

CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA ANISOTROPIA NA MADEIRA

NILSON TADEU MASCIA

PROF. DR. FRANCISCO ANTONIO ROCCO LAHR

**DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS**

CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA ANISOTROPIA NA MADEIRA

NILSON TADEU MASCIA

**DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

Tese apresentada junto à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Doutor em Engenharia de Estruturas".

- SÃO CARLOS, JULHO DE 1991 -

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Francisco Antonio Rocco Lahr pela orientação neste trabalho e, sobretudo, pela amizade e desprendimento que se desenrolou durante o desenvolvimento do trabalho.

Ao Prof. Dr. Carlito Calil Jr. pela constante troca de idéias sobre o assunto e sobre a parte experimental.

Ao Prof. Dr. João Cesar Hellmeister pelo exemplo de dedicação.

Ao Prof. Isaias Vizotto, da FECC-UNICAMP, pelo auxílio na parte relativa ao uso do programa SAP90.

Ao Prof. Antonio Ludovico Beraldo, da FEAGRI-UNICAMP, pelo apoio na parte de fotografias das amostras de madeira.

Aos funcionários e colegas do Laboratório de Madeira e de Estruturas de Madeira, do Departamento de Estruturas da EESC-USP, pelo convívio e amizade nestes anos e em especial, ao Cláudio Ortiz da Silva pelo eficaz auxílio na montagem dos ensaios, ao Luiz Eduardo Bragato pelo zelo na climatização dos corpos de prova e à Maria Regina Ferreira pela cuidadosa digitação deste texto. À Neuza T. M. Celere, bibliotecária da EESC-USP pelo auxílio e revisão das referências bibliográficas.

À Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP e à Faculdade de Ilha Solteira da UNESP pelo apoio institucional proporcionado para a realização deste trabalho.

Ao CNPq e à Capes pelo apoio financeiro.

À Márcia, minha esposa, pelo incentivo e abnegação, particularmente durante o período de elaboração desta tese.

"Porque na sua mão estão todos os limites da terra, e as alturas dos montes são suas".

(Salmos 94)

À minha esposa e ao meu filho
Márcia e Tiago

Aos meus pais
Antonio e Maria Alice

Ao Prof. Ulisses dos Santos Ribeiro (in memoriam)

RESUMO

Apresenta-se, neste trabalho, um estudo sobre a anisotropia da madeira. Neste sentido, formula-se a lei constitutiva com vistas a evidenciar o modelo ortotrópico aplicado à madeira.

São mostrados o tensor constitutivo S_{ijkl} e suas particularidades quando associado aos eixos principais de elasticidade L, T, R (eixos longitudinal, tangencial e radial) da madeira e quando inserido numa situação genérica num sistema de coordenadas x_i .

Além disso, são considerados os aspectos relativos à determinação experimental das constantes de elasticidade da madeira que estão presentes no tensor S_{ijkl} .

Os resultados obtidos evidenciam significativa aderência do modelo elástico ortotrópico aplicado à madeira.

ABSTRACT

The aim of this work is to present a study about wood anisotropy. It is formulated the constitutive law in order to show the orthotropic model applied to wood.

The constitutive tensor S_{ijkl} and its features associated to the principal axes of elasticity L, T, R (longitudinal, tangencial and radial axes) of wood and inserted in a generic situation in a coordinate system are presented.

Aspects related to the experimental determination of elastic constants of wood that appear in the S_{ijkl} tensor are also considered in this study.

The results point out the adequacy of wood to the orthotropic model.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS

1- INTRODUÇÃO E OBJETIVOS.....	1
2- LEIS CONSTITUTIVAS OU RELAÇÕES TENSÕES-DEFORMAÇÕES.....	3
2.1- Introdução	
2.2- Análise de Tensão	
2.2.1- Tensor das Tensões	
2.2.3- Transformação de Coordenadas	
2.2.4- Tensões Principais	
2.3- Análise de Deformação	
2.3.1- Introdução	
2.3.2- Tensor-Deformação	
2.3.3- Relações entre Deformação e Deslocamento	
2.4- Idealização das Leis Constitutivas	
2.4.1- Introdução	
2.4.2- Elasticidade	
2.4.3- Modelos Elásticos de Green	
2.4.4- Relação Energia de Deformação com Tensões e Deformações	
2.4.5- Simetria do Material	
2.4.6- Leis Constitutivas para Material Elasticamente Anisotrópico	
2.4.7- Casos Básicos de Simetria Elástica	
3- A MADEIRA E O MODELO ORTOTRÓPICO.....	82
3.1- Introdução	
3.2- Estrutura Macroscópica da Madeira	
3.3- Estrutura Microscópica da Madeira	
3.4- Parede Celular, sua Constituição e sua Orientação	
3.5- Comportamento Mecânico ao Nível das Paredes Celulares	
3.6- Algumas Considerações sobre o Modelo Ortotrópico na Madeira	
3.7- Os Tensores S_{ij} e S'_{ij} para a Madeira	

3.8-	O Efeito da Inclinação das Fibras	
3.9-	Determinação Experimental dos Coeficientes de Elasticidade da Madeira	
3.10-	Os Problemas Planos de Tensão e de Deformação na Madeira. Algumas Aplicações	
4-	CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DOS MATERIAIS E DOS MÉTODOS UTILIZADOS NA PARTE EXPERIMENTAL.....	134
4.1-	Introdução	
4.2-	Material para Experimentação	
4.2.1-	Preparação dos Corpos de Prova	
4.2.2-	Aspectos Gerais e Anatômicos da Madeira dos Corpos de Prova	
4.3-	Equipamentos e Instrumentação	
4.3.1-	Ensaio de Compressão Simples	
4.3.2-	Ensaio de Flexão Simples	
4.3.3-	Sistema de Aquisição de Dados (SAD)	
4.4-	Algumas Considerações acerca do Ensaio de Compressão Simples	
4.5-	Algumas Considerações acerca do Ensaio de Flexão Simples	
5-	SIMETRIA DO TENSOR S_{ijkl} PARA A MADEIRA. EXPERIMENTAÇÃO E RESULTADOS.....	174
5.1-	Introdução	
5.2-	Material para Ensaio	
5.3-	Medidas de Deformações. Extensômetros Elétricos de Resistência	
5.4-	Determinação das Constantes de Elasticidade	
5.4.1-	Módulo de Elasticidade e Coeficiente de Poisson	
5.4.2-	Módulo de Elasticidade Transversal	
5.4.3-	Posição dos Extensômetros nos Corpos de Prova Ensaçados a Compressão Simples	
5.5-	Apresentação dos Resultados	
5.6-	Análise dos Resultados	
5.7-	Conclusão	

6. O EFEITO DA VARIAÇÃO DO ÂNGULO DAS FIBRAS NOS PLANOS LT, LR E DA VARIAÇÃO DO ÂNGULO DOS ANÉIS NO PLANO RT NO TENSOR S_{ijkl}	200
6.1- Introdução	
6.2- Corpos de Prova Empregados	
6.3- Os Elementos do Tensor S'_{ijkl} Colocados em Função do Ângulo θ	
6.4- Retirada dos Corpos de Prova	
6.5- O Ensaio de Compressão Simples	
6.6- Determinação de S'_{11} , S'_{12} , S'_{13} e S'_{16}	
6.6.1- Os Elementos S'_{11}	
6.6.2- Os Elementos S'_{12}	
6.6.3- Os Elementos S'_{13}	
6.6.4- Os Elementos S'_{16}	
6.7- Apresentação dos Resultados	
6.7.1- Os Elementos S'_{11} ou $1/E'_{1j}$	
6.7.2- Os Elementos S'_{12}	
6.7.3- Os Elementos S'_{13}	
6.7.4- Os Elementos S'_{16}	
6.8- Os Gráficos S'_{1j} para a Espécie Guapuruvú	
6.9- Comentários a Respeito dos Gráficos S'_{1j}	
6.10- Gráficos $1/S'_{66}$ e $1/S'_{11}$	
7- SITUAÇÃO GERAL DE S_{ijkl} NO ESPAÇO LRT.....	236
7.1- Introdução	
7.2- Material Utilizado	
7.2.1- Corpos de Prova com Variação dos Ângulos das Fibras e dos Anéis	
7.2.2- Corpos de Prova Situados Genericamente no Tronco da Árvore	
7.3- Os Elementos do Tensor S'_{1j} no Espaço LRT	
7.4- Apresentação dos Resultados	

7.4.1-	Corpos de Prova: TC ($\theta - \phi$)	
7.4.2-	Corpos de Prova: TC (LRT)	
7.5-	Gráficos de $1/S'_{ij}$	
7.5.1-	Corpos de Prova TC ($\theta - \phi$)	
7.5.2-	Corpos de Prova TC (LRT)	
7.6-	Comentários a Respeito dos Gráficos	
8-	OBSERVAÇÕES SOBRE OS COEFICIENTES DE INFLUÊNCIA MÚTUA E OS COEFICIENTES DE POISSON.....	236
8.1-	Introdução	
8.2-	Determinação do Coeficiente de Influência Mútua de 2ª Espécie	
8.3-	Resultados Obtidos para $\eta_{i,ij}$ e Algumas Observações	
8.4-	Coeficientes de Poisson. Compressibilidade da Madeira	
8.5-	Alguns Comentários sobre o Coeficiente de Influência Mútua de 1ª Espécie	
9-	OBSERVAÇÕES A RESPEITO DO ENSAIO DE FLEXÃO ESTÁTICA.....	257
9.1-	Introdução	
9.2-	Expressões Utilizadas para Determinação das Constantes de Elasticidade na Flexão	
9.3-	Apresentação e Análises dos Resultados do Ensaio de Flexão	
9.4-	Modelos para Análise dos Resultados do Ensaio de Flexão Utilizando o Programa SAP90	
10-	CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHO.....	268
11-	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	272
	ANEXO.....	284

LISTA DE SÍMBOLOS

A	- área da seção
a, d	- distância
b	- largura
C_{ijkl}, C_{ij}	- tensor constitutivo
df	- grau de liberdade
E_i	- módulo de elasticidade
e_j	- base ortogonal
F_i	- força de massa
F_{ij}	- função resposta
G_{ij}	- módulo de elasticidade transversal
h	- altura
I_i	- invariantes de tensão, momento de inércia
I_i'	- invariantes de deformação
J_i	- invariantes de tensão desviatória
l	- vão
l_{ij}	- cossenos diretores
M_i	- momento
N_i	- vetor, número de elementos
P_i	- força
S_n	- tensão tangencial
S_{ijkl}, S_{ij}	- tensor constitutivo
$S_{(x_i)}$	- momento estático
s	- desvio padrão
n	
T_i	- vetor tensão
t	- "t" de Student
U, U_0	- energia de deformação

u_i	- deslocamento
V	- volume, esforço cortante
x_i	- sistema de coordenadas
W	- trabalho externo
α_i	- constante, ângulo
Δ, δ	- variação, incremento, coeficiente de variação
δ_i^n	- vetor deslocamento
δ_{ij}	- delta de Kronecher
ϵ_{ij}	- tensor das deformações, deformação
ϵ_{ijk}	- símbolo permutador
θ	- ângulo das fibras
λ, μ	- constante de Lamé
$\mu_{ij,kl}$	- coeficiente de Chentsov
$\eta_{ij,k}$	- coeficiente de influência mútua de 1ª espécie
$\eta_{i,jk}$	- coeficiente de influência mútua de 2ª espécie
ν_{ij}	- coeficiente de Poisson
ξ_i	- deslocamento
$\pi(x_i)$	- plano
ρ	- raio de curvatura
σ_n	- tensão normal
σ_{ij}	- tensor das tensões, tensão
τ_{ij}	- tensão tangencial
ϕ	- ângulo dos anéis, função de tensão
ϕ_i	- função resposta
ϕ_{ij}	- distorção
ψ	- constante
Ω_i^n	- vetor rotação

ÍNDICES PRINCIPAIS

L - longitudinal

R - radial

T - tangencial

1- INTRODUÇÃO

A exigência da otimização de um projeto de engenharia possibilitou um importante avanço na aplicação da teoria da elasticidade dos sólidos anisotrópicos em décadas recentes. Em particular, entre os materiais de construção, a madeira exibe uma natureza significativamente anisotrópica. Neste contexto, à medida que se aplica a madeira em estruturas de grande porte, intensifica-se a convivência daqueles que trabalham com estas estruturas e este material, com a anisotropia associada à teoria de elasticidade.

De fato, o estudo da anisotropia implica no conhecimento da lei constitutiva que rege o material e, conseqüentemente na determinação do tensor constitutivo e nos elementos participantes deste tensor.

Neste sentido, a adequação de um material a um determinado modelo está balizada na existência de eixos de simetria elástica. Nestes eixos há invariança nas propriedades de elasticidade do material. Evidentemente não havendo coincidência entre eixos geométricos e eixos de simetria elástica, o problema recairá em soluções mais complexas e trabalhosas.

Num modelo completamente anisotrópico e elástico haverá 81 constantes a se conhecer. Num modelo ortotrópico (três planos de simetria elástica) há 9 elementos presentes no tensor constitutivo, S_{ijkl} .

A madeira, devido a sua própria constituição interna, revela-se ortotrópica. Os eixos de simetria são o longitudinal, o tangencial e o radial. Isto induz a aplicação e a análise deste modelo na madeira. Para tanto, torna-se necessário um procedimento a nível teórico e a nível experimental com o intuito de se verificar a aderência da madeira ao modelo convencional.

Neste contexto, estudos básicos de Hearmon⁽¹⁾, em 1948, Silverman⁽²⁾, em 1964, e Jayne⁽³⁾, em 1972, entre outros, têm influenciado as pesquisas modernas na anisotropia da madeira, não

se podendo deixar de mencionar, desde já, os trabalhos sobre anisotropia geral de Hearmon⁽⁴⁾, em 1946, Green e Zerna⁽⁵⁾, em 1954 e de Lekhnitiskii⁽⁶⁾, em 1981, os quais se apresentam como base de qualquer estudo neste campo de conhecimento.

Esta pesquisa relaciona-se com o estudo da anisotropia aplicada à madeira, à determinação do tensor constitutivo e dos elementos contidos neste tensor.

Assim, deve-se arbitrar, segundo as disponibilidades presentes, a escolha do material (corpos de prova) e da metodologia a ser empregada para alcançar estes objetivos.

Quanto ao material, de um modo geral, as espécies de madeira mais amplamente encontradas no Brasil pertencem à classe das dicotiledôneas, com particularidades intrínsecas diferentes das coníferas, de presença efetiva no hemisfério norte, onde, as pesquisas sobre o assunto são mais intensas. Isto, em princípio, já se constitui em um motivo de prováveis diferenciações nas propriedades de elasticidade entre as peças advindas de uma classe ou de outra. De outro lado, a posição de onde se retira um corpo de prova num tronco de uma árvore é de substantiva importância na análise dos resultados que se possa obter, através de um determinado procedimento experimental adotado.

Com relação à metodologia, foram utilizados ensaios de compressão simples, como uma base, e ensaios de flexão, como um subsídio, na determinação e na avaliação do tensor S_{ijkl} para a madeira.

Cabe, enfim, observar que este trabalho atenta para situações novas, com a preocupação de abrir novos caminhos, mas, por outro lado, longe de esgotar a riqueza de informações com que se depara ao se trabalhar com tal assunto.

2- LEIS CONTITUTIVAS OU RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO

2.1- Introdução

A solução de um problema na mecânica dos sólidos baseia-se em princípios fundamentais os quais governam a mecânica clássica, ou seja, conservação de massa, conservação de momento, conservação de energia e nas leis da irreversibilidade termodinâmica. (Desai⁽⁷⁾). Estes princípios são, em geral, válidos para todos os materiais, independente de sua constituição interna. No entanto, a resposta de um sistema ou de um meio contínuo, sujeitos a uma ação externa (forças externas), não pode ser determinado de forma única, com a aplicação de equações derivadas dos princípios citados anteriormente. Para tanto, requerem-se considerações adicionais, cuja ênfase reside na natureza intrínseca dos materiais. Estas equações que modelam o comportamento, ou a resposta dos materiais, são denominadas de leis ou equações constitutivas.

Antes de serem efetivamente abordadas as leis constitutivas, segue-se uma revisão dos conceitos de tensão e de deformação. A notação utilizada no texto é a tensorial e, em alguns lugares, encontra-se presente a notação matricial.

Adotou-se, como referência bibliográfica básica nestes tópicos, os seguintes autores: Chen e Saleeb⁽⁸⁾, Reismann e Pawlik⁽⁹⁾, Sokolnikoff⁽¹⁰⁾ e Fung⁽¹¹⁾.

2.2- Análise de Tensão

2.2.1- Tensor das Tensões

Considera-se um meio contínuo, onde os pontos são referidos a um sistema de eixos cartesianos. Seja ΔV um elemento de volume de uma região D deste meio, e seja \mathbf{T}_n , o vetor tensão associado ao vetor normal \mathbf{n} .

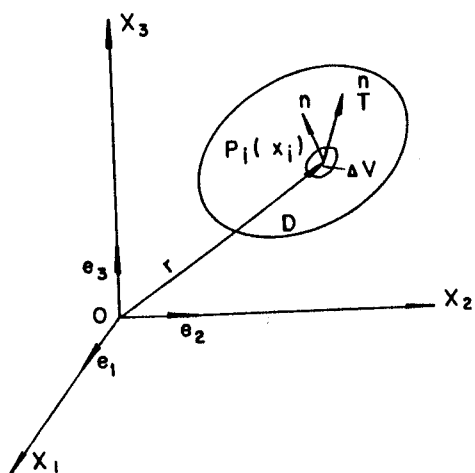


Fig.1- Elemento de uma região D. Vetor tensão.

Analisando-se o estado de tensão no ponto P_1 , com o auxílio da figura 2.

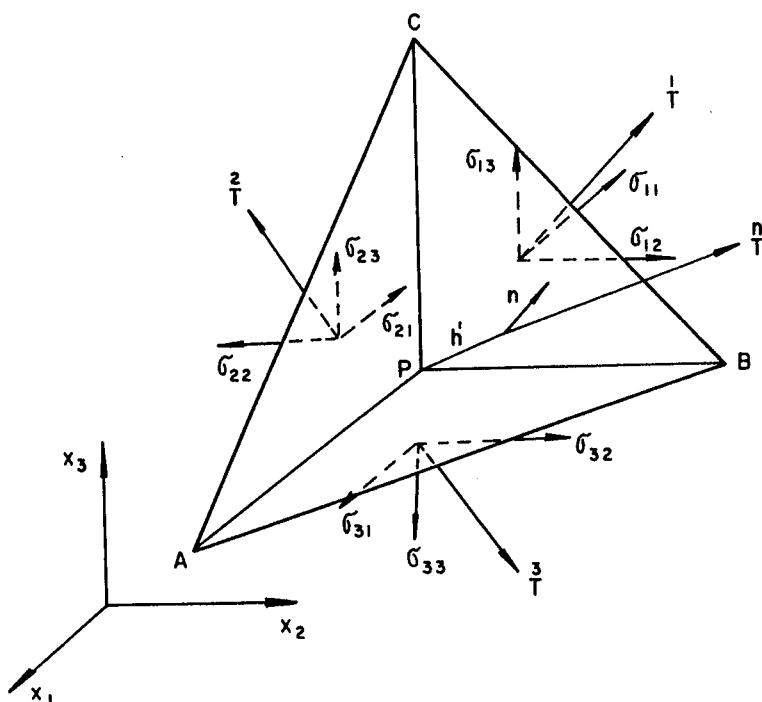


Fig 2- Estado de tensão num ponto. Fonte: Sokolnikof⁽¹⁰⁾

Conclui-se que:

$$\mathbf{T} = n_1 \mathbf{T}^1 + n_2 \mathbf{T}^2 + n_3 \mathbf{T}^3 \quad (1)$$

ou indicialmente:

$$\mathbf{T} = n_i \mathbf{T}^i \quad (2)$$

O estado de tensão de qualquer ponto P_1 é, então, caracterizado por nove elementos, denominados de componentes do tensor das tensões. Genericamente, tem-se:

$$\mathbf{T}_i = \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad (3)$$

onde: σ_{ij} = componentes do tensor das tensões
 \mathbf{e}_j = base ortonormal

Na figura 3 estão mostrados o vetor das tensões e os componentes do tensor σ_{ij} .

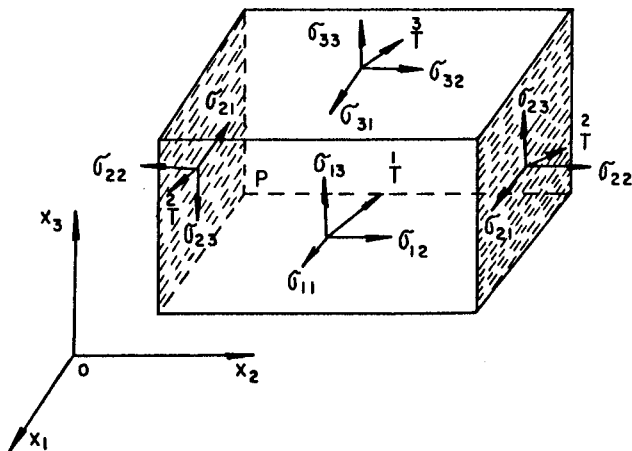


Fig.3- Vetor tensão e componentes do tensor σ_{ij}
 Fonte: Sokolnikof⁽¹⁰⁾

A expressão (1) pode ser escrita na forma matricial por:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

com: $i = j \rightarrow \sigma_{ij} =$ tensão normal

$i \neq j \rightarrow \sigma_{ij} =$ tensão tangencial

2.2.2- Equações de Equilíbrio

Para qualquer volume V de um meio contínuo, tendo como A a área da superfície de contorno de V , tendo F como força de massa e T_i^n como forças de superfície, de acordo com a figura 4.

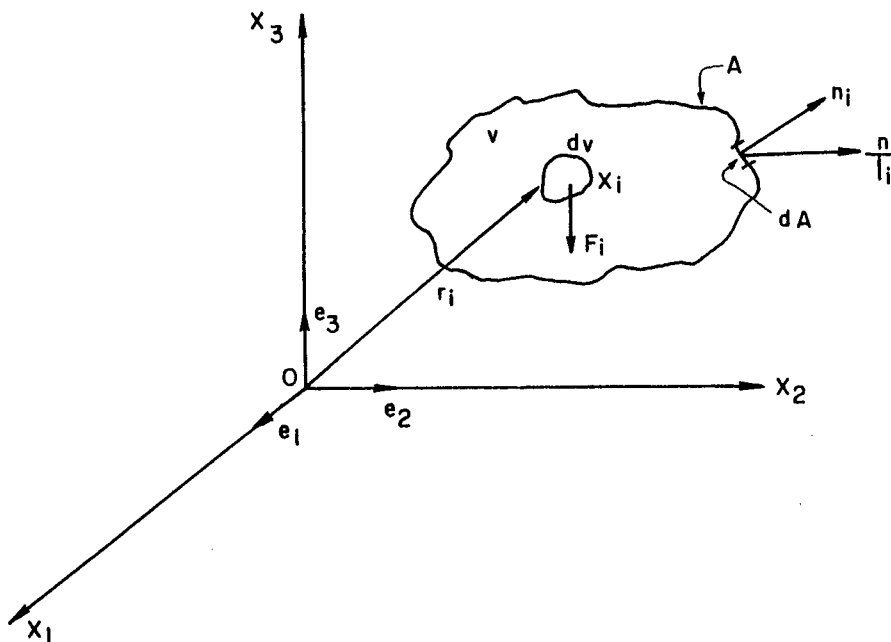


Fig. 4- Forças em um elemento. Fonte: Chen e Saleeb⁽⁸⁾

As condições de equilíbrio requerem:

. somatória de forças igual a zero.

$$\int_A \overset{n}{T}_i dA + \int_V F_i dV = 0 \quad (5)$$

. somatória de momentos em \underline{O} igual a zero.

$$\int_V \epsilon_{ijk} x_j F_k dV + \int_A \epsilon_{ijk} x_j \overset{n}{T}_k dA = 0 \quad (6)$$

onde ϵ_{ijk} representa o símbolo permutador.

Sendo $\overset{n}{T}_i = \sigma_{ij} n_j$. Substituindo-se em (5) obtém-se:

$$\int_A \sigma_{ij} n_j dA + \int_V F_i dV = 0 \quad (7)$$

Torna-se adequado, agora, utilizar o Teorema da divergência (ou Teorema de Gauss). (Wylei⁽⁶⁾)

$$\int_A \sigma_{ij} n_j dA = \int_V \sigma_{ij,j} dV \quad (8)$$

Portanto:

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i) dV = 0 \quad (9)$$

Para um volume arbitrário:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (10)$$

De forma análoga, para a equação de equilíbrio de momentos:

$$\int_V \epsilon_{ijk} x_j F_k dV + \int_A \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{rk} n_r dA = 0 \quad (11)$$

Usando o Teorema de Gauss:

$$\int_A \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{rk} n_r dA = \int_V (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{rk})_{,r} dV \quad (12)$$

Obtem-se, deste modo:

$$\int_V [\varepsilon_{ijk} x_j F_k + (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{rk})_{,r}] dV = 0 \quad (13)$$

e também,

$$\int_V [\varepsilon_{ijk} x_j (F_k + \sigma_{rk,r}) + \varepsilon_{ijk} x_{j,r} \sigma_{rk}] dV = 0 \quad (14)$$

Empregando-se (10), nesta equação, tem-se:

$$\int_V \varepsilon_{ijk} x_{j,r} \sigma_{rk} dV = 0 \quad (15)$$

e portanto:

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0 \quad (16)$$

Para um volume arbitrário tem-se:

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad (17)$$

Isto implicará em $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, ou seja, o tensor das tensões é simétrico.

2.2.3- Transformação de Coordenadas

Até este momento, as componentes de tensão σ_{ij} são definidas com respeito ao sistema x_1, x_2, x_3 ou indicialmente x_i . Considera-se, então, um outro sistema x'_1, x'_2, x'_3 ou x'_i como mesma origem, mas diferente orientação. É possível expressar os componentes de tensão neste novo sistema x'_i . (Figura 5)

Para tanto, recorrendo-se à transformação de coordenadas de um ponto P_1 , ou seja, à :

$$x'_i = l_{ij} x_j \quad (18)$$

onde: $l_{ij} = \cos(x'_i, x_j) = e_p \cdot e_i$.

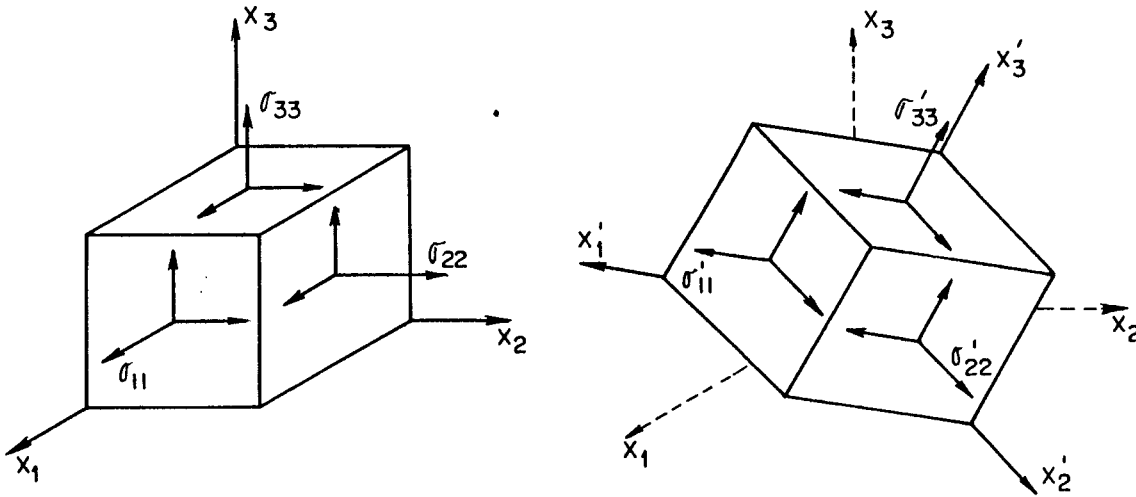


Fig.5- Componentes do tensor σ_{ij} segundo os eixos x_i e x'_i . Fonte: Fung⁽¹¹⁾

e, também, a equação (19), onde o símbolo \cdot indica produto escalar:

$$T = n_i T_i \quad (19)$$

Consequentemente:

$$\begin{aligned} T \cdot e_r &= n_i T_i \cdot e_r = n_i \sigma_{ij} e_j \cdot e_r = n_p \sigma_{p,q} e_q \cdot e_r = \\ &= n_p \sigma_{p,q} \delta_{q,r} = n_i \sigma_{ij} e_j \cdot e_r = n_p l_{p,i} \sigma_{ij} l_{r,j} \quad (20) \end{aligned}$$

Onde $\delta_{q,r}$, é o delta de Kronecker. Portanto:

$$(\sigma_{p,r} - l_{p,i} l_{r,j} \sigma_{ij}) n_p = 0 \quad (21)$$

Daí

$$\sigma_{p',r'} = l_{p',i} l_{r',j} \sigma_{ij} \quad (22)$$

Esta expressão rege a transformação de tensores de 2ª ordem sob rotação de eixos.

2.2.4- Tensões Principais

As equações $T = n_i T_i$ e $T_i = \sigma_{ij} n_j$ são diferentes maneiras de se escrever a expressão de Cauchy para tensões. Não obstante, é desejável exprimir a tensão normal, σ_n , e a tensão tangencial, S_n , diretamente de um vetor tensão T associado a um vetor n referente a um determinado ponto P_i .

Considera-se a figura 6.

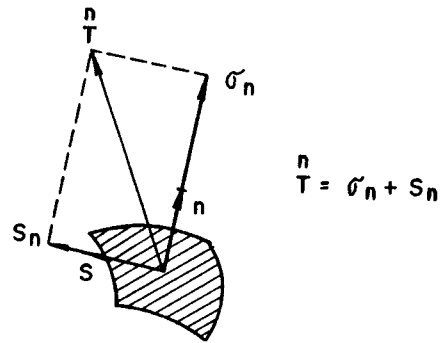


Fig. 6- Vetor tensão e suas projeções normal e tangencial.
Fonte: Chen e Saleeb⁽⁸⁾.

A tensão normal vale:

$$\sigma_n = T \cdot n = T_i n_i \quad (23)$$

ou

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (24)$$

A tensão tangencial é, então, dada por:

$$S_n^2 = (T)^2 - \sigma_n^2 \quad (25)$$

Se a direção do vetor n coincide com a direção do vetor T , tem-se que, $T = \sigma_n$ e $S_n = 0$. A direção n é chamada de direção principal, o plano normal a n é o plano principal e a tensão σ_n , ou σ denominando de tensão principal.

À luz destas considerações, escreve-se:

$$T = \sigma_n n = \sigma n \quad (26)$$

ou indicialmente,

$$T_i = \sigma n_i \quad (27)$$

ou, ainda:

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma n_i = \sigma \delta_{ij} n_j \quad (28)$$

Chega-se, então, a:

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (29)$$

e ainda:

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad (30)$$

e na forma expandido, chamada de equação característica:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (31)$$

onde:

$$I_1 = \sigma_{kk}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \sigma_{ji} - \sigma_{ii} \sigma_{jj}) \quad (32)$$

$$I_3 = \frac{1}{6} e_{ijk} e_{pqr} \sigma_{ip} \sigma_{jq} \delta_{kr}$$

As três raízes da equação (31): σ_1 , σ_2 , σ_3 , correspondem às três tensões principais. A estas raízes estão associados três direções, ortogonais entre si, denominadas de direções principais ou próprias, $n_i^{(1)}$, $i = 1, 2, 3$. Em síntese, são autovalores ou valores próprios σ_i associados a autovetores ou vetores próprios $n_i^{(1)}$.

Os valores I_1 , I_2 , I_3 são independentes do sistema de coordenadas adotado, e, por isso, chamados invariantes de tensão.

a) Decomposição do Tensor das Tensões

Em muitos casos, apresenta-se conveniente a decomposição do tensor das tensões σ_{ij} em duas partes, uma chamada de esférica e outra de desviatória.

O tensor das tensões esférico é relatado por meio de:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \quad (33)$$

e o tensor das tensões desviatório através de:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (34)$$

Nota-se que para $\delta_{ij} = 0 (i \neq j)$, $S_{ij} = \sigma_{ij}$. Para um estado esférico de tensões há um estado de dilatação uniforme e para um estado desviatório de tensões (somente tensões tangenciais) há um estado de distorção pura. Um estado altera volume, outro altera forma de um sólido. Este comentário adapta-se a materiais isotrópicos, outras considerações surgirão necessárias e serão apresentadas, quando se tratar com materiais anisotrópicos.

No que tange a direções principais de tensão, estas são as mesmas para o estado inicial de tensão σ_{ij} e para o estado

desviatório de tensão S_{ij} , haja vista que estado esférico não interfere nas direções principais. Para se obter os invariantes do tensor S_{ij} , processa-se de modo análogo a σ_{ij} . Assim:

$$|S_{ij} - s \delta_{ij}| = 0 \quad (35)$$

ou ainda:

$$s^3 - J_1 s^2 + J_2 s - J_3 = 0 \quad (36)$$

Os invariantes são:

$$\begin{aligned} J_1 &= 0 \quad (S_{11} = 0) \\ J_2 &= \frac{1}{2} S_{ij} S_{ji} \\ J_3 &= \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} \end{aligned} \quad (37)$$

2.3- Análise de Deformação

2.3.1- Introdução

Na parte referente às tensões, foi analisado o efeito de forças aplicadas num sólido em termos das tensões que elas causam. De um modo geral, essas forças causam, também, deslocamentos e deformações no sólido. Quando a posição relativa de dois pontos quaisquer, num sólido é alterada, este sólido é considerado deformado.

Um estado de deformação de um ponto é definido como a totalidade das mudanças nos comprimentos das linhas (fibras) do material que interceptam o ponto em questão e, também, a totalidade das mudanças no ângulo entre qualquer par de linhas irradiadas deste ponto.

Seja a figura 7, que apresenta um segmento infinitesimal OP de um ponto O, num sólido, em sua posição inicial, indeformado, com comprimento igual a unidade. Depois da deformação, o elemento é deslocado para a posição O'P'.

O vetor deslocamento relativo do ponto P com respeito ao ponto O é denominado por δ'_n . O índice superescrito n indica a relação com o vetor n.

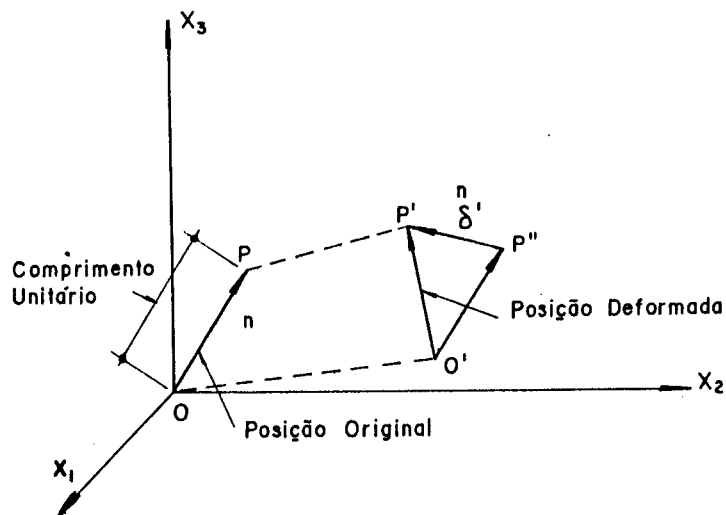


Fig. 7- Posição indeformada e deformada de um segmento.

Fonte: Chen e Saleeb⁽⁸⁾

Com a finalidade de buscar a relação entre o vetor δ' os vetores deslocamentos, δ'_1 , δ'_2 , δ'_3 de três eixos coordenados, uma situação bidimensional é considerada na figura 8. Ao lado disto, uma extensão tridimensional é, também, visualizada.

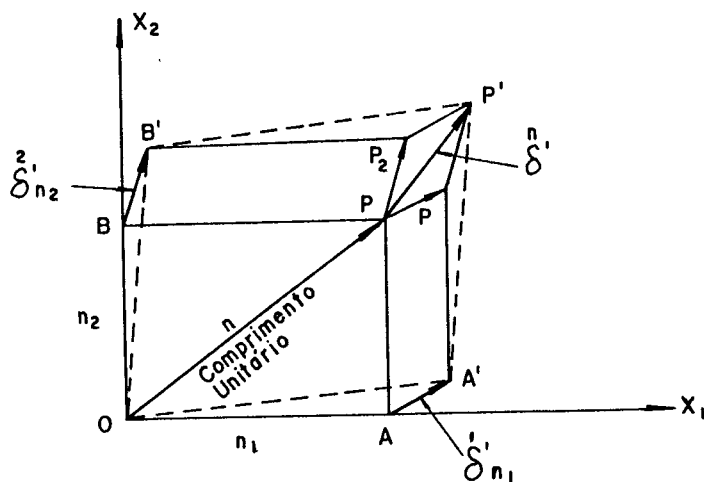


Fig. 8- Vetor deslocamento relativo e suas projeções.

Fonte: Chen e Saleeb⁽⁸⁾

Atendo-se à figura 8, e levando-se em conta a homogeneidade do estado de deformação, resulta em:

$$PP' = PP_1 + PP_2 \quad (38)$$

ou ainda,

$$\delta'^n = \delta'^{n_1} + \delta'^{n_2} \quad (39)$$

Para o caso tridimensional, como se tem na figura 9, obtem-se:

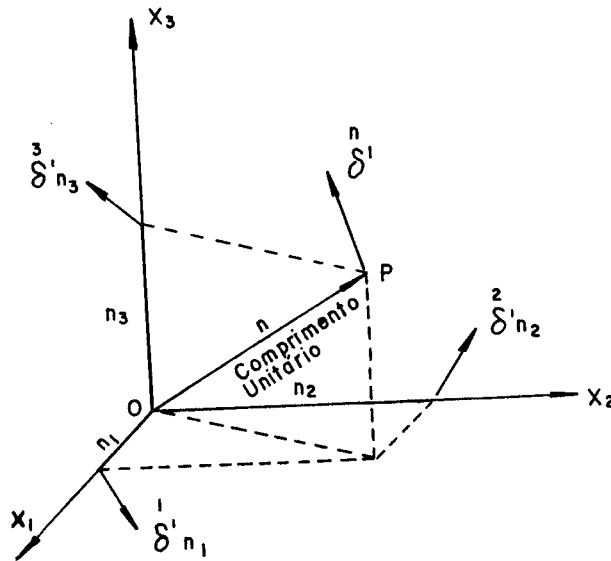


Fig. 9- Vetor deslocamento relativo no espaço tridimensional. Fonte: Chen e Saleeb⁽⁸⁾

$$\delta'^n = \delta'^{n_1} + \delta'^{n_2} + \delta'^{n_3} \quad (40)$$

Esta expressão é similar à da tensão T^n e concerne ao plano n com sistema de coordenadas tridimensionais.

Para um estado de deformação estar cabalmente definido há necessidade de se separar os deslocamentos de corpo rígido (translação e rotação) do vetor δ'^n , haja vista o pouco interesse destes na análise de deformação. A separação procedente é inerente ao caso de deformações infinitesimais.

2.3.2- Tensor Deformação

A expressão (40) pode ser definida através de componentes nas três direções x_1 , x_2 e x_3 por meio de:

$$\delta_i^n = \varepsilon'_{ij} n_j \quad (41)$$

onde as grandezas ε'_{ij} constituem o tensor deslocamento relativo. Na forma matricial escreve-se:

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{21} & \varepsilon'_{22} & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & \varepsilon'_{33} \end{bmatrix} \quad (42)$$

É possível demonstrar que esse tensor é antimétrico (Chen e Saleeb⁽⁸⁾).

$$\varepsilon'_{ij} = -\varepsilon'_{ji} \quad (43)$$

Nessas condições é permitido decompor o tensor ε'_{ij} , numa parte simétrica, representando a deformação pura (deformação normal e distorção) e outra parte antimétrica representando a rotação de corpo rígido. Com efeito, tem-se:

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} (\varepsilon'_{ij} + \varepsilon'_{ji}) + \frac{1}{2} (\varepsilon'_{ij} - \varepsilon'_{ji}) \quad (44)$$

ou

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (45)$$

onde: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\varepsilon'_{ij} + \varepsilon'_{ji})$ e $\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\varepsilon'_{ij} - \varepsilon'_{ji})$.

O tensor simétrico ε_{ij} é chamado tensor das deformações e o tensor antimétrico ω_{ij} é chamado de tensor rotacional. Substituindo-se em (41), tem-se:

$$\delta_i^n = \varepsilon_{ij} n_j + \omega_{ij} n_j \quad (46)$$

O vetor deslocamento relativo à deformação pura é denominado vetor deformação e sua notação é δ_1^n , valendo:

$$\delta_1^n = \epsilon_{1j} n_j \quad (47)$$

O vetor deslocamento relativo para a rotação de corpo rígido é chamado vetor rotação, denotado por Ω^n e dado por:

$$\Omega_1^n = \omega_{1j} n_j \quad (48)$$

O vetor deformação δ , decomposto nas três direções x_1, x_2, x_3 caracteriza, plenamente, o estado de deformação de um ponto. A próxima figura ilustra, através da superposição de efeitos, o processo de deformação de duas fibras, inicialmente retas.

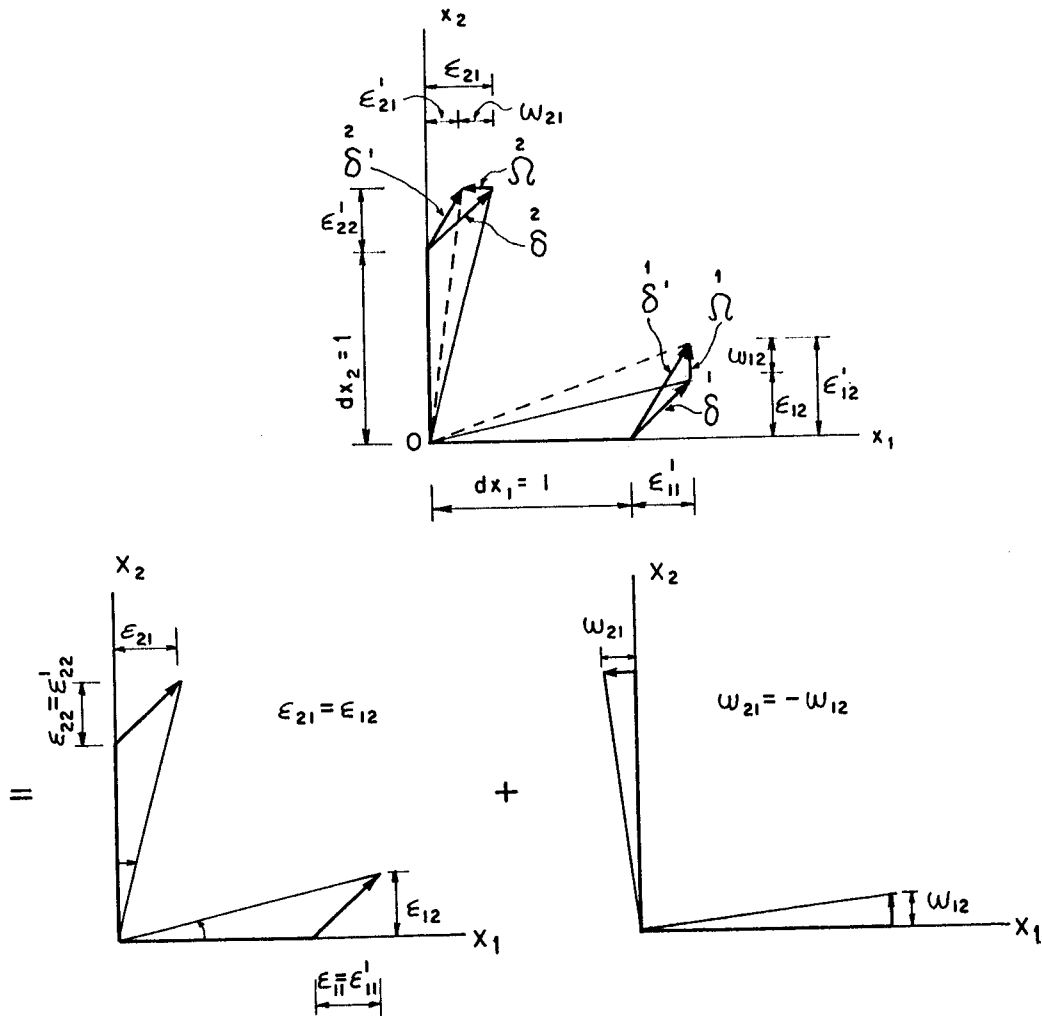


Fig. 10- Superposição de efeitos num processo de deformação. Fonte: Chen e Saleeb⁽⁸⁾

a) Notação da Deformação Tangencial

As componentes do tensor das deformações são de dois tipos. Aqueles relacionados com deformações normais e aqueles relacionados com deformações tangenciais. Desse modo:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{32} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Se: $i = j$, tem-se deformações normais tensoriais,
 $i \neq j$, tem-se deformações tangenciais tensoriais.

Em certos casos é conveniente utilizar as deformações tangenciais de engenharia, denotadas por γ_{ij} e indicando a variação total dos ângulos entre duas fibras, as quais estavam dispostas perpendicularmente antes da deformação. A Figura 10 ilustra tal fato. Torna-se, aqui, necessário observar que no desenvolvimento do cálculo tensorial, usa-se o valor $\gamma_{ij}/2 = \epsilon_{ij}$, $i \neq j$, e não o valor γ_{ij} .

b) Deformações Principais

Da mesma forma que no estudo das tensão, há no estudo das deformações, direções n , em que as deformações tangenciais se anulam. Estas direções são as direções principais e os valores correspondentes são as deformações principais. Analogamente às tensões pode-se, então, escrever:

$$\delta = \epsilon n \quad (50)$$

ou

$$\delta_i^n = \varepsilon n_i \quad (51)$$

ou

$$\varepsilon_{ij} n_j = \varepsilon \delta_{ij} n_j \quad (52)$$

ou

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (53)$$

Para a solução não trivial, deve-se ter $|\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}|$ igual a 0 e a equação característica associada fica sendo:

$$\varepsilon^3 - I'_1 \varepsilon^2 + I'_2 \varepsilon - I'_3 = 0 \quad (54)$$

onde:

$$I'_1 = \varepsilon_{kk}$$

$$I'_2 = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji} - \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj}) \quad (55)$$

$$I'_3 = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} \varepsilon_{ip} \varepsilon_{jq} \varepsilon_{kr}$$

As três raízes da equação (54) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ são as três deformações principais e estão vinculadas às três direções principais, $n_i^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, ou seja, autovalores ε_i ligados a autovetores $n_i^{(i)}$.

Os valores I'_1, I'_2, I'_3 são os invariantes de deformação.

c) Decomposição do Tensor das Deformações

O tensor ε_{ij} pode ser decomposto, de maneira semelhante ao tensor σ_{ij} , em duas partes: uma associada com a mudança de volume, denominada esférica e outra parte associada com a mudança de forma, chamada de desviatória. Assim,

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (56)$$

onde e_{ij} é definido como tensor deformação desviatória e $\frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij}$ é o tensor das deformações esférico.

Observa-se que para $\delta_{ij} = 0$ ($i \neq j$), $\varepsilon_{ij} = e_{ij}$. Para um estado esférico de deformação há um estado de dilatação uniforme e para um estado desviatório de deformação há um estado de distorção pura. Um é intrínseco à mudança do volume e outro à mudança de forma. As direções principais de ε_{ij} e e_{ij} são as mesmas e os invariantes do tensor e_{ij} são calculados como se segue.

Seja $|e_{ij} - e \delta_{ij}| = 0$ com equação característica valendo:

$$e^3 - J'_1 e^2 + J'_2 e - J'_3 = 0 \quad (57)$$

onde $J'_1 = 0$ ($e_{ii} = 0$)

$$J'_2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ji} \quad (58)$$

$$J'_3 = \frac{1}{3} e_{ij} e_{jk} e_{ki}$$

2.3.3- Relações entre Deformação e Deslocamento

Considere as coordenadas de um ponto P num sólido, originalmente indeformado, x_i ($i = 1, 2, 3$) referido a um sistema fixo x_1, x_2, x_3 . As coordenadas do mesmo ponto P depois de deformado são ξ_i ($i = 1, 2, 3$), com referência a x_1, x_2, x_3 , de acordo com a Figura 11.

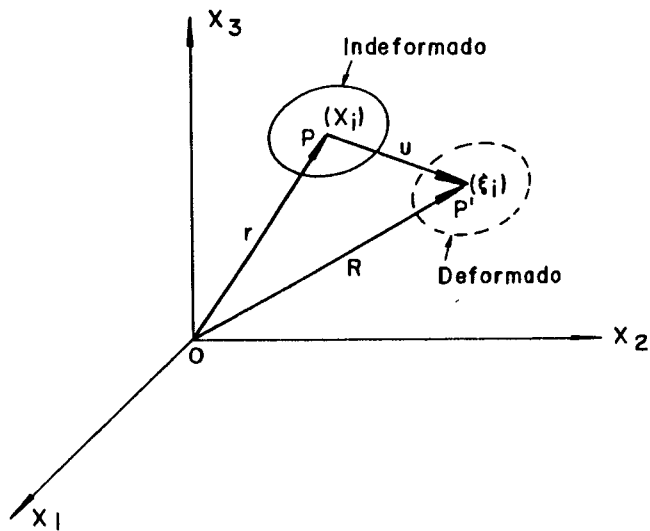


Fig. 11- Situação indeformada e deformada de um sólido
 Fonte: Chen e Saleeb⁽⁸⁾

Empregando-se a descrição Lagrangeana, onde as coordenadas x_1 são consideradas independentes, para análise das relações deformação-deslocamento, considera-se dois pontos P e Q, com coordenadas x_1 e $x_1 + dx_1$, respectivamente, antes da deformação. Depois da deformação os pontos são P' e Q' com coordenadas ξ_1 e $\xi_1 + d\xi_1$, como na figura 12.

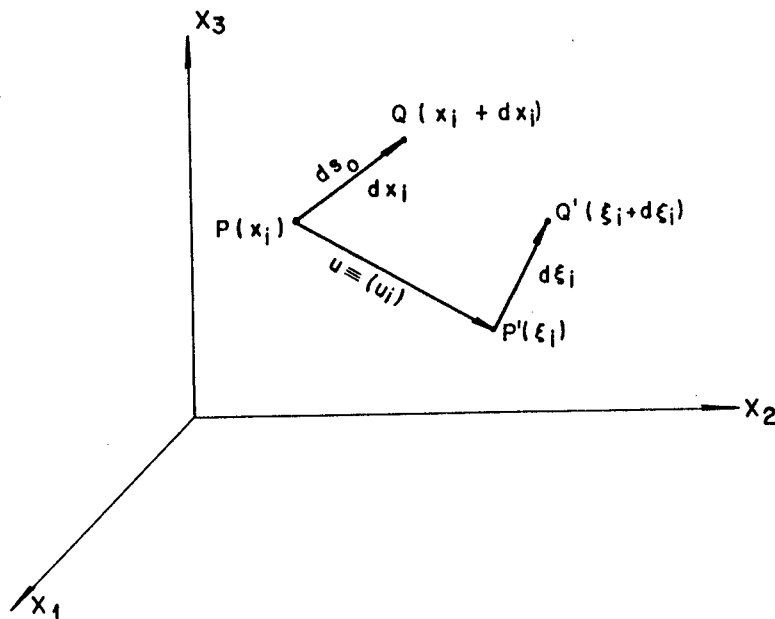


Fig. 12- Coordenadas de P e Q. Fonte: Chen e Saleeb⁽⁸⁾

O vetor u_1 é o vetor deslocamento do ponto P. Tem-se, então, que:

$$\begin{aligned} ds_o^2 &= dx_1 \cdot dx_1 \\ ds^2 &= d\xi_1 \cdot d\xi_1 \end{aligned} \quad (59)$$

Na descrição Lagrangeana, todas as quantidades são as expressas em função de x_1 . Assim,

$$\xi_1 = x_1 + u_1 \quad (60)$$

e

$$d\xi_1 = dx_1 + u_{1,j} dx_j \quad (61)$$

ou

$$d\xi_1 = (\delta_{1j} + u_{1,j}) dx_j \quad (62)$$

onde

$$u_{1,j} = \frac{\partial u_1}{\partial x_j}$$

A quantidade $ds^2 - ds_o^2$ pode ser usada para se medir deformação, ou seja: $(ds^2 - ds_o^2)/ds_o^2$ é a medida da deformação.

Das expressões anteriores (59 a 62) prossegue-se com

$$ds^2 - ds_o^2 = (\delta_{1j} + u_{1,j}) dx_j (\delta_{1r} + u_{1,r}) dx_r - dx_1 dx_1 \quad (63)$$

ou ainda,

$$ds^2 - ds_o^2 = (u_{1,j} + u_{j,1} + u_{r,1} u_{r,j}) dx_1 dx_j \quad (64)$$

podendo ser escrito como:

$$ds^2 - ds_o^2 = 2 \varepsilon_{1j} dx_1 dx_j \quad (65)$$

onde o tensor ε_{1j} é definido por:

$$\varepsilon_{1j} = \frac{1}{2} (u_{1,j} + u_{j,1} + u_{r,1} u_{r,j}) \quad (66)$$

O fator 1/2 é inserido na definição por conveniência de interpretação física.

Se as derivadas de deslocamentos $u_{1,j}$ são muito pequenas nos seus termos não lineares, de tal modo que seus produtos possam ser desprezados, a expressão (66) reduz-se para:

$$\varepsilon_{1j} = \frac{1}{2} (u_{1,j} + u_{j,1}) \quad (67)$$

a) Interpretação Física para Pequenas Deformações

Considera-se um elemento linear dx_1 , o qual permanece sobre o eixo x_1 , antes da deformação. Depois da deformação o elemento é representado por $-d\xi_1$, como na figura.

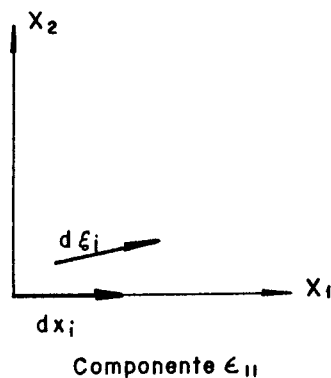


Fig. 13- Componente ε_{11} . Fonte: Chen e Saleeb⁽⁸⁾

Colocando-se, $dx_1 = dx_1 = (ds_0, 0, 0)$ em $ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{1j} dx_1 dx_j$, vem:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{11} ds_0^2. \text{ Daí } (ds + ds_0)(ds - ds_0) = 2\varepsilon_{11} ds_0^2,$$

que pode ser escrito por:

$$\frac{ds - ds_0}{ds_0} = \left(\frac{2ds_0}{ds_0} \right) \varepsilon_{11}. \text{ Para pequenas deformações } ds \cong$$

$\cong ds_0$, resultando em:

$$\varepsilon_{11} = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \quad (68)$$

À vista disso, ϵ_{11} representa a mudança de comprimento de um elemento que antes da deformação era paralelo a x_1 . As componentes ϵ_{22} e ϵ_{33} têm interpretações análogas.

A componente tangencial ϵ_{12} pode ser investigada tendo dois elementos retos $dx_1^{(1)}$ e $dx_1^{(2)}$, inicialmente, paralelos x_1 e x_2 , como na figura.

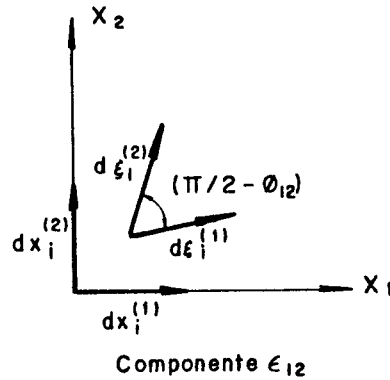


Fig. 14- Componente ϵ_{12} . Fonte: Chen e Saleeb⁽⁸⁾

Depois da deformação é configurado um decréscimo total no ângulo reto, denominado ϕ_{12} . Tem-se, desse modo que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{12}\right) = \frac{d\xi_1^{(1)} \cdot d\xi_1^{(2)}}{|d\xi_1^{(1)}| \cdot |d\xi_1^{(2)}|} \quad \text{ou:}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{12}\right) = \frac{(dx_1^{(1)} + u_{1,k} dx_k^{(1)})(dx_1^{(2)} + u_{1,t} dx_t^{(2)})}{|d\xi_1^{(1)}| |d\xi_1^{(2)}|} =$$

$$= \frac{dx_1^{(1)} \cdot dx_1^{(2)} + (u_{1,k} + u_{k,1} + u_{r,1} u_{r,k}) dx_1^{(1)} \cdot dx_k^{(2)}}{|d\xi_1^{(1)}| |d\xi_1^{(2)}|} \quad (69)$$

mas $dx_1^{(1)} \cdot dx_1^{(2)} = 0$, daí:

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \phi_{12} \right) = \frac{2\varepsilon_{ik} dx_1^{(1)} dx_k^{(2)}}{|d\xi_1^{(1)}| |d\xi_1^{(2)}|} = \frac{2\varepsilon_{12}}{(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})} \quad (70)$$

Para pequenos deslocamentos:

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \phi_{12} \right) \cong 2\varepsilon_{12} \quad \text{ou,}$$

$$\text{sen } \phi_{12} \cong 2\varepsilon_{12} \quad \text{ou,}$$

$$\phi_{12} \cong 2\varepsilon_{12} \quad \text{ou,}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\phi_{12}}{2} \quad (71)$$

Sob esta ótica, ε_{12} e, similarmente, ε_{13} e ε_{23} , representam metade do decréscimo do ângulo reto entre os dois segmentos, originalmente paralelos aos eixos coordenados.

b) Condições de Compatibilidade

Quando da análise das tensões, foi apontada a necessidade de se estabelecer condições de equilíbrio para assegurar o estado de equilíbrio de um sólido. Na análise das deformações deve-se ter algumas condições para que o sólido se mantenha contínuo. Com efeito, considera-se a equação deformação-deslocamento:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad (72)$$

Para os deslocamentos dados, u_i , num total de três, as componentes de deformações ε_{ij} , em número de seis, são completamente determinadas. Por outro lado, para as componentes de deformação, esta equação representa um sistema de equações diferenciais parciais para a determinação de componentes u_i . Desde que existam equações para três funções u_i , as componentes de deformação ε_{ij} não podem ser tomadas arbitrariamente, mas devem estar sujeitas a certas restrições. Tais restrições são chamadas de condições de compatibilidade. Pode-se mostrar (Sokolnikoff⁽¹⁰⁾ e Wylie⁽¹²⁾) que estas condições para uma região simplesmente conectada valem:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (73)$$

Este sistema tem 81 equações, sendo 6 independentes.

Estas equações constituem-se em condição necessária e suficiente para assegurar a existência de um deslocamento correspondente a um conjunto dado de funções de deformações.

2.4- Idealização das Leis Constitutivas

2.4.1- Introdução

Como já foi abordado na introdução deste capítulo, a solução de problemas na mecânica dos sólidos encontra-se vinculada a princípios fundamentais da mecânica e a leis constitutivas do material. Com o subsídio das considerações acerca das tensões e das deformações, pode-se interligar a solução de problemas com equações de equilíbrio, condições de compatibilidade de deformações e de deslocamentos e, naturalmente, com as leis constitutivas.

As condições de equilíbrio são determinadas por:

. Pontos na superfície

$$T_i = \sigma_{ji} n_j \quad (74)$$

. Pontos no interior

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0 \quad (75)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (76)$$

Estas condições permitem relacionar estaticamente as tensões σ_{ij} e as forças F_i e T_{ij} respectivamente, de volume e de superfície.

Qualquer série de tensões σ_{ij} , de forças volumétricas, F_i , e de superfície T_i que satisfaz estas equações é chamada série em equilíbrio. A condições de equilíbrio fornece três equações com seis componentes de tensão σ_{ij} . Assim, uma série em equilíbrio é meramente uma série e não significa uma única série. Em geral, uma infinidade de estados de tensão atendem as condições

de equilíbrio e de contorno.

No que se refere ao campo das deformações e dos deslocamentos, pode-se sumarizar as seguintes relações, para pequenas deformações:

. Relações deformações - deslocamentos:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (77)$$

. Condições de compatibilidade:

$$\varepsilon_{ij,k1} + \varepsilon_{k1,ij} - \varepsilon_{ik,j1} - \varepsilon_{j1,ik} = 0 \quad (78)$$

Estas condições descrevem as relações entre componentes de deformação e de deslocamento.

É necessário impor condições de compatibilidade de deformação e de deslocamento no sentido de se assegurar que essas relações deformações - deslocamentos são integradas para um determinado campo de deformação.

Uma série de deslocamentos u_i e de deformações ε_{ij} que satisfaz as relações citadas e as condições de contorno de deslocamento é denominada série compatível ou série de compatibilidade. De modo análogo à série de equilíbrio, uma série compatível é uma das muitas possíveis que se enquadram nas relações (78).

Na solução de problemas, em elasticidade clássica, tal qual a função de tensão ou de Airy, deve-se, necessariamente, impor as condições de compatibilidade, visto que os deslocamentos u_i não são incógnitas discretizadas na formulação dos problemas. Entretanto, em soluções onde os deslocamentos u_i são tomados como incógnitas no problema (método dos elementos finitos), as condições de compatibilidade não são necessárias e as relações deformações - deslocamentos são empregadas para se determinar as deformações a partir dos deslocamentos. Neste caso, existem nove incógnitas independentes, isto é, seis componentes de tensão σ_{ij} e três componentes de deslocamentos u_i ; as deformações são expressas em função dos deslocamentos u_i . Posto que se possua três equações de equilíbrio, há necessidade de serem adicionadas outras seis relações para integrar a formulação do problema. Estas outras

relações advêm das leis constitutivas dos materiais.

As condições estáticas (forças, tensões) e as geométricas (deslocamentos, deformações) são independentes das características do material que constitui um sólido. Por outro lado, as equações constitutivas traduzem o diferenciamento intrínseco do comportamento dos diversos materiais. Elas interligam as relações tensões - deformações, $\sigma_{ij} - \epsilon_{ij}$, em quaisquer pontos num sólido. Uma vez estabelecida a lei constitutiva de um material, a formulação geral para a solução de um problema de mecânica dos sólidos, em seu bojo, pode ser inteirada. As interrelações das variáveis, F_i , T_i , σ_{ij} , e u_i encontram-se numa formulação geral como mostrado no esquema da figura 15.

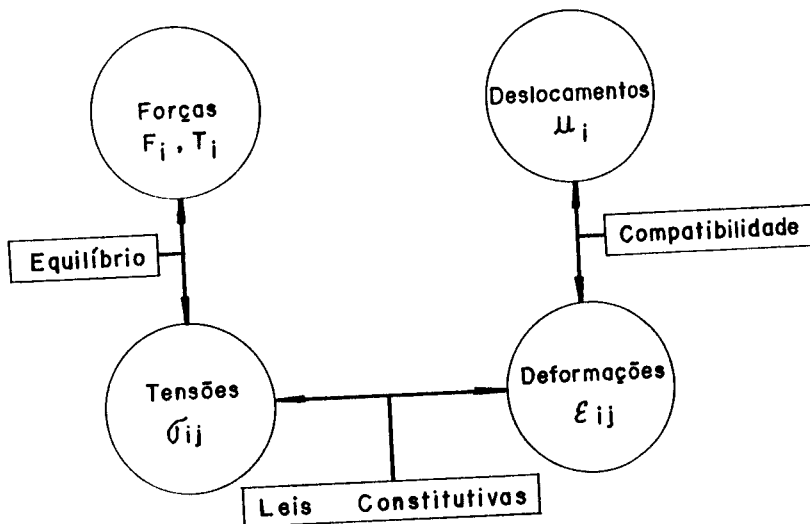


Fig. 15- Interrelações entre F_i , T_i , σ_{ij} , ϵ_{ij} e u_i

Fonte: Chen e Saleeb⁽⁸⁾

As relações constitutivas são determinadas experimentalmente e elas podem envolver quantidades físicas tais como temperatura, tempo e outras. Não obstante, o efeito destas quantidades no comportamento tensão - deformação pode ser mais convenientemente enfatizado em termos da história das tensões e deformações do que numa relação constitutiva.

De uma forma geral, as leis constitutivas tentam modelar matematicamente o comportamento real dos materiais. Há de serem feitas, então, idealizações nesses modelos para que eles representem o mais adequadamente possível. Nesse sentido, hipóteses como a de um modelo ideal elástico ou elasto-plástico, onde o efeito do tempo é desprezado; outras como a reversibilidade ou irreversibilidade dos caminhos de cargas em materiais elásticos e elasto-plásticos devem ser constatados. Noutro sentido, em materiais visco-elásticos ou visco-plásticos, os efeitos do tempo são contabilizados e há possibilidade de se exprimir o comportamento história - dependência. Ao se concluir, observa-se que existem limitações nos modelos idealizados para as leis constitutivas, mas em vista da praticidade exigida na solução dos problemas de engenharia, a investigação experimental cuidadosa e a busca de idealizações de modelos matemáticos afins para a formulação das leis constitutivas devem ser, constantemente, buscadas.

2.4.2- Elasticidade

A resposta mecânica interna de um sólido a uma ação externa pode ser expressa em termos de tensões e deformações. Uma vez cessada a ação ou causa (força externa) geradora de tensões e deformações, ou seja os efeitos, um sólido elástico retorna a sua situação inicial sem guardar deformações residuais. A esta propriedade dá-se o nome de elasticidade. Um sólido elástico pode ter comportamento não linear ou linear, como é indicado na figura.

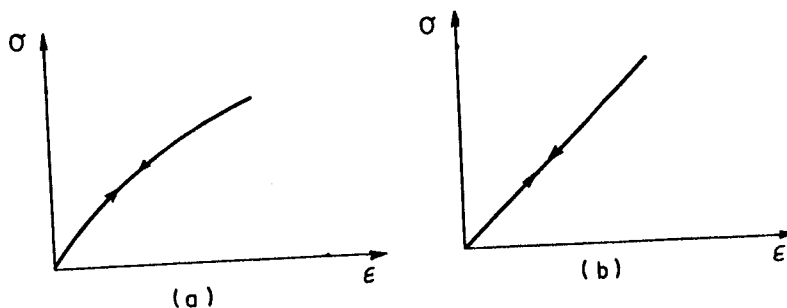


Fig. 16- Elasticidade não linear e linear.

Fonte: Desai⁽⁷⁾

Para estes sólidos, o estado atual de tensões depende, somente, do estado atual de deformações. Isto é, existe reversibilidade entre tensões e deformações. Matematicamente, define-se:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\epsilon_{kl}) \quad (79)$$

onde F_{ij} é uma função resposta.

As relações tensão - deformação ou modelos constitutivos descritos pelas equações (79) estão baseadas em hipóteses que não dependem do fator tempo e somente sólidos sob condições adiabáticas e isotérmicas são considerados. (Love⁽¹³⁾)

2.4.3- Modelos Elásticos de Green

Muito comumente, as leis e equações que regem os problemas de engenharia estão relacionadas com a energia armazenada num sólido. Assim, um sólido elástico é capaz de acumular a energia desenvolvida pelos agentes externos, ou seja, trabalho externo, em energia potencial, a qual é admitida função exclusiva das deformações existentes no sólido. Essa energia potencial elástica é denominada de energia de deformação.

Neste texto, de um modo geral, abordar-se-á energia de deformação, indistintamente, para a função energia de deformação total ou para a função densidade de energia de deformação.

Nessas condições, se nenhuma energia é dissipada durante o processo de deformação, as leis ou modelos derivados desta suposição são chamados de modelos elástico de Green e o material que constitui o sólido, de material hiperelástico. (Desai⁽⁷⁾). Dessa maneira, um material hiperelástico é aquele que possui uma função energia de deformação, aqui simbolizado por U_0 . Na Figura 16 está representada a quantidade U_0 através da área sob a curva σ x ϵ e o eixo ϵ . A quantidade de U_{co} representa a energia complementar de deformação.

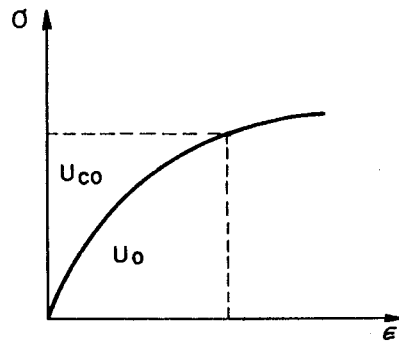


Fig. 17- Energia de deformação e energia complementar

2.4.4- Relação Energia de Deformação com Tensões e Deformações

Considera-se um sólido elástico em equilíbrio, com condições de geometria (compatibilidade) respeitadas.

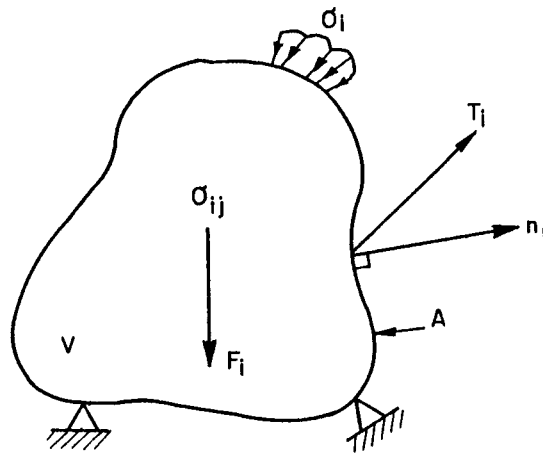


Fig. 18- Sólido elástico em equilíbrio. Fonte Desai⁽⁷⁾

Para um material elástico, as tensões são admitidas funções, únicas, das deformações, ou seja:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (80)$$

Considera-se, agora, uma série de compatibilidade virtual obtida quando o sólido experimenta um deslocamento infinitesimal virtual δu_1 na sua configuração de equilíbrio. Sejam $\delta \epsilon_{1j}$ as deformações compatíveis, as condições geométricas devem, naturalmente, ser satisfeitas em $\epsilon_{1j} = (u_{1,j} + u_{j,1})$. O princípio dos Trabalhos Virtuais interrelaciona uma série de equilíbrio F_1 , T_1 , σ_{1j} com uma série de compatibilidade virtual δu_1 , $\delta \epsilon_{1j}$ através da equação (81).

$$\int_A T_1 \delta u_1 dA + \int_V F_1 \delta u_1 dV = \int_V \sigma_{1j} \delta \epsilon_{1j} dV \quad (81)$$

A parcela à esquerda da equação representa a variação do trabalho externo δW e a parcela a direita representa a variação da energia de deformação δU . Assim:

$$\int_V \delta U dV = \int_V \sigma_{1j} \delta \epsilon_{1j} dV \quad (82)$$

Mas,

$$\delta U = \int_V \delta U_0 dV \quad (83)$$

Portanto:

$$\delta U_0 = \sigma_{1j} \delta \epsilon_{1j} \quad (84)$$

Desde que U_0 é função somente de componentes relativas às deformações ϵ_{1j} , tem-se:

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{1j}} \delta \epsilon_{1j} \quad (85)$$

Dessa forma, obtem-se:

$$\sigma_{1j} = \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{1j}} \quad (86)$$

Esta relação é chamada de lei constitutiva hiperelástica ou de Green.

O desenho da Figura 19 corrobora na presente descrição.

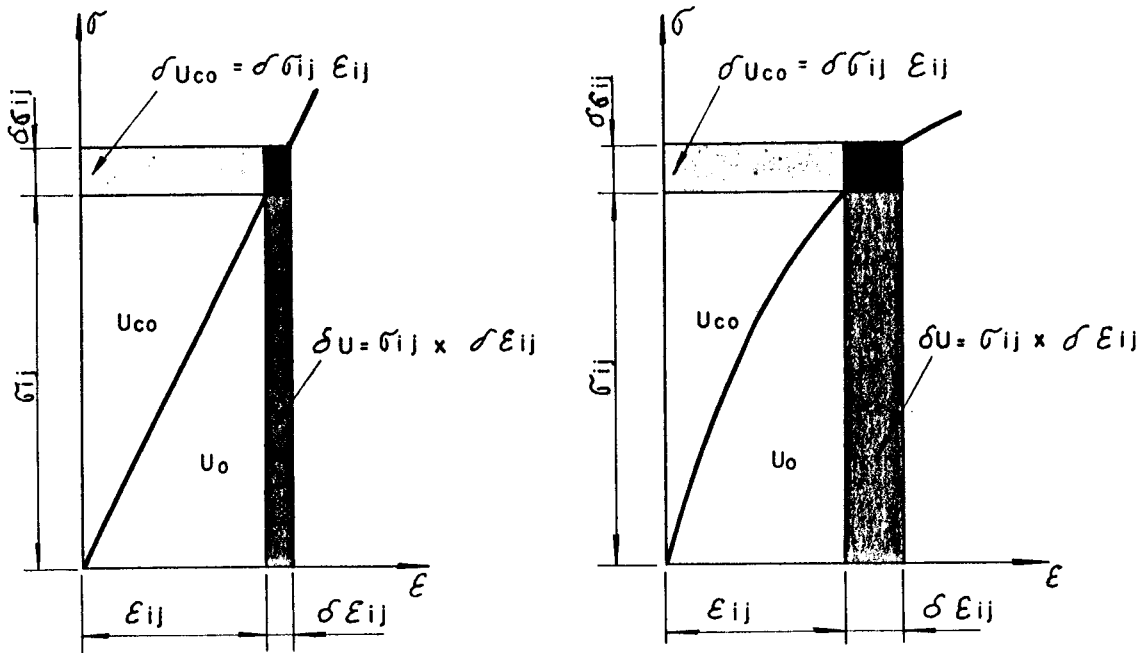


Fig. 19- Trabalho e energia de deformação
Fonte Popov⁽²⁶⁾

De outra maneira, pode-se conseguir uma relação entre σ_{ij} , ϵ_{ij} e U_o por intermédio de variações; $\delta\sigma_{ij}$, δF_i e δT_i . Utilizando-se esta variação na série de equilíbrio juntamente com a série de compatibilidade u_i e ϵ_i , a equação dos trabalhos virtuais se torna:

$$\int_A \delta u_i u_i dA + \int_V \delta F_i u_i dV = \int_V \delta \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (87)$$

A parcela da direita na equação (87) é igual à variação de energia interna do sólido, podendo ser escrita por:

$$\int_V \delta U_{co} dV = \int_V \delta \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (88)$$

Assim:

$$\delta U_{co} = \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} \quad (89)$$

Sendo U_{co} função somente de componentes relacionadas

com tensão σ_{ij} , tem-se:

$$\delta U_{co} = \frac{\partial U_{co}}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} \quad (90)$$

Desse modo, conclui-se:

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial U_{co}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (91)$$

Esta expressão representa a forma inversa da lei constitutiva hiperelástica.

De outro lado, a energia de deformação U_o pode ser definida em termos de deformações:

$$U_o = U_o(\epsilon_{ij}) \quad (92)$$

Pode, também, ser expressa em termos de invariantes de deformação, ou seja:

$$U_o = U_o(I'_1, I'_2, I'_3) \quad (93)$$

Aplicando-se, agora, a equação (86), resulta em:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_o}{\partial I'_1} \left(\frac{\partial I'_1}{\partial \epsilon_{ij}} \right) + \frac{\partial U_o}{\partial I'_2} \left(\frac{\partial I'_2}{\partial \epsilon_{ij}} \right) + \frac{\partial U_o}{\partial I'_3} \left(\frac{\partial I'_3}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \quad (94)$$

E, desde que:

$$\frac{\partial I'_1}{\partial \epsilon_{ij}} = \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial I'_2}{\partial \epsilon_{ij}} = \epsilon_{ij} \quad (95)$$

$$\frac{\partial I'_3}{\partial \epsilon_{ij}} = \epsilon_{im} \epsilon_{mj}$$

A equação (94) torna-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial I'_1} \delta_{ij} + \frac{\partial U_0}{\partial I'_2} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial U_0}{\partial I'_3} \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj} \quad (96)$$

Esta equação representa que o modelo elástico de Green se permite colocar em diferentes ordens, dependendo da interrelação da função U_0 com os termos ε_{ij} .

Retomando-se $\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl})$, esta relação pode ser expressa por :

$$\sigma_{ij} = \phi_0 \delta_{ij} + \phi_1 \varepsilon_{ij} + \phi_2 \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj} + \phi_3 \varepsilon_{im} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{nj} + \dots \quad (97)$$

onde ϕ_0, ϕ_1, \dots correspondem à função resposta elástica dependentes dos invariantes de deformações.

Observa-se, neste momento, que a representação do modelo elástico de Green, é um caso particular da equação (97), quando todos os termos, exceto ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 , são nulos. Ao caso geral da relação F_{ij} dá-se o nome de Modelo Elástico de Cauchy. (Desai⁽⁷⁾)

À luz destas considerações, se tem uma função U_0 escrita por:

$$U_0 = \alpha_1 I'_2 + \alpha_2 I_1'^2 \quad (98)$$

onde α_1 e α_2 são constantes inerentes ao material. Aplicando-se (96) tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \frac{\partial(\alpha_1 I'_2 + \alpha_2 I_1'^2)}{\partial I'_1} \delta_{ij} + \frac{\partial(\alpha_1 I'_2 + \alpha_2 I_1'^2)}{\partial I'_2} \varepsilon_{ij} + \\ & + \frac{\partial(\alpha_1 I'_2 + \alpha_2 I_1'^2)}{\partial I'_3} \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj} \end{aligned} \quad (99)$$

e, portanto:

$$\sigma_{ij} = 2\alpha_2 I_1' \delta_{ij} + \alpha_1 \varepsilon_{ij} \quad (100)$$

Esta expressão indica que há uma relação linear entre tensões e deformações. Este modelo é denominado modelo de primeira ordem de Green, ao qual apresenta-se também denominação de modelo de primeira ordem de Cauchy; haja vista as considerações abordadas anteriormente.

Neste momento, cabe uma importante citação a respeito do desenvolvimento histórico das leis constitutivas dos materiais. Em 1678, Hooke apresentou uma lei, que relatava a proporcionalidade entre tensões e deformações. Esta lei tornou-se a base da Teoria Matemática da Elasticidade e sua generalização e sua aplicação a luz das pesquisas modernas no campo da experimentação. Love⁽¹³⁾. Analiticamente, a lei de Hooke é expressa por: $\sigma = E \epsilon$, onde σ representa as tensões, ϵ as deformações e a constante E , relativa ao material, é denominada módulo de Young. Atualmente se faz referência às leis constitutivas, como lei de Hooke Generalizada, numa espécie de homenagem a tão ilustre pesquisador.

No modelo de primeira ordem, ou, modelo linear, a energia de deformação U_o e a energia complementar U_{co} são iguais. Com efeito, escreve-se:

$$U_o = U_{co} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (101)$$

Quando se trabalha com uma função U_o que resulta tensões como funções de deformações a nível do termo ϕ_2 , recai-se num modelo de 2^a ordem, ou modelo não linear. Dessa forma, as respectivas ordens dos modelos dependem do nível ou potência dos componentes ϵ_{ij} .

A título de ilustração considera-se as seguintes funções deformações, mencionadas por Desai⁽⁷⁾:

$$\begin{aligned} \phi_o &= a_1 I'_1 + a_2 I'_2 + a_3 I'_3 \\ \phi_1 &= a_4 + a_5 I_1 \\ \phi_2 &= a_6 \end{aligned} \quad (102)$$

onde: a_1, \dots, a_6 são constantes do material. Naturalmente, estas constantes são de determinação experimental. Aplicando-se a expressão (97) estabelece-se que:

$$\sigma_{ij} = (a_1 I'_1 + a_2 I_1'^2 + a_3 I_2') \delta_{ij} + (a_4 + a_5 I_1) \epsilon_{ij} + a_6 \epsilon_{im} \epsilon_{mj} \quad (103)$$

Observa-se que a parte inerente ao modelo de 1^a ordem é fornecido por:

$$\sigma_{ij} = a_1 I_1' \delta_{ij} + a_4 \varepsilon_{ij}$$

Aplicando-se estas expressões a uma situação tal que o tensor das deformações seja dado por:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (104)$$

isto é, um estado uniaxial de deformações, obtém-se as tensões:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (a_1 + a_4) \varepsilon_{11} + \left(a_2 + \frac{a_3}{2} + a_5 + a_6\right) \varepsilon_{11}^2 \\ \sigma_{22} &= a_1 \varepsilon_{11} + \left(a_2 + \frac{a_3}{2}\right) \varepsilon_{11}^2 \\ \sigma_{33} &= a_1 \varepsilon_{11} + \left(a_2 + \frac{a_3}{2}\right) \varepsilon_{11}^2 \\ \sigma_{12} &= \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0 \end{aligned} \quad (105)$$

A expressão $\sigma_{11} \times \varepsilon_{11}$ pode ser colocada em gráfico na forma de uma combinação das parcelas linear e não linear. A seguir, monta-se um terceiro gráfico superpondo-se os efeitos.

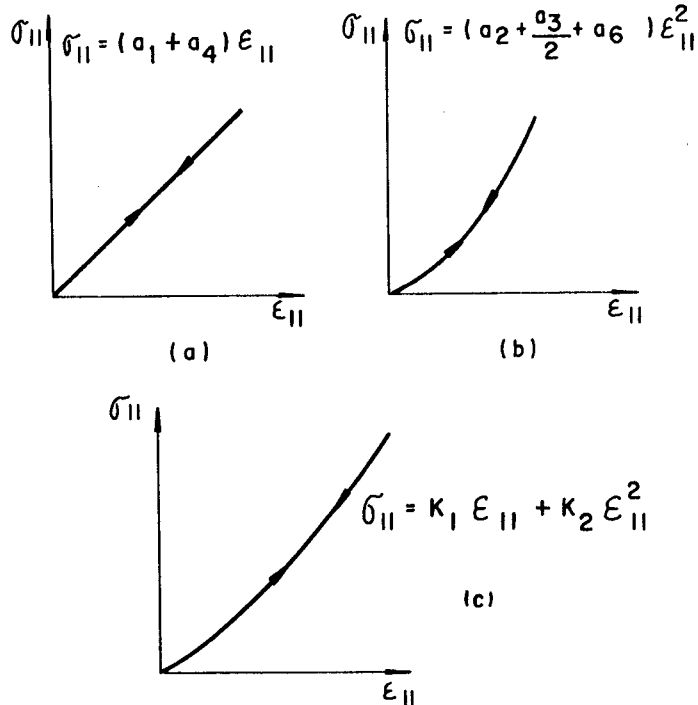


Fig. 20- Gráfico $\sigma_{11} \times \varepsilon_{11}$. Fonte: Desai⁽⁷⁾

Pode-se notar através desse exemplo que o efeito do modelo de 2ª ordem encampa o efeito do modelo de 1ª ordem.

2.4.5- Simetria do Material

De um modo geral, todos os materiais podem ser divididos, por um lado, em homogêneos e não homogêneos, e por outro lado, em isotrópicos e anisotrópicos. No que concerne a um sólido homogêneo, a nível de propriedades de elasticidade, estas são invariantes para todos os pontos referendados a um sistema de coordenadas x_1 . Em um sólido não homogêneo, as propriedades de elasticidade não se apresentam as mesmas, para diferentes pontos de x_1 .

Um sólido isotrópico é aquele no qual as propriedades de elasticidade são constantes para quaisquer direções estabelecidas a partir de um determinado ponto, ou seja, são invariantes para todas as transformações de coordenadas x'_1 . Noutro sentido, um sólido anisotrópico, em geral, exhibe diferentes propriedades de elasticidade para direções diferentes associadas a um ponto dado. As direções nas quais as propriedades de elasticidade se mantêm são denominadas direções equivalentes elasticamente ou direções principais de elasticidade de acordo com Lekhnitskii⁽⁶⁾. Neste texto, em alguns lugares, usar-se-á quando não houver dúvidas de interpretação, apenas de direção principal.

Se a estrutura de um sólido anisotrópico exhibe alguma espécie de simetria, as suas propriedades de elasticidade, da mesma sorte, também as exibem. A simetria elástica exprime o fato de existirem, associadas a quaisquer pontos, direções equivalentes simetricamente, nas quais as propriedades de elasticidade mantêm-se inalteradas. (Lekhnitskii⁽⁶⁾)

As relações entre a simetria estrutural e a simetria elástica para cristais foram estabelecidas por Neumann, apud Love⁽¹³⁾. Resumidamente, os princípios de Neumann estabelecem que as propriedades elásticas de um material têm a mesma espécie de simetria que a forma cristalográfica determina. Este princípio é estendido, também, à madeira.

2.4.6- Leis Constitutivas para Material Elasticamente Anisotrópico

Utilizando-se as propriedades da energia de deformação, apreciadas anteriormente, pode-se estabelecer formulações das leis constitutivas para diversas classes de materiais elásticos. Seja, então, a função energia de deformação, caracterizada pela seguinte série polinomial:

$$U_o = C_o \delta_{ij} + \alpha_{ij} \varepsilon_{ij} + \beta_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (106)$$

onde C_o , α_{ij} , β_{ijkl} são constantes.

À vista dos conceitos de energia de deformação, onde a energia de deformação tem um valor estacionário em relação ao tensor das deformações, é possível arbitrar essa constante C_o um valor igual a zero. Aplicando-se a expressão $\sigma_{ij} = \partial U_o / \partial \varepsilon_{ij}$, com U_o de acordo com a expressão (106) obtém-se:

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ij} + (\beta_{ijkl} + \beta_{klij}) \varepsilon_{kl} \quad (107)$$

Para o caso relativo ao "estado natural" (Reissman e Pawlik⁽⁹⁾) no qual as tensões e as deformações estão vinculadas a todo o sólido e, também, estão atuando simultaneamente no sólido, consegue-se escrever que:

$$(\sigma_{ij})_o = \left(\frac{\partial U_o}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_o = 0 \quad (108)$$

onde a notação parênteses com índice o , aponta para um estado natural com tensões e deformações nulas. Assim, α_{ij} vale zero.

É conveniente notar que a expressão (108) representa um valor estacionário de U_o no estado natural.

Denominando-se $(\beta_{ijkl} + \beta_{klij})$ de C_{ijkl} , pode-se escrever que:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (109)$$

O tensor C_{ijkl} é chamado de tensor de constantes de

elasticidade.

Pode-se exprimir a lei constitutiva $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$ em uma forma tensorial alternativa, admitindo-se naturalmente que $|C_{ijkl}| \neq 0$, por intermédio de:

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (110)$$

onde S_{ijkl} é denominado tensor compliance.

Do ponto de vista formal, os tensores C_{ijkl} e S_{ijkl} são constituídos de 81 elementos, haja vista que os índices i, j, k, l variam de 1 a 3. O tensor C_{ijkl} relaciona cada um dos nove componentes do tensor de deformação a cada um dos nove componentes do tensor de tensão. O tensor S_{ijkl} , por seu lado, faz esta interrelação de maneira inversa. Com intuito de exemplificação, considera-se as seguintes expansões das equações $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$ e $\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$, para uma particular escolha de índices livres i e j :

$$\begin{aligned} i = 1; j = 3 &\longrightarrow \sigma_{13} = C_{13kl} \epsilon_{kl} \\ i = 2; j = 2 &\longrightarrow \epsilon_{22} = S_{22kl} \sigma_{kl} \end{aligned} \quad (111)$$

Levando-se em conta, agora, os índices mudos tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = & C_{1311} \epsilon_{11} + C_{1312} \epsilon_{12} + C_{1313} \epsilon_{13} + C_{1321} \epsilon_{21} + C_{1322} \epsilon_{22} + \\ & + C_{1323} \epsilon_{23} + C_{1331} \epsilon_{31} + C_{1332} \epsilon_{32} + C_{1333} \epsilon_{33} \end{aligned} \quad (112)$$

e, também:

$$\begin{aligned} \epsilon_{22} = & S_{2211} \sigma_{11} + S_{2212} \sigma_{12} + S_{2213} \sigma_{13} + S_{2221} \sigma_{21} + S_{2222} \sigma_{22} + \\ & + S_{2223} \sigma_{23} + S_{2231} \sigma_{31} + S_{2232} \sigma_{32} + S_{2233} \sigma_{33} \end{aligned} \quad (113)$$

Torna-se oportuno observar que uma tensão tangencial, σ_{13} , provoca deformações tangenciais e deformações normais. Nota-se que a componente de tensão tangencial σ_{13} , por outro lado, induz um incremento de deformação normal ϵ_{22} , através do termo S_{2213} . De um modo geral, tensões tangenciais produzem deformações

normais, além das deformações tangenciais, e tensões normais produzem deformações tangenciais, além das deformações normais.

A partir do fato associado às seguintes derivações:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \quad (114)$$

e

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \quad (115)$$

pode-se concluir que $C_{ijkl} = C_{klij}$. Estas expressões estão de acordo com as derivadas relativas à expressão (107). Dessa forma, o tensor C_{ijkl} é simétrico em relação aos pares de índices (i, j) e (k, l), ou seja:

$$C_{(ij)(kl)} = C_{(kl)(ij)} \quad (116)$$

Retomando-se a expressão $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$, o tensor C_{ijkl} acena para a existência de 81 elementos independentes. Não obstante, deve-se lembrar que tanto o tensor das tensões como o tensor das deformações são simétricos. Direcionando-se estes conceitos à expressão $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$, tem-se:

. simetria do tensor σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sigma_{ji} = C_{jilk} \varepsilon_{kl} \quad (117)$$

e daí:

$$C_{ijkl} = C_{jilk} \quad (118)$$

Por outro lado:

. simetria do tensor ε_{ij} :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijlk} \varepsilon_{lk} \quad (119)$$

e portanto:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (120)$$

Nesse sentido, dos 81 elementos independentes, ao se aplicar (118), sobram 54 elementos independentes e quando se vincula (120), sobram 36 elementos independentes.

Entretanto, o tensor C_{ijkl} é simétrico em relação aos

pares (i,j) e (k,l). com efeito, dos 36 elementos independentes tem-se, assim, somente 21 elementos independentes.

a) Representação Material das Leis Constitutivas

À vista da simetria dos tensores de tensão e de deformação, é possível constatar as identidades:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \sigma_{21} & \epsilon_{12} &= \epsilon_{21} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} & \epsilon_{13} &= \epsilon_{31} \\ \sigma_{23} &= \sigma_{32} & \epsilon_{23} &= \epsilon_{32} \end{aligned} \quad (121)$$

Dessa forma, as nove equações que caracterizam as expressões tensoriais das leis constitutivas permitem serem condensadas em seis equações com seis termos cada uma.

Retomando-se às expressões (112) e (113), onde são discretizados σ_{13} e ϵ_{22} , respectivamente, e aplicando-se a simetria descrita pelas igualdades associada à simetria de C_{ijkl} e de S_{ijkl} em relação aos pares (i,j) e (k,l), tem-se :

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= C_{1311} \epsilon_{11} + C_{1312} \epsilon_{12} + C_{1331} \epsilon_{31} + C_{1312} \epsilon_{12} + C_{1322} \epsilon_{22} + \\ &C_{1323} \epsilon_{23} + C_{1331} \epsilon_{31} + C_{1323} \epsilon_{23} + C_{1333} \epsilon_{33} \end{aligned} \quad (122)$$

ou:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= C_{1311} \epsilon_{11} + C_{1322} \epsilon_{22} + C_{1333} \epsilon_{33} + 2 C_{1312} \epsilon_{12} + 2 C_{1323} \epsilon_{23} + \\ &2 C_{1331} \epsilon_{31} \end{aligned} \quad (123)$$

e, também,

$$\begin{aligned} \epsilon_{22} &= S_{2211} \sigma_{11} + S_{2212} \sigma_{12} + S_{2231} \sigma_{31} + S_{2212} \sigma_{12} + S_{2222} \sigma_{22} + \\ &+ S_{2223} \sigma_{23} + S_{2231} \sigma_{31} + S_{2223} \sigma_{23} + S_{2233} \sigma_{33} \end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned} \epsilon_{22} = & S_{2211} \sigma_{11} + S_{2222} \sigma_{22} + S_{2233} \sigma_{33} + 2 S_{2212} \sigma_{12} + 2 S_{2223} \sigma_{23} + \\ & + 2 S_{2231} \sigma_{31} \end{aligned} \quad (124)$$

Evidentemente a outras combinações de i e j corresponder-se-ão outras relações entre σ_{ij} , ϵ_{kl} e os tensores constitutivos.

Neste sentido, $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$ pode ser escrita na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1133} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ & & & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ \text{Sim.} & & & & C_{2323} & C_{2331} \\ & & & & & C_{3131} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \end{pmatrix}$$

(125)

Ou simplesmente,

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\} \quad (126)$$

A matriz [C] é denominada de matriz de constantes de elasticidade. Outros pesquisadores, entre eles Fusco⁽¹⁴⁾, atribuem para os coeficientes presentes nesta matriz de coeficientes de rigidez.

De modo análogo, $\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$ fica sendo:

$$\{\epsilon\} = [S] \{\sigma\} \quad (127)$$

onde a matriz [S] é chamada de matriz compliance. Fusco⁽¹⁴⁾ trata os coeficientes desta matriz por coeficientes de deformabilidade.

. Nestas condições, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1112} & 2S_{1123} & 2S_{1133} \\ & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2212} & 2S_{2223} & 2S_{2231} \\ & & S_{3333} & 2S_{3312} & 2S_{3323} & 2S_{3331} \\ & & & 4S_{1212} & 4S_{1223} & 4S_{1231} \\ \text{Sim.} & & & & 4S_{2323} & 4S_{2331} \\ & & & & & 4S_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix}$$

(128)

Observa-se que os valores $2\varepsilon_{12}$, $2\varepsilon_{23}$ e $2\varepsilon_{31}$ podem ser substituídos por γ_{12} , γ_{23} e γ_{31} , e também, numa notação de engenharia é bastante utilizado τ_{12} , τ_{23} e τ_{31} para representar σ_{12} , σ_{23} e σ_{31} .

Introduzindo-se uma notação indicial reduzida para as equações tensoriais e matriciais constitutivas de tal sorte que os índices estejam relacionados da seguinte maneira:

- $S_{mn} = S_{ijkl}$ se $m, n = 1, 2, 3$
- $S_{mn} = 2S_{ijkl}$ se m ou $n = 4, 5, 6$
- $S_{mn} = 4S_{ijkl}$ se $m, n = 4, 5, 6$
- $C_{mn} = C_{ijkl}$ para quaisquer índices
- $\sigma_n = \sigma_{ij}$ para quaisquer índices
- $\varepsilon_n = \varepsilon_{ij}$ se $n = 1, 2, 3$
- $\varepsilon_n = 2\varepsilon_{ij}$ se $n = 4, 5, 6$.

Diante, do exposto, é permitido escrever:

$$\sigma_m = C_{mn} \varepsilon_n$$

$$\varepsilon_m = S_{mn} \sigma_n$$

(129)

e matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \text{Sim.} & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}$$

(130)

e também,

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ \text{Sim.} & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}$$

(131)

Além disto, pode-se escrever outra relação matricial considerando-se a matriz de deformações de engenharia, γ , associada à matriz S_{mn} , ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ \text{Sim.} & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix}$$

(132)

Sinteticamente, tem-se: $\{\gamma\} = [S] \{\sigma\}$ (133)

b) A respeito do Número de Constantes Independentes em S_{ijkl} .

No caso geral de material elástico e anisotrópico, o número de constantes S_{ij} independentes não é 21, mas apenas 18 coeficientes são independentes entre si, conforme citações de Novozhilov⁽¹⁵⁾ e Lekhnitskii⁽⁶⁾.

É possível provar este fato com base no seguinte encaminhamento algébrico.

Seja o tensor σ_{ij} , simétrico, decomposto em duas partes, isto é, $\sigma_{ij} = s_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}$. Os tensores $\bar{\sigma}_{ij}$ e s_{ij} representam a parte esférica e a desviatória de σ_{ij} . Para tal demonstração considera-se a propriedade dos tensores simétricos, que estabelece a coincidência entre as direções próprias das componentes do tensor σ_{ij} e do tensor s_{ij} .

Prosseguindo-se, sejam as equações características de σ_{ij} e s_{ij} :

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad (134)$$

$$|s_{ij} - s\delta_{ij}| = 0 \quad (135)$$

onde $s_{ij} = \sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$ com $p = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{1}{3} I_1$. As componentes de s_{ij} são dados por:

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad (136)$$

Sendo σ os autovalores de σ_{ij} , pode-se estabelecer que:

$$\sigma = s + p$$

ou

$$s = \sigma - p \quad (137)$$

isto é, os autovalores de s_{ij} são os autovalores de σ_{ij} diminuídos de p .

Voltando-se à equação característica de s_{ij} , escreve-se:

$$|s_{ij} - (\sigma - p)\delta_{ij}| = 0 \quad (138)$$

ou na forma de sistema de equações

$$\begin{cases} (\sigma_{11} - p - s)x_1 + \sigma_{12}x_2 + \sigma_{13}x_3 = 0 \\ \sigma_{21}x_1 + (\sigma_{22} - p - s)x_2 + \sigma_{23}x_3 = 0 \\ \sigma_{31}x_1 + \sigma_{32}x_2 + (\sigma_{33} - p - s)x_3 = 0 \end{cases} \quad (139)$$

e portanto em face de $s = \sigma - p$, elas mostram-se equivalentes a:

$$\begin{cases} (\sigma_{11} - \sigma) x_1 + \sigma_{12} x_2 + \sigma_{13} x_3 = 0 \\ \sigma_{21} x_1 + (\sigma_{22} - \sigma) x_2 + \sigma_{23} x_3 = 0 \\ \sigma_{31} x_1 + \sigma_{32} x_2 + (\sigma_{33} - \sigma) x_3 = 0 \end{cases} \quad (140)$$

Estas últimas equações são utilizadas para determinar as direções próprias de σ_{ij} através dos autovalores σ_1 , σ_2 , e σ_3 associados aos respectivos autovetores $n_i^{(1)}$, $n_i^{(2)}$ e $n_i^{(3)}$. Atendo-se a este fato, fica demonstrada a propriedade da coincidência de direções próprias entre os tensores σ_{ij} e s_{ij} .

No que tange as deformações, o procedimento é análogo. Diante disto, conclui-se que se ε_{ij} é o tensor das deformações, e_{ij} o tensor desviatório e $\bar{\varepsilon}_{ij}$ o tensor esférico, seus autovalores são, respectivamente, ε , e , $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}$. Além disso, às direções próprias de ε_{ij} , estabelecidas por meio dos autovalores ε_1 , ε_2 e ε_3 associadas aos respectivos autovetores $n_j^{(1)}$, $n_j^{(2)}$ e $n_j^{(3)}$, e de e_{ij} , são idênticas.

Se existir uma relação linear entre s_{ij} e e_{ij} , do tipo: $s_{ij} = \psi e_{ij}$, com ψ um escalar, torna-se possível afirmar que as direções próprias de s_{ij} e de e_{ij} são as mesmas. Além disso, generaliza-se tal fato aos tensores σ_{ij} e ε_{ij} .

Dispondo-se de um estado de tensão caracterizado por:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (141)$$

onde as tensões desviatórias são dadas por meio de

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - p \end{bmatrix} \quad (142)$$

Considera-se, a seguir, um estado de deformação expresso por:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (143)$$

sendo:

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} - \hat{e} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} - \hat{e} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} - \hat{e} \end{bmatrix} \quad (144)$$

e aplicando-se, enfim, a lei constitutiva $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1133} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ & & & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ \text{Sim.} & & & & C_{2323} & C_{2331} \\ & & & & & C_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{Bmatrix} \quad (145)$$

Discretizando-se estas relações chega-se a:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{1111} \varepsilon_{11} + C_{1122} \varepsilon_{22} + \dots + C_{1131} \varepsilon_{31} \\ \sigma_{22} &= C_{1122} \varepsilon_{11} + C_{2222} \varepsilon_{22} + \dots + C_{2231} \varepsilon_{31} \\ \sigma_{33} &= C_{1133} \varepsilon_{11} + C_{2233} \varepsilon_{22} + \dots + C_{3331} \varepsilon_{31} \\ 0 &= C_{1112} \varepsilon_{11} + C_{2212} \varepsilon_{22} + \dots + C_{1231} \varepsilon_{31} \\ 0 &= C_{1123} \varepsilon_{11} + C_{2223} \varepsilon_{22} + \dots + C_{2331} \varepsilon_{31} \\ 0 &= C_{1131} \varepsilon_{11} + C_{2223} \varepsilon_{22} + \dots + C_{3131} \varepsilon_{31}\end{aligned}$$

(146)

é possível concluir pela não validade de expressão $s_{ij} = \psi e_{ij}$, pois a elementos nulos de s_{ij} correspondem a elementos não nulos em e_{ij} . Então, existem três relações entre σ_{ij} e ε_{ij} , presentes no sistema de equações anteriores, mais precisamente, as três últimas expressões. Nisto, vincula-se o fato de não haver independência linear das deformações, ou dos termos C_{ijkl} não serem todos simultaneamente nulos, pois esta independência acarretaria para quaisquer estados de deformação sempre estados principais de tensão.

Perante a presente abordagem, constata-se que os termos independentes em C_{ijkl} ou S_{ijkl} são formados pelos seis termos da diagonal principal, mais quinze termos, entres os quais apenas doze são independentes, perfazendo-se, dessa forma, dezoito termos independentes.

Com efeito, para um estado de tensões principais, suas respectivas direções principais não coincidem, via de regra, num material anisotrópico, com suas direções principais de deformações.

c) Representações das Constantes de Elasticidade

Muitos autores representam as constantes de elasticidade através das chamadas constantes de engenharia (Lekhnitskii⁽⁶⁾), onde estão inseridos os termos módulo de elasticidade ou de Young, coeficientes de Poisson e módulo de elasticidade transversal ou de rigidez. Essas representações surgem nos casos especiais de anisotropia, mais particularmente nos casos básicos de simetria elástica, a que estão expostas as estruturas do sólido anisotrópico. Considerações a esse respeito serão apresentadas no transcorrer deste capítulo.

Outros autores, como por exemplo, Rabinovich, apud Lekhnitskii⁽⁶⁾, introduziram símbolos para as constantes de S_{ij} , especificamente, no caso de anisotropia homogênea. São estabelecidas as seguintes equações para a lei constitutiva:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_{xx}} (\sigma_x - \nu_{yx} \sigma_y - \nu_{zx} \sigma_z + \eta_{yz,x} \tau_{yz} + \eta_{zx,x} \tau_{xz} + \eta_{xy,x} \tau_{xy}),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_{yy}} (-\nu_{xy} \sigma_x + \sigma_y - \nu_{zy} \sigma_z + \eta_{yz,y} \tau_{yz} + \eta_{zx,y} \tau_{xz} + \eta_{xy,y} \tau_{xy})$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_{zz}} (-\nu_{xz} \sigma_x - \nu_{yz} \sigma_y + \sigma_z + \eta_{yz,z} \tau_{yz} + \eta_{zx,z} \tau_{xz} + \eta_{xy,z} \tau_{xy})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G_{yz}} (\eta_{x,yz} \sigma_x + \eta_{y,yz} \sigma_y + \eta_{z,yz} \sigma_z + \tau_{yz} + \mu_{zx,yz} \tau_{xz} +$$

$$+ \mu_{xy,yz} \tau_{xy})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G_{xz}} (\eta_{x,zx} \sigma_x + \eta_{y,zx} \sigma_y + \eta_{z,zx} \sigma_z + \tau_{xz} + \mu_{yz,zx} \tau_{yz} +$$

$$+ \mu_{xy,zx} \tau_{xy})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G_{xy}} (\eta_{x,xy} \sigma_x + \eta_{y,xy} \sigma_y + \eta_{z,xy} \sigma_z + \mu_{yz,xy} \tau_{yz} + \mu_{zx,xy} \tau_{xz} + \tau_{xy}), \quad (147)$$

Sendo σ_x , σ_y , σ_z tensões normais nas direções x, y, z; τ_{xy} , τ_{yz} e τ_{xz} tensões tangenciais nos planos xy, yz e xz, respectivamente; os parâmetros E_{xx} , E_{yy} , E_{zz} são denominados, aqui, de módulos de Young, na tração ou compressão, nas direções x, y, z. A propósito, não parece ser necessário a utilização de dois índices para identificar-se os módulos de elasticidade, apenas um índice é o suficiente. Os módulos de rigidez são escritos por G_{xy} , G_{yz} e G_{xz} , onde os dois índices referem-se a planos paralelos aos eixos principais de elasticidade; ν_{yx} , ν_{zx} , ..., ν_{yz} são os coeficientes de Poisson que se caracterizam por contração na direção de um eixo quando há tensão de tração na direção do outro eixo (por exemplo, ν_{yx} é o resultado da contração na direção do eixo x quando existe tensão de tração na direção y), isto é, o primeiro índice representa a causa e o segundo se restringe ao efeito.

Os parâmetros $\mu_{zx,yz}$, ... $\mu_{zx,xy}$ são conhecidos como coeficientes de Chentsov. Eles caracterizam as deformações tangenciais em planos paralelos aos planos principais de elasticidade causadas por tensões tangenciais que atuam em planos outros, paralelos aos planos principais de elasticidade. A próxima figura mostra um sistema de eixos principais de elasticidade x, y, z, com tensões tangenciais atuando em planos principais e particularizando a interferência de tensões tangenciais num terceiro plano π_y , caracterizado pelas deformações.

Analogamente à figura anterior, pode-se imaginar uma situação em que a deformação normal ϵ_x é constituída por partes inerentes às tensões normais e, de um modo geral, por partes relativas às tensões tangenciais τ_{xy} , τ_{yz} e τ_{zx} .

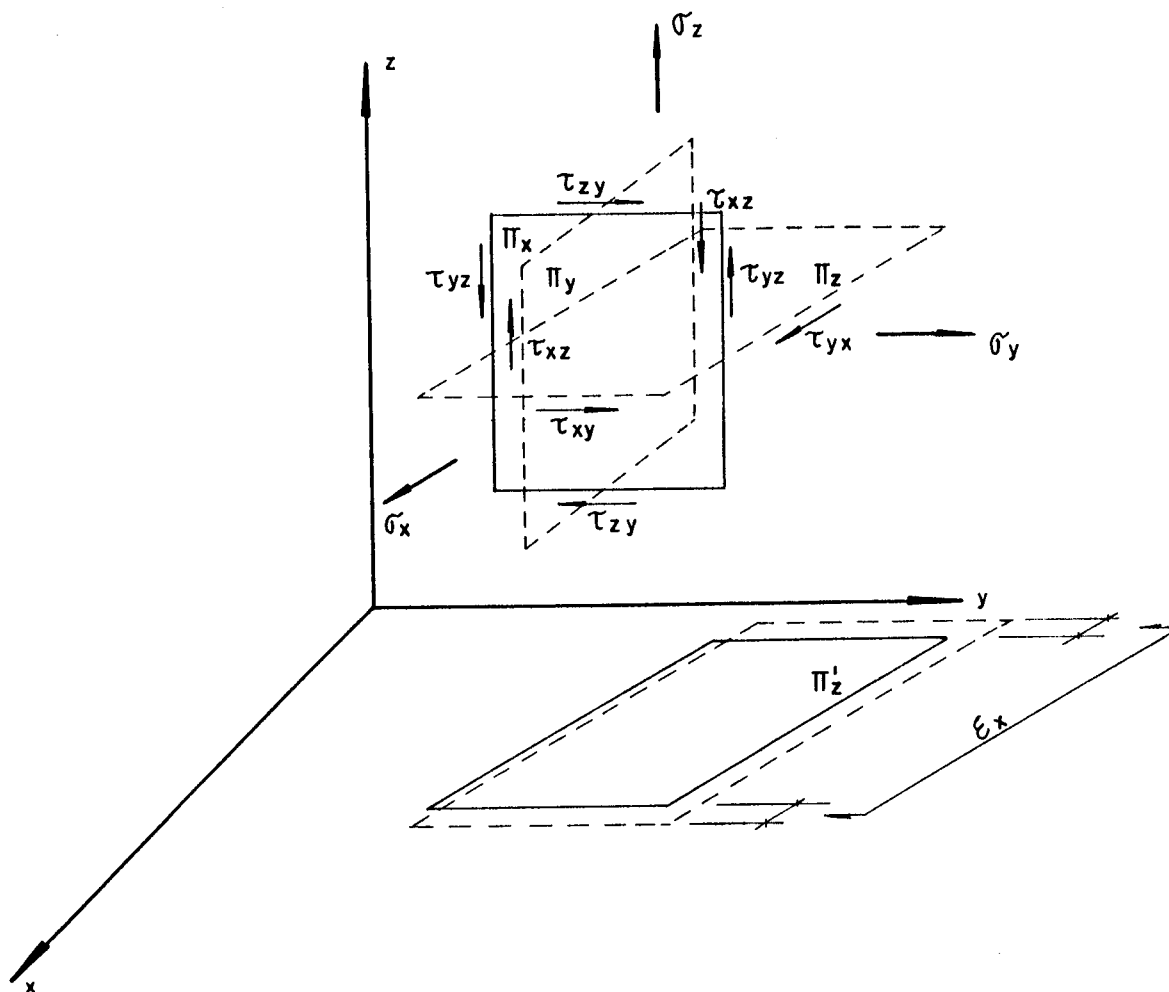


Fig. 22- Influência das tensões tangenciais na deformação normal

Por fim, tem-se os coeficientes de influência mútua de 2^a espécie, $\eta_{x,yz}$, $\eta_{y,y,z}$, ..., $\eta_{z,xy}$, que expressam, de acordo com Rabinovich, deformações tangenciais nos planos principais, devidas às tensões normais instaladas nos planos principais.

Pode-se, também, através de uma figura representar a distorção γ_{xz} , por exemplo, onde as tensões normais σ_x , σ_y e σ_z contribuem juntamente com as tensões tangenciais para inteirar o valor de γ_{xz} .

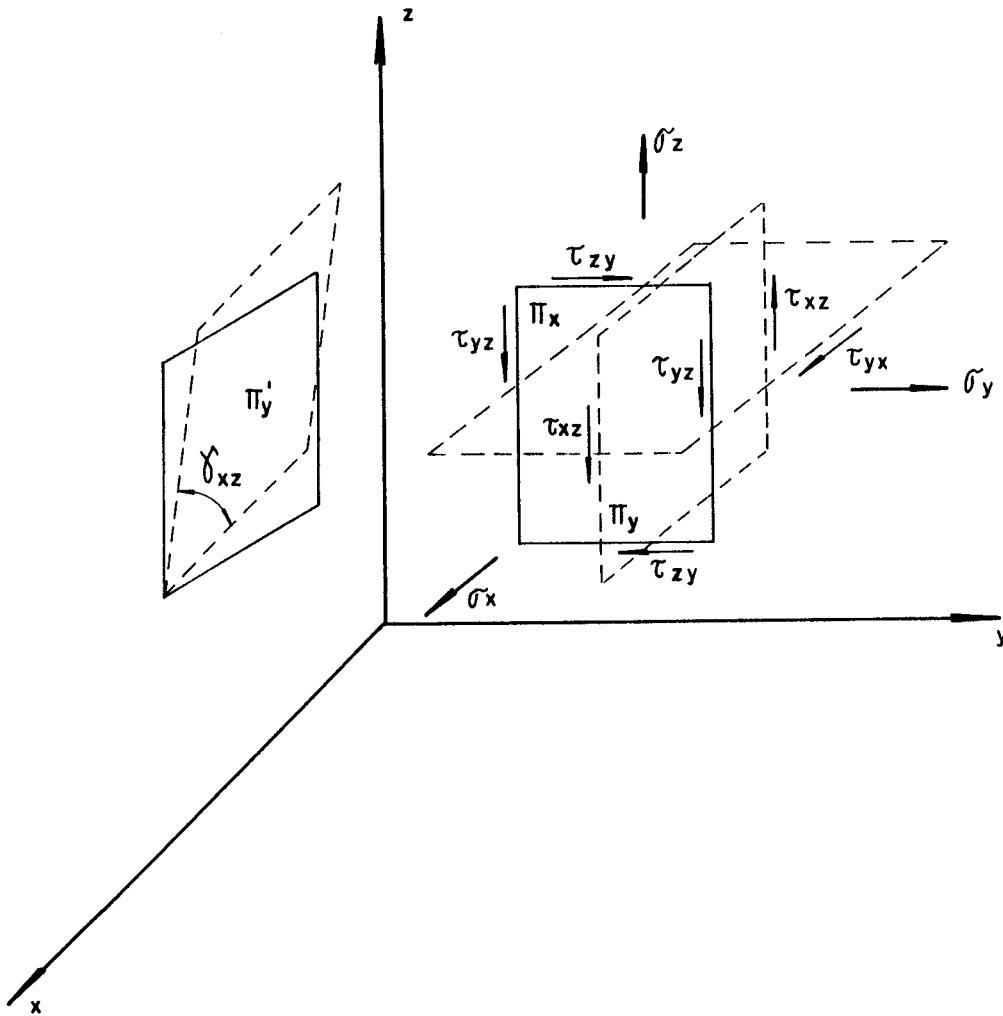


Fig. 23- Influência das tensões normais na deformação tangencial

Segundo Lekhnitskii ⁽⁶⁾, as equações (147) são referidas a um determinado sistema de coordenadas; para outros sistemas os coeficientes ali existentes variam, mas o número de constantes de elasticidade é invariante e igual a 18.

2.4.7- Casos Básicos de Simetria Elástica

Retomando-se a simetria elástica (item 2.4.5), se num corpo anisotrópico existe alguma simetria elástica suas propriedades de elasticidade, também, a experimentam. Nesse sentido, as propriedades elásticas expressas pela lei constitutiva do material induzem simplificações à escrita desta lei. Desse modo, as simplificações surgirão na forma de alguns coeficientes C_{ij} ou S_{ij} com valores nulos e na forma de relações lineares entre outros Lekhnitskii⁽⁶⁾.

Para fazer analiticamente tais simplificações, este autor considera um corpo anisotrópico referido a um sistema de coordenadas x_i e escreve as relações constitutivas associadas a este sistema. Em seguida, toma outro sistema de coordenadas x'_i , simétrico ao primeiro e, de maneira análoga, anota a relação constitutiva para este sistema. Compara as respectivas expressões e conclui as virtuais simplificações.

Love⁽¹³⁾ explora as transformações de deformações dos sistemas simétricos de coordenadas x_i e x'_i em termos de variação de energia de deformação. Se esta não apresenta qualquer variação, evidentemente, existirá simetria elástica no material. As variações ou não variações na energia de deformação estão naturalmente acopladas com às deformações.

Seja um exemplo: considere-se um sistema cartesiano de coordenadas x_i (x_1, x_2, x_3) e um sólido com deformações ϵ_{ij} .

Tem-se, agora, um sistema simétrico x'_i , de tal sorte que $x'_i = -x_i$, como na figura 24.

Pode-se colocar as deformações ϵ_{ij} no sistema x'_i , através da seguinte transformação de coordenadas:

$$\epsilon'_{ij} = l_{ik} l_{jl} \epsilon_{kl} \quad (148)$$

com

$$l_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

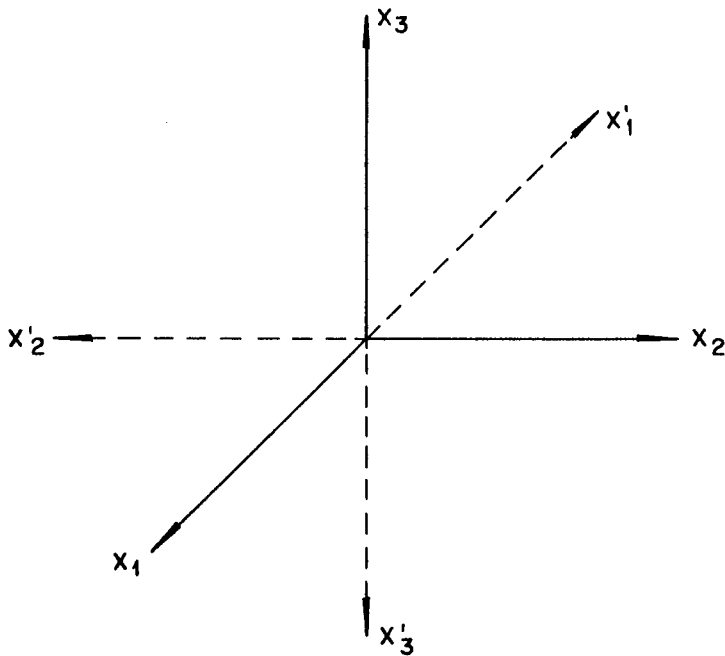


Fig. 24- Sistema x_i e seu simétrico

Aplicando-se a expressão (148), com $i = 1$ e $j = 1$, tem-se

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon_{11} l_{11}^2 + \varepsilon_{22} l_{12}^2 + \varepsilon_{33} l_{13}^2 + 2\varepsilon_{12} l_{11} l_{12} + 2\varepsilon_{23} l_{12} l_{13} + 2\varepsilon_{31} l_{11} l_{13}.$$

Assim, $\varepsilon'_{11} = \varepsilon_{11}$. De um modo geral $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}$.

Com efeito, se não há variação de deformação a energia de deformação se mantém, e se exhibe a simetria elástica.

Para obter as simplificações relacionadas com os elementos dos tensores constitutivos, Love⁽¹³⁾ utiliza-se de expressões de energia de deformação, aqui colocadas em termos

tensoriais. Assim, $U_0 = 1/2 \sigma_{ij} \varepsilon_{kl}$ e $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ daí:

$$U_o = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (149)$$

Aplicando-se as transformações de deformações de dois sistemas x_i e x'_i , é possível correlacionar os elementos C_{ijkl} ou simplesmente C_{ij} , através da expressão de energia de deformação.

Um outro modo de se proceder às simplificações inerentes aos elementos dos tensores constitutivos está balizado no fato de que em um material anisotrópico as componentes de C_{ij} ou S_{ij} dependem das direções dos eixos do sistema de referência. Quando suas direções variam os seus valores não são mantidos. Entretanto, existem determinadas posições dos eixos x_i nas quais as propriedades de elasticidade são invariantes. Estes eixos ou direções constituem-se nas direções principais de elasticidade do material.

Sob esta ótica, direcionando-se o sistema de eixos a casos particulares consegue-se as profícuas simplificações em C_{ij} ou S_{ij} .

No entanto, para se colocar em prática tais simplificações, torna-se necessário referenciar o tensor constitutivo a qualquer sistema de coordenadas ortogonais x_i . Isto é apreciado no próximo tópico.

Cabe, aqui, observar que num material isotrópico as propriedades de elasticidade são invariantes em relação às orientações dos eixos de referência x_i . Outras informações podem ser obtidas em Rivlin e Ericksen⁽¹⁶⁾.

a) Transformações de Coordenadas para o Tensor Constitutivo

Um material com simetria elástica sob a transformação $x'_i = l_{ij} x_j$ dos eixos de coordenadas requer que o tensor C_{ijkl} esteja sujeito à seguinte condição:

$$C'_{pqmn} = l_{pi} l_{qj} l_{mk} l_{nl} C_{ijkl} \quad (150)$$

Para se chegar nesta regra de transformação, considere a lei constitutiva $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$, escrita num sistema de eixos x_i . Num sistema de eixos x'_i , conforme o da figura

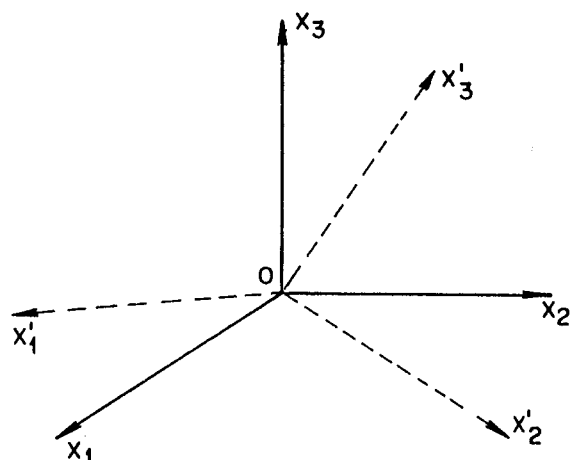


Fig. 25- Sistema x'_i rodado do sistema x_i

pode-se escrever:

$$\sigma'_{pq} = C'_{pqmn} \epsilon'_{mn} \quad (151)$$

mas por outro lado:

$$\sigma'_{pq} = l_{pi} l_{qj} \sigma_{ij} \quad (152)$$

e, também:

$$\epsilon'_n = l_{mk} l_{nl} \epsilon_{kl} \quad (153)$$

ou,

$$\epsilon_{kl} = l_{mk} l_{nl} \epsilon'_{mn} \quad (154)$$

Desta forma,

$$C'_{pqmn} \epsilon'_{mn} = \sigma'_{pq} = l_{pi} l_{qj} \sigma_{ij} = l_{pi} l_{qj} C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

ou,

$$C'_{pqmn} \varepsilon'_{mn} = l_{pi} l_{qj} C_{ijkl} l_{mk} l_{nl} \varepsilon'_{mn}$$

e, portanto,

$$(C'_{pqmn} - l_{pi} l_{qj} l_{mk} l_{nl} C_{ijkl}) \varepsilon'_{mn} = 0$$

conclui-se que:

$$C'_{pmn} = l_{pi} l_{qj} l_{nk} l_{ml} C_{ijkl} \quad (155)$$

De modo análogo, pode-se obter:

$$S'_{pqmn} = l_{pi} l_{qj} l_{mk} l_{ml} S_{ijkl} \quad (156)$$

Lekhnitskii⁽⁶⁾ e Cauwelaert⁽¹⁷⁾, fazem a transformação de coordenadas para o caso dos tensores constitutivos com dois índices subscritos, de tal forma que:

$$S'_{ij} = q_{im} q_{jn} S_{mn} \quad (157)$$

e

$$C'_{ij} = q_{im} q_{jn} C_{mn} \quad (158)$$

e, também, apresentam os valores de q_{ij} numa tabela, transcrita como se prossegue:

TABELA 1- Valores de q_{ij} na transformação de S_{ij}

	1	2	3	4	5	6
1	l_{11}^2	l_{12}^2	l_{13}^2	$l_{12}l_{13}$	$l_{13}l_{11}$	$l_{12}l_{11}$
2	l_{21}^2	l_{22}^2	l_{23}^2	$l_{23}l_{22}$	$l_{23}l_{21}$	$l_{22}l_{21}$
3	l_{31}^2	l_{32}^2	l_{33}^2	$l_{33}l_{32}$	$l_{33}l_{31}$	$l_{32}l_{31}$
4	$2l_{31}l_{21}$	$2l_{32}l_{22}$	$2l_{33}l_{23}$	$l_{33}l_{22}^+$ $+l_{32}l_{23}$	$l_{33}l_{21}^+$ $+l_{31}l_{23}$	$l_{31}l_{22}^+$ $+l_{32}l_{21}$
5	$2l_{31}l_{11}$	$2l_{32}l_{12}$	$2l_{33}l_{13}$	$l_{33}l_{12}^+$ $+l_{32}l_{13}$	$l_{33}l_{11}^+$ $+l_{31}l_{13}$	$l_{31}l_{12}^+$ $+l_{32}l_{11}$
6	$2l_{21}l_{11}$	$2l_{12}l_{22}$	$2l_{13}l_{23}$	$l_{13}l_{22}^+$ $+l_{12}l_{23}$	$l_{13}l_{21}^+$ $+l_{11}l_{23}$	$l_{11}l_{22}^+$ $+l_{12}l_{21}$

Neste sentido, é possível, por exemplo, expressar o coeficiente constitutivo por:

$$\begin{aligned}
 S'_{11} = & S_{11} l_{11}^4 + S_{22} l_{12}^4 + S_{33} l_{13}^4 + (2S_{23} + S_{44}) l_{12}^2 l_{13}^2 + \\
 & + (2S_{13} + S_{55}) l_{11}^2 l_{12}^2 + (2S_{12} + S_{66}) l_{11}^2 l_{12}^2 + 2l_{12} l_{13} \\
 & [(S_{14} + S_{56}) l_{11}^2 + S_{21} l_{12}^2 + S_{31} l_{13}^2] + 2l_{13} l_{11} \cdot [S_{15} l_{11}^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (S_{25} + S_{46}) I_{12}^2 + S_{33} I_{13}^2 + 2I_{11} I_{12} [S_{16} I_{11}^2 + S_{26} I_{12}^2 + (S_{31} + \\
 & + S_{45}) I_{13}^2]. \qquad \qquad \qquad (159)
 \end{aligned}$$

Considera-se, neste instante, um caso especial no qual o sistema de coordenadas, x'_1 (x'_1, x'_2, x'_3) é obtido do sistema x_1 (x_1, x_2, x_3) através de uma rotação θ em torno do eixo comum $x_3 = x'_3$, conforme a figura:

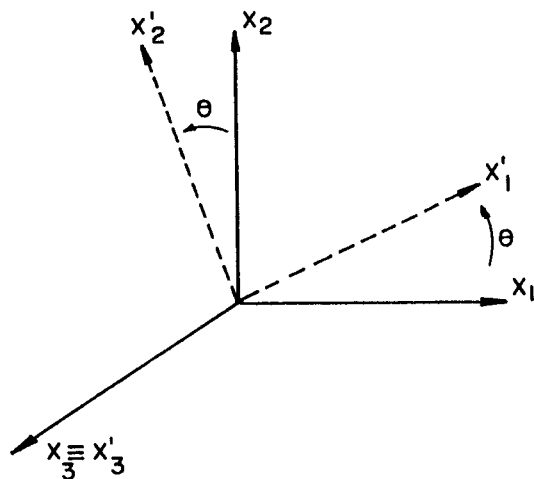


Fig. 26- Sistema x'_1 rodado em x_3 do ângulo θ

Os elementos do tensor de transformação de coordenadas I_{ij} , neste caso, tornam-se:

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (160)$$

Conseqüentemente, toda as transformações envolvendo os tensores S_{ijkl} e C_{ijkl} serão funções, trigonométricas do ângulo de rotação θ .

A seguir, são apresentadas as expressões expandidas de S'_{ij} , tendo-se como base a equação $S'_{mn} = l_{mi} l_{nj} S_{ij}$, com l_{ij} conforme o da equação (160).

$$S'_{11} = S_{11} \cos^4 \phi + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + \\ + S_{22} \sin^4 \phi + 2(S_{16} \cos^2 \phi + S_{26} \sin^2 \phi) \sin \phi \cos \phi,$$

$$S'_{22} = S_{11} \sin^4 \phi + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + \\ + S_{22} \cos^4 \phi - 2(S_{16} \sin^2 \phi + S_{26} \cos^2 \phi) \sin \phi \cos \phi,$$

$$S'_{12} = (S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + S_{12} + \\ + (S_{16} - S_{26}) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \sin \phi \cos \phi,$$

$$S'_{66} = 4(S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + S_{66} - \\ - 4(S_{16} - S_{26}) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \sin \phi \cos \phi,$$

$$S'_{16} = [2S_{22} \sin^2 \phi - 2S_{11} \cos^2 \phi + \\ + (2S_{12} + S_{66}) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)] \sin \phi \cos \phi + \\ + S_{16} \cos^2 \phi (\cos^2 \phi - 3 \sin^2 \phi) + \\ + S_{26} \sin^2 \phi (3 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi),$$

$$S'_{26} = [2S_{22} \cos^2 \phi - 2S_{11} \sin^2 \phi - \\ - (2S_{12} + S_{66}) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)] \sin \phi \cos \phi + \\ + S_{16} \sin^2 \phi (3 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + \\ + S_{26} \cos^2 \phi (\cos^2 \phi - 3 \sin^2 \phi);$$

$$S'_{44} = S_{44} \cos^2 \phi - 2S_{45} \operatorname{sen} \phi \cos \phi + S_{55} \operatorname{sen}^2 \phi,$$

$$S'_{45} = (S_{44} - S_{55}) \operatorname{sen} \phi \cos \phi + S_{45} (\cos^2 \phi - \operatorname{sen}^2 \phi),$$

$$S'_{55} = S_{44} \operatorname{sen}^2 \phi + 2S_{45} \operatorname{sen} \phi \cos \phi + S_{55} \cos^2 \phi;$$

$$S'_{14} = S_{14} \cos^3 \phi + (S_{46} - S_{15}) \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi + \\ + (S_{24} - S_{56}) \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi - S_{25} \operatorname{sen}^3 \phi,$$

$$S'_{24} = S_{24} \cos^3 \phi - (S_{46} + S_{25}) \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi + \\ + (S_{14} + S_{56}) \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi - S_{15} \operatorname{sen}^3 \phi,$$

$$S'_{46} = S_{46} \cos^3 \phi + (-2S_{14} + 2S_{24} - S_{56}) \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi + \\ + (2S_{15} - 2S_{25} - S_{46}) \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi + S_{56} \operatorname{sen}^3 \phi,$$

$$S'_{15} = S_{15} \cos^3 \phi + (S_{14} + S_{56}) \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi + \\ + (S_{25} + S_{46}) \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi + S_{24} \operatorname{sen}^3 \phi,$$

$$S'_{25} = S_{25} \cos^3 \phi + (S_{24} - S_{56}) \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi + \\ + (S_{15} - S_{46}) \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi + S_{14} \operatorname{sen}^3 \phi,$$

$$S'_{56} = S_{56} \cos^3 \phi + (-2S_{15} + 2S_{25} + S_{46}) \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi + \\ + (-2S_{14} + 2S_{24} - S_{56}) \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi - S_{46} \operatorname{sen}^3 \phi;$$

$$S'_{13} = S_{13} \cos^2 \phi + S_{36} \operatorname{sen} \phi \cos \phi + S_{23} \operatorname{sen}^2 \phi,$$

$$S'_{36} = 2(S_{23} - S_{13}) \operatorname{sen}\phi \cos\phi + S_{36} (\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi),$$

$$S'_{23} = S_{13} \operatorname{sen}^2\phi - S_{36} \operatorname{sen}\phi \cos\phi + S_{23} \cos^2\phi,$$

$$S'_{33} = S_{33},$$

$$S'_{34} = S_{34} \cos\phi - S_{35} \operatorname{sen}\phi,$$

$$S'_{35} = S_{34} \operatorname{sen}\phi + S_{35} \cos\phi \quad (161)$$

Diante das ponderações a respeito das transformações do tensor constitutivo permite-se, então, investigar os casos de simetria elástica mais relevantes no assunto em questão.

b) Simetria Elástica em um Plano

Considera-se um sólido, referido a um sistema de coordenadas x_i , no qual um plano $x_1 x_2$ (πx_3) possua a propriedade de simetria elástica, isto é, quaisquer duas direções simétricas passando por um determinado ponto deste plano são equivalentes em âmbito de resguardar as propriedades elásticas. A direção normal a este plano, x_3 , constitui-se na principal de elasticidade, e também chamado de eixo de simetria.

Há de notar, neste instante, que quaisquer outras duas direções não são, em geral, equivalentes ao par já adotado.

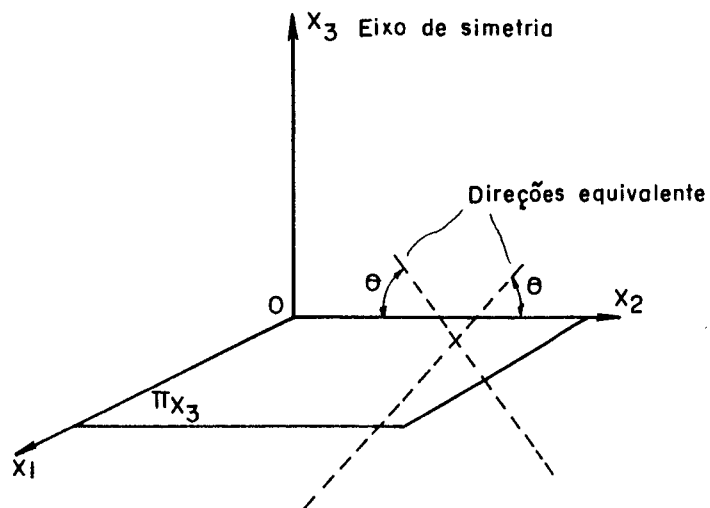


Fig. 27- Simetria elástica num plano

Admite-se, então, uma rotação de 180° em torno do eixo

x_3 .

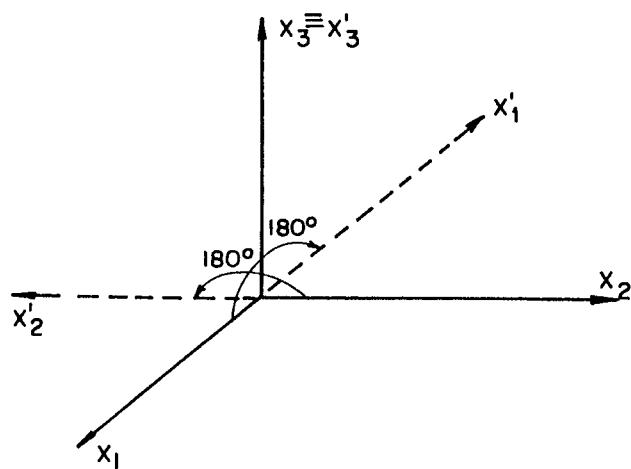


Fig. 28- Rotação de 180° em torno de x_3

Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= C_{1111} \epsilon_{11} + C_{1122} \epsilon_{22} + C_{1133} \epsilon_{33} + 2C_{1112} \epsilon_{12} + 2C_{1123} \epsilon_{23} + 2C_{1131} \epsilon_{31} \\
\sigma_{22} &= C_{2211} \epsilon_{11} + C_{2222} \epsilon_{22} + \dots + 2C_{2223} \epsilon_{23} + 2C_{2231} \epsilon_{31} \\
&\dots \\
\sigma_{31} &= C_{1131} \epsilon_{11} + C_{2231} \epsilon_{22} + C_{3331} \epsilon_{33} + 2C_{1231} \epsilon_{12} + 2C_{2331} \epsilon_{23} + 2C_{3131} \epsilon_{31}
\end{aligned}$$

(165)

Conclui-se que os seguintes valores são nulos:

$$C_{1123} = C_{1131} = C_{2223} = C_{2231} = C_{3323} = C_{3331} = C_{1223} = C_{1231} = 0$$

Em vista das sucessivas igualdades tem-se:

$$C_{1123} = -C_{1123} \dots, C_{1231} = -C_{1231}$$

Se por outro lado, ater-se à transformação tensorial $C'_{pqmn} = l_{pi} l_{qj} l_{mk} l_{nl} C_{ijkl}$, encontrar-se-á o mesmo resultado anterior. Exemplificando-se: fixa-se a sequência pqmn e se varia i, j, k, l de 1 a 3; assim:

$$C'_{1111} = l_{1i} l_{1j} l_{1k} l_{1l} C_{ijkl}, \text{ e somente quando } i = j = k = l = 1 \rightarrow l_{1j} \neq 0. \text{ Portanto } C'_{1111} = C_{1111};$$

$$C'_{1123} = l_{1i} l_{1j} l_{2k} l_{3l} C_{ijkl}, \text{ quando } i = j = 1, k = 2, l = 3 \rightarrow l_{1j} \neq 0, \text{ mas } l_{33} = -1. \text{ Portanto } C'_{1123} = C_{1123}.$$

Há de notar que as propriedades elásticas serão diferentes se forem consideradas duas outras direções que não $x_3 = x'_3$. Por exemplo, a direção x_2 :

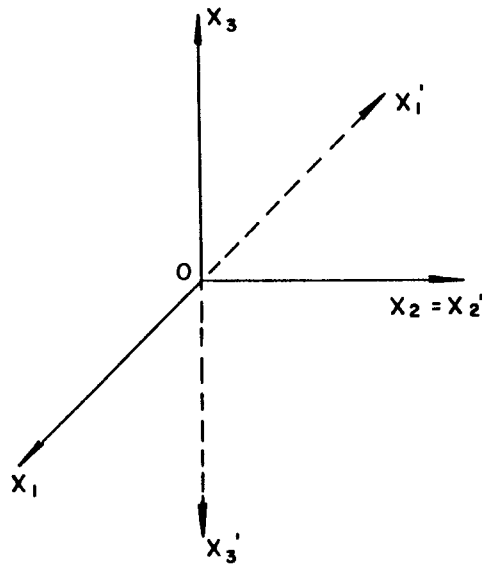


Fig. 29- Rotação de 180° em torno de x_2

Com isto os l_{ij} serão dados por:

$$l_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (166)$$

e todas as transformações que são norteadas por este tensor acarretarão em outros resultados para o tensor constitutivo C_{ijkl} .

Pode-se, neste instante, focar as quantidades que comparecem ao tensor constitutivo:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & C_{3312} & 0 & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & & & & & \\ & & & & C_{2323} & C_{2331} \\ & & & & & C_{3131} \end{bmatrix}$$

(167)

Observa-se que existem 13 coeficientes diferentes neste tensor. Todavia são independentes 11 coeficientes, pois das duas últimas linhas deste tensor podem-se tirar condições de dependência entre C_{2323} , C_{3131} e C_{2331} , analogamente às conseguidas no item 2.4.6b).

É possível, agora, aplicar em um exemplo, as considerações aqui apreciadas. Seja um elemento de um sólido na forma de um prisma retangular, no qual existem duas faces paralelas ao plano de simetria, como na figura. Nestas faces atua o tensor normal σ_{33} .

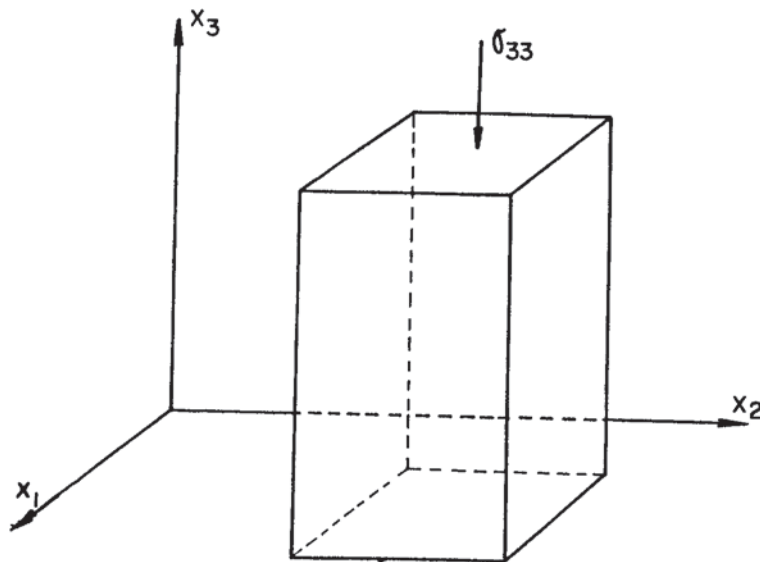


Fig. 30- Prisma retangular sob a tensão σ_{33}

Substituindo-se na expressão $\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= S_{1133} \sigma_{33}; & \epsilon_{22} &= S_{2233} \sigma_{33}; & \epsilon_{33} &= S_{3333} \sigma_{33} \\ 2\epsilon_{23} &= 0; & 2\epsilon_{31} &= 0, & 2\epsilon_{12} &= 4S_{1233} \sigma_{33} \end{aligned} \quad (168)$$

O termo $2\epsilon_{12}$ representa a deformação tangencial no plano π_{x_3} , ou seja, a distorção γ_{12} . Desta maneira, no estado final do sólido haveria composição de deformações normais e distorção em planos paralelos a π_{x_3} .

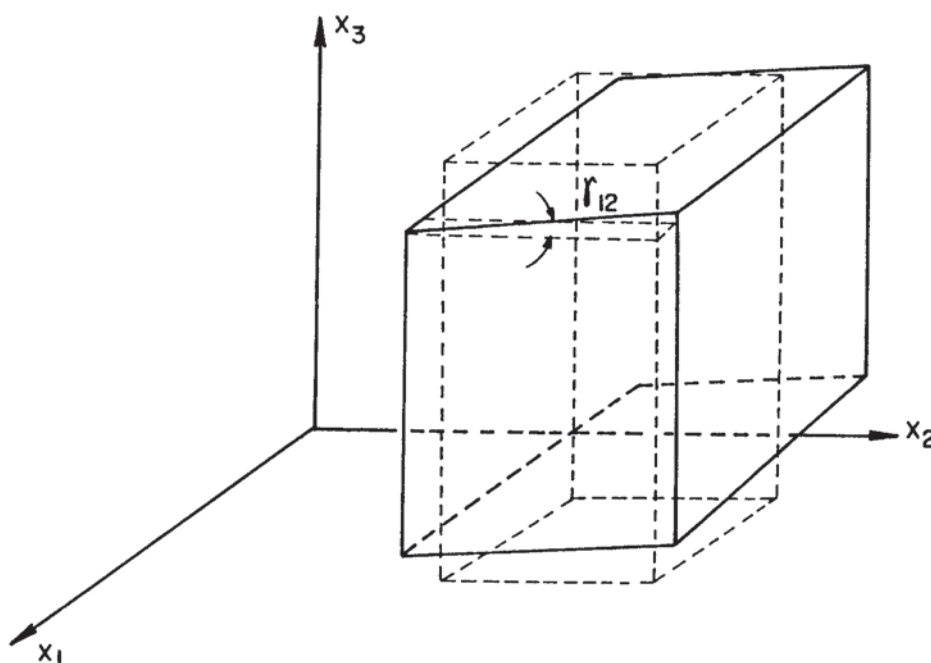


Fig. 31- Situação deformada do prisma

Nota-se que as faces laterais permanecem retangulares, haja vista que ϵ_{31} e ϵ_{23} são nulas.

c) Simetria Elástica em Três Planos. Material Ortotrópo

Um sólido, referido a um sistema de coordenadas x_i , é denominado de material ortotrópo ou ortotópico quando possui três planos de simetria mutuamente perpendiculares: π_{x_1} , π_{x_2} , π_{x_3} , com

eixos de simetria x_1 , x_2 e x_3

Considere-se, uma por vez, rotações de 180° nos três eixos de simetria. Para o eixo x_3 esta rotação já foi discutida no item anterior. Para o eixo x_1 deve-se ter:

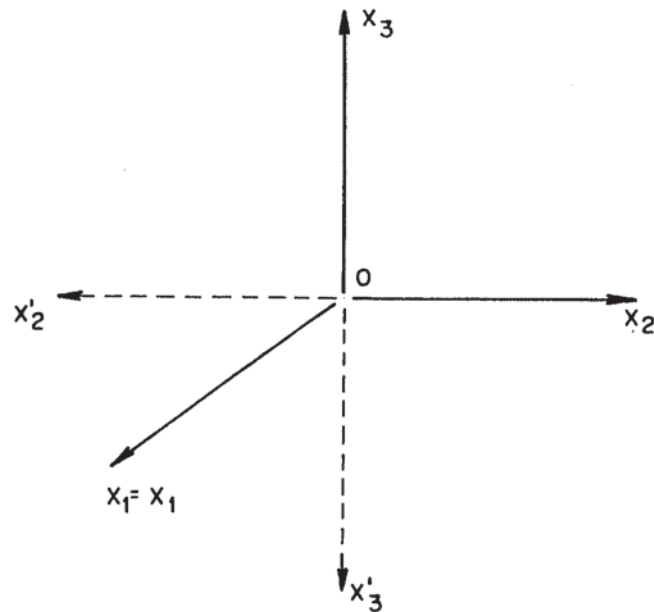


Fig. 32- Rotação de 180° em torno de x_1

Desse modo, tem-se:

$$l_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (169)$$

Procedendo-se de maneira análoga ao item anterior, obtém-se as componentes que não se mantêm iguais:

$$\sigma'_{12} = -\sigma_{12} \quad ; \quad \sigma'_{31} = -\sigma_{31}$$

$$\varepsilon'_{12} = -\varepsilon_{12} \quad ; \quad \varepsilon'_{31} = -\varepsilon_{31} \quad (170)$$

Daí, resulta em:

$$C_{1112} = C_{2212} = C_{3312} = C_{2331} = 0$$

Para o eixo x_2 , os resultados das transformações recaem nos casos de rotação de x_1 e x_3 , já investigados, podendo-se concluir que se há simetria elástica em dois planos ortogonais, existe num terceiro plano ortogonal.

Os elementos do tensor constitutivo que restaram diferentes de zero são mostrados por:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & 0 \\ & \text{Sim.} & & & C_{2323} & 0 \\ & & & & & C_{3131} \end{bmatrix}$$

(171)

Pode-se, neste momento, colocar as componentes de C_{ij} ou de S_{ij} em termos de notação usual da engenharia, ou seja, módulo de elasticidade E , coeficiente de Poisson ν e módulo de elasticidade transversal G_{ij} . Face a isto, tem-se:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix} \quad (172)$$

Devido à simetria de S_{ij} , pode-se escrever:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (173)$$

resultando em três importantes relações entre os coeficientes de elasticidade.

Um material ortotrópico necessita de nove elementos em S_{ij} para ser completamente definido.

Com vistas à exemplificação, considera-se um prisma retangular reto, igual ao da figura 31, com tensão σ_{33} aplicada. Substituindo-se na lei constitutiva para material ortotrópico, obtém-se:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= -\frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{33} \\ \epsilon_{22} &= -\frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_{33} \end{aligned}$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E_3} \sigma_{33}$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0$$

Ou seja, uma tensão normal aplicada não causa distorção em qualquer plano. O sólido somente muda as suas dimensões originais.

A madeira constitui-se num exemplo importante de material ortotrópico, onde os eixos de simetria elástica seriam os eixos longitudinal, radial e tangencial, conforme pode ser visto na figura.

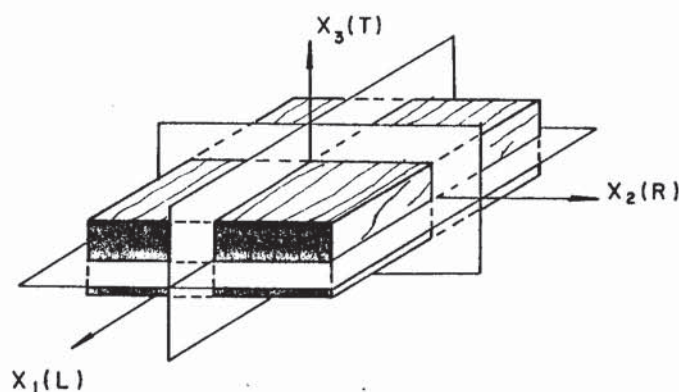


Fig. 33- Eixos ortotrópicos na madeira.

Fonte: Bodig e Jayne⁽²⁷⁾

Assim sendo, ao se estudar a madeira deve-se compatibilizar as causas e os efeitos no sistema de referência principal, caso contrário o tensor S_{ij} não teria somente nove elementos independentes e o estudo recairia em situações bastante complexas, como relatam Jayne e Suddarth⁽¹⁸⁾.

Considerações a respeito da constituição da madeira, das constantes de elasticidade e do tensor S_{ij} serão apresentados no Capítulo 3.

d) Isotropia em um Plano. Material Transversalmente Isotrópico.

Neste caso, o material exibe uma simetria elástica rotacional em torno de um dos eixos de simetria elástica. Seja, então, x_3 esse eixo de simetria elástica. Dessa forma, todas as direções contidas no plano de simetria elástica $x_1 - x_2$ (πx_3) são elasticamente equivalentes. O plano $x_1 - x_2$ é denominado plano de isotropia.

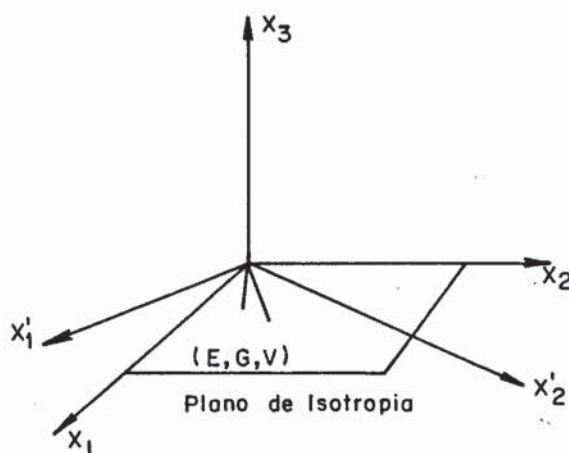


Fig. 34- Plano de isotropia (material transversalmente isotrópico).

Alguns outros pesquisadores como por exemplo Laier e Barreiro⁽¹⁹⁾ denominam o material que apresenta um plano de isotropia de monótropo.

Os materiais transversalmente isotrópicos são casos particulares dos materiais ortotrópicos, no qual se impõe em C'_{pqmn} , a condição de satisfazer qualquer transformação rotacional, I_{1j} , em torno do eixo x_3 da forma (ver item 2.4.7.a).

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (174)$$

onde θ é o ângulo de rotação sobre o eixo x_3 .

Face ao exposto e se procedendo conforme os casos anteriores de simetria elástica, encontra-se:

$$C_{1111} = C_{2222}; \quad C_{1133} = C_{2233}; \quad C_{2323} = C_{3131};$$

$$1/2 (C_{1111} - C_{1122}) = C_{1212}$$

$$S_{1111} = S_{2222}; \quad S_{1133} = S_{2233}; \quad S_{2323} = S_{3131};$$

$$2(S_{1111} - S_{1122}) = S_{1212} \quad (175)$$

Introduzindo-se as constantes de elasticidade de engenharia E , E' = módulo de elasticidade no plano de isotropia e na direção normal a ele; ν , ν' = coeficiente de Poisson no plano de isotropia e na direção normal; G , G' = módulo de elasticidade transversal no plano de isotropia e no plano normal, pode-se escrever:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & \text{Sim.} & & & \frac{1}{G'} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G'} \end{bmatrix} \quad (176)$$

e, também:

$$2(S_{1111} - S_{1122}) = S_{1212} \quad \text{ou}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (177)$$

sendo esta expressão utilizada para indicar a isotropia no plano πx_3 .

Desta forma, apenas cinco componentes em S_{ij} são independentes.

e) Material Isótropo

Se num material todas as direções são elasticamente equivalentes e principais, então se permite igualar $E = E'$, $G = G'$, $\nu = \nu'$.

Nesse sentido, pode-se escrever:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & \text{Sim.} & & & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (178)$$

e, também, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Portanto, com apenas duas constantes se define um material isotrópico.

Muitos autores acham conveniente escrever a lei constitutiva do material isotrópico, ou simplesmente lei de Hooke, em função de duas constantes λ e μ , sendo:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2} (C_{1111} - C_{1122}) \\ \lambda &= C_{1122} \end{aligned} \quad (179)$$

Por outro lado, tem-se:

$$\sigma_{11} = C_{1111} \varepsilon_{11} + C_{1122} \varepsilon_{22} + C_{1122} \varepsilon_{33} \quad \text{ou ,}$$

$$\sigma_{11} = C_{1122} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + (C_{1111} - C_{1122}) \varepsilon_{11}$$

ou:

$$\sigma_{11} = \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{11} \quad (180)$$

De um modo geral escreve-se:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (181)$$

e inversamente:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (182)$$

As constantes μ e λ foram introduzidas por G Lamé e são chamadas de constantes de Lamé. (Sokolnikoff⁽¹⁰⁾)

É possível relacionar as constantes de Lamé com as constantes de elasticidade E e ν . Para tanto considera um estado de tensão σ_{ij} , com apenas $\sigma_{11} \neq 0$, ou seja, o exemplo clássico de tração ou de compressão simples. As constantes E e ν são determinadas por:

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}, \quad \nu = - \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = - \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \quad (183)$$

Reportando-se às equações (181) e (182) obtém-se:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \quad (184)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (185)$$

Com efeito, pode-se escrever:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (186)$$

E frente a isto se conclui que nos materiais isotrópicos tem-se:

$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (187)$$

Por fim, se os eixos x_1, x_2, x_3 são eixos principais de deformação, isto é $\varepsilon_{ij} = 0$, para $i \neq j$, substituindo-se os ε_{ij} em (181) obtém-se $\sigma_{ij} = 0$, para $i \neq j$. Esta propriedade de coincidência entre eixos principais de deformação e de tensão, válida para os materiais isotrópicos, foi utilizada por Cauchy para definir um meio elástico isotrópico.

3- A MADEIRA E O MODELO ORTOTRÓPICO

3.1- Introdução

Para se entender a adequação do modelo ortotrópico à madeira, torna-se necessário discutir certos aspectos relativos à sua constituição material.

Nesse sentido, ao se analisar uma peça de madeira num sistema ortogonal de coordenadas, pode-se externar as suas propriedades de elasticidade, desde que haja coincidência entre estes eixos e aqueles referentes aos eixos de simetria elástica.

Esta adequação é fruto do conhecimento das estruturas microscópicas e macroscópicas da madeira e de um modo geral, da fisiologia e do crescimento da árvore, bem como, do estabelecimento da lei constitutiva que rege o material.

Por outro lado, as simplificações inerentes ao modelo ortotrópico, quando de sua aplicação em diferentes direções das direções principais, dão lugar a expressões de caráter complexo no tensor constitutivo. Estas expressões tensoriais estão relacionadas com as variações dos elementos participantes do tensor de transformação, l_{ij} , os quais embutem as variações dos ângulos entre os eixos principais e outros quaisquer, que no caso específico da madeira seriam suas fibras.

Os ângulos a que se faz alusão no parágrafo anterior estabelecem a própria natureza anisotrópica da madeira. Na realidade, a adaptação do modelo ortotrópico é resultado da conveniente escolha dos eixos de simetria elástica conjugada com a integração dos elementos formadores da madeira. Em síntese, de acordo com Camargo⁽²⁰⁾, isto representa a essência da análise anátomo-tensorial da madeira.

3.2- Estrutura Macroscópica da Madeira

O crescimento da árvore se verifica inicialmente segundo a direção vertical. A cada ano há um novo crescimento vertical e a

formação de camadas sucessivas, dispostas em arranjos quase concêntricos, ao redor das camadas mais antigas.

Em um corte transversal do tronco, essas camadas constituem os anéis de crescimento. Nesse corte transversal é possível identificar uma região central, resultante do crescimento vertical, formada por madeira com características geralmente inferior às da madeira em si. O conjunto de anéis de crescimento representa o lenho, que por sua vez é recoberto pela casca da árvore. Entre a casca e o lenho há uma camada muito delgada denominada de câmbio, onde se dá a origem dos elementos anatómicos constituintes do lenho e da casca.

As camadas externas do lenho, mais novas, com menor resistência mecânica, mais claras e que conduzem a seiva bruta das raízes até as folhas são chamadas de alburno. Por outro lado, as camadas mais internas tendem a armazenar resinas, óleos e outros, o que as torna mais resistentes mecanicamente, mais densas e mais escuras são designadas por cerne. A figura 35 ilustra essas considerações.

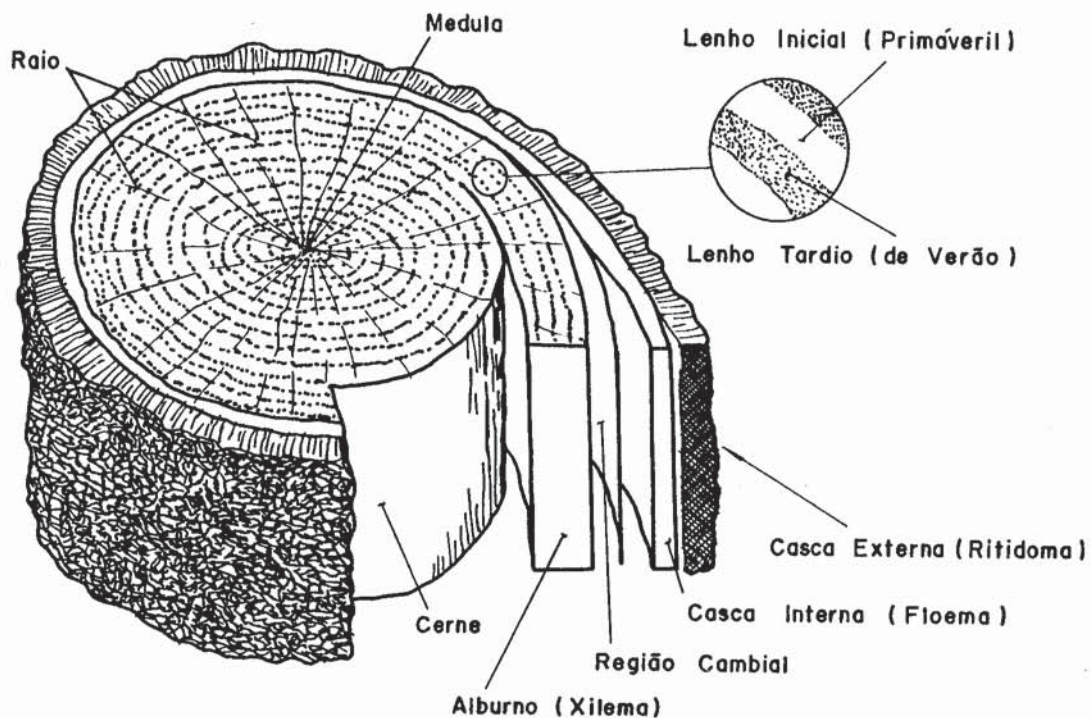


Fig. 35- As camadas constituintes da madeira

Fonte: La Madera ⁽²⁸⁾

As camadas que constituem o lenho não apresentam desenvolvimento uniforme durante o ano. Na primavera e no verão são formadas células maiores, com paredes mais finas. No outono e no inverno formam-se células menores, com paredes mais espessas. (Hellmeister⁽²¹⁾, Morey⁽²²⁾).

Com auxílio de lentes de dez a vinte aumentos pode-se observar as células de parênquima. Estas células são células pequenas, de paredes finas, geralmente depósitos de amido. De acordo com Rocco Lahr⁽²³⁾, os padrões de distribuição das células de parênquima são de significativa importância para a descrição da anatomia da madeira e para a identificação das espécies.

Nas dicotilédoneas existem duas classes básicas de padrões de distribuição de parênquima. Numa denominada paratraqueal, as células de parênquima estão adjacentes aos poros, e, na outra, apotraqueal, não adjacentes aos poros.

Segundo Mainieri⁽²⁴⁾ o parênquima apotraqueal apresenta os seguintes tipos:

- parênquima marginal: se dispõe em faixas, regulares ou não, mais ou menos afastadas, aparentemente delimitando as camadas de crescimento; pode ser inicial ou terminal, respectivamente dando início ou terminando uma camada de crescimento; ocorre, por exemplo, no Jatobá (*Hymenaea stilbocarpa*).

- parênquima difuso: ocorre quando as células de parênquima estão escassamente distribuídas por entre a massa fibrosa, sem um padrão definido; tem-se, por exemplo, a Peroba Rosa (*Aspidosperma polyneuron*).

- parênquima em faixas: se dispõe em linhas ou faixas nitidamente concêntricas, com maior ou menor aproximação; tem-se como exemplo o Carvalho (*Euplassa*, sp).

O parênquima paratraqueal, por outro lado, pode ser:

- parênquima vasicêntrico: se dispõe ao redor dos poros, escassos ou abundantes, formando um desenho em forma de auréola de largura variável, circular, ovalada ou elíptica, muitas vezes visível sem o auxílio de lentes de aumento; é o caso do Angico (*Piptadenia excelso*), do Guapuruvú (*Shizolobium parahyba*).

- parênquima aliforme: se dispõe ao redor dos poros, podendo-se estender em direções opostas em expansões largas e curtas, constituindo o tipo losangular; ou em prolongamentos laterais, com extremidades ligadas ou não às dos poros vizinhos, constituindo o tipo linear; ocorre em diversas espécies do gênero *Tabebuia*, inclusive nos Ipês. Mainieri⁽²⁴⁾.

Nas coníferas, segundo Kollmann⁽²⁵⁾, as células de parênquima aparecem nos padrões marginal e difuso. Estas células de um modo geral são praticamente as mesmas daquelas que ocorrem nas dicotilédoneas. Por outro lado, a porcentagem de células de parênquima presentes nas dicotilédoneas pode alcançar 30 a 35% do material lenhoso, ao passo que nas coníferas a ordem de grandeza cai para 5 a 8%. Há de observar que, em diferentes posições de uma amostra, aparecem porcentagens aleatórias de células de parênquima, como relata Kollmann⁽²⁵⁾.

3.3- Estrutura Microscópica da Madeira

A madeira apresenta-se constituída por células de forma alongada, com vazio interno, e tendo tamanhos e formas variadas de acordo com sua função e sua classificação botânica da árvore.

Com a utilização de microscópio é possível identificar na madeira das coníferas os seguintes elementos básicos: traqueídes e raios medulares. Os traqueídes são células alongadas, de até 5mm de comprimento, e até 60 μ de diâmetro, com comunicação pelas extremidades, por meio de válvulas, designadas por pontuações areoladas. Os traqueídes podem perfazer até 90% da madeira das coníferas (Morey⁽²²⁾). Os raios medulares são conjuntos de células alongadas e achatadas que se dispõem radialmente em forma de fitas, indo da casca ao centro da árvore. Estas células se comunicam por perfurações nas suas paredes, chamadas de pontuação simples. Os raios integram até 10% da madeira das coníferas.

A figura 36 mostra uma porção a nível microscópico da madeira nas coníferas.

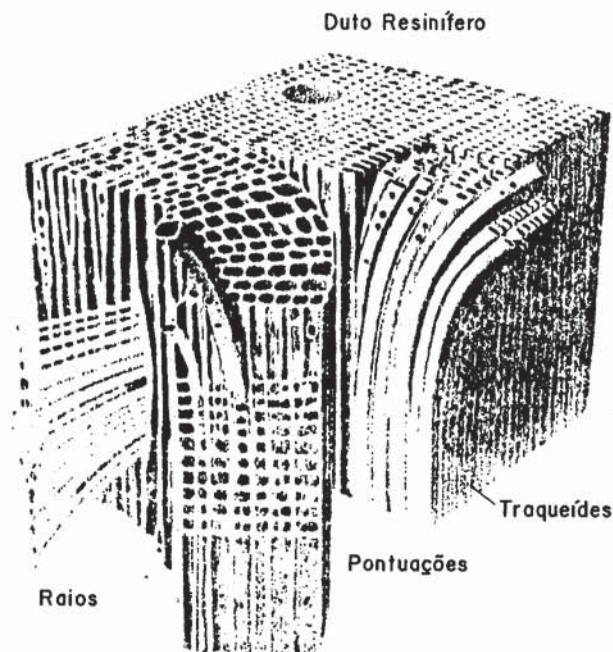


Fig. 36- Os elementos microscópicos das coníferas.

Fonte: La Madera⁽²⁸⁾.

Por sua vez, a madeira das dicotilédoneas apresenta os seguintes elementos básicos quando observada a nível microscópico; vasos, fibras e raios medulares. Os vasos são células alongadas, com 0,2 a 1mm de comprimento, 20 a 300 μ de diâmetro, com seção transversal vazada e arredondada. Os vasos são denominados nos cortes transversais da madeira como poros. Os vasos alinham-se mais que os traqueídes e a comunicação entre as células é direta. Podem constituir de 20 até 50% da madeira das dicotilédoneas.

As fibras são células alongadas, com 0,7 a 1,4mm de comprimento, com seção transversal vazada e arredondada, paredes espessas fechadas e afinando nas extremidades. As fibras não possuem comunicação pelas extremidades, ligam-se aos vasos e às fibras por pontuação simples e areoladas. As fibras podem perfazer até 50% da madeira das dicotilédoneas, dependendo da espécie, Hellmeister⁽²¹⁾.

Quanto aos raios medulares, estes seguem as considerações expostas anteriormente.

A próxima figura mostra os elementos anatômicos das dicotilédneas.

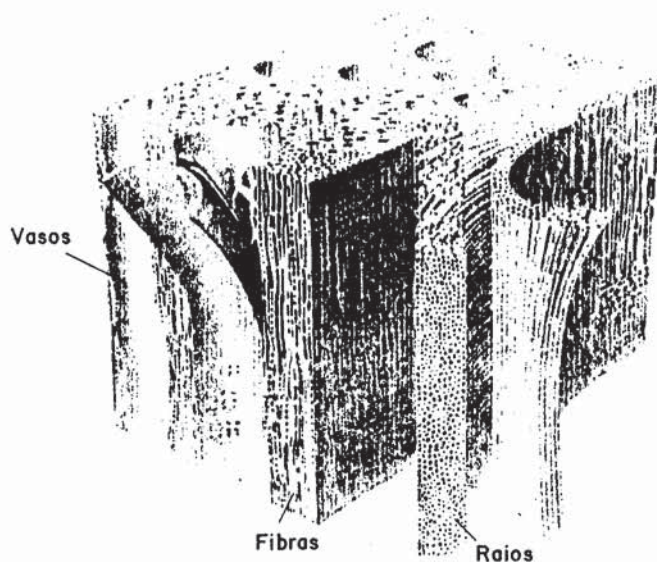


Fig. 37- Os elementos microscópicos das dicotiledôneas
Fonte: La Madera⁽²⁸⁾

Cabe, aqui, observar que a madeira das dicotilédneas apresenta-se estruturalmente menos homogênea que a madeira das coníferas haja vista que, nesta, cerca de 90% dos elementos axiais são traqueídes. Este fato poderá ser responsável pela introdução de eventuais variações nos valores de parâmetros de resistência e de elasticidade, determinados através de procedimentos experimentais usuais.

3.4- Parede Celular, sua Constituição e sua Orientação

A estrutura da madeira e muitas de suas propriedades são baseadas no arranjo característico das células componentes e mais fundamentalmente, na organização e na composição química das substâncias a nível da parede celular. (Morey⁽²²⁾).

A parede celular das fibras, traqueídes e outros tipos de elementos anatômicos é constituída por lamelas, que são arranjos de várias centenas de microfibrilas. Estas, por sua vez, são fileiras paralelas de moléculas de celulose. Desta forma, a organização física da parede celular está associada à celulose, uma substância orgânica natural.

A parede cambial primária, denominada também de parede celular primária, pode crescer em área quando, por exemplo, um vaso aumenta em diâmetro. Neste estágio inicial de diferenciação, de acordo com Gemmel⁽²⁹⁾, as derivações cambiais adjacentes são separadas por duas paredes primárias finas unidas por uma substância intercelular, denominada de lamela média. Em traqueídes adultos e fibras, a parede celular primária, neste momento a parte mais externa da parede celular, como pode ser visto na figura a seguir, corresponde a uma pequena porção da parede celular (menor que $0,1\mu$ de espessura). Uma parede espessa, chamada de parede secundária aparece no lado interno da parede primária, logo após esta parar seu crescimento em área. Observa-se que a parede celular é formada principalmente da parede celular secundária. Tanto a parede primária e a secundária são constituídas de celulose, de hemicelulose, ambas polissacarídeos, e por um polímero aromático, chamado de lignina. Em fibras do lenho, a parede celular secundária é formada por três camadas distintas chamadas de S_1 , S_2 , S_3 , conforme é mostrada na figura. A camada S_2 é a mais espessa medindo aproximadamente 2μ . (Morey⁽²²⁾, Bodig e Jayne⁽²⁷⁾).

O arranjo das moléculas de celulose na parede celular, em ordem crescente de complexidade, vai das microfibrilas, visíveis em fotomicrográficas de microscópio eletrônico, até a parede celular de dimensões macroscópica.

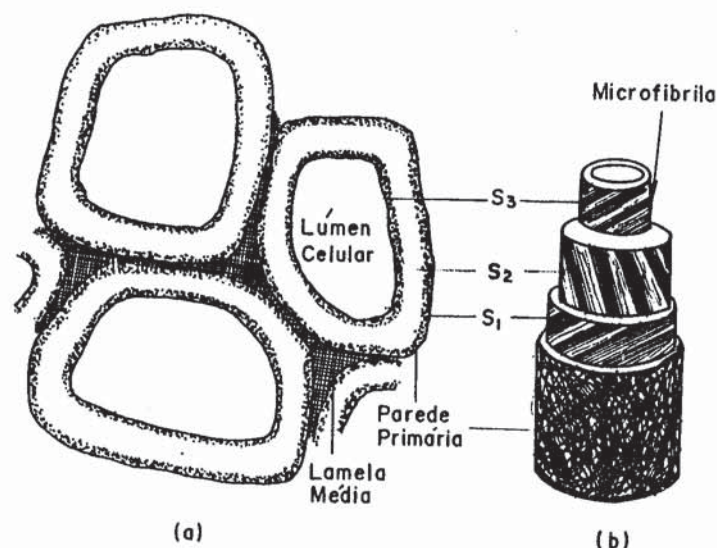


Fig. 38- A parede celular e as camadas S_1 , S_2 e S_3
 Fonte: Morey⁽²²⁾.

Assim, com o uso de luz polarizada é possível determinar a orientação da celulose em fibras e traqueídes. Desta forma, a camada S_2 revela caráter ortotrópico, formando ângulos com a direção longitudinal da célula que variam de 10 a 30°. Mark⁽³⁰⁾ apresenta importante trabalho onde se pode extrair uma fotografia de parede secundária de madeira da espécie *Valonia* evidenciando a ortotropia do material. A camada S_1 possui duas direções principais, onde a celulose faz ângulo de 60 a 90° com a direção das fibras. Por fim a camada S_3 apresenta-se praticamente anisotrópica.

Cabe, aqui, observar que a resistência e por extrapolação, a elasticidade da madeira está intimamente vinculada com o arranjo da estrutura laminada, ora apresentada.

A seguir, apresenta-se a figura 39 onde se evidencia as camadas S_1 , S_2 , S_3 e particularmente a ortotropia da camada S_2 .

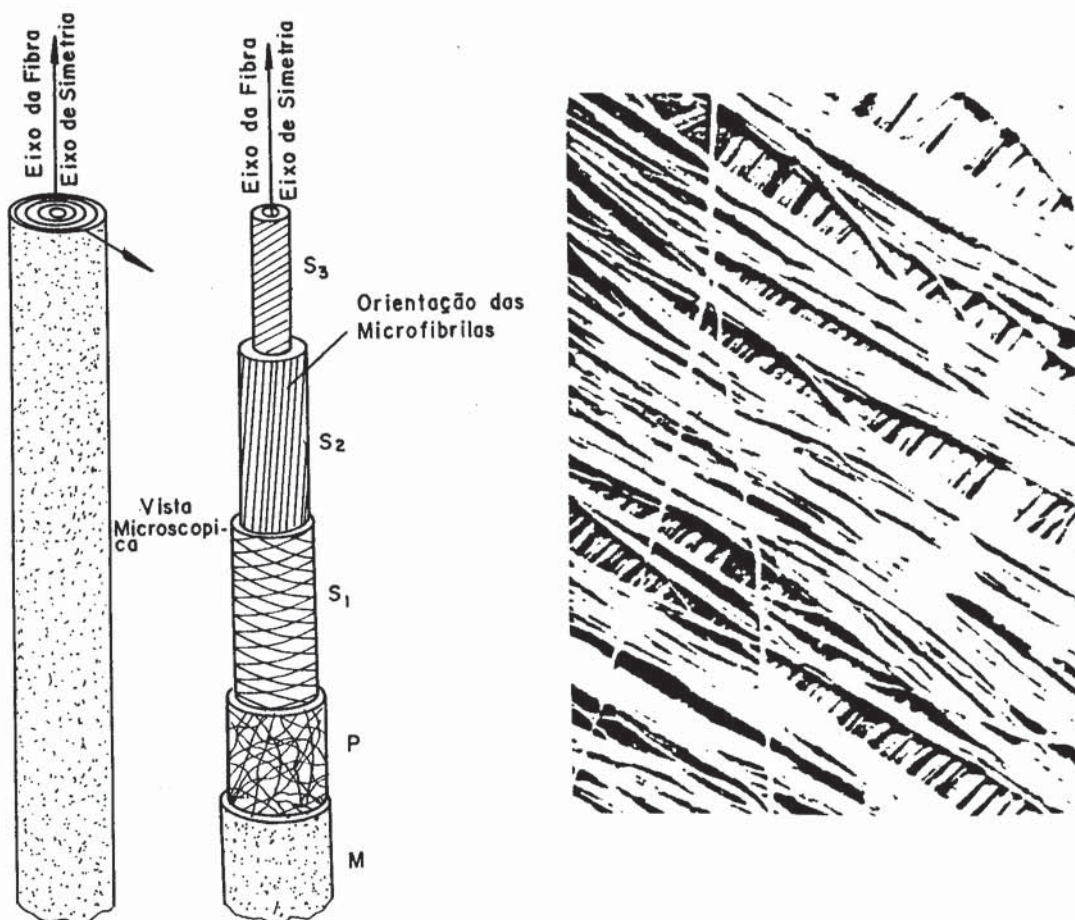


Fig. 39- As direções das camadas S_1 , S_2 , S_3 e a ortotropia de S_2 . Fonte: Bodig e Jayne⁽²⁷⁾.

3.5- Comportamento Mecânico ao Nível das Paredes Celulares

Considera-se, agora, a estrutura anatômica de uma peça de madeira, por exemplo a da figura 40, em relação ao comportamento mecânico quando submetida a uma sollicitação de tração paralela às suas fibras. A curva tensão deformação é linear e segue a Lei de Hooke. Aceita-se este fenômeno como natural, conforme relata Mark⁽³⁰⁾. Mas ao se imaginar que a estrutura do material apresenta grande quantidade de espaços vazios, poder-se-ia esperar por outros resultados. Ao nível das fibras tem-se a região central vazia, e ao nível das paredes celulares encontram-se inúmeras pontuações (pits). Além disso, existem os raios medulares, cuja orientação é normal ao carregamento aplicado.

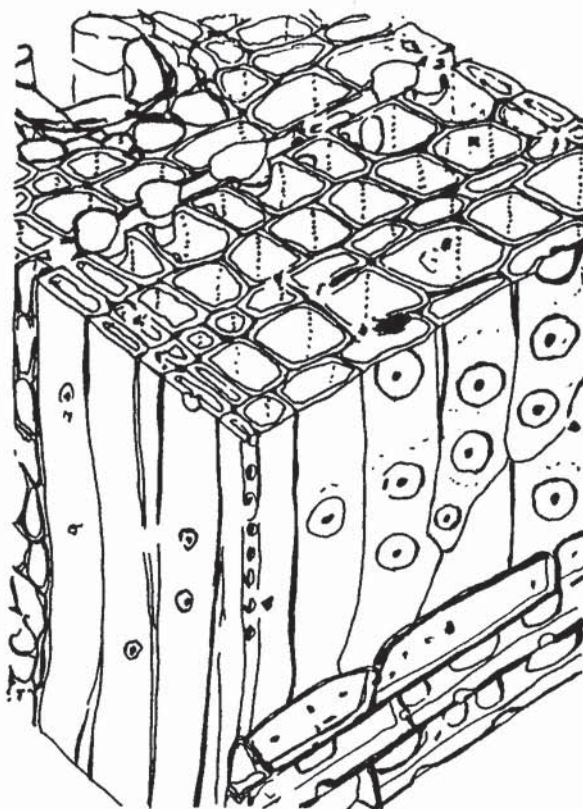


Fig. 40- Estrutura anatômica da madeira. Fonte Mark⁽³⁰⁾.

Perante tais fatos seria de se esperar uma considerável contração transversal durante o teste de tração. Entretanto, isso frequentemente não ocorre.

Observa-se que, ao nível da figura anterior, a estrutura anisotrópica, causada pela orientação das fibras, resulta em que a maioria do material das paredes das fibras está alinhada em relação ao carregamento e, por outro lado, ao nível da estrutura das paredes das células, apresenta-se não alinhada diante da orientação das fibras. (ver orientação nas camadas S_1 , S_2 , S_3). Além disso cerca de 10% da madeira são ocupados por substâncias intercelular, na lamela média entre as paredes das células adjacentes (ver figura 38), onde não há presença de celulose contribuindo para o reforço de uma maneira geral. Sob esta ótica, pareceria normal um comportamento distinto daquele previsto pela Lei de Hooke. Então, face ao exposto, Mark⁽³⁰⁾ se volta para importantes observações:

- a celulose presente nas microfibrilas se constitui num material que obedece a Lei de Hooke.

- a rigidez das estruturas de celulose predomina sob os efeitos da geometria celular.

Mark⁽³⁰⁾, Schniewind⁽³¹⁾ e Perkins⁽³²⁾, entre outros, atentam para a importância do entendimento dos modelos elásticos constitutivos das paredes das células para o cabal entendimento do comportamento mecânico da madeira. Interessantes resultados podem ser destacados nos trabalhos destes pesquisadores, como por exemplo o gráfico que mostra a variação do módulo de elasticidade das fibras contra a variação da inclinação das camadas S_2 .

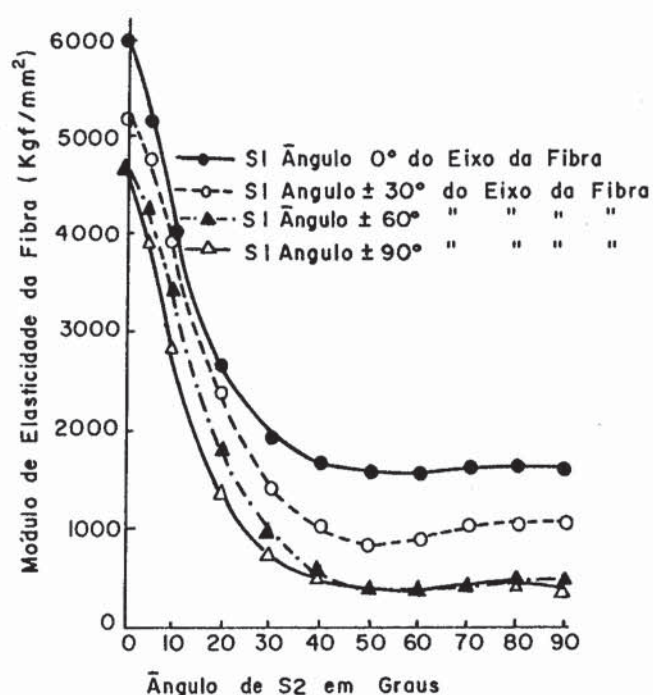


Fig. 41- Variação do módulo de elasticidade com as fibras em S_2 . Fonte: Mark⁽³⁰⁾.

3.6- Algumas Considerações sobre o Modelo Ortotrópico na Madeira

A teoria da elasticidade aplicada à madeira baliza-se na hipótese de simetria elástica em três planos mutuamente perpendiculares, vinculados a sua estrutura interna, e na

homogeneidade macroscópica do material, conforme relata Hearmon⁽¹⁾. A superfície longitudinal-tangencial (superfície gerada por uma linha paralela ao eixo da árvore, movendo-se ao longo dos anéis de crescimento) não é plana, mas grosseiramente cilíndrica. As outras duas superfícies, a longitudinal radial (definida pelo eixo da árvore e pelos raios medulares) e a tangencial radial, são, mais verdadeiramente, planas, com eventuais irregularidades locais, devido ao crescimento da árvore. A figura 42 ilustra estas superfícies.

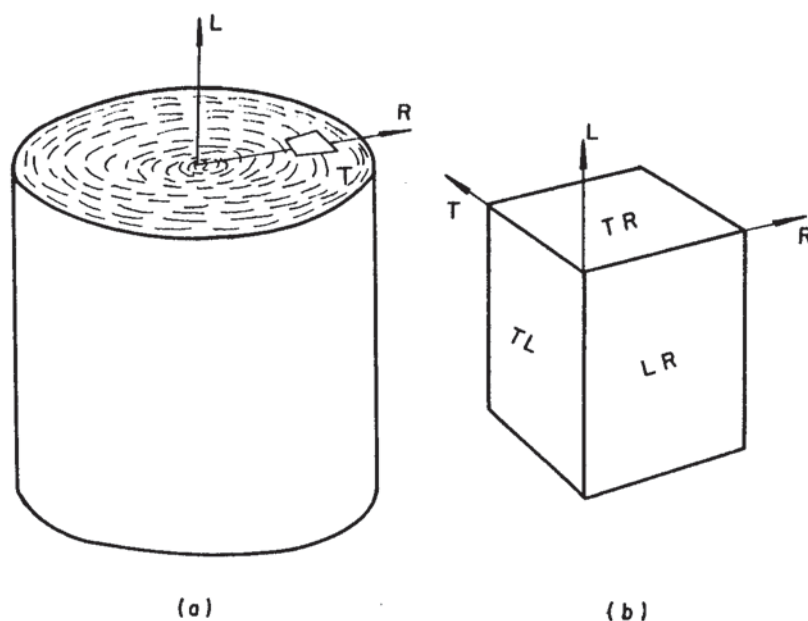


Fig. 42- Os eixos de simetria elástica numa peça de madeira. Fonte: Hearmon⁽¹⁾.

Há de notar, entretanto, que ao se analisar uma amostra retirada do tronco, conforme a figura 42(b), considera-se esta amostra referida a um sistema de coordenadas cartesianas x_1 . Neste caso os eixos geométricos (x_1, x_2, x_3) coincidem com os eixos de simetria elástica, ou eixos ortotrópicos (L, R, T), como se mostra na próxima figura. (Kollmann e Coté⁽³³⁾, Bodig e Jayne⁽²⁷⁾).

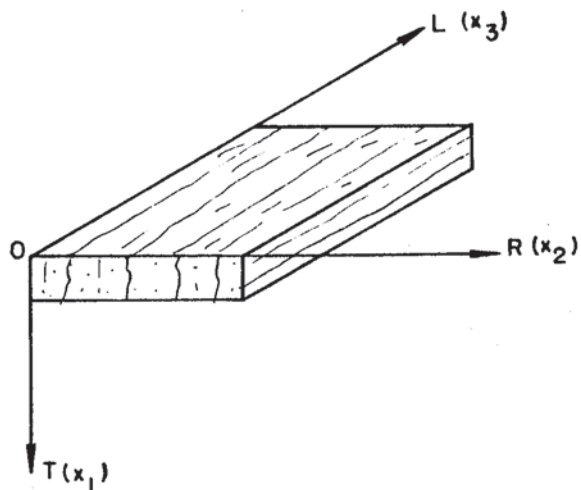


Fig. 43- Eixos ortotrópicos e eixos geométricos.

Fonte: Bodig e Jayne⁽²⁷⁾.

A adequação do modelo teórico ao real depende não somente da regularidade do crescimento, mas também da posição da peça analisada na árvore. Estes constituem-se em níveis de inhomogeneidade da madeira. Na figura 44 são apresentados quatro níveis de inhomogeneidade.

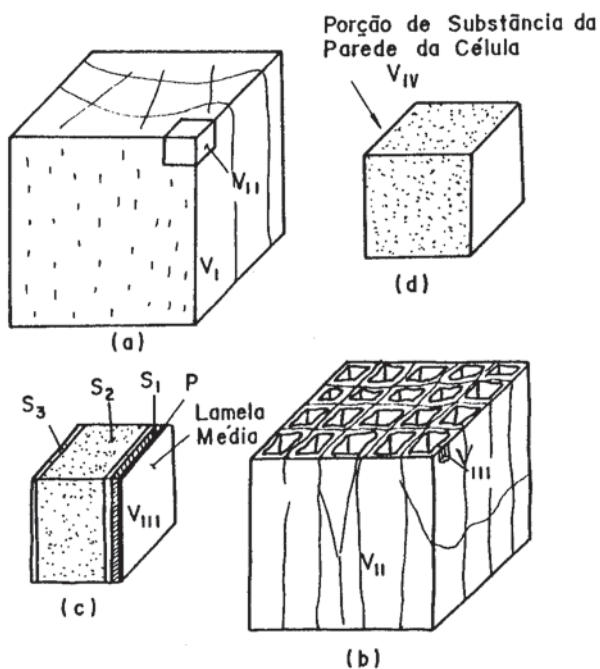
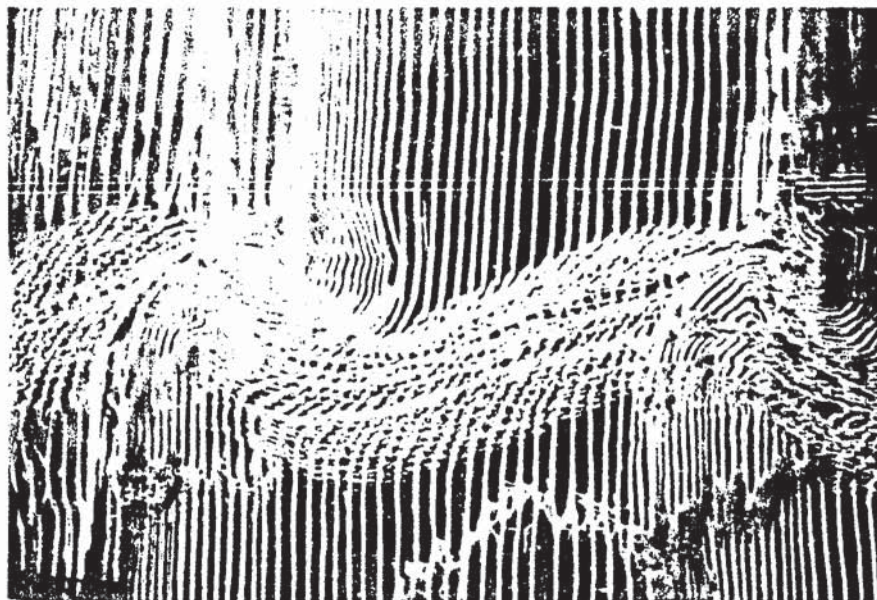


Fig. 44- Níveis de inhomogeneidade na madeira.

Fonte: Perkins⁽³⁴⁾.

Segundo Perkins⁽³⁴⁾, considerando-se um volume típico V_I , que detém uma inhomogeneidade característica, o qual resulta na variação das propriedades mecânicas com cada anel do crescimento anual. Este típico elemento V_I pode ser considerado constituído de vários elementos V_{II} . O elemento V_{II} exibe uma característica de inhomogeneidade resultante da estrutura celular. Por outro lado, considera-se, agora, níveis menores de inhomogeneidade, ilustrados pelos elementos V_{III} e V_{IV} (parede celular e parte de substância da parede celular).

A aplicabilidade de teorias clássicas do meio contínuo para o campo da mecânica da madeira está, intimamente, ligada a um tipo de classificação como a descrita anteriormente. Os níveis de inhomogeneidade aqui apresentados podem, de alguma maneira, conduzir a utilização das teorias da mecânica do meio contínuo na madeira. Por exemplo: o esmagamento de fibras na compressão pode ser elucidado pelos níveis V_I e V_{II} ; a resistência a tração da madeira relacionada com a resistência das paredes dos traqueídes através do nível V_{III} . As figuras, a seguir, evidenciam estes fatos. (Bodig & Jayne⁽²⁷⁾).



Esmagamento de fibras

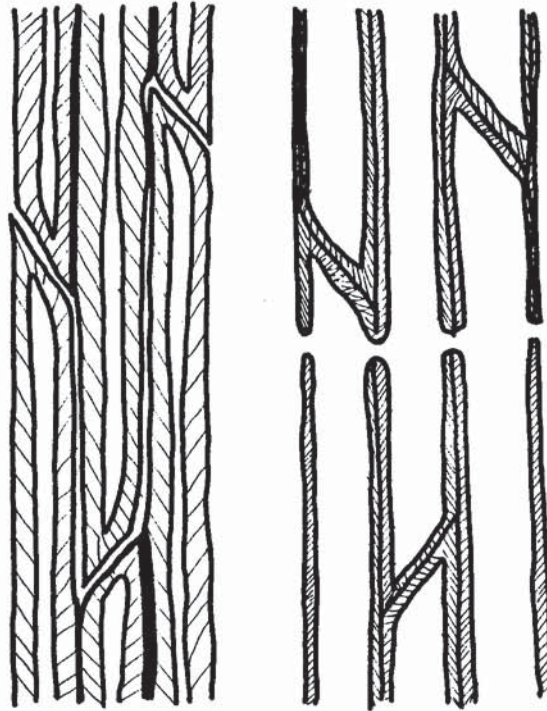


Fig. 45- Esmagamento de fibras e traqueídes rompidos.

Fonte: Bodig e Jayne⁽²⁷⁾

Perkins⁽³⁴⁾ discute, também, as relações entre componentes de tensão, deformações, coeficientes de elasticidade num material, macroscopicamente homogêneo e num nível inferior inhomogêneo. Denota um elemento de volume V^* e sua área de A^* . Assume um meio elástico-contínuo. A nível macroscópico os componentes de tensão, deformação e coeficientes de elasticidade são, aqui, t_{ij} , d_{ij} , C_{ijkl} ; num nível inferior σ_{ij} , ϵ_{ij} , c_{ijkl} . Assim, c_{ijkl} depende da posição. Para simplificação, assume-se n elementos de volume, com homogeneidade a este nível. A figura 46 ilustra o elemento V^* .

É considerado, ainda, que as tensões principais e todas as equações da teoria da elasticidade clássica são válidas ao nível inferior. A um nível superior esta hipótese pode se manter ou não.

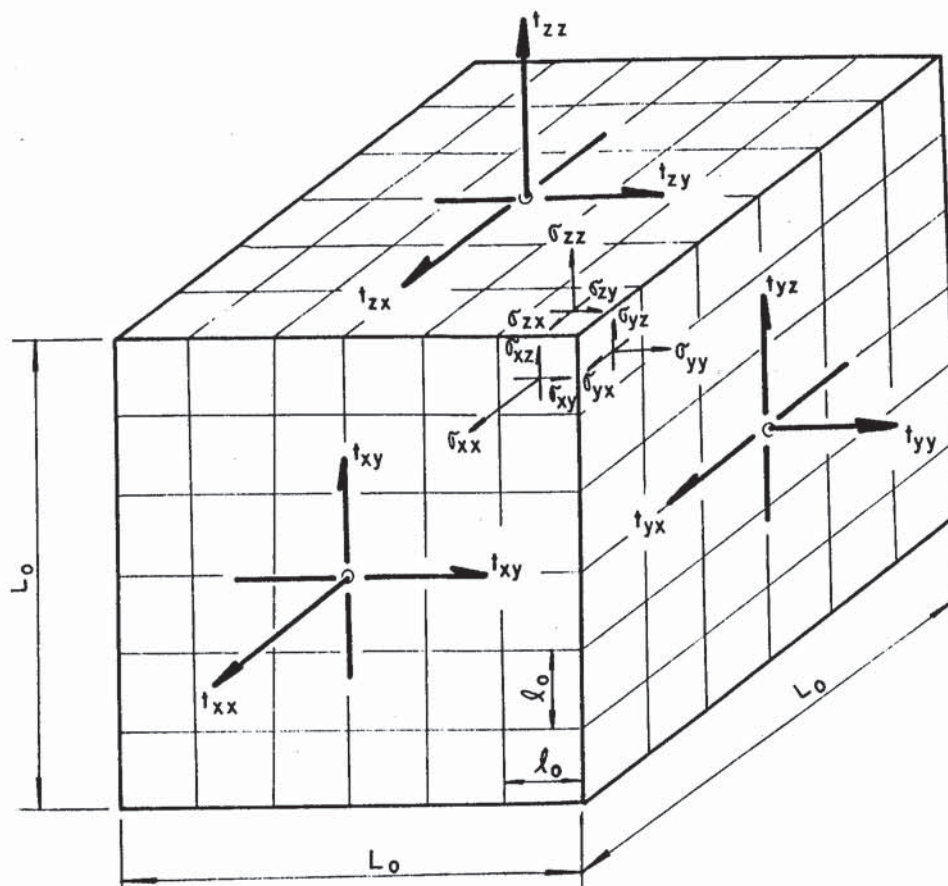


Fig. 46- Componentes de tensão num nível superior e num inferior de inhomogeneidade. Fonte: Perkins⁽³⁴⁾.

A componente de tensão t_{ij} pode se relacionar com a componente σ_{ij} através da diferenciação:

$$t_{xx} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{P_x / \Delta A_x}{\Delta A_x} \quad (188)$$

onde ΔA_x representa a área do elemento em que o vetor normal é paralelo ao eixo x e P_x representa o componente do vetor força P_n transmitida sobre A_x . Nesta definição não há qualquer distinção entre t_{ij} e σ_{ij} . Com efeito:

$$t_{xx} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow \Delta A_x^*} \frac{P_x / \Delta A_x}{\Delta A_x} = \sum_{k=1}^{N^2} \sigma_{xx}^{(K)} \frac{A_k}{\Delta A_x^*} \quad (189)$$

onde: $\Delta A_x^* = l_0^2 N^2$ e A_k é a área de um elemento K .

Se se faz uma hipótese ergódica usual com relação à equivalência de tempo e igual probabilidade das médias, então t_{xx} é a espectância de σ_{xx} , $E(\sigma_{xx})$, onde σ_{xx} é uma variável aleatória. Em outras palavras t_{xx} é a média das componentes de tensão num nível inferior σ_{ij} . Assim:

$$t_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} = 1/V^* \int_{V^*} \sigma_{ij} dV = 1/V^* \int_{A^*} T_i x_j dA \quad (190)$$

onde $T_i = \sigma_{ij} n_j$ e n_j é normal a superfície A_x .

Analogamente, obtém-se para as deformações:

$$d_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} = 1/V^* \int_{V^*} \varepsilon_{ij} dV = 1/2V^* \int_{A^*} (u_i n_j + u_j n_i) dA =$$

$$\sum_{k=1}^{N^3} \varepsilon_{ij}^{(k)} / N^3 \quad (191)$$

onde: $\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$, com u indicando componente de deslocamento na direção i e $u_{i,j}$ indicando a derivada parcial do deslocamento em i em relação a j ; $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ representa o valor homogêneo de ε_{ij} associado com o elemento V^k de V^* . Do mesmo modo que nas tensões, a componente macroscópica de deformação d_{ij} é a espectância das componentes microscópicas de deformação ε_{ij} .

A relação entre coeficientes de elasticidade num nível macroscópico e num nível inferior pode ser obtida da relação tensão-deformação do nível inferior, através do valor médio $\bar{\sigma}_{ij}$. Deste modo:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \overline{c_{ijkl} \varepsilon_{kl}} \quad (192)$$

Entretanto, em geral, $\overline{c_{ijkl} \varepsilon_{kl}} \neq \bar{c}_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl}$. Por outro lado, Perkins⁽³⁴⁾ apresenta simplificação que conduzem a:

$$C_{ijkl} \approx \bar{c}_{ijkl} \quad (193)$$

considerando o meio macroscópico homogêneo e deformações pequenas.

Neste contexto, torna-se possível determinar coeficientes de elasticidade num elemento específico de nível inferior e extrapolá-lo ao nível macroscópico, colocando-se naturalmente, restrições e hipóteses adequadas. Esta determinação de coeficientes de elasticidade pode ser feita através de ensaios de laboratório. Pode-se supor, por exemplo, um sólido prismático, onde uma carga F atua ao longo do eixo longitudinal, como na figura 47.

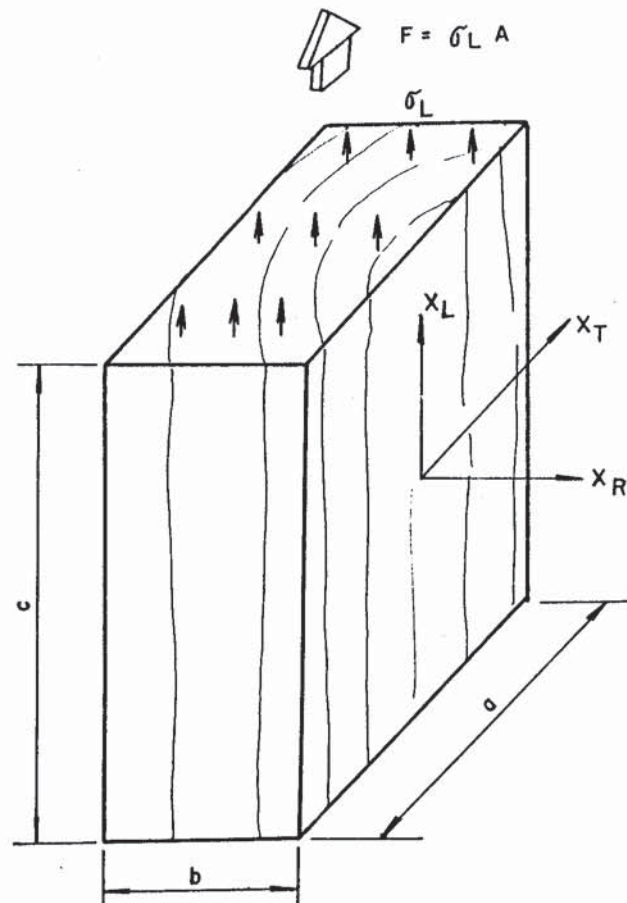


Fig. 47- Sólido de madeira sob a ação de uma carga P .

Fonte: Perkins⁽³⁴⁾.

Assume-se que a carga F gera um campo homogêneo de tensões, Perkins⁽³⁴⁾, caracterizado, neste caso, por:

$$\sigma_L = \frac{F}{a b} \quad (194)$$

A variação das dimensões a, b, c pode ser mensurada e escrita por Δa , Δb , Δc . A hipótese da homogeneidade é estendida ao campo de deformações. Assim:

$$e_L = \frac{\Delta c}{c}, \quad e_R = \frac{\Delta b}{b}, \quad e_T = \frac{\Delta a}{a} \quad (195)$$

A relação entre tensão-deformação, descrita originalmente por $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$, pode ser resolvida na sua forma alternativa por:

$$e_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (196)$$

Na presente situação, aplicando-se as simplificações convenientes, torna-se permissível escrever:

$$E_L = \frac{\sigma_L}{e_L} = \frac{F c}{ab \Delta c}$$

$$\nu_{LR} = - \frac{E_L e_R}{\sigma_L} = - \frac{e_R}{e_L} = - (c/b) (\Delta b/\Delta c) \quad (197)$$

$$\nu_{LT} = - \frac{E_L e_T}{\sigma_L} = - \frac{e_T}{e_L} = - (c/a) (\Delta a/\Delta c)$$

onde: E_L = representa o módulo de elasticidade na direção L;

$$\nu_{ij} = - \frac{e_j}{e_i} \quad \text{o coeficiente de Poisson, quando se aplica carga em } i \text{ e se mede deformação em } i \text{ e } j.$$

Perkins⁽³⁴⁾ prossegue seu estudo, expressando que os campos das tensões e das deformações são inomogêneos e complexos, mas, constando que o efeito dos campos de tensão e de deformação,

quando considerados os valores médios $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\epsilon}_{kl}$, são campos homogêneos de tensão ou de deformação.

Al-Dabbagh⁽³⁵⁾ apresenta, em 1972, análise dos efeitos do campo de tensão e de deformação, através do método dos elementos finitos, em que se pode verificar a situação de um sólido, de madeira, solicitado à compressão. Na figura 48 são apresentadas a distribuição de tensões e de deformações e a situação deformada do sólido. Este tem as seguintes dimensões nominais 1,75" x 1,75" x 5" (4,44cm x 4,44cm x 12,70cm).

Observa-se, claramente, que o efeito real, no sólido, das distribuições de tensões e de deformação são inhomogêneos, de acordo com Perkins⁽³⁴⁾. Todavia, o efeito médio e o real quando medidos na região média do sólido apresentam homogeneidade. Esta observação vai de encontro à conclusão de Perkins⁽³⁴⁾ e de Jayne⁽³⁶⁾ em que se pode, perfeitamente, atribuir homogeneidade nos resultados obtidos para os coeficientes de elasticidade, para materiais fibrosos através de ensaios de laboratório. Esta extrapolação pode e deve ser feita, mas as restrições e hipóteses a serem consideradas, além das já apresentadas, outras, como a hipótese de Saint-Venant, a colocação adequada de instrumentos de medições e a escolha dos sólidos ou corpos de prova a serem utilizados, necessitam ser contabilizadas para corroborar na veracidade dos resultados encontrados na experimentação adotada.

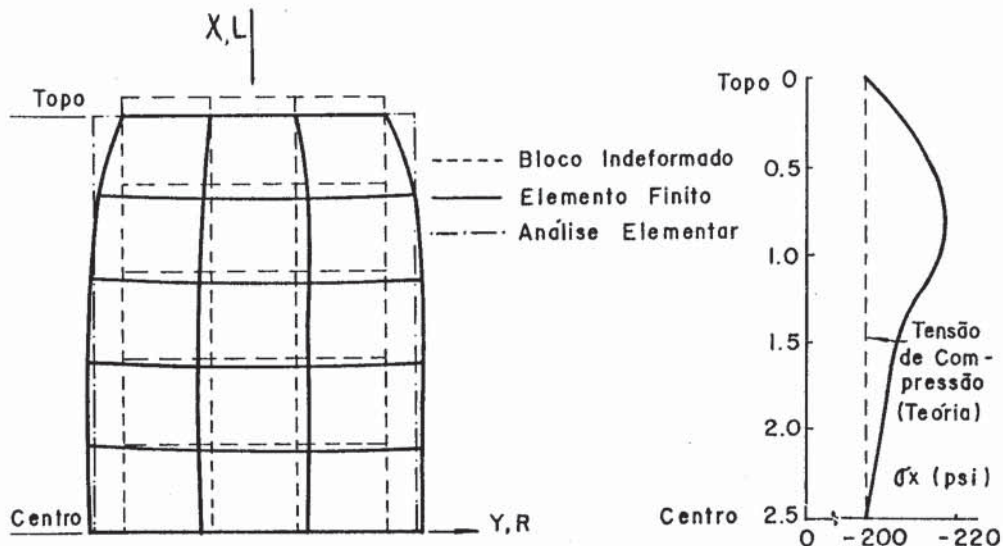


Fig. 48- Situação deformada, tensões e deformações.

Fonte: Al-Dabbagh⁽³⁵⁾.

3.7- Os Tensores S_{ij} e S'_{ij} para a Madeira

Arbitrando-se os eixos de simetria elástico do material ortotrópico, apreciados no item 2.4.7.c), aos eixos longitudinal, tangencial e radial da madeira é possível escrever:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= 1/E_L; & S_{21} &= -\nu_{TL}/E_T = -\nu_{LT}/E_L; \\
 S_{31} &= -\nu_{RL}/E_R = -\nu_{LR}/E_L; & S_{22} &= 1/E_T; \\
 S_{32} &= -\nu_{RT}/E_R = \nu_{TR}/E_T; & S_{33} &= 1/E_R; \\
 S_{44} &= 1/G_{TR}; & S_{55} &= 1/G_{LR}; & S_{66} &= 1/G_{LT}; \\
 S_{41} &= S_{51} = S_{61} = S_{42} = S_{52} = S_{62} = S_{43} = S_{53} = S_{63} = \\
 S_{54} &= S_{64} = S_{65} = 0
 \end{aligned}
 \tag{198}$$

onde, por exemplo:

E_L = módulo de elasticidade na direção longitudinal (L);
 ν_{RT} = coeficiente de Poisson no plano radial-tangencial (RT);
 G_{LT} = módulo de elasticidade transversal no plano longitudinal-tangencial (LT).

Ao se retornar às expressões de transformação do tensor S_{ij} , no caso específico da rotação θ em relação ao eixo x_3 , nota-se claramente que:

$$S'_{41} = S'_{42} = S'_{64} = S'_{51} = S'_{52} = S'_{65} = S'_{43} = S'_{53} = 0,$$

mas por, outro lado,

S'_{61} , S'_{62} , S'_{63} e S'_{54} não são, em geral, nulos.

Sob esta ótica, com a presença das constantes de elasticidade da madeira, têm-se as seguintes expressões para as

componentes do tensor S_{ij} , quando rodado de θ em torno, por exemplo, de R:

$$S'_{11} = \frac{\cos^4 \theta}{E_L} + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{TL}}{E_T} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{E_T} = \frac{1}{E'_1} ;$$

$$S'_{22} = \frac{\sin^4 \theta}{E_L} + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{TL}}{E_T} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\cos^4 \theta}{E_T} = \frac{1}{E'_2} ;$$

$$S'_{21} = \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \frac{\nu_{TL}}{E_T} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) -$$

$$- \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{G_{LT}} = - \frac{\nu'_{21}}{E'_2} ;$$

$$S'_{66} = 4 \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{2\nu_{TL}}{E_T} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{LT}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \frac{1}{G'_{12}} ;$$

$$S'_{61} = -2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{E_L} - \frac{\sin^2 \theta}{E_T} \right) \sin \theta \cos \theta + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{TL}}{E_T} \right) \times$$

$$\sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) ;$$

$$S'_{62} = -2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{E_L} - \frac{\cos^2 \theta}{E_T} \right) \sin \theta \cos \theta - \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{TL}}{E_T} \right) \times$$

$$\sin \theta \cos \theta (\sin^2 \theta \cos^2 \theta) ;$$

$$S'_{33} = S_{33} = \frac{1}{E_3}$$

$$S'_{44} = \frac{\cos^2 \theta}{G_{RT}} + \frac{\sin^2 \theta}{G_{RL}} = \frac{1}{G'_{23}} ;$$

$$S'_{55} = \frac{\sin^2 \theta}{G_{RT}} + \frac{\cos^2 \theta}{G_{RL}} = \frac{1}{G'_{13}} ;$$

$$S'_{54} = \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{1}{G_{LR}} \right) \operatorname{sen}\theta \cos\theta ;$$

$$S'_{32} = - \frac{\nu_{RT}}{E_R} \cos^2\theta - \frac{\nu_{RL}}{E_R} \operatorname{sen}^2\theta = - \frac{\nu'_{32}}{E_3} ;$$

$$S'_{31} = - \frac{\nu_{RT}}{E_R} \operatorname{sen}^2\theta - \frac{\nu_{RL}}{E_R} \cos^2\theta = - \frac{\nu'_{31}}{E_3} ; \quad (199)$$

$$S'_{63} = 2 \left(\frac{\nu_{RL}}{E_R} - \frac{\nu_{RT}}{E_R} \right) \operatorname{sen}\theta \cos\theta .$$

Os outros S'_{ij} são nulos. Naturalmente fixando-se os eixos L ou T, obter-se-ão expressões semelhantes.

Lekhnitskii⁽⁶⁾, identifica alguns invariantes para o material ortotrópico, os quais adaptados aos eixos L,T,R da madeira ficam sendo:

$$I_1 = S'_{11} + S'_{22} + 2 S'_{12} = \frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{2\nu_{TL}}{E_L} ;$$

$$I_2 = S'_{66} - 4 S'_{12} = \frac{1}{G_{LT}} + \frac{4\nu_{TL}}{E_T} ; \quad (200)$$

$$I_3 = S'_{44} + S'_{55} = \frac{1}{G_{LR}} + \frac{1}{G_{TR}} ;$$

$$I_4 = S'_{31} + S'_{32} = - \left(\frac{\nu_{RL}}{E_R} + \frac{\nu_{RT}}{E_R} \right) .$$

Outro dado significativo a respeito dos coeficientes S'_{ij} é apresentado por Hearmon⁽¹⁾, ao se referir à dependência

dos coeficientes S'_{61} , S'_{62} , S'_{63} e S'_{54} aos termos fundamentais S_{11} ... S_{21} ... S_{44} ... e ao ângulo de rotação θ .

A existência de S'_{61} , S'_{62} e S'_{63} não nulos significa que tensões tangenciais nas direções x'_1 e x'_2 produzem deformações normais nas direções x'_1 , x'_2 , e x'_3 ; a existência de S'_{54} não nulo significa que as tensões tangenciais na direção x_1 e x'_3 produzem deformação tangencial no plano x_3 - x'_2 . Estas conclusões são resultado da análise da lei constitutiva do material ortotrópico, que pode ser encontrada, por exemplo, em March⁽³⁷⁾.

Hearmon⁽¹⁾ apresenta, também, um quadro de resultados com valores das constantes S_{ij} para diversos materiais. Citam-se aqui alguns destes valores.

TABELA 2 - Valores de S_{ij} para três espécies de madeira
(em $10^{-3} \text{cm}^2/\text{dina}$)

	S_{11}	S_{22}	S_{33}	S_{44}	S_{55}	S_{66}	S_{23}	S_{13}	S_{12}
Red Beech	878	72,6	447	640	2250	965	-32,7	-325	-37,9
Oregon pine	1110	61	770	1110	13400	1190	-24	-460	-24,6
Oak	1040	175	468	828	2740	1320	-59,4	-303	-88,4

Fonte: Hearmon, R.F.S.⁽¹⁾

Para se obter os S_{ij} deste quadro na unidade internacional MPa, ou melhor em 1/MPa, basta multiplicá-los por 10^{-7} .

3.8- O Efeito da Inclinação das Fibras

De um modo geral, a inclinação das fibras constitui-se, ao nível macroscópico, numa das razões fundamentais da anisotropia da madeira. É responsável por alterações substanciais dos valores das componentes presentes no tensor S_{ij} , isto é, altera os valores das constantes de elasticidade da madeira.

O estudo do efeito da variação do ângulo das fibras tem

sido objeto de investigação de inúmeros pesquisadores, que analisaram este efeito, tanto do ponto de vista teórico como prático.

Jenkin apud Hearmon⁽¹⁾, em 1920, obteve resultados experimentais da variação das constantes de elasticidade com o ângulo das fibras, nos três planos principais de simetria elástica para quatro espécies de madeira: Spruce, Mahogany, Ash e Walnut. Hearmon⁽¹⁾ plotou estes pontos em gráficos, mostrando a aferição das expressões S'_{ij} , como é mostrado na figura a seguir.

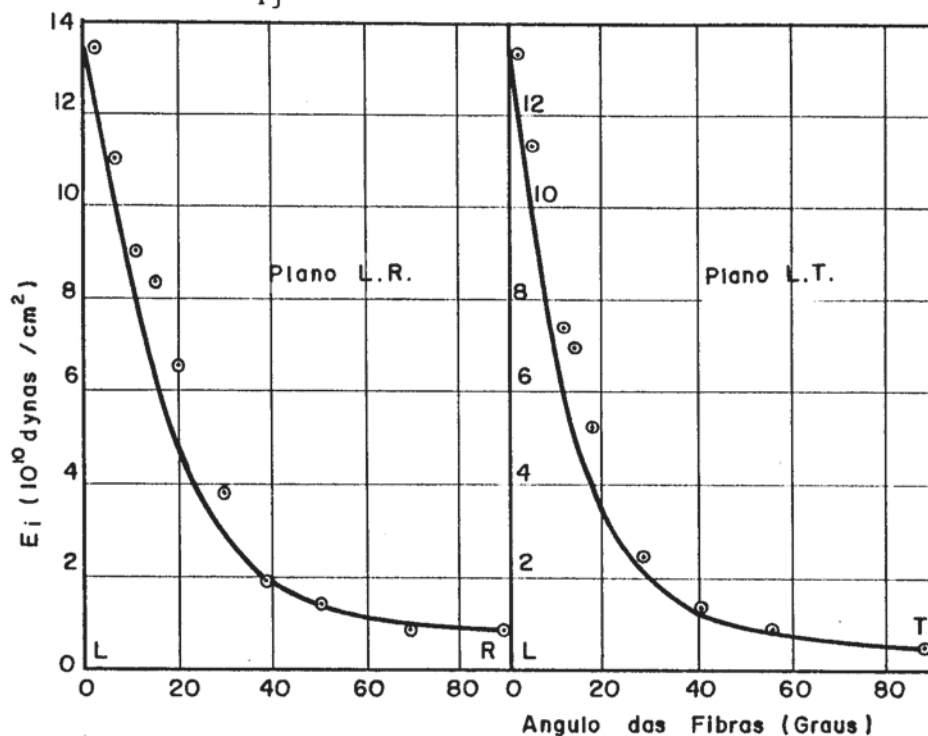


Fig. 49- Gráficos de S'_{ij} : teóricos e pontos experimentais
Fonte: Hearmon⁽¹⁾

Hörig apud Hearmon⁽¹⁾, em 1931, apresentou alguns gráficos evidenciando a variação das S'_{ij} com o ângulo das fibras. Estes gráficos foram baseados em resultados de Sitka spruce e na hipótese do comportamento de duas espécies de madeira, uma conífera (softwood) e uma dicotiledônea (hardwood). Na verdade, Hörig não calculou os S'_{21} , S'_{61} , S'_{62} , S'_{63} e S'_{54} ; fez uma análise teórica exploratória do assunto. Os gráficos obtidos por Hörig são apresentados na figura a seguir, considerando-se apenas o plano LT.

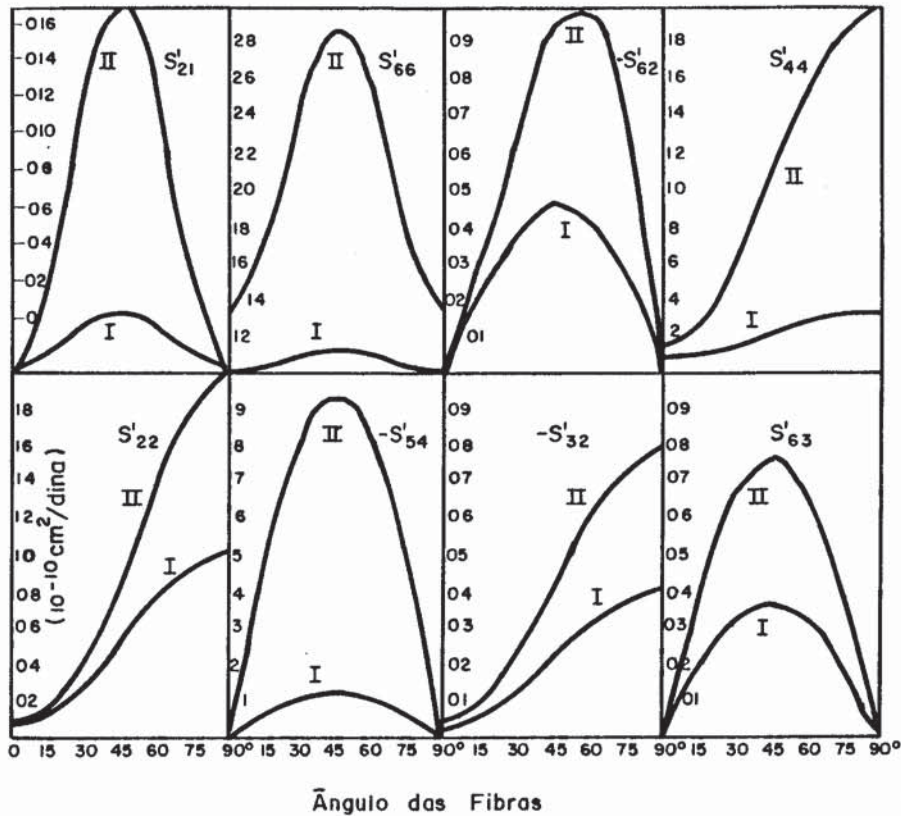


Fig. 50- Gráficos de S'_{ij} Fonte: Hearmon⁽¹⁾

Há de se observar que os valores de S'_{21} podem ser tanto positivos, tanto negativos, implicando na existência de valores negativos para o coeficiente de Poisson; os coeficientes S'_{21} , S'_{62} , S'_{63} e S'_{54} são os mesmos para os ângulos 0° e 90° e a variação de S'_{54} , S'_{66} , por exemplo, é pequena acarretando em simplificações em alguns casos para a solução de problemas de elasticidade para a madeira.

Kollmann apud Kollmann & Côté⁽³³⁾, em 1934, usou da seguinte função aproximadora para S'_{11} ($1/E'_1$)

$$S'_{11} \cong S'_{11} \cos^n \theta + S'_{22} \sin^n \theta \quad (201)$$

onde \underline{n} foi determinado através de resultados obtidos em experimentação, realizada por Baumann, em 1922, e estabelecido igual a 3. A próxima figura mostra a função S'_1 para as espécies Basswood e White Fir.

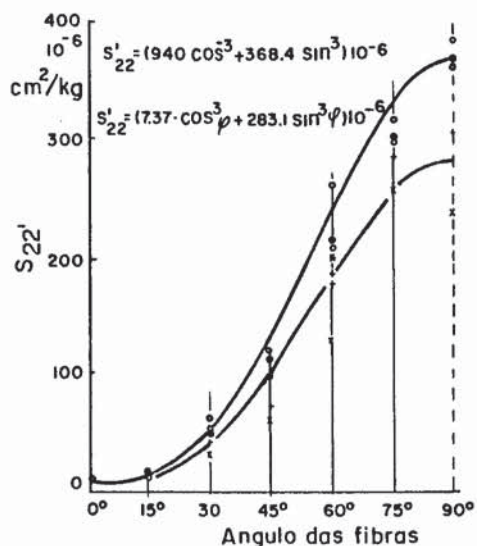


Fig. 51- S'_{11} em função das fibras.
 Fonte: Kollmann e Côté⁽³³⁾

Hearmon & Barkas⁽³¹⁾, em 1941, atentam para as dificuldades envolvendo a determinação do parâmetro G_{1j} , tendo em vista que o módulo de elasticidade longitudinal E_1 é determinado numa direção enquanto G_{1j} é estabelecido num plano. Isto pode ser apreciado através da seguinte figura.

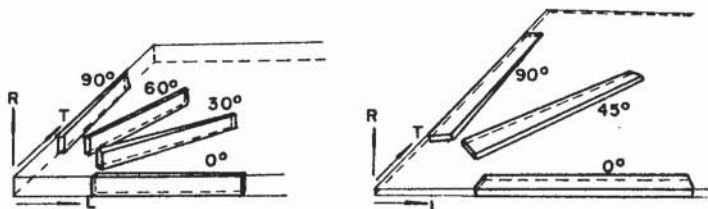


Fig. 52- Variação de E_1 (eixo) e de G_{1j} (plano).
 Fonte: Hearmon e Barkas⁽³⁸⁾

Ao se aplicar tensões tangenciais nos corpos de prova mostrados na figura 52 pode-se imaginar que há duas possibilidades de G_{1j} variar com o ângulo das fibras θ , como indicado na próxima figura. No primeiro caso, θ define um plano de cisalhamento paralelo ao eixo R, e outro plano em LT e a inclinação com o eixo

L é dada por θ .

Deve-se neste caso utilizar a expressão S'_{55} :

$$S'_{55} = \frac{1}{G'_{1j}} = \frac{1}{G_{RL}} \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{TL}} \sin^2 \theta \quad (202)$$

Os valores de G'_{1j} a 0° e a 90° são respectivamente G_{RL} e G_{TL} . Além disso, θ varia no plano LT e o parâmetro G_{LT} não está presente em tal situação.

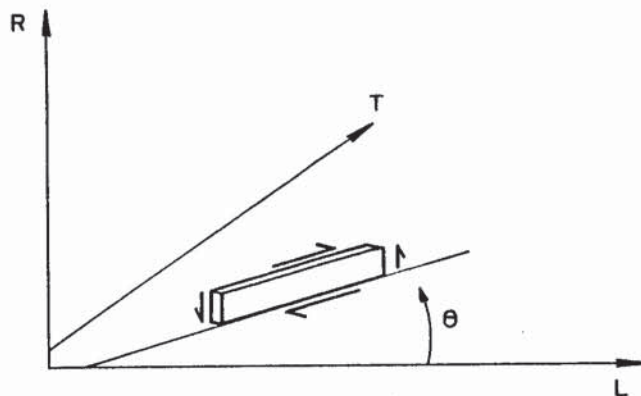


Fig. 53- Plano onde se deve usar S'_{55} .

No segundo caso, o plano contendo as tensões tangenciais é o próprio LT e as tensões estão sob ângulo θ e $\theta + 90^\circ$ com a direção L, como na figura 54.

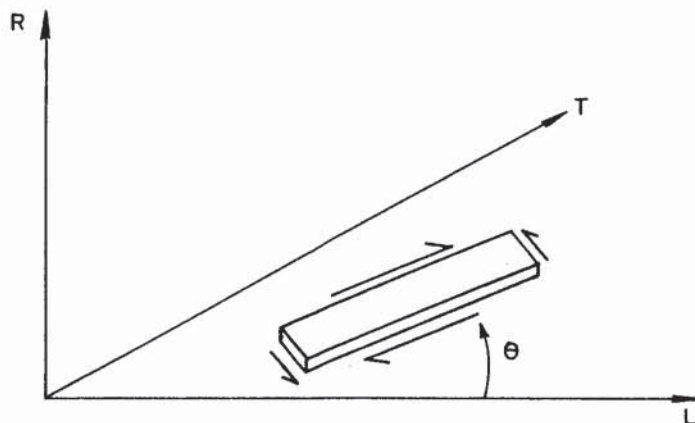


Fig. 54- Plano onde se deve usar S'_{66} .

Dessa forma, para se definir a variação de G'_{1j} com a

inclinação das fibras, deve-se reportar à expressão S'_{66} , sendo possível, também, escrever:

$$S'_{66} = \frac{1}{G'_{1j}} = 4 \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} + \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{LT}} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)^2 \quad (203)$$

E com $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 90^\circ$, esta expressão estabelece que $G_{1j} = G_{LT}$.

Interessante notar, então, que é suficiente usar a expressão S'_{11} para se conseguir E ; assim para $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 90^\circ$, tem-se $E'_1 = E_L$ e E_T , respectivamente.

Em 1970, Goodman e Bodig⁽³⁹⁾ apresentaram um amplo trabalho a respeito das propriedades da madeira associadas ao modelo ortotrópico e, particularmente ao aspecto do efeito da inclinação das fibras, sendo possível se deter ao seguinte gráfico.

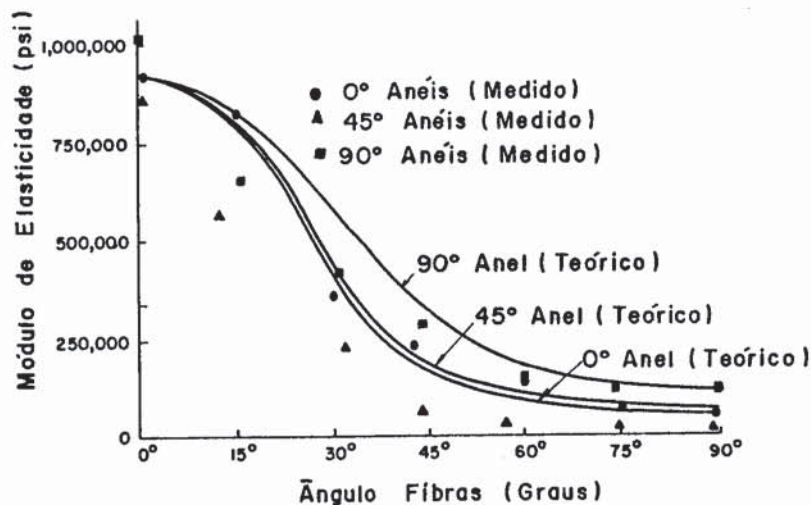


Fig. 55- Variação de E'_1 com as fibras.

Fonte: Goodman e Bodig⁽³⁹⁾.

Neste gráfico bidimensional estão condensadas a variação do módulo de elasticidade E'_1 com a variação do ângulo das fibras e, mais, são consideradas variações do ângulo dos anéis de

crescimento. Isto envolve duas rotações no sistema de eixo x'_1 . Uma ao redor do eixo L e outra no plano RT, conforme indicado na figura a seguir.

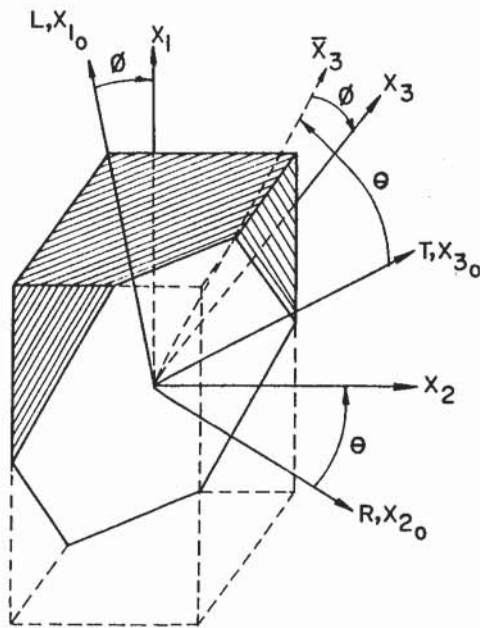


Fig. 56- Rotações de x'_1 : em torno de L e no plano RT.

Fonte: Goodman e Bodig⁽³⁹⁾

O tensor I_{ij} utilizado neste trabalho é o seguinte:

	L	R	T
x'_1	$\cos \phi$	$-\text{sen}\theta \text{ sen}\phi$	$\cos\theta \text{ sen}\phi$
x'_2	0	$\cos\theta$	$\text{sen}\theta$
x'_3	$-\text{sen} \phi$	$-\text{sen}\theta \cos\phi$	$\cos\theta \cos\phi$

Observa-se que os elementos I_{ij} que relacionam a rotação no plano RT $-x_2 \ x_3$ são os mesmos empregados na transformação de coordenadas no plano, a menos do elemento $\cos\phi$, o qual quando $\phi = 0^\circ$, ou seja, o eixo x_1 coincidente com o eixo L, acena para igualdade absoluta. Os outros elementos que comparecem no tensor I_{ij} estão relacionados com a rotação ϕ .

Neste momento, pode-se verificar que os gráficos obtidos de resultados experimentais apresentam-se bem ajustados às curvas

teóricas das equações de S'_{ij} (os métodos experimentais serão discutidos no próximo item). Isto pode ser conferido pelos gráficos aqui presentes, ou em trabalhos afins, podendo-se citar, também, Norris & McKinnon⁽⁴⁰⁾ e Lee⁽⁴¹⁾ entre outros.

Nestas curvas, particularmente, para o caso do módulo de elasticidade E_1 , quando o ângulo das fibras varia até cerca de 5° , existe uma acentuada diminuição no valor de E_L , ou E_T ou E_R . Isto se torna interessante e, de certo modo, preocupante quando não são tomadas preventivas na confecção de corpos de prova para se determinar coeficientes de elasticidade, podendo-se modificar sensivelmente o valor destas constantes. Outro ponto a ser enfocado, reside na semelhança entre os gráficos de S'_{ij} associados ao nível macroscópico da madeira, isto é, obtidos de resultados experimentais de corpos de prova convencionais, e aqueles obtidos por Mark⁽³⁰⁾ para os elementos que constituem o nível microscópico da madeira. Dessa forma, evidencia-se a aderência do modelo ortotrópico aplicado, em linhas gerais, à madeira.

3.9- Determinação Experimental dos Coeficientes de Elasticidade da Madeira

O desenvolvimento dos testes em peças de madeira vem desde os tempos de Galileo (1638) e de Hooke (1678), quando foram investigados os ensaios de tração, a análise do efeito carga-deslocamento, conforme relata Booth⁽⁴²⁾. Aspectos relativos à distribuição em tensão em vigas e testes de flexão estática e de compressão simples em pequenos corpos de prova consistiram no objeto de estudo de Duhamel (1742) e de Girard (1798). Essas pesquisas aconteceram, de um modo geral, mais a nível empírico do que revestidas de uma adequada base teórica.

Em 1830, Savart apud Hearmon⁽¹⁾, através de estudos de vibração em discos de madeira, sugeriu a possibilidade da madeira exibir uma simetria elástica em três eixos mutuamente perpendiculares. Por outro lado, Hearmon⁽¹⁾ cita Hagen, que propôs, em 1842, a seguinte fórmula empírica:

$$E = \frac{E_o E_{90}}{E_o \sin^3 \theta + E_{90} \cos^3 \theta} \quad (204)$$

onde seria possível determinar o módulo de elasticidade em qualquer direção θ , a partir do conhecimento dos módulos de elasticidade nas direções $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 90^\circ$.

Em 1864, St. Venant apud Hearmon⁽¹⁾ admitiu a variação do módulo de elasticidade com a distância do centro de gravidade da seção transversal do tronco, através da expressão:

$$E = E_o - (E_o - E_1) \frac{r^2}{r_1^2} \quad (205)$$

onde E_o e E_1 são os módulos de elasticidade no centro ($r = 0$) e no contorno ($r = r_1$) da seção do tronco. Para determinar estes módulos, parte do ensaio de flexão estática.

Há de se notar que esta simetria cilíndrica proposta por St. Venant esbarra em problemas com o próprio material, visto que no centro da árvore existe a medula, madeira com propriedades inferiores às outras regiões do tronco e, na parte do contorno da seção do tronco, do mesmo modo existe a casca, com particularidades semelhantes à medula. St. Venant atentou para a necessidade da realização experimental de sua teoria, que foi levada a efeito por Griffith e Wigley em 1918, conforme relata Hearmon⁽¹⁾. Entretanto estes pesquisadores mediram os coeficientes E_L , G_{LR} e G_{LT} , desconsiderando os coeficientes de Poisson.

Os primeiros experimentos que apresentaram os resultados dos nove coeficientes de elasticidade datam de 1920 e foram executados por Jenkin e por Carrington de acordo com Hearmon⁽¹⁾. Os experimentos utilizados para a determinação dos módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson foram flexão estática e tração-compressão simples. Na determinação do módulo de elasticidade transversal fez-se uso de peças de seção circular e

do ensaio de torção. Calculou-se G_{1j} por:

$$G_{1j} = \frac{2G_{RL} G_{TL}}{G_{RL} + G_{TL}} \quad (206)$$

Observa-se que G_{1j} é um valor híbrido e dependente da seção transversal. Todavia, aparece como uma boa aproximação do valor de G_{1j} estabelecido por meio de cisalhamento direto Kuenzi⁽⁴³⁾. Dessa forma, denominou-se o módulo de elasticidade transversal, quando do ensaio de torção, de módulo aparente.

Jenkin apud Hearmon⁽¹⁾, também utilizou das transformações tensoriais de S_{1j} para determinar o módulo de elasticidade transversal. Por exemplo, considerando-se a expressão $S'_{11} = 1/E'_1$, sob um ângulo $\theta = 45^\circ$, tem-se:

$$\frac{1}{E'_{45^\circ}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_T} + \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} + \frac{1}{E_L} \right) \quad (207)$$

Tendo os valores de E_T , E_L , E_{45° e ν_{LT} , calcula-se G_{LT} .

Hearmon⁽¹⁾ sintetizou em tabela dados dos coeficientes de elasticidade para diversas espécies de madeira obtidos por Jenkin e outros pesquisadores. Transcreve-se aqui, alguns destes resultados.

TABELA 3 - Constantes de Elasticidade da Madeira
(E, G em 10^4 MPa)

	E_L	E_R	E_T	G_{LT}	G_{LR}	G_{TR}
Oak	5,3	2,14	0,97	0,76	1,29	0,39
Beech	13,7	2,24	1,14	1,06	1,61	0,46
Spruce	10,7	0,71	0,43	0,62	0,50	0,023
Oregon pine	16,4	1,30	0,90	0,91	1,18	0,079

(continuação da Tabela 3)

	ν_{RT}	ν_{RL}	ν_{TR}	ν_{TL}	ν_{LR}	ν_{LT}
Oak	0,64	0,13	0,30	0,086	0,33	0,50
Beech	0,75	0,073	0,36	0,044	0,45	0,51
Spruce	0,51	0,030	0,31	0,025	0,38	0,51
Oregon pine	0,63	0,028	0,40	0,024	0,43	0,37

Fonte: Hearmon, R.F.S. ⁽¹⁾

A partir dos resultados desta tabela, Hearmon ⁽¹⁾ montou uma outra tabela a fim de verificar a simetria do tensor de elasticidade S_{ij} . Dessa forma, tem-se aqui:

TABELA 4 - Simetria do Tensor S_{ij}

Espécies	Oak	Beech	Spruce	Oregon pine
ν_{LR}/E_L	0,062	0,033	0,028	0,026
ν_{RL}/E_R	0,061	0,033	0,041	0,035
ν_{LT}/E_L	0,094	0,037	0,024	0,031
ν_{TL}/E_T	0,089	0,039	0,033	0,026
ν_{RT}/E_R	0,31	0,32	0,64	0,54
ν_{TR}/E_T	0,30	0,33	0,68	0,62

Fonte: Hearmon R.F.S. ⁽¹⁾

Em vista dos resultados da Tabela 4 não se descarta a hipótese de simetria do tensor S_{ij} para a madeira. Outros aspectos a se considerar residem no fato dos valores muito pequenos dos coeficientes de Poisson nas planos RL e TL, bem como a relação entre os módulos de elasticidade (E e G) nas três

direções. Nota-se, claramente, que E_L é bem maior que E_R ou E_T . De um modo geral E_R é maior que E_T . Por outro lado G_{LT} e G_{LR} são valores próximos e maiores que G_{RT} .

Em 1927, Bergsträsser⁽⁴⁴⁾ apresenta um método experimental para determinação das constantes de elasticidade de materiais isotrópicos, baseado na teoria das placas. Consistiu na aplicação de cargas em certas posições de uma placa fina (com relação lado espessura de 1:30) resultando em sollicitação de flexão ou de torção.

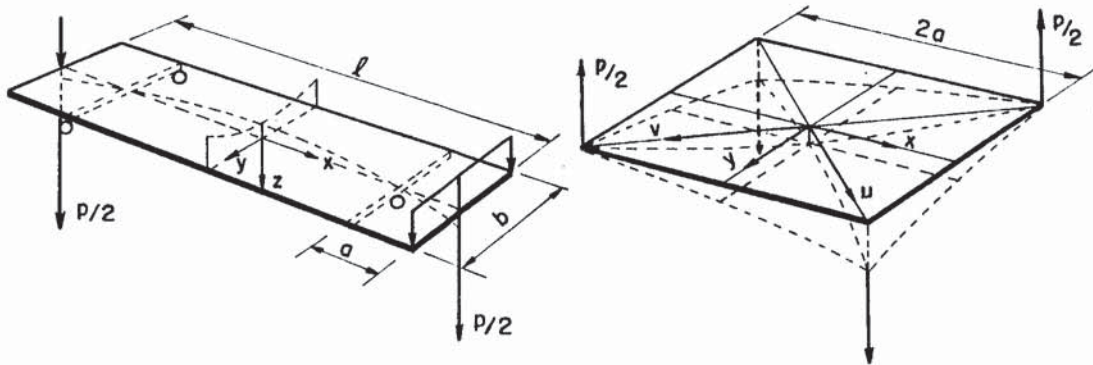


Fig. 57- Placa sujeita à flexão ou à torção.

Fonte Bergsträsser⁽⁴⁴⁾

Antes de se passar a aplicação deste método às placas anisotrópicas, apresenta-se oportuna uma breve revisão teórica sobre o assunto. Informações adicionais podem ser encontradas em Lekhnitskii et alii⁽⁴⁵⁾ e em Hearmon e Adams⁽⁴⁶⁾.

Seja, então, uma placa ortotrópica na qual os eixos coordenados x_1 e x_2 coincidem com os eixos principais de elasticidade. Pode-se, então, escrever:

$$\epsilon_1 = S_{11} \sigma_1 + S_{12} \sigma_2$$

$$\epsilon_2 = S_{12} \sigma_1 + S_{22} \sigma_2$$

$$\gamma_{12} = S_{66} \sigma_{12}$$

(207)

onde os coeficientes S_{ij} valem:

$$S_{11} = 1/E_1; S_{22} = 1/E_2; S_{12} = -\nu_{12}/E_1; S_{66} = 1/G_{12} \quad (208)$$

Se os eixos Ox_1 e Ox_2 na placa forem giradas de um ângulo θ , os novos coeficientes são expressos por Hearmon & Adams⁽⁴⁶⁾:

$$S'_{11} = S_{11} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + S_{22} \sin^4 \theta;$$

$$S'_{22} = S_{11} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + S_{22} \cos^4 \theta;$$

$$S'_{16} = [2S_{22} \sin^2 \theta - 2S_{11} \cos^2 \theta + (2S_{12} + S_{66})(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \cos \theta \sin \theta;$$

$$S'_{26} = [2S_{22} \cos^2 \theta - 2S_{11} \sin^2 \theta - (2S_{12} + S_{66})(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \cos \theta \sin \theta;$$

$$S'_{12} = (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + S_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta);$$

$$S'_{66} = 4(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + S_{66} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2; \quad (209)$$

Dessa forma, para uma direção genérica num material ortotrópico, S'_{16} e S'_{26} diferem de zero e fica evidente, então, que nas relações tensões-deformações eles devem estar presentes.

Considera-se, agora, a placa ortotrópica da figura 58.

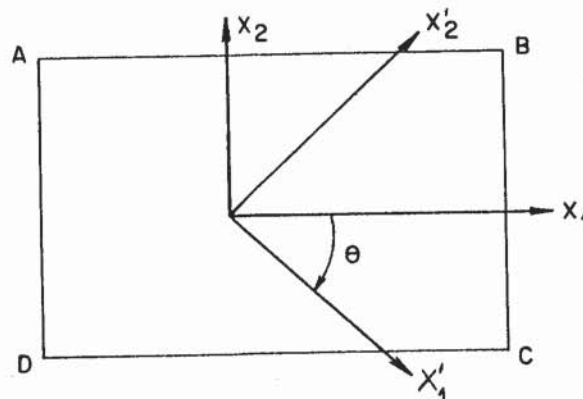


Fig. 58- Eixos x'_1 na placa ortotrópica

Quando o ângulo θ assume 0° ou 90° , a placa é denominada especialmente ortotrópica e para um ângulo θ qualquer ela é chamada de genericamente ortotrópica. Se existem os momentos fletores $M(x_2)$ e $M(x_1)$, por unidade de comprimento, ao longo de AD e BC e o momento torçor $M(x_1 x_2)$. Nas bordas, a expressão do deslocamento w , nestas condições vale:

$$\begin{aligned}
 w = & 1/h^3 [6M(x_1) (S'_{11} x_1^2 + S'_{12} x_2^2 + S'_{16} x_1 x_2) + \\
 & + 6M(x_2) (S'_{12} x_1^2 + S'_{22} x_2^2 + S'_{26} x_1 x_2) + \\
 & + 6M(x_1 x_2) (S'_{16} x_1^2 + S'_{26} x_2^2 + S'_{66} x_1 x_2)] \quad (210)
 \end{aligned}$$

onde h é a espessura da placa e w um deslocamento pequeno, normal ao plano $x_1 x_2$.

Retomando-se, agora, o experimento de Bergsträsser⁽⁴⁴⁾, Hearmon e Adams⁽⁴⁶⁾, em 1951, consideraram uma placa retangular, medindo 31,75cm x 15,24cm, como mostrada na figura 59.

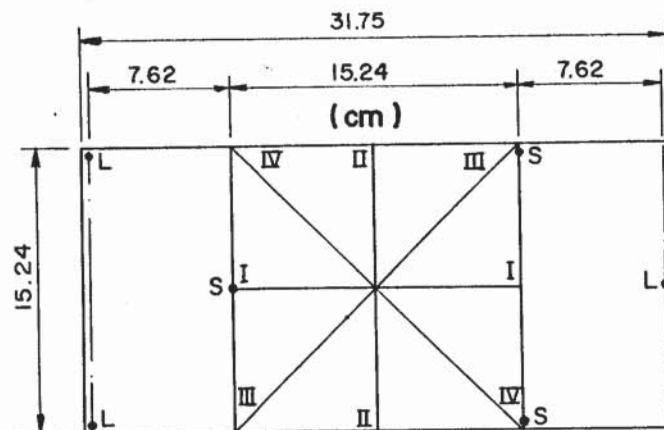


Fig. 59- Dimensões da placa. Fonte: Hearmon e Adams⁽⁴⁶⁾

Os pontos L são pontos de aplicação de carga e os pontos S são os pontos de apoio da placa. Os deslocamentos foram medidos sob as linhas I, II, III e IV, por meio de um relógio comparador de precisão 10^{-4} polegadas.

Aqui, observa-se, que o carregamento foi obtido através de acréscimos de pesos, devido à pequena carga admissível, mas

por outro lado, evidenciando-se alguma imprecisão de leitura.

A medida em que somente $M(x_1)$ solicita a placa, tem-se:

$$w = 3/2 P (S'_{11} x_1^2 + S'_{12} x_2^2 + S'_{16} x_1 x_2) \quad (211)$$

onde P é a carga aplicada no conjunto.

Nessas condições, pode-se obter:

$$\begin{aligned} \text{placa } 0^\circ - \text{ linha I} \quad S_{11} &= wh^3/11,35 P \\ \text{linha II} \quad S_{12} &= wh^3/11,35 P \end{aligned} \quad (212)$$

$$\text{linha III e IV} \quad S_{11} + S_{12} = wh^3/5,67 P$$

$$\begin{aligned} \text{placa } 90^\circ - \text{ linha I} \quad S_{22} &= wh^3/11,35 P \\ \text{linha II} \quad S_{12} &= wh^3/11,35 P \end{aligned} \quad (213)$$

$$\text{linha III e IV} \quad S_{22} + S_{12} = wh^3/5,67 P$$

A vista destes resultados, tornam-se determinados todos os coeficientes de elasticidade, a menos do módulo de elasticidade transversal, cuja determinação se faz através do ensaio de torção, como se segue.

Com efeito, considera-se uma placa quadrada de 15,24cm de lado; nos cantos não consecutivos são aplicadas cargas $P/2$ e nos outros existem dois apoios, como é evidenciado na figura 60.

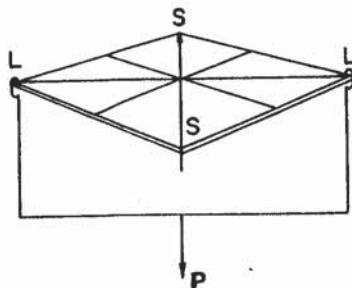


Fig. 60- Torção em placas. Fonte: Hearmon e Adams⁽⁴⁶⁾

Com base no desenvolvimento técnico de Timoshenko⁽⁴⁷⁾ e no desenvolvimento experimental de Bergsträsser⁽⁴⁴⁾, pode-se mostrar que as duas cargas concentradas $P/2$, geram um momento torçor $M(x_1, x_2) = P/4$, distribuído ao longo de cada lado. Face a isto, a expressão do deslocamento w torna-se igual a:

$$w = \frac{3P}{2h^3} (S'_{16} x_1^2 + S'_{26} x_2^2 + S'_{66} x_1 x_2) \quad (215)$$

e ao longo das linhas:

$$\text{I, tem-se: } S'_{16} = wh^3/11,35 P$$

$$\text{II, tem-se: } S'_{26} = wh^3/11,35 P$$

$$\text{III, tem-se: } S'_{16} + S'_{26} + S'_{66} = wh^3/5,67 P$$

$$\text{IV, tem-se: } S'_{16} + S'_{26} - S'_{66} = wh^3/5,67 P$$

Para o caso específico de uma placa especialmente ortotrópica tem-se, ao longo das linhas III e IV, que:

$$S_{66} = \frac{wh^3}{5,67 P} ; \quad S_{66} = - \frac{wh^3}{5,67 P} \quad (216)$$

Determina-se desta maneira, o coeficiente de elasticidade restante, ou seja, G_{12} .

Observa-se, ainda, que o sistema de medida de deslocamento adotado é o mesmo do ensaio de placa à flexão.

Este ensaio de placas à torção tornou-se usual para determinação do módulo de elasticidade transversal. Isto pode ser checado nos trabalhos de: March et alii⁽⁴⁸⁾ em 1942, resultando na adoção pela ASTM como método de ensaio; Doyle et alii⁽⁴⁹⁾, em 1946; Tsai⁽⁵⁰⁾ em 1965; Goodman & Bodig⁽³⁹⁾, em 1970 e Vafai⁽⁵¹⁾ em 1978, entre outros.

Entretanto, mesmo sendo o ensaio de torção em placas um bom caminho para determinação de G_{1j} , há de se notar que existem certas peculiaridades a respeito do deslocamento w e da espessura

h da placa. Em 1967, Foye⁽⁵²⁾ apresentou um trabalho evidenciando as teorias das pequenas deformações e das grandes deformações. Quando o deslocamento médio no canto iguala-se à espessura da placa, a análise linear difere da não linear em cerca de 7,5%, mas por outro lado, quando o deslocamento alcança duas vezes a espessura da placa a diferença assume o valor de 30%.

Na verdade este problema é plenamente superável se se considerar uma relação entre deslocamento e espessura da ordem de 1 para 30. Entretanto, a maior dificuldade deste ensaio de placa consiste na confecção do corpo de prova, haja vista a dificuldade de encontrar uma placa de cerca de 20cm ou mais, de madeira e, ainda, em três planos, LT, LR e RT.

A solução encontrada por esses pesquisadores foi a montagem da placa através da seleção de pequenos pedaços de madeira retirados do tronco da árvore. Para a confecção da placa, uniam-se os pequenos pedaços por colagem. Com isto, a placa atinge dimensões adequadas para execução dos ensaios. A próxima figura evidencia esta montagem Bodig & Goodman⁽⁵³⁾.

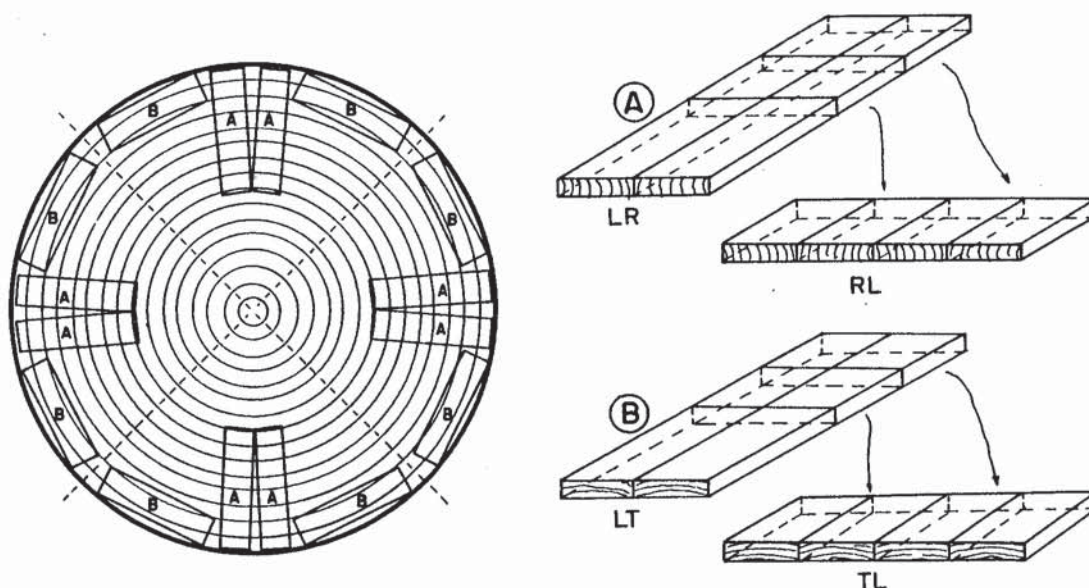


Fig. 61- Confecção de uma placa de madeira.

Fonte: Bodig e Goodman⁽⁵³⁾

À vista destas dificuldades, o ensaio de torção em placa ficou direcionado para a madeira laminada e para madeira compensada.

Neste instante, torna-se oportuno constatar que o ensaio de placa para avaliar os coeficientes de elasticidade envolve particularidades outras que aquela, já não tão simples, de se determinar a constante de elasticidade da madeira.

Um outro ensaio que se apresentou e apresenta-se de muita utilidade na determinação das constantes de elasticidade é o da flexão estática, como prescrito na DIN52-185⁽⁵⁴⁾, na BS5820⁽⁵⁵⁾ e na ASTM D143⁽⁵⁶⁾, normas alemã, de 1978, inglesa de 1979 e americana de 1981, respectivamente, entre outros. Entretanto, como demonstraram Rocco Lahr⁽⁵⁷⁾, em 1983 e Mascia⁽⁵⁸⁾, em 1985, neste ensaio devem ser tomadas certas precauções, como fica evidente ao se analisar o gráfico da variação do módulo de elasticidade com o vão livre da peça a ser ensalada.

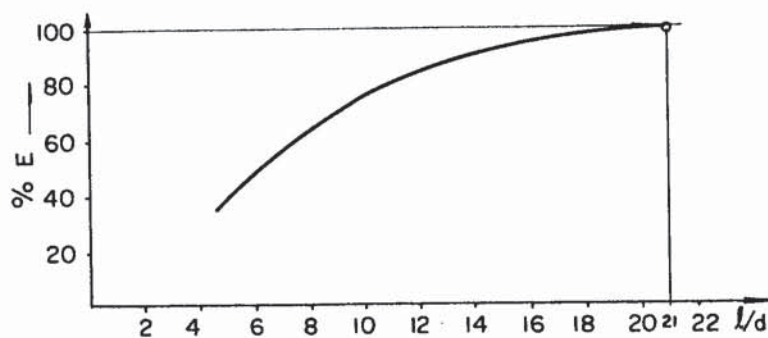


Fig. 62- Variação de E_1 com a relação l/h
Fonte Rocco Lahr⁽⁵⁷⁾

A partir de relações $l/h \geq 20$, a curva tende para o valor do módulo de elasticidade. Em razão disto, deve-se fazer uso da expressão completa do deslocamento, dado por:

$$v = v_N + v_T \quad \text{ou,}$$

$$v = \frac{Fl^3}{48 E_1 I} + \frac{0,3 Fl}{G_{1j} A} \quad (217)$$

onde: F , l , I , A são respectivamente a força aplicada, o vão livre, o momento de inércia da seção e a área da seção, com vistas a evidenciar a participação das deformações tangenciais, por meio do parâmetro G_{1j} e, conseqüentemente de v_T , no deslocamento total da peça de madeira.

Para se determinar os elementos E_1 e G_{1j} realizam-se dois ensaios, variando-se o vão livre l e medindo no centro do vão o deslocamento. Recai-se num sistema de equações com duas incógnitas. Tem-se, assim, os valores de E_1 e G_{1j} . A figura 63 ilustra estes ensaios.

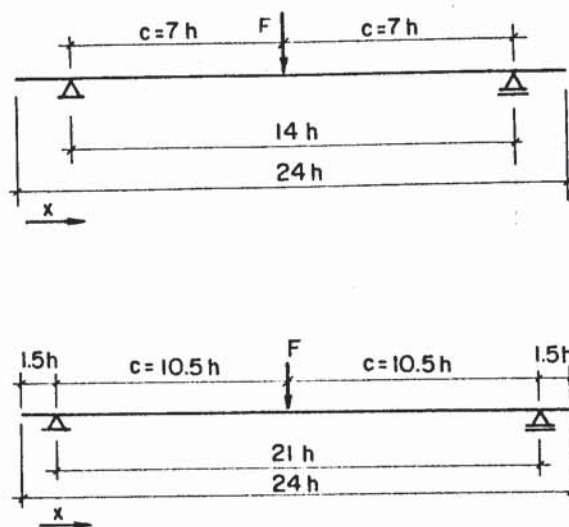


Fig. 63- Esquemas de ensaio de flexão. Fonte: Mascia⁽⁵⁸⁾

Além desses cuidados a serem observados, o corpo de prova ao ser retirado do tronco ou de pranchas deve apresentar as fibras paralelas ao eixo da peça e, na seção transversal, estas devem aparecer paralelas ou perpendiculares às bordas da seção.

Há de se notar que só é possível no ensaio de flexão se obter os constantes E_L , G_{LT} e G_{LR} , sendo que Lahr e Mascia⁽⁵⁹⁾, em 1985, atentaram para a equivalência entre G_{LT} e G_{LR} . Dessa maneira, num programa de determinação de constantes elásticas, deve-se reportar a outros ensaios, sendo mais usuais os ensaios de compressão ou de tração simples, para a completa determinação dos S_{1j} .

Entre os ensaios de compressão e de tração simples, o primeiro apresenta a vantagem de ter confecção simples, sendo

genericamente um prisma de seção transversal constante, enquanto no segundo existem problemas relativos à colocação do corpo de prova na máquina de ensaio e à própria geometria do corpo de prova, tendo-se em vista possíveis excentricidades de cargas e efeitos de flexo-tração relacionados com a rigidez da seção transversal da peça.

Além disso, num corpo de prova de compressão há possibilidade de se obter os coeficientes de Poisson em dois planos, por exemplo, ν_{LT} e ν_{LR} , ao passo que num teste de tração, realizado com o corpo de prova mencionado, só é possível se obter ν_{LT} ou ν_{LR} . O trabalho de Sliker⁽⁶⁰⁾, em 1972, atenta para tal fato.

A próxima figura mostra um corpo de prova de tração da norma ASTM⁽⁵⁶⁾ e outro citado por Karlsten⁽⁶¹⁾ e adotado no Laboratório de Madeiras e de Estruturas de Madeira, EESC-USP⁽⁶²⁾.

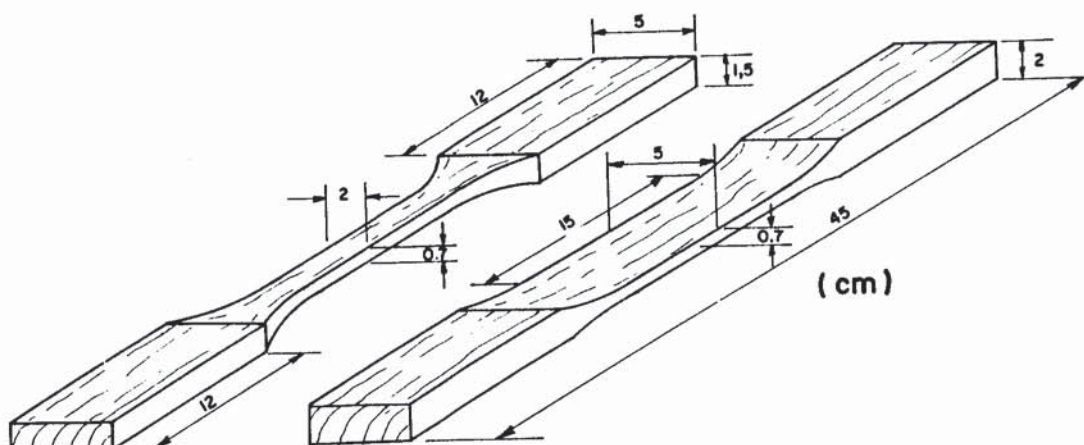


Fig. 64- Corpos de prova de tração. Fonte Hellmeister⁽⁶²⁾

Outros pesquisadores, como Swab e Polaczek⁽⁶³⁾, em 1977, apresentaram para determinação do módulo de elasticidade (*Chlorophora excelsa*), com dimensões nominais de 2cm x 2cm x 50cm, conforme esquema da figura 65.

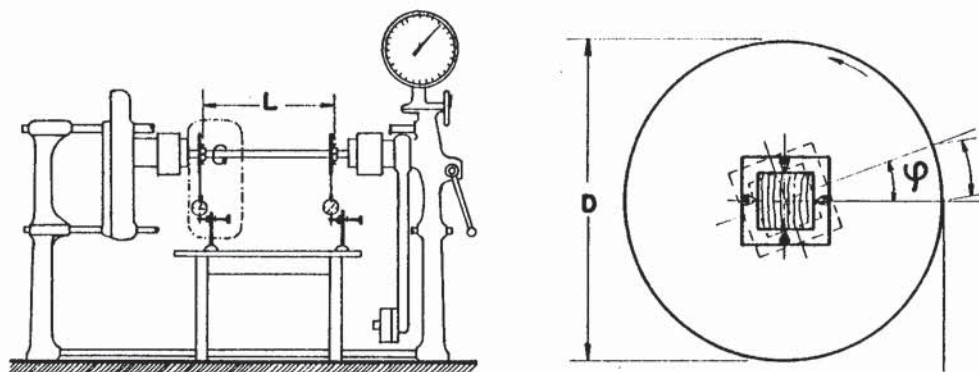


Fig. 65- Ensaio de torção. Fonte: Schwab e Polaczek⁽⁶³⁾

Os valores encontrados para os coeficientes de elasticidade G_{LR} , G_{LT} e G_{RT} foram 840 MPa, 690 MPa e 240 MPa.

Cabe, aqui, relembrar as singularidades relativas ao valor exato de G_{ij} , advindo do ensaio de torção, de sorte que o valor de G_{ij} não é puro, mas um valor híbrido, resultado da combinação dos módulos de elasticidade transversal envolvidos no questionamento do problema. Outros particulares, como a distribuição de tensões tangenciais vêm à tona quando uma peça é solicitada à torção. Por exemplo, numa peça de seção circular, tem-se uma distribuição linear de tensões tangenciais, ao passo que, numa seção quadrada essa distribuição torna-se mais complexa. Conforme salienta Feodosiev⁽⁶⁴⁾ seria necessário uma peça de seção delgada de parede fina a fim de se obter uma distribuição homogênea de tensões tangenciais. No caso específico da madeira, seria impraticável confeccionar e ensaiar peças nestas condições, pelo menos, nesta presente situação.

Outro fato interessante de se mencionar, a propósito, esá

está relacionado com as interações de flexão com torção. Hearmon⁽⁶⁵⁾, em 1942, ao considerar um estado plano de tensões, quando somente as tensões σ_{11} e τ_{12} agem, chega a:

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= S'_{11} \sigma_{11} + S'_{16} \tau_{12} \\ \gamma_{12} &= S'_{16} \sigma_{11} + S'_{66} \tau_{12}\end{aligned}\quad (218)$$

e promove as seguintes definições:

- se $\epsilon_{11} = 0$, daí: $\frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = G_P = 1/(S'_{66} - \frac{S'^2_{16}}{S'_{11}})$,

G_P é definido como módulo de elasticidade transversal "puro";

- se $\gamma_{12} = 0$, daí: $\frac{\sigma_{11}}{\epsilon_{11}} = E_P = 1/(S'_{11} - \frac{S'^2_{16}}{S'_{66}})$,

onde E_P é o módulo de Young "puro";

- se $\sigma_{11} = 0$, daí: $\frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = G_F = \frac{1}{S'_{66}}$,

onde G_F é o módulo "livre",

- se $\tau_{12} = 0$, daí: $\frac{\sigma_{11}}{\epsilon_{11}} = E_F = \frac{1}{S'_{11}}$,

onde E_F é o módulo de Young "livre".

Agrupando-se estas expressões, tem-se:

$$\frac{G_F}{G_P} = \frac{E_F}{E_P} = 1 - \frac{S'^2_{16}}{S'_{11} S'_{66}} \quad (219)$$

Naturalmente, quando S'_{16} existe, os módulos "puros" e "livres" são diferentes, como se observa na figura 66.

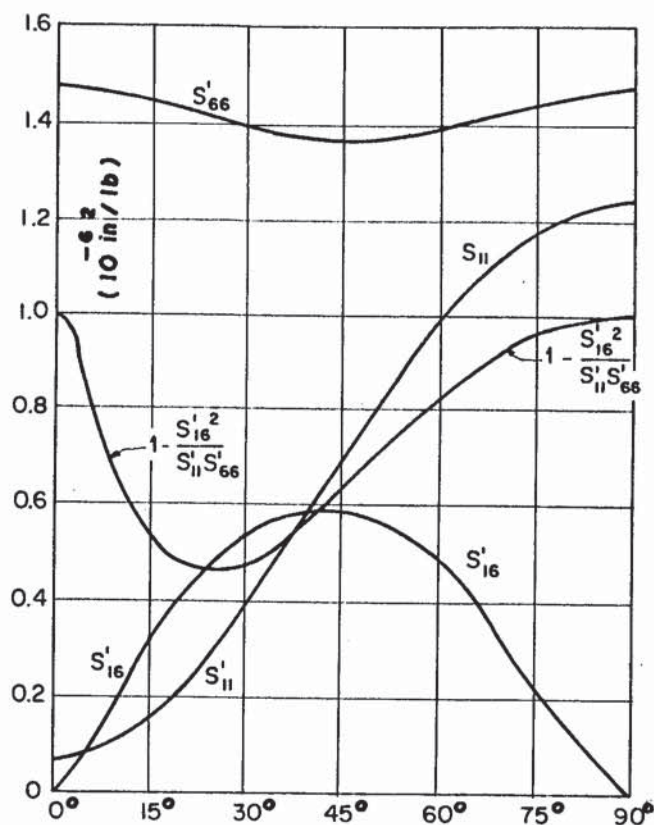


Fig. 66- Influência dos módulos de elasticidade "puro" e "livre". Fonte: Hearmon⁽⁶⁵⁾

Conclui-se, então, que para ângulos diferentes de 0° ou 90° , $E_p > E_f$ e $G_p > G_f$.

A constante denominada "pura" (E_p) corresponde à aplicação simultânea de tensões normais e tangenciais de tal forma que a deformação é puramente normal. A constante "livre" (E_L) resulta da aplicação de somente tensão normal e a deformação resultante é uma combinação de deformações tangencial e normal. Estas observações se estendem a G_p e G_f , intercambiando-se deformação normal por deformação tangencial e tensão normal por tangencial.

Nestes termos, as constantes E_f e G_f estão, respectivamente, atreladas à flexão simples e à torção simples. Por outro lado, as constantes E_p e G_p correspondem à aplicação de flexão acoplada com torção. Isto pode ocorrer se, num ensaio de

flexão, o sistema de carregamento não estiver perfeitamente localizado.

As relações entre E_F/E_P e G_F/G_P podem chegar a 0,58, conforme relata Hearmon⁽⁶⁵⁾.

Em 1981, Ebrahimi e Sliker⁽⁶⁶⁾ utilizando-se do ensaio de tração simples determinaram os valores G_{LT} e G_{LR} para algumas espécies americanas. Este estudo foi baseado na transformação tensorial de tensão e de deformação e na aplicação da lei constitutiva da madeira. As deformações foram medidas através de extensômetros elétricos dispostos em rosetas retangulares, conforme a figura 67.

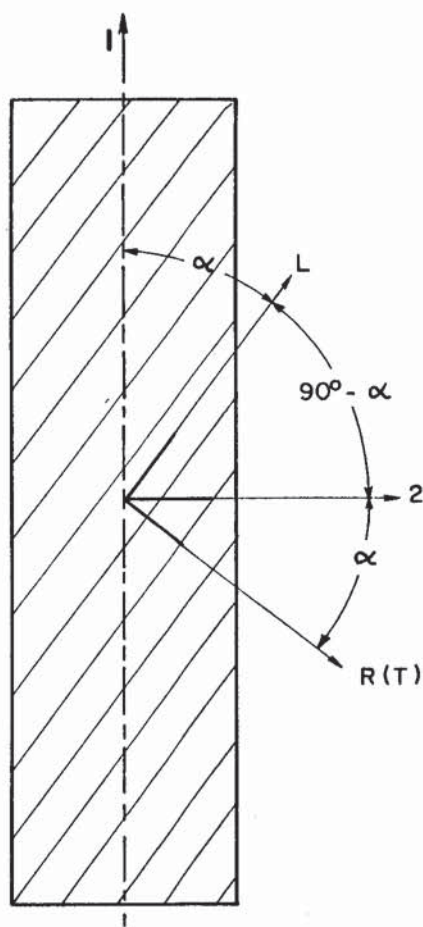


Fig. 67- Ensaio de tração. Fonte: Ebrahimi e Sliker⁽⁶⁶⁾

A crítica que se permite fazer a este trabalho surge quando estes pesquisadores não fazem qualquer comparação através de possíveis determinações dos G_{1j} nos planos LT e LR. Em suma, o

trabalho se restringe à determinação de G_{ij} por ensaio de tração simples.

Ao se concluir este item, apresenta-se duas tabelas extraídas dos resultados obtidos por Goodman e Bodig⁽³⁹⁾ a respeito das constantes de elasticidade da madeira.

TABELA 5 - Constantes de Elasticidade da Madeira (10^{-4} MPa)

Espécie	E_L	E_R	E_T
Douglas fir	2,70	0,137	0,135
Aspen	1,14	0,107	0,038
Oak	2,22	0,171	0,089

Espécie	G_{TR}	G_{LT}	G_{LR}
Douglas fir	0,016	0,116	0,108
Aspen	0,012	0,065	0,087
Oak	0,046	0,099	0,119

Espécie	ν_{LR}	ν_{LT}	ν_{TR}
Douglas fir	0,174	0,469	0,425
Aspen	0,458	0,202	0,452
Oak	0,390	0,567	0,184

Fonte: Goodman e Bodig⁽³⁹⁾

As conclusões a cerca dos dados da Tabela 5 são semelhantes às da Tabela 3. A outra tabela é transcrita a seguir.

TABELA 6 - Simetria de S_{ij} ($\times 10^{-5} \text{MPa}^{-1}$)

Espécie	$-\nu_{LR}/E_L$	$-\nu_{RL}/E_R$	$-\nu_{LT}/E_L$	$-\nu_{TL}/E_T$	$-\nu_{RT}/E_R$	$-\nu_{TR}/E_T$
Douglas fir	0,171	0,168	0,226	0,210	4,41	4,22
Aspen	0,402	0,495	0,177	0,371	11,24	11,80
Oak	0,149	0,136	0,222	0,268	3,35	3,13

Fonte: Goodman e Bodig⁽³⁹⁾

À vista destes resultados, não se rejeita, a princípio, a hipótese de simetria de S_{ij} .

3.10- Os Problemas Planos de Tensão e de Deformação na Madeira. Algumas Aplicações

O questionamento de problemas planos de tensão e de deformação para a madeira veio à tona, em linhas gerais, em 1939, com os trabalhos de Green e Taylor apud Hearmon⁽¹⁾.

Partindo-se da lei constitutiva do material anisotrópico:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (220)$$

da definição da função de Airy $\phi(x_1, x_2)$:

$$\sigma_{11} = \phi_{,11}; \quad \sigma_{22} = \phi_{,22}; \quad \sigma_{12} = \phi_{,12} \quad (221)$$

e da equação de compatibilidade:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

ou,

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12} \quad (222)$$

pode-se obter a equação que governa os problemas planos de distribuição de tensão, sem a presença de forças de volume:

$$\nabla^4 \phi \equiv 0 \quad (223)$$

ou em termos dos S_{ijkl} :

$$S_{2222} \phi_{,1111} - 4 S_{2212} \phi_{,1122} + 2(S_{1122} + 2 S_{1212}) \phi_{,1122} - \\ - 4 S_{1112} \phi_{,1222} + S_{1111} \phi_{,2222} = 0 \quad (224)$$

Esta equação, a menos da notação indicial, é a mesma proposta por Green e Taylor apud Hearmon⁽¹⁾.

Se os eixos de coordenadas x_1 e x_2 coincidem com os eixos de simetria elástica da madeira, por exemplo os eixos L e T, o problema se reduz à solução da equação:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \phi = 0$$

ou,

$$\phi_{,1111} + \alpha_2 \phi_{,1122} + \alpha_1 \phi_{,2211} + \alpha_1 \alpha_2 \phi_{,2222} = 0 \quad (225)$$

onde $\alpha_1 \alpha_2 = S_{1111}/S_{2222}$; $\alpha_1 + \alpha_2 = (S_{1212} + 2 S_{1122})/S_{2222}$.

Green e Taylor apud Hearmon⁽¹⁾, utilizaram esta expressão na análise de chapas solicitadas por forças concentradas, nos problemas de distribuição de tensões em chapas com furos. Cabe observar que este caso é bastante corrente nas ligações das peças estruturais de madeira.

De uma forma geral, a solução de problemas planos envolve equações que dependem das constantes de elasticidade do material. Nas estruturas em cascas, Tottenham⁽⁶⁷⁾ em 1959 e Goodman^{(68), (69)} em 1966 e 1967 apontam a necessidade de uma solução a nível das constantes de elasticidade da madeira, ao invés da adoção da equação diferencial para materiais isotrópicos. Na equação

diferencial das placas ortotrópicas:

$$D_{11} \frac{\partial^4 x_3}{\partial x_1^4} + 2 D_3 \frac{\partial^4 x_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 x_3}{\partial x_2^4} = q$$

ou,

$$D_{11} x_{3,1111} + 2D_3 x_{3,1122} + D_{22} x_{3,2222} = q \quad (226)$$

onde os coeficientes de rigidez da placa valem:

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12 \mu}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12 \mu}; \quad (227)$$

$$D_{12} = \frac{\gamma_{21} E_1 h^3}{12 \mu}, \quad D_{66} = \frac{G_{12} h^3}{12 \mu}$$

$$D_{13} = D_{12} + 2 D_{66}, \quad \mu = 1 - \nu_{21} \nu_{12}$$

sendo E_1 o módulo de elasticidade, ν_{ij} o coeficiente de Poisson, G_{12} o módulo de elasticidade transversal, h a espessura da placa e q a carga aplicada, Gunnerson et alii⁽⁷⁰⁾, em 1973, enveredam pelo método das diferenças finitas para a determinação dos coeficientes de elasticidade.

Foudjet et alii⁽⁷¹⁾, em 1982, utilizaram o método dos elementos finitos para a completa determinação dos parâmetros de elasticidade através do equacionamento das placas ortotrópicas.

Bakht e Jaeger⁽⁷²⁾, em 1985 apresentaram estudos de pontes utilizando do equacionamento de placas e introduzindo nos coeficientes de rigidez, as constantes de elasticidade da madeira E_L , G_{LT} . Foi evidenciado o interesse, por estes pesquisadores pela aplicação destas constantes para uma formulação mais adequada do problema de placas ortotrópicas para pontes de madeira.

Silos são exemplos adequados de estruturas de madeira na concepção de placas e de chapas, particularmente as tremonhas. Vaz⁽⁷³⁾, em 1987, realizou interessante estudo com vistas ao equacionamento destas estruturas ao nível ortotrópico, estudando a

avaliação das constantes de elasticidade através de ensaios de tração e torção em placa e, posteriormente, a aplicação destas constantes na equação geral do problema.

Ao concluir este item, parece oportuno sugerir que as pesquisas e os pesquisadores em madeira fundamentem no estudo e na aplicação dos conceitos de anisotropia, de acordo com as propostas de Jayne e Hunt⁽⁷⁴⁾.

4- CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DOS MATERIAIS E DOS MÉTODOS UTILIZADOS NA PARTE EXPERIMENTAL

4.1- Introdução

Com vistas à determinação das constantes de elasticidade da madeira S_{ij} , quer nas direções principais de elasticidade quer nas direções diferentes destas, e das relações entre estas constantes, foi programada a realização de ensaios de compressão simples em peças prismáticas de madeira.

Fez-se uso, também, do ensaio de flexão estática para avaliação das constantes E_i e G_{ij} nas direções L,T e nos planos LT e LR, respectivamente. Posteriormente foram feitas comparações entre estes valores e aqueles resultantes dos ensaios de compressão simples.

Cabe neste momento lembrar que, de um modo geral, os métodos de ensaio balizam-se nos ensaios de flexão estática para a determinação dos coeficientes E_i e G_{ij} , conforme Mascia⁽⁷⁵⁾. Desse modo, os resultados advindos do ensaio de flexão mostraram-se úteis como subsídios na análise de diversos resultados de compressão simples.

Os materiais e a metodologia experimental empregados para a realização deste trabalho estão descritos a seguir.

4.2- Material para Experimentação

Neste trabalho foram utilizados corpos de prova retirados de troncos de árvores, das seguintes espécies de madeira:

Guapuruvú (Schizolobium parahyba)
Angico Vermelho (Parapiptadenia rígida)
Pinus Caribaea var. Bahamensis

Estes troncos tinham, em média, diâmetro de 70cm e

comprimento de 120cm para as duas primeiras espécies e diâmetro ao redor de 50cm por 110cm de comprimento para a espécie terceira e foram desdobrados nas oficinas do LaMEM.

Uma outra espécie de madeira, Ipê (*Tabebuia* sp) desta feita já em vigas de dimensões nominais 6cm x 16cm x 400cm, deu origem aos corpos de prova para ensaio de compressão e flexão.

4.2.1- Preparação dos Corpos de Prova

Os corpos de prova compressão simples foram preparados nas seguintes condições:

- retiraram-se dos troncos amostras com 35cm de comprimento, como é mostrado na figura 68.

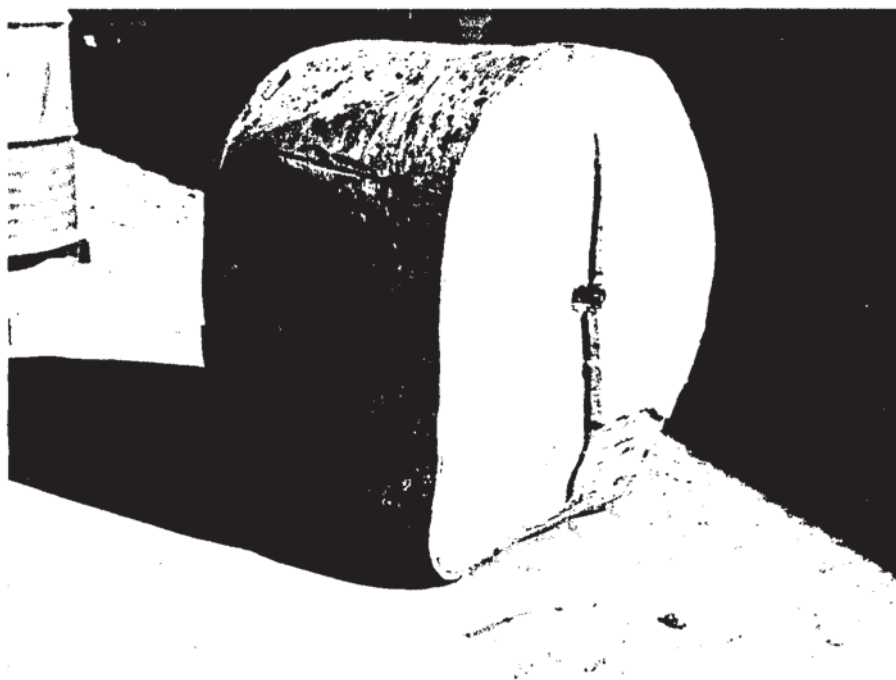


Fig. 68- Foto de uma amostra de madeira da espécie Guapuruvú.

- de cada amostra, com o emprego de motosserra, chegou-se em partes de tamanho menor, cerca de 20cm x 20cm x 35cm, como se vê nas figuras.



Fig. 69 e 70- Fotos das partes menores da amostra de madeira.

- das partes de 20cm x 20cm x 35cm, utilizando-se serras de fita, serras circulares e finalmente plaina, conseguiu-se confeccionar os corpos de prova com as dimensões nominais ao redor de 40cm x 4cm x 12cm, como é visto nas próximas figuras. Na realidade, são obtidos corpos de prova nas direções principais de elasticidade e em outras direções que formam um determinado ângulo com as direções principais. Neste caso, as figuras evidenciam os corpos de prova nas direções principais (L, R, T) e nos planos RT, LR ou LT.

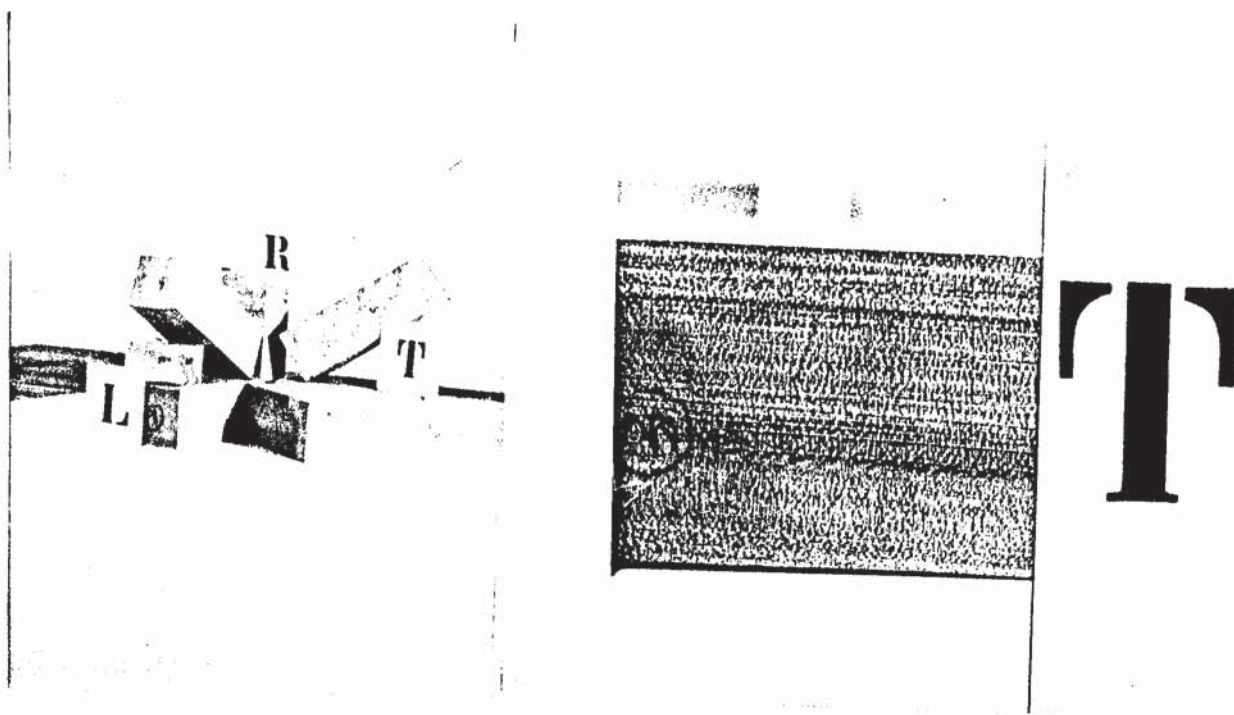


Fig. 71 e 72- Fotos de corpos de prova no espaço LTR e na direção T.



Fig. 73 e 74- Fotos de corpos de prova segundo os planos LT e RT.

A preparação dos corpos de prova para estudo da transformação do tensor S'_{ij} será descrita no item referente a este assunto.

Os corpos de prova retirados conforme descrito apresentavam-se com umidade muito acima do ponto de saturação das fibras. Por outro lado, os corpos de prova estavam programados para serem ensaiados com cerca de 12 a 14% de umidade, haja vista que extensômetros elétricos deveriam ser colados em suas faces laterais. Desta forma, teriam de permanecer no interior de climatizadora para atingir a umidade desejada, bem como para se evitar prováveis rachaduras. Conseguiu-se isto em três semanas, em média, com os corpos de prova com dimensões ligeiramente superiores às do ensaio em si.

Estando, desse modo, os corpos de prova nas condições de ensaio, partiu-se para a fase de acabamento com lixamento e polimento das faces. Nessa condição, os corpos de prova estavam prontos para a colagem dos extensômetros e, a seguir, para serem ensaiados.

Por outro lado, os corpos de prova para ensaio de flexão foram retirados de partes do tronco de comprimento cerca de 110cm, pois as dimensões destes corpos de prova deveriam alcançar 4cm x 4cm x 90cm, (ajustando-se a relação $l/h = 21$). Naturalmente, demoraram mais tempo para atingir as condições de ensaio, permanecendo, em média, um mês na climatizadora. Os cuidados que foram dispensados aos corpos de prova de compressão estendem-se, também, aos de flexão. Fotos ilustrativas destes serão oportunamente apresentadas.

Os corpos de prova de Ipê, originários das vigas de 6cm x 16cm, apresentaram-se de confecção mais simples, nem por isso deixando de requerer os cuidados correspondentes.

4.2.2- Aspectos Gerais e Anatomicos da Madeira dos Corpos de Prova

Realizada a etapa de preparação dos corpos de prova, passou-se para a colocação dos instrumentos para a medição de

deformação ou de deslocamento.

Os corpos de prova de compressão simples, assim preparados, possuíam dimensões relativamente pequenas (4cm x 4cm x 12cm). Havendo a necessidade de se medir deformações em várias direções, relativas a um determinado ponto, tornou-se sugestiva a opção do uso de extensômetros elétricos de resistência (strain gages), como será indicado neste trabalho.

Neste contexto, sendo os extensômetros instrumentos de tamanho muito pequeno, no máximo com 1cm de comprimento (outros aspectos serão descritos a seguir), os quais trabalham colados às superfícies onde se deseja fazer medições, há de se verificar com muito zelo sua instalação e, naturalmente, o lugar onde estão afixados.

Por isto e em se tratando de madeira como material dos corpos de prova, tornou-se necessário avaliar os aspectos gerais e os anatómicos da superfície de contato com os extensômetros. Aqui, será ilustrada a espécie de madeira Guapuruvú.

Desse modo, fotografaram-se as regiões de alguns corpos de prova onde os extensômetros foram instalados. Por se tratar de partes de madeira de um mesmo tronco, a extrapolação dos diversos aspectos inerentes ao material apresentou-se satisfatória.

As duas primeiras fotografias mostram as faces tangencial e radial de um corpo de prova preparado com a maior dimensão na direção do eixo longitudinal (L). A ampliação empregada na revelação destas fotografias foi 2 vezes.

É possível observar nestas figuras como as fibras e os raios se distribuem na textura da madeira.

Analogamente, foram fotografadas as faces tangencial e longitudinal do corpo de prova preparado com a maior dimensão na direção radial (R), conforme ilustrado nas figuras 77 e 78.

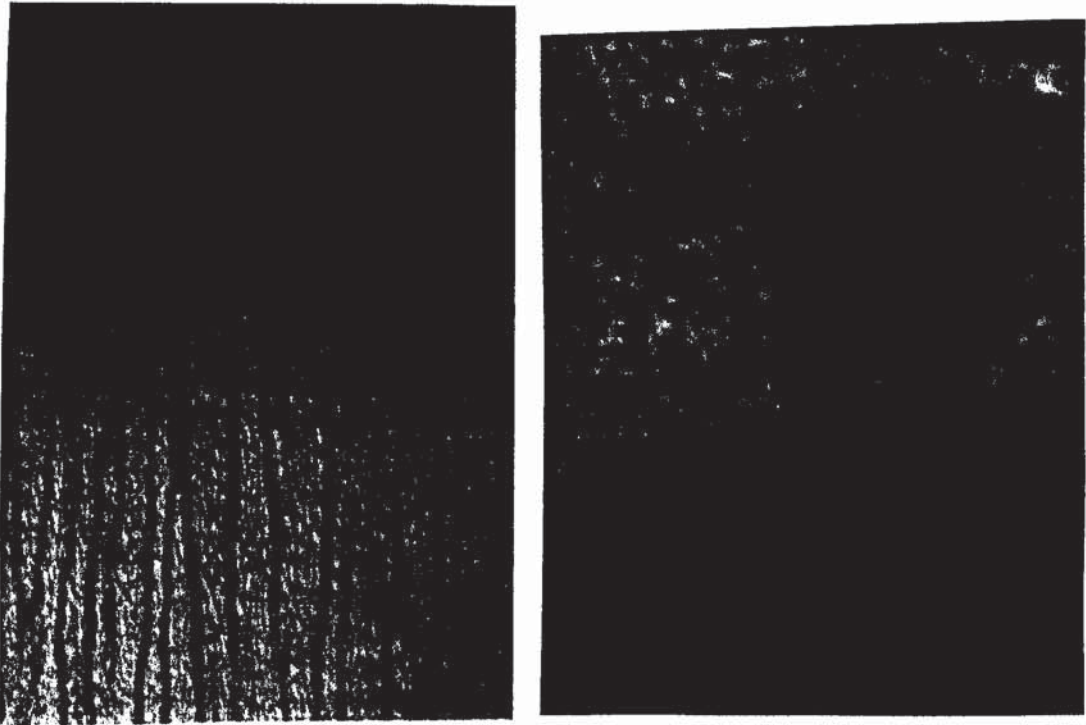


Fig. 75 e 76- Fotos das faces T e R de um corpo de prova na direção L (ampliação 2 vezes)

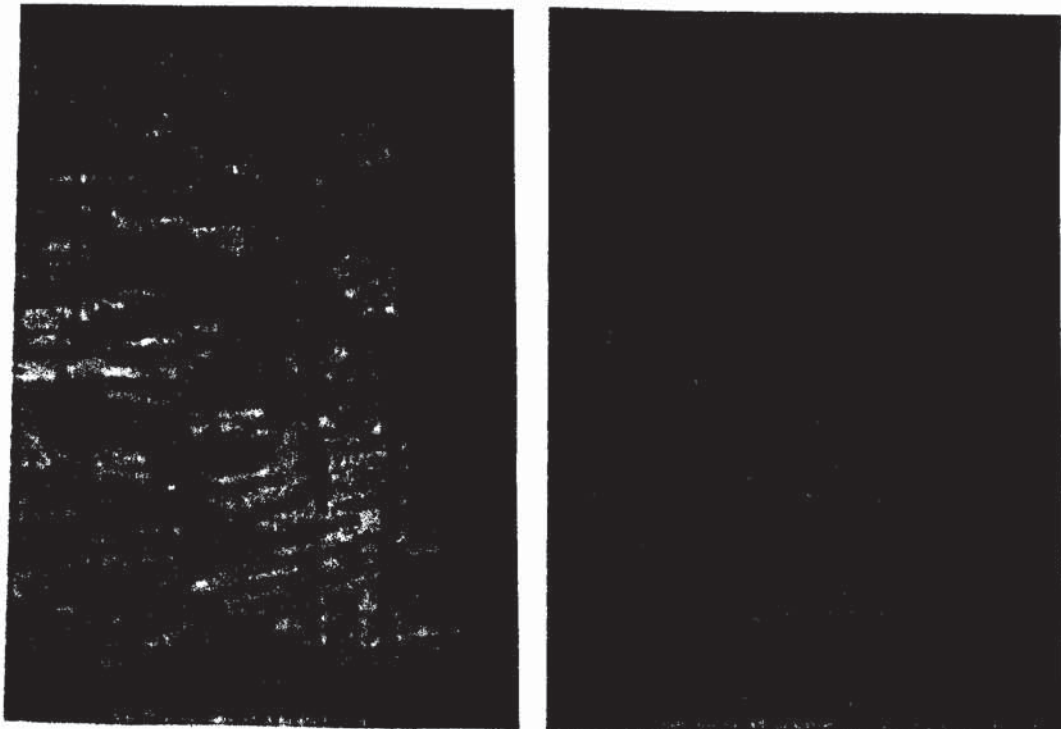


Fig. 77 e 78- Fotos das faces T e L de um corpo de prova na direção R (ampliação 2 vezes)

As figuras 79 e 80 enfatizam a disposição das fibras e dos raios nas faces longitudinal e radial de um corpo de prova preparado com a maior dimensão na direção do eixo tangencial (T).



Fig. 79 e 80- Fotos das faces L e R de um corpo de prova na direção T (ampliação 2 vezes)

Nestas figuras pode-se observar o parênquima vasocêntrico que se dispõe ao redor dos vasos e o parênquima marginal demarcando as camadas de crescimento.

A influência destes elementos anatômicos nos resultados dos ensaios, através da introdução de possíveis ruídos nas medidas de deformações, não só induz a análise dos valores das constantes de elasticidade em termos macroscópicos, mas também de um modo geral, testemunha sua interferência nas referidas constantes.

As três próximas fotografias atentam para cortes transversal (plano RT), tangencial (plano LT) e radial (plano LR), com ampliação de 50 vezes.

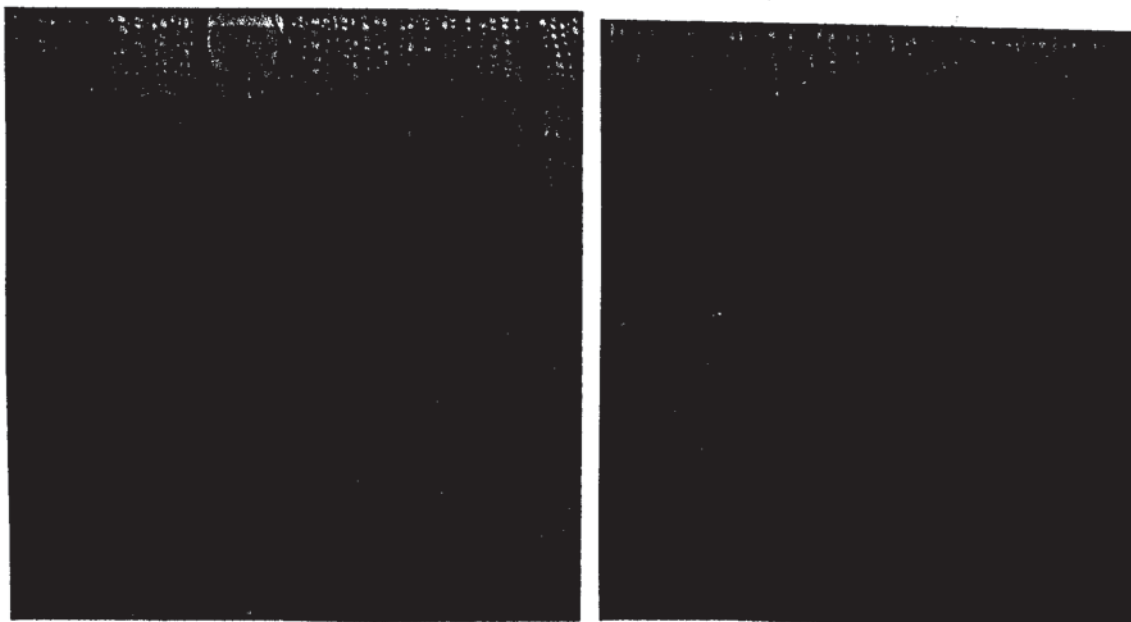


Fig 81 e 82- Fotos dos cortes transversal (plano RT) e tangencial (plano LT), ampliação 50 vezes



Fig. 83- Foto do corte radial do plano LR (ampliação 50 vezes)

Nestas figuras ficam plenamente evidenciados os elementos anatômicos da madeira e, naturalmente, a importância de serem considerados estudos de características físicas ou elásticas deste material.

No que refere aos corpos de prova de ensaio de flexão, cabe anotar que foram utilizados, para medição dos deslocamentos, relógios comparadores e transformadores diferenciais (DCDT). Estes instrumentos de medição não detêm um vínculo à madeira como os extensômetros elétricos, reduzindo significativamente os efeitos da distribuição dos elementos anatômicos da madeira nos resultados experimentais.

4.3- Equipamentos e Instrumentação

4.3.1- Ensaio de Compressão Simples

Nos ensaios de compressão simples, fez-se uso da máquina universal de ensaio AMSLER, com capacidade de 250 KN, para aplicação de carga ao corpo de prova. A figura 84 ilustra tal situação.

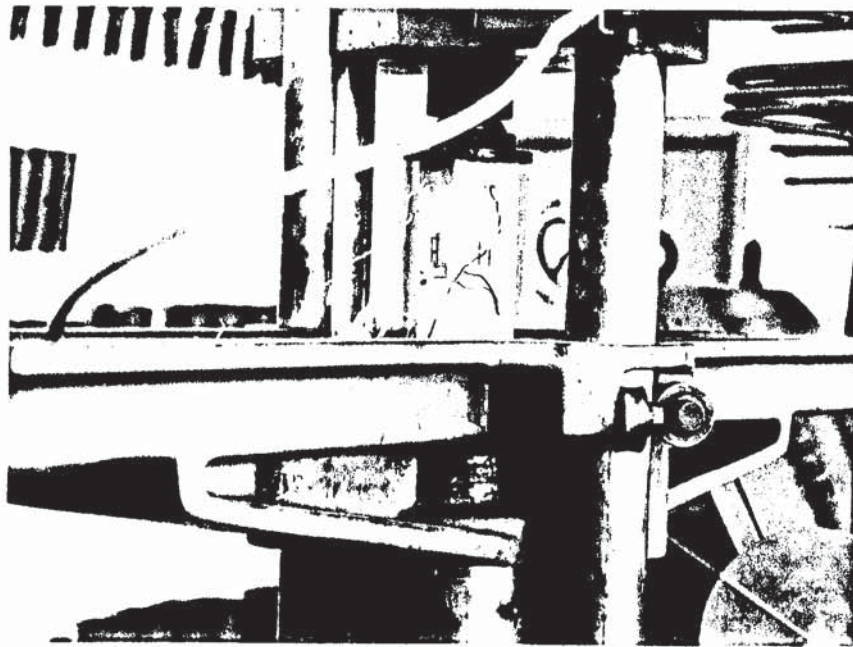


Fig. 84- Foto do ensaio de compressão simples.

Para a medida das deformações foram utilizados os extensômetros elétricos de resistência (Strain gages) da marca KYOWA, tipos: KL-10-A4 com 10mm de comprimento, fator gage 1,89, resistência elétrica 120Ω ; KFC-5-C1-11, com 5mm de comprimento, fator gage 2,10, resistência elétrica 120Ω . A figura 85 mostra um corpo de prova de compressão, instrumentado com quatro extensômetros elétricos.

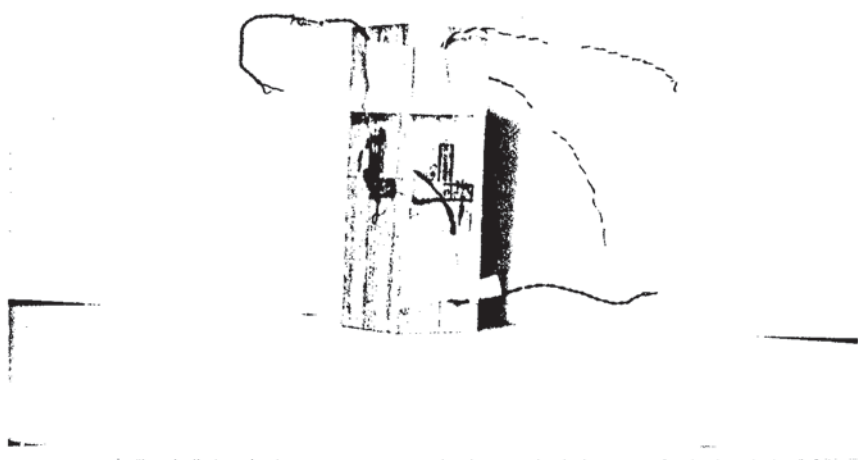


Fig. 85- Foto de um corpo de prova instrumentado.

O limite de deformação para estes extensômetros está na ordem de $10.000 \mu \epsilon$.

4.3.2- Ensaio de Flexão Simples

Nos ensaios de flexão simples as cargas foram aplicadas por meio de um cilindro hidráulico VICKERS, com capacidade de 50 KN, anel dinamométrico E.L.E. de 20 KN, constante $K = 0,0178$ KN/div.

Para a medida dos deslocamentos foram empregados transformadores diferenciais (DCDT), da marca Hewlett Packard (HP), modelo HP-24 DCDT 500, com precisão de milímetro e curso de

25,4mm. Empregaram-se, também, relógios comparadores MITUTOYO, precisão 0,01mm e curso de 10mm.

A figura 86 indica estes equipamentos no ensaio de flexão simples.

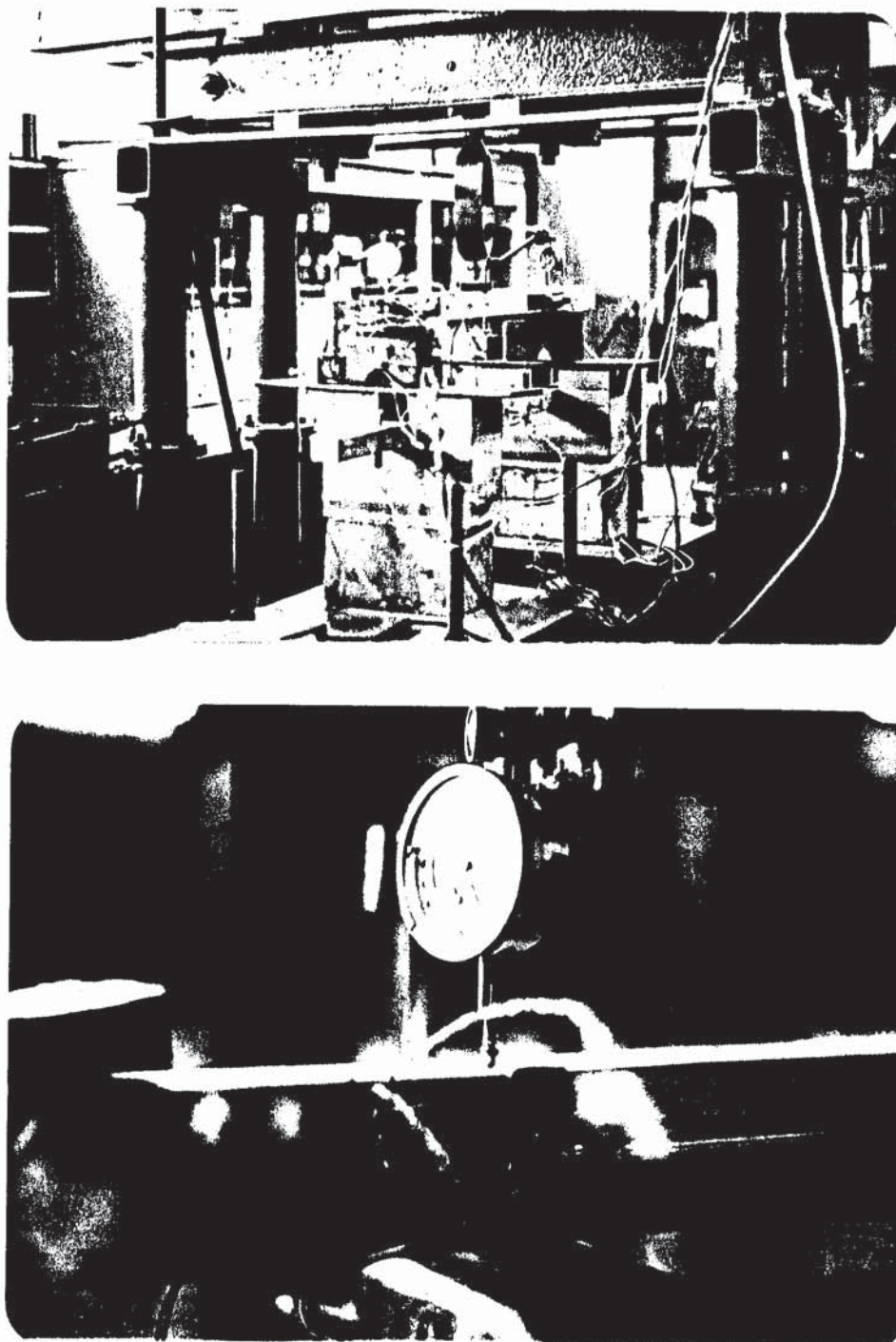


Fig. 86- Fotos do ensaio da flexão e do detalhe de apoio.

4.3.3. Sistema de Aquisição de Dados (SAD)

O SAD disponível no LaMEM é constituído de um voltímetro digital (DVM 3497A) de 5 e 1/2 dígitos, fonte de corrente e placas de rele para conexão de medidores de deformação tipo extensômetros elétricos de resistência, medidores de deslocamentos tipo transformadores diferenciais. As placas de rele utilizadas foram as HP 44421A. Cada placa pode medir até 10 canais ou pontos de leitura, sendo fornecidas até 50 leituras de deformação por segundo.

O SAD associado ao microcomputador HP-9825T com 64K de memória, à impressora HP-2631G e ao plotter HP-7470A perfazem o sistema de aquisição e processamento de dados de um determinado ensaio.

No esquema está evidenciado o fluxo de dados de um ensaio. Outras informações estão em CALIL⁽⁷⁶⁾.

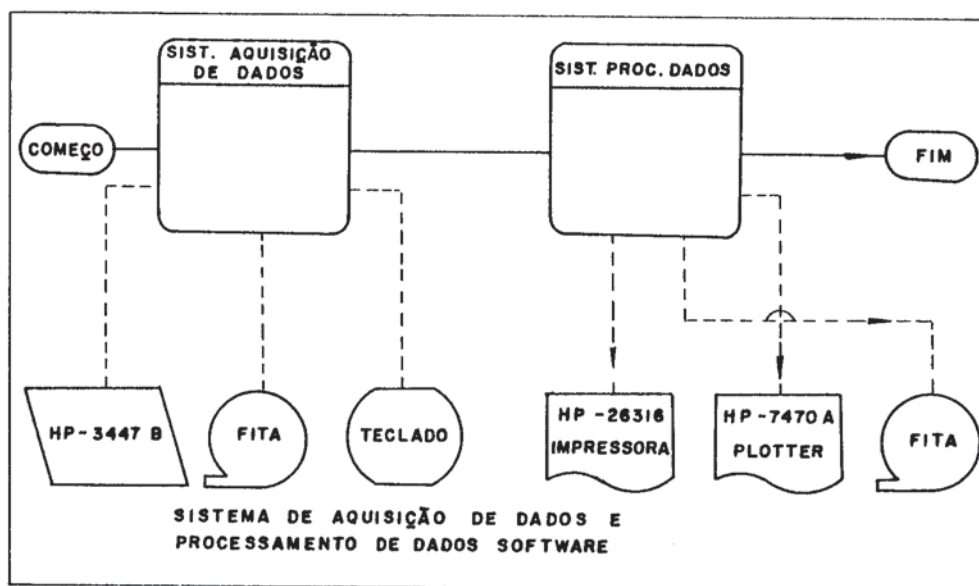


Fig. 87- Sistema de aquisição de dados. Fonte: Calil⁽⁷⁶⁾

Dessa forma, ao se utilizar este SAD os ensaios ficaram automatizados, permitindo a precisão adequada nas leituras de deformação ou deslocamento.

4.4- Algumas Considerações Acerca do Ensaio de Compressão Simples

Para se usufruir do ensaio de compressão deve-se resguardar de alguns procedimentos necessários.

Cuidados especiais precisam ser tomados na preparação dos corpos de prova a serem ensaiados com o intuito de se garantir o paralelismo das faces e a formação de ângulos retos ao eixo de aplicação de carga.

A fim de se obter um carregamento uniforme, principalmente nas extremidades do corpo de prova, utiliza-se na prensa um prato com suporte esférico. Isto pode ser visualizado na figura 88.

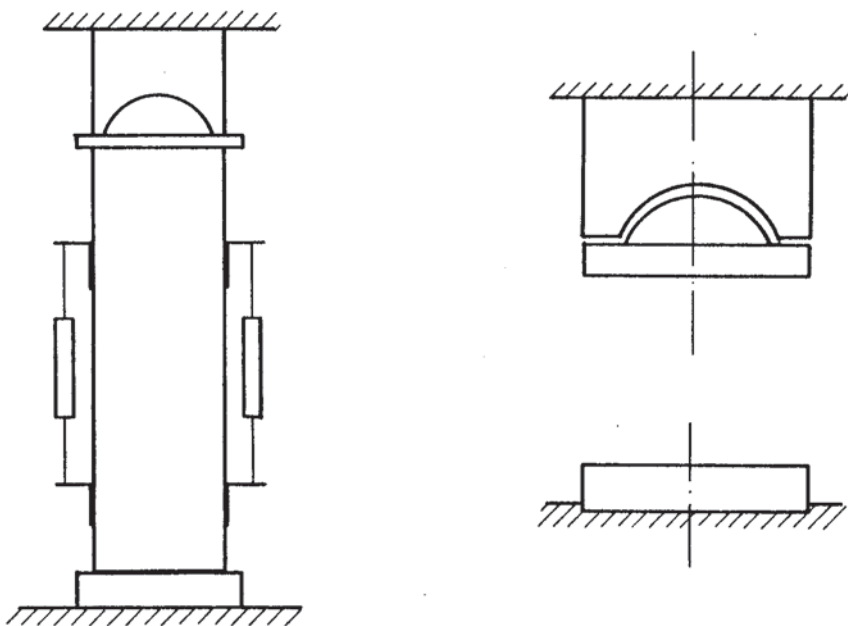


Fig. 88- Corpo de prova de compressão e sistema de carga.

ou através da fotografia apresentada na figura 89.



Fig. 89- Foto ilustrando as placas e o suporte esférico.

Bodig e Jayne⁽⁷⁷⁾, em 1969 e mais recentemente Prata⁽⁷⁸⁾, em 1990, evidenciaram os possíveis problemas relativos ao desenvolvimento de flexão nos corpos de prova de compressão simples se não se efetuar uma centragem de carga eficiente durante a realização destes testes.

À luz destas considerações, torna-se oportuna a reprodução de duas figuras ilustrativas que traduzem bem estas eventuais perturbações.

A figura 90 ilustra o fato de um aparelhamento não adequado da face de contato de um corpo de prova e a base da máquina de ensaio.

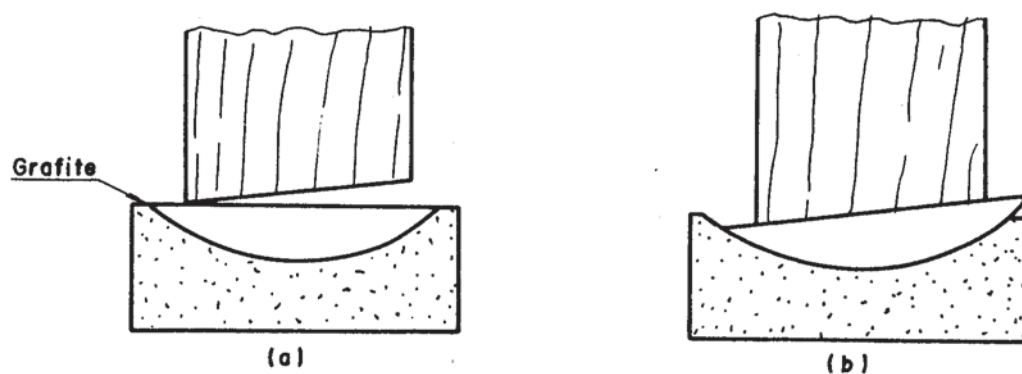


Fig. 90- Contato placa corpo de prova. Fonte Prata⁽⁷⁸⁾

Por outro lado, a figura 91 exhibe o não alinhamento entre o corpo de prova e o sistema de aplicação de carga.

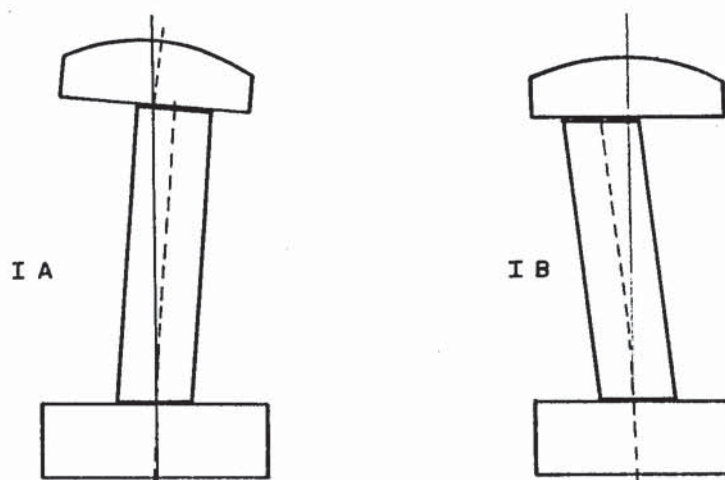


Fig. 91- Corpo de prova não alinhado.

Fonte: Bodig e Goodman⁽⁷⁷⁾

Nesse contexto, além das medidas preventivas ora apresentadas, empregaram-se, sempre que possível, durante a realização dos ensaios, extensômetros elétricos dispostos em faces opostas. A utilização desta técnica permitiu a comparação das deformações medidas em faces opostas e, conseqüentemente, verificar o aparecimento ou não de efeitos de flexão nas peças comprimidas.

Um outro aspecto relacionado ao ensaio de compressão diz respeito à distribuição de tensões normais e tangenciais na peça ensaiada.

É usual aqui, surgir perturbações na distribuição de tensões nas regiões de contato entre os pratos da máquina de ensaio e o corpo de prova.

Para se ter condições claras de se analisar esta questão utilizou-se do programa SAP 90⁽⁷⁹⁾ (Structural Analysis Programs - versão 5,04) da FECC-UNICAMP.

Para exemplificar, modelou-se um corpo de prova, com dimensões 4,7cm x 4,7cm x 18cm, da espécie Guapuruvú, discretizando-se o sólido em pequenos elementos de 1cm x 1cm x 1cm num total de 288 elementos. Na figura 92 pode-se observar o modelo aqui empregado e, também, a numeração de alguns nós.

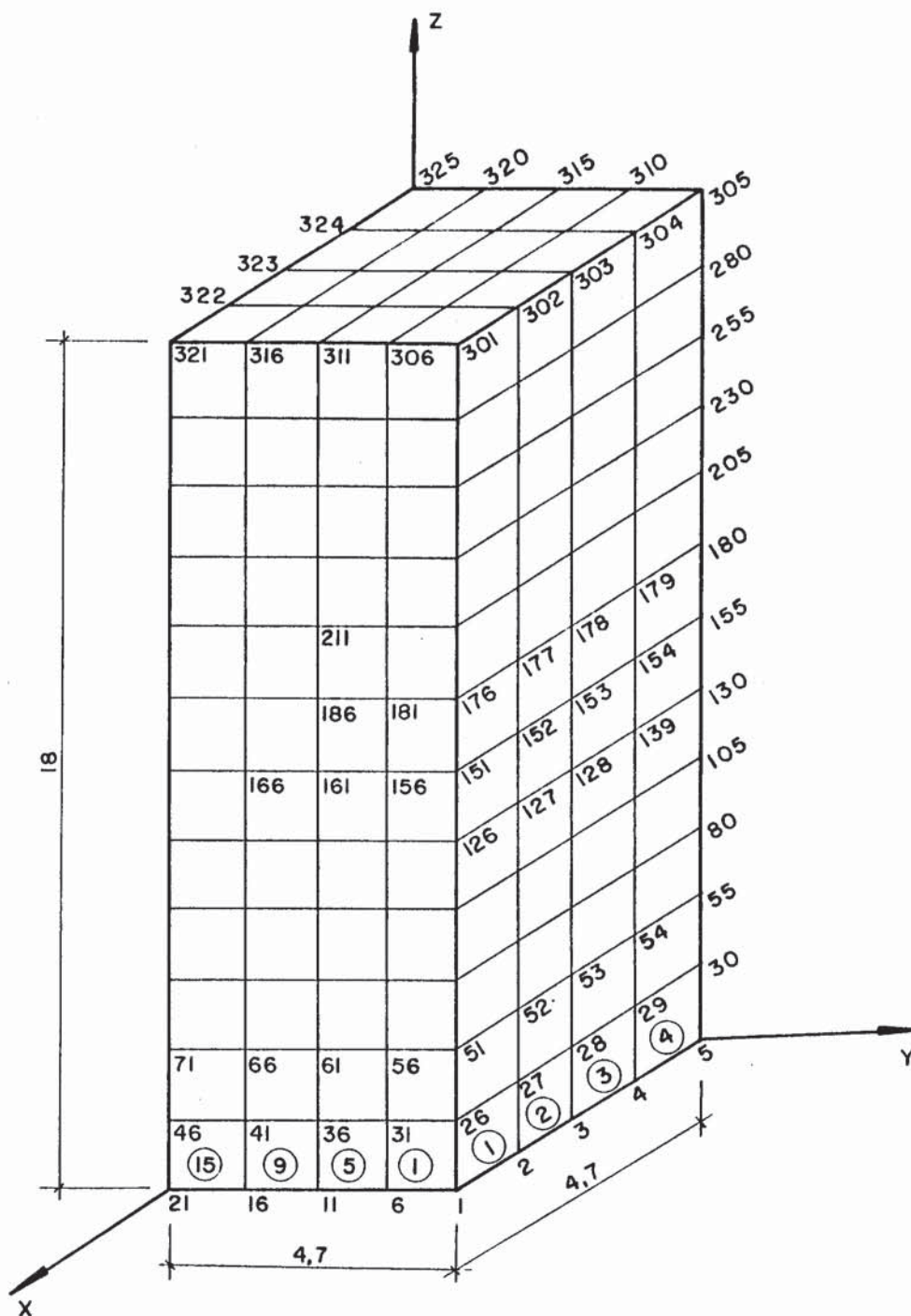


Fig. 92- Modelo do corpo de prova de compressão para uso do SAP90. Dimensões em cm.

Os resultados advindos do SAP90 podem ser ilustrados através da deformada do sólido e das distribuições de tensões normais, na direção do carregamento aplicado, e de tensões tangenciais em um dos planos paralelos a esta direção.

Segue-se, então, a situação deformada do corpo de prova apresentada na figura 93.

As distribuições de tensões normais e tangenciais serão apresentadas nas figuras 94 e 95.

Observa-se nestas figuras que o fluxo de tensões normais vai se estabilizando à medida que se caminha para a região central do corpo de prova.

Constitui-se numa pura constatação do princípio de Saint-Venant. (Timoshenko⁽⁸¹⁾ e Durelli et alii⁽⁸²⁾).

No que se refere à distribuição de tensões tangenciais nota-se que as perturbações remontam à região próxima à base do corpo de prova, sendo que na região central não se constata perturbações consideráveis.

Há de se esclarecer que foram utilizados conceitos intrínsecos ao modelo ortotrópico no programa SAP90⁽⁷⁹⁾.

Um outro detalhe que se mostra interessante se volta à distribuição de tensões no interior dos corpos de prova, como se pode ver nas figuras 96 e 97, que evidenciam cortes longitudinais nos corpos de prova.

Pode-se concluir, à vista das figuras 94 a 97, que nas faces laterais e na região central dos corpos de prova, existe uma homogeneidade de tensão. Em decorrência deste fato tornou-se conveniente colocar os extensômetros elétricos, de comprimento máximo de 1cm, nestas regiões e se ter a garantia de medir, efetivamente, as deformações que se fazem necessárias.

A seguir são mostradas as figuras de 93 a 97.

SAP90

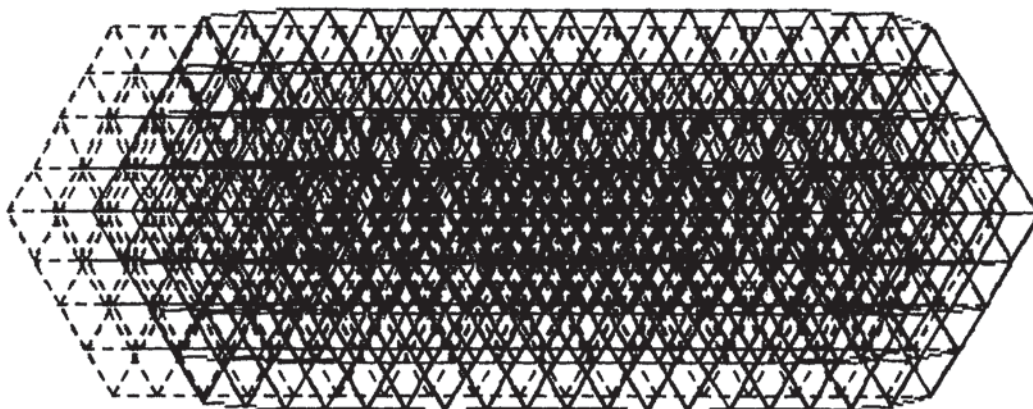
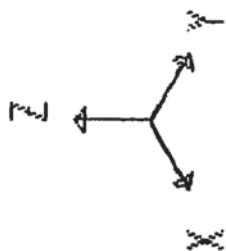
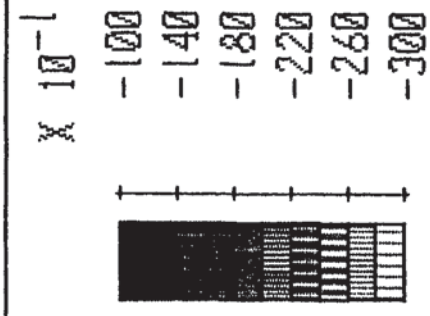
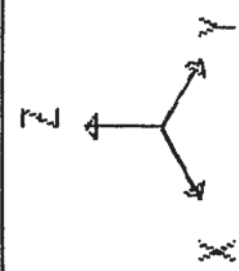
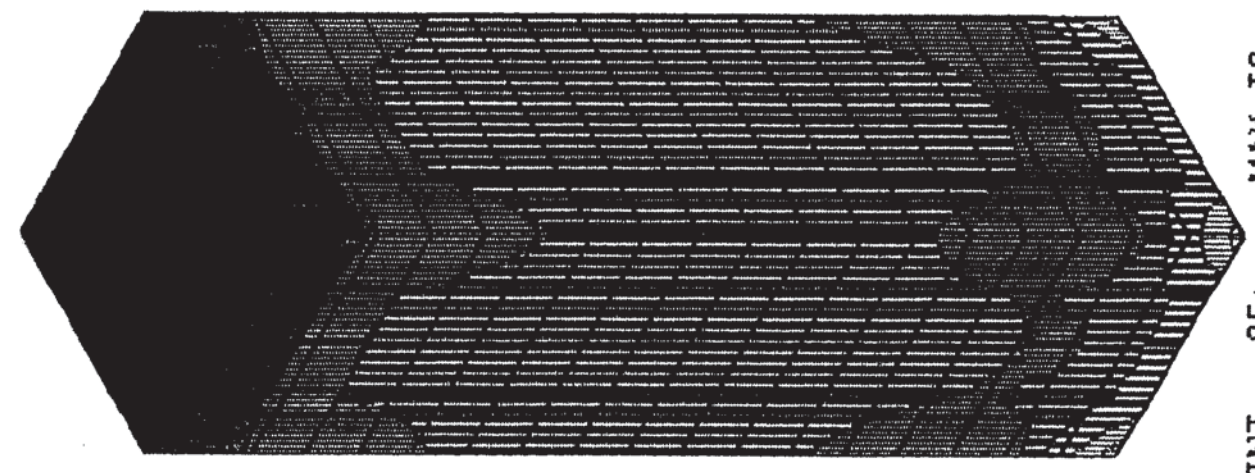
FILE : DRN1L4
DEFORMED SHAPE
LOAD : 1

Fig. 93- Deformada do corpo de prova de compressão.



FILE : DRN1L4
 OUTPUT : SOLID SZZ
 LOAD : 1

SAP90



MIN IS - .290E+02 <JOINT 25> MAX IS - .105E+02 <JOINT 475>

Fig. 94- Distribuição de tensão normal σ_{zz} ($\times 10^{-1}$ MPa).

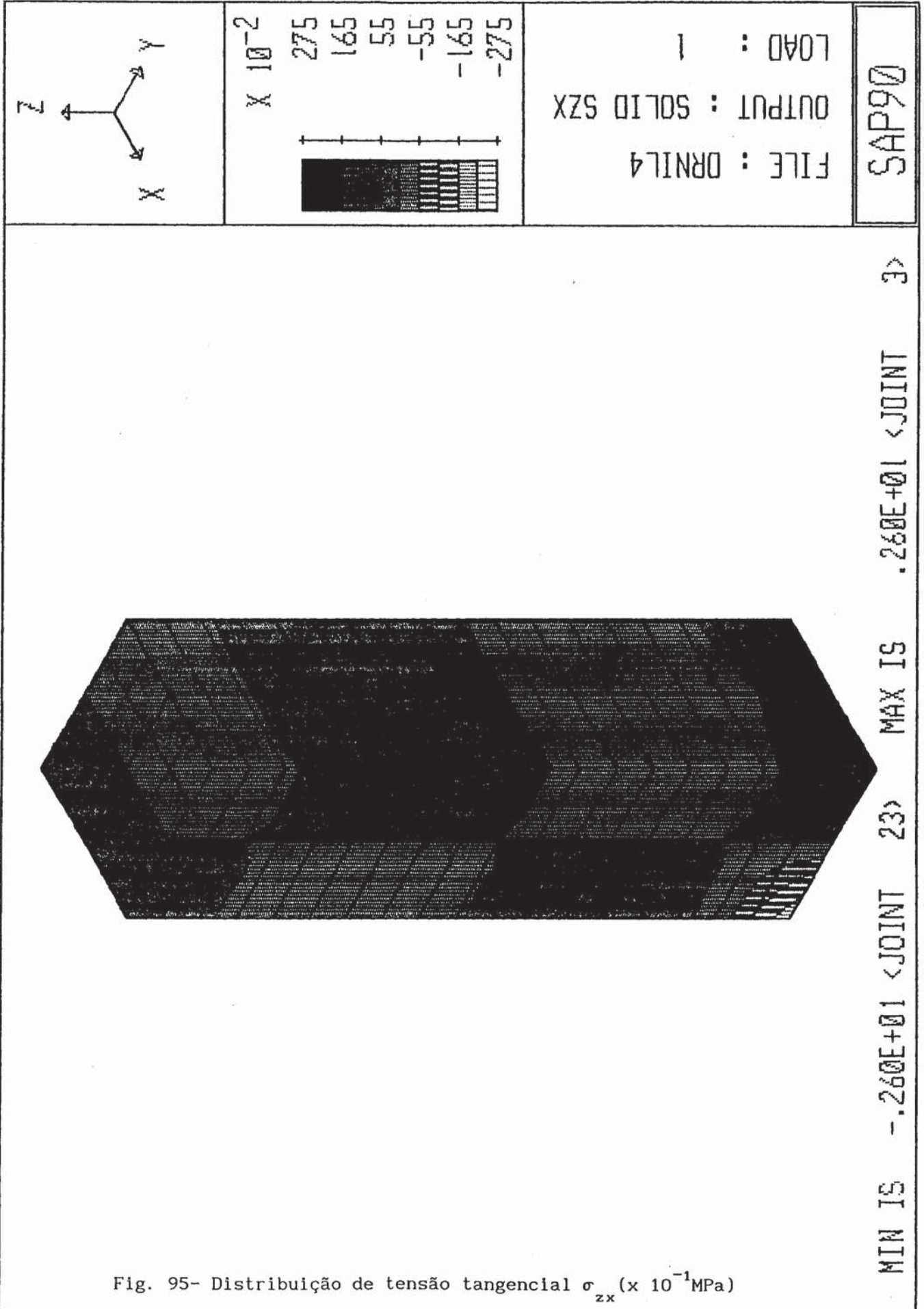
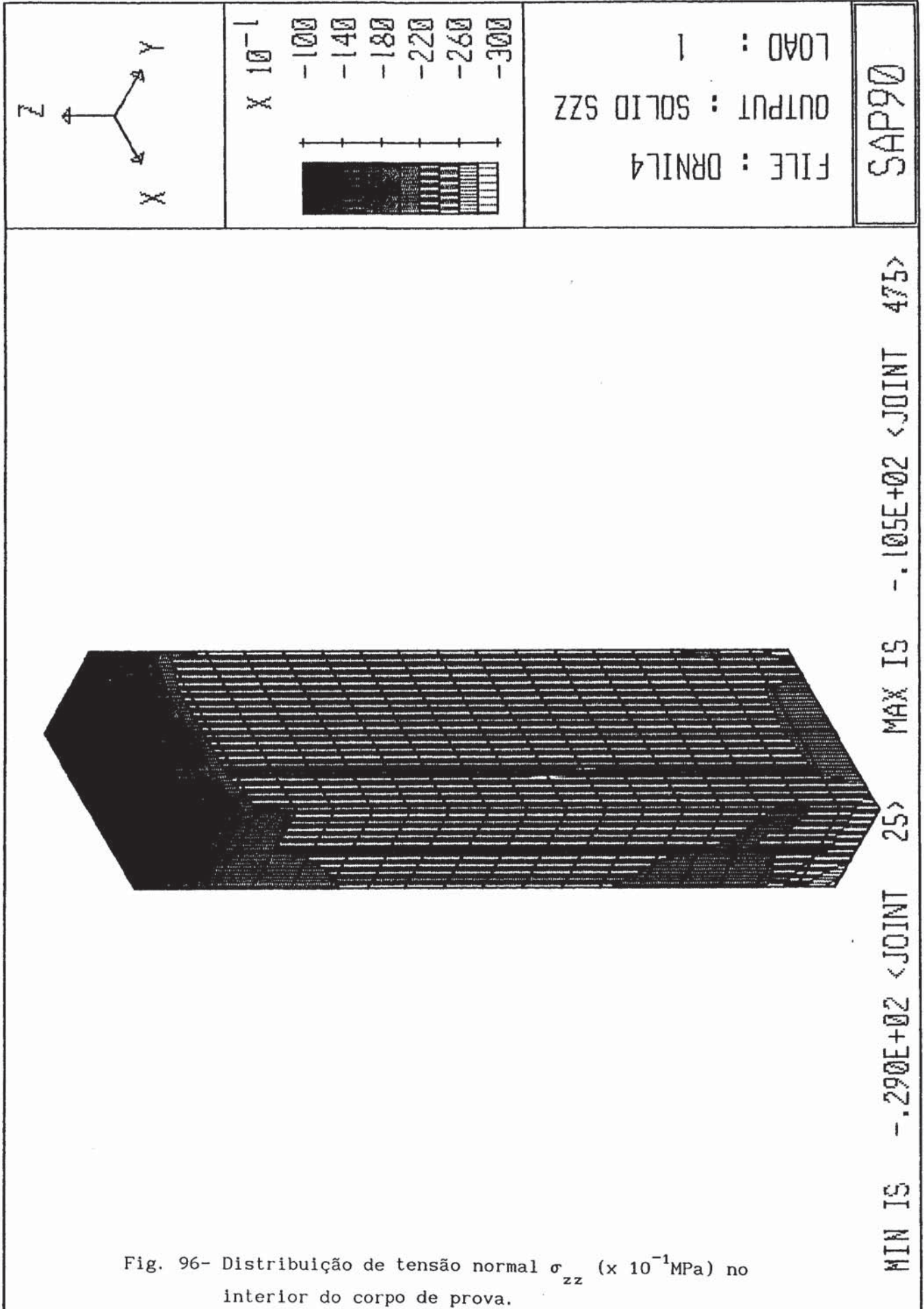
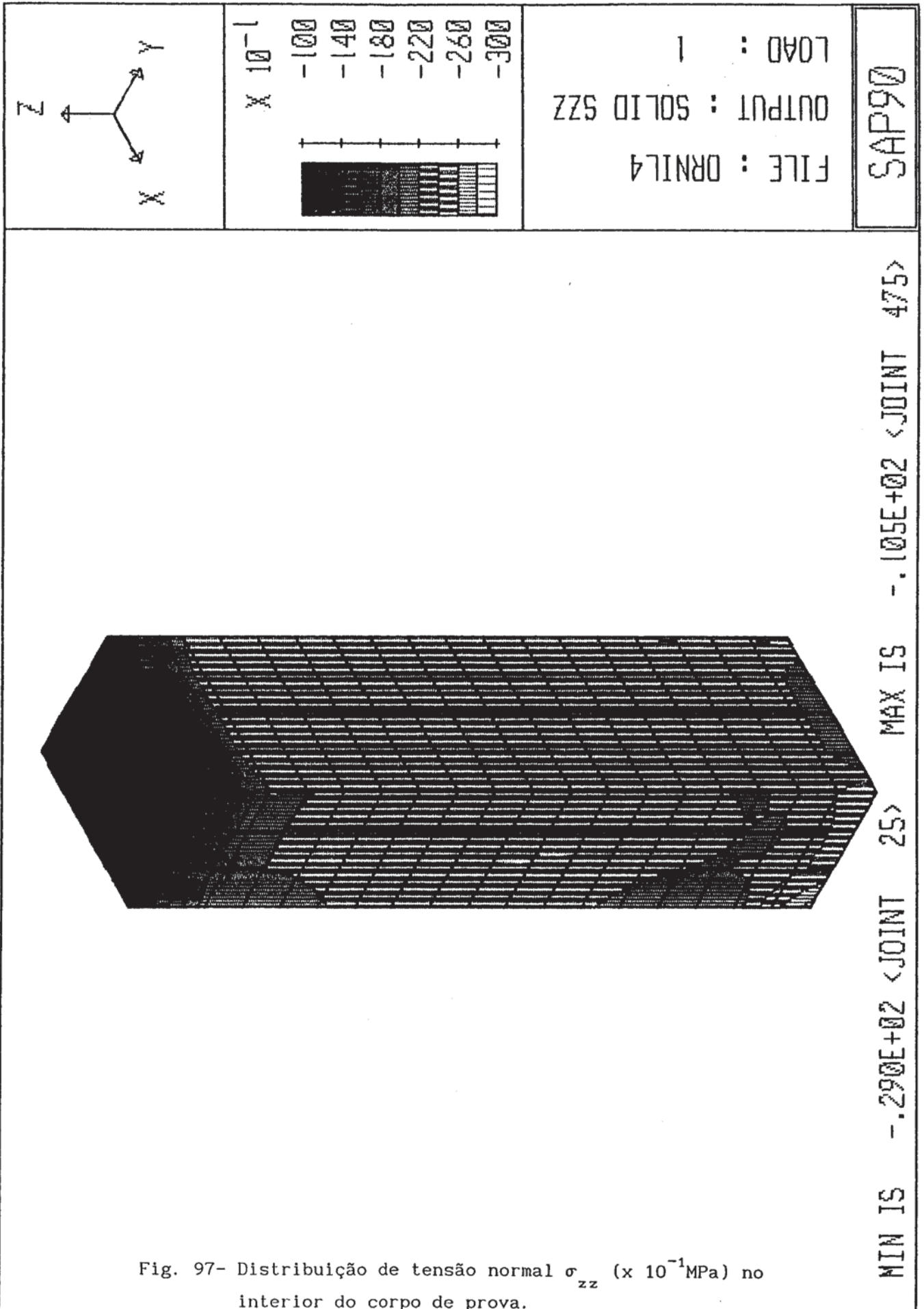


Fig. 95- Distribuição de tensão tangencial σ_{zx} ($\times 10^{-1}$ MPa)





Apresentada, desta forma, a análise dos resultados advindos do programa SAP90, pareceu oportuno comparar os dados de deformação deste programa com dados obtidos de uma experimentação preliminar desenvolvida.

Em meio a isto, foram colocados sete extensômetros elétricos de resistência KFC-5-C1-11 no corpo de prova de compressão, como pode ser visto na figura 98.

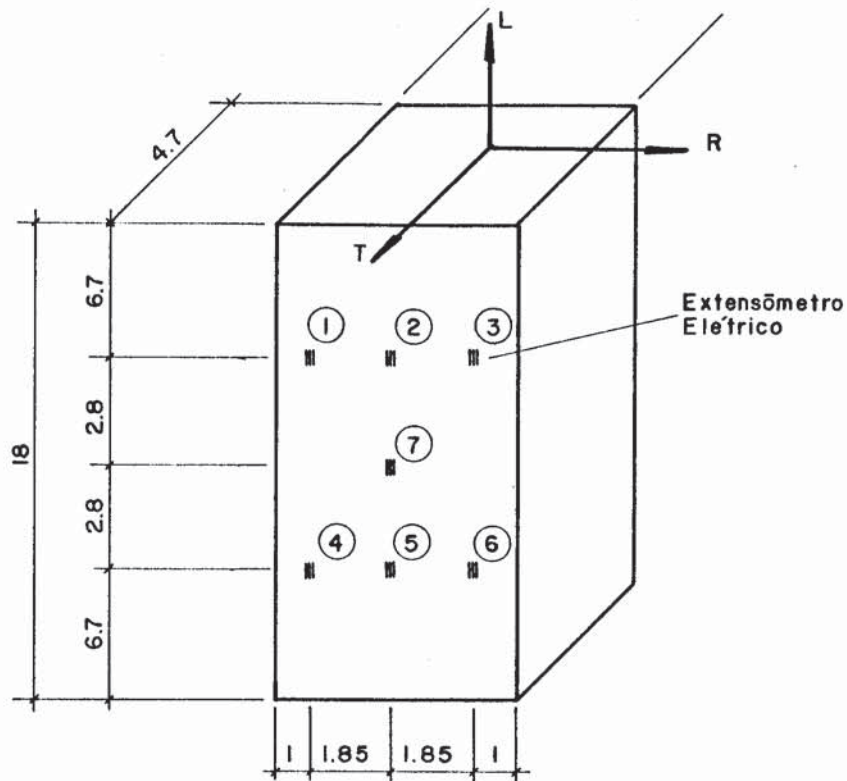


Fig. 98- Corpo de prova para verificação do fluxo de deformações. Dimensões em cm.

Cumprе ressaltar, aqui, que com a disposição dos extensômetros indicada nesta figura pretendeu-se verificar: as deformações em posições mais próximas aos pratos de aplicação de carga e a simetria de deformação em relação aos eixos vertical e horizontal, hipoteticamente passando pela região central do corpo de prova.

Os resultados das deformações neste ensaio estão na Tabela 7.

TABELA 7- Resultados das Deformações no Ensaio de Compressão

N. lei	C1 (kN)	C2 $\times 10^{-6}$	C3 $\times 10^{-6}$	C4 $\times 10^{-6}$	C5 $\times 10^{-6}$	C6 $\times 10^{-6}$	C7 $\times 10^{-6}$	C8 $\times 10^{-6}$
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.50	-57.23	-57.04	-50.17	-53.48	-51.53	-49.94	-60.17
3	1.00	-105.33	-112.47	-100.65	-99.70	-92.14	-90.69	-107.52
4	1.50	-157.14	-169.74	-155.20	-149.63	-138.31	-136.99	-159.29
5	2.00	-208.93	-227.01	-201.33	-197.69	-184.48	-185.15	-228.90
6	2.50	-257.01	-284.27	-250.21	-245.75	-226.92	-233.29	-287.64
7	3.00	-303.22	-334.09	-298.58	-286.38	-265.65	-274.01	-342.81
8	3.50	-355.17	-393.46	-350.14	-334.62	-310.18	-320.40	-404.03
9	4.00	-403.23	-446.98	-400.98	-380.80	-352.61	-375.94	-454.31
10	4.50	-453.31	-506.34	-431.21	-427.18	-395.28	-422.32	-525.51
11	5.00	-499.50	-559.85	-487.47	-475.21	-439.55	-474.15	-599.12
12	5.50	-547.72	-617.34	-537.58	-516.01	-480.36	-524.22	-655.11
13	6.00	-599.47	-680.10	-592.39	-564.02	-522.77	-577.89	-707.11
14	6.50	-645.82	-732.02	-635.69	-608.53	-567.27	-631.66	-796.94
15	7.00	-699.40	-796.61	-695.25	-658.38	-613.38	-681.61	-845.22
16	7.50	-745.75	-854.08	-742.39	-702.88	-702.38	-742.79	-907.92
17	8.00	-792.10	-907.84	-786.87	-747.38	-702.38	-794.70	-977.92
18	8.50	-836.39	-959.44	-831.25	-786.09	-742.38	-848.33	-1044.56
19	9.00	-882.73	-1016.90	-874.01	-828.73	-783.69	-902.08	-1125.56
20	0.00	-53.78	-91.59	-49.68	-9.00	-41.85	-45.31	-38.61

Por outro lado, num gráfico carga versus deformação pode-se observar de maneira mais contundente a variação das deformações, acusadas pelos extensômetros durante o ensaio de compressão simples. (Ver figura 99)

Os resultados obtidos pelo programa SAP90 estão na Tabela 8, inserida no Anexo, presente no final do trabalho.

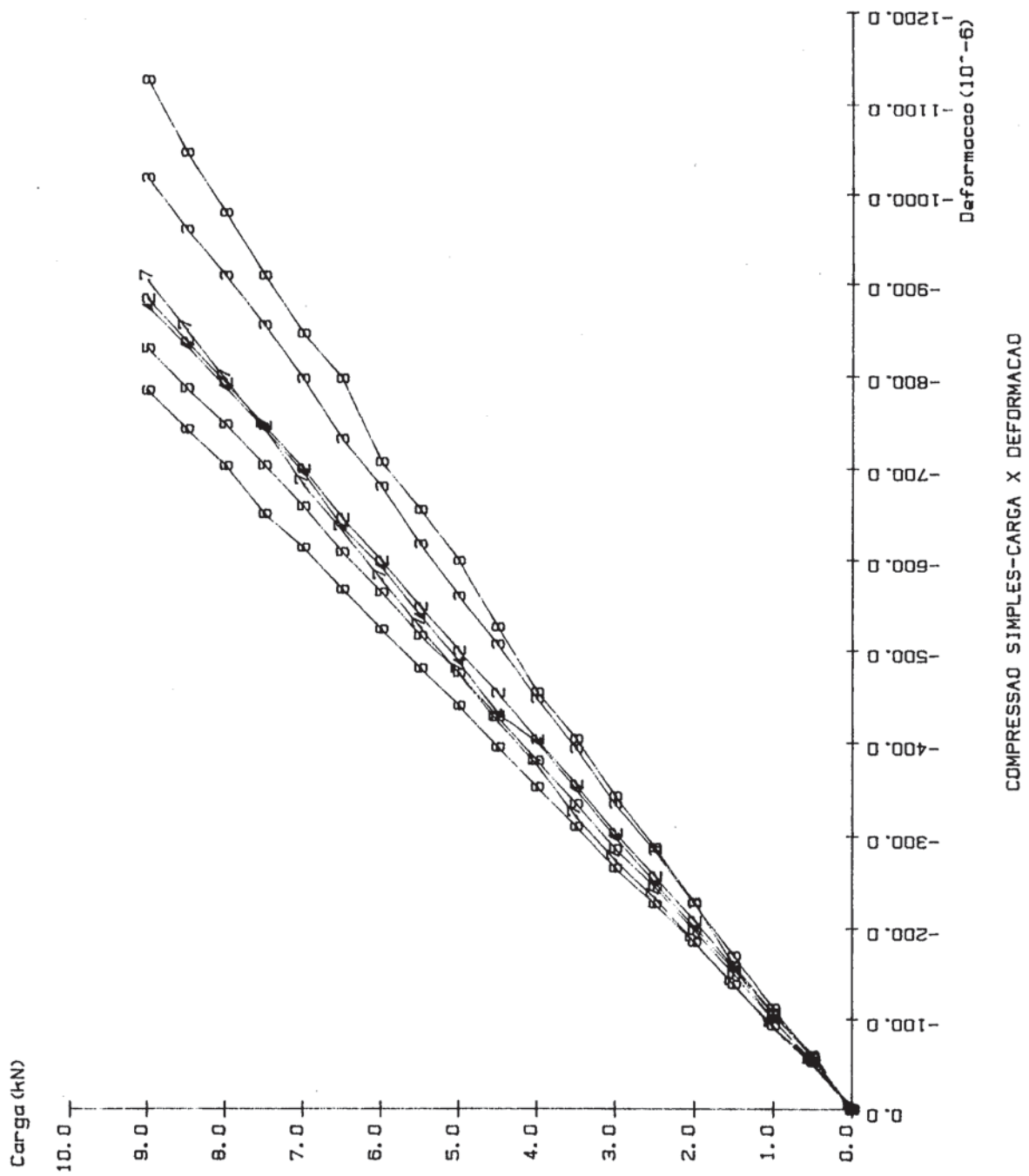


Fig. 99- Gráfico carga x deformação nos corpos de prova de compressão.

Detendo-se aos pontos de igual posição do modelo e do corpo de prova chega-se aos seguintes resultados.

TABELA 9- Resultados das Deformações do SAP90 e Experimental

Pontos	SAP90	Experimental	Variação
1 - 2 - 3	503×10^{-6}	515×10^{-6}	2,33%
7	518×10^{-6}	599×10^{-6}	13,52%
4 - 5 - 6	503×10^{-6}	463×10^{-6}	8,64%

À vista destes resultados, não se pode descartar a hipótese de se estar trabalhando com um bom modelo teórico e naturalmente, experimental.

Assim sendo, optou-se pela colocação dos extensômetros na região central dos corpos de prova empregando-se o adesivo Super Bonder 401, série Prisma, da Loctide.

Nesse processo de colagem, onde foram seguidas as recomendações do fabricante, os corpos de prova instrumentados permaneciam em repouso por 24 horas para atingir as condições ideais para ensaio.

No âmbito geral da experimentação foram utilizados 364 extensômetros elétricos de resistência nos 80 corpos de prova de compressão simples.

Por fim, deve-se fazer menção à velocidade de carregamento adotada. Neste trabalho optou-se por 10MPa/min, a qual corresponde à velocidade presente no Método Brasileiro de Ensaio para Madeiras, NBR 6230⁽⁸³⁾ e de uso geral no LaMEM.

4.5 Algumas Considerações Acerca do Ensaio de Flexão Simples

Via de regra, o ensaio de flexão simples para se determinar as constantes de elasticidade deve-se ater a respostas que vão subsidiar os métodos de determinação experimental de constantes considerados puros, como os de compressão simples.

Além desse fato, devem ser considerados os efeitos que o carregamento e os vínculos induzem nas distribuições de tensão normal e tangencial.

Estes efeitos vão interferir diretamente nos resultados das medições de deslocamentos, conseqüentemente na linha elástica e por sua vez, na determinação das constantes.

Estudos de Zaslavsky⁽⁸⁴⁾, de 1965 e Timoshenko e Gere⁽⁸⁵⁾, de 1983, sobre a introdução de tensões normais advindas da consideração de se ter no ensaio de flexão uma vinculação de estrutura hiperestática, podem se apresentar num ensaio de uma peça de madeira fletida, devido ao esmagamento das regiões do apoio. Nestas regiões ocorre compressão normal pois a rigidez nesta direção é bastante baixa se comparada à da direção axial.

A figura 100 se atem a este aspecto.

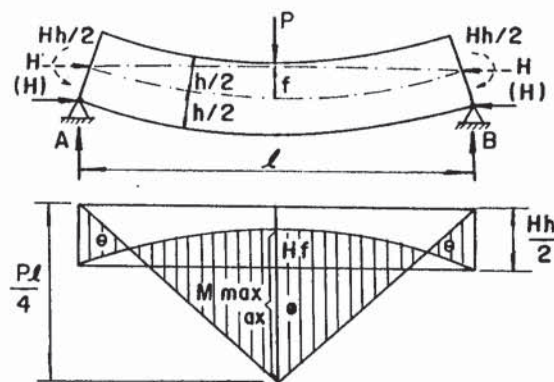


Fig. 100- Flexão - efeito de vinculação hiperestática.

Para se verificar a influência destas possíveis tensões, foram colocados extensômetros elétricos e DCDTs nas regiões próximas ao apoio. Por outro lado, foram instalados dois relógios comparadores nos apoios, objetivando-se medir a variação de deslocamento devido à compressão normal e, por sua vez, o valor efetivo de deslocamento verificado durante o desenvolvimento da flexão. Isto pode ser apreciado em Mascia⁽⁵⁸⁾ com base nos estudos

de Timoshenko & Goodier⁽⁸⁵⁾, de 1980.

Estudos outros, sobre problemas de distribuição de tensão nos apoios e na região de carregamento são encontrados em Hooley & Hibbert⁽⁸⁶⁾, no ano de 1967, e em Liu⁽⁸⁷⁾, em 1980. A figura 101 mostra a distribuição de tensão na região do apoio de uma viga de madeira.

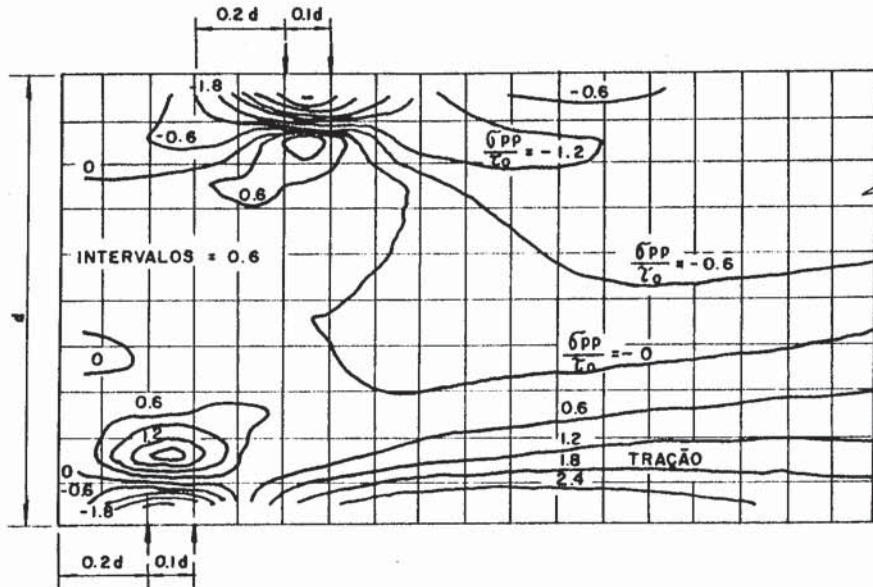


Fig. 101- Tensões na região do apoio. Fonte: Liu⁽⁸⁷⁾.

Neste contexto foi utilizado o programa SAP90⁽⁷⁹⁾ para constatar as distribuições de tensões normais e tangenciais, bem como os deslocamentos verticais num ensaio de flexão simples.

Para tanto, modelou-se um corpo de prova, com dimensões 4,7cm x 4,7cm x 108,3cm, da espécie Guapuruvú, discretizando-se o sólido em 140 elementos. A figura 102 apresenta a modelagem empregada.

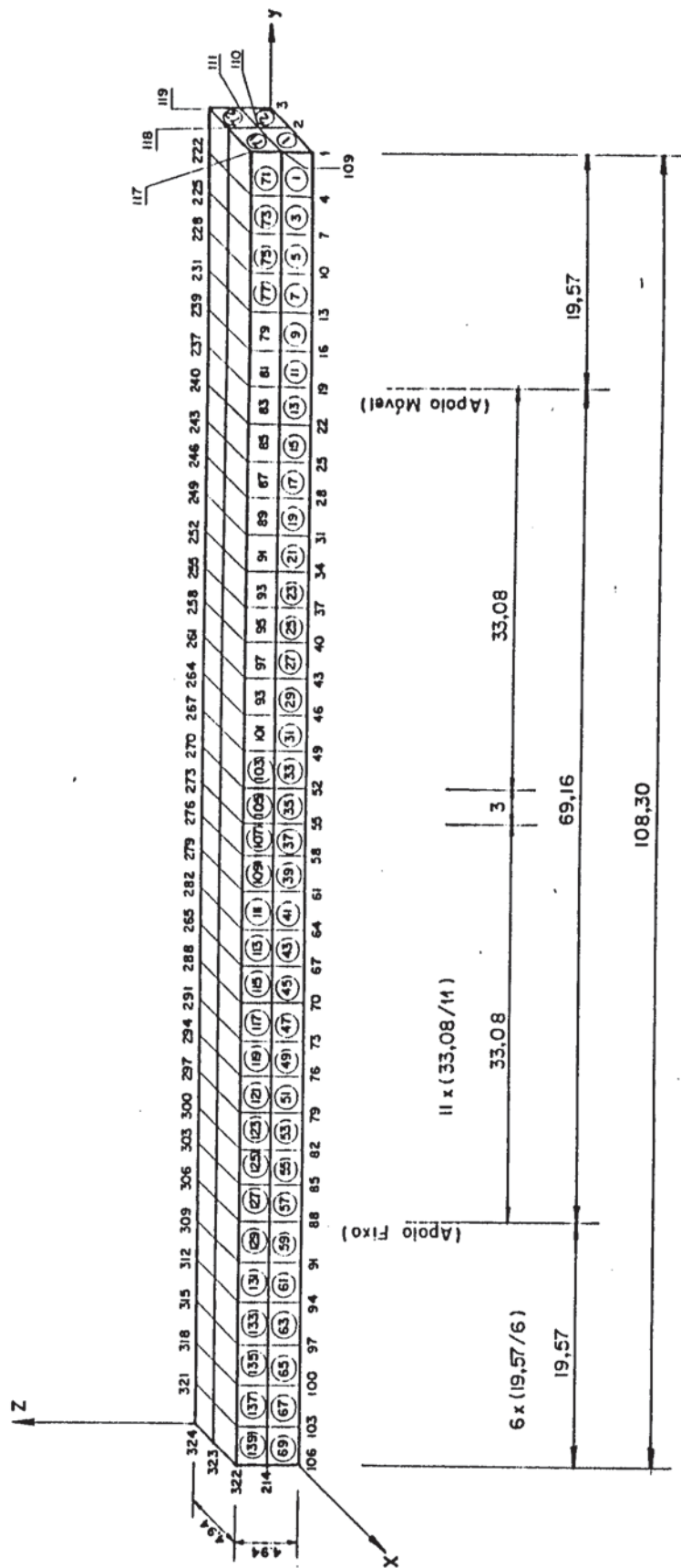


Fig. 102- Modelo de ensaio de flexão para o SAP90.
Dimensões em cm.

Assim, com os resultados do SAP90 pode-se ilustrar a situação deformada do corpo de prova através da figura:

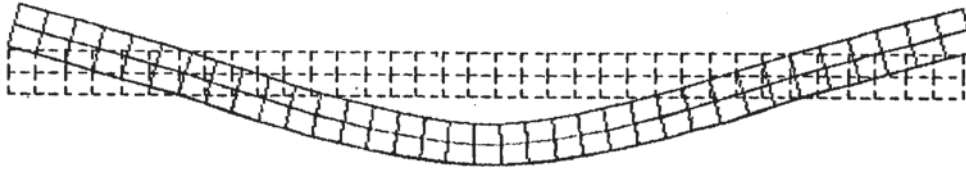


Fig. 103- Deformada do corpo de prova de flexão.

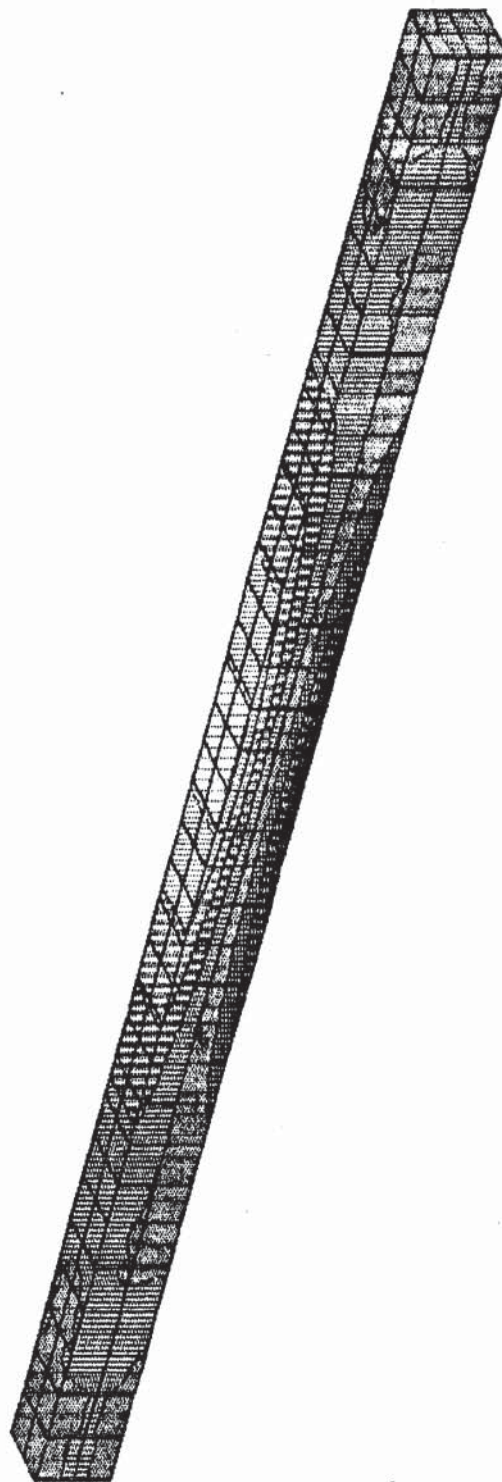
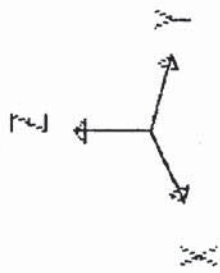
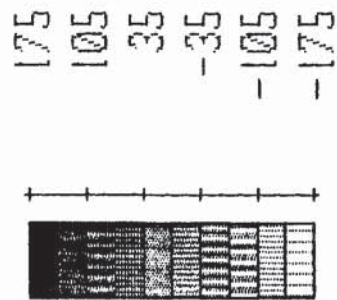
As distribuições de tensões normais na direção axial da peça estão representadas na figura 104.

As distribuições de tensões normais na direção paralela ao carregamento aparecem na figura 105.

Por outro lado, as distribuições de tensões tangenciais nos planos vertical estão na figura 106. Em relação ao plano horizontal, pode-se observar as tensões tangenciais através da figura 107.

SAP90

FILE : drn15
 OUTPUT : SOLID SYY
 LOAD : 1



MIN IS -.150E+03 <JOINT 269> MAX IS .152E+03 <JOINT 57>

Fig. 104- Tensões normais σ_{yy} ($\times 10^{-1}$ MPa) na peça de flexão.

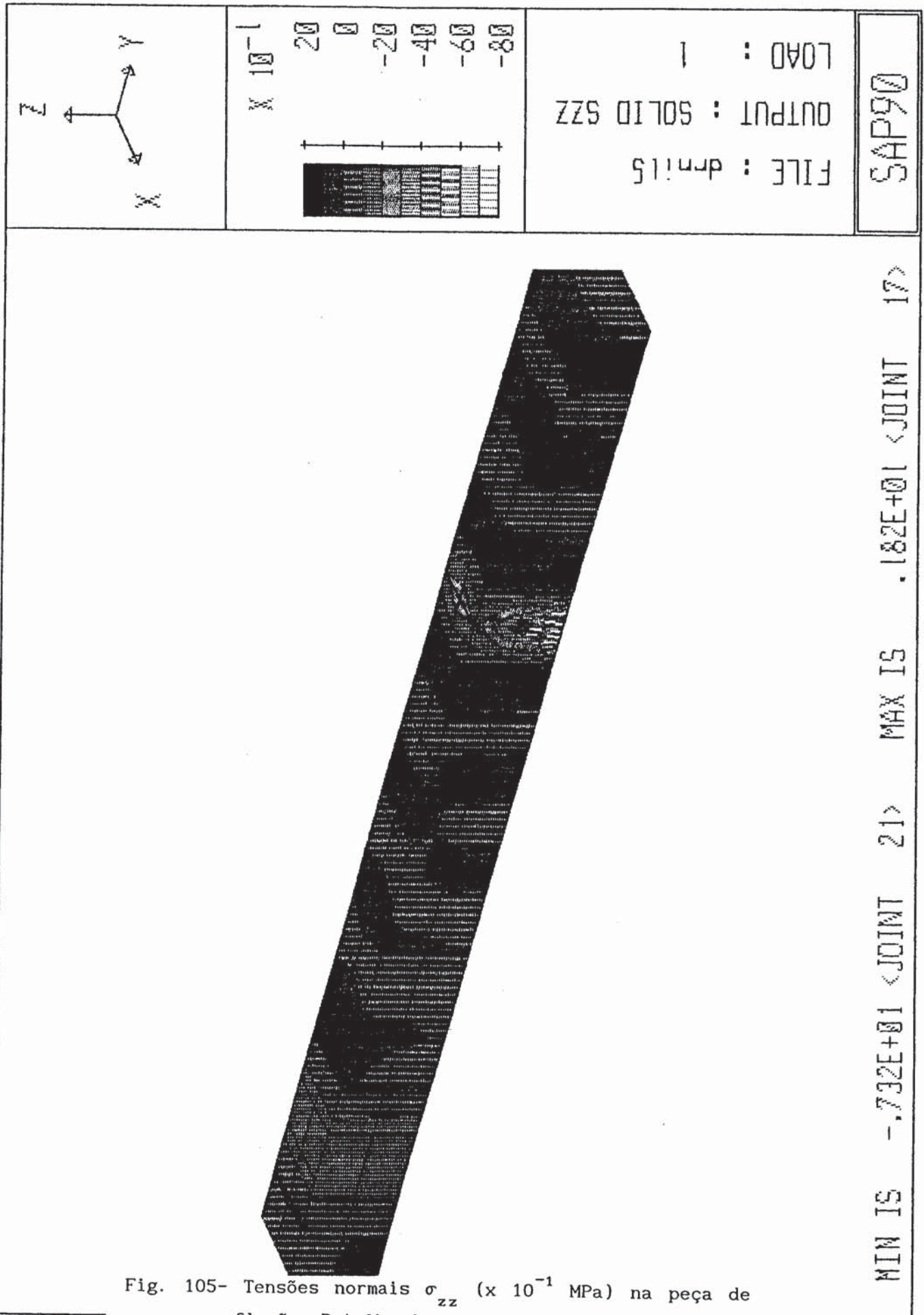


Fig. 105- Tensões normais σ_{zz} ($\times 10^{-1}$ MPa) na peça de flexão. Detalhe de meia viga

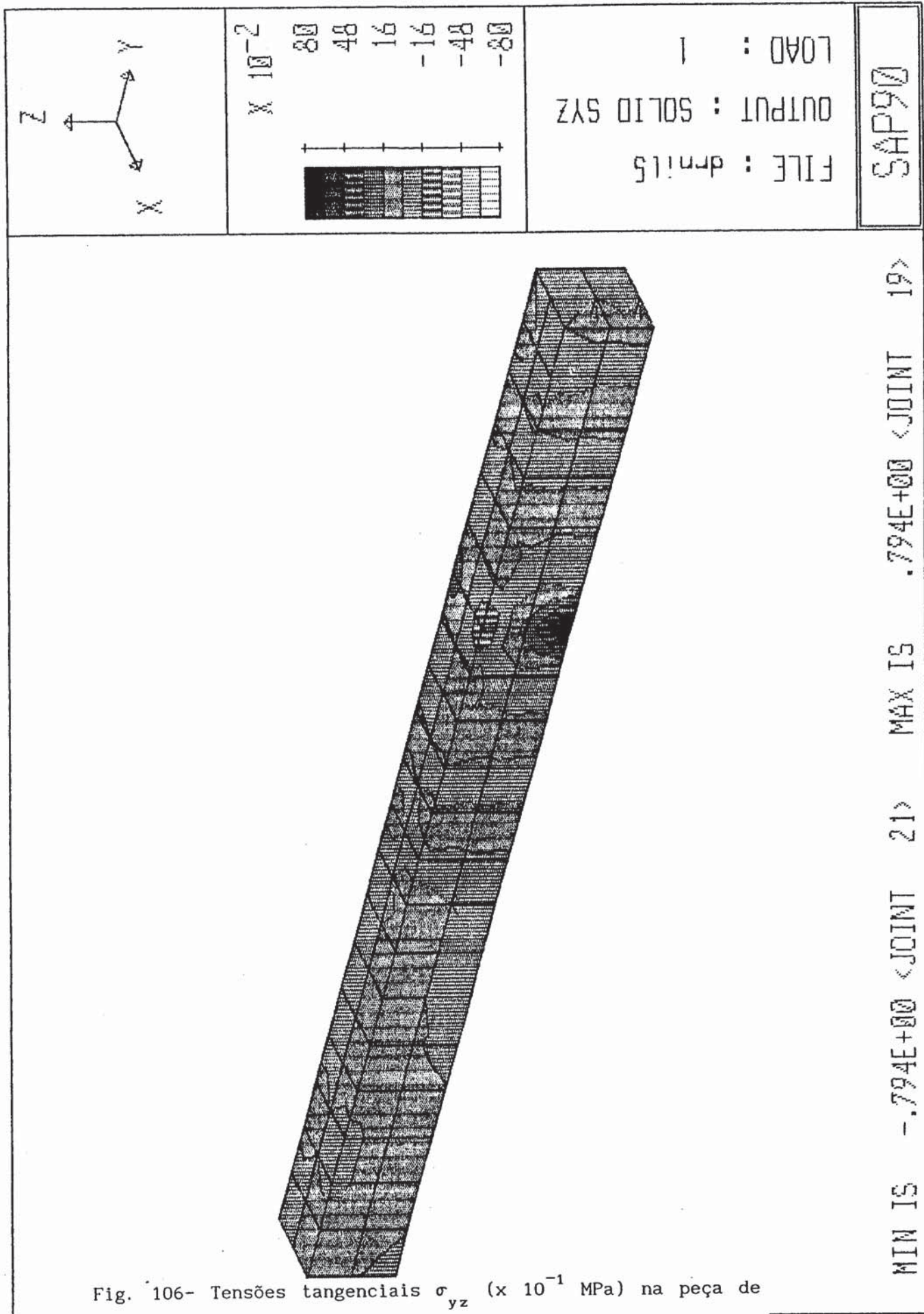


Fig. 106- Tensões tangenciais σ_{yz} ($\times 10^{-1}$ MPa) na peça de flexão.

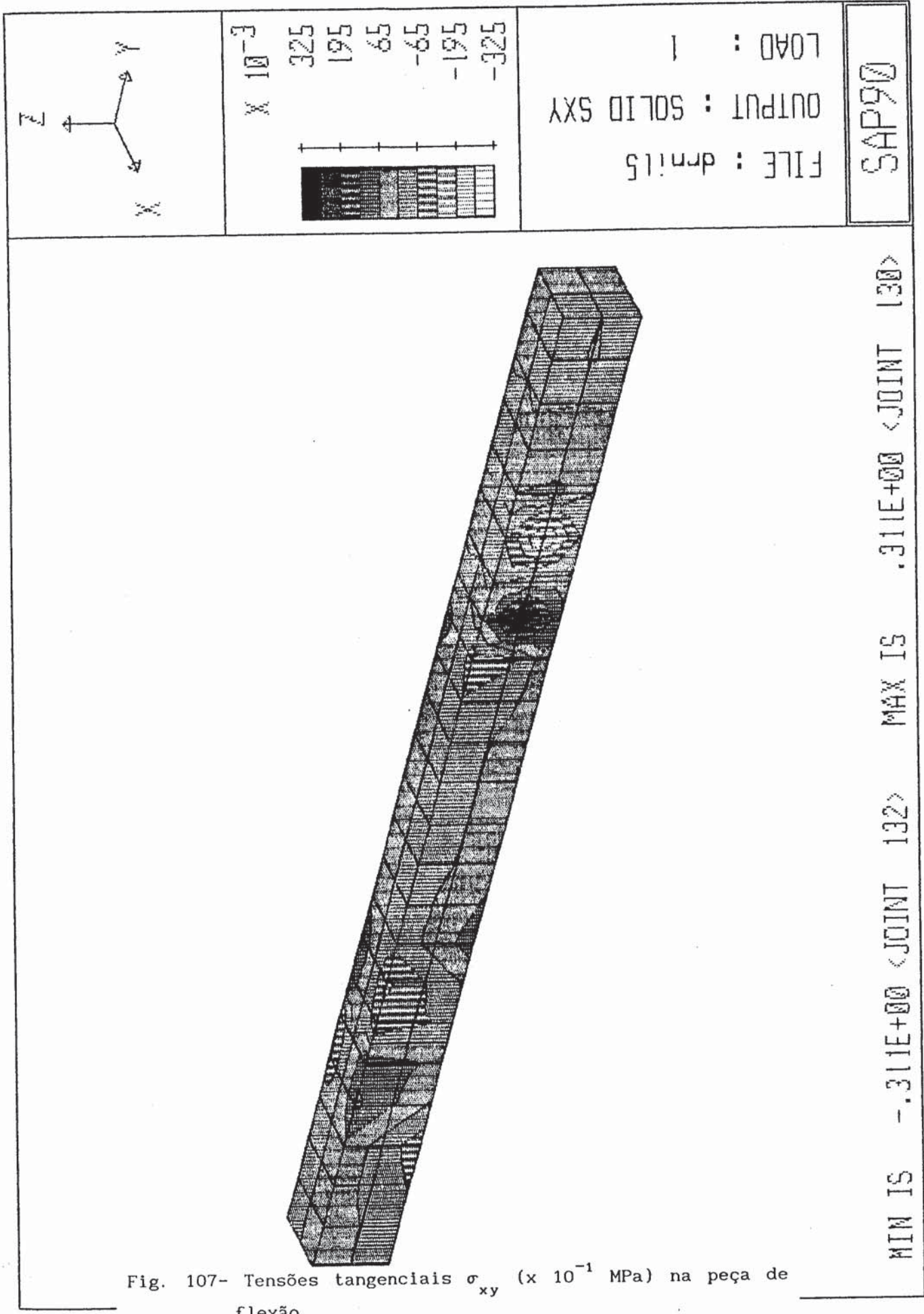
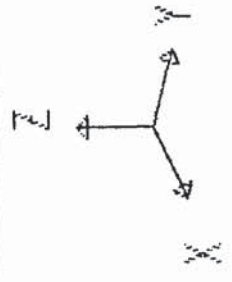
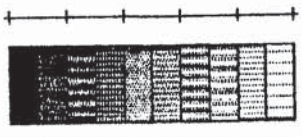


Fig. 107- Tensões tangenciais σ_{xy} ($\times 10^{-1}$ MPa) na peça de flexão.

FILE : dnn15
 OUTPUT : SOLID SXY
 LOAD : 1

SAP90

$\times 10^{-3}$
 325
 195
 65
 -65
 -195
 -325



MIN IS -.311E+00 <JOINT 132> MAX IS .311E+00 <JOINT 130>

Permite-se, aqui com intuito de ilustração apresentar as distribuições de tensões em regiões críticas, como nos apoios e na região do carregamento.

Assim, a figura 108 atenta para as perturbações, na região do apoio, das tensões de compressão. Isto evidencia os problemas de esmagamento da madeira nesta região.

A figura 109 acena com detalhe para as perturbações das tensões tangenciais nas regiões dos apoios e na região do carregamento.

A figura 110 mostra a distribuição de tensões normais, clássica em vigas solicitadas por flexão simples.

Um outro aspecto a ser focado reside na grande variabilidade das informações sobre constantes elásticas que permite se obter ao longo da peça de madeira a ser testada, como relata Melo⁽⁸⁸⁾. De um modo geral, utilizam-se valores médios para os cálculos, conforme Goodman et alii⁽⁸⁹⁾ relacionando-se as normas internacionais e como preconiza a NBR 7190⁽⁹⁰⁾ - Norma Brasileira para Cálculo e Execução de Estruturas de Madeira.

Assim, foram empregados cinco DCTDs ao longo do eixo da peça, situados ao longo de um suporte a fim de se evitar prováveis perturbações durante a fase de carregamento do corpo de prova.

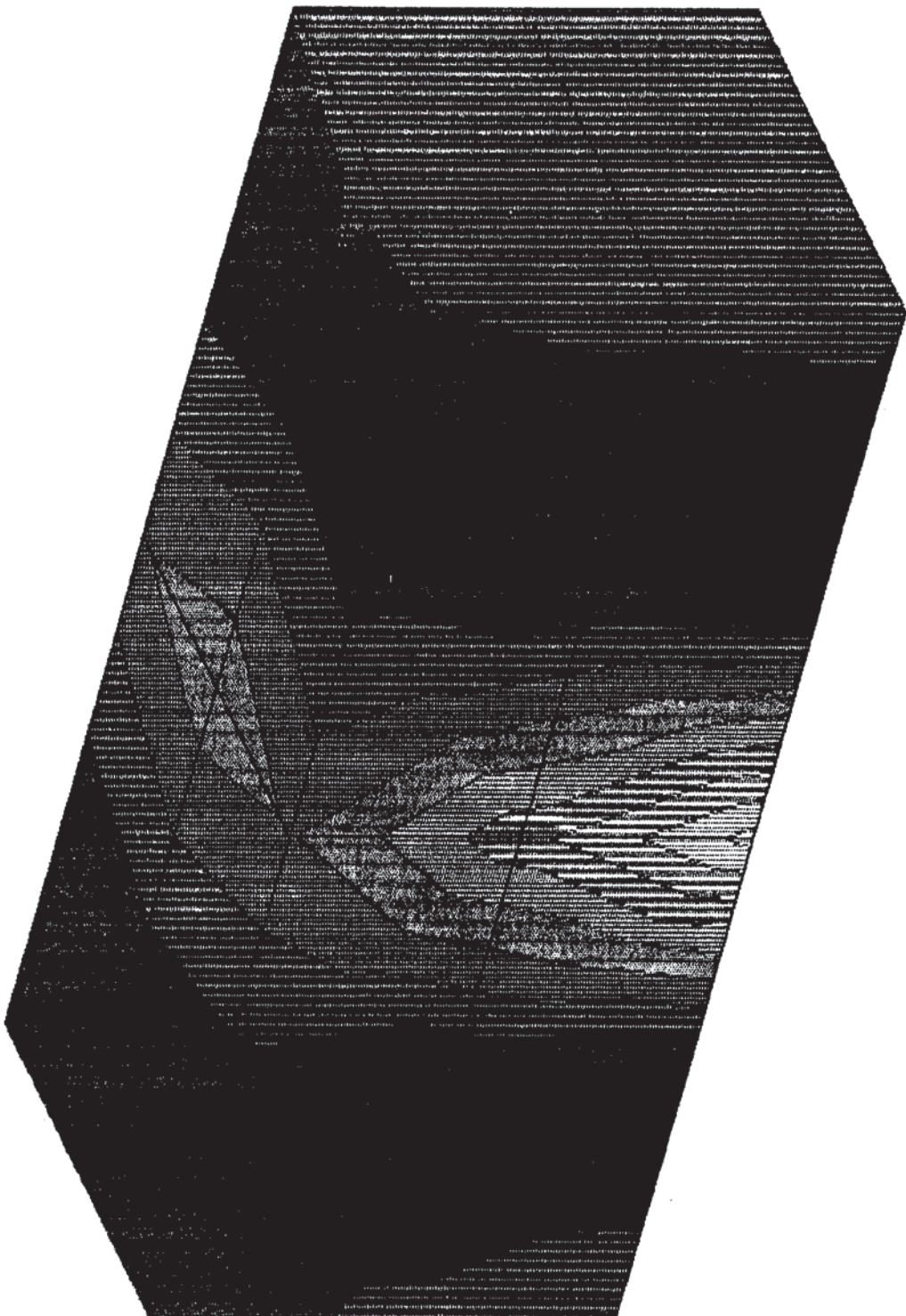
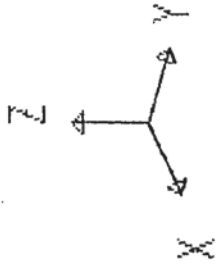
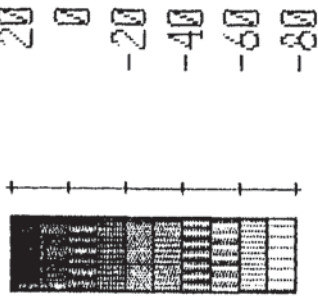
Há de se notar, também, que uma peça pode ser ensaiada em duas posições, uma considerando-se o plano de flexão LT e outra LR, sendo, naturalmente, impraticável no plano RT.

Por fim, a figura 111 ilustra a instrumentação de uma das 16 peças empregadas no ensaio de flexão simples. Nos próximos capítulos serão apresentados e discutidos os resultados da experimentação realizada.

A seguir são mostradas as figuras 108 a 111.

SAP90

FILE : dnn15
 OUTPUT : SOLID SZZ
 LOAD : 1

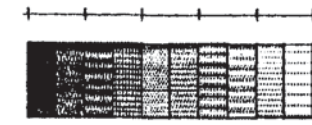


MIN IS -.7332E+01 <JOINT 21> MAX IS .182E+01 <JOINT 17>

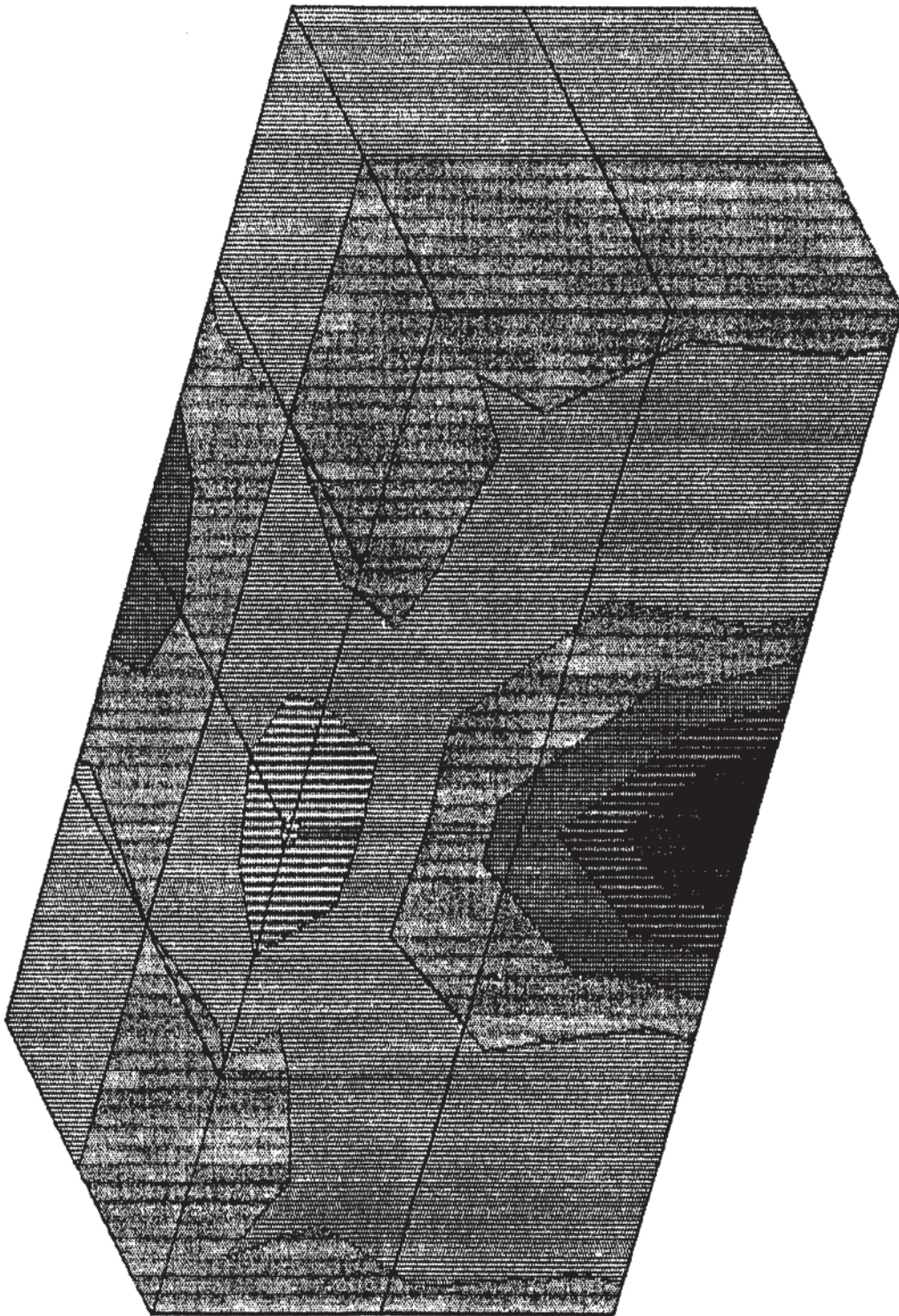
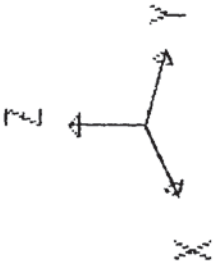
Fig. 108- Tensão normal σ_{zz} (x 10⁻¹MPa) na região do apoio.

SAP90

FILE : dnn15
 OUTPUT : SOLID SYZ
 LOAD : 1



$\times 10^{-2}$
 80
 48
 16
 -16
 -48
 -80

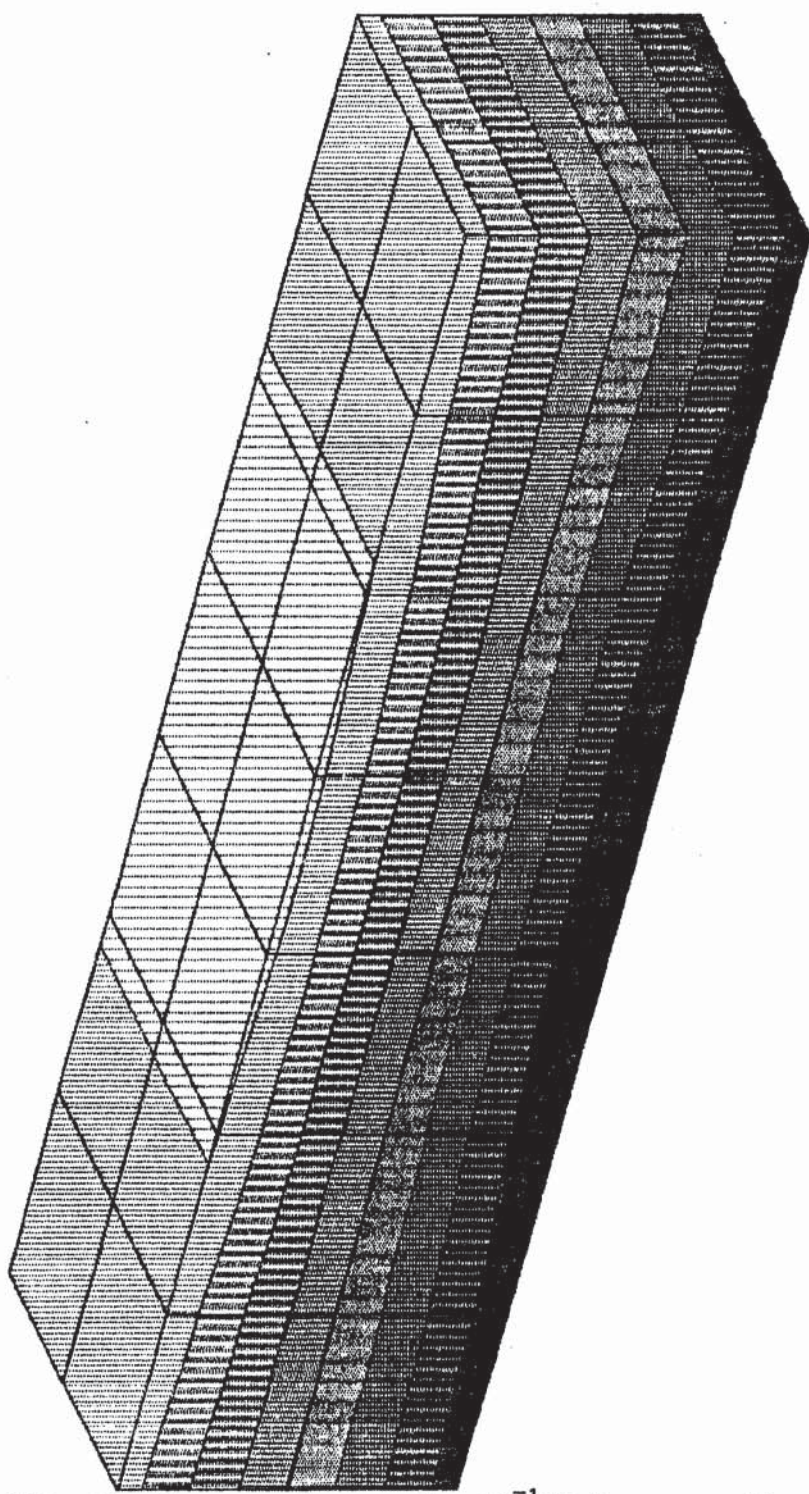
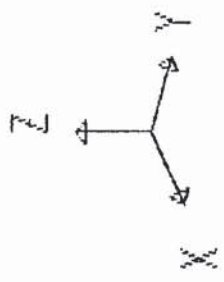
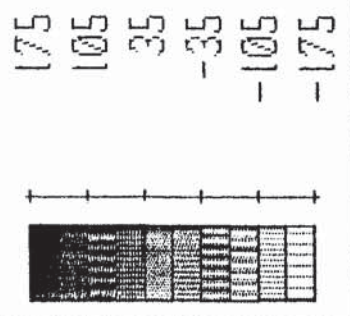


MIN IS -.794E+00 <JOINT 21> MAX IS .794E+00 <JOINT 19>

Fig. 109- Tensão tangencial σ_{yz} ($\times 10^{-1}$ MPa) na região do apoio.

SAP90

FILE : dnn15
OUTPUT : SOLID SYY
LOAD : 1



MIN IS -.150E+03 <JOINT 269> MAX IS .152E+03 <JOINT 57>

Fig. 110- Tensão normal σ_{yy} ($\times 10^{-1}$ MPa) na região central da viga.

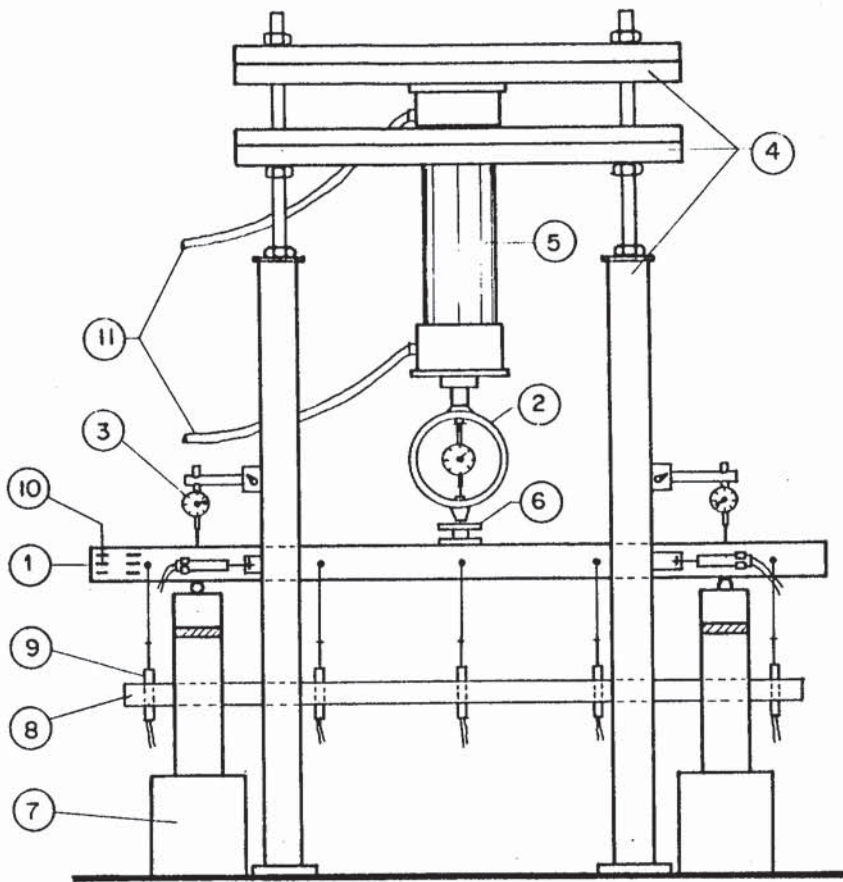


Fig. 111- Esquema de ensaio de flexão e instrumentação.

LEGENDA:

- 1- Viga a ensaiar
- 2- Anel dinamométrico
- 3- Relógio comparador
- 4- Estrutura de fixação
- 5- Cilindro hidráulico
- 6- Junta universal
- 7- Bloco de apoio
- 8- Suporte de madeira
- 9- DCDT
- 10- Extensômetro elétrico
- 11- Mangueiras hidráulicas

5- SIMETRIA DO TENSOR S_{ijkl} PARA A MADEIRA. EXPERIMENTAÇÃO E RESULTADOS

5.1- Introdução

Conforme discutido nos capítulos precedentes, para um determinado material ser considerado ortotrópico, ele deve se enquadrar nas condições de simetria do tensor constitutivo C_{ijkl} ou de sua forma inversa S_{ijkl} .

Face a isto, foram realizados ensaios de compressão simples em peças de madeira com vistas à determinação dos coeficientes de elasticidade. Em seguida, de posse destes resultados, tornou-se possível efetuar as relações de simetria dentro do tensor constitutivo e tirar conclusões a respeito da adequação da madeira ao modelo ortotrópico.

5.2- Material para Ensaio

Os corpos de prova utilizados tinham, em média, seção transversal nominal de 4cm x 4cm, e altura ao redor de 12cm. As quantidades e as espécies foram as seguintes:

TABELA 10- Quantidade e Espécies dos Corpos de Prova

Espécie	Nº de Corpos de Prova
Guapuruvú	36 ^(*)
Angico Vermelho	6
Pinus	6
Ipê	6

(*): utilizou-se, também, duas séries de seis corpos de prova com dimensões maiores, 6cm x 6cm x 18cm. Isto será plenamente discutido em um próximo capítulo.

Estes corpos de prova, considerados distribuídos em séries de 6 elementos, foram retirados de regiões próximas umas das outras dos troncos das árvores.

Embora este procedimento consista, a rigor, em buscar uma homogeneidade da madeira de que se constituem os corpos de prova, a variabilidade inerente à madeira é, ainda, um fator de persistência que não se deve descartar, como relatam Hellmeister⁽⁹¹⁾, em 1973, Freitas⁽⁹²⁾, em 1978, e Lazarini e Hellmeister⁽⁹³⁾, em 1990.

Perante este fato, é de extrema valia o emprego dos conceitos de estatística desde a obtenção dos corpos de prova até o cálculo das constantes de elasticidade.

Os corpos de prova de Ipê, por outro lado, como já esclarecido no capítulo anterior, foram retirados de vigas.

A umidade considerada adequada destes corpos de prova para colagem dos extensômetros girou ao redor de 12%.

5.3- Medidas de Deformações. Extensômetros Elétricos de Resistência

As deformações que se fizeram comparecer nos corpos de prova durante os ensaios de compressão simples foram medidas através de extensômetros elétricos situados em posições pré-estabelecidas. Desta forma, tornou-se possível medir deformações normais e por sua vez calcular as deformações tangenciais, ou distorções, através da consideração das deformações acusadas pelas rosetas retangulares.

Considera-se, então, um sistema de eixos x_1 . Neste sistema, nos eixos x_1 , x_2 e x'_1 , são colocados três extensômetros, como se pode constatar pela figura 112.

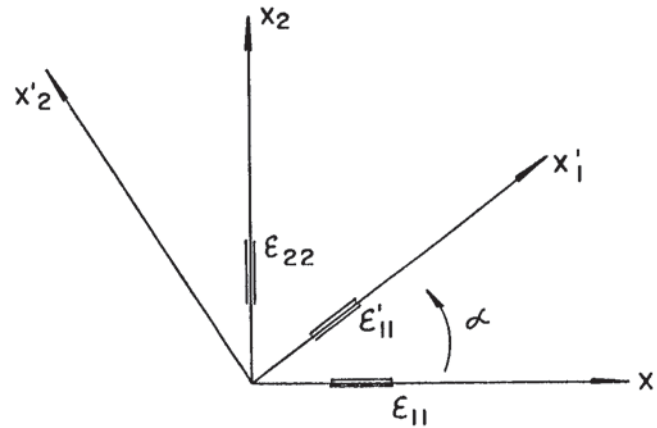


Fig. 112- Posicionamento dos extensômetro x'_1 .

Obtêm-se, então, as deformações tangenciais γ_{12} ou γ'_{12} , ou ainda γ_{12} e γ'_{12} , através das deformações nominais ϵ_{11} , ϵ_{22} e ϵ'_{11} , como se segue.

Seja o tensor transformação de coordenadas:

$$l_{1j} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (228)$$

e a transformação tensorial:

$$\epsilon'_{pq} = l_{p1} l_{qj} \epsilon_{1j} \quad (229)$$

Desenvolvendo-se (229) para $p = q = 1$ e para $p = 1$ e $q = 2$, tem-se:

$$\epsilon'_{11} = \epsilon_{11} \cos^2 \alpha + \epsilon_{22} \text{sen}^2 \alpha + \gamma_{12} \text{sen } \alpha \cos \alpha \quad (230)$$

e

$$\gamma'_{12} = 2(\epsilon_{22} - \epsilon_{11}) \text{sen } \alpha \cos \alpha + \gamma_{12} (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) \quad (231)$$

Da equação (230) pode-se tirar:

$$\gamma_{12} = (\epsilon'_{11} - \epsilon_{11} \cos^2 \alpha - \epsilon_{22} \sin^2 \alpha) / \sin \alpha \cos \alpha \quad (232)$$

e substituindo-se em (231), chega-se a :

$$\begin{aligned} \gamma'_{12} &= 2 (\epsilon_{22} - \epsilon_{11}) \sin \alpha \cos \alpha + (\epsilon'_{11} - \epsilon_{11} \cos^2 \alpha - \epsilon_{22} \sin^2 \alpha) \times \\ &\times (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) / \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (233)$$

e daí a:

$$\begin{aligned} \gamma'_{12} &= 2(\epsilon_{22} - \epsilon_{11}) \sin \alpha \cos \alpha + (\epsilon'_{11} - \epsilon_{11} \cos^2 \alpha - \epsilon_{22} \sin^2 \alpha) \times \\ &\times \cotg 2\alpha \end{aligned} \quad (234)$$

Naturalmente, se $\alpha = 45^\circ$, obtém-se:

$$\gamma'_{12} = 2(\epsilon_{22} - \epsilon_{11}) \quad (235)$$

Por outro lado, extrapolações das equações (230) e (231) podem ser alcançadas ao se dispor os extensômetros em posições genéricas, mas, de um modo geral, dependentes de três deformações medidas.

5.4- Determinação das Constantes de Elasticidade

5.4.1- Módulo de Elasticidade e Coeficiente de Poisson

A equação constitutiva de um material ortotrópico escreve-se como:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (236)$$

ou na forma expandida através de:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{3131} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix}$$

(237)

Nesta expressão os eixos de simetria elástica T, L, R coincidem com os eixos x_1, x_2, x_3 .

Se se considerar uma sollicitação tipo tensão normal atuando num sólido, tal como um dos corpos de prova descritos anteriormente, e arbitrariamente na direção x_1 , conforme a figura:

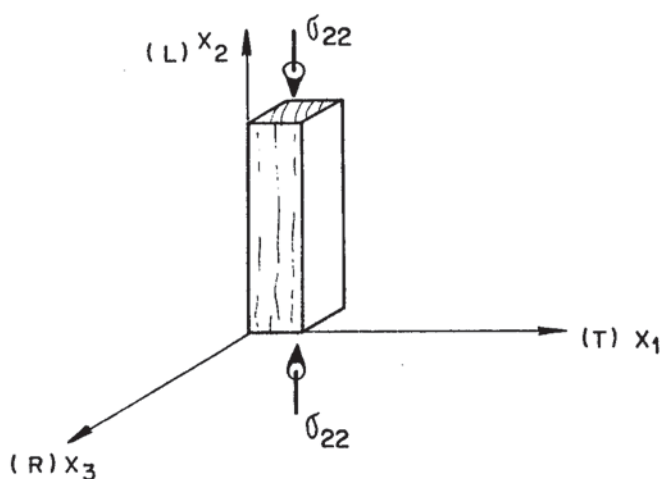


Fig. 113- Tensão σ_{11} aplicada no sólido segundo o eixo principal L.

Na equação (237) a parte relativa às tensões reduz-se ao segundo elemento.

Nesse aspecto só será possível relacionar deformações normais com tensão normal, via tensor constitutivo.

Sob esta ótica tem-se:

$$\epsilon_{11} = S_{1122} \sigma_{22} ; \epsilon_{22} = S_{2222} \sigma_{22} ; \epsilon_{33} = S_{3322} \sigma_{22} \quad (238)$$

ou em termos das constantes de elasticidade:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \sigma_{22} \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{E_L} \sigma_{22} \\ \epsilon_{33} &= - \frac{\nu_{LR}}{E_L} \sigma_{22} \end{aligned} \quad (239)$$

e daí:

$$\nu_{LT} = - \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{22}} ; \nu_{LR} = - \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{22}} \quad (240)$$

Nesse contexto, colocando-se extensômetros nas faces LT e LR, nas direções x_1 , x_2 e x_3 , consegue-se determinar três constantes de elasticidade da madeira.

De forma análoga, determina-se outras três constantes da madeira, fazendo-se uso de outro corpo de prova com a maior dimensão na direção T. Assim:

$$E_T = \frac{\sigma_{22}}{\epsilon_{22}}$$

$$\nu_{TL} = - \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{22}}$$

e também,

$$\nu_{TR} = - \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{22}} \quad (241)$$

e num outro corpo de prova, com a maior dimensão na direção R, se obtem:

$$E_R = \frac{\sigma_{22}}{\epsilon_{22}}$$

$$\nu_{RL} = - \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{22}} \quad (242)$$

$$\nu_{RT} = - \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{22}}$$

As figuras 114, 115 mostram a disposição dos extensômetros elétricos em um corpo de prova de Guapuruvú.

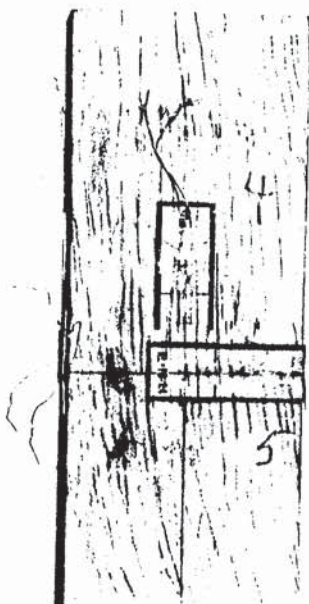


Fig. 114- Disposição de extensômetros.



Fig. 115- Disposição de extensômetro.

Na verdade, foram utilizados 8 extensômetros por corpo de prova. Isto se deve aos problemas de excentricidade da carga, da heterogeneidade do material, da funcionabilidade dos equipamentos de leituras, enfim, buscando-se maior precisão nos resultados, conforme já descrito.

5.4.2- Módulo de Elasticidade Transversal

a) Análise via roseta

Retomando-se a equação constitutiva para materiais ortotrópicos, observa-se nas direções principais de elasticidade as seguintes relações:

$$\gamma_{12} = S_{1212} \tau_{12}$$

$$\gamma_{23} = S_{2323} \tau_{23}$$

e também,

$$\gamma_{31} = S_{3131} \tau_{31} \quad (243)$$

Para que estas relações possam ser praticadas há necessidade da existência das distorções e das tensões tangenciais serem não nulas.

Entretanto, numa solicitação a compressão simples, onde aparece a coincidência entre os eixos de simetria elástica e os eixos do sistema de referência x_1 , no qual se aplica uma carga numa destas direções, não são passíveis de uso as relações (243).

Cumprе ressaltar que ao se aplicar numa compressão simples as relações (243), genericamente expressas por:

$$\gamma_{ij} = S_{ijkl} \tau_{kl} \quad (244)$$

ou:

$$S_{ijkl} = \frac{\gamma_{ij}}{\tau_{kl}} \quad (245)$$

recai-se numa maneira inadequada de se analisar esta questão.

Desenvolvendo-se, pois, as expressões γ_{ij} e τ_{kl} para o caso do plano $x_1 x_2$, obtém-se:

$$\gamma'_{12} = 2(\epsilon_{22} - \epsilon_{11}) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \gamma_{12} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \quad (246)$$

e:

$$\tau'_{12} = (\tau_{22} - \tau_{11}) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \tau_{12} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \quad (247)$$

Daí, ao se aplicar (245), com $S_{ijkl} = 1/G'_{12}$, depreende-se que:

$$G'_{12} = \frac{(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \tau_{12} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)}{2(\epsilon_{22} - \epsilon_{11}) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \gamma_{12} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)} \quad (248)$$

Assim, em conformidade com o ensaio de compressão simples, tem-se que $\sigma_{11} = \tau_{12} = \gamma_{12} = 0$ e portanto:

$$G'_{12} = \frac{\sigma_{22}}{2(\epsilon_{22} - \epsilon_{11})} \quad (249)$$

Ou seja, o módulo de elasticidade transversal seria aparentemente independente do ângulo α . Isto, a primeira vista, indicaria que G'_{12} viria ser independente em relação à variação dos ângulos das fibras. Na realidade estar-se-ia determinando G_{1j} em diferentes planos $x_1 - x_j$. É claro que as deformações ϵ_{22} e ϵ_{11} apresentariam valores distintos nos diversos planos $x_1 - x_j$. No entanto, havendo coincidência entre os eixos x_1 e os eixos de simetria elástica do material, sempre estar-se-á estabelecendo o módulo de elasticidade transversal para um plano principal de elasticidade.

A inobservância ao fato de que para situações diferentes desta anterior, os elementos que comparecem no tensor constitutivo não são mais elementos nulos, não se podendo, desse modo, aplicar, indistintamente, a expressão (244).

Dessa maneira, ao se analisar a determinação de G_{1j} através das relações entre tensões e deformações, deve-se ter consciência de que a madeira não é um material isotrópico.

À luz dessas considerações, no que tange à determinação das constantes G_{1j} com uso do ensaio de compressão simples, deve-se preparar um corpo de prova com as direções principais de elasticidade sempre não coincidentes com a direção de aplicação da carga, que atua num dos eixos x_1 .

Assim haverá a possibilidade de se estabelecer a relação G_{1j} , empregando-se as relações (230), (231), (232) e (244) e chegando-se em:

$$G'_{12} = \frac{(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \operatorname{sen} 2\alpha + 2 \tau_{12} \cos 2\alpha}{4(\epsilon'_{11} - \epsilon_{11} \cos^2 \alpha - \epsilon_{22} \operatorname{sen}^2 \alpha) \cotg 2\alpha + 2(\epsilon_{22} - \epsilon_{11}) \operatorname{sen} 2\alpha} \quad (250)$$

Esta expressão é válida, também para os planos $x_1 - x_3$ e $x_2 - x_3$, com as devidas adequações.

Nota-se que para um ângulo $\alpha = 45^\circ$ e numa sollicitação de

compressão simples as expressões (249) e (250) são as mesmas.

Na figura 116 é esquematizado um corpo de prova de acordo com as considerações externadas neste item.

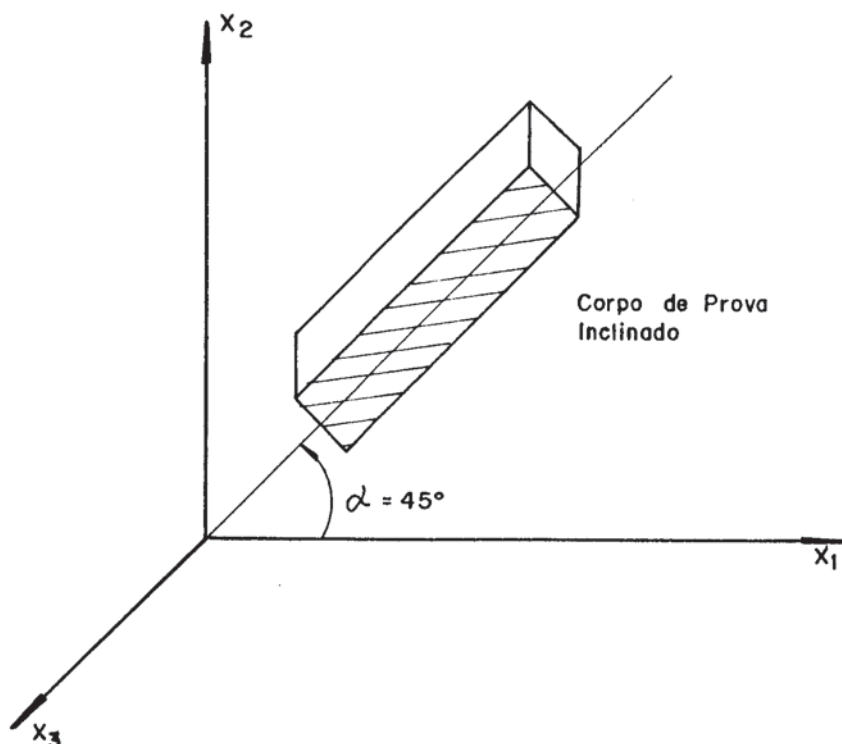


Fig. 116- Corpo de prova na posição inclinada de $\alpha = 45^\circ$

Este corpo de prova é retirado segundo direções diferentes das direções L, T e R. Constitue-se de difícil preparação, requerendo uso de motosserra, serra de disco e acompanhamento direto para se assegurar bons resultados.

Os extensômetros são instalados segundo as direções x_1, x_2 e numa direção inclinada de α com estes eixos. A presença de um quarto extensômetro no plano $x_1 - x_2$ atenta para a verificação das deformações serem invariantes em eixos ortogonais.

Há de se observar que a colocação dos extensômetros se dá nas faces que representam os planos onde se deseja determinar o módulo de elasticidade correspondente.

Desse modo, se se deseja determinar por exemplo, G_{LT} , deve-se colocar os extensômetros na face LT. A figura 117 ilustra este fato, com o detalhe enfocando-se as tensões tangenciais no

ponto central da face.

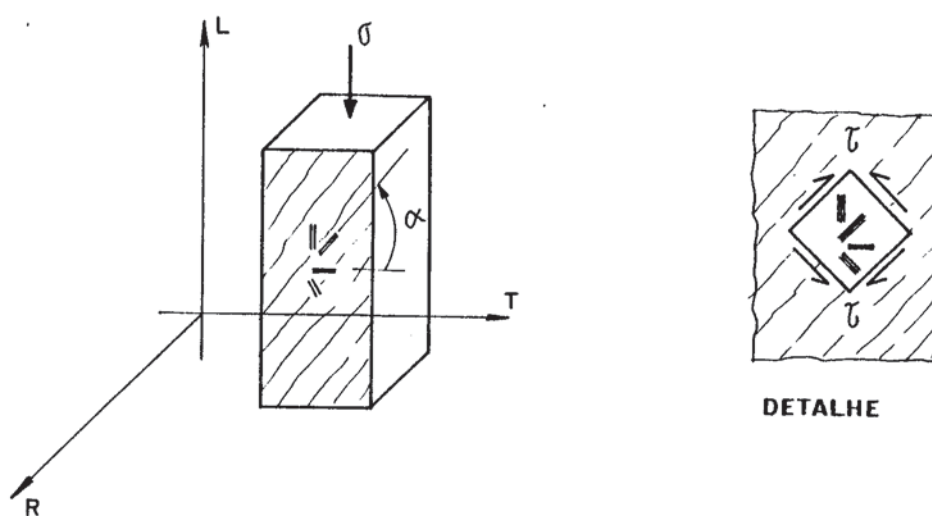


Fig. 117- Corpo de prova para determinação de G_{1j} .

Assim, em linhas gerais, as superfícies dos corpos de prova ensaiados com objetivo da determinação de G_{1j} estão esquematizados na figura 118.

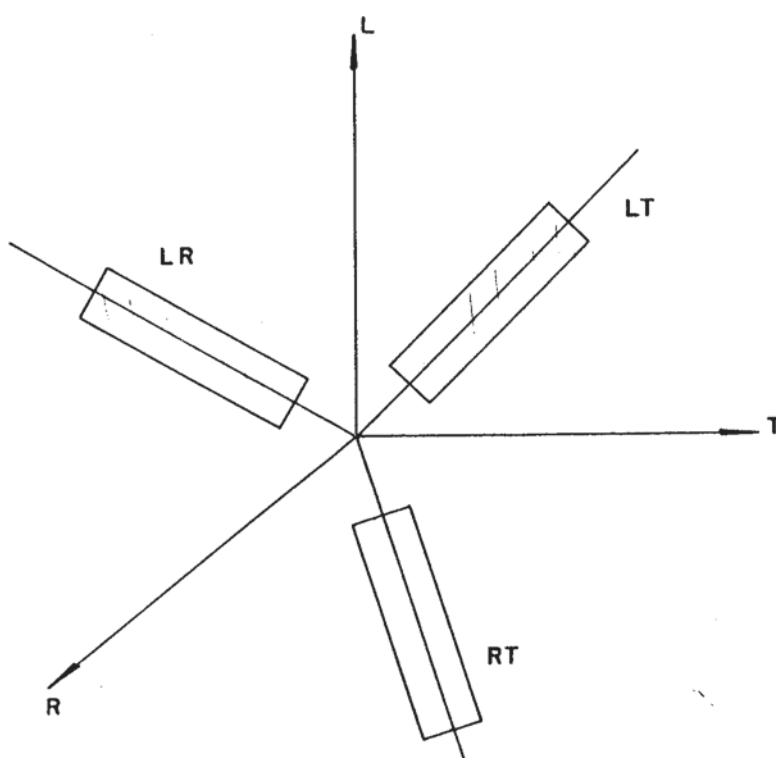


Fig. 118- Faces LT, LR, LT dos corpo de prova.

b) Análise via Transformação Tensorial de S_{ijkl}

Com base na transformação tensorial de 4ª ordem o tensor S_{ijkl} , na sua condição discretizada, fica sendo função de constantes de elasticidade e de funções trigonométricas, como já abordados no item 3.7.

Assim sendo, ao se analisar a expressão S'_{1111} ou S'_{11} , a qual se transcreve aqui:

$$S'_{11} = \frac{\cos^4 \theta}{E_L} + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{TL}}{E_T} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{E_T} \quad (251)$$

Observa-se que uma das constantes de elasticidade integrantes de S'_{11} é o módulo de elasticidade transversal G_{LT} . Evidentemente, esta expressão advem de uma transformação no plano LT. Desse modo, os outros G_{ij} surgiriam quando se detivesse aos planos LR e RT.

Com efeito, se se conhecem as outras constantes que se encontram em (251), a constante G_{ij} estaria, desta forma, determinada.

Para isso, é suficiente realizar um ensaio de compressão simples numa peça de madeira, onde as fibras estão inclinadas em relação a um dos eixos x_i de um ângulo θ .

Considera-se, então, a figura 119.

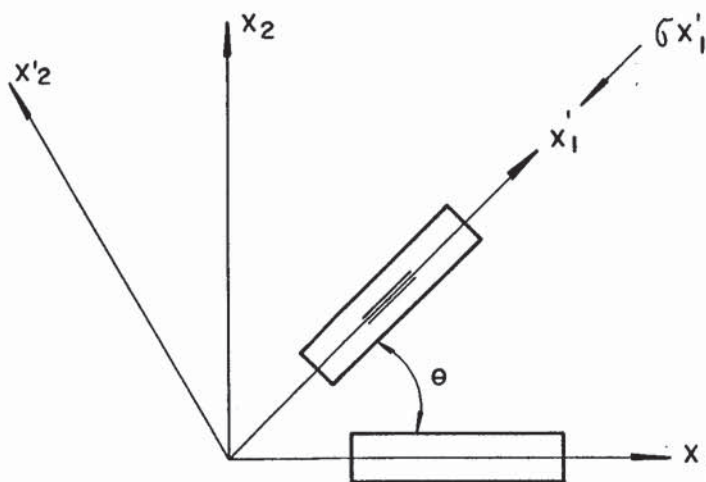


Fig. 119- Corpo de prova rodado de θ a partir de x_1 .

Segundo este esquema de ensaio, ao se dispor um extensômetro na direção x'_1 torna-se possível determinar S'_{11} , que nada mais é que E'_{x_1} . Dessa forma, escreve-se:

$$S'_{11} = \frac{1}{E'_{x_1}} = \frac{\varepsilon'_{x_1}}{\sigma'_{x_1}} \quad (252)$$

Em decorrência disto e fazendo-se uso da expressão (248), pode-se escrever genericamente que:

$$\frac{1}{G'_{x_1 x_2}} = \frac{1}{E'_{x_1} (\sin^2 \theta \cos^2 \theta)} - \frac{\cos^4 \theta}{E_{x_2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta} + \frac{2\nu_{x_2 x_1}}{E_{x_2}} \quad (253)$$

Pode-se também, mostrar a representação da figura 116 em sua forma usual, ou seja, o corpo de prova na direção vertical.

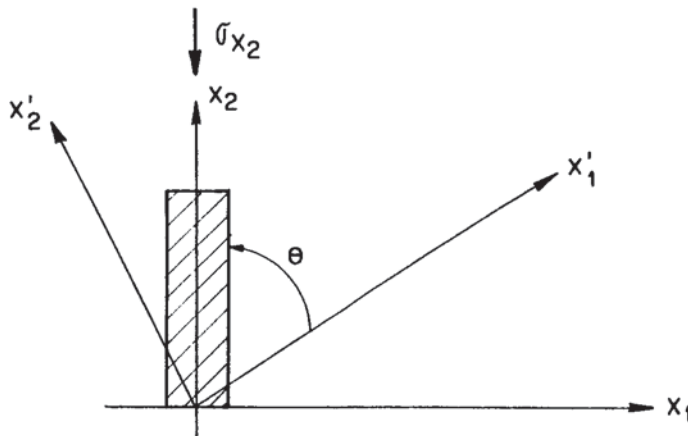


Fig. 120- Posição usual de ensaio.

Nas figuras 121 e 122 são apresentadas fotos ilustrativas dos extensômetros elétricos colocados nas faces LT e LR.

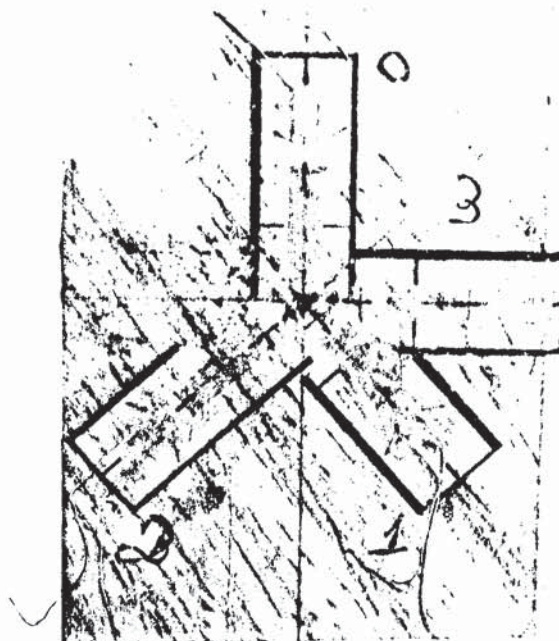


Fig. 121- Foto da face LT com extensômetros.

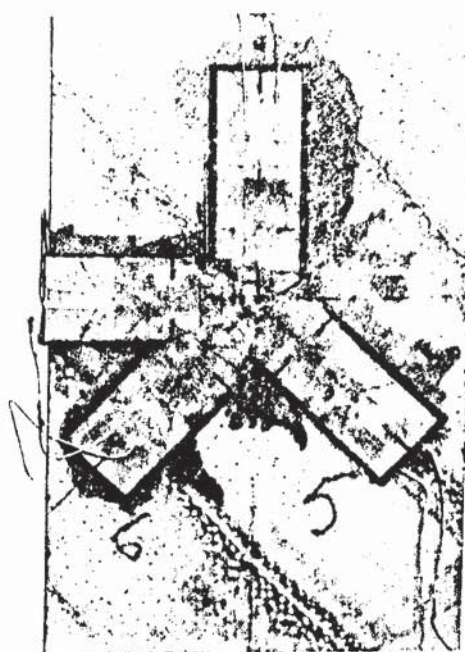


Fig. 122- Foto da face LR com extensômetros.

Nota-se que nestas figuras a presença de quatro extensômetros em cada uma das faces onde se deve medir as deformações. Os extensômetros alocados nas posições diferentes da vertical tiveram a função na análise de possíveis excentricidades de carga, e, principalmente na constatação da quantificação da variação das somas de deformações em eixos ortogonais.

5.4.3- Posição dos Extensômetros nos Corpos de Prova Ensaaiados a Compressão Simples

Na figura 123 estão indicadas as posições dos corpos de prova, em número de seis, necessários à determinação das constantes de elasticidade da madeira.

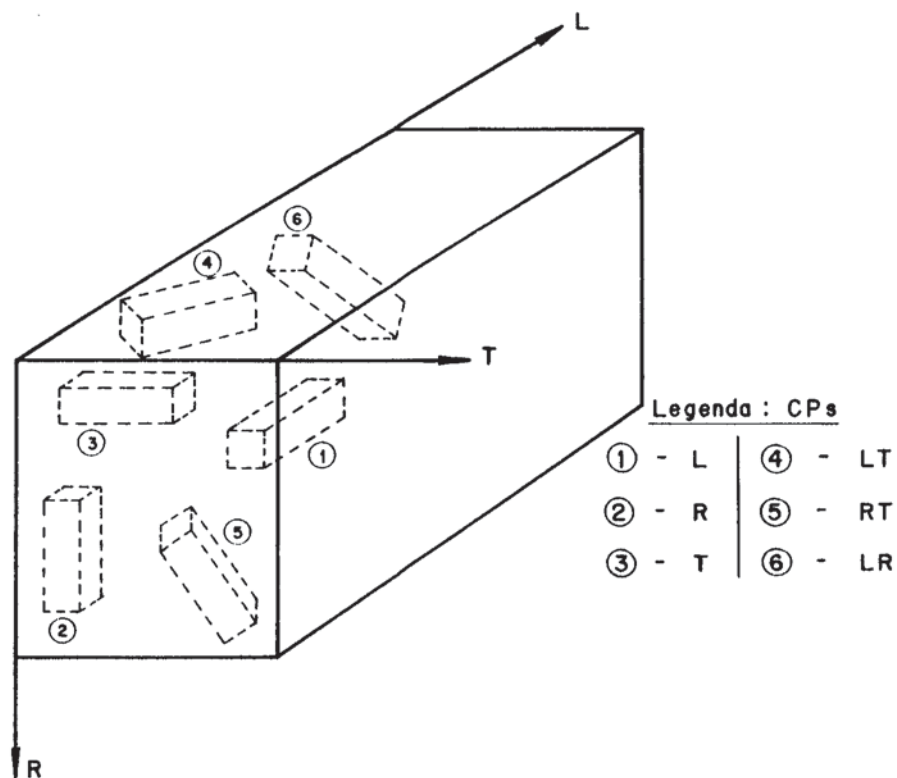


Fig. 123- Posição dos corpos de prova numa amostra.

Desse modo, os corpos de prova nas direções principais contribuem para a determinação das constantes E_1 e ν_{1j} e os corpos de prova em direções inclinadas nos planos principais acenam para a determinação dos G_{1j} .

Assim sendo, pode-se fazer o seguinte esquema para evidenciar os corpos de prova com seus respectivos extensômetros.

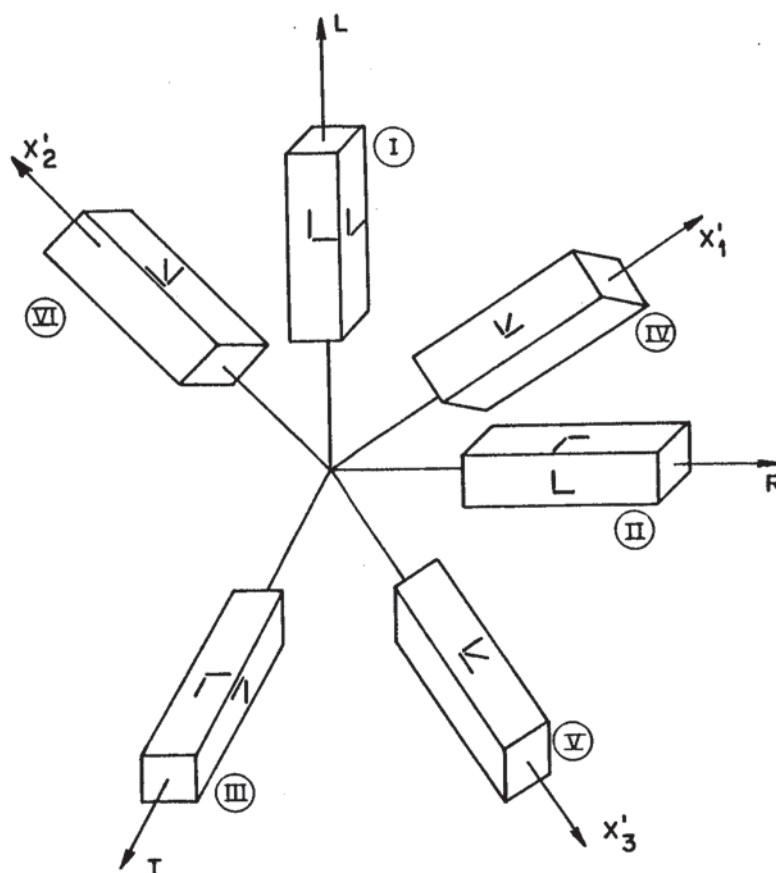


Fig. 124- Posição dos CPs e dos extensômetros.

Posição dos Extensômetros nos CPs.

Corpo de prova	Posição dos extensômetros	Constante de Elasticidade
I		E_L, ν_{LR}, ν_{LT}
II		E_R, ν_{RT}, ν_{RL}
III	ver Fig. 124	E_T, ν_{TR}, ν_{TL}
IV		$E_b, G_{LR} \quad E_b \rightarrow G_{LR}$
V		$E_c, G_{RT} \quad E_c \rightarrow G_{RT}$
VI		$E_a, G_{TL} \quad E_a \rightarrow G_{TL}$
Expressão	A B	A B

Observação sobre a Tabela 10:

A \Rightarrow Roseta \rightarrow Rotação de τ'_{xy} e γ'_{xy}

B \Rightarrow Expressão (253).

Antes de se passar para a apresentação dos resultados é conveniente destacar que os carregamentos aplicados nos corpos de prova sempre estiveram relacionados com a fase elástica do material. Vale notar que as tensões normais que solicitaram os corpos de prova nas direções R, T e nas direções inclinadas estiveram na relação de 1:5 com aquelas dos corpos de prova na direção L. Ensaio preliminares de compressão simples em corpos de prova segundo estas direções asseguraram a validade do procedimento aqui adotado. Informações complementares a respeito de alguns valores das constantes de elasticidade das espécies empregadas foram obtidas no Boletim 31 do IPT⁽⁹⁴⁾

5.5 Apresentação dos Resultados

Na Tabela 11 estão indicados os resultados das constantes de elasticidade para as quatro espécies de madeira utilizadas, obtidas através da metodologia aqui desenvolvida.

Na próxima página está apresentada esta tabela.

TABELA 11- Constantes de Elasticidade da Madeira

Espécie	Corpo de prova	E_L	E_T	E_R	G_{LT}	G_{LR}	G_{RT}
		(unidade MPa)					
Guapuruvú	S1	4497,2	435,1	610,8	534,6	591,2	84,2
	S2	4100,0	423,8	600,6	485,2	456,2	68,7
	S3	5400,4	391,8	637,8	526,9	602,7	63,7
	S4	3747,3	334,2	610,6	435,8	491,0	47,2
	Tc1	3901,0	349,2	526,1	471,3	415,4	72,5
	Tc2	3507,5	287,2	519,5	420,8	377,8	72,9
Ipê	I1	18043,9	960,5	1748,1	831,2	620,2	356,3
Angico	A1	8558,5	462,1	759,0	727,1	542,4	248,6
Pinus	P1	5471,0	737,6	1049,4	307,0	542,6	116,3
		ν_{LT}	ν_{LR}	ν_{RT}	ν_{TL}	ν_{RL}	ν_{TR}
Guapuruvú	S1	0,6865	0,5585	0,8300	0,0645	0,0770	0,5300
	S2	0,6359	0,5159	0,9611	0,0557	0,0713	0,6100
	S3	0,7086	0,5932	0,9074	0,0606	0,0670	0,6125
	S4	0,6238	0,6134	0,8673	0,0593	0,0711	0,5412
	Tc1	0,4149	0,4166	0,6680	0,0318	0,0701	0,3541
	Tc2	0,5019	0,4818	0,6802	0,0448	0,0662	0,3458
Ipê	I1	0,4790	0,4345	0,6136	0,0270	0,0371	0,3532
Angico	A1	0,4549	0,5089	0,8068	0,0239	0,0484	0,4975
Pinus	P1	0,3346	0,3701	0,6393	0,0477	0,0858	0,4509

A seguir são analisados os resultados desta tabela.

5.6- Análise dos Resultados

A verificação da simetria do tensor constitutivo para as quatro espécies de madeiras estudadas divide-se em dois tipos de análise. A primeira delas se volta aos resultados obtidos para as constantes E_{11} , G_{11} e ν_{11} da espécie Guapuruvú, haja vista que se dispõem de seis valores distintos para manipulação estatística. Este número de dados constitui para a madeira uma pequena amostra como citam Mascia et alii⁽⁹⁵⁾, em 1990. A segunda análise se restringe à constatação da variação percentual das relações entre as constantes de elasticidade. Na realidade, a adoção de estudos acerca das três espécies de madeira afora o Guapuruvú se originou mais no fato de uma extrapolação da idéia de simetria do tensor S_{11} do que numa análise estatística mais rigorosa. Isto está balizado no enorme dispêndio de extensômetros elétricos que se faria necessário para alcançar os mesmos resultados da espécie Guapuruvú.

Utilizando-se do programa estatístico Minitab⁽⁹⁶⁾ e consoante aos conceitos estatísticos de pequenas amostras, como apresentados por Box et alii⁽⁹⁷⁾, pode-se ater à seguinte análise.

Seja μ_1 a média da 1^a amostra e μ_2 a média da 2^a amostra. Para se testar se estas duas amostras pertencem a um mesmo universo, emprega-se a seguinte hipótese:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \text{ versus } H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

calculando-se a significância através da expressão:

$$t = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2} \leq t_{\phi} (P\%) \quad (254)$$

onde: \bar{x}_1 = estimativa da média da primeira amostra;
 \bar{x}_2 = estimativa da média da segunda amostra;
 s_1 = desvio padrão da primeira amostra;
 s_2 = desvio padrão da segunda amostra;
 n_1 = número de elementos da primeira amostra;

n_2 = número de elementos da segunda amostra;
 $t_{\phi}(P\%)$ = valor de t'Student' com P% de confiança
 $\phi(P\%)$ = nível de confiança adotado.

Por outro lado, para se verificar se as médias das amostras são estatisticamente equivalentes, isto é, se o intervalo da diferença das médias μ_2 , μ_1 contém o zero, determina-se o seguinte intervalo:

$$\begin{aligned}
 \Delta_- &= (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t^* \sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2} \leq \mu_2 - \mu_1 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \\
 &+ t^* \sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2} = \Delta_+ \quad (255)
 \end{aligned}$$

onde t^* é o valor correspondente para P% de confiança. A expressão dos graus de liberdade (df) é equivalente a:

$$df = \frac{[(s_1^2/n_1) + (s_2^2/n_2)]}{\left[\frac{(s_1^2/n_1)^2}{(n_1 - 1)} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{(n_2 - 1)} \right]} \quad (256)$$

O intervalo de confiança pode ser visualizado por meio da seguinte figura:

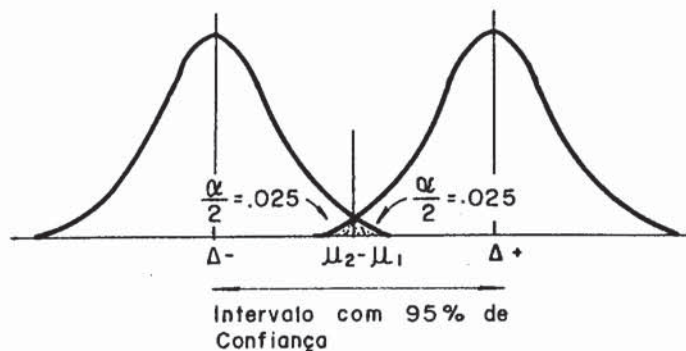


Fig. 125- Intervalo de confiança da média.

No programa Minitab, o teste TWOSAMPLE realiza estas duas verificações, simultaneamente, como será apresentado.

Neste contexto, com base na Tabela 12 pode-se manter uma outra tabela, onde são representados os valores de ν_{ij}/E_i e ν_{ji}/E_{ij} .

TABELA 12- Valores de ν_{ij}/E_i e ν_{ji}/E_j para a Espécie Guapuruvú (unidade $10^{-4}/\text{MPa}$)

Córpore de prova	$\frac{\nu_{LT}}{E_L}(C1)^*$	$\frac{\nu_{TL}}{E_T}(C2)$	$\frac{\nu_{LR}}{E_L}(C3)$	$\frac{\nu_{RL}}{E_R}(C4)$	$\frac{\nu_{TR}}{E_T}(C5)$	$\frac{\nu_{RT}}{E_R}(C6)$
S1	1,5271	1,4860	1,2418	1,2606	12,1811	13,5887
S2	1,5509	1,3145	1,2582	1,1871	14,3935	16,0023
S3	1,3121	1,5472	1,0984	1,0505	15,6329	14,2270
S4	1,6646	1,7749	1,6369	1,1649	16,1938	14,2040
Tc1	1,2865	1,2856	1,2350	1,2583	9,8999	12,9291
Tc2	1,1828	1,1061	1,1877	1,3493	12,3293	12,8585

* C1, ..., C6 são colunas no programa Minitab.

Aplicando-se, enfim, o teste TWOSAMPLE obtém-se:

```

TWOSAMPLE C1 C2
TWOSAMPLE t FOR C1 VS C2
      N      MEAN      STDEV      SE MEAN
C1  6      1.421      0.187      0.076
C2  6      1.419      0.234      0.096
95 PCT CI FOR MU C1 - MU C2: (-0.275, 0.278)
TTEST MU C1 = MU C2 (VS NE): t = 0.01 P=0.99

```

$$\left[\begin{array}{l} \Delta_- = -0,275 \leq \mu - \mu \leq \Delta_+ = 0,278 \\ t^* = 0,01 < t_{\phi} (5\%) 1,812 \end{array} \right.$$

TWOSAMPLE C3 C4

TWOSAMPLE t FOR C3 VS C4

	N	MEAN	STDEV	SE MEAN
C3	6	1.276	0,186	0,076
C4	6	1.212	0,102	0,042

95 PCT CI FOR MU C3 - MU C4: (-0.140, 0.269)

TTEST MU C3 = MU C4 (VS NE): t = 0.75 P=0.48

$$\left[\begin{array}{l} \Delta_- = -0,140 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq \Delta_+ = 0,269 \\ t^* = 0,75 < t_{\phi} (5\%) = 1,812 \end{array} \right.$$

TWOSAMPLE C5 C6

TWOSAMPLE t FOR C5 VS C6

	N	MEAN	STDEV	SE MEAN
C5	6	13.44	2.39	0.98
C6	6	13.97	1.16	0.47

95 PCT CI FOR MU C5 - MU C6: (-3.10, 2.04)

TTEST MU C5 = C6 (VS NE): t = -0.49 P=0.64

$$\left[\begin{array}{l} \Delta_- = -3,10 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq \Delta_+ = 2,04 \\ t^* = 0,49 < t_{\phi} (5\%) = 1,812 \end{array} \right.$$

Em vista dos resultados do teste TWOSAMPLE é possível concluir que as hipóteses H_0 apresentam alta aceitação e que as amostras são estatisticamente equivalentes. Em síntese, $\nu_{ij}/E_i \approx \nu_{ji}/E_j$ para $i, j = L, T, R$.

Para as outras três espécies de madeira estudadas, com uso da Tabela 13 é possível mostrar uma única tabela para verificação da simetria do tensor S_{ij} .

TABELA 13- Valores de ν_{ij}/E_j e ν_{ji}/E_j para Ipê
Angico, Pinus (unidade: $10^{-4}/\text{MPa}$)

Espécie	ν_{LT}/E_L	ν_{TL}/E_L	ν_{LR}/E_L	ν_{RL}/E_R	ν_{TR}/E_T	ν_{RT}/E_R
Ipê	0,2654	0,2811	0,2408	0,2122	3,6772	3,5100
Angico	0,5315	0,5172	0,5946	0,6376	10,7660	10,6297
Pinus	0,6115	0,6466	0,6764	0,8176	6,1130	6,0920

Aplicando-se, agora, o teste estatístico TWOSAMPLE nota-se que:

TWOSAMPLE C21 C22

TWOSAMPLE t FOR C21 VS C22

	N	MEAN	STDEV	SE MEAN
C21	9	2.61	3.66	2.2
C22	9	2.59	3.60	1.2

95 PCT CI FOR C21 - MU C22: (-3.6, 3.7)

TTEST MU C21 = MU C22 (VS NE): t = 0.01 P=0.99

$$\left[\begin{array}{l} \Delta_- = -3,6 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq \Delta_+ = 3,7 \\ t^* = 0,01 \leq t_{\phi} (5\%) = 1,746 \end{array} \right.$$

Sendo possível concluir pela aceitação da hipótese H_0 e pela equivalência estatística entre as amostras, ou seja, $\nu_{ij}/E_i \cong \nu_{ji}/E_j$, para $i, j = L, T, R$.

Interessante, neste momento, exercitar algumas comparações com os valores do S_{ij} , aqui encontrados, com valores presentes na literatura específica do assunto.

Na Tabela 14 estão os S_{ij} para a espécie de madeira Douglas fir, determinados a partir das referências bibliográficas apresentadas na tabela.

TABELA 14- Valores de S_{ij} para espécie Douglas' fir
(unidade: $10^{-4}/\text{MPa}$)

S_{ij}	ν_{LT}/E_L	ν_{TL}/E_T	ν_{LR}/E_L	ν_{RL}/E_R	ν_{RT}/E_R	ν_{TR}/E_T
Autores						
Bucur ⁽⁹⁸⁾	0,9235	0,9270	0,03912	0,03947	2,0000	2,0000
Keenan ⁽⁹⁹⁾	0,3428	0,4403	0,27650	0,28330	3,2110	3,1943
Hearmon ⁽¹⁾	0,2866	0,2820	0,18470	0,18860	3,6792	4,7435
Goodman e Bodig ⁽³⁹⁾	0,2260	0,2100	0,17100	0,16800	4,4100	4,2200

Com a utilização do teste TWOSAMPLE fica evidente que a hipótese H_0 não pode ser rejeitada a $P = 5\%$ e que as amostras são estatisticamente equivalentes.

TWOSAMPLE t FOR C26 VS C27

	N	MEAN	STDEV	SE MEAN
C26	12	1.31	1.59	0.46
C27	12	1.39	1.72	0.50

95 PCT CI FOR MU C26 = MU C27: (-1.49, 1.33)

TTEST MU C26 = MU C27 (VS NE): t -0.11 P=0.91

$$\left[\begin{array}{l} \Delta_- = -1,49 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq \Delta_+ = 1,33 \\ t^* = 0,11 < t_{\phi} (5\%) = 1,717 \end{array} \right.$$

5.7- Conclusão

Tendo em vista a análise estatística apresentada no corrente capítulo não se pode rejeitar a hipótese de simetria do tensor S_{ij} para as espécies de madeira analisadas neste trabalho.

Conclui-se também, de um modo geral, que apesar da

madeira possuir uma variabilidade nas propriedades de elasticidade, que lhe é intrínseca, o coeficiente de variação dos resultados, obtidos através do procedimento aqui empregado, manteve-se entre 9,76 e 12,65%. Isto constituiu-se numa interessante conclusão, pois a dispersão média para os valores correspondentes às propriedades de elasticidade da madeira gira ao redor de 20% a 25%, mesmo em pequenas amostras.

6- O EFEITO DA VARIAÇÃO DO ÂNGULO DAS FIBRAS NOS PLANOS LT, LR E DA VARIAÇÃO DO ÂNGULO DOS ANÉIS NO PLANO RT NO TENSOR S_{ijkl}

6.1- Introdução

No Capítulo 3, particularmente nos seus itens 3.7 e 3.8, foi apresentada uma revisão teórica a respeito da variação dos coeficientes S_{ijkl} ou S_{ij} em função da variação dos ângulos das fibras da madeira (θ) num plano $x_i - x_j$. Esta revisão veio acompanhada de gráficos ilustrativos onde se abordava a adequação dos resultados advindos de meios experimentais às curvas de S_{ijkl} , função de θ .

Neste presente capítulo serão estudadas as expressões de S'_{ijkl} enfatizando-se a construção de gráficos, onde é mostrada a variação das constantes de elasticidade em função dos ângulos das fibras ou dos anéis num determinado plano $x_i - x_j$. Estes gráficos se basearam em resultados obtidos na parte experimental do trabalho, em particular, nos ensaios de compressão simples.

6.2- Corpos de Prova Empregados

Para se tornar efetiva a construção dos gráficos S'_{ijkl} versus θ , foram empregados na parte experimental corpos de prova da espécie Guapuruvú, com dimensões nominais 4cm x 4cm x 12cm. O teor de umidade apresentou-se ao redor dos 12%.

As deformações que se fizeram presentes no ensaio de compressão simples foram medidas por extensômetros elétricos de resistência.

No que se refere à disposição dos extensômetros nos corpos de prova, este aspecto será abordado na análise das expressões S_{ijkl} .

De um modo geral, utilizaram-se 12 corpos de prova, sendo colocados em cada corpo de prova 4 extensômetros por face de interesse de leituras.

6.3- Os Elementos do Tensor S'_{ijkl} Colocados em Função do Ângulo θ

Conforme descrito no Capítulo 3, item 3.7, o tensor S_{ij} quando sofre uma transformação no plano $x_i - x_j$, por exemplo uma rotação θ em relação ao eixo x_k , apresenta os termos S'_{61} , S'_{62} , S'_{63} e S'_{64} agora não nulos, pode-se assim, escrever:

$$S'_{ij} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{21} & S'_{31} & 0 & 0 & S'_{61} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{32} & 0 & 0 & S'_{62} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{63} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{54} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \quad (257)$$

Genericamente, os termos S'_{ij} são dependentes das constantes de elasticidade da madeira, as quais são obtidas segundo as direções principais de elasticidade.

Para se traçar gráficos que mostrem a variação dos S'_{ij} com o ângulo θ é suficiente considerar as equações (199), do item 3.7, Capítulo 3.

Entretanto, estes gráficos teriam uma conotação teórica. Torna-se, aqui, especialmente interessante avaliar a aderência do modelo ortotrópico aos resultados experimentais correspondentes.

Neste sentido, ao se analisar corpos de prova que se situam em posições inclinadas aos eixos de simetria elástica num determinado plano, estar-se-ia testando a adequação teórico-experimental para a madeira. Certamente, faltaria um estudo envolvendo posições dos corpos de prova numa situação genérica num espaço tridimensional. Isto será visto no próximo capítulo.

6.4- Retirada dos Corpos de Prova

Os corpos de prova de Guapuruvú foram retirados segundo o seguinte esquema:

- do tronco da árvore retirou-se três blocos com cerca de 5cm x 15cm de seção transversal e comprimento variável, segundo as direções LT, LR e RT.

- desses blocos procedia-se a retirada de corpos de prova de dimensões nominais acima de 4cm x 4cm x 12cm.

- realizada essa etapa, os corpos de prova eram, então, climatizados e posteriormente preparados para o ensaio de compressão simples.

A figura 126 indica o posicionamento dos corpos de prova no plano $x_i - x_j$.

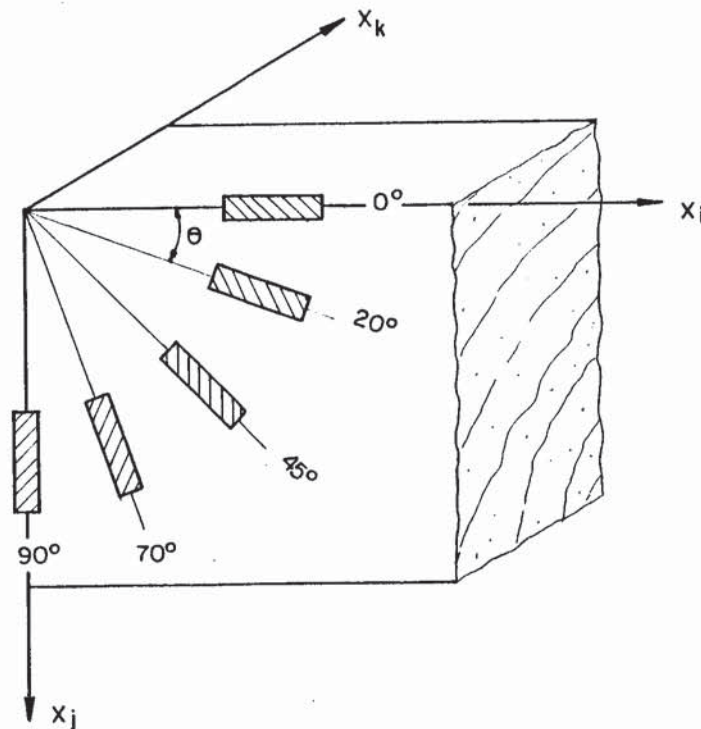


Fig. 126- Posição dos corpos de prova com inclinação 0° , 20° , 45° , 70° , 90° do eixo x_i .

Ao todo foram retirados 5 corpos de prova por plano, perfazendo-se 12 corpos de prova. As inclinações de θ foram escolhidas com o intuito de, com um número compatível de peças, se

alcançar uma satisfatória verificação da adequação teórico-experimental, ora estudada.

Há de se observar que a confecção de corpos de prova descrita apresenta certas dificuldades operacionais que requerem cuidado e um bom manejo do material.

6.5- O Ensaio de Compressão Simples

Ao se analisar a equação constitutiva para a madeira num sistema diferente do principal, deve-se escrever que:

$$\varepsilon'_{ij} = S'_{ijkl} \sigma'_{kl} \quad (258)$$

e em sua forma expandida, com algumas modificações na simbologia, como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{33} \\ \gamma'_{12} \\ \gamma'_{23} \\ \gamma'_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{21} & S'_{31} & 0 & 0 & S'_{61} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{32} & 0 & 0 & S'_{62} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{63} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{54} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{33} \\ \tau'_{12} \\ \tau'_{23} \\ \tau'_{31} \end{pmatrix} \quad (259)$$

Ao se deter no ensaio de compressão simples, isto é, a uma solicitação por compressão σ'_{11} , todos os elementos do tensor σ'_{ij} são nulos, a menos de um. Seja então σ'_{11} o elemento não nulo.

Nestes termos, pode-se isolar as seguintes expressões:

$$\varepsilon'_{11} = S'_{11} \sigma'_{11}$$

$$\varepsilon'_{22} = S'_{12} \sigma'_{11}$$

$$\epsilon'_{33} = S'_{13} \sigma'_{11} \quad (260)$$

$$\gamma'_{31} = S'_{16} \sigma'_{11}$$

Desse modo, pode-se determinar S'_{11} , S'_{12} , S'_{13} e S'_{16} para cada valor de θ desejado. No caso 0° , 20° , 45° , 70° e 90° .

Feito isto, compara-se os valores de S_{1j} com aqueles obtidos pelos S'_{1j} , função de θ (equação 199).

6.6- Determinação de S'_{11} , S'_{12} , S'_{13} e S'_{16}

6.6.1- Os Elementos S'_{11}

Colocando-se um extensômetro elétrico em cada uma das faces de um corpo de prova na direção do carregamento, pode-se medir ϵ'_{11} . Tendo σ'_{11} obtem-se o S'_{11} . Este procedimento é específico para cada plano $x_1 - x_j$ e naturalmente para cada ângulo θ escolhido.

6.6.2- Os Elementos S'_{12}

Neste instante, já se apresentam necessários dois extensômetros, um na direção da carga e outro na direção perpendicular a esta. Isto em cada face que se deseja fazer as medições.

Seja, então a figura 127, que servirá de referência para o posicionamento dos extensômetros elétricos.

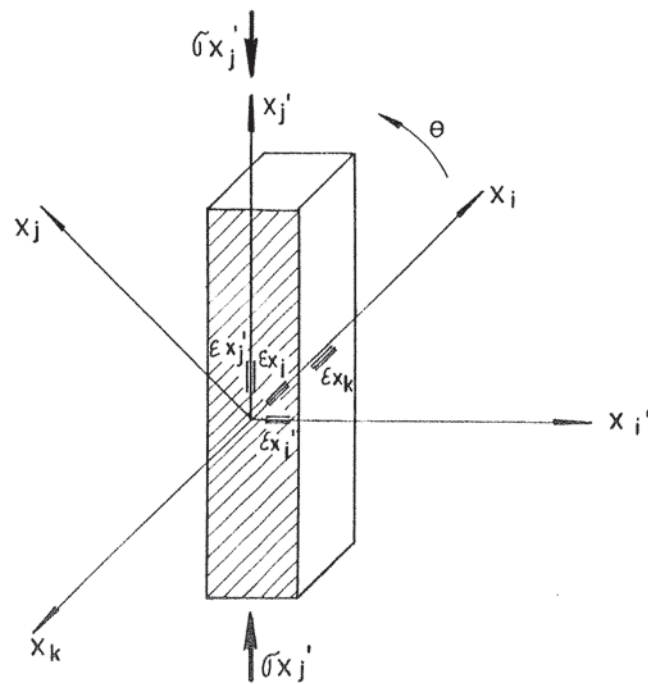


Fig. 127- Posição dos extensômetros elétricos para determinação dos S'_{1j} .

Dessa forma, $\epsilon'_{x_j} = \epsilon_{11}$, $\epsilon'_{x_i} = \epsilon_{22}$ e $\sigma'_{x_j} = \sigma_{11}$.

Portanto:

$$\begin{aligned}
 S'_{12} &= -\frac{\nu'_{x_1 x_j}}{E'_{x_1}} = -\frac{\nu'_{x_j x_1}}{E'_{x_j}} = -\frac{\epsilon'_{x_1}}{\epsilon'_{x_j}} \cdot \frac{\epsilon'_{x_j}}{\sigma'_{x_j}} = \\
 &= -\frac{\epsilon'_{x_1}}{\sigma'_{x_j}} = -\frac{\epsilon_{22}}{\sigma_{11}} \quad (261)
 \end{aligned}$$

6.6.3- Os Elementos S'_{13}

Os elementos S'_{13} vêm da expressão:

$$\epsilon'_{33} = S'_{13} \sigma'_{11} \quad (262)$$

Ao se colocar um extensômetro na direção perpendicular ao plano x_1 e x_j , ou seja, x_k , é imediata a determinação deste coeficiente de elasticidade. Isto se vê na figura 127.

No entanto é conveniente fazer a seguinte observação para esclarecimento do cálculo de S'_{13} .

Assim, para cálculo de S'_{13} no plano IT, mede-se deformação na direção R; quando se calcula S'_{13} no plano TR, mede-se a deformação na direção L e finalmente ao se calcular S'_{13} no plano LR, a deformação é medida na direção T.

6.6.4 Os Elementos S'_{16}

Neste caso a situação merece mais atenção, visto que o elemento S'_{16} envolve uma relação entre tensão normal e distorção.

Dessa forma:

$$S'_{16} = \frac{\gamma'_{x_1 x_j}}{\sigma'_{x_j}} \quad (263)$$

mas:

$$\gamma'_{x_1 x_j} = (\epsilon'_{x_1} - \epsilon'_{x_j} \sin^2 \theta - \epsilon'_{x_j} \cos^2 \theta) / \sin \theta \cos \theta \quad (264)$$

Conclui-se, então, que existe a necessidade da colocação de um outro extensômetro segundo a direção x_1 . Perfaz-se, assim, uma roseta, conforme se vê na figura 127.

6.7- Apresentação dos Resultados

6.7.1- Os Elementos S'_{11} ou $1/E'_{1j}$

Na Tabela 15 estão apresentados os valores de $1/S'_{1j}$, obtidos na parte experimental realizada. São apresentados os

valores inversos de S'_{1j} , haja vista que estes representam os módulos de elasticidade E'_{1j} para cada plano principal de elasticidade.

TABELA 15- Valores de E'_{1j} para cada Plano Principal (MPa)

θ	0°	20°	45°	70°	90°
$1/S'_{11}$					
plano LT	3747,3	1502,0	771,2	286,1	334,2
plano LR	3747,3	1804,5	900,8	413,3	610,6
plano RT	610,6	308,9	177,1	211,3	334,2

Há de se observar que os ângulos θ foram medidos nos planos LT e LR partindo-se do eixo L, e no plano RT, do eixo R.

6.7.2- Os Elementos S'_{12}

Na Tabela 16 apresentam-se os valores inversos de S'_{12} advindos da experimentação realizada.

TABELA 16- Valores de $1/S'$ para cada Plano Principal (MPa)

θ	0°	20°	45°	70°	90°
$1/S'$					
plano LT	-5514	-8989	11300	-8421	-5514
plano LR	-6109	-6767	-8500	-7021	-6109
plano RT	-704	-320	-235	-330	-704

6.7.3- Os Elementos S'_{13}

Apresentam-se na Tabela 17 os elementos $1/S'_{13}$.

TABELA 17- Valores de $1/S'_{13}$ para cada Plano Principal
(MPa)

	θ	0°	20°	45°	70°	90°
$1/S'_{13}$						
plano LT (LL)*		-6007	-5490	-5600	-6253	-6109
plano LR (RR)*		-704	-440	-1438	-4787	-8587
plano RT (TT)*		-617	-654,5	-1459	-4285	-5635

* A representação LL, RR, TT está de acordo com o item 6.6.3.

6.7.4- Os Elementos S'_{16}

Na Tabela 18 encontram-se os inversos dos elementos S'_{16}

TABELA 18- Valores de $1/S'_{16}$ para cada Plano Principal
(MPa)

	θ	0°	20°	45°	70°	90°
$1/S'_{16}$						
plano LT		nd	-3130	1468	611	nd
plano LR		nd	-46182	-1304	1960	nd
plano RT		nd	95,5	540	-509	nd

Para os ângulos 0° e 90° os valores de S'_{16} são não definidos (nd).

6.8- Gráficos S'_{1j} para a Espécie Guapuruvú

São apresentados neste item os gráficos S'_{1j} em função do ângulo das fibras ou dos anéis.

Nestes gráficos estão plotados os pontos cujos valores foram obtidos através da presente experimentação.

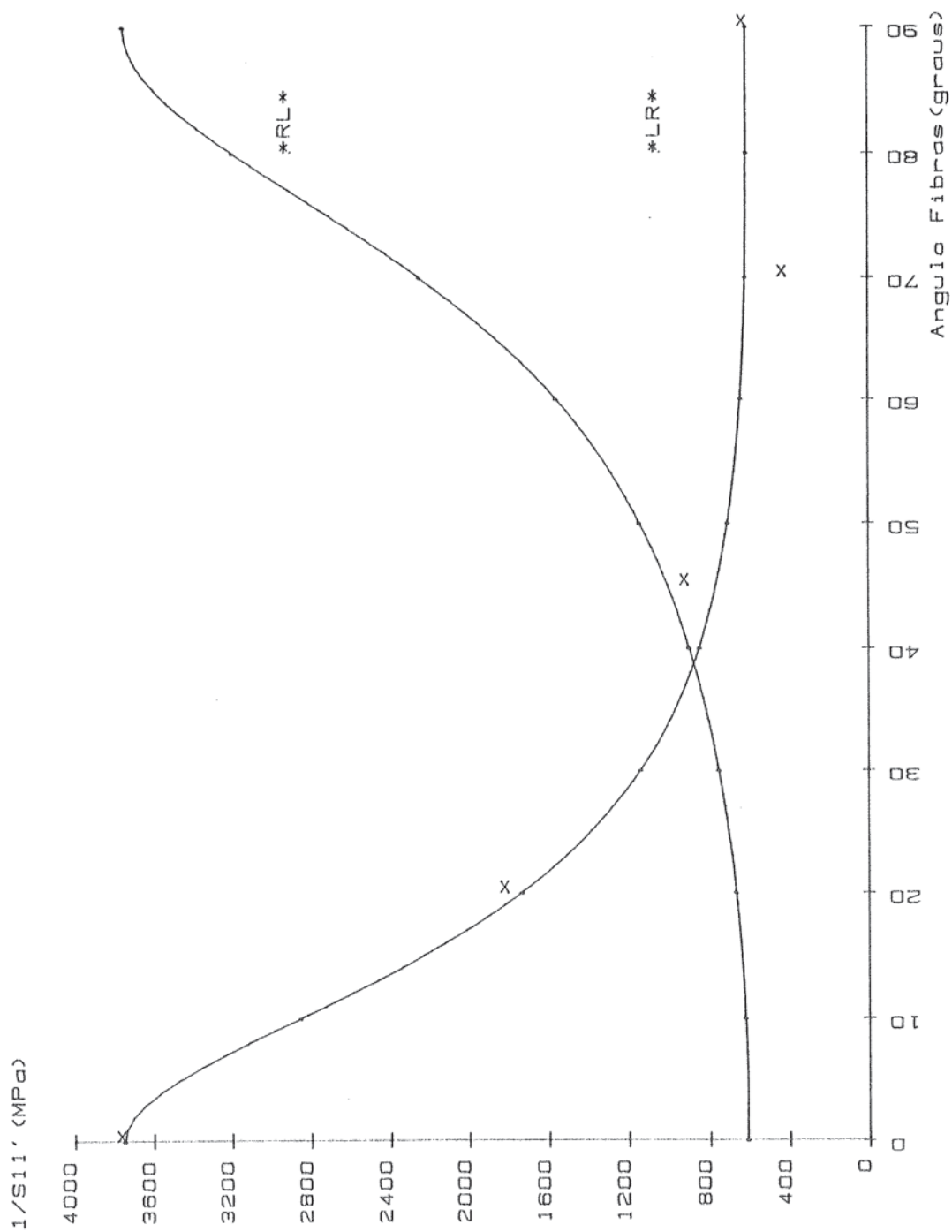


Fig. 128- Gráficos de $1/S_{11}'$ (Plano RL) em função do ângulo das fibras. Os pontos (x) são aqueles obtidos da experimentação.

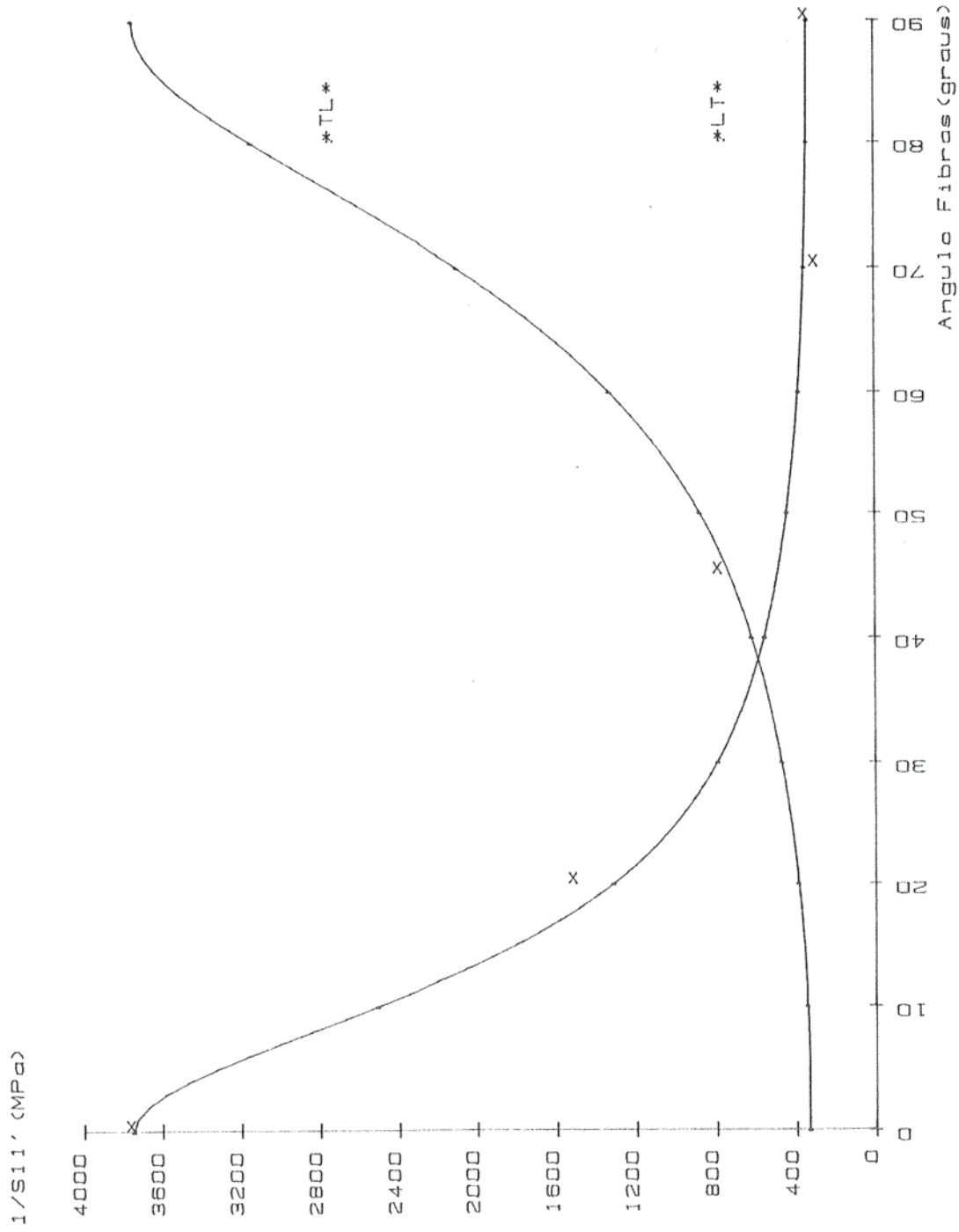


Fig. 129- Gráficos de $1/S_{11}'$ (Plano LT) em função do ângulo das fibras. Os pontos (x) são aqueles obtidos da experimentação

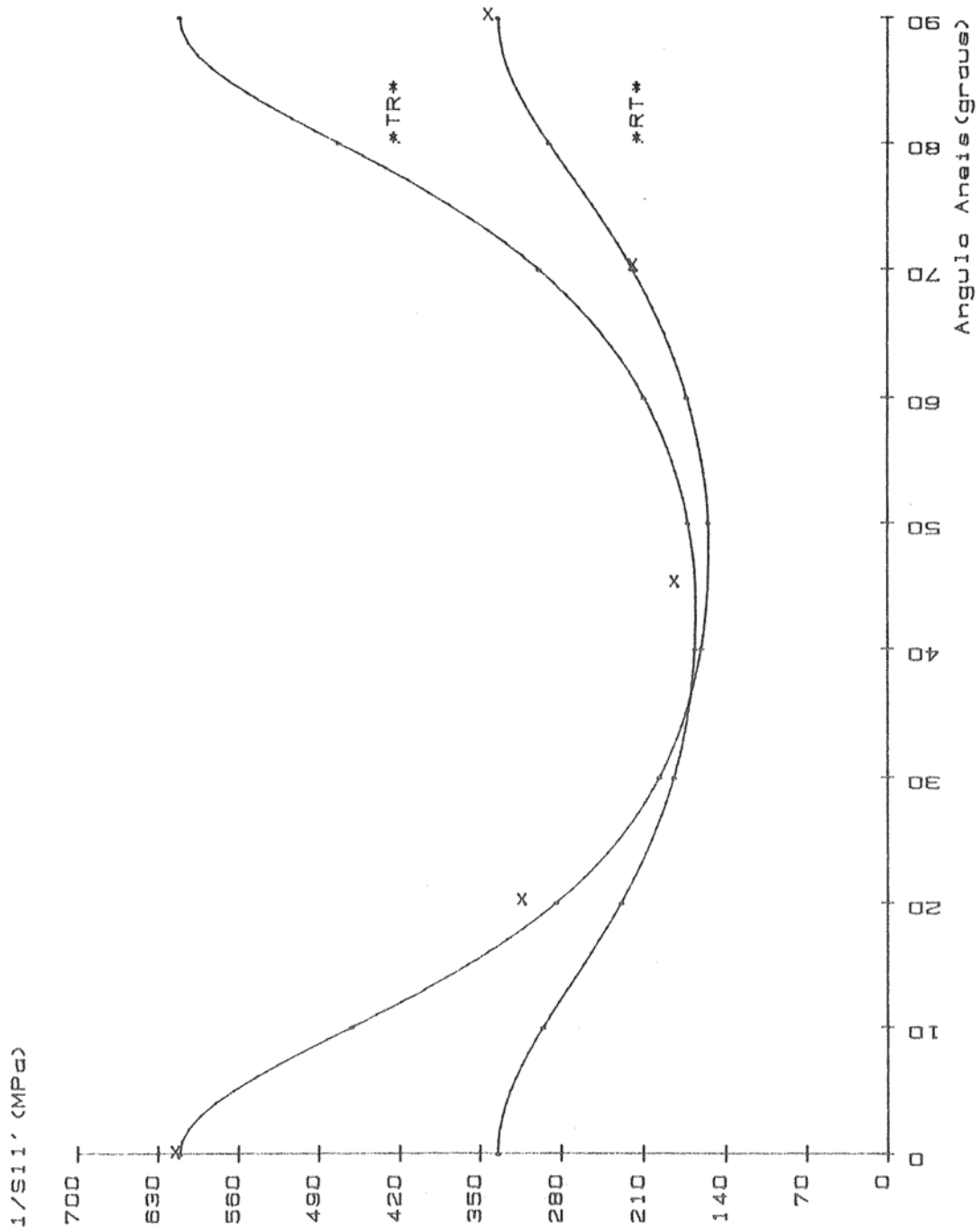


Fig. 130- Gráficos de $1/S_{11}'$ (Plano RT) em função do ângulo dos anéis. Os pontos (x) são aqueles obtidos da experimentação.

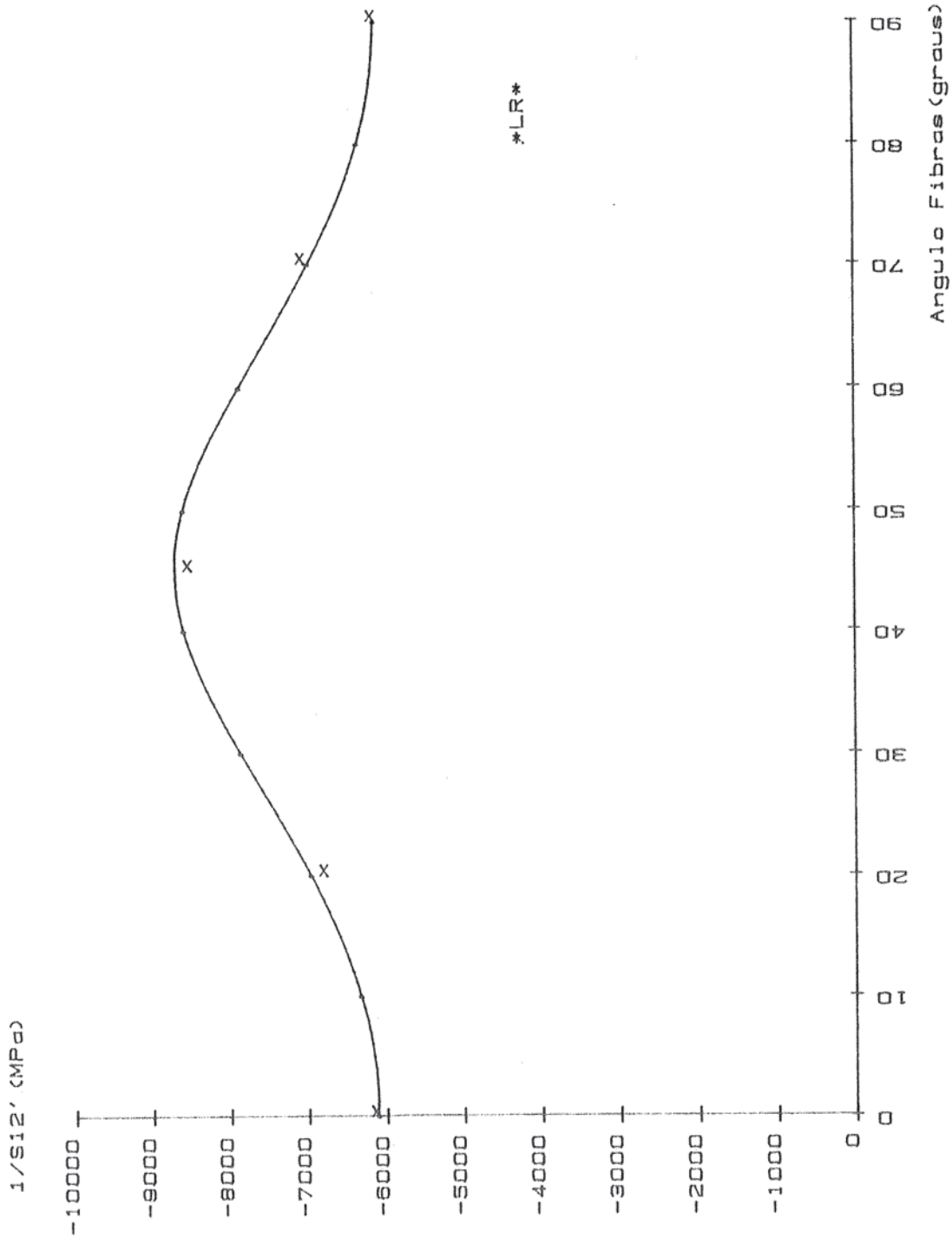


Fig. 131- Gráfico de 1/S12' (Plano RL) em função do ângulo das fibras. Os pontos (x) são aqueles obtidos da experimentação.

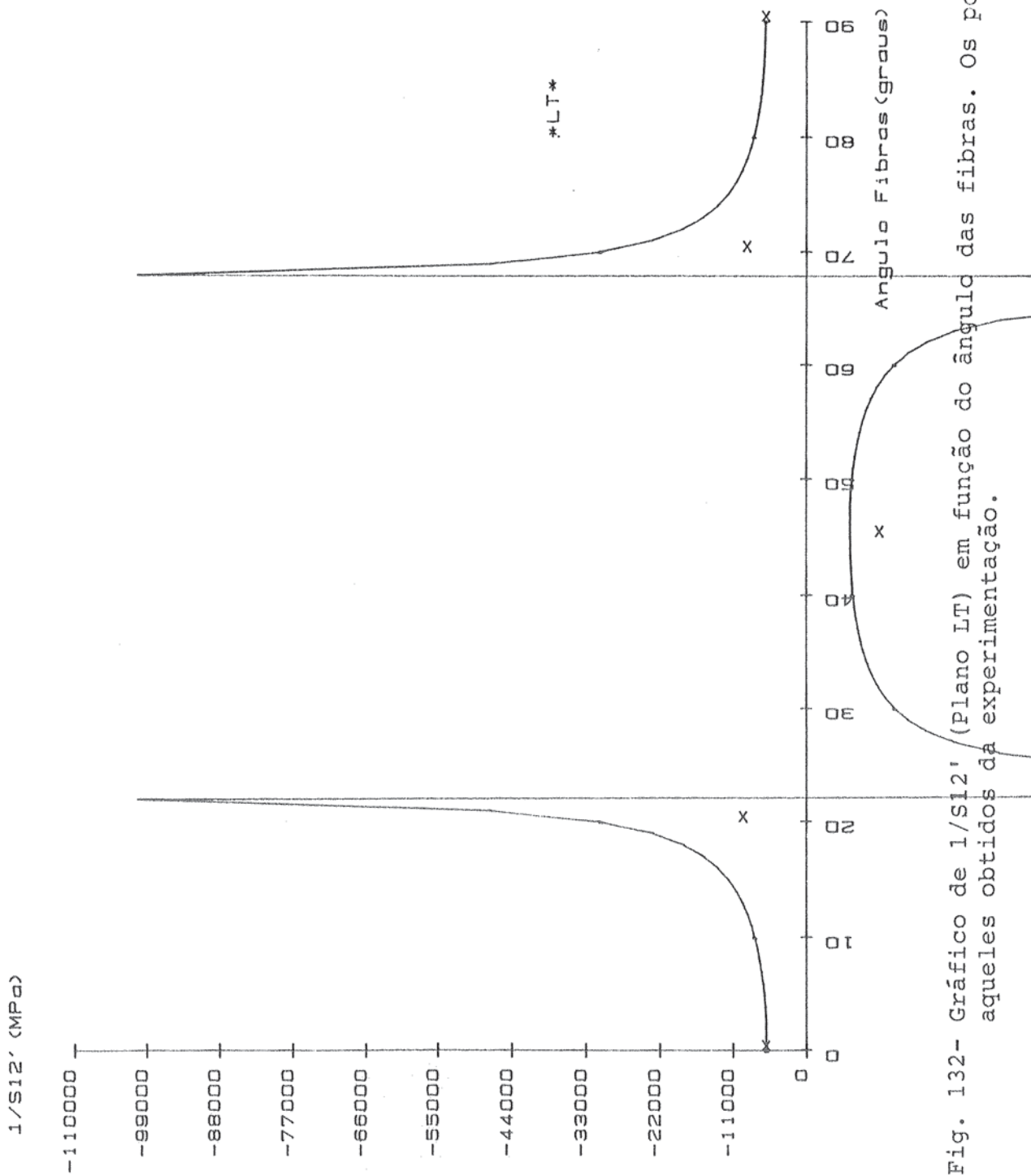


Fig. 132- Gráfico de $1/S_{12}'$ (Plano LT) em função do ângulo das fibras. Os pontos (x) são aqueles obtidos da experimentação.

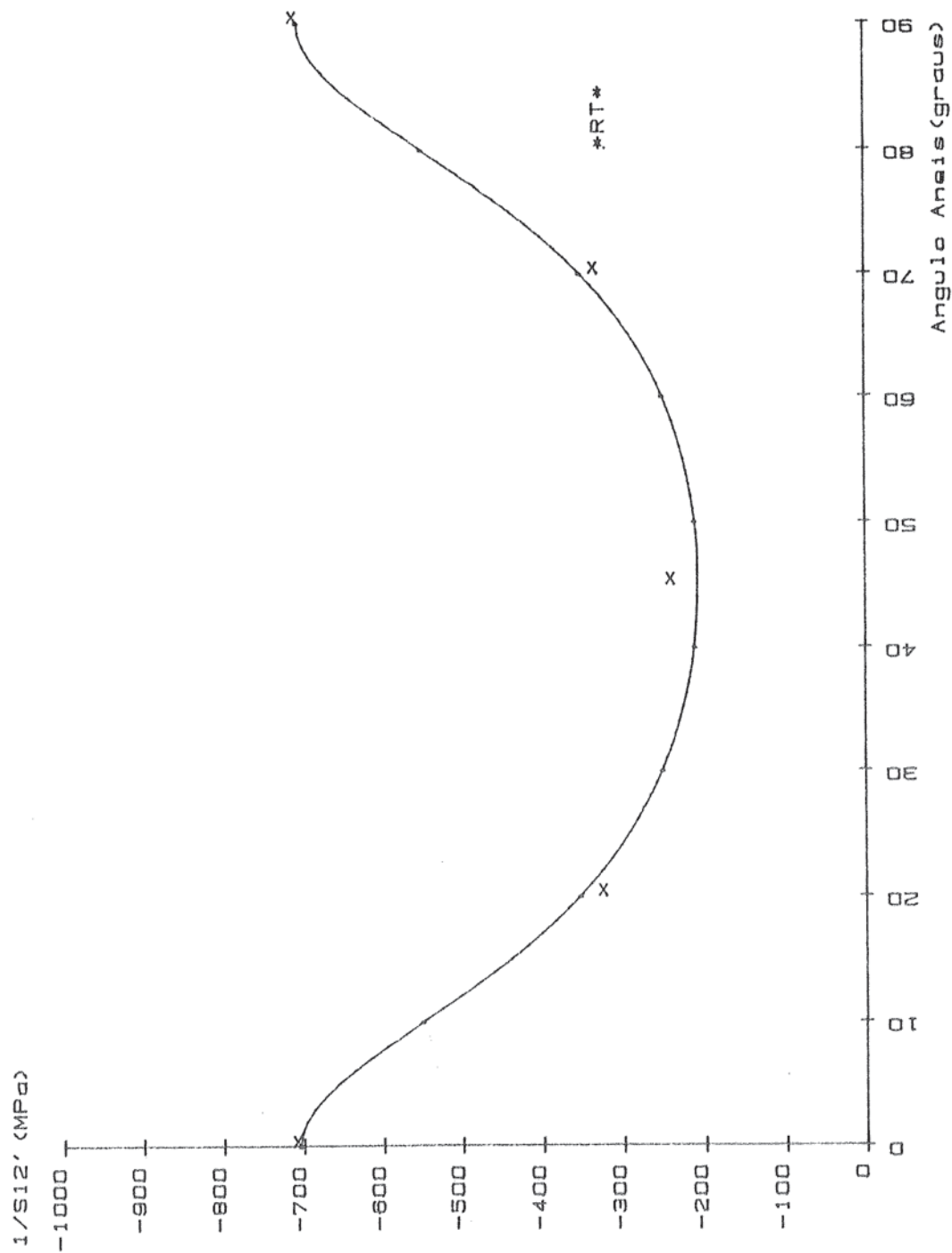


Fig. 133- Gráfico de $1/S_{12}'$ (Plano RT) em função do ângulo dos anéis. Os pontos (x) são aqueles obtidos da experimentação.

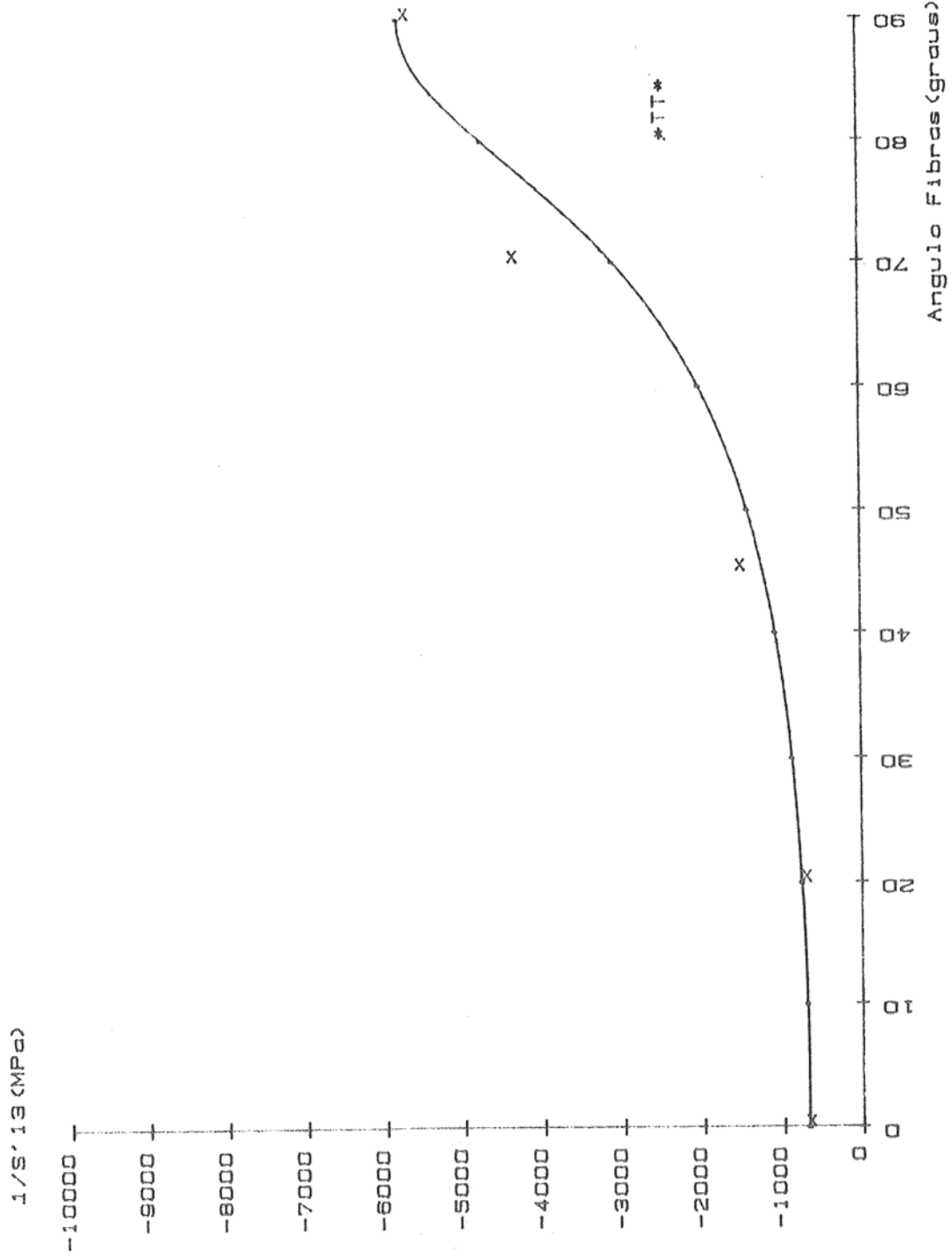


Fig. 134- Gráfico de 1/S'13' (Eixo TT) em função do ângulo das fibras. Os pontos (x) são aqueles obtidos da experimentação.

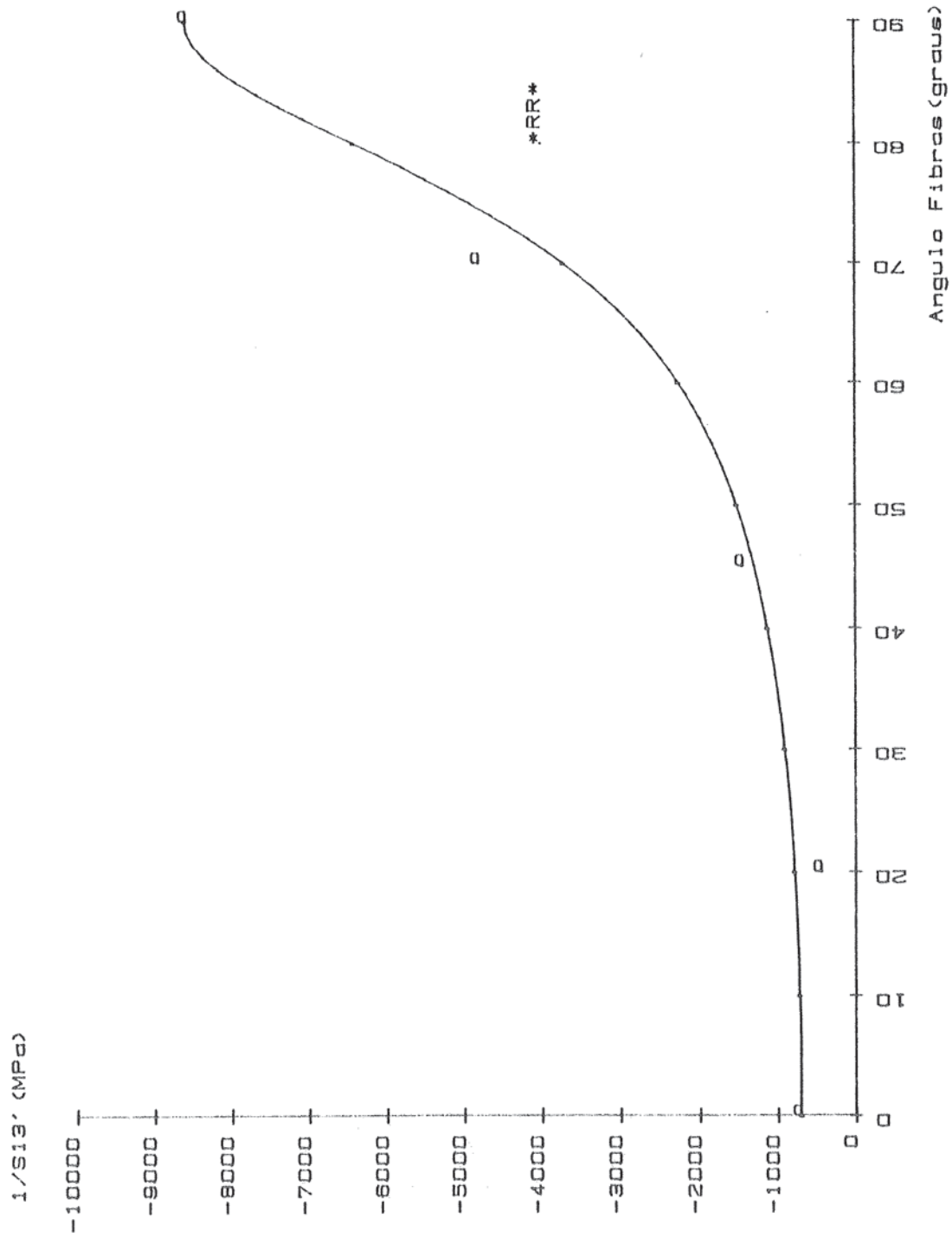


Fig. 135- Gráfico de 1/S13' (Eixo RR) em função do ângulo das fibras. Os pontos (o) são aqueles obtidos da experimentação.

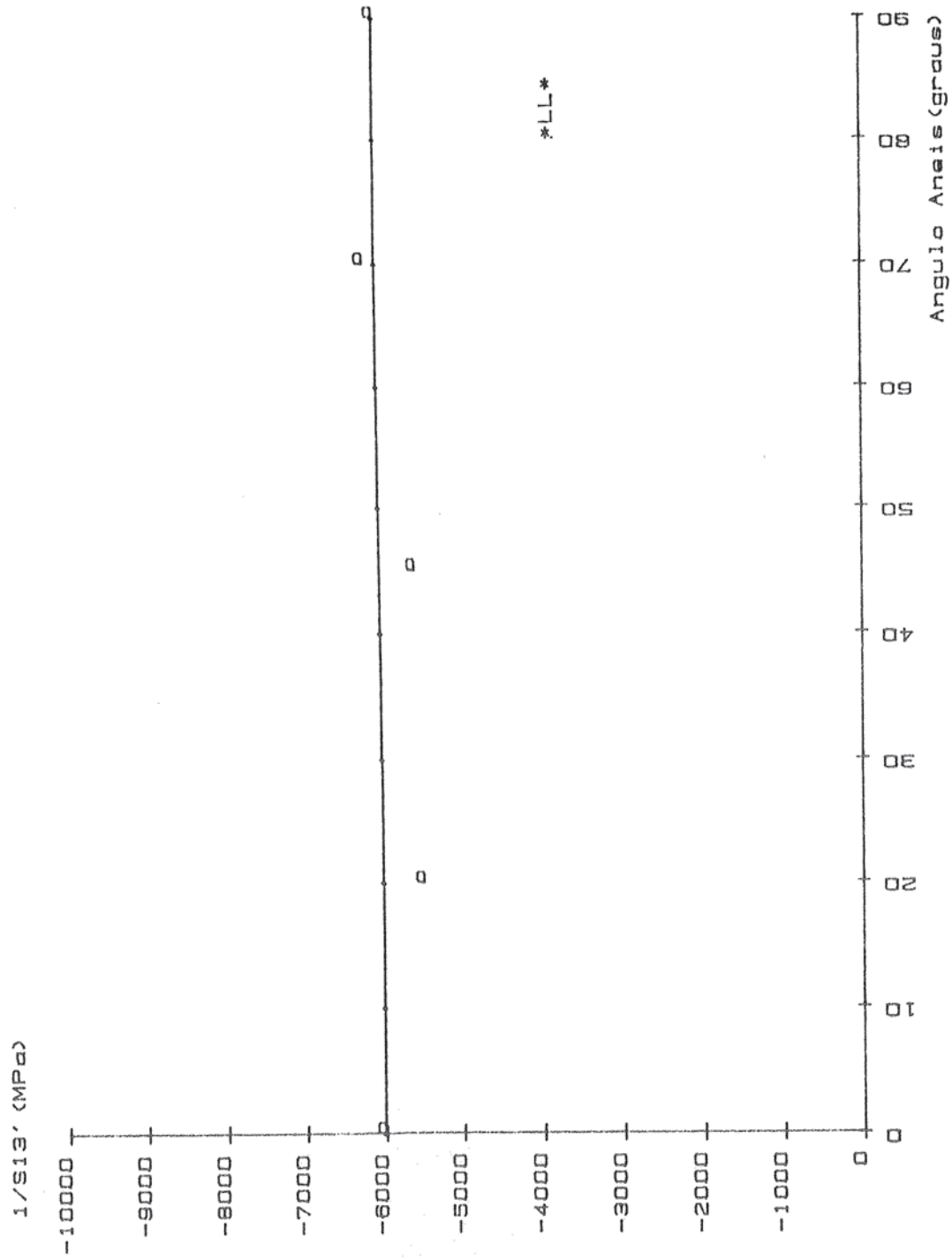


Fig. 136- Gráfico de 1/S13' (Eixo LL) em função do ângulo dos anéis. Os pontos (o) são aqueles obtidos da experimentação.

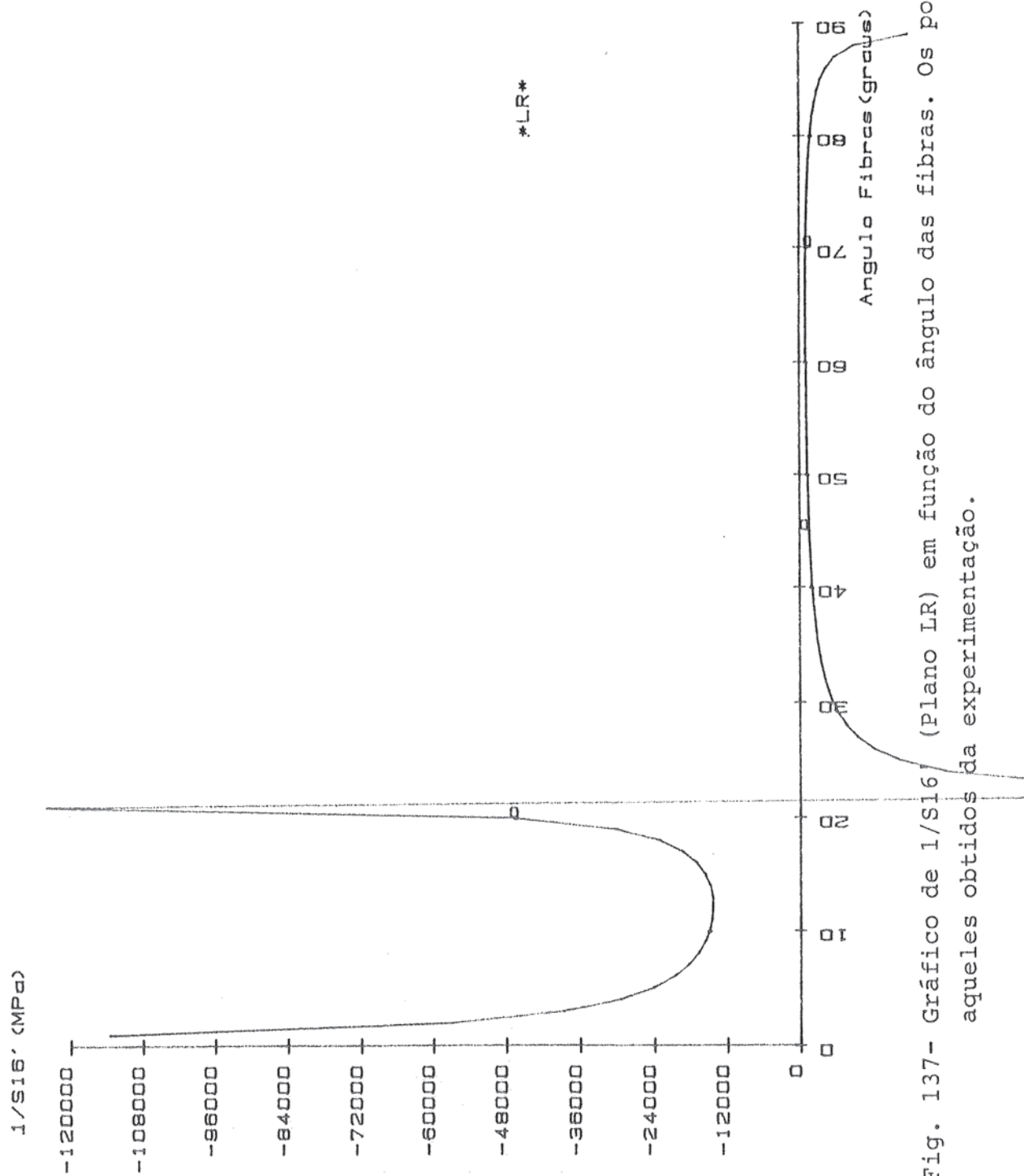


Fig. 137- Gráfico de 1/S16' (MPa) em função do ângulo das fibras. Os pontos (o) são aqueles obtidos da experimentação.

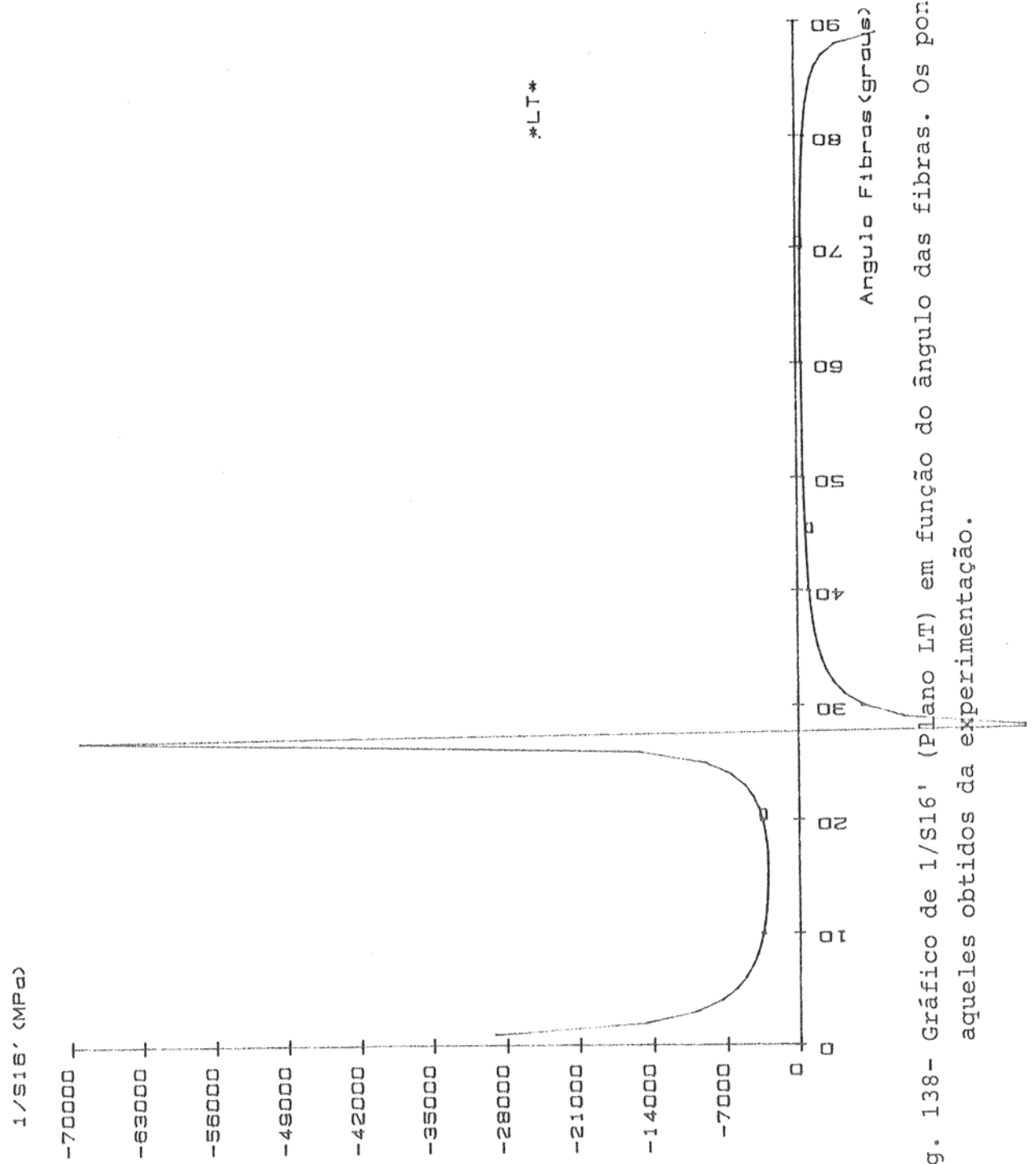


Fig. 138- Gráfico de $1/S16'$ (Plano LT) em função do ângulo das fibras. Os pontos (o) são aqueles obtidos da experimentação.

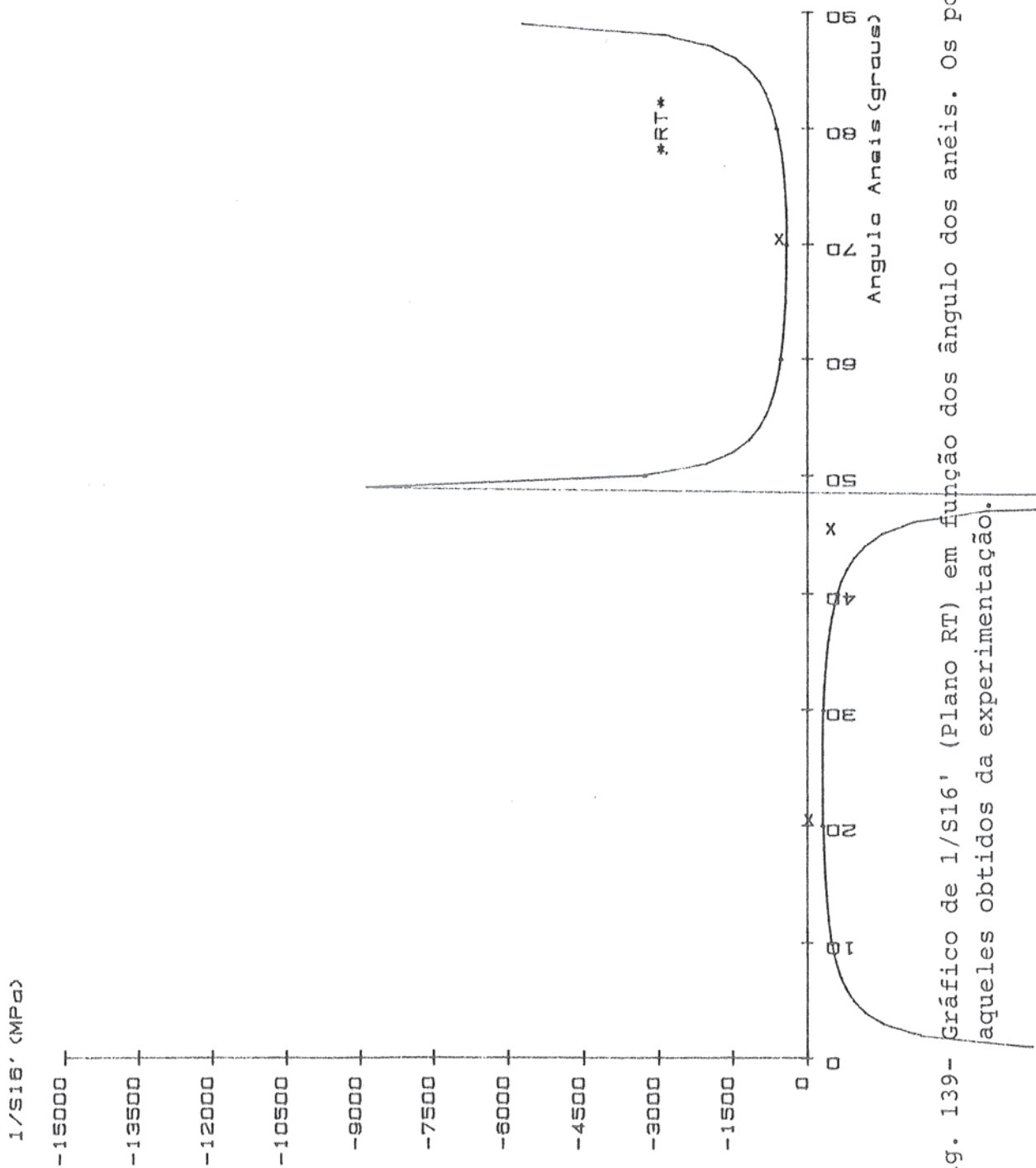


Fig. 139- Gráfico de $1/S_{16}'$ (Plano RT) em função dos ângulo dos anéis. Os pontos (x) são aqueles obtidos da experimentação.

6.9- Comentários a Respeito dos Gráficos S'_{ij}

À vista da boa aderência entre os valores de ensaio e aqueles que constituem os pontos das funções S'_{ij} , pode-se concluir pela adequação do modelo ortotrópico aplicado à madeira.

Naturalmente, fica também evidenciado que os gráficos S'_{ij} têm sua forma definida pelo valor das constantes de elasticidade correntes nos planos principais de elasticidade. Isto implica que para cada espécie, os gráficos de S'_{ij} têm formatos singulares.

Há, também, de se observar que os possíveis desajustes que estão presentes nos gráficos de S'_{ij} , ou seja, a não coincidência total entre valores teóricos e valores advindos da experimentação, estão dentro da margem de não acerto que um programa experimental deve exibir.

Por outro lado, é de particular interesse se ater aos gráficos de S'_{11} . Nestes gráficos, para valores entre 0° e 5° , nos planos LR e LT, acontece uma variação bastante brusca nos valores de $1/S'_{11}$. O módulo de elasticidade E_L cai cerca de 17% no intervalo de 0° a 5° . Este fato é bastante comum num programa para levantamento da constante de elasticidade E_i que se realiza num laboratório. Isto acarreta em uma diminuição significativa no valor desta constante para a madeira. Desse modo, há necessidade de se determinar os valores de E_i com total rigor, ou seja, as fibras ou os anéis nos corpos de prova devem estar paralelas à aplicação da carga, para se conseguir a caracterização completa e correta do material em questão.

Nos gráficos S'_{12} , S'_{13} e S'_{16} há de se ressaltar que são de interesse imediato os valores que pertencem aos intervalos de $\theta = 0^\circ$ a valores próximos a 0° . Os outros valores são aqui apresentados para registro e para incentivar futuras investigações neste vasto campo de pesquisa e conhecimento.

Outro aspecto interessante a ser levantado diz respeito a alguns valores de S'_{ij} , mais especificamente, aos valores inversos de S'_{12} e S'_{13} , no plano LT, que se encontram em Hearmon⁽¹⁾ e que podem ser colocados na seguinte tabela.

TABELA 19- Valores de $1/S_{12}$ e $1/S_{13}$ (MPa)

Espécie	Oak	Red Beach	Oregon Pine
$1/S_{1j}$			
$1/S_{12}$	-11312	-26385	-40650
$1/S_{13}$	-3300	-3076,9	-2173,9

Fonte: Hearmon⁽¹⁾

Nota-se, claramente, que existem afinidades numéricas entre estes resultados e aqueles revelados para a espécie Guapuruvú, lembrando-se ainda que as espécies da Tabela 18 são coníferas, enquanto o Guapuruvú é dicotiledônea.

Cabe, ainda, evidenciar que na construção dos gráficos S'_{ij} , foram desenhadas duas curvas, indicadas por $*ij*$, $*ji*$, onde i, j são L, T ou R. A intersecção dessas duas curvas denotaria o ponto de igual valor, sendo que se houvesse simetria absoluta entre estas, o valor da abcissa θ seria 45° . Observa-se pelos gráficos presentes que o valor de θ na intersecção aponta para 40° . Isto evidencia a calibração do modelo ortotrópico aplicado à madeira, naturalmente considerando-se os "erros" experimentais de medições.

A seguir são apresentados os gráficos de $1/S_{66}$ para o Guapuruvú (gráfico que mostra a variação de G_{ij} com o ângulo θ , das fibras) e os gráficos de $1/S'_{11}$ (com alguns valores obtidos na parte experimental) para as outras espécies de madeira que envolveram este trabalho. Os comentários apresentados neste item se estendem, também, a estes próximos gráficos.

6.10- Gráficos $1/S'_{66}$ e $1/S'_{11}$

Apresenta-se, então, os gráficos $1/S'_{66}$ para o Guapuruvú e $1/S'_{11}$ para as espécies Ipê, Angico e Pinus.

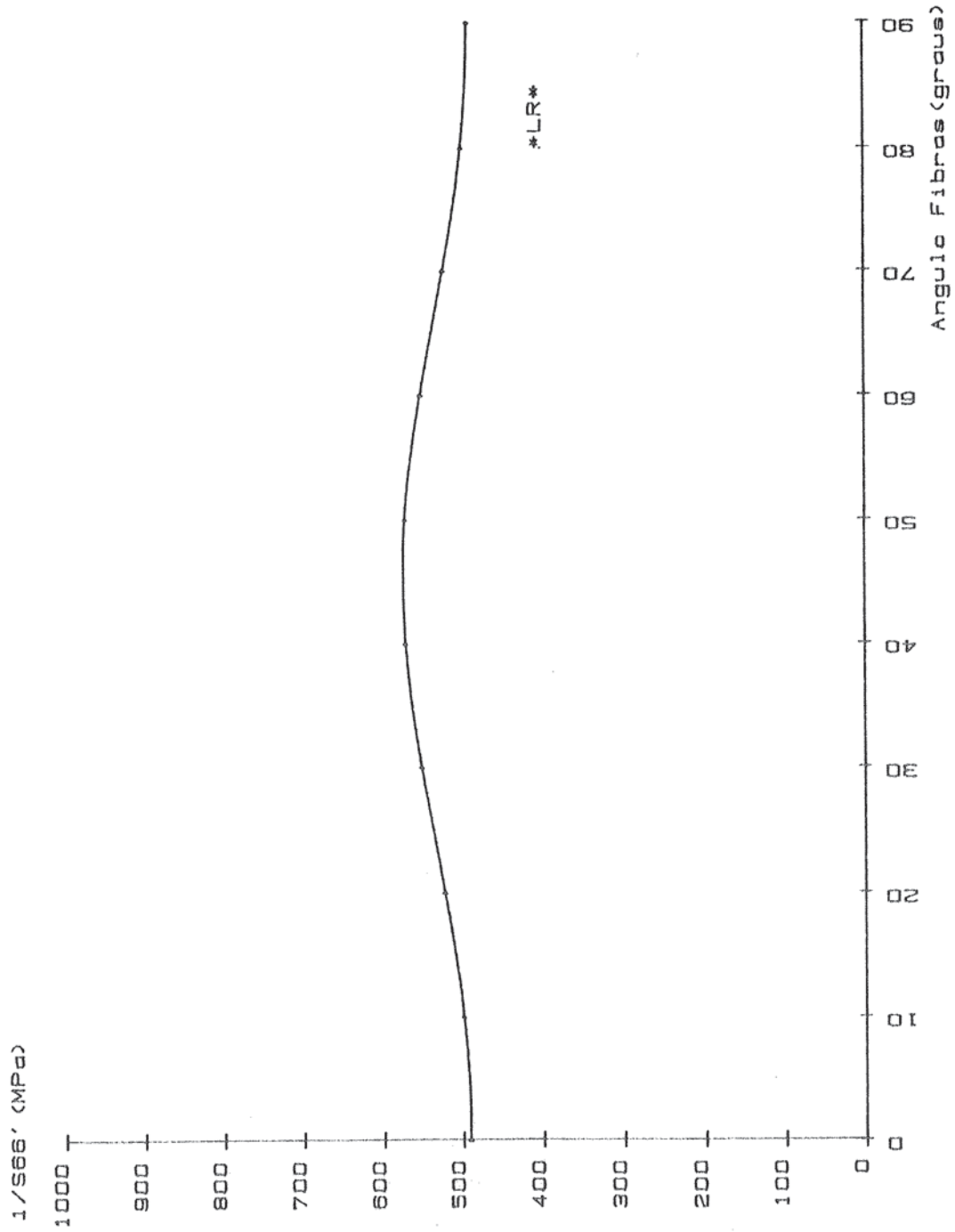


Fig. 140- Gráfico de 1/S66' (Plano LR) em função do ângulo das fibras.

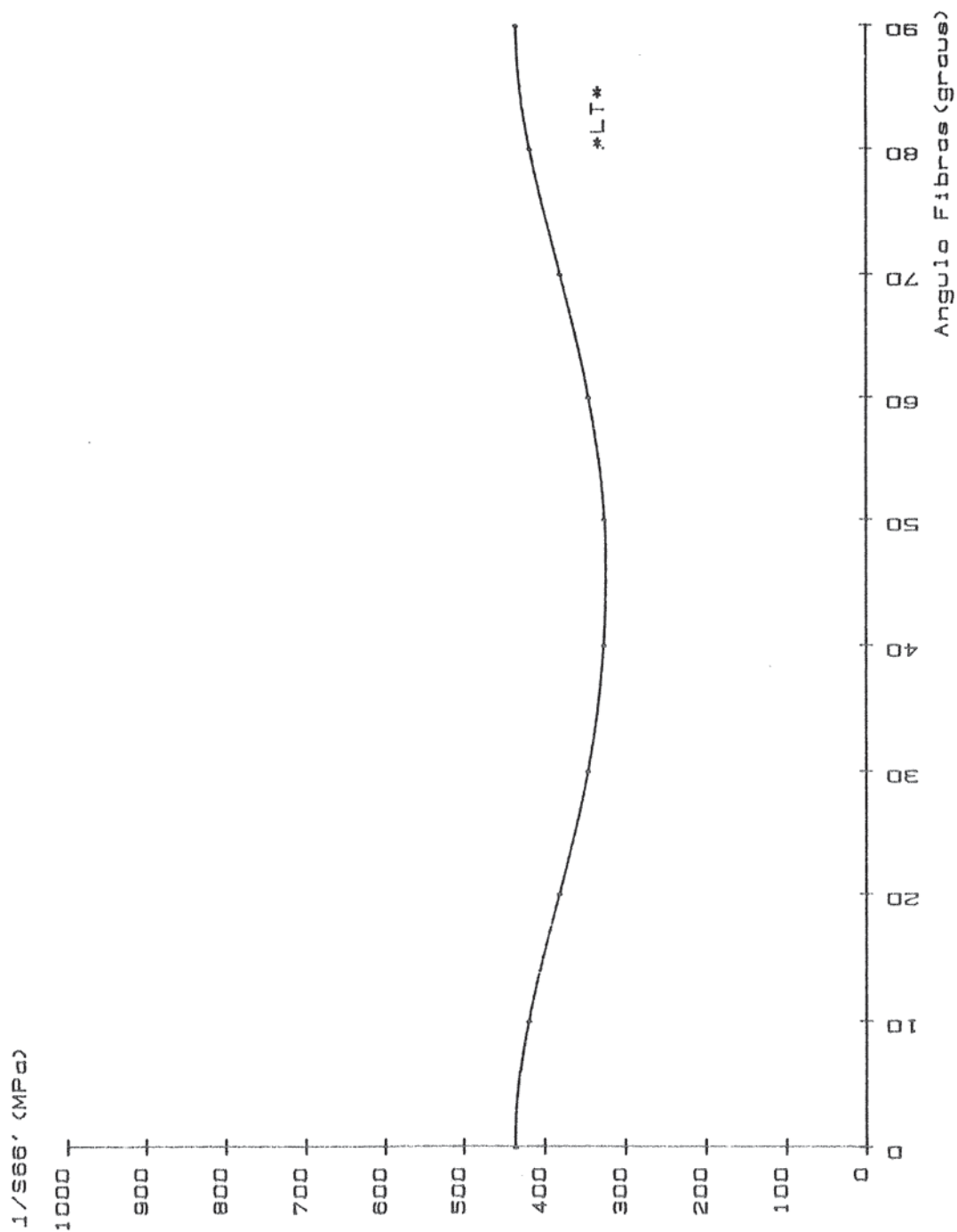


Fig. 141- Gráfico de $1/S_{66}'$ (Plano LT) em função do ângulo das fibras.

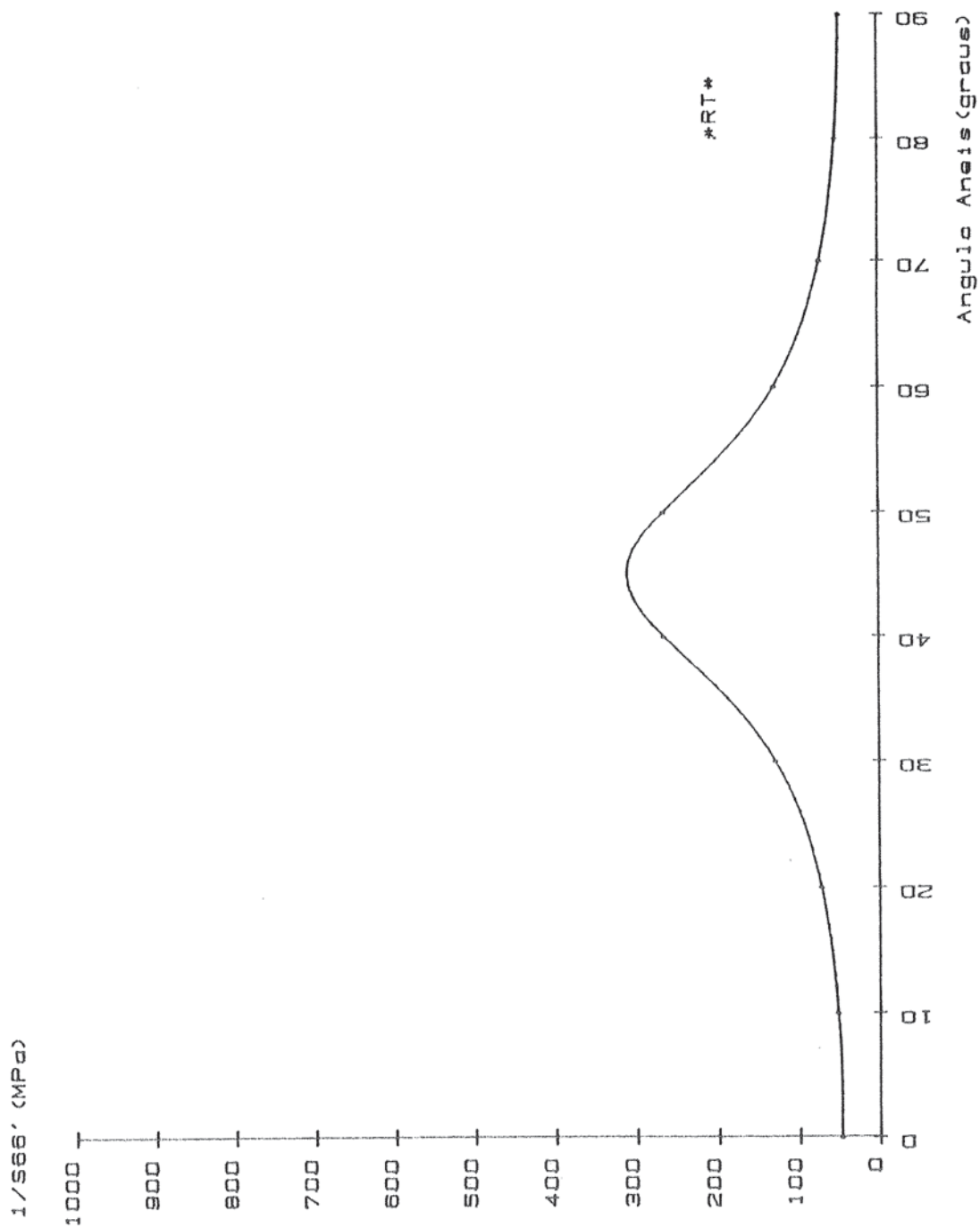


Fig. 142- Gráfico de 1/S66' (Plano RT) em função do ângulo dos anéis.

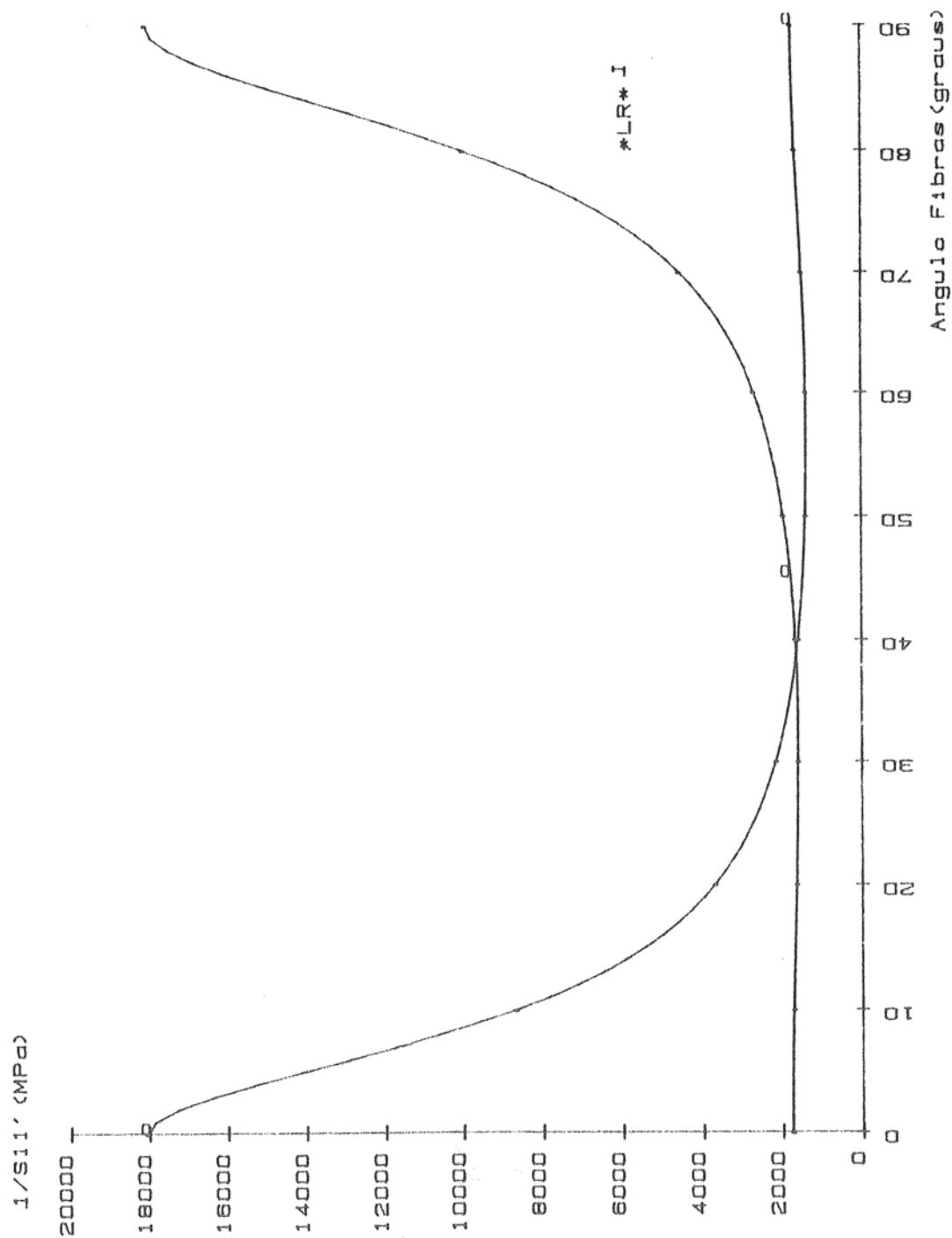


Fig. 143- Gráficos de $1/S_{11}'$ (Plano LR) em função do ângulo das fibras. Os pontos (o) são aqueles obtidos da experimentação. (Ipê)

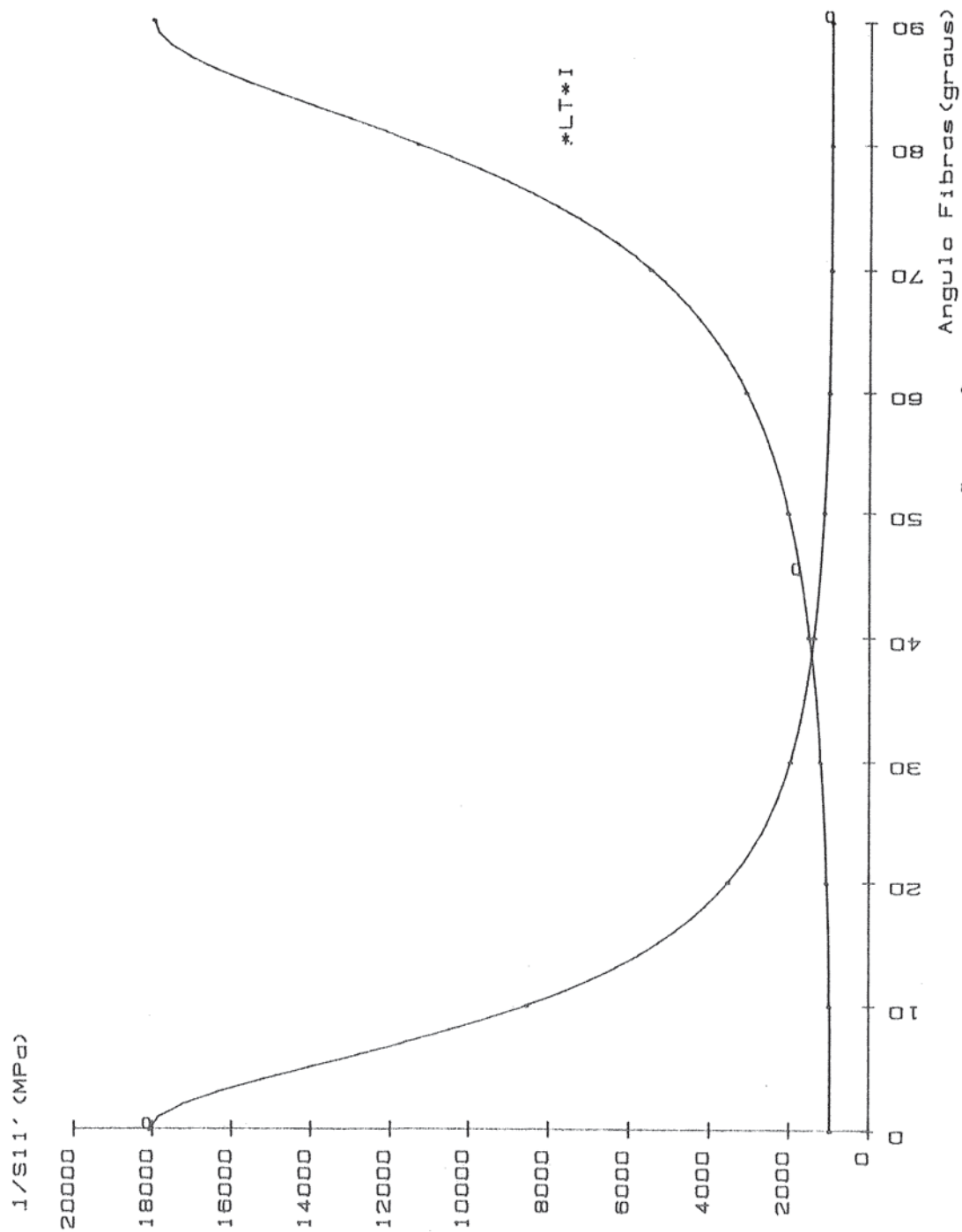


Fig. 144- Gráficos de 1/S11' (Plano LT) em função do ângulo das fibras. Os pontos (o) são aqueles obtidos da experimentação. (Ipê)

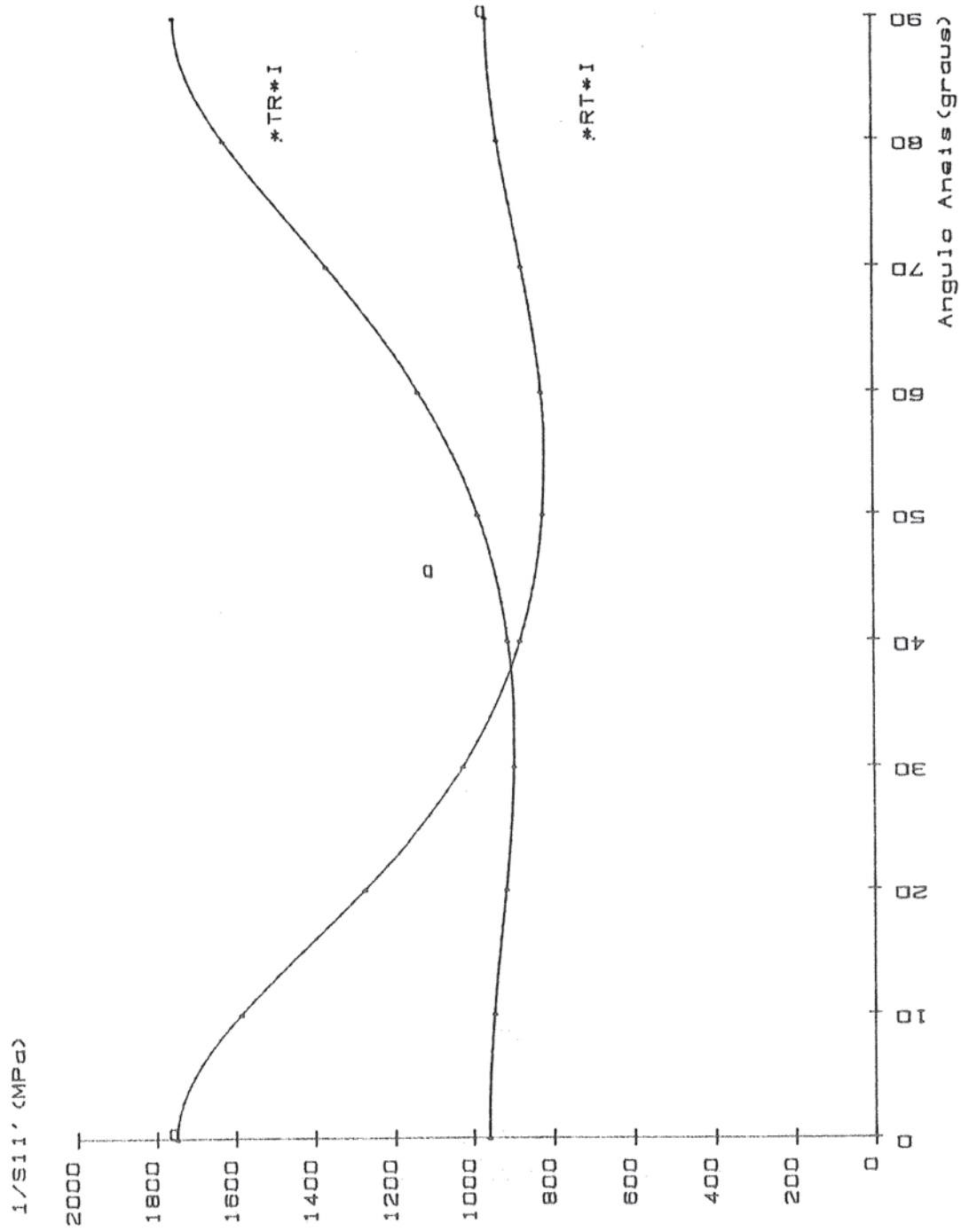


Fig. 145- Gráficos de 1/S11' (Plano RT) em função do ângulo dos anéis. Os pontos (o) são aqueles obtidos da experimentação. (Ipê)

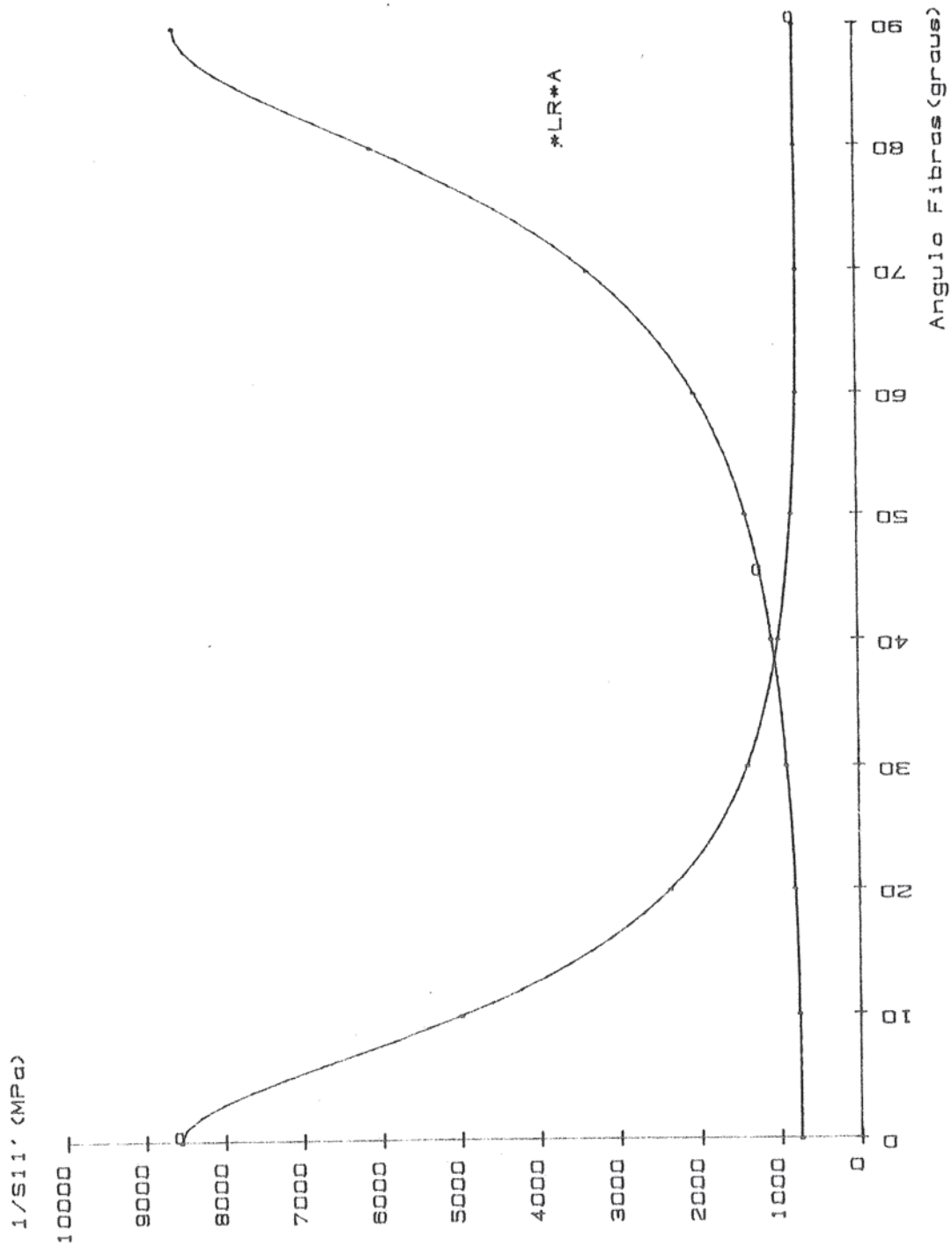


Fig. 146- Gráficos de 1/S11' (Plano LR) em função do ângulo das fibras. Os pontos (o) são aqueles obtidos da experimentação. (Angico)

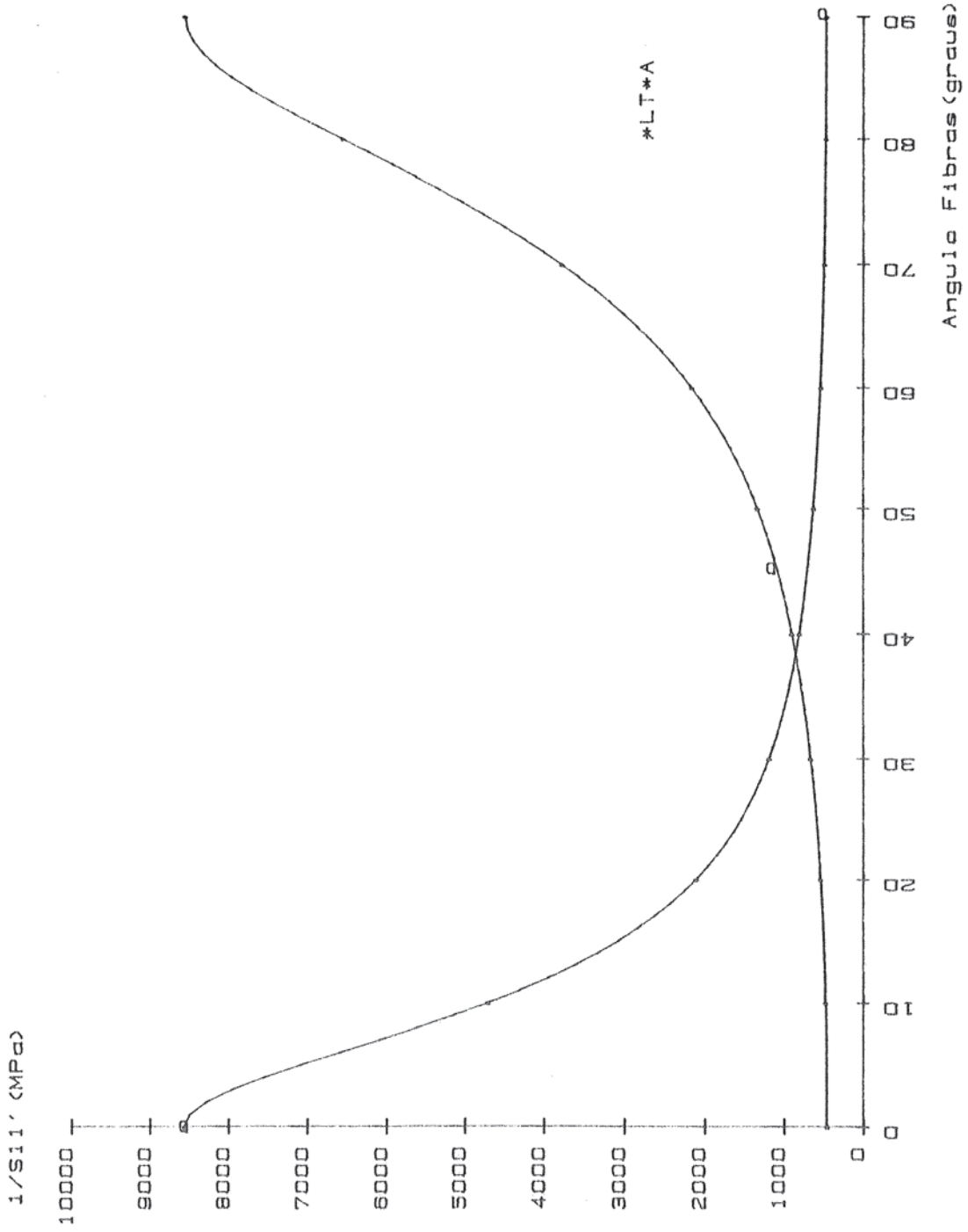


Fig. 147- Gráficos de $1/S_{11}'$ (Plano LT) em função do ângulo das fibras. Os pontos (o) são aqueles obtidos da experimentação. (Angico)

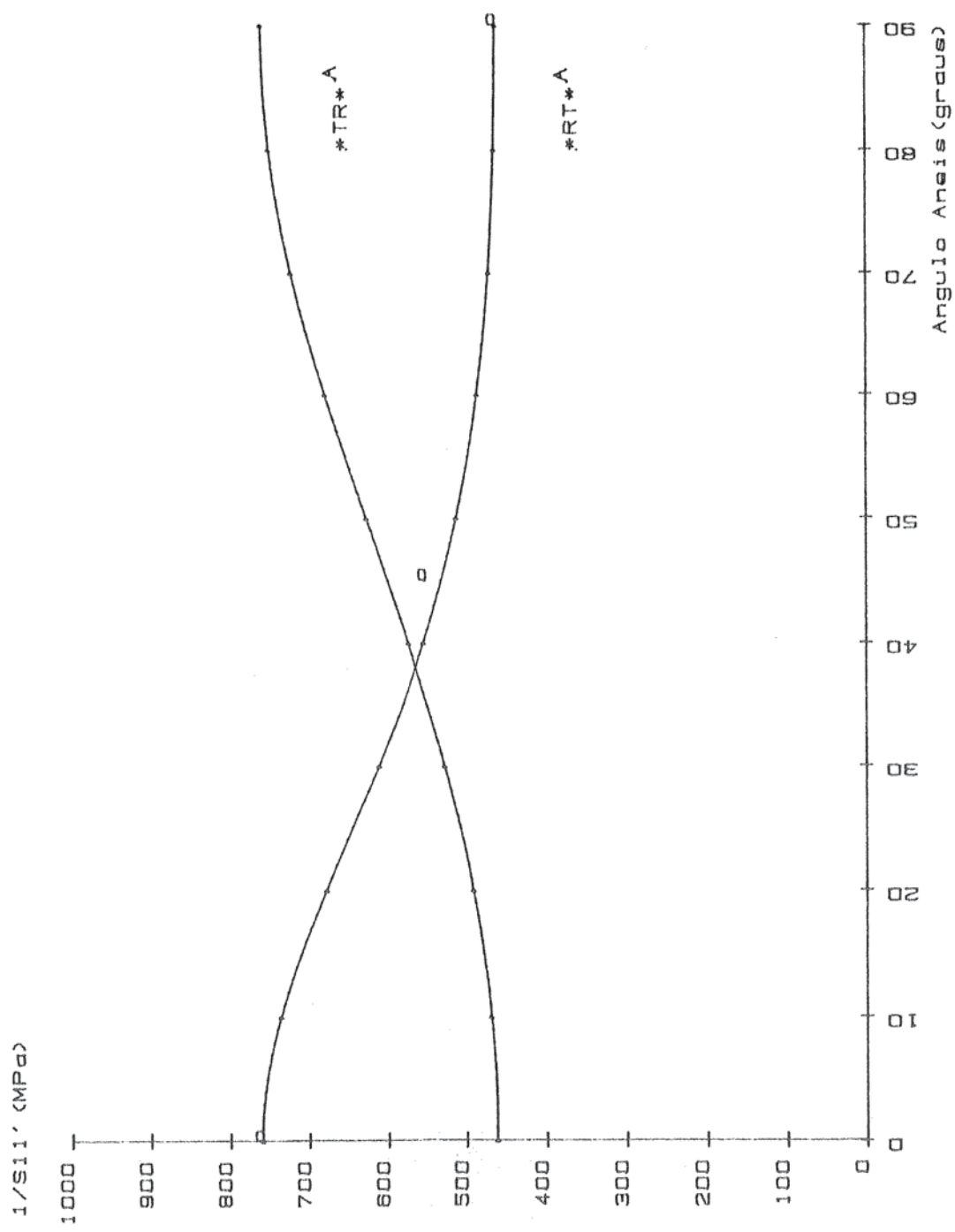


Fig. 148- Gráficos de 1/S11' (Plano RT) em função do ângulo dos anéis. Os pontos (o) são aqueles obtidos da experimentação. (Angico)

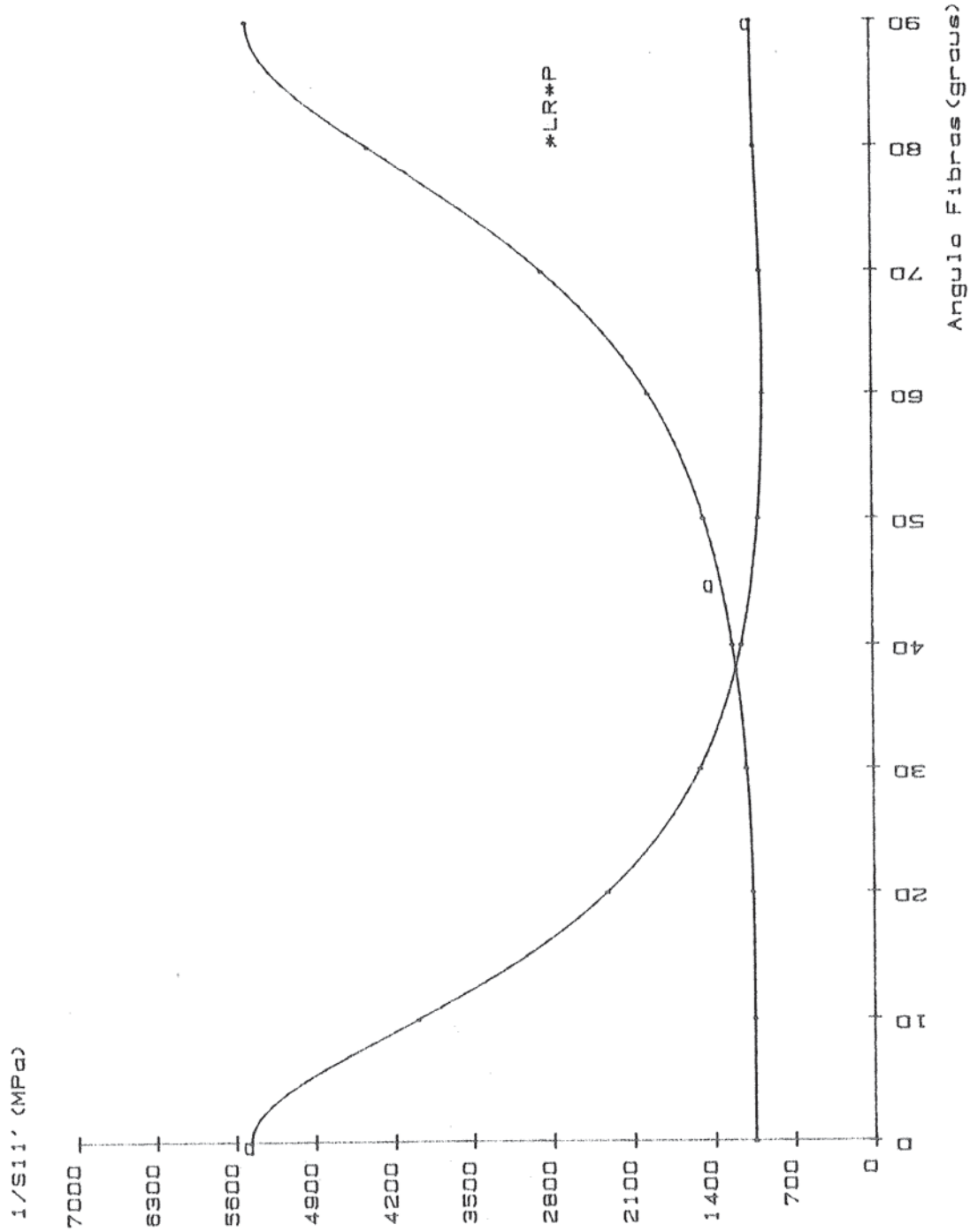


Fig. 149- Gráficos de $1/S_{11}'$ (Plano LR) em função do ângulo das fibras. Os pontos (o) são aqueles obtidos da experimentação. (Pinus)

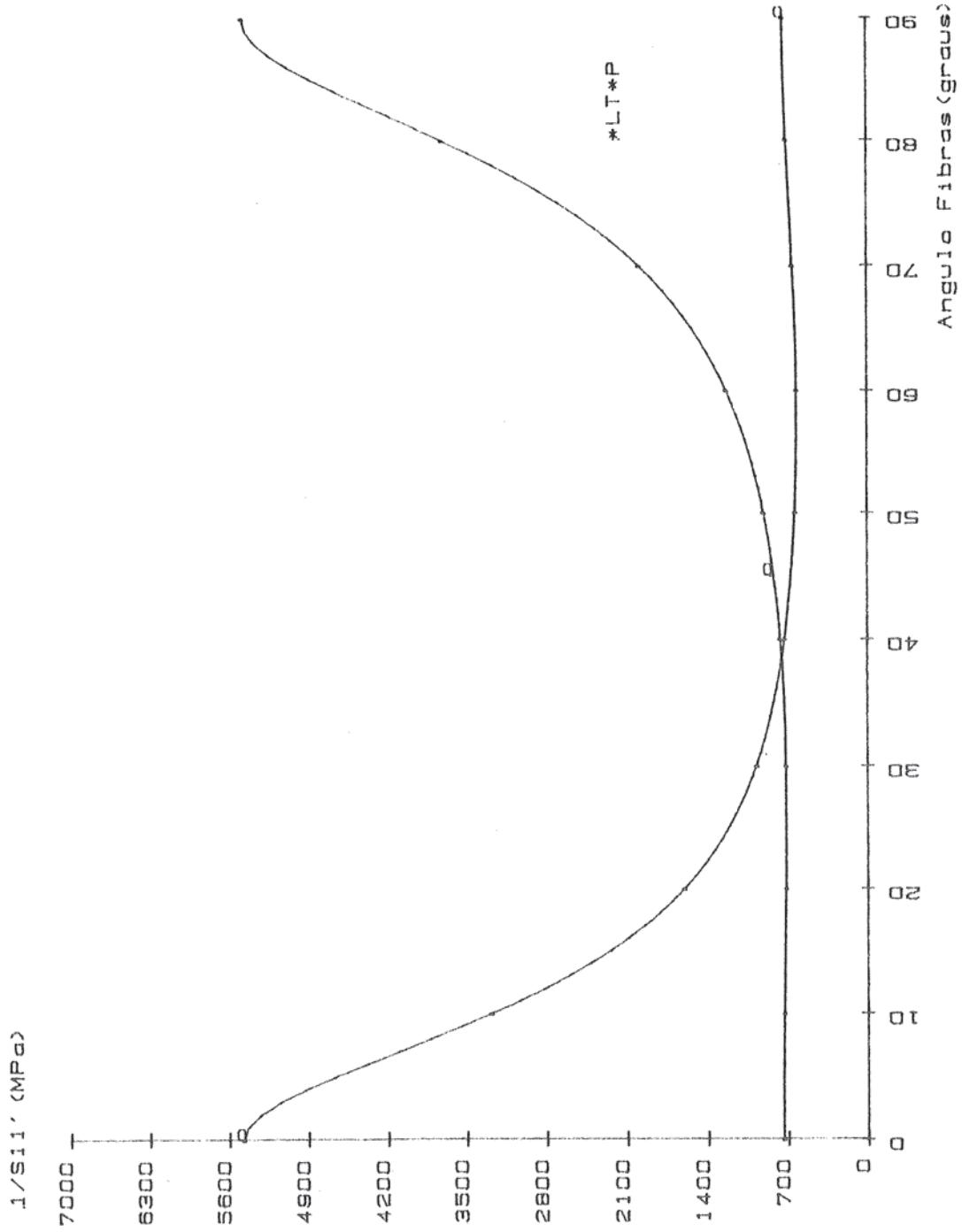


Fig. 150- Gráficos de $1/S_{11}'$ (Plano IT) em função do ângulo das fibras. Os pontos (o) são aqueles obtidos da experimentação. (Pinus)

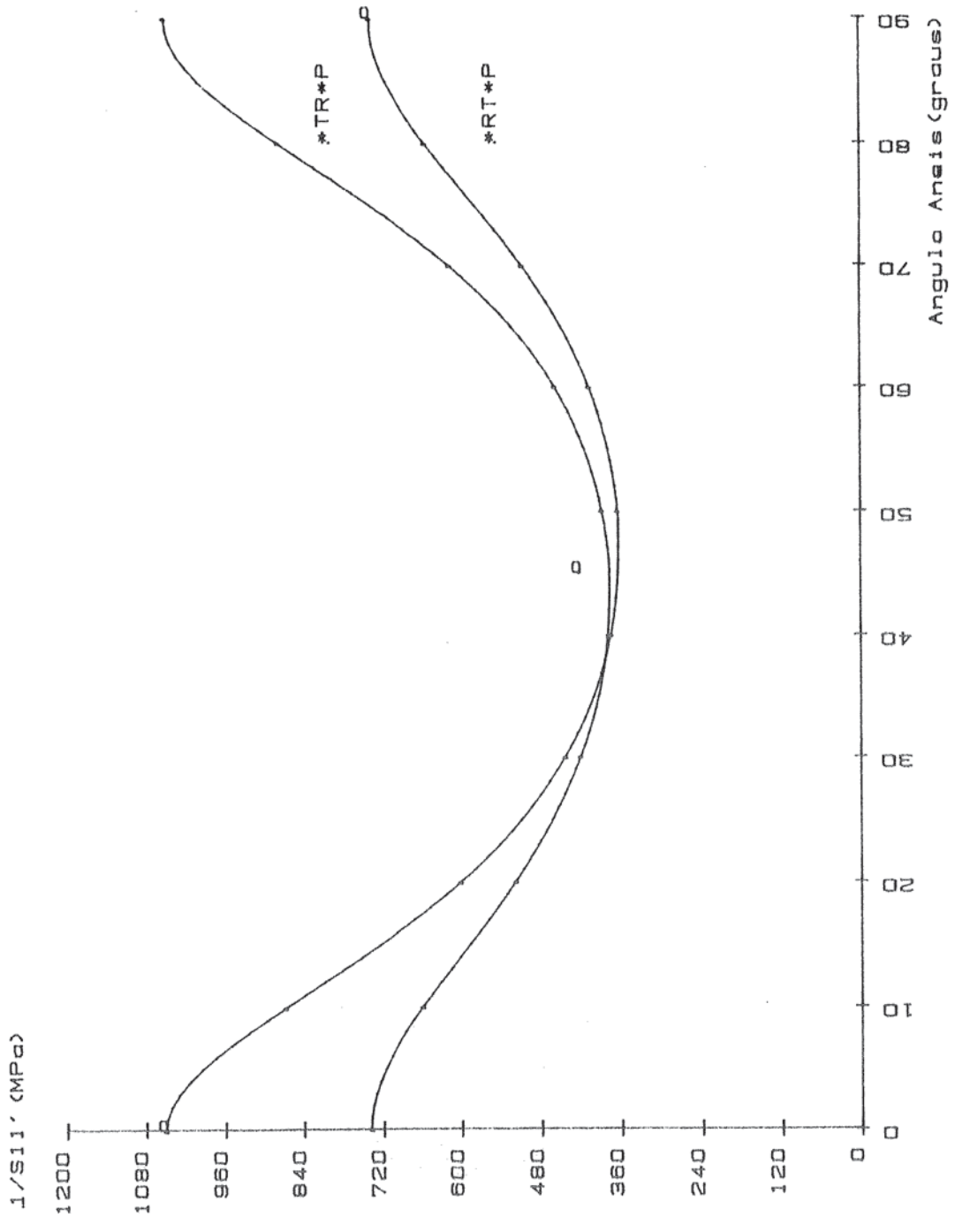


Fig. 151- Gráficos de 1/S11' (Plano RT) em função do ângulo dos anéis. Os pontos (o) são aqueles obtidos da experimentação. (Pinus)

7- SITUAÇÃO GERAL DE S_{ijkl} NO ESPACO L R T

7.1- Introdução

No capítulo anterior foram discutidos os gráficos S'_{ijkl} . Nestes gráficos evidenciou-se a variação das constantes de elasticidade com o ângulo das fibras e com o ângulo dos anéis, nos planos principais L, T, R. No presente capítulo, serão analisados os casos em que, além das mencionadas variações, será verificada a influência, nas constantes, do posicionamento de uma peça de madeira numa situação genérica, associado ao sistema de referência x_i (x_1, x_2, x_3).

Sob este espectro, ter-se-ão peças de madeira retiradas de posições diversas de um tronco e avaliados os valores de S'_{11} . Naturalmente, poder-se-iam realizar estudos para as outras constantes de elasticidade. Todavia, este trabalho se ateve à S'_{11} , devido a razões circunstanciais.

7.2- Material Utilizado

7.2.1- Corpos de Prova com Variação dos Ângulos das Fibras e dos Anéis

Foram retirados, inicialmente, corpos de prova da espécie Guapuruvú, com dimensões nominais 6cm x 6cm x 18cm, dos prismas provenientes do tronco da árvore. Estes corpos de prova faziam, ângulos de 0°, 45° e 90° com as fibras e com anéis da madeira, e pertenciam aos planos LT, LR e RT (ver figura 126, item 6.4).

O número de corpos de prova chegou a 48, sendo então utilizadas 2 séries de 24 corpos de prova. A umidade presente alcançava cerca de 12%.

Depois da realização dos ensaios de compressão simples, retiravam-se destes corpos de prova, outros com dimensões nominais de 3cm x 3cm x 9cm ou maiores, quando possível. A figura 152 ilustra este fato.

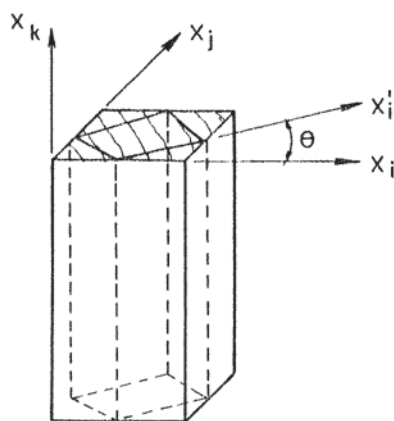


Fig. 152- Posição do corpo de prova de dimensões
3cm x 3cm x 9cm.

Desse modo, conseguiam-se corpos de prova com ângulo dos anéis ϕ igual a 0° , 45° , 90° , ou o valor que se desejasse.

Depois disso, foram retirados 9 corpos de prova com inclinações de 20° , 45° e 70° em relação às fibras e aos anéis. Estes corpos de prova apresentam ângulos ϕ da ordem de 0° , 45° e 90° nos planos LT e LR, e no plano RT, ângulo θ próximo de 0° , 45° e 90° , do mesmo modo.

Com isso tornou-se possível analisar os valores das constantes de elasticidade segundo um posicionamento (θ, ϕ) , ou seja, variação do ângulo das fibras e dos anéis.

7.2.2- Corpos de Prova Situados Genericamente no Tronco da Árvore

Para completar o estudo das constantes de elasticidade S'_{11} foi necessária a busca de corpos de prova situados em posições que pertencem a outras posições do 1º octante de LTR.

Vale ressaltar a dificuldade apresentada para a confecção destes corpos de prova e a opção por determinados ângulos entre os eixos L, T, R e x'_1 , este vinculado aos corpos de prova.

Para a retirada dos corpos de prova, procedeu-se da seguinte maneira:

. foram retiradas pranchas de madeira que faziam ângulos de 0° , 20° , 45° , 70° e 90° com os eixos R - T.

. em seguida, retiravam-se destas placas corpos de prova com ângulos 0° , 20° , 45° , 70° e 90° , com o eixo L.

Dessa forma, pode-se obter 25 corpos de prova pertencentes ao espaço LTR. As duas próximas figuras mostram a sequência descrita.

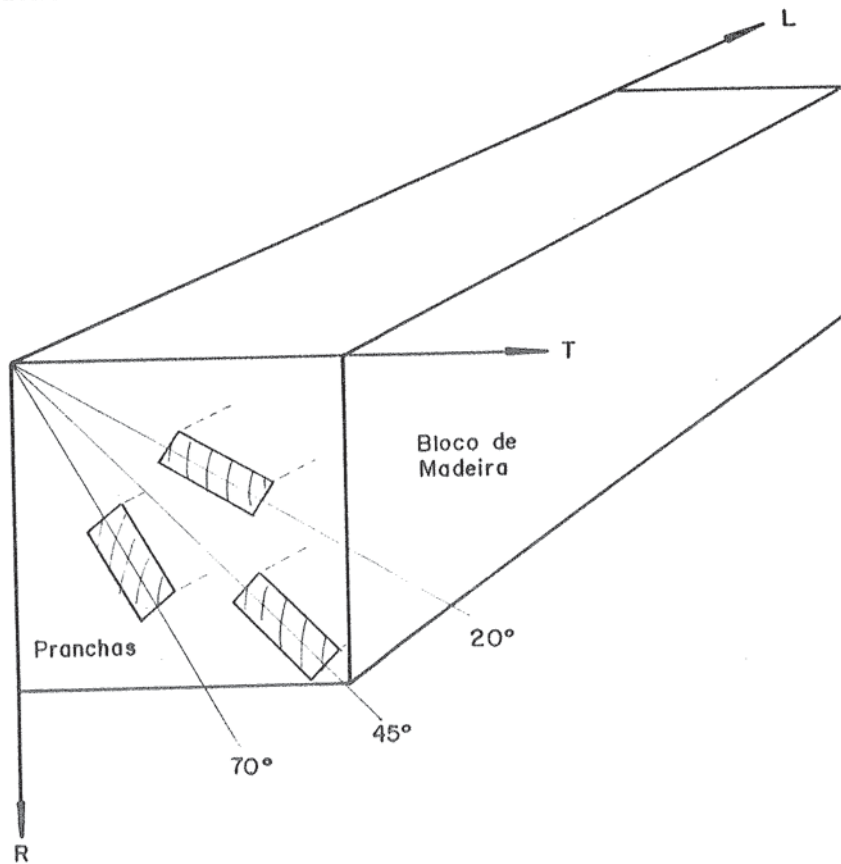


Fig. 153- Pranchas de 0° , 20° , 45° , 70° e 90°

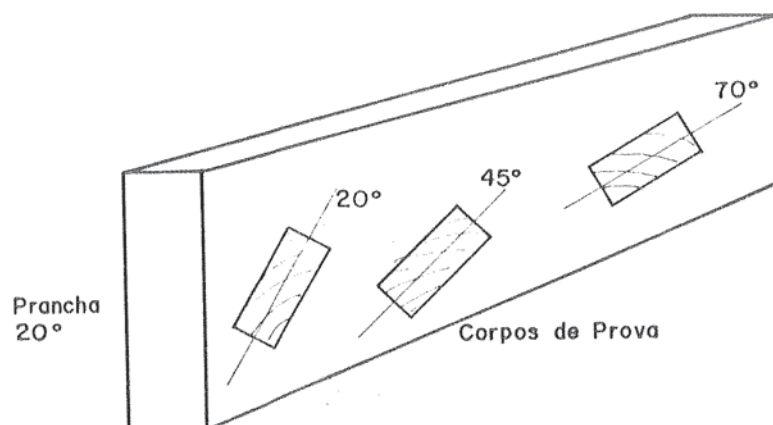


Fig. 154- Corpo de prova de $0^\circ \dots 90^\circ$ numa prancha de 20°

7.3- Os Elementos do Tensor S'_{ij} no Espaço L T R

Empregando-se a expressão (156) do Capítulo 2, item 2.4.7.a) e do tensor de transformação l_{ij} , apresentado no Capítulo 3, item 3.7, pode-se escrever S'_{11} em função das constantes de elasticidade e dos ângulos θ e ϕ . Tem-se então:

$$\begin{aligned}
 S'_{11} = & \frac{1}{E_1} \cos^4 \theta + \frac{1}{E_2} \sin^4 \phi \cos^4 \theta + \frac{1}{E_3} \cos^4 \phi \sin^4 \theta + \\
 & + \left(-\frac{2\nu_{23}}{E_2} + \frac{1}{G_{23}} \right) \sin^2 \phi \cos^2 \phi \sin^4 \theta + \left(-\frac{2\nu_{13}}{E_1} + \frac{1}{G_{13}} \right) \cdot \\
 & \cdot \cos^2 \phi \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \left(-\frac{2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \phi \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \\
 & + 2 \left(\frac{\nu_{21}}{E_2} \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \frac{\nu_{31}}{E_3} \cos^2 \phi \sin^2 \theta \right) \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta + \\
 & + 2 \frac{\cos^3 \phi \sin^3 \theta \cos \theta}{E_3} + \frac{2\nu_{31} \sin \phi \cos^2 \phi \sin^3 \theta \cos \theta}{E_3}
 \end{aligned} \tag{265}$$

Relacionando-se os eixos 1,2,3 com os eixos L,T,R e obedecendo-se à convenção do tensor l_{ij} , obtêm-se os valores de S'_{11} para os planos LT, LR e RT, respectivamente.

Outra forma de se utilizar a expressão S'_{ij} diz respeito à determinação dos elementos l_{ij} presentes na expressão (156), através da medição dos ângulos entre os eixos x_i e LTR. Em síntese, fez-se a determinação dos cossenos diretores.

Neste caso, a expressão S'_{ij} fica determinada para qualquer posição x'_i (x_1, x_2, x_3). Interessante notar que vindo a expressão (155) da transformação $S'_{pqmn} = l_{pi} l_{qj} l_{mk} l_{nl} S_{ijkl}$, recai-se na necessidade da determinação de 81 elementos para o cálculo de S'_{pqmn} numa posição genérica x'_i .

Além disto, rotações do tipo da figura 152 resultariam em

outra transformação tensorial em torno do eixo x_k . No caso específico de S'_{11} , esta transformação levaria aos próprios S'_{11} .

7.4- Apresentação dos Resultados

7.4.1- Corpos de Prova: TC ($\theta - \phi$)

Os primeiros resultados a serem apresentados referem-se àqueles corpos de prova com variação dos ângulos θ e ϕ , denominados de TC ($\theta - \phi$).

Na próxima tabela estão reunidos os valores das constantes de elasticidade para os corpos de prova de dimensões 6cm x 6cm x 18cm (TC1-G e TC2-G) e aqueles com 3cm x 3cm x 9cm (TC1-P e TC2-P) e rotação de 45°.

TABELA 20- Valores de E'_{ij} , G'_{ij} (MPa) e ν'_{ij} para TC($\theta - \phi$) Rotação 0°, 45°.

Corpos de prova	E'_L	E'_T	E'_R	G'_{LT}	G'_{LR}	G'_{RT}
TC1-G	3901,0	349,3	526,1	471,3	415,4	72,5
TC1-P	3911,9	318,9	500,6	484,7	661,9	79,6
TC2-G	3507,5	287,2	519,5	420,8	377,8	75,9
TC2-P	3510,7	291,3	577,2	399,1	368,1	76,3

Corpos de prova	ν'_{LT}	ν'_{LR}	ν'_{RT}	ν'_{TL}	ν'_{RL}	ν'_{TR}
TC1-G	0,5019	0,4818	0,6802	0,0448	0,0601	0,3458
TC1-P	0,3715	0,7219	0,8765	0,2749	0,2749	0,2924
TC2-G	0,4149	0,5166	0,6680	0,0318	0,0484	0,3541
TC2-P	0,6711	0,9776	0,5438	0,1377	0,1371	0,2928

Para os corpos de prova TC1-G e TC2-G as constantes de elasticidade se referem aos planos principais L,T,R e para os

outros corpos de prova elas não se referem a estes eixos.

Há de se observar que as constantes de elasticidade a rotação 0° e 90° são basicamente equivalentes. Na tabela a seguir somente serão apresentados os resultados para 0° .

A Tabela 21 apresenta os resultados obtidos para os corpos inclinados em relação as fibras ou anéis de ângulos de 20° , 45° e 70° , além das rotações de 0° , 45° e 90° em relação ao eixo do corpo de prova.

Tabela 21- Valores de E'_1 para os TC($\theta - \phi$)
Rotação 0° , 45° (MPa)

Corpo de Prova	E_1	$\phi \setminus \theta \rightarrow$ \downarrow	20°	45°	70°
TC1-1	E_1 - plano LT	0°	2000	708	430
		45°	1905	677	410
TC2-1	E_1 - plano LT	0°	1600	661	407
		45°	1550	648	396
TC1-2	E_1 - plano LR	0°	1827	722	460
		45°	1780	679	430
TC2-2	E_1 - plano LR	0°	1760	703	438
		45°	1711	671	417
TC1-3	E_1 - plano RT	0°	400	270	320
		45°	420	250	350
TC2-3	E_1 - plano RT	0°	360	240	250
		45°	373	220	265

7.4.2- Corpos de Prova: TC (LTR)

Na Tabela 22 encontram-se os valores da constante de

elasticidade E_1 para os corpos de prova retirados em uma posição do espaço determinado pelos eixos LTR.

TABELA 22- Constantes de Elasticidade E_1 (MPa)

Corpo de Prova	E_1	Corpo de Prova	E_1
0 - 0	3500	70 - 0	3391
0 - 20	1884	70 - 20	1200
0 - 45	876	70 - 45	256
0 - 70	413	70 - 70	179
0 - 90	519	70 - 90	211
20 - 0	3666	90 - 0	3500
20 - 20	1489	90 - 20	1400
20 - 45	489	90 - 45	677
20 - 70	379	90 - 70	286
20 - 90	338	90 - 90	287
45 - 0	3700		
45 - 20	1092		
45 - 45	288		
45 - 70	111		
45 - 90	250		

7.5- Gráficos de $1/S'_{1j}$

7.5.1- Corpos de Prova TC ($\theta - \phi$)

Para se apreciar a variação de E_1 segundo as variações dos ângulos das fibras e dos anéis, são traçados gráficos de $1/S'_{1j}$ onde em determinados pontos plotam-se os valores encontrados experimentalmente. É lógico dizer que as curvas contínuas já embutem a variação do módulo de elasticidade com as fibras ou com os anéis. Em seguida, também, utilizou-se da expressão (265), de S'_{11} , θ e ϕ , para o caso tridimensional, fazendo-se uma aplicação nos planos principais de elasticidade L, T, R.

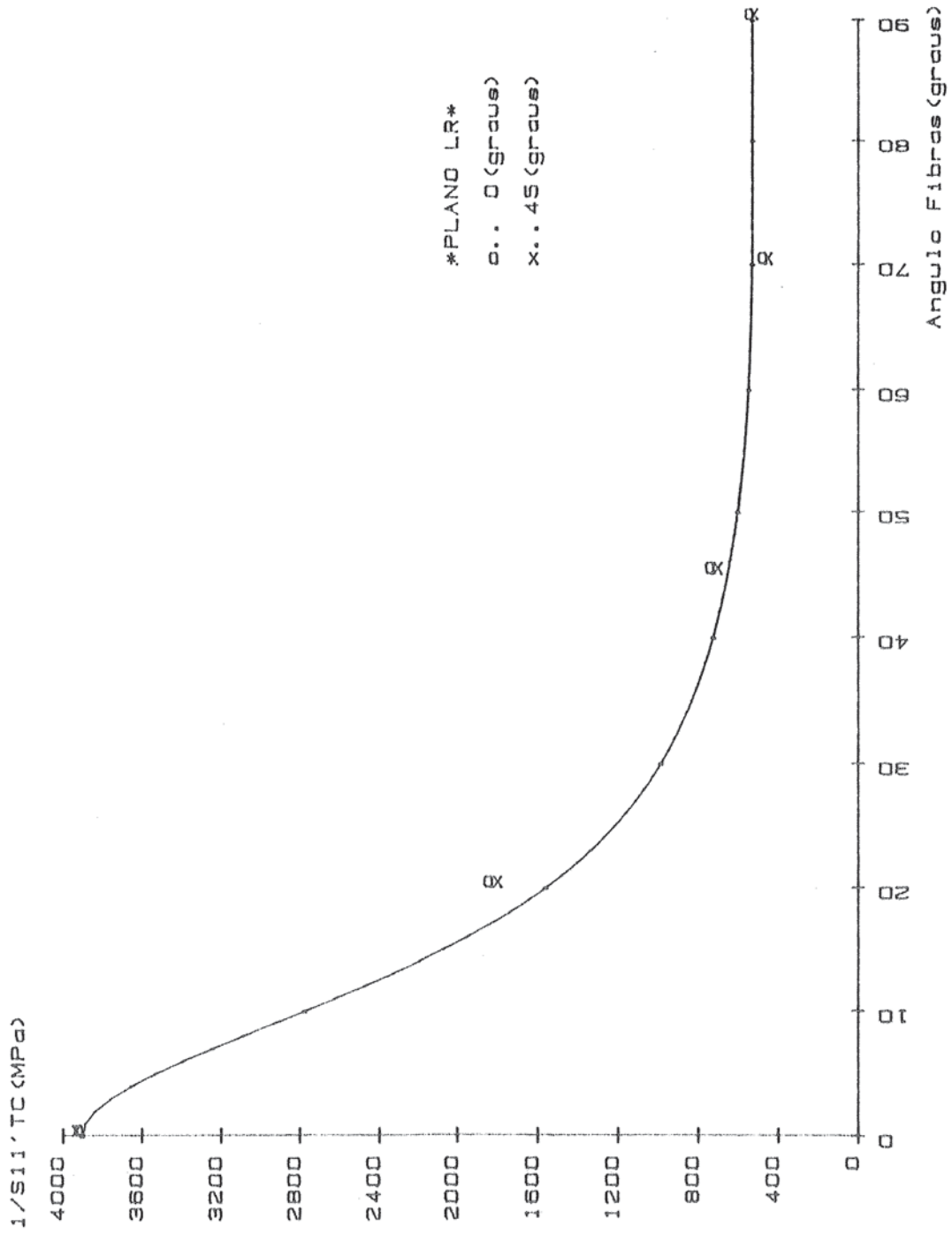


Fig. 155- Valores de 1/S11' (Plano RL) à 0°, 20°, 45°, 70° e 90° com rotações de 0°, 45° e 90°.

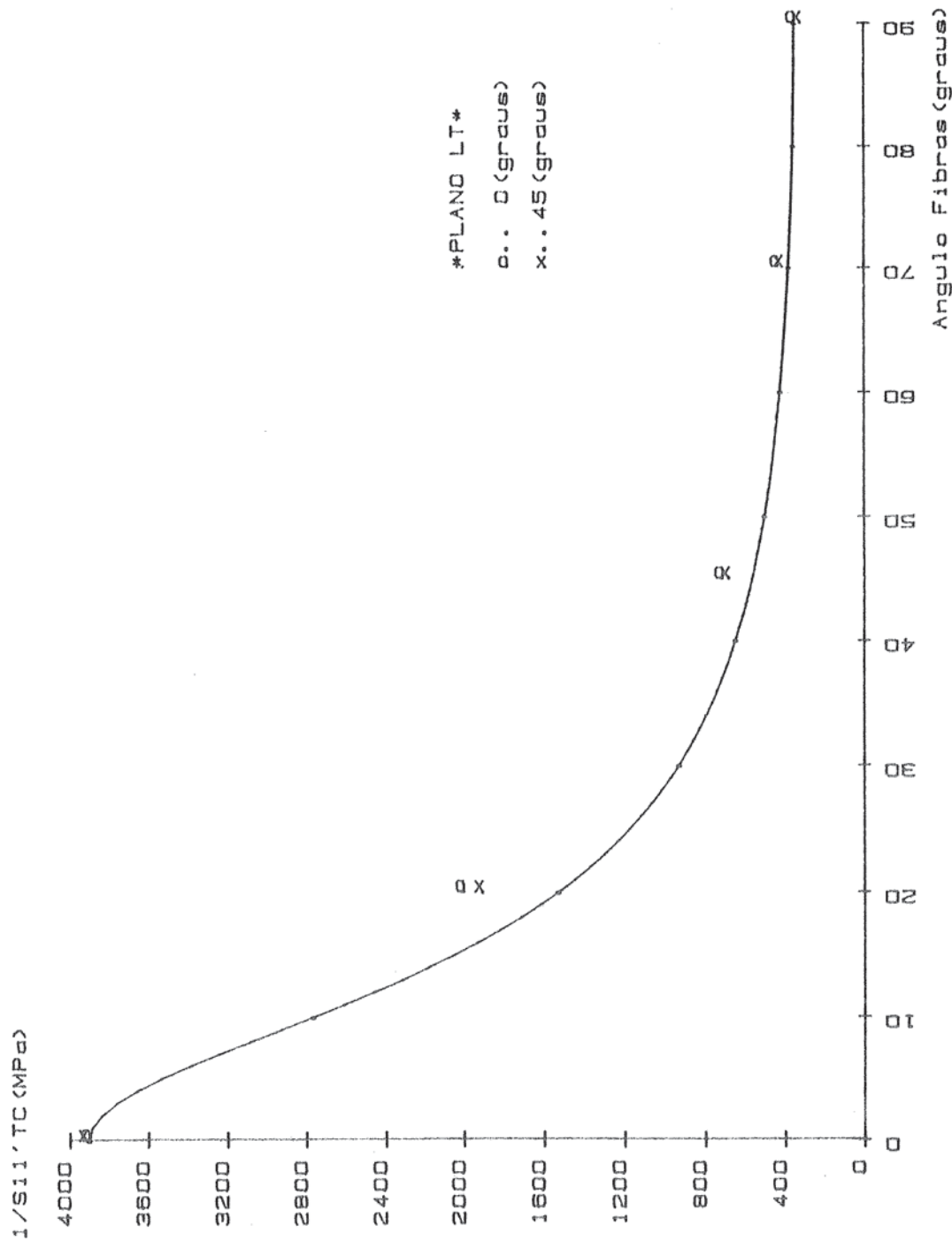


Fig. 156- Valores de 1/S11' (Plano LT) à 0°, 20°, 45°, 70° e 90° com rotações de 0°, 45° e 90°.

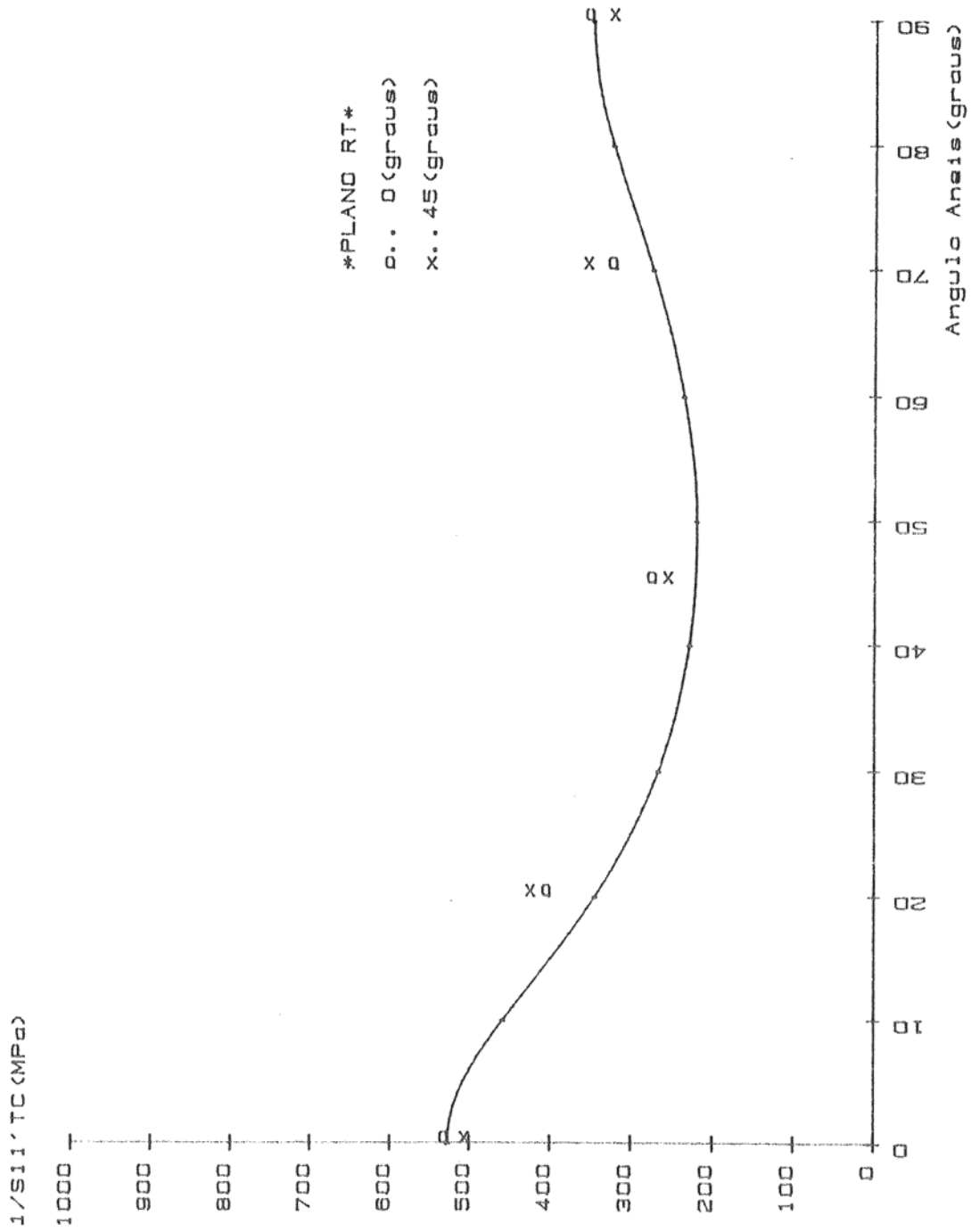


Fig. 157- Valores de 1/S11' (Plano RT) à 0°, 20°, 45°, 70° e 90° com rotações de 0°, 45° e 90°.

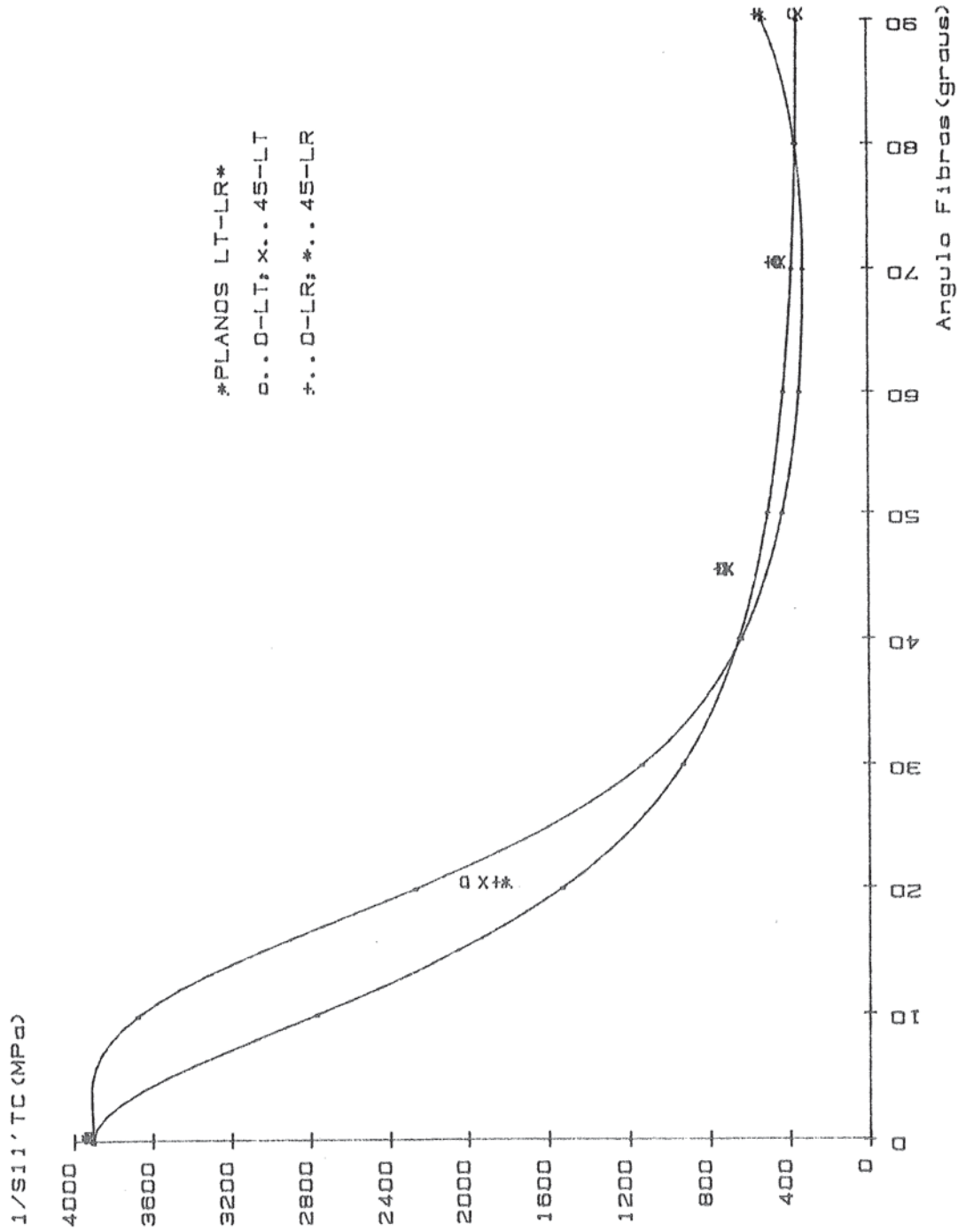


Fig. 158- Gráficos de 1/S11' evidenciando os planos LT e RL e os resultados totais.

7.5.2- Corpos de Prova TC (LTR)

Plotando-se os pontos correspondentes aos valores de E_1 vindos do item 7.4.2 construiu-se um diagrama indicando a variação de E_1 no espaço LTR.

A seguir é apresentada a figura correspondente.

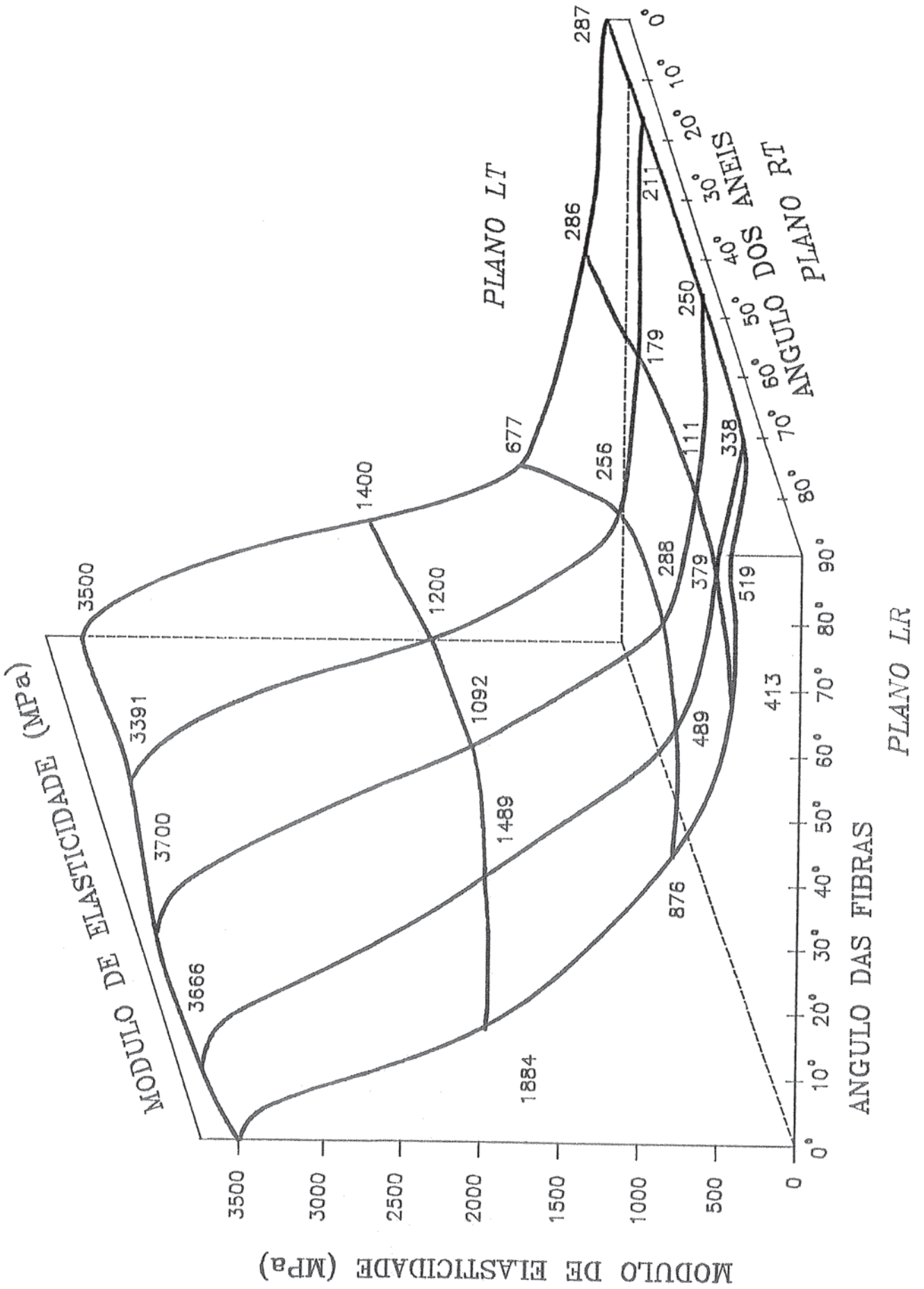


Fig. 159- Gráfico de 1/S11' no espaço LTR, evidenciando os pontos experimentais.

7.6- Comentários a Respeito dos Gráficos

De um modo geral os resultados obtidos na parte experimental aproximaram-se satisfatoriamente das curvas teóricas.

Particularmente, nas regiões em torno do ângulo das fibras $\theta = 20^\circ$, é menor a aproximação entre os dados experimentais e os teóricos.

Nos gráficos onde foram indicadas as variações do módulo de elasticidade com o ângulo dos anéis e com variação de 0° , 45° e 90° com as fibras, observa-se que quando se tem um corpo de prova no eixo R com ângulo das fibras $\theta = 90^\circ$, a influência de E_L é nula. Contudo, se $\theta = 0^\circ$, sua influência constitui-se na própria variação da constante E'_1 no plano LR. Esta observação aplica-se também ao eixo T.

Nesse sentido, cabe, de igual modo, observar que existe influência do ângulo dos anéis nas constantes de elasticidade da madeira, quando se tratar de corpos de prova situados no eixo L ou nos planos LR e LT. Isto implica que, num programa de avaliação de constantes de elasticidade para madeira, não se deve esquecer desse interessante aspecto.

O gráfico tridimensional da constante E_1 reúne, de maneira geral, todas as peculiaridades que se fizeram comentadas até este momento.

Pode-se constatar, assim, que o estudo sobre propriedades de elasticidade, e certamente valerá para outras propriedades, está imerso num meio em que a variabilidade é um fator de forte influência. Mas, de outro lado, balizando-se em subsídios teóricos adequados, observa-se que vêm à tona muitas explicações para o comportamento intrínseco desse nobre material que a natureza, sabiamente, colocou a disposição ao uso da engenharia.

8- OBSERVAÇÕES SOBRE OS COEFICIENTES DE INFLUÊNCIA MÚTUA E OS COEFICIENTES DE POISSON

8.1- Introdução

No âmbito geral deste trabalho foi possível realizar algumas outras investigações na direção da determinação dos coeficientes de influência mútua de 1ª e 2ª espécies, ou coeficientes de Rabinovich, de acordo com Lekhnitskii ⁽⁶⁾.

É, também, interessante apresentar os valores do coeficiente de Poisson para ângulos das fibras ou dos anéis além daqueles $\theta, \phi = 0^\circ$ ou $\theta, \phi = 90^\circ$.

Neste capítulo serão abordados estes dois assuntos, os quais estão intimamente relacionados com a anisotropia dos materiais.

8.2- Determinação do Coeficiente de Influência Mútua de 2ª Espécie

No item 2.4.6.c) foi mostrada a representação das leis constitutivas segundo a visão de Rabinovich, apud Lekhnitskii ⁽⁶⁾. Nessas equações estão embutidos os coeficientes de influência mútua. Particularmente, quando se dispõe de uma solicitação de compressão simples, num material anisotrópico, como a madeira, pode-se escrever as equações (147) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{yz}} \eta_{x,yz} \sigma_x \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G_{xz}} \eta_{x,xz} \sigma_x \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G_{xy}} \eta_{x,xy} \sigma_x \end{aligned} \quad (266)$$

Naturalmente foi considerada apenas a tensão σ_x diferente de zero.

Por outro lado, para se obter as distorções γ_{yz} , γ_{xz} e γ_{xy} , devem ser praticadas as expressões deduzidas no item 5.3, as observações do item 5.4.2. a respeito do posicionamento das fibras no corpo de prova (ângulos das fibras θ ou dos anéis ϕ), bem como a colocação dos extensômetros elétricos.

Adequando-se os eixos x, y, z aos eixos x_1, x_2 e x_3 , pode-se chegar às expressões:

$$\gamma'_{12} = 2(\epsilon_{22} - \epsilon_{11}) \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + 2(\epsilon'_{11} - \epsilon_{11} \cos^2\alpha - \epsilon_{22} \operatorname{sen}^2\alpha) \times \\ \times \cotg 2\alpha \quad (267)$$

e:

$$\sigma'_{22} = \sigma_{22} \cos^2\alpha \quad (268)$$

Depreende-se daí que:

$$\gamma'_{12} = \frac{1}{G'_{12}} \eta'_{1,12} \sigma'_{22} \quad (269)$$

e portanto:

$$\eta'_{1,12} = 2G'_{12} [(\epsilon_{22} - \epsilon_{11}) \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + (\epsilon'_{11} - \epsilon_{11} \cos^2\alpha - \epsilon_{22} \operatorname{sen}^2\alpha) \times \\ \times \cotg 2\alpha] / \sigma'_{22} \cos^2\alpha \quad (270)$$

Para $\alpha = 45^\circ$, tem-se

$$\eta_{1,12}' = \frac{2G_{12}' (\epsilon_{22}' - \epsilon_{11}')}{\sigma_{22}'} \quad (271)$$

Ilá de se notar que G_{12}' é o módulo de elasticidade transversal num plano principal.

Fica evidente que, ao se tratar com os outros eixos, a expressão $\eta_{1,12}'$ sofre os devidos acertos. Geralmente, escreve-se $\eta_{1,ij}'$.

8.3- Resultados Obtidos para $\eta_{1,ij}$ e Algumas Observações

A seguir são apresentados os resultados de $\eta_{1,ij}$ para as quatro espécies de madeira utilizadas neste trabalho.

TABELA 23- Coeficientes de Influência Mútua de 2^a Espécie

Espécies de Madeira	$\eta_{L,LT}$	$\eta_{L,LR}$	$\eta_{R,RT}$
Angico	1,1485	0,7578	0,3691
Ipê	1,1311	0,9234	0,5901
Pinus	1,1001	0,7390	0,3094
Guapuruvú	0,6456	0,6799	0,2273

Neste momento, parece oportuno relacionar os coeficientes de influência mútua com os coeficientes S_{ij} . Nesse sentido, ao se deter na expressão de S_{16}' , ou seja:

$$S_{16}' = \frac{\gamma_{x_1 x_j}'}{\sigma_{x_j}'} \quad (272)$$

Como já descrito em 6.6.4., nota-se que este coeficiente relaciona tensão normal com distorção.

De outro lado, os coeficientes $\eta_{1,ij}$ quantificam a influência das tensões normais nas distorções.

Em síntese, os dois coeficientes medem as mesmas influências, sendo descritos por notações diferentes e tendo valores numéricos distintos (Tabela 18 - item 6.7.4.).

De um modo geral, observa-se que os coeficientes apresentados por Rabinovich e Chentsov, apud Lekhnitskii⁽⁶⁾ têm conotações análogas aos coeficientes S_{ij} , presentes no tensor constitutivo.

Em termos numéricos, a título de ilustração, ao se aplicar uma tensão de 1 MPa numa peça de madeira de área de 15cm^2 , considerando-se um coeficiente $G_{ij} = 500$ MPa e $E_1 = 6.000$ MPa, pode-se obter distorções da ordem de 1300×10^{-6} e deformações axiais da ordem de 800×10^{-6} . O coeficiente de influência mútua $\eta_{1,ij}$, neste caso, assume o valor de 0,65 e evidencia a ordem de grandeza das distorções produzidas pela tensão normal.

Isto retrata a anisotropia da madeira, visto que o coeficiente $\eta_{1,ij}$ é nulo para materiais considerados isotrópicos.

8.4- Coeficientes de Poisson. Compressibilidade da Madeira

Os coeficientes de Poisson, da mesma maneira que os outros coeficientes aqui estudados, apresentam grande variação numérica, quer nos planos principais L, R, T, quer em planos quaisquer.

No estudo dos coeficientes S'_{ij} , particularmente naqueles S'_{12} , que representam a razão entre ν'_{12} e E'_1 , já ficou clara a grande dispersão dos valores do coeficiente de Poisson para a madeira.

Neste item, através de uma tabela, serão mostrados alguns valores numéricos de ν'_{ij} para a espécie Guapuruvú.

Seja, então, a seguinte tabela:

TABELA 24 - Coeficientes de Poisson nos Planos Principais

	0°	20°	45°	70°	90°
Plano LT	0,6238	0,4092	0,0821	0,0339	0,0317
Plano LR	0,6885	0,3743	0,1347	0,0715	0,0601
Plano RT	0,8673	0,7827	0,8047	0,8273	0,4975

Naturalmente, estes valores estão aferidos para uma série de corpos de prova.

Em outras séries, cujos resultados não estão aqui colocados, foram encontrados valores negativos para coeficientes de Poisson, assim como valores maiores que 1. Casos típicos de valores negativos ocorrem em ângulos ao redor de 45°. Por outro lado, nos planos RT ou planos genéricos $x'_1 x'_j$ foram encontrados ν_{ij} maiores que a unidade.

Nota-se, através deste resumo de informações, que a madeira tem um alto grau de compressibilidade. Nos trabalhos de Hearmon ⁽¹⁾, são apresentados valores de coeficientes de compressibilidade de algumas espécies de madeira (Oak, Red Beech, Oregon pine) e outros materiais (aço, zinco etc). O coeficiente de compressibilidade é dado, por exemplo, pela soma ($S_{11} + S_{12} + S_{13}$), quando se consideram medidas de deformações e de tensões no eixo x_1 .

Para o aço ($S_{11} + S_{12} + S_{13}$) $\approx 2,040 \times 10^{-6} \times \text{MPa}^{-1}$; para as três espécies de madeira descritas anteriormente tem-se ($S_{11} + S_{12} + S_{13} + S_{12}$) $\approx 596,36 \times 10^{-6} \text{MPa}^{-1}$, em média. Os valores da compressibilidade da madeira dependem, naturalmente, da espécie de madeira e dos planos considerados. Conclue-se, desse modo, que a compressibilidade da madeira é bem superior à do aço.

Em termos de compressibilidade volumétrica, basta somar os elementos do tensor S_{ij} , cujos índices variam de 1 a 3, haja vista que a compressibilidade numa direção é dada pela soma dos elementos S_{ij} , de uma linha do tensor (por exemplo $i=1, j=1$ a 3).

Outras informações, no que tange a um material isotrópico, podem ser obtidas entre outros, em Timoshenko e Goodier⁽⁸⁶⁾, onde é definido o módulo de elasticidade volumétrico, sendo igual a $E/3(1 - 2\nu)$.

Neste contexto, observa-se que a madeira deve possuir coeficientes de Poisson relativamente altos e, por outro lado, relativamente baixos, diferentemente de um material isotrópico. Dessa forma, a anisotropia vinculada à estrutura micro e macroscópica fica plenamente evidenciada.

8.5- Alguns Comentários sobre o Coeficiente de Influência Mútua de 1ª Espécie

Em decorrência da simetria existente no tensor constitutivo, pode-se fazer uma avaliação dos coeficientes de influência mútua de 1ª espécie, $\eta_{ij,j}$. Estes coeficientes avaliam a influência das tensões tangenciais nas deformações normais.

Com efeito, escreve-se:

$$\frac{\eta_{i,ij}}{G_{ij}} = \frac{\eta_{ij,j}}{E_j} \quad (273)$$

e daí:

$$\eta_{ij,j} = \eta_{i,ij} \frac{E_j}{G_{ij}} \quad (274)$$

A título de ilustração numérica, monta-se a seguinte tabela, com base nos G_{ij} , E_j e em se tratando de plano LT, por exemplo.

TABELA 25 - Valores do Coeficiente de Influência Mútua de 1ª Espécie

Espécies	Guapuruvú	Ipê	Pinus	Angico
$\eta_{ij,j}$	0,5364	1,3051	2,6407	0,7298

E retornando-se ao exemplo do item 8.3, encontrar-se-ia $\eta_{ij,j} \cong 0,70$, considerando-se um $E_j = 540$ MPa.

Estes dados indicam que ao se lidar com uma peça de madeira fora de seus eixos principais de elasticidade, as influências da anisotropia se manifestam com bastante intensidade.

9- OBSERVAÇÕES A RESPEITO DO ENSAIO DE FLEXÃO ESTÁTICA

9.1- Introdução

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos nos ensaios de flexão estática.

No capítulo 4, mais especificamente no item 4.5, foram delineadas diversas variáveis envolvidas nos ensaios de flexão em peças de madeira. Dessa forma, sempre que necessário será possível aludir àquele capítulo. Alguns aspectos relacionados com anisotropia do material foram considerados na equação de cálculo dos deslocamentos e conseqüentemente na determinação das constantes de elasticidade.

Por outro lado, foi desenvolvido outro modelo para a peça em flexão para aplicação do programa SAP90. Este modelo consistiu na subdivisão desta peça em cinco partes, cada uma considerada com características de elasticidade próprias.

Por fim, são feitas as comparações de resultados das constantes de elasticidade advindas dos ensaios de compressão e flexão.

9.2- Expressões Utilizadas para Determinação das Constantes de Elasticidade na Flexão

Os deslocamentos u_1 podem ser obtidos através da função de tensão ϕ no plano $x_1 - x_2$.

A função de tensão ϕ é escrita por meio de :

$$S_{2222} \phi_{,1111} - 4 S_{2212} \phi_{,1112} + 2(S_{1122} + 2 S_{1212}) \phi_{,1122} - \\ - 4 S_{1112} \phi_{,1222} + S_{1111} \phi_{,2222} = 0 \quad (275)$$

Nota-se que $S_{2222} = S_{22}$; $2S_{2212} = S_{26}$; $S_{1122} = S_{12}$;

$$4S_{1212} = S_{66}; \quad 2S_{1112} = S_{16} \text{ e } S_{1111} = S_{11}.$$

A equação de tensão ϕ pode ser, também, escrita por:

$$\begin{aligned} S_{22} \phi_{,1111} - 2S_{26} \phi_{,1112} + (2S_{12} + S_{66}) \phi_{,1122} - \\ - 2S_{16} \phi_{,1222} + S_{11} \phi_{,2222} = 0 \end{aligned} \quad (276)$$

As funções deslocamentos são, então, representadas por:

$$u_{1,1} = S_{11} \phi_{,22} + S_{12} \phi_{,11} - S_{16} \phi_{,12} \quad (277)$$

$$u_{2,2} = S_{12} \phi_{,22} + S_{22} \phi_{,11} - S_{26} \phi_{,12} \quad (278)$$

$$1/2 (u_{1,2} + u_{2,1}) = S_{16}/2 \phi_{,22} + S_{26}/2 \phi_{,11} - S_{66}/2 \phi_{,12} \quad (279)$$

Integrando-se (277) e (278) em relação a x_1 e x_2 obtem-se:

$$u_1 = S_{11} \int \phi_{,22} dx_1 + S_{12} \phi_{,1} - S_{16} \phi_{,2} + f(x_2) \quad (280)$$

e

$$u_2 = S_{12} \phi_{,2} + S_{22} \int \phi_{,11} dx_2 - S_{26} \phi_{,1} + g(x_1) \quad (281)$$

onde f e g são funções arbitrárias.

Inserindo-se as funções u_1 e u_2 em (279), chega-se a:

$$\begin{aligned} S_{1111} \int \phi_{,222} dx_1 + S_{2222} \int \phi_{,111} dx_2 + 2(S_{1122} + 2S_{1212}) \phi_{,12} - \\ - 4 S_{1112} \phi_{,22} - 4 S_{2212} \phi_{,11} + g(x_1)_{,1} + f(x_2)_{,2} = 0 \end{aligned} \quad (282)$$

Esta equação é empregada para se determinar as funções $f(x_2)$ e $g(x_1)$ a partir das condições de contorno de determinado problema.

De um modo geral este procedimento para determinação de funções deslocamentos está discutido, detalhadamente, em Timoshenko e Goodier⁽⁸⁶⁾ e no caso particular de anisotropia ortotrópica em Lekhnitskii et alii⁽⁴⁵⁾, Hashin⁽¹⁰⁰⁾, Silverman⁽²⁾ e Noach e Roth⁽¹⁰¹⁾.

Numa viga biapoiada com carga pontual P, como indicado na figura:

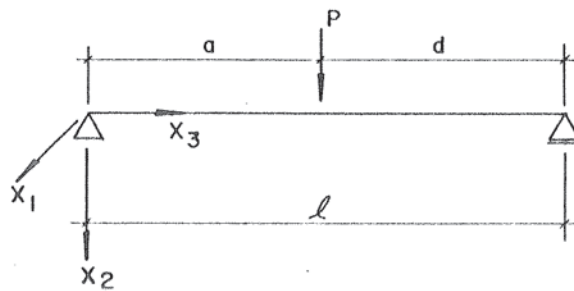


Fig. 159- Viga biapoiada com carga pontual P.

têm-se as seguintes tensões agindo na viga:

$$\sigma_{x_3} = M_{(x_1)} \frac{x_2}{I_{(x_1)}} = \frac{Pdx_2x_3}{I_{(x_1)}} \quad (283)$$

$$\sigma_{x_2x_3} = \tau_{x_2x_3} = \frac{V_{(x_2)} S_{(x_1)}}{b I_{(x_1)}} = \frac{3}{2} \frac{Pd}{IA} - \frac{Pdx_2^2}{2I_{(x_1)}l} \quad (284)$$

As deformações seriam:

$$\epsilon_{x_3} = S_{33} \sigma_{x_3} + S_{34} \tau_{x_2x_3} \quad (285)$$

$$\epsilon_{x_2} = S_{23} \sigma_{x_3} + S_{24} \tau_{x_2 x_3} \quad (286)$$

$$\gamma_{x_2 x_3} = S_{34} \sigma_{x_3} + S_{44} \tau_{x_2 x_3} \quad (287)$$

A partir dessas relações pode-se obter a função deslocamento $u_2(x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} u_2(x_2, x_3) = & \frac{Pdx_3 x_2^2}{2II_{(x_1)}} S_{23} + \frac{3Pdx_2}{2IA} S_{24} - \frac{Pdx_2^3}{6II_{(x_1)}} S_{24} + \\ & + B_0 x_3 - \frac{Pdx_3^3}{6II_{(x_1)}} S_{33} + \frac{Pdx_2 x_3^2}{2II_{(x_1)}} S_{34} + \frac{3Pdx_3}{2IA} S_{44} - B_1 \end{aligned} \quad (288)$$

válida para $0 \leq x_3 \leq 1/2$. Os termos B_0 e B_1 são determinados a partir de condições de contorno. A parcela de $u_2(x_2, x_3)$ relativa ao trecho $1/2 \leq x_3 \leq 1$ pode ser expressa de forma análoga à (288).

Interessante observar que a função $u_2(x_2, x_3)$ depende de coeficientes $S_{34} = \eta_{x_2 x_3, x_3} / E_{x_3} = \eta_{x_3, x_2 x_3} / G_{x_2 x_3}$, coeficientes de

influência mútua de 1^a e 2^a espécie. Evidentemente se os eixos principais de simetria elástica coincidirem com os eixos x_1 , estes coeficientes se anulam. Tem-se como consequência que tensões normais não produzem deformações tangenciais e tensões tangenciais não produzem deformações normais. Os coeficientes S_{23} e S_{24} , com a restrição anterior, também se anulam.

Na expressão (288), ao se considerar $a = d = 1/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1/2$, obtém-se:

$$u_2\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{Pl^3}{48I_{(x_1)}} S_{11} \quad (289)$$

nada mais que a usual expressão do cálculo, do deslocamento vertical, em função do módulo de elasticidade E_1 ou S_{11}^{-1} .

Ao se levar em conta a influência da anisotropia

do material deve-se, segundo Lekhnitskii et alii⁽⁶⁾ e Hashin⁽¹⁰⁰⁾, colocar a expressão da curvatura como sendo:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{I} S_{ij} + \Delta \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (290)$$

onde o segundo termo desta expressão não é apreciado na teoria elementar de flexão.

A solução dos problemas de flexão, segundo estes pesquisadores, implicaria em se considerar $\Delta \sigma_{x_1}$, $\Delta \tau_{x_1 x_2}$, funções de coeficientes S_{ij} , presentes na lei constitutiva do material. As funções polinomiais do tipo:

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} x_1^m x_2^n \quad (291)$$

propostas por Neon, em 1957, apud Malvern⁽¹⁰²⁾, onde C_{mn} são constantes arbitrárias, e as funções tipo

$$\phi = f_m(x_2) \cos \frac{m\pi x_1}{l} \quad (292)$$

ou séries de Fourier (Lekhnitskii et alii⁽⁴⁵⁾) são de uso constante na determinação das funções de tensão e, conseqüentemente, nas funções deslocamentos.

No exemplo específico da viga com carga concentrada, Timoshenko e Goodier⁽⁸⁶⁾, Lekhnitskii et alii⁽⁴⁵⁾ sugerem a aproximação de carga concentrada P a uma distribuída q num pequeno intervalo. Isto é significativamente prático, pois geralmente se aplica uma carga P numa base com uma determinada área.

Aplicando-se esta simplificação e admitindo-se a coincidência entre eixos geométricos e eixos principais de elasticidade, a parcela considerada anisotrópica tende a:

$$u_2(x_2, x_3) = \frac{3}{10} \frac{Pl}{A} S_{44} \quad (293)$$

$$u_2(x_2, x_3) = \frac{3}{10} \frac{Pl}{G_{x_2 x_3} A} S_{44} \quad (294)$$

onde $G_{x_2 x_3}$ é o módulo de elasticidade transversal.

Dessa forma o deslocamento $u_2(x_2, x_3) = u(0, l/2)$

torna-se:

$$u_2(0, l/2) = \frac{Pl^3}{48 E_{x_3} I_{(x_1)}} + \frac{3Pl}{10 G_{x_2 x_3} A} \quad (295)$$

Aplicando-se esta expressão em duas situações de ensaio, tais como:

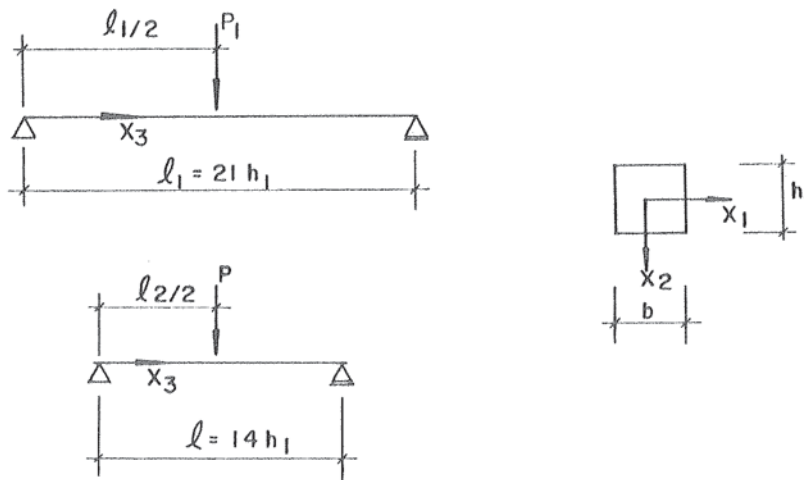


Fig. 160 e 161- Duas situações de ensaio.

Primeira $l/h = 21$, segunda $l/h = 14$

recai-se num sistema de duas equações a duas incógnitas E_{x_3} e $G_{x_2 x_3}$ ou, simplesmente, E_3 e G_{23} , de pronta solução.

Resolvendo-se, desse modo, este sistema obtêm-se as seguintes expressões para E_3 e G_{23} :

$$E_3 = \frac{P_1 P_2 l_1 l_2 (l_1^2 - l_2^2)}{48 (P_2 l_2 u_2^{(1)} - P_1 l_1 u_2^{(2)}) I_{x_1}} \quad (295)$$

$$G_{23} = \frac{144 P_1 l_1 E_3 I_{x_1}}{480 E_3 I_{x_1} A u_2^{(2)} - 10 P_1 A l_1^3} \quad (296)$$

onde: $u_2^{(1)}$ = deslocamento vertical na 1ª situação de ensaio e
 $u_2^{(2)}$ analogamente na segunda situação de ensaio.

Neste momento, cabe observar que o valor de G_{23} pode ser G_{LT} ou G_{LR} dependendo naturalmente do posicionamento do corpo de prova nas situações de ensaio.

9.3- Apresentação e Análise dos Resultados do Ensaio de Flexão

Foram ensaiados corpos de prova de cada uma das espécies aqui utilizadas. São apresentados os resultados médios para as constantes de elasticidade, haja vista que a dispersão neste caso foi, de fato, muito pequena. Em relação aos resultados de G_{LT} e G_{LR} são colocados apenas os valores de G_{LT} devido à coincidência entre estes dois módulos, advindos dos resultados de flexão.

TABELA 26- Resultados do Ensaio de Flexão

Espécies	E_L (MPa)	G_{LT} (MPa)
Pinus	8862	253
Angico	12139	379
Ipê	20900	364
Guapuruvú	7871	303

Os resultados apresentados na Tabela 26 evidenciam um valor maior da constante E_L e, por outro lado, um valor menor da constante G_{LT} ou G_{LR} comparando-se com os resultados pertinentes ao ensaio de compressão simples.

Um dado interessante deve ser ressaltado: G_{LT} é determinado a partir de pequenos valores de deslocamento, face à pequena participação dos deslocamentos afins de G_{LT} na expressão do cálculo do deslocamento total de uma viga.

9.4- Modelos para Análise dos Resultados do Ensaio de Flexão Utilizando o Programa SAP90

Com o objetivo de investigar um pouco mais as peculiaridades que envolvem o ensaio de flexão, foram analisadas duas situações:

1ª situação: realizou-se ensaio de flexão numa peça de dimensões 4,94cm x 4,94cm x 108,30cm, razão vão/altura = 14. Foram colocados cinco DCDTs como se mostra na figura.

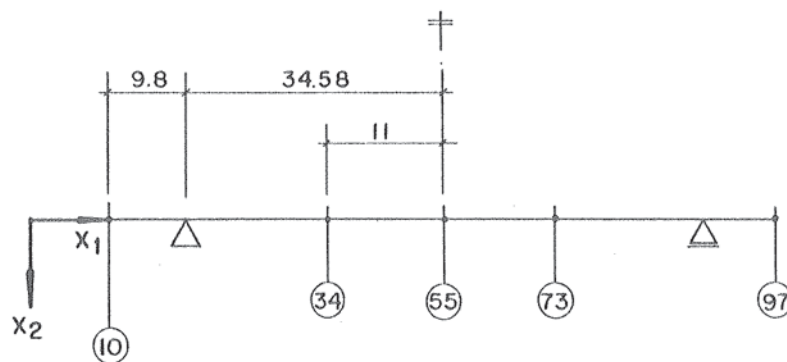


Fig. 162- Posição dos DCDTs na peça para o ensaio de flexão (Dimensões em cm).

A numeração 10, 34, 55, 73, 97 é usada para se fazer a associação com a identificação dos nós dos elementos na discretização para o SAP90.

Determinou-se através das expressões de E_i e G_{ij} apresentadas neste capítulo, os seguintes valores:

$$E_L = 7225,7 \text{ MPa}$$

$$G_{LR} = 308,0 \text{ MPa}$$

A partir destes dados e arbitrando-se valores para E_T , E_R , G_{LT} , G_{RT} e os coeficientes de Poisson nos planos LT, LR e RT, baseados em relações lineares de E_L , G_{LR} (Biblis⁽¹⁰³⁾, Eurocode n^o 5⁽¹⁰⁴⁾), determinando-se através do SAP90 os deslocamentos nos pontos nodais 10, 34 97.

TABELA 27 - Valores das Constantes de Elasticidade (MPa)

Corpo de prova	E_L	E_T	E_R	G_{LT}	G_{LR}	G_{RT}
CPF*	7225,7	839	1238	308	308	48,8

* CPF = Corpo de prova na flexão

Corpo de prova	ν_{LT}	ν_{RL}	ν_{RT}
CPF	0,618	0,0781	0,830

2^a situação: foram realizados ensaios de compressão simples em cinco amostras retiradas da peça utilizada no ensaio de flexão da situação anterior. Essas amostras tinham, em média, as seguintes dimensões: 4,94cm x 4,94cm x 20,0cm. Desta forma, obtiveram-se os valores de E_i e os coeficientes de Poisson para cada amostra. Com base nas mesmas relações lineares de E_L , estimaram-se os outros parâmetros de elasticidade, como indicados na tabela:

TABELA 28 - Valores das Constantes de Elasticidade* nas Partes da Peça de Flexão (MPa)

Corpos de Prova	E_L	E_T	E_R	G_{LT}	G_{LR}	G_{RT}
CP1	8852	856	1267	1052	1164	165
CP2	8829	854	1261	1049	1161	165
CP3	8670	839	1238	1030	1140	162
CP4	8852	856	1267	1052	1164	165
CP5	8212	794	1173	976	1080	153

* Os valores dos coeficientes de Poisson utilizados foram os mesmos da Tabela 27.

Com estes dados, repetiu-se o procedimento anterior e foram determinados os deslocamentos nos pontos nodais 10 97. Cabe observar que, no equacionamento destes problemas para uso do SAP90, foram empregados conceitos inerentes ao modelo ortotrópico (tensor S_{ijkl}).

Face ao exposto, foi possível montar uma tabela indicando os valores de deslocamento naqueles cinco pontos, por intermédio de resultados advindos dos dois modelos de flexão e um outro vindo de resultado da experimentação. Tem-se, portanto, a seguinte tabela:

TABELA 29 - Deslocamentos nos Pontos Nodais (cm)

Pontos Nodais	10	34	55	73	97
Situação*	Deslocamentos (cm)				
Flexão (1)	-0,1535	0,3427	0,6215	0,3427	-0,1535
Flexão (2)	-0,1266	0,2198	0,3765	0,2198	-0,1266
Experimental	-0,051	0,145	0,222	0,158	-0,034

* Flexão (1) = situação (1); Flexão (2) = situação (2)

Esta tabela evidencia, de forma clara, alguns aspectos relativos ao ensaio de flexão e à variabilidade intrínseca da madeira.

Em relação aos resultados para constantes de elasticidade, o ensaio de flexão apenas aponta para uma razoável aproximação aos valores de módulo de elasticidade obtidos através de um ensaio de compressão, considerado mais puro. Entretanto, os valores de G_{1j} revelam-se distintos, de modo geral.

Há de se notar que, sendo a peça de flexão cerca de cinco vezes maior que a de compressão, estar-se-á trabalhando com uma variabilidade tal que implica numa dispersão de resultados bem mais acentuada. É natural, ao se trabalhar com grandes amostras, estas evidências ficarem mais perceptíveis.

Com respeito aos resultados de deslocamentos da última tabela, deve-se considerar que o universo em questão está restrito a apenas cinco pontos e a apenas uma peça. Todavia, não se pode descartar os diferentes resultados apresentados. É óbvio que, à medida que se aumente o valor dos módulos de elasticidade no ensaio da situação (2), diminuem os deslocamentos e a resposta deste modelo se aproxima a do ensaio da situação (1).

Embora não se constitua de abordagem pertinente ao presente trabalho, este campo de pesquisa está aberto a investigações mais detalhadas. Nos aspectos de interesse do trabalho (ensaio de flexão entendido como subsídio para aferir o ensaio de compressão), os objetivos foram alcançados de maneira amplamente satisfatória.

10- CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHO

De um modo geral, as conclusões deste presente trabalho foram apresentadas em cada capítulo. Com o intuito de mostrar um quadro geral e sintético das conclusões alcançadas, pode-se delinear-las da seguinte maneira:

- A adequação da madeira ao modelo ortotrópico demonstrou ser plenamente viável. A simetria do tensor constitutivo S_{ijkl} constitui-se num importante subsídio a esta adequação.

- O tratamento matemático para a madeira torna-se mais ou menos complexo ao se considerar a coincidência ou não entre eixos geométricos e eixos principais de elasticidade do material. O tensor constitutivo, no caso de haver esta coincidência, é montado com 9 elementos.

- O módulo de elasticidade E_L é numericamente bem maior que E_R , e este pouco maior que o E_T . Os módulos transversais G_{LT} e G_{LR} são próximos entre si e cerca de oito vezes superiores a G_{RT} . Dos coeficientes de Poisson, ν_{RT} é aquele que se apresenta maior e os ν_{RL} e ν_{TL} são os menores.

- Os corpos de prova para a determinação das constantes de elasticidade na compressão simples devem ser preparados com rigor e devem ser utilizados instrumentos precisos para medição de deslocamentos e deformações (tipo extensômetros elétricos de resistência). Na colocação destes extensômetros atenta-se para as peculiaridades ou os defeitos que possam existir nas faces do corpo de prova.

- O conhecimento das características macro e microscópicas da madeira conduzem ao bom entendimento do seu comportamento mecânico.

- Os resultados advindos dos ensaios de flexão não se

alinham bem com os resultantes do ensaio de compressão simples. Na realidade, a flexão na madeira deve ser objeto de muita investigação, pois ainda não se tem completo conhecimento das variáveis que compõem aquele problema e o que realmente pode ser determinado com o citado ensaio.

- As curvas dos S'_{ijkl} com ângulos de fibras e ou de anéis tiveram boa aderência quando considerados valores teóricos e valores obtidos na experimentação.

- Os resultados dos ensaios também acompanharam os obtidos por método numérico vinculado ao programa SAP90.

- A anisotropia da madeira ficou mais evidenciada quando da determinação dos coeficientes de Rabinovitch (coeficientes de influência mútua de 1^a e 2^a espécie) e da implicação destes coeficientes nas deformações normal e tangencial de uma peça de madeira.

No que tange às propostas de trabalho, parece necessário o estudo da anisotropia cilíndrica que envolveria: as peças de madeira em forma de troncos; madeiras de reflorestamento (Eucaliptus e Pinus), as quais apresentam diâmetro relativamente pequeno para a retirada de peças que tenham os eixos L, T, R ortogonais entre si.

Devem ser apreciadas as solicitações de tração, flexão e outras em peças de madeira, com uma abordagem segundo a teoria elástica anisotrópica. Isto certamente, apesar das dificuldades que se apresentarão, dará uma visão mais completa sobre o assunto. Aplicações destas teorias em estruturas de madeira, tipo silos, grandes treliças, pontes, etc, também são metas desejáveis.

Devem ser investigados, também, na continuação deste trabalho, aspectos fundamentais relacionados com o comportamento da madeira a solicitações de longa duração.

Pesquisas assim conduzidas constituir-se-ão nos mais atualizados subsídios para a redação dos novos textos das normas brasileiras referentes às estruturas de madeira.

Finalmente é proposta, a seguinte metodologia experimental para a determinação do módulo de elasticidade transversal:

. Dimensões nominais do corpo de prova: 4cm x 4cm x 12cm ou dimensões interrelacionadas na razão de 1:1:3.

. Retirada dos seguintes corpos de prova:

- paralelos às direções L, T ou R
- a 45° dos eixos L, T ou R

. Umidade em torno de 12%, objetivando-se a colagem de extensômetros elétricos de resistência, no caso destes serem os medidores de deformações.

. Utilização de placas de distribuição de carga, com a presença de junta, com o intuito de se evitarem possíveis excentricidades.

. Velocidade de carga: 10 MPa/min.

Ensaio:

1º ensaio: corpos de prova retirados nas direções L, T ou R.

Determinação de: E_j e ν_{ij} através das expressões:

$$E_j = \frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}$$

$$\nu_{ji} = - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} \quad (297)$$

sendo ε_i , ε_j valores de deformações nas direções i e j.

2º ensaio: corpos de prova retirados a 45° dos eixos L, T ou R.

Determinação de E_k através de

$$E_k = \frac{\sigma_k}{\varepsilon_k} \quad (298)$$

sendo ε_k valor de deformação medido na direção k.

. Cálculo do módulo de elasticidade transversal.

$$G_{1J} = \frac{E_i E_j E_k}{4E_i E_j - E_j E_k + (2\nu_{ji} - 1) E_i E_k} \quad (299)$$

A seguir são apresentadas as figuras 163 e 164.

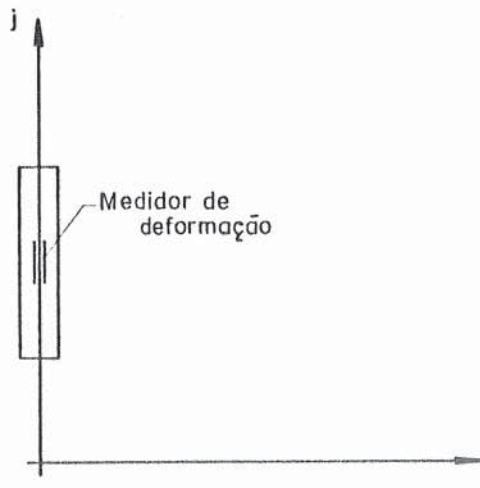


Fig. 163- Representação do corpo de prova no 1º ensaio

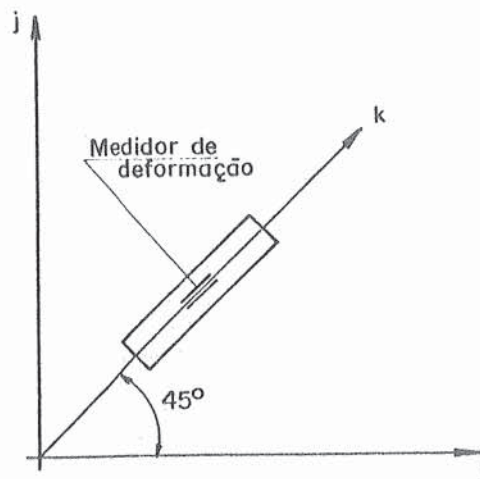


Fig. 164- Representação do corpo de prova no 2º ensaio

11- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (35) AL-DABBAGH, A., GOODMAN, J.R., BODIG, J. Finite element method for wood mechanics. Journal of the Structural Division, v.98, n.ST3, p.569-586, Mar. 1972.
- (56) AMERICAN SOCIETY FOR TESTING MATERIALS. Annual Book of ASTM Standart. Philadelphia: ASTM, 1981. part 22, wood; adhesives.
- (90) ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Cálculo e execução de estruturas de madeira (NBR 7190-82). Rio de Janeiro, 1982. 23p.
- (83) ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Ensaio físicos e mecânicos de madeiras (NBR 6230-80). Rio de Janeiro, 1980 16p.
- (72) BAKHT, B., JAEGER, L.G. Bridge analysis simplified. New York: Mc Grall Hill, 1985. 294p.
- (44) BERGSTRÄSSER, M. Bestimmung der beiden elastischen konstanten von platten förmigen körpern. Zeitschult fur Fechnische Physik, n.8, p.355-359, 1927.
- (103) BIBLIS, E.J. Design considerations laminated wood beams composed of two species. Forest Products Journal. v.16, n.7, p.39-51, July, 1966.
- (77) BODIG, J., GOODMAN, J.R. A new apparatus for compression testing of wood. Wood and Fiber, v.1, n.2, p.146-153, 1969.
- (51) BODIG, J., GOODMAN, J.R. Prediction of elastic parameters for wood. Wood Science, v.5, n.4, p.249-264, Apr. 1973.

- (27) BODIG, G. J., JAYNE, B. A. Mechanics of wood and wood composites. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982. 712p.
- (42) BOOTH, L.G. The strength testing of timber during the 17th and 18th centuries. Journal of the Institute of Wood Science, n.13, p.3-30, Nov. 1964.
- (97) BOX, G.E.P., HUNTER, W.G., HUNTER, J.S. Statistics for experimenters. New Yor: John Wiley, 1978. 653p.
- (55) BRITISH STANDARD. Methods of tests for determination of certain physical and mechanical properties of timber in structural sizes (BS 5820). s.1, 1967. 6p.
- (98) BUCUR, V. Les termes non diagonaux de la matrice des rigidités du bois. Holzforschung, v.40, n.5, p315-324, 1986.
- (76) CALIL JR., C. Análise experimental de materiais e de estruturas. São Carlos, 1988. 227p. (Apostilha).
- (20) CAMARGO, W.M. de Uma tentativa de se estabelecer um modelo de comportamento da madeira como material elastofrágil anisotrópo. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE MADEIRAS E DE ESTRUTURAS DE MADEIRA, 1, São Carlos, 20-22 junho, 1983, Anais... São Carlos, LaMEM-EESC-USP, 1983, v.1, p.1-93.
- (17) CAUWELAERT, F. van. Coefficients of deformation of an anisotropic body. Journal of the Engineering Mechanics Division, n.EM5, p.823-835, Oct. 1977.
- (8) CHEN, W.F., SALEEB, A. Constitutive equations for engineering materials. New York: John Wiley & Sons, 1982. V.1: Elasticity and Modeling... p.1-181.

- (104) CRUBILÉ, Ph. et alii Common unified rules for timber structures. Luxembourg, Commission of the European Communities, 1987. (Industrial Processes - building and civil engineering).
- (7) DESAI, C.S., SIRIWARDANE, H.J. Constitutive laws for engineering materials with emphasis on geologic materials. New Jersey: Prentice-Hall, 1984. p.1-168.
- (54) DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG. Prüfung von Holz Biegeversuch (DIN 52-186). Berlin, Springer-Verlag, 1978. 3p.
- (47) DOYLE, D.V., DROW, J.T., MC BURNEY, R.S. The yong's moduli of rigidity, and Poisson's ratios of Balsa and Quipo. USDA-FS-FPL, Mad., Wis., n.1528, Nov. 1946, 16p.
- (82) DURELLI, A.J., PHILLIPS, E.A., TSAO, C.H. Introduction to the theoretical and experimental analysis of stress and strain. New York: Mc Graw Hill, 1958. 498p.
- (66) EBRAHIMI, G., SLIKER, A. Measurement of shear modulus in wood by a tension test. Wood Science, v.13, n.3, p.171-176, Jan. 1981.
- (64) FEODOSIEV, V.I. Resistencia de materiales. Moscou: Mir, 1980. p.81-114.
- (71) FOUJNET, A., SURRY, C., JULLIEN, J.F. Indirect identification methods for the elastic constants of orthotropic materials and their application to wood. Wood Science and Technology, n.16, p.215-222, 1982.
- (52) FOYE, R.L. Deflection limits on the plate-twisting test. Journal of Composite Materials, v.1, p.194-198, 1967.

- (92) FREITAS, A.R. de Probabilistic approach in the design of wood structures in Brazil based on the variability of 23 species. São Paulo: IPT/Divisão de Madeiras, 1978. 77p.
- (11) FUNG, Y.C. Foundations of solid mechanics. New Jersey: Prentice-Hall, 1965. p.1-131.
- (14) FUSCO, P.B. Caracterização da deformabilidade na elasticidade linear (Conceitos básicos para a definição das propriedades elásticas de madeira). In: ENCONTRO BRASILEIRO DE MADEIRAS E DE ESTRUTURAS DE MADEIRA, 3, São Carlos, 26-28 julho, 1989, Anais... São Carlos, LaMEM-EESC-USP, 1989, v.5, p.175-215.
- (29) GEMMEL, A.R. Anatomia do vegetal em desenvolvimento. São Paulo: EDUSP, 1981. 73p. (Temas de Biologia, 12).
- (5) GREEN, A.E., ZERNA, W. Theoretical elasticity. Glasgow: Clarendon Press, 1954. 142p.
- (68) GOODMAN, J.R. Governing equations for timber shell structures. Forest Products Journal. v.16, n.10, p.49-55, Oct. 1966.
- (69) GOODMAN, J.R. Timber shell structures. Fort Collins, Colorado, Department of Forest Wood Sciences, 1967. 42p.
- (39) GOODMAN, J.R., BODIG, J. Orthotropic elastic properties of wood. Journal of the Structural Division, v. 96, n.ST11, p.2301-2319, Nov. 1970.
- (89) GOODMAN, J.R. et alii. Code comparisons of factor design for wood. Journal of Structural Division, v.107, n.ST8, p.1151-1526, Aug. 1981.

- (70) GUNNERSON, R. A., GOODMAN, J.R., BODIG, J. Plates tests for determination of elastic parameters of wood. Wood Science, v.5, n.4, p.241-248, Ap. 1973.
- (100) HASHIN, Zvi. Plane anisotropic beams. Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, v.34, n.2, p.257-262, June, 1967
- (4) HEARMON, R.F.S. The elastic constants of anisotropic materials. Review of Modern Physics, v.18, n.3, p.409-440, July, 1946.
- (1) HEARMON, R.F.S. The elasticity of wood and plywood. Forest Products Research Special Report, London, v.7, n.1, p.5-44, 1948.
- (65) HEARMON R.F.S. The significance of coupling between shear and extension in elastic behavior of wood and plywood. Proceedings of Physical Society of London, n.55, p.67-80, Aug. 1942.
- (46) HEARMON, R.F.S., ADAMS, H. The bending and twisting of anisotropic plates. British Journal of Applied Physics, v.3, p.150-156, 1952.
- (38) HEARMON, R.F.S., BARKAS, W.W. The effect of grain direction on the young's moduli and rigidity moduli of beach and Sitka spruce. Forest Products Research Laboratory, n.53, p.674-680, May, 1941.
- (62) HELLMEISTER, J.C. Madeira: determinação de suas características. São Carlos, LaMEM/EESC/USP, 1987. 44p. (Método).
- (21) HELLMEISTER, J.C. Madeiras e suas características. São Carlos, 1974. 23p. (Apostilha).

- (91) HELLMEISTER, J.C. Sobre a determinação das características físicas da madeira. São Carlos, 1973. 161p. (Tese) Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos/USP.
- (86) HOOLEY, R.F., HIBBERT, P.D. Stress concentration in timber beams. Journal of Structural Division, v.93, n.ST2, p.127-139, Apr. 1967.
- (94) INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS. Madeiras nacionais: Tabela de resultados de ensaios físicos e mecânicos. (Separata da 2. ed. Boletim n.31, 1956).
- (36) JAYNE, B.A. Models and analysis in the physics of fibrous materials. Forest Products Journal, v.16, n.6, p.51-59, June, 1966.
- (3) JAYNE, B.A. Theory and design of wood and fiber composite materials. New York: Syracuse University Press, 1972. 417p.
- (74) JAYNE, B.A., HUNT, M.O. Plane stress and plane strain in orthotropic and anisotropic media. Wood and Fiber, v.1, n.3, p.236-247, 1969.
- (18) JAYNE, B.A., SUDDARTH, S.K. Matrix-tensor mathematics in orthotropic elasticity: (ASTM-STP 405). Philadelphia: ASTM, 1966. p.39-58.
- (61) KARLSEN, G.G. The mechanical properties of wood and quality requirements of timber for the members of wooden structures. In: ----- Wooden structures. Moscou: MIR, 1967. p.22-40.
- (99) KEENAN, F.J. The shear of glued-laminated timber beams. Toronto: University of Toronto, 1973.

- (25) KOLLMANN, F. Tecnologia y aplicaciones de la madera. Madrid: Graficas Reunidas, 1959. p.1-46.
- (33) KOLLMANN, F. CÔTÉ Jr., W.A. Mechanics and rheology of wood. In: -----, Principles of Wood Science and Technologi, Berlin, Springer-Verlag, 1968.
- (43) KUENZI, E.W. Methods for determining the elastic constants of nonmetallic materials. Philadelphia: ASTM, June, 1952, 10p.
- (28) LA MADERA. Barcelona Blume, 1976. 274p.
- (57) LAHR, F.A.R. Sobre a determinação de propriedades de elasticidade da madeira. São Carlos, 1983. 221p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos/USP.
- (23) LAHR, F.A.R. Considerações a respeito da variabilidade de propriedades de resistência e de elasticidade da madeira. São Carlos, 1990. 161p. Tese (Livre Docência) - Escola de Engenharia de São Carlos/USP.
- (59) LAHR, F.A.R., MASCIA, N.T. Metodologia do ensaio de peças de madeira à flexão estática. In: ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRA, 2, São Carlos, 23-25 julho, 1986. Anais... São Carlos, SET-LaMEM-EESC- USP, 1986. v.2, p.114- 132.
- (19) LAIER, J.E., BARREIRO, J.C. Complementos de resistência dos materiais. EESC-USP. São Carlos, 1983. 208p. (Apostilha).

- (93) LAZARINI, F.F, HELLMEISTER, J.C. Modelo matemático de amostragem mínima para determinação das características tecnológicas das madeiras. In: ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRA, 3, São Carlos, 26-28 julho, 1989. Anais... São Carlos, LaMEM-EESC-USP, 1989. v.6, p.193-210.
- (41) LEE, I.D.G. Measuring the elasticity of timber. Civil Engineering and Public Works Review, v.54, n.635, p.607-615, May, 1959.
- (6) LEKHNITSKII, S.G. Theory of elasticity of an anisotropic-body. Moscou: Mir, 1981. p.10-98.
- (45) LEKHNITSKII, S.G., TSAI, S.W., CHERONT, T. Anisotropic plates. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1968. 534p.
- (87) LIU, J.Y. Shear strength of wood beams: a weibull analysis. Journal of Structural Division, v.106, n.ST10, p.2035-2052, Oct. 1980.
- (13) LOVE, A.E. A treatise on the theory of elasticity. New York: Dover Publications, 1944. p.1-182.
- (24) MAINIERI, C. Manual de identificação das principais madeiras comerciais brasileiras. São Paulo: IPT, 1983. 241p.
- (102) MALVERN, L.E. Introduction to the mechanics of a continuous medium. New Jersey: Prentice-Hall, 1969. 713p.
- (37) MARCH, H.W. Stress-strain relations in wood and plywood considered as orthotropic materials. U.S. Forest Products, Madison, Mimeo 1503, p.1-25, 1944.
- (48) MARCH, H.W, KUENZI, E.W., KOMMERS, W.J. Method of measuring the shearing moduli in wood. USDA-FS-FPL, Mad., Wis., n.13, June, 1942, 10p.

- (30) MARK, R.E. Mechanical behavior of the molecular components of fibers. In: JAYNE, B.A., ed. Theory and design of wood and fiber composite materials, 1972, New York: Siracuse University Press. 418p.
- (58) MASCIA, N.T. Contribuição ao estudo da flexão estática em peças de madeira. São Carlos, 1985. 308p. Diss. (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos/USP.
- (75) MASCIA, N.T. Um estudo sobre flexão em peças de madeira. In: COLLOQUIA 88 JORNADAS EN ESPAÑOL Y PORTUGUES SOBRE ESTRUCTURAS Y MATERIALES, Madrid, Espanha, Maio, 1988.
- (95) MASCIA, N.T., HELLMEISTER, J.C., CHAHUD, E., LAHR, F.A.R. Introdução à idéia da aceitação ou rejeição de um lote de madeira. In: ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRA, 3, São Carlos, 26-28 julho, 1989. Anais... São carlos, LaMEM-EESC-USP, 1989. V.3, p.181-190.
- (88) MELO, J.E. de Classificação mecânica de peças de madeira. São Carlos, 1981. 131p. Diss. (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos/USP.
- (22) MOREY, P.R. O crescimneto das árvores. São Paulo: EDUSP, 1980. 72p. (Temas de Biologia, 19).
- (101) NOACK, Detlef, Von ROTH, Walter. On the theory of elasticity of the orthotropic material wood. Wood Science and Technology, v.10, p.97-110, 1976.
- (40) NORRIS, G.B., Mc KINNON, P.F. Compression, tension, and shear tests on Yellow-Poplar Plywood Panels of sizes that do not buckle with tests mode at various angles to the face grain. Forest Products Laboratory, n.53, p.674-680, May 1941.

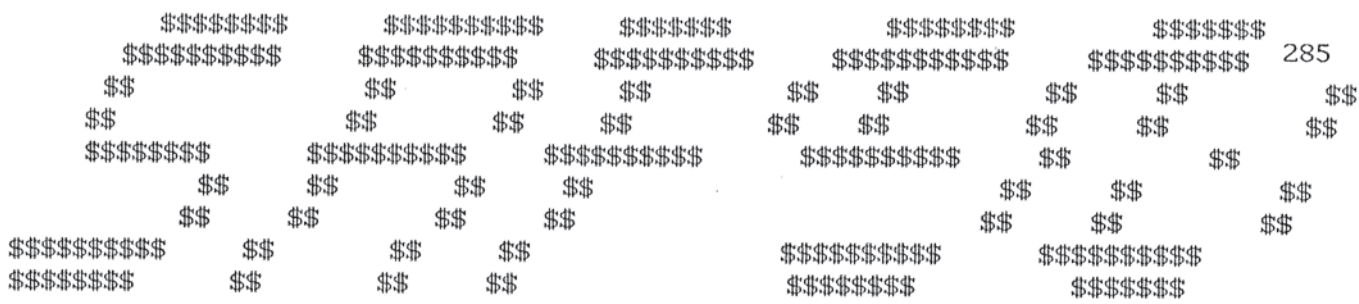
- (15) NOVOZHILOV, V.V. Theory of elasticity. London: Pergamon Press, 1961. p.211-281.
- (32) PERKINS, R.W. Concerning the mechanics of wood deformation. Forest Products Journal, v.17, n.3, p.55-67, Mar. 1967.
- (34) PERKINS, R.W. Concerning the mechanics of wood deformation: geometrical models. Forest Products Journal, v.17, n.5, p.58-70, May, 1967.
- (24) POPOV, E.P. Introdução à mecânica dos sólidos. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1978. 534p.
- (78) PRATA, G.G. Compressão paralela às fibras em peças de madeira. São Carlos, 1989. 151p. Diss. (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos/USP.
- (9) REISMANN, H., PAWLIK, P.S. Elasticity - Theory and applications. New York: John Wily & Sons, 1980. 425p.
- (16) RIVLIN, R.S., ERICKSEN, J.L. Stress-deformation relation for isotropic materials. Journal of Rational Mechanics Analysis, v.4, n.2, p.323-425, Mar. 1955.
- (96) RYAN JR., T.A., JOINER, B.L., RYAN, B.F. Minitab student handbook. Scituate: Massachusetts, 1976. 341p.
- (37) SCHNIEWIND, A.P. Elastic behavior of the wood fiber. In: ----- Theory and design of wood fiber composite materials, 1972, New York: Siracuse University press. 418p.
- (63) SCHWAB, E., POLACZEK, P. Bestimmung der schubmoduln von holz durch statische torsionsversuche. Beitrag zur Neufassung DIN52190. Holzals Roh-und Werkstoff, n.35, p.23-27, 1977.

- (2) SILVERMAN, I.K. Orthotropic beams under polynomial loads. Journal of the Engineering Mechanics Division. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, v.90, n.EM5, p.293-319, Oct. 1964.
- (60) SLIKER, A. Measuring Poisson's ratios in wood. Experimental Mechanics, p.239-242, May, 1972.
- (47) SOKOLNIKOFF, I.S. Mathematical theory of elasticity. 2.ed. New York: Mc Graw Hill, 1956. p.1-89.
- (80) TIMOSHENKO, S.P. History of strength of materials. New York: Mc Graw Hill, 1953. 452p.
- (81) TIMOSHENKO, S.P. Resistência dos materiais. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1975. v.1, 415p.
- (47) TIMOSHENKO, S.P. Theory of plates and shells. New York: Mc Graw Hill, 1940. p.34-53.
- (85) TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.E. Mecânica dos sólidos. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983. v.1, 256p.
- (86) TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N. Teoria da elasticidade. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980. 545p.
- (67) TOTTENHAM, M.A. The analysis of orthotropic cylindrical shells. Civil Engineering and Public Works Review, v.54, n.635, p.597-599, May, 1959.
- (50) TSAI, S.W. Experimental determination of the elastic behavior of orthotropic plates. Journal of Engineering for Industry, v.90, n.3, p.315-318, Aug. 1965.
- (51) VAFAI, A. Shear moduli an three planes of chenar and Red Jangali wood. Wood Science, v.11, n.2, p.73-75, Oct. 1978.

- (73) VAZ, J. Silos verticais de madeira compensada. São Carlos, 1987. 34p. Diss. (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos/USP.
- (79) WILSON, E.L., HABIBULLAH, A. SAP90 : a series of computer programs for the static and dynamic finite element analysis of structures, users manual. Berkeley, California: s.c.p., 1988.
- (12) WYLIE, C.R. Advanced engineering mathematics. New York: McGraw Hill, 1975. p.631-731.
- (84) ZASLAVSKY, A. Beams on immovable supports. s.l.: International Association for Bridge and Structural Engineering, 1965. p.353- 362.

ANEXO

Neste anexo são apresentados os resultados de deformação para uma simulação de compressão simples, conforme o item 4.4, obtidos através do programa SAP90 (Tabela 8).



STRUCTURAL ANALYSIS PROGRAMS

VERSION 5.04

Copyright (C) 1978-1988

EDWARD L. WILSON

All rights reserved

XEMPLO4 (NILSON DOUTORADO) - SAP90

SYSTEM

L=1

POINTS

1	X=4.7	Y=4.7	Z=0	
5	X=0	Y=4.7	Z=0	
451	X=4.7	Y=4.7	Z=18	
455	X=0	Y=4.7	Z=18	Q=1, 5, 451, 455, 1, 25
6	X=4.7	Y=3*4.7/4	Z=0	
10	X=0	Y=3*4.7/4	Z=0	
456	X=4.7	Y=3*4.7/4	Z=18	
460	X=0	Y=3*4.7/4	Z=18	Q=6, 10, 456, 460, 1, 25
11	X=4.7	Y=4.7/2	Z=0	
15	X=0	Y=4.7/2	Z=0	
461	X=4.7	Y=4.7/2	Z=18	
465	X=0	Y=4.7/2	Z=18	Q=11, 15, 461, 465, 1, 25
16	X=4.7	Y=4.7/4	Z=0	
20	X=0	Y=4.7/4	Z=0	
466	X=4.7	Y=4.7/4	Z=18	
470	X=0	Y=4.7/4	Z=18	Q=16, 20, 466, 470, 1, 25
21	X=4.7	Y=0	Z=0	
25	X=0	Y=0	Z=0	
471	X=4.7	Y=0	Z=18	
475	X=0	Y=0	Z=18	Q=21, 25, 471, 475, 1, 25

CONSTRAINTS

1 25 1 R=1, 1, 1, 0, 0, 0

POTENCIAL

451 475 1 P=500/4.7/4.7

OLID

NM=1 P=1 NTM=1

1 NUMT=1

E=4351, 6368, 44972 U=0.8300, 0.6885, 0.6865 G=842, 5912, 5346

1 JQ=1, 2, 26, 27, 6, 7, 31, 32 M=1 G=4, 4, 18 I=0

EXEMPLO4 (NILSON DOUTORADO) - SAP90

JOINT DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
2	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
3	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
4	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
5	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
6	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
7	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
8	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
9	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
10	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
11	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
12	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
13	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
14	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
15	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
16	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
17	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
18	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
19	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
20	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
21	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
22	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
23	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
24	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
25	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
26	.5542E-03	.6360E-03	-.5396E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
27	.1560E-03	.7001E-03	-.4451E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
28	.0000E+00	.7902E-03	-.4536E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
29	-.1560E-03	.7001E-03	-.4451E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
30	-.5542E-03	.6360E-03	-.5396E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
31	.6185E-03	.2093E-03	-.4453E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
32	.1654E-03	.2323E-03	-.3444E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
33	.0000E+00	.2692E-03	-.3498E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
34	-.1654E-03	.2323E-03	-.3444E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
35	-.6185E-03	.2093E-03	-.4453E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
36	.7059E-03	.0000E+00	-.4546E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
37	.1911E-03	.0000E+00	-.3516E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
38	.0000E+00	.0000E+00	-.3579E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
39	-.1911E-03	.0000E+00	-.3516E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
40	-.7059E-03	.0000E+00	-.4546E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
41	.6185E-03	-.2093E-03	-.4453E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
42	.1654E-03	-.2323E-03	-.3444E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
43	.0000E+00	-.2692E-03	-.3498E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
44	-.1654E-03	-.2323E-03	-.3444E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
45	-.6185E-03	-.2093E-03	-.4453E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
46	.5542E-03	-.6360E-03	-.5396E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
47	.1560E-03	-.7001E-03	-.4451E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
48	.0000E+00	-.7902E-03	-.4536E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
49	-.1560E-03	-.7001E-03	-.4451E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
50	-.5542E-03	-.6360E-03	-.5396E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
51	.000668	.000725	-.001023	.000000	.000000	.000000

KEMPI.04 (NILSON DOUTORADO) - SAP90

O I N T D I S P L A C E M E N T S

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
52	.3261E-03	.7890E-03	-.9299E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
53	.0000E+00	.8530E-03	-.9027E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
54	-.3261E-03	.7890E-03	-.9299E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
55	-.000668	.000725	-.001023	.000000	.000000	.000000
56	.7159E-03	.3684E-03	-.9387E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
57	.3399E-03	.3950E-03	-.8505E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
58	.0000E+00	.4330E-03	-.8237E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
59	-.3399E-03	.3950E-03	-.8505E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
60	-.7159E-03	.3684E-03	-.9387E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
61	.7707E-03	.0000E+00	-.9120E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
62	.3717E-03	.0000E+00	-.8259E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
63	.0000E+00	.0000E+00	-.7932E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
64	-.3717E-03	.0000E+00	-.8259E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
65	-.7707E-03	.0000E+00	-.9120E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
66	.7159E-03	-.3684E-03	-.9387E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
67	.3399E-03	-.3950E-03	-.8505E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
68	.0000E+00	-.4330E-03	-.8237E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
69	-.3399E-03	-.3950E-03	-.8505E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
70	-.7159E-03	-.3684E-03	-.9387E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
71	.000668	-.000725	-.001023	.000000	.000000	.000000
72	.3261E-03	-.7890E-03	-.9299E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
73	.0000E+00	-.8530E-03	-.9027E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
74	-.3261E-03	-.7890E-03	-.9299E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
75	-.000668	-.000725	-.001023	.000000	.000000	.000000
76	.000762	.000794	-.001475	.000000	.000000	.000000
77	.000384	.000831	-.001406	.000000	.000000	.000000
78	.000000	.000866	-.001377	.000000	.000000	.000000
79	-.000384	.000831	-.001406	.000000	.000000	.000000
80	-.000762	.000794	-.001475	.000000	.000000	.000000
81	.000784	.000403	-.001420	.000000	.000000	.000000
82	.000389	.000419	-.001362	.000000	.000000	.000000
83	.000000	.000441	-.001338	.000000	.000000	.000000
84	-.000389	.000419	-.001362	.000000	.000000	.000000
85	-.000784	.000403	-.001420	.000000	.000000	.000000
86	.000811	.000000	-.001394	.000000	.000000	.000000
87	.000409	.000000	-.001341	.000000	.000000	.000000
88	.000000	.000000	-.001314	.000000	.000000	.000000
89	-.000409	.000000	-.001341	.000000	.000000	.000000
90	-.000811	.000000	-.001394	.000000	.000000	.000000
91	.000784	-.000403	-.001420	.000000	.000000	.000000
92	.000389	-.000419	-.001362	.000000	.000000	.000000
93	.000000	-.000441	-.001338	.000000	.000000	.000000
94	-.000389	-.000419	-.001362	.000000	.000000	.000000
95	-.000784	-.000403	-.001420	.000000	.000000	.000000
96	.000762	-.000794	-.001475	.000000	.000000	.000000
97	.000384	-.000831	-.001406	.000000	.000000	.000000
98	.000000	-.000866	-.001377	.000000	.000000	.000000
99	-.000384	-.000831	-.001406	.000000	.000000	.000000
100	-.000762	-.000794	-.001475	.000000	.000000	.000000
101	.000801	.000808	-.001939	.000000	.000000	.000000
102	.000410	.000828	-.001896	.000000	.000000	.000000

XEMPLO4 (NILSON DOUTORADO) - SAP90

JOINT DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
103	.000000	.000844	-.001872	.000000	.000000	.000000
104	-.000410	.000828	-.001896	.000000	.000000	.000000
105	-.000801	.000808	-.001939	.000000	.000000	.000000
106	.000807	.000414	-.001908	.000000	.000000	.000000
107	.000409	.000421	-.001875	.000000	.000000	.000000
108	.000000	.000432	-.001856	.000000	.000000	.000000
109	-.000409	.000421	-.001875	.000000	.000000	.000000
110	-.000807	.000414	-.001908	.000000	.000000	.000000
111	.000818	.000000	-.001888	.000000	.000000	.000000
112	.000418	.000000	-.001859	.000000	.000000	.000000
113	.000000	.000000	-.001840	.000000	.000000	.000000
114	-.000418	.000000	-.001859	.000000	.000000	.000000
115	-.000818	.000000	-.001888	.000000	.000000	.000000
116	.000807	-.000414	-.001908	.000000	.000000	.000000
117	.000409	-.000421	-.001875	.000000	.000000	.000000
118	.000000	-.000432	-.001856	.000000	.000000	.000000
119	-.000409	-.000421	-.001875	.000000	.000000	.000000
120	-.000807	-.000414	-.001908	.000000	.000000	.000000
121	.000801	-.000808	-.001939	.000000	.000000	.000000
122	.000410	-.000828	-.001896	.000000	.000000	.000000
123	.000000	-.000844	-.001872	.000000	.000000	.000000
124	-.000410	-.000828	-.001896	.000000	.000000	.000000
125	-.000801	-.000808	-.001939	.000000	.000000	.000000
126	.000817	.000812	-.002417	.000000	.000000	.000000
127	.000417	.000821	-.002392	.000000	.000000	.000000
128	.000000	.000828	-.002376	.000000	.000000	.000000
129	-.000417	.000821	-.002392	.000000	.000000	.000000
130	-.000817	.000812	-.002417	.000000	.000000	.000000
131	.000816	.000413	-.002401	.000000	.000000	.000000
132	.000414	.000416	-.002383	.000000	.000000	.000000
133	.000000	.000420	-.002371	.000000	.000000	.000000
134	-.000414	.000416	-.002383	.000000	.000000	.000000
135	-.000816	.000413	-.002401	.000000	.000000	.000000
136	.000819	.000000	-.002389	.000000	.000000	.000000
137	.000417	.000000	-.002373	.000000	.000000	.000000
138	.000000	.000000	-.002362	.000000	.000000	.000000
139	-.000417	.000000	-.002373	.000000	.000000	.000000
140	-.000819	.000000	-.002389	.000000	.000000	.000000
141	.000816	-.000413	-.002401	.000000	.000000	.000000
142	.000414	-.000416	-.002383	.000000	.000000	.000000
143	.000000	-.000420	-.002371	.000000	.000000	.000000
144	-.000414	-.000416	-.002383	.000000	.000000	.000000
145	-.000816	-.000413	-.002401	.000000	.000000	.000000
146	.000817	-.000812	-.002417	.000000	.000000	.000000
147	.000417	-.000821	-.002392	.000000	.000000	.000000
148	.000000	-.000828	-.002376	.000000	.000000	.000000
149	-.000417	-.000821	-.002392	.000000	.000000	.000000
150	-.000817	-.000812	-.002417	.000000	.000000	.000000
151	.000822	.000812	-.002906	.000000	.000000	.000000
152	.000417	.000816	-.002893	.000000	.000000	.000000
153	.000000	.000818	-.002883	.000000	.000000	.000000

EXEMPLO4 (NILSON DOUTORADO) - SAP90

JOINT DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
154	-.000417	.000816	-.002893	.000000	.000000	.000000
155	-.000822	.000812	-.002906	.000000	.000000	.000000
156	.000819	.000410	-.002898	.000000	.000000	.000000
157	.000414	.000411	-.002889	.000000	.000000	.000000
158	.000000	.000412	-.002881	.000000	.000000	.000000
159	-.000414	.000411	-.002889	.000000	.000000	.000000
160	-.000819	.000410	-.002898	.000000	.000000	.000000
161	.000819	.000000	-.002891	.000000	.000000	.000000
162	.000414	.000000	-.002883	.000000	.000000	.000000
163	.000000	.000000	-.002877	.000000	.000000	.000000
164	-.000414	.000000	-.002883	.000000	.000000	.000000
165	-.000819	.000000	-.002891	.000000	.000000	.000000
166	.000819	-.000410	-.002898	.000000	.000000	.000000
167	.000414	-.000411	-.002889	.000000	.000000	.000000
168	.000000	-.000412	-.002881	.000000	.000000	.000000
169	-.000414	-.000411	-.002889	.000000	.000000	.000000
170	-.000819	-.000410	-.002898	.000000	.000000	.000000
171	.000822	-.000812	-.002906	.000000	.000000	.000000
172	.000417	-.000816	-.002893	.000000	.000000	.000000
173	.000000	-.000818	-.002883	.000000	.000000	.000000
174	-.000417	-.000816	-.002893	.000000	.000000	.000000
175	-.000822	-.000812	-.002906	.000000	.000000	.000000
176	.000822	.000811	-.003401	.000000	.000000	.000000
177	.000415	.000813	-.003395	.000000	.000000	.000000
178	.000000	.000813	-.003389	.000000	.000000	.000000
179	-.000415	.000813	-.003395	.000000	.000000	.000000
180	-.000822	.000811	-.003401	.000000	.000000	.000000
181	.000819	.000408	-.003398	.000000	.000000	.000000
182	.000413	.000408	-.003393	.000000	.000000	.000000
183	.000000	.000408	-.003389	.000000	.000000	.000000
184	-.000413	.000408	-.003393	.000000	.000000	.000000
185	-.000819	.000408	-.003398	.000000	.000000	.000000
186	.000818	.000000	-.003394	.000000	.000000	.000000
187	.000412	.000000	-.003390	.000000	.000000	.000000
188	.000000	.000000	-.003387	.000000	.000000	.000000
189	-.000412	.000000	-.003390	.000000	.000000	.000000
190	-.000818	.000000	-.003394	.000000	.000000	.000000
191	.000819	-.000408	-.003398	.000000	.000000	.000000
192	.000413	-.000408	-.003393	.000000	.000000	.000000
193	.000000	-.000408	-.003389	.000000	.000000	.000000
194	-.000413	-.000408	-.003393	.000000	.000000	.000000
195	-.000819	-.000408	-.003398	.000000	.000000	.000000
196	.000822	-.000811	-.003401	.000000	.000000	.000000
197	.000415	-.000813	-.003395	.000000	.000000	.000000
198	.000000	-.000813	-.003389	.000000	.000000	.000000
199	-.000415	-.000813	-.003395	.000000	.000000	.000000
200	-.000822	-.000811	-.003401	.000000	.000000	.000000
201	.000821	.000811	-.003900	.000000	.000000	.000000
202	.000413	.000812	-.003897	.000000	.000000	.000000
203	.000000	.000811	-.003895	.000000	.000000	.000000
204	-.000413	.000812	-.003897	.000000	.000000	.000000

EXEMPLO4 (NILSON DOUTORADO) - SAP90

JOINT DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
205	-.000821	.000811	-.003900	.000000	.000000	.000000
206	.000819	.000407	-.003899	.000000	.000000	.000000
207	.000412	.000407	-.003897	.000000	.000000	.000000
208	.000000	.000407	-.003895	.000000	.000000	.000000
209	-.000412	.000407	-.003897	.000000	.000000	.000000
210	-.000819	.000407	-.003899	.000000	.000000	.000000
211	.000818	.000000	-.003898	.000000	.000000	.000000
212	.000411	.000000	-.003896	.000000	.000000	.000000
213	.000000	.000000	-.003894	.000000	.000000	.000000
214	-.000411	.000000	-.003896	.000000	.000000	.000000
215	-.000818	.000000	-.003898	.000000	.000000	.000000
216	.000819	-.000407	-.003899	.000000	.000000	.000000
217	.000412	-.000407	-.003897	.000000	.000000	.000000
218	.000000	-.000407	-.003895	.000000	.000000	.000000
219	-.000412	-.000407	-.003897	.000000	.000000	.000000
220	-.000819	-.000407	-.003899	.000000	.000000	.000000
221	.000821	-.000811	-.003900	.000000	.000000	.000000
222	.000413	-.000812	-.003897	.000000	.000000	.000000
223	.000000	-.000811	-.003895	.000000	.000000	.000000
224	-.000413	-.000812	-.003897	.000000	.000000	.000000
225	-.000821	-.000811	-.003900	.000000	.000000	.000000
226	.000820	.000811	-.004401	.000000	.000000	.000000
227	.000412	.000811	-.004400	.000000	.000000	.000000
228	.000000	.000811	-.004400	.000000	.000000	.000000
229	-.000412	.000811	-.004400	.000000	.000000	.000000
230	-.000820	.000811	-.004401	.000000	.000000	.000000
231	.000818	.000407	-.004401	.000000	.000000	.000000
232	.000411	.000407	-.004400	.000000	.000000	.000000
233	.000000	.000406	-.004400	.000000	.000000	.000000
234	-.000411	.000407	-.004400	.000000	.000000	.000000
235	-.000818	.000407	-.004401	.000000	.000000	.000000
236	.000818	.000000	-.004401	.000000	.000000	.000000
237	.000410	.000000	-.004401	.000000	.000000	.000000
238	.000000	.000000	-.004400	.000000	.000000	.000000
239	-.000410	.000000	-.004401	.000000	.000000	.000000
240	-.000818	.000000	-.004401	.000000	.000000	.000000
241	.000818	-.000407	-.004401	.000000	.000000	.000000
242	.000411	-.000407	-.004400	.000000	.000000	.000000
243	.000000	-.000406	-.004400	.000000	.000000	.000000
244	-.000411	-.000407	-.004400	.000000	.000000	.000000
245	-.000818	-.000407	-.004401	.000000	.000000	.000000
246	.000820	-.000811	-.004401	.000000	.000000	.000000
247	.000412	-.000811	-.004400	.000000	.000000	.000000
248	.000000	-.000811	-.004400	.000000	.000000	.000000
249	-.000412	-.000811	-.004400	.000000	.000000	.000000
250	-.000820	-.000811	-.004401	.000000	.000000	.000000
251	.000819	.000812	-.004902	.000000	.000000	.000000
252	.000412	.000812	-.004903	.000000	.000000	.000000
253	.000000	.000811	-.004904	.000000	.000000	.000000
254	-.000412	.000812	-.004903	.000000	.000000	.000000
255	-.000819	.000812	-.004902	.000000	.000000	.000000

EXEMPLO4 (NILSON DOUTORADO) - SAP90

JOINT DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
256	.000818	.000407	-.004903	.000000	.000000	.000000
257	.000411	.000407	-.004904	.000000	.000000	.000000
258	.000000	.000407	-.004905	.000000	.000000	.000000
259	-.000411	.000407	-.004904	.000000	.000000	.000000
260	-.000818	.000407	-.004903	.000000	.000000	.000000
261	.000818	.000000	-.004905	.000000	.000000	.000000
262	.000410	.000000	-.004905	.000000	.000000	.000000
263	.000000	.000000	-.004906	.000000	.000000	.000000
264	-.000410	.000000	-.004905	.000000	.000000	.000000
265	-.000818	.000000	-.004905	.000000	.000000	.000000
266	.000818	-.000407	-.004903	.000000	.000000	.000000
267	.000411	-.000407	-.004904	.000000	.000000	.000000
268	.000000	-.000407	-.004905	.000000	.000000	.000000
269	-.000411	-.000407	-.004904	.000000	.000000	.000000
270	-.000818	-.000407	-.004903	.000000	.000000	.000000
271	.000819	-.000812	-.004902	.000000	.000000	.000000
272	.000412	-.000812	-.004903	.000000	.000000	.000000
273	.000000	-.000811	-.004904	.000000	.000000	.000000
274	-.000412	-.000812	-.004903	.000000	.000000	.000000
275	-.000819	-.000812	-.004902	.000000	.000000	.000000
276	.000819	.000813	-.005402	.000000	.000000	.000000
277	.000413	.000813	-.005405	.000000	.000000	.000000
278	.000000	.000812	-.005408	.000000	.000000	.000000
279	-.000413	.000813	-.005405	.000000	.000000	.000000
280	-.000819	.000813	-.005402	.000000	.000000	.000000
281	.000819	.000408	-.005405	.000000	.000000	.000000
282	.000412	.000408	-.005408	.000000	.000000	.000000
283	.000000	.000408	-.005410	.000000	.000000	.000000
284	-.000412	.000408	-.005408	.000000	.000000	.000000
285	-.000819	.000408	-.005405	.000000	.000000	.000000
286	.000818	.000000	-.005409	.000000	.000000	.000000
287	.000412	.000000	-.005410	.000000	.000000	.000000
288	.000000	.000000	-.005413	.000000	.000000	.000000
289	-.000412	.000000	-.005410	.000000	.000000	.000000
290	-.000818	.000000	-.005409	.000000	.000000	.000000
291	.000819	-.000408	-.005405	.000000	.000000	.000000
292	.000412	-.000408	-.005408	.000000	.000000	.000000
293	.000000	-.000408	-.005410	.000000	.000000	.000000
294	-.000412	-.000408	-.005408	.000000	.000000	.000000
295	-.000819	-.000408	-.005405	.000000	.000000	.000000
296	.000819	-.000813	-.005402	.000000	.000000	.000000
297	.000413	-.000813	-.005405	.000000	.000000	.000000
298	.000000	-.000812	-.005408	.000000	.000000	.000000
299	-.000413	-.000813	-.005405	.000000	.000000	.000000
300	-.000819	-.000813	-.005402	.000000	.000000	.000000
301	.000820	.000813	-.005899	.000000	.000000	.000000
302	.000414	.000815	-.005907	.000000	.000000	.000000
303	.000000	.000815	-.005913	.000000	.000000	.000000
304	-.000414	.000815	-.005907	.000000	.000000	.000000
305	-.000820	.000813	-.005899	.000000	.000000	.000000
306	.000820	.000410	-.005906	.000000	.000000	.000000

EXEMPLO4 (NILSON DOUTORADO) - SAP90

JOINT DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
307	.000414	.000410	-.005912	.000000	.000000	.000000
308	.000000	.000411	-.005917	.000000	.000000	.000000
309	-.000414	.000410	-.005912	.000000	.000000	.000000
310	-.000820	.000410	-.005906	.000000	.000000	.000000
311	.000820	.000000	-.005913	.000000	.000000	.000000
312	.000414	.000000	-.005917	.000000	.000000	.000000
313	.000000	.000000	-.005922	.000000	.000000	.000000
314	-.000414	.000000	-.005917	.000000	.000000	.000000
315	-.000820	.000000	-.005913	.000000	.000000	.000000
316	.000820	-.000410	-.005906	.000000	.000000	.000000
317	.000414	-.000410	-.005912	.000000	.000000	.000000
318	.000000	-.000411	-.005917	.000000	.000000	.000000
319	-.000414	-.000410	-.005912	.000000	.000000	.000000
320	-.000820	-.000410	-.005906	.000000	.000000	.000000
321	.000820	-.000813	-.005899	.000000	.000000	.000000
322	.000414	-.000815	-.005907	.000000	.000000	.000000
323	.000000	-.000815	-.005913	.000000	.000000	.000000
324	-.000414	-.000815	-.005907	.000000	.000000	.000000
325	-.000820	-.000813	-.005899	.000000	.000000	.000000
326	.000818	.000813	-.006391	.000000	.000000	.000000
327	.000415	.000818	-.006406	.000000	.000000	.000000
328	.000000	.000821	-.006416	.000000	.000000	.000000
329	-.000415	.000818	-.006406	.000000	.000000	.000000
330	-.000818	.000813	-.006391	.000000	.000000	.000000
331	.000820	.000412	-.006406	.000000	.000000	.000000
332	.000416	.000414	-.006417	.000000	.000000	.000000
333	.000000	.000417	-.006426	.000000	.000000	.000000
334	-.000416	.000414	-.006417	.000000	.000000	.000000
335	-.000820	.000412	-.006406	.000000	.000000	.000000
336	.000823	.000000	-.006417	.000000	.000000	.000000
337	.000418	.000000	-.006427	.000000	.000000	.000000
338	.000000	.000000	-.006436	.000000	.000000	.000000
339	-.000418	.000000	-.006427	.000000	.000000	.000000
340	-.000823	.000000	-.006417	.000000	.000000	.000000
341	.000820	-.000412	-.006406	.000000	.000000	.000000
342	.000416	-.000414	-.006417	.000000	.000000	.000000
343	.000000	-.000417	-.006426	.000000	.000000	.000000
344	-.000416	-.000414	-.006417	.000000	.000000	.000000
345	-.000820	-.000412	-.006406	.000000	.000000	.000000
346	.000818	-.000813	-.006391	.000000	.000000	.000000
347	.000415	-.000818	-.006406	.000000	.000000	.000000
348	.000000	-.000821	-.006416	.000000	.000000	.000000
349	-.000415	-.000818	-.006406	.000000	.000000	.000000
350	-.000818	-.000813	-.006391	.000000	.000000	.000000
351	.000810	.000809	-.006875	.000000	.000000	.000000
352	.000413	.000822	-.006902	.000000	.000000	.000000
353	.000000	.000831	-.006917	.000000	.000000	.000000
354	-.000413	.000822	-.006902	.000000	.000000	.000000
355	-.000810	.000809	-.006875	.000000	.000000	.000000
356	.000819	.000412	-.006902	.000000	.000000	.000000
357	.000416	.000418	-.006925	.000000	.000000	.000000

EXEMPLO4 (NILSON DOUTORADO) - SAP90

J O I N T D I S P L A C E M E N T S

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
358	.000000	.000424	-.006939	.000000	.000000	.000000
359	-.000416	.000418	-.006925	.000000	.000000	.000000
360	-.000819	.000412	-.006902	.000000	.000000	.000000
361	.000827	.000000	-.006918	.000000	.000000	.000000
362	.000422	.000000	-.006940	.000000	.000000	.000000
363	.000000	.000000	-.006956	.000000	.000000	.000000
364	-.000422	.000000	-.006940	.000000	.000000	.000000
365	-.000827	.000000	-.006918	.000000	.000000	.000000
366	.000819	-.000412	-.006902	.000000	.000000	.000000
367	.000416	-.000418	-.006925	.000000	.000000	.000000
368	.000000	-.000424	-.006939	.000000	.000000	.000000
369	-.000416	-.000418	-.006925	.000000	.000000	.000000
370	-.000819	-.000412	-.006902	.000000	.000000	.000000
371	.000810	-.000809	-.006875	.000000	.000000	.000000
372	.000413	-.000822	-.006902	.000000	.000000	.000000
373	.000000	-.000831	-.006917	.000000	.000000	.000000
374	-.000413	-.000822	-.006902	.000000	.000000	.000000
375	-.000810	-.000809	-.006875	.000000	.000000	.000000
376	.000788	.000792	-.007345	.000000	.000000	.000000
377	.000403	.000817	-.007391	.000000	.000000	.000000
378	.000000	.000834	-.007410	.000000	.000000	.000000
379	-.000403	.000817	-.007391	.000000	.000000	.000000
380	-.000788	.000792	-.007345	.000000	.000000	.000000
381	.000808	.000406	-.007393	.000000	.000000	.000000
382	.000410	.000418	-.007436	.000000	.000000	.000000
383	.000000	.000430	-.007457	.000000	.000000	.000000
384	-.000410	.000418	-.007436	.000000	.000000	.000000
385	-.000808	.000406	-.007393	.000000	.000000	.000000
386	.000823	.000000	-.007414	.000000	.000000	.000000
387	.000421	.000000	-.007459	.000000	.000000	.000000
388	.000000	.000000	-.007482	.000000	.000000	.000000
389	-.000421	.000000	-.007459	.000000	.000000	.000000
390	-.000823	.000000	-.007414	.000000	.000000	.000000
391	.000808	-.000406	-.007393	.000000	.000000	.000000
392	.000410	-.000418	-.007436	.000000	.000000	.000000
393	.000000	-.000430	-.007457	.000000	.000000	.000000
394	-.000410	-.000418	-.007436	.000000	.000000	.000000
395	-.000808	-.000406	-.007393	.000000	.000000	.000000
396	.000788	-.000792	-.007345	.000000	.000000	.000000
397	.000403	-.000817	-.007391	.000000	.000000	.000000
398	.000000	-.000834	-.007410	.000000	.000000	.000000
399	-.000403	-.000817	-.007391	.000000	.000000	.000000
400	-.000788	-.000792	-.007345	.000000	.000000	.000000
401	.000752	.000759	-.007806	.000000	.000000	.000000
402	.000364	.000797	-.007873	.000000	.000000	.000000
403	.000000	.000822	-.007887	.000000	.000000	.000000
404	-.000364	.000797	-.007873	.000000	.000000	.000000
405	-.000752	.000759	-.007806	.000000	.000000	.000000
406	.000785	.000371	-.007880	.000000	.000000	.000000
407	.000372	.000385	-.007954	.000000	.000000	.000000
408	.000000	.000398	-.007973	.000000	.000000	.000000

EXEMPLO4 (NILSON DOUTORADO) - SAP90

JOINT DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
409	-.000372	.000385	-.007954	.000000	.000000	.000000
410	-.000785	.000371	-.007880	.000000	.000000	.000000
411	.000809	.000000	-.007896	.000000	.000000	.000000
412	.000383	.000000	-.007975	.000000	.000000	.000000
413	.000000	.000000	-.007994	.000000	.000000	.000000
414	-.000383	.000000	-.007975	.000000	.000000	.000000
415	-.000809	.000000	-.007896	.000000	.000000	.000000
416	.000785	-.000371	-.007880	.000000	.000000	.000000
417	.000372	-.000385	-.007954	.000000	.000000	.000000
418	.000000	-.000398	-.007973	.000000	.000000	.000000
419	-.000372	-.000385	-.007954	.000000	.000000	.000000
420	-.000785	-.000371	-.007880	.000000	.000000	.000000
421	.000752	-.000759	-.007806	.000000	.000000	.000000
422	.000364	-.000797	-.007873	.000000	.000000	.000000
423	.000000	-.000822	-.007887	.000000	.000000	.000000
424	-.000364	-.000797	-.007873	.000000	.000000	.000000
425	-.000752	-.000759	-.007806	.000000	.000000	.000000
426	.000613	.000604	-.008254	.000000	.000000	.000000
427	.000309	.000616	-.008338	.000000	.000000	.000000
428	.000000	.000617	-.008343	.000000	.000000	.000000
429	-.000309	.000616	-.008338	.000000	.000000	.000000
430	-.000613	.000604	-.008254	.000000	.000000	.000000
431	.000623	.000304	-.008348	.000000	.000000	.000000
432	.000312	.000310	-.008452	.000000	.000000	.000000
433	.000000	.000312	-.008464	.000000	.000000	.000000
434	-.000312	.000310	-.008452	.000000	.000000	.000000
435	-.000623	.000304	-.008348	.000000	.000000	.000000
436	.000625	.000000	-.008355	.000000	.000000	.000000
437	.000315	.000000	-.008466	.000000	.000000	.000000
438	.000000	.000000	-.008475	.000000	.000000	.000000
439	-.000315	.000000	-.008466	.000000	.000000	.000000
440	-.000625	.000000	-.008355	.000000	.000000	.000000
441	.000623	-.000304	-.008348	.000000	.000000	.000000
442	.000312	-.000310	-.008452	.000000	.000000	.000000
443	.000000	-.000312	-.008464	.000000	.000000	.000000
444	-.000312	-.000310	-.008452	.000000	.000000	.000000
445	-.000623	-.000304	-.008348	.000000	.000000	.000000
446	.000613	-.000604	-.008254	.000000	.000000	.000000
447	.000309	-.000616	-.008338	.000000	.000000	.000000
448	.000000	-.000617	-.008343	.000000	.000000	.000000
449	-.000309	-.000616	-.008338	.000000	.000000	.000000
450	-.000613	-.000604	-.008254	.000000	.000000	.000000
451	.000448	.000419	-.008506	.000000	.000000	.000000
452	.000265	.000391	-.008600	.000000	.000000	.000000
453	.000000	.000358	-.008606	.000000	.000000	.000000
454	-.000265	.000391	-.008600	.000000	.000000	.000000
455	-.000448	.000419	-.008506	.000000	.000000	.000000
456	.000419	.000243	-.008612	.000000	.000000	.000000
457	.000257	.000234	-.008733	.000000	.000000	.000000
458	.000000	.000225	-.008749	.000000	.000000	.000000
459	-.000257	.000234	-.008733	.000000	.000000	.000000

EMPLO4 (NILSON DOUTORADO) - SAP90

O I N T D I S P L A C E M E N T S

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

OINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
460	-.000419	.000243	-.008612	.000000	.000000	.000000
461	.000388	.000000	-.008621	.000000	.000000	.000000
462	.000251	.000000	-.008752	.000000	.000000	.000000
463	.000000	.000000	-.008766	.000000	.000000	.000000
464	-.000251	.000000	-.008752	.000000	.000000	.000000
465	-.000388	.000000	-.008621	.000000	.000000	.000000
466	.000419	-.000243	-.008612	.000000	.000000	.000000
467	.000257	-.000234	-.008733	.000000	.000000	.000000
468	.000000	-.000225	-.008749	.000000	.000000	.000000
469	-.000257	-.000234	-.008733	.000000	.000000	.000000
470	-.000419	-.000243	-.008612	.000000	.000000	.000000
471	.000448	-.000419	-.008506	.000000	.000000	.000000
472	.000265	-.000391	-.008600	.000000	.000000	.000000
473	.000000	-.000358	-.008606	.000000	.000000	.000000
474	-.000265	-.000391	-.008600	.000000	.000000	.000000
475	-.000448	-.000419	-.008506	.000000	.000000	.000000