

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ANÁLISE LINEAR DE ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS RETANGULARES
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS UTILIZANDO
SUBESTRUTURAS

AUTOR: ENG. ERIC SORIA GALVARRO BALCAZAR

ORIENTADOR: PROF.DR. WALTER SAVASSI

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Walter Savassi (Orientador)

Prof. Dr. Marcio Antonio Ramalho

Prof. Dr. Mario Francisco Mucheroni

Suplentes:

Prof. Dr. João Lirani

Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini



São Carlos, ABRIL de 1991

"A
Sandra, Gisele
y a mis Padres,
Armando y Dora".

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Walter Savassi, cuja orientação segura e objetiva tornou possível a realização do presente trabalho.

A Professora Maria de Lourdes Rebucci, pela valiosa colaboração concedida.

Ao Senhor Antonio Valdair Carneiro pelos excelentes trabalhos de datilografia, a Sr^a Sylvia H. Morrette Villani pelos desenhos e a Maria Nadir Minatel pela revisão bibliográfica.

Ao C.P.D. (Centro de Processamentos de dados) da EESC-USP, pela utilização dos equipamentos, e aos funcionários Luiz Carlos Dotta e Wagner Baptista Pontes pelo auxílio prestado.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal ao Nível Superior), pela concessão da bolsa de estudos.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver um programa de computador que permita a análise linear de estruturas tridimensionais de plantas retangulares, discretizáveis por elementos finitos unidimensionais e bidimensionais sujeitas a ação de cargas permanentes, de utilização e de vento, considerando cada estado de carga independentemente, utilizando na formulação teórica o processo dos deslocamentos.

Para resolver o problema do manejo de grande volume de dados gerados na montagem da matriz de rigidez da estrutura, assim como para o melhor aproveitamento de características das estruturas como a repetitividade dos pavimentos foi adotada a técnica das subestruturas.

Na implementação do programa computacional a subestruturação é feita em dois níveis de hierarquização com o propósito de permitir uma melhor discretização dos elementos estruturais, a primeira operada em "paralelo" na composição dos "macro-elementos" e a segunda operada em série sobre as unidades maiores chamadas "subestruturas".

Os algoritmos utilizados para operar a subestruturação em ambos os níveis são os mesmos, e foram condicionados ao programa do computador em forma de módulos, de maneira a permitir uma maior versatilidade, viabilizando consequentemente a inclusão de outros tipos de elementos finitos que posteriormente ampliem o uso do programa para análise de estruturas não retangulares.

ABSTRACT

The present work has as objective to develop a computer program that allows the linear analysis of rectangular tridimensional structures discretized by unidimensional and bidimensional finite elements under the action of permanent, service and wind loadings, considering each state of loading independently.

Theoretical formulation follows the displacement method. To solve the handling problem of big data bulk generated when assembling the stiffness matrix of the structure, as well as to take advantage of structural characteristics, such as the floor repetition, it was adopted the substructure technique.

In the implementation of the computer program substructuring is done in two levels of hierarchy so that it allows a better discretization of the structural elements, the first operated in "parallel" on the composition of the "macro-elements" and the second operated in "series" on greater unities called "substructures".

The algorithms used to operate substructuring in both levels are the same and they were conditioned to the computer program in modular forms, so that it allows a greater versatility and the inclusion of other kinds of finite elements that furthermore amplify the use of the program for the analysis of non-rectangular structures.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

1.1. GENERALIDADES	I/1
1.2. NOTAÇÃO E SIMBOLOGIA.....	I/3

CAPÍTULO II - ELEMENTOS FINITOS

1. INTRODUÇÃO

1.1. O método dos elementos finitos.....	II/1
1.2. O princípio da mínima energia potencial total...	II/1
1.3. Hipóteses de cálculo.....	II/2
1.4. Procedimento geral de cálculo.....	II/2
1.5. Complementos teóricos.....	II/7

2. ELEMENTO RETANGULAR DE CHAPA

2.1. Descrição.....	II/8
2.2. Cálculo da matriz $\underline{\phi}$	II/8
2.3. Cálculo da matriz $\underline{\bar{B}}$	II/10
2.4. Cálculo da matriz de rigidez \underline{r}_c	II/11
2.5. Cargas nodais equivalentes	II/14
2.6. Cálculo das tensões	II/17
2.7. Exemplos de aplicação	II/19

3. ELEMENTO RETANGULAR DE PLACA

3.1. Descrição.....	II/20
3.2. Cálculo da matriz $\underline{\phi}$	II/20
3.3. Cálculo da matriz $\underline{\bar{B}}$	II/26
3.4. Cálculo da matriz de rigidez \underline{r}_p	II/26
3.5. Cargas nodais equivalentes.....	II/37
3.6. Cálculo dos esforços	II/43
3.7. Exemplos de aplicação	II/47

4. ELEMENTOS DE BARRA DE PÓRTICO TRIDIMENSIONAL	
4.1. Descrição.....	II/50
4.2. Matriz de rigidez r_b	II/50
4.3. Cargas nodais equivalentes	II/53
4.4. Esforços nodais	II/55

CAPÍTULO III - SUBESTRUTURAS

1. INTRODUÇÃO	III/1
2. SEQUÊNCIAS DE SUBESTRUTURAÇÃO	
2.1. Subestruturação em paralelo.....	III/4
2.2. Subestruturação em série	III/5
3. MÉTODOS DE CONDENSAÇÃO ESTÁTICA	
3.1. Método "FULL RELEASE"	III/8
3.2. Método "CHOLESKY DECOMPOSITION".....	III/10
4. RESUMO E ALGORITMOS	III/12
5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	III/14

CAPÍTULO IV - IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA

1. TÓPICOS ADICIONAIS	
1.1. Transformação de coordenadas	IV/1
1.2. Conexão rígida entre elementos	IV/6
1.3. Matriz de rigidez generalizada para elemento de barra de pórtico tridimensional.....	IV/9
2. ELEMENTOS ESTRUTURAIS	
2.1. Parede	IV/18
2.2. Laje	IV/18
2.3. Vigas e pilares	IV/19
3. CARGAS	IV/20

4. TÉCNICAS COMPUTACIONAIS

4.1. Arranjo para matriz simétrica	IV/22
4.2. Subprograma "Decom 1"	IV/23
4.3. Subprograma "Decom 2"	IV/24
4.4. Subprograma "Solsis"	IV/25
4.5. Subprograma "Espal 1"	IV/26
4.6. Subprograma "Espal 2"	IV/27
4.7. Subprograma "Vinnos"	IV/29
4.8. Subprograma "Carnos"	IV/30

5. MODELO ESTRUTURAL

5.1. Esquema de Subestruturação	IV/32
5.2. Classificação das Subestruturas.....	IV/33
5.3. Convenção.....	IV/33

6. FLUXOGRAMA

CAPÍTULO V - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

1. EXEMPLO 1	V/1
2. EXEMPLO 2	V/6
3. EXEMPLO 3	V/12
4. EXEMPLO 4	V/19

ANEXO

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAPÍTULO I

1. INTRODUÇÃO

1.1. GENERALIDADES

A constante evolução da tecnologia em computadores tem acelerado o desenvolvimento do "software" de forma a possibilitar a resolução de problemas estruturais mais complexos, otimizando os resultados e diminuindo o tempo de processamento.

A implementação do método dos elementos finitos por [1] e [2], entre outros, para programas de computador desenvolvidos por [5],[6] utilizando técnicas matriciais como as propostas por [3], são consequência deste fato.

Contudo, a considerável capacidade de memória de computador requerida para o processamento dos dados gerados na resolução destes problemas estruturais, evidência a necessidade de se desenvolver programas auxiliares que permitam o acesso a ditas técnicas no uso prático, utilizando computadores de pequeno e médio porte, programas baseados principalmente em técnicas de subestruturação.

As técnicas de subestruturação, como complemento ao análise de problemas estruturais foi proposto formalmente por autores como [2], [3], e posteriormente enunciadas com processos alternativos para operar a condensação estática dos graus de liberdade das subestruturas por autores como [4], [8].

Neste trabalho apresenta-se um modelo de cálculo e as respectivas subrotinas básicas para a análise de estruturas tridimensionais que possam ser discretizadas por elementos bidimensionais de chapa e placa combinados com elementos unidimensionais. Para fins de ilustração são incluídos em cada capítulo exemplos de aplicação das técnicas utilizadas, assim como testes de convergência dos elementos finitos utilizados sujeitos a diferentes estados de carga.

Como é característica da técnica discreta, é possível a abordagem de uma ampla gama de problemas estruturais pela simples combinação de elementos finitos que reflitam o comportamento estrutural dos elementos constitutivos, porém a descrição correta desse comportamento e a discretização adequada da estrutura dependem exclusivamente da criteriosa análise do usuário.

1.2. NOTAÇÃO E SIMBOLOGIA

π_p	:	Energia potencial do sistema
U	:	Energia de deformação do sistema
Ω	:	Potencial das cargas totais atuantes no sistema
$\bar{u} = \begin{Bmatrix} \bar{u}(x,y,z) \\ \bar{v}(x,y,z) \\ \bar{w}(x,y,z) \end{Bmatrix}$:	vetor dos deslocamentos no interior do elemento
$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(x,y,z)$:	vetor das deformações no interior do elemento
$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(x,y,z)$:	vetor das tensões no interior do elemento
$\bar{p} = \bar{p}(x,y,z)$:	vetor das forças de superfície aplicadas no elemento
$\bar{q} = \bar{q}(x,y,z)$:	vetor das forças de volume próprios do elemento
$\bar{\psi} = \bar{\psi}(x,y,z)$:	Matriz de funções aproximadoras adequadamente escolhidas
$\bar{\alpha}$:	vetor cujos elementos são constantes a calcular
\bar{H}	:	Matriz numérica obtida de $\bar{\psi}$ quando avaliada nos pontos nodais
$\bar{\phi} = \bar{\phi}(x,y,z)$:	Matriz de funções de forma que expressa deslocamento unitário do nó e os restantes deslocamentos mantidos nulos quando avaliados nos pontos nodais.
$\bar{\phi}_p = \bar{\phi}_p(x,y,z)$:	Matriz de funções de forma que expressa carregamento unitário no nó e os restantes carregamentos mantidos nulos quando avaliados nos pontos nodais.
$\bar{\phi}_g = \bar{\phi}_g(x,y,z)$:	idem $\bar{\phi}_p$
$\bar{\psi}' = \bar{\psi}'(x,y,z)$:	Matriz de funções derivadas de $\bar{\psi}$
$\bar{B} = \bar{B}(x,y,z)$:	Matriz das funções de forma das deformações no interior do elemento.

\underline{u}	: Vetor de deslocamentos nodais do elemento
$\underline{\epsilon}$: Vetor das deformações avaliadas num ponto do elemento
$\underline{\sigma}$: Vetor das tensões avaliadas num ponto do elemento
\underline{p}	: Vetor das forças nodais equivalentes provenientes das forças de superfície
\underline{q}	: Vetor das forças nodais equivalentes provenientes das forças de volume
\underline{P}	: Vetor das forças pontuais aplicadas diretamente nos nós
\underline{B}	: Matriz numérica obtida de \bar{B} quando avaliada nos pontos nodais
\underline{f}	: Vetor das forças nodais totais no elemento
\underline{r}	: Matriz de rigidez do elemento
\underline{a}	: Matriz de incidência que relaciona forças de deslocamentos e nível do elemento com as correspondentes no sistema global
\underline{F}	: Vetor de forças totais no sistema global
\underline{R}	: Matriz de rigidez do sistema global
\underline{U}	: Vetor de deslocamentos nodais do sistema global
\underline{FI}	: Parcela do vetor das forças aplicadas nos nós internos das subestruturas
\underline{FE}	: Parcela do vetor das forças aplicadas nos nós externos das subestruturas
\underline{RII}	: Parcela da matriz de rigidez correspondentes aos elementos conectados a nós internos das subestruturas
\underline{RIE}	: Parcela da matriz de rigidez correspondente aos elementos conectados a nós internos e externos das subestruturas.

\underline{REE}	: Parcela da matriz de rigidez correspondente aos elementos conectados a nós externos das subestruturas
\underline{A}	: Matriz de incidência que relaciona forças e deslocamentos a nível das subestruturas com as correspondentes no sistema de referência global
E	: Módulo de elasticidade longitudinal
G	: Módulo de elasticidade transversal
ν	: Coeficiente de Poisson
ρ	: Peso específico
I_x, I_y, I_z	: Momentos de Inércia da seção
S	: Área da seção transversal do elemento unidimensional
d	: Espessura do elemento bidimensional
\underline{D}	: Matriz de elasticidade
\underline{D}^*	: Matriz de elasticidade modificada
[]	: Indica matriz
{ }	: Indica vetor
\int_s	: Integral de área
\int_v	: Integral de volume
$\phi_{,x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$: Indica derivada parcial
\underline{u}	: Letras sobre til indicam matriz ou vetor
\bar{u}	: Letras sob traço indicam função
u	: Letras sem traço ou til indicam valor nodal
\underline{D}^*	: Matriz com asterisco encima indicam que a matriz original foi modificada

- ↑ : Deslocamento, força
- ↑ : Rotação, momento
- ↑ : Parâmetro nodal (w, ξ, η)
- T : Como expoente, indica matriz transposta

CAPÍTULO II

ELEMENTOS FINITOS

I. INTRODUÇÃO

1.1. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Os métodos matemáticos de mais ampla utilização conhecidos na atualidade e ligados à resolução de problemas de meios contínuos, são os chamados métodos variacionais, utilizados também na teoria da elasticidade e outras teorias simplificadas, através de conceitos ligados a energia. São Métodos com possibilidade de implementação numérica, que permitem obter soluções aproximadas para sua posterior aplicação prática em problemas específicos. Entre os métodos variacionais desta-se pela sua importância e generalidade o método dos elementos finitos.

A utilização dos métodos variacionais em geral, e do método dos elementos finitos em particular, pode ser feita de diversas maneiras de acordo com as incógnitas utilizadas na sua formulação; no que segue será adotado exclusivamente o método dos deslocamentos, por ser o mais simples e fácil de implementar num programa computacional. Para esse objetivo o método dos elementos finitos precisa de uma formulação matricial adequada, embora conceitualmente seja independente da linguagem matricial.

1.2. PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL TOTAL

Considerando um campo qualquer de deslocamentos admissíveis de um corpo sólido, admitindo como um campo qualquer aquele que satisfaz as condições de contorno

geométrico do problema, podem ser calculadas as correspondentes deformações através das relações deformações-deslocamentos e as correspondentes tensões pela utilização das matrizes de correspondência elástica. O teorema da mínima energia potencial expressa que, dentre todos os campos de deslocamentos admissíveis, aquele que define a solução exata é o que torna mínima a energia potencial total. A solução corresponde a configuração de equilíbrio do sistema.

Chama-se energia potencial do sistema:

$$\pi_p = u + \Omega \quad (1.1)$$

u : Energia de deformação

Ω : Potencial das cargas

1.3. HIPÓTESES DE CÁLCULO

As considerações físicas e do material feitas na dedução das equações a seguir respeitam as seguintes hipóteses:

- a) O material é elástico linear (segue a Lei de Hooke).
- b) O material é homogêneo e isotrópico.
- c) São desprezadas as deformações por esforço cortante.
- d) Se conservam as seções planas após a deformação.

1.4. PROCEDIMENTO GERAL DE CÁLCULO

Para um elemento finito:

$$u_e = \frac{1}{2} \int_V \bar{\sigma}^T \cdot \bar{\epsilon} \cdot dv \quad (1.2)$$

$$\Omega_e = - \int_{S_0} \bar{p}^T \cdot \bar{u} \cdot dS - \int_V \bar{g}^T \cdot \bar{u} \cdot dv + \bar{p}^T \cdot \bar{u} \quad (1.3)$$

$$\bar{u} = \psi \cdot \alpha \quad (1.4)$$

$$\bar{u} = H \cdot \alpha \quad (1.5)$$

$$\alpha = H^{-1} \cdot \bar{u} \quad (1.6)$$

$$\bar{u} = \psi \cdot H^{-1} \cdot \bar{u} \quad \text{substituindo (1.6) em (1.4)} \quad (1.7)$$

$$\bar{\underline{u}} = \underline{\phi} \cdot \underline{u} \quad (1.8)$$

$$\bar{\underline{p}} = \underline{\phi}_p \cdot \underline{p} \quad (1.9)$$

$$\bar{\underline{q}} = \underline{\phi}_g \cdot \underline{q} \quad (1.10)$$

$$\bar{\underline{\epsilon}} = \underline{\psi}' \cdot \underline{\alpha} \quad (1.11)$$

$$\bar{\underline{\epsilon}} = \underline{\psi}' \cdot \underline{H}^{-1} \cdot \underline{u} \quad (1.12)$$

$$\bar{\underline{\epsilon}} = \underline{\bar{B}} \cdot \underline{u} \quad (1.13)$$

$$\bar{\underline{\sigma}} = \underline{D} \cdot \bar{\underline{\epsilon}} \quad (1.14)$$

$$\bar{\underline{\sigma}} = \underline{D} \cdot \underline{\bar{B}} \cdot \underline{u} \quad (1.15)$$

Operando a equação da energia potencial tem-se:

$$\pi_{pe} = U_e + \Omega_e \quad (1.16)$$

$$\pi_{pe} = \frac{1}{2} \int_V \bar{\underline{\sigma}}^T \cdot \bar{\underline{\epsilon}} \, dv - \int_{s_0} \bar{\underline{p}}^T \cdot \bar{\underline{u}} \, ds - \int_V \bar{\underline{q}}^T \cdot \bar{\underline{u}} \, dv - \underline{p}^T \cdot \underline{u} \quad (1.17)$$

$$\pi_{pe} = \frac{1}{2} \int_V \bar{\underline{\epsilon}}^T \cdot \underline{D} \cdot \bar{\underline{\epsilon}} \, dv - \int_S \bar{\underline{u}}^T \cdot \bar{\underline{p}} \, ds - \int_V \bar{\underline{u}}^T \cdot \bar{\underline{q}} \, dv - \underline{u}^T \cdot \underline{p} \quad (1.18)$$

(1.18) Substituindo (1.8), (1.9), (1.10), (1.15) em

$$\pi_{pe} = \frac{1}{2} \underline{u}^T \left\{ \int_S \underline{\bar{B}}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{\bar{B}} \, ds \right\} \cdot \underline{u} - \underline{u}^T \left\{ \int_{s_0} \underline{\phi}^T \cdot \underline{\phi}_p \, ds \cdot \underline{p} + \int_V \underline{\phi}^T \cdot \underline{\phi}_g \, dv \cdot \underline{q} + \underline{p} \right\} \quad (1.19)$$

$$\pi_{pe} = \frac{1}{2} \cdot \underline{u}^T \cdot \{\underline{r}\} \cdot \underline{u} - \underline{u}^T \cdot \{\underline{f}_s + \underline{f}_v + \underline{f}_p\} \quad (1.20)$$

$$\pi_{pe} = \frac{1}{2} \cdot \underline{u}^T \cdot \underline{r} \cdot \underline{u} - \underline{u}^T \cdot \underline{f} \quad (1.21)$$

$$\underline{u}^T = \{ u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_n \} \quad (1.22)$$

$$\underline{f}^T = \{ f_1 \ f_2 \ f_3 \ \dots \ f_n \} \quad (1.23)$$

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Considerando a variação de parâmetros:

$$\delta \pi_{pe} = \frac{\partial \pi_{pe}}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial \pi_{pe}}{\partial u_2} \delta u_2 + \dots + \frac{\partial \pi_{pe}}{\partial u_n} \delta u_n \quad (1.25)$$

Os deslocamentos virtuais que aparecem em cada termo do segundo membro de (1.25), são arbitrários e não devem ser simultaneamente nulos; para que a variação de energia potencial $\delta \pi_{pe}$ seja nula deve-se ter:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \pi_{pe}}{\partial u_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi_{pe}}{\partial u_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \pi_{pe}}{\partial u_n} = 0 \end{array} \right\} \quad (1.26)$$

Levando em conta que a matriz de rigidez \underline{r} e o vetor de cargas \underline{f} são constantes, aplica-se (1.25) ao primeiro termo do somatório.

$$\pi_{pe} = \frac{1}{2} \underline{u}^T \cdot \underline{r} \cdot \underline{u} - \underline{u}^T \cdot \underline{f}$$

$$\delta \pi_{pe} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \pi_{pe}}{\partial u_i} \cdot \delta u_i$$

$$\frac{\partial \pi_{pe}}{\partial u_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial u_1} [\{u_1 u_2 \dots u_n\} \cdot \underline{r} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} - \{u_1 u_2 \dots u_n\} \cdot \underline{f}]$$

$$\frac{\partial \pi_{pe}}{\partial u_1} = \frac{1}{2} \{1 0 \dots 0\} \cdot \underline{r} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \{u_1 u_2 \dots u_n\} \cdot \underline{r} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} - \\ - \{1 0 \dots 0\} \cdot \underline{f}$$

$$\frac{\partial \pi_{pe}}{\partial u_1} = \frac{1}{2} \{r_{11} \ r_{12} \dots r_{1n}\} \cdot \underline{u} + \frac{1}{2} \cdot \underline{u}^T \cdot \begin{Bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ \vdots \\ r_{n1} \end{Bmatrix} - f_1$$

Onde \underline{r}_1 é a primeira linha de \underline{r} .

$$\frac{\partial \pi_{pe}}{\partial u_1} = \frac{1}{2} \underline{r}_1 \cdot \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{u}^T \cdot \underline{r}_1^T - f_1$$

Sabendo-se que $\underline{r}_1 \cdot \underline{u} = \underline{u}^T \cdot \underline{r}_1^T$, resulta

$$\frac{\partial \pi_{pe}}{\partial u_1} = \underline{r}_1 \cdot \underline{u} - f_1, \text{ generalizando:}$$

$$\delta \pi_{pe} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \pi_{pe}}{\partial u_i} \cdot \delta u_i = \delta \underline{u}^T \cdot \begin{Bmatrix} \underline{r}_1 \cdot \underline{u} - f_1 \\ \underline{r}_2 \cdot \underline{u} - f_2 \\ \vdots \\ \underline{r}_n \cdot \underline{u} - f_n \end{Bmatrix} = \delta \underline{u}^T \cdot \begin{Bmatrix} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \\ \vdots \\ \underline{r}_n \end{Bmatrix} \cdot \underline{u} - \underline{f}$$

$$\delta \pi_{pe} = \delta \underline{u}^T \cdot (\underline{r} \cdot \underline{u} - \underline{f})$$

Pelo princípio da mínima energia potencial total:

$$\delta\pi_{pe} = \delta\bar{u}^T \cdot (\bar{r} \cdot \bar{u} - \bar{f}) = 0$$

Como os $\delta\bar{u}$ são arbitrários e não todos nulos simultaneamente:

$$\bar{r} \cdot \bar{u} = \bar{f} \quad (1.27)$$

Isso representa a equação de equilíbrio a nível de elemento; generalizando para os n elementos da estrutura.

$$\pi_p = \sum_{i=1}^n \pi_{pe} \quad (1.28)$$

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^n \bar{a}^T \cdot \bar{f} \quad (1.29)$$

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{a}^T \cdot \bar{r} \cdot \bar{a} \quad (1.30)$$

$$\bar{R} \cdot \bar{U} = \bar{F} \quad (1.31)$$

onde \bar{a} é a matriz de transformação de parâmetros do elemento para a estrutura.

1.5. COMPLEMENTOS TEÓRICOS

TABELA 1.1 - RELAÇÃO ELÁSTICA PARA OS PROBLEMAS ABORDADOS

TIPO	$\bar{u} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}$	$\bar{\epsilon}^T$	$\bar{\sigma}^T$	\underline{D}^*
BARRA	\bar{u}	$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \sigma_x \end{Bmatrix}$	E
VIGA	\bar{w}	$\begin{Bmatrix} k_{xx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} M_{xx} \end{Bmatrix}$	EI
CHAPA	\bar{u}, \bar{v}	$\begin{Bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{Bmatrix}$	$\frac{Ed}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$
PLACA	\bar{w}	$\begin{Bmatrix} k_{xx} & k_{yy} & k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} M_{xx} & M_{yy} & M_{xy} \end{Bmatrix}$	$\frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$

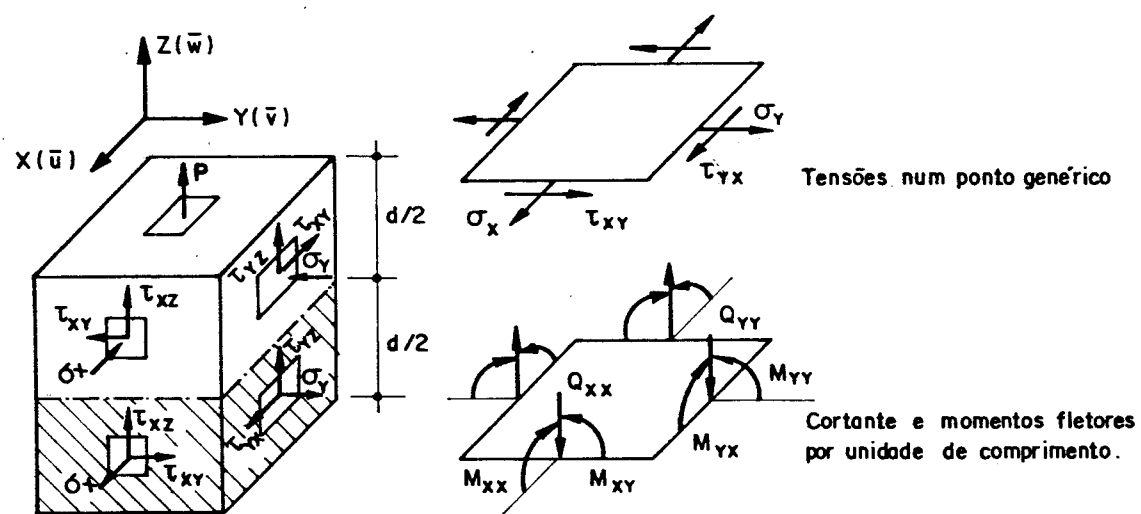


FIG. 1.1 - Convenção positiva para esforços solicitantes.

2. ELEMENTO RETANGULAR DE CHAPA (A.C.M.)

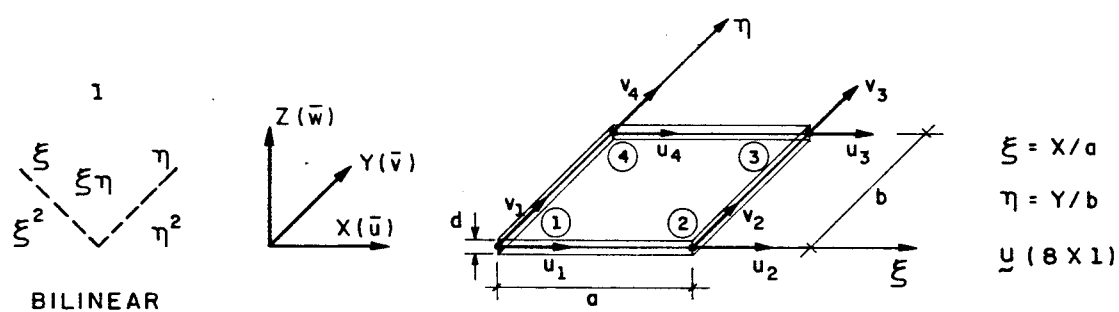


Fig. 2.1- Elemento de chapa (A.C.M)

2.1. DESCRIÇÃO:

É o elemento bidimensional retangular $c(0)$, desenvolvido por ADINI-CLOUGH-MELOSH conforme [2], para representar o comportamento de membrana; este elemento tem quatro nós de vértice, oito graus de liberdade e funções de forma bilineares.

2.2. CÁLCULO DA MATRIZ ϕ :

Sendo a função de deslocamentos $\bar{\underline{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u}(x,y) \\ \bar{v}(x,y) \end{Bmatrix}$, se optará pelo cálculo da matriz ϕ para $\bar{\underline{u}} = \bar{u}(x,y)$, utilizando coordenadas homogêneas

Tem-se:

$$\bar{\underline{u}}(\xi, \eta) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \xi \eta = \{1 \ \xi \ \eta \ \xi \eta\} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\underline{u}} = \underline{\psi} \cdot \underline{\alpha}$$

Avaliando a matriz $\underline{\psi}$ nos pontos nodais tem-se:

$$(\bar{u})_1 \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} = \alpha_0$$

$$(\bar{u})_2 \Big|_{\substack{\xi=1 \\ \eta=0}} = \alpha_0 + \alpha_1$$

$$(\bar{u})_3 \Big|_{\substack{\xi=1 \\ \eta=1}} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$(\bar{u})_4 \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=1}} = \alpha_0 + \alpha_2$$

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \underline{H} \cdot \underline{\alpha}$$

$$\underline{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\bar{u}} = \underline{\psi} \cdot \underline{H}^{-1} \cdot \underline{u} = \underline{\phi} \cdot \underline{u}$$

Finalmente:

$$\underline{\phi} = \{1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \{1 \ -\xi \ -\eta + \xi\eta \ \xi - \xi\eta \ \xi\eta \ \eta - \xi\eta\}$$

$$\underline{\phi} = \{\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4\} = \{(1-\xi)(1-\eta) \ \xi(1-\eta) \ \xi\eta \ (1-\xi)\eta\} \quad (2.1)$$

Representação das funções de forma $\underline{\phi}$:

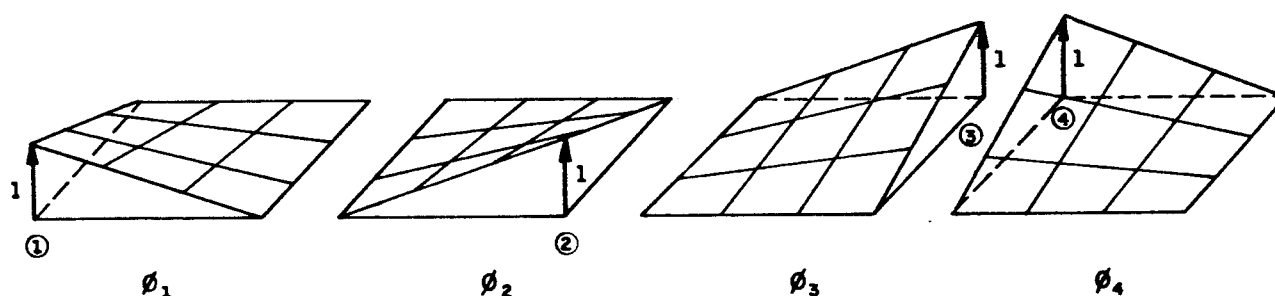


FIG. 2.2 - Funções de forma $\underline{\phi}$ para o elemento A.C.M.

Seguindo um processo análogo obtem-se as funções ϕ para $\bar{v} = \bar{v}(\xi, \eta)$ e finalmente:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \\ \bar{\epsilon} &= \phi \bar{u} \\ \phi &= \begin{bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) & \xi(1-\eta) & \xi\eta & (1-\xi)\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\xi)(1-\eta) & \xi(1-\eta) & \xi\eta & (1-\xi)\eta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.3. CÁLCULO DA MATRIZ \bar{B} :

$$\bar{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \\ \frac{1}{b} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} \\ \frac{1}{b} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \phi_{,\xi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \phi_{,\eta} \\ \frac{1}{b} \phi_{,\eta} & \frac{1}{a} \phi_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\epsilon} = \bar{B} \cdot \bar{u}$$

$$\bar{u}^T = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{-(1-\eta)}{a} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{\eta}{a} & \frac{-\eta}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-(1-\xi)}{b} & \frac{-\xi}{b} & \frac{\xi}{b} & \frac{1-\xi}{b} \\ \frac{-(1-\xi)}{b} & \frac{-\xi}{b} & \frac{\xi}{b} & \frac{1-\xi}{b} & \frac{-(1-\eta)}{a} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{\eta}{a} & \frac{-\eta}{a} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

2.4. CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ r_c :

$$r_c = \int_S \bar{B}^T \cdot \bar{D} \cdot \bar{B} \, ds$$

$$r_c = \int_S \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \phi_{,\xi}^T & 0^T & \frac{1}{b^2} \phi_{,\eta}^T \\ 0^T & \frac{1}{b^2} \phi_{,\eta}^T & \frac{1}{a^2} \phi_{,\xi}^T \end{bmatrix} \cdot \frac{Ed}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \phi_{,\xi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \phi_{,\eta} \\ \frac{1}{b^2} \phi_{,\eta} & \frac{1}{a^2} \phi_{,\xi} \end{bmatrix} ds$$

$$r_c = \frac{Ed}{1-\nu^2} \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \phi_{,\xi}^T \phi_{,\xi} + \frac{1-\nu}{2b^2} \phi_{,\eta}^T \phi_{,\eta} & \frac{\nu}{ab} \phi_{,\xi}^T \phi_{,\eta} + \frac{1-\nu}{2ab} \phi_{,\eta}^T \phi_{,\xi} \\ \frac{\nu}{ba} \phi_{,\eta}^T \phi_{,\xi} + \frac{1-\nu}{2ba} \phi_{,\xi}^T \phi_{,\eta} & \frac{1}{b^2} \phi_{,\eta}^T \phi_{,\eta} + \frac{1-\nu}{2a^2} \phi_{,\xi}^T \phi_{,\xi} \end{bmatrix} ab d\xi d\eta$$

(2.4)

$$r_c = \frac{Ed}{1-\nu^2} = \begin{bmatrix} r_{c\,uu} & r_{c\,uv} \\ r_{c\,vu} & r_{c\,vv} \end{bmatrix}$$

Assim, por exemplo, para o elemento r_{c11} :

$$R_{c11} = \frac{Ed}{1-\nu^2} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{a^2} (1-\eta)^2 + \frac{1-\nu}{ab^2} (1-\xi)^2 \right] a \cdot b d\xi d\eta = \frac{Ed}{12(1-\nu^2)} \left[4\frac{b}{a} + 2\frac{a}{b}(1-\nu) \right]$$

Depois de obter os elementos da matriz de rigidez por integração, faz-se o rearranjo adequado para ter-se a sequência:

$$\underline{u}^T = \{u_1 v_1 u_2 v_2 u_3 v_3 u_4 v_4\}$$

$$r_c = \frac{Ed}{12(1-\nu^2)}$$

1	$\frac{b}{a} + 2\frac{a}{b}(1-\nu)$	$\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-4\frac{b}{a} + \frac{a}{b}(1-\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$2\frac{b}{a} - 2\frac{a}{b}(1-\nu)$	$\frac{3}{2}(1-3\nu)$
2	$4\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a}(1-\nu)$	$\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$2\frac{a}{b} - 2\frac{b}{a}(1-\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-\nu)$	$-2\frac{a}{b} - \frac{b}{a}(1-\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu) - \frac{4a}{b} + \frac{b}{a}(1-\nu)$	
3	$4\frac{b}{a} + 2\frac{a}{b}(1-\nu)$	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-\nu)$	$2\frac{b}{a} - 2\frac{a}{b}(1-\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-2\frac{b}{a} - \frac{a}{b}(1-\nu)$	$\frac{3}{2}(1+\nu)$
4	$4\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a}(1-\nu)$	$\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-\nu)$	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-\nu)$	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-2\frac{a}{b} - \frac{b}{a}(1-\nu)$
5	SIMETRICA		$4\frac{b}{a} + 2\frac{a}{b}(1-\nu)$	$\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-\frac{b}{a} + \frac{a}{b}(1-\nu)$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	
6	$4\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a}(1-\nu)$	$4\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a}(1-\nu)$	$4\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a}(1-\nu)$	$4\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a}(1-\nu)$	$\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$2\frac{a}{b} - 2\frac{b}{a}(1-\nu)$	
7			$4\frac{b}{a} + 2\frac{a}{b}(1-\nu)$	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$			
8							$4\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a}(1-\nu)$

(2.5)

Elementos que se repetem na matriz de rigidez:

$$r_{c11} = r_{c33} = r_{c55} = r_{c77}$$

$$r_{c12} = r_{c38} = r_{c47} = r_{c56}$$

$$r_{c13} = r_{c57}$$

$$r_{c14} = r_{c27} = r_{c36} = r_{c58}$$

$$r_{c15} = r_{c37}$$

$$r_{c16} = r_{c25} = r_{c34} = r_{c78}$$

$$r_{c17} = r_{c35}$$

$$r_{c18} = r_{c23} = r_{c45} = r_{c67}$$

$$r_{c22} = r_{c44} = r_{c66} = r_{c88}$$

$$r_{c24} = r_{c68}$$

$$r_{c26} = r_{c48}$$

$$r_{c28} = r_{c46}$$

2.5. CARGAS NODAIS EQUIVALENTES:

Parcela \underline{f}_s :

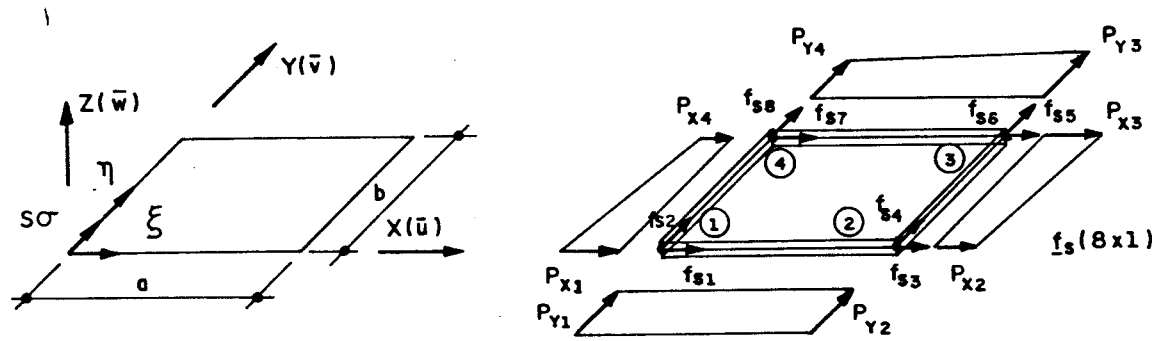


FIG. 2.3 — Cargas de superfície no elemento (A.C.M.)

$$\underline{f}_s = \int_{s_0} \underline{\phi}^T \cdot \underline{\phi}_p \, ds \cdot \underline{p}$$

considerando variação linear de carregamento ao longo do lado 1-4.

$$\underline{p} = \underline{p}(\eta) = \alpha_0 + \alpha_1 \eta = \{1 \ \eta\} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{p} = \underline{\psi} \cdot \underline{\alpha}$$

Avaliando a matriz $\underline{\psi}$ nos pontos nodais 1 e 4.

$$(\underline{p})_1 |_{\eta=0} = \alpha_0$$

$$(\underline{p})_4 |_{\eta=1} = \alpha_0 + \alpha_1$$

$$\underline{p} = \begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{x4} \end{Bmatrix} = \underline{H} \cdot \underline{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix}, \quad \underline{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{p} = \underline{\psi} \cdot \underline{H}^{-1} \cdot \underline{p} = \underline{\phi}_p \cdot \underline{p}$$

$$\underline{\phi}_p = \{1 \ \eta\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \{(1-\eta) \ \eta\}$$

$$\underline{\phi}^T = \begin{Bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) \\ \xi(1-\eta) \\ \xi\eta \\ (1-\xi)\eta \end{Bmatrix}, \quad \text{para o lado 1-4: } \xi = 0, \quad \underline{\phi}^T = \begin{Bmatrix} (1-\eta) \\ \eta \end{Bmatrix}$$

$$\underline{f}_s = \int_0^1 \begin{Bmatrix} (1-\eta) \\ \eta \end{Bmatrix} \{1-\eta \ \eta\} d\eta \cdot b \begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{x4} \end{Bmatrix} = b \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{x4} \end{Bmatrix} =$$

$$\underline{f}_s = b \begin{Bmatrix} \frac{1}{3}P_{x1} + \frac{1}{6}P_{x4} \\ \frac{1}{6}P_{x1} + \frac{1}{3}P_{x4} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Generalizando a expressão de \underline{f}_s para os quatro lados e ordenando:

$$\underline{f}_s = \begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ f_{s3} \\ f_{s4} \\ f_{s5} \\ f_{s6} \\ f_{s7} \\ f_{s8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1/3 P_{x1} + 1/6 P_{x4})b \\ (1/3 P_{y1} + 1/6 P_{y2})a \\ (1/3 P_{x2} + 1/6 P_{x3})b \\ (1/3 P_{y2} + 1/6 P_{y1})a \\ (1/3 P_{x3} + 1/6 P_{x2})b \\ (1/3 P_{y3} + 1/6 P_{y4})a \\ (1/3 P_{x4} + 1/6 P_{x1})b \\ (1/3 P_{y4} + 1/6 P_{y3})a \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Parcela \underline{f}_y :

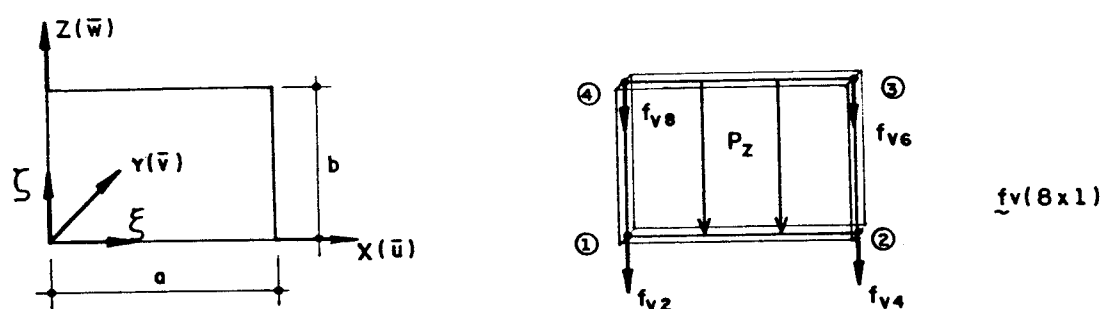


FIG. 2.4 - Cargas de volume no elemento (A.C.M.)

Considerando espessura constante d , tem-se:

$$\underline{f}_v = \int_S \underline{\phi}^T \cdot \underline{\phi}_g \cdot ds \cdot \underline{g} \quad , \text{ e}$$

$$\underline{g} = \begin{Bmatrix} P_{z1} \\ P_{z2} \\ P_{z3} \\ P_{z4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_z \\ P_z \\ P_z \\ P_z \end{Bmatrix} \quad \text{onde: } P_z = -\rho \cdot d \quad , \quad \text{e } \underline{\phi}_g = \underline{\phi} \quad (\text{calculada em (2.1).})$$

$$\underline{f}_v = \int_0^1 \int_0^1 \begin{Bmatrix} (1-\xi)(1-\zeta) \\ \xi(1-\zeta) \\ \xi\zeta \\ (1-\xi)\zeta \end{Bmatrix} \{ (1-\xi)(1-\zeta)\xi(1-\zeta)\xi\zeta(1-\xi)\zeta \} ab d \xi d \zeta \cdot \begin{Bmatrix} P_z \\ P_z \\ P_z \\ P_z \end{Bmatrix}$$

$$\underline{f}_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_z \\ P_z \\ P_z \\ P_z \end{Bmatrix} \quad ab = ab \quad \begin{Bmatrix} 1/4 P_z \\ 1/4 P_z \\ 1/4 P_z \\ 1/4 P_z \end{Bmatrix}$$

Ordenando os dados de \underline{f}_v para o vetor generalizado:

$$\underline{f}_v = \begin{Bmatrix} f_{v1} \\ f_{v2} \\ f_{v3} \\ f_{v4} \\ f_{v5} \\ f_{v6} \\ f_{v7} \\ f_{v8} \end{Bmatrix} = ab \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/4 P_z \\ 0 \\ 1/4 P_z \\ 0 \\ 1/4 P_z \\ 0 \\ 1/4 P_z \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

2.6. CÁLCULO DAS TENSÕES NUM PONTO GENÉRICO $p(\xi, \eta)$.

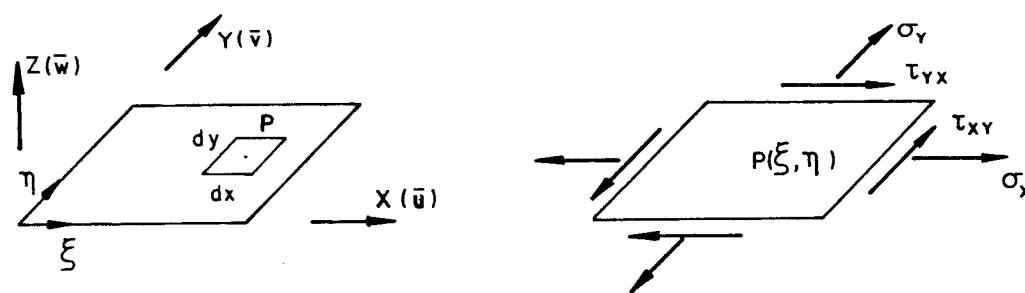


FIG. 2.5 - Tensões num ponto genérico P para o elemento (A.C.M.)

$$\bar{\sigma} = \underline{D} \cdot \bar{B} \cdot \underline{u}$$

$$\underline{\sigma} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \phi, \xi & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \phi, \eta \\ \frac{1}{b} \phi, \eta & \frac{1}{a} \phi, \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\sigma} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \phi, \xi & \frac{\nu}{b} \phi, \eta \\ \frac{\nu}{a} \phi, \xi & \frac{1}{b} \phi, \eta \\ \frac{1-\nu}{2b} \phi, \eta & \frac{1-\nu}{2a} \phi, \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x(\xi, \eta) \\ \sigma_y(\xi, \eta) \\ \tau_{xy}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{\eta-1}{a} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{\eta}{a} & \frac{-\eta}{a} & \frac{\nu(\xi-1)}{b} & \frac{-\nu\xi}{b} & \frac{\nu(1-\xi)}{b} \\ \frac{\nu(\eta-1)}{a} & \frac{\nu(1-\eta)}{a} & \frac{\nu\eta}{a} & \frac{-\nu\eta}{a} & \frac{\xi-1}{b} & \frac{\xi}{b} & \frac{1-\xi}{b} \\ \frac{(1-\nu)(\xi-1)}{2b} & \frac{-(1-\nu)\xi}{2b} & \frac{(1-\nu)\xi}{2b} & \frac{(1-\nu)(1-\xi)}{2b} & \frac{(1-\nu)(\eta-1)}{2a} & \frac{(1-\nu)\eta}{2a} & \frac{-(1-\nu)\eta}{2a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Ordenando para o novo arranjo do vetor de deslocamentos tem-se:

$$\vec{u}^T = \{ u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \}$$

$$\vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x(\xi, \eta) \\ \sigma_y(\xi, \eta) \\ \tau_{xy}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{\eta-1}{a} & \frac{\nu(\xi-1)}{b} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{-\nu\xi}{b} & \frac{\eta}{a} & \frac{\xi}{b} & \frac{\nu(1-\xi)}{b} & \frac{-\nu\eta}{a} \\ \frac{\nu(\eta-1)}{a} & \frac{\xi-1}{b} & \frac{\nu(1-\eta)}{a} & \frac{-\nu\eta}{a} & \frac{\nu\eta}{a} & \frac{\xi}{b} & \frac{1-\xi}{b} & \frac{-\nu\eta}{a} \\ \frac{(1-\nu)(\xi-1)}{2b} & \frac{(1-\nu)\eta}{2a} & \frac{-(1-\nu)\xi}{2b} & \frac{(1-\nu)(1-\xi)}{2b} & \frac{(1-\nu)\xi}{2b} & \frac{(1-\nu)\eta}{2a} & \frac{-(1-\nu)\eta}{2a} & \frac{-(1-\nu)\eta}{2a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

2.7. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO PARA O ELEMENTO (A.C.M.)

Exemplo 1: Viga simplesmente apoiada submetida a carregamento linearmente distribuído.

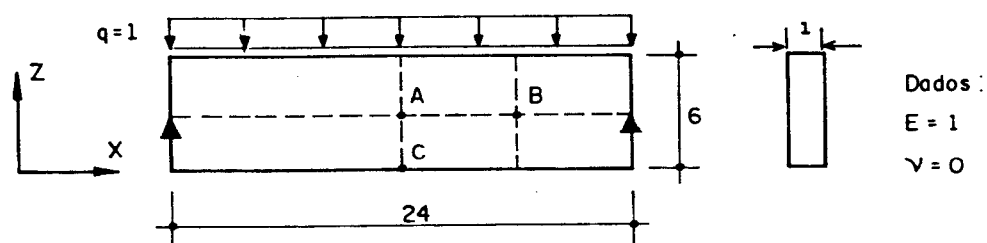


TABELA 2.1-Resultados comparativos para o Exemplo 1.

REDE	UZ DO PONTO A	UZ DO PONTO B	σ_x NO PONTO C
(8x2)	-236,3	-170,1	10,34
(16x2)	-261,5	-188,9	11,56
(16x4)	-266,7	-192,0	11,73
SOLUÇÃO ANALÍTICA	-268,8	-192,6	12,2

Exemplo 2: Viga engastada em uma extremidade, submetida a carregamento linearmente distribuído.

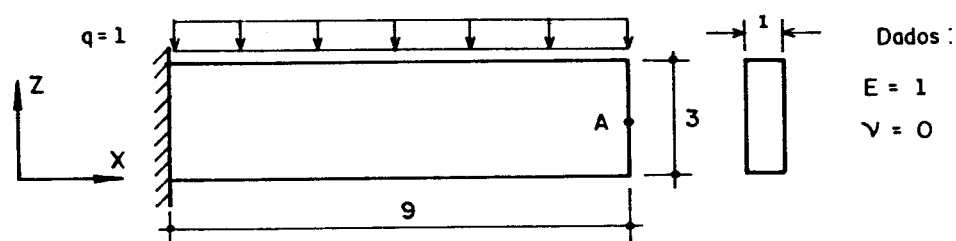


TABELA 2.2-Resultados comparativos para o Exemplo 2.

REDE	UZ DO PONTO A
(8x2)	-352,0
(16x2)	-388,4
(16x4)	-392,8
SOLUÇÃO ANALÍTICA	-396,8

Valores analíticos obtidos do Timoshenko-Goodier [11]

3. ELEMENTO RETANGULAR DE PLACA (B.F.S.)

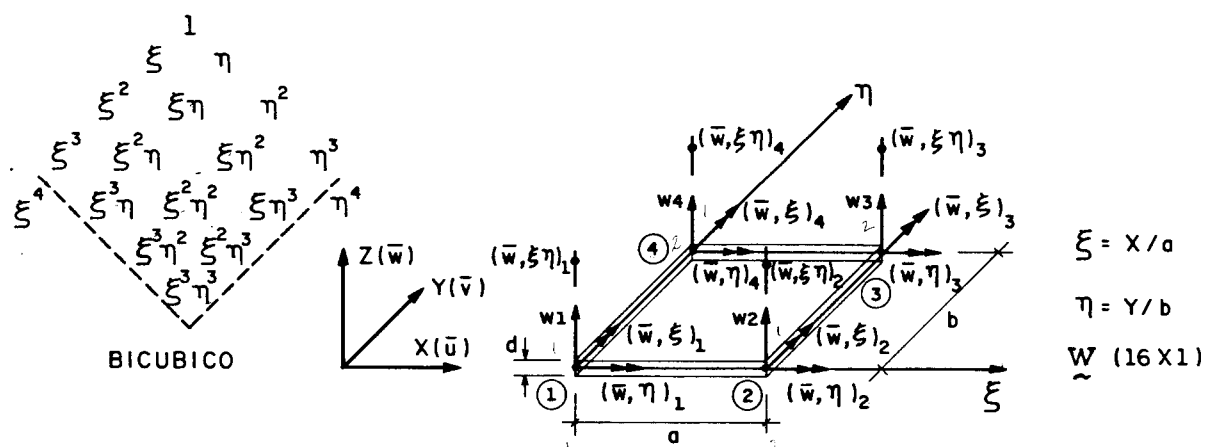


Fig. 31- Elemento de placa (B.F.S)

3.1. DESCRIÇÃO

É o elemento bidimensional retangular c(1), desenvolvido por BOGNER-FOX-SCHMIT conforme [6] para representar o comportamento à flexão; este elemento tem quatro nós de vértice, dezesseis graus de liberdade e funções de forma hermitianas bicúbicas, inclui o valor (\bar{w}, ξ_η) como parâmetros nodal o que garante a continuidade das derivadas primeiras normais aos lados, definindo-o como elemento conforme. Para o cálculo da matriz de rigidez do elemento foi adotado a teoria de Kirchhoff para placas delgadas que despreza a deformação por esforços cortantes.

3.2 CÁLCULO DA MATRIZ ϕ

Para o cálculo da matriz ϕ a partir de um polinômio cúbico completo em x e para a função de deslocamentos $\bar{w} = \bar{w}(x,y)$, utilizando coordenadas homogêneas, tem-se:

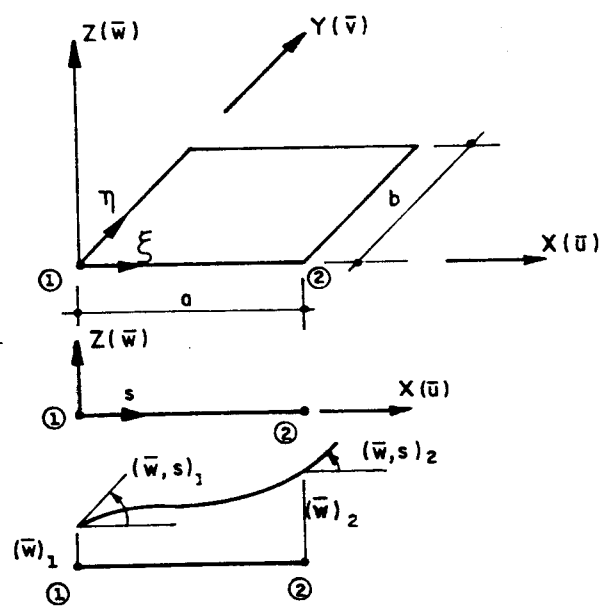


FIG. 3.2

$$\underline{w}(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 = \{1 \ s \ s^2 \ s^3\} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{w} = \underline{\psi} \cdot \underline{\alpha}$$

Avaliando a matriz $\underline{\psi}$ nos pontos nodais tem-se:

$$(\bar{w})_1 |_{s=0} = \alpha_0$$

$$(\bar{w}, s)_1 |_{s=0} = \alpha_1 / a$$

$$(\bar{w})_2 |_{s=1} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$(\bar{w}, s)_2 |_{s=1} = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3) / a$$

$$\underline{w}^* = \begin{Bmatrix} w_1 \\ a(\bar{w}, s)_1 \\ w_2 \\ a(\bar{w}, s)_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \underline{H} \cdot \underline{\alpha}$$

$$\underline{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{w} = \psi \cdot H^{-1} \cdot \bar{w}^*$$

$$\bar{w} = \phi \cdot \bar{w}^*$$

$$\bar{w} = \{1-3S^2+2S^3 \quad S-2S^2+S^3 \quad 3S^2+2S^3 \quad -S^2+S^3\} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ a(\bar{w}, s)_1 \\ \bar{w}_2 \\ a(\bar{w}, s)_2 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\bar{w} = \{1-3S^2+2S^3 \quad (S-2S^2+S^3)a \quad 3S^2+2S^3 \quad (-S^2+S^3)a\} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ (\bar{w}, s)_1 \\ \bar{w}_2 \\ (\bar{w}, s)_2 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\bar{w} = \phi^* \cdot w \quad (3.3)$$

onde as funções:

$$\begin{aligned} f_1(s) &= 1 - 3S^2 + 2S^3 \\ g_1(s) &= S - 2S^2 + S^3 \\ f_2(s) &= 3S^2 + 2S^3 \\ g_2(s) &= -S^2 + S^3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

são as chamadas funções Hermitianas de interpolação, propostas por Bogner, Fox e Schmidt [6], [15] para compor as funções de forma ϕ do elemento retangular de flexão.

Representação das funções de forma $f_1(s)$, $g_1(s)$, $f_2(s)$, $g_2(s)$.

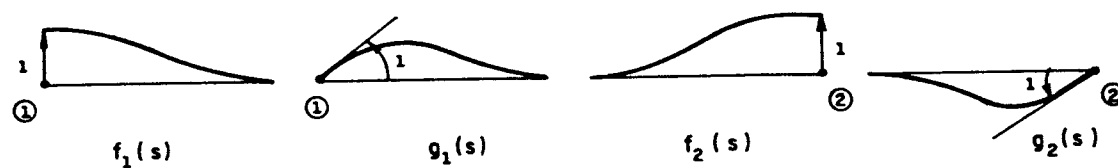


FIG. 3.3 - Representação das funções de forma $f_1(s)$, $g_1(s)$, $f_2(s)$, $g_2(s)$

As funções de forma composta para o elemento bidimensional são as seguintes:

$$\phi_1^* = f_1(\xi) \cdot f_1(\eta)$$

$$\phi_2^* = f_1(\xi) \cdot g_1(\eta) \cdot b$$

$$\phi_3^* = -g_1(\xi) \cdot a \cdot f_1(\eta)$$

$$\phi_4^* = g_1(\xi) \cdot a \cdot g_1(\eta) \cdot b$$

$$\phi_5^* = f_2(\xi) \cdot f_1(\eta)$$

$$\phi_6^* = f_2(\xi) \cdot g_1(\eta) \cdot b$$

$$\phi_7^* = -g_2(\xi) \cdot a \cdot f_1(\eta)$$

$$\phi_8^* = g_2(\xi) \cdot a \cdot g_1(\eta) \cdot b$$

$$\phi_9^* = f_2(\xi) \cdot f_2(\eta)$$

$$\phi_{10}^* = f_2(\xi) \cdot g_2(\eta) \cdot b$$

$$\phi_{11}^* = -g_2(\xi) \cdot a \cdot f_2(\eta)$$

$$\phi_{12}^* = g_2(\xi) \cdot a \cdot g_2(\eta) \cdot b$$

$$\phi_{13}^* = f_1(\xi) \cdot f_2(\eta)$$

$$\phi_{14}^* = f_1(\xi) \cdot g_2(\eta) \cdot b$$

$$\phi_{15}^* = -g_1(\xi) \cdot a \cdot f_2(\eta)$$

$$\phi_{16}^* = g_1(\xi) \cdot a \cdot g_2(\eta) \cdot b$$

Representação das funções ϕ_i para o nó 1:

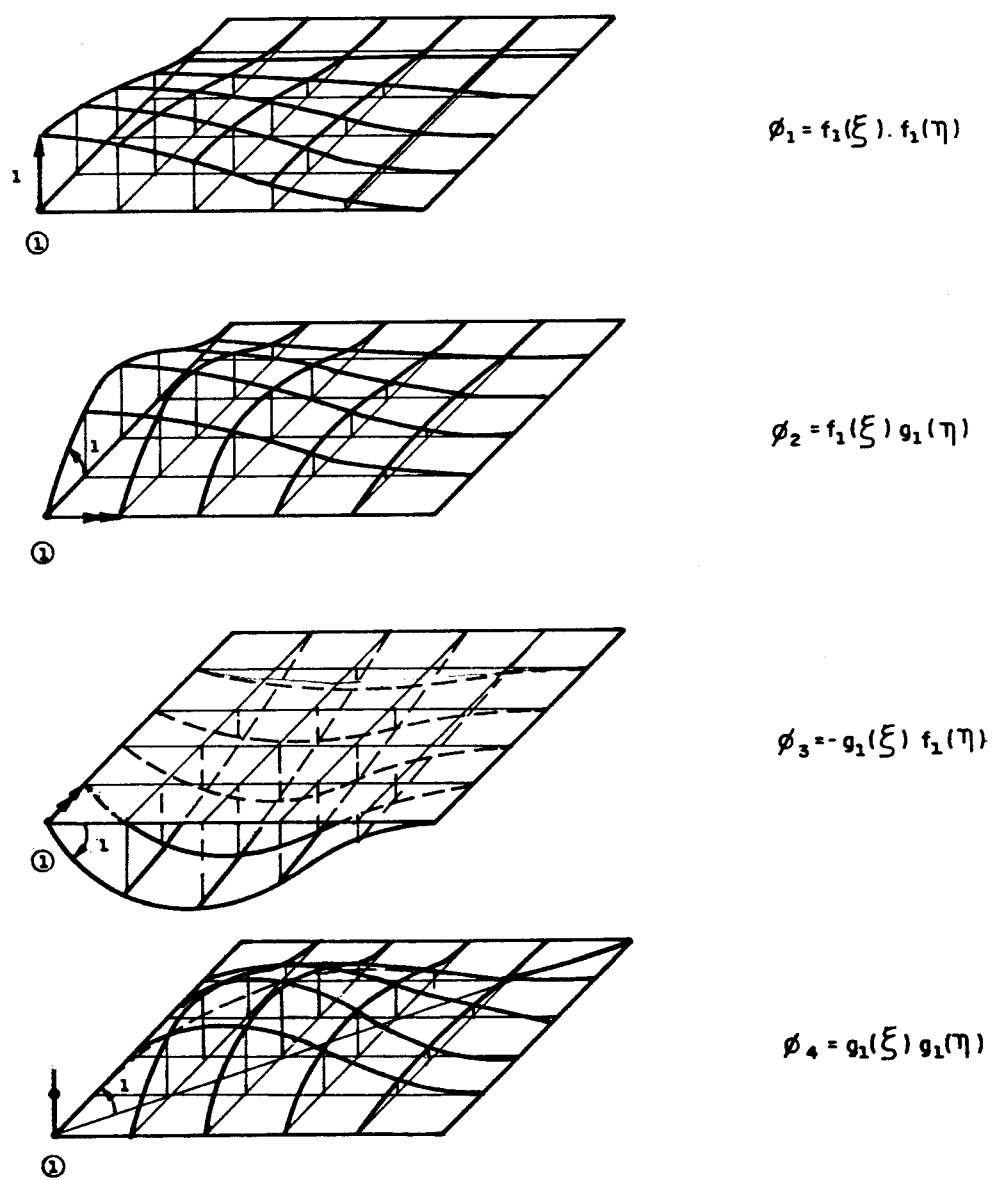


FIG. 3.4 - Representação das funções de forma ϕ para o nó 1

onde a matriz de funções de forma $\underline{\phi}$ está definida em forma compacta por:

$$\underline{\phi}^* = \{\underline{\phi}_1^* \quad \underline{\phi}_2^* \quad \underline{\phi}_3^* \quad \underline{\phi}_4^*\} = \{\underline{\phi}_1^* \quad \underline{\phi}_2^* \quad \underline{\phi}_3^* \quad \dots \quad \underline{\phi}_{16}^*\} \quad (3.5)$$

para o vetor de deslocamentos \underline{w} tem-se:

$$\underline{w}^T = \{(\bar{w})_1 \quad (\bar{w}, \eta)_1 \quad (\bar{w}, \xi)_1 \quad (\bar{w}, \xi\eta)_1 \quad \dots \quad (\bar{w}, \xi\eta)_4\}$$

CONVENÇÃO PARA COMPATIBILIZAR O PARÂMETRO NODAL w, ξ, η

Utilizando as funções de forma ϕ_i dos parâmetros nodais $(w, \xi, \eta)_i$ visualiza-se esquematicamente os sentidos positivos das rotações nos quatro nós do elemento.

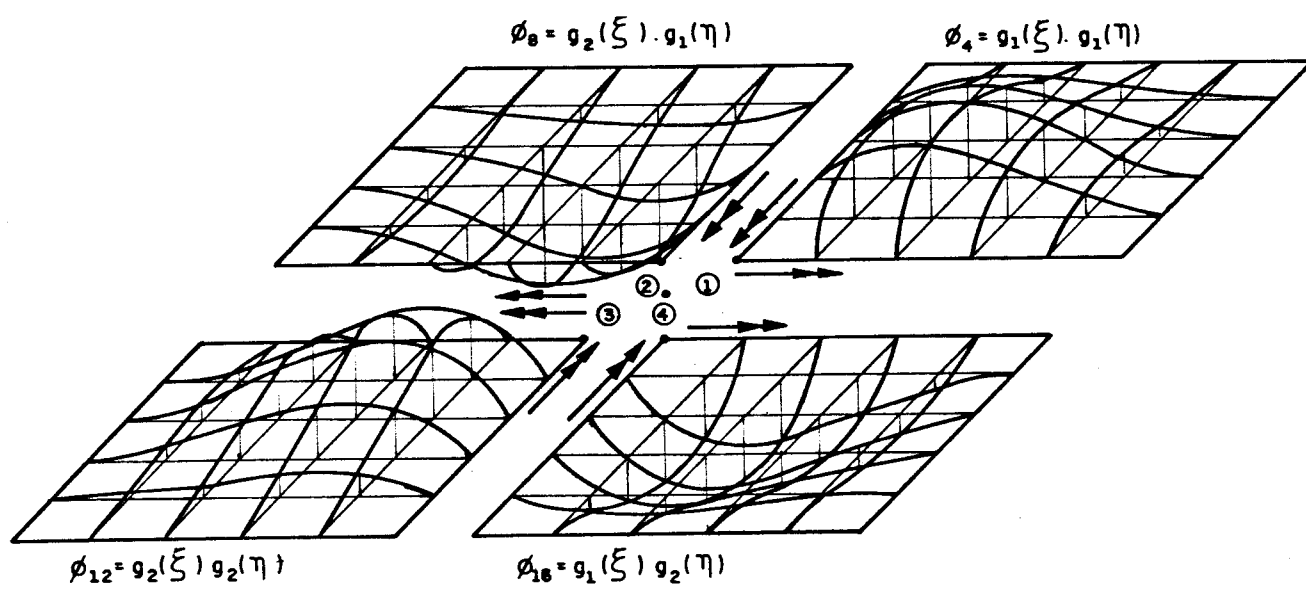


FIG. 3.4— Funções de forma $\phi_4, \phi_8, \phi_{12}, \phi_{16}$.

Funções envolvidas na composição das funções ϕ^* :

$$f_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$f_2(\xi) = 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$g_1(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$$

$$g_2(\xi) = \xi^3 - \xi^2$$

$$f_1(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3$$

$$f_2(\eta) = 3\eta^2 + 2\eta^3$$

$$g_1(\eta) = \eta - 2\eta^2 + \eta^3$$

$$g_2(\eta) = \eta^3 - \eta^2$$

3.3. CÁLCULO DA MATRIZ \bar{B} :

$$\bar{w} = \bar{\phi} \cdot w$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \\ \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \\ \frac{2}{ab} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \xi^2} \\ \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \eta^2} \\ \frac{2}{ab} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \xi \partial \eta} \end{pmatrix} \cdot w$$

$$\bar{\epsilon} = \bar{B} \cdot w$$

$$\bar{B}^T = \left\{ \frac{1}{a^2} \bar{\phi}_{,\xi\xi}^* \quad \frac{1}{b^2} \bar{\phi}_{,\eta\eta}^* \quad \frac{2}{ab} \bar{\phi}_{,\xi\eta}^* \right\}$$

3.4. CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ \bar{r}_p :

$$\bar{r}_p = \int_s \bar{B}^T \cdot \bar{D} \cdot \bar{B} \, ds$$

$$\bar{r}_p = \int_s \left[\frac{1}{a^2} \bar{\phi}_{,\xi\xi}^* \quad \frac{1}{b^2} \bar{\phi}_{,\eta\eta}^* \quad \frac{2}{ab} \bar{\phi}_{,\xi\eta}^* \right] \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \bar{\phi}_{,\xi\xi}^* \\ \frac{1}{b^2} \bar{\phi}_{,\eta\eta}^* \\ \frac{2}{ab} \bar{\phi}_{,\xi\eta}^* \end{bmatrix} \cdot ds$$

$$\bar{r}_p = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{4} \bar{\phi}_{,\xi\xi}^* \bar{\phi}_{,\xi\xi}^* + \frac{\nu}{a^2 b^2} \bar{\phi}_{,\eta\eta}^* \bar{\phi}_{,\xi\xi}^* + \frac{\nu}{a^2 b^2} \bar{\phi}_{,\xi\xi}^* \bar{\phi}_{,\eta\eta}^* + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{b^4} \bar{\phi}_{,\eta\eta}^* \bar{\phi}_{,\eta\eta}^* + \frac{2(1-\nu)}{a^2 b^2} \bar{\phi}_{,\xi\eta}^* \bar{\phi}_{,\xi\eta}^* \right\} ab d\xi d\eta \quad (3.7)$$

Expressão para cada elemento da matriz de rigidez:

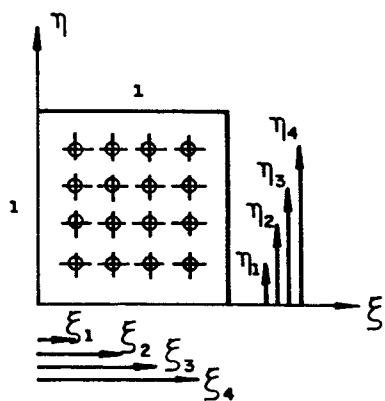
$$r_{p_{ij}} = \frac{Ed^3ab}{12(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{a^4} \phi^{*i},_{\xi\xi} \phi^{*j},_{\xi\xi} + \frac{\nu}{a^2b^2} \phi^{*i},_{\eta\eta} \phi^{*j},_{\xi\xi} + \frac{\nu}{a^2b^2} \phi^{*i},_{\xi\xi} \phi^{*j},_{\eta\eta} \right. \\ \left. + \frac{1}{b^4} \phi^{*i},_{\eta\eta} \phi^{*j},_{\eta\eta} + \frac{2(1-\nu)}{a^2b^2} \phi^{*i},_{\xi\eta} \phi^{*j},_{\xi\eta} \right\} d\xi d\eta$$

Depois da integração da expressão anterior tem-se:

$$r_{p_{ij}} = \frac{Ed^3ab}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{a^4} R1_{ij} + \frac{\nu}{a^2b^2} (R2_{ij} + R3_{ij}) + \frac{1}{b^4} R4_{ij} + \frac{2(1-\nu)}{a^2b^2} R5_{ij} \right\} CR_{ij} \quad (3.8)$$

Os coeficientes do elemento da matriz de rigidez serão obtidos por integração numérica explicitamente, e mostrados a seguir:

Integração numérica para 4 x 4 pontos de Gauss,



$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 f(\xi_i, \eta_j) w_j w_i$$

TABELA 3.1

η	grau exato	Ponto	ξ_i	w_i
4	até sexto	(1,4)	$\bar{\tau}$ 0,8611361311594	0,347854845137
		(2,3)	$\bar{\tau}$ 0,3399981043584	0,652145154862

Transformação:

$$\xi_i^* = (a+b)/2 + (b-a) \cdot \xi_i$$

$$w_i^* = (b-a)/2 w_i$$

$$\int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 f(\xi_j^*, \eta_i^*) w_j w_i$$

TABELA 3.2

η grau (exato)	Ponto	ξ_i^*	w_i^*
4 até sexto	1	0,0694318442	0,1739274225
	2	0,3300094782	0,3260725774
	3	0,6699905218	0,3260725774
	4	0,9305681558	0,1739274226

Cálculo demonstrativo de um elemento da matriz de rigidez:

Elemento R_{11} :

$$\phi_{,\xi\xi}^{*1} \phi_{,\xi\xi}^{*1} = (12\xi-6) (1-3\eta^2+2\eta^3) (12\xi-6) (1-3\eta^2+2\eta^3) = R1_{11}$$

$$\phi_{,\eta\eta}^{*1} \phi_{,\xi\xi}^{*1} = (1-3\xi^2+2\xi^3) (12\eta-6) (12\xi-6) (1-3\eta^2+2\eta^3) = R2_{11}$$

$$\phi_{,\xi\xi}^{*1} \phi_{,\eta\eta}^{*1} = (12\xi-6) (1-3\eta^2+2\eta^3) (1-3\xi^2+2\xi^3) (12\eta-6) = R3_{11}$$

$$\phi_{,\eta\eta}^{*1} \phi_{,\eta\eta}^{*1} = (1-3\xi^2+2\xi^3) (12\eta-6) (1-3\xi^2+2\xi^3) (12\eta-6) = R4_{11}$$

$$\phi_{,\xi\xi}^{*1} \phi_{,\xi\eta}^{*1} = (6\xi^2-6\xi) (6\eta^2-6\eta) (6\xi^2-6\xi) (6\eta^2-6\eta) = R5_{11}$$

ponto (,)	R1 ₁₁	R2 ₁₁	R3 ₁₁	R4 ₁₁	R5 ₁₁
$\xi_{1,n1}$	0,7854502237	0,7854502237	0,7854502237	0,7854502237	6,8323274x10 ⁻⁴
$\xi_{1,n2}$	0,8406774026	0,4392683658	0,4392683658	0,2295252574	0,015
$\xi_{1,n3}$
$\xi_{1,n4}$
$\xi_{2,n1}$
$\xi_{2,n2}$
$\xi_{2,n3}$
$\xi_{2,n4}$
$\xi_{3,n1}$
$\xi_{3,n2}$
$\xi_{3,n3}$
$\xi_{3,n4}$
$\xi_{4,n1}$
$\xi_{4,n2}$
$\xi_{4,n3}$
$\xi_{4,n4}$	1,5363647x10 ⁻⁴	1,5363647x10 ⁻⁴	1,5363647x10 ⁻⁴	1,5363647x10 ⁻⁴	6,8323274x10 ⁻⁴

$\Sigma=4,457142857$

$\Sigma=1,44$

$\Sigma=1,44$

$\Sigma=1,44$

$\Sigma=1,44$

Assim:

$$R1_{11} = 156/35$$

$$R2_{11} = 36/25$$

$$R3_{11} = 36/25$$

$$R4_{11} = 36/25$$

$$R5_{11} = 36/25$$

$$rp_{11} = \frac{Ed^3ab}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{a^4} (156/35) + \frac{\nu}{a^2b^2} (72/25) + \frac{1}{b^4} (36/25) + \frac{2(1-\nu)}{a^2b^2} (36/25) \right\} \cdot (1)$$

Os coeficientes dos elementos da matriz de rigidez estão apresentados a continuação, na tabela 3.3.

TABELA 3.3

ELEMENTO r_{ij}	$R1_{ij}$	$R2_{ij}$	$R3_{ij}$	$R4_{ij}$	$R5_{ij}$	CR_{ij}
rp ₁₁	156/35	36/25	36/25	156/35	36/25	1
rp ₁₂	22/35	3/25	33/25	78/35	3/25	b
rp ₁₃	78/35	33/25	3/25	22/35	3/25	-a
rp ₁₄	11/35	11/100	11/100	11/35	1/100	ab
rp ₁₅	-156/35	-36/25	-36/25	54/35	-36/25	1
rp ₁₆	-22/35	-3/25	-33/25	27/35	-3/25	b
rp ₁₇	78/35	3/25	3/25	-13/35	3/25	-a
rp ₁₈	11/35	1/100	11/100	-13/70	1/100	ab
rp ₁₉	-54/35	36/25	36/25	-54/35	36/25	1
rp ₁₁₀	13/35	-3/25	-3/25	27/35	-3/25	b
rp ₁₁₁	27/35	-3/25	-3/25	13/35	-3/25	-a
rp ₁₁₂	-13/70	1/100	1/100	-13/70	1/100	ab
rp ₁₁₃	54/35	-36/25	-36/25	-156/35	-36/25	1
rp ₁₁₄	-13/35	3/25	3/25	78/35	3/25	b
rp ₁₁₅	27/35	-33/25	-3/25	-22/35	-3/25	-a
rp ₁₁₆	-13/70	11/100	1/100	11/35	1/100	ab
rp ₂₂	4/35	4/25	4/25	52/35	4/25	b ²
rp ₂₃	11/35	1/100	121/100	11/35	1/100	-ab
rp ₂₄	2/35	11/75	1/75	22/105	1/75	ab ²
rp ₂₅	-22/35	-33/25	-3/25	27/35	-3/25	b
rp ₂₆	-4/35	-4/25	-4/25	18/35	-4/25	b ²
rp ₂₇	11/35	11/100	1/100	-13/70	1/100	-ab
rp ₂₈	2/35	1/75	1/75	-13/105	1/75	ab ²
rp ₂₉	-13/35	3/25	3/25	-27/35	3/25	b
rp ₂₁₀	3/35	1/25	1/25	9/35	1/25	b ²
rp ₂₁₁	13/70	-1/100	-1/100	13/70	-1/100	-ab
rp ₂₁₂	-3/70	-1/300	-1/300	-13/210	-1/300	ab ²
rp ₂₁₃	13/35	-3/25	-3/25	-78/35	-3/25	b
rp ₂₁₄	-3/35	-1/25	-1/25	26/35	-1/25	b ²
rp ₂₁₅	13/70	-11/100	-1/100	-11/35	-1/100	-ab
rp ₂₁₆	-3/70	-11/300	-1/300	11/105	-1/300	ab ²
rp ₃₃	52/35	4/25	4/25	4/35	4/25	a ²
rp ₃₄	22/105	1/75	11/75	2/35	1/75	-a ² b

ELEMENTO r_{ij}	$R1_{ij}$	$R2_{ij}$	$R3_{ij}$	$R4_{ij}$	$R5_{ij}$	CR_{ij}
rp ₃₅	-78/35	-3/25	-3/25	13/35	-3/25	-a
rp ₃₆	-11/35	-1/100	-11/100	13/70	-1/100	-ab
rp ₃₇	26/35	-1/25	-1/25	-3/35	-1/25	a ²
rp ₃₈	11/105	-1/300	-11/300	-3/70	-1/300	-a ² b
rp ₃₉	-27/35	3/25	3/25	-13/35	3/25	-a
rp ₃₁₀	13/70	-1/100	-1/100	13/70	-1/100	-ab
rp ₃₁₁	9/35	1/25	1/25	3/35	1/25	a ²
rp ₃₁₂	-13/210	-1/300	-1/300	-3/70	-1/300	-a ² b
rp ₃₁₃	27/35	-3/25	-33/25	-22/35	-3/25	-a
rp ₃₁₄	-13/70	1/100	11/100	11/35	1/100	-ab
rp ₃₁₅	18/35	-4/25	-4/25	-4/35	-4/25	a ²
rp ₃₁₆	-13/105	1/75	1/75	2/35	1/75	-a ² b
rp ₄₄	4/105	4/225	4/225	4/105	4/225	a ² b ²
rp ₄₅	-11/35	-11/100	-1/100	13/70	-1/100	ab
rp ₄₆	-2/35	-1/75	-1/75	13/105	-1/75	ab ²
rp ₄₇	11/105	-11/300	-1/300	-3/70	-1/300	-a ² b
rp ₄₈	2/105	-1/225	-1/225	-1/35	-1/225	a ² b ²
rp ₄₉	-13/70	1/100	1/100	-13/70	1/100	ab
rp ₄₁₀	3/70	1/300	1/300	13/210	1/300	ab ²
rp ₄₁₁	13/210	1/300	1/300	3/70	1/300	-a ² b
rp ₄₁₂	-1/70	1/900	1/900	-1/70	1/900	a ² b ²
rp ₄₁₃	13/70	-1/100	-11/100	-11/35	-1/100	ab
rp ₄₁₄	-3/70	-1/300	-11/300	11/105	-1/300	ab ²
rp ₄₁₅	13/105	-1/75	-1/75	-2/35	-1/75	-a ² b
rp ₄₁₆	-1/35	-1/225	-1/225	2/105	-1/225	a ² b ²
rp ₅₅	156/35	36/25	36/25	156/35	36/25	1
rp ₅₆	22/35	3/25	33/25	78/35	3/25	b
rp ₅₇	-78/35	-33/25	-3/25	-22/35	-3/25	-a
rp ₅₈	-11/35	-11/100	-11/100	-11/35	-1/100	ab
rp ₅₉	54/35	-36/25	-36/25	-156/35	-36/25	1
rp ₅₁₀	-13/35	3/25	3/25	78/35	3/25	b
rp ₅₁₁	-27/35	33/25	3/25	22/35	3/25	-a

ELEMENTO r_{ij}	$R1_{ij}$	$R2_{ij}$	$R3_{ij}$	$R4_{ij}$	$R5_{ij}$	CR_{ij}
rp ₅₁₂	13/70	-11/100	-1/100	-11/35	-1/100	ab
rp ₅₁₃	-54/35	36/25	36/25	-54/35	36/25	1
rp ₅₁₄	13/35	-3/25	-3/25	27/35	-3/25	b
rp ₅₁₅	-27/35	3/25	3/25	-13/35	3/25	-a
rp ₅₁₆	13/70	-1/100	-1/100	13/70	-1/100	ab
rp ₆₆	4/35	4/25	4/25	52/35	4/25	b ²
rp ₆₇	-11/35	-1/100	-121/100	-11/35	-1/100	-ab
rp ₆₈	-2/35	-11/75	-1/75	-22/105	-1/75	ab ²
rp ₆₉	13/35	-3/25	-3/25	-78/35	-3/25	b
rp ₆₁₀	-3/35	-1/25	-1/25	26/35	-1/25	b ²
rp ₆₁₁	-13/70	11/100	1/100	11/35	1/100	-ab
rp ₆₁₂	3/70	11/300	1/300	-11/105	1/300	ab ²
rp ₆₁₃	-13/35	3/25	3/25	-27/35	3/25	b
rp ₆₁₄	3/35	1/25	1/25	9/35	1/25	b ²
rp ₆₁₅	-13/70	1/100	1/100	-13/70	1/100	-ab
rp ₆₁₆	3/70	1/300	1/300	13/210	1/300	ab ²
rp ₇₇	52/35	4/25	4/25	4/35	4/25	a ²
rp ₇₈	22/105	1/75	11/75	2/35	1/75	-a ² b
rp ₇₉	-27/35	3/25	33/25	22/35	3/25	-a
rp ₇₁₀	13/70	-1/100	-11/100	-11/35	-1/100	-ab
rp ₇₁₁	18/35	-4/25	-4/25	-4/35	-4/25	a ²
rp ₇₁₂	-13/105	1/75	1/75	2/35	1/75	-a ² b
rp ₇₁₃	27/35	-3/25	-3/25	13/35	-3/25	-a
rp ₇₁₄	-13/70	1/100	1/100	-13/70	1/100	-ab
rp ₇₁₅	9/35	1/25	1/25	3/35	1/25	a ²
rp ₇₁₆	-13/210	-1/300	-1/300	-3/70	-1/300	-a ² b
rp ₈₈	4/105	4/225	4/225	4/105	4/225	a ² b ²
rp ₈₉	-13/70	1/100	11/100	11/35	1/100	ab
rp ₈₁₀	3/70	1/300	11/300	-11/105	1/300	ab ²
rp ₈₁₁	13/105	-1/75	-1/75	-2/35	-1/75	-a ² b
rp ₈₁₂	-1/35	-1/225	-1/225	2/105	-1/225	a ² b ²

ELEMENTO r_{ij}	$R1_{ij}$	$R2_{ij}$	$R3_{ij}$	$R4_{ij}$	$R5_{ij}$	CR_{ij}
rp ₈₁₃	13/70	-1/100	-1/100	13/70	-1/100	ab
rp ₈₁₄	-3/70	-1/300	-1/300	-13/210	-1/300	ab ²
rp ₈₁₅	13/210	1/300	1/300	3/70	1/300	-a ² b
rp ₈₁₆	-1/70	1/900	1/900	-1/70	1/900	a ² b ²
rp ₉₉	156/35	36/25	36/25	156/35	36/25	1
rp ₉₁₀	-22/35	-3/25	-33/25	-78/35	-3/25	b
rp ₉₁₁	-78/35	-33/25	-3/25	-22/35	-3/25	-a
rp ₉₁₂	11/35	11/100	11/100	11/35	1/100	ab
rp ₉₁₃	156/35	-36/25	-36/25	54/35	-36/25	1
rp ₉₁₄	22/35	3/25	33/25	-27/35	3/25	b
rp ₉₁₅	-78/35	-3/25	-3/25	13/35	-3/25	-a
rp ₉₁₆	11/35	1/100	11/100	-13/70	1/100	ab
rp ₁₀₁₀	4/35	4/25	4/25	52/35	4/25	b ²
rp ₁₀₁₁	11/35	1/100	121/100	11/35	1/100	-ab
rp ₁₀₁₂	-2/35	-11/75	-1/75	-22/105	-1/75	ab ²
rp ₁₀₁₃	22/35	33/25	3/25	-27/35	3/25	b
rp ₁₀₁₄	-4/35	-4/25	-4/25	18/35	-4/25	b ²
rp ₁₀₁₅	11/35	11/100	1/100	-13/70	1/100	-ab
rp ₁₀₁₆	-2/35	-1/75	-1/75	13/105	-1/75	ab ²
rp ₁₁₁₁	52/35	4/25	4/25	4/35	4/25	a ²
rp ₁₁₁₂	-22/105	-1/75	-11/75	-2/35	-1/75	-a ² b
rp ₁₁₁₃	78/35	3/25	3/25	-13/35	3/25	-a
rp ₁₁₁₄	-11/35	-1/100	-11/100	13/70	-1/100	-ab
rp ₁₁₁₅	26/35	-1/25	-1/25	-3/35	-1/25	a ²
rp ₁₁₁₆	-11/105	1/300	11/300	3/70	1/300	-a ² b
rp ₁₂₁₂	4/105	4/225	4/225	4/105	4/225	a ² b ²
rp ₁₂₁₃	-11/35	-11/100	-1/100	13/70	-1/100	ab
rp ₁₂₁₄	2/35	1/75	1/75	-13/105	1/75	ab ²
rp ₁₂₁₅	-11/105	11/300	1/300	3/70	1/300	-a ² b
rp ₁₂₁₆	2/105	-1/225	-1/225	-1/35	-1/225	a ² b ²

ELEMENTO r_{ij}	$R1_{ij}$	$R2_{ij}$	$R3_{ij}$	$R4_{ij}$	$R5_{ij}$	CR_{ij}
rp ₁₃₁₃	156/35	36/25	36/25	156/35	36/25	1
rp ₁₃₁₄	-22/35	-3/25	-33/25	-78/35	-3/25	b
rp ₁₃₁₅	78/35	33/25	3/25	22/35	3/25	-a
rp ₁₃₁₆	-11/35	-11/100	-11/100	-11/35	-1/100	ab
rp ₁₄₁₄	4/35	4/35	4/25	52/35	4/25	b ²
rp ₁₄₁₅	-11/35	-1/100	-121/100	-11/35	-1/100	-ab
rp ₁₄₁₆	2/35	11/75	1/75	22/105	1/75	ab ²
rp ₁₅₁₅	52/35	4/25	4/25	4/35	4/25	a ²
rp ₁₅₁₆	-22/105	-1/75	-11/75	-2/35	-1/75	-a ² b
rp ₁₆₁₆	4/105	4/225	4/225	4/105	4/225	a ² b ²

Elementos que se repetem na matriz de rigidez:

$$rp_{11} = rp_{55} = rp_{99} = rp_{1313}$$

$$rp_{12} = rp_{56} = -rp_{910} = -rp_{1314}$$

$$rp_{13} = -rp_{57} = -rp_{911} = rp_{1315}$$

$$rp_{14} = -rp_{58} = rp_{912} = -rp_{1316}$$

$$rp_{15} = rp_{913}$$

$$rp_{16} = rp_{25} = -rp_{914} = -rp_{1013}$$

$$rp_{17} = rp_{35} = -rp_{915} = rp_{1113}$$

$$rp_{18} = -rp_{27} = rp_{36} = -rp_{45} = rp_{916} = -rp_{1015} = rp_{1114} = -rp_{1213}$$

$$rp_{19} = rp_{513}$$

$$rp_{110} = -rp_{29} = rp_{514} = -rp_{613}$$

$$rp_{111} = -rp_{39} = -rp_{515} = rp_{713}$$

$$rp_{112} = rp_{211} = rp_{310} = rp_{49} = -rp_{516} = -rp_{615} = -rp_{714} = -rp_{813}$$

$$rp_{113} = rp_{59}$$

$$rp_{114} = -rp_{213} = rp_{510} = -rp_{69}$$

$$rp_{115} = rp_{313} = -rp_{511} = -rp_{79}$$

$$rp_{116} = rp_{215} = -rp_{314} = -rp_{413} = -rp_{512} = -rp_{611} = rp_{710} = rp_{89}$$

$$rp_{22} = rp_{66} = rp_{1010} = rp_{1414}$$

$$rp_{23} = -rp_{67} = rp_{1011} = -rp_{1415}$$

$$rp_{24} = -rp_{68} = -rp_{1012} = rp_{1416}$$

$$rp_{26} = rp_{1014}$$

$$rp_{28} = -rp_{46} = -rp_{1016} = rp_{1214}$$

$$rp_{210} = rp_{614}$$

$$rp_{212} = -rp_{410} = -rp_{616} = rp_{814}$$

$$rp_{214} = rp_{610}$$

$$\begin{aligned}
 r_{p216} &= r_{p414} = -r_{p612} = -r_{p810} \\
 r_{p33} &= r_{p77} = r_{p1111} = r_{p1515} \\
 r_{p34} &= r_{p78} = -r_{p1112} = -r_{p1516} \\
 r_{p37} &= r_{p1115} \\
 r_{p38} &= r_{p47} = -r_{p1116} = -r_{p1215} \\
 r_{p311} &= r_{p715} \\
 r_{p312} &= -r_{p411} = r_{p716} = -r_{p815} \\
 r_{p315} &= r_{p711} \\
 r_{p316} &= -r_{p415} = r_{p712} = -r_{p811} \\
 r_{p44} &= r_{p88} = r_{p1212} = r_{p1616} \\
 r_{p48} &= r_{p1216} \\
 r_{p412} &= r_{p816} \\
 r_{p416} &= r_{p812}
 \end{aligned}$$

3.5. CARGAS NODAIS EQUIVALENTES:

Cargas distribuídas na face do elemento:

parcela \underline{f}_s :

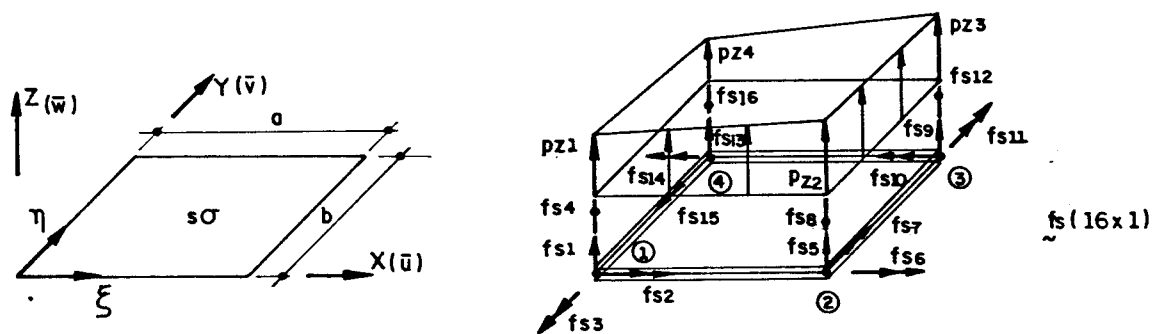


FIG. 3.5 - Cargas distribuídas na face do elemento

$$\underline{f}_s = \int_{s\sigma} \underline{\phi}^{*T} \cdot \underline{\phi}_p ds \cdot P$$

$\underline{\phi}_p = \{(1-\xi)(1-\eta) \quad \xi(1-\eta) \quad \xi\eta \quad (1-\xi)\eta\}$, para variação linear de carga.

$$\underline{\phi}^{*T} = \begin{pmatrix} f_1(\xi) & \cdot & f_1(\eta) \\ f_1(\xi) & \cdot & g_1(\eta)b \\ -g_1(\xi)a & \cdot & f_1(\eta) \\ g_1(\xi)a & \cdot & g_1(\eta)b \\ f_2(\xi) & \cdot & f_1(\eta) \\ f_2(\xi) & \cdot & g_1(\eta)b \\ -g_2(\xi)a & \cdot & f_1(\eta) \\ g_2(\xi)a & \cdot & g_1(\eta)b \\ f_2(\xi) & \cdot & f_2(\eta) \\ f_2(\xi) & \cdot & g_2(\eta)b \\ -g_2(\xi)a & \cdot & f_2(\eta) \\ g_2(\xi)a & \cdot & g_2(\eta)b \\ f_1(\xi) & \cdot & f_2(\eta) \\ f_1(\xi) & \cdot & g_2(\eta)b \\ -g_1(\xi)a & \cdot & f_2(\eta) \\ g_1(\xi)a & \cdot & g_2(\eta)b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-3\xi^2+2\xi^3) & \cdot & (1-3\eta^2+2\eta^3) \\ (1-3\xi^2+2\xi^3) & \cdot & (\eta-2\eta^2+\eta^3)b \\ -(\xi-2\xi^2+\xi^3)a & \cdot & (1-3\eta^2+2\eta^3) \\ (\xi-2\xi^2+\xi^3)a & \cdot & (\eta-2\eta^2+\eta^3)b \\ (3\xi^2-2\xi^3) & \cdot & (1-3\eta^2+2\eta^3) \\ (3\xi^2-2\xi^3) & \cdot & (\eta-2\eta^2+\eta^3)b \\ -(\xi^3-\xi^2)a & \cdot & (1-3\eta^2+2\eta^3) \\ (\xi^3-\xi^2)a & \cdot & (\eta-2\eta^2+\eta^3)b \\ (3\xi^2-2\xi^3) & \cdot & (3\eta^2+2\eta^3) \\ (3\xi^2-2\xi^3) & \cdot & (\eta^3-\eta^2)b \\ -(\xi^3-\xi^2)a & \cdot & (3\eta^2+2\eta^3) \\ (\xi^3-\xi^2)a & \cdot & (\eta^3-\eta^2)b \\ (1-3\xi^2+2\xi^3) & \cdot & (3\eta^2-2\eta^3) \\ (1-3\xi^2+2\xi^3) & \cdot & (\eta^3-\eta^2)b \\ -(\xi-2\xi^2+\xi^3)a & \cdot & (3\eta^2-2\eta^3) \\ (\xi-2\xi^2+\xi^3)a & \cdot & (\eta^3-\eta^2)b \end{pmatrix}$$

$\underline{f}_s = ab \int_0^1 \int_0^1 \underline{\phi}^{*T} \cdot \underline{\phi}_p \cdot d\xi d\eta \cdot p$, integrando e ordenando os termos:

$$\underline{f}_{si} = ab \{ F_{1i} F_{2i} F_{3i} F_{4i} \} \begin{pmatrix} P_{z1} \\ P_{z2} \\ P_{z3} \\ P_{z4} \end{pmatrix} \cdot cF_i =$$

$$\underline{f}_{si} = \{ P_{z1} \cdot F_{1i} + P_{z2} \cdot F_{2i} + P_{z3} \cdot F_{3i} + P_{z4} \cdot F_{4i} \} a \cdot b \cdot cF_i \quad (3.9)$$

TABELA 3.4

ELEMENTO f_{s_i}	$F1_i$	$F2_i$	$F3_i$	$F4_i$	cF_i
f_{s1}	49/400	21/400	9/4000	21/400	l
f_{s2}	7/400	3/400	1/200	7/600	b
f_{s3}	7/400	7/600	1/200	3/400	-a
f_{s4}	1/400	1/600	1/900	1/600	ab
f_{s5}	21/400	49/400	21/400	9/400	l
f_{s6}	3/400	7/400	7/600	1/200	b
f_{s7}	-7/600	-7/400	-3/400	-1/200	-a
f_{s8}	-1/600	-1/400	-1/600	-1/900	ab
f_{s9}	9/400	21/400	49/400	21/400	l
f_{s10}	-1/200	-7/600	-7/400	-3/400	b
f_{s11}	-1/200	-3/400	-7/400	-7/600	-a
f_{s12}	1/900	1/600	1/400	1/600	ab
f_{s13}	21/400	9/400	21/400	49/400	l
f_{s14}	-7/600	-1/200	-3/400	-7/400	b
f_{s15}	3/400	1/200	7/600	7/400	-a
f_{s16}	-1/600	-1/900	-1/600	-7/400	ab

Parcela f_v :

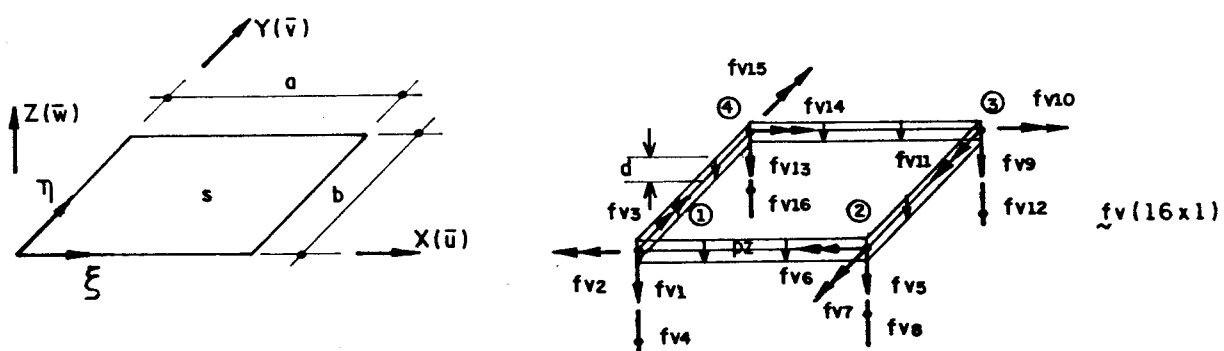


FIG. 3.6 — Cargas de peso próprio

Considerando espessura constante e como carga o peso próprio.

$$\underline{f}_v = \int_S \underline{\phi}^{*T} \cdot \underline{\phi}_g \cdot ds \cdot \underline{g} \quad , \quad e$$

$$\underline{g} = \begin{Bmatrix} P_{z1} \\ P_{z2} \\ P_{z3} \\ P_{z4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_z \\ P_z \\ P_z \\ P_z \end{Bmatrix} \quad \text{onde: } P_z = -\rho \cdot d \quad e \quad \underline{\phi}_g = \underline{\phi}_p$$

$$\underline{f}_v = ab \int_0^1 \int_0^1 \underline{\phi}^{*T} \cdot \underline{\phi}_g \, d\xi d\eta \cdot \underline{g}$$

Depois da integração:

$$\underline{f}_{vi} = ab \{ F1_i \ F2_i \ F3_i \ F4_i \} \begin{Bmatrix} P_z \\ P_z \\ P_z \\ P_z \end{Bmatrix} \quad cF_i = abP_z \{ F1_i + F2_i + F3_i + F4_i \} \quad cF_i = abP_z \cdot F_i \cdot cF_i \quad (3.10)$$

Utilizando os valores obtidos na tabela 3.4

TABELA 3.5

ELEMENTO fv _i	F _i	cF _i
fv ₁	1/4	1
fv ₂	1/24	b
fv ₃	1/24	-a
fv ₄	1/144	ab
fv ₅	1/4	1
fv ₆	1/24	b
fv ₇	-1/24	-a
fv ₈	-1/144	ab
fv ₉	1/4	1
fv ₁₀	-1/24	b
fv ₁₁	-1/24	-a
fv ₁₂	1/144	ab
fv ₁₃	1/4	1
fv ₁₄	-1/24	b
fv ₁₅	1/24	-a
fv ₁₆	-1/144	ab

Cargas transversais distribuídas no lado do elemento.

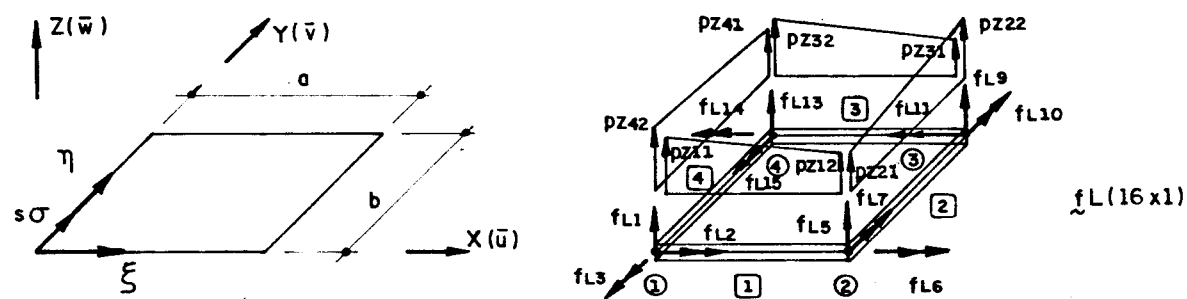


FIG. 3.7 - Cargas distribuídas no lado do elemento

$$\underline{f}_L = \int_{s\sigma} \underline{\phi}^{*T} \cdot \underline{\phi}_p \cdot dS \cdot \underline{P}$$

Considerando como lado carregado o 4:

$$\underline{\phi}_p = \{(1-\xi)(1-\eta) \quad \xi(1-\eta) \quad \xi\eta \quad (1-\xi)\eta\}, \text{ para } \xi=0 \text{ tem-se:}$$

$$\underline{\phi}_p = \{1-\eta \quad \eta\} \text{ no lado 4.}$$

$$\underline{\phi}^{*T} = \begin{Bmatrix} (1-3\xi^2+2\xi^3) & \cdot (1-3\eta^2+2\eta^3) \\ (1-3\xi^2+2\xi^3) & \cdot (\eta-2\eta^2+\eta^3)b \\ -(\xi-2\xi^2+\xi^3)a & \cdot (1-3\eta^2+2\eta^3) \\ (\xi-2\xi^2+\xi^3)a & \cdot (\eta-2\eta^2+\eta^3)b \\ (3\xi^2-2\xi^3) & \cdot (1-3\eta^2+2\eta^3) \\ (3\xi^2-2\xi^3) & \cdot (\eta-2\eta^2+\eta^3)b \\ -(\xi^3-\xi^2)a & \cdot (1-3\eta^2+2\eta^3) \\ (\xi^3-\xi^2)a & \cdot (\eta-2\eta^2+\eta^3)b \\ (3\xi^2-2\xi^3) & \cdot (3\eta^2-2\eta^3) \\ (3\xi^2-2\xi^3) & \cdot (\eta^3-\eta^2)b \\ -(\xi^3-\xi^2)a & \cdot (3\eta^2-2\eta^3) \\ (\xi^3-\xi^2)a & \cdot (\eta^3-\eta^2)b \\ (1-3\xi^2+2\xi^3) & \cdot (3\eta^2-2\eta^3) \\ (1-3\xi^2+2\xi^3) & \cdot (\eta^3-\eta^2)b \\ -(\xi-2\xi^2+\xi^3)a & \cdot (3\eta^2-2\eta^3) \\ (\xi-2\xi^2+\xi^3)a & \cdot (\eta^3-\eta^2)b \end{Bmatrix}$$

para $\xi = 0$ tem-se:

$$\bar{\phi}^T = \left\{ \begin{array}{c} 1-3\eta^2 + 2\eta^3 \\ (\eta-2\eta^2+\eta^3)b \\ 0 \\ 0 \\ 3\eta^2 - 2\eta^3 \\ (\eta^3 - \eta^2)b \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad \text{no lado 4.}$$

$$\bar{f}_L = \int_0^1 \left\{ \begin{array}{c} 1-3\eta^2 + 2\eta^3 \\ (\eta-2\eta^2+\eta^3)b \\ 0 \\ 0 \\ 3\eta^2 - 2\eta^3 \\ (\eta^3 - \eta^2)b \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \{1-\eta \eta\} d\eta \cdot b = \left\{ \begin{array}{c} 7/20bP_{z42} + 3/20bP_{z41} \\ (1/20P_{z42} + 1/30P_{z41})b^2 \\ 0 \\ 0 \\ 7/20bP_{z41} + 3/20bP_{z42} \\ -(1/20P_{z41} + 1/30P_{z42})b^2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

generalizando:

$$\bar{f}_L = \left\{ \begin{array}{c} f_{L1} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 7/20(aP_{z11} + bP_{z42}) + 3/20(aP_{z12} + bP_{z41}) \\ (1/20 P_{z42} + 1/30P_{z41})b^2 \\ -(1/20 P_{z11} + 1/30P_{z12})a^2 \\ 0 \\ 7/20(aP_{z12} + bP_{z21}) + 3/20(aP_{z11} + bP_{z22}) \\ (1/20 P_{z21} + 1/30P_{z22})b^2 \\ (1/20 P_{z12} + 1/30P_{z11})a^2 \\ 0 \\ 7/20(aP_{z31} + bP_{z22}) + 3/20(aP_{z32} + bP_{z21}) \\ -(1/20 P_{z22} + 1/30P_{z21})b^2 \\ (1/20 P_{z31} + 1/30P_{z32})a^2 \\ 0 \\ 7/20(aP_{z32} + bP_{z41}) + 3/20(aP_{z31} + bP_{z42}) \\ -(1/20 P_{z41} + 1/30P_{z42})b^2 \\ -(1/20 P_{z32} + 1/30P_{z31})a^2 \\ 0 \end{array} \right\}$$

(3.11)

3.6. CÁLCULO DOS ESFORÇOS NUM PONTO GENÉRICO P(ξ, η).

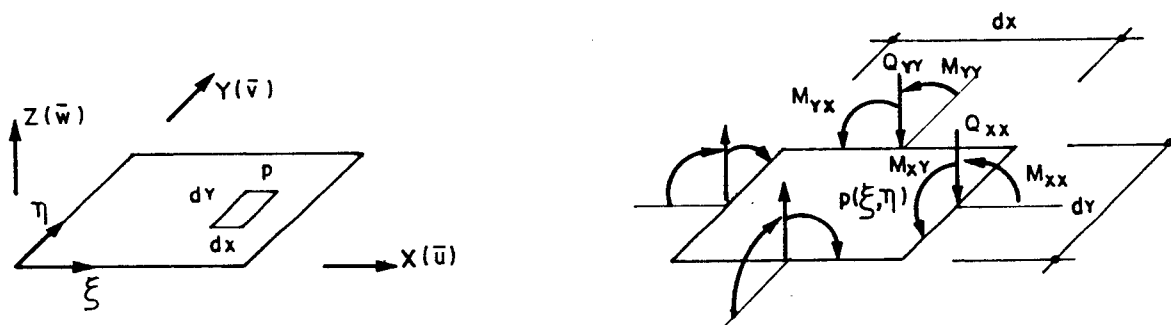


FIG. 3.8 - Esforços num ponto genérico

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \underline{D} \cdot \bar{\epsilon} \\ \bar{\sigma} &= \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{w} \end{aligned}$$

$$\bar{M} = \frac{d^3}{12} \cdot \bar{\sigma} = \frac{d^3}{12} \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{w} = \underline{D}^* \cdot \underline{B} \cdot \underline{w}$$

$$\bar{M} = \begin{Bmatrix} M_{xx}(\xi, \eta) \\ M_{yy}(\xi, \eta) \\ M_{xy}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} \phi^*,_{\xi\xi} \\ \frac{1}{b^2} \phi^*,_{\eta\eta} \\ \frac{2}{ab} \phi^*,_{\xi\eta} \end{bmatrix} \cdot \underline{w}$$

$$\bar{M}_L = \begin{Bmatrix} M_{xx}(\xi, \eta) \\ M_{yy}(\xi, \eta) \\ M_{xy}(\xi, \eta) \end{Bmatrix}_L = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} (\phi^*,_{\xi\xi})_L + \frac{\nu}{b^2} (\phi^*,_{\eta\eta})_L \\ \frac{\nu}{a^2} (\phi^*,_{\xi\xi})_L + \frac{1}{b^2} (\phi^*,_{\eta\eta})_L \\ \frac{1-\nu}{ab} (\phi^*,_{\xi\eta})_L \end{bmatrix} \cdot w_L;$$

para o índice L = 1, 16.

(3.12)

As expressões que relacionam esforços cortantes e momentos fletores obtidas da teoria da elasticidade são:

$$\bar{Q}_{xx} = \bar{M}_{xx,x} + \bar{M}_{xy,y}$$

$$\bar{Q}_{yy} = \bar{M}_{yy,y} + \bar{M}_{xy,x}$$

$$\bar{Q} = \begin{Bmatrix} Q_{xx}(\xi, \eta) \\ Q_{yy}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^3} \underline{\phi}^*{}_{,\xi\xi\xi} + \frac{1}{ab^2} \underline{\phi}^*{}_{,\xi\eta\eta} \\ \frac{1}{b^3} \underline{\phi}^*{}_{,\eta\eta\eta} + \frac{1}{a^2b} \underline{\phi}^*{}_{,\eta\xi\xi} \end{bmatrix} \cdot \underline{w}$$

$$\bar{Q} = \begin{Bmatrix} Q_{xx}(\xi, \eta) \\ Q_{yy}(\xi, \eta) \end{Bmatrix}_L = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^3} (\underline{\phi}^*{}_{,\xi\xi\xi})_L + \frac{1}{ab^2} (\underline{\phi}^*{}_{,\xi\eta\eta})_L \\ \frac{1}{b^3} (\underline{\phi}^*{}_{,\eta\eta\eta})_L + \frac{1}{a^2b} (\underline{\phi}^*{}_{,\eta\xi\xi})_L \end{bmatrix} \cdot \underline{w}_L$$

para o índice $L = 1, 16$

(3.13)

expressões ordenadas para o seguinte arranjo do vetor de deslocamentos:

$$\underline{w}^T = \{ \bar{w}_1 \ (\bar{w}, \eta)_1 \ (\bar{w}, \xi)_1 \ (\bar{w}, \xi\eta)_1 \dots (\bar{w}, \xi\eta)_4 \}$$

As matrizes derivadas de $\underline{\phi}^*$ são:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l}
 (12\xi-6) \cdot (1-3\eta^2+2\eta^3) \\
 (12\xi-6) \cdot (\eta-2\eta^2+\eta^3) b \\
 -(6\xi-4) a \cdot (1-3\eta^2+2\eta^3) \\
 (6\xi-4) a \cdot (\eta-2\eta^2+\eta^3) b \\
 (6-12\xi) \cdot (1-3\eta^2+2\eta^3) \\
 (6-12\xi) \cdot (\eta-2\eta^2+\eta^3) b \\
 -(6\xi-2) a \cdot (1-3\eta^2+2\eta^3) \\
 (6\xi-2) a \cdot (\eta-2\eta^2+\eta^3) b \\
 (6-12\xi) \cdot (3\eta^2-2\eta^3) \\
 (6-12\xi) \cdot (\eta^3-\eta^2) b \\
 -(6\xi-2) a \cdot (3\eta^2-2\eta^3) \\
 (6\xi-2) a \cdot (\eta^3-\eta^2) b \\
 (12\xi-6) \cdot (3\eta^2-2\eta^3) \\
 (12\xi-6) \cdot (\eta^3-\eta^2) b \\
 -(6\xi-4) a \cdot (3\eta^2 2\eta^3) \\
 (6\xi-4) a \cdot (\eta^3-\eta^2) b
 \end{array} \right\} \underset{\phi, \xi\xi}{*T} = \\
 & \left\{ \begin{array}{l}
 (1-3\xi^2+2\xi^3) \cdot (12\eta-6) \\
 (1-3\xi^2+2\xi^3) \cdot (6\eta-4) b \\
 -(\xi-2\xi^2+\xi^3) a \cdot (12\eta-6) \\
 (\xi-2\xi^2+\xi^3) a \cdot (6\eta-4) b \\
 (3\xi^2-2\xi^3) \cdot (12\eta-6) \\
 (3\xi^2-2\xi^3) \cdot (6\eta-4) b \\
 -(\xi^3-\xi^2) a \cdot (12\eta-6) \\
 (\xi^3-\xi^2) a \cdot (6\eta-4) b \\
 (3\xi^2-2\xi^3) \cdot (6-12\eta) \\
 (3\xi^2-2\xi^3) \cdot (6\eta-2) b \\
 -(\xi^3-\xi^2) a \cdot (6-12\eta) \\
 (\xi^3-\xi^2) a \cdot (6\eta-2) b \\
 (1-3\xi^2+2\xi^3) \cdot (6-12\eta) \\
 (1-3\xi^2+2\xi^3) \cdot (6\eta-2) b \\
 -(\xi-2\xi^2+\xi^3) a \cdot (6-12\eta) \\
 (\xi-2\xi^2+\xi^3) a \cdot (6\eta-2) b
 \end{array} \right\} \underset{\phi, \eta\eta}{*T} = \\
 & \left\{ \begin{array}{l}
 (6\xi^2-6\xi) \cdot (6\eta^2-6\eta) \\
 (6\xi^2-6\xi) \cdot (1-4\eta+3\eta^2) b \\
 -(1-4\xi+3\xi^2) a \cdot (6\eta^2-6\eta) \\
 (1-4\xi+3\xi^2) a \cdot (1-4\eta+3\eta^2) b \\
 (6\xi-6\xi^2) \cdot (6\eta^2-6\eta) \\
 (6\xi-6\xi^2) \cdot (1-4\eta+3\eta^2) b \\
 -(3\xi^2-2\xi) a \cdot (6\eta^2-6\eta) \\
 (3\xi^2-2\xi) a \cdot (1-4\eta+3\eta^2) b \\
 (6\xi-6\xi^2) \cdot (6\eta-6\eta^2) \\
 (6\xi-6\xi^2) \cdot (3\eta^2-2\eta) b \\
 -(3\xi^2-2\xi) a \cdot (6\eta-6\eta^2) \\
 (3\xi^2-2\xi) a \cdot (3\eta^2-2\eta) b \\
 (6\xi^2-6\xi) \cdot (6\eta-6\eta^2) \\
 (6\xi^2-6\xi) \cdot (3\eta^2-2\eta) b \\
 -(1-4\xi+3\xi^2) a \cdot (6\eta-6\eta^2) \\
 (1-4\xi+3\xi^2) a \cdot (3\eta^2-2\eta) b
 \end{array} \right\} \underset{\phi, \xi\eta}{*T} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} (12) \cdot (1-3\eta^2+2\eta^3) \\ (12) \cdot (\eta-2\eta^2+\eta^3)b \\ -(6)a \cdot (1-3\eta^2+2\eta^3) \\ (6)a \cdot (\eta-2\eta^2+\eta^3)b \\ \dots \\ (-12) \cdot (1-3\eta^2+2\eta^3) \\ (-12) \cdot (\eta-2\eta^2+\eta^3)b \\ -(6)a \cdot (1-3\eta^2+2\eta^3) \\ (6)a \cdot (\eta-2\eta^2+\eta^3)b \\ \dots \\ (-12) \cdot (3\eta^2-2\eta^3) \\ (-12) \cdot (\eta^3-\eta^2)b \\ -(6)a \cdot (3\eta^2-2\eta^3) \\ (6)a \cdot (\eta^3-\eta^2)b \\ \dots \\ (12) \cdot (3\eta^2-2\eta^3) \\ (12) \cdot (\eta^3-\eta^2)b \\ -(6)a \cdot (3\eta^2-2\eta^3) \\ (6)a \cdot (\eta^3-\eta^2)b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \phi^* \xi \xi \xi \\ \phi^* \eta \eta \eta \\ \phi^* \eta \eta \eta \\ \phi^* \eta \eta \eta \end{array} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} (1-3\xi^2+2\xi^3) \cdot (12) \\ (1-3\xi^2+2\xi^3) \cdot (6)b \\ -(\xi-2\xi^2+\xi^3) a \cdot (12) \\ (\xi-2\xi^2+\xi^3) a \cdot (6)b \\ \dots \\ (3\xi^2-2\xi^3) \cdot (12) \\ (3\xi^2-2\xi^3) \cdot (6)b \\ -(\xi^3-\xi^2) a \cdot (12) \\ (\xi^3-\xi^2) a \cdot (6)b \\ \dots \\ (3\xi^2-2\xi^3) \cdot (-12) \\ (3\xi^2-2\xi^3) \cdot (6)b \\ -(\xi^3-\xi^2) a \cdot (-12) \\ (\xi^3-\xi^2) a \cdot (6)b \\ \dots \\ (1-3\xi^2+2\xi^3) \cdot (-12) \\ (1-3\xi^2+2\xi^3) \cdot (6)b \\ -(\xi-2\xi^2+\xi^3) a \cdot (-12) \\ (\xi-2\xi^2+\xi^3) a \cdot (6)b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \phi^* \xi \eta \eta \\ \phi^* \xi \eta \eta \\ \phi^* \xi \eta \eta \\ \phi^* \xi \eta \eta \end{array} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} (6\xi^2-6\xi) \cdot (12\eta-6) \\ (6\xi^2-6\xi) \cdot (6\eta-4)b \\ -(1-4\xi+3\xi^2)a \cdot (12\eta-6) \\ (1-4\xi+3\xi^2)a \cdot (6\eta-4)b \\ \dots \\ (6\xi-6\xi^2) \cdot (12\eta-6) \\ (6\xi-6\xi^2) \cdot (6\eta-4)b \\ -(3\xi^2-2\xi)a \cdot (12\eta-6) \\ (3\xi^2-2\xi)a \cdot (6\eta-4)b \\ \dots \\ (6\xi-6\xi^2) \cdot (6-12\eta) \\ (6\xi-6\xi^2) \cdot (6\eta-2)b \\ -(3\xi^2-2\xi)a \cdot (6-12\eta) \\ (3\xi^2-2\xi)a \cdot (6\eta-2)b \\ \dots \\ (6\xi^2-6\xi) \cdot (6-12\eta) \\ (6\xi^2-6\xi) \cdot (6\eta-2)b \\ -(1-4\xi+3\xi^2)a \cdot (6-12\eta) \\ (1-4\xi+3\xi^2)a \cdot (6\eta-2)b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \phi^* \eta \xi \xi \\ \phi^* \eta \xi \xi \\ \phi^* \eta \xi \xi \\ \phi^* \eta \xi \xi \end{array} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} (12\xi-6) \cdot (6\eta^2-6\eta) \\ (12\xi-6) \cdot (1-4\eta+3\eta^2)b \\ -(6\xi-4)a \cdot (6\eta^2-6\eta) \\ (6\xi-4)a \cdot (1-4\eta+3\eta^2)b \\ \dots \\ (6-12\xi) \cdot (6\eta^2-6\eta) \\ (6-12\xi) \cdot (1-4\eta+3\eta^2)b \\ -(6\xi-2)a \cdot (6\eta^2-6\eta) \\ (6\xi-2)a \cdot (1-4\eta+3\eta^2)b \\ \dots \\ (6-12\xi) \cdot (6\eta-6\eta^2) \\ (6-12\xi) \cdot (3\eta^2-2\eta)b \\ -(6\xi-2)a \cdot (6\eta-6\eta^2) \\ (6\xi-2)a \cdot (3\eta^2-2\eta)b \\ \dots \\ (12\xi-6) \cdot (6\eta-6\eta^2) \\ (12\xi-6) \cdot (3\eta^2-2\eta)b \\ -(6\xi-4)a \cdot (6\eta-6\eta^2) \\ (6\xi-4)a \cdot (3\eta^2-2\eta)b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \phi^* \eta \xi \xi \\ \phi^* \eta \xi \xi \\ \phi^* \eta \xi \xi \\ \phi^* \eta \xi \xi \end{array} \\
 & \hspace{15em} (3.14)
 \end{aligned}$$

3.7. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Exemplo 1: Placa quadrada apoiada nos quatro lados sob carga linearmente distribuída.

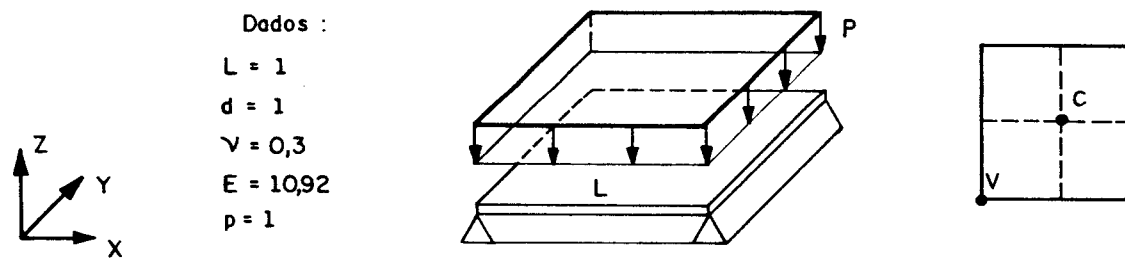


FIG. 3.9 — Placa quadrada apoiada nos lados

TABELA 3.6 - VALORES COMPARATIVOS PARA EXEMPLO 1

REDE	U_z DO PONTO C	M_{xx} NO PONTO C	M_{xy} NO PONTO V
(2x2)	-4123×10^{-5}	5720×10^{-5}	-3341×10^{-5}
(4x4)	-4065×10^{-5}	4922×10^{-5}	-3267×10^{-5}
(8x8)	-4062×10^{-5}	4815×10^{-5}	-3252×10^{-5}
SOLUÇÃO ANALÍTICA.	-4062×10^{-5}	4789×10^{-5}	-3246×10^{-5}

Diagrama de deslocamentos e de esforços.

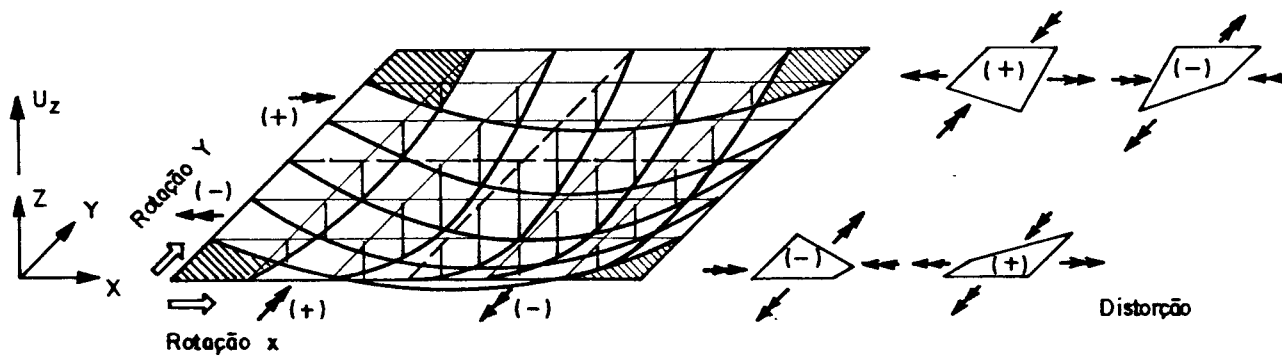


FIG. 3.10 — Diagrama da estrutura deformada.

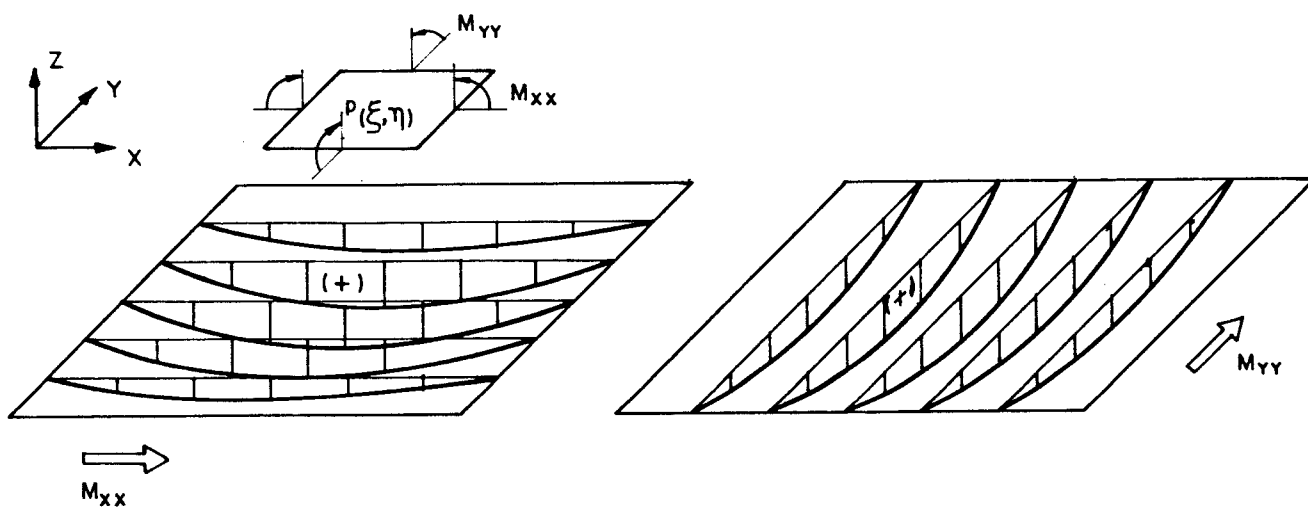


FIG. 3.11 — Diagrama de momentos M_{xx} e M_{yy} .

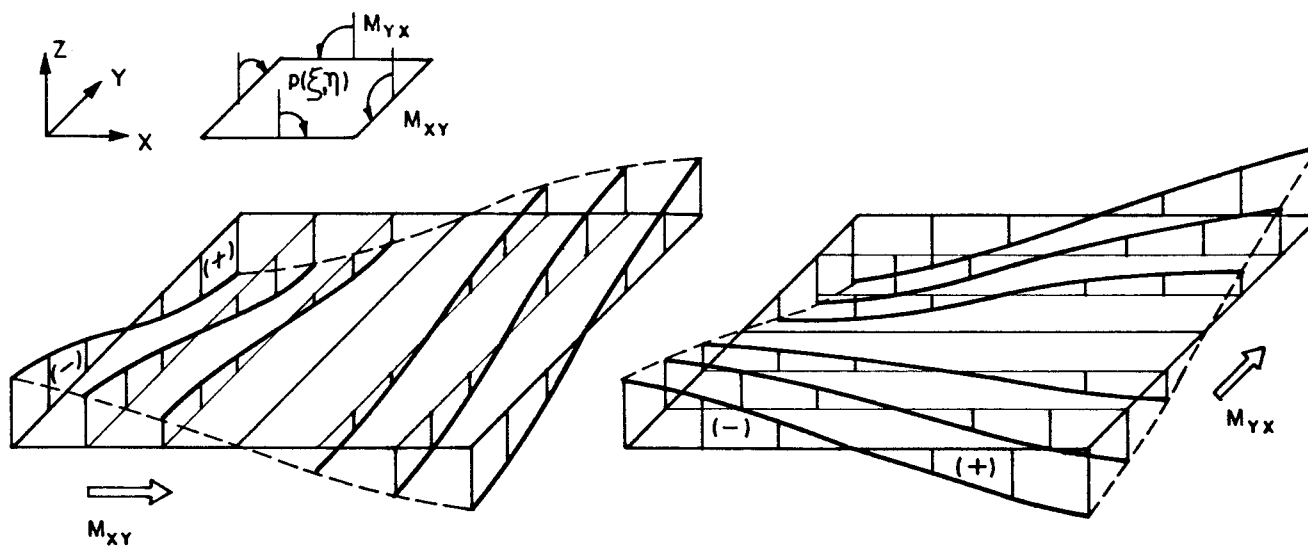


FIG. 3.12 — Diagrama de momentos M_{xy} e M_{yx} .

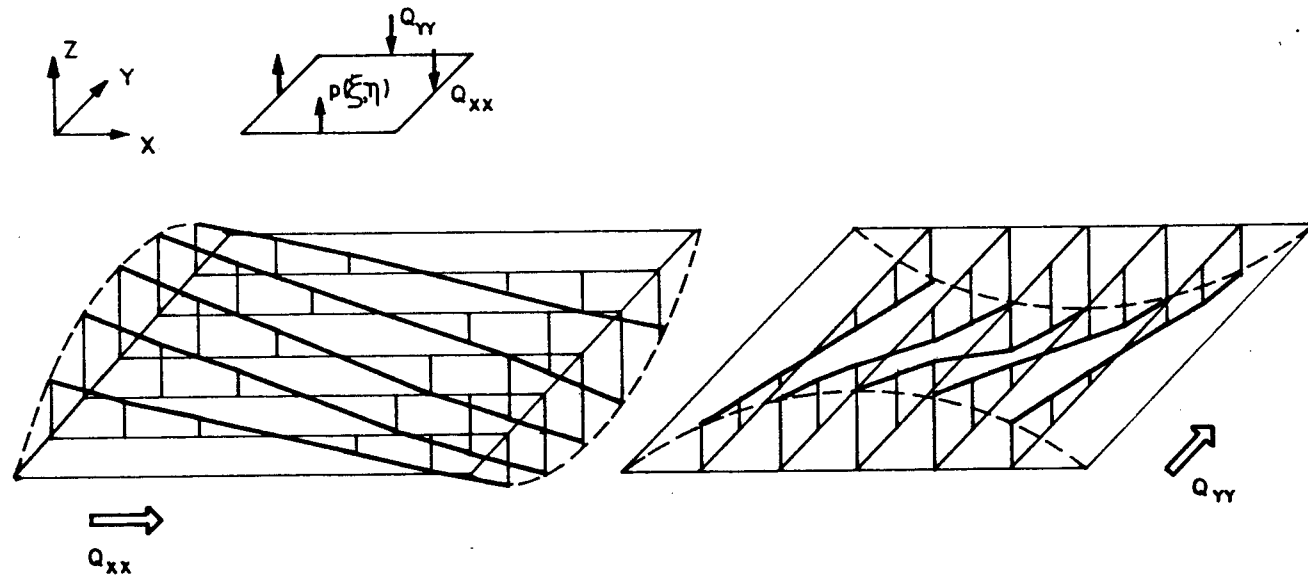
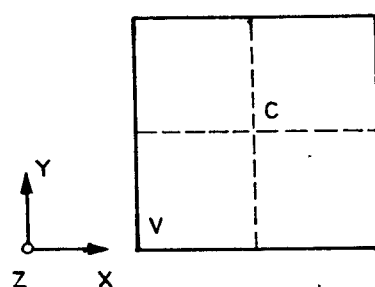


FIG. 3.13 — Diagrama de esforços cortantes.

Exemplo 2: Placa quadrada apoiada nos quatro lados com carga concentrada no centro.



Dados :

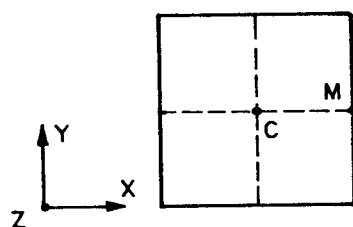
L = 1
d = 1
ν = 0,3
E = 10,92
P = 1

TABELA 3.7 - VALORES COMPARATIVOS PARA O EXEMPLO 2

REDE	U_z DO PONTO C	M_{xx} NO PONTO C	M_{xy} NO PONTO V
(2x2)	-1108×10^{-5}	1981×10^{-5}	-6912×10^{-5}
(4x4)	-1147×10^{-5}	2726×10^{-5}	-6121×10^{-5}
(8x8)	-1157×10^{-5}	3461×10^{-5}	-6093×10^{-5}
SOLUÇÃO ANALÍTICA	-1160×10^{-5}	$4045 \times 10^{-5} (+)$	$-6095 \times 10^{-5} (+)$

(+) DEGASPARE [16] com o elemento triangular de flexão T_{18} .

Exemplo 3: Placa quadrada apoiada nos quatro vértices sobre colunas pontuais sob carga linearmente distribuída.



Dados :

L = 1
d = 1
ν = 0,3
E = 10,92
P = 1

TABELA 3.8 - VALORES COMPARATIVOS PARA O EXEMPLO 3

REDE	U_z DO PONTO C	M_{xx} NO PONTO C	M_{yy} NO PONTO M
(2x2)	-2543×10^{-5}	1403×10^{-4}	1842×10^{-4}
(4x4)	-2551×10^{-5}	1196×10^{-4}	1575×10^{-4}
(8x8)	-2546×10^{-5}	1135×10^{-4}	1518×10^{-4}
SOLUÇÃO ANALÍTICA	-2490×10^{-5}	1090×10^{-4}	1404×10^{-4}

Valores analíticos dos exemplos, obtidos de [16].

4. ELEMENTO DE BARRA DE PÓRICO TRIDIMENSIONAL:

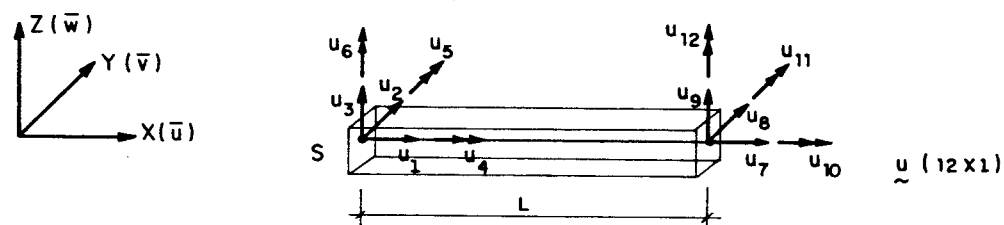


Fig. 4.1- Elemento de barra de pórtico tridimensional

4.1. DESCRIÇÃO:

É o elemento unidimensional com dois nós nas extremidades e doze graus de liberdade; os deslocamentos desconhecidos são os três componentes de translação de nó em x, y, z bem como os três componentes de giro de nó em x, y, z . A matriz de rigidez deste elemento inclui as deformações axiais, por flexão e torção, desprezando as deformações por cortante.

4.2. MATRIZ DE RIGIDEZ

A matriz de rigidez deste elemento é amplamente divulgada em livros de análise matricial, portanto será enunciada diretamente:

Matriz de rigidez para o elemento orientado segundo o eixo x .

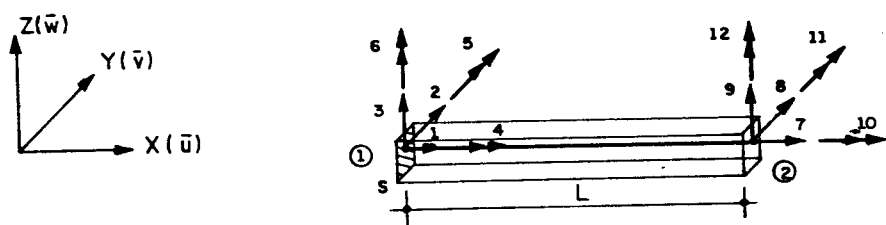


FIG. 4.2 - Elemento orientado segundo o eixo X

(4.1)

$$\underline{r}_b = \begin{bmatrix} ES/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -ES/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12EIz/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EIz/L^2 & 0 & -12EIz/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6EIz/L^2 \\ 12EIy/L^3 & 0 & -6EIy/L^2 & 0 & 0 & 0 & -12EIy/L^3 & 0 & -6EIy/L^2 & 0 & 0 & 0 \\ GIx/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GIx/L & 0 & 0 & 0 \\ 4EIy/L & 0 & 0 & 0 & 6EIy/L^2 & 0 & 2EIy/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4EIz/L & 0 & -6EIz/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EIz/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ES/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12EIz/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6EIz/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12EIy/L^3 & 0 & 6EIy/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6EIy/L^2 & 0 & 0 & 0 \\ GIx/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4EIy/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4EIz/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SIMETRICA

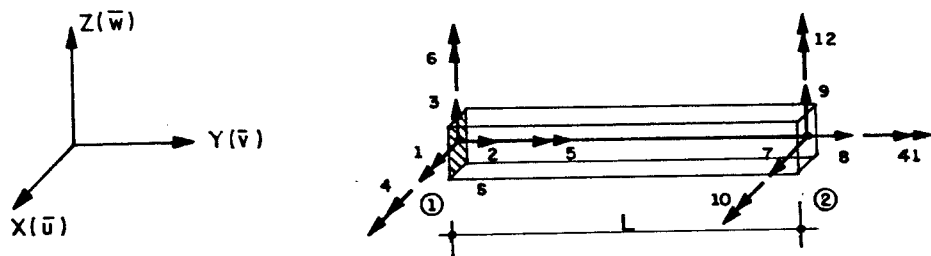


FIG. 4.3 - Elemento orientado segundo o EIXO Y

(4.2)

$$\underline{r}_b = \begin{bmatrix} 12EIz/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6EIz/L^2 & -12EIz/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6EIz/L^2 \\ ES/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -ES/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12EIx/L^3 & 6EIx/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12EIx/L^3 & 6EIx/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4EIx/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6EIx/L^2 & 2EIx/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ GIy/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GIy/L & 0 & 0 & 0 \\ 4EIz/L & 6EIz/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2EIz/L & 0 \\ 12EIz/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6EIz/L^2 & 0 \\ ES/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12EIx/L^3 & -6EIx/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4EIx/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ GIy/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4EIz/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SIMETRICA

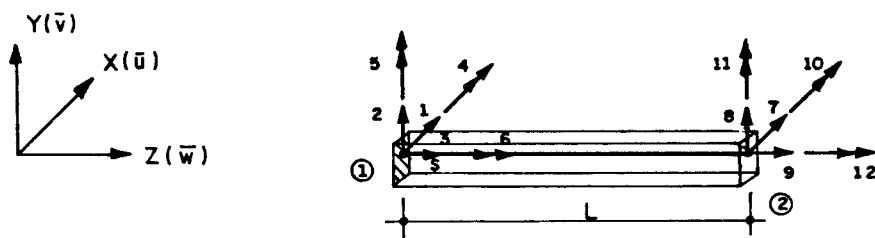


FIG. 4.3 - Elemento orientado segundo o EIXO Z

(4.3) $\tilde{b} =$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$12EI_y/L^3$	0	0	0	$6EI_y/L^2$	0	$-12EI_y/L^3$	0	0	0	$6EI_y/L^2$	0	1
	$12EI_x/L^3$	0	$-6EI_x/L^2$	0	0	0	$-12EI_x/L^3$	0	$-6EI_x/L^2$	0	0	2
		ES/L	0	0	0	0	0	$-ES/L$	0	0	0	3
			$4EI_x/L$	0	0	0	$6EI_x/L^2$	0	$2EI_x/L$	0	0	4
				$4EI_y/L$	0	$-6EI_y/L^2$	0	0	0	$2EI_y/L$	0	5
					GI_z/L	0	0	0	0	0	$-GI_z/L$	6
						$12EI_y/L^3$	0	0	0	$-6EI_y/L^2$	0	7
							$12EI_x/L^3$	0	$6EI_x/L^2$	0	0	8
								ES/L	0	0	0	9
									$4EI_x/L$	0	0	10
										$4EI_y/L$	0	11
											GI_z/L	12

SIMÉTRICA

4.3. CARGAS NODAIS EQUIVALENTES

Cargas nodais equivalentes para o elemento segundo x.

parcela \underline{f}_s :

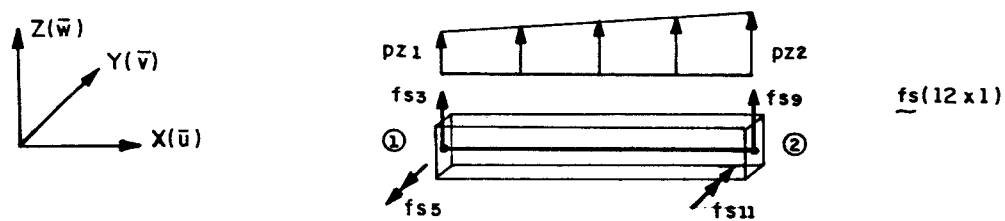


FIG. 4.4 — Cargas nodais equivalentes \underline{f}_s para elemento orientado segundo o eixo X.

$$\begin{aligned}
 f_{s3} &= (7/20 Pz_1 + 3/20 Pz_2) L \\
 f_{s5} &= -(1/20 Pz_1 + 1/30 Pz_2) L^2 \\
 f_{s9} &= (7/20 Pz_2 + 3/20 Pz_1) L \\
 f_{s11} &= (1/20 Pz_2 + 1/30 Pz_1) L^2 \\
 f_{s1} = f_{s2} = f_{s4} = f_{s6} = f_{s7} = f_{s8} = f_{s10} = f_{s12} &= 0 \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

parcela \underline{f}_v :

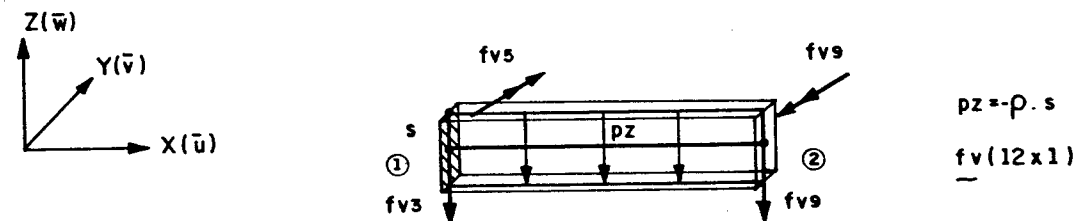


FIG. 4.5 — Cargas nodais equivalentes \underline{f}_v para elemento orientado segundo X.

$$\begin{aligned}
 f_{v3} &= P_z \cdot L/2 \\
 f_{v5} &= -P_z \cdot L^2/12 \\
 f_{v9} &= P_z \cdot L/2 \\
 f_{v11} &= P_z \cdot L^2/12 \\
 f_{v1} = f_{v2} = f_{v4} = f_{v6} = f_{v7} = f_{v8} = f_{v10} = f_{v12} &= 0 \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

Cargas nodais equivalentes para o elemento orientado segundo y.

Parcela \underline{f}_s :

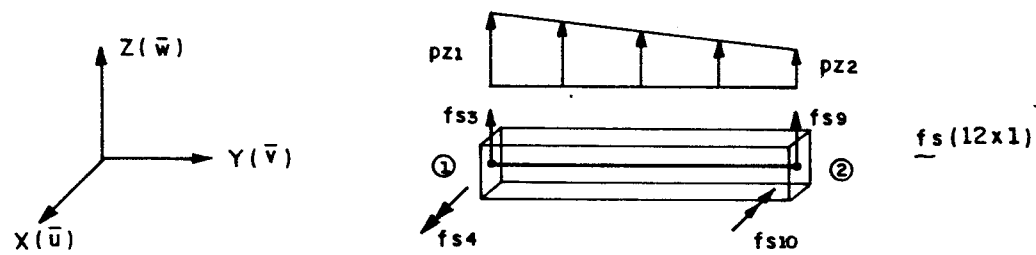


FIG. 4.6 - Cargas nodais equivalentes \underline{f}_s para elemento orientado segundo Y

$$\begin{aligned}
 f_{s3} &= (7/20 Pz_1 + 3/20 Pz_2) L \\
 f_{s4} &= (1/20 Pz_1 + 1/30 Pz_2) L^2 \\
 f_{s9} &= (7/20 Pz_2 + 3/20 Pz_1) L \\
 f_{s10} &= -(1/20 Pz_2 + 1/30 Pz_1) L^2 \\
 f_{s1} &= f_{s2} = f_{s5} = f_{s6} = f_{s7} = f_{s8} = f_{s11} = f_{s12} = 0 \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Parcela \underline{f}_v :

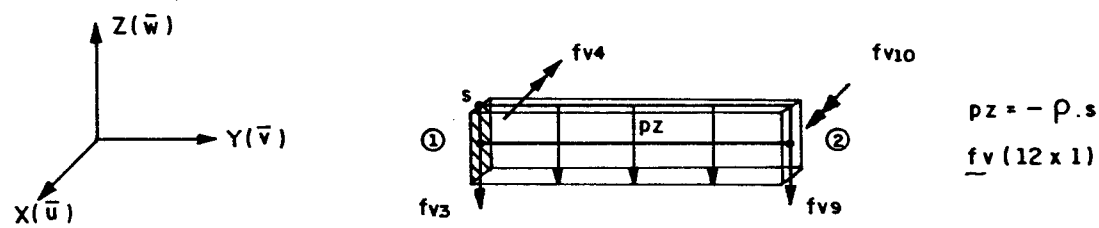


FIG. 4.7 - Cargas nodais equivalentes \underline{f}_v para elemento orientado segundo Y

$$\begin{aligned}
 f_{v3} &= Pz \cdot L/2 \\
 f_{v4} &= Pz \cdot L^2/12 \\
 f_{v9} &= Pz \cdot L/2 \\
 f_{v10} &= -Pz \cdot L^2/12 \\
 f_{v1} &= f_{v2} = f_{v5} = f_{v6} = f_{v7} = f_{v8} = f_{v11} = f_{v12} = 0 \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Cargas nodais equivalentes para o elemento orientado segundo z.

Parcela \underline{f}_v :



FIG. 4.8 — Cargas nodais equivalentes \underline{f}_v para elemento orientado segundo Z.

$$f_{v3} = P_z \cdot L/2$$

$$f_{v9} = P_z \cdot L/2$$

$$f_{v1} = f_{v2} = f_{v4} = f_{v5} = f_{v6} = f_{v7} = f_{v8} = f_{v10} = f_{v11} = f_{v12} = 0$$

4.4. ESFORÇOS NODAIS

Obtidas da equação:

$$\underline{r} \cdot \underline{u} = \underline{f} \quad \text{para:}$$

$$\underline{E} = \underline{r} \cdot \underline{u}$$

$$\underline{u}^T = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_{12}\}$$

Convenção para os esforços nodais no elemento orientado segundo x.

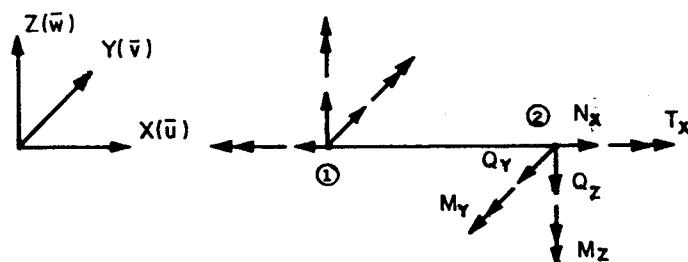


FIG. 4.9 — Esforços solícitantes no elemento orientado segundo X.

$$\underline{E}^T = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ -N_x & Q_y & Q_z & -T_x & M_y & M_z & N_x & -Q_y & -Q_z & T_x & -M_y & -M_z \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Convenção de esforços nodais para o elemento orientado do segundo y.

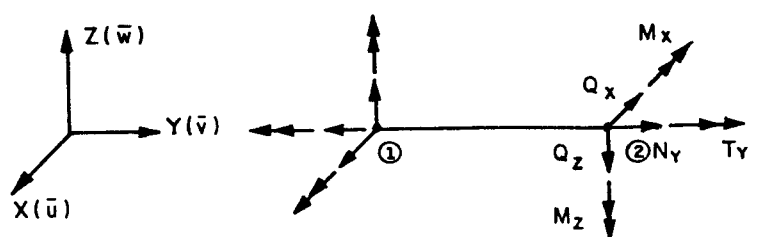


FIG. 4.10 - Esforços solicitantes no elemento orientado segundo Y.

$$\tilde{E}^T = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \{ Q_x & -N_y & Q_z & M_x & -T_y & M_z & -Q_x & N_y & -Q_z & -M_x & T_y & -M_z \} \end{matrix} \quad (4.10)$$

Convenção de esforços nodais para o elemento segundo z.

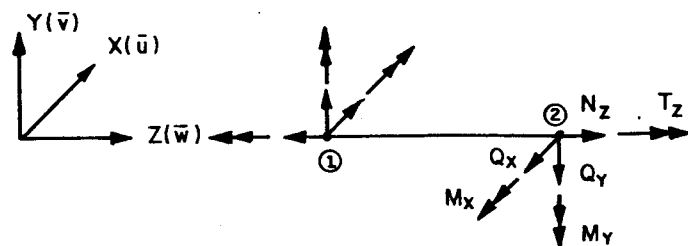


FIG. 4.11 - Esforços solicitantes no elemento orientado segundo Z.

$$\tilde{E}^T = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \{ Q_x & Q_y & -N_z & M_x & M_y & -T_z & -Q_x & -Q_y & N_z & -M_x & -M_y & T_z \} \end{matrix} \quad (4.11)$$

CAPÍTULO III

SUBESTRUTURAS

1. INTRODUÇÃO

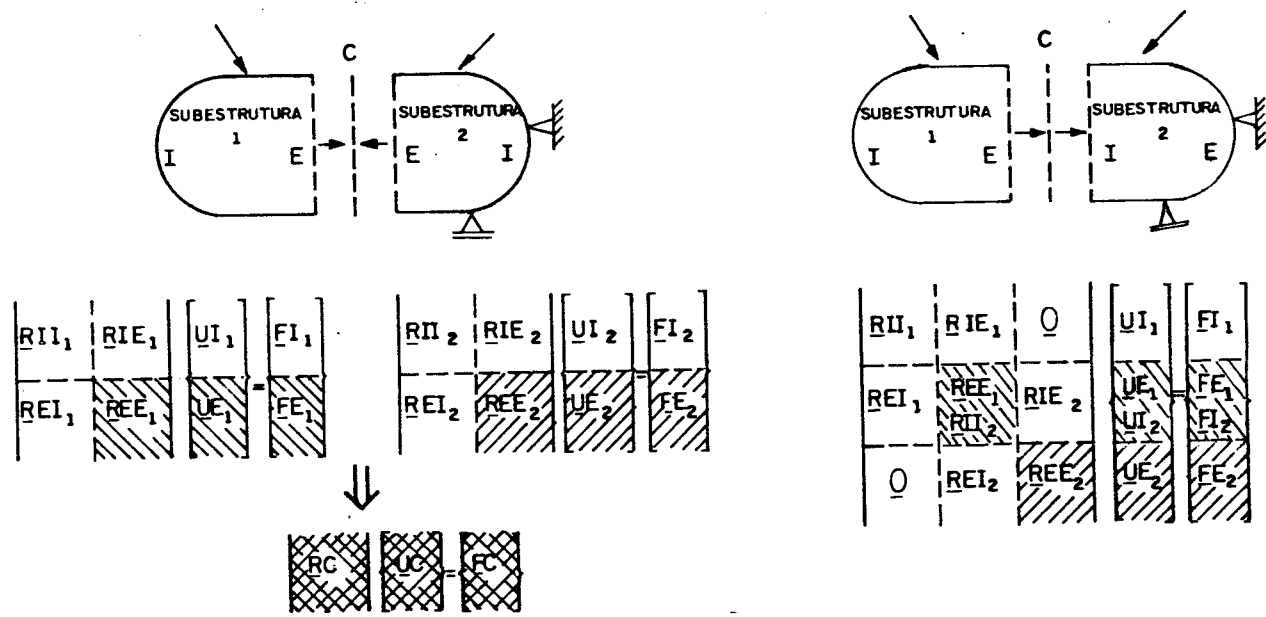
O método da separação (Diakoptico) foi introduzido pela primeira vez por Gabriel Kron[9] para a análise de circuitos elétricos e estruturas elásticas sob a forma de subespaços. Posteriormente a engenharia estrutural o definiria como o método das subestruturas.

Quando uma estrutura é muito grande para analisá-la como um todo (a matriz de rigidez final excede a capacidade de memória do computador), tem-se duas alternativas que implicam partição. A primeira operada diretamente na matriz de rigidez da estrutura, como inversão de matrizes particionadas ou solução do sistema por blocos e a segunda dividindo a estrutura em unidades menores (subestruturas) analisando cada unidade independentemente. A partição da estrutura em subestruturas tem sua vantagem sobre o tratamento meramente matemático em que propriedades físicas dos diferentes tipos de elementos estruturais, tais como número de graus de liberdade e planos de montagem, assim como a repetitividade dos pavimentos podem ser aproveitados para fins de acondicionamento e simplificação do trabalho computacional.

Quando as propriedades de rigidez e de cargas de cada subestrutura tem sido determinadas no contorno, estas podem ser tratadas como se fossem elementos estruturais complexos, e o método dos deslocamentos na análise estrutural pode ser formulado logo para a estrutura condensada equivalente.

Os métodos conhecidos para efetuar matematicamente a condensação estática dos graus de liberdade são o "FULL RELEASE" [4], que implica a liberação total dos graus de liberdade internos da subestrutura e o "Cholesky Decomposition" que opera liberação parcial desses graus de liberdade.

As sequências para sistematizar a subestruturação podem ser em série e paralelo. O esquema da Fig.1.1 mostra como se compõem as equações matriciais seguindo estes dois processos, sendo I o índice que indica as coordenadas internas que serão liberadas, o índice E indica as coordenadas externas ou de conexão e, finalmente, o índice C indica as coordenadas de contorno ou coordenadas do sistema de referencia da estrutura "Reduzida" equivalente.



(a) Sequência de Substruturação em paralelo

(b) Sequência de Substruturação em série

FIG. 1.1 — Diagrama para as sequências de substruturação.

2. SEQUÊNCIAS DE SUBESTRUTURAÇÃO:

Serão analisados os dois processos básicos de subestruturação, série e paralelo, com a obtenção das equações de equilíbrio para ambos os casos.

2.1. FORMULAÇÃO PARA A SUBESTRUTURAÇÃO EM PARALELO:

Seguindo o esquema da Fig.1.1(a) obtem-se as seguintes equações de equilíbrio:

$$\underline{R}_{II1} \cdot \underline{U}_{I1} + \underline{R}_{IE1} \cdot \underline{U}_{E1} = \underline{F}_{I1} \quad (2.1)$$

$$\underline{R}_{EI1} \cdot \underline{U}_{I1} + \underline{R}_{EE1} \cdot \underline{U}_{E1} + \underline{R}_{EI2} \cdot \underline{U}_{I2} + \underline{R}_{EE2} \cdot \underline{U}_{E2} = \underline{F}_{E1} + \underline{F}_{E2} \quad (2.2)$$

$$\underline{R}_{II2} \cdot \underline{U}_{I2} + \underline{R}_{IE2} \cdot \underline{U}_{E2} = \underline{F}_{I2} \quad (2.3)$$

Operando as equações (2.1) e (2.3) tem-se:

$$\underline{U}_{I1} = \underline{R}_{II1}^{-1} \cdot (\underline{F}_{I1} - \underline{R}_{IE1} \cdot \underline{U}_{E1}) \quad (2.4)$$

$$\underline{U}_{I2} = \underline{R}_{II2}^{-1} \cdot (\underline{F}_{I2} - \underline{R}_{IE2} \cdot \underline{U}_{E2}) \quad (2.5)$$

Substituindo (2.4) e (2.5) na equação (2.2)

$$\begin{aligned} & (\underline{R}_{EE1} - \underline{R}_{EI1} \cdot \underline{R}_{II1}^{-1} \cdot \underline{R}_{IE1}) \cdot \underline{U}_{E1} + (\underline{R}_{EE2} - \underline{R}_{EI2} \cdot \underline{R}_{II2}^{-1} \cdot \underline{R}_{IE2}) \cdot \underline{U}_{E2} = \\ & = (\underline{F}_{E1} - \underline{R}_{EI1} \cdot \underline{R}_{II1}^{-1} \cdot \underline{F}_{I1}) + (\underline{F}_{E2} - \underline{R}_{EI2} \cdot \underline{R}_{II2}^{-1} \cdot \underline{F}_{I2}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Agrupando termos:

$$\underline{R}_{EE1}^* = \underline{R}_{EE1} - \underline{R}_{EI1} \cdot \underline{R}_{II1}^{-1} \cdot \underline{R}_{IE1} \quad (2.7)$$

$$\underline{R}_{EE2}^* = \underline{R}_{EE2} - \underline{R}_{EI2} \cdot \underline{R}_{II2}^{-1} \cdot \underline{R}_{IE2} \quad (2.8)$$

$$\underline{F}_{E1}^* = \underline{F}_{E1} - \underline{R}_{EI1} \cdot \underline{R}_{II1}^{-1} \cdot \underline{F}_{I1} \quad (2.9)$$

$$\underline{F}_{E2}^* = \underline{F}_{E2} - \underline{R}_{EI2} \cdot \underline{R}_{II2}^{-1} \cdot \underline{F}_{I2} \quad (2.10)$$

Substituindo as equações (2.7), (2.8), (2.9) e (2.10) na equação (2.6)

$$\underline{R}_{EE1}^* \cdot \underline{U}_{E1} + \underline{R}_{EE2}^* \cdot \underline{U}_{E2} = \underline{F}_{E1}^* + \underline{F}_{E2}^* \quad (2.11)$$

Para efetuar (2.11) é preciso compatibilizar as equações matriciais no contorno, assim:

Compatibilizando-se as submatrizes e generalizando as equações para n subestruturas:

$$\underline{R}_c = \sum_{i=1}^n \underline{A}_i^T \cdot \underline{R}EE_i^* \cdot \underline{A}_i \quad (2.12)$$

$$\underline{F}_c = \sum_{i=1}^n \underline{A}_i^T \cdot \underline{F}E_i^* \quad (2.13)$$

$$\underline{U}E_i = \underline{A}_i \cdot \underline{U}_c \quad (2.14)$$

Onde \underline{A}_i é a matriz de incidência das subestruturas para o contorno. Substituindo (2.12) e (2.13) na equação (2.11) tem-se:

$$\underline{R}_c \cdot \underline{U}_c = \underline{F}_c \quad (2.15)$$

que representa a equação de equilíbrio final da estrutura condensada aos nós de contorno.

Resolvendo o sistema de equações (2.15), se obtém os deslocamentos das subestruturas utilizando (2.14), (2.4) e (2.5).

2.2. FORMULAÇÃO PARA SUBESTRUTURAÇÃO EM SÉRIE:

Seguindo o esquema da Fig. 1.1(b).

Obtem-se as seguintes equações de equilíbrio:

$$\underline{R}II_1 \cdot \underline{U}I_1 + \underline{R}IE_1 \cdot \underline{U}E_1 = \underline{F}I_1 \quad (2.16)$$

$$\underline{R}EI_1 \cdot \underline{U}I_1 + \underline{R}EE_1 \cdot \underline{U}E_1 + \underline{R}II_2 \cdot \underline{U}I_2 + \underline{R}IE_1 \cdot \underline{U}E_2 = \underline{F}E_1 + \underline{F}I_2 \quad (2.17)$$

$$\underline{R}EI_2 \cdot \underline{U}I_2 + \underline{R}EE_2 \cdot \underline{U}E_2 = \underline{F}E_2 \quad (2.18)$$

Operando a equação (2.16) tem-se:

$$\underline{U}I_1 = \underline{R}II_1^{-1} (\underline{F}I_1 - \underline{R}IE_1 \cdot \underline{U}E_1) \quad (2.19)$$

Substituindo a equação (2.19) na (2.17):

$$\begin{aligned} & (\underline{R}EE_1 - \underline{R}EI_1 \cdot \underline{R}II_1^{-1} \cdot \underline{R}IE_1) \cdot \underline{U}E_1 + \underline{R}II_2 \cdot \underline{U}I_2 + \underline{R}IE_2 \cdot \underline{U}E_2 = \\ & = (\underline{F}E_1 - \underline{R}EI_1 \cdot \underline{R}II_1^{-1} \cdot \underline{F}I_1) + \underline{F}I_2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Agrupando termos:

$$\begin{aligned}\underline{R}\underline{E}\underline{E}_1^* &= \underline{R}\underline{E}\underline{E}_1 - \underline{R}\underline{E}\underline{I}_1 \cdot \underline{R}\underline{I}\underline{I}_1^{-1} \cdot \underline{R}\underline{I}\underline{E}_1 \\ \underline{F}\underline{E}_1^* &= \underline{F}\underline{E}_1 - \underline{R}\underline{E}\underline{I}_1 \cdot \underline{R}\underline{I}\underline{I}_1^{-1} \cdot \underline{F}\underline{I}_1\end{aligned}\quad (2.21)$$

Substituindo as equações (2.21) e (2.22) na equação (2.20)

$$\underline{R}\underline{E}\underline{E}_1^* \cdot \underline{U}\underline{E}_1 + \underline{R}\underline{I}\underline{I}_2 \cdot \underline{U}\underline{I}_2 + \underline{R}\underline{I}\underline{E}_2 \cdot \underline{U}\underline{E}_2 = \underline{F}\underline{E}_1^* + \underline{F}\underline{I}_2 \quad (2.23)$$

Compatibilizando as submatrizes da equação (2.23)

$$\underline{R}\underline{C}_1 = \underline{A}_1^T \cdot \underline{R}\underline{E}\underline{E}_1^* \cdot \underline{A}_1 \quad (2.24)$$

$$\underline{F}\underline{C}_1 = \underline{A}_1^T \cdot \underline{F}\underline{E}_1^* \quad (2.25)$$

$$\underline{R}\underline{I}\underline{I}_2^* = \underline{R}\underline{C}_1 + \underline{R}\underline{I}\underline{I}_2 \quad (2.26)$$

$$\underline{F}\underline{I}_2^* = \underline{F}\underline{C}_1 + \underline{F}\underline{I}_2 \quad (2.27)$$

$$\underline{U}\underline{E}_1 = \underline{A}_1 \cdot \underline{U}\underline{I}_2 \quad (2.28)$$

Nas equações (2.24), (2.25), (2.28), \underline{A}_1 é a matriz de incidência da subestrutura 1 para o contorno 1, compatível com a subsequente subestrutura 2.

Substituindo as equações (2.26) e (2.27) na equação (2.23) tem-se:

$$\underline{R}\underline{I}\underline{I}_2^* \cdot \underline{U}\underline{I}_2 + \underline{R}\underline{I}\underline{E}_2 \cdot \underline{U}\underline{E}_2 = \underline{F}\underline{I}_2^* \quad (2.29)$$

operando a equação (2.29) tem-se:

$$\underline{U}\underline{I}_2 = \underline{R}\underline{I}\underline{I}_2^{*-1} (\underline{F}\underline{I}_2^* - \underline{R}\underline{I}\underline{E}_2 \cdot \underline{U}\underline{E}_2) \quad (2.30)$$

Substituindo na equação (2.18)

$$(\underline{R}\underline{E}\underline{E}_2 - \underline{R}\underline{E}\underline{I}_2 \cdot \underline{R}\underline{I}\underline{I}_2^{*-1} \cdot \underline{R}\underline{I}\underline{E}_2) \cdot \underline{U}\underline{E}_2 = \underline{F}\underline{E}_2 - \underline{R}\underline{E}\underline{I}_2 \cdot \underline{R}\underline{I}\underline{I}_2^{*-1} \cdot \underline{F}\underline{I}_2^* \quad (2.31)$$

Agrupando termos:

$$\underline{R}\underline{E}\underline{E}_2^* = \underline{R}\underline{E}\underline{E}_2 - \underline{R}\underline{E}\underline{I}_2 \cdot \underline{R}\underline{I}\underline{I}_2^{*-1} \cdot \underline{R}\underline{I}\underline{E}_2 \quad (2.32)$$

$$\underline{F}\underline{E}_2^* = \underline{F}\underline{E}_2 - \underline{R}\underline{E}\underline{I}_2 \cdot \underline{R}\underline{I}\underline{I}_2^{*-1} \cdot \underline{F}\underline{I}_2^* \quad (2.33)$$

Substituindo as equações (2.32) e (2.33) na equação (2.31)

tem-se:

$$\underline{R}\underline{E}\underline{E}_2^* \cdot \underline{U}\underline{E}_2 = \underline{F}\underline{E}_2^* \quad (2.34)$$

Compatibilizando as submatrizes da equação (2.34) com a vinculação

$$\underline{RC}_2 = \underline{A}_2^T \cdot \underline{REE}_2^* \cdot \underline{A}_2 \quad (2.35)$$

$$\underline{FC}_2 = \underline{A}_2^T \cdot \underline{FE}_2^* \quad (2.36)$$

$$\underline{UE}_2 = \underline{A}_2 \cdot \underline{UI}_3 \quad (2.37)$$

$$\underline{RC}_2 \cdot \underline{UI}_3 = \underline{FC}_2 \quad (2.38)$$

onde a equação (2.38) é a equação final da estrutura condensada aos nós de vinculação, \underline{UI}_3 representa os deslocamentos dos nós de vínculo, obtidos resolvendo o sistema de equações.

Generalizando o procedimento para n subestruturas:

$$\underline{UI}_i = \underline{RII}_i^{*-1} (\underline{FI}_i^* - \underline{RIE}_i \cdot \underline{UE}_i) \quad (2.39)$$

$$\underline{REE}_i^* = \underline{REE}_i - \underline{REI}_i \cdot \underline{RII}_i^{*-1} \cdot \underline{RIE}_i \quad (2.40)$$

$$\underline{FE}_i^* = \underline{FE}_i - \underline{REI}_i \cdot \underline{RII}_i^{*-1} \cdot \underline{FI}_i \quad (2.41)$$

$$\underline{RC}_i = \underline{A}_i^T \cdot \underline{REE}_i^* \cdot \underline{A}_i \quad (2.42)$$

$$\underline{FC}_i = \underline{A}_i^T \cdot \underline{FE}_i^* \quad (2.43)$$

$$\underline{RII}_{i+1}^* = \underline{RII}_{i+1} + \underline{RC}_i \quad (2.44)$$

$$\underline{FI}_{i+1}^* = \underline{FI}_{i+1} + \underline{FC}_i \quad (2.45)$$

$$\underline{UE}_i = \underline{A}_i \cdot \underline{UI}_{i+1} \quad (2.46)$$

$$\underline{RC}_n \cdot \underline{UI}_{n+1} = \underline{FC}_n \quad (2.47)$$

Resolvendo (2.47), os restantes deslocamentos se obtêm regressivamente de (2.46) a (2.39).

3. MÉTODOS DE CONDENSAÇÃO ESTÁTICA:

Para obter a matriz de rigidez e vetor de cargas condensadas da estrutura podem utilizar-se dois procedimentos, o método "FULL RELEASE", considerado o método padrão, que foi apresentado pelos autores [2] e [3] entre outros e que requer a total liberação dos graus de liberdade dos nós internos antes da solução do problema com as matrizes "condensadas", enquanto que o método de "Cholesky Decomposition" apresentado posteriormente por [4] e [8], envolve a liberação parcial dos graus de liberdade dos nós internos operado por uma série de transformações que proporcionam um novo conjunto de equações matriciais derivadas, que permitam o conhecimento dos deslocamentos internos depois que os deslocamentos externos são calculados, resultando num processo com menor número de operações numéricas e, conseqüentemente, menor trabalho computacional. Por razões informativas serão apresentados os dois métodos.

Seja a equação matricial de equilíbrio de uma subestrutura:

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_{II} & \underline{R}_{IE} \\ \underline{R}_{EI} & \underline{R}_{EE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}_I \\ \underline{U}_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_I \\ \underline{F}_E \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{] NI} \\ \text{] NE} \end{matrix} \quad (3.1)$$

onde:

I = subíndice que indica as coordenadas internas da subestrutura

E = subíndice que indica as coordenadas externas da subestrutura

NI = Número de coordenadas internas da subestrutura

NE = Número de coordenadas externas da subestrutura.

3.1. MÉTODO "FULL RELEASE":

As coordenadas internas são liberadas para se obter as relações forças-deslocamentos em termos das coordenadas externas. Assim operando a equação (3.1) tem-se:

$$\underline{U}I = \underline{R}II^{-1}(\underline{F}I - \underline{R}IE.\underline{U}E) \quad (3.2)$$

$$(\underline{R}EE - \underline{R}EI.\underline{R}II^{-1}.\underline{R}IE).\underline{U}E = \underline{F}E - \underline{R}EI.\underline{R}II^{-1}.\underline{F}I \quad (3.3)$$

$$\underline{R}EE^*.\underline{U}E = \underline{F}E^* \quad (3.4)$$

onde:

$$\underline{R}EE^* = \underline{R}EE - \underline{R}EI.\underline{R}II^{-1}.\underline{R}IE \quad (3.5)$$

$$\underline{F}E^* = \underline{F}E - \underline{R}EI.\underline{R}II^{-1}.\underline{F}I \quad (3.6)$$

Este método também pode ser formulado como a decomposição da matriz num triplo produto matricial, assim:

$$\begin{bmatrix} \underline{R}II & | & \underline{R}IE \\ \underline{R}EI & | & \underline{R}EE \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & | & \underline{0} \\ \underline{R}EI.\underline{R}II^{-1} & | & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{R}II & | & \underline{0} \\ \underline{0} & | & \underline{R}EE^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I} & | & \underline{R}II^{-1}.\underline{R}IE \\ \underline{0} & | & \underline{I} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

De onde relacionando (3.7) com (3.1) podem desacoplar-se os seguintes sistemas:

$$\begin{bmatrix} \underline{R}II & | & \underline{0} \\ \underline{0} & | & \underline{R}EE^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}I^* \\ \underline{U}E^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}I^* \\ \underline{F}E^* \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \underline{R}II.\underline{U}I^* = \underline{F}I^* \\ \underline{R}EE^*.\underline{U}E^* = \underline{F}E^* \end{matrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}I^* \\ \underline{U}E^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & | & \underline{R}II^{-1}.\underline{R}IE \\ \underline{0} & | & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}I \\ \underline{U}E \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \underline{U}I^* = \underline{U}I + \underline{R}II^{-1}.\underline{R}IE.\underline{U}E \\ \underline{U}E^* = \underline{U}E \end{matrix} \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{F}I \\ \underline{F}E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & | & \underline{0} \\ \underline{R}EI.\underline{R}II^{-1} & | & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}I^* \\ \underline{F}E^* \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \underline{F}I^* = \underline{F}I \\ \underline{F}E = \underline{R}EI.\underline{R}II^{-1}.\underline{F}I^* + \underline{F}E^* \end{matrix} \quad (3.10)$$

Como se vê as equações (3.2) a (3.6) estão contidas nos sistemas (3.7) a (3.10), os quais serviram para relacioná-los aos sistemas desacoplados do método "Cholesky Decomposition".

3.2. MÉTODO "CHOLESKY DECOMPOSITION"

Este método pode ser formulado como a decomposição da matriz de rigidez da equação (3.1) no seguinte triplo produto matricial:

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_{II} & | & \underline{R}_{IE} \\ \hline \underline{R}_{EI} & | & \underline{R}_{EE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{L} & | & \underline{0} \\ \hline \underline{N} & | & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{D} & | & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & | & \underline{R}_{EE}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{L}^T & | & \underline{N}^T \\ \hline \underline{0} & | & \underline{I} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

\underline{L} = matriz triangular inferior com diagonais iguais a 1.

\underline{N} = matriz retangular

$\underline{0}$ = matriz nula

\underline{I} = matriz identidade

\underline{D} = matriz diagonal

\underline{R}_{EE}^* = matriz simétrica (condensada)

Do triplo produto matricial são obtidas as seguintes relações:

$$\underline{R}_{II} = \underline{L} \cdot \underline{D} \cdot \underline{L}^T \quad (3.12)$$

$$\underline{R}_{EI} = \underline{R}_{IE}^T = \underline{N} \cdot \underline{D} \cdot \underline{L}^T \quad (3.13)$$

$$\underline{R}_{EE} = \underline{R}_{EE}^* + \underline{N} \cdot \underline{D} \cdot \underline{N}^T \quad (3.14)$$

De onde, relacionando (3.11) com (3.8), (3.9), (3.10), podem desacoplar-se os seguintes sistemas:

$$\begin{bmatrix} \underline{D} & | & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & | & \underline{R}_{EE}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_I^* \\ \hline \underline{U}_E^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_I^* \\ \hline \underline{F}_E^* \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \underline{D} \cdot \underline{U}_I^* &= \underline{F}_I^* \\ \underline{R}_{EE}^* \cdot \underline{U}_E^* &= \underline{F}_E^* \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_I^* \\ \hline \underline{U}_E^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{L}^T & | & \underline{N}^T \\ \hline \underline{0} & | & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_I \\ \hline \underline{U}_E \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \underline{U}_I^* &= \underline{L}^T \cdot \underline{U}_I + \underline{N}^T \cdot \underline{U}_E \\ \underline{U}_E^* &= \underline{U}_E \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{F}_I \\ \hline \underline{F}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{L} & | & \underline{0} \\ \hline \underline{N} & | & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}_I^* \\ \hline \underline{F}_E^* \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \underline{F}_I &= \underline{L} \cdot \underline{F}_I^* \\ \underline{F}_E &= \underline{N} \cdot \underline{F}_I^* + \underline{F}_E^* \end{aligned} \quad (3.17)$$

Com as novas equações matriciais (3.15) a (3.17) tanto em estado compacto ou por separado, opera-se o processo de condensação estática por este método. Entretanto estas equações podem condicionar-se a três etapas fundamentais:

Etapa 1: Substituição parcial, combinando as equações (3.15) e (3.16)

$$\begin{bmatrix} \underline{D} & | & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & | & \underline{REE}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{L}^T & | & \underline{N}^T \\ \hline \underline{0} & | & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{UI} \\ \underline{UE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{FI}^* \\ \underline{FE}^* \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{D.L}^T & | & \underline{D.N}^T \\ \hline \underline{0} & | & \underline{REE}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{UI} \\ \underline{UE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{FE}^* \\ \underline{FE}^* \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{FI}^*} \quad (3.19)$$

Etapa 2: Solução do sistema de equações condensados, da equação (3.19).

$$[\underline{REE}^*] \{\underline{UE}\} = \{\underline{FE}^*\} \quad (3.20)$$

$$[\underline{I}] \{\underline{UE}\} = \{\underline{UE}\} \quad (3.21)$$

Etapa 3: Retrosubstituição parcial, combinando (3.21) e (3.19), ou operando (3.16) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \underline{D.L}^T & | & \underline{D.N}^T \\ \hline \underline{0} & | & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{UI} \\ \underline{UE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{FI}^* \\ \underline{UE} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I} & | & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & | & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{UI} \\ \underline{UE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{UI} \\ \underline{UE} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

4. RESUMO E ALGORÍTMOS

As relações matriciais do método "CHOLESKY DECOMPOSITION" quando operadas em forma compacta, como se mostra nas etapas básicas 1, 2 e 3 conduzem a aplicação do processo de Gauss em forma parcial.

Para a obtenção dos deslocamentos nas sequências série e paralelo se segue o roteiro básico descrito nos itens (2.1) e (2.2).

Para fins de simplificação se adotará em seguida:

$$\underline{D.L}^T = \underline{RII}^*$$

$$\underline{D.N}^T = \underline{RIE}^*$$

$$\underline{REE}^* = \underline{REE}^*$$

Etapa 1: Substituição parcial até condensar a última equação das coordenadas internas.

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{---} \text{RII} \text{---} & \text{RIE} \\ \text{SIM} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \underline{UI} \\ \underline{UE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{FI} \\ \underline{FE} \end{Bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \text{ETAPA 1} \quad \left[\begin{array}{c|c} \text{---} \text{RII}^* \text{---} & \text{RIE}^* \\ 0 \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \underline{UI} \\ \underline{UE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{FI}^* \\ \underline{FE}^* \end{Bmatrix} \quad (4.1) a$$

$$\text{RII}_{j,k}^* = \sum_{i=1}^{NI} \sum_{j=i+1}^{NI} \sum_{k=j}^{NI} \text{RII}_{j,k} - \frac{\text{RII}_{i,j}}{\text{RII}_{i,i}} \cdot \text{RII}_{i,k} \quad (4.1) b$$

$$\text{RIE}_{j,k}^* = \sum_{i=1}^{NI} \sum_{j=i+1}^{NI} \sum_{k=NI}^{NI+NE} \text{RIE}_{j,k-NI} - \frac{\text{RII}_{i,j}}{\text{RII}_{i,i}} \cdot \text{RIE}_{i,k-NI} \quad (4.1) c$$

$$\text{REE}_{j,k}^* = \sum_{i=1}^{NI} \sum_{j=NI+1}^{NI+NE} \sum_{k=j}^{NI+NE} \text{REE}_{j-NI,k-NI} - \frac{\text{RIE}_{i,j-NI}}{\text{RII}_{i,i}} \cdot \text{RIE}_{i,k-NI} \quad (4.1) d$$

$$\text{FI}_j^* = \sum_{i=1}^{NI} \sum_{j=i+1}^{NI} \text{FI}_j - \frac{\text{RII}_{i,j}}{\text{RII}_{i,i}} \cdot \text{FI}_i \quad (4.1) e$$

$$\text{FE}_j^* = \sum_{i=1}^{NI} \sum_{j=NI+1}^{NI+NE} \text{FE}_{j-NI} - \frac{\text{RIE}_{i,j-NI}}{\text{RII}_{i,i}} \cdot \text{FI}_i \quad (4.1) f$$

Etapa 2: Cálculo dos deslocamentos externos, resolvendo o sistema de equações.

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{SIM} & \text{REE}^* \\ \hline & \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \text{UE} \\ \text{UE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{FE}^* \\ \text{FE}^* \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{ETAPA 2}} \begin{Bmatrix} \text{UE} \\ \text{UE} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Etapa 3: Cálculo dos deslocamentos internos, por retrossubstituição parcial a partir da última equação interna condensada.

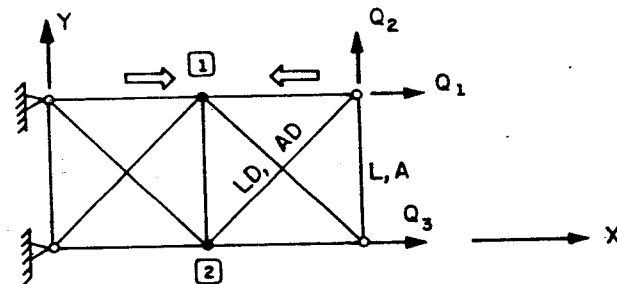
$$\left[\begin{array}{c|c|c} & \text{RII}^* & \text{RIE}^* \\ \hline 0 & & \\ \hline 0 & & \text{I} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \text{UI} \\ \text{UE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{FI}^* \\ \text{UE} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{ETAPA 3}} \begin{Bmatrix} \text{UI} \\ \text{UE} \end{Bmatrix} \quad (4.3) a$$

$$\text{UI}_j = \frac{1}{\sum_{j=NI}^{} \frac{1}{\text{RII}_{j,j}^*}} \left(\text{FI}_j^* - \sum_{k=j+1}^{NI} \text{RII}_{j,k}^* \cdot \text{FI}_k^* \right) \quad (4.3) b$$

$$\text{UI}_j = \frac{1}{\sum_{j=NI}^{} \frac{1}{\text{RII}_{j,j}^*}} \left(\text{FI}_j^* - \sum_{k=NI+1}^{NI+NE} \text{RIE}_{j,k-NI}^* \cdot \text{UE}_{k-NI} \right) \quad (4.3) c$$

5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

EXEMPLO 1 : Calcular os deslocamentos da treliça plana utilizando subestruturação em paralelo, considerando como nós de contorno os nós 1 e 2.



DADOS :
 E = 10
 A = 1
 AD = $\sqrt{2} / 2$ $Q_1 = 1$
 L = 20 $Q_2 = 2$
 LD = $20\sqrt{2}$ $Q_3 = 3$

FIG. 5.1 - Treliça plana do exemplo 1

MATRIZ DE RIGIDEZ E DE CARGAS DAS SUBESTRUTURAS.

$$\begin{bmatrix} R_{II_i} & R_{IE_i} \\ R_{EI_i} & R_{EE_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{I_i} \\ U_{E_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{I_i} \\ F_{E_i} \end{bmatrix}$$

Subestrutura 1:

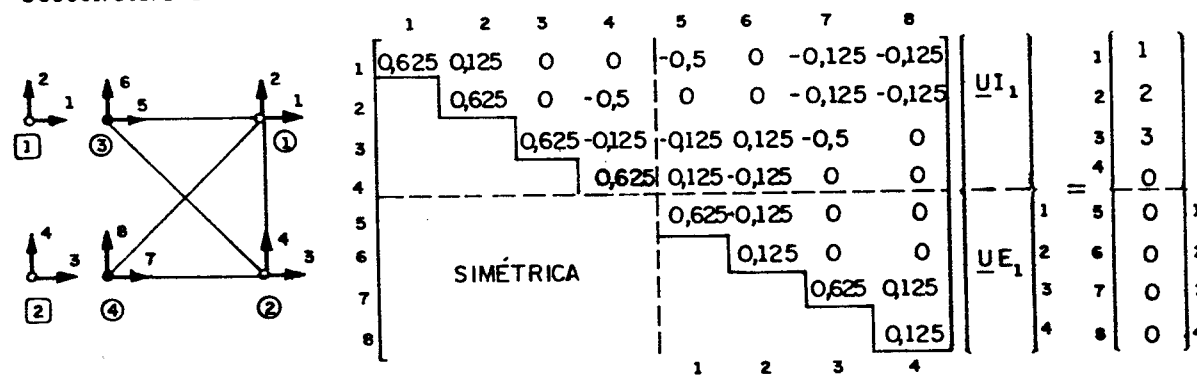


FIG. 5.2 - Subestrutura 1

Subestrutura 2:

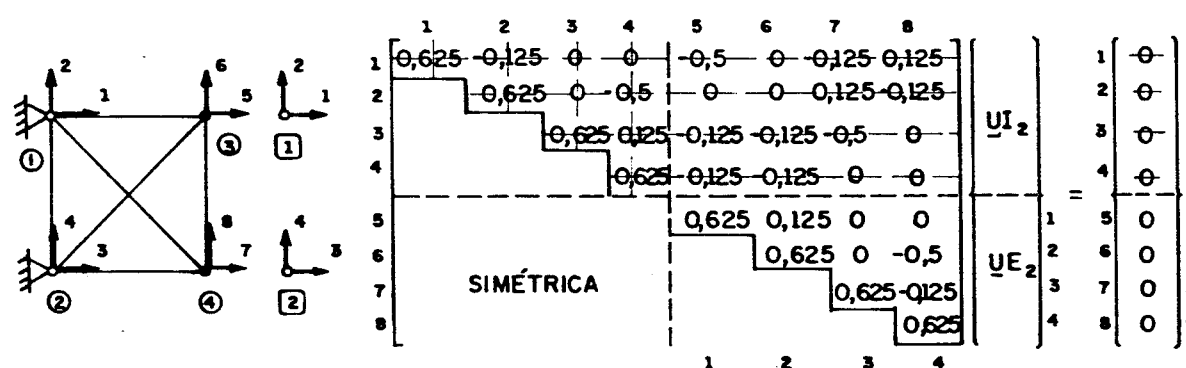


FIG. 5.3 - Subestrutura 2

Impondo na matriz de rigidez e vetor de cargas as condições de contorno.

PROCESSO DE SUBESTRUTURAÇÃO :

ETAPA 1 :

$$\begin{bmatrix} \underline{R}II_i & \underline{R}IE_i \\ \underline{R}EI_i & \underline{R}EE_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}I_i \\ \underline{U}E_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}I_i \\ \underline{F}E_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{R}II_i^* & \underline{R}IE_i^* \\ \underline{0} & \underline{R}EE_i^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}I_i \\ \underline{U}E_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}I_i^* \\ \underline{F}E_i^* \end{bmatrix}$$

Subestrutura 1 :

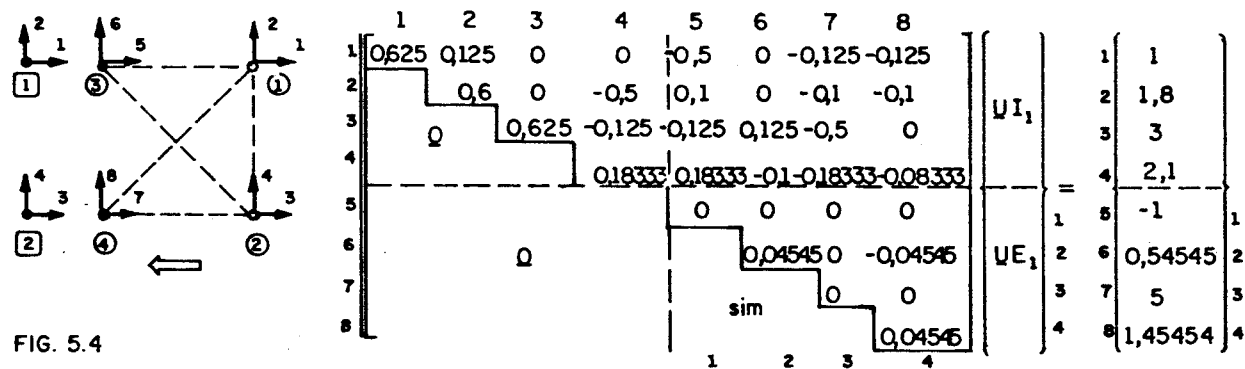


FIG. 5.4

Subestrutura 2 :

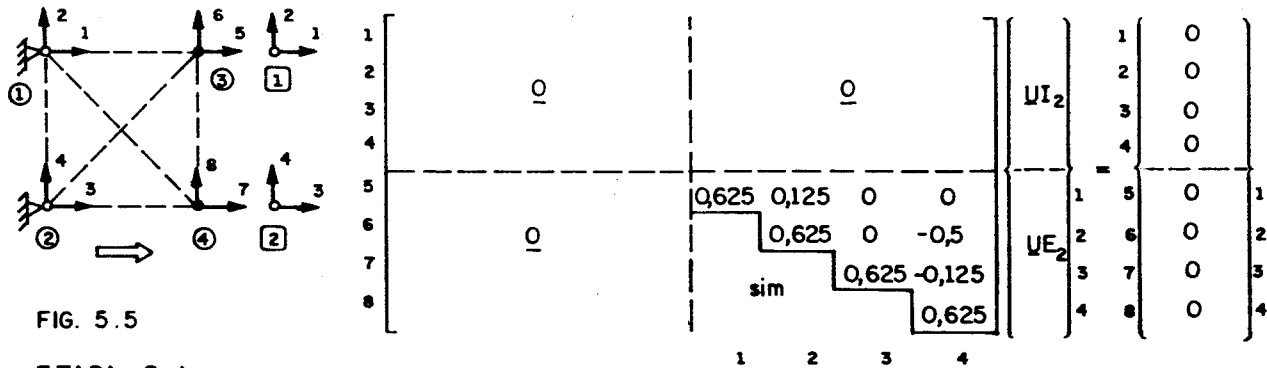


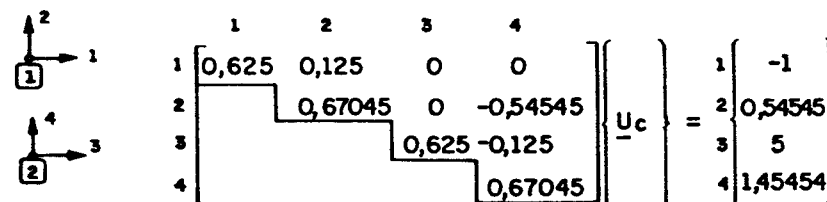
FIG. 5.5

ETAPA 2 :

$$\underline{R}C = \sum_{i=1}^2 \underline{A}_i^T \underline{R}EE_i^* \underline{A}_i$$

$$\underline{F}C = \sum_{i=1}^2 \underline{A}_i^T \underline{F}E_i^*$$

$$\underline{R}C \cdot \underline{U}C = \underline{F}C$$



$$\underline{U}C = \begin{bmatrix} -4,65648 \\ 15,28239 \\ 11,34350 \\ 16,71751 \end{bmatrix}$$

ETAPA 3:

$$\underline{U}E_i = \underline{A}_i \cdot \underline{U}_i$$

$$\begin{bmatrix} \underline{R}II_i^* & \underline{R}IE_i^* \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}I_i \\ \underline{U}E_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}I_i^* \\ \underline{U}E_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{U}I_i \\ \underline{U}E_i \end{bmatrix}$$

Subestrutura 1:

	1	2	3	4		5	6	7	8			
1	0,625	0,125	0	0		-0,5	0	-0,125	-0,125		1	1
2		0,6	0	-0,5		0,1	0	-0,1	-0,1		2	1,8
3			0,625	-0,125		-0,125	0,125	-0,5	0		3	3
4				0,18333		0,18333	-0,1	-0,18333	-0,08333		4	2,1
5											5	-4,65648
6											6	15,28239
7											7	11,34350
8											8	16,71751

$$\begin{bmatrix} \underline{U}I_1 \\ \underline{U}E_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5,4351 \\ 2 & 44,6108 \\ 3 & 18,5649 \\ 4 & 43,3894 \\ 5 & -4,6565 \\ 6 & 15,2824 \\ 7 & 11,3435 \\ 8 & 16,7175 \end{bmatrix}$$

Subestrutura 2:

	1	2	3	4		5	6	7	8			
1											1	0
2											2	0
3											3	0
4											4	0
5											5	-4,65648
6											6	15,28239
7											7	11,34350
8											8	16,71751

$$\begin{bmatrix} \underline{U}I_2 \\ \underline{U}E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \\ 5 & -4,6565 \\ 6 & 15,2824 \\ 7 & 11,3435 \\ 8 & 16,7175 \end{bmatrix}$$

Comparar o processo e resultados com o obtido por [2], no exemplo da pág. 241.

EXEMPLO 2: Calcular os deslocamentos da treliça plana, utilizando subestruturação em série.

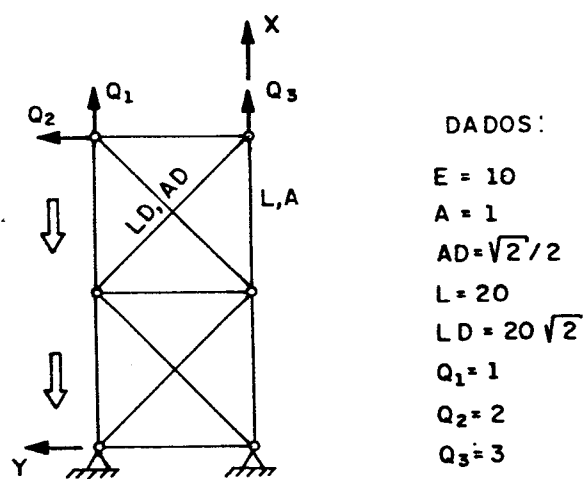


FIG. 5.6 — Treliça plana do EXEMPLO 2.

MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DE CARGAS DAS SUBESTRUTURAS.

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_{II_i} & \underline{R}_{IE_i} \\ \underline{R}_{EI_i} & \underline{R}_{EE_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{I_i} \\ \underline{U}_{E_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_{I_i} \\ \underline{F}_{E_i} \end{bmatrix}$$

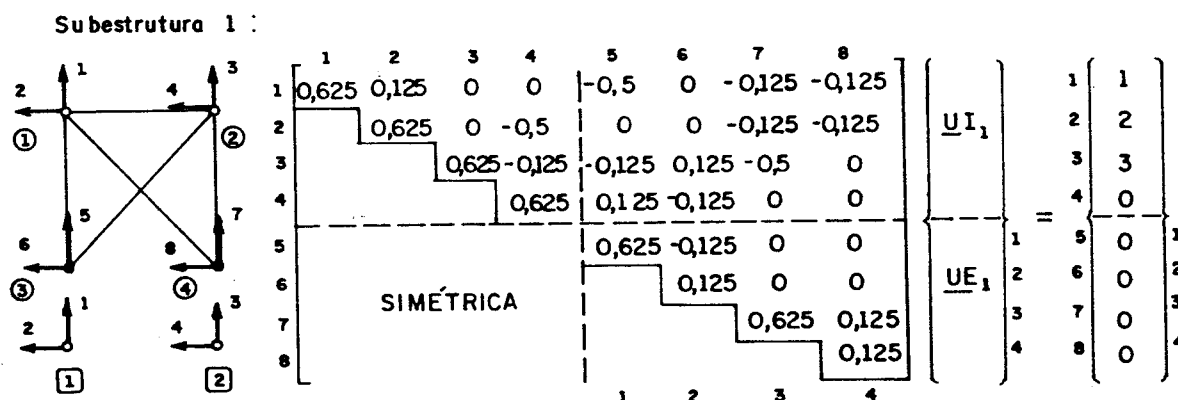


FIG. 5.7

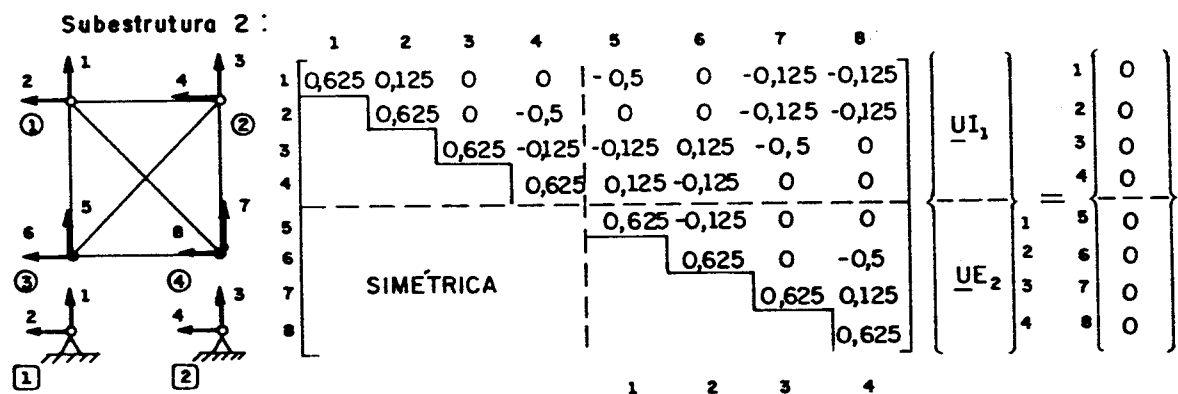


FIG. 5.8

A imposição das condições de vínculo para a última subestrutura pode ser feita antes do processo de condensação, resolvendo o sistema completo, ou depois, resolvendo o sistema de equações a nível de nós vinculados, a escolha vai depender da sistematização de cálculo adotada, neste exemplo se prossegue com a segunda alternativa.

PROCESSO DE SUBESTRUTURAÇÃO

ETAPA 1 :

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_{II_i} & \underline{R}_{IE_i} \\ \underline{R}_{EI_i} & \underline{R}_{EE_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{I_i} \\ \underline{U}_{E_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_{I_i} \\ \underline{F}_{E_i} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{R}_{II_i}^* & \underline{R}_{IE_i}^* \\ \underline{0} & \underline{R}_{EE_i}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{I_i} \\ \underline{U}_{E_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_{I_i}^* \\ \underline{F}_{E_i}^* \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_{C_i} = \underline{A}_i^T \cdot \underline{R}_{EE_i}^* \cdot \underline{A}_i$$

$$\underline{F}_{C_i} = \underline{A}_i^T \cdot \underline{F}_{E_i}^*$$

$$\underline{R}_{II_{i+1}}^* = \underline{R}_{II_{i+1}} + \underline{R}_{C_i}$$

$$\underline{F}_{I_{i+1}}^* = \underline{F}_{I_{i+1}} + \underline{F}_{C_i}$$

Subestrutura 1 :

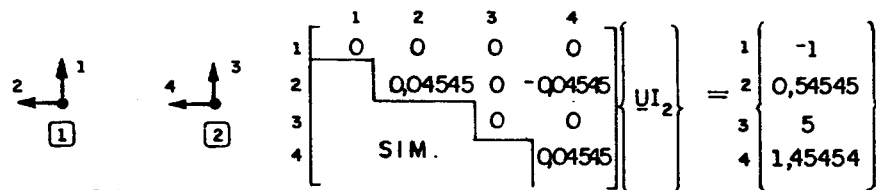
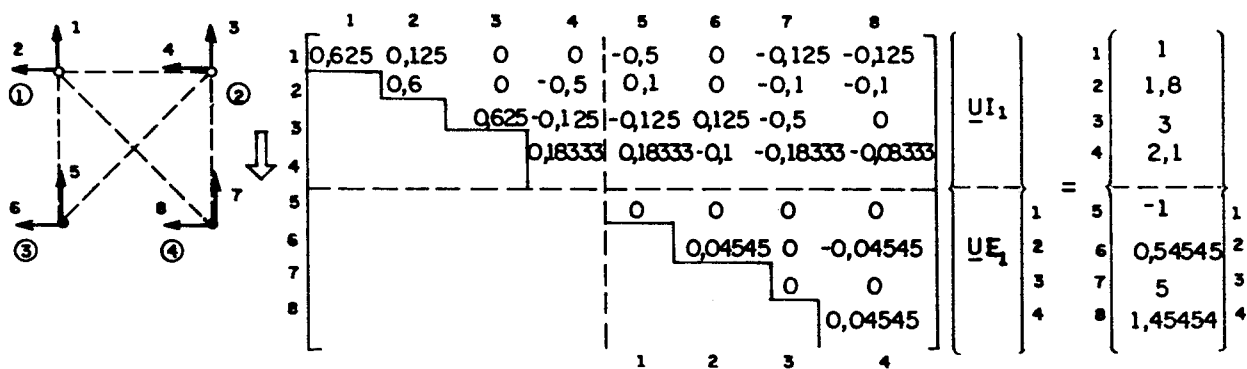


FIG. 5.9

Subestrutura 2 :

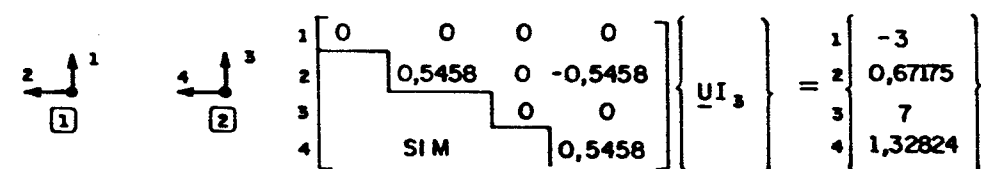
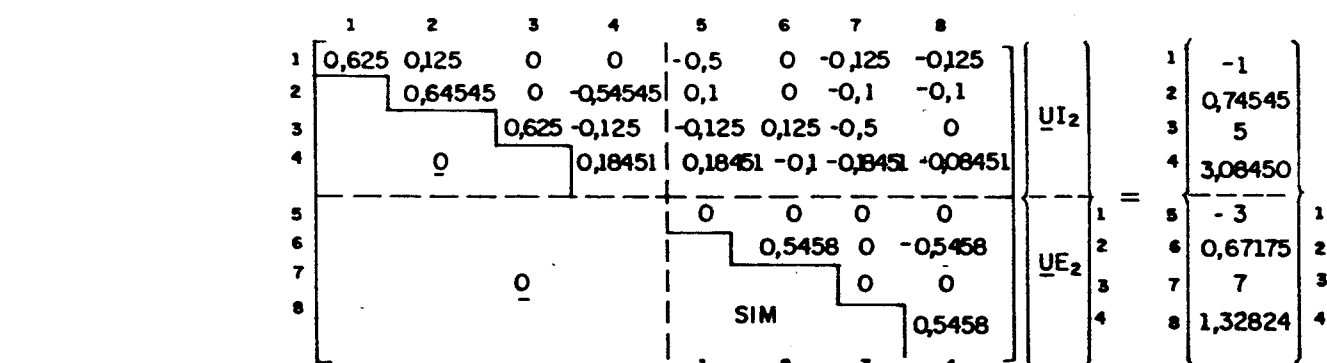
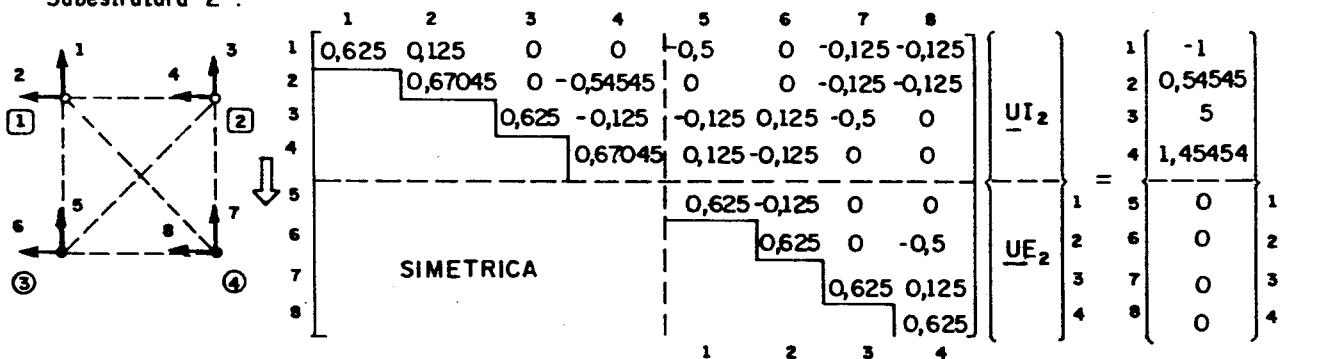
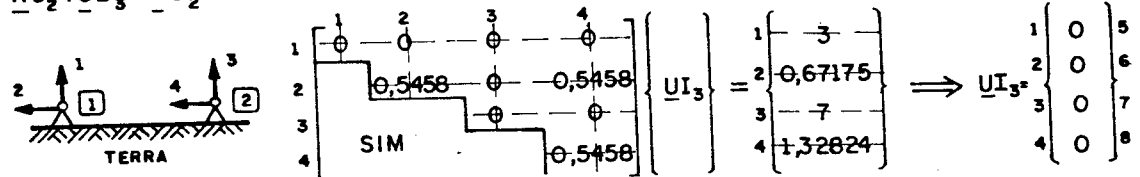


FIG. 5.10

ETAPA 2: Impondo as condições de vínculo e considerando \underline{UI}_3 o deslocamento do nó vinculado a terra.

$$\underline{RC}_2 \cdot \underline{UI}_3 = \underline{FC}_2$$



ETAPA 3:

$$\underline{UE}_i = \underline{A}_i \cdot \underline{UI}_{i+1}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{RII}_i^* & \underline{RIE}_i^* \\ \underline{0} & \underline{I}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{UI}_i \\ \underline{UE}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{FI}_i^* \\ \underline{UE}_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{UI}_i \\ \underline{UE}_i \end{bmatrix}$$

Subestrutura 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0,625 & 0,125 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & -0,125 & -0,125 \\ 2 & & 0,64545 & 0 & -0,54545 & 0,1 & 0 & -0,1 & -0,1 \\ 3 & & & 0,625 & -0,125 & -0,125 & 0,125 & -0,5 & 0 \\ 4 & & & & 0,18451 & 0,18451 & -0,1 & -0,18451 & -0,08451 \\ 5 & & & & & & & & \\ 6 & & & & & & & & \\ 7 & & & & & & & & \\ 8 & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{UI}_2 \\ \underline{UE}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0,74545 \\ 3 & 5 \\ 4 & 3,08450 \\ 5 & 0 \\ 6 & 0 \\ 7 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{UI}_2 \\ \underline{UE}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4,6564 \\ 2 & 15,2822 \\ 3 & 11,3435 \\ 4 & 16,7173 \\ 5 & 0 \\ 6 & 0 \\ 7 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{UE}_1$$

Subestrutura 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0,625 & 0,125 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & -0,125 & -0,125 \\ 2 & & 0,6 & 0 & -0,5 & 0,1 & 0 & -0,1 & -0,1 \\ 3 & & & 0,625 & -0,125 & -0,125 & 0,125 & -0,5 & 0 \\ 4 & & & & 0,18333 & 0,18333 & -0,1 & -0,18333 & -0,08333 \\ 5 & & & & & & & & \\ 6 & & & & & & & & \\ 7 & & & & & & & & \\ 8 & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{UI}_1 \\ \underline{UE}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1,8 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2,1 \\ 5 & -4,6564 \\ 6 & 15,2822 \\ 7 & 11,3435 \\ 8 & 16,7173 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{UI}_1 \\ \underline{UE}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5,4362 \\ 2 & 44,6164 \\ 3 & 18,5663 \\ 4 & 43,3963 \\ 5 & -4,6564 \\ 6 & 15,2822 \\ 7 & 11,3435 \\ 8 & 16,7173 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO IV

IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA

1. TÓPICOS ADICIONAIS

As deduções teóricas feitas a continuação, conduzem a obtenção da matriz de rigidez e vetor de cargas generalizadas para o elemento de barra de pórtico tridimensional, referidos a um sistema local de coordenadas.

1.1. TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS:

Sequência z-y-x

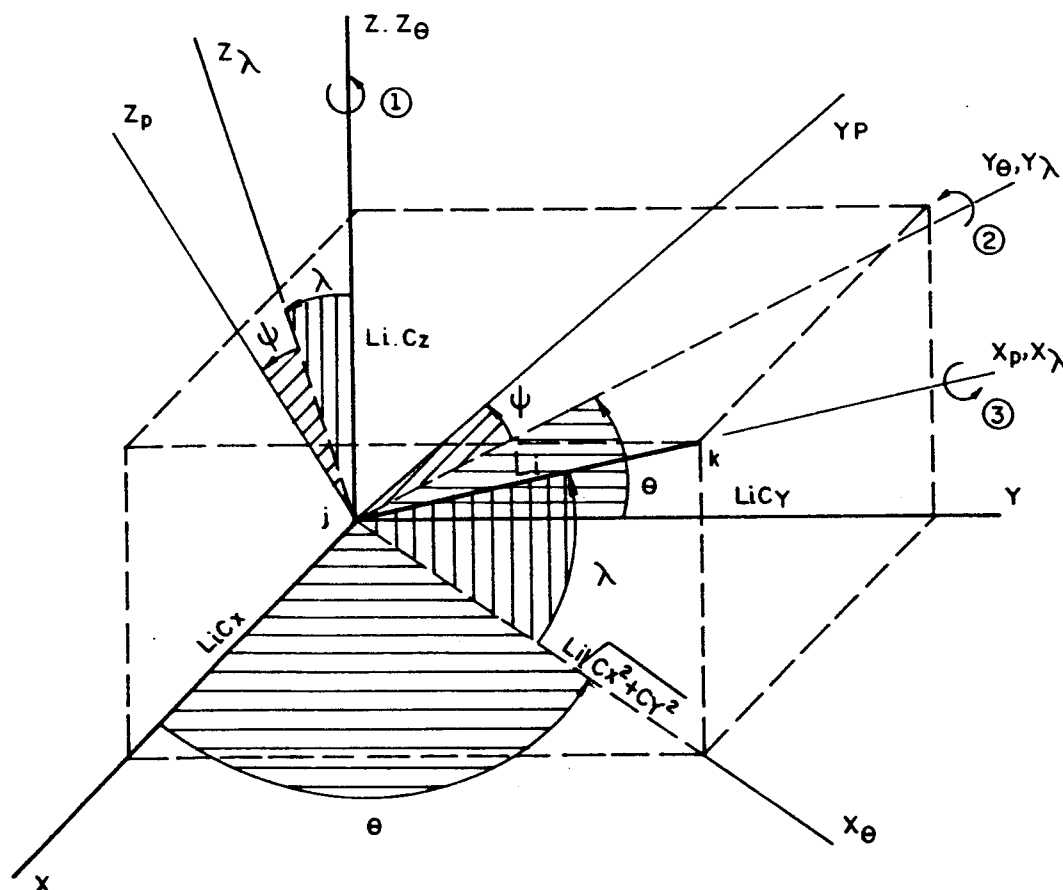


FIG. 1.1 - Transformação de coordenadas

DEFINIÇÃO DO ÂNGULO ψ_z : é o ângulo formado entre os eixos $Y_\lambda - z_\lambda$ com os eixos principais da seção transversal.

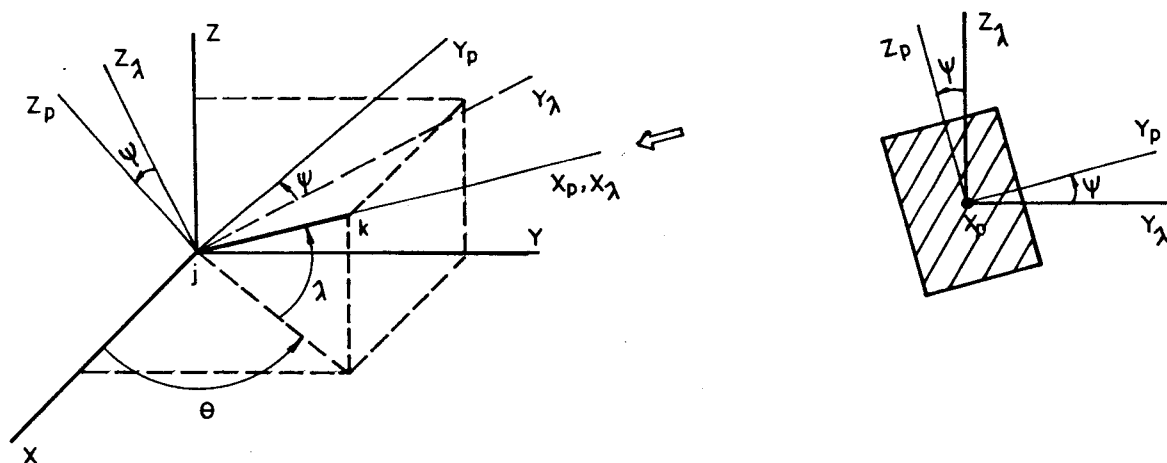


FIG. 1.2 - Eixos principais de inércia

Tendo como dados as coordenadas dos pontos j, k

$$L_i = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2}$$

$$c_x = \frac{x_k - x_j}{L}, \quad c_y = \frac{y_k - y_j}{L}, \quad c_z = \frac{z_k - z_j}{L}$$

Equivalência trigonométrica

$$\text{sen}\theta = \frac{c_y}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}, \quad \text{cos}\theta = \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}$$

$$\text{sen}\lambda = c_z, \quad \text{cos}\lambda = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$$

Matriz de transformação para o primeiro giro θ no plano $x-y$

$$\underline{G}^i_\theta = \begin{bmatrix} \text{cos}\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \text{cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{G}^i_\theta = \begin{bmatrix} \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} & \frac{c_y}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} & 0 \\ \frac{-c_y}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} & \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Matriz de transformação para o segundo giro λ no plano $x_\theta - z$

$$\underline{G}_{\lambda}^i = \begin{bmatrix} \cos\lambda & 0 & \text{sen}\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\lambda & 0 & \cos\lambda \end{bmatrix}, \quad \underline{G}_{\lambda}^i = \begin{bmatrix} \sqrt{cx^2+cy^2} & 0 & cz \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_z & 1 & \sqrt{cx^2+cy^2} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

A matriz de transformação geral para o caso em que os eixos coincidem com os principais, o plano $x_\lambda - z_\lambda$ é perpendicular ao x-y.

$$\underline{G}_{\lambda\theta}^i = \begin{bmatrix} \cos\theta.\cos\lambda & \text{sen}\theta.\cos\lambda & \text{sen}\lambda \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta\text{sen}\lambda - \text{sen}\theta.\text{sen}\lambda & \cos\lambda & \end{bmatrix}, \quad \underline{G}_{\lambda\theta}^i = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z \\ -c_y & c_x & 0 \\ \frac{-c_x c_z}{\sqrt{cx^2+cy^2}} & \frac{-c_x c_z}{\sqrt{cx^2+cy^2}} & \sqrt{cx^2+cy^2} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Matriz de transformação para o terceiro giro ψ no plano $y_\lambda - z_\lambda$

$$\underline{G}_{\psi}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \text{sen}\psi \\ 0 & -\text{sen}\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

A matriz de transformação geral para o caso em que os eixos λ não coincidem com os principais

$$\underline{G}^i = \underline{G}_{\psi}^i \underline{G}_{\lambda}^i \underline{G}_{\theta}^i = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\lambda & \text{sen}\theta\cos\lambda & \text{sen}\lambda \\ -\text{sen}\theta\cos\psi - \cos\theta\text{sen}\lambda\text{sen}\psi & \cos\theta\cos\psi - \text{sen}\theta\text{sen}\lambda\text{sen}\psi & \cos\lambda\text{sen}\psi \\ \text{sen}\theta\text{sen}\psi - \cos\theta\text{sen}\lambda\cos\psi & -\cos\theta\text{sen}\psi - \text{sen}\theta\text{sen}\lambda\cos\psi & \cos\lambda\cos\psi \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$G^i = G_\lambda^i G_\lambda^i G_\theta^i = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z \\ \frac{-c_x c_z \cdot \text{sen}\psi - c_y \cdot \text{cos}\psi}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} & \frac{-c_y c_z \cdot \text{sen}\psi + c_x \cdot \text{cos}\psi}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} & \sqrt{c_x^2 + c_y^2} \text{sen}\psi \\ \frac{-c_x c_z \cdot \text{cos}\psi + c_y \cdot \text{sen}\psi}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} & \frac{-c_y c_z \cdot \text{cos}\psi - c_x \cdot \text{sen}\psi}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} & \sqrt{c_x^2 + c_y^2} \text{cos}\psi \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Para o caso particular em que o eixo x_p , x_λ coincide com o eixo global z tem-se:

$c_z = \text{sen}\lambda = \bar{1}$ se assume que o eixo y_λ coincide com o global y , assim:

A matriz de transformação geral para o caso em que os eixos λ coincidem com os principais é:

$$G_{\lambda\theta}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{sen}\lambda \\ 0 & \text{sen}\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_{\lambda\theta}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_z \\ 0 & c_z & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

A matriz de transformação geral para o caso em que os eixos λ não coincidem com os principais é:

$$\underline{G}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{sen}\lambda \\ -\text{sen}\psi & \text{sen}\lambda \cdot \text{cos}\psi & 0 \\ -\text{cos}\psi & -\text{sen}\lambda \cdot \text{sen}\psi & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{G}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{sen}\lambda \\ -\text{sen}\psi & c_z \cdot \text{cos}\psi & 0 \\ -\text{cos}\psi & -c_z \cdot \text{sen}\psi & 0 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Para o caso particular em que as transformações de coordenadas aconteçam no plano $x-y$ (grelha) tem-se:

$\lambda = c_z = \theta$, assim:

$$\underline{G}^i = \begin{bmatrix} \text{cos}\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta \cdot \text{cos}\psi & \text{cos}\theta \cdot \text{cos}\psi & \text{sen}\psi \\ \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\psi & -\text{cos}\theta \cdot \text{sen}\psi & \text{cos}\psi \end{bmatrix}, \quad \underline{G}^i = \begin{bmatrix} \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} & \frac{c_y}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} & 0 \\ \frac{-c_y \cdot \text{cos}\psi}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} & \frac{c_x \cdot \text{cos}\psi}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} & \text{sen}\psi \\ \frac{c_y \cdot \text{sen}\psi}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} & \frac{-c_x \cdot \text{sen}\psi}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} & \text{cos}\psi \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Finalmente a matriz \underline{G}^i genérica para todos os casos:

$$\underline{G}^i = \begin{bmatrix} G_1 & G_4 & G_7 \\ G_2 & G_5 & G_8 \\ G_3 & G_6 & G_9 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Finalmente a matriz de transformação para um elemento espacial com n grupos de coordenadas:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} G^1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & G^i & \\ 0 & & & G^n \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

As operações de transformação de sistemas local-global são as seguintes:

Deslocamentos:

$$\underline{u}_L = \underline{G} \cdot \underline{u} \quad (1.12)$$

Matriz de rigidez:

$$\underline{r} = \underline{G}^T \cdot \underline{r}_L \cdot \underline{G} \quad (1.13)$$

Forças nodais equivalentes:

$$\underline{f} = \underline{G}^T \cdot \underline{f}_L \quad (1.14)$$

1.2. CONEXÃO RÍGIDA ENTRE ELEMENTOS

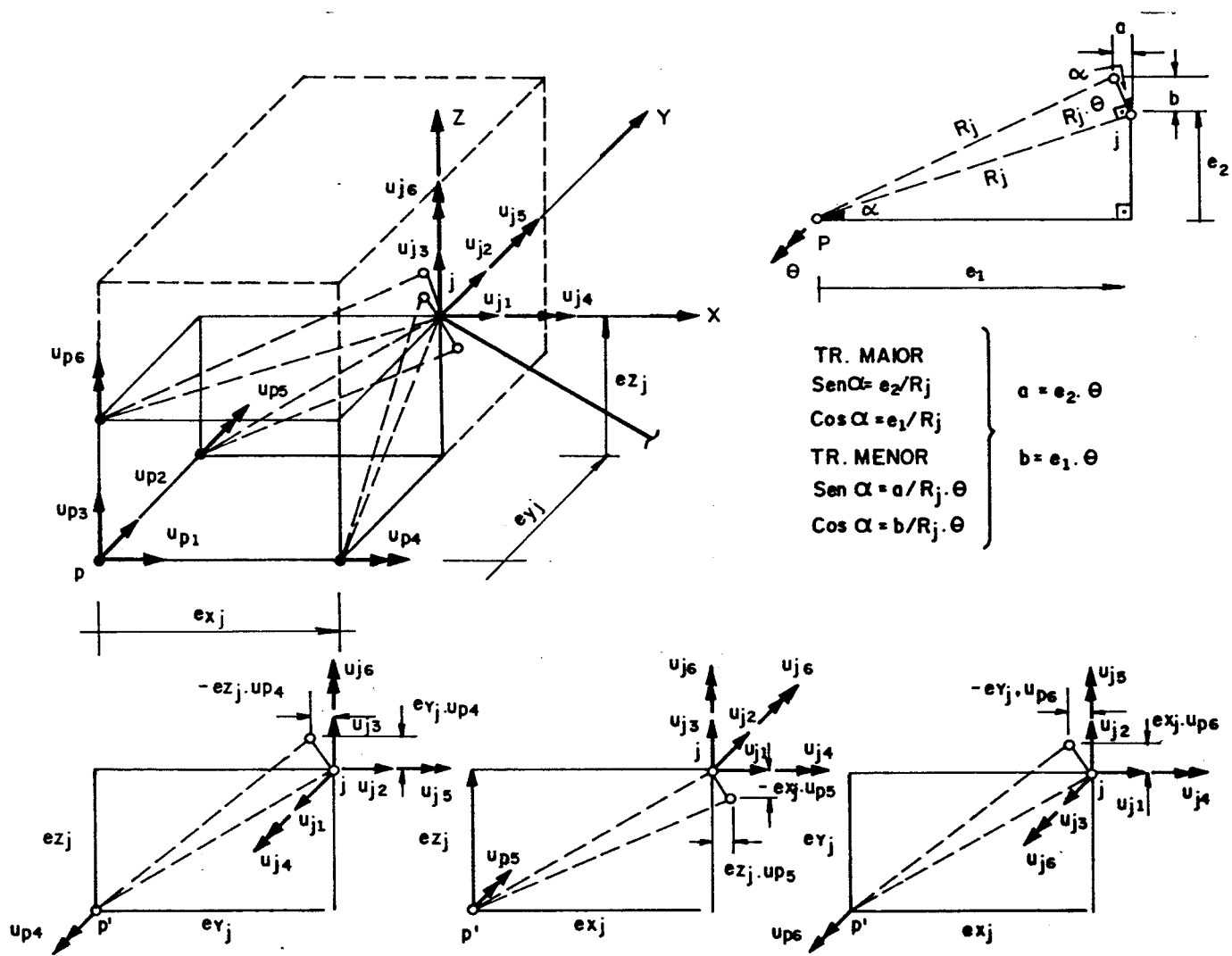


FIG. 1.3 - Conexões rígidas

Expressando os deslocamentos do ponto j em termos

de deslocamentos do ponto p.

$$u_{j1} = u_{p1} + e_{zj} \cdot u_{p5} - e_{yj} \cdot u_{p6}$$

$$u_{j2} = u_{p2} - e_{zj} \cdot u_{p4} + e_{xj} \cdot u_{p6}$$

$$u_{j3} = u_{p3} + e_{yj} \cdot u_{p4} - e_{xj} \cdot u_{p5}$$

$$u_{j4} = u_{p4}$$

$$u_{j5} = u_{p5}$$

$$u_{j6} = u_{p6}$$

em arranjo matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & e_z & -e_y \\ 0 & 1 & 0 & -e_z & 0 & e_x \\ 0 & 0 & 1 & e_y & -e_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{jp} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}_p \quad (1.15)$$

Elementos com as extremidades conectadas em corpos rígidos:



FIG. 1.4 - Barra com extremidades rígidas

Equação matricial de transformação para o elemento i

$$\begin{Bmatrix} \underline{u}_j \\ \underline{u}_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c}_{jp} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{c}_{kq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_p \\ \underline{u}_q \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

Generalizando a matriz de transformação para um elemento espacial com n nós.

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{c}_1 & & & \underline{0} \\ & \dots & & \\ & & \underline{c}_i & \\ & & & \dots & \underline{c}_n \\ \underline{0} & & & & \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

As equações transformação de coordenadas para elementos conectados através de corpos rígidos são as seguintes:

Deslocamentos:

$$\underline{u} = \underline{c} \cdot \underline{u}' \quad (1.18)$$

Matriz de rigidez:

$$\underline{r}' = \underline{c}^T \cdot \underline{r} \cdot \underline{c} \quad (1.19)$$

Forças nodais equivalentes

$$\underline{f}' = \underline{c}^T \cdot \underline{f} \quad (1.20)$$

Para o caso em que p coincide com j e q com k tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{c} &= \underline{I} \\ \underline{u} &= \underline{u}' \\ \underline{r}' &= \underline{r} \\ \underline{f}' &= \underline{f} \end{aligned}$$

$$\underline{T}_j = \left[\begin{array}{ccc|ccc} G_1 & G_4 & G_7 & e_z \cdot G_2 - e_y \cdot G_3 & e_z \cdot G_5 - e_y \cdot G_6 & e_z \cdot G_8 - e_y \cdot G_9 \\ G_2 & G_5 & G_8 & -e_z \cdot G_1 + e_x \cdot G_3 & -e_z \cdot G_4 + e_x \cdot G_6 & -e_z \cdot G_7 + e_x \cdot G_9 \\ G_3 & G_6 & G_9 & e_y \cdot G_1 - e_x \cdot G_2 & e_y \cdot G_4 - e_x \cdot G_5 & e_y \cdot G_7 - e_x \cdot G_8 \\ \hline & & & G_1 & G_4 & G_7 \\ & 0 & & G_2 & G_5 & G_8 \\ & & & G_3 & G_6 & G_9 \end{array} \right]_j \quad (1.24)$$

para os nós j e k tem-se:

$$\underline{T}_j = \left[\begin{array}{ccc|ccc} G_1 & G_4 & G_7 & T_1 & T_4 & T_7 \\ G_2 & G_5 & G_8 & T_2 & T_5 & T_8 \\ G_3 & G_6 & G_9 & T_3 & T_6 & T_9 \\ \hline & & & G_1 & G_4 & G_7 \\ & 0 & & G_2 & G_5 & G_8 \\ & & & G_3 & G_6 & G_9 \end{array} \right] ; \quad \underline{T}_k = \left[\begin{array}{ccc|ccc} G_1 & G_4 & G_7 & T_{10} & T_{13} & T_{16} \\ G_2 & G_5 & G_8 & T_{11} & T_{14} & T_{12} \\ G_3 & G_6 & G_9 & T_{12} & T_{15} & T_{18} \\ \hline & & & G_1 & G_4 & G_7 \\ & 0 & & G_2 & G_5 & G_8 \\ & & & G_3 & G_6 & G_9 \end{array} \right]_k \quad (1.25)$$

Generalizando a matriz de transformação para um elemento espacial com n nós e 6 graus de liberdade por nó.

$$\underline{T} = \left[\begin{array}{cccc} \underline{T}^1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \underline{T}^i & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \underline{T}^n \end{array} \right] \quad (1.26)$$

Matriz de rigidez para o elemento de barra no sistema local:

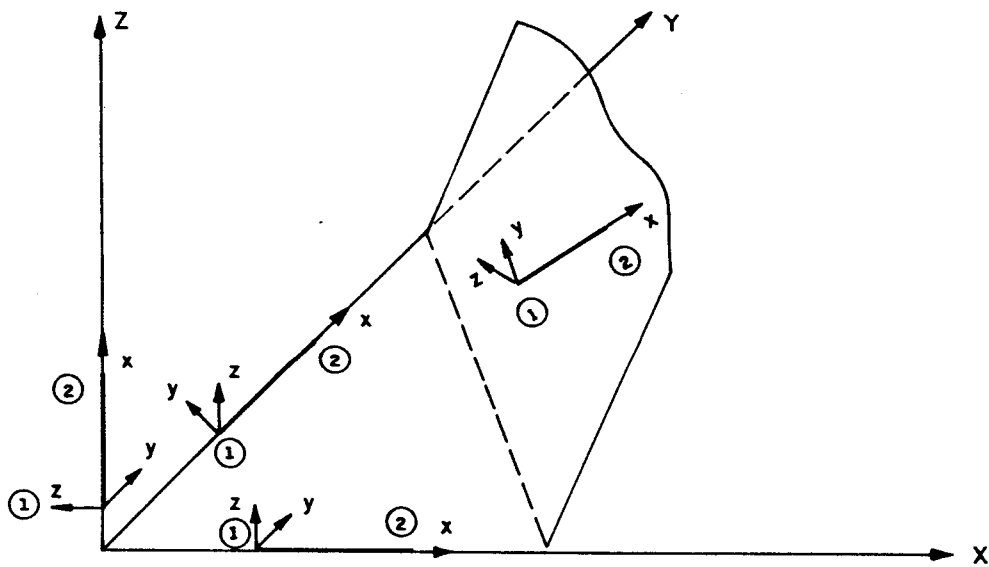


FIG. 1.5 - Orientação eixos locais

$$\underline{r}_i = \begin{bmatrix}
 A_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & AB & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -AB & 0 & 0 & 0 & 0 & A_7 \\
 & & A_4 & 0 & -A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_4 & 0 & -A_3 & 0 \\
 & & & A_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_{10} & 0 & 0 \\
 & & & & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 \\
 & & & & & A_6 & 0 & -A_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 \\
 & & & & & & A_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & AB & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_7 \\
 & & & & & & & & A_4 & 0 & 0 & 0 & A_3 \\
 & & & & & & & & & A_{10} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & A_2 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & A_6 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & A_6
 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

SIMÉTRICA

(1.27)

Vetor de cargas nodais equivalentes para o elemento de barra no sistema local.

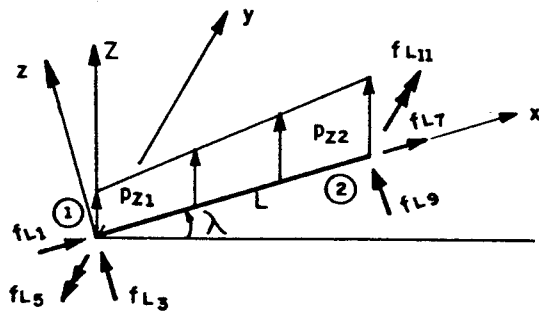


FIG. 1.6 - Cargas nodais equivalentes.

$$\underline{f}_L = \begin{bmatrix}
 B_1 \\
 0 \\
 B_2 \\
 0 \\
 B_3 \\
 0 \\
 B_4 \\
 0 \\
 B_5 \\
 0 \\
 B_6 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= (7/20 \cdot P_{Z1} + 3/20 \cdot P_{Z2}) \cdot L \cdot \text{Sen } \lambda \\
 B_2 &= (7/20 \cdot P_{Z1} + 3/20 \cdot P_{Z2}) \cdot L \cdot \text{Cos } \lambda \\
 B_3 &= (1/20 \cdot P_{Z1} + 1/30 \cdot P_{Z2}) \cdot L^2 \cdot \text{Cos } \lambda \\
 B_4 &= (7/20 \cdot P_{Z2} + 3/20 \cdot P_{Z1}) \cdot L \cdot \text{Sen } \lambda \\
 B_5 &= (7/20 \cdot P_{Z2} + 3/20 \cdot P_{Z1}) \cdot L \cdot \text{Cos } \lambda \\
 B_6 &= (1/20 \cdot P_{Z2} + 1/30 \cdot P_{Z1}) \cdot L^2 \cdot \text{Cos } \lambda
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Sen } \lambda &= \frac{CZ}{\sqrt{CX^2 + CY^2}} \\
 \text{Cos } \lambda &= \frac{CX}{\sqrt{CX^2 + CY^2}}
 \end{aligned}$$

(1.28)

Matriz de rigidez generalizada:

$$\underline{r}' = \underline{T}^T \cdot \underline{r}_L \cdot \underline{T} \quad (1.29)$$

$$\underline{r}' = \begin{bmatrix} [\underline{T}_j^T] & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & [\underline{T}_k^T] \end{bmatrix} \cdot \underline{r}_L \cdot \begin{bmatrix} [\underline{T}_j] & \underline{0} \\ \underline{0} & [\underline{T}_k] \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

efetuando o produto de matrizes (1.25) tem-se:

$$r'_{11} = G_1^2 \cdot A_9 + G_2^2 \cdot A_8 + G_3^2 \cdot A_4$$

$$r'_{12} = G_1 \cdot G_4 \cdot A_9 + G_2 \cdot G_5 \cdot A_8 + G_3 \cdot G_6 \cdot A_4$$

$$r'_{13} = G_1 \cdot G_7 \cdot A_9 + G_2 \cdot G_8 \cdot A_8 + G_3 \cdot G_9 \cdot A_4$$

$$r'_{14} = G_1 \cdot T_1 \cdot A_9 + G_2 (T_2 \cdot A_8 + G_3 \cdot A_7) + G_3 (T_3 \cdot A_4 - G_2 \cdot A_3)$$

$$r'_{15} = G_1 \cdot T_4 \cdot A_9 + G_2 (T_5 \cdot A_8 + G_6 \cdot A_7) + G_3 (T_6 \cdot A_4 - G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{16} = G_1 \cdot T_7 \cdot A_9 + G_2 (T_8 \cdot A_8 + G_9 \cdot A_7) + G_3 (T_9 \cdot A_4 - G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{17} = -G_1^2 \cdot A_9 - G_2^2 \cdot A_8 - G_3^2 \cdot A_4$$

$$r'_{18} = -G_1 \cdot G_4 \cdot A_9 - G_2 \cdot G_5 \cdot A_8 - G_3 \cdot G_6 \cdot A_4$$

$$r'_{19} = -G_1 \cdot G_7 \cdot A_9 - G_2 \cdot G_8 \cdot A_8 - G_3 \cdot G_9 \cdot A_4$$

$$r'_{110} = -G_1 \cdot T_{10} \cdot A_9 - G_2 (T_{11} \cdot A_8 - G_3 \cdot A_7) - G_3 (T_{12} \cdot A_4 + G_2 \cdot A_3)$$

$$r'_{111} = -G_1 \cdot T_{13} \cdot A_9 - G_2 (T_{14} \cdot A_8 - G_6 \cdot A_7) - G_3 (T_{15} \cdot A_4 + G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{112} = -G_1 \cdot T_{16} \cdot A_9 - G_2 (T_{17} \cdot A_8 - G_9 \cdot A_7) - G_3 (T_{18} \cdot A_4 + G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{22} = G_4^2 \cdot A_9 + G_5^2 \cdot A_8 + G_6^2 \cdot A_4$$

$$r'_{23} = G_4 \cdot G_7 \cdot A_9 + G_5 \cdot G_8 \cdot A_8 + G_6 \cdot G_9 \cdot A_4$$

$$r'_{24} = G_4 \cdot T_1 \cdot A_9 + G_5 (T_2 \cdot A_8 + G_3 \cdot A_7) + G_6 (T_3 \cdot A_4 - G_2 \cdot A_3)$$

$$r'_{25} = G_4 \cdot T_4 \cdot A_9 + G_5 (T_5 \cdot A_8 + G_6 \cdot A_7) + G_6 (T_6 \cdot A_4 - G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{26} = G_4 \cdot T_7 \cdot A_9 + G_5 (T_8 \cdot A_8 + G_9 \cdot A_7) + G_6 (T_9 \cdot A_4 - G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{27} = -G_4 \cdot G_1 \cdot A_9 - G_5 \cdot G_2 \cdot A_8 - G_6 \cdot G_3 \cdot A_4$$

$$r'_{28} = -G_4^2 \cdot A_9 - G_5^2 \cdot A_8 - G_6^2 \cdot A_4$$

$$r'_{29} = -G_4 \cdot G_7 \cdot A_9 - G_5 \cdot G_8 \cdot A_8 - G_6 \cdot G_9 \cdot A_4$$

$$r'_{210} = -G_4 \cdot T_{10} \cdot A_9 - G_5 (T_{11} \cdot A_8 - G_3 \cdot A_7) - G_6 (T_{12} \cdot A_4 + G_2 \cdot A_3)$$

$$r'_{211} = -G_4 \cdot T_{13} \cdot A_9 - G_5 (T_{14} \cdot A_8 - G_6 \cdot A_7) - G_6 (T_{15} \cdot A_4 + G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{212} = -G_4 \cdot T_{16} \cdot A_9 - G_5 (T_{17} \cdot A_8 - G_9 \cdot A_7) - G_6 (T_{18} \cdot A_4 + G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{33} = G_7^2 \cdot A_9 + G_8^2 \cdot A_8 + G_9^2 \cdot A_4$$

$$r'_{34} = G_7 \cdot T_1 \cdot A_9 + G_8 (T_2 \cdot A_8 + G_3 \cdot A_7) + G_9 (T_3 \cdot A_4 - G_2 \cdot A_3)$$

$$r'_{35} = G_7 \cdot T_4 \cdot A_9 + G_8 (T_5 \cdot A_8 + G_6 \cdot A_7) + G_9 (T_6 \cdot A_4 - G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{36} = G_7 \cdot T_7 \cdot A_9 + G_8 (T_8 \cdot A_8 + G_9 \cdot A_7) + G_9 (T_9 \cdot A_4 - G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{37} = -G_7 \cdot G_1 \cdot A_9 - G_8 \cdot G_2 \cdot A_8 - G_9 \cdot G_3 \cdot A_4$$

$$r'_{38} = -G_7 \cdot G_4 \cdot A_9 - G_8 \cdot G_5 \cdot A_8 - G_9 \cdot G_6 \cdot A_4$$

$$r'_{39} = -G_7^2 \cdot A_9 - G_8^2 \cdot A_8 - G_9^2 \cdot A_4$$

$$r'_{310} = -G_7 \cdot T_{10} \cdot A_9 - G_8 (T_{11} \cdot A_8 - G_3 \cdot A_7) - G_9 (T_{12} \cdot A_4 + G_2 \cdot A_3)$$

$$r'_{311} = -G_7 \cdot T_{13} \cdot A_9 - G_8 (T_{14} \cdot A_8 - G_6 \cdot A_7) - G_9 (T_{15} \cdot A_4 + G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{312} = -G_7 \cdot T_{16} \cdot A_9 - G_8 (T_{17} \cdot A_8 - G_9 \cdot A_7) - G_9 (T_{18} \cdot A_4 + G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{44} = G_1^2 \cdot A_{10} - G_2 (T_3 \cdot A_3 - G_2 \cdot A_2) + G_3 (T_2 \cdot A_7 + G_3 \cdot A_6) + T_1^2 \cdot A_9 + \\ + T_2 (T_2 \cdot A_8 + G_3 \cdot A_7) + T_3 (T_3 \cdot A_4 - G_2 \cdot A_3)$$

$$r'_{45} = G_1 \cdot G_4 \cdot A_{10} - G_2 (T_6 \cdot A_3 - G_5 \cdot A_2) + G_3 (T_5 \cdot A_7 + G_6 \cdot A_6) + \\ + T_1 \cdot T_4 \cdot A_9 + T_2 (T_5 \cdot A_8 + G_6 \cdot A_7) + T_3 (T_6 \cdot A_4 - G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{46} = G_1 \cdot G_7 \cdot A_{10} - G_2 (T_9 \cdot A_3 - G_8 \cdot A_2) + G_3 (T_8 \cdot A_7 + G_9 \cdot A_6) + T_1 \cdot T_7 \cdot A_9 + \\ + T_2 (T_8 \cdot A_8 + G_9 \cdot A_7) + T_3 (T_9 \cdot A_4 - G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{47} = G_2 \cdot G_3 \cdot A_3 - G_3 \cdot G_2 \cdot A_7 - T_1 \cdot G_1 \cdot A_9 - T_2 \cdot G_2 \cdot A_8 - T_3 \cdot G_3 \cdot A_4$$

$$r'_{48} = G_2 \cdot G_6 \cdot A_3 - G_3 \cdot G_5 \cdot A_7 - T_1 \cdot G_4 \cdot A_9 - T_2 \cdot G_5 \cdot A_8 - T_3 \cdot G_6 \cdot A_4$$

$$r'_{49} = G_2 \cdot G_9 \cdot A_3 - G_3 \cdot G_8 \cdot A_7 - T_1 \cdot G_7 \cdot A_9 - T_2 \cdot G_8 \cdot A_8 - T_3 \cdot G_9 \cdot A_4$$

$$r'_{410} = -G_1^2 \cdot A_{10} + G_2 (T_{12} \cdot A_3 + G_2 \cdot A_1) - G_3 (T_{11} \cdot A_7 - G_3 \cdot A_5) - T_1 \cdot T_{10} \cdot A_9 - \\ - T_2 (T_{11} \cdot A_8 - G_3 \cdot A_7) - T_3 (T_{12} \cdot A_4 + G_2 \cdot A_3)$$

$$r'_{411} = -G_1 \cdot G_4 \cdot A_{10} + G_2 (T_{15} \cdot A_3 + G_5 \cdot A_1) - G_3 (T_{14} \cdot A_7 - G_6 \cdot A_5) - T_1 \cdot T_{13} \cdot A_9 - \\ - T_2 (T_{14} \cdot A_8 - G_6 \cdot A_7) - T_3 (T_{15} \cdot A_4 + G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{412} = -G_1 \cdot G_7 \cdot A_{10} + G_2 (T_{18} \cdot A_3 + G_8 \cdot A_1) - G_3 (T_{17} \cdot A_7 - G_9 \cdot A_5) - T_1 \cdot T_{16} \cdot A_9 - \\ - T_2 (T_{17} \cdot A_8 - G_9 \cdot A_7) - T_3 (T_{18} \cdot A_4 + G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{55} = G_4^2 \cdot A_{10} - G_5 (T_6 \cdot A_3 - G_5 \cdot A_2) + G_6 (T_5 \cdot A_7 + G_6 \cdot A_6) + T_4^2 \cdot A_9 + \\ + T_5 (T_5 \cdot A_8 + G_6 \cdot A_7) + T_6 (T_6 \cdot A_4 - G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{56} = G_4 \cdot G_7 \cdot A_{10} - G_5 (T_9 \cdot A_3 - G_8 \cdot A_2) + G_6 (T_8 \cdot A_7 + G_9 \cdot A_6) + T_4 \cdot T_7 \cdot A_9 + \\ + T_5 (T_8 \cdot A_8 + G_9 \cdot A_7) + T_6 (T_9 \cdot A_4 - G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{57} = G_5 \cdot G_3 \cdot A_3 - G_6 \cdot G_2 \cdot A_7 - T_4 \cdot G_1 \cdot A_9 - T_5 \cdot G_2 \cdot A_8 - \\ - T_6 \cdot G_3 \cdot A_4$$

$$r'_{58} = G_5 \cdot G_6 \cdot A_3 - G_6 \cdot G_5 \cdot A_7 - T_4 \cdot G_4 \cdot A_9 - T_5 \cdot G_5 \cdot A_8 - \\ - T_6 \cdot G_6 \cdot A_4$$

$$r'_{59} = G_5 \cdot G_9 \cdot A_3 - G_6 \cdot G_8 \cdot A_7 - T_4 \cdot G_7 \cdot A_9 - T_5 \cdot G_8 \cdot A_8 - \\ - T_6 \cdot G_9 \cdot A_4$$

$$r'_{510} = -G_4 \cdot G_1 \cdot A_{10} + G_5 (T_{12} \cdot A_3 + G_2 \cdot A_1) - G_6 (T_{11} \cdot A_7 - G_3 \cdot A_5) - T_4 \cdot T_{10} \cdot A_9 - \\ - T_5 (T_{11} \cdot A_8 - G_3 \cdot A_7) - T_6 (T_{12} \cdot A_4 + G_2 \cdot A_3)$$

$$r'_{511} = -G_4^2 \cdot A_{10} + G_5 (T_{15} \cdot A_3 + G_5 \cdot A_1) - G_6 (T_{14} \cdot A_7 - G_6 \cdot A_5) - T_4 \cdot T_{13} \cdot A_9 - \\ - T_5 (T_{14} \cdot A_8 - G_6 \cdot A_7) - T_6 (T_{15} \cdot A_4 + G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{512} = -G_4 \cdot G_7 \cdot A_{10} + G_5 (T_{18} \cdot A_3 + G_8 \cdot A_1) - G_6 (T_{17} \cdot A_7 - G_9 \cdot A_5) - T_4 \cdot T_{16} \cdot A_9 - \\ - T_5 (T_{17} \cdot A_8 - G_9 \cdot A_7) - T_6 (T_{18} \cdot A_4 + G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{66} = G_7^2 \cdot A_{10} - G_8 (T_9 \cdot A_3 - G_8 \cdot A_2) + G_9 (T_8 \cdot A_7 + G_9 \cdot A_6) + T_7^2 \cdot A_9 + T_8 (T_8 \cdot A_8 + \\ + G_9 \cdot A_7) + T_9 (T_9 \cdot A_4 - G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{67} = G_8 \cdot G_3 \cdot A_3 - G_9 \cdot G_2 \cdot A_7 - T_7 \cdot G_1 \cdot A_9 - T_8 \cdot G_2 \cdot A_8 - T_9 \cdot G_3 \cdot A_4$$

$$r'_{68} = G_8 \cdot G_6 \cdot A_3 - G_9 \cdot G_5 \cdot A_7 - T_7 \cdot G_4 \cdot A_9 - T_8 \cdot G_5 \cdot A_8 - T_9 \cdot G_6 \cdot A_4$$

$$r'_{69} = G_8 \cdot G_9 \cdot A_3 - G_9 \cdot G_8 \cdot A_7 - T_7 \cdot G_7 \cdot A_9 - T_8 \cdot G_8 \cdot A_8 - T_9 \cdot G_9 \cdot A_4$$

$$r'_{610} = -G_7 \cdot G_1 \cdot A_{10} + G_8 (T_{12} \cdot A_3 + G_2 \cdot A_1) - G_9 (T_{11} \cdot A_7 - G_3 \cdot A_5) - T_7 \cdot T_{10} \cdot A_9 - \\ - T_8 (T_{11} \cdot A_8 - G_3 \cdot A_7) - T_9 (T_{12} \cdot A_4 + G_2 \cdot A_3)$$

$$r'_{611} = -G_7 \cdot G_4 \cdot A_{10} + G_8 (T_{15} \cdot A_3 + G_5 \cdot A_1) - G_9 (T_{14} \cdot A_7 - G_6 \cdot A_5) - T_7 \cdot T_{13} \cdot A_9 - \\ - T_8 (T_{14} \cdot A_8 - G_6 \cdot A_7) - T_9 (T_{15} \cdot A_4 + G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{612} = -G_7^2 \cdot A_{10} + G_8 (T_{18} \cdot A_3 + G_8 \cdot A_1) - G_9 (T_{17} \cdot A_7 - G_9 \cdot A_5) - T_7 \cdot T_{16} \cdot A_9 - \\ - T_8 (T_{17} \cdot A_8 - G_9 \cdot A_7) - T_9 (T_{18} \cdot A_4 + G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{77} = G_1^2 \cdot A_9 + G_2^2 \cdot A_8 + G_3^2 \cdot A_4$$

$$r'_{78} = G_1 \cdot G_4 \cdot A_9 + G_2 \cdot G_5 \cdot A_8 + G_3 \cdot G_6 \cdot A_4$$

$$r'_{79} = G_1 \cdot G_7 \cdot A_9 + G_2 \cdot G_8 \cdot A_8 + G_3 \cdot G_9 \cdot A_4$$

$$r'_{710} = G_1 \cdot T_{10} \cdot A_9 + G_2 \cdot (T_{11} \cdot A_8 - G_3 \cdot A_7) + G_3 (T_{12} \cdot A_4 + G_2 \cdot A_3)$$

$$r'_{711} = G_1 \cdot T_{13} \cdot A_9 + G_2 (T_{14} \cdot A_8 - G_6 \cdot A_7) + G_3 (T_{15} \cdot A_4 + G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{712} = G_1 \cdot T_{16} \cdot A_9 + G_2 (T_{17} \cdot A_8 - G_9 \cdot A_7) + G_3 (T_{18} \cdot A_4 + G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{88} = G_4^2 \cdot A_9 + G_5^2 \cdot A_8 + G_6^2 \cdot A_4$$

$$r'_{89} = G_4 \cdot G_7 \cdot A_9 + G_5 \cdot G_8 \cdot A_8 + G_6 \cdot G_9 \cdot A_4$$

$$r'_{910} = G_4 \cdot T_{10} \cdot A_9 + G_5 (T_{11} \cdot A_8 - G_3 \cdot A_7) + G_6 (T_{12} \cdot A_4 + G_2 \cdot A_3)$$

$$r'_{911} = G_4 \cdot T_{13} \cdot A_9 + G_5 (T_{14} \cdot A_8 - G_6 \cdot A_7) + G_6 (T_{15} \cdot A_4 + G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{912} = G_4 \cdot T_{16} \cdot A_9 + G_5 (T_{17} \cdot A_8 - G_9 \cdot A_7) + G_6 (T_{18} \cdot A_4 + G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{99} = G_7^2 \cdot A_9 + G_8^2 \cdot A_8 + G_9^2 \cdot A_4$$

$$r'_{910} = G_7 \cdot T_{10} \cdot A_9 + G_8 (T_{11} \cdot A_8 - G_3 \cdot A_7) + G_9 (T_{12} \cdot A_4 + G_2 \cdot A_3)$$

$$r'_{911} = G_7 \cdot T_{13} \cdot A_9 + G_8 (T_{14} \cdot A_8 - G_6 \cdot A_7) + G_9 (T_{15} \cdot A_4 + G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{912} = G_7 \cdot T_{16} \cdot A_9 + G_8 (T_{17} \cdot A_8 - G_9 \cdot A_7) + G_9 (T_{18} \cdot A_4 + G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{1010} = G_1^2 \cdot A_{10} + G_2 (T_{12} \cdot A_3 + G_2 \cdot A_2) - G_3 (T_{11} \cdot A_7 - G_3 \cdot A_6) + T_{10}^2 \cdot A_9 + \\ + T_{11} (T_{11} \cdot A_8 - G_3 \cdot A_7) + T_{12} (T_{12} \cdot A_4 + G_2 \cdot A_3)$$

$$r'_{1011} = G_1 \cdot G_4 \cdot A_{10} + G_2 (T_{15} \cdot A_3 + G_5 \cdot A_2) - G_3 (T_{14} \cdot A_7 - G_6 \cdot A_6) + T_{10} \cdot T_{13} \cdot A_9 + \\ + T_{11} (T_{14} \cdot A_8 - G_6 \cdot A_7) + T_{12} (T_{15} \cdot A_4 + G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{1012} = G_1 \cdot G_7 \cdot A_{10} + G_2 (T_{18} \cdot A_3 + G_8 \cdot A_2) - G_3 (T_{17} \cdot A_7 - G_9 \cdot A_6) + T_{10} \cdot T_{16} \cdot A_9 + \\ + T_{11} (T_{17} \cdot A_8 - G_9 \cdot A_7) + T_{12} (T_{18} \cdot A_4 + G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{1111} = G_4^2 \cdot A_{10} + G_5 (T_{15} \cdot A_3 + G_5 \cdot A_2) - G_6 (T_{14} \cdot A_7 - G_6 \cdot A_6) + T_{13}^2 \cdot A_9 + \\ + T_{14} (T_{14} \cdot A_8 - G_6 \cdot A_7) + T_{15} (T_{15} \cdot A_4 + G_5 \cdot A_3)$$

$$r'_{1112} = G_4 \cdot G_7 \cdot A_{10} + G_5 (T_{18} \cdot A_3 + G_8 \cdot A_2) - G_6 (T_{17} \cdot A_7 - G_9 \cdot A_6) + T_{13} \cdot T_{16} \cdot A_9 + \\ + T_{14} (T_{17} \cdot A_8 - G_9 \cdot A_7) + T_{15} (T_{18} \cdot A_4 + G_8 \cdot A_3)$$

$$r'_{1212} = G_7^2 \cdot A_{10} + G_8 (T_{18} \cdot A_3 + G_8 \cdot A_2) - G_9 (T_{17} \cdot A_7 - G_9 \cdot A_6) \\ + T_{16}^2 \cdot A_9 + T_{17} (T_{17} \cdot A_8 - G_9 \cdot A_7) + T_{18} (T_{18} \cdot A_4 + G_8 \cdot A_3)$$

vetor de cargas nodais equivalentes generalizado:

$$\underline{f}' = \underline{T}^T \cdot \underline{f}_L \quad (1.31)$$

$$\underline{f}' = \begin{bmatrix} [\underline{T}_j^T] & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & [\underline{T}_k^T] \end{bmatrix} \cdot \underline{f}_L \quad (1.32)$$

efetuando o produto de matrizes tem-se:

$$\begin{aligned} f'_1 &= G_1 \cdot B_1 + G_3 \cdot B_2 \\ f'_2 &= G_4 \cdot B_1 + G_6 \cdot B_2 \\ f'_3 &= G_7 \cdot B_1 + G_9 \cdot B_2 \\ f'_4 &= G_2 \cdot B_3 + T_1 \cdot B_1 + T_3 \cdot B_2 \\ f'_5 &= G_5 \cdot B_3 + T_4 \cdot B_1 + T_6 \cdot B_2 \\ f'_6 &= G_8 \cdot B_3 + T_7 \cdot B_1 + T_9 \cdot B_2 \\ f'_7 &= G_1 \cdot B_4 + G_3 \cdot B_5 \\ f'_8 &= G_4 \cdot B_4 + G_6 \cdot B_5 \\ f'_9 &= G_7 \cdot B_4 + G_9 \cdot B_5 \\ f'_{10} &= G_2 \cdot B_6 + T_{10} \cdot B_4 + T_{12} \cdot B_5 \\ f'_{11} &= G_5 \cdot B_6 + T_{13} \cdot B_4 + T_{15} \cdot B_5 \\ f'_{12} &= G_8 \cdot B_6 + T_{16} \cdot B_4 + T_{18} \cdot B_5 \end{aligned}$$

2. ELEMENTOS ESTRUTURAIS

2.1. PAREDE: Elemento estrutural com rigidez no próprio plano, composto por elementos de chapa, referenciados diretamente às coordenadas globais da estrutura.

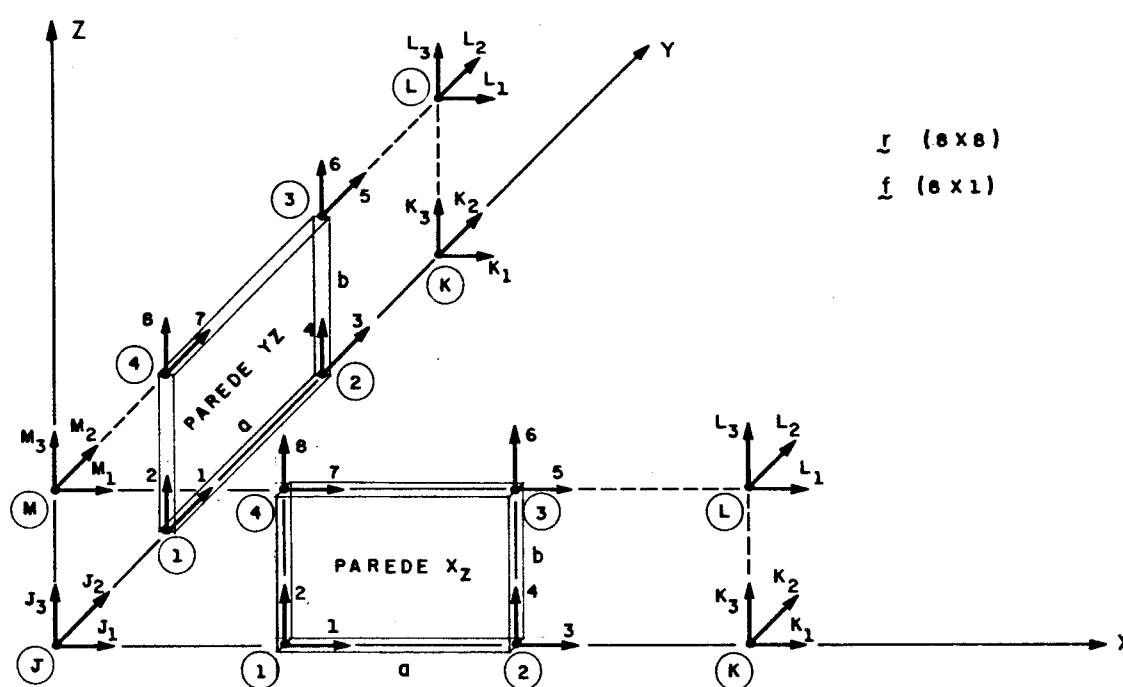


FIG. 2.1 - Sistema locais e globais

2.2. LAJE: Elemento estrutural com rigidez transversal e no próprio plano, composto por elementos de chapa e superposto com elementos de placa para representar o comportamento à flexão. Para a aplicação da teoria de placas delgadas ($\frac{1}{100} \leq \frac{d}{lm} \leq \frac{1}{5}$), e para pequenos deslocamentos podem considerar-se os efeitos de flexão e de membrana independentes.

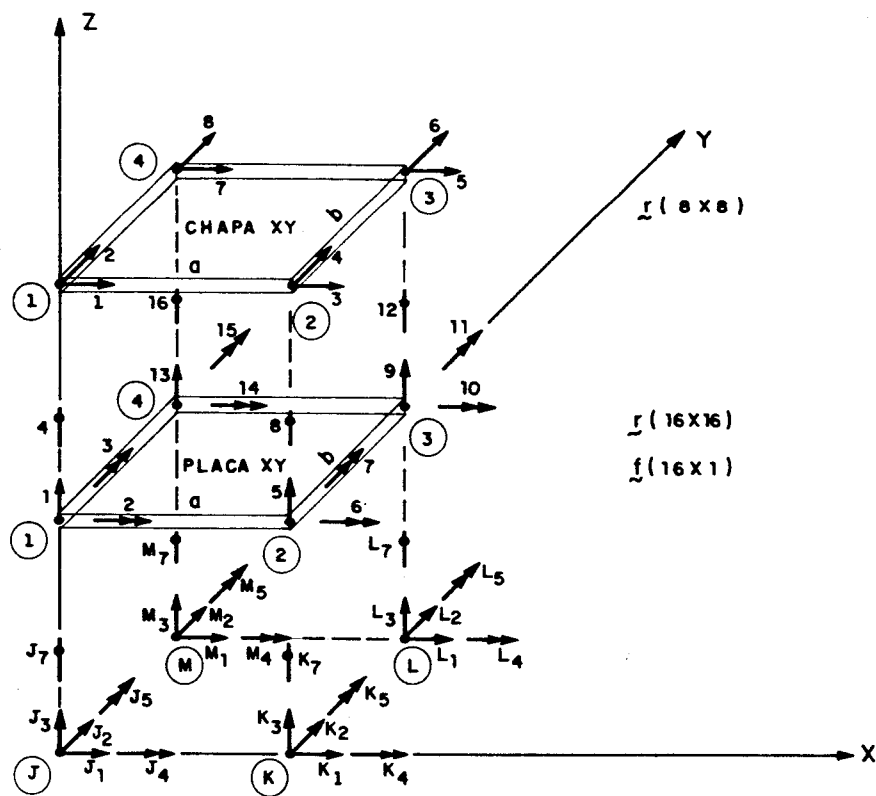


FIG. 22 - Sistemas locais e globais

2.3. VIGAS E PILARES: Elementos estruturais com rigidez à flexão, esforço axial e torção com postos por elementos de barra de pórtico tridimensional, podendo trabalhar com todos ou alguns dos seus seis graus de liberdade.

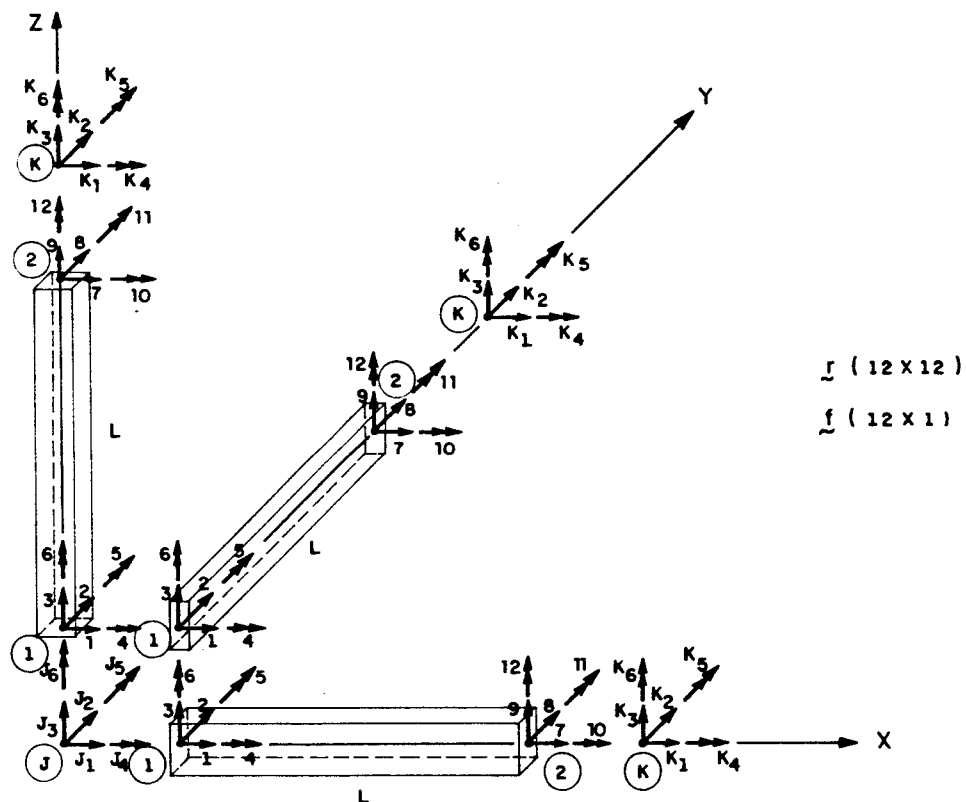


FIG. 2.3 - Sistemas local e global

3. **CARGAS:** As cargas consideradas na análise como atuantes na estrutura são de três tipos:

a) **Cargas Permanentes:** constituídas pelo peso da estrutura e carregamento fixo em geral, considerado distribuído nas lajes e/ou vigas ou como carga localizada nos nós.

b) **Cargas de Utilização:** Constituída por outros tipos de cargas não fixos, consideradas uniformemente distribuídas nas lajes e/ou vigas.

c) **Cargas de Vento:** Estabelecida segundo as normas e considerada atuando nos nós a nível das lajes.

4. TÉCNICAS COMPUTACIONAIS

Com o propósito de otimizar o processamento computacional para a aplicação das técnicas anteriormente descritas, foram criadas subrotinas adequadas ao manejo das matrizes de rigidez e de cargas das subestruturas em forma particionada, levando em conta as características de cada uma. As matrizes simétricas \underline{R} , \underline{R}_{II} , \underline{R}_{EE} serão armazenadas em vetor por linhas e as matrizes retangulares \underline{R}_{IE} , \underline{F} , \underline{F}_I , \underline{F}_E em arranjo retangular.

$$\begin{matrix} N & & NVC \\ \left[\begin{array}{c} \diagdown \\ \underline{R} \\ \diagup \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \underline{U} \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c} \underline{F} \end{array} \right] \end{matrix} \quad \text{Matrizes de rigidez e de cargas}$$

$$\begin{matrix} NCI & NCE & & NVC \\ \left[\begin{array}{cc|c} \underline{R}_{II} & \underline{R}_{IE} & \\ \hline \text{SIM} & & \\ \hline & \underline{R}_{EE} & \\ \hline \text{SIM} & \text{SIM} & \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \underline{U}_I \\ \underline{U}_E \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c} \underline{F}_I \\ \underline{F}_E \end{array} \right] \end{matrix} \quad \text{Matriz de rigidez e de cargas particionadas}$$

\underline{R}_{II} [NCI(NCI+1)/2]

\underline{R}_{IE} (NCI,NCE)

\underline{R}_{EE} [NCE(NCE+1)/2]

\underline{F}_I (NCI,NVC)

\underline{F}_E (NCE,NVC)

\underline{R} [NC(NC+1)/2]

\underline{F} (NC,NVC)

NCI = N # DE COORDENADAS INTERNAS

NCE = N # DE COORDENADAS EXTERNAS

N = N # DE COORDENADAS

NHCP = HIPÓTESE DE CARGA PERMANENTE = 1

NHCU = N # DE HIPÓTESES DE CARGA DE UTILIZAÇÃO

NHCV = N # DE HIPÓTESES DE CARGA DE VENTO

NVC = NHCP + NHCU + NHCV

4.1. ARRANJO PARA MATRIZ SIMÉTRICA

Para operar a matriz simétrica armazenada em vetor por linhas o fator i_d deve ser calculado uma vez para en dereçar todos os elementos da linha.

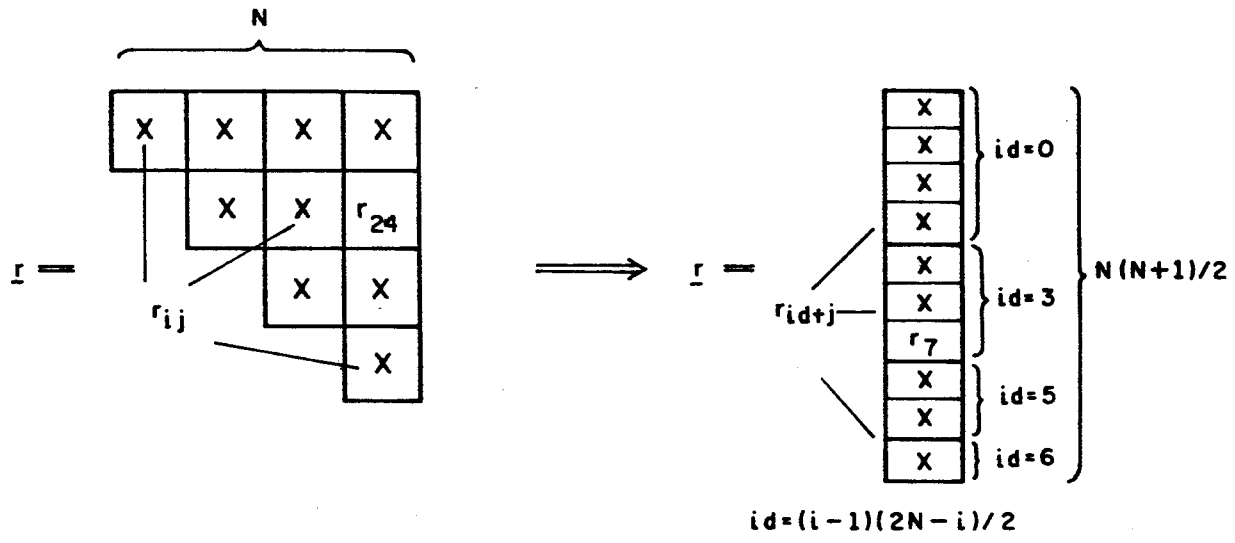


FIG. 4.1 - Arranjo em vetor para matriz simétrica

4.2. SUBPROGRAMA "DECOM 1"

Opera a condensação estática para obter as matrizes condensadas \underline{REE}^* e \underline{FE}^* .

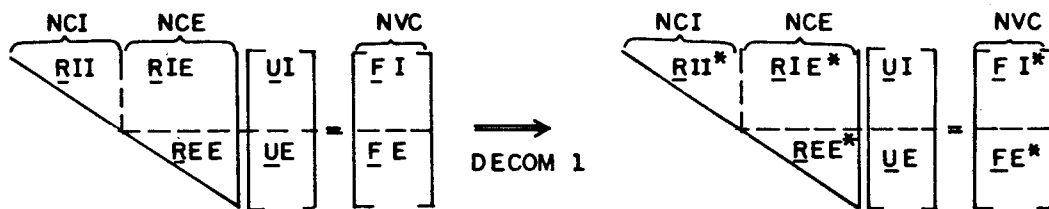


FIG. 4.2

```

SUBROUTINE DECOM1(NCI,NCE,NVC)
DOUBLE PRECISION RII,RIE,REE,FI,FE,AUX
COMMON/BLOC12/RII(15400)
COMMON/BLOC13/RIE(175,175)
COMMON/BLOC14/REE(15400)
COMMON/BLOC15/FI(175,12)
COMMON/BLOC16/FE(175,12)
NCT=NCI+NCE
IF(NCI.EQ.0)
$THEN
  RETURN
END IF
DO 5560 I=1,NCI
  ID=(I-1)*(2*NCI-I)/2
  IF(RII(ID+I).NE.0.)
  $ THEN
    DO 5550 J=I+1,NCT
      IF(J.LE.NCT)
      $ THEN
        IF(J.LE.NCI)
        $ THEN
          JD=(J-1)*(2*NCI-J)/2
          AUX=RII(ID+J)/RII(ID+I)
          IF(AUX.NE.0.)
          $ THEN
            DO 5510 K=J,NCT
              IF(K.LE.NCI)
              $ THEN
                RII(JD+K)=RII(JD+K)-AUX*RII(ID+K)
              ELSE
                KA=K-NCI
                RIE(J,KA)=RIE(J,KA)-AUX*RIE(I,KA)
            END IF
          5510 CONTINUE
          DO 5520 L=1,NVC
            FI(J,L)=FI(J,L)-AUX*FI(I,L)
          5520 CONTINUE
          END IF
        ELSE
          JA=J-NCI
          JDA=(JA-1)*(2*NCE-JA)/2
          AUX=RIE(I,JA)/RII(ID+I)
          IF(AUX.NE.0.)
          $ THEN
            DO 5530 K=J,NCT
              KA=K-NCI
              REE(JDA+KA)=REE(JDA+KA)-AUX*RIE(I,KA)
            5530 CONTINUE
            DO 5540 L=1,NVC
              FE(JA,L)=FE(JA,L)-AUX*FI(I,L)
            5540 CONTINUE
          END IF
        END IF
      END IF
    CONTINUE
  5550 END IF
CONTINUE
5560 CONTINUE
RETURN
END

```


4.3. SUBPROGRAMA NA "DECOM 2"

Calcula por retro-substituição os deslocamentos dos nós internos UI.

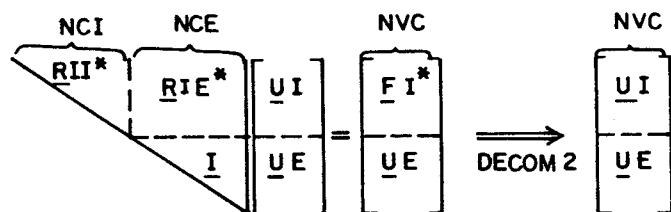


FIG. 4.3

```

C      SUBROUTINE DECOM2(NCI,NCE,NVC)
      DOUBLE PRECISION RII,RIE,UI,UE,AUX
      COMMON/BLOC12/RII(15400)
      COMMON/BLOC13/RIE(175,175)
      COMMON/BLOC15/UI(175,12)
      COMMON/BLOC16/UE(175,12)
      NCT=NCI+NCE
      IF(NCI.EQ.0)
      $THEN
      RETURN
      END IF
      IF(NCI.EQ.NCT)
      $THEN
      ND=(NCT-1)*NCT/2
      IF(RII(ND+NCT).NE.0.)
      $ THEN
      DO 6000 L=1,NVC
      UI(NCT,L)=UI(NCT,L)/RII(ND+NCT)
6000 CONTINUE
      END IF
      END IF
      DO 6030 J=NCI,1,-1
      JD=(J-1)*(2*NCI-J)/2
      IF(RII(JD+J).NE.0.)
      $ THEN
      DO 6020 L=1,NVC
      AUX=UI(J,L)
      DO 6010 K=J+1,NCT
      IF(K.LE.NCT)
      $ THEN
      IF(K.LE.NCI)
      $ THEN
      AUX=AUX-RII(JD+K)*UI(K,L)
      ELSE
      KA=K-NCI
      AUX=AUX-RIE(J,KA)*UE(KA,L)
      END IF
      END IF
6010 CONTINUE
      UI(J,L)=AUX/RII(JD+J)
6020 CONTINUE
      END IF
6030 CONTINUE
      RETURN
      END
    
```

4.4. SUBPROGRAMA "SOLISIS"

Resolve o sistema de equações final da estrutura condensada, armazenada nos arrays R() e U().

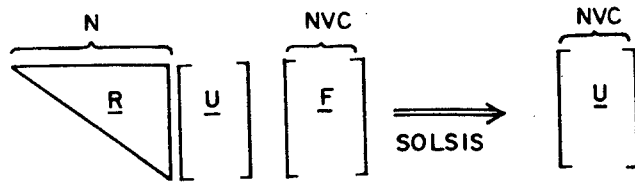


FIG. 4.4

```

C      SUBROUTINE SOLISIS(N,NVC)
      DOUBLE PRECISION R,U,AUX
      COMMON/BLOC1/R(15400)
      COMMON/BLOC2/U(175,12)
      IF(N.EQ.0)
      $THEN
        RETURN
      END IF
      DO 6540 I=1,N-1
        ID=(I-1)*(2*N-I)/2
        IF(R(ID+I).NE.0.)
        $ THEN
          DO 6530 J=I+1,N
            JD=(J-1)*(2*N-J)/2
            AUX=R(ID+J)/R(ID+I)
            IF(AUX.NE.0.)
            $ THEN
              DO 6510 K=J,N
                R(JD+K)=R(JD+K)-AUX*R(ID+K)
              6510 CONTINUE
              DO 6520 L=1,NVC
                U(J,L)=U(J,L)-AUX*U(I,L)
              6520 CONTINUE
            END IF
          CONTINUE
        END IF
      6540 CONTINUE
C      ND=(N-1)*N/2
      IF(R(ND+N).NE.0.)
      $THEN
        DO 6550 L=1,NVC
          U(N,L)=U(N,L)/R(ND+N)
        6550 CONTINUE
      END IF
      DO 6580 J=N-1,1,-1
        JD=(J-1)*(2*N-J)/2
        IF(R(JD+J).NE.0.)
        $ THEN
          DO 6570 L=1,NVC
            AUX=U(J,L)
            DO 6560 K=J+1,N
              AUX=AUX-R(JD+K)*U(K,L)
            6560 CONTINUE
            U(J,L)=AUX/R(JD+J)
          6570 CONTINUE
        END IF
      6580 CONTINUE
      RETURN
      END
  
```

4.5. SUBPROGRAMA "ESPAL 1"

Espalha as matrizes R() e F() que contem as matrizes de rigidez e de cargas dos elementos nas matrizes particionadas do macro-elemento e, na seguinte etapa, as matrizes condensadas dos macro-elementos nas matrizes particionadas da subestrutura. A subrotina "ESPAL 1" condiciona as matrizes para o processo de substituição operado pelo subprograma "DECOM 1".

```
C SUBROUTINE ESPAL1(NN1,NCOR1,NCOR2,NCI,NCE,NVC)
  DOUBLE PRECISION R,F,R11,R1E,REE,FI,FE
  COMMON/BLOC1/R(15400)
  COMMON/BLOC2 /F(175,12)
  COMMON/BLOC3/JNONUM(50),JCRNUM(7)
  COMMON/BLOC12/R11(15400)
  COMMON/BLOC13/R1E(175,175)
  COMMON/BLOC14/REE(15400)
  COMMON/BLOC15/FI(175,12)
  COMMON/BLOC16/FE(175,12)
  KR=0
  KF=0
  DO 2560 IA=1,NN1
    DO 2550 IB=1,NCOR1
      KI=NCOR2*(JNONUM(IA)-1)+JCRNUM(IB)
      IF(NVC.NE.0)
        $ THEN
          KF=KF+1
          IF(KI.LE.NCI)
            $ THEN
              DO 2510 L=1,NVC
                FI(KI,L)=FI(KI,L)+F(KF,L)
                2510 CONTINUE
              ELSE
                KA=KI-NCI
                DO 2520 L=1,NVC
                  FE(KA,L)=FE(KA,L)+F(KF,L)
                  2520 CONTINUE
                END IF
              END IF
            IO=IB
            DO 2540 JA=IA,NN1
              DO 2530 JB=IO,NCOR1
                KJ=NCOR2*(JNONUM(JA)-1)+JCRNUM(JB)
                KR=KR+1
                IF(KI.LE.KJ)
                  $ THEN
                    I1=KI
                    J1=KJ
                  ELSE
                    I1=KJ
                    J1=KI
                  END IF
                IF(I1.LE.NCI)
                  $ THEN
                    IF(J1.LE.NCI)
                      $ THEN
                        IDI=(I1-1)*(2*NCI-I1)/2
                        R11(IDI+J1)=R11(IDI+J1)+R(KR)
                      ELSE
                        J2=J1-NCI
                        R1E(I1,J2)=R1E(I1,J2)+R(KR)
                      END IF
                    ELSE
                      I2=I1-NCI
                      J2=J1-NCI
                      IDE=(I2-1)*(2*NCE-I2)/2
                      REE(IDE+J2)=REE(IDE+J2)+R(KR)
                    END IF
                  END IF
                2530 CONTINUE
              IO=1
            2540 CONTINUE
          2550 CONTINUE
        2560 CONTINUE
      RETURN
    END
```

4.6. SUBPROGRAMA "ESPAL 2":

Espalha as matrizes particionadas UI(), UE() que contem os deslocamentos da subestrutura na matriz do macroelemento e na seguinte etapa as matrizes particionadas do macroelemento na matriz de deslocamentos do elemento. A subrotina "ESPAL 2" condiciona as matrizes para o processo de volta ou de retro substituição "DECOM 2".

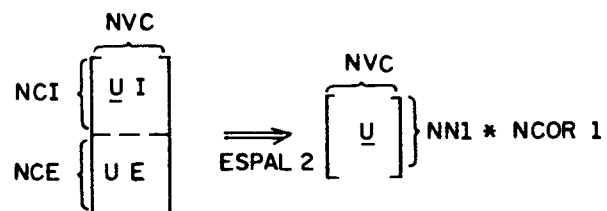


FIG. 4.8

```

C      SUBROUTINE ESPAL2(NN1,NCOR1,NCOR2,NCI,NVC)
      DOUBLE PRECISION U,UI,UE
      COMMON/BLOC2/U(175,12)
      COMMON/BLOC3/JNONUM(50),JCRNUM(7)
      COMMON/BLOC15/UI(175,12)
      COMMON/BLOC16/UE(175,12)
      KF=0
      DO 3040 IA=1,NN1
        DO 3030 IB=1,NCOR1
          KI=NCOR2*(JNONUM(IA)-1)+JCRNUM(IB)
          KF=KF+1
          IF(KI.LE.NCI)
            $ THEN
              DO 3010 L=1,NVC
                U(KF,L)=UI(KI,L)
              3010 CONTINUE
            ELSE
              KA=KI-NCI
              DO 3020 L=1,NVC
                U(KF,L)=UE(KA,L)
              3020 CONTINUE
            END IF
          3030 CONTINUE
        3040 CONTINUE
      RETURN
      END
  
```

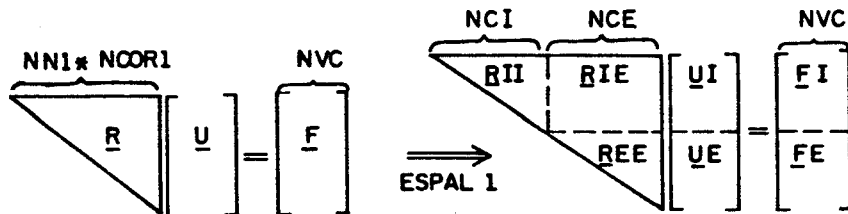


FIG. 4.5

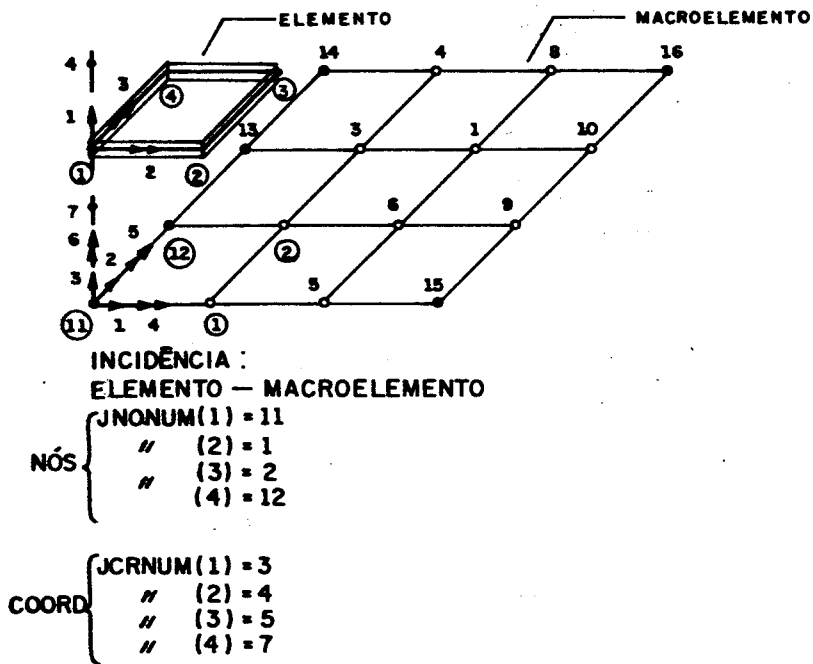


FIG. 4.6 - Composição do elemento

ELEMENTO:
 NN1 = 4 NÓS
 NCOR1 = 4 COORDENADAS P/NÓ
 MACROELEMENTO:
 NCOR2 = 7 COORDENADAS P/NÓ
 NCI = 10 * 7 = 70 COORD. INTERNAS
 NCE = 6 * 7 = 42 COORD. EXTERNAS

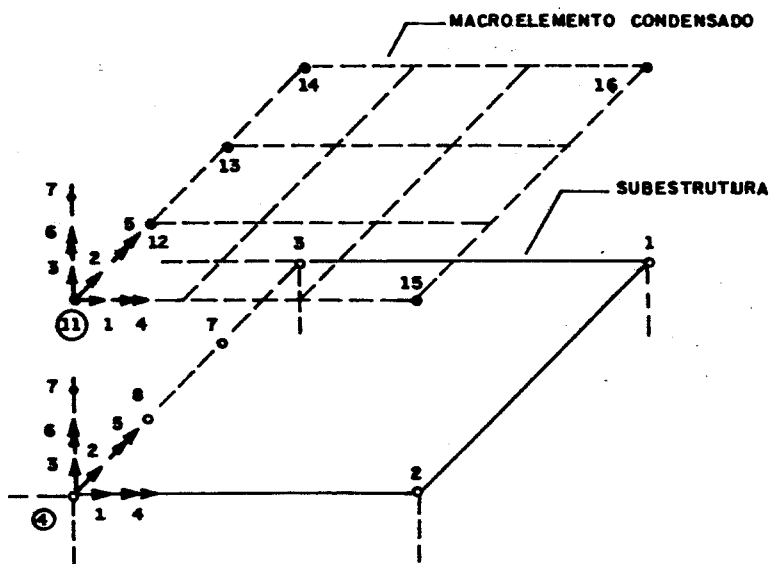


FIG. 4.7 - Composição do macro elemento

MACROELEMENTO:
 NN1 = 6 NÓS
 NCOR1 = 7 COORDENADAS P/NÓ
 SUBESTRUTURA:
 NCOR2 = 7 COORDENADAS P/NÓ
 NCI = 8 * 7 = 56 COORD. INTERNAS
 NCE = 6 * 7 = 42 COORD. EXTERNAS

4.7. SUBPROGRAMA "VINNOS"

Condiciona as matrizes particionadas com as restrições de vínculo, zerando as filas e colunas da coordenada restringida.

```

SUBROUTINE VINNOS(NNI,NNE,NCOR,NVC,JNO)
DOUBLE PRECISION RII,RIE,REE,FI,FE
COMMON/BLOC11/JNOVIN(100,7)
COMMON/BLOC12/RII(15400)
COMMON/BLOC13/RIE(175,175)
COMMON/BLOC14/REE(15400)
COMMON/BLOC15/FI(175,12)
COMMON/BLOC16/FE(175,12)
NNO=JNOVIN(JNO,1)
NCI=NCOR*NNI
NCE=NCOR*NNE
IF(NNO.LE.NNI)
$THEN
DO 4040 I=1,NCOR
JCR=JNOVIN(JNO,I+1)
IF(JCR.EQ.1)
$ THEN
LZ=NCOR*(NNO-1)+I
LD=(LZ-1)*(2*NCI-LZ)/2
DO 4010 L=1,NVC
FI(LZ,L)=0.
4010 CONTINUE
DO 4020 J=1,NCI
IF(J.LT.LZ)
$ THEN
JD=(J-1)*(2*NCI-J)/2
RII(JD+LZ)=0.
ELSE
RII(LD+J)=0.
END IF
4020 CONTINUE
DO 4030 J=1,NCE
RIE(LZ,J)=0.
4030 CONTINUE
END IF
4040 CONTINUE
ELSE
DO 4080 I=1,NCOR
JCR=JNOVIN(JNO,I+1)
IF(JCR.EQ.1)
$ THEN
LZ=NCOR*(NNO-NNI-1)+I
LD=(LZ-1)*(2*NCE-LZ)/2
DO 4050 L=1,NVC
FE(LZ,L)=0.
4050 CONTINUE
DO 4060 J=1,NCE
IF(J.LT.LZ)
$ THEN
JD=(J-1)*(2*NCE-J)/2
REE(JD+LZ)=0.
ELSE
REE(LD+J)=0.
END IF
4060 CONTINUE
DO 4070 J=1,NCI
RIE(J,LZ)=0.
4070 CONTINUE
END IF
4080 CONTINUE
END IF
RETURN
END
    
```

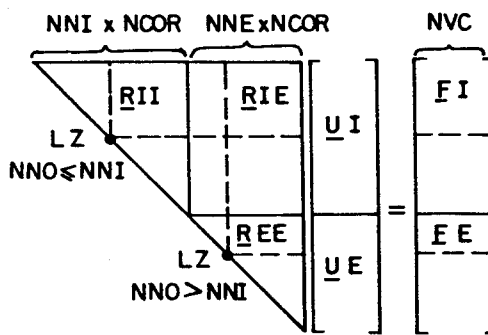
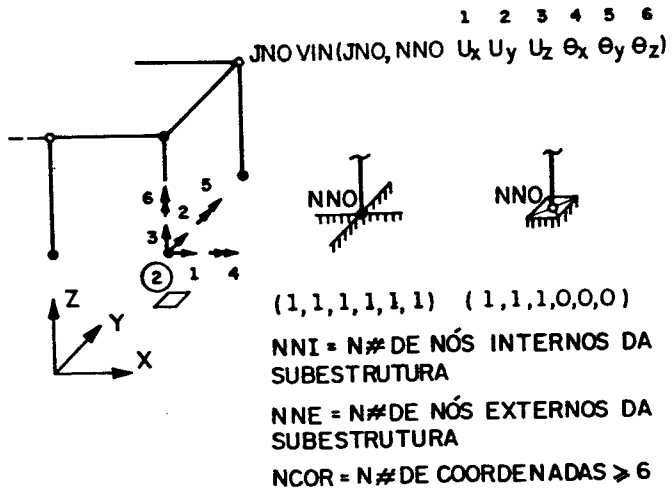


FIG. 4.9

4.8 . SUBPROGRAMA "CARNOS"

Localiza as cargas pontuais aplicadas nos nós dos macro-elementos e/ou subestruturas na matriz de cargas particionada.

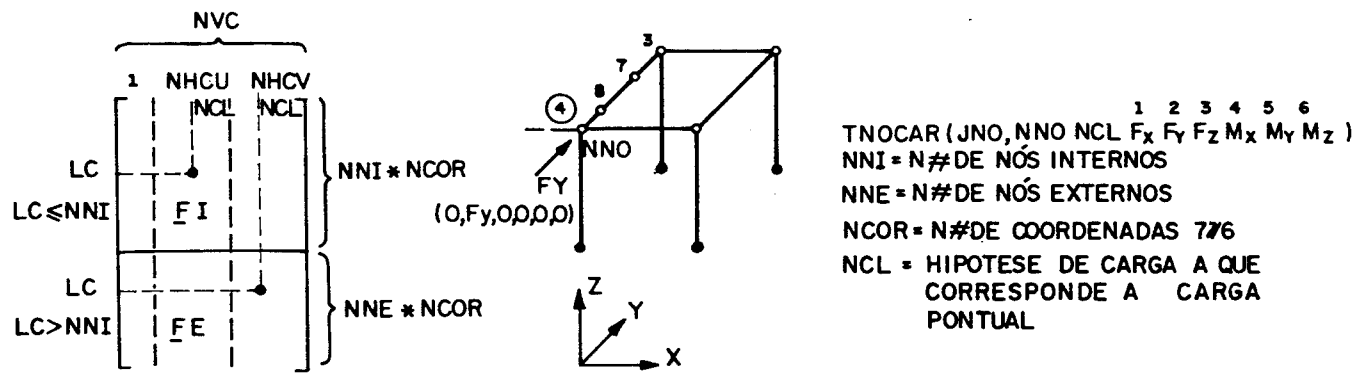


FIG. 4.10

```

C      SUBROUTINE CARNOS (NNI, NCOR, JNO)
      DOUBLE PRECISION FI, FE
      COMMON/BLOC10/TNOCAR(100,8)
      COMMON/BLOC15/FI(175,12)
      COMMON/BLOC16/FE(175,12)
      NNO=TNOCAR(JNO,1)
      NCL=TNOCAR(JNO,2)
      IF(NNO.LE.NNI)
      $THEN
        DO 3510 I=1,6
          LC=NCOR*(NNO-1)+I
          FI(LC,NCL)=FI(LC,NCL)+TNOCAR(JNO,I+2)
3510    CONTINUE
      ELSE
        DO 3520 I=1,6
          LC=NCOR*(NNO-NNI-1)+I
          FE(LC,NCL)=FE(LC,NCL)+TNOCAR(JNO,I+2)
3520    CONTINUE
      END IF
      RETURN
      END
  
```

5. MODELO ESTRUTURAL

Para poder implementar a técnica de subestruturação na análise de estruturas tridimensionais foi necessário criar uma nomenclatura especial para definir os diferentes elementos estruturais, quando consideradas como subestruturas, fugindo um pouco da classificação convencional mas com o intuito de ter uma linguagem o mais geral possível, para ser aplicada aos diferentes tipos de estruturas, sem gerar alguma incongruência.

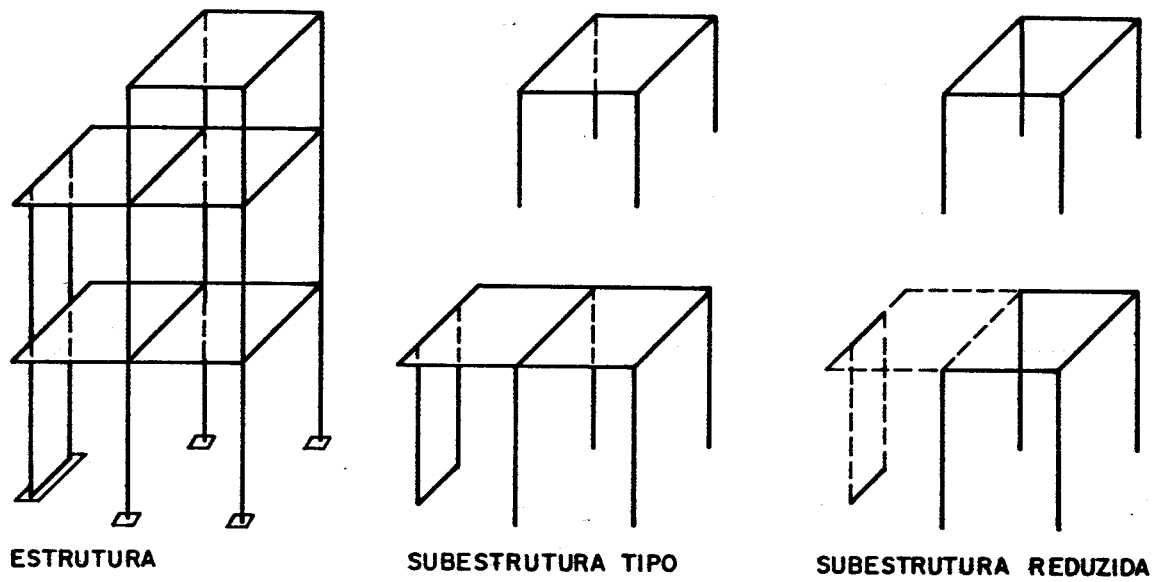


FIG. 5.1 — Componentes estruturais

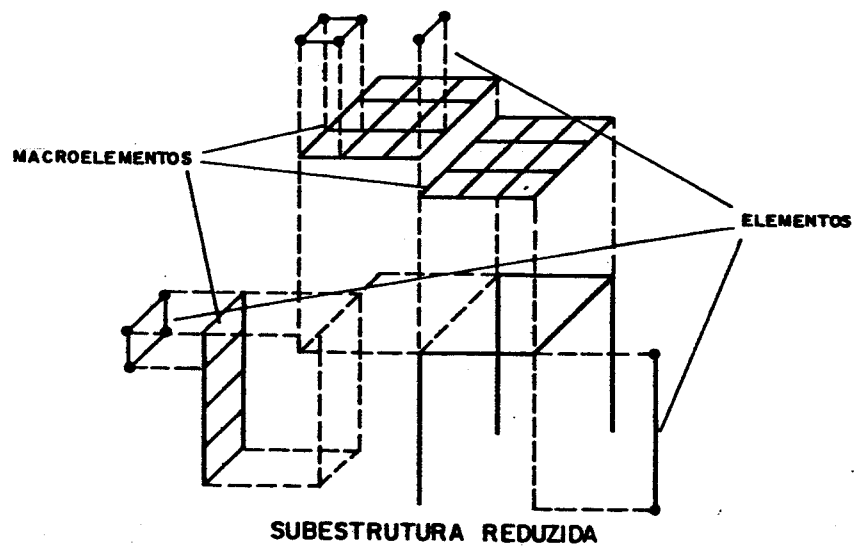


FIG. 5.2 — Unidades de discretização

5.1. ESQUEMA DE SUBESTRUTURAÇÃO

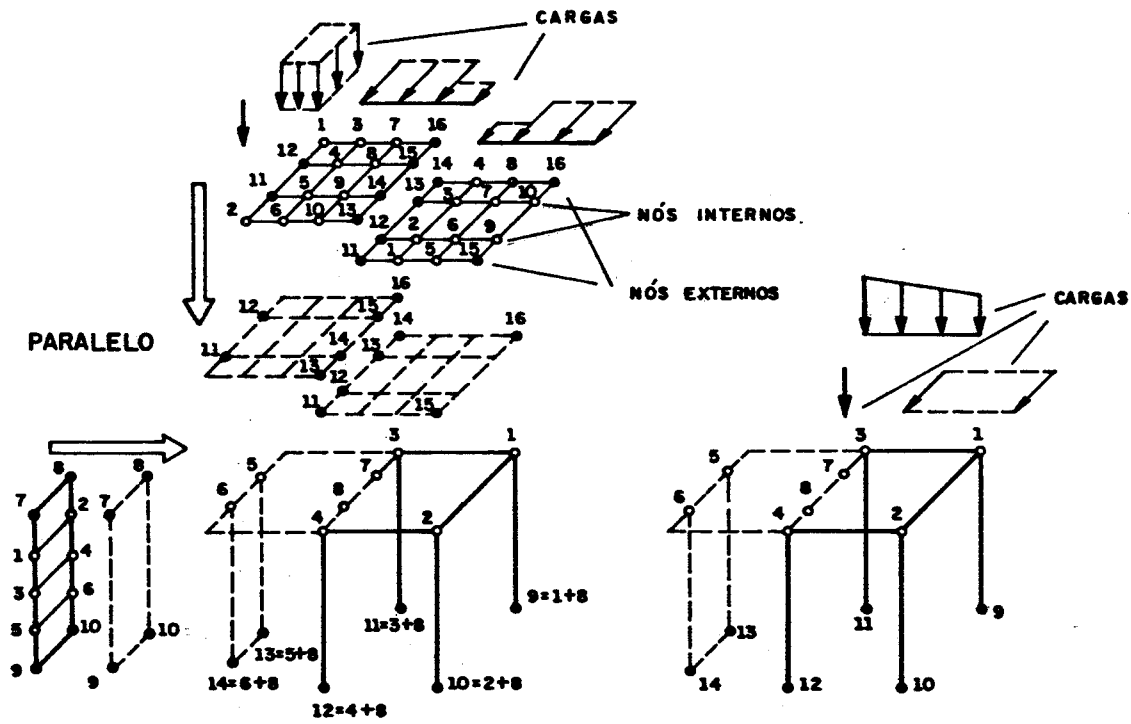


FIG. 5.3 — Numeração e seqüência para a subestruturação em paralelo

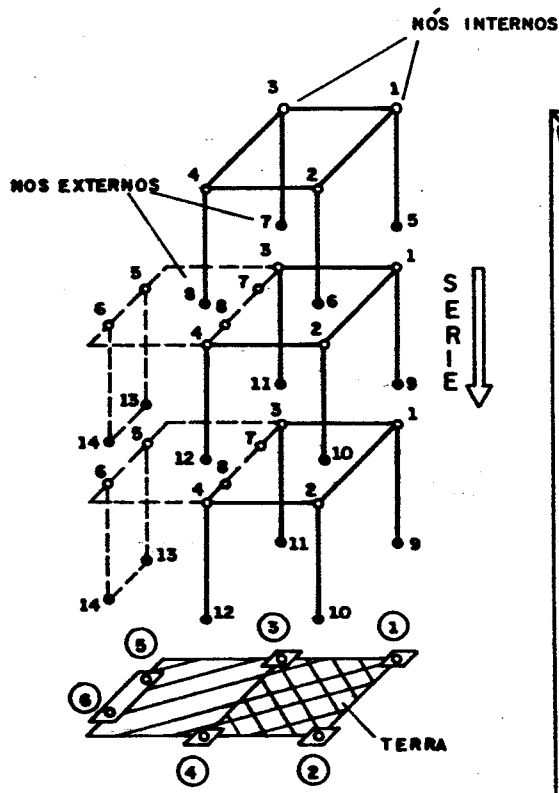


FIG. 5.4 — Numeração e seqüência para a subestruturação em série

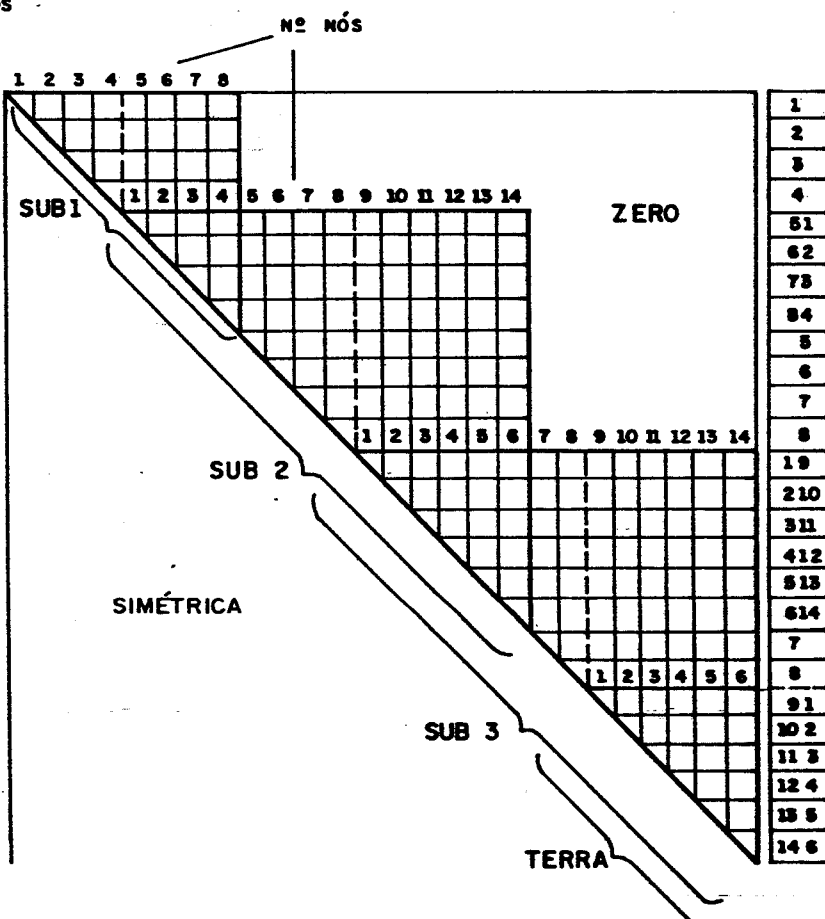


FIG. 5.5 — Incidência entre as matrizes de rigidez das subestruturação reduzidas.

5.2. CLASSIFICAÇÃO DAS SUBESTRUTURAS

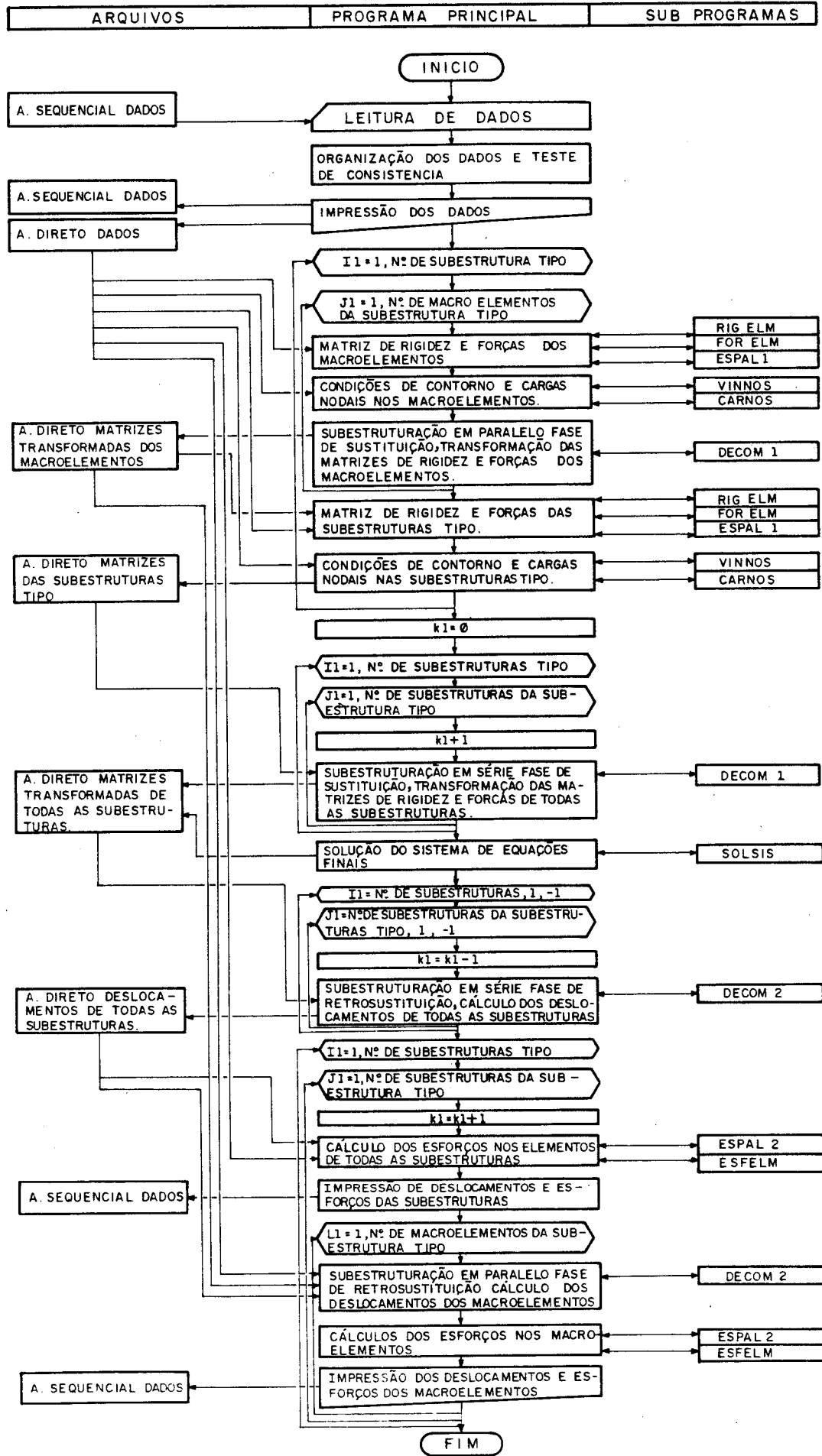
- a) **MACRO-ELEMENTO:** Componente estrutural que será montado em paralelo podendo estar os seus elementos construtivos num plano horizontal formando lajes, lajes mistas, grelhas, etc., ou num plano vertical (Paredes, painéis, etc); os macro-elementos condensados aos seus nós de contorno (externos) compõem junto aos elementos individuais uma unidade estrutural maior chamada subestrutura.
- b) **SUBESTRUTURA:** Componente estrutural a ser montado em série (Pavimento tipo, pórtico tipo, etc), composto por elementos individuais e/ou macro-elementos; é na subestrutura reduzida que será operada a subestruturação em série.

5.3. CONVENÇÃO

- a) **NUMERAÇÃO DAS SUBESTRUTURAS:** Devem numerar-se primeiramente as subestruturas mantendo a correspondência de uma mesma prumada na projeção à Terra, como mostra a Fig. 5.4 para o modelo de edifício tridimensional; similar análise pode se fazer para outro tipo de estruturas; o que deve observar-se no fim é a correta incidência entre as matrizes de rigidez e vetores de carga das subestruturas sucessivas como mostra a Fig. 5.5. O objetivo final desta sistematização é a eliminação do vetor de endereçamentos para conexão de nós entre subestruturas. Devem considerar-se como nós externos única e exclusivamente aqueles que estejam conectados à subestrutura subsequente; os restantes são nós internos.

- b) NUMERAÇÃO DOS MACRO-ELEMENTOS: Para a numeração dos macro-elementos somente deve observar-se que nós internos são aqueles que não estão conectados a outros macro-elementos ou subestruturas. Os nós externos precisam de um vetor de endereçamentos (incidência), como mostra a fig. 5.3.

- c) CARREGAMENTO: Para escolher a etapa adequada onde incluir o carregamento, se a nível de macro-elemento ou subestrutura, deve observar-se simplesmente que os nós onde está distribuída ou aplicada a carga devem estar definidos.



CAPÍTULO V

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Trata-se de um edifício de 10 andares, constituído de painéis parede planos, conforme é mostrado na Fig. 1.1.

São adotados os seguintes valores:

$$E = 1000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0,1666$$

$$h = 290\text{cm}$$

$$P = 0,0207\text{kN/cm}$$

A carga P distribuída segundo a direção global x , será transformada na equivalente aplicada ao nível das lajes.

Aproveitando a simetria geométrica e de cargas, será calculado somente $1/4$ da estrutura, como mostra a Fig.1.2, afetando a estrutura da vinculação apropriada.

Serão analisados os seguintes casos:

T1: Estrutura tipo 1, idealizada com as paredes ligadas as lajes, considerando a rigidez à flexão.

T2: Idem T1, analisada por [15]

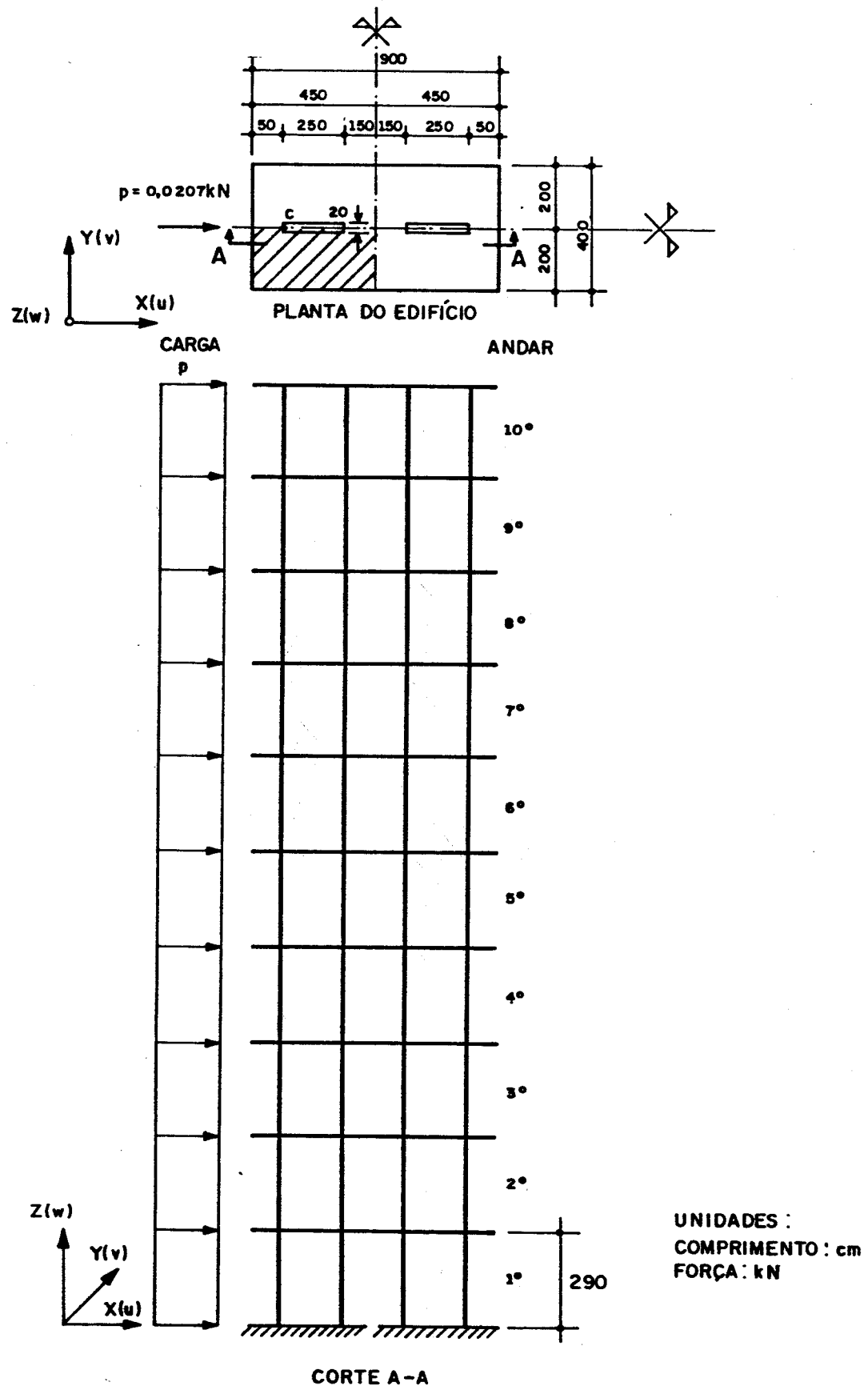


FIG. 1.1- ESTRUTURA EXEMPLO 1

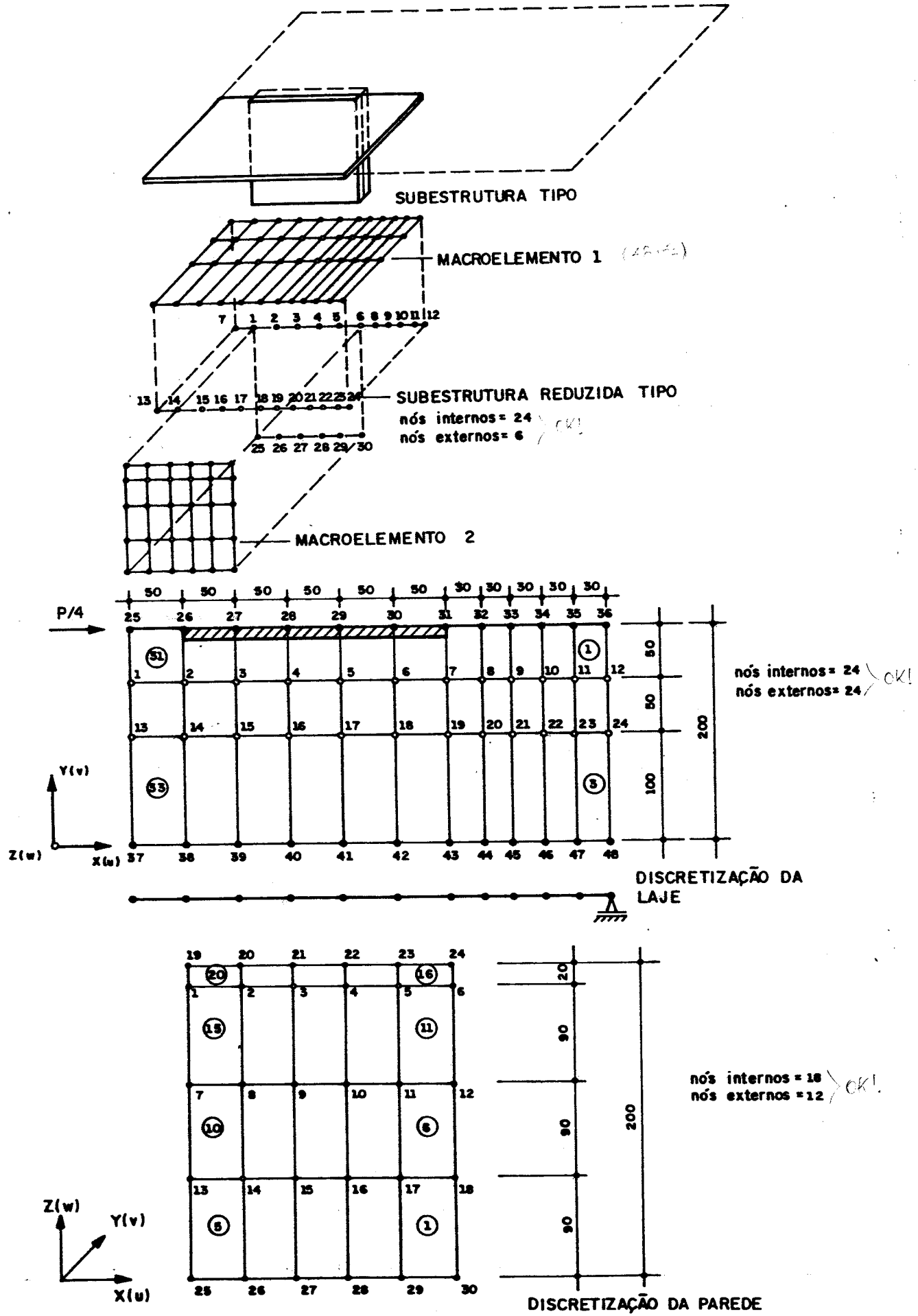


FIG. 1.2 - DISCRETIZAÇÃO DOS COMPONENTES ESTRUTURAIIS

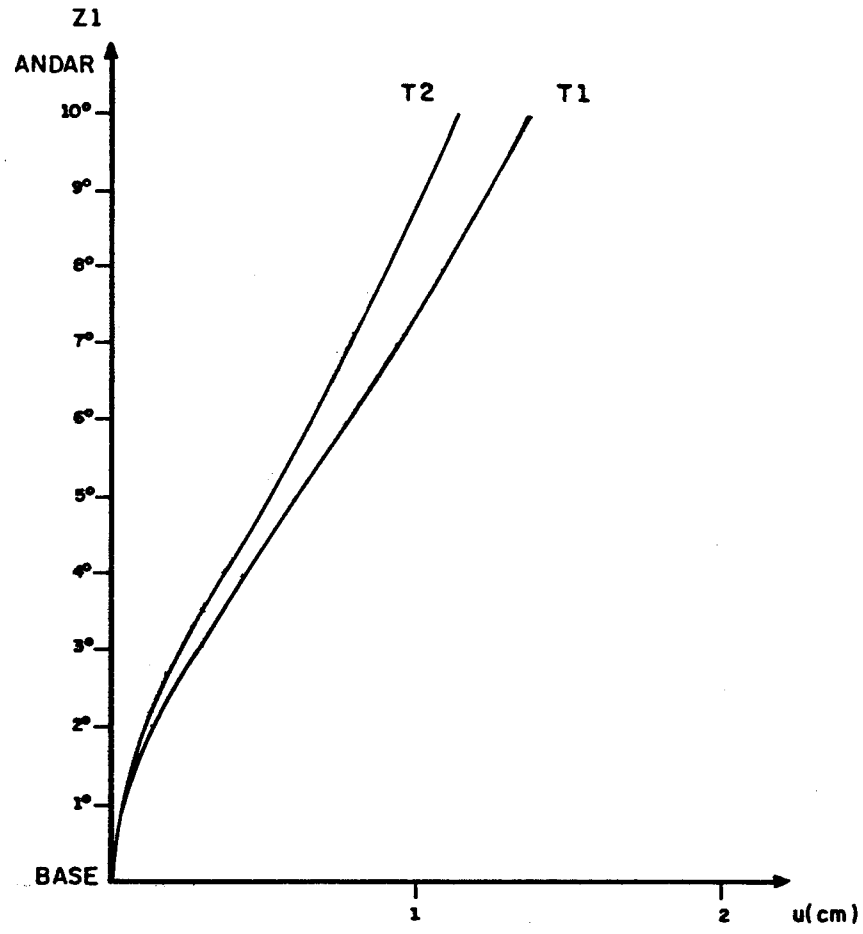


FIG. 1.3 - DESLOCAMENTO HORIZONTAL DA ESTRUTURA

ANDAR	DESLOCAMENTO HORIZONTAL (u) DO PONTO C	
	T1	T2
BASE	0,00	0,00
1°	0,04	0,04
2°	0,14	0,12
3°	0,28	0,24
4°	0,43	0,37
5°	0,60	0,51
6°	0,77	0,65
7°	0,93	0,78
8°	1,08	0,90
9°	1,23	1,02
10°(TOPO)	1,37	1,15

TABELA 1.1 - DESLOCAMENTO HORIZONTAL DA ESTRUTURA

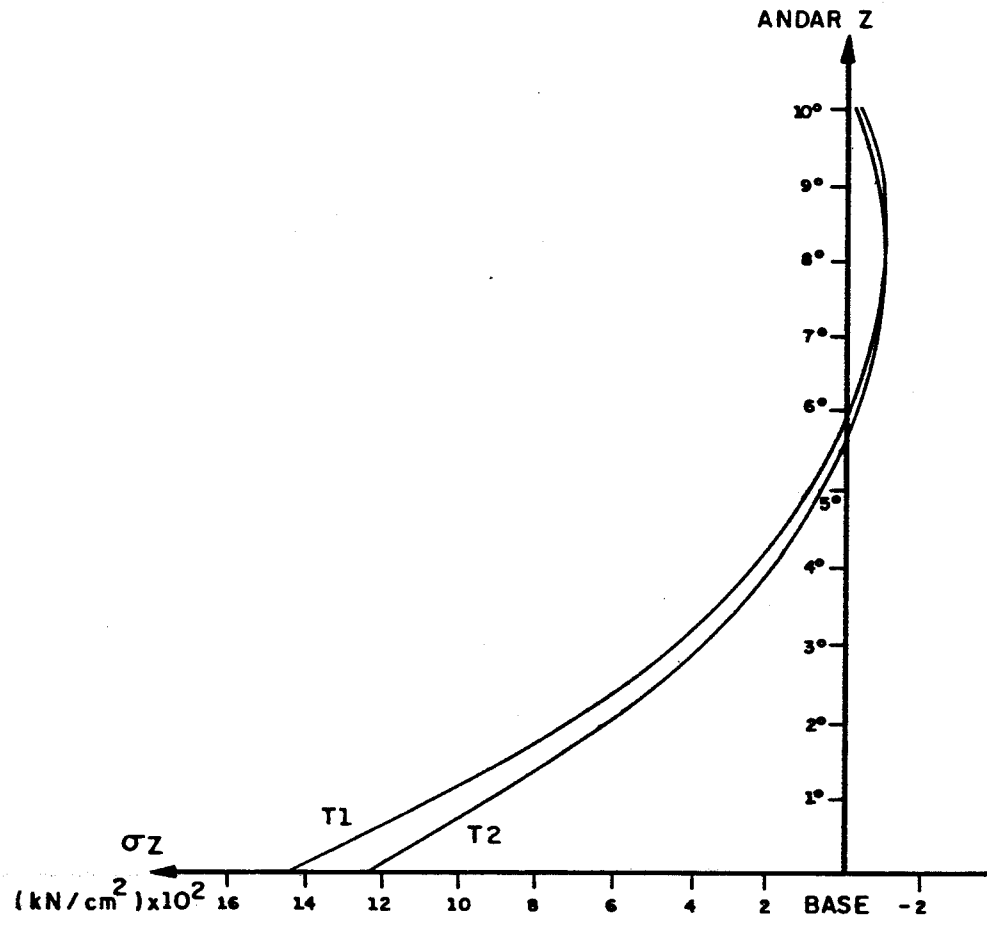


FIG.1.4 — TENSÕES NA PAREDE

ANDAR	TENSÕES (σ_z) NO PONTO C, DA PAREDE (VALORES $\text{kN/cm}^2 \times 10^2$)	
	T1	T2
BASE	14,31	12,21
1°	10,58	9,01
2°	7,18	6,04
3°	4,53	3,71
4°	2,49	1,93
5°	0,95	0,61
6°	-0,14	-0,31
7°	-0,84	-0,86
8°	-1,16	-1,05
9°	-1,12	-0,90
10°(TOPO)	-0,37	-0,28

TABELA 1.2 — TENSÕES NA PAREDE

EXEMPLO 2

Trata-se de um edifício de 10 andares, constituído por vigas, pilares e painel parede, conforme mostrado na Fig.2.1.

São adotados os seguintes valores:

$$E = 420 \text{ Kip/in}^2$$

$$\nu = 0,1666$$

$$h = 5 \text{ in}$$

$$P = 0,2 \text{ Lb/in}$$

A carga distribuída segundo a direção global y, será transformada na equivalente aplicada ao nível das lajes.

A estrutura analisada é na realidade um modelo reduzido que foi estudado pelo Prof. Stamato [17].

Serão analisados os seguintes casos:

- T1:** Estrutura tipo 1, idealizada com a parede, os pórticos e considerando a rigidez à flexão das lajes.
- T2:** Estrutura tipo 2, idealizada com a parede, os pórticos e sem considerar a rigidez à flexão das lajes.
- T3:** Idem T2, analisada por [17].

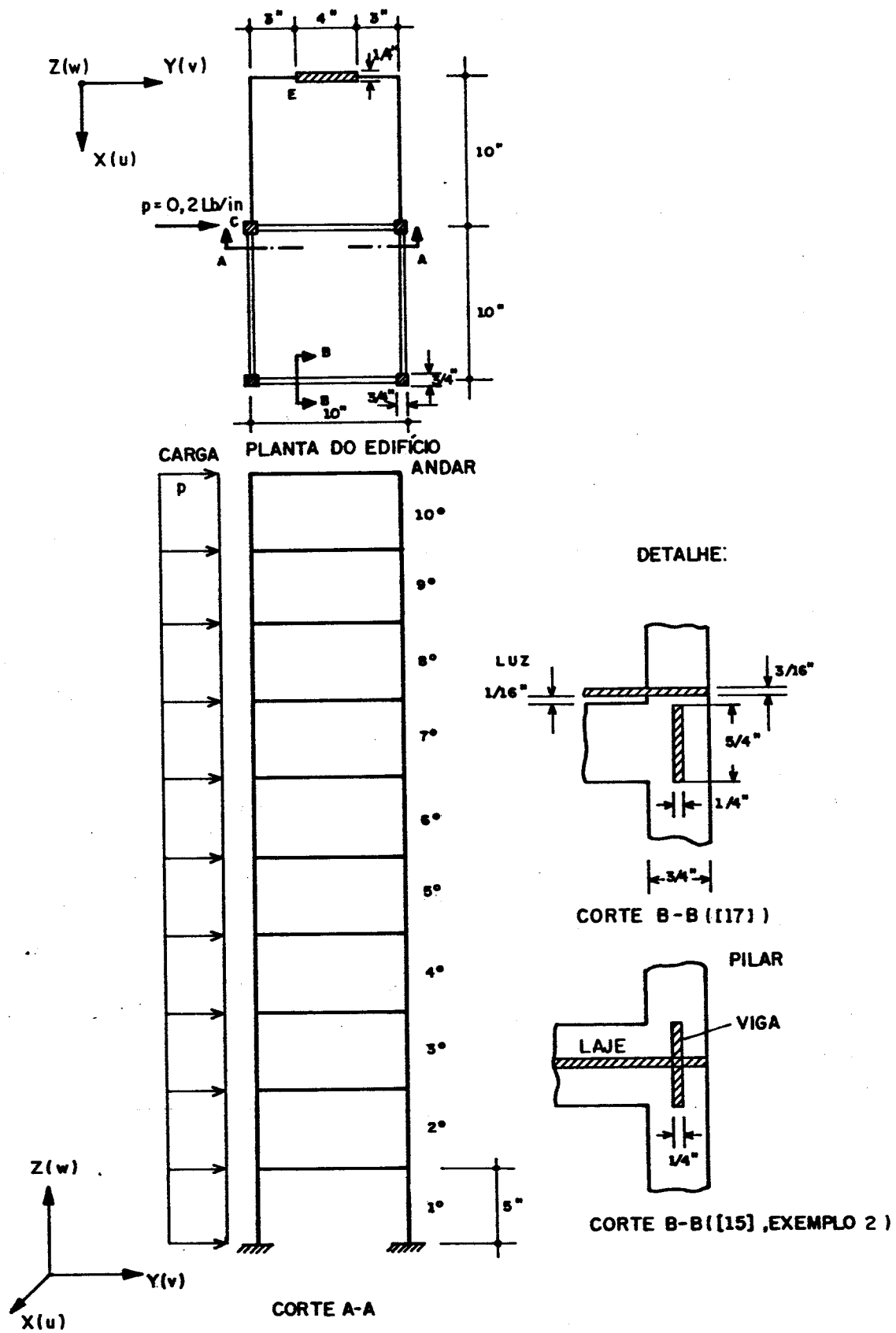


FIG. 2.1 — ESTRUTURA EXEMPLO 2

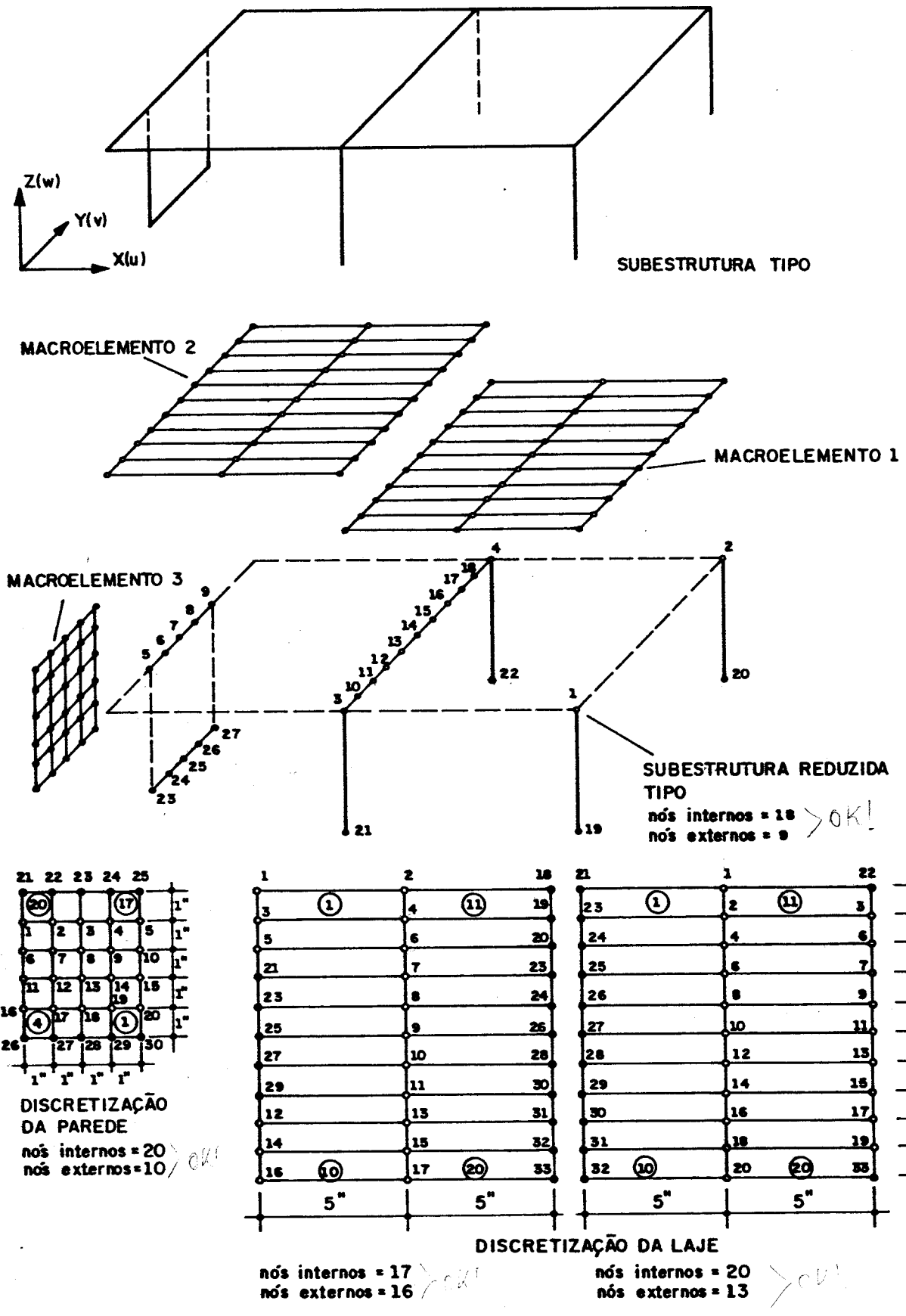


FIG. 2.2 - DISCRETIZAÇÃO DOS COMPONENTES ESTRUTURAIS

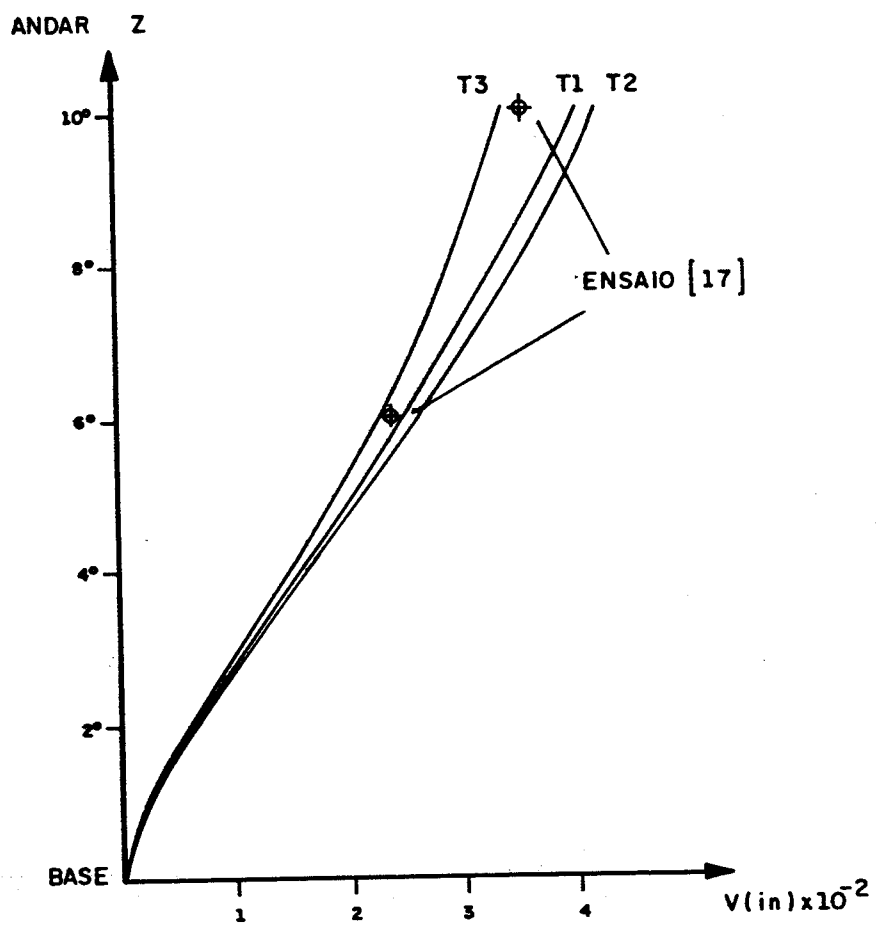


FIG. 2.3 — DESLOCAMENTO HORIZONTAL DA ESTRUTURA

ANDAR	DESLOCAMENTO HORIZONTAL (v) DA ESTRUTURA, PONTO C.		
	T1	T2	T3
BASE	0,0000	0,0000	0,0000
2°	0,0065	0,0066	0,0061
4°	0,0159	0,0165	0,0147
6°	0,0250	0,0262	0,0226
8°	0,0330	0,0347	0,0290
10°(TOPO)	0,0394	0,0417	0,0338

TABELA 2.1 — DESLOCAMENTO HORIZONTAL DA ESTRUTURA

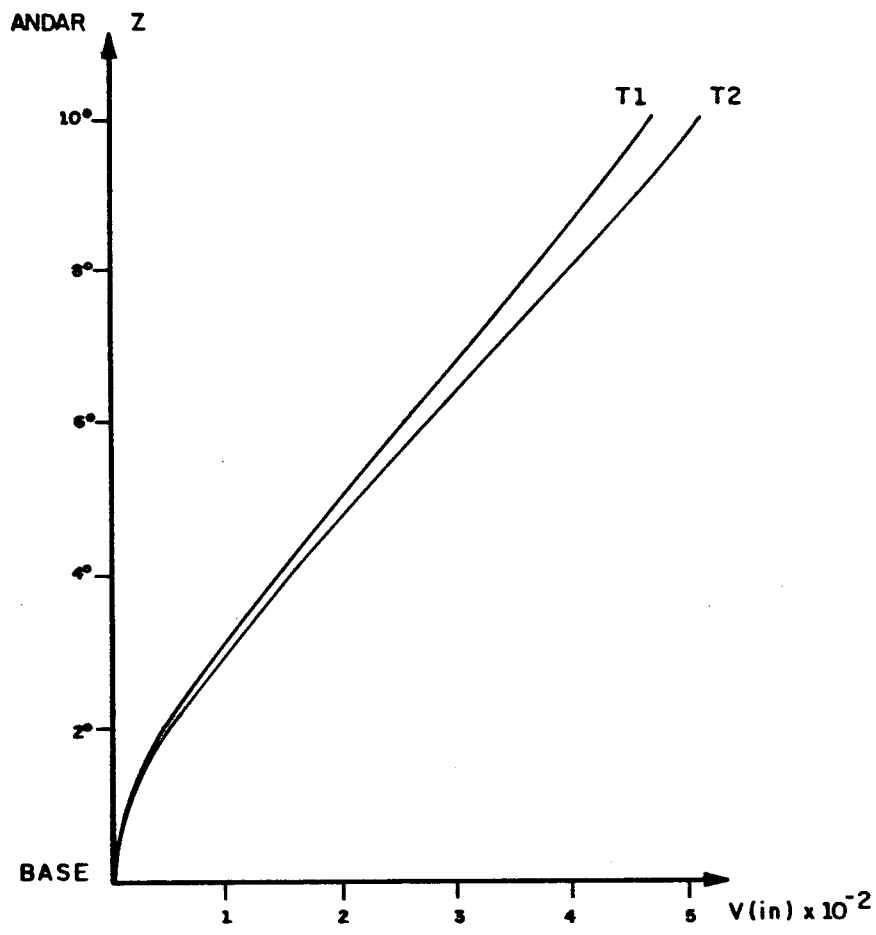


FIG. 2.4 — DESLOCAMENTO HORIZONTAL DA PAREDE

ANDAR	DESLOCAMENTO (v) DA PAREDE	
	T1	T2
BASE	0,0000	0,0000
2°	0,0046	0,0049
4°	0,0144	0,0154
6°	0,0258	0,0277
8°	0,0368	0,0399
10°(TOPO)	0,0470	0,0512

TABELA 2.2 — DESLOCAMENTO HORIZONTAL DA PAREDE

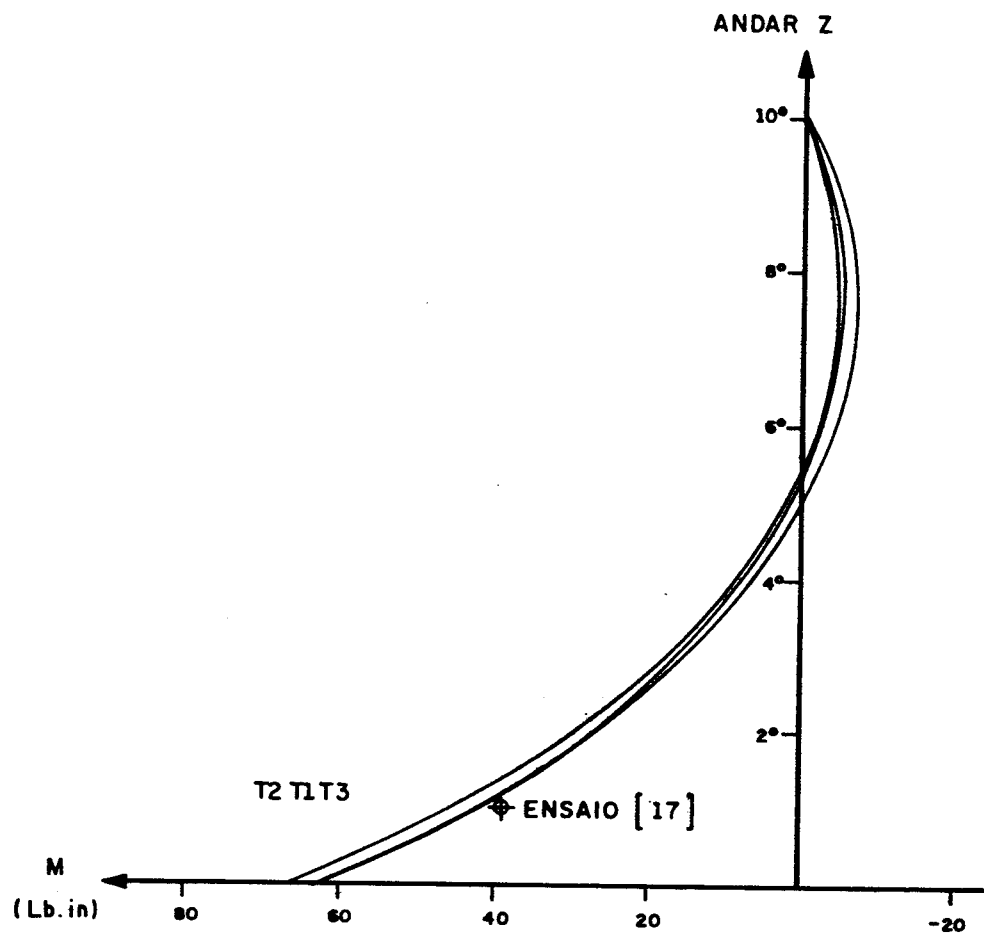


FIG. 2.5 - MOMENTO FLETOR NA PAREDE

ANDAR	TENSÕES (σ_z) NA PAREDE (Lb/in ²)		MOMENTO FLETOR (M) NA PAREDE (Lb. in)		
	T1	T2	T1	T2	T3
BASE	94,10	99,29	62,73	66,19	62,0
2°	41,74	44,93	27,83	29,95	27,0
4°	11,82	13,23	7,88	8,82	6,2
6°	-3,39	-3,21	-2,26	-2,14	-4,3
8°	-7,20	-7,64	-4,80	-5,09	-6,6
10° (TOPO)	-1,78	-0,63	-1,19	-0,42	0

TABELA 2.3 - TENSÕES E MOMENTO FLETOR NA PAREDE

EXEMPLO 3

Trata-se de uma estrutura tubular de 9 andares, constituído por vigas, pilares e as lajes como mostra a Fig. 4.1.

São adotados os seguintes valores:

$$E = 2000\text{kN/cm}^2$$

$$\nu = 0$$

$$h = 300\text{cm}$$

$$P = 0,144\text{kN/cm}$$

A carga P distribuída segundo a direção global Y , será transformada na equivalente aplicada ao nível das lajes.

Aproveitando a simetria geométrica e de cargas, será calculado somente $1/4$ da estrutura, como mostra a Fig. 3.2.

Serão analisados os seguintes casos:

- T1:** Estrutura tipo 1, considerando a rigidez à flexão das lajes ($d = 12\text{cm}$)
- T2:** Estrutura tipo 2, não considerando a rigidez à flexão das lajes ($d = 12\text{cm}$)
- T3:** Idem t2, analisado por [18] considerando a laje como diafragma infinitamente rígido

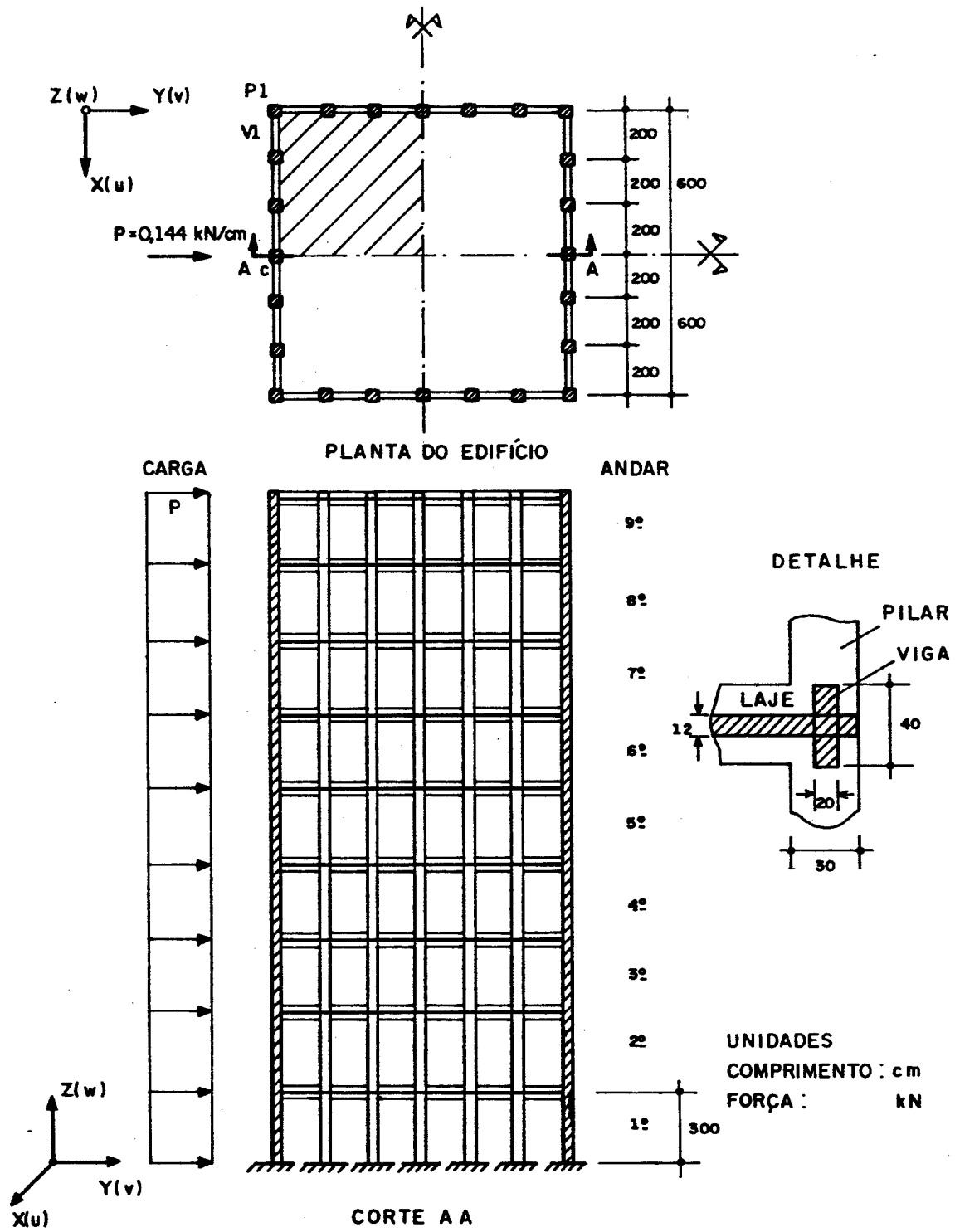


FIG. 3.1 - ESTRUTURA EXEMPLO 3

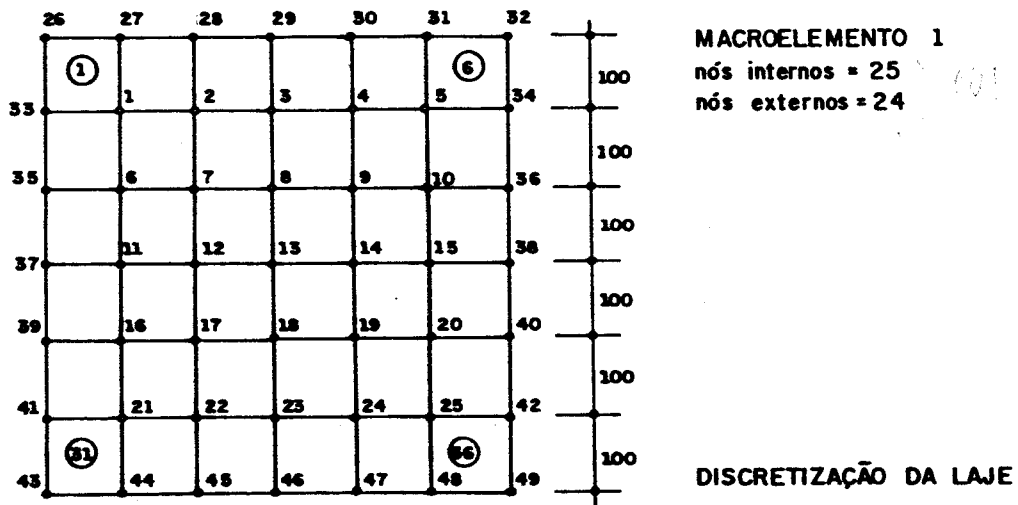
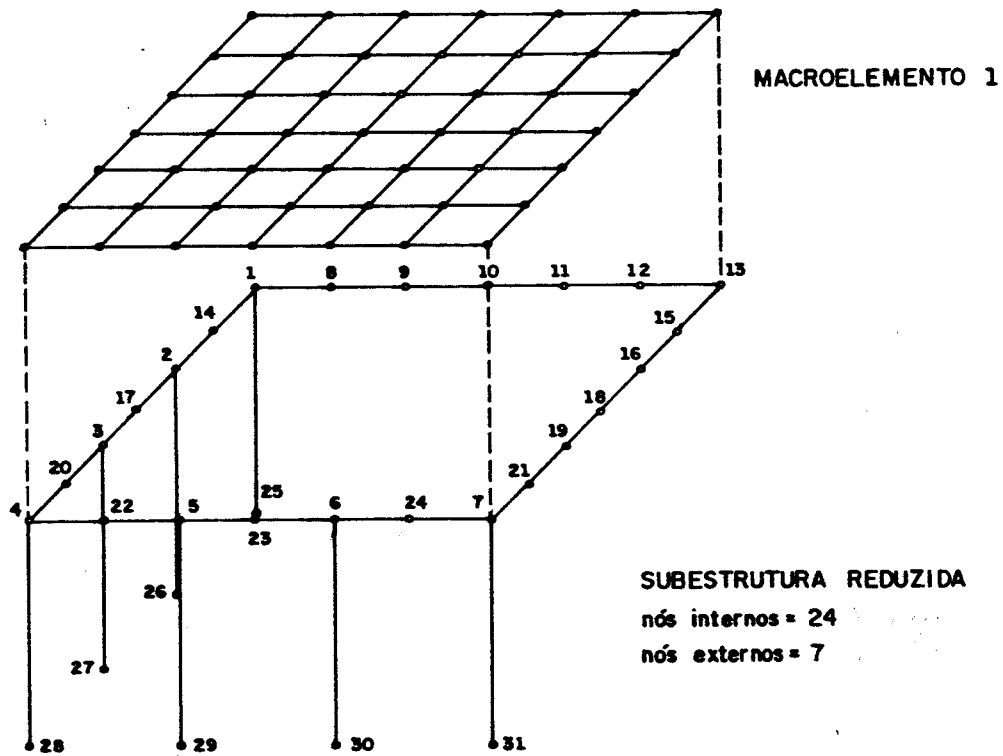
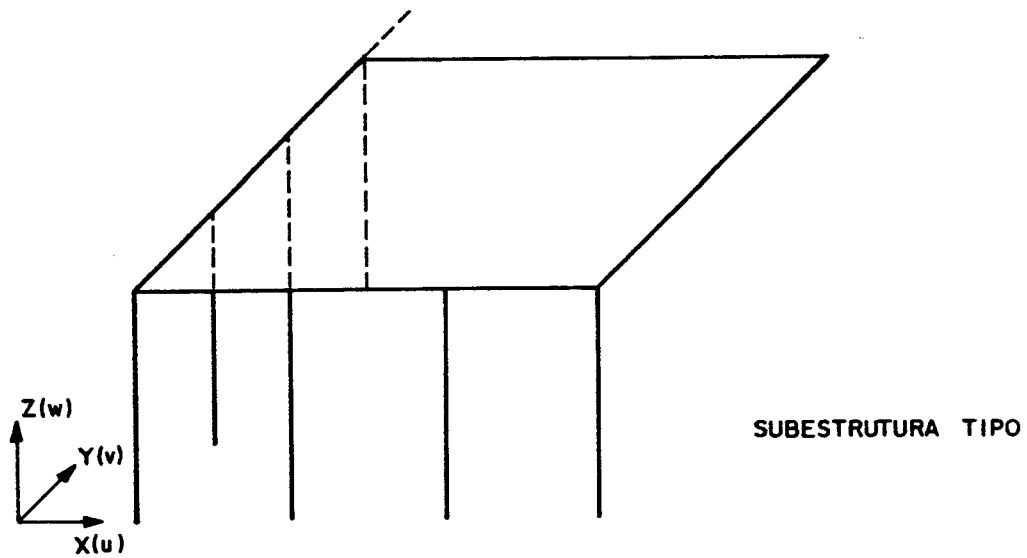


FIG. 3.2 — DISCRETIZAÇÃO DOS COMPONENTES ESTRUTURAIIS

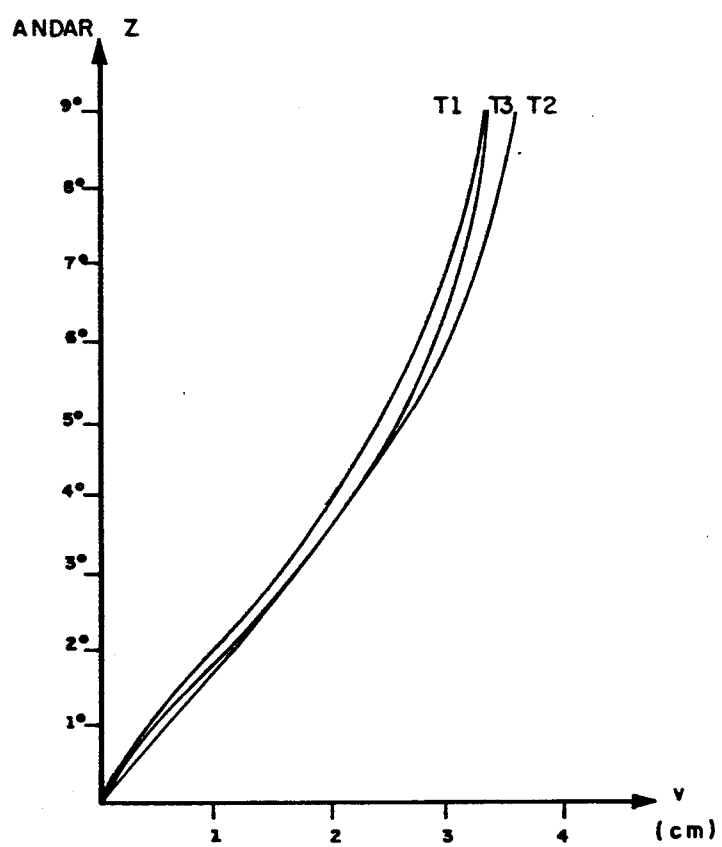


FIG.3.3 – DESLOCAMENTO HORIZONTAL (v) DA ESTRUTURA (PONTO C)

ANDAR	DESLOCAMENTO HORIZONTAL (v) DA ESTRUTURA, PONTO C (cm)		
	T1	T2	T3
BASE	0,00	0,00	0,00
1°	0,43	0,45	0,55
2°	1,02	1,09	1,16
3°	1,56	1,67	1,69
4°	2,03	2,18	2,16
5°	2,42	2,61	2,55
6°	2,76	2,97	2,86
7°	3,01	3,25	3,09
8°	3,20	3,45	3,25
9°(TOPO)	3,31	3,57	3,33

TABELA 3.1 – DESLOCAMENTO HORIZONTAL DA ESTRUTURA

TABELA 3.2 - MOMENTOS FLETORES NO PILAR P1

AN-DAR	NÓS	MOMENTOS FLETORES Mx NO PILAR P1 (kN.cm)x10			MOMENTOS FLETORES MY NO PILAR P1 (kN.cm)x10		
		T1	T2	T3	T1	T2	T3
9	28I	5,0	9,0	-8,0	25,9	31,40	26,0
	4S	-11,6	-16,96	-2,0	-28,7	-35,19	30,0
8	28	36,48	41,26	27,6	25,32	30,19	25,7
	4	-47,95	-53,62	40,5	-24,47	-29,29	24,8
7	28	68,06	75,21	60,8	27,16	31,88	27,7
	4	-79,42	-87,69	73,4	-26,62	-31,40	27,2
6	28	100,00	109,30	94,7	28,52	32,98	29,1
	4	-110,90	-121,30	107,0	-28,12	-32,67	28,7
5	28	133,30	144,30	129,4	29,01	33,01	29,6
	4	-143,10	-155,50	141,0	-28,96	-33,14	29,5
4	28	169,90	181,30	165,6	27,89	31,16	28,4
	4	-176,60	-191,18	176,0	-28,46	-32,01	29,0
3	28	204,60	219,50	205,0	24,80	29,03	24,6
	4	-211,40	-227,30	213,2	-26,07	-28,68	26,2
2	28	254,60	273,50	243,1	16,66	17,04	17,4
	4	-248,70	-266,60	249,8	-19,37	-20,40	20,3
1	28	299,40	313,90	391,6	5,85	5,96	4,8
	4	-210,50	-217,50	288,7	-11,00	-11,08	9,7

TABELA 3.3 - ESFORÇOS CORTANTES NO PILAR P1

AN-DAR	NÓS	ESFORÇOS CORTANTES Qx NO PILAR P1 (kN)x10			ESFORÇOS CORTANTES Qy NO PILAR P1 (kN)x10		
		T1	T2	T3	T1	T2	T3
9	28I	0,182	0,222	0,190	-0,055	-0,087	-0,033
	4S	0,182	0,222	-0,190	-0,055	-0,087	0,033
8	28	0,166	0,198	0,168	-0,281	-0,316	-0,227
	4	0,166	0,198	-0,168	-0,281	-0,316	0,227
7	28	0,179	0,211	0,183	-0,492	-0,543	-0,448
	4	0,179	0,211	-0,183	-0,492	-0,543	0,448
6	28	0,189	0,218	0,193	-0,703	-0,768	-0,673
	4	0,189	0,218	-0,193	-0,303	-0,768	0,673
5	28	0,193	0,220	0,197	-0,920	-0,999	-0,901
	4	0,193	0,220	-0,197	-0,920	-0,999	0,901
4	28	0,188	0,211	0,191	-1,148	-1,241	-1,139
	4	0,188	0,211	-0,191	-1,148	-1,241	1,139
3	28	0,169	0,185	-0,170	-1,387	-1,489	-1,394
	4	0,169	0,185	-0,170	-1,387	-1,489	1,394
2	28	0,120	0,125	0,126	-1,678	-1,800	-1,643
	4	0,120	0,125	-0,126	-1,678	-1,800	1,643
1	28	0,056	0,057	0,049	-1,70	-1,77	-2,268
	4	0,056	0,057	-0,049	-1,70	-1,77	2,268

TABELA 3.4-ESFORÇOS NORMAIS NO PILAR P1

AN-DAR	NÓS	ESFORÇOS NORMAIS NO PILAR P1 (Fz) (kN)x10		
		T1	T2	T3
9	28I	-0,323	-0,310	0,400
	4S	-0,323	-0,310	0,400
8	28	-0,440	-0,414	0,674
	4	-0,440	-0,414	0,674
7	28	-0,010	0,051	0,364
	4	-0,010	0,051	0,364
6	28	0,955	1,084	-0,510
	4	0,955	1,084	-0,510
5	28	2,478	2,707	-1,958
	4	2,478	2,707	-1,958
4	28	4,609	4,972	-4,028
	4	4,609	4,972	-4,028
3	28	7,427	7,954	-6,801
	4	7,427	7,954	-6,801
2	28	11,05	11,77	-10,378
	4	11,05	11,77	-10,378
1	28	14,98	15,83	-14,804
	4	14,98	15,83	-14,804

TABELA 3.5-ESFORÇOS NORMAIS NA VIGA V1

AN-DAR	NÓS	ESFORÇOS NORMAIS NA VIGA V1 (Fx) (kN)x10		
		T1	T2	T3
9	4E	-0,130	-0,159	0
	5D	-0,146	-0,179	
8	4	-0,030	-0,25	
	5	-0,092	-0,093	
7	4	-0,047	-0,049	
	5	-0,111	-0,123	
6	4	-0,045	-0,046	
	5	-0,109	-0,119	
5	4	-0,043	-0,043	
	5	-0,109	-0,119	
4	4	-0,038	-0,038	
	5	-0,107	-0,117	
3	4	-0,031	-0,029	
	5	-0,102	-0,109	
2	4	-0,018	-0,014	
	5	-0,104	-0,113	
1	4	0,058	0,068	
	5	0,174	0,213	

TABELA 3.6-MOMENTOS FLETORES NA VIGA V1.

AN-DAR	NÓS	MOMENTOS FLETORES (My) NA VIGA V1 (kN.cm)x10		
		T1	T2	T3
9	4E	-27,32	-35,19	-30,0
	5D	24,89	35,88	-29,8
8	4	-47,72	-60,69	-51,7
	5	40,85	56,86	-48,0
7	4	-48,72	-61,59	-52,9
	5	41,72	59,29	-50,6
6	4	-51,40	-64,55	-56,4
	5	43,71	63,05	-54,9
5	4	-52,98	-66,12	-58,7
	5	44,83	65,63	-58,2
4	4	-52,42	-65,02	-58,6
	5	43,89	65,56	-59,0
3	4	-48,50	-59,84	-54,6
	5	39,57	61,18	-55,9
2	4	-38,54	-47,43	-44,9
	5	29,50	49,53	-46,7
1	4	-22,58	-28,12	-27,1
	5	12,85	29,80	-28,8

TABELA 3.7-ESFORÇOS CORTANTES NA VIGA V1.

AN-DAR	NÓS	ESFORÇOS CORTANTES (Qz) NA VIGA V1 (kN)x10		
		T1	T2	T3
9	4E	0,277	0,355	-0,299
	5D	0,245	0,355	0,299
8	4	0,470	0,587	-0,499
	5	0,415	0,587	0,499
7	4	0,490	0,604	-0,518
	5	0,406	0,604	0,518
6	4	0,523	0,638	-0,557
	5	0,410	0,638	0,557
5	4	0,546	0,658	-0,584
	5	0,405	0,658	0,584
4	4	0,548	0,653	-0,588
	5	0,379	0,653	0,588
3	4	0,515	0,605	-0,552
	5	0,319	0,605	0,552
2	4	0,420	0,484	-0,458
	5	0,203	0,484	0,458
1	4	0,260	0,289	-0,280
	5	0,250	0,289	0,280

OBS: os valores de T3 obedecem outra convenção de sinais.

EXEMPLO 4

Trata-se de um edifício de 10 andares, constituído por vigas, pilares e painéis parede como mostrado na Fig. 3.1.

São adotados os seguintes valores:

$$E = 2 \times 10^3 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0$$

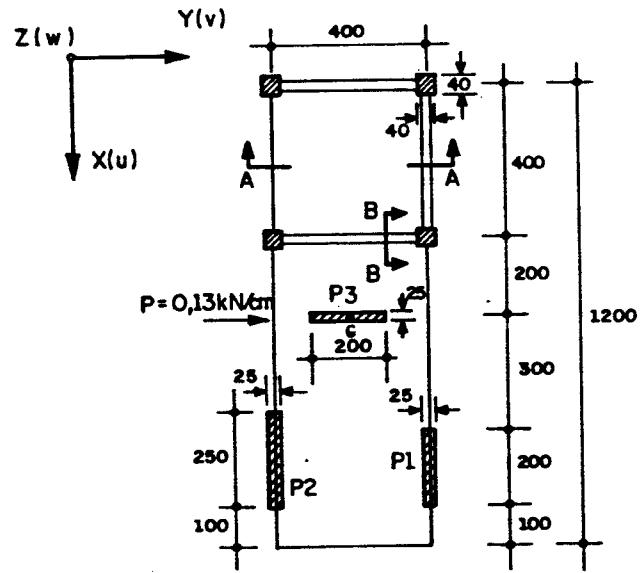
$$h = 300 \text{ cm}$$

$$P = 0,13 \text{ kN/cm}$$

A carga distribuída segundo a direção global y , será transformada na equivalente aplicada ao nível das lajes.

Serão analisados os seguintes casos:

- T1:** Estrutura tipo 1, idealizada com as paredes, os pórticos e considerando a rigidez à flexão das lajes.
- T2:** Estrutura tipo 2, idealizada com as paredes, os pórticos e sem considerar a rigidez à flexão das lajes.
- T3:** Idem T2, analisado por [18], considerando as lajes como diafragmas infinitamente rígidos.



UNIDADES :
 COMPRIMENTO : cm
 FORÇA : kN

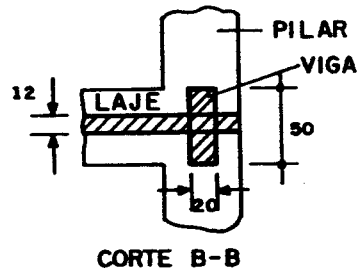
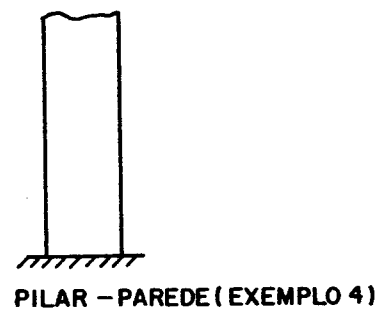
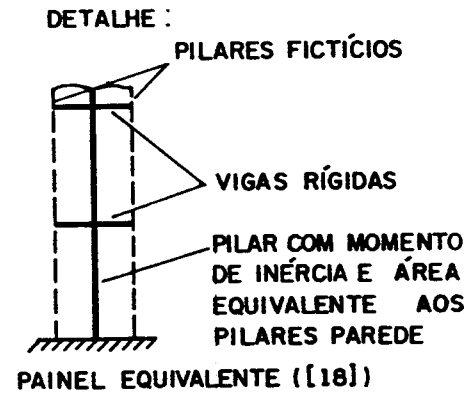
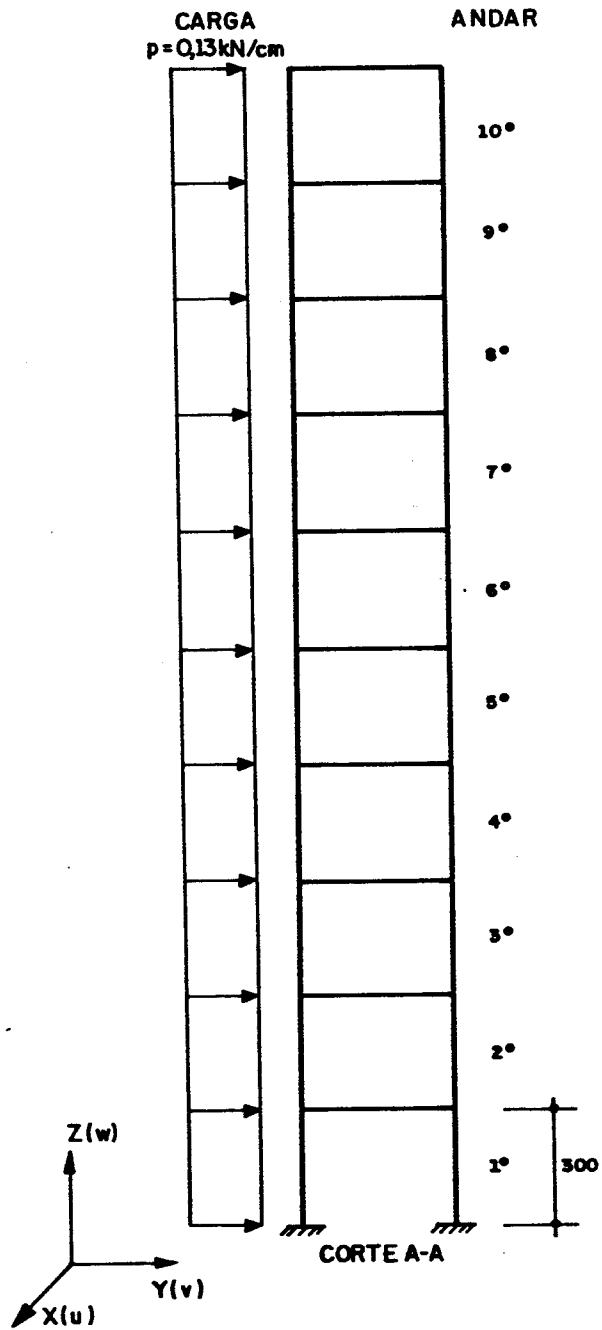


FIG. 4.1 - ESTRUTURA EXEMPLO 4

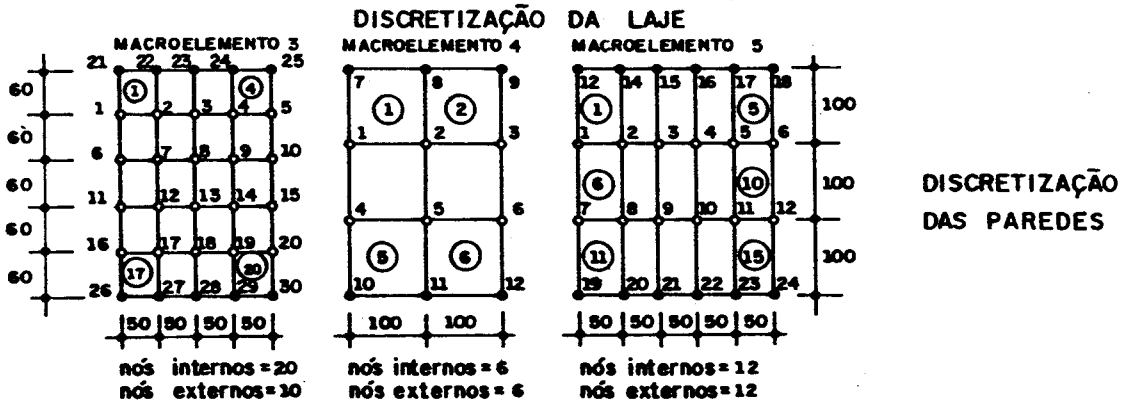
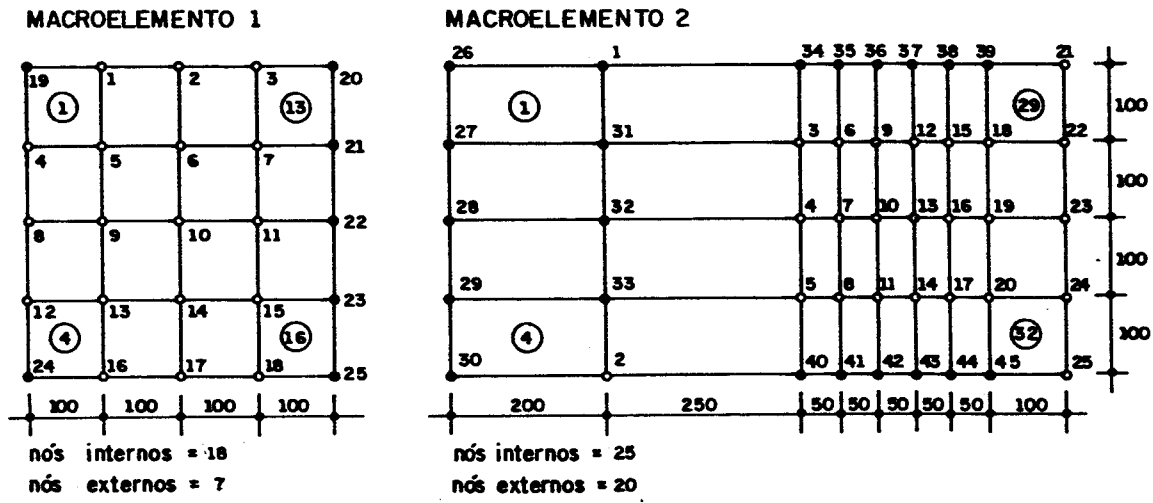
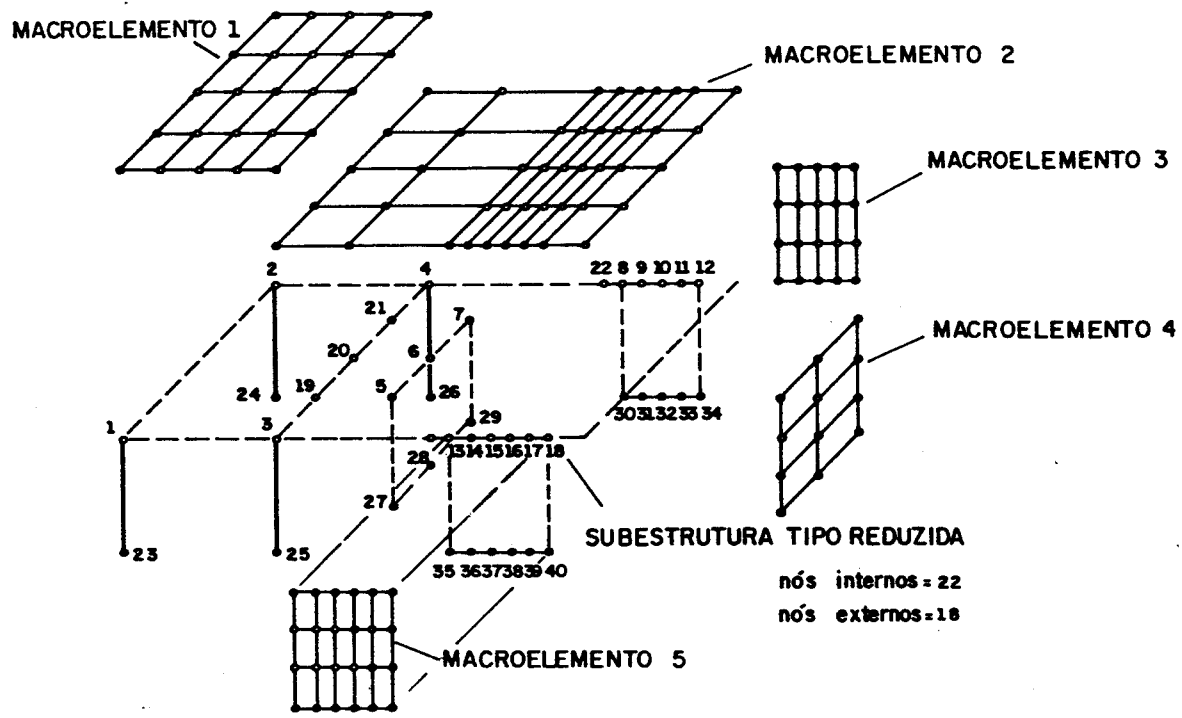
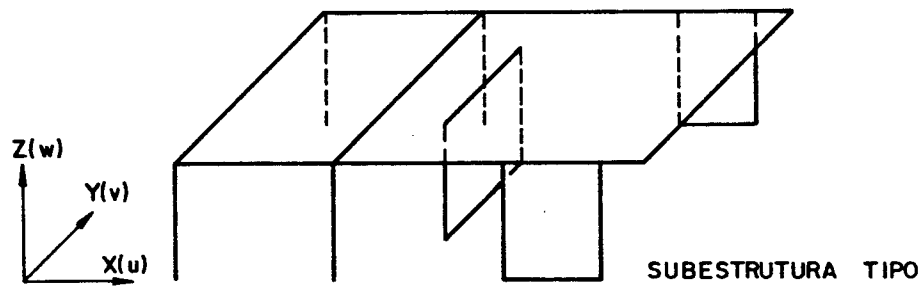


FIG. 4.2 - DISCRETIZAÇÃO DOS COMPONENTES ESTRUTURAIS

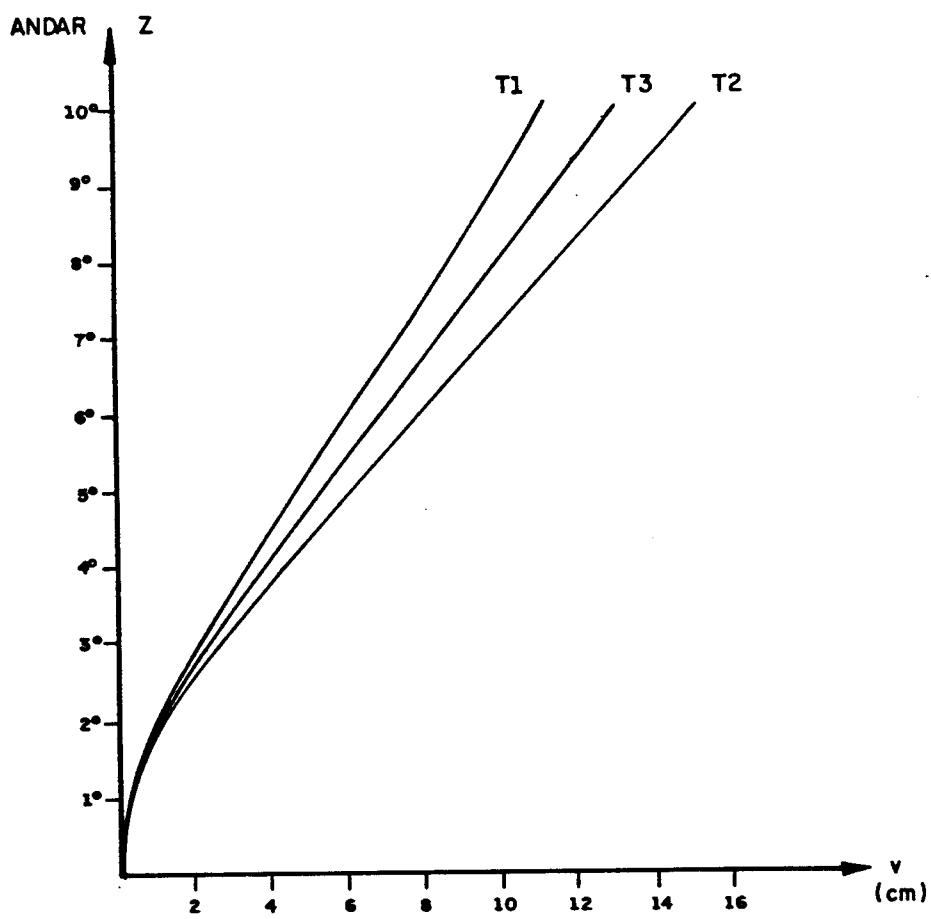


FIG. 4.3 — DESLOCAMENTO HORIZONTAL (v) DA ESTRUTURA

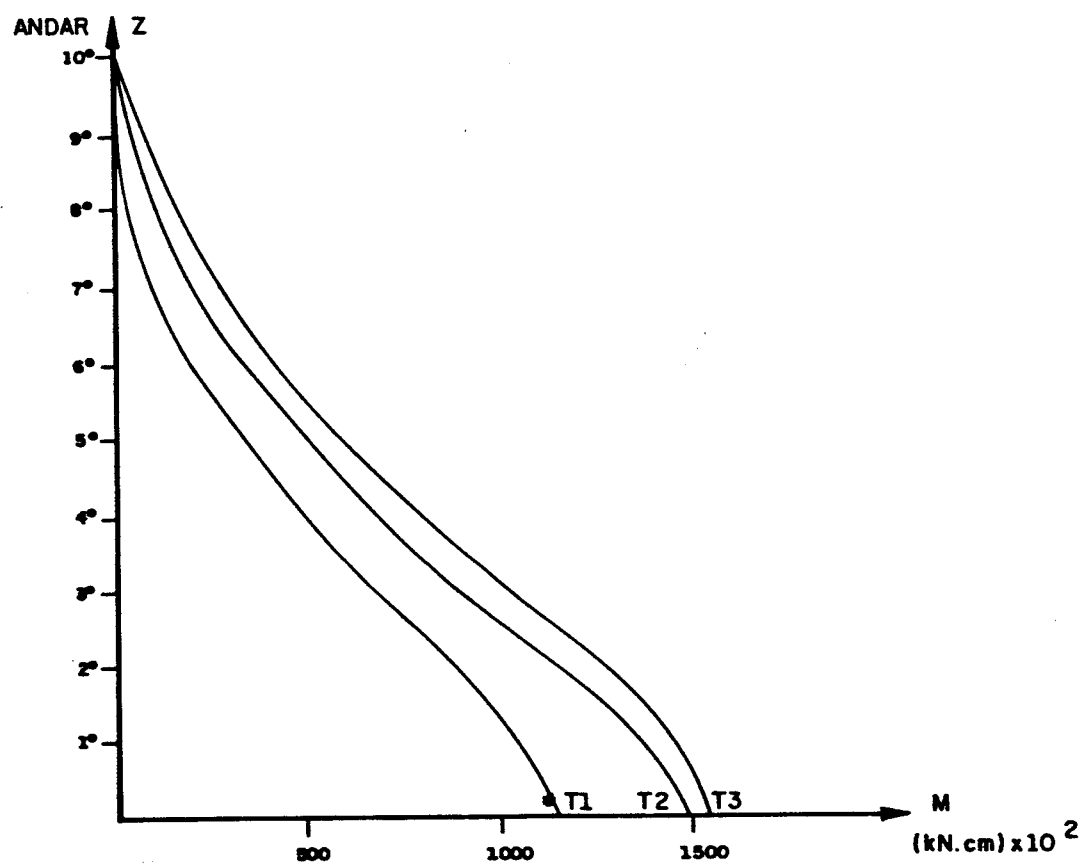


FIG. 4.4 — MOMENTO FLETOR NA PAREDE P2.

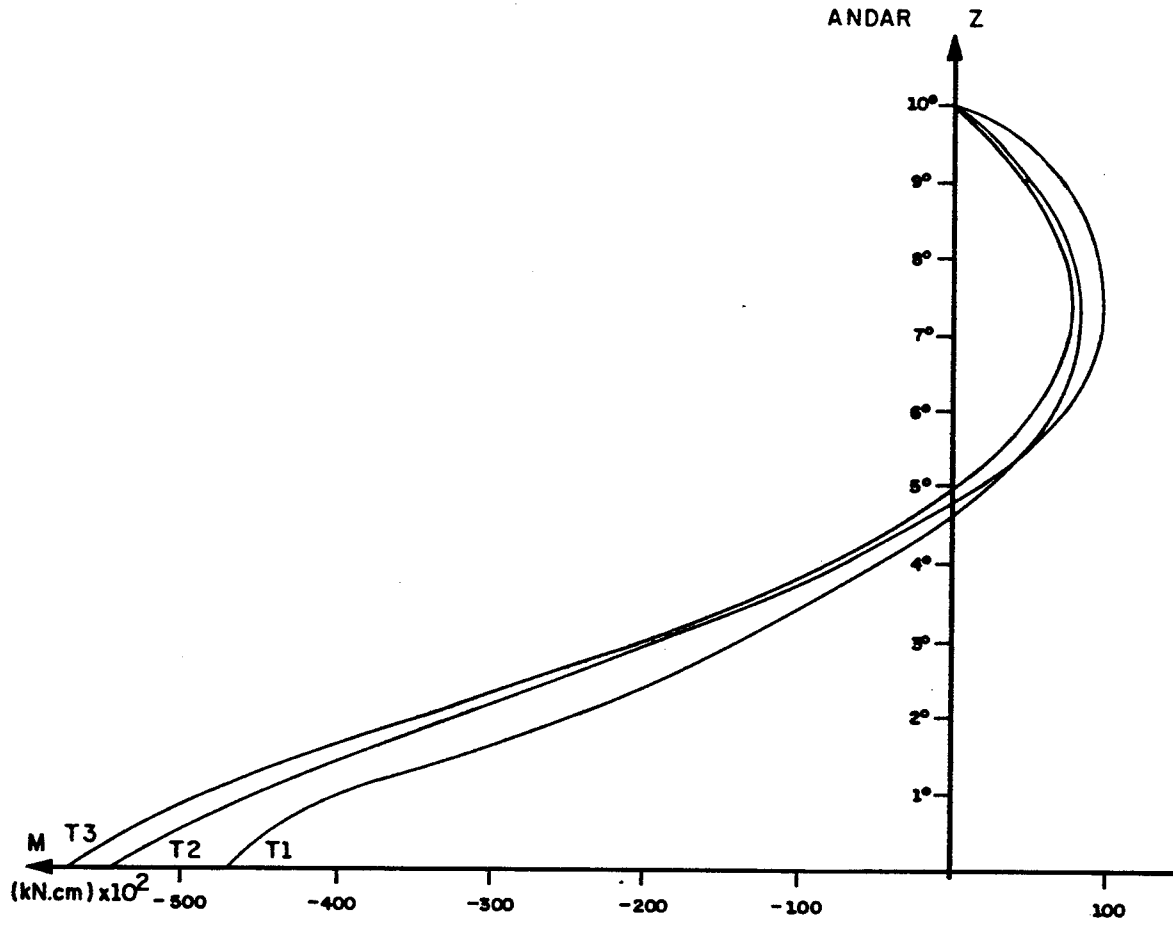


FIG. 4.5 - MOMENTO FLETOR NA PAREDE P1

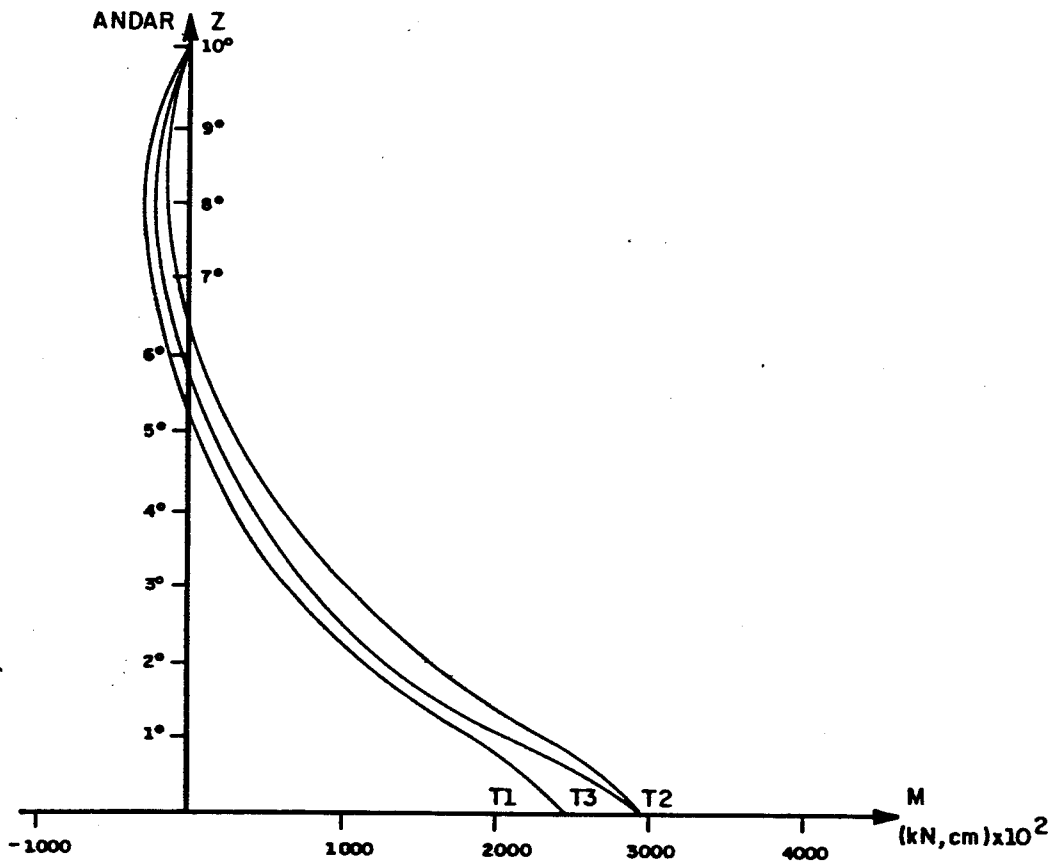


FIG. 4.6 - MOMENTO FLETOR NA PAREDE P3

ANEXO:

Durante a fase de execução do programa foi testado um novo elemento de chapa, modificado do A.C.M. e estudado por Wilson e outros como consta nas referências de [1] e [6]. O comportamento deste outro elemento para problemas com predominância de flexão (parede) foi surpreendentemente bom, confirmando os resultados obtidos por Wilson; também foi comparado o comportamento desse elemento modificado com o A.C.M. trabalhando como diafragma (Laje) e se obteve valores quase coincidentes.

Por estes motivos este outro elemento foi implementado no programa e os resultados dos exemplos 1 a 4, para o elemento de chapa, corresponde ao elemento modificado.

a) MATRIZ $\underline{\underline{B}}^*$:

Considerando a deformação tangencial constante no elemento e igual ao valor no centro de gravidade.

$$\underline{\underline{B}}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\phi_{,\xi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b}\phi_{,\eta} \\ \frac{1}{b}\phi_{,\eta}^* & \frac{1}{a}\phi_{,\xi}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(1-\eta)}{a} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{\eta}{a} & -\frac{\eta}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(1-\xi)}{b} & -\frac{\xi}{b} & \frac{\xi}{b} & \frac{1-\xi}{b} \\ -\frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2a} \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

b) Matriz de rigidez $\underline{\underline{r}}_c^*$:

$$\underline{\underline{r}}_c^* = \int_s \underline{\underline{B}}^{*T} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{B}}^* \cdot dS$$

$$\underline{\underline{r}}_c^* = \frac{Ed ab}{1-\nu^2} \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2}\phi_{,\xi}^T \phi_{,\xi} + \frac{1-\nu^*}{2b^2}\phi_{,\eta}^* \phi_{,\eta} & \frac{\nu}{ab}\phi_{,\xi}^T \phi_{,\eta} + \frac{1-\nu^*}{2ab}\phi_{,\eta}^* \phi_{,\xi} \\ \frac{\nu}{ba}\phi_{,\eta}^T \phi_{,\xi} + \frac{1-\nu^*}{2ba}\phi_{,\xi}^* \phi_{,\eta} & \frac{1}{b^2}\phi_{,\eta}^T \phi_{,\eta} + \frac{1-\nu^*}{2a^2}\phi_{,\xi}^* \phi_{,\xi} \end{bmatrix} d\xi d\eta$$

integrando a expressão a fazendo o arranjo adequado: (A.2)

1	$8 \frac{b}{a} + 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$3(1+\nu)$	$-8 \frac{b}{a} + 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$-3(1-3\nu)$	$-4 \frac{b}{a} - 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$-3(1+\nu)$	$4 \frac{b}{a} - 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$-3(1-3\nu)$
2	$8 \frac{a}{b} + 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$3(1-3\nu)$	$4 \frac{a}{b} - 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$-3(1+\nu)$	$-4 \frac{a}{b} - 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$-3(1-3\nu)$	$-8 \frac{a}{b} + 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$-8 \frac{a}{b} + 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$
3	$8 \frac{b}{a} + 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$3(1+\nu)$	$4 \frac{b}{a} - 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$-3(1-3\nu)$	$-4 \frac{b}{a} - 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$-3(1+\nu)$	$4 \frac{b}{a} - 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$3(1+\nu)$
4	$8 \frac{a}{b} + 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$3(1-3\nu)$	$4 \frac{a}{b} - 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$-3(1+\nu)$	$-4 \frac{a}{b} - 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$-3(1-3\nu)$	$-4 \frac{a}{b} - 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$-4 \frac{a}{b} - 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$
5	$8 \frac{b}{a} + 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$3(1+\nu)$	$8 \frac{b}{a} + 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$3(1+\nu)$	$8 \frac{b}{a} + 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$3(1+\nu)$	$-8 \frac{b}{a} + 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$-3(1-3\nu)$
6	$8 \frac{a}{b} + 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$3(1-3\nu)$	$8 \frac{a}{b} + 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$3(1-3\nu)$	$8 \frac{a}{b} + 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$3(1-3\nu)$	$4 \frac{a}{b} - 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$4 \frac{a}{b} - 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$
7	$8 \frac{b}{a} + 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$3(1+\nu)$	$8 \frac{b}{a} + 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$3(1+\nu)$	$8 \frac{b}{a} + 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$3(1+\nu)$	$8 \frac{b}{a} + 3 \frac{a}{b}(1-\nu)$	$-3(1+\nu)$
8	$8 \frac{a}{b} + 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$3(1-3\nu)$	$8 \frac{a}{b} + 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$3(1-3\nu)$	$8 \frac{a}{b} + 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$3(1-3\nu)$	$8 \frac{a}{b} + 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$	$8 \frac{a}{b} + 3 \frac{b}{a}(1-\nu)$

$$* \epsilon_c = \frac{Ed}{2\mu(1-\nu^2)}$$

SIMÉTRICA

(A.3)

c) Tensões num ponto genérico $p(\xi, \eta)$.

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \begin{Bmatrix} \sigma_x^*(\xi, \eta) \\ \sigma_y^*(\xi, \eta) \\ \tau_{xy}^*(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{-(1-\eta)}{a} & \frac{\nu(\xi-1)}{b} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{-\nu\xi}{b} & \frac{\eta}{a} & \frac{\nu\xi}{b} & \frac{-\eta}{a} & \frac{\nu(1-\xi)}{b} \\ \frac{\nu(\eta-1)}{a} & \frac{\xi-1}{b} & \frac{\nu(1-\eta)}{a} & \frac{-\xi}{b} & \frac{\nu\eta}{a} & \frac{\xi}{b} & \frac{-\nu\eta}{a} & \frac{1-\xi}{b} \\ \frac{-(1-\nu)}{4b} & \frac{-(1-\nu)}{4a} & \frac{1-\nu}{4b} & \frac{1-\nu}{4a} & \frac{-(1-\nu)}{4b} & \frac{1-\nu}{4a} & \frac{1-\nu}{4b} & \frac{-(1-\nu)}{4a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (A.4)$$

d) Exemplo de aplicação

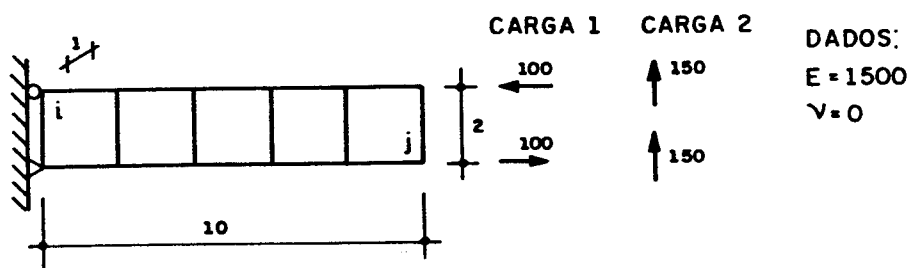


FIG. (A.1)

TABELA (A.1)

	TENSÃO DE FLEXÃO PONTO i		DESLOCAMENTO PONTO j	
	CARGA 1	CARGA 2	CARGA 1	CARGA 2
ELEMENTO (A.C.M.)	6,81	70,1	218,2	2945
ELEMENTO MODIFICADO	10,0	101,2	300,0	4050
VALOR ANALÍTICO	10,0	103,0	300,0	4050

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A análise de resultados finais das estruturas analisadas mostrou, como já se esperava, valores muito próximos dos obtidos utilizando outras técnicas discretas, ressaltando-se, é claro, aquelas diferenças decorrentes da não consideração da rigidez a flexão das lajes e do seu comportamento elástico no próprio plano, embora este último possa ser mínimo e localizado sob certas condições.

Uma análise mais pormenorizada destes efeitos foi abordada por [15], utilizando também o método dos elementos finitos, cabendo somente ressaltar que as diferenças de valores obtidos entre o presente trabalho e o citado provêm de que: a utilização da técnica de subestruturas permitiu um maior refinamento das redes de elementos finitos, a utilização da matriz de rigidez do elemento de placa (B.F.S.) em forma explícita eliminou possíveis erros de arredondamento oriundos da integração numérica e finalmente a inclusão do elemento de chapa modificado, para representar o comportamento dos pilares-parede, melhorou significativamente a convergência dos resultados.

Contudo não foi possível analisar no presente trabalho estruturas submetidas a cargas verticais e estruturas de forma alongada em planta, como é o caso, por exemplo, de pontes contínuas, galpões industriais, etc, embora o programa disponha dos recursos computacionais para tanto, ficando para um posterior trabalho do autor ou de quem prosseguir com a pesquisa.

Para processar os dados dos exemplos estudados foi utilizado o computador IBM-4381; o tempo de CPU em todos os casos foi menor que 10 minutos; também foi necessário o uso de precisão dupla para os "ARRAYS" envolvidos nas subrotinas que operam a subestruturação, com o propósito de minimizar os erros de arredondamento devidos ao grande volume de operações matriciais; propositadamente, e com a intenção de poder utilizasse microcomputador, foi restringido o número de nós das subestruturas, em qualquer nível, a

25 nós internos e 25 nós externos como pode ser verificado nos exemplos 1 a 4.

Foram incluídas em cada capítulo as deduções teóricas, exemplos detalhados de ilustração que facilitem ao leitor a compreensão das técnicas utilizadas e, paralelamente, as subrotinas básicas codificadas em FORTRAN-77 com acompanhamento explicativo; Inclui-se como contribuição adicional a técnica de armazenamento de matrizes simétricas em vetor por linhas, e a aplicação de condição de contorno com a imposição de zero na diagonal que versatiliza a composição com elementos finitos de diferentes graus de liberdade.

Finalmente, cientes que os objetivos deste trabalho foram alcançados e com o propósito de sugerir temas que conduzam ao prosseguimento da pesquisa, propõe-se a inclusão de elementos triangulares de placa e chapa compatíveis, para ampliar a aplicabilidade para a análise de estruturas de plantas não retangulares, a implementação de recursos gráficos que permitam visualizar objetivamente o grande volume de dados e resultados que o processo do elementos finitos envolve.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ZIENKIEWICZ, O.C. El método de los elementos finitos. Barcelona, Ed. Reverté, 1980.
- [2] PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of matrix structural analysis. New York, McGraw-Hill, 1968.
- [3] WEAVER JR., W. Computer programs for structural analysis. Princeton, D. Van Nostrand, 1967.
- [4] ROSEN, R. & RUBINSTEIN, M.F. Substructure analysis by matrix recomposition. Journal of Structural Division, ASCE, 96 (3): 663-70, Mar. 1970.
- [5] HINTON, E. & OWEN, D.R.J. An introduction to finite element computation. Swansea, UK, Pineridge Press.
- [6] BREBBIA, C.A. & CONNOR, J.J. Metodos de los elementos finitos en la ingenieria civil. Madrid, Colegio Oficial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 1975.
- [7] BATHE, K.-J. Finite element procedures in engineering analysis. New Jersey, Prentice-Hall, 1982.
- [8] BOSSHARD, W. An introduction to finite element technique. São Carlos, EESC, 1971.
- [9] KARDESTUNGER, H. Fundamentos de analisis matricial de estruturas. Colombia, Ed. Carvajal, 1975.
- [10] BEAUFAIT, F. et alii. Computer methods of structural analysis. New Jersey, Prentice-Hall, 1970.
- [11] TIMOSHENKO, S.P. & GODIER, J.N. Teoria da elasticidade. 3.ed. Rio Janeiro, Guanabara Dois, 1980.
- [12] CEREDA & MALDONADO. Introdução ao FORTRAN 77 para microcomputadores. São Paulo, McGraw-Hill, 1986.
- [13] HEHL, E.M. Linguagem de programação estruturada FORTRAN 77. São Paulo, McGraw-Hill, 1986.
- [14] MARTINELLI, D.A.O.; MONTANARI, I.; SAVASSI, W. Placas elásticas. São Carlos, EESC, 1986.

- [15] BRUNELLI, A.C. Análise estrutural de edifícios sujeitos a carregamento horizontal, considerando a rigidez das lajes, com o método dos elementos finitos. São Carlos, 1987. Dissertação de mestrado, EESC-USP.
- [16] DEGASPARE, J.C. Aplicações do elemento finito T18 para flexão de placas delgadas elástico-isótropas. São Carlos, 1978. Dissertação de mestrado, EESC-USP.
- [17] STAMATO, M.C. Associação contínua de painéis de contraventamento. São Carlos, EESC, 1972.
- [18] PRUDENTE, M. Análise de estruturas tridimensionais usuais de edifícios altos. São Carlos, 1984. Dissertação de mestrado, EESC-USP.