

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO PARA SÓLIDOS ELÁSTICOS TRIDIMEN-
SIONAIS, BASEADA NA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE
MINDLIN

ENG^o JOÃO CARLOS CORDEIRO BARBIRATO

ORIENTADOR: PROF. DR. WILSON SÉRGIO VENTURINI

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO PARA SÓLIDOS ELÁSTICOS TRIDIMEN-
SIONAIS. BASEADA NA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE
MINDLIN

ENG^o JOÃO CARLOS CORDEIRO BARBIRATO

ORIENTADOR: PROF. DR. WILSON SÉRGIO VENTURINI

Dissertação apresentada à Escola
de Engenharia de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, como
parte dos requisitos para a
obtenção do título de Mestre em
Engenharia de Estruturas.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Wilson Sérgio Venturini - Orientador (EESC/USP)

Walter Savassi (EES/USP)

Euclides Mesquita Neto (UNICAMP)

SÃO CARLOS

1991

Aos meus pais
Dulci e João;
à minha irmã Regina
e ao meu cunhado
Geraldo.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini, pela amizade, orientação e incentivo constantes na elaboração deste trabalho.

À Gianna, pelo carinho, incentivo e valiosa ajuda no decorrer deste trabalho, sobretudo nos momentos mais difíceis.

Aos amigos do Departamento de Engenharia Estrutural da UFAL, pelo incentivo e apoio - em particular ao Prof. Severino P. C. Marques responsável primeiro pelo meu despertar para a área de estruturas.

Aos amigos da pós-graduação da EESC-USP - em especial a Aline, Flávio e Marcio -, sem a ajuda dos quais teria sido impossível o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC-USP, que contribuíram direta ou indiretamente na execução deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho apresenta a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para a análise de sólidos isotrópicos elástico-lineares tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin. Inicialmente, são descritas as equações da elasticidade para corpos tridimensionais, as equações integrais de contorno e as soluções fundamentais de Mindlin, Kelvin e Boussinesq-Cerruti. Em seguida, são apresentadas aproximações numéricas das equações integrais, utilizando elementos triangulares planos com funções de interpolação constante e linear. Nesse contexto, é apresentada uma formulação para o elemento linear descontínuo. Por fim, e a partir das considerações anteriores, é desenvolvido um sistema computacional para análise de corpos tridimensionais, onde são mostradas suas rotinas principais e alguns exemplos de aplicação para problemas de sólidos inseridos no espaço semi-infinito.

ABSTRACT

This work presents a direct formulation of the Boundary Element Method (BEM) for analysis of three-dimensional isotropic linear elastic solids, based on the Mindlin's fundamental solution. First, equations of elastic bodies in three dimensions, the boundary integral equations and the Mindlin, Kelvin and Boussinesq-Cerruti fundamentals solutions are described. Later, numerical approximations of integrals equations, using flat triangles elements with constant and linear interpolation functions are presented. In this context, a formulation for discontinuous linear elements is presented. Finally, based on the previous considerations, a computational system for analysis of three-dimensional bodies and some examples for bodies into the semi-infinite space problems are shown.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Considerações gerais	1
1.2 - Revisão bibliográfica	2
1.3 - Objetivos	8
1.4 - Conteúdo do trabalho	9
CAPÍTULO 2 - EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO	11
2.1 - Introdução	11
2.2 - Notações	12
2.3 - Relações da teoria da elasticidade	15
2.4 - Soluções fundamentais	19
2.4.1 - Generalidades	19
2.4.2 - Solução fundamental de Kelvin	23
2.4.3 - Solução fundamental de Boussinesq/ /Cerruti	24
2.4.4 - Solução fundamental de Mindlin	26
2.5 - Equações integrais para pontos no domínio .	33
2.6 - Equações integrais para pontos no contorno .	38
CAPÍTULO 3 - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	46
3.1 - Introdução	46
3.2 - Discretização da equação integral de contorno	46
3.3 - Elementos de contorno	52
3.3.1 - Funções de forma	54
3.3.2 - Funções de interpolação	58
3.3.2.1 - Elemento constante	58
3.3.2.2 - Elemento linear	59

linear contínuo	61
linear descontínuo	63
3.4 - Integrações numéricas	66
3.5 - Determinação dos deslocamentos e tensões em pontos do domínio	72
3.6 - Determinação das tensões em pontos do contorno	75
3.7 - Sub-regiões	77
CAPÍTULO 4 - SISTEMA COMPUTACIONAL	83
4.1 - Introdução	83
4.2 - Descrição global do sistema	84
4.3 - O módulo principal de cálculo	85
4.3.1 - Módulo de cálculo para pontos no contorno	86
4.3.1.1 - Procedimento: aloca memória	89
4.3.1.2 - Procedimento: leitura de dados ..	89
4.3.1.3 - Procedimento: valores auxiliares .	90
4.3.1.4 - Procedimento: montagem das matrizes G e H	91
4.3.1.5 - Procedimento: Resolução do sistema de equações	95
4.3.1.6 - Procedimento: vetores dos deslo- camentos e forças de superfície ..	96
4.3.1.7 - Procedimento: saída de resulta- dos para arquivos	97
4.3.1.8 - Procedimento: libera memória	97
4.3.2 - Módulo de cálculo para pontos no domínio	97
4.3.2.1 - Procedimento: aloca memória	99
4.3.2.2 - Procedimento: leitura de dados ..	99
4.3.2.3 - Procedimento: tensões e des- locamentos	100
4.3.2.4 - Procedimento: saída de resul- tados	102
4.3.2.5 - Procedimento: libera memória	102

4.4 - Módulo de pré-processamento de dados	103
4.4.1 - Módulo dados para o contorno	104
4.4.1.1 - Procedimento: dados da geometria .	104
4.4.1.2 - Procedimento: dados das condições de contorno	105
4.5 - Módulo listagens de resultados	106
CAPÍTULO 5 - APLICAÇÕES	107
5.1 - Introdução	107
5.2 - Aplicação 1: área circular do semi-infi- nito uniformemente carregada	107
5.3 - Aplicação 2: área retangular do semi-infi- nito uniformemente carregada	112
5.4 - Aplicação 3: cavidade cilíndrica no in- terior do semi-infinito	116
5.5 - Aplicação 4: cavidade na superfície do semi-infinito	119
5.6 - Aplicação 5: frente de escavação de um túnel circular	124
CAPITULO 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS	131
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	134
APÊNDICE A: SIMETRIA DO TENSOR DAS TENSÕES PARA A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE MINDLIN	145
APÊNDICE B: DERIVADAS DO TENSOR DAS TENSÕES PARA A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE MINDLIN	149

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

A grande maioria dos problemas de engenharia é governada por equações diferenciais. Apenas alguns poucos casos simples possuem solução analítica (exata). Nos demais a solução só é possível através do uso de métodos numéricos, que utilizam modelos discretos, com finitos graus de liberdade, em substituição aos modelos contínuos dos métodos analíticos.

Na análise de problemas através de métodos numéricos, geralmente surgem grandes sistemas de equações (há manipulação de grande número de dados). É indispensável a utilização de máquinas capazes de manipular com velocidade e precisão todos os dados envolvidos na análise. Por isso, a utilização em grande escala dos métodos numéricos se deve ao avanço da eletrônica que proporcionou o surgimento do computador.

Vários métodos numéricos têm sido desenvolvidos visando a solução dos problemas de engenharia. Pode-se citar o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno, como os principais.

O surgimento do Método das Diferenças Finitas - MDF - é devido a SOUTHWELL [1], segundo a literatura especializada. O MDF consiste em aproximar a solução da equação diferencial, que rege o problema físico, utilizando valores do domínio (criando nós no domínio). Por isso, é considerado um método de domínio. Apesar da dificuldade existente neste método com relação à discretização de contornos irregulares, é, até hoje, adequado para a solução de diversos problemas de engenharia.

O Método dos Elementos Finitos - MEF - tem sua divulgação a partir dos trabalhos de TURNER et alii [2], ARGYRIS [3] e CLOUGH [4]. Nesta mesma época surgiam os computadores eletrônicos que se tornaram co-partícipes do desenvolvimento do MEF (ferramenta indispensável para o uso do método). O MEF encontra-se em um estágio de desenvolvimento muito avançado, constituindo-se no método numérico mais utilizado para a solução dos mais diversos problemas de engenharia. O MEF consiste em dividir o domínio em um número finito de elementos (considerados sub-regiões), reunindo-os através de seus nós. É considerado como um método de domínio.

O Método dos Elementos de Contorno - MEC - é o método numérico mais recente do ponto de vista de aplicações computacionais. Tem esta denominação a partir do trabalho de BREBBIA [5]. O MEC consiste em obter a solução das equações diferenciais que descrevem o comportamento de um corpo no seu domínio, através da solução de uma equação integral sobre o contorno. Isso conduz sempre a uma redução das dimensões dos problemas analisados, e consequentemente, menor quantidade de dados de entrada e menor sistema de equações final. Outro particular do MEC é ter a matriz do sistema cheia e não simétrica.

Uma diferença marcante entre os métodos MDF, MEF e MEC é que os dois primeiros são métodos ditos de domínio, enquanto o terceiro é dito de contorno.

O presente trabalho adota o Método dos Elementos de Contorno como objeto de estudo.

1.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Embora só recentemente tenha surgido interesse maior pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC), e, consequentemente, revistos seus conceitos e formulação, Abel (segundo ELLIOT [6]) em 1823 obteve uma

equação integral para resolver o problema chamado Pêndulo Isócrono (a técnica de transformação da equação diferencial que rege o problema em uma equação integral constitui a base matemática do MEC). A partir daí, sucederam-se outros estudos com o método integral. Dentre eles, destacam-se BETTI [7], SOMIGLIANA [8] e Cerruti Apud COSTA JR. [9].

A aplicação do método integral a problemas da teoria do potencial foi decisiva para o seu desenvolvimento. Neste campo destacam-se VOLTERRA [10], FREDHOLM [11] e HILBERT [12]. É de Fredholm a primeira teoria (teoria clássica) das equações integrais que apresentavam integrais com núcleos definidos e integráveis, assim como o primeiro estudo da aplicação das equações integrais lineares à solução de problemas de valor de contorno em elastostática.

Uma série de trabalhos publicados por autores russos fez com que o método das equações integrais se tornasse mais conhecido na Europa. Dentre esses trabalhos, destacam-se MUSKHELISHVILI [13], MIKHLIN [14], SMIRNOV [15] e KUPRADZE [16], que tiveram como predecessor KELLOG [17], o primeiro a aplicar as equações integrais à solução de problemas governados pela Equação de Laplace.

Até então, as equações integrais eram usadas principalmente em mecânica dos fluidos, e conhecidas como métodos indiretos de análise - isto é, a solução do problema era obtida em termos de fontes fictícias aplicadas ao contorno onde, após a determinação de seus valores, calculavam-se as variáveis físicas do problema. É atribuída a Kupradze a primeira formulação dos ditos métodos de contorno (por utilizarem as equações integrais) aplicados aos problemas de elastostática, com a utilização dos métodos indiretos.

Vários outros trabalhos seguiram a formulação indireta. Dentre eles destacam-se JASWON [18], SYMM [19], MASSONET [20] e HESS [21]. Jaswon e Symm introduziram um equacionamento do problema elástico

bidimensional, usando as variáveis físicas do problema, e ainda mantendo uma função de tensão auxiliar, sendo por isso chamado por alguns autores - como BANERJEE [22] - de método semi-direto.

Os diversos trabalhos até aqui apresentados contribuíram sensivelmente para o desenvolvimento do método baseado nas equações integrais. Entretanto, não davam ainda características ao método de modo que este pudesse ser classificado como um método numérico para resolução de problemas da engenharia.

RIZZO [23] constitui o primeiro registro onde o tratamento das equações integrais toma uma forma de técnica numérica, similar à dos outros métodos (Métodos das Diferenças Finitas e Método dos Elementos Finitos, por exemplo). Esse trabalho foi o primeiro a propor a formulação direta para o tratamento das equações integrais (onde as incógnitas das equações são as próprias variáveis físicas do problema), com aplicação em elasticidade em duas dimensões. A discretização do contorno foi feita por segmentos de reta, sendo os deslocamentos e forças de superfície constantes em cada segmento e a integração feita analiticamente.

JASWON et alii [24] propõe a solução da equação diferencial bi-harmônica por meio de equações integrais, na análise de placas. Com este trabalho, inicia-se o desenvolvimento do método das equações integrais, com uso prático na engenharia estrutural, com relação à placas.

Vários outros trabalhos se seguiram ao de Rizzo, utilizando a formulação direta do método, agora denominado "Método das Equações Integrais de Contorno - BIEM". Alguns deles são descritos a seguir.

Em CRUSE & RIZZO [25] e CRUSE [26] é apresentada uma formulação do método das equações integrais de contorno, para análise de problemas elastodinâmicos

usando transformadas de Laplace com relação ao tempo.

RIZZO & SHIPPY [27] utiliza o método das equações integrais de contorno, considerando a elasticidade linear e sugerindo o uso de sub-regiões para o tratamento dos domínios não homogêneos.

Em CRUSE [28] o método é apresentado como uma ferramenta promissora para a solução numérica de problemas elásticos em três dimensões. Na discretização da geometria do sólido em estudo, são utilizados elementos triangulares constantes, ou seja, os deslocamentos e forças de superfície são considerados constantes em cada elemento.

CRUSE & VANBUREN [29] utiliza o BIEM com formulação direta aplicando-o pela primeira vez a um sólido tridimensional não linear considerando-se a influência de uma fratura.

Em SWEDLOW & CRUSE [30], é apresentada uma formulação (embora sem apresentar resultados numéricos) para simular materiais elastoplásticos, anisotrópicos e compressíveis, considerando ainda o encruamento na relação tensão-deformação.

Partindo de Swedlow & Cruse, e utilizando outros critérios que permitiram a modelação dos efeitos plásticos, RICARDELLA [31] aplica o método das equações integrais de contorno na análise tridimensional de tensões, apresentando, ainda, alguns exemplos. Este trabalho é considerado um marco dentro do método por ser o primeiro a resolver problemas no campo da elastoplasticidade utilizando a formulação direta e por servir de base para trabalhos que o sucederam.

Com a mesma formulação de seus trabalhos anteriores CRUSE [32], mostra que o método pode proporcionar melhores resultados que o Método dos Elementos Finitos em situações de alta concentração de tensões. CRUSE [33] propõe ao método a adoção de elementos triangulares com variação linear para as variáveis do problema

(deslocamentos e forças de superfície), para aplicações em sólidos tridimensionais. Nesse trabalho, os coeficientes dos termos livres são calculados utilizando-se o movimento de corpo rígido.

LACHAT [34], tomando como base os trabalhos de Cruse, consegue uma maior generalização do método e o aplica a problemas elásticos bi- e tridimensionais. Esse trabalho apresenta um eficiente tratamento numérico utilizando elementos curvos de segunda ordem com opções de variação linear, quadrática e cúbica para as aproximações das variáveis do problema. As integrais são calculadas numericamente por um sofisticado esquema de integração através das fórmulas da quadratura gaussiana. Para os problemas tridimensionais o algoritmo propõe a divisão em sub-regiões para permitir à matriz do sistema características de banda, diminuindo o trabalho computacional.

A partir de BREBBIA [5] o método das equações integrais de contorno ganha novas bases matemáticas e a denominação "Método dos Elementos de Contorno - MEC". O trabalho utiliza a técnica dos resíduos ponderados, obtendo uma maior generalização da formulação e, conseqüentemente, permitindo sua associação com outros métodos numéricos.

Várias conferências ([35], [36], [37] e [38]) e trabalhos publicados tornam o MEC mais conhecido e estudado em diversos centros importantes de pesquisa. Ao mesmo tempo são fixadas novas áreas de atuação, como: não-linearidade física; plasticidade; viscoelasticidade; no-tension; visco-plasticidade; não-linearidade geométrica; mecânica da fratura; contacto; mecânica das rochas e dos solos; propagação de tensão; interação solo-estrutura; combinações com outros métodos para análise de problemas diversos, dentre outros.

A utilização do MEC na não-linearidade física e geométrica, pode ser vista em BUI [39]; TELLES &

BREBBIA [40], [41] e [42]; MUKHERJEE [43], [44], [45] e [46]; BANERJEE [47], [48] e [49]; ROCHA [50]; dentre outros. Na análise de tensões no meio contínuo, regimes plástico e viscoplásticos, são exemplos os trabalhos de BRADY [51] e [52], e VENTURINI [53] e [54].

No campo de aplicação do MEC a cascas e placas, tem-se, entre outros, TOTTENHAM [55]; BÉZINE [56], [57] e [58]; WU & ALTIERO [59]; COSTA JR & BREBBIA [60]; SILVA [61]. Na aplicação em mecânica dos fluidos, ressalte-se BÉZINE & BONNEAU [62], YANO & KIEDA [63] e WU ([64], [65], [66], [67] e [68]).

No tocante à aplicação do método dos elementos de contorno a sólidos elásticos tridimensionais, que é especificamente o campo de atuação do presente trabalho, alguns trabalhos foram desenvolvidos e serão citados a seguir.

Os trabalhos de CRUSE [28] e [33], e LCHAT [34], já citados anteriormente, representam importantes avanços da utilização do método dos elementos de contorno no tocante à aplicação a sólidos tridimensionais, embora tenham surgido anteriormente à denominação presente do método.

NAKAGUMA [69] apresenta uma formulação direta do método dos elementos de contorno, para a aplicação em sólidos elásticos tridimensionais, baseada nas soluções fundamentais de Kelvin, Mindlin e Boussinesq-Cerruti. Nesse trabalho, são analisados sólidos elástico-lineares tridimensionais, com ênfase na utilização particular para interação solo-estrutura. A solução de Kelvin é empregada em regiões finitas (a estrutura) e as Mindlin e Boussinesq-Cerruti, em regiões semi-infinitas (o solo). A discretização do contorno é feita utilizando-se elementos triangulares planos e curvos, com aproximações constante, linear ou quadrática. As integrações são feitas numericamente utilizando o método de Hammer.

CUROTTO [70] apresenta uma formulação do método dos elementos de contorno partindo do teorema da reciprocidade de Betti. A solução fundamental de Kelvin é utilizada, considerando na formulação do método efeitos de forças de volume e temperatura. São utilizados elementos isoparamétricos triangulares planos de variação linear, e as integrais sobre os elementos são calculadas de uma forma mista (analítica e numericamente).

Enfatize-se ainda SÁ & TELLES [71], onde é utilizado um algoritmo similar ao de Nakaguma, embora as expressões de Mindlin sejam aí apresentadas de forma compacta.

A utilização das soluções fundamentais de Mindlin e Boussinesq-Cerruti por Nakaguma na aplicação de interação solo-estrutura ou escavações traz grande versatilidade ao método, ao dispensar a discretização da superfície do solo (uma vez que a hipótese da tração nula neste contorno já está presente nestas soluções).

A solução fundamental de Kelvin é largamente utilizada por RIZZO [27], LACHAT [34], CRUSE [28] e BREBBIA [5], dentre outros. A solução de Mindlin, por outro lado, é utilizada em BANERJEE [72]; BUTTERFIELD & BANERJEE [73]. A solução de Boussinesq-Cerruti, versão tridimensional da solução de Flamant, é vista em LOVE [74].

1.3 - OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo principal apresentar uma formulação, dita direta, do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para a análise de sólidos elástico-lineares tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin.

O MEC abrange com facilidade domínios infinitos e semi-infinitos; portanto, apresenta-se conveniente no estudo de problemas de interação

solo-estrutura. Desta forma, podem ser analisados túneis, barragens, fundações, galerias, escavações, dentre outros. Neste contexto, a solução fundamental de Mindlin se insere perfeitamente.

A solução de Mindlin dispensa a discretização da superfície do semi-infinito (superfície do terreno), uma vez que possui em suas expressões a hipótese de tração nula nesta superfície, bastando discretizar apenas parte da superfície que se encontra carregada. Com esta vantagem, constitui-se na solução indicada para problemas de interação solo estrutura próximos da superfície do semi-infinito.

Na prática costuma-se buscar, sempre que possível, simplificações para problemas tridimensionais analisando-os como bidimensionais. Tal artifício leva, algumas vezes, a aproximações pouco precisas. Isto justifica a presente aplicação do MEC a corpos tridimensionais.

1.4 - CONTEÚDO DO TRABALHO

No capítulo 2 são apresentadas as equações da elasticidade para corpos tridimensionais, as equações integrais de contorno (obtidas através da Técnica dos Resíduos Ponderados, para pontos no contorno e no domínio) e as soluções fundamentais - Mindlin, Kelvin e Boussinesq-Cerruti.

O capítulo 3 é dedicado às aproximações numéricas das equações integrais, utilizando elementos triangulares planos com funções de interpolação constante e linear. É apresentada uma formulação para o elemento linear descontínuo (que possui pontos nodais no interior do elemento), de grande utilidade nos pontos do contorno com descontinuidade de forças de superfície.

No capítulo 4 são apresentadas as rotinas

principais do sistema computacional desenvolvido para análise de corpos tridimensionais utilizando o método dos elementos de contorno (usando as soluções fundamentais de Mindlin e Kelvin).

No capítulo 5 são apresentados os resultados de alguns exemplos processados pelo programa computacional desenvolvido a partir da formulação apresentada do Método dos Elementos de Contorno, e ligados a problemas de interação solo-estrutura.

As conclusões gerais sobre a utilização do método dos elementos de contorno aplicado a sólidos elásticos tridimensionais são apresentadas no capítulo 6.

CAPÍTULO 2 - EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas as relações básicas da elasticidade linear para sólidos tridimensionais, bem como as equações integrais básicas para a utilização do método dos elementos de contorno.

Inicialmente, será definida a forma de apresentação de tais equações, que se fará através da notação indicial. Outros parâmetros importantes e que serão utilizados neste capítulo em particular, e em parte de outros, também serão apresentados.

A definição dos problemas fundamentais (problemas particulares para os quais as soluções são conhecidas) e suas respectivas soluções, constituem uma peça importante para o entendimento deste trabalho e de seu escopo. Um item será dedicado a esta finalidade, enfocando os problemas fundamentais que serão utilizados neste trabalho.

Definidos os problemas fundamentais e suas soluções, serão apresentadas as equações integrais básicas, tanto para pontos internos e externos ao domínio, quanto para os pertencentes ao contorno. O objetivo é encontrar uma expressão que relaciona deslocamentos e forças de superfície dos pontos do contorno, que é a equação "mestra" para a utilização do método numérico em questão. Esta equação será aproximada numericamente, resultando em um sistema de equações algébricas, o que será abordado no capítulo 3.

2.2 - NOTAÇÕES

No sentido de simplificar as expressões que serão apresentadas neste trabalho, sobretudo neste capítulo, algumas considerações devem ser feitas a priori.

A notação indicial será utilizada. O sistema cartesiano de referência, geralmente representado pelas coordenadas x , y , e z , o será agora por x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente (ou simplesmente por x_i). O mesmo procedimento será adotado para outros parâmetros, tais como: deslocamentos, u_i ; forças de superfície, p_i ; tensões, σ_{ij} ; etc.

O símbolo convencional de derivada parcial, ∂ , será substituído por "vírgula", como por exemplo em

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial X_k} &= \phi_{,k} \\ \frac{\partial u_i}{\partial X_k} &= u_{i,k} \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_k} &= \sigma_{ij,k}\end{aligned}\quad \dots(2.2.1)$$

A convenção implícita de somatório também será aqui utilizada. A repetição de um índice em um termo denota o somatório com relação ao índice repetido. Por exemplo,

$$\begin{aligned}a_{ij}b_i &= a_{1j}b_1 + a_{2j}b_2 + a_{3j}b_3, \\ e \\ a_i b_i &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,\end{aligned}\quad \dots(2.2.2)$$

para $i = 1, 2, 3$.

O Delta de Kronecker, representado por δ_{ij} , assume os seguintes valores:

$$\begin{aligned} - \delta_{ij} &= 0 \text{ se } i \neq j; \text{ e} \\ - \delta_{ij} &= 1 \text{ se } i = j. \end{aligned} \quad \dots(2.2.3)$$

A seguir, são apresentados outros conceitos importantes, e que serão referenciados no decorrer deste trabalho.

a) A distribuição Delta de Dirac, representada por $\delta(q,s)$, possui as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} - \delta(s,q) &= 0 \text{ se } q \neq s; \\ - \delta(s,q) &= \infty \text{ se } q = s; \text{ e} \\ - \int_{\Omega} \rho(q) \delta(s,q) d\Omega &= \rho(s), \end{aligned} \quad \dots(2.2.4)$$

onde $\rho(q)$ é uma função qualquer.

b) Condição de Hölder, [50]:

- Seja uma função $\phi(t)$ definida e contínua em uma determinada curva. A função $\phi(t)$ satisfaz a condição de Hölder se:

$$|\phi(t_2) - \phi(t_1)| \leq A |t_2 - t_1|^\mu \quad \dots(2.2.5)$$

onde t_1 e t_2 são dois pontos desta curva; A e μ são constantes positivas; e $0 \leq \mu \leq 1$.

c) Integrais Singulares, [50]:

- Seja $\phi(t)$ uma função definida no intervalo $a \leq t \leq b$, e "c" um ponto desse intervalo. Pode-se, então, escrever a integral desta função em duas partes, isto é,

$$\int_a^{c-\varepsilon} \phi(t) dt \quad e \quad \int_{c+\varepsilon}^b \phi(t) dt. \quad \dots(2.2.6)$$

Tendo em vista (2.2.6), a integral pode ser obtida quando o limite (2.2.7), mostrado a seguir, for determinável.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \phi(t) dt + \int_{c+\varepsilon}^b \phi(t) dt \right] = \int_a^b \phi(t) dt \dots(2.2.7)$$

Quando o limite (2.2.7) for possível, o resultado é o que se chama de "valor principal da integral". No caso em que $\phi(t)$ não possui singularidade, o valor principal coincide com o valor obtido pelo sentido "usual" de integração. Mas, no caso em que $\phi(t)$ possui singularidade, a integral da função é dita "integral singular" e só é possível se fazer a integração no sentido de valor principal, se ele existir.

Como integral singular, pode-se citar a integral de Cauchy,

$$\int_a^b \frac{\phi(t)}{t-z} dt, \quad \dots(2.2.8)$$

isto, se z pertencer ao intervalo de integração. Obedecido isto, esta integral só pode ser integrada no sentido de valor principal, e recebe o nome próprio de "valor principal de Cauchy".

d) Constantes elásticas básicas:

- E, módulo de elasticidade longitudinal, ou módulo de Young;

- G, módulo de elasticidade transversal, ou módulo de elasticidade ao cisalhamento;

- ν , coeficiente de Poisson.

Para um problema elástico qualquer, basta que se conheçam apenas duas destas constantes, sendo que a terceira fica determinada pela expressão

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \dots(2.2.9)$$

2.3 - RELAÇÕES DA TEORIA DA ELASTICIDADE

Neste item, será apresentada uma formulação básica da elasticidade-linear para corpos tridimensionais, [85], objeto de estudo deste trabalho.

Seja um corpo tridimensional, elástico-linear e homogêneo, definido pelo domínio Ω e contorno Γ , como mostra a figura 2.3.1.

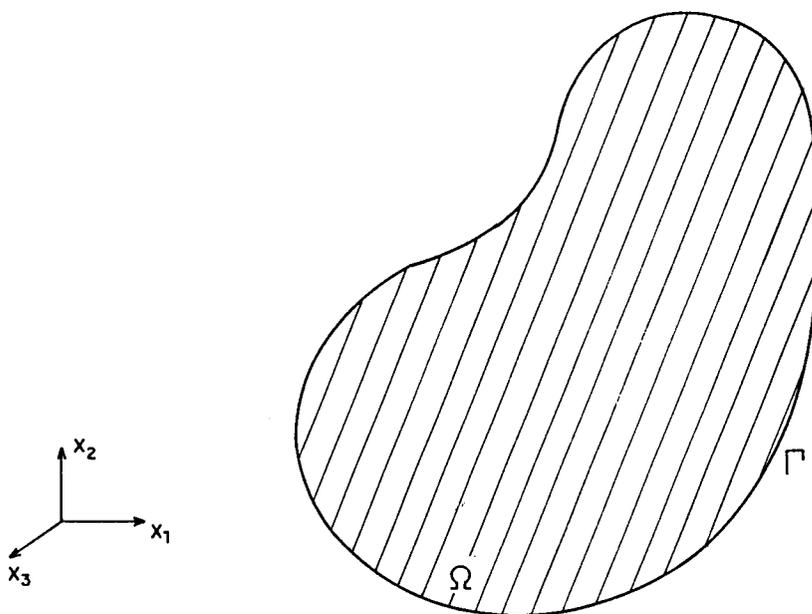


Fig. 2.3.1 - Caracterização do corpo tridimensional

Impondo-se as condições de equilíbrio estático a um elemento infinitesimal deste corpo, obtém-se uma expressão diferencial, a qual se mostra a seguir:

$$\sigma_{ij,j}(s) + b_i(s) = 0, \quad \dots(2.3.1)$$

onde $\sigma_{ij,j}$ é a derivada, tal como (2.2.1), do tensor das tensões, e

b_i o vetor das forças volumétricas.

É importante ressaltar a simetria existente no tensor das tensões, conhecida classicamente por condição de Cauchy, traduzida pela equação

$$\sigma_{ij}(s) = \sigma_{ji}(s). \quad \dots(2.3.2)$$

As componentes das forças de superfície, (figura 2.3.2), podem ser expressas em função das componentes de tensão de um ponto da superfície. Para tanto, considera-se o equilíbrio nas três direções de um tetraedro, onde n_j são os co-senos diretores dos ângulos entre a normal à face inclinada, n , e o eixo x_j . O resultado é a relação

$$P_i = \sigma_{ij} n_j. \quad \dots(2.3.3)$$

O tensor das deformações, a partir dos deslocamentos do domínio, considerando-se as hipóteses de continuidade destes e linearizando-o para pequenas deformações, é dado pela expressão

$$\varepsilon_{ij}(s) = \frac{1}{2} \left[u_{i,j}(s) + u_{j,i}(s) \right], \quad \dots(2.3.4)$$

conhecida como relação deformação/deslocamento.

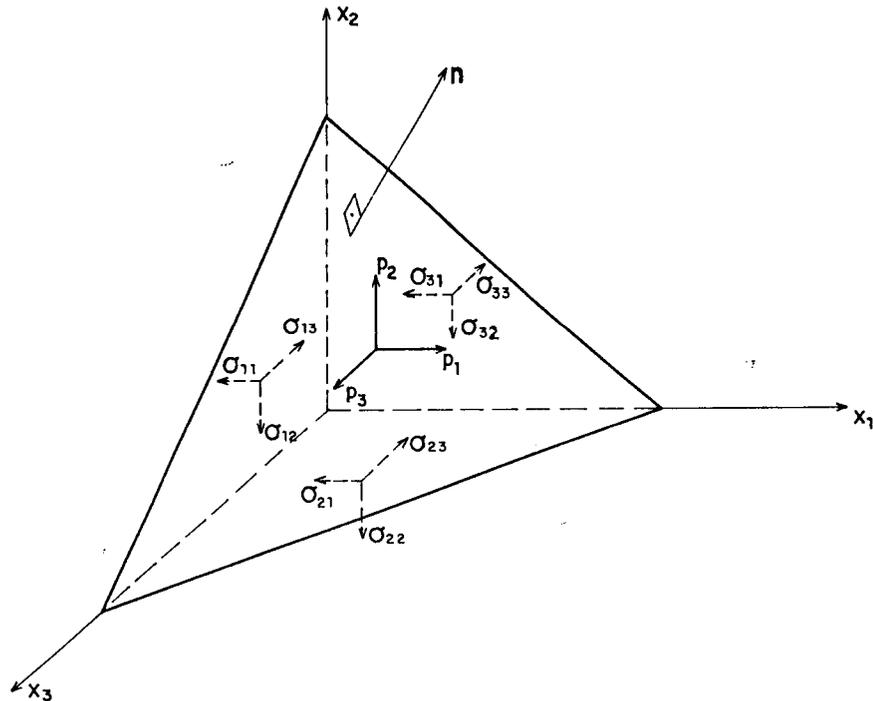


Fig. 2.3.2 - Tetraedro de Cauchy com forças de superfície

As relações entre os tensores das tensões e das deformações, para um corpo elástico-linear isotrópico, são dadas pela lei de Hooke, isto é,

$$\sigma_{ij}(s) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(s) + 2G\varepsilon_{ij}(s) \quad \dots(2.3.5)$$

ou, de forma inversa,

$$\varepsilon_{ij}(s) = \frac{1}{2G} \sigma_{ij}(s) - \frac{\nu}{2G(1+\nu)} \sigma_{kk}(s) \delta_{ij} \quad \dots(2.3.6)$$

Substituindo-se as equações (2.3.5) e (2.3.4) em (2.3.1), obtém-se a equação diferencial do problema elástico em termos de deslocamentos, conhecida como equação de Navier,

$$u_{i,jj}(s) + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ij}(s) + \frac{b_i(s)}{G} = 0. \quad \dots(2.3.7)$$

As equações diferenciais parciais de equilíbrio (2.3.1), deformação/deslocamento (2.3.4) e a Lei de Hooke (2.3.5) e (2.3.6), definem completamente um problema elástico-linear juntamente com as condições de contorno prescritas.

Considerando-se o contorno Γ como sendo a soma de duas partes, Γ_1 e Γ_2 ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$), conforme mostra a figura 2.3.3, definem-se as condições de contorno pelas relações

$$\begin{aligned} u_i(Q) &= \bar{u}_i(Q), & Q \in \Gamma_1, \text{ e} \\ p_i(S) &= \bar{p}_i(S), & S \in \Gamma_2, \end{aligned} \quad \dots(2.3.8)$$

onde \bar{u}_i e \bar{p}_i representam valores prescritos de deslocamentos e forças de superfície, respectivamente.

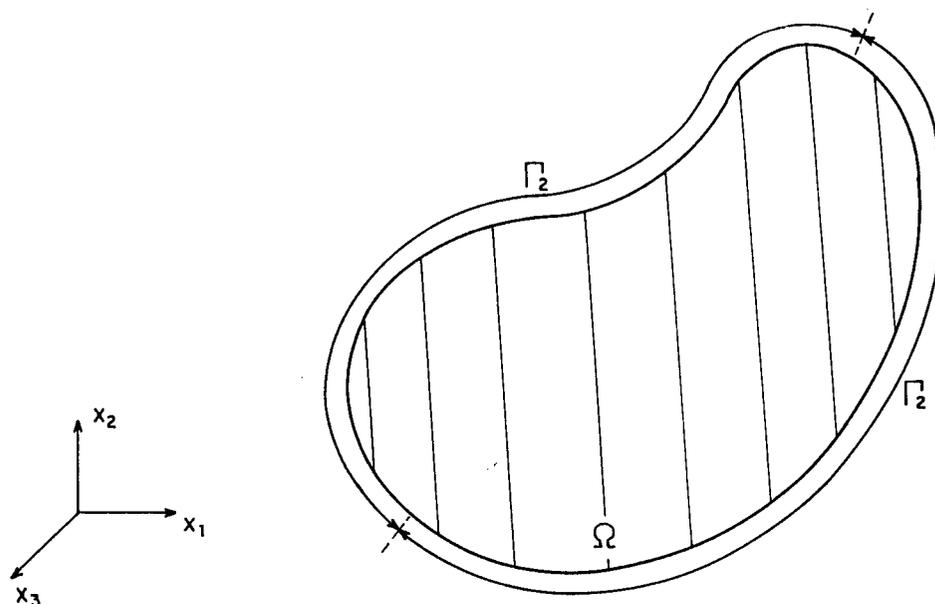


Fig 2.3.3 - Definição do contorno $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

2.4 - SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

2.4.1 - Generalidades

Na formulação das equações integrais de contorno para o problema elástico, faz-se necessário o emprego de uma "solução fundamental" da equação (2.3.1) ou (2.3.7). Para este trabalho, serão adotadas as soluções fundamentais para os problemas elásticos tridimensionais infinitos e semi-infinitos, denominados Kelvin, descrita em [74] e Mindlin, descrita em [75] (inclusive a particular Boussinesq/Cerruti, descrita em [69]) respectivamente.

Considera-se, então, como caso geral, um domínio infinito Ω^* de contorno Γ^* que contém o corpo Ω de contorno Γ que se pretende estudar, conforme figura 2.4.1. O '*' indica tratar-se de um problema particular, apresentado na literatura especializada, e também aqui como problema fundamental.

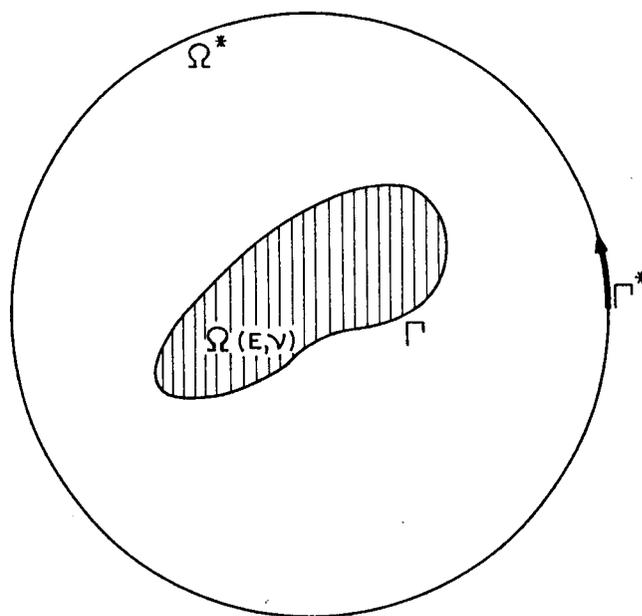


Fig. 2.4.1 - Corpo Ω em estudo, contido em Ω^* .

Seja "s" um ponto onde se aplica uma força

unitária, $F_i^*(s)$, usualmente denominado ponto de carga, e "q" um ponto genérico onde deseja-se calcular os efeitos da força unitária, ponto campo, como mostra a figura 2.4.2.

Define-se solução fundamental como sendo as respostas no ponto "q" devidas a aplicação da força unitária no ponto "s", em uma das direções dos eixos coordenados.

Através da substituição do termo independente, $b_i(s)$ de (2.3.1), pela função delta de Dirac (2.2.4) como multiplicadora da carga unitária em s, obtém-se a equação de equilíbrio para o problema fundamental.

$$\sigma_{ij,j}^* + \delta(s,q) F_i^*(s) = 0. \quad \dots(2.4.1)$$

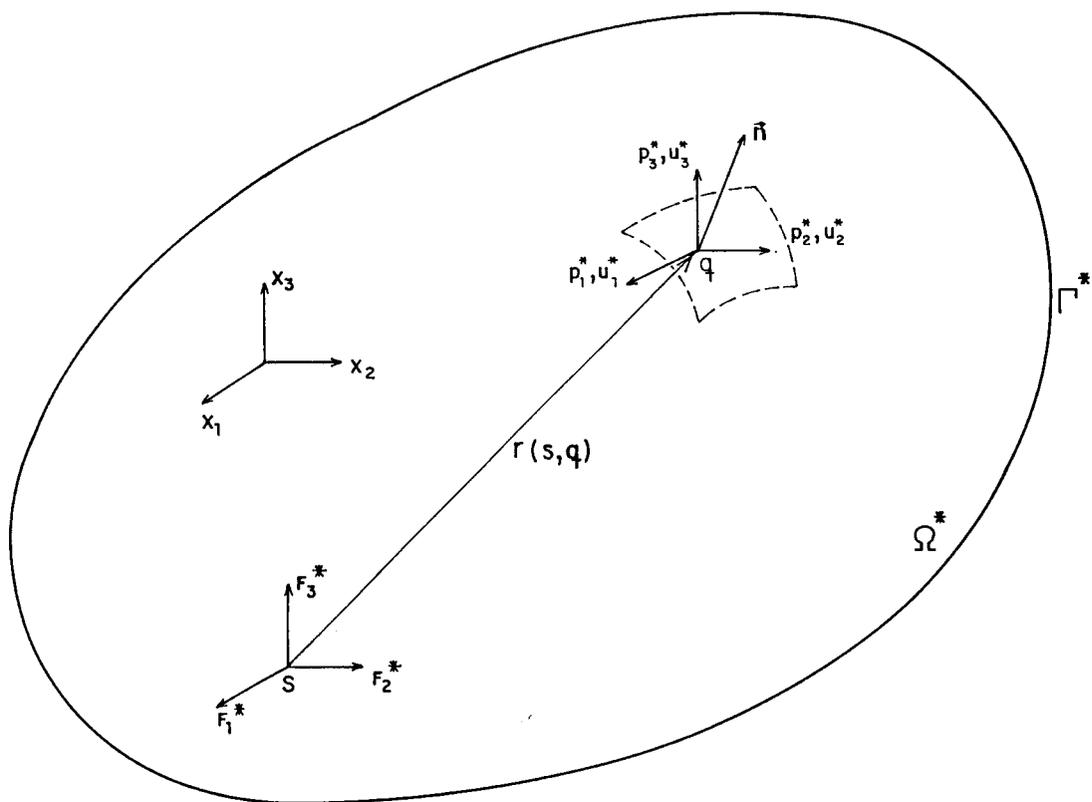


Fig. 2.4.2 - Resposta em q devida a uma força unitária em s
(s e $q \in \Omega^* + \Gamma^*$)

Utilizando-se a mesma substituição anterior, encontram-se as demais expressões que governam o problema elástico fundamental. Assim, a expressão (2.3.7), em termos de deslocamentos, vem a ser

$$U_{i,jj}^*(s) + \frac{1}{1-2\nu} U_{j,ij}^*(s) + \frac{\delta(s,q) F_i^*(s)}{G} = 0. \quad \dots(2.4.2)$$

Calculando-se os deslocamentos em (2.4.2) e manipulando-os nas expressões (2.3.5), (2.3.4) e (2.3.3), obtém-se a expressão fundamental para forças de superfície, que é

$$p_i^*(s) = G (U_{i,n}^*(s) + U_{j,i}^*(s) n_j + \frac{2\nu}{1-2\nu} U_{j,j}^*(s) n_i) \quad \dots(2.4.3)$$

onde n_i indica a direção da força p_i^* .

Em uma rápida análise para o caso tridimensional, objetivo do presente trabalho, tem-se três direções para a força unitária F_i^* em s , cada qual provocando respostas nas três direções dos eixos coordenados em q , u_{ij}^* e p_{ij}^* , onde o primeiro índice representa a direção da força unitária e o segundo a direção da resposta que pode ser deslocamento ou força de superfície, como mostra a figura 2.4.3.

Convém definir as resultantes dos deslocamentos e forças de superfície em uma direção j , o que resulta em

$$U_j^*(s,q) = u_{ij}^*(s,q) F_i^*(s), \text{ e} \quad \dots(2.4.4a)$$

$$P_j^*(s, q) = p_{ij}^*(s, q) F_i^*(s). \quad \dots(2.4.4b)$$

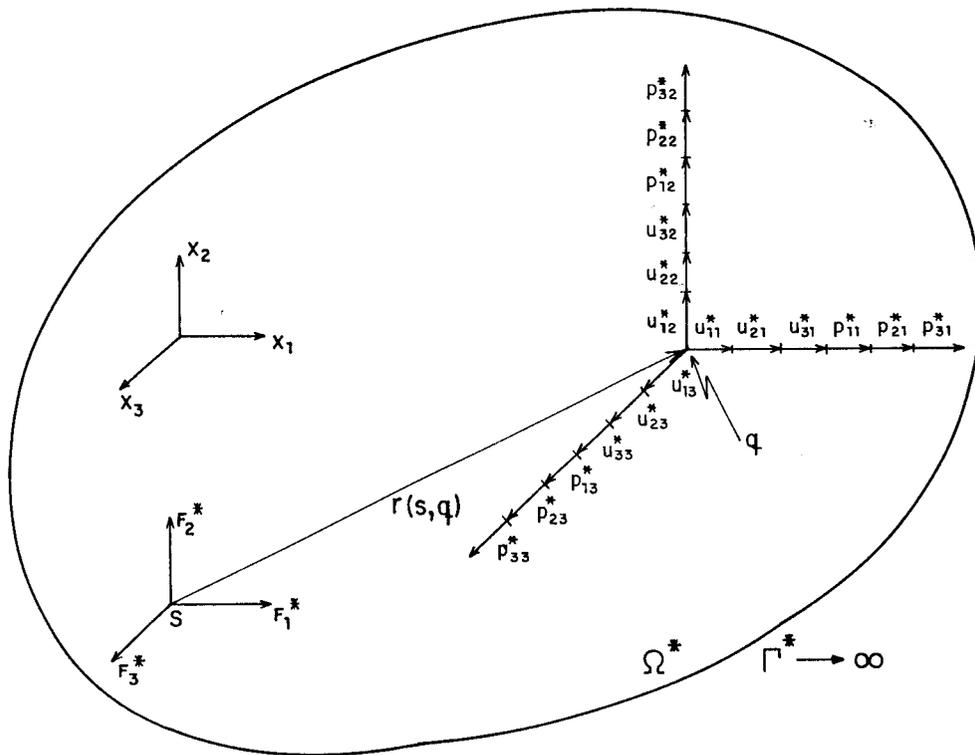


Fig. 2.4.3 - Componentes dos tensores u_{ij}^* e p_{ij}^* .

De acordo com as características do domínio Ω^* e contorno Γ^* , obtêm-se as soluções fundamentais correspondentes. Portanto, para cada problema fundamental existe uma solução fundamental. O problema fundamental mais utilizado é o problema dito de Kelvin, que considera o domínio Ω^* como sendo infinito. Outro problema fundamental conhecido é o dito de Mindlin, e que interessa mais de perto a este trabalho. Este considera o domínio Ω^* um semi-infinito. Assim, também o faz o problema de Boussinesq-Cerruti. A seguir, serão discutidos cada um destes problemas.

2.4.2 - Solução Fundamental de Kelvin

A solução clássica desenvolvida por Lord Kelvin, descrita em [79], é sem dúvida a mais difundida e utilizada. Considera o domínio Ω^* como sendo um corpo tridimensional infinito, elástico e homogêneo, conforme figura 2.4.4.

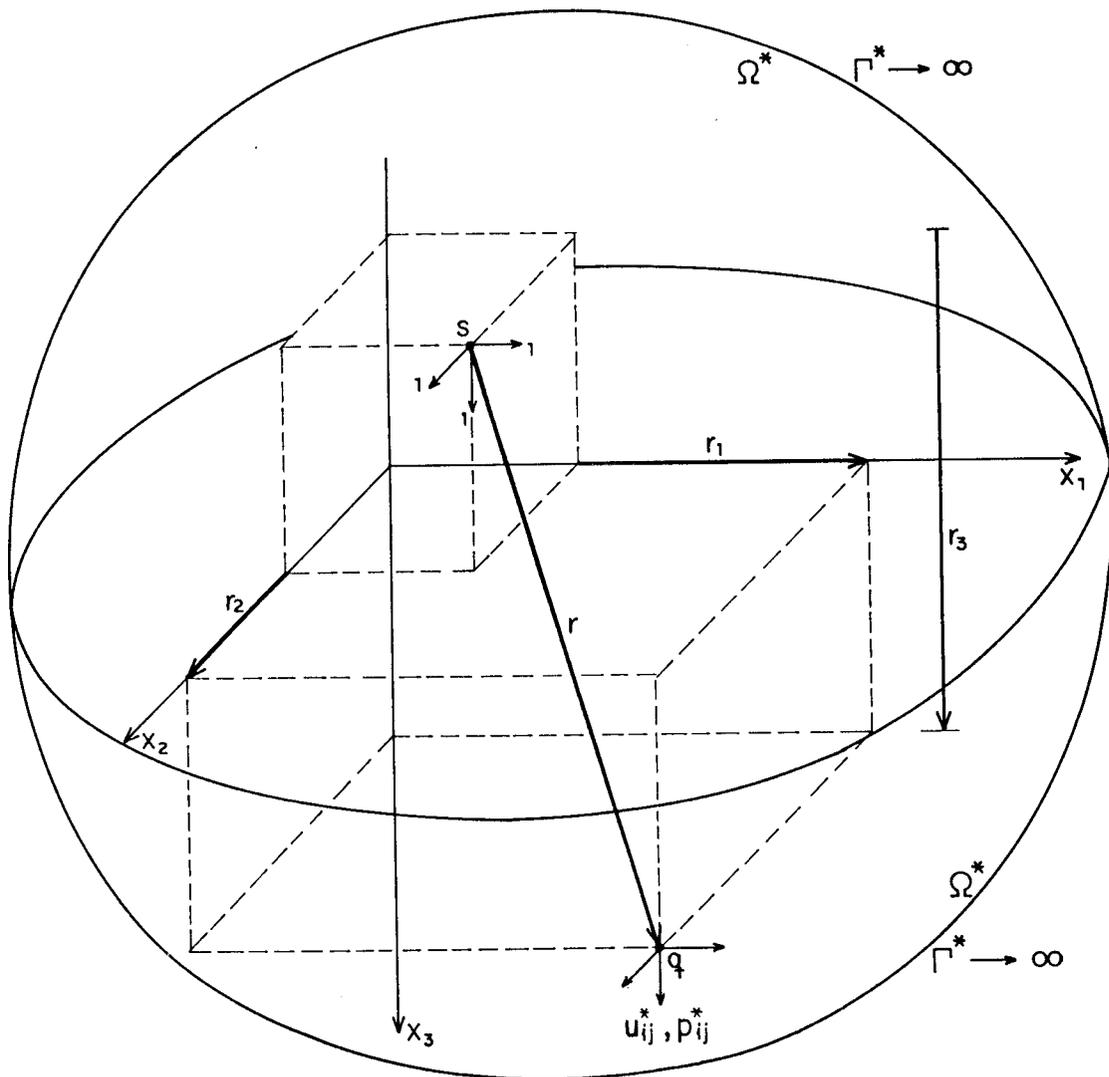


Fig. 2.4.4 - Problema fundamental de Kelvin.

As expressões fundamentais para deslocamentos e forças de superfície (BREBBIA [5]), tendo-se em

vista o item 2.4.1 (ou seja, considerando a carga unitária apenas na direção i), são as seguintes:

$$u_{ij}^*(s, q) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G r} \left\{ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right\} \dots(2.4.5a)$$

$$p_{ij}^*(s, q) = - \frac{1}{8\pi(1-\nu) r^2} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j} \right] r_{,n} + \right. \\ \left. - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\} \dots(2.4.5b)$$

2.4.3 - Solução Fundamental de Boussinesq-Cerruti

As soluções clássicas desenvolvidas por Boussinesq e Cerruti, conforme [75] (para os problemas onde uma força é aplicada normal e tangencialmente ao plano de contorno de um domínio Ω^* semi-infinito, elástico e homogêneo, respectivamente), foram justapostas para formar um único problema (figura 2.4.5). O plano $x_3 = 0$ representa a superfície de contorno ($\bar{\Gamma}$) onde admite-se ser livre de trações. O ponto de aplicação da força unitária é um qualquer na superfície, $x_3 = 0$, $\bar{\Gamma}$, conforme figura 2.4.5.

As componentes da solução fundamental para deslocamentos, são as seguintes (NAKAGUMA [69]):

$$\begin{aligned} u_{11}^* &= k[(1-\nu) + \nu r_{,1}^2] \\ u_{12}^* &= k\nu r_{,1}r_{,2} \\ u_{13}^* &= k(0,5-\nu)r_{,1} \\ u_{21}^* &= u_{12}^* \\ u_{22}^* &= k[(1-\nu) + \nu r_{,2}^2] \\ u_{23}^* &= k(0,5-\nu)r_{,2} \end{aligned} \dots(2.4.6)$$

$$\begin{aligned} u_{31}^* &= -u_{13}^* \\ u_{32}^* &= -u_{23}^* \\ u_{33}^* &= k(1-\nu) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2\pi Gr} \\ r &= \sqrt{r_i r_i} = |s-q| \\ r_i &= x_i(q) - x_i(s) \\ r_{,i} &= \frac{r_i}{r} \end{aligned}$$

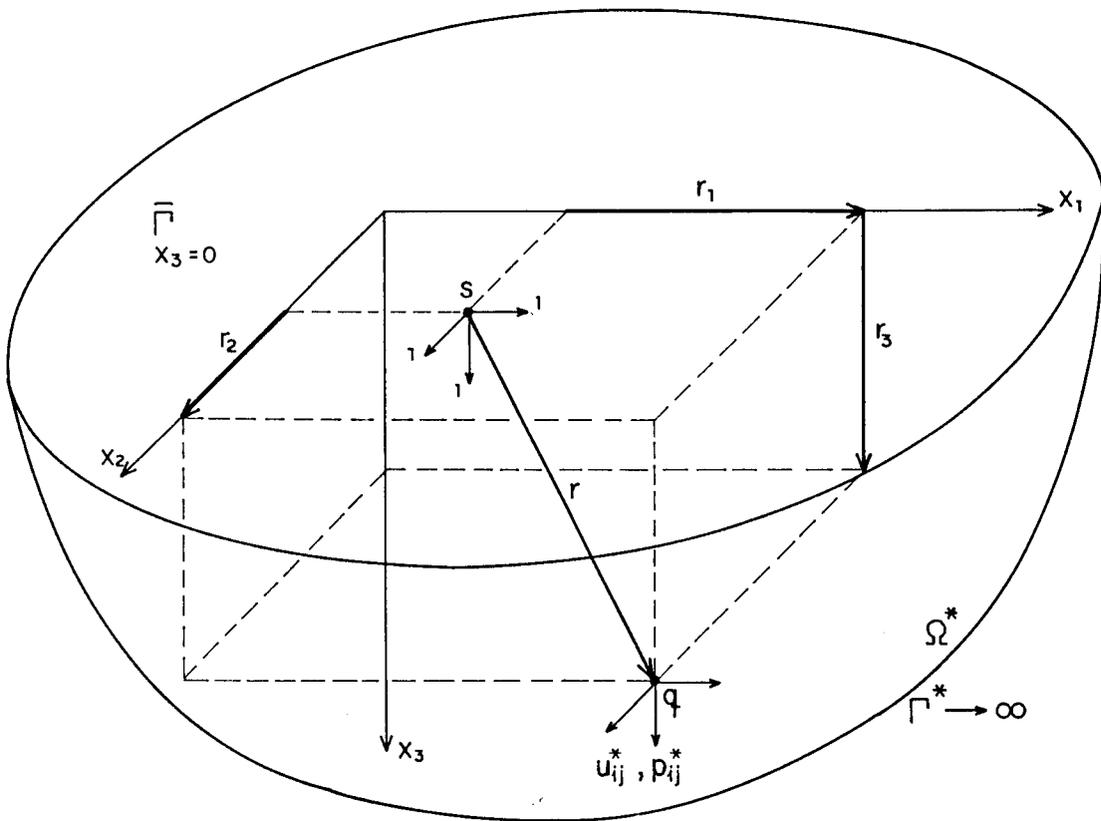


Fig. 2.4.5 - Problema Fundamental de Boussinesq-Cerruti.
Quando $x_3(q) = 0$, $p_{ij}^* = 0$.

2.4.4 - Solução Fundamental de Mindlin

No problema fundamental, dito de Mindlin (conforme [75]), o domínio Ω^* é considerado um sólido semi-infinito, elástico e homogêneo. O plano $x_3 = 0$ representa parte da superfície de contorno ($\bar{\Gamma}$) onde admite-se ser livre de trações. O ponto de aplicação da força unitária é um qualquer do interior deste domínio (incluindo a superfície $x_3 = 0$, $\bar{\Gamma}$, conforme figura 2.4.6.

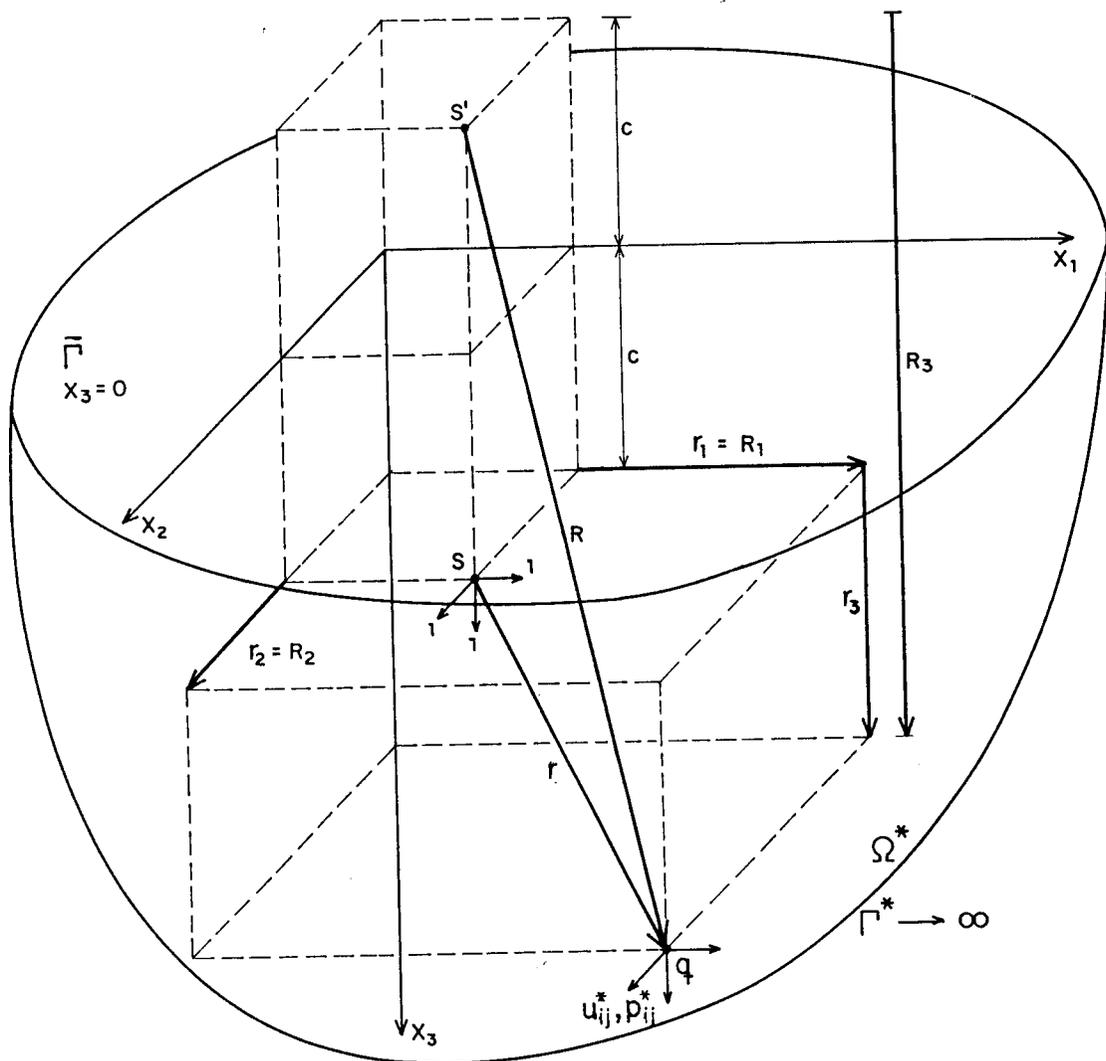


Fig. 2.4.6 - Problema Fundamental de Mindlin.

As expressões fundamentais para deslocamentos e forças de superfície são apresentadas, tal como em NAKAGUMA [69], ou seja, com cada componente dos tensores de deslocamento e força de superfície explicitados. Em [71], os autores apresentam estas mesmas expressões de forma compacta, semelhantes àquelas apresentadas para Kelvin, (2.4.5a e 2.4.5b). Isto foi possível através da adoção de vários valores auxiliares e alguns somatórios internos que, segundo os autores, devem ser desenvolvidos para a programação em computador.

A seguir, apresentam-se as expressões fundamentais de Mindlin para deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, onde são válidos os seguintes parâmetros (definições na figura 2.4.6):

$$r = \sqrt{r_i r_i}$$

$$R = \sqrt{R_i R_i}$$

$$r_i = x_i(q) - x_i(s)$$

$$R_i = x_i(q) - x_i(s')$$

$$c = x_3(s) \geq 0$$

$$z = x_3(q) \geq 0$$

$$K_d = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)}$$

$$K_s = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}$$

Expressões para deslocamentos (2.4.7):

$$u_{11}^* = K_d \left\{ \frac{3-4\nu}{r} + \frac{1}{R} + \frac{r_1^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_1^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left[1 - \frac{3r_1^2}{R^2} \right] + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R+R_3} \left[1 - \frac{r_1^2}{R(R+R_3)} \right] \right\}$$

$$u_{12}^* = K_d r_1 r_2 \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{3-4\nu}{R^3} - \frac{6cz}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \right\}$$

$$u_{13}^* = K_d r_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} - \frac{6czR_3}{R^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right\}$$

$$u_{21}^* = u_{12}^*$$

$$u_{22}^* = K_d \left\{ \frac{3-4\nu}{r} + \frac{1}{R} + \frac{r_2^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_2^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left[1 - \frac{3r_2^2}{R^2} \right] + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R+R_3} \left[1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_3)} \right] \right\}$$

$$u_{23}^* = \frac{r_2}{r_1} u_{13}^*$$

$$u_{31}^* = K_d r_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} + \frac{6czR_3}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right\}$$

$$u_{32}^* = \frac{r_2}{r_1} u_{31}^*$$

$$u_{33}^* = K_d \left\{ \frac{3-4\nu}{r} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R} + \frac{r_3^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)R_3^2 - 2cz}{R^3} + \frac{6czR_3^2}{R^5} \right\} \dots (2.4.7)$$

$$\sigma_{22}^{*1} = K_s r_1 \left\{ \frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[c - (1-2\nu)R_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5r_2^2 z}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{23}^{*1} = K_s r_1 r_2 \left\{ -\frac{3r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)R_3}{R^5} + \frac{6c}{R^5} \left[1-2\nu + \frac{5zR_3}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{33}^{*1} = K_s r_1 \left\{ \frac{1-2\nu}{r^3} - \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)R_3^2}{R^5} + \frac{6c}{R^5} \left[c + (1-2\nu)R_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5R_3^2 z}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{11}^{*2} = K_s r_2 \left\{ \frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[c - (1-2\nu)R_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{12}^{*2} = K_s r_1 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{(1-2\nu)}{R^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] - \frac{6cz}{R^5} \left[1 - \frac{5r_2^2}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{13}^{*2} = \sigma_{23}^{*1}$$

As expressões para forças de superfície são obtidas através da equação

$$p_{ij}^* = \sigma_{jk}^* n_k, \quad \dots(2.4.8)$$

isto é, em função do tensor de terceira ordem das tensões e das componentes do vetor normal à superfície no ponto q.

A seguir são apresentadas as 18 componentes do tensor de terceira ordem das tensões, necessárias à obtenção do tensor das forças de superfície (ver maiores detalhes no apêndice A).

Expressões para forças de superfície (2.4.9):

$$\sigma_{11}^{*1} = K_s r_1 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[3 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[3c - (3-2\nu)R_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{12}^{*1} = K_s r_2 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{(1-2\nu)}{R^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] - \frac{6cz}{R^5} \left[1 - \frac{5r_1^2}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{13}^{*1} = K_s \left\{ -\frac{(1-2\nu)r_3}{r^3} + \frac{(1-2\nu)r_3}{R^3} - \frac{3r_1^2 r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2 R_3}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{6c}{R^5} \left[zR_3 - (1-2\nu)r_1^2 - \frac{5r_1^2 z R_3}{R^3} \right] \right\}$$

$$\sigma_{22}^{*2} = K_s r_z \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R^3} - \frac{3r_z^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_z^2}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[3 - \frac{r_z^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[3c - (3-2\nu)R_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5r_z^2 z}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{23}^{*2} = K_s \left\{ -\frac{(1-2\nu)r_3}{r^3} + \frac{(1-2\nu)r_3}{R^3} - \frac{3r_z^2 r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_z^2 R_3}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{6c}{R^5} \left[zR_3 - (1-2\nu)r_z^2 - \frac{5r_z^2 z R_3}{R^3} \right] \right\}$$

$$\sigma_{33}^{*2} = \frac{r_2}{r_1} \sigma_{33}^{*1}$$

$$\sigma_{11}^{*3} = K_s \left\{ \frac{(1-2\nu)r_3}{r^3} - \frac{3r_1^2 r_3}{r^5} + \frac{(1-2\nu)(3r_3 - 4\nu R_3)}{R^3} + \right. \\ \left. - \frac{3(3-4\nu)r_1^2 r_3 - 6cR_3[(1-2\nu)Z - 2\nu c]}{R^5} - \frac{30cr_1^2 z R_3}{R^7} + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \left[1 - \frac{r_1^2}{R(R+R_3)} - \frac{r_1^2}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{12}^{*3} = K_s r_1 r_z \left\{ -\frac{3r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_3}{R^5} - \frac{30czR_3}{R^7} + \right. \\ \left. + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R^2(R+R_3)} \left[\frac{1}{R+R_3} + \frac{1}{R} \right] \right\}$$

$$\sigma_{13}^{*3} = K_s r_1 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)zR_3 - 3c(3z+c)}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{30czR_3^2}{R^7} \right\}$$

$$\sigma_{22}^{*3} = K_s \left\{ \frac{(1-2\nu)r_3}{r^3} - \frac{3r_2^2 r_3}{r^5} + \frac{(1-2\nu)(3r_3 - 4\nu R_3)}{R^3} + \right. \\ \left. - \frac{3(3-4\nu)r_2^2 r_3 - 6cR_3[(1-2\nu)z - 2\nu c]}{R^5} - \frac{30cr_2^2 z R_3}{R^7} + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \left[1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_3)} - \frac{r_2^2}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{23}^{*3} = K_s r_2 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)zR_3 - 3c(3z+c)}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{30czR_3^2}{R^7} \right\}$$

$$\sigma_{33}^{*3} = K_s \left\{ -\frac{(1-2\nu)r_3}{r^3} + \frac{(1-2\nu)r_3}{R^3} - \frac{3r_3^3}{r^5} + \right. \\ \left. - \frac{3(3-4\nu)zR_3^2 - 3cR_3(5z-c)}{R^5} - \frac{30czR_3^3}{R^7} \right\} \dots(2.4.9)$$

As expressões (2.4.7) e (2.4.9), podem também, ser apresentadas a partir das expressões dadas para Kelvin, (2.4.5a) e (2.4.5b), adicionando-se uma parte complementar que inclui a existência de uma superfície livre de trações, conforme mostrado em [81] e [71]. Assim, a solução fundamental para o meio semi-infinito teria a seguinte forma:

$$(\)^* = (\)^K + (\)^C,$$

onde $()^K$ e $()^C$ representam as expressões de Kelvin e complementares, respectivamente.

Há uma relação interessante entre as três soluções fundamentais apresentadas anteriormente. Considere-se o parâmetro 'c' apresentado na figura 2.4.6, que representa a distância entre o ponto carregado 's' e o plano de contorno $x_3 = 0$. Ao se fazer 'c' tender para o infinito ($c \rightarrow \infty$) a influência do plano livre de trações desaparece e chega-se no problema fundamental de Kelvin. Procedendo-se da mesma forma, agora tendendo para zero ($c \rightarrow 0$), chega-se no problema fundamental de Boussinesq/Cerruti. Portanto, pode-se dizer que a solução fundamental de Mindlin engloba as de Kelvin e Boussinesq-Cerruti. De certa forma, esta foi a pretensão de Mindlin, uma vez que buscava, em seu trabalho, preencher a lacuna existente entre os dois outros problemas. No trabalho de MINDLIN [75], analisa-se as soluções fundamentais existentes para sólidos elásticos, mais precisamente as de Kelvin, Boussinesq e Cerruti. Verifica-se a particularidade existente para o problema de Boussinesq e Cerruti, a de ter pontos carregados somente na superfície e também a generalidade do problema de Kelvin ao se tratar de estudos próximos à superfície de um sólido semi-infinito.

Do ponto de vista de aplicações à interação solo-estrutura, a solução fundamental ligada a Mindlin apresenta-se mais adequada, pois permite a análise de problemas no interior do solo sem precisar discretizar a superfície livre, próximo desta ou não.

2.5 - EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO PARA PONTOS NO DOMÍNIO

Neste item serão apresentadas as equações integrais de deslocamentos e tensões para pontos situados

no domínio de um corpo tridimensional, elástico-linear (BREBBIA [81]). São as equações básicas para se utilizar o método dos elementos de contorno na resolução deste tipo de problema.

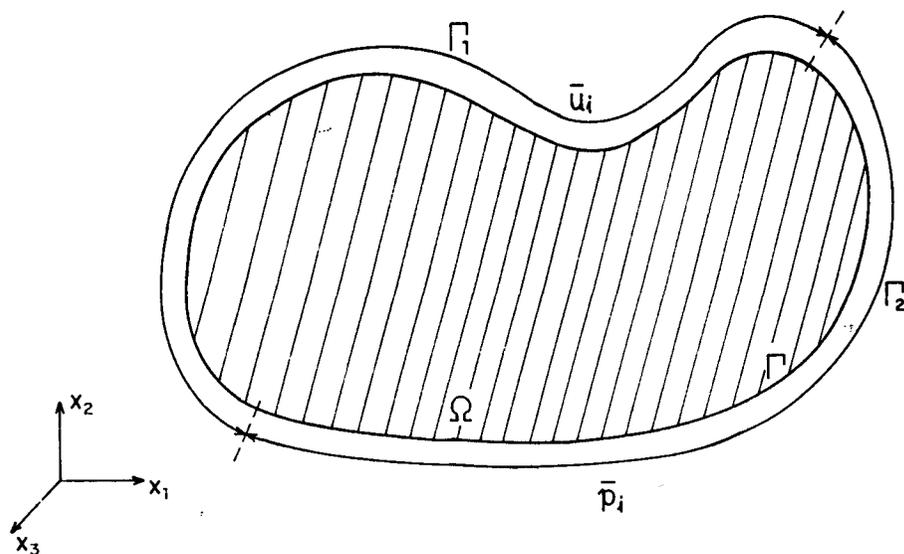
Podem-se obter as equações integrais para pontos internos de diversas maneiras:

- através do Teorema da Divergência;
- utilizando-se as Técnicas dos Resíduos Ponderados;
- através do Teorema da Reciprocidade (Teorema de Betti); dentre outras.

O uso da técnica dos Resíduos Ponderados parece mais simples e, possuindo sentido físico mais claro, permite portabilidade da formulação do método dos Elementos de Contorno para com outros métodos numéricos, como por exemplo, o método dos Elementos Finitos. Por isso, numa sucinta formulação daquelas equações, esta técnica será utilizada.

Nos Trabalhos de GIL RODRIGUES [76] e ROCHA [50], sobretudo neste último, encontra-se a formulação do método passo a passo com detalhes matemáticos.

Considera-se um sólido de domínio Ω e contorno Γ , que encontra-se dividido em dois segmentos, Γ_1 e Γ_2 , nos quais estão prescritos os deslocamentos e forças de superfície, respectivamente - $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ - conforme figura 2.5.1. De acordo com o item 2.4, este sólido encontra-se contido em um espaço infinito, Kelvin, ou semi-infinito, Mindlin e Boussinesq-Cerruti.



$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i & \text{em } \Gamma_1, & \text{condi\c{c}o essencial} \\ p_i &= \bar{p}_i & \text{em } \Gamma_2, & \text{condi\c{c}o natural} \end{aligned}$$

Fig. 2.5.1 - Defini\c{c}o das condi\c{c}oes de contorno

Utilizando-se a equa\c{c}o (2.3.1) e a t\c{e}cnica dos Res\c{i}duos Ponderados com a fun\c{c}o ponderadora w_i substitu\c{i}da pelas solu\c{c}oes fundamentais U_i^* e P_i^* , obtem-se a seguinte equa\c{c}o integral:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) U_i^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_i - \bar{p}_i) U_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_i - u_i) P_i^* d\Gamma \quad \dots(2.5.1)$$

Com o prop\c{os}ito de se eliminar o diferencial em j do tensor das tens\c{o}es, integra-se por partes duas vezes a equa\c{c}o (2.5.1), obtendo-se

$$\int_{\Omega} b_i U_i^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega = \int_{\Gamma_2} \bar{p}_i U_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_i U_i^* d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Gamma_2} P_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_i P_i^* d\Gamma \dots (2.5.2)$$

Agrupando-se os segmentos Γ_1 e Γ_2 do contorno Γ , obtém-se uma forma mais geral para (2.5.2), representada por

$$- \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} P_i^* u_i d\Gamma = \int_{\Omega} b_i U_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i U_i^* d\Gamma \dots (2.5.3)$$

Substituindo-se em (2.5.3) a diferencial do tensor das tensões por (2.4.1), fazendo-se uso da terceira propriedade da função delta de Dirac (2.2.4), e tomando-se independentemente cada direção cartesiana, chega-se à expressão conhecida como identidade Somigliana [8],

$$u_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) +$$

$$+ \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, q) b_j(q) d\Omega(q), \dots (2.5.4)$$

que fornece os deslocamentos u_i para pontos 's' no interior do domínio Ω .

Para que se tenha uma análise completa de um sólido elástico faz-se necessário conhecer o estado de tensão ou deformação no qual o corpo se encontra (escolhido um, o outro pode ser encontrado através da Lei de Hooke, (2.3.5) e (2.3.6)).

Utilizando-se a relação tensão-deformação, (2.3.5), substituindo-se nesta as deformações (2.3.4) e considerando-se os deslocamentos vindos de (2.5.4), obtém-se a expressão para cálculo das componentes de tensão, apresentada a seguir.

$$\sigma_{ij}(s) = - \int_{\Gamma} S_{ijk}^*(s, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(s, Q) p_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} D_{ijk}^*(s, q) b_k(q) d\Omega(q) \quad \dots(2.5.5)$$

Vale ressaltar que os tensores S_{ijk}^* e D_{ijk}^* em (2.5.5), são inerentes ao tipo de problema fundamental adotado. No caso em que se adota Kelvin (ver BREBBIA [5]), as expressões dos tensores são:

$$S_{ijk}^* = \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^3} \left\{ 3r_{,n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) + 5r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] + 3\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu)(3n_k r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad \dots(2.5.6)$$

$$D_{ijk}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \quad \dots(2.5.7)$$

No caso em que se adota Mindlin (ver LAETHEM [77]), as expressões dos tensores passam a ser:

$$S_{ijk}^* = \left[\lambda \delta_{ij} \sigma_{kl,j}^{*m} + G \left(\sigma_{kl,j}^{*i} + \sigma_{kl,i}^{*j} \right) \right] n_l \quad \dots(2.5.8)$$

As derivadas do tensor de tensões serão apresentadas no apêndice B.

As expressões para o tensor D_{ijk}^* são as mesmas do σ_{jk}^{*i} , (2.4.9), a menos do sinal, isto é,

$$D_{ijk}^* = - \sigma_{jk}^{*i} \quad \dots(2.5.9)$$

2.6 - EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA PONTOS NO CONTORNO

A identidade Somigliana (2.5.4) é válida apenas para pontos contidos no interior do corpo em estudo. Deseja-se, por outro lado, obter a expressão correspondente para o caso em que o ponto pertença ao contorno Γ , uma vez que o método necessita desta equação para a montagem de um sistema de equações lineares (este assunto será abordado em detalhes no capítulo 3).

O artifício utilizado comumente na literatura especializada, (ver DOMINGUEZ & BREBBIA [78]), para a avaliação de pontos pertencentes ao contorno, é o de transformar o ponto do contorno num ponto do domínio, acrescentando-se, para isto, parte de uma esfera, denominado domínio Ω_ε , centrada no ponto em questão e de raio ε . Assim, um ponto 'S' do contorno (figura 2.6.1) passa a ser 's' do domínio, e agora, vale a identidade Somigliana (2.5.4).

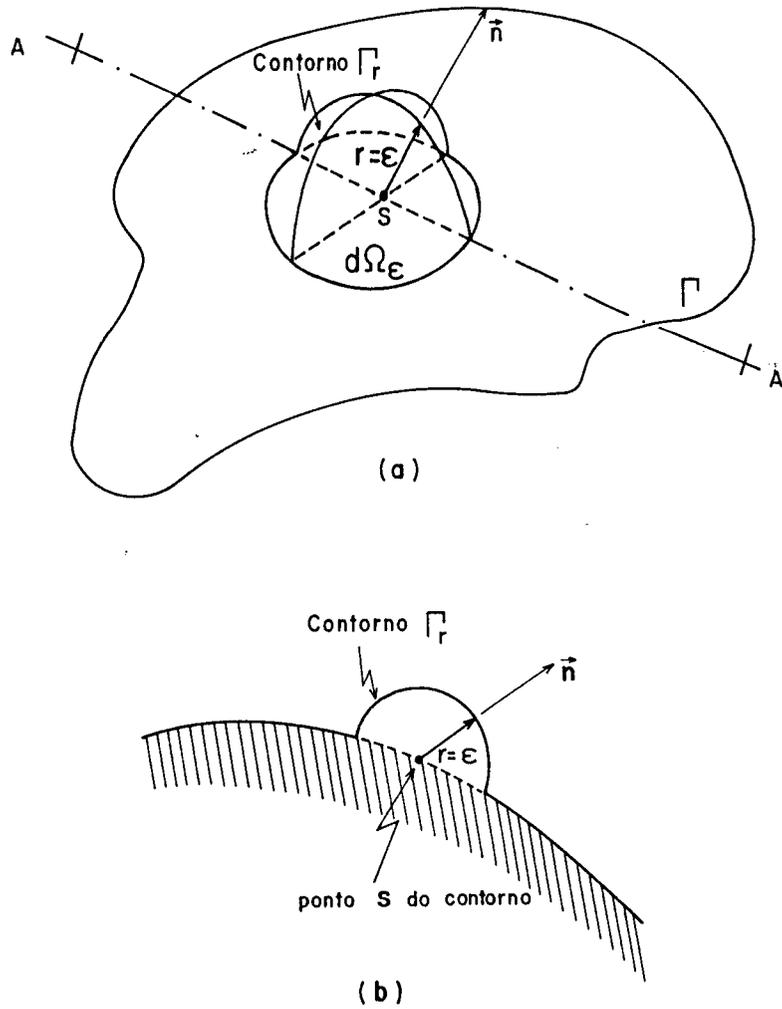


Fig. 2.6.1 - a) acréscimo do domínio Ω para dedução da equação integral de pontos no contorno; b) corte AA'.

Com esta modificação, o novo domínio torna-se $\Omega + \Omega_\epsilon$, o mesmo acontecendo com o contorno, $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon$. Considerando tal artifício na equação (2.5.4), esta passa a se apresentar da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 u_i(S) = & - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} u_{ij}^*(S, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) + \\
 & + \int_{\Omega + \Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(S, q) b_j(q) d\Omega(q), \quad \dots(2.6.1)
 \end{aligned}$$

Separando-se em (2.6.1) cada parte nova do domínio e do contorno, tem-se:

$$\begin{aligned}
 u_i(S) = & - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} p_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) + \\
 & + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} u_{ij}^*(S, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ij}^*(S, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) + \\
 & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) b_j(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(S, q) b_j(q) d\Omega(q) \\
 & \dots(2.6.2)
 \end{aligned}$$

O próximo passo caracteriza-se por resolver os limites dos termos da equação (2.6.2), com $\varepsilon \rightarrow 0$, tentativa para retornar ao domínio inicial onde o ponto 's' pertencera ao contorno. Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $\Omega_\varepsilon \rightarrow 0$ e $\bar{\Gamma} \rightarrow 0$.

Assim procedendo, obtêm-se os seguintes resultados para os limites das integrais sobre $\Gamma - \bar{\Gamma}$:

$$\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} p_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q), \quad \dots(2.6.3a)$$

$$\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} u_{ij}^*(S, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q). \quad \dots(2.6.3b)$$

O valor da integral (2.6.3a) deve ser computado no sentido

de valor principal, conforme a expressão (2.2.7), já que a função p_{ij}^* apresenta uma descontinuidade no limite (ver características do tensor em (2.4.5b) para Kelvin e (2.4.8) para Mindlin).

Demonstra-se facilmente, conforme NAKAGUMA [69], que as integrais sobre Γ_ε , para a função u_{ij}^* , têm limites iguais a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Assim,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ij}^*(S, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) = 0, e \quad \dots(2.6.4a)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(S, q) b_j(q) d\Omega(q) = 0. \quad \dots(2.6.4b)$$

Resta apenas computar o valor da integral sobre Γ_ε , cuja função p_{ij}^* , apresenta uma descontinuidade no limite com $\varepsilon \rightarrow 0$. Aplicando-se o artifício de somar e subtrair o mesmo termo nesta, este limite pode ser escrito

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(S, Q) [u_j(Q) - u_j(S)] d\Gamma(Q) + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_j(S) \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(S, Q) d\Gamma(Q), \end{aligned} \quad \dots(2.6.5)$$

onde o limite da primeira integral é identicamente nulo (Hölder, expressão (2.2.5)). Portanto, (2.6.5) vem a ser apenas

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_j(S) \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(S, Q) d\Gamma(Q) \quad \dots(2.6.6)$$

Para o caso particular em que o contorno tem uma única derivada no ponto 'S' (contorno dito "smooth", na literatura especializada), resulta

$$-\frac{1}{2} \delta_{ij} u_j(S) \quad \dots(2.6.7)$$

Substituindo-se os resultados dos limites obtidos em (2.6.2), chega-se à expressão

$$C_{ij}(S)u_j(S) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S,Q)u_j(Q)d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S,Q)p_j(Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(S,q)b_j(q)d\Omega(q), \quad \dots(2.6.8)$$

onde $C_{ij}(S)$ resulta da adição de (2.6.7) ao termo u_i de (2.6.2), ou seja,

$$C_{ij}(S) = \delta_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad \dots(2.6.9)$$

Partindo-se de (2.5.3) e mediante cálculos apropriados obtém-se a expressão integral para pontos fora do domínio. A expressão obtida é semelhante à (2.6.8), mudando-se apenas o coeficiente $C_{ij}(S)$.

Portanto, conhecendo-se as expressões integrais para pontos internos e externos ao domínio e para pontos no contorno, pode-se dizer que a expressão geral é a (2.6.8) com os seguintes valores para o coeficiente $C_{ij}(S)$:

δ_{ij} (ou I_{ij} , de forma matricial), para pontos internos;

$\frac{\delta_{ij}}{2}$ (ou $I_{ij}/2$, de forma matricial), para pontos

do contorno;

U (ou U , de forma matricial), para pontos externos.

Nas expressões matriciais acima, I representa a matriz identidade de ordem 3×3 .

A equação (2.6.8), quando escrita para um ponto do contorno ou do exterior, relaciona valores de deslocamentos e forças de superfície apenas do contorno, que são as reais variáveis do problema. Isto vem como consequência da formulação direta do método dos elementos de contorno (obter valores das variáveis físicas do problema).

Todas as equações apresentadas até agora neste item dizem respeito a um corpo tridimensional, elástico-linear, homogêneo e finito. Desta forma, aplicações caracterizadas por cavidades não podem ser abordadas. Faz-se necessário, portanto, conhecer as expressões que descrevem o comportamento para corpos infinitos e semi-infinitos com cavidades.

Seja um corpo tridimensional, elástico-linear, homogêneo, de domínio $\bar{\Omega}$, contorno $\bar{\Gamma}$, e contendo uma cavidade definida pelo contorno Γ (ver figuras 2.6.2 e 2.6.3). Este corpo, definido por $\Gamma + \bar{\Omega} + \bar{\Gamma}$, em forma de uma esfera de raio r_0 centrado em um ponto S do contorno Γ da cavidade, encontra-se contido em um espaço Ω^* infinito (ou semi-infinito). A idéia é acrescentar à equação (2.6.8) o contorno $\bar{\Gamma}$ e fazer com que $r_0 \rightarrow \infty$, que é a situação limite do problema. Diante disso, a expressão correspondente à (2.6.8) passa a ser

$$\begin{aligned}
 C_{ij}(S)u_j(S) = & - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q)u_j(Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q)p_j(Q)d\Gamma(Q) + \\
 & - \lim_{r_o \rightarrow \infty} \int_{\bar{\Gamma}} p_{ij}^*(S, \bar{Q})u_j(\bar{Q})d\Gamma(\bar{Q}) + \lim_{r_o \rightarrow \infty} \int_{\bar{\Gamma}} u_{ij}^*(S, \bar{Q})p_j(\bar{Q})d\Gamma(\bar{Q}) + \\
 & + \lim_{r_o \rightarrow \infty} \int_{\bar{\Omega}} u_{ij}^*(S, \bar{q})b_j(\bar{q})d\Omega(\bar{q})
 \end{aligned}
 \dots(2.6.10)$$

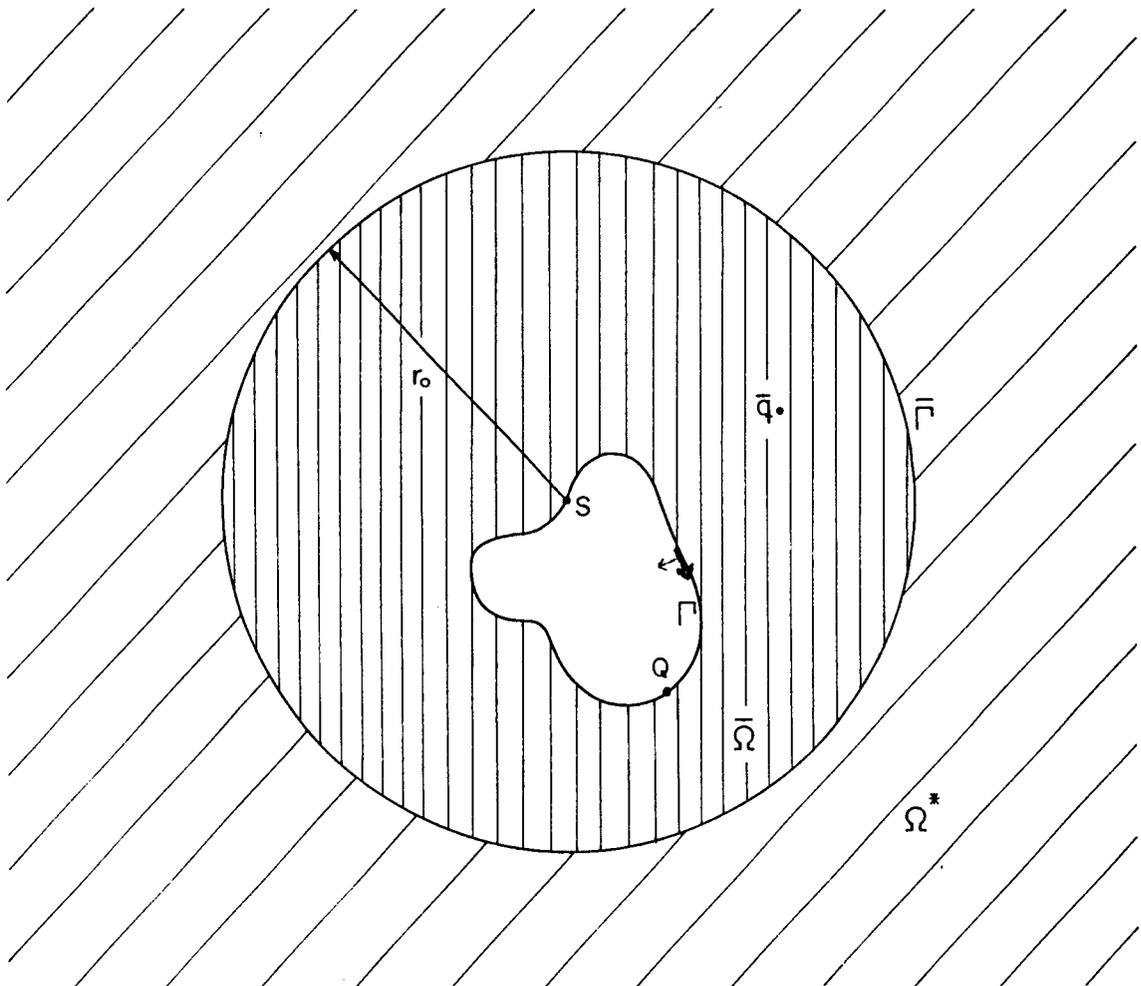


Fig. 2.6.2 - Região Infinita (Espaço de Kelvin)

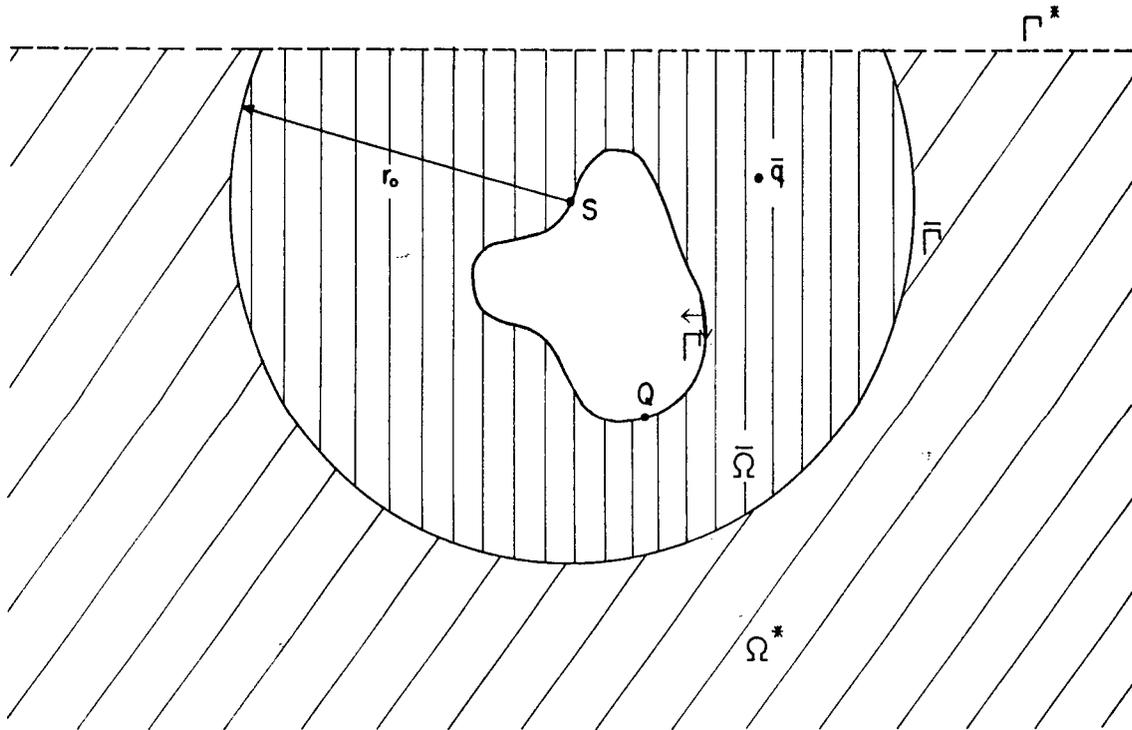


Fig. 2.6.3 - Região Semi-Infinita (Espaço de Mindlin - se $S \in \Gamma^*$)

Desenvolvendo os termos com limites da equação (2.6.10), levando-se em conta as soluções fundamentais u_{ij}^* , p_{ij}^* (2.4.5a, 2.4.5b, 2.4.6, 2.4.7 e 2.4.8), chega-se a uma expressão idêntica à (2.6.8). Os dois primeiros limites das integrais em (2.6.10) resultam em valores nulos, enquanto o terceiro converge para o termo das forças de volume em (2.6.8). Isto significa que a mesma expressão vale tanto para as regiões finitas quanto para as infinitas, e a caracterização de ambas se dá através da adoção do sentido do vetor normal ao contorno (no caso tridimensional, normal à superfície de contorno em um determinado ponto 'S'). A convenção para o vetor normal é aquela utilizada no teorema de Gauss. Assim, este vetor sempre apontará para fora do corpo a ser analisado.

CAPÍTULO 3 - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3.1 - INTRODUÇÃO

No capítulo anterior foram apresentadas as equações integrais e demais expressões que permitem a análise de um corpo elástico-linear e tridimensional.

No presente capítulo serão apresentados os procedimentos necessários para utilizar as equações do capítulo anterior, dando-lhes uma forma discretizada, a partir de aproximações que vão desde as da geometria do contorno até as das variáveis do problema.

3.2 - DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Para a discretização da equação integral (2.6.8), o contorno é aproximado por um número finito de elementos, que podem ser planos ou curvos, tendo forma clássica como os triangulares e quadrangulares (figura 3.2.1).

Um elemento qualquer é inteiramente definido pelas coordenadas de seus pontos nodais, \tilde{x}^n . As coordenadas cartesianas \tilde{x} dos pontos de cada elemento são expressas em termos de funções interpoladoras $\tilde{\psi}$ e das coordenadas nodais,

$$\tilde{x} = \tilde{\psi}^T \tilde{x}^n. \quad \dots(3.2.1)$$

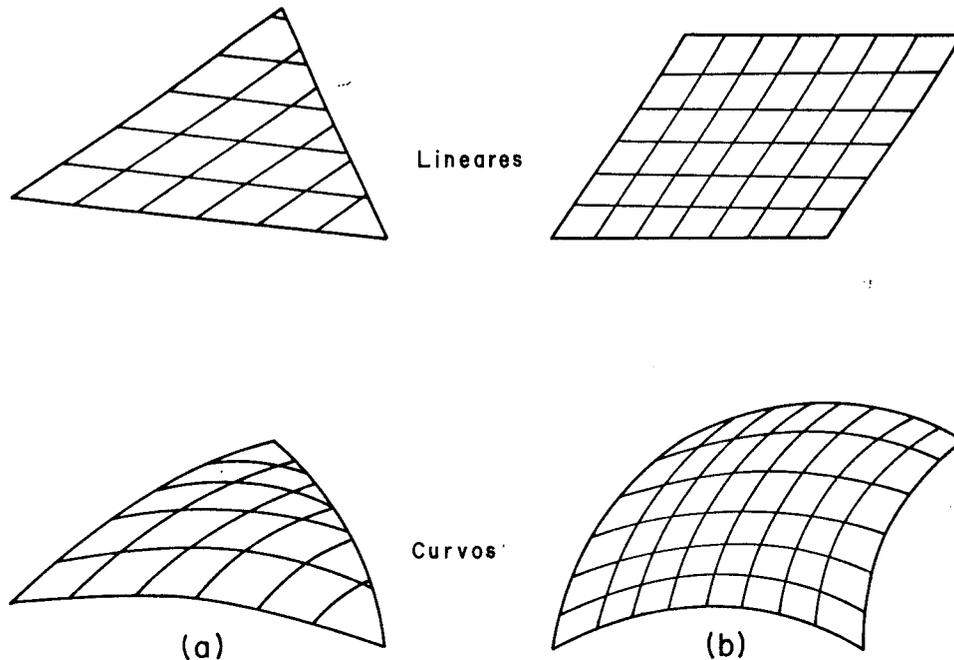


Fig. 3.2.1 - Tipos de elementos utilizados para aproximar a superfície do contorno: a) triangulares; b) quadrangulares.

Sobre cada elemento são definidos os nós funcionais, nos quais são expressos os valores de deslocamentos e forças de superfície. Para tais parâmetros procura-se a forma adequada de aproximação, sendo comum o uso de funções polinomiais (como por exemplo as utilizadas no método dos elementos finitos).

De acordo com a escolha da função interpoladora para as variáveis de contorno, os elementos ganham outra classificação (utilizando-se o método dos elementos de contorno): a) constantes; b) lineares; c) quadráticos; e d) de ordens superiores. A figura 3.2.2 apresenta o contorno de um corpo tridimensional dividido em elementos triangulares e quadrangulares com aproximações constante, linear e quadrática.

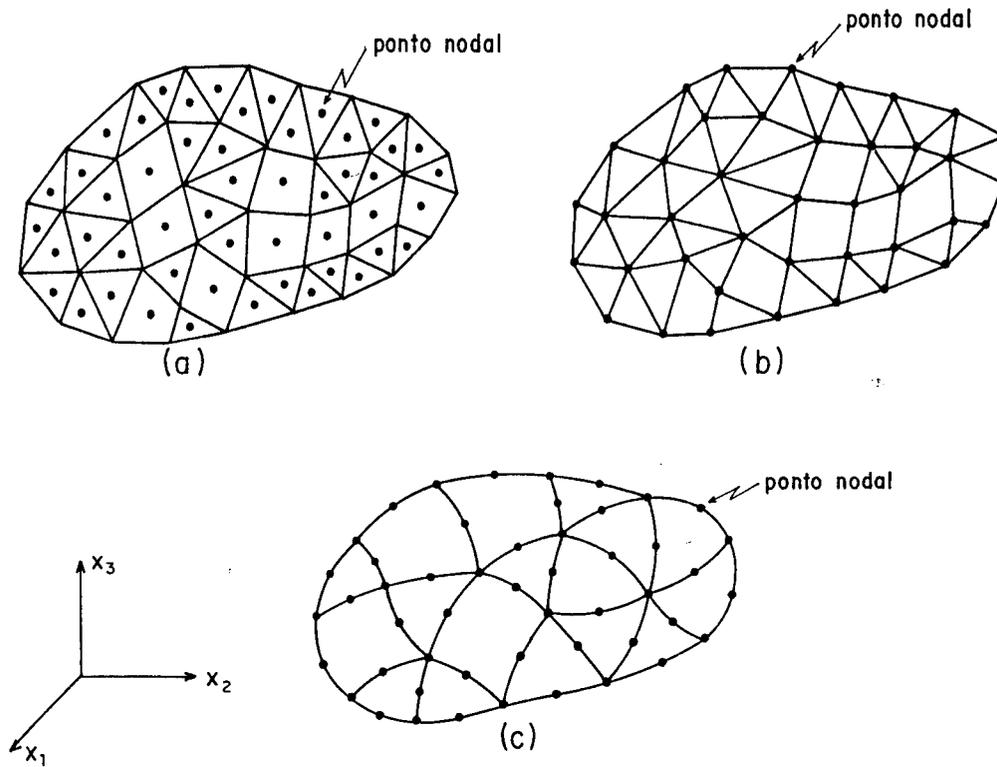


Fig. 3.2.2 - Corpo tridimensional com o contorno discretizado em elementos: a) constante; b) linear; e c) quadrático.

Expressando de forma matricial o que foi dito acima, observa-se que os deslocamentos \underline{u} e forças de superfície \underline{p} são aproximados através de funções interpoladoras $\underline{\phi}$ e dos valores nodais \underline{U}^n e \underline{P}^n respectivamente. Portanto, de uma maneira análoga ao já feito para a geometria.

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{\phi}^T \underline{U}^n \\ \underline{p} &= \underline{\phi}^T \underline{P}^n. \end{aligned} \quad \dots(3.2.2)$$

O domínio, por sua vez, é dividido em células, geralmente dos tipos hexaedro e tetraedro, conforme figura 3.2.3, para se determinar aproximadamente as integrais de domínio da equação (2.6.8).

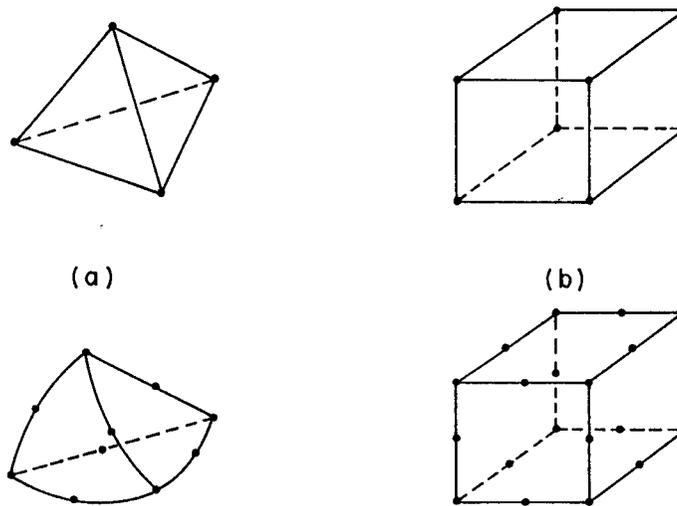


Fig. 3.2.3 - Tipos de células utilizadas para aproximar o domínio: a) tetraedro; b) hexaedro (por ex.: cubo).

As coordenadas \tilde{x} dos pontos em cada célula ficam definidas em termos de funções interpoladoras $\tilde{\psi}_c$ e das coordenadas nodais da célula \tilde{x}_c^n .

$$\tilde{x} = \tilde{\psi}_c^T \tilde{x}_c^n \quad \dots(3.2.3)$$

Similarmente às variáveis de contorno, as forças volumétricas \tilde{b} podem ser aproximadas sobre cada célula por funções interpoladoras $\tilde{\phi}_c$ e valores nodais \tilde{B}^n .

$$\tilde{b} = \tilde{\phi}_c^T \tilde{B}^n \quad \dots(3.2.4)$$

É conveniente, neste ponto do trabalho, utilizar a equação (2.6.8) na forma matricial, uma vez que as expressões que definem um elemento e as que aproximam as variáveis do problema (introduzidas neste capítulo) já estão apresentadas desta forma, o que torna imediata a substituição de uma na outra. A equação (2.6.8) fica

$$\begin{aligned} \underline{C}(S) \underline{u}(S) + \int_{\Gamma} \underline{p}^*(S, Q) \underline{u}(Q) d\Gamma(Q) &= \int_{\Gamma} \underline{u}^*(S, Q) \underline{p}(Q) d\Gamma(Q) + \\ &+ \int_{\Omega} \underline{u}^*(S, q) \underline{b}(q) d\Omega(q). \end{aligned} \quad \dots(3.2.5)$$

Estando o contorno do corpo discretizado em "J" elementos, "N" pontos nodais (ou nós funcionais) e seu domínio em "M" células, a equação integral de contorno para o nó "S" do contorno (equação (3.2.5)), torna-se:

$$\begin{aligned} \underline{C}(S) \underline{u}(S) + \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \underline{p}^*(S, Q) \underline{\phi}^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \underline{U}^n(Q) &= \\ \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \underline{u}^*(S, Q) \underline{\phi}^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \underline{P}^n(Q) &+ \\ + \sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega_m} \underline{u}^*(S, q) \underline{\phi}_c^T(q) d\Gamma(q) \right] \underline{B}^n(q). \end{aligned} \quad \dots(3.2.6)$$

Resolvendo-se adequadamente as integrais da equação (3.2.6) (assunto que será discutido nos itens posteriores) e aplicando esta equação aos "N" pontos de

contorno, estabelece-se a seguinte equação,

$$\underline{\underline{C}} \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}. \quad \dots(3.2.7)$$

As matrizes $\underline{\underline{H}}$, $\underline{\underline{G}}$ e $\underline{\underline{D}}$ resultam do cálculo das integrais indicadas na equação (3.2.6).

As matrizes $\underline{\underline{C}}$ e $\underline{\underline{H}}$, na equação (3.2.7), podem ser agrupadas formando uma só matriz, o que resulta em

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}, \quad \dots(3.2.8)$$

onde $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{H}}$.

Os elementos das sub-matrizes da diagonal de $\underline{\underline{H}}$, que contém $\underline{\underline{C}}$, podem ser calculados considerando-se somente translação de corpo rígido em cada direção cartesiana, conforme NAKAGUMA [69].

Neste trabalho optou-se pelo valor do coeficiente dado pela relação (3.2.9), apresentada a seguir, sendo possível posicionar o ponto nodal no interior do elemento (onde a normal é continuamente definida) mesmo quando o contorno apresenta descontinuidade da tangente.

$$\underline{\underline{C}} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad \dots(3.2.9)$$

Conhecidos os valores dos coeficientes das matrizes $\underline{\underline{H}}$, $\underline{\underline{G}}$ e $\underline{\underline{D}}$, bem como os valores prescritos de $\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{U}}$ e $\underline{\underline{B}}$, da equação (3.2.8), chega-se a um sistema de equações algébricas

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{F}}, \quad \dots(3.2.10)$$

com "3N" incógnitas, entre elas deslocamentos e forças de superfície, devidamente arranjados de forma que todas as

incógnitas fiquem em um único vetor \underline{X} .

A matriz \underline{A} , formada por colunas de \underline{H} e \underline{G} , é cheia e não simétrica cujas linhas correspondem aos graus de liberdade do problema.

O vetor \underline{F} contém os valores prescritos dos deslocamentos e forças de superfície, assim como valores de forças volumétricas, quando consideradas.

A solução deste sistema de equações algébricas é extremamente simples e pode ser simbolizada por

$$\underline{X} = \underline{A}^{-1} \underline{F} \quad \dots(3.2.11)$$

3.3 - ELEMENTOS DE CONTORNO

Este trabalho considera o contorno discretizado por elementos triangulares planos, onde as funções interpoladoras utilizadas para aproximar valores de deslocamentos e forças de superfície são dos tipos constante e linear. Existe, porém, em LACHAT [34] e SILVA [79] a utilização de elementos mais sofisticados, comprovadamente eficientes.

Os elementos utilizados pelo método dos elementos de contorno são semelhantes aos utilizados pelo método dos elementos finitos. As considerações com relação às coordenadas homogêneas, funções interpoladoras, são praticamente as mesmas. Porém, uma propriedade singular do método dos elementos de contorno é que, ao contrário dos elementos finitos (BATHE [80]), a sua formulação não exige a continuidade dos deslocamentos (conforme BREBBIA [81]).

O emprego de funções descontínuas permitiu o desenvolvimento de elementos com pontos nodais situados no seu interior. Este artifício permite a solução dos problemas onde aparecem descontinuidades (problemas de nós de canto, por exemplo, figura 3.3.1).

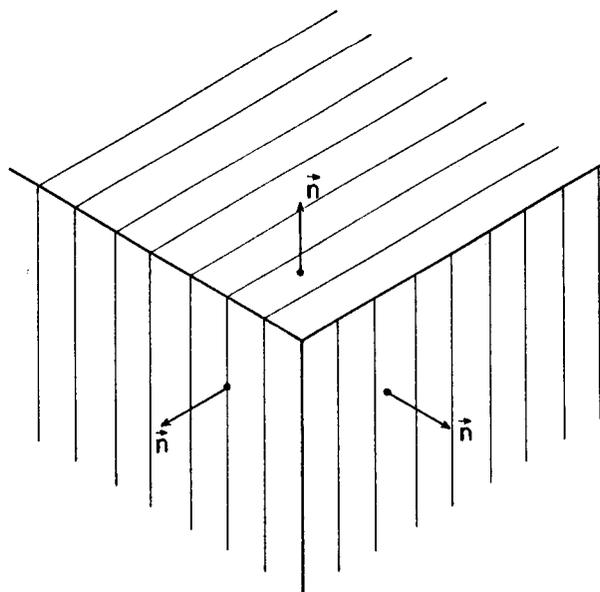


Fig. 3.3.1 - Problema de descontinuidade do vetor normal (nó de canto)

O contorno em detalhe na figura 3.3.1 apresenta uma angulosidade, isto é, tem mais de uma tangente para o mesmo ponto; assim as faces têm normais diferentes.

No tratamento de problemas onde há pontos com concentração de tensões, os elementos descontínuos são mais adequados e conseguem uma melhor aproximação de seus valores.

A seguir apresentam-se os elementos triangulares planos, constante e linear, e a formulação que os envolve.

3.3.1 - GEOMETRIA DOS ELEMENTOS

Para o elemento triangular plano, basta que sejam conhecidas as coordenadas cartesianas dos três nós de seus vértices. A partir disso, qualquer ponto do elemento é dado em função de suas componentes nodais (ver equação 3.2.1).

É conveniente adotar coordenadas locais para o elemento. Na literatura corrente, são utilizadas as coordenadas homogêneas ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , conforme figura 3.3.2.

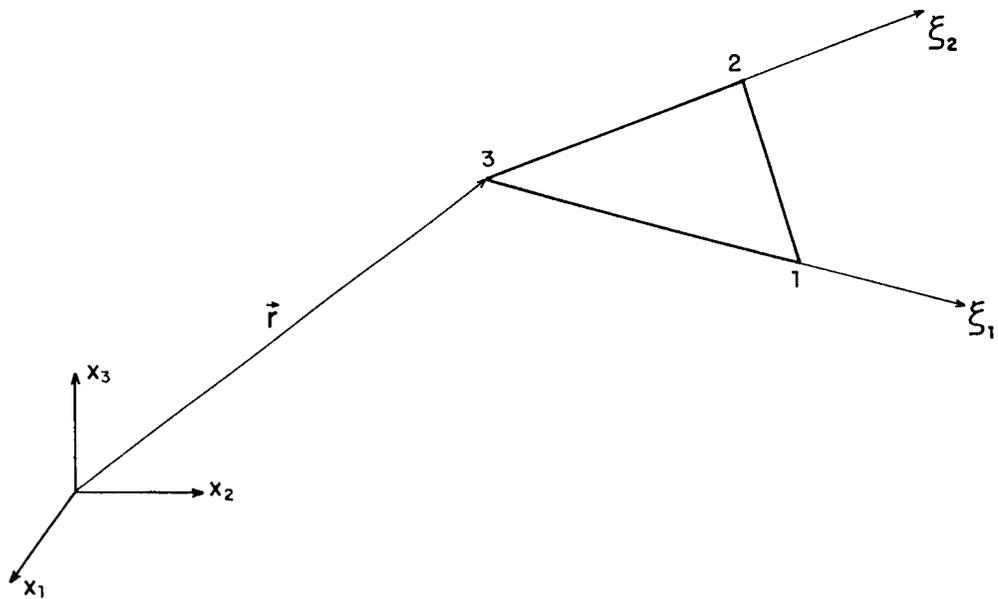


Fig. 3.3.2 - Coordenadas globais e homogêneas para o elemento triangular plano.

Pela introdução do sistema local de referência, a equação (3.2.1) passa a ser

$$\underline{x} = \underline{\psi}^T(\underline{\xi}) \underline{x}^n \quad \dots(3.3.1)$$

Explicitando-se as componentes das matrizes, a equação (3.3.1) vem a ser

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \\ U_3^3 \end{Bmatrix} \quad \dots(3.3.2)$$

A variação de cada coordenada homogênea é de 0 a 1, conforme figura 3.3.3.

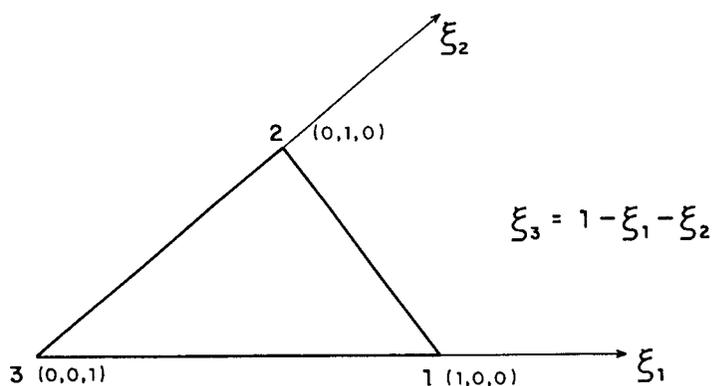


Fig. 3.3.3 - Variação das coordenadas homogêneas (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

Uma vez adotado o sistema local de referência em coordenadas homogêneas, as integrais em cada elemento (conforme equação (3.2.6)) necessitam do Jacobiano de transformação de coordenadas.

Sendo os problemas aqui abordados tridimensionais (que significa contorno discretizado em elementos bidimensionais), o Jacobiano de transformações $|G|$, para qualquer função r , é extraído de

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r}{\partial x_2} \\ \frac{\partial r}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \quad \dots(3.3.3)$$

onde

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad \dots(3.3.4)$$

Na figura 3.3.4 estão indicadas as diferenciais do vetor posição r com relação às coordenadas homogêneas ξ_1 e ξ_2 .

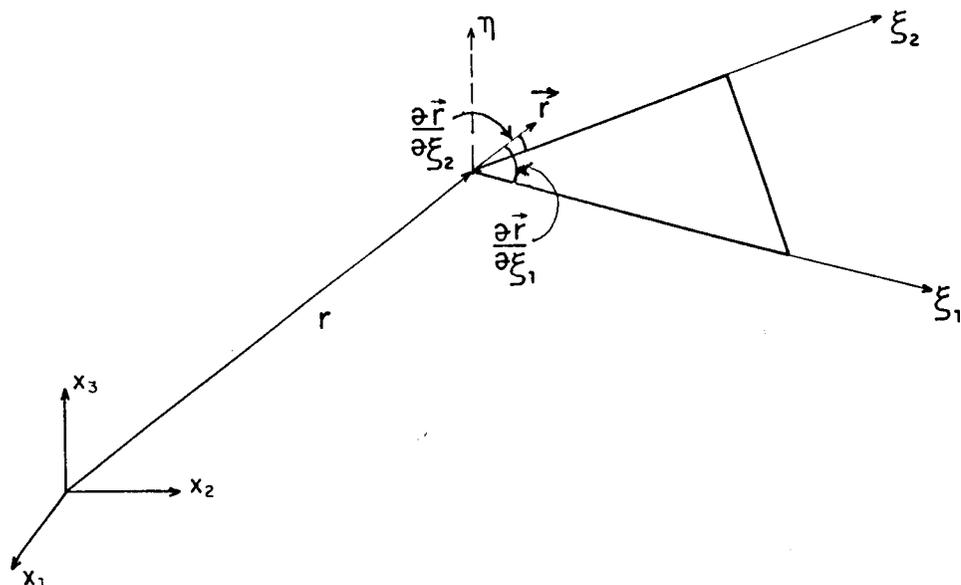


Fig. 3.3.4 - Indicação das derivadas de r .

A diferencial do contorno $d\Gamma$ pode ser escrita da seguinte maneira

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = |G| d\xi_1 d\xi_2 \quad \dots(3.3.5)$$

onde

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right), \text{ e} \quad \dots(3.3.6)$$
$$\frac{\partial r}{\partial \xi_2} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right)$$

Por outro lado, o vetor normal é dado pelo produto vetorial entre dois vetores, como por exemplo

$$n = \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \quad \dots(3.3.7)$$

É interessante notar que o Jacobiano, $|G|$ na equação (3.3.5), tem a mesma intensidade do vetor normal (equação (3.3.7)) e vale a área do paralelogramo formado pelos dois vetores. Sendo adotado o elemento triangular, que possui metade da área do paralelogramo, pode-se dizer que

$$|G| = 2 A \quad \dots(3.3.8)$$

onde A representa a área do elemento triangular plano.

Da equação (3.3.7) ficam também definidas as componentes do vetor normal em relação aos eixos cartesianos:

$$n = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}, \frac{\partial x_2}{\partial \eta}, \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \right) \quad \dots(3.3.9)$$

3.3.2 - Funções de Interpolação

A determinação das funções de interpolação está ligada à escolha da posição dos pontos nodais no elemento.

3.3.2.1 - Elemento Constante

O elemento constante possui apenas um ponto nodal, cuja posição é convencionalmente no centróide da sua área. Neste caso a aproximação é referente ao elemento, qualquer que seja o nó desse elemento constante.

O uso do elemento constante é justificado por ser de simples implementação, e pelos bons resultados obtidos em trabalhos de NAKAGUMA [69], LACHAT [34] e SILVA [79].

Outro ponto importante com relação ao elemento constante é que com ele pode-se considerar qualquer tipo de descontinuidade sem nenhum problema de singularidade. Por outro lado, são necessários muitos destes elementos para a obtenção de resultados mais precisos.

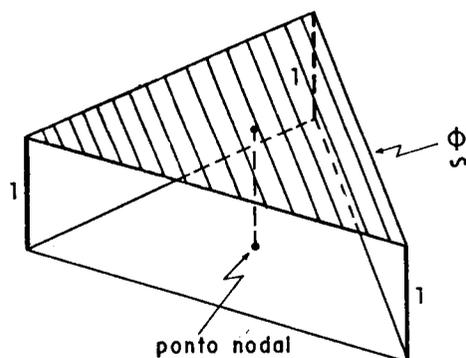


Fig. 3.3.5 - Elemento triangular constante - definição do ponto nodal e da função interpoladora.

A figura 3.3.5 mostra o elemento triangular constante, definindo o ponto nodal convencional e a função de interpolação.

A função de interpolação vale

$$\tilde{\phi} = \tilde{I} , \quad \dots(3.3.10)$$

e os deslocamentos e forças de superfície são dados por

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{\phi}^T(\xi_i) \tilde{U}^n = \tilde{I} \tilde{U}^n \\ \tilde{p} &= \tilde{\phi}^T(\xi_i) \tilde{P}^n = \tilde{I} \tilde{P}^n, \end{aligned} \quad \dots(3.3.11)$$

onde

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} , \quad \tilde{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} , \quad e \quad \dots(3.3.12a)$$

$$\tilde{U}^n = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} , \quad \tilde{P}^n = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} . \quad \dots(3.3.12b)$$

Os vetores \tilde{U}^n e \tilde{P}^n possuem os valores das componentes dos deslocamentos e forças nodais no centróide do elemento.

3.3.2.2 - Elemento Linear

O elemento linear permite melhor aproximação das funções no contorno. Não obstante, podem surgir alguns problemas com descontinuidades. Nesse caso, as variações

do elemento quanto à sua continuidade, fazem com que este se apresente como contínuo, descontínuo ou de transição (ver figura 3.3.6).

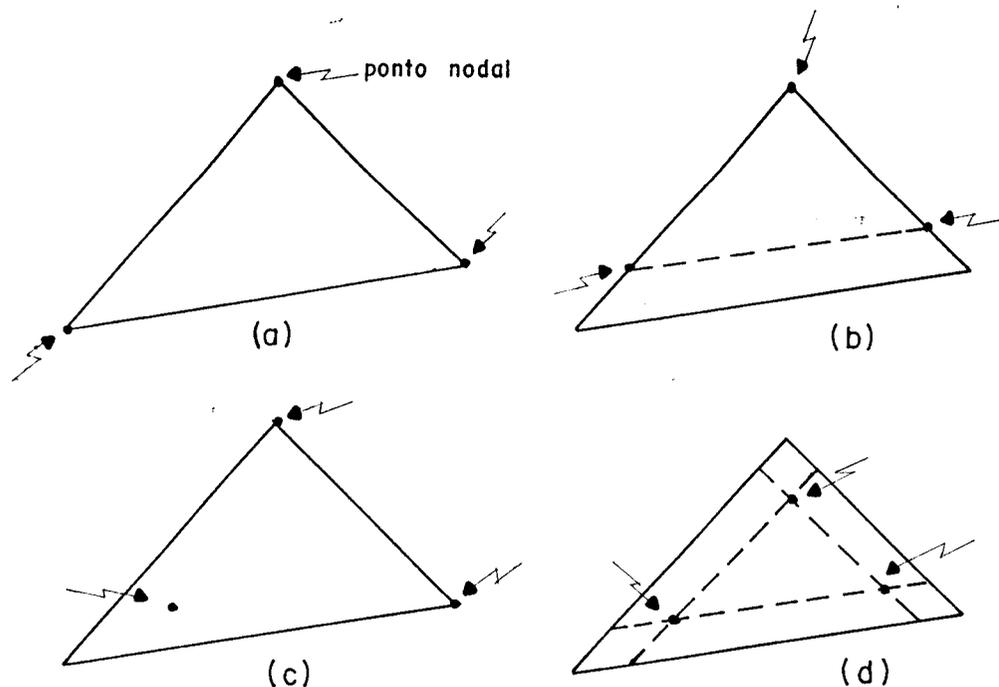


Fig. 3.3.6 - Elementos triangulares lineares: (a) contínuo; (b) e (c) de transição; e (d) descontínuo.

O elemento linear contínuo é aquele onde os pontos nodais coincidem com os nós geométricos. Não possibilita a inclusão de descontinuidade.

O elemento linear descontínuo é aquele onde os pontos nodais não coincidem com os nós geométricos. Permite a avaliação de descontinuidade.

O elemento linear de transição é aquele onde somente alguns pontos nodais coincidem com os nós geométricos. Como o próprio nome indica, é este elemento que une os elementos descontínuos com os contínuos, permitindo melhor avaliação das condições de contorno.

A) Elemento Triangular Linear Contínuo

O elemento triangular linear contínuo possui três pontos nodais, posicionados nos pontos vértices do triângulo.

A figura 3.3.7 mostra este elemento, definindo os pontos nodais (1, 2 e 3) e as funções de interpolação (ϕ^1 , ϕ^2 e ϕ^3).

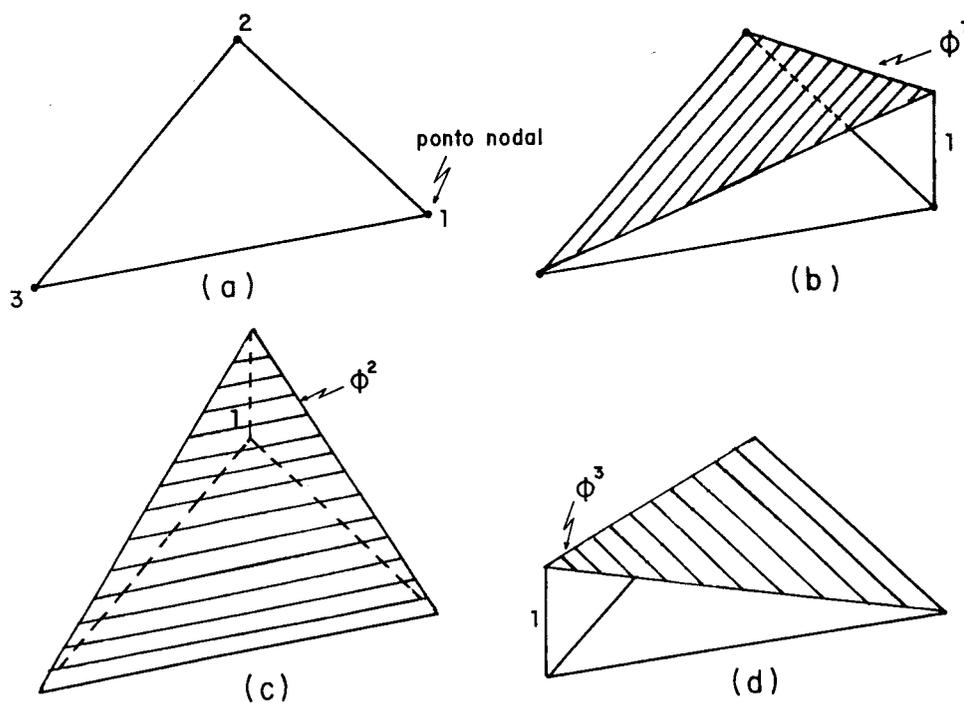


Fig. 3.3.7 - Elemento triangular linear contínuo: (a) definição dos pontos nodais 1, 2 e 3; (b) função de interpolação ϕ^1 ; (c) função de interpolação ϕ^2 ; e (d) função de interpolação ϕ^3 .

A função de interpolação ϕ^1 vale uma unidade quando o ponto interpolado for o ponto nodal "1". O mesmo ocorre para os pontos nodais "2" e "3".

As componentes da matriz ϕ valem

$$\begin{aligned}\phi^1 &= \xi_1 \\ \phi^2 &= \xi_2 \\ \phi^3 &= \xi_3\end{aligned}\quad \dots(3.3.13)$$

As equações (3.2.2) passam a ser

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \tilde{\phi}^T(\xi_i) \tilde{U}^n \\ \tilde{p} &= \tilde{\phi}^T(\xi_i) \tilde{P}^n\end{aligned}\quad \dots(3.3.14)$$

onde

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad e \quad \tilde{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}, \quad \dots(3.3.15a)$$

$$\tilde{\phi}^T(\xi_i) = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix}, \quad e \quad \dots(3.3.15b)$$

$$\tilde{U}^n = \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \\ U_3^3 \end{Bmatrix} \quad e \quad \tilde{P}^n = \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_3^1 \\ P_1^2 \\ P_2^2 \\ P_3^2 \\ P_1^3 \\ P_2^3 \\ P_3^3 \end{Bmatrix} \quad \dots(3.3.15c)$$

É importante ressaltar que o elemento triangular linear contínuo só é usado neste trabalho para as partes do contorno onde não há angulosidades e, portanto, são válidos os valores das componentes da matriz \tilde{C} dadas pela equação (3.2.9).

B) Elemento Triangular Linear Descontínuo

Este elemento possui três pontos nodais, agora posicionados no interior do elemento, e deslocados sobre a mediatriz dos lados opostos aos vértices do qual o ponto nodal é relativo.

Com o elemento triangular linear descontínuo a abordagem de descontinuidade é imediata, permitindo ainda, o emprego dos mesmos valores das componentes da matriz \tilde{C} dadas pela equação (3.2.9), pois o contorno no ponto considerado não tem angulosidade.

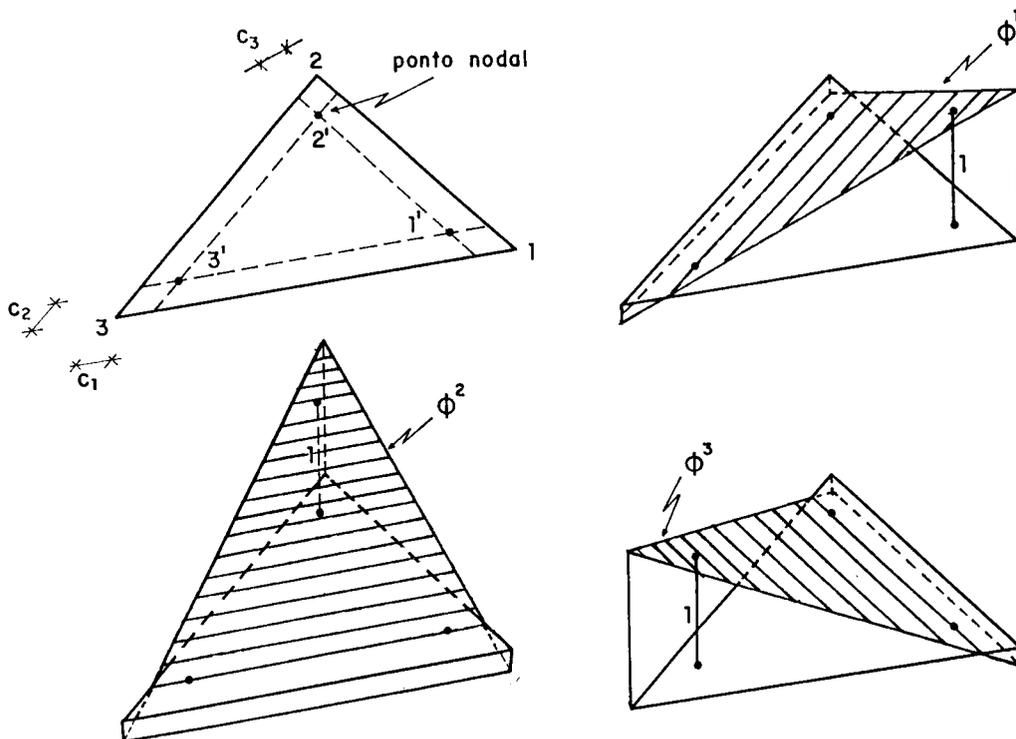


Fig. 3.3.8 - Elemento triangular linear descontínuo: a) definição dos pontos nodais; b) função de interpolação ϕ^1 ; c) função de interpolação ϕ^2 ; e d) função de interpolação ϕ^3 .

A figura 3.3.8 mostra o elemento linear descontínuo cujos pontos nodais $1'$, $2'$ e $3'$ são definidos dentro do elemento. São apresentadas, ainda, as funções de interpolação ϕ^1 , ϕ^2 e ϕ^3 .

A figura 3.3.8(a) caracteriza bem o elemento linear descontínuo. Os pontos nodais são deslocados para dentro do elemento de um valor c_1 , c_2 ou c_3 , frações das coordenadas homogêneas ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 respectivamente.

Os valores dos parâmetros c_1 , c_2 e c_3 foram adotados iguais a

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0,1625 \quad \dots(3.3.16)$$

Com esses valores os resultados foram satisfatórios, embora não se tenha feito testes para avaliar os valores ótimos destes parâmetros.

O trabalho de GIL RODRIGUEZ [76] traz um estudo de posicionamento dos pontos nodais em elementos unidimensionais lineares. Embora o emprego destes elementos seja para o bidimensional, o valor encontrado, próximo de 0,35, é um número que, guardando as devidas proporções, foi também usado no tridimensional com bons resultados.

As funções de interpolação, conforme figura 3.3.8(b)(c)(d), possuem o valor unitário no ponto nodal referente à coordenada homogênea, e valor nulo nos outros dois pontos nodais restantes.

A título de comparação com o elemento linear contínuo, as coordenadas homogêneas (já que os pontos nodais sofreram um deslocamento para dentro do elemento), sofrem uma pequena transformação a fim de expressar esta mudança dos pontos nodais.

A figura 3.3.9 mostra a definição de um novo sistema homogêneo, $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ e $\bar{\xi}_3$, e a relação entre este sistema e o homogêneo adotado até aqui.

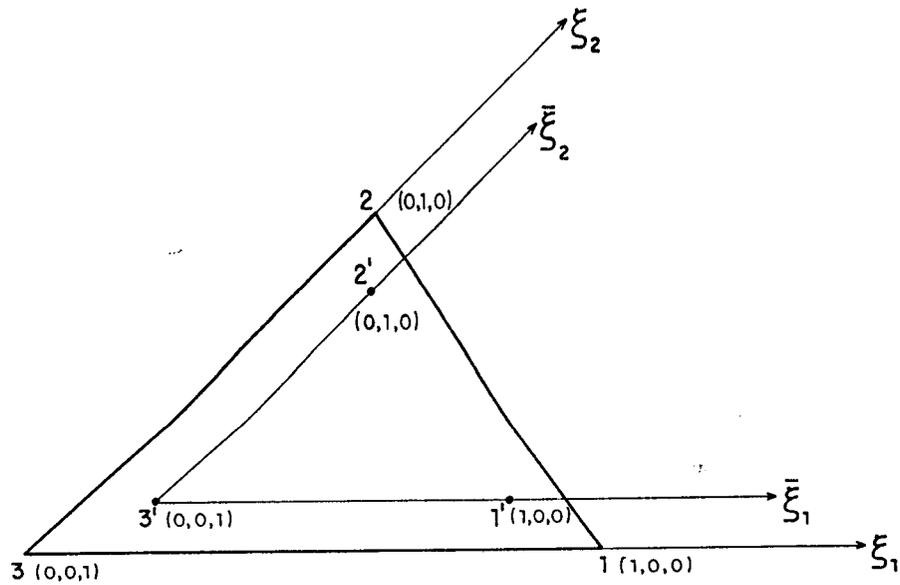


Fig. 3.3.9 - Elemento triangular descontínuo. Sistema de coordenadas homogêneas ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , e $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ e $\bar{\xi}_3$.

Definindo-se um novo parâmetro, c_4 , como sendo

$$c_4 = 1 - c_1 - c_2 - c_3 \quad \dots(3.3.17)$$

as novas coordenadas $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ e $\bar{\xi}_3$ ficam

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= \frac{\xi_1 - c_1}{c_4} \\ \bar{\xi}_2 &= \frac{\xi_2 - c_2}{c_4} \\ \bar{\xi}_3 &= \frac{\xi_3 - c_3}{c_4} \end{aligned} \quad \dots(3.3.18)$$

As equações (3.2.2) passam a ser

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{\phi}^T(\bar{\xi}_i) \tilde{U}^n \\ \tilde{p} &= \tilde{\phi}^T(\bar{\xi}_i) \tilde{P}^n \end{aligned} \quad \dots(3.3.19)$$

onde

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad e \quad \vec{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}, \quad \dots(3.3.20a)$$

$$\phi^T(\vec{\xi}_i) = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix}, \quad e \quad \dots(3.3.20b)$$

$$\vec{U}^n = \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \\ U_3^3 \end{Bmatrix} \quad e \quad \vec{P}^n = \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_3^1 \\ P_1^2 \\ P_2^2 \\ P_3^2 \\ P_1^3 \\ P_2^3 \\ P_3^3 \end{Bmatrix} \quad \dots(3.3.20c)$$

3.4 - INTEGRAÇÕES NUMÉRICAS

Neste ponto do trabalho, e para simplificação dos procedimentos apresentados daqui por diante, admite-se não existirem forças volumétricas. Não obstante, é importante observar que com essas forças de

representações analíticas conhecidas, torna-se fácil a transformação da integral de domínio para uma integral de contorno na equação (3.2.5), conforme apresentado em [82]. Com o uso dessa transformação encontra-se o vetor \underline{b} da equação (3.2.4) com um número bastante reduzido de operações aritméticas.

Na seção 3.2 chegou-se à expressão geral do sistema de equações analíticas (equação (3.2.10)) formado a partir das matrizes da equação (3.2.8), que por sua vez, correspondem às somatórias das integrais da equação (3.2.6).

Da equação (3.2.6) pode-se definir

$$\underline{g} = \int_{\Gamma_j} \underline{u}^*(S, Q) \underline{\phi}^T(Q) d\Gamma(Q), \quad \dots(3.4.1)$$

$$\underline{h} = \int_{\Gamma_j} \underline{p}^*(S, Q) \underline{\phi}^T(Q) d\Gamma(Q) \quad \dots(3.4.2)$$

As soluções analíticas de (3.4.1) e (3.4.2) são de difícil obtenção, dado à complexidade das funções a serem integradas. Para contornar este problema, lança-se mão do procedimento numérico de integração.

As integrais (3.4.1) e (3.4.2) são calculadas para dois casos distintos: quando os pontos S e Q pertencem a elementos diferentes e quando pertencem ao mesmo elemento.

No caso em que os pontos S e Q pertencem a elementos diferentes, a integração numérica para elementos triangulares, dada por HAMMER et alii [83], dá bons resultados. Este procedimento pode ser utilizado porque a variável "r", que mede a distância entre os dois pontos possui valores não pequenos. A integração numérica é feita com relação às coordenadas homogêneas. Utilizando-se o Jacobiano de transformação, |G|, a equação (3.4.1) torna-se

$$\tilde{g} = |G| \int_0^1 \left[\int_0^{1-\xi_2} f_g(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 \right] d\xi_2 \dots (3.4.3)$$

$$\tilde{g} = |G| \sum_{i=1}^n f_g(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i) w_i \dots (3.4.4)$$

onde $f_g(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ representa o integrando da integral (3.4.1).

Procedendo-se da mesma forma, agora para a equação (3.4.2), tem-se

$$\tilde{h} = |G| \sum_{i=1}^n f_h(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i) w_i \dots (3.4.5)$$

No caso em que os pontos S e Q pertencem ao mesmo elemento, a integração numérica usando Hammer não permite uma boa aproximação. Isto se deve ao fato de "r" ser pequeno e haver singularidades, o que indica a necessidade de procedimentos alternativos ou mesmo um número maior de pontos de integração (a integração de Hammer é feita apenas com 9 pontos). Um artifício utilizado para a obtenção de melhores resultados para as integrais (3.4.1) e (3.4.2) consiste na utilização de coordenadas polares que integrem analiticamente em r o termo considerado, transformando-o em uma integral apenas em θ (o que pode ser feita numericamente). A figura 3.4.1 mostra o esquema de integração mista quando o ponto singular P está no interior do elemento.

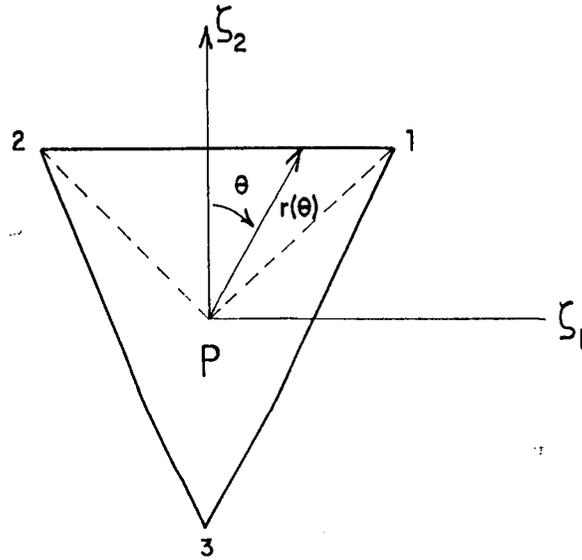


Fig.: 3.4.1 - Esquema de integração mista

Substituindo-se a diferencial do contorno por

$$d\Gamma = r dr d\theta, \quad \dots(3.4.6)$$

as integrais (3.4.1) e (3.4.2) tornam-se

$$\tilde{g} = \int_{\theta} \int_r \tilde{u}^*(S, Q) \tilde{\phi}^T(Q) r dr d\theta \quad \dots(3.4.7)$$

$$\tilde{h} = \int_{\theta} \int_r \tilde{p}^*(S, Q) \tilde{\phi}^T(Q) r dr d\theta \quad \dots(3.4.8)$$

A idéia é efetuar a integração em r analiticamente, e substituir a integração em θ por outra sobre o contorno do elemento triangular plano, considerando-se este último como sendo formado por três

elementos lineares (os três lados do triângulo, conforme figura 3.4.2).

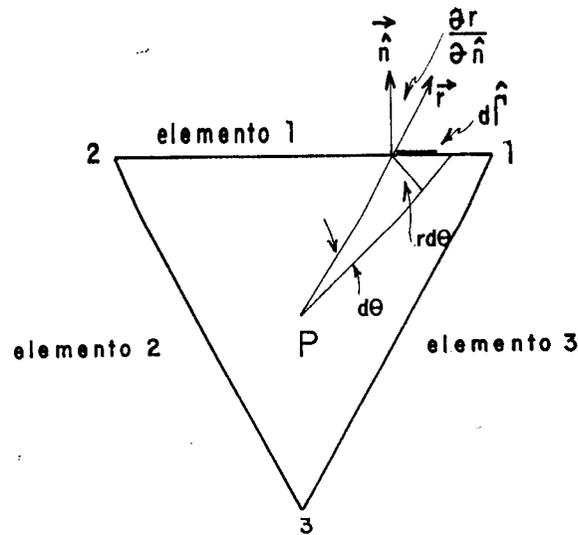


Fig.: 3.4.2 - Integração em um ponto interno considerando o elemento triangular formado por três elementos lineares.

Este procedimento é factível; para seu equacionamento substitui-se a diferencial de θ por

$$d\hat{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial \hat{\eta}} = r d\theta, \quad \dots(3.4.9)$$

onde $d\hat{\Gamma}$ e $\frac{\partial r}{\partial \hat{\eta}}$

são relativos aos elementos lineares que formam o elemento triangular. É um procedimento que transforma a integração sobre o elemento triangular em uma integral sobre um "contorno fictício" deste elemento.

Efetuando-se a integração em θ para as integrais (3.4.7) e (3.4.8), surgem as funções f_g e f_h , respectivamente. Estas equações passam a ser

$$\tilde{g} = \int_{\Theta} f_g \, d\Theta \quad \dots(3.4.10)$$

e

$$\tilde{h} = \int_{\Theta} f_h \, d\Theta \quad \dots(3.4.11)$$

Substituindo-se (3.4.9) em (3.4.10) e (3.4.11), obtem-se

$$\tilde{g} = \int_{\hat{\Gamma}} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \hat{\eta}} f_g \, d\hat{\Gamma} \quad \dots(3.4.12)$$

$$\tilde{h} = \int_{\hat{\Gamma}} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \hat{\eta}} f_h \, d\hat{\Gamma} \quad \dots(3.4.13)$$

onde as integrais são calculadas numericamente através da quadratura Gaussiana.

Simbolizando o que foi dito, temos

$$\tilde{g} = |J| \sum_{i=1}^n \bar{f}_g(r_i) w_i \quad \dots(3.4.14)$$

$$\tilde{h} = |J| \sum_{i=1}^n \bar{f}_h(r_i) w_i \quad \dots(3.4.15)$$

onde \bar{f}_g e \bar{f}_h representam os integrandos dos termos (3.4.12) e (3.4.13), respectivamente, e $|J|$ o Jacobiano da transformação de coordenadas do elemento linear.

Outro procedimento interessante é o de se encontrar um elemento quadrilátero equivalente ao triangular. No elemento quadrilátero a integração numérica

pode ser efetuada através da quadratura Gaussiana, que utiliza maior número de pontos de integração que o procedimento de Hammer, permitindo assim melhor aproximação do valor final das integrais. Tal procedimento foi utilizado em SILVA [79].

3.5 - DETERMINAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS E TENSÕES EM PONTOS DO DOMÍNIO

A identidade Somigliana (equação (2.5.4)) fornece os valores dos deslocamentos em pontos do domínio. Esta equação depende dos valores de \underline{u} e \underline{p} no contorno, (que admitem-se conhecidos nesta fase do cálculo) e também da discretização do contorno feita através de elementos, o que já foi discutido nos itens 3.2 e 3.3. Assim sendo, (2.5.4) torna-se

$$\begin{aligned} \underline{u}(s) = & - \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \underline{p}^*(s, Q) \underline{\phi}^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \underline{u}^n(Q) + \\ & + \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \underline{u}^*(s, Q) \underline{\phi}^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \underline{p}^n(Q) + \\ & + \sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega_m} \underline{u}^*(s, Q) \underline{\phi}_c^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \underline{B}^n(Q). \end{aligned} \quad \dots(3.5.1)$$

As integrais em (3.5.1) são calculadas através de integração numérica não singular, semelhante ao procedimento usado para o caso onde S e Q pertencem a elementos diferentes, apresentado no item 3.4 (valem, então, as expressões (3.4.4) e (3.4.5) observando que,

agora, s é um ponto do domínio).

Como resposta a um ponto s tem-se o vetor

$$\underline{u}(s) = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \dots(3.5.2)$$

O mesmo tratamento dispensado à equação dos deslocamentos para pontos no domínio é também empregado na equação (2.5.5), das tensões para pontos no domínio, o que resulta em

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(s) = & - \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \underline{S}^*(s, Q) \underline{\phi}^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \underline{U}^n(Q) + \\ & + \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \underline{D}^*(s, Q) \underline{\phi}^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \underline{P}^n(Q) + \\ & + \sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega_m} \underline{D}_c^*(s, q) \underline{\phi}_c^T(q) d\Gamma(q) \right] \underline{B}^n(q). \end{aligned} \quad \dots(3.5.3)$$

As integrais em (3.5.3) são resolvidas numericamente através dos pontos de Hammer, semelhante ao processo que resultou na equação (3.4.4). Observando que os tensores agora são \underline{S}^* e \underline{D}^* ,

$$\tilde{S}^*(s, Q) = \begin{bmatrix} S_{111}^* & S_{112}^* & S_{113}^* \\ S_{121}^* & S_{122}^* & S_{123}^* \\ S_{131}^* & S_{132}^* & S_{133}^* \\ S_{221}^* & S_{222}^* & S_{223}^* \\ S_{231}^* & S_{232}^* & S_{233}^* \\ S_{331}^* & S_{332}^* & S_{333}^* \end{bmatrix} \dots (3.5.4)$$

$$\tilde{D}^*(s, Q) = \begin{bmatrix} D_{111}^* & D_{112}^* & D_{113}^* \\ D_{121}^* & D_{122}^* & D_{123}^* \\ D_{131}^* & D_{132}^* & D_{133}^* \\ D_{221}^* & D_{222}^* & D_{223}^* \\ D_{231}^* & D_{232}^* & D_{233}^* \\ D_{331}^* & D_{332}^* & D_{333}^* \end{bmatrix} \dots (3.5.5)$$

A resposta para um ponto s , vindo da equação (3.5.3), é

$$\tilde{\sigma}(s) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \dots (3.5.6)$$

3.6 - DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES EM PONTOS DO CONTORNO

As tensões em pontos do contorno podem ser obtidas através da equação (3.5.3) com alguma manipulação algébrica. Entretanto, os núcleos das integrais apresentam singularidades do tipo $1/r^n$, motivo pelo qual este procedimento é evitado (n está diretamente ligado à solução fundamental adotada).

A maneira mais simples de se determinar as tensões em pontos do contorno consiste na adoção de um sistema local de coordenadas no ponto em questão, e consequente utilização de valores de deslocamentos e forças de superfície já conhecidos para o contorno (procedimento apresentado em LACHAT [34], BREBBIA et alii [81] e DOMINGUEZ [78]). Esse sistema cartesiano auxiliar de coordenadas locais, denotado como x'_1 , x'_2 e x'_3 , é definido tendo um dos planos tangente ao contorno no ponto S e um dos eixos normal ao mesmo (figura 3.6.1).

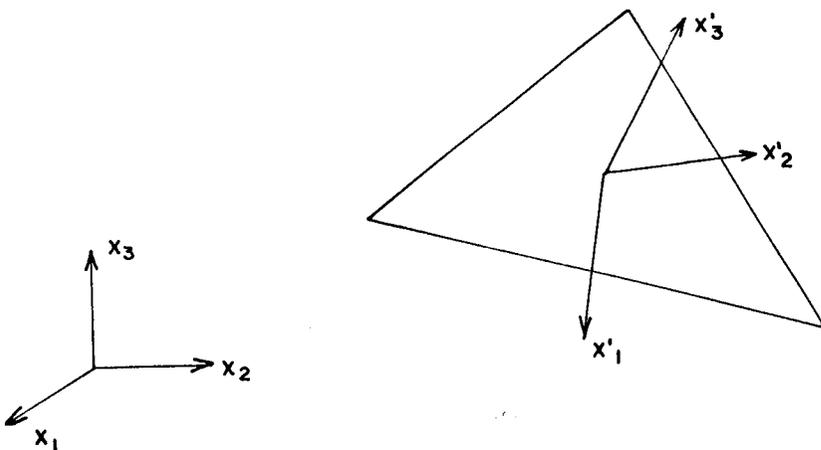


Fig.: 3.6.1 - Sistema local de coordenadas sobre um elemento.

Adotando-se este sistema de coordenadas e

utilizando-se as equações (2.3.3) e (2.3.2), pode-se dizer que

$$\begin{aligned}\sigma'_{13} &= \sigma'_{31} = p'_1 \\ \sigma'_{23} &= \sigma'_{32} = p'_2 \\ \sigma'_{33} &= \sigma'_{33} = p'_3\end{aligned}\quad \dots(3.6.1)$$

A obtenção das componentes de deslocamentos e das forças de superfície relativas ao sistema local vem das equações (3.2.2) rotacionadas, ou seja,

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{u}} &= \underline{\tilde{R}}^T \underline{\tilde{\phi}}^T \underline{U}^n \\ \underline{\tilde{p}} &= \underline{\tilde{R}}^T \underline{\tilde{\phi}}^T \underline{P}^n\end{aligned}\quad \dots(3.6.2)$$

onde $\underline{\tilde{R}}$ é a matriz de transformação do sistema global para o local.

As demais componentes do tensor das tensões podem ser obtidas pela lei de Hooke, equação (2.3.5),

$$\begin{aligned}\sigma'_{12} &= \sigma'_{21} = 2G\varepsilon'_{12} \\ \sigma'_{11} &= \frac{1}{1-\nu} \left[\nu\sigma'_{33} + 2G(\varepsilon'_{11} + \nu\varepsilon'_{22}) \right] \\ \sigma'_{22} &= \frac{1}{1-\nu} \left[\nu\sigma'_{33} + 2G(\varepsilon'_{22} + \nu\varepsilon'_{11}) \right]\end{aligned}\quad \dots(3.6.3)$$

onde ε'_{ij} são dadas pela equação (2.3.4).

3.7 - SUB-REGIÕES

Toda a teoria apresentada até este ponto do trabalho é aplicável apenas a corpos tridimensionais, elásticos e homogêneos. Para corpos compostos por zonas possuindo diferentes características elásticas este desenvolvimento não permite a sua análise. Porém, se o corpo possui sub-regiões homogêneas, a teoria é aplicada para cada uma separadamente, embora estas sejam ligadas nas interfaces.

Para melhor entendimento do procedimento que permite a análise de corpos formados por sub-regiões elásticas com diferentes características, considere-se a figura 3.7.1, que apresenta duas sub-regiões, Ω_1 e Ω_2 . A sub-região Ω_1 possui os contornos Γ_1 , dito externo, e Γ_{12} , dito interno, que é a interface com a sub-região Ω_2 . A sub-região Ω_2 , por sua vez, é definida pelos contornos Γ_{21} , interface com a sub-região Ω_1 , e Γ_2 , dito externo.

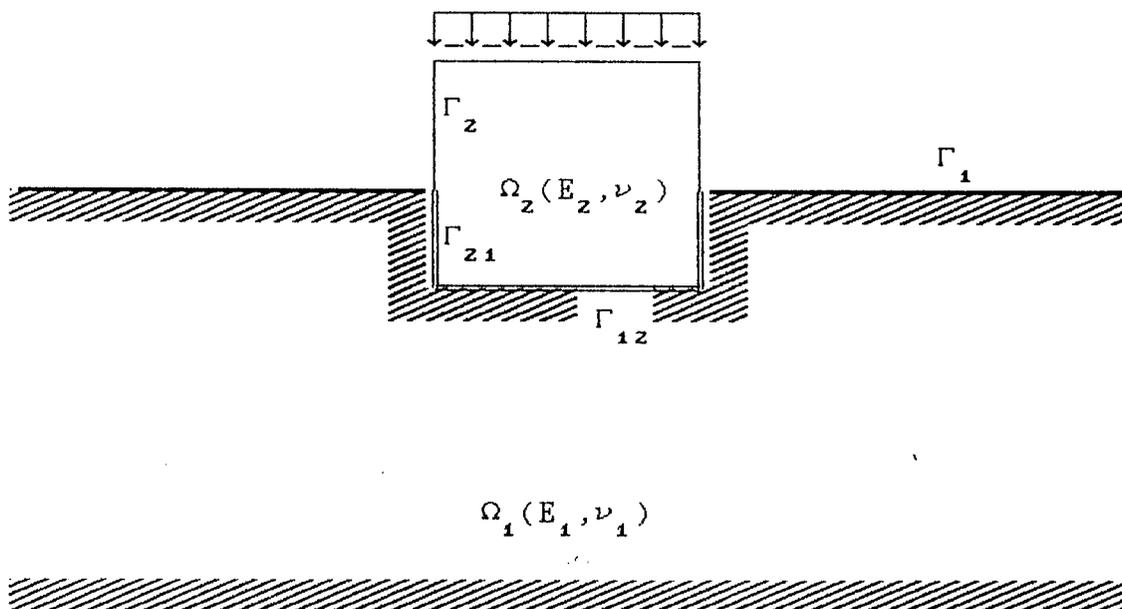


Fig. 3.7.1 - Problema elástico composto por duas sub-regiões homogêneas com diferentes características: $\Omega_1(E_1, \nu_1)$ e $\Omega_2(E_2, \nu_2)$.

Para cada sub-região da figura 3.7.1 é válida a equação (3.2.8), desconsiderando desta o termo correspondente às forças volumétricas por simplicidade. Assim, para a sub-região Ω_1 pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}^1 & \tilde{H}^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}^1 & \tilde{G}^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{p}^1 \\ \tilde{p}^{12} \end{Bmatrix} \quad \dots(3.7.1)$$

Para a sub-região Ω_2 pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}^2 & \tilde{H}^{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}^2 \\ \tilde{u}^{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}^2 & \tilde{G}^{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{p}^2 \\ \tilde{p}^{21} \end{Bmatrix} \quad \dots(3.7.2)$$

Em (3.7.1) e (3.7.2) os termos \tilde{u}^1 , \tilde{p}^1 , \tilde{u}^2 e \tilde{p}^2 representam os deslocamentos e forças de superfície nos contornos externos Γ_1 e Γ_2 das sub-regiões Ω_1 e Ω_2 , respectivamente. Já os termos \tilde{u}^{12} , \tilde{p}^{12} , \tilde{u}^{21} e \tilde{p}^{21} representam os deslocamentos e forças de superfície nos contornos internos Γ_{12} e Γ_{21} , ou seja, na interface das sub-regiões Ω_1 e Ω_2 .

Os deslocamentos na interface das duas sub-regiões devem obedecer a condição de continuidade, o que implica dizer que

$$\tilde{u}^{12} = \tilde{u}^{21} \quad \dots(3.7.3)$$

Já as forças de superfície na interface

devem obedecer a condição de equilíbrio, ou seja,

$$\tilde{p}^{12} = - \tilde{p}^{21} \quad \dots(3.7.4)$$

Substituindo-se as igualdades (3.7.3) e (3.7.4) em (3.7.2), e reunindo este resultado à expressão (3.7.1), no intuito de montar uma só matriz para o corpo em estudo, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}^1 & \tilde{H}^{12} & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \tilde{H}^{21} & \tilde{H}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^{12} \\ \tilde{u}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}^1 & \tilde{G}^{12} & \tilde{O} \\ \tilde{O} & -\tilde{G}^{21} & \tilde{G}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{p}^1 \\ \tilde{p}^{12} \\ \tilde{p}^2 \end{Bmatrix} \quad \dots(3.7.5)$$

Passando as parcelas das forças de superfície na interface, que são incógnitas, para o primeiro termo de (3.7.5), temos

$$\begin{array}{c} \text{SUB-REGIÃO } \tilde{\Omega}_1 \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \tilde{H}^1 & \tilde{H}^{12} & -\tilde{G}^{12} & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \tilde{H}^{21} & \tilde{G}^{21} & \tilde{H}^2 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^{12} \\ \tilde{p}^{12} \\ \tilde{u}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}^1 & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \tilde{G}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{p}^1 \\ \tilde{p}^2 \end{Bmatrix} \\ \text{SUB-REGIÃO } \tilde{\Omega}_2 \end{array} \quad \dots(3.7.6)$$

É importante notar em (3.7.6) as parcelas identificadas para cada sub-região (as linhas) e para cada contorno (as colunas).

Aplicando-se as condições prescritas para os contornos externos Γ_1 e Γ_2 , e efetuando-se as trocas entre as matrizes \underline{H} e \underline{G} necessárias, chega-se ao sistema de equações lineares dado por (3.2.10 repetida).

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{F} \quad \dots(3.2.10 \text{ repetida})$$

A matriz \underline{A} em (3.2.10 repetida) tem ordem $N \times N$; por sua vez

$$N = 3 (Nn_e + 2 Nn_i) \quad \dots(3.7.7)$$

onde

Nn_e representa o número de pontos nodais nos contornos externos; e

Nn_i representa o número de pontos nodais na interface das regiões e que é multiplicado por 2, face à sua incidência nas duas sub-regiões adjacentes.

A divisão do corpo em sub-regiões não permite apenas a análise de corpos elásticos formados por zonas homogêneas; este procedimento pode ser usado também em meios homogêneos como uma maneira de melhorar a eficiência computacional, já que dá à matriz \underline{A} em (3.2.10 repetida), características de matriz em banda. Isto pode ser notado em (3.7.6), evidenciado na figura 3.7.2. A extensão deste procedimento para mais sub-regiões é imediata (ver DOMINGUEZ & BREBBIA [78]).

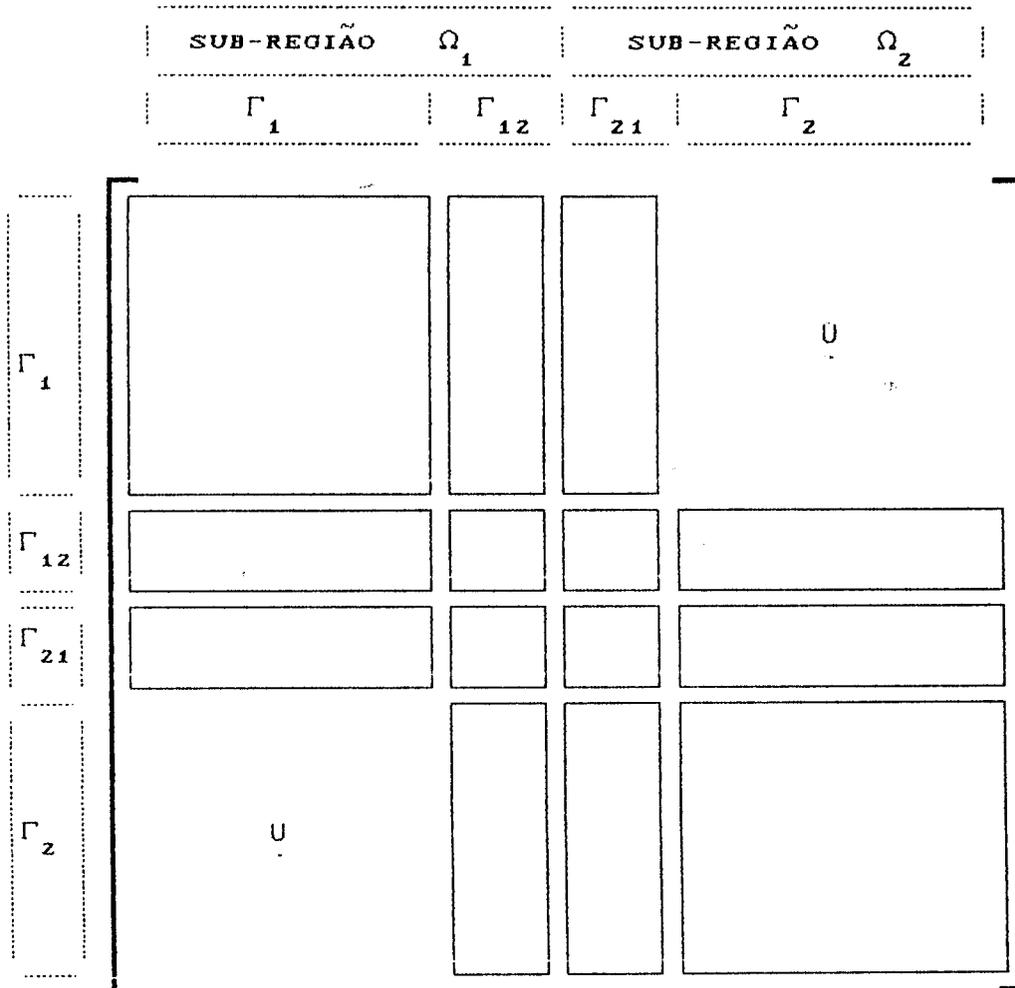


Fig. 3.7.2 - Matriz A com características de banda.

O procedimento apresentado neste item transforma a matriz dos coeficientes do sistema de equações, anteriormente cheia e não simétrica, em uma matriz com características em banda, mas ainda não simétrica.

Quando o corpo é composto por várias sub-regiões, a matriz dos coeficientes do sistema de equações é formada por vários blocos nulos ou não. Com um sistema de equações desta natureza faz-se necessário um algoritmo de solução adequado, que tire partido desses blocos nulos. O algoritmo desenvolvido por CROTTY [84]

apresenta-se como o mais indicado para esse tipo de sistema. Este algoritmo utiliza a eliminação Gaussiana e foi desenvolvido para aplicação do método dos elementos de contorno a problemas elásticos homogêneos ou formado por partes homogêneas.

CAPÍTULO 4 - SISTEMA COMPUTACIONAL

4.1 - INTRODUÇÃO

A proposta deste trabalho é a de utilizar uma formulação adequada para analisar corpos tridimensionais elástico-lineares, inseridos no espaço semi-infinito. Para tanto, foram apresentadas no capítulo 2 as equações que governam tais problemas, definindo-se os espaços de estudo e apresentando-se as soluções para problemas conhecidos. O cálculo analítico das variáveis das equações apresentadas é complexo, tornando adequado o uso de métodos numéricos. No particular deste trabalho, o método escolhido foi o método dos elementos de contorno, cuja formulação foi dada no capítulo 3.

Para a implementação do método dos elementos de contorno é necessária a utilização de uma importante ferramenta - o computador. Por isso, é fundamental o desenvolvimento de um programa computacional.

Neste capítulo, será apresentado um sistema computacional aglutinando programas baseados em algoritmos que utilizam as soluções fundamentais para o espaço infinito (Kelvin) e para o espaço semi-infinito (Mindlin). Esses algoritmos serão empregados somente à uma única região homogênea.

Os códigos, gerados em linguagem Pascal, utilizam o ambiente Turbo Pascal direcionados para a linha de computadores IBM-PC/XT/AT ou compatíveis.

O uso de micro-computadores se justifica pelo fato deste tipo de computador ter grande popularidade e, nos últimos anos, ter aumentado sua capacidade de memória de massa como também de desempenho (velocidade de processamento e acesso a periféricos) e, portanto, ser

adequado a escritórios de porte pequeno ou médio.

A utilização de micro-computadores traz vantagens e limitações. As vantagens relacionam-se à manipulação de tela; por exemplo, com o uso de equipamentos cada dia mais sofisticados é possível criar pré e pós-processadores gráficos (tônica natural dos trabalhos futuros). As limitações dizem respeito à memória central; existem micros com memória central expandida, porém o sistema operacional mais utilizado só consegue gerenciar 640Kb. Esta dificuldade, porém, fica cada dia menos importante; já existem software básicos que gerenciam memórias maiores que 640Kb para essa linha de computadores, necessitando, porém, de uma configuração mínima, o que ainda não é tão comum.

4.2 - DESCRIÇÃO GLOBAL DO SISTEMA

Estabeleceu-se que o desenvolvimento do sistema computacional, nos seus diversos níveis, se daria em módulos. Isto permite uma forma estruturada do sistema, com sub-rotinas específicas para cada tipo de tarefa.

O sistema computacional implementado é composto por três módulos principais: um pré-processador de dados; um módulo de programas específicos para cálculo de deslocamentos, forças de superfície e tensões e um módulo de listagens de resultados. Esses módulos são mostrados no diagrama da figura 4.2.1.

Cada uma das rotinas principais tem autonomia de execução em relação às outras. São módulos separados intercambiando dados através de arquivos armazenados em memória de massa.

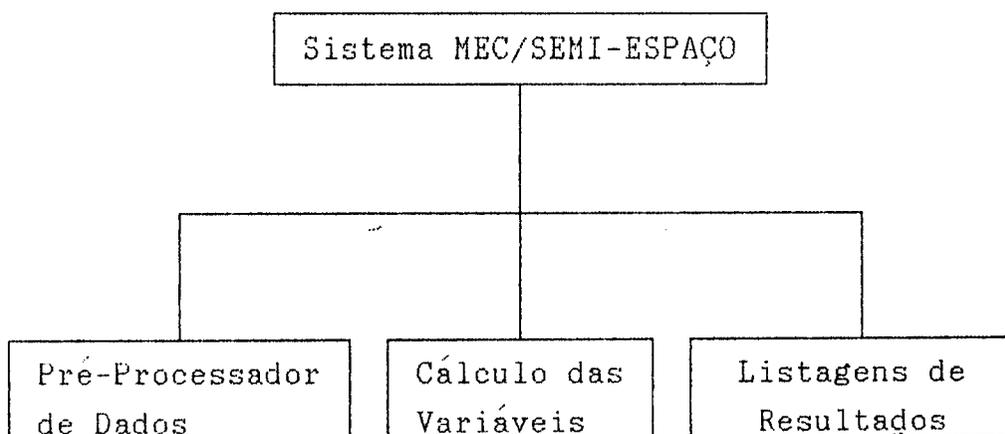


Fig. 4.2.1 - Esquema global do sistema computacional

Nos itens seguintes deste capítulo serão apresentados os diversos módulos que compõem o sistema, partindo dos três módulos principais.

4.3 - O MÓDULO PRINCIPAL DE CÁLCULO

O módulo principal de cálculo compreende os programas para cálculo das seguintes variáveis:

- deslocamentos e forças de superfície no contorno, utilizando as soluções fundamentais de Kelvin e Mindlin;
- deslocamentos e tensões em pontos do domínio utilizando os tensores de Kelvin e Mindlin.

A figura 4.3.1 mostra o esquema geral da rotina de cálculo das variáveis.

Seguindo-se o desenvolvimento do sistema em módulos, pode-se separar o módulo de cálculo das variáveis em dois outros: um para as variáveis em pontos no contorno e outro para as variáveis em pontos no domínio.

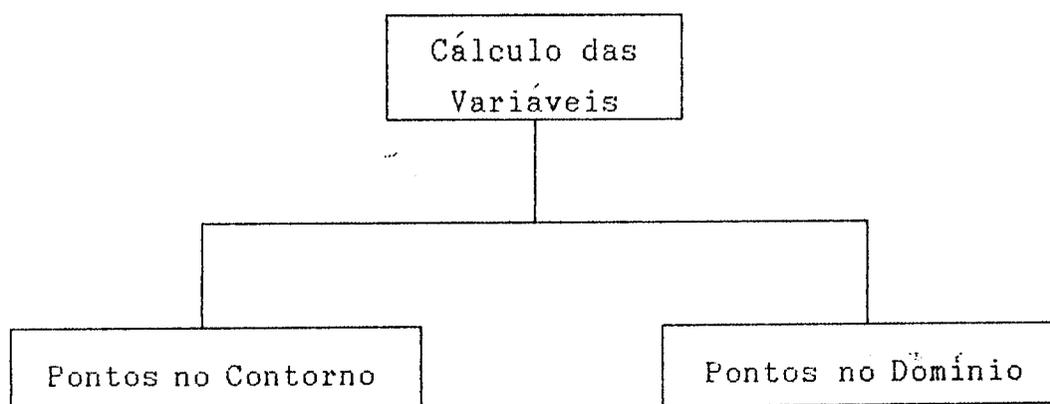


Fig. 4.3.1-Esquema geral do módulo de cálculo das variáveis

A divisão do módulo das rotinas de cálculo em pontos no contorno e em pontos do domínio é interessante, pois em uma primeira fase de processamento calculam-se os valores das variáveis em pontos do contorno. Com estes, a liberdade para a análise no domínio é total. A análise pode ser feita para um ponto, para uma linha ou para um determinado plano, basta que sejam dados estes parâmetros de entrada para o segundo módulo.

4.3.1 - Módulo de Cálculo para Pontos no Contorno

Este módulo é destinado ao cálculo das variáveis para pontos do contorno. Para isto, são implementadas as equações do capítulo 3, ou seja, a aplicação das equações integrais de contorno tendo como pontos de colocação aqueles definidos no contorno.

As variáveis no contorno, deslocamentos e forças de superfície aqui calculadas, são por si só respostas procuradas e, permitem ainda, a avaliação de deslocamentos e tensões em pontos do domínio.

A figura 4.3.2 mostra o esquema do módulo de

cálculo das variáveis para pontos definidos no contorno.

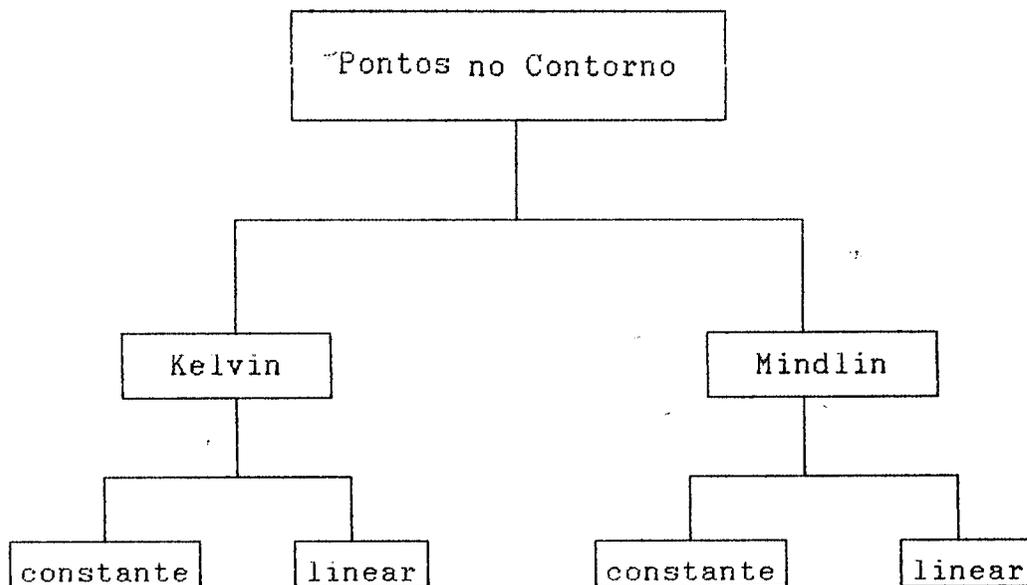


Fig. 4.3.2 - Esquema do módulo de cálculo para pontos no contorno

Os programas desenvolvidos utilizam as soluções fundamentais de Kelvin e Mindlin, e seguem uma mesma sequência de chamada de sub-rotinas, já amplamente apresentada na literatura especializada. Para cada solução fundamental foram implementados os elementos constante e linear descontínuo. As modificações para a utilização de um ou outro tipo serão comentadas convenientemente. A figura 4.3.3 mostra a sequência de chamada das sub-rotinas.

O código gerado é do tipo top-down, estruturado em procedimentos (em Pascal, "procedures" e "functions"), conforme figura 4.3.3. Esses procedimentos são distribuídos em quatro níveis, dependendo da origem de chamada (por exemplo, os procedimentos do segundo nível são chamados a partir do procedimento principal, e assim por diante) de tal sorte que o procedimento final da cadeia executa tarefas simples e específicas.

Nos sub-itens seguintes serão discutidos os procedimentos apresentados na figura 4.3.3.

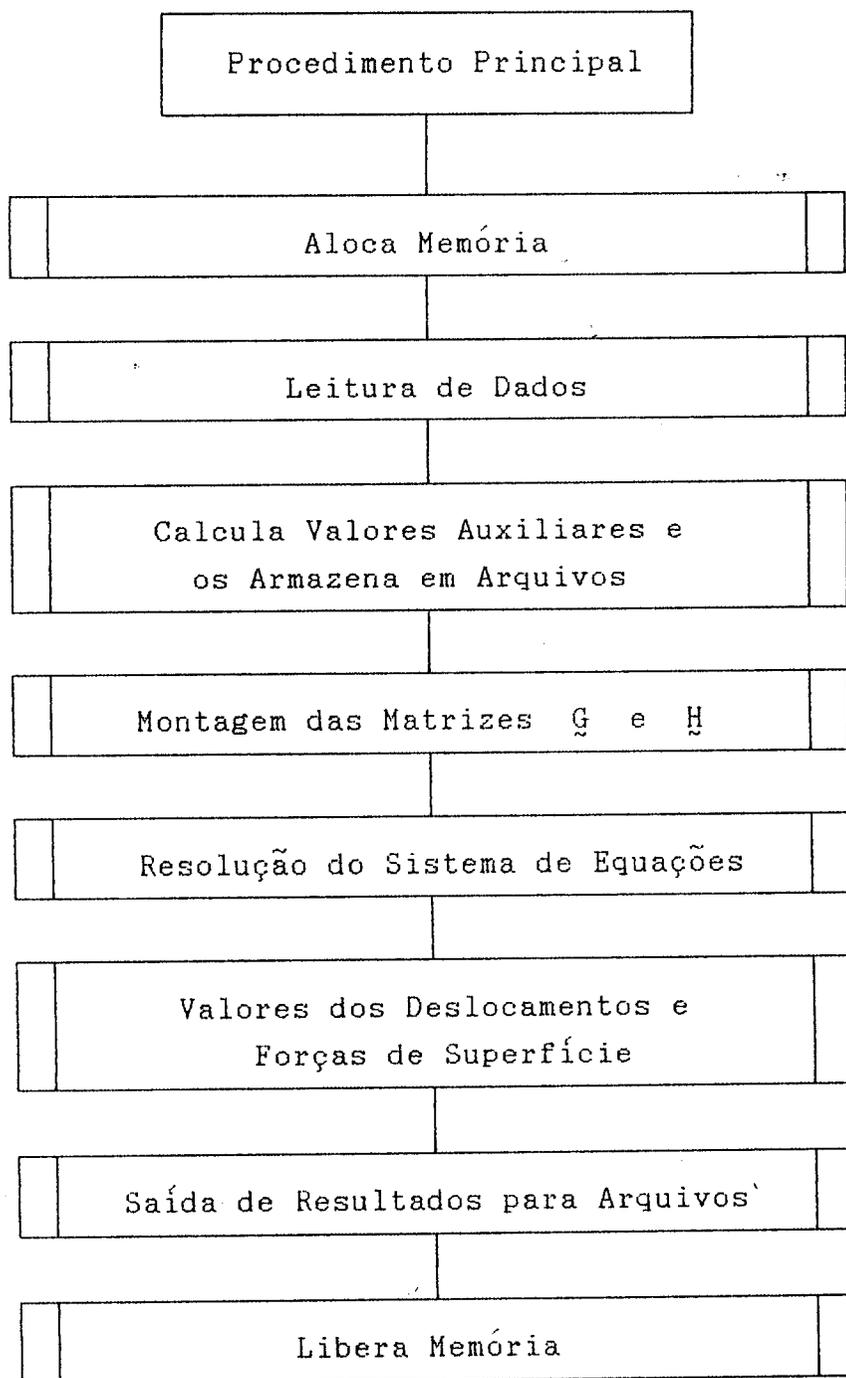


Fig. 4.3.3 - Sequência de chamada das sub-rotinas para o cálculo de deslocamentos e forças de superfície no contorno

4.3.1.1 - Procedimento: Aloca Memória

Nesta sub-rotina são inicializadas as variáveis estáticas e dinâmicas (ponteiros). O uso de ponteiros é necessário para permitir a definição de variáveis indexadas com mais de 64Kb de memória.

Na área de definição de constantes de cada programa (Kelvin, constante e linear descontínuo; Mindlin, constante e linear descontínuo), estão fixados os limites máximos para os números de elementos e de nós no contorno.

Para a análise com a solução fundamental de Kelvin foi estabelecido:

- Elemento constante:
 - 180 elementos;
 - 180 nós no contorno.
- Elemento linear descontínuo:
 - 60 elementos;
 - 180 nós no contorno.

Para a análise com a solução fundamental de Mindlin foi estabelecido:

- Elemento constante:
 - 170 elementos;
 - 170 nós no contorno.
- Elemento linear descontínuo:
 - 56 elementos;
 - 168 nós no contorno.

4.3.1.2 - Procedimento: Leitura de Dados

Trata-se de um procedimento que recebe de arquivos os dados iniciais correspondentes às características do material, à geometria e às condições de contorno do problema.

Com relação às características do material são lidos os valores:

- módulo de elasticidade;

- coeficiente de Poisson.

Quanto à geometria são lidas:

- quantidade de nós no contorno;
- quantidade de elementos;
- coordenadas x_1 , x_2 e x_3 dos nós no contorno;
- conectividade dos elementos;

Quanto às condições de contorno, são lidos os valores prescritos de:

- deslocamentos (código 0);
- forças de superfície (código 1).

Os dados descritos acima são lidos de um único arquivo e obedecem à sequência apresentada. O arquivo possui extensão ".DAT" (por exemplo, EXEMP01.DAT), é do tipo "TEXT" (em forma de listagem) e independe da forma que foi gerado: automaticamente por um pré-processador ou digitado diretamente em qualquer editor.

4.3.1.3 - Procedimento: Valores Auxiliares

Este procedimento calcula, a partir dos dados da geometria, os seguintes valores:

- coordenadas cartesianas dos sete pontos de integração (integração por Hammer) para cada elemento triangular;
- coordenadas cartesianas dos 12 pontos de integração (integração por Gauss) para os três elementos lineares que formam cada elemento triangular;
- área de cada elemento (para o Jacobiano de transformação de coordenadas - expressão (3.3.8));
- componentes do vetor normal de cada elemento triangular - expressão (3.3.9);
- componentes do vetor normal para cada elemento linear auxiliar - expressão

(3.3.9);

- coordenadas dos pontos campo. No caso do elemento triangular do tipo constante, o ponto é o centróide do triângulo (figura 3.3.5); para o elemento do tipo linear descontínuo, são os nós dos vértices deslocados para o interior do mesmo (figura 3.3.8).

Os valores auxiliares calculados neste procedimento serão utilizados nas integrações numéricas para pontos no contorno e no domínio (módulo para pontos no domínio). Assim, esses valores são armazenados em arquivo cuja extensão é ".BAS" (arquivo de parâmetros básicos).

4.3.1.4 - Procedimento: Montagem das Matrizes \underline{G} e \underline{H}

Este procedimento por si só representa o método dos elementos de contorno. É nele que a expressão (3.2.6) é calculada para os "N" pontos nodais, com o auxílio de dois outros procedimentos:

- Integração sobre Elemento Singular;
- Integração sobre Elemento Não Singular.

Estes procedimentos utilizam os valores auxiliares, apresentados no item anterior, e implementam as equações do item 3.4.

Para a integração sobre o elemento singular foi adotada a quadratura Gaussiana, utilizando-se doze pontos de integração. Esses pontos são definidos sobre os elementos lineares apresentados como sendo os lados do triângulo, conforme expressões (3.4.12) e (3.4.13).

A integração sobre elementos não singulares é implementada utilizando-se os pontos de Hammer.

A integração sobre elementos singulares, quando estes são do tipo constante, é extremamente simples, visto que ϕ^T é igual à matriz identidade (expressão

(3.3.10)). Já para o elemento linear descontínuo, alguns cuidados devem ser tomados. Considerando-se a disposição dos vetores nodais \underline{U}^n e \underline{P}^n (expressão (3.3.20c)) e as funções de interpolação ϕ^T (expressão (3.3.20b)) as matrizes $\underline{u}^* \phi^T$ e $\underline{p}^* \phi^T$ (expressões (3.4.1) e (3.4.2), respectivamente) têm a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} u_{11}^* \bar{\xi}_1 & u_{12}^* \bar{\xi}_1 & u_{13}^* \bar{\xi}_1 & u_{11}^* \bar{\xi}_2 & u_{12}^* \bar{\xi}_2 & u_{13}^* \bar{\xi}_2 & u_{11}^* \bar{\xi}_3 & u_{12}^* \bar{\xi}_3 & u_{13}^* \bar{\xi}_3 \\ u_{21}^* \bar{\xi}_1 & u_{22}^* \bar{\xi}_1 & u_{23}^* \bar{\xi}_1 & u_{21}^* \bar{\xi}_2 & u_{22}^* \bar{\xi}_2 & u_{23}^* \bar{\xi}_2 & u_{21}^* \bar{\xi}_3 & u_{22}^* \bar{\xi}_3 & u_{23}^* \bar{\xi}_3 \\ u_{31}^* \bar{\xi}_1 & u_{32}^* \bar{\xi}_1 & u_{33}^* \bar{\xi}_1 & u_{31}^* \bar{\xi}_2 & u_{32}^* \bar{\xi}_2 & u_{33}^* \bar{\xi}_2 & u_{31}^* \bar{\xi}_3 & u_{32}^* \bar{\xi}_3 & u_{33}^* \bar{\xi}_3 \end{bmatrix} \dots(4.3.1)$$

$$\begin{bmatrix} p_{11}^* \bar{\xi}_1 & p_{12}^* \bar{\xi}_1 & p_{13}^* \bar{\xi}_1 & p_{11}^* \bar{\xi}_2 & p_{12}^* \bar{\xi}_2 & p_{13}^* \bar{\xi}_2 & p_{11}^* \bar{\xi}_3 & p_{12}^* \bar{\xi}_3 & p_{13}^* \bar{\xi}_3 \\ p_{21}^* \bar{\xi}_1 & p_{22}^* \bar{\xi}_1 & p_{23}^* \bar{\xi}_1 & p_{21}^* \bar{\xi}_2 & p_{22}^* \bar{\xi}_2 & p_{23}^* \bar{\xi}_2 & p_{21}^* \bar{\xi}_3 & p_{22}^* \bar{\xi}_3 & p_{23}^* \bar{\xi}_3 \\ p_{31}^* \bar{\xi}_1 & p_{32}^* \bar{\xi}_1 & p_{33}^* \bar{\xi}_1 & p_{31}^* \bar{\xi}_2 & p_{32}^* \bar{\xi}_2 & p_{33}^* \bar{\xi}_2 & p_{31}^* \bar{\xi}_3 & p_{32}^* \bar{\xi}_3 & p_{33}^* \bar{\xi}_3 \end{bmatrix} \dots(4.3.2)$$

É importante enfatizar que esta integração é feita sobre elementos unidimensionais, conforme figura 3.4.2, e esses são lineares contínuos. As funções ϕ^1 , ϕ^2 e ϕ^3 , representadas em (4.3.1) e (4.3.2) por $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ e $\bar{\xi}_3$, respectivamente, assumem os seguintes valores:

- para o elemento definido pelos nós 1 e 2.

$$\begin{aligned} \phi^1 &= \frac{1}{2} \frac{(1-2c) + \xi}{c_4} \\ \phi^2 &= \frac{1}{2} \frac{(1-2c) - \xi}{c_4} \\ \phi^3 &= - \frac{c}{c_4} \end{aligned} \dots(4.3.3)$$

- para o elemento definido pelos nós 2 e 3.

$$\begin{aligned}\phi^1 &= - \frac{c}{c_4} \\ \phi^2 &= \frac{1}{2} \frac{(1-2c) + \xi}{c_4} \quad \dots(4.3.4) \\ \phi^3 &= \frac{1}{2} \frac{(1-2c) - \xi}{c_4}\end{aligned}$$

- para o elemento definido pelos nós 3 e 1.

$$\begin{aligned}\phi^1 &= \frac{1}{2} \frac{(1-2c) - \xi}{c_4} \\ \phi^2 &= - \frac{c}{c_4} \quad \dots(4.3.5) \\ \phi^3 &= \frac{1}{2} \frac{(1-2c) + \xi}{c_4}\end{aligned}$$

Nas expressões acima descritas o parâmetro c vale c_1 , c_2 ou c_3 (expressão (3.3.16)). O termo c_4 vem da expressão (3.3.17), assim como a coordenada adimensional ξ refere-se aos elementos unidimensionais lineares (que formam o elemento triangular).

A integração não singular para o elemento constante também é simples; para o elemento linear descontínuo utilizam-se as matrizes (4.3.1) e (4.3.2).

No procedimento de montagem das matrizes \underline{G} e \underline{H} , ainda se processa a troca das colunas entre as referidas matrizes, resultando nas matrizes \underline{A} e \underline{F} do sistema de equações algébricas definido na expressão (3.2.10). Esta troca de colunas é feita observando-se o código dado pelas condições de contorno. Adotou-se que a matriz \underline{A} teria os elementos da matriz \underline{G} depois de trocadas as colunas necessárias.

As matrizes \underline{G} e \underline{H} são calculadas para cada ponto nodal (um bloco de 3 linhas x 3 vezes o número de pontos nodais). Observa-se o código da condição de contorno de cada coluna, e procede-se a troca entre as duas matrizes (se o código for 1 não há troca; se ao contrário for 0, há troca). \underline{G} é armazenada em arquivos enquanto \underline{H} é multiplicada pelos valores prescritos de deslocamentos e forças de superfície resultando parte do vetor independente \underline{F} , definido na expressão (3.2.10).

É importante destacar que a coluna de \underline{G} que não precisar ser trocada deve ser corrigida multiplicando-se os seus elementos pelo valor do módulo de elasticidade transversal, (expressão (2.2.9)). Pretende-se com isso manter a mesma ordem de grandeza entre os elementos de \underline{A} , evitando que o sistema tenha valores muito discrepantes o que poderia levar a alguma instabilidade.

A discretização do contorno do problema está diretamente limitada pela memória central destinada ao sistema resultante de equações. Para permitir o uso de mais elementos, idealizou-se a matriz \underline{A} formada por blocos de linhas, designados macro-linhas, e armazenados em arquivos na memória de massa. A matriz \underline{A} é mostrada na figura 4.3.4.

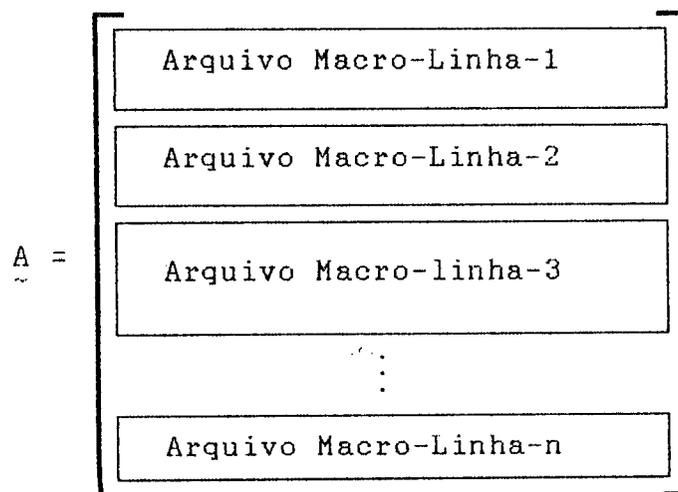


Fig. 4.3.4 - Definição da Matriz \underline{A} armazenada em blocos de linhas em memória de massa.

4.3.1.5 - Procedure: Resolução do Sistema de Equações

A rotina principal deste procedimento é mostrada na listagem 4.3.1.

```
{  


|                          |
|--------------------------|
| FASE DE TRIANGULARIZACAO |
|--------------------------|

  
}  
For mlA := 1 to Num_ml do  
    begin  
        Le_Macro_Linha_mlA;  
        Triangulariza_Macro_Linha_mlA;  
        Grava_Macro_Linha_mlA;  
        For mlB := (mlA + 1) to Num_ml do  
            begin  
                Le_Macro_Linha_mlB;  
                Elimina_Colunas_Abaixo_com_mlA;  
                Grava_Macro_Linha_mlB;  
            end;  
        end;  
    end;  
    {  


|                            |
|----------------------------|
| FASE DE RETRO-SUBSTITUICAO |
|----------------------------|

  
    }  
    For mlA := Num_ml downto 1 do  
        begin  
            Le_Macro_Linha_mlA;  
            Retro_Substitui_Macro_Linha_mlA;  
            For mlB := (mlA - 1) downto 1 do  
                begin  
                    Le_Macro_Linha_mlB;  
                    Elimina_Colunas_Acima_com_mlA;  
                end;  
            end;  
        end;
```

A resolução do sistema de equações utiliza o algoritmo de Gauss, modificado para trabalhar com as macro-linhas definidas como na figura 4.3.4. Esse procedimento, tal como o processo de Gauss, é dividido em duas fases: uma de triangularização e outra de retro-substituição, conforme listagem 4.3.1. Para manipular (ler e gravar) arquivos, que são as macro-linhas, aparecem sub-rotinas específicas. Cada sub-rotina chamada executa tarefas específicas e trabalha com linhas dentro de uma macro-linha ou relacionando duas delas.

Para armazenar as macro-linhas na memória central, são utilizadas duas variáveis dinâmicas.

Obedecendo-se à sequência da listagem 4.3.1, primeiramente lê-se o arquivo designado "macro-linha A", procedendo-se a triangularização de suas linhas. Esta macro-linha, então, é armazenada em arquivo, continuando na memória central onde vai ser utilizada para eliminar colunas da "macro-linha B". Sempre depois de se trabalhar com uma macro-linha, esta é atualizada no arquivo em memória de massa. A sequência descrita se repete até que todas as macro-linhas tenham sido triangularizadas. A fase de retro-substituição é semelhante à anterior, apenas não necessitando atualização dos valores nos arquivos. Neste ponto do processamento, as incógnitas nos nós do contorno encontram-se calculadas.

4.3.1.6 - Procedimento: Vetores dos Deslocamentos e Forças de Superfície

O vetor de incógnitas determinado na resolução do sistema abriga tanto deslocamentos quanto forças de superfície. Assim, é necessária a troca entre este vetor e o dos valores prescritos, tendo o cuidado de corrigir a componente trocada multiplicando-a pelo módulo de elasticidade transversal (expressão (2.2.9)), uma vez

que esta alteração foi processada para a montagem da matriz \tilde{A} .

4.3.1.7 - Procedimento: Saída de Resultados para Arquivos

Os valores de deslocamentos e forças de superfície são armazenados em arquivos na memória de massa (arquivos ".DES" e ".FSU", respectivamente) e utilizados nos módulos de cálculo para pontos no domínio e de listagens.

4.3.1.8 - Procedimento: Libera Memória

Neste procedimento as variáveis indexadas do tipo dinâmica são canceladas, liberando-se área de memória central.

4.3.2 - Módulo de Cálculo para Pontos no Domínio

Este módulo é destinado ao cálculo de deslocamentos e tensões em pontos do domínio. Esses valores são obtidos através das expressões (3.5.1) e (3.5.3), respectivamente, utilizando-se os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície já determinados conforme item 4.3.1.

Os programas desenvolvidos utilizam as soluções fundamentais de Kelvin e Mindlin, sendo utilizados os elementos constante e linear descontínuo. Estes programas complementam aqueles que calculam valores de deslocamentos e forças de superfície para pontos do contorno. Na literatura especializada estes dois tipos de programas formam um só e fazem a análise de todo o corpo, tanto em pontos do contorno quanto em pontos do domínio.

A figura 4.3.5 traz o esquema geral do

módulo de cálculo para pontos no domínio (idêntico ao mostrado pela figura 4.3.2, para cálculo em pontos do contorno).

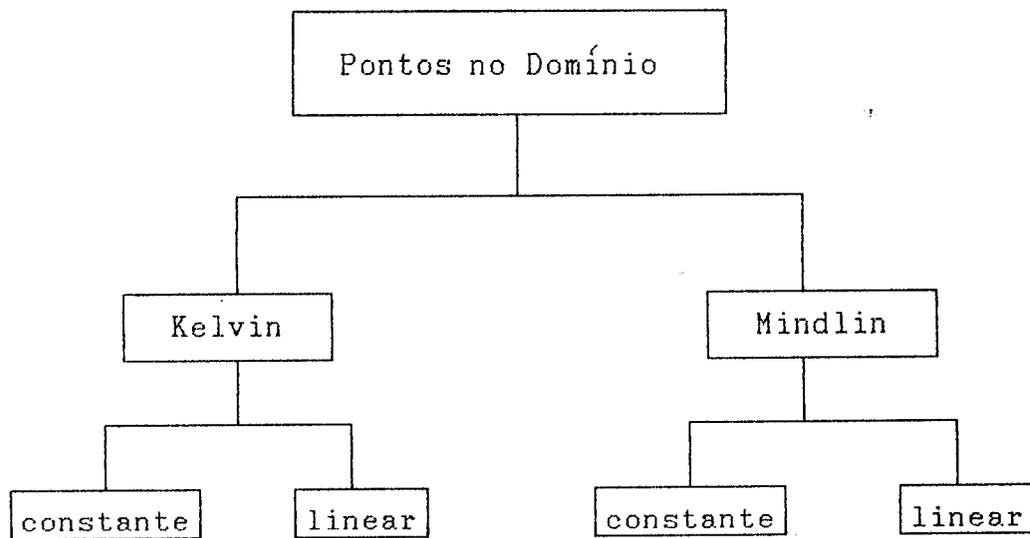


Fig. 4.3.5 - Esquema do módulo de cálculo para pontos no domínio.

Os programas obedecem a uma mesma sequência e encontram-se estruturados em procedimentos, semelhante ao item 4.3.1. A sequência de chamada destes procedimentos é mostrada na figura 4.3.6. Nos itens seguintes serão discutidos cada um desses procedimentos.

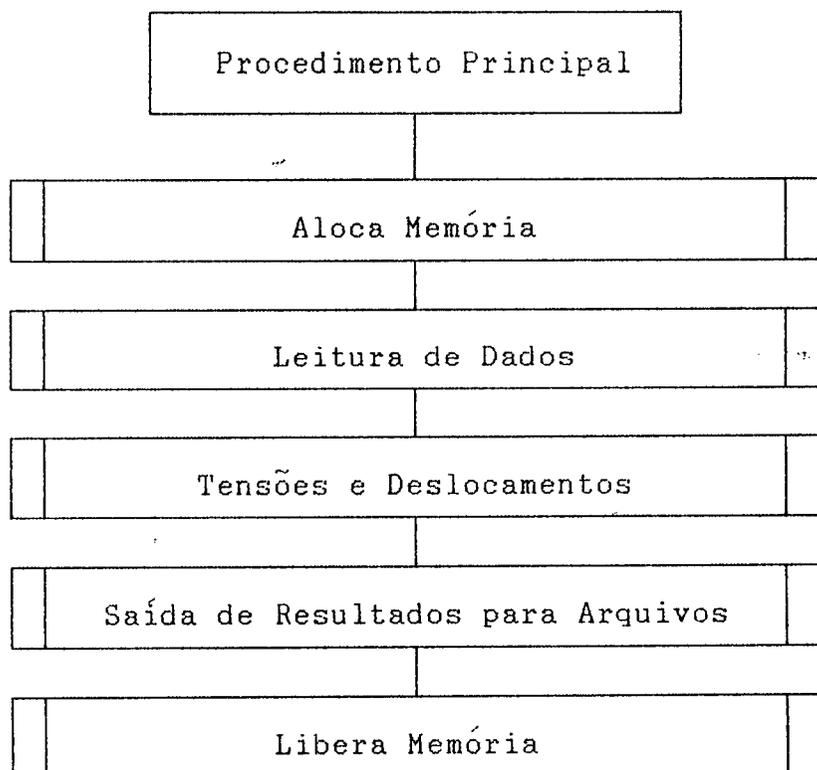


Fig. 4.3.6 - Sequência de chamada das sub-rotinas para o cálculo de deslocamentos e tensões em pontos do domínio.

4.3.2.1 - Procedimento: Aloca Memória

Nesta sub-rotina são inicializadas as variáveis estáticas e dinâmicas, utilizadas pelo módulo.

Os números limites para nós do contorno e para elementos são os mesmos apresentados no item 4.3.1.1. O número de nós internos é da ordem de:

- para o elemento constante: 100 nós;
- para o elemento linear descontínuo: 80 nós.

4.3.2.2 - Procedimento: Leitura de Dados

Neste procedimento lêem-se, dos arquivos, os dados necessários para o cálculo dos deslocamentos e das

tensões em pontos do domínio.

Inicialmente, são lidos do arquivo de extensão ".BAS" os valores auxiliares já calculados e armazenados quando do cálculo das variáveis no contorno, item 4.3.1.3. Na sequência, são lidos os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície em pontos do contorno, armazenados nos arquivos com extensão ".DES" e ".FSU", respectivamente (armazenados conforme item 4.3.1.7).

Os dados que definem os pontos do domínio a serem investigados são lidos de um arquivo com extensão ".DIN" (Dados dos pontos *IN*ternos). Nele constam apenas o número de pontos internos e as suas coordenadas cartesianas, x_1 , x_2 e x_3 .

É interessante notar que, para uma mesma discretização, podem surgir várias investigações de domínio. Basta que sejam criados arquivos definindo esses pontos e, o que é mais importante, a qualquer momento. O cálculo de deslocamentos e forças de superfícies nos pontos definidos no contorno, entretanto, só é realizado uma única vez.

4.3.2.3 - Procedimento: Tensões e Deslocamentos

Nesta sub-rotina são calculadas as integrais numéricas das expressões (3.5.1) e (3.5.3), utilizando-se Hammer e obtendo-se valores para deslocamentos e tensões, respectivamente, em pontos definidos no domínio. Os dados necessários para este cálculo são lidos conforme item 4.3.2.2.

Similarmente ao item 4.3.1.4, necessita-se dispor de um certo cuidado para a definição das matrizes $\underline{u}^* \underline{\phi}^T$ e $\underline{p}^* \underline{\phi}^T$, na expressão (3.5.1), e $\underline{S}^* \underline{\phi}^T$ e $\underline{D}^* \underline{\phi}^T$, na expressão (3.5.3). A forma destas matrizes vale tanto para a solução fundamental de Kelvin quanto para a de Mindlin.

Utilizando-se o elemento com aproximação

constante, o cálculo de deslocamentos em pontos do domínio é extremamente simples, visto que $\phi = \underline{I}$ e as matrizes \underline{u}^* e \underline{p}^* são conhecidas (expressões (2.4.5a) e (2.4.5b) para Kelvin, e (2.4.7) e (2.4.8) para Mindlin). O cálculo de tensões nestes pontos também é simples, pelo mesmo motivo já apresentado para os deslocamentos, considerando-se as matrizes, agora, \underline{S}^* e \underline{D}^* (expressões (2.5.6) e (2.5.7) para Kelvin, e (2.5.8) e (2.5.9) para Mindlin). Estas últimas matrizes apresentam-se conforme (3.5.4.) e (3.5.5), respectivamente.

Por outro lado, com a utilização do elemento com aproximação linear descontínua, o cálculo de deslocamentos em pontos do domínio demanda maiores cuidados. As matrizes $\underline{u}^* \phi^T$ e $\underline{p}^* \phi^T$ apresentam-se conforme (4.3.1) e (4.3.2), sendo que $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ e $\bar{\xi}_3$ são dadas por (3.3.18). O cálculo de tensões nestes pontos, também demanda maior atenção. As matrizes $\underline{S}^* \phi^T$ e $\underline{D}^* \phi^T$, para este caso, têm as formas dadas nas expressões (4.3.6) e (4.3.7), respectivamente.

$$\begin{bmatrix}
 S_{111}^* \bar{\xi}_1 & S_{112}^* \bar{\xi}_1 & S_{113}^* \bar{\xi}_1 & S_{111}^* \bar{\xi}_2 & S_{112}^* \bar{\xi}_2 & S_{113}^* \bar{\xi}_2 & S_{111}^* \bar{\xi}_3 & S_{112}^* \bar{\xi}_3 & S_{113}^* \bar{\xi}_3 \\
 S_{121}^* \bar{\xi}_1 & S_{122}^* \bar{\xi}_1 & S_{123}^* \bar{\xi}_1 & S_{121}^* \bar{\xi}_2 & S_{122}^* \bar{\xi}_2 & S_{123}^* \bar{\xi}_2 & S_{121}^* \bar{\xi}_3 & S_{122}^* \bar{\xi}_3 & S_{123}^* \bar{\xi}_3 \\
 S_{131}^* \bar{\xi}_1 & S_{132}^* \bar{\xi}_1 & S_{133}^* \bar{\xi}_1 & S_{131}^* \bar{\xi}_2 & S_{132}^* \bar{\xi}_2 & S_{133}^* \bar{\xi}_2 & S_{131}^* \bar{\xi}_3 & S_{132}^* \bar{\xi}_3 & S_{133}^* \bar{\xi}_3 \\
 S_{221}^* \bar{\xi}_1 & S_{222}^* \bar{\xi}_1 & S_{223}^* \bar{\xi}_1 & S_{221}^* \bar{\xi}_2 & S_{222}^* \bar{\xi}_2 & S_{223}^* \bar{\xi}_2 & S_{221}^* \bar{\xi}_3 & S_{222}^* \bar{\xi}_3 & S_{223}^* \bar{\xi}_3 \\
 S_{231}^* \bar{\xi}_1 & S_{232}^* \bar{\xi}_1 & S_{233}^* \bar{\xi}_1 & S_{231}^* \bar{\xi}_2 & S_{232}^* \bar{\xi}_2 & S_{233}^* \bar{\xi}_2 & S_{231}^* \bar{\xi}_3 & S_{232}^* \bar{\xi}_3 & S_{233}^* \bar{\xi}_3 \\
 S_{331}^* \bar{\xi}_1 & S_{332}^* \bar{\xi}_1 & S_{333}^* \bar{\xi}_1 & S_{331}^* \bar{\xi}_2 & S_{332}^* \bar{\xi}_2 & S_{333}^* \bar{\xi}_2 & S_{331}^* \bar{\xi}_3 & S_{332}^* \bar{\xi}_3 & S_{333}^* \bar{\xi}_3
 \end{bmatrix}$$

....(4.3.6)

$$\begin{bmatrix}
 D_{111}^* \xi_1 & D_{112}^* \xi_1 & D_{113}^* \xi_1 & D_{111}^* \xi_2 & D_{112}^* \xi_2 & D_{113}^* \xi_2 & D_{111}^* \xi_3 & D_{112}^* \xi_3 & D_{113}^* \xi_3 \\
 D_{121}^* \xi_1 & D_{122}^* \xi_1 & D_{123}^* \xi_1 & D_{121}^* \xi_2 & D_{122}^* \xi_2 & D_{123}^* \xi_2 & D_{121}^* \xi_3 & D_{122}^* \xi_3 & D_{123}^* \xi_3 \\
 D_{131}^* \xi_1 & D_{132}^* \xi_1 & D_{133}^* \xi_1 & D_{131}^* \xi_2 & D_{132}^* \xi_2 & D_{133}^* \xi_2 & D_{131}^* \xi_3 & D_{132}^* \xi_3 & D_{133}^* \xi_3 \\
 D_{221}^* \xi_1 & D_{222}^* \xi_1 & D_{223}^* \xi_1 & D_{221}^* \xi_2 & D_{222}^* \xi_2 & D_{223}^* \xi_2 & D_{221}^* \xi_3 & D_{222}^* \xi_3 & D_{223}^* \xi_3 \\
 D_{231}^* \xi_1 & D_{232}^* \xi_1 & D_{233}^* \xi_1 & D_{231}^* \xi_2 & D_{232}^* \xi_2 & D_{233}^* \xi_2 & D_{231}^* \xi_3 & D_{232}^* \xi_3 & D_{233}^* \xi_3 \\
 D_{331}^* \xi_1 & D_{332}^* \xi_1 & D_{333}^* \xi_1 & D_{331}^* \xi_2 & D_{332}^* \xi_2 & D_{333}^* \xi_2 & D_{331}^* \xi_3 & D_{332}^* \xi_3 & D_{333}^* \xi_3
 \end{bmatrix}$$

....(4.3.7)

Uma vez calculadas as expressões (3.5.1) e (3.5.3) para cada ponto definido no domínio, a análise do corpo encontra-se completa. Caso se queira analisar outros pontos isolados, formando-se uma linha ou mesmo um plano, basta que se crie um novo arquivo ".DIN", item 4.3.2.2, retorne-se a este módulo e a este procedimento, que essas expressões para os novos pontos serão calculadas.

4.3.2.4 - Procedimento: Saída de Resultados

Este procedimento armazena em arquivos com extensão ".INT" os valores de deslocamentos e tensões calculados para os pontos definidos no arquivo ".DIN". Este arquivo da memória de massa será utilizado pelo módulo de listagem, que define o tipo de saída (será visto no item 4.5).

4.3.2.5 - Procedimento: Libera Memória

Similarmente ao procedimento 4.3.1.8, tem a função de liberar área da memória central, ocupada por variáveis dinâmicas.

4.4 - MÓDULO DE PRÉ-PROCESSAMENTO DE DADOS

O módulo de cálculo de variáveis do contorno e do domínio recebe os dados em um determinado padrão, lidos de arquivos, não importando se estes foram gerados automaticamente ou digitados em um editor qualquer.

No presente trabalho visa-se analisar corpos elásticos tridimensionais. De imediato, é possível ligar a estes uma grande quantidade de dados. Portanto, é razoável pensar em automatizar a obtenção destes dados criando-se rotinas capazes disso.

O módulo de pré-processamento de dados é responsável pela geração automática dos mesmos, e encontra-se primeiramente dividido conforme mostra a figura 4.4.1.

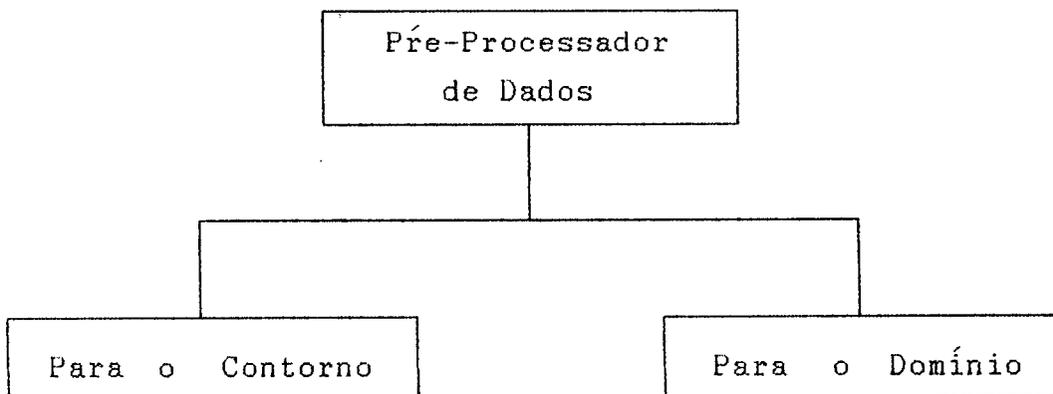


Fig. 4.4.1 - Esquema principal do módulo de pré-processamento de dados.

Os módulos dados para o contorno e dados para o domínio serão discutidos a seguir.

4.4.1 - Módulo Dados para o Contorno

Este módulo é destinado à geração dos dados necessários para a execução do módulo de cálculo das variáveis do contorno, item 4.3.1.

A geração dos dados acontece para as soluções fundamentais utilizadas (Kelvin e Mindlin) e, para cada uma, tem-se ainda distinção para elemento constante e elemento linear descontínuo.

O módulo "dados para o contorno" encontra-se dividido em duas rotinas: uma para dados da geometria e outra para dados das condições de contorno. A figura 4.4.2 mostra a divisão em duas rotinas.

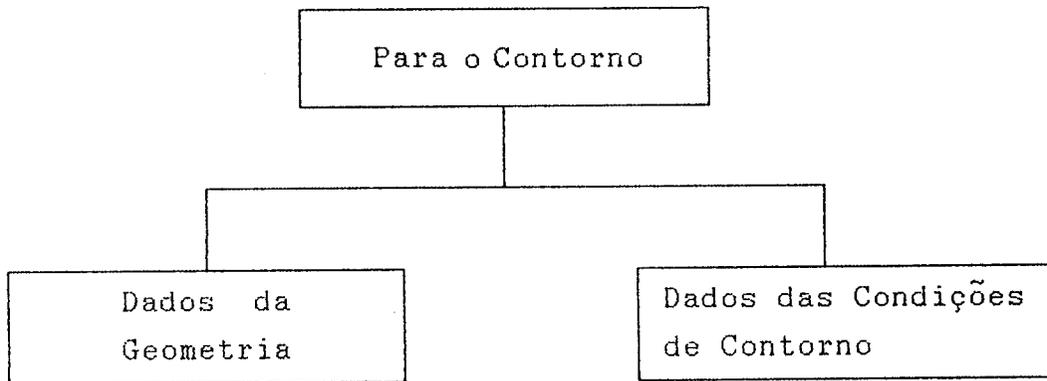


Fig. 4.4.2 - Divisão do módulo de geração de dados

4.4.1.1 - Procedimento: Dados da Geometria

Este procedimento tem a finalidade de gerar automaticamente os dados da geometria do corpo que se quer estudar, a partir de uma quantidade bem resumida de dados chaves.

Como alguns exemplos foram estabelecidos, adotou-se uma nova divisão para o procedimento dados da geometria, em geração de formas pré-definidas e em geração de forma qualquer.

A geração de formas pré-definidas é executada por sub-rotinas específicas para um tipo de problema, como por exemplo a geração de um túnel circular.

A geração de forma qualquer é feita por montagem de faces, onde são geradas e compatibilizadas as malhas. A figura 4.4.3 mostra as opções deste procedimento.

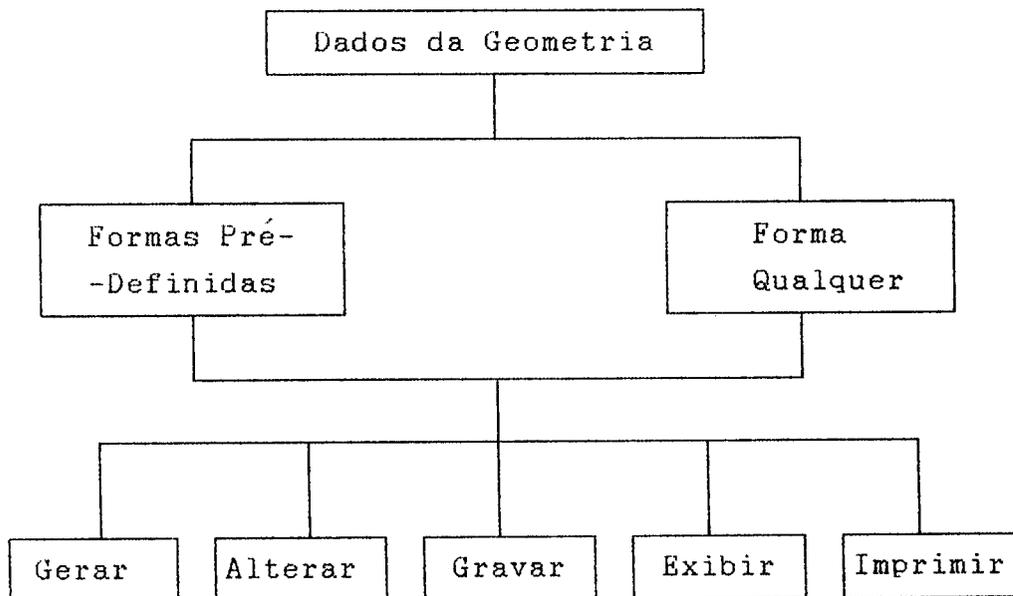


Fig. 4.4.3 - Opções para a geração automática

4.4.1.2 - Procedimento: Dados das Condições de Contorno

Nesta sub-rotina são fornecidos os valores prescritos dos deslocamentos e das forças de superfície, bem como o código utilizado para identificar cada um. Em seguida esses valores são armazenados em arquivos para uso

pelo módulo de cálculo para pontos no contorno.

4.5 - MÓDULO LISTAGENS DE RESULTADOS

Este módulo aglutina procedimentos que definem as diversas formas de saída dos valores utilizados e calculados pelos módulos de cálculo, conforme item 4.2. Estas formas de saída são listagens para relatório ou em padrão a ser interpretado por um editor gráfico (GRAPHER, por exemplo).

As listagens tipo relatório estão disponíveis para o módulo de contorno, para o módulo de domínio e reunindo informações desses dois módulos.

No relatório destinado ao módulo de contorno constam os valores dos dados de entrada (item 4.3.1.2) e também os valores de deslocamentos e forças de superfície obtidos (item 4.3.1.4).

Para o módulo de domínio o relatório traz os valores de entrada (item 4.3.2.2) e também os valores de deslocamentos e tensões (item 4.3.2.3) para os pontos definidos no arquivo de entrada.

Por fim, um relatório global reúne valores tanto do contorno quanto do domínio, para dados de entrada e calculados.

CAPÍTULO 5 - APLICAÇÕES

5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas algumas aplicações do método dos elementos de contorno a corpos elásticos tridimensionais utilizando a formulação apresentada nos capítulos 2 e 3. Tais aplicações servirão para explorar mais de perto a solução fundamental de Mindlin. Essas aplicações dizem respeito a sólidos inseridos no espaço semi-infinito.

Serão utilizados os programas computacionais, citados no capítulo 4, para proceder à análise numérica dos problemas propostos.

Os resultados obtidos com a formulação do método dos elementos de contorno serão, dentro do possível, comparados com as respectivas soluções exatas. Serão, também, utilizados problemas já resolvidos numericamente pelo MEC em outros trabalhos, para aferição dos programas desenvolvidos.

As aplicações serão processadas em um micro-computador da linha IBM-AT-286 ou compatível, com configuração básica (sem co-processador numérico).

5.2 - APLICAÇÃO 1

ÁREA CIRCULAR DO SEMI-INFINITO UNIFORMEMENTE CARREGADA

Neste problema, uma carga uniformemente distribuída age sobre uma área circular na superfície do semi-infinito. O objetivo deste exemplo é o de testar a solução fundamental para o espaço semi-infinito - Mindlin.

A figura 5.2.1 mostra a área circular de raio igual a 1cm, carregada uniformemente com $q = 10\text{N/cm}^2$, módulo de elasticidade longitudinal igual a 10kN/cm^2 e coeficiente de Poisson 0,3.

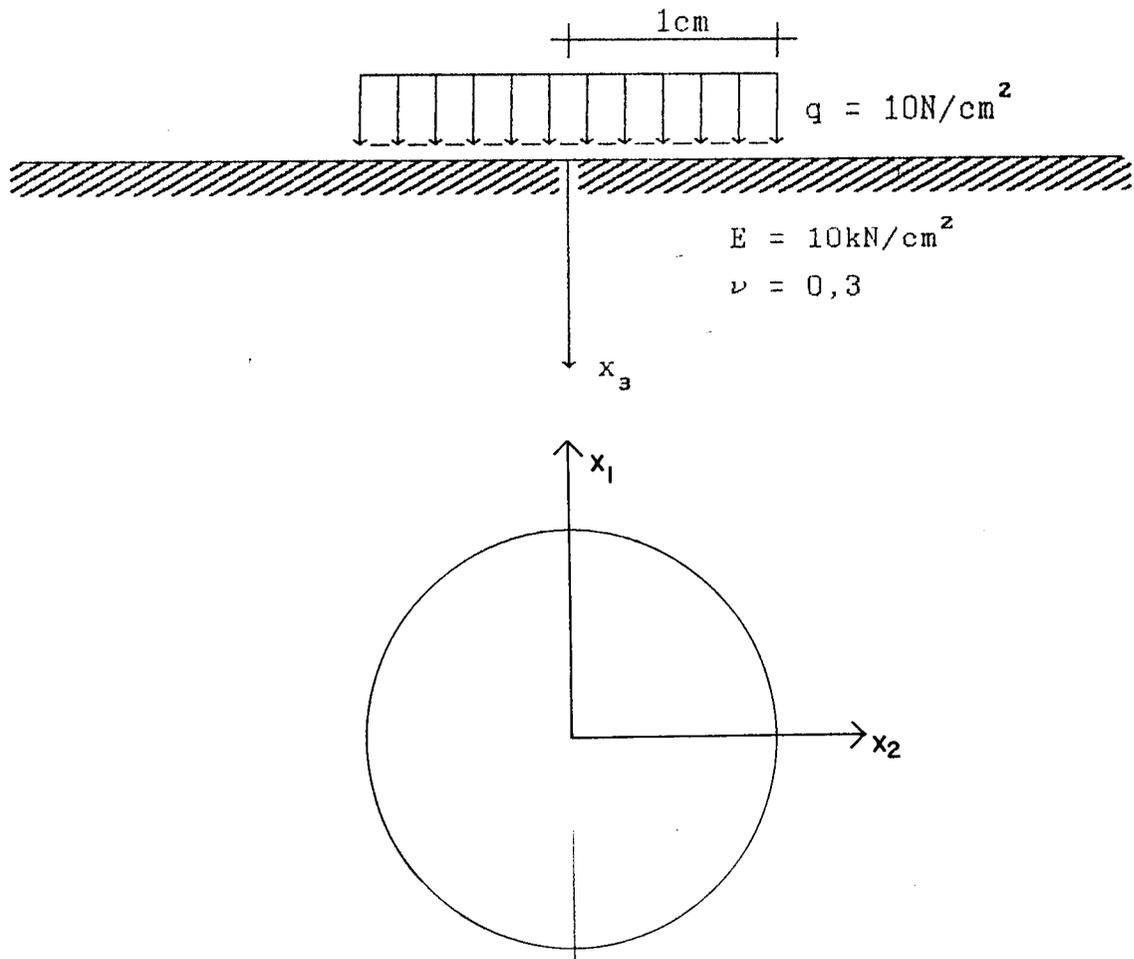


Fig. 5.2.1 - Área circular da superfície do semi-infinito, carregada uniformemente.

Se a solução fundamental de Mindlin é utilizada, basta discretizar apenas a parte da superfície onde as cargas estão aplicadas (conforme mencionado nos capítulos anteriores). Para a utilização da solução fundamental de Kelvin se faz necessário discretizar a área ao redor do carregamento, isso com o intuito de simular a condição de tração nula nesta.

A figura 5.2.2 mostra as discretizações,

feitas por elementos triangulares, para a obtenção dos resultados.

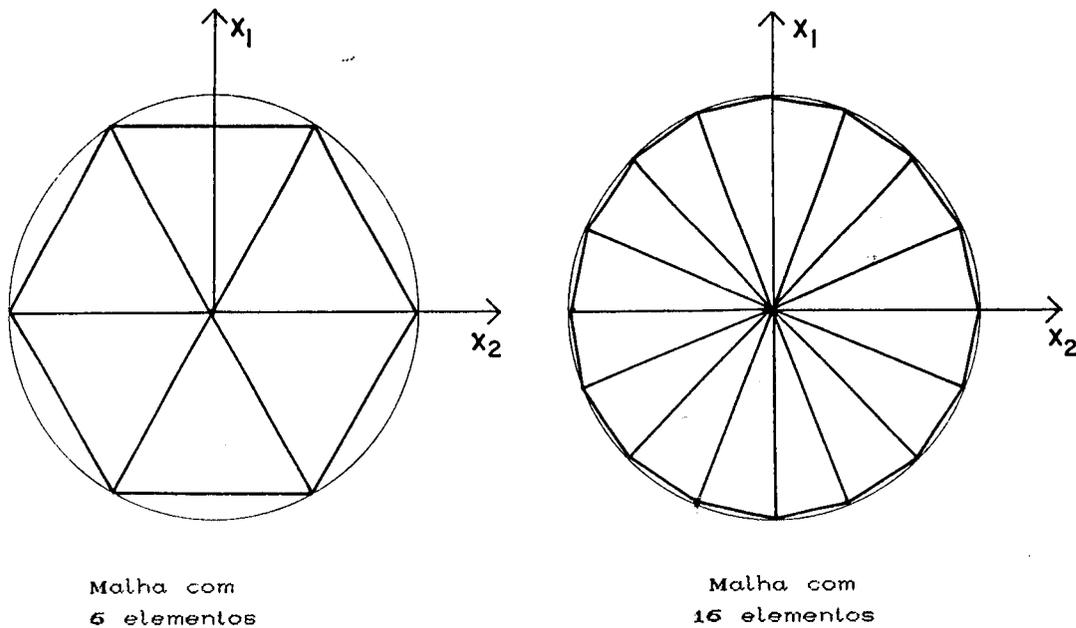


Fig. 5.2.2 - Discretização apenas da área circular carregada.

A solução exata deste problema é apresentada em TIMOSHENKO [85], e será comparada com os resultados obtidos utilizando-se as soluções fundamentais de Mindlin e Kelvin. Tais resultados são devidos às discretizações da figura 5.2.2 e encontram-se apresentados nas tabelas e nos gráficos mostrados a seguir.

TABELA 5.2.1 - Deslocamentos verticais obtidos da solução numérica na superfície do semi-infinito (elem. constantes)

x_2 (cm)	SOLUÇÃO EXATA (cm)	SOLUÇÃO DE KELVIN		SOLUÇÃO DE MINDLIN	
		6 ELEM.	16 ELEM.	6 ELEM.	16 ELEM.
0	0,00182	0,00150	0,00161	0,00158	0,00170
1	0,00116	0,00082	0,00095	0,00091	0,00110
2	0,00047	0,00035	0,00042	0,00039	0,00046
3	0,00031	0,00023	0,00027	0,00025	0,00030
4	0,00023	0,00017	0,00021	0,00019	0,00022
5	0,00015	0,00011	0,00014	0,00013	0,00015
6	0,00009	0,00007	0,00008	0,00008	0,00009

Os valores dos deslocamentos verticais mostrados na tabela 5.2.1 evidenciam a melhor adequação da solução fundamental de Mindlin para problemas na superfície do espaço semi-infinito.

A comparação entre Kelvin e Mindlin é feita para uma mesma discretização (figura 5.2.2), na qual a primeira leva nítida desvantagem, uma vez que necessita da discretização, também, da área ao redor do carregamento para levar em conta a área descarregada.

Com relação a eficiência dos elementos constante e linear descontínuo, a tabela 5.2.2 traz valores dos deslocamentos verticais, que demonstram melhor aproximação para o elemento linear, como era esperado.

TABELA 5.2.2 - Comparação dos deslocamentos verticais obtidos para os elementos constante e linear descontínuo.

x_2	SOLUÇÃO EXATA (cm)	SOLUÇÃO DE MINDLIN (cm)			
		ELEM. CONSTANTE		ELEM. LINEAR	
		6 ELEM.	16 ELEM.	6 ELEM.	16 ELEM.
0	0,00182	0,00158	0,00170	0,00160	0,00181
1	0,00116	0,00091	0,00110	0,00098	0,00116

Mesmo utilizando o elemento com aproximação linear os resultados não são imediatamente iguais aos exatos. Observe-se que as discretizações feitas na área carregada, conforme figura 5.2.2, cometem erros na aproximação da geometria (não representam com exatidão a área circular).

A seguir serão apresentados os gráficos resumindo os resultados obtidos na análise deste problema utilizando a solução fundamental de Mindlin.

A figura 5.2.3 mostra os deslocamentos verticais ao longo do raio, na superfície do semi-infinito.

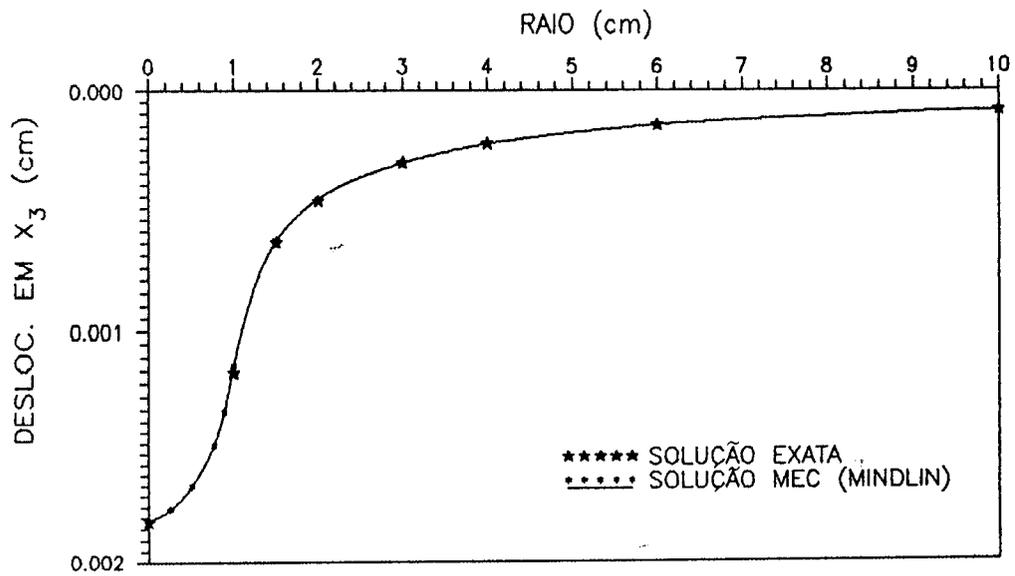


Fig. 5.2.3 - Deslocamentos verticais ao longo do raio.

A figura 5.2.4 mostra os deslocamentos verticais ao longo do eixo x_3 (profundidade).

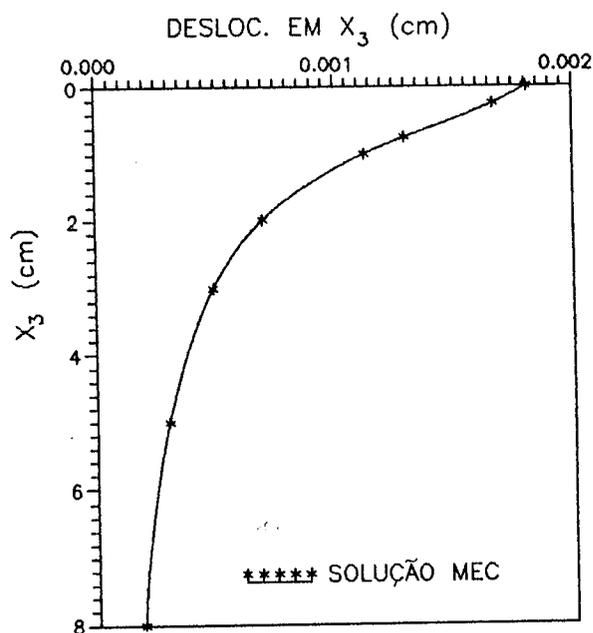


Fig. 5.2.4 - Deslocamentos verticais ao longo de x_3 .

A figura 5.2.5 mostra a variação da tensão na direção do eixo x_3 (σ_{33}) ao longo do eixo vertical x_3 .

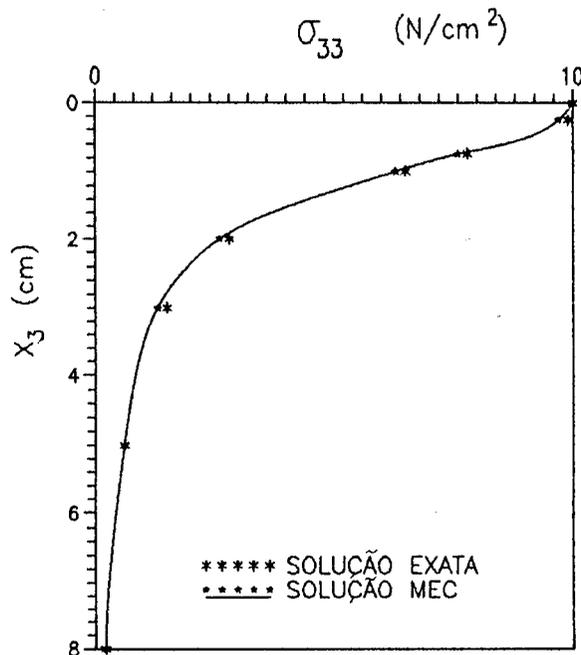


Fig. 5.2.5 - Variação da tensão σ_{33} ao longo de x_3 .

5.3 - APLICAÇÃO 2

ÁREA RETANGULAR DO SEMI-INFINITO UNIFORMEMENTE CARREGADA

Este exemplo, similar ao anterior, propõe a análise do problema de uma área retangular uniformemente carregada na superfície do espaço semi-infinito. Os dados necessários à análise serão apresentados na figura 5.3.1.

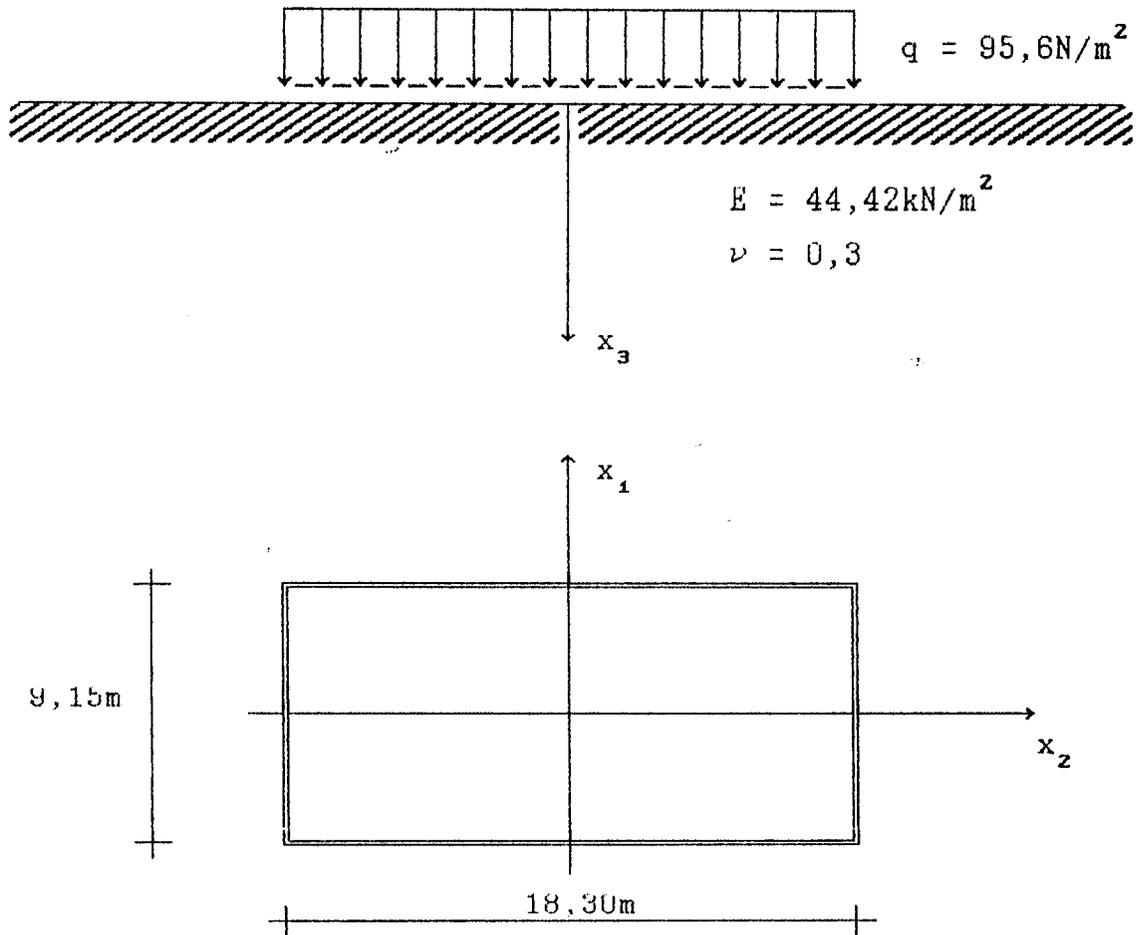


Fig. 5.3.1 - Área retangular da superfície do semi-infinito, carregada uniformemente.

Os elementos triangulares utilizados na discretização do problema, conforme figura 5.3.2, representam exatamente a área carregada, não existindo, portanto, aproximações quanto à geometria.

Os resultados obtidos utilizando a solução fundamental de Mindlin são comparados com aqueles apresentados no trabalho de SÁ [71]

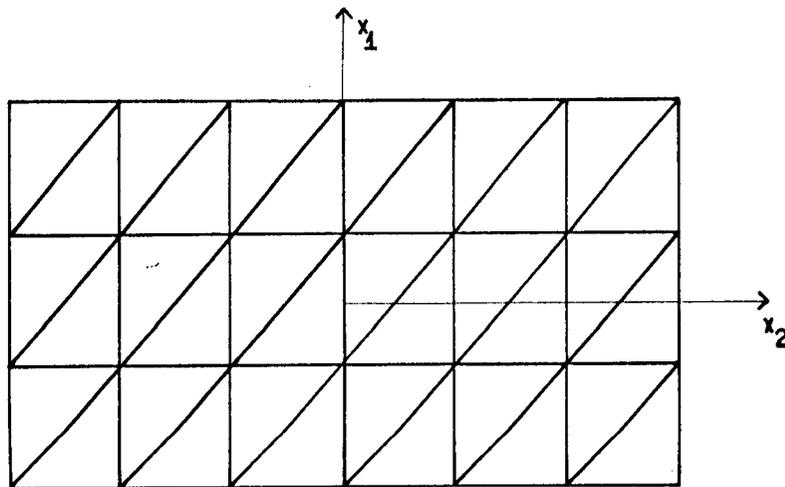


Fig. 5.3.2 - Discretização do problema em elementos triangulares.

Os resultados obtidos neste trabalho são considerados satisfatórios e encontram-se resumidos nos gráficos que serão apresentados a seguir.

A figura 5.3.3 mostra deslocamentos verticais ao longo do eixo x_2 , na superfície do espaço semi-infinito.

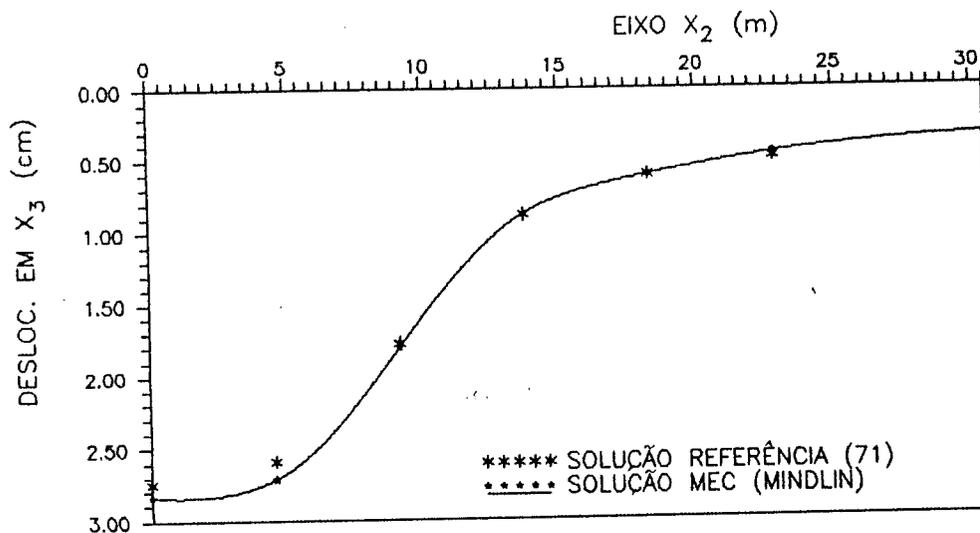


Fig. 5.3.3 - Deslocamentos verticais ao longo do eixo x_2 .

A figura 5.3.4 mostra deslocamentos verticais ao longo do eixo x_1 , na superfície do espaço semi-infinito.

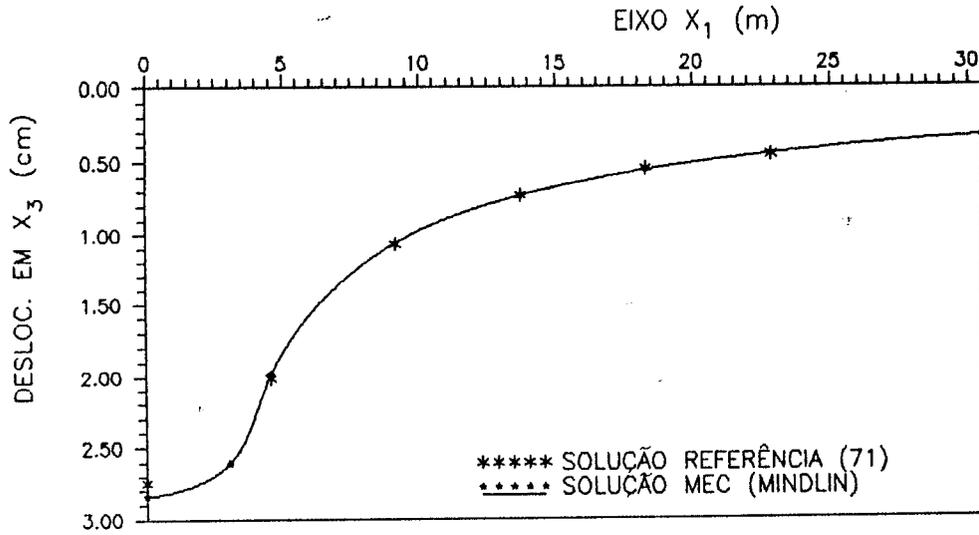


Fig. 5.3.4 - Deslocamentos verticais ao longo do eixo x_1 .

A figura 5.3.5 dá os deslocamentos verticais (em x_3), obtidos para um eixo que passa pelo vértice do retângulo.

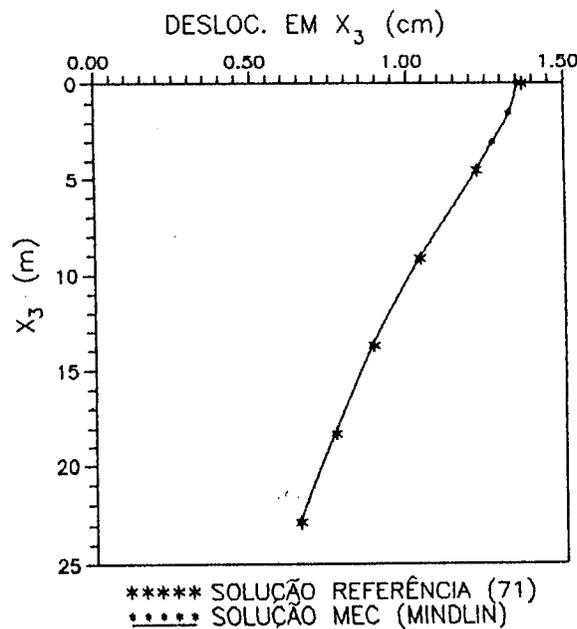


Fig. 5.3.5. - Deslocamentos verticais ao longo de x_3 .

5.4 - APLICAÇÃO 3

CAVIDADE CILÍNDRICA NO INTERIOR DO SEMI-INFINITO

Neste item são analisados os efeitos de uma cavidade cilíndrica situada no interior de um sólido elástico semi-infinito (solo). A cavidade encontra-se a uma profundidade de 4m tendo 1m de diâmetro e de altura, conforme mostra a figura 5.4.1. O módulo de elasticidade longitudinal do semi-infinito é $E = 100\text{kN/cm}^2$ e $\nu = 0,4$. A cavidade é carregada uniformemente em sua base com uma taxa $q = 100\text{kN/cm}^2$.

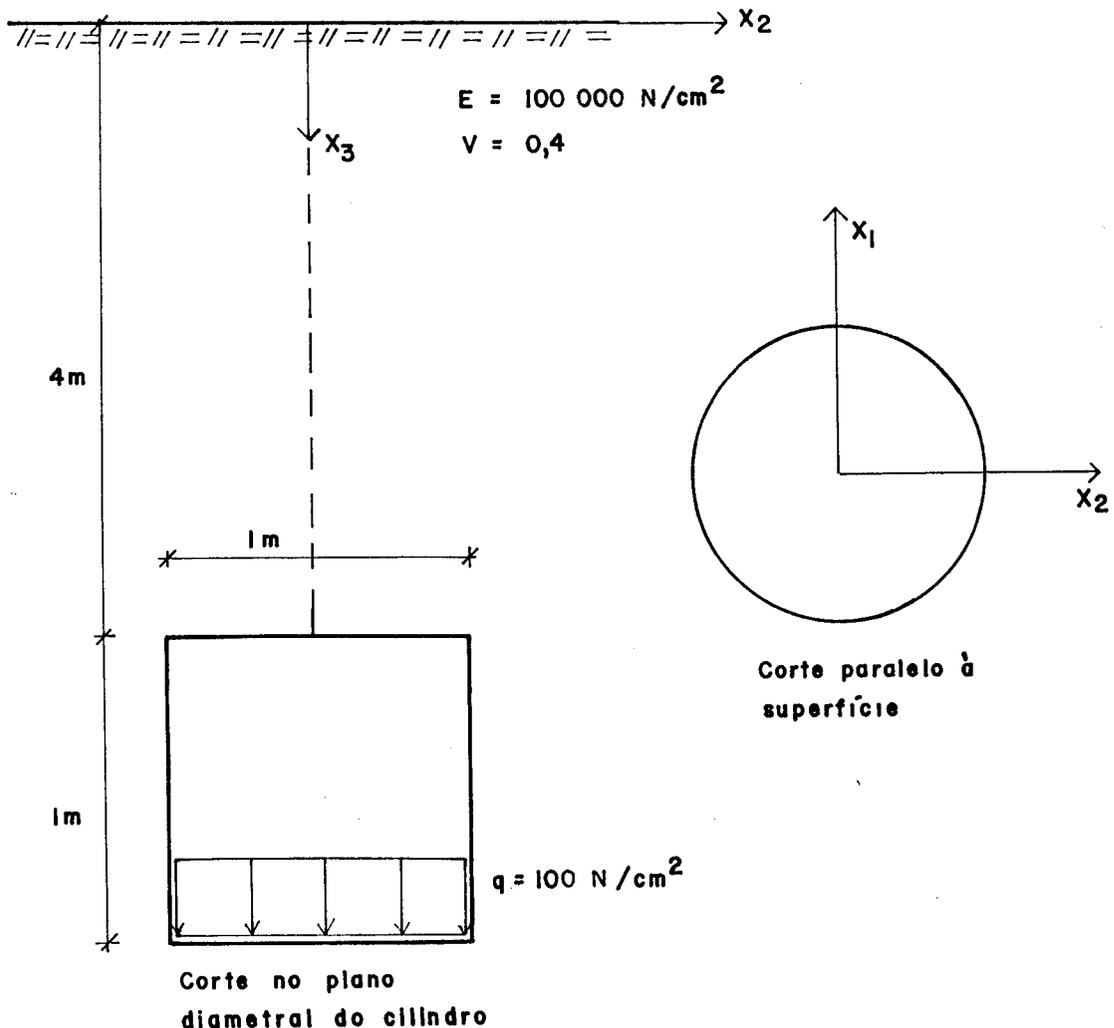


Fig. 5.4.1 - Definição do problema a ser estudado - geometria e carregamento

Pretende-se, com esta aplicação, avaliar o desempenho da solução fundamental de Mindlin quando os pontos carregados estão no interior de um sólido semi-infinito.

Esta aplicação encontra-se analisada nos trabalhos de NAKAGUMA [69] e SÁ [71].

A discretização, disposta no plano para clareza de detalhes, é mostrada na figura 5.4.2 e só é feita para a cavidade cilíndrica, uma vez que será utilizada a solução fundamental de Mindlin. Se a solução fundamental de Kelvin fosse usada, uma malha suplementar deveria ser constituída na superfície do semi-infinito.

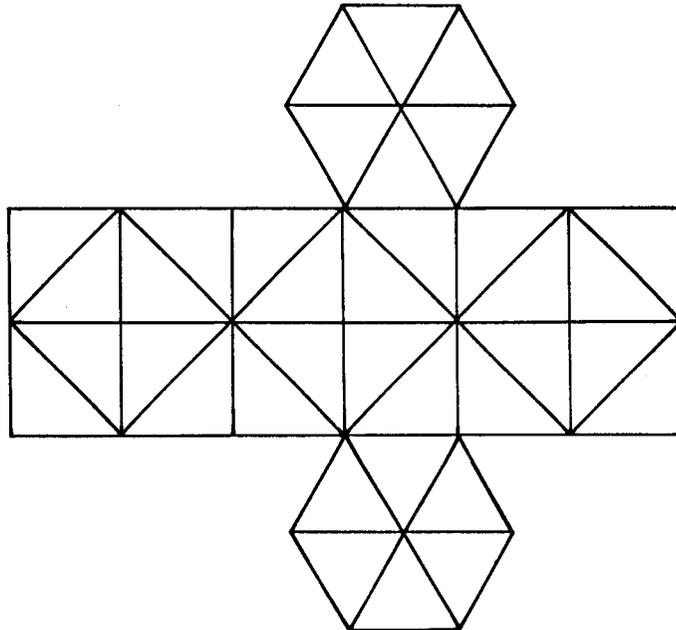


Fig. 5.4.2 - Discretização da cavidade cilíndrica por 36 elementos triangulares.

É interessante ressaltar que o vetor normal a cada elemento deve ter orientação para dentro da cavidade (conforme preceituam as figuras 2.6.2 e 2.6.3), e que fica estabelecido quando da preparação dos dados de entrada (relativos à discretização do corpo em questão).

Uma vez encontrados os valores para deslocamentos e forças de superfície para o contorno (para pontos da malha da figura 5.4.2) são determinados os

deslocamentos para pontos do interior do solo.

A figura 5.4.3 apresenta os valores de deslocamentos verticais, ao longo de x_2 e na superfície do solo.

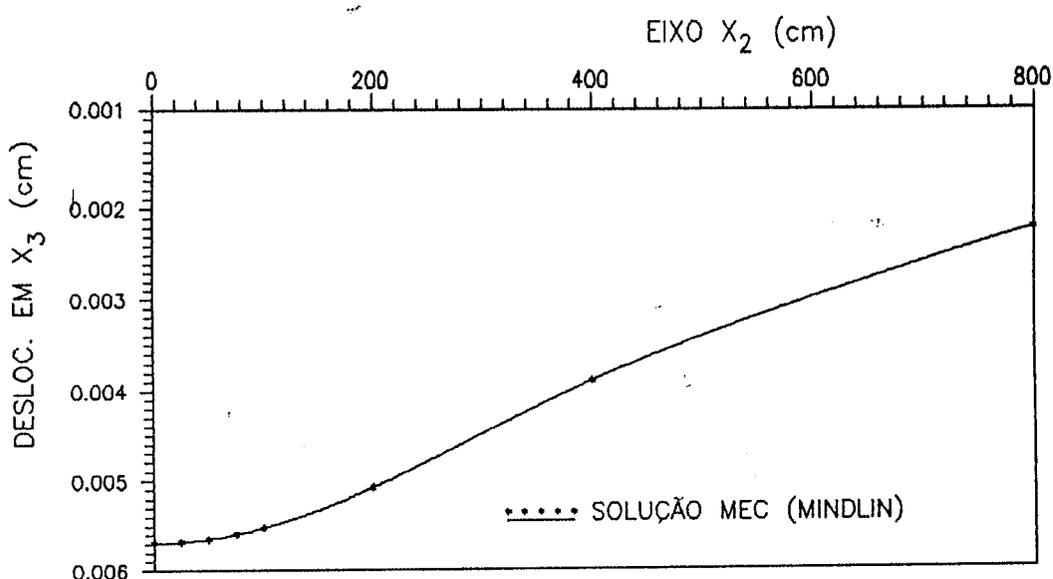


Fig. 5.4.3 - Deslocamentos verticais ao longo de x_2 .

Os deslocamentos verticais ao longo do eixo x_3 são mostrados na figura 5.4.4. Observe-se que da cota situada a 4m até a correspondente a 5m (espaço representado pela linha tracejada) existe um vazio, que é a cavidade cilíndrica.

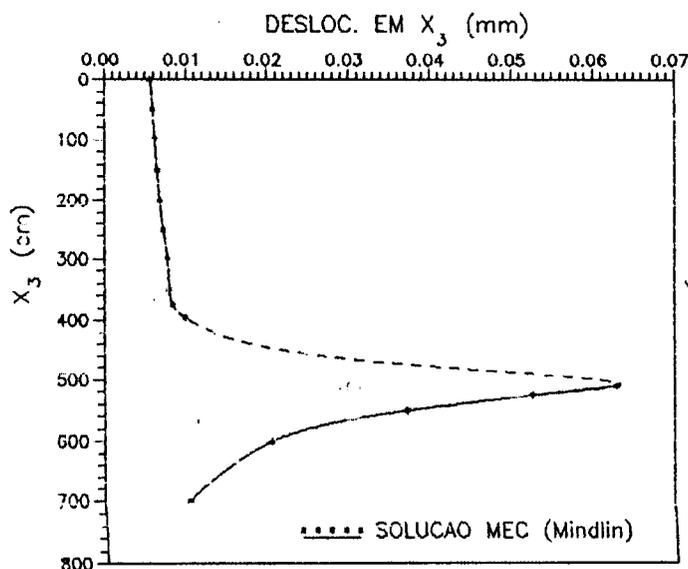


Fig. 5.4.4 - Deslocamentos verticais ao longo de x_3 .

A figura 5.4.5 mostra os deslocamentos verticais ao longo de um eixo geratriz do cilindro.

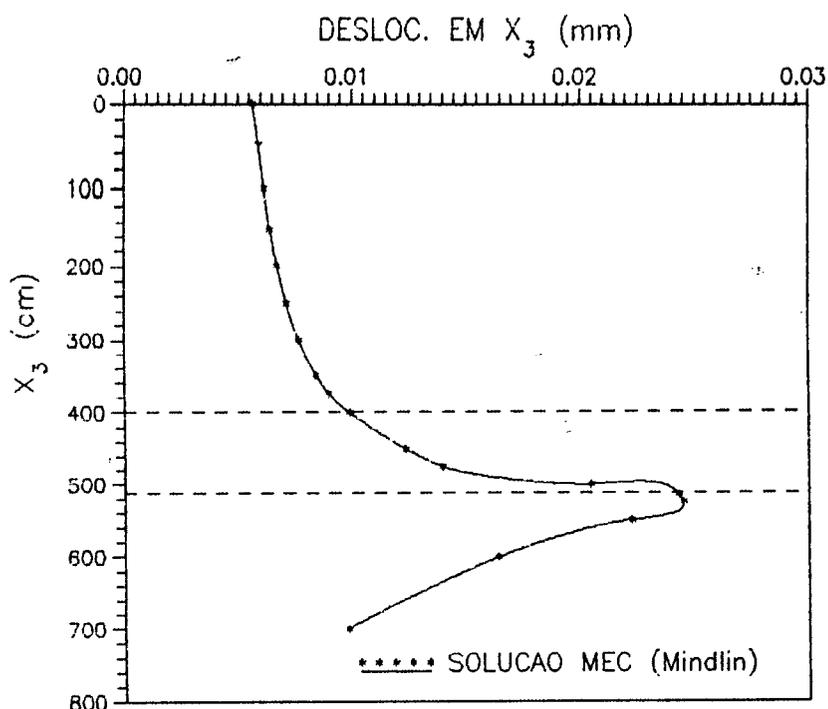
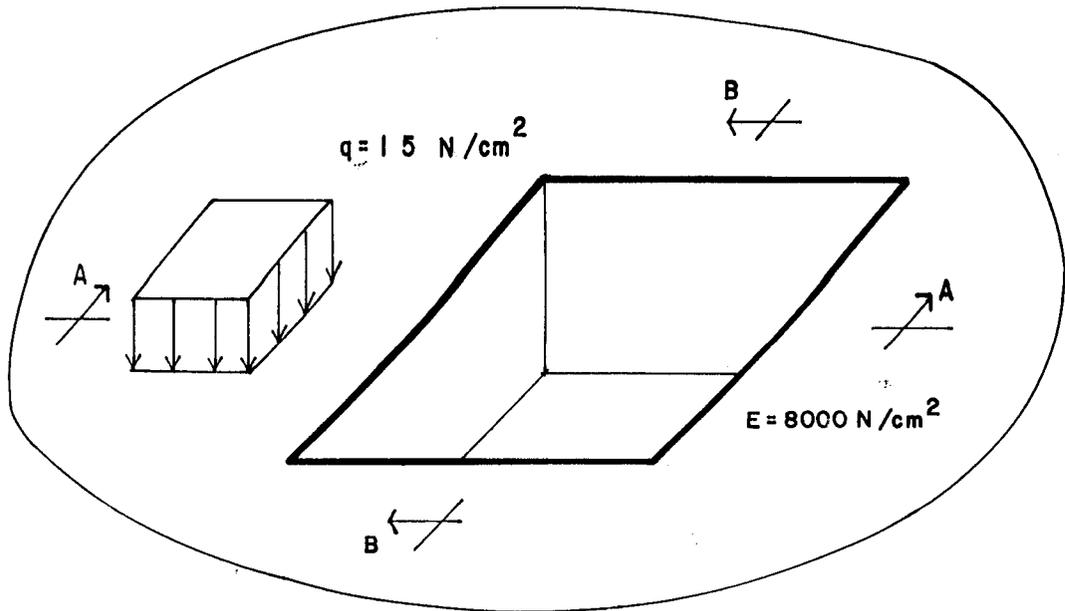


Fig. 5.4.5 - Deslocamentos verticais ao longo de um eixo paralelo a x_3 ($x_1 = 0$ e $x_2 = 50$ cm).

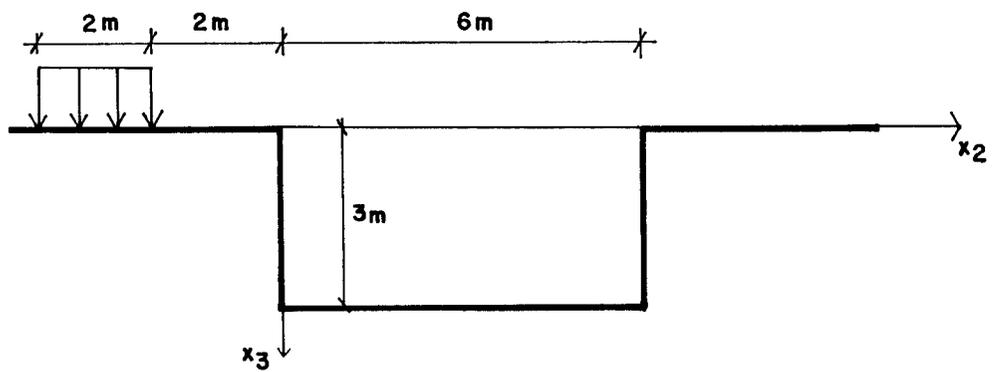
5.5 - APLICAÇÃO 4

CAVIDADE NA SUPERFÍCIE DO SEMI-INFINITO

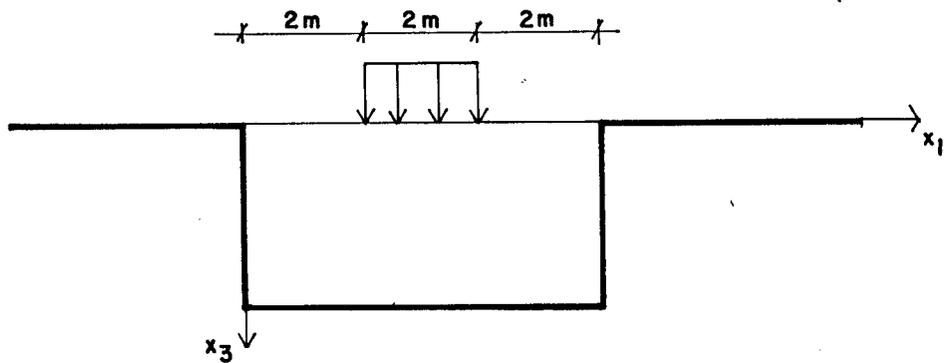
Nesta aplicação é analisado um exemplo sobre escavações próximas à superfície, do sólido semi-infinito (solo). Trata-se, portanto, da análise de uma cavidade na superfície do solo (corte para um sub-solo, por exemplo) com uma carga aplicada próxima à escavação, conforme mostra a figura 5.5.1. Serão analisados os deslocamentos e as tensões devidos apenas à carga aplicada na superfície, conforme mostra a figura 5.5.1.



(a) Definição do Problema



(b) Corte AA



(c) Corte BB

Fig. 5.5.1 - Meio semi-infinito com uma cavidade sofrendo a ação de uma carga distribuída agindo na superfície.

Este tipo de problema é, geralmente, resolvido através de análise bidimensional. Determina-se a seção mais solicitada, obtendo os seus valores de deslocamentos e tensões. Com estes valores é feita uma extrapolação para as demais seções, isto é, são feitas algumas aproximações, às vezes, pouco precisas.

O tratamento tridimensional do problema é interessante pois permite sua análise na real dimensão, possibilitando uma investigação mais coerente e próxima do real.

O método dos elementos de contorno, utilizando a solução fundamental de Mindlin, constitui-se em uma ferramenta importante na análise do problema de cavidades próximas à superfície do solo, exigindo para tanto, apenas as discretizações da cavidade e da área carregada. A figura 5.5.2 mostra a discretização utilizada na investigação deste problema (disposta no plano para a clareza de detalhes).

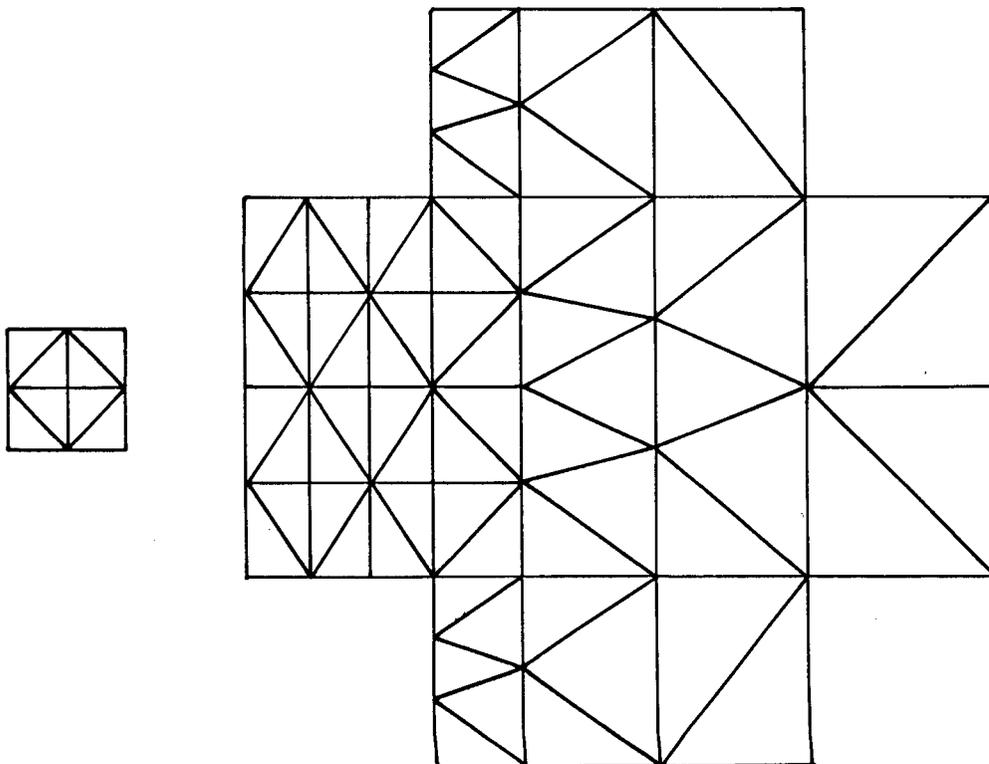


Fig. 5.5.2 - Discretização do problema em elementos triangulares (apenas a cavidade e a área carregada).

Serão feitas avaliações de deslocamentos na face mais próxima à carga (face relativa ao eixo x_1). Para tanto serão adotados eixos nos quais são medidos os deslocamentos, apresentados nas figuras a seguir.

A figura 5.5.3 mostra os deslocamentos na direção x_2 ao longo do eixo x_3 . Com estes resultados pode-se avaliar em qual profundidade acontece o maior deslocamento horizontal da face investigada.

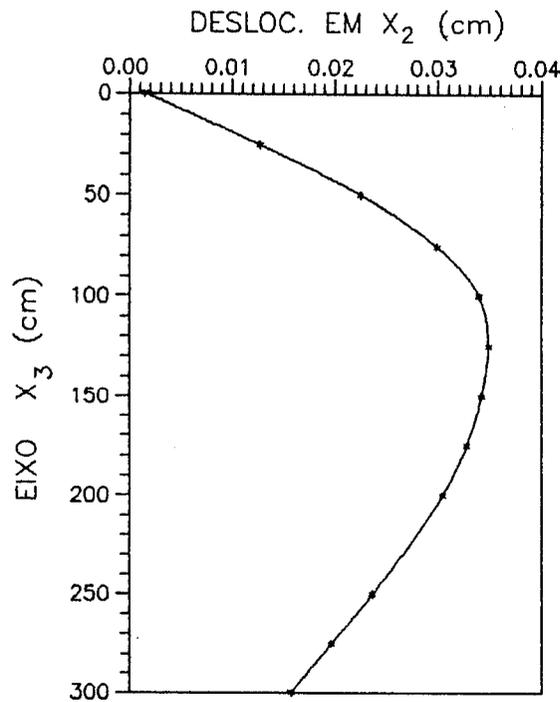


Fig. 5.5.3 - Deslocamentos horizontais na face de x_1 , ao longo do eixo x_3 .

Outra investigação proposta, é a de avaliar os deslocamentos ao longo da face próxima à carga, na borda relativa ao eixo x_1 , $u_1(0, x_2, 1,25)$. A figura 5.5.4 mostra os resultados desta investigação.

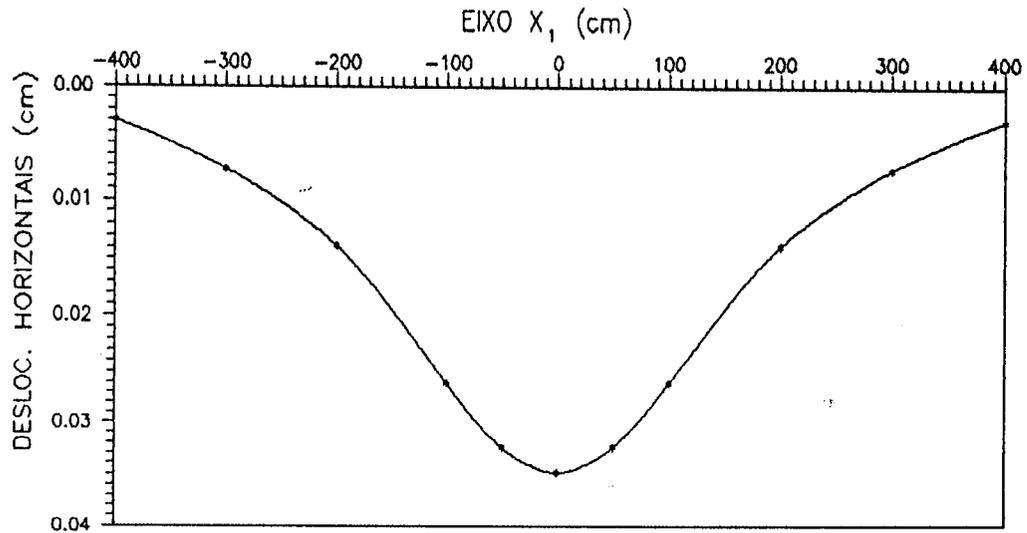


Fig. 5.5.4 - Deslocamentos horizontais na face mais próxima da carga, nos pontos com coordenadas $x_3 = 1,25$ e $x_2 = 0$.

Com este procedimento de análise aplicado a outros níveis, pode-se obter uma superfície de deslocamentos horizontais na face mais próxima da carga (face escolhida para estudos) ou qualquer uma outra.

A figura 5.5.5 apresenta os deslocamentos horizontais obtidos para os pontos co-lineares na direção x_1 , em cotas (x_3) distintas.

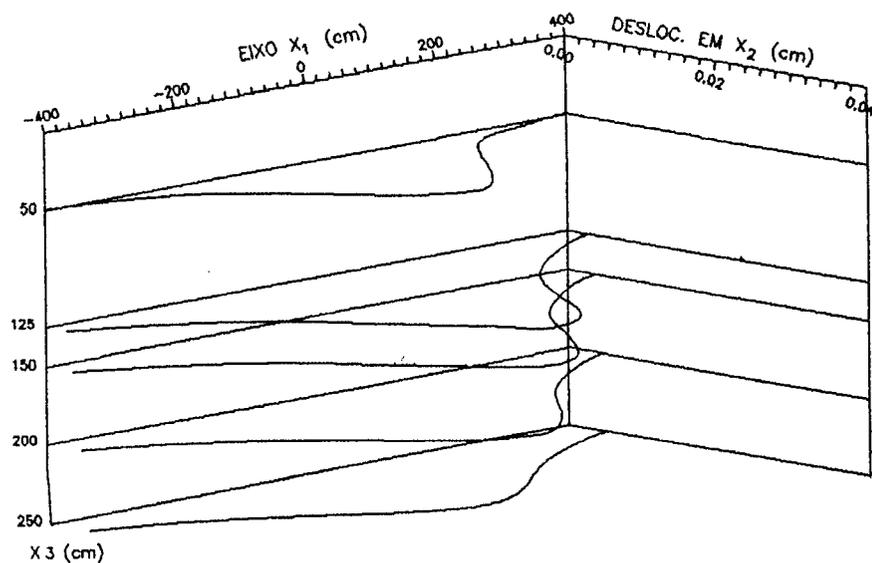


Fig. 5.5.5 - Deslocamentos horizontais em diversos níveis.

Geralmente existem outras cargas (sapatas, etc.) aplicadas a profundidades diferentes elevando ainda mais a complexidade do problema dificultando uma avaliação bidimensional. No tridimensional a avaliação do problema ganha maior consistência e apresenta mais subsídios para o projetista.

O método dos elementos de contorno com a solução fundamental de Mindlin, se mostra adequado para a solução deste tipo de problema, pois exige discretização mais simples do que outros métodos numéricos, o que se reflete no tempo computacional gasto.

5.6 - APLICAÇÃO 5

FRONTE DE ESCAVAÇÃO DE UM TÚNEL CIRCULAR

A análise do comportamento da frente de escavação de túneis constitui-se em um problema tridimensional, embora tenha sido tratada através de modelos numéricos (conforme os trabalhos de LOMBARDI [86] e PANET [87]) com uma aproximação plana com resultados aceitáveis.

O estado tridimensional de tensões, ao qual está submetido o problema em questão, provoca deformações que devem ser criteriosamente avaliadas, sobretudo em uma região (dita de perturbação) próxima à frente de escavação do túnel.

Uma avaliação criteriosa do comportamento da frente de escavação de um túnel é conseguida através do método dos elementos de contorno com sua formulação tridimensional. O MEC é indicado a esse tipo de problema tendo em vista as vantagens apresentadas no capítulo 1 (item 1.1).

Considere-se um meio semi-infinito elástico

no qual se faz a escavação de um túnel circular. As características relevantes para a definição do problema encontram-se na figura 5.6.1.

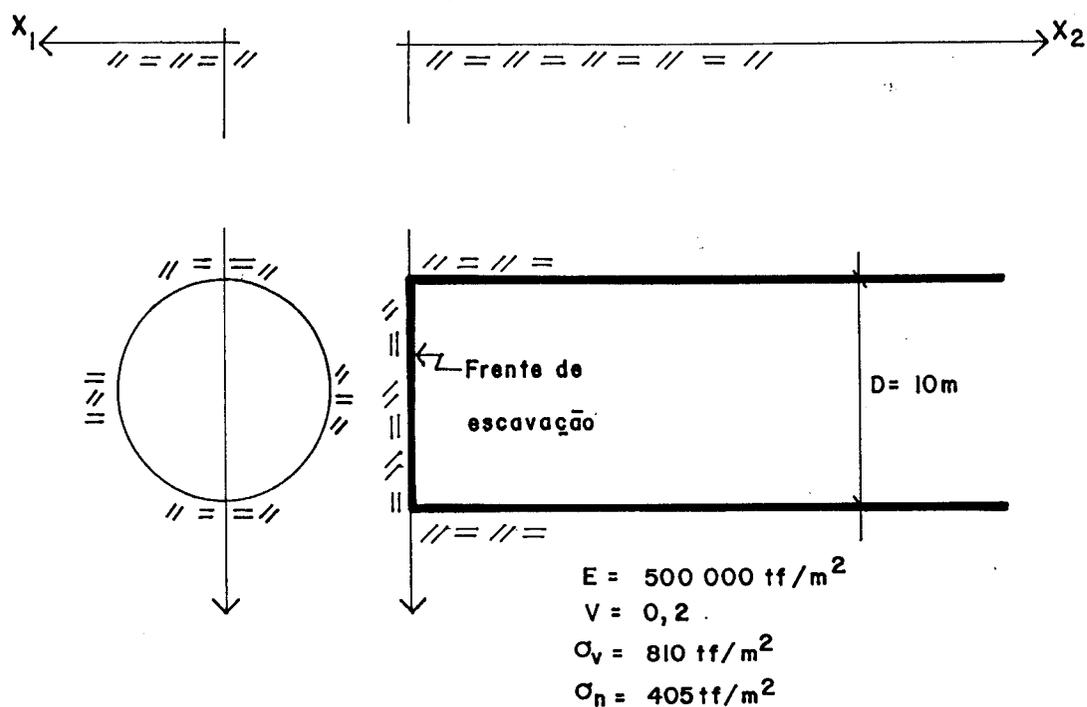


Fig. 5.6.1 - Definição do problema - avaliação do comportamento da frente de escavação de um túnel circular.

Continuando na avaliação do comportamento do semi-infinito próximo à frente de escavação, estabelece-se uma região de comprimento duas vezes o diâmetro do túnel (um diâmetro para dentro do maciço e um diâmetro para dentro da escavação), conforme figura 5.6.2. Esta região é a mais perturbada uma vez que a escavação provoca uma nova configuração de tensões no maciço, tornando-se, também, a mais preocupante.

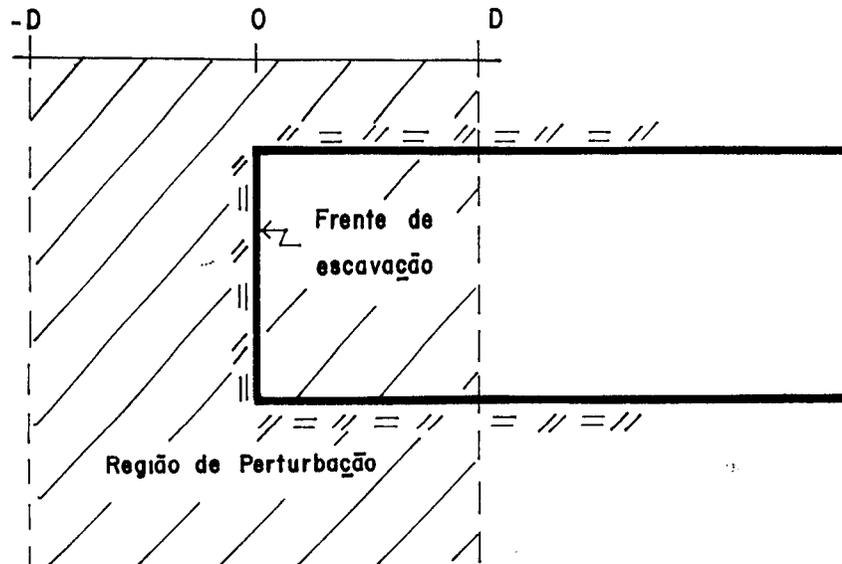


Fig. 5.6.2 - Definição da região mais perturbada na escavação do túnel.

Com a utilização do método dos elementos de contorno, em sua formulação tridimensional, são obtidos resultados de deslocamentos verticais na região de perturbação (ver figura 5.6.2) em uma cota x_3 coincidente com a da geratriz mais alta do túnel. Esses resultados são comparados aos do trabalho de LOMBARDI [86] e encontram-se mostrados na figura 5.6.3.

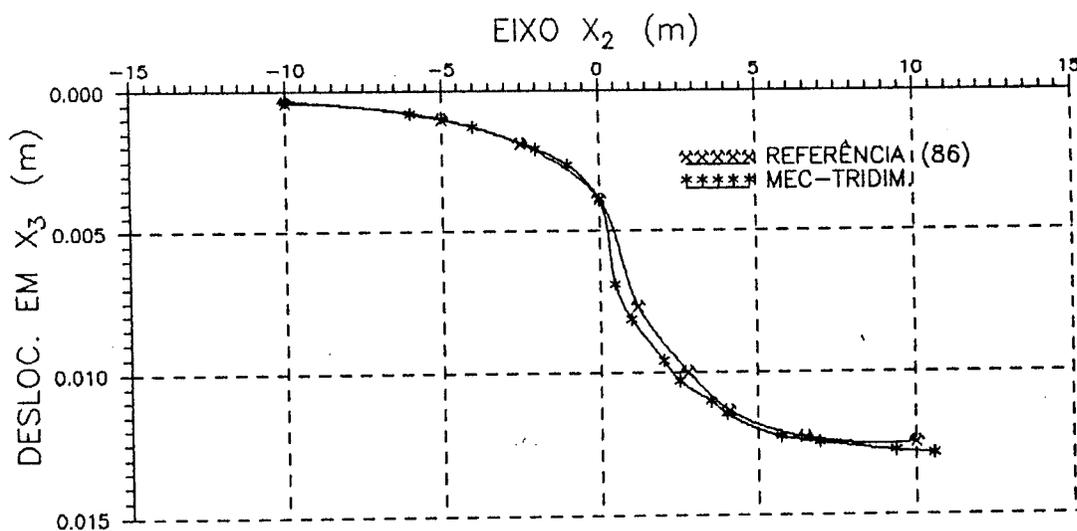


Fig. 5.6.3 - Deslocamentos verticais na região de perturbação próxima à frente de escavação

Para a utilização do método dos elementos de contorno, o túnel teve seu contorno (a frente de escavação e a superfície cilíndrica) discretizado por elementos triangulares planos. Empregou-se o elemento com aproximação constante.

Os resultados, em comparação aos do trabalho de LOMBARDI [86], são considerados satisfatórios, o que evidencia a convergência do método dos elementos de contorno para a solução do problema.

Outro exemplo do mesmo problema é estudado. A figura 5.6.4 mostra o novo problema e apresenta os dados necessários à avaliação do mesmo.

Uma malha de elementos triangulares planos é utilizada para a discretização do contorno do túnel (sua superfície de contato com o maciço, incluindo-se, é claro, a frente de escavação).

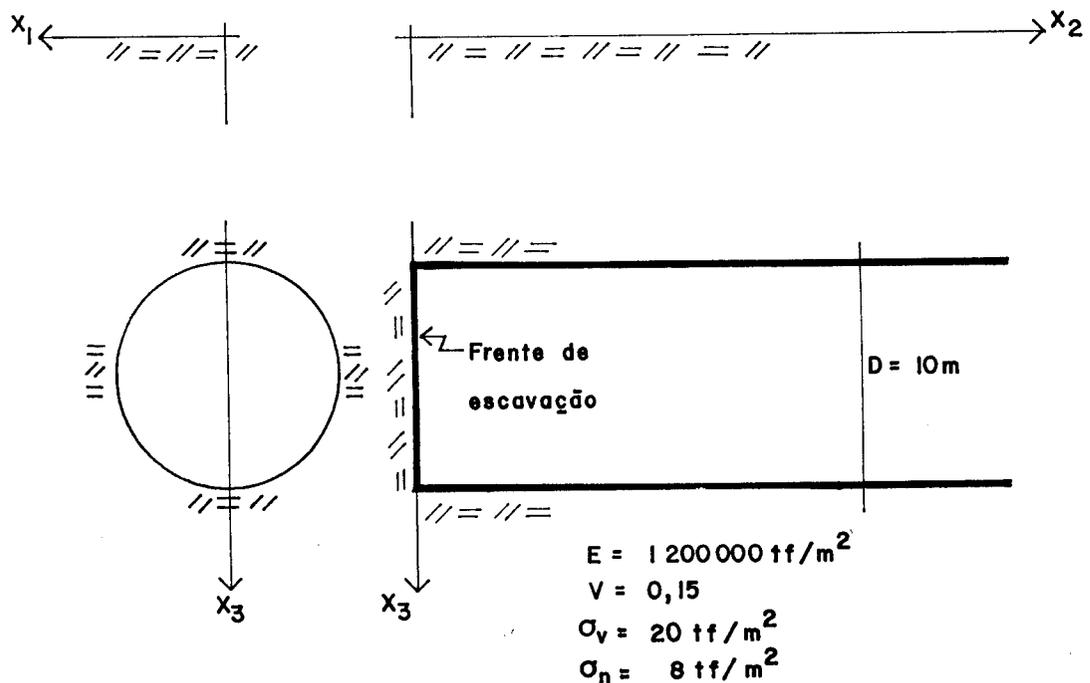


Fig. 5.6.4 - Definição do problema - comportamento do semi-infinito próximo a frente de escavação.

A figura 5.6.5 mostra deslocamentos

calculados ao longo de um eixo, paralelo ao eixo x_1 , na altura do eixo do cilindro (deslocamentos horizontais na face de escavação).

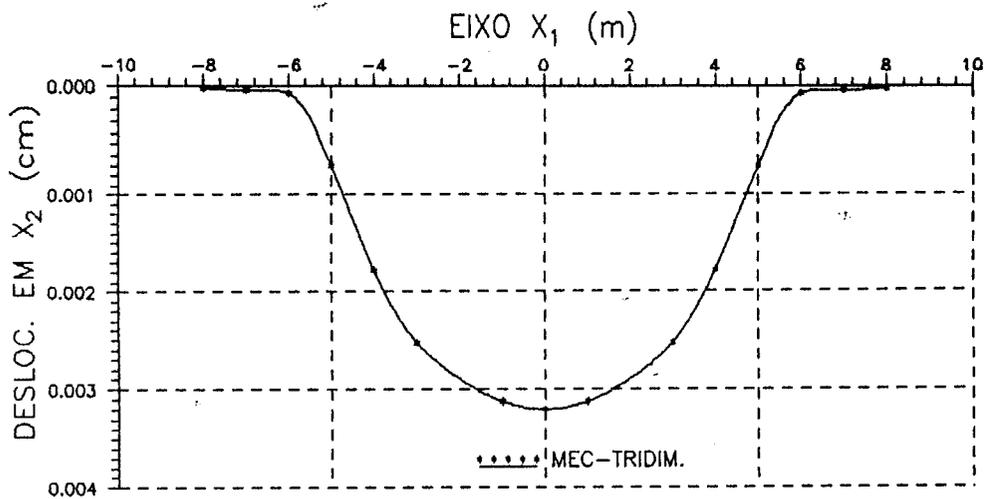


Fig. 5.6.5 - Deslocamentos horizontais na face de escavação

Os deslocamentos verticais, com representação semelhante aos da figura 5.6.3, são mostrados na figura 5.6.6.

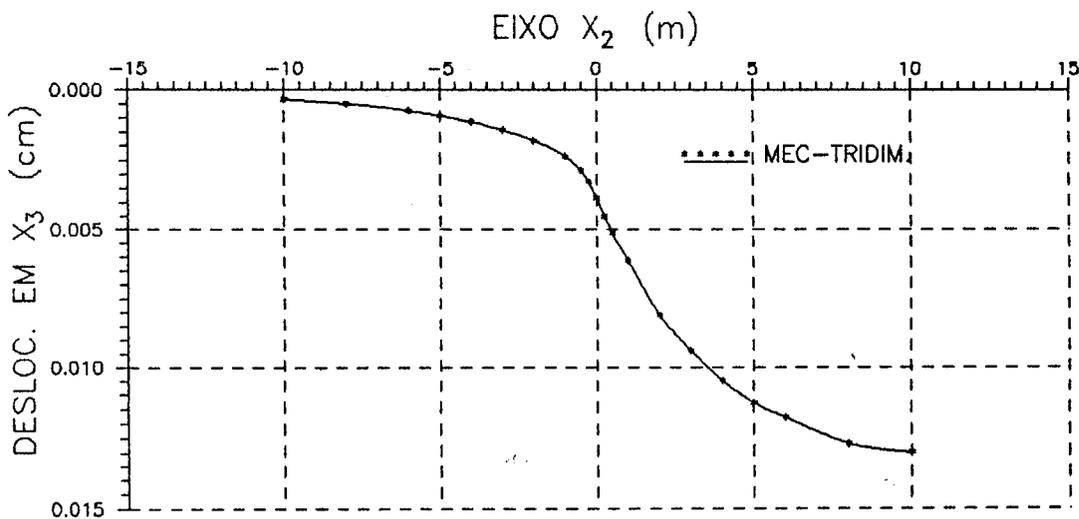


Fig. 5.6.6 - Deslocamentos verticais na região de perturbação.

As tensões σ_{33} também obtidas na região de perturbação, são mostradas na figura 5.6.7.

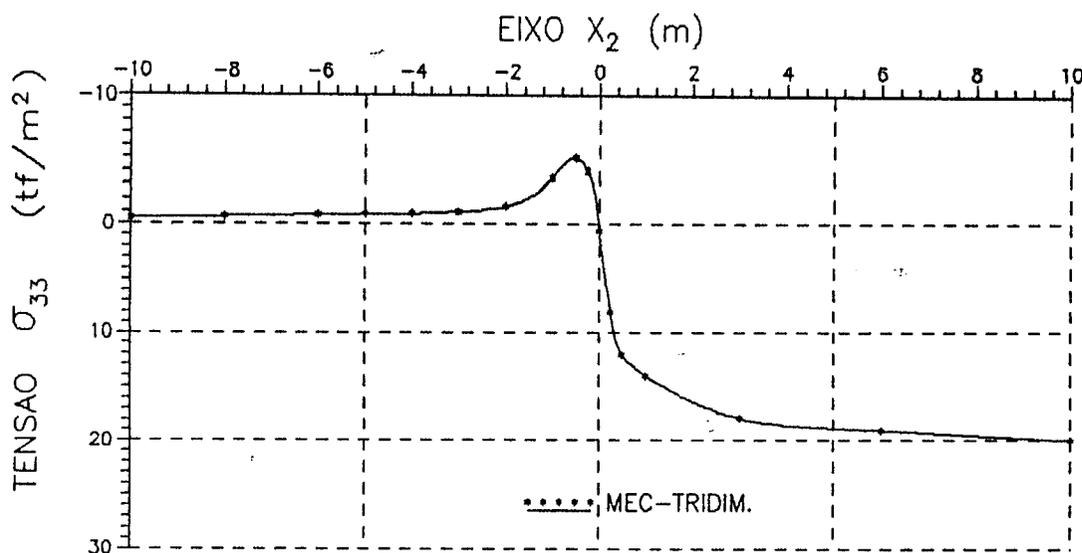


Fig. 5.6.7 - Tensões σ_{33} na região de perturbação.

Observando-se as figuras que trazem os resultados da análise tridimensional, fica patente que a avaliação tridimensional apresenta maiores informações sobre o problema e, o que é mais importante, informações confiáveis, uma vez que a mesma é feita no estado real do problema.

Com a utilização do método dos elementos de contorno em sua formulação tridimensional, a análise do comportamento da frente de escavação de um túnel ganha versatilidade, uma vez que, obtidos os valores dos pontos nodais no contorno, obtem-se facilmente valores para pontos no domínio.

Há, na prática, uma avaliação simplificada para o estudo do comportamento do meio semi-infinito na região próxima à frente de escavação - a investigação bidimensional. São adotados modelos que permitem avaliar tal problema considerando-o em termos de estado plano de deformações (ver trabalho de SAKURAI [88]).

Um procedimento para a análise bidimensional é considerar o túnel cheio com um material que possui características elásticas variáveis ao longo da região de perturbação. Com isso tenta-se simular o amolecimento do maciço semi-infinito próximo à frente de escavação (varia de uma seção do maciço inalterado até uma seção aberta do túnel).

Com a análise bidimensional, sem dúvida, chega-se a resultados mais rapidamente do que com a tridimensional. Porém, para a representação matemática do amolecimento sugerido no parágrafo anterior, são necessários dados importantes obtidos através de análise tridimensional.

CAPÍTULO 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) constitui, sem dúvida, uma ferramenta poderosa e promissora na solução de problemas da engenharia. No presente trabalho procurou-se evidenciar o uso do MEC a problemas de análise de sólidos tridimensionais.

Para problemas conhecidos como de interação solo-estrutura; na qual o tratamento do semi-espaço infinito é muito importante, o Método dos Elementos de Contorno mostra-se inteiramente adequado, como enfatizam os resultados obtidos nos exemplos processados. A adoção de uma solução fundamental mais próxima do tipo de problema envolvido possibilita maior eficiência do método.

Os resultados obtidos no presente trabalho através da análise dos exemplos processados comprovam a adequação da solução fundamental de Mindlin aos problemas estruturais relacionados a sólidos inseridos no espaço semi-infinito; em especial as aplicações que envolvem escavações próximas à superfície do solo, onde a ausência de discretização da superfície melhora significativamente os resultados (menos operações).

Além disso, a solução fundamental de Mindlin leva a uma sensível diminuição dos dados envolvidos no problema e a uma maior facilidade de manipulação dos mesmos, visto que tal solução exige unicamente a discretização do contorno e das áreas onde existem cargas na superfície do semi-infinito.

Por outro lado, a adoção da solução fundamental de Mindlin traz a manipulação de expressões longas, o que exige a otimização no uso destas para que seja obtido um código computacional não muito lento, em

termos de tempo de computação.

O programa desenvolvido pelo presente trabalho tem sua aplicação voltada para micro-computadores, face à grande popularidade e versatilidade desse tipo de equipamento em projetos. Quanto à memória necessária para a análise de corpos tridimensionais, contudo, é importante ressaltar que esse é um ponto que deve ser ainda melhor abordado.

O surgimento de grandes sistemas de equações (resultantes da discretização mais refinada de um problema tridimensional) requer a adoção de rotinas especiais que contornem a questão, relativa aos micro-computadores, de pequena memória central (rotinas que utilizam memória de massa).

De qualquer forma, a adoção, no presente trabalho, de um algoritmo que utiliza a memória de massa (disco rígido, por exemplo) na resolução de sistema de equações encontrado, consiste em uma solução satisfatória frente à questão da pouca memória central existente em micro-computadores.

Outra possibilidade, não adotada no presente trabalho e que traz grandes vantagens, é a de utilizar uma formulação do MEC que aborde o problema como composto de sub-regiões. Neste caso, a matriz dos coeficientes do sistema ganha características de matriz em banda e pode-se lançar mão de algoritmos sofisticados como o sugerido por CROTTY [84], onde blocos nulos são desprezados durante o processo de solução.

Quanto à utilização de elementos triangulares com aproximação constante, os resultados obtidos no presente trabalho são considerados satisfatórios. O inconveniente deste elemento é que torna-se necessária uma discretização de qualquer sólido com um número grande de elementos para que se consiga melhores resultados. Mesmo assim, os resultados são

confiáveis e, do ponto de vista didático, é melhor iniciar-se por esse elemento.

O elemento triangular com aproximação linear descontínua, apresentou melhores resultados, já que permite melhor aproximação das variáveis do problema e melhor discretização das descontinuidades. Com um número reduzido de elementos (em relação ao elemento constante) consegue-se excelentes resultados.

A convergência do Método dos Elementos de Contorno é comprovada através dos resultados aqui obtidos, quando comparados com os resultados de outros trabalhos numéricos ou teóricos, quando foi possível.

O presente trabalho representa apenas o passo inicial para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno a problemas elásticos tridimensionais. Alguns passos importantes devem ser experimentados, ainda que somente para problemas de interação solo-estrutura (tônica das aplicações deste trabalho). Portanto, sugere-se:

- A adoção de algoritmos que permitam utilizar sub-regiões, com a intenção de se aplicar a solução fundamental de Mindlin para a região semi-infinita (o solo) e a de Kelvin para a região infinita (a estrutura, uma barragem por exemplo); não esquecendo que este procedimento traz características de matriz em banda à matriz dos coeficientes do sistema de equações;

- Utilização de outros tipos de elementos (quadrangular, por exemplo) com aproximações de ordens superiores àquelas adotadas neste trabalho;

- Aproveitamento das potencialidades do Método dos Elementos de Contorno combinando-o a outros métodos numéricos (por exemplo, o Método dos Elementos Finitos), tirando de cada um suas melhores características, de maneira a permitir uma solução mais adequada aos problemas de engenharia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SOUTHWELL, R. V. Relaxation methods in theoretical physics. London, Oxford University Press, 1946. (The Oxford Engineering Science Series).
- [2] TURNER, M.J. et alii. Stifness and deflection analysis of complex structures. Journal Aero. Science: 23, pp. 805-823, 1956.
- [3] ARGYRIS, J.H. & KELSEY, S. Energy theorems and structural analysis. London, Butterworths, 1960.
- [4] CLOUGH, R.W. The finite element in plane stress analysis. Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Comp., 1960.
- [5] BREBBIA, C.A. The boundary element method for engineers. London, Pentech Press, 1978.
- [6] ANDERSEN, R.S. et alii. The application and numerical solution of integral equations. Alphen aan den Rijn, The Netherlands, Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [7] BETTI, E. Teoria dell elasticita. Il Nuovo cimento, 7-10, 1872.
- [8] SOMIGLIANA, C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo. Il Nuovo cimento, 17-19, 1886.
- [9] COSTA JR., J.A. The boundary element method applied to plate problems, Southampton, Univ. of Southampton, 1985. (Ph. D. Thesis)
- [10] VOLTERRA, V. Opere matematiche. Acad. Naz. Lincei, Rome, 2: 216-275, 1956.

- [11] FREDHOLM, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta Math., 27: 365-390, 1903.
- [12] HILBERT, D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. New York, Chelsea Publishing Co., 1953.
- [13] MUSKHELISHVILI, N.I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Groningen Holand, Noordhoff, 1953.
- [14] MIKHLIN, S.G. Integral equations. London, Pergamon Press, 1957. (International series of monographs in pure and applied mathematics).
- [15] SMIRNOV, V.J. Integral equations and partial differential equations in A course in higher mathematics. London, Addison-Wesley, 1964.
- [16] KUPRADZE, V.D. Potencial methods in theory of elasticity. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1965.
- [17] KELLOG, O.D. Foundations of potencial theory. New York, Dover, 1953.
- [18] JASWON, M.A. Integral equation methods in potencial theory I. Proc. Royal Society, A 275: 23-32, 1963.
- [19] SYMM, G.T. Integral equation methods in potencial theory II. Proc. Royal Society, A 275: 33-46, 1963.
- [20] MASSONET, C.E. Numerical use of integral procedures in stress analysis. London, O.C.Zienkiewicz and G.S.Holister Eds., Wiley, 1966.

- [21] HESS, J.L. and SMITH, A.M.O. Calculation of potential flow about arbitrary bodies. Progress in Aeronautical Sciences, 8, London, Pergamon, 1967.
- [22] BANERJEE, P.K. Integral equation methods for analysis of piece-wise non-homogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape. Int. Journal Mechanical Science, 18: 293-303, 1976.
- [23] RIZZO, F.J. An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quarterly of Applied Mathematics, 25 (1): 83-92, 1967.
- [24] JASWON, M.A.; MAITI, M; SYMM, G.T. Numerical biharmonic analysis and some applications. Int. Journal of Solids and Structures, 3: 309-332, 1967.
- [25] CRUSE, T.A. and RIZZO, F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I. Journal Math. Anal. Appl., 22: 224-259, 1968.
- [26] CRUSE, T.A. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamics problem II. Journal Math. Anal. Appl., 22, 1968.
- [27] RIZZO, F.A. & SHIPPY, D.J. A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. Int. J. Solids Structures, 4: 1161-1179, 1968.
- [28] CRUSE, T.A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. Int. Journal of Solids and Structures, 5: 1259-1274, 1969.
- [29] CRUSE, T.A. & VANBUREN, W. Three dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge

crack. Int. J. Fract. Mech., 7: 1-15, 1971.

- [30] SWEDLOW, J.L. & CRUSE, T.A. Formulation of boundary integral equations for three dimensional elastoplastic flow. Int. J. Solids Structures, 7: 1673-1683, 1971.
- [31] RICARDELLA, P.C. An implementation of the boundary integral technique for planar problems of elasticity and elasto-plasticity. Carnegie - Mellon University, 1973. (Ph.D. Thesis).
- [32] CRUSE, T.A. Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis. Computers and Structures, 3: 509-527, 1973.
- [33] CRUSE, T.A. An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. Computers and Structures, 4: 741-754, 1974.
- [34] LACHAT, J.C. A further development of the boundary integral technique for elastostatics. University of Southampton, 1975. (Ph.D. Thesis).
- [35] BREBBIA, C.A. ed. Recent advances in boundary element methods. Proc. 1st Int. Conf. Boundary Element Methods, Southampton University, Pentech, 1978.
- [36] BREBBIA, C.A. ed. New developments in boundary element methods. Proc. 2nd Int. Conf. Boundary Element Methods, Southampton University, CML Publications, 1980.
- [37] BREBBIA, C.A. ed. Boundary element methods. Proc. 3rd Int. Conf. Boundary Element Methods, California, Springer-Verlag, 1981.

- [38] BREBBIA, C.A. ed. Boundary element methods in engineering. Proc. 4th Int. Conf. Boundary Element Methods, Southampton University, Springer-Verlag, 1982.
- [39] BUI, H.D. Some remarks about the formation of three dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations. Int. J. Solids Structures, 14: 935-939, 1978.
- [40] TELLES, J.C.F. & BREBBIA, C.A. On the application of the boundary element method to plasticity. Appl. Math. Modelling, 3: 466-470, 1979.
- [41] TELLES, J.C.F. & BREBBIA, C.A. The boundary element method in plasticity. In: BREBBIA, C.A., ed. New development in boundary element methods. CML Publications, 295-317, 1980.
- [42] TELLES, J.C.F. & BREBBIA, C.A. Elastoplastic boundary element analysis. In: WUNDERLICH, W. et alii, eds. Proc. Europe - U.S. Workshop on nonlinear finite element analysis in structural mechanics. Springer-Verlag, 403-434, 1980.
- [43] MUKHERJEE, S. Boundary element method in creep and fracture. Barking, U.K., Elsevier Applied Science Publ., 1982.
- [44] CHANDRA, A. & MUKHERJEE, S. Boundary element formulations for large strain-large deformation problems of viscoplasticity. Int. J. Solids Structures, 20: 41-53, 1984.
- [45] MUKHERJEE, S. & CHANDRA, A. Boundary element formulations for large strain-large deformation problems of plasticity and viscoplasticity. In:

- BANERJEE, P.K. & MUKHERJEE, S., eds. Developments in boundary element methods, 3. Appl. Sci. Publ., 1984.
- [46] MUKHERJEE, S. & RAJIYAH, H. Analysis of metal forming problems by the boundary element method. In: BREBBIA, C.A. & VENTURINI, W.S., eds., Boundary element techniques: applications in stress analysis and heat transfer. CML Publ., 1987.
- [47] CATHIE, C.N. & BANERJEE, P.K. Boundary element method for plasticity and creep including viscoplastic approach. Res. Mechanica, 4: 3-22, 1982.
- [48] BANERJEE, P.K. & DAVIES, T.G. Advanced implementation of boundary element methods for three-dimensional problems of elastoplasticity and viscoplasticity. In: MUKERJEE, S. & BANERJEE, P.K., eds. Developments in boundary element methods, 3. Appl. Sci. Publ., 1984.
- [49] BANERJEE, P.K.; WILSON, R.B.; MILLER, N. development of a large B.E.M. system for three-dimensional analysis. In: CRUSE, T.A. et alii, eds. Advanced topics in boundary element analysis. ASME, 1985.
- [50] ROCHA, F.S. Análise de descontinuidades pelo método dos elementos de contorno. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1988. (Tese de doutoramento).
- [51] BRADY, B.H. & BRAY, J.W. The boundary element method for elastic analysis of tabular orebody extraction, assuming complete plane strain. Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., 15: 29-37, 1978.

- [52] BRADY, B.H.G. & BRAY, J.W. The boundary element method for determining stresses and displacements around long openings in a triaxial stress field. Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., 15: 21-28, 1978.
- [53] VENTURINI, W.S. Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems. University of Southampton, 1982. (Ph.D. Thesis).
- [54] VENTURINI, W.S. & BREBBIA, C.A. Boundary element formulation for nonlinear applications in geomechanics. Appl. Math. Modelling, 8: 251-260, 1984.
- [55] TOTTENHAM, H. Boundary element method for plates and shells. In: BANERJEE, P.K. & BUTTERFIELD, R., eds., Developments in boundary element methods. Appl. Sci. Publ., 1979.
- [56] BÉZINE, G. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. Mech. Research Communications, 5 (4): 197-206, 1978.
- [57] BÉZINE, G. A mixed boundary integral : finite element approach to plate vibration problems. Mechanics Research Communications, 7 (3): 141-150, 1980.
- [58] BÉZINE, G. & BONNEAU, D. Integral equation method for the study of two dimensional stokes flow. Acta Mechanica, 41: 197-209, 1981.
- [59] WU, B.C. & ALTIERO, N.J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. Computer & Structures, 10: 703-707, 1979.

- [60] COSTA JR, J.A. & BREBBIA, C.A. The boundary element method applied to plates on elastic foundations. Engineering Analysis, 2 (4): 174-183, 1985.
- [61] SILVA, N.A. Análise de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1988. (Dissertação de Mestrado).
- [62] BÉZINE, G. & BONNEAU, D. Integral equation method for the study of two dimensional stokes flow. Acta Mechanica, 41: 197-209, 1981.
- [63] YANO, H. & KIEDA, A. An approximate method for solving two-dimensional low-Reynolds-number flow past arbitrary cylindrical bodies. J. Fluid Mec., 97: 157-179, 1980.
- [64] WU, J.C. Integral representation approach for the numerical solution of turbulent flow problems. AIAA Journal, 16: 948-955, 1980.
- [65] WU, J.C. Problems of general viscous flow. In: BANERJEE, P.K. & SHAW, R.P., eds., Development in boundary element method, 2. Barking, U.K., Appl. Sci. Publ., 1982.
- [66] WU, J.C. Boundary element methods and in homogeneous elliptic differential equations. In: BREBBIA, C.A. & MAIER, G., eds., Boundary elements VII. Springer-Verlag, 1985.
- [67] EL REFAEE, M.M.; WU, J.C.; LEKOUKIS, S.G. Solutions of the compressible navier-stokes equations using the integral methods. AIAA Journal, 20: 356-362, 1982.

- [68] WU, J.C. Boundary element solution of viscous flow problems. In: BREBBIA, C.A. & VENTURINI, W.S., eds., Boundary element techniques: application in fluid flow and computational aspects. CML Publ., 1987.
- [69] NAKAGUMA, R.K. Three dimensional elastostatics using the boundary element method. Southampton, University of Southampton, 1979. (Ph.D. Thesis).
- [70] CUROTTO, C.L. Método dos elementos de contorno para elasticidade tridimensional. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, 1981. (Dissertação de Mestrado).
- [71] SÁ, P.A.C.O. & TELLES, J.C.F. Análise de problemas de elasticidade linear tridimensional pelo método dos elementos de contorno utilizando as soluções fundamentais de Kelvin e Mindlin. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 7, São Carlos, EES-USP, 1986 - Anais.
- [72] BANERJEE, P.K. A contribution to the study of axially loaded pile foundations. Southampton, Southampton University, 1969 (Ph.D Thesis).
- [73] BUTTERFIELD, R. & BANERJEE, P.K. The elastic analysis of compressible piles and pile groups, Geotechnique, 21: 43-60, 1971.
- [74] LOVE, A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Dover Publications, 1944.
- [75] MINDLIN, R.D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid, J. Physics, 7: 195-202, 1936.
- [76] GIL RODRIGUEZ, J.C. Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos

bidimensionais. Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, 1986. (Dissertação de Mestrado).

- [77] LAETHEM, M. VAN et alii. The use of boundary elements to represent the far field in soil-structure interaction. North-Holland Publishing Division. Nuclear Engineering and Design, 78: 313-327, 1984.
- [78] DOMINGUEZ, J. & BREBBIA, C.A. Boundary elements an introductory course. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1984.
- [79] SILVA, J.J.R. MEC3DE - Um programa para análise elástica tridimensional com o método dos elementos de contorno, Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, 1989. (Dissertação de Mestrado).
- [80] BATHE, K.J. Finite element procedures in engineering analysis. Prentice Hall Inc., New Jersey, 1982.
- [81] BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F. and WROBEL, L.C. Boundary element techniques. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [82] DANSON, D. A boundary element formulation of problems in linear isotropic elasticity with body forces. In: BREBBIA, C.A. ed., Boundary element methods, Springer-Verlag, 1981.
- [83] HAMMER, P.C. et alii. Numerical integration over simplexes and cones. Math. Tables and Other Aids to Computation, x: 130-137, 1956.
- [84] CROTTY, J.M. A block equation solver for large unsymmetric matrices arising in the boundary integral equation method. International Journal for

Numerical Methods in Engineering, 18: 997-1017,
1982.

[85] TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. Teoria da elasticidade. Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1980.

[86] LOMBARDI, G. The problems of tunnel supports.
In: Proc. 3rd International Congress of Rock
Mechanics, Session IV, Denver, 1974.

[87] PANET, M. Time-dependent deformations in underground works. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, France.

[88] SAKURAI, S. Approximate time-dependent analysis of tunnel support structure considering progress of tunnel face. Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2: 159-175, 1978.

APÊNDICE A - SIMETRIA DO TENSOR DAS TENSÕES PARA A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE MINDLIN

Serão feitas considerações sobre a simetria do tensor de terceira ordem das tensões, para a solução fundamental de Mindlin.

As dezoito componentes do tensor das tensões fundamentais (expressões (2.4.9)) são suficientes para a definição de todas as componentes necessárias. Para a determinação das componentes restantes, deve-se observar as situações de carregamento utilizadas no trabalho original de MINDLIN [75], que serão reportadas a seguir.

1º caso:

uma carga unitária é aplicada no interior de um sólido semi-infinito perpendicularmente ao seu plano de contorno.

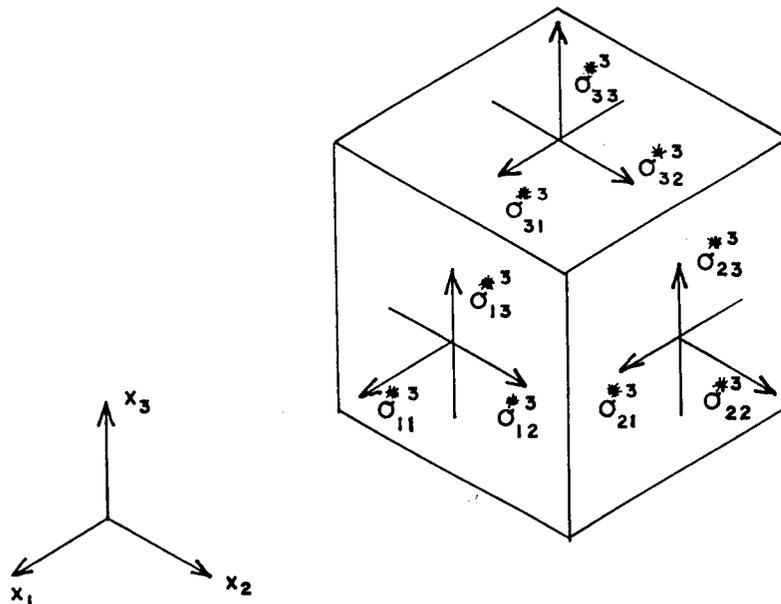


Fig. A.1 - Componentes do tensor de terceira ordem das tensões - carga unitária na direção x_3

As seguintes componentes são conhecidas:

$$\sigma_{11}^{*3}, \sigma_{12}^{*3}, \sigma_{13}^{*3}, \sigma_{22}^{*3}, \sigma_{23}^{*3} \text{ e } \sigma_{33}^{*3} \quad \dots(A.1)$$

As demais componentes, tendo em vista a figura A.1, são:

$$\sigma_{21}^{*3} = \sigma_{12}^{*3};$$

$$\sigma_{31}^{*3} = \sigma_{13}^{*3};$$

$$\sigma_{32}^{*3} = \sigma_{23}^{*3}.$$

.....(A.2)

2º caso:

uma carga unitária é aplicada no interior de um sólido semi-infinito paralelamente à direção do eixo x_1 .

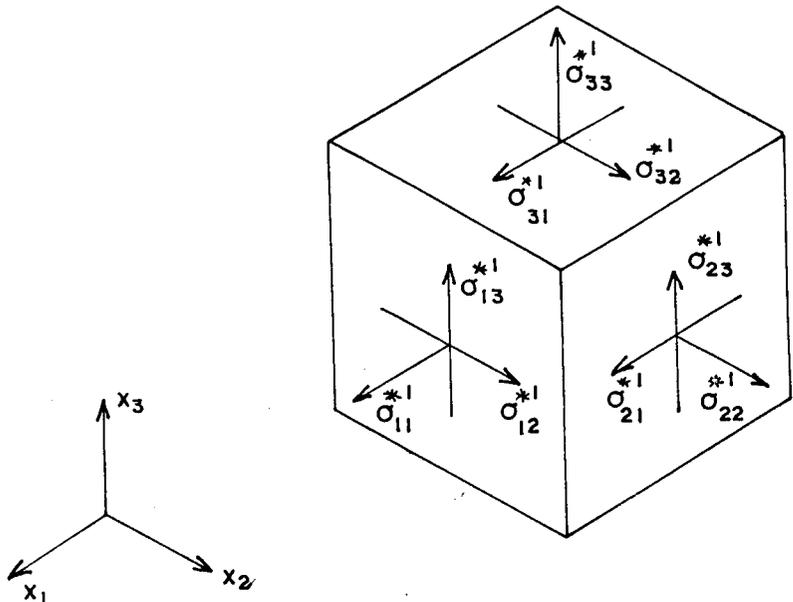


Fig. A.2 - Componentes do tensor de terceira ordem das tensões - carga unitária na direção x_1

Neste caso as componentes conhecidas são:

$$\sigma_{11}^{*1}, \sigma_{12}^{*1}, \sigma_{13}^{*1}, \sigma_{22}^{*1}, \sigma_{23}^{*1} \text{ e } \sigma_{33}^{*1} \quad \dots(\text{A.3})$$

As demais componentes, tendo em vista a figura A.2, são:

$$\sigma_{21}^{*1} = \sigma_{12}^{*1};$$

$$\sigma_{31}^{*1} = \sigma_{13}^{*1}; \quad \dots(\text{A.4})$$

$$\sigma_{32}^{*1} = \sigma_{23}^{*1}.$$

3º caso:

uma carga unitária é aplicada no interior de um sólido semi-infinito paralelamente à direção do eixo x_2 .

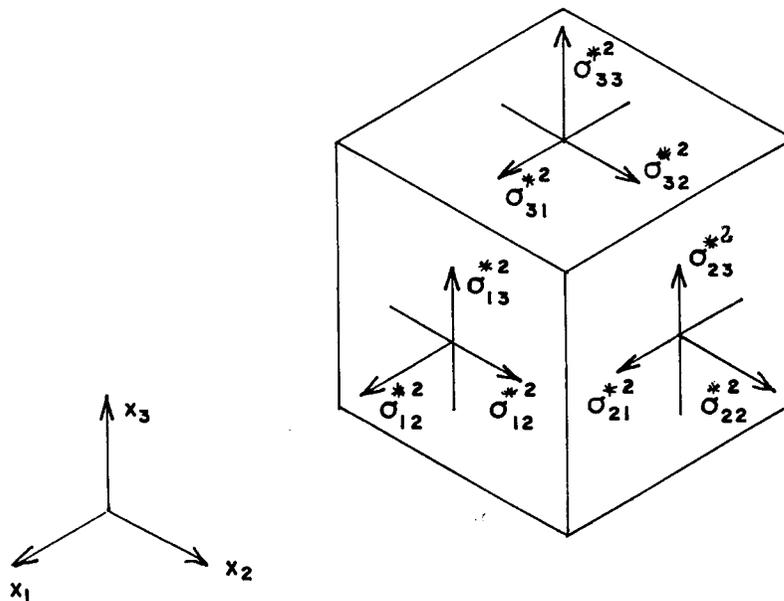


Fig. A.3 - Componentes do tensor de terceira ordem das tensões - carga unitária na direção x_2

Agora, conhecem-se as seguintes componentes:

$$\sigma_{11}^{*2}, \sigma_{12}^{*2}, \sigma_{13}^{*2}, \sigma_{22}^{*2}, \sigma_{23}^{*2} \text{ e } \sigma_{33}^{*2} \quad \dots(\text{A.5})$$

As demais componentes, tendo em vista a figura A.2, são:

$$\sigma_{21}^{*2} = \sigma_{12}^{*2};$$

$$\sigma_{31}^{*2} = \sigma_{13}^{*2};$$

$$\sigma_{32}^{*2} = \sigma_{23}^{*2}.$$

.....(A.6)

APÊNDICE B - DERIVADAS DO TENSOR DAS TENSÕES PARA A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE MINLIN

Neste apêndice serão apresentadas as derivadas do tensor de terceira ordem, utilizadas para a obtenção dos tensores S_{ijk}^* e D_{ijk}^* . Esses tensores são necessários para a avaliação de tensões em pontos definidos no domínio, quando se utiliza a solução fundamental de Mindlin (expressão 2.5.8).

As derivadas do tensor de terceira ordem, apresentadas aqui, são retiradas do trabalho LAETHEM et alii [77].

Inicialmente são apresentadas algumas expressões auxiliares ao cálculo das derivadas, sendo que os parâmetros K_s , r_i , R_i , c e z são aqueles apresentados no item 2.4.4.

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - 2\nu \\ A_2 &= 3 - 4\nu \\ A_3 &= 1 - \nu \end{aligned} \quad \dots(B.1)$$

(expressões indiciais (B.2), dadas a seguir)

$$D = 2\delta_{ai} - 1$$

$$C_1(i,j) = \frac{6r_j \delta_{ji}}{r^5} - \frac{15r_j^2 r_i}{r^7}$$

$$C_2(i,j) = \frac{6A_2 r_j \delta_{ij}}{R^5} - \frac{15A_2 r_j^2 R_i D}{R^7}$$

$$C_3(i,j,k) = \frac{4A_3 A_1}{R^2 (R+R_3)^4} \left[k - \frac{r_j^2 (3R+R_3)}{R^2 (R+R_3)} \right] \left[\frac{R_i D}{R} (R+R_3)^2 + \right.$$

$$+ 2R(R+R_3) \left[\frac{R_i D}{R} + \delta_{3i} \right] - \frac{4A_3 A_1}{R(R+R_3)^2} \left[\frac{2r_j(3R+R_3)\delta_{ij}}{R^2(R+R_3)} + \right. \\ \left. - \frac{r_j^2 \left(\frac{3R_i D}{R} + \delta_{3i} \right)}{R^2(R+R_3)} + \frac{r_j^2(3R+R_3)}{R^4(R+R_3)^2} \left[2R_i D(R+R_3) + R^2 \left(\frac{R_i D}{R} + \delta_{3i} \right) \right] \right]$$

$$C_4(i, j, k, l, m) = \left[\frac{6\delta_{3i}}{R^5} - \frac{30cR_i D}{R^7} \right] \left[mc - (k-1\nu)R_3 + \frac{5r_j^2 z}{R^2} \right] + \\ + \frac{6c}{R^5} \left[m\delta_{3i} - (k-1\nu)\delta_{3i} - \frac{10r_j z \delta_{ij}}{R^2} - \frac{10r_j z R_i D}{R^4} \right]$$

$$C_5(i, j) = \left[-\frac{6z\delta_{3i}}{R^5} + \frac{30czR_i D}{R^7} \right] \left[1 - \frac{5r_j^2}{R^2} \right] - \frac{6cz}{R^5} \left[\frac{10r_j \delta_{ij}}{R^2} + \right. \\ \left. + \frac{10r_j^2 R_i D}{R^4} \right]$$

$$C_6(i, j) = \left[-\frac{6\delta_{3i}}{R^5} + \frac{30cR_i D}{R^7} \right] \left[zR_3 - A_1 r_j^2 - \frac{5r_j^2 z R_3}{R^2} \right] + \\ - \frac{6c}{R^5} \left[z\delta_{3i} + 2A_1 r_j \delta_{ij} + \frac{10r_j z R_3 \delta_{ij}}{R^2} - \frac{5r_j^2 z \delta_{3i}}{R^2} + \right. \\ \left. + \frac{10r_j^2 z R_3 R_i D}{R^4} \right]$$

$$C_7(i,j) = \frac{6r_j r_3 \delta_{ij}}{r^5} + \frac{3r_j^2 \delta_{3i}}{r^5} - \frac{15r_j^2 r_3 r_i}{r^7}$$

$$C_8(i,j) = \frac{6A_2 r_i r_3 \delta_{ij} + 3A_2 r_j^2 \delta_{3i}}{R^5} + \frac{6(R_3+z)\delta_{3i}(A_1 z - 2\nu c)}{R^5} +$$

$$- \frac{12cR_3 \nu \delta_{3i}}{R^5} + \frac{5(3A_2 r_j^2 r_3 - 6cR_3(A_1 z - 2\nu c))R_i D}{R^7}$$

$$C_9(i,j) = \frac{-30\delta_{3i} r_j^2 z R_3 - 30c r_j^2 z \delta_{3i} + 60c r_j z R_3 \delta_{ij}}{R^7} +$$

$$+ \frac{(210c r_j^2 z R_3) R_i D}{R^9}$$

$$C_{10}(i,j) = \frac{4A_3 A_1}{R^2 (R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_j^2}{R(R+R_3)} - \frac{r_j^2}{R^2} \right] \left[\frac{R_i D}{R} (R+R_3) + \right.$$

$$\left. + R \left(\frac{R_i D}{R} + \delta_{3i} \right) \right] - \frac{4A_3 A_1}{R(R+R_3)} \left[\frac{2r_j \delta_{ij}}{R(R+R_3)} + \frac{r_j^2}{R^2 (R+R_3)^2} \left[\right.$$

$$\left. \frac{R_i D}{R} (R+R_3) + R \left(\frac{R_i D}{R} + \delta_{3i} \right) \right] + \frac{2r_j \delta_{ij}}{R^2} + \frac{2r_j^2 R_i D}{R^4} \right]$$

A seguir são apresentadas as expressões das derivadas do tensor de terceira ordem (expressões (B.3)).

$$\sigma_{11,i}^{*1} = - \frac{\delta_{1i}}{r_1} \sigma_{11}^{*1} + K_s r_1 \left[- \frac{3A_1 r_j}{r^5} - \frac{3A_1 (5-4\nu) R_i D}{R^5} + \right.$$

$$\left. + C_1(i,1) + C_2(i,1) + C_3(i,1,3) + C_4(i,1,3,2,3) \right]$$

$$\sigma_{12,i}^{*1} = - \frac{\delta_{2i}}{r^2} \sigma_{12}^{*1} + K_s r_2 \left[- \frac{3A_1 r_i}{r^5} - \frac{3A_1 R_i D}{R^5} + C_1(i,1) + \right. \\ \left. + C_2(i,1) + C_3(i,1,1) + C_5(i,1) \right]$$

$$\sigma_{13,i}^{*1} = K_s \left[\frac{A_1 \delta_{3i}}{r^3} - \frac{3A_1 r_3 r_i}{r^5} - \frac{A_1 \delta_{3i}}{R^3} - \frac{3A_1 r_3 R_i D}{R^5} + \right. \\ \left. + \frac{3r_1^2 \delta_{3i}}{r^5} + r_3 C_1(i,1) - \frac{3A_2 r_1^2 \delta_{3i}}{R^5} + R_3 C_2(i,1) + \right. \\ \left. + C_6(i,1) \right]$$

$$\sigma_{22,i}^{*1} = - \frac{\delta_{1i}}{r_1} \sigma_{22}^{*1} + K_s r_1 \left[\frac{3A_1 r_i}{r^5} - \frac{3A_1 A_2 R_i D}{R^5} + C_1(i,z) + \right. \\ \left. + C_2(i,z) + C_3(i,z,1) + C_4(i,z,1,z,1) \right]$$

$$\sigma_{23,i}^{*1} = \left[- \frac{\delta_{1i}}{r_1} - \frac{\delta_{2i}}{r_2} \right] \sigma_{23}^{*1} + K_s r_1 r_2 \left[\frac{3\delta_{3i}}{r^5} - \frac{15r_3 r_i}{r^7} + \right. \\ \left. - \frac{3A_2 \delta_{3i}}{R^5} + \frac{15A_2 R_3 R_i D}{R^7} + \left[\frac{6\delta_{3i}}{R^5} - \frac{30cR_i D}{R^7} \right] \left[A_1 + \frac{5zR_3}{R^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{6c}{R^5} \left[\frac{5z\delta_{3i}}{R^2} - \frac{10zR_3 R_i D}{R^4} \right] \right]$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33,i}^{*1} = & - \frac{\delta_{1i}}{r_1} \sigma_{33}^{*1} + K_s r_1 \left[\frac{3A_1 r_i}{r^5} + \frac{3A_1 R_i D}{R^5} + C_1(i,3) + \right. \\ & - \frac{6A_2 R_3 \delta_{3i}}{R^5} + \frac{15A_2 R_3^2 R_i D}{R^7} + \left. \left[\frac{6\delta_{3i}}{R^5} - \frac{30cR_i D}{R^7} \right] \left[c + A_1 R_3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{5zR_3^2}{R^2} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[\delta_{3i} + A_1 \delta_{3i} + \frac{10zr_3 \delta_{3i}}{R^2} - \frac{10zR_3 DR_i^2}{R^4} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11,i}^{*2} = & - \frac{\delta_{2i}}{r_2} \sigma_{11}^{*2} + K_s r_2 \left[\frac{3A_1 r_i}{r^5} - \frac{3A_1 A_2 R_i D}{R^5} + C_1(i,1) + \right. \\ & \left. + C_2(i,1) + C_3(i,1,1) + C_3(i,1,z,1) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12,i}^{*2} = & - \frac{\delta_{1i}}{r_1} \sigma_{12}^{*2} + K_s r_1 \left[- \frac{3A_1 r_i}{r^5} - \frac{3A_1 R_i D}{R^5} + C_1(i,z) + \right. \\ & \left. + C_2(i,z) + C_3(i,z,1) + C_5(i,z) \right] \end{aligned}$$

$$\sigma_{13,i}^{*2} = \sigma_{23,i}^{*1}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22,i}^{*2} = & - \frac{\delta_{2i}}{r_2} \sigma_{22}^{*2} + K_s r_2 \left[- \frac{3A_1 r_i}{r^5} - \frac{3A_1 (5-4\nu) R_i D}{R^5} + \right. \\ & \left. + C_1(i,z) + C_2(i,z) + C_3(i,z,3) + C_4(i,z,3,z,3) \right] \end{aligned}$$

$$\sigma_{23,i}^{*2} = K_s \left[\frac{A_1 \delta_{3i}}{r^3} - \frac{3A_1 r_3 r_i}{r^5} - \frac{A_1 \delta_{3i}}{R^3} - \frac{3A_1 r_3 R_i D}{R^5} + \right. \\ \left. + C_7(i,2) + R_3 C_2(i,2) - \frac{3A_2 r_2^2 \delta_{3i}}{R^5} + C_6(i,2) \right]$$

$$\sigma_{33,i}^{*2} = \frac{r_2}{r_1} \sigma_{33,i}^{*1} + \sigma_{33}^{*1} \left(\delta_{1i} \frac{r_2}{r_1^2} - \frac{\delta_{2i}}{r_1} \right)$$

$$\sigma_{11,i}^{*3} = K_s \left[-\frac{A_1 \delta_{3i}}{r^3} + \frac{3A_1 r_3 r_i}{r^5} - \frac{A_1 (3+4\nu) \delta_{3i}}{R^3} + C_7(i,1) + \right. \\ \left. - \frac{3A_1 (3r_3 - 4\nu R_3) R_i D}{R^5} + C_8(i,1) + C_9(i,1) + C_{10}(i,1) \right]$$

$$\sigma_{12,i}^{*3} = \left[-\frac{\delta_{1i}}{r_1} - \frac{\delta_{2i}}{r_2} \right] \sigma_{12}^{*3} + K_s r_1 r_2 \left[\frac{3\delta_{3i}}{r^5} - \frac{15r_3 r_i}{r^7} + \frac{3A_2 \delta_{3i}}{R^5} + \right. \\ \left. + \frac{15A_2 r_3 R_i D}{R^7} - \frac{30z\delta_{3i}(R_3+c)}{R^7} + \frac{210czR_3 R_i D}{R^9} + \frac{4A_3 A_1}{R^2(R+R_3)} \left[\right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(R_i D/R + \delta_{3i})}{(R+R_3)^2} - \frac{R_i D}{R^3} \right] - \frac{4A_3 A_1}{R^4(R+R_3)^2} \left[\frac{1}{R+R_3} + \frac{1}{R} \right] \left[2R_i D(R+R_3) + \right. \right. \\ \left. \left. + R^2 \left(\frac{R_i D}{R} + \delta_{3i} \right) \right] \right]$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13,i}^{*a} = & - \frac{\delta_{1i}}{r_1} \sigma_{13}^{*a} + K_s r_1 \left[- \frac{3A_1 r_i}{r^5} - \frac{3A_1 R_i D}{R^5} + C_1(i, z) + \right. \\ & - \frac{3A_2 z \delta_{3i} - 3\delta_{3i}(3z+2c)}{R^5} + \frac{5(3A_2 z R_3 - 3c(3z+c))R_i D}{R^7} + \\ & \left. + \frac{210czR_3^2 R_i D}{R^9} - \frac{30\delta_{3i} z R_3^2 + 60czR_3 \delta_{3i}}{R^7} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22,i}^{*a} = & K_s \left[- \frac{A_1 \delta_{3i}}{r^3} + \frac{3A_1 r_3 r_i}{r^5} + C_7(i, z) - \frac{A_1(3-4\nu)\delta_{3i}}{R^3} + \right. \\ & \left. - \frac{3A_1(3r_3 - 4\nu R_3)R_i D}{R^5} + C_8(i, z) + C_9(i, z) + C_{10}(i, z) \right] \end{aligned}$$

$$\sigma_{23,i}^{*a} = \frac{r_2}{r_1} \sigma_{13,i}^{*a} + \sigma_{13}^{*a} \left(\delta_{1i} \frac{r_2}{r_1} - \frac{\delta_{2i}}{r_1} \right)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33,i}^{*a} = & K_s \left[\frac{A_1 \delta_{3i}}{r^3} - \frac{3A_1 r_3 r_i}{r^5} - \frac{A_1 \delta_{3i}}{R^3} - \frac{3A_1 r_3 R_i D}{R^5} + \frac{9r_3^2 \delta_{3i}}{r^5} + \right. \\ & - \frac{15r_3^3 r_i}{r^7} + \frac{210czR_3^3 R_i D}{R^9} - \frac{6A_2 z c R_3 \delta_{3i} - 3(R_3 + c)\delta_{3i}(5z-c)}{R^5} + \\ & \left. + \frac{3cR_3 \delta_{3i}}{R^5} + \frac{5(3A_2 z R_3^2 - 3cR_3(5z-c))R_i D}{R^7} - \frac{30zR_3^3 \delta_{3i} + 90czR_3^2 \delta_{3i}}{R^7} \right] \end{aligned}$$