

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ANÁLISE DA INSTABILIDADE
DE COLUNAS DE MADEIRA

ENG^o MAURO AUGUSTO DEMARZO

ORIENTADOR: PROF. DR. JOÃO CESAR HELLMEISTER

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

São Carlos
Estado de São Paulo
1990

ANÁLISE DA INSTABILIDADE
DE COLUNAS DE MADEIRA

ENGO MAURO AUGUSTO DEMARZO

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Titular João Cesar Hellmeister (EESC-USP) (Orientador)
Prof. Doutor Aluízio Fontana Margarido (POLI-USP)
Prof. Doutor Vahan Agopyan (POLI-USP)
Prof. Doutor Francisco Antonio Rocco Lahr (EESC-USP)
Prof. Doutor Munir Rachid (EESC-USP)

SÃO CARLOS
ESTADO DE SÃO PAULO
1990

A meus pais (in memoriam)
irmãos e irmãs

e Maria Augusta
Marina
Marisa
Márcia
Marcela

RESUMO

Este trabalho trata da análise e projeto de um particular tipo de barra estrutural: coluna de madeira. São descritos os princípios básicos aplicáveis a esse elemento estrutural, incluindo-se tanto a instabilidade quanto a falha por resistência do material.

Também é feita uma explanação a respeito de vários métodos de projetos para colunas longas.

Desenvolveu-se um programa experimental para a determinação da excentricidade equivalente inicial da carga em substituição ao efeito da excentricidade de carga propriamente dita, curvatura inicial, efeito da não homogeneidade do material e inevitável variação na área da seção transversal da coluna (excentricidade accidental e_a).

É proposto um critério de projeto para excentricidade accidental em colunas de madeira.

ABSTRACT

This work is concerned with the analysis and design of a particular type of structural member: timber column. The basic principles apply to columns are described. Both instability and material strength failures are included.

It is also made an explanation about several methods of design of slender columns.

An experimental program has been used for determination of the equivalent initial eccentricity in load application to replace the effect of eccentricity of load, an initial curvature, the effect of nonhomogeneity of the material and unavoidable variation in the cross-sectional area of the column (accidental eccentricity e_a).

A design criterion to accidental eccentricity for wood columns is proposed.

PREFÁCIO

Em ciência, de uma maneira geral, a transição do que se sabe para o que não se sabe nem é nítida, nem dramática.

Diante de uma nova pesquisa, maneiras diversas de abordá-la são possíveis e muitas vezes explicações incompatíveis entre si são propostas. A contribuição do pesquisador pode ser no sentido de esclarecer de maneira segura algum ponto, ou de lançar dúvidas sobre algo que parecia razoável, propor novas explicações para algum tipo de questão, ou, ainda, levantar problemas novos.

O tema que será tratado aqui é exemplar.

O estudo de colunas constitui-se há alguns séculos em um dos campos mais complexos, férteis e, por isso mesmo, polêmico. Sua abrangência transcende os limites da Resistência dos Materiais e passa a ter intersecções com os demais campos afins, tais como o da Mecânica das Estruturas.

Não obstante o conhecimento hoje existente sobre o material madeira, contribuições ao estudo de colunas construídas com esse material sempre são possíveis, e muitos progressos continuam sendo feitos, principalmente no sentido de explicar os mais importantes aspectos relacionados ao problema da perda de estabilidade, numa tentativa de se obter procedimentos seguros e adequados à

atuação prática dos engenheiros.

A eventual contribuição que este trabalho possa dar ao tema escolhido será altamente gratificante, não só ao autor, mas a toda equipe de infra-estrutura existente no Laboratório de Madeiras e de Estruturas de Madeira (LaMEM), do Departamento de Estruturas, da Escola de Engenharia de São Carlos - USP, sem a qual pouco poderia ter sido feito.

Além do constante respeito e admiração pelo Prof. Dr. João Cesar Hellmeister, pessoa que sempre se dedicou com todo empenho, carinho e atenção ao LaMEM para que o mesmo pudesse ser, como o é hoje, um "centro de excelência" na pesquisa da madeira, o autor quer agradecer-lo não só por ter aceito ser o orientador, mas também pela confiança, entusiasmo e carinho durante toda a pesquisa, fatores indispensáveis a qualquer realização.

O autor agradece ao Programa Institucional de Capacitação de Docentes (PICD), da CAPES, pelo apoio financeiro, e à Faculdade de Engenharia de Campinas - UNICAMP, à qual pertence, pelo afastamento concedido durante o período necessário.

Em particular, gostaria de agradecer:

- ao Dr. Francisco Antonio Rocco Lahr pelas sugestões e ensinamentos nestes anos de convívio.
- ao Dr. Carlito Calil Junior, que me proporcionou os primeiros passos na área experimental, e sempre atencioso na discussão de algum problema dessa área.
- ao Dr. Francisco Antonio Romero Gesualdo, cujos programas estatísticos, à disposição dos usuários do LaMEM, muito me auxiliaram.
- ao Dr. José Alberto Cuminato, que permitiu a utilização ininterrupta, dia e noite, de equipamento computacional sob sua responsabilidade; além de esclarecimentos sobre tópicos matemáticos da tese.
- ao Dr. Josemar Rodrigues, que viabilizou a implantação, no equipamento computacional acima citado, do programa MINITAB, ensinando-me a usá-lo; e dando sugestões na parte estatística das regressões e análise de resultados.

- ao Prof. João Carlos Barreiro, grande amigo, pelas sugestões e discussões de alguns tópicos teóricos do tema aqui tratado.
- ao Prof. Toshiaki Takeya, responsável pelo Laboratório do Departamento de Estruturas, pelo seu pronto atendimento no empréstimo de equipamentos de leitura de deformações e macacos hidráulicos, quando foi necessário, e sua sempre presente simpatia nos esclarecimentos de uso dos mesmos.
- ao funcionário Claudio Ortiz da Silva, de dedicação impar, que me acompanhou na realização da quase totalidade dos ensaios desta tese.
- aos funcionários José Francisco do Nascimento Filho, Silvio Antonio Ferro, Aparecido Galindo e Arnaldo Floro de Souza, pela retaguarda de laboratório, serraria e oficina mecânica.
- aos funcionários Jaime Galindo e Roberto Galindo, pela elaboração dos desenhos.
- à funcionária Silvana Aparecida Araújo Celestini, pelos serviços de datilografia.

Finalmente, estendo o agradecimento a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a concretização desta pesquisa.

SUMÁRIO

DEDICATÓRIA	ii
RESUMO - ABSTRACT	iii e iv
PREFÁCIO	v
CAPÍTULO 1: PANORAMA GERAL E OBJETIVOS	1
1.1- Introdução	1
1.2- Panorama Geral do Estudo de Estabilidade	4
1.3- Objetivos	6
1.4- Condições de Segurança Segundo a NBR-8681/84	7
CAPÍTULO 2: O GERAL E O ESPECÍFICO DO TEMA	15
2.1- O Início	15
2.2- A Carga de Euler	16
2.3- A Rotação Específica	20
2.4- Histórico	23
2.5- Instabilidade Divergente Estática	30
2.6- O Específico do Tema	34
CAPÍTULO 3: BASE EXPERIMENTAL DAS RELAÇÕES ELÁSTICAS E ELAS- TOPLÁSTICAS	53
3.1- Tensões e Deformações	53
3.2- A Relação Tensão-Deformação até a Ruptura	56
3.3- Aproximação da Madeira como Material Isótropo	60
CAPÍTULO 4: UMA ABORDAGEM EXPERIMENTAL	64
4.1- Introdução	64
4.2- Determinação Experimental da Carga de Flambagem	65
CAPÍTULO 5: MÉTODOS DE ANÁLISE E PROJETO COM EXCENTRICIDADE.	75
5.1- Introdução	75
5.2- Índice de Esbeltez	76
5.3- Instabilidade por Divergência de Equilíbrio	78
5.4- Construção do Diagrama Momento Interno-Curvatura	91
5.5- Método de Análise e Projeto	95

CAPÍTULO 6: ENSAIOS PRELIMINARES À EXPERIMENTAÇÃO PRINCIPAL E ESPÉCIES DE MADEIRA	110
6.1- Introdução	110
6.2- As Espécies de Madeira	110
6.3- Umidade e Densidade	111
6.4- Ensaio para Determinação do Módulo de Elasticidade na Flexão	114
 CAPÍTULO 7: EQUIPAMENTOS UTILIZADOS E MONTAGENS	 124
7.1- Introdução	124
7.2- A Meia-Ponte Utilizada nos Corpos de Prova Longos	125
7.3- A Meia-Ponte Utilizada nos Corpos de Prova Curtos	128
7.4- Montagem dos Equipamentos de Carga	130
7.5- Os apoios das Colunas Ensaçadas	135
7.6- O Equipamento de Carga	136
7.7- Os Equipamentos de Leitura	137
 CAPÍTULO 8: EXPERIMENTAÇÃO E RESULTADOS	 139
8.1- Introdução	139
8.2- Os Corpos de Prova	139
8.3- Instrumentação e Medidas Efetuadas	141
8.4- Preparação dos Resultados	142
 CAPÍTULO 9: ANÁLISE DOS RESULTADOS	 165
9.1- Introdução	165
9.2- Conceitos Envolvidos	165
9.3- A Análise	169
9.3.1- Tabelando os resultados	169
9.3.2- Relação [comprimento x excentricidade e_f]	171
9.3.3- Relação [comprimento x excentricidade e_e]	176
9.3.4- Relação [espessura x excentricidade e_f]	179
9.3.5- Relação [espessura x excentricidade e_e]	183
9.3.6- Critério da excentricidade mínima	186
 CAPÍTULO 10: CONCLUSÕES E SUGESTÕES	 187
10.1- Introdução	187
10.2- Conclusões	187
10.3- Sugestões	189

10.3.1- Composição de excentricidades	189
10.3.2- Parâmetros de normalização	190
10.4- Novas Pesquisas	191
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	193

CAPÍTULO 1

PANORAMA GERAL E OBJETIVOS

1.1- INTRODUÇÃO

O emprego de madeiras em estruturas pressupõe um perfeito conhecimento de suas características físicas e mecânicas, específicas de cada madeira, de modo a obter dados representativos de cada espécie, sem considerar fatores de modificação destas características, inevitáveis em peças construtivas, e um estudo essencial à engenharia estrutural, em que se analise a influência desses fatores, designados englobadamente por "defeitos das peças de madeira".

A engenharia de hoje procura aperfeiçoar as estruturas, seja pelas concepções estruturais, seja pelo refinamento de métodos de cálculos teóricos e experimentais para componentes ou estrutura como um todo.

A grande preocupação atual dos pesquisadores está no estabelecimento de processos simplificados baseados em uma conceituação mais ampla e geral, aplicáveis aos diversos tipos de estruturas usuais.

As considerações ligadas à estabilidade e à instabilidade do equilíbrio das estruturas são de fundamental importância para o seu projeto, já que a instabilidade do equilíbrio define, qua

se sempre, quando comparado com os demais, duas características particulares que o tornam especialmente perigoso para a engenharia (De Zagottis, 1980).

Em primeiro lugar, os fenômenos de instabilidade manifestam-se repentina e violentamente, mesmo quando a velocidade de crescimento das intensidades das ações não sofre acréscimos bruscos. Assim sendo, praticamente todas as estruturas não têm capacidade de aviso de ruína iminente para este tipo de estado limite último, o que deve inclusive ser levado em conta na responsabilidade da estrutura e, conseqüentemente, na segurança que deve ser imposta ao projeto. As ruínas produzidas por instabilidade são quase sempre ruínas que produzem grandes danos.

Em segundo lugar, os fenômenos de instabilidade manifestam-se, graças à própria evolução da Teoria das Estruturas que permite uma otimização cada vez mais pronunciada das estruturas projetadas e construídas ao longo do tempo, através de formas inesperadas e de violência crescente. Essa característica que liga o agravamento dos problemas de instabilidade com a otimização pode ser verificada, quer teoricamente, quer praticamente, analisando os grandes acidentes e os grandes problemas da engenharia estrutural.

Fica, pois, evidenciada a importância do estudo da estabilidade estrutural. Essa não é uma preocupação exclusiva do nosso tempo. Desde épocas remotas já se se preocupava com tal problema, dentro da relatividade dos conceitos em cada período.

Como qualquer outro problema da engenharia, busca-se uma solução ideal que apresente eficiência, funcionalidade, segurança, estética e economia. Técnicas de otimização tentam atingi-la, aproximando-se satisfatoriamente à medida que avançam os conhecimentos técnico-científicos.

Os progressos teóricos na análise estrutural, assim como a pesquisa constante das propriedades mecânicas dos materiais empregados na Engenharia Civil é o resultado dessa busca da solução ideal, estimulando o engenheiro a ser cada vez mais audacioso, concebendo estruturas mais e mais esbeltas e com capacidade de carga elevadas.

Ocorre, porém, que estruturas esbeltas são passíveis de comportamentos estruturais muito diversos dos comportamentos básicos, que a princípio delas se espera. Entre outras coisas, inevitã

veis imperfeições, próprias das estruturas reais, ocorrem, levando à perda de características da estabilidade do equilíbrio. A complexidade dos problemas da prática, via de regra, induz o analista a estender tacitamente as conclusões obtidas do estudo do sistema ideal ao sistema real, o que no campo da estabilidade estrutural, principalmente, envolve uma série de perigos (Mazzilli, 1979).

Segundo esse autor, as imperfeições, quanto a suas origens, podem ser dos seguintes tipos:

- a. irregularidades ou excentricidades geométricas;
- b. propriedades mecânicas variáveis do material estrutural;
- c. tensões iniciais;
- d. excentricidades de carregamentos;
- e. carregamentos acidentais laterais, etc.

Estas imperfeições a que se refere são as pequenas imperfeições, isto é, aquelas dentro dos limites de tolerância normalmente exigidos no processo de construção, de fabricação ou de utilização das estruturas.

Uma estrutura apresenta sensibilidade a imperfeições se, para pequenos afastamentos das condições ideais de projeto, apresentar em seu comportamento variação desproporcionalmente grande (Croll & Walker - apud Mazzilli, 1979). Evidentemente, variação no comportamento diz respeito à modificação qualitativa das formas de equilíbrio, com alteração das trajetórias de equilíbrio e das cargas críticas.

É interessante notar que a sensibilidade a imperfeições está intimamente relacionada com a dispersão dos resultados que se observa nos ensaios estruturais. Este fenômeno se compreende imediatamente, pois todos os elementos submetidos a um ensaio, inclusive aqueles que se supõem idênticos, apresentarão sempre imperfeições próprias ligeiramente distintas.

Se a estrutura ensaiada for insensível a imperfeições, as pequenas diferenças dos elementos similares não terão grandes influências nos resultados, ou seja, o grau de dispersão é pequeno. Por outro lado, se as menores diferenças em tais elementos forem responsáveis por grandes discrepâncias nos resultados dos ensaios, a grande dispersão evidenciará a maior sensibilidade que o sistema estrutural apresenta a imperfeições.

Na prática, alguns exemplos de estruturas que podem ser sensíveis a imperfeições seriam as barras, as estruturas reticuladas, arcos, chapas, cascas cilíndricas, cascas esféricas, e outras.

Vamos nos deter nas barras.

As barras de material elástico linear de grande resistência, como por exemplo o aço, em geral apresentam sensibilidade a imperfeições. Já para barras de material elástico não-linear ou com comportamento reológico mais complexo, é possível ocorrer sensibilidade a imperfeições. No campo das madeiras, a atual Norma NBR 7190 - "Cálculo e Execução de Estruturas de Madeira", trata a compressão axial de peças esbeltas, com carga teoricamente centrada, sem considerar a presença de excentricidades acidentais.

O material madeira tem uma forte característica de não homogeneidade, que somada ao seu comportamento reológico e às tolerâncias de construção, podem levar a uma nova postura crítica quanto ao ponto analisado.

1.2- PANORAMA GERAL DO ESTUDO DE ESTABILIDADE

Para que se possa avaliar a grande extensão e a complexidade envolvidas nos estudos gerais da estabilidade apresenta-se a organização diagramática, constante em (Mazzilli, 1979), reproduzida pela figura 1.1, a qual representa esquematicamente os diversos tipos característicos de instabilidade, que se agrupam segundo as categorias básicas: divergente e oscilatória. No primeiro caso, o sistema abandona sua configuração inicial de forma definitiva, ao procurar novos e eventuais estados equilibrados. No segundo, porém, o sistema oscila em torno de sua configuração inicial, sendo levado à instabilidade pela crescente absorção de energia, típica do processo.

Segundo ainda aquele autor, embora, o fenômeno da instabilidade seja "essencialmente dinâmico", a terminologia "instabilidade divergente estática" é utilizada em contraposição a "instabilidade divergente dinâmica", para significar que aquela pode ser estudada por processos estáticos e é típica de sistemas conservativos, enquanto esta deve ser estudada por meio de análises dinâmicas.

micas, sendo característica dos sistemas não-conservativos.

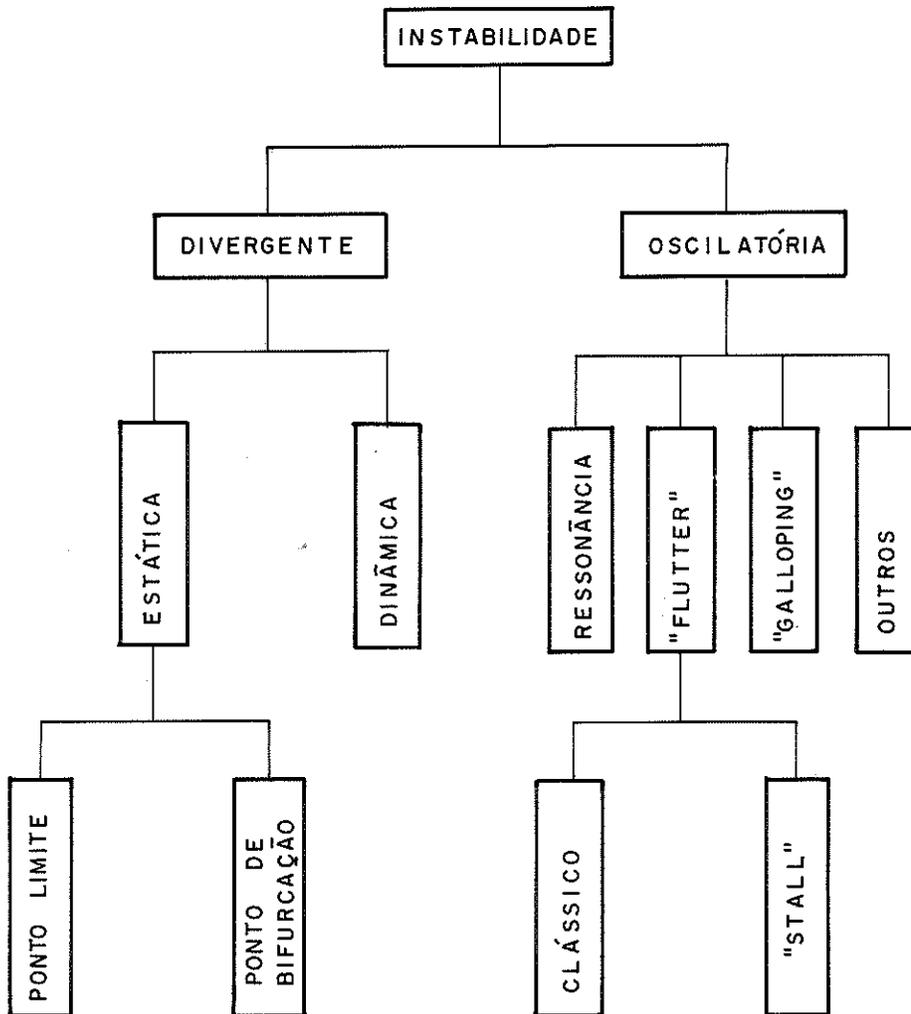


Figura 1.1- Tipos fundamentais de instabilidade [IN: (Mazzilli, 1979)]

Na figura 1.1 notam-se os termos "ponto limite" e "ponto de bifurcação". Enquadram-se em "ponto limite" o sistema que não possui qualquer configuração de equilíbrio, além de um nível crítico do carregamento. Um sistema se enquadra em "ponto de bifurcação" quando, além de níveis críticos do carregamento, ainda apresenta possibilidade de se equilibrar em configurações diferentes de seu estado inicial. Os casos clássicos de Euler se enquadram nesta última categoria, enquanto que arcos abatidos, cascas delgadas e outros, se enquadram na primeira.

A instabilidade oscilatória entra no campo de instabilidade induzida por vórtices, ressonância, efeitos fluido-dinâmicos

(flutter), instabilidade oscilatória auto-excitada (galloping) e combinações de dois ou mais dos tipos elementares.

O estudo das colunas de madeira, que será tratado aqui, se situa no campo da instabilidade divergente estática, em sistemas conservativos. Um sistema é dito conservativo quando todos os esforços nele atuantes, internos ou externos, são conservativos. Para que um esforço seja considerado conservativo ele deve ser tal que seu trabalho, em qualquer deslocamento cinematicamente admissível do sistema sobre o qual age, dependa exclusivamente da configuração inicial e da final do sistema.

1.3- OBJETIVOS

As informações disponíveis sobre testes de colunas de madeira tem sido tão escassas e os procedimentos de ensaio tão pouco divulgados por parte dos diferentes pesquisadores no mundo que fica praticamente impossível uma comparação adequada dos resultados.

No Brasil, utilizam-se formulários que constam da NBR-7190 - "Cálculo e Execução de Estruturas de Madeira" (antiga NB-11) e que está vigente, sem modificações, desde 1951.

Com intuito de iniciar um estudo de revisão de tais formulários optou-se pelo tema que, sem dúvida, é vastíssimo. Atualmente, no estudo da perda de estabilidade são considerados os momentos de 2ª ordem. A elástica da peça, provocada pelo carregamento externo, cria uma excentricidade para a carga axial N fazendo surgir um momento de 2ª ordem que, por sua vez, aumenta a elástica e conseqüentemente aumenta a excentricidade da carga normal e assim sucessivamente.

Se as cargas externas forem menores que a capacidade de carga da estrutura, esse processo continuará até o estado de equilíbrio entre esforços solicitantes e capacidade resistente da peça em todas as seções. Além disso, em todas as seções, a curvatura necessária para provocar aquela capacidade resistente deverá ser igual à curvatura da linha elástica.

Dependendo das características geométricas da peça comprimida, o estado limite último de ruptura pode ocorrer após a perda de estabilidade que se inicia antes do material atingir seu limite de resistência.

Será sempre considerado no cálculo de barras comprimidas um acréscimo na excentricidade da carga axial N que visa levar em conta os efeitos da incerteza sobre sua posição real, tolerâncias de construção, não homogeneidade do material, eventuais curvaturas iniciais, etc.

Esse acréscimo, que está sendo objeto de uma pesquisa experimental neste trabalho, é denominada excentricidade equivalente adicional, ou excentricidade não intencional, ou ainda, excentricidade acidental, com notação e_a .

Além disso, procura-se conceituar o fenômeno da perda de estabilidade na flexão composta procurando ordenar as idéias de forma a se dar um primeiro passo na rediscussão do assunto sob as luzes dos novos métodos de análise que já se empregam para outros materiais.

1.4- CONDIÇÕES DE SEGURANÇA SEGUNDO A NBR 8681/84

1.4.1- Introdução

Para se fixar as condições exigíveis na verificação da segurança das estruturas usuais da Construção Civil e se estabelecer as definições e os critérios de quantificação das ações e das resistências a considerar no projeto das estruturas e de edificações, quaisquer que sejam sua classe e destino, deve-se obedecer a NBR 8681/84 - "Ações e Segurança nas Estruturas - Procedimento". Os critérios de verificação da segurança e os de quantificação das ações adotadas nessa Norma são válidas para as estruturas e peças estruturais construídas com quaisquer dos materiais usualmente empregados na Construção Civil, entre os quais, a madeira.

O que se segue tem por base, pois, a norma citada.

1.4.2- Verificação da Segurança

A segurança das peças estruturais deve ser verificada em relação a todos os possíveis estados que são admitidos como limites para a peça considerada.

A segurança em relação aos estados limites é verificada tanto pelo respeito às condições analíticas quanto pela obediência às condições construtivas. Com respeito às condições analíticas, verifica-se a segurança por meio da comparação dos valores que certos parâmetros tomam na análise estrutural, quando na peça atuam ações a que ela está sujeita, quantificadas e combinadas de acordo com as regras estabelecidas pela norma em foco, com os valores que estes mesmos parâmetros tomam quando se manifestam os estados limites considerados.

As variáveis empregadas como parâmetros para estabelecimento das condições de segurança são de três naturezas:

- a. ações;
- b. esforços internos (solicitações, esforços solicitantes, tensões);
- c. efeitos estruturais (deformações, deslocamentos, etc)

Com respeito às condições construtivas, verifica-se a segurança em relação aos possíveis estados limites pelo atendimento das exigências construtivas incluídas nas diversas normas referentes às estruturas feitas com os materiais de construção considerados, que no nosso caso seriam os estados limites da madeira.

1.4.3- Ações e Estados Limites

São denominadas ações as causas que provocam esforços ou deformações nas estruturas ou, particularmente, nas peças estruturais. Do ponto de vista prático, as forças e as deformações impostas pelas ações são consideradas como se fossem as próprias ações. As deformações impostas são por vezes designadas por "ações indiretas" e as forças, por "ações diretas".

As ações são classificadas em:

- permanentes
- variáveis
- excepcionais
- acidentais

Os estados limites podem ser "estados limites últimos", aqueles que pela sua simples ocorrência determinam a paralização, no todo ou em parte, do uso da construção; ou "estados limites de

utilização", aqueles que por sua ocorrência, repetição ou duração causam efeitos estruturais que não respeitam as condições especificadas para o uso normal da construção, ou que são indícios de comprometimento da durabilidade da estrutura.

Os estados limites considerados nos projetos de estruturas dependem dos tipos de materiais de construção empregados e devem ser especificados pelas normas referentes ao projeto de estruturas com eles construídas.

1.4.4- Condições de Segurança Relativas à Perda de Equilíbrio

Os estados limites últimos de perda de equilíbrio, considerada a estrutura como um corpo rígido, não dependem da resistência dos materiais empregados e correspondem ao início da movimentação da estrutura como um corpo rígido.

As condições de segurança relativas aos estados limites últimos de perda de equilíbrio são expressas por desigualdades do tipo:

$$S_{sd} \geq S_{nd} \quad (1.1)$$

ou

$$S(F_{sd}) \geq S(F_{nd}) \quad (1.2)$$

onde S_{nd} e S_{sd} representam os valores de cálculo dos esforços com que é expresso o equilíbrio, sendo S_{nd} referente às ações não estabilizantes F_n , e S_{sd} às ações estabilizantes F_s .

Os valores de cálculo F_d das ações são obtidos a partir dos valores representativos (valores característicos F_k , valores característicos nominais convenientemente escolhidos, valores reduzidos de combinação $\Psi_0 F_k$, valores convencionais excepcionais arbitrados para ações excepcionais, valores reduzidos de utilização $\Psi_1 F_k$ e $\Psi_2 F_k$, valores raros de utilização mas que podem acarretar estados limites de utilização) multiplicando-os pelos respectivos coeficientes de ponderação γ_f , o qual é uma função de γ_{f1} , γ_{f2} e γ_{f3} :

$$\gamma_f = f(\gamma_{f1}, \gamma_{f2}, \gamma_{f3}) \quad (1.3)$$

onde

γ_{f1} = coeficiente parcial que leva em conta a variabilidade das ações;

$\gamma_{f2} = \psi_0$ = coeficiente parcial que leva em conta que é muito baixa a probabilidade de ocorrência simultânea dos valores característicos de duas ou mais ações variáveis de natureza diferentes;

γ_{f3} = coeficiente parcial que leva em consideração os possíveis erros de avaliação dos efeitos das ações, seja por problemas construtivos, seja por deficiência do método de cálculo empregado.

O desdobramento do coeficiente de segurança γ_f em coeficientes parciais permite que os valores gerais especificados para γ_f possam ser discriminados em função de peculiaridades dos diferentes tipos de estruturas e de materiais de construção considerados (§ 5.2 da norma citada).

Na inequação (1.2) os valores de F_{nd} e F_{sd} são determinados pelas mesmas regras de combinações indicadas no § 5.13 da norma em questão (combinações últimas normais, combinações últimas excepcionais). Os coeficientes de ponderação γ a empregar devem ser convenientemente justificados, tendo em vista os valores especificados no § 5.14 (coeficientes de ponderação para as ações permanentes γ_g , coeficientes de ponderação para as ações variáveis γ_q , etc) e as suas possíveis alterações indicadas no § 5.3, do qual destacamos:

§ 5.3.2.1- Comportamento com não linearidade geométrica:

"De acordo com o que é previsto no final do § 5.1.2.1 (que diz que há não linearidade geométrica quando o comportamento estrutural deixa de ser linear em virtude de alteração da geometria do sistema, e neste caso o coeficiente γ_f pode ser desdobrado em seus coeficientes parciais, aplicando-se o coeficiente γ_{f3} à solicitação calculada com a ação característica multiplicada por $\gamma_{f1} \psi_0$, ou seja, $S_d = \gamma_{f3} S(\gamma_{f1} \psi_0 F_k)$), para efeitos desfavoráveis, os va-

lores do coeficiente de ponderação γ_f para as combinações especiais ou de construção podem ser desdobrados no produto dos coeficientes parciais γ_{f1} e γ_{f3} . Neste caso, deve-se manter $\gamma_{f3} \geq 1,1$ ".

As condições de segurança podem ser expressas simbolicamente por:

$$S(\gamma_{gs} G_{sk}) \geq S(\gamma_{gn} G_{nk} + \gamma_q Q_k) \quad (1.4)$$

onde:

γ_{gs}, γ_{gn} = coeficientes de ponderação correspondentes respectivamente às ações permanentes estabilizantes G_s e não estabilizantes G_n .

G_s, G_n, Q = ações permanentes estabilizantes, ações não estabilizantes, e ações variáveis não estabilizantes (as três devem ser determinadas, para cada tipo de carregamento, de acordo com § 5.1.3, da norma referida).

Em princípio, as ações variáveis consideradas nas condições de segurança devem ser apenas as não estabilizantes. Quando a atuação de uma variável não estabilizante for obrigatoriamente acompanhada pela atuação de uma parcela estabilizante de uma outra ação, esta deve ser incluída no cálculo de S_{nd} , como uma ação de sentido contrário ao das demais. Não se permite que o efeito desta ação seja considerado como uma parcela do esforço estabilizante S_{sd} . As condições de segurança têm, neste caso, a forma simbólica seguinte:

$$S(\gamma_{gs} G_{sk}) \geq S(\gamma_{gn} G_{nk} + \gamma_q Q_{nk} - \gamma_{qs} Q_{s,min}) \quad (1.5)$$

na qual se adota, para as ações variáveis estabilizantes $Q_{s,min}$, o coeficiente de ponderação $\gamma_{qs} = 1,0$.

1.4.5- Resistências

1.4.5.1- Resistência dos materiais

A resistência é a aptidão da matéria de suportar tensões.

Do ponto de vista prático, a medida dessa aptidão é considerada como a própria resistência.

A resistência é determinada convencionalmente pela máxima tensão que pode ser aplicada ao corpo de prova do material considerado, até o aparecimento de fenômenos particulares de comportamento além dos quais há restrições de emprego do material em elementos estruturais. De modo geral estes fenômenos são os de ruptura ou de deformação específica excessiva. Para cada material particular, as normas correspondentes devem especificar quais os fenômenos que permitem determinar as resistências.

1.4.5.2- Valores representativos da resistência

Os valores representativos da resistência são:

- Resistência média: a resistência média f_m é dada pela média aritmética das resistências dos elementos que compõe o lote considerado de material.
- Resistências características: os valores característicos f_k das resistências são os que, num lote de material, têm uma determinada probabilidade de serem ultrapassados, no sentido desfavorável para a segurança. Usualmente é de interesse a resistência característica inferior $f_{k,inf}$, cujo valor é menor que a resistência média f_m , embora por vezes haja interesse na resistência característica superior $f_{k,sup}$, cujo valor é maior que f_m .
- Resistência característica inferior: a resistência característica inferior $f_{k,inf}$ é admitida como sendo o valor que tem apenas 5% de probabilidade de não ser atingido pelos elementos de um dado lote de material.

Quanto à escolha do valor representativo, salvo exigência expressa em norma referente a determinado material ou tipo de

construção, o valor representativo deve ser tomado como o da resistência característica inferior, sempre que a segurança dependa das porções menos resistentes do material da estrutura.

O valor representativo pode ser tomado como o da resistência média, quando a segurança é condicionada pela soma das resistências de muitas porções do material da estrutura, sem que cada uma delas individualmente tenha influência determinante.

1.4.5.3- Valores de cálculo

a. Resistência de cálculo

A resistência de cálculo f_d é dada por:

$$f_d = \frac{f_k}{\gamma_m} \quad (1.6)$$

onde:

f_k = resistência característica inferior;

γ_m = coeficiente de ponderação de resistências;

sendo γ_m dado pela equação:

$$\gamma_m = \gamma_{m1} \cdot \gamma_{m2} \cdot \gamma_{m3} \quad (1.7)$$

na qual os coeficientes γ_{mi} procuram considerar os seguintes pontos:

γ_{m1} = leva em conta a variabilidade da resistência efetiva, transformando a resistência característica num valor extremo de menor probabilidade de ocorrência;

γ_{m2} = considera as diferenças entre a resistência efetiva do material da estrutura e a resistência medida convencionalmente em corpos de prova padronizados;

γ_{m3} = considera as incertezas existentes na determinação das solicitações resistentes, seja em decorrência dos métodos construtivos seja em virtude do método de cálculo empregado.

b. Tensões últimas resistentes

As tensões últimas resistentes σ_u e τ_u são estabelecidas para a determinação das solicitações resistentes que não dependam diretamente das resistências medidas convencionalmente em ensaios de corpos de prova padronizados dos materiais empregados. Os valores de σ_u e τ_u são estabelecidos, em cada caso particular, a partir das teorias da resistência dos elementos estruturais considerados.

CAPÍTULO 2

O GERAL E O ESPECÍFICO DO TEMA

2.1- O INÍCIO

Os primeiros experimentos com barras prismáticas comprimidas onde se observou o aparecimento do fenômeno da flambagem foi feito pelo pesquisador experimental P. van Musschenbroek. Publicou suas observações em 1729 através do trabalho "Introductis ad cohaerentiam corporum firmorum". O seu grande mérito foi ter concluído apenas e tão somente através de seus testes, desarmado de qualquer teoria matemática, que a carga de flambagem era inversamente proporcional ao quadrado do comprimento da coluna.

Quem apresentou, pela primeira vez, o estudo teórico das linhas elásticas de barras fletidas foi Leonard Euler, publicando "De curvis elasticis" como apêndice de seu livro "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes", em 1744.

É interessante observar que, embora seja costume hoje em dia denominar uma coluna biarticulada como "Coluna de Euler", Euler na realidade analisou uma barra engastada em uma extremidade e livre na outra em seu trabalho, publicado em 1759, "Sur la force de colonnes", inserido nas Memórias da Academia de Berlin.

2.2- A CARGA DE EULER

É ilustrativo, neste ponto, verificar as hipóteses de cálculo e a dedução da carga de Euler. A barra com carga axial centrada, mostrada na figura 2.1, é suposta com seção transversal constante e feita de um material homogêneo. Quatro hipóteses adicionais são feitas:

1. As extremidades da barra são articuladas. A extremidade inferior é um apoio fixo, e a extremidade superior é apoiada de maneira que possa rodar livremente e mover-se verticalmente, mas não horizontalmente.
2. A barra é perfeitamente reta, e a carga é aplicada ao longo de seu eixo centroidal.
3. O material obedece a lei de Hooke, ou seja, é elástico-linear.
4. As deformações da barra são suficientemente pequenas de maneira que o termo $(y')^2$ é desprezível quando comparado com a unidade na expressão para a curvatura.

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad (2.1)$$

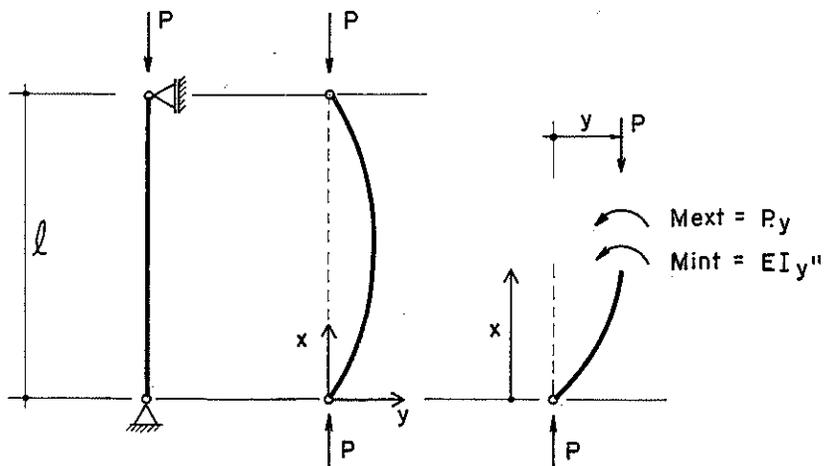


Figura 2.1- Coluna de Euler

Na expressão (2.1), r é o raio de curvatura, y'' e y' representam a segunda e a primeira derivada de y em relação a x ; e y são os deslocamentos transversais dos pontos situados no eixo da barra, em relação à ordenada inicial destes pontos.

De acordo com o critério do equilíbrio neutro, a carga crítica é a carga para a qual o equilíbrio na configuração ligeiramente fletida mostrada na figura 2.1 é possível. Se as coordenadas x e y são tomadas como mostrado nessa figura o momento interno resistente M_{int} em qualquer seção distante x da origem será dado por:

$$M_{int} = - EI \left(\frac{1}{r} \right) \quad (2.2)$$

que, pela hipótese 4, se transforma em:

$$M_{int} = - EI y'' \quad (2.3)$$

Os valores E e I representam o módulo de elasticidade e o momento de inércia da seção coerente com o plano de flexão, respectivamente.

Da equação de equilíbrio no estado deformado $M_{int} = M_{ext}$ se obtém: $EIy'' + Py = 0$, ou, rearranjando:

$$y'' + \frac{P}{EI} y = 0 \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é uma equação diferencial linear com coeficientes constantes, homogênea, de fácil solução. Usando-se a notação:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.5)$$

a solução de (2.4) pode ser escrita como:

$$y = A \text{ sen } (kx) + B \text{ cos } (kx) \quad (2.6)$$

Fazendo-se uso da condição de contorno $y = 0$ quando $x = 0$, obtém-se $B = 0$. Consequentemente, (2.6) se reduz a:

$$y = A \text{ sen } (kx) \quad (2.7)$$

O uso da outra condição de contorno, $y = 0$ quando $x = \ell$, nos leva a:

$$A \text{ sen } (k\ell) = 0 \quad (2.8)$$

A equação (2.8) será satisfeita se ocorrer pelo menos uma das duas condições:

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ \text{sen } (k\ell) &= 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pela primeira condição de (2.9), k e conseqüentemente P , através da equação (2.5), pode ter qualquer valor. Este resultado é conhecido como solução trivial, pois confirma o que já é conhecido, ou seja, a coluna estará em equilíbrio sob qualquer carga axial P desde que a barra permaneça perfeitamente reta (não está em análise o limite de resistência do material).

A segunda condição presente em (2.9), $\text{sen } (k\ell) = 0$, tem como campo de solução a seguinte família de ângulos:

$$k\ell = n\pi \tag{2.10}$$

onde $n = 1, 2, 3 \dots$. É interessante lembrar que, neste caso, A pode assumir qualquer valor.

Substituindo (2.10) em (2.5) chega-se à seguinte família de valores da carga P :

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{\ell^2} \tag{2.11}$$

A coluna de Euler, sob os valores de carga dados por (2.11), poderá ficar em equilíbrio, em formas ligeiramente fletidas.

A equação representativa de tais formas é obtida substituindo (2.10) em (2.7), fornecendo uma senóide (de amplitude A indeterminada uma vez que A pode assumir qualquer valor quando $\text{sen } (k\ell) = 0$):

$$y = A \text{ sen } \frac{n\pi x}{\ell} \tag{2.12}$$

A menor carga sob a qual o estado neutro de equilíbrio é possível, é conhecida como "carga de Euler", e é obtida fazendo-se $n = 1$ em (2.11):

$$P_{\text{EULER}} = P_E = \frac{\pi^2 EI}{\lambda^2} \quad (2.13)$$

O comportamento da coluna ideal de Euler pode ser visualizada através de um gráfico tendo como abscissa a amplitude A da senóide e, como ordenada, a carga P , suposta crescer a partir de zero, como mostrado na figura 2.2 (Chajes, 1974).

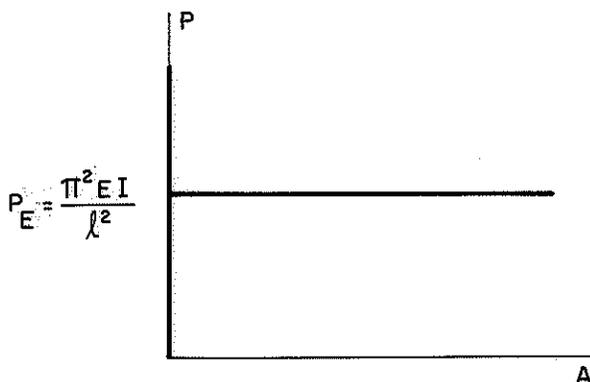


Figura 2.2- Comportamento da coluna de Euler

Observa-se pela figura 2.2 que, enquanto a carga P permanece abaixo da carga de Euler, a coluna mantém sua forma reta. No ponto correspondente à carga de Euler existe a bifurcação do equilíbrio, isto é, a coluna pode permanecer reta ou pode assumir uma forma fletida de amplitude indeterminada.

A carga de Euler acima obtida é algumas vezes denominada como "carga crítica" e outras, como "carga de flambagem".

Hoff (Hoff, 1954) propõe que a carga sob a qual uma coluna imperfeita real se curva repentinamente seja referida como carga de flambagem, reservando-se o termo carga crítica para a qual o equilíbrio neutro é possível em uma barra perfeita ideal, de acordo como uma análise linear. Em outras palavras, ele sugere que "flambagem" é alguma coisa que pode ser observada quando uma coluna real é carregada durante um teste em laboratório, enquanto que o termo "carga crítica" refere-se à solução de uma análise teórica idealizada. Sob esse critério a carga de Euler acima deduzida seria denominada "carga crítica" da coluna.

Analisemos o comportamento de (2.11) e (2.12) quando se varia n . Para $n = 0$, teríamos uma carga nula. Com $n = 1$ temos a carga de Euler com a coluna apresentando a forma de meia onda de senóide.

Se $n > 1$, tem-se senóides com n semi-ondas, em equilíbrio com cargas maiores do que P_E . Tais formas, porém, só são realmente possíveis se a coluna for contraventada nos pontos de inflexão. A figura 2.3 mostra carga e forma da coluna de Euler para os primeiros valores de n .

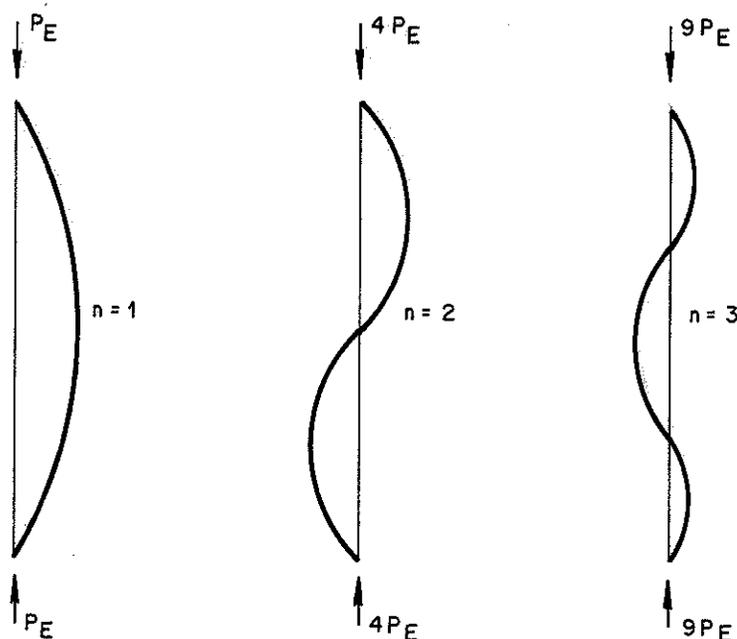


Figura 2.3- Formas possíveis de flambagem da coluna de Euler para n igual a 1, 2 e 3.

2.3- A ROTAÇÃO ESPECÍFICA

Em (Pimenta & Mazzilli, 1986), os autores procuram mostrar que a afirmação comum dos cursos de Resistência dos Materiais de que a conhecida expressão (2.3): $M_{int} = -EI y''$, a qual

derivaria da linearização de (2.2), $M_{int} = - EI (1/r)$, como foi feito no parágrafo anterior, não é verdadeira pois esta última expressão não é consistente com a hipótese usual de as seções transversais permanecerem planas e ortogonais ao eixo da barra após a deformação, no caso geral. Mostram que, na verdade, (2.3) é a linearização de:

$$M_{int} = - EI \frac{d\theta}{dx} = - EI \theta' \quad (2.14)$$

onde θ' é a denominada rotação específica, obtida a partir da flexão de um elemento diferencial da coluna reta, de comprimento dx , como mostra a figura 2.4:

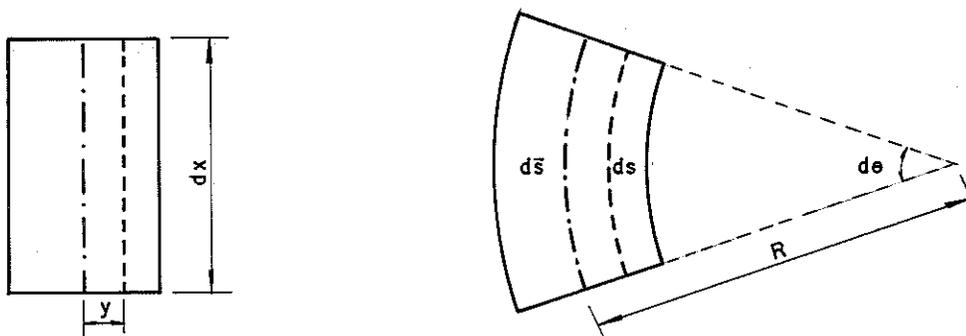


Figura 2.4- Elemento diferencial da coluna reta, antes e após flexão.

e cuja expressão, pela regra da cadeia, nos leva a:

$$\theta' = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\bar{s}} \cdot \frac{d\bar{s}}{dx} = \kappa \bar{\lambda} \quad (2.15)$$

sendo:

$$\kappa = d\theta/d\bar{s} = \text{curvatura do eixo da barra}$$

$$\bar{\lambda} = d\bar{s}/dx = \text{estiramento da fibra ao longo do eixo da barra.}$$

Segundo esses autores a fórmula da curvatura do eixo da barra, completa, seria:

$$\kappa = \frac{\bar{v}'' (1 + \bar{u}') - \bar{u}'' \bar{v}'}{[(1 + \bar{u}')^2 + (\bar{v}')^2]^{3/2}} \quad (2.16)$$

Assim, segundo a demonstração feita pelos mesmos, \bar{v}'' não seria a linearização da curvatura, mas a da rotação específica θ' , sendo esta uma melhor denominação. Além disso, é a rotação específica θ' , e não a curvatura, o deslocamento generalizado conjugado energeticamente com o momento fletor.

Na expressão (2.15), acima, a notação utilizada pelos autores para o campo de deslocamentos dos pontos da barra reta com o seu eixo alinhado com o eixo das coordenadas x , e considerando a hipótese usual das seções transversais permanecerem planas e ortogonais ao eixo da barra, é:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \bar{u}(x) + y \operatorname{sen}\theta \\ v(x,y) &= \bar{v}(x) + y \operatorname{cos}\theta \end{aligned} \quad (2.17)$$

que pode ser visualizada pela figura 2.5.

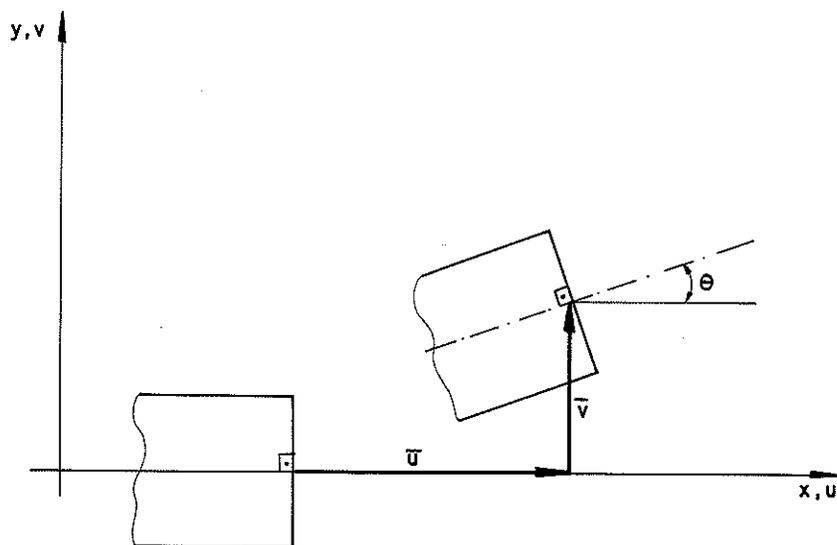


Figura 2.5- Deslocamentos de uma barra reta

É interessante notar, segundo os autores, que a hipótese de inextensibilidade do eixo da barra adotada por Euler leva a:

$$\theta' = \kappa = \bar{v}'' (1 + \bar{u}') - \bar{u}'' \bar{v}' \quad (2.18)$$

o que justificaria $M = -EI \kappa$ somente na ausência de força normal.

Para a linearização da rotação específica θ' :

$$\theta' = \frac{\bar{v}'' (1 + \bar{u}') - \bar{u}'' \bar{v}'}{(1 + \bar{u}')^2 + (\bar{v}')^2} \quad (2.19)$$

são necessárias as hipóteses de \bar{u}' e \bar{v}' serem muito pequenos em relação à unidade e de \bar{u}' ter a mesma ordem de grandeza de \bar{v}'' , o que não é muito intuitivo, segundo os autores.

Notam, finalmente, que a difundida fórmula da curvatura, dada por:

$$\kappa = \frac{\bar{v}''}{[1 + (\bar{v}')^2]^{3/2}} \quad (2.20)$$

somente é correta se as derivadas de \bar{v} forem entendidas como sendo em relação à abscissa dos pontos do eixo da barra após a deformação. Este tipo de descrição é conhecido na Mecânica dos Meios Contínuos como descrição Euleriana, podendo não ser muito conveniente, segundo aqueles autores, para problemas com grandes rotações, assim como em soluções numéricas de problemas não lineares.

2.4- HISTÓRICO

O primeiro estudo sobre a linha elástica de barras fletidas deve-se ao matemático suíço Jakob Bernoulli (pai de Daniel Bernoulli), que adotou as hipóteses formuladas por Mariotte, o qual, por sua vez, em seus estudos sobre a resistência de barras fletidas, já supusera as seções transversais permanecendo planas após as deformações e girando em torno de eixos cujos traços no plano de flexão eram pontos do "eixo neutro" que se mantinha inextensível (Timoshenko, 1953 - apud Pimenta & Mazzilli, 1986) (1).

Mariotte, porém, havia imaginado, erroneamente, que esse "eixo neutro" se situava sobre o lado côncavo da barra submetida a flexão simples, em vez de conter os baricentros das seções transversais. A correção desse erro da posição do "eixo neutro" só foi

(1) PIMENTA, Paulo de Matos & MAZZILLI, Carlos, E.N. - "Minima Correctio Methodi Inveniendi Lineas Curvas Elasticii" - Publicação BT/PEF - 8163 da Poli - USP, 1986 São Paulo - SP.

feita muito tempo depois, por Navier, em 1826.

Entretanto, a menos de induzir a erro no valor da constante representativa do produto de rigidez de flexão, a hipótese de Mariotte foi correta o suficiente, a ponto de permitir a formulação clássica da linha elástica de barras fletidas, o que se deu com o notável concurso dos já citados Jacok Bernoulli e seu filho Daniel Bernoulli, assim como do seu discípulo Leonhard Euler.

Como nos conta L'HERMITE (L'Hermite, 1974) ⁽¹⁾, o trabalho "Sur la force des colonnes" apresentado por Euler, em 1757, às Memórias da Academia de Berlim (e publicado em 1759), foi-lhe inspirado por Daniel Bernoulli.

Em (Pimenta & Mazzilli, 1986) observa-se que Daniel Bernoulli propôs a Euler que utilizasse o cálculo variacional, de que era conhecedor exímio, para derivar a equação da linha elástica a partir da condição de que a energia de deformação fosse mínima. Sem questionar as hipóteses intrínsecas à formulação da energia de deformação de Daniel Bernoulli, Euler obteve a clássica lei que afirma ser o momento proporcional à curvatura.

Euler enganou-se, porém, com respeito à constante de proporcionalidade, que não resultou propriamente no produto de rigidez. A propósito, sua constante, no caso de viga prismática de seção retangular, dependia do quadrado da altura, em vez do cubo.

Tais enganos jamais desmereceram seus trabalhos, que continuam, logicamente, a ter extraordinário conceito ao longo do tempo. Como vimos na seção 2.1, Euler publicou estas informações no apêndice I "De Curvis Elásticos" do livro "Methodus ..." cuja capa é reproduzida na figura 2.6.

(1) L'HERMITE, R. - "Flambage et Stabilité - Le flambage élastique des pièces droites", Collection V.T.I. - I.T.B.T.P., Éditions Eyrolles, 1^o ed., 230 pp, 1974.

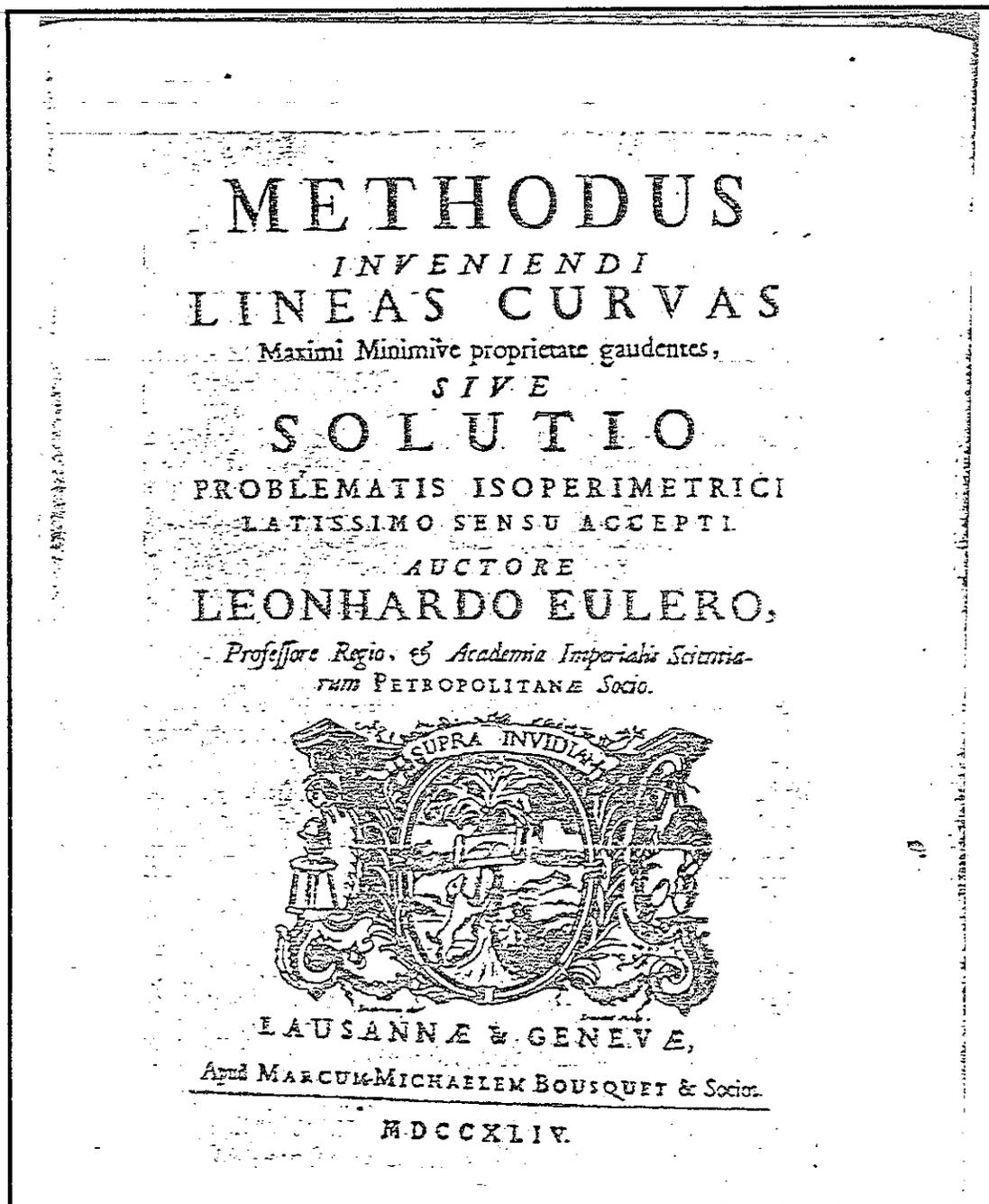


Figura 2.6- Capa do Livro de Leonard Euler, cujo apêndice I é "De curvis elasticus", publicado em 1744.

A teoria de Euler foi desenvolvida por Lagrange em torno de 1800 (Lagrange, 1867 - apud L'Hermite, 1974).

Infelizmente as teorias sobre flambagem tiveram pouco sucesso porque as experiências empreendidas na época para verificá-las malograram quase que completamente na falta, reconhece-se hoje, de métodos precisos. Os ensaios de flambagem são sempre delicados face, principalmente, às dificuldades de centragem, e dos vínculos

mal definidos nas extremidades, como constatou DULEAU (Duleau, 1820) ⁽¹⁾, com suas experiências com colunas de ferro.

Outra razão do revés relativo das primeiras experiências vieram do fato de que foram feitas, na maioria das vezes, com colunas cujo comprimento não era suficientemente grande em relação à menor dimensão transversal, fazendo, então, com que o limite de elasticidade do material aparecesse antes da flambagem elástica. A rica teoria de Euler sobre a flambagem elástica só trouxe grandes embaraços para a época, onde pouco se conhecia sobre a plasticidade na flambagem.

Com todos esses males de nascência, a teoria sobre flambagem não conseguiu se firmar e a confusão estabelecida certamente prejudicou o progresso dentro desse domínio.

As primeiras luzes só apareceram através de HODGKINSON (Hodgkinson, 1840) ⁽²⁾ e LAMARLE (Lamarle, 1845 e 1846) ⁽³⁾. Eles constataram a existência de um limite acima do qual a fórmula de Euler poderia ser utilizada e abaixo do qual seria necessário apelar para a experimentação e o empirismo (tendo em vista o diagrama tensão x esbeltez).

RANKINE (Rankine, 1898) ⁽⁴⁾ colocou um pouco de ordem na questão entre 1855 e 1872. Estabelecida por Navier e estudada em 1853 pelo engenheiro inglês Rankine, a "fórmula de Rankine" ficou também conhecida por vários outros nomes. Pertence ao tipo das semi-empíricas, porque, baseada de início na teoria, entra em

(1) DULEAU, "Essai théorique et expérimental de la résistance du fer forgé", Paris, 1820.

(2) HODGKINSON, Phil. Trans. Royal Soc., Londres, 2ª parte, 1840, p. 385-456.

(3) LAMARLE, E., "Mémoires sur la flexion du bois", Annales des Travaux Publics de Belgique, Bruxelles, 1845, vol.3, p.1-64; 1846, vol.4, p.1-36.

(4) RANKINE, "Manual of Civil Engineering", 1898.

seguida com um coeficiente numérico experimental (Rankine - apud - Lacerda, 1966) (1).

Outro pesquisador, GORDON, modificou a Fórmula de Rankine variando o coeficiente experimental e tomando, em vez do índice de esbeltez, a relação entre o comprimento da barra e a menor dimensão transversal (Gordon - apud Lacerda, 1966) (1).

RONDELET, na mesma época, tomou vários corpos de prova de madeira, de seção transversal quadrada e retangular, determinou a relação entre a altura e a menor dimensão desta seção, e a carga de ruptura em cada caso, experimentalmente. Com isto construiu uma tabela. Esta tentativa prática recebeu o nome de "Regra de Rondelet" (Rondelet - apud Lacerda, 1966) (1).

LOVE instituiu fórmulas empíricas, uma para cada material e dentro de certos limites. Estas fórmulas com coeficientes criteriosos tem o valor da de TETMAJER (que será citado a seguir). Entretanto não são usadas. (Love - apud Lacerda, 1966) (1).

NATALIS também modificou a Fórmula de Rankine, complicando-a consideravelmente (Natalis - apud Lacerda, 1966) (1).

JOHNSON aconselha uma fórmula empírica parabólica, sem grandes méritos (Johnson - apud Lacerda, 1966) (1).

USINGER, fazendo experiências sobre peças cilíndricas solicitadas do tampo, instituiu fórmulas para o caso de duas articulações e para o caso de dois engastamentos.

H.KAYSER também contribuiu para o estudo do fenômeno apresentado a "Fórmula de Kayser" (Kayser - apud Lacerda, 1966) (1).

BAUSCHINGER (Bauschinger, 1887) (2) efetuou em 1887 as primeiras experiências precisas. Esse pesquisador, para se liberar das impertinentes indeterminações devidas às condições de apoio, realizou os experimentos com as extremidades das barras sob a forma cônica. Tal artifício, ao fornecer uma melhor centragem das forças, lhe permitiu verificar pela primeira vez, de forma precisa, que a fórmula de Euler era exata quando a flambagem se produzia ao longo da fase elástica da deformação. Mas o problema da flambagem

(1) LACERDA, F. S., "Resistência dos Materiais", II Volume, 4ª ed., 1ª impressão, Editora Globo, Rio de Janeiro, 1966, 472 pp.

(2) BAUSCHINGER, Mitt. Tech. Mech. Lab. München, 1887, Heft 15, p. 11.

elastoplástica não ficou ainda resolvido.

TETMAJER, apresentou uma formulação empírica para o problema. Em (Lacerda, 1966), já citado, encontram-se tais formulações.

JASINSKY (Jasinsky, 1894 - apud L'Hermitte, 1974), excelente pesquisador do fim do século passado, fornece uma contribuição marcada pelo exame profundo de várias questões em aberto devidas à flambagem em pontes metálicas.

As experiências de CONSIDÈRE (Considère, 1889)⁽¹⁾, à mesma época, deram importantes subsídios ao entendimento do fenômeno.

Os trabalhos de ENGESSER sobre flambagem foram inúmeros. Ele propôs a extensão das teorias de Euler pela introdução de um módulo tangencial definido pela tangente à curva de deformação. Ele estudou, de uma maneira aprofundada, a flambagem de colunas engastadas, a influência do efeito cortante, a integração de equações diferenciais da flambagem sob a forma de aproximações sucessivas por meio de métodos analíticos e gráficos, a flambagem de pontes, etc...

ENGESSER (Engesser, 1898)⁽²⁾ e CONSIDÈRE (Considère, 1889) foram os primeiros a reconhecer o problema da flambagem inelástica em 1889. Entretanto, mesmo nos dias de hoje a carga na qual a coluna falha por flambagem inelástica é ainda uma questão em aberto.

SHANLEY (Shanley, 1946)⁽³⁾ reconheceu o paradoxo na teoria do módulo reduzido da flambagem inelástica e mostrou que a carga prevista pela teoria poderia não ser obtida na realidade. Ele concluiu que a teoria do módulo tangente estava correta para prever a máxima carga sob a qual uma coluna perfeita, carregada axialmente, permanece reta.

(1) CONSIDÈRE, Résistance des pièces comprimées, Congrès International Procédés de Construction, Paris, 1889.

(2) ENGESSER, F. - "Über die knickfestigkeit gerader stäbe". Revista Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen", 35 (1-8): 455-461, Schmorl an Von Seefeld, Hannover, Germany, 1889.

(3) SHANLEY, F.R. "The Column Paradox", Journal Aeronautical Sciences (13):678, 1946.

JOHNSTON (Johnston, 1961) (1) apresenta um diagrama que mostra a evolução da fórmula para colunas desde Euler até Shanley, e é reproduzido na figura 2.7, onde L é o comprimento da coluna, R é o raio de giração, e K é um coeficiente para adequar as condições de contorno.

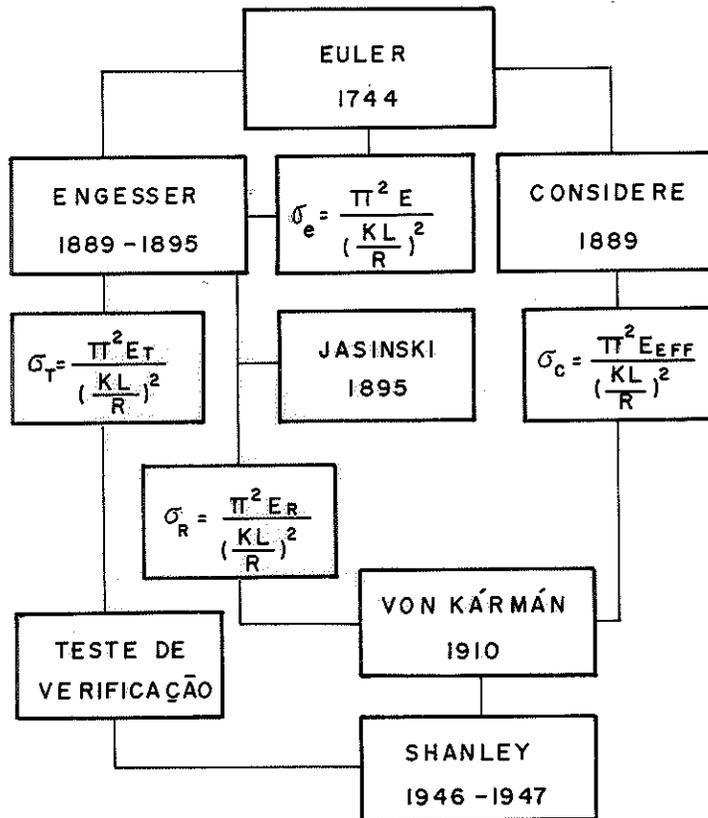


Figura 2.7- Evolução da Fórmula para Coluna [(IN: (Johnston, 1961)]

Neste diagrama mostra-se que Considere e Engesser, na mesma época (1889), mas trabalhando independentemente, chegaram a expressões idênticas para explicar porque algumas colunas entravam em colapso antes da carga de Euler. Em suas expressões E_T e E_{EFF} representam respectivamente o "módulo tangente" e o "módulo efetivo", e substituem o módulo de elasticidade E da fórmula de Euler.

(1) JOHNSTON, B. G. "Buckling behavior above the tangent modulus load". Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 87(6), 79-99, 1961.

JASINSKI, em 1895, sugeriu que existiria um erro aparente na fórmula de Engesser, surgindo aí o "módulo reduzido" E_R , também chamado de "módulo duplo". Em 1910, Theodor von Kármán derivou expressões explícitas para o "módulo duplo".

Somente em 1946, Shanley apresentou sua teoria que procurava conciliar a controvérsia existente entre os proponentes das teorias do módulo tangente e do módulo reduzido ou duplo, mostrando que era possível uma coluna fletir simultaneamente com um acréscimo de carga, sem haver reversão das deformações.

Muitas expressões, desde então, têm sido deduzidas para as colunas, num festival imenso de fórmulas entre as quais destacam-se fórmulas antigas ou mais recentes, podendo-se listar algumas tais como as de Ritter, Tetmajer, Rankine, Rondelet, Rondon, Nachtergal, Movin & Hodgkinson, Love, Gordon, Natalis, Johnson, Usinger, Kayser, Ylinen.

No campo específico das madeiras alguns pesquisadores se destacam, e é o que veremos na seção 2.6, mais além.

2.5- INSTABILIDADE DIVERGENTE ESTÁTICA

2.5.1- Teorias de Primeira, Segunda e Terceira Ordem

Segundo as hipóteses que são adotadas no estudo da instabilidade, a mesma é enquadrada em teorias denominadas de 1ª, 2ª ou 3ª ordem. A primeira se caracteriza por não levar em consideração os deslocamentos no estudo do equilíbrio da estrutura e admitir simplificações de cálculo, enquanto que a de 2ª ordem leva em conta os deslocamentos no estudo do equilíbrio da estrutura. A teoria de 3ª ordem considera os deslocamentos sem simplificações.

Cada uma das teorias acima citadas pode ser aplicada em problemas de 1ª ou 2ª espécie, que a figura 2.8, através de colunas esquemáticas, procura mostrar. A parte (a) da figura 2.8 representa colunas que em condições ideais estariam sujeitas, exclusivamente, a forças normais, enquanto que a coluna da parte (b) da figura permite, entre outras coisas, verificar a influência das imperfeições geométricas, que são inevitáveis nas estruturas reais.

As definições de problemas de 1ª ou 2ª espécie passam an

tes, pelas definições de carga crítica e carga última, que serão analisadas a seguir.

2.5.2- Carga Crítica - Passagem Qualitativa e Carga Última - Passagem Quantitativa

Por "carga crítica" entende-se o valor da carga que provoca instabilidade na estrutura pela passagem de um estado de equilíbrio para outro. Essa passagem é dita "passagem qualitativa", pois há uma mudança de uma forma de equilíbrio para outra (ponto de bifurcação, figura 1.1).

Quando essa passagem é uma "passagem quantitativa" diz-se que se tem uma "carga última". No caso da coluna, a passagem quantitativa é caracterizada por variações grandes das funções deslocações para uma variação do carregamento tão pequena quanto se queira (ponto limite, figura 1.1).

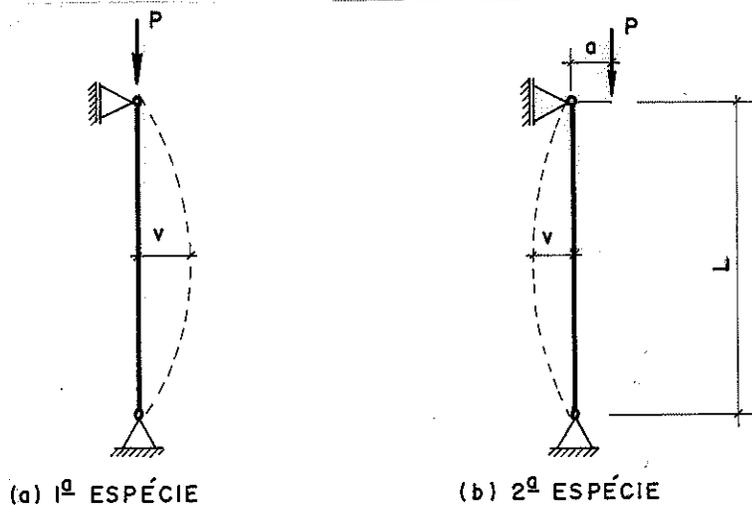


Figura 2.8- Colunas Esquemáticas para Problemas de 1ª Espécie e 2ª Espécie

2.5.3- Problemas de Primeira e Segunda Espécies

Por problemas de 1ª espécie entende-se aqueles em que, ao se atingir o carregamento crítico, ocorre passagem qualitativa de uma forma de equilíbrio para outra, enquanto que os problemas de 2ª espécie se caracterizam pela passagem de um estado de equilíbrio para outro através apenas de variação quantitativa das funções que definem a posição deslocada.

A figura 2.9 ilustra, através de gráficos, as defini-

ções acima descritas. O eixo das abscissas apresenta o deslocamento lateral v da coluna, enquanto que o das ordenadas, o carregamento P , como já visto na figura 2.8.

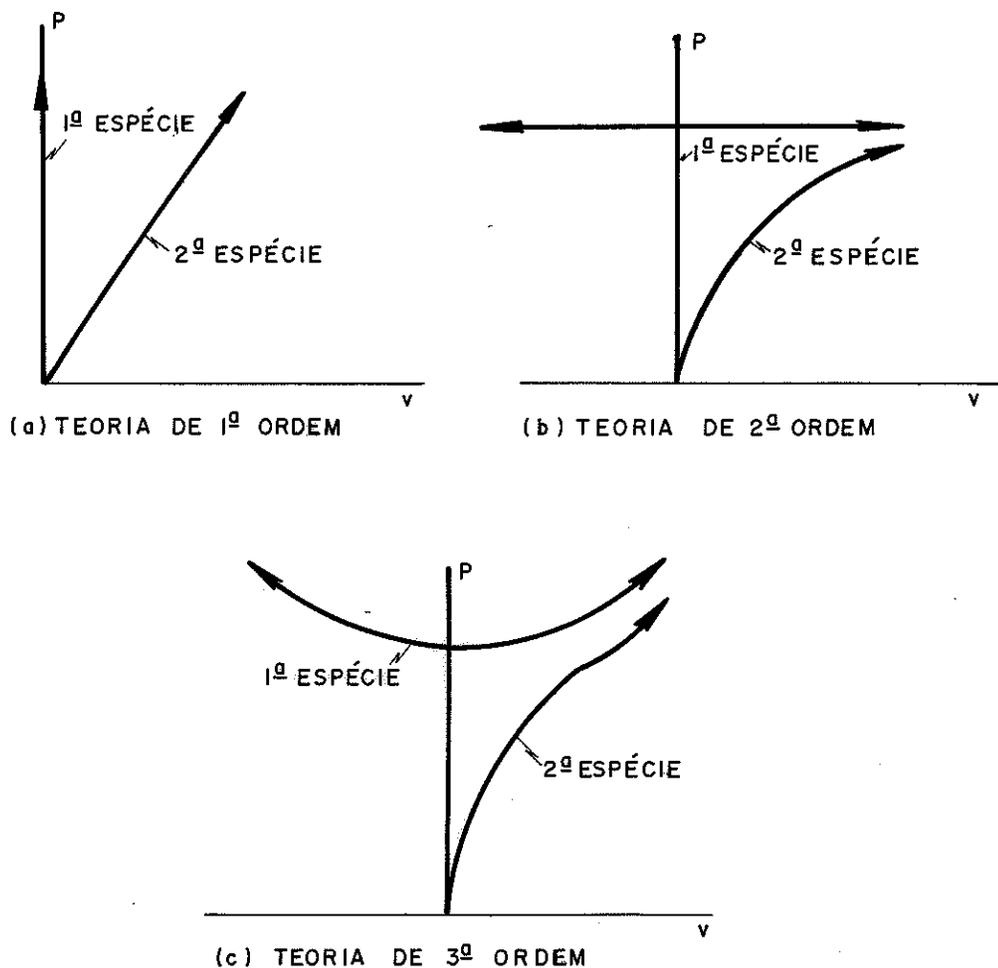


Figura 2.9- Gráficos (Carga x Deslocamentos) segundo as Teorias de 1ª, 2ª ou 3ª Ordem

2.5.4- Processos de Verificação da Estabilidade

MAZZILLI (Mazzilli, 1979) discute os vários processos que poderiam ser utilizados na verificação da estabilidade. Na figura 2.10 procura-se diagramar essa família de abordagens possíveis.

O Processo Cinético consiste na aplicação direta da definição de estabilidade cinética, ou seja, escrevem-se as equações diferenciais do movimento para o sistema, verificando-se se sua solução geral é limitada ou não.

Os Processos Estáticos são aqueles cuja aplicação não envolve considerações sobre velocidade ou aceleração. O primeiro deles seria o Processo do Equilíbrio que se caracteriza pela pesquisa dos valores de carregamento para os quais o sistema admite configurações de equilíbrio não triviais (ZIEGLER, 1968) ⁽¹⁾. O segundo, seria o Processo Energético, cujas bases para procedimento estão fundamentadas no célebre Teorema de Lagrange-Dirichlet, o qual afirma ser condição suficiente para a estabilidade do equilíbrio de uma configuração de um sistema que a energia potencial total seja mínima. Finalmente, o Processo da Imperfeição pesquisa o valor do carregamento para o qual os deslocamentos do sistema assumido imperfeito se tornam excessivos ou mesmo infinitos, o que, aliás, é típico para tratamento matemático linearizado.

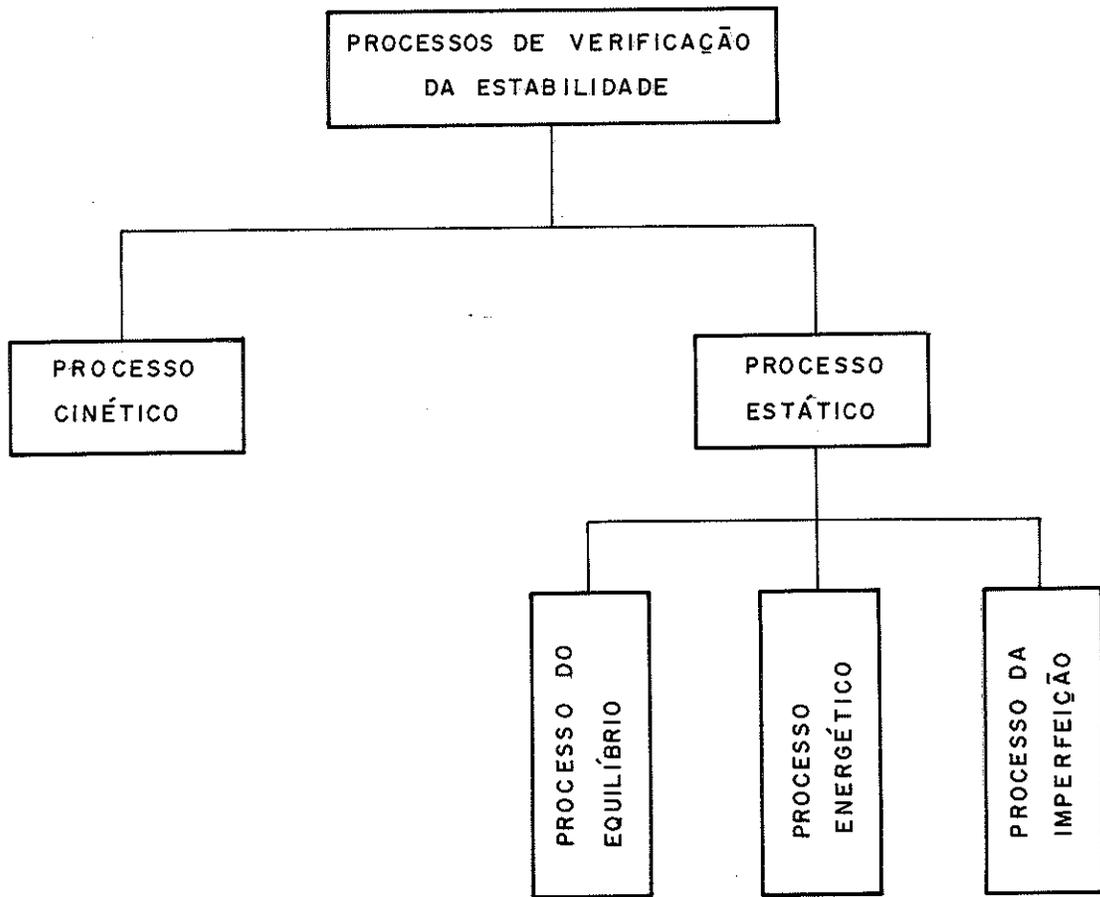


Figura 2.10- Processo de Verificação da Estabilidade
[In: (Mazzilli, 1979)]

(1) ZIEGLER, H. - "Principles of structural stability". Waltham, Mass., Blaisdell Publishing, 1968.

2.5.5- Comentários

Não se pode esquecer que os problemas de engenharia exigem, antes de mais nada, idealizações e simplificações da realidade, gerando modelos. A teoria matemática que então se vai aplicar não deve ter preocupações de purismos incompatíveis com o nível de aproximação já inerente ao estudo.

KOITER (Koiter, 1962) ⁽¹⁾ diz que, sem dúvida, é importantíssimo saber quais as limitações geradas quando se adotam simplificações, e recomenda cuidados especiais na pesquisa de soluções aproximadas. Sua crença na teoria da estabilidade elástica se deve à boa concordância que vem obtendo com a análise experimental.

2.6- O ESPECÍFICO DO TEMA

2.6.1- Estudo das Colunas de Madeira

NEWLIN & GAHAGAN (Newlin e Gahagan, 1930) ⁽²⁾ apresentaram uma fórmula específica para colunas de madeira, adotada pelo Forest Products Laboratory, marcando um importante passo nessa linha de pesquisa.

Lembra GURFINKEL (Gurfinkel, 1973) ⁽³⁾ que o caso de uma coluna de madeira sob carga axial é apenas um caso idealizado o qual raramente ocorre na prática. Mesmo em colunas projetadas para carregamento axial, pequenas excentricidades da carga em relação ao eixo da coluna aparecem devido às tolerâncias de construção, curvaturas iniciais e não homogeneidade do material. Essas excentricidades criam momentos fletores na seção da coluna. Por isso, aquele autor acha razoável projetar colunas de madeira para um mínimo de excentricidade de carga, mesmo se a análise indica uma ausência de momentos fletores.

(1) KOITER, W.T. - "Stability of equilibrium of continuous bodies". Division of Applied Mechanics, Brown University, 1962. (Technical Report nº 79).

(2) NEWLIN, J. A. & GAHAGAN, J. M. - "Test of large timber columns and presentation of the Forest Products Laboratory Column Formula". Department of Agriculture, Washington - D.C., U.S., Technical Bulletin nº 167. 1930.

(3) GURFINKEL, German - "Wood Engineering", New Orleans, Southern Forest Products Association, 1973.

Alguns trabalhos tem seguido essa linha tais como os de (Newlin & Trayer, 1941) (1), (Buchanan, 1986) (2), (Malhotra, 1969) (3), (Neubauer, 1973) (4) e (Zahn, 1986) (5).

2.6.2- A Coluna Real

Consideremos a coluna de madeira da figura 2.11. Nela observa-se que o carregamento é aplicado na direção paralela às fibras, chamada "longitudinal". As deflexões laterais, poderão ocorrer nas direções "radial", "tangencial" ou numa direção intermediária entre ambas. Para efeito de índices, designa-se por 1, 2 e 3 respectivamente as direções longitudinal, radial e tangencial.

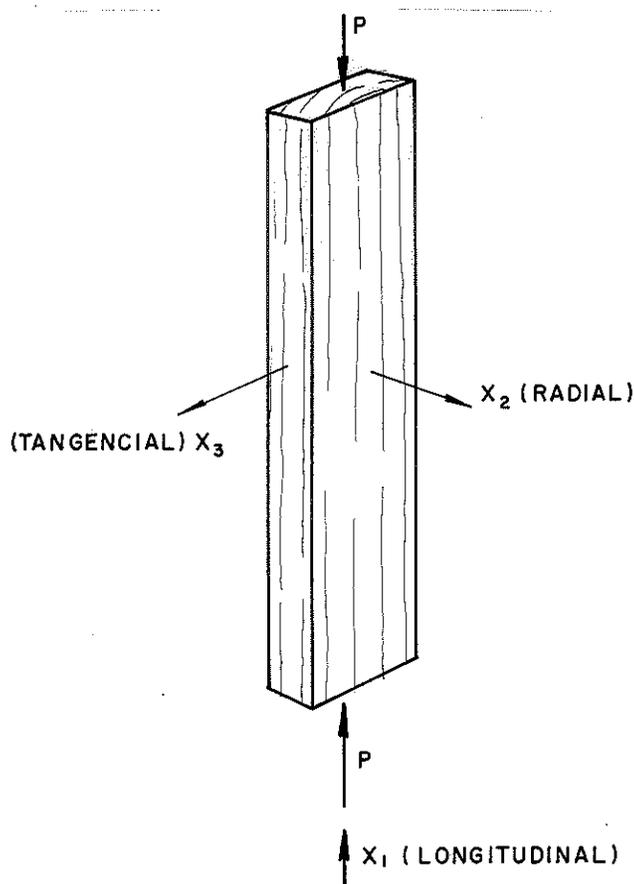


Figura 2.11- Coluna de Madeira e Eixos Coordenados.

(1) NEWLIN, J.A. & TRAYER, G.W. - "Stress in wood members subjected to combined column and beam action". USDA-FS-FPL, Madison, 1941. (Forest Products Laboratory Report nº 1311).

(2) BUCHANAN, Andrew H. - "Combined bending and axial loading in lumber". Journal of Structural Engineering, 112(12): 2592-2609, Dec. 1986.

(3) MALHOTRA, S. K. - "Buckling strength of solid timber columns". Halifax, N.S., Nova Scotia Technical College, 1969.

(4) NEUBAUER, L. W. - "A realistic and continuous wood column formula". Forest Products Journal, 23(3): 38-44, Mar. 1973.

(5) ZAHAN, John J. - "Design of wood members under combined load". Journal of Structural Engineering, 112(9): 2109-2127, Sept. 1986.

Segundo BODIG & JAYNE (Bodig & Jayne, 1982) ⁽¹⁾, a curvatura, a não homogeneidade do material e a carga de compressão, a qual quase sempre não se encontra sobre o eixo centroidal da peça, podem se combinar para causar a flambagem. Momentos fletores, então, surgem acompanhando as deflexões laterais. Um momento torçor, que também está presente no sistema, é normalmente, razoavelmente pequeno para que possa ser desprezado sem comprometer a segurança. Esses momentos fletores, que poderiam ser denominados por M_2 e M_3 , seriam os responsáveis pelas deflexões δ_2 e δ_3 nas direções X_2 e X_3 respectivamente.

Na análise daqueles autores, um incremento da carga P gera aumentos nas deflexões δ_2 e δ_3 mais rapidamente do que as tensões de compressão resultantes. Esta situação ocorreria devido ao fato que as deflexões causam grandes momentos fletores ao mesmo tempo que o eixo centroidal fica cada vez mais distante de sua posição original.

A carga aplicada P finalmente alcançará um nível crítico P_{CR} no qual uma deflexão exagerada ocorrerá em uma das direções X_2 ou X_3 . A coluna não mais suportará a carga aplicada. A direção da flambagem crítica depende de qual tensão de flexão última σ_u será alcançada primeiro. Se M_2 e M_3 são de magnitudes similares, o menor momento de inércia determinará, com toda a probabilidade, a tensão que primeiro alcançará o máximo nível suportável. Então, no cálculo de P_{CR} , o menor momento de inércia é determinante.

2.6.3- Coluna Carregada Centricamente

É bem conhecido que o modo de colapso de uma coluna centricamente carregada depende de sua esbeltez. Uma coluna curta chega ao colapso com uma carga que produz o esmagamento do material. Uma coluna esbelta vai ao colapso através de um processo de instabilidade exatamente quando a carga alcança certo valor crítico proporcional ao módulo de elasticidade e inversamente proporcional ao quadrado do comprimento.

(1) BODIG, Jozsef & JAYNE, Benjamin A. - "Mechanics of wood and wood composites". New York, Van Nostrand Reinhold, 1982.

Se o material segue a Lei de Hooke, existirá um trecho linear de proporcionalidade entre tensão e deformação cujo máximo valor servirá para delimitar a separação entre colunas "intermediárias" e "longas".

Para as colunas intermediárias existirá uma transição entre os dois modos de colapso acima descritos. A capacidade de carga das colunas intermediárias dependerá tanto da resistência quanto da rigidez do material. A figura 2.12 ilustra graficamente essa classificação das peças segundo a esbeltez.

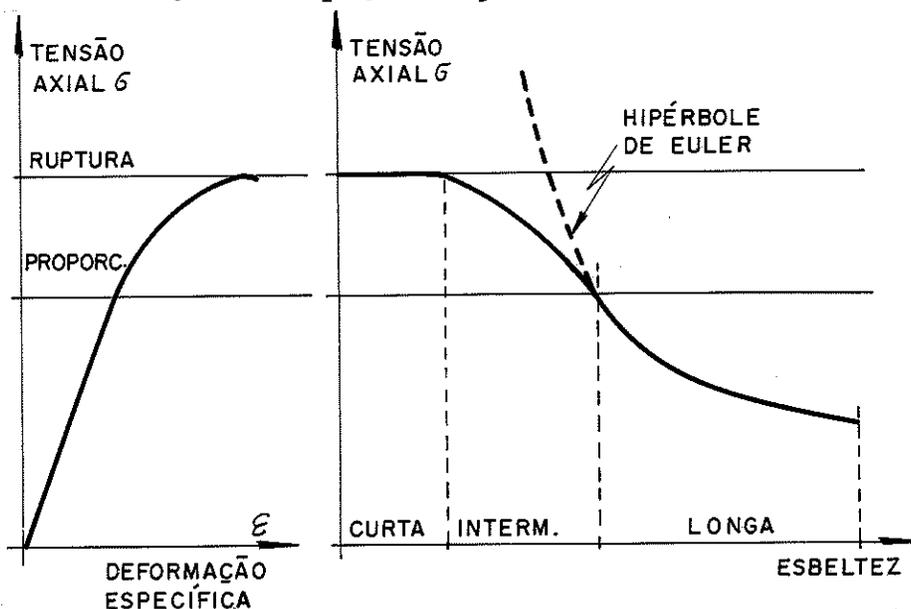


Figura 2.12 - Gráfico ($\sigma \times \epsilon$) e a classificação das colunas segundo esbeltez

2.6.4- Coluna Carregada Excentricamente

A capacidade de carga de uma coluna carregada excentricamente depende do tamanho dessa excentricidade, além, logicamente, dos fatores já descritos no item anterior.

Vamos acompanhar a análise feita por BUCHANAN sobre esse caso, onde o mesmo faz considerações sobre o desempenho de uma coluna com igual excentricidade "e" nas extremidades, como mostrado na figura 2.13, quando uma carga P é aumentada até o colapso (Buchanan, 1986) (1).

O momento nas extremidades da coluna é sempre $(P \cdot e)$. O momento no meio do vão é $P(e + \Delta)$, onde Δ é a deflexão central.

Na figura 2.13 também é mostrado um típico diagrama de

(1) BUCHANAN, Andrew H. - "Combined Bending and Axial Loading in Lumber", Journal of Structural Engineering, vol.112, nº 12, Dez.1986-pp 2592-2609

interação para coluna de madeira. M_u é a capacidade de momento flexor. P_a é a capacidade de carga axial para a coluna curta de mesmo material. A capacidade de carga axial centrada da coluna, P_u , depende da esbeltez.

A curva externa, chamada de "diagrama de interação último", é a envoltória de todas as possíveis combinações de carga axial e momento, as quais podem ser suportadas pela seção de um dado material. A forma da curva toma o aspecto mostrado porque a capacidade de momento da madeira pode ser aumentada ao se aplicar uma moderada carga de compressão, com um desempenho semelhante ao da coluna de concreto armado.

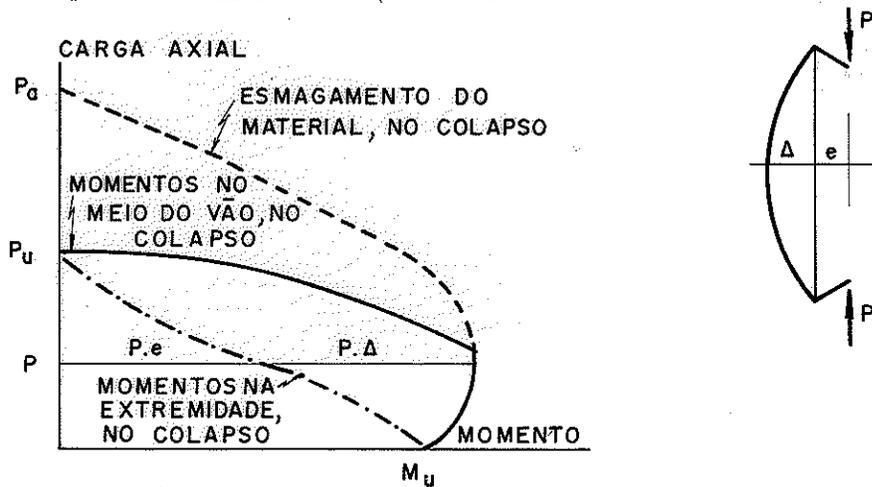


Figura 2.13 - Desempenho de Coluna com Carga Excêntrica [IN: (Buchanan, 1986)]

A curva inferior mostra a combinação da carga axial e o momento na extremidade da coluna no colapso. A curva de linha cheia mostra a correspondente combinação da carga axial e o momento no meio do vão, no colapso. Para cargas axiais pequenas a curva de linha cheia coincide com o "diagrama de interação último", indicando esmagamento do material. Para cargas axiais altas a curva de linha cheia fica interna ao "diagrama de interação último", indicando colapso por instabilidade.

Na figura 2.13, a distância horizontal entre as duas curvas inferiores representa o acréscimo de momento ($P \cdot \Delta$) resultante da deflexão da coluna, em uma dada carga P.

BUCHANAN constrói, então, um gráfico tridimensional combinando simultaneamente o desempenho das colunas, sob carga centrada e excêntrica, o qual é reproduzido na figura 2.14.

A curva no plano (carga x esbeltez) é a curva mostrada à direita na figura 2.12, A curva no plano (carga x momento) é o "diagrama de interação último". Curvas paralelas a esse plano são "diagramas de interação" tal como a curva de linha cheia mostrada na figura 2.13, adicionada ao fator esbeltez. Conhecidas a resistência e rigidez do material, uma coluna carregada excêntrica - mente pode suportar qualquer combinação de carga axial e momento desde que se mantenha interna à superfície mostrada na figura 2.14.

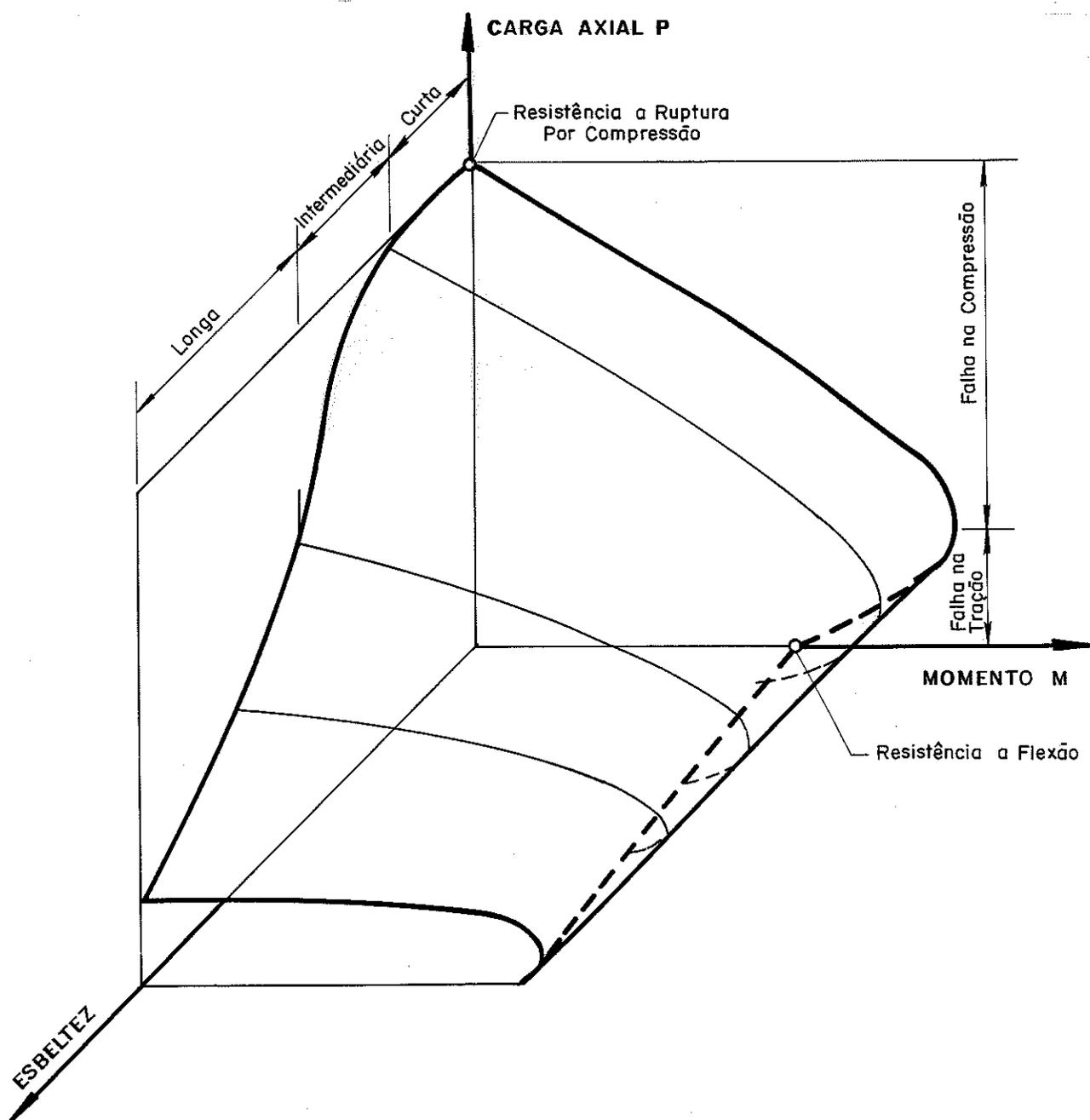


Figura 2.14- Gráfico Tri-Dimensional de (Carga x Esbeltez x Momento) [IN: (Buchanan, 1986)]

Aquele autor constrói então o seu modelo de resistência para predizer a resistência última da coluna de madeira submetida à flexão e a combinação de flexão e carga axial.

Nesta mesma linha ZAHN apresenta um novo critério de projeto para colunas de madeira sob a ação combinada de carga axial e flexão. A nova equação abrange flexão biaxial e carga axial. Emprega a fórmula de coluna devida a YLINEN (Ylinen, 1956)⁽¹⁾ para flambagem de colunas, e substitui a equação de interação linear por equações mais exatas, baseadas em resultados de recentes dados da análise de estabilidade elástica. O autor sugere que, embora simples, o critério proposto é mais geral, mais racional e mais correto do que o critério de projeto existente em seu país. (Zahn, 1986).

2.6.5- EUROCODE Nº 5

O CIB - CONSEIL INTERNACIONAL DU BÂTIMENT - através de seu grupo de trabalho W18 - Timber Structures preparou previamente uma série de propostas de projeto de norma para estruturas de madeira no intuito de as apresentarem ao ISO/TC 165 - Timber Structures como base para um Modelo Padrão Internacional. Foram também submetidas à Comunidade Econômica Europeia, no que resultou numa norma européia para madeira estrutural, o EUROCODE Nº 5 (Common unified rules for timber structures), ano de 1987.

No item referente a colunas diz que as tensões de flexão devido à curvatura inicial e deflexão induzida deverão ser levadas em consideração, além daquelas devidas a alguma carga lateral.

A teoria de elasticidade linear pode ser usada para calcular o momento fletor resultante.

Para a curvatura inicial uma forma senoidal pode ser assumida, correspondendo a uma excentricidade máxima da força axial de:

$$e = \eta r \lambda \quad (2.21)$$

onde r é o raio do núcleo.

(1) YLINEN, A - " A Method of Determining the Buckling Stress and the Required Cross - Sectional Area for Centrally Loaded Straight Columns in Elastic and Inelastic Range". Publication IABSE - 1956.

Para madeira maciça, η , como um mínimo, será tomado como:

$$\eta = 0,006 \quad (2.22)$$

(correspondendo para uma seção transversal retangular a uma excentricidade inicial de até 1/300 do comprimento) e para madeira laminada:

$$\eta = 0,004 \quad (2.23)$$

As tensões deverão satisfazer a seguinte condição:

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_c f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} \frac{1}{1 - \frac{k_c}{k_{eu}} \frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}}} \leq 1 \quad (2.24)$$

onde $\sigma_{m,d}$ são as tensões de flexão calculadas sem levar em consideração deflexão e curvatura inicial.

$$k_{eu} = \frac{\sigma_{eu,k}}{f_{c,0,k}} = \frac{\pi^2 E_{0,k}}{f_{c,0,k} \lambda^2} \quad (2.25)$$

sendo σ_{eu} a tensão de Euler.

$$k_c = \min = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0.5(1 + 20\eta) \left\{ 1 + [1 + \eta\lambda(1 + 20\eta)] \frac{f_{c,0,k}}{f_{m,k}} \frac{k_{eu}}{1 + 20\eta} \right. \right. \end{array} \right. \quad (2.26a)$$

$$\left. \sqrt{(1 + [1 + \eta\lambda(1 + 20\eta)] \frac{f_{c,0,k}}{f_{m,k}} \frac{k_{eu}}{1 + 20\eta})^2 - 4 \frac{k_{eu}}{1 + 20\eta}} \right\} \quad (2.26b)$$

Onde a coluna é livre para defletir em direções diferentes, k_{eu} e k_c corresponderão ao maior dos valores de λ .

Comentários: O EUROCODE Nº 5 já incorpora, como se pode ver, uma excentricidade adicional (expressão 2.21):

$$e = \eta r \lambda$$

onde $\lambda = \frac{l_{fl}}{i} = \text{índice de esbeltez}$

$$r = \frac{W}{A} = \frac{\text{módulo de resistência}}{\text{área}} = \text{raio do núcleo}$$

$\eta = 0,006$ e $0,004$ (madeira maciça e laminada, respectivamente)

Para seção retangular ($b \times d$), e madeira maciça, tem-se:

$$\lambda = \sqrt{12} \frac{l_{fl}}{d}$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{(bd^2)/6}{bd} = \frac{d}{6} \\ e &= 0,006 \times \frac{d}{6} \times \sqrt{12} \times \frac{l_{fl}}{d} = \frac{\sqrt{12}}{1000} l_{fl} = \\ &= 0,00346 l_{fl} \cong \frac{l_{fl}}{300} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para entender-se as expressões deve-se ter em conta os seguintes índices:

0 = na direção das fibras, paralela às fibras
d = projeto
m = flexão
c = compressão
k = característico
eu = Euler

e os símbolos principais:

E = módulo de elasticidade
f = tensão resistente
k = fator, sempre com um índice
 σ = tensão normal atuante

A expressão (2.27) advém de um trabalho de LARSEN & THEILGAARD (Larsen, Hans J. & Theilgaard, Esko - 1979)⁽¹⁾ no qual são deduzidas expressões para várias situações.

No caso de coluna carregada centricamente, a expressão fica:

(1) LARSEN, Hans J. & THEILGAARD, Esko - "Laterally Loaded Timber Columns" - Journal of the Structural Division - ASCE - Vol. 105, nº ST 7, Julho 1979, pp 1347 - 1363.

$$\frac{N_{cr}}{N_0} = 0,5 \left[\left(1 + \frac{N_{Ex}}{N_0} + \frac{N_{Ex} v_0}{M_0} \right) - \sqrt{\left(1 + \frac{N_{Ex}}{N_0} + \frac{N_{Ex} v_0}{M_0} \right)^2 - 4 \frac{N_{Ex}}{N_0}} \right] \dots (2.28)$$

onde N_0 = força axial correspondente a resistência de compressão = $f_c A$
 M_0 = capacidade de momento fletor = $f_b W_x$
 N_{cr} = valor da carga crítica
 N_{Ex} = carga de Euler na direção x
 v_0 = deflexão inicial no centro da coluna

Neste trabalho, os autores apresentam um gráfico, reproduzido a seguir na figura 2.15, onde se pode observar as deflexões iniciais relativas em relação a esbelteza (l/b ou l/h).

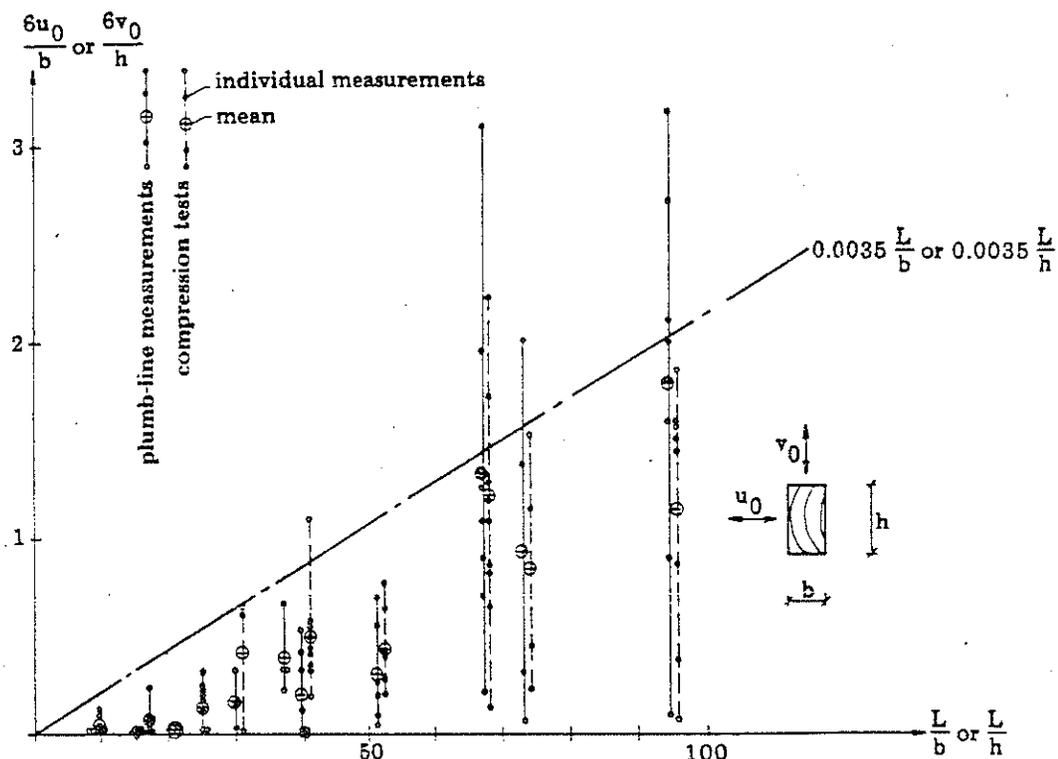


Fig. 2.15- Deflexão inicial relativa em relação à esbelteza [in LARSEN & THEILGAARD - 1979]

No mesmo trabalho, os autores sugerem

$$u_0 = 0,0035 L \quad (2.29)$$

$$v_0 = 0,0035 L \quad (2.30)$$

para as deflexões iniciais em ambas as direções de uma seção retangular. Observa-se, pois, a semelhança com:

$$e = 0,00346 \lambda_{f\lambda} \quad (2.31)$$

obtida com a expressão do EUROCODE 5.

2.6.6- Norma Norte-Americana do Projeto (NDS)

A última versão da norma NDS expõe as seguintes expressões:

$$\frac{f_c}{F'_c} + \frac{(6 + 1,5J) \frac{e}{d} f_c}{F_b - Jf_c} \leq 1 \quad (2.32)$$

na qual:

- f_c = tensão axial de compressão
- e = excentricidade da carga axial
- d = espessura da barra
- F_b = tensão última de resistência

$$F'_c = \begin{cases} F_c = \text{tensão última de resistência à compressão, se } \frac{L}{d} \leq 11 & (2.33) \\ F_c \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{L/d}{k} \right) \right] \text{ se } 11 \leq \frac{L}{d} \leq K & (2.34) \\ F''_c = \frac{0,822 E}{\left(\frac{L}{d} \right)^2} \text{ se } K \leq \frac{L}{d} & (2.35) \end{cases}$$

$$J = \begin{cases} 0 \text{ se } \frac{L}{d} \leq 11 & (2.36) \end{cases}$$

$$J = \begin{cases} \frac{L/d - 11}{K - 11} \text{ se } 11 \leq \frac{L}{d} \leq K & (2.37) \end{cases}$$

$$J = \begin{cases} 1 \text{ se } K \leq \frac{L}{d} & (2.38) \end{cases}$$

$$K = 1,11 \sqrt{\frac{E}{F_c}} \quad (2.39)$$

Comentário:

A norma norte-americana NDS considera 3 faixas de colunas: curtas ($L/d \leq 11$), intermediárias ($11 \leq L/d \leq K$), e longas ($K \leq L/d$). O valor K corresponde ao conhecido λ_0 da norma brasileira.

Um trabalho de ZAHN (Zahn, John J. - 1986)⁽¹⁾ tece algumas críticas à norma americana e propõe.

$$\left(\frac{f_c}{F'_c}\right)^2 + \frac{6 \frac{e}{d} f_c (1,234 - 0,234\theta_{c1})}{\theta_{c1} F_b} \leq 1 \quad (2.40)$$

na qual F_c , e , d e F_b são os mesmos da norma citada, mas F'_c deve ser obtida da fórmula de Ylinen:

$$F'_c = \frac{F_c + F''_c}{2c} - \sqrt{\left(\frac{F_c + F''_c}{2c}\right)^2 - \frac{F_c F''_c}{c}} \quad (2.41)$$

com F_c , F''_c e E idênticos ao da norma, e

$$\theta_{c1} = 1 - \frac{f_c}{F''_c} \quad (2.42)$$

Tanto na NDS quanto no trabalho de ZAHN, não se consegue observar referências à excentricidade adicional.

2.6.7- Norma Alemã DIN 1052

A norma alemã pressupõe uma barra imperfeita com curvatura inicial solicitada excentricamente e constituída por um material elastoplástico.

O conceito de carga crítica se refere à força que produz na face côncava flexo-comprimida tensões iguais à resistência $R_{c//}$. As deduções analíticas das tensões críticas consideram a superposição dos efeitos de compressão axial e de flexo-compressão excêntrica. As soluções mais conhecidas são as de Perry-Robertson na Grã-Bretanha e Möhler na Alemanha e podem ser expressas pela relação:

(1) ZAHAN, John J. - "Design of Wood Members under Combined Load", Journal of Structural Engineering, Vol. 112, nº 9, Setembro, 1986, pp. 2109 - 2127.

$$F_{cr} = A - \sqrt{A^2 - \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} R_{C//}} \quad (\text{kgf/cm}^2) \quad (2.43)$$

com

$$A = \frac{1}{2} \left[R_{C//} + \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} (1 + e) \right] \quad (\text{kgf/cm}^2) \quad (2.44)$$

Aqui o termo "e" representa as imperfeições da coluna e as excentricidades na aplicação da carga. A expressão (2.43) tem sido aceita como válida para todas as faixas de esbeltez e os resultados experimentais parecem provar uma excelente correlação com a teoria, tanto na faixa elástica quanto na inelástica. A aplicação de fatores de ajuste variáveis entre 2,5 e 3,2 permite estabelecer as propriedades admissíveis sob a consideração de um nível de exclusão de 5%.

As tensões admissíveis de flambagem se derivam da expressão (2.43). Para o termo "e", que considera as excentricidades e imperfeições da coluna se propõe o valor.

$$e = \frac{\lambda}{125} + 0,1 \quad (\text{cm}) \quad (2.45)$$

A primeira parcela incorpora as máximas curvaturas permitidas nas peças de uso habitual na construção, que na Alemanha se limitam ao valor de L/250, enquanto que a parcela 0,1 representa os defeitos próprios da madeira.

Introduzido o fator de excentricidade dada por 2.45 na equação (2.43), obtém-se para as tensões críticas de coluna a expressão:

$$F_{cr} = \frac{R_{C//} + \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \left(1,1 + \frac{\lambda}{125}\right)}{2} - \sqrt{\left[\frac{R_{C//} + \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \left(1,1 + \frac{\lambda}{125}\right)}{2} \right]^2 - \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} R_{C//}} \quad (2.46)$$

Em colunas curtas o efeito de $R_{C//}$ predomina notadamente sobre o de E, sucedendo o contrário nas barras esbeltas.

A variação do fator de excentricidade "e" afeta muito o comportamento de colunas com esbeltez menores, perdendo influência à medida que a esbeltez aumenta, situação que pode ser apreciada com

uma análise gráfica de sensibilidade da figura 2.16.

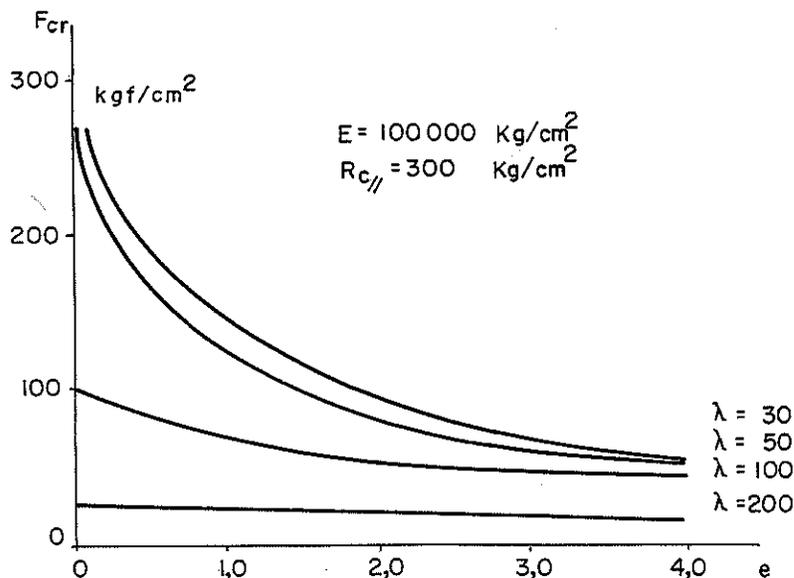


Fig. 2.16- Variação das tensões em relação ao fator de excentricidade.

O coeficiente de segurança considera unicamente as possíveis variações nas propriedades resistentes da madeira $R_{c//}$ e E , uma vez que os defeitos das peças já estão incorporados ao fator de excentricidade.

Möhler propõe um valor variável, decrescente com a esbeltez na faixa inelástica e constante na faixa elástica, como segue:

$$\lambda = 0,7 \left(\frac{\lambda - 100}{100} \right)^2 + 2,5 \quad \text{se } \lambda \leq 100 \quad (2.47)$$

$$\lambda = 2,5 \quad \lambda > 100 \quad (2.48)$$

Na faixa $\lambda > 100$ se exigiria, ainda, um $\gamma = 3,5$ com respeito às tensões críticas de Euler.

As tensões admissíveis seriam estimadas considerando:

$$F_{c\lambda} = \frac{F_{cr}}{\gamma} \quad (2.49)$$

controlando-se, ainda, quando $\lambda > 100$ que:

$$F_{C\lambda} \leq \frac{\pi^2 E}{3,5\lambda^2} \quad (2.50)$$

A DIN 1052 decidiu considerar as características da madeira normal de construção, para o cálculo da (2.46). Estas correspondem às coníferas européias com $R_{C\parallel} = 85 \text{ kgf/cm}^2$ e $E = 100.000 \text{ kgf/cm}^2$.

Diferente das maiores das normas, na Alemanha não se indica explicitamente a fórmula de cálculo das tensões admissíveis por flambagem, mas sim se recorre à tabulação biunívoca, em função da esbeltez, dos coeficientes ($F_{C\parallel}/F_{C\lambda}$), designados como coeficientes de flambagem " ω ".

Na tabela 2.1. se reproduzem os coeficientes de flambagem resultantes da incorporação nas equações (2.46) a (2.50) das propriedades das madeiras coníferas, e que se estabelecem na norma germânica. Estes coeficientes se aplicam sobre todas as espécies e níveis de qualidade da madeira.

Tabela 2.1
Coeficiente de Flambagem " ω " (DIN-1052)

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	λ
0	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	0
10	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	10
20	1,08	1,09	1,09	1,10	1,11	1,11	1,12	1,13	1,13	1,14	20
30	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,24	1,25	30
40	1,26	1,27	1,29	1,30	1,32	1,33	1,35	1,36	1,38	1,40	40
50	1,42	1,44	1,46	1,48	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58	1,60	50
60	1,62	1,64	1,67	1,69	1,72	1,74	1,77	1,80	1,82	1,85	60
70	1,88	1,91	1,94	1,97	2,00	2,03	2,05	2,10	2,13	2,16	70
80	2,20	2,23	2,27	2,31	2,35	2,38	2,42	2,46	2,50	2,54	80
90	2,58	2,62	2,66	2,70	2,74	2,78	2,82	2,87	2,91	2,95	90
100	3,00	3,06	3,12	3,18	3,24	3,31	3,37	3,44	3,50	3,57	100
110	3,63	3,70	3,76	3,83	3,90	3,97	4,04	4,11	4,18	4,25	110
120	4,32	4,39	4,46	4,54	4,61	4,68	4,76	4,84	4,92	4,99	120
130	5,07	5,15	5,23	5,31	5,39	5,47	5,55	5,63	5,71	5,80	130
140	5,88	5,96	6,05	6,13	6,22	6,31	6,39	6,48	6,57	6,66	140
150	6,75	6,84	6,93	7,02	7,11	7,21	7,30	7,39	7,49	7,58	150
160	7,68	7,78	7,87	7,97	8,07	8,17	8,27	8,37	8,47	8,57	160
170	8,67	8,77	8,88	8,98	9,08	9,19	9,29	9,40	9,51	9,61	170
180	9,72	9,83	9,94	10,05	10,16	10,27	10,38	10,49	10,60	10,62	180
190	10,83	10,94	11,06	11,17	11,29	11,41	11,52	11,64	11,76	11,88	190
200	12,00										

A solução permite verificar as peças comprimidas bastando ponderar a tensão efetiva de compressão pelo coeficiente de flambagem correspondente à esbeltez λ da coluna e verificar que o produto não excede a tensão de projeto (índice d) na compressão paralela.

De fato, a verificação tradicional procura satisfazer a condição:

$$f_{cef} = \frac{P}{A} \leq F_{c\lambda d} \quad (2.51)$$

Introduzindo a definição do coeficiente de flambagem

$$\omega = \frac{F_{c//d}}{F_{c\lambda d}} \quad (2.52)$$

se obtém a condicionante de verificação da DIN 1052:

$$f_{c\omega} = \frac{\omega P}{A} \leq F_{c//d} \quad (\text{kgf/cm}^2) \quad (2.53)$$

onde $f_{c\omega}$ se define como a tensão ponderada de flambagem; P e A correspondem à compressão solicitante em (kgf) e a seção transversal da barra, em (cm²), respectivamente.

A esbeltez máxima em barras simples é 150. Nas barras de contraventamentos, bem como em barras tracionadas que eventualmente possam ficar solicitadas por pequenas compressões, se aceitam esbeltez até 200.

2.6.8- Norma Brasileira NBR-7190

A norma brasileira, quanto a flexo-compressão, dá o seguinte tratamento. Inicialmente considera um "índice de flexão ϵ "

$$\epsilon = \frac{\text{tensão atuante na flexão simples}}{\text{tensão atuante na flexão composta}} = \frac{\sigma_f}{\sigma_{fc}} = \frac{\frac{M}{W}}{\frac{M}{W} + \frac{N}{S}} \quad (2.54)$$

Então o valor de ϵ irá variar de 0 (compressão pura) a 1 (flexão pura).

$$0 \leq \epsilon \leq 1 \quad (2.55)$$

Os valores intermediários de ϵ representam a flexão composta.

Se se lança em gráfico $\epsilon \times \lambda$ tem-se:

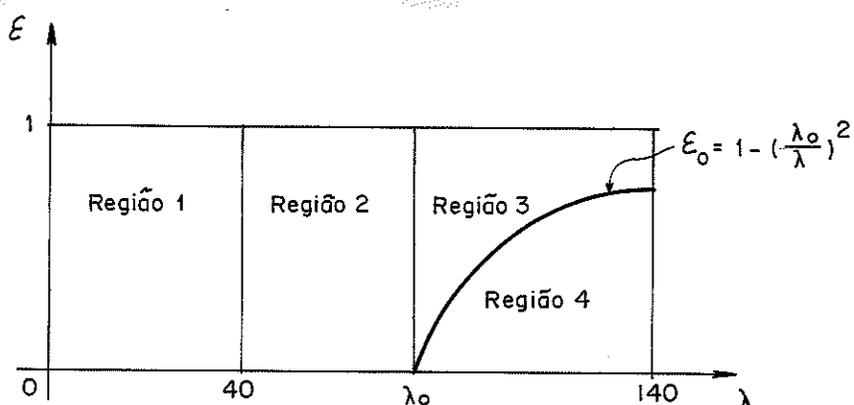


Fig. 2.17- Gráfico índice de flexão x índice de esbeltez

As seguintes expressões são fornecidas para as tensões admissíveis das faces comprimidas nas 4 regiões:

$$R.1- f_{fc} = f_c + (f_f - f_c) \epsilon \quad (2.56)$$

$$R.2- f_{fc} = f_{f\ell} + (f_f - f_{f\ell}) \epsilon \quad (2.57)$$

$$R.3- f_{fc} = \frac{2}{3} f_c + (f_f - \frac{2}{3} f_c) (\epsilon - \epsilon_0) \quad (2.58)$$

$$\text{onde } \epsilon_0 = 1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 \quad (2.59)$$

$$R.4- f_{fc} = f_c \quad (2.60)$$

2.6.9- Referências Bibliográficas sobre Excentricidades Iniciais

a) BREYER (Breyer, D. E. - 1980)⁽¹⁾ no livro "Design of Wood Structures" propõe na página 221:

$$\text{excentricidade mínima:} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1" = 2,54 \\ 0,1 d = \frac{d}{10} \text{ onde } d = \text{maior } d_i \\ \text{(maior entre)} \quad \text{mensão da seção} \end{array} \right. \quad (2.61)$$

b) BUCHANAN & alii (Buchanan & alii - 1985)⁽²⁾ citam em seu trabalho a norma OHBDC 1982 (Ontario Highway Bridge Code):

$$\frac{P}{P_a} + \frac{C_m}{1 - P/P_e} \frac{M}{M_u} \leq 1 \quad (2.63)$$

(1) BREYER, Donald E. - "Design of Wood Structures"-Editora McGraw-Hill-Book Company - New York - 1980, 542 pp.

(2) BUCHANAN, Andrew; JOHNS, Kenneth C. & MADSEN, Borg - "Column design methods for timber engineering"- Canadian Journal Civ. Eng. - Vol 12 - 1985, pp. 731-744.

O termo C_m é um fator para o caso de momentos desiguais nas extremidades dado por:

$$C_m = 0,6 + 0,4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0,4 \quad (2.64)$$

onde M_2 e M_1 são o maior e o menor momento nas extremidades, respectivamente. A taxa M_1/M_2 é positiva se a barra tem curvatura simples, e negativa, se tem curvatura dupla.

P é a carga axial, P_a é a capacidade de compressão da coluna curta, M é o momento de 1ª ordem e M_u é a capacidade de flexão da seção transversal.

P_e é a carga de Euler.

O momento M deve ser o momento real na extremidade, ou o momento devido a uma excentricidade mínima de 0,05 vezes a maior das dimensões da seção transversal. Uma excentricidade correspondente a uma curvatura inicial é considerada como sendo 1/500 vezes o comprimento de flambagem.

$$\text{excentricidade mínima} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0,05 d \text{ onde } d = \text{maior dimensão} \\ \text{da seção} \end{array} \right. \quad (2.65)$$

$$\text{(maior entre)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{l_{fl}}{500} \end{array} \right. \quad (2.66)$$

c) TIMOSHENKO & GERE (Timoskenko & Gere - 1961)⁽¹⁾

no livro "Theory of Elastic Stability", à página 198 e seguintes, comenta sobre a excentricidade equivalente, citando, inclusive, outros autores. Ali se encontra que SALMON recomenda:

$$e = 0,001l \quad \text{para excentricidade da carga} \quad (2.67)$$

$$a = \frac{l}{750} \quad \text{para a deflexão inicial} \quad (2.68)$$

(1) TIMOSHENKO, Stephen P. & GERE, James M. - "Theory of Elastic Stability", 2.ed. Tokio, McGraw-Hill Kogakusha, 1961 (International Student Edition).

Continuam os autores, dizendo que, em adição ao efeito da excentricidade na aplicação da carga e curvatura inicial, o efeito da não homogeneidade do material e variações inevitáveis na área da seção transversal deverão ser considerados. Todas as precedentes imperfeições podem ser substituídas por uma deflexão equivalente inicial da coluna. Considerando que as imperfeições crescem em proporção ao comprimento da coluna e levando em conta as duas expressões de SALMON, os autores propõe:

$$a = \frac{\ell}{400} \quad (2.69)$$

como deflexão inicial, e que consideram suficiente para compensar todas as prováveis imperfeições em uma coluna.

d) No livro "WOOD ENGINEERING", o autor GURFINKEL (Gurfinkel, 1973)⁽¹⁾ diz que as colunas de madeira deveriam ser projetadas com alguma excentricidade, uma vez que o conceito de coluna carregada axialmente, sem flexão, é uma idealização que raramente ocorre na prática.

Segundo esse autor, colunas de madeira podem ser projetadas com uma excentricidade "e" correspondente ao momento máximo que possa acompanhar o carregamento, mas não menor que uma excentricidade mínima específica e que poderia ser:

$$\begin{array}{l} \text{excentricidade mínima} \\ \text{(maior entre)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1" = 2,54\text{cm} \\ 0,1b \text{ ou } 0,1d \\ \text{sobre os eixos principais} \end{array} \right. \begin{array}{l} (2.70) \\ (2.71) \end{array}$$

onde b e d são as dimensões da seção transversal.

(1) GURFINKEL, German - "Wood Engineering" - Southern Forest Products Association, New Orleans, Louisiana - USA, 1973, 537 pp.

CAPÍTULO 3

BASE EXPERIMENTAL DAS RELAÇÕES ELÁSTICAS E ELASTOPLÁSTICAS

3.1- TENSÕES E DEFORMAÇÕES

Consideremos uma coluna submetida a um ensaio de compressão, figura 3.1. A coluna tem inicialmente um comprimento L_0 e uma seção A_0 .

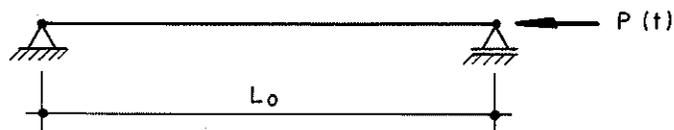


Fig. 3.1. Ensaio de Compressão de Coluna

Durante o ensaio, aplica-se à coluna uma força axial, uniformemente distribuída na seção, de valor $P(t)$ que varia com tempo, $0 \leq t < \infty$. Por efeito da carga, a coluna experimenta um encurtamento longitudinal $\Delta L(t)$ dado por:

$$\Delta L(t) = L(t) - L_0 \quad (3.1)$$

e um aumento de seção transversal dado por

$$\Delta A(t) = A(t) - A_0 \quad (3.2)$$

Para cada instante t podemos definir a "tensão real" como sendo:

$$\sigma^*(t) = \frac{P(t)}{A(t)} \quad (3.3)$$

e a "taxa de deformação específica longitudinal":

$$\dot{\epsilon}^*(t) = \frac{1}{L(t)} \frac{dL(t)}{dt} \quad (3.4)$$

Se a seção inicial A_0 é retangular de dimensões " b_0 " e " d_0 ", e se representarmos por " r_0 " qualquer uma delas, pode-se definir a "taxa de deformação específica transversal".

$$\dot{\epsilon}_t^*(t) = \frac{1}{r(t)} \frac{dr(t)}{dt} \quad (3.5)$$

Se a coluna passa de um comprimento L_0 em $t = 0$ a um comprimento $L(t)$ em t , podemos definir a "deformação específica longitudinal":

$$\epsilon^*(t) = \int_0^t \dot{\epsilon}^*(t) dt = \ln \left[\frac{L(t)}{L_0} \right] \quad (3.6)$$

Entretanto, na Teoria das Estruturas é mais comum empregar os valores nominais.

$$\sigma(t) = \frac{P(t)}{A_0} \quad (3.7)$$

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{1}{L_0} \frac{dL(t)}{dt} \quad (3.8)$$

$$\epsilon(t) = \frac{L(t) - L_0}{L_0} \quad (3.9)$$

referidos às dimensões iniciais. Valores reais e nominais são similares quando as deformações são pequenas. Por exemplo, se partirmos de (3.9):

$$\epsilon(t) = \frac{L(t) - L_0}{L_0} = \frac{L(t)}{L_0} - 1$$

sos, empregam-se as expressões (3.7) a (3.9) pois os valores obtidos são praticamente iguais aos valores reais. Por outro lado, em certas aplicações é necessário considerar o efeito das deformações finitas.

3.2- A RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO ATÉ A RUPTURA

BODIG & JAYNE (Bodig & Jayne, 1982) ⁽¹⁾ analisam em seu livro que devido a sua restrição à faixa linear das tensões e de formações, a Lei de Hooke tem aplicação limitada para prever a ruptura. Também, ainda, deve ser enfatizado que a dependência com o tempo das propriedades mecânicas da madeira e compostos de madeira pode inviabilizar a utilização da Lei de Hooke para as tensões, mesmo na faixa linear. Procurando evitar tais complicações, equações tem sido apresentadas, as quais descrevem a relação tensão-deformação até a ruptura. A Tabela 3.1, reproduzida do livro dos autores, resume as mais importantes dessas equações.

Muitas das expressões foram derivadas a partir de materiais selecionados sob condições controladas rigidamente, e por isso carecem de generalidade e nenhuma tem a aplicabilidade universal da lei de Hooke.

Continuemos com o nosso ensaio de compressão. Fazendo crescer monotonamente o tempo a tensão aplicada $\sigma(t)$ obtém-se uma deformação também crescente $\epsilon(t)$. Eliminando entre ambas funções o parâmetro t , obtém-se uma relação tensão-deformação como indicada na figura 3.3, caso logicamente consiga-se levar a compressão até a ruptura do material, sem que ocorra o fenômeno da flambagem.

(1) BODIG, Jozsef & JAYNE, Benjamin A. - "Mechanics of Wood and Wood Composites" - New York, Van Nostrand Reinhold Company, 1982.

chegamos a

$$\frac{L(t)}{L_0} = 1 + \varepsilon(t) \quad (3.10)$$

que colocado em (3.6) nos leva a:

$$\varepsilon^* = \ln(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \varepsilon^3 - \dots \quad (3.11)$$

e para ε pequena tem-se:

$$\varepsilon^* \cong \varepsilon \quad (3.12)$$

A figura 3.2 apresenta o gráfico de ambas as medidas, sendo mostrado ε tanto no seu comportamento à compressão quanto à tração.

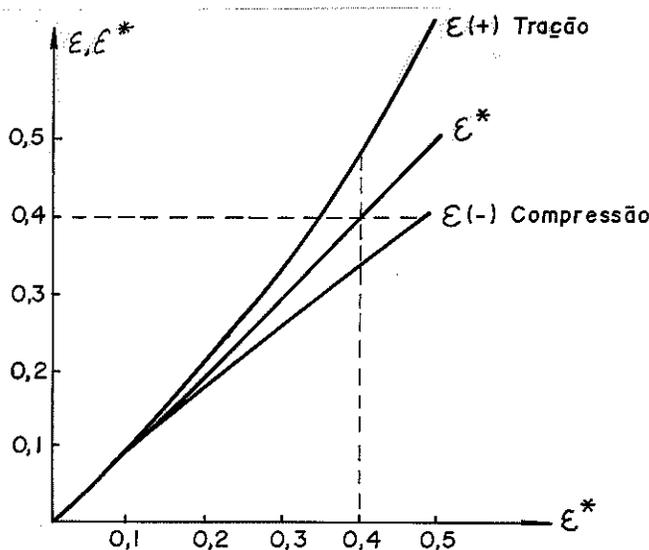


Fig. 3.2. Relação entre deformações nominais e logarítmicas.

A relação entre σ e σ^* para a coluna comprimida depende do valor da extensão transversal, ou seja, do valor $\varepsilon_t/\varepsilon$.

Em muitas aplicações estruturais $\varepsilon^* < 0,01$ (Creuss, 1983) ⁽¹⁾ de modo que o erro cometido não é importante. Nesses ca -

(1) CREUSS, Guillermo Juan - "Relações Elastoplásticas em Tração e Compressão", Caderno Técnico-CT-A 49. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil UFRGS, Setembro de 1983.

TABELA 3.1

Lista Cronológica das Equações Propostas para Descrever as Relações Tensão-Deformação.

EQUAÇÃO	PESQUISADOR	DATA
$\sigma = E \cdot \gamma$	Hooke	1678
$\gamma = K \left(\frac{\sigma}{E} \right)^n$	Bulfingeri	1729
$\sigma = \frac{E}{a} (e^{a\gamma} / (1+\gamma) - 1)$	Riccoti	1731
$\sigma = E(\gamma - b\gamma^2)$	Gerstner	1841
$\gamma = \frac{\sigma}{E} [1 + \beta (e^{\alpha(\sigma/E)} - 1)]$	Poncelet	1841
$\sigma/E = \gamma + b\gamma^2 + c\gamma^3 + d\gamma^4 + \dots$	Hodgkinson	1849
$\frac{\sigma}{E} = \frac{1}{a} (c^{a\gamma} - 1)$	Hartig	1893
$\frac{\sigma}{E} = a\gamma + b \tanh \left(\frac{1-a}{b} \right) \gamma$	Prager	1939
$\gamma = \sigma/E \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_p$	Holmquist & Nadai	1939
$\gamma = \frac{1}{E} [\sigma + K(\sigma - \sigma_p)^n], \sigma \geq \sigma_p$		
$\gamma = \frac{\sigma}{E} + K \left(\frac{\sigma}{E} \right)^n$	Ramberg & Osgood	1943
$\gamma = a\sigma + b\sigma^2$	Ivanov	1949
$\sigma = E\gamma - A\gamma^n$	O'Halloran	1973

Obs. σ = tensão, γ = deformação, e = número de Napier, E = módulo de elasticidade, σ_p = tensão no limite de proporcionalidade; demais símbolos são constantes.

Para tensões suficientemente baixas, a relação entre tensões e deformações, como vimos, pode ser considerada linear e se expressa na forma.

$$\sigma = E \epsilon \tag{3.13}$$

que define o módulo de elasticidade E.

No período linear, a relação entre os valores das deformações transversais ϵ_t e longitudinais ϵ é a conhecida constante "módulo de Poisson", característica do material:

$$\nu = - \frac{\epsilon_t(t)}{\epsilon(t)} \tag{3.14}$$

Para tensões crescentes, por exemplo a partir do ponto A na figura 3.3, a relação tensão-deformação torna-se não linear. As deformações crescem aceleradamente para relativamente pequenos aumentos da tensão. Para uma tensão σ_r correspondente ao ponto H com deformação ϵ_r a barra atinge a ruptura (no entanto, no período imediatamente anterior à ruptura, a distribuição de tensões e deformações deixa de ser uniforme e a representação indicada na figura 3.3 não é completa). A tensão σ_p correspondente ao ponto A é denominada "limite de proporcionalidade". Os valores σ_r e ϵ_r são denominados "tensão de ruptura" e "deformação de ruptura", respectivamente.

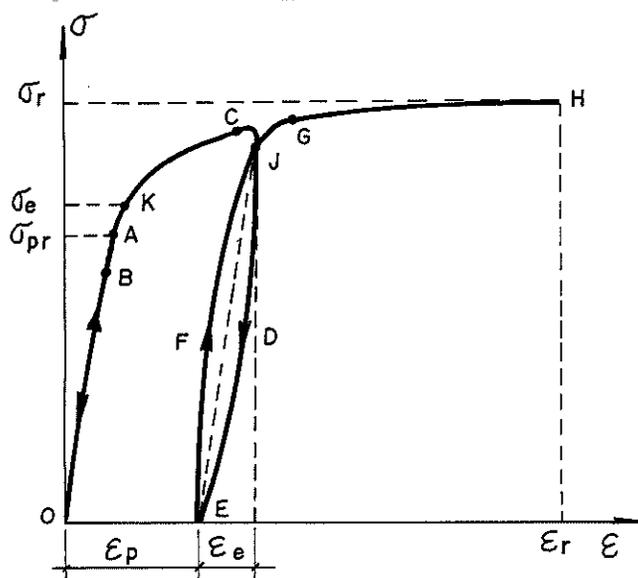


Fig. 3.3. Relação Tensão-Deformação Elastoplástica.

A característica fundamental dos materiais elasto-plásticos é seu comportamento em descarga. Se a barra ensaiada for descarregada desde um ponto ϵ como o indicado por B na figura 3.3 a descar-

ga toma lugar ao longo de uma linha como BO, sem deixar qualquer deformação permanente; este é o comportamento característico dos materiais elásticos. Entretanto, se a barra é descarregada desde um ponto como o C a descarga toma lugar ao longo de uma linha CDE, elasticamente. Assim, da deformação em C uma parcela (ϵ^e) é recuperada elasticamente enquanto que outra parcela é permanente ou plástica (ϵ^p). ϵ^e e ϵ^p são denominadas deformação elástica e deformação plástica respectivamente. Naturalmente

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (3.15)$$

Se após a descarga voltamos a incrementar a carga a partir do ponto E, a relação tensão-deformação segue uma linha EFG. A inclinação média da linha EJ é bem próxima da inclinação inicial OB. O laço JDEFJ (um tanto exagerada na figura 3.3) é denominado "laço de histerese" e sua área indica o trabalho mecânico dissipado durante o ciclo de carga e descarga. Para cargas crescentes, a relação tensão-deformação coincide com o original GH, como se o episódio da descarga nunca tivesse acontecido.

Naturalmente, deve existir um ponto K no limite entre a região com deformações totalmente recuperáveis ou elásticas (OK) e a região com deformações permanentes ou plásticas (KH).

Na prática, para a maioria dos materiais, a definição de um limite entre comportamentos elásticos e plásticos não é simples, porque a transição é gradual e medições muito precisas indicam a existência de deformações permanentes ainda a baixos níveis de tensão. Para solucionar este problema devemos desprezar as deformações plásticas que não sobrepassem um certo limite inferior, estabelecendo empiricamente segundo o problema estudado e a precisão requerida.

Na figura 3.3, o ponto A representa o limite de linearidade e o ponto K o limite de irreversibilidade. Na maioria dos materiais usados em engenharia os dois fenômenos tem valores bastante similares, sendo portanto usual falar-se em um único limite para ambos.

Na mesma linha de simplificações, assume-se que geralmente os processos de descarga e recarga acontecem sobre uma única reta, paralela à linha de carga inicial com módulo E, desprezando o laço

de histerese. Assim, a relação da figura 3.3 é substituída pela relação simplificada da figura 3.4.

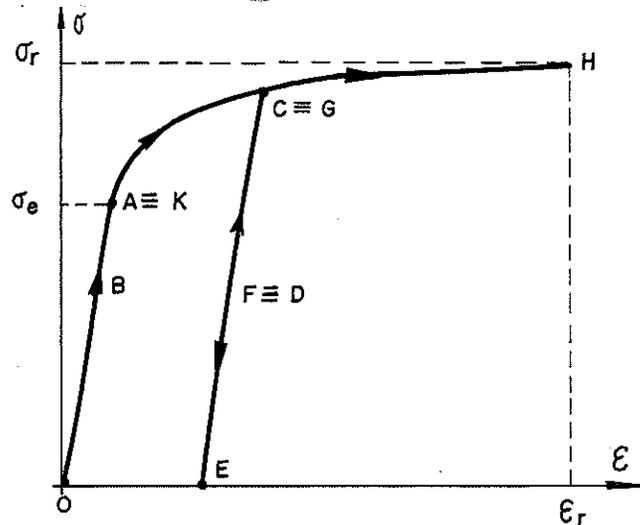


Fig. 3.4- Relação Tensão-Deformação Idealizada

É de fundamental importância perceber que depois de um processo de deformação plástica como o indicado por OACE as propriedades mecânicas do material serão (ao menos parcialmente) diferentes das iniciais. Com efeito, a relação tensão-deformação do material será agora, para uma nova carga, a indicada por ECH.

A rigor, a relação tensão-deformação obtida de uma experiência como a descrita acima depende da velocidade de carga ou de deformação empregadas no ensaio.

A teoria clássica de plasticidade dita "invíscida" (Creuss, 1983) despreza estes efeitos e, portanto, é válida só dentro de uma certa faixa de velocidades de carga. Para processos muito lentos ou muito rápidos (em relação ao material de interesse) o efeito das velocidades de carga ou deformação deve ser levado em conta. Estes são campos de estudo da viscoelasticidade e da viscoplasticidade.

3.3- APROXIMAÇÃO DA MADEIRA COMO MATERIAL ISÓTROPO

O arranjo de distribuição das fibras, além das diferenças de constituição das células - anéis de primavera (período de maior desenvolvimento), anéis de verão (verão, outono, inverno, período de menor desenvolvimento), figura 3.5, são responsáveis pelo comportamento anisótropo da madeira, isto é, conferem-lhe propriedades diferentes conforme a direção que se considere, e, pelo

comportamento não homogêneo, isto é, numa mesma direção, essas propriedades poderão variar de ponto para ponto.

A madeira pode, entretanto, ser considerada como um material ortótropo, ou seja, um material com três planos de simetria elástica mutuamente ortogonais. Tais planos são definidos pelos 3 eixos da figura 3.6: transversal, radial e tangencial. São indicadas também, nessa figura, as direções longitudinal (L), radial (R) e tangencial (T).

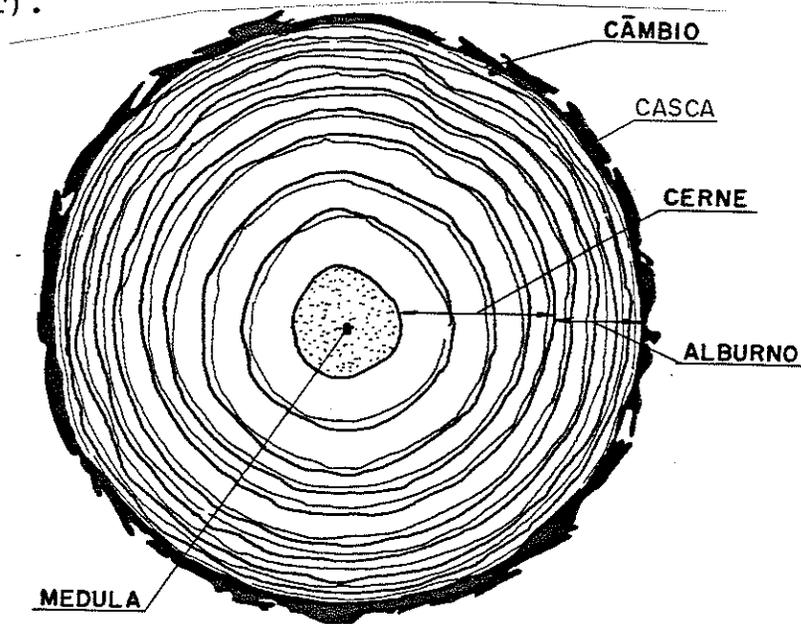


Figura 3.5- Estrutura Macroscópica da Madeira

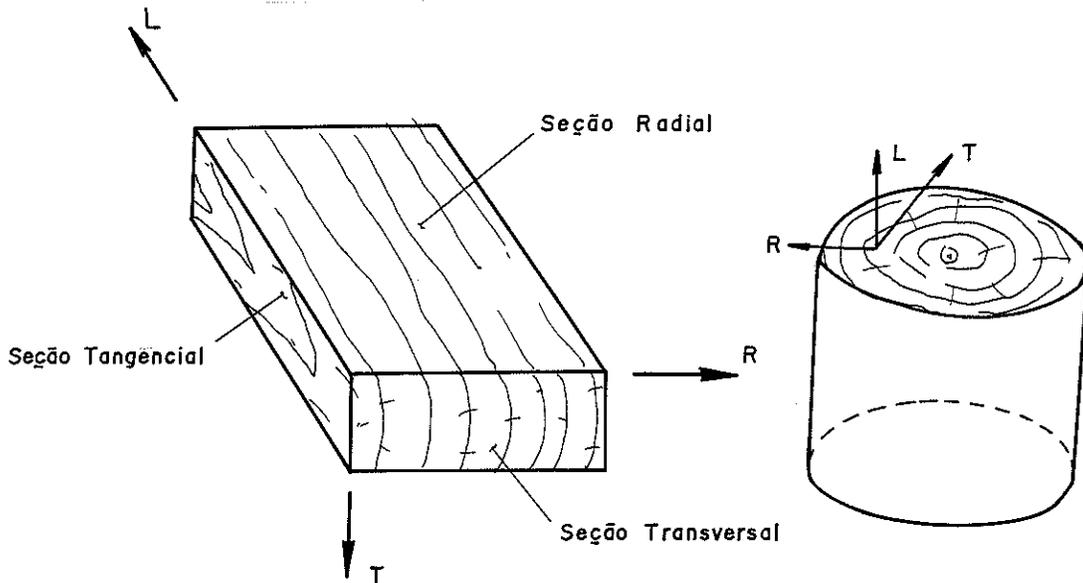


Figura 3.6- Definição de Seções e Direções para um Bloco Retangular de Madeira

Os materiais isótopos homogêneos são caracterizados por 3 parâmetros elásticos: E, G e ν , dos quais apenas dois são independentes, visto que entre eles existe a seguinte relação: $G = E/2(1+\nu)$. Conhecidos o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν estarão definidas as propriedades elásticas do material isótropo homogêneo.

Para o material ortótropo homogêneo, porém, seriam necessários os seguintes parâmetros:

a) Três módulos de Young E: longitudinal, radial e tangencial;

b) Três módulos de rigidez transversal G: correspondentes à distorção dos ângulos retos entre os 3 pares de planos de simetria: transversal-radial, transversal-tangencial e radial-tangencial;

c) Seis coeficientes de Poisson ν : pois uma tensão normal que atue num plano de simetria provocará deformações que serão diferentes em cada um dos outros planos perpendiculares ao da solicitação.

Entretanto, existem 3 relações entre esses 12 parâmetros e restam 9 parâmetros independentes, característicos de um material ortótropo homogêneo.

A consideração dessa ortotropia homogênea - se a madeira fosse homogênea - em problemas de dimensionamento já constituiria um notável trabalho a enfrentar.

Some-se a isso: o trabalho necessário para determinar esses parâmetros para cada espécie (que apresentará variações, decorrentes do meio onde ela se desenvolveu, etc); as variações posteriores ao corte, oriundas da secagem e da serragem; a necessidade de fazer milhares de ensaios para obter médias dignas de confiança ou válidas para cada espécie; a presença de defeitos que acentuam o comportamento não homogêneo e ter-se-á uma idéia a respeito da complexidade do problema, caso pretendêssemos executar o cálculo das estruturas de madeira levando em conta os parâmetros elásticos inerentes ao material ortótropo.

Em vista disso o cálculo das estruturas de madeira é feito de adaptações e correções nos processos de cálculos válidos para material homogêneo e isótropo. Tais adaptações e correções são sugeridas e controladas através de ensaios de laboratório especia-

lizados, que num esforço contínuo estão sempre contribuindo para melhor conhecer o material, como é o caso do LaMEM.

C A P Í T U L O 4

UMA ABORDAGEM EXPERIMENTAL

4.1- INTRODUÇÃO

Julius Ratzersdorfer no prefácio de uma de suas publicações (Ratzersdorfer, 1954) ⁽¹⁾ assim se expressa: "A consideração dos ensaios de flambagem é, também, de importância particular. No domínio da aplicabilidade da lei de Hooke as conclusões teóricas são confirmadas pela experiência. Fôra desse domínio só o resultado dos ensaios é que fornecem uma base segura para qualquer teoria. Relativamente a êsses assuntos especializados convém ter em mente a frase de E. March retirada do famoso livro "Die Mechanick in ihrer Entwicklung": Toda ciência deve estar enquadrada nos limites da experiência, ainda que, muitas vezes, ela se antecipe aos resultados das experiências".

(1) RATZERSDORFER, Julius - "FLAMBAGEM-I. Barras Prismáticas", Publicação nº 513 do Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT) - São Paulo-730pp 1954.

Na teoria clássica de colunas carregadas axialmente assume-se que o material é perfeitamente elástico e as colunas permanecem perfeitamente retas até uma certa carga crítica na qual a falha ocorre através de uma repentina deflexão da barra. Esta falha é então considerada como sendo um fenômeno de estabilidade.

A correspondência entre a teoria e a prática, no entanto, nem sempre é verdadeira.

Para a madeira, pelo menos, há pouca concordância entre o módulo de elasticidade em um dado nível de tensão, medido por uma máquina de ensaio, e aquele que deve ser assumido teoricamente para esclarecer as capacidades de carga de colunas testadas (Larsen & Theilgaard, 1979)⁽¹⁾.

É portanto, importante enfatizar a diferença entre a coluna ideal e a real.

4.2- DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA CARGA DE FLAMBAGEM

4.2.1- Método de Southwell

Como visto anteriormente, é importante enfatizar a diferença entre uma coluna ideal e uma coluna real, e a diferença entre a carga de flambagem e a carga última. Para colunas imperfeitas, a carga de flambagem é não definida, e todas as colunas reais são mais ou menos imperfeitas.

SOUTHWELL (Southwell, 1932)⁽²⁾, em 1931, propôs um método com o qual os dados obtidos em testes de colunas com curvatura inicial poderiam ser analisadas para determinar a carga crítica de flambagem da coluna caso ela fosse perfeitamente reta.

(1) LARSEN, Hans J. & THEILGAARD, Esko - "Laterally Loaded Timber Columns", Journal of the Structural Division, Proceeding of the American Society of Civil Engineers (ASCE), vol. 105, nº ST7, julho, 1979.

(2) SOUTHWELL, R.V. - "On the Analysis of Experimental Observations in Problems of Elastic Stability". Royal Society of London - PROCEEDINGS, 135: 601-616, April, 1932.

A figura 4.1 mostra uma coluna com uma curvatura inicial, de comprimento projetado L, sob uma carga axial P, representando um corpo de prova durante um ensaio em laboratório. Esse corpo de prova é carregado e a deflexão v em um ponto conveniente qualquer, como por exemplo o do meio do vão, é obtida em vários estágios de carga.

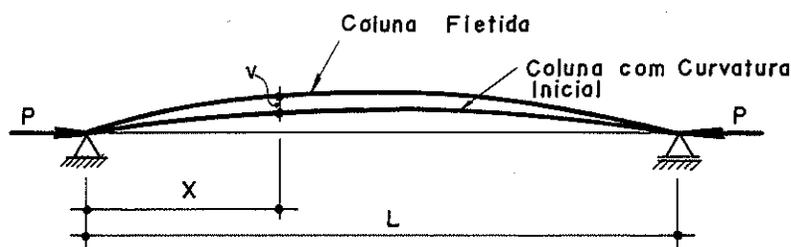


Figura 4.1- Coluna com curvatura inicial

A curvatura de deflexão v pode ser expressa em forma de uma série de senos. VASWANI (Vaswani, 1961)⁽¹⁾ expõe a seguinte descrição do método:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\frac{P_{crn}}{P} - 1} \text{sen} \frac{n \pi x}{L} \quad (4.1)$$

onde P_{crn} é a carga requerida para produzir o enésimo modo de flambagem.

Fazendo $v = \delta$, em $x = L/2$, obtém-se:

$$\delta = \frac{a_1}{\frac{P_{cr1}}{P} - 1} + \frac{a_3}{\frac{P_{cr3}}{P} - 1} + \frac{a_5}{\frac{P_{cr5}}{P} - 1} \dots \quad (4.2)$$

Quando P se aproxima de P_{cr1} , o primeiro termo da série torna-se predominante em relação aos demais, e uma boa aproximação de δ pode ser:

$$\delta = \frac{a_1}{\frac{P_{cr1}}{P} - 1} \quad (4.3)$$

(1) VASWANI, H.P. - "Model Analysis Method for Determining Buckling Load of Rectangular Frames". Experimental Mechanics: 55-64, Aug. 1961.

a qual, rearranjada, fornece:

$$\frac{\delta}{P} = \frac{1}{P_{cr1}} \delta + \frac{a_1}{P_{cr1}} \quad (4.4)$$

A equação (4.4) representa uma reta cujo gráfico é mostrado na figura 4.2(a).

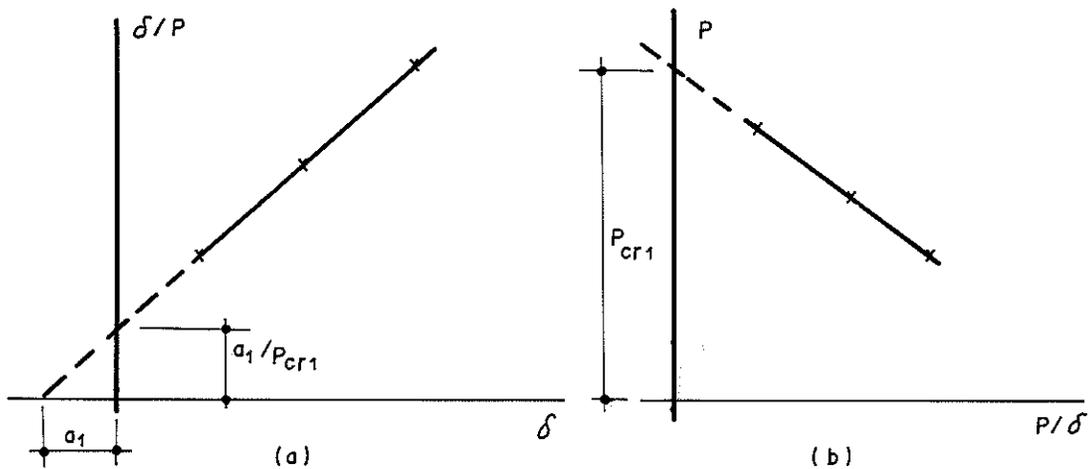


Figura 4.2(a) Método de SOUTHWELL - (b) Idem, modificado por DONNELL

Os pontos do ensaio geram uma reta que prolongada cortam a abscissa a uma distância a_1 da origem, e, a ordenada a uma distância a_1/P_{cr1} . Para se determinar P_{cr1} basta obter o inverso do valor da inclinação dessa reta. Observa-se que não é necessário carregar-se o corpo de prova até a carga crítica. Se o valor aproximado da carga crítica é conhecido, o carregamento pode ser encerrado antes de que seja atingido, salvando o mesmo da destruição.

DONNELL (Donnell, 1938—apud Timoshenko, S., 1938) ⁽¹⁾ rearranjou a expressão do método de Southwell e sugeriu outra equação para a reta. A equação (4.3) foi reescrita como:

$$P = -a_1 \frac{P}{\delta} + P_{cr1} \quad (4.5)$$

O gráfico desta reta está mostrado na figura 4.2(b).

(1) DONNELL, L.H.—"On the Application of Southwell's Method for the Analysis of Buckling Tests". in: TIMOSHENKO, S. - "Contributions to the Mechanics of Solids". New York, Mac Millan, 1938.

Outro autor que propôs melhorias no método de Southwell foi WANG (Wang, 1948)⁽¹⁾. Wang mostra que o método pode ser exten- dido também para a flambagem inelástica. Além disso, sugere que ao invés de analisar medidas de carga e deflexão, leituras de carga e deformação simultâneas podem ser utilizadas, com a vantagem de que a leitura da deformação poderá ser feita com mais precisão, utilizando-se extensômetros elétricos, os conhecidos "strain-gages".

Segundo esse autor, se se assume que as seções permanecem planas após a deflexão, a curvatura $1/R$ da coluna em uma dada seção estará relacionada com a diferença entre deformações em dois pontos, ϵ_1 e ϵ_2 , de uma particular seção, de acordo com a equação:

$$1/R = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/t \quad (4.6)$$

onde t é a espessura da coluna, perpendicular às faces aonde os extensômetros elétricos estão colados.

A diferença das medidas de deformação, na seção do meio do vão da coluna é dada por:

$$\Delta \epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1 = \bar{\delta}_1 (\pi/L)^2 t / [(P_1/P) - 1] \quad (4.7)$$

quando P se aproxima de P_1 .

Na equação (4.7) os valores " $\bar{\delta}_1$ " e " P_1 " correspondem respectivamente a " a_1 " e " P_{cr1} " utilizados anteriormente.

Então, ao se lançar em gráfico $\Delta \epsilon/P$ contra $\Delta \epsilon$, a linha resultante será também uma reta.

TIMOSHENKO & GERE (Timoshenko & Gere, 1961)⁽²⁾ mostram que o Método de Southwell pode ser aplicado a uma coluna carregada ex- centricamente. A expressão aproximada que é obtida para o caso de curvatura inicial e alguma excentricidade do ponto de aplicação da carga é:

$$\delta_c = (a_1 + \frac{4}{\pi} e) \frac{1}{(P_{cr}/P) - 1} \quad (4.8)$$

onde " δ_c " é a deflexão no meio do vão referido à posição inicial, " a_1 " é a deflexão inicial no meio do vão, " e " é a excentricidade

(1) WANG, CHI-TEH-"Inelastic Column Theories and an Analysis of Experimental Observations". Journal of the Aeronautical Sciences: 283-292. May, 1948.

(2) TIMOSHENKO, Stephen P. & GERE, James M.- "Theory of Elastic Stability", 2.ed. Tokio, McGraw-Hill Kogakusha, 1961 (International Student Edition).

da carga que pode surgir por um erro de centralização da carga e não homogeneidade do material.

4.2.2- Comentários sobre o Método de Southwell, por CHRISTOPHERSON

D.G. CHRISTOPHERSON (Cristopherson, 1951)⁽¹⁾ tece os seguintes comentários sobre o Método de Southwell:

"O Método de Southwell, de plotar os resultados de testes com colunas, pelo qual a carga crítica de Euler pode ser obtida sem destruir a coluna, é agora bem conhecida e largamente empregada (Teoria de Elasticidade, 1ª Edição, pág. 429. Editora da Universidade de Oxford). Observações são feitas da deflexão ω da coluna quando submetida a uma carga de compressão P , e se a quantidade ω/P é plotada contra ω uma linha aproximadamente reta é obtida. A equação para essa linha reta é:

$$P_1 \left(\frac{\omega}{P} \right) = \omega + \omega_1 \dots \quad (4.9)$$

onde ω_1 é o coeficiente do primeiro termo na expansão de Fourier para a "imperfeição inicial" da coluna quando sem carga e P_1 é a carga crítica de Euler, a qual é então dada pela inclinação da linha plotada.

Na prática, é frequentemente encontrado que a linha obtida não é reta exceto durante uma limitada faixa de valores de ω , e alguma dificuldade pode ser experimentada ao selecionar-se a linha reta que melhor representa os resultados. Fica claro pela teoria que, se por um lado, a linha reta não será obtida a menos que as tensões estejam completamente dentro do limite de proporcionalidade, pelo outro, se as observações são feitas quando a carga na extremidade é muito pequena comparada com a primeira carga crítica de Euler, estas não recairão na requerida linha reta. A expressão completa para a deflexão lateral de uma coluna biapoiada de comprimento l , adotando-se um eixo x a partir de uma das extremidades é:

(1) CRISTOPHERSON, D.G. - "Determination of Critical Loads of Structures". Engineering, Vol. 172, pags. 629 e 630, 1951.

$$\omega = \frac{P\omega_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{e}}{P_1 - P} + \frac{P\omega_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{e}}{P_2 - P} + \dots$$

$$\dots + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{P\omega_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{e}}{P_n - P} \quad (4.10)$$

onde P_n tende a carga crítica da coluna quando fletida em n trechos ($= n^2 \pi^2 EI/l^2$, onde EI é a rigidez à flexão).

A fórmula da linha reta é obtida desprezando - se todos menos o primeiro termo naquela série, mas se P é pequeno e os sucessivos coeficientes $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ são da mesma ordem de grandeza - como eles podem ser - o segundo termo será da ordem de 25 por cento: $(1/2^2)$ do primeiro termo; o terceiro termo, da ordem de 11 por cento: $(1/3^2)$, e assim por diante; e então a deflexão observada poderá diferir apreciavelmente do valor requerido pela equação (4.9). Observações para pequenas cargas na extremidade são também sujeitas a erros de qualquer outra fonte, os quais são provavelmente mais importantes na prática. Muitos equipamentos de testes de compressão permitem alguns movimentos laterais do corpo de prova nos primeiros estágios de carregamento e isto pode ser erroneamente registrado como parte de sua deflexão lateral.

Mas essas dificuldades podem ser superadas começando - se o teste não de carga zero, mas de uma carga P_0 , a qual é uma parte apreciável, digamos, metade ou dois terços da carga crítica, escolhida de maneira que desse oportunidade para um número suficiente de observações antes que o material atingisse o limite de proporcionalidade. Em lugar da equação (4.9) nós, então, teríamos:

$$(P_1 - P_0) \left(\frac{\omega}{P - P_0} \right) = \omega + \omega_1 \quad (4.11)$$

onde ω agora representa a deflexão medida da posição da coluna sob carga P_0 como origem, e ω_1 é o apropriado coeficiente na série representando a forma da coluna sob essa carga. O gradiente da linha obtida é então $(P_1 - P_0)$, de maneira que qualquer erro na medida do gradiente produz um erro percentual muito pequeno em P_1 . Uma nota de rodapé no trabalho original de Southwell (Proc. Roy. Soc., Series A, vol. 135, page 601 (1932)) indica que ele estava ciente dessa possibilidade, a qual, é claro, elimina completamente o erro devido a folgas no equipamento empregado, e reduz muito o erro mate

mático devido ao fato de se desprezar o segundo e demais termos da série(4.10). Na prática, para um material o qual obedece a Lei de Hooke com precisão em uma faixa significativa, a carga crítica pode ser encontrada com uma precisão próxima àquela do equipamento de testes empregado. Um método similar pode ser empregado plotando se os resultados de testes em sistemas elasticamente instáveis".

4.2.3- Melhoria ao método, proposta por W.T. Tsai

TSAI (Tsai, 1986)⁽¹⁾ faz a seguinte discussão sobre o Método de Southwell:

"Southwell (1931) divisou um método pelo qual os dados de um teste elástico linear de uma coluna com curvatura inicial poderia ser analisada para determinar a capacidade de flambagem que a coluna poderia ter se ela fosse perfeitamente reta. A capacidade é estimada a partir da medida da deflexão lateral e da força axial aplicada. O método provou ser muito prático e eficiente em muitas aplicações (Donnell, 1938; Horton, et al., 1971). Ele é especialmente útil em testes não-destrutivos para demonstrar propriedades de resistência e rigidez de um componente de uma estrutura real desde que a coluna seja solicitada com carregamento dentro do limite elástico. Entretanto, a precisão da capacidade de flambagem estimada e as associadas propriedades de rigidez resultam pobres se a curvatura inicial é pequena. A razão, entre outras, é que a deflexão real assume valores dentro da faixa de imprecisão dos aparelhos de medições empregados. Erros introduzidos pelas incertezas nas medidas obtidas dos equipamentos de leitura resultam no fator dominante das medidas tomadas durante o teste. Isso não é surpresa uma vez que o método não é aplicável a uma coluna perfeitamente reta. A dificuldade em obter-se um resultado preciso para uma coluna de pequena curvatura inicial foi também reconhecido por Donnell (1938).

(1) TSAI, W.T. - "Note on Southwell's Method for Buckling Test of Structures", Journal of Applied Mechanics, Vol. 53, pag. 953 e 954, Dezembro de 1986.

Devido às melhorias no controle de produção hoje em dia, uma coluna pode ser feita com muita pouca imperfeição inicial. A capacidade de flambagem de tais colunas resulta ruim como estimativa a não ser que seja carregada na faixa permitida. Afim de obter uma capacidade de flambagem precisa para a coluna que permanece dentro do limite elástico com força axial baixa, um método alternativo de testes é proposto. Esse método introduz uma excentricidade em ambas as extremidades da coluna [fig.4.3]. Tal excentricidade, junto com qualquer excentricidade inicial existente, produz um momento o qual por sua vez induz uma deflexão lateral da coluna. A magnitude da deflexão lateral é diretamente influenciada pela magnitude da excentricidade introduzida. Ela pode ser escolhida grande o suficiente para superar as dificuldades de erros de medida. Embora a mesma idéia tenha sido brevemente discutida por Donnell (1938), ele não a desenvolveu mais amplamente desde que ele antecipou dificuldades em usar séries harmônicas para o tratamento da excentricidade. Nessa nota, uma solução para um modelo restrito é obtido para relatar a excentricidade introduzida para a deflexão lateral de uma coluna.

Equação Diferencial Governante e a Solução

Levando-se em conta os efeitos de uma curvatura inicial e de uma excentricidade, a equação diferencial governante de uma coluna é

$$EI(y'' - y_0'') + P(y + e) = 0 \quad (4.12)$$

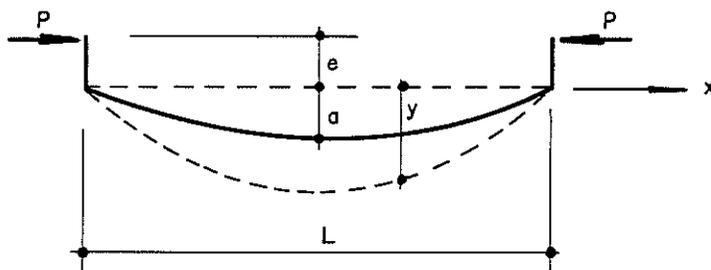


Fig. 4.3- Geometria de uma coluna

onde EI é a rigidez à flexão de uma coluna, "e" a excentricidade ; P a força axial, y a deflexão total, e y_0 a curvatura inicial. Afim de simplificar a análise, a curvatura inicial é assumida como sendo uma função seno:

$$y_0 = a \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (4.13)$$

Como demonstrou Southwell, esta é uma boa aproximação para a determinação da deflexão lateral. Após a introdução da equação (4.13) e das condições de contorno, $y = 0$ em $x = 0$ e $x = L$, na equação (4.12) a deflexão total foi dada por TSAI (Tsai, 1977) (1)

$$y = \frac{a}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + \left[\frac{\cos \lambda (L/2 - x)}{\cos (\lambda L/2)} - 1 \right] \quad (4.14)$$

onde $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ é a capacidade de flambagem da coluna se ela for perfeitamente reta, e $\lambda = \sqrt{P/EI} = \sqrt{P/P_{cr}} \cdot \pi/L$.

Aplicação do Método de Southwell

Para ajustar a equação (4.14) para o teste de Southwell a deflexão livre no ponto médio deve ser medida. Introduzindo-se $x = L/2$ na equação (4.14), a deflexão livre, $d = y - y_0$, é dada por:

$$d = \frac{a}{\frac{P_{cr}}{P} - 1} + e \left[\frac{1}{\cos \left(\frac{\lambda L}{2} \right)} - 1 \right] \dots \quad (4.15)$$

A expressão pode ser reescrita em uma maneira alternativa multiplicando-se a equação (4.15) por um fator, $(P_{cr}/P) - 1$, e definindo $v = d/P$, o resultado fica:

$$P_{cr} v - d = a + e \left[\frac{1}{\cos (\lambda L/2)} \right] \left(\frac{P_{cr}}{P} - 1 \right) \dots \quad (4.16)$$

O lado esquerdo junto com o primeiro termo do lado direito da equação (4.16) é a forma típica da aproximação de Southwell. Plotando-se v como abscissa e d como a ordenada, uma linha reta é obtida. A inclinação dessa linha reta é a capacidade de flambagem e o ponto de intersecção no lado negativo do eixo é a curvatura inicial do meio do vão. Pode ser visto dessa relação que a capacidade de flambagem não pode ser obtida de um teste com nível de carga abaixo de P_{cr} se não existir curvatura inicial uma vez que uma

(1) TSAI, W.T. - "Nonlinear Behavior of Compression Members", ASCE Structural Div., pp 1484-1489, 1977.

coluna perfeitamente reta não mostrará qualquer deflexão lateral até o colapso em $P = P_{cr}$.

Com uma excentricidade adicionada à possível curvatura inicial, o lado direito da equação (4.16) todo será requerido. O efeito da excentricidade aparecerá associado com λL e P/P_{cr} em uma forma muito mais complicada do que uma curvatura inicial sozinha. Realmente, uma aproximação simplificada tão elegante quanto a de uma curvatura inicial pode ser obtida. A simplificação começa com uma expansão em série da função cosseno. Segue-se então uma inversão na série e uma multiplicação. O resultado final da equação (4.16) com a ajuda de $\lambda L = \pi \sqrt{P/P_{cr}}$, resulta:

$$\begin{aligned}
 P_{cr} v - d &= a + \frac{\pi^2}{8} e \left[1 + \left(\frac{5\pi^2}{48} - 1 \right) \frac{P}{P_{cr}} + \right. \\
 &+ \left. \frac{5\pi^2}{48} \left(\frac{61\pi^2}{600} - 1 \right) \left(\frac{P}{P_{cr}} \right)^2 \dots \right] = \\
 &= a + 1,234 e \left[1 + 0,028 \left(\frac{P}{P_{cr}} \right) + 0,004 \left(\frac{P}{P_{cr}} \right)^2 + \dots \right] \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

Um exame dos coeficientes indicam que a máxima contribuição do termo P/P_{cr} é menor do que 3% do P/P_{cr} . Desprezando-se o efeito de P/P_{cr} no lado direito da equação (4.17), obtém-se uma forma com aproximação de primeira ordem:

$$P_{cr} v - d = a + 1,234 e \quad \dots \quad (4.18)$$

Portanto, o efeito da excentricidade de carga correlaciona-se com a carga crítica de flambagem da mesma maneira que a curvatura inicial exceto que a intersecção negativa é agora a soma da curvatura inicial com 1,234 vezes o valor da excentricidade. Evidentemente, quanto maior a excentricidade, a capacidade de flambagem pode ser estimada com uma deflexão maior, para a mesma força axial. Em outras palavras, ela pode ser estimada para a mesma deflexão, com uma força axial menor. Efetivamente, o resultado teria menos erros introduzidos por equipamentos de medida para uma maior excentricidade. A curvatura inicial seria o ponto de intersecção negativa do eixo "d" subtraído de 1,234 e.

Concluindo, a capacidade de flambagem e as propriedades de resistência de uma coluna serão estimadas com mais precisão nos testes de forças axiais baixas se a coluna é carregada com uma excentricidade. A curvatura inicial é obtida subtraindo-se um fator de excentricidade do ponto de intersecção negativo do eixo "d".

CAPÍTULO 5

MÉTODOS DE ANÁLISE E PROJETO COM EXCENTRICIDADE

5.1- INTRODUÇÃO

A análise de colunas de acordo com a Teoria de 2ª Ordem, em que as deformações ainda são pequenas mas os deslocamentos não, envolve problemas intrínsecos a alguns materiais de construção, entre os quais inclui-se a madeira.

Em primeiro lugar tem-se o problema da não linearidade geométrica que implica em escrever as equações de equilíbrio na posição deformada da estrutura. Segundo o § 5.1.2.1-NB-8681/84 - "Ações e Segurança nas Estruturas - Procedimento", a não linearidade geométrica ocorre quando o comportamento estrutural deixa de ser linear em virtude de alteração da geometria do sistema.

Em segundo lugar, pode-se levantar o fato do diagrama σ - ϵ (tensão x deformação) apresentar características não lineares após o limite de proporcionalidade, podendo, entretanto, ser considerado um material elástico - linear até esse limite.

O fenômeno da fluência assume certa importância, uma vez que pode ser origem de deslocamentos a serem considerados nas equações de equilíbrio sem que haja aumento da carga externa. Desta maneira, intervém no problema a variável tempo. Embora fuja do escopo deste trabalho tal consideração, desde já fica em perspectiva tal pesquisa.

Formulações para colunas de madeira são necessárias, as quais reflitam devidamente a interação de flexão e compressão. É sabido que colunas não podem ser consideradas como carregadas com carga puramente axial, por diversas razões: desvio do eixo da barra, má formação nas fibras que não lhe garantem paralelismo com o eixo da peça, variações mesmo que pequenas nas dimensões das seções, momentos desprezados ou não percebidos, divergência entre o centro elástico e o centro geométrico da seção, etc.

Por isso, a tendência das normas internacionais é a de impor uma excentricidade adicional, a ser considerada na análise da coluna, e que é tão mais importante quanto maior for a força normal de compressão.

5.2- ÍNDICE DE ESBELTEZ

Um ponto a ser analisado é saber a partir de qual valor do índice de esbeltez (λ) os efeitos de 2ª ordem devem ser considerados. A atual NB-7190/82 (antiga NB-11/51) "Cálculo e Execução de Estruturas de Madeira" recomenda que efeitos de flambagem devem ser considerados a partir de $\lambda > 40$.

Corpos de prova em tamanho estrutural, quando tem λ próximo de 40, exigem carregamentos de ensaio com cargas muito elevadas, fugindo, assim, da capacidade do equipamento montado para a nossa experimentação. Assim sendo não fez parte desta pesquisa um estudo sobre tal limite, o que sem dúvida, será objeto de estudos futuros.

Mas, vejamos até onde o índice de esbeltez é útil.

Admitindo-se resistência suficiente, a forma original (não fletida) da coluna será instável quando o carregamento atingir o valor crítico, passando a ser estável a configuração fletida. Em outras palavras, se a coluna está submetida a um carregamento que também produz flexão (no caso em pauta, uma eventual excentricidade na carga de compressão axial), não há instabilidade de forma quando se atinge o carregamento crítico.

Para ilustrar o que acabou de ser exposto vamos esquematizar a nossa coluna com carregamento como mostrado na figura 5.1.

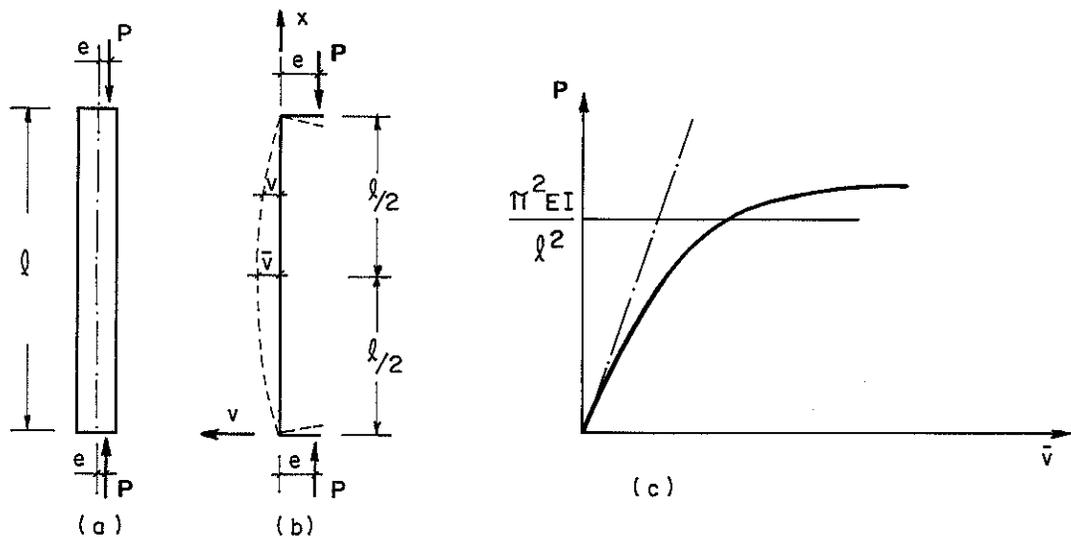


Fig. 5.1. Comportamento não linear na flexo- compressão (não linearidade geométrica), para uma coluna de madeira (material elástico até o limite elástico)

Na verdade a coluna altera sua velocidade de deslocamentos a medida que P aproxima-se de P_{cr} . A forma fletida é estável enquanto houver resistência; apenas os deslocamentos crescem mais do que proporcionalmente com o crescimento da carga. Tem-se, pois, um problema de 2ª espécie em que as equações de equilíbrio têm de ser escritas na posição deformada da estrutura, para a determinação da relação $P - \bar{v}$.

No caso de colunas esbeltas de madeira, que estão praticamente sempre fletidas devido a própria natureza do material, teremos problemas de 2ª espécie e, eventualmente, instabilidade, mas não de forma. O que de fato pode ocorrer é uma instabilidade caracterizada por ausência de equilíbrio.

Portanto, diante das considerações feitas acima, o índice de esbeltez λ , embora útil, passa a ter seu significado um pouco enfraquecido, uma vez que, em sua determinação, somente grandezas geométricas estão envolvidas.

5.3- INSTABILIDADE POR DIVERGÊNCIA DE EQUILÍBRIO

5.3.1- Momento Interno M_i

5.3.1.1- Equação simplificada da curvatura

Examinemos o caso da coluna da fig. 5.1.

Admitindo-se a hipótese de manutenção da seção plana, a curvatura ($1/r$) da barra liga-se ao momento interno através da seguinte relação simplificada.

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-M_i}{EI} \quad (5.1)$$

onde EI é o produto de inércia correspondente ao plano de flexão.

A cada configuração da linha elástica corresponde uma certa distribuição de momentos fletores da barra. Em cada seção atua o momento M_i , obtido a partir do rearranjo da equação (5.1):

$$M_i = -\frac{1}{r} EI \quad (5.2)$$

Os momentos obtidos pela equação (5.2) são considerados momentos internos porque são determinados pela rigidez EI da barra e pela curvatura ($1/r$) da seção considerada.

No caso em pauta, o valor máximo de M_i age na seção a meio comprimento, sendo dado, com a hipótese de elasticidade linear, pela expressão:

$$M_{i\max} = -\left(\frac{1}{r}\right)_x = \frac{l}{2} \cdot EI \quad (5.3)$$

Em princípio, o equilíbrio da barra será estável se a um aumento do momento externo (M_e) corresponder um aumento do momento interno (M_i) de tal forma que fique satisfeita a condição de equilíbrio.

$$M_i = M_e \quad (5.4)$$

5.3.1.2- Equação exata da curvatura

Agora, vamos analisar a equação exata da curvatura:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{[1 + (\frac{dv}{dx})^2]^{3/2}} = \frac{-M_i}{EI} \quad (5.5)$$

Como se observa facilmente, o denominador contém o fator (dv/dx) que corresponde à derivada da linha elástica em relação a x , ou em outras palavras, corresponde à tangente à elástica em cada ponto x .

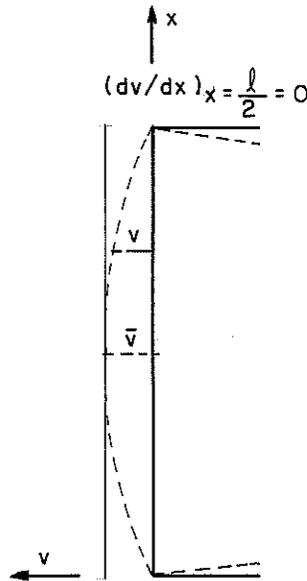


Fig. 5.2- Coluna fletida e sua tangente no ponto médio

Na figura 5.2 podemos observar que, se a curva assumida pela barra fletida for simétrica em relação ao seu ponto médio (como acontece com curvas senoidais e cossenoidais), a derivada (dv/dx) se anulará exatamente nesse ponto.

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x = \frac{l}{2}} = 0 \quad (5.6)$$

Isso significa que a equação (5.5) da curvatura exata produzirá o mesmo resultado que a equação (5.1) da curvatura aproximada, no ponto médio, uma vez que o denominador da equação (5.5) se reduzirá a 1, nesse ponto.

5.3.1.3- Elástica senoidal

Se assumíssemos que a linha elástica fosse senoidal com equação:

$$v = + \bar{v} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell} \quad (5.7)$$

onde \bar{v} é flecha máxima (que ocorre no ponto médio), trabalhando com a curvatura aproximada, teríamos:

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d^2v}{dx^2} = - \bar{v} \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell} \quad (5.8)$$

Se substituirmos (5.7) em (5.8) obtemos:

$$\frac{1}{r} = - \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 v \quad (5.9)$$

Lembrando a equação de Euler, $P = \frac{\pi^2}{\ell^2} EI$, podemos escrever:

$$\frac{P}{EI} = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 = k^2 \quad (5.10)$$

Então, voltando à equação (5.9), podemos reescrevê-la:

$$\frac{1}{r} = - k^2 v$$

Como π e ℓ são constantes, pode-se afirmar que a curvatura varia linearmente com a elástica, para qualquer ponto, inclusive o ponto médio ($x = \ell/2$, $v = \bar{v}$):

$$\left(\frac{1}{r}\right)_x = \frac{\ell}{2} = -k^2 \bar{v} \quad (5.11)$$

Vamos agora proceder à mesma análise, para a equação exata da curvatura:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2v/dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Então, após obtidas as derivadas primeira e segunda de v em relação a x , a partir da elástica senoidal dada por (5.7), temos para a curvatura:

$$\frac{1}{r} = \frac{-\bar{v} \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}}{\left[1 + \bar{v}^2 \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi x}{\ell}\right]^{3/2}}$$

Usando a relação trigonométrica $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$, e a equação (5.7), podemos escrever:

$$\frac{1}{r} = \frac{-\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 v}{\left[1 + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 (\bar{v}^2 - v^2)\right]^{3/2}} = \frac{-\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 v}{\left[1 + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 (\bar{v} - v)(\bar{v} + v)\right]^{3/2}}$$

É interessante observar-se o comportamento do produto $(\bar{v} - v)(\bar{v} + v)$. Como mostrado na figura 5.3, ele é máximo nas extremidades da coluna em pautas e mínimo (nulo) no ponto a meio comprimento ($x = \ell/2$), como já havíamos analisado.

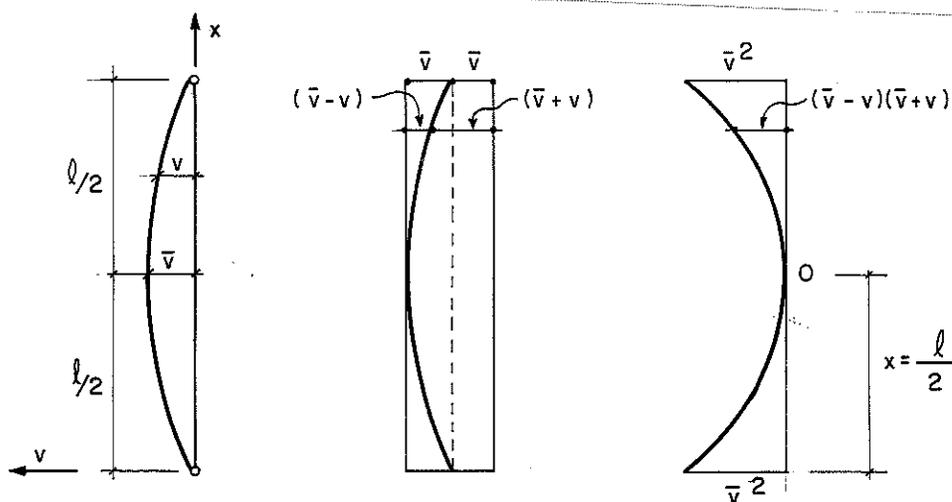


Figura 5.3- Variação do produto $(\bar{v} - v)(\bar{v} + v)$, que aparece no denominador da expressão da curvatura exata, com linha elástica senoidal.

Então, para o ponto médio ($x = \ell/2$, $v = \bar{v}$) obtém-se:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_x = \frac{\ell}{2} = -\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \bar{v} = -k^2 \bar{v} \quad (5.12)$$

que coincide com a equação (5.11). Conclui-se, então, que a análise do ponto médio pode ser feita tanto com a equação simplificada da curvatura, quanto com a exata, e o resultado será o mesmo, para o ponto médio.

5.3.1.4- Uma elástica que atenda às condições de contorno

Analisemos agora outra equação de elástica. Vejamos o caso de elástica produzida por uma carga excêntrica, figura 5.4.

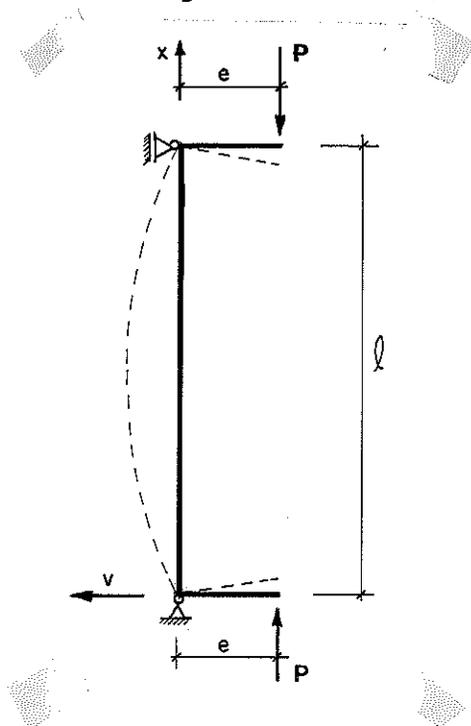


Fig. 5.4- Curva elástica produzida por carga excêntrica

Nessa situação a elástica será da forma:

$$v = A_0 + A_1x + A_2 \cos kx + A_3 \sen kx \tag{5.13}$$

com o valor de k dado pela eq. (5.10).

As condições de contorno a serem obedecidas serão:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0 \\ v(l) &= 0 \\ EI v''(0) &= -Pe \\ EI v''(l) &= -Pe \end{aligned} \tag{5.14}$$

Através das condições de contorno (5.14) e da equação (5.13) obtém-se:

$$A_0 = -e; A_1 = 0; A_2 = e; A_3 = \frac{e(1 - \cos k l)}{\sen k l} \tag{5.15}$$

de onde:

$$v = -e + e \cos kx + e \frac{(1 - \cos k\ell)}{\text{sen} k\ell} \text{sen} kx \quad (5.16)$$

Através de transformações trigonométricas podemos escrever (5.16) também como:

$$v = e \left[\frac{\cos\left(\frac{k\ell}{2} - kx\right)}{\cos \frac{k\ell}{2}} - 1 \right] \quad (5.17)$$

Vamos trabalhar com a equação (5.16).

Inicialmente, vejamos como fica a curvatura aproximada:

$$\frac{1}{r} \approx \frac{d^2v}{dx^2} = -k^2 \left\{ e \cos kx + e \frac{(1 - \cos k\ell)}{(\text{sen} k\ell)} \text{sen} kx \right\} \quad (5.18)$$

ou, usando (5.16) em (5.18):

$$\frac{1}{r} = -k^2 (v + e) \quad (5.19)$$

A equação (5.19) para o ponto médio será:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_x = \frac{\ell}{2} = -k^2 (\bar{v} + e) \quad (5.20)$$

de onde se conclui que no ponto médio a curvatura é função linear da elástica.

Façamos agora a análise para a curvatura exata:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}} = \frac{-k^2(v + e)}{\left\{ 1 + e^2 k^2 \left[\left(\text{tg}^2 \frac{k\ell}{2} - 1 \right) \cos^2 kx - \text{tg} \frac{k\ell}{2} \text{sen} 2kx + 1 \right] \right\}^{3/2}} \quad (5.21)$$

Para o ponto médio, $x = \ell/2$, e, lembrando que neste ponto $v = \bar{v}$, a curvatura fica:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_x = \frac{\ell}{2} = \frac{-k^2(\bar{v} + e)}{\{1 + e^2 k^2 [0]\}^{3/2}}$$

ou seja:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_x = \frac{\ell}{2} = -k^2 (\bar{v} + e) \quad (5.22)$$

A equação (5.22) é exatamente igual à equação (5.20) e a conclusão é a mesma, ou seja, a curvatura varia linearmente com \bar{v} neste ponto médio.

5.3.1.5- Os Diagramas Curvatura - Elástica e Momento Interno - Elástica

A elástica dada por (5.7) nos levou a uma relação linear que passa pela origem, enquanto que a obtida em (5.16) passa fora da mesma (fig. 5.5).

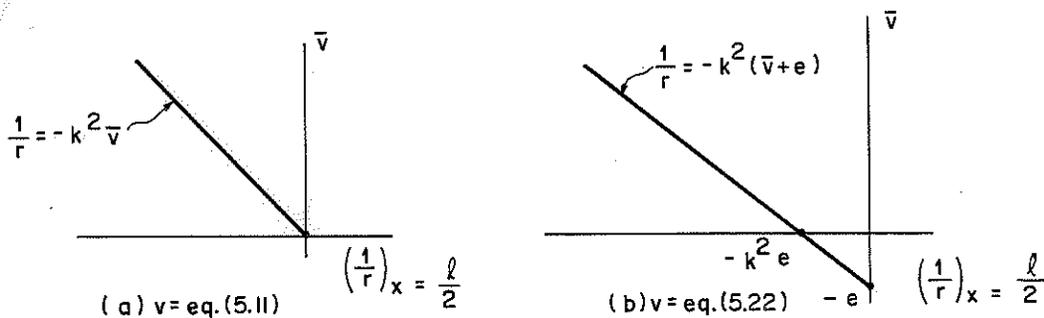


Fig. 5.5- Variação curvatura - elástica para o ponto médio $x = l/2$

É importante salientar que o momento interno M_i , que surge devido à curvatura é função desta, do material em questão (E) e da geometria (I). Lembrando a equação (5.8):

$$M_{i_{\max}} = -\left(\frac{1}{r}\right)_x = \frac{l}{2} \cdot EI$$

podemos colocar:

$$M_{i_{\max}} = -f(\bar{v}) \cdot EI \tag{5.23}$$

onde $f(\bar{v})$ significa uma função de \bar{v} .

Analisemos a figura 5.6, e vamos observar o que acontece com uma coluna reta que recebe uma carga P, com excentricidade "e".

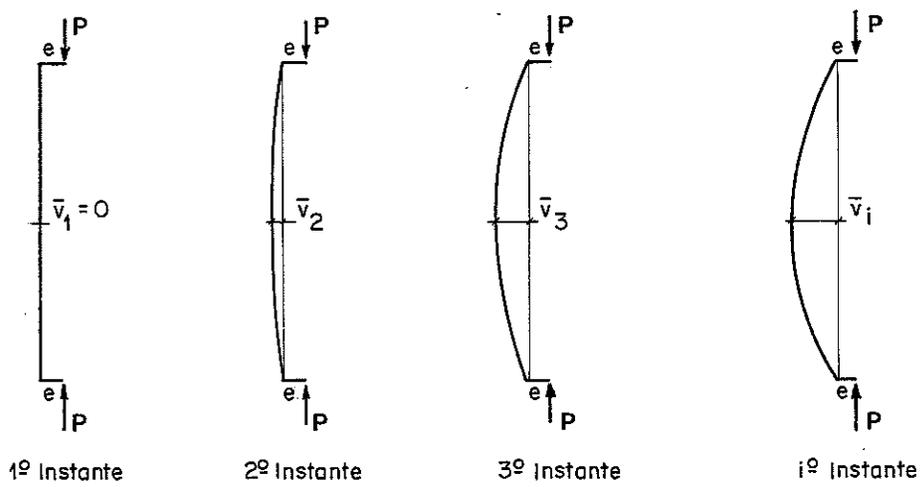


Fig. 5.6- Os vários instantes de encurvamento para a mesma carga P e a mesma excentricidade e .

No instante inicial, a curvatura é nula e o M_i no ponto central também é nulo: portanto $M_e > M_i$ e a barra começa a encurvar.

No 2º instante a barra já apresenta alguma curvatura e portanto a barra começa a apresentar algum momento interno. Como provavelmente o M_i desenvolvido ainda é pequeno, M_e continua maior que o M_i e a barra continua se encurvando.

Esse processo de encurvamento prossegue até que o M_i se iguale ao M_e , se conseguir.

Então, analisando um material como a madeira, que pode ser considerado linear até um certo limite, acima do qual o módulo de elasticidade começa a variar, podemos traçar o diagrama $M_i \times \bar{v}$, figura 5.7.

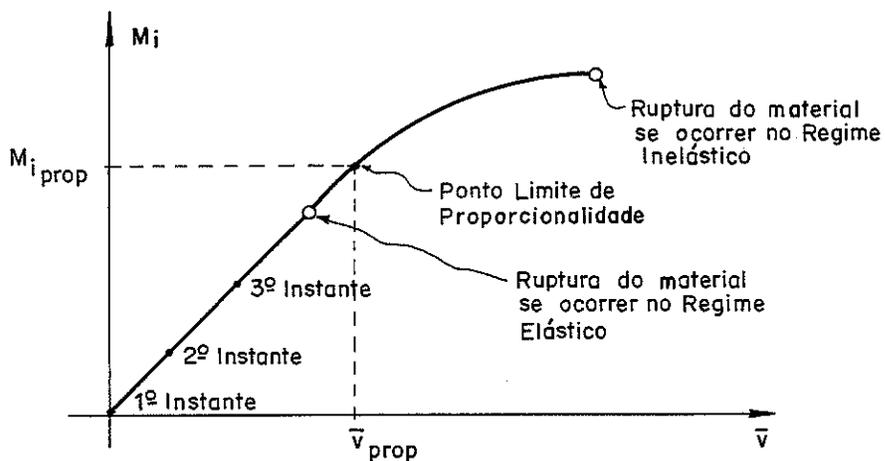


Fig. 5.7- Diagrama momento interno - elástica, no ponto $x = \frac{l}{2}$, e sua correlação com a figura 5.6.

O diagrama nos mostra que o que se passa no íntimo da barra independe da ação externa, embora seja uma consequência da mesma. Em outras palavras, cada seção da barra está sofrendo uma curvatura e está respondendo com um momento interno correspondente àquela curvatura de acordo com o momento de inércia I (suposto constante até o fim) e o módulo de elasticidade E (que se modifica a partir do limite de proporcionalidade).

5.3.2- O Momento Externo M_e

Vamos analisar, agora, o momento externo M_e . Da figura 5.1(b) obtém-se facilmente:

$$M_e = P (e + v) \quad (5.24)$$

sendo "e" a excentricidade inicial de 1ª ordem.

Para o ponto a meio comprimento ($x = l/2$), com as conclusões anteriores, podemos escrever, tanto para curvatura simplificada quanto para a completa:

$$M_{e_{\max}} = P(e + \bar{v}) = P \cdot e + P \cdot \bar{v} \quad (5.25)$$

Para a equação (5.25) podemos traçar o gráfico mostrado na figura 5.8.

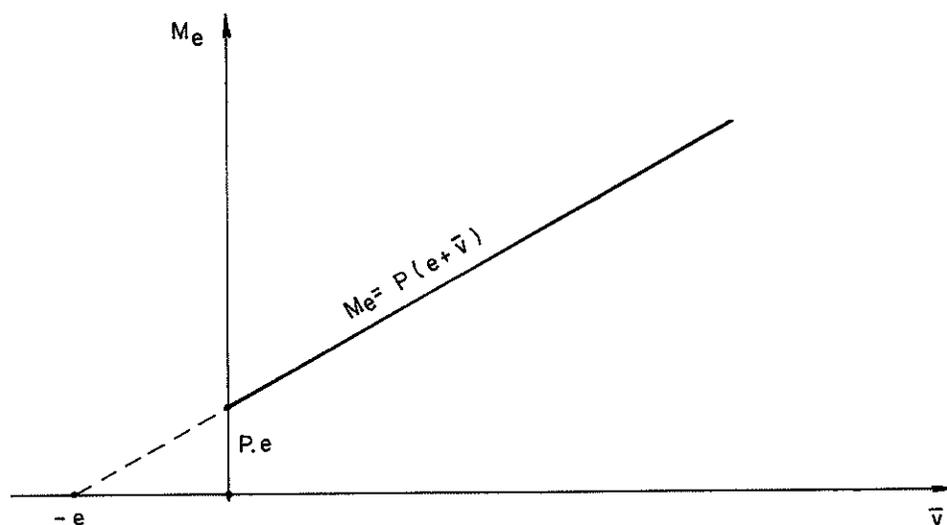
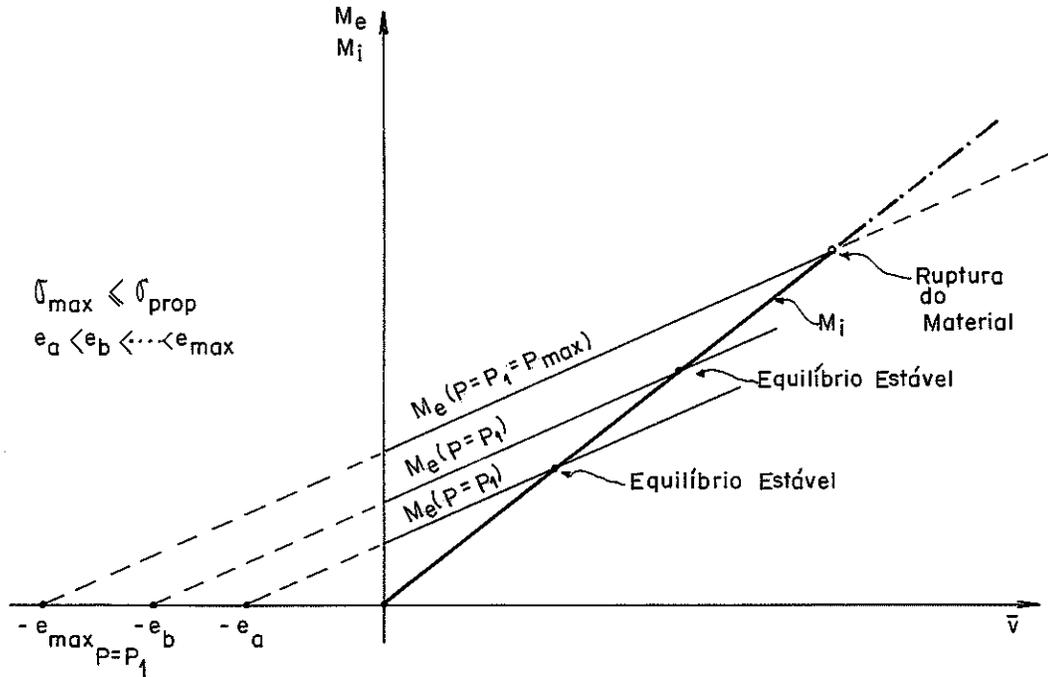
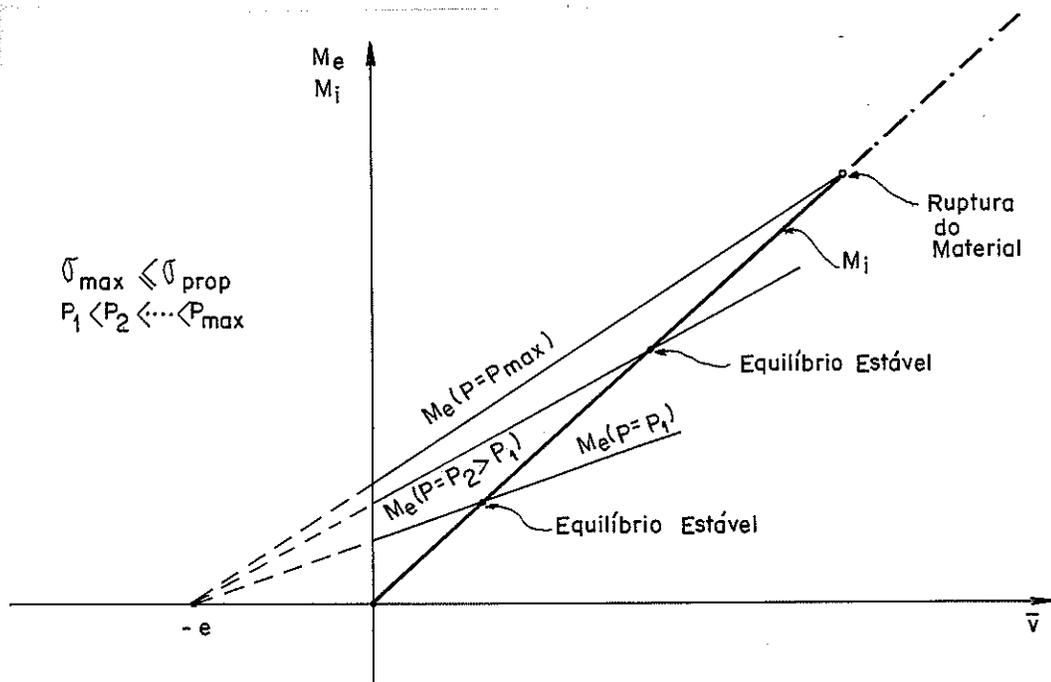


Fig. 5.8- Diagrama do momento externo M_e , em função do deslocamento máximo da coluna, \bar{v} .

Dada, pois, uma força P qualquer, fixa, ela desenvolverá os momentos M_i e M_e , de maneira que para sua análise podemos sobrepor os diagramas das figuras 5.7 e 5.8, obtendo-se as situações da figura 5.9 e 5.10.

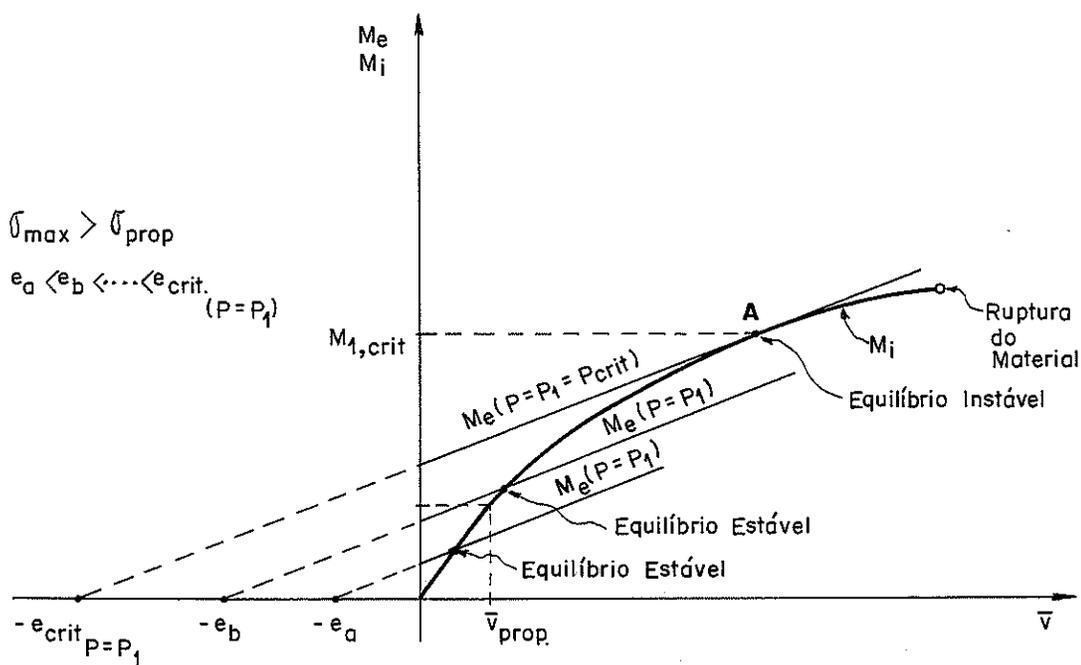


(a) Variação da excentricidade mantendo o mesmo $P = P_1$

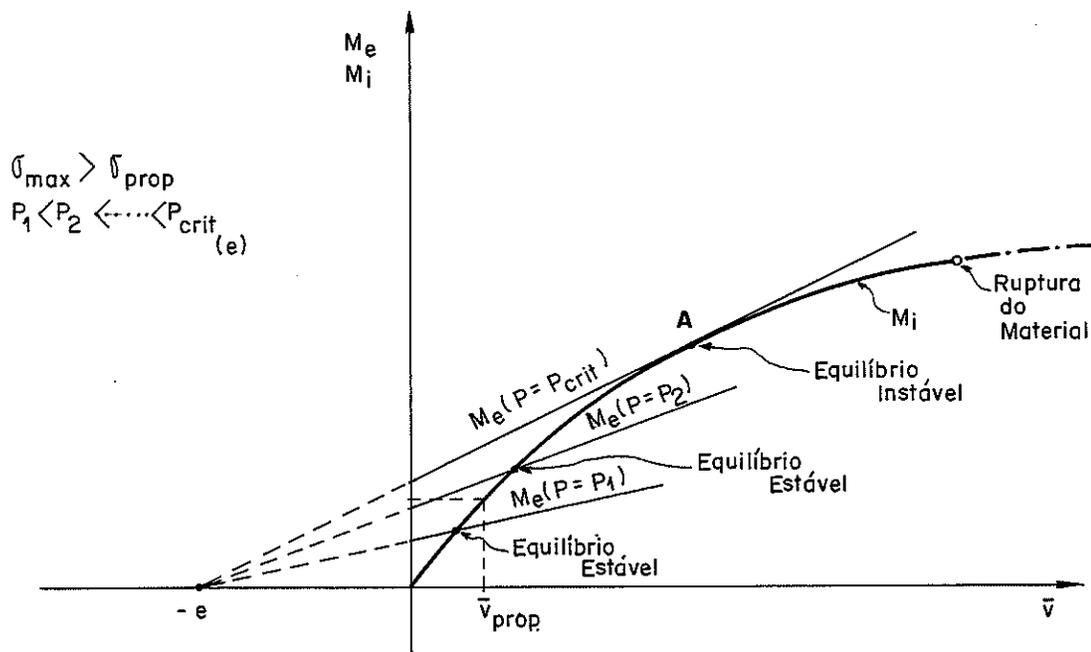


(b) Variação de P mantendo a mesma excentricidade " e "

Fig. 5.9- Instabilidade na flexo-compressão no regime elástico



(a) Variação da excentricidade mantendo o mesmo $P = P_1$



(b) Variação de P mantendo a mesma excentricidade "e"

Fig. 5.10- Instabilidade na flexo-compressão no regime inelástico.

Na figura 5.9(a), para a mesma carga $P = P_1$, aplicadas com excentricidades diferentes ($e_a < e_b < \dots < e_{max}$), obteremos re

tas paralelas entre si, mais afastadas da origem quanto maior a excentricidade, até atingir-se uma excentricidade máxima (para aquela carga $P = P_1$) que corresponde à reta que passa pelo ponto de ruptura do material. Os pontos de cruzamento das retas M_e e M_i constituem-se em pontos de equilíbrio estável, pois além deste valor de \bar{v} , M_e passa a ser menor que M_i .

Na figura 5.9(b), fixando-se uma excentricidade qualquer e , vamos observar que à medida que se aumenta P ($P_1 < P_2 < \dots < P_{max}$), as retas M_e giram para a esquerda até atingir-se uma carga máxima (para aquela excentricidade "e") que corresponde à reta que passa pelo ponto de ruptura do material. Os pontos de cruzamento das retas M_e e M_i constituem-se em pontos de equilíbrio estável, pois além deste valor de \bar{v} , M_e passa a ser menor que M_i .

Para a figura 5.10(a); mutatis mutantis, vale a mesma análise já feita para a figura 5.9(a). A única ressalva se refere à reta M_e que tangencia a curva M_i . Neste ponto A de tangência temos um equilíbrio instável pois qualquer acréscimo infinitesimal que se dê a \bar{v} , M_e passa a ser maior do que M_i . No caso, um processo dinâmico se desenvolverá levando a barra ao colapso. Isto caracterizará o estado limite último de instabilidade. Deve-se observar que se trata de uma divergência de equilíbrio, não tendo sentido afirmar-se que há instabilidade de forma.

Para a figura 5.10(b) repete-se a análise já feita para a figura 5.9(b) adicionada com a feita para a figura 5.10(a).

Observa FUSCO (Fusco, 1981)⁽¹⁾ que enquanto a barra permanecer no regime elástico, sempre haverá uma configuração de equilíbrio estável, pois M_i também será função linear das curvaturas. Nesse caso, observa o autor, uma situação de ruína somente poderá ser alcançada por ruptura do material. Pelo contrário, continua, se for ultrapassado o regime de proporcionalidade, o diagrama de M_i passará a ser curvo, surgindo então um novo fenômeno de instabilidade. Esse novo fenômeno de instabilidade na flexão composta é caracterizado pela existência de uma carga P_{crit} para a qual a reta M_e é tangente à curva M_i . Para $P < P_{crit}$ é possível o equilíbrio estável, e para $P > P_{crit}$ o equilíbrio é impossível.

(1) FUSCO, P.B. - "Estruturas de Concreto - Solicitações Normais", Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1981, 464 pags.

A perda da linearidade do material é condição suficiente para permitir o desencadeamento do fenômeno de instabilidade na flexão composta, desde que a barra seja suficientemente esbelta.

Conforme se mostra na figura 5.10(b), o fenômeno de instabilidade na flexão composta é caracterizado pelo fato de que, para uma dada excentricidade inicial de 1ª ordem "e", existe um valor máximo da força axial P além do qual o equilíbrio é impossível. Este valor máximo podemos denominar P_{crit} . Portanto, quando $\sigma_{max} > \sigma_{prop}$, no caso de flexo-compressão o equilíbrio é impossível para $P > P_{crit}$. O ponto A não corresponde a uma mudança da configuração de equilíbrio estável, mas sim a uma reversão do andamento das deformações. Antes de se atingir o ponto A, isto é, para $P < P_{crit}$, a um aumento de P corresponde um aumento da flecha \bar{v} . Pelo contrário, após atingido o ponto A, não somente é impossível aumentar a carga, como a própria manutenção do equilíbrio somente será possível com um sistema de deformação controlada, pois o aumento das flechas corresponde a uma diminuição das cargas.

Por outro lado, conforme se vê na figura 5.10(a), para uma dada força axial $P = P_1 = \text{constante}$, existe uma excentricidade máxima e_{crit} . Para $e > e_{crit}$ não há equilíbrio, e para $e < e_{crit}$ o equilíbrio é estável.

Observando-se agora a equação (5.25):

$$M_{e_{max}} = P \cdot e + P \cdot \bar{v}$$

notamos que o termo à direita é formado por duas parcelas.

A primeira delas, $P \cdot e$, é denominado "momento fletor de 1ª ordem" e é composto exatamente pelos dois fatores que envolvem o carregamento: a carga P e a excentricidade "e". Como fizemos nas figuras 5.9 e 5.10 podemos variar tanto um quanto o outro dos dois fatores. Portanto este momento fletor de 1ª ordem também variará. Chamando-o de M_1 , temos:

$$M_1 = P \cdot e \tag{5.26}$$

Na figura 5.11 está ilustrado o aparecimento do fenômeno de instabilidade em função do momento fletor de primeira ordem M_1 , segundo FUSCO (Fusco, 1981) já citado.

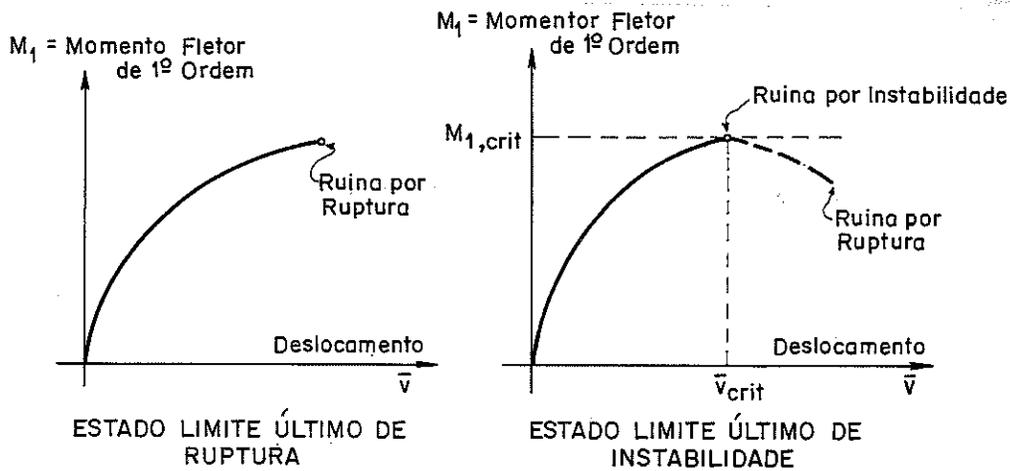


Fig. 5.11- Estados limites últimos na flexo - compressão [in (Fusco, 1981)]

A presença do ponto de máximo relativo no diagrama da figura 5.11 indica que o equilíbrio é impossível para o momento de 1ª ordem $M_1 > M_{1,crit}$ e que o aumento das flechas além do valor correspondente a $M_{1,crit}$ somente seria possível em condições de deformações controladas, para as quais haveria redução automática do valor de M_1 (Fusco, 1981).

Para uma dada força normal $P = P_1$, a segurança contra o estado limite último de instabilidade na flexão composta é garantida impondo-se a condição de que, na situação de cálculo (o índice "d" indica situação de cálculo) tenha-se:

$$M_{1,d} \leq M_{1,crit} \quad (5.27)$$

De forma prática, isso será feito levando-se em conta os momentos de 2ª ordem no dimensionamento das seções das colunas retangulares (seções constantes ao longo do eixo) submetidas a flexo compressão.

5.4- CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA MOMENTO INTERNO - CURVATURA

5.4.1- Definição de Hipóteses

Para a construção do diagrama momento interno - curvatura serão admitidas as seguintes hipóteses:

- a - manutenção da seção plana após a deformação

- b - a seção tem um plano de simetria onde estará contida a força normal excêntrica e de compressão.
- c - a peça é constituída só de cerne.
- d - as leis tensão - deformação da madeira são conhecidas na tração e na compressão.

A primeira hipótese refere-se a relação geométrica que se obtém a partir da hipótese de Navier.

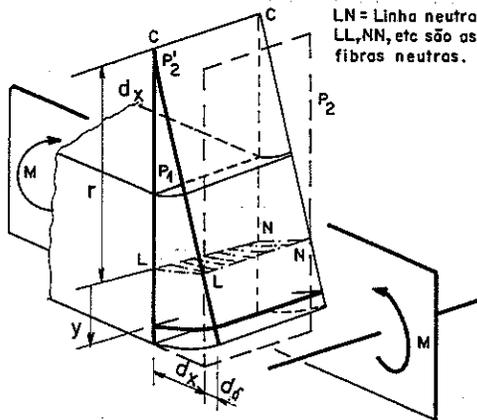


Fig. 5.12a.- Representação Gráfica da Hipótese de Navier

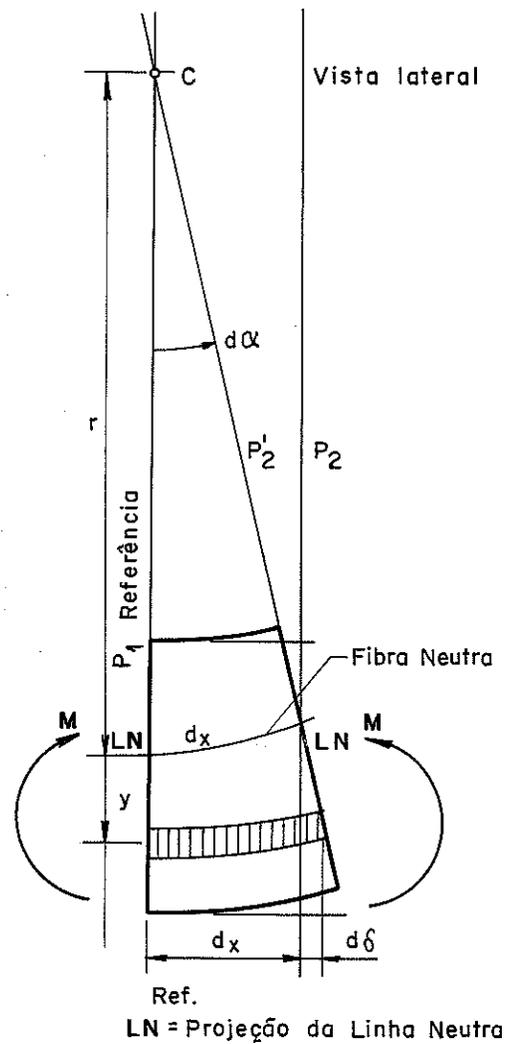


Fig. 5.12b.- Relações Geométricas nas barras.

5.4.2- Relação Geométrica Fundamental

Para determinarmos essa relação geométrica consideremos dois planos P_1 e P_2 normais ao eixo de uma barra reta afastados de "dx" (figura 5.12a.). Antes de surgir a curvatura, esses dois planos são paralelos. Depois dela, as fibras superiores ficam sujeitas à compressão, e se encurtam. As inferiores ficam sujeitas à tração, e se alongam. Como a seção deformada continua plana, seu plano P_2' intercepta o da seção de referência P_1 numa reta que passa por C (normal ao desenho 5.12b e que passa por C). Como este último desenho indica, o problema é reduzido a duas dimensões. O ponto C é chamado centro de curvatura da barra deformada, no trecho "dx".

Todas as fibras, no espaço, à distância r de C, não sofrem variação de comprimento e são chamadas "fibras neutras". Tais fibras interceptam o plano P_2' , após a deformação. Tal reta é a conhecida "linha neutra". A rigor, o encurvamento das fibras neutras, as quais mantêm seu comprimento constante, produz uma aproximação na direção de P_1 . Tal deslocamento pode ser obtido aproximadamente por

$$\begin{aligned} r - r \cos\alpha &= r[1 - \cos\alpha] \cong \\ &\cong r \left[1 - 1 + \frac{(d\alpha)^2}{2} - \frac{(d\alpha)^4}{4} + \dots \right] \cong \frac{r}{2} (d\alpha)^2 \end{aligned}$$

Como se observa, é de segunda ordem, e será desprezado no caso em análise.

O raio r, correspondente às fibras neutras, é o "raio de curvatura em "dx".

Chamando de y a distância de uma fibra qualquer em relação à fibra neutra e considerando-a positiva no sentido mostrado na figura 5.12b, por semelhança de triângulos obtém-se:

$$\frac{d\delta}{y} = \frac{dx}{r} \tag{5.28}$$

ou

$$\frac{d\delta}{dx} = \epsilon = \frac{y}{r} \tag{5.29}$$

A equação (5.29) é a relação geométrica fundamental.

5.4.3- Relação geométrica na flexo-compressão

No caso de uma curvatura provocada por uma flexo-compressão a linha neutra não passará mais pelo C.G. Observe-se a figura 5.13, lembrando que $\theta \cong \text{tg}\theta = \frac{1}{r}$.

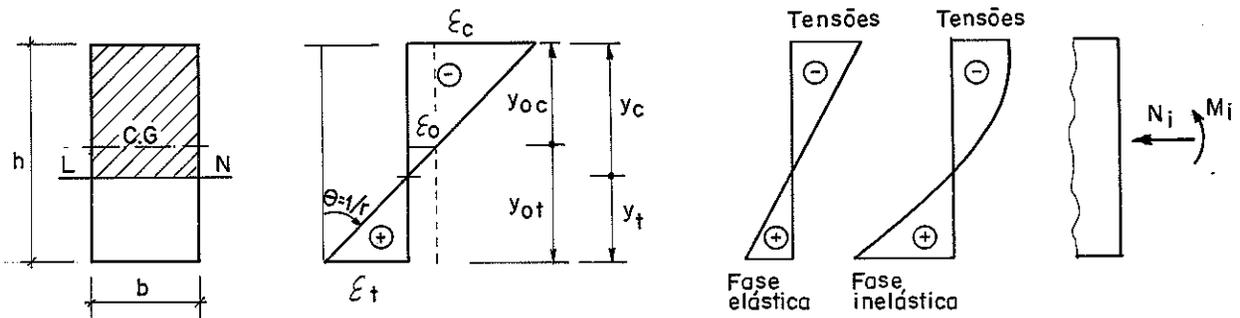


Fig. 5.13- Curvatura na flexo-compressão

O valor ϵ_0 é a deformação da fibra situada no nível do centro de gravidade da seção.

Aplicando-se a expressão (5.29) às fibras extremas, tem-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{\epsilon_c}{y_c} = \frac{\epsilon_t}{y_t} > 0 \quad (5.30)$$

pois $\epsilon_c < 0$ e $y_c < 0$, bem como $\epsilon_t > 0$ e $y_t > 0$.

Desse modo, resulta,

$$\frac{1}{r} = \frac{\epsilon_t - \epsilon_c}{y_t - y_c} = \frac{\epsilon_t + |\epsilon_c|}{y_t + |y_c|} = \frac{\epsilon_t + |\epsilon_c|}{h} \quad (5.31)$$

Se na figura 5.13 tivermos as duas faces comprimidas, sendo uma menos comprimida que a outra, a relação (5.31) poderá ser escrita:

$$\frac{1}{r} = \frac{\epsilon_{c1} - \epsilon_{c2}}{h} \quad (5.32)$$

onde ϵ_{c1} e ϵ_{c2} representam as deformações nas faces extremas mais comprimida e menos comprimida, respectivamente.

A equação (5.32) será utilizada na parte experimental deste trabalho, na fase da análise de resultados.

5.5- MÉTODO DE ANÁLISE E PROJETO

Muitos métodos de análise de colunas têm sido desenvolvidos na atualidade, e mesmo, incorporados às normas de projeto, como é o caso do concreto armado.

O objetivo deste item é o de expor quatro desses métodos de análise, quais sejam:

- Método Geral
- Método da Coluna Padrão
- Método Aproximado para Calcular o Momento Complementar
- Método Simplificado baseado no Estado de Equilíbrio.

5.5.1- Método Geral

É baseado na equação diferencial que traduz o comportamento da estrutura e as propriedades do material. Este método é aceito como a melhor aproximação do comportamento real da estrutura.

O projeto de barras comprimidas pode ser feito por uma análise racional do comportamento da estrutura incluindo-se, além dos efeitos das cargas, os efeitos de 2ª ordem produzidos pelas deformações.

Esses efeitos de 2ª ordem devem ser avaliados levando-se em conta a deformação lenta correspondente às cargas de utilização.

A capacidade de carga está diretamente ligada à relação existente entre carregamento e deformação. É pois, essencial, basear os cálculos numa apropriada representação dos diagramas tensão-deformação da madeira na tração e compressão.

A previsão sobre o comportamento de barras de madeira é dificultada por dois tipos de não linearidade: geométrica e física.

A não linearidade geométrica resulta da influência das deformações no momento total; esse efeito é também conhecido como efeito de 2ª ordem.

Por sua vez, a não linearidade física resulta da resposta não linear da madeira no diagrama tensão x deformação ($\sigma \times \epsilon$) pa

ra as tensões de compressão acima do limite de proporcionalidade , que provoca um diagrama curvo de momento x curvatura ($\mu \times \frac{1}{r}$) dependente da carga axial (v). As grandezas adimensionais μ e v se referem respectivamente ao momento fletor M e à carga axial N .

Pode-se definir v e μ como sendo:

$$v = \frac{N_d}{f_{wd} A_w} \quad (5.33)$$

$$\mu = \frac{M_d}{f_{wd} A_w t} \quad (5.34)$$

onde A_w é a área da seção de madeira, e t é a espessura.

Por outro lado, a não linearidade geométrica é incorporada às equações diferenciais que regem o problema e a influência da carga axial aplicada é considerada por tentativas sucessivas até a convergência do processo, isto é, até a carga normal obtida ser igual à carga normal assumida.

A variação do momento, portanto da curvatura, ao longo da barra impõe que seja feita uma subdivisão das barras para a análise da estrutura chegando-se assim a resultados com a precisão desejada.

A vantagem do método geral é a sua precisão e generalidade pois pode ser usado para todos os casos imaginários. A maior desvantagem é que ele requer o uso de computador. Entretanto, pode-se preparar tabelas e gráficos para os casos desejados e utilizá-los sempre.

Para achar a capacidade suporte da coluna é necessário aumentar gradualmente a carga externa e, a cada passo, computar o correspondente estado de equilíbrio. A capacidade de carga de uma barra esbelta pode ser dada por diagramas de interação entre esforço normal, momento fletor de 1ª ordem, e esbeltez da peça.

Esses diagramas podem também ser utilizados na verificação de qualquer método simplificado ou na obtenção de uma curvatura ou rigidez apropriadas para que os resultados estejam de acordo com o método geral.

5.5.2- Método da Coluna Padrão

Basicamente esse não é um novo método mas, sim, um caso especial do Método Geral.

5.5.2.1- 1ª Aproximação

O enorme trabalho exigido na aplicação do Método Geral é devido principalmente ao comportamento não linear dos materiais gerando a necessidade de se subdividir a coluna em trechos e se processar um cálculo iterativo.

A capacidade de carga de uma coluna em balanço pode ser determinada aproximadamente se o deslocamento da extremidade for assumido como função da altura da coluna e da curvatura da base.

A hipótese básica do método da coluna padrão é assumir-se que:

$$a = \frac{l_f l^2}{10} \frac{1}{r} \tag{5.35}$$

onde a = flecha da extremidade livre

$\frac{1}{r}$ = curvatura da base

Portanto, define-se:

"Coluna padrão é uma coluna em balanço com uma distribuição de curvatura tal que a flecha do topo pode ser determinada pela expressão (5.35)".

Essa expressão é exata se a elástica for senoidal desde que se considere $\pi^2 \approx 10$. Por outro lado a expressão (5.35) pode ser interpretada como o 1º termo da série de Fourier relativa à forma real da elástica, o que significa que é uma boa aproximação da flecha em vários casos práticos.

A figura 5.14 esquematiza os conceitos envolvidos.

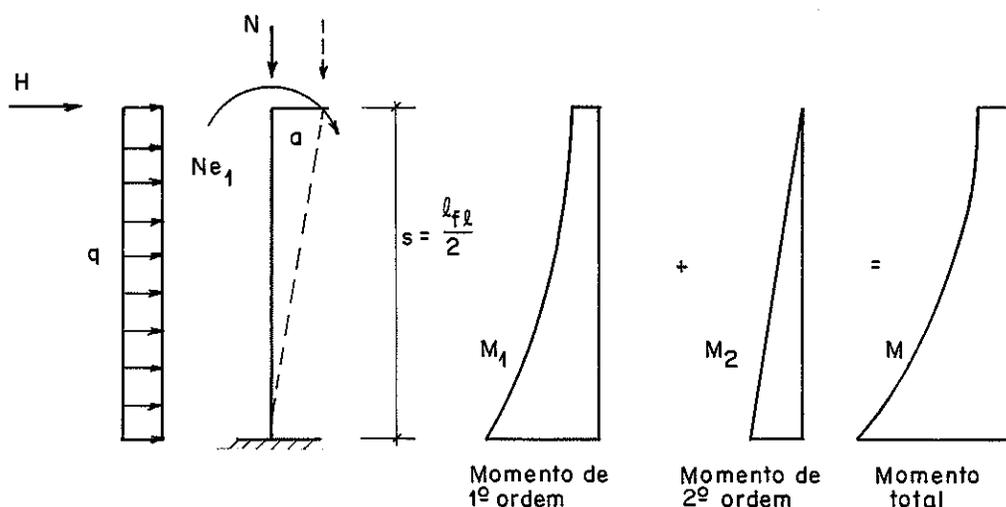


Fig. 5.14- Esforços genéricos e momentos envolvidos no Método da Coluna Padrão.

Então:

$$M = M_1 + M_2 \quad \text{ou} \quad \mu = \mu_1 + \mu_2$$

M = momento total cujo adimensional é μ

M_1 = momento de 1ª ordem cujo adimensional é μ_1

M_2 = momento de 2ª ordem cujo adimensional é μ_2

O objetivo do método é determinar o máximo momento de 1ª ordem (μ_1) que a coluna pode suportar.

Deve se conhecer as propriedades do material, a seção transversal da coluna e a carga axial no topo.

Obtém-se o valor de μ_1 utilizando-se:

1º) $a = \frac{k_{fl}^2}{10} \times \frac{1}{r}$ para obter $\mu_2 = \frac{va}{t}$

2º) gráfico de $\mu \times \frac{1}{r}$ para a seção da base.

A figura 5.15 ilustra o conceito.

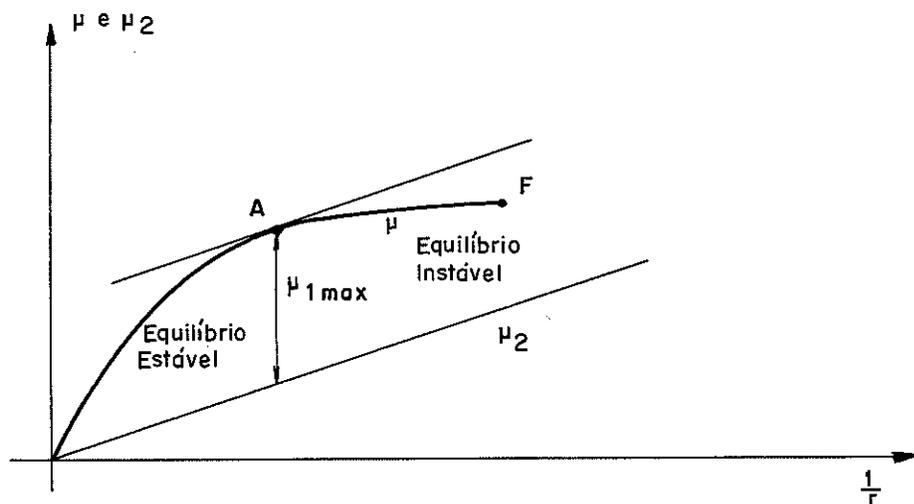


Fig. 5.15- Diagrama $\mu \times \frac{1}{r}$, na 1ª aproximação do Método da Coluna Padrão.

O ponto F é o ponto correspondente ao estado limite último de ruptura da seção determinado ou por ϵ_c máximo ou por ϵ_t máximo.

O ponto A corresponde à curvatura em que o valor μ_1 é máximo e é denominado "estado limite último de perda de estabilidade". A partir do ponto A pode haver estado de equilíbrio com valores menores de μ_1 mas será um equilíbrio instável pois qualquer

aumento na flecha com conseqüente aumento da curvatura da base faz com que a parcela μ_2 do momento externo aumente mais que o interno μ_1 (a partir do ponto A, a tangente $\mu \times \frac{1}{r}$ é menor que a tangente de $\mu_2 \times \frac{1}{r}$).

5.5.2.2- 2ª Aproximação

Neste método admite-se que $\mu \times \frac{1}{r}$ para $v = \text{constante}$ se comporte, praticamente, como um gráfico composto por 2 retas, como se observa na figura 5.16.

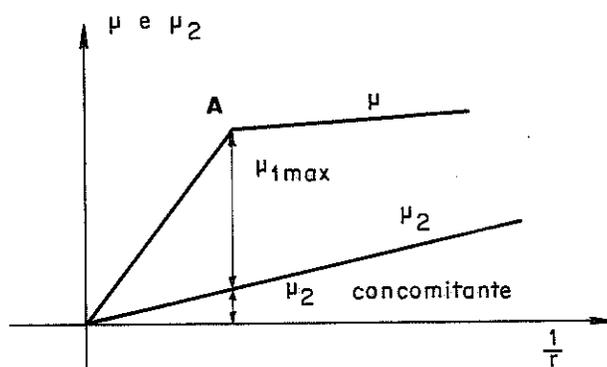


Fig. 5.16- Diagrama $\mu \times \frac{1}{r}$, na 2ª aproximação do Método da Coluna Padrão.

Sabe-se que em peças esbeltas o ponto A está na vizinhança do "cotovelo" da curva $\mu \times \frac{1}{r}$, o que justifica a boa aproximação de se considerar M como função linear de $\frac{1}{r}$.

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} = \frac{M_1 + M_2}{EI} \tag{5.36}$$

Chamando

$$\frac{1}{r} = \frac{M_1}{EI} \tag{5.37}$$

e

$$\frac{1}{r_2} = \frac{M_2}{EI} \tag{5.38}$$

tem-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

A flecha no topo da coluna, calculada por

$$a = \frac{l_{fl}^2}{10} \frac{1}{r} = \frac{(2s)^2}{10} \frac{1}{r} = 0,4 s^2 \frac{1}{r} \quad (5.39)$$

que pode ser subdividido em duas parcelas:

$$a = 0,4s^2 \frac{1}{r_1} + 0,4 s^2 \frac{1}{r_2} \quad (5.40)$$

A primeira parcela, correspondente aos momentos de 1ª ordem, admite uma correção que pode alterar o coeficiente 0,4. Chamando de a_{1c} essa primeira parcela, tem-se, então, um valor corrigido da flecha no topo (a_c):

$$a_c = a_{c1} + a_2 = a_{1c} + 0,4 s^2 \frac{1}{r_2} \quad (5.41)$$

O momento de 1ª ordem corrigido (M_{1c}) será:

$$M_{1c} = M - M_{2c} = M - N (a_{1c} + a_2) \quad (5.42)$$

Introduz-se agora a notação, esquematizada na figura 5.17, onde $\frac{1}{r_1}$ é a curvatura de 1ª ordem da base, e o diagrama de curvatura foi subdividido em 3 diagramas parciais:

α_1 = fator que multiplicando a curvatura da base $\frac{1}{r_1}$ fornece a curvatura a meia altura da barra do diagrama parcial parabólico.

α_2 = fator que multiplicando a curvatura da base $\frac{1}{r_1}$ fornece a curvatura da extremidade da barra.

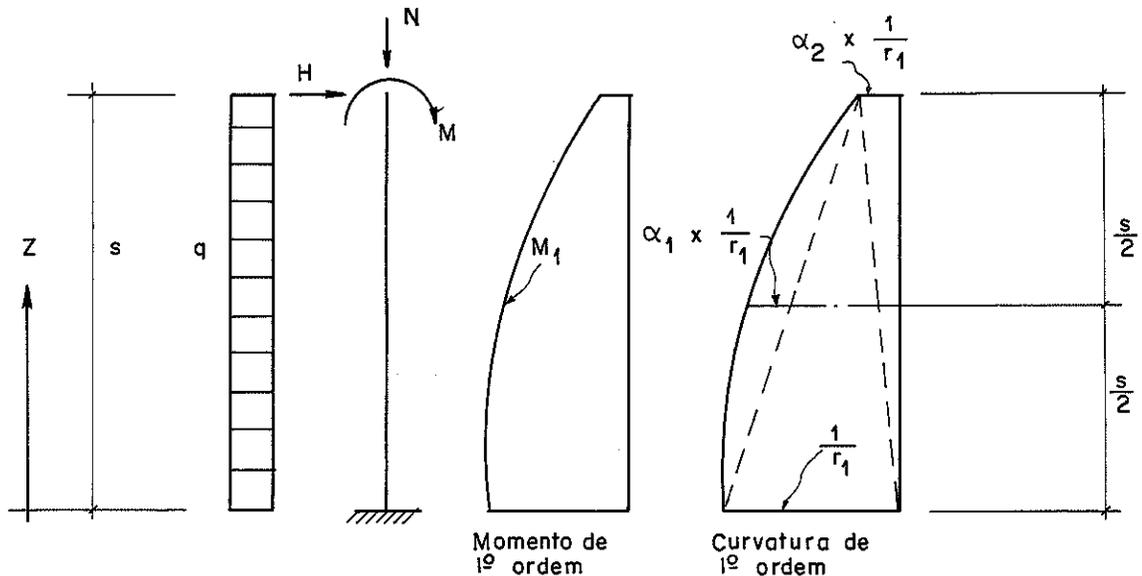


Fig. 5.17-Diagrama de curvatura de 1ª ordem, e notação adotada

Com esta notação, pode-se escrever:

$$M_{1c} = M_1 \left(1 + \frac{M - M_1}{M} \alpha_c \right) \quad (5.43)$$

onde:

$$\alpha_c = \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \alpha_1 - \frac{5}{12} \alpha_2 \quad (5.44)$$

Os valores de α_1 e α_2 - e portanto o de α_c - mudam para cada caso particular de M_1 .

A laboriosa dedução das equações (5.43) e (5.44) está disponível no trabalho da Eng^a Liliana AUFIERO (Aufiero, 1977)⁽¹⁾.

Em síntese, para a aplicação do Método da Coluna Padrão, deve-se:

- 1º) traçar o gráfico de $\mu \times \frac{1}{r}$ para v conhecido
- 2º) traçar o gráfico de $\mu_2 = v \frac{a}{t}$
- 3º) determinar μ_1 na curvatura em que $\mu_1 = \mu - \mu_2$ é máximo
- 4º) corrigir μ_1 em função do diagrama de momento de 1ª ordem.

5.5.3- Método Aproximado para Calcular o Momento Complementar

5.5.3.1- 1ª aproximação

Este método só é válido para pilares de seção constante, submetidos a carga normal constante ao longo de seu eixo.

De acordo com este método pode-se projetar uma coluna de alto índice de esbeltez como se fosse uma coluna curta com carga axial N e momento fletor M onde

$$M = M_1 + M_2$$

e

M_1 = momento fletor de 1ª ordem devido às cargas externas e à excentricidade adicional.

M_2 = momento fletor de 2ª ordem devido à carga axial.

(1) AUFIERO, Liliana - "Estabilidade de Colunas Isostáticas de Concreto Armado". Dissertação de Mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos - USP, sob orientação do Prof. Dr. Lauro Modesto dos Santos-1977.

Pode-se tomar, como avaliação de M_2 , a expressão:

$$M_2 = N \frac{l f l^2}{10} \frac{1}{r} \quad (5.45)$$

O valor de $\frac{1}{r}$ deve ser avaliado a partir de um estado limite de deformação. Pouca pesquisa tem sido feita nesta área com relação ao material madeira.

Se chamamos de:

ϵ_{uc} = deformação última na compressão

ϵ_{ut} = deformação última na tração

e tendo em vista a figura 5.18, pode-se escrever:

$$\frac{1}{r} = (\epsilon_{uc} + \epsilon_{ut}) \frac{1}{r} \quad \text{para } v \leq C \quad (5.46)$$

$$\frac{1}{r} = (\epsilon_{uc} + \epsilon_{ut}) \frac{1}{f(v) t} \quad \text{para } v > C \quad (5.47)$$

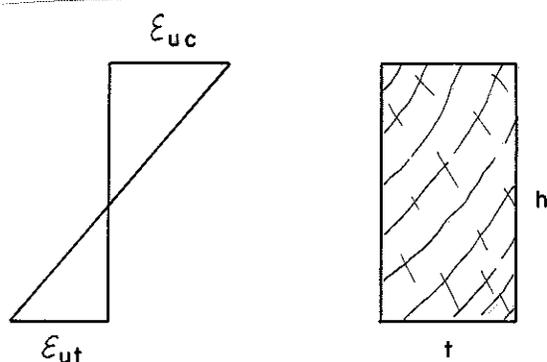


Fig. 5.18- Estado limite de deformação na tração e na compressão.

Nas equações (5.46) e (5.47) o valor de C se situa entre 0 e 1. Para concreto armado tem-se utilizado $C = 0,5$. Na equação (5.47) a função $f(v)$ poderá ser igual a 1, ou seja, as duas expressões serem a mesma, ou assumir um outro valor a ser pesquisado. A sua finalidade é fazer uma redução da curvatura a medida que v aumenta (aumento da força normal). No concreto armado $f(v) = 2v$, segundo o CEB, e $f(v) = (0,85v + 0,5)$ segundo a atual norma de concreto armado (antiga NB-1).

5.5.3.2- 2ª Aproximação

O objetivo desta segunda parte do método é melhorar os resultados através de uma correção no momento de 2ª ordem baseada no método da coluna padrão.

Tendo em vista a expressão (5.34) pode-se escrever:

$$\mu_2 = \frac{M_2}{f_{wd} A_w t} = \frac{N}{f_{wd} A_w} \left(\frac{\lambda_{fl}^2}{10} \frac{1}{r} \right) \frac{1}{t} \quad (5.48)$$

Usando (5.33) obtêm-se

$$\mu_2 = \frac{\nu}{10} \left(\frac{\lambda_{fl}}{t} \right)^2 \frac{t}{r} \quad (5.49)$$

Utilizando as expressões (5.46) e (5.47) na (5.49) calcula-se a primeira aproximação de μ_2 . Com esse valor consegue-se a 1ª aproximação do momento com que deve ser dimensionada a peça:

$$\mu_F = \mu_1 + \mu_2 \quad (5.50)$$

onde μ_F = capacidade da peça para a curvatura correspondente a ruptura do material (ponto F na figura 5.19).

μ_1 = capacidade da peça para a curvatura correspondente à perda de estabilidade (ponto A).

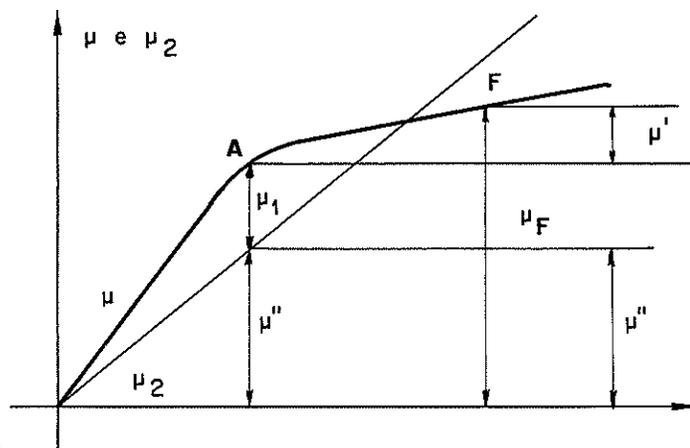


Fig. 5.19- 2ª Aproximação do Método do Momento Complementar.

Note-se que o valor de μ_2 não deve corresponder ao momento de 2ª ordem que ocorre quando a peça desenvolve a curvatura correspondente ao ponto de perda de estabilidade (A). Poderá ser chamado de "momento fictício de 2ª ordem", utilizado para transformar o cálculo em que as deformações afetam os esforços num cálculo usual de colunas curtas.

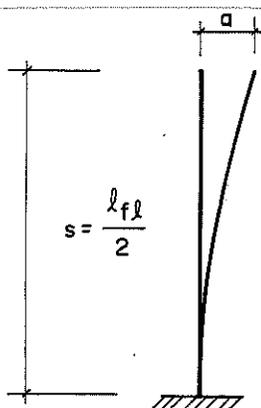
Esse momento fictício seria:

$$\mu_2 = \mu' + \mu'' \quad (5.51)$$

sendo μ'' o momento de 2ª ordem que ocorre concomitante com o máximo momento de 1ª ordem (μ_1).

5.5.4- Método Simplificado baseado no Estado de Equilíbrio

Assim como no método da coluna padrão, assume-se o deslocamento na extremidade livre da coluna como função da curvatura da extremidade engastada (figura 5.20).



$$a = \frac{l_{fl}^2}{10} \times \frac{1}{r} = 0,4 \left(\frac{l_{fl}}{r} \right)^2 \quad \dots (5.52)$$

Fig. 5.20- Coluna Padrão no Método Simplificado

A partir dessa hipótese, a verificação da segurança é feita na seção da base, comparando carga axial aplicada com resultante das tensões, e comparando excentricidade da carga externa (1ª + 2ª ordem) com a excentricidade da resultante das tensões.

Seja N_d , na figura 5.21, a carga axial externa aplicada.

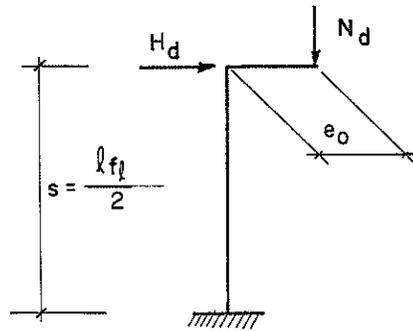


Fig. 5.21- Método Simplificado: excentricidades a considerar.

Momento na base:

$$M_{1d} = H_d s + N_d (e_0 + e_a) \quad (5.53)$$

onde e_a = excentricidade adicional.

A excentricidade de 1ª ordem (e_1) da carga N_d em relação à seção da base será:

$$e_1 = \frac{M_{1d}}{N_d} = \frac{H_d s}{N_d} + e_0 + e_a \quad (5.54)$$

Levando em consideração a posição deformada da coluna a excentricidade total externa é igual a (figura 5.22):

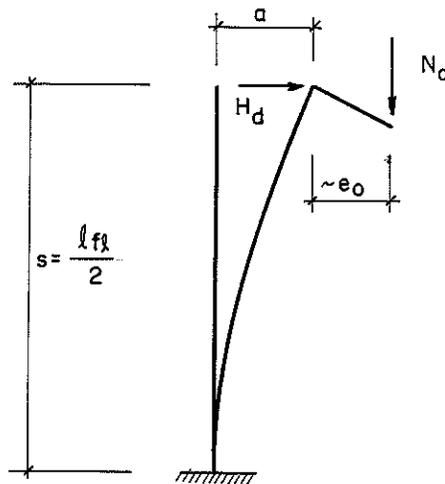


Fig. 5.22- Posição deformada da coluna

$$e = e_1 + a = e_1 + \frac{l_{fl}^2}{10} \cdot \frac{1}{r} \quad (5.55)$$

O gráfico da excentricidade externa em função da curvatura é representado na figura 5.23.

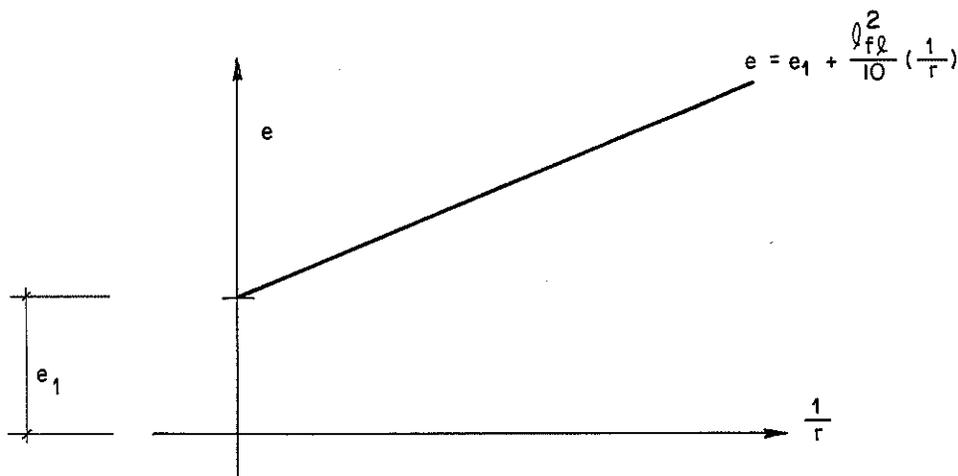


Fig. 5.23- Gráfico da excentricidade externa x curvatura

Por outro lado o valor da excentricidade interna e_i em função da curvatura é obtido das condições de equilíbrio de forças e compatibilidade de deformações.

A figura 5.24 mostra um gráfico típico de e_i para um valor constante de v .

R_i = força resultante das tensões normais

M_i = momento resultante das tensões normais.

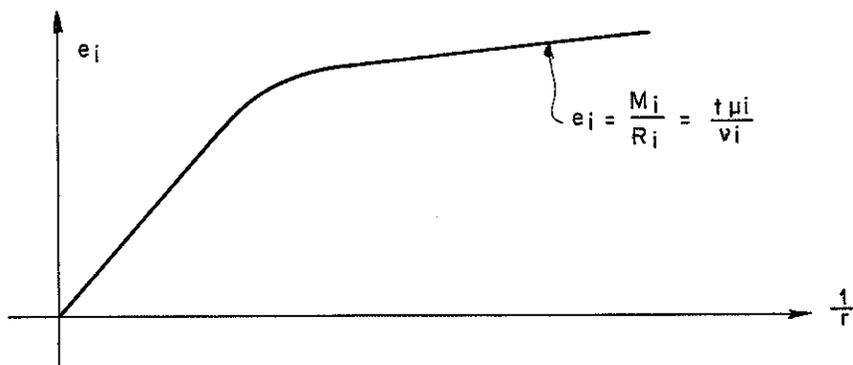


Fig. 5.24- Gráfico da excentricidade interna x curvatura

Superpondo os dois diagramas:

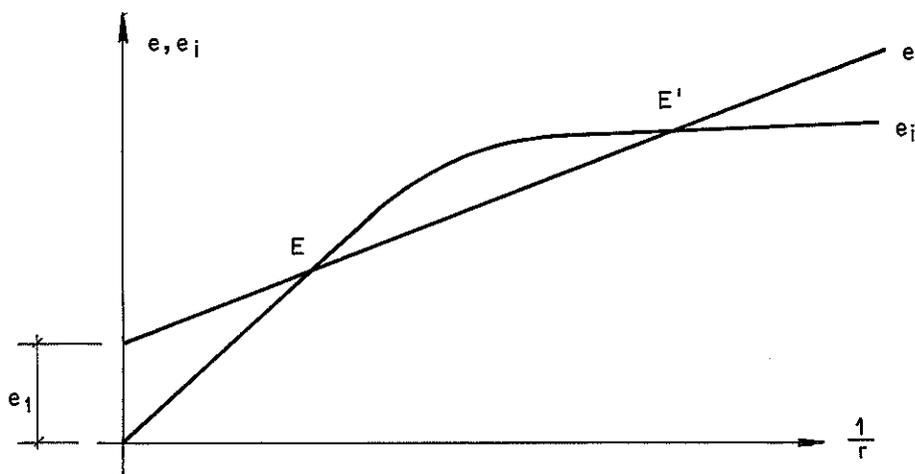


Fig. 5.25- Superposição dos diagrams das figuras 5.24 e 5.23.

Se as duas curvas se interceptam existe o estado de equilíbrio com configuração representada pela curvatura do ponto E onde $e = e_i$.

O ponto E' representa outra configuração de equilíbrio mas, nesse caso, é equilíbrio instável (se o equilíbrio é ligeiramente alternado pelo aumento da flecha, e conseqüente aumento da curvatura da base, a excentricidade interna aumenta menos que a externa).

Se, por outro lado, o valor da carga axial externa N_d aumenta, o correspondente diagrama de e_i abaixa e os pontos E e E' tendem a se aproximar.

No estado limite, E e E' coincidem e a reta da excentricidade externa é tangente à curva da excentricidade interna nesse mesmo ponto $E \equiv E'$ (fig. 5.26).

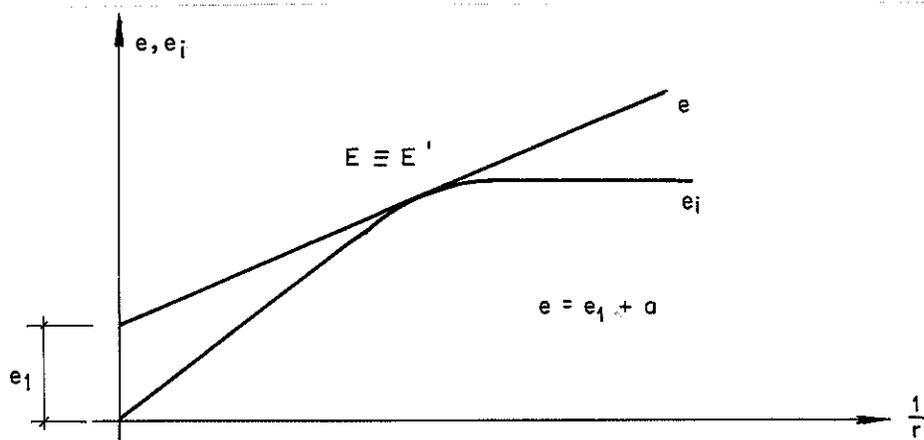


Fig. 5.26- Estado limite, onde os pontos E e E' coincidem (Estado Limite Último de Instabilidade).

O valor de N_d correspondente a essa situação corresponde ao Estado Limite Último de Instabilidade.

Neste processo não é necessário determinar o diagrama completo de e_i .

Suponhamos, para a seção da base, uma forma qualquer com uma deformação plana qualquer (figura 5.27).

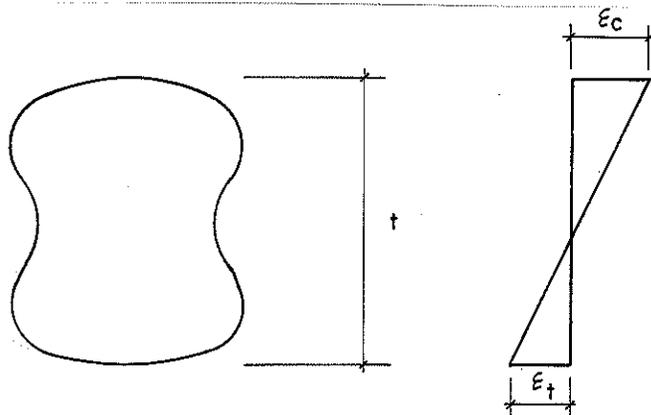


Fig. 5.27- Seção da base: forma qualquer com deformação plana qualquer.

Conhecido o estado de deformações calcula-se a resultante das tensões internas (R_i) e o momento fletor dessas tensões (M_i) através das relações $\sigma \times \epsilon$ da madeira.

$$R_i = \int_{A_w} \tau dA_w \quad (5.56)$$

$$M_i = \int_{A_w} z \cdot \tau dA_w \quad (5.57)$$

Haverá estabilidade se forem satisfeitas as duas condições seguintes:

$$R_i > N_d \quad (5.58)$$

e

$$e_i = \frac{M_i}{R_i} > e \quad (5.59)$$

cuja representação está na figura 5.28, a seguir:

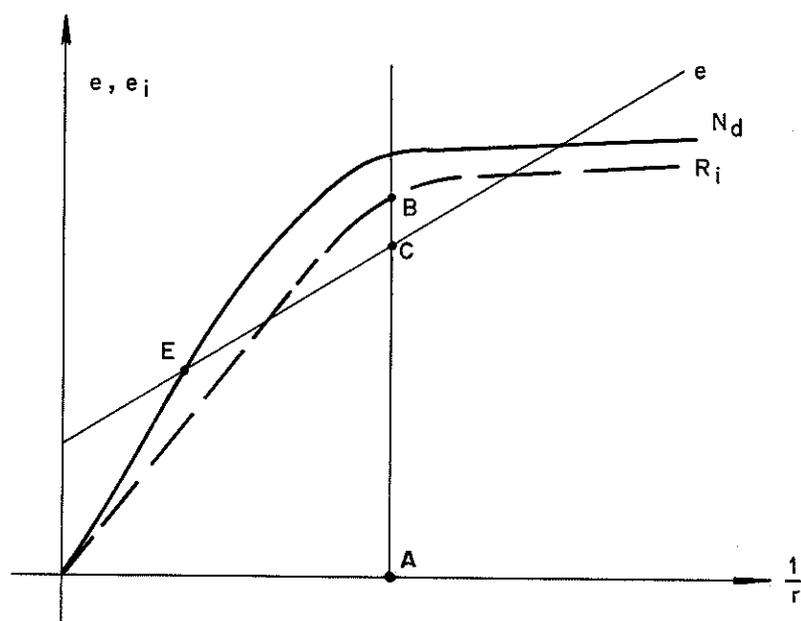


Fig. 5.28- Representação das duas condições para a estabilidade da coluna.

O raciocínio que demonstra essa afirmativa não necessita da determinação da curva $e_i \times \frac{1}{r}$ para N_d pois,

$$\overline{AB} > \overline{AC}, \text{ isto é, } e_i > e = e_1 + a$$

pode-se afirmar que a curva de parâmetro R_i intercepta a reta da excentricidade externa.

Por outro lado, como:

$$R_i > N_d$$

a curva correspondente a N_d encontra-se acima da correspondente a R_i e, certamente, interceptará a reta da excentricidade externa e então existirá um ponto E de equilíbrio estável.

Neste método garante-se a existência de um ponto de equilíbrio estável, sem procurar detectá-lo, apenas se aproximar, pelo lado da segurança, do mesmo.

CAPÍTULO 6

ENSAIOS PRELIMINARES À EXPERIMENTAÇÃO PRINCIPAL E ESPÉCIES DE MADEIRA

6.1- INTRODUÇÃO

Os testes preliminares foram planejados para propiciarem informações adicionais necessárias no sentido de se poder conhecer as propriedades físicas e mecânicas do material das colunas, assim como das peças de apoio e equipamento de carga.

6.2- AS ESPÉCIES DE MADEIRA

Os primeiros testes foram feitos com pequenos corpos de prova de Pinho do Paraná (*Araucaria angustifolia*) a partir dos quais se desenvolveu um estudo sobre a influência dos apoios metálicos nos resultados obtidos.

Em seguida foram feitos testes em peças estruturais de grande esbeltez objetivando o comportamento das colunas com e sem contraventamento. Esses corpos de prova foram elaborados em Peroba Rosa (*Aspidosperma polyneuron*).

Finalmente, para se conhecer a umidade, a densidade e o módulo de elasticidade do material empregado na experimentação principal, acompanhou-se cada corpo de prova com ensaios prévios que determinassem essas propriedades físicas e mecânicas.

As variações de espécie para espécie são atribuídas às diferentes proporções em que os constituintes (celulose, hemicelulose e lignina, dentre outros) entram para formar a madeira e as possíveis interrelações entre eles nas paredes celulares.

Nos estudos da anisotropia da madeira feitos por GALVÃO e JANKOWSKY são apreciadas as razões da diferença entre a variação longitudinal e a transversal, e entre a radial (R) e a tangencial (T). (Galvão & Jankowsky - 1985) ⁽¹⁾.

Segundo estes autores, de uma maneira geral, as madeiras com baixa relação (T/R) e baixos valores de T e R são as mais estáveis quanto à variação dimensional. Isso ocorre, por exemplo, com o ipê, o cedro. De maneira oposta, o Eucalipto tereticornis e a peroba - rosa apresentam elevada instabilidade dimensional.

Considerando-se que havia uma disponibilidade de peças de ipê-amarelo (*Tecoma eximia*) no LaMEM à época dos ensaios, e tendo em vista a sua estabilidade dimensional acima mencionada, recaiu sobre essa espécie a nossa escolha para a experimentação principal, objetivo de nosso trabalho.

6.3- UMIDADE E DENSIDADE

De cada corpo de prova de coluna foram separados pequenos corpos de prova com seção 2 x 2 cm e comprimento 3cm, com os quais foram medidos o teor de umidade e a densidade aparente.

6.3.1- Teor de Umidade

Durante a formação e através dos ciclos de vida de uma célula de madeira, uma grande quantidade de água está presente. Além disso, por causa da natureza higroscópica de muitos produtos químicos da madeira, a umidade é retida mesmo após a célula estar morta. A quantidade de água presente na madeira modifica significativamente suas propriedades físicas. Em consequência disso, o conhecimento do teor de umidade da madeira é particularmente importante quando uma propriedade física é especificada.

(1) GALVÃO, A.P.M. & JANKOWSKY, I.P. - "Secagem Racional da Madeira" Livraria Nobel S.A. - 1ª Edição - 1985.

A umidade é quase sempre expressa como uma porcentagem do peso da madeira seca em estufa. O peso seco em estufa é obtido com uma temperatura na faixa de 100° a 105°C, até que um peso constante seja obtido. Embora outros métodos sejam algumas vezes utilizados para estabelecer o peso da madeira seca, a secagem até um peso constante é amplamente aceito.

A umidade da madeira costuma ser determinada evaporando-se toda a água da madeira, em estufa, a 100°C ± 3°C até atingir massa constante e calculando-se pela expressão:

$$U = \frac{M_u - M_o}{M_o} 100\% \quad (6.1)$$

onde: U = teor de umidade, em porcentagem

M_u = massa da madeira com a umidade procurada

M_o = massa da madeira seca em estufa

É bom lembrar que a seiva contida nos vazios dos traqueídes, dos vasos, dos raios e das fibras é considerada como "água livre", isto é, que pode circular livremente sem afetar a forma e dimensões da madeira.

Além de água livre há na madeira "água de impregnação", ligada às moléculas de celulose, holocelulose e lignina através de suas oxidrilas.

Logo após o corte e desdobro, a água da madeira começa a evaporar-se, sendo que a "água livre" evapora-se mais facilmente, até o ponto de saturação (25 a 30%), umidade percentual limite, acima da qual existe "água livre" e abaixo, somente "água de impregnação". A evaporação, então, prossegue, porém mais lentamente, até atingir a "umidade de equilíbrio com as condições do ambiente". Estas são instáveis e a umidade da madeira ao ar oscila em torno do valor 12%, sendo considerada, com essa umidade, "seca ao ar", o que ocorre à temperatura de 20°C e umidade relativa do ar a 65%.

A partir da expressão (6.1) foram obtidos os valores de Teor de Umidade dos corpos de prova, listados na Tabela 6.1.

6.3.2- Densidade

Com os mesmos corpos de prova 2 x 2 x 3 cm, citados em 6.3.1, determinou-se a densidade aparente, ou massa específica. As dimensões lineares foram feitas com paquímetro de precisão 0,1%

(0,02 mm/20mm). A massa do corpo de prova foi determinada utilizando-se a balança de precisão 0,1% (0,01g/10g).

A densidade aparente, com umidade U%, foi determinada utilizando-se a expressão.

$$D_u = \frac{M_u}{V_u} \quad (6.2)$$

onde: D_u = densidade aparente da madeira, com umidade U%

M_u = massa da madeira, com umidade U%

V_u = volume da madeira, com umidade U%

A partir da expressão (6.2) obteve-se os valores da densidade dos corpos de prova, listados, também, na tabela 6.1.

TABELA 6.1

Corpo de Prova	Umidade (%)	Densidade (g/cm ³)	Corpo de Prova	Umidade (%)	Densidade (g/cm ³)
IPE-I-A	11,63	0,892	IPE-III-B	9,56	1,008
IPE-II-A	11,80	0,873	IPE-XVI-A	12,15	0,969
IPE-III-A	11,54	1,007	IPE-IV-B	10,45	1,012
IPE-IV-A	10,69	1,014	IPE-V-B	10,80	1,017
IPE-V-A	11,69	1,015	IPE-VI-B	10,77	1,025
IPE-VI-A	11,39	1,026	IPE-XVII-A	12,07	0,928
IPE-VII-A	11,78	1,044	IPE-XVIII-A	11,48	0,932
IPE-VIII-A	12,13	1,036	IPE-XIX-A	11,39	0,925
IPE-X-A	11,14	1,034	IPE-XXI-A	11,39	0,945
IPE-XI-A	12,95	0,893	IPE-XXII-A	11,14	1,010
IPE-XII-A	12,88	0,902	IPE-XXIII-A	10,28	1,043
IPE-XIV-A	12,78	0,957	IPE-VII-B	11,42	1,081
IPE-XV-A	11,65	0,950	IPE-VIII-B	11,35	1,040
IPE-I-B	10,16	0,893	IPE-X-B	11,40	1,004
IPE-II-B	10,44	0,879			
IPE-IX-A	12,01	1,017	IPE-XX-A	11,57	0,914
IPE-XIII-A	12,78	1,023	IPE-XXIV-A	11,27	1,028

6.4- ENSAIOS PARA DETERMINAÇÃO DO MÓDULO DE ELASTICIDADE NA FLEXÃO

6.4.1- Módulo de Elasticidade Real e Aparente

Ao estudar-se experimentalmente colunas comprimidas, é conveniente submeter-se previamente tais colunas à flexão transversal para obter-se o seu módulo de elasticidade (E), uma vez que, como a madeira é um material heterogêneo, os valores do módulo de elasticidade que figuram nas tabelas são muito aproximados.

Pela teoria da flexão sabe-se que a fórmula para a flecha (v) de uma viga carregada em seu ponto médio com força concentrada, (fig. 6.1), é a seguinte:

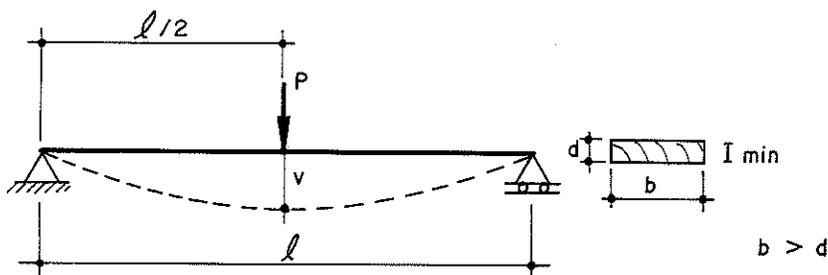


Fig. 6.1- Carregamento em uma viga de madeira para determinar o módulo de elasticidade (E).

$$v = \frac{P l^3}{48 EI} + \frac{3 P l}{10 GS} \quad (6.3)$$

Conforme ROCCO LAHR, para relações vão livre/altura maiores ou iguais a 21 podemos desprezar a influência da cortante na expressão (6.3) (Rocco Lahr - 1983)⁽¹⁾.

(1) ROCCO LAHR, Francisco Antonio .- "Sobre a Determinação de Propriedades de Elasticidade da Madeira", Tese apresentada para obtenção do título Doutor em Engenharia de Estruturas, Orientador - Prof. Dr. João Cesar Hellmeister, EESC-USP, 1983 - São Carlos - SP

Segundo aquele autor, a não consideração da parcela correspondente à cortante para a relação $l/h < 21$ acarretaria um erro no valor verdadeiro do módulo de elasticidade, e o obtido deveria ser denominado "módulo de elasticidade aparente" (E_a):

$$E_a = \frac{Pl^3}{48vI} \quad \text{para } l/h < 21 \quad (6.4)$$

As dimensões do corpo de prova assim como a distância entre apoio do ensaio para obter o módulo de elasticidade dado pela NB-6230/85 (antiga MB-26) leva à relação $l/h = 14 < 21$, e portanto o valor que se obtém através da mesma é aparente (fig. 6.2).

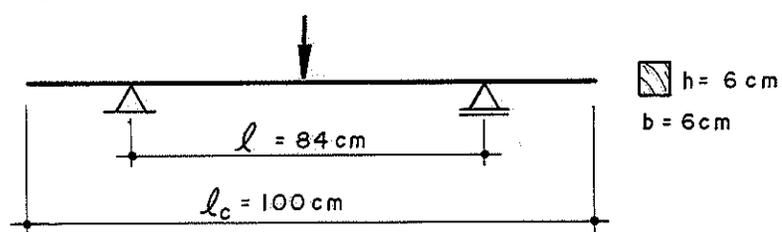


Fig. 6.2- Esquema de ensaio para cálculo de E, segundo NBR-6230/85

Para relações $l/h \geq 21$ o módulo de elasticidade pode ser considerado como sendo o real (E_r ou simplesmente E):

$$E = E_r = \frac{Pl^3}{48vI} \quad \text{para } l/h \geq 21 \quad (6.5)$$

O módulo aparente se relaciona percentualmente com o módulo real, segundo a equação (6.6):

$$(\%E)^2 = 14260 \log \frac{l}{h} - 8590 \quad (6.6)$$

sendo o valor do logaritmo calculado na base 10. Essa relação pode ser vista na figura 6.3.

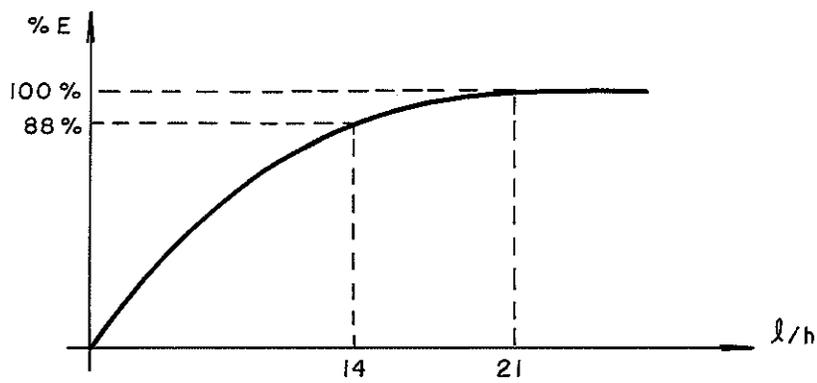


Fig. 6.3- Valor percentual em relação ao E real segundo a equação (6.6).

6.4.2- Procedimentos Matemáticos Sobre os Resultados de Ensaio

6.4.2.1- Esquema de ensaio

Nos ensaio efetuados, a força P vertical foi aplicada no plano de rigidez mínima da coluna (fig. 6.4).

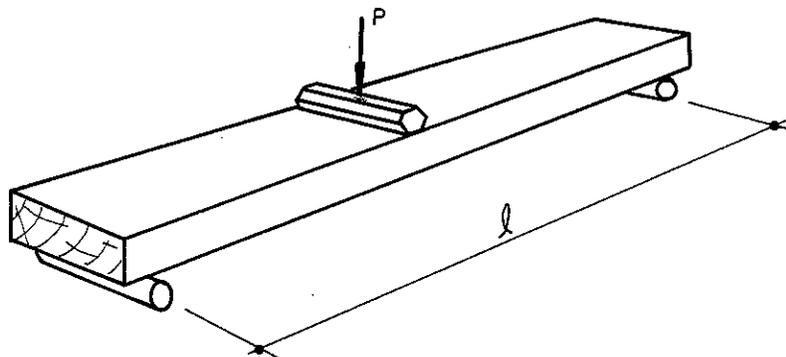


Fig. 6.4- Esquema de ensaio das colunas para obter o módulo de elasticidade

O valor máximo de P não ultrapassa, no ensaio, o limite de proporcionalidade entre carga e deformação.

Cada lado oposto da coluna, de rigidez mínima, foi ensaiado, sendo que o módulo de elasticidade (E) considerado para a coluna foi o menor dos dois valores obtidos. Para cada lado foram feitas leituras da flecha " v " em vários estágios da carga " P ". A partir de tais dados foi ajustada uma reta pelos pontos no gráfico ($P \times v$), mostrada na figura 6.5.

6.4.2.2- Equacionamento dos dados e regressão

Da equação (6.5), tem-se:

$$E = \frac{P}{v} \cdot \frac{l^3}{48I} = \left(\frac{\Delta P}{\Delta v} \right) \cdot \frac{l^3}{48I} \tag{6.7}$$

onde Δv representa o acréscimo de flecha correspondente ao acréscimo ΔP de carga.

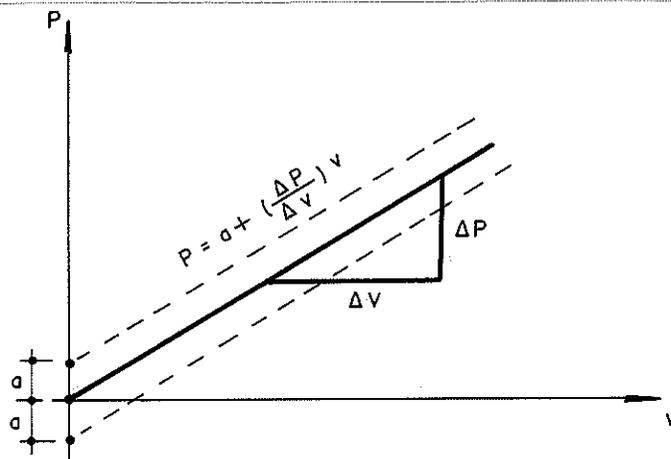


Fig. 6.5- Ajuste de uma reta pelos pontos do gráfico P x v

A reta verdadeira, que correlaciona P com v, deve passar obrigatoriamente pela origem, mas a equação linear ajustada através do método dos mínimos quadrados poderá apresentar um valor "a" diferente de zero correspondente à passagem de tal reta fora desse particular ponto. As acomodações iniciais tanto do corpo de prova quanto dos equipamentos de leitura, mesmo fazendo-se um escorvamento inicial da peça, podem produzir tais distorções. Desprezando-se uma ou duas medidas iniciais realinhamos os eixos dos gráficos para uma posição mais próxima da real.

Para todas as regressões, foi calculado o coeficiente de Explicação R^2 , que indica, em porcentagem, quanto a variação explicada pela regressão representa da variação total. Devemos ter:

$$0 \leq R^2 \leq 100 \tag{6.8}$$

No caso em que $R^2 = 100$, todos os pontos observados se situam "exatamente" sobre a reta de regressão. Diremos então que

o ajuste é perfeito. As variações de "v" são 100% explicadas pelas variações de \underline{P} através da função especificada. Por outro lado, se $R^2 = 0$, concluiremos que não existe dependência linear entre as variáveis:

Em resumo, procuramos efetuar uma regressão linear de equação:

$$P = a + (\Delta P / \Delta v) v \quad (6.9)$$

com $R^2 > 99\%$, e utilizamos o coeficiente $(\Delta P / \Delta v)$, assim obtido, na equação (6.7) para a determinação de E.

5.4.2.3- Tabela dos módulos de elasticidade

A tabela 6.2 mostra os módulos de elasticidade estimados pelos procedimentos descritos acima.

Por exemplo, a coluna IPE-XXIII, de seção 5,85 x 4,10cm, foi ensaiada primeiramente com um vão livre de 120cm. Para o primeiro lado (que vamos denominar "lado A") o resultado nos levou à equação:

$$P = - 1,944 + 190,614v \quad \text{com } R^2 = 100\%$$

Daí, então, $(\Delta P / \Delta v) = 190,614$ e o cálculo de E fornece:

$$\begin{aligned} E_{\text{lado A}} &= \left(\frac{\Delta P}{\Delta v} \right) \frac{l^3}{48I} = 190,614 \times 120^3 / (48 \times 33,599) = \\ &= 204.235 \text{ kgf/cm}^2 \end{aligned}$$

que convertido em MPa (SI), através do fator 0,1^(*)

(1kgf \cong 10N e 1 kgf/cm² = 0,1MPa), tem-se:

$$E_{\text{lado A}} = 204,235 \text{ kgf/cm}^2 = 20.424 \text{ MPa}$$

(*) Se quisermos precisão, aos invés do fator 0,1 podemos utilizar o valor 0,0980665. Não tem sentido, entretanto, uma vez que existe uma grande variabilidade natural das características da madeira que tornariam tal rigor sem qualquer sentido.

Para a mesma coluna, ensaiando-se o outro lado (que vamos denominar "lado B"), obteve-se:

$$P = -0,861 + 189,696 v \quad \text{com } R^2 = 99,99\%$$

Então:

$$E_{\text{lado B}} = 203.252 \text{ kgf/cm}^2 = 20.325 \text{ MPa}$$

Como se pode observar, os valores são praticamente iguais. decidimos representar E com o menor entre $E_{\text{lado A}}$ e $E_{\text{lado B}}$, e, portanto, para o caso em questão:

$$E_{\text{XXIII}} = 203.252 \text{ kgf/cm}^2 = 20.325 \text{ MPa}$$

Poderíamos, também, calcular E através da expressão:

$$E = \frac{\left(\frac{\ell_2}{h_2}\right) - \left(\frac{\ell_1}{h_1}\right)}{4b \left[\frac{1}{\left(\frac{\Delta P_2}{\Delta v_2}\right) \left(\frac{\ell_2}{h_2}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{\Delta P_1}{\Delta v_1}\right) \left(\frac{\ell_1}{h_1}\right)} \right]} \quad (6.10)$$

para 2 valores distintos de $\frac{\ell}{h}$, onde os valores b e h são tomados como mostrado na figura 6.6.

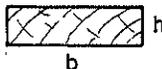


Fig. 6.6- Considerações de b e h para a expressão (6.10)

Ensaíamos nossa coluna também para $\frac{\ell}{h} = 14$, com um vão de 57,4 cm ($57,4/4,1 = 14$).

Obtivemos para os lados A e B:

$$\text{lado A: } P = - 0,681 + 1485,424v \quad \text{com } R^2 = 99,98\%$$

$$\text{lado B: } P = - 6,713 + 1544,413v \quad \text{com } R^2 = 99,96\%$$

Então, utilizando-se a (6.10), e lembrando que

$$\frac{\ell_2}{h_2} = \frac{120}{4,1} = 29,2$$

tem-se:

$$E_{\text{lado A}} = \frac{29,2^2 - 14^2}{4 \times 5,85 \left[\frac{1}{190,614 \times 29,2} - \frac{1}{1549,166 \times 14} \right]}$$

$$= 210,109 \text{ kgf/cm}^2 = 21.011 \text{ MPa}$$

Identicamente, para o lado B, tem-se

$$E_{\text{lado B}} = \frac{29,2^2 - 14^2}{4 \times 5,85 \left[\frac{1}{189,696 \times 29,268} - \frac{1}{1504,413 \times 14} \right]}$$

$$= 208.971 \text{ kgf/cm}^2 = 20.897 \text{ MPa}$$

A expressão (6.10) surgiu em meados de 1987, em uma época em que nossos ensaios de colunas já estavam adiantados, e era impossível recuperar as colunas já ensaiadas para efetuarmos um segundo ensaio de flexão com $l/h = 14$. Assim sendo, os módulos de elasticidade obtidos correspondem ao cálculo com um único valor de l/h , o qual é maior que 21, como se pode observar na coluna apropriada da Tabela 6.2.

TABELA 6.2

Nº DO CORPO DE PROVA	EQUAÇÃO DA REGRESSÃO $\hat{P} = a + (\frac{\Delta P}{\Delta V}) v$	R ² (%)	VÃO LIVRE DE ENSAIO (cm)	ÁREA (cm x cm)	l/h	I	MÓDULO DE ELASTICIDADE NA FLEXÃO (E)			
							FÓRMULA (6.7)		FÓRMULA (6.10)	
							kgf/cm ²	MPa	kgf/cm ²	
IPE - 1 A	A	4,957 + 73,032 v	99,99	248,5	7,5 x 5,90	42,1	128361	181.894	18.189	
	B	-3,738 + 73,008 v	99,98					181.834	18.183	
IPE - 2 A	A	-2,436 + 75,581 v	99,99	253,7	7,8 x 5,75	32,5	123571	208.073	20.807	
	B	-15,587 + 75,806 v	99,99					208.692	20.869	
IPE - III	A	-6,756 + 104,216 v	100	212,2	6,84 x 5,46	38,9	92780	223.602	22.360	
	B	-7,210 + 102,791 v	99,99					220.544	22.054	
IPE - IV	A	-6,404 + 113,049 v	99,99	212,2	7,35 x 5,50	38,6	101905	220.834	22.083	
	B	-6,043 + 111,647 v	99,99					218.095	21.810	
IPE - V	A	-3,426 + 123,604 v	100	204,5	7,445x5,51	37,1	103786	212.194	21.219	
	B	-5,048 + 122,876 v	100					210.944	21.094	
IPE - VI	A	-3,675 + 132,316 v	99,99	204,5	7,38 + 5,49	37,2	101764	231.663	23.166	
	B	-1,776 + 128,633 v	99,99					225.214	22.521	
IPE - VII	A	-8,033 + 183,326 v	100	188,5	7,34 + 5,45	34,6	99016	258.351	22.835	
	B	-8,160 + 180,043 v	100					253.725	25.373	
IPE - VIII	A	-6,859 + 175,736 v	99,99	188,5	7,35x5,465	34,5	99972	245.287	24.529	
	B	-8,419 + 174,629 v	99,99					243.742	24.374	
IPE - IX	A	-7,406 + 431,373 v	100	135	7,225x5,505	24,5	100445	220.132	22.013	
	B	-8,185 + 427,494 v	99,99					218.153	21.815	

TABELA 6.2 (cont.)

Nº DO CORPO DE PROVA	EQUAÇÃO DA REGRESSÃO $\bar{P} = a + \left(\frac{\Delta P}{\Delta V}\right) v$	R ² (%)	VÃO LIVRE DE ENSAIO (cm)	ÁREA (cm x cm)	l/h	I	MÓDULO DE ELASTICIDADE NA FLEXÃO (E)				
							FÓRMULA (6.7)		FÓRMULA (6.10)		
							kgf/cm ²	MPa	kgf/cm ²	MPa	
IPE - X	A	-9,902 + 398,715 v	99,99	(135)	7,10x5,495	24,6	981,70	208.182	20.818		
	B	-5,489 + 400,453 v	99,99					209.090	20.909		
IPE - XI	A	-7,135 + 579,840 v	99,98	120	7,525x5,56	21,6	107,783	193.669	19.367		
	B	-6,712 + 563,698 v	99,98					188.277	18.828		
IPE - XII	A	-6,407 + 584,798 v	99,99	120	7,54x5,545	21,6	107,126	196.523	19.652		
	B	-8,515 + 588,007 v	99,99					197.601	19.760		
IPE - XIII e IPE - XIV	A	-2,758 + 58,024 v	99,99	250	7,35 x 5,23	47,8	87,622	215.562	21.556		22.001
	B	-2,714 + 58,251 v	100					216.406	21.641		
IPE - XV e IPE - XVI	A	-21,360+1955,066 v	99,98	73,22	7,35 x 5,23	14	87,622	182.472	18.247		
	B	-21,274+1898,916 v	99,99					177.231	17.723		
IPE - XV e IPE - XVI	A	-1,012+58,984 v	99,99	250	7,335x5,235	47,8	87,694	218.949	21.895		22.430
	B	-0,111+58,788 v	99,99					218.222	21.822		
IPE - XVII e IPE - XVIII	A	-4,603+1857,302 v	99,89	73,64	7,335x5,235	14	87,694	176.203	17.620		
	B	-17,721+1877,160v	99,98					178.087	17.809		
IPE - XVII e IPE - XVIII	A	-0,023 + 54,866 v	100	250	7,05 x 5,17	48,4	81,186	219.989	21.999		22.319
	B	-0,141 + 54,485 v	100					218.461	21.846		
IPE - XVII e IPE - XVIII	A	-28,063+1887,704v	99,98	72,36	7,05 x 5,17	14	81,186	183.530	18.353		
	B	-17,281+1872,086	99,99					182.012	18.201		

CAPÍTULO 7

EQUIPAMENTOS UTILIZADOS E MONTAGENS

7.1- INTRODUÇÃO

Os ensaios realizados envolveram colunas de grande comprimento, o que exigiu a decisão de efetuarlos com o corpo de prova na posição horizontal, pois isto facilitaria sobremaneira a montagem do aparato experimental necessário ao caso.

À primeira vista, pode-se pensar que o peso próprio da coluna deva influir nos resultados mas tal fato não acontece uma vez que a pequena flexão que aparece devido a essa carga, ocorre no plano perpendicular ao do fenômeno da flambagem. Entretanto, tal flexão poderia afetar as leituras, porém o esquema escolhido para a montagem dos extensômetros elétrico procurou minimizar tal efeito, ou mesmo anulá-lo, como será demonstrado adiante.

Para tais deduções foi necessário escolher-se um sistema de eixos.

Na figura 7.1 observa-se um corpo de prova e o sistema de eixos adotado para referir os deslocamentos e esforços envolvidos.

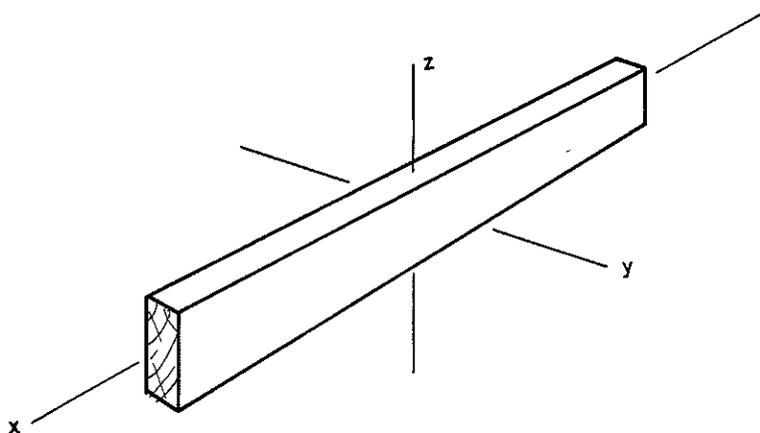


Fig. 7.1- Sistema de eixos para o corpo de prova

7.2- A MEIA-PONTE UTILIZADA NOS CORPOS DE PROVA LONGOS

Como citado no item anterior, a montagem escolhida procurou minimizar (ou mesmo anular) a influência da deformação parasitária ϵ_{My} , produzida pelo momento que eventualmente surgisse no plano perpendicular ao plano de flambagem.

A figura 7.2 mostra o esquema em meia ponte adotado.

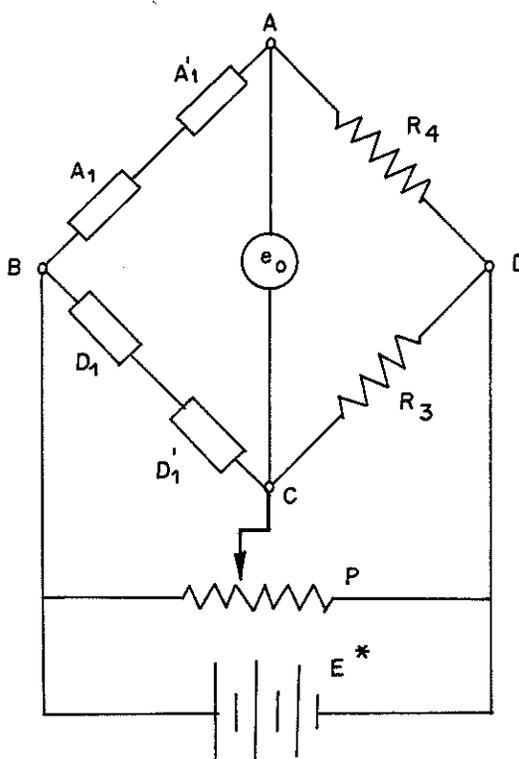


Fig. 7.2 - Esquema em meia-ponte montada para os corpos de prova longos

Para entender-se melhor a aplicabilidade do esquema elétrico adotado faz-se mister que se mostre a posição dos extensômetros A_1 e A'_1 no corpo de prova. Isso é feito através da figura 7.3 .

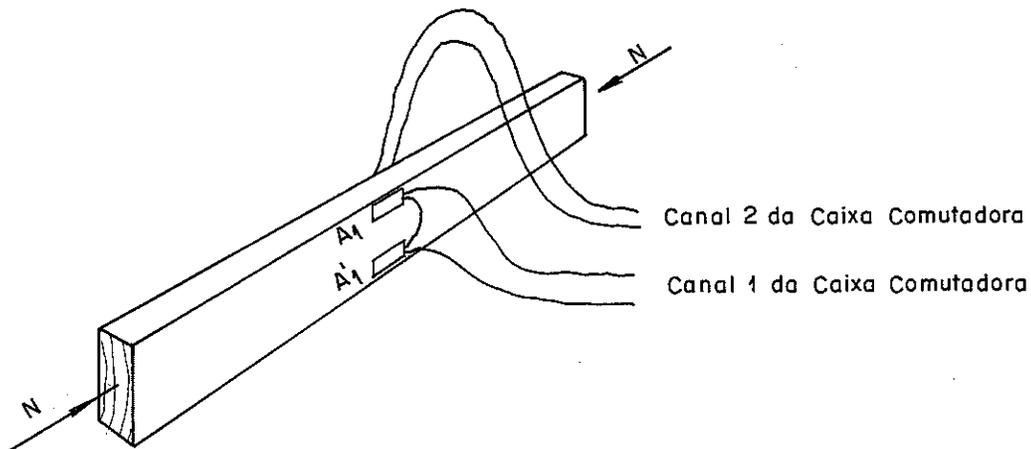


Fig. 7.3 - Posição dos extensômetros ativos A_1 e A'_1 e sua ligação em série

Nessa figura fica subentendido a utilização de duas meia-pontes, uma para cada lado da viga. No caso desses ensaios, os dois extensômetros compensadores D_1 e D'_1 (colados a um pedaço de material idêntico ao do corpo de prova) foram utilizados para os dois canais, o que é mostrado pela montagem da figura 7.4 .

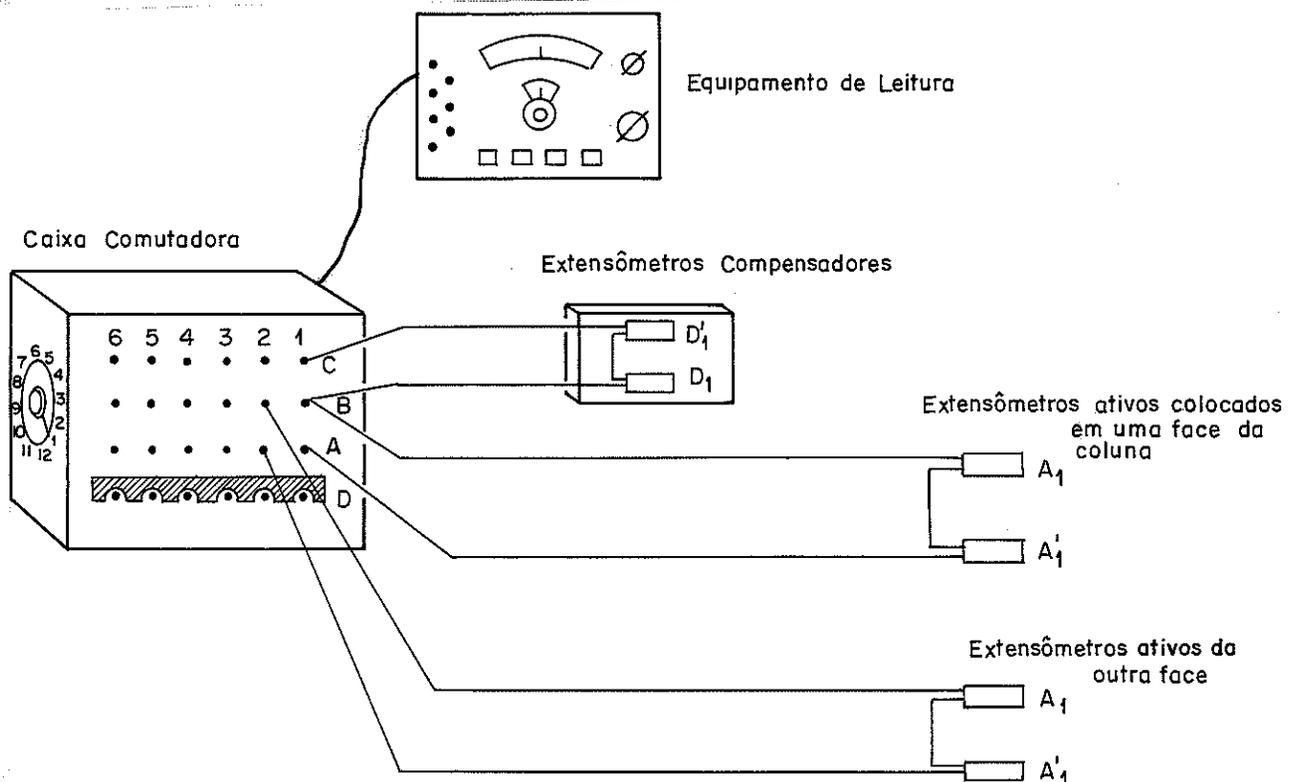


Fig.7.4 - Ligação dos extensômetros ativos e compensadores.

Então, para cada canal tem-se uma meia-ponte, tendo em um braço dois extensômetros ativos em série e no outro, dois extensômetros compensadores, também em série.

Desenvolve-se, agora, a análise do tipo de leitura efetuada.

Os quatro extensômetros eram iguais, com resistência R.

Indicando por:

ΔR_N = variação da resistência R dos extensômetros A_1 e A_1' causada por N.

ΔR_{M_y} e ΔR_{M_z} = variações das resistências R dos extensômetros A_1 e A_1' causadas respectivamente pelos momentos M_y e M_z .

ΔR_t = variação da resistência provocada em cada um dos quatro extensômetros pela temperatura.

pode-se escrever:

$$\frac{\Delta A_1 + \Delta A_1'}{A_1 + A_1'} = \frac{(\Delta R_N + \Delta R_{M_y} + \Delta R_{M_z} + \Delta R_t) + (\Delta R_N - \Delta R_{M_y} + \Delta R_{M_z} + \Delta R_t)}{2 R} \dots (7.1)$$

Os eventuais momentos que surgem no plano vertical (e portanto perpendicular ao plano da flambagem estudada - plano horizontal) produzem variações opostas nas resistências A_1 e A_1' e a menos de pequenas diferenças localizadas do módulo de elasticidade, elas são iguais e de sinais contrários. Portanto, se anulam.

Então a expressão (7.1) fica:

$$\frac{\Delta A_1 + \Delta A_1'}{A_1 + A_1'} = \frac{\Delta R_N + \Delta R_{M_z} + \Delta R_t}{R} \quad (7.2)$$

Para os dois extensômetros passivos tem-se:

$$\frac{\Delta D_1 + \Delta D_1'}{D_1 + D_1'} = \frac{\Delta R_t + \Delta R_t}{2 R} = \frac{\Delta R_t}{R} \quad (7.3)$$

Portanto a leitura (L) que o aparelho acusou usando - se as expressões (7.2) e (7.3), foi:

$$L = \frac{1}{K} \left(\frac{\Delta R_N + \Delta R_{M_z} + \Delta R_t}{R} - \frac{\Delta R_t}{R} \right) \quad (7.4)$$

na qual K é o "fator-gage" do extensômetro.

Observa-se na expressão (7.4) que o efeito da temperatura ficará compensado e as respectivas parcelas ΔR_t se anulam. Então:

$$L = \frac{1}{K} \left(\frac{\Delta R_N + \Delta R_{M_z}}{R} \right) \quad (7.5)$$

Recordando a conhecida expressão para o fator-gage K:

$$K = \frac{\Delta R/R}{\epsilon} \quad (7.6)$$

explicitando ϵ em tal expressão e substituindo em (7.5) tem-se , finalmente, a leitura efetuada:

$$L = \epsilon_N + \epsilon_{M_z} \quad (7.7)$$

A expressão (7.7) mostra que a deformação devida à flexão vertical ϵ_{M_y} fica automaticamente eliminada e que, além disso, a leitura resultante já é a média da indicação dos dois extensômetros ativos A_1 e A_1' .

E mais, a leitura é composta da parcela de deformação (ϵ_N) devida à força normal N, mais a da deformação (ϵ_{M_z}) devido ao momento que ocorre no plano da flambagem M_z .

7.3- A MEIA-PONTE UTILIZADA NOS CORPOS DE PROVA CURTOS

Nos corpos de prova com índice de esbeltez próximo de 40, utilizou-se uma meia -ponte mais simples do que a aquela descrita anteriormente.

Aliás, a meia-ponte adotada é a tradicional, com um extensômetro ativo, e um passivo. Se forem eliminados os extensômetros A_1' e D_1' na figura 7.2, obtém-se a meia-ponte utilizada.

Nestes casos o extensômetro ativo foi colado a meia altura na viga, como se vê na figura 7.5.

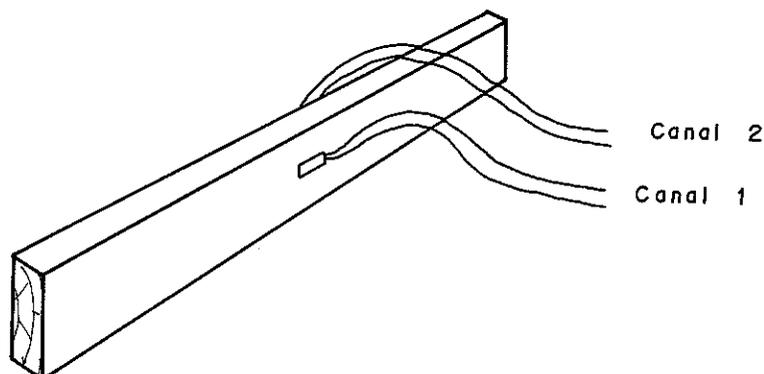


Fig. 7.5 - Posição dos extensômetros ativos A_1 nas duas faces do corpo de prova

Procedendo-se da mesma maneira anterior quanto à análise da leitura efetuada, tem-se para o extensômetro ativo A_1 :

$$\frac{\Delta A_1}{A_1} = \frac{\Delta R_N + \Delta R_{My} + \Delta R_{Mz} + \Delta R_t}{R} \quad (7.8)$$

Como o extensômetro é colado nas imediações da linha neutra para efeito do momento vertical, a variação ΔR_{My} é desprezível (ou mesmo nula) e portanto (7.8) reduz-se a:

$$\frac{\Delta A_1}{A_1} = \frac{\Delta R_N + \Delta R_{Mz} + \Delta R_t}{R} \quad (7.9)$$

Para o extensômetro passivo D_1 :

$$\frac{\Delta D_1}{D_1} = \frac{\Delta R_t}{R} \quad (7.10)$$

Assim sendo, a leitura (L) que o aparelho forneceu foi:

$$L = \frac{1}{K} \left(\frac{\Delta R_N + \Delta R_{Mz} + \Delta R_t}{R} - \frac{\Delta R_t}{R} \right) \quad (7.11)$$

a qual se reduz à equação (7.5) já obtida:

$$L = \frac{1}{K} \left(\frac{\Delta R_N + \Delta R_{Mz}}{R} \right)$$

que pode ser escrita como a (7.7):

$$L = \epsilon_N + \epsilon_{Mz}$$

Aqui a análise é a mesma efetuada no item anterior.

7.4- MONTAGEM DOS EQUIPAMENTOS DE CARGA

O Laboratório de Madeiras e de Estruturas de Madeira (LaMEM) conta com uma viga de reação, a qual tem uma altura de 40 cm totalmente enterrada, de maneira que a face superior, medindo 1,60 x 12,00m, se situa no plano do chão. A figura 7.6 mostra corte e planta de tal viga.

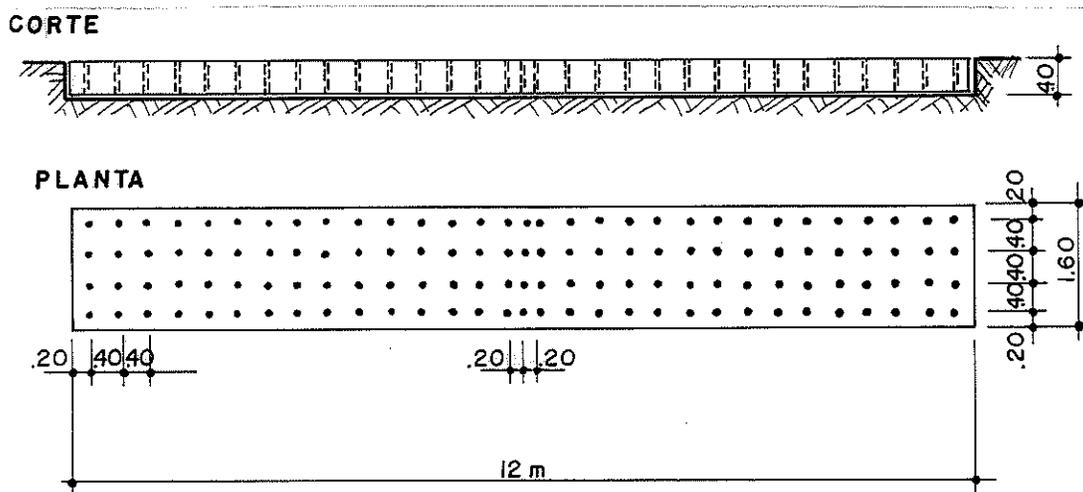


Fig. 7.6 - Viga de reação do LaMEM

Esta viga de reação contém 124 furos, espaçados como mostrado na figura 7.6, que a percorrem em toda a altura, preenchidos por tubo de aço com porcas de reação ao seu final. Assim sendo, barras de aço com pontas rosqueadas podem ser fixadas no fundo do furo, como se pode ver na figura 7.7.

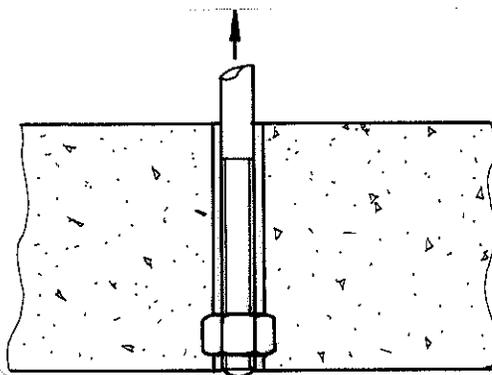


Fig. 7.7 - Furo com porca, na viga de reação, dentro do qual pode-se fixar barras de aço para montagens de equipamentos de carga.

Como foi dito no início deste capítulo, os ensaios envolvem colunas de grande comprimento, o que exigiu a decisão de efetuá-los com o corpo de prova (C.P.) na posição horizontal. Logicamente, as montagens das estruturas de apoio ocorreram sobre a viga de reação anteriormente descrita, e as fotos, a seguir, mostram alguns detalhes, bem como, vistas parciais do ensaio.

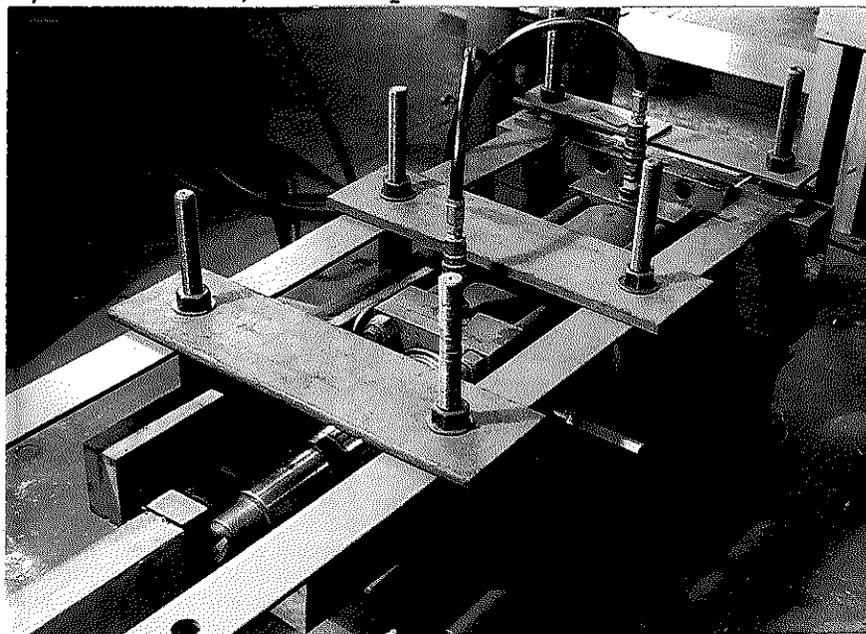


Foto 7.4.1- Estrutura de fixação do cilindro hidráulico de compressão

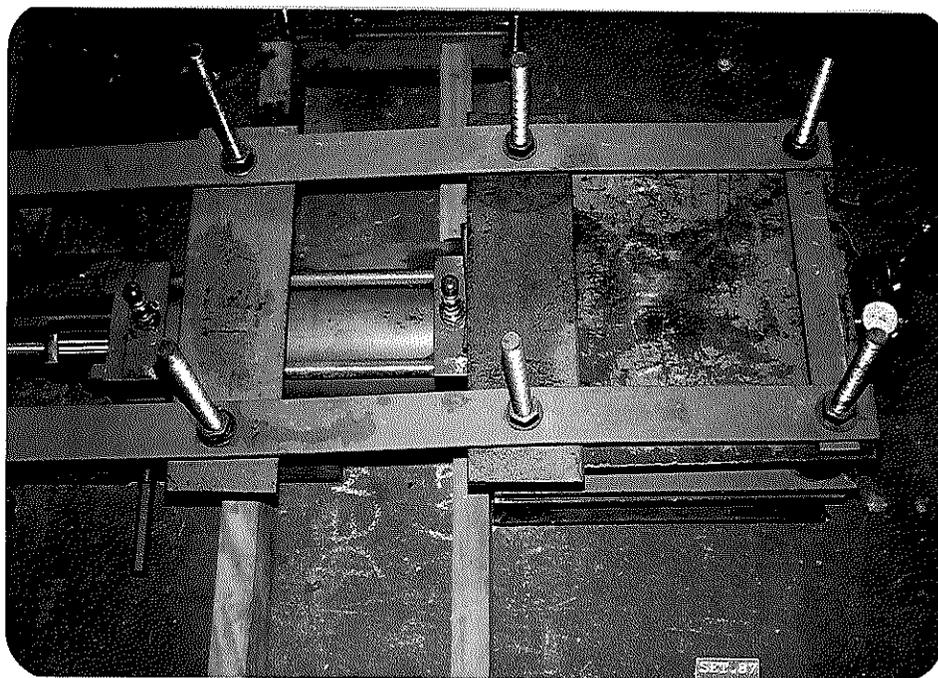


Foto 7.4.2- Cilindro hidráulico fixo, trabalhando na extremidade oposta

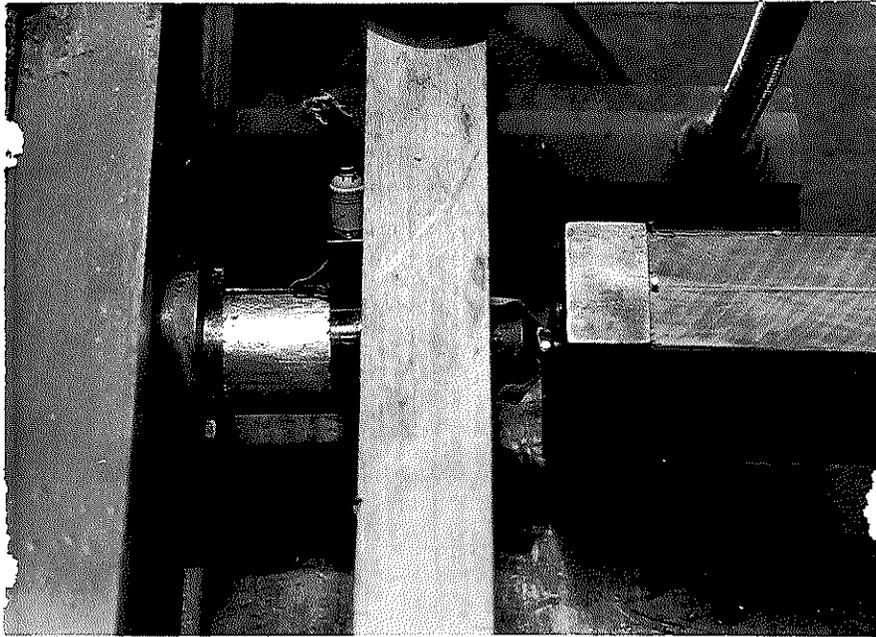


Foto 7.4.3- Estrutura de apoio da célula de carga e articulação (esfera de aço) da extremidade do CP.

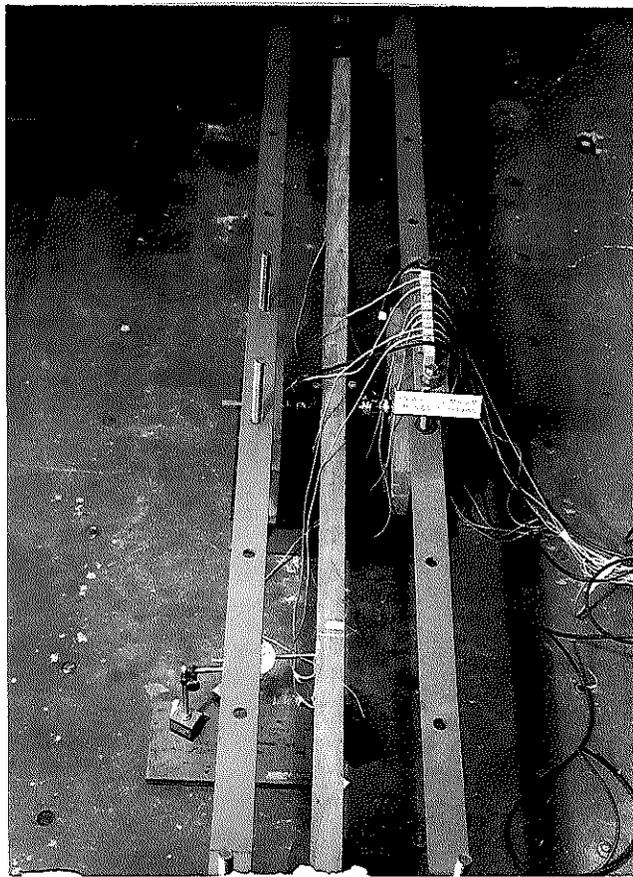


Foto 7.4.4- Barras de conexão entre as estruturas de fixação, e CP instrumentado.

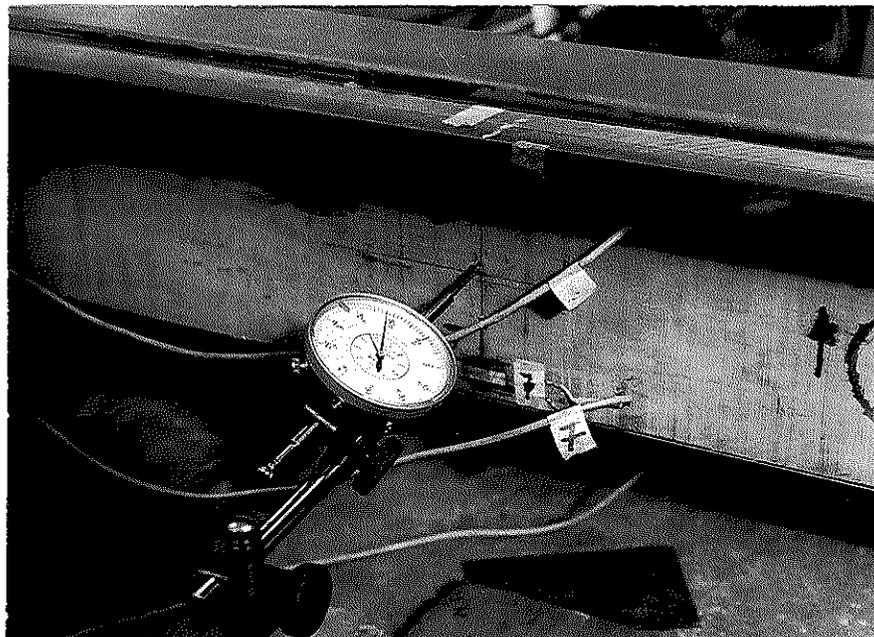


Foto 7.4.5- Vista parcial da instrumentação do CP com extensômetros elétricos resistivos (tração-compressão), e relógio comparador (flecha).

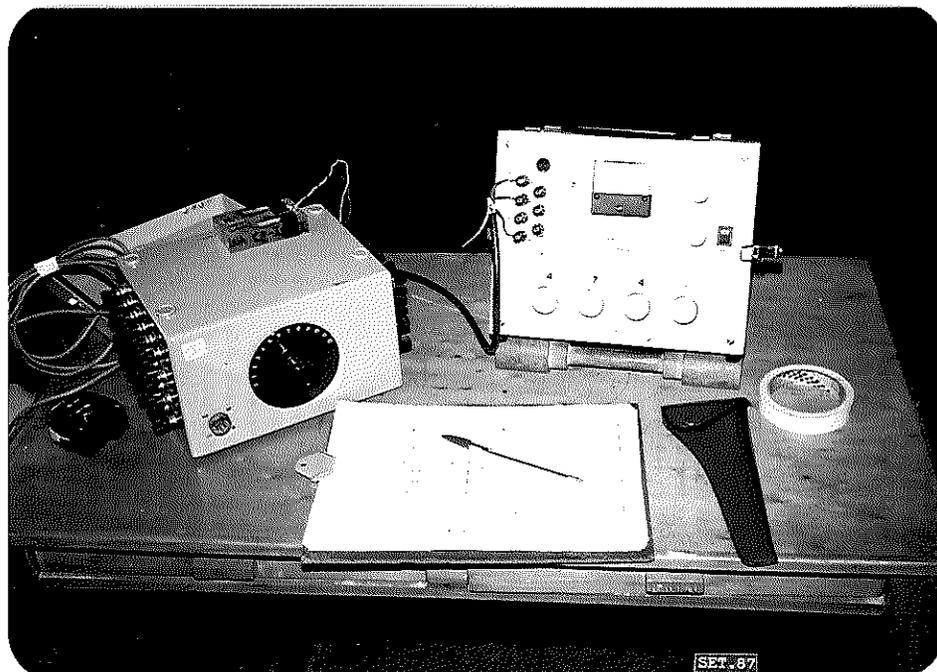


Foto 7.4.6- Equipamento de leitura dos extensômetros resistivos

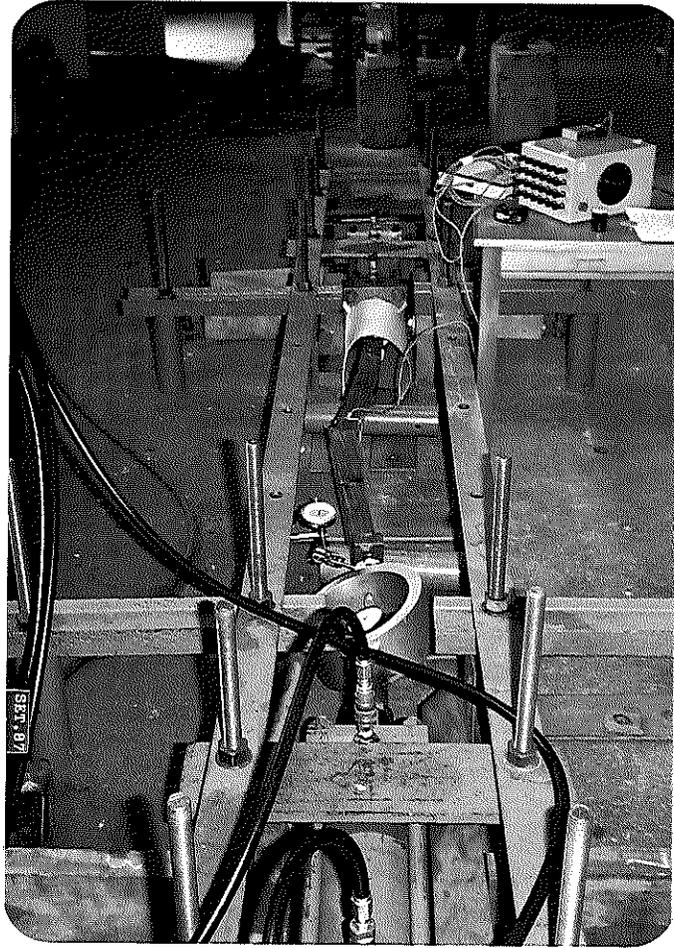


Foto 7.4.7- C.P. rompido, utilizando anel dinamométrico na leitura das cargas

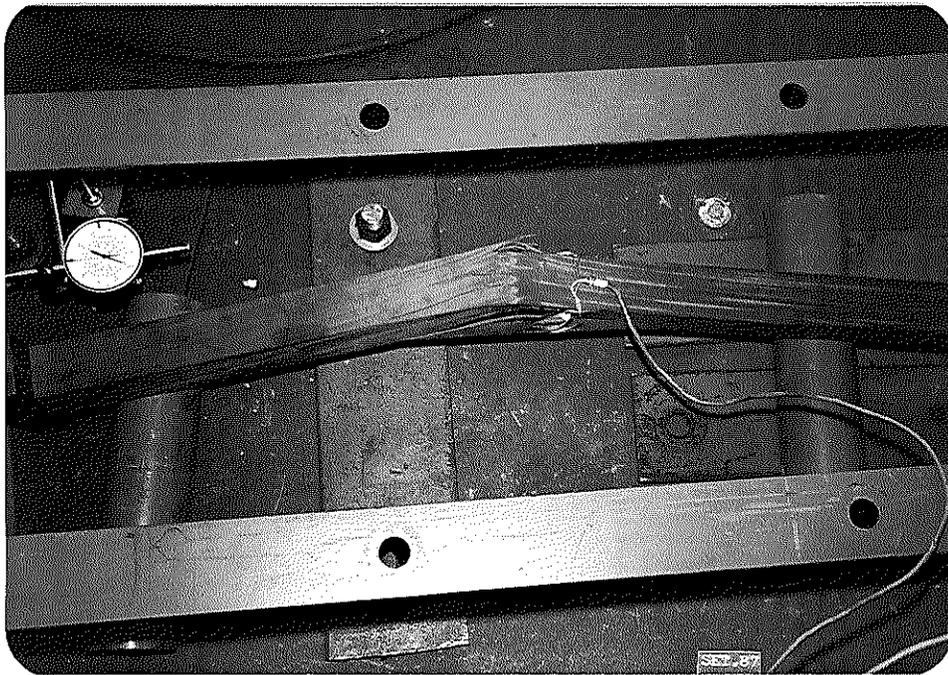


Foto 7.4.8- Outra vista do CP da foto anterior

7.5- OS APOIOS DAS COLUNAS ENSAIADAS

A experimentação visou o carregamento no Centro Geométrico das faces extremas da coluna. Para tanto, utilizou-se o ponto de cruzamento das duas diagonais da face.

Sobre o ponto assim encontrado, ajustou-se uma cabeça metálica, como mostrado na figura 7.8, com um prego auxiliar o qual passava provisoriamente dentro de um furo central no rebaixo semi-esférico (travesseiro da esfera metálica de apoio).

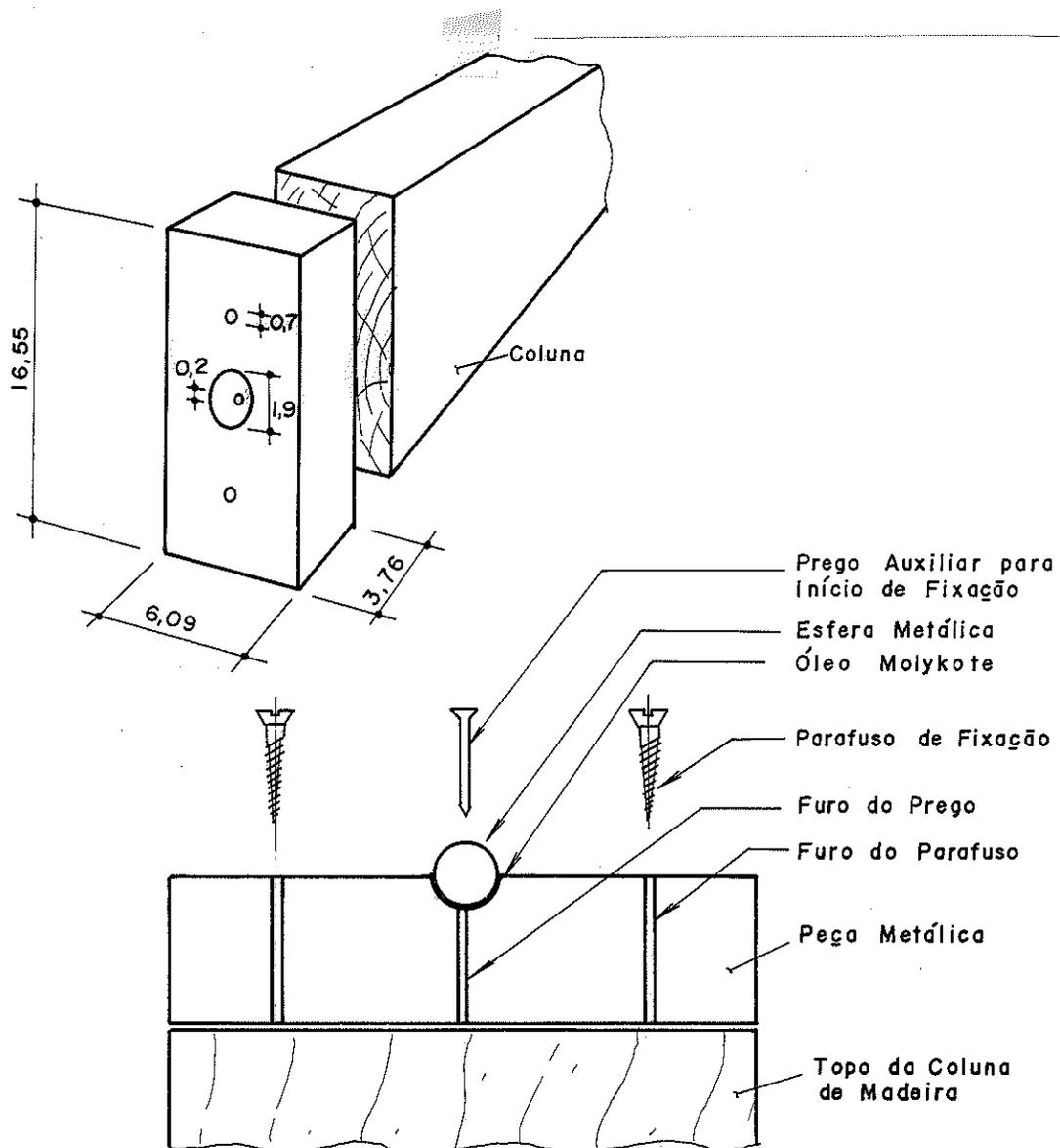


Fig. 7.8 - Fixação de peça metálica para produzir apoio articulado com esfera metálica.

Em seguida, fixava-se a peça metálica na cabeça da coluna através de 2 parafusos. Retirava-se, então, o prego, deixando-se livre a concavidade onde iria trabalhar a esfera metálica.

Tanto o rebaixo semi-esférico, acima citado, quanto a esfera metálica eram lubrificadas com óleo MOLYKOTE, fluido formado por uma suspensão estável do bissulfeto de Molibdênio, purificado em partículas microfinas. Logicamente, a complementação semi-esférica, fixada no macaco hidráulico, figura 7.9, também era lubrificada com tal óleo.

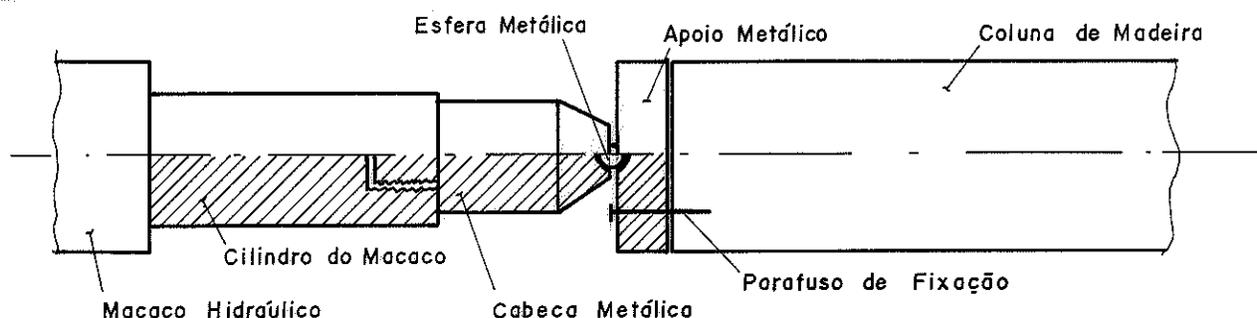


Fig. 7.9 - Apoio da coluna (meio-corte abaixo do eixo central)

O óleo MOLYKOTE, embora seja originalmente um lubrificante adicional de motores, tem se constituído em um dos mais eficazes lubrificantes para peças metálicas em contato nos ensaios de laboratório. As suas partículas microfinas agem como se fossem as esferas de um rolimã, permitindo uma alta mobilidade entre as peças e baixíssimo atrito, além de não exigir reposição de óleo durante a experimentação.

A foto 7.4.3 mostra mais detalhes do apoio.

7.6 - O EQUIPAMENTO DE CARGA

Tanto o macaco hidráulico, quanto a unidade geradora de pressão eram da marca SPERRY - VICKERS.

Utilizaram-se macacos hidráulicos de várias capacidades, variando de acordo com a série de tamanhos dos corpos de prova ensaiados.

Assim, foram utilizados macacos com capacidade para 40 kN, 100 kN, 200 kN, 250 kN (4, 10, 20 e 25 tf, respectivamente).

O painel de comando para controle da carga permitia que se parasse o carregamento em determinado valor constante, maneira pela qual se conseguiu efetuar as leituras nos strain-gages (extensômetros elétricos) nos diversos estágios de carga, durante o ensaio.

As fotos 7.4.1, 7.4.2 e 7.4.7 mostram detalhes da fixação dos macacos hidráulicos na viga de reação.

7.7- OS EQUIPAMENTOS DE LEITURA

Para a leitura das flechas utilizaram-se relógios comparadores da marca MITUTOYO, um dos quais pode ser observado na foto 7.4.5.

A ligação dos extensômetros ativos e compensadores já foi mostrada na figura 7.4. O indicador de deformação utilizado, modelo T.832-TRANSDUTEC, e caixa comutadora de 12 canais, marca HUGGENBERGER - ZÜRICH, aparecem na foto 7.4.6.

Cabe observar aqui como são efetuadas as leituras no indicador de deformação utilizado. Tem-se 4 janelas, sendo que nas 3 primeiras, à esquerda, observam-se algarismos simples de 0 a 9. Na última janela, à direita, tem-se um dial que indica valores de 00 a 99 (figura 7.10).

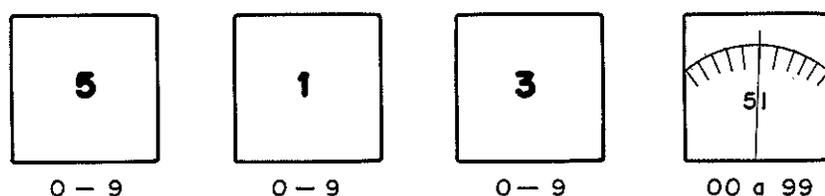


Fig. 7.10 - Painel do indicador de deformações TRANSDUTEC

Assim, a leitura a ser efetuada na figura 7.10 será 51.351.

É necessário, no início da experimentação efetuar-se uma leitura inicial, a qual será deduzida das leituras obtidas posteriormente durante os ensaios. Supondo-se que a leitura inicial foi 50.000 e uma leitura intermediária qualquer tenha sido 51.351, a de

formação específica (ϵ) obtida é a diferença multiplicada por 10^{-6} , ou seja:

leitura inicial	50.000
leitura do ensaio	51.351
diferença	1.351
deformação específica (ϵ)	$1351 \times 10^{-6} = 0,001351$

Nos ensaios, efetuamos a leitura no indicador de deformação de tal modo que o dial da 4ª janela fornecesse as casas decimais. Assim, por exemplo, o painel da figura 7.10 seria lido 513,51. Logicamente, neste caso, as diferenças foram multiplicadas por 10^{-4} para obter-se o valor da leitura. No exemplo acima teríamos:

$$513,51 - 500,00 = 13,51 \rightarrow \Delta\epsilon = 13,51 \times 10^{-4} = 0,001351$$

CAPÍTULO 8

EXPERIMENTAÇÃO E RESULTADOS

8.1- INTRODUÇÃO

Este capítulo refere-se ao trabalho experimental cujo objetivo foi o de estudar-se a excentricidade equivalente adicional (e_a). Descreve-se, nele, os corpos de prova, os ensaios efetuados e os resultados obtidos. O material, como já descrito, foi o Ipê-amarelo (Tecoma eximia).

8.2- OS CORPOS DE PROVA

Os C.P.'s (aqui C.P. = corpo de prova) utilizados na experimentação foram batizados por uma sigla composta de "IPE", seguido de um número e uma letra, sendo, esta última, escolhida entre A e B.

A letra A designou uma peça nova, ou seja, ainda não ensaiada. Por outro lado, a letra B, os C.P.'s que foram obtidos das extremidades de C.P.'s maiores, já ensaiados antes (C.P.'s da família A).

É conveniente observar que os C.P.'s "B" foram sempre retirados de C.P.'s "A" que trabalharam em regime elástico, e portanto não apresentaram deformação permanente. Além disso, nas extremidades, as tensões de flexão são menores do que no centro da peça, de maneira que tais trechos sofreram pouca deformação e ficaram longe do ponto crítico que caracterizaria deformação permanente. As

sim, por exemplo, o C.P. - IPE - VII-A, com 164,2 cm de comprimento, gerou o C.P.-IPE-VII-B com 94 cm de comprimento. O primeiro corpo de prova citado tinha índice de esbeltez em torno de 100 (fase elástica), enquanto o segundo, 60 (fase inelástica).

A TABELA 8.1 apresenta, em resumo, as designações e dimensões dos C.P.'s ensaiados, segundo os grupos de índice de esbeltez (λ).

TABELA 8.1

	Grupo de λ	C.P.	Distância de Centro a Centro entre Esferas (cm)	Seção (cm x cm)	λ Efetivo
01	162,5	IPE-2-A	269,64	5,750x7,800	162,44
02	155	IPE-1-A	264,44	5,825x7,800	155,26
03		IPE-I-A	245,00	5,850x7,720	145,08
04	145	IPE-III-A	230,40	5,455x6,860	146,25
05		IPE-IV-A	229,20	5,450x7,370	145,68
06	135	IPE-II-A	230,00	5,800x7,640	137,37
07	125	IPE-V-A	197,20	5,470x7,340	124,95
08		IPE-VI-A	197,80	5,445x7,350	125,84
09	105	IPE-VII-A	164,30	5,435x7,305	104,75
10		IPE-VIII-A	164,00	5,455x7,310	104,53
11	90	IPE-IX-A	142,30	5,490x7,270	89,79
12		IPE-X-A	142,50	5,483x7,090	90,08
13	75	IPE-XI-A	119,90	5,530x7,530	74,98
14		IPE-XII-A	119,40	5,533x7,525	74,99
15		IPE-XIII-A	105,55	5,238x7,315	69,55
16		IPE-XIV-A	105,60	5,218x7,355	70,35
17	70	IPE-XV-A	106,20	5,290x7,300	69,54
18		IPE-I-B	114,20	5,675x7,200	69,71
19		IPE-II-B	117,00	5,805x7,635	69,82
20		IPE-III-B	108,67	5,433x6,825	69,47

(continua)

(cont. TABELA 8.1)

21		IPE-XVI-A	81,00	4,695x7,360	59,76
22		IPE-XVII-A	81,10	4,700x7,045	59,77
23		IPE-XVIII-A	81,10	4,700x7,045	59,77
24	60	IPE-VII-B	94,00	5,440x7,300	59,86
25		IPE-VIII-B	94,00	5,440x7,300	59,86
26		IPE-IX-B	94,50	5,480x7,180	59,74
27		IPE-X-B	94,40	5,480x7,070	59,67
28		IPE-XIX-A	51,00	3,554x5,478	49,71
29		IPE-XXI-A	56,60	3,940x6,000	49,76
30		IPE-XXII-A	59,20	4,100x5,844	50,02
31	50	IPE-XXIV-A	59,20	4,100x5,850	50,02
32		IPE-IV-B	78,00	5,435x7,300	49,71
33		IPE-XIII-B	59,10	4,100x5,850	49,93
34	45	IPE-XX-A	56,80	4,350x6,000	45,23

Trabalhou-se com grupos de C.P.'s com índices de esbeltez (λ) variando de 45 a 162,5.

A umidade, como já foi visto anteriormente, ficou entre 10 e 12% (TABELA 6.1), uma variação que é normal e pode ser considerada como não tendo influência nas propriedades estruturais da madeira, dentro dessa faixa, e portanto, sobre os resultados.

8.3- INSTRUMENTAÇÃO E MEDIDAS EFETUADAS

Para acompanhar-se o movimento axial do apoio móvel instalou-se um relógio comparador próximo à esfera (foto 7.4.7).

As medidas das flechas no centro do C.P. foram obtidas de outro relógio comparador instalado com tal finalidade (foto 7.4.5).

Nos ensaios em que os esforços a serem aplicados eram grandes, foram colocados 2 relógios comparadores, cada um ficando na parte posterior das placas de fixação dos apoios, para monitorar-se os eventuais deslocamentos axiais que ali pudessem ocorrer.

Foram cronometrados os tempos entre leituras, com o objetivo de manter-se mais ou menos constante o tempo de carregamento entre etapas.

Finalmente, os extensômetros elétricos resistivos (strain-gages) foram fixados nos C.P.'s, como já amplamente descrito e discutido no capítulo 7. As leituras foram denominadas por canal 1 e 2.

Os C.P.'s longos foram ensaiados, geralmente, 3 a 4 vezes; em seguida girados axialmente de 180° e ensaiados mais 3 a 4 vezes, num total de 6 a 8 ou 9 ensaios por C.P.

Os C.P.'s na fase inelástica foram ensaiados uma única vez, de uma maneira geral.

Foram efetuadas leituras em torno de 10 estágios de carga para cada C.P.. Como já foi descrito, a primeira leitura foi efetuada com carregamento nulo devido ao tipo de indicador de deformação utilizado.

Os resíduos registrados foram aqueles medidos imediatamente após o descarregamento.

Os ensaios sobre o mesmo C.P. foram espaçados de um mínimo de meia hora, tempo no qual os resíduos de deformação praticamente desapareceram, quando dos ensaios na fase elástica.

8.4- PREPARAÇÃO DOS RESULTADOS

8.4.1- Método de Southwell

Para obter-se as excentricidades equivalentes adicionais (e_a) optou-se pelo Método de Southwell, o qual já foi discutido no Capítulo 4.

Em linhas gerais, se se plota em um gráfico a relação f/N (onde f é a flecha e N é a carga axial) como abscissa e f como ordenada (figura 8.1), e se as deformações iniciais variam senoi -

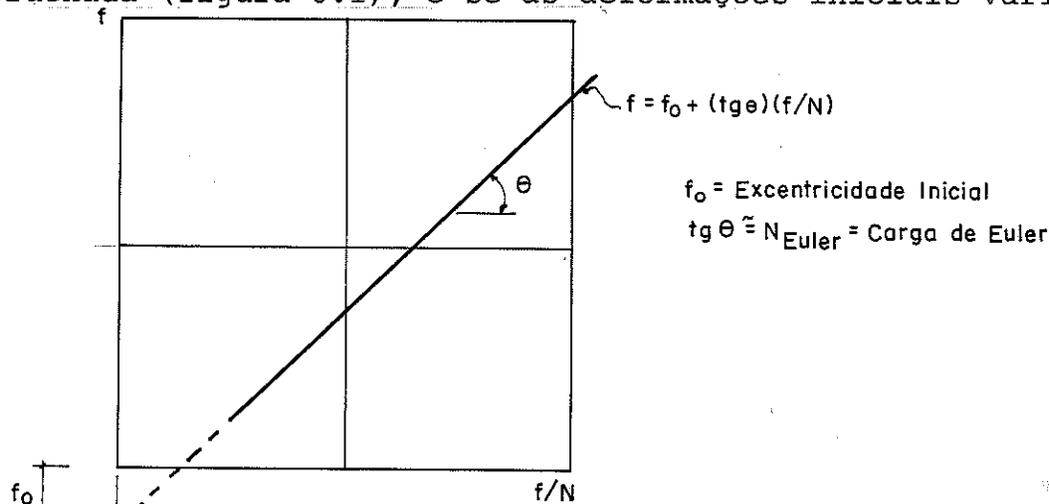


Fig. 8.1- Adaptação do Método de Southwell

dalmente, os pontos plotados formarão uma reta, a qual cruzará o eixo coordenado exatamente no valor estimado da excentricidade equivalente adicional (e_a).

8.4.2- A Extensão do Método de Southwell

Sobre esta linha de raciocínio, e apoiados no trabalho de WANG (1948), já citado, que demonstra a extensão da validade do Método de Southwell para as colunas inelásticas, a pesquisa abrangeu também o caso inelástico.

Batizou-se por facilidade, o método com o nome de Método de Southwell para Excentricidades, ou, abreviadamente, MSE.

Esta preparação dos dados, portanto, vai ser a aplicação do MSE para as flechas centrais, e a aplicação do MSE para as deformações específicas. Mais detalhes serão dados nos itens seguintes.

AS regressões foram obtidas usando-se o programa estatístico MINITAB.

8.4.3- Aplicação do MSE para as Flechas Centrais

A partir dos dados obtidos nos relógios comparadores para as medidas de flechas centrais, aplicou-se o MSE, que, no caso, se resumiu na obtenção de uma reta através de uma regressão linear.

Mais especificamente, para exemplificar, tome-se o caso do C.P.-IPE-I-A. No 1º ensaio obteve-se:

TABELA 8.1

CARGA	FLECHA
3	0
30	17
60	35
90	57,5
120	89,5
150	133,5
180	198,00
210	294,5

Considerando-se que o anel de carga utilizado tem uma constante igual a 16,91, e que o relógio comparador é de centésimo de milímetro, as leituras efetuadas significam (TABELA 8.2).

TABELA 8.2

ORDEM	CARGA (P)		FLECHA (Δ) (cm)
	(kgf)	(N)	
1	50,73	507,3	0,000
2	507,30	5.073,0	0,017
3	1.014,60	10.146,0	0,035
4	1.521,90	15.219,0	0,0575
5	2.029,20	20.292,0	0,0895
6	2.536,50	25.365,0	0,1335
7	3.043,80	30.438,0	0,198
8	3.551,10	35.511,0	0,2945

Como o MSE necessita dos valores (Δ/P) e o valor de $P_{inicial}$ é zero, ou próximo de zero (para resolver o problema prático de se manter as 2 esferas extremas presas aos seus alojamentos, foi aplicada pequena carga inicial), o primeiro par de pontos (0,0) é sempre desprezado, para evitar-se divisão por zero. O conjunto de pontos fica:

TABELA 8.3

ORDEM	Δ (x 10^{-3} cm)	Δ/P (x 10^{-7} cm/N)
1	17,0	33,5107
2	35,0	34,4964
3	57,5	37,7817
4	89,5	44,1061
5	133,5	52,6316
6	198,0	65,0503
7	294,5	82,9321

Desta maneira, a primeira regressão leva à equação:

$$\Delta = -153,532 + 5,4199 (\Delta/P)$$

com $R^2 = 99,7\%$

Omitindo-se o primeiro ponto do conjunto (17; 33,5107) passa-se a ter um conjunto de 6 pontos que resulta:

$$\Delta = -144,999 + 5,29339 (\Delta/P)$$

com $R^2 = 100,00\%$

O coeficiente independente - 144,999 representa a excentricidade equivalente adicional (e_a), ou seja, $e_a = 0,145\text{cm} \approx 1,5\text{mm}$. A figura 8.2 mostra graficamente o que ocorre:

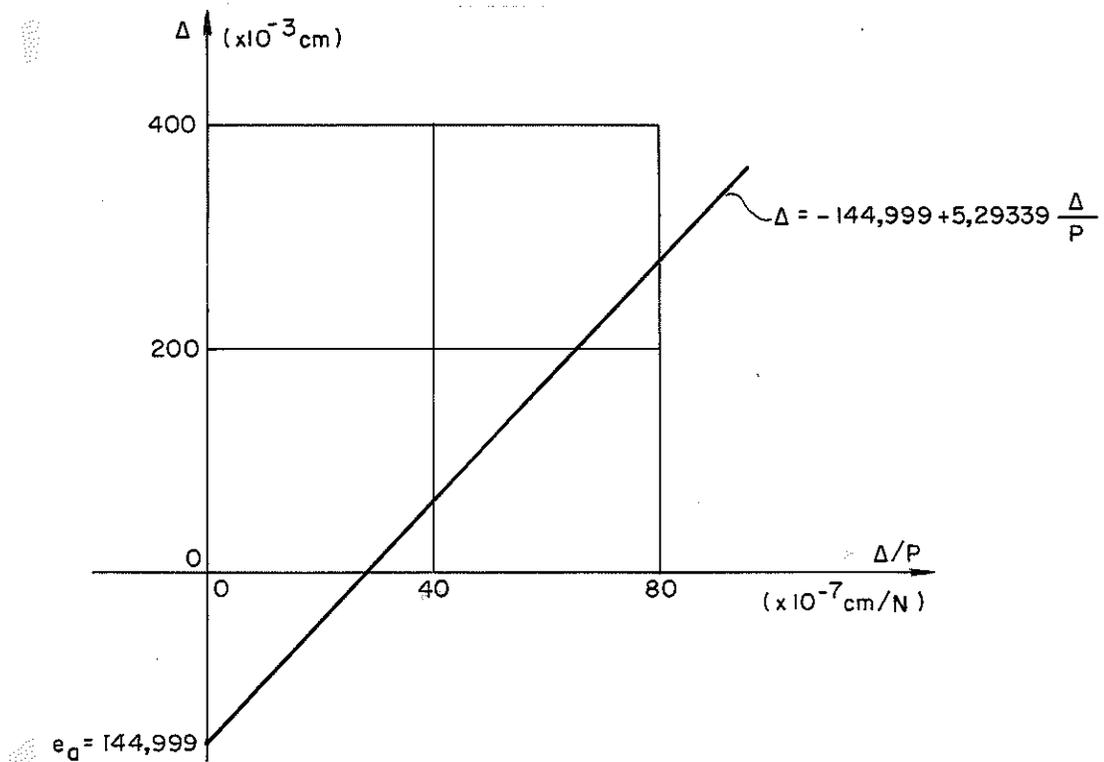


Fig. 8.2- Obtenção da excentricidade equivalente adicional, usando o MSE para os resultados obtidos pelas leituras das flechas da coluna.

Tendo por base as observações feitas no Capítulo 4 de que os pontos mais afastados dariam melhores resultados para o Método de Southwell, resolveu-se fazer várias regressões sobre o conjunto de pontos, retirando-se, a cada vez, um ponto. Utilizou-se o coeficiente de explicação R^2 (eq. 6.8) para controlar-se a precisão desejada.

Na TABELA 8.4, a seguir, a primeira coluna contém o nome do C.P., as 4 colunas seguintes se referem ao resultado das regressões acima descritas para as leituras da flechas, ou seja:

n = número de pontos que entraram na regressão

R^2 = coeficiente de explicação

a = termo independente da reta de regressão

b = coeficiente de inclinação da reta de regressão

Então, o valor " a " representa a excentricidade equivalente adicional (e_a), enquanto que o valor " b ", a carga de Euler para

as colunas na fase elástica. Para a fase inelástica, "b" não teria um significado relevante.

8.4.4- Aplicação do MSE para as deformações específicas ϵ

A preparação dos dados neste item tem por base as leituras que foram efetuadas dos strain-gages colados nas duas faces opostas da coluna, como já descrito no Capítulo 7.

Para essa preparação utilizou-se a reta obtida a partir da equação (4.7), ou seja:

$$\Delta\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1 = \bar{\delta}_1 (\pi/L)^2 t \frac{1}{(P_1/P) - 1}$$

onde L é o comprimento da coluna, t é a espessura, e P_1 é a primeira carga crítica.

Então:

$$\Delta\epsilon (P_1/P) - \Delta\epsilon = \bar{\delta}_1 (\pi/L)^2 t$$

$$\Delta\epsilon = - \bar{\delta}_1 (\pi/L)^2 t + P_1 \left(\frac{\Delta\epsilon}{P} \right) \quad (8.1)$$

ou, ainda:

$$\Delta\epsilon = a' + b \left(\frac{\Delta\epsilon}{P} \right) \quad (8.2)$$

onde:

$$a' = - \bar{\delta}_1 (\pi/L)^2 t \quad (8.3)$$

Daí, para obter-se o valor procurado $\bar{\delta}_1$, basta explicitá-lo na equação (8.3):

$$a = \bar{\delta}_1 = - \frac{a'}{(\pi/L)^2 t} \quad (8.4)$$

A TABELA 8.4 mostra as várias regressões feitas para cada conjunto de pontos, nas suas últimas 5 colunas, onde:

n = número de pontos que entraram na regressão

R^2 = coeficiente de explicação

a' = termo independente da reta de regressão

b = coeficiente de inclinação da reta de regressão

$a = \bar{\delta}_1 =$ obtido a partir da equação (8.4).

A análise dos valores das duas colunas "a" da TABELA 8.4 será feita no CAPÍTULO 9.

TABELA 8.4

Corpo de Prova	Regressões das Flechas				Regressões das Deformações Específicas				
	n	R ²	a	b	n	R ²	a'	b	a
			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou(tf)			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou(tf)	(x10 ⁻³ cm)
IPE-2-A-1	9	94,5	-19,360	2,8850	9	99,2	-0,82229	3,9103	-105,35
	8	98,5	-47,940	3,2507					
	7	99,4	-63,070	3,4207					
IPE-2-A-2	8	98,1	-105,55	3,8913					
	7	99,3	-106,045	3,8407					
	6	99,4	-101,282	3,7743					
	5	99,8	-111,835	3,92701					
IPE-2-A-3	8	97,1	-41,75	2,9438	8	93,7	-0,7053	3,2790	- 90,36
	7	97,3	-49,74	3,0636	7	99,3	-1,14174	3,9811	-146,17
	6	99,2	-72,031	3,3966					
	5	99,8	-86,023	3,58922					
IPE-2-A-4	8	96,9	-45,93	2,9412	8	98,4	-0,9771	3,6205	-125,18
	7	97,8	-59,41	3,1290	7	98,9	-1,1034	3,7986	-141,36
	6	99,4	-80,873	3,4175	6	99,9	-1,30128	4,06898	-166,71
	5	99,8	-94,523	3,58734	5	100,0	-1,28077	4,05023	-164,09
IPE-2-A-5	8	91,4	-16,23	2,5483	8	93,8	-0,5157	3,0599	- 66,07
	7	96,8	-49,41	3,0799	7	99,2	-0,90370	3,6839	-115,78
	6	99,2	-76,175	3,4683	6	99,6	-0,86238	3,6426	-110,48
	5	100,0	-93,327	3,69681					
IPE-2-A-6	9	99,8	-110,419	3,92126	9	99,5	-1,24693	4,2977	-159,75
	8	99,9	-117,017	4,00570					
IPE-2-A-7	11	99,6	-68,331	3,31252	11	98,2	-0,9184	3,5780	-117,66
					10	99,1	-0,8134	3,4996	-104,21

TABELA 8.4 (cont.)

Corpo de Prova	Regressões das Flechas				Regressões das Deformações Específicas				
	n	R ²	a	b	n	R ²	a'	b	a
			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou (tf)			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou (tf)	(x10 ⁻³ cm)
IPE-2-A-8	9	99,3	-98,833	3,3589	9	99,3	-0,75234	3,4534	-96,39
	8	99,6	-109,065	3,44514	8	99,7	-1,16214	3,79572	-126,94
IPE-2-A-9	8	98,1	-91,60	3,3394	8	99,0	-1,21070	3,9065	-148,89
	7	99,6	-113,613	3,59660	7	99,2	-1,14695	3,8261	-155,11
	6	99,9	-124,419	3,71371	6	99,6	-1,28205	4,0033	-146,94
		Média =	96,401					Média =	-136,559
		s =	21,296					s =	27,825
IPE-1-A-1	8	98,9	-89,44	3,1627	8	98,8	-0,72123	3,1862	-87,73
	7				7	99,4	-0,84404	3,3303	-102,66
	6				6	99,3	-0,8699	3,3581	-105,81
	5				5	100,0	-1,04804	3,54891	-127,48
IPE-1-A-2	7	99,5	-73,370	3,11949	7	98,3	-0,84329	3,5543	-102,57
	6				6	99,9	-0,74992	3,40212	-91,22
IPE-1-A-3	7	98,3	-83,144	3,182466	7	96,0	-0,8808	3,7167	-107,14
	6	99,6	-100,916	3,442893	6	99,6	-0,76200	3,5194	-92,69
IPE-1-A-4		não regrediu			5	99,9	-0,83306	3,65576	-101,33
IPE-1-A-5	7	99,4	-80,968	3,6519		não regrediu			
	6				7	72,6	+0,0944	1,4905	+11,48
	5				6	98,6	-0,49124	3,4048	-59,75
IPE-1-A-6	7	89,4	-209,27	5,7343	5	99,0	-0,44222	3,2797	-53,79
	6	92,8	-195,27	5,5261	7	91,0	-0,19696	2,5216	-23,96
					6	97,3	-0,41055	3,1840	-49,94

TABELA 8.4 (cont.)

Corpo de Prova	Regressões das Flechas				Regressões das Deformações Específicas				
	n	R ²	a	b	n	R ²	a'	b	
			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou(tf)			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou(tf)	
IPE-III-A-1	7	96,8	- 99,20	4,6109	7	93,4	+0,0461	3,0971	+ 4,56
	6	97,5	-111,97	4,7957	6	98,7	-0,16925	3,6273	- 16,69
	5	99,3	- 93,60	4,5659	5	98,9	-0,22742	3,7412	- 22,42
	4				4	99,6	-0,36608	4,0067	- 36,09
IPE-III-A-2	11	96,2	-189,63	5,8568	11	99,5	-0,29831	4,14084	- 29,41
	10	99,6	-163,104	5,5756	10	99,7	-0,35058	4,22189	- 34,57
	9	99,8	-151,850	5,44353	9	99,9	-0,41683	4,32272	- 41,10
IPE-III-A-3	8	95,6	-184,84	5,7841	8	98,3	-0,24908	3,9366	- 24,56
	7	99,4	-160,88	5,5235	7	99,7	-0,38380	4,1769	- 37,84
IPE-III-A-4	6	99,8	-148,299	5,3673					
	8	99,6	-122,153	4,6962	8	98,8	-0,9804	4,3560	- 96,67
IPE-III-A-5	7	99,9	-134,852	4,82936	7	99,8	-1,22956	4,59183	-121,23
	7	99,2	- 95,84	4,3220	7	99,8	-1,07378	4,53930	-105,87
IPE-III-A-6	6	99,7	-108,228	4,4713	6	99,9	-1,12383	4,60319	-110,81
	5	99,9	-110,049	5,4650					
IPE-III-A-6	8	99,6	- 97,423	4,4063	8	99,5	-0,8696	4,2394	- 85,74
	7	99,8	-106,996	4,50238	7	99,7	-0,98617	4,34336	- 97,23
	Média =		-124,274		6	99,9	-0,91015	4,28550	- 89,74
	s =		24,047					Média =	- 72,802
IPE-IV-A-1	9	95,6	-180,92	6,0756	9	99,3	-0,59448	4,7059	- 58,06
	8	99,6	-158,274	5,8532	8	99,8	-0,70818	4,86512	- 69,16
	7	99,9	-147,970	5,72810	7	100,0	-0,76681	4,93941	- 74,89

TABELA 8.4 (cont.)

Corpo de Prova	Regressões das Flechas				Regressões das Deformações Específicas				
	n	R ²	a	b	n	R ²	a'	b	
			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou (tf)			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou (tf)	
IPE-IV-A-2	7	99,6	- 42,311	4,5105	6	69,6	-1,574	5,045	-153,72
	6	99,9	- 53,900	4,63618	5	96,9	-1,5911	5,5765	-155,39
					4	98,9	-1,3077	5,2938	-127,71
					3	99,9	-1,05190	5,0369	-102,73
IPE-IV-A-3	7	99,7	- 40,513	4,3922	6	100,0	-0,62168	4,48213	- 60,72
	6	100,0	- 53,250	4,48475					
IPE-IV-A-4	6	97,8	- 34,02	4,2727	6	99,7	-0,85847	4,7307	- 83,84
	5	99,9	- 56,688	4,6580					
IPE-IV-A-5	7	99,9	-119,083	5,34413	7	99,9	-0,79616	4,89707	- 77,76
					6	100,0	-0,76533	4,87824	- 74,74
IPE-IV-A-6	7	99,6	-124,23	5,1288	6	100,0	-0,61251	4,27679	- 59,82
	6	99,8	-113,71	5,0390					
IPE-IV-A-7	7	99,5	-124,99	5,0275	6	99,6	-0,85912	4,8759	- 83,90
	6	99,8	-113,07	4,9389	5	99,9	-0,95168	4,99579	- 92,94
		Média =	- 93,953					Média =	- 78,526
		s =	38,632					s =	15,897
IPE-II-A-1	9	100,0	- 66,397	5,98978	9	95,5	-1,3725	6,7683	-126,84
					8	98,3	-1,2293	6,5195	-113,60
IPE-II-A-2	10	100,0	- 60,400	5,99804	10	98,1	-1,3131	6,7573	-121,35
					9	99,4	-1,19657	6,5567	-110,58
					8	99,8	-1,12825	6,4412	-104,26
IPE-II-A-3	10	99,9	- 62,747	6,04598	10	99,7	-0,84638	5,9855	- 78,22

TABELA 8.4 (cont.)

Corpo de Prova	Regressões das Flechas				Regressões das Deformações Específicas				
	n	R ²	a	b	n	R ²	a'	b	
			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou(tf)			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou(tf)	
					9	99,7	-0,82143	5,9369	- 75,91
					8	99,9	-0,88277	6,06120	- 81,58
IPE-II-A-4	10	99,5	- 20,649	5,0301	10	71,3	-1,5065	6,5390	-139,22
					9	95,5	-1,6224	7,2032	-149,93
					8	97,5	-1,4495	6,9242	-133,95
					7	99,1	-1,2818	6,6523	-118,45
IPE-II-A-5	10	99,2	- 16,992	4,9874	10	97,1	-1,1421	6,7644	-105,54
	9	99,6	- 20,576	5,1154	9	99,4	-1,02479	6,5451	- 94,70
					8	99,3	-1,01576	6,5252	- 93,87
					7	99,8	-0,94294	6,3907	- 87,14
					6	99,9	-0,88226	6,2626	- 81,53
IPE-II-A-6	11	99,7	- 19,946	5,18098	11	94,9	-1,0351	6,3520	- 95,66
	10	99,8	- 22,442	5,24980	10	99,3	-0,90437	6,2020	- 83,57
		Média =	- 42,202					Média =	- 97,165
		s =	23,071					s =	17,004
IPE-V-A-1	8	99,8	- 34,007	6,3381	8	99,5	-0,79275	6,8598	- 57,10
					7	99,8	-0,67287	6,6587	- 48,47
IPE-V-A-2	5	99,5	- 35,450	6,2231	5	99,5	-1,0095	7,0712	- 72,72
					4	99,9	-0,87295	6,8390	- 62,88
IPE-V-A-3	5	99,8	- 62,014	6,9276	5	99,8	-0,77312	6,2054	- 55,69
IPE-V-A-4	5	99,5	- 57,30	6,1670	5	99,8	-1,3750	6,6950	- 99,04
IPE-V-A-5	4	99,1	- 53,49	5,9351	4	99,5	-1,4300	6,9830	-103,00

TABELA 8.4 (cont.)

Corpo de Prova	Regressões das Flechas			Regressões das Deformações Específicas				
	n	R ²	a	n	R ²	a'	b	a
			(x 10 ⁻³ cm)					
IPE-V-A-6	5	99,1	- 46,75	5	99,8	-1,2205	6,4298	- 87,92
		Média =	- 48,169				Média =	- 76,167
		s =	11,556				s =	23,428
IPE-VI-A-1	9	99,8	- 8,438	9	99,9	-0,38536	7,02109	- 28,06
	8	100,0	- 11,072	8	99,9	-0,35560	6,96533	- 25,89
IPE-VI-A-2	8	99,9	- 14,131	8	99,8	-0,40840	7,1671	- 29,73
	7	100,0	- 17,333	7	99,9	-0,35975	7,0805	- 26,12
IPE-VI-A-3	6	100,0	- 23,976	6	100,0	-0,53451	7,23283	- 38,91
IPE-VI-A-4	5	99,5	- 59,740	5	99,9	-0,62750	6,5420	- 45,68
IPE-VI-A-5	5	98,9	- 54,730	4	100,0	-0,70060	6,61677	- 51,01
IPE-VI-A-6	5	98,1	- 64,770	5	99,8	-0,60725	6,6523	- 44,21
		Média =	- 38,604	4	100,0	-0,71642	6,79157	- 52,16
		s =	23,731	5	99,7	-0,53359	6,6263	- 38,85
IPE-VII-A-1	6	100,0	- 83,956	4	100,0	-0,65028	6,80305	- 47,34
IPE-VII-A-2	9	99,8	- 81,305				Média =	- 40,692
	8	99,9	- 88,650				s =	11,346
				6	99,4	-1,9618	11,9137	- 98,73
				5	100,0	-1,73726	11,5641	- 87,43
				8	99,9	-1,69295	11,5488	- 85,196

TABELA 8.4 (cont.)

Corpo de Prova	Regressões das Flechas				Regressões das Deformações Específicas				
	n	R ²	a	b	n	R ²	a'	b	a
			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou(tf)			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou(tf)	(x10 ⁻³ cm)
IPE-VII-A-3	8	99,9	-130,501	12,4179	8	99,9	-1,8051	11,5113	- 90,84
IPE-VII-A-4	8	99,0	- 26,04	10,0548	8	99,9	-1,23917	10,9612	- 62,36
	7	100,0	- 44,474	10,6535					
IPE-VII-A-5	8	98,5	- 12,18	9,6740	8	99,9	-1,40512	11,5085	- 70,71
	7	99,8	- 30,825	10,4022	7	100,0	-1,33499	11,3969	- 67,18
IPE-VII-A-6	8	98,8	- 17,692	9,8509	8	99,8	-1,4033	11,2440	- 70,62
	7	99,9	- 35,108	10,4772	7	99,9	-1,2962	11,0988	- 65,23
		Média =	- 68,919					Média =	- 76,373
		s =	38,986					s =	12,763
IPE-VIII-A-1	6	97,8	+ 1,14	8,9001	5	98,2	-1,7927	11,7773	- 89,56
	5	99,8	- 19,026	9,6251	4	99,8	-1,5056	11,2000	- 75,21
IPE-VIII-A-2	9	98,6	- 1,46	8,8553	9	99,7	-1,2924	10,1899	- 64,56
	8	99,9	- 21,874	9,5022	8	99,8	-1,1664	10,0653	- 58,27
					7	99,8	-1,0113	9,9154	- 50,52
					6	99,9	-0,8360	9,7498	- 41,76
					5	100,0	-0,61221	9,54729	- 30,58
IPE-VIII-A-3	7	98,0	- 3,64	8,7473	7	99,8	-1,5589	10,6915	- 77,88
	6	99,9	- 25,749	9,5673	6	99,9	-1,4355	10,5330	- 71,71
IPE-VIII-A-4	8	91,0	-355,77	14,8850	8	100,0	-2,37619	11,2186	-118,71
	7	98,5	-282,22	13,7455					
	6	99,4	-233,20	12,8913					
	5	99,8	-188,67	12,1218					

TABELA 8.4 (cont.)

Corpo de Prova	Regressões das Flechas				Regressões das Deformações Específicas				
	n	R ²	a	b	n	R ²	a'	b	
			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou(tf)			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou(tf)	
IPE-VIII-A-5	7	99,5	- 88,79	10,7239	7	99,7	-1,9386	10,7168	- 96,85
	6	99,8	-105,165	11,1132	6	99,8	-1,7883	10,5733	- 89,34
IPE-VIII-A-6	6	99,3	- 82,82	10,5919	5	99,9	-1,8438	10,5689	- 92,11
	5	99,9	-103,170	11,1670	6	99,9	-1,9131	10,8442	- 95,57
		Média=	- 77,276					Média =	- 80,648
		s=	67,786					s =	29,729
IPE-IX-A-1	8	98,3	-208,15	16,6854	8	99,9	-2,14696	13,4492	- 80,23
	7	99,4	-178,21	15,7701	7	99,9	-2,20562	13,5368	- 82,43
IPE-IX-A-2	7	98,3	-174,87	14,8451	7	99,9	-1,9634	12,6502	- 73,37
	6	99,2	-146,84	14,2132					
IPE-IX-A-3	7	98,6	-159,29	14,2473	7	99,9	-1,9610	12,5723	- 73,29
	6	99,2	-136,28	13,7605	6	99,9	-2,0068	12,5424	- 75,00
	5	99,3	-116,10	13,3355					
IPE-IX-A-4	8	99,4	- 1,00	11,1807	7	99,9	-1,6071	12,7757	- 60,06
	7	99,9	- 15,570	11,5339					
IPE-IX-A-5	7	98,6	- 0,41	10,8648	7	99,8	-1,7894	12,7500	- 66,87
	6	99,7	- 17,882	11,5415	6	99,8	-1,6385	12,5951	- 61,23
IPE-IX-A-6	8	99,8	- 7,688	11,3131	7	99,9	-1,5449	12,0471	- 57,73
	7	100,0	- 20,462	11,5009					
		Média =	- 82,511					Média =	- 68,592
		s =	73,393					s =	8,650

TABELA 8.4 (cont.)

Corpo de Prova	Regressões das Flechas				Regressões das Deformações Específicas						
	n	R ²	a		b	n	R ²	a'		b	a
			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN) ou (tf)				(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN) ou (tf)		
IPE-X-A-1	4	100,0	- 59,516	11,3026	4	99,5	-2,5744	12,7328	- 96,60		
IPE-X-A-2	8	100,0	- 43,922	10,7861	3	99,9	-2,2932	12,2053	- 86,05		
IPE-X-A-3	7	99,9	- 37,395	10,5721	7	99,9	-1,7510	11,0444	- 65,70		
IPE-X-A-4	6	100,0	- 45,799	10,6741	6	99,9	-2,0586	11,2922	- 77,25		
IPE-X-A-5	7	100,0	- 39,692	10,4856	6	99,9	-1,8023	10,8909	- 67,63		
IPE-X-A-6	8	99,6	-121,780	11,1288	7	99,9	-1,8719	10,8829	- 70,24		
IPE-X-A-7	7	99,8	-100,860	10,9749	6	99,9	-2,3802	11,2304	- 89,32		
IPE-X-A-1	7	99,4	-143,030	11,3432	7	100,0	-2,0255	10,7531	- 76,01		
IPE-XI-A-1	6	99,7	-118,990	11,1341				Média =	- 76,029		
IPE-XI-A-2	8	99,7	-123,080	10,9576				s =	9,031		
IPE-XI-A-3	7	99,9	-102,170	10,8274							
IPE-XI-A-4		Média =	- 72,993								
IPE-XI-A-5		s =	33,213								
IPE-XI-A-1	8	100,0	- 67,442	16,0602	7	100,0	-4,04229	16,9579	-106,47		
IPE-XI-A-2	8	100,0	- 70,583	15,8397	7	99,9	-4,0968	16,6830	-107,91		
IPE-XI-A-3	8	99,9	- 56,519	15,3275	7	100,0	-4,3647	17,0507	-114,97		
IPE-XI-A-4	8	99,9	-122,673	17,5993	8	99,8	-3,7711	16,5983	- 99,33		
IPE-XI-A-5	8	99,9	- 86,161	15,5896	7	99,9	-3,4654	16,4200	- 91,28		
					7	99,7	-4,7997	17,2528	-126,42		
					6	99,9	-4,3678	16,8920	-115,05		

TABELA 8.4 (cont.)

Corpo de Prova	Regressões das Flechas				Regressões das Deformações Específicas				
	n	R ²	a		n	R ²	a'		b
			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou(tf)			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou(tf)	
IPE-XI-A-6	8	100,0	-103,238	15,5459	7	99,9	-4,6599	15,7910	-122,74
					6	99,9	-4,3937	15,6655	-115,73
					5	100,0	-3,9621	15,4706	-104,36
			Média = - 84,436 s = 24,814					Média = s =	-106,673 8,751
IPE-XII-A-1	10	100,0	- 24,765	16,5655	9	99,6	-3,4830	18,7831	- 90,93
					8	99,6	-3,3113	18,5859	- 86,45
					7	99,8	-2,9667	18,2116	- 77,45
					6	99,9	-2,7079	17,9342	- 70,69
					5	100,0	-2,4149	17,6359	- 63,04
IPE-XII-A-2	8	100,0	- 31,704	16,7169	7	99,6	-4,3780	19,4088	-114,29
					6	99,8	-4,0922	19,1189	-106,83
					5	99,8	-3,7939	18,8251	- 99,05
					4	99,9	-3,4207	18,4721	- 89,30
IPE-XII-A-3	7	99,8	- 31,502	16,8003	7	99,8	-4,0627	18,9013	-106,06
	6	100,0	- 35,988	17,0479	6	99,8	-3,9065	18,7497	-101,98
IPE-XII-A-4	8	99,9	- 90,557	18,4060	5	99,9	-3,6285	18,4928	- 94,73
					7	99,7	-4,4980	19,8508	-117,43
IPE-XII-A-5	8	99,9	- 58,844	17,5842	6	99,9	-4,1549	19,4744	-108,47
IPE-XII-A-6	8	99,9	- 78,040	17,9784	7	100,0	-3,5136	18,9605	- 91,73
					7	99,9	-3,9748	19,2883	-103,77
					6	100,0	-3,8405	19,1366	-100,26
			Média = - 53,316 s = 26,875					Média = s =	- 91,255 15,425

TABELA 8.4 (cont.)

Corpo de Prova	Regressões das Flechas			Regressões das Deformações Específicas					
	n	R ²	a	b	n	R ²	a'	b	a
			(x 10 ⁻³ cm)				(x 10 ⁻³ cm)		(x10KN)ou(tf)
IPE-XIV-A-5	6	100,0	- 60,773	16,4045	5	100,0	-3,8442	17,2947	- 83,24
IPE-XIV-A-6	6	100,0	- 71,774	16,4603	4	100,0	-3,61311	17,1167	- 78,24
		Média=	- 66,892					Média =	- 55,567
		s=	13,044					s =	18,504
IPE-XV-A-1	5	100,0	- 72,117	15,3288	4	100,0	-6,8644	17,0931	-148,28
IPE-XV-A-2	4	100,0	-106,922	15,4620	4	100,0	-7,7553	16,2169	-167,53
IPE-XV-A-3	5	100,0	-122,176	14,9037	4	100,0	-8,5899	15,5752	-185,56
		Média=	-100,405					Média =	-167,123
		s=	25,658					s =	18,643
IPE-I-B	5	100,0	-115,417	17,2370	4	99,0	-1,5908	14,673	- 37,04
		Média =	-115,417		3	99,9	-2,4141	15,8365	- 56,21
		s =	0					Média =	- 56,21
								s =	0
IPE-II-B	7	99,8	- 40,967	19,4156	6	99,7	-1,2415	19,3672	- 29,66
	6	99,9	- 37,166	19,3190	5	100,0	-1,5607	19,8240	- 37,29
		Média =	- 37,166					Média =	- 37,29
		s =	0					s =	0
IPE-III-B-1	6	99,6	+ 4,988	17,5353	6	99,9	-2,4719	20,2421	- 54,44
IPE-III-B-2	5	95,6	+ 7,180	14,5760	6	99,7	-3,9956	23,7702	- 88,00
					5	99,8	-3,6964	23,2701	- 81,41
					4	100,0	-3,7049	23,1013	- 81,59

TABELA 8.4 (cont.)

Corpo de Prova	Regressões das Flechas			Regressões das Deformações Específicas				
	n	R ²	a	n	R ²	a'	b	a
			(x 10 ⁻³ cm)			(x 10 ⁻³ cm)		
IPE-III-B-3	7	98,0	- 49,420	7	99,5	-3,8020	22,9682	- 83,73
	6	99,8	- 71,406	6	99,7	-3,4630	22,4392	- 76,27
IPE-III-B-4	6	98,9	- 51,610	5	99,8	-3,2561	22,1209	- 71,71
	5	99,9	- 67,642	6	97,7	-3,3407	20,7870	- 73,57
IPE-III-B-5	6	99,6	- 38,408	5	99,9	-3,4115	21,7798	- 75,13
	5	99,9	- 46,312	4	100,0	-3,4519	21,6496	- 76,02
		Média =	- 61,787	6	99,9	-3,2958	21,4414	- 72,58
		s =	13,533				Média =	- 71,268
IPE-XVI-A-1	6	69,3	-242,8	6	99,9	-2,0854	22,2986	- 29,53
	5	93,7	-280,51					
IPE-XVI-A-2	6	98,2	-225,74	6	99,7	-2,3409	21,7184	- 33,14
				5	99,9	-2,7160	22,1998	- 38,46
		Média =	-253,125				Média =	- 33,995
		s =	38,728				s =	6,314
IPE-XVII-A	7	98,9	-133,56	7	99,9	-2,35273	23,3451	- 33,36
	6	98,7	-139,21					
		Média =	-136,56				Média =	- 33,36
		s =	0				s =	0
IPE-XVIII-A	7	99,1	- 77,01	6	97,6	+0,3936	15,992	+ 5,58
	6	99,6	- 67,788	5	98,5	+0,5044	15,879	+ 7,15
		Média =	- 67,788				Média =	---
		s =	0				s =	---

TABELA 8.4 (cont.)

Corpo de Prova	Regressões das Flechas				Regressões das Deformações Específicas			
	n	R ²	a	b	n	R ²	a'	b
			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou (tf)			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN)ou (tf)
IPE-VII-B-1	8	74,1	-223,50	32,003	7	98,7	-3,1859	31,686
	7	91,9	-200,15	31,699	6	99,5	-3,7237	34,178
	6	95,7	-160,63	29,420	5	99,9	-3,7522	34,0951
		Média =	-160,63				Média =	- 61,75
		s =	0				s =	0
IPE-VII-B-2	6	0,8	+127,9	3,19	6	100,0	-2,74740	28,9324
	5	80,1	-457,6	45,15				
	4	98,5	-387,27	41,739				
		Média =	-387,27				Média =	- 45,21
		s =	0				s =	0
IPE-VIII-B	7	93,4	- 50,13	21,999	7	99,5	-3,0229	23,3932
	5	99,3	- 42,32	21,954	6	99,8	-3,5171	24,2890
	4	99,7	- 62,53	23,6119				
		Média =	- 62,53				Média =	- 57,88
		s =	0				s =	0
IPE-IX-B	não	regrediu			5	99,8	-6,4396	25,0685
					4	99,9	-6,8264	25,7033
		Média =	---				Média =	-112,71
		s =	---				s =	0

TABELA 8.4 (cont.)

Corpo de Prova	Regressões das Flechas			Regressões das Deformações Específicas				
	n	R ²	a	n	R ²	a'	b	a
			(x 10 ⁻³ cm)					
IPE-X-B	8	83,9	+ 9,738	7	90,3	-0,5106	20,498	- 8,41
	7	96,4	+ 15,081	6	98,6	-1,7435	27,043	- 28,73
				5	99,7	-1,4583	25,9018	- 24,03
				4	99,8	-1,3034	25,2630	- 21,48
		Média =	---				Média =	- 21,48
		s =	---				s =	0
IPE-XIX-A	3	99,7	-466,410	não	regrediu			
		Média =	-466,410				Média =	---
		s =	0				s =	---
IPE-XXI-A	não	regrediu		5	99,9	-4,0605	19,2695	- 33,45
		Média =	---				Média =	- 33,45
		s =	---				s =	0
IPE-XXII-A	7	97,9	- 99,110	6	99,5	-0,1772	16,5328	- 1,53
	6	98,4	- 89,110	5	99,5	-0,2340	16,7064	- 2,03
		Média =	- 89,110	4	99,8	-0,4283	17,3107	- 3,71
		s =	0				Média =	- 3,71
IPE-XXIV-A-1	3	98,1	+ 1,312	3	98,5	-1,1926	12,793	- 10,33
IPE-XXIV-A-2	6	99,4	- 14,100	5	99,6	-2,3001	16,4154	- 19,92
	5	100,0	- 6,176	4	100,0	-2,9845	17,1138	- 25,85
		Média =	- 6,176				Média =	- 18,090
		s =	0				s =	- 10,974

TABELA 8.4 (cont.)

Corpo de Prova	Regressões das Flechas				Regressões das Deformações Específicas				
	n	R ²	a	b	n	R ²	a'	b	
			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN) ou (tf)			(x 10 ⁻³ cm)	(x10KN) ou (tf)	
IPE-IV-B	7	17,2	-177,000	33,44	7	94,4	+0,2473	16,722	+ 2,80
	6	46,5	-272,700	46,45	6	95,8	+0,1118	18,177	+ 1,27
	5	78,6	-279,700	48,98	5	98,7	-0,1814	21,263	- 2,06
	4	87,6	-207,570	41,65	4	99,8	-0,44047	23,6678	- 5,00
		Média =	-207,570				Média =		- 5,00
		s =	0				s =		0
IPE-XIII-B	4	89,3	- 27,210	15,107	4	100,0	-5,20348	15,7697	- 44,91
			Média =					Média =	- 44,91
		s =	0				s =		0
IPE-XX-A	6	95,3	-216,28	26,758	6	não	regrediu		
	5	97,1	-179,56	24,859					
		Média =	-179,56					Média =	---
		s =	0					s =	---

CAPÍTULO 9

ANÁLISE DOS RESULTADOS

9.1- INTRODUÇÃO

Neste capítulo faz-se uma análise dos dados obtidos na TABELA 8.4, do capítulo anterior.

O objetivo principal é ter-se um critério para projeto com as estimativas das excentricidades equivalentes adicionais (e_a).

Serão analisadas aqui tanto as excentricidades obtidas a partir da flecha quanto as obtidas a partir das deformações específicas.

9.2- CONCEITOS ENVOLVIDOS

9.2.1- Critérios para a excentricidade adicional

Da mesma forma que já ocorre hoje no concreto armado no Brasil, há uma tendência internacional de se fixar três critérios para a excentricidade e_a : um em função do comprimento da peça, outro em função das dimensões da seção transversal, e um terceiro, um valor mínimo.

O primeiro critério tem sua justificativa, para o caso de colunas de madeira, no fato de que as curvaturas iniciais são provenientes da contração das fibras. Some-se a elas o fato da não

homogeneidade do material, presença de nós, etc, e é fácil observar-se que, quanto mais comprida a peça, mais esses problemas se agravarão e, portanto, proporcionalmente ter-se-á uma excentricidade equivalente adicional (e_a) maior.

O segundo critério - tomar uma porcentagem dos lados da seção - parece se apoiar no fato da maior descentralização do carregamento a medida que se aumenta a seção.

O terceiro critério - de se fixar uma excentricidade adicional mínima - tem como base a inexistência na realidade de uma coluna ideal, e mesmo que os estudos de projeto indiquem a ausência de excentricidade, um valor mínimo, para prevenir o fator "surpresa", deve ser convencionado.

9.2.2- Coefficiente de majoração

Convém, sempre que se fala em parâmetros de projetos, incorporar aos resultados de laboratório um coeficiente. No caso em questão deve ser um coeficiente de majoração.

Optou-se por seguir mais ou menos o critério adotado para se chegar ao coeficiente de segurança das tensões de compressão de ruptura e que redundou no valor 5 na NBR-7190 para as tensões admissíveis de compressão.

Acompanhando a exposição feita por PFEIL (Pfeil, 1985)⁽¹⁾ em seu livro "Estruturas de Madeira", à página 43, tem-se:

$$\bar{\sigma}_c = 0,75 \times 0,60 \times 0,62 \times 0,72 f_c = 0,20 f_c = \frac{f_c}{5} \quad \dots (9.1)$$

onde: $0,75 = \frac{1}{1,33}$: para levar em conta a dispersão nos ensaios;

$0,62 = \frac{1}{1,61}$: para reduzir os resultados de ensaios rápidos à carga de longa duração (10 anos);

(1) PFEIL, Walter - "Estruturas de Madeira", Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1985, 296 pp.

$0,60 = \frac{1}{1,67}$: redução de resistência em peças de segunda categoria (*);

$0,72 = \frac{1}{1,4}$: para ter um coeficiente de segurança ($\gamma = 1,4$) em relação à ruptura e limitar tensões em serviço a valores inferiores ao limite de proporcionalidade.

Para o caso em pauta, propõe-se adotar os três primeiros coeficientes parciais acima e trocar-se o último por outros dois. Fica-se então com:

- 1,33 : para levar em conta a dispersão nos ensaios;
- 1,61 : para reduzir os resultados de ensaios rápidos à carga de longa duração (10 anos);
- 1,67 : redução de resistência em peças de segunda categoria (*);
- 1,43 : para levar em consideração a existência simultânea de cerne e alburno na peça;
- 1,18 : para levar em consideração a variabilidade dimensional do material madeira.

Então, o coeficiente de majoração para a excentricidade equivalente adicional (e_a), que será denominado por γ_a , terá o valor 6, ou seja:

$$\gamma_a = 1,33 \times 1,61 \times 1,67 \times 1,43 \times 1,18 = 6 \quad (9.2)$$

(*) Entende-se por segunda categoria a madeira de qualidade estrutural corrente, com pequena incidência de nós firmes e outros defeitos. Como primeira categoria classifica-se a madeira de qualidade excepcional, sem nós, retília, quase isenta de defeitos.

ou, chamando de " e_{ad} " a excentricidade equivalente adicional, pode-se escrever:

$$e_{ad} = \gamma_a e_a = 6e_a \quad (9.3)$$

Assim sendo, as excentricidades obtidas a partir da TABELA 8.4 foram multiplicadas por 6 para estudar-se os critérios a serem propostos a nível de projeto. Devido a linearidade existente entre esse coeficiente e os resultados que serão obtidos a seguir, os mesmos poderão ser modificados, bastando para isso alterar-se o valor de γ_a .

9.2.3- Valores das excentricidades para a análise

Uma questão que poderia ser colocada é a seguinte: se o Método de Southwell fornece uma reta que cruza o eixo das ordenadas em um valor correspondente à curvatura inicial, pode-se associar essa curvatura inicial a uma excentricidade de carga? Tendo em vista a figura 9.1, a pergunta corresponde a se questionar qual a relação entre " ϵ_1 " e " e ".

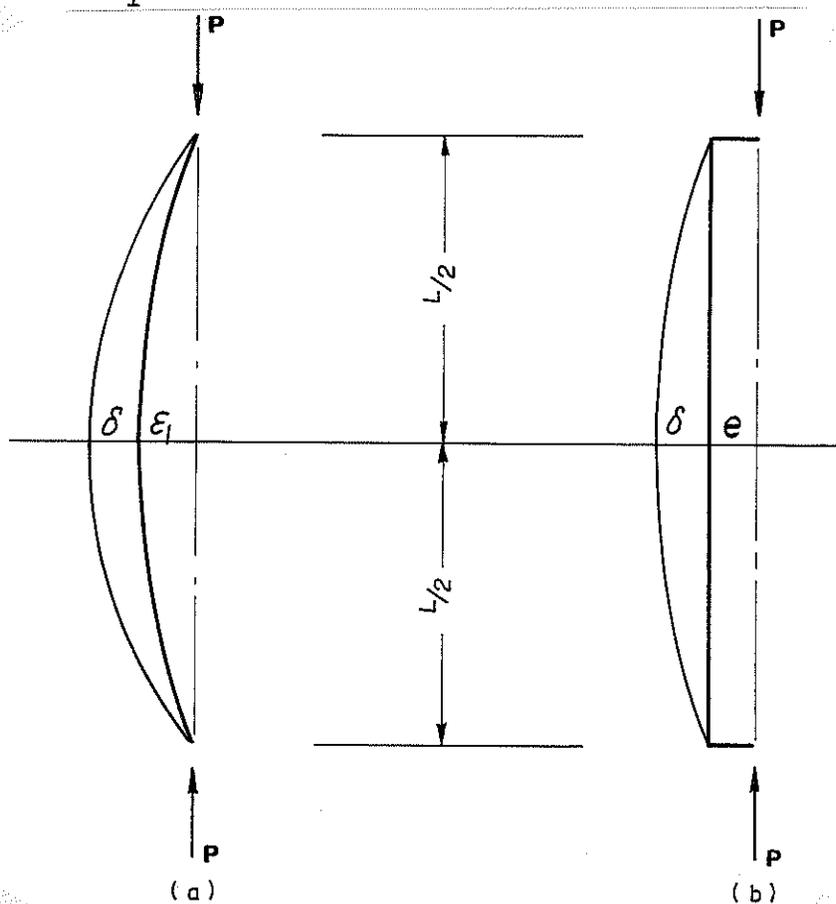


Fig. 9.1- Relação entre curvatura inicial e excentricidade de inicial [in (WOOD, 1961)].

No artigo "Formulas for columns with side loads and eccentricity" do engenheiro Lyman W. WOOD (Wood, 1961)⁽¹⁾, encontra-se a dedução dessa relação, cujo resultado fornece:

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi^2}{8} e \quad (9.4)$$

ou, como $\pi^2 \cong 10$ tem-se

$$e = \frac{4}{5} \varepsilon_1 = 0,80\varepsilon_1 \quad (9.5)$$

Pode-se auferir da equação (9.5), que, se se adota

$$e = \varepsilon_1 \quad (9.6)$$

está-se indo a favor da segurança. Resolveu-se pois ficar com a equação (9.6), ou seja, considerar-se os valores obtidos pelo Método de Southwell como sendo a própria excentricidade inicial, e não, 80% como sugere a equação (9.5).

9.3- A ANÁLISE

9.3.1- Tabelando os resultados

Tendo por base a TABELA 8.4, foi construída a TABELA 9.1. Nela, foram lançadas as colunas: " l " para comprimento de flambagem, " t " para a espessura da peça, " e_f " para as excentricidades obtidas a partir das flechas, e " e_ε " para as excentricidades obtidas a partir das deformações específicas. Aparecem, também, as colunas correspondentes às relações l/t , $6 e_f/t$, e $6 e_\varepsilon/t$, as quais serão utilizadas em itens posteriores.

(1) WOOD, Lyman W. - "Formulas for columns with side loads and eccentricity" - Forest Products Laboratory, Forest Service U.S. Department of Agriculture - report nº 1782, Outubro de 1961.

TABELA 9.1

MEDRO	ℓ (cm)	t (cm)	ℓ / t	e_f ($\times 10^{-3}$ cm)	e_ε ($\times 10^{-3}$ cm)	$6e_f/t$ ($\times 10^{-3}$)	$6e_\varepsilon/t$ ($\times 10^{-3}$)
1	269,4	5,750	46,8939	96,401	136,559	100,5923	142,4963
2	264,44	5,825	45,3974	95,789	82,382	98,6668	84,8570
3	245,00	5,850	41,8803	113,297	74,792	116,2021	76,7097
4	230,40	5,455	42,2365	124,274	72,802	136,6900	80,0755
5	229,20	5,450	42,0550	93,953	78,526	103,4345	86,4506
6	230,00	5,800	39,6552	42,202	97,165	43,6572	100,5155
7	197,20	5,470	36,0512	48,169	76,167	52,8362	83,5470
8	197,80	5,445	36,3269	38,604	40,692	42,5388	44,8397
9	164,30	5,435	30,2300	68,919	76,373	76,0835	84,3124
10	164,00	5,455	30,0642	77,276	80,648	84,9965	88,7054
11	142,30	5,490	25,9199	82,511	68,592	90,1760	74,9639
12	142,50	5,483	25,9894	72,993	76,029	79,8756	83,1979
13	119,90	5,530	21,6817	84,436	106,673	91,6123	115,7392
14	199,40	5,533	21,5796	53,316	91,255	57,8160	98,9572
15	105,55	5,238	20,1508	1,106	18,033	1,2669	20,6564
16	105,60	5,218	20,2376	66,892	55,567	76,9168	63,8946
17	106,20	5,290	20,0756	100,405	167,123	113,8809	189,5535
18	114,20	5,675	20,1233	115,417	56,210	122,0268	59,4291
19	117,00	5,805	20,1550	36,166	37,290	38,4145	38,5426
20	108,67	5,433	20,0018	61,787	71,268	68,2352	78,7057
21	81,00	4,695	17,2524	253,125	33,995	323,4824	43,4441
22	81,10	4,700	17,2553	133,560	33,360	120,5021	42,5872
23	81,10	4,700	17,2553	67,788	-	86,5379	-
24	94,00	5,440	17,2794	160,630	61,750	177,1654	68,1066
25	94,00	5,440	17,2794	387,270	45,210	427,1360	49,8640
26	94,00	5,440	17,2794	62,530	57,880	68,9669	63,8382
27	94,50	5,480	17,2445	-	112,710	-	123,4051
28	94,40	5,480	17,2263	-	21,480	-	23,5182
29	51,00	3,554	14,3500	466,410	-	787,4114	-
30	56,60	3,940	14,3655	-	33,450	-	50,9391
31	59,20	4,100	14,4390	89,110	3,710	130,4049	5,4293
32	59,20	4,100	14,4390	6,176	18,090	9,0380	26,4732
33	78,00	5,435	14,3514	207,570	5,000	229,1481	5,5198
34	59,10	4,100	14,4146	27,210	44,910	39,8195	65,7220
35	56,80	4,350	13,0575	179,560	-	247,6690	-

9.3.2- Relação [comprimento x excentricidade (e_f)]

É inegável que para uma coluna de comprimento nulo ($l=0$), a curvatura inicial e a excentricidade sejam nulas ($e_a = 0$). Deste modo, pode-se admitir o ponto (0,0) como fazendo parte do conjunto de pares de números (comprimento, excentricidade).

Para trabalhar-se com números adimensionais, ao invés dos valores (l) e (e), pode-se relacionar as razões (l/t) e (e/t) onde t é a espessura da coluna na direção paralela ao plano de flambagem. Os valores assim obtidos encontram-se nas colunas (l/t) e ($6e_f/t$) da TABELA 9.1.

Colocando-se nas abscissas os valores de (l/t) e nas ordenadas, os de ($6e_f/t$), os 33 pontos geram o gráfico superior da figura 9.2. O gráfico inferior corresponde aos resíduos.

É interessante observar-se que (l/t) é, a menos da constante 3,46, o valor do índice de esbeltez λ para uma seção retangular, ou seja, $\lambda = 3,46 l/t$. A quantidade (l/t) mede também, portanto, a quantidade de esbeltez da peça (como é feito na norma americana).

Na figura 9.2 também é mostrado o gráfico de resíduos.

Observa-se na figura 9.2 que os pontos 21, 25, 29, 33 e 35, segundo a numeração da TABELA 9.1, cujas coordenadas são:

ponto 21- (17,2524; 323,4824)

ponto 25- (17,2794; 427,1360)

ponto 29- (14,3500; 787,4114)

ponto 33- (14,3514; 229,1481)

ponto 35- (13,0575; 247,6690)

estão destoantes dos restantes 28 pontos, pois quando se considera os 33 pontos se obtém a reta ($6e_f/t$) = 194,994 - 2,693 (l/t), que tem uma inclinação negativa, com $R^2 = 4,25\%$.

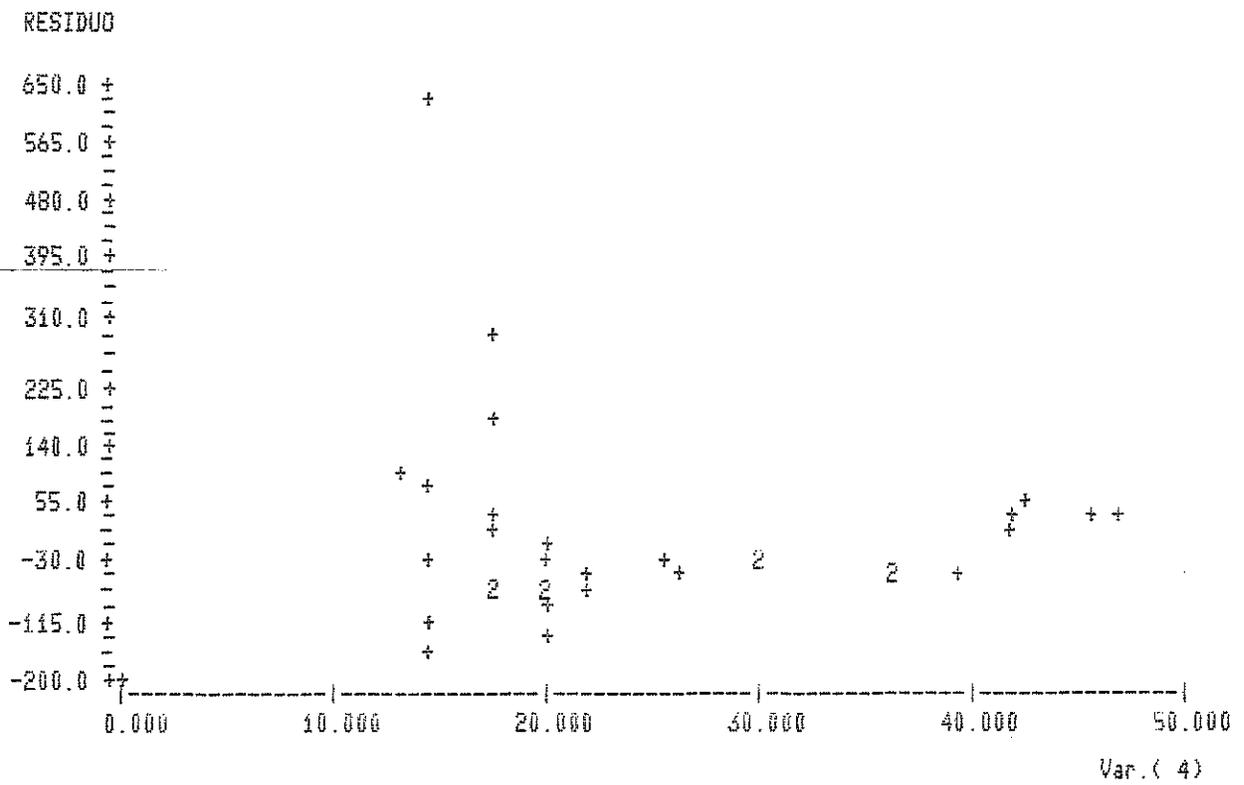
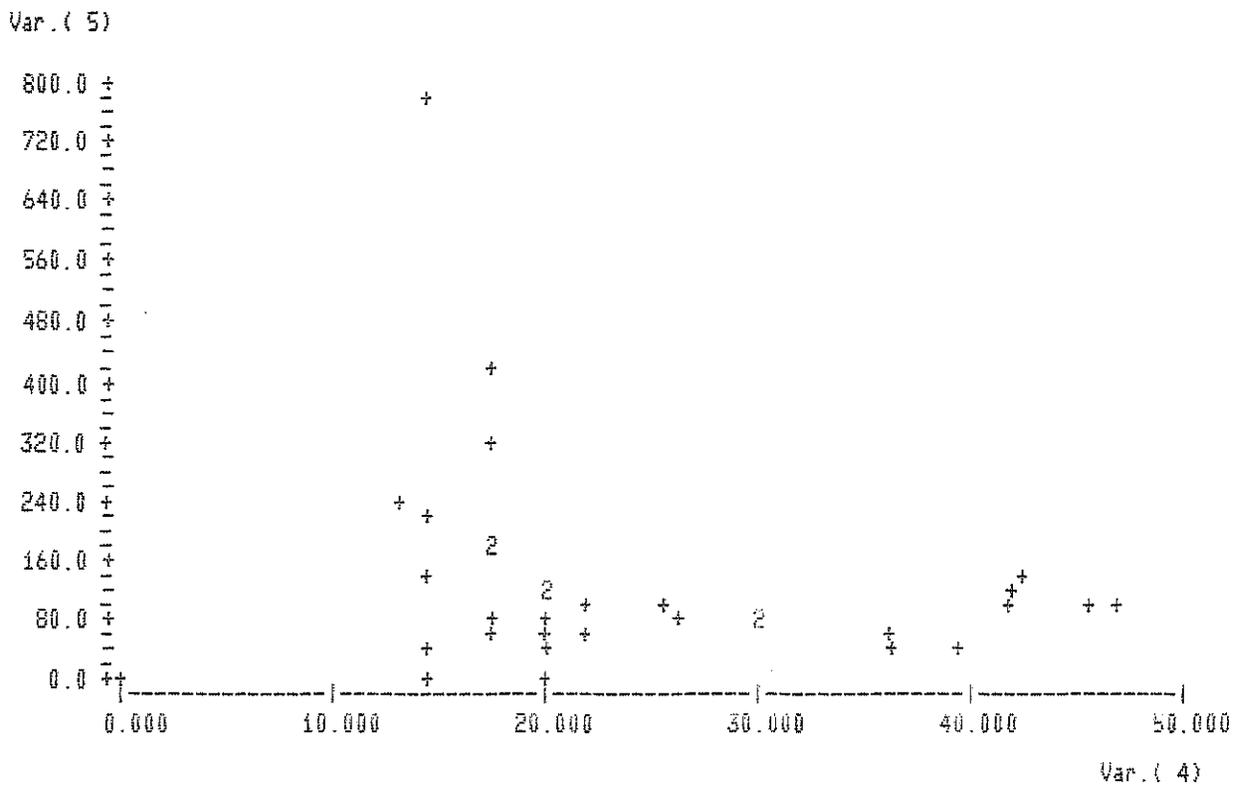


Fig. 9.2- Gráfico [adimensional da excentricidade e_f^x e \underline{es} beltez] com 33 pontos.

Reduzindo-se, pois, o conjunto para 28 pontos tem-se (TABELA 9.2).

TABELA 9.2

LINHA	VAR. (4)	VAR. (5)
1	0.0000	0.0000
2	46.8939	100.5923
3	45.3974	98.6668
4	41.8803	116.2021
5	42.2365	136.6900
6	42.0550	103.4345
7	39.6592	43.6572
8	36.0512	52.8362
9	36.3269	42.5388
10	30.2300	76.0835
11	30.0642	84.9965
12	25.9199	90.1760
13	25.9894	79.8756
14	21.6817	91.6123
15	21.5796	57.8160
16	20.1508	1.2669
17	20.2376	76.9168
18	20.0756	113.8809
19	20.1233	122.0268
20	20.1550	38.4145
21	20.0018	68.2352
22	14.4146	39.8195
23	17.2553	170.5021
24	17.2553	86.5379
25	17.2794	177.1654
26	14.4390	9.0380
27	17.2794	68.9669
28	14.4390	130.4049

Este novo conjunto de pontos gerou os 2 gráficos da figura 9.3. A reta de regressão é:

$$\frac{6 e_f}{t} = 59,509 \times 10^{-3} + 0,851 \times 10^{-3} \left(\frac{l}{t}\right) \quad (9.7)$$

com $R^2 = 4,85\%$.

Como se pode observar na figura 9.3, tem-se uma nuvem de pontos e portanto a reta de regressão explica pouco a sua distribuição. Na realidade, o que interessa é uma reta limitante superior, que consiga envolver o maior número de pontos.

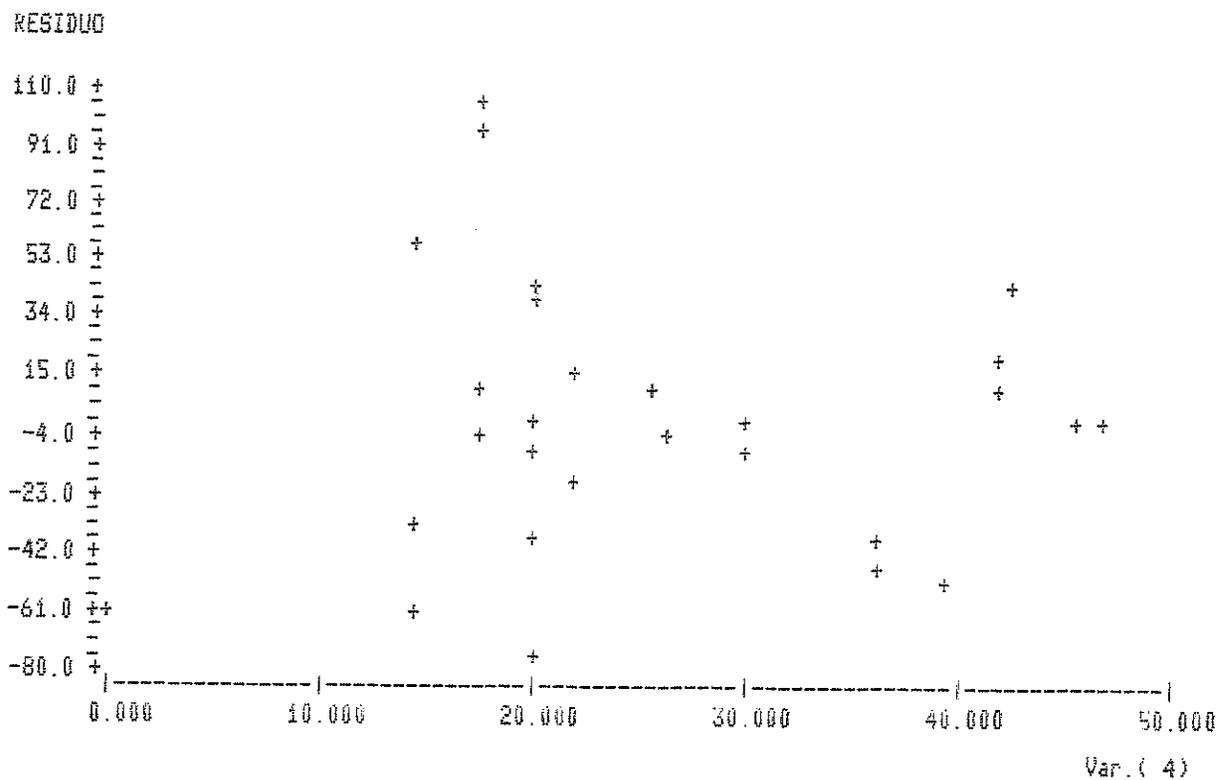
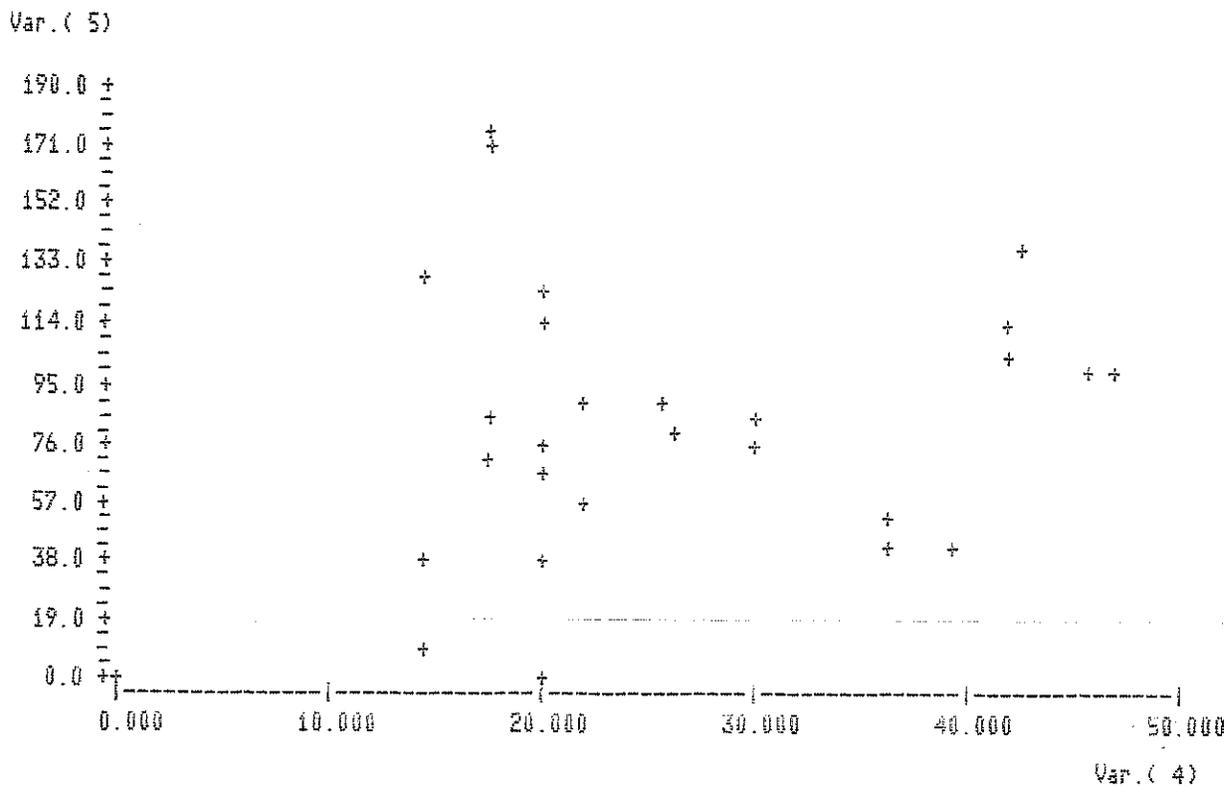


Fig. 9.3- Gráfico [adimensional da excentricidade e_f x e_s beltez] com 28 pontos.

Recorrendo à estatística, encontra-se que se:

$$\hat{y} = a + bx \tag{9.8}$$

é uma estimativa da reta verdadeira:

$$y = \alpha + \beta x \tag{9.9}$$

o intervalo de confiança para o parâmetro β é dado por:

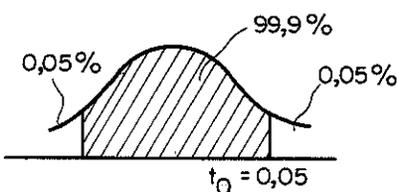
$$b - \frac{t_{(n-2; 1 - \frac{\gamma}{2})} s}{\sqrt{\sum_j (x_j - \bar{x})^2}} < \beta < b + \frac{t_{(n-2; 1 - \frac{\gamma}{2})} s}{\sqrt{\sum_j (x_j - \bar{x})^2}} \tag{9.10}$$

onde: x_j = abscissas dos pontos

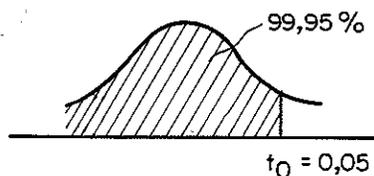
\bar{x} = média dos pontos

b = estimativa dos valor β , que aparece na eq. (9.9)

$t_{(n-2; 1 - \frac{\gamma}{2})}$ = distribuição de Student, com $n-2$ graus de liberdade, e uma probabilidade acumulada de $1 - \frac{\gamma}{2}$. Para se ter um intervalo de confiança de 99,9% ($\gamma = 0,1\%$):



procura-se, na tabela de Student um valor de 99,95%:



Então, para 28 pontos e 99,9% ($\gamma = 0,1\%$):

$$t_{(28-2; 1 - \frac{0,001}{2})} = t_{(26; 0,9995)} = 3,707$$

e, ainda, "s", desvio padrão da regressão, é dado por:

$$s = \sqrt{\frac{n}{\sum_{j=1}^n (y_j - a - bx_j)^2 / (n - 2)}} \quad (9.11)$$

onde n = quantidade de pontos que entraram na regressão.

Achando-se o intervalo de confiança para a reta da equação (9.7) gerada a partir dos pontos da TABELA 9.2, tem-se:

$$-1,8904 \times 10^{-3} < \beta < 3,5928 \times 10^{-3} \quad (9.12)$$

Como se procura a reta limitante superior, somente o valor $3,5928 \times 10^{-3}$ é interessante, e, portanto, a reta procurada é:

$$\left(\frac{6 e_f}{t}\right)_{\lim_{\sup}} = 0,0059 + 0,0036 \left(\frac{l}{t}\right) \quad (9.13)$$

que para todos os efeitos práticos, passa pela origem. Ou seja, lembrando que e_{ad} é a excentricidade de projeto majorada pelo fator 6, tem-se:

$$e_{ad} = 0,0036 \left(\frac{l}{t}\right) \quad (9.14)$$

ou, ainda, multiplicando ambos os membros por t:

$$e_{ad} = 0,0036 l = \frac{l}{278} \approx \frac{l}{300} \quad (9.15)$$

A equação (9.15) é idêntica a do EUROCODE 5, para seções retangulares de madeira (eq. 2.27), e idêntica também às equações (2.29) e (2.30), e idêntica, ainda à utilizada no concreto armado (para seções retangulares):

$$e = \frac{\lambda}{1000} h = \frac{3,46 \ l/h}{1000} h = 0,00346l \quad (9.16)$$

9.3.3- Relação [comprimento x excentricidade (e_c)]

Da mesma forma como já foi explicado no item 9.3.2, aqui também se juntou o par (0,0) ao conjunto de pontos. Os valores que serão analisados são aqueles constantes nas colunas (l/t) e ($6e_c/t$) da TABELA 9.1.

Colocando-se nas abscissas os valores de (l/t) e nas ordenadas os de $(6e_\epsilon/t)$, os 33 pontos geram o gráfico superior da figura 9.4. O gráfico inferior refere-se aos resíduos.

Este conjunto de pontos tem como regressão a reta:

$$\left(\frac{6 e_\epsilon}{t}\right) = 27,134 \times 10^{-3} + 1,713 \times 10^{-3} \left(\frac{l}{t}\right) \quad (9.17)$$

com $R^2 = 22,96\%$

Como se observa na figura 9.4, os 33 pontos gerados a partir das deformações específicas produziram uma nuvem com uma melhor definição, o que pode ser constatado pelo próprio coeficiente de explicação R^2 , quando comparado com os gráficos das excentricidades geradas a partir das flechas.

Não serão afastadas aqui nenhum ponto do conjunto, de modo diferente, pois, do que ocorreu no item precedente.

Procedendo da mesma forma como anteriormente, encontra-se o seguinte intervalo de confiança (99,9%) para o valor de β :

$$- 0,3361 \times 10^{-3} < \beta < 3,7621 \times 10^{-3} \quad (9.18)$$

A reta limitante superior será, portanto:

$$\left(\frac{6 e_\epsilon}{t}\right) = 0,027134 + 0,0037261 \left(\frac{l}{t}\right) \quad (9.19)$$

ou, para efeitos práticos, considerando-se a reta passando pela origem e chamando de $e_{ad} = 6 e_\epsilon$ o valor da excentricidade de projeto, pode-se escrever:

$$\frac{e_{ad}}{t} = 0,0037 \left(\frac{l}{t}\right) \quad (9.20)$$

ou, eliminando-se o valor t :

$$e_{ad} = 0,0037 \frac{l}{270} \cong \frac{l}{300} \quad (9.21)$$

Pelo próprio resultado obtido em (9.21) valem as mesmas observações feitas para (9.15).

Como conclusão dos itens 9.3.2 e 9.3.3 sugere-se a adoção da expressão:

$$e_{ad} = \frac{l}{270} \quad (9.22)$$

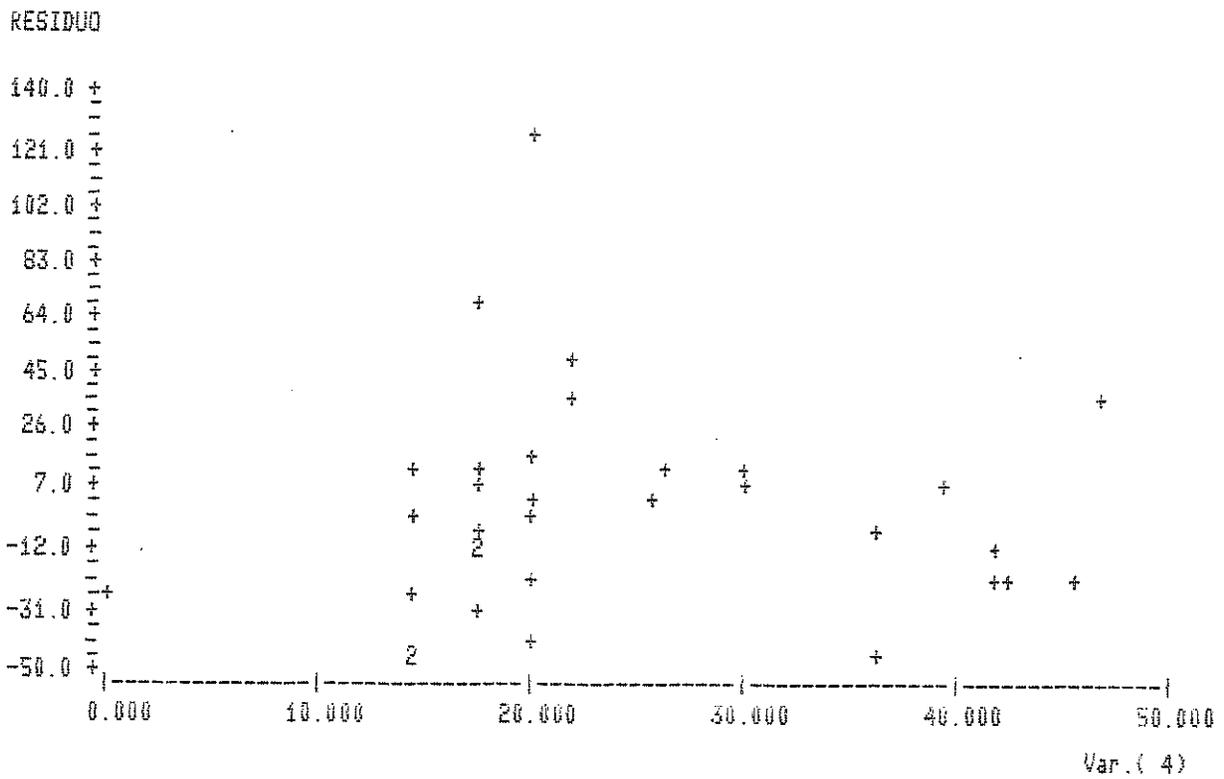
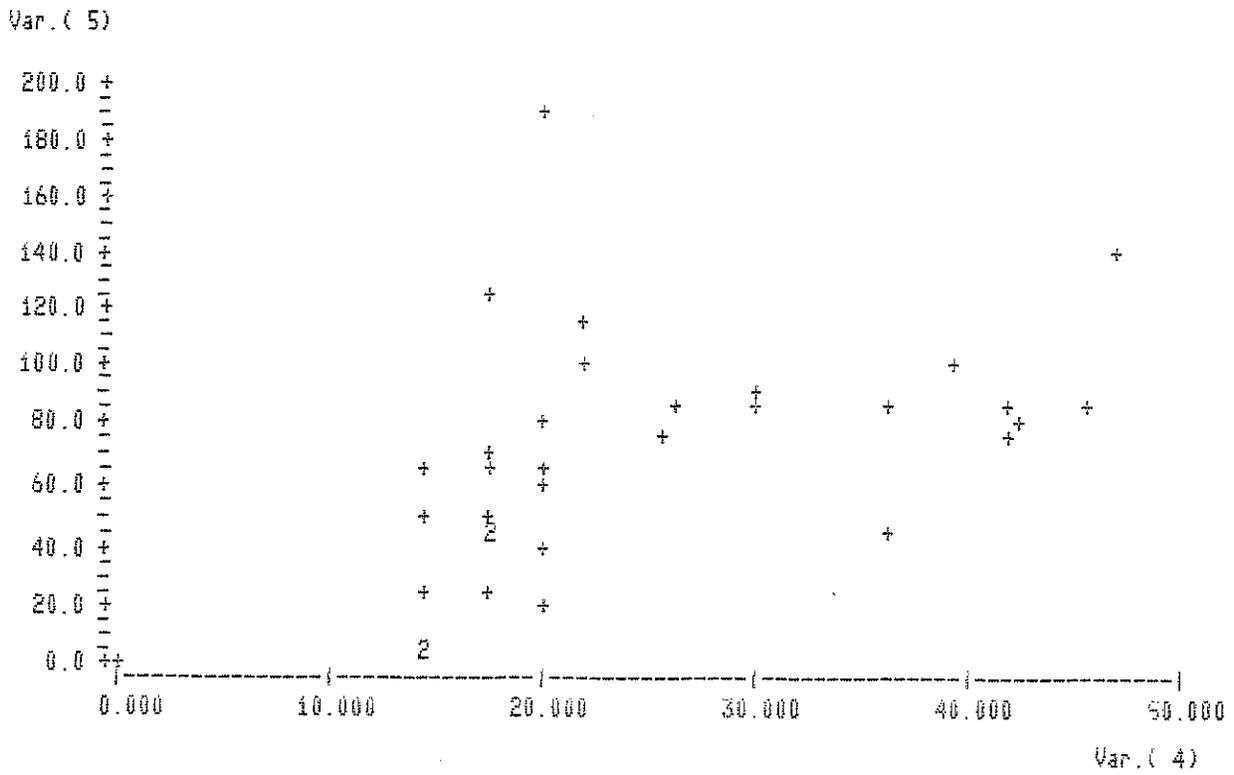


Fig. 9.4- Gráfico [adimensional da excentricidade e_c x e_s beltez] com 33 pontos.

como o primeiro critério para estimar-se a excentricidade equivalente adicional, também chamada de excentricidade acidental, ou ainda, excentricidade não intencional, para as colunas de madeira de seção retangular.

9.3.4- Relação [espessura x excentricidade e_f]

Neste item e seguinte procura-se correlacionar a excentricidade equivalente adicional com a dimensão da seção paralela ao plano de flexão (t).

Para a correlação de "t" com as excentricidades obtidas a partir das flechas, serão utilizados os valores da coluna "t", bem como os valores da coluna " e_f " multiplicados por 6. Assim sendo, obtêm-se os pontos que serão correlacionados, listados na TABELA 9.3.

TABELA 9.3

LINHA	VAR. (1)	VAR. (2)
1	5.7500	578.4060
2	5.8250	574.7340
3	5.8500	679.7820
4	5.4550	745.6440
5	5.4500	563.7180
6	5.8000	253.2120
7	5.4700	289.0140
8	5.4450	231.6240
9	5.4350	413.5140
10	5.4550	463.6560
11	5.4900	495.0660
12	5.4830	437.9580
13	5.5300	506.6160
14	5.5330	319.8960
15	5.2380	6.6360
16	5.2180	401.3520
17	5.2900	602.4300
18	5.6750	692.5020
19	5.8050	222.9960
20	5.4330	370.7220
21	4.6950	1518.7500
22	4.7000	801.3600
23	4.7000	406.7280
24	5.4400	963.7800
25	5.4400	2323.6200
26	5.4400	375.1800
27	3.5540	2798.4600
28	4.1000	534.6600
29	4.1000	37.0560
30	5.4350	1245.4200
31	4.1000	163.2600
32	4.3500	1077.3600

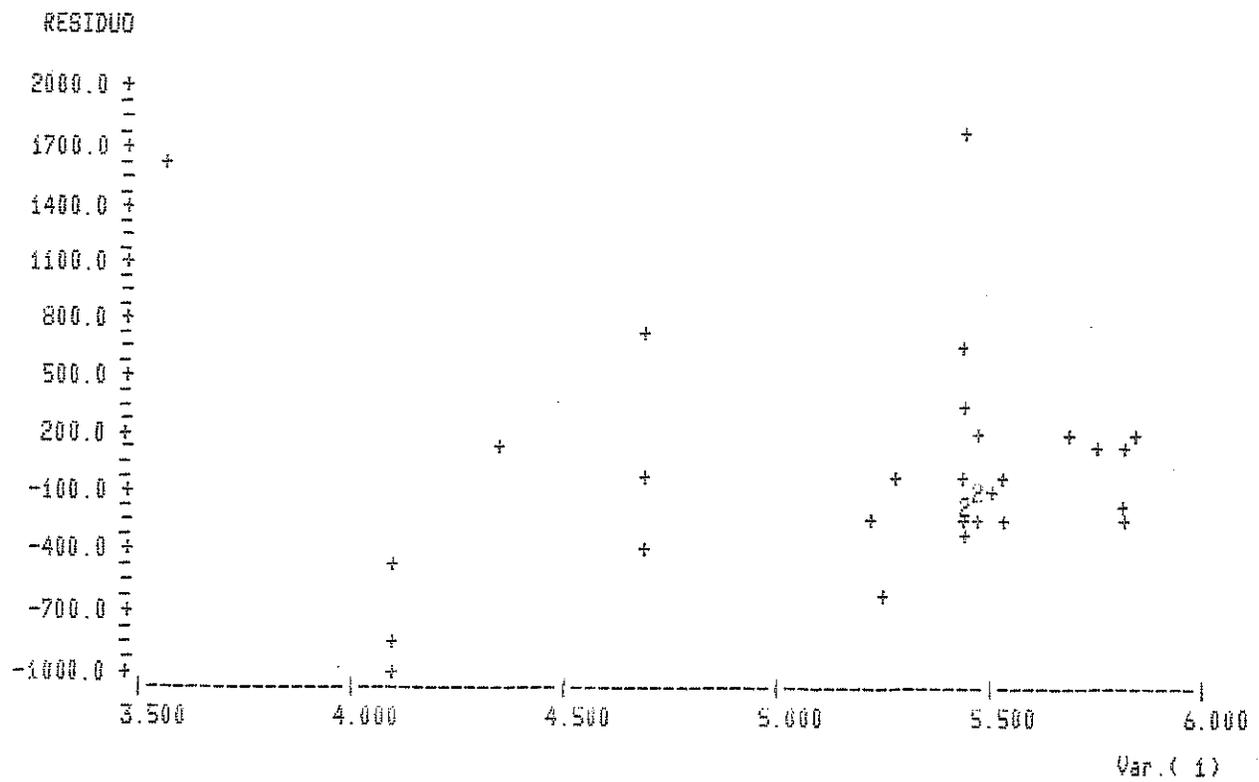
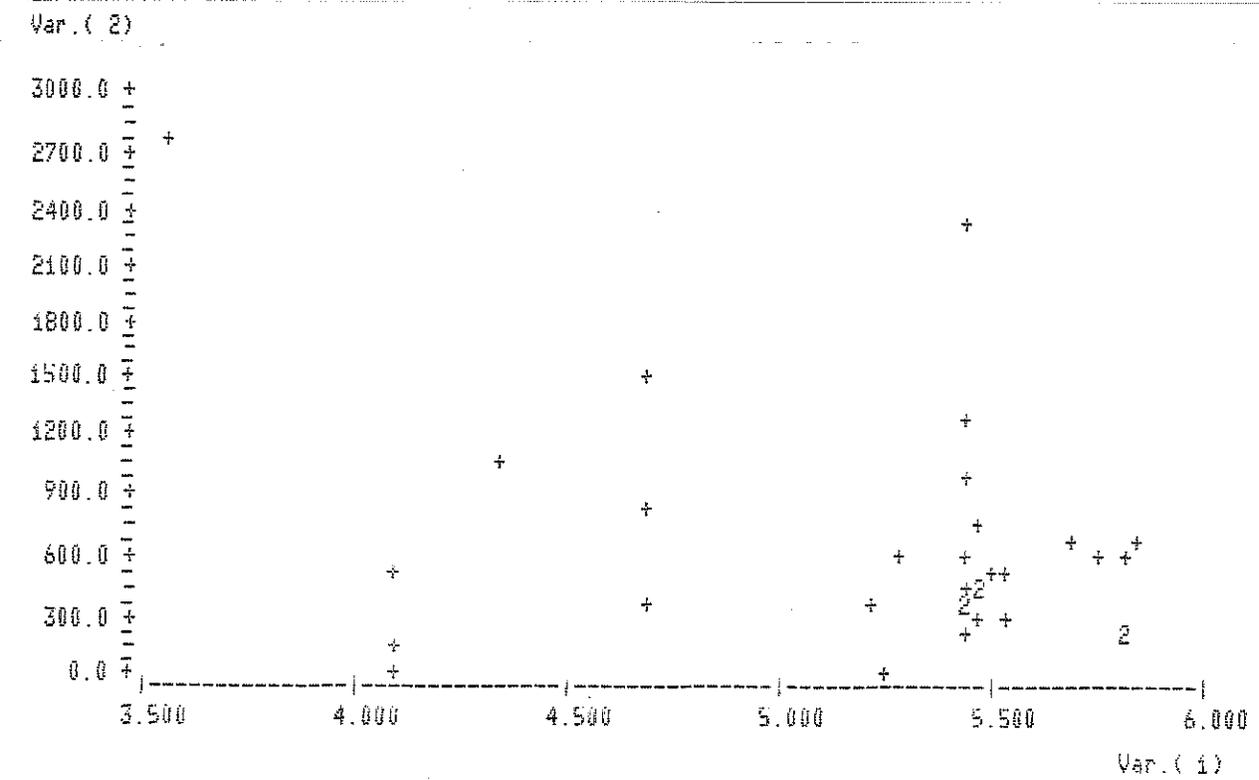


Fig. 9.5- Gráfico [excentricidade e_f x espessura t], com 32 pontos (sem o ponto de origem).

A regressão destes pontos leva à reta:

$$6 e_f = 2,379019 - 0,330167 t \quad (9.23)$$

com $R^2 = 10,73\%$

A reta obtida em (9.23) tem uma inclinação negativa, e o ponto destoante no conjunto está sendo o de nº 27 (TABELA 9.3).

É coerente pensar-se que para $t = 0$ tem-se $e_a = 0$, ou seja, é coerente colocar-se a origem como sendo um dos pontos do conjunto.

Abandonando-se o ponto 27, e introduzindo o (0,0) no conjunto de pontos obtêm-se os gráficos da figura 9.6.

A nova regressão gerou:

$$6 e_f = 0,126496 + 0,087346 t \quad (9.24)$$

com $R^2 = 3,97\%$. Passa-se, então, a uma reta com inclinação positiva.

Para aumentar-se o índice de correlação, abandonou-se alguns pontos, e o conjunto passou a ser o da TABELA 9.4.

TABELA 9.4

LINHA	VAR. (1)	VAR. (2)
1	5.7500	578.4060
2	5.8250	574.7340
3	5.8500	679.7820
4	5.4330	370.7220
5	5.4500	563.7180
6	4.7000	406.7280
7	5.4700	289.0140
8	4.1000	37.0560
9	5.4350	413.5140
10	5.4550	463.6560
11	5.4900	495.0660
12	5.4830	437.9560
13	5.5300	506.6160
14	5.5330	319.8960
15	4.1000	163.2600
16	5.2180	401.3520
17	5.2900	602.4300
18	5.6750	692.5020
19	5.4400	375.1800
20	0.0000	0.0000

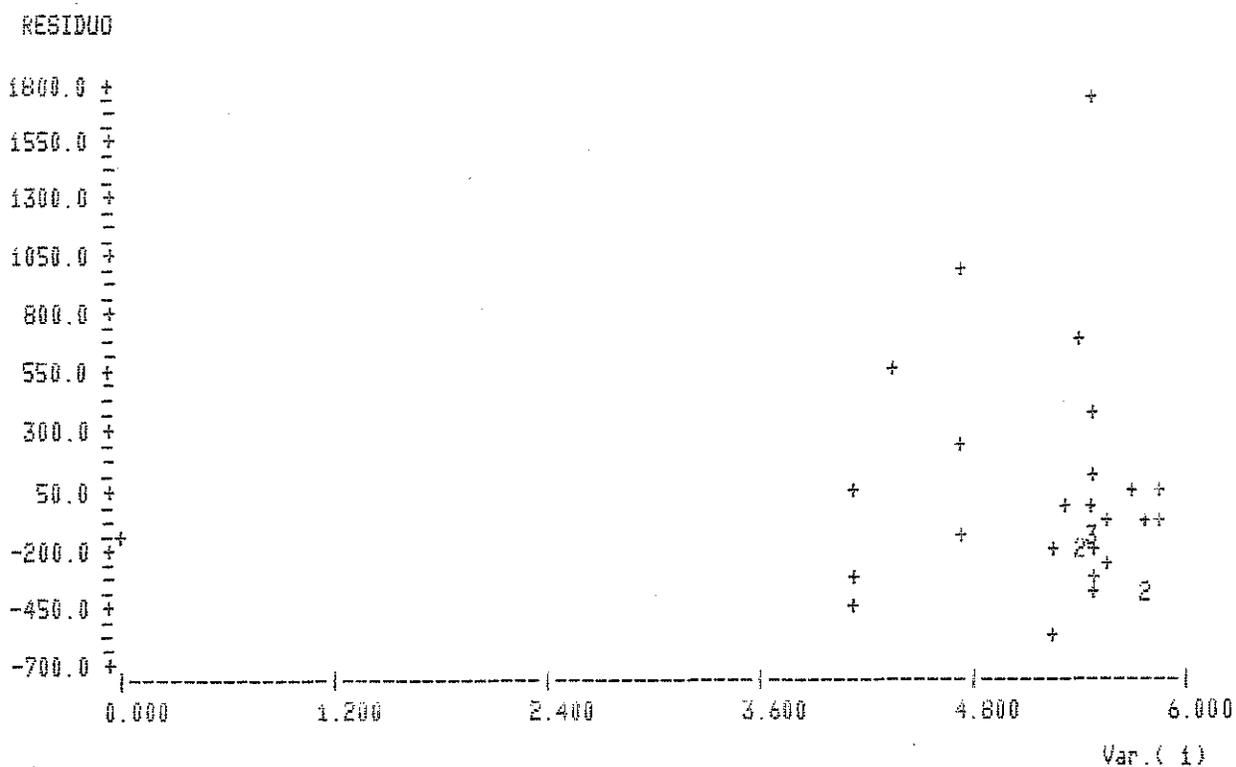
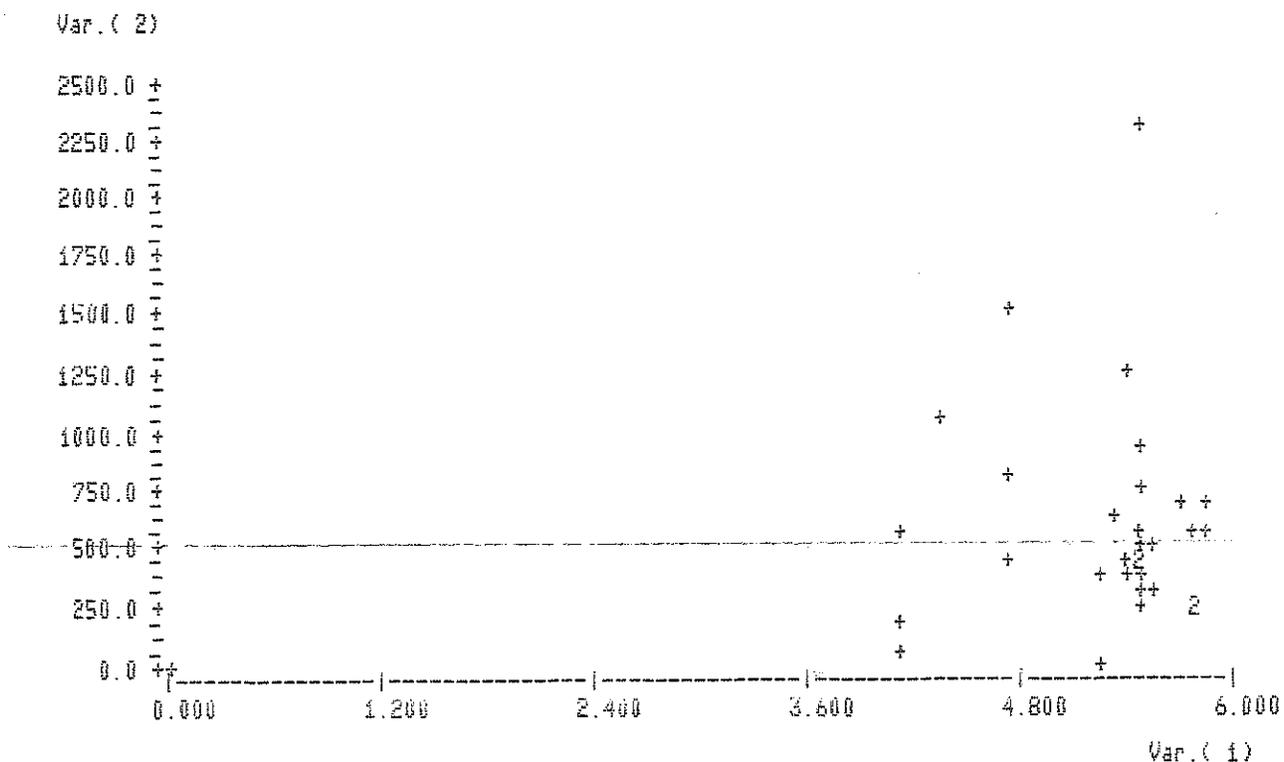


Fig. 9.6- Gráfico [excentricidade e_f x espessura t], com 32 pontos (sem o ponto 27, mas introduzindo a origem).

Esses 20 pontos fornecem a seguinte regressão:

$$6 e_f = - 0,128772 + 0,108143 t \quad (9.25)$$

com $R^2 = 53,96\%$.

Se na equação (9.25), despreza-se o termo independente (a favor da segurança pois é negativo); e chama-se de e_{ad} (excentricidade de projeto) o termo $6 e_f$, tem-se:

$$e_{ad} = 0,108 t \cong \frac{t}{10} \quad (9.26)$$

9.3.5- Relação [espessura x excentricidade e_ϵ]

De maneira semelhante ao item anterior, pretende-se correlacionar aqui a dimensão da seção paralela ao plano de flexão (espessura t) com a excentricidade obtida a partir das deformações específicas e_ϵ .

TABELA 9.5

LINHA	VAR. (1)	VAR. (2)
1	5.7500	819.3540
2	5.8250	494.2920
3	5.8500	448.7520
4	5.4550	436.8120
5	5.4500	471.1560
6	5.8000	582.9900
7	5.4700	457.0020
8	5.4450	244.1520
9	5.4350	458.2380
10	5.4550	483.8880
11	5.4900	411.5520
12	5.4830	456.1740
13	5.5300	640.0380
14	5.5330	547.5300
15	5.2380	108.1980
16	5.2180	333.4020
17	5.2900	1002.7380
18	5.6750	337.2600
19	5.8050	223.7400
20	5.4330	427.6080
21	4.6950	203.9700
22	4.7000	200.1600
23	5.4400	370.5000
24	5.4400	271.2600
25	5.4400	347.2800
26	5.4800	676.2600
27	5.4800	128.6800
28	3.9400	200.7000
29	4.1000	22.2600
30	4.1000	108.5400
31	5.4350	30.0000
32	4.1000	269.4600
33	0.0000	0.0000

Os valores de e_ϵ serão multiplicados, aqui também, pelo coeficiente de majoração 6.

Os valores de "t" e "6 e_ϵ " estão listados na TABELA 9.5. Entre os 33 pontos listados na TABELA 9.5 já se encontra a origem (0,0) pelos motivos já expostos no item anterior.

A distribuição desses pontos em gráfico, está mostrada na figura 9.7, parte superior. Na parte inferior tem-se a distribuição dos resíduos.

A regressão dos 33 pontos, gerou a reta:

$$6 e_\epsilon = -0,162203 + 0,103958 t \quad (9.27)$$

com $R^2 = 23,66\%$.

Desprezando-se o termo independente (a favor da segurança pois é negativo), e chamando de e_{ad} o termo 6 e_ϵ , tem-se:

$$e_{ad} = 0,104 t \cong \frac{t}{10} \quad (9.28)$$

Novamente, as excentricidades obtidas a partir das deformações específicas se comportaram melhor que as correspondentes, obtidas pela flecha.

Os resultados obtidos através das equações (9.26) e (9.28) são idênticas às sugestões feitas por alguns autores sendo que duas delas foram mostradas através das equações (2.62) e (2.71).

É importante registrar também que diferente de como foi procedido no caso do primeiro critério (ítems 9.3.2 e 9.3.3), nos casos presentes não se buscou uma reta superior limitante, considerando-se como razoável a reta de regressão, uma vez que os resultados estavam coerentes com os critérios existentes na bibliografia. A reta superior limitante levaria a um critério muito rígido, incoerente com a prática corrente.

Convém lembrar que para o concreto armado tem-se adotado o valor de $h/30$, ou seja, um valor três vezes menor do que o obtido com a reta média (eqs. 9.26 e 9.28).

Como conclusão dos ítems 9.3.4 e 9.3.5, sugere-se a adoção da expressão:

$$e_{ad} = \frac{t}{10} \quad (9.29)$$

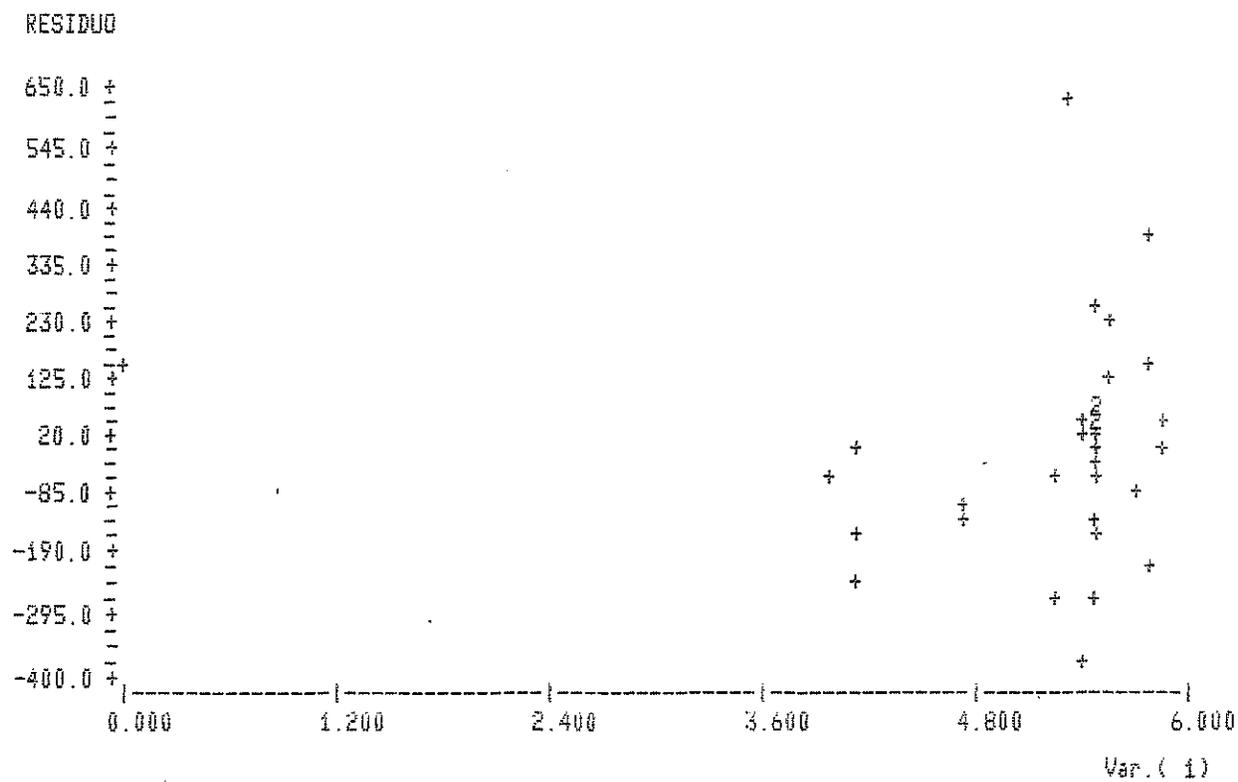
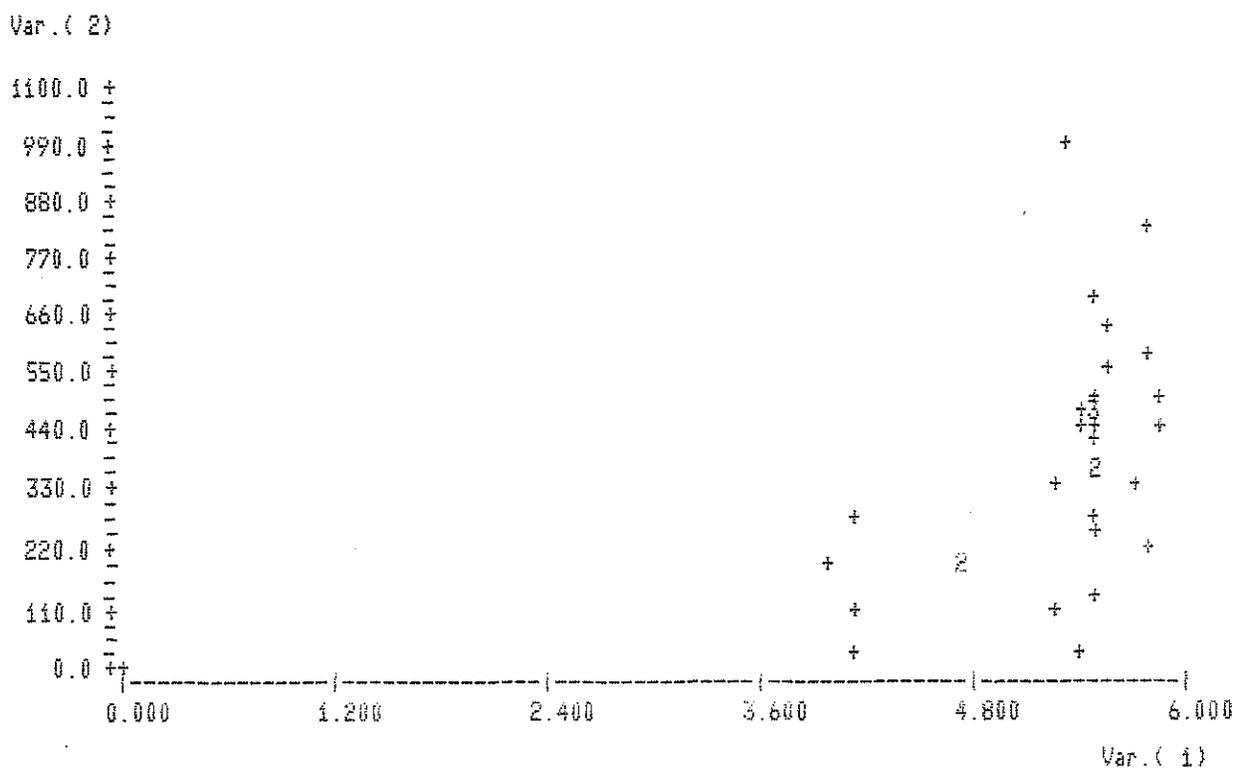


Fig. 9.7- Gráfico [excentricidade e_e x espessura t], com 33 pontos incluindo-se a origem.

como o segundo critério para estimar-se a excentricidade equivalente adicional (ou acidental, ou, ainda, não intencional), para as colunas de madeira de seção retangular.

9.3.6- Critério da excentricidade mínima

É muito difícil encontrar-se um balizamento seguro para a adoção desse valor mínimo.

Em concreto armado adotou-se 2cm mas muitos calculistas o consideram um valor excessivo.

Tem-se a impressão, até criar-se bases mais firmes através de discussões e usos práticos, que o valor de 1cm seja razoável.

Assim , sugere-se a adoção do valor mínimo:

$$e_{ad_{min}} = 1 \text{ cm} \quad (9.30)$$

como o terceiro critério para estimar-se a excentricidade equivalente adicional (ou acidental, ou não intencional), para as colunas de madeira de seção retangular.

CAPÍTULO 10

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

10.1- INTRODUÇÃO

As estruturas de madeira, na engenharia moderna requerem um critério de projeto mais adequado, que represente mais eficientemente a realidade, sem comprometer a utilização e a segurança.

Os critérios de cálculo de barras submetidas à compressão e flexão-composta contidos na atual norma "Cálculo e Execução de Estruturas de Madeira" (NBR-7190) tem permanecido inalterados desde o final dos anos 40, quando foi proposta.

A análise mais correta, com momentos de segunda ordem, tem estado na literatura por várias décadas, e provavelmente chegou o momento de uma ampla discussão sobre a sua adoção como critério para projetos de estruturas de madeira.

Estudos nesse campo são, portanto, necessários. Este trabalho pretendeu oferecer alguma contribuição nessa área.

10.2- CONCLUSÕES

As conclusões a que se chegou foram as seguintes:

- 1) O caso de uma coluna com carregamento axial é uma idealização que raramente ocorre na prática.

Mesmo em colunas projetadas para trabalhar com carregamento axial, ocorrerá pequenas excentricidade de carga provocadas pelas tolerâncias de construções e eventuais curvaturas iniciais.

- 2) Além do efeito da excentricidade na aplicação da carga e curvatura inicial, o efeito da não homogeneidade do material e inevitável variação na área da seção transversal da coluna ao longo do seu eixo também contribuem para nos afastarmos da idealização criada pelas hipóteses tradicionais de colunas cêntricas homogêneas.
- 3) Todas as imperfeições citadas nos itens (1) e (2) podem ser englobadas através da consideração de uma excentricidade equivalente adicional, que também poderá ser designada como acidental, ou, ainda, não intencional.
- 4) Para confirmar-se as expressões aqui encontradas das excentricidades equivalentes adicionais, abrangendo uma gama maior de espécies de madeira faz-se necessário um programa de pesquisa mais amplo. Acredita-se, entretanto, que pouco irão diferenciar daquelas obtidas neste trabalho.

Sugere-se, pois, um cálculo em projeto com o maior valor obtido entre os três seguintes critérios para as excentricidades equivalentes adicionais (e_{ad}), para $\lambda \geq 40$.

1º Critério:

$$e_{ad} = \ell/270$$

onde ℓ = comprimento de flambagem

2º Critério:

$$e_{ad} = \frac{t}{10}$$

onde t = espessura da peça na direção do plano de flexão

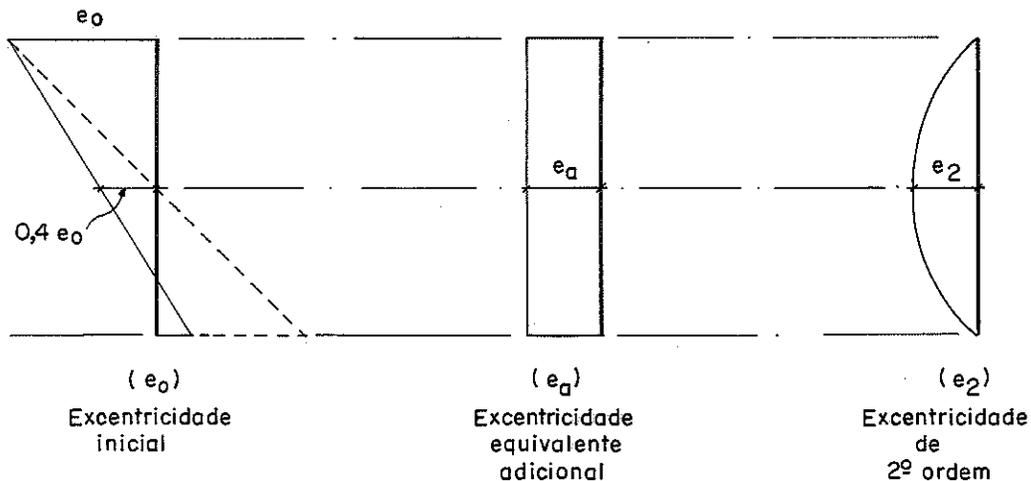
3º Critério:

$$e_{ad_{min}} = 1 \text{ cm}$$

10.3- SUGESTÕES

10.3.1- Composição de excentricidades

Sugere-se a seguinte composição de excentricidade para colunas de madeira:



Condições críticas a serem consideradas:

- nas extremidades superior ou inferior:

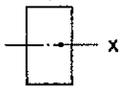
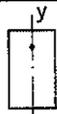
$$e = e_0 + e_a$$

- no meio do vão:

$$e = 0,4 e_0 + e_a + e_2$$

onde a parcela $0,4e_0$ é proposta objetivando-se levar em conta uma possível diferença de excentricidades iniciais nas extremidades superior e inferior da coluna.

No caso mais genérico, que é o da flexão-composta oblíqua fica a sugestão de se fazer as combinações de excentricidades sintetizadas no seguinte quadro:

POSIÇÃO DA EXCENTRICIDADE	DIREÇÃO x 	DIREÇÃO y 
Nas Extremidades	$e_{ox} + e_{ax}$ e_{ox}	e_{oy} $e_{oy} + e_{ay}$
No Vão	$0,4 e_{ox} + e_{1x} + e_{2x}$ $0,4 e_{ox}$	$0,4 e_{oy}$ $0,4 e_{oy} + e_{ax} + e_{ay}$

10.3.2- Parâmetros de Normalização

Para efeito de se rever a atual norma NBR-7190, sugerem-se os seguintes parâmetros, quanto ao item "colunas":

" 1º caso: $\lambda \leq 40$

O efeito das deformações pode ser desprezado.

Se a excentricidade inicial intencional (e_0) for nula, o cálculo pode ser feito como compressão simples, utilizando como carregamento de projeto (N_d) um valor majorado dado por:

$$N_d = 1,2 \gamma N$$

Se e_0 for diferente de zero, calcula-se à flexão-composta com:

$$N_d = \gamma N$$

$$M_d = N_d (e_0 + e_a)$$

onde e_a é o maior dos três valores:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\lambda}{270} & \text{cm} \\ \frac{t}{10} & \text{cm} \\ 1 & \text{cm} \end{array} \right.$$

sendo l = comprimento de flambagem, t = lado da seção transversal paralelo ao plano de flexão.

2º caso: $40 < \lambda \leq \lambda_0$

O efeito das deformações deve ser considerado e permite-se a aplicação do método do momento complementar, caso a coluna seja reta com seção constante; ou o método simplificado.

O cálculo à flexão composta será feito com:

$$N_d = \gamma N$$

$$M_d = N_d (e_0 + e_a + e_2)$$

onde e_0 = excentricidade inicial intencional

e_a = idem ao definido no 1º caso

e_2 = excentricidade de 2ª ordem = $\frac{l^2}{10} \cdot \frac{1}{r}$

A norma deverá fornecer uma expressão para avaliar a curvatura ($1/r$).

3º caso: $\lambda_0 < \lambda < 140$

O cálculo será feito pelos métodos que consideram a relação momento-curvatura, isto é, método geral, método simplificado ou método do momento complementar corrigido."

Sem dúvida, a sugestão segue o caminho do concreto armado, mas acredita-se que se se consegue critérios idênticos para materiais distintos, o calculista sairá lucrando.

Além disso, os progressos obtidos em uma área poderão ser absorvidos mais facilmente pela outra.

10.4- NOVAS PESQUISAS

Sem sombra de dúvida, muitas pesquisas podem ser feitas nesta área.

- mais pesquisas sobre as excentricidades equivalentes adicionais, levando em consideração a variação da umidade, variação da forma da seção, duração da carga, de formação lenta, etc.
- pesquisas sobre a excentricidade de 2ª ordem, procurando expressões que melhor a definam; estudos sobre os estados limites de deformação específica na compressão e

tração, visando expressões adequadas para o raio de curvatura; etc.

- pesquisas sobre flexão-composta oblíqua, objetivando o estabelecimento de parâmetros realísticos para colunas comprimidas de madeira.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1744: (1) EULER, Leonhard. "Methods Inveniendi Lineas Curvas. Apêndice I: De Curvis Elasticus". Lausannae & Genevaê. 1744.
- 1759: (2) EULER, Leonhard. "Sur la Force des Colonnes". Academie des Sciences de Berlin, Mem. 13: 252(1757). Tradução para o inglês por J.A. Van Den Broek, Am. J. Phy. 15: 309-18 (1947).
- 1820: (3) DULEAU. "Essai théorique et experiemntal de la résistance du fer fogé". paris, 1820.
- 1840: (4) HODGKINSON, Phil. Trans. Royal Soc., Londres, 2ª Parte , 1840, p. 385-456.
- 1845 e
1846 : (5) LAMARLE; E. . "Memórias sur la flexion du bois". Anna - les des Travaux Publics de Belgique, Bruxelles, Vol. 3, p. 1-64, 1845; vol. 4, p. 1-36. 1846.
- 1887: (6) BAUSCHINGER, Mitt. Tech. Mech Lab. München, Heft 15, p. 11. 1887.
- 1889: (7) CONSIDÈRE. "Résistance des pièces comprimées". Congrès International Procédés de Construction, Paris. 1889.
- (8) ENGESSER, F. . "Ueber die knickfestigkeit gerader stäbe". Revista Zeitschrift fur Architektur und Ingenieurwesen, 35(1-8). 455-461, Schmorl an Von Seefeld, Hannover, Alemanha. 1889.
- 1898: (9) RANKINE. "Manual of Civil Engineering". 1898.
- 1930: (10) NEWLIN, J. A. & GAHAGAN, J. M.. "Test of large timber columns and presentation of the Forest Products Laboratory Column Formula", Technical Bulletin nº 167, Forest Products Laboratory, U.S. Department of Agriculture , Washington, D.C. 1930.

- 1932: (11) SOUTHWELL, R. V.. "On the Analysis of Experimental Observations in Problems of Elastic Stability". Royal Society of London-Proceedings, 135: 601-616. Abril de 1932.
- 1938: (12) DONNELL, L.H.. "On the Application of Southwell's Method for the Analysis of Buckling Tests". in: TIMOSHENKO, S. - "Contributions to the Mechanics of Solids". New York, MacMillan, 1938.
- 1941: (13) NEWLIN; J. A. & TRAYER, G. W.. "Stress in wood members subjected to combined column and beam action". USDA-FS-FPL, Madison, Forest Products Laboratory Report nº 1311. 1941.
- 1946: (14) SHANLEY, F. R.. "The Column Paradox". Journal Aeronautical Sciences, (13): 678. 1946.
- 1948: (15) WANG, Chi-Teh. "Inelastic Column Theories and an Analysis of Experimental Observations". Journal of the Aeronautical Sciences: 283-292. Maio, 1948.
- 1951: (16) CRISTOPHERSON; D. G.. "Determination of Critical Loads of Struts". Engineering, Vol. 172, p. 629 e 630. 1951.
- 1954: (17) HOOFF; N. J.. "Buckling and Stability". Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 58. Janeiro de 1954.
- (18) RATZERSDORFER, Julius, "FLAMBAGEM-I. Barras Prismáticas". Publicação nº 513 do Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT) São Paulo-SP. 1954. 730 pp.
- 1956: (19) YLINEN, A.. "A Method of Determining the Buckling Stress and the Required Cross-Section Area for Centrally Loaded Straight Columns in Elastic and Inelastic Range". Publication IABSE. 1956.
- 1961: (20) JOHNSTON, B. G.. "Buckling behavior above the tangent modulus load". Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 87(6), 79-99. 1961.

- (21) TIMOSHENKO, Stephen P. & GERE, James M.. "Theory of Elastic Stability", 2.ed., Tokio, McGraw-Hill Kogakusha, (International Student Edition). 1961.
- (22) VASWANI, H. P.. "Model Analysis Method for Determining Buckling Load of Rectangular Frames". Experimental Mechanics: 55-64. Agosto 1961.
- (23) WOOD, Lyman W.. "Formulas for columns with side loads and eccentricity". Forest Products Laboratory, Forest Service U.S. Department of Agriculture, Report nº 1782. Outubro de 1961.
- 1962: (24) KOITER, W. T.. "Stability of equilibrium of continuous bodies". Division of Applied Mechanics, Brown University. Technical Report nº 79. 1962.
- 1966: (25) LACERDA, F. S.. "Resistência dos Materiais" II Volume , 4ª ed., 1ª impressão. Editora Globo. Rio de Janeiro . 1966. 472 pp.
- 1968: (26) ZIEGLER, H.. "Principles of structural stability". Waltham, Mass., Blaisdell Publishing. 1968.
- 1969: (27) MALHOTRA, S. K.. "Buckling strenght of solid timber columns". Halifax, N. S., Nova Scotia Technical College . 1969.
- 1973: (28) GURFINKEL, German. "Wood Engineering". Southern Forest Products Association. New Orleans, Louisiana, USA, 1973. 537 pp.
- (29) NEUBAUER, L.W.. "A realistic and continuous wood column formula". Forest Products Journal, 23(3): 38-44. Março de 1973.
- 1974: (30) CHAJES, A.. "Principles of Structural Stability Theory". Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.. 1974.

- (31) L'HERMITE, R.. "Flambage et Stabilité - Le flambage élastique des pièces droites". Collection V.T.I. - I.T.B.T.P., Éditions Eyrolles, 1^o ed. 1974. 230 pp.
- 1977: (32) AUFIERO, Liliana. "Estabilidade de Colunas Isostáticas de Concreto Armado". Dissertação de Mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos-USP, sob orientação do Prof. Lauro Modesto dos Santos. 1977.
- (33) TSAI, W.T.. "Nonlinear Behavior of Compression Members". ASCE Structural Div., pp 1484-1489. 1977.
- 1979: (34) LARSEN, Hans J. & THEILGAARD, Esko. "Laterally Loaded Timber Columns". Journal of the Structural Divison. ASCE. Vol. 105, nº ST 7, pp. 1347-1363. Julho de 1979 .
- (35) MAZZILLI; Carlos E. N.. "Sobre a Instabilidade de Estruturas Elásticas Sensíveis a Imperfeições". Dissertação apresentada à Escola Politécnica da USP para obtenção do Título de Mestre em Engenharia sob orientação do Prof. Dr. Décio de Zagottis. São Paulo- SP. 1979.
- 1980: (36) BREYER; Donald E. . "Design of Wood Structures". Editora MacGraw-Hill Book Company, New York. 1980. 542 pp.
- (37) DE ZAGOTTIS, Decio. "Introdução à Teoria das Estruturas. Capítulo 10: Estabilidade e Instabilidade do Equilíbrio das Estruturas". POLI-USP. 1980. 81 pp.
- 1981: (38) FUSCO, P. B.. "Estruturas de Concreto - Solicitações Normais". Editora Guanabara Dois. Rio de Janeiro. 1981. 464 pp.
- 1982: (39) BODIG, Jozsef & JAYNE, Benjamin A.. "Mechanics of Wood and Wood Composites". New York, Van Nostrand Reinhold Company. 1982.
- 1983: (40) CREUSS, Guillermo Juan. "Relações Elastoplásticas em Tração e Compressão". Caderno Técnico - CT-A 49. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS. Setembro de 1983.

- (41) ROCCO LAHR, Francisco Antonio. "Sobre a Determinação de Propriedades de Elasticidade da Madeira". Tese apresentada para obtenção do título Doutor em Engenharia de Estruturas, Orientador Prof. Dr. João Cesar Hellmeister. EESC-USP. São Carlos-SP. 1983.
- 1985: (42) BUCHANAN, Andrew; JOHNS, Kenneth C. & MADSEN, Borg. "Column design methods for timber engineering". Canadian Journal Civ. Eng., Vol. 12, pp. 731-744. 1985.
- (43) GALVÃO, A. P. M. & JANKOWSKY, I. P. . "Secagem Racional da Madeira". Livraria Nobel S.A., 1ª Edição. 1985.
- (44) PFEIL, Walter. "Estruturas de Madeira". Livros Técnicos e Científico. Editora S.A.. 1985. 296 pp.
- 1986: (45) BUCHANAN; Andrew H.. "Combined bending and axial loading in lumber". Journal of Structural Engineering, 112(12): 2592-2609. Dezembro de 1986.
- (46) PIMENTA, Paulo de Matos & MAZZILLI, Carlos, E. N.. "Mínima Correctio Methodi Inveniendi Lineas Curvas Elasticas". Publicação BT/PEF nº 8163 da Poli-USP, São Paulo-SP. 1986.
- (47) TSAI, W. T.. "Note on Southwell's Method for Buckling Test of Structures". Journal of Applied Mechanics. Vol. 53, pp. 953 e 954. Dezembro de 1986.
- (48) ZAHAN, John J.. "Design of Wood Members under Combined Load". Journal of Structural Engineering, 112(9): 2109-2127. Setembro de 1986.