

**"ESTUDO SOBRE O EFEITO DA DEFORMABILIDADE DAS
LAJES NA DISTRIBUIÇÃO DOS ESFORÇOS HORIZONTAIS
NOS PAINÉIS DE CONTRAVENTAMENTO"**

AUTOR: ENG . HEITOR MIRANDA BOTTURA

ORIENTADOR: PROF.DR. JOSÉ ELIAS LAIER

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ESTUDO SOBRE O EFEITO DA DEFORMABILIDADE DAS
LAJES NA DISTRIBUIÇÃO DOS ESFOÇOS HORIZONTAIS
NOS PAINÉIS DE CONTRAVENTAMENTO**

Eng. HEITOR MIRANDA BOTTURA.
Orientador: PROF. DR. JOSÉ ELIAS LAIER

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Dissertação apresentada à Escola,
de Engenharia de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, como
parte dos requisitos para obten-
ção do título de "Mestre em En-
genharia de Estruturas".

São Carlos, Fevereiro de 1991

À minha esposa

A meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. José Elias Laier, pela orientação, estímulo e amizade, desde há muito tempo recebidos, e decisivos no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Sr. Rui Roberto Casale, pela presteza e excelência no trabalho de datilografia; à Srª Sylvia Helena Morrette Villani e Sr. Olavo Dionysio de Souza, pela realização dos desenhos com perfeição e rapidez.

Aos meus colegas.

A B S T R A C T

The analysis here presented treats of horizontal load distribution among the panels of a tall building under wind action.

The continuous medium technic is utilized and the slabs deformation is considered.

Several panel combination cases are treated, all of them presenting vertical simetry plane in the load acting direction.

Two kinds of panels are utilized: frames, whose shear deformation is the only one considered, and shear walls, where solely the flexural deformation is taken in account (the slabs modelling also follows this pattern).

The resulting differential equations, in each case, are directly solved; simplified expressions are also derived for the shearing force and bending moment at the footing, allowing the simplicity of the traditional appliance of the continuous medium technic, that is, considering slabs as rigid panels, with more representative results, in many cases.

Three examples are presented, and the results of their analysis are compared with those obtained both from the traditional continuous medium technic and from the matricial analysis, with the discrete model of the structure.

R E S U M O

Este trabalho objetiva estudar a distribuição das cargas horizontais devidas à ação do vento entre os painéis de contraventamento de edifícios altos com a aplicação da técnica do meio contínuo, considerando-se a deformação das lajes em seu próprio plano.

Analizam-se arranjos de três ou quatro painéis, de mesmo tipo ou não, que apresentem um plano de simetria vertical na direção de atuação da carga.

Os tipos de painéis empregados são o painel-parede, que apresenta deformação apenas por flexão, e o painel-pórtico cuja única causa de deformação considerada é o esforço cortante. Considera-se a laje como deformável apenas por flexão.

As equações diferenciais resultantes em cada caso são resolvidas explicitamente; obtém-se também, para os esforços na base, expressões simplificadas que permitem manter a abordagem tradicional da técnica do meio contínuo, com resultados mais representativos, na maioria dos casos.

Apresentam-se três exemplos onde se comparam os gráficos de esforços e deslocamentos obtidos com as lajes deformáveis com aqueles gerados pela aplicação tradicional da técnica do meio contínuo e com a análise matricial da estrutura, segundo um modelo discreto.

Í N D I C E

1. INTRODUÇÃO	1
2. OS TIPOS DE PAINÉIS	4
2.1 - INTRODUÇÃO	4
2.2 - PAINEL-PAREDE	5
2.3 - PAINEL-PÓRTICO	7
2.4 - PAINEL-LAJE	9
3. ASSOCIAÇÕES DE PÓRTICOS	17
3.1 - INTRODUÇÃO	17
3.2 - ASSOCIAÇÕES DE TRÊS PÓRTICOS	17
3.3 - ASSOCIAÇÕES DE QUATRO PÓRTICOS	28
4. ASSOCIAÇÕES DE PAREDE	34
4.1 - INTRODUÇÃO	34
4.2 - ASSOCIAÇÃO DE TRÊS PAREDES	35
4.3 - ASSOCIAÇÃO DE QUATRO PAREDES	52
5. ASSOCIAÇÃO DE PÓRTICOS E PAREDES	57
5.1 - INTRODUÇÃO	57
5.2 - ASSOCIAÇÃO DE DUAS PAREDES E UM PÓRTICO IN- TERMEDIÁRIO	57
5.3 - ASSOCIAÇÃO DE DUAS PAREDES EXTREMAS E DOIS PÓRTICOS INTERMEDIÁRIOS	74
5.4 - ASSOCIAÇÃO DE UMA PAREDE CENTRAL E DOIS PÓR- TICOS EXTREMOS	82
5.5 - ASSOCIAÇÃO DE DUAS PAREDES CENTRAIS E DOIS PÓRTICOS EXTREMOS	88
6. EXEMPLOS	90
6.1 - INTRODUÇÃO	90
6.2 - PRIMEIRO EXEMPLO	91
6.3 - SEGUNDO EXEMPLO	100
6.4 - TERCEIRO EXEMPLO	109
7. CONCLUSÕES	120

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

No estudo do comportamento estrutural dos edifícios altos, a ação horizontal proporcionada pelo vento deve ser considerada. Para tal, duas abordagens têm sido utilizadas.

A técnica matricial de análise [9] é uma delas, considerando-se a estrutura como formada por barras interligadas, com o efeito da pressão do vento sendo representado por cargas equivalentes aplicadas às barras ou aos nós da estrutura (junção de duas ou mais barras). Suas principais desvantagens são a formação de sistemas de equações lineares de ordem elevada, exigindo-se o uso de computadores, fornecimento de muitos parâmetros de projeto e análise cuidadosa dos resultados para interpretá-los, o que, na prática, inviabiliza seu uso em anteprojetos, ou mesmo projetos, quando não há disponibilidade de equipamentos adequados.

A outra abordagem é a técnica do meio contínuo [2], [3], [4], [6] e [8], onde o comportamento estrutural

é representado por equações diferenciais relacionando ações e deslocamentos através de poucos parâmetros característicos da estrutura. Nessa técnica, para distribuição da parcela do carregamento que cabe a cada painel resistente [7] (paredes de contraventamento, pórticos, treliças de contraventamento ou associações desses elementos), assume-se a hipótese de que a laje tem rigidez infinita no seu plano, o que pode afastar-se um tanto da verdade para edifícios largos e pouco profundos, em planta. Em tais edifícios, painéis afastados entre si podem acusar os efeitos da deformação da laje em seu plano, na distribuição dos quinhões de carga que lhes cabem.

A frequência do emprego de edifícios com planta de relação largura/profundidade sensivelmente maior que a unidade é bastante grande, notadamente em conjuntos habitacionais em grandes centros, onde se visa racionalizar o aproveitamento do terreno, atendendo-se às boas normas de urbanização. Assim, torna-se importante estabelecer relações e parâmetros que levem em conta a deformabilidade das lajes na determinação dos esforços provocados pelo vento, facilitando e aprimorando a elaboração de anteprojetos de construções com tal geometria.

O abandono da hipótese simplificadora de considerar as lajes como diafragmas de rigidez infinita em seu plano já tem merecido atenção dos pesquisadores: na técnica matricial, em SERRA [5], onde se introduz na matriz de rigidez da estrutura a contribuição das lajes, consideradas deformáveis. Por consequência, não se tem mais apenas um deslocamento independente por andar, aumentando-se o trabalho envolvido na solução do problema.

Na técnica do meio contínuo, BAIKOV [1] fornece indicações para o tratamento do problema, desde que a associação seja de painéis do mesmo tipo.

Em YOSHIDA [10] encontram-se associações de painéis diferentes. A dificuldade do tratamento matemático das equações diferenciais resultantes é contornada com a utilização do método das diferenças finitas.

Para os edifícios com um plano vertical de simetria, tratados em [1] e [10], as associações de painéis podem ser abordadas como associações planas. Então, para os casos básicos de combinação de painéis pórticos e paredes, o tratamento direto das equações diferenciais envolvidas (isto é, sem se recorrer a métodos numéricos) é relativamente simples, o que permite uma boa compreensão do inter-relacionamento dos parâmetros envolvidos.

Outra hipótese que simplifica sobremaneira o tratamento matemático, e que não constitui uma limitação muito importante atualmente, é a dos painéis terem rigidez constante ao longo de sua altura (uma certa uniformidade geométrica também na vertical vem sendo buscada nos últimos tempos).

O objetivo deste trabalho é o estudo dos casos básicos de combinação de pórticos e paredes, com as hipóteses descritas, considerando-se a deformabilidade das lajes em seu próprio plano; comparam-se os resultados obtidos com os resultados da aplicação da técnica tradicional do meio contínuo com diafragmas de rigidez infinita, e também com aqueles oriundos da aplicação da técnica matricial, chamando-se a atenção para alguns resultados, cujo conhecimento pode aprimorar a aplicação da técnica do meio contínuo à análise de edifícios altos.

CAPÍTULO 2

OS TIPOS DE PAINÉIS

2.1 - INTRODUÇÃO

Na técnica do meio contínuo [6], a estrutura do edifício composta por elementos discretos como lajes, vigas e pilares é substituída por um meio contínuo, de comportamento elástico equivalente ao da estrutura original, mas com rigidez uniformemente distribuída ao longo da altura do prédio. As cargas horizontais aplicadas, oriundas (entre outras causas) da ação do vento são representadas por pressões aplicadas à superfície vertical do prédio.

As resultantes dessas pressões atuam sobre elementos resistentes planos verticais, chamados painéis, e o quinhão que corresponde a cada painel depende da relação constitutiva que o rege (do tipo de painel), de uma constante de rigidez que o caracteriza e ainda de como ele se liga aos demais painéis resistentes [3].

Assim, em função da relação constitutiva do painel, fica ele caracterizado como apresentando uma determinada deformada ao longo de sua altura. Em função da constante de rigidez pode-se avaliar a contribuição de cada painel na resistência do conjunto e, dependendo da ligação existente entre os diversos painéis, pode-se complementar escrevendo-se equações de compatibilidade de deslocamentos. Se essa ligação verifica-se através de diafragmas de rigidez infinita, por exemplo, numa associação simétrica, como as que vão ser consideradas, todos os painéis têm mesmo deslocamento numa dada ordenada.

2.2 - PAINEL-PAREDE

O painel plano, contínuo, sem rigidez transversal, deformável principalmente por momento fletor, recebe o nome de painel-parede. São considerados neste trabalho apenas painéis-parede de seção constante ao longo da altura e perfeitamente engastados na base. As deformações por força cortante são desprezadas, e o carregamento externo admitido consiste de uma carga distribuída q_w e uma carga concentrada F_w aplicada no topo. As orientações e notações adotadas são as ilustradas na figura 2.1.

O equilíbrio de um elemento infinitesimal de altura dz (mostrado na figura 2.1c), fornece:

$$\frac{dM_w}{dz} = - Q_w \quad (2.1)$$

$$\frac{dQ_w}{dz} = - q_w \quad (2.2)$$

e ainda, derivando-se (2.1) e levando-se em (2.2):

$$\frac{d^2 M_w}{dz^2} = q_w \quad (2.3)$$

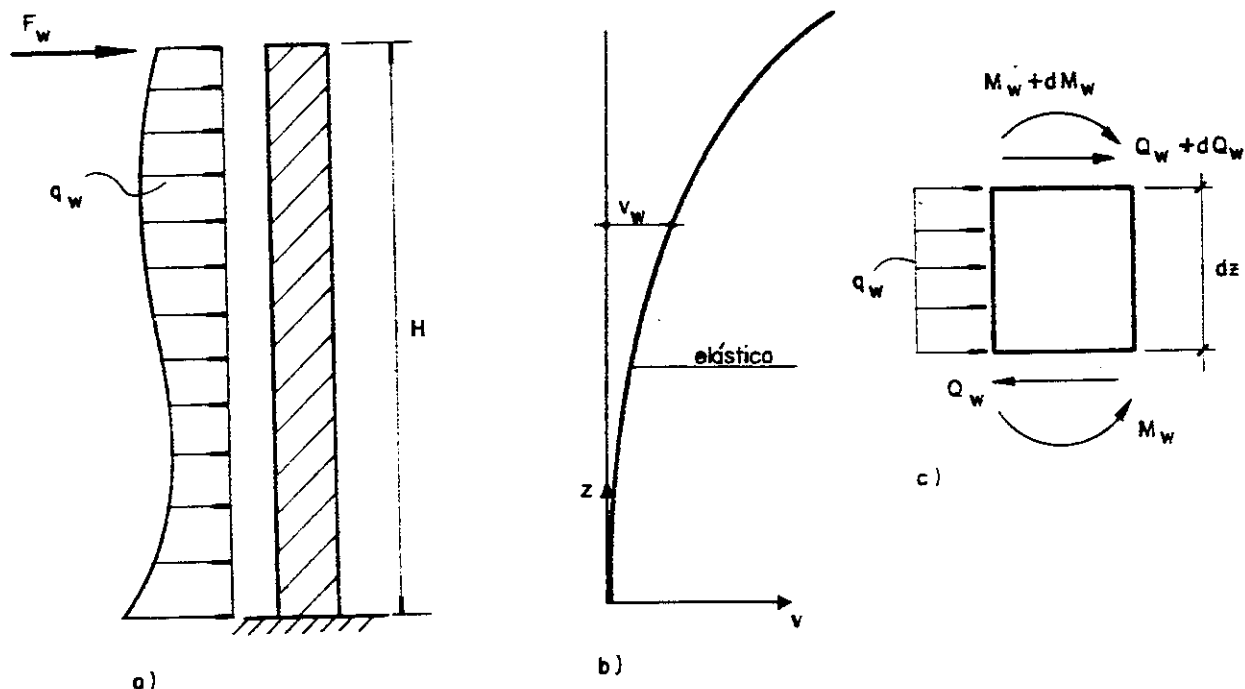


FIG. 2.1 — PAINEL — PAREDE

expressão esta que relaciona o carregamento atuante com o momento fletor resultante.

Desprezando-se a deformação por força cortante, pode-se escrever para a equação da linha elástica (relação momento-curvatura clássica):

$$\frac{d^2 u_w}{dz^2} = u_w'' = \frac{M_w}{j_w} \quad (2.4)$$

com j_w representando o produto de rigidez à flexão do painel, dado por EI_w .

Derivando-se (2.4), vem:

$$j_w u_w''' = \frac{dM_w}{dz}$$

e levando-se (2.1):

$$Q_w = - j_w u_w''' \quad (2.5)$$

relacionando-se dessa forma o esforço cortante à deformada. Derivando-se (2.5) e substituindo-se (2.2), tem-se ainda:

$$u_w^{IV} = \frac{1}{j_w} q_w \quad (2.6)$$

encerrando-se assim as relações de interesse.

2.3 - PAINEL-PÓRTICO

O painel plano, contínuo, sem rigidez transversal, formado por pilares e vigas, elasticamente equivalente a um consolo deformável apenas por força cortante, resultando num conjunto praticamente indeformável por momento fletor, recebe o nome de painel-pórtico. Serão considerados neste trabalho apenas aqueles formados por pilares e vigas de seção constante ao longo de sua altura. O carregamento externo admitido consiste de uma carga distribuída q_f e uma carga concentrada F_f aplicada no topo. As orientações e notações adotadas (consistentes com aquelas do painel-parede) são as ilustradas na figura 2.2.

As equações de equilíbrio, mantidas a orientação e convenção adotadas, são as mesmas para qualquer elemento de painel de qualquer tipo, isto é:

$$\frac{dM_f}{dz} = - Q_f \quad (2.7)$$

$$\frac{dQ_f}{dz} = - q_f \quad (2.8)$$

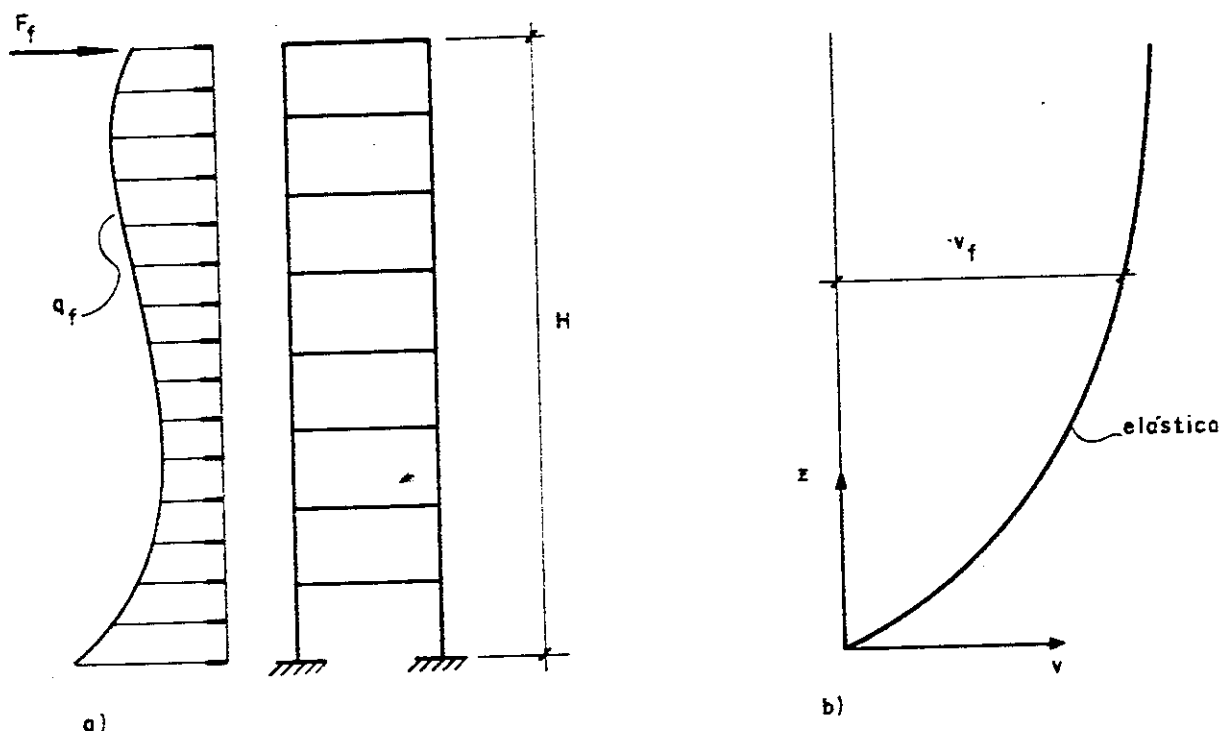


FIG. 2.2 — PAINEL - PÓRTICO

analogamente a (2.1) e (2.2).

Pode-se também combinar essas duas expressões, obtendo-se:

$$\frac{d^2 M_f}{dz^2} = q_f \quad (2.9)$$

que vem a ser outra relação que será utilizada nesse trabalho.

A equação da linha elástica para este painel é escrita, segundo STAMATO [6]:

$$\frac{du_f}{dz} = u'_f = \frac{Q_f}{s_f} \quad (2.10)$$

sendo s_f a rigidez do pórtico ao esforço cortante, estimada conforme mostrado em [6].

A equação (2.10) pode ser derivada, resultando:

$$u_f'' = \frac{dQ_f}{s_f dz}$$

Combinando com (2.8) chega-se a:

$$u_f'' = - \frac{1}{s_f} q_f \quad (2.11)$$

encerrando-se assim o conjunto de relações de interesse.

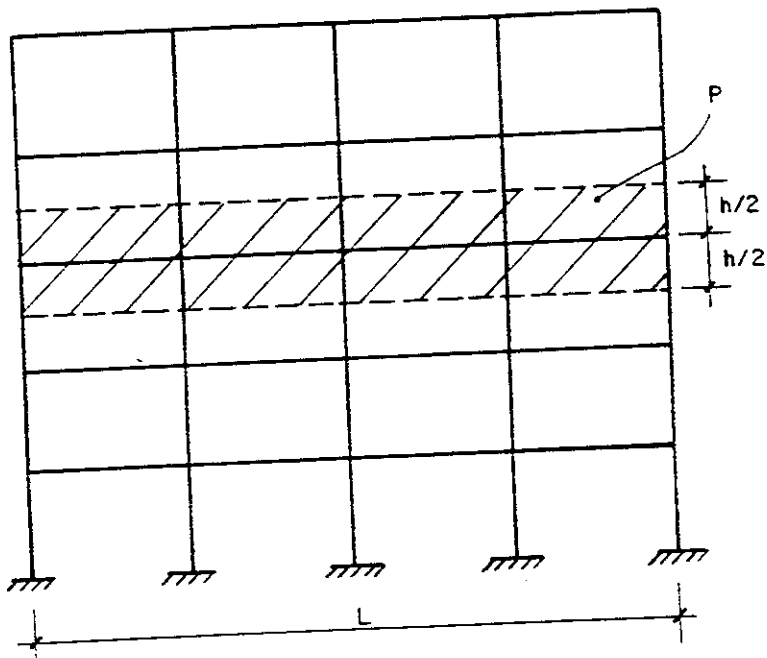
2.4 - PAINEL-LAJE

No modelo tradicional, a laje é representada por um diafragma de rigidez infinita, que liga os diversos painéis verticais.

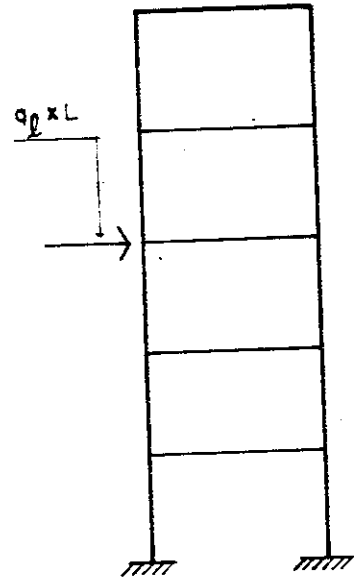
Para os edifícios de relação largura/profundidade (em planta) sensivelmente maior que a unidade, a representação adotada neste trabalho, para as lajes, é a de uma viga horizontal, deformável predominantemente por momento fletor [10].

O carregamento externo pode ser representado por uma carga horizontal uniformemente distribuída q_ℓ atuando sobre essa laje, de valor igual ao produto da resultante p da pressão e sucção atuantes por uma faixa de altura igual à distância h entre as lajes (pé direito). O valor de p é indicado em cada caso pelas normas referentes ao assunto, e será considerado constante ao longo da altura do prédio, por simplicidade.

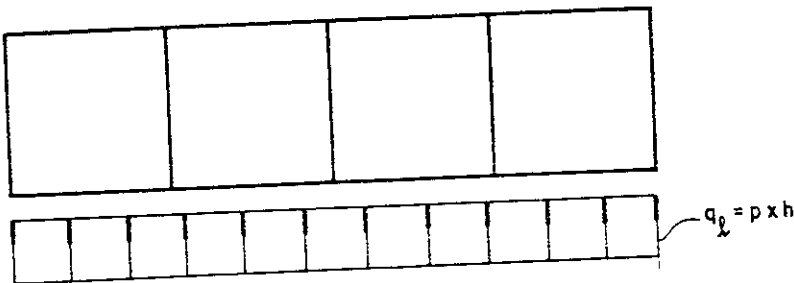
A vinculação dessa "viga equivalente" nos painéis de contraventamento é assimilada a apoios elásticos que transmitem apenas uma reação horizontal e que represen



a) Elevação



b) Vista lateral do edifício



c) Planta da estrutura do edifício

FIG.2.3 - ÁREA DE INFLUÊNCIA DE UMA LAJE

tam a intersecção da laje com cada painel vertical (fig. 2.4). A hipótese de rigidez transversal nula, seja nos painéis verticais como na laje é que traz como consequência o surgimento de uma única reação, na direção horizontal.

Se a laje estiver ligada a $(n+2)$ painéis verticais, representados respectivamente por $(n+2)$ apoios elásticos, resulta um esquema estático de grau de hiperestaticidade "n", que pode ser resolvido com a aplicação do método da flexibilidade. Uma escolha possível para o sistema fundamental é vincular a laje em dois dos apoios, elegendose como incógnitas as reações nas "molas" referentes aos outros apoios elásticos (fig. 2.5).

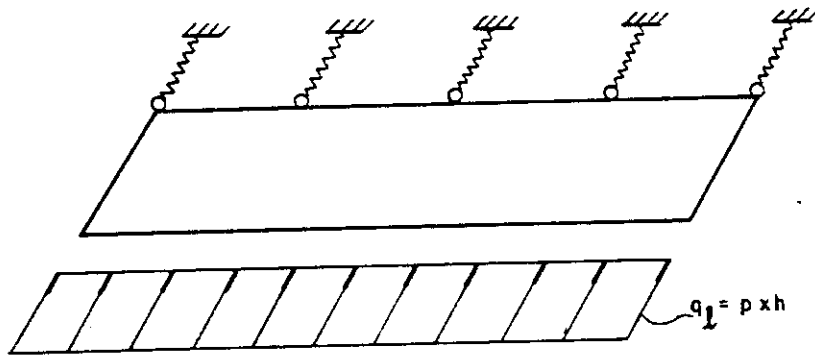


FIG. 2.4 — VIGA EQUIVALENTE COM VINCULAÇÃO

A obtenção dos coeficientes de flexibilidade segue o caminho tradicional, isto é, o coeficiente F_{ij} é o deslocamento obtido no apoio i em correspondência à aplicação de uma ação unitária no apoio j . Assim, pode-se relacionar os δ_i com as diversas q_j através de expressões da forma [10]:

$$\delta_i = F_{i0}(q_0 L) - F_{i1}q_1 h \dots - F_{ij}q_j h - \dots - F_{in}q_n h \quad (2.12)$$

Casos particulares de determinação de δ_i :

- a) Três painéis igualmente espaçados, tomando os extremos como referência

Neste caso, $n = 1$. Tomando a carga horizontal total no edifício, por unidade de altura: $p \cdot L = \frac{q_l \cdot L}{h}$, e chamando a carga distribuída por unidade de altura sobre o painel intermediário, de q_2 , a equação (2.12) escreve-se:

$$\delta = \frac{5(p \cdot L)L^3}{384(j_l/h)} - q_2 \cdot \frac{L^3}{48(j_l/h)}$$

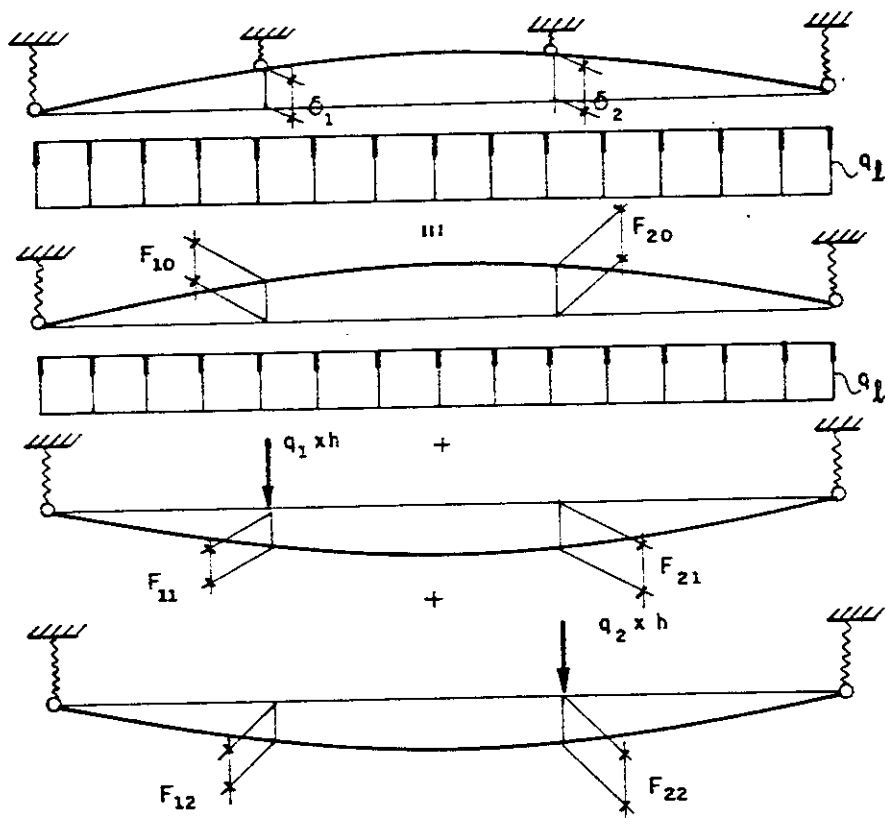


FIG. 2.5 — ANÁLISE DA LAJE

com j_l representando o produto de rigidez à flexão de uma laje, dado por EI_l . Então, (j_l/h) é a rigidez por unidade de altura, da viga equivalente. Ou ainda, chamando:

$$\alpha = \frac{5L^3}{384(j_l/h)} \quad (2.13)$$

$$\beta = \frac{L^3}{48(j_l/h)} \quad (2.14)$$

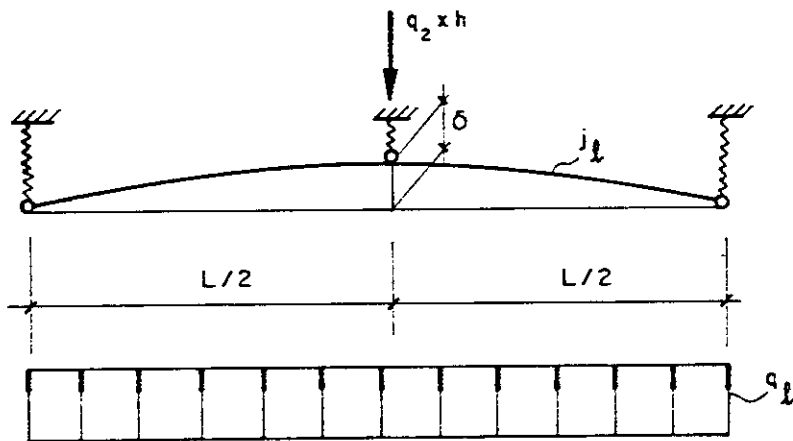


FIG. 2.6 — TRÊS PAINÉIS IGUALMENTE ESPAÇADOS, TOMANDO OS EXTREMOS COMO REFERÊNCIA

vem:

$$\delta = \alpha p L - \beta q_2 \quad (2.15)$$

fechando-se assim a questão.

- b) Quatro painéis igualmente espaçados, tomando-se como referência os painéis extremos

Também neste caso, havendo simetria elástica, pode-se lidar com o problema como tendo apenas uma incógnita hiperestática. Utilizando-se a nomenclatura introduzida nos itens precedentes, a equação (2.12) assume a forma:

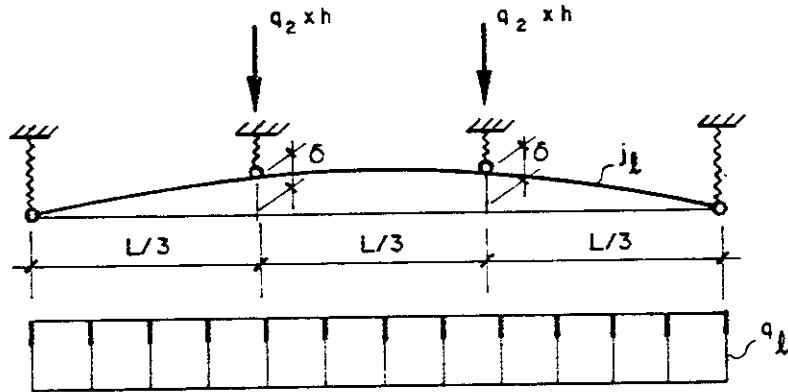


FIG. 2.7 — QUATRO PAINÉIS IGUALMENTE ESPAÇADOS, TOMANDO OS EXTREMOS COMO REFERÊNCIA.

$$\delta = \frac{4,34pL^4}{384(j_l/h)} - q_2 \frac{1,4814815}{48(j_l/h)} L^3$$

e chamando-se agora:

$$\alpha = \frac{4,34L^3}{384(j_l/h)} \quad (2.16)$$

$$\beta = \frac{1,481415L^3}{48(j_l/h)} \quad (2.17)$$

vem, novamente, δ expresso através de (2.15).

c) Três painéis igualmente espaçados, tomando-se como referência o painel central

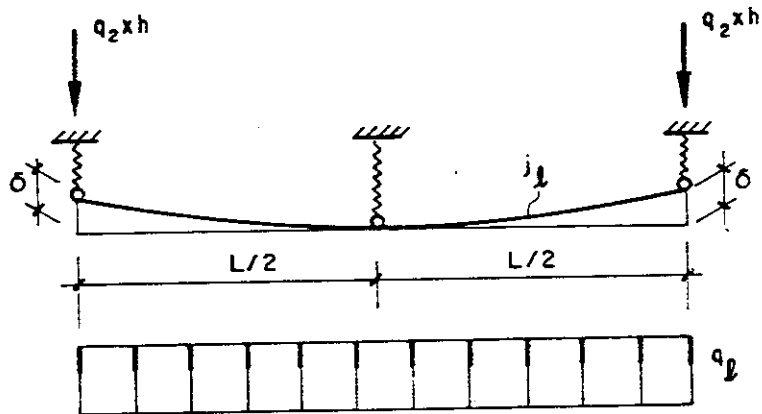


FIG. 2.8 — TRÊS PAINÉIS IGUALMENTE ESPAÇADOS, TOMANDO O CENTRAL COMO REFERÊNCIA.

Para este caso, (2.12) escreve-se:

$$\delta = \frac{3pL^4}{384(j_\ell/h)} - q_2 \frac{2L^3}{48(j_\ell/h)}$$

com:

$$\alpha = \frac{3L^3}{384(j_\ell/h)} \quad (2.18)$$

$$\beta = \frac{2L^3}{48(j_\ell/h)} \quad (2.19)$$

de forma a recair-se em (2.15).

d) Quatro painéis igualmente espaçados, tomando-se como referência os painéis centrais

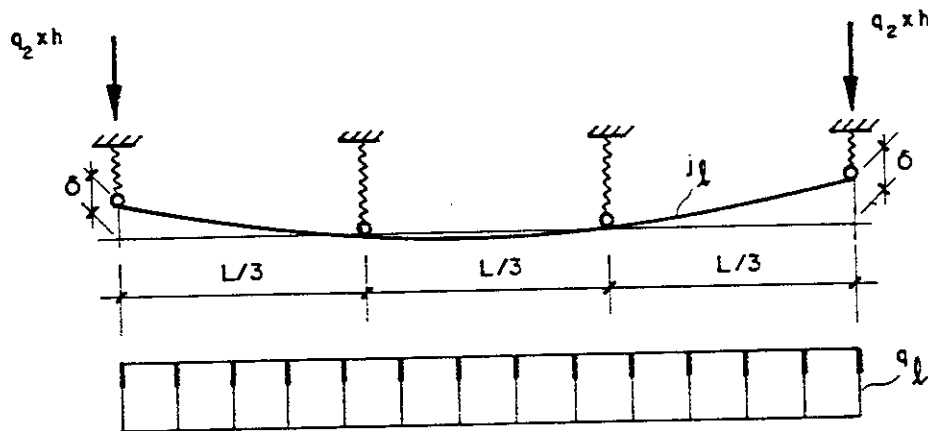


FIG. 2.9 — QUATRO PAINÉIS IGUALMENTE ESPAÇADOS, TOMANDO OS CENTRAIS COMO REFÊRENCIA.

Agora, (2.12) assume a forma:

$$\delta = \frac{10pL^4}{24 \times 81(j_\ell/h)} - q_2 \frac{2,5L^3}{81(j_\ell/h)}$$

e, para obter-se (2.15), basta fazer:

$$\alpha = \frac{10L^3}{24 \times 81(j_\ell/h)} \quad (2.20)$$

$$\beta = \frac{2,5L^3}{81(j_\ell/h)} \quad (2.21)$$

o que encerra o equacionamento pertinente.

CAPÍTULO 3

ASSOCIAÇÕES DE PÓRTICOS

3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, analisam-se os casos de associação de três e quatro painéis pórticos, igualmente espaçados, com simetria elástica. Apresentam-se inicialmente, para cada caso, os resultados obtidos com as lajes assimiladas a diafragmas de rigidez infinita. Pode-se assim, comparando-se as expressões resultantes, identificar os termos devidos à consideração de lajes deformáveis. Obtém-se também expressões aproximadas e simplificadas para os esforços na base dos painéis.

3.2 - ASSOCIAÇÕES DE TRÊS PÓRTICOS

O esquema deste caso tem o aspecto exibido na figura 3.1.

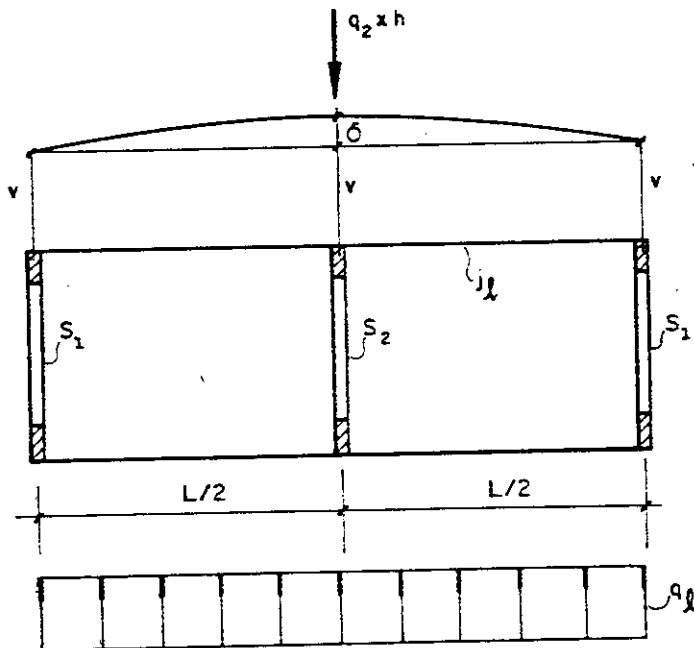


FIG. 3.1 — TRÊS PÓRTICOS

Considere-se inicialmente o painel laje de rigidez infinita. Nesse caso tem-se de imediato movimento δ no lo e a relação constitutiva dos painéis é escrita:

$$s_1 v'_0 = Q_{10} \quad (3.1)$$

$$s_2 v'_0 = Q_{20} \quad (3.2)$$

de acordo com as expressões apresentadas no capítulo 2.

A equação de equilíbrio de cortantes numa seção horizontal escreve-se

$$2Q_{10} + Q_{20} = pL(H-z) \quad (3.3)$$

ou, levando-se (3.1) e (3.2)

$$2s_1 v'_0 + s_2 v'_0 = pL(H-z) \quad (3.4)$$

cuja derivação fornece

$$2s_1 v''_0 + s_2 v''_0 = - pL \quad (3.5)$$

expressão onde se pode levar

$$\frac{s_1}{s_2} = k \quad (3.6)$$

e, com o rearranjo dos termos, chegar-se a

$$\frac{(2k+1)}{k} s_1 v''_0 = - pL \quad (3.7)$$

que permite obter-se uma expressão para o deslocamento v_0 .

De fato, integrando-se (3.7) vem, rearranjando os termos novamente:

$$v'_0 = - \frac{pL}{s_1} \left[\frac{zk}{(2k+1)} + \frac{C_{10}}{2} \right] \quad (3.8)$$

e repetindo-se a operação uma segunda e última vez

$$v_0(z) = - \frac{pL}{2s_1} \left[\frac{k}{(2k+1)} z^2 + C_{10}z + C_{20} \right] \quad (3.9)$$

podendo-se assim, com o emprego de (3.1) e (3.2), exprimir-se os esforços nos painéis através de

$$Q_{10}(z) = - \frac{pL}{2} \left[\frac{2k}{(2k+1)} z + C_{10} \right] \quad (3.10)$$

$$Q_{20}(z) = - pL \left[\frac{1}{(2k+1)} z + \frac{C_{10}}{2k} \right] \quad (3.11)$$

ficando-se apenas na dependência de obter-se as constantes de integração.

As condições de contorno que permitem a determinação desses valores são:

$$v_0(0) = 0 \quad (3.12)$$

$$Q_{10}(H) = Q_{20}(H) = 0 \quad (3.13)$$

impostas a primeira pela vinculação dos painéis na base e a segunda pelo tipo de carregamento aplicado.

De (3.12) em (3.9), resulta:

$$C_{20} = 0 \quad (3.14)$$

e (3.13) levada em (3.10) fornece

$$C_{10} = - \frac{2k}{(2k+1)} H \quad (3.15)$$

e com esses dois valores, pode-se reescrever (3.9), (3.10) e (3.11), que assumem, respectivamente, as formas

$$v_0(z) = - \frac{pL}{2s_1} \left[\frac{k}{(2k+1)} z^2 - \frac{2k}{(2k+1)} Hz \right] \quad (3.16)$$

$$Q_{10}(z) = \frac{pL}{2} \left[(H-z) \frac{2k}{(2k+1)} \right] \quad (3.17)$$

$$Q_{20}(z) = pL \frac{(H-z)}{(2k+1)} \quad (3.18)$$

que vem a ser as expressões da técnica tradicional do meio contínuo.

Pode-se proceder analogamente para o painel laje tomado de rigidez finita, igual a (j_ℓ/h) .

Nesse caso, (fig. 3.1), a relação constitutiva dos painéis é escrita (conforme 2.10)

$$s_1 v' = Q_1 \quad (3.19)$$

$$s_2 (v' + \delta') = Q_2 \quad (3.20)$$

Escrevendo-se uma equação de equilíbrio de cortantes numa seção horizontal e levando-se (3.19) e (3.20), vem:

$$2s_1 v' + s_2 (v' + \delta') = pL(H-z) \quad (3.21)$$

que, derivada, toma a forma

$$2s_1 v'' + s_2 (v'' + \delta'') = - pL \quad (3.22)$$

análoga a (3.5).

Derivando-se (3.20) e lembrando-se (2.8), pode-se escrever

$$Q_2' = s_2 (v'' + \delta'')$$

$$Q_2' = - q_2$$

ou seja

$$q_2 = - s_2 (v'' + \delta'') \quad (3.23)$$

relação que pode ser aplicada em (2.15), fornecendo

$$\delta = \alpha pL - \beta [-s_2 (v'' + \delta'')]$$

ou, rearranjando-se

$$v'' = -\delta'' + \frac{1}{\beta s_2} \delta - \alpha \frac{pL}{\beta s_2} \quad (3.24)$$

expressão esta que será utilizada adiante.

Retomando-se (3.22) e levando-se (3.24) e (3.6)

vem:

$$-2s_1 \delta'' + \frac{(2k+1)}{\beta} \delta = pL \left[\frac{\alpha}{\beta} (2k+1) - 1 \right]$$

ou, finalmente

$$\delta'' - \frac{(2k+1)}{2\beta s_1} \delta' = -\frac{pL}{2s_1} \left[\frac{\alpha}{\beta} (2k+1) - 1 \right] \quad (3.25)$$

cuja solução fornece a expressão do deslocamento δ .

A solução de (3.25) é da forma

$$\delta(z) = \delta_p(z) + \delta_h(z) \quad (3.26)$$

onde $\delta_p(z)$ é uma solução particular de (3.25); por exemplo

$$\delta_p(z) = \frac{pL\beta}{(2k+1)} \left[\frac{\alpha}{\beta} (2k+1) - 1 \right] \quad (3.27)$$

sendo $\delta_h(z)$ a solução da equação homogênea correspondente.

Para a obtenção de $\delta_h(z)$, toma-se a equação característica

$$\rho^2 - \frac{(2k+1)}{2s_1\beta} \rho = 0$$

que tem como raízes

$$\rho = \pm \sqrt{\frac{(2k+1)}{2s_1\beta}}$$

e estas fornecem

$$\delta_h(z) = \bar{C}_1 e^{\rho z} + \bar{C}_2 e^{-\rho z}$$

ou, de (3.26):

$$\delta(z) = pL\beta \left[C_1 e^{\rho z} + C_2 e^{-\rho z} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2k+1} \right) \right] \quad (3.28)$$

restando as constantes C_1 e C_2 a serem determinadas.

As condições de contorno do problema são:

$$\delta(0) = 0 \quad (3.29)$$

já que na base não há deformação da laje, e

$$\delta'(H) = 0 \quad (3.30)$$

que resulta da consideração de cargas nulas no topo, e decorrente da continuidade da função que representa o esforço cortante.

Aplicando-se (3.29) e (3.30) a (3.28) e sua primeira derivada, respectivamente, vem

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 = - \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ C_1 e^{\rho H} - C_2 e^{-\rho H} = 0 \end{array} \right. \quad (3.31)$$

cuja solução fornece

$$C_1 = - \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2k+1}\right)}{(1+e^{2\rho H})} \quad (3.32)$$

$$C_2 = - \frac{e^{2\rho H}}{1+e^{2\rho H}} \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2k+1}\right) \quad (3.33)$$

que são as constantes de interesse.

Para a obtenção das expressões de $v(z)$, $Q_1(z)$ e $Q_2(z)$, retoma-se (3.24), substituindo-se (3.28):

$$v'' = - \frac{\rho L}{2s_1} \left[C_1 e^{\rho z} + C_2 e^{-\rho z} + \frac{2k}{2k+1} \right] \quad (3.34)$$

que conduz a

$$v' = - \frac{\rho L}{2s_1} \left[\frac{C_1}{\rho} e^{\rho z} - \frac{C_2}{\rho} e^{-\rho z} + \frac{2k}{2k+1} z + C_3 \right] \quad (3.35)$$

e, integrando-se mais uma vez

$$v(z) = - \frac{\rho L}{2s_1} \left[\frac{C_1}{\rho^2} e^{\rho z} + \frac{C_2}{\rho^2} e^{-\rho z} + \frac{k}{(2k+1)} z^2 + C_3 z + C_4 \right] \quad (3.36)$$

sujeitas às condições e contorno:

$$v(0) = 0 \quad (3.37)$$

já que não há deslocamentos na base dos painéis, e

$$v'(H) = 0 \quad (3.38)$$

a partir do equilíbrio de cortantes, e considerando-se (3.30) e (3.20).

Aplicando-se (3.37) a (3.36), e tendo-se em vista a primeira das (3.31), vem

$$C_4 = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{(2k+1)} \right] \quad (3.39)$$

e ainda, levando-se (3.38), (3.39), (3.32) e (3.33) a (3.35), chega-se a

$$C_3 = - \frac{2kH}{(2k+1)} \quad (3.40)$$

completando-se assim a determinação das constantes envolvidas no problema.

A expressão de Q_1 , com esses resultados, a partir de (2.10) fica então:

$$Q_1(z) = \frac{pL}{2} \left[(H-z) \frac{2k}{(2k+1)} - \frac{1}{\rho} (C_1 e^{\rho z} - C_2 e^{-\rho z}) \right] \quad (3.41)$$

e de Q_2

$$Q_2(z) = pL \left[\frac{(H-z)}{(2k+1)} + \frac{1}{\rho} (C_1 e^{\rho z} - C_2 e^{-\rho z}) \right] \quad (3.42)$$

enquanto a dos deslocamentos escreve-se:

$$v(z) = - \frac{pL}{2s_1} \left[\frac{k}{(2k+1)} z^2 - \frac{2kH}{(2k+1)} z + \frac{1}{\rho^2} (C_1 e^{\rho z} + C_2 e^{-\rho z} + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2k+1}) \right]$$

desde que se substitua C_3 e C_4 pelos valores dados por (3.39) e (3.40).

Observa-se que para uma determinada relação entre α , β e k , as constantes C_1 , C_2 e C_4 se anulam, e então os esforços e deformações têm mesmas expressões que para a técnica do meio contínuo tradicional, isto é, considerando-se a laje como de rigidez infinita. Essa relação de interesse é dada por

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2k+1}$$

ou

$$k = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \quad (3.44)$$

que para o caso de três painéis igualmente espaçados (conforme (2.13) e (2.14)) assume o valor

$$k = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{5} - 1 \right) = 0,3$$

isto é, quando o painel externo tem rigidez igual a 30% do intermediário, a "laje não se deforma" (δ é nulo).

Outro resultado interessante é o esforço cortante na base dos painéis, que apresenta as expressões:

$$Q_1(z=0) = - \frac{pL}{2} \left[\frac{1}{\rho} (C_1 - C_2) - \frac{2kH}{(2k+1)} \right] \quad (3.45)$$

$$Q_2(z=0) = pL \left[\frac{1}{\rho} (C_1 - C_2) + \frac{H}{(2k+1)} \right] \quad (3.46)$$

bastando tomar (3.41) e (3.42) com \underline{z} nulo para se chegar a elas.

A relação entre o cortante na base do painel intermediário nessa solução e naquela em que se considera a laje rígida é dada por (3.46) e (3.18): e vale:

$$\frac{Q_2(z=0)}{Q_{20}(z=0)} = \frac{\left[\frac{1}{\rho} (C_1 - C_2) + \frac{H}{(2k+1)} \right]}{\frac{H}{(2k+1)}} = 1 + \left[\frac{\alpha}{\beta} (2k+1) - 1 \right] \left[\frac{e^{2\rho H} - 1}{e^{2\rho H} + 1} \right] \frac{1}{\rho H} \quad (3.47)$$

configurando-se o valor exato da relação em apreço.

Entretando, para valores de ρH superiores a 2,0, ocorre:

$$0,964 < \frac{e^{2\rho H} - 1}{e^{2\rho H} + 1} < 1,0 \quad (3.48)$$

sendo então razoável aproximar-se (3.47) por

$$\frac{Q_2(z=0)}{Q_{20}(z=0)} = 1 + \left[\frac{\alpha}{\beta} (2k+1) - 1 \right] \frac{1}{\rho H} \quad (3.49)$$

mais simples de se calcular.

O uso de (3.49) permite, ao se aplicar a técnica tradicional do meio contínuo, uma melhor estimativa para o valor do cortante na base do painel intermediário de uma associação desse tipo, que passa a ser dada por

$$Q_2(z=0) = \frac{\rho L H}{(2k+1)} \left\{ 1 + \left[\frac{\alpha}{\beta} (2k+1) - 1 \right] \frac{1}{\rho H} \right\} \quad (3.50)$$

ou ainda

$$Q_2(z=0) = \frac{\rho L H}{(2k+1)} \left\{ 1 + \frac{1}{\rho H} \left[\frac{5}{8} (2k+1) - 1 \right] \right\} \quad (3.51)$$

substituídos os valores de α e β .

3.3 - ASSOCIAÇÕES DE QUATRO PÓRTICOS

Este caso é análogo ao anterior, tendo o esquema exibido na figura 3.2.

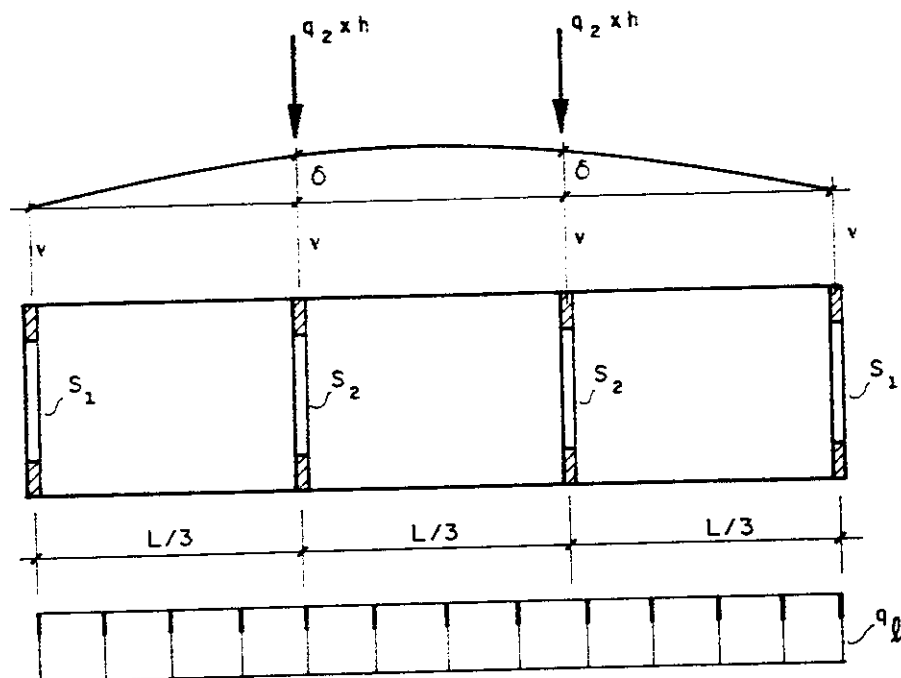


FIG. 3.2 - QUATRO PÓRTICOS

O equilíbrio de cortantes na horizontal fornece

$$2Q_{10} + 2Q_{20} = pL(H-z) \quad (3.52)$$

ou, levando-se (3.1) e (3.2) e derivando-se

$$2s_1 v'' + 2s_2 v'' = -pL \quad (3.53)$$

que, rearranjada com o auxílio de (3.6) assume a forma

$$\frac{(k+1)}{k} 2s_1 v_0'' = - pL \quad (3.54)$$

onde se pode isolar v_0'' .

Assim fazendo, e integrando-se sucessivamente a expressão resultante, chega-se a

$$v_0' = - \frac{pL}{2s_1} \left[\frac{k}{(k+1)} z + C_{10} \right] \quad (3.55)$$

e

$$v_0 = - \frac{pL}{2s_1} \left[\frac{k}{2(k+1)} z^2 + C_{10}z + C_{20} \right] \quad (3.56)$$

que é a expressão dos deslocamentos nesse caso.

Os esforços são dados, conforme (3.1) e (3.2) por

$$Q_{10}(z) = - \frac{pL}{2} \left[\frac{k}{(k+1)} z + C_{10} \right] \quad (3.57)$$

$$Q_{20}(z) = - \frac{pL}{2} \left[\frac{1}{(k+1)} z + \frac{C_{10}}{k} \right] \quad (3.58)$$

e as condições de contorno (3.12) e (3.13) fornecem

$$C_{20} = 0 \quad (3.59)$$

$$C_{10} = - \frac{kH}{(k+1)} \quad (3.60)$$

que, substituídas nas expressões anteriormente obtidas conduzem a suas expressões finais, que são

$$v_0(z) = - \frac{pL}{2s_1} \left[\frac{k}{2(k+1)} z^2 - \frac{kH}{(k+1)} \right] \quad (3.61)$$

$$Q_{10}(z) = \frac{pL}{2} \left[(H-z) \frac{k}{(k+1)} \right] \quad (3.62)$$

$$Q_{20}(z) = \frac{pL}{2} \left[\frac{(H-z)}{(k+1)} \right] \quad (3.63)$$

e com tais resultados encerram-se as relações de interesse dessa análise.

Repetindo o procedimento para a laje considerada deformável, o equilíbrio de cortantes numa seção horizontal toma a forma

$$2s_1 v' + 2s_2 (v' + \delta') = pL(H-z) \quad (3.64)$$

considerando-se (3.19) e (3.20).

Derivando-se (3.64), e levando-se (3.6) e (3.24), após rearranjar-se os termos, chega-se a

$$\delta'' - \frac{(k+1)}{s_1 \beta} \delta = - \frac{pL}{2s_1} \left[\frac{2\alpha}{\beta} (k+1) - 1 \right] \quad (3.65)$$

sendo pois, uma equação análoga a (3.25).

A solução dessa equação fornece, para o deslocamento δ , a expressão

$$\delta(z) = pL\beta \left\{ C_1 e^{\rho z} + C_2 e^{-\rho z} + \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2(k+1)} \right] \right\} \quad (3.66)$$

onde α e β são dados por (2.16) e (2.17), respectivamente, e

$$\rho = \pm \sqrt{\frac{(k+1)}{s_1 \beta}}$$

com as constantes C_1 e C_2 obtidas da aplicação das condições de contorno (3.29) e (3.30), resultando

$$C_1 = \frac{\left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2(k+1)} \right]}{(1+e^{2\rho H})}$$

$$C_2 = - \frac{e^{2\rho H}}{(1+e^{2\rho H})} \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2(k+1)} \right]$$

que completam a definição de $\underline{\delta}$.

Retomando-se (3.24) e levando-se (3.66) e sua segunda derivada, obtêm-se

$$v''(z) = - \frac{pL}{s_1} \left\{ C_1 e^{\rho z} + C_2 e^{-\rho z} + \frac{k}{2(k+1)} \right\} \quad (3.67)$$

e, integrando-se duas vezes chega-se a

$$v'(z) = - \frac{pL}{s_1} \left\{ \frac{C_1}{\rho} e^{\rho z} - \frac{C_2}{\rho} e^{-\rho z} + \frac{k}{2(k+1)} z + C_3 \right\} \quad (3.68)$$

e

$$v(z) = - \frac{pL}{s_1} \left\{ \frac{C_1}{\rho^2} e^{\rho z} + \frac{C_2}{\rho^2} e^{-\rho z} + \frac{k}{4(k+1)} z^2 + C_3 z + C_4 \right\} \quad (3.69)$$

restando C_3 e C_4 por determinar.

As condições de contorno (3.37) e (3.38) aplicadas a (3.68) e (3.69) fornecem, para essas constantes de integração:

$$C_3 = - \frac{kH}{2(k+1)}$$

$$C_4 = - \frac{1}{\rho^2} (C_1 + C_2)$$

permitindo assim escrever-se as expressões dos esforços.

A expressão de $Q_1(z)$, de (2.10) e (3.68), fica então:

$$Q_1(z) = pL \left[(H-z) \frac{k}{2(k+1)} - \frac{1}{\rho} (C_1 e^{\rho z} - C_2 e^{-\rho z}) \right] \quad (3.70)$$

e $Q_2(z)$, dada por (3.20) e levando-se (3.68) e a derivada de (3.66) torna a forma:

$$Q_2(z) = pL \left[\frac{(H-z)}{2(k+1)} + \frac{1}{\rho} (C_1 e^{\rho z} - C_2 e^{-\rho z}) \right] \quad (3.71)$$

ficando assim expressos os deslocamentos e esforços deste caso.

A relação que deve existir entre α , β e k , agora, para que as constantes C_1 , C_2 e C_4 se anulem, isto é, para que a "laje não se deforme" e o deslocamento de qualquer ponto de uma dada ordenada z seja o mesmo, é dada por

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2(k+1)}$$

ou, substituindo-se α e β , k resulta em 0,36542. Este número indica a relação que deve existir entre a rigidez dos painéis extremos (s_1) e do intermediário (s_2) para que a solução dada pela aplicação tradicional da técnica do meio contínuo (v_0 , Q_{10} , Q_{20}) coincida com a que resulta quando se assumem as hipóteses desse trabalho.

O esforço cortante na base dos painéis pode ser calculado com o uso de uma única expressão, a saber

$$\frac{Q_2(z=0)}{Q_{20}(z=0)} = \frac{\left[\frac{1}{\rho} (C_1 - C_2) + \frac{H}{2(k+1)} \right]}{\frac{H}{2(k+1)}} = 1 + \frac{2(k+1)}{\rho H} \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2(k+1)} \right] \frac{(e^{2\rho H} - 1)}{(e^{2\rho H} + 1)} \quad (3.72)$$

mas analogamente ao que foi feito no caso anterior, e visando-se a simplificação dessa expressão, para valores de ρ_H superiores a 2,0 (3.48) pode-se escrever

$$\frac{Q_2(z=0)}{Q_{20}(z=0)} = 1 + \frac{2(k+1)}{\rho_H} \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2(k+1)} \right] \quad (3.73)$$

resultando então

$$Q_2(z=0) = \frac{\rho_{LH}}{2(k+1)} \left\{ 1 + \frac{1}{\rho_H} \left[0,73237(k+1) - 1 \right] \right\} \quad (3.74)$$

após substituir-se os valores de α e β correspondentes.

CAPÍTULO 4

ASSOCIAÇÕES DE PAREDES

4.1 - INTRODUÇÃO

Estudam-se agora as associações de três e quatro painéis-paredes, igualmente espaçados, e com simetria elástica. Inicialmente é feito o equacionamento segundo a técnica do meio contínuo tradicional, e a seguir, com a consideração de lajes deformáveis, chegando-se às expressões de esforços e deslocamentos nos painéis a que cada uma dessas hipóteses conduz.

Mostra-se ainda como se pode obter expressões simplificadas para os esforços na base dos painéis, decorrentes de expediente de aproximação (que é bom na maioria dos casos, identificados).

4.2 - ASSOCIAÇÃO DE TRÊS PAREDES

A associação em paralelo de três paredes igualmente espaçadas, apresentando simetria elástica com relação a um plano vertical, com o aspecto ilustrado na figura 4.1 é,

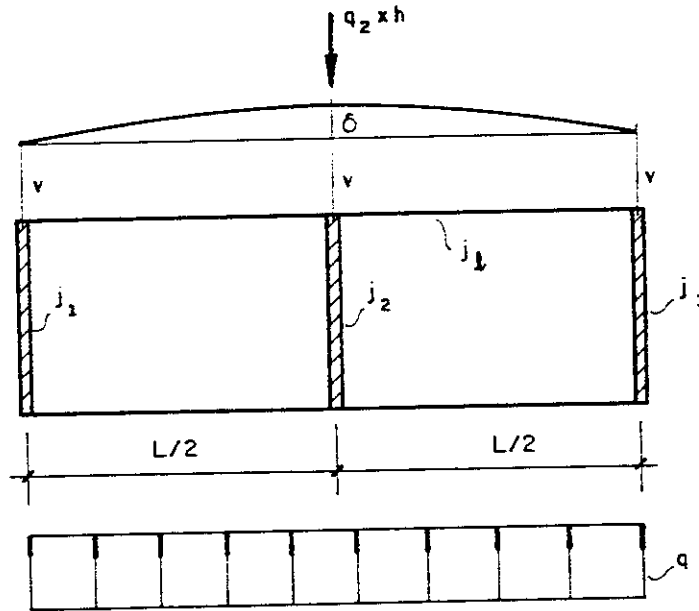


FIG. 4.1 - TRÊS PAREDES

geralmente, viável de ser analisada de maneira expedita pela técnica do meio contínuo, considerando-se lajes indeformáveis, tendo-se as relações constitutivas:

$$j_1 v''''_0 = - Q_{10}(z) \quad (4.1)$$

$$j_2 v''''_0 = - Q_{20}(z) \quad (4.2)$$

uma vez que vem a ser nulo o movimento $\delta_0(z)$.

O equilíbrio de cortantes numa seção horizontal qualquer é escrito, analogamente a (3.3):

$$2Q_{10}(z) + Q_{20}(z) = pL(H-z)$$

Levando-se (4.1) e (4.2), derivando-se e rearranjando-se os termos tem-se:

$$2j_1 v_o^{IV} + j_2 v_o^{IV} = pL \quad (4.3)$$

e, chamando-se:

$$\frac{j_1}{j_2} = k \quad (4.4)$$

levando-se em (4.3) e rearranjando-se novamente:

$$\frac{(2k+1)}{k} j_1 v_o^{IV} = pL \quad (4.5)$$

que permite chegar-se à expressão do deslocamento.

Isolando-se o termo em v_o , em (4.5), e integrando-se sucessivamente, chega-se a

$$v_o''' = \frac{pL}{j_1} \left[\frac{k}{(2k+1)} z + C_{10} \right] \quad (4.6)$$

$$v''_0 = \frac{pL}{j_1} \left[\frac{k}{(2k+1)} \frac{z^2}{2} + C_{10}z + C_{20} \right] \quad (4.7)$$

$$v'_0 = \frac{pL}{j_1} \left[\frac{k}{(2k+1)} \frac{z^3}{6} + C_{10} \frac{z^2}{2} + C_{20}z + C_{30} \right] \quad (4.8)$$

$$v_0 = \frac{pL}{j_1} \left[\frac{k}{(2k+1)} \frac{z^4}{24} + C_{10} \frac{z^3}{6} + C_{20} \frac{z^2}{2} + C_{30}z + C_{40} \right] \quad (4.9)$$

com os esforços dados, de acordo com (2.5) e (2.4), por

$$M_{10} = pL \left[\frac{k}{(2k+1)} \frac{z^2}{2} + C_{10}z + C_{20} \right] \quad (4.10)$$

$$M_{20} = \frac{pL}{k} \left[\frac{k}{(2k+1)} \frac{z^2}{2} + C_{10}z + C_{20} \right] \quad (4.11)$$

$$Q_{10} = - pL \left[\frac{k}{(2k+1)} z + C_{10} \right] \quad (4.12)$$

$$Q_{20} = - \frac{pL}{k} \left[\frac{k}{(2k+1)} z + C_{10} \right] \quad (4.13)$$

e as condições de contorno que em sendo aplicadas permitem a determinação das constantes são:

$$v_0(0) = 0 \quad (4.14)$$

$$v'_0(0) = 0 \quad (4.15)$$

decorrentes da vinculação na base dos painéis, e

$$M_{10}(H) = M_{20}(H) = 0 \quad (4.16)$$

$$Q_{10}(H) = Q_{20}(H) = 0 \quad (4.17)$$

que são consequência da rigidez transversal nula da laje e do tipo de carregamento aplicado, e permitem que se escreva:

$$v''_0(H) = 0 \quad (4.18)$$

$$v'''_0(H) = 0 \quad (4.19)$$

respectivamente, de acordo com (2.4) e (2.5).

Da aplicação de (4.14) em (4.9) vem

$$C_{40} = 0 \quad (4.20)$$

e de (4.15) em (4.8), analogamente

$$C_{30} = 0 \quad (4.21)$$

e ainda de (4.19) em (4.12) obtém-se:

$$C_{10} = - \frac{kH}{(2k+1)} \quad (4.22)$$

que, levando-se em (4.10), e considerando-se (4.16) permite que se escreva:

$$C_{20} = \frac{kH^2}{2(2k+1)} \quad (4.23)$$

o que encerra a determinação das constantes.

Uma vez obtidos esses valores, pode-se retomar as expressões já obtidas de esforços e deslocamentos, ou seja

$$v_o = \frac{pL}{j_1} \frac{k}{(2k+1)} \left(\frac{z^4}{24} - \frac{Hz^3}{6} + \frac{H^2 z^2}{4} \right) \quad (4.24)$$

$$M_{10} = pL \frac{k}{(2k+1)} \left(\frac{z^2}{2} - Hz + \frac{H^2}{2} \right) \quad (4.25)$$

$$M_{20} = pL \frac{1}{(2k+1)} \left(\frac{z^2}{2} - Hz + \frac{H^2}{2} \right) \quad (4.26)$$

$$Q_{10} = pL \frac{k}{(2k+1)} (H-z) \quad (4.27)$$

$$Q_{20} = pL \frac{1}{(2k+1)} (H-z) \quad (4.28)$$

escritas em sua forma definitiva.

Tomando agora, para consideração da compatibilidade dos painéis na mesma ordenada o painel-laje que os interliga, com rigidez finita (j_ℓ/h), escrevem-se as relações constitutivas dos painéis, de acordo com (2.5), ou seja:

$$j_1 v'''' = - Q_1(z) \quad (4.29)$$

$$j_2 (v'''' + \delta'''') = - Q_2(z) \quad (4.30)$$

respectivamente para os painéis extremos e intermediário.

O equilíbrio de cortantes numa seção horizontal numa ordenada z qualquer é dado por

$$2Q_1(z) + Q_2(z) = pL(H-z)$$

ou, levando-se (4.29), (4.30) e (4.4), e derivando-se uma vez

$$(2k+1)v^{IV} + \delta^{IV} = \frac{pL}{j_1} k \quad (4.31)$$

Lembrando-se, de (2.6), que

$$q_2 = j_2 (v^{IV} + \delta^{IV}) \quad (4.32)$$

e também, de (2.15),

$$q_2 = \frac{\alpha}{\beta} pL - \frac{\delta}{\beta} \quad (4.33)$$

pode-se escrever, igualando-se (4.32) a (4.33) e rearranjando-se:

$$v^{IV} = -\delta^{IV} - \frac{\delta}{\beta j_2} + \frac{\alpha pL}{\beta j_2} \quad (4.34)$$

resultado que, levando-se em (4.31), após rearranjar-se permite escrever:

$$\delta^{IV} + \frac{(2k+1)}{2\beta j_1} \delta = \frac{pL}{2j_1} \left[\frac{\alpha}{\beta} (2k+1) - 1 \right] \quad (4.35)$$

cuja solução fornece a expressão do movimento δ .

Conforme (3.26), para essa equação uma solução particular é dada por

$$\delta_p = pL\beta \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{(2k+1)} \right] \quad (4.36)$$

e para a obtenção da solução geral da equação homogênea, deve-se tomar a equação característica

$$\rho^4 + \frac{(2k+1)}{2\beta j_1} \rho = 0 \quad (4.37)$$

ou seja

$$\frac{\overline{\rho}^4}{\rho} = - \frac{(2k+1)}{2\beta j_1}$$

que conduz a

$$\overline{\rho} = \sqrt[4]{\frac{(2k+1)}{2\beta j_1}} \sqrt[4]{(-1)}$$

expressão das raízes da equação.

Chamando-se

$$\overline{\rho} = \sqrt[4]{\frac{(2k+1)}{2\beta j_1}}$$

e lembrando-se que

$$\sqrt[4]{(-1)} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1 \pm i)$$

e fazendo-se ainda

$$\rho = \overline{\rho} \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt[4]{\frac{(2k+1)}{8\beta j_1}}$$

pode-se exprimir, alternativamente, os dois pares de raízes conjugadas, solução da equação característica em questão através de:

$$\rho_{1,3} = \pm \rho (1+i)$$

$$\rho_{2,4} = \pm \rho (1-i)$$

sendo que ao primeiro par têm-se associadas as soluções:

$$e^{\rho z} \operatorname{cosp}z, \quad e^{\rho z} \operatorname{senp}z$$

e ao segundo

$$e^{-\rho z} \cos z, \quad e^{-\rho z} \operatorname{senp}z$$

podendo-se colocar a solução geral de (4.37) na forma:

$$\delta(z) = pL\beta \left\{ \bar{C}_1 e^{\rho z} \operatorname{cosp}z + \bar{C}_2 e^{\rho z} \operatorname{senp}z + \bar{C}_3 e^{-\rho z} \operatorname{cosp}z + \right. \\ \left. + \bar{C}_4 e^{-\rho z} \operatorname{senp}z + \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{(2k+1)} \right] \right\}$$

ou, de maneira equivalente:

$$\delta(z) = pL\beta \left\{ C_1 \operatorname{cosp}z \operatorname{coshp}z + C_2 \operatorname{cosp}z \operatorname{senhp}z + \right. \\ \left. + C_3 \operatorname{senp}z \operatorname{coshp}z + C_4 \operatorname{senp}z \operatorname{senhp}z + \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{(2k+1)} \right] \right\} \quad (4.38)$$

que vem a ser a expressão geral do movimento δ .

Utilizando-se a notação:

$$\left. \begin{aligned} F_1(z) &= \operatorname{cosp}z \operatorname{coshp}z \\ F_2(z) &= \operatorname{cosp}z \operatorname{senhp}z \\ F_3(z) &= \operatorname{senp}z \operatorname{coshp}z \\ F_4(z) &= \operatorname{senp}z \operatorname{senhp}z \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

a expressão (4.38) se escreve:

$$\delta(z) = pL\beta \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i F_i(z) + \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{(2k+1)} \right] \right\} \quad (4.40)$$

tendo-se, pois, uma expressão mais sintética.

As condições de contorno que permitem a obtenção das constantes C_i são

$$\delta(0) = 0 \quad (4.41)$$

$$\delta'(0) = 0 \quad (4.42)$$

já que as paredes são engastadas na base, e mais

$$\delta''(H) = 0 \quad (4.43)$$

que decorre da consideração de rigidez transversal nula do diafragma, o que não permite interação de momentos no topo das paredes. Assim, de (2.4), e para o tipo de carregamento assumido

$$M_2(H) = M_1(H) = 0$$

implicando em

$$\delta''(H) = v''(H) = 0$$

de onde se extraiu (4.43).

Por consideração semelhante à que já foi feita na análise da associação de pórticos, a continuidade de $q_2(z)$ finita exige que a cortante no topo dos painéis se anule. Assim:

$$Q_1(H) = Q_2(H) = 0$$

que conduz a

$$\delta'''(H) = v'''(H) = 0$$

e dessa última expressão destaca-se

$$\delta'''(H) = 0 \quad (4.44)$$

para completar as condições de contorno que, aplicadas, fornecem as constantes C_i ($i=1,4$).

Da aplicação de (4.41) a (4.40) resulta:

$$C_1 = - \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{(2k+1)} \right] \quad (4.45)$$

e de (4.42) aplicada também a (4.40) vem

$$C_1 F_1'(0) + C_2 F_2'(0) + C_3 F_3'(0) + C_4 F_4'(0) = 0 \quad (4.46)$$

sendo aplicáveis as relações

$$\left. \begin{aligned} F_1'(z) &= \rho [F_2(z) - F_3(z)] \\ F_2'(z) &= \rho [F_1(z) - F_4(z)] \\ F_3'(z) &= \rho [F_4(z) + F_1(z)] \\ F_4'(z) &= \rho [F_3(z) + F_2(z)] \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

de modo que efetuando-se os cálculos dessas derivadas, e atendendo a (4.39), escreve-se (4.46) na forma

$$C_2 \rho + C_3 \rho = 0$$

ou seja

$$C_3 = - C_2 \quad (4.48)$$

Aplicando-se também (4.43) e levando-se em conta que

$$\left. \begin{aligned} F_1''(z) &= - 2\rho^2 F_4(z) \\ F_2''(z) &= - 2\rho^2 F_3(z) \\ F_3''(z) &= 2\rho^2 F_2(z) \\ F_4''(z) &= 2\rho^2 F_1(z) \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

pode-se escrever, considerando-se (4.48)

$$\left[-F_3(H) - F_2(H) \right] C_2 + F_1(H) C_4 = F_4(H) C_1 \quad (4.50)$$

relacionando assim C_2 e C_4 .

Para escrever (4.44), observe-se que

$$\left. \begin{aligned} F_1'''(z) &= - 2\rho^3 [F_3(z) + F_2(z)] \\ F_2'''(z) &= - 2\rho^3 [F_4(z) + F_1(z)] \\ F_3'''(z) &= 2\rho^3 [F_1(z) - F_4(z)] \\ F_4'''(z) &= 2\rho^3 [F_2(z) - F_3(z)] \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

de modo que, levando-se (4.48), chega-se a

$$- 2F_1(H) C_2 + [F_2(H) - F_3(H)] C_4 = [F_3(H) + F_2(H)] C_1 \quad (4.52)$$

também em C_2 e C_4 .

Da solução do sistema formado por (4.50) e (4.52), e da aplicação de (4.48), completa-se a obtenção das constantes C_1 , definindo-se a expressão final de δ .

Para a determinação da equação de $v(z)$, retome-se (4.34). Essa expressão, integrada sucessivamente, permite que se explicita, a menos de constantes que advirão dessas operações, a forma de \underline{v} .

A primeira integração resulta em:

$$v''' = -\delta''' - \frac{1}{\beta j_2} \int \delta dz + \frac{\alpha p L}{\beta j_2} z + C_5 \quad (4.53)$$

sendo interessante considerar, para efetuar-la, que

$$\left. \begin{aligned} \int F_1(z) dz &= \frac{1}{2\rho} [F_3(z) + F_2(z)] \\ \int F_2(z) dz &= \frac{1}{2\rho} [F_4(z) + F_1(z)] \\ \int F_3(z) dz &= -\frac{1}{2\rho} [F_1(z) - F_4(z)] \\ \int F_4(z) dz &= -\frac{1}{2\rho} [F_2(z) - F_3(z)] \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

Integrando-se novamente:

$$v'' = -\delta'' - \frac{1}{\beta j_2} \iint \delta dz dz + \frac{\alpha p L}{\beta j_2} \frac{z^2}{2} + C_{5z} + C_6 \quad (4.55)$$

sendo:

$$\left. \begin{aligned} \iint F_1(z) dz dz &= \frac{1}{2\rho^2} F_4(z) \\ \iint F_2(z) dz dz &= \frac{1}{2\rho^2} F_3(z) \\ \iint F_3(z) dz dz &= -\frac{1}{2\rho^2} F_2(z) \\ \iint F_4(z) dz dz &= -\frac{1}{2\rho^2} F_1(z) \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

Uma terceira integração produz:

$$v' = -\delta' - \frac{1}{\beta j_2} \iiint \delta dz dz dz + \frac{\alpha p L}{\beta j_2} \frac{z^3}{6} + \frac{C_5}{2} z^2 + C_6 z + C_7 \quad (4.57)$$

com as seguintes relações que podem ser utilizadas:

$$\left. \begin{aligned} \iiint F_1(z) dz dz dz &= -\frac{1}{4\rho^3} [F_2(z) - F_3(z)] \\ \iiint F_2(z) dz dz dz &= -\frac{1}{4\rho^3} [F_1(z) - F_4(z)] \\ \iiint F_3(z) dz dz dz &= -\frac{1}{4\rho^3} [F_1(z) + F_4(z)] \\ \iiint F_4(z) dz dz dz &= -\frac{1}{4\rho^3} [F_2(z) + F_3(z)] \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

e finalmente, uma quarta e última integração leva a

$$v(z) = -\delta(z) - \frac{1}{\beta j_2} \iiiii \delta dz dz dz dz + \frac{\alpha p L}{\beta j_2} \frac{z^4}{24} + \frac{C_5}{6} z^3 + \frac{C_6}{2} z^2 + C_7 z + C_8 \quad (4.59)$$

com as integrais envolvendo as $F_i(z)$ dadas por:

$$\left. \begin{aligned} \iiiii F_1(z) dz dz dz dz &= -\frac{1}{4\rho^4} F_1(z) \\ \iiiii F_2(z) dz dz dz dz &= -\frac{1}{4\rho^4} F_2(z) \\ \iiiii F_3(z) dz dz dz dz &= -\frac{1}{4\rho^4} F_3(z) \\ \iiiii F_4(z) dz dz dz dz &= -\frac{1}{4\rho^4} F_4(z) \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

que permitem, levando-se (4.40) e explicitando-se o valor de ρ , reescrever-se a expressão de v na forma:

$$v(z) = \frac{pL\beta}{(2k+1)} \left\{ \frac{1}{\beta j_2} \left[\frac{z^4}{24} + \frac{C_5 z^3}{6} + \frac{C_6 z^2}{2} + C_7 z + C_8 \right] + \sum_{i=1}^4 C_i F_i(z) \right\} \quad (4.61)$$

restando apenas por determinar as constantes C_5 , C_6 , C_7 e C_8 .

As condições de contorno que devem ser atendidas no problema são:

$$v(0) = 0 \quad (4.62)$$

$$v'(0) = 0 \quad (4.63)$$

em função do engastamento na base das paredes, e mais

$$v''(H) = 0 \quad (4.64)$$

$$v'''(H) = 0 \quad (4.65)$$

por razões já discutidas.

Da aplicação de (4.62) obtém-se:

$$C_8 = \frac{\beta j_1}{k} \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{(2k+1)} \right] \quad (4.66)$$

e, de (4.65), levando-se (4.44):

$$C_5 = -H \quad (4.67)$$

enquanto, de (4.64), levando-se (4.67) e (4.43), vem

$$C_6 = + \frac{H^2}{2} \quad (4.68)$$

e finalmente, de (4.63):

$$C_7 = + \frac{\beta j_1}{k} \sum_{i=1}^4 C_i F_i'(0) \quad (4.69)$$

que, levados em (4.61), definem totalmente a expressão do deslocamento \underline{v} . As expressões dos esforços também podem ser agora escritas. Assim, de (4.29), aplicando-se (4.53):

$$Q_1(z) = \frac{pLk}{(2k+1)} \left\{ (H-z) + \frac{\beta j_1}{k} \sum_{i=1}^4 C_i F_i'''(z) \right\} \quad (4.70)$$

e analogamente, de (4.30):

$$Q_2(z) = \frac{pL}{(2k+1)} \left\{ (H-z) - 2\beta j_1 \sum_{i=1}^4 C_i F_i'''(z) \right\} \quad (4.71)$$

e de (2.4), utilizando-se as expressões já obtidas para v e δ , tem-se, para as equações dos momentos fletores nos painéis extremo e intermediário, respectivamente:

$$M_1(z) = \frac{pLk}{(2k+1)} \left\{ \left(\frac{z^2}{2} - Hz + \frac{H^2}{2} \right) - \frac{\beta j_1}{k} \sum_{i=1}^4 C_i F_i''(z) \right\} \quad (4.72)$$

$$M_2(z) = \frac{pL}{(2k+1)} \left\{ \left(\frac{z^2}{2} - Hz + \frac{H^2}{2} \right) + 2\beta j_1 \sum_{i=1}^4 C_i F_i''(z) \right\} \quad (4.73)$$

concluindo-se a análise.

Para a relação entre os parâmetros α , β e k dada por (3.44), aplicando-se (4.45) tem-se $C_1 = 0$, e substituindo-se esse valor em (4.50) e (4.52), resulta $C_2 = C_4 = 0$. Ainda, de (4.48), C_3 também é nulo.

Este conjunto de resultados leva à coincidência das expressões obtidas com aquelas que consideram a laje como um diafragma de rigidez infinita ((4.24) a (4.28)).

O esforço cortante na base do painel intermediário, relacionado ao de diafragma rígido, tem a expressão:

$$\frac{Q_2(z=0)}{Q_{20}(z=0)} = \frac{H+8\beta\rho^3 j_1 C_2}{H} = 1 + \frac{8\beta\rho^3 j_1 C_2}{H} = 1 + \frac{(2k+1)}{\rho H} C_2 \quad (4.74)$$

Tomando o valor de C_2 obtido da solução de (4.50) e (4.52), vem:

$$C_2 = \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{(2k+1)} \right] \frac{[\sinh(2\rho H) + \sin(2\rho H)]}{[2 + \cosh(2\rho H) + \cos(2\rho H)]} \quad (4.75)$$

ou, para valores de ρH superiores a 3,0, com uma aproximação que conduz a erros inferiores a 10%:

$$C_2 \cong \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{(2k+1)} \right] \quad (4.76)$$

e com isso, (4.74) escreve-se:

$$\frac{Q_2(z=0)}{Q_{20}(z=0)} = 1 + \frac{1}{\rho H} \left[\frac{\alpha}{\beta} (2k+1) - 1 \right] \quad (4.77)$$

valor satisfatório na maioria dos casos. Quanto ao momento fletor, analogamente, de (4.26) e (4.73):

$$\frac{M_2(z=0)}{M_{20}(z=0)} = 1 + \frac{2\beta j_1}{(H^2/2)} \sum_{i=1}^4 C_i F_i''(0) \quad (4.78)$$

ou, efetuando-se os cálculos dessas funções, substituindo-se as constantes, vem:

$$\frac{M_2(z=0)}{M_{20}(z=0)} = 1 + \frac{8\beta j_1 \rho^2}{H^2} \frac{(\cosh^2 \rho H - \cos^2 \rho H)}{(\cosh^2 \rho H + \cos^2 \rho H)} \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{(2k+1)} \right] \quad (4.79)$$

ou ainda, considerando-se que

$$\rho^4 = \frac{(2k+1)}{8\beta j_1}$$

conforme visto anteriormente, tem-se

$$\frac{M_2(z=0)}{M_{20}(z=0)} = 1 + \left[\frac{\alpha}{\beta} (2k+1) - 1 \right] \frac{(\cosh^2 \rho H - \cos^2 \rho H)}{(\cosh^2 \rho H + \cos^2 \rho H)} \frac{1}{(\rho H)^2} \quad (4.80)$$

e aceitando-se, novamente, para valores de ρH superiores a 3,0 uma estimativa mais simples para a segunda parcela, pode-se escrever:

$$\frac{M_2(z=0)}{M_{20}(z=0)} = 1 + \left[\frac{\alpha}{\beta} (2k+1) - 1 \right] \frac{1}{(\rho H)^2} \quad (4.81)$$

gerando-se com isso erros não superiores a 2% no valor da parcela.

Substituindo-se, finalmente, a relação entre α e β , pode-se escrever as seguintes expressões para os esforços na base do painel intermediário:

$$Q_2(z=0) = \frac{\rho L H}{(2k+1)} \left\{ 1 + \left[\frac{5}{8} (2k+1) - 1 \right] \frac{1}{(\rho H)} \right\} \quad (4.82)$$

$$M_2(z=0) = \frac{\rho L H^2}{2(2k+1)} \left\{ 1 + \left[\frac{5}{8} (2k+1) - 1 \right] \frac{1}{(\rho H)^2} \right\} \quad (4.83)$$

encerrando-se, pois, o estudo.

4.3 - ASSOCIAÇÃO DE QUATRO PAREDES

É análoga ao caso anterior, porém com o esquema mostrado na figura 4.2.

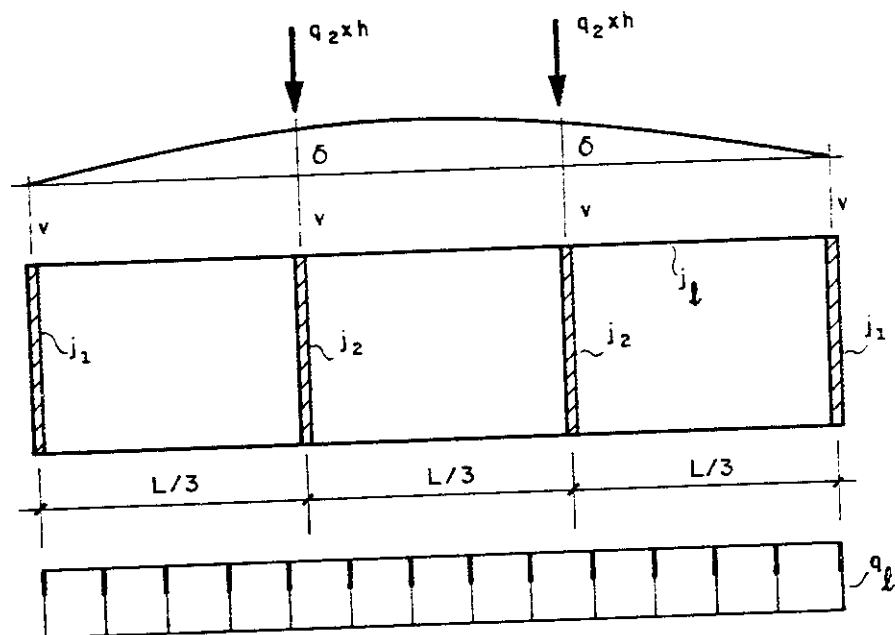


FIG. 4.2 - QUATRO PAREDES

O equilíbrio de cortantes numa seção horizontal fornece

$$2Q_{10}(z) + 2Q_{20}(z) = pL(H-z) \quad (4.84)$$

ou, levando-se (4.1), (4.2), (4.4), derivando-se e reorganizando-se:

$$\frac{(k+1)}{k} 2j_1 v_o^{IV} = pL \quad (4.85)$$

que, integrando-se sucessivamente, resulta em

$$v_o'''' = \frac{pL}{j_1} \left[\frac{k}{2(k+1)} z + C_{10} \right] \quad (4.86)$$

$$v_o''' = \frac{pL}{j_1} \left[\frac{k}{2(k+1)} \frac{z^2}{2} + C_{10}z + C_{20} \right] \quad (4.87)$$

$$v_o'' = \frac{pL}{j_1} \left[\frac{k}{2(k+1)} \frac{z^3}{6} + C_{10} \frac{z^2}{2} + C_{20}z + C_{30} \right] \quad (4.88)$$

$$v_o' = \frac{pL}{j_1} \left[\frac{k}{2(k+1)} \frac{z^4}{24} + C_{10} \frac{z^3}{6} + C_{20} \frac{z^2}{2} + C_{30}z + C_{40} \right] \quad (4.89)$$

com as condições de contorno (4.14), (4.15), (4.17) e (4.18) permitindo a determinação das constantes, cujos valores resultam:

$$C_{30} = C_{40} = 0 \quad (4.90)$$

$$C_{10} = - \frac{kH}{2(k+1)} \quad (4.91)$$

$$C_{20} = \frac{kH^2}{4(k+1)} \quad (4.92)$$

e cuja aplicação a (4.89) fornece:

$$v_o = \frac{pLk}{2(k+1)j_1} \left(\frac{z^4}{24} - \frac{Hz^3}{6} + \frac{H^2z^2}{4} \right) \quad (4.93)$$

e desta, considerando-se as relações constitutivas do painel, obtém-se as expressões dos esforços

$$M_{10} = \frac{pLk}{2(k+1)} \left(\frac{z^2}{2} - Hz + \frac{H^2}{2} \right) \quad (4.94)$$

$$M_{20} = \frac{pL}{2(k+1)} \left(\frac{z^2}{2} - Hz + \frac{H^2}{2} \right) \quad (4.95)$$

$$Q_{10} = \frac{pLk}{2(k+1)} (H-z) \quad (4.96)$$

$$Q_{20} = \frac{pL}{2(k+1)} (H-z) \quad (4.97)$$

que completam os resultados de interesse.

Considerando-se as lajes deformáveis, o equilíbrio de cortantes numa seção horizontal, considerada a relação constitutiva da laje, fornece a relação:

$$\delta^{IV} + \frac{(k+1)}{\beta j_1} \delta = \frac{pL}{2j_1} \left[\frac{2\alpha}{\beta} (k+1) - 1 \right] \quad (4.98)$$

cuja solução é dada por:

$$\delta(z) = pL\beta \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i F_i(z) + \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2(k+1)} \right] \right\} \quad (4.99)$$

com a nomenclatura para as $F_i(z)$ dada por (4.39), agora com:

$$\rho = \sqrt[4]{\frac{(k+1)}{4\beta j_1}} \quad (4.100)$$

introduzindo-se, pois, uma pequena alteração formal.

As constantes C_i ($i=1,4$) são obtidas da imposição das condições de contorno (4.41) a (4.44).

Da aplicação de (4.34) e integrações sucessivas, chega-se à expressão dos deslocamentos v , na forma:

$$v(z) = \frac{pL\beta}{(k+1)} \left\{ \frac{1}{\beta j_2} \left[\frac{z^4}{48} + C_5 \frac{z^3}{6} + C_6 \frac{z^2}{2} + C_7 z + C_8 \right] - \sum_{i=1}^4 C_i F_i(z) \right\} \quad (4.101)$$

e as constantes C_5 , C_6 , C_7 e C_8 resultam das condições de contorno (4.62) a (4.65), analogamente ao caso anterior.

Dessa forma, escreve-se:

$$C_8 = \frac{\beta j_1}{k} \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2(k+1)} \right] \quad (4.102)$$

e, para C_5 , C_6 e C_7 , obtêm-se valores similares aos expressos por (4.67) a (4.69), ou seja

$$C_5 = -\frac{H}{2} \quad (4.103)$$

$$C_6 = \frac{H^2}{4} \quad (4.104)$$

$$C_7 = \frac{\beta j_1}{k} \sum_{i=1}^4 C_i F_i'(0) \quad (4.105)$$

resultados que permitem expressar-se os esforços

$$Q_1(z) = \frac{pLk}{(k+1)} \left\{ \frac{(H-z)}{2} + \frac{\beta j_1}{k} \sum_{i=1}^4 C_i F_i'''(z) \right\} \quad (4.106)$$

$$Q_2(z) = \frac{pL}{(k+1)} \left\{ \frac{(H-z)}{2} - \beta j_1 \sum_{i=1}^4 C_i F_i'''(z) \right\} \quad (4.107)$$

$$M_1(z) = \frac{pLk}{(k+1)} \left\{ \left(\frac{z^2}{4} - \frac{Hz}{2} + \frac{H^2}{4} \right) + \frac{\beta j_1}{k} \sum_{i=1}^4 C_i F_i''(z) \right\} \quad (4.108)$$

$$M_2(z) = \frac{pL}{(k+1)} \left\{ \left(\frac{z^2}{4} - \frac{Hz}{2} + \frac{H^2}{4} \right) - \beta j_1 \sum_{i=1}^4 C_i F_i''(z) \right\} \quad (4.109)$$

na sua forma definitiva.

Se a relação entre α , β e k atender àquela dada por:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2(k+1)}$$

ou seja, $k = 0,36542$, os deslocamentos e esforços serão os mesmos daqueles fornecidos quando se considera a laje indeformável.

Para os esforços na base dos painéis, pode-se obter expressões semelhantes a (4.82) e (4.83), desde que seja feita a mesma consideração para os valores de ρ_H . As fórmulas escrevem-se:

$$Q_2(z=0) = \frac{\rho L H}{2(k+1)} \left\{ 1 + \frac{1}{\rho H} \left[\frac{2\alpha}{\beta} (k+1) - 1 \right] \right\} \quad (4.110)$$

$$M_2(z=0) = \frac{\rho L H^2}{4(k+1)} \left\{ 1 + \frac{1}{(\rho H)^2} \left[\frac{2\alpha}{\beta} (k+1) - 1 \right] \right\} \quad (4.111)$$

finalizando-se a colocação analítica do problema.

CAPÍTULO 5

ASSOCIAÇÃO DE PÓRTICOS E PAREDES

5.1 - INTRODUÇÃO

Apresentam-se neste capítulo alguns casos básicos de combinação de pórticos e paredes em paralelo, sempre igualmente espaçados e com simetria elástica com relação a um plano vertical na direção de atuação da carga.

Antes de mostrar a solução com lajes deformáveis, resolve-se o problema assimilando-se as lajes a diafragmas de rigidez infinita, conforme Stamato apresenta em [6].

Obtém-se, em todos os casos, as expressões para esforços e deslocamentos ao longo da altura dos painéis, e particularizam-se as fórmulas para os valores dos esforços nas bases.

5.2 - ASSOCIAÇÃO DE DUAS PAREDES E UM PÓRTICO INTERMEDIÁRIO

O esquema genérico dessa associação de painéis é mostrado na figura 5.1.

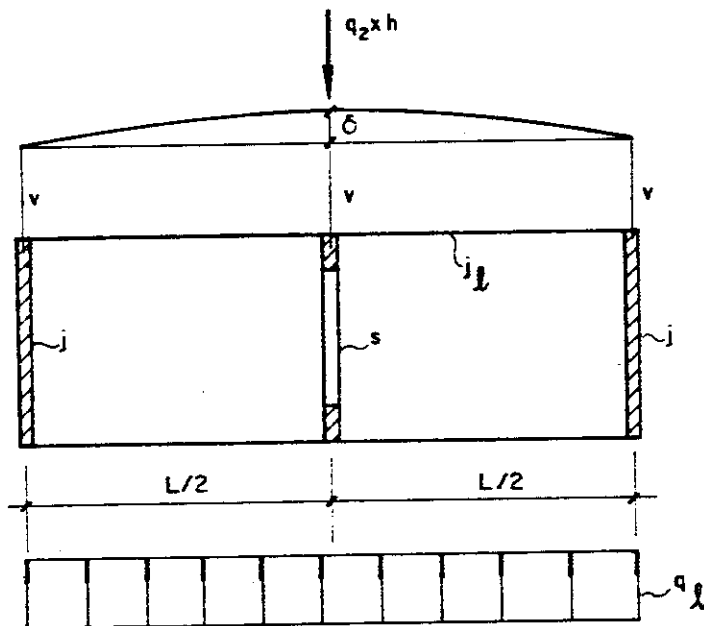


FIG. 5.1 - DUAS PAREDES E UM PÓRTICO INTERMEDIÁRIO

Quando se considera a rigidez da laje como infinita, não há diferença entre a associação "em série" e aquela "em paralelo", dos painéis. A solução desse problema é apresentada em [6] por Stamato, e tem, para relações constitutivas dos painéis parede e pórtico, respectivamente:

$$- jv'''' = Q_{10} \quad (5.1)$$

$$sv' = Q_{20} \quad (5.2)$$

e o equilíbrio de cortantes numa seção horizontal qualquer, aplicadas essas relações, se escreve:

$$- 2jv'''' + sv' = pL(H-z) \quad (5.3)$$

ou, derivando-se e rearranjando-se, vem:

$$2jv_0^{IV} - sv_0'' = pL \quad (5.4)$$

cuja solução fornece a expressão dos deslocamentos v_0 . Esta solução compõe-se de duas parcelas, ou seja:

$$v_0(z) = v_p(z) + v_h(z) \quad (5.5)$$

com $v_p(z)$ sendo uma solução particular de (5.4); por exemplo:

$$v_p(z) = -\frac{pL}{s} \frac{z^2}{2} \quad (5.6)$$

e $v_h(z)$, a solução da homogênea correspondente, que tem por equação característica:

$$2j\rho^4 - s\rho^2 = 0$$

com as seguintes raízes:

$$\rho_1 = \rho_2 = 0$$

$$\rho_3 = -\rho_4 = \sqrt{\frac{s}{2j}} = \rho$$

que conduzem a:

$$v_h(z) = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 z + \bar{C}_3 e^{\rho z} + \bar{C}_4 e^{-\rho z}$$

e este resultado, junto com (5.6), permite reescrever-se (5.5) na forma:

$$v_0(z) = \frac{pL}{s} \left(-\frac{z^2}{2} + C_2 z + C_1 + C_3 e^{\rho z} + C_4 e^{-\rho z} \right) \quad (5.7)$$

restando a determinação das constantes para definição completa dos deslocamentos.

A aplicação das condições de contorno seguintes permite a obtenção de C_1 , C_2 , C_3 e C_4 :

$$v_0(o) = 0 \quad (5.8)$$

já que não há deslocamentos na base;

$$v'(o) = 0 \quad (5.9)$$

pois as paredes estão engastadas na base e

$$v''(H) = 0 \quad (5.10)$$

representando momento fletor nulo no topo das paredes e mais

$$- 2jv_0'''(H) + sv_0'(H) = 0 \quad (5.11)$$

uma vez que, por hipótese, há apenas cargas distribuídas aplicadas, implicando em cortante total nula no topo.

De (5.8) em (5.7), vem:

$$C_1 = - C_3 - C_4 \quad (5.12)$$

e analogamente, derivando-se (5.7) e levando-se (5.9):

$$C_2 = \rho(C_4 - C_3) \quad (5.13)$$

De (5.10) segue:

$$C_3 e^{\rho H} + C_4 e^{-\rho H} = \frac{1}{\rho^2} \quad (5.14)$$

e, de (5.11), vem:

$$C_2 = + H \quad (5.15)$$

com os esforços de interesse dados pelas expressões:

$$Q_{10}(z) = -\frac{pL\rho}{2} (C_3 e^{\rho z} - C_4 e^{-\rho z}) \quad (5.16)$$

$$Q_{20}(z) = pL \left[(H-z) + \rho (C_3 e^{\rho z} - C_4 e^{-\rho z}) \right] \quad (5.17)$$

$$M_{10}(z) = \frac{pL}{2\rho^2} \left[-1 + \rho^2 (C_3 e^{\rho z} + C_4 e^{-\rho z}) \right] \quad (5.18)$$

apresentando, na base dos painéis, respectivamente, os valores:

$$Q_{10}(z=0) = \frac{pLH}{2} \quad (5.19)$$

$$Q_{20}(z=0) = 0 \quad (5.20)$$

$$M_{10}(z=0) = \frac{pL}{2} \left[-\frac{1}{\rho^2} + C_3 + C_4 \right] \quad (5.21)$$

Para lajes deformáveis, escrevem-se as relações constitutivas dos painéis na forma:

$$jv''' = -Q_1(z) \quad (5.22)$$

$$s(v' + \delta') = Q_2(z) \quad (5.23)$$

e o equilíbrio de cortantes numa seção horizontal qualquer passa a ser escrito:

$$-2jv''' + s(v' + \delta') = pL(H-z) \quad (5.24)$$

expressão que, derivando-se e rearranjando-se os termos, assume o aspecto:

$$2jv^{IV} - s(v'' + \delta'') = pL \quad (5.25)$$

ou, lembrando-se (2.8), derivando-se (5.23) e aplicando-se em (2.15):

$$\delta = \alpha pL - \beta [-s(v'' + \delta'')]]$$

ou então, de outra forma:

$$v'' = -\delta'' + \frac{\delta}{\beta s} - \frac{\alpha pL}{\beta s} \quad (5.26)$$

que também, derivando-se duas vezes:

$$v^{IV} = -\delta^{IV} + \frac{\delta''}{\beta s} \quad (5.27)$$

formando-se assim um conjunto de relações que será utilizado a seguir.

Retomando-se (5.25), e levando-se as duas últimas relações obtidas, chega-se a:

$$\delta^{IV} - \frac{1}{\beta s} \delta'' + \frac{1}{2\beta j} \delta = \frac{pL}{2j} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \quad (5.28)$$

cuja solução tem o aspecto:

$$\delta(z) = \delta_h(z) + \delta_p(z)$$

com $\delta_p(z)$ uma solução particular que atenda a (5.28), tal como:

$$\delta_p(z) = pL \beta \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \quad (5.29)$$

e $\delta_h(z)$ a solução geral da homogênea correspondente a (5.28).

As condições de contorno que devem ser respeitadas são, neste caso:

$$\delta(0) = 0 \quad (5.30)$$

por não haver deslocamentos dos painéis na base;

$$v''(H) = 0 \quad (5.31)$$

da imposição de momento fletor nulo no topo das paredes.

Da aplicação dessa condição a (5.26), vem:

$$-\delta''(H) + \frac{1}{\beta s} \delta(H) - \frac{\alpha p L}{\beta s} = 0 \quad (5.32)$$

expressa em termos de δ . Pode-se também escrever:

$$v'''(H) = 0 \quad (5.33)$$

pois a cortante no topo dos painéis é nula, conforme já discutido nesse trabalho. Assim, derivando-se (5.26) e levando-se (5.33), resulta:

$$-\delta'''(H) + \frac{1}{\beta s} \delta'(H) = 0 \quad (5.34)$$

e a última condição necessária para a determinação do movimento δ decorre do fato das paredes estarem engastadas na base, isto é:

$$v'(0) = 0 \quad (5.35)$$

que, tomada com (5.24) e (5.26) derivada, fornece:

$$2j\delta'''(0) + (s - \frac{2j}{\beta s})\delta'(0) = pLH \quad (5.36)$$

encerrando as relações que vão permitir a obtenção das constantes que advirão da solução de (5.28).

Considere-se agora a equação característica:

$$\delta^4 - \frac{1}{\beta s} \delta^2 + \frac{1}{2\beta j} = 0 \quad (5.37)$$

associada à equação diferencial (5.28).

Chamando $\rho^2 = \rho^*$, e resolvendo-se (5.37) nessa última variável, tem-se, para expressão do discriminante:

$$\Delta = \left(\frac{1}{\beta s}\right)^2 - 4 \frac{1}{2\beta_j} = \frac{j - 2\beta s^2}{\beta^2 s^2 j} \quad (5.38)$$

verificando-se a ocorrência de três casos distintos. No primeiro caso, tem-se:

$$\Delta > 0 \rightarrow \beta < \frac{j}{2s^2} \quad (5.39)$$

com:

$$\rho^* = \frac{1}{2\beta s} \left[1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{2\beta s^2}{j}\right)} \right]$$

ou:

$$\rho_{1,3} = \sqrt{\frac{1}{2\beta s}} \sqrt{\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\beta s^2}{j}}\right)}$$

$$\rho_{2,4} = - \sqrt{\frac{1}{2\beta s}} \sqrt{\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\beta s^2}{j}}\right)}$$

sendo que tais raízes fornecem a solução geral, considerando-se (5.29):

$$\delta(z) = pL\beta \left\{ C_1 e^{\rho_1 z} + C_2 e^{-\rho_1 z} + C_3 e^{\rho_3 z} + C_4 e^{-\rho_3 z} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \right\} \quad (5.40)$$

que, aplicada a (5.26), integrando-se duas vezes, resulta:

$$v(z) = pL \left\{ \left(\frac{\rho_3}{\rho_1}\right)^2 (C_1 e^{\rho_1 z} + C_2 e^{-\rho_1 z}) + \left(\frac{\rho_1}{\rho_3}\right)^2 (C_3 e^{\rho_3 z} + C_4 e^{-\rho_3 z}) + \right. \\ \left. - \frac{z^2}{2\beta s} + C_5 z + C_6 \right\} \quad (5.41)$$

que é a expressão geral do deslocamento \underline{v} .

As constantes C_5 e C_6 decorrem do atendimento às condições de contorno

$$\left. \begin{aligned} v(0) &= 0 \\ v'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

uma vez que se utiliza a hipótese de as paredes estarem engastadas na base.

As expressões para os esforços resultam das relações produzidas pela derivação de (5.40) e (5.41) e sua aplicação às relações constitutivas expressas por (5.22) e (5.23), assumindo as formas:

$$Q_1(z) = -pL \sqrt{\frac{\beta j}{2}} \left\{ \rho_3 (C_1 e^{\rho_1 z} - C_2 e^{-\rho_1 z}) + \rho_1 (C_3 e^{\rho_3 z} - C_4 e^{-\rho_3 z}) \right\} \quad (5.43)$$

$$Q_2(z) = pL \left\{ \frac{1}{\rho_1} (C_1 e^{\rho_1 z} - C_2 e^{-\rho_1 z}) + \frac{1}{\rho_3} (C_3 e^{\rho_3 z} - C_4 e^{-\rho_3 z}) - \right. \\ \left. - z + C_5 \beta s \right\} \quad (5.44)$$

$$M_1(z) = pL\beta j \left\{ \rho_3^2 (C_1 e^{\rho_1 z} + C_2 e^{-\rho_1 z}) + \rho_1^2 (C_3 e^{\rho_3 z} + C_4 e^{-\rho_3 z}) - \frac{1}{\beta s} \right\} \quad (5.45)$$

e, para os valores na base, substituindo-se C_5 :

$$Q_2(z=0) = pL\beta s \left\{ \rho_1 (C_1 - C_2) + \rho_3 (C_3 - C_4) \right\} \quad (5.46)$$

$$M_1(z=0) = pL\beta j \left\{ \rho_3^2 (C_1 + C_2) + \rho_1^2 (C_3 + C_4) - \frac{1}{\beta s} \right\} \quad (5.47)$$

respectivamente, cortante no painel intermediário e momento fletor nos painéis extremos.

No segundo caso tem-se:

$$\Delta = 0 \rightarrow \beta = \frac{j}{2s^2} \quad (5.48)$$

$$\rho_1 = \rho_3 = \sqrt{\frac{1}{2\beta s}} = \rho = \sqrt{\frac{s}{j}}$$

$$\rho_2 = \rho_4 = - \sqrt{\frac{1}{2\beta s}} = - \rho$$

e, com procedimento análogo ao do primeiro caso, chega-se a:

$$\delta(z) = pL\beta \left\{ C_1 e^{\rho z} + C_2 z e^{\rho z} + C_3 e^{-\rho z} + C_4 z e^{-\rho z} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \right\} \quad (5.49)$$

que, aplicada a (5.26), produz, após duas integrações:

$$v(z) = pL\beta \left\{ C_1 e^{\rho z} + C_2 e^{\rho z} \left(z - \frac{4}{\rho}\right) + C_3 e^{-\rho z} + \right. \\ \left. + C_4 e^{-\rho z} \left(z + \frac{4}{\rho}\right) - \frac{z^2}{2\beta s} + C_5 z + C_6 \right\} \quad (5.50)$$

e essas duas expressões de deslocamentos, levadas suas derivadas de ordem conveniente às relações constitutivas dos painéis, fornecem, para os esforços, as seguintes fórmulas:

$$Q_1(z) = - pL\beta j \left\{ \rho^3 C_1 e^{\rho z} + \rho^2 (\rho z - 1) C_2 e^{\rho z} - \rho^3 C_3 e^{-\rho z} - \rho^2 (\rho z + 1) C_4 e^{-\rho z} \right\} \quad (5.51)$$

$$Q_2(z) = pL\beta s \left\{ 2\rho C_1 e^{\rho z} + 2(\rho z - 1) C_2 e^{\rho z} - 2\rho C_3 e^{-\rho z} - 2(\rho z + 1) C_4 e^{-\rho z} - \frac{z}{\beta s} + C_5 \right\} \quad (5.52)$$

$$M_1(z) = pL\beta j \left\{ \rho^2 C_1 e^{\rho z} + (\rho^2 z - 2\rho) C_2 e^{\rho z} + (\rho^2 C_3 e^{-\rho z} + (\rho^2 z + 2\rho) C_4 e^{-\rho z} - \frac{1}{\beta s}) \right\} \quad (5.53)$$

e, na base:

$$Q_2(z=0) = pL \left\{ H - 2\beta s \left[C_2 + C_4 + \rho(C_3 - C_1) \right] \right\} \quad (5.54)$$

$$M_1(z=0) = pL\beta j \left\{ \rho^2 C_1 - 2\rho C_2 + \rho^2 C_3 + 2\rho C_4 - \frac{1}{\beta s} \right\} \quad (5.55)$$

para o cortante no painel intermediário e momento fletor nos painéis extremos.

Finalmente, no terceiro caso, verifica-se

$$\Delta < 0 \rightarrow \beta > \frac{j}{2s^2} \quad (5.56)$$

que resulta:

$$\rho^2 = \frac{1}{2\beta s} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\beta s^2}{j}} \right)$$

sendo, de (5.56):

$$\left(1 - \frac{2\beta s^2}{j} \right) < 0$$

o que permite escrever-se:

$$\rho^2 = \frac{1}{2\beta s} \left[1 \pm \sqrt{\left(\frac{2\beta s^2}{j} - 1\right)} \sqrt{(-1)} \right]$$

ou ainda:

$$\rho^2 = \frac{1}{2\beta s} \left[1 \pm \sqrt{\left(\frac{2\beta s^2}{j} - 1\right)} i \right]$$

com o termo dentro da raiz seguramente positivo.

Chamando, para sintetizar as expressões a serem operadas:

$$a = \frac{1}{2\beta s}$$

$$b = \frac{1}{2\beta s} \sqrt{\left(\frac{2\beta s^2}{j} - 1\right)}$$

tem-se:

$$\rho^2 = a \pm b_i$$

e, conseqüentemente:

$$\rho_{1,3} = \sqrt{a+b_i}$$

$$\rho_{2,4} = \sqrt{a-b_i}$$

e, lembrando-se, da forma polar dos números complexos, que:

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \sqrt{r} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ \sqrt{r} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) \right] \end{cases}$$

com:

$$z = a+bi$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

segue, para o caso em questão:

$$r = \sqrt{\frac{1}{2\beta j}} \quad (5.57)$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{j}{2\beta s^2}} \quad (5.58)$$

ou ainda:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{j}{2\beta s^2}}}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{j}{2\beta s^2}}}$$

e, considerando-se que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) = - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) = - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

pode-se escrever:

$$\rho_{1,3}^* = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{8\beta j}} \left\{ \sqrt{1 + \sqrt{\frac{j}{2\beta s^2}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{j}{2\beta s^2}}} i \right\} \quad (5.59)$$

$$\rho_{2,4}^* = \pm \sqrt[4]{\frac{j}{8\beta j}} \left\{ \sqrt{1 + \sqrt{\frac{j}{2\beta s^2}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{j}{2\beta s^2}}} i \right\} \quad (5.60)$$

e considerando-se, novamente para sintetizar as expressões:

$$\rho_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{8\beta j}} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{j}{2\beta s^2}}} \quad (5.61)$$

$$\rho_3 = \sqrt[4]{\frac{1}{8\beta j}} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{j}{2\beta s^2}}} \quad (5.62)$$

escrevem-se as raízes da equação característica na forma:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1^* &= \rho_1 + \rho_3 i \\ \rho_2^* &= \rho_1 - \rho_3 i \\ \rho_3^* &= -\rho_1 - \rho_3 i \\ \rho_4^* &= -\rho_1 + \rho_3 i \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

representando dois pares de raízes complexas conjugadas.

Com essa representação, a solução geral da equação homogênea, somada à solução particular dada por (5.29) toma o aspecto:

$$\delta(z) = pL\beta \left\{ \bar{C}_1 e^{\rho_1 z} \cos \rho_3 z + \bar{C}_2 e^{\rho_1 z} \sen \rho_3 z + \bar{C}_3 e^{-\rho_1 z} \cos \rho_3 z + \bar{C}_4 e^{-\rho_1 z} \sen \rho_3 z + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \right\} \quad (5.64)$$

ou ainda:

$$\delta(z) = pL\beta \left\{ C_1 \cosh \rho_1 z \cos \rho_3 z + C_2 \cosh \rho_1 z \sin \rho_3 z + \right. \\ \left. + C_3 \sinh \rho_1 z \cos \rho_3 z + C_4 \sinh \rho_1 z \sin \rho_3 z + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \right\} \quad (5.65)$$

que lhe é equivalente.

Chamando-se:

$$\left. \begin{aligned} G_1(z) &= \cosh \rho_1 z \cos \rho_3 z \\ G_2(z) &= \cosh \rho_1 z \sin \rho_3 z \\ G_3(z) &= \sinh \rho_1 z \cos \rho_3 z \\ G_4(z) &= \sinh \rho_1 z \sin \rho_3 z \end{aligned} \right\} \quad (5.66)$$

pode-se sintetizar (5.65), que passa a escrever-se:

$$\delta(z) = pL\beta \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i G_i(z) + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \right\} \quad (5.67)$$

e, desde que se adote essa representação, levando-se (5.67) a (5.26), e integrando-se duas vezes, vem:

$$v(z) = pL\beta \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i \left[\frac{1}{\beta s} \iint G_i(z) dz dz - G_i(z) \right] + \right. \\ \left. - \frac{1}{2\beta s} z^2 + C_5 z + C_6 \right\} \quad (5.68)$$

expressão que pode ser explicitada a partir de:

$$\left. \begin{aligned} \int G_1(z) dz &= \frac{1}{(\rho_1^2 + \rho_3^2)} (\rho_1 G_3 + \rho_3 G_2) \\ \int G_2(z) dz &= \frac{1}{(\rho_1^2 + \rho_3^2)} (\rho_1 G_4 - \rho_3 G_1) \\ \int G_3(z) dz &= \frac{1}{(\rho_1^2 + \rho_3^2)} (\rho_1 G_1 + \rho_3 G_4) \\ \int G_4(z) dz &= \frac{1}{(\rho_1^2 + \rho_3^2)} (\rho_1 G_2 - \rho_3 G_3) \end{aligned} \right\} \quad (5.69)$$

e:

$$\left. \begin{aligned} \iint G_1(z) dz dz &= \frac{1}{(\rho_1^2 + \rho_3^2)^2} \left[(\rho_1^2 - \rho_3^2) G_1 + 2\rho_1 \rho_3 G_4 \right] \\ \iint G_2(z) dz dz &= \frac{1}{(\rho_1^2 + \rho_3^2)^2} \left[(\rho_1^2 - \rho_3^2) G_2 - 2\rho_1 \rho_3 G_3 \right] \\ \iint G_3(z) dz dz &= \frac{1}{(\rho_1^2 + \rho_3^2)^2} \left[(\rho_1^2 - \rho_3^2) G_3 + 2\rho_1 \rho_3 G_2 \right] \\ \iint G_4(z) dz dz &= \frac{1}{(\rho_1^2 + \rho_3^2)^2} \left[(\rho_1^2 - \rho_3^2) G_4 - 2\rho_1 \rho_3 G_1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.70)$$

efetuando-se as integrações sobre as funções $G_i(z)$.

Quanto aos esforços, tem-se:

$$Q_1(z) = -jv''' = -pL\beta j \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i \left[\frac{1}{\beta s} G_i'(z) - G_i'''(z) \right] \right\} \quad (5.71)$$

e, nessa expressão, as derivações indicadas produzem:

$$\left. \begin{aligned} G_1'(z) &= \rho_1 G_3 - \rho_3 G_2 \\ G_2'(z) &= \rho_3 G_1 + \rho_1 G_4 \\ G_3'(z) &= \rho_1 G_1 - \rho_3 G_4 \\ G_4'(z) &= \rho_1 G_2 + \rho_3 G_3 \end{aligned} \right\} \quad (5.72)$$

e, na sequência:

$$\left. \begin{aligned} G_1''(z) &= (\rho_1^2 - \rho_3^2) G_1 - 2\rho_1 \rho_3 G_4 \\ G_2''(z) &= (\rho_1^2 - \rho_3^2) G_2 + 2\rho_1 \rho_3 G_3 \\ G_3''(z) &= (\rho_1^2 - \rho_3^2) G_3 - 2\rho_1 \rho_3 G_2 \\ G_4''(z) &= (\rho_1^2 - \rho_3^2) G_4 + 2\rho_1 \rho_3 G_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.73)$$

ou ainda:

$$\left. \begin{aligned} G_1'''(z) &= \rho_1 (\rho_1^2 - 3\rho_3^2) G_3 + \rho_3 (\rho_3^2 - 3\rho_1^2) G_2 \\ G_2'''(z) &= \rho_3 (3\rho_1^2 - \rho_3^2) G_1 + \rho_1 (\rho_1^2 - 3\rho_3^2) G_4 \\ G_3'''(z) &= \rho_1 (\rho_1^2 - 3\rho_3^2) G_1 + \rho_3 (\rho_3^2 - 3\rho_1^2) G_4 \\ G_4'''(z) &= \rho_3 (3\rho_1^2 - \rho_3^2) G_3 + \rho_1 (\rho_1^2 - 3\rho_3^2) G_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.74)$$

que permitem o cálculo do esforço cortante nos painéis extremos.

No painel intermediário, analogamente, tem-se, para a expressão do esforço cortante:

$$Q_2(z) = s(v' + \delta') = pL\beta s \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i \int \frac{G_i(z)}{\beta s} dz - \frac{1}{\beta s} z + C_5 \right\} \quad (5.75)$$

e, também aqui, as constantes C_5 e C_6 são determinadas fazendo-se o deslocamento v e sua primeira derivada nulos na base, atendendo-se à vinculação aí existente nos painéis-parede, isto é, ao engastamento. Continuando-se:

$$M_1(z) = jv''(z)$$

$$M_1(z) = pL\beta j \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i \left[\frac{1}{\beta s} G_i(z) - G_i''(z) \right] - \frac{1}{\beta s} \right\} \quad (5.76)$$

que indica os valores do momento fletor nos painéis extremos ao longo de sua altura.

Para os valores dos esforços na base dos painéis, particularizando-se (5.75) e (5.76), para $z = 0$, e levando-se o valor resultante para C_5 , tem-se, finalmente:

$$Q_2(z=0) = pL \left\{ H - (\rho_3 C_2 - \rho_1 C_3) \sqrt{2\beta j} \right\} \quad (5.77)$$

$$M_1(z=0) = pL\beta j \left\{ C_1 \left[\frac{1}{\beta s} - \sqrt{2\beta j} \right] - 2\rho_1 \rho_3 C_4 - \frac{1}{\beta s} \right\} \quad (5.78)$$

expressões que completam a análise desse caso.

5.3 - ASSOCIAÇÃO DE DUAS PAREDES EXTREMAS E DOIS PÓRTICOS INTERMEDIÁRIOS

A figura 5.2 representa, esquematicamente, este caso de associação de pórticos e paredes.

Considerando-se inicialmente a laje rígida, escreve-se o equilíbrio de cortantes numa seção horizontal qualquer, substituídas (5.1) e (5.2), na forma:

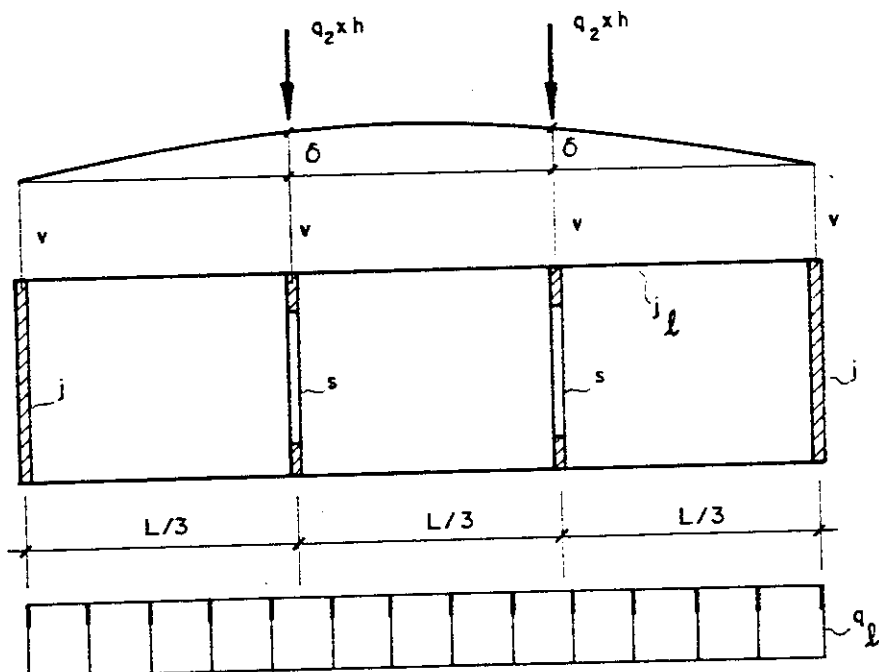


FIG. 5.2 — DUAS PAREDES E DOIS PÓRTICOS INTERMEDIÁRIOS

$$- 2jv'''' + 2sv'_0 = pL(H-z) \quad (5.79)$$

e, com uma derivação e rearranjo conveniente dos termos, vem:

$$2jv'''' - 2sv'' = pL \quad (5.80)$$

equação que se apresenta análoga a (5.4), sendo sua solução dada por:

$$v_0(z) = \frac{pL}{2s} \left(-\frac{z^2}{2} + C_2 z + C_1 + C_3 e^{\rho z} + C_4 e^{-\rho z} \right) \quad (5.81)$$

agora com

$$\rho = \sqrt{\frac{s}{j}}$$

estando aí uma alteração formal de pequena monta.

As condições de contorno (5.8) a (5.10) também se aplicam a este caso, enquanto (5.11) é substituída, obviamente, por:

$$- 2jv'''(H) + 2sv'(H) = 0 \quad (5.82)$$

e a imposição dessas condições leva a (5.15) e às seguintes expressões do deslocamento e esforços:

$$v_0(z) = \frac{pL}{2s} \left[-\frac{z^2}{2} + Hz + C_3(e^{\rho z} - 1) + C_4(e^{-\rho z} - 1) \right] \quad (5.83)$$

$$Q_{20}(z) = \frac{pL}{2} \left[(H-z) + \rho (C_3 e^{\rho z} - C_4 e^{-\rho z}) \right] \quad (5.84)$$

enquanto, para $Q_{10}(z)$ e $Q_{20}(z)$, repetem-se (5.16) e (5.17).

No equacionamento para lajes deformáveis, o mesmo equilíbrio de cortantes é escrito, respeitando-se (5.22) e (5.23):

$$- 2jv''' + 2s(v' + \delta') = pL(H-z) \quad (5.85)$$

Arranjando-se os termos, derivando-se e considerando-se (5.26) e (5.27), vem:

$$\delta^{IV} - \frac{1}{\beta s} \delta'' + \frac{1}{\beta j} \delta = \frac{pL}{2j} \left(\frac{2\alpha}{\beta} - 1 \right) \quad (5.86)$$

que vem a ser uma expressão análoga a (5.28), devendo-se atender às mesmas condições de contorno (5.30), (5.31), (5.33) e (5.35), implicando-se em:

$$\delta(0) = 0 \quad (5.30)$$

$$-\delta''(H) + \frac{1}{\beta s} \delta(H) - \frac{\alpha}{\beta} \frac{pL}{s} = 0 \quad (5.32)$$

$$- \delta'''(H) + \frac{1}{\beta s} \delta'(H) = 0 \quad (5.34)$$

No lugar de (5.36), se for tomada (5.85), derivada de (5.26), e considerada a equação (5.35), vem:

$$2j\delta'''(0) + (2s - \frac{2j}{\beta s})\delta'(0) = pLH \quad (5.87)$$

fechando as condições que devem ser atendidos no problema.

A equação característica passa a ser:

$$\rho^4 - \frac{1}{\beta s} \rho^2 + \frac{1}{\beta j} = 0$$

distinguindo-se novamente três casos. No primeiro, tem-se

$$\Delta > 0 \rightarrow \beta < \frac{j}{4s^2}$$

e, repetindo o procedimento já adotado anteriormente, fazendo-se

$$\rho_{1,3} = \sqrt{\frac{1}{2\beta s}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta s^2}{j}}}$$

$$\rho_{2,4} = -\sqrt{\frac{1}{2\beta s}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta s^2}{j}}}$$

tem-se a solução geral, após a soma da solução particular à da homogênea, expressa por:

$$\delta(z) = pL\beta \left\{ C_1 e^{\rho_1 z} + C_2 e^{-\rho_1 z} + C_3 e^{\rho_3 z} + C_4 e^{-\rho_3 z} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2}\right) \right\} \quad (5.88)$$

e, a partir dessa expressão de deslocamentos levada em (5.26), após duas integrações obtém-se para os deslocamentos v a forma:

$$v(z) = pL\beta \left\{ \left(\frac{\rho_3}{\rho_1}\right)^2 (C_1 e^{\rho_1 z} + C_2 e^{-\rho_1 z}) + \left(\frac{\rho_1}{\rho_3}\right)^2 (C_3 e^{\rho_3 z} + C_4 e^{-\rho_3 z}) + \frac{z^2}{4\beta s} + C_5 z + C_6 \right\} \quad (5.89)$$

sendo as constantes C_5 e C_6 novamente obtidas da imposição das condições de contorno representadas por (5.42) e (5.43), em \underline{v} e sua primeira derivada, que devem se anular na base, tendo-se em vista a vinculação aí existente nas paredes.

As expressões para os esforços, às quais se pode chegar através de procedimento já mostrado, são:

$$Q_1(z) = -pL \sqrt{\beta j} \left\{ \rho_3 (C_1 e^{\rho_1 z} - C_2 e^{-\rho_1 z}) + \rho_1 (C_3 e^{\rho_3 z} - C_4 e^{-\rho_3 z}) \right\} \quad (5.90)$$

$$Q_2(z) = pL \left\{ \frac{1}{\rho_1} (C_1 e^{\rho_1 z} - C_2 e^{-\rho_1 z}) + \frac{1}{\rho_3} (C_3 e^{\rho_3 z} - C_4 e^{-\rho_3 z}) - \frac{z}{2} + C_5 \beta s \right\} \quad (5.91)$$

$$M_1(z) = pL\beta j \left\{ \rho_3^2 (C_1 e^{\rho_1 z} + C_2 e^{-\rho_1 z}) + \rho_1^2 (C_3 e^{\rho_3 z} + C_4 e^{-\rho_3 z}) - \frac{1}{\beta s} \right\} \quad (5.92)$$

assumindo, na base, no caso do cortante do painel intermediário e momento do painel extremo, respectivamente:

$$Q_2(z=0) = pL\beta s \left\{ \rho_1 (C_1 - C_2) + \rho_3 (C_3 - C_4) \right\} \quad (5.93)$$

$$M_1(z=0) = pL\beta j \left\{ \rho_3^2 (C_1 + C_2) + \rho_1^2 (C_3 + C_4) - \frac{1}{\beta s} \right\} \quad (5.94)$$

O segundo caso corresponde a:

$$\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{j}{4s^2}$$

e fazendo-se, com procedimento igual ao já utilizado:

$$\rho_1 = \rho_3 = \sqrt{\frac{1}{2\beta s}} = \rho = \sqrt{\frac{2s}{j}}$$

$$\rho_2 = \rho_4 = -\sqrt{\frac{1}{2\beta s}} = -\rho$$

a composição das soluções particular e da homogênea associada à equação diferencial de interesse, isto é, (5.86), fornece:

$$\delta(z) = pL\beta \left\{ C_1 e^{\rho z} + C_2 z e^{\rho z} + C_3 e^{-\rho z} + C_4 z e^{-\rho z} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2}\right) \right\} \quad (5.95)$$

podendo-se, com esse resultado, chegar-se a

$$v(z) = pL\beta \left\{ C_1 e^{\rho z} + C_2 e^{\rho z} \left(z - \frac{4}{\rho}\right) + C_3 e^{-\rho z} + C_4 e^{-\rho z} \left(z + \frac{4}{\rho}\right) - \frac{z^2}{4\beta s} + C_5 z + C_6 \right\} \quad (5.96)$$

e ainda, levando-se essas expressões de deslocamentos e suas derivadas às relações constitutivas dos painéis, obter-se as fórmulas para os esforços, que nesse caso ficam:

$$Q_1(z) = -pL\beta j \left\{ \rho^3 C_1 e^{\rho z} + \rho^2 (\rho z - 1) C_2 e^{\rho z} - \rho^3 C_3 e^{-\rho z} - \rho^2 (\rho z + 1) C_4 e^{-\rho z} \right\} \quad (5.97)$$

$$Q_2(z) = pL\beta s \left\{ 2\rho C_1 e^{\rho z} + 2(\rho z - 1) e^{\rho z} C_2 - 2\rho C_3 e^{-\rho z} - 2(\rho z + 1) C_4 e^{-\rho z} - \frac{z}{2\beta s} + C_5 \right\} \quad (5.98)$$

$$M_1(z) = pL\beta j \left\{ \rho^2 C_1 e^{\rho z} + (\rho^2 z - 2\rho) C_2 e^{\rho z} + \rho^2 C_3 e^{-\rho z} + \right. \\ \left. + (\rho^2 z + 2\rho) C_4 e^{-\rho z} - \frac{1}{2\beta s} \right\} \quad (5.99)$$

ou, anulando z , para cálculo dos valores assumidos na base:

$$Q_2(z=0) = pL \left\{ \frac{H}{2} - 2\beta s \left[C_4 + C_2 + \rho(C_3 - C_1) \right] \right\} \quad (5.100)$$

$$M_1(z=0) = pL\beta j \left\{ \rho^2 C_1 - 2\rho C_2 + \rho^2 C_3 + 2\rho C_4 - \frac{1}{2\beta s} \right\} \quad (5.101)$$

estando já incorporado o valor da constante C_5 .

Finalmente, o terceiro caso corresponde a:

$$\Delta < 0 \quad \rightarrow \quad \beta > \frac{j}{4s^2}$$

e para sua análise, considere-se

$$\rho_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{4\beta j}} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{j}{4\beta s^2}}} \\ \rho_3 = \sqrt[4]{\frac{1}{4\beta j}} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{j}{4\beta s^2}}} \quad (5.102)$$

que permitem escrever-se as raízes da equação característica na forma:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1^* &= \rho_1 + \rho_3 i \\ \rho_2^* &= \rho_1 - \rho_3 i \\ \rho_3^* &= -\rho_1 - \rho_3 i \\ \rho_4^* &= -\rho_1 + \rho_3 i \end{aligned} \right\}$$

e, juntando-se a essa representação aquela adotada em (5.66), pode-se escrever a solução de (5.86) como:

$$\delta(z) = pL\beta \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i G_i(z) + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (5.103)$$

que aplicada a (5.26) integrada duas vezes, resulta, para a expressão dos deslocamentos \underline{v} :

$$v(z) = pL\beta \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i \left[\frac{1}{\beta s} \iint G_i(z) dz dz - G_i(z) \right] - \frac{1}{4\beta s} z^2 + C_5 z + C_6 \right\} \quad (5.104)$$

sendo as integrais envolvidas explicitadas através do emprego de (5.70). O esforço cortante nos painéis extremos é representado por:

$$Q_1(z) = - pL\beta j \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i \left[\frac{1}{\beta s} G_i'(z) - G_i''(z) \right] \right\} \quad (5.105)$$

recorrendo-se, para seu cálculo, a (5.72) e (5.74), e o momento fletor é dado por

$$M_1(z) = pL\beta j \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i \left[\frac{1}{\beta s} G_i(z) - G_i''(z) \right] - \frac{1}{2\beta s} \right\} \quad (5.106)$$

com $G_i''(z)$ fornecido pelas (5.73). No painel intermediário, a relação obtida, para o esforço cortante, é:

$$Q_2(z) = pL\beta s \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i \frac{1}{\beta s} \int G_i(z) dz - \frac{1}{2\beta s} z + C_5 \right\} \quad (5.107)$$

onde a integral apresentada é resolvida em (5.69).

Os esforços na base têm as expressões:

$$Q_2(z=0) = pL \left\{ \frac{H}{2} - (\rho_3 C_2 - \rho_1 C_3) \sqrt{\beta j} \right\} \quad (5.108)$$

$$M_1(z=0) = pL\beta j \left\{ C_1 \left[\frac{1}{\beta s} - \sqrt{\beta j} \right] - 2\rho_1 \rho_3 C_4 - \frac{1}{2\beta s} \right\} \quad (5.109)$$

que encerram, no que interessa, a formulação pertinente.

5.4 - ASSOCIAÇÃO DE UMA PAREDE CENTRAL E DOIS PÓRTICOS EX-TREMOS

O esquema representado na figura (5.3) fornece a configuração genérica da associação em questão.

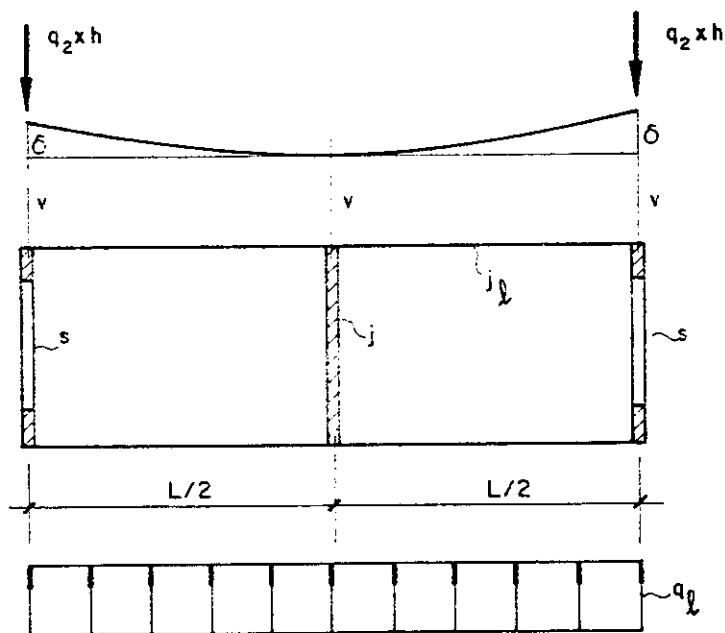


FIG. 5.3 - DOIS PÓRTICOS E UMA PAREDE INTERMEDIÁRIA

Considerada a laje rígida, a seguinte equação de equilíbrio de cortantes numa seção horizontal qualquer corresponde ao problema em análise:

$$- jv_o'''' + 2sv_o' = pL(H-z) \quad (5.110)$$

cuja solução fornece, para os deslocamentos:

$$v_o(z) = \frac{pL}{2s} \left\{ -\frac{z^2}{2} + C_1 + C_2z + C_3e^{\rho z} + C_4e^{-\rho z} \right\} \quad (5.111)$$

com

$$\rho = \sqrt{\frac{2s}{j}}$$

e, aplicando-se as derivadas de v_o às relações constitutivas dos painéis, obtêm-se as relações dos esforços, que são:

$$Q_{10}(z) = - jv_o'''' = - pL \left\{ \rho(C_3e^{\rho z} - C_4e^{-\rho z}) \right\} \quad (5.112)$$

$$M_{10}(z) = jv_o'' = pL \left\{ C_3e^{\rho z} + C_4e^{-\rho z} - \frac{1}{\rho^2} \right\} \quad (5.113)$$

$$Q_{20}(z) = sv_o' = \frac{pL}{2} \left\{ (H-z) + \rho C_3e^{\rho z} - \rho C_4e^{-\rho z} \right\} \quad (5.114)$$

já substituída C_2 , cujo valor foi encontrado utilizando-se as condições de contorno (5.8) a (5.10), e mais:

$$- jv_o''''(H) + 2sv_o'(H) = 0 \quad (5.115)$$

isto é, o cortante total nulo no topo, dada a ausência de ações externas concentradas nesse nível.

Para lajes deformáveis, o mesmo equilíbrio, derivado e com seus termos rearranjados, se escreve:

$$jv^{IV} - 2s(v'' + \delta'') = pL . \quad (5.116)$$

Aplicando-se (5.26) e (5.27) a essa última relação, vem:

$$\delta^{IV} - \frac{1}{\beta s} \delta'' + \frac{2}{\beta j} \delta = \frac{pL}{j} \left(\frac{2\alpha}{\beta} - 1 \right) \quad (5.117)$$

sendo as mesmas as condições de contorno a serem respeitadas, isto é, (5.30), (5.32), (5.34) e ainda, de $v'(0) = 0$, substituída em (5.116) antes da derivação, com o auxílio de (5.26) derivada:

$$j\delta'''(0) + \left(2s - \frac{j}{\beta s}\right) \delta'(0) = pLH \quad (5.118)$$

podendo-se assim determinar todas as constantes envolvidas.

A equação característica é:

$$\rho^4 - \frac{1}{\beta s} \rho^2 + \frac{2}{\beta j} = 0$$

verificando-se novamente a ocorrência de três casos. No primeiro tem-se:

$$\Delta > 0 \rightarrow \beta < \frac{j}{8s^2}$$

e chamando-se:

$$\rho_{1,3} = \sqrt{\frac{1}{2\beta s}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{8\beta s^2}{j}}} = -\rho_{2,4}$$

a solução de (5.117) escreve-se:

$$\delta(z) = \frac{pL\beta}{2} \left\{ c_1 e^{\rho_1 z} + c_2 e^{-\rho_1 z} + c_3 e^{\rho_3 z} + c_4 e^{-\rho_3 z} + \left(\frac{2\alpha}{\beta} - 1 \right) \right\} \quad (5.119)$$

cuja aplicação a (5.26) integrada duas vezes fornece:

$$v(z) = \frac{pL\beta}{2} \left\{ \left(\frac{\rho_3}{\rho_1}\right)^2 (C_1 e^{\rho_1 z} + C_2 e^{-\rho_1 z}) + \left(\frac{\rho_1}{\rho_3}\right)^2 (C_3 e^{\rho_3 z} + C_4 e^{-\rho_3 z}) + \right. \\ \left. - \frac{z^2}{2\beta s} + C_5 z + C_6 \right\} \quad (5.120)$$

com as constantes C_5 e C_6 tendo sua determinação resultando da imposição de deslocamento \underline{v} e sua primeira derivada nulos na base, em decorrência da vinculação da parede nessa seção.

As expressões para os esforços resultam, utilizando-se procedimento semelhante ao já aplicado em casos anteriores:

$$Q_1(z) = -pL \sqrt{\frac{\beta j}{2}} \left\{ \rho_3 (C_1 e^{\rho_1 z} - C_2 e^{-\rho_1 z}) + \rho_1 (C_3 e^{\rho_3 z} - C_4 e^{-\rho_3 z}) \right\} \quad (5.121)$$

$$Q_2(z) = \frac{pL}{2} \left\{ \frac{1}{\rho_1} (C_1 e^{\rho_1 z} - C_2 e^{-\rho_1 z}) + \frac{1}{\rho_3} (C_3 e^{\rho_3 z} - C_4 e^{-\rho_3 z}) - z + C_5 \beta s \right\} \quad (5.122)$$

$$M_1(z) = \frac{pL\beta j}{2} \left\{ \rho_3^2 (C_1 e^{\rho_1 z} + C_2 e^{-\rho_1 z}) + \rho_1^2 (C_3 e^{\rho_3 z} + C_4 e^{-\rho_3 z}) - \frac{1}{\beta s} \right\} \quad (5.123)$$

e, na base, anulando-se z e substituindo-se C_5 , os valores do cortante nos pórticos extremos e momento fletor na parede intermediária são dados, respectivamente, por

$$Q_2(z=0) = \frac{pL\beta s}{2} \left\{ \rho_1 (C_1 - C_2) + \rho_3 (C_3 - C_4) \right\} \quad (5.124)$$

$$M_1(z=0) = \frac{pL\beta j}{2} \left\{ \rho_3^2 (C_1 + C_2) + \rho_1^2 (C_3 + C_4) - \frac{1}{\beta s} \right\} \quad (5.125)$$

No segundo caso, verifica-se:

$$\Delta = 0 \rightarrow \beta = \frac{j}{8s^2}$$

implicando-se em:

$$\delta(z) = \frac{pL\beta}{2} \left\{ C_1 e^{\rho z} + C_2 z e^{\rho z} + C_3 e^{-\rho z} + C_4 z e^{-\rho z} + \left(\frac{2\alpha}{\beta} - 1 \right) \right\} \quad (5.126)$$

$$v(z) = \frac{pL\beta}{2} \left\{ C_1 e^{\rho z} + C_2 e^{\rho z} \left(z - \frac{4}{\rho} \right) + C_3 e^{-\rho z} + C_4 e^{-\rho z} \left(z + \frac{4}{\rho} \right) + \right. \\ \left. - \frac{z^2}{2\beta s} + C_5 z + C_6 \right\} \quad (5.127)$$

para os deslocamentos, enquanto para os esforços, vêm:

$$Q_1(z) = - \frac{pL\beta j}{2} \left\{ \rho^3 C_1 e^{\rho z} + \rho^2 (\rho z - 1) C_2 e^{\rho z} - \rho^3 C_3 e^{-\rho z} - \right. \\ \left. - \rho^2 (\rho z + 1) C_4 e^{-\rho z} \right\} \quad (5.128)$$

$$Q_2(z) = \frac{pL\beta s}{2} \left\{ 2\rho C_1 e^{\rho z} + 2(\rho z - 1) e^{\rho z} C_2 - 2\rho C_3 e^{-\rho z} - \right. \\ \left. - 2(\rho z + 1) C_4 e^{-\rho z} - \frac{z}{\beta s} + C_5 \right\} \quad (5.129)$$

$$M_1(z) = \frac{pL\beta j}{2} \left\{ \rho^2 C_1 e^{\rho z} + (\rho^2 z - 2\rho) C_2 e^{\rho z} + \rho^2 C_3 e^{-\rho z} + \right. \\ \left. + (\rho^2 z + 2\rho) C_4 e^{-\rho z} - \frac{1}{\beta s} \right\} \quad (5.130)$$

e, para os valores na base:

$$Q_2(z=0) = \frac{pL}{2} \left\{ H - 2\beta s \left[C_2 + C_4 + \rho(C_3 - C_1) \right] \right\} \quad (5.131)$$

$$M_1(z=0) = \frac{pL\beta j}{2} \left\{ \rho^2 C_1 - 2\rho C_2 + \rho^2 C_3 + 2\rho C_4 - \frac{1}{\beta s} \right\} \quad (5.132)$$

Finalmente, no terceiro caso tem-se:

$$\Delta < 0 \rightarrow \beta > \frac{j}{8s^2}$$

e chamando-se:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt[4]{\frac{1}{2\beta j}} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{j}{8\beta s^2}}} \\ \rho_3 &= \sqrt[4]{\frac{1}{2\beta j}} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{j}{8\beta s^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (5.133)$$

pode-se escrever as equações (5.63) novamente, e a solução pode ser apresentada na forma sintetizada permitida pelas (5.66) com o aspecto:

$$\delta(z) = \frac{pL\beta}{2} \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i G_i(z) + \left(\frac{2\alpha}{\beta} - 1\right) \right\} \quad (5.134)$$

que, aplicada a (5.26), após duas integrações, leva a:

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{pL\beta}{2} \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i \left[\frac{1}{\beta s} \iint G_i(z) dz dz - G_i(z) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{z^2}{2\beta s} + C_5 z + C_6 \right\} \end{aligned} \quad (5.135)$$

sendo, com as relações constitutivas dos painéis, possível exprimir-se os esforços conforme as equações abaixo:

$$Q_1(z) = - \frac{pL\beta j}{2} \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i \left[\frac{1}{\beta s} G_i'(z) - G_i'''(z) \right] \right\} \quad (5.136)$$

$$Q_2(z) = \frac{pL\beta s}{2} \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i \frac{1}{\beta s} \int G_i(z) dz - \frac{z}{\beta s} + C_5 \right\} \quad (5.137)$$

$$M_1(z) = \frac{pL\beta j}{2} \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i \left[\frac{1}{\beta s} G_i(z) - G_i''(z) \right] - \frac{1}{\beta s} \right\} \quad (5.138)$$

Quanto aos esforços na base, pode-se escrever:

$$Q_2(z=0) = \frac{pL}{2} \left\{ H - (\rho_3 C_2 - \rho_1 C_3) \sqrt{\frac{\beta j}{2}} \right\} \quad (5.139)$$

$$M_1(z=0) = pL\beta j \left\{ C_1 \left[\frac{1}{\beta s} - \sqrt{\frac{\beta j}{2}} \right] - 2\rho_1 \rho_3 C_4 - \frac{1}{\beta s} \right\} \quad (5.140)$$

que completam as expressões que interessam à análise que se está fazendo.

5.5 - ASSOCIAÇÃO DE DUAS PAREDES CENTRAIS E DOIS PÓRTICOS EXTREMOS

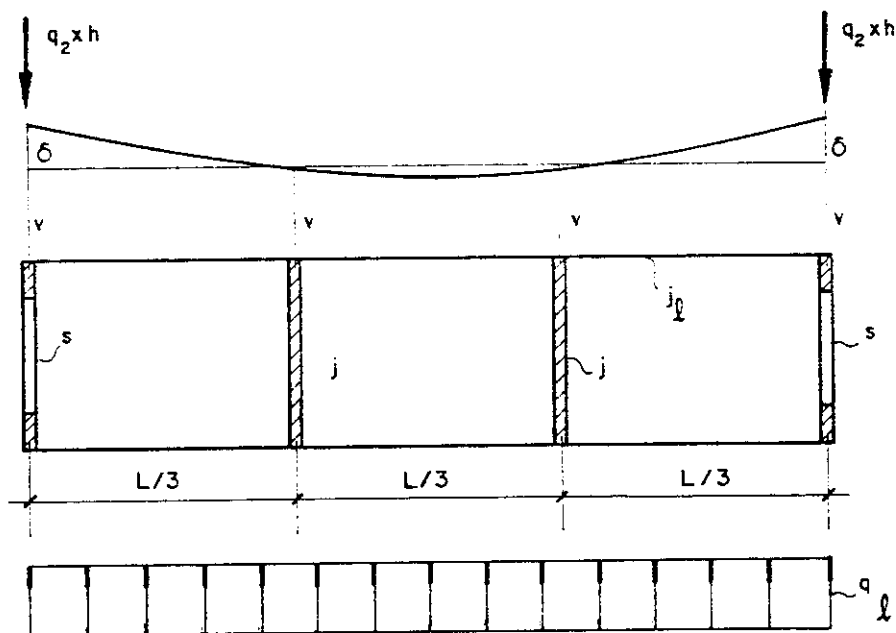


FIG. 5.4 — DOIS PÓRTICOS E DUAS PAREDES INTERMEDIÁRIAS

O esquema geral dessa associação está representado na figura (5.4), e toda a formulação deste caso é idêntica à de 5.4, sendo as diferenças levadas em conta nos valores dos coeficientes $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$, agora assumindo-se para essas constantes os valores decorrentes de (2.20) e (2.21).

Com isso, representam-se os esforços e deslocamentos de interesse aplicando-se diretamente as equações deduzidas no ítem citado.

CAPITULO 6

EXEMPLOS

6.1 - INTRODUÇÃO

Apresentam-se neste capítulo alguns exemplos numéricos, onde se comparam os resultados obtidos considerando as lajes deformáveis com os da aplicação tradicional da técnica do meio contínuo.

Julgou-se interessante, também, apresentar os resultados obtidos discretizando-se a estruturas segundo o modelo reticulado tradicional. Embora não sejam resultados perfeitamente apropriados ajudam a compreender as diferenças entre as considerações de lajes de rigidez infinita e deformáveis, apresentando mais afinidade desta última com o comportamento decorrente da modelagem discreta tradicional.

Para auxiliar a análise da estrutura com as lajes deformáveis, foram programadas em computador as expressões dos esforços e deslocamentos bem como a obtenção das constantes de integração, dos diversos casos aqui apresentados.

A escolha dos dados para a montagem dos exemplos obedece ao critério de se utilizar conjuntos de valores possíveis de ocorrerem na prática, com a intenção de apresentar resultados que chamem a atenção para a ordem de grandeza dos efeitos aqui abordados.

6.2 - PRIMEIRO EXEMPLO

A figura 6.1 exhibe a estrutura de um edifício de dez pavimentos, com pórticos e lajes em concreto armado, com módulo de deformação longitudinal $E = 20.000\text{mPa}$. As lajes têm espessura de 7 centímetros e o pórtico é constituído por três pilares espaçados entre si de 4 metros, de eixo a eixo, com seção transversal de $25 \times 60\text{cm}^2$, interligados na altura de cada laje por vigas de seção transversal de $20 \times 50\text{cm}^2$. A largura total do prédio é 40 metros e sua profundidade em planta, 8 metros.

A distância vertical entre duas lajes consecutivas é de 3 metros e o carregamento, resultante das ações de pressão e sucção, foi adotado com valor de $1,0\text{kN/m}^2$.

Para a discretização assimilaram-se as lajes da estrutura a chapas formadas por uma malha regular de elementos finitos retangulares de 4 metros (na direção do comprimento do prédio) por 2 metros (na direção de atuação das cargas), e os pilares, a elementos de barras ligados a essas chapas através de seus nós. O carregamento foi representado por forças concentradas aplicadas aos nós dos pórticos que se encontram na superfície de barlavento do edifício, com o valor dado pelo produto da resultante de pressão e sucção atuante multiplicada pela área de influência de cada um desses nós.

Os deslocamentos mostrados nas tabelas e gráficos correspondem aos valores fornecidos pelo programa para os nós que se encontram no plano de simetria da estrutura, que fica perpendicular à direção de atuação da carga.

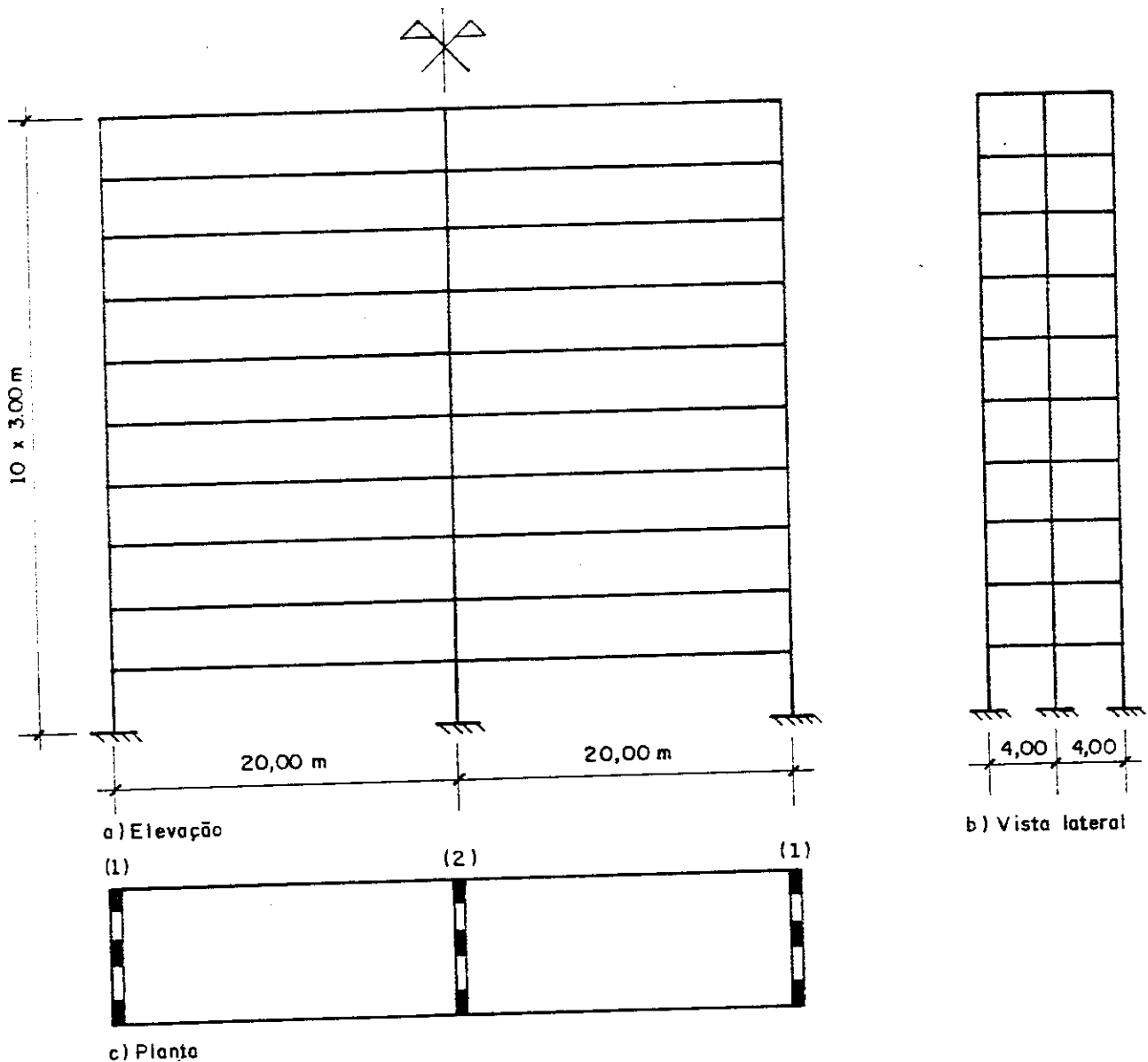


FIG. 6.1 — ESQUEMA DO EXEMPLO 1

Os deslocamentos \underline{v} são os dos painéis extremos e os $\underline{\delta}$, as diferenças entre os deslocamentos do painel intermediário e um dos extremos, na ordenada em estudo.

Os esforços cortante, indicado constante para cada pórtico entre duas lajes consecutivas, é a soma das cortantes fornecidas pelo programa para cada barra representativa de um dos pilares do pórtico de interesse. Para obtenção do valor indicado na ordenada zero, isto é, ao

nível das fundações tomou-se o valor indicado para as barras localizadas entre a base e a primeira laje, e adicionou-se a força concentrada que caberia ao nó correspondente ao engastamento, segundo o processo das áreas de influência.

Na aplicação da técnica do meio contínuo, para o cálculo da rigidez dos pórticos (s_1 e s_2) foram utilizadas as expressões apresentadas em [3]. As demais relações utilizadas são discutidas e desenvolvidas neste trabalho.

Determinação dos parâmetros envolvidos no problema:

a) Rigidez da laje

$$j_\ell = E \cdot I_\ell = 20.000 \times 10^3 \times \frac{0,07 \times 8^3}{12} = 5,973 \times 10^2 \text{ kN.m}^2$$

b) Rigidez dos pórticos (1) e (2):

$$s_1 = s_2 = 66.430 \text{ kN}$$

Determinação dos esforços na base:

a) Segundo Stamato:

De (3.6), vem $k = 1,0$, e portanto os esforços são distribuídos igualmente entre os painéis, isto é:

$$Q_{10}(z) = Q_{20}(z) \rightarrow 3Q_{10}(z) = pL(H-z)$$

ou

$$3Q_{10}(z=0) = pLH \rightarrow Q_{10}(z=0) = \frac{1,0 \times 40 \times 30}{3} = 400 \text{ kN} = Q_{20}(z=0)$$

b) Considerando-se as lajes deformáveis tem-se:

$$\beta = \frac{40^3}{48 \times \left(\frac{5,973 \times 10^7}{3,0} \right)} = 6,6968 \times 10^{-5}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{(2 \times 1 + 1)}{2 \times 66430 \times 6,6968 \times 10^{-5}}} \cong 0,58067$$

$$\rho H = 17,42 \gg 2,00$$

podendo-se utilizar, com boa precisão, (3.51). Portanto:

$$Q_2(z=0) \cong \frac{1,0 \times 40 \times 30}{(2 \times 1 + 1)} \left\{ 1 + \frac{1}{17,42} \left[\frac{5}{8} (2 \times 1 + 1) - 1 \right] \right\}$$

$$Q_2(z=0) \cong 400 \left\{ 1 + 0,05023 \right\} = 420 \text{ kN}$$

e, por equilíbrio:

$$Q_1(z=0) \cong 390 \text{ kN}$$

c) Resultado fornecido pela discretização:

$$Q_1(z=0) = 388,6 \text{ kN}$$

$$Q_2(z=0) = 422,7 \text{ kN}$$

Valores de esforços e deslocamentos:

A tabela 6.1 mostra os valores obtidos aplicando as equações de Stamato, e as equações desenvolvidas nesse trabalho considerando as lajes deformáveis, mais os resultados fornecidos pelo modelo discreto, arranjados de acordo com o critério já descrito nesse capítulo. Os gráficos correspondentes estão mostrados nas figuras 6.2 a 6.5.

Observa-se que, caso os deslocamentos v indicados na figura 6.2 fossem o objetivo final da análise, a técnica tradicional com diafragmas de rigidez infinita representando as lajes forneceria resultados muito próximos àqueles da consideração de lajes deformáveis, dispensando esse refinamento. De fato, a única diferença perceptível

no gráfico é entre os resultados dessas duas técnicas e aqueles fornecidos pelo programa, facilmente explicável pelo fato da técnica do meio contínuo considerar os pórticos como deformáveis apenas por cortantes, gerando uma equação do segundo grau para a elástica e dificultando a consideração do engastamento na base dos painéis. Uma outra relação constitutiva deve ser empregada caso se deseje que o modelo reproduza melhor o comportamento dos pórticos nessa região, conforme discutido por LAIER, em [10].

Em termos comparativos, a maior diferença entre os resultados fornecidos pelos diferentes modelos utilizados ocorre nos valores obtidos para o deslocamento δ . Assim é que, para diafragmas rígidos, ele simplesmente se anula. Quando calculado com a discretização da estrutura, apresenta valores significativamente inferiores, se comparados aos decorrentes da utilização de lajes deformáveis.

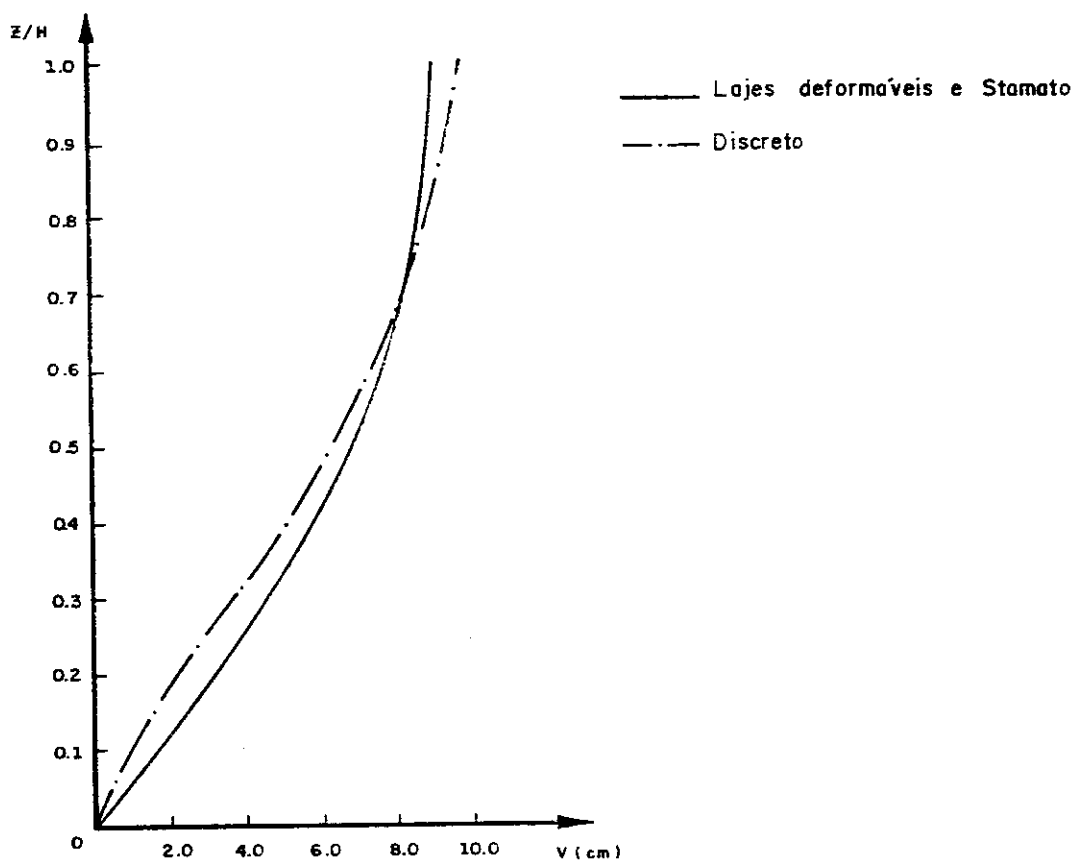


FIG. 6.2 — DESLOCAMENTOS (v) DO EXEMPLO 1

ξ	STAMATO		LATES DEFORMAVEIS				DISCRETO		Q ₁ (kN)	Q ₂ (kN)
	v (cm)	Q (kN)	v (cm)	δ (cm)	Q ₁ (kN)	Q ₂ (kN)	v (cm)	δ (cm)		
0	0,000	400	0	0,000	390,0	420,0	0,000	0,000	385,6	428,8
0,1	1,716	360	1,695	0,064	358,2	363,5	0,828	0,041	370,6	398,8
0,2	3,252	320	3,226	0,076	319,7	320,6	2,223	0,069	338,6	342,8
0,3	4,607	280	4,581	0,078	279,9	280,1	3,637	0,076	300,1	299,8
0,4	5,781	240	5,755	0,078	240,0	240,0	4,934	0,077	260,1	259,8
0,5	6,774	200	6,748	0,078	200,0	200,0	6,079	0,076	220,0	220,0
0,6	7,587	160	7,561	0,078	160,0	160,0	7,060	0,076	180,0	180,0
0,7	8,220	120	8,194	0,078	120,0	120,0	7,871	0,076	139,9	140,2
0,8	8,671	80	8,645	0,078	80,0	80,0	8,509	0,075	99,9	100,2
0,9	8,942	40	8,916	0,078	40,0	40,0	8,979	0,067	60,2	59,6
1,0	9,032	0	9,006	0,078	0,0	0,0	9,307	0,048	22,3	15,4
									7,3	-14,6

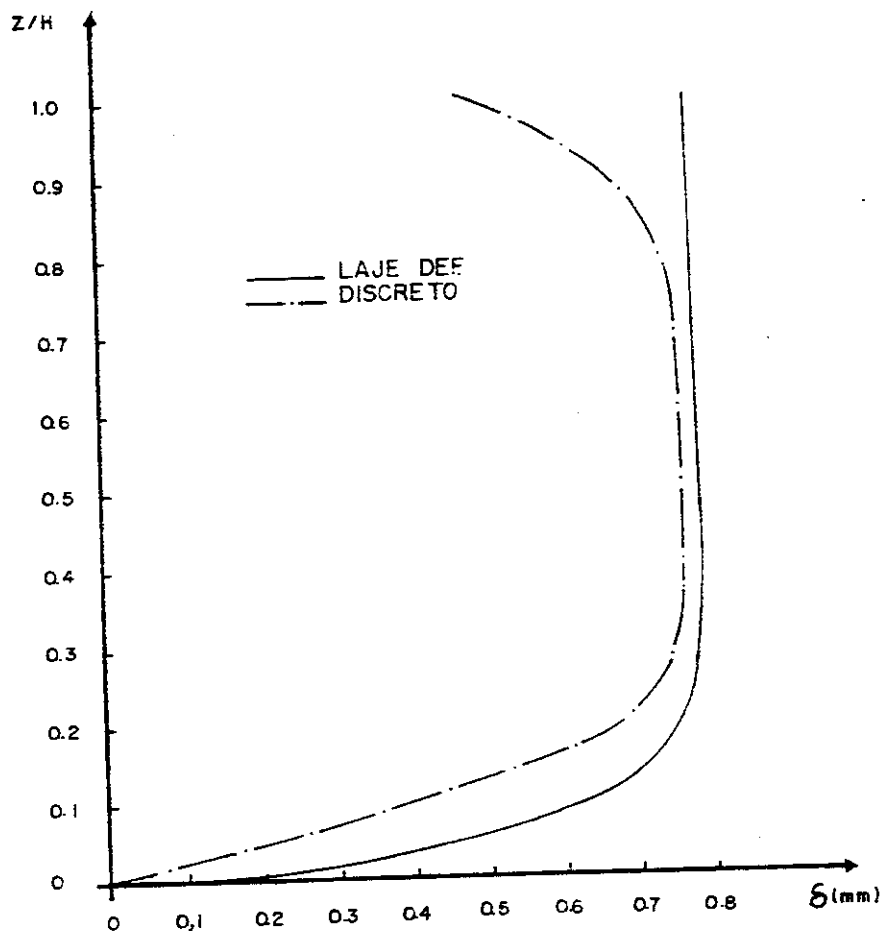


FIG. 6.3 - DESLOC. RELATIVOS (δ) DO EXEMPLO 1

Em parte, isto se deve ao fato de, nesta última técnica, reproduzir-se a vinculação da laje nos pórticos como apoios perfeitos, com uma única reação horizontal, ao passo que na análise matricial consideram-se, em cada nó da ligação, restrições ao giro e ao deslocamento relativos entre os elementos em qualquer direção no espaço.

Próximo ao topo, evidencia-se também a distinção entre considerar-se um meio contínuo de rigidez equivalente e a existência de uma chapa, na ordenada $z = H$. Nesse último caso, o modelo apresenta, além de uma descontinuidade na rigidez, uma força externa concentrada no topo de valor igual à metade daquelas aplicadas nos outros níveis, atendendo-se ao critério adotado para representação da ação do vento. Configura-se, assim, uma situação diversa das condições de contorno aplicadas a esta ordenada na solução do

sistema de equações e explica as diferenças encontradas.

Notou-se ainda ao analisar as equações encontradas que, no caso de lajes deformáveis, as condições de contorno na base são muito mais "fortes" que aquelas no topo da estrutura, querendo com isso dizer-se que, alterando-se as condições consideradas na ordenada correspondente àquela seção ($z = H$), afetam-se praticamente apenas os esforços e deformações numa região próxima a ela.

Extraí-se, da última observação, a conclusão de que as divergências acima apontadas entre as condições de contorno no topo nos casos discreto e contínuo não influem significativamente nos valores encontrados para esforços e deslocamentos na maior porção da altura do edifício, e em particular, na base, onde estão os valores mais importantes dos esforços.

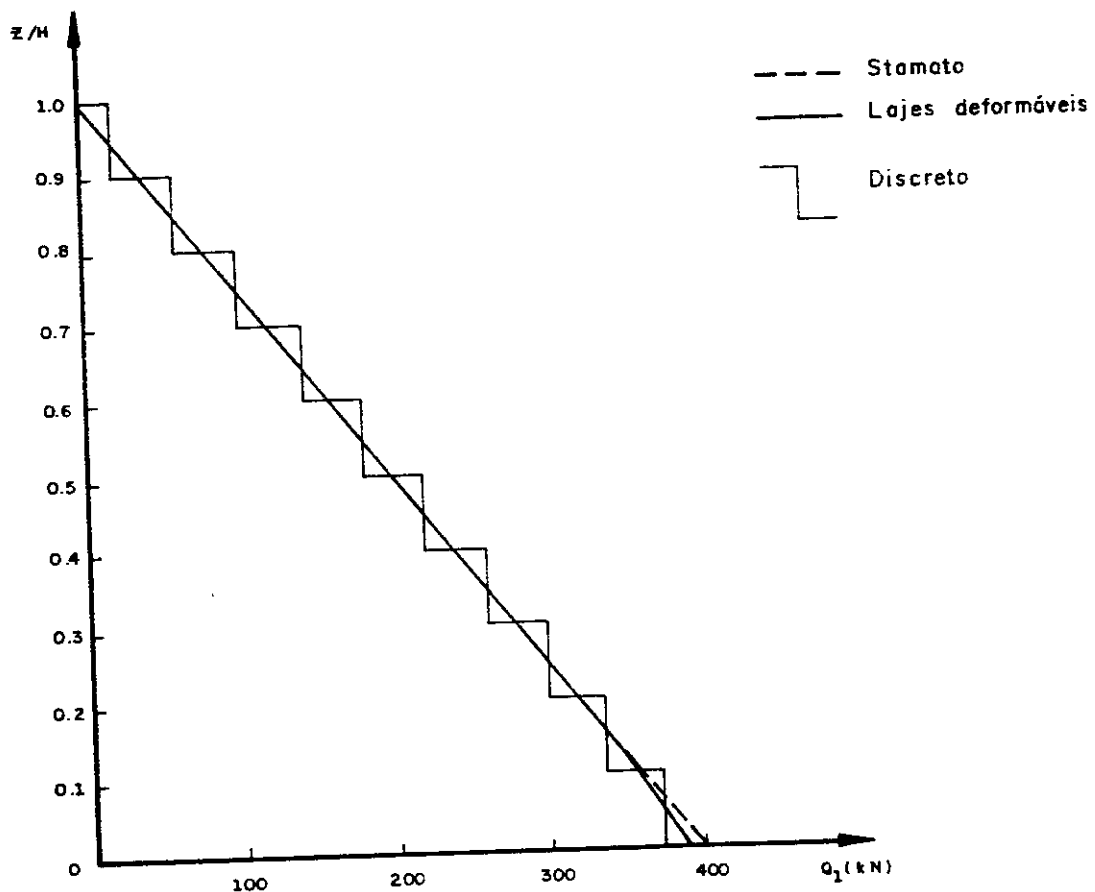


FIG. 6.4 — CORTANTE NO PAINEL ① DO EXEMPLO 1

Os gráficos para os cortantes nos painéis, representados nas figuras 6.4 e 6.5 mostram, para a aplicação da técnica apresentada neste trabalho, uma perturbação nos resultados decorrentes da utilização de diafragmas rígidos, apenas na região próxima à base dos pórticos. Note-se que o gráfico referente à análise matricial indica os cortantes nos pilares entre a fundação e a primeira laje. Caso se aplique o procedimento já discutido neste capítulo para obtenção dos esforços ao nível das fundações, observa-se maior proximidade entre os valores assim obtidos e aqueles fornecidos com lajes deformáveis na técnica do meio contínuo.

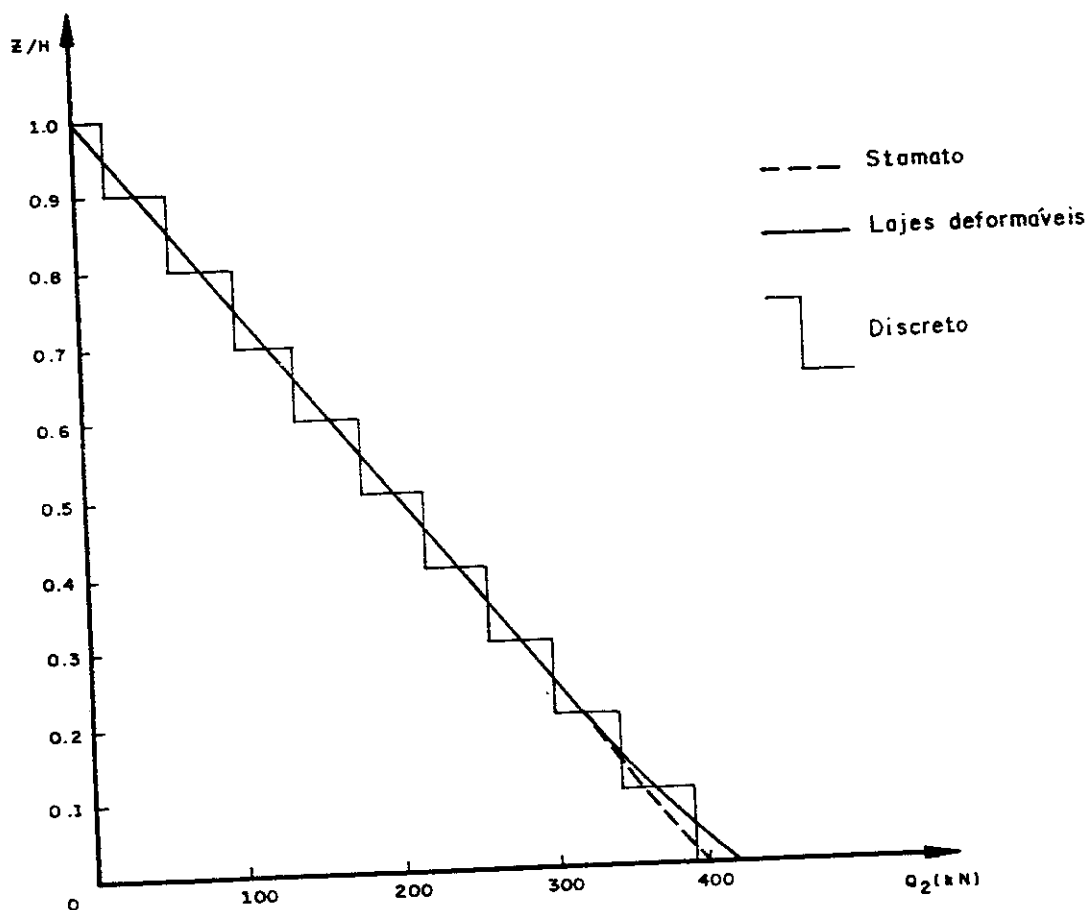


FIG. 6.5 — CORTANTE NO PAINEL ② DO EXEMPLO 1

6.3 - SEGUNDO EXEMPLO

A geometria do edifício analisado é semelhante à do exemplo anterior, havendo como única modificação nos dados a substituição dos três painéis-pórticos por painéis-paredes, todos com seção transversal formada por espessura constante de 20cm e comprimento 4 metros, em concreto de mesmo módulo de deformação daquele das lejes, e localizados nas mesmas posições em que estavam os pórticos. A figura 6.6 representa o esquema resultante. As demais condições foram mantidas idênticas às do exemplo anterior. Para a discretização, assimilou-se a estrutura a uma grelha formada por barras verticais formadas pelas paredes interligadas por barras horizontais formadas pelas lajes. O carregamento, conforme já comentado, foi representado por forças concentradas horizontais aplicadas aos nós da grelha, de valor estabelecido segundo o critério já descrito.

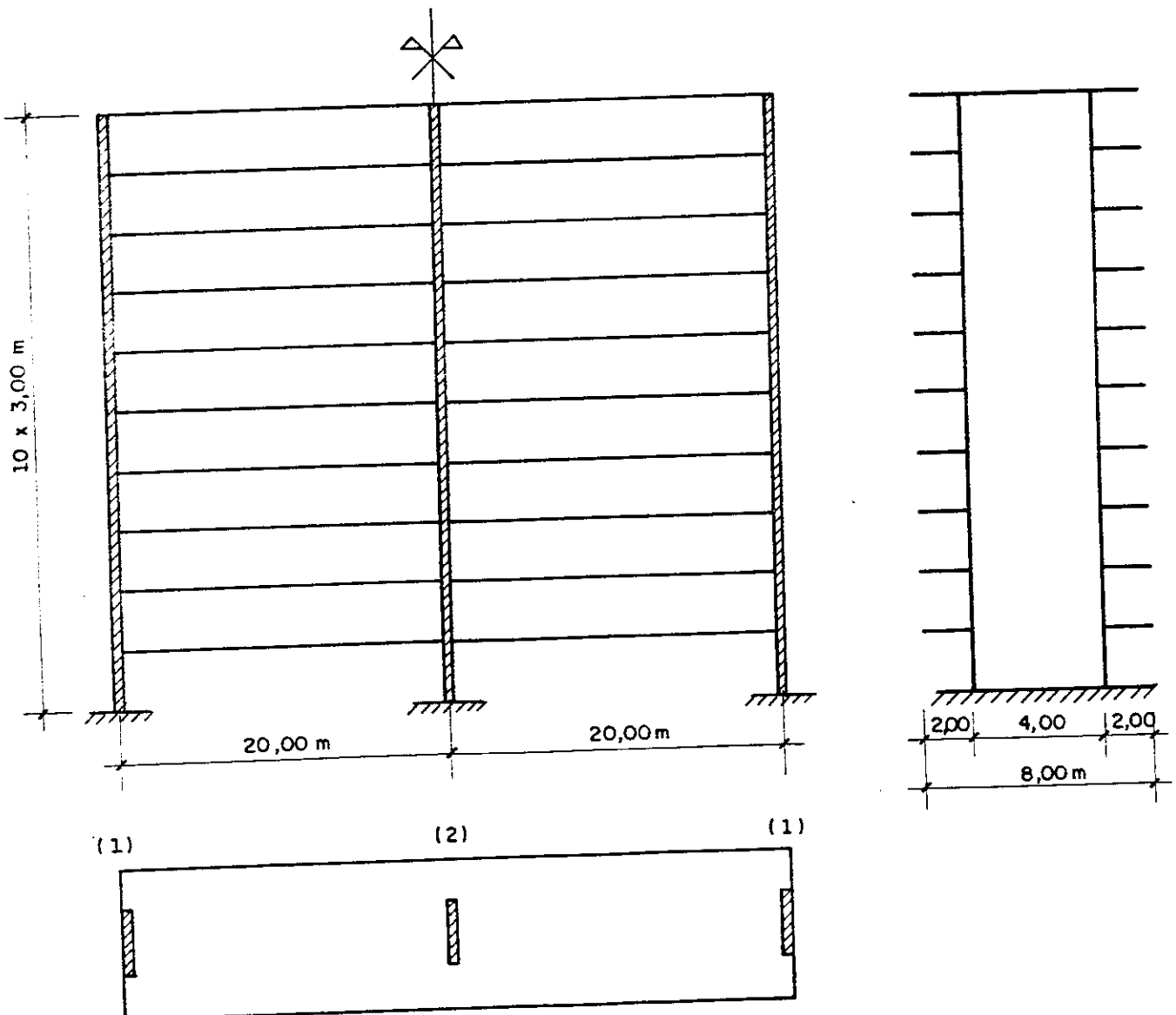


FIG. 6.6 - ESQUEMA DO EXEMPLO 2

Nos gráficos, representaram-se os deslocamentos nodais fornecidos pelo programa (\underline{v}) e suas diferenças num dado nível ($\underline{\delta}$), enquanto para os esforços tomaram-se os valores fornecidos para as extremidades das barras verticais (\underline{Q}) e a média entre os valores nas extremidades das barras inferior e superior ao nó representante de um dado nível (\underline{M}).

As demais condições foram mantidas idênticas às do exemplo anterior.

Determinação dos parâmetros envolvidos no problema:

a) Rigidez da laje:

$$j_{\ell} = EI_{\ell} = 5,973 \times 10^7 \text{ kN.m}^2$$

b) Rigidez das paredes (1) e (2):

$$j_1 = j_2 = EI_1 = 20.000 \times 10^3 \times \frac{0,2 \times 4^3}{12} = 2,1333 \times 10^7 \text{ kN.m}^2$$

Determinação dos esforços na base:

a) Segundo Stamato:

$$\text{De (4.25) a (4.28), para } k = \frac{j_1}{j_2} = 1,0, \text{ vem:}$$

$$Q_{10}(z=0) = Q_{20}(z=0) = 400 \text{ kN}$$

$$M_{10}(z=0) = M_{20}(z=0) = 6.000 \text{ kN.m}$$

b) Considerando as lajes deformáveis:

$$\beta = 6,6968 \times 10^{-5}$$

$$\rho = \sqrt[4]{\frac{3}{8 \times 6,6968 \times 10^{-5} \times 2,1333 \times 10^7}} \cong 0,12729$$

$$\rho H \cong 3,8186 > 3,00$$

podendo-se utilizar então, com bons resultados, as expressões (4.82) e (4.83), que fornecem, para os dados do exemplo:

$$Q_2(z=0) = \frac{1 \times 40 \times 30}{3} \left\{ 1 + \left[\frac{5}{8} \times 3 - 1 \right] \times \frac{1}{3,8186} \right\} = 491,7 \text{ kN}$$

$$M_2(z=0) = \frac{1 \times 40 \times 30^2}{2 \times 3} \left\{ 1 + \left[\frac{5}{8} \times 3 - 1 \right] \times \frac{1}{3,8186^2} \right\} = 6360 \text{ kN.m}$$

e, por equilíbrio:

$$Q_1(z=0) = 354,2 \text{ kN}$$

$$M_1(z=0) = 5820 \text{ kN.m}$$

c) Resultados fornecidos pela discretização:

$$Q_1(z=0) = 368,5 \text{ kN}$$

$$Q_2(z=0) = 463,0 \text{ kN}$$

$$M_1(z=0) = 5912 \text{ kN.m}$$

$$M_2(z=0) = 6176 \text{ kN.m}$$

Valores de esforços e deslocamentos:

As tabelas 6.2 e 6.3 trazem os valores encontrados para deslocamentos e esforços produzidos pela aplicação das três técnicas em pauta.

Os deslocamentos y estão representados no gráfico da figura 6.7 e a coincidência é quase total nos três casos.

Os deslocamentos relativos entre os painéis numa mesma ordenada (δ) estão mostrados na figura 6.8 e, embora as formas das curvas sejam bastante similares, novamente

percebe-se que a vinculação entre as lajes e os painéis extremos apresenta diferenças entre os dois modelos. Este exemplo, especificamente, foi analisado pelo modelo discreto também com uma malha retangular regular representando as lajes e outra para as paredes, utilizando-se elementos de casca para formar uma estrutura tridimensional, e os deslocamentos \underline{v} e $\underline{\delta}$ resultantes praticamente coincidiram com aqueles fornecidos quando da utilização do esquema de grelha, numa forte indicação de que, já no primeiro exemplo, não foi o emprego de uma malha inadequada o fato responsável pelas diferenças apontadas no valores de $\underline{\delta}$ obtidos segundo as duas técnicas.

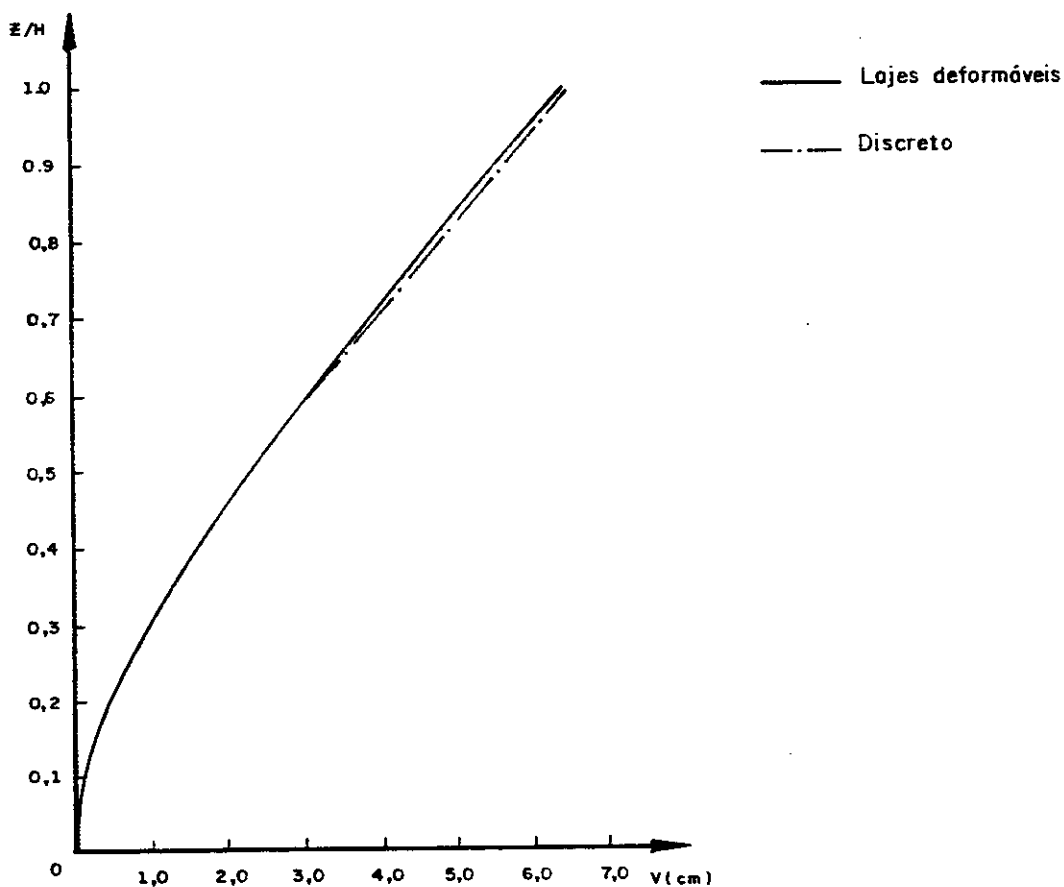


FIG. 6.7 — DESLOCAMENTOS (v) DO EXEMPLO 2

ξ	STAMATO		LAJES DEFORMÁVEIS				DISCRETO			
	v (cm)	Q (kN)	v	δ	Q ₁	Q ₂	v	δ	Q ₁ (kN)	Q ₂ (kN)
									Q ₁ (kN)	Q ₂ (kN)
0	0,000	400	0	0	354,2	491,6	0,000	0,000	361,4	477,2
0,1	0,188	360	0,115	0,009	331,0	418,0	0,135	0,014	346,4	447,2
0,2	0,442	320	0,433	0,027	304,6	350,8	0,471	0,033	320,4	379,2
0,3	0,928	280	0,913	0,045	274,1	291,8	0,968	0,052	290,5	319,0
0,4	1,539	240	1,519	0,060	239,7	240,6	1,589	0,062	256,7	266,6
0,5	2,241	200	2,218	0,071	202,4	195,2	2,302	0,077	220,0	220,0
0,6	3,007	160	2,981	0,077	163,2	153,6	3,078	0,082	181,3	177,4
0,7	3,814	120	3,787	0,081	123,0	114,0	3,895	0,082	141,7	136,6
0,8	4,644	80	4,617	0,082	82,2	75,6	4,735	0,079	101,9	96,2
0,9	5,485	40	5,457	0,083	41,2	37,6	5,584	0,073	62,8	54,4
1,0	6,328	0,0	6,300	0,083	0	0	6,435	0,066	24,8	10,4
									9,8	-19,6

ξ	STAMATO		DISCRETO		L. DEFORMÁVEIS	
	M_1 (kN.m)	M_2 (kN.m)	M_1 (kN.m)	M_2 (kN.m)	M_1 (kN.m)	M_2 (kN.m)
	0	6000	6000	5840	6320	5820
0,1	4860	4860	4800	4980	4792	4996
0,2	3840	3840	3839	3842	3838	3845
0,3	2940	2940	2967	2885	2968	2883
0,4	2160	2160	2197	2086	2197	2086
0,5	1500	1500	1537	1427	1533	1434
0,6	960	960	993	895	984	912
0,7	540	540	568	485	555	511
0,8	240	240	262	197	247	226
0,9	60	60	74	32	62	57
1,0	0	0	0	0	0	0

Da observação das figuras 6.9 e 6.10, conclui-se novamente que a introdução da deformabilidade das lajes resulta em melhora para os resultados dos esforços na região próxima à base. Repetiu-se, para representação dos cortantes fornecidos pela análise discreta, o critério descrito na apresentação do exemplo anterior. Nota-se ainda, a partir do aspecto das curvas, a possibilidade de utilizarem-se as fórmulas tradicionais da técnica do meio contínuo e corrigirem-se os esforços na base através da aplicação das fórmulas aproximadas apresentadas neste trabalho.

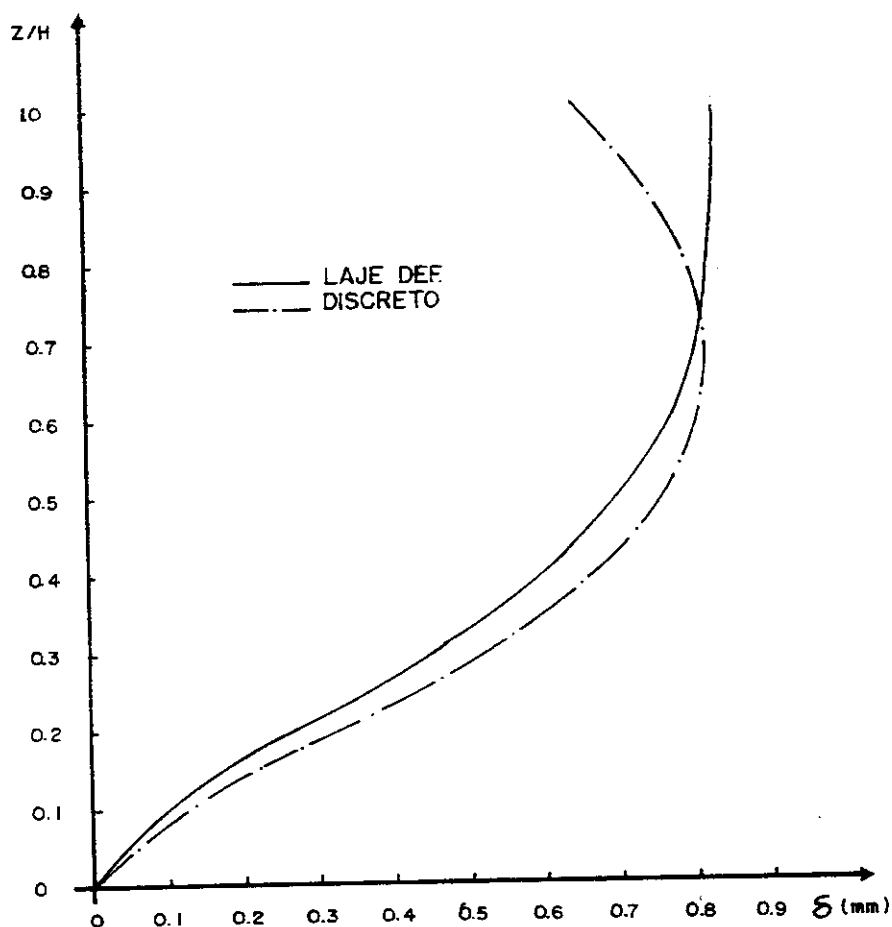


FIG. 6.8 - DESLOC. RELATIVOS (δ) DO EXEMPLO 2

Como a "perturbação" na hipótese de distribuição das cargas entre os painéis da técnica tradicional ocorre predominantemente próximo à base destes, verifica-se, das

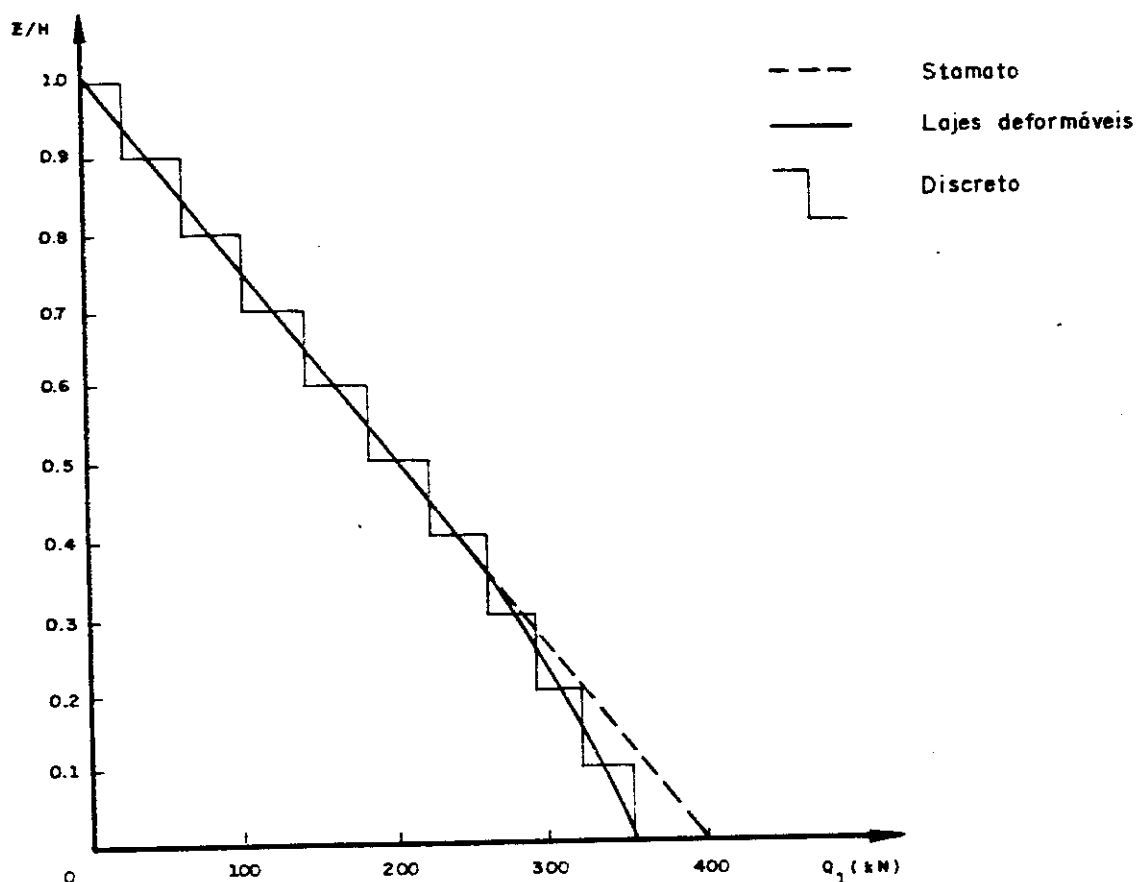


FIG. 6.9 — CORTANTE NO PAINEL ① DO EXEMPLO 2

figuras 6.11 e 6.12, que a diferença entre os resultados obtidos é bastante inferior para o momento fletor nos painéis, do que para os cortantes, podendo-se mesmo prescindir, para efeito de cálculo do momento, da consideração de lajes deformáveis, inclusive na base. Não obstante, as fórmulas aproximadas deduzidas neste trabalho podem ser utilizadas para melhorar esse resultado, quando de interesse, conforme mostram os valores deste exemplo.

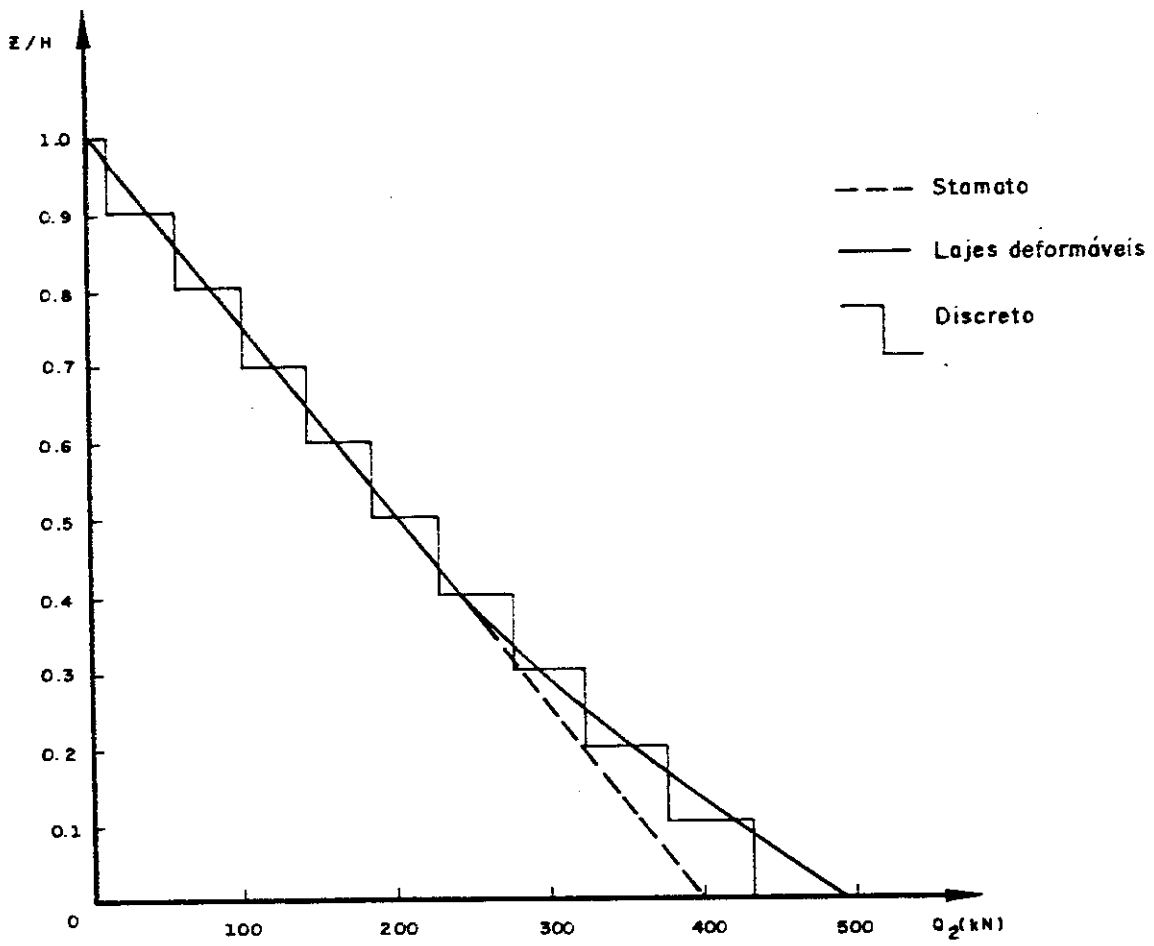


FIG. 6.10 - CORTANTE NO PAINEL ② DO EXEMPLO 2

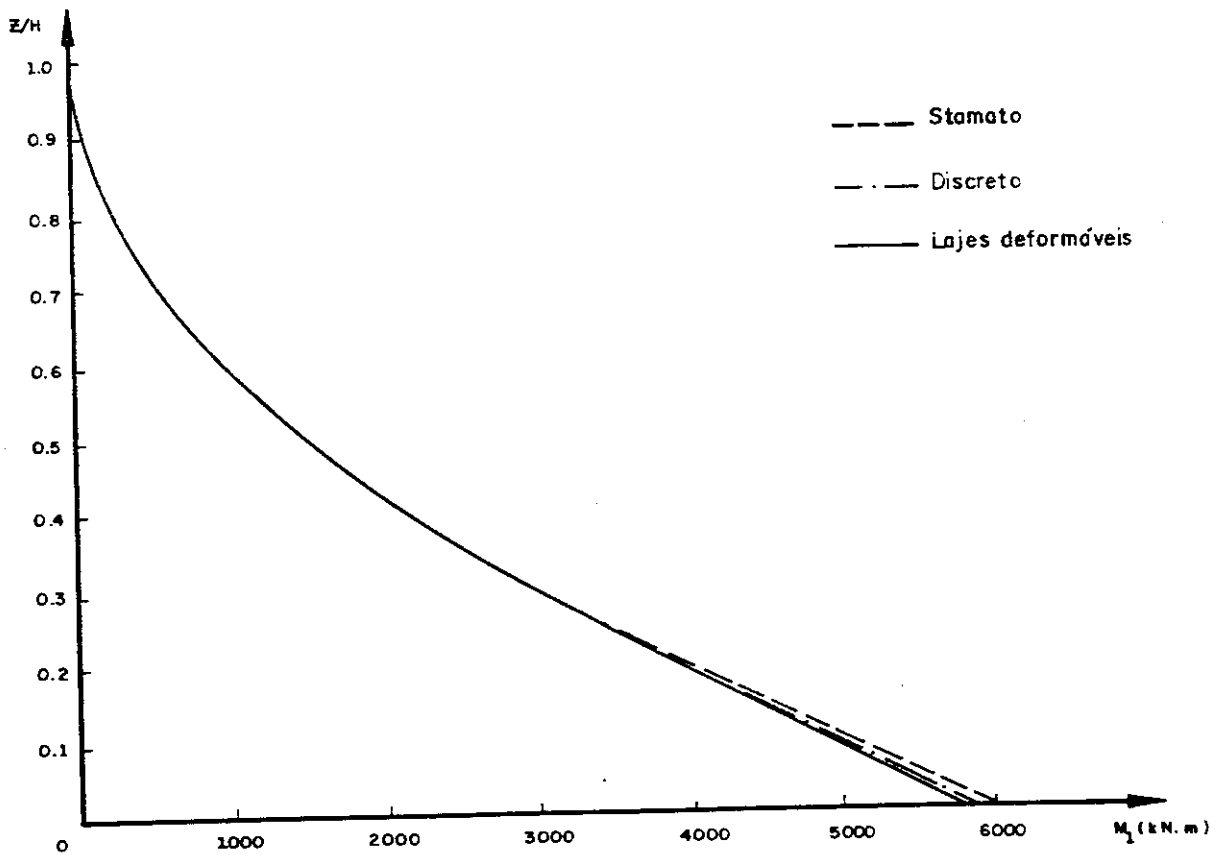


FIG. 6.11 - MOMENTO FLETOR NO PAINEL ① DO EXEMPLO 2

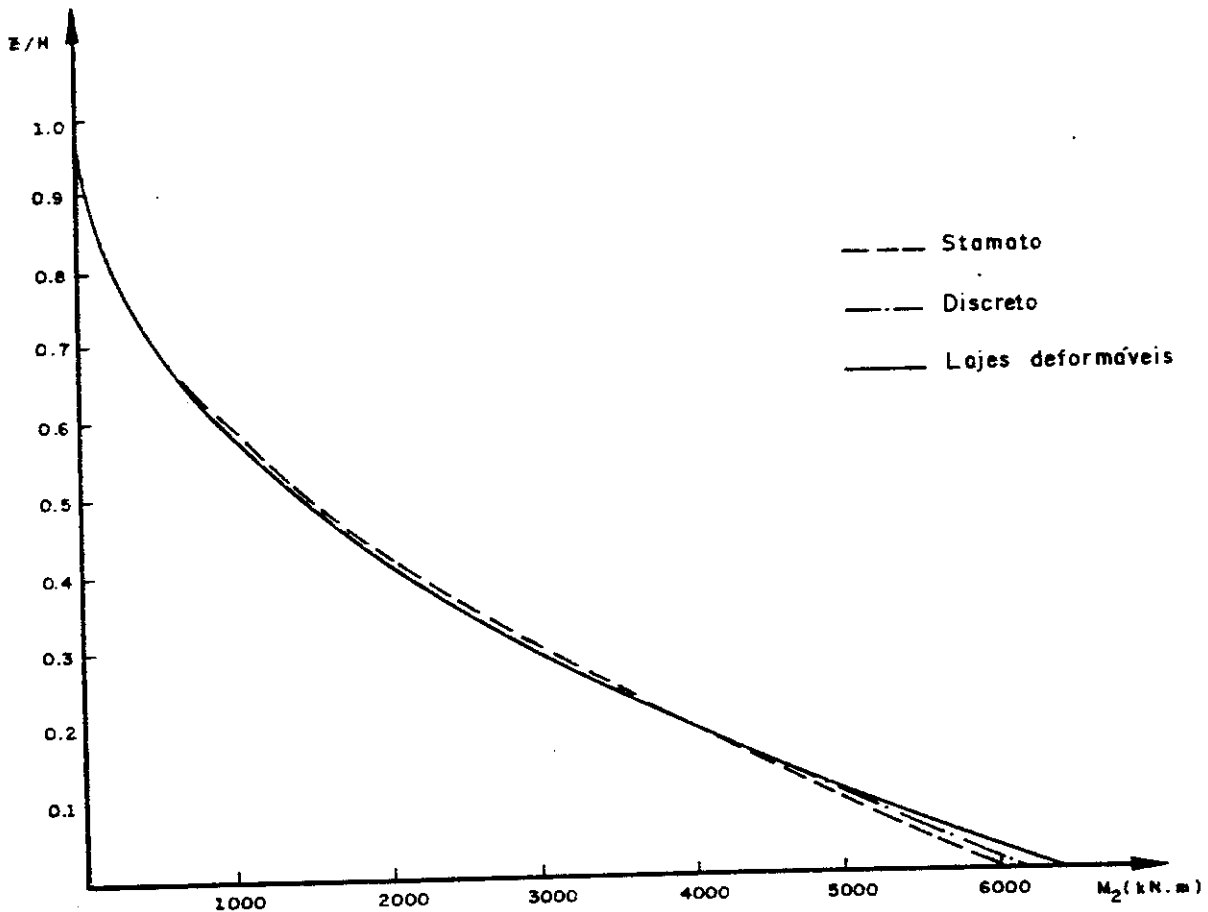


FIG. 6.12 - MOMENTO FLETOR NA PAINEL ② DO EXEMPLO 2

6.4 - TERCEIRO EXEMPLO

Trata-se, agora, de analisar um edifício cujo esquema estrutural é composto também por três painéis, sendo os dois extremos do tipo parede, com mesmas características elásticas e geométricas daqueles empregados no segundo exemplo. Quanto ao painel intermediário, é um pórtico de mesmas características elásticas e geométricas dos pórticos já descritos e utilizados no esquema do primeiro exemplo.

As demais dimensões e grandezas envolvidas foram mantidas com os valores já apresentados nos exemplos anteriores, e a figura 6.13 representa o esquema correspondente.

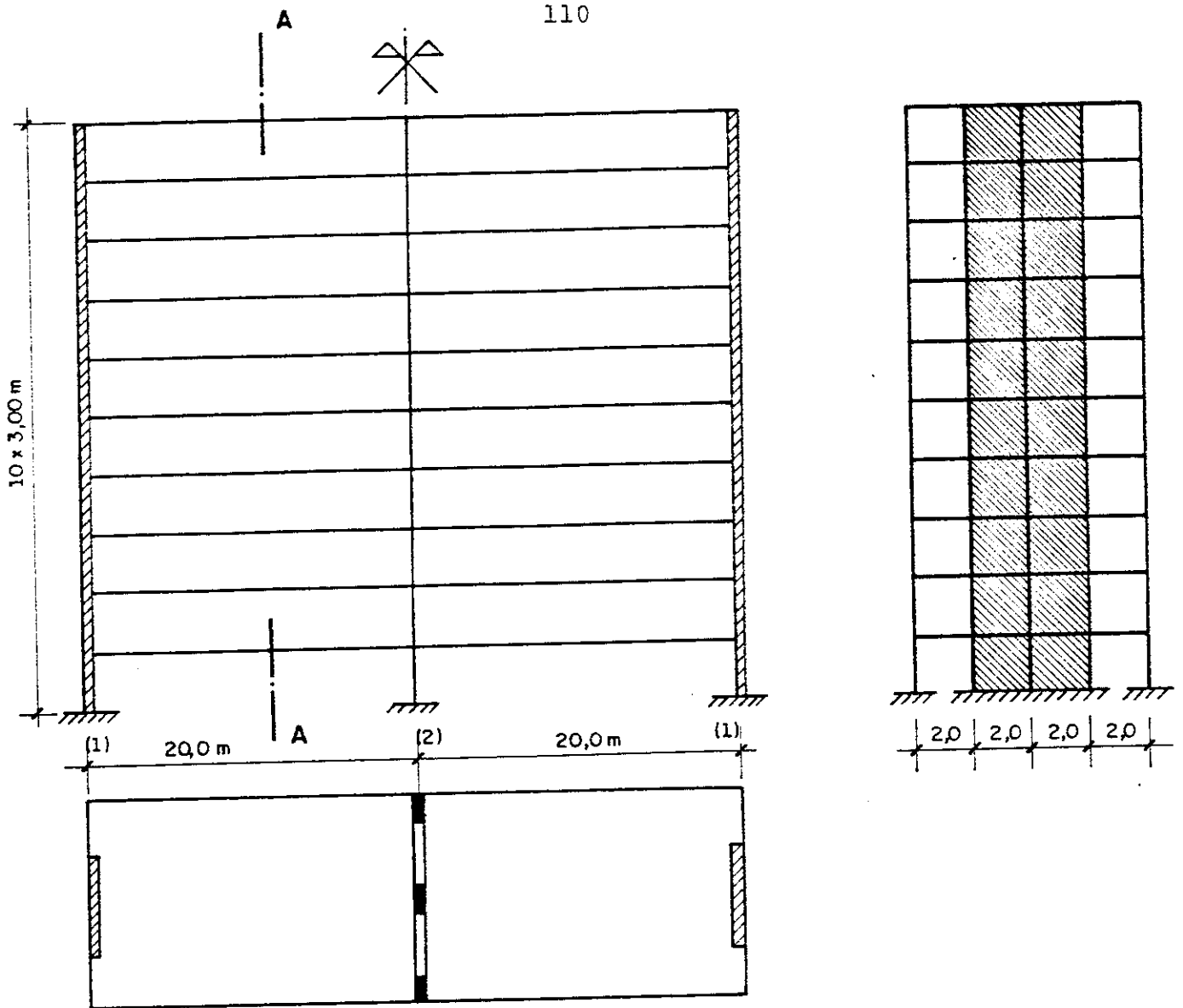


FIG. 6.13 — ESQUEMA DO EXEMPLO 3

Na análise com o emprego do modelo discreto, utilizaram-se elementos de barras para representar as vigas e pilares dos pórticos, e malhas regulares de elementos retangulares para representar as lajes (analogamente ao exemplo 1) e as paredes. As dimensões dos elementos formadores dessas últimas são: 1,50m de altura por 2,0m de comprimento na horizontal. A espessura, obviamente, é a mesma da parede representada: 20 centímetros.

Determinação dos parâmetros envolvidos no problema:

ma:

a) Rigidez da laje:

$$j_{\ell} = EI_{\ell} = 5,973 \times 10^7 \text{ kNxm}^2$$

b) Rigidez das paredes (1):

$$j = EI = 2,1333 \times 10^7 \text{ kN.m}^2$$

c) Rigidez do pórtico (2)

$$s = 66.430 \text{ kN}$$

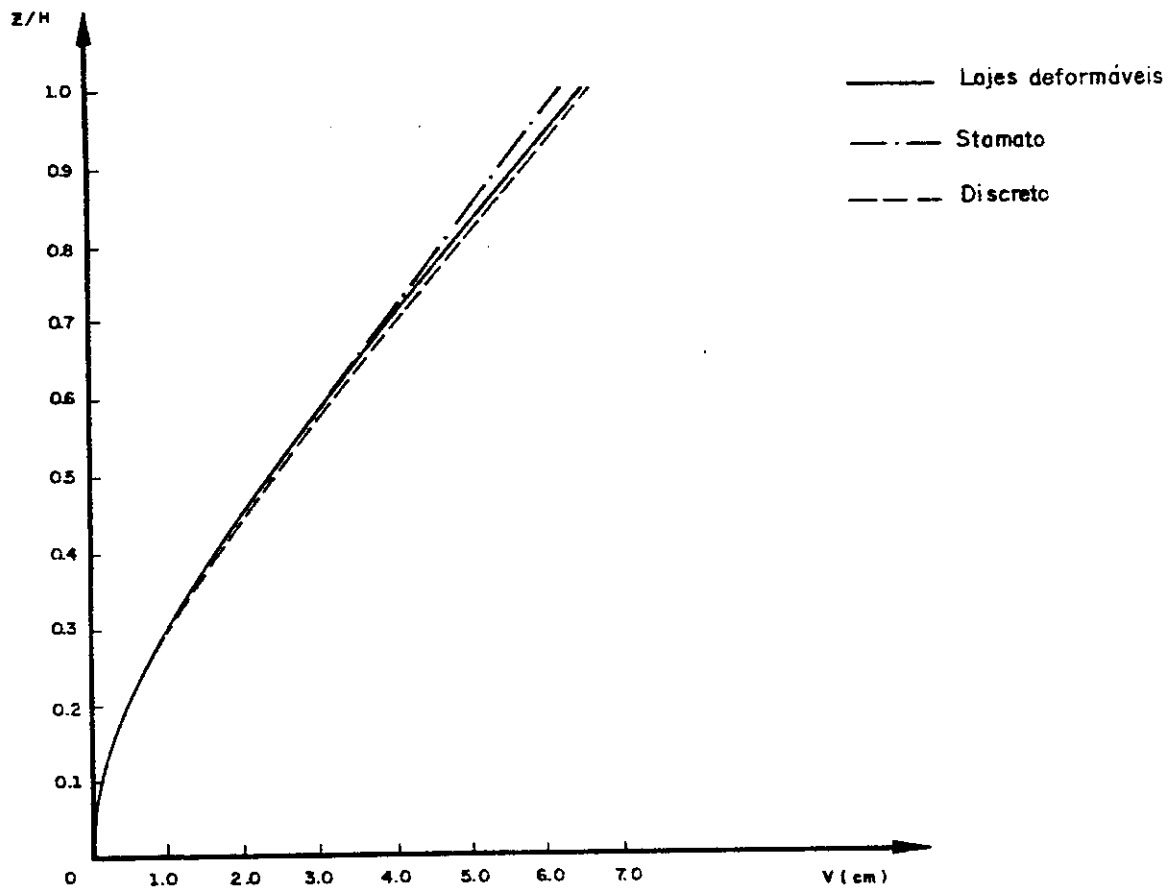


FIG. 6.14 - DESLOCAMENTOS (v) DO EXEMPLO 3

Determinação dos esforços na base:

a) Segundo Stamato:

$$\rho = \sqrt{\frac{66430}{2 \times 2,1333 \times 10^7}} \cong 0,039458$$

Calculando-se (5.16) a (5.18) para $z = 0$, após obtidas as constantes C_1, C_2, C_3 e C_4 da solução do sistema formado por (5.12) a (5.15), vêm:

$$Q_{10}(z=0) = 600 \text{ kN}$$

$$Q_{20}(z=0) = 0$$

$$M_{10}(z=0) \cong 6946 \text{ kN.m}$$

b) Considerando-se as lajes deformáveis:

Aplicando-se (5.46) e (5.47) para $z=0$, vêm:

$$Q_2(z=0) = 91,5 \text{ kN}$$

$$M_1(z=0) = 6993 \text{ kN.m}$$

e, por equilíbrio, ainda:

$$Q_1(z=0) = 554,3 \text{ kN}$$

c) Resultados fornecidos pelo modelo discreto:

$$Q_2(z=0) = 138 \text{ kN}$$

$$M_1(z=0) = 6773 \text{ kN.m}$$

$$Q_1(z=0) = 531 \text{ kN}$$

Valores de esforços e deslocamentos:

As tabelas 6.4 e 6.5 mostram os valores comparativos entre as tres alternativas de análise, e os gráficos

correspondentes encontram-se representados nas figuras 6.14 e 6.18.

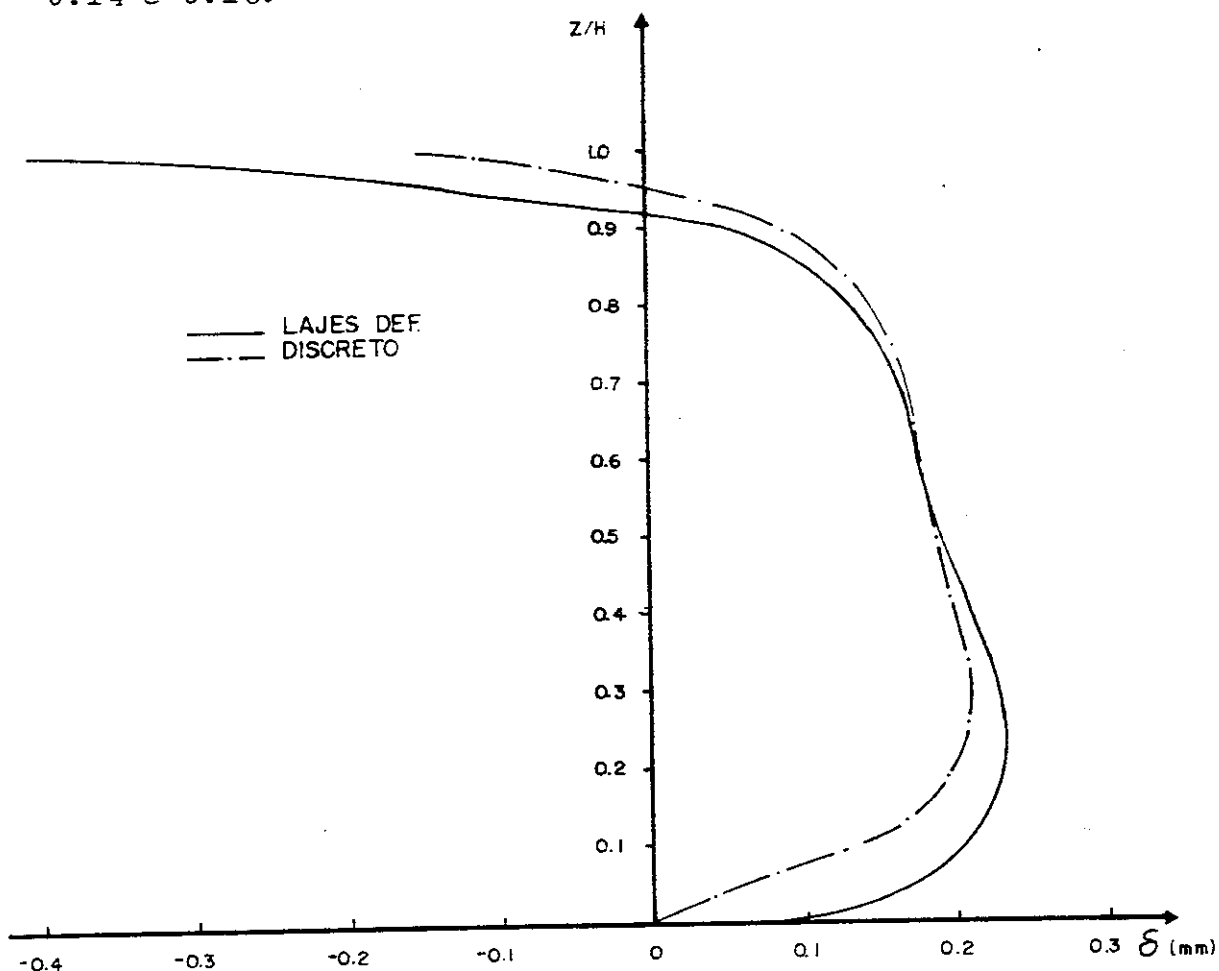


FIG. 6.15-DESLOC. RELATIVOS (δ) DO EXEMPLO 3

Observando-se os deslocamentos \underline{v} , confirma-se a conclusão de que qualquer uma das técnicas empregadas fornece bons resultados. Assim, se a análise efetuada tiver como objetivo final a sua obtenção, não se justifica o emprego de técnicas mais sofisticadas do que a técnica do meio tradicional.

A figura 6.15 podem-se comparar os deslocamentos $\underline{\delta}$ resultantes da discretização da estrutura com aqueles obtidos da aplicação das relações deduzidas neste trabalho, uma vez que, utilizando-se o modelo de diafragmas rígidos para as lajes, tal movimento seria identicamente

nulo. Conforme já discutido nos outros exemplos, o modelo discreto apresenta-se mais rígido que o contínuo, isto é, com deslocamentos menores em módulo.

Deduz-se, da similaridade da forma das duas curvas, e da independência do caminho adotado para obtenção dos resultados que permitiram seu traçado, que ambos modelos representam bastante bem as deformações produzidas na estrutura. Note-se ainda que as maiores diferenças entre os valores encontrados acham-se na região próxima ao topo, onde, por razões já comentadas, os modelos resultam em diferentes condições de contorno a serem atendidas.

Os cortantes representados à figura 6.16 reforçam a afirmativa de que a diferença sensível entre as considerações de diafragmas rígidos e lajes deformáveis pode ser entendida como uma perturbação na distribuição dos

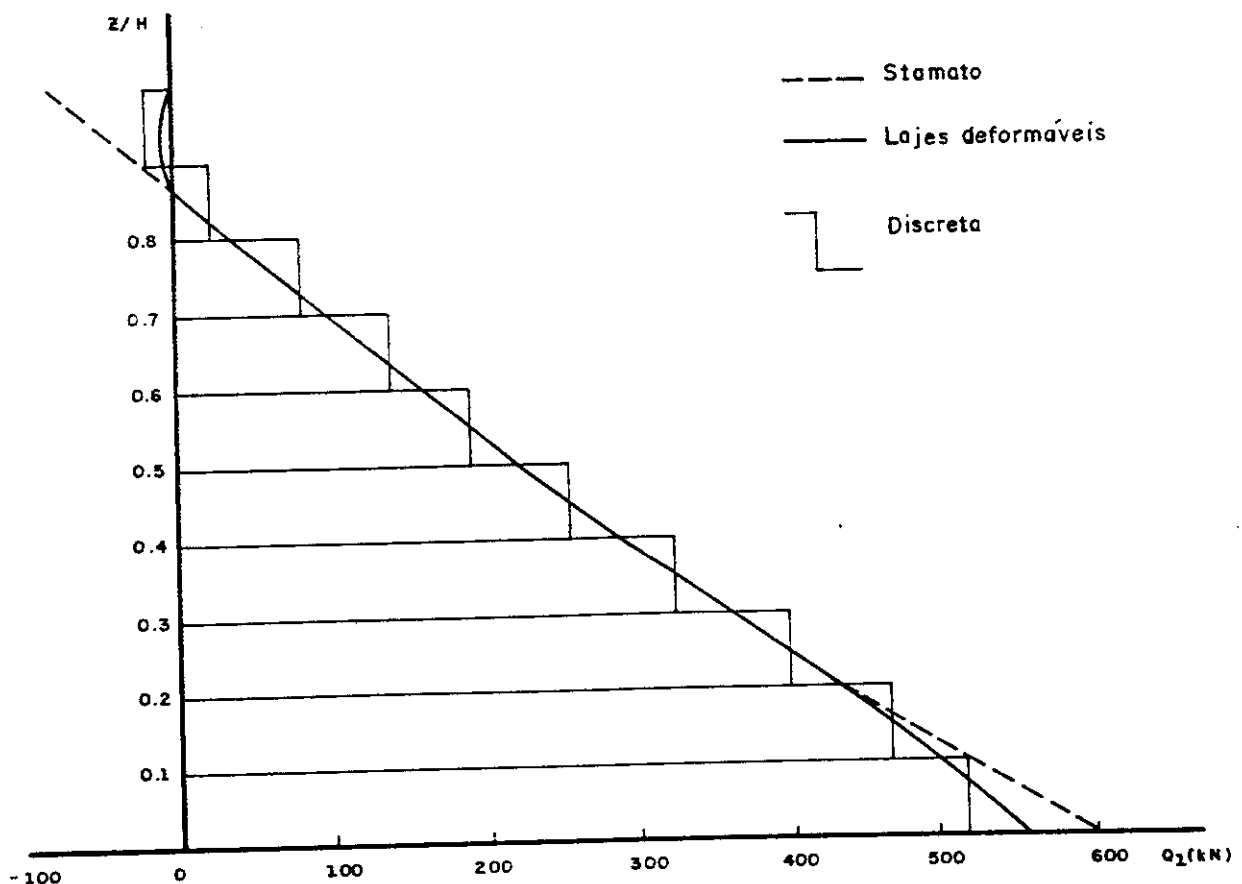


FIG. 6.16 - CORTANTE NO PAINEL ① DO EXEMPLO 3

esforços entre os painéis nas suas regiões extremas, isto é, próximo à base e ao topo, se tomada como referência a distribuição indicada pela técnica do meio contínuo na sua forma tradicional, isto é, considerando-se as lajes como diafragmas de rigidez infinita.

A razão de tal perturbação é a necessidade de atendimento às condições de contorno, aparentemente mais próximas às da estrutura real no modelo apresentado neste trabalho (observe-se que a comparação com os resultados do modelo discreto lhe é favorável).

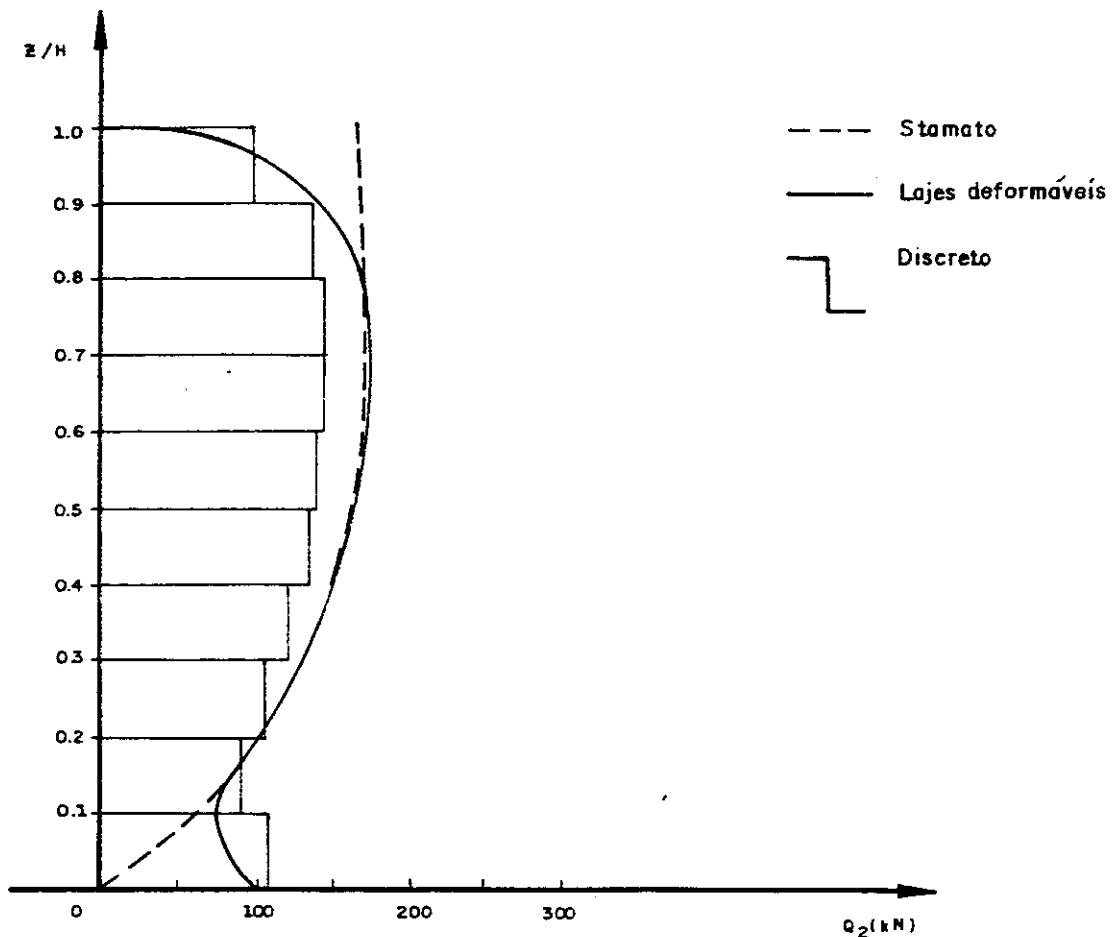


FIG. 6.17 — CORTANTE NO PAINEL ② DO EXEMPLO 3

ξ	STAMATO					LAJES DEFORMÁVEIS				
	v (cm)	Q ₁ (kN)	Q ₂ (kN)	M ₁ (kN.m)	v (cm)	δ (cm)	Q ₁ (kN)	Q ₂ (kN)	M ₁ (kN.m)	
0	0	600,0	0	6945	0	0	554,3	91,5	6993	
0,1	0,134	511,6	56,9	5280	0,136	0,206	502,6	74,8	5397	
0,2	0,492	430,3	99,4	3869	0,500	0,235	429,4	101,3	3997	
0,3	1,014	355,1	129,9	2692	1,034	0,224	355,2	129,6	2821	
0,4	1,651	284,8	150,4	1734	1,688	0,207	284,4	151,2	1863	
0,5	2,361	218,6	162,9	980	2,421	0,192	217,3	165,5	1111	
0,6	3,113	155,4	169,3	419	3,201	0,179	153,3	173,5	556	
0,7	3,884	94,3	171,4	45	4,006	0,165	92,1	175,7	189	
0,8	4,657	34,7	170,7	-148	4,819	0,136	35,4	169,2	-1	
0,9	5,424	-24,6	169,2	-163	5,633	0,030	-8,3	136,5	-36	
1,0	6,186	-84,2	168,3	0	6,445	-0,404	0	0	0	

ξ	DISCRETO			Q_1 (kN)	Q_2 (kN)
	v (cm)	δ (cm)	M_1 (kN.m)		
0	0,000	0,000	7087	528,6	142,8
0,1	0,139	0,121	5546	513,6	112,8
0,2	0,512	0,200	4154	464,1	91,7
0,3	1,063	0,211	2963	396,8	106,4
0,4	1,739	0,199	1812	327,1	125,7
0,5	2,501	0,185	1202	260,1	139,8
0,6	3,315	0,175	613	196,3	147,3
0,7	4,156	0,168	209	134,5	150,9
0,8	5,007	0,152	-138	74,4	151,3
0,9	5,859	0,079	-67	17,8	144,5
1,0	6,709	-0,150	0	-22,4	105,1
				-37,4	74,8

O cortante no painel 2 está representado no gráfico da figura 6.17, e seu valor na base é o resultado que acusa maior diferença relativa entre as alternativas de análise consideradas, na técnica do meio contínuo.

Na verdade, ao considerar-se as lajes como diafragmas rígidos, em associações de pórticos e paredes com um plano de simetria vertical na direção de atuação da carga, obtém-se como resultado que o esforço cortante total do conjunto na base é absorvido integralmente pelas paredes, nenhuma contribuição cabendo aos pórticos. Ao utilizar-se a consideração de lajes deformáveis, tal situação é alterada, obtendo-se valores nada desprezíveis para os cortantes dos pórticos nessa seção, como se verifica neste exemplo.

Ao comparar-se esse cortante com o valor fornecido pelo modelo discreto, entretanto, deve-se levar em conta que, neste último, há uma razão diferente que contribui para o surgimento de cortantes na base do pórtico, qual seja a consideração de deformações também por flexão, nesse caso, em lugar de considerar-se o pórtico idealmente deformável apenas por cortantes, como na técnica do meio contínuo.

Não obstante a última observação, esse caso de combinação de painéis (isto é, pórticos com paredes) parece ser o que mais se beneficiaria do refinamento aqui apresentado para a técnica do meio contínuo. De fato, quando se imagina que um dos principais objetivos dessa técnica é a estimativa dos esforços na base para efeito de dimensionamento das fundações, observa-se que a consideração de diafragmas rígidos, neste caso, despreza totalmente a contribuição dos painéis pórticos no equilíbrio do cortante total na base, o que é contra a segurança.

Nos painéis-parede existe ainda o surgimento de momentos fletores, como esforços solicitantes; sua representação, para este exemplo, encontra-se no gráfico da figura 6.18. Novamente conclui-se que, devido ao fato das diferentes alternativas de análise fornecerem as principais discrepâncias

entre os valores encontrados para os cortantes na região próxima à base, os momentos resultam quase coincidentes, qualquer que seja a técnica de análise pela qual se opte.

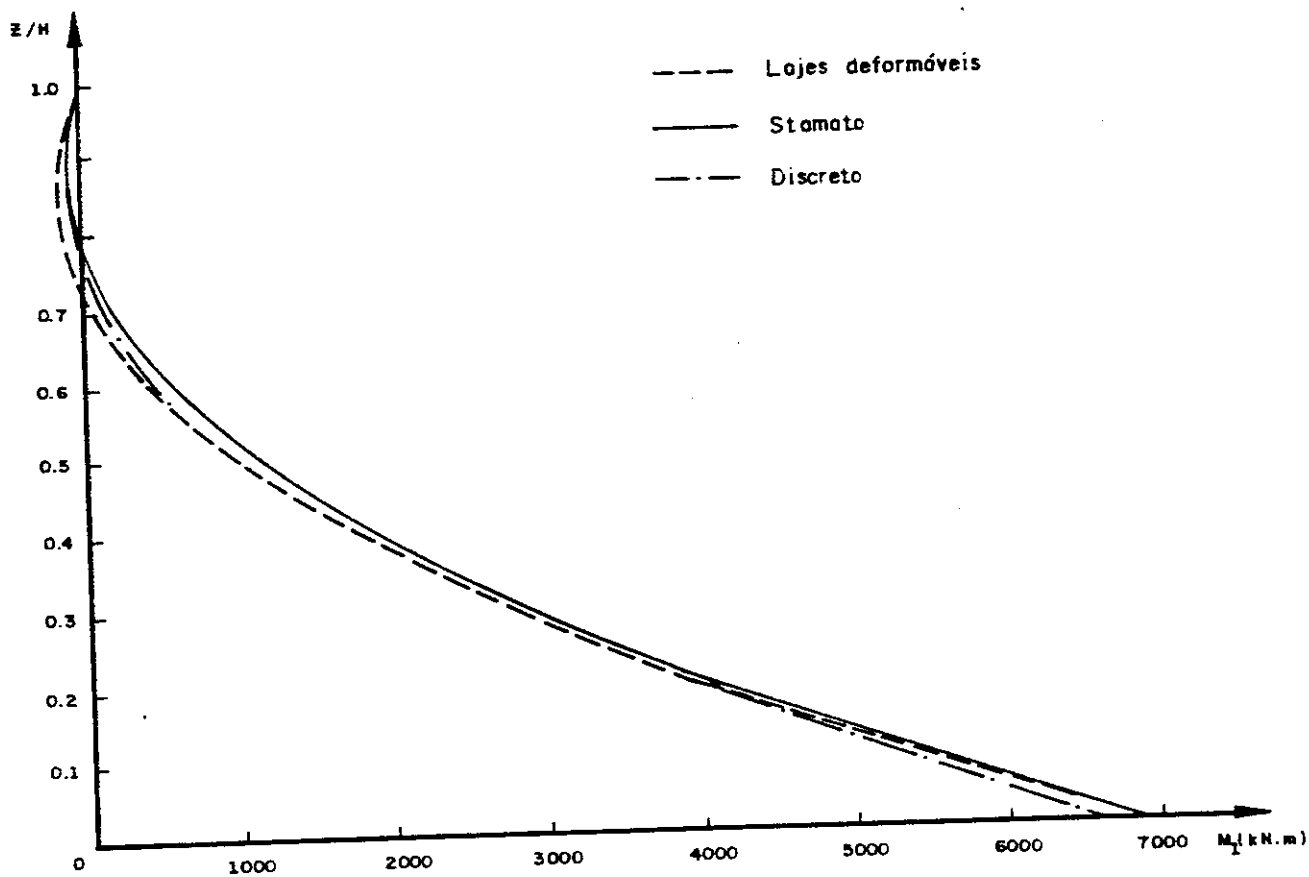


FIG. 6.18 — MOMENTO FLETOR NO PAINEL ① DO EXEMPLO 3

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

Na aplicação tradicional da técnica do meio contínuo, a hipótese de as lajes comportarem-se como diafragmas rígidos implica em que os esforços nos painéis de contraventamento distribuam-se proporcionalmente às suas rigidezes, dentro das configurações simétricas abordadas.

Neste trabalho verifica-se que considerar a deformação das lajes e sua compatibilidade com aquelas dos painéis exige uma lei diferente (mais abrangente) para a distribuição dos esforços nos painéis.

Dependendo da geometria, em planta, do edifício, as diferenças entre as duas considerações são significativas, mormente na região próxima da base da estrutura, onde os esforços têm valores elevados e os resultados mostram que as diferenças absolutas também são maiores.

A comparação é bastante favorável à consideração da deformação das lajes, como pode ser observado a partir dos resultados obtidos nos exemplos estudados em confronto com os da análise discreta da estrutura.

Com vistas a manter a simplicidade de análise permitida pela técnica do meio contínuo, pode-se utilizar para obtenção dos esforços na base, as expressões simplificadas que se obt~~ve~~^m, cuja boa precisão os exemplos mostram.

O caso que mais chama a atenção, quanto às diferenças nos resultados, é o de combinação de pórticos com paredes; para consideração de diafragmas rígidos, o pórtico não absorveria nenhuma parcela de cortante, na base, o que a análise discreta revela estar bastante discrepante. A consideração da deformação das lajes permite corrigir essa distorção, como ficou evidente.

Como a maior perturbação na distribuição dos esforços cortantes ocorre próximo à base, as diferenças resultantes no cálculo dos momentos fletores nessa região são mínimas, bastante inferiores (em termos relativos) às que se observam no cálculo dos esforços cortantes. Também para os deslocamentos, verifica-se grande precisão quando da consideração dos diafragmas rígidos. Os deslocamentos relativos dos painéis numa mesma ordenada não são de grandeza tal que interfiram nos resultados.

Um aspecto importante da técnica do meio contínuo é mantido, qual seja a possibilidade de análise com o fornecimento de um pequeno número de parâmetros para caracterização da estrutura, prescindindo inclusive do uso de programação e técnicas numéricas para a solução das equações envolvidas na análise.

Como seqüência deste trabalho, seria interessante a consideração de painéis com vinculações diferentes (paredes engastadas elasticamente na base) e outros casos de combinação, inclusive aqueles que não apresentem plano vertical de simetria na direção de atuação das cargas horizontais.

BIBLIOGRAFIA

1. BAIKOV, V. & SIGALOV, E. Members of multistorey framed and panel, buildings. ----- . Reinforced Concrete Structures. 2.ed. Moscou, Mir Publishers, 1983. cap.6, p.223-95.
2. FERREIRA, L.F.O. Associação plana de pórticos com pilares-paredes. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1975. 199p.
3. MANCINI, E. Análise contínua de estruturas de edifícios elevados sujeitos à ação do vento. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1973. 142p. (Tese de Doutorado, EESC-USP).
4. ROSA NETO, J.P. Associações de pórticos com paredes deformáveis por momento fletor e força cortante. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1984. 44p.
5. SERRA, J.L.F.A. Influência da deformabilidade das lejes nos efeitos da ação do vento. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1974. 86p. (Dissertação de Mestrado, EESC-USP).
6. STAMATO, M.C. Associação contínua de painéis de contraventamento. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1980. 72p.
7. STAMATO, M.C. Distribuição das cargas do vento entre os painéis de contraventamento. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1978. 30p.

8. STAMATO, M.C. & STAFFORD-SMITH, B. Análise aproximada de estruturas tridimensionais de edifícios elevados. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1983. 23p.
9. YOSHIDA, S. Análise do efeito do vento em estruturas de edifícios com lajes deformáveis. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1989. 158p. (Dissertação de Mestre, EESC-USP).
10. LAIER, J.E. Efeitos de segunda ordem em pórticos de edifícios altos. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1989. 52p.
11. GERE, J.M. & WEAVER, JR., W. Analysis of framed structures. New York, Van Nostrand Reinhold Company, 1965.
12. KAPLAN, W. Cálculo Avançado - 2. São Paulo, Editora da USP, 1972. cp.8, p.489-517, cap.9,541-48.