

"UMA FORMULAÇÃO ALTERNATIVA PARA O ESTUDO DE  
PLACAS SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA PELO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS DE CONTORNO"

ENG . EDSON TEJERINA CALDERÓN

ORIENTADOR: PROF.DR. WILSON SERGIO VENTURINI

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

"UMA FORMULAÇÃO ALTERNATIVA PARA O ESTUDO DE  
PLACAS SOBRE FUNDAÇÃO ELÁSTICA PELO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS DE CONTORNO"

ENG. EDSON TEJERINA CALDERÓN  
ORIENTADOR: PROF.DR. WILSON SERGIO VENTURINI

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

Prof.Dr. Wilson Sergio Venturini (Orientador)  
Prof.Dr. Sergio Persival B. Proença  
Prof.Dr. Fernando Iguti

**SUPLENTE:**

Prof.Dr. José Alberto Cuminato  
Prof.Dr. José Elias Laier

São Carlos  
Março de 1991

**Aos meus pais,  
Eduardo e M.Luisa.**

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Wilson Sérgio Venturini pela excelente orientação fornecida durante a elaboração deste trabalho.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela bolsa de estudos concedida.

À Sra. Marta Couto Faria pela digitação, ao Sr. Francisco Carlos G. de Brito pelos desenhos e à Sra. Maria Nadir Minatel pela revisão das referências bibliográficas.

À todos os colegas, professores e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC/USP pela amizade.

## RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo Método dos Elementos de Contorno. A reação da fundação é representada pelo acréscimo de uma integral de domínio nas equações integrais usuais de placas. Esta integral de domínio é tratada inicialmente utilizando-se células internas e o processo da reciprocidade dual. Em seguida, é apresentada a formulação alternativa, que consiste em aproximar a densidade dessa integral de domínio por uma função apropriada e transformá-la em integrais de contorno pela aplicação sucessiva de integrações por partes. Finalmente são apresentadas aplicações numéricas utilizando-se as três formulações, visando mostrar a eficiência da formulação proposta.

## ABSTRACT

In this work an alternative formulation to the study of plates on elastic foundation by the Boundary Element Method is presented. The subgrade reaction is represented by introducing a domain integral in the usual integral equations for plate bending. This domain integral is initially treated using internal cells and the dual reciprocity process. Following this, an alternative formulation is presented, which consists of approximating the domain integral density by one appropriate function and transforming it into boundary integrals by successive application of integration by parts. Finally, numerical examples using the three formulations are presented, showing the efficiency of the proposed formulation.

## SUMÁRIO

|   |    |
|---|----|
| I. INTRODUÇÃO .....                                   | 1  |
| II. FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS DELGADAS .....    | 9  |
| 2.1. Introdução .....                                 | 9  |
| 2.2. Hipóteses Básicas .....                          | 11 |
| 2.3. Relações básicas para placas delgadas .....      | 11 |
| 2.4. Equações de placas em coordenadas polares .....  | 22 |
| 2.5. Soluções fundamentais de placas .....            | 29 |
| III. EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO EM PLACAS .....   | 38 |
| 3.1. Introdução .....                                 | 38 |
| 3.2. Equação integral para um ponto do domínio .....  | 39 |
| 3.3. Equação integral para um ponto do contorno ..... | 48 |
| 3.4. Integrais de domínio para o carregamento .....   | 60 |
| IV. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....            | 65 |
| 4.1. Introdução .....                                 | 65 |
| 4.2. Discretização do contorno .....                  | 66 |
| 4.3. Aproximação das variáveis .....                  | 69 |
| 4.3.1. Elemento linear contínuo .....                 | 70 |
| 4.3.2. Elemento linear descontínuo .....              | 72 |
| 4.3.3. Elemento linear misto .....                    | 74 |
| 4.4. Transformação das equações integrais .....       | 74 |

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 4.5.    | Condições de contorno .....   | 80  |
| 4.6.    | Alternativas de montagem do sistema de equações .....   | 83  |
| 4.6.1.  | Utilizando-se as equações integrais de $w$ e $\partial w / \partial m$ .....  | 83  |
| 4.6.2.  | Utilizando-se apenas a equação integral de $w$ .....  | 90  |
| 4.7.    | Integração sobre os elementos .....   | 95  |
| 4.8.    | Propriedades da matriz $\tilde{H}$ .....  | 100 |
| 4.9.    | Deslocamentos e esforços para pontos internos .....   | 102 |
| 4.9.1.  | Deslocamento transversal $w(q)$ e sua derivada com $\partial w / \partial m(q)$ .....   | 102 |
| 4.9.2.  | Momento fletor e força cortante .....   | 104 |
| 4.10.   | Aplicações numéricas .....  | 114 |
| 4.10.1. | Exemplo 1: Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada .....  | 114 |
| 4.10.2. | Exemplo 2: Placa quadrada engastada no contorno e uniformemente carregada ...   | 116 |
| 4.10.3. | Exemplo 3: Placa quadrada engastada em dois lados opostos e apoiada nos outros dois com carregamento uniformemente distribuído .....                  | 117 |
| 4.10.4. | Exemplo 4: Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois com carregamento uniformemente distribuído total e parcial ..... | 119 |
| 4.10.5. | Exemplo 5: Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno com carregamento distribuído em pequena área central ..                                    | 121 |
| 4.10.6. | Exemplo 6: Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro cantos e uniformemente carregada .....  | 123 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.10.7. Exemplo 7: Placa com condições de carregamento e contorno variados ..... | 125 |
| V. PLACAS SOBRE FUNDAÇÕES ELÁSTICAS .....  | 127 |
| 5.1. Introdução .....  | 127 |
| 5.2. Equações básicas .....  | 128 |
| 5.3. Integração sobre células internas .....                                     | 131 |
| 5.4. Processo da reciprocidade dual .....  | 141 |
| 5.5. Formulação alternativa .....  | 148 |
| 5.6. Aplicações numéricas .....  | 161 |
| 5.6.1. Exemplo 1: Placa com carga concentrada ..                                 | 162 |
| 5.6.2. Exemplo 2: Placa com carga excêntrica ..                                  | 168 |
| VI. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....   | 178 |
| VII. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA .....   | 181 |

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Em muitos problemas físicos governados por equações diferenciais, as soluções analíticas são conhecidas apenas para casos muito particulares. A necessidade de resolver problemas mais gerais fez com que surgissem diversas técnicas numéricas para analisar, de forma aproximada, esse tipo de equações, tornando-se eficientes ferramentas de cálculo. Com o advento dos computadores seu uso ficou mais amplo e prático, permitindo a análise de diversos tipos de problemas físicos.

O método das diferenças finitas - M.D.F. [1], embora tenha surgido em uma época anterior ao advento dos computadores, é utilizado até hoje na solução de diversos problemas de engenharia. Já o método dos elementos finitos - M.E.F. [2,3], foi introduzido na época em que os avanços tecnológicos na eletrônica dão origem aos computadores, fazendo-o adquirir um crescimento rápido, tornando-se assim, o método numérico mais difundido nos últimos 25 anos, tendo

atingido praticamente todos os campos de aplicação dentro da engenharia.

O método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos, são técnicas numéricas que aproximam a solução da equação diferencial que rege o problema físico, utilizando valores das variáveis básicas do problema associados a pontos internos e de contorno do corpo em análise, por esta razão, são também denominados "métodos de domínio".

O método dos elementos de contorno - M.E.C. [4], é um método recente que vem despertando o interesse entre pesquisadores das mais diversas áreas, e que devido as suas características, se apresenta como uma alternativa promissora para a resolução de diversos problemas físicos usuais no campo da engenharia. Uma das características principais do método dos elementos de contorno, é que a discretização é feita apenas sobre o contorno, o que leva a uma redução das dimensões dos problemas analisados: isto significa menor quantidade de dados de entrada, diminuição do tempo de processamento e menor área auxiliar de armazenamneto de informações na memória do computador.

O M.E.C. apesar de ser um método numérico recente, origina-se como uma evolução natural das técnicas de resolução de equações integrais de contorno, conhecidas há muito tempo, pois segundo ELLIOT [5], em 1823 ABEL [6] deduziu uma equação integral para resolver o problema chamado de pêndulo isócrono. Posteriormente, em 1837 LIOUVILLE [7] transformou um problema de valor inicial em uma equação integral, que a resolveu por aproximações sucessivas. BETTI [8], em 1872 utilizou as equações integrais na teoria clássica da elasticidade. Outros trabalhos foram realizados também por SOMIGLIANA e CERRUTTI [9] em problemas de elasticidade plana. O estudo de problemas da teoria do potencial deu uma contribuição importante no desenvolvimento das equações integrais quando

VOLTERRA [10] em 1884, estudou a distribuição de cargas elétricas na superfície de uma esfera; tendo realizado ainda outros estudos em 1896. Entretanto, FREDHOLM [11] em 1903, foi quem apresentou a primeira teoria clássica das equações integrais com núcleos definidos e integráveis, que mais tarde influenciou trabalhos como os realizados por HILBERT [12] na solução de problemas elásticos e por KELLOGG [13] na teoria do potencial. Pesquisadores russos como MUSKHELISHVILI [14], MIKHLIN [15], SIMIRNOV [16] e KUPRADZE [17], deram uma valiosa contribuição para o início de uma nova era do uso das equações integrais na resolução de problemas físicos, utilizando equações integrais com singularidades e descontinuidades no domínio de integração, baseados na teoria das variáveis complexas, dando origem assim, ao Método Indireto, devido às variáveis envolvidas, que não eram as variáveis do problema. Este método foi utilizado também por outros pesquisadores como MASSONET, OLIVEIRA, WATSON e VAN BUREN [18]. Em 1963, JASWON [19] e SYMM [20] usaram variáveis reais, além de manter uma função de tensão auxiliar, no equacionamento do problema, caracterizando assim, o Método Semi-direto.

Em 1967, RIZZO [21] apresentou uma formulação para elasticidade plana relacionando as variáveis físicas do problema denominada Método Direto. Sendo uma técnica alternativa das equações integrais, passou a ser chamada de "Método das equações integrais de contorno". Posteriormente, este método foi estendido para elasticidade tridimensional por CRUSE [22]. Um trabalho também importante, foi o realizado por RIZZO & SHIPPY [23], onde é sugerido o uso de sub-regiões para tratamento de domínios não homogêneos. CRUSE & RIZZO [24] apresentaram formulações do método para análise de problemas elásticos dinâmicos usando transformadas de Laplace com relação ao tempo. Nessa mesma época aparecem os primeiros trabalhos utilizando a formulação direta das equações integrais de contorno em

problemas não-lineares. Em 1971, CRUSE & VAN BUREN [25] aplicam o método a um sólido tridimensional, considerando a influência de um "crack" e SWEDLON & CRUSE [26] apresentam uma formulação para a simulação de materiais elastoplásticos, anisotrópicos e compressíveis. MENDELSON [27] também apresentou várias formulações para a aplicação do método em problemas elastoplásticos, assim como MUKHERJEE [28], que considerou apenas materiais incompressíveis utilizando o critério de VON MISES. RICARDELA [29] e CRUSE [30], introduziram a aproximação linear para as variáveis em problemas de duas e três dimensões. A técnica das sub-regiões e aproximações de ordem superior para as variáveis, foram desenvolvidas por LACHAT [31], dando uma contribuição maior ao método das equações integrais de contorno, que começou a ser interpretada como um método numérico. Mas, só em 1978, BREBBIA [4] consegue dar uma generalização ainda maior ao método, apresentado a sua formulação a partir da técnica dos Resíduos Ponderados, e o método passa a ser denominado de "Método dos Elementos de Contorno", começando a ser intensamente estudado em diversos centros de pesquisa, analisando-se os mais variados problemas de engenharia como: plasticidade, viscoplasticidade, viscoelasticidade, não-linearidade física: mecânica da fratura; mecânica das rochas e dos solos; adensamento, percolação e efeitos dinâmicos; vibração; radiação; propagação de ondas; placas; cascas; concentração de tensão; iterações solo-estrutura, fluido-estrutura e acústica-estrutura; e outros. O M.E.C. é também utilizado em combinação com outros métodos numéricos [32,33,34], como o M.E.F. na análise de diversos problemas.

Os problemas de flexão de placas foram estudados, utilizando-se equações integrais de contorno, inicialmente por JASWON et alii [35], que propôs a solução da equação bi-harmônica por meio de equações integrais e aplicou-a na solução de placas [36]. HANSEN [37] propôs uma formulação

direta para a análise de placas infinitas com buracos de contornos não carregados utilizando duas equações integrais, a do deslocamento transversal e a da sua derivada direcional. Em 1978, ALTIERO & SIKARKIE [38] analisaram apenas placas engastadas devido à complexidade da técnica utilizada, que consistia em considerar uma placa real contida numa placa fictícia cuja função de Green era conhecida. Esta técnica, considerada como uma formulação indireta, foi estendida posteriormente por WU & ALTIERO [39] para incluir condições arbitrárias de contorno. TOTTENHAM [4] apresentou um trabalho similar para cascas abatidas. BEZINE [41,42] e STERN [43,44], desenvolveram uma formulação direta para análise de placas finitas com vinculação qualquer no contorno. Outros trabalhos importantes foram apresentados também por BENZINE [45], que propôs uma formulação mista para análise de vibrações envolvendo contorno e domínio, e KAMIYA [46], que aplicou o método a placas sujeitas a efeitos de temperatura. TANAKA [47] e KAMIYA [48] consideraram nos seus trabalhos, os efeitos de grandes deslocamentos transversais na análise de placas. VAN DER WEEËN [49], propôs uma formulação para análise de placas espessas, baseado na teoria de REISSNER [50]. COSTA & BREBBIA [51] e BÉZINE et alii [52] analisaram placas sujeitas a instabilidade utilizando células internas para o cálculo da integral de domínio. MORJARIA [53] desenvolveu formulações que levam em conta a não-linearidade física para análise de placas.

Formulações relacionadas com problemas de placas sobre fundação elástica, embora sejam poucas, também foram desenvolvidas utilizando-se equações integrais, sendo TOTTENHAM [40] em 1979, o primeiro em apresentar um trabalho neste campo. Em 1984 KATSIKADELIS & ARMENAKAS [54,55], baseados na teoria de WINKLER [56], apresentaram duas formulações diferentes para analisar placas sobre fundação elástica, sem o uso de células internas. Recentemente

destacam-se os trabalhos de COSTA & BREBBIA [57,58,59], nos quais as reações da fundação são consideradas elásticas. SILVA [60], trata a integral de domínio proveniente da reação da fundação utilizando células internas e o processo da reciprocidade dual, considerando inclusive, o comportamento não-linear da fundação. Uma alternativa de tratamento de integrais de domínio desse tipo, ou seja, de integrais de domínio cuja densidade é desconhecida, foi proposta por VENTURINI [61], e consiste na escolha de uma função adequada para a aproximação da densidade da integral de domínio, a qual é transformada em integrais de contorno utilizando-se sucessivas integrais por partes. Esta alternativa foi utilizada inicialmente por CODA [62], com algumas melhorias, na análise da vibração livre de meios elásticos bidimensionais, obtendo resultados satisfatórios.

O presente trabalho tem como objetivo principal, apresentar uma formulação alternativa para placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno. A formulação já proposta para este caso [54], inclui na sua solução fundamental a reação da fundação, ficando sua aplicação restrita a casos particulares, onde são consideradas apenas reações elásticas em todo o domínio da placa. Na formulação proposta neste trabalho, a reação da fundação é representada pelo acréscimo de uma integral de domínio nas equações integrais usuais de placas. Esta integral de domínio é tratada utilizando-se a alternativa proposta por VENTURINI [61]. Os resultados obtidos desta forma, são comparados com os resultados obtidos pela definição de células internas e pela reciprocidade dual [60].

Inicialmente, no capítulo II, é apresentado um resumo da teoria de KIRCHHOFF [63] para placas, a partir da qual são obtidos os esforços e a equação diferencial geral de placas, em termos do deslocamento transversal,  $w$ , em

coordenadas cartesianas e polares. São obtidas também as soluções fundamentais dos deslocamentos e esforços da placa.

Utilizando-se o teorema da reciprocidade de BETTI [8], no capítulo III, são obtidas as equações integrais do deslocamento transversal,  $w$ , da placa e de sua derivada direcional, para pontos do domínio e do contorno. A integral de domínio correspondente ao carregamento transversal da placa é transformada em integrais sobre o contorno da região carregada.

No capítulo IV, o contorno da placa é discretizado em elementos, nos quais as variáveis são aproximadas por funções lineares. Desta forma, as equações integrais são aplicadas em uma quantidade igual às incógnitas, são transformadas em um sistema de equações algébricas lineares que pode ser resolvido após a imposição das condições de contorno, fornecendo incógnitas do contorno úteis para a determinação de esforços e deslocamentos em pontos do domínio. São também apresentadas, algumas alternativas de montagem do sistema de equações, utilizando-se as equações integrais do deslocamento transversal e de sua derivada direcional, aplicadas em pontos de contorno e fora do domínio. É proposto ainda, um tratamento alternativo dos termos relacionados com os cantos da placa. Os resultados das aplicações numéricas apresentadas no final do capítulo, são comparados com a solução analítica da equação diferencial de placas ou com resultados obtidos com uma técnica numérica diferente.

As equações integrais aplicadas na solução de placas, no capítulo V, são estendidas para a análise de placas apoiadas sobre fundação elástica, com o acréscimo de uma integral de domínio proveniente da reação da fundação. Esta integral de domínio é tratada inicialmente, utilizando-se células internas e o processo da reciprocidade dual [60]. Em seguida, é apresentada uma formulação alternativa que consiste em aproximar a densidade dessa integral de domínio

por uma função apropriada, e transformá-la em integrais de contorno pela aplicação sucessiva de integrações por partes. Finalmente são comparados os resultados obtidos pelas três formulações aplicadas em placas apoiadas sobre fundações elásticas, mostrando a eficiência de cada uma delas, em relação a resultados exatos.

## CAPITULO II

### FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS DELGADAS

#### 1.1 - Introdução

Os elementos estruturais, em relação às suas dimensões podem ser classificados como:

- a) lineares, ou de barras (duas dimensões pequenas em relação à terceira);
- b) de superfície, ou laminares (uma dimensão pequena em relação as outras);
- c) tridimensionais, ou blocos (as três dimensões aproximadamente iguais).

Os elementos de superfície, ou laminares (chamados também de folhas), segundo sua forma e direção de aplicação dos esforços, podem ser subdivididos em:

- a) chapas (com superfície média plana e forças externas aplicadas nesse plano);

- b) placas (com superfície média plana e forças externas normais a esse plano);
- c) cascas (com superfície média não plana).

A superfície média, ou plano médio, é a superfície equidistante às duas superfícies que definem o elemento laminar.

A placa é definida usualmente como um corpo limitado por duas superfícies planas, podendo-se admitir pequena curvatura da superfície média. A distância entre estas superfícies, chamada espessura (que pode ser variável), é pequena se comparada com as outras dimensões.

Dependendo das propriedades do material que constitui a placa, esta pode ser:

- a) anisótropa (com propriedades diferentes em qualquer direção);
- b) ortótropa (com propriedades diferentes em duas direções ortogonais);
- c) isotrópica (com as mesmas propriedades em qualquer direção).

Dependendo da relação ( $h/a$ ) entre a espessura " $h$ " e a menor dimensão " $a$ " medida no plano da placa, ela pode ser classificada como: muito delgada, delgada e espessa.

O estudo dos fundamentos das placas delgadas corresponde à chamada Teoria de KIRCHHOFF [63], que em geral interpreta suficientemente bem o comportamento das placas que têm relação ( $h/a$ ) entre 1/5 a 1/100 [64].

No presente trabalho, são consideradas apenas as placas delgadas isotrópicas submetidas a carregamentos ortogonais ao plano médio inicial.

## 2.2. Hipóteses Básicas

Para a determinação das relações e equações diferenciais básicas das placas delgadas, são necessárias as seguintes hipóteses:

- o material da placa é considerado elástico-linear homogêneo e isotrópico.
- os deslocamentos transversais são pequenos se comparados com a espessura "h" da placa.
- uma reta inicialmente normal ao plano médio da placa, depois da flexão, permanece reta e perpendicular ao plano médio deformado.
- as tensões de cisalhamento atuantes nas superfícies limítrofes da placa são desprezíveis.

## 2.3. Relações Básicas para Placas Delgadas

Pela última hipótese básica considera-se que:

$$\sigma_{zx} \cong 0 \quad (2.1.a)$$

$$\sigma_{zy} \cong 0 \quad (2.1.b)$$

$$\sigma_{zz} \cong 0 \quad (2.1.c)$$

As tensões restantes atuando nas faces de um elemento genérico de placa, com os sentidos tomados como positivos, são indicados na figura 2.1.

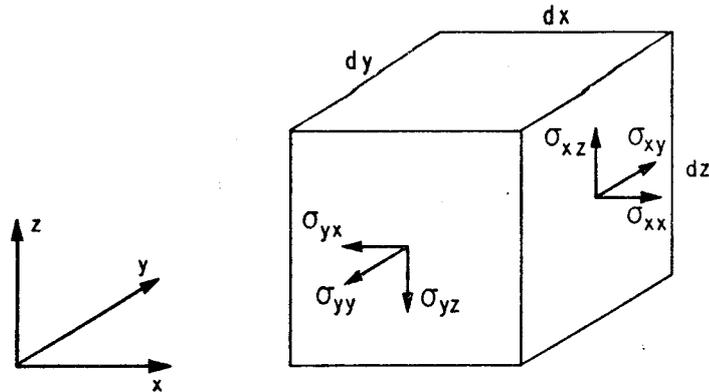


Fig. 2.1 - Elemento genérico de placa.

A primeira hipótese do item anterior, corresponde à Lei de Hooke, que escrita na forma indicial é a seguinte:

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\ell\ell} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (2.2)$$

ou

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{\ell\ell} \delta_{ij} \right) \quad (2.3)$$

com

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.4)$$

onde:

- E : módulo de elasticidade longitudinal;
- G : módulo de elasticidade transversal;
- $\nu$  : coeficiente de Poisson.

Como são considerados apenas deslocamentos pequenos na placa, a relação deformação/deslocamento fica dada por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.5)$$

Substituindo-se os valores de (2.1) e (2.4) em (2.3) e igualando-se a (2.5) obtém-se para a direção z:

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] = 0 \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right] = 0 \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (2.8)$$

Pela terceira hipótese básica do item 2.2, as tensões normais, paralelas ao plano médio da placa, variam linearmente com sua espessura, ou seja:

$$\sigma_{xx} = a_1(x,y) + b_1(x,y) z \quad (2.9)$$

$$\sigma_{yy} = a_2(x,y) + b_2(x,y) z$$

Substituindo-se (2.9) em (2.8) e integrando-se em z obtém-se:

$$u_z = w(x,y) - \frac{\nu}{E} [a_1(x,y) + a_2(x,y)] z + \frac{\nu}{E} [b_1(x,y) + b_2(x,y)] \frac{z^2}{2} \quad (2.10)$$

Os dois últimos termos podem ser desprezados em comparação com  $w(x,y)$ , que representa o deslocamento transversal do plano médio, onde a coordenada z vale zero,

ficando:

$$u_z = w(x,y) \quad (2.11)$$

De (2.6) e (2.7) obtém-se respectivamente:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = - \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.12.a)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = - \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (2.12.b)$$

Substituindo-se (2.11) nas equações (2.12) e integrando-se em relação a z, obtém-se:

$$u_x = u(x,y) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) \quad (2.13.a)$$

$$u_y = v(x,y) - z \frac{\partial w}{\partial y}(x,y) \quad (2.13.b)$$

Os termos  $u(x,y)$  e  $v(x,y)$ , que são os deslocamentos tangenciais dos pontos do plano médio da placa, bem como  $w(x,y)$ , serão a partir de agora escritos, por simplicidade, como  $u$ ,  $v$  e  $w$ .

De (2.5) e (2.13) obtém-se:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.14.a)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.14.b)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.14.c)$$

A partir de (2.2) e considerando-se (2.1), obtêm-se as relações entre as tensões e as deformações:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \quad (2.15.a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \quad (2.15.b)$$

$$\sigma_{xy} = 2 G \varepsilon_{xy} \quad (2.15.c)$$

Considere-se (2.8) e substituindo-se as equações (2.14) em (2.15) obtêm-se as relações entre as tensões e os deslocamentos:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad (2.16.a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \quad (2.16.b)$$

$$\sigma_{xy} = 2G \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (2.16.c)$$

A partir das tensões representadas no elemento genérico de placa na figura 2.1, definem-se os esforços solicitantes por unidade de comprimento, como integrais das tensões sobre a espessura "h" do elemento, representados na figura 2.2 e dados por:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz \quad (2.17.a)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz \quad (2.17.b)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \quad (2.17.c)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \quad (2.18.a)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz \quad (2.18.b)$$

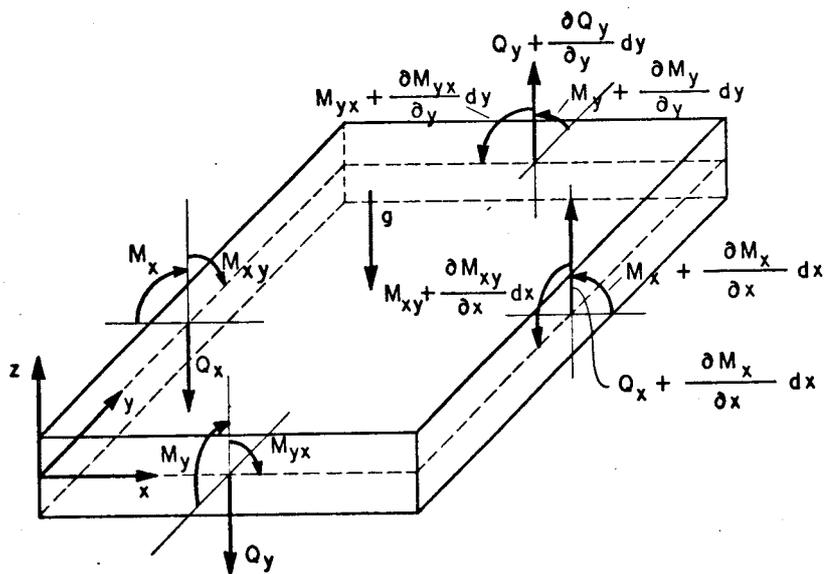


Fig. 2.2 - Esforços em um elemento de placa.

Substituindo-se (2.16) em (2.17) obtém-se:

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (2.19.a)$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (2.19.b)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.19.c)$$

onde:

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.20)$$

é a rigidez da placa à flexão.

Fazendo-se o equilíbrio dos esforços atuantes no elemento de placa da figura 2.2 obtém-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (2.21.a)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (2.21.b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + g = 0 \quad (2.22)$$

onde, g é a resultante total das cargas transversais.

Substituindo-se os valores de  $Q_x$  e  $Q_y$  de (2.21) em (2.22), e considerando-se que  $M_{xy} = M_{yx}$  obtém-se:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -g \quad (2.23)$$

Esta expressão representa a equação diferencial de placas escrita em termos de esforços.

Substituindo-se (2.19) em (2.23) obtém-se a equação diferencial geral de placas em termos do deslocamento transversal  $w$ :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{g}{D} \quad (2.24)$$

que também pode ser escrita como:

$$\Delta \Delta w = \frac{g}{D} \quad (2.25)$$

onde:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.26)$$

De (2.21) obtém-se:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (2.27.a)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (2.27.b)$$

Substituindo-se (2.19) em (2.27) obtém-se as forças cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$  em termos do deslocamento transversal  $w$ :

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \quad (2.28.a)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \quad (2.28.b)$$

As equações (2.19) e (2.28) podem ser escritas indicialmente como:

$$M_{ij} = -D \left[ \nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_l \partial x_l} + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad (2.29)$$

$$Q_i = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_l \partial x_l} \quad (2.30)$$

Os momentos fletores e forças cortantes podem ser escritos também em relação a um outro sistema qualquer de coordenadas  $\underline{n}$  e  $\underline{s}$  ortogonais, como é mostrado na figura 2.3. Tal transformação é necessária para poder exprimir as condições de contorno, ainda a ser comentadas, que são sempre referidas a um sistema local de coordenadas.

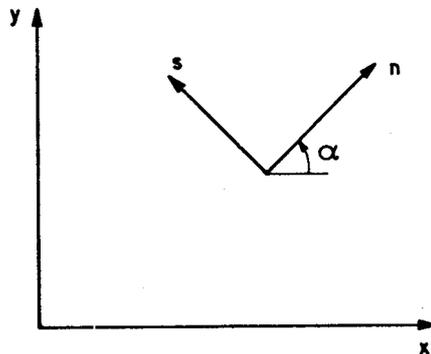


Fig. 2.3 - Sistemas de coordenadas (x,y) e (n,s).

A transformação entre o sistema de coordenadas (x,y) e (n,s), pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} \quad (2.31.a)$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} = [T]^T \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2.31.b)$$

onde, a matriz de transformação [T] é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Os momentos fletores e forças cortantes, nas novas coordenadas (n,s), podem ser obtidas com a ajuda das relações (2.31), fazendo-se convenientemente a transformação vetorial ou tensorial conforme a natureza dos esforços.

$$[M_{(n,s)}] = [T]^T [M_{(x,y)}] [T] \quad (2.33)$$

$$\{Q_{(n,s)}\} = [T]^T \{Q_{(x,y)}\} \quad (2.34)$$

As transformações acima podem também ser escritas em forma explícita:

$$M_n = M_x \cos^2\alpha + 2M_{xy} \text{sen}\alpha \cos\alpha + M_y \text{sen}^2\alpha \quad (2.35.a)$$

$$M_{ns} = (M_y - M_x) \text{sen}\alpha \cos\alpha + M_{xy} (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) \quad (2.35.b)$$

$$M_s = M_x \sin^2 \alpha - 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + M_y \cos^2 \alpha \quad (2.35.c)$$

$$Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha \quad (2.36.a)$$

$$Q_s = -Q_x \sin \alpha + Q_y \cos \alpha \quad (2.36.b)$$

Analogamente à transformação (2.33), pode-se obter as tensões normais e tangenciais no sistema (n,s) a partir das tensões conhecidas no sistema (x,y):

$$[\sigma_{(n,s)}] = [T]^T [\sigma_{(x,y)}] [T] \quad (2.37)$$

que explicitamente fica:

$$\sigma_n = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + 2\sigma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha \quad (2.38.a)$$

$$\sigma_{ns} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (2.38.b)$$

Para a resolução da equação diferencial de placas, será necessário impor as condições de contorno com relação aos esforços  $M_n$ ,  $M_{ns}$  e  $Q_n$ , ao deslocamento  $w$  e à sua derivada  $\partial w / \partial n$ . Segundo KIRCHHOFF [63], as condições de contorno relativas à cortante,  $Q_n$ , e ao momento volvente,  $M_{ns}$ , podem ser agrupadas em uma única, dando origem a um esforço denominado cortante equivalente, cuja intensidade por unidade de comprimento é:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (2.39)$$

Para o caso particular em que  $\underline{n}$  coincide com  $\underline{x}$  ou  $\underline{y}$  obtém-se:

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M}{\partial y} \quad (2.40.a)$$

$$V_y = Q_y + \frac{\partial M}{\partial x} \quad (2.40.b)$$

Isto é compatível com a ordem da equação diferencial. Equação de quarta ordem só pode ter quatro valores independentes no contorno.

#### 2.4. Equações de placas em coordenadas polares

Neste trabalho são empregadas equações integrais envolvendo soluções fundamentais expressas em coordenadas polares, portanto, é necessário escrever a equação diferencial de placas, referida a este sistema de coordenadas.

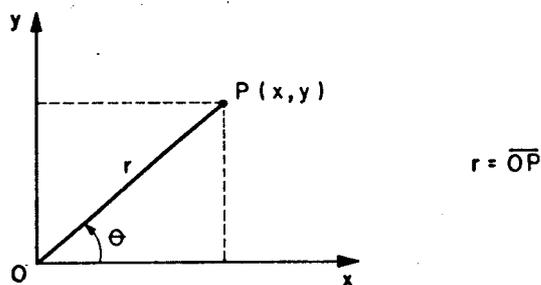


Fig. 2.4 - Sistemas de coordenadas cartesianas e polares.

A partir da figura 2.4 pode-se determinar as seguintes relações, entre os sistemas de coordenadas cartesianas e polares:

$$x = r \cos\theta \quad (2.41.a)$$

$$y = r \operatorname{sen}\theta \quad (2.41.b)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (2.42.a)$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (2.42.b)$$

De (2.42) e (2.41) podem-se obter as relações derivadas:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta \quad (2.43.a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta \quad (2.43.b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \quad (2.43.c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{x}{r^2} = -\frac{\cos\theta}{r} \quad (2.43.d)$$

Sendo que  $\underline{r}$  e  $\underline{\theta}$  são funções de  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$ , pode-se escrever:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.44)$$

Substituindo-se (2.43.a) e (2.43.c) em (2.44), obtém-se:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (2.45)$$

De (2.45) pode-se definir o operador diferencial  $\frac{\partial}{\partial x}$ , escrito em função das coordenadas polares:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.46)$$

Aplicando-se (2.46) em (2.45), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left[ \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \left[ \cos\theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \quad (2.47)$$

que, após as derivações fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \cos^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - 2\sin\theta \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] + \\ &+ \sin^2\theta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

Analogamente a (2.45) e (2.48) podem-se obter, em relação a  $y$ , as seguintes expressões:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \sin^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 2 \sin\theta \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] + \\ &+ \cos^2\theta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Somando-se (2.48) e (2.50), obtém-se a expressão do operador diferencial de Laplace em coordenadas polares:

$$\Delta w = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w \quad (2.51)$$

Portanto, a equação diferencial de placas (2.25), em coordenadas polares, fica dada por:

$$\Delta \Delta w = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q}{D} \quad (2.52)$$

Derivando-se (2.45) em relação a  $\underline{y}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\ &+ (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

Substituindo-se (2.48), (2.50) e (2.53) nas equações (2.19) e (2.28), obtém-se os momentos fletores e forças cortantes em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\cos^2 \theta + \nu \operatorname{sen}^2 \theta) + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\operatorname{sen}^2 \theta + \right. \\ &\left. + \nu \cos^2 \theta) - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.54.a)$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.54.b)$$

$$M_{xy} = -D (1-\nu) \left[ \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.54.c)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w = -D \left[ \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \Delta w - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w \right] \quad (2.55.a)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w = -D \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \Delta w + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w \right] \quad (2.55.b)$$

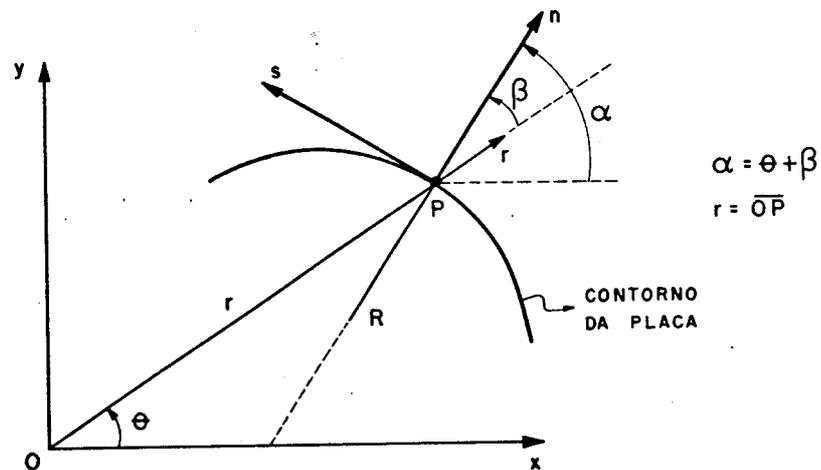


Fig. 2.5 - Relação das coordenadas (n,s) de um ponto P do contorno da placa, com as coordenadas cartesianas e polares.

Conforme a figura 2.5,  $\beta$  é o ângulo formado entre os versores  $\vec{r}$  e  $\vec{n}$ , que somado a  $\theta$ , formam o ângulo  $\alpha$ .

Substituindo-se o valor de  $\alpha = \theta + \beta$  e (2.54) em (2.35) obtém-se  $M_n$ ,  $M_s$  e  $M_{ns}$  em coordenadas polares:

$$M_n = -D \left[ (\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2(1-\nu) \sin \beta \cos \beta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.56.a)$$

$$M_s = -D \left[ (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2(1-\nu) \sin \beta \cos \beta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.56.b)$$

$$M_{ns} = -D(1-\nu) \left[ \sin \beta \cos \beta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.57)$$

Para obter  $Q_n$  em coordenadas polares, substitui-se (2.55) e  $\alpha$  em (2.36), chegando-se a:

$$Q_n = -D \left( \frac{\partial}{\partial r} \Delta w \cos \beta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w \sin \beta \right) \quad (2.58)$$

Derivando-se (2.57), que é função de  $r$ ,  $\theta$  e  $\beta$ , em relação a coordenada  $s$ , do contorno, obtém-se:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} \quad (2.59)$$

As derivadas em relação a  $\tilde{s}$ , podem ser escritas como:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (2.60.a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (2.60.b)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(\alpha - \theta) = \frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{\partial \theta}{\partial s} \quad (2.60.c)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (2.61)$$

A partir de (2.31.a) e (2.43), as expressões de (2.60), são dadas por:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = -\cos\theta \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\theta \operatorname{cos}\alpha = -\operatorname{sen}\beta \quad (2.62.a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \operatorname{sen}\alpha + \frac{\operatorname{cos}\theta}{r} \operatorname{cos}\alpha = \frac{\operatorname{cos}\beta}{r} \quad (2.62.b)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{1}{R} - \frac{\operatorname{cos}\theta}{r} \quad (2.62.c)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{1}{R} \quad (2.63)$$

onde,  $R$  é o raio de curvatura do contorno no ponto  $P$ , mostrado na figura 2.5 [65].

Substituindo-se em (2.59) os valores de (2.62), obtém-se:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = - \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \text{sen}\beta + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \text{cos}\beta + \left( \frac{1}{R} - \frac{\text{cos}\beta}{r} \right) \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \quad (2.64)$$

Uma vez conhecidas as expressões de  $Q_n$  e  $\partial M_{ns} / \partial s$ , dadas em (2.58) e (2.64) respectivamente, obtém-se a cortante equivalente  $V_n$  em coordenadas polares:

$$V_n = \left[ -D \frac{\partial}{\partial r} \Delta w + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \right] \text{cos}\beta - \left[ D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w + \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \right] \text{sen}\beta + \left( \frac{1}{R} - \frac{\text{cos}\beta}{r} \right) \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \quad (2.65)$$

## 2.5. Soluções Fundamentais de Placas

O estudo das soluções fundamentais, é necessário em trabalhos que têm como base o uso de equações integrais. Entende-se como solução fundamental, a resposta em um ponto genérico "p" de um domínio (em geral infinito), denominado domínio fundamental, devido à aplicação de uma carga unitária em outro ponto "q" deste domínio. Para o caso particular de placas, a solução fundamental é o deslocamento transversal,  $w^*$ , em um ponto "p" de coordenadas  $[x(p), y(p)]$ , denominado ponto de deslocamento, devido a ação de uma força unitária aplicada em um ponto "q", de coordenadas  $[x(q), y(q)]$ , denominado ponto de carregamento. A solução fundamental  $w^*$ , é obtida a partir da seguinte equação, onde o termo independente foi modificado:

$$\Delta \Delta w^* = \delta(q,p)/D \quad (2.66)$$

sendo  $\delta(q,p)$  a distribuição delta de Dirac, que tem as seguintes propriedades:

$$\delta(q,p) = 0 \quad \text{se } p \neq q \quad (2.67.a)$$

$$\delta(q,p) = \infty \quad \text{se } p = q \quad (2.67.b)$$

$$\int_{\Omega} \phi(p) \delta(q,p) d\Omega = \phi(q) \quad (2.68)$$

onde,  $\phi(p)$  é uma função qualquer definida no domínio  $\Omega$ .

A partir de (2.68) pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \delta(q,p) d\Omega = 1 \quad (2.69)$$

ou seja, a integral da distribuição delta de Dirac no domínio, é uma força unitária aplicada no ponto "q", e corresponde a totalidade do carregamento transversal aplicado à placa.

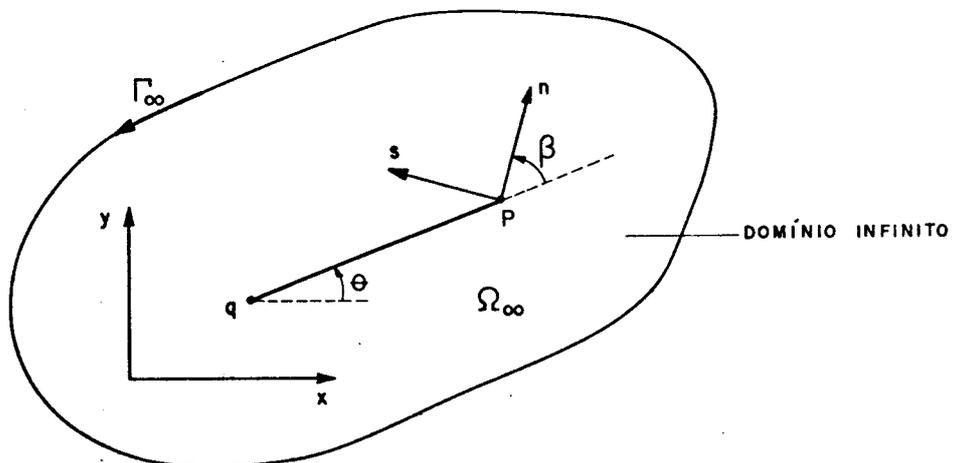


Fig. 2.6 - Pontos de carregamento "q" e de deslocamento "p".

A solução fundamental  $w^*$ , é obtida a partir da equação diferencial (2.66) aplicada a todos os pontos do domínio, exceto ao ponto de carregamento "q". Assim, (2.66) fica:

$$\Delta \Delta w^* = 0 \quad (2.70)$$

Considerando-se um sistema de coordenadas polares com origem no ponto "q", (Fig. 2.6), e a simetria existente em relação ao mesmo (domínio infinito), a equação (2.70) a partir de (2.52) pode ser reescrita como:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} \right) = 0 \quad (2.71)$$

O diferencial agora é total, pois  $w^*$  é apenas função de  $r$ . Aplicando-se o operador indicado em (2.71) obtém-se:

$$\frac{d^4 w^*}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w^*}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw^*}{dr} = 0 \quad (2.72)$$

cuja solução é conhecida e tem a seguinte forma:

$$w^* = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + E \quad (2.73)$$

Considerando-se a simetria em relação ao ponto "q" e a condição de equilíbrio das forças verticais atuante em um círculo de raio  $r$ , cujo centro é o ponto de aplicação da carga unitária [60], obtém-se:

$$A = 0 \quad (2.74.a)$$

$$B = \frac{1}{8\pi D} \quad (2.74.b)$$

As constantes C e E, no caso da placa fundamental, podem assumir quaisquer valores. STERN [43] e BEZINE [41] adotam valores nulos. DANSON [66], adota as seguintes:

$$C = - \frac{1}{16\pi D} \quad (2.75.a)$$

$$E = 0 \quad (2.75.b)$$

Substituindo-se (2.74) e 2.75) em (2.73), a solução fundamental,  $w^*$ , fica:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (2.76)$$

onde:

$$r = \left\{ [x(p) - x(q)]^2 + [y(p) - y(q)]^2 \right\}^{1/2} \quad (2.77)$$

Conforme se verá no próximo capítulo, é necessário determinar a solução fundamental da derivada do deslocamento e dos esforços definidos no ponto "p", (Fig. 2.6) em relação ao sistema (n,s). Assim:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{\partial w^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.78)$$

Como a derivada está sendo calculada no ponto "p", tem-se:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x_i(p)} \frac{\partial x_i(p)}{\partial n} = r_{,i} n_i \quad (2.79)$$

ou explicitamente:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x(p)} \frac{\partial x(p)}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y(p)} \frac{\partial y(p)}{\partial n} \quad (2.80)$$

A partir de (2.77) obtém-se:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(p)} = r_{,i} = \frac{x_i(p) - x_i(q)}{r} \quad (2.81.a)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i(p) \partial x_j(p)} = r_{,ij} = \frac{\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}}{r} \quad (2.81.b)$$

onde,  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

Apos derivar  $x$  e  $y$  dados em (2.31.a) em relação a  $\underline{n}$  obtém-se:

$$\frac{\partial x(p)}{\partial n} = n_x = \cos\alpha \quad (2.82.a)$$

$$\frac{\partial y(p)}{\partial n} = n_y = \sen\alpha \quad (2.82.b)$$

Pode-se escrever explicitamente (2.81.a) como:

$$\frac{\partial r}{\partial x(p)} = r_{,x} = \cos\theta \quad (2.83.a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y(p)} = r_{,y} = \sen\theta \quad (2.83.b)$$

Substituindo-se (2.82) e (2.83) em (2.80) obtém-se:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \cos\theta \cos\alpha + \sen\theta \sen\alpha = \cos\beta \quad (2.84)$$

Portanto (2.78) fica:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r \cos \beta \quad (2.85)$$

Considerando-se que  $\vec{r}$  e  $\vec{n}$  são versores nas direções  $\underline{r}$  e  $\underline{n}$  respectivamente, (2.85) pode ser escrita também como:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r (\vec{r} \cdot \vec{n}) \quad (2.86)$$

ou indicialmente:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r (r_{,i} n_i) \quad (2.87)$$

Impondo-se as condições da placa fundamental a (2.56), (2.57) e (2.65), e após derivações necessárias, obtém-se os esforços fundamentais:

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi} [(1+\nu) \ln r + (1-\nu) \cos^2 \beta + \nu] \quad (2.88)$$

$$M_{ns}^* = \frac{1-\nu}{8\pi} \sin 2\beta \quad (2.89)$$

$$V_n^* = \frac{\cos \beta}{4\pi r} [2(1-\nu) \sin^2 \beta - 3 + \nu] + \frac{1-\nu}{4\pi R} \cos 2\beta \quad (2.90)$$

onde:

$$\cos \beta = r_{,i} n_i$$

$$\sin \beta = -r_{,i} s_i$$

Conforme se verá no próximo capítulo é também necessário determinar a solução fundamental da derivada do deslocamento fundamental e dos esforços definidos no ponto "q", (Fig.2.7) em relação ao sistema (m,u).

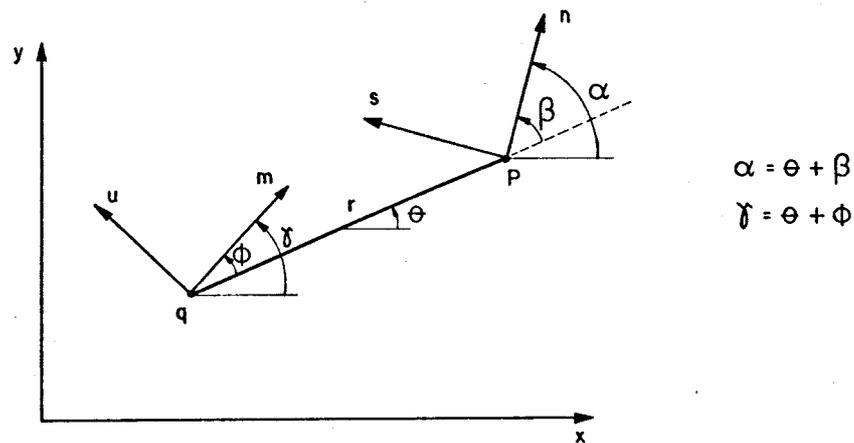


Fig. 2.7 - Sistemas de coordenadas (n,s) e (m,u).

Analogamente a (2.78), (2.79), (2.80) e (2.81) obtém-se:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{\partial w^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial m} \quad (2.91)$$

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial x_i(q)} \frac{\partial x_i(q)}{\partial m} \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial x(q)} \frac{\partial x(q)}{\partial m} + \frac{\partial r}{\partial y(q)} \frac{\partial y(q)}{\partial m} \quad (2.93)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(q)} = - \frac{x_i(p) - x_i(q)}{r} = - r_{,i} \quad (2.94.a)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i(q) \partial x_j(q)} = - \frac{\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}}{r} = - r_{,ij} \quad (2.94.b)$$

Com a ajuda da transformação dada em (2.31.a), para o sistema de coordenadas  $(m,u)$  mostrado na figura 2.7, obtém-se as derivadas de  $x(q)$  e  $y(q)$  em relação a  $\underline{m}$ , dadas por:

$$\frac{\partial x(q)}{\partial m} = m_x = \cos\gamma \quad (2.95.a)$$

$$\frac{\partial y(q)}{\partial m} = m_y = \text{sen}\gamma \quad (2.95.b)$$

Escrevendo-se explicitamente (2.94.a) fica:

$$\frac{\partial r}{\partial x(q)} = -r_{,x} = -\cos\theta \quad (2.96.a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y(q)} = -r_{,y} = -\text{sen}\theta \quad (2.96.b)$$

Substituindo-se (2.95) e (2.96) em (2.93) obtém-se:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = -\cos\theta \cos\gamma - \text{sen}\theta \text{sen}\gamma = -\cos\phi \quad (2.97)$$

Portanto (2.85) fica:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = -\frac{r}{4\pi D} \ln r \cos\phi \quad (2.98)$$

Em função dos versores  $\vec{r}$  e  $\vec{m}$  (2.97) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial w}{\partial m} = -\frac{r}{4\pi D} \ln r (\vec{r} \cdot \vec{m}) \quad (2.99)$$

ou indicialmente:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = - \frac{r}{4\pi D} \ln r (r, i m_i) \quad (2.100)$$

Para as demais soluções fundamentais, derivadas em relação a  $\underline{m}$ , obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) = - \frac{1}{4\pi D} \left[ (r, i m_i)(r, j m_j) + (n, j m_j) \ln r \right] \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_n^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r} \left\{ (1+\nu)(r, j m_j) + 2(1-\nu)(r, i n_i) \left[ (n, j m_j) + \right. \right. \\ \left. \left. - (r, i n_i)(r, j m_j) \right] \right\} \quad (2.102) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial m} = \frac{1-\nu}{4\pi r} \left[ (r, i n_i)(s, j m_j) - 2(r, j m_j)(r, i s_i)(r, i n_i) + \right. \\ \left. + (r, i s_i)(n, j m_j) \right] \quad (2.103) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu)(r, i s_i) \left[ 4(r, i n_i)(r, i s_i)(r, j m_j) + \right. \right. \\ \left. \left. - 2(r, i n_i)(s, j m_j) - (r, i s_i)(n, j m_j) + (3-\nu) \left[ (n, j m_j) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2(r, i n_i)(r, j m_j) \right] \right] \right\} + \frac{1-\nu}{\pi R r} (r, i s_i) \left[ (s, j m_j) + \right. \\ \left. - (r, i s_i)(r, j m_j) \right] \quad (2.104) \end{aligned}$$

## CAPÍTULO III

### EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO DE PLACAS

#### 3.1. Introdução

As equações integrais são necessárias na formulação do método dos elementos de contorno. Elas envolvem soluções fundamentais e sua obtenção pode ser feita utilizando-se o método dos resíduos ponderados, ou, a partir do teorema da reciprocidade de Betti.

Aplicando-se os teoremas de Betti e de Green, a uma placa submetida a dois carregamentos não simultâneos  $g$  e  $g^*$ , que dão origem a dois estados de tensão e deslocamento distintos, obtém-se equações integrais relacionando o deslocamento  $w(q)$  de um ponto do domínio a esforços e deslocamentos do contorno.

Pode-se determinar também, a derivada direcional do deslocamento,  $\partial w(q)/\partial m$ , que é importante em formulações alternativas.

### 3.2. Equação integral para um ponto do domínio

Seja uma placa isotrópica de domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ , contida em outra de domínio  $\Omega_\infty$  e contorno  $\Gamma_\infty$  (Fig. 3.1), e submetida a um carregamento  $g$  distribuído em uma área  $\Omega_g$ .

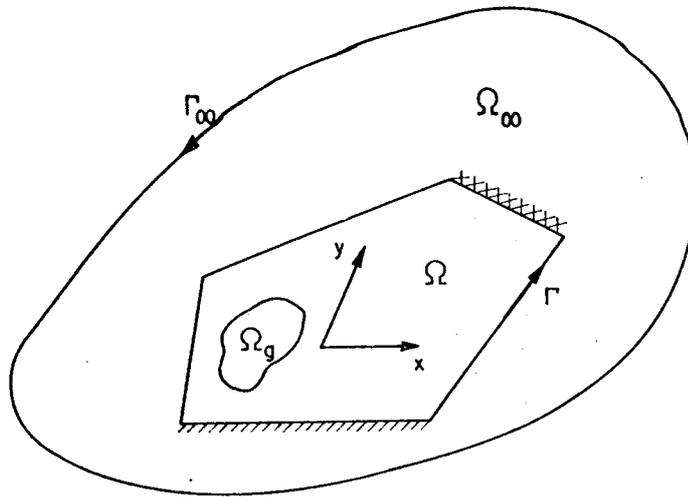


Fig. 3.1 - Placa finita contida em uma placa infinita.

Considerando-se a placa de domínio finito submetida a dois carregamentos não simultâneos  $g$  e  $g^*$ , com as superfícies elásticas  $w$  e  $w^*$  a eles associados, os dois estados de tensão  $\sigma_{ij}$  e  $\sigma_{ij}^*$  correspondentes e seus respectivos estados de deformação  $\varepsilon_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}^*$ , pode-se escrever o teorema da reciprocidade de BETTI [8] da seguinte forma:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = & \sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \sigma_z \varepsilon_z^* + 2(\sigma_{xy} \varepsilon_{xy}^* + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz}^* + \\ & + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz}^*) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Denominando-se de U o termo da direita de (3.1) e desprezando-se as tensões relativas à direção normal ao plano da placa, obtém-se:

$$U = \int_V \left[ \sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy}^* \right] dV \quad (3.3)$$

Substituindo-se em (3.3) as expressões dadas em (2.14) e (2.16), e desprezando-se os infinitésimos de ordem superior relacionados com u e v, obtém-se:

$$U = \int_V \left[ \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z^2 + \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z^2 + 4G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z^2 \right] dV \quad (3.4)$$

Integrando-se (3.4) ao longo da espessura da placa, fica:

$$U = \int_{\Omega} \left[ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] d\Omega \quad (3.5)$$

Observando-se (2.19), a expressão (3.5) pode ser escrita como:

$$U = \int_{\Omega} \left( -M_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right) d\Omega \quad (3.6)$$

A integral sobre o domínio  $\Omega$ , pode ser transformada em integral sobre o contorno  $\Gamma$ . Denominando-se de  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  às três parcelas de (3.6) respectivamente e integrando-se por partes a primeira, na direção  $x$ , obtém-se:

$$u_1 = - \int_{\Omega} M_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = - \int_{\Gamma} M_x \frac{\partial w^*}{\partial x} n_x d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} d\Omega \quad (3.7)$$

onde,  $n_x$  é o cosseno diretor do vetor normal ao contorno na direção  $x$ . Conforme a figura 3.2 os cossenos diretores de (3.7) são:

$$n_x = \cos \alpha \quad (3.8.a)$$

$$n_y = \sin \alpha \quad (3.8.b)$$

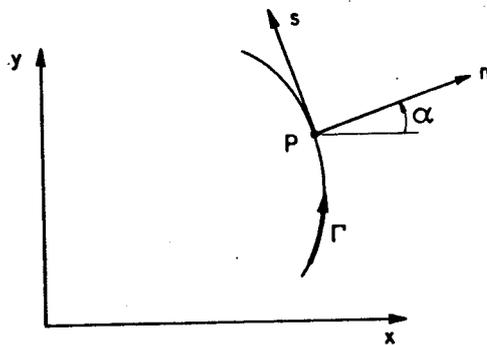


Fig. 3.2 - Sistema de coordenadas (n,s), normal e tangente ao contorno.

Integrando-se novamente por partes a segunda parcela de (3.7), a expressão de  $u_1$  fica:

$$u_1 = \int_{\Gamma} \left[ -M_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial M_x}{\partial x} w^* \cos \alpha \right] d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} w^* d\Omega \quad (3.9)$$

De forma análoga deduz-se:

$$u_2 = \int_{\Gamma} \left[ -M_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + \frac{\partial M_y}{\partial y} w^* \sin \alpha \right] d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} w^* d\Omega \quad (3.10)$$

A terceira parcela pode ser escrita da seguinte forma:

$$u_3 = - \int_{\Omega} M_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega - \int_{\Omega} M_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega \quad (3.11)$$

Integrando-se por partes a primeira parcela de (3.11) em relação a  $x$  e a segunda em relação a  $y$ , e procedendo-se da mesma forma obtida para  $u_1$ , chega-se à seguinte expressão:

$$u_3 = \int_{\Gamma} \left[ -M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha - M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} w^* \cos \alpha + \right. \\ \left. + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} w^* \sin \alpha \right] d\Gamma - \int_{\Omega} 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} w^* d\Omega \quad (3.12)$$

Substituindo-se os valores de  $u_1, u_2$  e  $u_3$  em (3.6), obtém-se o valor de  $U$ :

$$\begin{aligned}
 U = & - \int_{\Gamma} \left[ M_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + M_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha + \right. \\
 & \left. M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} \left[ \left( \frac{\partial M}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial M}{\partial y} \right]_{xy} \cos \alpha + \left( \frac{\partial M}{\partial y} \right)_y + \\
 & \left. \frac{\partial M}{\partial x} \right]_{xy} \sin \alpha \right] w^* d\Gamma - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \right]_x + 2 \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} \right]_{xy} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right]_y w^* d\Omega
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Observando-se as expressões de (2.21), (2.22), (2.23) e (2.36), pode-se escrever (3.13) como:

$$\begin{aligned}
 U = & - \int_{\Gamma} \left[ M_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + M_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha + \right. \\
 & \left. + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

A partir de (2.31) pode-se escrever:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha
 \tag{3.15.a}$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial y} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha
 \tag{3.15.b}$$

Substituindo-se (3.15) em (3.14) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 U = & - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial n} \left[ M_x \cos^2 \alpha + 2M_{xy} \text{sen} \alpha \cos \alpha + M_y \text{sen}^2 \alpha \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial w^*}{\partial s} \left[ (M_y - M_x) \text{sen} \alpha \cos \alpha + M_{xy} (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) \right] \right\} d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma} Q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Observando-se (2.35), a expressão (3.16) fica:

$$U = - \int_{\Gamma} \left( M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - Q_n w^* \right) d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.17)$$

Integrando-se por partes o segundo termo da integral de contorno de (3.17), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \left( M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) d\Gamma = M_{ns} w^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (3.18)$$

onde,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são as coordenadas dos limites do contorno no qual se realiza a integração.

A primeira parcela de (3.18) é nula para o caso de um contorno fechado, cuja representação paramétrica e a respectiva derivada sejam contínuas, caso contrário, ela dará origem a reações nas angulosidades (cantos) da placa. Neste caso (3.18) fica:

$$\int_{\Gamma} \left( M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) d\Gamma = - \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci} w_{ci}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (3.19)$$

onde,  $N_c$  é o número total de cantos do contorno da placa e,

$$R_{ci} = M_{nsi}^+ - M_{nsi}^- \quad (3.20)$$

O termo  $(M_{nsi}^+ - M_{nsi}^-)$  pode ser considerado como a reação de canto  $\underline{i}$  da placa [65] mostrada na figura 3.3.

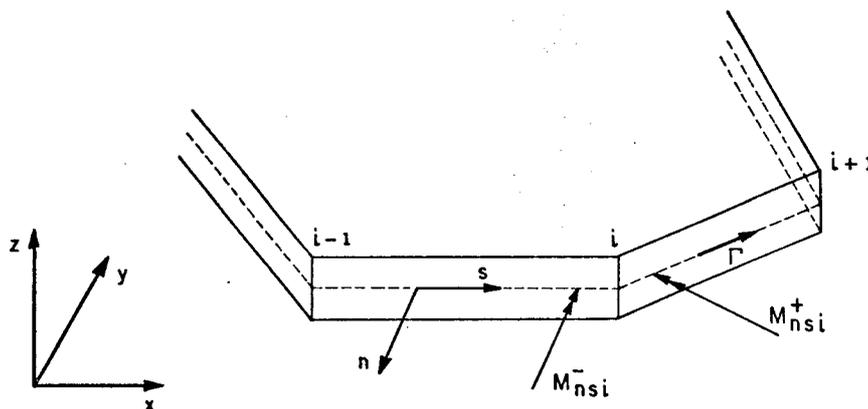


Fig. 3.3.- Canto "i" da placa.

Portanto (3.17) pode ser reescrita utilizando-se (3.19):

$$U = \int_{\Gamma} \left( Q_n w^* + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.21)$$

Utilizando-se a equação (2.39) em (3.21) e levando-se em conta que  $g$  está distribuído em  $\Omega_g$ , obtém-se:

$$U = \int_{\Gamma} \left( V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega \quad (3.22)$$

O termo da esquerda de (3.1), pode ser desenvolvido de modo análogo, chegando-se a:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} = \int_{\Gamma} (V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}^* w_{ci} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega \quad (3.23)$$

Finalmente, de (3.22) e (3.23), o teorema de Betti aplicado às placas fica:

$$\int_{\Gamma} (V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}^* w_{ci} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega =$$

$$\int_{\Gamma} (V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (3.24)$$

Supondo-se que  $g^*$  seja uma carga unitária aplicada em um ponto "q" do domínio da placa e sua representação matemática a distribuição delta de Dirac,  $\delta(q,p)$ , os deslocamentos e esforços a ela associados são funções que dependem das posições do ponto de carregamento "q", e do ponto de deslocamento "p" no domínio ou "P" se estiver no contorno.

Os deslocamentos e esforços correspondentes à carga distribuída "g", são funções apenas do ponto onde os efeitos de "g" são medidos, ou seja, do ponto de deslocamento "p" ou "P", uma vez que a posição desta carga está previamente fixada.

Escrevendo-se cada variável em função de dois pontos quando se tratar de solução fundamental e de um ponto em caso contrário, e ainda, substituindo-se  $g^*$  por  $\delta(q,p)$  em (3.24), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \delta(q,p)w(p)d\Omega(p) + \iint_{\Gamma} \left[ V_n(q,P)w(P) - M_n^*(q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(q,P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}^*(q,P)w_{ci}(P) = \iint_{\Gamma} \left[ V_n(P)w^*(q,P) - M_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}(P)w_{ci}^*(q,P) + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(q,p)d\Omega(p) \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Aplicando-se a propriedade da função delta de Dirac (2.68) ao primeiro termo de (3.25), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \delta(q,p)w(p)d\Omega(p) = w(q) \quad (3.26)$$

Portanto, substituindo-se (3.26) em (3.25), pode ser escrita a expressão do teorema de Betti para placas, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 w(q) + \iint_{\Gamma} \left[ V_n^*(q,P)w(P) - M_n^*(q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}^*(q,P)w_{ci}(P) = \iint_{\Gamma} \left[ V_n(P)w^*(q,P) + \right. \\
 \left. - M_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}(P)w_{ci}^*(q,P) +
 \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega(p) \quad (3.27)$$

A expressão (3.27) é a equação integral do deslocamento  $w$ , de um ponto "q" do domínio da placa. Derivando-se (3.27) em relação à direção  $\underline{m}$ , obtém-se a equação integral da derivada direcional do deslocamento,  $\partial w / \partial m$ , para um ponto "q" da placa.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(q)}{\partial m} + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) + \right. \\ \left. - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) + \\ + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) d\Omega(p) \quad (3.28) \end{aligned}$$

### 3.3. Equação integral para um ponto do contorno

As equações (3.27) e (3.28) são válidas para pontos "q" do domínio; entretanto, é necessária a obtenção de equações integrais para pontos "Q" do contorno, para a formulação do problema de flexão de placas pelo método dos elementos de contorno.

Seja uma placa da Figura 3.4, onde o ponto "Q" inicialmente do contorno, agora pertence ao domínio devido ao acréscimo de um contorno circular  $\Gamma_\xi$ , de centro em "Q" e raio  $\xi$ , conforme indicado.

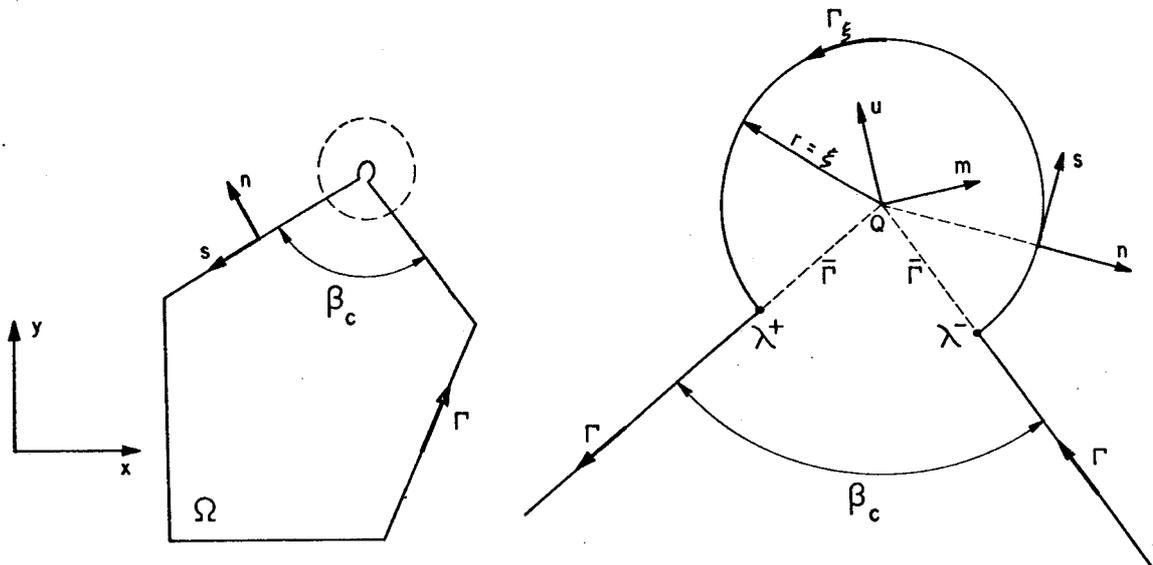


Fig.3.4 - Contorno circular acrescido a um canto "Q" da placa.

Após a modificação do domínio da placa, a equação integral (3.27) para o ponto "Q" fica:

$$\begin{aligned}
 w(Q) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 + \int_{\Gamma_\xi} \left[ V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
 + \sum_{i=1}^{Nc-1} R_{ci}^*(Q,P)w_{ci}(P) + R_{c\lambda-}^*(Q,P)w_{c\lambda-}(P) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + R_{c\lambda+}^*(Q,P)w_{c\lambda+}(P) = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ V_n^*(P)w^*(Q,P) + \right. \\
 & - M_n^*(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \left. \right] d\Gamma(P) + \int_{\Gamma_\xi} \left[ V_n^*(P)w^*(Q,P) + \right. \\
 & - M_n^*(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \left. \right] d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{Nc-1} R_{ci}^*(P)w_{ci}^*(Q,P) + \\
 & + R_{c\lambda-}(P)w_{c\lambda-}^*(Q,P) + R_{c\lambda+}(P)w_{c\lambda+}^*(Q,P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,p)d\Omega(p) \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

A medida que o raio  $\xi$  se aproxima de zero, o ponto "Q" se aproxima do contorno e, na condição limite tem-se que:

$$\begin{aligned}
 & w(Q) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[ V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{Nc-1} R_{ci}^*(Q,P)w_{ci}(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ R_{c\lambda-}^*(Q,P)w_{c\lambda-}(P) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + R_{c\lambda+}^*(Q,P)w_{c\lambda+}(P) \Big] = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ V_n(P)w^*(Q,P) + \right. \\
 & - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \Big] d\Gamma(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[ V_n(P)w^*(Q,P) + \right. \\
 & - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{Nc-1} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q,P) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ R_{c\lambda-}(P)w_{c\lambda-}^*(Q,P) + R_{c\lambda+}(P)w_{c\lambda+}^*(Q,P) \right] + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,P)d\Omega(p) \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

Os limites das integrais sobre  $\Gamma-\bar{\Gamma}$  indicadas em (3.30), por definição, representam o valor principal das mesmas [65]. Assim:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) \tag{3.31}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ V_n(P)w(Q,P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) =$$

$$= \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(P) w^*(Q, P) - M_n^*(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) \quad (3.32)$$

Para o limite  $\Gamma_{\xi} \rightarrow 0$  nas integrais de  $w(P)$  e  $\frac{\partial w}{\partial n}(P)$  obtém-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \left[ V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_{\xi}(P) = \\ = - \frac{2\pi - \beta_c}{2\pi} w(Q) \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde,  $\beta_c$  é o ângulo do canto "Q" da placa.

Os demais limites para  $\xi \rightarrow 0$  conduzem a valores nulos. Portanto, a equação para um ponto do contorno fica:

$$\begin{aligned} K(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(P) w^*(Q, P) + \right. \\ \left. - M_n^*(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}^*(P) w_{ci}^*(Q, P) + \\ + \int_{\Omega} g(p) w^*(Q, p) d\Omega(p) \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde:

$$K(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \quad (3.35)$$

Quando o ponto "Q" do contorno não pertence a um canto da placa, (3.35) fica:

$$K(Q) = \frac{1}{2} \quad (3.36)$$

Analogamente pode-se calcular a derivada  $\partial w(Q)/\partial m$  a partir de (3.29), obtendo-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(Q)}{\partial m} + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q,P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \int_{\Gamma_\xi} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q,P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\ + \sum_{i=1}^{Nc-1} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(Q,P) w_{ci}(P) + \frac{\partial R_{c\lambda-}^*}{\partial m}(Q,P) w_{c\lambda-}(P) + \\ + \frac{\partial R_{c\lambda+}^*}{\partial m}(Q,P) w_{c\lambda+}(P) = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) + \right. \\ \left. - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \int_{\Gamma_\xi} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \Bigg\} d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{Nc-1} R_{ci}(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}{}_{ci}(Q, P) + \\
 & + R_{c\lambda-}(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}{}_{c\lambda-}(Q, P) + R_{c\lambda+}(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}{}_{c\lambda+}(Q, P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega(p) \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

Calculando-se os limites indicados a seguir, o ponto "Q", inicialmente do domínio, será ponto do contorno:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[ \frac{\partial V^*}{\partial m}{}^n(Q, P) w(P) - \frac{\partial M^*}{\partial m}{}^n(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[ \frac{\partial V^*}{\partial m}{}^n(Q, P) w(P) - \frac{\partial M^*}{\partial m}{}^n(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{Nc-1} \frac{\partial R^*}{\partial m}{}_{ci}(Q, P) w_{ci}(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial R^*}{\partial m}{}_{c\lambda-}(Q, P) w_{c\lambda-}(P) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial R^*}{\partial m}{}_{c\lambda+}(Q, P) w_{c\lambda+}(P) \right] = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) + \right. \\
 & \left. - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \} d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{Nc-1} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ R_{c\lambda^-}(P) \frac{\partial w_{c\lambda^-}^*}{\partial m}(Q, P) + R_{c\lambda^+}(P) \frac{\partial w_{c\lambda^+}^*}{\partial m}(Q, P) \right] + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) d\Omega(p) \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

Segundo PAIVA [65], é conveniente dar a placa um deslocamento vertical de corpo rígido igual a  $-w(Q)$ , para remover a singularidade envolvida na equação (3.38) quando  $\xi \rightarrow 0$ . Neste caso todas as derivadas permanecem inalteradas. Lembrando-se que os limites das integrais sobre  $\Gamma-\bar{\Gamma}$ , são os respectivos valores principais das integrais sobre  $\Gamma$ , a equação (3.38) fica:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial v^*}{\partial m}^n(Q, P) [w(P) - w(Q)] - \frac{\partial M^*}{\partial m}^n(Q, P) \frac{\partial w}{\partial m}(P) \right\} d\Gamma(P) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ \frac{\partial v^*}{\partial m}^n(Q, P) [w(P) - w(Q)] - \frac{\partial M^*}{\partial m}^n(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{Nc-1} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) [w_{ci}(P) - w(Q)] + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial R_{c\lambda^-}}{\partial m}(Q, P) [w_{c\lambda^-}(P) - w(Q)] \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial R}{\partial m}{}_{c\lambda+}(Q,P) \left[ w_{c\lambda+}(P) - w(Q) \right] = \\
 & = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q,P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{Nc-1} R_{ci}(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ R_{c\lambda-}(P) \frac{\partial w_{c\lambda-}}{\partial m}(Q,P) + \right. \\
 & \left. + R_{c\lambda+}(P) \frac{\partial w_{c\lambda+}}{\partial m}(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,p) d\Omega(p) \right] \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

Os limites quando  $\xi \rightarrow 0$  de (3.39), são:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q,P) \left[ w(P) - w(Q) \right] - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma_{\xi}(P) = \\
 & = - \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[ (4\pi - 2\beta_c) + \sin 2(\gamma + \beta_c) - \sin 2\gamma \right] \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + \right. \\
 & \left. + \left[ \cos 2(\gamma + \beta_c) - \cos 2\gamma \right] \frac{\partial w}{\partial u}(Q) \right\} \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial R}{\partial m}{}_{c\lambda+}(Q,P) \left[ w_{c\lambda-}(P) - w(Q) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial R}{\partial m} {}_{c\lambda^+}(Q,P) \left[ w_{c\lambda^+}(P) - w(Q) \right] = \\
 & = \frac{1-\nu}{4\pi} \left\{ - \left[ \text{sen}2\gamma - \text{sen}2(\gamma+\beta_c) \right] \frac{\partial w}{\partial m}(Q) \right\} + \\
 & + \left[ -\text{cos}2\gamma + \text{cos}2(\gamma+\beta_c) \right] \frac{\partial w}{\partial u}(Q) \} \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

onde,  $\gamma$  é um ângulo entre os sistemas de coordenadas  $(n_1, s_1)$  e  $(m, u)$ , mostradas na figura 3.5.

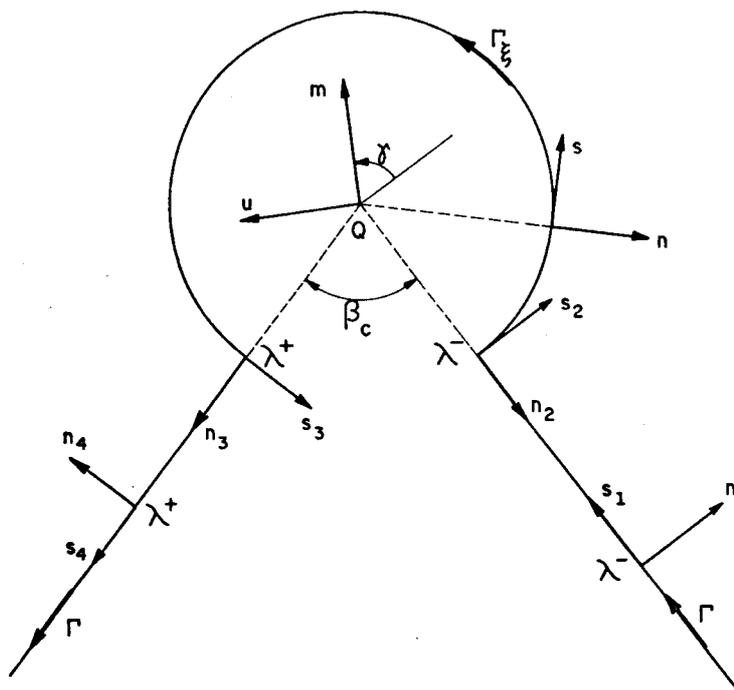


Fig. 3.5 - Sistemas de coordenadas associadas aos pontos anterior e posterior aos cantos  $\lambda^+$  e  $\lambda^-$ .

Os demais limites quando  $\xi \rightarrow 0$  de (3.39) conduzem a valores nulos.

Substituindo-se (3.40) e (3.41) em (3.39) e considerando-se que  $w(Q)$  é um deslocamento de corpo rígido, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & K_1 \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + K_2 \frac{\partial w}{\partial u}(Q) + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) w_{ci}(P) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega(p) \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

onde:

$$K_1 = \frac{\beta_c}{2\pi} + \frac{\nu}{4\pi} \left[ \text{sen}2\gamma - \text{sen}2(\gamma + \beta_c) \right] \quad (3.43)$$

$$K_2 = \frac{\nu}{4\pi} \left[ \text{cos}2\gamma - \text{cos}2(\gamma + \beta_c) \right] \quad (3.44)$$

$$K_v(Q) = K_1 \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + K_2 \frac{\partial w}{\partial u}(Q) \quad (3.45)$$

A partir da figura 3.5, observa-se que a coordenada  $m$ , pode assumir direções normais ao contorno da placa em ambos

os lados do canto "Q". Para  $m = n_1$  e escrevendo-se (3.45) em função das normais aos lados,  $n_1$  e  $n_4$  [65], obtém-se:

$$K_v(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \frac{\partial w}{\partial n_1}(Q) + \frac{\nu}{2\pi} \operatorname{sen} \beta_c \frac{\partial w}{\partial n_4}(Q) \quad (3.46)$$

Analogamente para  $m = n_4$ , obtém-se:

$$K_v(Q) = \frac{\nu}{2\pi} \operatorname{sen} \beta_c \frac{\partial w}{\partial n_1}(Q) + \frac{\beta_c}{2\pi} \frac{\partial w}{\partial n_4}(Q) \quad (3.47)$$

Portanto, conclui-se que para cada canto "Q" da placa, pode-se escrever duas equações integrais para as derivadas do deslocamento em relação às duas normais aos lados que concorrem no canto. Substituindo-se (3.46) ou (3.47) em (3.42), serão obtidas as equações para os pontos anterior ou posterior ao canto respectivamente.

Para o caso em que o ponto "Q" do contorno não pertencer a um canto da placa, ou seja,  $\beta_c = \pi$ , as expressões (3.46) e (3.47) são idênticas. Considerando-se que  $\underline{m}$  coincida com a direção normal ao contorno no ponto "Q", (3.42) fica:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial v_n^*}{\partial m}(Q,P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(Q,P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w}{\partial m}(Q,P) + \right. \\ & \left. - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w}{\partial n}(Q,P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(Q,P) + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) d\Omega(p) \quad (3.48)$$

### 3.4 . Integrais de domínio para o carregamento

As integrais de domínio que aparecem nas equações integrais do deslocamento e de sua derivada (3.27), (3.28), (3.34) e (3.42), e que correspondem às influências do carregamento distribuído na área  $\Omega_g$ , podem ser transformadas em integrais sobre o contorno de  $\Omega_g$ .

Considere-se a placa da figura 3.6, submetida a um carregamento "g" distribuído em uma região  $\Omega_g$  de contorno  $\Gamma_g$  e o ponto de carregamento "q".

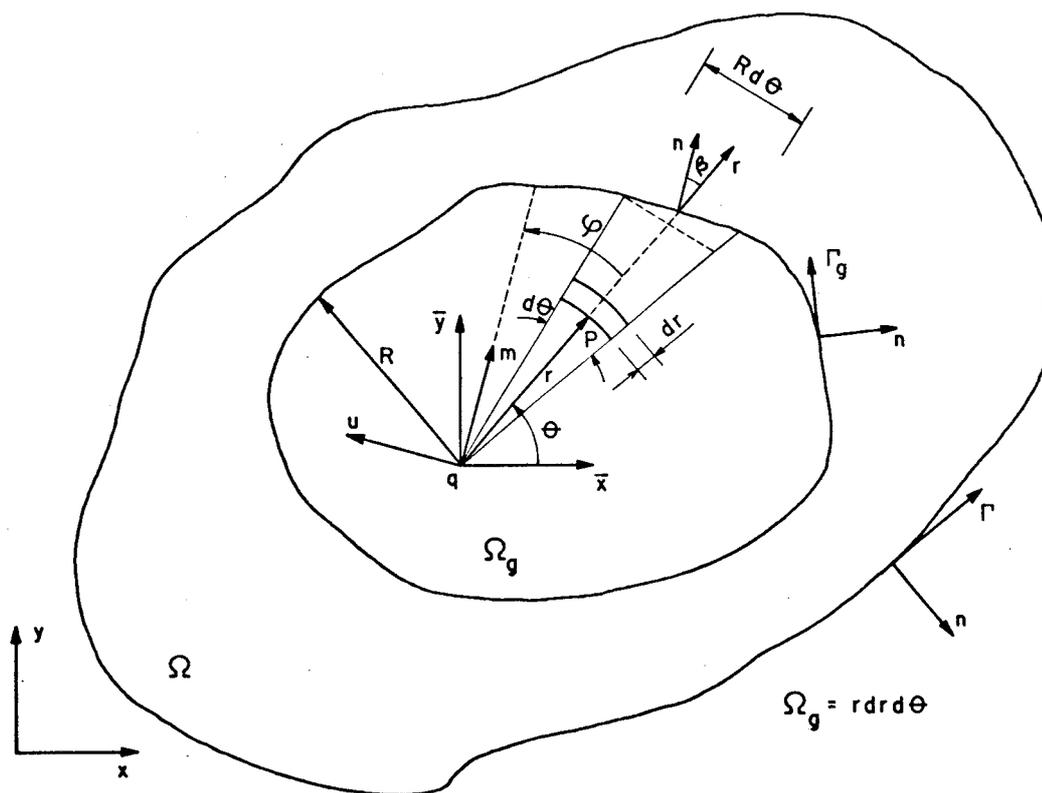


Fig. 3.6 - Região carregada  $\Omega_g$ .

As integrais de domínio a serem transformadas são:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega_g(p) \quad (3.49)$$

$$\int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q,p) d\Omega_g(p) \quad (3.50)$$

Admitindo-se que o carregamento  $g$  varie linearmente na região  $\Omega_g$ , ele pode ser escrito em função das coordenadas  $(x,y)$  da seguinte forma:

$$g(p) = A x(p) + B y(p) + C \quad (3.51)$$

Em relação ao sistema  $(\bar{x}, \bar{y})$ , de origem em "q" (Fig. 3.6) obtém-se:

$$x(p) = x(q) + \bar{x}(p) \quad (3.52.a)$$

$$y(p) = y(q) + \bar{y}(p) \quad (3.52.b)$$

Substituindo-se (3.52) em (3.51) fica:

$$g(p) = Ax(q) + By(q) + C + A\bar{x}(p) + B\bar{y}(p) = g(q) + A\bar{x}(p) + B\bar{y}(p) \quad (3.53)$$

onde,  $g(q)$  é o valor da intensidade da carga no ponto "q".

Escrevendo-se (3.53) em coordenadas polares e substituindo-se em (3.49), obtém-se:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega_g(p) = \int_{\Omega_g} \left[ g(q) + \text{Arcos}\theta + \right. \\ \left. + B \text{sen}\theta \right] w^*(q,p) d\Omega_g \quad (3.54)$$

Com o valor de  $w^*(q,p)$  dado em (2.76) e lembrando-se que  $g(q)$  é uma constante, obtém-se:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega_g(p) = \frac{g(q)}{8\pi D} \int_{\theta} \left[ \int_0^R r^3 \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) dr \right] d\theta + \\ + \frac{1}{8\pi D} \int_{\theta} \left[ \int_0^R (A \cos\theta + B \text{sen}\theta) r^4 \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) dr \right] d\theta \quad (3.55)$$

Integrando-se (3.55) em  $r$ , com o ângulo  $\theta$  constante, obtém-se:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega_g(p) = \frac{g(q)}{32\pi D} \int_{\theta} R^4 \left( \ln R - \frac{3}{4} \right) d\theta + \\ + \frac{1}{40\pi D} \int_{\theta} R^5 \left( \ln R - \frac{7}{10} \right) (A \cos\theta + B \text{sen}\theta) d\theta \quad (3.56)$$

A partir da figura 3.6 pode-se escrever:

$$d\Gamma_g \cos\beta = R d\theta \quad (3.57.a)$$

$$d\theta = \frac{d\Gamma_g \cos\beta}{R} \quad (3.57.b)$$

Substituindo-se (3.57.b) em (3.56) obtém-se a integral de domínio (3.49), transformada numa integral sobre o contorno  $\Gamma_g$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega(p) &= \frac{g(q)}{32\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 (\ln R - \frac{3}{4}) \cos\beta d\Gamma_g + \\ &+ \frac{1}{40\pi D} \int_{\Gamma_g} R^4 (\ln R - \frac{7}{10}) (A \cos\theta + B \sin\theta) \cos\beta d\Gamma_g \quad (3.58) \end{aligned}$$

A integral de domínio (3.50), transforma-se numa integral sobre o contorno procedendo-se de forma análoga a (3.49), isto é:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q,p) d\Omega(p) &= - \frac{g(q)}{12\pi D} \int_{\Gamma_g} R^2 (\ln R - \frac{1}{3}) \cos\phi \cos\theta d\Gamma_g + \\ &- \frac{1}{16\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 (\ln R - \frac{1}{4}) (A \cos\theta + B \sin\theta) \cos\theta \cos\beta d\Gamma_g \quad (3.59) \end{aligned}$$

As expressões de (3.58) e (3.59) são também válidas para pontos "Q" do contorno, portanto, as equações integrais do deslocamento e de sua derivada direcional, ficam representadas apenas por integrais sobre o contorno.

Para uma carga  $g(p)$  qualquer, as integrais (3.49) e

(3.50) podem ser resolvidas [60], dividindo-se a região  $\tilde{\Omega}_g$  em subregiões menores, ou células, e fazendo-se o somatório das integrais sobre todas as células internas.

## CAPÍTULO IV

### MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

#### 4.1. Introdução

As equações integrais do deslocamento e de sua derivada direcional, obtidas no capítulo anterior, são praticamente impossíveis de serem resolvidas analiticamente na maioria dos casos de interesse estrutural prático, tornando-se uma alternativa viável a sua resolução numérica, transformando-as em equações algébricas. Essa transformação é feita dividindo-se o contorno da placa em segmentos chamados "elementos de contorno", onde os deslocamentos e esforços são aproximados por funções previamente escolhidas.

Assim, cada equação integral terá uma correspondente equação algébrica, podendo-se definir um sistema de equações lineares, onde as incógnitas são deslocamentos e esforços em pontos do contorno. Impondo-se as condições de contorno do problema, o sistema é resolvido em termos de valores de contorno. Posteriormente os deslocamentos e os esforços do domínio poderão ser obtidos.

No final deste capítulo, serão apresentados alguns exemplos práticos das formulações desenvolvidas e os resultados obtidos, comparados com os calculados analiticamente pela equação diferencial de placas, ou por outras técnicas numéricas.

#### 4.2. Discretização do contorno

O contorno da placa da figura 4.1, foi aproximado por um número finito de segmentos ou "elementos de contorno"  $\Gamma_j$ . O número e a forma dos elementos são escolhidos de modo que o contorno real fique representado adequadamente.

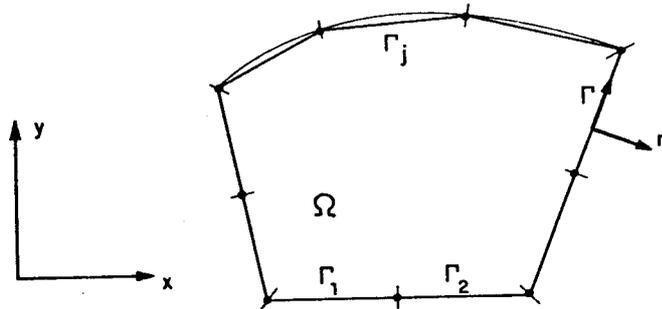


Fig.4.1 - Discretização do contorno da placa.

Em cada elemento  $\Gamma_j$ , os deslocamentos e esforços são aproximados por funções polinomiais, as quais estão associadas a um certo número de "nós" ou "pontos nodais" do elemento. Os valores das variáveis associados aos "nós" são denominados "valores nodais".

As funções polinomiais normalmente utilizadas são a constante, a linear e a quadrática, o que implica em elementos com um, dois e três pontos nodais.

Neste trabalho, serão utilizados apenas funções lineares para aproximar a geometria e as variáveis do problema.

Com o propósito de facilitar, posteriormente, as integrações numéricas sobre os elementos, é conveniente expressar as coordenadas de cada ponto "P" de um elemento qualquer "j", em função de coordenadas locais homogêneas "ξ" (Fig. 4.2), da seguinte forma:

$$\tilde{x}(P) = \tilde{\psi}(P)^T \tilde{x}^N \quad (4.1)$$

onde:

$$\tilde{x}(P) = \begin{Bmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\tilde{\psi}^T(P) = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}^T(P) & 0 \\ 0 & \tilde{\varphi}^T(P) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\tilde{x}^N = \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

O índice N é utilizado para indicar valores nodais.  $x_i^N$  é coordenada nodal do nó "N" na direção "i".

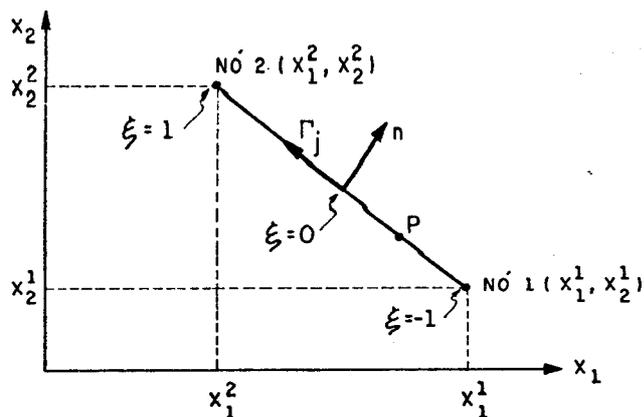


Fig. 4.2 - Descrição geométrica do elemento linear.

O vetor das funções aproximadoras  $\varphi(P)$  é dado por:

$$\varphi(P) = \begin{Bmatrix} \varphi_1(P) \\ \varphi_2(P) \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

onde:

$$\varphi_1(P) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad (4.6.a)$$

$$\varphi_2(P) = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (4.6.b)$$

A expressão (4.1) escrita explicitamente fica:

$$\begin{Bmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(P) & \varphi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(P) & \varphi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

### 4.3. Aproximação das variáveis

De maneira análoga a geometria, pode-se expressar as variáveis  $\tilde{u}$  e  $\tilde{p}$  (deslocamentos e esforços) sobre cada elemento, através de funções aproximadoras  $\tilde{\phi}$  e valores nodais  $\tilde{U}^N$  e  $\tilde{P}^N$ .

$$\tilde{u}(P) = \tilde{\phi}^T(P) \tilde{U}^N \quad (4.8)$$

$$\tilde{p}(P) = \tilde{\phi}^T(P) \tilde{P}^N \quad (4.9)$$

ou escritas explicitamente:

$$\begin{Bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\begin{Bmatrix} p_1(P) \\ p_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_2^1 \\ P_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Assim para um elemento qualquer "j", os deslocamentos e esforços nos pontos nodais serão:

$$u_1(P) = w(P) \quad U_1^1 = w^1 \quad U_1^2 = w^2 \quad (4.12.a)$$

$$u_2(P) = \frac{\partial w}{\partial n}(P) \quad U_2^1 = \frac{\partial w^1}{\partial n} \quad U_2^2 = \frac{\partial w^2}{\partial n} \quad (4.12.b)$$

$$p_1(P) = V_n(P) \quad P_1^1 = V_n^1 \quad P_1^2 = V_n^2 \quad (4.13.a)$$

$$p_2(P) = M_n(P) \quad P_2^1 = M_n^1 \quad P_2^2 = M_n^2 \quad (4.13.b)$$

#### 4.3.1. Elemento linear contínuo

Um elemento linear é contínuo quando suas variáveis assumem em seus nós valores únicos, ou seja, não há angulosidades ou vinculações diferentes do contorno, entre elementos vizinhos (Fig. 4.3)

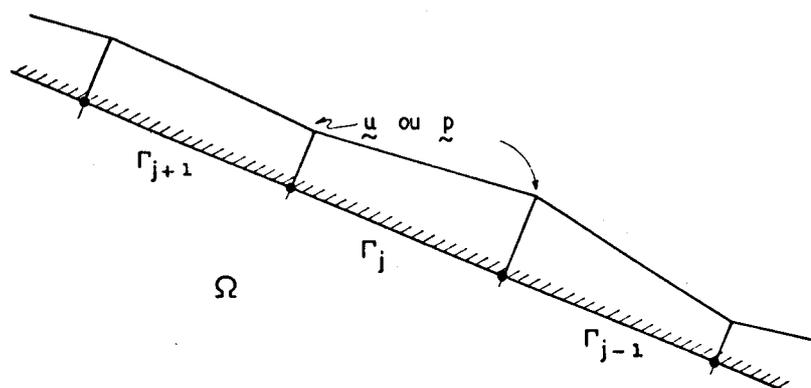


Fig. 4.3 - Contorno de uma placa apoiada e sem angulosidades.

Como os valores nodais  $\underline{U}^N$  e  $\underline{P}^N$  estão situados no nós correspondentes a extremidade do elemento (Fig. 4.3), a aproximação das variáveis pode ser feita por funções  $\phi$  idênticas à da geometria (Fig. 4.6), isto é:

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad (4.14.a)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (4.14.b)$$

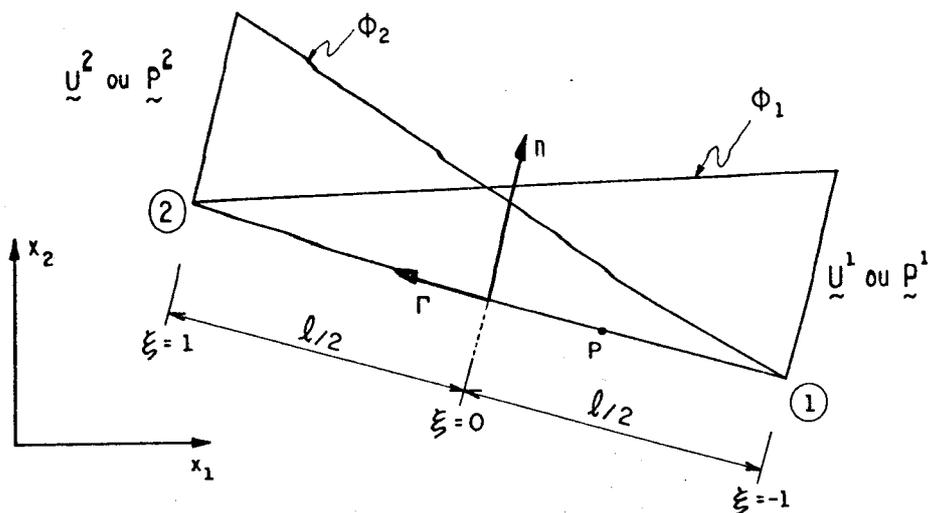


Fig. 4.4 - Elemento linear contínuo.

A presença de angulosidades e vinculações diferentes no contorno de uma placa (Fig. 4.5), torna necessária a descontinuidade das variáveis nos casos práticos, podendo-se assim, definir outros tipos de elementos que permitam expressar tal descontinuidade.

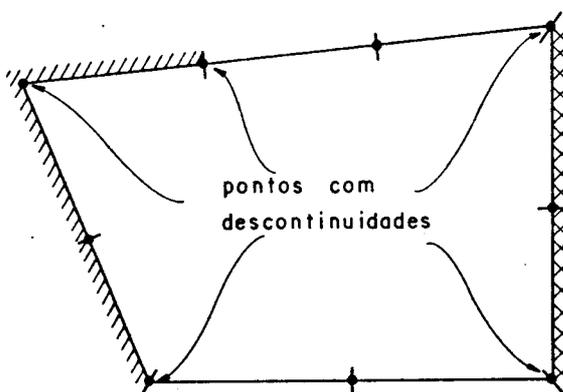


Fig. 4.5 - Descontinuidades do contorno de uma placa.

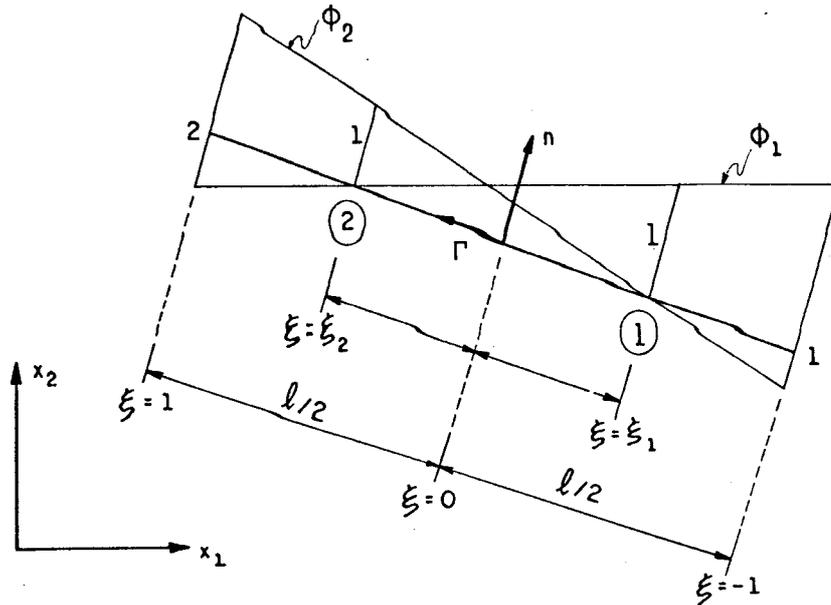


Fig. 4.6 - Elemento linear descontínuo.

#### 4.3.2. Elemento linear descontínuo

O elemento linear descontínuo se caracteriza por expressar uma aproximação linear entre dois nós e permitir que haja descontinuidade das variáveis (deslocamentos e esforços) entre dois elementos. Uma das maneiras de se obter essa representação descontínua é através da definição de nós no interior do elemento. Neste caso, as variáveis  $u(P)$  e  $p(P)$  serão aproximadas pelas equações (4.8) e (4.9) respectivamente, sendo as funções  $\phi$  agora dadas por:

$$\phi_1(P) = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} (\xi_2 - \xi) \quad (4.15.a)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{\xi_1 - \xi_2} (\xi_1 - \xi) \quad (4.15.b)$$

onde, conforme a figura 4.6, tem-se:

$\xi_1$  e  $\xi_2$ : posições dos nós com relação ao centro do elemento, em coordenadas homogêneas.

$\xi$  : coordenada homogênea.

$\phi_1$  e  $\phi_2$  : funções aproximadoras.

As funções aproximadoras (4.15) estão baseadas nos nós ① e ② definidos em pontos internos do elemento, garantindo-se assim, a descontinuidade das variáveis nas extremidades.

Para o caso particular em que os pontos nodais ① e ② coincidem com os extremos geométricos 1 e 2 do elemento respectivamente (Fig. 4.4), isto é,  $\xi_1 = -1$  e  $\xi_2 = 1$ , (4.14) fica:

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad (4.16.a)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (4.16.b)$$

que são as funções aproximadoras do elemento linear contínuo.

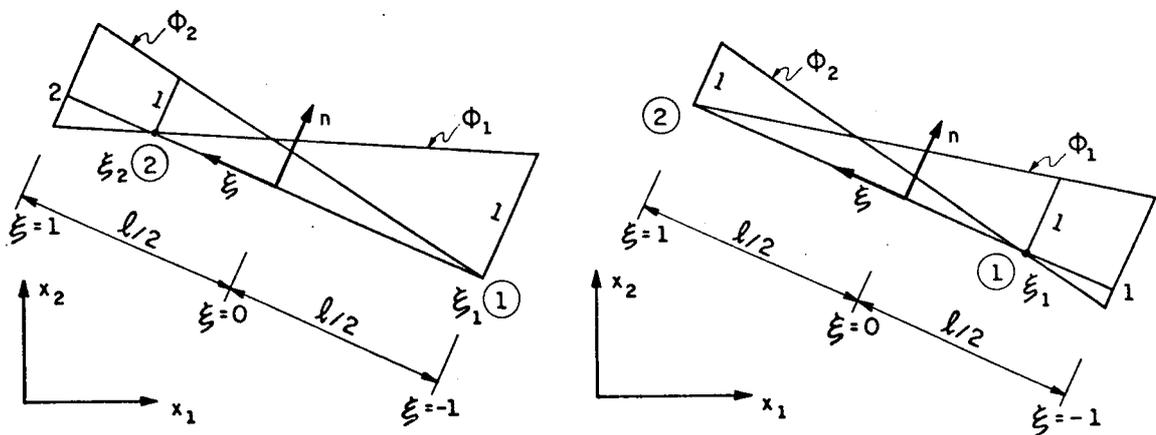


Fig. 4.7 - Elementos lineares mistos.

### 4.3.3. Elemento linear misto

No caso de combinação dos elementos contínuos e descontínuos, é necessário a utilização de elementos mistos que possam expressar descontinuidade em uma das extremidades (Fig. 4.7).

A utilização de apenas elementos descontínuos, na discretização do contorno de uma placa, aumenta significativamente o número de nós e por consequência o número de equações do sistema. Quando utilizado apenas para modular descontinuidades em vértices ou em pontos onde existe mudança das condições de contorno, torna-se vantajoso [67,68] a sua combinação com os elementos contínuos e mistos. Para ilustrar este esquema de discretização é mostrada a placa da figura 4.8, discretizada com oito elementos e treze nós, utilizando-se elementos lineares contínuos, descontínuos e mistos.

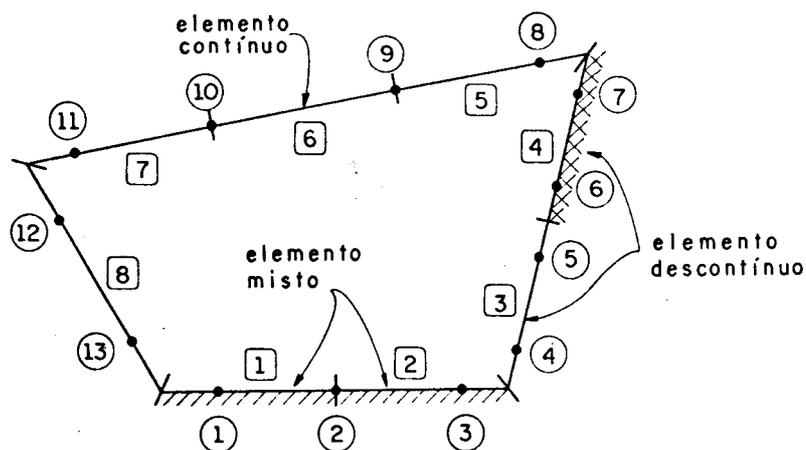


Fig. 4.8. - Discretização de uma placa com elementos lineares.

### 4.4. Transformação das equações integrais

A equação integral do deslocamento (3.34), de um ponto

"Q" qualquer do contorno, pode ser escrita de uma forma genérica como:

$$\begin{aligned}
 C(Q) u(Q) + \int_{\Gamma} \underline{p}^*(Q,P) \underline{u}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} p_{ci}^*(Q,P) w_{ci}(P) = \\
 = \int_{\Gamma} \underline{u}^*(Q,P) \underline{p}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} u_{ci}^*(Q,P) R_{ci}(P) + \\
 + \int_{\Omega_g} g(p) u_g^*(Q,p) d\Omega_g(p) \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

onde, os esforços e deslocamentos são expressos através de variáveis generalizadas. Assim, tem-se:

$$\underline{u}(P) = \left\{ \begin{array}{l} w(P) \\ \frac{\partial w}{\partial n}(P) \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

$$\underline{p}(P) = \left\{ \begin{array}{l} V_n(P) \\ M_n(P) \end{array} \right\} \quad (4.19)$$

$$\underline{p}^*(Q,P) = \left\{ V_n^*(Q,P) \quad - M_n^*(Q,P) \right\} \quad (4.20)$$

$$\underline{u}^*(Q,P) = \left\{ w^*(Q,P) \quad - \frac{\partial w}{\partial n}^*(Q,P) \right\} \quad (4.21)$$

$$p_{ci}^*(Q,P) = R_{ci}^*(Q,P) \quad (4.22)$$

$$u_{ci}^*(Q,P) = w_{ci}^*(Q,P) \quad (4.23)$$

$$u_g^*(Q,p) = w_g^*(Q,p) \quad (4.24)$$

$$u(Q) = w(Q) \quad (4.25)$$

$$C(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \quad (4.26)$$

Considerando-se o contorno da placa discretizado por "Ne" elementos e substituindo-se as variáveis por suas aproximações (4.8) e (4.9), a equação (4.17) fica:

$$\begin{aligned} C(Q)u(Q) + \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} p_{ci}^*(Q,P) \phi^T(P) d\Gamma(P) U_j^N + \sum_{i=1}^{Nc} p_{ci}^*(Q,P) w_{ci}(P) = \\ = \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma} u_{ci}^*(Q,P) \phi^T(P) d\Gamma(P) P_j^N + \sum_{i=1}^{Nc} u_{ci}^*(Q,P) R_{ci}(P) + \\ + \int_{\Omega_g} g(p) u_g^*(Q,p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (4.27)$$

As integrais de contorno da equação (4.27) têm funções conhecidas, portanto elas podem ser calculadas. Por

facilidade definem-se abaixo as integrais sobre um elemento genérico  $\Gamma_j$ .

$$\tilde{h}^j(Q) = \int_{\Gamma_j} p_{\tilde{p}}^*(Q,P) \phi^T(P) d\Gamma(P) \quad (4.28)$$

$$\tilde{g}^j(Q) = \int_{\Gamma_j} u_{\tilde{u}}^*(Q,P) \phi^T(P) d\Gamma(P) \quad (4.29)$$

A integral de domínio, correspondente ao carregamento transversal, também é conhecida. Sua obtenção pode ser feita transformando-a em uma integral de contorno conforme o item 3.4. Após sua integração é conveniente representá-la por:

$$t(Q) = \int_{\Omega_g} g(p) u_g^*(Q,p) d\Omega_g(p) \quad (4.30)$$

Assim, a equação (4.27) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C(Q)u(Q) + \sum_{j=1}^{Ne} \tilde{h}^j(Q) U_j^N + \sum_{i=1}^{Nc} p_{ci}^*(Q,P) w_{ci}(P) = \\ = \sum_{j=1}^{Ne} \tilde{g}^j(Q) P_j^N + \sum_{i=1}^{Nc} u_{ci}^*(Q,P) R_{ci}(P) + t(Q) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Após a soma das influências  $\tilde{h}^j(Q)$  e  $\tilde{g}^j(Q)$  de todos os "Ne" elementos nos "Nn" nós do contorno, a equação (4.31) fica:

$$C(Q)u(Q) + \hat{H}(Q)\underline{U} + \underline{H}_c(Q)\underline{W}_c = \underline{G}(Q)\underline{P} + \underline{G}_c(Q)\underline{R}_c + T(Q)$$

(4.32)

O deslocamento  $u(Q)$  pode ser escrito em função dos deslocamentos  $\underline{U}$  do elemento ao qual pertence o ponto "Q". Desta forma (4.32) pode ser escrita:

$$\underline{H}(Q)\underline{U} + \underline{H}_c(Q)\underline{W}_c = \underline{G}(Q)\underline{P} + \underline{G}_c(Q)\underline{R}_c + T(Q) \quad (4.33)$$

onde:

$$\underline{U}^T = \left\{ w^1 \quad \frac{\partial w^1}{\partial n} \dots \dots \dots w^{Nn} \quad \frac{\partial w^{Nn}}{\partial n} \right\}$$

$$\underline{P}^T = \left\{ V_n^1 \quad M_n^1 \dots \dots \dots V_n^{Nn} \quad M_n^{Nn} \right\}$$

$$\underline{W}_c^T = \left\{ w_{c1} \quad w_{c2} \dots \dots \dots w_{cNc} \right\}$$

$$\underline{R}_c^T = \left\{ R_{c1} \quad R_{c2} \dots \dots \dots R_{cNc} \right\}$$

$\underline{H}(Q)$  e  $\underline{G}(Q)$ : são os vetores de influência, que dependem apenas da geometria do problema.

$\underline{H}_c(Q)$  e  $\underline{G}_c(Q)$ : são os vetores formados pelos coeficientes dos deslocamentos e reações dos cantos da placa, respectivamente.

$T(Q)$  : é o valor resultante da integração da região  $\Omega_g$ .

A equação (4.33), representa a transformação da equação integral do deslocamento de um ponto do contorno em uma equação algébrica do tipo:

$$a_{ij}(w)_j + b_{ij} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_j + c_{ik}(w_c)_k = d_{ij}(V_n)_j + e_{ij}(M_n)_j + f_{ik}(R_c)_k + t_i$$

$j=1, N_n$

$k=1, N_c$

(4.34)

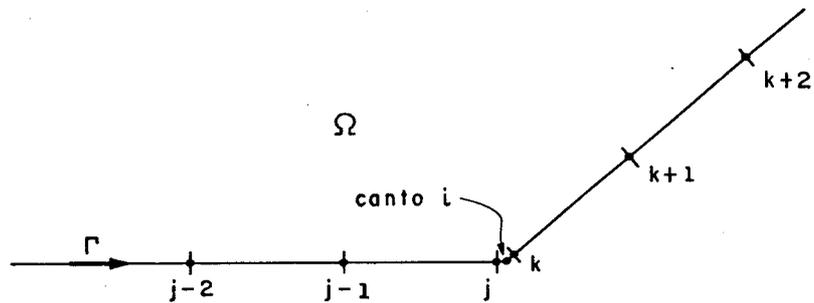


Fig. 4.9 - Canto "i" da placa com os nós anteriores e posteriores necessários às contribuições da reação de canto na matriz  $\tilde{H}$ .

Os termos relacionados com os cantos da placa,  $w_c$  e  $R_c$ , são tratados normalmente da seguinte forma: o coeficiente de  $w_c$  é dividido em duas partes obtendo-se desta maneira a contribuição dos nós (anterior e posterior) do canto (Fig. 4.9). As parcelas assim obtidas são somadas aos correspondentes coeficientes da matriz  $\tilde{H}$ . A reação  $R_c$  é escrita em função das rotações dos nós vizinhos ao canto, usando-se para isso, sua definição (3.20) e escrevendo-se as derivadas em termos de diferenças. Assim, a equação (4.34) fica:

$$a'_{ij}(w)_j + b'_{ij} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_j = d_{ij}(V_n)_j + e_{ij}(M_n)_j + t_i \quad (4.35)$$

$$j=1, Nn$$

ou simplesmente:

$$\underline{\tilde{H}}(Q) \underline{\tilde{U}} = \underline{\tilde{G}}(Q) \underline{\tilde{P}} + \underline{\tilde{T}}(Q) \quad (4.36)$$

De forma análoga a (4.33) ou (4.36), poderá ser obtida uma equação algébrica para a equação integral da derivada direcional do deslocamento (3.42), de um ponto "Q" qualquer do contorno, mudando apenas os valores dos vetores  $\underline{\tilde{H}}(Q)$ ,  $\underline{\tilde{G}}(Q)$ ,  $\underline{\tilde{H}}_c(Q)$ ,  $\underline{\tilde{G}}_c(Q)$  e o termo  $\underline{\tilde{T}}(Q)$ , em função das correspondentes soluções fundamentais.

#### 4.5. Condições de contorno

Com a discretização do contorno da placa, quatro variáveis são associadas a cada nó,  $w(P)$ ,  $\frac{\partial w}{\partial n}(P)$ ,  $V_n(P)$  e  $M_n(P)$ , das quais duas são conhecidas devido a suas condições de contorno. Nos casos de vinculações clássicas, tem-se:

##### a) Borda engastada

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

$V_n$  e  $M_n$  desconhecidos

##### b) Borda simplesmente apoiada

$$w = M_n = 0$$

$V_n$  e  $\frac{\partial w}{\partial n}$  desconhecidos

c) Borda livre

$$V_n = M_n = 0$$

$w$  e  $\frac{\partial w}{\partial n}$  desconhecidos

Portanto, impondo-se as condições de contorno a todos os "Nn" nós da equação (4.36), tem-se "2Nn" incógnitas, o que torna necessário a utilização de duas equações para cada nó, para definir um sistema de equações lineares.

$$\tilde{H} \tilde{U} = \tilde{G} \tilde{P} + \tilde{T} \quad (4.37)$$

No caso da equação (4.33), os termos  $w_c$  e  $R_c$  associados aos cantos, podem ser considerados como variáveis, sendo que um dos quais é possível conhecer-se nos casos clássicos de vinculação. Assim, tem-se "2Nn" incógnitas nos nós e "Nc" incógnitas nos cantos, tornando-se necessário utilizar duas equações para cada nó e uma para cada canto, para a definição do sistema. O sistema de equações lineares assim definido fica:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H} & \tilde{H}_c \\ \tilde{H} & \tilde{H}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G} & \tilde{G}_c \\ \tilde{G} & \tilde{G}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{R}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{T}_c \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

onde,  $\tilde{H}_c$  e  $\tilde{G}_c$  são as submatrizes formadas pelos coeficientes correspondentes a  $w_c$  e  $R_c$  respectivamente, e

têm  $2(Nn) \times (Nc)$  elementos;  $\bar{H}$ ,  $\bar{H}_c$ ,  $\bar{G}$  e  $\bar{G}_c$  são submatrizes semelhantes a  $H$ ,  $H_c$ ,  $G$  e  $G_c$  respectivamente, provenientes das equações integrais de deslocamento aplicadas nos cantos da placa; o subvetor  $T_c$  é também semelhante a  $T$ .

As submatrizes  $\bar{H}$  e  $\bar{G}$  têm  $(Nc) \times 2(Nn)$  elementos e as sub-matrizes  $\bar{H}_c$  e  $\bar{G}_c$  são quadradas de ordem  $(Nc)$ .

O sistema de equações lineares (4.37) pode ser resolvido levando-se todas as incógnitas para o primeiro membro, obtendo-se:

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{B} \quad (4.39)$$

onde,  $\underset{\sim}{A}$  é a matriz dos coeficientes de  $\underset{\sim}{H}$  e  $\underset{\sim}{G}$  correspondentes a valores de  $\underset{\sim}{U}$  e  $\underset{\sim}{P}$  desconhecidos, e  $\underset{\sim}{B}$  é o vetor obtido a partir da soma do vetor  $\underset{\sim}{T}$  com o vetor formado pelo produto dos coeficientes de  $\underset{\sim}{H}$  e  $\underset{\sim}{G}$  multiplicados pelos correspondentes valores de  $\underset{\sim}{U}$  e  $\underset{\sim}{P}$  conhecidos.

A solução de (4.39) é dada por:

$$\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{A}^{-1} \underset{\sim}{B} \quad (4.40)$$

onde,  $\underset{\sim}{X}$  é o vetor das incógnitas procuradas, composto por deslocamentos e esforços nodais.

O sistema de equações (4.38) é semelhante a (4.37) e pode ser resolvido de forma análoga, obtendo-se:

$$\underset{\sim}{A}_c \underset{\sim}{X}_c = \underset{\sim}{B}_c \quad (4.41)$$

$$\underset{\sim}{X}_c = \underset{\sim}{A}_c^{-1} \underset{\sim}{B}_c \quad (4.42)$$

onde,  $\underset{\sim}{X}_c$  é o vetor das incógnitas procuradas, composto por deslocamentos e esforços nos nós e cantos da placa.

#### 4.6. Alternativas de montagem do sistema de equações

As alternativas para a escolha das equações integrais para a definição do sistema de equações lineares são evidentemente infinitas; algumas delas são as seguintes:

##### 4.6.1. Utilizando-se as equações integrais de $w$ e $\partial w/\partial m$

1o. Caso:  $w_c$  e  $R_c$  são tratados como contribuições dos nós vizinhos em cada canto.

Neste caso são usados apenas os elementos lineares contínuos, tornando-se necessário a utilização de nós duplos (Fig. 4.10) para representar as descontinuidades dos esforços e deslocamentos.

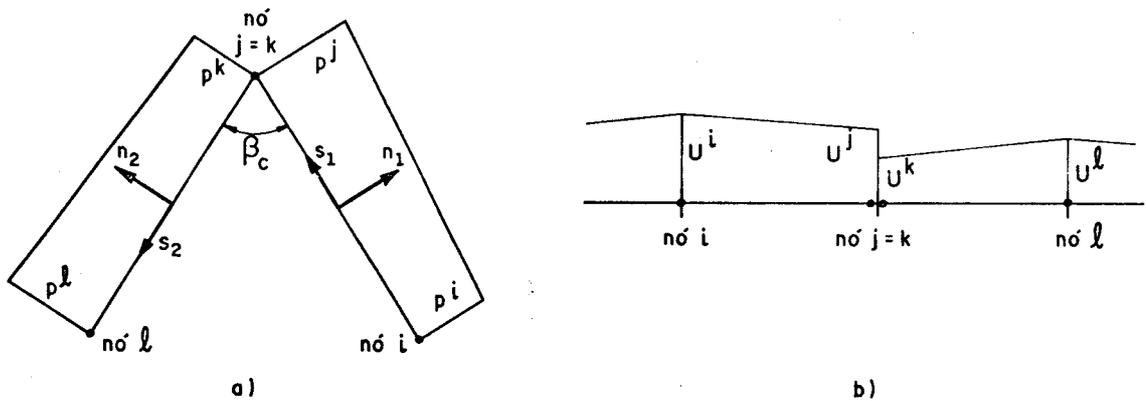


Fig. 4.10 Definição dos nós duplos.

As equações integrais do deslocamento e de sua derivada direcional, (3.34) e (3.48) respectivamente, podem ser empregadas de duas formas:

- a) Aplicando-as nos próprios nós do contorno (Fig. 4.11.a).

Em certos casos, devido à utilização de nós duplos, podem surgir singularidades na matriz  $\tilde{A}$  do sistema de equações (4.39), sendo necessário determinar uma condição de contorno adicional [65] baseada na hipótese da unicidade do tensor de tensões em um meio contínuo, que permite a eliminação<sup>N</sup> de tais singularidades.

Neste caso, duas equações podem ser escritas em uma forma única exprimindo-se os valores de deslocamentos e esforços generalizados em termos matriciais.

$$\begin{aligned} \tilde{C}(Q)\tilde{u}(Q) + \int_{\Gamma} \tilde{p}^*(Q,P)\tilde{u}(P)d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} \tilde{p}_{ci}^*(Q,P)w_{ci}(P) = \\ = \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(Q,P)\tilde{p}(P)d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} \tilde{u}_{ci}^*(Q,P)R_{ci}(P) + \\ + \int_{\Omega_g} g(P)\tilde{u}_g^*(Q,P)d\Omega \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde, os vetores e matrizes de cada termo integral são dados por:

$$\tilde{C}(Q) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\tilde{u}(Q) = \begin{Bmatrix} u_1(Q) \\ u_2(Q) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(Q) \\ \frac{\partial w}{\partial m}(Q) \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\underline{p}^*(Q, P) = \begin{bmatrix} V_n^*(Q, P) & - M_n^*(Q, P) \\ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) & - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$\underline{u}(P) = \begin{Bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(P) \\ \frac{\partial w}{\partial n}(P) \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

$$\underline{p}_{ci}^*(Q, P) = \begin{Bmatrix} R_{ci}^*(Q, P) \\ \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

$$\underline{u}^*(Q, P) = \begin{bmatrix} w^*(Q, P) & - \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \\ \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) & - \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\underline{p}(P) = \begin{Bmatrix} p_1(P) \\ p_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_n(P) \\ M_n(P) \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\underline{u}_{ci}^*(Q, p) = \begin{Bmatrix} w_{ci}^*(Q, p) \\ \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(Q, p) \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\underline{u}_g^*(Q, p) = \begin{Bmatrix} w^*(Q, p) \\ \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

b) Aplicando-as em pontos "A" fora do domínio (Fig. 4.11.b).

A posição do ponto "A" é definida na direção normal ao elemento, a uma distância do nó dada por:

$$d = a \ell_m \quad (4.53)$$

onde:

a : coeficiente maior que zero;

$\ell_m$  : média dos comprimentos dos elementos concorrentes no nó, ou simplesmente o comprimento do elemento, no caso de nó duplo.

O valor de "a" pode estar situado convenientemente [60] entre 0,5 e 1,5.

Como o ponto de carregamento "A", está situado fora do domínio, o primeiro termo da equação (3.25) se anula, ou seja:

$$\int_{\Omega} \delta(A,P) w(P) d\Omega(P) = 0 \quad (4.54)$$

Portanto, na equação (4.43) tem-se:

$$\tilde{C}(Q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$P^*(Q,P) = \begin{bmatrix} V_n^*(A,P) & - M_n^*(A,P) \\ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(A,P) & - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(A,P) \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$p_{ci}^*(Q,P) = \begin{bmatrix} R_{ci}^*(A,P) \\ \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(A,P) \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$\tilde{u}_{ci}^*(Q,P) = \begin{bmatrix} w_{ci}^*(A,P) & - \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial n}(A,P) \\ \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(A,P) & - \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial n}(A,P) \right] \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$u_{ci}^*(Q,P) = \left\{ \begin{array}{l} w_{ci}^*(A,P) \\ \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(A,P) \end{array} \right\} \quad (4.59)$$

$$u_g^*(Q,p) = \left\{ \begin{array}{l} w^*(A,p) \\ \frac{\partial w^*}{\partial m}(A,p) \end{array} \right\} \quad (4.60)$$

Note-se que o ponto "Q" do contorno não coincide com "A" do exterior. Assim, nenhum dos termos acima apresentará singularidade.

A aplicação da equação (4.43) em pontos sobre o contorno ou fora do domínio (Fig. 4.11) definirá um sistema de equações lineares semelhante a (4.37), que após impor-se às condições de contorno, poderá ser resolvido.

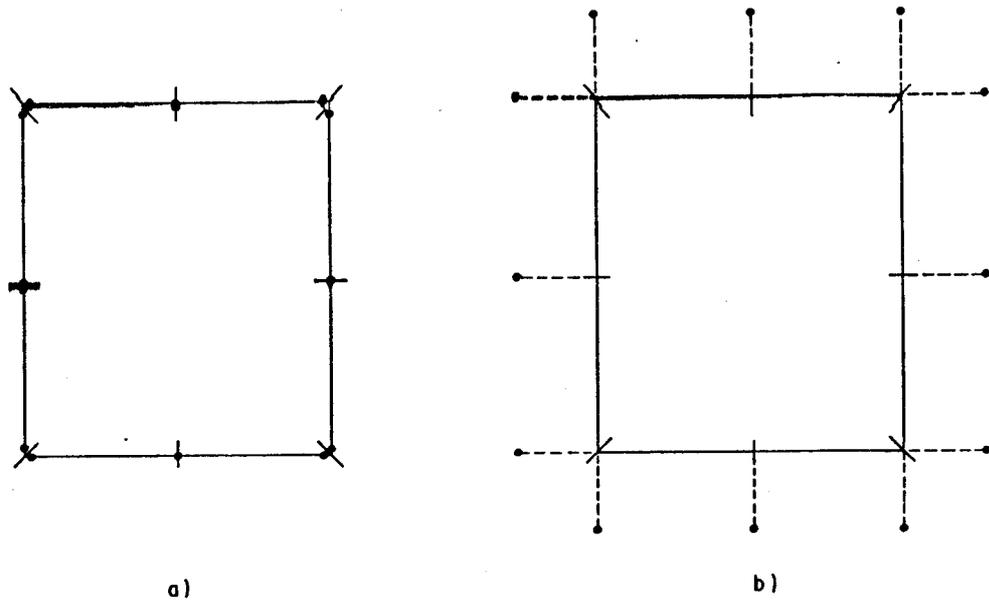


Fig. 4.11 - Placa quadrada com pontos singulares :  
a) sobre o contorno; b) fora do domínio.

2o. Caso:  $w_c$  e  $R_c$  são considerados como variáveis do problema.

Neste caso é necessário aplicar-se as equações integrais de deslocamento adicionais nos " $N_c$ " cantos, para ter-se o mesmo número de equações e incógnitas no sistema semelhante a (4.38). Portanto, os nós adjacentes aos cantos devem ser levados para o interior de seus respectivos elementos (Fig. 4.12), para evitar singularidades na matriz  $A_{\tilde{c}}$  do sistema de equações (4.41).

A distância do canto ao nó adjacente deve ser aproximadamente igual a 1/3 do comprimento do elemento (Fig. 4.12).

Os nós adjacentes aos cantos não ficam situados nas extremidades de seus respectivos elementos, assim, elementos lineares descontínuos ou mistos são utilizados, dependendo do caso.

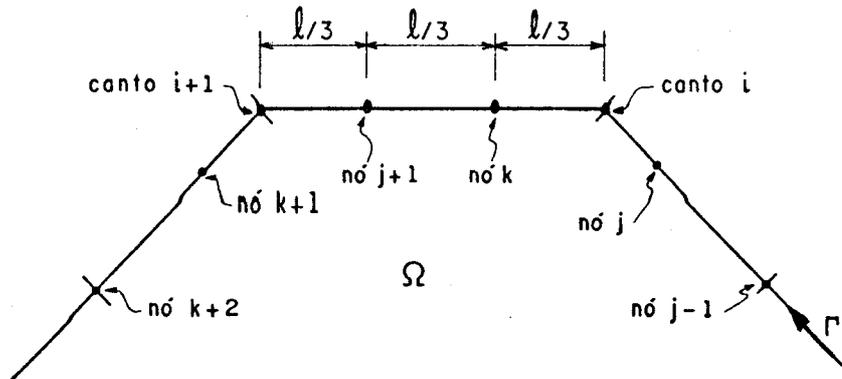


Fig. 4.12 - Nós j e k, anterior e posterior ao canto "i".

Utilizando-se a equação (4.43) e considerando-se as equações relativas aos cantos, um sistema de equações semelhante a (4.38) poderá ser montada de duas formas:

- a) Aplicando-se nos próprios nós do contorno (Fig.4.13.a).
- b) Aplicando-se em pontos "A" fora do domínio (Fig.4.13.b).

Após serem impostas as condições de contorno nos cantos e nós do contorno, será obtido um sistema de equações semelhante a (4.41), para cada tipo de montagem, e poderá ser resolvido de forma análoga.

Apesar das alternativas vistas neste item, mostrarem resultados numéricos de boa precisão [61], a montagem do sistema de equações algébricas, utilizando-se apenas a equação integral do deslocamento [69], mostrou ser mais eficiente, melhorando a precisão dos resultados numéricos. Esta alternativa será mostrada com duas formas de tratamento dos cantos no item seguinte.

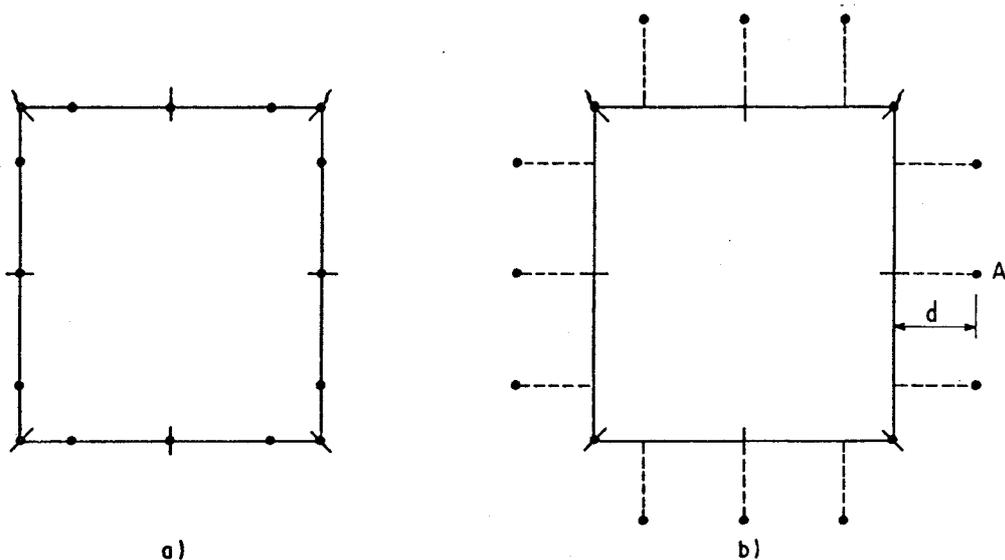


Fig. 4.13 - Placa quadrada com pontos singulares nos cantos e: a) sobre o contorno; b) fora do domínio.

#### 4.6.2. Utilizando-se apenas a equação integral de $w$

1o. Caso:  $w_c$  e  $R_c$  são tratados como contribuições dos nós vizinhos em cada canto.

Para montar um sistema de equações semelhante a (4.37) apenas com equações integrais de deslocamento, é necessário associar dois pontos de carregamento para cada nó do contorno, podendo-se escolher qualquer uma das situações seguintes:

- a) Um dos pontos de carregamento "Q", estará situado no contorno, enquanto que o segundo, "A", fora do domínio (Fig.4.14.a).

As duas equações integrais de deslocamento, podem ser agrupadas numa só, utilizando-se a equação (4.43), sendo neste caso, os valores dos deslocamentos e esforços generalizados dados por:

$$\underline{z}(Q) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$\underline{z}(Q) = \begin{Bmatrix} w(Q) \\ w(A) \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

$$\underline{p}^*(Q,P) = \begin{bmatrix} V_n^*(Q,P) & - M_n^*(Q,P) \\ V_n^*(A,P) & - M_n^*(A,P) \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$\underline{u}^*(Q,P) = \begin{bmatrix} w^*(Q,P) & - \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \\ w^*(A,P) & - \frac{\partial w^*}{\partial n}(A,P) \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

$$\underline{p}_{ci}^*(Q,P) = \begin{Bmatrix} R_{ci}^*(Q,P) \\ R_{ci}^*(A,P) \end{Bmatrix} \quad (4.65)$$

$$\underline{u}_{ci}^*(Q,P) = \begin{Bmatrix} w_{ci}^*(Q,P) \\ w_{ci}^*(A,P) \end{Bmatrix} \quad (4.66)$$

$$\underline{u}_g^*(Q,P) = \begin{Bmatrix} w^*(Q,P) \\ w^*(A,P) \end{Bmatrix} \quad (4.67)$$

b) Os dois pontos de carregamento "A" e "B", estarão situados fora do domínio (Fig. 4.14.b).

Os pontos "A" e "B" estão situados a distâncias  $d_1$  e  $d_2$  respectivamente, do nó correspondente. Essas distâncias têm as mesmas características que "d", da expressão (4.53).

Procedendo-se de forma análoga ao item a), na equação (4.43) agora tem-se:

$$\tilde{c}(Q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$\tilde{u}(Q) = \begin{Bmatrix} w(B) \\ w(A) \end{Bmatrix} \quad (4.69)$$

$$\tilde{p}^*(Q,P) = \begin{bmatrix} V_n^*(B,P) & -M_n^*(B,P) \\ V_n^*(A,P) & -M_n^*(A,P) \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$\tilde{u}^*(Q,P) = \begin{bmatrix} w^*(B,P) & -\frac{\partial w^*}{\partial n}(B,P) \\ w^*(A,P) & -\frac{\partial w^*}{\partial n}(A,P) \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

$$\tilde{p}_{ci}^*(Q,P) = \begin{Bmatrix} R_{ci}^*(B,P) \\ R_{ci}^*(A,P) \end{Bmatrix} \quad (4.72)$$

$$\tilde{u}_{ci}^*(Q,P) = \begin{Bmatrix} w_{ci}^*(B,P) \\ w_{ci}^*(A,P) \end{Bmatrix} \quad (4.73)$$

$$\underline{z}_g^*(Q, p) = \begin{Bmatrix} w^*(B, p) \\ w^*(A, p) \end{Bmatrix} \quad (4.74)$$

Assim, após imporem-se as condições de contorno, em cada caso, será obtido um sistema semelhante a (4.39), o qual poderá ser resolvido.

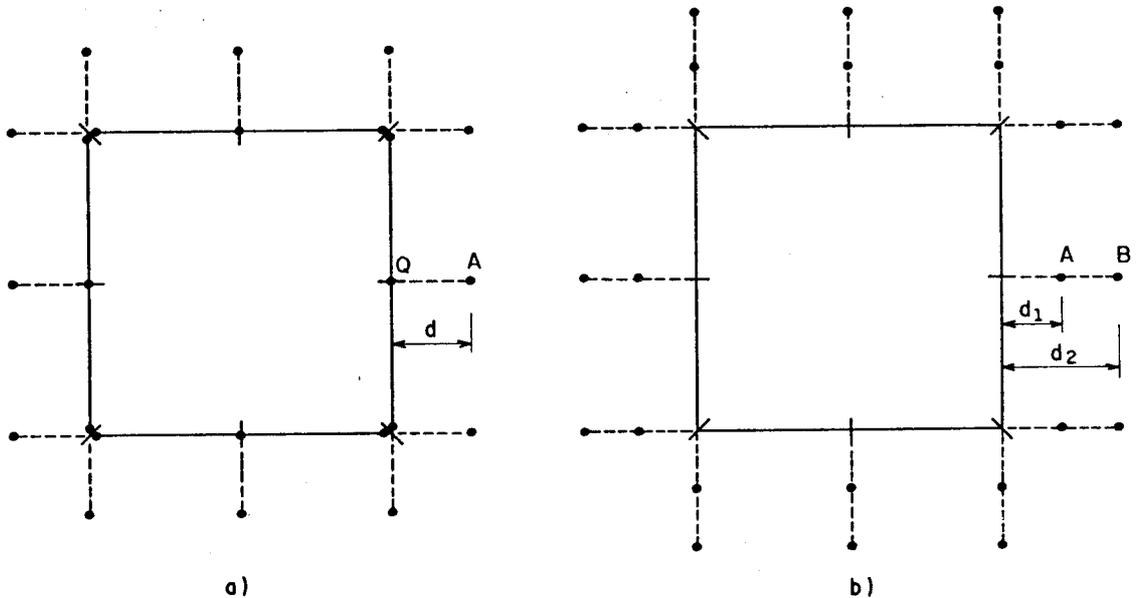


Fig. 4.14 - Placa quadrada com pontos singulares :  
 a) sobre o contorno e fora do domínio;  
 b) fora do domínio.

2o. Caso:  $w_c$  e  $R_c$  são considerados como variáveis do problema.

De forma análoga ao segundo caso do item anterior, serão aplicadas equações integrais de deslocamento no nós e cantos da placa, para definir um sistema de equações semelhante a (4.38). A aplicação destas equações, pode ser

feita de duas formas:

- a) Um dos pontos de carregamento "Q", estará situado no contorno, e o outro ponto "A", fora do domínio (Fig. 4.15.a),
- b) Os dois pontos de carregamento "A" e "B", estarão situados fora do domínio (Fig. 4.15.b).

É também indispensável nestes casos, a utilização de uma equação integral de deslocamento aplicada em cada canto da placa. Assim, é necessário que os nós situados nos cantos, sejam levados para o interior de seus respectivos elementos, como é mostrado na figura 4.15, devendo-se portanto, usar elementos lineares descontínuos ou mistos.

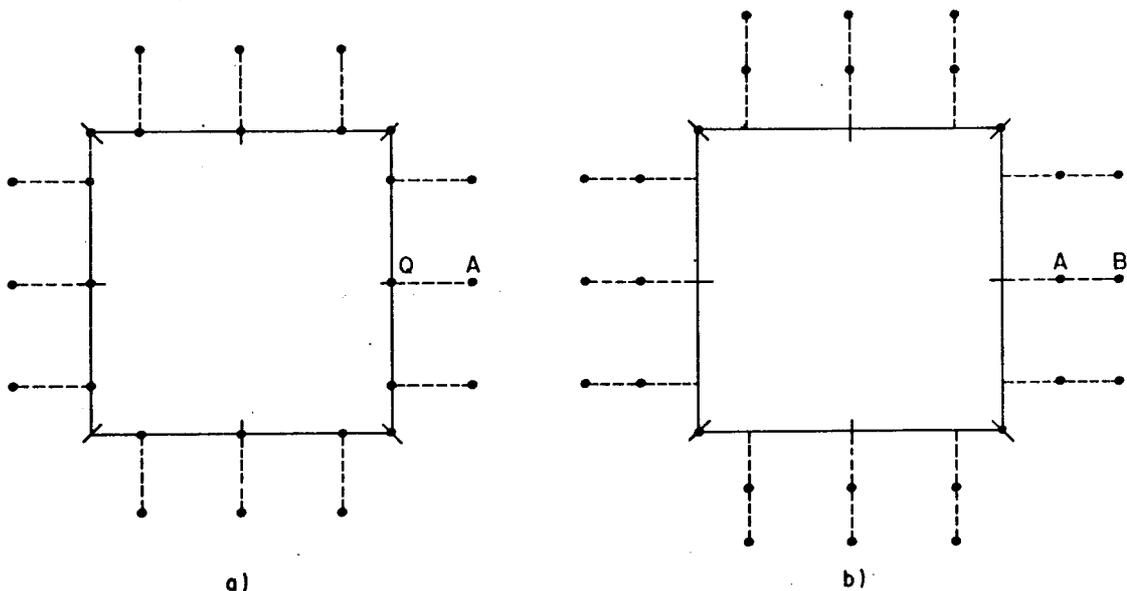


Fig. 4.15 - Placa quadrada com pontos singulares nos cantos e: a) sobre o contorno e fora do domínio; b) fora do domínio.

O sistema de equações montado com uma das formas acima, poderá ser resolvido após a imposição das condições de contorno da placa, de forma análoga a (4.41).

Embora neste item tenham sido mostradas apenas duas possibilidades de escolha do nó singular para a montagem do sistema de equações, usando-se apenas a equação integral do deslocamento, é claro que muitas outras possibilidades podem ser idealizadas e utilizadas em problemas de placas.

A alternativa escolhida neste trabalho, é a de utilizar-se apenas a equação integral de deslocamento em pontos do contorno, fora do domínio e nos cantos da placa (Fig.4.15.a), para montagem do sistema de equações algébricas. Os resultados obtidos por esta alternativa serão comparados a outros obtidos por alternativas ou métodos diferentes.

#### 4.7. Integração sobre os elementos

A equação (4.27) apresenta integrais de contorno (4.28) e (4.29), que podem ser escritas da seguinte forma:

$$h_k^n(Q) = \int_{\Gamma_j} p_k^*(Q,P) \phi_n(P) d\Gamma(P) \quad (4.75)$$

$$g_k^n(Q) = \int_{\Gamma_j} u_k^*(Q,P) \phi_n(P) d\Gamma(P) \quad (4.76)$$

Quando o ponto de carregamento "Q", não pertence ao elemento a ser integrado, as integrais (4.75) e (4.76) podem ser calculadas numericamente empregando-se a quadratura de Gauss [70], que tem a seguinte expressão:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^N w_i f(\xi_i) \quad (4.77)$$

onde:

$f(\xi)$ : função a ser integrada, escrita em termos da coordenada adimensional  $\xi$ ;

$N$  : número de pontos de integração;

$\xi_i$  : coordenada adimensional do  $i$ -ésimo ponto de integração, definida em função de  $N$ ;

$w_i$  : fator ponderador calculado em função de  $N$ .

A partir da figura 4.4 pode-se escrever a seguinte relação entre as variáveis  $\Gamma$  e  $\xi$ :

$$\Gamma = \frac{\ell}{2} \xi \quad (4.78)$$

O determinante do Jacobiano da transformação (4.78), necessário para fazer a mudança de variável nas integrais numéricas, é dado por:

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{\ell}{2} \quad (4.79)$$

ou seja:

$$d\Gamma = \frac{\ell}{2} d\xi \quad (4.80)$$

Assim, as integrais (4.75) e (4.76), podem ser escritas em função da variável adimensional " $\xi$ ", que para o caso de

duas equações integrais de deslocamento agrupadas numa só, ficam:

$$h_{ik}^n(Q) = \int_{-1}^1 |J| p_{ik}^*(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.81)$$

$$g_{ik}^n(Q) = \int_{-1}^1 |J| u_{ik}^*(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.82)$$

$$i, k, n = 1, 2$$

onde:

$n$  : representa o nó local do elemento onde se mede a resposta do carregamento unitário aplicado.

$Q$  : é o ponto singular situado sobre o contorno. Será "A" ou "B" se estiver fora do domínio da placa.

$i$  : indica que a equação de  $w$  está sendo aplicada sobre o contorno ou fora do domínio da placa.

$k$  : indica a natureza da resposta medida em  $P$ , relativa aos esforços fundamentais  $V_n^*$  e  $M_n^*$  ou a seus correspondentes deslocamentos  $w^*$  e  $\partial w^* / \partial n$ .

Por exemplo, para um nó local "n" de um elemento qualquer, a partir de (4.81), (4.82) e (4.79), pode-se obter:

$$h_{11}^n(Q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 V_n^*(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.83)$$

$$h_{12}^n(Q) = - \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 M_n^*(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.84)$$

$$h_{21}^n(A) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 V_n^*(A,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.85)$$

$$h_{22}^n(A) = - \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 M_n^*(A,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.86)$$

$$g_{11}^n(Q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 w_n^*(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.87)$$

$$g_{12}^n(Q) = - \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial w_n^*}{\partial n}(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.88)$$

$$g_{21}^n(A) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 w_n^*(A,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.89)$$

$$g_{22}^n(A) = - \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial w_n^*}{\partial n}(A,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.90)$$

A determinação do número de pontos de integração "N" necessário para se obter resultados satisfatórios [71] dependem de vários fatores como a distância do ponto de carregamento ao elemento, o comprimento do elemento, os ângulos formados entre os vetores posição e o elemento, e a função a ser integrada.

Quando o ponto de carregamento "Q" pertence ao elemento a ser integrado, é conveniente que as integrais sejam calculadas analiticamente.

Utilizando-se as funções aproximadoras do elemento

linear descontínuo (4.15), na integração analítica ao longo do comprimento  $l$  do elemento ao qual pertence o ponto singular "Q", as expressões (4.75) e (4.76) provenientes de uma equação integral de deslocamento ficam:

$$h_{11}^n(Q) = 0 \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} h_{12}^n(Q) = & \frac{l}{4\pi} \left\{ C_1^n (1+\nu) \left[ \phi_2 \ln(l\phi_2) + \phi_1 \ln(l\phi_1) - 1 \right] + \right. \\ & + \frac{(1+\nu)}{C_2^n} \left[ (\phi_2)^2 \ln(l\phi_2) - (\phi_1)^2 \ln(l\phi_1) - \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1) \right] + \\ & \left. + \frac{\nu}{C_2^n} (\phi_2 - \phi_1) + \nu C_1^n \right\} \quad (4.92) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^n(Q) = & \frac{l^3}{8\pi D} \left\{ \frac{C_1^n}{3} \left[ (\phi_2)^3 \left[ \ln(l\phi_2) - \frac{5}{6} \right] + (\phi_1)^3 \left[ \ln(l\phi_1) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{5}{6} \right] \right] + \frac{1}{2C_2^n} \left[ (\phi_2)^4 \left[ \ln(l\phi_2) - \frac{3}{4} \right] - (\phi_1)^4 \left[ \ln(l\phi_1) - \frac{3}{4} \right] \right] \right\} \quad (4.93) \end{aligned}$$

$$g_{12}^n(Q) = 0 \quad (4.94)$$

onde,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são dados por (4.16) e:

$$C_1^n = \frac{\xi_{3-n} - \xi}{\xi_{3-n} - \xi_n} \quad (4.95)$$

$n=1,2$

$$C_2^n = \xi_{3-n} - \xi_n \quad (4.96)$$

A posição dos pontos singulares pode ficar definida pelas coordenadas adimensionais " $\xi$ " de cada elemento. Assim, para  $\xi = +1$  ou  $\xi = -1$ , o ponto singular esta em uma das extremidades do elemento; para  $\xi = -\bar{\xi}$  ou  $\xi = \bar{\xi}$ , o ponto estará no interior do elemento. No presente trabalho é adotado  $\bar{\xi}=0,35$ . As coordenadas  $\xi_1$  e  $\xi_2$  definirão a posição dos nós, que estarão situados nas extremidades ou dentro do elemento, como é mostrado na figura 4.16.

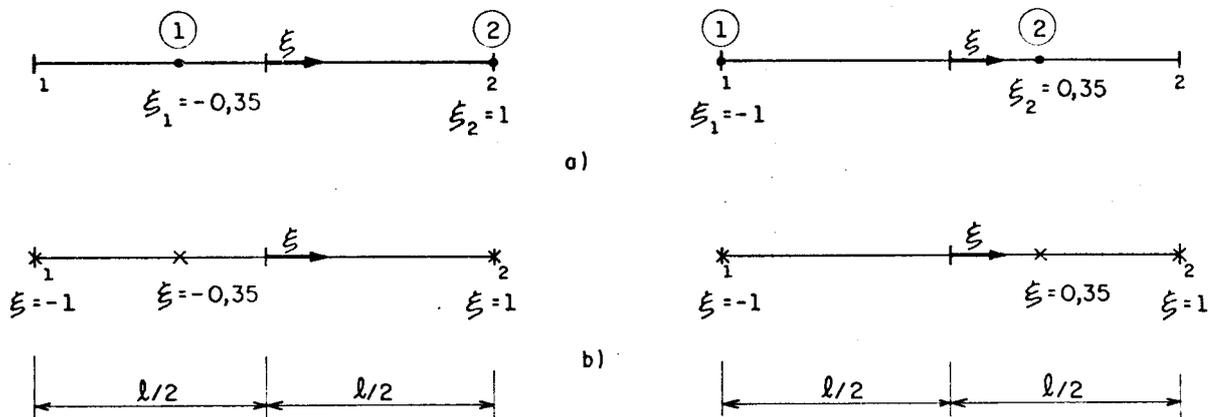


Fig. 4.16 - Posição de: a) nós e b) pontos singulares; em um elemento linear misto.

#### 4.8. Propriedades da matriz $\tilde{H}$

Se for admitido um carregamento transversal nulo, em uma placa com o contorno discretizado (Fig.4.17), os vetores dos esforços nodais  $\tilde{P}$  e das integrações sobre a região carregada  $\tilde{T}$ , no sistema de equações (4.37), são também nulos, isto é:

$$\tilde{H} \tilde{U} = 0 \quad (4.97)$$

O sistema de equações resultante (4.97), admite soluções não triviais, correspondentes aos movimentos de corpo rígido, isto é, deslocamento vertical e rotação em torno de um eixo arbitrário [65].

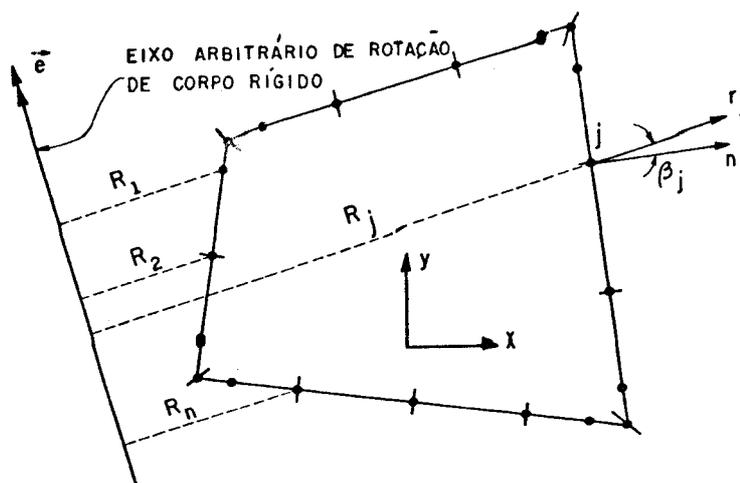


Fig. 4.17 - Placa com carregamento transversal nulo.

Considerando-se um movimento vertical na placa, o deslocamento de corpo rígido  $w_0$  nos nós é dado por:

$$\underline{U}^T = \left\{ w_0 \quad 0 \quad w_0 \quad 0 \quad w_0 \dots \dots w_0 \quad 0 \right\} \quad (4.98)$$

que, substituindo-se em (4.97), permite escrever a seguinte propriedade, envolvendo apenas elementos ímpares da matriz  $\underline{H}$ :

$$\sum_{j=1}^{Nn} h_{i, 2j-1} = 0 \quad (4.99)$$

$$i = 1, 2Nn$$

Considerando-se agora uma rotação de corpo rígido  $\alpha$ , no sentido indicado pelo eixo arbitrário  $\vec{e}$  (Fig. 4.17), o vetor deslocamento fica:

$$\tilde{U}^T = \alpha \left\{ R_1 \cos\beta_1 \ R_2 \cos\beta_2 \dots R_j \cos\beta_j \dots R_{Nn} \cos\beta_{Nn} \right\} \quad (4.100)$$

Substituindo-se (4.100) no sistema (4.97), obtém-se a seguinte propriedade para uma linha qualquer da matriz  $\tilde{H}$  :

$$\sum_{j=1}^{Nn} (h_{i,2j-1} R_j + h_{i,2j} \cos\beta_j) = 0 \quad (4.101)$$

As propriedades (4.99) e (4.101) da matriz  $\tilde{H}$  , podem ser utilizadas para obter os elementos da diagonal principal, correspondentes a integrais com singularidade, ou também, para simples verificação da mesma, como no presente trabalho.

#### 4.9. Deslocamentos e esforços para pontos internos

##### 4.9.1. Deslocamento transversal $w(q)$ e sua derivada $\frac{\partial w}{\partial m}(q)$

Depois de achar as incógnitas do contorno, pode-se obter os deslocamentos  $w(q)$  e  $\frac{\partial w}{\partial m}(q)$  em pontos internos da placa, aplicando-se as equações (3.27) e (3.28) a todos eles, chegando-se assim, a uma equação matricial semelhante a (4.38).

$$\tilde{w}(q) + \begin{bmatrix} H' & H'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{w} \\ \tilde{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G' & G'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{R} \\ \tilde{R}_c \end{Bmatrix} + \tilde{T} \quad (4.102)$$

onde:

$$\tilde{w}(q) = \begin{Bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \vdots \\ \tilde{w}_{Ni} \end{Bmatrix} \quad \text{com} \quad \tilde{w}_1 = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial m} \end{Bmatrix}_1$$

- $N_i$  : número de pontos internos;
- $\tilde{H}'$  e  $\tilde{G}'$  : são matrizes de influência dos pontos internos semelhantes a  $\tilde{H}$  e  $\tilde{G}$ ;
- $\tilde{H}'_c$  e  $\tilde{G}'_c$  : são matrizes formadas pelos coeficientes dos termos provenientes da reação de canto, semelhantes a  $\tilde{H}_c$  e  $\tilde{G}_c$ ;
- $\tilde{T}'$  : vetor resultante da integração sobre a região  $\Omega_g$ , dos pontos internos, semelhante a  $\tilde{T}$ ;
- $\tilde{U}$  e  $\tilde{P}$  : vetores dos deslocamentos e esforços dos nós do contorno, que já foram determinados;
- $\tilde{W}_c$  e  $\tilde{R}_c$  : vetores dos deslocamentos e reações dos cantos da placa, que também são conhecidos.

As matrizes  $\tilde{H}'$ ,  $\tilde{G}'$ ,  $\tilde{H}'_c$  e  $\tilde{G}'_c$  poderão ter duas ou três linhas para cada ponto interno, desde que se escreva uma ou duas equações integrais da derivada direcional, podendo ser nas direções dos eixos  $\underline{x}$  ou  $\underline{y}$ , ou nas duas. Neste caso as integrais sobre os elementos serão sempre numéricas. A forma das submatrizes de  $\tilde{H}$  e  $\tilde{G}$  para um nó local "n" de um elemento qualquer será:

$$h_{11}^n(q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 V_n^*(q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.103)$$

$$h_{12}^n(q) = - \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 M_n^*(q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.104)$$

$$h_{21}^n(q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.105)$$

$$h_{22}^n(q) = - \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.106)$$

$$g_{11}^n(q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 w^*(q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.107)$$

$$g_{12}^n(q) = - \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.108)$$

$$g_{21}^n(q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.109)$$

$$g_{22}^n(q) = - \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.110)$$

$$n = 1, 2$$

#### 4.9.2. Momento fletor e força cortante para pontos internos

O momento fletor e a força cortante são dados na forma indicial pelas seguintes expressões:

$$M_{ij} = -D \left[ \nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_\ell \partial x_\ell} + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad (2.29)$$

$$Q_i = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_\ell \partial x_\ell} \quad (2.30)$$

$$i, j, \ell = 1, 2$$

Substituindo-se o valor de  $w(q)$  da equação (3.27) em (2.29) e (2.30), obtém-se:

$$\begin{aligned} M_{ij}(q) = & - \int_{\Gamma} \left[ V_{nij}^*(q, P) w(P) - M_{nij}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ & - \sum_{c=1}^{Nc} R_{ij}^*(q, P) w_c(P) + \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) w_{ij}^*(q, P) + \right. \\ & \left. - M_n(P) \frac{\partial w_{ij}^*}{\partial n}(q, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{Nc} R_c(P) w_{cij}^*(q, P) + \\ & + \int_{\Omega_g} g(P) w_{ij}^*(q, P) d\Omega_g(P) \end{aligned} \quad (4.111)$$

$$\begin{aligned} Q_i(q) = & - \int_{\Gamma} \left[ V_{ni}^*(q, P) w(P) - M_{ni}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ & - \sum_{c=1}^{Nc} R_{ci}^*(q, P) w_c(P) + \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) w_i^*(q, P) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - M_n(P) \frac{\partial w_i^*}{\partial n}(q, P) \Big] d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{Nc} R_c(P) w_{ci}^*(q, P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) w_i^*(q, p) d\Omega_g(p) \qquad (4.112)
 \end{aligned}$$

onde:

$$V_{nij}^*(q, P) = -D \left[ \nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q, P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \qquad (4.113)$$

$$M_{nij}^*(q, P) = -D \left[ \nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q, P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \qquad (4.114)$$

$$w_{ij}^*(q, P) = -D \left[ \nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q, P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \qquad (4.115)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w_{ij}^*}{\partial n}(q, P) = & -D \left\{ \nu \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] + \right. \\
 & \left. + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \right\} \qquad (4.116)
 \end{aligned}$$

$$V_{ni}^*(q,P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q,P) \right] \quad (4.117)$$

$$M_{ni}^*(q,P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q,P) \right] \quad (4.118)$$

$$w_i^*(q,P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q,P) \right] \quad (4.119)$$

$$\frac{\partial w_i^*}{\partial n}(q,P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] \right\} \quad (4.120)$$

$$R_{cij}^*(q,P) = -D \left[ \nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 R_c}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q,P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,P) \right] \quad (4.121)$$

$$R_{ci}^*(q,P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q,P) \right] \quad (4.122)$$

Discretizando-se o contorno, as variáveis são aproximadas conforme (4.9) e (4.10), e substituídas nas equações (4.111) e (4.112), obtendo-se assim, as equações integrais dos esforços internos em função da variável dimensional "ξ".

$$M_{ij}(q) = - \sum_{k=1}^{N_e} \int_{-1}^1 |J| \left[ V_{nij}^*(q,P) - M_{nij}^*(q,P) \right] \phi^T(P) d\xi(P) U_k^N +$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{c=1}^{Nc} R_{cij}^*(q,P) w_c(P) + \sum_{k=1}^{Ne} \int_{-1}^1 |J| \left[ w_{ij}^*(q,P) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial w_{ij}}{\partial n}(q,P) \right] \phi^T(P) d\xi(P) P_{\sim k}^N + \sum_{c=1}^{Nc} R_c(P) w_{cij}^*(q,P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) w_{ij}^*(q,p) d\Omega_g(p) \tag{4.123}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_i(q) = & - \sum_{k=1}^{Ne} \int_{-1}^1 |J| \left[ v_{ni}^*(q,P) - M_{ni}^*(q,P) \right] \phi^T(P) d\xi(P) U_{\sim k}^N + \\
 & - \sum_{c=1}^{Nc} R_{ci}^*(q,P) w_c(P) + \sum_{k=1}^{Ne} \int_{-1}^1 |J| \left[ w_i^*(q,P) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial w_i}{\partial n}(q,P) \right] \phi^T(P) d\xi(P) P_{\sim k}^N + \sum_{c=1}^{Nc} R_c(P) w_{ci}^*(q,P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) w_i^*(q,p) d\Omega(p) \tag{4.124}
 \end{aligned}$$

Aplicando-se as equações (4.123) e (4.124) a todos os pontos internos "Ni", obtém-se o vetor de esforços que escrito matricialmente fica:

$$\tilde{E} = - \begin{bmatrix} \tilde{S} & \tilde{S}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{W}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{F} & \tilde{F}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{R}_c \end{Bmatrix} + \tilde{T}_e \quad (4.125)$$

onde:

$$\tilde{E} = \begin{Bmatrix} E \\ \tilde{E}_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_{Ni} \end{Bmatrix} \quad \tilde{E}_i = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_{xy} \\ M_y \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}$$

$\tilde{S}$  e  $\tilde{F}$  : são matrizes semelhantes a  $\tilde{H}$  e  $\tilde{G}$ , determinadas a partir das soluções fundamentais (4.113) a (4.120).

$\tilde{S}_c$  e  $\tilde{F}_c$  : são as matrizes formadas pelos coeficientes dos termos provenientes da reação de canto, semelhantes a  $\tilde{C}$  e  $\tilde{F}$ .

$\tilde{T}_e$  : é o vetor resultante das integrais de domínio, semelhante a  $\tilde{T}$ .

$\tilde{U}$  e  $\tilde{P}$  : vetores dos deslocamentos e esforços dos nós do contorno.

$\tilde{W}_c$  e  $\tilde{R}_c$  : vetores dos deslocamentos e reações dos cantos da placa.

Para cada ponto interno serão geradas cinco linhas nas matrizes  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{S}_c$  e  $\tilde{F}_c$ , das quais três correspondem aos momentos fletores  $M_x$ ,  $M_{xy}$  e  $M_y$ , e duas às forças cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$ .

As derivadas das soluções fundamentais que aparecem em (4.113) a (4.122), podem ser determinadas em relação a um eixo particular  $x_i$  definido no ponto "q" (Fig. 4.18).

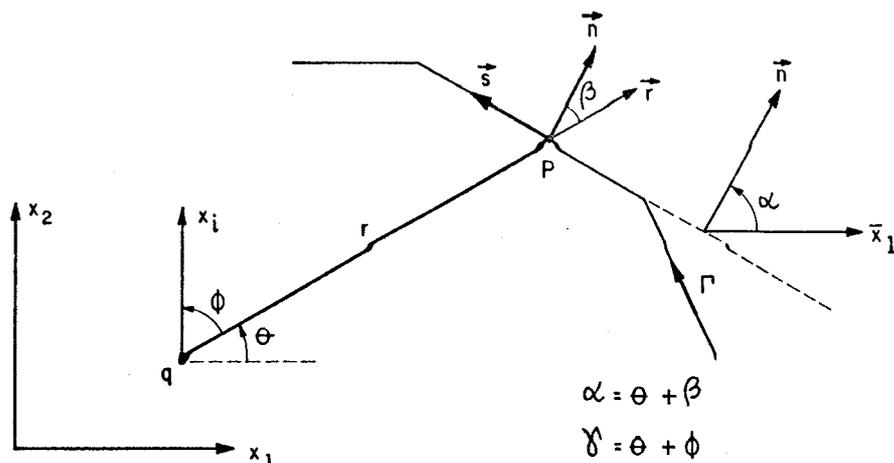


Fig. 4.18 - Representação do vetor posição  $r(q,P)$ .

$$\frac{\partial w^*}{\partial x_i}(q,P) = -\frac{r}{4\pi D} \ln r \, r_{,i} \quad (4.126.a)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,P) = \frac{1}{4\pi D} (r_{,i} \, r_{,j} + \delta_{ij} \ln r) \quad (4.126.b)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q,P) = \frac{1}{4\pi D} (1 + 2 \ln r) \quad (4.126.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q,P) \right] = -\frac{1}{2\pi r D} r_{,i} \quad (4.126.d)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] = -\frac{1}{4\pi D} \left[ r_{,i} (r_{,k} n_k) + n_i \ln r \right] \quad (4.127.a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] = -\frac{1}{4\pi r D} \left[ (2r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}) (r_{,k} n_k) + \right.$$

$$- r_{,i} n_j - r_{,j} n_i \quad (4.127.b)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right] = \frac{1}{2\pi r D} (r_{, \ell} n_\ell) \quad (4.127.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right] \right\} = \frac{1}{2\pi r^2 D} \left[ 2r_{,i} (r_{, \ell} n_\ell) - n_i \right] \quad (4.127.d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial x_i} (q, P) &= \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu) (r_{,k} s_k)^2 \left[ 4r_{,i} (r_{,k} n_k) - n_i \right] + \right. \\ &\quad \left. - 4(1-\nu) (r_{,k} s_k) (r_{,k} n_k) s_i + (3-\nu) \left[ n_i - 2r_{,i} (r_{,k} n_k) \right] \right\} \quad (4.128.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x_i \partial x_j} (q, P) &= \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 2(1-\nu) (r_{,k} s_k)^2 \left[ 24 r_{,i} r_{,j} (r_{,k} n_k) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4 \left[ r_{,i} n_j + r_{,j} n_i + \delta_{ij} (r_{,k} n_k) \right] \right\} + \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu) (r_{,k} s_k) \left[ 2(n_i s_j + n_j s_i) - 8(r_{,k} n_k) (r_{,i} s_j + r_{,j} s_i) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 4(1-\nu) (r_{,k} n_k) (s_i s_j) + (3-\nu) \left[ 2\delta_{ij} (r_{,k} n_k) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$- 8r_{,i}r_{,j}(r_{,k}n_k) + 2(r_{,i}n_j + r_{,j}n_i) \}} \quad (4.128.b)$$

$$\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q,P) = - \frac{1-\nu}{\pi r^3}(r_{,\ell}n_\ell) \left[ 4(r_{,k}s_k)^2 - 1 \right] \quad (4.128.c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q,P) \right] &= - \frac{1-\nu}{\pi r^4} \left\{ (r_{,k}s_k)^2 \left[ 24r_{,i}(r_{,\ell}n_\ell) - 4n_i \right] + \right. \\ &\left. - (r_{,\ell}n_\ell) \left[ 8s_i(r_{,k}s_k) - 4r_{,i} \right] + n_i \right\} \quad (4.128.d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_n^*}{\partial x_i}(q,P) &= \frac{1}{4\pi r} \left\{ (1+\nu)r_{,i} - 2(1-\nu)(r_{,k}n_k) \left[ r_{,i}(r_{,k}n_k) + \right. \right. \\ &\left. \left. - n_i \right] \right\} \quad (4.129.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,P) &= - \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ (1+\nu)(\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j}) + \right. \\ &+ 2(1-\nu) \left\{ n_i n_j - 2r_{,j}n_i(r_{,k}n_k) - (\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j})(r_{,k}n_k)^2 + \right. \\ &\left. \left. - 2r_{,i}(r_{,k}n_k) \left[ n_j - r_{,j}(r_{,k}n_k) \right] \right\} \right\} \quad (4.129.b) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q,P) = - \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu) \left[ 1 - 2(r_{,k}n_k)^2 \right] \right\} \quad (4.129.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) \right] = - \frac{1-\nu}{\pi r^3} \left[ r_{,i} + 2r_{,i} (r_{,k} n_k) \right. \\ \left. - 4r_{,i} (r_{,k} n_k)^2 \right] \quad (4.129.d)$$

$$\frac{\partial M_{ns}^*}{\partial x_i} (q, P) = - \frac{1-\nu}{4\pi r} \left[ 2r_{,i} (r_{,k} n_k) (r_{,k} s_k) - n_i (r_{,k} s_k) \right. \\ \left. - s_i (r_{,k} n_k) \right] \quad (4.130.a)$$

$$\frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_i \partial x_j} (q, P) = \frac{1-\nu}{4\pi r^2} \left\{ 2 \left[ (r_{,k} s_k) (r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) + \right. \right. \\ \left. \left. + (r_{,k} n_k) (r_{,i} s_j + r_{,j} s_i) + (r_{,k} n_k) (r_{,k} s_k) (\delta_{ij} + \right. \right. \\ \left. \left. - 4r_{,i} r_{,j}) \right] - (n_i s_j + n_j s_i) \right\} \quad (4.130.b)$$

$$\frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) = \frac{1-\nu}{\pi r^2} \left[ (r_{,k} s_k) (r_{,\ell} n_\ell) \right] \quad (4.130.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) \right] = \frac{1-\nu}{\pi r^3} \left[ 4r_{,i} (r_{,k} s_k) (r_{,\ell} n_\ell) + \right. \\ \left. - n_i (r_{,k} s_k) - s_i (r_{,\ell} n_\ell) \right] \quad (4.130.d)$$

$$i, j, k, \ell = 1, 2$$

#### 4.10. Aplicações numéricas

Neste item, são apresentadas algumas aplicações numéricas da formulação do método dos elementos de contorno para problemas de flexão de placas, utilizando-se a alternativa proposta no segundo caso a) do item 4.6.2, para montagem do sistema de equações lineares, ou seja, serão utilizadas apenas equações integrais de deslocamento aplicadas nos cantos, nos nós e fora do domínio.

Os resultados obtidos, utilizando-se esta alternativa proposta, A.P., são comparados com os obtidos analiticamente [64], ou por outros métodos numéricos, ou também, com outras alternativas diferentes.

Em todos os exemplos analisados são considerados elementos lineares descontínuos, o coeficiente de Poisson é igual a 0,3 e o valor de "a" é igual a 0,5.

As alternativas A e B que aparecem nas tabelas, correspondem ao primeiro caso b) do item 4.6.1 para  $\bar{\xi} = 0,35$  e  $\bar{\xi} = 1$  respectivamente. A alternativa C corresponde ao segundo caso b) do item 4.6.1.

As referências REF.A e REF.B correspondem aos números [64] e [65] das referências bibliográficas deste trabalho.

##### 4.10.1. Exemplo 1: Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada.

Neste exemplo é analisada uma placa quadrada apoiada no contorno com carregamento uniformemente distribuído, mostrado na figura 4.19. São utilizadas as alternativas A,B,C, e A.P., já mencionadas, discretizando-se o contorno da placa com 8, 16, 32 e 40 elementos. Os resultados obtidos são comparados com os valores teóricos [64], na tabela 4.1.

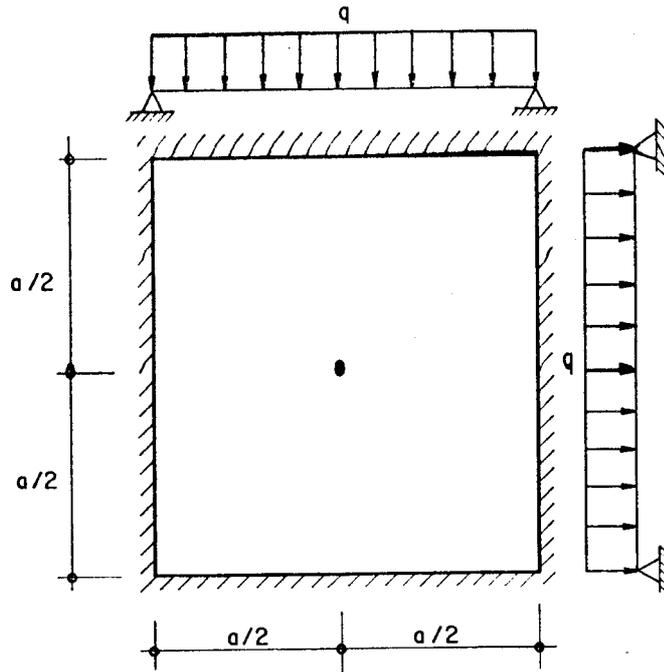


Fig. 4.19 - Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada.

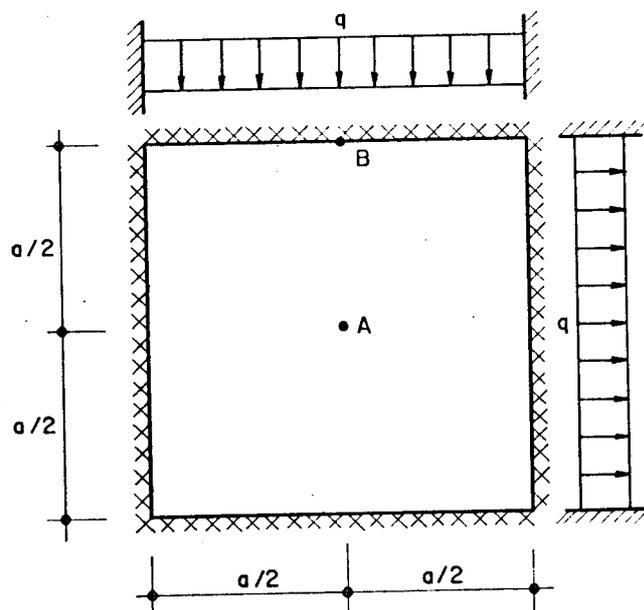


Fig. 4.20 - Placa quadrada engastada no contorno e uniformemente carregada.

Tabela 4.1 - Resultados do exemplo 1.

| ALT.  | NE | $w_{\max}$ | $M_{\max}$ | $V_{\max}$ | $R_C$  |
|-------|----|------------|------------|------------|--------|
|       |    | 0,00406*   | 0,0479*    | 0,42*      | 0,065* |
| A     | 8  | 0,00397    | 0,0477     | 0,51       | 0,187  |
|       | 16 | 0,00406    | 0,0478     | 0,47       | 0,095  |
|       | 32 | 0,00406    | 0,0479     | 0,43       | 0,076  |
|       | 40 | 0,00406    | 0,0479     | 0,42       | 0,073  |
| B     | 8  | 0,00406    | 0,0479     | 0,47       | 0,079  |
|       | 16 | 0,00406    | 0,0479     | 0,44       | 0,076  |
|       | 32 | 0,00406    | 0,0479     | 0,43       | 0,070  |
|       | 40 | 0,00406    | 0,0479     | 0,42       | 0,068  |
| C     | 8  | 0,00404    | 0,0477     | 0,43       | 0,095  |
|       | 16 | 0,00406    | 0,0479     | 0,43       | 0,073  |
|       | 32 | 0,00406    | 0,0479     | 0,42       | 0,067  |
|       | 40 | 0,00406    | 0,0479     | 0,42       | 0,066  |
| A.P.  | 8  | 0,00393    | 0,0467     | 0,41       | 0,142  |
|       | 16 | 0,00404    | 0,0476     | 0,45       | 0,087  |
|       | 32 | 0,00406    | 0,0478     | 0,43       | 0,072  |
|       | 40 | 0,00406    | 0,0479     | 0,42       | 0,070  |
| FATOR |    | $qa^4/D$   | $qa^2$     | $qa$       | $qa^2$ |

\* Valores teóricos [64].

#### 4.10.2. Exemplo 2: Placa quadrada engastada no contorno e uniformemente carregada.

A placa analisada neste exemplo é quadrada, engastada no seu contorno e com carregamento uniformemente distribuído, conforme a figura 4.20. Aqui também são utilizadas as alternativas A, B, C e A.P. com discretização do contorno em 8, 16, 32 e 40 elementos e os seus resultados obtidos comparados com os resultados exatos [64], como é mostrado na tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Resultados do exemplo 2.

| ALT.  | NE | $w_A$    | $M_{xA}$ | $M_{yB}$ | $R_C$  |
|-------|----|----------|----------|----------|--------|
|       |    | 0,00126* | 0,0231*  | -0,0513* | 0,000* |
| A     | B  | 0,00128  | 0,0230   | -0,0578  | 0,000  |
|       | 16 | 0,00126  | 0,0229   | -0,0562  | 0,000  |
|       | 32 | 0,00126  | 0,0229   | -0,0521  | 0,000  |
|       | 40 | 0,00127  | 0,0229   | -0,0520  | 0,000  |
| B     | B  | 0,00127  | 0,0229   | -0,0587  | 0,000  |
|       | 16 | 0,00126  | 0,0229   | -0,0563  | 0,000  |
|       | 32 | 0,00127  | 0,0229   | -0,0521  | 0,000  |
|       | 40 | 0,00127  | 0,0229   | -0,0520  | 0,000  |
| C     | B  | 0,00126  | 0,0229   | -0,0609  | 0,000  |
|       | 16 | 0,00126  | 0,0229   | -0,0561  | 0,000  |
|       | 32 | 0,00127  | 0,0229   | -0,0522  | 0,001  |
|       | 40 | 0,00127  | 0,0229   | -0,0520  | 0,001  |
| A.P.  | B  | 0,00128  | 0,0230   | -0,0600  | -0,014 |
|       | 16 | 0,00127  | 0,0229   | -0,0555  | 0,002  |
|       | 32 | 0,00127  | 0,0229   | -0,0522  | 0,002  |
|       | 40 | 0,00127  | 0,0229   | -0,0518  | 0,002  |
| FATOR |    | $qa^4/D$ | $qa^2$   | $qa^2$   | $qa^2$ |

\* Valores teóricos [64].

4.10.3. Exemplo 3: Placa quadrada engastada em dois lados opostos e apoiada nos outros dois com carregamento uniformemente distribuído.

Esta placa (Fig. 4.21), foi discretizada com 40 elementos iguais. Os resultados foram obtidos utilizando-se a alternativa proposta A.P. e comparados com os da referência REF.A.

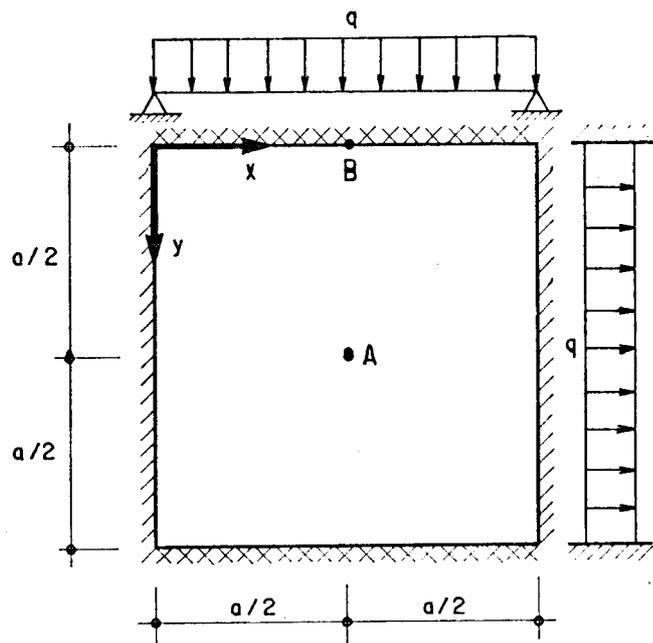


Fig. 4.21 - Placa quadrada engastada em dois lados opostos e apoiada nos outros dois com carregamento uniformemente distribuído.

Tabela 4.3 - Resultados do exemplo 3.

| PONTO | w        |         | $M_x$   |         | $M_y$   |         |
|-------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
|       | A.P.     | REF.A   | A.P.    | REF.A   | A.P.    | REF.A   |
| A     | 0,00192  | 0,00192 | 0,0244  | 0,0244  | 0,0332  | 0,0332  |
| B     | 0        | 0       | -0,0203 | -0,0209 | -0,0701 | -0,0697 |
| FATOR | $qa^4/D$ |         | $qa^2$  |         | $qa^2$  |         |

4.10.4. Exemplo 4: Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois com carregamento uniformemente distribuído total e parcial.

Esta placa submetida a um carregamento uniformemente distribuído total e parcial, é mostrada nas figuras 4.22 e 4.23 respectivamente, e foi discretizada com 40 elementos iguais. Neste exemplo foi adotado o coeficiente de Poisson igual a 0,2. Os resultados obtidos com a alternativa proposta A.P. são comparados com os da referência REF.B e com o método dos elementos finitos M.E.F., para uma divisão do domínio em 144 elementos triangulares de seis parâmetros por nó (T-18), nas tabelas 4.4. e 4.5, para carregamento total e parcial respectivamente.

Tabela 4.4 - Resultados do exemplo 4, para carregamento total.

| VALORES   | REF.B   | A.P.    | M.E.F.  | FATOR            |
|-----------|---------|---------|---------|------------------|
| $w_{18}$  | 0,0458  | 0,0415  | 0,0407  | $\frac{qa^4}{D}$ |
| $w_{11}$  | 0,0171  | 0,0159  | 0,0156  |                  |
| $w_{12}$  | 0,0131  | 0,0123  | 0,0121  |                  |
| $M_{x3}$  | -0,1318 | -0,1276 | -0,1268 | $qa^2$           |
| $M_{x6}$  | -0,1185 | -0,1124 | -0,1123 |                  |
| $M_{x7}$  | -0,0941 | -0,0896 | -0,0883 |                  |
| $M_{x8}$  | -0,0652 | -0,0619 | -0,0608 |                  |
| $M_{y6}$  | -0,0162 | -0,0201 | -0,0230 |                  |
| $M_{y7}$  | -0,0204 | -0,0180 | -0,0177 |                  |
| $M_{y10}$ | -0,0141 | -0,0133 | -0,0130 |                  |
| $M_{y14}$ | -0,0229 | -0,0197 | -0,0191 |                  |
| $M_{y15}$ | -0,0652 | -0,0619 | -0,0608 |                  |
| $M_{y16}$ | -0,0318 | -0,0277 | -0,0269 |                  |
| $M_{y17}$ | -0,0418 | -0,0349 | -0,0337 |                  |

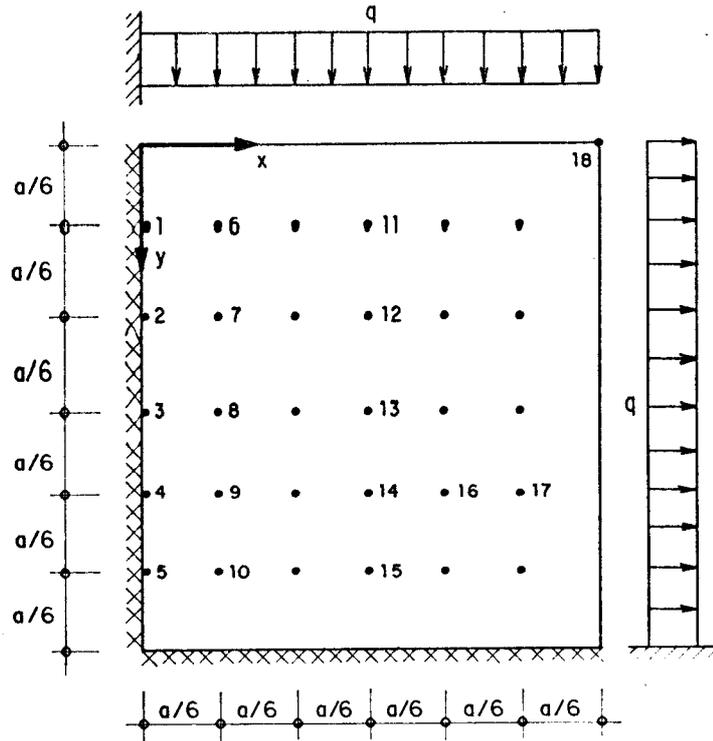


Fig. 4.22 - Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois.

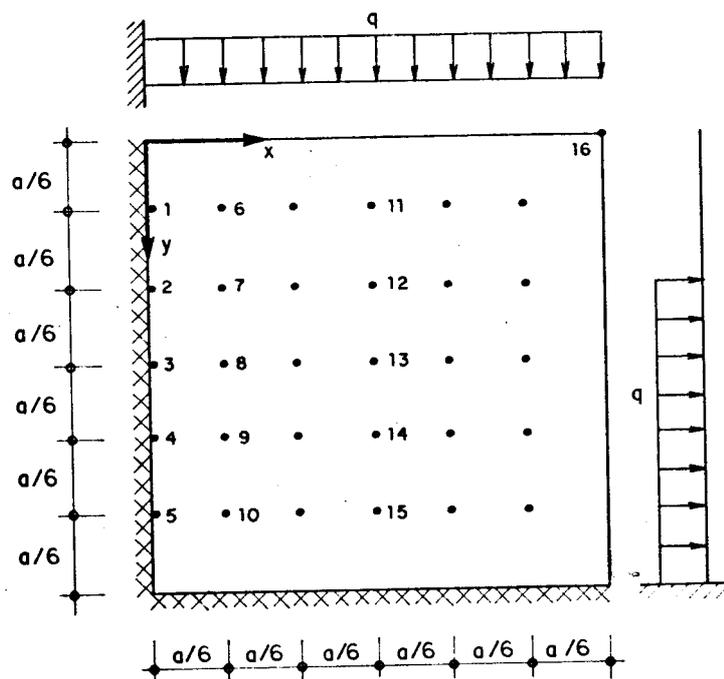


Fig. 4.23 - Placa parcialmente carregada.

Tabela 4.5 - Resultados do exemplo 4, para carregamento parcial.

| VALORES   | REF.B   | A.P.    | M.E.F.  | FATOR            |
|-----------|---------|---------|---------|------------------|
| $w_0$     | 0,0009  | 0,0009  | 0,0009  | $\frac{qa^4}{D}$ |
| $w_7$     | 0,0009  | 0,0009  | 0,0009  |                  |
| $w_{11}$  | 0,0059  | 0,0055  | 0,0054  |                  |
| $w_{13}$  | 0,0041  | 0,0039  | 0,0039  |                  |
| $w_{14}$  | 0,0026  | 0,0025  | 0,0024  |                  |
| $w_{16}$  | 0,0154  | 0,0139  | 0,0137  |                  |
| $M_{x3}$  | -0,0762 | -0,0747 | -0,0732 | $qa^2$           |
| $M_{x6}$  | -0,0422 | -0,0408 | -0,0409 |                  |
| $M_{x7}$  | -0,0354 | -0,0340 | -0,0337 |                  |
| $M_{x8}$  | -0,0252 | -0,0242 | -0,0238 |                  |
| $M_{x9}$  | -0,0146 | -0,0140 | -0,0138 |                  |
| $M_{y12}$ | 0,0126  | 0,0138  | 0,0137  |                  |
| $M_{y13}$ | 0,0187  | 0,0199  | 0,0200  |                  |
| $M_{y14}$ | 0,0066  | 0,0080  | 0,0081  |                  |
| $M_{y15}$ | -0,0265 | -0,0249 | -0,0244 |                  |

**4.10.5. Exemplo 5: Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno com carregamento distribuído em pequena área central.**

Neste exemplo a placa é analisada discretizando-se o contorno em 8, 16, 32 e 40 elementos iguais (Fig. 4.24). Nas tabelas 4.6 e 4.7, são apresentados resultados obtidos pela formulação alternativa F.A. e a referência REF.A, para deslocamentos e momentos fletores máximos respectivamente, embora alguns valores não foram encontrados na referência REF.A.

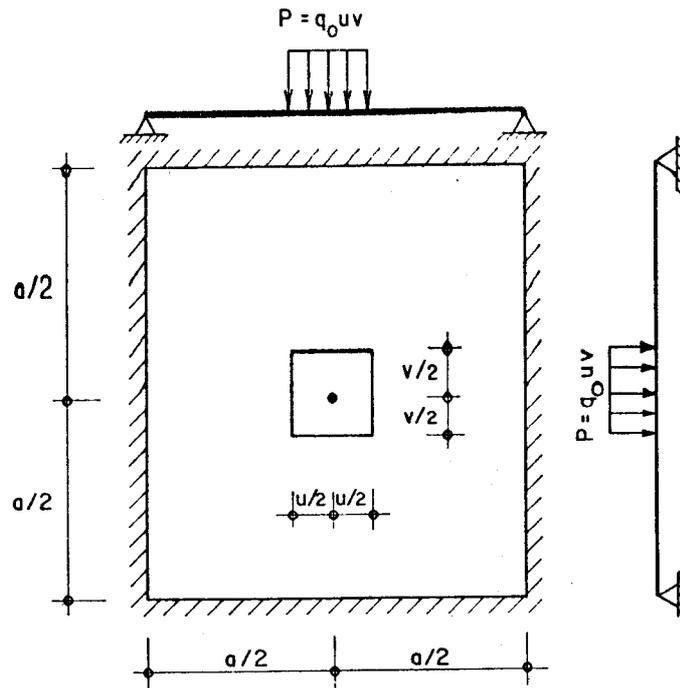


Fig. 4.24 - Placa quadrada com carregamento distribuido en pequena área central.

Tabela 4.6 - Resultados do exemplo 5.  
Deslocamentos máximos.

| u/a=v/a | $w_{\max}' = \alpha Pa^2 / D$ |         |         |         |         |
|---------|-------------------------------|---------|---------|---------|---------|
|         | 8                             | 16      | 32      | 40      | REF. A  |
| 0,005   | 0,01138                       | 0,01157 | 0,01159 | 0,01160 | 0,01160 |
| 0,01    | 0,01138                       | 0,01157 | 0,01159 | 0,01159 | —       |
| 0,10    | 0,01115                       | 0,01134 | 0,01136 | 0,01137 | —       |

Tabela 4.7 - Resultados do exemplo 5.  
Momentos fletores máximos.

| u/a=v/a | $M_{\max} = \beta P$ |       |       |       |       |
|---------|----------------------|-------|-------|-------|-------|
|         | 8                    | 16    | 32    | 40    | REF.A |
| 0,005   | 0,592                | 0,594 | 0,594 | 0,594 | —     |
| 0,01    | 0,520                | 0,522 | 0,522 | 0,522 | —     |
| 0,10    | 0,282                | 0,284 | 0,284 | 0,284 | 0,284 |

4.10.6. Exemplo 6: Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro cantos e uniformemente carregada.

A placa da figura 4.25, apoiada apenas nos seus cantos, foi discretizada com 40 elementos iguais. Os resultados obtidos pela alternativa proposta A.P. são comparados na tabela 4.8, com os resultados das referências REF.A e REF.B.

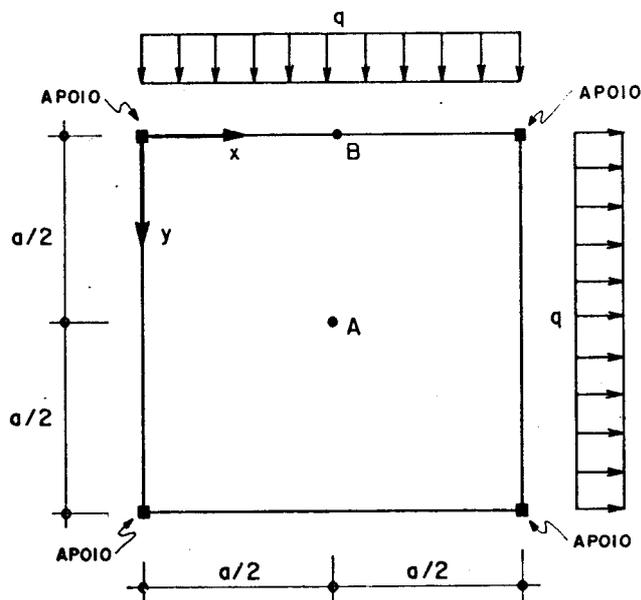


Fig. 4.25 - Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro cantos.

Tabela 4.8 - Resultados do exemplo 6.

| VALORES          | REF.B  | A.P.   | REF.A  |
|------------------|--------|--------|--------|
| $w_B / qa^4 / D$ | 0,0246 | 0,0271 | 0,0249 |
| $Mx_B / qa^2$    | 0,1100 | 0,1139 | 0,1090 |
| $Mv_B / qa^2$    | 0,1100 | 0,1139 | 0,1090 |
| $w_A / qa^4 / D$ | 0,0163 | 0,0194 | —      |

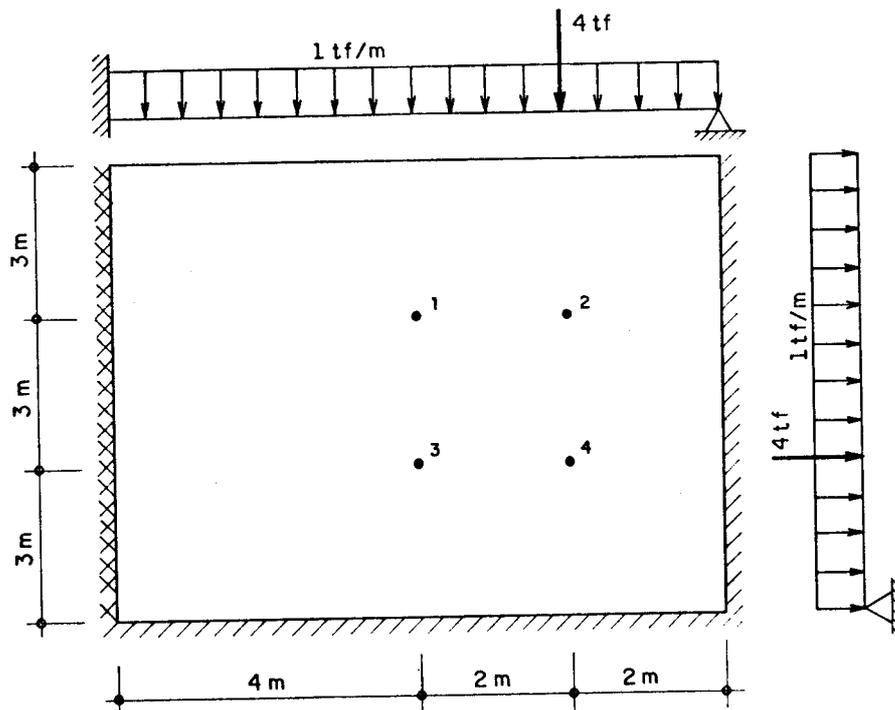


Fig. 4.26 - Placa com condições de carregamento e contorno variados.

#### 4.10.7. Exemplo 7: Placa com condições de carregamento e contorno variados.

Neste exemplo a placa é retangular (Fig. 4.26), com um lado engastado, dois lados simplesmente apoiados e um lado livre. Tem uma carga uniformemente distribuída de  $1\text{tf}/\text{m}^2$  e uma carga concentrada de  $4\text{tf}$  no ponto 4. Foram adotados: o módulo de elasticidade longitudinal  $E = 1,8 \times 10^6 \text{tf}/\text{m}^2$ , o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e a espessura  $h = 0,18\text{m}$ . Na tabela 4.9 são mostrados os resultados obtidos pela alternativa proposta A.P., a alternativa C [60] e o Método dos Elementos Finitos [73], para o qual foi utilizado o programa ICES STRUDL-II com a malha de elementos finitos mostrada na figura 4.27.

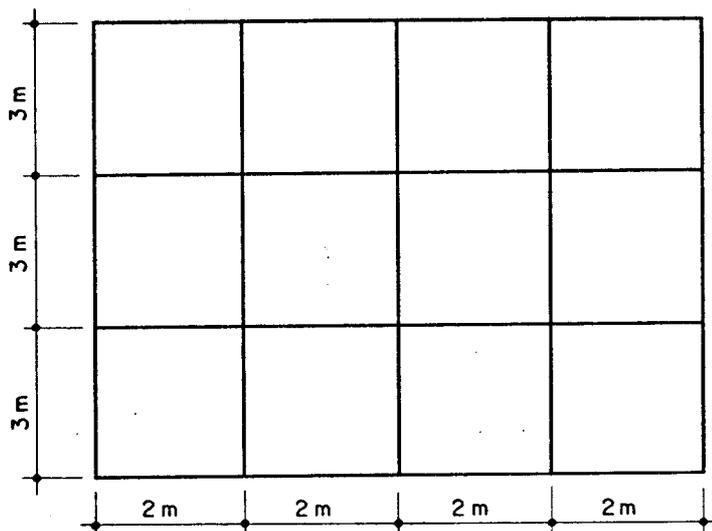


Fig. 4.27 - Malha de elementos finitos.

Tabela 4.9 - Resultados do exemplo 7.

| ELEM. | VALOR           | ALTER. | PONTO 1 | PONTO 2 | PONTO 3 | PONTO 4 |
|-------|-----------------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 28    | w               | A.P.   | -1,956  | -1,656  | -1,209  | -1,066  |
|       |                 | A      | -1,899  | -1,593  | -1,192  | -1,031  |
|       | M <sub>x</sub>  | A.P.   | 3317    | 3447    | 2080    | 3369    |
|       |                 | A      | 3250    | 3374    | 2048    | 4219    |
|       | M <sub>y</sub>  | A.P.   | 1066    | 935     | 1594    | 2516    |
|       |                 | A      | 1137    | 1012    | 1611    | 3406    |
|       | M <sub>xy</sub> | A.P.   | 222     | 611     | 436     | 1002    |
|       |                 | A      | 187     | 561     | 429     | 980     |
| 56    | w               | A.P.   | -1,936  | -1,638  | -1,203  | -1,062  |
|       |                 | A      | -1,875  | -1,588  | -1,183  | -1,048  |
|       | M <sub>x</sub>  | A.P.   | 3296    | 3420    | 2074    | 3364    |
|       |                 | A      | 3534    | 3357    | 2219    | 3960    |
|       | M <sub>y</sub>  | A.P.   | 1115    | 987     | 1614    | 2533    |
|       |                 | A      | 1605    | 1460    | 1860    | 3405    |
|       | M <sub>xy</sub> | A.P.   | 203     | 587     | 432     | 993     |
|       |                 | A      | 172     | 525     | 422     | 996     |
| /     | w               | M.E.F. | -1,909  | -1,615  | -1,195  | -1,055  |
|       | M <sub>x</sub>  | M.E.F. | 3620    | 3738    | 2208    | —       |
|       | M <sub>y</sub>  | M.E.F. | 1530    | 1184    | 1970    | —       |
|       | M <sub>xy</sub> | M.E.F. | 168     | 512     | 432     | —       |

As unidades dos deslocamentos w e dos momentos M, são dados em cm e kgfm/m respectivamente, na tabela 4.9.

Os resultados apresentados nos exemplos anteriores, mostram que a alternativa proposta A.P., para flexão de placas pelo Método dos Elementos de Contorno é eficiente.

## CAPÍTULO V

### PLACAS SOBRE FUNDAÇÕES ELÁSTICA

#### 5.1. Introdução

A formulação já proposta para placas sobre fundações elásticas, pelo método dos elementos de contorno [54], inclui na sua solução fundamental o efeito da fundação elástica. Esta formulação fica restrita à análise de placas inteiramente apoiadas sobre uma fundação elástica homogênea, dificultando, por exemplo, a consideração de efeitos não-lineares da fundação.

No presente capítulo, a análise de placas sobre fundações elásticas, será apresentada como uma extensão do método dos elementos de contorno aplicada ao problema de flexão de placas, considerando-se para isto, o acréscimo de uma integral de domínio, devida à reação da fundação, na equação integral do deslocamento.

Em muitos casos, as integrais de domínio têm integrandos conhecidos, sendo possível transformá-las em integrais de contorno, como foi feito com as integrais de domínio, para o carregamento transversal da placa, das

equações integrais do deslocamento e da sua derivada direcional, no item 3.4. Porém, há casos onde as densidades dessas integrais são funções das variáveis do problema: a integral de domínio correspondente à reação da fundação, por exemplo, é um desses casos. Ela pode ser tratada discretizando-se o domínio em células ou transformando-a em uma integral de contorno, utilizando-se o processo da reciprocidade dual [60].

A alternativa proposta neste trabalho, consiste em aproximar a densidade da integral de domínio, utilizando-se uma função aproximadora conveniente [61] e transformá-la em integrais de contorno.

No final do capítulo serão apresentadas algumas aplicações numéricas da alternativa proposta, comparando-se os resultados obtidos com valores teóricos e valores obtidos por meio da discretização do domínio em células e pelo processo da reciprocidade dual [60].

## 5.2. Equações básicas

Segundo o modelo simplificado de WINKLER [56], cada ponto da placa deve ficar ligado a um elemento de mola e não à estrutura de fundação (Fig. 5.1). Adotando-se esta simplificação, a equação diferencial de uma placa (2.25), apoiada sobre fundação elástica e submetida a um carregamento transversal  $g_a$ , pode ser escrita da seguinte forma:

$$\nabla^4 w(q) = [g_a(p) - g_s(p)]/D \quad (5.1)$$

onde,  $g_s(q)$  é reação da fundação no ponto "p" dada por:

$$g_s(p) = Kw(p) \quad (5.2)$$

sendo  $K$  o módulo de reação da fundação.

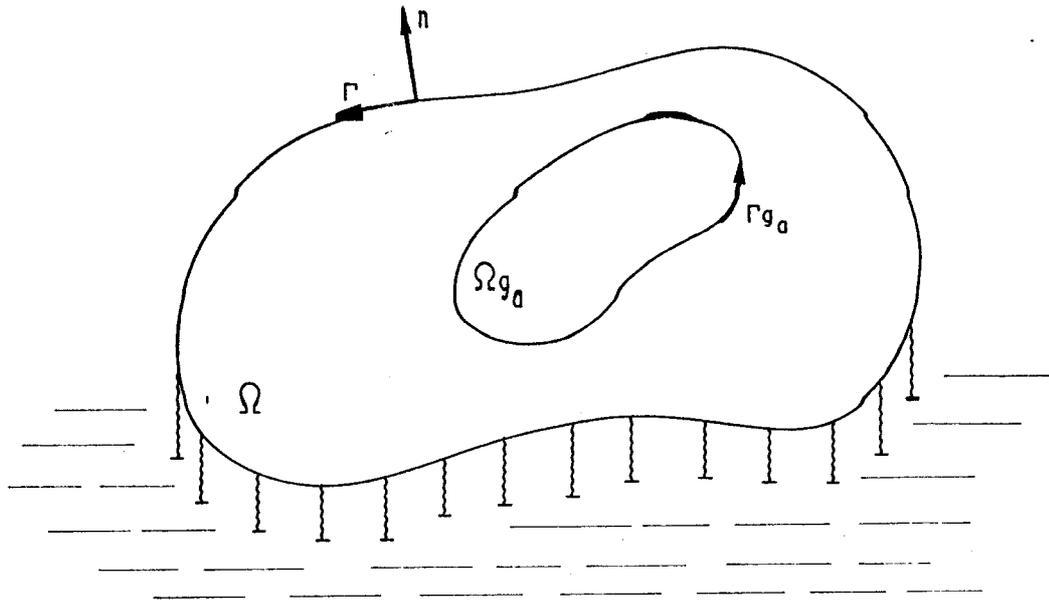


Fig. 4.1 - Discretização do contorno da placa.

Substituindo-se o carregamento transversal  $g(p)$  por  $[g_a(p) - g_s(p)]$ , nas equações integrais do deslocamento e de sua derivada direcional dadas em (3.34) e (3.42) respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & K(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}^*(Q,P)w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[ V_n(P)w^*(Q,P) + \right. \\
 & \left. - M_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q,P) + \\
 & + \int_{\Omega_{g_a}} w^*(Q,p)g_a(p)d\Omega_{g_a}(p) - \int_{\Omega_{g_s}} Kw^*(Q,p)w(p)d\Omega_{g_s}(p) \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & K_1 \frac{\partial w}{\partial m}(Q) + K_2 \frac{\partial w}{\partial u}(Q) + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) w_{ci}(P) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) + \int_{\Gamma_{g_a}} \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) g_a(p) d\Omega_{g_a} + \\
 & - \int_{\Omega_{g_s}} K \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) w(p) d\Omega_{g_s} \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

As equações (5.3) e (5.4) podem ser aplicada sem pontos do domínio, do contorno ou externos da placa, escolhendo-se convenientemente as constantes  $K(Q)$ ,  $K_1$  e  $K_2$ . Pode-se observar que a única diferença destas equações com as equações (3.34) e (3.42) é o último termo integral que aparece em cada uma delas, ou seja:

$$\int_{\Omega_{g_s}} K w^*(Q, P) w(p) d\Omega_{g_s}(p) \tag{5.5}$$

e

$$\int_{\Omega_{g_s}} K \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) w(p) d\Omega_{g_s}(p) \tag{5.6}$$

que serão tratadas nos próximos itens.

### 5.3. Integração sobre células internas

Discretizando-se o domínio da placa em células internas (Fig. 5.2.a), os deslocamentos poderão ser aproximados, transformando-se as integrais (5.5) e (5.6), em somatórios de integrais sobre estas células, para todos os pontos "q" internos, e "Q" do contorno, obtendo-se as seguintes expressões:

$$\sum_{i=1}^{N_{cel}} \int_{\Omega_{g_{si}}} K w^*(Q, p) w(p) d\Omega_{g_{si}}(p) \quad (5.7)$$

$$\sum_{i=1}^{N_{cel}} \int_{\Omega_{g_{si}}} K \frac{\partial w}{\partial m}^{**}(Q, p) w(p) d\Omega_{g_{si}}(p) \quad (5.8)$$

onde,  $N_{cel}$  é o número de células.

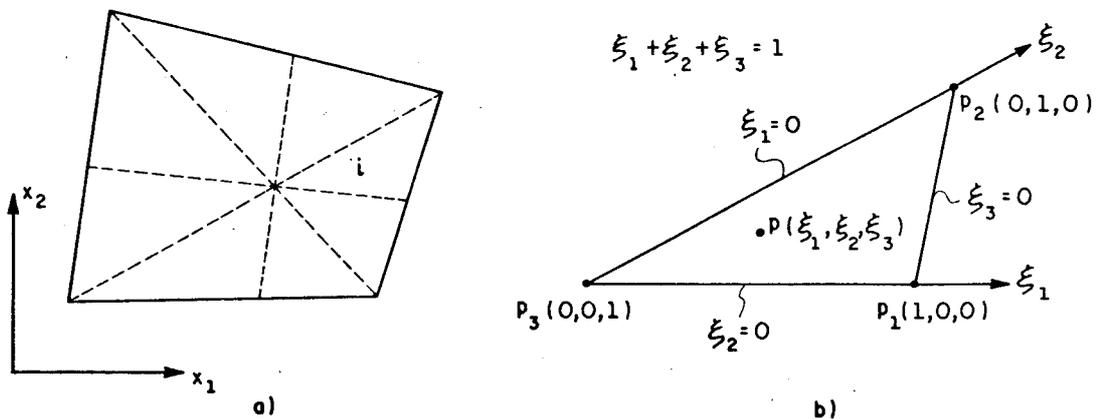


Fig. 5.2 - a) Domínio de uma placa discretizada em células; b) definição do sistema de coordenadas de uma célula triangular "i".

Um ponto "p" de coordenadas  $(x_1^p, x_2^p)$ , pode ser definido em função das coordenadas dos vértices  $p_1, p_2$  e  $p_3$  de uma célula triangular "i" (Fig. 5.2.b), da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{x}^p = \underset{\sim}{\psi}^T \underset{\sim}{x}^N \quad (5.9)$$

$$\underset{\sim}{x}^p = \begin{Bmatrix} x_1^p \\ x_2^p \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\underset{\sim}{\psi}^T = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\phi}^T & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\phi}^T \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\underset{\sim}{x}^N = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{x}_1^N \\ \underset{\sim}{x}_2^N \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

com:

$$\underset{\sim}{\phi} = \begin{Bmatrix} \xi_1^p \\ \xi_2^p \\ \xi_3^p \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\underset{\sim}{x}_i^N = \begin{Bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ x_i^3 \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

A coordenada  $x_i$  do ponto "p" pode ser escrita explicitamente como:

$$x_i^P = \xi_1^P x_i^1 + \xi_2^P x_i^2 + \xi_3^P x_i^3 \quad (5.15)$$

A variável adimensional  $\xi_\alpha^P$  em função das coordenadas  $x_i^P$  do ponto "p" fica:

$$\xi_\alpha^P = \frac{1}{2A} (2A_\alpha^0 + b^\alpha x_1^P + a^\alpha x_2^P) \quad (5.16)$$

onde:

$$a^\alpha = x_1^k - x_1^j \quad (5.17)$$

$$b^\alpha = x_2^j - x_2^k \quad (5.18)$$

$$2A_\alpha^0 = x_1^j x_2^k - x_1^k x_2^j \quad (5.19)$$

$$A = \frac{1}{2} (b^1 a^2 - b^2 a^1) \quad (5.20)$$

$$\alpha=1,2,3 \quad j=2,3,1 \quad e \quad k=3,1,2$$

Devido às soluções fundamentais que envolvem as integrais (5.5) e (5.6), é conveniente expressar a equação (5.16) em coordenadas polares  $(r, \theta)$ , com origem no ponto "p" (Fig. 5.3).

$$\xi_\alpha^P = \xi_\alpha^q + \frac{r}{2A} (b^\alpha \cos\theta + a^\alpha \sin\theta) \quad (5.21)$$

onde,  $\xi_\alpha^q$  é obtido com a equação (5.16), para o ponto "q".

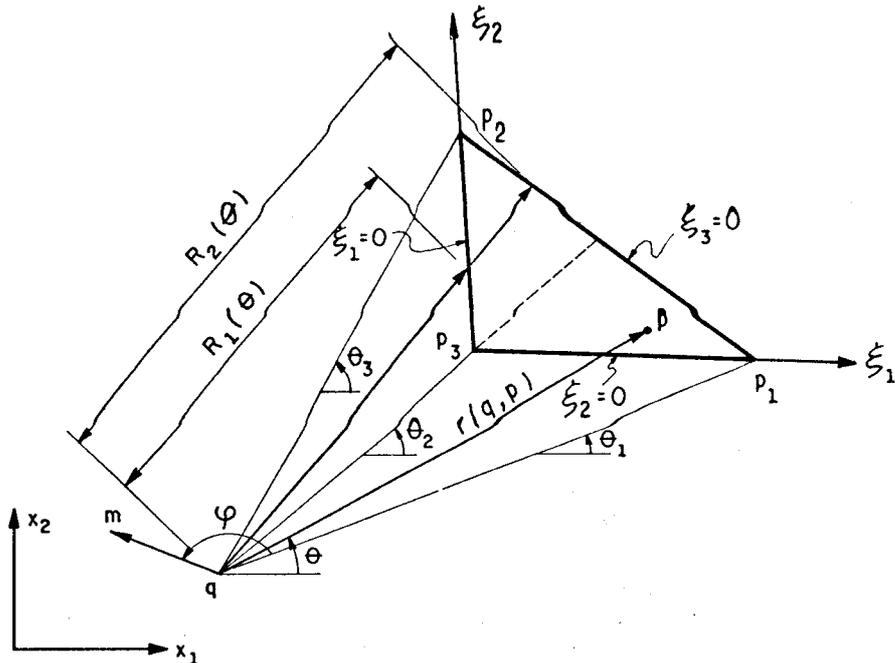


Fig. 5.3 - Célula interna e os sistemas de coordenadas  $(x_1, x_2)$ ,  $(\xi_1, \xi_2)$  e  $(r, \theta)$ .

De forma análoga à expressão (5.9), pode-se escrever o deslocamento transversal  $w(p)$  de um ponto qualquer da célula, em função dos deslocamentos verticais dos vértices da mesma, isto é:

$$w(p) = \phi^T \tilde{w}^N \quad (5.22)$$

onde,  $\phi$  é dada em (5.13) e  $\tilde{w}^N$ , representa os deslocamentos verticais  $w^1$ ,  $w^2$  e  $w^3$  nos vértices da célula.

Substituindo-se em (5.7) e (5.8) o valor de  $w(p)$  dado em (5.22), considerando-se apenas uma célula genérica "i", e escrevendo-se  $\Omega_i = \Omega_{g_{si}}$ , por simplicidade, obtém-se:

$$\int_{\Omega_i} K w^*(Q, p) w(p) d\Omega_i(p) = \left\{ \int_{\Omega_i} \xi_1^P w^*(Q, p) d\Omega_i(p) \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega_i} \xi_2^P w^*(Q, P) d\Omega_i(p) & \quad \int_{\Omega_i} \xi_3^P w^*(Q, p) d\Omega_i(p) \end{aligned} \right\} K \begin{Bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

$$\int_{\Omega_i} K \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) w(p) d\Omega_i(p) = \left\{ \int_{\Omega_i} \xi_1^P \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega_i(p) \right.$$

$$\left. \int_{\Omega_i} \xi_2^P \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) d\Omega_i(p) \quad \int_{\Omega_i} \xi_3^P \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega_i(p) \right\} K \begin{Bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

Substituindo-se as expressões de  $\xi_\alpha^P$ ,  $w^*(Q, p)$  e  $\frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p)$  nas integrais do segundo membro de (5.23) e (5.24), estas podem ser transformadas em integrais sobre  $\underline{r}$  e  $\underline{\theta}$ , integradas em relação a  $\underline{r}$ , obtendo-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \xi_\alpha^P w^*(Q, p) d\Omega_i(p) &= \frac{1}{32\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi_\alpha^q \left[ R_2^4 (\ln R_2 - \frac{3}{4}) + \right. \\ &- R_1^4 (\ln R_1 - \frac{3}{4}) \left. \right] d\theta + \frac{1}{80\pi AD} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (b^\alpha \cos\theta + a^\alpha \sin\theta) \left[ R_2^5 (\ln R_2 + \right. \\ &- \frac{7}{10}) - R_1^5 (\ln R_1 - \frac{7}{10}) \left. \right] d\theta \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\int_{\Omega_i} \xi_\alpha^P \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega_i(p) = \frac{1}{12\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi_\alpha^q \left[ R_2^3 (\ln R_2 - \frac{1}{3}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - R_1^3 \left( \ln R_1 - \frac{1}{3} \right) \cos \phi d\theta - \frac{1}{32\pi AD} \int_{\theta_1}^{\theta_3} (b^\alpha \cos \theta + \\
 & + a^\alpha \sin \theta) \left[ R_2^4 \left( \ln R_2 - \frac{1}{4} \right) - R_1^4 \left( \ln R_1 - \frac{1}{4} \right) \right] \cos \phi d\theta \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

onde,  $R_1$  e  $R_2$  são funções do ângulo  $\theta$ , obtidos a partir de (5.21) para  $\xi_\alpha^P = 0$ .

Na figura 5.3 pode-se observar que para intervalos distintos de variação do ângulo  $\theta$ , obtém-se duas expressões para  $R_1$  e uma para  $R_2$ , dadas por:

$$R_1 = \frac{2A\xi_2^q}{b^2 \cos \theta + a^2 \sin \theta} \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad (5.27)$$

$$R_1 = \frac{2A\xi_1^q}{b^1 \cos \theta + a^1 \sin \theta} \quad \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3 \quad (5.28)$$

$$R_2 = \frac{2A\xi_3^q}{b^3 \cos \theta + a^3 \sin \theta} \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_3 \quad (5.29)$$

Este problema pode ser evitado, dividindo-se a célula em duas (Fig. 5.4.a), e integrando-se nos intervalos  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  e  $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$  isoladamente. Isto não será necessário quando  $\theta_2$  for igual a  $\theta_1$  ou  $\theta_3$ .

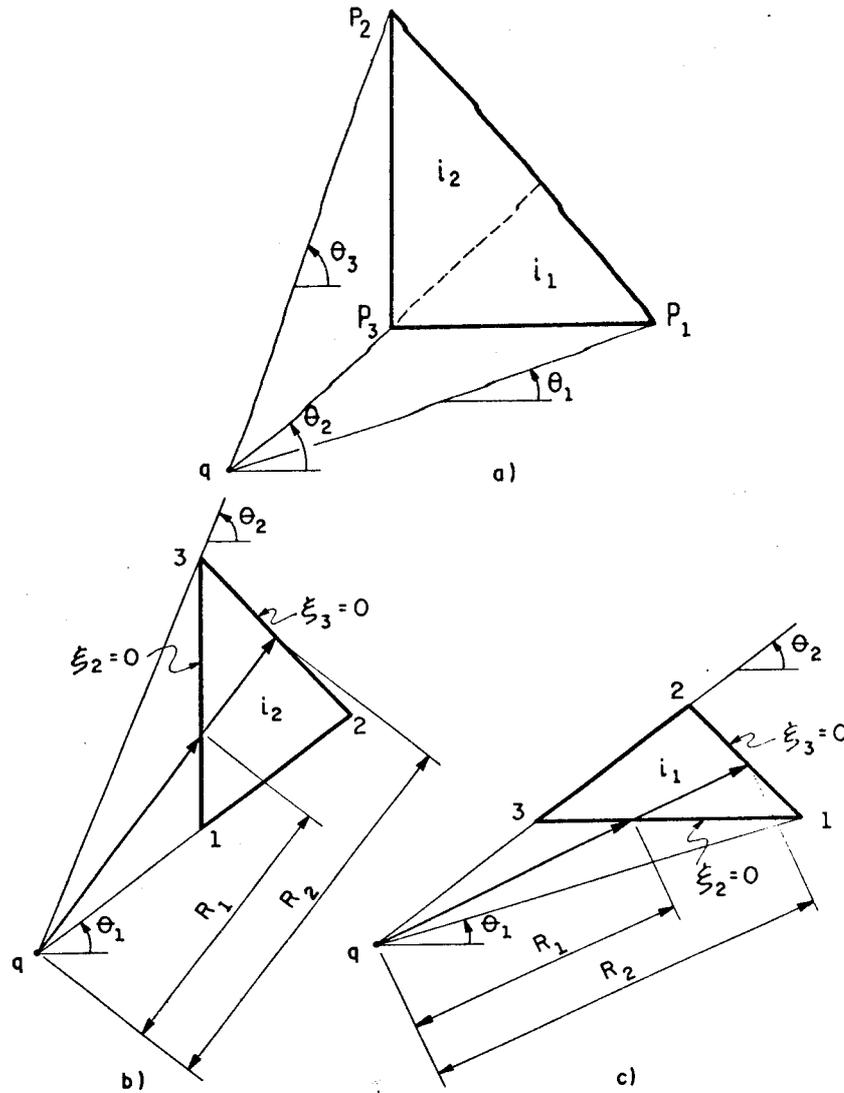


Fig. 5.4 - a) Célula "i" subdividida nas células "i<sub>1</sub>" e "i<sub>2</sub>".  
 b) Célula "i<sub>2</sub>". c) Célula "i<sub>1</sub>".

As integrais (5.25) e (5.26) sobre a célula "i", dividida em duas, "i<sub>1</sub>" e "i<sub>2</sub>" (Fig. 5.4.b e 5.4.c), são transformadas na soma das integrais em cada uma destas. Considerando-se apenas uma delas, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_i} \xi_{\alpha}^P w^*(Q,p) d\Omega_i(p) = \frac{1}{32\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi_{\alpha}^q \left[ R_2^4 (\ln R_2 - \frac{3}{4}) + \right]$$

$$\begin{aligned}
 & - R_1^4 \left( \ln R_1 - \frac{3}{4} \right) d\theta + \frac{1}{80\pi AD} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (b^\alpha \cos\theta + a^\alpha \sin\theta) \left[ R_2^5 (\ln R_2 + \right. \\
 & \left. - \frac{7}{10}) - R_1^5 (\ln R_1 - \frac{7}{10}) \right] d\theta \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_i} \xi_\alpha^p \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega_i(p) &= \frac{1}{12\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi_\alpha^q \left[ R_2^3 (\ln R_2 - \frac{1}{3}) + \right. \\
 & \left. - R_1^3 (\ln R_1 - \frac{1}{3}) \right] \cos\phi d\theta - \frac{1}{32\pi A} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (b^\alpha \cos\theta + \\
 & + a^\alpha \sin\theta) \left[ R_2^4 (\ln R_2 - \frac{1}{4}) - R_1^4 (\ln R_1 - \frac{1}{4}) \right] \cos\phi d\theta \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

onde, o índice "i" representa uma das células " $i_1$ " ou " $i_2$ ",  $R_1$  é obtido para  $\xi_2^p = 0$  e  $R_2 > R_1$ .

Fazendo-se a mudança da variável  $\theta$  para uma variável adimensional  $\eta$ , as integrais (5.30) e (5.31) podem ser transformadas em integrais numéricas, sendo:

$$\eta = \frac{2}{\theta_2 - \theta_1} \left( \theta - \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \right) \quad (5.32)$$

onde,  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  implica em  $-1 \leq \eta \leq 1$ .

A partir de (5.32), pode-se escrever:

$$d\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} d\eta \quad (5.33)$$

Substituindo-se (5.33) nas equações (5.30) e (5.31) obtém-se:

$$\int_{\Omega_i} \xi_{\alpha}^p w^*(Q, p) d\Omega_i(p) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{64\pi D} \int_{-1}^1 \xi_{\alpha}^q \left[ R_2^4 (\ln R_2 - \frac{3}{4}) + \right. \\ \left. - R_1^4 (\ln R_1 - \frac{3}{4}) \right] d\eta + \frac{\theta_2 - \theta_1}{160\pi AD} \int_{-1}^1 (b^{\alpha} \cos\theta + a^{\alpha} \sin\theta) \left[ R_2^5 (\ln R_2 + \right. \\ \left. - \frac{7}{10}) - R_1^5 (\ln R_1 - \frac{7}{10}) \right] d\eta \quad (5.34)$$

$$\int_{\Omega_i} \xi_{\alpha}^p \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega_i(p) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{24\pi D} \int_{-1}^1 \xi_{\alpha}^q \left[ R_2^3 (\ln R_2 - \frac{1}{3}) + \right. \\ \left. - R_1^3 (\ln R_1 - \frac{1}{3}) \right] \cos\phi d\eta + \frac{\theta_2 - \theta_1}{64\pi AD} \int_{-1}^1 (b^{\alpha} \cos\theta + \\ + a^{\alpha} \sin\theta) \left[ R_2^4 (\ln R_2 - \frac{1}{4}) - R_1^4 (\ln R_1 - \frac{1}{4}) \right] \cos\phi d\eta \quad (5.35)$$

Escrevendo-se as integrais (5.34) e (5.35) para as duas células "i<sub>1</sub>" e "i<sub>2</sub>", e substituindo-se nas expressões (5.23) e (5.24), obtém-se:

$$\int_{\Omega_i} K w^*(Q, p) w(p) d\Omega_i(p) = \{A^1 \ A^2 \ A^3\} K \left\{ \begin{matrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{matrix} \right\} \quad (5.36)$$

$$\int_{\Omega_1} K \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) w(p) d\Omega_i(p) = \{B^1 \quad B^2 \quad B^3\} K \begin{Bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{Bmatrix} \quad (5.37)$$

onde:

$$A^\alpha = \int_{\Omega_{i1}} \xi_{\alpha}^P w^*(Q, p) d\Omega_{i1}(p) + \int_{\Omega_{i2}} \xi_{\alpha}^P w^*(Q, p) d\Omega_{i2}(p) \quad (5.38)$$

$$B^\alpha = \int_{\Omega_{i1}} \xi_{\alpha}^P \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega_{i1}(p) + \int_{\Omega_{i2}} \xi_{\alpha}^P \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) d\Omega_{i2}(p) \quad (5.39)$$

$$\alpha = 1, 2, 3$$

Assim, as integrais (5.5) e (5.6) foram transformadas em termos algébricos dados pelo produto entre os coeficientes e os deslocamentos verticais  $w$ , correspondentes aos vértices " $\alpha$ " da célula " $i$ ", ou aos pontos " $p_\alpha$ " do domínio da placa. Desta forma, tais coeficientes poderão ser levados para o sistema (4.37), representando assim, a influência da reação da fundação na equação algébrica já anteriormente obtida, que agora passa a ter a forma:

$$\tilde{H} \tilde{U} = \tilde{G} \tilde{P} + \tilde{J} - K \begin{bmatrix} \tilde{S}^c & \tilde{S}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}_i \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

onde,  $\tilde{S}^c$  e  $\tilde{S}^i$  são submatrizes formadas pelos coeficientes  $K A^\alpha$  e  $K B^\alpha$ , para pontos do contorno e internos, respectivamente.

A equação (5.40), onde foram incluídas novas incógnitas internas  $\tilde{U}^i$ , pode ser estendida para pontos internos, utilizando-se a equação (3.27) em cada um desses pontos "i", resultando:

$$\tilde{U}^i = -\tilde{H}'\tilde{U} + \tilde{G}'\tilde{P} + \tilde{T}' - K [\tilde{S}'^c \quad \tilde{S}'^i] \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

Reunindo-se (5.40) e (5.41) em um só sistema, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} [\tilde{H} + K\tilde{S}'^c] & [K\tilde{S}'^i] \\ [\tilde{H}' + K\tilde{S}'^c] & [\tilde{I} + K\tilde{S}'^i] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{G}' \end{bmatrix} \tilde{P} + \begin{Bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{T}' \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

que pode ser escrita simplesmente como:

$$\tilde{H} \tilde{U} = \tilde{G} \tilde{P} + \tilde{T} \quad (5.43)$$

Após a imposição das condições de contorno, o sistema de equações (5.43) poderá ser resolvido.

Os esforços internos podem ser obtidos, considerando-se a equação (5.3), de forma análoga ao que foi feito no capítulo 4.

#### 5.4. Processo da reciprocidade dual

Utilizando-se o processo da reciprocidade dual, que já foi aplicado em outros tipos de problemas [72], as integrais de domínio (5.5) e (5.6) provenientes da reação da fundação, podem ser transformadas em integrais sobre o contorno da placa, pela adoção de uma aproximação para o deslocamento  $w(p)$ , dada por:

$$w(p) = f(m,p)\alpha^m \quad (5.44)$$

onde,  $f(m,p)$  representa um grupo de funções relacionadas a "m" pontos ou nós duais, e  $\alpha^m$ , são coeficientes que serão determinados posteriormente.

Considerando-se  $f(m,p)$  como uma carga distribuída fictícia ou pseudo carregamento da placa, a equação diferencial (2.25) para este caso fica escrita na seguinte forma:

$$\Delta\Delta\hat{w}(q) = f(m,p)/D \quad (5.45)$$

onde,  $f(m,p)$  é o pseudo-carregamento vertical, associado a pseudo-deslocamentos  $\hat{w}(m,p)$ .

Uma função particular  $f(m,p)$ , pode ser obtida a partir da adoção de um campo de pseudo-deslocamentos  $\hat{w}(m,p)$ , que satisfaça a equação diferencial (5.45), dado por [60]:

$$\hat{w}(m,p) = \frac{C}{64D}R^4(m,p) + \frac{1}{225D}R^5(m,p) \quad (5.46)$$

onde, C é uma constante com unidade de comprimento, como por exemplo a maior dimensão da placa, e:

$$R(m,p) = \left\{ [x_1(p) - x_1(m)]^2 + [x_2(p) - x_2(m)]^2 \right\}^{1/2} \quad (5.47)$$

Substituindo-se (5.46) na equação (5.45) e após derivações necessárias chega-se a:

$$f(m,p) = C + R(m,p) \quad (5.48)$$

que representa uma superfície cônica (Fig. 5.5).

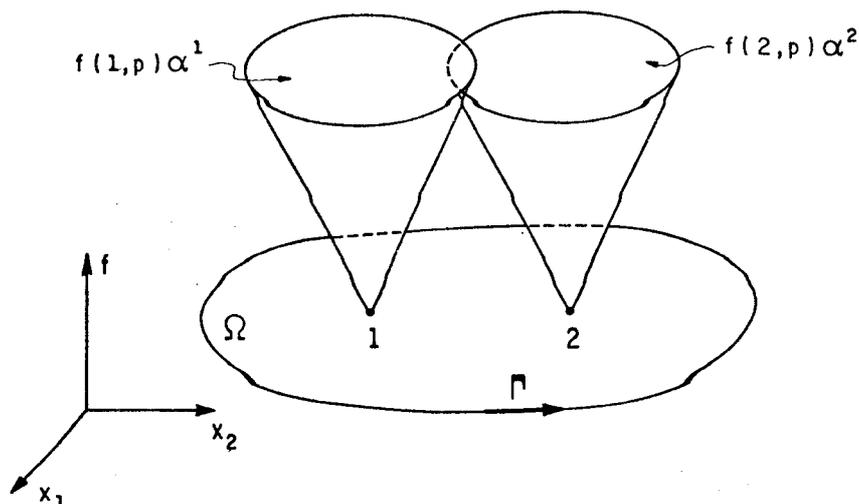


Fig. 5.5 - Superfícies cônicas correspondentes a dois pseudo carregamentos, usadas para a aproximação de  $w(p)$ .

De forma análoga ao já mostrado no caso das equações integrais de deslocamento  $w(q)$  e de sua derivada direcional  $\partial w / \partial m(q)$ , podem agora ser escritas equações integrais para os pseudo-deslocamentos, ou deslocamentos duais,  $\hat{w}(m,p)$  e  $\partial \hat{w} / \partial m(m,p)$ , a partir da equação diferencial (5.45), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{w}(q) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(q,P) \hat{w}(m,P) - M_n^*(q,P) \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}(m,P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}^*(q,P) \hat{w}_{ci}(m,P) = \int_{\Gamma} \left[ w^*(q,P) \hat{V}_n(m,P) + \right. \\ \left. - \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \hat{M}_n(m,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} \hat{R}_{ci}(m,P) w_{ci}^*(q,P) + \\ + \int_{\Omega_f} f(m,p) w^*(q,p) d\Omega_f(p) \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{w}}{\partial m}(q) + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) \hat{w}(m, P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, P) \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}(m, P) \right] d\Gamma(P) + \\
 + \sum_{i=1}^{Nc} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(q, P) \hat{w}_{ci}(m, P) = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) \hat{V}_n(m, P) + \right. \\
 \left. - \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \hat{M}_n(m, P) \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} \hat{R}_{ci}(m, P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(q, P) + \\
 + \int_{\Omega_f} f(m, p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) d\Omega_f(p) \tag{5.50}
 \end{aligned}$$

As equações (5.49) e (5.50) podem ser também escritas de forma que as integrais de domínio fiquem isoladas no primeiro membro, isto é:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f(m, p) w^*(q, p) d\Omega_f(p) = \hat{w}(q) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(q, P) \hat{w}(m, P) + \right. \\
 \left. - M_n^*(q, P) \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}(m, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{Nc} R_{ci}^*(q, P) \hat{w}_{ci}(m, P) + \\
 - \int_{\Gamma} \left[ w^*(q, P) \hat{V}_n(m, P) - \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \hat{M}_n(m, P) \right] d\Gamma(P) - \\
 - \sum_{i=1}^{Nc} \hat{R}_{ci}(m, P) w_{ci}^*(q, P) \tag{5.51}
 \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_f} f(m, p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) d\Omega_f(p) = \frac{\partial \hat{w}}{\partial m}(q) + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) \hat{w}(m, P) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, P) \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}(m, P) \Big] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(q, P) \hat{w}_{ci}(m, P) + \\
 & - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) \hat{V}_n(m, P) - \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \hat{M}_n(m, P) \right\} d\Gamma(P) + \\
 & - \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^{\wedge}(m, P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) \tag{5.52}
 \end{aligned}$$

Embora sejam conhecidos, a partir da discretização do contorno da placa, os deslocamentos e esforços duais poderão ser aproximados pelas mesmas funções aproximadoras usadas para as variáveis reais, para facilitar e simplificar o equacionamento. Desta forma as integrações sobre os elementos darão origem às matrizes  $\tilde{H}$  e  $\tilde{G}$  já conhecidas. Assim, considerando-se todos os nós do contorno, as equações (5.51) e (5.52) podem ser escritas matricialmente como:

$$\{M\}_m = \tilde{H} \{\hat{U}\} - \tilde{G} \{\hat{P}\} \tag{5.53}$$

sendo  $\{M\}_m$ , apenas uma coluna da matriz  $\tilde{M}$  correspondente ao nó dual "m".

Considerando-se todos os nós duais (5.53) fica:

$$\tilde{M} = \tilde{H} \hat{U} - \tilde{G} \hat{P} \tag{5.54}$$

onde, as matrizes  $\hat{U}$  e  $\hat{P}$  contém, respectivamente em cada linha, os deslocamentos e esforços duais correspondentes aos "m" pontos escolhidos.

Substituindo-se a aproximação do deslocamento  $w(p)$ , dada em (5.44), nas integrais de domínio (5.5) e (5.6), obtém-se:

$$K \left[ \int_{\Omega_{gs}} f(m,p) w^*(q,p) d\Omega_{gs}(p) \right] \alpha^m \quad (5.55)$$

$$K \left[ \int_{\Omega_{gs}} f(m,p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q,p) d\Omega_{gs}(p) \right] \alpha^m \quad (5.56)$$

As integrais de domínio (5.55) e (5.56) obtidas de forma dual, analogamente a (5.51) e (5.52) respectivamente, para todos os pontos do contorno, podem ser representadas matricialmente por:

$$K \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\alpha} \quad \text{ou} \quad K [\underset{\sim}{H} \hat{\underset{\sim}{U}} - \underset{\sim}{G} \hat{\underset{\sim}{P}}] \underset{\sim}{\alpha} \quad (5.57)$$

onde,  $\underset{\sim}{\alpha}$  é o vetor que contém os coeficientes  $\alpha^m$ .

Considerando-se a influência da reação da fundação, dada por (5.57) na equação matricial (4.37), obtém-se:

$$\underset{\sim}{H} \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{T} - K \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\alpha} \quad (5.58)$$

Os coeficientes do vetor  $\underset{\sim}{\alpha}$ , podem ser obtidos aplicando-se a equação (5.44) a todos os pontos duais do contorno e domínio da placa, para  $f(m,p)$  dado na equação (5.48), assim:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} = \tilde{F} \tilde{\alpha} \quad (5.59)$$

ou seja:

$$\tilde{\alpha} = \tilde{F}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} \quad (5.60)$$

Substituindo-se o vetor  $\tilde{\alpha}$ , dado em (5.60), na equação (5.58), fica:

$$\tilde{H} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} = \tilde{G} \tilde{P} + \tilde{T} - K \begin{bmatrix} \tilde{M}^c & \tilde{M}^i \end{bmatrix} \tilde{F}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} \quad (5.61)$$

onde,  $\tilde{M}^c$  e  $\tilde{M}^i$  são submatrizes de  $\tilde{M}$ , para pontos do contorno e internos respectivamente.

A equação (5.61), pode ser estendida para pontos internos, de forma análoga à equação (5.41), ou seja:

$$\tilde{U}^i = \tilde{H}' \tilde{U} + \tilde{G}' \tilde{P} + \tilde{T}' - K \begin{bmatrix} \tilde{M}'^c & \tilde{M}'^i \end{bmatrix} \tilde{F}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} \quad (5.62)$$

Agrupando-se as equações (4.61) e (4.62), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} [\tilde{H} + K\tilde{M}^c\tilde{F}^{-1}] & [K\tilde{M}^i\tilde{F}^{-1}] \\ [\tilde{H}' + K\tilde{M}'^c\tilde{F}^{-1}] & [\tilde{I} + K\tilde{M}'^i\tilde{F}^{-1}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{G}' \end{bmatrix} \tilde{P} + \begin{Bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{T}' \end{Bmatrix} \quad (5.63)$$

A equação (5.63), escrita de uma forma mais simples, fica semelhante à equação (5.43), e após a imposição das condições de contorno poderá ser resolvida, obtendo-se

assim, os deslocamentos verticais dos pontos internos e dos nós do contorno da placa.

Pode-se observar que a matriz  $\tilde{M}$  da equação (5.54), contém as matrizes  $\hat{U}$  e  $\hat{P}$ , formadas por deslocamentos e esforços duais, que são determinados a partir do deslocamento dual  $\hat{w}$ , dado em (5.46), e relacionando-se cada ponto nodal "m" com todos os nós do contorno e pontos internos da placa.

### 5.5. Formulação alternativa

Esta formulação, consiste em transformar as integrais de domínio em integrais de contorno, utilizando-se uma aproximação para o deslocamento  $w(p)$ , semelhante à adotada no processo da reciprocidade dual, ou seja:

$$w(p) = f(m,p) \alpha^m \quad (5.44)$$

onde,  $f(m,p)$  seria uma função que represente uma superfície composta por trechos planos, equivalente ao processo de aproximação por células e que não precise, necessariamente, satisfazer a equação diferencial de placas (2.25);  $\alpha^m$ , são coeficientes a serem determinados posteriormente.

Uma função  $f(m,p)$ , com as características acima, foi sugerida inicialmente por VENTURINI [61], da seguinte forma:

$$f(m,p) = |x_1(p) - x_1(m)| + |x_2(p) - x_2(m)| + \\ + |x_1(p) - x_1(m)| |x_2(p) - x_2(m)| \quad (5.64)$$

Posteriormente, CODA [62] mostrou que os termos lineares da função (5.64), em nada contribuem para a precisão da aproximação, bastando-se escrever:

$$f(m,p) = |x_1(p) - x_1(m)| |x_2(p) - x_2(m)| \quad (5.65)$$

cuja forma é mostrada na figura 5.6.

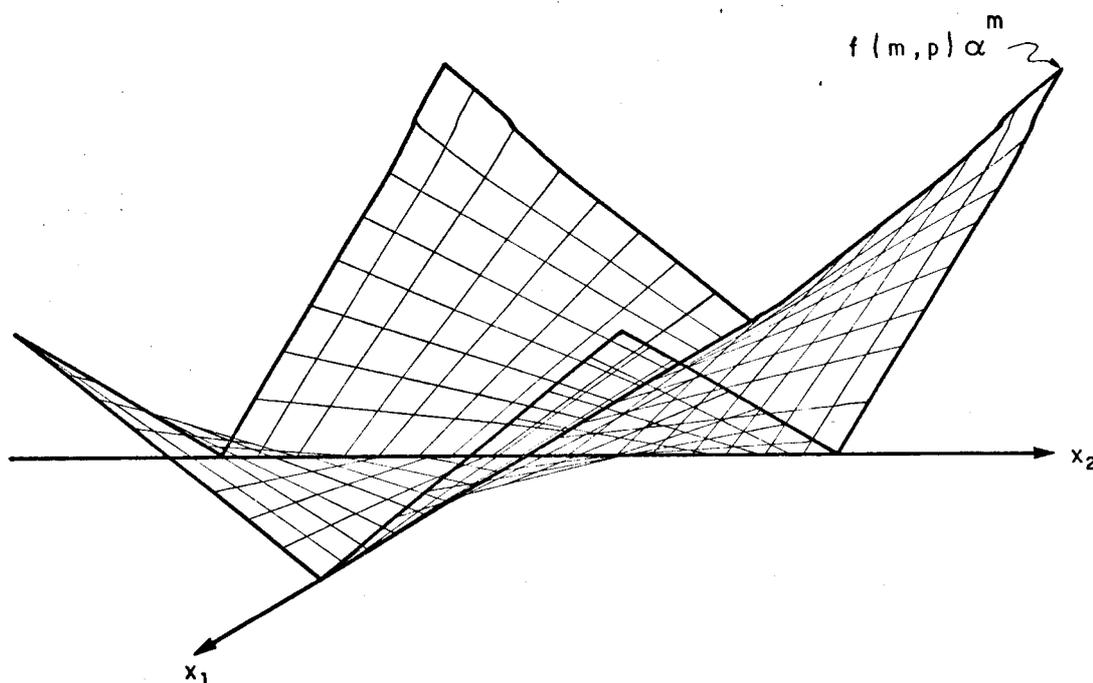


Fig. 5.6 - Gráfico da função  $f(m,p)$ .

Observe-se, após escolhida a função  $f(m,p)$  para aproximar o deslocamento  $w(p)$ , o processo poderia ser tratado de forma análoga ao exposto no item anterior.

Considerando-se o deslocamento  $w(p)$  da integral de domínio (5.5), aproximado pela função  $f(m,p)$ , dada em (5.65), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_{gs}} K w^*(Q,p) w(p) d\Omega_{gs}(p) = \int_{\Omega_{gs}} K w^*(Q,p) f(m,p) \alpha^m d\Omega_{gs}(p)$$

A integral de domínio do segundo membro, pode ser transformada em integrais de contorno, efetuando-se sucessivas integrais por partes até a eliminação completa das integrais de domínio residuais, isto é:

$$\begin{aligned}
 K \int_{\Omega_{gs}} f(m,p) w^*(Q,p) d\Omega_{gs}(p) \alpha^m &= K \left[ \int_{\Gamma_{gs}} f(m,p) C_{\ell}^*(Q,P) n_{\ell} d\Gamma_{gs}(P) + \right. \\
 &- \int_{\Gamma_{gs}} f(m,P) ,_{\ell} D_{\ell s}^*(Q,P) n_s d\Gamma_{gs}(P) + \\
 &\left. + \int_{\Gamma_{gs}} f(m,P) ,_{\ell s} E_{\ell st}^*(Q,P) n_t d\Gamma_{gs}(P) \right] \alpha^m \quad (5.67)
 \end{aligned}$$

-  $\ell, s, t = 1, 2$

onde:

$$f(m,P) ,_{\ell} = \text{sign}(m,P)_{\ell} |x_{3-\ell}(P) - x_{3-\ell}(m)| \quad (5.68)$$

$$f(m,P) ,_{\ell s} = (1 - \delta_{\ell s}) \text{sign}(m,P)_{\ell} \text{sign}(m,P)_s \quad (5.69)$$

sendo:

$$\text{sign}(m,P)_{\ell} = \frac{x_{\ell}(P) - x_{\ell}(m)}{|x_{\ell}(P) - x_{\ell}(m)|} \quad (5.70)$$

e

$$f(m,P) ,_{\ell st} = 0 \quad (5.71)$$

O termo  $C_{\ell}^*(Q,P)$ , é uma primitiva do deslocamento fundamental  $w^*(Q,P)$  dado em (2.76), e pode ser determinado a partir da integral de domínio deste deslocamento.

$$\int_{\Omega} w^*(Q,p) d\Omega(p) = \int_{\theta} \int_r \frac{1}{8\pi D} r^2 (\ln r - \frac{1}{2}) r dr d\theta \quad (5.72)$$

Integrando-se em relação a  $r$ , o segundo membro de (5.71) fica:

$$\int_{\Omega} w^*(Q,p) d\Omega(p) = \int_{\theta} \frac{1}{32\pi D} r^3 (\ln r - \frac{3}{4}) r d\theta \quad (5.73)$$

A partir da figura 5.7, obtém-se a seguinte relação necessária para a mudança de variável:

$$d\Gamma \frac{\partial r}{\partial n} = r d\theta \quad (5.74)$$

sendo:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} = r,_{\ell} n_{\ell} \quad (5.75)$$

Substituindo-se (5.74) em (5.73) obtém-se:

$$\int_{\Omega} w^*(Q,p) d\Omega(p) = \int_{\Gamma} C_{\ell}^*(Q,P) n_{\ell} d\Gamma(P) \quad (5.76)$$

onde,  $C_{\ell}^*(Q,P)$  é dada pela seguinte expressão:

$$C_{\ell}^*(Q,P) = \frac{r^3}{32\pi D} \left( \ln r - \frac{3}{4} \right) r,_{\ell} \quad (5.77)$$

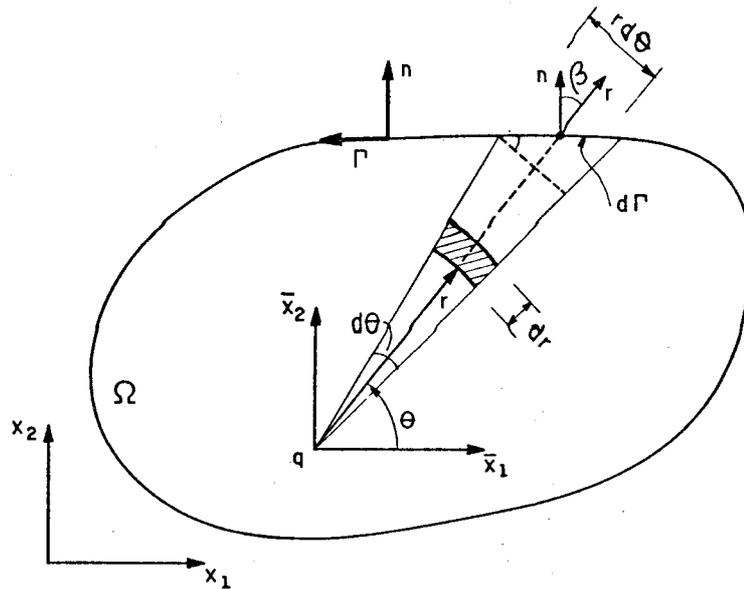


Fig. Relação entre os sistemas de coordenadas  $(n, \Gamma)$  e  $(r, \theta)$ .

Os termos  $D_{\ell_s}^*(Q,P)$  e  $E_{\ell_{st}}^*(Q,P)$  podem ser determinados de forma análoga a  $C_{\ell}^*(Q,P)$ , chegando-se a:

$$D_{\ell_s}^*(Q,P) = \frac{r^4}{160\pi D} \left( \ln r - \frac{19}{20} \right) r,_{\ell} r,_{s} \quad (5.78)$$

$$D_{\ell_s}^*(Q,P) = \frac{r^5}{960\pi D} \left( \ln r - \frac{67}{60} \right) r,_{\ell} r,_{s} r,_{t} \quad (5.79)$$

Pode-se observar, entretanto, que as derivadas de  $f(m,p)$ ;  $f(m,P),_{\ell}$  e  $f(m,P),_{\ell_s}$  dadas em (5.68) e (5.69) respectivamente, não são contínuas em todo o domínio, o que tornaria inválida a aplicação direta da integração por partes na integral do segundo membro de (5.66). Essas descontinuidades podem ser evitadas [62], pois elas ocorrem

nos eixos paralelos aos eixos coordenados que se cruzam nos pontos base "m" (Fig. 5.8), dividindo o domínio em subdomínios, nos quais a função  $f(m,p)$  e suas derivadas são contínuas, podendo-se assim, aplicar a integração por partes em cada um desses subdomínios.

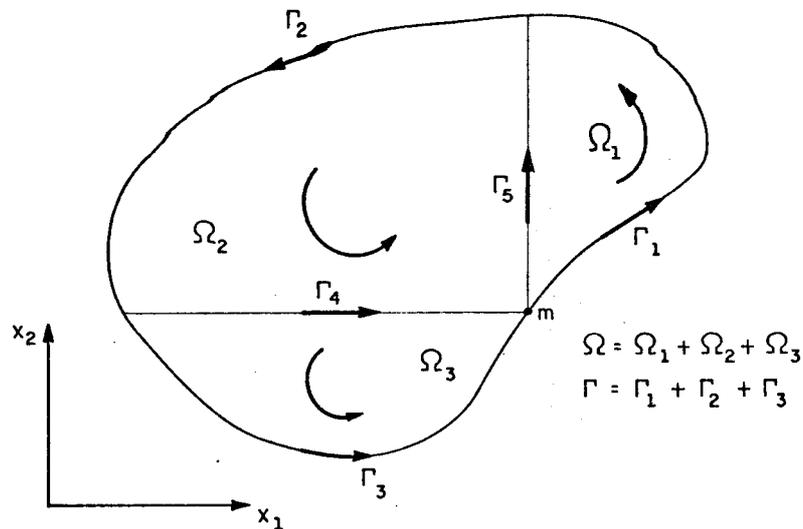


Fig. 5.8 - Divisão do domínio em subdomínios para para um ponto base "m" do contorno.

Considerando-se a figura 5.8 como exemplo, o primeiro membro de (5.66) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} K w^*(Q,p) w(p) d\Omega(p) = K \left[ \int_{\Omega_1} w^*(Q,p_1) w(p_1) d\Omega(p_1) + \int_{\Omega_2} w^*(Q,p_2) w(p_2) d\Omega(p_2) + \int_{\Omega_3} w^*(Q,p_3) w(p_3) d\Omega(p_3) \right] \quad (5.80)$$

As integrais sobre os subdomínios  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$ , agora poderão ser integrados por partes; assim, aproximando-se o deslocamento  $w(p)$  dado em (5.44), na equação (5.80), fica:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} K w^*(Q, p) f(m, p) \alpha^m d\Omega(p) = & K \left\{ \int_{\Gamma} f(m, P) C_{\ell}^*(Q, P) n_{\ell} d\Gamma(P) + \right. \\
 & - \int_{\Gamma} f(m, P)_{, \ell} D_{\ell s}^*(Q, P) n_s d\Gamma(P) + \int_{\Gamma} f(m, P)_{, \ell s} E_{\ell s t}^*(Q, P) n_t d\Gamma(P) + \\
 & + \int_{\Gamma_4} \left[ f(m, P_2)_{, \ell} - f(m, P_3)_{, \ell} \right] D_{\ell s}^*(Q, P) n_s d\Gamma(P) + \\
 & + \int_{\Gamma_5} \left[ f(m, P_1)_{, \ell} - f(m, P_2)_{, \ell} \right] D_{\ell s}^*(Q, P) n_s d\Gamma(P) + \\
 & + \int_{\Gamma_4} \left[ f(m, P_2)_{, \ell s} - f(m, P_3)_{, \ell s} \right] E_{\ell s t}^*(Q, P) n_t d\Gamma(P) + \\
 & \left. + \int_{\Gamma_5} \left[ f(m, P_1)_{, \ell s} - f(m, P_2)_{, \ell s} \right] E_{\ell s t}^*(Q, P) n_t d\Gamma(P) \right\} \alpha^m \quad (5.81)
 \end{aligned}$$

onde, o índice do ponto "P" indica o subdomínio ao qual pertence a função (Fig.5.9) ;  $\Gamma_4$  e  $\Gamma_5$  , são "contornos auxiliares" que separam os subdomínios.

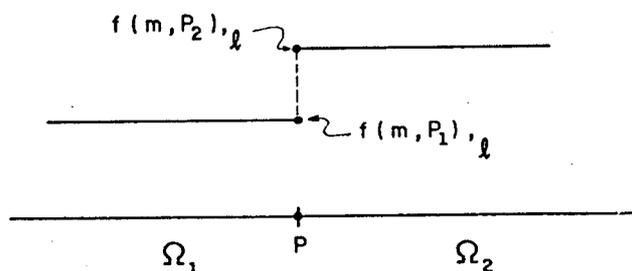


Fig. 5.9 - Descontinuidade da função  $f(m, P)_{, \ell}$ .

Dependendo da posição do ponto base "m", o domínio  $\Omega$  pode ser dividido em até 4 subdomínios, obtendo-se para cada caso, uma expressão análoga a (5.81).

Após a transformação da integral de domínio (5.5) em integrais de contorno, as funções  $f(m,P)$ ,  $f(m,P)_{,l}$  e  $f(m,P)_{,ls}$  podem ser aproximadas linearmente sobre os elementos do contorno, de forma análoga aos esforços e deslocamentos reais (item 4.3).

Aproximando-se a função  $f(m,P)$ , mostrada na figura (5.10), tem-se:

$$f(m,P) = \phi_1(P)f(m,P_1) + \phi_2(P)f(m,P_2) \quad (5.82)$$

onde, as funções aproximadoras  $\phi_1(P)$  e  $\phi_2(P)$  são dadas por (4.15.a) e (4.15.b);  $f(m,P_1)$  e  $f(m,P_2)$  são valores que a função  $f(m,P)$ , com base no ponto "m", assume nos nós locais 1 e 2 respectivamente, do elemento  $\Gamma_j$ .

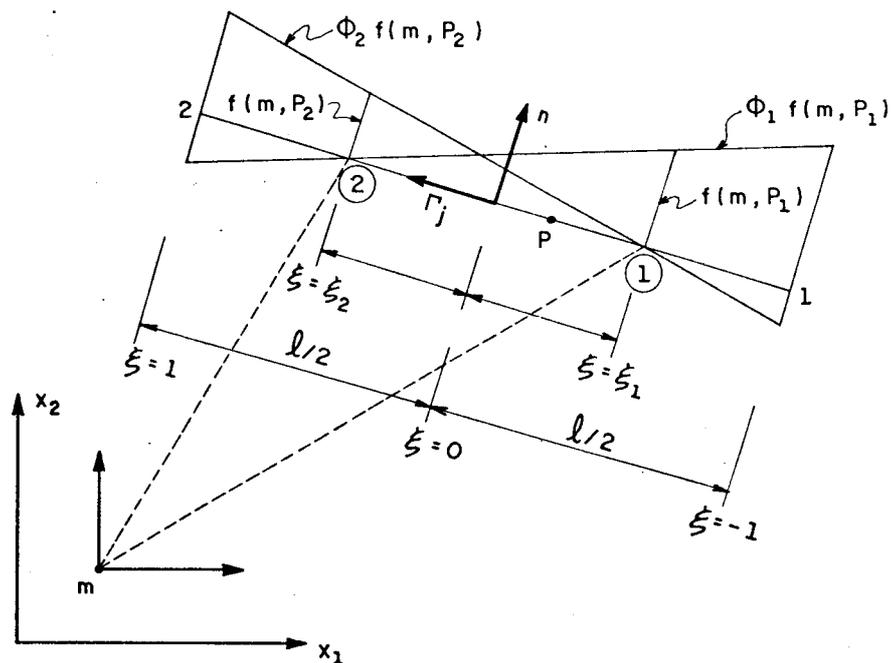


Fig. 5.10 - Aproximação linear da função  $f(m,P)$ .

De forma análoga a (5.82), as aproximações para as derivadas de  $f(m,P)$  ficam:

$$f(m,P),_{\ell} = \phi_1(P)f(m,P_1),_{\ell} + \phi_2(P)f(m,P_2),_{\ell} \quad (5.83)$$

$$f(m,P),_{\ell_s} = \phi_1(P)f(m,P_1),_{\ell_s} + \phi_2(P)f(m,P_2),_{\ell_s} \quad (5.84)$$

Na figura 5.10, supõe-se que o elemento  $\Gamma_j$  se encontra em uma região onde a função  $f(m,P)$  e suas derivadas são contínuas.

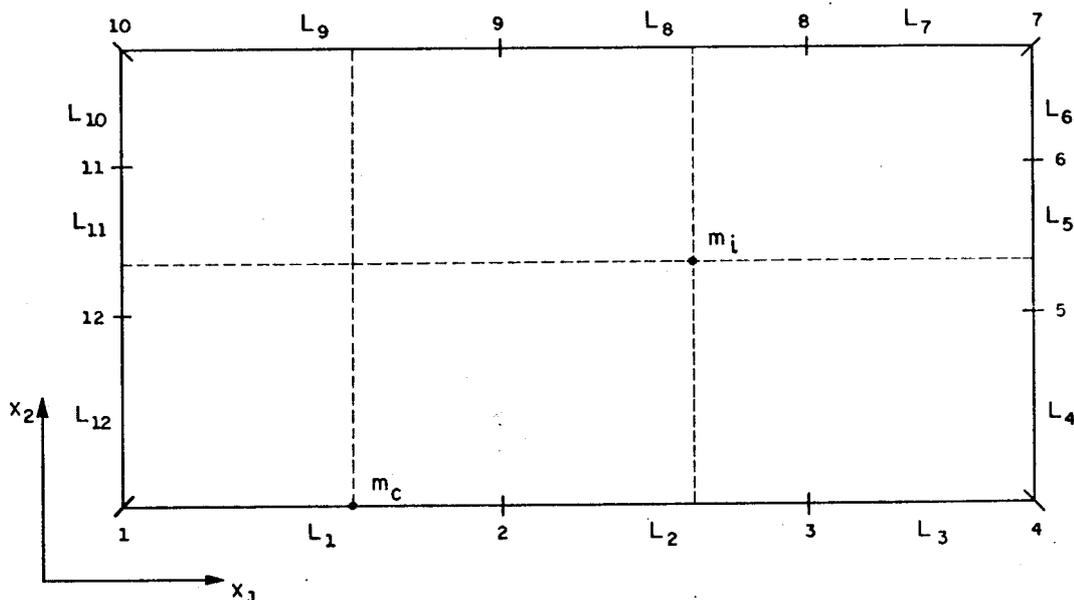


Fig. 5.11 - Posições não adequadas de pontos base.

Existem casos em que podem ser introduzidos erros de aproximação da função  $f(m,P)$  e suas derivadas na integração de alguns elementos [62]; isto acontece quando o ponto base "m" não está situado na interseção de linhas retas, paralelas aos eixos coordenados, que unem nós geométricos dos elementos de contorno. É o caso, por exemplo, do ponto

base interno " $m_i$ " da placa mostrada na figura 5.11, na qual os elementos  $L_2$ ,  $L_5$ ,  $L_8$  e  $L_{11}$ , ficam em regiões onde as derivadas da função  $f(m, P)$  são descontínuas. O mesmo acontece com os elementos  $L_4$  e  $L_9$ , em relação ao ponto base " $m_c$ " situado no contorno da placa.

Na figura 5.12, são mostradas as posições mais adequadas dos pontos bases internos, para evitar-se a introdução do tipo de erros de aproximação já mencionado, utilizando-se a placa da figura anterior.

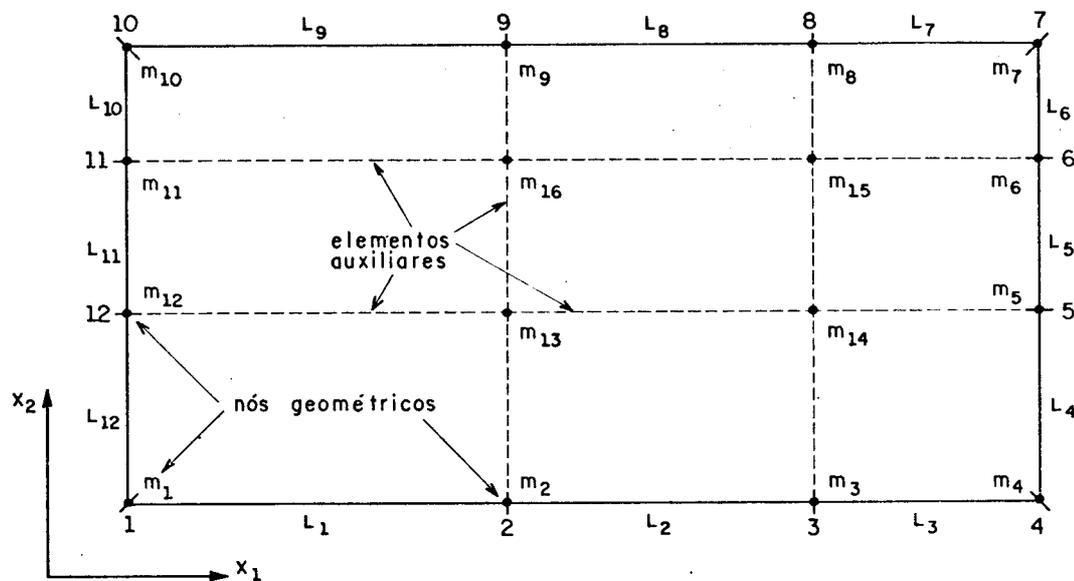


Fig. 5.12 - Posições adequadas de pontos base internos e de contorno.

No caso de pontos base situados no contorno da placa, a posição mais adequada do mesmo é, conseqüentemente, nos próprios nós geométricos dos elementos (fig. 5.12).

Pode-se observar que, na figura 5.12 aparecem "elementos auxiliares" unindo os pontos internos com os de contorno. Esses "elementos auxiliares" separam os subdomínios formados pelos próprios pontos base, e são necessários na transformação das integrais desses

subdomínios (expressão 5.80) em integrais de contorno (expressão 5.81).

Com a aproximação da função  $f(m,P)$  e de suas derivadas, e também a mudança da variável  $\Gamma$  para  $\xi$ , cada uma das integrais correspondentes a reação da fundação pode ser escrita explicitamente da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} f(m,P) C_{\ell}^*(Q,P) n_{\ell} d\Gamma(P) = \sum_{j=1}^{N_{te}} \int_{-1}^1 \frac{\ell}{2} \left[ \phi_1(P) f(m,P_1) + \right. \\ \left. + \phi_2(P) f(m,P_2) \right] C^*(Q,P) d\xi(P) \quad (5.85)$$

$$\int_{\Gamma} f(m,P) D_{\ell_s}^*(Q,P) n_s d\Gamma(P) = \sum_{j=1}^{N_{te}} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{\ell}{2} \left[ \phi_1(P) f(m,P_1)_{,1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \phi_2(P) f(m,P_2)_{,1} \right] D_1^*(Q,P) d\xi(P) + \int_{-1}^1 \frac{\ell}{2} \left[ \phi_1(P) f(m,P_1)_{,2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \phi_2(P) f(m,P_2)_{,2} \right] D^*(Q,P) d\xi(P) \right\} \quad (5.86)$$

$$\int_{\Gamma} f(m,P) E_{\ell_{st}}^*(Q,P) n_t d\Gamma(P) = \sum_{j=1}^{N_{te}} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{\ell}{2} \left[ \phi_1(P) f(m,P_1)_{,12} + \right. \right. \\ \left. \left. + \phi_2(P) f(m,P_2)_{,12} \right] E_{12}^*(Q,P) d\xi(P) + \int_{-1}^1 \frac{\ell}{2} \left[ \phi_1(P) f(m,P_1)_{,21} + \right. \right. \\ \left. \left. + \phi_2(P) f(m,P_2)_{,21} \right] E_{21}^*(Q,P) d\xi(P) \right\} \quad (5.87)$$

onde:

$$C^*(Q,P) = C_{\ell}^*(Q,P)n_{\ell} \quad (5.88)$$

$$D_{\ell}^*(Q,P) = D_{\ell_s}^*(Q,P)n_s \quad (5.89)$$

$$C_{\ell_{st}}^*(Q,P) = E_{\ell_{st}}^*(Q,P)n_t \quad (5.90)$$

Integrando-se todos os elementos "Nte" de cada uma das integrais anteriores (5.85), (5.86) e (5.87), em relação a todos os pontos "Q" e todas as bases "m", a expressão (5.67) escrita matricialmente fica:

$$K \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\alpha} = K [ \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{f} - \underset{\sim}{D1} \underset{\sim}{f1} - \underset{\sim}{D2} \underset{\sim}{f2} + \underset{\sim}{E12} \underset{\sim}{f12} ] \underset{\sim}{\alpha} \quad (5.91)$$

onde, as matrizes  $\underset{\sim}{C}$ ,  $\underset{\sim}{D1}$ ,  $\underset{\sim}{D2}$  e  $\underset{\sim}{E12}$  são obtidas a partir da integração de  $C_{\ell}^*(Q,P)$  e  $E_{\ell_{st}}^*(Q,P)$ , sobre todos os elementos "Nte" em relação a todos os pontos de carregamento "Q"; as matrizes  $\underset{\sim}{f}$ ,  $\underset{\sim}{f1}$ ,  $\underset{\sim}{f2}$  e  $\underset{\sim}{f12}$  são obtidas aplicando-se as funções  $f(m,P)$ ,  $f(m,P)_{\ell}$  e  $f(m,P)_{\ell_s}$  de todas as bases "Nb" em relação a todos os elementos "Nte".

As matrizes  $\underset{\sim}{C}$ ,  $\underset{\sim}{D1}$ ,  $\underset{\sim}{D2}$  e  $\underset{\sim}{E12}$  da equação (5.91), têm dimensões  $(2Nn + Nc) \times (Nte)$ , enquanto que as matrizes  $\underset{\sim}{f}$ ,  $\underset{\sim}{f1}$ ,  $\underset{\sim}{f2}$  e  $\underset{\sim}{f12}$ , têm dimensões  $(Nte) \times (Nb)$ . Assim, pode-se concluir que a matriz  $\underset{\sim}{M}$  tem dimensões  $(2Nn + Nc) \times (Nb)$ . E o vetor  $\underset{\sim}{\alpha}$  é obtido de forma análoga ao processo da reciprocidade dual, isto é:

$$\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{F}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{U_i} \end{array} \right\} \quad (5.92)$$

onde, a matriz  $\underset{\sim}{F}$  é obtida a partir da função  $f(m,P)$ , relacionando-se as bases entre si, e tem dimensões  $(Nb) \times (Nb)$ .

Desta forma, poderá ser incluída a influência da reação da fundação, dada em 5.91, na equação matricial (5.48), Obtendo-se:

$$\tilde{H} \tilde{U} = \tilde{G} \tilde{P} + \tilde{T} - K \tilde{M} \tilde{\alpha} \quad (5.93)$$

ou

$$\tilde{H} \tilde{U} = \tilde{G} \tilde{P} + \tilde{T} - K \begin{bmatrix} \tilde{M}^c & \tilde{M}^i \end{bmatrix} F^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} \quad (5.94)$$

Analogamente à equação (5.94) para pontos internos obtém-se:

$$\tilde{U}^i = \tilde{H}' \tilde{U} + \tilde{G}' \tilde{P} + \tilde{T}' - K \begin{bmatrix} \tilde{M}'^i \end{bmatrix} \tilde{F}^{-1} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} \quad (5.95)$$

Agrupando-se as equações (5.94) e (5.95), obtém-se uma equação matricial idêntica à obtida no processo da reciprocidade dual, sendo que apenas as matrizes  $\tilde{M}$  e  $\tilde{F}$  são diferentemente definidas.

$$\begin{bmatrix} [\tilde{H} + K \tilde{M}^c \tilde{F}^{-1}] & [K \tilde{M}^i \tilde{F}^{-1}] \\ [\tilde{H}' + K \tilde{M}'^c \tilde{F}^{-1}] & [I + K \tilde{M}'^i \tilde{F}^{-1}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G} \\ \tilde{G}' \end{bmatrix} \tilde{P} + \begin{Bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{T}' \end{Bmatrix}$$

(5.96)

Embora a formulação acima tenha enfatizado o uso de pontos internos para aproximar o deslocamento no domínio da placa, verificou-se que, no presente caso, a definição de

bases internas não é necessária. A aproximação com bases tomadas apenas no contorno, já oferece uma boa aproximação para este caso. Assim, considerando-se apenas pontos base no contorno, a equação (5.96) fica:

$$\begin{bmatrix} H \\ N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ N \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

Após a imposição das condições de contorno da placa, na equação (5.97), o sistema pode ser resolvido em termos de deslocamentos e esforços do contorno.

Seguindo-se o mesmo procedimento proposto neste item, poderão ser obtidos deslocamentos e esforços internos após a solução de (5.97).

## 5.6. Aplicações numéricas

Neste item são apresentadas algumas aplicações da formulação alternativa para análise de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno.

O contato entre a placa e a fundação é admitido perfeito, embora em certos casos existam tensões de tração atuantes na interface

São adotadas as mesmas constantes adotadas no item 4.10 do capítulo anterior. O módulo de reação da fundação  $K$  é igual a  $1 \text{ kgf/cm}^3$  para todos os exemplos.

Os pontos base adotados para a formulação alternativa estão situados apenas no contorno e são em número igual aos elementos do contorno da placa.

As tensões de tração são indicadas com sinal positivo.

### 5.6.1. Placa com carga centrada

Neste exemplo é analisada uma placa quadrada (Fig. 5.13), submetida a uma carga vertical de 40 tf, distribuída em uma pequena área central. Na figura 5.14 são mostradas a discretização das células internas e do contorno, bem como os pontos em análise. Os resultados das reações da fundação obtidas pelas três formulações, ou seja, usando-se células internas [60], o processo da reciprocidade dual [60] e a formulação alternativa, são apresentados nas tabelas 5.1 5.2 e 5.3 respectivamente, para diferentes valores da espessura  $h$  da placa e para duas relações de  $u/a$ . Estes resultados são comparados com valores teóricos, considerando-se a rigidez da placa infinita. Para o caso da reciprocidade dual é utilizada a discretização mostrada na figura 5.15. Pode-se observar nas tabelas 5.1 e 5.3, que a distribuição de tensões na fundação é praticamente constante e próxima do valor teórico a partir de  $h=30\text{cm}$  para as duas relações  $u/a$ .

Na tabela 5.4 são apresentados valores do momento fletor, obtidos usando-se células internas e a formulação alternativa, para duas relações  $u/a$  e para a espessura  $h$  variando de 10 a 50cm.

Na figura 5.16 são mostrados os momentos fletores  $(M_x)_{y=0}$  e  $(M_x)_{x=0}$ , obtidos pela solução analítica [64] (REF.A) e a formulação alternativa, considerando-se o módulo de reação da fundação  $K$ , pequeno e a altura da placa infinita. Neste caso, a placa é discretizada com 32 elementos iguais, embora com 16 elementos já tenha apresentado boa aproximação. Observou-se que a variação do momento fletor máximo não é significativa para diferentes valores de  $K$ , como é mostrado na tabela 5.5.

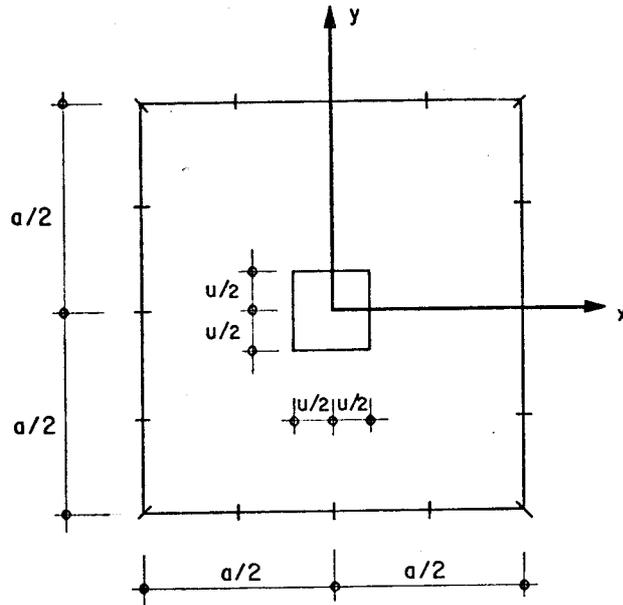


Fig. 5.13 - Geometria da placa para carga centrada

Tabela 5.1 - Reações do solo para carga centrada.

| PONTO | u/a | VALORES DA REAÇÃO DO SOLO (kgf/cm <sup>2</sup> ) |       |       |       |       |                  |
|-------|-----|--|-------|-------|-------|-------|------------------|
|       |     | USANDO CÉLULAS                                   |       |       |       |       | VALORES TEÓRICOS |
|       |     | h=10   | h=20  | h=30  | h=40  | h=50  | CASO RÍGIDO      |
| 1     | 0,1 | -0,57  | -0,94 | -0,98 | -0,99 | -1,00 | -1,00            |
|       | 0,2 | -0,58  | -0,94 | -0,98 | -0,99 | -1,00 | -1,00            |
| 2     | 0,1 | -0,80  | -0,97 | -0,99 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
|       | 0,2 | -0,81  | -0,97 | -0,99 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
| 3     | 0,1 | -1,05  | -1,01 | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
|       | 0,2 | -1,05  | -1,01 | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
| 4     | 0,1 | -0,91  | -0,99 | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
|       | 0,2 | -0,92  | -0,99 | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
| 5     | 0,1 | -1,19  | -1,03 | -1,01 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
|       | 0,2 | -1,19  | -1,03 | -1,01 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
| 6     | 0,1 | -1,42  | -1,06 | -1,02 | -1,01 | -1,01 | -1,00            |
|       | 0,2 | -1,39  | -1,05 | -1,02 | -1,01 | -1,01 | -1,00            |

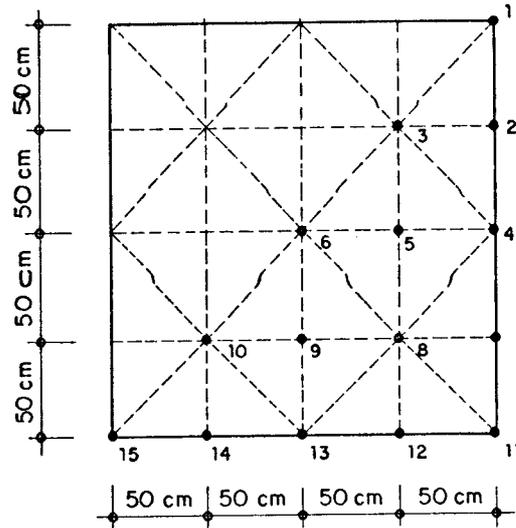


Fig. 5.14 - Definição das células e pontos em análise.

Tabela 5.2 - Reações do solo para carga centrada.

| PONTO | u/a | VALORES DA REAÇÃO DO SOLO (kgf/cm <sup>2</sup> ) |       |       |       |       |                  |
|-------|-----|--|-------|-------|-------|-------|------------------|
|       |     | RECIPROCIDADE DUAL                               |       |       |       |       | VALORES TEÓRICOS |
|       |     | h=10   | h=20  | h=30  | h=40  | h=50  | CASO RÍGIDO      |
| 1     | 0,1 | -0,49  | -0,88 | -0,93 | -0,96 | -0,97 | -1,00            |
|       | 0,2 | -0,50  | -0,88 | -0,93 | -0,96 | -0,97 | -1,00            |
| 2     | 0,1 | -0,69  | -0,91 | -0,94 | -0,96 | -0,97 | -1,00            |
|       | 0,2 | -0,70  | -0,91 | -0,94 | -0,96 | -0,97 | -1,00            |
| 3     | 0,1 | -0,98  | -0,95 | -0,95 | -0,96 | -0,98 | -1,00            |
|       | 0,2 | -0,98  | -0,95 | -0,95 | -0,96 | -0,98 | -1,00            |
| 4     | 0,1 | -0,80  | -0,92 | -0,94 | -0,96 | -0,97 | -1,00            |
|       | 0,2 | -0,80  | -0,92 | -0,94 | -0,96 | -0,97 | -1,00            |
| 5     | 0,1 | -1,16  | -0,98 | -0,96 | -0,96 | -0,98 | -1,00            |
|       | 0,2 | -1,16  | -0,98 | -0,96 | -0,96 | -0,98 | -1,00            |
| 6     | 0,1 | -1,37  | -1,00 | -0,97 | -0,97 | -0,98 | -1,00            |
|       | 0,2 | -1,34  | -1,00 | -0,96 | -0,97 | -0,98 | -1,00            |

Tabela 5.3 - Reações do solo para carga centrada.

| PONTO | u/a | VALORES DA REAÇÃO DO SOLO (kgf/cm <sup>2</sup> ) |       |       |       |       |                  |
|-------|-----|--|-------|-------|-------|-------|------------------|
|       |     | FORMULAÇÃO ALTERNATIVA                           |       |       |       |       | VALORES TEÓRICOS |
|       |     | h=10   | h=20  | h=30  | h=40  | h=50  | CASO RÍGIDO      |
| 1     | 0,1 | -0,52  | -0,93 | -0,98 | -0,99 | -1,00 | -1,00            |
|       | 0,2 | -0,54  | -0,94 | -0,98 | -0,99 | -1,00 | -1,00            |
| 2     | 0,1 | -0,80  | -0,97 | -0,99 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
|       | 0,2 | -0,81  | -0,97 | -0,99 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
| 3     | 0,1 | -1,06  | -1,01 | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
|       | 0,2 | -1,05  | -1,01 | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
| 4     | 0,1 | -0,92  | -0,99 | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
|       | 0,2 | -0,93  | -0,99 | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
| 5     | 0,1 | -1,20  | -1,03 | -1,01 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
|       | 0,2 | -1,20  | -1,03 | -1,01 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
| 6     | 0,1 | -1,44  | -1,06 | -1,02 | -1,01 | -1,00 | -1,00            |
|       | 0,2 | -1,40  | -1,05 | -1,02 | -1,01 | -1,00 | -1,00            |

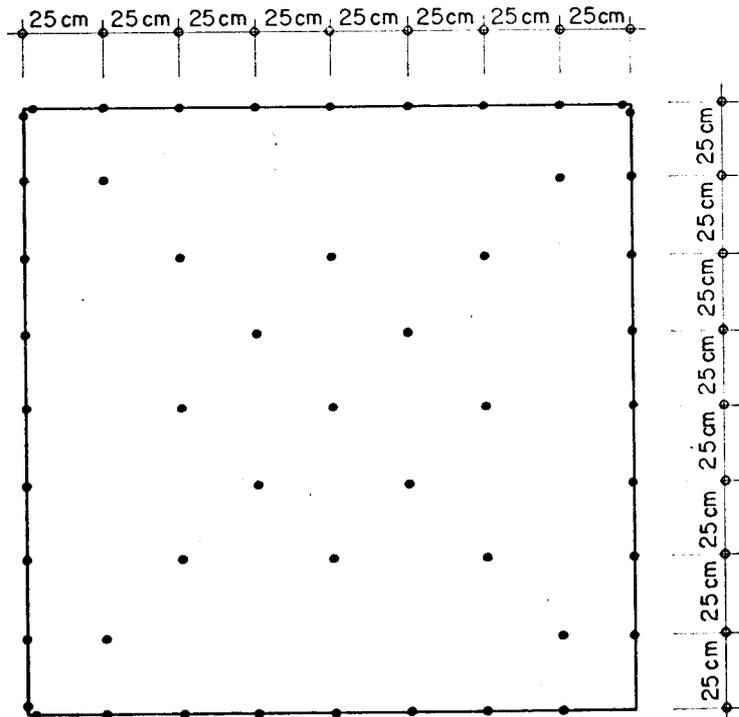


Fig. 5.15 - Discretização do contorno e pontos duais.

Tabela 5.4 - Momentos fletores para carga centrada.

| PONTO | u/a | h  | USANDO CÉLULAS |                | FORMULAÇÃO ALTERNATIVA |                |
|-------|-----|----|----------------|----------------|------------------------|----------------|
|       |     |    | M <sub>x</sub> | M <sub>y</sub> | M <sub>x</sub>         | M <sub>y</sub> |
| 3     | 0,1 | 10 | 1128           | 1134           | 1172                   | 1172           |
|       |     | 20 | 1277           | 1297           | 1338                   | 1338           |
|       |     | 30 | 1302           | 1327           | 1358                   | 1358           |
|       |     | 40 | 1338           | 1340           | 1362                   | 1362           |
|       |     | 50 | 1365           | 1371           | 1364                   | 1364           |
|       | 0,2 | 10 | 1121           | 1125           | 1160                   | 1160           |
|       |     | 20 | 1269           | 1285           | 1322                   | 1322           |
|       |     | 30 | 1284           | 1314           | 1340                   | 1340           |
|       |     | 40 | 1324           | 1322           | 1345                   | 1345           |
|       |     | 50 | 1349           | 1354           | 1347                   | 1347           |
| 5     | 0,1 | 10 | 1050           | 3221           | 1032                   | 3294           |
|       |     | 20 | 1247           | 3528           | 1219                   | 3593           |
|       |     | 30 | 1271           | 3583           | 1241                   | 3627           |
|       |     | 40 | 1275           | 3630           | 1247                   | 3634           |
|       |     | 50 | 1278           | 3707           | 1251                   | 3635           |
|       | 0,2 | 10 | 1131           | 3112           | 1109                   | 3177           |
|       |     | 20 | 1319           | 3406           | 1291                   | 3469           |
|       |     | 30 | 1337           | 3463           | 1313                   | 3502           |
|       |     | 40 | 1348           | 3506           | 1319                   | 3509           |
|       |     | 50 | 1352           | 3583           | 1323                   | 3510           |
| 6     | 0,1 | 10 | 9773           | 9773           | 9825                   | 9825           |
|       |     | 20 | 10124          | 10129          | 10154                  | 10154          |
|       |     | 30 | 10178          | 10176          | 10192                  | 10192          |
|       |     | 40 | 10205          | 10204          | 10201                  | 10201          |
|       |     | 50 | 10236          | 10247          | 10205                  | 10205          |
|       | 0,2 | 10 | 6907           | 6905           | 6947                   | 6947           |
|       |     | 20 | 7241           | 7243           | 7267                   | 7267           |
|       |     | 30 | 7294           | 7290           | 7304                   | 7304           |
|       |     | 40 | 7319           | 7317           | 7313                   | 7313           |
|       |     | 50 | 7349           | 7360           | 7317                   | 7317           |

Tabela 5.5 - Momentos fletores máximos.

| MOMENTO FLETOR MÁXIMO |           |                                |
|-----------------------|-----------|--------------------------------|
| $K = 1$               | $K = 15$  | VALOR TEÓRICO PARA $K$ PEQUENO |
| $0,183 P$             | $0,180 P$ | $0,186 P$                      |

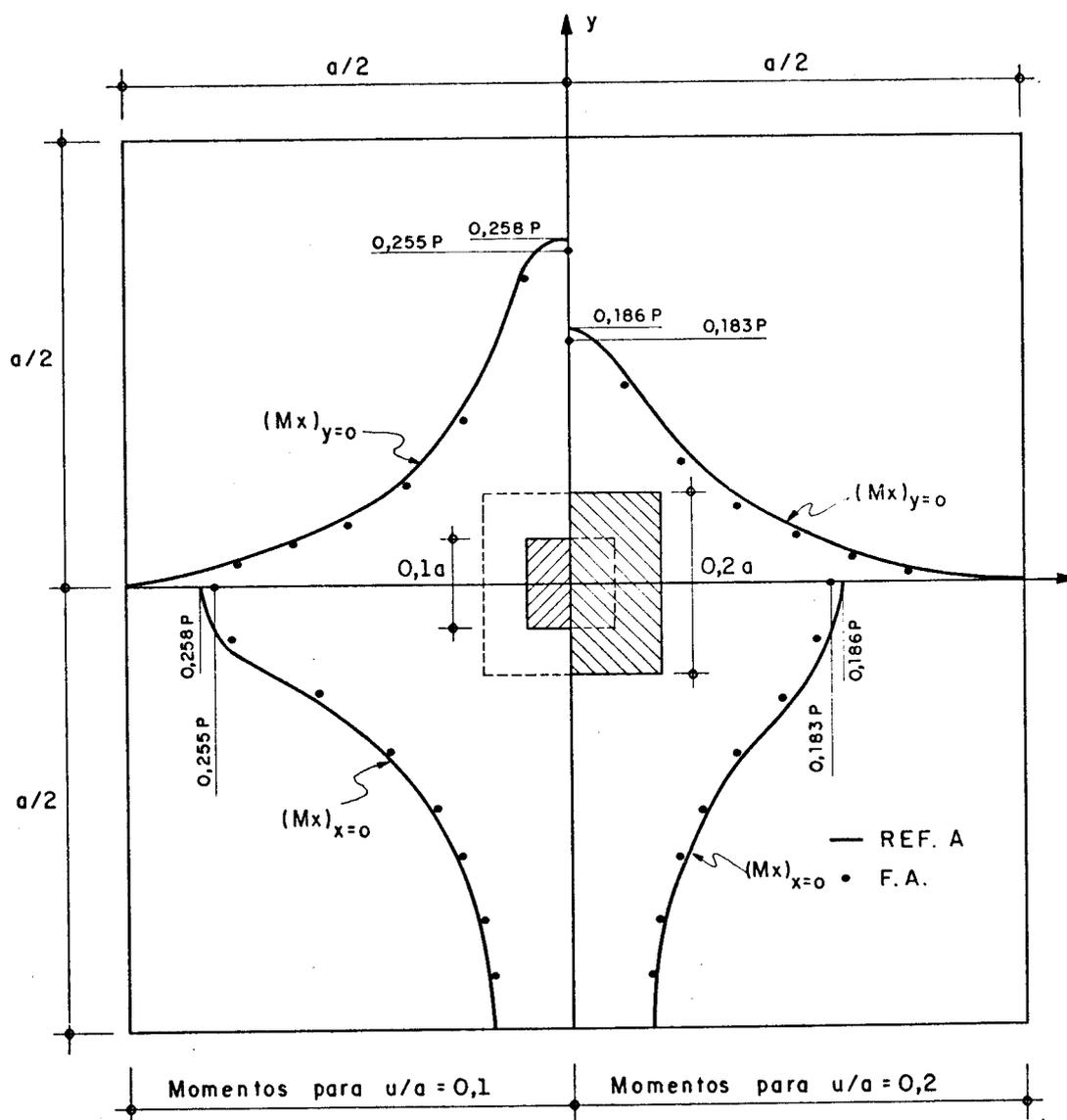


Fig. 5.16 - Momentos fletores para placa com carga centrada.

### 5.6.2. Placa com carga excêntrica

Utilizando-se a mesma geometria e discretização do exemplo anterior, aqui a carga vertical de 40 tf é excêntrica (fig. 5.18) e a relação  $u/a=0,2$ .

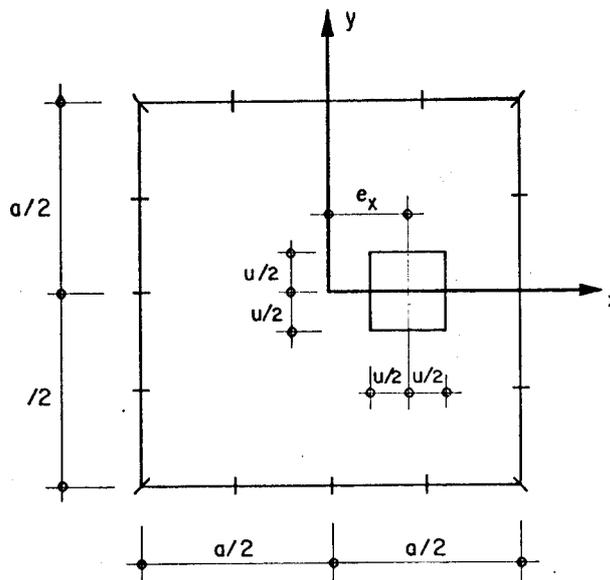


Fig. 5.18 - Geometria da placa para carga com uma excentricidade.

Inicialmente, com uma excentricidade de  $e_x=30\text{cm}$ , aparecem apenas tensões de compressão na fundação. Para uma excentricidade  $e_x=50\text{cm}$ , resultam tensões de tração e compressão. Nas tabelas 5.6, 5.7 e 5.8 são apresentados os resultados obtidos utilizando-se células internas, o processo da reciprocidade dual e a formulação alternativa respectivamente, e são comparados com valores exatos.

Tabela 5.6 - Reações do solo para carga com uma excentricidade.

| $e_x$ | PONTO | VALORES DA REAÇÃO DO SOLO (kgf/cm <sup>2</sup> ) |       |       |       |                  |       |
|-------|-------|--|-------|-------|-------|------------------|-------|
|       |       | USANDO CÉLULAS                                   |       |       |       | VALORES TEÓRICOS |       |
|       |       | h=10   | h=20  | h=30  | h=40  | CASO RÍGIDO      |       |
| 30cm  | 1     | -1,43  | -1,84 | -1,88 | -1,89 | -1,90            |       |
|       | 2     | -1,78  | -1,88 | -1,90 | -1,90 | -1,90            |       |
|       | 3     | -1,52  | -1,46 | -1,45 | -1,45 | -1,45            |       |
|       | 4     | -1,97  | -1,88 | -1,90 | -1,90 | -1,90            |       |
|       | 5     | -1,73  | -1,49 | -1,46 | -1,46 | -1,45            |       |
|       | 6     | -1,30  | -1,04 | -1,01 | -1,01 | -1,00            |       |
|       | 9     | -1,12  | -1,02 | -1,01 | -1,00 | -1,00            |       |
|       | 10    | -0,57  | -0,55 | -0,55 | -0,55 | -0,55            |       |
|       | 12    | -1,19  | -1,41 | -1,44 | -1,45 | -1,45            |       |
|       | 13    | -0,84  | -0,98 | -0,99 | -1,00 | -1,00            |       |
|       | 14    | -0,37  | -0,53 | -0,54 | -0,55 | -0,55            |       |
|       | 15    | +0,154   | -0,06 | -0,09 | -0,10 | -0,10            |       |
|       | 50cm  | 1  | -2,06 | -2,44 | -2,48 | -2,49            | -2,50 |
|       |       | 2  | -2,54 | -2,51 | -2,50 | -2,50            | -2,50 |
|       |       | 3  | -1,91 | -1,76 | -1,75 | -1,75            | -1,75 |
| 4     |       | -2,82  | -2,55 | -2,51 | -2,50 | -2,50            |       |
| 5     |       | -2,07  | -1,79 | -1,76 | -1,75 | -1,75            |       |
| 6     |       | -1,18  | -1,02 | -1,01 | -1,00 | -1,00            |       |
| 9     |       | -1,02  | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |       |
| 10    |       | -0,26  | -0,25 | -0,25 | -0,25 | -0,25            |       |
| 12    |       | -1,39  | -1,70 | -1,74 | -1,74 | -1,75            |       |
| 13    |       | -0,72  | -0,96 | -0,99 | -1,00 | -1,00            |       |
| 14    |       | -0,06  | -0,22 | -0,24 | -0,25 | -0,25            |       |
| 15    |       | +0,60  | +0,52 | +0,50 | +0,50 | +0,50            |       |

Tabela 5.7 - Reações do solo para carga com uma excentricidade.

| e <sub>x</sub> | PONTO | VALORES DA REAÇÃO DO SOLO (kgf/cm <sup>2</sup> ) |       |       |       |                  |       |
|----------------|-------|--|-------|-------|-------|------------------|-------|
|                |       | RECIPROCIDADE DUAL                               |       |       |       | VALORES TEÓRICOS |       |
|                |       | h=10   | h=20  | h=30  | h=40  | CASO RÍGIDO      |       |
| 30cm           | 1     | -1,07  | -1,40 | -1,45 | -1,46 | -1,90            |       |
|                | 2     | -1,37  | -1,45 | -1,46 | -1,47 | -1,90            |       |
|                | 3     | -1,42  | -1,24 | -1,22 | -1,22 | -1,45            |       |
|                | 4     | -1,55  | -1,48 | -1,47 | -1,47 | -1,90            |       |
|                | 5     | -1,59  | -1,26 | -1,22 | -1,22 | -1,45            |       |
|                | 6     | -1,25  | -0,99 | -0,96 | -0,96 | -1,00            |       |
|                | 9     | -1,08  | -0,96 | -0,95 | -0,96 | -1,00            |       |
|                | 10    | -0,57  | -0,66 | -0,68 | -0,70 | -0,55            |       |
|                | 12    | -0,91  | -1,16 | -1,19 | -1,21 | -1,45            |       |
|                | 13    | -0,74  | -0,92 | -0,94 | -0,96 | -1,00            |       |
|                | 14    | -0,44  | -0,65 | -0,68 | -0,70 | -0,55            |       |
|                | 15    | -0,04  | -0,36 | -0,41 | -0,44 | -0,10            |       |
|                | 50cm  | 1  | -1,40 | -1,77 | -1,80 | -1,81            | -2,50 |
|                |       | 2  | -1,92 | -1,83 | -1,82 | -1,82            | -2,50 |
|                |       | 3  | -1,63 | -1,42 | -1,39 | -1,39            | -1,75 |
| 4              |       | -2,20  | -1,87 | -1,83 | -1,82 | -2,50            |       |
| 5              |       | -1,87  | -1,45 | -1,40 | -1,40 | -1,75            |       |
| 6              |       | -1,13  | -0,97 | -0,96 | -0,96 | -1,00            |       |
| 9              |       | -0,90  | -0,94 | -0,95 | -0,96 | -1,00            |       |
| 10             |       | -0,31  | -0,47 | -0,50 | -0,53 | -0,25            |       |
| 12             |       | -1,02  | -1,33 | -1,36 | -1,38 | -1,75            |       |
| 13             |       | -0,64  | -0,90 | -0,93 | -0,96 | -1,00            |       |
| 14             |       | -0,26  | -0,47 | -0,50 | -0,52 | -0,25            |       |
| 15             |       | +0,10  | -0,06 | -0,07 | -0,10 | +0,50            |       |

Tabela 5.8 - Reações do solo para carga com uma excentricidade.

| e <sub>x</sub> | PONTO | VALORES DA REAÇÃO DO SOLO (kgf/cm <sup>2</sup> ) |       |       |       |                  |       |
|----------------|-------|--|-------|-------|-------|------------------|-------|
|                |       | FORMULAÇÃO ALTERNATIVA                           |       |       |       | VALORES TEÓRICOS |       |
|                |       | h=10   | h=20  | h=30  | h=40  | CASO RÍGIDO      |       |
| 30cm           | 1     | -1,39  | -1,82 | -1,88 | -1,89 | -1,90            |       |
|                | 2     | -1,79  | -1,88 | -1,90 | -1,90 | -1,90            |       |
|                | 3     | -1,52  | -1,46 | -1,45 | -1,45 | -1,45            |       |
|                | 4     | -1,99  | -1,91 | -1,90 | -1,90 | -1,90            |       |
|                | 5     | -1,74  | -1,49 | -1,46 | -1,46 | -1,45            |       |
|                | 6     | -1,30  | -1,04 | -1,01 | -1,01 | -1,00            |       |
|                | 9     | -1,12  | -1,02 | -1,01 | -1,00 | -1,00            |       |
|                | 10    | -0,56  | -0,55 | -0,55 | -0,55 | -0,55            |       |
|                | 12    | -1,18  | -1,41 | -1,44 | -1,45 | -1,45            |       |
|                | 13    | -0,84  | -0,98 | -0,99 | -1,00 | -1,00            |       |
|                | 14    | -0,35  | -0,52 | -0,54 | -0,55 | -0,55            |       |
|                | 15    | +0,21  | -0,06 | -0,09 | -0,10 | -0,10            |       |
|                | 50cm  | 1  | -2,01 | -2,43 | -2,42 | -2,49            | -2,50 |
|                |       | 2  | -2,54 | -2,51 | -2,50 | -2,50            | -2,50 |
|                |       | 3  | -1,79 | -1,76 | -1,75 | -1,75            | -1,75 |
| 4              |       | -2,84  | -2,55 | -2,50 | -2,51 | -2,50            |       |
| 5              |       | -2,06  | -1,79 | -1,76 | -1,76 | -1,75            |       |
| 6              |       | -1,15  | -1,02 | -1,01 | -1,00 | -1,00            |       |
| 9              |       | -1,00  | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |       |
| 10             |       | -0,22  | -0,25 | -0,25 | -0,25 | -0,25            |       |
| 12             |       | -1,37  | -1,70 | -1,73 | -1,74 | -1,75            |       |
| 13             |       | -0,69  | -0,96 | -0,99 | -1,00 | -1,00            |       |
| 14             |       | -0,02  | -0,22 | -0,24 | -0,25 | -0,25            |       |
| 15             |       | +0,66  | +0,52 | +0,51 | +0,50 | +0,50            |       |

Nas figuras 5.19.a e 5.19.b, são mostradas as distribuições das tensões na fundação para  $e_x = 30\text{cm}$  e  $e_x = 50\text{cm}$  respectivamente.

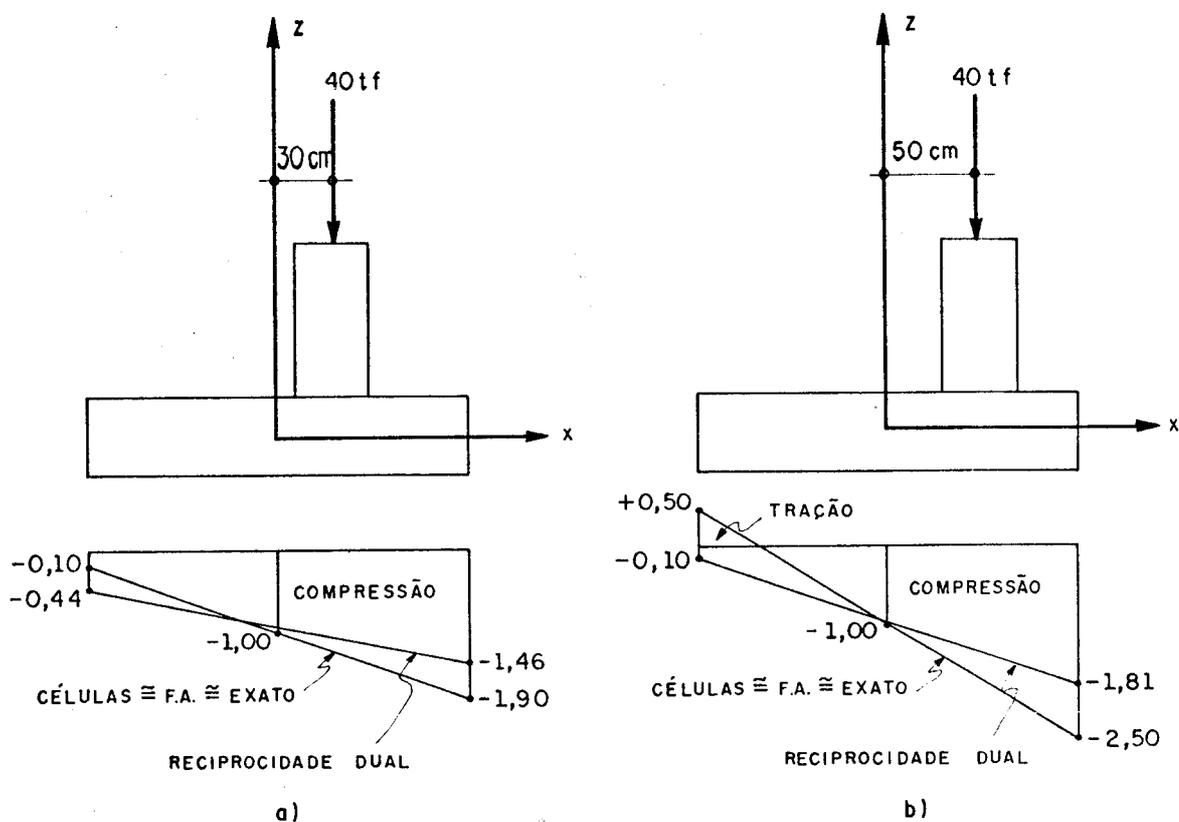


Fig. 5.19 - Distribuição de tensões no solo.

a)  $e_x = 30\text{cm}$  ; b)  $e_x = 50\text{cm}$ .

Na figura 5.20, é mostrada a mesma placa submetida a uma carga vertical de 40 tf com duas excentricidades  $e_x = e_y = 50\text{cm}$ .

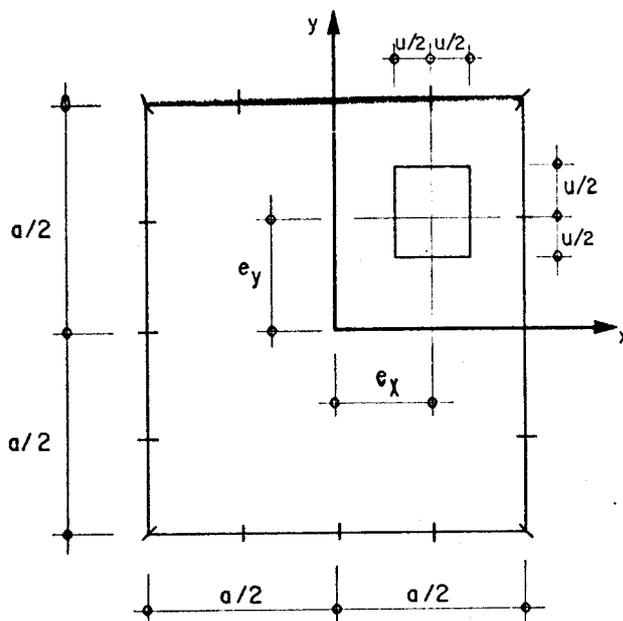


Fig. 5.20 - Geometria da placa para carga com duas excentricidades.

Os resultados das reações da fundação obtidas usando-se células internas, o processo da reciprocidade dual e a formulação alternativa são apresentados nas tabelas 5.9 5.10 e 5.11 respectivamente, e são também comparados com os valores teóricos.

Tabela 5.9 - Reações do solo para carga com duas excentricidades.

| PONTO | VALORES DA REAÇÃO DO SOLO (kgf/cm <sup>2</sup> ) |       |       |       |                  |
|-------|--|-------|-------|-------|------------------|
|       | USANDO CÉLULAS                                   |       |       |       | VALORES TEÓRICOS |
|       | h=10   | h=20  | h=30  | h=40  | CASO RÍGIDO      |
| 1     | -4,39  | -4,07 | -4,02 | -4,00 | -4,00            |
| 2     | -3,56  | -3,30 | -3,26 | -3,25 | -3,25            |
| 3     | -2,80  | -2,54 | -2,51 | -2,50 | -2,50            |
| 4     | -2,45  | -2,49 | -2,50 | -2,50 | -2,50            |
| 5     | -1,80  | -1,76 | -1,75 | -1,75 | -1,75            |
| 6     | -1,03  | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
| 7     | -1,33  | -1,68 | -1,73 | -1,74 | -1,75            |
| 8     | -0,81  | -0,97 | -0,99 | -1,00 | -1,00            |
| 9     | -0,25  | -0,25 | -0,25 | -0,25 | -0,25            |
| 10    | +0,33  | +0,47 | +0,49 | +0,49 | +0,50            |
| 11    | -0,37  | -0,90 | -0,97 | -0,99 | -1,00            |
| 12    | +0,09  | -0,19 | -0,23 | -0,25 | -0,25            |
| 13    | +0,49  | +0,50 | +0,50 | +0,50 | +0,50            |
| 14    | +0,92  | +1,19 | +1,23 | +1,24 | +1,25            |
| 15    | +1,42  | +1,90 | +1,97 | +1,98 | +2,00            |

Tabela 5.10 - Reações do solo para carga com duas excentricidades.

| PONTO | VALORES DA REAÇÃO DO SOLO (kgf/cm <sup>2</sup> ) |       |       |       |                  |
|-------|--|-------|-------|-------|------------------|
|       | RECIPROCIDADE DUAL                               |       |       |       | VALORES TEÓRICOS |
|       | h=10   | h=20  | h=30  | h=40  | CASO RÍGIDO      |
| 1     | -2,88  | -2,73 | -2,69 | -2,67 | -4,00            |
| 2     | -2,54  | -2,30 | -2,26 | -2,25 | -3,25            |
| 3     | -2,55  | -1,90 | -1,84 | -1,83 | -2,50            |
| 4     | -1,84  | -1,81 | -1,82 | -1,82 | -2,50            |
| 5     | -1,70  | -1,41 | -1,39 | -1,39 | -1,75            |
| 6     | -1,00  | -0,95 | -0,95 | -0,96 | -1,00            |
| 7     | -0,96  | -1,32 | -1,36 | -1,38 | -1,75            |
| 8     | -0,62  | -0,91 | -0,94 | -0,96 | -1,00            |
| 9     | -0,68  | -0,50 | -0,51 | -0,53 | -0,25            |
| 10    | +0,19  | -0,03 | -0,06 | -0,09 | +0,50            |
| 11    | -0,45  | -0,84 | -0,92 | -0,96 | -1,00            |
| 12    | -0,11  | -0,44 | -0,49 | -0,52 | -0,25            |
| 13    | +0,04  | -0,06 | -0,08 | -0,10 | -0,50            |
| 14    | +1,13  | +0,32 | +0,34 | +0,32 | +1,25            |
| 15    | +1,88  | +0,69 | +0,75 | +0,74 | +2,00            |

Tabela 5.11 - Reações do solo para carga com duas excentricidades.

| PONTO | VALORES DA REAÇÃO DO SOLO (kgf/cm <sup>2</sup> ) |       |       |       |                  |
|-------|--|-------|-------|-------|------------------|
|       | FORMULAÇÃO ALTERNATIVA                           |       |       |       | VALORES TEÓRICOS |
|       | h=10   | h=20  | h=30  | h=40  | CASO RÍGIDO      |
| 1     | -4,33  | -4,07 | -4,02 | -4,01 | -4,00            |
| 2     | -3,56  | -3,30 | -3,27 | -3,26 | -3,25            |
| 3     | -2,80  | -2,55 | -2,51 | -2,51 | -2,50            |
| 4     | -2,45  | -2,49 | -2,50 | -2,50 | -2,50            |
| 5     | -1,79  | -1,76 | -1,75 | -1,75 | -1,75            |
| 6     | -1,03  | -1,00 | -1,00 | -1,00 | -1,00            |
| 7     | -1,33  | -1,68 | -1,73 | -1,74 | -1,75            |
| 8     | -0,81  | -0,97 | -0,99 | -1,00 | -1,00            |
| 9     | -0,25  | -0,25 | -0,25 | -0,25 | -0,25            |
| 10    | +0,33  | +0,47 | +0,49 | +0,50 | +0,50            |
| 11    | -0,39  | -0,90 | -0,97 | -0,98 | -1,00            |
| 12    | +0,09  | -0,19 | -0,23 | -0,24 | -0,25            |
| 13    | +0,50  | +0,50 | +0,50 | +0,50 | +0,50            |
| 14    | +0,93  | +1,20 | +1,24 | +1,25 | +1,25            |
| 15    | +1,44  | +1,91 | +1,97 | +1,99 | +2,00            |

Considerando-se a reta entre os pontos 1 e 15 da figura 5.14, são mostradas as distribuições das tensões na fundação para as duas excentricidades na figura 5.21.

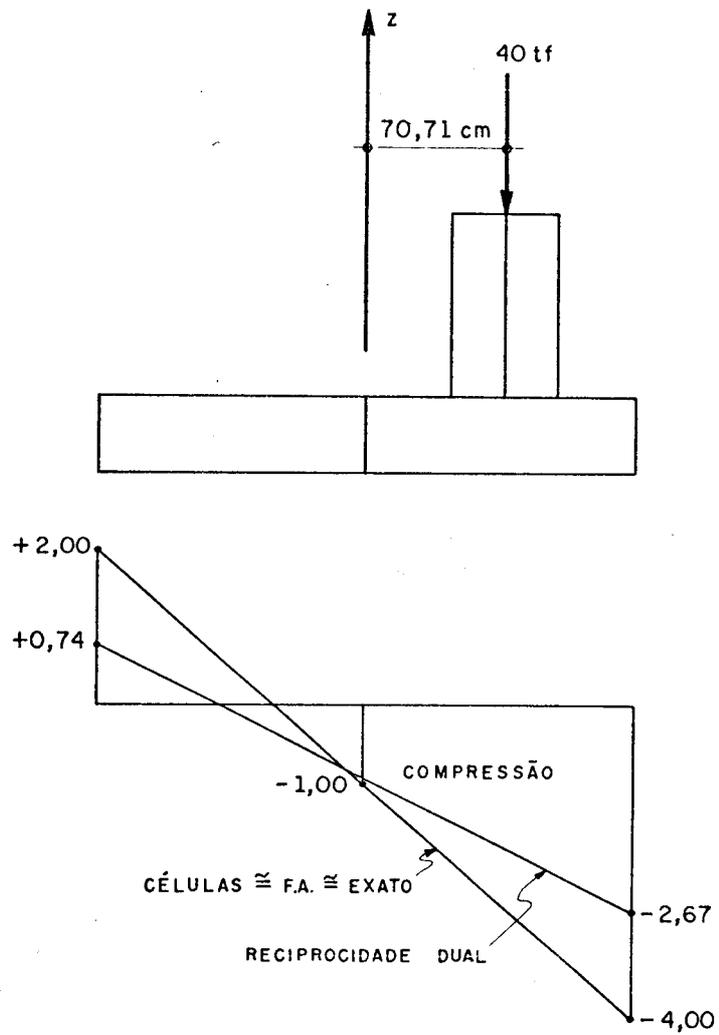


Fig. 5.21 - Distribuição de tensões no solo para  $e_x = e_y = 50\text{cm}$ .

Nos exemplos anteriores obsevou-se que a utilização de células internas na discretização do domínio da placa fornece resultados praticamente iguais aos teóricos, assim como a formulação alternativa, com a diferença de que esta última, utiliza a discretização apenas no contorno da placa.

## CAPÍTULO VI

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal deste trabalho foi apresentar uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo Método dos Elementos de Contorno. Inicialmente foi desenvolvida uma formulação para análise de placas, a partir da teoria de KIRCHHOFF [63]. Utilizando-se as equações integrais de deslocamento transversal e de sua derivada direcional, foram apresentadas algumas alternativas de montagem do sistema de equações, mostrando a importância da escolha da posição do ponto singular e o uso adequado das funções aproximadoras lineares descontínuas. Observou-se que a introdução de descontinuidades das variáveis principais, em pontos especiais do contorno, podem evitar singularidades. Quando o ponto singular é definido fora do domínio da placa, a precisão da resposta tende a melhorar com a redução de sua distância ao contorno, desde que o processo de integração seja adequado para evitarem-se possíveis erros. Entretanto, distâncias pequenas devem ser evitadas. A montagem do sistema de equações algébricas

utilizando-se apenas a equação integral do deslocamento transversal, mostrou ser eficiente, especialmente quando a placa está submetida a diversos tipos de carregamento e condições de contorno. O tratamento alternativo proposto para os termos relacionados com os cantos da placa evitando-se o uso de diferenças finitas quando se substitui as reações de canto usando sua definição, torna a formulação mais geral, possibilitando a adequação do método a problemas com características físicas e geométricas complexas.

Tentando-se reunir algumas dessas vantagens, optou-se pela alternativa proposta no segundo caso a) do item 4.6.2, que consiste em utilizar-se apenas a equação integral do deslocamento transversal,  $w$ , considerando-se os termos relacionados com os cantos da placa,  $w_c$  e  $R_c$ , como variáveis do problema. Desta forma, os pontos de carregamento ficam situados no contorno e fora do domínio da placa. É também necessário a utilização de uma equação integral de deslocamento aplicada em cada canto da placa.

Esta alternativa proposta, foi estendida para o cálculo de placas apoiadas sobre fundação elástica, segundo o modelo simplificado de WINKLER [56], representando-se a reação da fundação pelo acréscimo de uma integral de domínio nas equações integrais usuais de placas. Inicialmente foram apresentadas duas formulações para tratamento dessa integral de domínio: utilizando-se células internas e o processo da reciprocidade dual.

O processo da integração sobre células internas, além de demandar um longo tempo computacional, foge de uma das características básicas do Método dos Elementos de Contorno, devido à necessária discretização do domínio, embora proporcione uma ótima aproximação das densidades das integrais de domínio em questão.

O processo da reciprocidade dual apresenta [60], mesmo com uma discretização maior do contorno, um menor tempo de processamento. Mas, a dificuldade de se obter uma

aproximação por superfícies cônicas, justapostas sobre o domínio, cria vértices na função aproximadora, impedindo a definição de superfícies resultantes suaves. A aproximação é ainda agravada, pois a equação diferencial apresenta um operador de quarta ordem, e a variável  $\hat{w}(m,P)$  fica função de  $R^s(m,p)$  para poder aproximar o domínio com uma função  $f(m,p)$  linear. Tudo isto faz com que os resultados sejam imprecisos.

Com o objetivo de eliminar-se a discretização interna, que exige sempre um trabalho adicional de manipulação de dados, testes bastante detalhados foram realizados [62] levando a conclusão que a aproximação proposta no item 5.5 do capítulo V, para aproximar a densidade da integral de domínio, é mais eficiente que aquelas normalmente utilizadas por outras técnicas, podendo ser utilizada em outros tipos de problemas onde existe integrais de domínio com densidade desconhecida. Desta forma, processos que transformam integrais de domínio em integrais de contorno podem ser testados para evitar-se a discretização interna e dar uma simplicidade maior à formulação.

Uma característica do Método dos Elementos de Contorno, é a de reduzir em uma unidade a dimensão do problema, uma vez que a discretização pode ser feita apenas no contorno. A transformação proposta na formulação alternativa, dá origem a integrais de contorno com núcleos menos singulares do que os núcleos da integral de domínio original, portanto, poderão ser integradas sem problema.

A extensão desta formulação alternativa pode ser feita para qualquer outro problema que apresente integrais de domínio com densidade desconhecida, deixando assim, um vasto campo de aplicação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SOUTHWELL, R.V. Relaxation methods in theoretical physics. London, Oxford University Press, 1946. (The Oxford Engineering Science Series).
- [2] ARGYRIS, J.H. & KELSEY, S. Energy theorems and structural analysis. London, Butterworths, 1960.
- [3] TURNER, M.J. et alii. Stiffness and deflection analysis of complex structures. Journal aero. science, 23: 805-823, 1956.
- [4] BREBBIA, C.A. The boundary element method for engineering. London, Pentech Press, 1978.
- [5] ANDERSEN, R.S. et alii. The application and numerical solution of integral equations. Alphen aan den Rijn, The Netherlands, Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [6] ABEL, N.H. Ouevres complètes. Norvégien Christiania, 1981. v.1, 621p.

- [7] LIOUVILLE, V.D. Sur le développement des fonctions. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2:16-35, 1837.
- [8] BETTI, E. Teoria dell elasticita. Il Nuovo Cimento, 7-10, 1872.
- [9] COSTA, J.R. The boundary element method applied to plate problems. Southampton, University of Southampton, 1985. (Ph. D. Thesis).
- [10] VOLTERRA, V. Opere matematiche. Acad. Naz. Lincei, Rome, 2:216-275, 1956.
- [11] FREDHOLM, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta Math., 27: 365-390, 1903.
- [12] HILBERT, D. Grundzuge einer allgemeinen theorie der linearen integralgleichungen. New York, Chelsea Publ. 1953.
- [13] KELLOGG, O.D. Foundation of potencial theory. Berlin, Springer-Verlag, 1967.
- [14] MUSKHELISHVILI, N.I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Groningen Holand, Noordhoff, 1953.
- [15] MIKHLIN, S.G. Integral equations. London, Pergamon Press, 1957. (International series of monographs in pure and applied mathematics).
- [16] SMIRNOV, V.J. Integral equations and partial differential equations. In: COURSE in higher mathematics. London, Addison-Wesley, 1964. v.4.

- [17] KUPRADZE, V.D. Potencial methods in the theory of elasticity. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1965.
- [18] BANERJEE, P.K. Integral equations methods for analysis of piece-wise non-homogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape. Int. Journal Mechanics Science, 18: 293-303, 1976.
- [19] JASWON, M.A. Integral equation methods in potential theory I. Proc. Royal Society, A275: 23-32, 1963.
- [20] SYMM, G.T. Integral equation methods in potential theory II. Proc. Royal Society, A275: 33-46, 1963.
- [21] RIZZO, F.J. An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quarterly of Applied Mathematics, 25 (1): 83-92, 1967.
- [22] CRUSE, T.A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. Int. J Solids & Structures, 5: 1259-1274, 1969.
- [23] RIZZO, F.J. & SHIPPY, D.J.A. A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. Int. J. Solids & Structures, 4: 1161-1179, 1968.
- [24] CRUSE, T.A. & RIZZO, F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamics problem I. J. Math. Anal. appl., 22, 1968.

- [25] CRUSE, T.A. & VAN BUREN, W. Three dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. Int. J. Fract. Mech., 7: 1-15, 1971.
- [26] SWEDLOW, J.L. & CRUSE, T.A. Formulation of boundary integral equations for three dimensional elastoplastic flow. Int. J. Solids & Structures, 7: 1673-1683, 1971.
- [27] MENDELSON, A. Boundary integral methods in elasticity and plasticity. NASA report TN D-7418, 1973.
- [28] MUKHERJEE, S. Corrected boundary integral equations in planar thermoelastoplasticity. Int. J. Solids & Structures, 13: 331-335, 1977.
- [29] RICARDELLA, P.C. An implementation of the boundary and elasto-plasticity. Carnegie-Mellon University, 1973. (Ph.D. Thesis).
- [30] CRUSE, T.A. An improved boundary integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. Computers & Structures, 4: 741-754, 1974.
- [31] LACHAT, J.A. A further development of the boundary integral technique for elastostatics. Southampton, University of Southampton, 1975. (Ph.D. Thesis).
- [32] ZIENKIEWICZ, O.C. ; KELLY, D.W. ; BETESS, P. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. Int. J. Num. Meth. Engrg, 11: 355-375, 1977.
- [33] BEER, G. Finite element, boundary element and coupled analysis of unbounded problems in elastostatics.

Int. J. Num.Meth.Enqng, 19: 567-580, 1983.

- [34] BEER, G. & MEEK, J.L. The coupling of boundary and finite element methods for in finite domain problems in elasto-plasticity. In: BREBBIA, C.A. ed. Boundary element methods. Berlin, Springer-Verlag, 1981.
- [35] JASWON, M.A. ; MAITI, M ; SYMM, G.T. Numerical biharmonic analysis and some applications. Int. J. Solids & Structures, 3: 309-332, 1967.
- [36] JASWON, M.A. & MAITI, M. An integral formulation of plate bending problems. J. Enqng. Math., 2: 83-93, 1968.
- [37] HANSEN, E.B Numerical solution of integro-differential and singular equations for plate bending problems. Journal of Elasticity, 6: 39-56, 1976.
- [38] ALTIERO, N.J. & SIKARSKIE, D.L. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. Computer & Structures, 9: 163-168, 1978.
- [39] WU, B.C. & ALTIERO, N.J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. Computer & Structures, 10: 107-707, 1979.
- [40] TOTTENHAM, H. The boundary element method for plates and shells. In: BANERJEE, P.K. & BUTTERFIELD, R. eds. Developments in boundary element methods. London, Elsevier, 1979.

- [41] BEZINE, G. Boundary integral formulations for plate flexure with arbitrary boundary conditions. Mechanics Research Communications, 5 (4): 197-206, 1978.
- [42] BÉZINE, G. & GAMBI, D.A. A new integral equation formulation for plate bending problems. In: BREBBIA, C.A., ed. Recent advances in boundary element methods. London, Pentech Press, 1978.
- [43] STERN, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. Int. J. Solids & Structures, 15: 769-782, 1979.
- [44] STERN, M. Boundary integral equations for bending of thin plates. In: BREBBIA, C.A. ed. Progress in boundary element methods. London, Pentech Press, 1983. v.2.
- [45] BÉZINE, G. A mixed boundary integral: finite element approach to plate vibration problem. Mechanics Research Communications, 7 (3): 141-150, 1980.
- [46] KAMIYA, N. et alii. An approximate finite deflection analysis of a heated elastic plate by the boundary element method. Appl. Math. Modelling, 6 (1): 23-27, 1982.
- [47] TANAKA, M. Large deflection analysis of thin elastic plates. In: BANERJEE, P.K. & MUKHERJEE, S. eds. Developments in boundary element methods - 3. London, Elsevier, 1984.
- [48] KAMIYA, N. & SAWAKY, Y. An integral equation approach to finite deflection of elastic plates. Int. J.

Non-Linear Mechanics, 17 (3): 187-194, 1982.

- [49] VAN DER WEEEN, F. Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model. In: BREBBIA, C.A. ed. Boundary element methods in engineering. Berlin, Springer-Verlag, 1982.
- [50] REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. Journal of Applied Mechanics, 12: A69-A77, 1945.
- [51] COSTA JR., J.A. & BREBBIA, C.A. Elastic buckling of plates using the boundary element method. In: BREBBIA, C.A. & MAIER, G., eds. Boundary element VII. Berlin, Springer-Verlag, 1985.
- [52] BÉZINE, G. ; CIMETIERRE, A. ; GELBERT, J.P. Unilateral buckling on thin plates by the boundary integral equation method. Int. J. Num. Meth. Enngng., 21: 2189-2199, 1985.
- [53] MORJARIA, M. & MUKHERJEE, S. Inelastic analysis of transverse deflection of plates by boundary element method. Journal of Applied Mechanics, 47 (2): 291-296, 1980.
- [54] KATSIKADELIS, J.T. & ARMENAKAS, A.E. Plates on elastic foundation by BIE method. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 110 (7): 1086-1104, 1984.
- [55] KATSIKADELIS, J.T. & ARMENAKAS, A.E. Analysis of clamped plates on elastic foundation by the boundary integral method. Journal of Applied Mechanics, 54: 544-580, 1984.

- [56] WINKLER, E. Die Lehre von der Elastizitaet und Festigkeit. Piague, Dominicus, 1867.
- [57] COSTA JR., J.A. & BREBBIA, C.A. The boundary element method applied to plates on elastic foundations. Engineering Analysis, 2 (4): 174-183, 1985.
- [58] COSTA JR, J.A. & BREBBIA, C.A. On the reduction of domain integrals to the boundary for the BEM formulation of plates on elastic foundations. Engineering Analysis, 3 (2): 123-126, 1986.
- [59] COSTA JR., J.A. & BREBBIA, C.A. Bending of plates on elastic foundations using the boundary element method. In: INTERNATIONAL CONFERENCE, 2nd, Southampton, 1985. Proc. Berlin, Springer-Verlag, 1985.
- [60] SILVA, N.A. Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas sobre fundações elásticas. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1986. (Dissertação de Mestrado).
- [61] VENTURINI, W.S. Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1988. (Tese de Livre-Docência).
- [62] CODA, H.B. Análise da vibração livre de meios elásticos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1990. (Dissertação de Mestrado).

- [63] KIRCHHOFF, G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe. J. Math., Crelle, 40: 51-58, 1850.
- [64] TIMOSHENKO, S. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells. New York, McGraw-Hill, 1959.
- [65] PAIVA, J.B. Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1987. (Tese de Doutorado).
- [66] DANSON, D.J. Analysis of plate bending problems by direct boundary element method. Southampton, University of Southampton, 1979. (M.Sc.Dissertation)
- [67] GIL RODRIGUEZ, J.C. & VENTURINI, W.S. Boundary element technique for the analysis of tension discontinuity problems. In: BREBBIA, C.A. & NOYE, B.J., eds. BETECH 85, Berlin, Springer-Verlag, 1985.
- [68] GIL RODRIGUEZ, J.C. & VENTURINI, W.S. Sobre a influência da discretização de domínio bidimensionais para o método dos elementos de contorno. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 7., São Carlos, EESC-USP, 1986 - Anais.
- [69] PAIVA, J.B. & VENTURINI, W.S. Uma formulação alternativa para a resolução de placas via método dos elementos de contorno. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO E IBÉRICO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 8., Rio de Janeiro, PUC-RJ, 1987 - Anais. v.B., p.307-314.

- [70] STROUD, A.H. & SECREST, D. Gaussian quadrature formulas. New York, Prentice-Hall, 1966.
- [71] GIL RODRIGUEZ, J.C. Sobre o emprego de método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1986. (Dissertação de Mestrado).
- [72] BREBBIA, C.A. & NARDINI, D. Solution of parabolic and hiperbolic time dependent problems using boundary elements. Compl. & Maths. with Appls., 12B: 1061-1072, 1986.
- [73] FREITAS NETO, J.A. et alii. Introdução ao método dos elementos finitos. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1976. (Cadernos de Estruturas n.º 5).
- [74] GUERRIN, A. Traité du béton armé. Paris, Dunod, 1960.
- [75] JIMÉNEZ MONTOYA, P. ; GARCIA MESSEGUER, A. ; MORÁN CABRÉ, F. Hormigón armado. 10.ed. Barcelona, Gustavo Gilli, 1979.
- [76] FUNG, Y.C. Foundations of solid mechanics. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1965.
- [77] BOWLES, J.E. Foundation analysis and design. Tokio, McGraw-Hill, 1977.
- [78] SILVA, N.A. & VENTURINI, W.S. Análise de placas apoiadas em fundações elásticas pelo método dos elementos de contorno. In: CONGRESO LATINO AMERICANO E IBÉRICO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONALES PARA INGENIERIA, 9., Cordoba, Argentina, 1988.

- [79] SILVA, N.A. & VENTURINI, W.S. Dual reciprocity process applied to solve bending plates on elastic foundation. In: BREBBIA, C.A. ed. Boundary elements X. Southampton, CML; Berlin, Springer-Verlag, 1988. v.3, p.95-105.
- [80] SILVA, N.A. & VENTURINI, W.S. Aplicação do método dos elementos de contorno na determinação de cargas últimas em sapatas isoladas. In: CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 10., Porto, Portugal, 1989 - Anais. v.4, p.C29-C38.
- [81] CODA, H.B. & VENTURINI, W.S. Alternative boundary element formulation for elastodynamics. In: BREBBIA, C.A. & HONMA, T. eds. Boundary elements XII. Southampton, CML; Berlin, Springer-Verlag, 1990. v.1, p.517-534.
- [82] CODA, H.B. & VENTURINI, W.S. Vibração livre de meios elásticos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno. In: CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 11., Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, 1990 - Anais. v.2.