end{aligned}$$

(6.53 cont.)

Com (6.53), tem-se a base inicial para se começar a fase I do método das duas fases. Otimizando-se o problema (6.53), a base inicial para a fase II, que resolverá o problema (6.52), será a última base da fase I. Resolvido esse problema, a solução ótima para o problema (6.50) será a mesma do problema (6.52) com o sinal trocado, conforme estabelecido na seção 5.4.1; os momentos fletores residuais nas seções transversais críticas são obtidos através das equações (6.51). Desta forma, obtém-se o fator de carga de colapso incremental λ_I . O fator de carga de plastificação alternada λ_a já foi obtido anteriormente. Portanto, o fator de carga de acomodação λ_b fica determinado, sendo dado pelo menor dentre os fatores λ_a e λ_I .

6.4 O problema de síntese sob carregamento variável

Como visto na seção 3.4, o problema de síntese sob carregamento variável envolve conhecimentos de acomodação e de peso mínimo. Ele pode ser colocado como sendo um problema que visa minimizar a função peso da estrutura, sujeita às condições do teorema estático da acomodação; reduz-se também a problema de programação linear semelhante aos anteriores

Em cada iteração está previsto o cálculo da envoltória elástica dos momentos, com os momentos de inércia correspondentes aos momentos de plastificação da iteração anterior, tendo essa envoltória o problema dessa

iteração se completa resolvendo um PPL, cuja forma geral é expressa por:

$$\text{Minimize } \sum_{k=1}^b (M_p^*)_k \ell_k \quad (6.54)$$

Sujeito a

$$m_j + \mu_j^{\max} \leq (M_p)_j \quad ; j = 1, \dots, r$$

$$m_j + \mu_j^{\min} \geq -(M_p)_j \quad ; j = 1, \dots, r$$

$$\sum_{j=1}^r C_{i,j} m_j = 0 \quad ; i = 1, \dots, e$$

$$(M_p^*)_k \geq 0 \quad ; k = 1, \dots, b$$

$$(M_p)_j \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, r$$

Os $(M_p^*)_k$ e $(M_p)_j$ estão definidos em função dos p parâmetros positivos para os momentos de plastificação total das barras; os momentos fletores elásticos μ_j^{\max} e μ_j^{\min} são conhecidos, tendo sido calculados a partir dos momentos de plastificação total da iteração anterior.

Observe-se que o problema (6.54), cujas variáveis são os m_j , $(M_p^*)_k$ e $(M_p)_j$, envolve as formulações dos problemas (6.24) e (6.35). Em termos matriciais, (6.54) é dado por:

$$\text{Minimize } (M_p^*)^T L$$

Sujeito a

$$M + M^{\max} \leq M_p$$

$$M + M^{\min} \geq -M_p \quad (6.55)$$

$$C M = 0$$

$$M_p^* \geq 0$$

$$M_p \geq 0$$

As equações referentes às mudanças de variáveis necessárias para transformar o problema (6.54) na sua forma

padrão são semelhantes às (6.45), obtidas para o problema de análise sob carregamento variável; a única diferença é que para o problema em estudo o carregamento variável é conhecido, isto é, $\lambda = 1$. Desta forma:

$$m_j = x_j - \mu_j^{\min} - (M_p)_j \quad ; j = 1, \dots, r \quad (6.56)$$

Analogamente ao problema (6.35), as inequações de (6.54) podem ser transformadas em equações do tipo:

$$x_j - 2(M_p)_j + x_{r+p+j} = -(\mu_j^{\max} - \mu_j^{\min}) \quad ; j = 1, \dots, r \quad (6.57)$$

onde $x_j \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, r, r+p+1, \dots, 2r+p$.

Observe-se que os elementos do segundo membro das equações de (6.57) podem ser negativos ou nulos. Suponha-se que n elementos sejam negativos e que, após um reagrupamento das equações, as equações referentes a esses elementos negativos correspondam às n últimas equações de (6.57). Visando-se a obtenção da forma padrão de (6.54), estas equações devem ser multiplicadas por -1 . Com isso, as equações de (6.57) podem ser reescritas na forma seguinte:

$$\begin{aligned} x_j - 2(M_p)_j + x_{r+p+j} &= 0 \quad ; j = 1, \dots, r-n \\ -x_j + 2(M_p)_j - x_{r+p+j} &= (\mu_j^{\max} - \mu_j^{\min}) \quad ; j = r-n+1, \dots, r \end{aligned} \quad (6.58)$$

onde $x_j \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, r, r+p+1, \dots, 2r+p$.

Substituindo-se os m_j dados por (6.56) nas equações de (6.54), tem-se:

$$\sum_{j=1}^r C_{ij} x_j - \sum_{j=1}^r C_{ij} (M_p)_j = \sum_{j=1}^r C_{ij} \mu_j^{\min} \quad ; i = 1, \dots, e \quad (6.59)$$

onde se supõe que os elementos do segundo membro dessas equações sejam não negativos; se isto não ocorrer, basta

multiplicar as equações correspondentes por -1

Com (6.58) e (6.59), chega-se à forma padrão do problema (6.54), ou seja:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_{k=1}^b (M_p^*)_k z_k \\ & \text{Sujeito a} && \hspace{15em} (6.60) \\ & x_j - 2(M_p)_j + x_{r+p+j} &= 0 & \quad j = 1, \dots, r-n \\ & -x_j + 2(M_p)_j - x_{r+p+j} &= (\mu_j^{\max} - \mu_j^{\min}) & \quad j = r-n+1, \dots, r \\ & \sum_{j=1}^r C_{ij} x_j - \sum_{j=1}^r C_{ij} (M_p)_j &= \sum_{j=1}^r C_{ij} \mu_j^{\min} & \quad i = 1, \dots, e \\ & (M_p^*)_k &\geq 0 & \quad k = 1, \dots, b \\ & (M_p)_j &\geq 0 & \quad j = 1, \dots, r \\ & x_j &\geq 0 & \quad j = 1, \dots, r, r+p+1, \dots, 2r+p \end{aligned}$$

Neste caso, para que se tenha o problema artificial, com o sistema de equações na forma canônica, além das e variáveis artificiais que devem ser acrescentadas nas últimas e equações de (6.60), há necessidade de mais n variáveis artificiais para as n equações de (6.57) que foram multiplicadas por -1 . Com isso, o problema artificial é dado por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_{j=1}^{n+e} x_{2r+p+j} \\ & \text{Sujeito a} && \hspace{15em} (6.61) \\ & x_j - 2(M_p)_j + x_{r+p+j} &= 0 & \quad j = 1, \dots, r-n \\ & -x_j + 2(M_p)_j - x_{r+p+j} + x_{r+p+n+j} &= (\mu_j^{\max} - \mu_j^{\min}) & \quad j = r-n+1, \dots, r \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^r C_{ij} x_j - \sum_{j=1}^r C_{ij} (M_p)_j + x_{2r+p+n+i} = \sum_{j=1}^r C_{ij} \mu_j^{\min} \quad ; i=1, \dots, e$$

$$(M_p)_j \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, r$$

$$x_j \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, r, r+p+1, \dots, 2r+p+n+e$$

(6.61 cont.)

A figura 6.8 mostra o posicionamento dos coeficientes das equações do problema artificial (6.61). As variáveis correspondentes aos grupos (a), (b) e (c), indicados nesta figura formam a base inicial para a fase I do método das duas fases que otimizará este problema artificial.

Terminada a fase I, prossegue-se na fase II com a última base obtida na fase anterior. Com isso, consegue-se otimizar o problema (6.60). Resolvido este problema, tem-se os valores mínimos dos momentos de plastificação total das barras exigidos pelo carregamento. Em seguida, faz-se uma verificação se a diferença entre estes momentos calculados e os admitidos no início de cada iteração está dentro da tolerância estabelecida. Se estiver, o problema está terminado; caso contrário, faz-se uma nova iteração conforme estabelecido na seção 3.4, até que a convergência seja atingida.

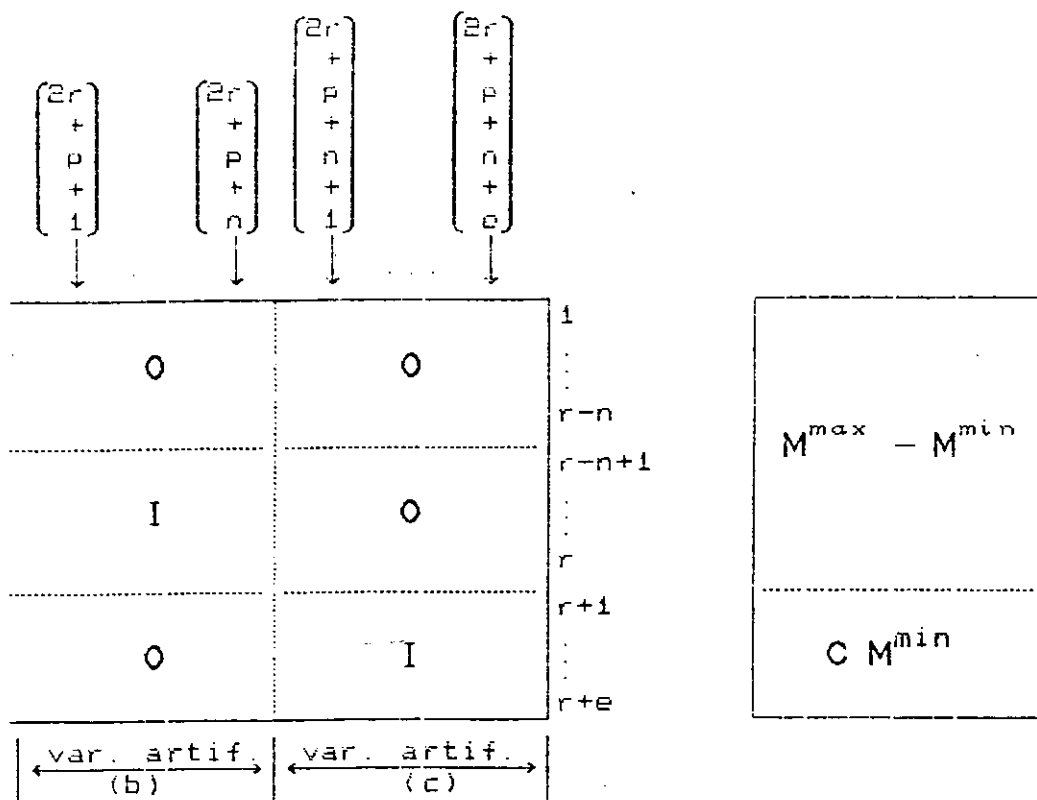
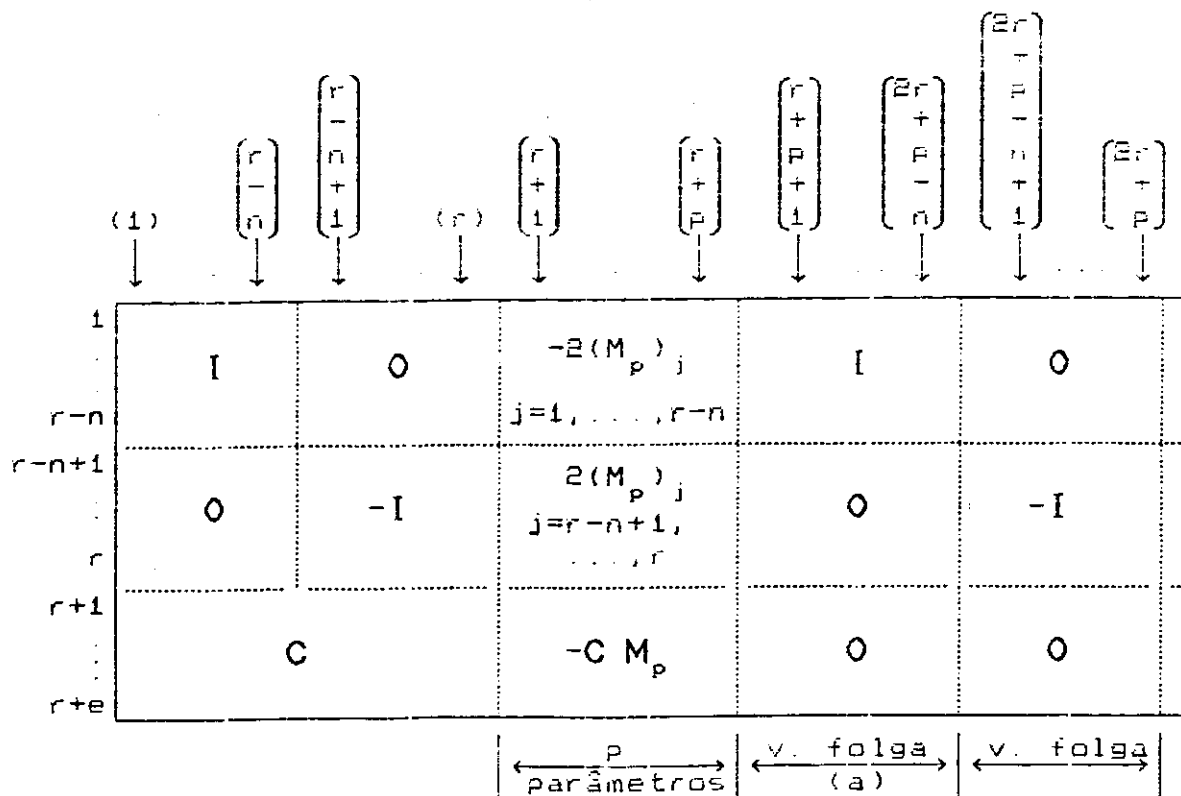


Fig. 6.8 Esquema do posicionamento dos coeficientes das equações do problema artificial (6.61)

CAPÍTULO 7

APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA

Tomando-se como base a teoria apresentada nos capítulos anteriores, foi desenvolvido um programa para microcomputadores compatíveis com a linha IBM-PC para resolução dos problemas de análise e síntese no método das rótulas plásticas. Pretende-se neste capítulo reunir todas as informações que possibilitem ao usuário utilizá-lo de maneira correta.

7.1 Comentários iniciais

O programa foi desenvolvido utilizando-se a linguagem FORTRAN-77. Quanto ao espaço de memória necessário para executá-lo, vai depender não só do espaço gasto para a codificação do programa mas também das dimensões das matrizes e vetores necessários para o cálculo do pórtico. Convém lembrar que esse espaço é limitado em 640 Kbytes de acordo com o equipamento que está sendo utilizado.

Para dimensionar as matrizes e os vetores, foi utilizado o comando PARAMETER em que há necessidade de especificar somente as seguintes variáveis auxiliares:

- M1 : Número de barras (NBAR)
- M2 : Número de nós (NNOS)
- M3 : Número de parâmetros referentes aos momentos de plastificação total das barras (NP)
- M4 : Número de nós vinculados (NNV)
- M5 : Número de coordenadas globais carregadas (NCC)

O programa-fonte, identificado pelo nome PASMRF.FOR, é composto de um programa principal e mais 8 sub-rotinas, descritas a seguir:

SUB-ROTINA	DESCRIÇÃO
CIMP	Determina o expoente " γ " e a constante "c" referentes à relação entre o momento de inércia e o momento de plastificação total para os diversos tipos de secções transversais usuais
DADRES	Impressão dos dados do pórtico e dos resultados do programa
ENVOLT	Cálculo da envoltória elástica dos momentos fletores
EQUIL	Determina as relações independentes de equilíbrio de pórticos planos
GAUSS1	Resolução de sistemas de equações pelo método de Gauss para matrizes não simétricas
GAUSS2	Resolução de sistemas de equações pelo método de Gauss para o caso de matriz simétrica armazenada na forma completa e com vários termos independentes
PERFILI	Determina o expoente " γ " e a constante "c" referentes à relação entre o momento de inércia e o momento de plastificação total dos perfis I

SUB-ROTINA	DESCRIÇÃO
SIMPLEX	Otimização de problemas sujeitos a restrições lineares

O programa trabalha com 3 arquivos. O primeiro é o de entrada de dados que deverá ser criado pelo usuário utilizando-se um editor qualquer; as informações necessárias para se criar esse arquivo serão dadas na seção 7.3. Os dois arquivos restantes são criados pelo programa; um, de nome ARQ1, será utilizado para armazenar os coeficientes das relações independentes de equilíbrio e o outro, identificado pelo nome DASA, contém os dados de entrada e a saída dos resultados da estrutura.

Quanto à unidade a ser utilizada para a entrada de dados e saída dos resultados, fica a critério do usuário.

7.2 Descrição das variáveis, vetores e matrizes utilizadas no programa

Pretende-se nesta seção descrever o conteúdo das variáveis, vetores e matrizes que foram utilizadas no programa, proporcionando assim uma rápida identificação entre os passos do programa e a teoria apresentada nos capítulos anteriores. Essa descrição é dada a seguir:

VARIÁVEL	CONTEÚDO
AREA	Área da seção transversal da barra
B	Largura da seção transversal retangular
BETA	Relação "b/h" da seção transversal retangular
BF	Largura da mesa do perfil I

VARIÁVEL	CONTEÚDO
C1	Variável de verificação se a solução ótima foi alcançada ou se pode ser melhorada
C2	Identificação da variável básica que vai deixar a base
COD	Constante "c" da relação entre o momento de inércia e o momento de plastificação total das barras
COD1	<p>Código do tipo de problema a ser resolvido:</p> <p>COD1 = 1 → problema de análise sob carregamento único onde se procura determinar o parâmetro positivo T que multiplica os M_p</p> <p>COD1 = 2 → problema de análise sob carregamento único onde se procura determinar o fator de carga λ_c</p> <p>COD1 = 3 → problema de síntese sob carregamento único</p> <p>COD1 = 4 → problema de análise sob carregamento variável</p> <p>COD1 = 5 → problema de síntese sob carregamento variável</p>
COD2	<p>Código do tipo de seção transversal usada:</p> <p>COD2 = 1 → retangular com "b/h" definido</p> <p>COD2 = 2 → retangular com largura "b" definida</p> <p>COD2 = 3 → retangular com altura "h" definida</p> <p>COD2 = 4 → circular de raio "r"</p> <p>COD2 = 5 → "I" para uma nuvem de pontos a ser definida</p> <p>COD2 = 6 → qualquer seção transversal diferente das anteriores onde se conheçam "γ" e "c"</p>

VARIAVEL	CONTEÚDO
COS	$\text{Cos } \alpha_i$
CRM	Custo relativo máximo
D	Altura total do perfil I
DE2, DE3 DE5, DE6	Componentes do vetor $(\delta_e)_i$, equação (B.16)
E	Módulo de elasticidade longitudinal
FCA	Fator de carga de acomodação
FCCI	Fator de carga de colapso incremental
FCCP	Fator de carga de colapso plástico
FCPA	Fator de carga de plasticidade alternada
FF	Fator de forma ν
FO	Valor da função objetivo
FPP	Fator de proporcionalidade dos parâmetros dos momentos de plastificação total das barras
FY	Tensão de escoamento
GAMA	Expoente "γ" da relação entre o momento de inércia e o momento de plastificação total das barras
H	Altura da seção transversal retangular
I1, I2, I3	índices das componentes do vetor $(P)_i$
IB	índice da barra
IRPA	índice da rótula plástica onde ocorreu a plastificação alternada
IX	Momento de inércia do perfil I em relação ao eixo principal XX
IXBR	índice da variável básica que vai deixar a base

VARIAVEL	CONTEÚDO
IXK	Posição do índice da variável não básica x_k , escolhida para entrar na base, no vetor IVNB(I)
J1,J2,J3	índices das coordenadas globais do nó inicial de cada barra segundo as direções dos eixos globais \bar{X} , \bar{Y} e \bar{Z} , respectivamente
K1,K2,K3	índices das coordenadas globais do nó final de cada barra segundo as direções dos eixos globais \bar{X} , \bar{Y} e \bar{Z} , respectivamente
L	Comprimento da barra
M	Ordem da matriz básica B
M1 a M11	Parâmetros para dimensionar matrizes e vetores
MINE	Momento de inércia
MPX	Momento de plastificação total do perfil I em relação ao eixo principal XX
NBA	Número de barras do grupo que possuem a mesma área
NBAI	Número de barras do grupo que possuem mesma área e mesmo momento de inércia
NBAR	Número de barras
NBFP	Número de barras do grupo que possuem o mesmo fator de proporcionalidade dos parâmetros dos momentos de plastificação das barras
NBP	Número de barras que possuem o mesmo parâmetro multiplicador dos momentos de plastificação total das barras
NC	Controle do número de colunas das matrizes
NCC	Número de coordenadas globais carregadas
NCV	Número de coordenadas globais vinculadas

VARIÁVEL	CONTEÚDO
NGBA	Número de grupos de barras que possuem a mesma área
NGBAI	Número de grupos de barras que possuem a mesma área e o mesmo momento de inércia
NGFP	Número de grupos de barras que possuem o mesmo fator de proporcionalidade dos parâmetros dos momentos de plastificação total das barras
NIF	Número de iterações feitas no problema de síntese sob carregamento variável
NITER	Número de iterações previstas para o problema de síntese sob carregamento variável
NL	Controle do número de linhas
NNOS	Número de nós
NNV	Número de nós vinculados
NP	Número de parâmetros referentes aos momentos de plastificação total das barras
NPTOS	Número de pontos que definem uma nuvem para a relação entre I e M_p
NR	Número de rótulas plásticas possíveis
NRI	Número de relações independentes de equilíbrio
NVNB	Número de variáveis não básicas
PIVO	Elemento pivô da eliminação de Gauss
PRECI	Valor mínimo no qual toda variável cujo módulo for menor ou igual a este valor será considerada nula
PROJETO	Variável do tipo CHARACTER*72 para identificação do pórtico a ser analisado

VARIÁVEL	CONTEÚDO
SEN	Sen α_i
SX	Somatório dos x_i das equações (A.26) e (A.27)
SX2	Somatório do termo x_i^2 da equação (A.26)
SXY	Somatório do produto $x_i y_i$ da equação (A.26)
SY	Somatório dos y_i das equações (A.26) e (A.27)
TF	Espessura da mesa do perfil I
TW	Espessura da alma do perfil I
XI	Contém o $\log(M_p)_x$
XK	Valor da variável não básica escolhida para entrar na base
YI	Contém o $\log(I_x)$
I, J, J1 J2, K1, K	Contadores
A1, A2, A3 A4, A5, AUX1, AUX2 I, J, J1, J2 K, K1, K2	Variáveis auxiliares

VETOR	CONTEÚDO	DIMENSÃO
AK(I)	Coluna da matriz A correspondente à variável não básica x_k escolhida para entrar na base	I=1,2NBAR+NRI
AR(I)	Áreas das seções transversais das barras	I=1,NBAR
AUX(I)	Vetor auxiliar	I=1,2NBAR+NRI
B1(I)	Ações aplicadas nas coordenadas globais / Termos independentes dos sistemas de equações	I=1,3NNOS ou I=1,2NBAR+NRI
BB(I)	Vetor auxiliar que guarda as componentes do vetor B1(I)	I=1,2NBAR+NRI
CC(I)	Coeficientes de custos da função objetivo original ou artificial	I=1,6NBAR+NP+NRI
CCB(I)	Coeficientes de custos básicos do vetor C_B	I=1,2NBAR+NRI
F(I)	Ações aplicadas nas coordenadas globais carregadas	I=1,NCC
FMAX(I)	Valores característicos máximos das cargas variáveis aplicadas nas coord. globais carregadas	I=1,NCC
FMIN(I)	Valores característicos mínimos das cargas variáveis aplicadas nas coord. globais carregadas	I=1,NCC
FP(I)	Fatores de proporcionalidade dos parâmetros dos momentos de plastificação total referentes a cada posição possível de se formar uma rótula plástica	I=1,2NBAR
IBR(I)	Posições das componentes do vetor y_k maiores que zero	I=1,C2

VETOR	CONTEÚDO	DIMENSÃO
ICC(I)	índices das coordenadas globais carregadas	I=1,NCC
INV(I)	índices dos nós vinculados	I=1,NNV
IP(I)	índices dos parâmetros dos momentos de plastificação total referentes a cada posição possível de se formar uma rótula plástica	I=1,2NBAR
IVB(I)	índices das variáveis básicas	I=1,2NBAR+NRI
IVNB(I)	índices das variáveis não básicas	I=1,4NBAR+NP
IZ(I)	Momentos de inércia das barras em relação ao eixo global \bar{Z}	I=1,NBAR
JB(I)	Nós iniciais das barras	I=1,NBAR
KB(I)	Nós finais das barras	I=1,NBAR
MF(I)	Momentos fletores atuantes nas extremidades das barras	I=1,2NBAR
MFMA(I)	Momentos fletores máximos atuantes nas extremidades das barras	I=1,2NBAR
MFMI(I)	Momentos fletores mínimos atuantes nas extremidades das barras	I=1,2NBAR
MFR(I)	Momentos fletores residuais nas extremidades das barras	I=1,2NBAR
MMAX(I)	Momentos fletores máximos das seções transversais críticas, calculados elasticamente	I=1,2NBAR
MMIN(I)	Momentos fletores mínimos das seções transversais críticas, calculados elasticamente	I=1,2NBAR

VETOR	CONTEÚDO	DIMENSÃO
MP(I)	Momentos de plastificação total das barras	I=1,NBAR
MUNIT(I)	Momentos fletores nas extremidades das barras devidos às cargas unitárias	I=1,2NBAR
V(I)	Vinculação das coordenadas globais referentes aos nós vinculados	I=1,3NNV
VIP(I)	Valores iniciais dos parâmetros dos momentos de plastificação total	I=1,NP
X(I)	Coordenadas dos nós em relação ao eixo global \bar{X}	I=1,NNOS
X1(I)	Termos independentes dos sistemas de equações	I=1,2NBAR+NRI
X2(I)	Contém as soluções dos sistemas de equações	I=1,2NBAR+NRI
XB(I)	Valores das variáveis básicas / Vetor expandido para conter os valores das variáveis básicas e não básicas do problema original	I=1,4NBAR+NP
W(I)	Contém a solução do sistema $B^t w = c_b$	I=1,2NBAR+NRI
Y(I)	Coordenadas dos nós em relação ao eixo global \bar{Y}	I=1,NNOS
YK(I)	Contém a solução do sistema $B \cdot y_k = A_k$	I=1,2NBAR+NRI

MATRIZ	CONTEÚDO	DIMENSÃO
A(I,J)	Coefficientes dos sistemas de equações dos problemas original e artificial. Coefficientes das relações gerais de equilíbrio	I=1,2NBAR+NRI J=1,6NBAR+NP+NRI
B(I,I)	Matriz básica do sistema de equações	I=1,2NBAR+NRI
R(I,I)	Matriz de rigidez da estrutura	I=1,3NNOS
U(I,J)	Contém os carregamentos unitários/ Contém os deslocamentos nas coordenadas globais referentes às cargas unitárias	I=1,3NNOS J=1,NCC

7.3 Informações sobre a entrada de dados

A leitura dos dados da estrutura é feita através de arquivo. Para se criar esse arquivo, de nome DAEN, basta usar qualquer editor disponível. O formato escolhido para a entrada de dados é o padrão, assumido pelo sistema.

Os tipos de dados e a sequência em que estes dados serão escritos no arquivo estão apresentados a seguir:

1) Dados iniciais:

1.a) PROJETO

1.b) COD1,NBAR,NNOS,NNV,NCC

2) Leitura dos dados relacionados com a definição do pórtico:

2.a) Incidência das barras:

Barra I, JB(I), KB(I)

I=1,NBAR

2.b) Coordenadas dos nós:

Nó I, X(I), Y(I) I=1, NNOS

2.c) Vinculação do pórtico:

Nó vinculado, Direcção \bar{X} , Direcção \bar{Y} , Direcção \bar{Z}

$\begin{array}{cccc}
|-----| & |-----| & |-----| & |-----| \\
\text{INV(I)} & \text{V(3*I-2)} & \text{V(3*I-1)} & \text{V(3*I)}
\end{array}$

para I=1, NNV

3) Leitura do carregamento do pórtico:

Se COD1 = 1, 2 ou 3:

3.a) ICC(I), B1(ICC(I)) I=1, NCC

Se COD1 = 4 ou 5:

3.b) ICC(I), FMAX(I), FMIN(I) I=1, NCC

4) Se COD1 = 4 ou 5, fazer a leitura das características geométricas das barras e das características do material empregado:

4.a) Se COD1 = 4:

4.a.1) FF, E, NGBAI

Se NGBAI \neq 1:

4.a.2) NBAI, AREA, MINE } I=1, NGBAI

4.a.3) IB \longrightarrow J=1, NBAI }

Se NGBAI = 1:

4.a.4) AREA, MINE

4.b) Se COD1 = 5:

4.b.1) FY, E, NGBA

Se NGBA \neq 1:

4.b.2) NBA, AREA } I=1, NGBA

4.b.3) IB \longrightarrow J=1, NBA }

Se NGBA = 1:

4.b.4) AREA

5) Leitura dos dados referentes aos momentos de plastificação total das barras

5.a) Se COD1 = 1, 2 ou 4:

5.a.1) NGFP

Se NGFP ≠ 1:

5.a.2) NBFP, FPP

5.a.3) IB → J=1, NBFP

I=1, NGFP

Se NGFP = 1:

5.a.4) FPP

5.b) Se COD1 = 3 ou 5:

5.b.1) NP

Se NP ≠ NBAR:

5.b.2) NBP

5.b.3) IB, FPP → J=1, NBP

I=1, NP

6) Se COD1 = 5, fazer a leitura dos dados adicionais para a resolução do problema.

6.a) NITER, COD2

6.b) Se COD2 = 1:

BETA

6.c) Se COD2 = 2:

B

6.d) Se COD2 = 3:

H

6.e) Se COD2 = 5:

6.e.1) NPTOS

6.e.2) D, BF, TW, TF

I=1, NPTOS

6.f) Se COD2 = 6:

COC, GAMA

6.g) VIP(I)

I=1,NP

7.4 Esquema da estrutura do programa

A figura 7.1 mostra a estrutura simplificada do programa "PASMRP.FOR". Por essa estrutura, torna-se clara a sequência em que os dados são lidos e processados. Há também a indicação dos pontos onde as sub-rotinas são chamadas.

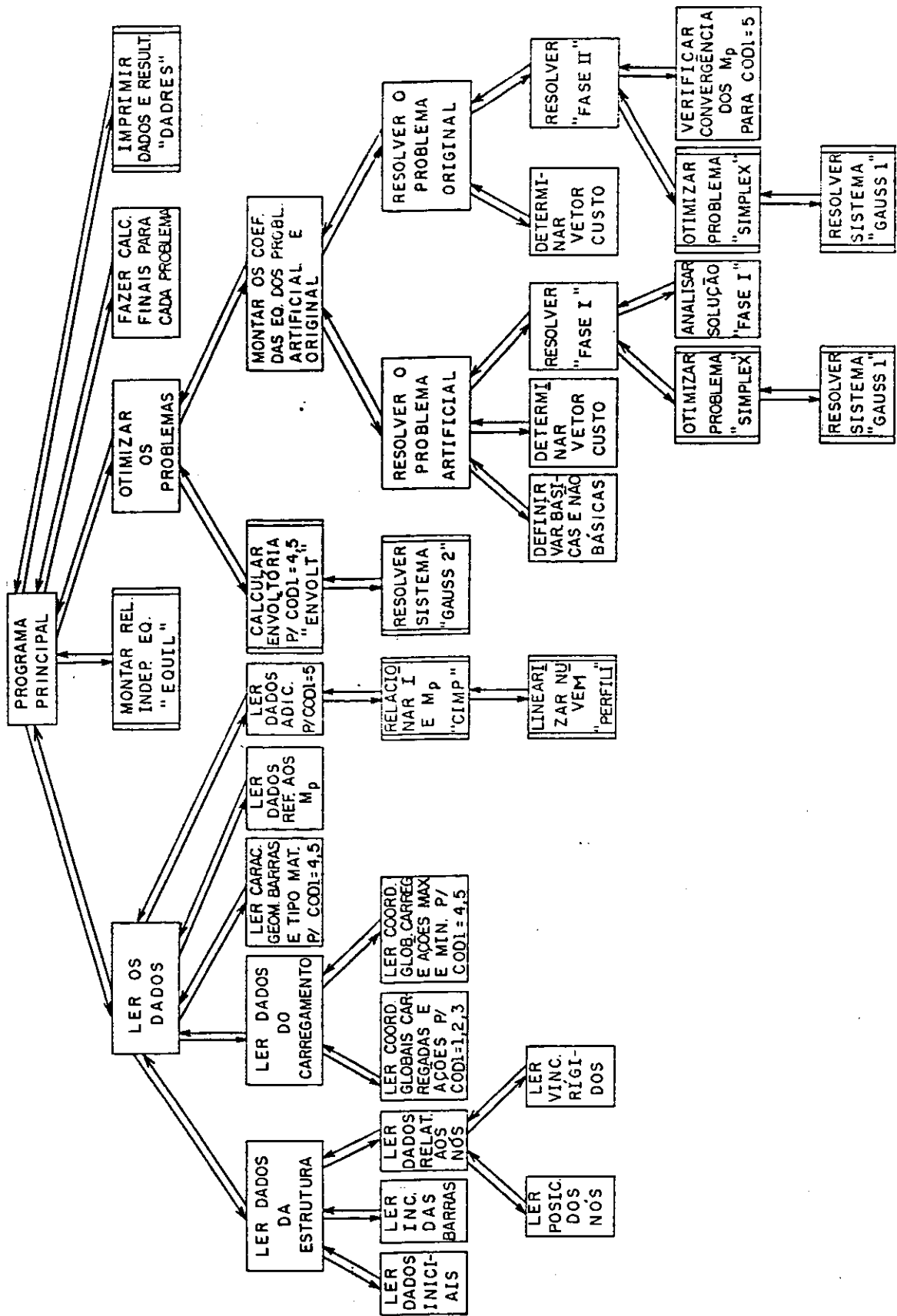


Fig. 7.1 Estrutura simplificada do programa "PASMRP.FOR"

7.5 LISTAGEM DO PROGRAMA "PASMRF.FOR"

5STORAGE:2

```
*****
*   PROGRAMA "PASMRF.FOR" PARA RESOLUCAO DE PROBLEMAS DE ANALISE E *
*   SINTESE NO METODO DAS ROTULAS PLASTICAS                               *
*****
```

```
C
*****
*   SUB-ROTINA "EQUIL" PARA CALCULO DAS RELACOES INDEPENDENTES DE *
*   EQUILIBRIO DE UM PORTICO PLANO                                       *
*****
```

```
      SUBROUTINE EQUIL (NBAR,NNOS,NNV,NCV,PRECI,JB,KB,X,Y,INV,V,NRI)
      PARAMETER (M1=35,M2=30,M3=15,M4=10)
      PARAMETER (M6=4*M1,M8=8*M1+M3,M10=3*M4)
      REAL L
      INTEGER V(M10)
      DIMENSION JB(M1),KB(M1),X(M2),Y(M2),INV(M4),A(M6,M8),B1(M6)
      COMMON /BLOC1/ A,/BLOC2/ B1
```

```
C
      NC=3*NBAR+NCV
      DO 10 I=1,3*NNOS
        DO 10 J=1,NC
      10  A(I,J)=0.  ..
```

```
*****
*   1. OBTENCAO DOS COEFICIENTES DA MATRIZ [E], EQUACAO (4.10), *
*   REFERENTES AS RELACOES GERAIS DE EQUILIBRIO QUE SERAO *
*   ARMAZENADOS NA MATRIZ [A]                                           *
*   *                                                                     *
*   1.1. CALCULO DOS COSSENO DIRETORES E DOS ELEMENTOS DA MATRIZ DE *
*   INCIDENCIA ESTATICA EXPRESSA PELA EQUACAO (4.26), PARA CADA *
*   BARRA                                                                 *
*****
```

```
      DO 25 I=1,NBAR
        L=SQRT((X(KB(I))-X(JB(I)))**2+(Y(KB(I))-Y(JB(I)))**2)
        COS=(X(KB(I))-X(JB(I)))/L
        SEN=(Y(KB(I))-Y(JB(I)))/L
        AUX1=COS/L
        AUX2=SEN/L
```

```
*****
*   1.2 MONTAGEM DOS COEFICIENTES DA MATRIZ [M], EQUACAO (4.49) *
*****
```

```
      J1=3*JB(I)-2
      J2=J1+1
      J3=J2+1
      K1=3*KB(I)-2
      K2=K1+1
      K3=K2+1
      I1=I
      I2=2*I+NBAR-1
      I3=I2+1
      A(J1,I1) =-COS
      A(J1,I2) =-AUX2
      A(J1,I3) =-AUX2
      A(J2,I1) =-SEN
      A(J2,I2) = AUX1
```

```
A(J2,I3) = AUX1
A(J3,I1) = 0.
A(J3,I2) = 1.
A(J3,I3) = 0.
A(K1,I1) = COS
A(K1,I2) = AUX2
A(K1,I3) = AUX2
A(K2,I1) = SEN
A(K2,I2) = -AUX1
A(K2,I3) = -AUX1
A(K3,I1) = 0.
A(K3,I2) = 0.
```

```
25 A(K3,I3) = 1.
```

```
*****
* 1.3. MONTAGEM DOS COEFICIENTES DA MATRIZ [N], EQUACAO (4.50) *
*****
```

```
NC=3*NBAR
DO 35 I=1,NNV
  K=3*INV(I)-3
  DO 35 J=3*I-2,3*I
    K=K+1
    IF (V(J) .EQ. 1) THEN
      NC=NC+1
      A(K,NC)=1.
    ENDIF
```

```
35 CONTINUE
```

```
*****
```

```
* 2. ARQUIVAR AS RELACOES INDEPENDENTES DE EQUILIBRIO DOS *
* MOMENTOS FLETORES DOS NOS NO ARQUIVO "ARQ1" E PREPARAR AS *
* DEMAIS NAS PRIMEIRAS POSICOES DA MATRIZ [A] PARA SE APLICAR *
* GAUSS *
*****
```

```
NRI=0
NL=0
```

```
*****
```

```
* 2.1. VERIFICACAO SE O NO ESTA LIGADO AO SISTEMA DE APOIO: *
```

```
* *
```

```
* K2=0, NO NAO LIGADO AO SISTEMA DE APOIO. MANDAR AS *
* RELACOES DE EQUILIBRIO REFERENTES AS DIRECOES DOS *
* EIXOS GLOBAIS "X" E "Y" PARA AS PRIMEIRAS POSICOES *
* DA MATRIZ [A] E A EQUACAO REFERENTE AO EQUILIBRIO *
* DO MOMENTO FLETOR DO NO PARA O ARQUIVO "ARQ1" *
* *
```

```
* K2>0, NO LIGADO AO SISTEMA DE APOIO. VERIFICAR SE AS *
* COORDENADAS GLOBAIS ASSOCIADAS A ESTE NO ESTAO *
* VINCULADAS. SE NAO EXISTIREM VINCULOS NAS DIRECOES *
* DOS EIXOS GLOBAIS "X" E "Y", MANDAR AS RESPECTIVAS *
* RELACOES DE EQUILIBRIO PARA AS PRIMEIRAS POSICOES *
* DA MATRIZ [A]. SE NAO EXISTIR VINCULO NA DIRECAO *
* DO EIXO GLOBAL "Z", MANDAR A RESPECTIVA RELACAO *
* PARA O ARQUIVO "ARQ1". *
*****
```

```
DO 90 I=1,NNDS
  K2=0
  DO 50 J=1,NNV
    IF (I .EQ. INV(J)) THEN
      K2=J
```

```

        ENDIF
50    CONTINUE
    IF (K2 .EQ. 0) THEN
        DO 65 J1=3*I-2,3*I-1
            NL=NL+1
            DO 60 J2=1,3*NBAR
60        A(NL,J2)=A(J1,J2)
65        B1(NL)=B1(J1)
            NRI=NRI+1
            DO 70 J2=NBAR+1,3*NBAR
70        WRITE (5) A(3*I,J2)
            WRITE (5) B1(3*I)
        ELSE
            K1=3
            DO 80 J1=3*K2-2,3*K2-1
                IF (V(J1).EQ.0) THEN
                    K1=K1-1
                    NL=NL+1
75                DO 75 J2=1,3*NBAR
                    A(NL,J2)=A(3*I-K1,J2)
                    B1(NL)=B1(3*I-K1)
                ELSE
                    K1=K1-1
                ENDIF
80            CONTINUE
            IF (V(3*K2) .EQ. 0) THEN
                NRI=NRI+1
                DO 85 J2=NBAR+1,3*NBAR
85                WRITE (5) A(3*I,J2)
                    WRITE (5) B1(3*I)
            ENDIF
        ENDIF
90    CONTINUE
*****
*    3.  OBTENCAO DAS RELACOES INDEPENDENTES DE EQUILIBRIO RESTANTES :  *
*                                                                 *
*    3.1.  APLICAR A ELIMINACAO DE GAUSS NAS PRIMEIRAS "NL" LINHAS  *
*           DA MATRIZ [A]                                          *
*****
    DO 130 I=1,NBAR
        PIVO=A(I,I)
        J1=0
        IF (ABS(PIVO) .LE. PRECI) THEN
            DO 95 J=I+1,NL
                IF (ABS(A(J,I)) .GT. ABS(PIVO)) THEN
                    PIVO=A(J,I)
                    K1=J
95            CONTINUE
                IF (ABS(PIVO) .GT. PRECI) THEN
                    DO 100 J=I,3*NBAR
                        AUX1=A(I,J)
                        A(I,J)=A(K1,J)
100                     A(K1,J)=AUX1
                        AUX1=B1(I)
                        B1(I)=B1(K1)
                        B1(K1)=AUX1

```

```

      J1=1
    ELSE
      DO 105 J=I+1,NBAR
        IF (ABS(A(I,J)) .GT. ABS(PIVO)) THEN
          PIVO=A(I,J)
          K1=J
        ENDIF
105      CONTINUE
        IF (ABS(PIVO) .GT. PRECI) THEN
          DO 110 J=1,NL
            AUX1=A(J,I)
            A(J,I)=A(J,K1)
110          A(J,K1)=AUX1
            J1=1
          ELSE
            NRI=NRI+1
            DO 115 J=NBAR+1,3*NBAR
115          WRITE (5) A(I,J)
            WRITE (5) B1(I)
          ENDIF
        ENDIF
      ELSE
        J1=1
      ENDIF
      IF (J1 .EQ. 1) THEN
        DO 125 J=I+1,NL
          IF (ABS(A(J,I)) .GT. PRECI) THEN
            AUX1=A(J,I)/PIVO
            DO 120 J1=I+1,3*NBAR
120          A(J,J1)=A(J,J1)-AUX1*A(I,J1)
            B1(J)=B1(J)-AUX1*B1(I)
          ENDIF
125        CONTINUE
      ENDIF
130 CONTINUE
*****
* 4. GUARDAR NO ARQUIVO "ARQ1" AS RELACOES INDEPENDENTES DE *
* EQUILIBRIO RESTANTES *
*****
      DO 140 I=NBAR+1,NL
        NRI=NRI+1
        DO 135 J=NBAR+1,3*NBAR
135      WRITE (5) A(I,J)
140      WRITE (5) B1(I)
      RETURN
      END
C
*****
* SUB-ROTINA "PERFILI" PARA DETERMINACAO DO EXPOENTE "GAMA" E DA *
* CONSTANTE "C", REFERENTES A RELACAO ENTRE O MOMENTO DE INERCIA E *
* O MOMENTO DE PLASTIFICACAO TOTAL DOS PERFIS "I" *
*****
      SUBROUTINE PERFILI (FY,COC,GAMA)
      REAL IX,MPX
*****
* 1. LER O NUMERO DE PONTOS E ZERAR AS VARIABEIS SOMATORIO *
*****

```

```

READ (1,*) NPTOS
SX =0.
SY =0.
SXY=0.
SX2=0.

```

```

*****
* 2. LEITURA DAS CARCTERISTICAS GEOMETRICAS DOS PERFIS "I" E *
* CALCULO DOS MOMENTOS DE INERCIA E MOMENTOS DE PLASTIFICACAO *
* TOTAL EM RELACAO AO EIXO PRINCIPAL DE INERCIA "X" *
*
* D = ALTURA DO PERFIL *
* BF = LARGURA DA MESA *
* TW = ESPESSURA DA ALMA *
* TF = ESPESSURA DA MESA *
*****

```

```

DO 5 I=1,NPTOS
READ (1,*) D,BF,TW,TF
IX=(BF*D**3-(BF-TW)*(D-2.*TF)**3)/12.
MPX=FY*(BF*TF*(D-TF)+(TW*(D-2.*TF)**2)/4.)

```

```

*****
* 3. CALCULO DO EXPOENTE "GAMA" E DA CONSTANTE "C" PELO AJUSTE DE *
* RETAS PELO METODO DOS MINIMOS QUADRADOS DOS LOGARITMOS: *
*
* "LOG(MPX)" E "LOG(IX)" *
*****

```

```

XI=ALOG10(MPX)
YI=ALOG10(IX)
SX=SX+XI
SY=SY+YI
SXY=SXY+XI*YI

```

```

5 SX2=SX2+XI*XI
GAMA=(SXY-(SX*SY)/NPTOS)/(SX2-(SX*SX)/NPTOS)
AUX1=(SY-GAMA*SX)/NPTOS
CDC=10**AUX1
RETURN
END

```

C

```

*****
* SUB-ROTINA "CIMP" PARA DETERMINACAO DOS EXPOENTES "GAMA" E *
* CONSTANTES "C", REFERENTES A RELACAO ENTRE OS MOMENTOS DE INERCIA *
* E OS MOMENTOS DE PLASTIFICACAO TOTAL PARA OS DIVERSOS TIPOS DE *
* SECOES TRANSVERSAIS USUAIS *
*****

```

```

SUBROUTINE CIMP (COD2,FY,CDC,GAMA)
INTEGER COD2

```

```

*****
* 1. IDENTIFICACAO DO TIPO DE SECAO TRANSVERSAL E CALCULO DO *
* EXPOENTE "GAMA" E DA CONSTANTE "C" *
*
* "I = C*(MP)**GAMA" *
*
* ----- *

```

COD2	TIPO DE SECAO TRANSVERSAL
1	RETANGULAR COM "b/h" DEFINIDO
2	RETANGULAR COM LARGURA "b" DEFINIDA
3	RETANGULAR COM ALTURA "h" DEFINIDA

```
*      4      :   CIRCULAR DE RAIO "r"                               *
*      5      :   "I" PARA UMA NUVEM DE PONTOS A SER DEFINIDA DE   *
*              :   ACORDO COM O PROJETO                             *
*      6      :   QUALQUER SECAO TRANSVERSAL DIFERENTE DAS ANTERIORES *
*              :   ONDE SE CONHECAM "GAMA" E "C"                     *
* ----- *
*****
```

```
IF (COD2 .EQ. 1) THEN
  READ (1,*) BETA
  AUX1=4./3.
  COC=((4./FY)**AUX1)/(12.*BETA**(AUX1-1))
  GAMA=AUX1
ELSEIF (COD2 .EQ. 2) THEN
  READ (1,*) B
  COC=((4./FY)**1.5)/(12.*B**.5)
  GAMA=1.5
ELSEIF (COD2 .EQ. 3) THEN
  READ (1,*) H
  COC=H/(3.*FY)
  GAMA=1.
ELSEIF (COD2 .EQ. 4) THEN
  AUX1=4./3.
  COC=((3./(4.*FY))**AUX1)/(4./3.141592654)
  GAMA=AUX1
ELSEIF (COD2 .EQ. 5) THEN
  CALL PERFILI (FY,COC,GAMA)
ELSEIF (COD2 .EQ. 6) THEN
  READ (1,*) COC,GAMA
ELSE
  WRITE (3,5)
5  FORMAT (T6,'ERRO NA ENTRADA DA VARIAVEL "COD2"')
  STOP
ENDIF
RETURN
END
```

C

```
*****
* SUB-ROTINA "GAUSS2" PARA RESOLUCAO DE SISTEMAS DE EQUACOES PELO *
* METODO DE GAUSS PARA O CASO DE MATRIZ SIMETRICA ARMAZENADA NA *
* FORMA COMPLETA E COM VARIOS TERMOS INDEPENDENTES *
*****
```

```
      SUBROUTINE GAUSS2 (NNOS,NCC)
      PARAMETER (M1=35,M2=30,M3=15,M5=30)
      PARAMETER (M6=4*M1,MB=8*M1+M3,M11=3*M2)
      DIMENSION R(M6,MB),U(M11,M5)
      COMMON /BLOC1/ R,/BLOC3/ U
```

```
*****
* 1. FASE DE TRIANGULARIZACAO *
*****
```

```
      NC=3*NNOS
      DO 10 I=1,NC-1
        DO 10 J=I+1,NC
          AUX1=R(I,J)/R(I,I)
          DO 5 K=J,NC
5         R(J,K)=R(J,K)-AUX1*R(I,K)
```

```
*****
* 2. FASE DE SUBSTITUICAO *
*****
```



```

*****
      DO 10 K=1,NCC
10    U(J,K)=U(J,K)-AUX1*U(I,K)
*****
*    3. FASE DE RETROSUBSTITUICAO
*****
      DO 15 I=1,NCC
15    U(NC,I)=U(NC,I)/R(NC,NC)
      DO 25 I=NC-1,1,-1
          DO 25 J=1,NCC
              AUX1=U(I,J)
              DO 20 K=I+1,NC
20                AUX1=AUX1-R(I,K)*U(K,J)
25    U(I,J)=AUX1/R(I,I)
      RETURN
      END

```

```

C
*****
*    SUB-ROTINA "ENVOLT" PARA CALCULO DA ENVOLTORIA ELASTICA DOS
*    MOMENTOS FLETORES
*****

```

```

      SUBROUTINE ENVOLT (NBAR,NNOS,NNV,NCC,E,JB,KB,X,Y,INV,V,ICC,FMAX,FM
+IN,AR,IZ,MMAX,MMIN)
      PARAMETER (M1=35,M2=30,M3=15,M4=10,M5=30)
      PARAMETER (M6=4*M1,M7=2*M1,M8=8*M1+M3,M10=3*M4,M11=3*M2)
      INTEGER V(M10)
      REAL L,IZ(M1),MMAX(M7),MMIN(M7),MUNIT(M7)
      DIMENSION JB(M1),KB(M1),X(M2),Y(M2),AR(M1),R(M6,M8),U(M11,M5),INV(
+M4),ICC(M5),FMAX(M5),FMIN(M5)
      COMMON /BLOC1/ R,/BLOC3/ U

```

```

*****
*    1. DETERMINACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA [R]
*****

```

```

      DO 15 I=1,3*NNOS
          DO 15 J=1,3*NNOS
15    R(I,J)=0.
      DO 20 I=1,NBAR
          L=SQRT((X(KB(I))-X(JB(I)))**2+(Y(KB(I))-Y(JB(I)))**2)
          A1=4.*E*IZ(I)/L
          A2=1.5*A1/L
          A3=2.*A2/L
          A4=E*AR(I)/L
          A5=A1/2.
          COS=(X(KB(I))-X(JB(I)))/L
          SEN=(Y(KB(I))-Y(JB(I)))/L
          J1=3*JB(I)-2
          J2=J1+1
          J3=J2+1
          K1=3*KB(I)-2
          K2=K1+1
          K3=K2+1
          R(J1,J1)=R(J1,J1)+A4*COS**2+A3*SEN**2
          R(J1,J2)=R(J1,J2)+A4*COS*SEN-A3*COS*SEN
          R(J1,J3)=R(J1,J3)-A2*SEN
          R(J2,J1)=R(J2,J1)+A4*COS*SEN-A3*COS*SEN
          R(J2,J2)=R(J2,J2)+A4*SEN**2+A3*COS**2
          R(J2,J3)=R(J2,J3)+A2*COS

```

```

R(J3,J1)=R(J3,J1)-A2*SEN
R(J3,J2)=R(J3,J2)+A2*COS
R(J3,J3)=R(J3,J3)+A1
R(J1,K1)=R(J1,K1)-A4*COS**2-A3*SEN**2
R(J1,K2)=R(J1,K2)-A4*COS*SEN+A3*COS*SEN
R(J1,K3)=R(J1,K3)-A2*SEN
R(J2,K1)=R(J2,K1)-A4*COS*SEN+A3*COS*SEN
R(J2,K2)=R(J2,K2)-A4*SEN**2-A3*COS**2
R(J2,K3)=R(J2,K3)+A2*COS
R(J3,K1)=R(J3,K1)+A2*SEN
R(J3,K2)=R(J3,K2)-A2*COS
R(J3,K3)=R(J3,K3)+A5
R(K1,J1)=R(K1,J1)-A4*COS**2-A3*SEN**2
R(K1,J2)=R(K1,J2)-A4*COS*SEN+A3*COS*SEN
R(K1,J3)=R(K1,J3)+A2*SEN
R(K2,J1)=R(K2,J1)-A4*COS*SEN+A3*COS*SEN
R(K2,J2)=R(K2,J2)-A4*SEN**2-A3*COS**2
R(K2,J3)=R(K2,J3)-A2*COS
R(K3,J1)=R(K3,J1)-A2*SEN
R(K3,J2)=R(K3,J2)+A2*COS
R(K3,J3)=R(K3,J3)+A5
R(K1,K1)=R(K1,K1)+A4*COS**2+A3*SEN**2
R(K1,K2)=R(K1,K2)+A4*COS*SEN-A3*COS*SEN
R(K1,K3)=R(K1,K3)+A2*SEN
R(K2,K1)=R(K2,K1)+A4*COS*SEN-A3*COS*SEN
R(K2,K2)=R(K2,K2)+A4*SEN**2+A3*COS**2
R(K2,K3)=R(K2,K3)-A2*COS
R(K3,K1)=R(K3,K1)+A2*SEN
R(K3,K2)=R(K3,K2)-A2*COS

```

```
20 R(K3,K3)=R(K3,K3)+A1
```

```

*****
* 2. CONDICAOES DE CONTORNO *
*****

```

```

DO 30 I=1,NNV
  K=3
  DO 30 J1=3*INV(I)-2,3*INV(I)
    K=K-1
    IF (V(3*I-K) .EQ. 1) THEN
      DO 25 J2=1,3*NNOS
        R(J1,J2)=0.
25      R(J2,J1)=0.
        R(J1,J1)=1.
    ENDIF

```

```
30 CONTINUE
```

```

*****
* 3. MONTAGEM DOS TERMOS INDEPENDENTES REFERENTES AS CARGAS *
* UNITARIAS APLICADAS NAS COORDENADAS GLOBAIS CARREGADAS; MATRIZ *
* [F], EQUACAO (B.9), ARMAZENADA EM [U] *
*****

```

```

DO 40 I=1,NCC
  DO 35 J=1,3*NNOS
35    U(J,I)=0.
40    U(ICC(I),I)=1.

```

```

*****
* 4. DETERMINACAO DOS DESLOCAMENTOS NAS COORDENADAS GLOBAIS DEVIDOS *
* AOS CARREGAMENTOS UNITARIOS; MATRIZ [U], EQUACAO (B.12) *
*****

```

```
CALL GAUSS2 (NNOS,NCC)
```

```
*****
* 5. DETERMINACAO DA ENVOLTORIA ELASTICA DOS MOMENTOS FLETORES *
* ATRAVES DA CONTRIBUICAO DE CADA CARREGAMENTO UNITARIO *
*****
```

```
DO 45 I=1,2*NBAR
  MMAX(I)=0.
45 MMIN(I)=0.
DO 55 I=1,NCC
  DO 50 K=1,NBAR
    L=SQRT((X(KB(K))-X(JB(K)))**2+(Y(KB(K))-Y(JB(K)))**2)
    COS=(X(KB(K))-X(JB(K)))/L
    SEN=(Y(KB(K))-Y(JB(K)))/L
    J1=3*JB(K)-2
    J2=J1+1
    J3=J2+1
    K1=3*KB(K)-2
    K2=K1+1
    K3=K2+1
    DE2=-U(J1,I)*SEN+U(J2,I)*COS
    DE3=U(J3,I)
    DE5=-U(K1,I)*SEN+U(K2,I)*COS
    DE6=U(K3,I)
    A1=4.*E*IZ(K)/L
    A2=1.5*A1/L
    A5=A1/2.
    MUNIT(2*K-1)=A2*DE2+A1*DE3-A2*DE5+A5*DE6
50 MUNIT(2*K)=A2*DE2+A5*DE3-A2*DE5+A1*DE6
    DO 55 K=1,2*NBAR
      AUX1=FMAX(I)*MUNIT(K)
      AUX2=FMIN(I)*MUNIT(K)
      IF (AUX1 .GT. AUX2) THEN
        MMAX(K)=MMAX(K)+AUX1
        MMIN(K)=MMIN(K)+AUX2
      ELSE
        MMAX(K)=MMAX(K)+AUX2
        MMIN(K)=MMIN(K)+AUX1
      ENDIF
55 CONTINUE
RETURN
END
```

```
C
```

```
*****
* SUB-ROTINA "SIMPLEX" PARA OTIMIZACAO DE PROBLEMAS SUJEITOS A *
* RESTRICAOES LINEARES *
*****
```

```
SUBROUTINE SIMPLEX (CC,M,NVNB,PRECI,IVB,IVNB,C1,XB)
PARAMETER (M1=35,M2=30,M3=15)
PARAMETER (M6=4*M1,M8=8*M1+M3,M9=4*M1+M3)
INTEGER C1,C2
DIMENSION B(M6,M6),A(M6,M8),B1(M6),IVB(M6),IVNB(M9),CCB(M6),BB(M6)
+,CC(M8),W(M6),AK(M6),YK(M6),IBR(M6),XB(M9)
EQUIVALENCE (BB(1),CCB(1),W(1),AK(1),YK(1))
COMMON /BLOC1/ A,/BLOC2/ B1,/BLOC4/B
```

```
*****
* 1. RESOLUCAO DO SISTEMA "[B]*{XB}={b}" *
*****
```

```
5 DO 10 I=1,M
  DO 8 J=1,M
8 B(J,I)=A(J,IVB(I))
10 BB(I)=B1(I)
  C1=0
  C2=0
  CALL GAUSS1 (BB,M,PRECI,XB)
*****
* 2. RESOLUCAO DO SISTEMA "[B]t*(W)=(CB)" *
*****
DO 15 I=1,M
  DO 15 J=1,M
15 B(I,J)=A(J,IVB(I))
  DO 20 I=1,M
20 CCB(I)=CC(IVB(I))
  CALL GAUSS1 (CCB,M,PRECI,W)
*****
* 3. VERIFICACAO SE A FUNCAO OBJETIVO PODE SER MELHORADA. CALCULO *
* DOS "Zj - Cj = (W)t*(Aj) - Cj" *
*****
CRM=-CC(IVNB(1))
IXK=1
DO 25 I=1,M
25 CRM=CRM+W(I)*A(I,IVNB(1))
  DO 35 I=2,NVNB
  AUX1=-CC(IVNB(I))
  DO 30 J=1,M
30 AUX1=AUX1+W(J)*A(J,IVNB(I))
  IF (AUX1 .GT. CRM) THEN
    CRM=AUX1
    IXK=I
  ENDIF
35 CONTINUE
  IF (CRM .GT. .0001) THEN
*****
* 4. RESOLUCAO DO SISTEMA "[B]*(YK) = (AK)" *
*****
DO 40 I=1,M
  DO 40 J=1,M
40 B(J,I)=A(J,IVB(I))
  DO 45 I=1,M
45 AK(I)=A(I,IVNB(IXK))
  CALL GAUSS1 (AK,M,PRECI,YK)
*****
* 5. VERIFICACAO SE O PROBLEMA TEM SOLUCAO OTIMA ILIMITADA *
*****
DO 50 I=1,M
  IF (YK(I) .GT. .0001 ) THEN
    C2=C2+1
    IBR(C2)=I
    YK(C2)=XB(I)/YK(I)
  ENDIF
50 CONTINUE
  IF (C2 .NE. 0) THEN
*****
* 6. DETERMINACAO DO INDICE DA VARIAVEL BASICA QUE VAI DEIXAR A *
* BASE *
*****
```

```
*****
      XK=YK(1)
      IXBR=IBR(1)
      DO 60 I=2,C2
        IF (YK(I) .LT. XK) THEN
          XK=YK(I)
          IXBR=IBR(I)
        ENDIF
60      CONTINUE
*****
* 7. ATUALIZAR OS INDICES BASICOS E NAO BASICOS E FAZER NOVA *
* ITERACAO *
*****
      J=IVB(IXBR)
      IVB(IXBR)=IVNB(IXK)
      IVNB(IXK)=J
      ELSE
        GOTO 65
      ENDIF
      ELSE
        C1=1
        GOTO 65
      ENDIF
      GOTO 5
65     RETURN
      END
C
*****
* SUB-ROTINA "GAUSS1" PARA RESOLUCAO DE SISTEMAS LINEARES PELO *
* METODO DE GAUSS PARA MATRIZES NAO SIMETRICAS *
*****
      SUBROUTINE GAUSS1 (X1,M,PRECI,X2)
      PARAMETER (M1=35)
      PARAMETER (M6=4*M1)
      DIMENSION B(M6,M6),X1(M6),X2(M6)
      COMMON /BLOC4/ B
*****
* 1. FASE DE TRIANGULARIZACAO *
*****
      DO 35 I=1,M-1
        PIVO=B(I,I)
*****
* 1.1. TESTE DO ELEMENTO "PIVO" *
*****
        IF (ABS(PIVO) .GT. PRECI) THEN
          ELSE
*****
* 1.2. PESQUIVA DO MAIOR ELEMENTO EM VALOR ABSOLUTO DA COLUNA "I" *
*****
          DO 10 J=I+1,M
            IF (ABS(B(J,I)) .GT. ABS(PIVO)) THEN
              PIVO=B(J,I)
              J1=J
            ENDIF
10          CONTINUE
*****
* 1.3. VERIFICACAO SE O SISTEMA E SINGULAR *
*****
```

```
*****
      IF (ABS(PIVO) .GT. PRECI) THEN
*****
*   1.4. TROCAR AS POSICOES DAS LINHAS "I" E "J1"
*****
      DO 20 K=I,M
          AUX1=B(I,K)
          B(I,K)=B(J1,K)
20      B(J1,K)=AUX1
          AUX1=X1(I)
          X1(I)=X1(J1)
          X1(J1)=AUX1
      ELSE
25      WRITE (3,25)
          FORMAT (T6, 'O SISTEMA DE EQUACOES E SINGULAR.', /, T6, 'NAO
+ENCONTROU-SE UM ELEMENTO NAO NULO NA COLUNA I.')
          STOP
      ENDIF
    ENDIF
    DO 35 J=I+1,M
        AUX1=B(J,I)/PIVO
        IF (ABS(AUX1) .LE. PRECI) THEN
        ELSE
30      DO 30 K=I+1,M
          B(J,K)=B(J,K)-B(I,K)*AUX1
*****
*   2. FASE DE SUBSTITUICAO
*****
          X1(J)=X1(J)-X1(I)*AUX1
        ENDIF
35      CONTINUE
*****
*   3. VERIFICACAO SE O SISTEMA E SINGULAR
*****
      IF (ABS(B(M,M)) .LE. PRECI) THEN
          WRITE (3,40)
40      FORMAT (T6, 'SISTEMA DE EQUACOES SINGULAR, B(M,M) NULO')
          STOP
      ELSE
*****
*   4. FASE DE RETROSUBSTITUICAO
*****
          X2(M)=X1(M)/B(M,M)
          DO 50 I=M-1,1,-1
              AUX1=X1(I)
              DO 45 K=I+1,M
45          AUX1=AUX1-B(I,K)*X2(K)
50          X2(I)=AUX1/B(I,I)
          ENDIF
          RETURN
      END
C
*****
*   SUB-ROTINA "DADRES" PARA IMPRESSAO DOS DADOS DO PORTICO E DOS
*   RESULTADOS DO PROGRAMA
*****
      SUBROUTINE DADRES (PROJETO,COD1,NBAR,NNOS,NNV,NCC,FF,E,FY,NR,NP,FO
```

```
+,FCPA,FCCI,FCA,FCCP,NITER,NIF,COD2,COC,GAMA,JB,KB,X,Y,INV,V,ICC,FM
+IN,FMAX,F,AR,IZ,FP,IP,XB,MF,MFMI,MFMA,MFR,MMIN,MMAX,VIP)
PARAMETER (M1=35,M2=30,M3=15,M4=10,M5=30)
PARAMETER (M7=2*M1,M9=4*M1+M3,M11=3*M4)
CHARACTER*72 PROJETO
INTEGER COD1,COD2,V(M11)
REAL L,IZ(M1),MF(M7),MFMI(M7),MFMA(M7),MFR(M7),MMIN(M7),MMAX(M7)
DIMENSION JB(M1),KB(M1),X(M2),Y(M2),INV(M4),ICC(M5),FMIN(M5),FMAX(
+M5),F(M5),AR(M1),FP(M7),IP(M7),XB(M9),VIP(M3)
```

```
*****
* 1.DADOS GERAIS DO PORTICO *
```

```
*****
WRITE (3,5) PROJETO
5 FORMAT (T6,'PROJETO ==> ',A72,///)
WRITE (3,10) COD1,NBAR,NNOS,NNV,NCC
10 FORMAT (T24,35('='),//,T24,'***** DADOS GERAIS DO PORTICO *****',/
+/,T24,35('='),///,T6,'CODIGO DO PROBLEMA',12('.'),'=' ,I3,/,T6,'N
+UMERO DE BARRAS',14('.'),'=' ,I3,/,T6,'NUMERO DE NOS',17('.'),'=' ,
+I3,/,T6,'NUMERO DE NOS VINCULADOS',6('.'),'=' ,I3,/,T6,'NUMERO DE
+COORD. CARREGADAS...=' ,I3,///,T6,48('-'),/,T12,'ORIENTACAO E COMP
+RIMENTO DAS BARRAS',/,T6,48('-'),/,T7,'BARRA : NO INICIAL : NO FI
+NAL : COMPRIMENTO',/,T6,48('-'))
```

```
*****
* 2. ORIENTACAO E COMPRIMENTO DAS BARRAS *
```

```
*****
DO 15 I=1,NBAR
L=SQRT((X(KB(I))-X(JB(I)))**2+(Y(KB(I))-Y(JB(I)))**2)
15 WRITE (3,20) I,JB(I),KB(I),L
20 FORMAT (T7,I3,T13,'!',T18,I3,T26,'!',T30,I3,T39,'!',T41,613.7)
WRITE (3,25)
25 FORMAT (T6,48('-'),///,T6,38('-'),/,T6,' COORDENADAS DOS
+ NOS',/,T6,38('-'),/,T8,'NO : COORDENADA X : COORDENADA Y',/,T
+6,38('-'))
```

```
*****
* 3. COORDENADAS DOS NOS *
```

```
*****
DO 30 I=1,NNOS
30 WRITE (3,35) I,X(I),Y(I)
35 FORMAT (T7,I3,T12,'!',T14,613.7,T28,'!',T30,613.7)
```

```
*****
* 4. VINCULACAO DOS NOS *
```

```
*****
WRITE (3,40)
40 FORMAT (T6,38('-'),///,T6,41('-'),/,T14,'VINCULACAO DOS NOS'
+/,T6,41('-'),/,T10,'NO',T17,'!',T29,'DIRECAO',/,T17,'!',29('-'),/
+,T7,'VINCULADO : X : Y : Z',/,T6,41('-'))
DO 45 I=1,NNV
45 WRITE (3,50) INV(I),V(3*I-2),V(3*I-1),V(3*I)
50 FORMAT (T9,I3,T17,'!',T22,I1,T27,'!',T32,I1,T37,'!',T42,I1)
WRITE (3,55)
55 FORMAT (T6,41('-'),/,T6,'NOTA: CODIGOS DE VINCULACAO:',/,T16,'0= D
+IRECAO NAO VINCULADA',/,T16,'1= DIRECAO VINCULADA',//)
```

```
*****
* 5. CARREGAMENTO DO PORTICO *
```

```
*****
IF ((COD1 .EQ. 4) .OR. (COD1 .EQ. 5)) THEN
WRITE (3,60)
```

```

60     FORMAT ( T6,44(' '),/,T12, 'CARREGAMENTO DO PORTICO',/
+,T6,44(' '),/,T7, 'COORDENADA : CARGA APLICADA',/,T9, 'GLO
+BAL :',31(' '),/,T7, 'CARREGADA : MINIMA : MAXIMA',/,T
+6,44(' '))
      DO 65 I=1,NCC
65     WRITE (3,70) ICC(I),FMIN(I),FMAX(I)
70     FORMAT (T10,I3,T18,' ',T20,G13.7,T34,' ',T36,G13.7)
      WRITE(3,75)
75     FORMAT (T6,44(' '),//)
      ELSE
      WRITE (3,80)
80     FORMAT (T6,31(' '),/,T9, 'CARREGAMENTO DO PORTICO',/,T6,31('
+),/,T7, 'COORD. GLOBAL : CARGA',/,T9, 'CARREGADA : APLICADA',
+/,T6,31(' '))
      DO 85 I=1,NCC
85     WRITE(3,90) ICC(I),F(I)
90     FORMAT (T11,I3,T21,' ',T23,G13.7)
      WRITE (3,95)
95     FORMAT (T6,31(' '),//)
      ENDIF
*****
* 6. CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DAS BARRAS E TIPO DE MATERIAL *
*****
      IF (COD1 .EQ. 4) THEN
      WRITE (3,100) FF,E
100    FORMAT (T6, 'FATOR DE FORMA',14(' '), '= ',G13.7,/,/,T6, 'MOD. DE D
+EF. LONGITUDINAL... = ',G13.7,/,/,T6,41(' '),/,T7, 'CARACTERISTICAS
+GEOMETRICAS DAS BARRAS',/,T6,41(' '),/,T7, 'BARRA : AREA :
+ MOM. DE INERCIA',/,T6,41(' '))
      DO 105 I=1,NBAR
105    WRITE (3,110) I,AR(I),IZ(I)
110    FORMAT (T7,I3,T13,' ',T15,G13.7,T29,' ',T32,G13.7)
      WRITE (3,115)
115    FORMAT (T6,41(' '),//)
      ENDIF
      IF (COD1 .EQ. 5) THEN
      WRITE (3,120) FY,E
120    FORMAT (T6, 'TENSAO DE ESCOAMENTO... = ',G13.7,/,/,T6, 'MOD. D
+E DEF. LONGITUDINAL... = ',G13.7,/,/,T6,25(' '),/,T7, 'CARAC. GEOM.
+DAS BARRAS',/,T6,25(' '),/,T7, 'BARRA : AREA',/,T6,25(' '))
      DO 125 I=1,NBAR
125    WRITE (3,130) I,AR(I)
130    FORMAT (T7,I3,T13,' ',T16,G13.7)
      WRITE (3,135)
135    FORMAT (T6,25(' '),//)
      ENDIF
*****
* 7. MOMENTO DE PLASTIFICACAO TOTAL DAS BARRAS *
*****
      IF ((COD1 .EQ. 2) .OR. (COD1 .EQ. 4)) THEN
      WRITE (3,140)
140    FORMAT (T6,30(' '),/,T7, 'BARRA : MOM. DE PLAST. TOTAL',/,T6,30(
+' '))
      DO 145 I=1,NBAR
145    WRITE (3,150) I,FP(2*I)
150    FORMAT (T7,I3,T13,' ',T18,G13.7)
      WRITE (3,155)

```

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS


```
155     FORMAT (T6,30('-'),////)
      ELSE
        WRITE (3,160)
160     FORMAT (T6,39('-'),/,T8,'MOMENTO DE PLAST. TOTAL DAS BARRAS',/,
+T6,39('-'),/,T7,'BARRA :      FATOR DE      : PARAMETRO',/,T13,' : P
+ROPORCIONALIDADE :      T',/,T6,39('-'))
        DO 165 I=1,NBAR
165     WRITE (3,170) I,FP(2*I),IP(2*I)
170     FORMAT (T7,I3,T13,' : ',T17,G13.7,T33,' : ',T37,I3)
        WRITE (3,175)
175     FORMAT (T6,39('-'),////)
      ENDIF
*****
*   B. RESULTADOS DO PROGRAMA
*****
      WRITE (3,180)
180     FORMAT (T25,34('='),//,T25,'***** RESULTADOS DO PROGRAMA *****',//
+,T25,34('='),////)
      IF ((COD1 .EQ. 1) .OR. (COD1 .EQ. 2)) THEN
        IF (COD1 .EQ. 1) THEN
          WRITE (3,185) XB(NR+NP)
185     FORMAT (T6,'VALOR DO PARAMETRO T1 = ',G13.7,/)
        ELSE
          WRITE (3,190) FCCP
190     FORMAT (T6,'FATOR DE CARGA DE COLAPSO PLASTICO = ',G13.7,/)
        ENDIF
        WRITE (3,195)
195     FORMAT (T6,47('-'),/,T7,'MOMENTOS FLETORES NAS EXTREMIDADES DAS
+ BARRAS',/,T6,47('-'),/,T8,'BARRA :      EXTREMIDADE      :      MOMENT
+O',/,T15,' : ',17('-'),',',/,T15,' : - NO INICIAL      : ',T40,'FLETOR',
+/,T15,' : - NO FINAL      : ',/,T6,47('-'))
        DO 200 I=1,NBAR
200     WRITE (3,205) I,JB(I),MF(2*I-1),KB(I),MF(2*I)
205     FORMAT (T8,I3,T15,' : ',T23,I3,T33,' : ',T37,G13.7,/,T15,' : ',T23,I3
+,T33,' : ',T37,G13.7)
        WRITE (3,210)
210     FORMAT (T6,47('-'))
        ELSEIF (COD1 .EQ. 3) THEN
          WRITE (3,215) FO
215     FORMAT (T6,'PESO MINIMO DO PORTICO = ',G13.7,///,T6,27('-'),/,T
+7,'PARAMETRO :      VALOR',/,T11,'T',T17,' : ',/,T6,27('-'))
          DO 220 I=1,NP
220     WRITE (3,225) I,XB(NR+I)
225     FORMAT (T9,I3,T17,' : ',T19,G13.7)
          WRITE (3,230)
230     FORMAT (T6,27('-'),///,T6,47('-'),/,T7,'MOMENTOS FLETORES NAS E
+XTREMIDADES DAS BARRAS',/,T6,47('-'),/,T8,'BARRA :      EXTREMIDADE
+ :      MOMENTO',/,T15,' : ',17('-'),',',/,T15,' : - NO INICIAL      :
+ ',T40,'FLETOR',/,T15,' : - NO FINAL      : ',/,T6,47('-'))
          DO 235 I=1,NBAR
235     WRITE (3,240) I,JB(I),MF(2*I-1),KB(I),MF(2*I)
240     FORMAT (T8,I3,T15,' : ',T23,I3,T33,' : ',T37,G13.7,/,T15,' : ',T23,I3
+,T33,' : ',T37,G13.7)
          WRITE (3,245)
245     FORMAT (T6,47('-'))
        ELSE
          IF (COD1 .EQ. 4) THEN
```

```

WRITE (3,250) FCPA,FCCI,FCA
250  FORMAT (T6,'FATOR DE CARGA DE PLASTIFICACAO ALTERNADA...= ',
+G13.7,/,T6,'FATOR DE CARGA DE COLAPSO INCREMENTAL...= ',G13.7,
+/,T6,'FATOR DE CARGA DE ACOMODACAO',16(' '),'= ',G13.7)
ELSE
WRITE (3,255) NITER,NIF,COD2,COC,GAMA,FO
255  FORMAT (T6,'NUMERO DE ITERACOES PREVISTAS.....= ',I3,/,
+/,T6,'NUMERO DE ITERACOES FEITAS.....= ',I3,/,T6,'CODIGO
+ DO TIPO DE SECAO TRANSVERSAL.....= ',I3,/,T6,'VALOR DA CONSTANTE
+ "C"',18(' '),'= ',G13.7,/,T6,'VALOR DO EXPOENTE "GAMA"',16(' '),
+'= ',G13.7,/,T6,'PESO MINIMO DO PORTICO COM ACOMODACAO...= ',G13.
+7,/,T6,43(' '),/,T7,'PARAMETRO :',T31,'VALOR',/,T17,' ',31(' '),
+/,T11,'T',T17,' ',T22,'INICIAL',T33,' ' EXIGIDO',/,T6,43(' '))
DO 260 I=1,NP
260  WRITE (3,265) I,VIP(I),XB(NR+I)
265  FORMAT (T9,I3,T17,' ',T19,G13.7,T33,' ',T35,G13.7)
WRITE (3,267)
267  FORMAT (T6,43(' '))
ENDIF
WRITE (3,270)
270  FORMAT (/,T6,54(' '),/,T10,'ENVOLTORIA ELASTICA DOS MOME
+NTOS FLETORES',/,T6,54(' '),/,T7,'BARRA : EXTREMIDADE : MO
+MENTO FLETOR',/,T13,' ',14(' '),', ',31(' '),/,T13,' ' - NO INICI
+AL : MINIMO : MAXIMO',/,T13,' ' - NO FINAL :',T44,' ',/,
+,T6,54(' '))
DO 275 I=1,NBAR
275  WRITE (3,280) I,JB(I),MMIN(2*I-1),MMAX(2*I-1),KB(I),MMIN(2*I
+),MMAX(2*I)
280  FORMAT (T7,I3,T13,' ',T18,I3,T28,' ',T30,G13.7,T44,' ',T46,G13.7,/,
+,T13,' ',T18,I3,T28,' ',T30,G13.7,T44,' ',T46,G13.7)
WRITE (3,285)
285  FORMAT (T6,54(' '),/,T6,70(' '),/,T7,'BARRA : EXTREMIDADE
+ : MOMENTO : MOMENTO FLETOR ATUANTE',/,T13,' ',14(' '),',
+; FLETOR :',31(' '),/,T13,' ' - NO INICIAL : RESIDUAL :
+ MINIMO : MAXIMO',/,T13,' ' - NO FINAL :',T44,' ',T60,
+' ',/,T6,70(' '))
DO 290 I=1,NBAR
290  WRITE (3,295) I,JB(I),MFR(2*I-1),MFMI(2*I-1),MFMA(2*I-1),KB(
+I),MFR(2*I),MFMI(2*I),MFMA(2*I)
295  FORMAT (T7,I3,T13,' ',T18,I3,T28,' ',T30,G13.7,T44,' ',T46,G
+13.7,T60,' ',T62,G13.7,/,T13,' ',T18,I3,T28,' ',T30,G13.7,T44,' ',
+T46,G13.7,T60,' ',T62,G13.7)
WRITE (3,300)
300  FORMAT (T6,70(' '))
ENDIF
RETURN
END

```

C

```

*****
*                                     ** PROGRAMA PRINCIPAL **                                     *
*****
PARAMETER (M1=35,M2=30,M3=15,M4=10,M5=30)
PARAMETER (M6=4*M1,M7=2*M1,M8=8*M1+M3,M9=4*M1+M3,M10=3*M4)
CHARACTER*72 PROJETO
INTEGER COD1,COD2,C1,V(M10)
REAL L,MINE,IZ(M1),MF(M7),MP(M1),MMAX(M7),MMIN(M7),MFR(M7),MFMA(M7
+),MFMI(M7)

```

```
DIMENSION JB(M1),KB(M1),X(M2),Y(M2),A(M6,M8),B1(M6),IP(M7),FP(M7),
+CC(M8),IVB(M6),IVNB(M9),XB(M9),B(M6,M6),AK(M6),YK(M6),INV(M4),ICC(
+M5),FMAX(M5),FMIN(M5),AUX(M6),AR(M1),F(M5),VIP(M3)
COMMON /BLOC1/ A,/BLOC2/ B1,/BLOC4/ B
EQUIVALENCE (AK(1),YK(1)),(CC(1),AUX(1))
```

```
*****
*   ABERTURA DOS ARQUIVOS :
*
*       " DAEN " = ENTRADA DE DADOS
*       " DASA " = SAIDA DE DADOS
*       " ARQ1 " = CONTEM AS RELACOES INDEPENDENTES DE EQUILIBRIO
*****
```

```
OPEN (1,FILE='DAEN')
OPEN (3,FILE='DASA',STATUS='UNKNOWN')
OPEN (5,FILE='ARQ1',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='SEQUENTIAL',FORM='UNF
+ORMATTED')
PRECI=1.E-10
```

```
*****
*   1. LEITURA DOS DADOS
*
*   1.1. LEITURA DOS DADOS INICIAIS
*****
```

```
READ (1,*) PROJETO
READ (1,*) COD1,NBAR,NNOS,NNV,NCC
```

```
*****
*   1.2. LEITURA DOS DADOS RELACIONADOS COM A DEFINICAO DO PORTICO
*****
```

```
READ (1,*) (K,JB(K),KB(K),I=1,NBAR)
READ (1,*) (K,X(K),Y(K),I=1,NNOS)
READ (1,*) (INV(I),V(3*I-2),V(3*I-1),V(3*I),I=1,NNV)
NCV=0
DO 2 I=1,3*NNV
  IF (V(I) .EQ. 1) THEN
    NCV=NCV+1
  ENDIF
```

```
2 CONTINUE
```

```
*****
*   1.3. LEITURA DO CARREGAMENTO DO PORTICO
*****
```

```
DO 4 I=1,3*NNOS
4  B1(I)=0.
  IF ((COD1 .EQ. 4) .OR. (COD1 .EQ. 5)) THEN
    READ (1,*) (ICC(I),FMAX(I),FMIN(I),I=1,NCC)
  ELSE
    DO 6 I=1,NCC
      READ (1,*) ICC(I),B1(ICC(I))
    6  F(I)=B1(ICC(I))
  ENDIF
```

```
*****
*   1.4. LEITURA DAS CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DAS BARRAS E DAS
*   CARACTERISTICAS DO MATERIAL EMPREGADO
*****
```

```
IF ((COD1 .EQ.4) .OR. (COD1 .EQ.5)) THEN
  IF (COD1 .EQ. 4) THEN
    READ (1,*) FF,E,NGBAI
    IF (NGBAI .NE. 1) THEN
      DO 8 I=1,NGBAI
```

```

      READ (1,*) NBAI,AREA,MINE
      DO 8 J=1,NBAI
        READ (1,*) IB
        AR(IB)=AREA
8      IZ(IB)=MINE
      ELSE
        READ (1,*) AREA,MINE
        DO 10 I=1,NBAR
          AR(I)=AREA
10     IZ(I)=MINE
      ENDIF
    ELSE
      READ (1,*) FY,E,NGBA
      IF (NGBA .NE. 1) THEN
        DO 15 I=1,NGBA
          READ (1,*) NBA,AREA
          DO 15 J=1,NBA
            READ (1,*) IB
15     AR(IB)=AREA
          ELSE
            READ (1,*) AREA
            DO 18 I=1,NBAR
              AR(I)=AREA
18     ENDIF
          ENDIF
        ENDIF
      ENDIF
    ENDIF
  ENDIF
*****
* 1.5. LEITURA DOS DADOS REFERENTES AOS MOMENTOS DE PLASTIFICACAO *
* TOTAL DAS BARRAS *
*****
  IF ((COD1 .EQ. 3) .OR. (COD1 .EQ. 5)) THEN
    READ (1,*) NP
    IF (NP .NE. NBAR) THEN
      DO 20 I=1,NP
        READ (1,*) NBP
        DO 20 J=1,NBP
          READ (1,*) IB,FPP
          K1=2*IB-1
          K2=K1+1
          IP(K1)=I
          IP(K2)=I
          FP(K1)=FPP
20     FP(K2)=FPP
        ELSE
          DO 25 I=1,NP
            K1=2*I-1
            K2=K1+1
            IP(K1)=I
            IP(K2)=I
            FP(K1)=1.
25     FP(K2)=1.
          ENDIF
        ELSE
          NP=1
          READ (1,*) NGFP
          IF (NGFP .NE. 1) THEN
            DO 30 I=1,NGFP

```

```
      READ (1,*) NBFP,FPP
      DO 30 J=1,NBFP
        READ (1,*) IB
        K1=2*IB-1
        K2=K1+1
        IP(K1)=1
        IP(K2)=1
        FP(K1)=FPP
30      FP(K2)=FPP
      ELSE
        READ (1,*) FPP
        DO 35 I=1,NBAR
          K1=2*I-1
          K2=K1+1
          IP(K1)=1
          IP(K2)=1
          FP(K1)=FPP
35      FP(K2)=FPP
      ENDIF
    ENDIF
*****
* 1.6. LEITURA DOS DADOS ADICIONAIS PARA O PROBLEMA DE SINTESE SOB *
* CARREGAMENTO VARIÁVEL. CALCULO DA CONSTANTE "C" E DO *
* EXPOENTE "GAMA" DA RELACAO ENTRE "I" E "Mp". CALCULO DOS *
* MOMENTOS DE PLASTIFICACAO TOTAL INICIAIS DAS BARRAS *
*****
      IF (COD1 .EQ. 5 ) THEN
        READ(1,*) NITER,COD2
        CALL CIMP (COD2,FY,COC,GAMA)
        DO 37 I=1,NP
37      READ (1,*) VIP(I)
        DO 40 I=1,NBAR
40      MP(I)=FP(2*I)*VIP(IP(2*I))
        NIF=0
      ENDIF
*****
* 2. DETERMINACAO DAS RELACOES INDEPENDENTES DE EQUILIBRIO *
*****
      CALL EQUIL (NBAR,NNOS,NNV,NCV,PRECI,JB,KB,X,Y,INV,V,NRI)
*****
* 3. DETERMINACAO DA ENVOLTORIA ELASTICA DOS MOMENTOS FLETORES *
*****
42  IF ((COD1 .EQ. 4) .OR. (COD1 .EQ. 5)) THEN
      IF (COD1 .EQ. 5) THEN
        DO 45 I=1,NBAR
45      IZ(I)=COC*MP(I)**GAMA
        NIF=NIF+1
      ENDIF
      CALL ENVOLT (NBAR,NNOS,NNV,NCC,E,JB,KB,X,Y,INV,V,ICC,FMAX,FMIN,
+AR,IZ,MMAX,MMIN)
    ENDIF
*****
* 4. DETERMINACAO DOS COEFICIENTES DAS EQUACOES DOS PROBLEMAS *
* ORIGINAL E ARTIFICIAL *
*****
      NR=2*NBAR
      NC=2*NR+NP
```

```

M=NR+NR1
DO 48 I=1,M
  DO 47 J=1,NC
47   A(I,J)=0.
48   B1(I)=0.
      DO 50 I=1,NR
        A(I,I)=1.
        K=NR+IP(I)
        IF (COD1 .EQ. 4) THEN
          A(I,K)=MMAX(I)-MMIN(I)
          B1(I)=2*FP(I)
        ELSE
          A(I,K)=-2.*FP(I)
          IF (COD1 .EQ. 5) THEN
            B1(I)=MMIN(I)-MMAX(I)
          ENDIF
        ENDIF
      ENDIF
50   CONTINUE
*****
*   4.1. POSICIONAMENTO DOS COEFICIENTES DAS RELACOES INDEPENDENTES *
*   DE EQUILIBRIO NA MATRIZ [A] E MUDANCA DE SUAS VARIAVEIS *
*****
      REWIND 5
      DO 60 I=NR+1,M
        DO 55 J=1,NR
55     READ (5) A(I,J)
60     READ (5) B1(I)
        DO 70 I=NR+1,M
          DO 70 J=1,NR
            IF (ABS(A(I,J)) .GT. PRECI) THEN
              K=NR+IP(J)
              IF (COD1 .EQ. 4) THEN
                A(I,K)=A(I,K)-A(I,J)*MMIN(J)
                B1(I)=B1(I)+A(I,J)*FP(J)
              ELSE
                A(I,K)=A(I,K)-A(I,J)*FP(J)
                IF (COD1 .EQ. 5) THEN
                  B1(I)=B1(I)+A(I,J)*MMIN(J)
                ENDIF
              ENDIF
            ENDIF
          ENDIF
        ENDIF
70     CONTINUE
*****
*   4.2.3. IMPOR A CONDICAO DE QUE AS COMPONENTES DO VETOR *
*   {B1} SEJAM NAO NEGATIVAS E POSICIONAMENTO DOS *
*   COEFICIENTES DAS VARIAVEIS DE FOLGA E ARTIFICIAIS *
*****
      DO 73 I=1,NR
        A(I, NR+NP+I)=1.
        IF (B1(I) .LT. 0.) THEN
          A(I,I)=-1.
          A(I, NR+NP+I)=-1.
          B1(I)=-B1(I)
          NC=NC+1
          DO 71 J=NR+1, NR+NP
71     A(I,J)=-A(I,J)
          DO 72 J=1,M

```

```
72      A(J,NC)=0.
        A(I,NC)=1.
        ENDIF
73  CONTINUE
        DO 75 I=NR+1,M
          IF (B1(I) .LT. 0.) THEN
            DO 74 J=1,NR+NP
74          A(I,J)=-A(I,J)
            B1(I)=-B1(I)
          ENDIF
75  CONTINUE
        K=NR
        DO 77 I=NC+1,NC+NR1
          DO 76 J=1,M
76          A(J,I)=0.
            K=K+1
77  A(K,I)=1.
*****
* 5. DETERMINACAO DOS INDICES INICIAIS DAS VARIABEIS BASICAS E NAO *
*   BASICAS PARA RESOLUCAO DO PROBLEMA ARTIFICIAL *
*****
        NVNB=NR+NP
        DO 78 I=1,NVNB
78  IVNB(I)=I
        K=0
        NC=2*NR+NP
        DO 79 I=1,NR
          IF (A(I,NR+NP+I) .EQ. 1.) THEN
            K=K+1
            IVB(K)=NR+NP+I
          ELSE
            NC=NC+1
            NVNB=NVNB+1
            K=K+1
            IVB(K)=NC
            IVNB(NVNB)=NR+NP+I
          ENDIF
79  CONTINUE
        DO 80 I=NC+1,NC+NR1
          K=K+1
80  IVB(K)=I
*****
* 6. DETERMINACAO DO VETOR CUSTO (C) PARA O PROBLEMA ARTIFICIAL *
*****
        DO 82 I=1,2*NR+NP
82  CC(I)=0.
        DO 83 I=2*NR+NP+1,NC+NR1
83  CC(I)=1.
        NC=2*NR+NP
*****
* 7. RESOLUCAO DA "FASE I" DO METODO DAS DUAS FASES *
*****
        CALL SIMPLEX (CC,M,NVNB,PRECI,IVB,IVNB,C1,XB)
*****
* 7.1. ANALISE DA SOLUCAO DA "FASE - I" *
*****
        IF (C1 .EQ. 0) THEN
```

```
WRITE (3,90)
90  FORMAT (T6,'O PROBLEMA ARTIFICIAL TEM SOLUCAO OTIMA ILIMITADA.'
+,/,T6,'O PROBLEMA ORIGINAL NAO POSSUE SOLUCOES VIAVEIS.')
STOP
ENDIF
FO=0.
DO 100 I=1,M
100 FO=FO+CC(IVB(I))*XB(I)
IF (ABS(FO) .GT. .0001) THEN
WRITE (3,110)
110  FORMAT (T6,'FUNCAO OBJETIVO ARTIFICIAL NAO NULA.',/,T6,'PROBLEM
+A ORIGINAL NAO POSSUE SOLUCOES VIAVEIS.')
STOP
ENDIF
*****
* 7.2. VERIFICACAO SE EXISTEM VARIABEIS ARTIFICIAIS NA BASE COM *
* VALORES NULOS; EXISTINDO, PROCURAR SUBSTITUI-LAS POR *
* VARIABEIS ORIGINAIS *
*****
DO 140 I=1,M
IF (IVB(I) .GT. NC) THEN
J2=0
DO 125 J=1,NVNB
IF (IVNB(J) .LE. NC) THEN
DO 115 J1=1,M
DO 115 K1=1,M
115  B(K1,J1)=A(K1,IVB(J1))
DO 120 J1=1,M
120  AK(J1)=A(J1,IVNB(J))
CALL GAUSS1 (AK,M,PRECI,YK)
IF (ABS(YK(I)) .GT. .0001) THEN
J2=J
GOTO 130
ENDIF
ENDIF
125  CONTINUE
130  IF (J2 .NE. 0) THEN
K=IVB(I)
IVB(I)=IVNB(J2)
IVNB(J2)=K
ELSE
WRITE (3,135)
135  FORMAT (T6,'O SISTEMA DE EQUACOES POSSUE EQUACAO REDUNDAN
+TE.',/,T6,'REVEJA A ENTRADA DE DADOS.')
STOP
ENDIF
ENDIF
140 CONTINUE
*****
* 8. RESOLUCAO DA "FASE II" DO METODO DAS DUAS FASES *
* *
* 8.1. ATUALIZACAO DOS INDICES DAS VARIABEIS NAO BASICAS, *
* RETIRANDO-SE OS INDICES DAS VARIABEIS ARTIFICIAIS *
*****
J=0
DO 145 I=1,NVNB
IF (IVNB(I) .LE. NC) THEN
```



```

      J=J+1
      IVNB(J)=IVNB(I)
    ENDIF
145 CONTINUE
    NVNB=J
*****
* 8.2. DETERMINACAO DO VETOR CUSTO {C} PARA O PROBLEMA ORIGINAL *
*****
    DO 150 I=1,NC
150 CC(I)=0.
      IF (COD1 .EQ. 4) THEN
        CC(NR+1)=-1.
      ELSEIF ((COD1 .EQ. 3) .OR. (COD1 .EQ. 5)) THEN
        DO 155 I=1,NBAR
          L=SQRT((X(KB(I))-X(JB(I)))**2+(Y(KB(I))-Y(JB(I)))**2)
155 CC(NR+IP(2*I))=CC(NR+IP(2*I))+FP(2*I)*L
        ELSE
          CC(NR+1)=1.
        ENDIF
      CALL SIMPLEX (CC,M,NVNB,PRECI,IVB,IVNB,C1,XB)
*****
* 8.3. CALCULO DA FUNCAO OBJETIVO DO PROBLEMA ORIGINAL E *
*   ARMazenamento DOS VALORES DAS VARIÁVEIS BÁSICAS E NÃO *
*   BÁSICAS NO VETOR {XB} *
*****
      FO=0.
      DO 160 I=1,M
160 FO=FO+CC(IVB(I))*XB(I)
      DO 165 I=1,M
165 AUX(I)=XB(I)
      DO 170 I=1,NC
170 XB(I)=0.
      DO 175 I=1,M
175 XB(IVB(I))=AUX(I)
*****
* 9. VERIFICACAO SE A CONVERGENCIA DO PROBLEMA DE SINTESE SOB *
*   CARREGAMENTO VARIÁVEL FOI ATINGIDA OU SE HA NECESSIDADE DE *
*   NOVA ITERACAO *
*****
      IF (COD1 .EQ. 5) THEN
        IF (NIF .LT. NITER) THEN
          K=0
          DO 180 I=1,NBAR
            IF (MP(I) .LE. PRECI) THEN
              IF (XB(NR+IP(2*I)) .GT. PRECI) THEN
                K=K+1
                MP(I)=XB(NR+IP(2*I))
              ENDIF
            ELSEIF (ABS(1-XB(NR+IP(2*I)))/MP(I)) .GT. .01) THEN
              K=K+1
              MP(I)=XB(NR+IP(2*I))
            ENDIF
180 CONTINUE
          IF (K .NE. 0) THEN
            GOTO 42
          ENDIF
        ENDIF
      ENDIF

```

```

      ENDIF
*****
* 10. CALCULOS FINAIS PARA OS DIVERSOS TIPOS DE PROBLEMAS EM ESTUDO *
*****
      IF (COD1 .EQ. 5) THEN
        DO 185 J=1,NR
          MFR(J)=XB(J)-MMIN(J)-FP(J)*XB(NR+IP(J))
          MFMA(J)=MFR(J)+MMAX(J)
185      MFMI(J)=MFR(J)+MMIN(J)
        ELSEIF (COD1 .EQ. 4) THEN
          FCCI=-FO
          AUX1=MMAX(1)-MMIN(1)
          IRPA=1
          DO 190 J=2,NR
            AUX2=MMAX(J)-MMIN(J)
            IF (AUX2 .GT. AUX1) THEN
              AUX1=AUX2
              IRPA=J
            ENDIF
190      CONTINUE
          FCPA=(2*(FP(IRPA)))/(FF*AUX1)
          IF (FCCI .LT. FCPA) THEN
            FCA=FCCI
            DO 195 J=1,NR
              MFR(J)=XB(J)-FCCI*MMIN(J)-FP(J)
              MFMA(J)=MFR(J)+FCCI*MMAX(J)
195      MFMI(J)=MFR(J)+FCCI*MMIN(J)
            ELSE
              FCA=FCPA
            ENDIF
          ELSE
            DO 200 J=1,NR
200      MF(J)=XB(J)-FP(J)*XB(NR+IP(J))
            IF (COD1 .EQ. 2) THEN
              FCCP=1./XB(NR+1)
              DO 205 J=1,NR
205      MF(J)=FCCP*MF(J)
            ENDIF
          ENDIF
*****
* 10. IR PARA A SUB-ROTINA DE IMPRESSAO DOS DADOS E RESULTADOS *
*****
      CALL DADRES (PROJETO,COD1,NBAR,NNOS,NNV,NCC,FF,E,FY,NR,NP,FO,FCPA,
+FCOI,FCA,FCCP,NITER,NIF,COD2,COC,GAMA,JB,KB,X,Y,INV,V,ICC,FMIN,FMA
+X,F,AR,IZ,FP,IP,XB,MF,MFMI,MFMA,MFR,MMIN,MMAX,VIP)
      STOP
      END
```

CAPÍTULO 8

EXEMPLOS

Neste capítulo serão apresentados 8 exemplos envolvendo os problemas de análise e síntese no método das rótulas plásticas. Os quatro primeiros exemplos foram resolvidos no capítulo 3; o primeiro e o quarto através dos teoremas e geometricamente; o segundo e o terceiro foram resolvidos geometricamente. A intenção ao propor esses 4 exemplos é mostrar que as soluções obtidas através do programa foram as mesmas obtidas anteriormente.

Os exemplos 5, 6, e 7 fazem parte dos exemplos propostos por Camilo e Souza em [21]. São exemplos expressivos que dão uma visão de como o problema de síntese sob carregamento variável pode ser facilmente executado utilizando-se o programa desenvolvido. Finalmente, o oitavo exemplo ilustra o caso de cargas uniformemente distribuídas ao longo das barras, mostrando o procedimento de substituição dessas cargas por outras equivalentes concentradas, para que o programa possa ser utilizado.

O primeiro exemplo é o do pórtico retangular da figura 3.1, analisado no capítulo 3. Na figura 8.1.a estão indicados o carregamento, o sistema de eixos globais, as dimensões básicas, a numeração dos nós e das barras e os momentos de plastificação total das barras. Esse problema é um problema de análise sob carregamento único onde se

procura determinar o fator de carga de colapso plástico; portanto, o seu código é COD1 = 2.

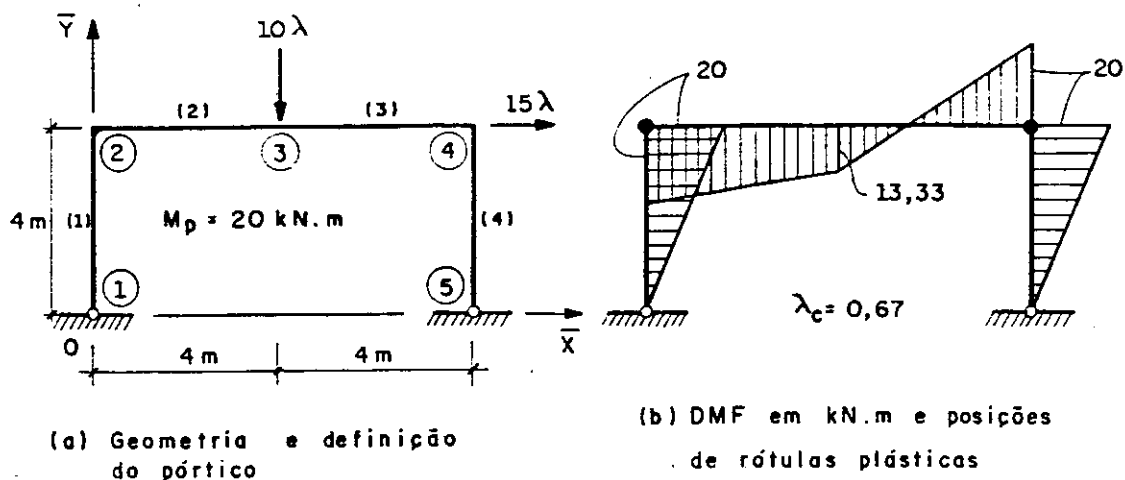


Fig. 3.1 Pórtico plano da figura 3.1, analisado no capítulo 3

A partir da análise dos resultados do programa, listados a seguir, obtém-se o diagrama de momentos fletores (DMF) da figura 3.1.b, onde estão também indicadas as posições onde se formaram rótulas plásticas.

PROJETO ==> PROBL. DE ANAL. SOB CARREG. UNICO; CALC. DO FATOR CARGA

***** DADOS GERAIS DO PORTICO *****

CODIGO DO PROBLEMA..... = 2
 NUMERO DE BARRAS..... = 4
 NUMERO DE NOS..... = 5
 NUMERO DE NOS VINCULADOS..... = 2
 NUMERO DE COORD. CARREGADAS... = 2

ORIENTACAO E COMPRIMENTO DAS BARRAS

BARRA	NO INICIAL	NO FINAL	COMPRIMENTO
1	1	2	4.000000
2	2	3	4.000000
3	3	4	4.000000
4	4	5	4.000000

COORDENADAS DOS NOS

NO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	.0000000	.0000000
2	.0000000	4.000000
3	4.000000	4.000000
4	8.000000	4.000000
5	8.000000	.0000000

VINCULACAO DOS NOS

NO	DIRECAO		
VINCULADO	X	Y	Z
1	1	1	0
5	1	1	0

NOTA: CODIGOS DE VINCULACAO:
0= DIRECAO NAO VINCULADA
1= DIRECAO VINCULADA

CARREGAMENTO DO PORTICO

COORD. GLOBAL	CARGA
CARREGADA	APLICADA
8	-10.00000
10	15.00000

BARRA : MOM. DE PLAST. TOTAL

1	20.00000
2	20.00000
3	20.00000
4	20.00000

=====
 ***** RESULTADOS DO PROGRAMA *****
 =====

FATOR DE CARGA DE COLAPSO PLASTICO = .6666667

 MOMENTOS FLETORES NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS

BARRA	EXTREMIDADE		MOMENTO
	- NO INICIAL	- NO FINAL	FLETOR
1	1		.0000000
2	2		20.00000
		2	-20.00000
3		3	13.33333
		3	-13.33333
4		4	-20.00000
		4	20.00000
		5	.0000000

O segundo exemplo é o problema de análise sob carregamento único referente ao pórtico da figura 3.3, em que se busca determinar o valor do parâmetro T para os momentos de plastificação total das barras. O código desse problema é COD1 = 1. A figura 8.2.a mostra a geometria e a definição do pórtico.

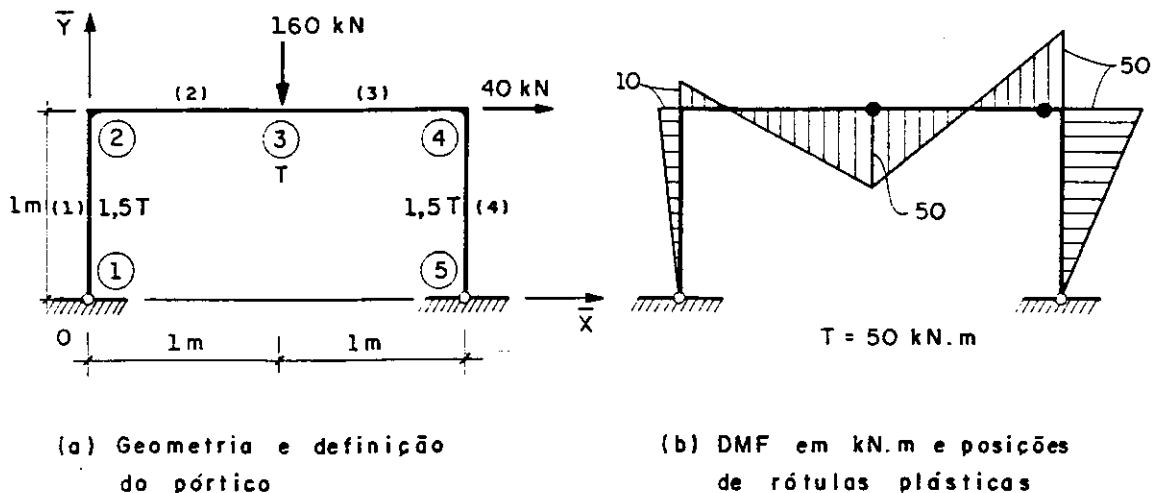


Fig. 8.2 Pórtico da figura 3.3, analisado no capítulo 3

Analisando-se os resultados do programa, listados a seguir, obtém-se o DMF e as posições onde se formaram rótulas plásticas, indicados na figura 8.2.5.

PROJETO ==> PROBL. DE ANAL. SOB CARREG. UNICO; CALC. DO PARAM. T

***** DADOS GERAIS DO PORTICO *****

CODIGO DO PROBLEMA. = 1
NUMERO DE BARRAS..... = 4
NUMERO DE NOS..... = 5
NUMERO DE NOS VINCULADOS..... = 2
NUMERO DE COORD. CARREGADAS... = 2

ORIENTACAO E COMPRIMENTO DAS BARRAS

Table with 4 columns: BARRA, NO INICIAL, NO FINAL, COMPRIMENTO. Rows 1-4 showing bar details.

COORDENADAS DOS NOS

Table with 4 columns: NO, COORDENADA X, COORDENADA Y. Rows 1-5 showing node coordinates.

VINCULACAO DOS NOS

Table with 5 columns: NO VINCULADO, DIRECAO X, Y, Z. Rows 1-5 showing connection directions.

NOTA: CODIGOS DE VINCULACAO:
0= DIRECAO NAO VINCULADA
1= DIRECAO VINCULADA

CARREGAMENTO DO PORTICO	
COORD. GLOBAL :	CARGA
CARREGADA :	APLICADA
8	-160.0000
10	40.00000

MOMENTO DE PLAST. TOTAL DAS BARRAS		
BARRA :	FATOR DE	PARAMETRO
:	PROPORCIONALIDADE :	T
1	1.500000	1
2	1.000000	1
3	1.000000	1
4	1.500000	1

***** RESULTADOS DO PROGRAMA *****

VALOR DO PARAMETRO T1 = 50.00000

MOMENTOS FLETORES NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS		
BARRA	EXTREMIDADE	MOMENTO
:	- NO INICIAL	FLETOR
:	- NO FINAL	
1	1	.0000000
	2	-10.00000
2	2	10.00001
	3	50.00000
3	3	-50.00000
	4	-50.00000
4	4	50.00000
	5	.7629395E-05

O terceiro exemplo é o pórtico da figura 3.5, referente ao problema de síntese sob carregamento único, com COD1 = 3. Na figura 8.3.a estão indicadas a geometria e a definição do pórtico. Os dados, os valores dos parâmetros e dos momentos fletores nas extremidades das barras estão listados a seguir. A partir da análise desses resultados se

obtem o DMF e as posicoes de rotulas plasticas, indicados na figura 8.3.b.

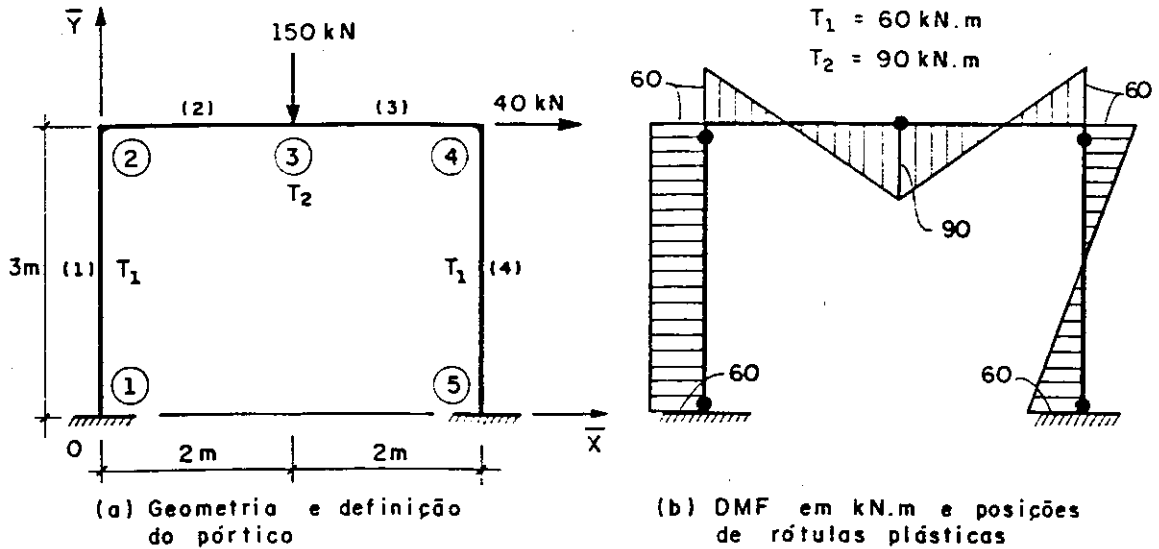


Fig. 8.3 Pórtico da figura 3.5, estudado no capítulo 3

PROJETO ==> PROBLEMA DE SINTESE SOB CARREGAMENTO UNICO

***** DADOS GERAIS DO PORTICO *****

CODIGO DO PROBLEMA..... = 3
 NUMERO DE BARRAS..... = 4
 NUMERO DE NOS..... = 5
 NUMERO DE NOS VINCULADOS..... = 2
 NUMERO DE COORD. CARREGADAS... = 2

ORIENTACAO E COMPRIMENTO DAS BARRAS

BARRA	NO INICIAL	NO FINAL	COMPRIMENTO
1	1	2	3.000000
2	2	3	2.000000
3	3	4	2.000000
4	4	5	3.000000

COORDENADAS		DOS	NOS	
NO	COORDENADA	X	COORDENADA	Y
1	.0000000	:	.0000000	
2	.0000000	:	3.0000000	
3	2.0000000	:	3.0000000	
4	4.0000000	:	3.0000000	
5	4.0000000	:	.0000000	

VINCULACAO		DOS		NOS	
NO	VINCULADO	DIRECAO			
		X	Y	Z	
1		1	1	1	1
5		1	1	1	1

NOTA: CODIGOS DE VINCULACAO:
 0= DIRECAO NAO VINCULADA
 1= DIRECAO VINCULADA

CARREGAMENTO DO PORTICO	
COORD GLOBAL	CARGA
CARREGADA	APLICADA
8	-150.0000
10	40.00000

MOMENTO DE PLAST. TOTAL DAS BARRAS		
BARRA	FATOR DE PROPORCIONALIDADE	PARAMETRO T
1	1.000000	1
2	1.000000	2
3	1.000000	2
4	1.000000	1

***** RESULTADOS DO PROGRAMA *****

PESO MINIMO DO PORTICO = 720.0000

PARAMETRO T	VALOR
1	60.00000
2	90.00000

BARRA	EXTREMIDADE		MOMENTO FLETOR
	- NO INICIAL	- NO FINAL	
1	1		60.00000
	2		-60.00000
2	2		60.00000
	3		90.00000
3	3		-90.00000
	4		-60.00000
4	4		60.00000
	5		60.00000

O quarto exemplo é do pórtico sob carregamento variável da figura 3.8, analisado no capítulo 3. O código do problema, onde se procura o fator de carga de acomodação, é COD1 = 4. Na figura 8.4.a estão indicados a geometria, a definição do pórtico e os dados adicionais para a solução do problema. A figura 8.4.b mostra o diagrama de momentos fletores residuais, obtido a partir da análise dos resultados do programa listados a seguir.

PROJETO ==> PROBLEMA DE ANALISE SOB CARREGAMENTO VARIAVEL

***** DADOS GERAIS DO PORTICO *****

CODIGO DO PROBLEMA.....= 4
NUMERO DE BARRAS.....= 4
NUMERO DE NOS.....= 5
NUMERO DE NOS VINCULADOS.....= 2
NUMERO DE COORD. CARREGADAS...= 2

ORIENTACAO E COMPRIMENTO DAS BARRAS

BARRA	NO INICIAL	NO FINAL	COMPRIMENTO
1	1	2	4.000000
2	2	3	4.000000
3	3	4	4.000000
4	4	5	4.000000

COORDENADAS DOS NOS

NO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	.0000000	.0000000
2	.0000000	4.000000
3	4.000000	4.000000
4	8.000000	4.000000
5	8.000000	.0000000

VINCULACAO DOS NOS

NO VINCULADO	DIRECAO		
	X	Y	Z
1	1	1	0
5	1	1	0

NOTA: CODIGOS DE VINCULACAO:
 0= DIRECAO NAO VINCULADA
 1= DIRECAO VINCULADA

CARREGAMENTO DO PORTICO

COORDENADA GLOBAL CARREGADA	CARGA MINIMA	APLICADA MAXIMA
8	.0000000	-10.00000
10	.0000000	15.00000

FATOR DE FORMA = 1.000000
 MOD. DE DEF. LONGITUDINAL... = .1900000E+09

CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DAS BARRAS

BARRA	AREA	MOM. DE INERCIA
1	.4900000E-02	.2000000E-05

2 : .4900000E-02 : .2000000E-05
 3 : .4900000E-02 : .2000000E-05
 4 : .4900000E-02 : .2000000E-05

BARRA : MOM. DE PLAST. TOTAL

1 : 20.00000
 2 : 20.00000
 3 : 20.00000
 4 : 20.00000

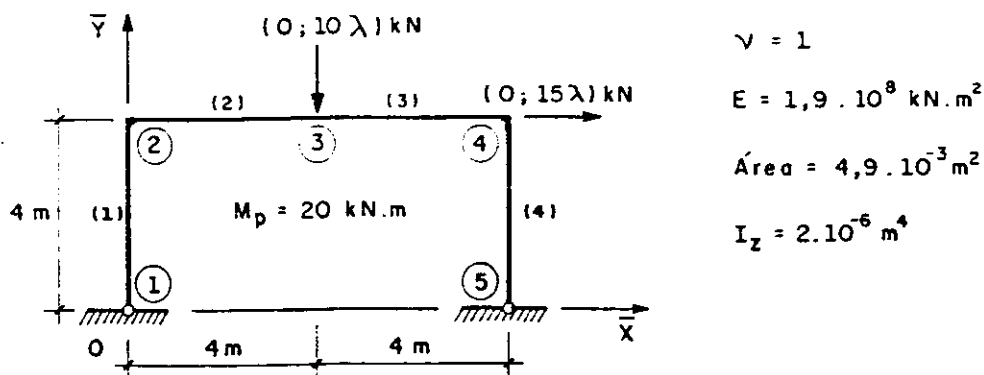
***** RESULTADOS DO PROGRAMA *****

FATOR DE CARGA DE PLASTIFICACAO ALTERNADA... = 1.066403
 FATOR DE CARGA DE COLAPSO INCREMENTAL..... = .5924386
 FATOR DE CARGA DE ACOMODACAO..... = .5924386

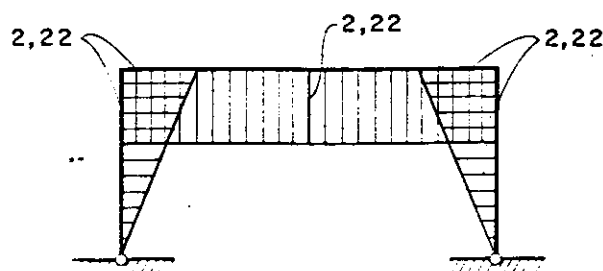
ENVOLTORIA ELASTICA DOS MOMENTOS FLETORES

BARRA	EXTREMIDADE		MOMENTO	FLETOR
	- NO INICIAL	- NO FINAL		
			MINIMO	MAXIMO
1	1		-.1327135E-05	.9747225E-07
	2		-7.499856	30.00827
2	2		-30.00826	7.499857
	3		-.5754565E-03	12.50014
3	3		-12.50014	.5727567E-03
	4		-37.50927	.0000000
4	4		.0000000	37.50927
	5		-.2761354E-06	.1327135E-05

BARRA	EXTREMIDADE		MOMENTO FLETOR RESIDUAL	MOMENTO FLETOR ATUANTE
	- NO INICIAL	- NO FINAL		
			MINIMO	MAXIMO
1	1		.7862458E-06	-.2126077E-13
	2		2.221942	-2.221262
2	2		-2.221943	-20.00000
	3		2.221942	2.221601
3	3		-2.221942	-9.627510
	4		2.221943	-20.00000
4	4		-2.221943	-2.221943
	5		.1635933E-06	.1269658E-14



(a) Geometria, definição do pórtico e dados adicionais

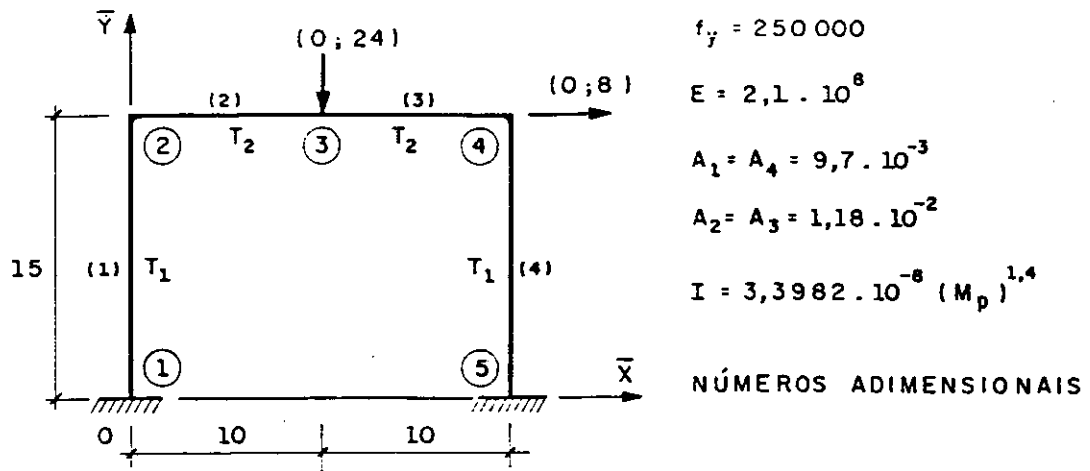


(b) Diagrama de momentos fletores residuais em kN.m

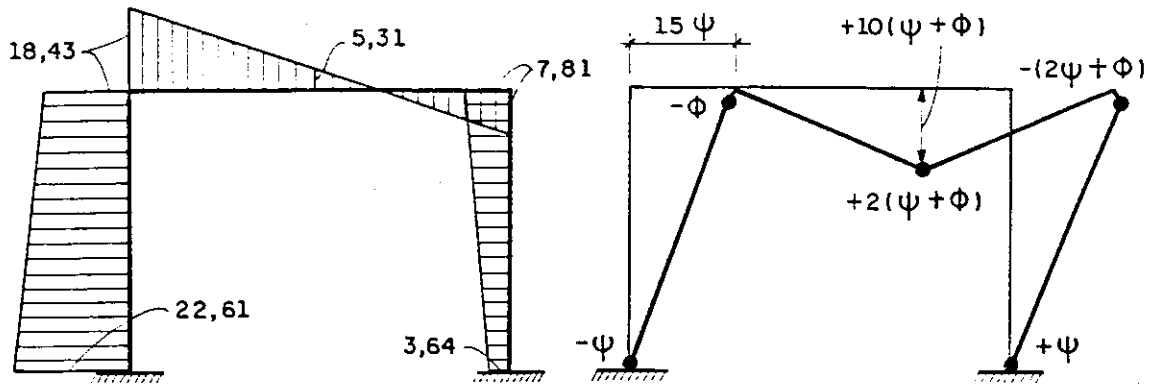
Fig. 8.4 Pórtico da figura 3.8, analisado no capítulo 3

O quinto exemplo corresponde ao "exemplo 7.13" dado por Heyman em [7]. Esse exemplo se refere a um problema de síntese sob carregamento variável, portanto, COD1 = 5. Na figura 8.5.a estão indicados o carregamento variável, a numeração dos nós e das barras, os parâmetros para os M_p , as características geométricas das barras e as características do material. A figura 8.5.b mostra a distribuição de momentos fletores residuais ao longo do pórtico e a figura 8.5.c ilustra o mecanismo de colapso incremental com dois graus de liberdade referente ao projeto de peso mínimo com acomodação. Essas duas figuras

foram obtidas a partir da análise dos resultados fornecidos pelo programa e que estão listados abaixo.



(a) Definição do pórtico e dados do problema



(b) Diagrama de momentos fletores residuais

(c) Mecanismo de colapso incremental com dois graus de liberdade

Fig B.5 Pórtico analisado por Heyman em [7]

PROJETO ==\ PROBLEMA DE SINTESE SOB CARREGAMENTO VARIAVEL

***** DADOS GERAIS DO PORTICO *****

CODIGO DO PROBLEMA.....= 5
 NUMERO DE BARRAS.....= 4
 NUMERO DE NOS.....= 5
 NUMERO DE NOS VINCULADOS.....= 2
 NUMERO DE COORD. CARREGADAS...= 2

ORIENTACAO E COMPRIMENTO DAS BARRAS

BARRA	NO INICIAL	NO FINAL	COMPRIMENTO
1	1	2	15.00000
2	2	3	10.00000
3	3	4	10.00000
4	4	5	15.00000

COORDENADAS DOS NOS

NO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	0.000000	0.000000
2	0.000000	15.00000
3	10.00000	15.00000
4	20.00000	15.00000
5	20.00000	0.000000

VINCULACAO DOS NOS

NO VINCULADO	DIRECAO		
	X	Y	Z
1	1	1	1
5	1	1	1

NOTA: CODIGOS DE VINCULACAO:
 0= DIRECAO NAO VINCULADA
 1= DIRECAO VINCULADA

CARREGAMENTO DO PORTICO

COORDENADA GLOBAL CARREGADA	CARGA MINIMA	APLICADA MAXIMA
8	0.000000	-24.00000

10 : .0000000 : 8.000000

TENSAO DE ESCOAMENTO.....= 250000.0
MOD. DE DEF. LONGITUDINAL...= .2100000E+09

CARAC. GEOM. DAS BARRAS

BARRA :	AREA
1 :	.9700000E-02
2 :	.1180000E-01
3 :	.1180000E-01
4 :	.9700000E-02

MOMENTO DE PLAST. TOTAL DAS BARRAS

BARRA :	FATOR DE PROPORCIONALIDADE :	PARAMETRO T
1 :	1.000000	1
2 :	1.000000	2
3 :	1.000000	2
4 :	1.000000	1

=====
***** RESULTADOS DO PROGRAMA *****
=====

NUMERO DE ITERACOES PREVISTAS.....= 10
NUMERO DE ITERACDES FEITAS.....= 5
CODIGO DO TIPO DE SECAO TRANSVERSAL.....= 6
VALOR DA CONSTANTE "C".....= .3398200E-07
VALOR DO EXPOENTE "GAMA".....= 1.400000
PESO MINIMO DO PORTICO COM ACOMODACAO...= 3226.225

PARAMETRO :	VALOR	
T	INICIAL	EXIGIDO
1	10.00000	56.37780
2	20.00000	76.74454

ENVOLTORIA ELASTICA DOS MOMENTOS FLETORES

BARRA :	EXTREMIDADE :	MOMENTO	FLETOR
	- NO INICIAL :	MINIMO	MAXIMO
	- NO FINAL :		

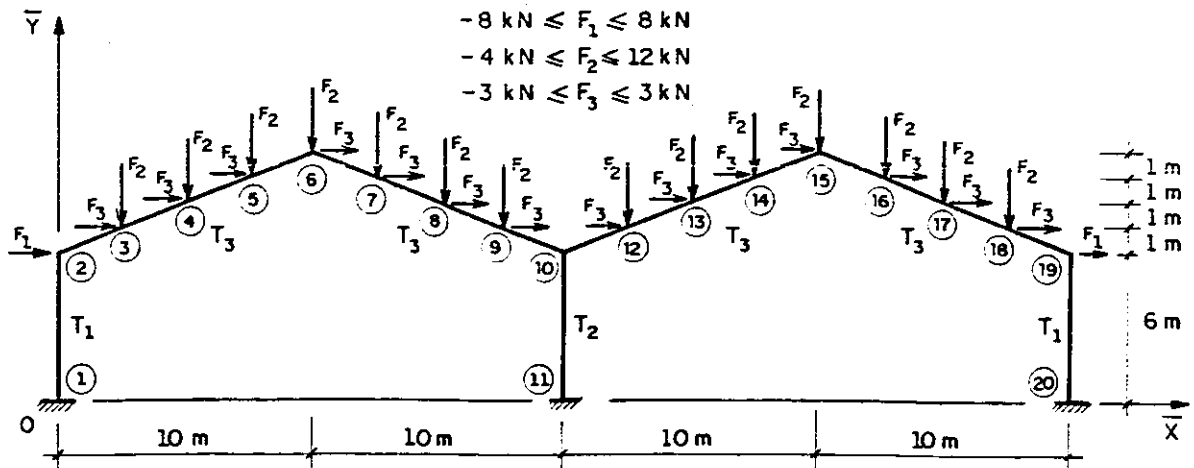
1	1	-18.97137	33.76917
	2	-37.94357	26.24407
2	2	-26.24407	37.94358
	3	-3182972E-03	82.05641
3	3	-82.05641	3197641E-03
	4	-64.18827	.0000000
4	4	.0000000	64.18828
	5	.0000000	52.74172

BARRA	EXTREMIDADE	MOMENTO FLETOR	MOMENTO FLETOR	ATUANTE
	- NO INICIAL	RESIDUAL	MINIMO	MAXIMO
1	1	22.60863	3.637260	56.37780
	2	-18.43423	-56.37780	7.809839
2	2	18.43423	-7.809837	56.37782
	3	-5.311876	-5.312195	76.74454
3	3	5.311874	-76.74454	5.312194
	4	7.810478	-56.37779	7.810478
4	4	-7.810478	-7.810478	56.37780
	5	3.636078	3.636078	56.37780

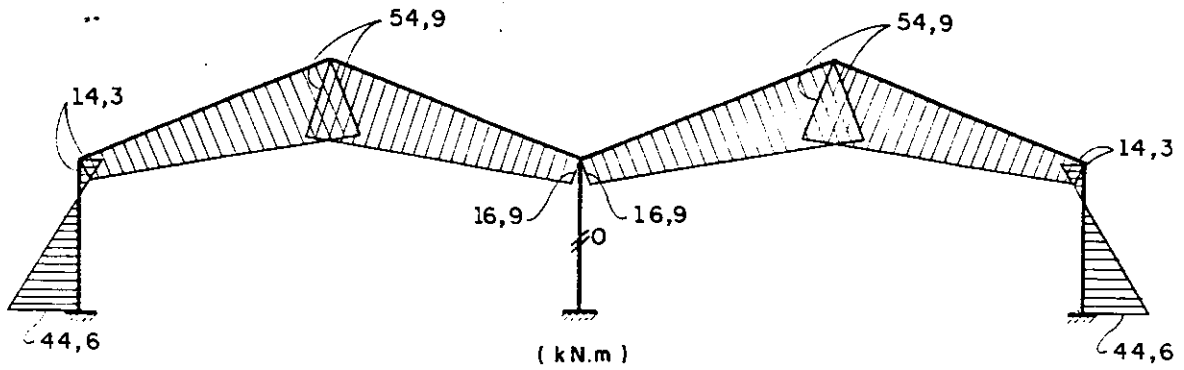
O sexto exemplo é o pórtico do edifício industrial esquematizado na figura 8.6, cujas cargas, dimensões básicas, numeração dos nós e a definição de parâmetros para os momentos de plastificação total das barras estão indicados na figura 8.6.a. As cargas atuantes no pórtico foram obtidas levando-se em conta as cargas de vento, peso próprio e sobrecarga, devidamente combinadas e concentradas nos pontos de apoio das terças; convém ressaltar que as cargas nodais da figura 8.6.a variam independentemente uma das outras dentro de seus respectivos intervalos. Foram adotados perfis soldados estruturais, com $f_y = 2,5 \cdot 10^5 \text{ KN/m}^2$ e $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ KN/m}^2$. As áreas das seções transversais dos perfis referentes aos pilares das extremidades são de $0,7 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$, as do pilar central são de $0,845 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ e as das vigas $0,605 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$.

Considerando-se inicialmente uma distribuição de momentos de plastificação total semelhante àquela da figura 8.6.a com 3 parâmetros, obteve-se, a partir dos resultados do programa, listados abaixo, o diagrama de momentos

fletores residuais da figura 8.6.b.



(a) Cargas atuantes, dimensões básicas, numeração dos nós e parâmetros dos momentos de plastificação total



(b) Diagrama de momentos fletores residuais

Fig. 8.6 Pórtico de edifício industrial

PROJETO ==> PORTICO DE EDIF. INDUSTRIAL; PESO MINIMO COM ACOMODACAO

***** DADOS GERAIS DO PORTICO *****

CODIGO DO PROBLEMA..... = 5
 NUMERO DE BARRAS..... = 19
 NUMERO DE NOS..... = 20
 NUMERO DE NOS VINCULADOS..... = 3
 NUMERO DE COORD. CARREGADAS... = 30

ORIENTACAO E COMPRIMENTO DAS BARRAS

BARRA	NO INICIAL	NO FINAL	COMPRIMENTO
1	1	2	6.000000
2	2	3	2.692582
3	3	4	2.692582
4	4	5	2.692582
5	5	6	2.692582
6	6	7	2.692582
7	7	8	2.692582
8	8	9	2.692582
9	9	10	2.692582
10	10	11	6.000000
11	10	12	2.692582
12	12	13	2.692582
13	13	14	2.692582
14	14	15	2.692582
15	15	16	2.692582
16	16	17	2.692582
17	17	18	2.692582
18	18	19	2.692582
19	19	20	6.000000

COORDENADAS DOS NOS

NO	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	.0000000	.0000000
2	.0000000	6.000000
3	2.500000	7.000000
4	5.000000	8.000000
5	7.500000	9.000000
6	10.000000	10.000000
7	12.500000	9.000000
8	15.000000	8.000000
9	17.500000	7.000000
10	20.000000	6.000000
11	20.000000	.0000000
12	22.500000	7.000000
13	25.000000	8.000000
14	27.500000	9.000000
15	30.000000	10.000000
16	32.500000	9.000000
17	35.000000	8.000000
18	37.500000	7.000000
19	40.000000	6.000000
20	40.000000	.0000000

VINCULACAO		DOS			NOS		
NO	DIRECAO						
VINCULADO	X	Y	Z				
1	1	1	1				
11	1	1	1				
20	1	1	1				

NOTA: CODIGOS DE VINCULACAO:
 0= DIRECAO NAO VINCULADA
 1= DIRECAO VINCULADA

CARREGAMENTO		DO		PORTICO	
COORDENADA	CARGA		APLICADA		
GLOBAL					
CARREGADA	MINIMA		MAXIMA		
4	-8.000000		8.000000		
7	-3.000000		3.000000		
8	4.000000		-12.000000		
10	-3.000000		3.000000		
11	4.000000		-12.000000		
13	-3.000000		3.000000		
14	4.000000		-12.000000		
16	-3.000000		3.000000		
17	4.000000		-12.000000		
19	-3.000000		3.000000		
20	4.000000		-12.000000		
22	-3.000000		3.000000		
23	4.000000		-12.000000		
25	-3.000000		3.000000		
26	4.000000		-12.000000		
34	-3.000000		3.000000		
35	4.000000		-12.000000		
37	-3.000000		3.000000		
38	4.000000		-12.000000		
40	-3.000000		3.000000		
41	4.000000		-12.000000		
43	-3.000000		3.000000		
44	4.000000		-12.000000		
46	-3.000000		3.000000		
47	4.000000		-12.000000		
49	-3.000000		3.000000		
50	4.000000		-12.000000		
52	-3.000000		3.000000		
53	4.000000		-12.000000		
55	-8.000000		8.000000		

TENSAO DE ESCOAMENTO.....= 250000.0
 MOD. DE DEF. LONGITUDINAL...= .2100000E+09

CARAC. GEOM. DAS BARRAS

BARRA	AREA
1	.7000000E-02
2	.6050000E-02
3	.6050000E-02
4	.6050000E-02
5	.6050000E-02
6	.6050000E-02
7	.6050000E-02
8	.6050000E-02
9	.6050000E-02
10	.8450000E-02
11	.6050000E-02
12	.6050000E-02
13	.6050000E-02
14	.6050000E-02
15	.6050000E-02
16	.6050000E-02
17	.6050000E-02
18	.6050000E-02
19	.7000000E-02

MOMENTO DE PLAST. TOTAL DAS BARRAS

BARRA	FATOR DE PROPORCIONALIDADE	PARAMETRO T
1	1.000000	1
2	1.000000	3
3	1.000000	3
4	1.000000	3
5	1.000000	3
6	1.000000	3
7	1.000000	3
8	1.000000	3
9	1.000000	3
10	1.000000	2
11	1.000000	3
12	1.000000	3
13	1.000000	3
14	1.000000	3
15	1.000000	3
16	1.000000	3
17	1.000000	3
18	1.000000	3
19	1.000000	1

***** RESULTADOS DO PROGRAMA *****

NUMERO DE ITERACOES PREVISTAS.....= 10
 NUMERO DE ITERACOES FEITAS.....= 5
 CODIGO DO TIPO DE SECAO TRANSVERSAL.....= 6
 VALOR DA CONSTANTE "C".....= .8928690E-07
 VALOR DO EXPOENTE "GAMA".....= 1.320000
 PESO MINIMO DO PORTICO COM ACOMODACAO...= 7777.214

PARAMETRO	VALOR	
	INICIAL	EXIGIDO
1	150.0000	176.1180
2	200.0000	252.3101
3	100.0000	101.4811

ENVOLTORIA ELASTICA DOS MOMENTOS FLETORES			
BARRA	EXTREMIDADE	MOMENTO FLETOR	
		MINIMO	MAXIMO
1	- NO INICIAL	-220.7241	131.5119
	- NO FINAL	-115.8009	53.79153
2	- NO INICIAL	-53.79153	115.8008
	- NO FINAL	-59.90668	44.08613
3	- NO INICIAL	-44.08612	59.90666
	- NO FINAL	-42.04012	52.40775
4	- NO INICIAL	-52.40777	42.04012
	- NO FINAL	-33.66584	50.22123
5	- NO INICIAL	-50.22123	33.66586
	- NO FINAL	-43.85294	46.59578
6	- NO INICIAL	-46.59578	43.85294
	- NO FINAL	-32.49530	51.83170
7	- NO INICIAL	-51.83178	32.49533
	- NO FINAL	-37.59399	53.52386
8	- NO INICIAL	-53.52386	37.59398
	- NO FINAL	-53.71297	46.23592
9	- NO INICIAL	-46.23591	53.71298
	- NO FINAL	-118.3640	67.47961
10	- NO INICIAL	-153.5255	153.5272
	- NO FINAL	-252.3089	252.3112
11	- NO INICIAL	-67.47488	118.3576
	- NO FINAL	-53.70927	46.23317
12	- NO INICIAL	-46.23316	53.70927
	- NO FINAL	-37.59705	53.52725
13	- NO INICIAL	-53.52723	37.59702
	- NO FINAL	-32.49570	51.83125
14	- NO INICIAL	-51.83125	32.49569
	- NO FINAL	-43.85046	46.59248

15	15	-46.59253	43.85048
	16	-33.66908	50.22311
16	16	-50.22311	33.66908
	17	-42.04988	52.41651
17	17	-52.41654	42.04990
	18	-59.90490	44.08579
18	18	-44.08578	59.90492
	19	-115.7943	53.78742
19	19	-53.78745	115.7943
	20	-131.5095	220.7187

BARRA	EXTREMIDADE	MOMENTO FLETOR RESIDUAL	MOMENTO FLETOR ATUANTE	
			MINIMO	MAXIMO
	- NO INICIAL - NO FINAL			
1	1	44.60612	-176.1180	176.1180
	2	14.31979	-101.4811	68.11132
2	2	-14.31978	-68.11131	101.4811
	3	24.46115	-35.44553	68.54729
3	3	-24.46115	-68.54728	35.44551
	4	34.60253	-7.437584	87.01028
4	4	-34.60253	-87.01030	7.437592
	5	44.74391	11.07806	94.96513
5	5	-44.74390	-94.96513	-11.07805
	6	54.88528	11.03234	101.4811
6	6	-54.88528	-101.4811	-11.03234
	7	45.38469	12.88939	97.21638
7	7	-45.38468	-97.21646	-12.88935
	8	35.88410	-1.709892	89.40796
8	8	-35.88409	-89.40794	1.709888
	9	26.38350	-27.32947	72.61942
9	9	-26.38350	-72.61942	27.32948
	10	16.88292	-101.4811	84.36253
10	10	-.6408691E-02	-153.5320	153.5208
	11	-.1129150E-02	-252.3101	252.3101
11	10	-16.87651	-84.35139	101.4811
	12	26.37583	-27.33344	72.60900
12	12	-26.37582	-72.60898	27.33345
	13	35.87514	-1.721909	89.40239
13	13	-35.87514	-89.40237	1.721882
	14	45.37445	12.87875	97.20570
14	14	-45.37445	-97.20570	-12.87877
	15	54.87377	11.02331	101.4663
15	15	-54.87377	-101.4663	-11.02329
	16	44.73363	11.06454	94.95674
16	16	-44.73363	-94.95674	-11.06454
	17	34.59349	-7.456390	87.01001
17	17	-34.59349	-87.01003	7.456413
	18	24.45336	-35.45155	68.53915
18	18	-24.45336	-68.53915	35.45156
	19	14.31324	-101.4811	68.10066
19	19	-14.31324	-68.10069	101.4811
	20	-44.60517	-176.1146	176.1135

Foram estudadas ainda duas outras possibilidades de distribuição dos M_p , uma com um único parâmetro para todas as barras e outra com dois parâmetros, um para os pilares e outro para as vigas. Os resultados obtidos para os valores dos parâmetros e para o peso mínimo com acomodação foram colocados na tabela 8.1. Observe-se, nessa tabela, que o projeto com 3 parâmetros, figura 8.6.a, possui uma redução de consumo de material da ordem de 32% em relação ao projeto com um único parâmetro.

TABELA 8.1 Valores dos parâmetros dos M_p , em KN.m, e do peso mínimo com acomodação, em KN, considerando-se 3 casos de distribuição para os parâmetros dos M_p

NÚMERO DE PARÂMETROS	1	2	3
PILARES DAS EXTREMIDADES	193,02	260,36	176,12
PILAR CENTRAL	193,02	260,36	252,31
VIGAS	193,02	95,88	101,48
PESO MÍNIMO	11789,82	8386,33	7999,21

O sétimo exemplo é o pórtico de um edifício de 7 andares, com estrutura de aço, cujas cargas atuantes, dimensões básicas, numeração dos nós e parâmetros dos momentos de plastificação total das barras estão indicados na figura 8.7.a. As cargas consideradas foram as devidas ao vento, peso próprio e sobrecarga. A figura 8.7.b mostra o diagrama de momentos fletores residuais para o projeto ótimo, obtido a partir da listagem dos resultados do programa apresentada abaixo.

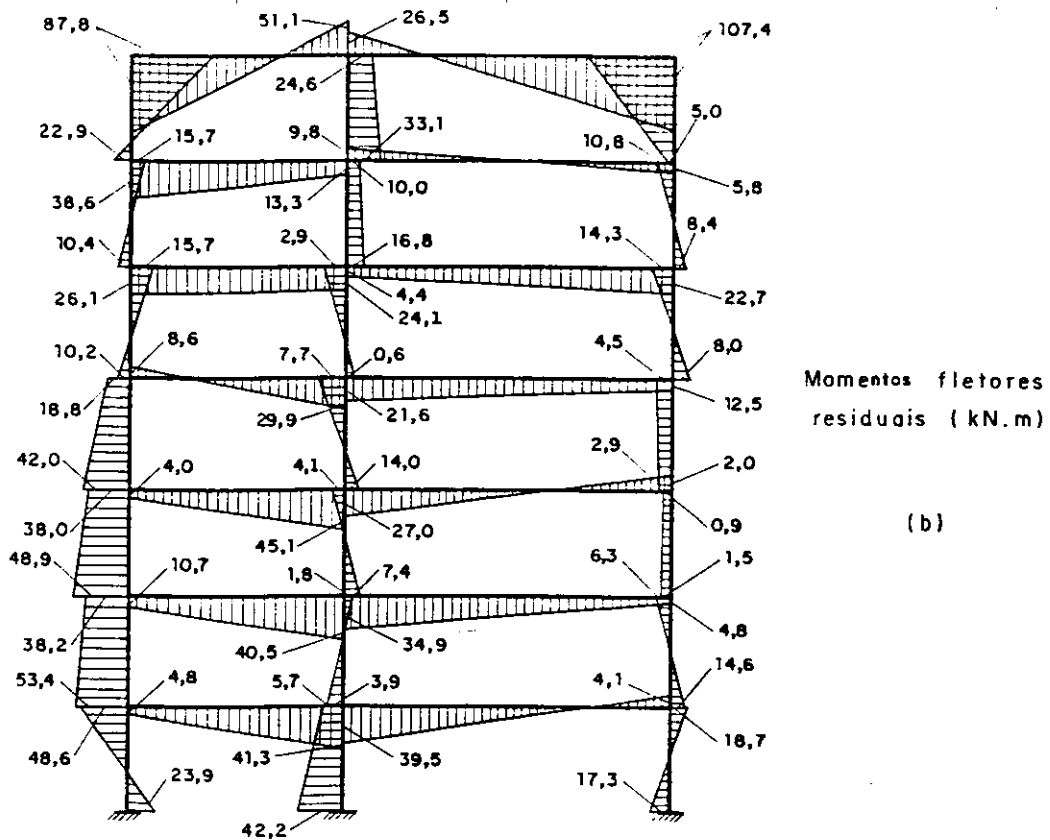
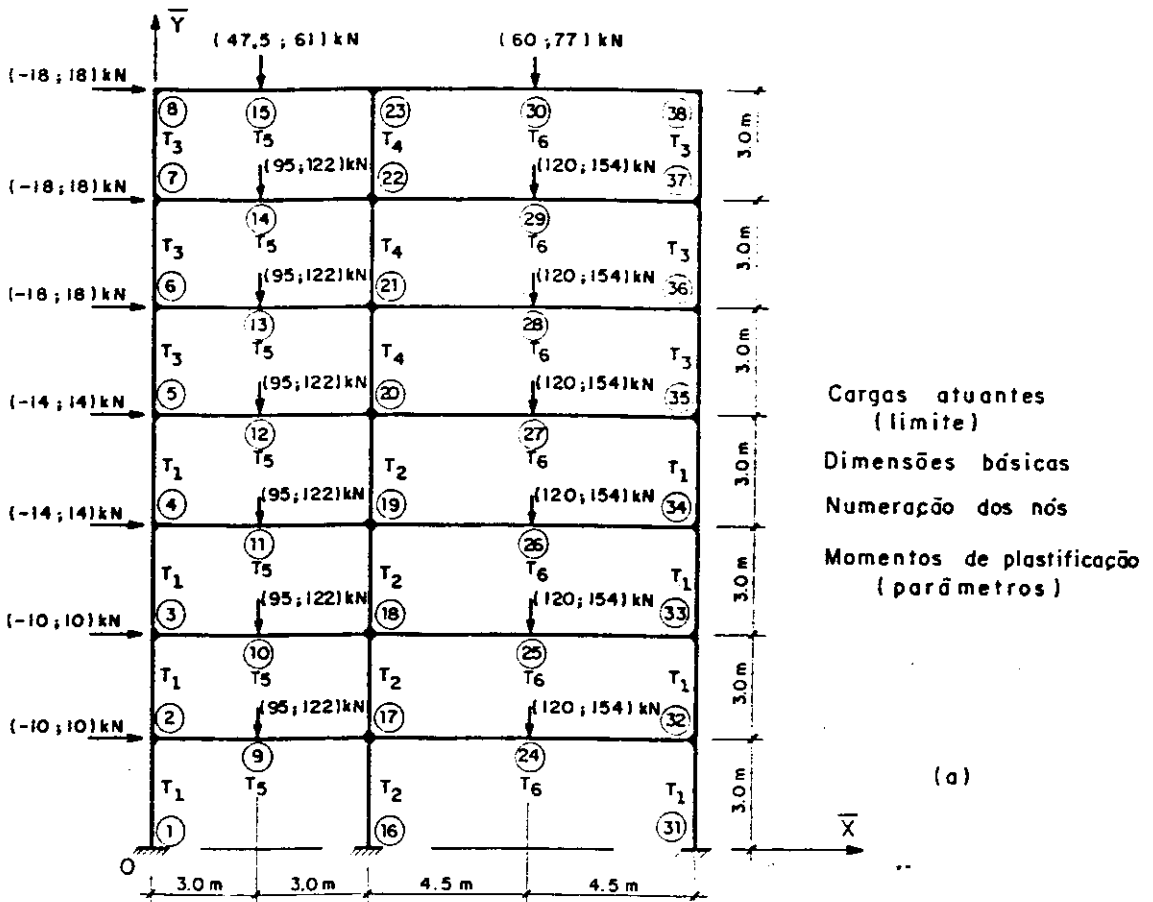


Fig. 8.7 Pórtico plano de um edifício de 7 andares

PROJETO ==> EDIFICIO DE 7 ANDARES, PESO MINIMO COM ACOMODACAO

***** DADOS GERAIS DO PORTICO *****

CODIGO DO PROBLEMA.....= 5
NUMERO DE BARRAS.....= 49
NUMERO DE NOS.....= 38
NUMERO DE NOS VINCULADOS.....= 3
NUMERO DE COORD. CARREGADAS...= 21

ORIENTACAO E COMPRIMENTO DAS BARRAS

Table with 4 columns: BARRA, NO INICIAL, NO FINAL, COMPRIMENTO. It lists 40 bars with their respective node numbers and lengths (e.g., 3.000000 and 4.500000).

41	:	23	:	30	:	4.500000
42	:	30	:	38	:	4.500000
43	:	31	:	32	:	3.000000
44	:	32	:	33	:	3.000000
45	:	33	:	34	:	3.000000
46	:	34	:	35	:	3.000000
47	:	35	:	36	:	3.000000
48	:	36	:	37	:	3.000000
49	:	37	:	38	:	3.000000

COORDENADAS		DOS	NOS	
NO	COORDENADA	X	COORDENADA	Y
1	: .0000000	:	.0000000	
2	: .0000000	:	3.000000	
3	: .0000000	:	6.000000	
4	: .0000000	:	9.000000	
5	: .0000000	:	12.00000	
6	: .0000000	:	15.00000	
7	: .0000000	:	18.00000	
8	: .0000000	:	21.00000	
9	: 3.000000	:	3.000000	
10	: 3.000000	:	6.000000	
11	: 3.000000	:	9.000000	
12	: 3.000000	:	12.00000	
13	: 3.000000	:	15.00000	
14	: 3.000000	:	18.00000	
15	: 3.000000	:	21.00000	
16	: 6.000000	:	.0000000	
17	: 6.000000	:	3.000000	
18	: 6.000000	:	6.000000	
19	: 6.000000	:	9.000000	
20	: 6.000000	:	12.00000	
21	: 6.000000	:	15.00000	
22	: 6.000000	:	18.00000	
23	: 6.000000	:	21.00000	
24	: 10.50000	:	3.000000	
25	: 10.50000	:	6.000000	
26	: 10.50000	:	9.000000	
27	: 10.50000	:	12.00000	
28	: 10.50000	:	15.00000	
29	: 10.50000	:	18.00000	
30	: 10.50000	:	21.00000	
31	: 15.00000	:	.0000000	
32	: 15.00000	:	3.000000	
33	: 15.00000	:	6.000000	
34	: 15.00000	:	9.000000	
35	: 15.00000	:	12.00000	
36	: 15.00000	:	15.00000	
37	: 15.00000	:	18.00000	
38	: 15.00000	:	21.00000	

VINCULACAO		DOS			NOS		
NO	DIRECAO						
VINCULADO	X	Y	Z				
1	1	1	1				
16	1	1	1				
31	1	1	1				

NOTA: CODIGOS DE VINCULACAO:
 0= DIRECAO NAO VINCULADA
 1= DIRECAO VINCULADA

CARREGAMENTO		DO		PORTICO	
COORDENADA GLOBAL	CARGA	APLICADA			
CARREGADA	MINIMA	MAXIMA			
4	-10.00000	10.00000			
7	-10.00000	10.00000			
10	-14.00000	14.00000			
13	-14.00000	14.00000			
16	-18.00000	18.00000			
19	-18.00000	18.00000			
22	-18.00000	18.00000			
26	-95.00000	-122.0000			
29	-95.00000	-122.0000			
32	-95.00000	-122.0000			
35	-95.00000	-122.0000			
38	-95.00000	-122.0000			
41	-95.00000	-122.0000			
44	-47.50000	-61.00000			
71	-120.0000	-154.0000			
74	-120.0000	-154.0000			
77	-120.0000	-154.0000			
80	-120.0000	-154.0000			
83	-120.0000	-154.0000			
86	-120.0000	-154.0000			
89	-60.00000	-77.00000			

TENSAO DE ESCOAMENTO..... = 250000.0
 MOD. DE DEF. LONGITUDINAL... = .2100000E+09

CARAC. GEOM. DAS BARRAS	
BARRA	AREA
1	.2757000E-01
2	.2757000E-01
3	.2757000E-01
4	.2757000E-01

5	:	1358000E-01
6	:	1358000E-01
7	:	1358000E-01
8	:	1052000E-01
9	:	1052000E-01
10	:	1052000E-01
11	:	1052000E-01
12	:	1052000E-01
13	:	1052000E-01
14	:	1052000E-01
15	:	1052000E-01
16	:	1052000E-01
17	:	1052000E-01
18	:	1052000E-01
19	:	1052000E-01
20	:	1052000E-01
21	:	1052000E-01
22	:	4750000E-01
23	:	4750000E-01
24	:	4750000E-01
25	:	4750000E-01
26	:	1404000E-01
27	:	1404000E-01
28	:	1404000E-01
29	:	1130000E-01
30	:	1130000E-01
31	:	1130000E-01
32	:	1130000E-01
33	:	1130000E-01
34	:	1130000E-01
35	:	1130000E-01
36	:	1130000E-01
37	:	1130000E-01
38	:	1130000E-01
39	:	1130000E-01
40	:	1130000E-01
41	:	1130000E-01
42	:	1130000E-01
43	:	2757000E-01
44	:	2757000E-01
45	:	2757000E-01
46	:	2757000E-01
47	:	1358000E-01
48	:	1358000E-01
49	:	1358000E-01

MOMENTO DE PLAST. TOTAL DAS BARRAS

BARRA	:	FATOR DE	:	PARAMETRO
	:	PROPORCIONALIDADE	:	T
1	:	1.000000	:	1
2	:	1.000000	:	1
3	:	1.000000	:	1
4	:	1.000000	:	1

5	1.000000	3
6	1.000000	3
7	1.000000	3
8	1.000000	5
9	1.000000	5
10	1.000000	5
11	1.000000	5
12	1.000000	5
13	1.000000	5
14	1.000000	5
15	1.000000	5
16	1.000000	5
17	1.000000	5
18	1.000000	5
19	1.000000	5
20	1.000000	5
21	1.000000	5
22	1.000000	2
23	1.000000	2
24	1.000000	2
25	1.000000	2
26	1.000000	4
27	1.000000	4
28	1.000000	4
29	1.000000	6
30	1.000000	6
31	1.000000	6
32	1.000000	6
33	1.000000	6
34	1.000000	6
35	1.000000	6
36	1.000000	6
37	1.000000	6
38	1.000000	6
39	1.000000	6
40	1.000000	6
41	1.000000	6
42	1.000000	6
43	1.000000	1
44	1.000000	1
45	1.000000	1
46	1.000000	1
47	1.000000	3
48	1.000000	3
49	1.000000	3

=====
***** RESULTADOS DO PROGRAMA *****
=====

NUMERO DE ITERACOES PREVISTAS..... = 10
NUMERO DE ITERACOES FEITAS..... = 4
CODIGO DO TIPO DE SECAO TRANSVERSAL..... = 6
VALOR DA CONSTANTE "C"..... = .8928690E-07
VALOR DO EXPOENTE "GAMA"..... = 1.320000
PESO MINIMO DO PORTICO COM ACOMODACAO... = 24810.25

PARAMETRO	VALOR		
	T	INICIAL	EXIGIDO
1	1600.000	110.7671	
2	2000.000	111.9267	
3	800.0000	76.36925	
4	1000.000	85.83331	
5	1200.000	123.9423	
6	1400.000	213.5872	

ENVOLTORIA ELASTICA DOS MOMENTOS FLETORES			
BARRA	EXTREMIDADE	MOMENTO	FLETOR
	- NO INICIAL	MINIMO	MAXIMO
	- NO FINAL		
1	1	-77.66254	50.07939
	2	-56.64437	5.694004
2	2	-76.50142	4.397603
	3	-72.62016	5.035100
3	3	-68.17914	4.512059
	4	-70.06581	6.517366
4	4	-65.95053	-2.090402
	5	-69.83755	-2.980114
5	5	-51.96161	.6220535
	6	-55.55535	.2449741
6	6	-50.04816	-9.531453
	7	-51.50358	-8.585684
7	7	-40.40746	-13.59910
	8	-36.69201	-11.43846
8	2	-5.677508	128.7317
	9	65.24554	98.15910
9	9	-98.15910	-65.24553
	17	-165.2269	-35.90963
10	3	-3.420070	134.6722
	10	65.03761	98.30695
11	10	-98.30693	-65.03761
	18	-164.4829	-28.57588
12	4	3.589574	127.9998
	11	65.19706	98.07851
13	11	-98.07851	-65.19704
	19	-158.4337	-34.42569
14	5	8.792346	115.3649
	12	65.20866	98.47306
15	12	-98.47305	-65.20867
	20	-153.8765	-45.60271
16	6	15.80593	99.08408
	13	65.42466	98.86819
17	13	-98.86819	-65.42466
	21	-147.9882	-59.53627
18	7	28.18920	85.90662
	14	66.35867	98.01122

19	14	-98.01122	-66.35868
	22	-137.2507	-70.91376
20	8	11.43846	36.69202
	15	31.58196	50.65371
21	15	-50.65371	-31.58195
	23	-72.82185	-40.07632
22	16	-95.35846	69.71574
	17	-87.20208	39.88601
23	17	-115.8161	48.11300
	18	-113.7221	50.44110
24	18	-104.5049	45.36352
	19	-107.8727	48.61343
25	19	-97.90493	34.78811
	20	-104.2434	37.64182
26	20	-77.40967	26.50364
	21	-82.92020	28.90855
27	21	-69.06976	11.48184
	22	-72.31770	14.32790
28	22	-52.76255	- .6926084E-01
	23	-50.26694	2.384034
29	17	71.72366	244.4321
	24	141.5257	195.9114
30	24	-195.9114	-141.5257
	32	-209.4853	-32.48503
31	18	66.97972	248.5016
	25	138.3011	193.7302
32	25	-193.7302	-138.3011
	33	-218.3869	-35.06919
33	19	74.62875	240.6068
	26	138.3993	193.7013
34	26	-193.7013	-138.3993
	34	-209.8616	-43.70200
35	20	86.44933	230.5375
	27	140.5650	196.5021
36	27	-196.5021	-140.5650
	35	-191.8126	-50.06632
37	21	101.1676	217.9565
	28	143.5649	200.0100
38	28	-200.0100	-143.5649
	36	-168.5377	-58.18827
39	22	115.1866	203.7995
	29	144.8237	199.5290
40	29	-199.5290	-144.8237
	37	-152.1212	-73.18732
41	23	59.70956	101.0715
	30	74.06049	105.9995
42	30	-105.9995	-74.06049
	38	-64.60187	-30.99743
43	31	-43.97165	93.48870
	32	9.912271	92.06288
44	32	17.61869	122.3765
	33	13.59478	117.0828
45	33	13.52729	109.2512
	34	11.11740	111.7206
46	34	22.90496	107.8206
	35	24.57020	115.2803
47	35	17.62494	84.40343

	36	18.86094	90.67802
48	36	32.34137	84.84559
	37	30.91145	87.14661
49	37	35.96126	71.28914
	38	30.99747	64.60181

BARRA	EXTREMIDADE		MOMENTO FLETOR RESIDUAL	MOMENTO FLETOR ATUANTE	
	- NO INICIAL	- NO FINAL		MINIMO	MAXIMO
1	1		-23.88274	-101.5453	26.19664
	2		-48.59059	-105.2350	-42.89659
2	2		53.38000	-23.12141	57.77761
	3		-38.14697	-110.7671	-33.11187
3	3		48.87691	-19.30222	53.38897
	4		-37.96378	-108.0296	-31.44642
4	4		42.02133	-23.92920	39.93093
	5		-18.74968	-88.58723	-21.72979
5	5		10.17230	-41.78931	10.79436
	6		15.71186	-39.84349	15.95683
6	6		10.39040	-39.65776	8589468
	7		15.65225	-35.85133	7.066565
7	7		22.90138	-17.50608	9.302280
	8		87.80772	51.11571	76.36926
8	2		-4.789418	-10.46693	123.9423
	9		23.03703	88.28257	121.1961
9	9		-23.03704	-121.1961	-88.28256
	17		41.28466	-123.9423	5.375031
10	3		-10.72995	-14.15002	123.9422
	10		25.63531	90.67292	123.9423
11	10		-25.63531	-123.9422	-90.67292
	18		40.54069	-123.9423	11.96480
12	4		-4.057553	-4679794	123.9423
	11		24.57643	89.77349	122.6549
13	11		-24.57643	-122.6549	-89.77347
	19		45.09529	-113.3384	10.66960
14	5		8.577382	17.36973	123.9423
	12		10.67846	75.88712	109.1515
15	12		-10.67845	-109.1515	-75.88712
	20		29.93427	-123.9423	-15.66844
16	6		-26.10225	-10.29633	72.98183
	13		25.07407	90.49873	123.9423
17	13		-25.07407	-123.9423	-90.49873
	21		24.04594	-123.9423	-35.49033
18	7		-38.55362	-10.36442	47.35301
	14		25.93103	92.28970	123.9423
19	14		-25.93103	-123.9423	-92.28971
	22		13.30845	-123.9423	-57.60532
20	8		-87.80772	-76.36926	-51.11569
	15		18.34366	49.92562	68.99737
21	15		-18.34365	-68.99736	-49.92561
	23		-51.12040	-123.9423	-91.19672
22	16		42.21095	-53.14751	111.9267
	17		-5.720421	-92.92250	34.16559

23	17	3.889435	-111.9267	52.00243
	18	1.795410	-111.9267	52.23651
24	18	-7.421776	-111.9267	37.94174
	19	-4.053978	-111.9267	44.55945
25	19	-14.02175	-111.9267	20.76636
	20	-7.683273	-111.9267	29.95855
26	20	-.6281471	-78.03781	25.87549
	21	-2.913109	-85.83331	25.99544
27	21	-16.76356	-85.83331	-5.281718
	22	9.974567	-62.34314	24.30246
28	22	-33.07077	-85.83331	-33.14003
	23	24.64829	-25.61864	27.03293
29	17	-39.45368	32.26997	204.9785
	24	17.67586	159.2015	213.5872
30	24	-17.67586	-213.5872	-159.2015
	32	-4.101929	-213.5872	-36.58696
31	18	-34.91434	32.06538	213.5872
	25	19.85701	158.1581	213.5872
32	25	-19.85701	-213.5872	-158.1581
	33	4.799713	-213.5872	-30.26948
33	19	-27.01955	47.60919	213.5872
	26	12.51328	150.9126	206.2146
34	26	-12.51328	-206.2146	-150.9126
	34	-1.993042	-211.8546	-45.69505
35	20	-21.62286	64.82648	208.9146
	27	17.08508	157.6501	213.5872
36	27	-17.08508	-213.5872	-157.6501
	35	12.54736	-179.2652	-37.51896
37	21	-4.369293	96.79828	213.5872
	28	13.57718	157.1421	213.5872
38	28	-13.57719	-213.5872	-157.1421
	36	22.78511	-145.7526	-35.40316
39	22	9.787735	124.9744	213.5872
	29	-2.045288	142.7784	197.4837
40	29	2.045277	-197.4838	-142.7784
	37	5.697235	-146.4239	-67.49008
41	23	26.47211	86.18167	127.5436
	30	40.44727	114.5078	146.4467
42	30	-40.44727	-146.4467	-114.5078
	38	107.3667	42.76486	76.36930
43	31	17.27843	-26.69322	110.7671
	32	18.70426	28.61653	110.7671
44	32	-14.60233	3.016357	107.7741
	33	-6.315679	7.279106	110.7671
45	33	1.515966	15.04326	110.7671
	34	-.9534397	10.16396	110.7671
46	34	2.946484	25.85144	110.7671
	35	-4.513205	20.05699	110.7671
47	35	-8.034187	9.590752	76.36925
	36	-14.30877	4.552177	76.36926
48	36	-8.476330	23.86504	76.36926
	37	-10.77735	20.13410	76.36926
49	37	5.080124	41.04138	76.36926
	38	-107.3667	-76.36925	-42.76490

O último exemplo é o pórtico da figura 8.8.a carregado com cargas uniformemente distribuídas e com os parâmetros para os momentos de plastificação total indicados nessa figura. Esse exemplo foi proposto por Baker e Heyman em [5]. Cada carga uniformemente distribuída será substituída por uma carga concentrada central equivalente, conforme a figura 8.8.b. Essa figura mostra também a definição do pórtico.

O valor aproximado para o fator de carga de colapso plástico obtido através do programa foi o mesmo obtido por Baker e Heyman em [5]. A listagem do arquivo DASA é mostrada abaixo.

PROJETO ==> PORTICO COM CARREG. UNIF. DISTR.; CARGA CRITICA

```

=====
***** DADOS GERAIS DO PORTICO *****
=====

```

```

CODIGO DO PROBLEMA.....= 2
NUMERO DE BARRAS.....= 21
NUMERO DE NOS.....= 18
NUMERO DE NOS VINCULADOS.....= 3
NUMERO DE COORD. CARREGADAS...= 9

```

```

-----
ORIENTACAO E COMPRIMENTO DAS BARRAS
-----

```

BARRA	NO INICIAL	NO FINAL	COMPRIMENTO
1	1	2	1.000000
2	2	3	1.000000
3	3	4	1.000000
4	2	5	1.000000
5	3	6	1.000000
6	4	7	1.000000
7	5	9	1.000000
8	6	10	1.000000
9	7	11	1.000000
10	8	9	1.000000
11	9	10	1.000000
12	10	11	1.000000
13	9	12	1.000000
14	10	13	1.000000
15	11	14	1.000000
16	12	16	1.000000
17	13	17	1.000000
18	14	18	1.000000
19	15	16	1.000000
20	16	17	1.000000
21	17	18	1.000000

COORDENADAS		DOS	NOS	
NO	COORDENADA	X	COORDENADA	Y
1	.0000000	:	.0000000	
2	.0000000	:	1.0000000	
3	.0000000	:	2.0000000	
4	.0000000	:	3.0000000	
5	1.0000000	:	1.0000000	
6	1.0000000	:	2.0000000	
7	1.0000000	:	3.0000000	
8	2.0000000	:	.0000000	
9	2.0000000	:	1.0000000	
10	2.0000000	:	2.0000000	
11	2.0000000	:	3.0000000	
12	3.0000000	:	1.0000000	
13	3.0000000	:	2.0000000	
14	3.0000000	:	3.0000000	
15	4.0000000	:	.0000000	
16	4.0000000	:	1.0000000	
17	4.0000000	:	2.0000000	
18	4.0000000	:	3.0000000	

VINCULACAO		DOS		NOS		
NO	VINCULADO	DIRECAO				
		X	Y	Z		
1	:	1	:	1	:	1
8	:	1	:	1	:	1
15	:	1	:	1	:	1

NOTA: CODIGOS DE VINCULACAO:
 0= DIRECAO NAO VINCULADA
 1= DIRECAO VINCULADA

CARREGAMENTO DO PORTICO		
COORD. GLOBAL	CARGA	
CARREGADA	APLICADA	
4	:	2.0000000
7	:	2.0000000
10	:	4.0000000
14	:	-6.0000000
17	:	-4.0000000
20	:	-2.0000000
35	:	-8.0000000
38	:	-5.0000000
41	:	-1.0000000

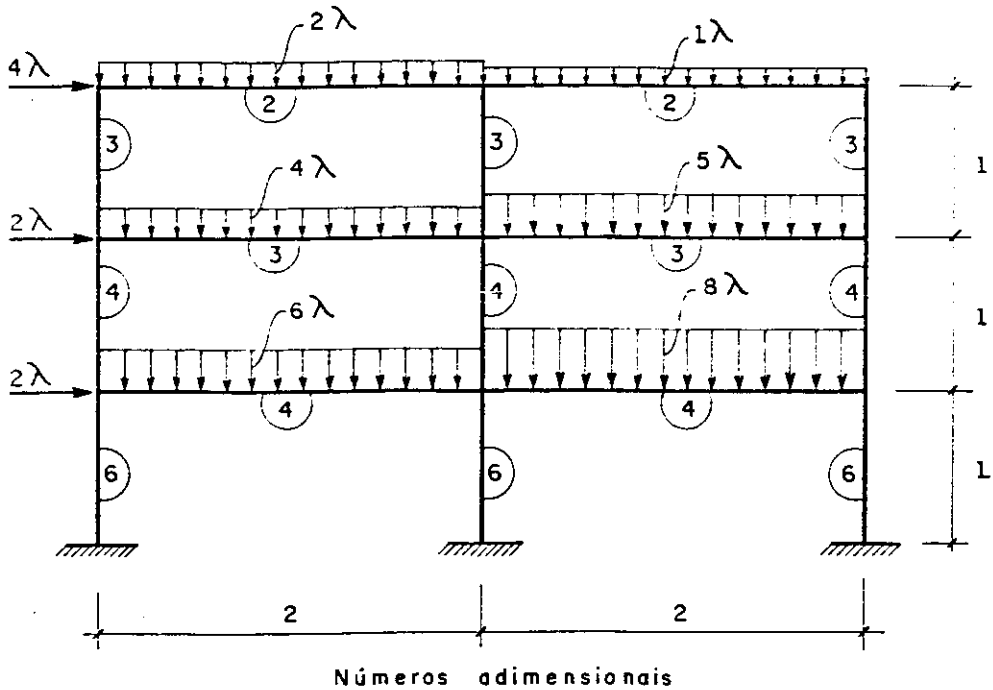
BARRA	MM. DE PLAST	TOTAL
1	6.000000	
2	4.000000	
3	3.000000	
4	4.000000	
5	3.000000	
6	2.000000	
7	4.000000	
8	3.000000	
9	2.000000	
10	6.000000	
11	4.000000	
12	3.000000	
13	4.000000	
14	3.000000	
15	2.000000	
16	4.000000	
17	3.000000	
18	2.000000	
19	6.000000	
20	4.000000	
21	3.000000	

=====
 ***** RESULTADOS DO PROGRAMA *****
 =====

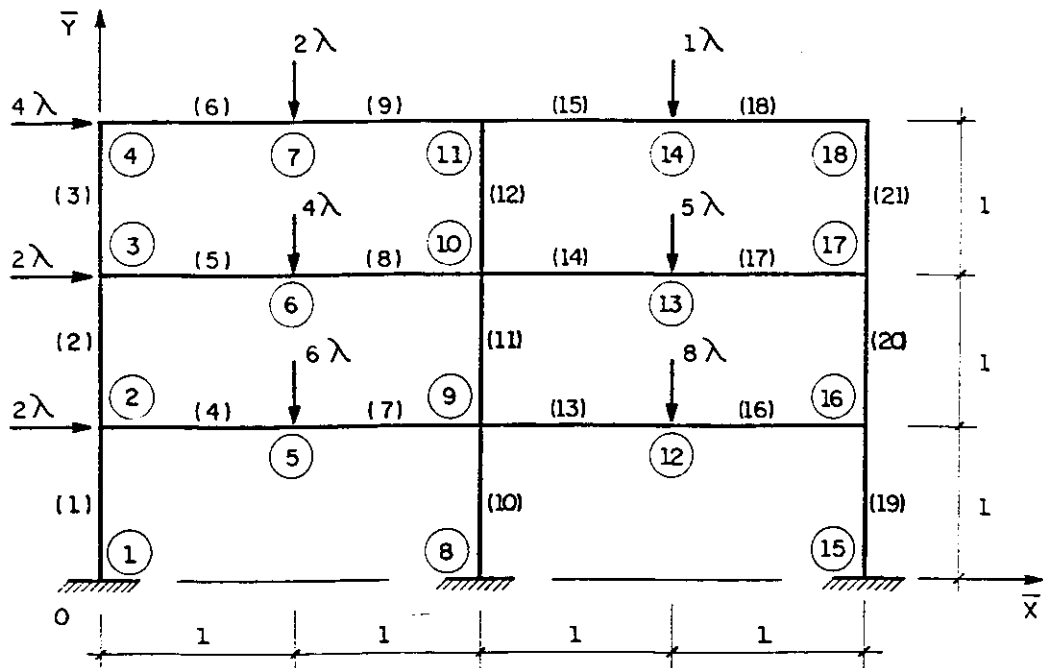
FATOR DE CARGA DE COLAPSO PLASTICO = 1.975610

MOMENTOS FLETORES NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS		
BARRA	EXTREMIDADE	MOMENTO
	- NO INICIAL - NO FINAL	FLETOR
1	1	6.000000
	2	-3.853658
2	2	4.000000
	3	-1.902439
3	3	3.000000
	4	2.000000
4	2	-1.1463409
	5	4.000000
5	3	-1.097561
	6	3.000000
6	4	-2.000000
	7	1.975610
7	5	-4.000000
	9	-4.000000
8	6	-3.000000
	10	-3.000000

9	7	-1.975610
	11	-2.000000
10	8	6.000000
	9	1.658537
11	9	-1.463415
	10	3.219512
12	10	-1.097561
	11	3.000000
13	9	3.804878
	12	4.000000
14	10	.8780491
	13	3.000000
15	11	-.9999998
	14	.4878053
16	12	-4.000000
	16	-4.000000
17	13	-3.000000
	17	-3.000000
18	14	-.4878052
	18	-2.000000
19	15	6.000000
	16	-.2355110E-06
20	16	4.000000
	17	4.000000
21	17	-1.000000
	18	2.000000



(a) Carregamento uniformemente distribuído e momentos de plastificação total.



(b) Definição do pórtico e carregamento equivalente

Fig. 8.8 Pórtico com carregamento uniformemente distribuído

CAPÍTULO 9

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Além dos exemplos mostrados no capítulo 8, foram processados inúmeros exemplos criados ou retirados das referências bibliográficas. Para todos esses exemplos, os resultados obtidos através do programa foram coerentes. A partir desses resultados, foi possível fazer uma avaliação positiva do programa desenvolvido e da eficiência da utilização de técnicas da programação linear na resolução dos problemas propostos neste trabalho.

Quanto às limitações do programa apresentado no capítulo 7 no que diz respeito ao espaço de memória necessária para sua execução, há de se ressaltar que as hipóteses assumidas para o método das rótulas plásticas têm validade restrita a estruturas em geral de baixa altura, já que, se houver um aumento no número de andares do pórtico os efeitos do esforço normal passam a ser significativos, não sendo possível desprezá-los. Em face disso, o limite de 640 Kb é perfeitamente suficiente para se estudar os pórticos que este trabalho abrange.

Com o programa desenvolvido, tornou-se possível estudar com maior rigor o problema de síntese sob carregamento variável, tratado na maioria dos artigos referentes a projeto plástico limite como um caso de uma sucessão de situações de carregamento único, como

ênfatuizado por Domaszewski em [1].

O estudo desse problema através da solução iterativa discutida no capítulo 3 mostrou a eficiência da utilização do método simplex e a rápida convergência, em pórticos usuais, dos parâmetros de origem elástica e dos de origem plástica associados ao projeto de peso mínimo com acomodação.

Há de se ressaltar que o problema de cargas uniformemente distribuídas ao longo das barras, exemplo 8 do capítulo 8, pode ser tratado com boa aproximação através do programa "PASMRF.FOR", fazendo-se a substituição dessas cargas por outras equivalentes concentradas no centro das barras, conforme proposto por Baker e Heyman em [5].

Observou-se durante a elaboração e conclusão deste trabalho que vários temas poderão ser explorados tomando-se como referência os estudos desenvolvidos aqui. Entre esses temas, merecem destaque:

- O uso do problema dual na formulação dos problemas tratados nesta dissertação.

- Estender o estudo a outros tipos de estruturas lineares e espaciais.

- Avaliar o efeito de se considerar o cálculo do peso mínimo com acomodação através do processo iterativo apresentado neste trabalho, possibilitando-se com isto aumentar o volume de estudos e exemplos sobre esse assunto, pouco tratado até o momento.

Como consideração final, pode-se destacar que os objetivos propostos para a execução desta dissertação, expostos no início do capítulo 1, foram atingidos. Pretende-se, baseado neste trabalho, dar prosseguimento tanto nos estudos a nível de doutorado quanto na elaboração de trabalhos envolvendo os temas expostos acima.

CAPÍTULO 10

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS E BIBLIOGRAFIA

10.1 Referências bibliográficas

- [1] DOMASZEWSKI, M. & SAMP-STANISLAWSKA, E.M. Optimal shakedown design of frames by linear programming. Computers & Structures, 21(3): 379-385, 1985.
- [2] GURALNICK, S.A. et alii. Plastic collapse, shakedown and hysteresis. Journal Structural Div., ASCE, 110(9): 2103- 2119, Sept., 1984.
- [3] GURALNICK, S.A. et alii. Plastic collapse, shakedown and hysteresis of multistory steel structures. Journal Structural Div., ASCE, 112(12): 2610-2627, Dec., 1986.
- [4] BAKER, J. et alii. The steel skeleton. London, Cambridge University Press, 1965. v.II, 422p.
- [5] BAKER, J. & HEYMAN, J. Plastic design of frames: 1-Fundamentals. London, Cambridge University Press, 1969. 235p.
- [6] BEEDLE, L.S. Plastic design of steel frames. New

York, John Wiley & Sons, 1958. 422p.

- [7] HEYMAN, J. Plastic design of frames: 2-Applications. London, Cambridge University Press, 1971. 300p.
- [8] KÖNIG, J.A. Shakedown of elastic-plastic structures. New York, Elsevier Sci., 1987. 225p.
- [9] MOY, S.S.J. Plastic methods for steel and concrete structures. London, The Macmillan Press, 1981. 235p.
- [10] NEAL, B.G. The plastic methods of structural analysis. 3rd.ed. London, Chapman and Hall, 1977. 218p.
- [11] BAZARAA, M.S. & JARVIS, J.J. Linear programming and network flows. New York, John Wiley & Sons, 1977. 578p.
- [12] LUENBERGER, D.G. Linear and non-linear programming. 2nd.ed., London, Addison Wesley, 1984. 491p.
- [13] PUCCINI, A.L. & PIZZOLATO, N.D. Programação linear. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1987. 264p.
- [14] GERE, J.M. & WEAVER, W.Jr. Analysis of framed structures. London, D. Van Nostrand, 1965. 490p.
- [15] PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of matrix structural analysis. New York, McGraw-Hill, 1968. 474p.
- [16] SOUZA, J.C.A.O. Aplicação de programação linear ao projeto de pórticos retangulares em regime elasto-plástico. São Carlos, EESC-USP, 1972. 82p. Dissertação (Mestrado). Departamento de Estruturas - Escola de Engenharia de São

Carlos/USP.

- [17] ANTUNES, H.M.C.C. & SOUZA, J.C.A.O. Técnicas computacionais na estática de estruturas. São Carlos, Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos/USP, 1987. 65p.
- [18] HEYMAN, J. Minimum weight of frames under shakedown loading. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 84(EM4): 1-25, Oct. 1958.
- [19] PRZEMIENIECKI, J.S. & DENKE, P.H. Joining of complex substructures by the matrix force method. Journal Aircraft, 3(3): 236-243, 1966.
- [20] HOFFMANN, R. & VIEIRA, S. Análise de regressão: uma introdução à econometria. São Paulo, EDUSP, 1977. 355p.
- [21] CAMILO, L.H. & SOUZA, J.C.A.O. Os carregamentos variáveis e o projeto de peso mínimo. In: CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 11., Rio de Janeiro, 29-31 out. 1990. Anais. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, 1990. v.1 p.525-539.

10.2 BIBLIOGRAFIA

- ANTUNES, H.M.C.C. & SOUZA, J.C.A.O. Técnicas computacionais na estática de estruturas. São Carlos, Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos/USP, 1987. 65p.
- BAKER, J. et alii. The steel skeleton. London, Cambridge University Press, 1965. v.II, 422p.
- BAKER, J. & HEYMAN, J. Plastic design of frames: 1-Fundamentals. London, Cambridge University Press, 1969. 235p.
- BARROSO, S.E.G. & ELLENRIEDER, A.R. Programação linear. Rio de Janeiro, Almeida Neves Ed., 1971. 216p.
- BAZARAA, M.S. & JARVIS, J.J. Linear programming and network flows. New York, John Wiley & Sons, 1977. 578p.
- BEEDLE, L.S. Plastic design of steel frames. New York, John Wiley & Sons, 1958. 422p.
- BEER, F.P. & JOHNSTON, E.R.J. Resistência dos materiais [Mechanics of materials]. Trad. Paulo Prestes Castilho. São Paulo, McGraw-Hill, 1982. 678p.
- BERSLER, B. et alii. Design of steel structures. 2nd.ed. New York, John Wiley & Sons, 1968. 848p.
- CALLADINE, C.R. Plasticity for engineers. Chichester, UK, Ellis Horwood, 1985. 336p.
- CAMILO, L.H. & SOUZA, J.C.A.O. Os carregamentos variáveis e o projeto de peso mínimo. In: CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 11., Rio de Janeiro, 29-31 out. 1990. Anais. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, 1990. v.1 p.525-539.

CEREDA, R.L.D. & MALDONADO, J.C. Introdução ao FORTRAN 77 para microcomputadores. São Paulo, McGraw-Hill, 1987. 229p.

COMPANHIA SIDERÚRGICA PAULISTA. Perfis soldados de aço: tabelas de características geométricas. São Paulo. v.1, 68p.

CHVÁTAL, V. Linear programming. New York, W. H. Freeman, 1983. 494p.

DOMASZEWSKI, M. & SAMP-STANISLAWSKA, E.M. Optimal shakedown design of frames by linear programming. Computers & Structures, 21(3): 379-385, 1985.

FRANGOPOL, D.M. Computer-automated sensitivity analysis in reliability-based plastic design. Computers & Structures, 22(1): 63-75, 1986.

GERE, J.M. & WEAVER, W.Jr. Analysis of framed structures. London, D. Van Nostrand, 1965. 490p.

GRIERSON, D.E. & ALY, A.A. Plastic design under combined stresses. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 106(EM4): 585-607, Aug., 1980.

GURALNICK, S.A. et alii. Plastic collapse, shakedown and hysteresis. Journal Structural Div., ASCE, 110(9): 2103- 2119, Sept., 1984.

GURALNICK, S.A. et alii. Plastic collapse, shakedown and hysteresis of multistory steel structures. Journal Structural Div., ASCE, 112(12): 2610-2627, Dec., 1986.

HADLEY, G. Linear programming. London, Addison-Wesley, 1962. 536p.

HEHL, M.E. Linguagem de programação estruturada: FORTRAN

77. São Paulo, McGraw-Hill, 1986. 537p.
- HEYMAN, J. Plastic design of frames : 2 - Applications. London, Cambridge University Press, 1971. 300p.
- HEYMAN, J. Minimum weight of frames under shakedown loading. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 84(EM4): 1-25, Oct. 1958.
- HOFFMANN, R. & VIEIRA, S. Análise de regressão: uma introdução à econometria. São Paulo, EDUSP, 1977. 355p.
- HOLZER, S.M. Computer analysis of structures. New York, Elsevier Sci., 1985. 439p.
- KÖNIG, J.A. Shakedown of elastic-plastic structures. New York, Elsevier Sci., 1987. 225p.
- LUENBERGER, D.G. Linear and non-linear programming. 2nd.ed. London, Addison Wesley, 1984. 491p.
- MICROSOFT CORPORATION. Microsoft FORTRAN optimizing compiler: language reference - version 4.0. 1987. 383p.
- MICROSOFT CORPORATION. Microsoft FORTRAN optimizing compiler: user's guide - version 4.0. 1987. 516p.
- MOREIRA, D.F. Análise matricial de estruturas. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1977. 404p.
- MOY, S.S.J. Plastic methods for steel and concrete structures. London, The Macmillan Press, 1981. 235p.
- NEAL, B.G. The plastic methods of structural analysis. 3rd.ed. London, Chapman and Hall, 1977. 218p.
- PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of matrix structural analysis.

- New York, McGraw-Hill, 1968. 474p.
- PRZEMIENIECKI, J.S. & DENKE, P.H. Joining of complex substructures by the matrix force method. Journal Aircraft, 3(3): 236-243, 1966.
- PUCCHINI, A.L. Introdução à programação linear. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1975. 270p.
- PUCCHINI, A.L. & PIZZOLATO, N.D. Programação linear. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1987. 264p.
- SAVE, M. & PRAGER, W. Structural optimization. New York, Plenum Press, 1985. v.1, 342p.
- SCHOLZ, H. & FALLER, G. A micro-computer program for the elastic-plastic analysis and optimum design of plane frames. Computer & Structures, 24(6): 941-947, 1986.
- SIMONNARD, M. Linear programming. [Programmation linéaire] Trad. William S. Jewell. New York, Prentice-Hall, 1966. 458p.
- SOUZA, J.C.A.O. Aplicação de programação linear ao projeto de pórticos retangulares em regime elasto-plástico. São Carlos, EESC-USP, 1972. 82p. Dissertação (Mestrado). Departamento de Estruturas-Escola de Engenharia de São Carlos/USP.

APÊNDICE A

RELAÇÃO ENTRE O MOMENTO DE INÉRCIA E O MOMENTO DE PLASTIFICAÇÃO TOTAL PARA OS DIVERSOS TIPOS DE SEÇÕES TRANSVERSAIS USUAIS

Ao se estudar os problemas de síntese sob carregamento variável, no capítulo 3, viu-se que uma das hipóteses adicionais necessárias para a solução destes problemas foi a de que deveria existir uma relação entre o momento de inércia e o momento de plastificação total das barras, dada pela (3.31), aqui repetida:

$$I = c(M_p)^\gamma \quad (A.1)$$

Com essa relação, era possível determinar os momentos de inércia a partir dos M_p admitidos em cada iteração e, com isso, obtinha-se a envoltória elástica dos momentos fletores, o que permitia resolver os problemas de síntese sob carregamento variável.

Para que se possa empregar a relação (3.31) ou (A.1), é necessário conhecer a constante c e o expoente γ , que dependem da forma das seções transversais utilizadas. O propósito deste apêndice é obter essa constante e esse expoente para os diversos tipos de seções transversais usuais.

Todo o estudo feito aqui constitui a base para o desenvolvimento das sub-rotinas CIMP e PERFILI do programa

apresentado neste trabalho. As seções transversais a serem consideradas são:

1) Seção transversal retangular com a relação base/altura definida:

Seja uma seção transversal retangular de base b e altura h , cuja relação b/h seja previamente definida, como mostra a figura A.1.

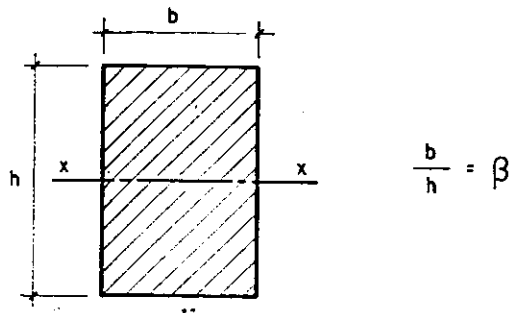


Fig. A.1 Seção transversal retangular com b/h definido

Da resistência clássica dos materiais, tem-se que o momento de inércia para a seção transversal da figura A.1 em relação ao seu eixo principal de inércia XX vale:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (A.2)$$

O momento de plastificação total desta seção é:

$$M_P = \frac{bh^2}{4} f_y \quad (A.3)$$

Substituindo-se (A.2) e (A.3) em (A.1), obtém-se:

$$\frac{bh^3}{12} = c \left[\frac{bh^2}{4} f_y \right]^{\delta} \quad (A.4)$$

Na figura A.1, definiu-se β tal que:

$$b = \beta h \tag{A.5}$$

Substituindo-se (A.5) em (A.4), chega-se facilmente a:

$$1h^4 = \left[12c \left(\frac{f_y}{4} \right)^\gamma \beta^{\gamma-1} \right] h^{3\gamma} \tag{A.6}$$

De (A.6), tira-se que:

$$4 = 3\gamma \tag{A.7}$$

$$1 = 12c \left(\frac{f_y}{4} \right)^\gamma \beta^{\gamma-1} \tag{A.8}$$

De (A.7), tem-se que o valor de γ é:

$$\gamma = \frac{4}{3} \tag{A.9}$$

Com (A.9) em (A.8), obtém-se o valor da constante c , que é dado por:

$$c = \left(\frac{4}{f_y} \right)^{4/3} \frac{1}{12\beta^{1/3}} \tag{A.10}$$

Desta forma, a relação entre o momento de inércia e o momento de plastificação total da seção transversal retangular com b/h definido fica determinada, sendo expressa por:

$$I = c(M_p)^{4/3} \tag{A.11}$$

onde a constante c é dada por (A.10).

2) Seção transversal retangular com a largura b definida:

Considere-se a seção transversal retangular ilustrada na figura A.2. Supõe-se que a sua largura b seja definida inicialmente. Essa figura mostra também o I e o M_p dessa seção, que são os mesmos obtidos anteriormente.

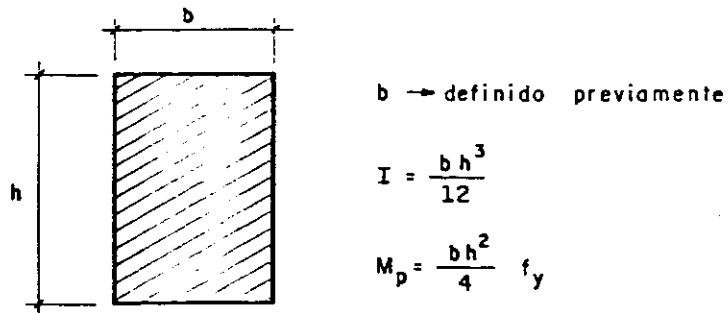


Fig. A.2 Seção transversal retangular com largura b definida

Procedendo-se de forma análoga ao caso anterior, obtém-se a relação:

$$I = c(M_p)^{3/2} \quad (A.12)$$

onde,

$$c = \left[\frac{4}{f_y} \right]^{3/2} \frac{1}{12b^{1/2}} \quad (A.13)$$

3) Seção transversal retangular com a altura h definida:

Seja a seção transversal retangular da figura A.3, com a altura h previamente definida. O momento de inércia e o momento de plastificação total já são conhecidos. Procedendo-se analogamente aos casos anteriores, tem-se que:

$$I = c(M_p)^1 \quad (A.14)$$

onde,

$$c = \left[\frac{4}{f_y} \right] \frac{h}{12} \tag{A.15}$$

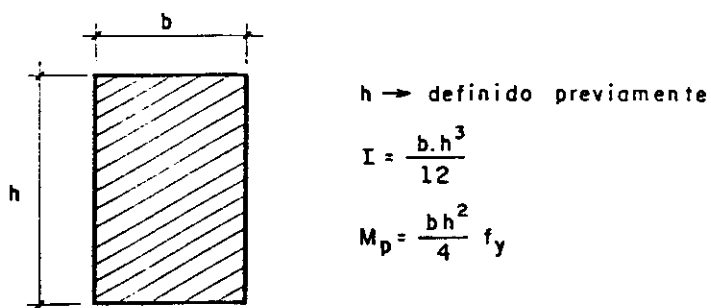


Fig. A.3 Seção transversal retangular com altura h definida

4) Seção transversal circular

Considere-se a seção transversal circular mostrada na figura A.4 de raio r , em que o momento de inércia e o momento de plastificação total correspondentes podem ser facilmente obtidos através da resistência clássica dos materiais e da tabela 1.2 de [10], respectivamente.

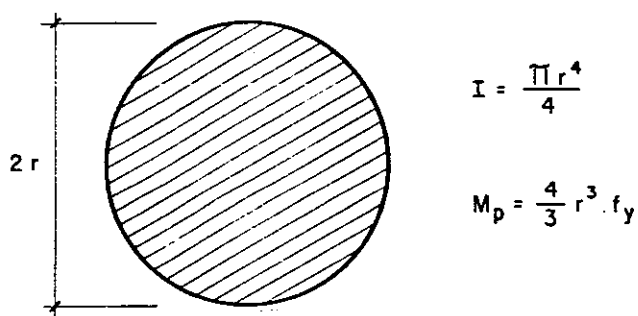


Fig. A.4 Seção transversal circular de raio r

A relação entre I e M_p para a seção transversal da figura A.4 pode ser obtida de forma idêntica aos casos

anteriores, sendo dada por:

$$I = c(M_p)^{4/3} \tag{A.16}$$

onde,

$$c = \left[\frac{3}{4f_y} \right]^{4/3} \frac{\pi}{4} \tag{A.17}$$

5) Seção transversal I:

Para se obter a relação entre o momento de inércia e o momento de plastificação total para as seções transversais do tipo I será utilizado o ajuste de retas pelo método dos mínimos quadrados para uma nuvem de pontos previamente conhecida a ser detalhado a seguir. Com este método, torna-se possível determinar a constante c e o expoente γ da relação (A.1).

Uma seção transversal I pode ser idealizada como mostra a figura A.5.

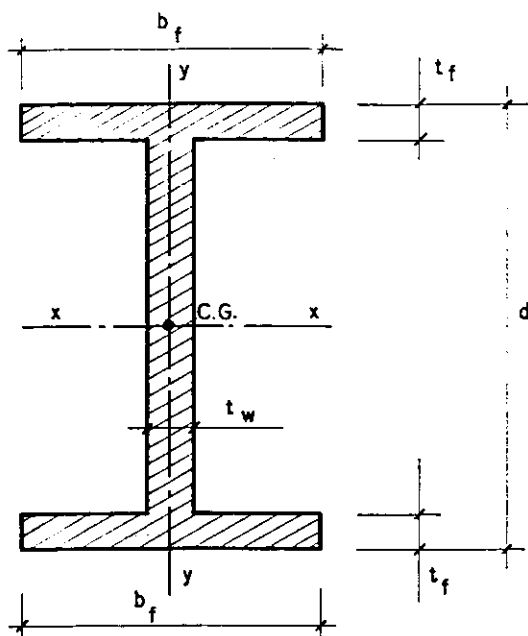


Fig. A.5 Seção transversal I idealizada

De acordo com a notação da figura A.5, tem-se que o momento de inércia da seção transversal I em relação ao seu eixo principal de inércia XX pode ser expresso por:

$$I = \frac{b_f d^3}{12} - \frac{(b_f - t_w)(d - 2t_f)^3}{12} \quad (A.18)$$

O módulo plástico de resistência Z_p para a seção transversal da figura A.5 segundo o seu eixo principal de inércia XX pode ser obtido da tabela 1.2 de [10], sendo dado por:

$$Z_p = b_f t_f (d - t_f) + \frac{1}{4} t_w (d - 2t_f)^2 \quad (A.19)$$

O momento de plastificação total é obtido multiplicando-se o módulo plástico de resistência pela tensão de escoamento, como visto no capítulo 2, ou seja:

$$M_p = Z_p f_y \quad (A.20)$$

onde Z_p é dado por (A.19).

A equação (A.1) pode ser convenientemente escrita na forma seguinte:

$$\log(I) = \log[c(M_p)^\gamma] \quad (A.21)$$

Após a aplicação das propriedades dos logaritmos, (A.21) torna-se:

$$\log(I) = \gamma \log(M_p) + \log(c) \quad (A.22)$$

que é uma equação de uma reta semelhante a

$$y = ax + b \quad (A.23)$$

onde,

$$y = \log(I) \qquad x = \log(M_p) \qquad (A.24)$$

$$a = \gamma \qquad b = \log(c) \qquad (A.25)$$

Conhecidas as características geométricas dos perfis I, através das expressões (A.18) e (A.20) obtém-se os correspondentes momentos de inércia e momentos de plastificação total, respectivamente. Desta forma, pode-se obter uma nuvem de n pontos num diagrama de $\log(I)$ contra $\log(M_p)$, semelhante à figura A.6.

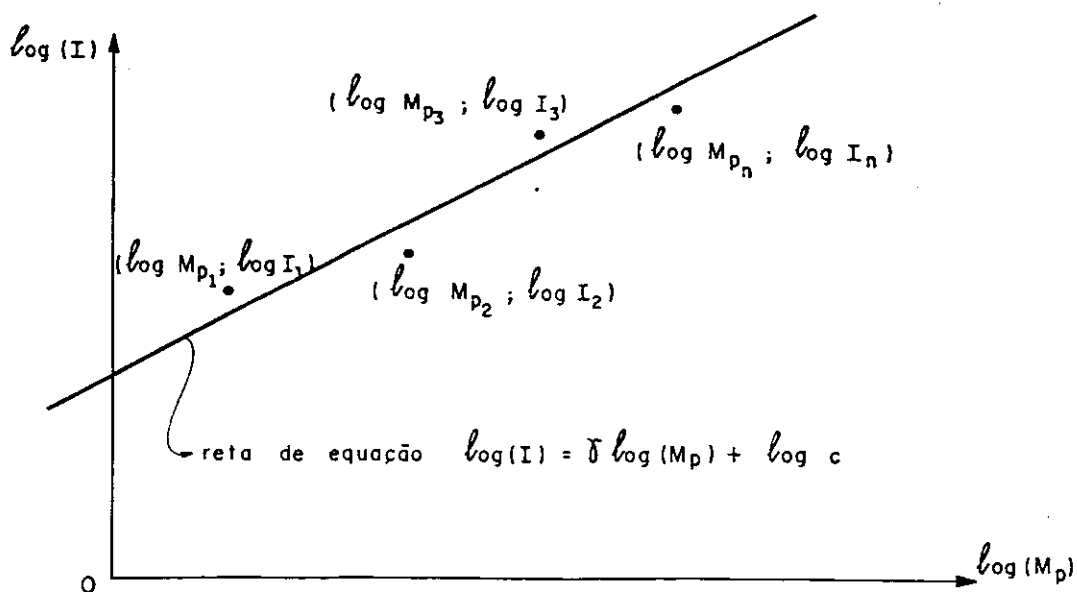
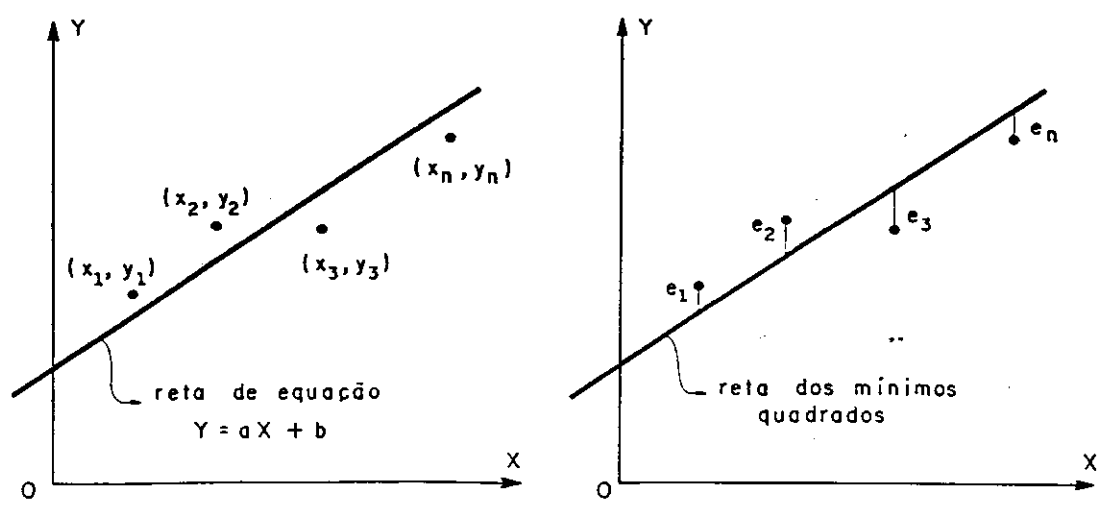


Fig.A.6 Nuvem de pontos obtida a partir das expressões (A.18) e (A.20)

Para que se tenha a relação entre I e M_p , é necessário conhecer a constante c e o expoente γ . Se for possível determinar a equação de uma reta semelhante à (A.22), mostrada na figura A.6, de tal forma que essa reta se ajuste aos pontos da nuvem representada nessa figura, então c e γ poderão ser facilmente determinados com a ajuda de (A.25).

A maneira pela qual se obterá a equação da reta ilustrada na figura A.6, será através do método dos mínimos quadrados. Dados n pontos no espaço E^2 , nem todos situados

na mesma vertical, conforme a figura A.7 a, a idéia básica deste método consiste em determinar uma reta, entre as infinitas que existem, de equação $y = ax + b$ de tal forma que esta reta torne mínima a soma dos quadrados dos desvios e_i ($i = 1, \dots, n$), figura A.7.b, onde $e_i = y_i - (ax_i + b)$. Esta reta é chamada de reta dos mínimos quadrados, ilustrada na figura A.7.b, cuja equação se deseja determinar.



(a) Nuvem de n pontos no espaço (x, y)

(b) Reta dos mínimos quadrados e os desvios e_i

Fig. A.7 Aplicação do ajuste de retas pelo método dos mínimos quadrados

Pelo método dos mínimos quadrados, os coeficientes a e b da equação da reta ilustrada na figura A.7.a, são dados por:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n}} \quad (\text{A.26})$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - a \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (\text{A.27})$$

Com (A.26) e (A.27), a equação $y = ax + b$ fica determinada. A demonstração da obtenção dessas expressões para a e b podem ser encontradas em HOFFMANN & VIEIRA^[20]. Estendendo-se este estudo para o caso da figura A.6, através das expressões (A.24), tem-se que os x_i e y_i de (A.26) e (A.27) correspondem, respectivamente, a:

$$x_i = \log(M_p)_i \quad y_i = \log(I)_i \quad (\text{A.28})$$

Conhecidos os coeficientes a e b através das equações (A.26) e (A.27), respectivamente, a constante c e o expoente γ ficam determinados pelas equações (A.25), ou seja:

$$\gamma = a \quad c = 10^b \quad (\text{A.29})$$

O cálculo de c e γ para a seção transversal I é feita no programa apresentado neste trabalho na sub-rotina PERFILI.

APÊNDICE B

ENVOLTÓRIA ELÁSTICA DOS MOMENTOS FLETORES

O objetivo deste apêndice é mostrar a formulação necessária para o cálculo da envoltória elástica dos momentos fletores, utilizada na solução dos problemas de análise e síntese sob carregamento variável. Este apêndice é a base para o desenvolvimento da sub-rotina ENVOLT que faz parte do programa apresentado neste trabalho.

Será utilizado o processo dos deslocamentos, aplicado ao cálculo de pórticos planos. As equações matriciais desse processo, necessárias para a obtenção da envoltória elástica dos momentos fletores, serão utilizadas aqui sem nenhuma demonstração. Todo este apêndice está baseado em [14] e [17].

Um dos primeiros passos na obtenção da envoltória elástica dos momentos fletores é a definição da estrutura, já discutida e apresentada na seção 4.5.1 do capítulo 4, quando do estudo das relações independentes de equilíbrio. Por esta definição, não serão previstas cargas ao longo das barras; os nós serão convenientemente definidos de tal maneira que todo o carregamento da estrutura possa estar aplicado só a eles e segundo as direções das coordenadas globais.

Os carregamentos nos problemas de análise e síntese sob carregamento variável são dados em função de intervalos de valores dentro dos quais as cargas podem

variar, aleatória e independentemente.

Sejam os vetores $\{F^{\max}\}$ e $\{F^{\min}\}$ em que o número de elementos de cada vetor é igual ao número de coordenadas globais carregadas; nesses dois vetores serão armazenados os valores máximo e mínimo de cada carga aplicada nestas coordenadas, respectivamente. Estes vetores podem ser expressos de uma forma geral por:

$$\{F^{\max}\} = \begin{Bmatrix} F_1^{\max} \\ \vdots \\ F_s^{\max} \\ \vdots \\ F_{ncc}^{\max} \end{Bmatrix} \quad \{F^{\min}\} = \begin{Bmatrix} F_1^{\min} \\ \vdots \\ F_s^{\min} \\ \vdots \\ F_{ncc}^{\min} \end{Bmatrix} \quad (B.1)$$

onde:

a) ncc é igual ao número de coordenadas globais carregadas.

b) cada índice dos elementos desses vetores relaciona-se a um índice de uma coordenada global carregada; por exemplo, ao longo de todo este apêndice, será suposto que os valores extremos F_e^{\max} e F_e^{\min} , que ocupam a posição s dos vetores $\{F^{\max}\}$ e $\{F^{\min}\}$, respectivamente, estão aplicados segundo a coordenada global de índice r.

O processo dos deslocamentos torna-se mais fácil com a definição dos dois sistemas de coordenadas locais apresentados nas figuras 4.6.a e 4.7 para uma barra genérica *i* de rigidez à flexão EI e área A . Essas figuras são repetidas nas figuras B.1.a e B.1.b onde estão indicadas a numeração das coordenadas locais, as matrizes e os vetores correspondentes a cada sistema de referência. Os vetores mostrados nessas figuras já foram introduzidos no capítulo 4. As matrizes $[r_e]_i$ e $[r_g]_i$ são as matrizes de rigidez da barra *i* correspondentes a cada um dos sistemas

locais da figura B.1. Os índices das coordenadas locais referentes à figura B.1.b são dados na tabela 4.1.

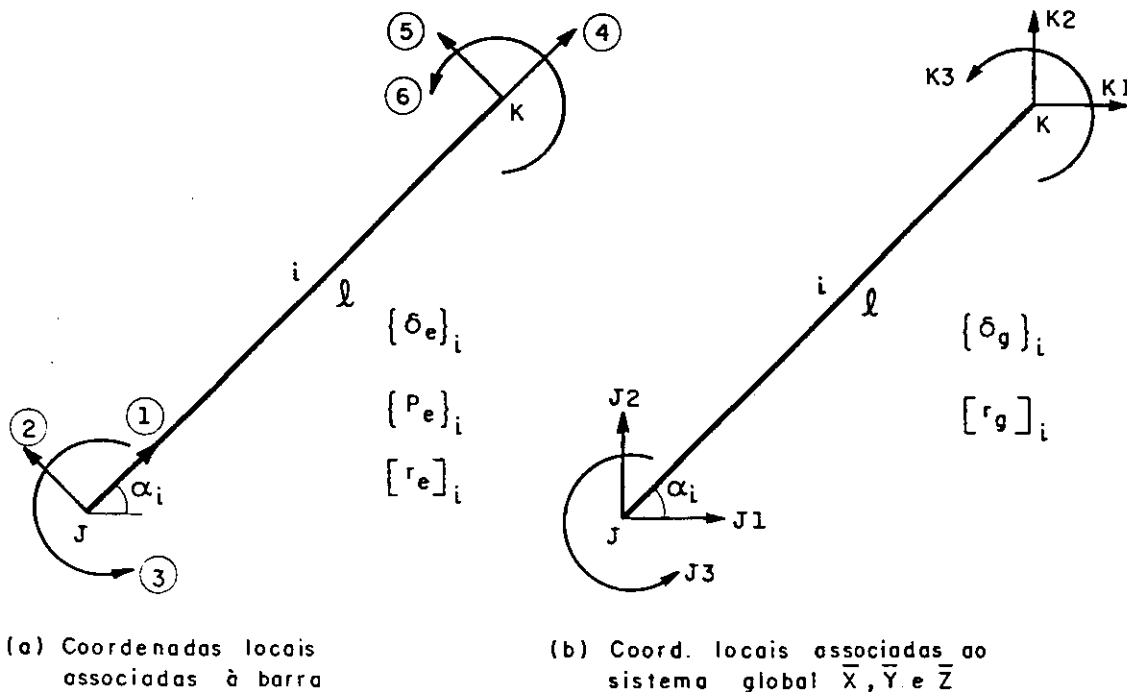


Fig B.1 Sistemas de coordenadas locais de uma barra genérica i para o processo dos deslocamentos

A matriz de rigidez $[r_e]_i$, referente ao sistema local da figura B.1.a, é obtida facilmente da análise matricial de estruturas, sendo dada por:

$$[r_e]_i = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 & -A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & A_2 & 0 & -A_3 & A_2 \\ 0 & A_2 & A_1 & 0 & -A_2 & A_5 \\ -A_4 & 0 & 0 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & -A_3 & -A_2 & 0 & A_3 & -A_2 \\ 0 & A_2 & A_5 & 0 & -A_2 & A_1 \end{bmatrix}_i \quad (B.2)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{4EI}{l} & A_2 &= \frac{6EI}{l^2} & A_3 &= \frac{12EI}{l^3} \\ A_4 &= \frac{EA}{l} & A_5 &= \frac{2EI}{l} \end{aligned} \tag{B.3}$$

Convém ressaltar que a apresentação de $[r_e]_i$ conforme B.2 visa facilitar os estudos que se seguem, envolvendo a multiplicação desta matriz por outras matrizes.

A matriz de rigidez $[r_g]_i$, referente ao sistema local da figura B.1.b, é dada por:

$$[r_g]_i = [\beta_e]_i^t [r_e]_i [\beta_e]_i \tag{B.4}$$

onde a matriz de incidência cinemática $[\beta_e]_i$ é a mesma obtida na seção 4.3 do capítulo 4, dada pela expressão (4.19).

Fazendo que $C = \cos\alpha_i$ e $S = \sin\alpha_i$, a (4.19) pode ser reescrita como:

$$[\beta_e]_i = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \tag{B.5}$$

A matriz de incidência cinemática $[\beta_g]_i$ foi obtida na seção 4.5.3 do capítulo 4, sendo dada por (4.46).

Considerando-se a barra genérica i da figura B.1.b, a sua contribuição para a obtenção da matriz de rigidez da estrutura pode ser obtida levando-se em conta (B.6), (B.7) e (4.46), ou seja:

$$[R] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{Nó} \\ 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right. \begin{array}{c} 1 \ 2 \ 3 \end{array} \begin{array}{c} \text{J1} \ \text{J2} \ \text{J3} \end{array} \begin{array}{c} \text{K1} \ \text{K2} \ \text{K3} \end{array} \begin{array}{c} \text{N1} \ \text{N2} \ \text{N3} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{g_{11}} & r_{g_{12}} & r_{g_{13}} & \dots & r_{g_{14}} & r_{g_{15}} & r_{g_{16}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{g_{21}} & r_{g_{22}} & r_{g_{23}} & \dots & r_{g_{24}} & r_{g_{25}} & r_{g_{26}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{g_{31}} & r_{g_{32}} & r_{g_{33}} & \dots & r_{g_{34}} & r_{g_{35}} & r_{g_{36}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{g_{41}} & r_{g_{42}} & r_{g_{43}} & \dots & r_{g_{44}} & r_{g_{45}} & r_{g_{46}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{g_{51}} & r_{g_{52}} & r_{g_{53}} & \dots & r_{g_{54}} & r_{g_{55}} & r_{g_{56}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{g_{61}} & r_{g_{62}} & r_{g_{63}} & \dots & r_{g_{64}} & r_{g_{65}} & r_{g_{66}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \left. \begin{array}{c} \text{Nó} \\ \text{K} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{K1} \\ \text{K2} \\ \text{K3} \end{array} \\ \left. \begin{array}{c} \text{Nó} \\ \text{N} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{N1} \\ \text{N2} \\ \text{N3} \end{array} \\ \left. \begin{array}{c} \text{Nó} \\ 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Nó} \\ 1 \end{array} \left| \right. \quad \left. \begin{array}{c} \text{Nó} \\ \text{J} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Nó} \\ \text{J} \end{array} \left| \right. \quad \left. \begin{array}{c} \text{Nó} \\ \text{K} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Nó} \\ \text{K} \end{array} \left| \right. \quad \left. \begin{array}{c} \text{Nó} \\ \text{N} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Nó} \\ \text{N} \end{array} \left| \right. \end{array}$$

(B.8)

Será definida uma matriz $[F]$ de ordem $3n \times ncc$, onde n é o número de nós da estrutura e ncc é o número de coordenadas globais carregadas. Cada coluna de $[F]$ será formada por um vetor de elementos nulos, com exceção de uma posição que será unitária, correspondente ao índice da

coordenada global carregada. De uma forma geral, a matriz [F] pode ser esquematizada como:

$$[F] = [\{F\}_1, \dots, \{F\}_s, \dots, \{F\}_{ncc}] \quad (B.9)$$

onde para uma coluna arbitrária s de [F] o correspondente vetor $\{F\}_s$ será dado por

$$\{F\}_s = r \begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (B.10)$$

onde se supõe que a r -ésima coordenada global tenha uma carga variável aplicada, conforme já estabelecido anteriormente.

Tendo os vetores $\{F\}_s$, ($s = 1, \dots, ncc$), e a matriz de rigidez [R], o objetivo agora é calcular os esforços nas extremidades das barras, segundo as coordenadas locais da figura B.1.a, para os valores extremos de cada carga variável aplicada à estrutura, visando-se assim obter a envoltória de momentos fletores.

Em primeiro lugar, serão calculados os esforços nas extremidades das barras referentes às cargas unitárias aplicadas, uma de cada vez, nas mesmas coordenadas globais onde estão agindo as cargas variáveis. Posteriormente, os esforços referentes a cada situação de carregamento unitário serão multiplicados pelos valores extremos da carga variável correspondente e, dessa forma, os esforços máximos e mínimos correspondentes a cada carga variável serão armazenados em vetores, obtendo-se, no final, a envoltória elástica dos momentos fletores.

O primeiro passo para se chegar aos esforços nas extremidades das barras devidos às cargas unitárias é obter os deslocamentos correspondentes nas coordenadas globais através da resolução dos sistemas:

$$\{F\}_s = [R] \{u\}_s \quad ; \quad s = 1, \dots, ncc \quad (B.11)$$

Os deslocamentos $\{u\}_s$ de (B.11) podem ser obtidos todos de uma só vez através da resolução de sistemas de equações pelo método de Gauss com matriz dos coeficientes simétrica. Utilizando-se a matriz $[F]$, dada por (B.9), em (B.11), após aplicar-se o processo chega-se a uma matriz $[U]$ cujas colunas são formadas por vetores que contém os deslocamentos das coordenadas globais correspondentes a cada situação de carga unitária aplicada, ou seja:

$$[U] = [\{u\}_1, \dots, \{u\}_s, \dots, \{u\}_{ncc}] \quad (B.12)$$

Antes de resolver os sistemas de equações dados em (B.11), serão impostas a estes sistemas as condições de contorno que se resumem na simulação de vínculos rígidos segundo as direções das coordenadas globais associadas aos apoios.

Para impor que o deslocamento u_t segundo a t -ésima coordenada global seja nulo, serão anuladas a linha t e a coluna t de $[R]$ com exceção do elemento R_{tt} que será feito igual a 1. Este procedimento será executado para cada vínculo que for adicionado à estrutura.

Obtidos os deslocamentos globais, armazenados em $[U]$ conforme expressão (B.12), considere-se o vetor $\{u\}_s$, cujas componentes correspondem aos deslocamentos nas coordenadas globais devidos a uma carga unitária aplicada numa certa coordenada global de índice r . O vetor $\{\delta_g\}_i$ da figura B.1.b que contém os deslocamentos nas extremidades da barra genérica i devidos à carga unitária aplicada na coordenada global r , é obtido através da equação matricial

$$\{\delta_g\}_i = [\beta_g]_i \{u\}_s \quad (B.13)$$

Com a matriz de incidência cinemática $[\beta_g]_i$ definida conforme (4.46) e com $\{u\}_s$ conhecido, efetuando-se o produto matricial de (B.13), tem-se:

$$\{\delta_g\}_i = \begin{Bmatrix} u_{J1} \\ u_{J2} \\ u_{J3} \\ u_{K1} \\ u_{K2} \\ u_{K3} \end{Bmatrix} \quad (B.14)$$

onde os índices J1, J2, J3, K1, K2 e K3 são os dados na tabela 4.1.

Para obter os deslocamentos nas extremidades da barra i segundo as direções do sistema de coordenadas locais da figura B.1.a, vetor $\{\delta_e\}_i$, utiliza-se a equação

$$\{\delta_e\}_i = [\beta_e]_i \{\delta_g\}_i \quad (B.15)$$

Com (B.5) e (B.14), efetuando-se o produto matricial de (B.15), obtém-se:

$$\{\delta_e\}_i = \begin{Bmatrix} 1 & u_{J1} \cos \alpha_i + u_{J2} \sin \alpha_i \\ 2 & -u_{J1} \sin \alpha_i + u_{J2} \cos \alpha_i \\ 3 & u_{J3} \\ 4 & u_{K1} \cos \alpha_i + u_{K2} \sin \alpha_i \\ 5 & -u_{K1} \sin \alpha_i + u_{K2} \cos \alpha_i \\ 6 & u_{K3} \end{Bmatrix} \quad (B.16)$$

Finalmente, os esforços nas extremidades da barra i segundo o sistema de coordenadas locais da figura B.1.a, devidos a carga unitária aplicada na r -ésima coordenada global, serão obtidos através da equação:

$$\{P_e\}_i = [r_e]_i \{\delta_e\}_i \quad (B.17)$$

Com (B.2) e (B.16), efetuando-se o produto matricial de (B.17), tem-se:

$$\{P_e\}_i = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_4 \delta_{e_1} - A_4 \delta_{e_4} \\ A_3 \delta_{e_2} + A_2 \delta_{e_3} - A_3 \delta_{e_5} + A_2 \delta_{e_6} \\ A_2 \delta_{e_2} + A_1 \delta_{e_3} - A_2 \delta_{e_5} + A_5 \delta_{e_6} \\ -A_4 \delta_{e_1} + A_4 \delta_{e_4} \\ -A_3 \delta_{e_2} - A_2 \delta_{e_3} + A_3 \delta_{e_5} - A_2 \delta_{e_6} \\ A_2 \delta_{e_2} + A_5 \delta_{e_3} - A_2 \delta_{e_5} + A_1 \delta_{e_6} \end{Bmatrix} \quad (B.18)$$

Como se pretende obter somente a envoltória de momentos fletores, há interesse apenas na terceira e na sexta componente do vetor dado por (B.18), ou seja:

$$\left\{P_e\right\}_3 = A_2 \delta_{e_2} + A_1 \delta_{e_3} - A_2 \delta_{e_5} + A_5 \delta_{e_6} \quad (B.19)$$

$$\left\{P_e\right\}_6 = A_2 \delta_{e_2} + A_5 \delta_{e_3} - A_2 \delta_{e_5} + A_1 \delta_{e_6}$$

Procedendo-se de forma análoga para as demais barras, determinam-se todos os momentos fletores nas extremidades das barras devidos a uma carga unitária aplicada na coordenada global de índice \underline{r} . Estes momentos serão armazenados convenientemente em um vetor $\{M^{unt}\}$, denominado vetor dos momentos fletores nas extremidades das barras devido às cargas unitárias aplicadas nas coordenadas globais, cujo o número de elementos é igual a duas vezes o número de barras \underline{b} , sendo dado por

$$\{M^{unit}\} = \left\{ \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} P_{e_3} \\ P_{e_6} \end{array} \right)_i \\ \left(\begin{array}{c} P_{e_3} \\ P_{e_6} \end{array} \right)_j \\ \left(\begin{array}{c} P_{e_3} \\ P_{e_6} \end{array} \right)_k \end{array} \right\} \quad (B.20)$$

Com o vetor $\{M^{unit}\}$ conhecido para cada carga unitária e com os vetores $\{F^{max}\}$ e $\{F^{min}\}$ dados inicialmente, torna-se extremamente simples obter a envoltória elástica dos momentos fletores. Para isto, serão definidos dois vetores $\{M^{max}\}$ e $\{M^{min}\}$ que guardarão os valores máximos e mínimos dos momentos fletores nas extremidades das barras, respectivamente.

Dos vetores $\{F^{max}\}$ e $\{F^{min}\}$, obtêm-se os valores extremos para a carga aplicada na coordenada global de índice s e que, por convenção, são, respectivamente, F_s^{max} e F_s^{min} , conforme (B.1). Cada elemento do vetor $\{M^{unit}\}$ será multiplicado por estes valores extremos, obtendo-se dois valores limites correspondentes. Em seguida, faz-se uma verificação desses valores limites determinando o maior, que será armazenado na posição correspondente de $\{M^{max}\}$, enquanto que o menor será armazenado em $\{M^{min}\}$.

Por exemplo, o elemento $\left(P_{e_6} \right)_i$ da expressão (B.20), que ocupa a posição $(2i)$ no vetor $\{M^{unit}\}$, será multiplicado por:

$$Aux_1 = \left(P_{e_6} \right)_i F_s^{max} \quad Aux_2 = \left(P_{e_6} \right)_i F_s^{min} \quad (B.21)$$

onde Aux_1 e Aux_2 são variáveis auxiliares.

Se $Aux_1 > Aux_2$, então Aux_1 será somado à posição (24) do vetor $\{M_1^{max}\}$ e Aux_2 somado à posição (24) do vetor $\{M_1^{min}\}$. Caso contrário, Aux_1 vai para $\{M_1^{min}\}$ e Aux_2 para $\{M_1^{max}\}$.

Procedendo-se desta forma para todos os elementos de (B.20), obtém-se a contribuição da carga variável aplicada na coordenada global de índice r para os valores máximos e mínimos dos momentos fletores nas extremidades das barras. Estendendo-se os procedimentos acima a todas as coordenadas globais carregadas, determina-se a envoltória elástica dos momentos fletores