

**APERFEIÇOAMENTO DE MODELOS USUALMENTE
EMPREGADOS NO PROJETO DE SISTEMAS
ESTRUTURAIS DE EDIFÍCIOS**

**AUTOR : PROF. MÁRCIO ROBERTO SILVA CORRÊA
ORIENTADOR : PROF. DR. WILSON SÉRGIO VENTURINI**

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

APERFEIÇOAMENTO DE MODELOS USUALMENTE EMPREGADOS
NO PROJETO DE SISTEMAS ESTRUTURAIS DE EDIFÍCIOS

PROF. MÁRCIO ROBERTO SILVA CORRÊA

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Doutor em Engenharia Civil".

ORIENTADOR:

PROF. DR. WILSON SÉRGIO VENTURINI

SÃO CARLOS, SETEMBRO DE 1991

Para minha esposa Karla
e minhas filhas Aline e Camila

AGRADECIMENTOS

A todas as pessoas que direta ou indiretamente tornaram possível a elaboração desta pesquisa.

A Sra. Marta Regina Couto Faria pelo dedicado trabalho de gerenciamento da impressão e o auxílio oferecido na digitação do capítulo 4.

A Sra. Sylvia Helena Morette Villani e o Sr. Francisco Carlos Guete de Brito pelo paciente trabalho de confecção da maioria dos desenhos.

A Sra. Maria Nadir Minatel pelo valioso trabalho de busca bibliográfica.

Ao prof. Walter Savassi com quem obtive as primeiras noções sobre o Método dos Elementos Finitos.

Ao prof. Sérgio Persival Baroncini Proença pelo auxílio e pelas sugestões.

Ao Dr. Edson Luiz Zucoloto, meu médico, sem cuja ajuda profissional não teria sido possível chegar ao final deste trabalho.

Em especial, ao prof. Wilson Sérgio Venturini, pelo apoio, pelo incentivo, pelo cuidadoso trabalho de orientação e, sobretudo, pela amizade.

Ao prof. Marcio Antonio Ramalho, pela cooperação e pela amizade inextinguíveis, demonstradas, não apenas durante o desenvolvimento desta pesquisa, mas, ao longo de muitos anos de trabalho em conjunto.

Ao eng. Luiz Henrique Ceotto, diretor técnico adjunto da ENCOL S/A Eng. Com. e Indústria, por ter permitido que se utilizassem como exemplos estruturas de edifícios de propriedade da referida empresa, bem como por ter possibilitado o contato com inúmeros projetistas estruturais que prestam serviços profissionais à ENCOL S/A.

Finalmente aos amigos, colegas e familiares, por sua contribuição em todos os níveis.

RESUMO

Este trabalho trata da viabilidade e da necessidade de aperfeiçoamento dos modelos utilizados no desenvolvimento de projetos usuais de estruturas de edifícios, mediante a aplicação de formulações simples. É utilizado o Método dos Elementos Finitos para a discretização do sistema estrutural e implementação do modelo mecânico que simula o seu comportamento.

São estudados aspectos fundamentais do comportamento do sistema estrutural do edifício. O primeiro está relacionado a trechos rígidos, com destaque para o tratamento de lajes como diafragmas e a consideração de nós de dimensões finitas. O segundo versa sobre a análise não-linear geométrica do sistema estrutural do edifício composto por barras, comparando-se os modelos desenvolvidos com análises simplificadas usuais. O terceiro é relativo à análise do pavimento do edifício, destacando-se a necessidade de utilização de modelo que considere todos os seus elementos estruturais em conjunto e a possibilidade de tratamento simplificado do comportamento não-linear de lajes de concreto armado.

Exemplos de estruturas de edifícios reais são incluídos, mostrando-se que os modelos desenvolvidos são viáveis para a análise em microcomputadores.

ABSTRACT

This work deals with the viability and necessity of improving the models applied in usual building structural design. The Finite Element Method is used to discretize the structural system and to approach mechanical model used to represent its behaviour.

Fundamental aspects of the building structural system are analysed. The first one is related to rigid members pointing out treating slabs as diaphragms and the finite joint size assumptions. The second point to be analysed is the geometrical nonlinear behaviour of the building structural system compounded by beam elements, comparing the developed models with those adopted for simplified analysis. The third point is related to the analysis of building floors, emphasizing the need of using models that deal with the structural elements together and the possibility of assuming simplified nonlinear behaviour of reinforced concrete slabs.

Real structural building examples are included to show the viability of the developed models to be used in personal computers.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - APRESENTAÇÃO

1.1	INTRODUÇÃO	1
1.2	DESCRIÇÃO SUCINTA DOS CAPÍTULOS	2
1.3	SÍNTESE	6

CAPÍTULO 2 - A ESTRUTURA DO EDIFÍCIO-CONSIDERAÇÕES GERAIS

2.1	INTRODUÇÃO	7
2.2	SISTEMA ESTRUTURAL - INTEGRIDADE E SUBDIVISÃO ...	8
2.3	O PROJETO ESTRUTURAL	9
2.4	ELEMENTOS ESTRUTURAIS BÁSICOS - CLASSIFICAÇÃO GEOMÉTRICA	10
2.5	ARRANJO ESTRUTURAL	14
2.6	SISTEMAS ESTRUTURAIS USUAIS	18
	2.6.1 Subsistemas Horizontais	18
	2.6.2 Subsistemas Verticais	21
2.7	IDEALIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO MATERIAL	24
2.8	IDEALIZAÇÃO DAS AÇÕES	25
2.9	O MODELO MECÂNICO.....	27
2.10	EFEITOS NÃO-LINEARES NO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL.	30
2.11	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	31
2.12	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	33

CAPÍTULO 3 - TRECHOS RÍGIDOS NA ESTRUTURA DE EDIFÍCIO

3.1	INTRODUÇÃO	35
3.2	TRECHOS RÍGIDOS - APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS	38
3.3	TRANSLAÇÃO DE COORDENADAS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL	41
3.4	TRECHO RÍGIDO DE BARRA "OFF SET"	43
3.5	APLICAÇÕES DE BARRAS COM TRECHOS RÍGIDOS	46

3.6	DIAFRAGMA RÍGIDO - NÓ MESTRE	50
3.7	PRIMEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO - PÓRTICO PLANO	55
3.8	SEGUNDO EXEMPLO DE APLICAÇÃO - ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAINÉIS	61
3.9	CONCLUSÕES	69
3.10	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	70

CAPÍTULO 4 - NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA - EFEITO DE SEGUNDA ORDEM

4.1	INTRODUÇÃO	71
4.2	UM BREVE HISTÓRICO	72
4.3	COLOCAÇÃO DO PROBLEMA	76
4.4	CONCEITOS BÁSICOS	77
4.5	UM CASO SIMPLES-TRELIÇA PLANA	81
	4.5.1 Modelo Elemental e Sistema de Coordenadas	81
	4.5.2 Energia de Deformação	84
	4.5.3 Matriz de Rigidez Secante	85
	4.5.4 Matriz de Rigidez Tangente	87
	4.5.5 Atualização de Coordenadas	89
4.6	PÓRTICO PLANO	97
	4.6.1 Modelo Elemental e Sistemas de Coordenadas	97
	4.6.2 Energia de Deformação	99
	4.6.3 Matriz de Rigidez Secante	101
	4.6.4 Matriz de Rigidez Tangente	104
	4.6.5 Atualização de Coordenadas	106
4.7	TRELIÇA NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL	113
	4.7.1 Modelo Elemental e Sistemas de Coordenadas	113
	4.7.2 Energia de Deformação	115
	4.7.3 Matriz de Rigidez Secante	116
	4.7.4 Matriz de Rigidez Tangente	117
	4.7.5 Atualização de Coordenadas	118

4.7.6	Tratamento do Problema a Partir do Modelo Plano	120
4.8	PÓRTICO NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL	122
4.8.1	Considerações Preliminares	122
4.8.2	Modelo Elemental e Sistema de Coordenadas	123
4.8.3	Energia de Deformação	126
4.8.4	Matrizes de Rigidez Secante e Tangente ...	129
4.8.5	Atualização de Coordenadas	133
4.8.6	Deslocamentos Nodais e Atualização da Geometria da Barra	138
4.9	TRECHOS RÍGIDOS	140
4.10	ASPECTOS COMPUTACIONAIS	147
4.11	EXEMPLOS DE AFERIÇÃO DOS MODELOS	150
4.11.1	Exemplo 1 - Pórtico Plano	150
4.11.2	Exemplo 2 - Arco Abatido	151
4.11.3	Exemplo 3 - Treliça Plana	153
4.11.4	Exemplo 4 - Pórtico no Espaço Tridimensional	154
4.12	TRÊS EXEMPLOS PLANOS - COMPARAÇÃO COM A ANÁLISE P- Δ	156
4.12.1	Primeira Opção	157
4.12.2	Segunda Opção	161
4.12.3	Terceira Opção	165
4.13	EDIFÍCIO SUN PARK	167
4.13.1	Primeira Opção	167
4.13.2	Segunda Opção	171
4.13.3	Terceira Opção	175
4.14	CONCLUSÕES	178
4.15	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	180

CAPÍTULO 5 - O PAVIMENTO DO EDIFÍCIO

5.1	INTRODUÇÃO	186
5.2	O SUBSISTEMA PLACA-VIGA	187
5.2.1	Modelo grelha - Descrição Sucinta	187

5.2.2	Modelo grelha - Considerações Finais	193
5.2.3	Modelo Laje Integrado à Grelha	194
5.3	O SUBSISTEMA LAJE PLANA	197
5.4	ELEMENTOS FINITOS PARA A FLEXÃO DE PLACAS	199
5.4.1	Elementos Triangulares - Um Breve Histórico	199
5.4.2	Noções Básicas - Teste do Elemento Individual	203
5.4.3	Formulação Padrão Baseada na Energia Potencial	207
5.4.4	A Formulação Livre	211
5.4.5	Flexão Linear de Placas - Equações Básicas	216
5.4.6	Elementos Finitos Adotados	218
5.4.7	Formação do Elemento Quadrilateral - Condensação Estática	229
5.4.8	Resultados Numéricos	231
5.5	PRIMEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO - ANÁLISE LINEAR ..	238
5.6	NÃO-LINEARIDADE FÍSICA DE PLACAS	250
5.6.1	Análise Elastoplástica - Um Breve Histórico	250
5.6.2	Análise Elastoplástica de Placas - Modelo Não-Estratificado	252
5.6.3	Aplicação do M.E.F. - Solução pelo Método das "Tensões" Iniciais	254
5.6.4	Implementação Computacional	259
5.6.5	Um Exemplo Simples	261
5.6.6	Um Modelo Simples para a Laje de Concreto Armado	263
5.6.7	Primeiro Exemplo de Aferição do Modelo - Viga de Bresler-Scordelis	270
5.6.8	Segundo Exemplo de Aferição do Modelo - Laje Simplesmente Apoiada com Carga Concentrada	273
5.6.9	Terceiro Exemplo de Aferição do Modelo - Laje Apoiada nos Cantos com Carga Concentrada	275

5.7	SEGUNDO EXEMPLO DE APLICAÇÃO - ANÁLISE NÃO LINEAR	280
5.8	CONCLUSÕES	290
5.9	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	293

APÊNDICE 1 - SOLUÇÃO DE SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

A1.1	PROCESSOS ITERATIVOS	306
A1.2	PROCEDIMENTOS INCREMENTAIS	311
A1.3	CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA	312
A1.4	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	315

APÊNDICE 2 - NOÇÕES ELEMENTARES DA TEORIA DA PLASTICIDADE

A2.1	INTRODUÇÃO	316
A2.2	ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA UNIDIMENSIONAL	316
A2.3	ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA MULTIDIMENSIONAL	320
	A2.3.1 Comportamento Elástico	320
	A2.3.2 Critério de escoamento	320
	A2.3.3 Regra de Endurecimento	322
	A2.3.4 Regra de Fluxo	323
	A2.3.5 Relações Tensão-Deformação	325
A2.4	ALGUNS CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO	326
	A2.4.1 Critério de Tresca	327
	A2.4.2 Critério de Von Mises	328
	A2.4.3 Critério de Mohr-Coulomb	329
	A2.4.4 Critério de Drucker-Prager	330

CAPÍTULO 1

APRESENTAÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

Nos últimos trinta anos tem-se observado uma grande revolução na análise estrutural, ocorrida devido ao enorme desenvolvimento dos computadores e dos métodos numéricos para modelagem de estruturas.

Em um primeiro momento o projetista estrutural se sentiu compelido a automatizar as rotinas de cálculo usuais, buscando, com o uso do computador, aumentar velocidade e precisão na obtenção dos resultados da análise de estruturas. Muitos não conseguiram enxergar, além desse horizonte, a renovação da maneira de se desenvolver o projeto estrutural, com a possibilidade de melhoria dos modelos empregados, buscando-se representar melhor o comportamento estrutural e obter economia com mais segurança. Em paralelo o meio acadêmico tem conseguido avanços fabulosos nos procedimentos de análise, com formulações cada vez mais apropriadas para a idealização do comportamento estrutural. Infelizmente, várias delas têm sido consideradas inacessíveis por parte de muitos projetistas, que julgam ser inviáveis para aplicação prática, bem como escritas em linguagem de difícil compreensão.

Em contraposição, o aparecimento de inúmeros "softwares" tem permitido o acesso a maneiras mais apuradas de idealização do comportamento estrutural. Muitas vezes ocorre o uso generalizado desses programas, sem que o analista de estruturas tenha adquirido habilitação no seu uso, transformando-se em preparador de arquivos de dados, sem a compreensão da teoria que liga esses dados aos resultados desejados.

O autor deste trabalho, vivendo a realidade do mundo

acadêmico e buscando contato constante com projetistas estruturais, em especial ligados ao projeto de edifícios, sentiu-se impulsionado a estudar algumas questões relativas ao projeto usual do edifício, procurando analisar possibilidades de melhoria dos modelos utilizados na prática, mediante aplicação de formulações relativamente simples e acessíveis ao projetista em geral. É, portanto, objetivo deste trabalho desenvolver texto em linguagem a mais simples possível, sobre a necessidade de aperfeiçoamento de modelos utilizados cotidianamente no projeto estrutural e os erros cometidos sem essa melhoria.

Todo o trabalho foi desenvolvido com a utilização de microcomputador compatível com o IBM/PC-AT, com processador principal Intel 80386, coprocessador aritmético Intel 80387, 640 kb de memória central e disco rígido com tempo de acesso de 20 ms e 40Mb de capacidade de armazenamento de informações, com uma média de 20Mb livres. O índice de desempenho em relação ao IBM/PC-XT padrão é de 20,7. Em todos os exemplos de aplicação foram anotados os tempos de processamento para mostrar a viabilidade de aplicação do "software" em microcomputadores, largamente utilizados nos escritórios de projeto.

O desenvolvimento do "software" se deu como uma adaptação do sistema LASER, sistema em elementos finitos desenvolvido no âmbito do Departamento de Estruturas da EESC/USP. Ampliar e melhorar a biblioteca de elementos do sistema LASER, bem como incluir a consideração de não-linearidade geométrica nos elementos de barra e a não-linearidade física em elementos de placa, constituem também, objetivo deste trabalho.

1.2 DESCRIÇÃO SUCINTA DOS CAPÍTULOS

O segundo capítulo apresenta conceitos básicos sobre a estrutura do edifício. São feitas considerações sobre o

sistema estrutural e seus elementos fundamentais. São comentadas as idealizações a serem feitas para que a estrutura real possa ser representada por um modelo mecânico, o que constitui a introdução do primeiro nível de aproximação. Em seguida trata-se do segundo nível de aproximação, mediante a utilização de métodos numéricos para a avaliação da resposta do modelo mecânico, apontando-se para o Método dos Elementos Finitos como o procedimento adotado no desenvolvimento desta pesquisa.

No terceiro capítulo é feito um estudo sobre trechos rígidos na estrutura de edifícios, mostrando-se que a sua consideração pode ser feita com formulação simples e segura. Embora a técnica de translação de coordenadas apresentada seja geral, é dado destaque à consideração do pavimento do edifício como diafragma rígido, com o uso do conceito de nó mestre e a análise de nós de dimensões finitas em sistemas estruturais compostos por barras, considerando-se trechos rígidos nas extremidades dos elementos. São apresentados dois exemplos de aplicação a estruturas de edifícios reais, um pórtico plano e uma associação tridimensional de painéis de contraventamento, submetidos a ações laterais. Mostra-se a influência dos trechos rígidos no comportamento do sistema estrutural e os perigos de sua desconsideração, bem como a importância da concepção tridimensional do sistema estrutural, para a simulação mais realista do seu comportamento. Um tratamento alternativo dos trechos rígidos de barra, com a inclusão de elementos de altíssima rigidez, sem a translação de graus de liberdade, é analisada, apontando-se os problemas numéricos e de dimensão do sistema de equações a que se pode chegar.

O quarto capítulo é dedicado à análise não-linear geométrica (NLG) de sistemas estruturais compostos por barras. Após um breve histórico são desenvolvidos modelos com o uso do conceito de matrizes incrementais em formulação lagrangeana, para a análise de elementos de

barra treliça e pórtico, nos espaços bi e tridimensionais. É considerada a hipótese das pequenas rotações entre duas sucessivas atualizações de coordenadas, com tratamento vetorial dos deslocamentos. É apresentado estudo sobre a consideração de trechos rígidos de barras em comportamento NLG, propondo-se alternativa de tratamento com processo iterativo. São comentados os aspectos computacionais sobre a adaptação do sistema LASER à análise de problemas não-lineares, com processo incremental-iterativo. Quatro exemplos simples, extraídos da literatura disponível, são utilizados para mostrar o desempenho dos modelos desenvolvidos. São utilizados como exemplos dois pórticos planos e uma parede, comparando-se os resultados provenientes da análise P- Δ com os correspondentes ao presente trabalho, verificando-se a aplicabilidade daquele processo aproximado apenas a problemas em que os efeitos de segunda ordem são pequenos. Finalmente é feita a análise NLG de estrutura de edifício real, considerando-se três opções: a estrutura original, assumindo-se a associação plana de painéis, sem a consideração de nós de dimensões finitas; a estrutura alterada com o acréscimo de alguns pavimentos, buscando o aumento dos efeitos de segunda ordem; a estrutura anterior considerada tridimensional e com nós de dimensões finitas. Em todos os casos os processamentos são feitos alternativamente com e sem a atualização da matriz de rigidez em cada iteração, estudando-se a vantagem de cada uma dessas possibilidades.

O quinto capítulo enfoca o estudo do pavimento do edifício, submetido a carregamento estático vertical. São tratados os pavimentos que se enquadram na classificação de subsistemas estruturais laje-viga e laje plana (cogumelo). Para o subsistema laje-viga são analisados dois modelos: o modelo grelha com a consideração do vigamento separado das lajes e o modelo com a consideração conjunta de vigas e lajes. O modelo grelha é detalhado, apresentando-se aspectos práticos de sua utilização na simulação de

pavimentos, incluindo-se uma visão crítica sobre o assunto. O modelo laje integrada à grelha é apresentado, discutindo-se as vantagens que oferece em relação ao anterior, mesmo na análise de subsistemas laje-viga. A seguir é tratado o subsistema laje plana, com atenção especial na ligação da laje aos pilares e paredes que lhe servem de apoio. Após um breve histórico sobre o desenvolvimento de elementos finitos triangulares aplicados à análise de flexão de placas, é apresentado um rápido estudo sobre a questão da convergência com o uso de elementos finitos e os fundamentos da Formulação Livre, adotada neste trabalho. São descritos os elementos escolhidos para a análise de placas finas, com estudo do seu desempenho em comparação com outros elementos de grande aceitação. A seguir é realizada análise elástica linear em pavimento real de edifício de concreto armado, que se enquadra na classificação de subsistema laje-viga. São utilizados o modelo grelha e o modelo laje integrada à grelha, com o uso de elementos finitos. Mostram-se no exemplo as vantagens da consideração do pavimento em sua integridade, apresentando-se os perigos da análise simplificada quanto aos quesitos segurança e economia. Na parte final do capítulo é proposto modelo não-estratificado para a consideração de comportamento elastoplástico de lajes de concreto armado, após breve histórico sobre a utilização do Método dos Elementos Finitos nesse assunto. É utilizado o método das tensões iniciais para a adaptação do sistema LASER à análise incremental-iterativa de placas em comportamento elastoplástico, assumindo-se que o material constituinte da placa admite diagrama momento-curvatura trilinear. O modelo considera a fissuração do concreto e a possibilidade de escoamento das armaduras, dois fenômenos fundamentais no comportamento não-linear das lajes de concreto armado. O desempenho do modelo é aferido mediante a comparação com exemplos clássicos de lajes de concreto armado, com disponibilidade de resultados experimentais e

resultados teóricos obtidos com a aplicação de modelos mais precisos, que consideram a laje estratificada em camadas ao longo de sua espessura. O modelo é aplicado ao estudo do comportamento de pavimento em laje plana, apresentando-se inicialmente os resultados da análise linear e, em seguida, a análise não-linear, assumindo-se uma distribuição de armaduras na laje; comparam-se os resultados e aponta-se um procedimento passível de ser adotado como rotina de projeto.

Incluem-se dois apêndices. O primeiro aborda rapidamente o problema da solução de sistemas de equações não-lineares e uso de critérios de convergência. O segundo apresenta rudimentos da teoria da plasticidade, voltados à aplicação feita no quinto capítulo.

1.3 SÍNTESE

O autor espera que o presente trabalho possa contribuir no sentido de aproximar o meio acadêmico ao projetista de estruturas.

Tendo desenvolvido estudo específico sobre a consideração de trechos rígidos nas estruturas, a análise não-linear geométrica de estruturas de barras, e a análise do pavimento do edifício considerando-se lajes e vigas integradas em um mesmo modelo e o tratamento não-linear físico de lajes de concreto armado, fica demonstrado com este trabalho que é possível, e, mais do que isso, é necessário aperfeiçoar os modelos utilizados na prática corrente do escritório de projetos. Fica patente, também, que esse aperfeiçoamento pode ser feito com a utilização de modelos simples, acessíveis e viáveis para a aplicação em microcomputadores.

CAPÍTULO 2

A ESTRUTURA DO EDIFÍCIO - CONSIDERAÇÕES GERAIS

2.1 INTRODUÇÃO

Todo edifício, como qualquer outra construção, para que possa cumprir a função a que se destina deve possuir uma forma material. A manutenção dessa forma só é possível se algumas das partes do edifício tiverem, em conjunto, capacidade resistente. Esse conjunto é usualmente denominado estrutura ou sistema estrutural. Sem a estrutura não há como a arquitetura se exprimir.

A referência principal do ser humano se faz em planos horizontais, onde a vida se desenvolve. Permanentemente, tanto o seu próprio corpo como os demais elementos materiais de sua necessidade são atraídos na vertical pelo planeta. Assim, as estruturas dos edifícios devem cumprir a função primeira de coletar, em planos horizontais, as cargas verticais e transmiti-las ao solo ou a outra estrutura a ele fixada. Têm que cumprir também a função de suportar e transmitir à base solicitações horizontais, como as provenientes da atuação do vento. Esta segunda, a partir de um certo valor da altura do edifício, pode se tornar a mais crítica, pois suas consequências passam a ultrapassar às da transmissão das cargas devidas à gravidade.

De forma sintética a estrutura tem que oferecer trajetórias às cargas presentes no edifício observando-se requisitos básicos de durabilidade, resistência e limitação de deslocamentos. Para que isso se dê o engenheiro planeja intelectualmente uma estratégia exequível que constitui o projeto estrutural.

2.2 SISTEMA ESTRUTURAL - INTEGRIDADE E SUBDIVISÃO

O sistema estrutural de um edifício constitui um todo tridimensional cujo comportamento é de extrema complexidade. A compreensão desse comportamento pode ser facilitada decompondo o todo em suas partes constituintes. Assim, o sistema estrutural pode ser decomposto em subsistemas estruturais, em geral planos, que por sua vez se decompõem em subsistemas mais simples, em muitos casos, elementos lineares.

Algumas dessas subdivisões se fazem de forma natural, uma vez que há separações físicas reais que tornam alguns subsistemas independentes dos demais. De outro modo outras separações são puramente intelectuais, cabendo ao projetista, com base nos fundamentos desenvolvidos na Teoria das Estruturas, ajustar um determinado subsistema a um modelo teórico existente, identificando as variáveis importantes no fenômeno, bem como suas interdependências e priorizando as conexões deste subsistema aos demais. Essas conexões, em resumo, traduzem as necessidades de compatibilidade que permitem reunir as partes para entender o todo, base do processo de análise.

Apesar da complexidade do problema, a Engenharia de Estruturas desenvolveu conhecimentos suficientes para a identificação dos tipos básicos de subsistemas bem como das interações necessárias para garantir a integridade do sistema estrutural.

Nas últimas décadas esse desenvolvimento tem se acelerado muito. Os modelos teóricos têm se aprimorado, fortemente influenciados pelos métodos numéricos, que se tornaram cada vez mais atraentes, acessíveis e eficientes com o aparecimento e aprimoramento dos computadores.

2.3 O PROJETO ESTRUTURAL

A escolha de um sistema estrutural adequado para um determinado edifício não é tarefa simples e envolve decisões extremamente importantes sobre inúmeros aspectos tais como :

- conciliar o sistema estrutural com a funcionalidade do edifício
- selecionar as ações importantes
- definir a natureza dos carregamentos (estáticos ou dinâmicos)
- eleger os materiais a serem utilizados
- escolher e arranjar de maneira eficiente os elementos estruturais

Tais aspectos são interdependentes, o que se torna um complicador adicional. Além disso, a análise da estrutura inicialmente definida orienta novas possibilidades e necessidades de aprimoramento do sistema estrutural, produzindo alterações na proposta inicial. Alterações muito profundas podem até mesmo definir um novo sistema estrutural adequado ao edifício em análise. De toda forma , mesmo com alterações superficiais, o problema possui um caráter interativo, em que o produto final deve harmonizar todos os itens envolvidos no projeto geral do edifício.

É necessário que o projetista tenha habilidade, conhecimentos teóricos e experiência para que o projeto estrutural tenha chance de sucesso.

2.4 ELEMENTOS ESTRUTURAIS BÁSICOS - CLASSIFICAÇÃO GEOMÉTRICA

Utilizando-se um critério de natureza geométrica [2.1] é possível distinguir quatro grandes classes de elementos estruturais básicos : blocos, folhas, barras e barras de parede delgada. Esse critério relaciona-se com a maneira segundo a qual tais elementos básicos se definem no espaço.

A primeira classe compreende as peças contínuas em que as três dimensões no espaço são da mesma ordem de grandeza. Tais peças, cuja característica principal é o volume, são denominados blocos (figura 2.1).

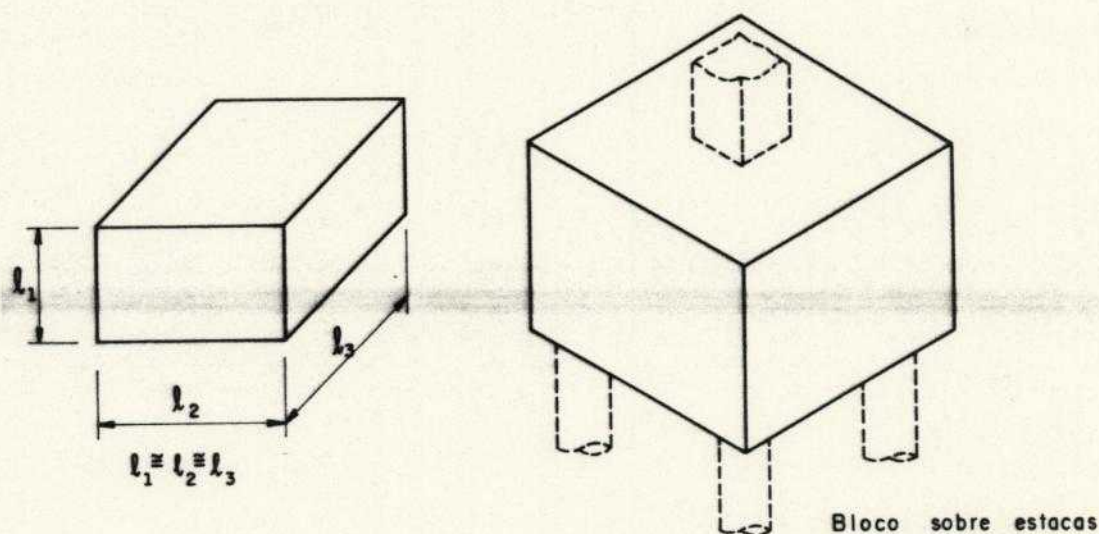


Fig. 2.1 Blocos

Os elementos da segunda classe possuem duas dimensões da mesma ordem de grandeza e bem maiores que uma terceira que constitui a espessura, como se ilustra na figura 2.2. A característica de estruturas de superfície é decisiva para a compreensão das folhas e orienta a sua classificação em cascas (quando a superfície média possui curvatura não nula) e em placas e chapas (quando a superfície média é plana).

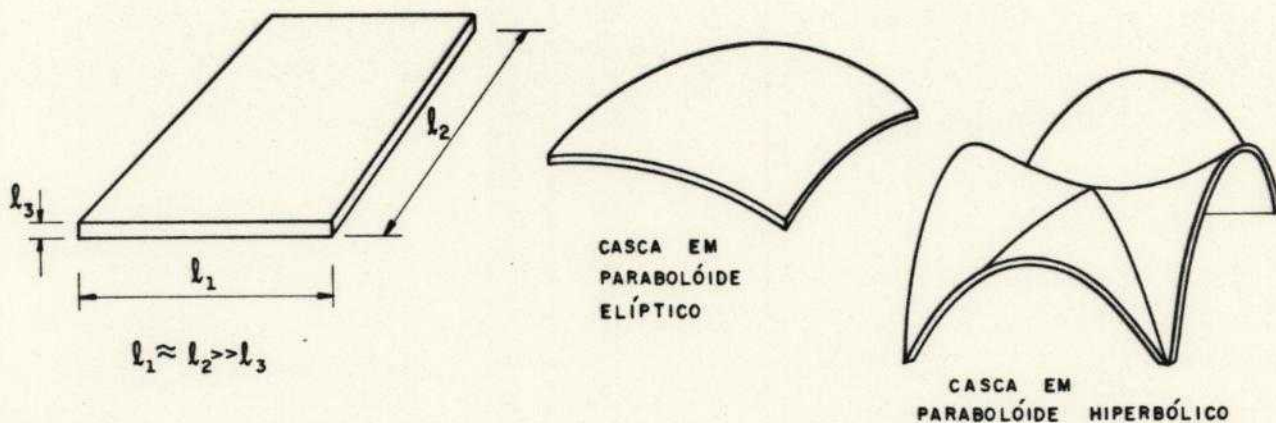


Fig. 2.2 Folhas

A terceira classe é constituída por peças que possuem duas dimensões da mesma ordem de grandeza e bem menores que a terceira (figura 2.3). Isso lhes confere a característica linear.

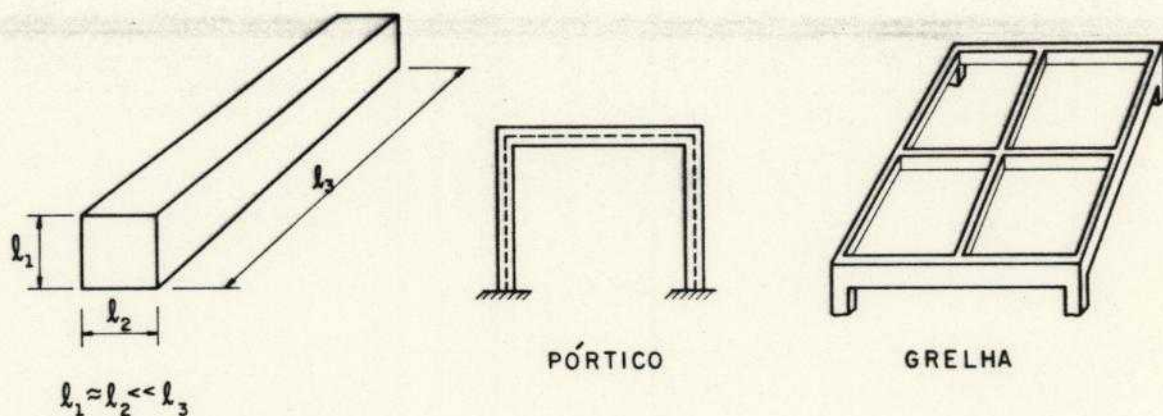


Fig. 2.3 Barras

A quarta classe compreende as peças em que cada uma das três dimensões é de uma ordem de grandeza diferente das demais. Essas peças possuem paredes de espessura bem menor que uma dimensão principal da seção transversal, que por sua vez deve ser de ordem de grandeza inferior à dimensão longitudinal, como se mostra na figura 2.4.

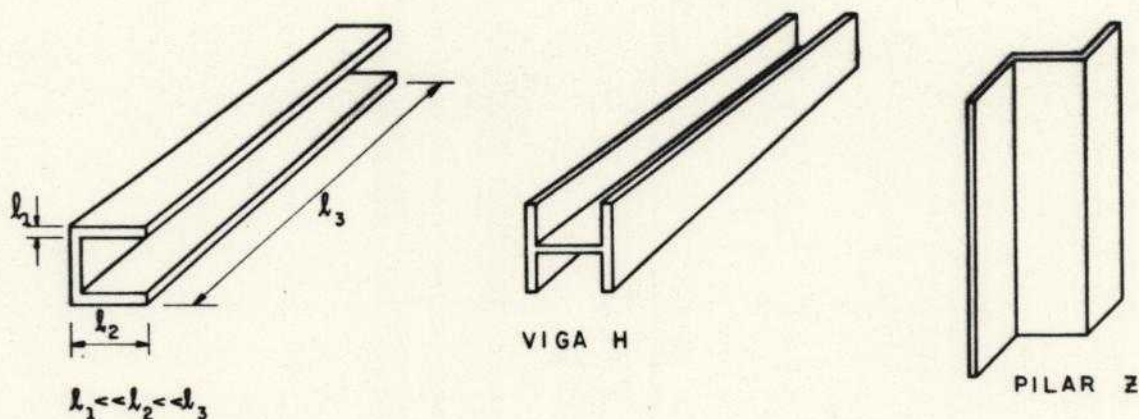


Fig. 2.4 Barras de parede delgada

A importância da classificação apresentada está em ser simples e permitir associar a cada uma das classes uma concepção de cálculo particular, buscando as aproximações possíveis associadas às hipóteses geométricas simplificadoras.

É evidente que qualquer elemento estrutural, por ter volume, pode ser visto como pertencente à primeira classe que por ser o mais geral implica na sua representação por modelos de cálculo mais complexos. O estudo dos blocos é feito, basicamente, pela Teoria Matemática da Elasticidade ou por outras mais modernas que procuram levar em conta o comportamento mais realista do material, como, por exemplo, a Teoria da Plasticidade. Analisar o comportamento do sistema estrutural de um edifício, concebendo todos os elementos estruturais como blocos, constitui tarefa exaustiva, complexa, de pouca praticidade e, muitas vezes, inexecutável devido às limitações dos instrumentos de cálculo à disposição do projetista. Por isso deve-se utilizar tal modelo quando estritamente necessário, ou seja, quando a característica de volume do elemento estrutural for determinante no seu comportamento.

O estudo dos elementos pertencentes à segunda classe se faz através de Teorias específicas para as Placas, Chapas e Cascas, derivadas daquelas citadas no parágrafo

anterior, com aproximações relativas à sua condição de peças delgadas. De modo expedito pode-se dizer que essas aproximações advêm de integrações ao longo da espessura e adoção da superfície média como representativa do elemento.

Os elementos da terceira classe são os mais simples de serem tratados e também os de comportamento mais conhecido. São objeto de estudo da Resistência dos Materiais Clássica. São normalmente associados a uma linha em que perpendicularmente se prendem as seções transversais planas. Dependendo do tipo de solicitação predominante são admitidas hipóteses geométricas simplificadoras, como a da manutenção da seção plana na flexão (com e sem força normal) ou a da inexistência de empenamento na torção pura, que reduzem drasticamente a complexidade da análise, e podem ser confirmadas por teorias mais gerais.

O estudo dos elementos constituintes da quarta classe se faz do mesmo modo que os da classe anterior, desde que não haja torção. Quando há torção, as seções transversais empenam, a hipótese da manutenção da seção plana deixa de ser aplicada. Neste caso o comportamento da peça tem características peculiares estudadas em teorias específicas como a de Vlassov [2.1].

Cabe observar que em muitos casos o projetista faz uso de teorias mais simples que garantem suficiente precisão para o dimensionamento da estrutura em análise, gerando campos de tensão estaticamente admissíveis. São inúmeras tais teorias e dentre elas pode-se citar como exemplos :

- analogia de treliça para a análise de blocos de coroamento de estacas
- analogia de grelha para a análise de placas
- analogia de treliça para análise de chapas
- teoria das charneiras plásticas para análise de lajes
- etc.

2.5 ARRANJO ESTRUTURAL

Um dos pontos mais delicados do projeto estrutural consiste em escolher os elementos a serem utilizados e arranjá-los de maneira eficiente.

Quando o engenheiro estrutural começa a conceber a estrutura que garantirá a forma do edifício, ele precisa decidir se algumas partes da construção, que estarão presentes independentemente da estrutura escolhida, participarão do sistema estrutural. É o caso, por exemplo das alvenarias, que podem ser utilizadas apenas com a função de fechar e delimitar espaços ou como elementos estruturais. Excluindo-se a hipótese da estrutura do edifício ser concebida em alvenaria estrutural, as paredes de alvenaria, em geral, são tratadas como mais um agente externo que carrega a estrutura. Neste caso, a capacidade resistente de tais elementos, mobilizada pela interação com a estrutura sadia, como se ilustra na figura 2.5, contribui como uma reserva de segurança, cuja importância é mais acentuada no enrijecimento dos subsistemas verticais para a transmissão de ações laterais à base da edificação.

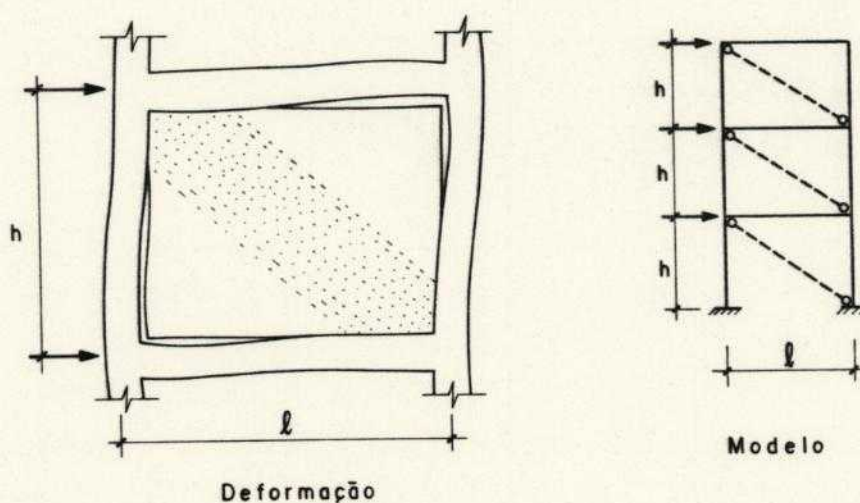


Fig. 2.5 Alvenaria mobilizada como elemento resistente

Outro aspecto a ser observado é o da definição de hierarquia dos subsistemas estruturais. Por exemplo, uma treliça projetada para suportar um telhado na cobertura de um edifício tem importância reduzida quando comparada à de um pórtico que participe do conjunto de painéis de contraventamento da estrutura e que funcione na captação de cargas dos pisos. Como a treliça possui uma função específica e localizada, ela pode ser destacada do conjunto ao se analisar a resposta global da estrutura do edifício quando submetido a ações laterais como a do vento. Como a participação da treliça é pequena, bem como a sua influência sobre a maneira como as cargas se distribuem entre os diversos painéis de contraventamento, a sua exclusão não prejudica os resultados e simplifica o modelo. É evidente que o estudo do comportamento dessa treliça deve ser feito, incluindo-se a ação do vento sobre o telhado, se for o caso. Só que esse estudo se desenvolve, em geral, considerando-se a treliça isoladamente, como estrutura auxiliar que se apoia sobre outros elementos estruturais, sem a necessidade de agregá-los ao modelo. Tais elementos aparecem apenas como condições de contorno.

A idealização do arranjo estrutural está intimamente associada às cargas presentes no edifício já que o objetivo básico do sistema estrutural é coletá-las e controlar-lhes o fluxo.

Em geral, as cargas verticais de piso e cobertura são coletadas em subsistemas horizontais bidimensionais que funcionam também como diafragmas e conectores dos elementos dispostos na vertical. Os subsistemas verticais, por sua vez, recolhem as cargas verticais transmitidas pelos subsistemas horizontais e resistem às forças horizontais. A definição dos subsistemas horizontais e verticais é feita simultaneamente uma vez que os mesmos são interdependentes. Distâncias entre os elementos verticais estão condicionadas pelas dimensões e formas dos elementos dispostos na horizontal, que por sua vez têm limites

definidos pela ocupação de espaço pelo subsistema horizontal em comparação com os pés-direitos definidos e a altura total do edifício. Essa altura condiciona as dimensões dos elementos verticais e horizontais, pois em geral quanto maior a altura maiores as solicitações verticais e horizontais. Para se conferir maior resistência ao sistema estrutural, pode-se optar por aumentar dimensões de peças, reduzir vãos ou promover um maior número de ligações entre os vários elementos estruturais. A necessidade de reduzir vãos pode ferir a concepção arquitetônica, assim como o aumento da dimensão de uma peça pode ser fisicamente impossível em função de disponibilidade de espaço, ou até mesmo de necessidades estéticas. Em resumo: o problema tem como característica fundamental a complexidade, por causa do número de variáveis presentes e da multiplicidade de soluções possíveis.

A concepção do arranjo estrutural envolve a idealização das ligações dos diversos elementos estruturais entre si e com o meio externo que lhes serve de apoio. Alguns requisitos importantes devem ser observados para que a idealização seja eficiente. Em primeiro lugar devem-se garantir ligações suficientes para que não haja a formação de mecanismos. Em segundo lugar deve-se atentar para um ponto de grande relevância: as ligações previstas devem ser exequíveis e devem representar da melhor maneira possível aquelas que realmente ocorrerão. Este fato é de especial delicadeza, pois o afastamento entre o arranjo ideal e o arranjo real destrói a representatividade do modelo assumido, e todo o controle sobre o fenômeno em análise.

Um exemplo muito ilustrativo é apresentado em [2.2]. Observe-se o pórtico plano, concebido em concreto armado, representado na figura 2.6. Admite-se que haja engastamento perfeito nas seções E e F. Para que o engastamento seja realizado, o pórtico é ligado monoliticamente a blocos rígidos de fundação. Para que se tenha o engaste perfeito é

necessário que as seções E e F não tenham nenhuma mobilidade no plano. Se o terreno tiver capacidade de absorver as solicitações, com recalques desprezíveis, os engastes idealizados se realizam. Caso o terreno seja adensável o esquema inicialmente planejado se altera, e as ligações com o terreno de fundação se aproximam de articulações.

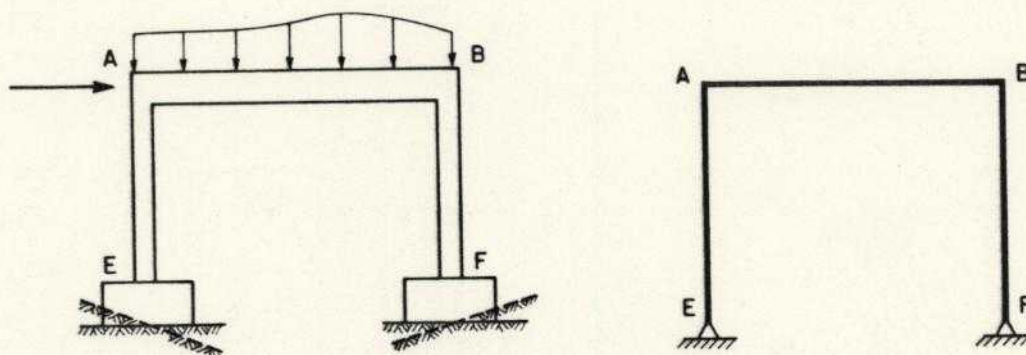


Fig. 2.6 Exemplo

Aproveitando-se o exemplo anterior imagine-se que as condições do terreno sob o bloco fixado em E sejam tais que, diante das solicitações presentes, a imobilização da seção E esteja garantida. Admita-se, também, que o terreno sob o bloco em F permita rotação, porém oferecendo uma certa resistência apreciável. Neste caso um esquema possível seria o que se apresenta na figura 2.7.

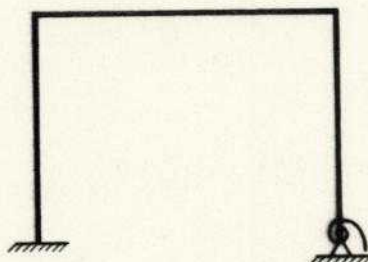


Fig. 2.7 Exemplo

2.6 SISTEMAS ESTRUTURAIS USUAIS

Como já se observou, a escolha do sistema estrutural a se adotar para um determinado edifício é um problema de grande complexidade. Porém, como uma infinidade de soluções já foram experimentadas, em situações muito variadas, algumas delas estão consagradas e se tornaram as mais usuais. Dentre elas algumas são aqui apresentadas a título de ilustração.

2.6.1 Subsistemas Horizontais

Têm como funções estruturais básicas :

- Coletar forças gravitacionais e transmíti-las para os elementos verticais; o comportamento é predominantemente de flexão.

- Distribuir as ações laterais entre os diversos subsistemas verticais resistentes, comportando-se como diafragmas.

A concepção geometricamente mais simples consiste em uma placa que coleta as ações gravitacionais distribuídas em sua superfície e as transmite diretamente aos pilares. A placa usualmente é uma laje de concreto (armado ou protendido), que pode necessitar de concentração de material nas regiões de ligação aos pilares para o aumento de sua capacidade resistente. Este é o subsistema laje plana ou laje cogumelo, ilustrado na figura 2.8.

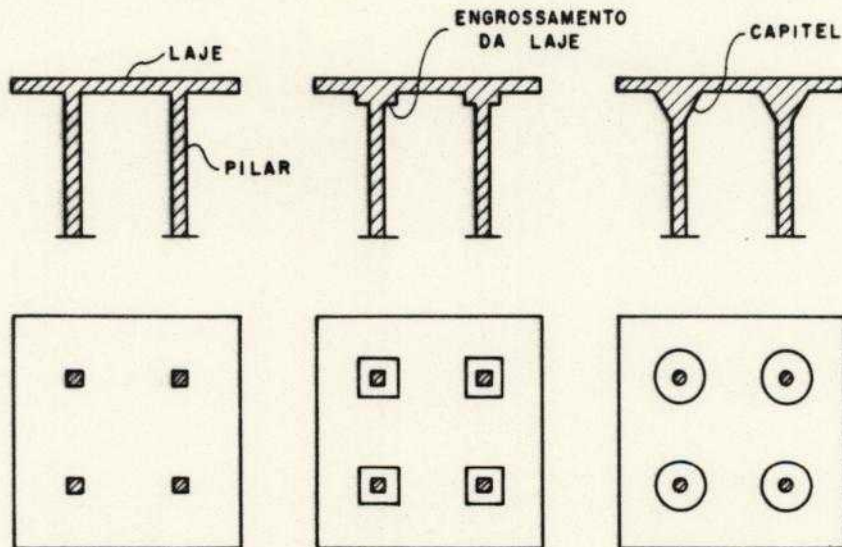


Fig. 2.8 Laje plana

Outras concepções são possíveis com a combinação de placas e barras horizontais. Estas funcionam como enrijecedores do subsistema horizontal e auxiliares na transmissão de cargas aos pilares. A distribuição da rigidez adicional pode ser feita com uma grande densidade de barras que possuem seções transversais reduzidas (nervuras) ou com uma pequena densidade de barras de seções transversais de maior área (vigas). Das inúmeras opções de composição placa-barra algumas são ilustradas nas figuras 2.9, 2.10 e 2.11.

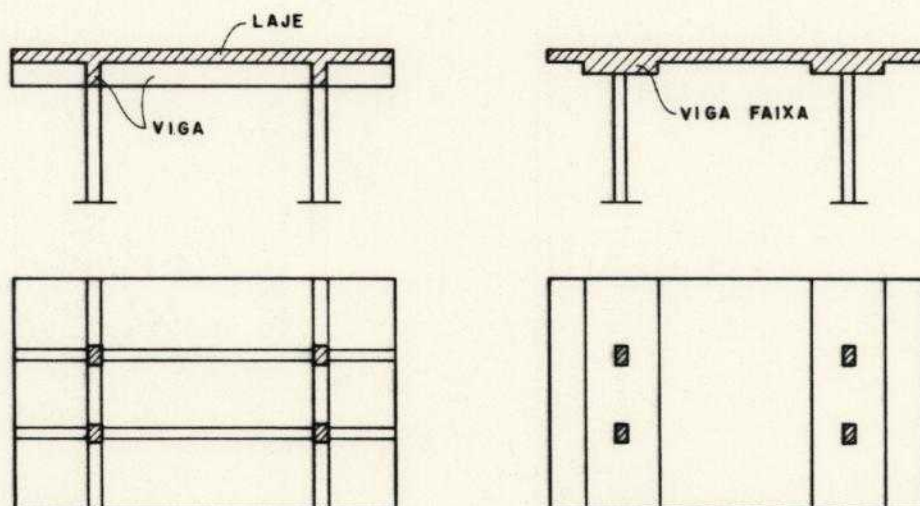


Fig. 2.9 Laje e viga

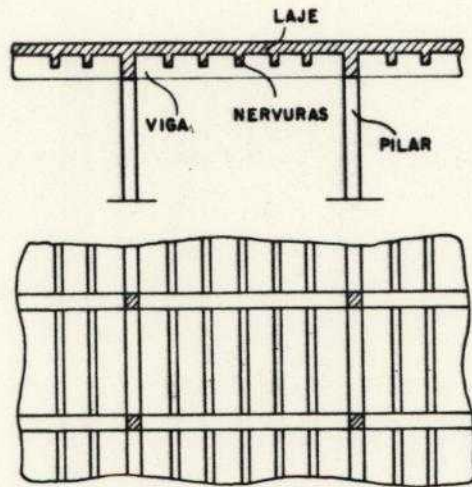


Fig. 2.10 Laje nervurada e viga

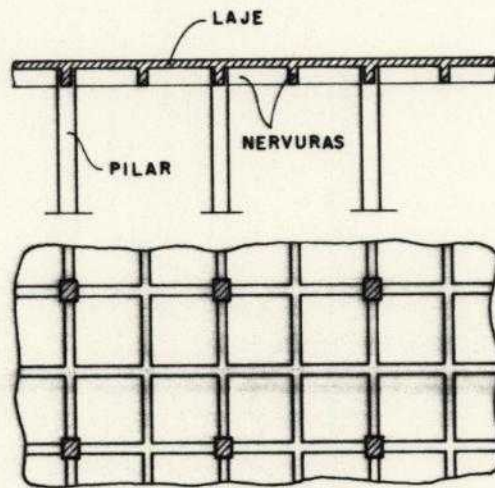


Fig. 2.11 Laje grelhada

Uma opção alternativa é a utilização simultânea de materiais diferentes, como os subsistemas placa sobre vigas mostrados na figura 2.12.

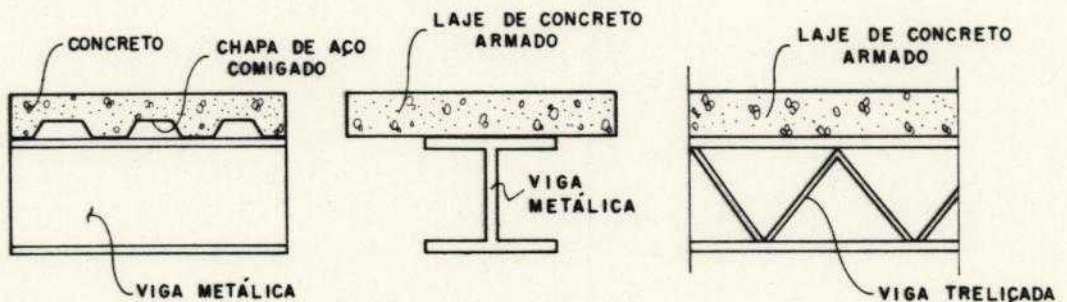


Fig. 2.12 - Placa e viga - alternativas

2.6.2 Subsistemas Verticais

Têm como funções estruturais básicas :

- Suportar os subsistemas horizontais coletando as ações gravitacionais e transmitindo-as às fundações.
- Compor com os subsistemas horizontais os painéis resistentes às ações laterais.

De forma resumida podem ser entendidos como arranjos de barras e folhas compondo os seguintes tipos básicos :

- pilares: barras verticais contínuas
- pórticos: arranjo de barras predominantemente horizontais (vigas) e verticais (pilares), conectadas de modo a permitir interação de forças e momentos (nós rígidos).
- paredes: folhas planas de comportamento preponderante de chapa, ou painéis bidimensionais treliçados de grande rigidez em seu plano.
- núcleos: arranjo tridimensional de folhas ou de painéis treliçados que, geralmente, envolvem as regiões de fluxo humano vertical no edifício (escadas e elevadores).

Muitas combinações dos tipos básicos são possíveis. Desde a concepção geometricamente mais simples, como a utilização exclusiva de pilares agrupados por ligações a lajes planas, até as mais complexas, como as mega-estruturas tubulares reforçadas externamente com grandes painéis treliçados. Algumas dessas combinações são ilustradas na figura 2.13.

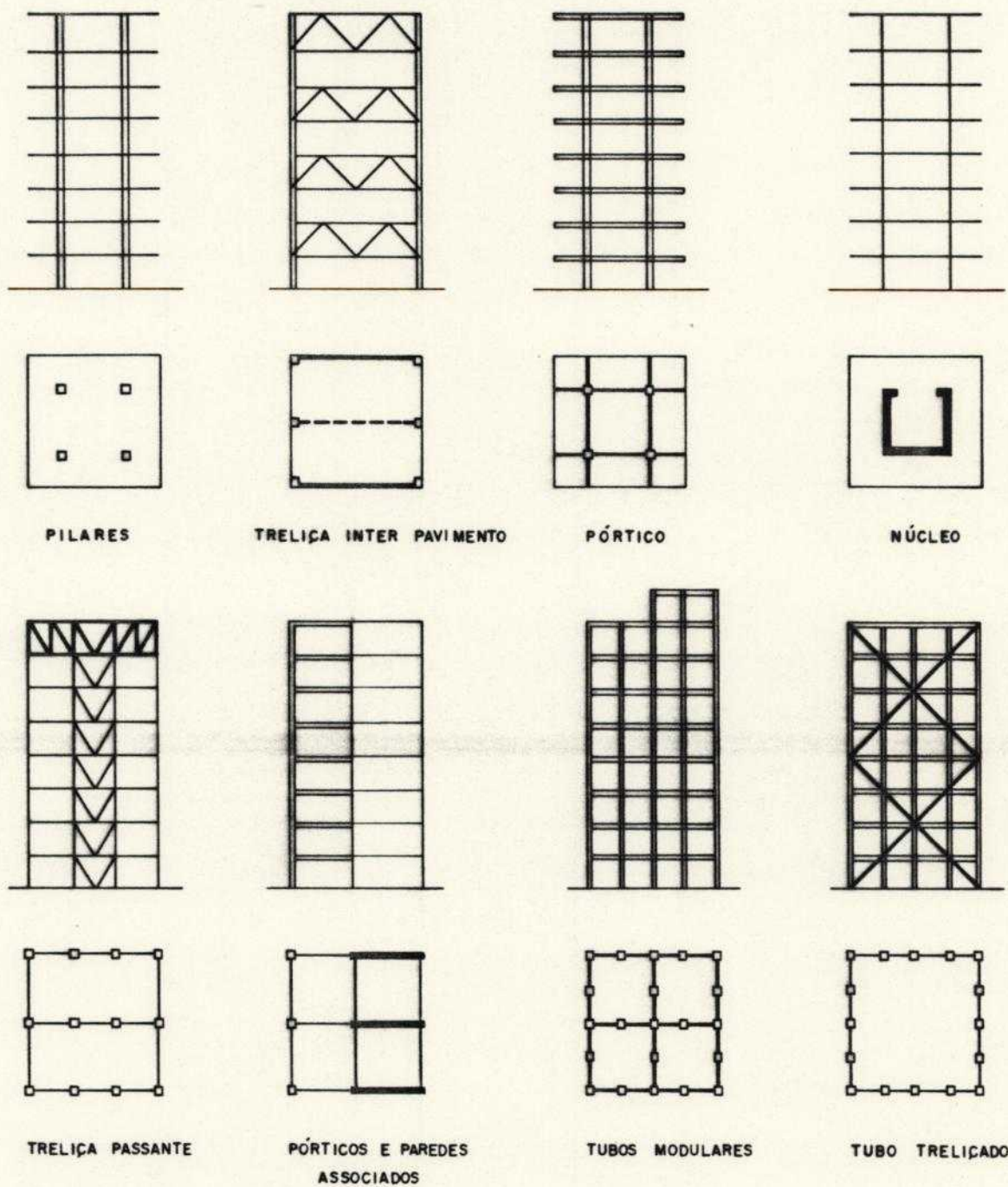


Fig. 2.13 Alguns subsistemas verticais

A ousadia de arquitetos e engenheiros tem permitido que a demanda por edifícios cada vez mais altos nos grandes centros populacionais seja atendida. Quanto mais altos os edifícios, maiores as solicitações presentes, com ênfase nas oriundas de ações laterais que podem ser dominantes na definição do sistema estrutural. Observando-se soluções de sucesso, utilizadas na prática da Engenharia de Estruturas, pode-se organizar um quadro que, sem a pretensão de encerrar o assunto, busca associar o número de pavimentos de um edifício com os sistemas estruturais adotados [2.3], [2.4], [2.5], [2.6]. É o que se apresenta na tabela 2.1, buscando contemplar as estruturas concebidas em aço, concreto armado ou protendido e a combinação desses materiais.

Sistema	Número de Pavimentos						
	0	20	40	60	80	100	120
laje plana e pilares	█						
laje plana, pilares e paredes	█	█					
treliça interpavimento	█	█					
pórtico	█	█	█				
núcleo rígido	█	█	█				
pórtico com reforço diagonal	█	█	█	█			
paredes e pórticos associados	█	█	█	█	█		
treliça passante	█	█	█	█	█		
tubo externo	█	█	█	█	█		
tubo externo e núcleo interno	█	█	█	█	█	█	
tubos modulares	█	█	█	█	█	█	█
mega-estrutura em tubos treliçados	█	█	█	█	█	█	█

Tab. 2.1 Sistemas estruturais para edifícios

2.7 IDEALIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO MATERIAL

É impossível prever a maneira como a estrutura responde às solicitações atuantes se não houver compreensão do comportamento dos materiais que a constituem. É necessário, então, que se faça uma idealização desse comportamento, através de modelos analíticos que sejam representativos e os mais simples possíveis.

Observe-se, por exemplo, na figura 2.14 a curva tensão-deformação obtida em ensaios de compressão uniaxial de corpos de prova cilíndricos de concreto, e a curva teórica proposta pela NBR 6118 [2.7], com a inclusão de coeficientes de segurança, adequada para dimensionamento.

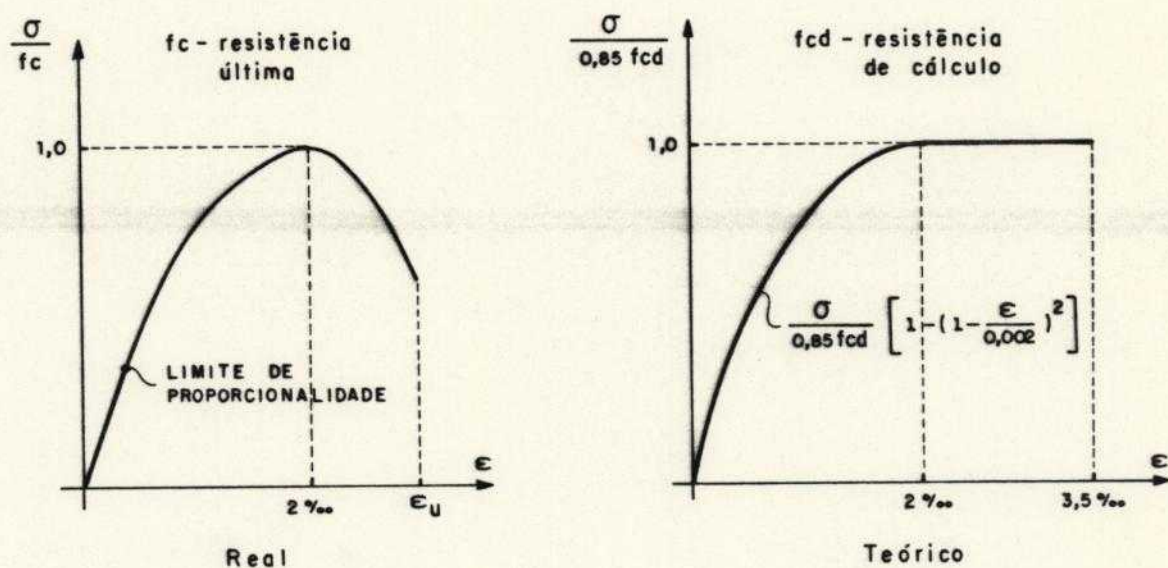


Fig. 2.14 Compressão uniaxial do concreto

A figura 2.15 apresenta a curva tensão-deformação obtida em um ensaio de tração uniaxial de um corpo de prova de aço (com baixo teor de carbono) e duas idealizações usuais dessa curva. Observe-se que a segunda idealização é mais representativa que a primeira pois permite considerar o endurecimento.

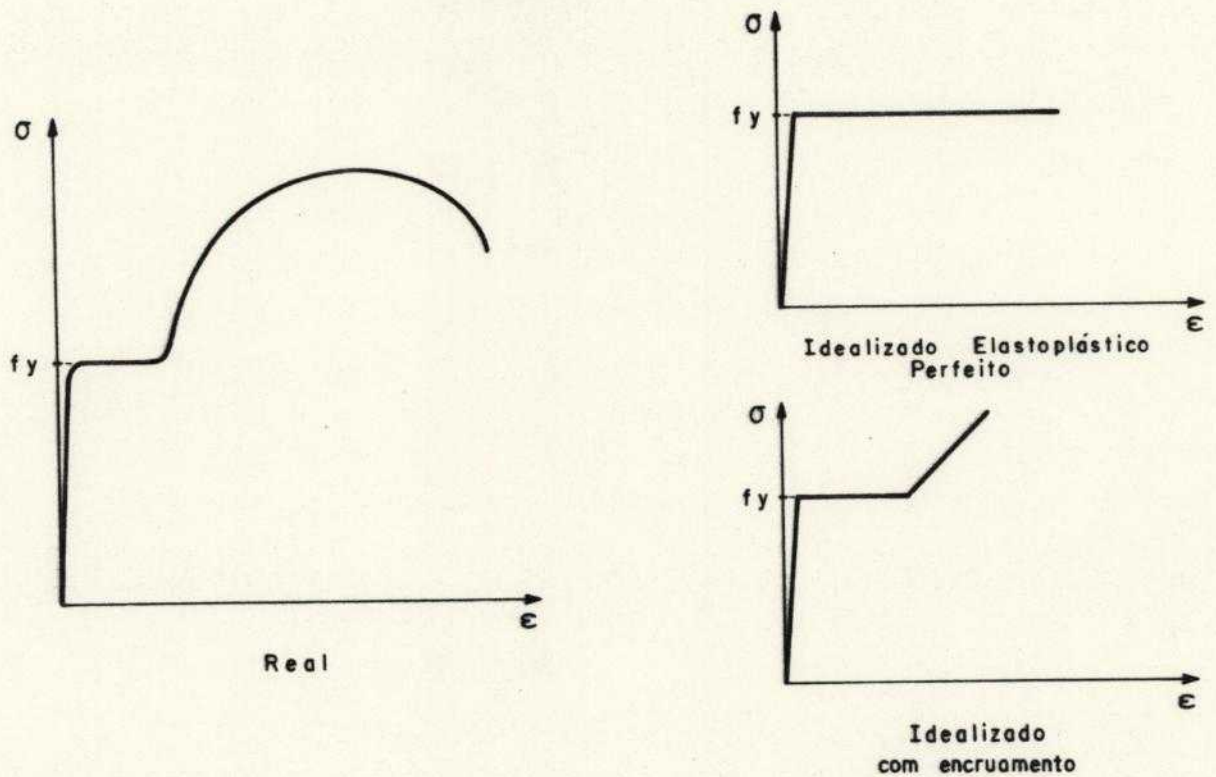


Fig. 2.15 Tração uniaxial do aço

2.8 IDEALIZAÇÃO DAS AÇÕES

Durante o projeto da estrutura de um edifício trabalha-se com uma previsão das ações que estarão presentes quando essa estrutura entrar em funcionamento. Essa previsão, amparada em prescrições normalizadas, é feita com base na funcionalidade do edifício, no arranjo em estudo (incluindo pré-dimensionamento das peças), nos materiais a serem empregados, nas dimensões da construção e na interação do edifício com o meio ambiente.

As ações podem ser de natureza estática ou dinâmica. Sempre que possível, ações que variam no tempo são aproximadas (idealizadas) por ações estáticas equivalentes como nos casos de cargas acidentais, rajadas do vento, distúrbios sísmicos, etc.

Sejam diretas (forças) ou indiretas (deformações impostas) as ações utilizadas no projeto são sempre aproximações que buscam simplificar o problema.

É importante observar que em muitos casos o projetista tem opções alternativas para idealizar uma determinada ação.

Tome-se, a título de ilustração, o caso de uma viga biapoiada que serve de suporte para uma parede de alvenaria conforme se mostra na figura 2.16 . O esquema usual consiste em considerar a ação da parede sobre a viga como uma força vertical linearmente distribuída com taxa uniforme.

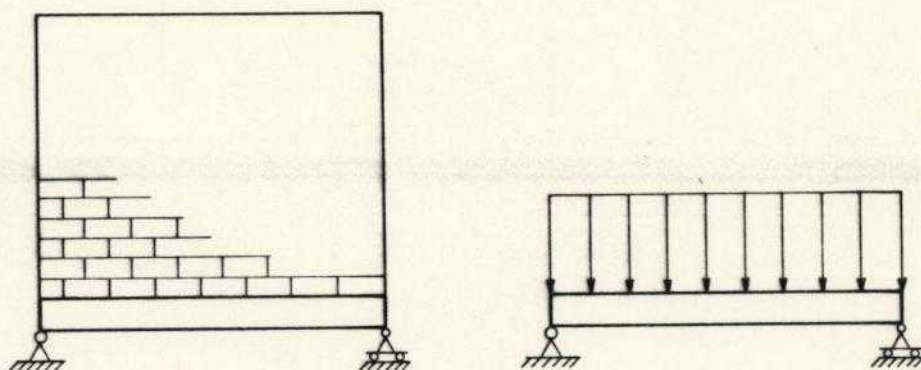


Fig. 2.16 Parede sobre viga - carregamento usual

Alternativamente, levando-se em conta o efeito arco no comportamento do conjunto parede-viga, o esquema de carregamento da viga pode ser expresso por forças verticais e horizontais junto aos apoios, como se esboça na figura 2.17.

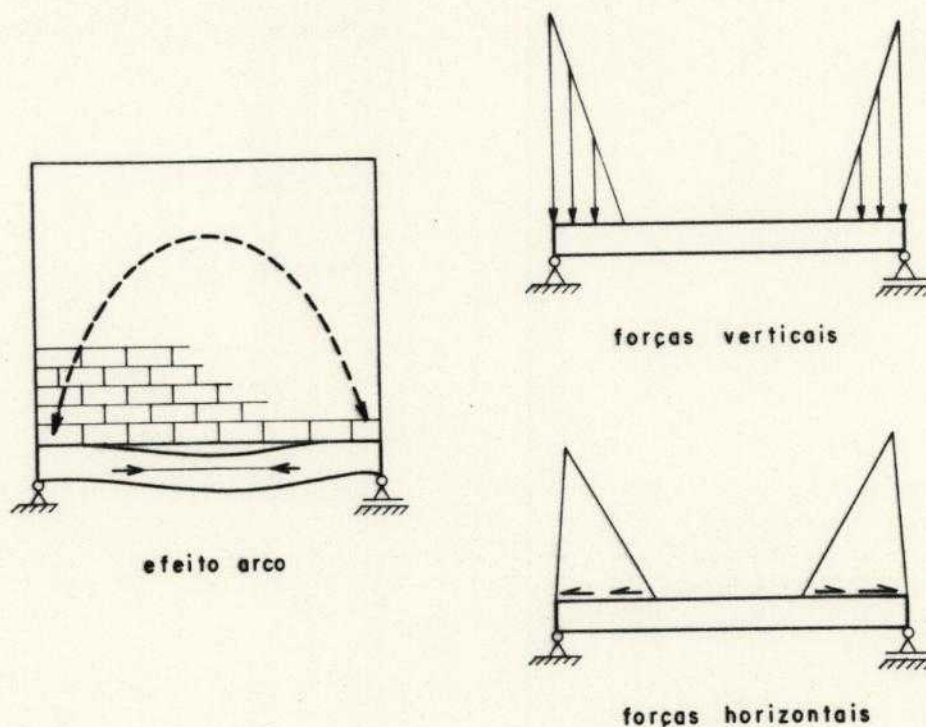


Fig. 2.17 Parede sobre viga - carregamento alternativo

Outro exemplo ilustrativo é o de paredes de alvenaria apoiadas em uma laje. O carregamento das paredes sobre a laje pode ser expresso por forças verticais distribuídas sobre a área de contato ou, no caso em que as paredes se espalham por toda a laje, é usual idealizar-se o carregamento como sendo uma força vertical uniformemente distribuída sobre a superfície total da laje.

2.9 O MODELO MECÂNICO

O projetista estrutural não analisa a estrutura real, mas uma versão idealizada que constitui o modelo mecânico.

O modelo mecânico engloba todas as idealizações

adotadas pelo engenheiro e se expressa por um conjunto de relações matemáticas que interligam as variáveis importantes do fenômeno físico em estudo.

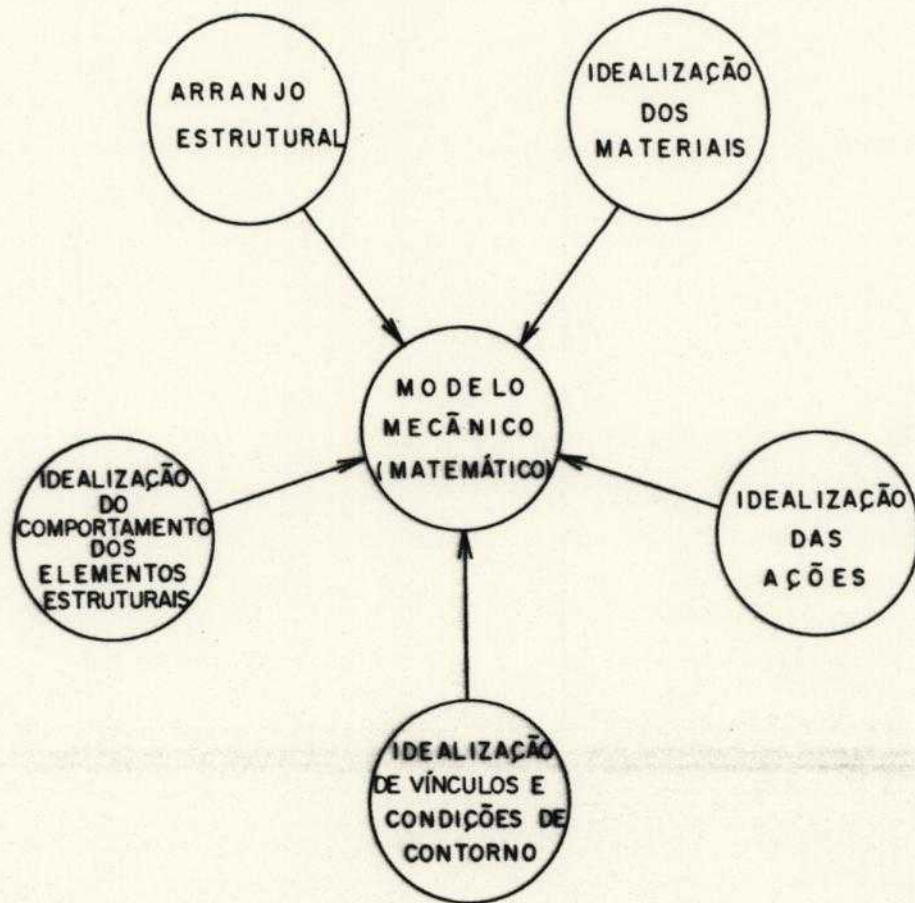


Fig. 2.18 Modelo da estrutura

O sistema estrutural idealizado é apenas um substituto do sistema real, e como tal inclui aproximações. É imprescindível que o projetista tenha habilidade e conhecimentos suficientes para que o modelo seja capaz de representar, de forma satisfatória, o sistema físico real e de produzir resultados cujo nível de aproximação seja conhecido.

Em geral, quanto maior a representatividade do modelo tanto mais elaborado ele poderá ser. Essa maior elaboração pode ser alcançada resumidamente por:

-aumento da complexidade das teorias que exprimem o

comportamento dos elementos estruturais e dos materiais componentes

-integração de um maior número de elementos estruturais no modelo ao invés de legar a cada um uma função estrutural específica, em modelos isolados.

-adoção de domínios geométricos mais abrangentes tal como a inclusão do solo e das fundações em conjunto com a superestrutura do edifício no modelo.

É atraente a idéia de se conceber um modelo para a estrutura de um edifício com grande requinte, combinando-se os seus diferentes elementos estruturais que, em conjunto, apresentam um comportamento integrado complexo.

A constante busca de realização dessa idéia é anotada em [2.8] como um dos mais notáveis e importantes desenvolvimentos da Engenharia de Estruturas atual, incentivada pela nova dimensão aberta pelos computadores eletrônicos aos métodos numéricos.

Essa busca justifica-se pois o tratamento do sistema estrutural integrado confere ao modelo a capacidade de representar propriedades resistentes que esse sistema possui, inerentes ao trabalho conjunto dos vários elementos estruturais, muitas das quais são usualmente desprezadas. Além de exprimir melhor o comportamento da estrutura é possível, com segurança, produzir soluções mais econômicas.

Muitas vezes surgem dificuldades na utilização dos modelos mais sofisticados, relacionadas à complexidade matemática do problema em si e também ao volume de operações e dados envolvidos em sua solução. O projetista pode esbarrar, por exemplo, em limites de capacidade do equipamento eletrônico à sua disposição, ou na falta de "software" adequado à análise da situação que se apresenta.

O que não se deve perder de vista é a necessidade constante de melhoria dos modelos, o que muitas vezes pode ser alcançado com os recursos disponíveis ao projetista.

Um simples problema de interseção de duas vigas em ponto não apoiado em pilar é melhor representado com a compatibilização de flechas do que com a hipótese de que uma das vigas serve de apoio rígido para a mais flexível, ou de menor inércia ou outro critério duvidoso aplicado regularmente em escritórios de projeto.

Em resumo : a implementação do modelo deve ser uma preocupação constante do profissional responsável para que a interdependência das ações e respostas da estrutura cada vez mais possam ser melhor representadas.

2.10 EFEITOS NÃO-LINEARES NO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL

A idealização mais simples para o relacionamento entre as ações e os seus efeitos sobre as estruturas é a linear. Para que seja aplicável é necessário que sejam lineares as relações entre tensões e deformações (linearidade física) e entre deformações e deslocamentos (linearidade geométrica).

Associada ao comportamento do material, a linearidade física exprime a aplicabilidade da Lei de Hooke, garantida desde que o nível de tensões não seja elevado , mantendo-se inferior a limites característicos do material.

A linearidade geométrica está relacionada com a grandeza dos deslocamentos e deformações presentes na estrutura. Constitui hipótese razoável desde que as alterações na geometria sejam tão pequenas que suas influências possam ser negligenciadas na análise do comportamento estrutural . As deformações são assimiladas a infinitésimos de primeira ordem.

O modelo linear é o mais importante por várias razões como as que são relacionadas a seguir:

- é o modelo de mais fácil compreensão e utilização
- possibilita a superposição de efeitos, que simplifica sobremaneira a análise

- em serviço é comum grande parte dos elementos estruturais de um edifício ter comportamento marcadamente linear.

- mesmo em situações em que a não-linearidade é característica do problema, a análise linear pode ser utilizada como primeira aproximação do comportamento estrutural.

- processos de análise não-linear podem ser desenvolvidos por sucessivas etapas lineares.

Há situações em que a utilização de modelos não-lineares é essencial, para que o comportamento estrutural previsto e o real sejam próximos. Algumas delas são apresentadas a seguir:

-análise de estruturas esbeltas de edifícios , onde os efeitos de segunda ordem têm influência significativa.

-estruturas concebidas em concreto armado em que se deseja analisar por exemplo : influência e progresso da fissuração com o carregamento, interação concreto-aço e aderência, plastificações , etc.

-estruturas de comportamento elastoplástico

-qualquer estrutura em que se deseja analisar mecanismos e possibilidades de colapso, reservas de segurança para um dado nível de carregamento, etc.

2.11 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Apenas em casos relativamente simples é possível obter soluções exatas para as equações diferenciais que exprimem o modelo. Objetivando-se prever o comportamento do sistema estrutural é usual empregarem-se procedimentos numéricos que o reduzem a uma versão ideal discretizada. Esta é a essência dos métodos numéricos aplicados à análise estrutural, dentre os quais destaca-se como o mais popular e de muito ampla aplicação o Método dos Elementos Finitos.

A formulação mais importante do MEF está baseada em deslocamentos. Praticamente todos os sistemas computacionais mais abrangentes foram desenvolvidos usando essa formulação [2.9] por causa de sua relativa simplicidade, generalidade, boas propriedades numéricas e da uniformidade de tratamento do problema que propicia.

Em resumo, a aplicação do MEF com base no processo dos deslocamentos, consiste em:

- Idealizar a estrutura como um conjunto de elementos interconectados em um número discreto de pontos da periferia desses elementos (nós).

- Selecionar funções que descrevam o campo de deslocamentos em cada elemento, ou seja, em cada subdomínio

- Expressar o comportamento de cada elemento, a partir de sua geometria e relações constitutivas, em função dos deslocamentos nodais incógnitos

- Reunindo todos os elementos , expressar o comportamento global da estrutura através de um sistema de equações em deslocamentos nodais.

- Resolver o sistema de equações e finalmente determinar os resultados da análise (deslocamentos, deformações, tensões, etc.).

É importantíssimo observar que o emprego de procedimentos numéricos para a resolução do problema acrescenta um outro nível de aproximação , além do já existente, devido às idealizações adotadas quando se concebe o modelo mecânico. Toda a representatividade de um modelo muito bem concebido pode ser desperdiçada por uma desastrada aplicação de um procedimento numérico.

É, pois, necessário que o analista esteja familiarizado com o procedimento a ser empregado. Para a utilização do MEF não basta dispor de "software" que ofereça uma biblioteca de elementos abrangente, riqueza de recursos e instruções claras de montagem de arquivos de dados e interpretação de saídas de resultados. É necessário

que haja compreensão das características do método, atentando-se para as diferentes possibilidades de ocorrências de erros que lhe são peculiares tais como os relacionados com discretização, integração numérica, solução do sistema de equações, arredondamento, etc.



Fig. 2.19 Níveis de aproximação na análise estrutural

2.12 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[2.1] Vlasov, B.Z.; "Pièces Longues en Voiles Minces"; Eyroles; 1962.

[2.2] Fusco, P.B.; "Estruturas de Concreto. Fundamentos do Projeto Estrutural"; vol 1; Ed. da Universidade de São Paulo e Ed. McGraw-Hill do Brasil, Ltda; São Paulo; 1976.

[2.3] Lin, T.Y., Stotesbury, S.D.; "Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers"; John Wiley & Sons; New York; 1981.

[2.4] Taranath,B.S.; "Structural Analysis and Design of Tall Buildings"; Ed. McGraw-Hill; New York; 1988.

[2.5] "Coletânea Técnica do Uso do Aço. Edifícios de Andares Múltiplos"; vol 1; Ed. Aço Minas Gerais S/A - AÇOMINAS; Belo Horizonte; 1979.

[2.6] Margarido,A.F.; "Arranjos Estruturais dos Edifícios em Aço"; Seminário - Os Edifícios de Estruturas Metálicas; EPUSP; São Paulo; 1986.

[2.7] Associação Brasileira de Normas Técnicas; "Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado"; ABNT; Rio de Janeiro; 1978 (NBR 6118/78).

[2.8] Engel,H.; "Sistemas Estruturais"; Hemus Editora Ltda; São Paulo; 1981.

[2.9] Bathe,K.-Y.; "Finite Element Procedures in Engineering Analysis"; Prentice-Hall, Inc.; New Jersey; 1982.

CAPÍTULO 3

TRECHOS RÍGIDOS NA ESTRUTURA DO EDIFÍCIO

3.1 INTRODUÇÃO

Nos sistemas estruturais de edifícios é comum a presença de elementos de rigidez significativamente maior que a dos demais, possibilitando a sua idealização como infinitamente rígidos, sem perda apreciável da representatividade do modelo.

Uma situação típica é a da análise do efeito do vento sobre a estrutura de um edifício cujo sistema estrutural é composto por lajes e pórticos, como se representa na figura 3.1. Excetuando-se os casos em que a laje apresenta aberturas de grandes dimensões ou aqueles em que o pavimento tem, em planta, uma das dimensões de ordem de grandeza superior à outra, é razoável admitir-se que o pavimento funcione como um elemento infinitamente rígido em seu plano e perfeitamente flexível na direção normal a esse plano. Ou seja, o pavimento funciona como um diafragma rígido que distribui as ações horizontais entre os vários painéis de contraventamento.

A simplificação do modelo é óbvia, uma vez que o comportamento do pavimento como elemento folha fica resumido à compatibilização dos deslocamentos no seu plano, na ausência de qualquer deformação. Sob o ponto de vista da resolução numérica há expressiva redução do número de graus de liberdade envolvidos na análise, pois a hipótese adotada dispensa a discretização da laje e permite "escravizar" três graus de liberdade (duas translações no plano do diafragma e uma rotação normal) de todos os nós ao nível do pavimento aos correspondentes de um único nó denominado "mestre". Detalhes adicionais serão apresentados em item posterior.

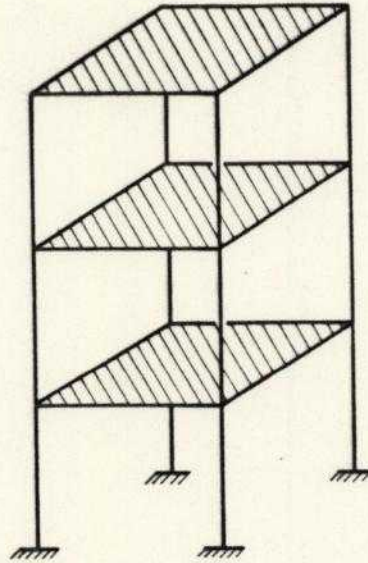


Fig. 3.1 Diafragmas

Outra situação a ser destacada é a dos nós de dimensões finitas que constituem as ligações entre pilares e vigas na formação de estruturas aperticadas resistentes a ações laterais. Em estruturas metálicas, no caso de vinculações resistentes ao momento fletor, bem como em edifícios de concreto, esses nós costumam ter dimensões não desprezíveis quando comparadas a vãos e pés-direitos usuais. Se o modelo adotado não considera essas dimensões, erros significativos podem aparecer na análise do comportamento da estrutura [3.1].

Idealização eficiente e relativamente simples para os nós de dimensões finitas, como os da estrutura apresentada na figura 3.2, consiste em considerá-los como elementos infinitamente rígidos. Isto é equivalente a admitir-se um ponto que resume o nó ao qual se ligam os elementos estruturais deformáveis por meio de trechos rígidos, usualmente designados por "offsets". De maneira análoga aos diafragmas rígidos, é possível reduzir o número de

graus de liberdade envolvidos na análise numérica do comportamento da estrutura.

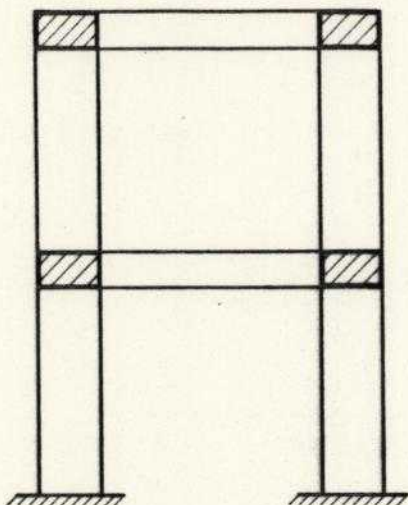


Fig. 3.2 Nós de dimensões finitas - Offsets

Outra possibilidade para desprezarem-se as deformações de determinados elementos estruturais em presença dos demais, ocorre no estudo de estaqueamentos. As dimensões usuais dos blocos de coroamento são tais que permitem considerá-los rígidos na determinação de esforços solicitantes nas estacas, consideradas deformáveis [3.2].

No presente capítulo será apresentada uma formulação, via Processo dos Deslocamentos, para a incorporação de trechos rígidos ao modelo. O desenvolvimento será feito para o elemento barra através do estudo de "offsets" e diafragmas. Outros casos podem ser contemplados por extensão das idéias aqui expostas.

3.2 TRECHOS RÍGIDOS - APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Sejam dois sistemas de forças F e \bar{F} , estaticamente equivalentes e dois conjuntos de deslocamentos Q e \bar{Q} de pontos de um corpo em equilíbrio, associados a esses sistemas. É dado um deslocamento virtual arbitrário de corpo rígido de modo que ocorram deslocamentos Q e \bar{Q} nas direções das forças F e \bar{F} , respectivamente, ou seja, deslocamentos compatíveis. Como aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) tem-se que o trabalho realizado pelos dois sistemas de forças é o mesmo.

Assim

$$\bar{F}^T \bar{Q} = F^T Q \quad \dots(3.1)$$

Supõe-se que os dois sistemas estejam relacionados pela transformação linear

$$F = \Lambda \bar{F} \quad \dots(3.2)$$

Combinando-se as eq. (3.2) e (3.1) tem-se

$$\bar{F}^T \bar{Q} = (\Lambda \bar{F})^T Q \quad \text{ou} \quad \bar{F}^T \bar{Q} = \bar{F}^T \Lambda^T Q \quad \dots(3.3)$$

Como F e \bar{F} são arbitrários Q e \bar{Q} se relacionam pela transformação linear expressa por

$$\bar{Q} = \Lambda^T Q \quad \dots(3.4)$$

As equações (3.2) e (3.4) em conjunto ressaltam a correlação entre variáveis estáticas e cinemáticas e constituem um aspecto particular da lei de contragradência para transformações de força e deslocamento.

Observe-se que não é necessário existir a inversa da transformação apresentada na eq. (3.2). A matriz Λ pode ser

singular ou até mesmo retangular sem invalidar o desenvolvimento anterior.

O sistema de forças pode ser entendido aqui de forma ampla, de modo a incluir componentes de força e de momento. Correspondentemente os deslocamentos associados podem ser translações ou rotações.

Tome-se como exemplo a chapa rígida apresentada na figura 3.3. São considerados dois sistemas de forças aplicados nos pontos O e \bar{O} .

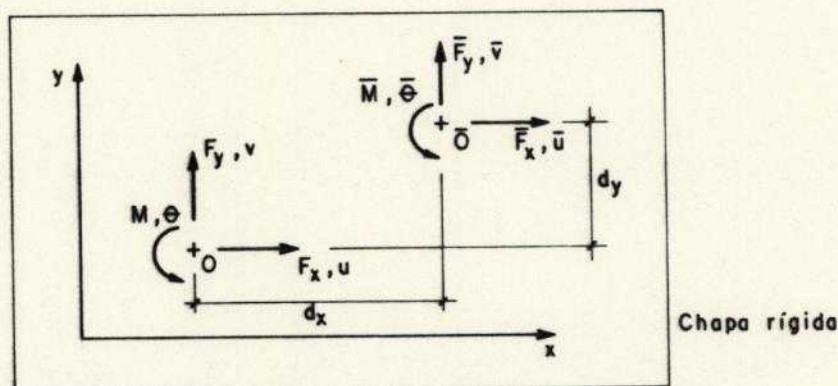


Fig. 3.3 Chapa rígida

A equivalência estática entre os sistemas é obtida por simples translação de forças, que pode ser expressa matricialmente por

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\Lambda} \bar{\mathbf{F}}$$

$$\text{onde } \tilde{\mathbf{F}}^T = \left\{ F_x \ F_y \ M \right\} \quad \bar{\mathbf{F}}^T = \left\{ \bar{F}_x \ \bar{F}_y \ \bar{M} \right\}$$

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -d_y & d_x & 1 \end{bmatrix} \quad \dots(3.5)$$

Adotando-se os conjuntos de deslocamentos em O e \bar{O} indicados na figura 3.3 é possível escrever-se, com base nas equações (3.2) e (3.4), a seguinte relação,

$$\bar{\underline{Q}} = \underline{\Lambda}^T \underline{Q}$$

$$\text{onde } \bar{\underline{Q}}^T = \left\{ \bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{\theta} \right\}$$

$$\underline{Q}^T = \left\{ u \quad v \quad \theta \right\} \quad \dots(3.6)$$

Abolindo-se o caráter matricial, é possível reescrever-se a transformação de deslocamentos

$$\bar{u} = u - \theta d_y$$

$$\bar{v} = v + \theta d_x$$

$$\bar{\theta} = \theta \quad \dots(3.7)$$

A validade das equações (3.7) está condicionada à linearização dos efeitos da rotação θ nas translações. Isto está garantido se os deslocamentos são virtuais [3.3]. No caso de deslocamentos reais finitos é preciso que a rotação seja pequena de modo a permitir a linearização. Tem-se assim os clássicos resultados : translação de um ponto normal ao segmento de reta que o liga ao centro instantâneo de rotação, proporcional ao produto do ângulo de rotação pelo comprimento desse segmento.

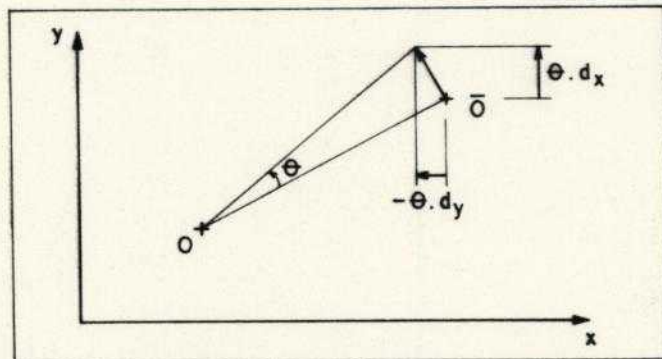


Fig. 3.4 Rotação pequena e linearização

No exemplo analisado a matriz $\tilde{\Lambda}$ possui inversa. Esse resultado, naturalmente, é o esperado, uma vez que $\tilde{\Lambda}$ pode ser interpretada como a matriz de transformação de componentes de força de um sistema de eixos coordenados a outro paralelo. Sendo análogas e em mesmo número as componentes, a transformação inversa tem o mesmo caráter da transformação direta, bastando alterar-se o sentido da translação. Então

$$\tilde{\Lambda}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d_y & -d_x & 1 \end{bmatrix} \quad \dots(3.8)$$

3.3 TRANSLAÇÃO DE COORDENADAS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Na figura 3.5 estão representados dois sistemas de forças reduzidos aos pontos O e \bar{O} de um corpo rígido. A equivalência estática fica garantida se

$$\vec{F}_O = \vec{F}_{\bar{O}} \quad e \quad \vec{M}_O = \vec{M}_{\bar{O}} + \vec{O\bar{O}} \times \vec{F}_{\bar{O}} \quad \dots(3.9)$$

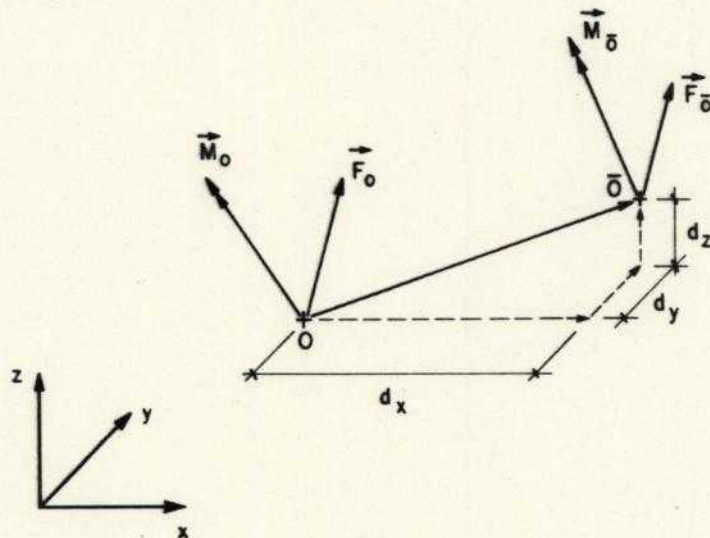


Fig. 3.5 Translação de forças - caso geral

A equação vetorial (3.9) pode ser reescrita em termos matriciais como

$$\tilde{F} = \tilde{\Lambda} \tilde{\bar{F}}$$

onde

$$\tilde{F}^T = \left\{ F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z \right\}$$

$$\tilde{\bar{F}}^T = \left\{ \bar{F}_x \ \bar{F}_y \ \bar{F}_z \ \bar{M}_x \ \bar{M}_y \ \bar{M}_z \right\}$$

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \tilde{I} & \tilde{O} \\ \tilde{\Omega} & \tilde{I} \end{bmatrix}$$

\tilde{I} matriz identidade de ordem três

\tilde{O} matriz nula de ordem três

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -d_z & d_y \\ d_z & 0 & -d_x \\ -d_y & d_x & 0 \end{bmatrix} \quad \dots (3.10)$$

Note-se que neste caso a matriz $\tilde{\Lambda}$ possui inversa, cabendo os mesmos comentários feitos no item anterior quanto à simples alteração do sentido de translação. Assim, tem-se

$$\tilde{\Lambda}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{I} & \tilde{O} \\ \tilde{\Omega}^T & \tilde{I} \end{bmatrix} \quad \dots (3.11)$$

Com base nas equações (3.2) e (3.3) escreve-se a transformação para os conjuntos de deslocamentos indicados na figura 3.6.

$$\tilde{\bar{Q}} = \tilde{\Lambda}^T \tilde{Q}$$

onde

$$\tilde{Q}^T = \left\{ u \ v \ w \ \phi \ \psi \ \theta \right\}$$

$$\tilde{\bar{Q}}^T = \left\{ \bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w} \ \bar{\phi} \ \bar{\psi} \ \bar{\theta} \right\}$$

$$\tilde{\Lambda}^T = \begin{bmatrix} \tilde{I} & \tilde{\Omega}^T \\ \tilde{O} & \tilde{I} \end{bmatrix}$$

... (3.12)

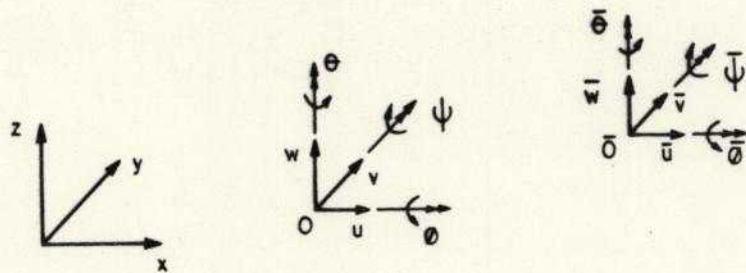


Fig. 3.6 Translação de deslocamentos - Caso geral

3.4 TRECHO RÍGIDO DE BARRA - "OFFSET"

O problema dos trechos rígidos de barras pode ser resolvido a partir das transformações de componentes de força e deslocamento apresentadas no item 3.3 .

Na figura 3.7 está representada uma barra disposta entre os nós I e J , cujo trecho deformável tem como extremos os pontos \bar{I} e \bar{J} . Os trechos $\bar{I}\bar{I}$ e $\bar{J}\bar{J}$ são rígidos e constituem os "offsets" do início e do final da barra, respectivamente.

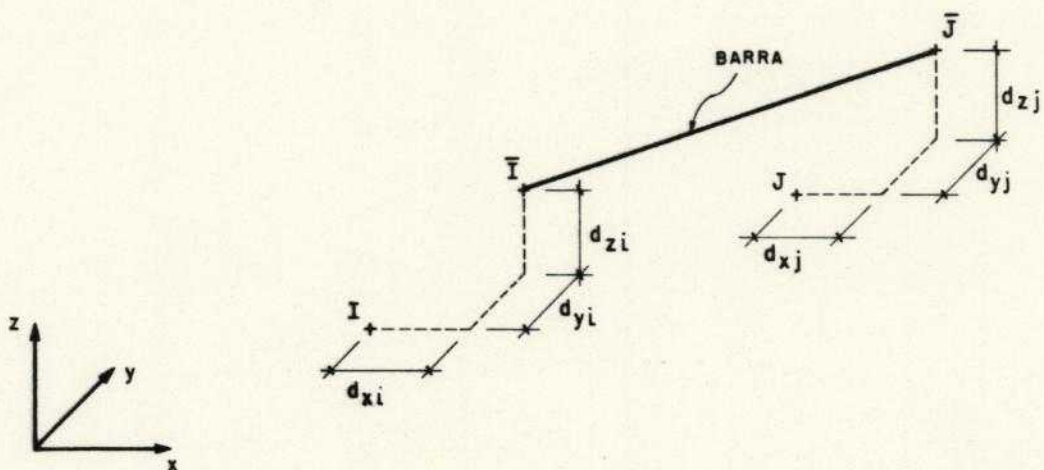


Fig. 3.7 Elemento barra

Em uma formulação, que não incorpore trechos rígidos, os nós são os pontos \bar{I} e \bar{J} , extremos do trecho deformável, onde as coordenadas estão definidas. A adaptação a ser feita para a consideração de trechos rígidos consiste em promover a translação de coordenadas para os pontos I e J que passam a ser os nós. Importa observar-se que no caso de determinação de esforços e tensões na barra só há interesse prático em seções pertencentes ao trecho deformável.

Toda a adaptação se faz com base nas expressões apresentadas no item 3.3, cabendo observar-se que, no presente caso, é necessário promoverem-se as translações de coordenadas localizadas nos dois extremos da barra.

As translações das componentes do vetor de forças e do vetor de deslocamentos do elemento se escrevem

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}} &= \tilde{\Lambda} \bar{\mathbf{F}} & \text{e} & & \bar{\mathbf{Q}} &= \tilde{\Lambda}^T \tilde{\mathbf{Q}} \\ \text{com } \tilde{\Lambda} &= \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}_i & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\Lambda}_j \end{bmatrix} & & & & \dots(3.13) \end{aligned}$$

onde

$\tilde{\mathbf{F}}$: vetor força correspondente aos novos nós I e J

$\bar{\mathbf{F}}$: vetor força correspondente aos antigos nós \bar{I} e \bar{J}

$\tilde{\mathbf{Q}}$: vetor deslocamento correspondente aos novos nós I e J

$\bar{\mathbf{Q}}$: vetor deslocamento correspondente aos antigos nós \bar{I} e \bar{J}

$\tilde{\Lambda}_i$, $\tilde{\Lambda}_j$: matrizes de translação correspondentes aos nós I e J, respectivamente

$\tilde{\mathbf{0}}$: matriz nula de ordem seis

Seja $\bar{\mathbf{k}}$ a matriz de rigidez da barra em relação aos eixos globais de referência, correspondente aos pontos \bar{I} e \bar{J} .

Então

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{Q}} \quad \dots(3.14)$$

Pré-multiplicando-se ambos os membros da eq. (3.14) pela matriz de translação $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ tem-se, com base nas eq. (3.13)

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} \tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \tilde{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{Q}} \quad \text{ou} \quad \tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \tilde{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{\Lambda}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \quad \dots(3.15)$$

Donde se conclui que a matriz de rigidez transladada para os nós I e J é dada por

$$\tilde{\mathbf{k}} = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \tilde{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{\Lambda}}^T \quad \dots(3.16)$$

O vetor de ações nodais equivalentes do elemento é transformado diretamente com o que se expressa na primeira das eq.(3.13).

O cálculo de esforços ou tensões, ao final da análise da estrutura, é feito com base na expressão

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}_0 + \tilde{\mathbf{T}}D \tilde{\mathbf{Q}} \quad \dots(3.17)$$

onde

$\tilde{\mathbf{T}}$, $\tilde{\mathbf{T}}_0$: Vetores de tensões ou esforços finais e iniciais, respectivamente.

$\tilde{\mathbf{T}}D$: Matriz da relação tensão-deslocamento referida aos pontos extremos \bar{I} e \bar{J} .

A matriz $\tilde{\mathbf{T}}D$ se transforma por simples translação dos deslocamentos aos nós I e J de acordo com as eq. (3.13).

Assim

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}_0 + \tilde{\mathbf{T}}D \tilde{\mathbf{\Lambda}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \quad \dots(3.18)$$

Donde

$$\tilde{\mathbf{T}}D = \tilde{\mathbf{T}}D \tilde{\mathbf{\Lambda}}^T \quad \dots(3.19)$$

Observe-se que as tensões ou esforços continuam a ser calculados nas mesmas seções originais. Mesmo que fossem

nas seções dos extremos \bar{I} e \bar{J} , não teria significado promover a translação de esforços para os pontos I e J que não pertencem ao trecho deformável do elemento.

Para que a implementação computacional seja eficiente importa tirar partido das características da matriz $\underline{\Lambda}$. É prudente promoverem-se as operações matriciais particionando-a da maneira apresentada na equação (3.13), evitando-se os produtos por zeros, que aumentam o tempo de processamento e podem gerar imprecisões. As submatrizes $\underline{\Lambda}_i$ e $\underline{\Lambda}_j$ por sua vez também devem ser particionadas como se mostra na eq. (3.10), observando-se a presença de submatrizes identidade e nula em sua composição.

Em todos os processamentos realizados não houve acréscimo significativo no tempo de montagem de matrizes e vetores correspondentes ao elemento barra, mesmo nos exemplos em que a grande maioria das barras possui trechos rígidos.

3.5 APLICAÇÕES DE BARRAS COM TRECHOS RÍGIDOS

As adaptações, relativamente simples, mostradas no item anterior abrem muitas possibilidades de modelagem. Uma delas, já citada, é a consideração de nós de dimensões finitas, como indicado no pórtico plano da figura 3.8. As interseções de eixos de barras definem as posições dos nós. Os trechos realçados na figura são considerados rígidos. Nos edifícios de concreto armado, por causa das dimensões usuais das peças, é mais comum a consideração de trechos rígidos de barras-vigas do que de barras-pilares.

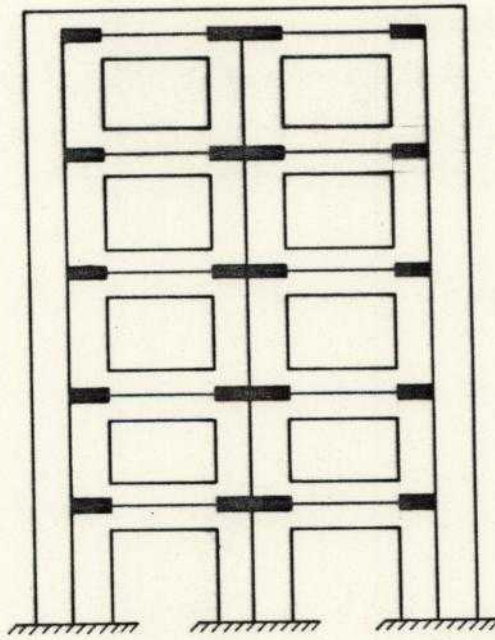


Fig. 3.8 Pórtico plano - Trechos rígidos

A simulação de trecho rígido pode ser feita sem o recurso do "offset", com a utilização de elementos de grande rigidez. O pórtico da figura 3.8 poderia ser discretizado de modo que os trechos rígidos fossem representados por elementos de grande rigidez. Neste caso, haveria o acréscimo de, pelo menos, dois nós e duas barras por pavimento (admitindo-se apenas trecho rígido em viga). Isto aumentaria significativamente o tempo de processamento por se ter mais graus de liberdade, mais elementos e maior largura da semibanda da matriz de rigidez global. Isto por si só já desaconselha tal procedimento. Mas há uma questão de difícil definição e que depende do problema analisado e de aspectos computacionais: o que é uma rigidez suficientemente grande para se alcançar o objetivo da simulação e sem perturbar a estabilidade numérica da solução? Sabe-se que a discrepância muito acentuada de rigidez no modelo pode produzir um resultado catastrófico e, o que é pior, sem controle por parte do usuário e dependente do tratamento dado às variáveis reais no "software". A experiência com o sistema LASER[3.4],

desenvolvido em FORTRAN e com toda a resolução do sistema de equações em reais de precisão dupla (8 bytes), mostrou-se bem sucedida com a adoção de trechos de viga de largura igual à do pilar e altura igual ao pé-direito.

Outra aplicação interessante é a da mudança de eixos de pilares, que pode ser resolvida de maneira muito elegante com a utilização de "offsets", como se mostra na figura 3.9. Em detalhe tem-se o nó como o ponto de interseção dos eixos da barra-viga com a barra-pilar inferior e trechos rígidos horizontais para a viga e para a barra-pilar superior.

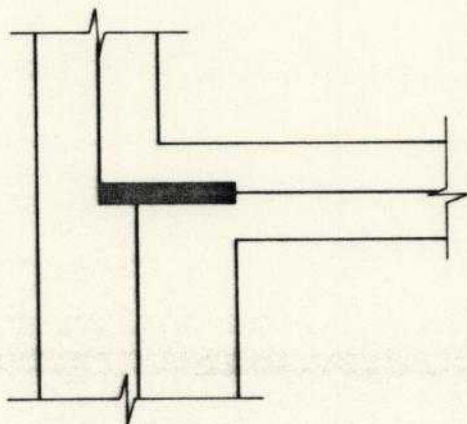


Fig. 3.9 Mudança de eixos de pilares

No caso de paredes com aberturas é usual promover a sua discretização em elementos finitos do tipo chapa como se mostra na figura 3.10. No entanto, quando se deseja, por exemplo, estudar o comportamento global do sistema estrutural de um edifício, sob ação do vento, modelando em conjunto os seus painéis de contraventamento, a discretização de suas paredes em elementos chapa em geral inviabiliza a solução pelo excesso de graus de liberdade com os quais se trabalha e o tempo de processamento exigido para a análise, mesmo que o carregamento seja idealizado como estático e o comportamento do material assumido como elástico linear. Neste caso é possível discretizar a parede com elementos barra, utilizando trechos rígidos [3.5],

como se apresenta na figura 3.10 . Quando se deseja melhorar a previsão para as distribuições de tensões junto às descontinuidades, pode-se discretizar, com elementos chapa, apenas uma região da parede em torno da descontinuidade que se deseja analisar, e impor como condições de contorno os deslocamentos encontrados na análise prévia com o pórtico equivalente.

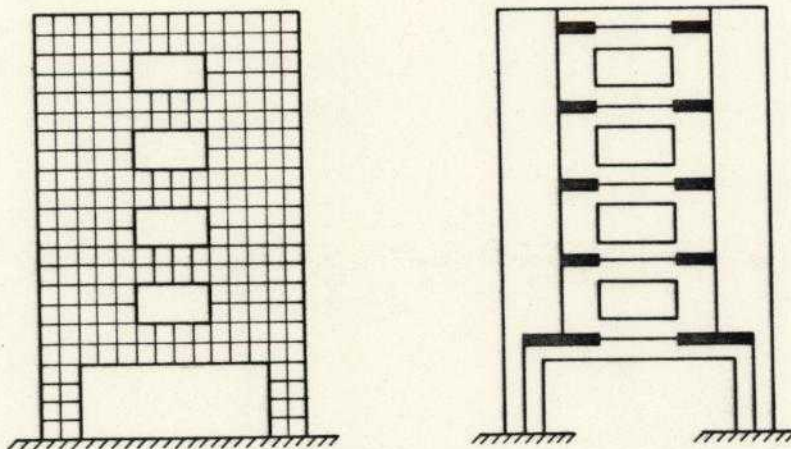


Fig. 3.10 Parede com aberturas

Na análise de pavimentos de edifícios há outra aplicação interessante do conceito de "offset". É a simulação do apoio em pilares, considerando-se as dimensões de sua seção transversal. A figura 3.11 apresenta, em planta, uma região de um pavimento onde duas vigas se apoiam sobre um pilar. O ponto de apoio localiza-se no baricentro da seção do pilar e as barras que simulam as vigas são adotadas com os trechos rígidos realçados na figura. Observe-se que a adoção desses trechos rígidos está de acordo com a hipótese da manutenção da seção plana do pilar e incorpora a consideração de excentricidades na aplicação de forças no pilar. No ponto de apoio, que deve ser um nó do modelo, são aplicadas as condições de contorno (restrição ou imposição de deslocamentos) ou a ligação a elementos do tipo mola para a simulação de apoio flexível. Opcionalmente, quando da consideração tridimensional da

estrutura , o nó citado pode ser simplesmente o extremo de barra(s) simuladora(s) de tramo(s) de pilar.

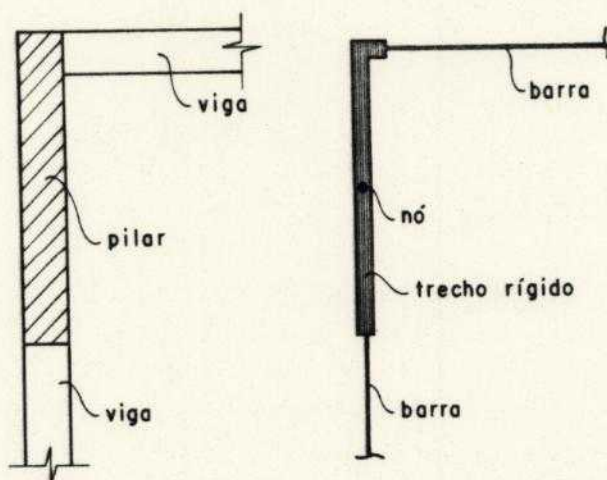


Fig. 3.11 Trechos rígidos no pavimento do edifício

3.6 DIAFRAGMA RÍGIDO - NÓ MESTRE

A simulação do pavimento rígido em seu plano pode também ser resolvida, com relativa simplicidade, a partir das transformações apresentadas no item 3.3. É escolhido um ponto do plano do pavimento, denominado nó mestre, cuja localização é arbitrária. Os graus de liberdade de cada nó do pavimento, associados aos deslocamentos de corpo rígido do diafragma, são dependentes dos graus de liberdade do nó mestre. Esses graus de liberdade são as translações no plano do pavimento e a rotação em torno de um eixo que lhe seja normal.

Suponha-se que o plano do diafragma seja paralelo ao plano XY do sistema global de referência, e que os pontos O e \bar{O} sejam, respectivamente, o nó mestre e um outro nó qualquer do pavimento. São considerados os dois sistemas de forças indicados na figura 3.12 , bem como os conjuntos de deslocamentos a eles associados.

Observe-se que a situação aqui apresentada é a mesma

da chapa rígida discutida no item 3.2, uma vez que a transformação desejada está associada exclusivamente ao movimento de corpo rígido do diafragma em seu plano.

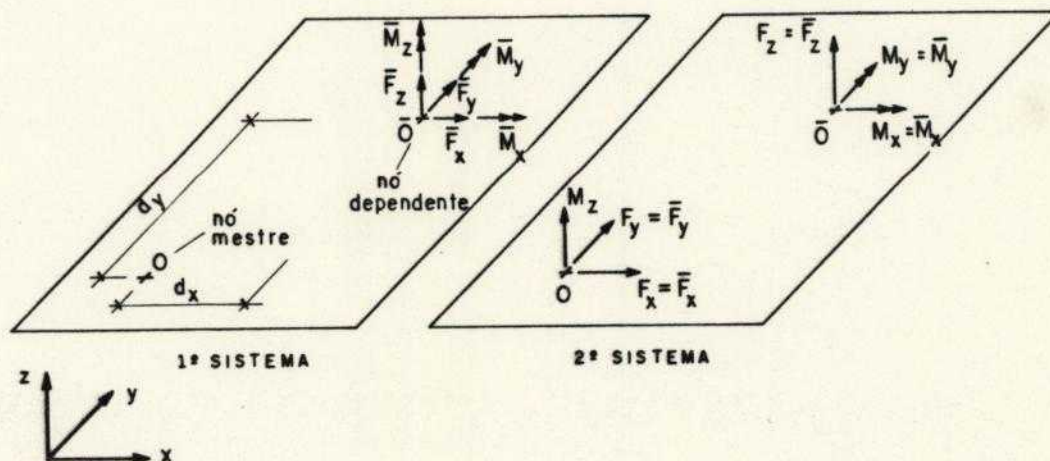


Fig. 3.12 Diafragma rígido - Nó mestre

O relacionamento entre os dois sistemas de força pode ser escrito de maneira análoga ao apresentado nas equações (3.10), assim como a transformação para os conjuntos de deslocamentos se faz de acordo com as equações (3.12), observando-se que a submatriz $\tilde{\Omega}$ se altera, passando a ser simplesmente

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -d_y & d_x & 0 \end{bmatrix} \quad \dots (3.20)$$

Na figura 3.13 está representada uma barra cujos nós I e J pertencem a dois pavimentos distintos que têm como nós mestres os pontos O_i e O_j , respectivamente. A adaptação a ser feita para a consideração dos diafragmas rígidos consiste em promover-se a translação em cada nó de três das suas seis coordenadas originais, para o respectivo nó mestre.

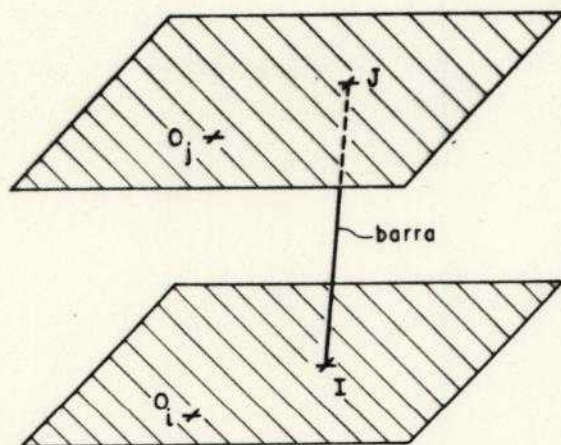


Fig. 3.13 Elemento barra - Nó mestre

As transformações das componentes do vetor de forças e do vetor de deslocamentos do elemento se escrevem

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}} &= \tilde{\Lambda} \bar{\mathbf{F}} & \text{e} & & \bar{\mathbf{Q}} &= \tilde{\Lambda}^T \mathbf{Q} \\ \text{com } \tilde{\Lambda} &= \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\Lambda}_j \end{bmatrix} & & & & \dots(3.21) \end{aligned}$$

onde

$\bar{\mathbf{F}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$: vetor força e vetor deslocamento correspondentes às coordenadas originais.

$\tilde{\mathbf{F}}$, \mathbf{Q} : vetor força e vetor deslocamento correspondente às novas coordenadas.

$\tilde{\Lambda}_i$, $\tilde{\Lambda}_j$: matrizes de transformação correspondentes aos nós I e J, respectivamente.

$\mathbf{0}$: matriz nula de ordem seis.

Todo o desenvolvimento subsequente se faz da mesma forma que o apresentado no item 3.4 para o "offset". As transformações a serem feitas na matriz de rigidez e na matriz tensão-deslocamento do elemento estão expressas nas equações (3.16) e (3.19), respectivamente.

Quando a barra jaz em um único pavimento a transformação é a mesma. A particularidade é que O_i e O_j

se confundem.

No caso dos "offsets" rígidos a adaptação nas matrizes e vetores do elemento é feita de modo que ao final as coordenadas ficam definidas apenas nos nós I e J, sendo eliminadas as coordenadas originais definidas nos pontos \bar{I} e \bar{J} , extremos do trecho flexível do elemento, que não mais participam como nós do modelo.

Na formulação do diafragma rígido apenas três componentes de força (ou deslocamento) do nó dependente são transladadas para o nó mestre. Isto significa que as três complementares permanecem no nó original, que continua presente no modelo. Ou seja, há três coordenadas remanescentes no nó dependente.

Em termos computacionais há um procedimento simples a ser adotado de modo que a adaptação do programa original seja feita sem transtornos. O vetor de contribuições nodais do elemento, que monitora a montagem do sistema de equações globais, deve ser alterado de modo que as posições correspondentes aos graus de liberdade transladados devam ser ocupadas pelos números das equações associadas aos graus de liberdade do nó mestre.

Como ilustração atente-se para a situação apresentada na figura 3.14.

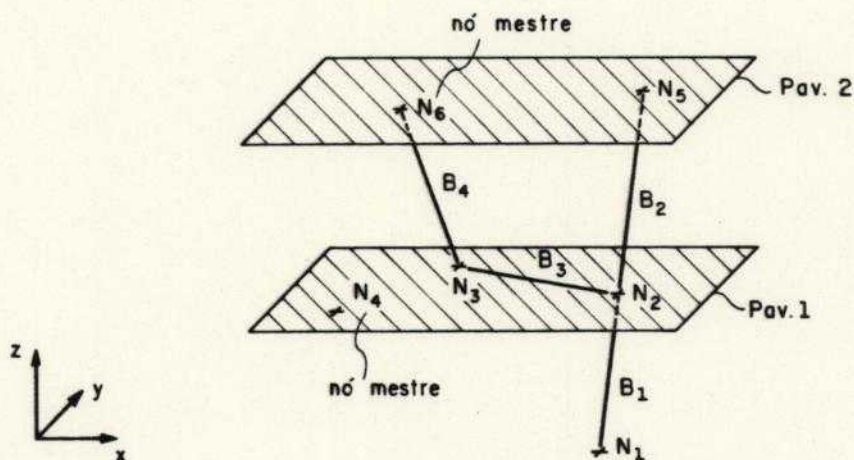


Fig. 3.14 Nó mestre e vetores de contribuição dos elementos

Os pontos N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 e N_6 são nós do modelo. N_4 e N_6 são nós mestres de dois pavimentos paralelos aos eixos globais X e Y. A tabela 3.1 contém as restrições nodais (1 = restrito e 0 = livre), organizadas em cada nó da mesma forma que os graus de liberdade , ou seja, as três traslações e as três rotações, segundo os eixos globais X, Y e Z, nesta ordem, e os números das equações associadas aos graus de liberdade.

Nó	Restrições nodais						Equações associadas					
N_1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
N_2	1	1	0	0	0	1	0	0	1	2	3	0
N_3	1	1	0	0	0	1	0	0	4	5	6	0
N_4	0	0	1	1	1	0	7	8	0	0	0	9
N_5	1	1	0	0	0	1	0	0	10	11	12	0
N_6	0	0	0	0	0	0	13	14	15	16	17	18

Tab. 3.1 Restrições nodais e numeração de equações

Importa observar-se a diferença na definição de restrições nodais para os dois nós mestres. Como ao nó N_4 não se liga nenhum elemento que contribua com rigidez nos graus de liberdade associados às rotações em torno dos eixos X e Y e à traslação segundo Z, esses deslocamentos são restritos.

Na tabela 3.2 são mostradas as incidências das barras e os seus vetores de contribuição no sistema global.

Barra	I	J	Vetor de Contribuições Nodais											
B_1	N_1	N_2	0	0	0	0	0	0	7	8	1	2	3	9
B_2	N_2	N_5	7	8	1	2	3	9	13	14	10	11	12	18
B_3	N_2	N_3	7	8	1	2	3	9	7	8	4	5	6	9
B_4	N_3	N_6	7	8	4	5	6	9	13	14	15	16	17	18

Tab. 3.2 Incidências e contribuições

Em um programa como o sistema LASER, que possui rotinas de minimização da banda da matriz de rigidez, é necessário que durante a montagem de vetores e matrizes de cada elemento sejam assinalados os pares de nós conectados. Para o elemento barra, caso O_i e O_j sejam os nós mestres associados aos nós I e J, respectivamente, é necessário assinalar, além de I-J, os pares O_i-I , O_i-J , O_j-I , O_j-J , O_i-O_j para que seja montada a matriz de conexões nodais.

3.7 PRIMEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO - PÓRTICO PLANO

A figura 3.15 apresenta a planta de forma do pavimento tipo do edifício Sun Park, localizado em São Paulo, concebido em concreto armado com $f_{ck} = 24$ MPa. O edifício cujo corte esquemático está na figura 3.16 tem sua fundação em estacas sob blocos de coroamento rígidos, em solo de elevado módulo de elasticidade, possibilitando-se a adoção de sua superestrutura engastada na base. A forma de todos os pavimentos tem concepção com diferenças insignificantes em relação ao pavimento tipo. Os pilares têm seção transversal inalterada da base ao topo.

Como primeira aplicação é feita a análise elástica linear do pórtico plano formado pelos pilares P17-P18-P19-P20 e vigas V17. O objetivo deste exemplo é mostrar a influência das dimensões dos nós em um painel de contraventamento submetido a ações estáticas laterais. O carregamento é composto por forças horizontais de 20 kN em todos os pavimentos, aplicadas no nó correspondente ao pilar P17.

Foram concebidos inicialmente dois modelos. Ambos com 76 nós, 72 barras simuladoras dos tramos de pilares e 54 para os tramos de vigas. No segundo modelo as barras horizontais foram adotadas com "offsets" rígidos de face a centro de pilar. Os nós de cada pavimento foram

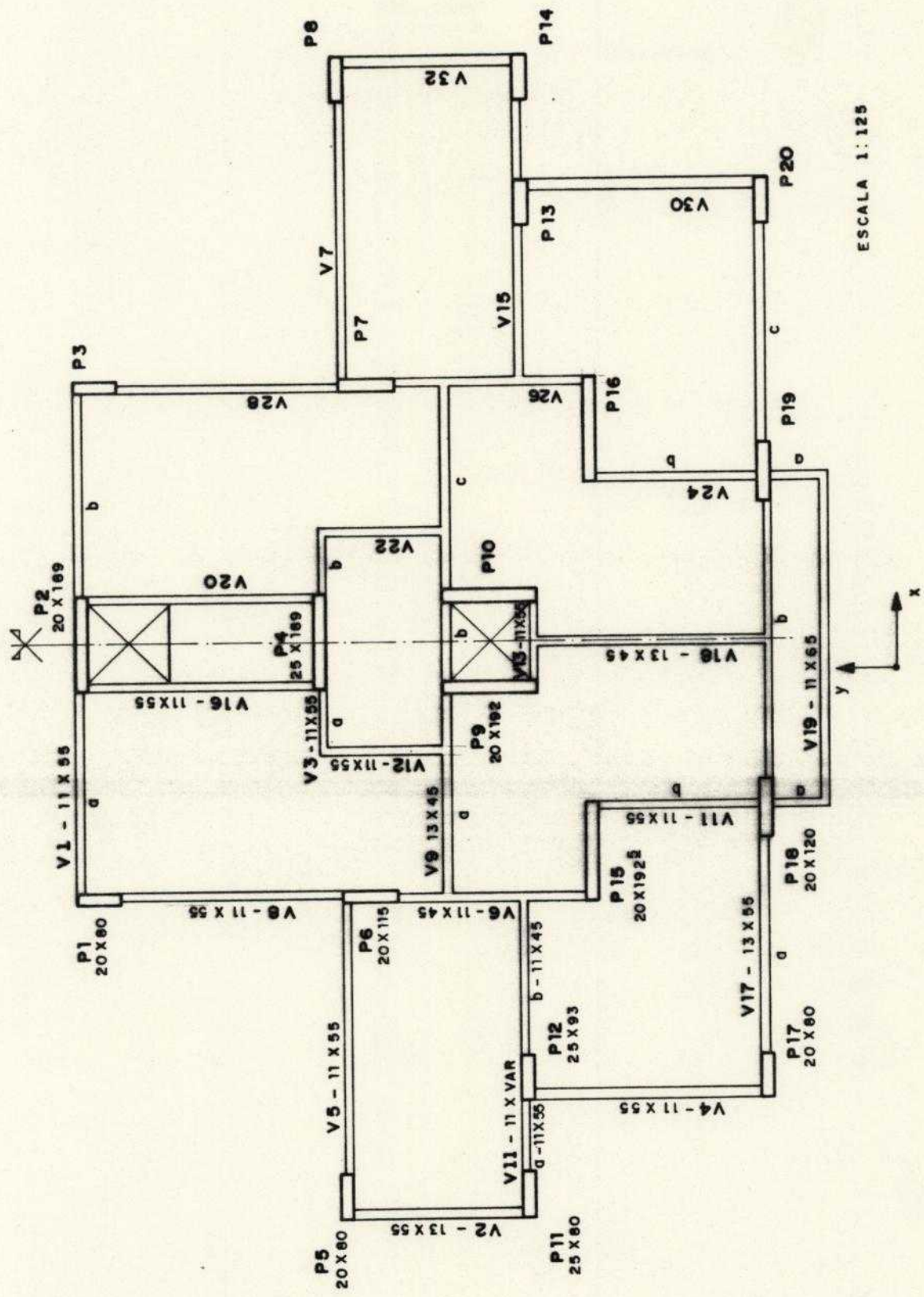


Fig. 3.15 Pavimento tipo do edifício Sun Park

constrangidos a terem a mesma translação horizontal. Foi adotado um módulo de deformação longitudinal igual a $3,46 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson igual a 0,15.

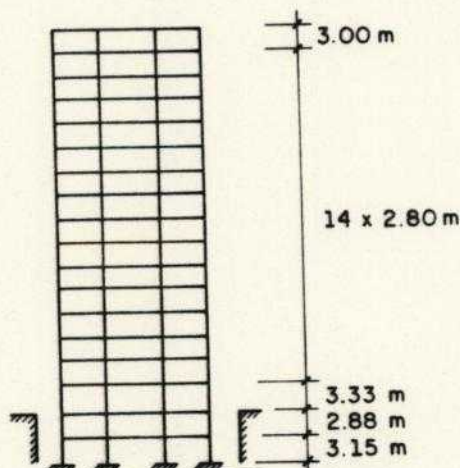


Fig. 3.16 Corte esquemático do edifício Sun Park

O confronto das translações horizontais dos pavimentos listados na tabela 3.3 permite obter informações sobre a influência das dimensões do nó sobre a rigidez da estrutura. No modelo 1 a translação no topo do edifício chega a ser 56% maior que a do modelo 2. Em termos qualitativos é possível observarem-se as diferenças ao longo de todos os níveis pela superposição das deformadas dos dois modelos apresentada na figura 3.17, onde os deslocamentos estão ampliados 75 vezes.

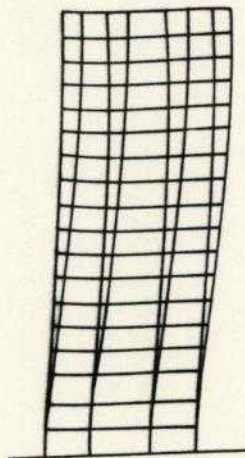


Fig. 3.17 Superposição das deformadas dos modelos 1 e 2

Pavimento	Modelo 1	Modelo 2
0	0.0000E+00	0.0000E+00
1	2.4320E-03	1.7858E-03
2	7.2962E-03	5.1135E-03
3	1.4335E-02	9.7316E-03
4	2.0471E-02	1.3585E-02
5	2.6507E-02	1.7301E-02
6	3.2318E-02	2.0854E-02
7	3.7831E-02	2.4226E-02
8	4.3007E-02	2.7405E-02
9	4.7820E-02	3.0381E-02
10	5.2254E-02	3.3148E-02
11	5.6299E-02	3.5699E-02
12	5.9949E-02	3.8028E-02
13	6.3201E-02	4.0132E-02
14	6.6057E-02	4.2009E-02
15	6.8524E-02	4.3659E-02
16	7.0624E-02	4.5088E-02
17	7.2397E-02	4.6313E-02
18	7.4025E-02	4.7445E-02

Tab. 3.3 Translações horizontais (m)

A simulação inadequada do comportamento do pórtico tem dois efeitos danosos. O primeiro relacionado à distribuição interna de esforços solicitantes entre as barras que o compõem. O segundo relacionado à participação do painel no sistema de contraventamento do edifício. O desprezo das dimensões finitas dos nós subestima a rigidez do painel, podendo gerar graves distorções na análise da distribuição de ações laterais entre os vários painéis de contraventamento, em que a rigidez relativa é o fator decisivo.

Buscando-se ampliar as possibilidades de comparação a tabela 3.4 reproduz os esforços solicitantes nas bases dos pilares P17 e P18. A tabela 3.5 apresenta os esforços nos extremos do primeiro e segundo tramos da viga V17 no terceiro pavimento, onde ela é mais solicitada. As seções de viga escolhidas localizam-se junto às faces dos pilares.

A maior diferença encontrada nos esforços nas bases dos pilares está no P18, onde no modelo 1 o momento fletor

é 26% maior que o valor dado pelo modelo 2. Na viga a maior diferença relativa está no extremo direito do primeiro tramo, em que o momento fletor no modelo 1 é 13% menor que o correspondente do modelo 2.

Pilar	Modelo 1			Modelo 2		
	Normal	Cortante	Fletor	Normal	Cortante	Fletor
P17	-515.52	46.312	-193.356	-524.63	47.148	-155.776
P18	125.27	133.688	-628.840	100.56	132.852	-498.160

Tab. 3.4 Esforços nas bases dos pilares (kN , m)

Tramo	Modelo 1		Modelo 2	
	Cortante	Fletor	Cortante	Fletor
1	-50.746	-114.304	-55.829	-120.100
	50.746	-105.424	55.829	-121.640
2	-32.300	-94.964	-35.368	-103.980
	32.300	-94.964	35.368	-103.980

Tab. 3.5 Esforços na viga V17 do 3^o pavimento (kN , m)

Quanto aos tempos de processamento a primeira análise consumiu 20,82s e a segunda, com a consideração de "offsets" 0,60s a mais , na etapa de montagem de matrizes e vetores correspondentes aos elementos, consumindo portanto um tempo 3% apenas superior ao primeiro.

Alternativamente foi concebido um terceiro modelo em que os trechos assumidos como rígidos no modelo 2 foram simulados por barras com a largura do pilar e altura igual à média dos pés-direitos adjacentes. Este modelo ficou constituído por 190 nós, 72 barras verticais e 162 barras horizontais. Aqui também os nós de cada pavimento foram constrangidos a transladar igualmente na horizontal. O desempenho comparado ao do modelo 2 é excelente quanto às respostas da estrutura às solicitações presentes, como se pode observar nas tabelas 3.6, 3.7 e 3.8 em comparação com as tabelas 3.3, 3.4 e 3.5. A maior diferença relativa é de 0,2% no deslocamento horizontal do topo do edifício.

Pavimento	Modelo 3
0	0.0000E+00
2	5.1231E-03
4	1.3614E-02
6	2.0902E-02
8	2.7469E-02
10	3.3226E-02
12	3.8118E-02
14	4.2107E-02
16	4.5192E-02
18	4.7554E-02

Tab. 3.6 Translações horizontais (m)

Pilar	Modelo 3		
	Normal	Cortante	Fletor
P17	-524.75	47.133	-155.932
P18	100.72	132.865	-498.760

Tab. 3.7 Esforços nas bases dos pilares (kN , m)

Tramo	Modelo 3		
	Cortante		Fletor
1	-55.822		-120.110
	55.822		-121.590
2	-35.364		-103.970
	35.364		-103.970

Tab. 3.8 Esforços na viga V17 do 3^o pavimento (kN , m)

Quanto ao tempo de processamento, igual a 44,65 s, tem-se, em relação ao modelo 2, um acréscimo de 108%, em virtude do aumento do número de graus de liberdade de 162 para 378, do número de barras de 126 para 234 e da semibanda da matriz de rigidez de 18 para 42. Durante o processamento todos os arquivos foram montados em disco rígido. Caso o sistema LASER dispusesse, em sua versão atual, de "buffer" em memória estendida para as gravações e leituras em disco, a diferença percentual dos tempos de processamento seria bastante aumentada.

Foram ainda promovidas alterações no terceiro modelo, aumentando-se as inércias dos trechos de viga que se buscou simular como rígidos. Quando as inércias foram multiplicadas por dez os resultados aproximaram-se ainda mais dos obtidos com o segundo modelo. Ao se multiplicar por cem, os resultados perderam a sua representatividade, tornando-se absurdos, tendo a rotina de solução do sistema de equações acusado a presença de elemento negativo na diagonal principal da matriz do sistema, durante a eliminação de Gauss.

3.8 SEGUNDO EXEMPLO DE APLICAÇÃO - ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAINÉIS

Como segunda aplicação é feita a análise elástica linear da estrutura do edifício Sun Park, submetido à ação do vento.

Inicialmente é considerada a ação do vento segundo a direção do eixo OY coincidente com a do eixo de simetria dos pavimentos do edifício. As forças horizontais aplicadas ao nível de cada pavimento foram determinadas de acordo com o estabelecido na norma NBR 6123 [3.6], com velocidade básica $V_0 = 40$ m/s, fator topográfico $S_1 = 1,0$, fator estatístico $S_2 = 1,0$, categoria IV e classe B.

Foi montado um primeiro modelo considerando-se plana a associação de painéis, como é usual no caso de carregamento segundo um plano de simetria da estrutura. Foram incluídos todos os pilares à esquerda do eixo de simetria, bem como todos os tramos de vigas que os ligam, perfazendo-se um total de 209 nós, 198 barras verticais e 180 barras horizontais. Todos os elementos foram alojados em um único plano e os nós de um pavimento constrangidos a transladar igualmente na horizontal. As barras simuladoras dos pilares P2 e P4 foram adotadas com metade de sua rigidez, devido à simetria. Foram considerados "offsets" rígidos nas barras

horizontais, sempre segundo a maior dimensão do pilar a que se ligam. Cabe notar que, se não houvesse o recurso de impedir-se o deslocamento horizontal relativo dos nós de um mesmo pavimento, a ligação entre os painéis de contraventamento deveria ser feita pelo acréscimo de elementos treliça ou elementos barra bi-rotulados, para garantir o comportamento conjunto. Isto implicaria em um aumento de 80% no número de elementos dispostos em planos horizontais e acrescentaria um complicador relativo à estipulação da "grande" rigidez que tais elementos deveriam ter.

Foi concebido um segundo modelo, tridimensional, em que não se tirou proveito da simetria, devido à sua utilização posterior para análise da ação do vento em direção perpendicular ao plano de simetria. Foram incluídos todos os pilares e todos os tramos de vigas que os ligam, perfazendo-se um total de 399 nós, 360 barras verticais e 414 barras horizontais. Cada pavimento possui um nó mestre cuja posição foi escolhida de modo que a ação do vento fosse aplicada apenas com forças horizontais, o que facilita a preparação do arquivo de dados, sem acrescentar graus de liberdade ao modelo. O nó mestre localiza-se no centróide do retângulo que circunscrive o pavimento. Observe-se que a utilização de "offsets" rígidos oferece não apenas o benefício da melhoria da representatividade do modelo, mas também da redução de nós necessários em sua concepção. Por exemplo, a definição da barra que simula a viga V4 pode ser feita exclusivamente com os nós fixados nos centros das seções transversais dos pilares P12 e P17, desde que sejam usados "offsets" em direção perpendicular ao eixo longitudinal de V4. Caso não se dispusesse do recurso do "offset" os extremos do trecho flexível da barra horizontal deveriam ser assinalados como nós do modelo.

A tabela 3.9 apresenta os deslocamentos horizontais dos vários pavimentos na direção das forças aplicadas. A máxima diferença situa-se em torno de 4%.

Pavimento	Modelo 1	Modelo 2
0	0.0000E+00	0.0000E+00
1	2.1022E-03	2.0828E-03
2	6.5438E-03	6.4733E-03
3	1.3292E-02	1.3125E-02
4	1.9440E-02	1.9163E-02
5	2.5694E-02	2.5281E-02
6	3.1897E-02	3.1326E-02
7	3.7945E-02	3.7197E-02
8	4.3768E-02	4.2824E-02
9	4.9313E-02	4.8158E-02
10	5.4541E-02	5.3162E-02
11	5.9423E-02	5.7807E-02
12	6.3936E-02	6.2074E-02
13	6.8062E-02	6.5946E-02
14	7.1793E-02	6.9417E-02
15	7.5130E-02	7.2490E-02
16	7.8092E-02	7.5185E-02
17	8.0725E-02	7.7550E-02
18	8.3290E-02	7.9827E-02

Tab. 3.9 Translações horizontais (m)

A pequena diferença encontrada nos deslocamentos horizontais não significa, necessariamente, que a distribuição de esforços solicitantes esteja bem representada no modelo bidimensional.

A tabela 3.10 apresenta forças cortantes e momentos fletores nas vigas do 4º pavimento, onde elas são, em sua maioria, mais solicitadas. Apenas são destacados elementos à esquerda do eixo de simetria. A correlação de valores para as vigas pares (paralelas ao eixo OY), as únicas presentes no modelo bidimensional, é muito boa. A maior diferença acontece na viga V2 e é de 4% . Atentando-se para as vigas ímpares (paralelas ao eixo OX), pode-se perceber que o caráter tridimensional da estrutura tem influência apreciável apenas em V1 e V11a. Nesta última, os esforços são da ordem de grandeza dos que solicitam as vigas pares.

Viga	Modelo 1		Modelo 2	
	Cortante	Fletor	Cortante	Fletor
V1	-	-	-6.7403E+0 6.7403E+0	-1.2191E+1 -1.6051E+1
V5	-	-	1.8984E-1 -1.8984E-1	7.1422E-1 4.0015E-1
V11a	-	-	2.5739E+1 -2.5739E+1	2.1277E+1 2.2736E+1
V17a	-	-	1.0484E-1 -1.0484E-1	5.6342E-2 4.1229E-1
V17b	-	-	.0000E+0 .0000E+0	4.4030E-2 -4.4086E-2
V2	-4.8824E+1 4.8824E+1	-9.8936E+1 -8.4644E+1	-5.0962E+1 5.0962E+1	-1.0327E+2 -8.8350E+1
V4	-3.5391E+1 3.5391E+1	-8.2123E+1 -9.4831E+1	-3.6301E+1 3.6301E+1	-8.4236E+1 -9.7271E+1
V6	-4.1223E+1 4.1223E+1	-7.9437E+1 -9.1228E+1	-4.0343E+1 4.0343E+1	-7.7735E+1 -8.9283E+1
V8	-6.0002E+1 6.0002E+1	-1.4489E+2 -1.4372E+2	-5.9906E+1 5.9906E+1	-1.4469E+2 -1.4346E+2
V10b	-5.5272E+1 5.5272E+1	-9.9644E+1 -9.7124E+1	-5.4249E+1 5.4249E+1	-9.7786E+1 -9.5342E+1
V16	-3.3738E+1 3.3738E+1	-8.8129E+1 -8.0224E+1	-3.2671E+1 3.2671E+1	-8.5343E+1 -7.7684E+1

Tab. 3.10 Esforços nas vigas do 4^o pavimento (kN , m)

Quanto aos esforços nas bases dos pilares, listados nas tabelas 3.11 (modelo bidimensional) e 3.12 (modelo tridimensional), atente-se, inicialmente, para a força cortante 2 e o momento fletor 3, correspondentes à flexão em plano paralelo ao de simetria da estrutura (YZ). Não há nenhuma discrepância de resultados que alcance 2% . Quanto à força cortante 3 e ao momento fletor 2 (flexão no plano XZ), tem-se valores reduzidos no modelo tridimensional, e de pouca influência no projeto, por serem os maiores correspondentes às direções mais fortes dos pilares. Em contraposição, as forças normais são amplamente influenciadas pelo aspecto tridimensional da associação de painéis, em especial junto às já citadas V1 e V11a. Observe-se que a diferença relativa em P1 é de 19% e em P2 17% . No pilar P11 chega a 202% e em P12 atinge 960%. Essas diferenças estão associadas à mobilização de painéis

dispostos em planos ortogonais ao do carregamento, fortalecidos pela presença de trechos rígidos e vigas de pequenos vãos. Essa mobilização é também favorecida pela ligação excêntrica viga-pilar, como a que se tem em V4-P12.

Pilar	Modelo 1		
	Normal	Cortante	Fletor
P1	6.8358E+2	-3.8000E+1	-1.6500E+2
P2	7.6852E+2	-1.7498E+1	-3.6846E+1
P4	-7.6852E+2	-2.2258E+1	-5.9436E+1
P5	4.8186E+2	-9.1563E+0	-1.7433E+1
P6	-1.2957E+2	-9.2480E+1	-4.6876E+2
P9	.0000E+0	-3.0877E+2	-2.0542E+3
P11	-4.8186E+2	-1.1979E+1	-2.7855E+1
P12	3.9476E+2	-1.1697E+1	-3.0037E+1
P15	6.1713E+1	-1.8583E+1	-3.8322E+1
P17	-3.9476E+2	-8.6355E+0	-1.6886E+1
P18	-6.1572E+2	-1.0876E+1	-2.3148E+1

Tab. 3.11 Esforços nas bases dos pilares (kN , m)

Pilar	Modelo 2				
	Normal	Cortante 2	Cortante 3	Fletor 2	Fletor 3
P1	5.7470E+2	-3.8151E+1	8.6442E-1	-9.0763E-1	-1.6401E+2
P2	9.2798E+2	-1.7288E+1	-1.2676E-4	6.5665E-4	-3.6454E+1
P4	-7.0943E+2	-2.2028E+1	-5.2363E-5	3.3999E-4	-5.8877E+1
P5	5.1178E+2	-9.2947E+0	1.1874E+0	-1.2468E+0	-1.7506E+1
P6	-1.2442E+2	-9.2415E+1	-3.6999E-1	3.8849E-1	-4.6526E+2
P9	4.0201E-5	-3.0866E+2	.0000E+0	.0000E+0	-2.0381E+3
P11	-1.5978E+2	-1.2141E+1	-3.2488E+0	3.4112E+0	-2.7884E+1
P12	3.7257E+1	-1.1790E+1	-4.9737E-1	5.2224E-1	-2.9970E+1
P15	6.0532E+1	-1.8434E+1	-7.2027E+0	7.5628E+0	-3.7992E+1
P17	-4.1303E+2	-8.7159E+0	-1.1444E+0	1.2016E+0	-1.6898E+1
P18	-5.9631E+2	-1.0795E+1	8.6489E-1	-9.0821E-1	-2.2955E+1

Tab. 3.12 Esforços nas bases dos pilares (kN , m)

As diferenças apresentadas anteriormente podem ter influência significativa na realização do projeto. Note-se os resultados listados na tabela 3.13, em que são apresentadas, para as bases dos pilares P1, P2, P11 e P12, as forças normais devidas às ações gravitacionais (permanentes e acidentais), conseguidas em análise que

não consta do presente trabalho. A tabela 3.13 apresenta, também, combinações últimas das forças normais com aquelas que resultam da análise do efeito do vento, expostas na tabela 3.12. Cabe observar-se que a combinação foi feita com base na norma NBR 8681 [3.7], assumindo-se que a ação do vento não é a principal (para minimizar os efeitos das diferenças em apreço), utilizando-se o fator de combinação efetivo $\psi_0 = 0,6$, e com os coeficientes de ponderação para ações permanentes e acidentais $\gamma_g = \gamma_q = 1,4$. Note-se que a diferença no pilar P11 chega a 21 % .

Pilar	Ações grav.	Combinações		
		Modelo 1	Modelo 2	Diferença
P1	1586,89	2795,85	2704,39	3 %
P2	2666,12	4378,12	4512,07	3 %
P11	826,67	1562,10	1291,55	21 %
P12	2397,32	3687,85	3387,55	9 %

Tab. 3.13 Forças normais nas bases dos pilares (kN)

Quanto aos tempos de processamento foram consumidos 73,77s e 294,73s para os modelos 1 e 2, respectivamente.

O modelo tridimensional foi aproveitado para a análise da ação do vento na direção perpendicular ao plano de simetria da estrutura. Neste caso ocorre rotação dos pavimentos em torno de eixo vertical, como se pode observar na tabela 3.14, que também apresenta as translações horizontais dos nós mestres dos pavimentos na direção do carregamento. Na direção do eixo de simetria as translações, praticamente nulas, não são apresentadas. Observe-se que a máxima rotação está dentro dos limites adequados à linearização adotada na formulação do diafragma rígido.

Pavimento	Translação (m)	Rotação (rad)
0	0.0000E+00	0.0000E+00
1	7.7754E-04	-3.4774E-05
2	2.4914E-03	-1.1029E-04
3	5.2163E-03	-2.2705E-04
4	7.8337E-03	-3.3526E-04
5	1.0614E-02	-4.4624E-04
6	1.3478E-02	-5.5677E-04
7	1.6363E-02	-6.6460E-04
8	1.9223E-02	-7.6812E-04
9	2.2020E-02	-8.6619E-04
10	2.4725E-02	-9.5795E-04
11	2.7314E-02	-1.0428E-03
12	2.9771E-02	-1.1202E-03
13	3.2083E-02	-1.1900E-03
14	3.4245E-02	-1.2521E-03
15	3.6255E-02	-1.3066E-03
16	3.8123E-02	-1.3542E-03
17	3.9867E-02	-1.3959E-03
18	4.1639E-02	-1.4365E-03

Tab. 3.14 Deslocamentos dos pavimentos

O caráter tridimensional da estrutura é fundamental para este carregamento que se analisa. Não apenas devido à já referida interseção de painéis, mas também por causa das rotações dos pavimentos, que mesmo pequenas influenciam os resultados. Por exemplo, o centróide do topo do pilar P11, cuja distância ao nó mestre, na direção do carregamento, é de 11,32 m, desloca-se 1,63 cm ao longo de OY por causa da rotação de $1,4365 \times 10^{-3}$ radianos do pavimento em torno do eixo vertical. Note-se que essa translação é 39% da que ocorre na direção do carregamento.

A tabela 3.15 apresenta forças cortantes e momentos fletores em vigas do 4º pavimento, situadas à esquerda de seu eixo de simetria. A tabela 3.16 expõe esforços solicitantes nas bases dos pilares. Os momentos torçores por serem desprezíveis não são apresentados. Cabe observar-se que a torção das barras não é essencial ao equilíbrio da estrutura.

Viga	Cortante	Fletor
V1A	-3.4377E+1 3.4377E+1	-6.2175E+1 -8.1866E+1
V5	-1.4578E+1 1.4578E+1	-4.5718E+1 -3.9853E+1
V9B	-2.7235E+1 2.7235E+1	-2.5601E+1 -2.5601E+1
V11A	-7.2140E+1 7.2140E+1	-6.1155E+1 -6.2204E+1
V13	-2.9337E+1 2.9337E+1	-2.7577E+1 -2.7577E+1
V15B	-2.2392E+1 2.2392E+1	-4.9799E+1 -5.0295E+1
V17B	-1.5361E+1 1.5361E+1	-4.6850E+1 -4.6850E+1
V2	-8.3637E+0 8.3637E+0	-1.6947E+1 -1.4500E+1
V4	-2.3154E+0 2.3154E+0	-5.3732E+0 -6.2041E+0
V6	-6.2808E-1 6.2808E-1	-1.0664E+0 -1.5339E+0
V8	-9.4927E+0 9.4927E+0	-2.3099E+1 -2.2561E+1
V10B	-1.3865E-2 1.3865E-2	2.6324E-1 -3.1260E-1
V16	-8.3011E-1 -8.3011E-1	-2.0711E+0 2.0711E+0

Tab. 3.15 Esforços nas vigas do 4^o pavimento (kN , m)

Pilar	Normal	Cortante 2	Cortante 3	Fletor 2	Fletor 3
P1	-2.8918E+2	-4.4052E+0	5.2931E+0	-9.2398E+0	-1.5138E+1
P2	9.7014E-5	.0000E+0	1.3512E+2	-9.2871E+2	.0000E+0
P4	7.0655E-5	.0000E+0	1.2002E+2	-9.3982E+2	.0000E+0
P5	-1.2041E+2	-1.5711E+0	1.1305E+1	-6.0190E+1	-3.1138E+0
P6	3.8899E+1	-6.3933E+0	3.5993E+0	-8.0167E+0	-3.7944E+1
P9	-4.7837E+2	-3.9416E+0	5.7937E+0	-1.2375E+1	-3.1039E+1
P10	4.7837E+2	3.9416E+0	5.7937E+0	-1.2375E+1	3.1039E+1
P11	-5.8618E+2	-2.0463E+0	1.8117E+1	-6.9714E+1	-5.0093E+0
P12	4.8429E+2	-1.2842E+0	2.2917E+1	-1.0369E+2	-3.9534E+0
P15	-4.3807E+0	-4.0334E-1	7.5880E+1	-6.0302E+2	-1.7521E+0
P17	-2.9721E+2	-9.2207E-1	8.7435E+0	-3.9372E+1	-2.1154E+0
P18	5.9340E+1	-1.1278E-1	2.3204E+1	-1.2626E+2	-8.0523E-1

Tab. 3.16 Esforços nas bases dos pilares (kN , m)

3.9 CONCLUSÕES

A consideração de trechos rígidos pode ser feita através de formulação relativamente simples e bastante segura.

Tal procedimento abre inúmeras possibilidades de modelagem tais como : incorporação de nós de dimensões finitas, simplificação da análise de estruturas de edifícios submetidos a ações laterais, consideração de apoios extensos, mudança de eixos longitudinais de barras, representação de paredes com aberturas, etc.

A simulação do trecho rígido deve ser feita preferencialmente de forma automática, incorporada à formulação teórica, para não causar acréscimo do número de graus de liberdade e do número de elementos, com o conseqüente aumento do tempo de processamento e pior utilização da capacidade do programa computacional disponível.

É melhor evitar-se a inclusão de elementos de rigidez muito elevada, comparada aos dos demais elementos, pela possibilidade de perturbação da estabilidade numérica da solução e a necessidade de, em cada caso, experimentar a rigidez a ser utilizada para alcançar o objetivo da simulação sem destruir a representatividade dos resultados, ou até mesmo, inviabilizar a análise.

A não consideração de trechos rígidos no modelo pode alterar a previsão do comportamento estrutural, distorcendo alguns resultados em níveis que influenciam o projeto.

A adoção de modelos tridimensionais para a análise de ações laterais, como a do efeito do vento, deve ser adotada sempre que possível, pois mesmo ao se carregar a estrutura segundo um plano de simetria, painéis dispostos em planos ortogonais ao do carregamento podem ser mobilizados, sendo essa mobilização influenciada pela presença de trechos rígidos, que devem ser, em princípio, considerados. Observe-se que A NBR 6123 [3.6] especifica que as forças

devidas ao vento, atuantes em edificações paralelepípedicas, devem ser consideradas perpendicularmente a cada uma das fachadas e, em adição, com as excentricidades causadas pelo vento agindo obliquamente ou por efeitos de vizinhança. Portanto, mesmo na direção de uma possível simetria é necessário considerarem-se excentricidades o que acarreta a necessidade de um modelo tridimensional.

3.10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[3.1] Weaver, W., Jr.; "Computer Programs for Structural Analysis"; D. Van Nostrand Company, Inc.; Princeton; 1967.

[3.2] Shiel, F.; "Estática de Estaqueamentos"; SET-EESC-USP; São Carlos; 1971.

[3.3] Stamato, M.C.; "Deslocamentos em Estruturas Lineares"; EESC-USP; São Carlos; 1979.

[3.4] Ramalho, M.A.; "Sistema para Análise de Estruturas Considerando Interação com o Meio Elástico"; Tese de Doutorado; EESC-USP; 1990.

[3.5] Taranath, B.S.; "Structural Analysis and Design of Tall Buildings"; Ed. McGraw-Hill; New York; 1988.

[3.6] Associação Brasileira de Normas Técnicas; "Forças Devidas ao Vento em Edificações"; ABNT; Rio de Janeiro; 1986 (NBR 6123/86).

[3.7] Associação Brasileira de Normas Técnicas; "Ações e Segurança nas Estruturas"; ABNT; Rio de Janeiro; 1984 (NBR 8681/84).

CAPÍTULO 4

NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA - EFEITO DE SEGUNDA ORDEM

4.1 INTRODUÇÃO

Em grande parte dos projetos estruturais atualmente desenvolvidos na prática corrente dos escritórios de Engenharia tem sido assumido que, para a determinação das solicitações dos elementos do sistema estrutural, o relacionamento entre as causas do fenômeno e os seus efeitos seja linear. Essa hipótese estabelece condições para se alcançar uma primeira aproximação do fenômeno, que estará bem representado, obviamente, se o nível de deslocamentos e deformações não for acentuado.

Dentre as não-linearidades intrínsecas ao fenômeno que aqui se estuda, interessa-nos, no presente capítulo, analisar tão-somente aquelas que o meio científico convencionou denominar como geométricas e apenas em sistemas estruturais compostos por barras. Isto com o objetivo de apresentar uma ferramenta para a análise estática de estruturas de edifícios usuais em que são consideradas alterações finitas na geometria e relações não-lineares entre deformações e deslocamentos, mas sempre com a hipótese de que as deformações são suficientemente pequenas de modo a se adotar a proporcionalidade entre tensões e deformações.

Resumidamente pode-se dizer que uma análise com não-linearidade geométrica (NLG) envolve o estabelecimento do equilíbrio na configuração deformada da estrutura, computando-se os deslocamentos ocorridos. As deformações não se expressam linearmente em função desses deslocamentos e a estrutura sofre alterações de rigidez de acordo com a magnitude das deformações presentes.

A mudança da geometria da estrutura, provocada pela

evolução crescente do carregamento, pode produzir a instabilidade do equilíbrio, por aparecimento de ponto de bifurcação ou ponto limite.

É intenção do autor estudar os problemas relacionados com a não-linearidade geométrica em que o equilíbrio se mantenha estável e as maneiras mais simples de considerá-los no projeto usual do sistema estrutural do edifício. Cabe observar que os modelos utilizados no presente trabalho servem igualmente para o estudo dos problemas de instabilidade.

4.2 UM BREVE HISTÓRICO

Não se pretende aqui fazer um levantamento detalhado referente ao assunto em questão mas, apenas, destacar alguns trabalhos que parecem ser fundamentais para a compreensão e estudo do fenômeno, com ênfase nas formulações matriciais baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF).

Após o trabalho de 1956 de Turner et al. [4.1], considerado pioneiro na apresentação dos fundamentos do MEF, grande desenvolvimento observou-se na área da Engenharia de Estruturas, impulsionado pela implementação da linguagem de programação FORTRAN e pelos computadores que permitiram resolver problemas cada vez mais complexos e de crescente número de incógnitas.

Na década de sessenta aparecem muitos trabalhos com a preocupação de permitir o uso do MEF em problemas de NLG. Em 1960 é publicado o primeiro artigo em que a NLG é tratada pelo MEF [4.2], onde um procedimento incremental linearizado, é implementado junto ao conceito de matriz de rigidez tangente, incorporando termos de ordem superior nas relações deformação-deslocamento para a análise das duas classes de problemas assinalados no item anterior.

Dois artigos apresentados 1963 [4.3] e 1965 [4.4]

merecem realce pelo fato de procurarem elucidar as bases teóricas para as deduções relativas ao MEF. Preocupam-se em analisar o problema de flambagem de barras, aperfeiçoando as deduções clássicas e buscando sistematizar o problema, amparando-se na Teoria da Elasticidade Não-Linear [4.5]. Ainda em 1965 aparece o clássico texto "Continua e Discontinua" [4.6] onde Argyris apresenta um panorama geral do desenvolvimento do MEF com destaque para os problemas não-lineares de natureza física e geométrica. No mesmo ano, aliás na mesma célebre conferência realizada na base aérea de Wright Patterson, é introduzido o modelo incremental de Martin [4.7] para análise NLG de pórticos, assumindo que a deformação inicial em cada incremento é constante e ligada exclusivamente à força normal. Em 1968 é apresentado pela primeira vez, como notável contribuição, o formalismo das matrizes incrementais [4.8], tendo sido retomado o conceito de matriz de rigidez tangente ou instantânea, alertando-se para o fato de que a parcela da matriz de rigidez dependente dos termos quadráticos de deslocamento é essencial para predição realista do comportamento em presença de significativa NLG, em especial em soluções de problemas pós-flambagem, até então tratados de forma nebulosa. Jennings [4.9] adota forma alternativa para as coordenadas do elemento barra (eulerianas) buscando separar deformações e deslocamentos de corpo rígido, modelo retomado por Powell [4.10] em 1969. Ainda em 1969 é apresentado por Martin [4.11] minucioso estado-da-arte sobre a utilização do MEF em problemas geometricamente não-lineares, assumindo o formalismo das matrizes incrementais e abordando amplamente a questão das matrizes das deformações e das tensões iniciais.

Sendo já conhecidos os modelos básicos para o tratamento da NLG, a partir da década de setenta o desenvolvimento das pesquisas foi orientado no sentido de aperfeiçoar os modelos existentes, compará-los, discutir as técnicas mais adequadas à solução dos sistemas de

equações não-lineares, ampliar o campo de aplicação, buscando analisar estruturas cada vez mais complexas, caracterizar e comparar as possibilidades das formulações lagrangeanas e eulerianas e, no entender do autor a mais difícil e não alcançada até os dias atuais, buscar a sistematização e formalização do problema nos moldes em que se havia estabelecido a análise elástica linear. Da vastíssima produção da década é dado realce, a seguir, a alguns trabalhos considerados marcantes.

Em 1972 é apresentada ao meio científico, por Ebner e Ucciferro[4.12], excelente comparação teórica e numérica de várias formulações para o tratamento de NLG em estruturas planas compostas por barras, com a vantagem de serem todas as formulações deduzidas a partir de um ponto comum, favorecendo essa comparação. Ainda em 1972 é publicado interessante artigo [4.13] com estudo comparativo de várias técnicas aplicáveis à solução de sistemas de equações não-lineares algébricas ou diferenciais, com atenção voltada a procedimentos econômicos em termos computacionais. Em 1973 Oran [4.14], com base na formulação clássica da "viga-coluna" [4.15], desenvolve matriz de rigidez tangente para a análise NLG de pórticos elásticos, com hipótese de deformações pequenas mas para grandes rotações, alertando para o fato de que uma grande rotação não pode ser tratada como um vetor no espaço tridimensional. Exame detalhado da formulação do problema, a partir das matrizes incrementais é feita em 1973 [4.16], apontando-se para os cuidados a serem adotados na sustentação do formalismo, ao se estabelecer as equações que regulam o problema. Ainda no profícuo ano de 1973 Gallagher [4.17], em singular e importante trabalho, revê os desenvolvimentos da análise NLG via elementos finitos. Relata os progressos na formulação de elementos, algoritmos de solução do sistema de equações, cálculo de ponto limite, análise de bifurcação do equilíbrio e pós-flambagem, etc, adotando o conceito das matrizes incrementais. Cabe

ressaltar que forma alternativa de compor a matriz de rigidez tangente já havia sido introduzida por Zienckiewicz [4.18], entendendo-a como a superposição da matriz de rigidez inicial, da geométrica e da que provém da atualização das coordenadas nodais. A maioria dos estudos envolvendo não-linearidade, com a utilização do MEF, baseiam-se em formulações lagrangeanas, total ou atualizada, como tem sido a preferência do grupo liderado pelo prof. K.-J. Bathe. Dentre uma grande produção podem ser citadas as referências [4.19] de 1975 e [4.20] de 1979 em que são apresentadas formulações para a análise estática e dinâmica envolvendo grandes deslocamentos, incluindo comparações entre formulações lagrangeanas para um elemento de barra tridimensional, apropriado à análise com grandes deslocamentos e grandes rotações. O problema de grandes deslocamentos em estruturas de barras é analisado em 1976 por Oran et al. [4.21] a partir de formulação previamente desenvolvida com base no modelo "viga-coluna", com interessante comparação entre a utilização de coordenadas eulerianas e lagrangeanas. Em 1978 Argyris et al. [4.22] publicam extenso artigo que pode ser visto como o resumo do trabalho do grupo que compõem. Nessa publicação há denso relato sobre a análise NLG via MEF no espaço tridimensional, com a consideração de grandes rotações; é apresentado o conceito de rotações semitangenciais que possuem a propriedade de serem comutativas.

Incontável número de publicações versando sobre o assunto aparece na década de oitenta. Dentre elas são aqui destacadas apenas aquelas mais utilizadas durante o desenvolvimento do presente trabalho. Em primeiro lugar o texto apresentado por Wen et al. [4.23] em que é analisado o problema de pórticos, planos e tridimensionais, em formulação lagrangeana para pequenas rotações, com base nas matrizes incrementais. É também interessante citar uma série de trabalhos desenvolvidos por autores brasileiros tais como os de Souza Lima e Venâncio Filho [4.24][4.25],

bastante didáticos e elucidativos para estruturas planas reticuladas, o de Mazzili [4.26], interessante análise teórica sobre o comportamento NLG de pórticos planos, e os de Pimenta [4.27][4.28], sobre a análise não-linear de pórticos planos, para grandes deslocamentos e rotações, com acesso a questões de unicidade de solução, estabilidade do equilíbrio e estudo particular de pórticos de concreto armado. Merecem destaque dois artigos em que a formulação computacional é utilizada para análise NLG de pórticos planos [4.29] e tridimensionais [4.30], com base no modelo "viga-coluna", em que foi eliminada a restrição de pequenas rotações entre incrementos sucessivos.

Recentemente Meek et al. [4.31] estudaram o comportamento não-linear físico e geométrico de pórticos tridimensionais, incluindo seções transversais quadradas e circulares vazadas. Wong et al. [4.32] apresentam modelo para a análise NLG de pórticos tridimensionais, incluindo a predição de ponto limite. Interessante análise do problema é feita a partir da energia de deformação. Em trabalho posterior [4.33], o modelo é estendido à análise não-linear física, com estudo da estabilidade da solução incremental iterativa com uso de coordenadas lagrangeanas atualizadas.

4.3 COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Uma análise NLG com o MEF envolve pelo menos quatro níveis de decisão. O primeiro deles consiste na definição do modelo elemental que abrange a fixação de hipóteses básicas, escolha das funções de interpolação e as relações deformação-deslocamento. O segundo, a fixação do sistema de coordenadas do elemento que pode ser lagrangeano, quando os deslocamentos generalizados do elemento são medidos em relação à configuração indeformada, ou euleriano, quando os deslocamentos são definidos tomando-se como referência o elemento deformado. O terceiro nível de decisão refere-se

ao formalismo adotado na decomposição da matriz de rigidez (quando usado o Processo dos Deslocamentos) que pode ser o das matrizes incrementais [4.8] ou o da matriz geométrica [4.18]. O quarto nível é o da escolha do algoritmo a ser adotado para a solução do sistema de equações não-lineares que pode ser, em resumo, o da iteração direta, o incremental direto, o Newton-Raphson, o da perturbação, o do valor inicial, etc. e suas variantes e combinações.

Os detalhes a respeito de cada uma dessas definições serão abordadas nos itens seguintes, mas é preciso que fique clara a intenção do autor de optar, sempre que possível, pelos procedimentos mais simples e que possam ser absorvidos em analogia e por extensão aos casos clássicos da análise elástica linear, buscando introduzir o problema de maneira gradual.

4.4 CONCEITOS BÁSICOS

Admita-se que a estrutura a ser analisada em regime elástico é constituída por um conjunto de elementos, no caso barras, interconectados nos seus extremos, que são os nós. Admita-se, também, que apenas nesses nós o carregamento estático seja aplicado por ações concentradas. A energia potencial da estrutura é dada pela expressão

$$\Pi = U - \tilde{F}^T \tilde{Q} \quad \dots(4.1)$$

onde

Π é a energia potencial total

U é a energia de deformação

\tilde{Q} é o vetor de deslocamentos nodais

\tilde{F} é o vetor de forças nodais

A energia de deformação U é dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}} dV = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\varepsilon}} dV$$

onde $\underline{\underline{\varepsilon}}$ é o vetor das componentes de deformação

$\underline{\underline{\sigma}}$ é o vetor das componentes de tensão

$\underline{\underline{E}}$ é a matriz dos coeficientes elásticos

V é o volume da estrutura

...(4.2)

É importante considerar que a escolha das medidas de tensão e de deformação deve ser tal que permita calcular corretamente a energia de deformação, ou seja, o tensor de deformações deve ser energeticamente conjugado ao tensor de tensões. São aqui utilizados o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e o tensor de deformações de Green-Lagrange, com integrações realizadas no volume inicial da estrutura.

Se as deformações em cada elemento são escritas em função dos deslocamentos nodais, mediante o uso apropriado de funções de forma, é possível dar nova redação à equação (4.1). Assim,

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{n \in e} \int_{V_e} \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{Q}} dV - \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{Q}}$$

onde $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{Q}}$

$\underline{\underline{B}}$ é matriz modal que relaciona deformação aos deslocamentos, de maneira não-linear

V_e é o volume do elemento

$n \in e$ é o número de elementos

...(4.3)

ou, simplesmente,

$$\Pi = U(Q_i) - \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{Q}}$$

...(4.4)

De acordo com a condição de estacionariedade da energia potencial, o estado de equilíbrio é representado pela solução do sistema de equações que resultam da condição de anulação das derivadas parciais de Π em relação a cada um dos deslocamentos Q_i , tem-se

$$\frac{\partial U}{\partial Q_i} - F_i = 0 \quad \dots(4.5)$$

Organizando-se matricialmente as equações do tipo (4.5) obtém-se

$$\underline{\underline{K}}_s \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{F}} \quad \dots(4.6)$$

Observe-se que a matriz $\underline{\underline{K}}_s$ é determinada a partir das contribuições de todos os elementos. Para se obter a contribuição de um dos elementos basta limitar o domínio ao seu volume, lembrando-se que apenas forças e deslocamentos correspondentes aos nós a que ele se liga estarão envolvidos. É o que se fará nos próximos itens para a obtenção das matrizes de cada elemento. Nesse caso, para identificação, as matrizes de rigidez serão grafadas em letras minúsculas.

Quando o comportamento da estrutura é linear obtém-se $\underline{\underline{K}}_s$ independente dos deslocamentos, já que a energia de deformação é, neste caso, função quadrática dos deslocamentos.

A matriz de rigidez $\underline{\underline{K}}_s$, no caso em que as relações deformação-deslocamento não são lineares, é função dos deslocamentos, alterando-se à medida em que esses deslocamentos ocorrem. Observe-se que a matriz $\underline{\underline{K}}_s$ relaciona as forças aplicadas no fim do processo aos correspondentes deslocamentos, como simbolicamente se mostra na figura 4.1.

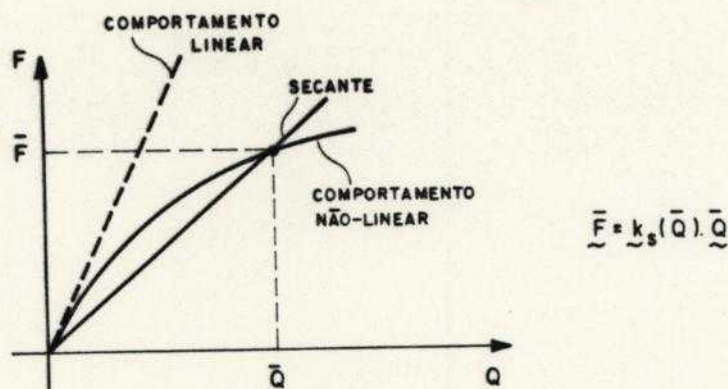


Fig. 4.1 Comportamento não-linear - Matriz secante

Por razões geométricas, observadas na figura 4.1, a matriz \tilde{K}_s é chamada matriz de rigidez secante.

A partir da equação (4.5) é imediata a dedução da formulação incremental do equilíbrio. Se Δ simboliza incremento tem-se que

$$\Delta \left[\frac{\partial U}{\partial Q_i} \right] = \Delta F_i \quad \dots(4.7)$$

Usando-se uma expansão linear para a definição do incremento (semelhante a se truncar o desenvolvimento em série de Taylor no termo linear), a partir de uma dada situação de equilíbrio, pode-se escrever (4.7) como

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Q_i \partial Q_l} \Delta Q_l = \Delta F_i \quad \dots(4.8)$$

Arranjando-se matricialmente as equações do tipo (4.8) pode-se escrever

$$\tilde{K}_T \Delta \tilde{Q} = \Delta \tilde{F} \quad \dots(4.9)$$

O problema a ser resolvido pode, a partir da equação (4.8), ser transformado em uma sequência de análises lineares em cada incremento de carga $\Delta \tilde{F}$. A matriz \tilde{K}_T , por razão fácil de se observar na figura 4.2, é denominada matriz de rigidez tangente.

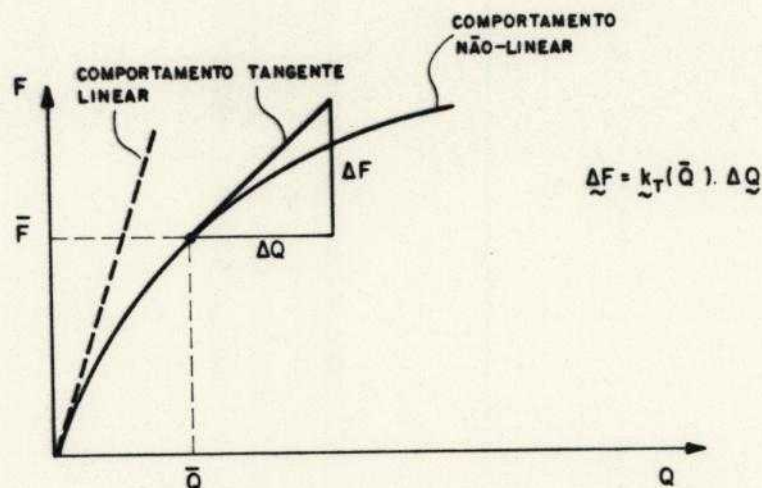


Fig.4.2 Comportamento não-linear - matriz tangente.

No início do processo, com a estrutura na configuração inicial ($\bar{Q} = 0$) a matriz de rigidez tangente e a matriz de rigidez elástica linear se confundem.

Em resumo, o estabelecimento das matrizes de rigidez secante e tangente pode ser feito simplesmente com a primeira e a segunda derivações da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais de deslocamento.

4.5 UM CASO SIMPLES - TRELIÇA PLANA

4.5.1 Modelo Elemental e Sistema de Coordenadas

A figura 4.3 mostra as configurações de equilíbrio ${}^0A^0B$ e ${}^1A^1B$ de um elemento barra de treliça plana, prismático, respectivamente antes e depois de se deformar. Observe-se que os eixos x e y são os eixos locais de barra fixados na configuração inicial, segundo os quais são medidos os deslocamentos u e v dos pontos da barra, indexados em seus extremos. O material constituinte da barra possui módulo de elasticidade longitudinal E .

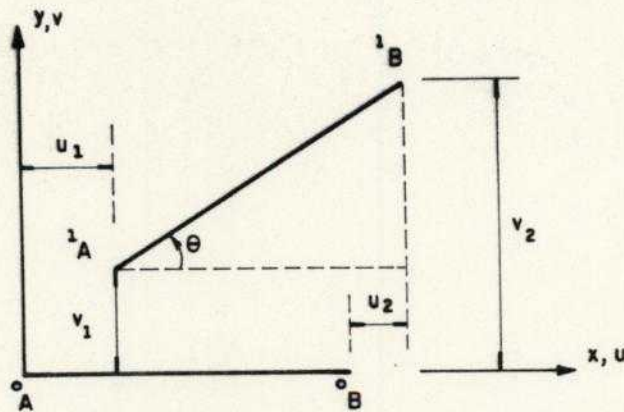


Fig. 4.3 Elemento barra de treliça plana

A vantagem em se utilizar um referencial lagrangeano está no conjunto de simplificações decorrentes de se ter a configuração inicial inalterável. Assim, tudo se referencia ao início do processo em que a barra possui comprimento L e área da seção transversal A .

Observe-se que o ângulo θ , que constitui a rotação da barra no plano, é dado por

$$\theta = \arctg \left(\frac{v_2 - v_1}{L + u_2 - u_1} \right) \quad \text{ou} \quad \theta = \arctg \left(\frac{\frac{v_2 - v_1}{L}}{1 + \frac{u_2 - u_1}{L}} \right) \quad \dots (4.10)$$

Considerando-se pequenas as deformações é razoável desprezar-se $\frac{u_2 - u_1}{L}$ em presença da unidade. Assim,

$$\theta = \arctg \frac{v_2 - v_1}{L} \quad \dots (4.11)$$

Assumindo-se que a rotação θ é pequena [4.5], da ordem de grandeza da raiz quadrada do valor absoluto da deformação longitudinal ε , é razoável admitir-se $\sin\theta = \text{tg}\theta = \theta$. Se as deformações máximas admitidas atingem o valor de 0,002, o limite de rotação pequena pode ser fixado em

torno de 0,045 rad ou 2,56°. Neste caso θ pode ser escrita simplesmente como

$$\theta = \frac{v_2 - v_1}{L} \quad \dots(4.12)$$

Considerando-se como linear a distribuição de deslocamentos ao longo do eixo longitudinal da barra pode-se escrever

$$u = u_1 + \varphi x \quad e \quad v = v_1 + \theta x$$

onde

$$\varphi = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad e \quad \theta = \frac{v_2 - v_1}{L} \quad \dots(4.13)$$

A relação deformação-deslocamento para a componente segundo o eixo x é dada por [4.5]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_x + \frac{1}{2} (u_x)^2 + \frac{1}{2} (v_x)^2 \\ \text{onde } u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad e \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad \dots(4.14)$$

Os dois termos quadráticos são os responsáveis pelo efeito não-linear de u e v sobre a deformação. O termo $(u_x)^2$ pode ser desprezado em comparação com u_x , mas $(v_x)^2$ é a contribuição de mais baixa ordem do deslocamento v , devendo ser mantido sob pena de se eliminar a não-linearidade da relação. Então assume-se, como é usual na grande maioria dos trabalhos que abordam a NLG, que

$$\varepsilon_x = u_x + \frac{1}{2} (v_x)^2 \quad \dots(4.15)$$

Ou, levando-se em conta as equações (4.13)

$$\varepsilon_x = \varphi + \frac{1}{2} \theta^2 \quad \text{ou} \quad \varepsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{L} + \frac{1}{2} \left[\frac{v_2 - v_1}{L} \right]^2 \quad \dots(4.16)$$

4.5.2 Energia de Deformação

A energia de deformação do elemento, escrita com base na equação (4.2), é dada por

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EA \varepsilon_x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\varphi + \frac{1}{2} \theta^2 \right)^2 dx \quad \dots(4.17) \end{aligned}$$

Como o integrando não é função da abscissa x , pode-se escrever

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{EAL}{2} \left[(u_x)^2 + u_x (v_x)^2 + \frac{1}{4} (v_x)^4 \right] \\ &= \frac{EAL}{2} \left(\varphi^2 + \varphi \theta^2 + \frac{1}{4} \theta^4 \right) \\ &= \frac{EAL}{2} \left[\left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right)^2 + \frac{u_2 - u_1}{L} \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right)^4 \right] \quad \dots(4.18) \end{aligned}$$

Como se pode observar na equação anterior, a energia de deformação pode ser entendida como a soma de três parcelas que são funções quadrática, cúbica e quártica das derivadas dos deslocamentos.

$$U_e = U_2 + U_3 + U_4$$

$$\text{onde } U_2 = \frac{EAL}{2} (u_x)^2$$

$$U_3 = \frac{EAL}{2} u_x (v_x)^2$$

$$U_4 = \frac{EAL}{2} \frac{1}{4} (v_x)^4 \quad \dots(4.19)$$

Com base no equacionamento apresentado no item 4.4 é possível desenvolver as expressões das matrizes de rigidez secante e tangente do elemento, o que será feito analisando-se, separadamente, as parcelas U_2 , U_3 e U_4 .

4.5.3 Matriz de Rigidez Secante

A primeira derivada de $U(Q_i)$ em relação a cada um dos parâmetros de deslocamento fornece uma equação de equilíbrio.

Derivando-se $U_2 = \frac{EAL}{2} \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right)^2$ em relação a u_1 , v_1 , u_2 e v_2 obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial u_1} &= -\frac{EA}{L} (u_2 - u_1) & \frac{\partial U_2}{\partial u_2} &= \frac{EA}{L} (u_2 - u_1) \\ \frac{\partial U_2}{\partial v_1} &= 0 & \frac{\partial U_2}{\partial v_2} &= 0 \end{aligned} \quad \dots (4.20)$$

De modo semelhante para $U_3 = \frac{EAL}{2} \frac{u_2 - u_1}{L} \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right)^2$ obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_3}{\partial u_1} &= -\frac{EA}{2} \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right)^2 & \frac{\partial U_3}{\partial u_2} &= \frac{EA}{2} \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right)^2 \\ \frac{\partial U_3}{\partial v_1} &= -EA \frac{u_2 - u_1}{L} \frac{v_2 - v_1}{L} & \frac{\partial U_3}{\partial v_2} &= EA \frac{u_2 - u_1}{L} \frac{v_2 - v_1}{L} \end{aligned} \quad \dots (4.21)$$

E, para $U_4 = \frac{EAL}{2} \frac{1}{4} \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right)^4$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_4}{\partial u_1} &= 0 & \frac{\partial U_4}{\partial u_2} &= 0 \\ \frac{\partial U_4}{\partial v_1} &= -\frac{EA}{2} \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right)^3 & \frac{\partial U_4}{\partial v_2} &= \frac{\partial U_4}{\partial v_1} \end{aligned} \quad \dots (4.22)$$

Estando o vetor de deslocamentos nodais definido como $Q^T = \{u_1, v_1, u_2, v_2\}$ é possível organizar as quatro equações de equilíbrio, evidenciando-se os parâmetros de deslocamento. Os primeiros membros dessas equações são apresentados a seguir.

$$1a. \text{ eq. } \frac{EA}{L} (u_1 - u_2) + \frac{EA}{2L} \theta (v_1 - v_2) + 0$$

$$2a. \text{ eq. } 0 + \frac{EA}{L} \varphi (v_1 - v_2) + \frac{EA}{2L} \theta^2 (v_1 - v_2)$$

$$\text{ou } 0 + \frac{EA}{L} \theta (u_1 - u_2) + \frac{EA}{2L} \theta^2 (v_1 - v_2)$$

$$\text{ou } 0 + \frac{1}{2} \frac{EA}{L} \left[\varphi (v_1 - v_2) + \theta (u_1 - u_2) \right] + \frac{EA}{2L} \theta^2 (v_1 - v_2)$$

$$3a. \text{ eq. } \frac{EA}{L} (u_2 - u_1) + \frac{EA}{2L} \theta (v_2 - v_1) + 0$$

$$4a. \text{ eq. } 0 + \frac{EA}{L} \varphi (v_2 - v_1) + \frac{EA}{2L} \theta^2 (v_2 - v_1)$$

$$\text{ou } 0 + \frac{EA}{L} \theta (u_2 - u_1) + \frac{EA}{2L} \theta^2 (v_2 - v_1)$$

$$\text{ou } 0 + \frac{1}{2} \frac{EA}{L} \left[\varphi (v_2 - v_1) + \theta (u_2 - u_1) \right] + \frac{EA}{2L} \theta^2 (v_2 - v_1)$$

... (4.23)

Como se pode observar em (4.23) a matriz secante do elemento pode ser escrita como

$$\underline{k}_s = \underline{k}_0 + \frac{1}{2} \underline{k}_1 + \frac{1}{3} \underline{k}_2$$

onde

$$\underline{k}_0 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{k}}_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & \theta & 0 & -\theta \\ 0 & 2\varphi & 0 & -2\varphi \\ 0 & -\theta & 0 & \theta \\ 0 & 2\varphi & 0 & 2\varphi \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \underline{\tilde{k}}_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & \theta & 0 & -\theta \\ 2\theta & 0 & -2\theta & 0 \\ 0 & -\theta & 0 & \theta \\ -2\theta & 0 & 2\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou} \quad \underline{\tilde{k}}_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & \theta & 0 & -\theta \\ \theta & \varphi & -\theta & -\varphi \\ 0 & -\theta & 0 & \theta \\ -\theta & -\varphi & \theta & \varphi \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{k}}_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5\theta^2 & 0 & -1,5\theta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5\theta^2 & 0 & 1,5\theta^2 \end{bmatrix} \quad \dots(4.24)$$

A parcela $\underline{\tilde{k}}_0$ é a matriz elástica linear e $\underline{\tilde{k}}_1$ e $\underline{\tilde{k}}_2$ são as matrizes incrementais [4.8]. Observe-se que a matriz $\underline{\tilde{k}}_1$ suporta mais do que uma forma de apresentação. A rigor, a sua contribuição nas equações de equilíbrio é a mesma em todas as três formas apresentadas. Prefere-se, por causa da simetria, a terceira delas.

4.5.4 Matriz de Rigidez Tangente

As segundas derivadas da energia de deformação fornecemos elementos da matriz de rigidez tangente. Como se conclui de (4.8) e (4.9)

$$k_{T,ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial Q_i \partial Q_j} \quad \dots(4.25)$$

A simetria da matriz $\underline{\tilde{k}}_T$ é neste caso óbvia, bastando inverter-se a ordem de derivação.

Com base nas equações (4.20) encontram-se as derivadas de U_2 , observando-se que aquelas que envolvem v_1 ou v_2 são todas nulas. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_2}{\partial v_i \partial v_j} &= 0 & \frac{\partial^2 U_2}{\partial v_i \partial u_j} &= 0 & \frac{\partial^2 U_2}{\partial u_1^2} &= \frac{EA}{L} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial u_1 \partial u_2} &= -\frac{EA}{L} \\
& & & & \frac{\partial^2 U_2}{\partial u_2^2} &= \frac{EA}{L} & & \dots (4.26)
\end{aligned}$$

Tendo em conta as equações (4.21) deriva-se a parcela U_3 .

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial u_1^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 U_3}{\partial u_1 \partial v_1} = \frac{EA}{L} \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right) \quad \frac{\partial^2 U_3}{\partial u_1 \partial u_2} = 0 \quad \frac{\partial^2 U_3}{\partial u_1 \partial v_2} = -\frac{\partial^2 U_3}{\partial u_1 \partial v_1}$$

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial v_1^2} = \frac{EA}{L} \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right) \quad \frac{\partial^2 U_3}{\partial v_1 \partial u_2} = \frac{EA}{L} \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right) \quad \frac{\partial^2 U_3}{\partial v_1 \partial v_2} = -\frac{\partial^2 U_3}{\partial v_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial u_2^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 U_3}{\partial u_2 \partial v_2} = \frac{EA}{L} \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right)$$

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial v_2^2} = \frac{EA}{L} \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right) \quad \dots (4.27)$$

E finalmente a partir das equações (4.22) é possível derivar a parcela U_4 , observando-se que as derivadas que envolvem u_1 ou u_2 são todas nulas. Assim,

$$\frac{\partial^2 U_4}{\partial u_i \partial u_j} = 0 \quad \frac{\partial^2 U_4}{\partial u_i \partial v_j} = 0 \quad \frac{\partial^2 U_4}{\partial v_1^2} = \frac{3}{2} \frac{EA}{L} \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right)^2$$

$$\frac{\partial^2 U_4}{\partial v_1 \partial v_2} = -\frac{\partial^2 U_4}{\partial v_1^2} \quad \frac{\partial^2 U_4}{\partial v_2^2} = \frac{\partial^2 U_4}{\partial v_1^2} \quad \dots (4.28)$$

A matriz de rigidez tangente pode então ser escrita como

$$\tilde{k}_T = \tilde{k}_0 + \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 \quad \dots (4.29)$$

onde \underline{k}_0 , \underline{k}_1 e \underline{k}_2 são exatamente as mesmas em que se decompõe a matriz de rigidez secante.

Fica então a regra muito simplificada que permite determinar as parcelas da matriz de rigidez

$$k_{0,ij} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial Q_i \partial Q_j} \quad k_{1,ij} = \frac{\partial^2 U_3}{\partial Q_i \partial Q_j} \quad k_{2,ij} = \frac{\partial^2 U_4}{\partial Q_i \partial Q_j} \quad \dots (4.30)$$

Observando-se que a passagem da matriz secante à tangente corresponde à elevação da ordem de derivação, pode-se chegar a uma regra mnemônica para a composição da matriz secante com os coeficientes $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ ponderando as matrizes incrementais \underline{k}_1 e \underline{k}_2 , respectivamente. Basta fazer a interpretação dos coeficientes como sendo provenientes da integração de um polinômio em que \underline{k}_1 e \underline{k}_2 são tomadas como termos de primeiro e segundo graus em deslocamento.

O aspecto sintético do formalismo das matrizes incrementais, a característica de simetria advinda da dupla derivação em relação aos deslocamentos para a matriz tangente e o fato de a matriz conter apenas características do elemento e incógnitas-deslocamento, não combinadas a incógnitas-esforço, constituem razão de se ter adotado tal procedimento neste trabalho. As deduções realizadas para os vários elementos mostram, em todos os casos, a sustentação desse formalismo. Uma análise mais genérica, incluindo a definição do potencial em termos das matrizes incrementais e o estudo para outros tipos de elementos, pode ser encontrada em [4.16].

4.5.5 Atualização de Coordenadas

Todo o desenvolvimento aqui apresentado refere-se aos eixos locais do elemento. O sistema de equações de equilíbrio é montado em uma referência comum a todos os elementos onde estão definidas as coordenadas globais. É

necessário, então, para cada elemento promover a devida transformação de coordenadas. Uma formulação lagrangeana total, sem atualização das coordenadas nodais, permite, além das simplificações previamente comentadas, a adoção de uma única matriz de transformação de coordenadas, no caso de pequenas rotações. Adota-se a transformação válida na configuração inicial. Quando as rotações deixam de ser pequenas, pelo menos três problemas surgem. O primeiro ligado à própria transformação de coordenadas, que vai gradativamente perdendo representatividade a partir do afastamento entre as configurações final e inicial. O segundo referente à perda de validade das simplificações adotadas com base em rotações pequenas (vide deduções anteriores). E ainda um terceiro que pode ocorrer quando diferentes componentes de deslocamento são interpolados por polinômios de diferentes graus, o que estabelece um direcionamento da interpolação que, segundo Bathe et al.[4.20], requer especial atenção. Este último problema não ocorre no caso do modelo aqui adotado para a treliça plana, pois os deslocamentos u e v são ambos interpolados linearmente ao longo do eixo longitudinal do elemento.

Para contornar essas dificuldades pode-se utilizar a formulação lagrangeana atualizada, tornando o problema incremental, com uma série de configurações de equilíbrio intermediárias, como uma sequência de fotos do movimento. Os eixos locais do elemento são móveis, definidos em cada uma das configurações de equilíbrio e válidos até a passagem à próxima configuração, sempre feita mediante deslocamentos suficientemente reduzidos de modo a se retomar o critério das pequenas rotações. Cada um dos incrementos ou estágios do processo é tratado de modo semelhante ao da formulação total (de coordenadas fixas), com diferença apenas no fato de se iniciar cada novo estágio com deformações não nulas. Essas deformações iniciais conduzem a uma parcela adicional da matriz de rigidez como se mostra a seguir.

A figura 4.4 mostra a configuração inicial de equilíbrio ${}^0A^0B$ de uma barra e duas outras ${}^1A^1B$ e ${}^2A^2B$ que lhe sucedem. Analisa-se aqui o problema até a chegada à configuração ${}^2A^2B$ por meio de dois estágios de deslocamentos, em que a hipótese das pequenas rotações é válida.

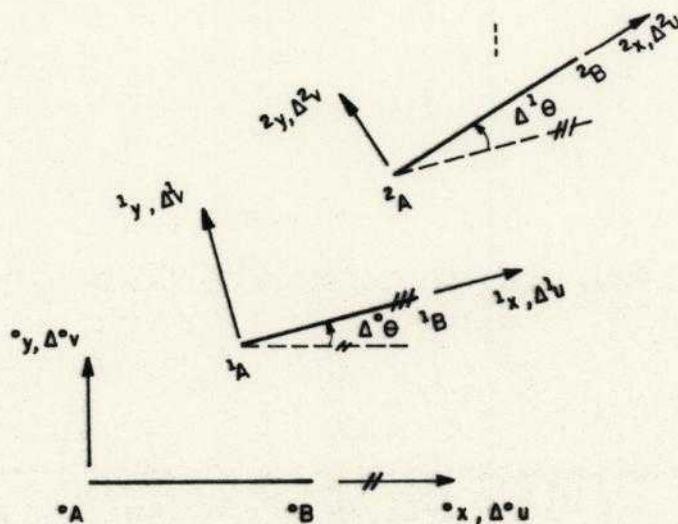


Fig. 4.4 Atualização de coordenadas

A análise do fenômeno ${}^0A^0B$ a ${}^1A^1B$ é a mesma que se apresentou anteriormente, já que na configuração ${}^0A^0B$ não há nenhuma deformação inicial. Assim as matrizes de rigidez secante e tangente são dadas por

$${}^0\tilde{k}_s = {}^0\tilde{k}_0 + \frac{1}{2} {}^0\tilde{k}_1 + \frac{1}{3} {}^0\tilde{k}_2$$

$${}^0\tilde{k}_T = {}^0\tilde{k}_0 + {}^0\tilde{k}_1 + {}^0\tilde{k}_2 \quad \dots(4.31)$$

O estabelecimento das matrizes anteriores é feito no referencial local ${}^0x^0y$, com ${}^0\tilde{k}_0$ fixa e ${}^0\tilde{k}_1$ e ${}^0\tilde{k}_2$ funções dos deslocamentos ocorridos. Observe-se que no início do processo, como não há deslocamentos, ${}^0\tilde{k}_s = {}^0\tilde{k}_T = {}^0\tilde{k}_0$. Mas à medida em que os deslocamentos ocorrem, as matrizes ${}^0\tilde{k}_s$ e

$^0 k_T$ vão sofrendo alterações. Independentemente do procedimento adotado na solução, admita-se que o equilíbrio correspondente à configuração ${}^1A^1B$ foi estabelecido. Tudo se dá com um certo nível de tensão e deformação, o que altera o cálculo das novas matrizes de rigidez secante e tangente no próximo estágio, correspondente à passagem de ${}^1A^1B$ a ${}^2A^2B$. A análise do fenômeno prossegue como se fosse um novo problema, de referencial inicial ${}^1x^1y$ e com a consideração da existência de uma deformação inicial. A energia de deformação acumulada é igual a

$$U = \int_V (\epsilon^2)^2 \frac{E}{2} dV = \int_V \frac{E}{2} [(\Delta\epsilon)^2 + 2({}^1\epsilon)\Delta\epsilon + ({}^1\epsilon)^2] dV$$

onde

ϵ^2 é a deformação total

${}^1\epsilon$ é deformação acumulada até ${}^1A^1B$

$\Delta\epsilon = \epsilon^2 - {}^1\epsilon$ é a deformação ocorrida no segundo estágio

...(4.32)

Observe-se que ${}^1\epsilon$ é deformação passada, acumulada ao longo do primeiro estágio e, portanto, independente dos deslocamentos do segundo. Qualquer derivação da parcela de energia de deformação que depende exclusivamente de ${}^1\epsilon$, em relação a esses deslocamentos, se anula. Em consequência a contribuição da terceira parcela da energia de deformação que aparece em (4.32), no estabelecimento das matrizes secante e tangente do atual estágio se anula. Reescrevendo-se a expressão da energia de deformação, com as parcelas que contribuem na rigidez, tem-se

$$\begin{aligned} U(\Delta\epsilon) &= \int_V \frac{E}{2} (\Delta\epsilon)^2 dV + \int_V E (\Delta\epsilon) {}^1\epsilon dV \\ &= \int_V \frac{E}{2} (\Delta\epsilon)^2 dV + {}^1\epsilon \int_V E (\Delta\epsilon) dV \end{aligned} \quad \dots(4.33)$$

A parcela ${}^1\epsilon$ é calculada acumulando-se a deformação até o início do presente estágio. Assim,

$${}^1\varepsilon = \frac{\Delta^0 u_2 - \Delta^0 u_1}{l_0} + \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta^0 v_2 - \Delta^0 v_1}{l_0} \right]^2 \quad \dots(4.34)$$

A primeira parcela da energia de deformação é igual à da formulação lagrangeana total (vide eq. 4.17) bastando substituírem-se u por Δu , v por Δv , etc. Ou seja, para essa parcela, tudo se passa como se não houvesse deformação inicial. Portanto, não há necessidade de novas deduções, cabendo simples analogia. Quanto à segunda parcela, é necessária investigação específica. Ela pode ser reescrita, promovendo-se a integração, como

$$\begin{aligned} {}^1U &= {}^1\varepsilon \int_v E \Delta\varepsilon \, dV \\ &= {}^1\varepsilon E A {}^1L \Delta\varepsilon \end{aligned}$$

onde

$$\Delta^1\varepsilon = \frac{\Delta^1 u_2 - \Delta^1 u_1}{l_1} + \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta^1 v_2 - \Delta^1 v_1}{l_1} \right]^2 \quad \dots(4.35)$$

Derivando-se em relação a $\Delta^1 u_1$, $\Delta^1 v_1$, $\Delta^1 u_2$, $\Delta^1 v_2$ obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^1 U}{\partial \Delta^1 u_1} &= -{}^1\varepsilon EA & \frac{\partial^1 U}{\partial \Delta^1 v_1} &= -{}^1\varepsilon EA \frac{\Delta^1 v_2 - \Delta^1 v_1}{l_1} \\ \frac{\partial^1 U}{\partial \Delta^1 u_2} &= -\frac{\partial^1 U}{\partial \Delta^1 u_1} & \frac{\partial^1 U}{\partial \Delta^1 v_2} &= -\frac{\partial^1 U}{\partial \Delta^1 v_1} \end{aligned} \quad \dots(4.36)$$

Então, reescrevem-se as quatro equações de equilíbrio matricialmente como

$${}^1\tilde{F} + [{}^1\tilde{k}_0 + {}^1\tilde{k}_0 + \frac{1}{2} {}^1\tilde{k}_1 + \frac{1}{3} {}^1\tilde{k}_2] \Delta^1 \tilde{Q} = {}^2\tilde{F}$$

devidos à segunda parcela	devidos à primeira parcela

...(4.37a)

onde

$${}^1\tilde{F} = \{-EA^1\varepsilon \quad 0 \quad EA^1\varepsilon \quad 0\}^T$$

$${}^1\tilde{k}_G = EA^1\varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/{}^1L & 0 & -1/{}^1L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/{}^1L & 0 & 1/{}^1L \end{bmatrix}$$

${}^2\tilde{F}$ é o vetor de forças nodais totais ... (4.37b)

Interpretando-se o termo $EA^1\varepsilon$ como a força normal acumulada até o final do primeiro estágio tem-se que ${}^1\tilde{F}$ é o vetor de forças nodais iniciais indicado na figura 4.5.

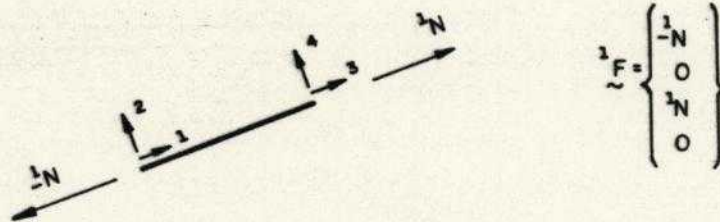


Fig. 4.5 Vetor de forças nodais iniciais

Merece destaque o fato de a matriz de rigidez das deformações iniciais ${}^1\tilde{k}_G$ ser igual à tradicional matriz geométrica da barra treliça, desde que se substitua $EA^1\varepsilon$ por 1N .

A equação (4.37) suporta nova apresentação, observando-se que a diferença entre ${}^2\tilde{F}$ e ${}^1\tilde{F}$ corresponde ao incremento do vetor de cargas nodais que provoca os deslocamentos Δ^1Q . Assim,

$$({}^1\tilde{k}_G + {}^1\tilde{k}_O + \frac{1}{2} {}^1\tilde{k}_1 + \frac{1}{3} {}^1\tilde{k}_2) \Delta^1 Q = \Delta^1 \tilde{F}$$

$$\text{onde } \Delta^1 \tilde{F} = {}^2\tilde{F} - {}^1\tilde{F} \quad \dots(4.38)$$

A matriz que resulta da soma das parcelas entre parênteses na equação (4.38) é a matriz de rigidez secante, o que permite tratar a passagem da configuração ${}^1A^1B$ para ${}^2A^2B$ como um problema separado, apenas adicionando-se a parcela ${}^1\tilde{k}_G$, que depende da deformação acumulada até o fim do estágio anterior (figura 4.6).

Quanto à matriz tangente é fácil estabelecê-la com a utilização da equação (4.25). Promovendo-se as derivadas segundas da parcela 1U da energia de deformação em relação aos deslocamentos, obtêm-se, como únicos termos não nulos,

$$\frac{\partial^2 {}^1U}{\partial \Delta^1 v_i^2} = \frac{{}^1N}{L} \quad \frac{\partial^2 {}^1U}{\partial \Delta^1 v_1 \partial^1 \Delta v_2} = -\frac{{}^1N}{L}$$

$$\text{onde } {}^1N = EA {}^1\varepsilon \quad \dots(4.39)$$

Então, a matriz de rigidez tangente pode ser escrita

$${}^1\tilde{k}_T = {}^1\tilde{k}_G + {}^1\tilde{k}_O + {}^1\tilde{k}_1 + {}^1\tilde{k}_2 \quad \dots(4.40)$$

ou seja, o formalismo das matrizes incrementais se mantém. Observe-se que no início do segundo estágio de deslocamentos, da mesma forma que no início do primeiro, ocorre igualdade entre as matrizes de rigidez tangente e secante, pois os deslocamentos $\Delta^1 Q$ ainda não ocorreram.

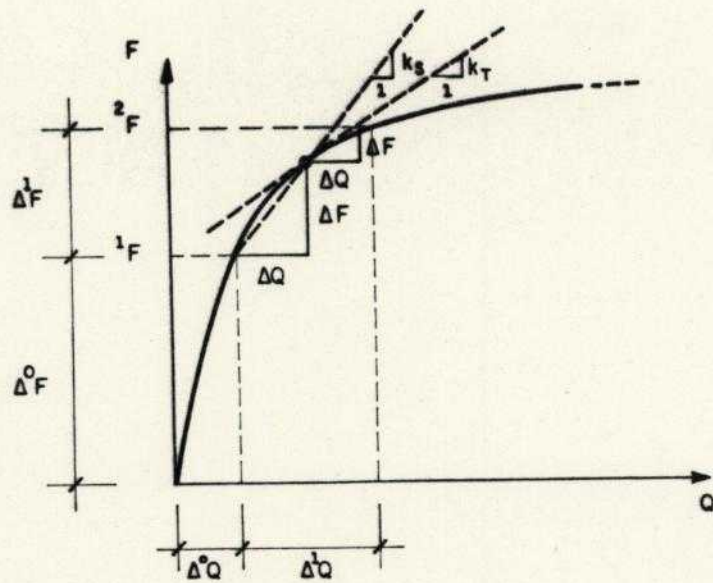


Fig. 4.6 Análise incremental - Matrizes secante e tangente

O desenvolvimento apresentado é facilmente estendido ao caso genérico, quando as duas configurações sucessivas são j e $j+1$. Todo o procedimento é mantido, percebendo-se que a deformação acumulada até o início do incremento j é a soma das que ocorreram ao longo de todos os $j-1$ incrementos anteriores.

Promovendo-se a generalização obtém-se

$$j_e = \sum_{i=0}^{j-1} \left[\frac{\Delta^i u_2 - \Delta^i u_1}{i_L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^i v_2 - \Delta^i v_1}{i_L} \right)^2 \right]$$

$$j_{\tilde{k}_s} = j_{\tilde{k}_0} + j_{\tilde{k}_0} + \frac{1}{2} j_{\tilde{k}_1} + \frac{1}{3} j_{\tilde{k}_2}$$

$$j_{\tilde{k}_T} = j_{\tilde{k}_0} + j_{\tilde{k}_0} + j_{\tilde{k}_1} + j_{\tilde{k}_2} \quad (4.41a)$$

$${}^j \underline{k}_G = EA {}^j \underline{\epsilon} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/jL & 0 & -1/jL \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/jL & 0 & 1/jL \end{bmatrix}$$

...(4.41b)

4.6. PÓRTICO PLANO

4.6.1 Modelo Elemental e Sistema de Coordenadas

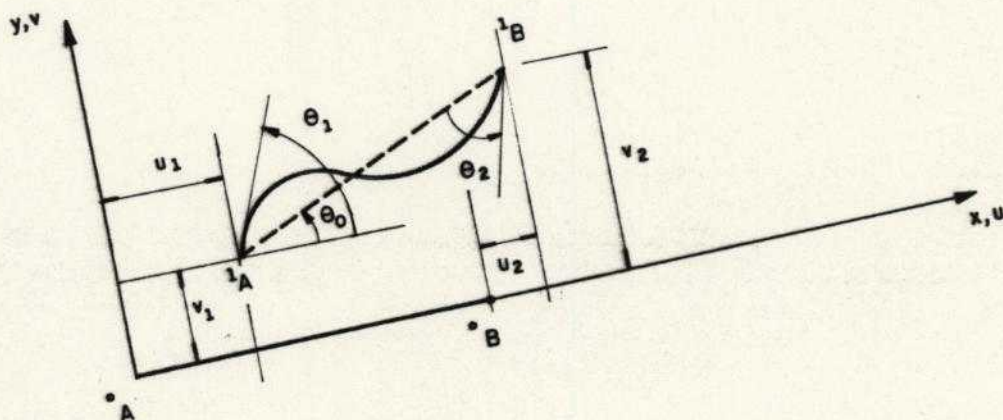


Fig. 4.7 Elemento barra de pórtico plano

Representam-se na figura 4.7 as configurações de equilíbrio ${}^0A{}^0B$ e ${}^1A{}^1B$ de um elemento barra de pórtico plano prismático, de seção bissimétrica, respectivamente, antes e depois de se deformar. Os eixos locais xy , fixos na posição inicial, constituem o referencial lagrangeano, a partir do qual são medidas as translações u e v e as rotações θ dos centróides das seções transversais da barra, com destaque para os parâmetros nodais de deslocamento indicados na figura 4.7. Assume-se que o material constituinte da barra é isotrópico linear, com módulo de

elasticidade E. A barra, inicialmente reta, possui área de seção transversal A, comprimento inicial L e momento de inércia relativo ao eixo baricêntrico ortogonal ao plano xy igual a I. Admitem-se válida a hipótese da manutenção da seção plana e desprezíveis as deformações devidas à força cortante. É adotada a consideração de que as rotações θ são pequenas, bem menores em radianos que a unidade, de modo a se poder aproximar a curvatura de flexão à segunda derivada do deslocamento transversal v em relação à abscissa x. O efeito Poisson é desprezado, supondo-se deformações transversais insignificantes.

O ângulo θ_0 , que mede a rotação da corda, é dado pela mesma expressão referente à barra de treliça plana (4.10). Com consideração análoga à que foi feita para a treliça chega-se a

$$\theta_0 = \frac{v_2 - v_1}{L} \quad (4.42)$$

O campo de deslocamentos é assumido linear para os deslocamentos axiais u e cúbico para os deslocamentos transversais v.

Assim,

$$u = a + bx \quad e \quad v = c + dx + ex^2 + fx^3 \quad \dots (4.43)$$

Particularizando-se u, v e $\theta \cong v_x$ nos extremos chega-se a

$$a = u_1, \quad b = \frac{u_2 - u_1}{L}, \quad c = v_1, \quad d = \theta_1, \\ e = \frac{-2\theta_1 - \theta_2 + 3\theta_0}{L}, \quad f = \frac{\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_0}{L^2} \quad \dots (4.44)$$

A relação deformação-deslocamento para a componente segundo o eixo x é montada acrescentando-se o termo correspondente à curvatura de flexão χ , na expressão (4.15), válida para as treliças. Assim, a deformação longitudinal ϵ_x em um ponto localizado a uma distância y da superfície neutra, pode ser aproximada por

$$\varepsilon_x = u_x + \frac{1}{2} (v_x)^2 - \chi y \quad \dots(4.45)$$

A parcela $\frac{1}{2}(u_x)^2$, em presença de u_x , é também aqui desprezada, sendo esse fato confirmado por resultados numéricos em problemas de autovalor [4.23]. Como a translação transversal v é assumida como expansão cúbica de x , a parcela $\frac{1}{2}(v_x)^2$ resulta em função quártica dessa abscissa, enquanto u_x é constante ao longo da barra, pois a translação u é assumida linear em x . Para a treliça (vide eq. 4.16) ε_x independe de x , o que é coerente com a adoção da força normal constante ao longo da barra. Aqui, também, é possível alterar-se a expressão de ε_x , tomando-se o valor médio da parcela $\frac{1}{2}(v_x)^2$ ao longo do comprimento da barra. Isto resulta em modelo menos rígido, de melhor desempenho que o tradicionalmente adotado [4.23] e com a vantagem de considerar as parcelas de deformação, excetuando-se a que corresponde à flexão, definidas para a barra como um todo [4.25], de modo semelhante ao modelo treliça. Assim, com as considerações anteriores, e substituindo-se χ pela segunda derivada de v em relação a x , obtém-se

$$\varepsilon_x = u_x + \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} (v_x)^2 dx - v_{xx} y \quad \dots(4.46)$$

4.6.2 Energia de Deformação

Com base na eq. (4.2) pode-se escrever a energia de deformação do elemento como

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int_V E(\varepsilon_x)^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V E \left\{ (u_x)^2 + (y v_{xx})^2 + 2u_x \frac{1}{L} \int_0^1 \frac{1}{2} (v_x)^2 dx + \left[\frac{1}{L} \int_0^1 \frac{1}{2} (v_x)^2 dx \right]^2 + \right. \end{aligned}$$

$$- 2 u_x v_{xx} y - 2 v_{xx} y \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} (v_x)^2 dx \} dV \quad \dots(4.47)$$

Analisando-se isoladamente cada uma das seis integrais em que a energia de deformação se decompõe, tem-se

$$I_1 = \frac{E}{2} \int_V (u_x)^2 dV = \frac{E}{2} b^2 \int_V dV = \frac{EAL}{2} b^2$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{E}{2} \int_V (y v_{xx})^2 dV = \frac{E}{2} \int_V [y(2e+6fx)]^2 dV = \frac{E}{2} \int_0^L (2e+6fx)^2 \left(\int_A y^2 dA \right) dx \\ &= \frac{EI}{2} \int_0^L (4e^2 + 24efx + 36f^2 x^2) dx \\ &= \frac{EI}{2} (4e^2 L + 12efL^2 + 12f^2 L^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{E}{2} \int_V b \frac{1}{L} \left[(d+2ex+3fx^2)^2 dx \right] dV = \frac{EAb}{2} \left[d^2 L + 2deL^2 + (4e^2 + 6df) \frac{L^3}{3} + \right. \\ &\left. + 3efL^4 + \frac{9}{5} f^2 L^5 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{E}{2} \int_V \frac{1}{2L} \left[(d+2ex+3fx^2)^2 dx \right]^2 dV = \frac{EA}{8} \left[d^2 + 2deL + (4e^2 + 6df) \frac{L^2}{3} + \right. \\ &\left. + 3efL^3 + \frac{9}{5} f^2 L^4 \right]^2 \end{aligned}$$

$$I_5 = -E \int_V b (2e+6fx)y dx = -Eb \int_0^L (2e+6fx) dx \int_A y dA = 0$$

$$\begin{aligned} I_6 &= -E \int_V \left[(2e+6fx)y \frac{1}{L} \int_0^L (d+2ex+3fx^2) dx \right] dx = \\ &= - \int_0^L \left[(2e+6fx) \frac{1}{L} \int_0^L (d+2ex+3fx^2)^2 dx \right] dx \int_A y dA = 0 \end{aligned}$$

... (4.48)

Observem-se, nas expressões anteriores, duas integrais particulares que dependem apenas de características geométricas da seção transversal. O momento estático que se anula $\int_A y \, dA = 0$ e o momento de inércia $\int_A y^2 \, dA = I$.

Com base em (4.44) e (4.48) pode-se perceber que as integrais I_1 e I_2 são funções quadráticas dos parâmetros nodais de deslocamento, enquanto I_3 é cúbica e I_4 quártica. De maneira análoga à treliça plana, pode-se, neste caso, decompor a energia de deformação em três parcelas.

$$U_e = U_2 + U_3 + U_4$$

$$\text{onde } U_2 = I_1 + I_2$$

$$U_3 = I_3$$

$$U_4 = I_4$$

...(4.49)

Derivando-se as parcelas U_2 , U_3 e U_4 em relação aos parâmetros de deslocamentos, chega-se às matrizes de rigidez secante e tangente.

4.6.3 Matriz de Rigidez Secante

Com base nas equações (4.5) e (4.6) determina-se a matriz de rigidez secante. Tomando-se cada uma das parcelas U_2 , U_3 e U_4 , tem-se

$$\frac{\partial U_2}{\partial u_1} = -EA \frac{u_2 - u_1}{L} \quad \frac{\partial U_2}{\partial v_1} = \frac{6EI}{L^2} \left[\theta_1 + \theta_2 - 2 \frac{v_2 - v_1}{L} \right]$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \theta_1} = \frac{EI}{L} \left[4\theta_1 + 2\theta_2 - 6 \frac{v_2 - v_1}{L} \right]$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial u_2} = - \frac{\partial U_2}{\partial u_1} \quad \frac{\partial U_2}{\partial v_2} = - \frac{\partial U_2}{\partial v_1} \quad \frac{\partial U_2}{\partial \theta_2} = \frac{\partial U_2}{\partial \theta_1} \quad \dots (4.50)$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial u_1} = \frac{1}{2} \left[-\frac{EA}{30} (4\theta_1 - \theta_2 - 3\theta_0) \theta_1 - \frac{EA}{30} (4\theta_2 - \theta_1 - 3\theta_0) \theta_2 + \right. \\ \left. + \frac{EA}{10L} (\theta_1 + \theta_2 - 12\theta_0) (v_2 - v_1) \right]$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial v_1} = \frac{1}{2} \left[EA \frac{u_2 - u_1}{L} \left(\frac{\theta_1}{10} + \frac{\theta_2}{10} - \frac{6}{5} \frac{v_2 - v_1}{L} \right) + EA (\theta_1 + \theta_2 - 12\theta_0) \frac{u_2 - u_1}{10L} \right]$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial u_1} = \frac{1}{2} \left[\frac{EA}{30} (4\theta_1 - \theta_2 - 3\theta_0) (u_2 - u_1) + \frac{EA}{30} (u_2 - u_1) \left(4\theta_1 - \theta_2 - 3 \frac{v_2 - v_1}{L} \right) \right]$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial u_2} = -\frac{\partial U_3}{\partial u_1} \quad \frac{\partial U_3}{\partial v_2} = -\frac{\partial U_3}{\partial v_1}$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} \left[\frac{EA}{30} (4\theta_2 - \theta_1 - 3\theta_0) (u_2 - u_1) + \frac{EA}{30} (u_2 - u_1) \left(4\theta_2 - \theta_1 - 3 \frac{v_2 - v_1}{L} \right) \right]$$

... (4.51)

$$\frac{\partial U_4}{\partial u_i} = 0$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial v_1} = \frac{1}{3} \frac{EA}{100} (2\theta_1^2 + 2\theta_2^2 + 18\theta_0^2 - \theta_1\theta_2 - 3\theta_1\theta_0 - 3\theta_2\theta_0) \left(-12 \frac{v_2 - v_1}{L} + \theta_1 + \theta_2 \right)$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial \theta_1} = \frac{1}{3} \frac{EAL}{300} (2\theta_1^2 + 2\theta_2^2 + 18\theta_0^2 - \theta_1\theta_2 - 3\theta_1\theta_0 - 3\theta_2\theta_0) \left(-3 \frac{v_2 - v_1}{L} + 4\theta_1 - \theta_2 \right)$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial v_2} = -\frac{\partial U_4}{\partial v_1}$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial \theta_2} = \frac{1}{3} \frac{EAL}{300} (2\theta_1^2 + 2\theta_2^2 + 18\theta_0^2 - \theta_1\theta_2 - 3\theta_1\theta_0 - 3\theta_2\theta_0) \left(-3 \frac{v_2 - v_1}{L} + 4\theta_1 - \theta_2 \right)$$

... (4.52)

A matriz de rigidez secante suporta várias apresentações alternativas. Opta-se pela que é simétrica e permite a aplicação do formalismo das matrizes

incrementais.

Tem-se, então, a matriz secante dada por

$$\tilde{k}_s = \tilde{k}_0 + \frac{1}{2} \tilde{k}_1 + \frac{1}{3} \tilde{k}_2 \quad \dots(4.53)$$

sendo

$$\tilde{k}_0 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \text{SIM} & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad \dots(4.54)$$

$$\tilde{k}_1 = EA \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\varphi_2}{10L} & -\frac{\varphi_3}{30} & 0 & \frac{\varphi_2}{10L} & -\frac{\varphi_4}{30} \\ & \frac{6\varphi_1}{5L} & \frac{\varphi_1}{10} & \frac{\varphi_2}{10L} & -\frac{6\varphi_1}{5L} & \frac{\varphi_1}{10} \\ & & \frac{2}{15}\varphi_1 L & \frac{\varphi_3}{30} & -\frac{\varphi_1}{10} & -\frac{\varphi_1 L}{30} \\ & & & 0 & -\frac{\varphi_2}{10L} & \frac{\varphi_4}{30} \\ & \text{SIM} & & & \frac{6\varphi_1}{5L} & -\frac{\varphi_1}{10} \\ & & & & & \frac{2}{15}\varphi_1 L \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } \varphi_1 = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

$$\varphi_3 = 4\theta_1 - \theta_2 - 3\theta_0$$

$$\theta_0 = \frac{v_2 - v_1}{L}$$

$$\varphi_2 = \theta_1 + \theta_2 - 12\theta_0$$

$$\varphi_4 = 4\theta_2 - \theta_1 - 3\theta_0$$

...(4.55)

$$\tilde{k}_2 = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{\varphi_5}{L} & \varphi_6 & 0 & -\frac{\varphi_5}{L} & \varphi_7 \\ & & \varphi_8 L & 0 & -\varphi_6 & \varphi_9 L \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{SIM} & & & \frac{\varphi_5}{L} & -\varphi_7 \\ & & & & & \varphi_{10} L \end{bmatrix}$$

onde

$$\varphi_5 = \frac{1}{100} (9\theta_1^4 + 9\theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2 - 36\theta_1\theta_0 - 36\theta_2\theta_0 + 216\theta_0^2)$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{300} (6\theta_1^4 + \theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2 - 54\theta_1\theta_0 + 6\theta_2\theta_0 + 54\theta_0^2)$$

$$\varphi_7 = \frac{1}{300} (6\theta_2^2 + \theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 - 54\theta_2\theta_0 + 6\theta_1\theta_0 + 54\theta_0^2)$$

$$\varphi_8 = \frac{1}{300} (8\theta_1^2 + 3\theta_2^2 - 4\theta_1\theta_2 - 12\theta_1\theta_0 - 2\theta_2\theta_0 + 27\theta_0^2)$$

$$\varphi_9 = \frac{1}{300} (-2\theta_1^2 - 2\theta_2^2 + 6\theta_1\theta_2 - 2\theta_1\theta_0 - 2\theta_2\theta_0 - 3\theta_0^2)$$

$$\varphi_{10} = \frac{1}{300} (8\theta_2^2 + 3\theta_1^2 - 4\theta_1\theta_2 - 12\theta_2\theta_0 - 2\theta_1\theta_0 + 27\theta_0^2)$$

...(4.56)

4.6.4 Matriz de Rigidez Tangente

Utilizando-se as equações (4.30) é possível determinar-se a matriz de rigidez tangente. Derivam-se as expressões apresentadas em (4.50), (4.51) e (4.52), não sendo mostradas as derivadas nulas ou as que possam ser encontradas por consideração da simetria das matrizes incrementais.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_2}{\partial u_1^2} &= \frac{EA}{L} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial u_1 \partial u_2} &= -\frac{EA}{L} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial v_1^2} &= \frac{12EI}{L^3} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial v_1 \partial \theta_1} &= \frac{6EI}{L^2} \\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial v_1 \partial v_2} &= -\frac{12EI}{L^3} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial v_1 \partial \theta_2} &= \frac{6EI}{L^2} \\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial \theta_1^2} &= \frac{4EI}{L} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial \theta_1 \partial v_2} &= -\frac{6EI}{L^2} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} &= \frac{2EI}{L} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial u_2^2} &= \frac{EA}{L} \\
\frac{\partial^2 U_2}{\partial v_2^2} &= \frac{12EI}{L^3} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial v_2 \partial \theta_2} &= -\frac{6EI}{L^2} & \frac{\partial^2 U_2}{\partial \theta_2^2} &= \frac{4EI}{L} & & \dots (4.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_3}{\partial u_1 \partial v_1} &= -\frac{\varphi_2}{10L} & \frac{\partial^2 U_3}{\partial u_1 \partial \theta_1} &= -\frac{\varphi_3}{30} & \frac{\partial^2 U_3}{\partial u_1 \partial v_2} &= -\frac{\varphi_2}{10L} & \frac{\partial^2 U_3}{\partial u_1 \partial \theta_2} &= -\frac{\varphi_4}{30} \\
\frac{\partial^2 U_3}{\partial v_1^2} &= \frac{6}{5} \frac{\varphi_1}{L} & \frac{\partial^2 U_3}{\partial v_1 \partial \theta_1} &= \frac{\varphi_1}{10} & \frac{\partial^2 U_3}{\partial v_1 \partial u_2} &= \frac{\varphi_2}{10L} & \frac{\partial^2 U_3}{\partial v_1 \partial v_2} &= -\frac{6}{5} \frac{\varphi_1}{L} \\
\frac{\partial^2 U_3}{\partial v_1 \partial \theta_2} &= \frac{\varphi_1}{10} & \frac{\partial^2 U_3}{\partial \theta_1^2} &= \frac{2}{15} \varphi_1 L & \frac{\partial^2 U_3}{\partial \theta_1 \partial u_2} &= \frac{\varphi_3}{30} & \frac{\partial^2 U_3}{\partial \theta_1 \partial v_2} &= -\frac{\varphi_1}{10} \\
\frac{\partial^2 U_3}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} &= -\frac{\varphi_1 L}{30} & \frac{\partial^2 U_3}{\partial u_2 \partial v_2} &= -\frac{\varphi_2}{10L} & \frac{\partial^2 U_3}{\partial u_2 \partial \theta_2} &= \frac{\varphi_4}{30} \\
\frac{\partial^2 U_3}{\partial v_2^2} &= \frac{6}{5} \frac{\varphi_1}{L} & \frac{\partial^2 U_3}{\partial v_2 \partial \theta_2} &= -\frac{\varphi_1}{10} & \frac{\partial^2 U_3}{\partial \theta_2^2} &= \frac{2}{15} \varphi_1 L & & \dots (4.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_4}{\partial v_1^2} &= \frac{\varphi_5}{L} & \frac{\partial^2 U_4}{\partial v_1 \partial \theta_1} &= \varphi_6 & \frac{\partial^2 U_4}{\partial v_1 \partial v_2} &= -\frac{\varphi_5}{L} & \frac{\partial^2 U_4}{\partial v_1 \partial \theta_2} &= \varphi_7 \\
\frac{\partial^2 U_4}{\partial \theta_1^2} &= \varphi_8 L & \frac{\partial^2 U_4}{\partial \theta_1 \partial v_2} &= -\varphi_6 & \frac{\partial^2 U_4}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} &= \varphi_8 L
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 U_4}{\partial v_2^2} = \frac{\varphi_5}{L} \quad \frac{\partial^2 U_4}{\partial v_2 \partial \theta_2} = -\varphi_7 \quad \frac{\partial^2 U_4}{\partial \theta_2^2} = \varphi_{10} L \quad \dots(4.59)$$

Portanto, a matriz de rigidez tangente pode ser escrita como

$$\tilde{k}_T = \tilde{k}_0 + \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 \quad \dots(4.60)$$

4.6.5 Atualização de Coordenadas

Quando a análise do equilíbrio do sistema estrutural apresenta grandes rotações a formulação lagrangeana atualizada pode ser utilizada para contornar as dificuldades que tal análise apresentaria (vide item 4.5.5), mediante o controle de rotações em cada incremento, que devem se acomodar dentro da hipótese de serem pequenas. Dentre as dificuldades referidas, a que se relaciona com o direcionamento da interpolação pode acontecer, no caso do modelo aqui adotado, pois enquanto o deslocamento axial u é interpolado linearmente, o deslocamento transversal v o é de forma cúbica.

Na figura 4.8 estão representadas a configuração inicial de equilíbrio ${}^0A^0B$ da barra indeformada e duas configurações sucessivas ${}^jA^jB$, ${}^{j+1}A^{j+1}B$. A análise do primeiro incremento é idêntica à da formulação lagrangeana total. Já na passagem da configuração j para $j+1$ é preciso computar a influência das deformações iniciais.

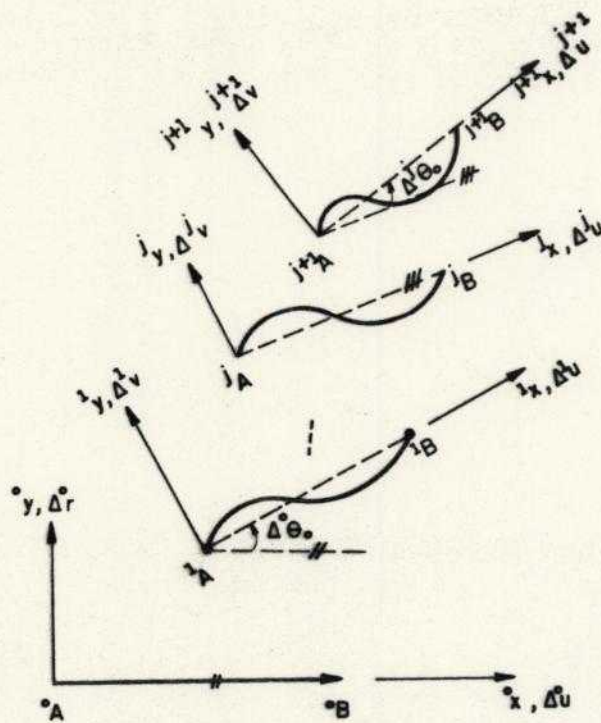


Fig. 4.8 Atualização de coordenadas

A energia de deformação total acumulada até este incremento é dada por

$$\begin{aligned}
 U &= \int_V {}^{j+1}\epsilon^2 \frac{E}{2} dV \\
 &= \int_V \frac{E}{2} [(\Delta\epsilon)^2 + 2({}^j\epsilon)\Delta\epsilon + ({}^j\epsilon)^2] dv
 \end{aligned}$$

onde,

${}^{j+1}\epsilon$ é a deformação total

${}^j\epsilon$ é a deformação acumulada até ${}^jA^jB$

$\Delta\epsilon = {}^{j+1}\epsilon - {}^j\epsilon$ é a deformação ocorrida no presente incremento

... (4.61)

O estabelecimento das matrizes de rigidez secante e tangente no atual incremento é feito derivando-se a energia de deformação com relação aos deslocamentos que nele ocorrem. Assim, a contribuição da terceira parcela, que depende exclusivamente dos incrementos anteriores, é nula. Quanto à primeira parcela o tratamento é o mesmo da formulação lagrangeana total bastando substituírem-se u por $\Delta^j u$, v por $\Delta^j v$, etc., e promover-se a analogia. A segunda parcela será analisada, a seguir, com detalhes.

$${}^j U = \int_V \frac{E}{2} 2 {}^j \varepsilon \Delta \varepsilon dV = \int_V E \Delta \varepsilon {}^j \varepsilon dV$$

onde

$$\Delta \varepsilon = {}^j u_x + \frac{1}{2L} \int_0^L ({}^j v_x)^2 dx - {}^j v_{xx} y$$

$${}^j \varepsilon = \sum_{i=0}^{j-1} \left[{}^i u_x + \frac{1}{2L} \int_0^L ({}^i v_x)^2 dx - {}^i v_{xx} y \right] \quad \dots(4.62)$$

É notável o fato de as duas primeiras parcelas das deformações $\Delta \varepsilon$ e ${}^j \varepsilon$ serem independentes das coordenadas x e y , podendo ser associadas, como no caso da treliça, aos efeitos da força normal N . Já a terceira parcela, que incorpora a contribuição do momento fletor na deformação longitudinal, além de ser função de y , depende também de x , por intermédio de v_{xx} que é linear na abscissa ao longo do eixo longitudinal da barra. Então, buscando-se facilitar os desenvolvimentos subsequentes pode-se escrever, separando-se os efeitos pela natureza das causas,

$$\Delta \varepsilon = {}^j \bar{\varepsilon} - {}^j v_{xx} y \quad \text{e} \quad {}^j \varepsilon = \sum_{i=0}^{j-1} ({}^i \bar{\varepsilon} - {}^i v_{xx} y)$$

$$\text{onde} \quad {}^j \bar{\varepsilon} = {}^j u_x + \frac{1}{2L} \int_0^L ({}^j v_x)^2 dx$$

$${}^i \bar{\varepsilon} = {}^i u_x + \frac{1}{2L} \int_0^L ({}^i v_x)^2 dx \quad \dots(4.63)$$

Voltando-se à parcela jU da energia de deformação, com (4.63) tem-se

$$\begin{aligned} {}^jU &= \int_V E ({}^j\bar{\varepsilon} - {}^jv_{xx} y) \sum_{i=0}^{j-1} ({}^i\bar{\varepsilon} - {}^iv_{xx} y) dV \\ &= \int_V E \sum_{i=0}^{j-1} [{}^j\bar{\varepsilon} {}^i\bar{\varepsilon} - ({}^j\bar{\varepsilon} {}^iv_{xx} + {}^i\bar{\varepsilon} {}^jv_{xx})y + {}^jv_{xx} {}^iv_{xx} y^2] dV \end{aligned} \quad \dots(4.64)$$

Integrando-se inicialmente sobre a área, lembrando-se que ${}^i\bar{\varepsilon}$, ${}^j\bar{\varepsilon}$, ${}^iv_{xx}$, ${}^jv_{xx}$ não dependem de y , e que $\int_A y dA = 0$ pois a distância y é medida em relação ao centróide da seção,

$$\begin{aligned} {}^jU &= \int_0^L E \sum_{i=0}^{j-1} \left[{}^j\bar{\varepsilon} {}^i\bar{\varepsilon} \int_A dA - ({}^j\bar{\varepsilon} {}^iv_{xx} + {}^i\bar{\varepsilon} {}^jv_{xx}) \int_A y dA + \right. \\ &\quad \left. + {}^jv_{xx} {}^iv_{xx} \int_A y^2 dA \right] dx \\ &= \int_0^L E \sum_{i=0}^{j-1} ({}^j\bar{\varepsilon} {}^i\bar{\varepsilon} A + {}^jv_{xx} {}^iv_{xx} I) dx \\ &= \underbrace{\int_0^L EA \left(\sum_{i=0}^{j-1} {}^i\bar{\varepsilon} \right) {}^j\bar{\varepsilon} dx}_{{}^jU_N} + \underbrace{\int_0^L EI \left(\sum_{i=0}^{j-1} {}^iv_{xx} \right) {}^jv_{xx} dx}_{{}^jU_M} \quad \dots(4.65) \end{aligned}$$

Os termos $EA \sum_{i=0}^{j-1} {}^i\bar{\varepsilon}$ e $EI \sum_{i=0}^{j-1} {}^iv_{xx}$ podem ser interpretados, respectivamente, como a força normal jN (constante ao longo da barra) e o momento fletor jM (linear em x), acumulados até o início do presente incremento. Assim, na expressão da energia jU pode-se distinguir as contribuições desses esforços internos trabalhando sobre as deformações atuais, ou seja, as parcelas jU_N e jU_M

anteriormente assinaladas.

A participação de jU nas equações de equilíbrio pode ser alcançada mediante as apropriadas derivações em relação aos parâmetros de deslocamento que correspondem ao incremento atual. Inicialmente analisa-se a contribuição de jU_N .

$$\begin{aligned} {}^jU_N &= {}^jL EA \sum_{i=0}^{j-1} i \bar{\varepsilon}^i \bar{\varepsilon}^{j-i} \\ &= {}^jL {}^jN \left\{ b + \frac{1}{2} [d^2 + (4e^2 + 6df) \frac{{}^jL^2}{3} + 2de {}^jL + 3ef {}^jL^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{5} f^2 {}^jL^4] \right\} \quad \dots(4.66) \end{aligned}$$

onde b,d,e,f são definidos em (4.44), bastando trocarem-se u_1 por $\Delta^j u_1$, v_1 por $\Delta^j v_1$, etc.

Derivando-se jU_N em relação aos parâmetros nodais de deslocamento, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j U_N}{\partial \Delta^j u_1} &= - {}^jN & \frac{\partial^j U_N}{\partial \Delta^j u_1} &= \frac{{}^jN}{10 {}^jL} \left[\Delta^j \theta_1 + \Delta^j \theta_2 - 12 \frac{\Delta^j v_2 - \Delta^j v_1}{{}^jL} \right] \\ \frac{\partial^j U_N}{\partial \Delta^j \theta_1} &= \frac{{}^jL {}^jN}{30} \left[4 \Delta^j \theta_1 - \Delta^j \theta_2 - 3 \frac{\Delta^j v_2 - \Delta^j v_1}{{}^jL} \right] \\ \frac{\partial^j U_N}{\partial \Delta^j u_2} &= {}^jN & \frac{\partial^j U_N}{\partial \Delta^j v_2} &= - \frac{\partial^j U_N}{\partial \Delta^j v_1} \\ \frac{\partial^j U_N}{\partial \Delta^j \theta_2} &= \frac{{}^jL {}^jN}{30} \left[4 \Delta^j \theta_2 - \Delta^j \theta_1 - 3 \frac{\Delta^j v_2 - \Delta^j v_1}{{}^jL} \right] \quad \dots(4.67) \end{aligned}$$

A integral jU_M contém duas funções lineares na abscissa x, ${}^jM(x)$ e ${}^jv_{xx}(x)$, que podem ser reescritas como

$${}^jM(x) = -{}^jM_1 + \frac{{}^jM_2 + {}^jM_1}{{}^jL} x$$

$${}^jv_{xx}(x) = 2e + 6fx \quad \dots 4.68)$$

Cabe observar que "e" e "f" são definidos com base em $\Delta^j v_1$, $\Delta^j \theta_1$, etc, e que $^j M_1$ e $^j M_2$ são os momentos extremos da barra, com o acerto de sinais, observando-se que a curvatura positiva corresponde ao momento fletor que traciona o lado negativo do eixo y local, o que contraria o sentido da coordenada momento no início da barra e concorda no fim, como se mostra na figura 4.9.

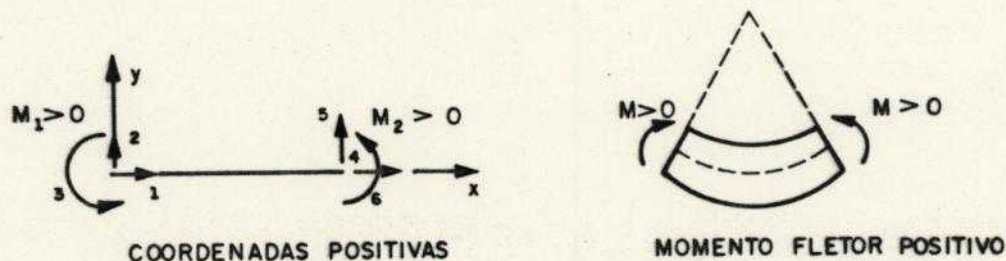


Fig. 4.9 Convenções de sinais

Integrando-se a parcela $^j U_M$ chega-se a

$$^j U_M = ^j L \left[(-M_1 - M_2) e + (-M_1 + 2M_2) ^j L f \right] \quad \dots (4.69)$$

Derivando-se em relação aos parâmetros nodais de deslocamento, para a obtenção da contribuição de $^j U_M$ nas equações de equilíbrio, determinam-se as forças nodais iniciais devidas à flexão.

$$\begin{aligned} \frac{\partial ^j U_M}{\partial \Delta^j u_1} &= 0 & \frac{\partial ^j U_M}{\partial \Delta^j v_1} &= \frac{^j M_1 + ^j M_2}{^j L} & \frac{\partial ^j U_M}{\partial \Delta^j \theta_1} &= ^j M_1 \\ \frac{\partial ^j U_M}{\partial \Delta^j u_2} &= 0 & \frac{\partial ^j U_M}{\partial \Delta^j v_2} &= -\frac{^j M_1 + ^j M_2}{^j L} & \frac{\partial ^j U_M}{\partial \Delta^j \theta_2} &= ^j M_2 \quad \dots (4.70) \end{aligned}$$

Então, reescrevendo-se as seis equações de equilíbrio em formato matricial, reunindo-se todas as contribuições, tem-se

$$\underbrace{j\tilde{F}} + \underbrace{[j\tilde{k}_0 + j\tilde{k}_0 + \frac{1}{2}j\tilde{k}_1 + \frac{1}{3}j\tilde{k}_2]} \Delta^j Q = j^{+1}\tilde{F}$$

devidos às deformações iniciais devidos às deformações do incremento atual

onde

$$j\tilde{F} = \left\{ -jN \frac{jM_1 + jM_2}{jL} \quad jM_1 \quad jN - \frac{jM_1 + jM_2}{jL} \quad jM_2 \right\}^T \text{ é o vetor de forças nodais iniciais (figura 4.10)}$$

$$j\tilde{k}_0 = jN \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5jL} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5jL} & -\frac{jL}{30} \\ & & \frac{2jL}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{jL}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{SIM} & & & \frac{6}{5jL} & -\frac{1}{10} \\ & & & & & \frac{2jL}{15} \end{bmatrix}$$

é a tradicional matriz geométrica da barra

$j^{+1}\tilde{F}$ é o vetor de forças nodais totais ... (4.71)

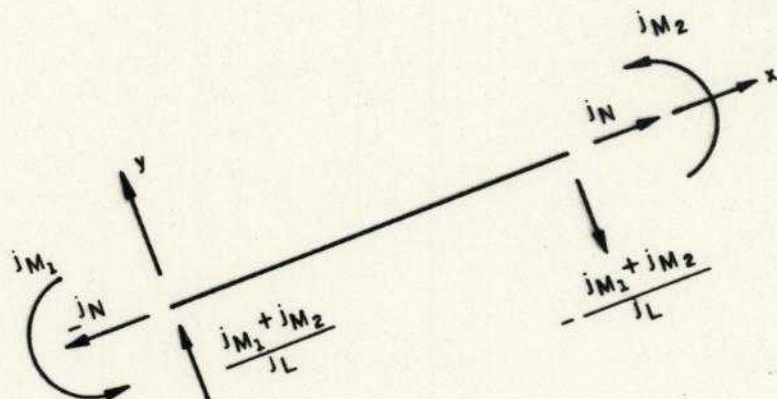


Fig. 4.10 Vetor de forças nodais iniciais

A diferença entre os vetores ${}^{j+1}\tilde{F}$ e ${}^j\tilde{F}$ corresponde ao incremento do vetor de forças nodais, associado aos deslocamentos $\Delta^j\tilde{Q}$. Portanto, as equações podem ser reescritas como

$$({}^j\tilde{k}_G + {}^j\tilde{k}_O + \frac{1}{2} {}^j\tilde{k}_1 + \frac{1}{3} {}^j\tilde{k}_2) \Delta^j\tilde{Q} = \Delta^j\tilde{F}$$

onde $\Delta^j\tilde{F} = {}^{j+1}\tilde{F} - {}^j\tilde{F} \quad \dots(4.72)$

A matriz secante é dada pela expressão entre parênteses na equação anterior. É possível, então, tratar cada incremento independentemente dos demais, introduzindo-se apenas a correção da matriz de rigidez secante referente à parcela ${}^j\tilde{k}_G$, que depende das deformações acumuladas até o final do incremento anterior.

Para o estabelecimento da matriz de rigidez tangente, basta promoverem-se as segundas derivadas em relação aos parâmetros nodais de deslocamento. A contribuição da parcela jU é conseguida a partir das derivações sobre as expressões apresentadas em (4.67) e (4.70). Como essas expressões são lineares nos parâmetros de deslocamento, chega-se também à matriz \tilde{k}_G como parcela corretiva da matriz tangente. Então, tem-se, de maneira análoga à do elemento barra de treliça plana,

$${}^j\tilde{k}_T = {}^j\tilde{k}_G + {}^j\tilde{k}_O + {}^j\tilde{k}_1 + {}^j\tilde{k}_2 \quad \dots(4.73)$$

4.7 TRELIÇA NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

4.7.1 Modelo Elemental e Sistema de Coordenadas

Considere-se, no espaço tridimensional, um elemento barra de treliça, prismático, de área de seção transversal A , comprimento L e material constituinte elástico linear, cujo módulo de elasticidade longitudinal é E . A figura 4.11 apresenta as projeções de duas configurações de equilíbrio

${}^0A^0B$ e ${}^1A^1B$ nos planos xy e xz de um sistema local de coordenadas, fixado na configuração inicial indeformada ${}^0A^0B$.

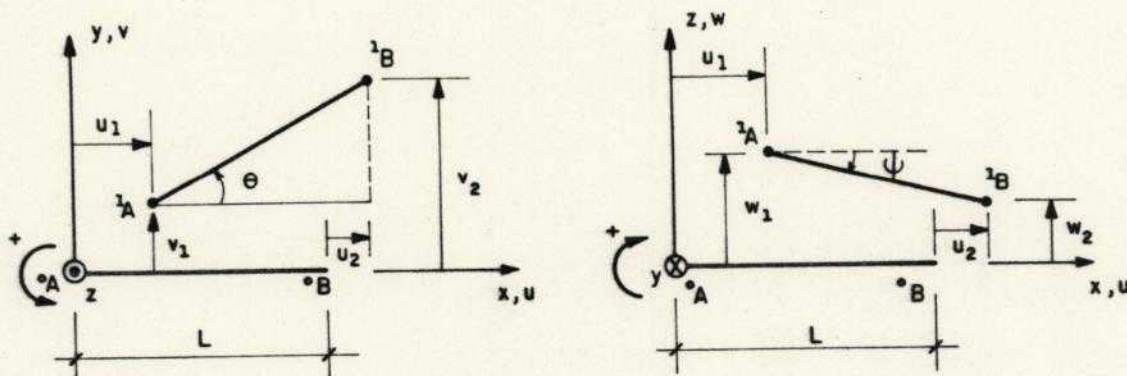


Fig. 4.11 Elemento barra de treliça no espaço tridimensional

O referencial xyz constitui um triedro direto, com o eixo x confundindo-se com o eixo longitudinal a barra e os demais eixos, y e z , com direções quaisquer no espaço tridimensional, desde que compoem com o eixo x um sistema triortogonal.

Todo o desenvolvimento da análise do elemento treliça espacial se faz de modo muito parecido ao da treliça plana, bastando comporem-se os planos xy e xz , assumindo-se rotações pequenas, como no item 4.5. Tem-se para os θ e ψ as expressões,

$$\theta = \frac{v_2 - v_1}{L}, \quad \psi = \frac{w_1 - w_2}{L} \quad \dots(4.74)$$

O sentido positivo dos ângulos θ e ψ é dado pela regra da mão direita em torno dos eixos z e y respectivamente.

Admite-se distribuição linear para os deslocamentos u , v e w ao longo do eixo longitudinal da barra. Assim,

$$u = u_1 + \varphi x \quad v = v_1 + \theta x \quad w = w_1 - \psi x$$

onde

$$\varphi = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad \theta = \frac{v_2 - v_1}{L} \quad \psi = \frac{w_1 - w_2}{L} \quad \dots (4.75)$$

A extensão da relação deformação-deslocamento no caso plano, expressa em (4.15), é imediata bastando adicionar-se a contribuição do deslocamento w na deformação. Tem-se, então,

$$\varepsilon_x = u_x + \frac{1}{2} (v_x)^2 + \frac{1}{2} (w_x)^2 \quad \dots (4.76)$$

Levando-se em conta as expressões (4.75), chega-se a:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varphi + \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{2} \psi^2 \\ &= \frac{u_2 - u_1}{L} + \frac{1}{2} \left[\frac{v_2 - v_1}{L} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{w_2 - w_1}{L} \right]^2 \quad \dots (4.77) \end{aligned}$$

4.7.2 Energia de Deformação

A energia de deformação do elemento, estabelecida com base na equação (4.2) é dada por

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EA \varepsilon_x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EA \left[u_x + \frac{1}{2} (v_x)^2 + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right]^2 dx \quad \dots (4.78) \end{aligned}$$

Como a integração não é função da abscissa x chega-se

a

$$\begin{aligned}
U_e &= \frac{EAL}{2} \left\{ (u_x)^2 + u_x \left[(v_x)^2 + (w_x)^2 \right] + \frac{1}{4}(v_x)^4 + \frac{1}{4}(w_x)^4 + \frac{1}{2} (v_x)^2 (w_x)^2 \right\} \\
&= \frac{EAL}{2} \left\{ \left[\frac{u_2 - u_1}{L} \right]^2 + \frac{u_2 - u_1}{L} \left[\left[\frac{v_2 - v_1}{L} \right]^2 + \left[\frac{w_2 - w_1}{L} \right]^2 \right] + \right. \\
&+ \frac{1}{4} \left[\frac{v_2 - v_1}{L} \right]^4 + \frac{1}{4} \left[\frac{w_2 - w_1}{L} \right]^4 + \frac{1}{2} \left[\frac{v_2 - v_1}{L} \right]^2 \left[\frac{w_2 - w_1}{L} \right]^2 \left. \dots (4.79) \right\}
\end{aligned}$$

Promovendo-se a decomposição da energia de deformação, como se fez para a treliça e o pórtico planos, encontra-se

$$U_e = U_2 + U_3 + U_4$$

onde

$$U_2 = \frac{EAL}{2} \left[\frac{u_2 - u_1}{L} \right]^2$$

$$U_3 = \frac{EAL}{2} \frac{u_2 - u_1}{L} \left[\left[\frac{v_2 - v_1}{L} \right]^2 + \left[\frac{w_2 - w_1}{L} \right]^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
U_4 &= \frac{EAL}{2} \left[\frac{1}{4} \left[\frac{v_2 - v_1}{L} \right]^4 + \frac{1}{4} \left[\frac{w_2 - w_1}{L} \right]^4 + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \left[\frac{v_2 - v_1}{L} \right]^2 \left[\frac{w_2 - w_1}{L} \right]^2 \right] \dots (4.80)
\end{aligned}$$

4.7.3 Matriz de Rigidez Secante

Com base nas equações (4.5) e (4.6), basta derivar-se a energia de deformação em relação aos parâmetros de deslocamento para o estabelecimento das equações de equilíbrio e, em consequência, da matriz de rigidez secante. Promovendo-se as derivações, de modo análogo ao que se fez nos itens 4.5.3 e 4.6.3, obtém-se

$$\underline{\tilde{k}}_3 = \underline{\tilde{k}}_0 + \frac{1}{2} \underline{\tilde{k}}_1 + \frac{1}{3} \underline{\tilde{k}}_2$$

onde

$$\underline{\tilde{k}}_0 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{SIM} & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{k}}_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & \theta & \psi & 0 & -\theta & \psi \\ & \varphi & 0 & -\theta & -\varphi & 0 \\ & & \varphi & \psi & 0 & -\varphi \\ & \text{SIM} & & 0 & \theta & -\psi \\ & & & & \varphi & 0 \\ & & & & & \varphi \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{k}}_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,5\theta^2 + 0,5\psi^2 & -\theta\varphi & 0 & -(1,5\theta^2 + 0,5\psi^2) & \theta\psi & 0 \\ & 1,5\psi^2 + 0,5\theta^2 & 0 & \theta\psi & -(1,5\theta^2 + 0,5\psi^2) & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{SIM} & & 1,5\theta^2 + 0,5\psi^2 & -\theta\varphi & 0 \\ & & & & & 1,5\psi^2 + 0,5\theta^2 \end{bmatrix}$$

...(4.81)

4.7.4 Matriz de Rigidez Tangente

Lembrando-se que cada um dos elementos da matriz de rigidez tangente é dado por $k_{T,ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial Q_i \partial Q_j}$, pode-se, facilmente, determinar as parcelas $\underline{\tilde{k}}_0$, $\underline{\tilde{k}}_1$ e $\underline{\tilde{k}}_2$ que compõem $\underline{\tilde{k}}_T$ a partir de U_2 , U_3 e U_4 . Mais uma vez o formalismo das matrizes incrementais se sustenta com $\underline{\tilde{k}}_1$, $\underline{\tilde{k}}_2$ e $\underline{\tilde{k}}_3$ iguais às

que compõem a matriz secante, lembrando-se que também aqui, dentre as alternativas de estabelecimento da matriz secante, optou-se pela que contempla a simetria e garante tal formalismo.

Então,

$$\tilde{k}_T = \tilde{k}_0 + \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 \quad \dots(4.82)$$

Sendo \tilde{k}_0 , \tilde{k}_1 e \tilde{k}_2 as mesmas apresentadas em (4.81). \tilde{k}_0 é a matriz elástica linear, \tilde{k}_1 e \tilde{k}_2 são as contribuições não-lineares de primeiro e segundo graus, respectivamente.

4.7.5 Atualização de Coordenadas

Evita-se a repetição das idéias já apresentadas, quando do estudo dos elementos barra de treliça plana, relativas à formulação lagrangeana atualizada, focalizando-se a atenção apenas na parcela da energia de deformação cujas derivações produzem as correções nas matrizes de rigidez tangente e secante.

Consideradas duas sucessivas configurações de equilíbrio ${}^jA^jB$ e ${}^{j+1}A^{j+1}B$, a referida parcela de energia de deformação se escreve

$${}^jU = \int_V E \Delta \epsilon \quad {}^j\epsilon \quad dV = EA \quad {}^j\epsilon \quad L \Delta \epsilon$$

onde $\Delta \epsilon = {}^j u_x + \frac{1}{2}({}^j v_x)^2 + \frac{1}{2}({}^j w_x)^2$

$${}^j\epsilon = \sum_{i=0}^{j-1} \left[{}^i u_x + \frac{1}{2} ({}^i v_x)^2 + \frac{1}{2} ({}^i w_x)^2 \right] \quad \dots(4.83)$$

Substituindo-se $EA^j\epsilon$ por jN , força normal acumulada até o início do presente incremento, e $\Delta \epsilon$ pelo seu valor expresso em função dos parâmetros nodais de deslocamento correspondentes, a energia jU pode ser escrita como

$${}^jU = {}^jN \quad {}^jL \quad \left[\frac{\Delta^j u_2 - \Delta^j u_1}{{}^jL} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^j v_2 - \Delta^j v_1}{{}^jL} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^j w_2 - \Delta^j w_1}{{}^jL} \right)^2 \right] \quad \dots(4.84)$$

Derivando-se em relação aos parâmetros nodais de deslocamento e incluindo-se as parcelas que dependem da parte complementar de jU , chega-se a

$$\underbrace{{}^j\tilde{F}}_{\text{devidos a } {}^jU} + [{}^j\tilde{k}_G + \frac{1}{2} {}^j\tilde{k}_1 + \frac{1}{3} {}^j\tilde{k}_2] \Delta^j Q = {}^{j+1}\tilde{F}$$

onde

${}^j\tilde{F} = \{-{}^jN \quad 0 \quad 0 \quad {}^jN \quad 0 \quad 0\}$ é o vetor de forças nodais iniciais

${}^{j+1}\tilde{F}$ é o vetor de forças nodais totais

$${}^j\tilde{k}_G = {}^jN \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & j\frac{1}{L} & 0 & 0 & -j\frac{1}{L} & 0 \\ & & j\frac{1}{L} & 0 & 0 & -j\frac{1}{L} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{SIM} & & & & j\frac{1}{L} & 0 \\ & & & & & j\frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

é a tradicional matriz geométrica do elemento treliça
... (4.85)

As equações de equilíbrio podem ainda ser escritas como

$${}^j\tilde{k}_S \Delta^j Q = \Delta^j \tilde{F}$$

onde $\Delta^j \tilde{F} = {}^{j+1}\tilde{F} - {}^j\tilde{F}$ é o acréscimo do vetor de forças nodais que provoca os deslocamentos $\Delta^j Q$ do presente incremento.

$${}^j\tilde{k}_S = {}^j\tilde{k}_G + {}^j\tilde{k}_O + \frac{1}{2} {}^j\tilde{k}_1 + \frac{1}{3} {}^j\tilde{k}_2 \quad \text{é a matriz secante} \\ \dots (4.86)$$

Derivando-se mais uma vez a energia em relação aos parâmetros de deslocamento $\Delta^j Q$, obtém-se a matriz de

rigidez tangente que é igual a

$$\tilde{k}_T^j = \tilde{k}_G^j + \tilde{k}_O^j + \frac{1}{2} \tilde{k}_1^j + \frac{1}{3} \tilde{k}_2^j \quad \dots(4.87)$$

A passagem da configuração de equilíbrio ${}^j A^j B$ a uma que lhe sucede ${}^{j+1} A^{j+1} B$ é feita de forma independente dos demais incrementos, bastando corrigirem-se tanto a matriz secante como a matriz tangente com a parcela \tilde{k}_G^j , constante ao longo do atual incremento, e que depende do nível de deformações acumuladas até o seu início.

4.7.6 Tratamento do Problema a Partir do Modelo Plano

Como no caso da treliça só há a força normal, os eixos locais y e z podem ser escolhidos de forma arbitrária, desde que compondo um triedro direto, com o eixo local x . A escolha desses eixos pode ser feita de modo a tratar o problema no espaço tridimensional, aproveitando-se os desenvolvimentos apresentados no plano. A figura 4.12 representa, em perspectiva, a configuração inicial de equilíbrio AB e uma configuração sucessiva, alcançada com a primeira estimativa a partir das matrizes de rigidez tangente ou secante iniciais.

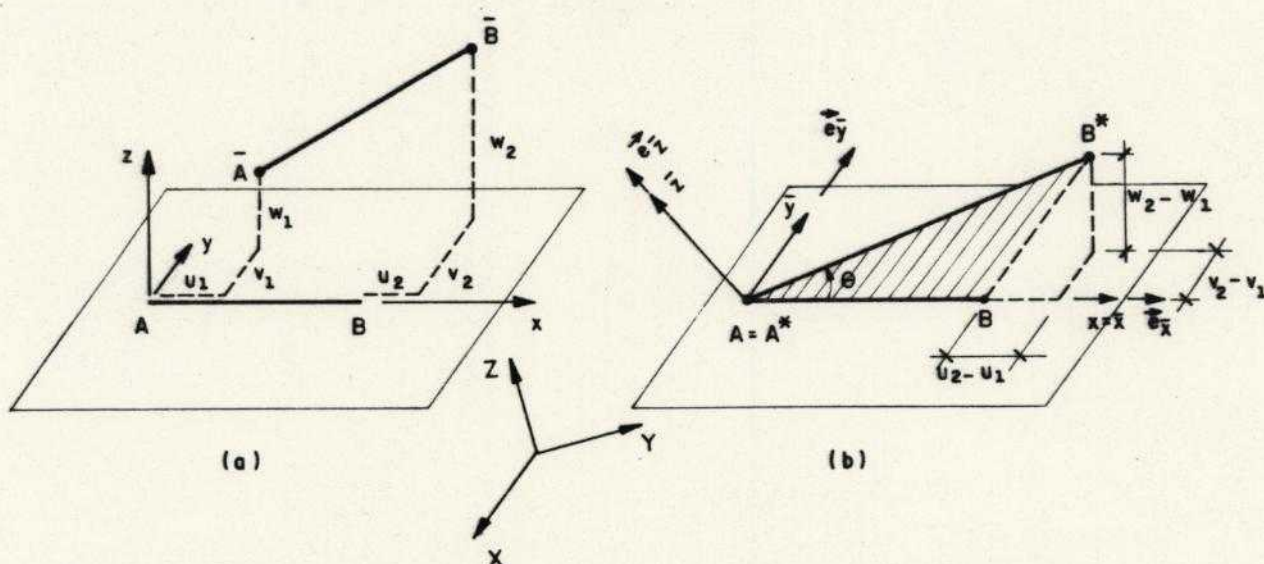


Fig. 4.12 Treliça espacial - Tratamento alternativo

Promovendo-se a translação de $\bar{A}\bar{B}$ de modo a confundirem-se A e \bar{A} , tem-se a definição do plano ABB^* , suficiente para entender-se a deformação da barra. Observe-se que o vetor BB^* tem como componentes as diferenças de deslocamento $(u_2 - u_1, v_2 - v_1, w_2 - w_1)$ referidas ao sistema original. O estabelecimento das matrizes de rigidez tangente e secante para a configuração AB se faz no sistema local $\bar{x}\bar{y}$, como se o problema fosse plano e, a seguir, promove-se a rotação de coordenadas para o sistema global XYZ.

A conduta descrita tem a vantagem de permitir fácil adaptação do elemento plano para a consideração do caso tridimensional, e a desvantagem de, em cada iteração ser necessária a alteração da matriz de rotação de coordenadas, a menos que se adote a primeira delas para todo o incremento que se analisa, atualizando-a apenas em um novo incremento de cargas.

Sendo \bar{e}_x , \bar{e}_y e \bar{e}_z os vetores unitários dos eixos do novo sistema local, que permite o tratamento do problema no plano $\bar{x}\bar{y}$, tem-se, com simples operações vetoriais, que

$$\bar{e}_x = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}, \quad \bar{e}_z = \bar{e}_x \times \frac{\overrightarrow{BB^*}}{|\overrightarrow{BB^*}|} \quad \text{e} \quad \bar{e}_y = \bar{e}_z \times \bar{e}_x \quad \dots (4.88)$$

A determinação das matrizes k_1 e k_2 envolve o ângulo θ que também pode ser determinado por simples operação vetorial, como se mostra na figura 4.13.

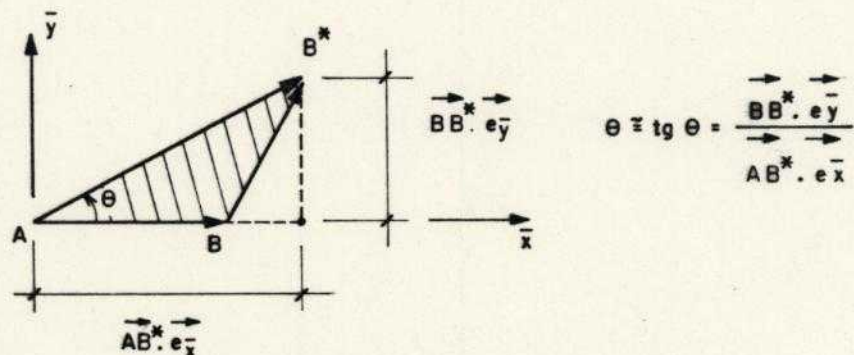


Fig. 4.13 Determinação do ângulo de rotação

4.8 PÓRTICO NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

4.8.1 Considerações Preliminares

Como se observou em itens anteriores, a análise NLG de treliça no espaço tridimensional pode ser feita por simples extensão do caso plano. Isto se dá pelo fato de os graus de liberdade serem exclusivamente translações. No caso do pórtico plano a rotação é em torno de um único eixo, ortogonal ao plano do pórtico, o que permite o seu tratamento escalar. Impõe-se a limitação de rotações em relação à corda do elemento, o que possibilita simplificações no desenvolvimento, assim como a continuidade do tratamento da barra como um elemento reto, mesmo após pequenas deformações. Entretanto, a posição final de um corpo sujeito a duas sucessivas rotações finitas depende da ordem em que as rotações ocorrem, se os eixos de rotação não são paralelos e fixos no espaço. Isto constitui a propriedade da não comutatividade das rotações, ilustrada na figura 4.14.

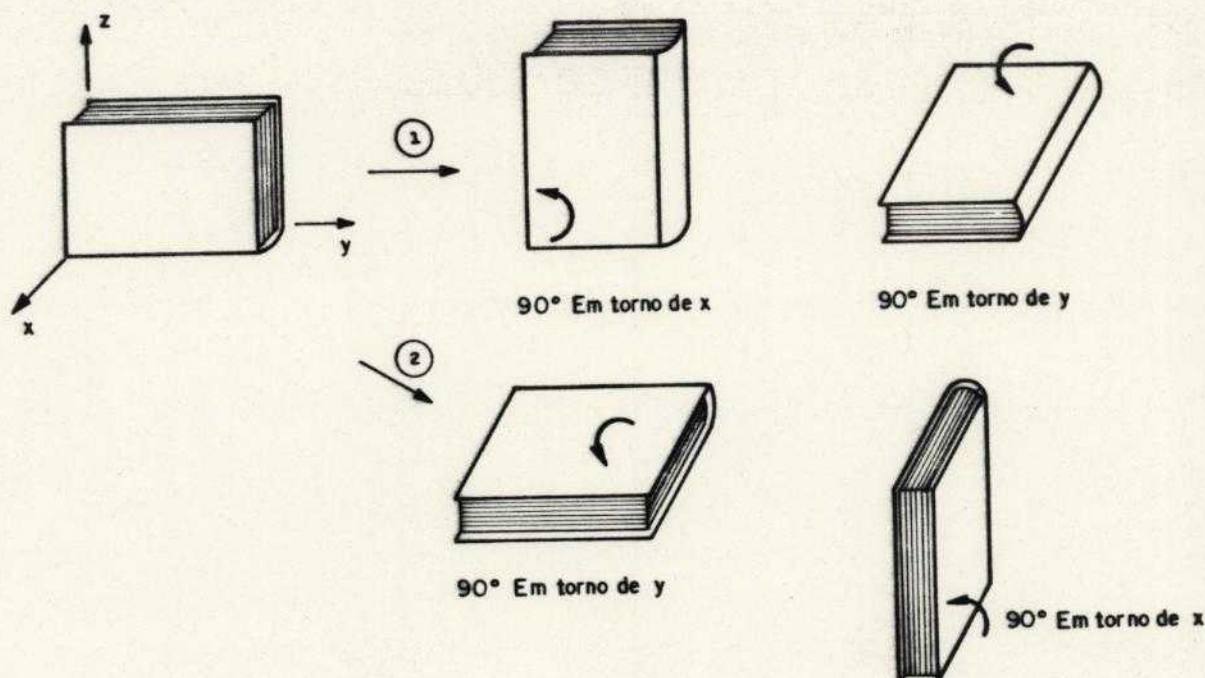


Fig. 4.14 Não-comutatividade das rotações

Funções não-lineares que envolvem produtos de rotações finitas podem não ter definição única, dependendo da ordem em que as rotações ocorrem. Além disso, rotações finitas no espaço tridimensional não suportam tratamento vetorial.

Em uma análise linear não há complicações, pois os deslocamentos são todos tratados como se fossem infinitésimos. A análise elástica com NLG de um pórtico tridimensional envolve as dificuldades anteriormente citadas, que podem ser solucionadas basicamente de duas maneiras distintas. A primeira consiste em tratar o problema, utilizando-se novas conceituações para momentos e rotações como, por exemplo, a apresentada em [4.22] que garantem a comutatividade e a conservação da energia potencial, mas com expressiva complexidade. A segunda, mais simples, que consiste em utilizar-se a atualização de coordenadas, mantendo-se as rotações, entre duas sucessivas atualizações muito pequenas, permitindo-se o seu tratamento vetorial e admitindo-se que os carregamentos são aplicados em incrementos prescritos de modo a poderem ser tratados como conservativos. Esta modalidade, suficiente para a análise NLG de pórticos tridimensionais de edifícios, é a utilizada neste trabalho.

4.8.2 Modelo Elemental e Sistema de Coordenadas

Considere-se um elemento barra de pórtico, prismático, disposto no espaço tridimensional, de seção transversal bissimétrica e duas sucessivas configurações de equilíbrio, ${}^0A^0B$ e ${}^1A^1B$, sendo ${}^0A^0B$ a configuração inicial indeformada. O referencial cartesiano triortogonal xyz é definido na configuração inicial ${}^0A^0B$ (lagrangeano), sendo o eixo x , coincidente com o eixo longitudinal da barra, definido pelos seus dois nós de extremidade, e os eixos y e z coincidentes com as direções dos eixos de simetria da seção transversal. Cada ponto do eixo longitudinal da barra pode estar submetido às translações u, v e w na direção dos eixos

x, y, z locais, bem como às rotações ϕ, ψ e θ em torno desses eixos, na mesma ordem (figura 4.15).

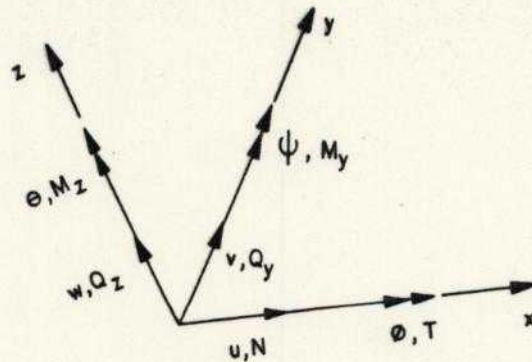


Fig. 4.15 Coordenadas nodais

A figura 4.16 apresenta as projeções de ${}^0A^0B$ e ${}^1A^1B$ sobre os planos de simetria xy e xz .

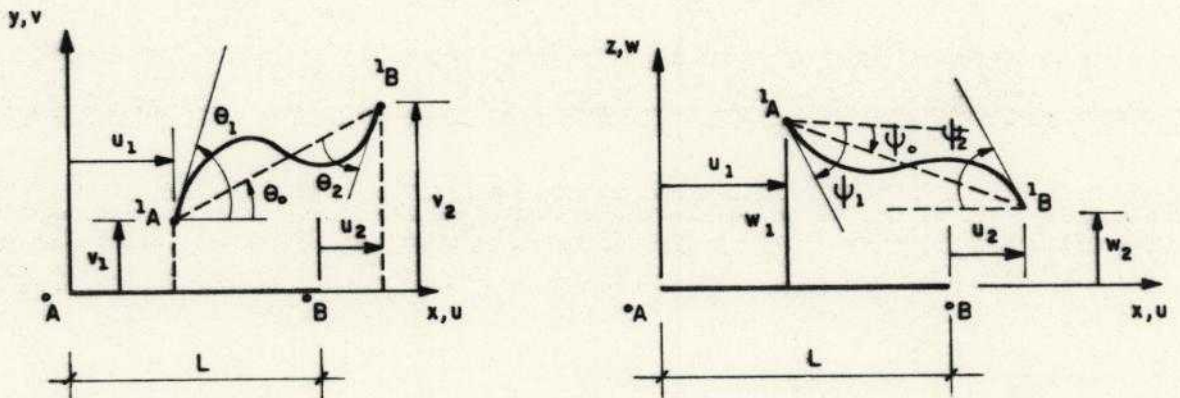


Fig. 4.16 Elemento barra de pórtico no espaço tridimensional

Assume-se que o material constituinte da barra é elástico linear, com módulo de Young E . A barra, inicialmente reta, tem como área de seção transversal A , momentos de inércia em torno dos eixos y e z , respectivamente, I_y e I_z e comprimento inicial L . Admite-se válida a hipótese da manutenção da seção plana e desprezível o efeito Poisson. São consideradas irrelevantes

as deformações produzidas pelas forças cortantes.

A torção, assumida como totalmente desacoplada da flexo-tração ou compressão é tratada de forma aproximada e sem restrição ao empenamento. O momento de inércia de torção da seção é igual a I_x . Entre duas sucessivas atualizações as rotações são sempre pequenas, permitindo-se a consideração aproximada das curvaturas de flexão.

Em decorrência das simplificações aqui adotadas é possível tratar a barra de pórtico no espaço tridimensional como extensão do caso bidimensional, compondo-se os planos xy e xz e complementando-se com os efeitos da torção. O desenvolvimento se faz de forma análoga ao do item 4.6, apresentando-se aqui apenas as considerações julgadas pertinentes.

Os ângulos θ_0 e ψ_0 (vide figura 4.16) podem ser aproximados por

$$\theta_0 = \frac{v_2 - v_1}{L} \quad \psi_0 = \frac{w_1 - w_2}{L} \quad \dots(4.89)$$

O campo de deslocamentos é assumido linear para translações u e rotações ϕ . Para as translações v e w , ao longo dos eixos y e z , nesta ordem, são admitidas interpolações cúbicas. Assim, tem-se,

$$u = a + bx \quad v = c + dx + ex^2 + fx^3 \quad w = \bar{c} + \bar{d}x + \bar{e}x^2 + \bar{f}x^3$$

$$\theta = g + hx \quad \dots(4.80)$$

Particularizando-se u, v, w, ϕ, ψ e θ nos extremos, tendo-se em vista as aproximações $\theta \cong v_x$ e $\psi \cong w_x$, obtém-se

$$a = u_1 \quad b = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad c = v_1 \quad d = \theta_1 \quad e = \frac{-2\theta_1 - \theta_2 + 3\theta_0}{L} \quad f = \frac{\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_0}{L^2}$$

$$g = \phi_1 \quad h = \frac{\phi_2 - \phi_1}{L} \quad \bar{c} = w_1 \quad \bar{d} = -\psi_1 \quad \bar{e} = \frac{2\psi_1 + \psi_2 - 3\psi_0}{L} \quad \bar{f} = \frac{-\psi_1 - \psi_2 + 2\psi_0}{L^2}$$

$$\dots(4.90)$$

A deformação longitudinal ϵ_x , considerando-se o acoplamento de N , M_y e M_z , é dada por

$$\epsilon_x = u_x + \frac{1}{2L} \int_0^L (v_x)^2 dx - v_{xx} y + \frac{1}{2L} \int_0^L (w_x)^2 dx - w_{xx} z \quad \dots(4.91)$$

4.8.3 Energia de Deformação

Com base nas hipóteses estabelecidas, a energia de deformação pode ser decomposta em uma parcela associada à força normal e aos momentos fletores (U_ϵ), e outra correspondente ao momento torçor (U_γ). A primeira delas é determinada com base na deformação ϵ_x , de modo semelhante ao que se fez para o pórtico plano, como se mostra a seguir.

Com base em (4.2) e observando-se (4.91) tem-se que

$$\begin{aligned} U_\epsilon &= \frac{1}{2} \int_V E (\epsilon_x)^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V E (u_x)^2 dV + \frac{1}{2} \int_V E (-v_{xx} y - w_{xx} z)^2 dV + \int_V E u_x \frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{1}{2} (v_x)^2 + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right] dx + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_V E \left\{ \frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{1}{2} (v_x)^2 + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right] dx \right\}^2 dV + \int_V E u_x (-v_{xx} y - w_{xx} z) dV + \\ &\quad + \int_V \left\{ \frac{E}{L} \int_0^L \left[\frac{1}{2} (v_x)^2 + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right] dx (-v_{xx} y - w_{xx} z) \right\} dV \quad \dots(4.92) \end{aligned}$$

Integrando-se inicialmente sobre a área de seção transversal, lembrando-se que $\int_A y^2 dA = I_z$, $\int_A z^2 dA = I_y$, $\int_A yz dA = 0$, $\int_A y dA = 0$, $\int_A z dA = 0$, vem

$$U_{\epsilon} = U_{2\epsilon} + U_{3\epsilon} + U_{4\epsilon}$$

onde

$$U_{2\epsilon} = \frac{EA}{2} \int_0^L (u_x)^2 dx + \frac{E}{2} \int_0^L (I_z v_{xx}^2 + I_y w_{xx}^2) dx$$

$$U_{3\epsilon} = EA \int_0^L u_x \left[\frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{1}{2} (v_x)^2 + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) dx \right] dx$$

$$U_{4\epsilon} = \frac{EA}{2} \left\{ \left[\frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{1}{2} (v_x)^2 dx \right]^2 + \left[\frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{1}{2} (w_x)^2 dx \right]^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \left[\frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{1}{2} (v_x)^2 dx \right] \left[\frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{1}{2} (w_x)^2 dx \right] \right] \right\} dx \quad \dots(4.93)$$

Comparando-se a expressão (4.93) com a correspondente do pórtico plano (4.48), observa-se que há uma repetição de integrais do mesmo tipo, com exceção da terceira parcela do integrando de $U_{4\epsilon}$, que acopla as flexões nos dois planos de simetria. A substituição das expressões de v_x e w_x no integrando da referida parcela fornece

$$\frac{EA}{2} \int_0^L 2 \left[\frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} (v_x)^2 dx \right] \left[\frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{1}{2} (w_x)^2 dx \right] dx = \right. \\ = \frac{EAL}{900} (2\theta_1^2 + 2\theta_2^2 + 18\theta_0^2 - \theta_1\theta_2 - 3\theta_1\theta_0 - 3\theta_2\theta_0) (2\psi_1^2 + 2\psi_2^2 + 18\psi_0^2 - \psi_1\psi_2 + \\ \left. - 3\psi_1\psi_0 - 3\psi_2\psi_0) \quad \dots(4.94)$$

Excetuando-se esta última parcela, todas as demais derivações para obtenção das matrizes de rigidez secante e tangente estão prontas para o caso plano, podendo ser utilizadas diretamente, com simples analogia.

A parcela da energia de deformação correspondente ao momento torçor, a rigor válida apenas para a torção livre de barras de seção circular, é aqui utilizada,

ressalvando-se o caráter aproximado em outros casos. Não incomoda tal aproximação uma vez que no comportamento do sistema estrutural do edifício composto apenas por barras, a rigidez contra a torção global do edifício está relacionada preponderantemente à associação dos painéis fletidos, com muito pequena influência da rigidez à torção de cada uma das barras, desprezada no desenvolvimento de projetos usuais. Esta parcela, função das distorções γ , é dada por

$$U_{\gamma} = \frac{1}{2} \int_v G \frac{\gamma^2}{2} dV$$

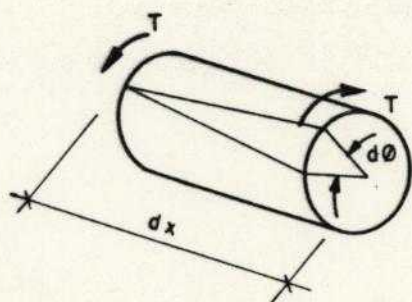
onde G é o módulo de elasticidade transversal

...(4.95)

O resultado da integração ao longo de uma seção circular (vide figura 4.17) produz

$$U_{\gamma} = \frac{1}{2} \int_0^L G I_x (\phi_x)^2 dx$$

...(4.96)



$$T = G I_x \frac{d\theta}{dx} = G I_x \cdot \theta_x$$

$$U = \frac{1}{2} T \cdot d\theta$$

Fig. 4.17 Torção de trecho infinitesimal de barra

Substituindo-se em (4.96) a expressão da derivada de ϕ em relação à abscissa x chega-se a

$$U_{\gamma} = \frac{1}{2} G I_x L \left[\frac{\phi_2 - \phi_1}{L} \right]^2$$

...(4.97)

A maneira como a torção é aqui tratada conduz a uma

parcela de energia de deformação que é função quadrática dos parâmetros nodais ϕ_2 e ϕ_1 , e, portanto, contribui apenas na matriz de rigidez elástica linear, com coeficientes associados exclusivamente aos referidos graus de liberdade. Então, reunindo-se as duas parcelas da energia de deformação, encontra-se

$$U = U_\varepsilon + U_\gamma \quad \text{ou} \quad U = U_2 + U_3 + U_4$$

$$\text{onde} \quad U_2 = U_{2\varepsilon} + U_\gamma$$

$$U_3 = U_{3\varepsilon}$$

$$U_4 = U_{4\varepsilon}$$

...(4.98)

4.8.4 Matrizes de Rigidez Secante e Tangente

Com base na expressão da energia de deformação pode-se determinar as matrizes de rigidez secante e tangente, de modo semelhante ao adotado para os demais elementos anteriormente tratados, reafirmando-se a possibilidade de aproveitamento dos desenvolvimentos referentes ao pórtico plano. Ressalte-se que o formalismo das matrizes incrementais está mantido.

A matriz secante e a tangente são dadas por

$$\tilde{k}_s = \tilde{k}_0 + \frac{1}{2} \tilde{k}_1 + \frac{1}{3} \tilde{k}_2$$

$$\tilde{k}_T = \tilde{k}_0 + \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2$$

...(4.99)

Sendo

$$\mathbf{k}_o = \begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\
 \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 \\
 \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & 0 \\
 EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

SIM

... (4.100)

$$\underset{\sim}{k}_1 = EA \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\varphi_2}{10L} & \frac{\bar{\varphi}_2}{10L} & 0 & \frac{-\varphi_3}{10L} & \frac{\varphi_3}{30} & 0 & \frac{\varphi_2}{10L} & \frac{-\bar{\varphi}_2}{L} & 0 & \frac{\bar{\varphi}_4}{30} & \frac{-\varphi_4}{30} \\ \frac{6\varphi_1}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{\varphi_1}{10} & \frac{\varphi_2}{10L} & \frac{-6\varphi_1}{5L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varphi_1}{10} \\ \frac{6\varphi_1}{5L} & 0 & \frac{\varphi_1}{10} & 0 & \frac{\bar{\varphi}_3}{10L} & 0 & \frac{-6}{5} \frac{\varphi_1}{L} & 0 & \frac{-\varphi_1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\varphi_1 L}{15} & 0 & \frac{\bar{\varphi}_3 L}{30} & 0 & \frac{\varphi_1}{10} & 0 & \frac{-\varphi_1 L}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\varphi_1 L}{15} & \frac{\varphi_3}{30} & \frac{-\varphi_1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varphi_1 L}{30} & 0 \\ 0 & \frac{-\varphi_2}{10L} & \frac{\bar{\varphi}_2}{10L} & 0 & \frac{\bar{\varphi}_4}{30} & \frac{\varphi_4}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6\varphi_1}{5L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varphi_1}{10} \\ \frac{6\varphi_1}{5L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varphi_1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{15} \varphi_1 L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\varphi_1 L}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ e φ_4 são os mesmos de (4.55)

$$\text{e } \bar{\varphi}_j(\psi_i) = \varphi_j(\theta_i) \quad \dots(4.101)$$

$$\underset{\sim}{k}_2 = \begin{bmatrix} k_{\underset{\sim}{2}AA} & k_{\underset{\sim}{2}AB} \\ \text{SIM} & k_{\underset{\sim}{2}BB} \end{bmatrix}$$

... (4.102a)

com

$$\tilde{k}_{2AA} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L}(\varphi_5 + \bar{\varphi}_{11}) & \frac{-1}{100L}\varphi_2\bar{\varphi}_2 & 0 & \frac{\varphi_2\bar{\varphi}_3}{300} & \varphi_6 + \frac{\bar{\varphi}_{11}}{12} \\ & \frac{1}{L}(\bar{\varphi}_5 + \varphi_{11}) & 0 & -\bar{\varphi}_6\frac{\varphi_{11}}{12} & \frac{-\bar{\varphi}_2\varphi_3}{300} \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{SIM} & & (\bar{\varphi}_8 + \frac{\varphi_{11}}{12})L & \varphi_3\bar{\varphi}_3\frac{L}{900} \\ & & & & (\varphi_8 + \frac{\bar{\varphi}_{11}}{12})L \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_{2AB} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L}(\varphi_5 + \bar{\varphi}_{11}) & \frac{1}{100L}\varphi_2\bar{\varphi}_2 & 0 & \frac{\varphi_2\bar{\varphi}_4}{300} & \varphi_7 + \frac{\bar{\varphi}_{11}}{12} \\ 0 & \frac{1}{100L}\varphi_2\bar{\varphi}_2 & -\frac{1}{L}(\bar{\varphi}_5 + \varphi_{11}) & 0 & -\bar{\varphi}_7\frac{\varphi_{11}}{12} & \frac{-\bar{\varphi}_2\varphi_4}{300} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\varphi_2\bar{\varphi}_3}{300} & \bar{\varphi}_6 + \frac{\varphi_{11}}{12} & 0 & (\bar{\varphi}_9\frac{\varphi_{11}}{900})L & \frac{\varphi_4\bar{\varphi}_3L}{900} \\ 0 & -\varphi_6\frac{\bar{\varphi}_{11}}{12} & \frac{\bar{\varphi}_2\varphi_3}{300} & 0 & \frac{\varphi_3\bar{\varphi}_4L}{900} & (\varphi_9\frac{\bar{\varphi}_{11}}{900})L \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_{2BB} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L}(\varphi_5 + \bar{\varphi}_{11}) & \frac{-1}{100L}\varphi_2\bar{\varphi}_2 & 0 & \frac{-\varphi_2\bar{\varphi}_4}{300} & -\varphi_7\frac{\bar{\varphi}_{11}}{12} \\ & \frac{1}{L}(\bar{\varphi}_5 + \varphi_{11}) & 0 & \bar{\varphi}_7 + \frac{\varphi_{11}}{12} & \frac{\bar{\varphi}_2\varphi_4}{300} \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{SIM} & & (\bar{\varphi}_{10} + \frac{\varphi_{11}}{9})L & \frac{\varphi_4\bar{\varphi}_4L}{900} \\ & & & & (\varphi_{10} + \frac{\bar{\varphi}_{11}}{9})L \end{bmatrix}$$

... (4.102b)

onde $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ são os mesmos de (4.55)

$\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10}$ são os mesmos de (4.56)

$$\varphi_{11} = \frac{1}{25} (2\theta_1^2 + 2\theta_2^2 - \theta_1\theta_2 - 3\theta_1\theta_0 - 3\theta_2\theta_0 + 18\theta_0^2)$$

$$\text{e } \bar{\varphi}_j(\psi_i) = \varphi_j(\theta_i) \quad \dots(4.102c)$$

4.8.5 Atualização de Coordenadas

Para duas sucessivas configurações de equilíbrio ${}^jA^jB$ e ${}^{j+1}A^{j+1}B$, interessa aqui tratar apenas a parcela da energia de deformação cujas derivadas produzem as correções nas matrizes de rigidez tangente e secante. Considerando-se, inicialmente, apenas a contribuição da deformação γ , associada a momento torçor T , tem-se

$${}^jU_\gamma = \int_0^L GI_x {}^j\phi_x \Delta^j\phi_x dx$$

$$\text{onde } {}^j\phi_x = \sum_{i=0}^{j-1} {}^i\phi_x = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\Delta^i\phi_2 - \Delta^i\phi_1}{{}^iL}$$

$$\Delta^j\phi_x = \frac{\Delta^j\phi_2 - \Delta^j\phi_1}{{}^jL} \quad \dots(4.103)$$

Observe-se que $GI_x {}^j\phi_x$ pode ser interpretado como o momento torçor jT acumulado até o início do incremento. Promovendo-se a integração ao longo do comprimento L obtém-se

$${}^jU_\gamma = {}^jT (\Delta^j\phi_2 - \Delta^j\phi_1) \quad \dots(4.104)$$

Derivando-se com relação aos parâmetros nodais de deslocamento, encontram-se

$$\frac{\partial {}^jU_\gamma}{\partial \Delta^j\phi_1} = - {}^jT \quad \frac{\partial {}^jU_\gamma}{\partial \Delta^j\phi_2} = {}^jT \quad \dots(4.105)$$

Os termos $-{}^jT$ e jT constituem contribuições no vetor

de forças nodais, como indicado na figura 4.18.

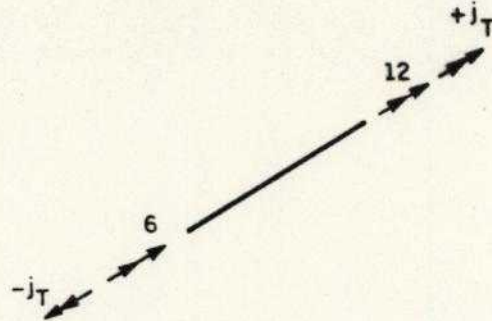


Fig. 4.18 Momentos axiais no início do incremento

Quanto à contribuição da deformação ϵ , associada à força normal N e aos momentos fletores M_y e M_z , tem-se

$${}^j U_\epsilon = \int_V E \Delta\epsilon \quad {}^j \epsilon \quad dV$$

onde

$$\Delta\epsilon = {}^j u_x + \frac{1}{2^j L} \int_0^L ({}^j v_{xx})^2 dx - {}^j v_{xx} y + \frac{1}{2^j L} \int_0^L ({}^j w_x)^2 dx - {}^j w_{xx} z$$

$${}^j \epsilon = \sum_{i=0}^{j-1} \left[{}^i u_x + \frac{1}{2^i L} \int_0^L ({}^i v_{xx})^2 dx - {}^i v_{xx} y + \frac{1}{2^i L} \int_0^L ({}^i w_x)^2 dx - {}^i w_{xx} z \right]$$

... (4.106)

De modo análogo ao que foi feito para o pórtico plano pode-se identificar nas deformações $\Delta\epsilon$ e ${}^j \epsilon$ parcelas independentes das coordenadas x, y, z , associadas ao efeito da força normal e parcelas que incorporam as contribuições dos momentos fletores na deformação longitudinal. Estas últimas são dependentes de x , por intermédio de v_{xx} e w_{xx} , e lineares em y e z , respectivamente. Então, separando-se os efeitos pela natureza das causas, tem-se,

$$\Delta \varepsilon = j_{\bar{\varepsilon}} - j_{v_{xx}y} - j_{w_{xx}z} \quad \text{e} \quad j_{\varepsilon} = \sum_{i=0}^{j-1} (i_{\bar{\varepsilon}} - i_{v_{xx}y} - i_{w_{xx}z})$$

$$\text{onde} \quad j_{\bar{\varepsilon}} = j_{u_x} + \frac{1}{2^j L} \int_0^{j_L} (j_{v_x})^2 dx + \frac{1}{2^j L} \int_0^{j_L} (j_{w_x})^2 dx$$

$$\text{e} \quad i_{\bar{\varepsilon}} = i_{u_x} + \frac{1}{2^i L} \int_0^{i_L} (i_{v_x})^2 dx + \frac{1}{2^i L} \int_0^{i_L} (i_{w_x})^2 dx \quad \dots(4.107)$$

Voltando-se à energia jU_{ε} com as expressões (4.107), e promovendo-se a integração sobre a área da seção transversal com $\int_A y dA = 0$, $\int_A z dA = 0$, $I_z = \int_A y^2 dA$, $I_y = \int_A z^2 dA$, chega-se a:

$$jU_{\varepsilon} = \underbrace{\int_0^{j_L} EA \left(\sum_{i=0}^{j-1} i_{\bar{\varepsilon}} \right) j_{\bar{\varepsilon}} dx}_{jU_N} + \underbrace{\int_0^{j_L} EI_z \left(\sum_{i=0}^{j-1} i_{v_{xx}} \right) dx}_{jU_{M_z}} + \underbrace{\int_0^{j_L} EI_y \left(\sum_{i=0}^{j-1} i_{w_{xx}} \right) dx}_{jU_{M_y}} \quad \dots(4.108)$$

Os termos $EA \sum_{i=0}^{j-1} i_{\bar{\varepsilon}}$, $EI_z \sum_{i=0}^{j-1} i_{v_{xx}}$ e $EI_y \sum_{i=0}^{j-1} i_{w_{xx}}$ podem ser interpretados como a força normal jN (constante ao longo da barra) e os momentos fletores jM_z e jM_y (lineares em x), acumulados até o início do atual incremento. Derivando-se uma vez em relação aos parâmetros nodais de deslocamento encontram-se as contribuições de jU_{ε} nas equações de equilíbrio. De modo semelhante ao que ocorre com o pórtico plano, U_{M_z} e U_{M_y} são lineares nos parâmetros de deslocamento e participam com termos constantes que constituem as forças iniciais, enquanto a parcela U_N colabora com termos constantes que traduzem as forças iniciais e termos lineares em deslocamento, que, devidamente arranjados, constituem a correção da matriz de rigidez secante. Em resumo, as equações de equilíbrio podem ser escritas como

$$\underbrace{{}^j \tilde{F}} + \underbrace{[{}^j k_0 + {}^j k_0 + \frac{1}{2} {}^j k_1 + \frac{1}{3} {}^j k_2]} \Delta^j Q = {}^{j+1} \tilde{F}$$

devidos às deformações iniciais devidos às deformações do incremento atual

onde

$${}^j \tilde{F} = \left\{ -{}^j N \quad \frac{{}^j M_{z1} + {}^j M_{z2}}{L} \quad - \frac{{}^j M_{y1} + {}^j M_{y2}}{L} \quad -{}^j T \quad {}^j M_{y1} \quad {}^j M_{z1} \right. \\ \left. {}^j N \quad - \frac{{}^j M_{z1} + {}^j M_{z2}}{L} \quad \frac{{}^j M_{y1} + {}^j M_{y2}}{L} \quad {}^j T \quad {}^j M_{y2} \quad {}^j M_{z2} \right\}^T$$

$${}^j k_G = {}^j N \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5^j L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{-6}{5^j L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{6}{5^j L} & \frac{6}{5^j L} & 0 & \frac{-1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6}{5^j L} & 0 & \frac{-1}{10} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2^j L}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{-1}{30} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2^j L}{15} & 0 & \frac{-1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-j L}{30} & 0 \\ & \text{SIM} & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{6}{5^j L} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{10} & 0 \\ & & & & & & & \frac{6}{5^j L} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{2^j L}{15} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{2^j L}{15} & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz geométrica da barra

${}^{j+1} \tilde{F}$ é o vetor de forças nodais totais

...(4.109)

O vetor de forças nodais iniciais está ilustrado na figura 4.19.

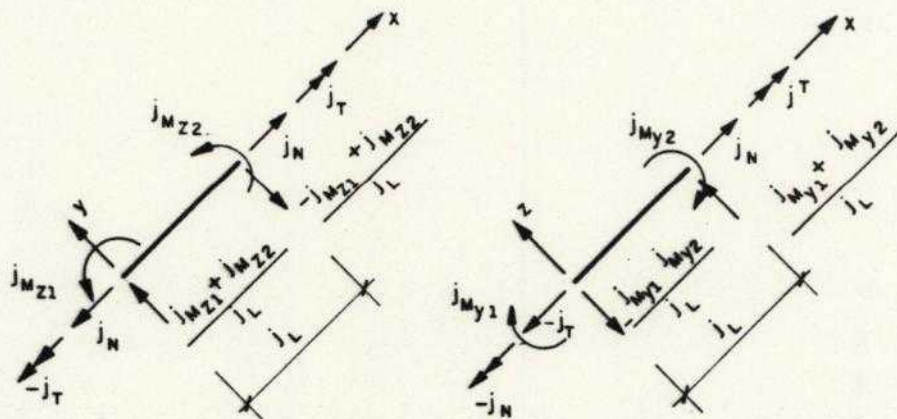


Fig.4.19 Vetor de forças nodais iniciais

É possível rearranjar as equações de equilíbrio da seguinte forma

$${}^j \underline{k}_S \Delta^j \underline{Q} = \Delta^j \underline{F}$$

onde

$$\Delta^j \underline{F} = {}^{j+1} \underline{F} - {}^j \underline{F}$$

$${}^j \underline{k}_S = {}^j \underline{k}_G + {}^j \underline{k}_O + \frac{1}{2} {}^j \underline{k}_1 + \frac{1}{3} {}^j \underline{k}_2 \quad \dots(4.110)$$

A matriz ${}^j \underline{k}_S$ é a matriz de rigidez secante correspondente ao incremento analisado. Para a determinação da matriz de rigidez tangente basta promoverem-se as segundas derivadas em relação aos parâmetros nodais de deslocamento. De maneira análoga aos elementos anteriores chega-se a

$${}^j \underline{k}_T = {}^j \underline{k}_G + {}^j \underline{k}_O + {}^j \underline{k}_1 + {}^j \underline{k}_2 \quad \dots(4.111)$$

Observe-se que em um processo iterativo, apenas \tilde{k}_1^j e \tilde{k}_2^j , por serem dependentes dos deslocamentos ocorridos ao longo do incremento, são recalculadas em cada iteração.

4.8.6 Deslocamentos Nodais e Atualização da Geometria da Barra

Não há complicações associadas à atualização da geometria da barra treliça, seja no caso plano ou no tridimensional. Isso se deve à existência exclusiva de translação como parâmetro nodal de deslocamento e também ao fato da barra se manter reta. Os deslocamentos podem ser tratados de forma vetorial e o estabelecimento do referencial atualizado se faz com base no eixo x local, definido do nó inicial para o final, cujas posições são determinadas sem ambiguidades. No caso plano o segundo eixo local é determinado de forma imediata e no tridimensional há liberdade de escolha dos outros dois eixos locais desde que se mantenha o sistema triortogonal dextrorso, como já comentado no item 4.7.

Para o pórtico plano o problema também se resolve de forma simplificada pois o eixo de flexão se mantém sempre ortogonal ao plano da estrutura. As rotações, medidas em torno desse eixo de direção fixa, podem ser tratadas de forma escalar, enquanto as translações suportam tratamento vetorial. Definidas as novas localizações dos nós inicial e final da barra, o referencial atualizado é estabelecido de maneira semelhante ao da treliça plana, sendo que o eixo local passa sobre a corda que liga os extremos da barra. Admite-se que as curvaturas são tão pequenas que permitem o tratamento da barra com eixo longitudinal retilíneo, mesmo depois da ocorrência de um certo nível de deformação por flexão. No caso de sistemas estruturais de edifícios usuais, em especial em estruturas de concreto armado [4.28], o tratamento simplificado adotado neste trabalho, é suficiente. Em situações especiais pode-se refinar a

discretização, aumentando-se o número de barras que compõe um tramo de viga ou pilar.

No estudo do pórtico tridimensional a atualização do referencial local é mais trabalhosa pois as rotações podem acontecer em torno de três eixos dispostos no espaço. Além disso, a presença de deformação da barra faz com que as direções principais variem de uma seção transversal para outra. O que se faz aqui é adotar-se a atualização das direções principais como a média das ocorrências nas seções extremas. Considerem-se as rotações nodais, referidas aos eixos globais, agrupadas em dois vetores correspondentes aos nós inicial e final da barra. Observe-se que, dentro das hipóteses anteriormente fixadas, admite-se o tratamento vetorial das rotações, desde que pequenas. Sendo \tilde{e}_x o vetor unitário do eixo x local da barra, pode-se calcular a rotação dos eixos principais em torno do eixo x, em cada nó, tomando-se o produto escalar do vetor das rotações nodais pelo unitário do eixo. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta\phi_A &= \tilde{e}_x^T \tilde{r}_A & \text{sendo } \tilde{r}_A &= \left\{ \Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z \right\}_A \\ \Delta\phi_B &= \tilde{e}_x^T \tilde{r}_B & \text{sendo } \tilde{r}_B &= \left\{ \Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z \right\}_B \end{aligned}$$

...(4.112)

E, então, calcula-se a rotação média $\Delta\phi = \frac{1}{2} (\Delta\phi_A + \Delta\phi_B)$, utilizada para efeitos de atualização dos eixos locais y e z. O eixo x local atualizado é definido simplesmente do nó inicial para o final, cujas posições são fixadas a partir das anteriores atualizadas com as translações ocorridas no presente incremento.

4.9 TRECHOS RÍGIDOS

Como se mostrou no terceiro capítulo há bastante interesse no estudo de trechos rígidos no sistema estrutural do edifício. Foram estudados com algum detalhe dois aspectos: a consideração do pavimento do edifício como um diafragma rígido em seu plano e a existência de trechos rígidos de barras. O desenvolvimento apresentado baseou-se na aplicação do PTV a partir do qual se chegou à clássica lei da contragradiência para transformação de pares cinemáticos e estáticos. Foi observado que para deslocamentos reais finitos é necessário que as rotações sejam pequenas de modo a permitir a linearização de sua influência nas translações. A rigor a transformação contragradiente vale desde que se trabalhe com as diferenciais dos deslocamentos [4.34], como se mostra a seguir.

Uma transformação cinemática não-linear entre dois conjuntos de deslocamentos \bar{Q} e Q pode ser organizada matricialmente como

$$\bar{Q} = \Gamma^T Q \quad \dots(4.113)$$

onde Γ é função dos deslocamentos Q . A transformação correspondente às diferenciais dos deslocamentos tem a forma

$$\delta\bar{Q} = \Lambda^T \delta Q$$

$$\text{onde } \Lambda_{ij} = \partial \bar{Q}_i / \partial Q_j \quad \dots(4.114)$$

Sendo \bar{F} e F dois sistemas de forças estaticamente equivalentes, associados, respectivamente, aos deslocamentos \bar{Q} e Q , tem-se, por causa da invariância do trabalho virtual, que

$$\bar{F}^T \delta\bar{Q} = F^T \delta Q \quad \dots(4.115)$$

Combinando-se , adequadamente as equações (4.114) e (4.115) chega-se a

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\Lambda} \tilde{\mathbf{F}} \quad \dots(4.116)$$

Assim , é possível tratar os trechos rígidos, quando há relações não-lineares de deslocamentos, de forma semelhante ao caso linear, lembrando-se que os elementos da matriz $\tilde{\Lambda}$ são, agora , funções dos deslocamentos $\tilde{\mathbf{Q}}$. É necessário que se promova uma análise incremental, sendo os deslocamentos em cada incremento suficientemente pequenos, de modo a ser boa a sua aproximação pelas diferenciais. Em geral é necessária a utilização de incrementos muito pequenos. Cabe observar que tal consideração simplificada diz respeito às transformações de coordenadas que devem ser operadas nas matrizes e vetores de cada barra para a consideração de diafragmas e trechos rígidos, como se fez no terceiro capítulo.

As transformações expressas pelas equações (4.113) e (4.116) podem ser reescritas, em notação indicial, como

$$\bar{Q}_j = \Gamma_{ij} Q_i \quad \dots(4.117)$$

$$F_l = \Lambda_{lk} \bar{F}_k \quad \dots(4.118)$$

A repetição de índices nas expressões anteriores significa somatório.

Considere-se a mudança de coordenadas que permite transformar o vetor dos deslocamentos $\tilde{\mathbf{Q}}$ e o vetor das forças $\tilde{\mathbf{F}}$ nos novos pares $\bar{\mathbf{Q}}$ e $\bar{\mathbf{F}}$, respectivamente, quando as relações entre as grandezas cinemáticas não é linear.

A energia potencial escrita em função das coordenadas originais , com base na equação (4.4), é dada por

$$\Pi = U(\bar{\mathbf{Q}}) - \bar{F}_i \bar{Q}_i \quad \dots(4.119)$$

A equação de equilíbrio correspondente ao parâmetro de deslocamento Q_k é encontrada derivando-se a equação (4.119) em relação a Q_k . Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial Q_k} &= \frac{\partial U}{\partial Q_k} - \frac{\partial}{\partial Q_k} (\bar{F}_i \bar{Q}_i) \\ &= \frac{\partial U}{\partial \bar{Q}_i} \frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial Q_k} - \bar{F}_i \frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial Q_k} \end{aligned} \quad \dots(4.120)$$

Tendo-se em vista as equações (4.114) e (4.118) pode-se reescrever a expressão anterior como

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_k} = \frac{\partial U}{\partial \bar{Q}_i} \Lambda_{ki} - F_k \quad \dots(4.121)$$

A primeira parcela, correspondente à derivação da energia de deformação em relação ao parâmetro Q_k , pode ser modificada com base nas equações (4.5) e (4.6).

$$\frac{\partial U}{\partial Q_k} = \bar{k}_{s,ij} \bar{Q}_j \Lambda_{ki} \quad \dots(4.122)$$

Escrevendo-se \bar{Q}_j em função dos deslocamentos Q , a partir de (4.113), pode-se reescrever (4.122).

$$\frac{\partial U}{\partial Q_k} = \bar{k}_{s,ij} \Gamma_{lj} Q_l \Lambda_{ki} \quad \dots(4.123)$$

Finalmente chega-se ao elemento genérico da matriz de rigidez secante expressa em função dos deslocamentos Q , pois como

$$\frac{\partial U}{\partial Q_k} = k_{s,kl} Q_l \quad \dots(4.124)$$

Tem-se que

$$k_{s,kl} = \Lambda_{ki} \bar{k}_{s,ij} \Gamma_{lj} \quad \text{ou}$$

$$\tilde{k}_s = \tilde{\Lambda} \tilde{\bar{k}}_s \tilde{\Gamma}^T \quad \dots(4.125)$$

Quando a transformação é linear tem-se $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Lambda}$ e chega-se, então, a equação análoga à (3.16), apresentada no terceiro capítulo.

Para a obtenção da matriz tangente é necessário encontrar as derivadas segundas da energia de deformação em relação aos parâmetros de deslocamento Q . A partir da equação (4.35) tem-se

$$k_{T,lk} = \frac{\partial^2 U}{\partial Q_l \partial Q_k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial Q_l} \left[\frac{\partial U}{\partial Q_k} \right] \quad \dots(4.126)$$

Operando-se adequadamente as derivadas de função de função chega-se a

$$\begin{aligned}
k_{T, lk} &= \frac{\partial}{\partial Q_l} \left[\frac{\partial U}{\partial \bar{Q}_j} \frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial Q_k} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial Q_l} \left[\frac{\partial U}{\partial \bar{Q}_j} \right] \frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial Q_k} + \frac{\partial U}{\partial \bar{Q}_j} \frac{\partial}{\partial Q_l} \left[\frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial Q_k} \right] \\
&\dots(4.127)
\end{aligned}$$

Combinando-se (4.113), (4.117), (4.124) e (4.127) tem-se que

$$\begin{aligned}
k_{T, lk} &= \frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial Q_l} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{Q}_i \partial \bar{Q}_j} \frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial Q_k} + \frac{\partial U}{\partial \bar{Q}_j} \frac{\partial}{\partial Q_l} \left[\frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial Q_k} \right] \\
&= \Lambda_{li} \bar{k}_{T, ij} \Lambda_{kj} + \bar{k}_{s, ji} \bar{Q}_i \frac{\partial}{\partial Q_l} \left[\Lambda_{kj} \right] \\
&= \Lambda_{li} \bar{k}_{T, ij} \Lambda_{kj} + \frac{\partial}{\partial Q_l} \left[\Lambda_{kj} \right] \bar{k}_{s, ji} \Gamma_{mi} \bar{Q}_m \\
&\dots(4.128)
\end{aligned}$$

No caso da transformação ser linear, as derivadas de Λ_{ji} se anulam e o elemento genérico da matriz de rigidez tangente é dado simplesmente por

$$\begin{aligned}
k_{T, lk} &= \Lambda_{li} \bar{k}_{T, ij} \Lambda_{kj} \quad \text{ou} \\
\tilde{k}_T &= \tilde{\Lambda} \tilde{\bar{k}}_T \tilde{\Lambda}^T \quad \dots(4.129)
\end{aligned}$$

Uma estratégia interessante para o tratamento dos trechos rígidos consiste em adotar-se linear o

relacionamento entre os deslocamentos para a montagem de matrizes e vetores que contribuem no sistema global. Após a estimativa dos deslocamentos nodais, essas relações são atualizadas com as suas características não-lineares, para que se possa calcular os desequilíbrios do vetor de forças, ou as parcelas do vetor de forças ainda não equilibradas, que são incorporadas no próximo passo, para a estimativa de incrementos adicionais dos deslocamentos.

Pode-se compreender a idéia da estratégia proposta a partir do exemplo simples apresentado a seguir. Considere-se a viga da figura 4.20. O trecho em balanço é suposto rígido. O trecho entre o apoio fixo e o engaste é simulado por uma barra, sendo que o grau de liberdade considerado é a rotação sobre o apoio. Supõe-se que a força aplicada mantenha a sua direção e o ponto de aplicação.

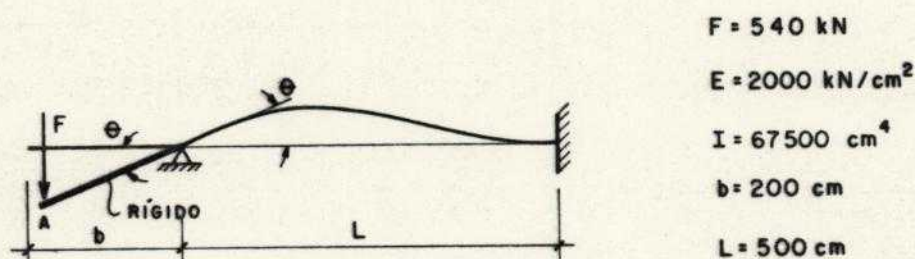


Fig. 4.20 Exemplo de tratamento de trecho rígido

Os deslocamentos do ponto de aplicação da força vertical, denominado na figura por A, dependentes da rotação sobre o apoio, influenciam o momento aplicado no extremo flexível da viga. Para uma rotação θ , o momento é igual a $F \cdot b \cdot \cos \theta$. Supondo-se que o comportamento da viga é linear, buscando-se evidenciar apenas a questão do trecho rígido, pode-se escrever o equilíbrio na posição deslocada como

$$F.b.\cos\theta = \frac{4 EI}{L} \theta \quad \dots(4.130)$$

Substituindo-se os valores numéricos das características geométricas e elásticas da viga tem-se

$$F \cos\theta = 5400 \theta \quad \dots(4.131)$$

Buscando-se estimar o incremento de deslocamentos correspondente a uma dada força aplicada ΔF , assume-se que a relação entre os deslocamentos do ponto A e a rotação θ é linear. Então o momento considerado se torna simplesmente $F.b$, o que corresponde a se fazer $\cos\theta = 1$ nas equações (4.130) e (4.131), o que só vale no início, quando $\theta = 0$. O desenvolvimento do processo pode ser acompanhado na tabela a seguir, onde a partir das estimativas dos incrementos de rotação, feitas com $\cos\theta = 1$, calcula-se a rotação acumulada e a força correspondente a essa rotação. Caso ela não seja igual à força que se aplica na viga, determina-se o desequilíbrio ΔF a ser aplicado de modo a se calcular o novo incremento de rotação e, assim por diante, até que ocorra a convergência, ou seja, até que a rotação acumulada corresponda a uma força igual à que se pretende aplicar.

ΔF (kN)	$\Delta\theta$ (rad)	θ (rad)	$F=5400 \theta/\cos\theta$ (kN)
.5400000E+3	.1000000E+1	.1000000E+0	.5427113E+3
-.2711296E+1	-.5020918E-3	.9949791E-1	.5399593E+3
.4074656E-2	.7545659E-5	.9950545E-1	.5400006E+3
-.6093661E-4	-.1128345E-6	.9950534E-1	.5400000E+3

Tab. 4.1 Processo iterativo

Esse tratamento iterativo das relações não-lineares no trecho rígido permite adaptar um "software" para análise linear de maneira simples, promovendo-se as correções em cada iteração simultaneamente com as habituais que são realizadas mesmo quando não há trechos rígidos. Outro ponto

importante a se considerar é que as matrizes dos elementos que contribuem na matriz de rigidez do sistema, mantêm a sua simetria, o que não está garantido em (4.125) e (4.128), mesmo com a consideração de que as rotações são pequenas.

4.10 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Os elementos aqui desenvolvidos foram incorporados à biblioteca de elementos do sistema LASER [4.35], em funcionamento no Departamento de Estruturas da EESC/USP. As adaptações realizadas permitem a análise NLG de sistemas estruturais compostos por barras do tipo treliça ou pórtico, dispostos no espaço tridimensional, e submetidos a carregamentos estáticos aplicados exclusivamente em nós do modelo. Há a possibilidade de aplicação total do carregamento ou em incrementos pré-estabelecidos. A análise incremental, feita com a atualização de coordenadas, descrita em itens anteriores, é necessária quando os efeitos de segunda ordem são grandes, com aparecimento de rotações que não se ajustam às hipóteses fixadas para o desenvolvimento dos modelos aqui apresentados.

Quanto ao tipo de solução do sistema de equações (vide o Apêndice 1) foi adotado o iterativo em cada incremento, com a possibilidade de mudança da matriz do sistema em cada iteração, ou a sua manutenção a partir da i -ésima iteração do incremento. Em cada iteração i , calculado o vetor dos desequilíbrios de carga ΔF_i , a estimativa dos acréscimos de deslocamentos ΔQ_i é feita opcionalmente com a matriz de rigidez secante ou tangente. A utilização da matriz secante é vantajosa quando ela é montada com o intuito de se determinarem os desequilíbrios de carga correspondentes aos deslocamentos acumulados Q_i . Em resumo, pode-se dizer que a análise NLG é realizada, no presente trabalho, com procedimento incremental-iterativo.

O sistema LASER, em sua versão original, está

preparado apenas para a análise elástica linear, com o sistema de equações montado apenas uma vez e, em seguida, resolvido pelo método da eliminação de Gauss, conforme esquema simplificado apresentado na figura 4.21.

Quanto à análise NLG, é preciso ressaltar que, em geral, só se opera com um caso de carregamento por vez já que o mesmo influencia a rigidez da estrutura, impossibilitando análise com mais do que um carregamento, a menos que o nível de não-linearidade seja tão pequeno que permita a utilização da matriz de rigidez elástica inicial, durante toda a análise, transferindo-se para o segundo membro das equações de equilíbrio, todas as parcelas não-lineares.

A opção de se trabalhar com matriz constante a partir de determinada iteração em um incremento possibilita a modificação do algoritmo de montagem e solução do sistema de equações, com redução significativa do esforço computacional. As adaptações feitas sobre as rotinas do sistema LASER são basicamente as seguintes:

- durante a iteração, a partir da qual a matriz será mantida constante, são armazenados os elementos da matriz de rigidez e a seqüência de operações necessárias à substituição progressiva nos blocos do vetor de cargas

- nas iterações seguintes, é montado apenas o vetor de cargas, com a sua divisão em blocos

- a substituição progressiva é feita apenas no segundo membro das equações, ou seja, as alterações adequadas em cada bloco do vetor de cargas e as influências sobre os blocos que lhe sucedem

- a substituição regressiva é feita da mesma forma que no algoritmo original

Observando-se o fluxograma simplificado da figura 4.21, tem-se que, no caso do aproveitamento da matriz do sistema, as etapas assinaladas em quadro especial, com traço forte interrompido, são evitadas. Na referida figura, NB é o número de blocos em que se divide a matriz de rigidez .

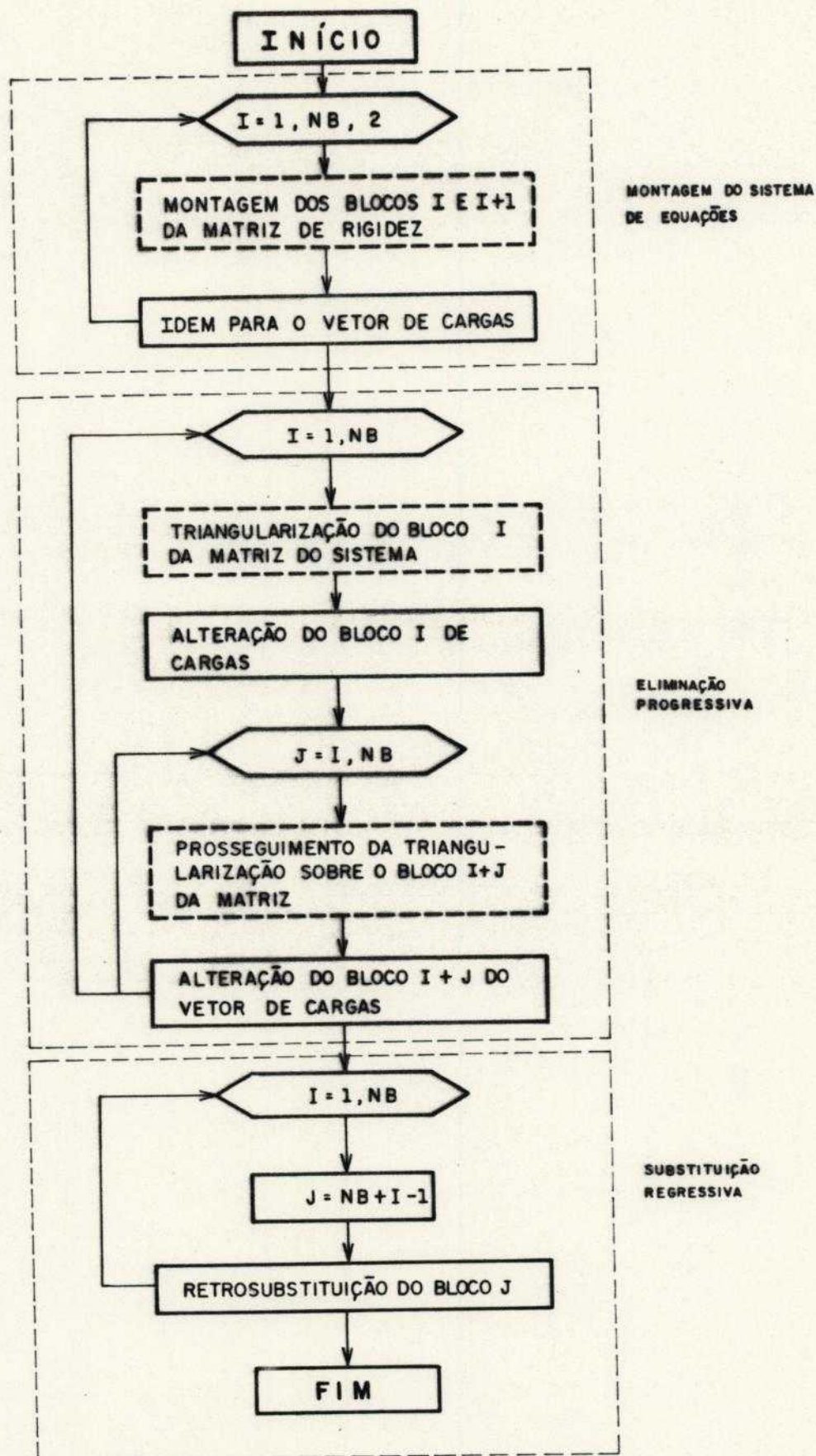


Fig. 4.21 Solução do sistema de equações - Sistema LASER

Quanto ao critério de convergência, foram adotados, para a definição do fim do processo iterativo, o de tolerância em deslocamento, ϵ_d , e o de tolerância em força, ϵ_f (vide Apêndice 1). Para o de deslocamentos foram separadas translações e rotações e para o de força foram separadas componentes de força e de momento. O usuário está livre para a fixação das tolerâncias, sendo que os valores adotados no presente trabalho são, a menos que se explicitamente outros, $\epsilon_f = 0,1$ e $\epsilon_d = 0,001$, conforme sugerem Bathe e Cimento[4.36]. Em uma análise incremental, todo desequilíbrio de forças, mesmo atendendo ao critério de convergência estabelecido, é incorporado ao vetor de cargas do incremento subsequente, para evitar-se o acúmulo de erros sucessivos.

4.11 EXEMPLOS DE AFERIÇÃO DOS MODELOS

4.11.1 Exemplo 1 - Pórtico Plano

Como primeiro exemplo de verificação do modelo de barra desenvolvido é utilizado o pórtico simples da figura 4.22, extraído de [4.34], onde é apresentada a solução com a utilização do modelo "viga-coluna", que faz uso das funções de estabilidade em seu desenvolvimento. O pórtico, discretizado em três elementos, tem suas características apresentadas na figura 4.22, cabendo observar-se que a barra horizontal é considerada inextensível.

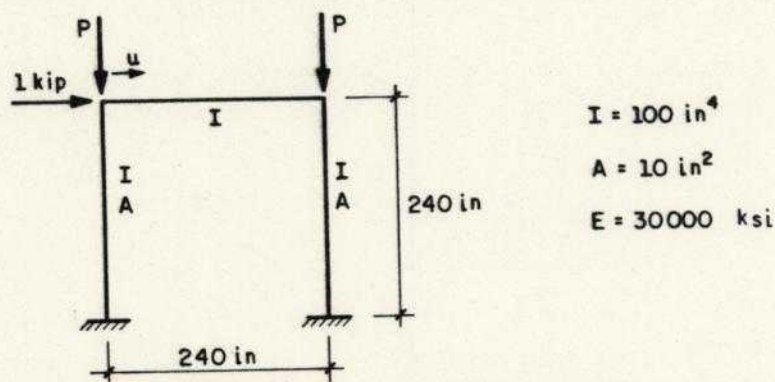


Fig. 4.22 Exemplo 1 - Pórtico plano

Com a mesma discretização foi feita a análise iterativa com carga total aplicada em um único incremento. Neste caso, a matriz de rigidez é alterada a cada iteração. Os resultados para as duas análises, correspondentes à variação do deslocamento horizontal dos extremos superiores dos pilares com o aumento das forças verticais P , estão apresentados na figura 4.23, que permite verificar a boa correlação das soluções, mesmo com discretização pobre e a consideração de um único incremento para cada nível de carga. O valor da força P em que ocorre a bifurcação do equilíbrio P_{cr} é extraída da referência [4.34]. Para $P = P_{cr}$ não há convergência. Para $P=370$ kips, em que o nível de não-linearidade já é muito alto, tem-se, como maior rotação nodal $0,84^\circ$ e maior rotação de corda de barra $1,79^\circ$ que possibilitam o tratamento de pequenas rotações.

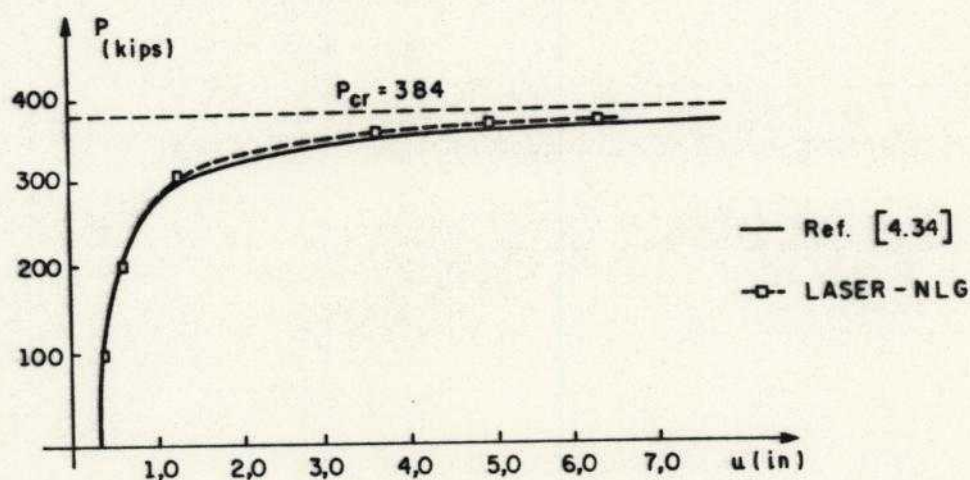


Fig. 4.23 Exemplo 1 - Resultados

4.11.2 Exemplo 2 - Arco Abatido

A figura 4.24 apresenta os resultados da análise de um arco circular abatido com um carregamento estático constituído por uma única força vertical no topo [4.20]. O material do arco é assumido isótro e elástico linear. Metade do arco foi discretizado na referência citada em

seis, doze e dezoito elementos de pórtico iguais, e processado com o programa ADINA. Foram também utilizados oito elementos isoparamétricos de seis nós com integração de Gauss 2x2. Em [4.20] não se relata o número de incrementos utilizados, que deve ser grande pois são também apresentados resultados de análises incrementais não iterativas. Para efeito de comparação foi utilizado o sistema LASER, com metade do arco discretizado em quatro elementos de pórtico iguais e o carregamento aplicado em um único incremento, com renovação da matriz de rigidez a cada iteração. A figura 4.24 apresenta a previsão das flechas do ponto sob a força concentrada, à medida em que ela cresce. Para $P = 35$ lb a solução correspondente à presente análise diverge.

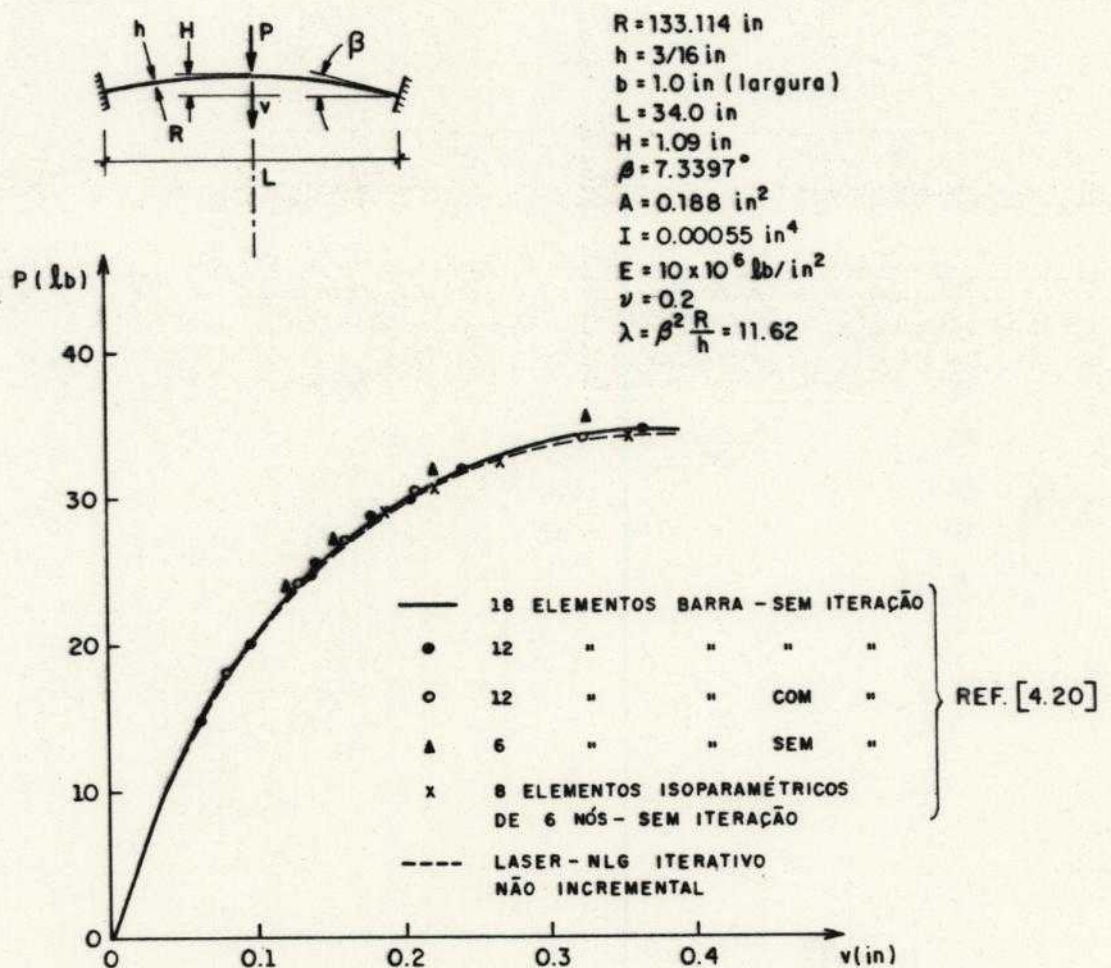


Fig. 4.24 Exemplo 2 - Arco abatido

Neste caso observa-se o bom nível de aproximação à solução conseguida com o programa ADINA, mesmo com a utilização de uma discretização mais pobre e a aplicação de toda a carga de uma única vez. A máxima rotação encontrada para $P=30 \text{ lb}$ é de $1,88^\circ$, ainda considerada pequena.

4.11.3 Exemplo 3 - Treliça Plana

A figura 4.25 mostra uma treliça plana, com suas características geométricas e elásticas, submetida a uma força estática vertical em seu nó superior. A referência [4.21] apresenta a variação de deslocamentos verticais do ponto de aplicação da força, cuja solução exata está disponível e uma solução iterativa com a utilização de uma barra em formulação euleriana baseada no modelo "viga-coluna".

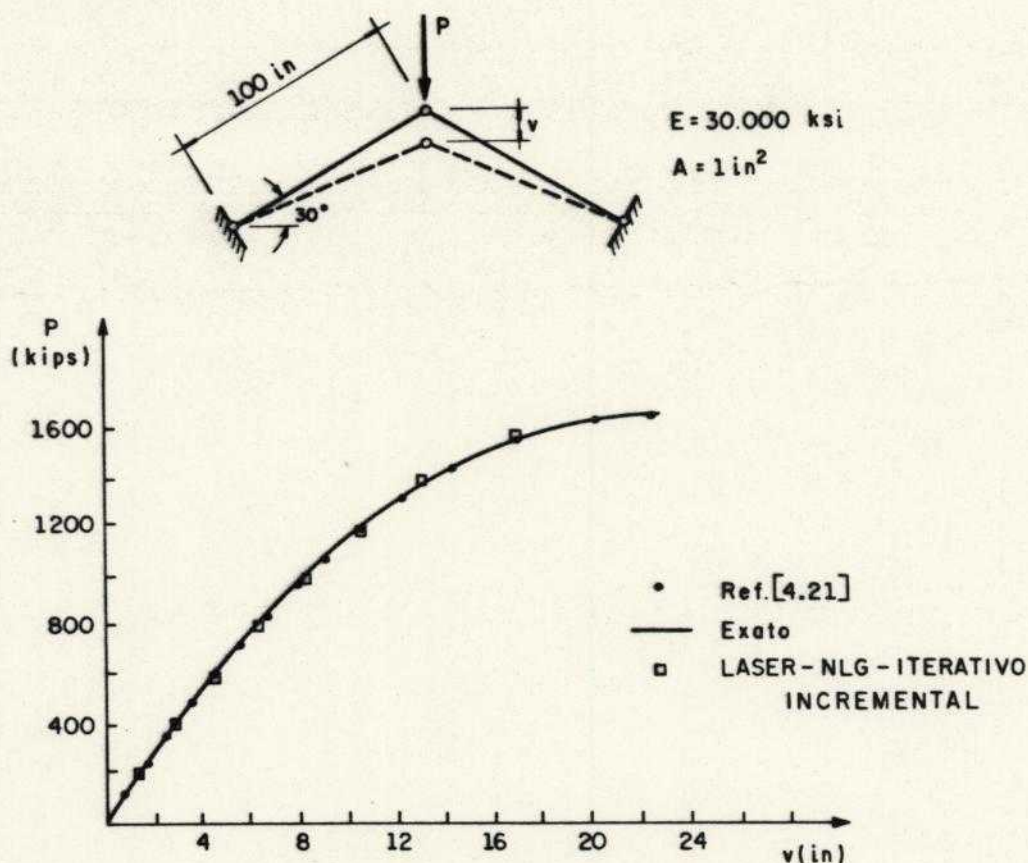


Fig.4.25 Exemplo 3 - Treliça Plana

Com o modelo apresentado no presente trabalho foi tentada inicialmente análise iterativa, não-incremental que perde a sua aplicabilidade à medida em que a rotação da barra cresce. E, neste caso, para $P = 1600$ kips essa rotação atinge $8,91^\circ$. A seguir optou-se pela solução com atualização de coordenadas, aplicando-se nove incrementos iguais de 200 kips. No último incremento, quando a força atinge o valor de 1800 kips, não há convergência. No penúltimo incremento, ocorre o maior acréscimo de rotação da corda, igual a $2,11^\circ$, que ainda pode ser considerado pequeno.

4.11.4 Exemplo 4 - Pórtico no Espaço Tridimensional

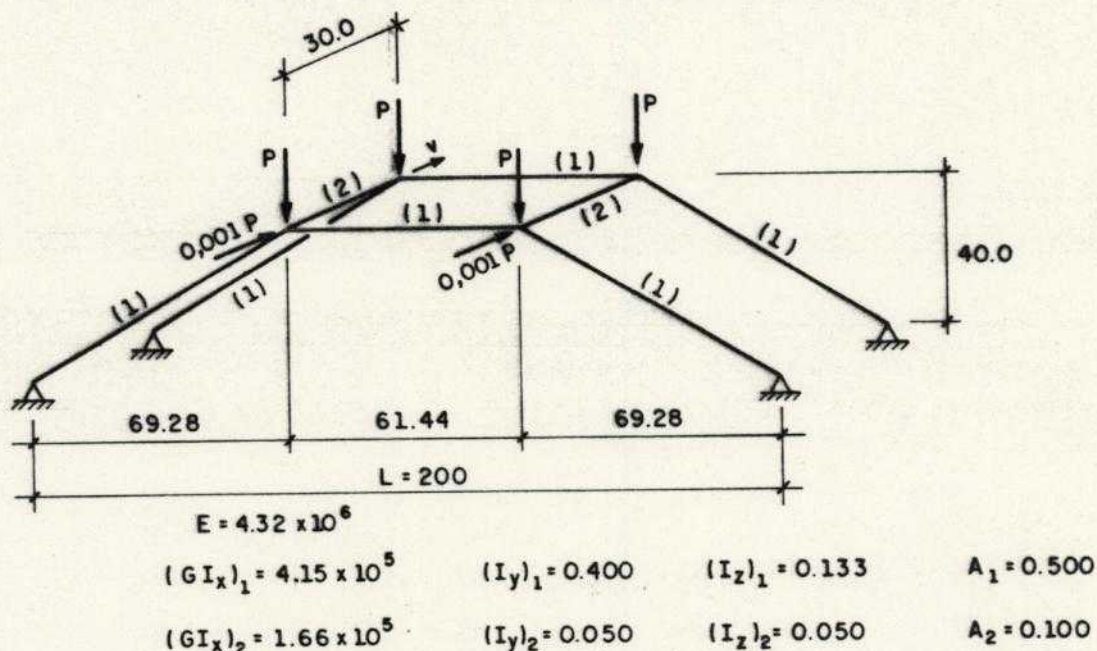


Fig. 4.26 Exemplo 4 - Pórtico tridimensional

Na figura 4.26 está representado um pórtico tridimensional submetido a um carregamento estático composto por quatro forças verticais de valor P e duas horizontais de valor $0,001 P$. As propriedades elásticas e geométricas estão assinaladas na figura e divididas em dois grupos, cabendo observar-se que os símbolos GI_x , I_y e I_z

significam a rigidez de torção, o maior e o menor momentos de inércia principais da seção transversal de cada barra. Todas as barras têm o eixo y de maior inércia disposto na horizontal.

Na referência [4.30] cada tramo é idealizado por quatro elementos barra, desenvolvidos com formulação corrotacional euleriana a partir da teoria das vigas de pequenas flechas, com acoplamento do efeito da força normal, consideração do momento torçor e tratamento de rotações finitas. Um processo iterativo-incremental com algum nível de sofisticação é adotado para a análise do problema não-linear. O carregamento é aplicado em dois incrementos e o critério de convergência adotado com tolerância de 10^{-5} . Com o objetivo de aferir o modelo incorporado ao sistema LASER, o pórtico foi discretizado com apenas uma barra para cada tramo e a análise processada sem a atualização de coordenadas e com renovação da matriz de rigidez a cada iteração. A evolução do deslocamento, indicado por v na figura 4.27, com o aumento gradativo da solicitação do pórtico, é apresentada a seguir.

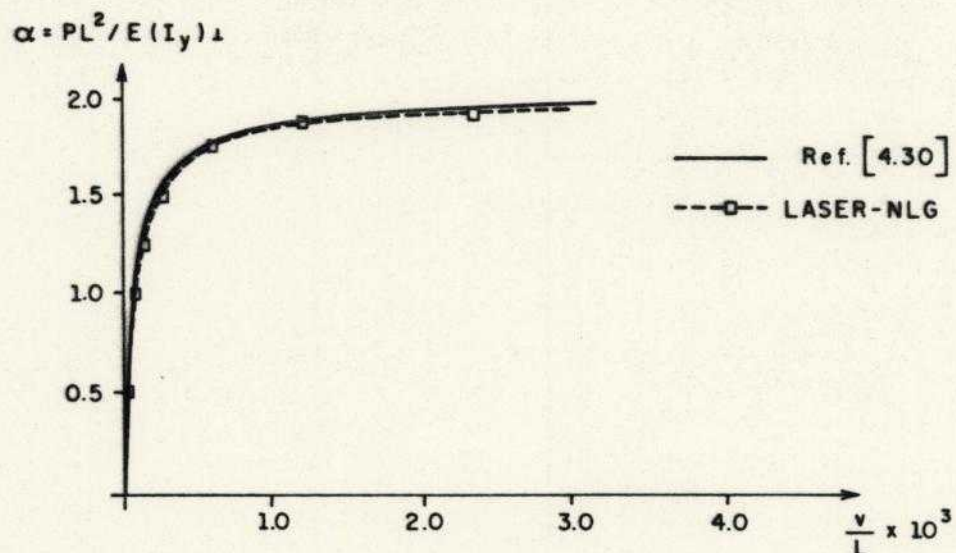


Fig. 4.27 Exemplo 4 - Resultados

Como se pode observar, o desempenho do modelo

utilizado no presente trabalho equivale ao da referência [4.30], bem mais sofisticado, pelo menos no que se refere ao tratamento das rotações e à eliminação dos deslocamentos de corpo rígido, a despeito da discretização aqui adotada propositalmente pobre, do tratamento vetorial dado às rotações e da tolerância menos rigorosa. Neste caso para $\alpha = 1.95$ a maior rotação presente na análise foi igual a $0,68^\circ$, portanto, pequena. Para $\alpha = 2.00$ ocorre divergência.

4.12 TRÊS EXEMPLOS PLANOS- COMPARAÇÃO COM A ANÁLISE P- Δ

Em [4.37] França apresenta estudo do efeito de segunda ordem global em edifício de doze pavimentos de concreto armado, com três alternativas para o esquema estrutural básico. Em cada uma delas, de acordo com as características do sistema estrutural do edifício e do carregamento estático adotado, é possível representar o contraventamento do edifício por um único painel plano. Nas duas primeiras alternativas o painel é um pórtico e na terceira uma parede. Nas três opções é feita uma estimativa do comportamento não-linear da estrutura com o processo P- Δ , com rigidez constante, conforme descrição em [4.38], adotando-se valores reduzidos para as inércias de pilares e vigas, conforme [4.39], buscando-se incorporar, de maneira aproximada, a fissuração das peças de concreto armado. As ações consideradas são as forças verticais permanentes e acidentais, a inclinação acidental dos pilares e a ação do vento.

Não se pretende rerepresentar detalhes sobre as características do edifício, a escolha do painel plano que resume o contraventamento e a determinação do carregamento, presentes em [4.37]. Apenas interessa comparar os resultados com aqueles provenientes da análise NLG, com a utilização do modelo desenvolvido no presente trabalho, e verificar, em situações reais de projeto, o seu desempenho

e a sua aplicabilidade.

4.12.1 Primeira Opção

A figura 4.28 esquematiza o pórtico correspondente à primeira opção analisada. As características das seções transversais das vigas e pilares são identificadas com os índices v e p , respectivamente. As forças horizontais indicadas incluem as ações devidas ao vento e a simulação aproximada do efeito do desaprumo por forças horizontais equivalentes.

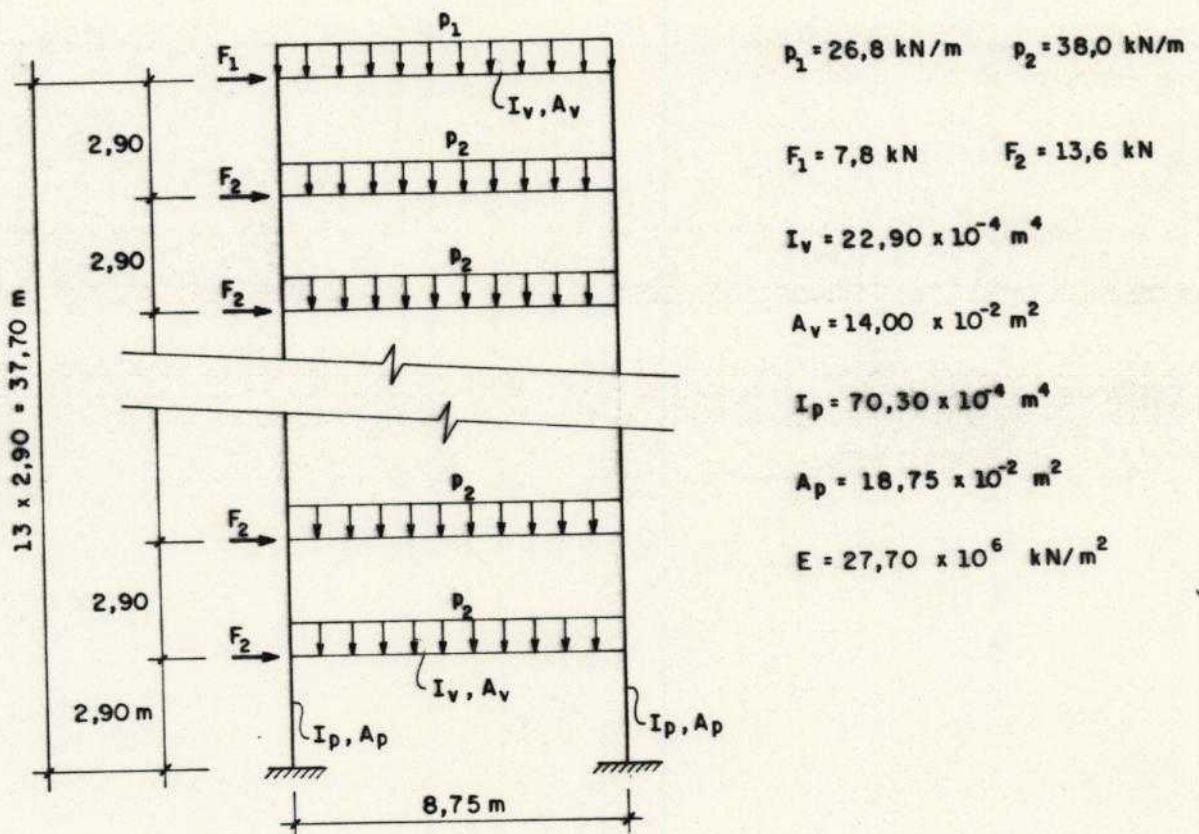


Fig.4.28 Primeira opção

O efeito P- Δ no pórtico pode ser incluído em sua análise pelo acréscimo de forças horizontais equivalentes ao momento das forças verticais na estrutura deformada (

vide figura 4.29). A força horizontal a ser acrescentada em cada cada pavimento i é dada por

$$H_i = V_i \frac{d_i}{h_i} - V_{i+1} \frac{d_{i+1}}{h_{i+1}}$$

onde H_i é a força horizontal acrescentada no pavimento i

V_i é a força vertical total aplicada no pavimento i

h_i é a altura do pavimento i

... (4.123)

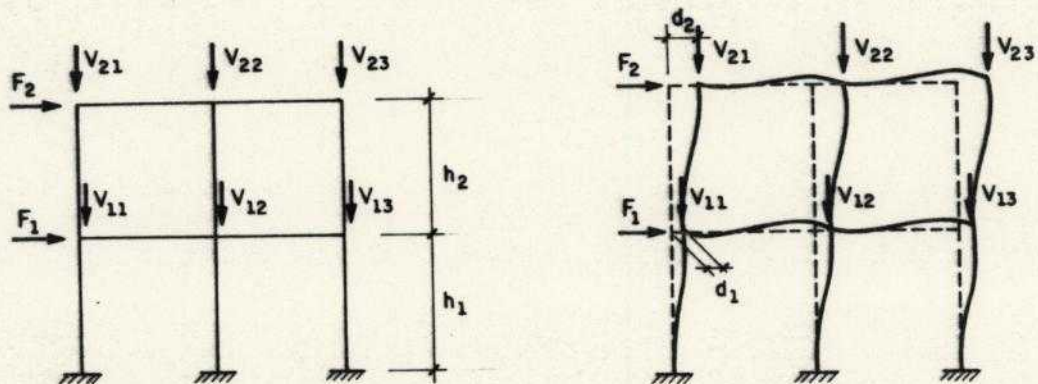


Fig. 4.29 Processo P-Δ

O procedimento é iterativo, chegando-se ao fim quando as forças horizontais equivalentes, correspondentes a uma determinada iteração, não diferem significativamente das que foram calculadas em iteração anterior. A análise apresentada em [4.37] foi interrompida na segunda iteração.

O pórtico foi também analisado com a utilização do sistema LASER. Cada um dos tramos de viga ou pilar foi idealizado por uma única barra. As forças distribuídas atuantes nas vigas foram substituídas pelas ações nodais equivalentes, correspondentes à análise elástica linear de primeira ordem. A análise foi feita, inicialmente, em

processo iterativo não-incremental (sem atualização de coordenadas), com renovação da matriz de rigidez a cada nova iteração. Neste caso ocorre convergência na terceira iteração, sendo o tempo de processamento igual a 34,05s . A seguir foi feita análise iterativa não-incremental, com manutenção da matriz de rigidez durante todo o processo. A convergência foi alcançada na quarta iteração, com resultados praticamente iguais aos da análise anterior e tempo de processamento igual a 27,91s. Cabe observar que a máxima rotação prevista é de $0,28^\circ$. De um modo geral o sistema estrutural ao obedecer a critérios de resistência para as várias combinações de carregamentos normalizadas, de limitação de flechas no topo, etc, possui rigidez suficiente para a garantia de tratamento das rotações como pequenas, mesmo com a aplicação de todo o carregamento de uma única vez, não havendo necessidade de emprego da atualização de coordenadas. Dificilmente essas rotações ultrapassarão o valor de $1,5^\circ$. Essa característica simplificadora permite e justifica a aplicação de modelos de NLG menos ousados como os que se apresentam neste trabalho.

A tabela 4.2 exhibe alguns resultados encontrados em [4.37], bem como os que foram encontrados com a utilização do sistema LASER. São eles a flecha no topo do edifício (f), as reações força horizontal (H), vertical (V) e momento (M), na base dos pilares da prumada esquerda (e) e direita (d). São apresentadas também as percentagens de variação desses valores relativos aos de primeira ordem.

Variável	1ª ordem	P-Δ [4.37]	LASER - NLG
f (m)	0,103	0,115 (+11,6%)	0,112 (+8,7%)
H _e (kN)	30,80	35,43* (+15,0%)	31,64 (+2,7%)
V _e (kN)	1798	1761 (-2,1%)	1770 (-1,6%)
M _e (kN.m)	258,2	286,0 (+10,8%)	279,7 (+8,3%)
H _d (kN)	140,2	145,6* (+3,9%)	139,4 (-0,6%)
V _d (kN)	2426	2463 (+1,5%)	2455 (+1,2%)
M _d (kN.m)	366,6	395,6 (+7,9%)	387,2 (+5,6%)

Tab. 4.2 Primeira opção- Comparação de resultados

Pode-se observar a proximidade dos resultados neste caso, com um nível de não-linearidade muito baixo. Os valores das reações horizontais assinaladas com "*", correspondentes ao processo P-Δ, não incluem a força horizontal que deveria ser adicionada ao nível das fundações. Evidentemente que os resultados provenientes da análise P-Δ não contemplam o equilíbrio da estrutura em sua configuração deformada. Já a análise NLG faz uma previsão na configuração final, atendendo ao equilíbrio global da estrutura e ao equilíbrio de cada um de seus elementos. Como ilustração, a figura 4.30 mostra a situação final da barra que modela o tramo inferior do pilar da prumada direita. É fácil comprovar o equilíbrio levando-se em conta a deformação sofrida pela estrutura, na análise NLG.

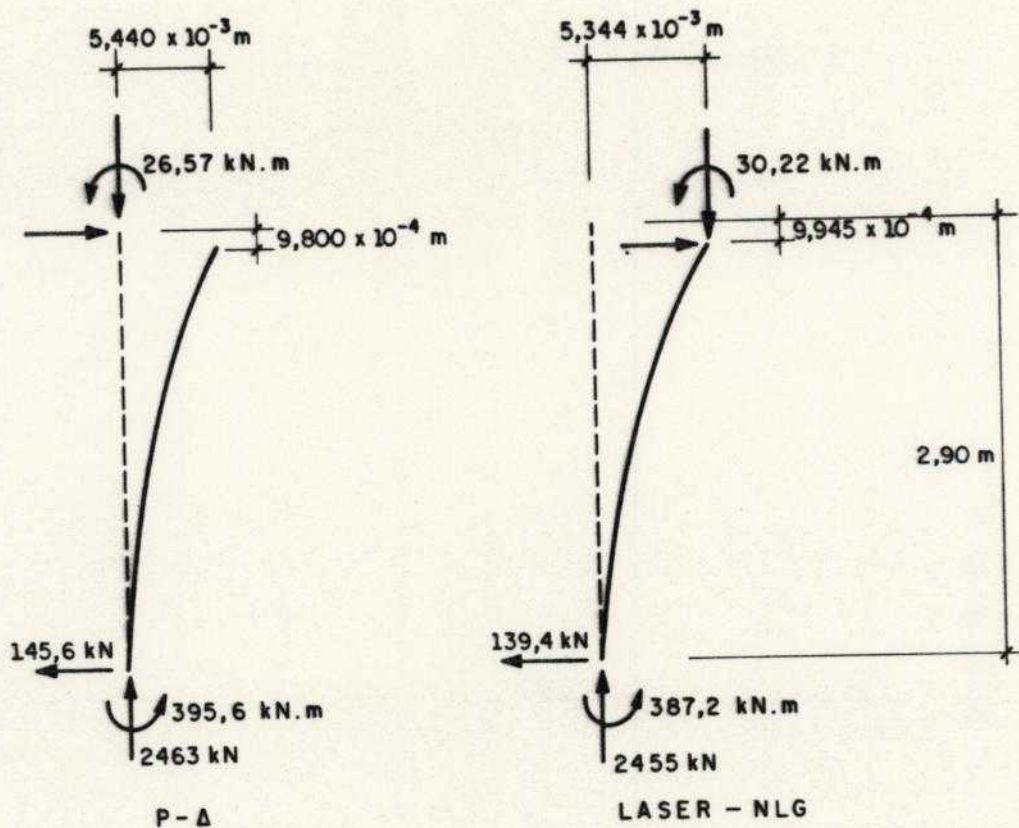


Fig. 4.30 Equilíbrio de barra em configuração final

4.12.2 Segunda Opção

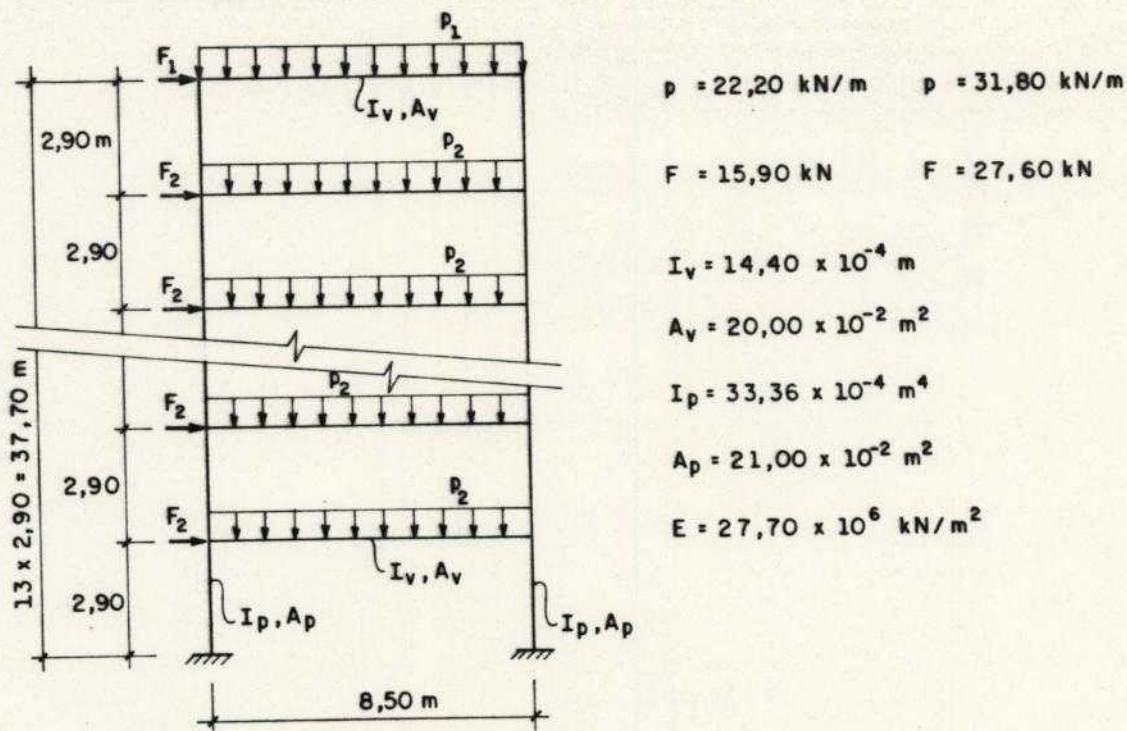


Fig. 4.31 Segunda Opção

A segunda opção analisada é apresentada na figura 4.31. Cabem aqui observações análogas às apresentadas no item 4.12.1.

A análise P- Δ , cujos resultados são apresentados em [4.37], foi interrompida na terceira iteração. Com a utilização do sistema LASER o exemplo foi resolvido inicialmente com processo iterativo não-incremental, renovando-se a matriz de rigidez a cada iteração. Neste caso a convergência é alcançada com quatro iterações, em um tempo de processamento igual a 42,51s. A seguir nova resolução, com a matriz constante, chegou-se à convergência com seis iterações, sendo de 35,10s o tempo de processamento. A tabela a seguir apresenta os resultados destacados em [4.37], de forma semelhante ao da primeira opção.

Variável	1ª ordem	P- Δ [4.34]	LASER - NLG
f (m)	0,330	0,528 (+60,0%)	0,371 (+12,4%)
H _e (kN)	132,4	183,7* (+38,7%)	138,9 (+4,9%)
V _e (kN)	1043	640,3 (-38,6%)	960,5 (-7,9%)
M _e (kN.m)	522,1	778,6 (+49,1%)	578,2 (+10,7%)
H _d (kN)	214,8	271,7* (+26,5%)	208,2 (-3,1%)
V _d (kN)	2389	2792 (+16,9%)	2472 (+3,5%)
M _d (kN.m)	602,2	867,3 (+44,0%)	649,6 (+7,9%)

Tab. 4.3 Segunda opção- Comparação de resultados

Nota-se que a análise P- Δ superestima a variação dos resultados em relação aos de primeira ordem, não sendo adequada na presente situação. Há processos que tentam prever o comportamento em segunda ordem, de forma aproximada, promovendo uma análise em primeira ordem com a

majoração das forças horizontais, como os apresentados por MacGregor e Hage [3.39] e por Vasconcellos [3.40], para estruturas planas. A estimativa da majoração das forças horizontais é função de parâmetros que medem o estado do sistema estrutural quanto à possibilidade de atingirem a instabilidade global. No primeiro processo o parâmetro de estabilidade empregado (q) fornece uma boa estimativa da razão entre a soma das cargas verticais atuantes e o seu valor crítico. Desde que esse parâmetro não ultrapasse o valor de 0,20, pode-se calcular o fator de amplificação simplesmente como $1/(1-q)$. O segundo processo, bastante interessante, utiliza como parâmetro de instabilidade o de Beck (α) [4.41], muito difundido no meio acadêmico e entre os projetistas estruturais. A partir da razão entre o valor crítico do parâmetro de Beck, dependente do número de pavimentos do edifício, e o seu valor atual é possível estimar-se o fator de amplificação das forças horizontais, de acordo com a sua natureza (ação do vento, desaprumo, etc.). Segundo [4.40] desde que o parâmetro de Beck não supere 1,3 o processo é aplicável de forma satisfatória.

No exemplo atual foi feita a aplicação desses processos sendo que, no primeiro deles, chegou-se a $q = 0,119$, que corresponde a um fator de ampliação igual a 1,135. Com a aplicação do segundo critério encontra-se $\alpha = 1,270$ e o fator de ampliação 1,273. Com esses fatores de amplificação foi feita análise linear do pórtico sendo que os resultados a serem comparados com os da tabela 4.2 são exibidos a seguir.

Variável	1ª ordem	Ampl.= 1,135	Ampl.= 1,273
f (m)	0,330	0,372 (+12,7%)	0,420 (+27,3%)
H _e (kN)	132,4	155,8 (+17,7%)	180,0 (+36,0%)
V _e (kN)	1043	952,5 (-8,7%)	859,1 (-17,6%)
M _e (kN.m)	522,1	598,1 (+14,6%)	676,2 (+29,5%)
H _d (kN)	214,8	238,2 (+10,9%)	262,2 (+22,1%)
V _d (kN)	2389	2480 (+3,8%)	2573 (+7,7%)
M _d (kN.m)	602,2	678,1 (+12,6%)	756,1 (+25,6%)

Tab. 4.4 Segunda opção - Ampliação de ações horizontais

Pode-se notar que, neste caso, a aplicação dos processos de majoração de forças horizontais produz resultados bem mais próximos dos da análise NLG do que o processo P-Δ, apesar de apresentarem a característica de superestimarem as reações horizontais, o que acontece também com as forças cortantes nas barras verticais. Este fato é intrínseco à natureza desses processos, devido à amplificação de forças horizontais. De um modo geral deve-se optar pela aplicação de modelos que permitem a análise NLG, que representam melhor o comportamento da estrutura em segunda ordem, são mais gerais e evitam as imprecisões características dos processos aproximados. Cabe lembrar que mesmo os processos de majoração das ações horizontais, em geral mais eficientes que o processo P-Δ, só devem ser utilizados quando os pórticos são muito rígidos [4.39]. Como ilustração é apresentada a situação da barra vertical inferior direita em sua configuração final de equilíbrio, correspondente à análise NLG, com a utilização do sistema LASER.

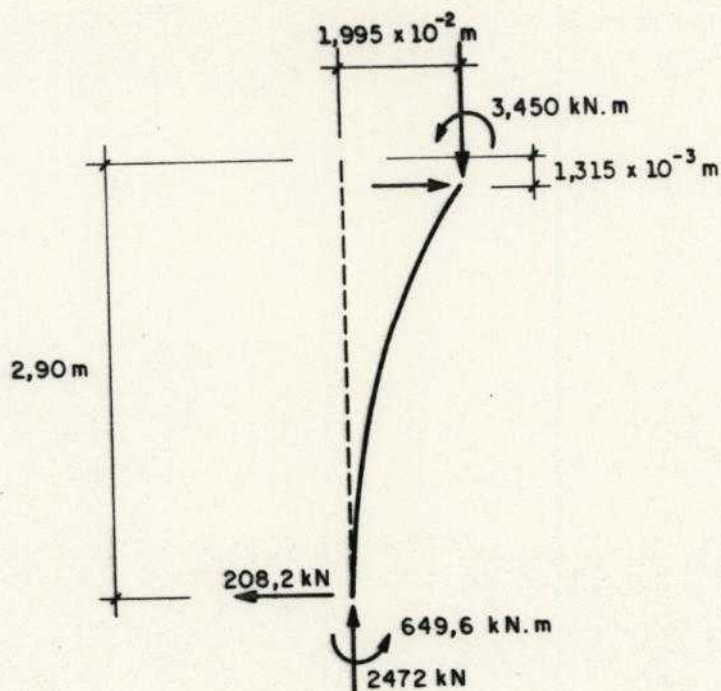


Fig. 4.32 Equilíbrio de barra em configuração final

4.12.3 Terceira Opção

A terceira opção analisada é apresentada na figura 4.33. É constituída por uma parede equivalente ao conjunto de paredes que compõem o sistema de contraventamento do edifício. O número de barras do modelo é igual ao número de pavimentos do edifício. Como se ressalta em [4.37], em condições de projeto, haveria necessidade de se aumentar a rigidez do contraventamento, buscando-se reduzir os efeitos de segunda ordem que, como se perceberá, são muito altos.

Em [4.37] interrompeu-se a análise com o processo P- Δ na terceira iteração. Utilizando-se o sistema LASER, com processo iterativo não-incremental, renovando-se a matriz de rigidez a cada iteração, atingiu-se a convergência na oitava iteração, com um tempo de processamento igual a

42,02s. Em seguida uma nova análise, com matriz constante, convergiu em 12 iterações consumindo tempo de processamento igual a 28,84s. A tabela 4.5 exhibe o deslocamento horizontal no topo do edifício (f) e o momento total na fundação (M). Quanto aos resultados correspondentes à análise P-Δ cabe observar-se que foram feitas mais duas iterações necessárias para a convergência do processo.

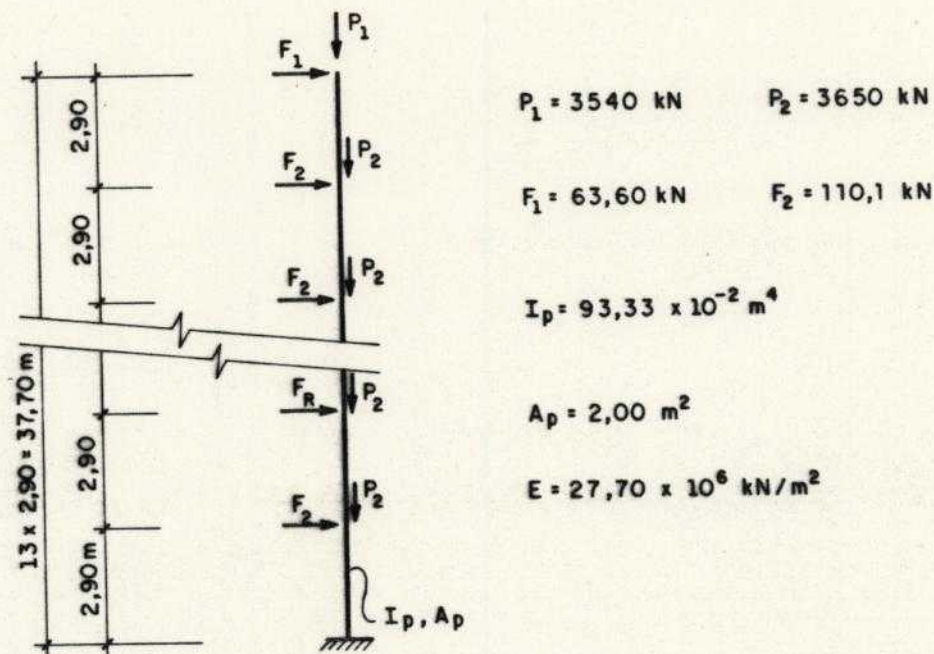


Fig.4.33 Terceira Opção

Variável	1ª ordem	P-Δ	LASER - NLG
f (m)	0,377	0,598 (+58,6%)	0,601 (+59,4%)
M (kN.m)	2730	3950 (+44,7%)	3959 (+45,0%)

Tab. 4.5 Terceira opção- Comparação de resultados

Neste caso, ocorre boa aproximação entre os resultados provenientes das duas análises. Isto deve-se ao fato de que a alteração da rigidez depende quase exclusivamente dos deslocamentos horizontais dos nós. Importa observar-se que,

mesmo com um nível de não-linearidade tão elevada, tem-se como máxima rotação alcançada o valor $1,25^\circ$, podendo ser tratada como pequena. Observe-se que o deslocamento horizontal do topo do edifício atinge o inadmissível valor de $1/63$ da altura total.

A situação da barra inferior em sua configuração final de equilíbrio, correspondente à análise NLG, com a utilização do sistema LASER, é mostrada na figura 4.34.

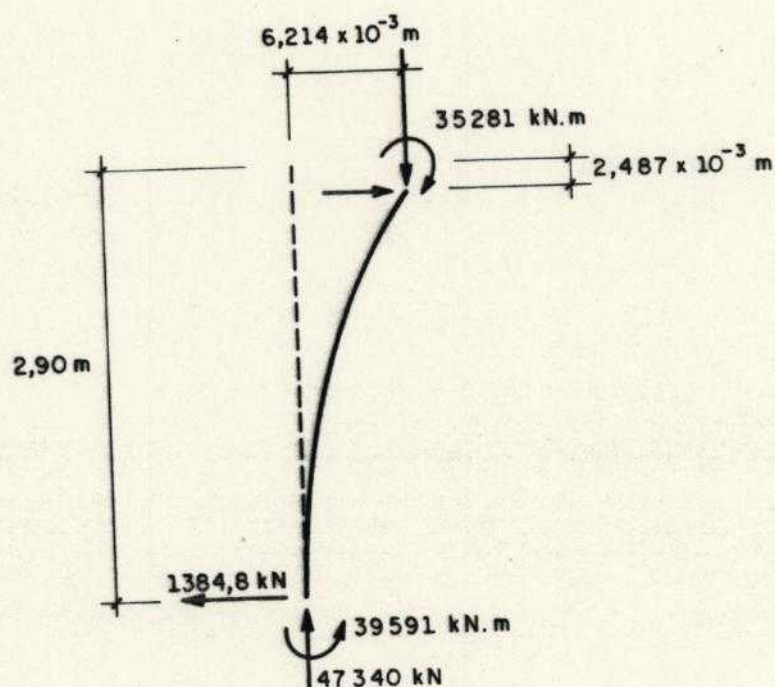


Fig. 4.34 Equilíbrio de barra em configuração final

4.13 EDIFÍCIO SUN PARK

4.13.1 Primeira Opção

Com o objetivo de exemplificar a análise NLG em estrutura de um edifício real foi utilizada a estrutura do edifício Sun Park, já descrita no terceiro capítulo. Além das ações verticais que incluem as cargas permanentes e

acidentais , foi considerada a ação do vento segundo a direção do eixo de simetria dos pavimentos, sendo a face de barlavento a que contém os pilares P17 a P20. Buscando-se ampliar os efeitos de segunda ordem, foi considerada a representação menos rígida possível do sistema estrutural do edifício , ou seja, associação plana de painéis e sem a consideração de trechos rígidos nas barras.

Quanto ao carregamento é preciso observar que, conforme a Norma de Ações e Segurança nas Estruturas [4.42], o coeficiente de ponderação das ações γ_f pode ser considerado como o produto de dois outros, γ_{f1} e γ_{fs} . O primeiro leva em conta a variabilidade das ações e o segundo considera possíveis erros de avaliação dos efeitos dessas ações. No tratamento da NLG , como não há proporcionalidade entre ações e efeitos, é aconselhável o desdobramento nos coeficientes parciais, carregando-se a estrutura com as ações ponderadas com γ_{f1} . Ao final, ponderam-se os efeitos com γ_{fs} para a determinação da solicitação de cálculo. Não se deve tomar, segundo [4.41], γ_{fs} menor do que 1,1. Na presente análise foi adotado $\gamma_{f1} = 1,25$, o que corresponde a $\gamma_{fs} = 1,12$ quando $\gamma_f = 1,4$. Foi considerada uma combinação última normal com $\gamma_g = \gamma_q = 1,4$, sendo que a ação do vento foi considerada como a ação variável principal e as demais (sobrecargas de utilização dos pavimentos) foram reduzidas pelo fator $\psi_0 = 0,7$. As ações, já ponderadas, são resumidas a seguir. As ações devidas ao vento, apresentadas na tabela 4.6, estão divididas por dois, já que o modelo considera apenas metade da estrutura. As ações verticais apresentadas na tabela 4.7, não incluem o peso próprio dos pilares, e apresentam o resultado da combinação de ações permanentes e acidentais para o pavimento tipo. Para os outros pavimentos, como a diferença em relação ao pavimento tipo é muito pequena, foi adotado o mesmo carregamento vertical.

Pavimento	Força (kN)
4	28.25
5	30.06
6	33.02
7	35.36
8	37.30
9	38.98
10	40.47
11	41.81
12	43.03
13	44.15
14	45.20
15	46.18
16	47.09
17	47.96
18	50.53
19	26.58

Tab. 4.6 Ações devidas ao vento

Pilar	Força (kN)
P1	65.93
P2*	77.32
P4*	134.59
P5	84.84
P6	208.89
P9	146.13
P11	51.74
P12	155.54
P15	145.83
P17	69.415
P18	4.520

* metade da carga devido à simetria

Tab. 4.7 Ações verticais - Pav. Tipo

O modelo montado é o mesmo descrito no terceiro parágrafo do item 3.8. A análise processada foi iterativa, não-incremental, com atualização da matriz de rigidez a cada iteração. Há convergência na terceira iteração, com um tempo de processamento igual a 313,95s . Em uma segunda análise , com matriz constante, a convergência foi

alcançada com quatro iterações em 301,27s. O nível de não-linearidade é pequeno, mesmo com a consideração do sistema estrutural favorável aos efeitos de segunda ordem. Isto pode ser observado na tabela 4.8, em que são apresentados alguns resultados finais e a comparação com os de primeira ordem. Tais resultados escolhidos são: o deslocamento horizontal do topo do edifício na direção da ação do vento (f) e as reações horizontal (H), vertical (V) e momento (M) na base do pilar P1.

Variável	1º ordem	Valor final
f (m)	0,1058	0,1169 (+10,5%)
H (kN)	41,21	41,00 (-0,5%)
V (kN)	2224	2282 (+2,6%)
M (kN.m)	204,5	220,3 (+7,7%)

Tab. 4.8 Primeira opção - Resultados

A configuração final de equilíbrio da barra que representa o tramo inferior do pilar P1 é apresentada, como ilustração, na figura 4.35.

Observe-se que a deslocamento no topo do edifício é igual a 1/441 da altura total, valor bastante razoável em termos de projeto. A máxima rotação que se alcança na análise NLG, neste caso, é igual a $0,19^\circ$, que pode ser tratada como pequena. Não será considerado o modelo tridimensional do sistema estrutural, com trechos rígidos de barras, sem dúvida mais rígido e, portanto com menor nível de NLG.

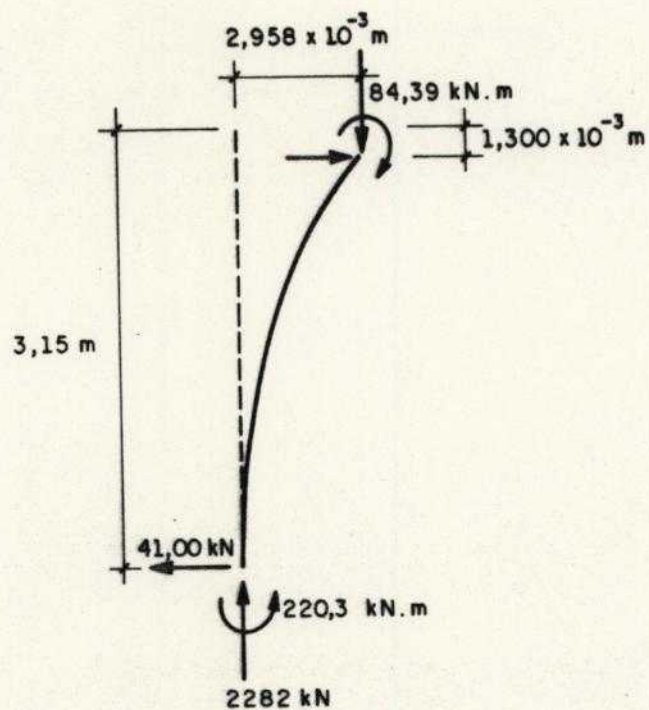


Fig. 4.35 Equilíbrio do tramo inferior do pilar P1

4.13.2 Segunda Opção

Buscando-se acrescentar ao caso anterior um pouco mais de efeito de segunda ordem foi imaginado edifício semelhante ao Sun Park, tendo como modificações o aumento de cinco pavimentos-tipo e a inexistência de pavimento enterrado no solo. Foram considerados os mesmos carregamentos da primeira opção, sendo que a ação do vento sobre a estrutura altera-se em função da nova geometria do edifício. A tabela 4.9 exhibe as forças devidas ao vento, aplicadas ao nível de cada pavimento, com o ponderador $\gamma_{f,1}$

Pavimento	Força (kN)
1	25.20
2	30.92
3	34.37
4	33.70
5	35.64
6	37.33
7	38.83
8	40.19
9	41.44
10	42.59
11	43.67
12	44.68
13	45.63
14	46.52
15	47.38
16	48.19
17	48.97
18	49.72
19	50.44
20	51.13
21	51.79
22	54.31
23	28.45

Tab. 4.8 Ações devidas ao vento

A associação de painéis é considerada da mesma forma que na opção anterior. O modelo tem como diferença fundamental, em relação ao anterior, o acréscimo dos números de barras e nós, que passam a ser, respectivamente, 391 e 264. A análise iterativa não-incremental, com renovação da matriz de rigidez em cada iteração, converge na quarta iteração, com um tempo de processamento igual a 421,44 s. Com a manutenção da matriz inicial são necessárias seis iterações, consumindo tempo de 383,22 s. A máxima rotação encontrada é de $0,31^\circ$, passível de tratar-se como pequena. As deformadas do pilar P1, em primeira ordem e para a primeira e quarta iterações podem ser observadas na figura 4.36, onde os deslocamentos estão ampliados duzentas vezes.

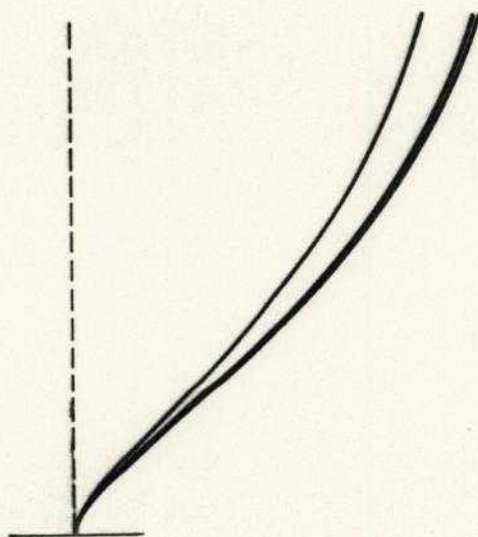


Fig. 4.36 Configurações deformadas em sucessivas iterações

Os resultados correspondentes aos da tabela 4.8 são a seguir apresentados, incluindo-se as iterações intermediárias para que se possa perceber a rapidez da convergência.

Variável	1ª ord.	Iter.1	Iter.2	Iter.3	Iter.4
f (m)	0,2143	0,2450	0,2478	0,2481	0,2482 (15,8%)
H (kN)	62,47	61,53	61,36	61,34	61,34 (-1,8%)
V (kN)	3278	3440	3455	3456	3457 (5,5%)
M (kN.m)	308,6	339,0	341,4	341,7	341,7 (10,7%)

Tab. 4.9 Segunda opção - Resultados

A convergência ocorre rapidamente como se pode notar acompanhando-se a evolução dos resultados com o crescimento do número de iterações, ou a aplicação do critério de interrupção do processo iterativo, com base nas translações nodais (vide Apêndice 1), apresentada na figura 4.37.

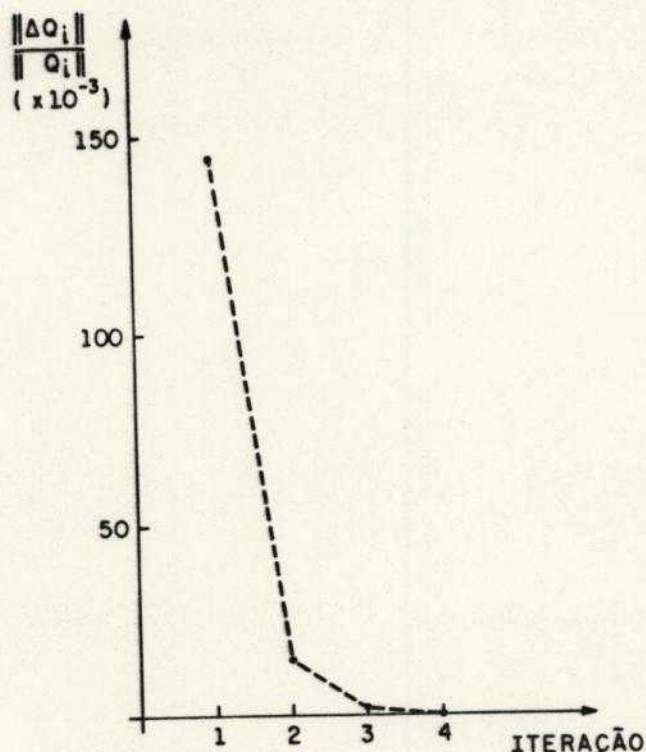


Fig. 4.37 Aplicação de critério de convergência

Cabe ressaltar que os poucos resultados mostrados têm comportamento que retrata o que acontece, de modo geral, com todos os outros, cuja apresentação se evita para não se produzir uma tabulação excessiva de valores numéricos.

Pode-se perceber que grande parte da NLG aparece na primeira iteração, o que é uma característica do fenômeno que se analisa, quando convergente. Tome-se como exemplo o deslocamento horizontal do topo do edifício, que na quarta iteração apresenta-se 15,8% maior que o de primeira ordem, sendo que na primeira iteração tal acréscimo já alcança 14,3%. O valor final deste deslocamento atinge 1/264 da altura total do edifício. Na presente análise a máxima rotação encontrada é de $0,31^\circ$, portanto pequena.

A situação final de equilíbrio da barra que simula o comportamento do tramo inferior do pilar P1, pode ser observada na figura 4.38. Ressalte-se que o equilíbrio

retratado só é possível com o cômputo dos deslocamentos ocorridos.

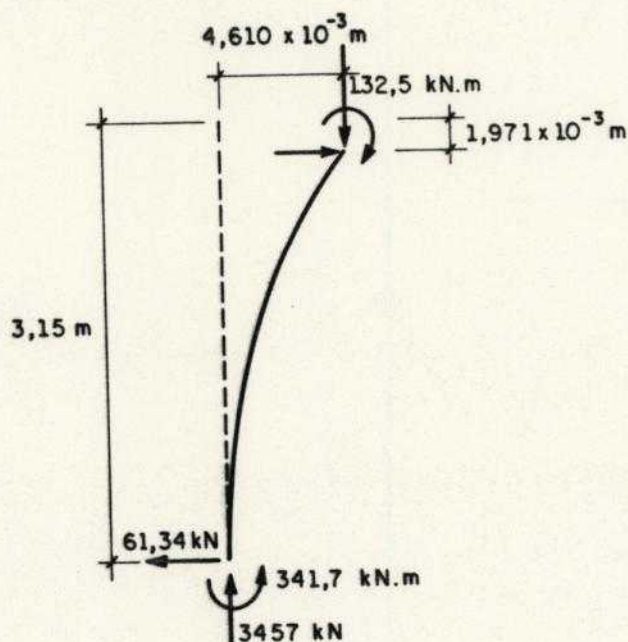


Fig. 4.38 Equilíbrio do tramo inferior do pilar P1

4.13.3 Terceira Opção

Finalmente foi concebido um modelo tridimensional, levando-se em conta a simetria do sistema estrutural e do carregamento a ser analisado. Foram incluídos todos os pilares e os tramos de viga que os ligam e possam, no carregamento escolhido, ter alguma participação no sistema de contraventamento do edifício, perfazendo-se um total de 264 nós e 483 barras. Cada pavimento foi tratado como um diafragma rígido em seu plano. Foram considerados "offsets" rígidos nas barras horizontais sempre segundo a maior dimensão do pilar a que se ligam. As barras simuladoras dos pilares P2 e P4 foram adotadas com metade de sua rigidez, devido à simetria. O carregamento é o mesmo descrito para a segunda opção. Com um tempo de processamento de 569,41s a análise iterativa não-incremental, com renovação da matriz

de rigidez em cada iteração, converge na terceira iteração. Mantendo-se a matriz de rigidez inicial, há convergência na quarta iteração, em um tempo de processamento de 457,75s. A máxima rotação encontrada é de $0,25^\circ$, que pode ser tratada como pequena, não havendo necessidade de aplicação do carregamento de forma incremental.

É possível notar-se a rápida convergência observando-se os resultados listados a seguir, correspondentes aos que foram apresentados para a primeira e a segunda opções. São eles o deslocamento horizontal do topo do edifício na direção da ação do vento (f) e as reações horizontal (H), vertical (V) e momento (M) na base do pilar P1.

Variável	1ª ord.	Iter.1	Iter.2	Iter.3	
f (m)	0,1670	0,1874	0,1889	0,1890	(13,2%)
H (kN)	70,31	70,25	70,17	70,17	(-0,2%)
V (kN)	3243	3379	3389	3390	(4,5%)
M (kN.m)	293,3	317,8	319,4	319,5	(8,9%)

Tab. 4.11 Terceira opção - Resultados

O modelo correspondente à terceira opção é mais representativo do que o anterior, pois, além de tridimensional, considera os trechos rígidos de barras. Como já se mostrou no terceiro capítulo, há grande influência da consideração dessas particularidades nos resultados obtidos. Na consideração da NLG, com muito mais forte razão já que a solução depende dos deslocamentos que ocorrem. Comparando-se os resultados listados nas tabelas 4.10 e 4.11 pode-se notar que, na terceira opção, mais rígida, há menor nível de NLG, o que não ocorre apenas para os valores apresentados, sendo uma tendência generalizada. A estimativa do deslocamento "f" que antes era de $1/264$ da

altura do edifício cai a 1/345. Mudança bastante expressiva que pode ser a diferença entre a consideração de um valor como admissível ou não. Aqui também observou-se que grande parte da NLG já aparece na primeira iteração.

A seguir, na tabela 4.9, são exibidos os esforços solicitantes na base de todos os pilares. Para cada pilar, tem-se na primeira linha os esforços de primeira ordem e na segunda linha os de segunda ordem. A força cortante 2 e o momento fletor 3 correspondem à flexão em plano paralelo ao de simetria da estrutura, enquanto a força cortante 3 e o momento fletor 2 correspondem a plano perpendicular.

Pilar	Normal	Cortante 2	Cortante 3	Fletor 2	Fletor 3
P1	.3243E+4	-.7031E+2	.1669E+1	-.1753E+1	-.2933E+3
	.3390E+4	-.7017E+2	.1832E+1	-.2044E+1	-.3195E+3
P2	.6526E+4	-.3108E+2	.0000E+0	.0000E+0	-.6504E+2
	.6762E+4	-.2468E+2	.0000E+0	.0000E+0	-.6828E+2
P4	.5484E+4	-.3974E+2	.0000E+0	.0000E+0	-.1050E+3
	.5312E+4	-.3586E+2	.0000E+0	.0000E+0	-.1123E+3
P5	.3252E+4	-.1621E+2	.1497E+1	-.1572E+1	-.3073E+2
	.3375E+4	-.1311E+2	.1737E+1	-.1831E+1	-.3241E+2
P6	.4175E+4	-.1687E+3	-.1067E+1	.1121E+1	-.8290E+3
	.4149E+4	-.1725E+3	-.1123E+1	.1242E+1	-.9068E+3
P9	.4149E+4	-.5694E+3	-.0000E+0	.0000E+0	-.3632E+4
	.4149E+4	-.5845E+3	-.0000E+0	.0000E+0	-.3980E+4
P11	.2290E+4	-.2129E+2	-.7775E+1	.8163E+1	-.4915E+2
	.2254E+4	-.2017E+2	-.8461E+1	.8902E+1	-.5292E+2
P12	.3325E+4	-.2103E+2	-.3019E+1	.3170E+1	-.5323E+2
	.3334E+4	-.1833E+2	-.3184E+1	.3349E+1	-.5667E+2
P15	.5148E+4	-.3308E+2	-.1291E+2	.1356E+2	-.6773E+2
	.5154E+4	-.2911E+2	-.1430E+2	.1502E+2	-.7212E+2
P17	.1456E+4	-.1546E+2	-.3059E+1	.3212E+1	-.2995E+2
	.1352E+4	-.1511E+2	-.3286E+1	.3455E+1	-.3242E+2
P18	.3110E+4	-.2016E+2	.5303E+0	-.5568E+0	-.4174E+2
	.2961E+4	-.1788E+2	.6918E+0	-.7271E+0	-.4442E+2

Tab. 4.10 Esforços nas bases dos Pilares (kN , m)

Como ilustração de equilíbrio na configuração final deformada, a figura 4.39 apresenta a barra que simula o comportamento do tramo inferior do pilar P1, caracterizando os dois planos principais de flexão. Qualquer outra barra do modelo equilibra-se na posição final, com a consideração dos deslocamentos nodais, inclusive as que têm trechos rígidos. O sistema estrutural como um todo também atende ao equilíbrio, levando-se em conta todos os deslocamentos sofridos pelos nós.

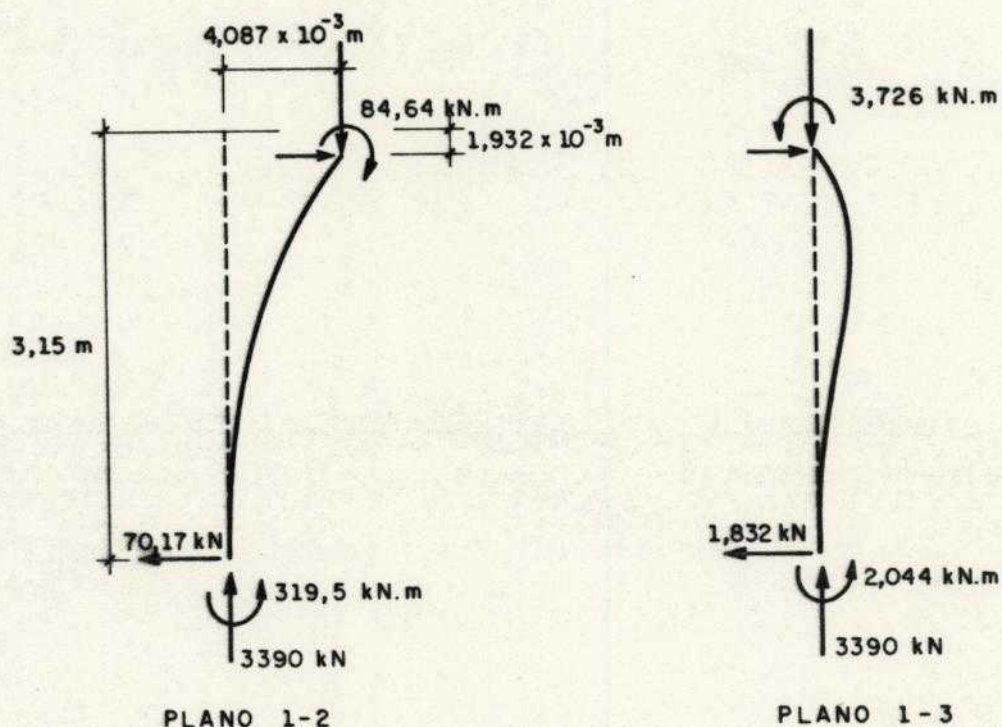


Fig. 4.39 Equilíbrio do tramo inferior do pilar P1

4.14 CONCLUSÕES

A assimilação de conceitos relativos à NLG é imperiosa por parte dos projetistas de estruturas, sendo necessário romper com a idéia de que a análise linear é capaz de produzir sempre os resultados suficientes para a realização do projeto do edifício. É importante observar-se que com a tendência de verticalização das cidades de médio e grande

porte o risco de se ter níveis de NLG altos é grande, estando o projetista compelido a rever seus modelos e instrumentação básica para a elaboração do projeto estrutural.

Cabe, em paralelo, ao meio acadêmico realizar um esforço de divulgação amplo desse assunto, em linguagem que não perca a precisão, mas que seja o mais complexa possível, para permitir o acesso do projetista à compreensão dos modelos não-lineares, ainda pouco difundidos em nosso país.

O modelo utilizado neste trabalho é simples e suficientemente preciso para as aplicações no projeto estrutural do edifício. A hipótese das pequenas rotações atende às necessidades práticas, sendo que, mesmo quando se tem grandes rotações é possível manter o mesmo modelo desde que se utilize a atualização de coordenadas, restringindo os incrementos das rotações entre duas atualizações sucessivas.

O tratamento vetorial aproximado adotado neste trabalho mostrou-se adequado para as rotações usuais.

A consideração de trechos rígidos da forma proposta, permite efetuar-se a translação de coordenadas de maneira simples, semelhante ao caso linear, aproveitando-se os desenvolvimentos relativos a matrizes e vetores associados à barra.

O comportamento NLG típico do sistema estrutural do edifício compreende a redução progressiva da rigidez global com o aumento dos deslocamentos, mesmo que alguns de seus componentes estejam aumentando individualmente a sua rigidez, como por exemplo barras que sejam eventualmente tracionadas.

Nas situações usuais de projeto, a convergência é alcançada em poucas iterações, com grande parte da NLG presente já na primeira iteração. O parâmetro utilizado no critério de interrupção do processo iterativo, baseado em deslocamento, força ou energia (vide Apêndice 1), que não

deve superar uma tolerância máxima pré-estabelecida, apresenta usualmente uma queda sistemática e muito rápida. Como as rotações são, em geral, muito pequenas, não há necessidade de se recorrer à atualização de coordenadas, podendo o carregamento ser aplicado em um único incremento.

Em todos os exemplos reais de projetos analisados (os apresentados neste trabalho e outros que foram omitidos para se evitar a excessiva e massante tabulação de resultados), foi mais vantajoso , em termos de tempo de processamento, a análise NLG com a manutenção na matriz do sistema, levando-se ao segundo membro das equações as parcelas não-lineares. Apesar do número de iterações necessárias para se atingir a convergência ser em torno de 50% maior que na análise com alteração da matriz em cada passo , a eliminação de algumas etapas da resolução do sistema de equações produz um ganho real no tempo total consumido na análise.

A proximidade de uma situação de instabilidade por ponto limite ou bifurcação do equilíbrio pode ser pressentida por uma divergência da solução, sendo que a tendência de crescimento excessivo dos deslocamentos já leva à condição de inviabilizar a estrutura do edifício em termos práticos.

Cuidado especial deve ser tomado quando se opta por utilizar processos aproximados de consideração do problema de segunda ordem, fixando com muita precisão os limites e o alcance desse processos, em geral, limitados. A rigor uma análise do tipo P- Δ é mais apropriada nas situações em que a consideração da NLG é dispensável, por ser muito pequena.

4.15 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[4.1] Turner, M.J. , Clough,R.W., Martin,H.C., Topp,L.J.; "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures"; J. Aerospace Sciences; 23, 805-824; 1956.

[4.2] Turner, M.J., Dill, E.H., Martin, H.C., Melosh, R.J.; "Large Deflections of Structures Subjected to Heating and External Loads"; J. Aerospace Sciences; 27; 1960.

[4.3] Gallagher, R., Padlog, J.; "Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis"; AIAA J.; 1; 1963.

[4.4] Hartz, B.J.; "Matrix Formulation of Structural Stability Problems"; J. Struct. Div., ASCE; 91; 141-156; 1965.

[4.5] Novozhilov, V.; "Nonlinear Theory of Elasticity"; Graylock Press; Rochester; N.Y.; 1953.

[4.6] Argyris, J.H.; "Continua and Discontinua"; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics; 11-189; WPAFB; Ohio; 1965.

[4.7] Martin, H.C.; "On the Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems"; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics; WPAFB; Ohio; 1965.

[4.8] Mallet, R., Marçal, P.V.; "Finite Element Analysis of Nonlinear Structures"; J. Struct. Div., ASCE; 94; 2081-2105; 1968.

[4.9] Jennings, A.; "Frame Analysis Including Change of Geometry"; J. Struct. Div., ASCE; 94; 627-643; 1968.

[4.10] Powell, G.H.; "Theory of Nonlinear Elastic Structures"; J. Struct. Div., ASCE; 95; 2687-2701; 1969.

[4.11] Martin, H.C.; "Finite Elements and the Analysis of Geometrically Nonlinear Problems"; in: Gallagher, R.H et al., ed.; Recent Advances in Matrix Methods of Structural

Analysis and Design; The University of Alabama Press; Alabama; 343-381; 1969.

[4.12] Ebner,A.M., Ucciferro,J.J.; "A Theoretical and Numerical Comparison of Elastic Nonlinear Finite Element Methods"; Comput. & Struct.; 2; 1043-1061; 1972.

[4.13] Haisler,W.E., Stricklin,J.A.; Development and Evaluation of Solution Procedures for Geometrically Nonlinear Structural Analysis"; AIAA J.; 10; 264-272; 1972.

[4.14] Oran,C.; "Tangente Stiffness in Space Frames"; J. Struct. Div., ASCE; 99; 987-1001; 1973.

[4.15] Timoshenko,S.P., Gere,J.M.; "Theory of Elastic Stability"; McGraw Hill Book Company,Inc.; New York,N.Y.; 1961.

[4.16] Rajasekaran,S., Murray,D.W.; "Incremental Finite Element Matrices"; J. Struct. Div., ASCE; 99; 2423-2438; 1973.

[4.17] Gallagher,R.H.; "Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Problems"; in: Yamada,Y. e Gallagher,R.H.,ed.; Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis; University of Tokyo Press; Tokyo; 109-123; 1973.

[4.18] Zienckiewicz,O.C.; "The Finite Element Method in Engineering Science"; McGraw Hill Book Company,Inc.; London; 1971.

[4.19] Bathe,K.-J., Ramm,E., Wilson,E.L.; "Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis"; Int. J. Num. Meths. Engrg; 9; 353-386; 1975.

[4.20] Bathe, K.-J., Bolourchi, S.; "Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures"; Int. J. Num. Meths. Engrg.; 14; 961-986; 1979.

[4.21] Oran, C., Kassimali, A.; "Large Deformations of Framed Structures Under Static and Dynamic Loads"; Comput. & Struct.; 6; 539-547; 1976.

[4.22] Argyris, J.H., Dunne, P.C., Scharpf, D.W.; "On Large Displacement-Small Strain Analysis of Structures With Rotational Degrees of Freedom"; Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.; 14; 401-451; 1978.

[4.23] Wen, R.K., Rahimzadeh, J.; "Nonlinear Elastic Frame Analysis by Finite Element"; J. Struc. Engrg., ASCE; 109; 1952-1971; 1983.

[4.24] Souza Lima, V.M., Venâncio Filho, F.; "Considerações sobre a Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Reticuladas"; III Escola de Matemática Aplicada; LCC-CNPQ; Rio de Janeiro; 1982.

[4.25] Souza Lima, V.M., Venâncio Filho, F.; "A Noção de Rigidez Tangente no Estudo da Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Reticuladas";

[4.26] Mazzilli, C.E.N.; "Comportamento Não-Linear de Pórticos Planos em Regime Elástico Linear"; VII Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia; EESC-USP; São Carlos; 381-395; 1986.

[4.27] Pimenta, P.M.; "Aspectos da Análise Não Linear de Estruturas Reticuladas"; VII Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia; EESC-USP; São Carlos; 449-464; 1986.

[4.28] Pimenta, P.M., Soler, J.G.M.; "Estabilidade de Pórticos Planos de Concreto Armado"; Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto; EPUSP; São Paulo; 503-527; 1989.

[4.29] Hsiao, K.-M., Hou, F.Y.; "Nonlinear Finite Element Analysis of Elastic Frames"; Comput. & Struct.; 26; 693-701; 1987.

[4.30] Hsiao, K.-M., Horng, H.-J., Chen, Y.-R.; "A Corotational Procedure That Handles Large Rotations of Spatial Beam Structures"; Comput. & Struct.; 27; 769-781; 1987.

[4.31] Meek, J.L., Loganathan, S.; "Geometric and Material Non-Linear Behaviour of Beam-Columns"; Comput. & Struct.; 34; 87-100; 1990.

[4.32] Wong, M.B., Tin-Loi, F.; "Geometrically Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures"; Comput. & Struct.; 34; 633-640; 1990.

[4.33] Wong, M.B., Tin-Loi, F.; "Analysis of Frames Involving Geometrical and Material Nonlinearities"; Comput. & Struct.; 34; 641-646; 1990.

[4.34] Elias, Z.E.; "Theory and Methods of Structural Analysis"; John Wiley & Sons; New York, N.Y.; 1986.

[4.35] Ramalho, M.A.; "Sistemas para Análise de Estruturas Considerando Interação com o Meio Elástico"; Tese de Doutorado; EESC-USP; 1990.

[4.36] Bathe, K.J., Cimento, A.P.; "Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations"; Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. ; 22; 59-85; 1980.

[4.37] França,R.L.; "Exemplo de Cálculo do Esforço de Segunda Ordem Global em um Edifício de Concreto Armado"; in: Colóquio Sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado; IBRACON; São Paulo; 1985.

[4.38] CEB; "CEB-FIP Manual of Buckling and Instability"; The Construction Press Ltd.; Lancaster; 1978.

[4.39] MacGregor,J.G., Hage,S.E.; "Stability Analysis and Design of Concrete Frames"; J. Struct. Div., ASCE; 103; 1953-1970; 1977.

[4.40] Vasconcelos, A.C.; "Como se Pode Enrijecer Edifícios Muito Flexíveis"; in: La Ingeniería Estructural Sudamericana en la Década del 80; Montevideo; Anais, v.1; 237-268.

[4.41] Beck,H., Konig,G.; "Criteria for Judging the Stiffness of Framed Structures"; in: IABSE Symposium; London; Proceedings; 37-45.

[4.42] Associação Brasileira de Normas Técnicas; "Ações e Segurança nas Estruturas"; ABNT; Rio de Janeiro; 1984 (NBR 8681/84).

CAPÍTULO 5

O PAVIMENTO DO EDIFÍCIO

5.1 INTRODUÇÃO

O presente capítulo tem como objetivo principal o estudo dos subsistemas horizontais do edifício quanto à sua função básica de coletar as cargas gravitacionais e transmiti-las aos subsistemas verticais. Isso é feito por um comportamento predominante de flexão. Vários arranjos estruturais têm sido utilizados, sendo que alguns foram destacados no capítulo 2. Dentre eles serão ressaltados os que constituem os subsistemas placa-viga e laje plana (cogumelo).

Como já se observou no referido capítulo, a tendência natural do projetista é a de conceber cada subsistema estrutural como o arranjo de vários elementos estruturais vinculados entre si e ao meio externo que pode ser outro subsistema estrutural ou ainda o planeta que lhe serve de apoio. A idealização desses vínculos constitui etapa delicada e é decisiva para a divisão do subsistema estrutural em outros mais simples, que possam ser analisados isoladamente sem a perda de representatividade do modelo. Cabe ao projetista, com base em sua experiência e nas soluções clássicas difundidas no meio técnico e no meio acadêmico, definir até que nível de subdivisão se pode chegar em cada caso, e quais os elementos estruturais que devem ser considerados em conjunto, compatilizando os seus comportamentos.

Só serão tratados os carregamentos estáticos. Inicialmente será considerado o comportamento elástico linear do pavimento e, a seguir, o comportamento elastoplástico de placas, com a proposta de utilização de modelo simplificado para a análise de lajes de concreto

armado, baseado em diagrama momento-curvatura trilinear.

5.2 O SUBSISTEMA PLACA-VIGA

Este subsistema é constituído pela combinação de placa com barras horizontais, normalmente apoiadas em subsistemas verticais pilares ou paredes. No Brasil o uso do concreto armado é mais difundido. Neste caso, a placa é uma laje e o subsistema laje-viga.

A primeira decomposição artificial consiste em destacar os painéis de laje, considerando-os independentemente das vigas que lhe servem de apoio. O vigamento pode ser tratado como uma grelha, ou pode-se promover a segunda decomposição, que corresponde à consideração mais simples possível, em que cada uma das vigas é tratada independentemente das demais, sendo suas interseções em pontos não localizados sobre pilares ou paredes, tratados, em geral, como apoio para a viga menos rígida que transmite à mais rígida uma força vertical. Este modelo simplificado, desde que possível deve ser evitado devido às imprecisões que pode produzir. No presente trabalho tal modelo não será tratado, optando-se por analisar apenas o comportamento do modelo grelha isolado da laje e do modelo laje integrada à grelha. Em ambos os casos a vinculação aos pilares pode ser concebida como apoios e engastes deformáveis ou rígidos, podendo-se, alternativamente, incorporar trechos de pilares como barras do modelo.

5.2.1 Modelo Grelha - Descrição Sucinta

É composto por elementos do tipo barra, cujos extremos são os nós. Em geral basta uma barra para a simulação do comportamento de cada tramo de viga que possua seção transversal constante, a menos que se deseje obter diretamente deslocamentos de pontos intermediários que

podem ser designados como nós do modelo.

A vinculação das barras é tal que permite a interação de uma força ortogonal ao plano da grelha e dois momentos em torno de eixos pertencentes a esse plano. Cada nó possui três graus de liberdade: uma translação e duas rotações associados aos referidos eixos.

Para as dimensões usuais é razoável supor-se desprezível a deformação correspondente ao esforço cortante.

A vinculação a pilares é feita de forma simplificada admitindo-se um nó no centro do apoio, com impedimento de graus de liberdade desse nó ou a associação de vínculos deformáveis. No caso de pilares com grande dimensão na direção do eixo longitudinal da viga pode-se optar pela definição de nós nas faces dos pilares, considerados como indeslocáveis, devido à sua grande rigidez comparada à da viga. Recurso interessante consiste em utilizar o trecho rígido de barra (vide Cap. 3), com um único nó no centro do apoio e adição de elementos do tipo mola para a simulação das características de deformabilidade desse apoio. Observe-se que, neste caso, preserva-se a hipótese de Bernouille para a seção do pilar e determinam-se os esforços solicitantes da barra que simula a viga apenas em trechos deformáveis, que são os que efetivamente interessam. Outra vantagem da utilização de trechos rígidos com nó definido no centro do apoio é que as reações força e momentos, ao final da análise, já ficarão reduzidas ao centróide da seção do pilar, evitando-se a necessidade de nova translação de forças devida às excentricidades. Em termos conservadores pode-se optar pela definição do trecho flexível da barra um pouco maior que o vão livre, aumentando-o de uma quantidade função de alguma dimensão da viga ou do pilar que lhe serve de apoio, conforme especificações usuais das normas técnicas. A figura 5.1 ilustra algumas opções de simulação de apoios.

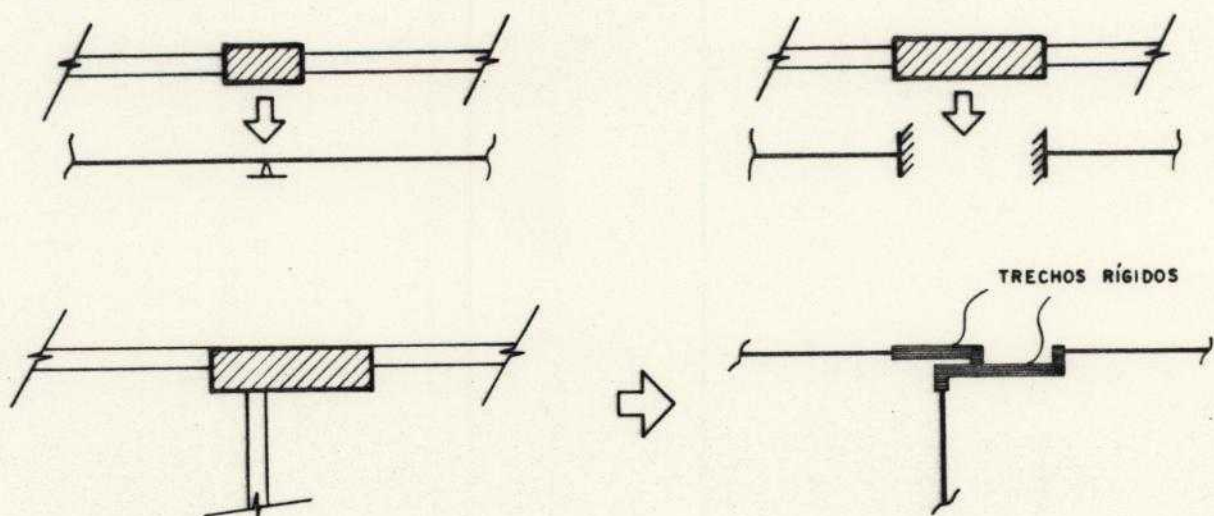


Fig. 5.1 Opções para a simulação de apoios

A determinação de constantes de mola, associadas à deformabilidade de pilares, pode ser feita de maneira simples quando se admite o comportamento elástico linear e se limita a consideração da deformabilidade aos tramos de pilar adjacentes ao pavimento. Como ilustração observe-se a figura 5.2, onde são apresentados dois tramos de pilar cuja rigidez associada à rotação do nó N, em torno de eixo ortogonal ao plano da figura, deseja-se determinar. Supondo-se que a extremidade B pudesse ser considerada como um engaste fixo, como é usual para o caso de ligações a fundações muito rígidas sobre solo não adensável, o coeficiente de mola correspondente ao tramo BN seria igual a $4(EI/l)_1$. Imaginando-se que o extremo A do tramo superior do pilar sofresse rotação igual à do nó N, como é razoável supor-se no caso de sucessivos pavimentos-tipo, de comportamento semelhante, a rigidez correspondente seria estimada como a de uma barra apoiada no ponto médio de AN e, portanto, igual a $6(EI/l)_2$. Quando o "software" utilizado não permite a especificação de elementos do tipo

mola para a inclusão de vínculos deformáveis associados a rotações, pode-se contornar tal limitação com a utilização de barras adicionais, ligadas ao nó a ser vinculado, com rigidez equivalente. Preferencialmente utiliza-se barra com liberação de vínculo que anule o esforço cortante, evitando-se o mascaramento da reação-força no nó a que se liga. Tal procedimento pode ser útil, também, para a imposição de rotações "nulas" em direções não paralelas aos eixos de referência globais que jazem no plano da grelha, especificando-se um coeficiente de mola de grande valor. Neste caso, deve-se fazer alguns testes buscando-se a rigidez que a ser especificada para reduzir-se significativamente a rotação, sem produzirem-se desastres numéricos, como na simulação de trechos rígidos com barra de grandes dimensões da seção transversal.

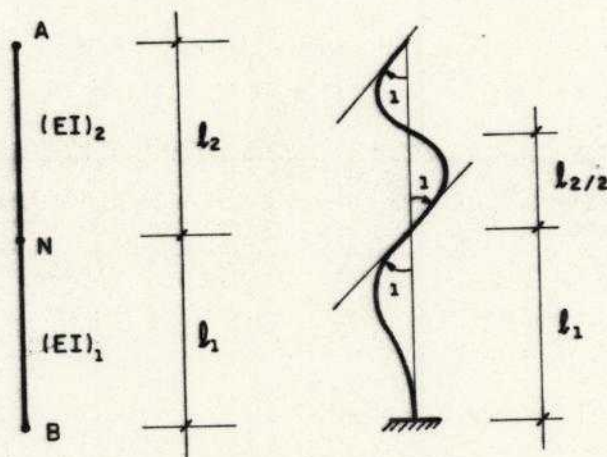


Fig. 5.2 Coeficientes de mola

É de grande importância que o modelo adotado para o elemento barra permita a liberação de vínculos em seus extremos objetivando, por exemplo, a representação de rótulas, muito útil na análise de pavimentos. Outra aplicação interessante consiste em desprezar-se o efeito da torção em vigas de concreto armado em que tal efeito não é fundamental para o equilíbrio da estrutura, o que pode ser feito liberando-se o vínculo associado à rotação em torno do eixo longitudinal da barra em seus extremos. De maneira

aproximada pode-se alcançar tal resultado com a redução do momento de inércia associado à torção, ou a diminuição do módulo de deformação transversal, devendo-se nestes casos, de maneira semelhante ao que se comentou no terceiro capítulo para os trechos rígidos, realizar-se uma cuidadosa experimentação numérica com o "software" disponível buscando-se o nível de redução que se deseja sem perturbar numericamente a solução. A experiência do autor demonstrou, com o uso do sistema LASER [5.1], escrito em FORTRAN e que trata a solução do sistema de equações com reais de dupla precisão (8 bytes), que a consideração de 1% do momento de inércia de torção produz resultados satisfatórios.

Isolados da grelha, os painéis de laje são usualmente analisados com as seguintes aproximações :

- despreza-se a deformabilidade dos elementos estruturais que lhe servem de apoio.

- continuidades com outros painéis são tratadas como se não houvesse qualquer interação ou supondo-se engastamento fixo ou, ainda, buscando-se a simulação simplificada do comportamento conjunto através de critérios como o que propõe igualar o momento fletor sobre apoio comum à média de momentos negativos de painéis adjacentes (ou a uma percentagem do de maior valor absoluto), com a aplicação das diferenças entre os valores inicial e final na borda de cada painel, e consequente correção de momentos nas regiões centrais.

- uniformização do carregamento em toda a superfície do painel (ações gravitacionais devidas à própria laje, às paredes, aos revestimentos, etc. e sobrecargas de utilização).

- uniformização das reações de apoio, gerando carregamentos de taxa de distribuição constante sobre as vigas que sustentam a laje.

- adaptação das características do painel a ser analisado, buscando aproveitarem-se as soluções clássicas disponíveis na literatura técnica. Assim, quadriláteros, de

lados e ângulos internos diferentes entre si, acabam sendo "representados" por retângulos; condições de contorno que não se estendem por todo um lado de um painel de contorno poligonal costumam ser considerados em toda a extensão desse lado; cargas que se concentram em regiões de pequena dimensão do painel são uniformizadas em toda a sua superfície; etc.

A variedade de combinações de formas, condições de contorno e carregamentos dos painéis de laje, torna impossível ao projetista reunir um elenco de soluções clássicas que atendam a todos os casos que aparecem no desenvolvimento do projeto do pavimento do edifício. Mesmo que tal elenco seja extenso, a identificação de cada situação e a adaptação a uma solução conhecida retiram da análise do pavimento algumas características que lhe são fundamentais : a praticidade, a rapidez na determinação dos resultados e a representatividade do modelo, que pode ser muito prejudicada em função das aproximações realizadas.

As ações das paredes sobre as vigas são normalmente tratadas, como as ações devidas às lajes , sem a consideração do comportamento conjunto e da rigidez relativa. É usual distribuir-se o peso das alvenarias sobre o comprimento de contato com as vigas, sem a consideração de que há a tendência de concentração de tensões normais verticais e tensões de cisalhamento junto aos apoios na interface parede-viga. Este fenômeno denominado efeito arco, tem sido mostrado em um grande número de trabalhos experimentais e teóricos como se relata em [5.2]. Quanto mais flexível a viga mais concentradas as tensões. Em especial nos casos em que a altura da parede ultrapassa 60% do vão, pode ocorrer redução significativa em momentos fletores e flechas nas vigas, produzidos pela ação das paredes. Este fato, bastante aventado no caso das alvenarias estruturais, não tem sido explorado na análise de edifícios em que as alvenarias não são assumidas como componentes do sistema estrutural, apesar de possuírem

alguma capacidade portante. Pesquisa paralela ao presente trabalho tem sido desenvolvida, com a participação do autor deste, objetivando, dentre outras coisas, estudar este fenômeno e adaptar modelos como os apresentados em [5.3],[5.4] e [5.5] para a utilização no projeto estrutural do edifício com alvenarias comuns. A desconsideração do efeito arco fornece resultados conservadores para os esforços nas vigas, a despeito de alguma indução de esforço normal (devido à interação tangencial parede-viga). Esse esforço produz, em geral, tensões reduzidas, que se distribuem nas porções de lajes adjacentes à viga.

5.2.2 Modelo Grelha - Considerações Finais

A utilização do modelo grelha para a análise do pavimento do edifício tem sido ampliada nos escritórios de projeto estrutural, devido a algumas características que merecem destaque. A primeira delas está associada à facilidade de programação, por envolver apenas o conceito de elemento barra e, quando presente, o elemento mola. A segunda, decorrente da primeira, que é o aparecimento de inúmeros "softwares" que permitem tal análise . A terceira que é o fato do modelo envolver, em geral, um número total de barras e nós pequeno, para os pavimentos usuais, o que facilita a montagem de arquivos de dados, agiliza a resolução do problema e simplifica a interpretação de resultados. Isto possibilita ao analista de estruturas a experimentação de várias alternativas do sistema estrutural tais como : alterações nas dimensões de peças, mudanças de condições de contorno, variações e combinações de carregamentos, etc., com um expressivo ganho na qualidade do projeto.

No âmbito do SET-EESC-USP têm sido desenvolvidos vários programas integrados [5.6],[5.7],[5.8], que compõem um conjunto harmônico bastante útil e eficiente para a análise de pavimentos de edifício do subsistema laje-viga.

Tal subsistema é constituído basicamente por:

-pré-processadores com recursos gráficos dedicados à montagem de arquivos de dados para a laje e a grelha, a partir da forma e da arquitetura do pavimento.

-processador para a análise de painéis de laje de concreto armado, que além de fornecer os resultados referentes aos painéis montam arquivos de carregamento da grelha.

-processador para análise da grelha

-pós-processador para a apresentação gráfica de resultados da análise da grelha e tabulação de reações força e momentos nos pilares.

-pós-processador para o dimensionamento das vigas , alteração de dimensões e correção automática dos dados da grelha.

-pós-processador para a apresentação gráfica de armaduras de vigas com editor para eventuais intervenções do projetista.

5.2.3 Modelo Laje Integrada à Grelha

Objetivando-se garantir praticidade, rapidez na determinação de resultados e a representatividade , com a integração dos elementos estruturais componentes do pavimento do edifício em um mesmo modelo, o projetista pode fazer uso de métodos para análise estrutural que se enquadram em dois grandes grupos. O primeiro em que o pavimento , incluindo-se as lajes, é substituído por uma conjunto de barras, assumido como equivalente à estrutura original. Como exemplos pode-se citar o método dos pórticos equivalentes [5.9],[5.10] e a analogia de grelha [5.11],[5.12]. Tais métodos esbarram em dificuldades de se definir as propriedades das barras equivalentes, bem como a sua ligação às vigas e pilares existentes, em especial quando a geometria do pavimento apresenta irregularidades

em sua forma, aberturas, contorno com recortes, etc. O segundo grupo inclui os métodos de cálculo que tratam a laje como um meio contínuo. Constituem procedimentos numéricos que permitem resolver as equações diferenciais que regem o comportamento da estrutura do pavimento do edifício. Os mais importantes são: o Método das Diferenças Finitas [5.13],[5.14] , o Método do Elemento de Contorno [5.15],[5.16] e [5.17] e o Método dos Elementos Finitos. Este último foi escolhido, como já se relatou no Capítulo 2, para utilização no presente trabalho. As referências básicas, bem como as que nortearam as decisões tomadas ao longo da pesquisa , estão disseminadas pelos próximos itens.

Inúmeras vantagens são obtidas com a utilização do MEF para a análise integrada do pavimento do edifício em contraposição ao modelo grelha isolada. Dentre eles podem ser citados:

- tratamento mais realista do carregamento; cargas de paredes são alojadas nos locais onde ocorrem, sem necessidade de se uniformizar no painel de laje, podendo ser distribuídas nos elementos sobre os quais se apoiam ou consideradas como grupos de cargas nodais concentradas; diferenças de sobrecargas em mesmo painel são facilmente representadas.

- representação da rigidez relativa laje-viga-pilar, com influência significativa no fluxo de cargas pelo sistema estrutural; cargas recebidas pelas lajes são transferidas preferencialmente para as regiões mais rígidas das vigas, sendo parte lançada diretamente sobre os pilares, o que produz, via de regra, esforços solicitantes nas vigas menores do que os produzidos com o modelo grelha, em especial, possibilitando um projeto mais econômico e preciso.

- representação das interações de flexão e torção entre vigas e lajes, desconsideradas no modelo grelha.

- facilidade de modelarem-se aberturas em lajes e

variedades de formas de painéis.

- simulação automática da continuidade dos painéis de laje.

- possibilidade de representação de enrijecedores excêntricos, como as vigas cujos eixos não jazem na superfície média da laje, mediante a translação de graus de liberdade, como se descreveu no terceiro capítulo.

- abundância nas informações sobre deslocamentos em todo o sistema estrutural; no modelo laje isolada da grelha, determinam-se deslocamentos em poucos pontos de cada painel de laje, com a consideração simplificada de condições de contorno (vigas funcionando como apoios rígidos e engastes assumidos fixos); essas informações são importantes não apenas para a verificação do sistema estrutural mas, também, para as alvenarias por ele suportadas, buscando-se evitar fissurações indesejáveis em serviço.

- fatura de informações sobre esforços solicitantes nas lajes, enriquecendo-se a análise e possibilitando-se uma disposição mais racional de armaduras, com o auxílio de apresentação gráfica de curvas isovalor.

- possibilidade de alteração de espessuras e características do material da laje em cada elemento.

Para que os elementos finitos possam ser utilizados como uma ferramenta usual no projeto do pavimento do edifício é necessário que o "software" a ser utilizado disponha de poderosos geradores de dados, eficientes elementos, boa documentação, abundância de recursos gráficos para a verificação de dados e análise de resultados. Grande distância separa a formulação de um elemento e o seu uso profissional em um sistema computacional que possa se agregar ao dia-a-dia do projetista. É importante que a documentação do "software" não seja apenas um roteiro para a montagem de arquivo de dados, mas que apresente informações abundantes sobre a sua

biblioteca de elementos, com referências bibliográficas e uma boa análise de desempenho, o que não se tem observado nos "pacotes" à disposição no mercado. É preocupante que o projetista faça uso desses programas sem estar devidamente informado e sem ter adquirido habilitação suficiente sobre o ferramental empregado.

5.3 O SUBSISTEMA LAJE PLANA

Constituído por uma placa que se apoia em subsistemas verticais paredes ou pilares. Muito atraente sob o ponto de vista arquitetônico devido à liberdade que oferece para a disposição de alvenarias e divisórias na delimitação de espaços, sem o aparecimento de vigas no teto.

Como a responsabilidade de coletar e transmitir cargas gravitacionais aos subsistemas verticais é exclusiva da laje deve ser utilizado modelo que represente bem o seu comportamento. A aplicação de métodos de equivalência a grelha ou a pórtico apresenta dificuldades relativas a geometrias variadas, disposição irregular de pilares, presença de aberturas nas lajes, etc. Para esses casos é recomendada a utilização de métodos que tratem a laje como um meio contínuo e que possam simular adequadamente o seu comportamento .

Além das colocações feitas no item anterior sobre a utilização do MEF, cabe observar com mais detalhe, no caso da laje plana, a ligação laje-pilar, fundamental no comportamento desse subsistema estrutural.

Quando as dimensões do pilar são da ordem de grandeza da espessura da laje é razoável admitir-se tal ligação como pontual. Teoricamente momentos infinitos serão produzidos na placa fina enquanto os deslocamentos permanecem finitos [5.13]. Não é necessário promoverem-se discretizações excessivamente refinadas nessa região, pois a tendência do

modelo em elementos finitos será a de fornecer valores para os momentos cada vez maiores e que não têm significado físico. A deficiência é teórica e não está associada ao método numérico ou à discretização. É aconselhável utilizarem-se valores dos momentos junto às faces do pilar [5.63] e, se necessário, promover-se uma investigação mais detalhada com modelo tridimensional. Observe-se que momentos muito altos provocam a plastificação do material, produzindo o arredondamento natural do diagrama. É fundamental a inclusão das características elásticas do pilar, permitindo-se a interação de flexão, importante na representação da ligação analisada. Pode-se, por exemplo, incluir no modelo uma barra de pilar, equivalente aos tramos adjacentes ao pavimento em análise. Opcionalmente promove-se a translação de graus de liberdade, utilizando-se a técnica dos "offsets" apresentada no capítulo 3, compatível com a Hipótese de Bernouille para a seção do pilar sob o qual se apoia a laje. Caso o "software" disponível não ofereça tal ferramenta pode-se optar por distribuírem-se as reações nas regiões de contato entre pilares e laje. Faz-se uma primeira análise com ligação assumida como pontual, determinando-se as reações de apoio. A seguir distribuem-se as reações, calculando-se novo carregamento que, em adição ao original, é aplicado ao modelo. A solução final não apresenta singularidades.

Quando o apoio é extenso, o que ocorre em geral em uma única direção (parede), pode-se optar pela imposição de restrições nodais de deslocamento e rotações em torno do eixo de maior inércia da seção da parede. Momentos máximos aparecem junto à face do apoio [5.63].

5.4 ELEMENTOS FINITOS PARA A FLEXÃO DE PLACAS

5.4.1 Elementos Triangulares - Um Breve Histórico

Os elementos triangulares para a análise de flexão de placas sempre constituíram uma preocupação constante dos pesquisadores por causa da necessidade de modelar domínios de contornos irregulares e da possibilidade de combiná-los com elementos de membrana para a análise de estruturas em casca. Além dessas razões anote-se a facilidade de construir-se elementos quadrilaterais mediante a associação de elementos triangulares o que, historicamente, tem demonstrado grande eficiência e simplicidade, favorecendo a implementação de bibliotecas de elementos no desenvolvimento de sistemas computacionais.

Não se tem aqui a pretensão de apresentar o estado da arte dos elementos finitos de placa nos moldes em que se fez em [5.18], de forma bastante ampla, e em [5.19] para os triangulares. Apenas a de levantar alguns pontos importantes no desenvolvimento histórico dos elementos triangulares, e situar a escolha feita na presente pesquisa.

As primeiras tentativas de desenvolvimento de elementos triangulares remontam à década de 1960. Em trabalho de 1965 Clough e Tocher [5.20] relatam algumas experiências de desenvolvimento de elementos triangulares de nove graus de liberdade (gdl). As devidas a Adini (1961) e Tocher (1962) utilizam polinômios cúbicos nas coordenadas x e y para a descrição do campo de deslocamentos, com redução de dez a nove termos, para haver igualdade com o número de gdl. Analisando os defeitos na utilização desses polinômios, os autores propõem a subdivisão do elemento em três subdomínios triangulares, na construção de um elemento compatível, com nove graus de liberdade, o HCT, um dos mais utilizados ao longo de toda a história do MEF. Tal elemento é reapresentado em 1968

[5.21] com o nome de LCCT9 junto com outros triangulares LCCT10, LCCT11 e LCCT12, para a montagem de elementos quadrilaterais.

Ainda em 1965 Bazeley et al. [5.22] publicam excelente trabalho onde são apresentados dois elementos triangulares de nove gdl: BCIZ1 e BCIZ2. São utilizadas coordenadas homogêneas e semeadas as primeiras idéias sobre o "patch test". O elemento BCIZ1, não-conforme, apresenta deficiências de convergência, sanadas com o BCIZ2 mediante a superposição de funções de forma conformes, com singularidades de curvatura nos nós. O BCIZ2, muito rígido como outros elementos conformes, exige um número muito grande de pontos de Gauss para a integração numérica (dezesseis), em contraposição aos três que são necessários no BCIZ1.

Com a utilização de polinômios de alto grau, em 1968 e 1969 foram desenvolvidos elementos triangulares conformes, com mais de nove gdl como o T21 e o T18 [5.23],[5.24], pouco utilizados em grandes sistemas computacionais devido ao elevado número de gdl e a presença de nós em outros pontos dos lados além dos vértices, o que aumenta a banda da matriz de rigidez global e dificulta a combinação com outros elementos.

Em 1973 Razzaque [5.25] retoma o elemento BCIZ2 substituindo as funções de forma associadas às curvaturas por falsas derivadas, utilizando mínimos quadrados, o que, posteriormente foi mostrado equivaler ao modelo híbrido. Com essa aproximação o número de pontos de Gauss necessários para a obtenção da matriz de rigidez por integração numérica, foi reduzido a três.

Os elementos supracitados foram todos desenvolvidos com base no modelo em deslocamentos, utilizando-se o princípio da mínima energia potencial. Elementos conformes são obtidos, neste caso, garantindo-se a continuidade de deslocamentos e primeiras derivadas entre elementos adjacentes (continuidade C^1), pois o funcional possui as

segundas derivadas como as de mais alta ordem. Outros princípios variacionais têm sido empregados para a obtenção de elementos finitos. Uma alternativa bastante interessante consiste na utilização do princípio da mínima energia complementar segundo a formulação proposta em 1964 por Pian [5.26]. Esse trabalho deu origem ao método híbrido com distribuição de tensões assumida no domínio. No caso de elementos de placa, algumas experiências bem sucedidas estão relatadas em [5.27]. Um dos mais eficientes e simples elementos de placa, denominado em [5.19] HSM tem distribuição linear de momentos no seu interior e variação cúbica de deslocamento w e linear de rotações normais θ_n , ao longo dos lados [5.28],[5.29],[5.30].

Um dos marcos mais importantes no desenvolvimento do MEF aplicado à flexão de placas ocorreu com o abandono da Teoria de Kirchhoff e a adoção da Teoria de Reissner-Mindlin para placas espessas, utilizando-se modelo em deslocamentos. Grande motivação para essa adoção está no fato de as derivadas primeiras serem as de mais alta ordem que aparecem no funcional, exigindo continuidade C^0 nas fronteiras do elemento para a obtenção de conformidade. Em 1965 Melosh [5.31] apresenta os primeiros elementos triangulares do tipo C^0 , aplicados à análise de placas, com inúmeros problemas para placas finas e elementos de ângulos obtusos. O sucesso com elementos C^0 apareceu na década de 1970, primeiramente com elementos quadrilaterais [5.32],[5.33],[5.34] acompanhados por triangulares como os desenvolvidos por Argyris et al.[5.35] e Belytschko et al.[5.36]. Um ponto delicado dos elementos baseados na teoria de Reissner-Mindlin é o fenômeno de travamento decorrente da preponderância, na matriz de rigidez, dos coeficientes associados ao cisalhamento, quando a placa é fina. Tal problema foi contornado com sucesso, em elementos triangulares, em [5.37] e, mais recentemente, em [5.38] e [5.39].

Outra opção que tem atraído a atenção de inúmeros

pesquisadores consiste em adotar-se modelo em deslocamentos com imposição das hipóteses de Kirchhoff de um modo discreto, ao longo de lados ou em determinados pontos do elemento como, por exemplo, os pontos de integração de Gauss. A idéia foi introduzida em 1968 [5.40] e utilizada inicialmente de forma complexa e pouco atraente em elementos triangulares, como em [5.41] até que Batoz et al. [5.19][5.42] mostraram o bom comportamento de um elemento da família DKT("Discret Kirchhoff Theory"), com formulação mais simples e acessível. Outras aplicações da teoria a elementos triangulares têm sido apresentadas, merecendo destaque trabalho recente de Zienkiewicz et al.[5.43] onde é feito estudo detalhado sobre os elementos DKT.

Uma formulação diferente das anteriores foi introduzida por Bergan e Hanssen [5.44]. A idéia básica é a de conceber o elemento impondo-se as condições de satisfação do "Patch Test" na montagem da matriz de rigidez. O campo de deslocamentos é descrito por um conjunto de modos básicos, completo para a representação de movimentos de corpo rígido e estados de deformação constante, e um conjunto de modos superiores. Apresentada inicialmente de forma pouco atraente [5.45] a formulação evoluiu e estabeleceu-se na década de 1980 de maneira mais clara e acessível, como uma alternativa bastante segura e eficiente no desenvolvimento de elementos de desempenho formidável [5.46]. Bergan e colaboradores têm demonstrado que a garantia de convergência está associada à maneira como ocorre o acoplamento entre os modos superiores e os modos básicos, e não à continuidade interelemental [5.45][5.47]. Modos superiores altamente não-conformes podem produzir elementos confiáveis e de rápida convergência. Vários elementos para a análise de placas têm sido desenvolvidos, incluindo placas espessas [5.48] e não linearidades geométrica e física [5.49][5.50]. No presente trabalho são utilizados dois elementos triangulares de placa, baseados na Teoria de Kirchhoff, aqui denominados

T3AF e T3AE. O elemento T3AF, um dos primeiros desenvolvidos com essa formulação [5.45], foi apontado em 1983, por Irons[5.51], como o elemento triangular de melhor desempenho para a análise de placas finas. O elemento T3AE, desenvolvido por Bergan e Felippa [5.52], possibilita uma eficiente implementação computacional e, com base na ponderação dos modos superiores, permite a redução da influência da geometria do elemento nos resultados da análise. Apesar de ter sido apresentada inicialmente como uma formulação bastante diferente das anteriores, há trabalhos que mostram as relações com a formulação em deslocamentos via energia potencial [5.47] e com o modelo híbrido, apresentando a base variacional dessa aproximação [5.53].

5.4.2 Noções Básicas - Teste do Elemento Individual (TEI)

O campo de deslocamentos no domínio de um elemento pode ser aproximado por

$$\tilde{u} = \tilde{N}_{rc} \alpha_{rc} + \tilde{N}_h \alpha_h \quad \dots(5.1)$$

onde \tilde{N}_{rc} é um polinômio completo até o grau que corresponde aos modos rígidos e de deformação constante, com os coeficientes associados α_{rc} , e \tilde{N}_h é um conjunto de modos superiores (funções de forma de alta ordem) aos quais se associam os coeficientes α_h . Os coeficientes α são os parâmetros generalizados, cujo número total deve igualar o número de graus de liberdade (gdl) do elemento.

A necessidade do elemento poder representar qualquer estado de deformação constante pode ser entendida fisicamente ao se imaginar que a rede de elementos é alterada de modo a refiná-la progressivamente. Explica-se em [5.54] que, no limite, a deformação em cada elemento aproxima-se de um valor constante pois as suas dimensões tendem a zero, e qualquer variação complexa no domínio

analisado deve poder ser representada.

É obrigatório que os modos em conjunto sejam linearmente independentes para permitir a determinação dos parâmetros generalizados α em função dos parâmetros nodais de deslocamento Q , que é feita particularizando-se a equação (5.1) com as coordenadas nodais. Nesta etapa pode ser necessário derivar N_{rc} e N_h quando os parâmetros nodais incluem derivadas do campo de deslocamentos, como no caso das placas, de acordo com o tratamento utilizado neste trabalho.

$$\underline{Q} = \underline{G} \underline{\alpha} \quad \dots(5.2)$$

$$\underline{Q} = \underline{Q}_{rc} + \underline{Q}_h = \underline{G}_{rc} \underline{\alpha}_{rc} + \underline{G}_h \underline{\alpha}_h \quad \dots(5.2a)$$

A matriz \underline{G} , quadrada de ordem igual ao número de gdl do elemento, tem como inversa à direita e à esquerda a matriz \underline{H} . Então

$$\underline{\alpha} = \underline{H} \underline{Q} \quad \text{ou}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \underline{\alpha}_{rc} \\ \underline{\alpha}_h \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \underline{H}_{rc} \\ \underline{H}_h \end{array} \right] \underline{Q} \quad \dots(5.3)$$

As deformações podem ser obtidas mediante a aplicação de um operador diferencial sobre o campo de deslocamentos, simbolizado aqui por ∇ . Então tem-se que

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \nabla \underline{u} = \nabla \underline{N}_{rc} \underline{\alpha}_{rc} + \nabla \underline{N}_h \underline{\alpha}_h \\ \underline{\varepsilon} &= \underline{B}_{rc} \underline{\alpha}_{rc} + \underline{B}_h \underline{\alpha}_h \quad \dots(5.4) \end{aligned}$$

Uma formulação padrão via energia potencial (ou Princípio dos Trabalhos Virtuais) , baseada na equação (5.1) , em muitos casos não impõe a compatibilidade interelemental. Para investigar se um grupo de elementos deste tipo, ditos não-conformes, é completa, Irons [5.22] propôs o "patch-test" que é um procedimento para verificar se o elemento , incluindo seus contornos, não produz ou

perde energia durante um estado de deformação constante. O teste pode ser realizado, por exemplo, impondo-se deslocamentos nodais, compatíveis com um estado de deformação constante, a um grupo de elementos. Se tais elementos deformam-se de acordo com o estado aplicado e de tal modo que se anulam as forças nodais induzidas nos nós internos, devido à contribuição de todos os elementos a ele conectados, o teste está atendido. Pode ocorrer que o elemento não atenda ao "patch test", perdendo a garantia de convergência como os elementos T9 de Holand [5.55] e BCIZ1 de Bazeley et al [5.22]. A aplicação do "patch test" é, em geral, uma operação trabalhosa e que envolve a análise de uma série de formas diferentes de combinação do elemento, podendo o teste ser atendido para uma dada configuração e não em outra, em que são agrupados os mesmos elementos. Uma alternativa bastante atraente pela simplicidade de envolver apenas um elemento foi proposta em [5.44]. O conceito básico é que em um estado arbitrário de deformação constante, elementos vizinhos, em fronteira comum, devem produzir contribuições no vetor de forças nodais que se cancelam aos pares, o que faz com que o "patch test" esteja automaticamente atendido (figura 5.3). Este é o chamado teste do elemento individual. A denominação do teste está relacionada ao fato de envolver um único elemento, diferentemente do "patch test", em que vários elementos em conjunto, em diferentes combinações, são utilizados.

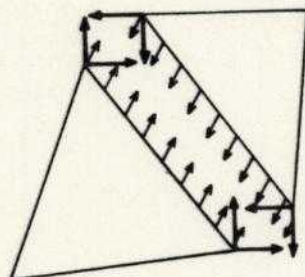


Fig. 5.3 O cancelamento de pares de forças - modos "rc"

As forças nodais \underline{T}_{rc} correspondentes aos parâmetros generalizados $\underline{\alpha}_{rc}$, podem ser determinadas por uma "transferência" consistente das tensões de superfície ao longo de um lado do elemento aos nós. Esta operação pode ser sintetizada por

$$\underline{T}_{rc} = \underline{L} \underline{\sigma}_{rc} \quad \dots(5.5)$$

onde $\underline{\sigma}_{rc}$ é um vetor de componentes de tensão, correspondentes a um estado de deformação constante e a matriz \underline{L} a que permite achar as ações equivalentes concentradas ou "amontoadas" ("lumped", em inglês) nos nós. O vetor $\underline{\sigma}_{rc}$ pode ser determinado multiplicando-se a matriz constitutiva \underline{E} pelas deformações correspondentes aos parâmetros generalizados $\underline{\alpha}_{rc}$.

$$\underline{\sigma}_{rc} = \underline{E} \underline{B}_{rc} \underline{\alpha}_{rc} \quad \dots(5.6)$$

Combinando-se as expressões (5.5) e (5.6) chega-se a

$$\underline{T}_{rc} = \underline{P}_{rc} \underline{\alpha}_{rc} \quad \dots(5.7)$$

com

$$\underline{P}_{rc} = \underline{L} \underline{E} \underline{B}_{rc} \quad \dots(5.8)$$

Sendo \underline{k} a matriz de rigidez do elemento, referida aos parâmetros nodais de deslocamento, tem-se que as forças nodais correspondentes ao estado de deformação constante são dadas por

$$\underline{F}_{rc} = \underline{k} \underline{Q}_{rc} = \underline{k} \underline{G}_{rc} \underline{\alpha}_{rc} \quad \dots(5.9)$$

As forças nodais produzidas pela rigidez devem ser iguais às calculadas pela transferência do estado de tensões constantes aos nós. Assim igualando-se \underline{T}_{rc} e \underline{F}_{rc} , com base nas equações (5.7) e (5.9), tem-se que

$$\underline{k} \underline{G}_{rc} = \underline{P}_{rc} \quad \dots(5.10)$$

que é a expressão matemática do teste do elemento individual.

5.4.3 Formulação Padrão Baseada na Energia Potencial

Quando se utiliza o princípio da mínima energia potencial para o desenvolvimento de elementos finitos, além de se garantir que as funções de forma reunidas em N_{rc} são completas, costuma-se garantir a continuidade interelemental de grau $m-1$ quando o operador diferencial que governa o problema é de ordem $2m$. Tais elementos, ditos conformes, atendem ao "path-test" [5.56], e a sua utilização produz resultados que convergem monotonicamente para a solução exata, à medida em que as discretizações vão sendo refinadas. Infelizmente, em muitos casos, não é fácil garantir a conformidade ou, então, essa garantia produz um elemento muito rígido que, utilizado em discretizações mais pobres, não oferece uma boa aproximação do problema em análise. Alternativamente o desenvolvimento do MEF, desde o seu nascimento, tem mostrado uma série de experiências bem sucedidas com elementos não-conformes, que atendem ao "patch-test", produzem resultados convergentes, embora não necessariamente de forma monotônica e que, em muitos casos, apresentam desempenho superior aos elementos conformes de natureza semelhante, em especial para discretizações menos refinadas. Interessa investigar o comportamento dos elementos não-conformes, sob o ponto de vista do teste do elemento individual, o seu significado e as possibilidades de desenvolvimento de elementos com a garantia de seu atendimento.

A energia de deformação do elemento, fundamental para a dedução de sua matriz de rigidez, é dada pela integral estendida ao longo de seu volume V

$$U = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\varepsilon}} dV \quad \dots(5.11)$$

onde $\underline{\underline{E}}$ é a matriz constitutiva do material.

Escrevendo-se as deformações em função dos parâmetros generalizados, com base em $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}}_\alpha \underline{\underline{\alpha}}$, tem-se que

$$U = \frac{1}{2} \alpha^T \left[\int_V \tilde{B}_\alpha^T E \tilde{B}_\alpha dV \right] \alpha \quad \dots(5.12)$$

onde a expressão entre parênteses fornece a matriz de "rigidez" generalizada \tilde{k}_α . Lembrando-se que a matriz \tilde{B}_α é constituída pelas submatrizes \tilde{B}_{rc} e \tilde{B}_h , conforme a equação (5.4), pode-se escrever a expressão de \tilde{k}_α , particionando-a, como

$$\tilde{k}_\alpha = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{arc} & \tilde{k}_{arch} \\ \tilde{k}_{arch}^T & \tilde{k}_{ah} \end{bmatrix}$$

onde

$$\tilde{k}_{arc} = \int_V \tilde{B}_{rc}^T E \tilde{B}_{rc} dV \quad \tilde{k}_{arch} = \int_V \tilde{B}_{rc}^T E \tilde{B}_h dV$$

$$\tilde{k}_{ah} = \int_V \tilde{B}_h^T E \tilde{B}_h dV \quad \dots(5.13)$$

A primeira das submatrizes, para a condição de E constante, pode ser reescrita de maneira mais simples

$$\tilde{k}_{arc} = V \tilde{B}_{rc}^T E \tilde{B}_{rc} \quad \dots(5.14)$$

uma vez que \tilde{B}_{rc} não se altera no domínio do elemento.

A determinação da matriz de rigidez referida aos parâmetros nodais de deslocamento pode ser feita aplicando-se a transformação expressa na equação (5.3).

$$\tilde{k} = \tilde{H}^T \tilde{k}_\alpha \tilde{H} \quad \dots(5.15)$$

Particionando-se \tilde{k}_α e \tilde{H} chega-se a

$$\tilde{k} = \tilde{H}_{rc}^T \tilde{k}_{arc} \tilde{H}_{rc} + \tilde{H}_{rc}^T \tilde{k}_{arch} \tilde{H}_h + \tilde{H}_h^T \tilde{k}_{arch}^T \tilde{H}_{rc} + \tilde{H}_h^T \tilde{k}_{ah} \tilde{H}_h \quad \dots(5.16)$$

Para que o elemento atenda ao TEI é necessário que a matriz de rigidez \tilde{k} obedeça à equação (5.10). Pós-multiplicando-se ambos os membros da equação anterior por \tilde{G}_{rc} obtém-se

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{k}}_{\tilde{r}rc} \underline{\tilde{G}} = & \underline{H}_{\tilde{r}rc}^T \underline{k}_{\tilde{a}rc} \underline{H}_{\tilde{r}rc} \underline{G}_{\tilde{r}rc} + \underline{H}_{\tilde{c}}^T \underline{k}_{\tilde{a}rch} \underline{H}_{\tilde{h}} \underline{G}_{\tilde{r}rc} + \\ & \underline{H}_{\tilde{h}}^T \underline{k}_{\tilde{a}rch}^T \underline{H}_{\tilde{r}rc} \underline{G}_{\tilde{r}rc} + \underline{H}_{\tilde{h}}^T \underline{k}_{\tilde{a}h} \underline{H}_{\tilde{h}} \underline{G}_{\tilde{r}rc} \quad \dots(5.17) \end{aligned}$$

Como $\underline{H} = \underline{G}^{-1}$ pode-se reescrever a equação anterior como

$$\underline{\tilde{k}}_{\tilde{r}rc} \underline{\tilde{G}} = \underline{H}_{\tilde{r}rc}^T \underline{k}_{\tilde{a}rc} + \underline{H}_{\tilde{h}}^T \underline{k}_{\tilde{a}rch}^T \quad \dots(5.18)$$

Antes de prosseguir é oportuno detalhar-se a submatriz $\underline{k}_{\tilde{a}rc}$, o que pode ser feito aplicando-se o PTV a um estado de deformação constante. Então

$$\delta \alpha_{\tilde{r}rc}^T \underline{k}_{\tilde{a}rc} \alpha_{\tilde{r}rc} = \delta Q_{\tilde{r}rc}^T \underline{T} \quad \dots(5.19)$$

A partir de (5.2a) e (5.7) pode-se dar nova apresentação a (5.19)

$$\delta \alpha_{\tilde{r}rc}^T \underline{k}_{\tilde{a}rc} \alpha_{\tilde{r}rc} = \delta \alpha_{\tilde{r}rc}^T \underline{G}_{\tilde{r}rc}^T \underline{P}_{\tilde{r}rc} \alpha_{\tilde{r}rc} \quad \dots(5.20)$$

E, finalmente,

$$\underline{k}_{\tilde{a}rc} = \underline{G}_{\tilde{r}rc}^T \underline{P}_{\tilde{r}rc} \quad \dots(5.21)$$

Este último resultado levado à equação (5.18) fornece

$$\underline{\tilde{k}}_{\tilde{r}rc} \underline{\tilde{G}} = \underline{H}_{\tilde{r}rc}^T \underline{G}_{\tilde{r}rc}^T \underline{P}_{\tilde{r}rc} + \underline{H}_{\tilde{h}}^T \underline{k}_{\tilde{a}rch}^T \quad \dots(5.22)$$

Como $\underline{H} = \underline{G}^{-1}$ e, portanto, pode-se escrever que

$$\underline{H}_{\tilde{r}rc}^T \underline{G}_{\tilde{r}rc}^T = \underline{I} - \underline{H}_{\tilde{h}}^T \underline{G}_{\tilde{h}}^T \quad \dots(5.23)$$

onde \underline{I} é matriz identidade, a equação (5.22) é reescrita como

$$\underline{\tilde{k}}_{\tilde{r}rc} \underline{\tilde{G}} = \underline{P}_{\tilde{r}rc} + \underline{H}_{\tilde{h}}^T (\underline{k}_{\tilde{a}rch}^T - \underline{G}_{\tilde{h}}^T \underline{P}_{\tilde{r}rc}) \quad \dots(5.24)$$

Para que o TEI seja atendido é, pois, necessário que

$$\tilde{k}_{arch}^T = \tilde{G}_h^T \tilde{P}_{rc} \quad \dots(5.25)$$

Em geral, não é fácil escolher modos superiores que respeitem a condição anterior. Bergan e Nygard [5.47] propõem uma forma mais simples que consiste em anular separadamente os dois membros da equação (5.25). Assim

$$\tilde{G}_h^T \tilde{P}_{rc} = 0 \quad e \quad \tilde{k}_{arch} = 0 \quad \dots(5.26)$$

Ambas expressam requisitos de convergência que devem ser atendidos pelos modos superiores. A primeira condição traduz ortogonalidade em força e a segunda ortogonalidade em energia. A obtenção da segunda condição é mais simples pois, como os modos básicos (rc) produzem \tilde{B}_{rc} constante, para se anular \tilde{k}_{arch} basta que

$$\int_v \tilde{B}_h dV = 0 \quad \dots(5.27)$$

Como se ressalva em [5.47], funções de forma que produzem elementos não-conformes podem ser utilizadas, na formulação padrão, desde que atendam às condições de ortogonalidade em força e energia, os modos básicos sejam completos e a matriz \tilde{G} inversível.

Observe-se que as condições expressas por (5.25) traduzem imposições à matriz de rigidez com o objetivo de garantir convergência. A questão fundamental relacionada com a convergência do elemento está no acoplamento entre os modos básicos e os modos superiores.

É oportuno observar-se que a montagem da matriz de rigidez, via campo de deslocamentos, simplifica-se quando a ortogonalidade em energia é atendida. A matriz de rigidez para os parâmetros generalizados pode ser escrita

$$\tilde{k}_\alpha = \begin{bmatrix} V \tilde{B}_{rc}^T \tilde{E} \tilde{B}_{rc} & 0 \\ 0 & \int_V \tilde{B}_h^T \tilde{E} \tilde{B}_h dV \end{bmatrix} \quad \dots(5.28)$$

E, referida aos parâmetros nodais de deslocamento

$$\tilde{k} = V \tilde{H}_{rc}^T \tilde{B}_{rc}^T \tilde{E} \tilde{B}_{rc} \tilde{H}_{rc} + \tilde{H}_h^T \left(\int_V \tilde{B}_h^T \tilde{E} \tilde{B}_h dV \right) \tilde{H}_h \quad \dots(5.29)$$

5.4.4 A Formulação Livre

Bergan e seus colaboradores, propuseram, com base nas implicações do TEI, alguns procedimentos alternativos para o desenvolvimento de elementos finitos, diferentes da formulação tradicional, mas ainda com base em campos de deslocamentos, como estabelecido pela equação (5.1). Só será aqui explorada a formulação livre, assim denominada por não exigir a ortogonalidade em força ou em energia, mas sempre obrigando o atendimento ao TEI como requisito básico para a convergência.

Uma possibilidade de montagem da matriz generalizada \tilde{k}_α consiste em utilizarem-se modos básicos completos em conjunto com modos superiores linearmente independentes, substituindo-se na equação (5.13) a submatriz $\tilde{k}_{\alpha rc}$ e sua transposta, com base em (5.25). Então

$$\tilde{k}_\alpha = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{\alpha rc} & \tilde{P}_{rc}^T \tilde{G}_h \\ \tilde{G}_h^T \tilde{P}_{rc} & \tilde{k}_{\alpha h} \end{bmatrix} \quad \dots(5.30)$$

Cabe observar-se que as submatrizes $\tilde{k}_{\alpha rc}$ e $\tilde{k}_{\alpha h}$ são determinadas de maneira igual à da formulação tradicional, enquanto as submatrizes que acoplam os modos superiores aos básicos foram substituídas.

A matriz de rigidez referida aos parâmetros nodais de deslocamento é encontrada, com base na equação (5.16),

promovendo-se a substituição supra citada. Então,

$$\begin{aligned} \tilde{k} = & \tilde{H}_{rc}^T \tilde{k}_{arc} \tilde{H}_{rc} + \tilde{H}_{rc}^T \tilde{P}_{rc}^T \tilde{G}_{rh} \tilde{H}_{rh} + \tilde{H}_{rh}^T \tilde{G}_{rh}^T \tilde{P}_{rc} \tilde{H}_{rc} + \\ & \tilde{H}_{rh}^T \tilde{k}_{ah} \tilde{H}_{rh} \end{aligned} \quad \dots(5.31)$$

Mais uma vez lembrando-se que a matriz \tilde{H} é a inversa de \tilde{G} pode-se mostrar, facilmente, que a matriz de rigidez \tilde{k} atende ao TEI expresso por (5.10).

Pode parecer, à primeira vista, que a matriz de rigidez construída com base na equação anterior iguala-se à da formulação tradicional. Isto só será verdade se os modos básicos e os modos superiores forem tais que a matriz de rigidez formulada via energia potencial atenda ao TEI. Observe-se que a substituição da submatriz \tilde{k}_{arc} estabelece um conjunto de restrições impostas aos elementos da matriz \tilde{k} . Um mesmo conjunto de modos \tilde{N}_{rc} e \tilde{N}_{rh} pode produzir elementos distintos quando deduzidos com uma ou outra formulação. Por exemplo, as funções de forma sugeridas por Holand [5.55] para a construção do elemento T9, quando aproveitadas na formulação livre produzem um elemento [5.45] de desempenho marcadamente superior e que atende ao TEI. No caso do elemento T9, que não atende ao TEI, experiências realizadas ao longo do desenvolvimento do presente trabalho mostraram que ele é igual ao elemento BCIZ1, apresentado anteriormente por Bazeley et al [5.22], embora isso não fique evidente ao se observar as funções de forma, que neste caso são referidas aos parâmetros nodais de deslocamento e naquele, aos parâmetros generalizados. Na referência [5.22], que apresenta os rudimentos do "patch-test" em um adendo, os autores alertam que não é possível obter convergência para a solução exata com determinadas redes, em que o "patch-test" não é atendido. Os modos superiores do elemento de Holand atendem à ortogonalidade em força, mas não em energia. Foi feita, ao longo deste trabalho, uma pequena alteração nos modos superiores de modo a garantir a ortogonalidade em energia,

infelizmente com perda da ortogonalidade em força. As características do elemento foram deduzidas com base na formulação tradicional. A ortogonalidade em energia não foi suficiente para garantir a melhoria do comportamento do elemento, atestando as colocações teóricas firmadas por Bergan e colaboradores de que apenas uma condição de ortogonalidade não é suficiente.

Na formulação livre, o cálculo das deformações é feito de maneira igual ao da formulação tradicional, ou seja,

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B}_{\alpha} \underline{\alpha} = \underline{B}_{\alpha} \underline{H} \underline{Q} \quad \dots(5.32)$$

Embora a matriz de rigidez \underline{k} , dada por (5.31), atenda ao TEI, e, portanto, ao "patch-test", segundo [5.47] alguns elementos não apresentaram convergência para soluções exatas. O insucesso em todos os casos desastrosos deve-se à existência de pelo menos um autovalor negativo da matriz de rigidez. O que aconteceu nesses casos foi que a submatriz $\underline{G}_{rc}^T \underline{P}_{rc}$ passou a ter uma influência nociva na montagem da matriz de rigidez, preponderando sobre \underline{k}_h , o que produziu o aparecimento de autovalor negativo. A matriz perde a condição de positiva definida. Tal situação deve ser evitada sempre. A formulação livre sofreu, então, desenvolvimento no sentido de eliminar-se tal possibilidade o que foi conseguido da maneira apresentada a seguir.

Comparando-se as equações (5.14) e (5.21) pode-se escrever

$$\underline{V} \underline{B}_{rc}^T \underline{E} \underline{B}_{rc} = \underline{G}_{rc}^T \underline{P}_{rc} \quad \dots(5.33)$$

Levando-se (5.8) na anterior obtém-se

$$\underline{B}_{rc}^T = \frac{1}{\underline{V}} \underline{G}_{rc}^T \underline{L} \quad \dots(5.34)$$

$$\underline{B}_{rc} = \frac{1}{\underline{V}} \underline{L}^T \underline{G}_{rc} \quad \dots(5.34a)$$

pois \underline{E} é positiva definida e \underline{B}_{rc} tem mesma característica de \underline{E} .

Com base em (5.34) pode-se reescrever (5.14) como

$$\tilde{k}_{\alpha rc} = \frac{1}{V} \tilde{G}_{rc}^T \tilde{L} \tilde{E} \tilde{L}^T \tilde{G}_{rc} \quad \dots(5.35)$$

Com a utilização conveniente de (5.8) e (5.34) pode-se escrever

$$\tilde{G}_h^T \tilde{P}_{rc} = \frac{1}{V} \tilde{G}_h^T \tilde{L} \tilde{E} \tilde{L}^T \tilde{G}_{rc} \quad \dots(5.36)$$

Transpondo-se ambos os membros da equação anterior e, lembrando-se que \tilde{E} é simétrica, vem

$$\tilde{P}_{rc}^T \tilde{G}_h = \frac{1}{V} \tilde{G}_{rc}^T \tilde{L} \tilde{E} \tilde{L}^T \tilde{G}_h \quad \dots(5.37)$$

Como na formulação baseada em (5.30), pode ocorrer algum problema quando $\tilde{P}_{rc}^T \tilde{G}_h$ se torna dominante em relação à submatriz de ordem superior $\tilde{k}_{\alpha h}$, a idéia utilizada para se evitar tal ocorrência foi adicionar uma outra submatriz a esta última. Evita-se a possibilidade de aparecimento de autovalor negativo com a matriz simétrica adicional de formato sugerido pela observação das submatrizes expressas por (5.35), (5.36) e (5.37).

$$\tilde{k}_{\alpha ha} = \frac{1}{V} \tilde{G}_h^T \tilde{L} \tilde{E} \tilde{L}^T \tilde{G}_h \quad \dots(5.38)$$

A matriz generalizada com o acréscimo de $\tilde{k}_{\alpha ha}$ é então escrita como

$$\tilde{k}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{rc}^T & \tilde{k}_b & \tilde{G}_{rc} & \tilde{G}_{rc}^T & \tilde{k}_b & \tilde{G}_h \\ \tilde{G}_h^T & \tilde{k}_b & \tilde{G}_{rc} & \tilde{G}_h^T & \tilde{k}_b & \tilde{G}_h + \tilde{k}_{\alpha h} \end{bmatrix} \quad \dots(5.39)$$

onde

$$\tilde{k}_b = \frac{1}{V} \tilde{L} \tilde{E} \tilde{L}^T \quad \dots(5.40)$$

A determinação da matriz de rigidez referida aos parâmetros nodais de deslocamento é feita com a aplicação de (5.15). A transformação pode ser bastante facilitada particionando-se \tilde{H} e separando-se \tilde{k}_{α} em duas parcelas

matriciais, uma que contém as submatrizes escritas em função de \underline{k}_b e outra preenchida apenas no canto inferior direito por $\underline{k}_{\alpha h}$. O resultado da referida transformação é

$$\underline{k} = \underline{k}_b + \underline{H}_h^T \underline{k}_{\alpha h} \underline{H}_h \quad \dots(5.41)$$

Sinteticamente pode-se escrever que

$$\underline{k} = \underline{k}_b + \underline{k}_h \quad \text{com} \quad \underline{k}_b = \frac{1}{V} \underline{L} \underline{E} \underline{L}^T$$

$$\underline{k}_h = \underline{H}_h^T \underline{k}_{\alpha h} \underline{H}_h \quad \dots(5.42)$$

Como \underline{E} e $\underline{k}_{\alpha h}$ são ambas simétricas e positivas definidas e \underline{k}_b e \underline{k}_h são formas quadráticas em \underline{E} e \underline{k}_h tem-se a garantia de que \underline{k} é simétrica e positiva definida, não possuindo nenhum autovalor negativo.

É necessário, ainda, provar que a matriz de rigidez \underline{k} atende ao TEI. Levando-se (5.42) em (5.10) obtém-se

$$\underline{k} \underline{G}_{rc} = \frac{1}{V} \underline{L} \underline{E} \underline{L}^T \underline{G}_{rc} + \underline{H}_h^T \underline{k}_{\alpha h} \underline{H}_h \underline{G}_{rc} \quad \dots(5.43)$$

Como \underline{H} é inversa de \underline{G} , a segunda parcela se anula. Substituindo-se (5.34a) na anterior chega-se a

$$\underline{k} \underline{G}_{rc} = \underline{L} \underline{E} \underline{B}_{rc} \quad \dots(5.44)$$

Com base em (5.8) o segundo membro da equação anterior iguala-se a \underline{P}_{rc} , ou seja, o TEI está atendido.

Observe-se que a matriz de rigidez é composta por uma parcela que depende apenas dos modos básicos e outra associada exclusivamente aos modos superiores. A primeira é inalterável para elementos que tenham o mesmo arranjo de parâmetros nodais de deslocamento enquanto a segunda modifica-se com a alteração dos modos superiores. Note-se, também, que para a determinação da matriz de rigidez só interessa a submatriz de \underline{H} associada aos modos superiores \underline{H}_h .

Levando-se (5.34a) e (5.3) em (5.4) obtém-se

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{V} \underline{L}^T \underline{G} \underline{H}_{rc} \underline{Q} + \underline{B}_h \underline{H}_h \underline{Q} \quad \dots(5.45)$$

Como o produto $\underline{G}_{rc} \underline{H}_{rc} = \underline{I}$, as deformações podem ser calculadas em função dos parâmetros nodais de deslocamento com

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{Q} \quad \text{onde} \quad \underline{B} = \frac{1}{V} \underline{L}^T + \underline{B}_h \underline{H}_h \quad \dots(5.46)$$

5.4.5 Flexão Linear de Placas - Equações Básicas

Dentro do escopo deste trabalho são adotadas as aproximações clássicas da teoria das placas finas, que permitem simplificar o problema que originalmente é tridimensional, concebendo-o como bidimensional. A placa é entendida como uma folha plana, onde todas as variáveis representativas do fenômeno são referidas à sua superfície média. Admite-se que não há deformações nessa superfície média e que o efeito da tensão normal ao plano da placa é desprezível no cálculo das deformações. São, também, consideradas irrelevantes as deformações devidas ao cisalhamento, adotando-se o modelo de Kirchhoff.

Considere-se a placa de espessura h , cuja superfície média jaz no plano xy , do referencial cartesiano triortogonal dextrorso xyz , como se esboça na figura 5.4. Os pontos da superfície média podem sofrer deslocamento w na direção do eixo z .

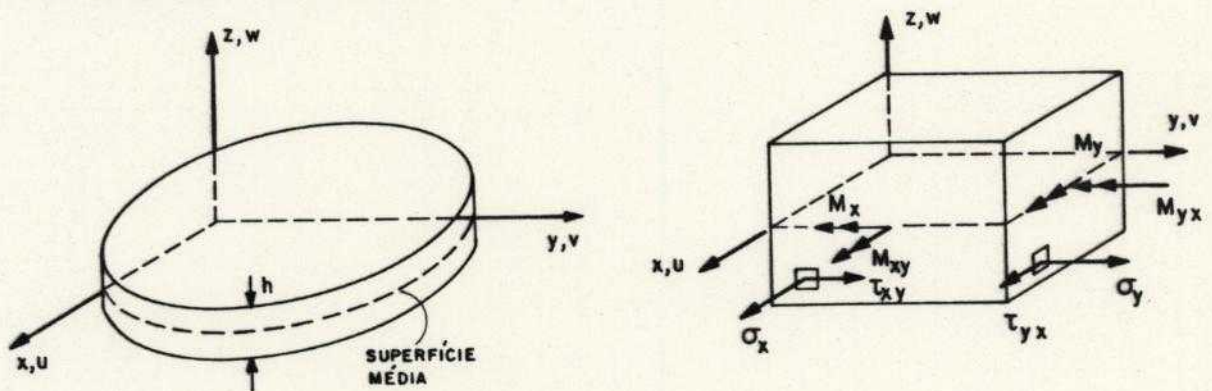


Fig. 5.4 Placa fina

Segundo a Teoria de Kirchhoff os deslocamentos de um ponto de coordenadas x, y e z são dados por

$$u = -z \theta_y \quad v = -z \theta_x \quad w = w(x, y)$$

$$\text{onde } \theta_x = \partial w / \partial y \text{ e } \theta_y = -\partial w / \partial x \quad \dots(5.47)$$

As curvaturas podem ser calculadas, em função do campo de deslocamentos, como

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \chi_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \dots(5.48)$$

As deformações em uma cota z arbitrária são dadas por

$$\varepsilon_x = z \chi_x \quad \varepsilon_y = z \chi_y \quad \gamma_{xy} = z \chi_{xy} \quad \dots(5.49)$$

Os momentos, por unidade de comprimento, são obtidos por meio das integrais

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z \, dz \quad M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z \, dz \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z \, dz \quad \dots(5.50)$$

Admitindo-se comportamento ortotrópico do material constituinte da placa, as relações constitutivas se escrevem

$$\tilde{\sigma} = \tilde{E} \tilde{\varepsilon} \quad \text{com} \quad \tilde{\sigma}^T = \{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \} \quad \tilde{\varepsilon}^T = \{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \}$$

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_x \nu_y} & \frac{\nu_y E_x}{1-\nu_x \nu_y} & 0 \\ \frac{\nu_x E_y}{1-\nu_x \nu_y} & \frac{E_y}{1-\nu_x \nu_y} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

... (5.51)

Combinando-se adequadamente as equações anteriores determinam-se as relações momento-curvatura, mediante integração ao longo da espessura h .

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\chi}} \text{ com}$$

$$\underline{\underline{M}}^T = \{M_x \ M_y \ M_{xy}\} \quad \underline{\underline{\chi}}^T = \{\chi_x \ \chi_y \ \chi_{xy}\} \quad \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{E}} h^3 / 12$$

... (5.52)

5.4.6 Elementos Finitos Adotados

É oportuno lembrar-se que o desenvolvimento teórico apresentado nos itens 5.4.2, 5.4.3 e 5.4.4, para um elemento finito genérico, deve ser adaptado ao caso específico da placa, com algumas simplificações. Basicamente tem-se que ao invés de formular o problema em um domínio tridimensional pode-se fazê-lo em um domínio bidimensional, em que a integração na espessura já está contemplada.

Serão considerados dois elementos finitos de placa, triangulares com três gdl por nó, como se mostra na figura 5.5.

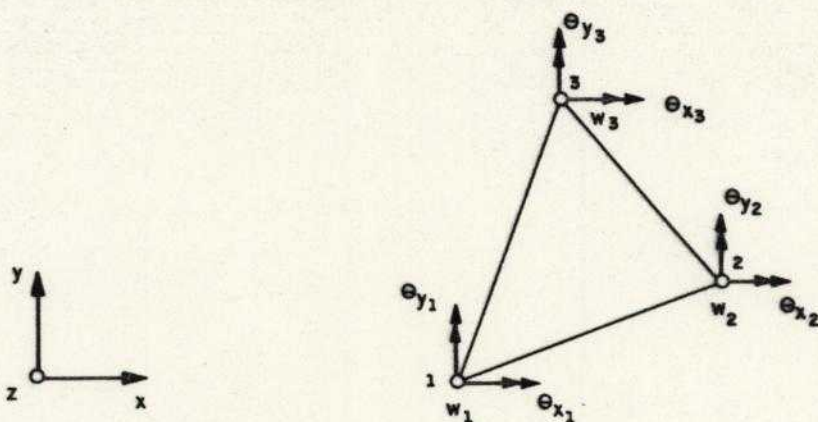


Fig. 5.5 Elemento triangular com nove gdl

De acordo com (5.1) o campo de deslocamentos se escreve

$$w = \underline{\underline{N}}_{rc} \underline{\underline{\alpha}}_{rc} + \underline{\underline{N}}_{rh} \underline{\underline{\alpha}}_{rh} \quad \dots (5.53)$$

Para o triângulo, a maneira natural de exprimirem-se

os modos é com a utilização de coordenadas homogêneas. Os modos básicos são dados por

$$\tilde{N}_{rc} = \{ \xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad \xi_1 \xi_2 \quad \xi_2 \xi_3 \quad \xi_3 \xi_1 \} \dots (5.54)$$

Quanto aos modos superiores serão consideradas duas alternativas. A primeira em que é atendida a condição de ortogonalidade em força

$$\tilde{N}_h = \{ \xi_1 \xi_2 (\xi_1 - \xi_2) \quad \xi_2 \xi_3 (\xi_2 - \xi_3) \quad \xi_3 \xi_1 (\xi_3 - \xi_1) \} \dots (5.55)$$

E a segunda, em que é respeitada a condição de ortogonalidade em energia

$$\tilde{N}_h = \{ (\xi_1 - \xi_2)^3 \quad (\xi_2 - \xi_3)^3 \quad (\xi_3 - \xi_1)^3 \} \dots (5.56)$$

O primeiro elemento foi denominado em [5.47] T3A, por ser Triangular com 3 gdl por nó e utilizar coordenadas homogêneas ("Area co-ordinates", em inglês). Aqui denominam-se os dois elementos utilizados por T3AF e T3AE, onde "F" e "E" são adicionados à nomenclatura como indicativo de ortogonalidade em Força e em Energia, respectivamente.

A escolha de aproximação cúbica para a translação w , e adoção de translação e rotação como parâmetros nodais de deslocamento, é apropriada para a combinação com o elemento barra utilizado neste trabalho que também possui essas características. Tal combinação é essencial para a simulação das ligações laje-viga e laje-pilar.

As coordenadas homogêneas de um ponto interior ao triângulo podem ser calculadas como

$$\xi_i = \frac{1}{2A} (2 A_i^o + b_i x + a_i y) \dots (5.57)$$

onde

$$b_i = y_j - y_k \quad a_i = x_k - x_j \quad 2 A_i^o = x_j y_k - x_k y_j \dots (5.58)$$

Nas duas expressões i, j e k devem ser uma permutação

cíclica de 1,2 e 3. A área A do triângulo pode ser determinada por

$$A = \frac{1}{2} (b_1 a_2 - b_2 a_1) \quad \dots(5.59)$$

Nas deduções que se seguem aparecem derivadas dos modos em relação às coordenadas cartesianas x e y. É oportuno lembrar-se que se $f=f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ então

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2A} \sum_i b_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} & \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2A} \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4A^2} \sum_i \sum_j a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \quad , \text{ etc.} \end{aligned} \quad \dots(5.60)$$

No estudo das placas é usual trabalhar-se diretamente com as curvaturas χ ao invés de se utilizarem as deformações ϵ , e os momentos M ao invés das tensões σ . As curvaturas podem ser calculadas, em qualquer ponto da placa, com base nas equações (5.48) e (5.53).

$$\begin{aligned} \chi &= \underline{B}_{rc} \alpha_{rc} + \underline{B}_h \alpha_h \\ \text{onde } \underline{B}_{rc} &= \nabla \underline{N}_{rc} \quad , \quad \underline{B}_h = \nabla \underline{N}_h \quad \text{e} \\ \nabla &= \{ \partial^2 / \partial x^2 \quad \partial^2 / \partial y^2 \quad 2\partial^2 / \partial x \partial y \}^T \end{aligned} \quad \dots(5.61)$$

A partir das curvaturas encontram-se os momentos M utilizando-se a equação (5.52). Combinando-se com a equação anterior encontra-se

$$\underline{M} = \underline{D} \underline{B}_{rc} \alpha_{rc} + \underline{D} \underline{B}_h \alpha_h \quad \dots(5.62)$$

Em um ponto que pertence a um lado do elemento podem-se utilizar as relações de rotação de coordenadas para a determinação dos momentos referidos ao sistema local indicado na figura 5.6.

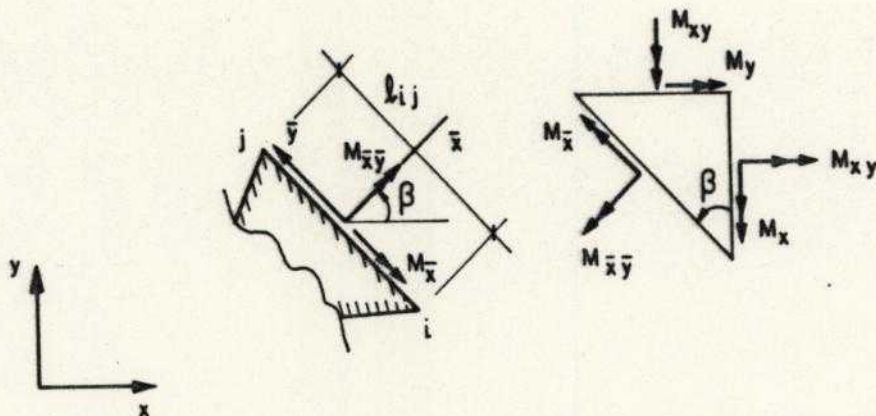


Fig. 5.6 Momentos no lado do elemento

Tem-se que

$$M_{\bar{x}} = M_x c^2 + M_y s^2 + 2 M_{xy} s c$$

$$M_{\bar{xy}} = -(M_x - M_y) s c + M_{xy} (c^2 - s^2)$$

onde $c = \cos \beta$ e $s = \text{sen } \beta$... (5.62)

Em um estado arbitrário de curvatura constante, quando a matriz \underline{D} não se altera no domínio do elemento, os momentos calculados em todos os pontos desse domínio, incluindo os seus lados, se mantêm inalterados. A determinação das forças concentradas nos nós, correspondentes a esse estado de momentos constantes é feita somando-se as contribuições dos momentos atuantes no lado, multiplicados pela metade do seu comprimento, o que é consistente mediante a aplicação do PTV, lembrando-se que as rotações, neste caso, têm distribuição linear ao longo do lado. Os momentos concentrados no nó j , devidos aos momentos atuantes no lado $i-j$ são iguais a

$$T_{rcx} = \frac{l_{ij}}{2} (M_{\bar{xy}} c + M_{\bar{x}} s)$$

$$T_{rcy} = \frac{l_{ij}}{2} (M_{\bar{xy}} s - M_{\bar{x}} c)$$

... (5.63)

Substituindo-se (5.62) em (5.63)

$$T_{rcx} = \frac{1}{2} [M_y (x_i - x_j) + M_{xy} (y_j - y_i)]$$

$$T_{rcy} = \frac{1}{2} [M_x (y_i - y_j) + M_{xy} (x_j - x_i)] \quad \dots(5.64)$$

Observe-se que as contribuições do lado i-j nos momentos concentrados no nó j , sob o ponto de vista geométrico, dependem apenas desse lado. Um elemento vizinho, que compartilhasse o lado i-j produziria momentos concentrados no nó j , em um estado de momento constante, iguais às do primeiro elemento e de sentidos contrários, permitindo-se o cancelamento aos pares, base do TEI.

Pode-se, então, determinar as contribuições do lado j-k nas ações concentradas no nó j, que, combinadas com as anteriores fornecem , tendo em vista (5.58),

$$\tilde{T}_{rcj} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_j & b_j \\ -b_j & 0 & -a_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_{rc} \quad \dots(5.65)$$

Agrupando-se as ações concentradas nos três nós do elemento e, lembrando-se que a equação (5.5) deve ser adaptada, substituindo-se $\tilde{\sigma}_{rc}$ por \tilde{M}_{rc} , obtém-se a matriz \tilde{L}

$$\tilde{T}_{rc} = \tilde{L} \tilde{M}_{rc} \quad \text{onde}$$

$$\tilde{L}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 & -b_3 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & b_1 & -a_1 & 0 & b_2 & -a_2 & 0 & b_3 & -a_3 \end{bmatrix} \quad \dots(5.66)$$

A matriz \tilde{L} independe dos modos superiores, mantendo-se a mesma para todos os elementos de placa que tenham igual arranjo dos graus de liberdade. Esse aspecto na formulação livre é bastante importante pois a matriz básica \tilde{k}_b não se modifica. A alteração dos modos superiores pode ser feita de maneira relativamente simples aproveitando-se grande

parte de desenvolvimento anterior.

O cômputo da matriz \tilde{G} (vide Eq. 5.2) é feito particularizando-se os valores de w , θ_x e θ_y nos nós do elemento. As rotações são calculadas com base em (5.47). O vetor dos parâmetros nodais de deslocamentos é dado a seguir

$$\tilde{Q} = \{ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \}^T \dots(5.67)$$

Com os modos básicos dados por (5.54) obtêm-se

$$\tilde{G}_{rc} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_2 & 0 & a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_2 & 0 & -b_3 \\ 0 & 2A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_3 & 0 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_1 & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 2A & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & a_2 & a_1 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & 0 & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \dots(5.68)$$

E, com os modos superiores expressos em (5.55) e (5.56), encontram-se respectivamente

$$\tilde{G}_{h1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -a_3 \\ -b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & a_3 & 0 \\ b_1 & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_1 \\ 0 & b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \quad \tilde{G}_{h2} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3a_{12} & 0 & 3a_{31} \\ 3b_{21} & 0 & 3b_{13} \\ -1 & 1 & 0 \\ 3a_{12} & 3a_{23} & 0 \\ 3b_{21} & 3b_{32} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3a_{23} & 3a_{31} \\ 0 & 3b_{32} & 3b_{13} \end{bmatrix}$$

onde $a_{12} = a_1 - a_2$, $b_{21} = b_2 - b_1$, etc.

...(5.69)

Aplicando-se as expressões (5.61) encontram-se,

mediante derivação apropriada, as expressões de \tilde{B}_{rc} e \tilde{B}_h . A primeira dessas matrizes pode ser particionada como

$$\tilde{B}_{rc} = [\tilde{B}_r \quad \tilde{B}_c]$$

onde

$$\tilde{B}_r = 0$$

$$\tilde{B}_c = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} 2 b_1 b_2 & 2 b_2 b_3 & 2 b_3 b_1 \\ 2 a_1 a_2 & 2 a_2 a_3 & 2 a_3 a_1 \\ 2(b_1 a_2 + a_1 b_2) & 2(b_2 a_3 + a_2 b_3) & 2(b_3 a_1 + a_3 b_1) \end{bmatrix} \dots (5.70)$$

Observe-se que a submatriz \tilde{B}_r , relacionada aos deslocamentos de corpo rígido, é identicamente nula.

A seguir são apresentadas as primeiras colunas das submatrizes \tilde{B}_h , correspondentes aos elementos T3AF e T3AE, respectivamente. As duas outras colunas de cada uma das submatrizes podem ser encontradas por permutação cíclica de índices.

$$\tilde{B}_{h1} = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} 2b_1^2 \xi_2 + 4b_1 b_2 (\xi_1 - \xi_2) - 2b_2^2 \xi_1 & \dots \\ 2a_1^2 \xi_2 + 4a_1 b_2 (\xi_1 - \xi_2) - 2a_2^2 \xi_1 & \dots \\ 4a_1 b_1 \xi_2 + 4(a_1 b_2 + b_2 a_1) (\xi_1 - \xi_2) - 4a_2 b_2 \xi_1 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_{h2} = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} 6(b_1 - b_2)^2 (\xi_1 - \xi_2) & \dots \\ 6(a_1 - a_2)^2 (\xi_1 - \xi_2) & \dots \\ 12(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)(\xi_1 - \xi_2) & \dots \end{bmatrix} \dots (5.71)$$

No desenvolvimento do presente trabalho foi adotada a formulação livre modificada com o acréscimo da submatriz $\tilde{k}_{\alpha ha}$, para se evitar a possibilidade de aparecimento de autovalores negativos. Observe-se que o elemento T3AF atende ao critério de ortogonalidade em força. Para a constatação desse fato basta perceber-se que o produto $\tilde{G}_h^T \tilde{L}$

se anula, anulando-se, pois, $\tilde{G}_h^T \tilde{P}_{rc}$ (vide equação 5.36). Decorre que não há, nesse caso, perigo de aparecimento de autovalor negativo da matriz de rigidez do elemento, sendo plausível a utilização da formulação livre sem modificação. Pode-se comprovar facilmente, com base na equação (5.38), que a matriz adicional $\tilde{k}_{\alpha h a}$ também se anula, tornando-se as duas alternativas de formulação livre equivalentes.

Já o elemento T3AE obedece à condição de ortogonalidade em energia o que pode ser comprovado promovendo-se a integração indicada em (5.27).

As relações curvatura-deslocamento (vide eq. 5.46 e 5.61), adaptadas para o elemento finito de placa, são dadas por

$$\tilde{\chi} = \tilde{B} \tilde{Q} \quad \text{onde} \quad \tilde{B} = \frac{1}{A} \tilde{L}^T + \tilde{B}_h \tilde{H}_h \quad \dots(5.72)$$

Admitindo-se que antes de ocorrerem as curvaturas $\tilde{\chi}$ já havia uma distribuição de momentos iniciais \tilde{M}_0 , os momentos finais podem ser calculados em função dos deslocamentos como (vide eq. 5.52)

$$\tilde{M} = \tilde{D} \tilde{B} \tilde{Q} + \tilde{M}_0 \quad \dots(5.73)$$

O campo de deslocamentos, com base em (5.53) e (5.3), pode ser escrito em função dos parâmetros nodais de deslocamento

$$w = \tilde{N} \tilde{Q} \quad \text{onde} \quad \tilde{N} = \tilde{N}_{rc} \tilde{H}_{rc} + \tilde{N}_{\alpha h} \tilde{H}_{\alpha h} \quad \dots(5.74)$$

A aplicação do PTV permite o estabelecimento das equações de equilíbrio de um corpo discretizado em elementos finitos, como se encontra em inúmeros textos clássicos do MEF [5.54]. Para uma placa submetida a ações concentradas " F_c " (forças e momentos), forças superficiais "p" ortogonais ao seu plano e a um campo de momentos iniciais " \tilde{M}_0 ", obtém-se

$$\tilde{K} \tilde{Q} = \tilde{F} \quad \dots(5.75)$$

onde \tilde{Q} deve ser entendido como o vetor que reúne todos os parâmetros nodais de deslocamento da estrutura e \tilde{K} a sua matriz de rigidez, resultado das contribuições dos "ne" elementos, conforme a equação a seguir

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \sum_{ne} \tilde{k} & \text{com} & \quad \tilde{k} = \int_A \tilde{B}^T \underline{D} \tilde{B} \, dA \\ & & \text{ou} & \quad \tilde{k} = \tilde{k}_b + \underline{H}_h^T \left(\int_A \tilde{B}_h^T \underline{D} \tilde{B}_h \, dA \right) \underline{H}_h \end{aligned} \quad \dots(5.76)$$

e \tilde{F} o vetor das forças nodais que contém as contribuições das ações concentradas nos nós, as equivalentes às forças superficiais e aos momentos iniciais, atuantes no domínio do elemento, explicitado, nessa ordem, a seguir.

$$\tilde{F} = \tilde{F}_c + \sum_{ne} \left[\int_A \tilde{N}^T p \, dA - \int_A \tilde{B}^T \underline{M}_o \, dA \right] \quad \dots(5.77)$$

Nas expressões (5.76) e (5.77) as integrações são realizadas sobre a área A de cada elemento.

Na determinação da matriz de rigidez do elemento, desde que a matriz constitutiva \underline{D} seja constante em seu domínio, o integrando tem desenvolvimento quadrático. Optando-se pela integração numérica de Gauss basta utilizarem-se três pontos-amostra.

Quanto ao vetor de forças nodais cabe atentar para a situação bastante usual de forças superficiais "p" de distribuição constante no domínio do elemento. De acordo com a eq. (5.77) as forças nodais equivalentes podem ser calculadas em um elemento por

$$\tilde{F}_p = p \int_A \tilde{N}^T \, dA \quad \dots(5.78)$$

Utilizando-se na equação anterior \tilde{N} dado em (5.74) obtém-se

$$\underline{\tilde{F}}_p = p \left[\underline{H}_{rc}^T \int_A \underline{\tilde{N}}_{rc} dA + \underline{H}_h^T \int_A \underline{\tilde{N}}_h dA \right] \quad \dots(5.79)$$

Para as duas opções de modos superiores adotadas, a segunda integral se anula. Promovendo-se a integração dos modos básicos chega-se a

$$\underline{\tilde{F}}_p = p \underline{H}_{rc}^T A \{ 1/3 \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 1/12 \quad 1/12 \quad 1/12 \}^T \quad \dots(5.80)$$

Bergan e Felippa [5.52], apresentam a expressão explícita para a matriz $\underline{H} = \underline{G}^{-1}$ correspondente ao elemento T3AE utilizado no presente trabalho. A matriz inversa é obtida utilizando-se técnicas de manipulação simbólica. Com a partição \underline{H}_{rc}^T é possível determinar-se a expressão do vetor de cargas $\underline{\tilde{F}}_p$ em (5.80), cujos elementos correspondentes ao primeiro nó são indicados na expressão (5.81). Os demais elementos podem ser determinados por permutação cíclica de índices.

$$\underline{\tilde{F}}_p = p A \{ 1/3 \quad (b_2 - b_3)/24 \quad (a_2 - a_3)/24 \quad \dots \}^T \quad \dots(5.81)$$

A submatriz \underline{H}_h , fundamental na montagem das matrizes do elemento, transcrita da referência supra citada é igual a

$$\underline{H}_{hz}^T = \frac{1}{54} \begin{bmatrix} -12 & 0 & 12 \\ -b_1 + 6 b_3 & -b_1 & -b_1 + 6 b_2 \\ -a_1 + 6 a_3 & -a_1 & -a_1 + 6 a_2 \\ 12 & -12 & 0 \\ -b_2 + 6 b_3 & -b_2 + 6 b_1 & -b_2 \\ -a_2 + 6 a_3 & -a_2 + 6 a_1 & -a_2 \\ 0 & 12 & -12 \\ -b_3 & -b_3 + 6 b_1 & -b_3 + 6 b_2 \\ -a_3 & -a_3 + 6 a_1 & -a_3 + 6 a_2 \end{bmatrix} \quad \dots(5.82)$$

Bergan e Felippa sugerem a alternativa de generalização da matriz de rigidez do elemento, expressa em [5.52], como

$$\tilde{k} = \tilde{k}_b + \beta \tilde{k}_h \quad \dots(5.83)$$

onde β é um fator de escala positivo. A matriz de rigidez obtida atende ao TEI e corresponde a se fazer o produto de \tilde{k}_{ah} por β na equação (5.39), o que permite ajustar o comportamento do elemento para distribuições de deformação escolhidas. A figura 5.7 mostra uma associação de dois elementos T3AE, considerados em comportamento elástico linear isotrópico com coeficiente de Poisson ν . Feita a análise para o modo x^3 , igualando-se a energia de deformação calculada a partir das matrizes de rigidez dos elementos com a que resulta da integração da curvatura $\partial^2(x^3)/\partial x^2$ [5.53], encontra-se o valor ótimo de β

$$\beta = \frac{27}{14 + (4+6\nu)(a/b)^2 + 2(a/b)^4} \quad \dots(5.84)$$

Para a manutenção da consistência é necessário que a matriz \tilde{B} seja alterada, escrevendo-a

$$\tilde{B} = \frac{1}{A} \tilde{L}^T + \sqrt{\beta} \tilde{B}_h \tilde{H}_h \quad \dots(5.85)$$

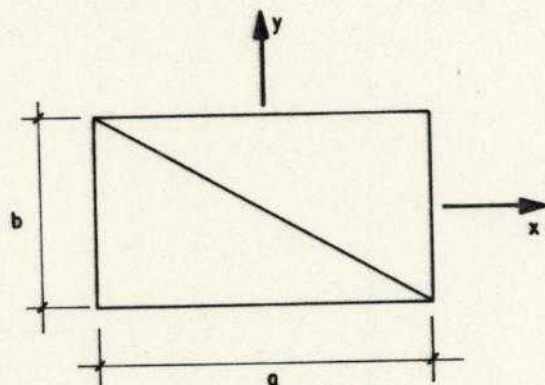


Fig. 5.7 Associação de dois triângulos para determinação de β ótimo

Quanto ao elemento T3AF, Bergan e Nygard [5.49] notificam que a matriz \tilde{H} é apresentada explicitamente em [5.57].

5.4.7 Formação do Elemento Quadrilateral - Condensação Estática

A construção de elementos quadrilaterais no presente trabalho é feita pela associação de quatro triângulos, como se mostra na figura 5.8. É aplicada a técnica da condensação estática [5.58] para a eliminação dos graus de liberdade internos.

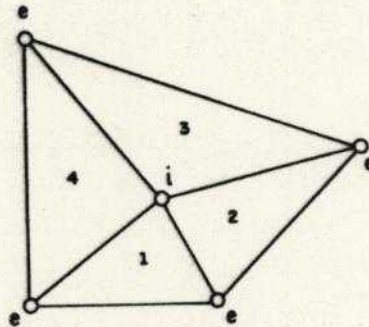


Fig. 5.8 Quadrilátero formado por quatro triângulos

A eliminação dos graus de liberdade internos, processada quando se faz a montagem da matriz de rigidez do elemento, permite reduzir a dimensão e a banda da matriz do sistema de equações de equilíbrio do modelo completo.

A eliminação é uma técnica mais geral do que a aplicação aqui feita. Pode-se entendê-la como um desdobramento do procedimento básico de eliminação de Gauss [5.59].

Considerem-se graus de liberdade que aparecem simultaneamente em um conjunto de equações de equilíbrio. Com os índices "i" e "e" associados aos gdl internos (a serem eliminados) e aos externos, respectivamente, essas equações de equilíbrio podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_{ii} & \tilde{k}_{ie} \\ \tilde{k}_{ei} & \tilde{k}_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_e \end{Bmatrix} \quad \dots(5.86)$$

A solução das equações associadas a Q_i permite escrever

$$Q_i = \tilde{k}_{ii}^{-1} (F_i - \tilde{k}_{ie} Q_e) \quad \dots(5.87)$$

Esse resultado, levado ao segundo grupo de equações, fornece

$$\begin{aligned} \bar{k}_{ee} Q_e &= \bar{F}_e \quad \text{onde} \quad \bar{k}_{ee} = \tilde{k}_{ee} - \tilde{k}_{ei} \tilde{k}_{ii}^{-1} \tilde{k}_{ie} \\ \bar{F}_e &= F_e - \tilde{k}_{ei} \tilde{k}_{ii}^{-1} F_i \end{aligned} \quad \dots(5.88)$$

\bar{k}_{ee} é a matriz de rigidez reduzida e \bar{F}_e o vetor de forças alterado, correspondentes aos gdl externos, com a inclusão dos efeitos das liberações realizadas nos gdl internos.

As relações momento-deslocamento também sofrem alterações. A equação (5.73) pode ser reescrita, com a separação dos gdl internos e externos, como

$$\underline{M} = \underline{D} \underline{B}_i Q_i + \underline{D} \underline{B}_e Q_e + \underline{M}_0 \quad \dots(5.89)$$

Levando-se (5.87) na anterior obtém-se

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \underline{D} \bar{\underline{B}}_e Q_e + \bar{\underline{M}}_0 \quad \text{onde} \quad \bar{\underline{B}}_e = \underline{B}_e - \underline{B}_i \tilde{k}_{ii}^{-1} \tilde{k}_{ie} \\ \bar{\underline{M}}_0 &= \underline{M}_0 + \underline{D} \underline{B}_i \tilde{k}_{ii}^{-1} F_i \end{aligned} \quad \dots(5.90)$$

De maneira semelhante ao da matriz de rigidez há uma redução da dimensão do problema. Observe-se que ocorre o acréscimo de uma parcela aos momentos iniciais \underline{M}_0 que não pode ser eliminada, sob pena de a solução com o uso do quadrilátero não se igualar àquela em que os triângulos são fornecidos explicitamente, definindo-se o vértice interno como nó do modelo.

Em termos computacionais o procedimento mais vantajoso consiste em se evitar a inversão da submatriz \tilde{k}_{ii} ,

promovendo-se a eliminação por triangularização da matriz de rigidez até o esgotamento dos graus de liberdade internos, com redução simultânea das equações de equilíbrio e das relações momento-deslocamento [5.59]. Esse procedimento foi adotado no presente trabalho.

5.4.8 Resultados Numéricos

Com o objetivo de mostrar o desempenho dos elementos descritos, são apresentados alguns resultados de experimentações numéricas com a sua utilização na análise elástica linear de placas delgadas isotrópicas. São aqui escolhidas as situações clássicas de placas quadradas, simplesmente apoiadas ou engastadas em todo o seu contorno, submetidas a um carregamento transversal uniformemente distribuído em toda a extensão da placa e a uma força transversal aplicada no ponto central. Além de serem alguns dos testes aceitos como padrões para a avaliação do comportamento de elementos de placa, são representativos de situações presentes na análise de pavimentos de edifícios. Testes que contemplem variações de forma, carregamento, condições de contorno, etc. podem ser encontrados em [5.45],[5.46],[5.47],[5.52],[5.57].

Foi discretizado apenas um quarto da placa com as redes mostradas na figura 5.9.

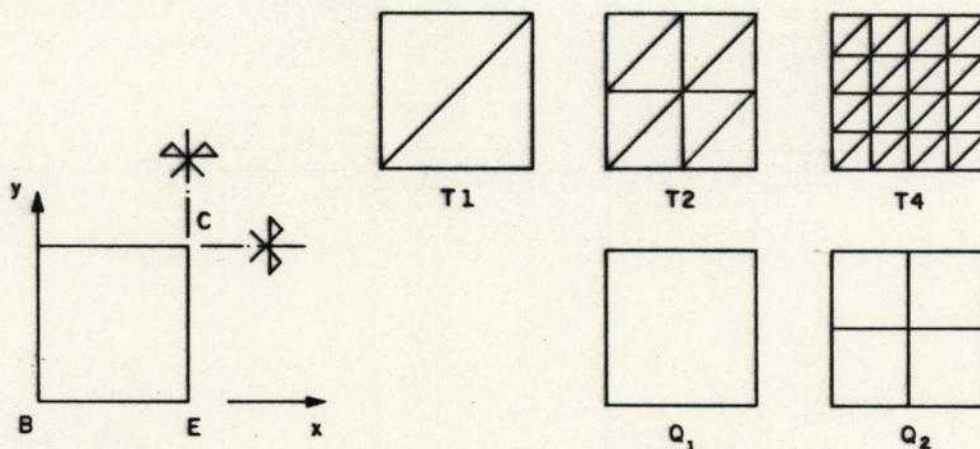


Fig. 5.9 Placa quadrada - pontos de saída e redes

Para o entendimento da tabela 5.1 é preciso atentar para a simbologia utilizada. Condição de contorno : A - simplesmente apoiada e E - engastada. Carregamento : C - Força concentrada no ponto central e D - Força uniformemente distribuída. Resultados : w_c - flecha no ponto central, M_{xc} - momento fletor M_x no ponto central, M_{yE} - momento fletor M_y no ponto médio de lado engastado, M_{xyB} - momento volvente M_{xy} no canto B. Todos os resultados foram multiplicados por um fator tal que o valor 100 corresponda à solução analítica apresentada em [5.13].

Para o carregamento distribuído o vetor de forças nodais equivalentes foi sempre calculado de maneira consistente, o que tem efeito importante na melhoria dos resultados para discretizações mais pobres. Em atendimento à equação (5.84), para o elemento T3AE foi adotado $\beta=1,2385$ ($\nu = 0,3$). Os resultados de momentos adotados foram nodais, fazendo-se a média de elementos vizinhos, quando necessário. A extrapolação de resultados dos centróides dos elementos produziria valores mais precisos, por serem os elementos não-conformes.

Cont.	Car.	Res.	Elem.	Rede				
				T ₁	T ₂	T ₄	Q ₁	Q ₂
A	C	w _C	T3AF	97,3	98,7	99,8	97,5	99,6
			T3AE	105,5	101,6	100,6	98,5	100,0
E	C	w _C	T3AF	92,8	100,5	100,3	96,6	100,1
			T3AE	92,8	103,3	101,4	103,1	101,8
		M _{YE}	T3AF	99,4	100,2	100,1	99,2	103,8
			T3AE	105,7	104,8	102,7	113,5	108,9
A	D	w _C	T3AF	107,6	101,0	100,3	100,7	100,2
			T3AE	116,6	103,5	100,8	100,7	100,0
		M _{xC}	T3AF	134,3	106,9	101,6	124,6	106,1
			T3AE	154,0	115,0	100,7	130,7	106,5
		M _{xyB}	T3AF	102,6	110,4	105,4	77,9	93,0
			T3AE	111,1	113,2	109,3	79,8	93,8
E	D	w _C	T3AF	137,2	109,1	102,1	107,1	102,3
			T3AE	137,2	110,5	102,4	114,3	103,7
		M _{xC}	T3AF	195,0	122,0	104,9	145,7	111,3
			T3AE	203,0	133,0	108,4	178,5	114,8
		M _{YE}	T3AF	81,2	95,7	99,3	78,4	98,5
			T3AE	86,4	101,4	102,9	85,0	103,9

Tab. 5.1 Testes numéricos com os elementos

Os resultados tabulados mostram que os elementos T3AF e T3AE apresentam um desempenho excelente, com alguma preferência pelo primeiro. O relaxamento da conformidade permite uma aproximação muito boa, mesmo para redes pobres. No caso da formulação livre, com garantia de convergência associada ao atendimento do TEI.

Para os deslocamentos, a consideração de pelo menos três divisões, no lado da placa completa, mantém os resultados na ordem de no máximo 10%. Isso, mesmo com a utilização de elementos triangulares.

Para os momentos vale a mesma regra desde que sejam utilizados quadriláteros, que é uma opção não apenas interessante para a melhoria de resultados, sem o acréscimo de dimensão e banda do sistema de equações de equilíbrio mas, também, sob o ponto de vista da geração de dados e desempenho do modelo. Quando são usados triângulos, após a

geração dos nós surge a questão de como dividir cada uma das quadrículas em dois elementos. O quadrilátero, composto por quatro triângulos, cria algo que se poderia chamar de isotropia geométrica enquanto que a divisão em dois triângulos define preferência de direção devido à separação em uma das diagonais.

Tal orientação para a discretização pode ser tomada como um critério de ordem prática para o uso dos elementos T3AF e T3AE. Preferencialmente utilizam-se quadrados ou quadriláteros de lados semelhantes e ângulos próximos de 90° . Cada painel, definido por vigas que se encontram, ou pela disposição de pilares, quando a laje é plana, deve conter um mínimo de três divisões por lado (quatro elementos), objetivando-se manter os erros máximos na ordem de 10%.

Em [5.53] são tabulados os mesmos resultados para placas com $\nu = 0$ em que o elemento T3AE, com $\beta=1,35$, apresenta desempenho excelente. Praticamente todos os resultados apresentados foram conferidos com o programa desenvolvido neste trabalho. Na referência citada, após a realização de testes bastante severos para a medida da acuidade do elemento, Bergan e Felippa sugerem que ele se coloca como um dos mais apurados dentre os elementos triangulares de nove gdl para a análise de flexão de placas finas.

Muitos testes foram realizados, embora apenas alguns tenham sido apresentados, para se evitar o excesso de tabulação de valores. Em todos eles percebeu-se a tendência de convergência para a solução analítica disponível. Mesmo que em alguns casos a diferença em relação ao valor correto aumentasse, com o acréscimo de algumas divisões adicionais na rede, refinamentos subsequentes produziram a redução dessas diferenças indicando claramente a convergência ao valor correto.

Como ilustração a figura 5.10 apresenta alguns erros cometidos na avaliação da flecha no ponto central de uma placa quadrada simplesmente apoiada, submetida a carregamento transversal uniformemente distribuído, quando se utilizam elementos quadrilaterais em redes Q_1 , Q_2 , Q_4 e Q_8 . Além do elemento quadrilateral formado por quatro triângulos T3AF, aqui denominado Q3AF, são apresentados os resultados para os elementos: QLS, introduzido em [5.33]; Heterosis, composto de 9 nós e descrito em [5.60]; QHSM, híbrido, baseado da teoria de Kirchhoff, apresentado em [5.61] com as adaptações assinaladas em [5.62]. É notório o bom desempenho do elemento Q3AF comparado aos demais. A comparação de resultados em outros testes realizados mostrou sempre um desempenho competitivo com os outros elementos.

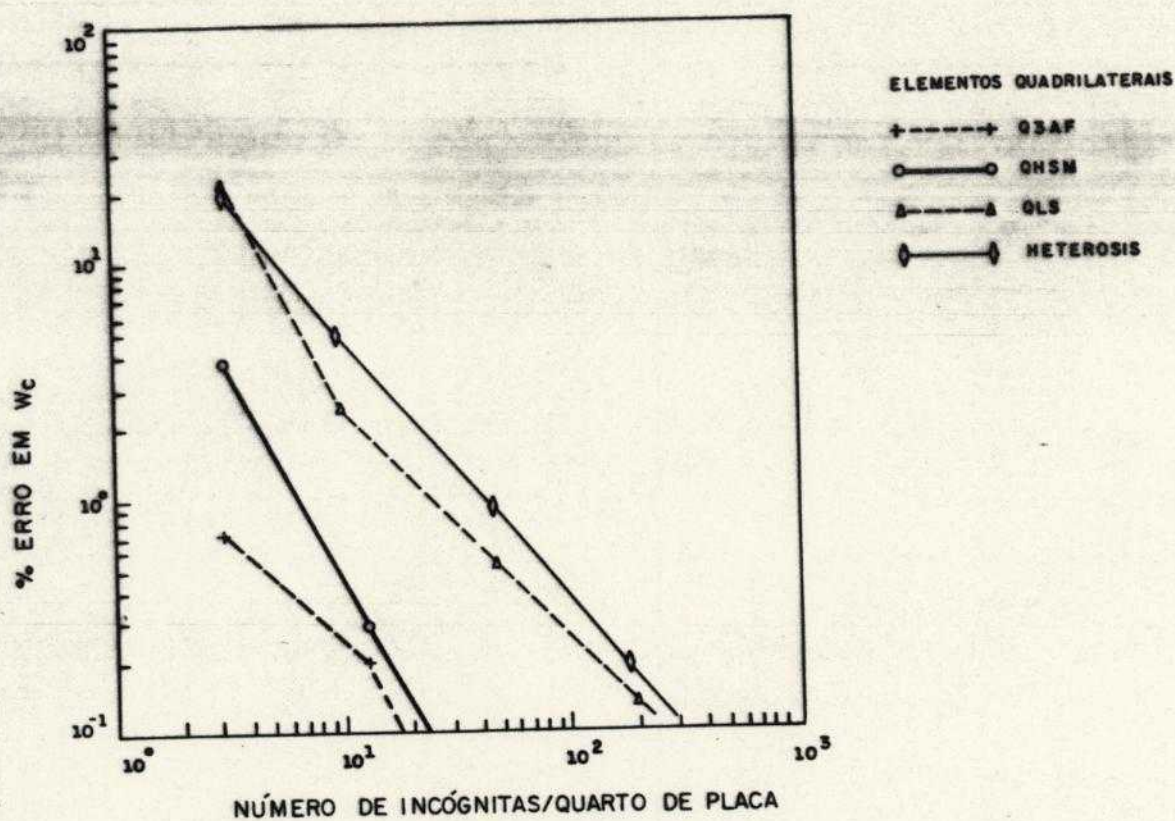


Fig. 5.10 Placa apoiada- carregamento distribuído
Flecha no centro

As figuras 5.11 e 5.12 apresentam alguns erros encontrados com a utilização do elemento T3AF e dois consagrados elementos triangulares de três gdl por nó. Estes elementos são o DKT ("Discret Kirchhoff Theory") e o HSM ("Hybrid Stress Model"), descritos detalhadamente em [5.19]. Foi escolhida uma placa quadrada engastada nas bordas e submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído. Pode-se observar que o desempenho de T3AF é comparável ao dos outros dois elementos triangulares. Foram utilizadas redes do tipo T_2 , T_4 e T_8 .

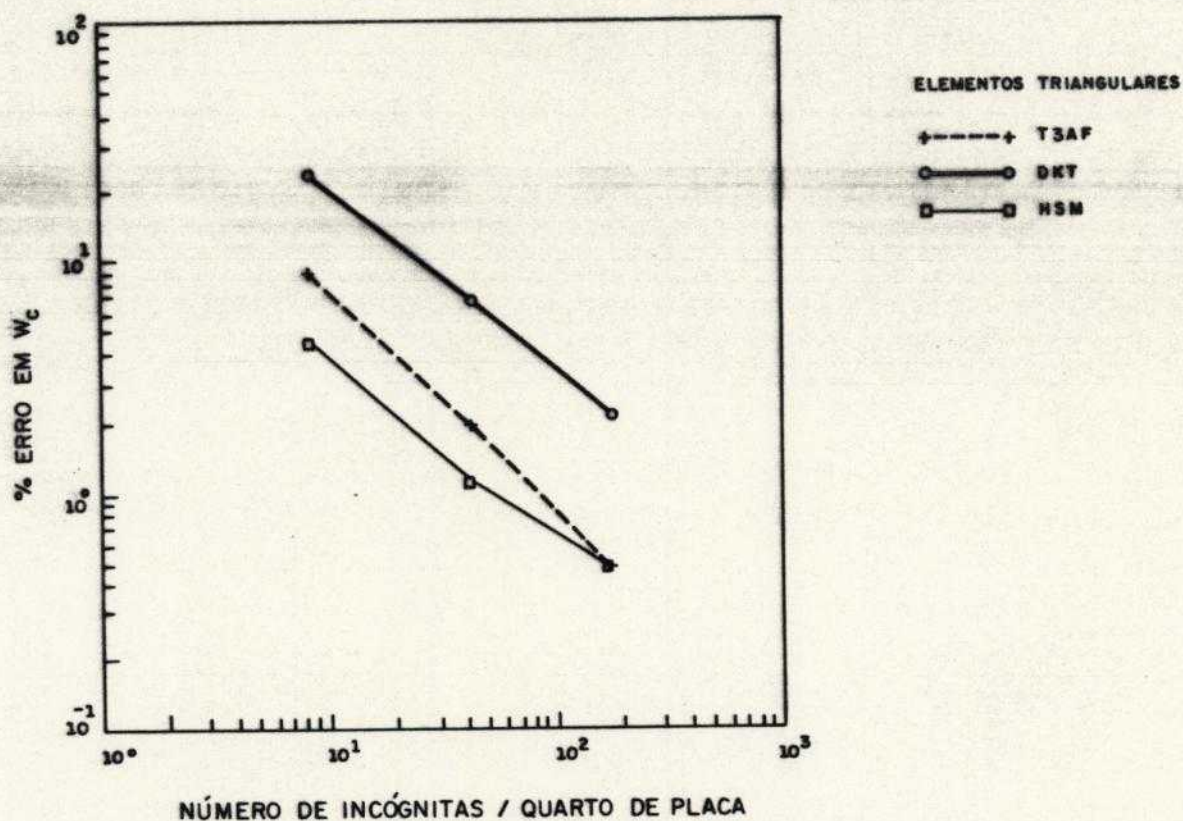


Fig. 5.11 Placa engastada - carregamento distribuído
Flecha no centro

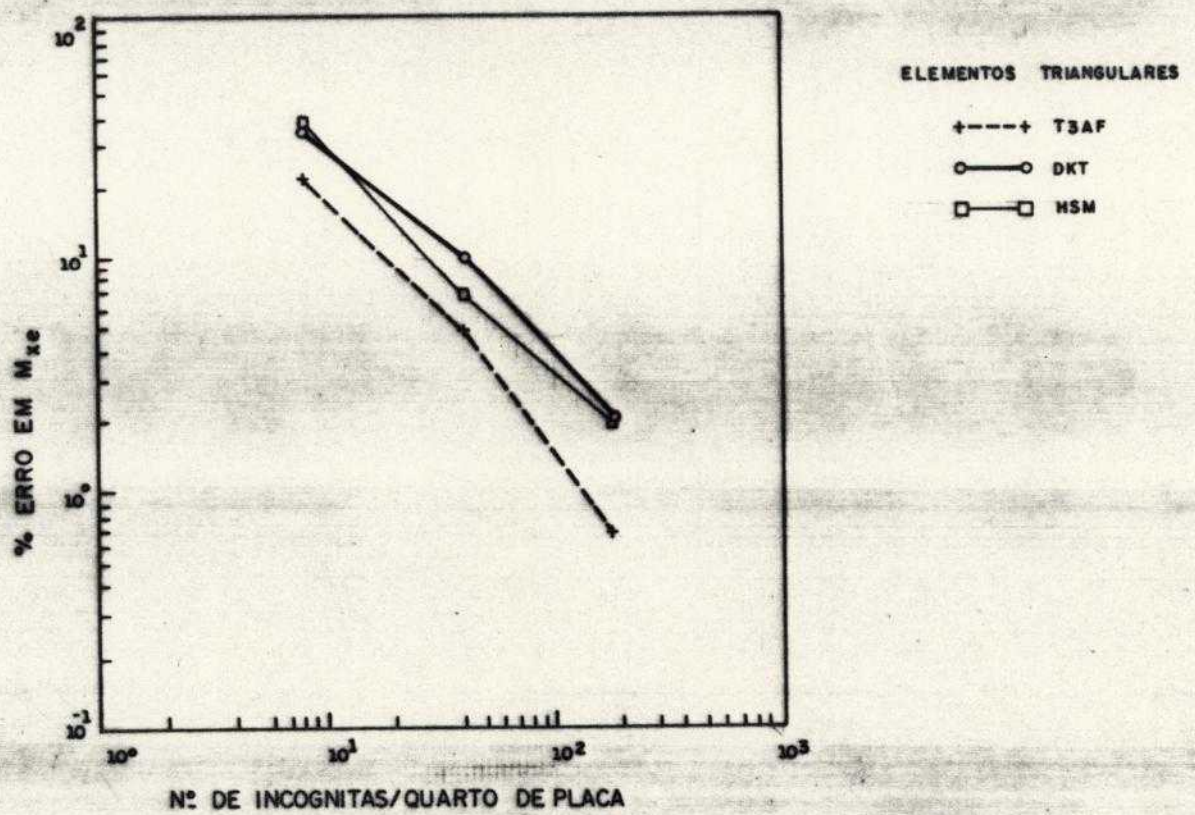


Fig. 5.12 Placa engastada - carregamento distribuído
Momento no centro do engaste

5.5 Exemplo de Aplicação - Análise Linear

A figura 5.13 esquematiza a forma do pavimento tipo do Edifício Costa do Mar, situado na Barra da Tijuca no Rio de Janeiro, e de sistema estrutural concebido em concreto armado. Como o pavimento é bissimétrico apenas a sua quarta parte é apresentada. O subsistema horizontal é do tipo laje-viga. Para efeitos de comparação foram feitas duas análises elásticas lineares do pavimento, para as ações estáticas verticais. A primeira desligando-se a laje das vigas, utilizando-se o modelo grelha e a segunda integrando-se a laje no modelo, com a utilização de elementos finitos de placa.

As características geométricas de vigas e pilares podem ser observadas na figura 5.13. A laje possui espessura constante e igual a oito centímetros. Quanto ao concreto armado foi adotado peso específico de 25 kN/m^3 , módulo de deformação longitudinal $1,8 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson igual a 0,15. Foi considerada força uniformemente distribuída de $2,5 \text{ kN/m}^2$ correspondente a contrapiso, piso e sobrecarga de utilização em todo o pavimento. As alvenarias internas e externas foram admitidas com peso por metro quadrado de painel igual a 1,4 e $1,8 \text{ kN/m}^2$, respectivamente. Sobre a viga V17 apoia-se uma escada que aplica uma força uniformemente distribuída de 15 kN/m .

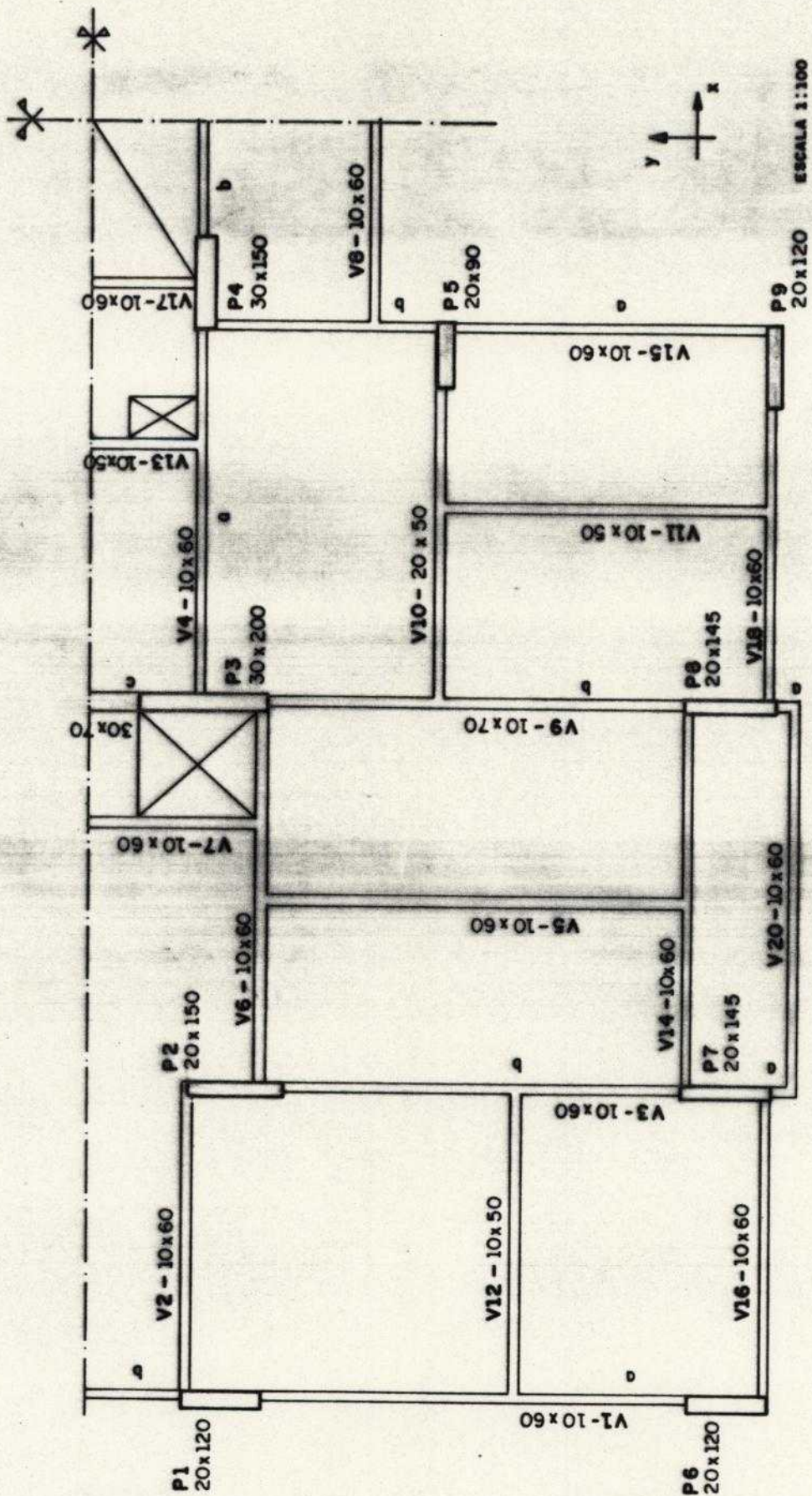


Fig. 5.13 Pavimento tipo do edifício Costa do Mar

O modelo grelha utilizado compõe-se de 55 nós , 62 barras e 9 molas, num total de 149 gdl. Os coeficientes de mola associados à translação e às duas rotações foram calculados supondo-se a contribuição de um tramo adjacente ao pavimento tipo de 2,88m de altura. Foi considerada uma barra de largura unitária e altura igual à da laje para simular a separação entre L1A e L1B. Todos os apoios foram simulados por três nós : um no centro , onde se prende a mola e dois nas faces de cada pilar. Os trechos de barra sobre o pilar foram considerados rígidos. Também foram adotados como nós os pontos médios dos vãos de viga para a obtenção de deslocamentos. As ações dos painéis de laje sobre as vigas foram calculadas de acordo com o item 3.3.2.9 da NBR 6118 [5.64], tendo sido distribuídos uniformemente sobre esses painéis os pesos das alvenarias sobre eles apoiados. A figura 5.14 mostra os nós e as barras da grelha, bem como as condições de contorno adotadas para os painéis de laje.

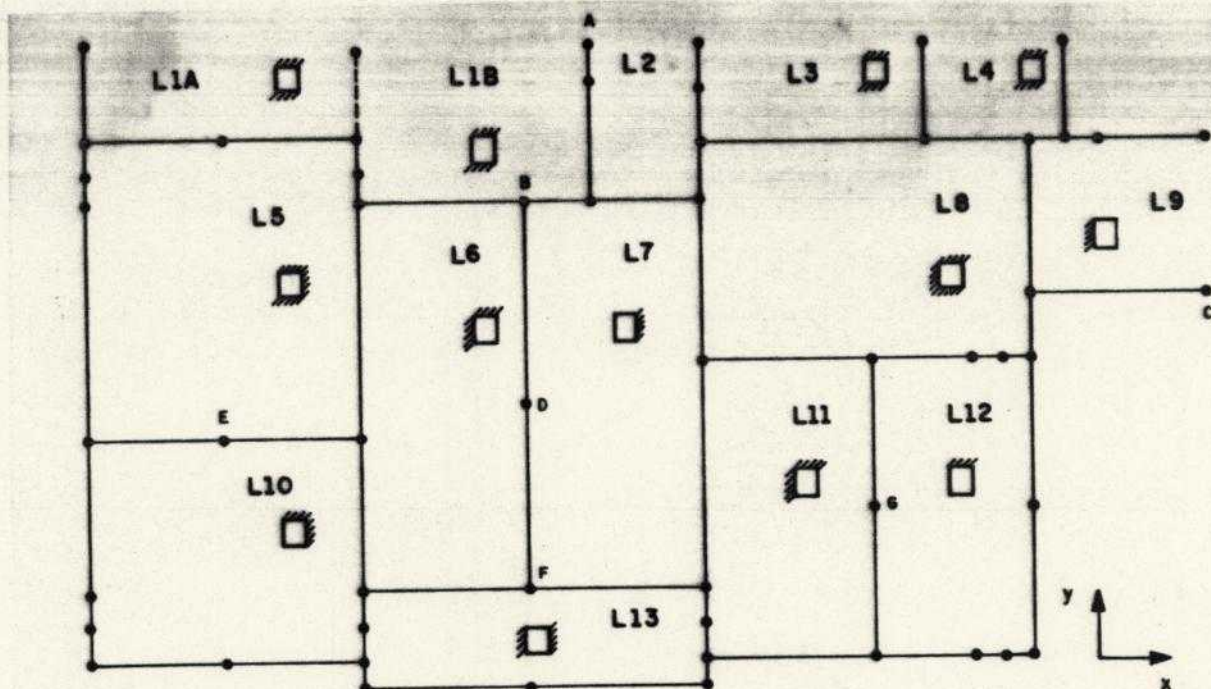


Fig. 5.14 Grelha e painéis de laje

Quanto ao modelo com integração da laje, foram utilizados 600 nós, 529 elementos T3AF de placa e 201 elementos de barra, incluindo-se os nove verticais para a simulação dos pilares. O número total de gdl iguala 1732. A discretização adotada é mostrada na figura 5.15.

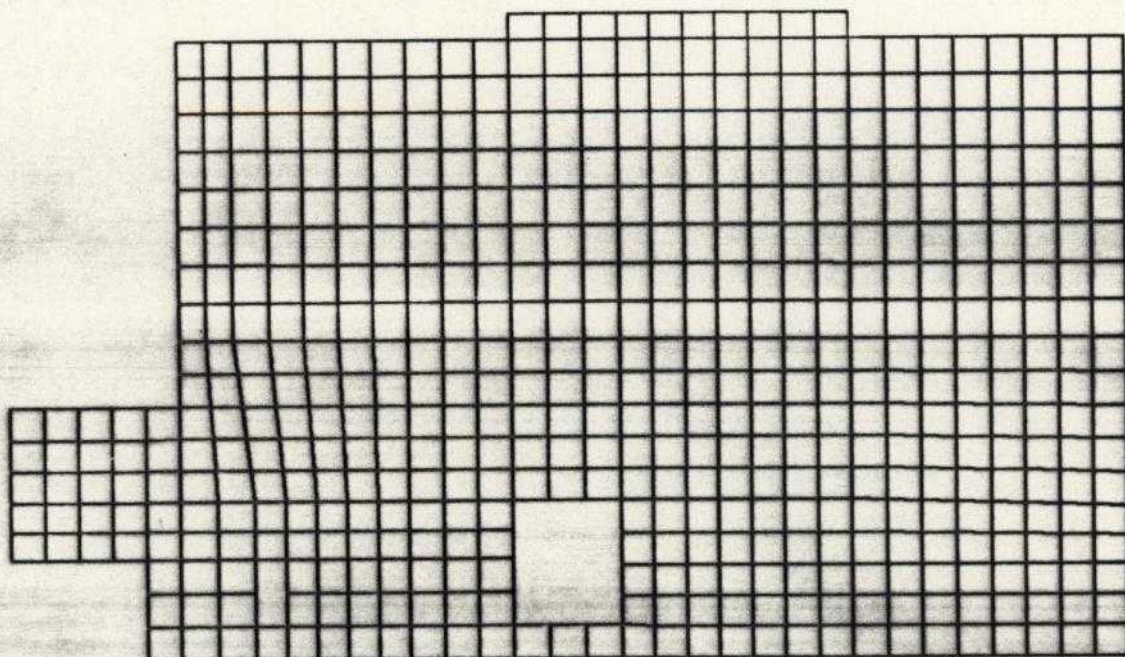


Fig. 5.15 Discretização do pavimento

A tabela 5.3 permite observar a boa correlação de valores para as reações de apoio conseguidas com os dois modelos. Quanto à força vertical a maior diferença está no P6, em que a grelha fornece valor 5% maior do que o modelo em elementos finitos (EF). Quanto aos momentos M_x , comparando-se apenas os que ocorrem segundo a maior inércia, a diferença mais significativa está em P2, com o modelo grelha apresentando valor 15% menor que o modelo em EF. Finalmente para o momento M_y a maior discrepância, para o eixo de maior inércia, está em P5 em que a grelha apresenta valor 9% menor que os EF.

Pilar	Elem. Finitos			Grelha		
	Fz	Mx	My	Fz	Mx	My
P1	118,81	-58,39	-6,39	117,08	-57,04	-5,32
P2	253,12	-145,28	-5,90	242,24	-123,06	-13,57
P3	232,17	-231,83	-46,06	241,07	-228,31	-41,70
P4	168,16	10,40	113,38	165,19	12,26	114,07
P5	177,78	-1,21	105,65	186,85	,53	96,42
P6	90,03	99,96	-5,50	94,92	108,39	-2,05
P7	214,04	189,30	-1,00	205,01	169,79	-5,96
P8	184,05	153,62	3,00	187,38	137,80	5,90
P9	73,24	2,90	59,06	71,58	1,46	61,45

Tab. 5.3 Reações de apoio - Unidades : kN , m

Os deslocamentos verticais nos pontos assinalados na figura 5.14 são apresentados na tabela 5.4. A distribuição desses deslocamentos ao longo de todo o pavimento pode ser observada na figura 5.16 através de curvas isovalor em cm, que expressam os resultados da análise via elementos finitos.

Ponto	Elem. Finitos	Grelha
A	1,239	1,685
B	1,088	1,489
C	0,610	0,582
D	1,275	1,621
E	0,704	0,838
F	0,780	0,915
G	0,545	0,508

Tab. 5.4 Flechas (cm)

De um modo geral a tendência da grelha é a de apresentar maiores valores para os deslocamentos, devido ao menor número de vínculos internos representados nesse modelo, com exceção de pontos como C e G, por exemplo, onde o fluxo de cargas e a rigidez relativa dos componentes do sistema estrutural não estão bem representados na grelha. A maior diferença encontrada está no ponto B e atinge 37% a mais na grelha, diferença bastante significativa. A determinação de deslocamentos de pontos das lajes , não

situados sobre vigas, seria bastante trabalhosa no modelo que não integra a laje e pouco significativa, pois os resultados analíticos disponíveis, em geral, consideram apoios rígidos em seu contorno, o que não se observa neste caso.

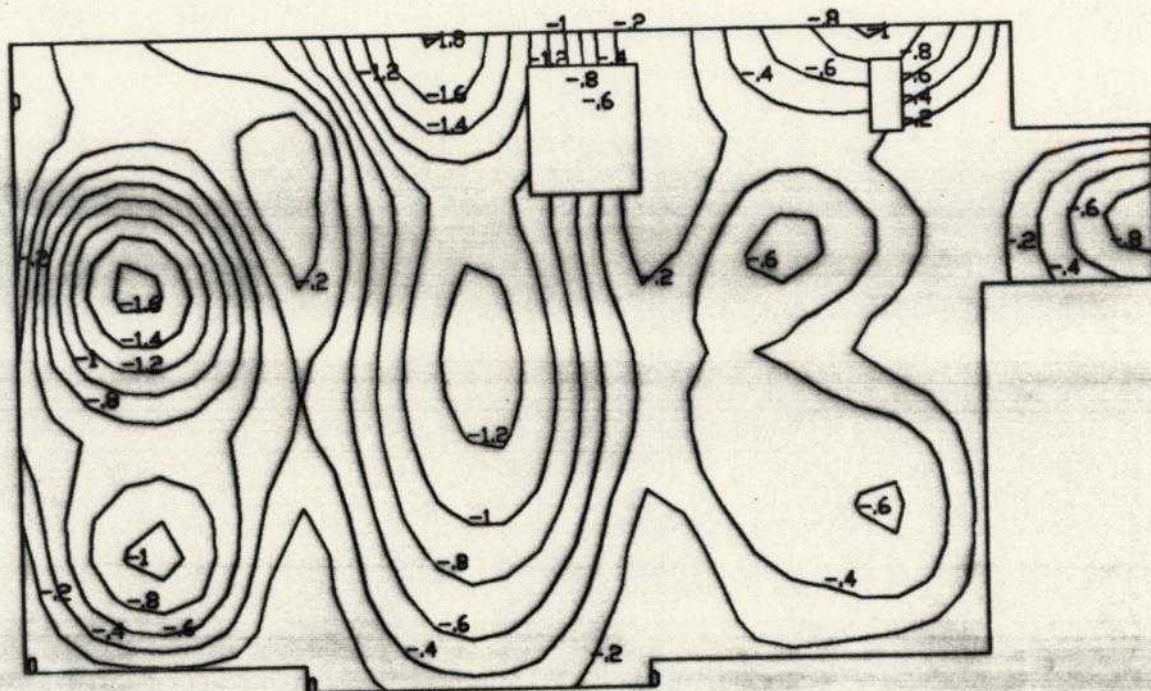


Fig. 5.16 Deslocamentos verticais - cm

A deformabilidade das vigas pode alterar de modo significativo o comportamento dos painéis de laje. Em adição aos deslocamentos mostrados na figura 5.16 observem-se as distribuições de momentos M_x e M_y estampadas nas figuras 5.17 e 5.18. Em uma primeira análise menos cuidadosa o projetista poderia cometer erros grosseiros. Por exemplo, observem-se os painéis L6 e L7. Poder-se-ia talvez esperar na laje momentos M_x negativos sobre a viga V5, o que não acontece. Em uma segunda tentativa, adotada para carregar a grelha, os citados painéis foram considerados apoiados em V5, o que ainda produziu um carregamento excessivo nessa viga, como pode ser notado verificando-se que os resultados para os deslocamentos nos pontos B, D e F

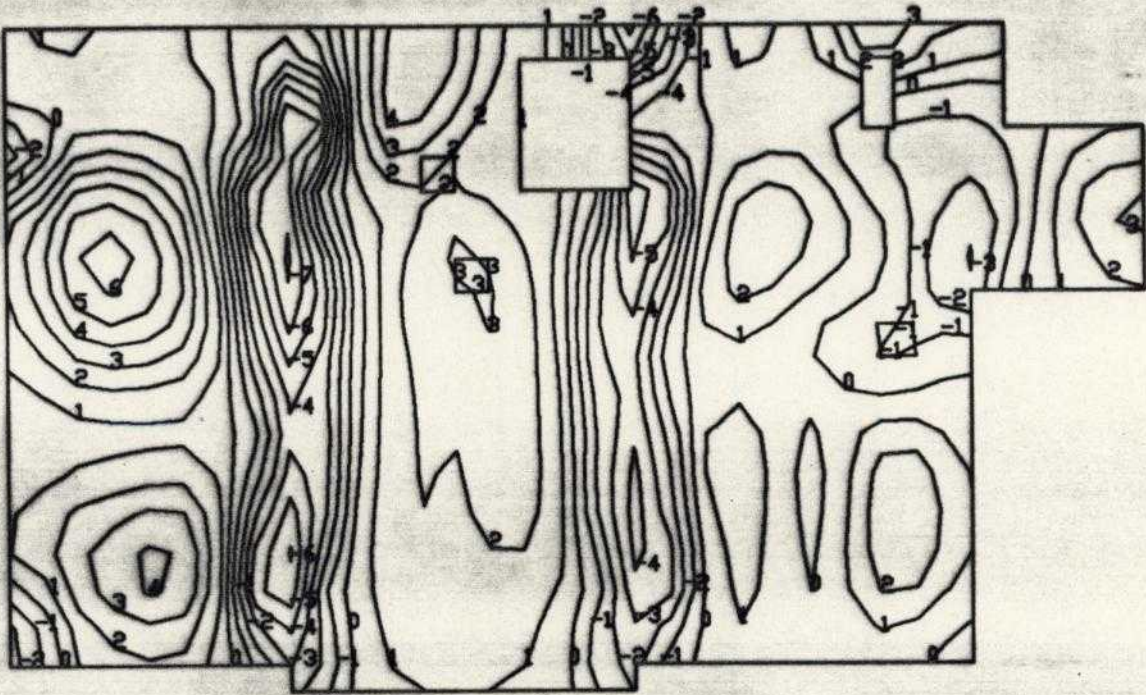


Fig. 5.17 Momentos M_x - kN.m/m

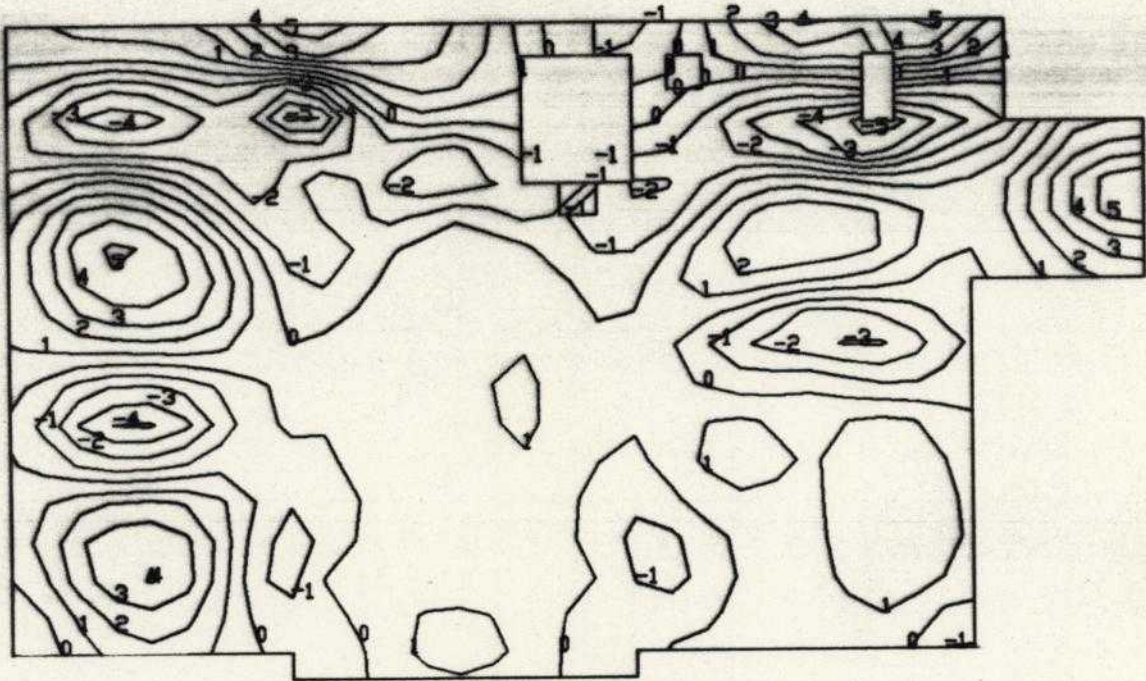


Fig. 5.18 Momentos M_y - kN.m/m

são bem maiores no caso da grelha. Momentos M_x positivos ocorrem na região de V5, que não funciona como apoio rígido para a laje. Os painéis L6 e L7 funcionam mais como um painel único, enrijecido por V5 que mantém os deslocamentos em níveis razoáveis. Tal comportamento é muito influenciado pelo fato de as vigas V3 e V9 interagirem com pilares, na direção de suas maiores inércias. O projetista deve estar preparado, quando opta por modelo mais simples como a grelha, para analisar essas possibilidades de alteração do comportamento da laje, o que não é tarefa muito simples. Pode-se representar mal o funcionamento das peças, com prejuízos apreciáveis. Enquanto a viga V5, com o modelo grelha, apresenta-se mais carregada, como se mostrará a seguir, os painéis L6 e L7 seriam armados de maneira inconveniente e contra a segurança na região sobre essa viga.

Outro fato ilustrativo é o que ocorre com o painel L5. A tabela 5.5 apresenta os resultados para os momentos máximos positivos e negativos, considerando-se a aplicação das tabelas de Bares[5.65] para cargas uniformemente distribuídas, com duas alternativas para as condições de contorno (C1 e C2 na tabela). A primeira está indicada na figura 5.14 e a segunda corresponde à consideração de engastamento apenas sobre V3. São também incluídos os esforços provenientes da análise com MEF.

	M_x^+	M_x^-	M_y^+	M_y^-
C1	335	866	346	900
C2	532	1222	368	-
MEF	658	796	560	469

Tab. 5.5 Esforços máximos em L5 - Unidade : kN.m/m

Com a utilização de processo simplificado em C1 e C2, observa-se uma tendência de subestimar os momentos positivos e superestimar os negativos. Mesmo na condição C2 os momentos positivos ainda são significativamente menores que os alcançados com o MEF: M_x^+ é 20% menor e M_y^+ 34%. Esse fato está relacionado à estimativa exagerada de momentos negativos no processo simplificado e à presença de paredes localizadas em região central do painel. Esse painel seria armado de maneira insuficiente na região central e haveria excesso de armadura negativa com a utilização do processo simplificado.

Ocorrências como as anotadas para os painéis analisados se repetem ao longo de todo o pavimento. Com a tendência atual de se reduzir o número de pilares, possibilitada pela utilização crescente de concretos de alta resistência e pela busca de soluções econômicas, diferenças significativas de rigidez das vigas que contornam os painéis de laje estarão presentes, modificando de maneira substancial o fluxo de carga previsto pelos modelos simplificados que desvinculam a laje das vigas. Cuidados especiais devem ser tomados pelo projetista, que preferencialmente deve optar pela utilização de modelos mais elaborados e que integram as lajes, sob pena de exprimirem mal o comportamento das peças, com possibilidade de produzirem resultados contra a segurança.

Quanto às vigas, as diferenças encontradas podem chegar a valores muito grandes. Observe-se, por exemplo os resultados listados na tabela 5.6 para os esforços máximos em alguns tramos de vigas, que são representativos do que ocorre em todo o pavimento. Na tabela, Q_i e Q_f representam os esforços cortantes no início e fim do vão. M_i e M_f são os momentos negativos no início e fim do vão e M_c o máximo momento positivo em sua região central. Quando o extremo do vão é um pilar, os esforços listados são aqueles que ocorrem em sua face. Momentos negativos só são apresentados quando significativos. A diferença percentual dos

resultados correspondentes ao modelo grelha (G) em relação aos obtidos com o modelo em elementos finitos (EF) é também exibida, buscando-se facilitar a comparação.

Viga		Q_i	Q_f	M_i	M_c	M_f
V1a	G	65,03	52,18	82,09	58,04	70,13
	EF	58,02	53,85	75,15	50,04	69,04
	dif.	+12%	-1%	+9%	+16%	+2%
V3b	G	96,75	81,17	119,28	72,19	103,40
	EF	104,15	98,56	126,50	70,00	119,65
	dif.	-7%	-18%	-6%	+3%	-14%
V5	G	42,07	42,07	-	70,67	-
	EF	33,40	27,64	-	57,34	-
	dif.	+26%	+52%	-	+23%	-
V11	G	35,00	35,00	-	45,49	-
	EF	35,75	33,19	-	53,16	-
	dif.	-2%	+5%	-	-14%	-
V15a	G	19,13	32,86	-	16,80	37,67
	EF	14,38	26,81	-	17,05	35,76
	dif.	+33%	+23%	-	-1%	+5%
V6	G	81,01	73,19	18,14	142,68	9,80
	EF	50,95	53,99	10,21	104,49	9,56
	dif.	+59%	+36%	+78%	+37%	+3%
V10	G	36,19	87,55	-	38,77	94,13
	EF	29,19	84,50	-	39,84	96,66
	dif.	+24%	+4%	-	-3%	-3%
V20	G	20,46	20,46	-	30,69	-
	EF	14,77	13,02	-	28,13	-
	dif.	+39%	+57%	-	+9%	-

Tab. 5.6 Esforços em vigas - Unidades : kN , m

As maiores diferenças encontradas ocorrem nas vigas V5 e V6, em função, principalmente, da má representação do fluxo de cargas no modelo grelha, já comentado anteriormente. V5 e V6 estão nitidamente mais carregadas. Em consequência, a viga V3, na grelha, está ligeiramente menos carregada, com diferenças inferiores às de V5 e V6. O

mesmo ocorre com a viga V9, aqui não apresentada, com diferenças ainda menores do que em V3. Nas regiões em que não há problemas na representação do fluxo de cargas, a tendência geral observada é a do modelo grelha fornecer resultados superiores para os esforços solicitantes das vigas. Isso se deve ao fato de o modelo não conseguir representar a transmissão direta de cargas das lajes para os pilares, com a consideração da rigidez relativa de todos os componentes do arranjo estrutural. Note-se o que ocorre em V10. Enquanto os momentos fletores da grelha chegam a ser ligeiramente inferiores (-3%), as forças cortantes são maiores, chegando a +24% no início do vão, mesmo com a viga V11 menos carregada na grelha. Observe-se que V3 ficou ligeiramente menos carregada no modelo grelha. Em V20 obtêm-se na grelha momentos fletores e forças cortantes maiores, só que estas com diferenças em nível superior aos dos momentos. Parte da carga que no modelo grelha vai para os pilares P7 e P8, por intermédio de V20, na realidade o fazem diretamente da laje aos pilares. Isso pode ser observado no arredondamento do diagrama de forças cortantes, nos extremos da viga, para o modelo em elementos finitos, em contraposição ao aspecto linear do mesmo diagrama correspondente ao modelo grelha, como se mostra na figura 5.19. Esse arredondamento do diagrama foi observado em todas as vigas do pavimento junto aos seus apoios.

O tempo de processamento consumido no processamento do modelo em elementos finitos foi de 569,03s, ou seja, 9 min e 29,03s. Observe-se que esse tempo é bastante reduzido em vista da representatividade que se alcançou na simulação do comportamento do pavimento. Mesmo que não houvesse simetrias, o tempo de processamento não seria um obstáculo à análise do pavimento com o modelo em elementos finitos, permitindo-se o estudo de várias alternativas para o subsistema estrutural.

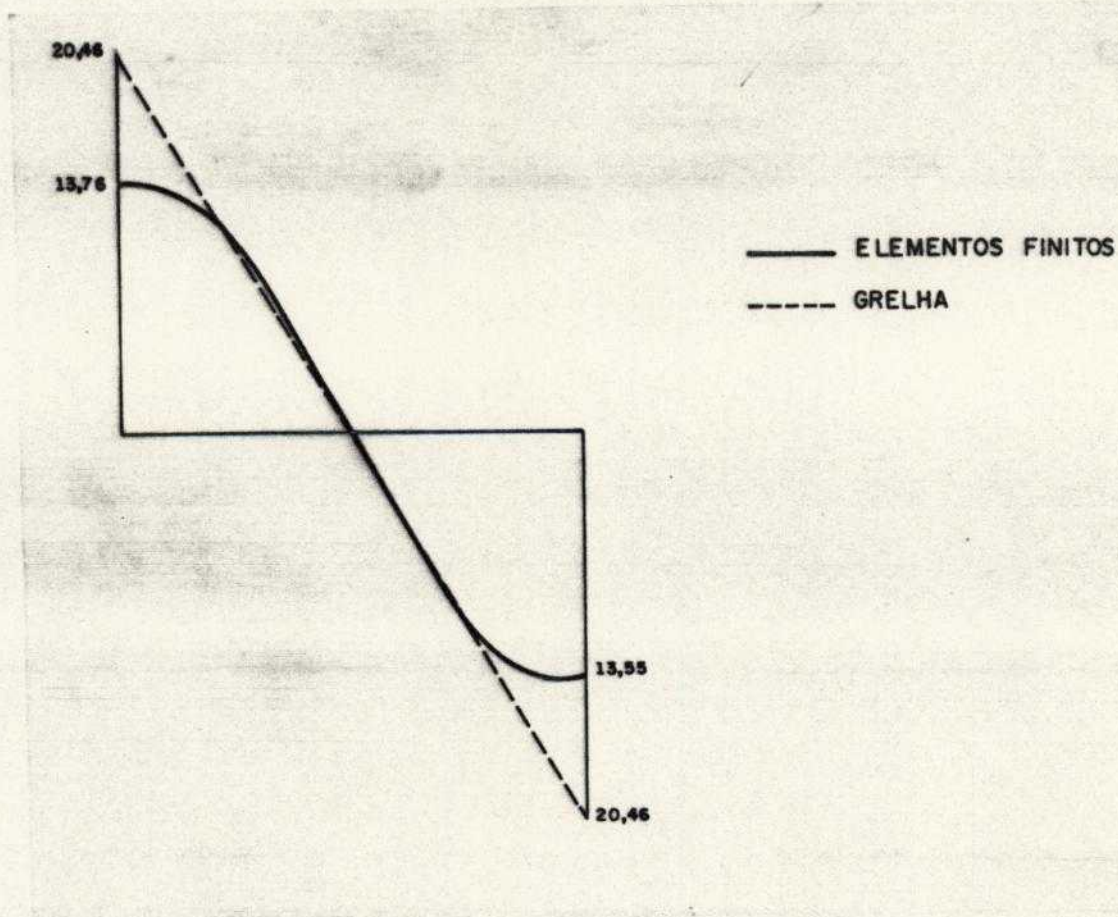


Fig. 5.19 Diagramas de forças cortantes em V20.

Em decorrência dos resultados apresentados, fica patente a importância da melhoria dos modelos utilizados na análise do pavimento, integrando-se a laje. Isso possibilita representar-se de maneira mais adequada o seu comportamento e evitar-se o consumo desnecessário de material em determinados pontos e dimensionar-se, de forma insuficiente, em outros.

5.6 NÃO LINEARIDADE FÍSICA DE PLACAS

5.6.1 Análise Elastoplástica - Um Breve Histórico

A aplicação das relações constitutivas elastoplásticas, baseadas na Teoria Clássica da Plasticidade [5.66],[5.67],[5.68], tem oferecido a possibilidade de modelar, com sucesso, o comportamento não-linear dos materiais constituintes de sistemas estruturais.

Na década de 1960 o MEF foi estendido para a aplicação a problemas não-lineares. Em 1967 Marçal e King [5.69] apresentam trabalho sobre a aplicação do MEF a problemas elastoplásticos bidimensionais e, em 1968 Yamada et. al. [5.70] expõem as idéias básicas sobre a análise elastoplástica via elementos finitos. A aplicação particular às placas é feita em 1968 por Armen et. al.[5.71] e Marçal e Mallet[5.72]. Em 1969 Whang [5.73] analisa placas e cascas de comportamento elastoplástico com o modelo em camadas. Zienckiewicz et. al.[5.74] publicam em 1969 importante trabalho em que o Método das Tensões Iniciais, largamente utilizado até a atualidade, é apresentado para a solução de problemas elastoplásticos com o uso do MEF.

Em 1972 Nayak e Zienckiewicz[5.75] generalizam várias relações constitutivas, agrupando-as de forma sintética, para aplicação em problemas elastoplásticos gerais. Ainda em 1972 Belytschko e Velebit[5.76] utilizam elemento triangular de momento constante para a análise elastoplástica de placas. Na década de 1970 apareceram os primeiros trabalhos que, com sucesso, aplicaram a análise elastoplástica com o MEF em lajes de concreto armado (CA) Essa aplicação tem sido feita basicamente segundo duas aproximações: a primeira em que, sob um ponto de vista macroscópico, são assumidas relações momento-curvatura para os vários estágios do comportamento do material, como

nos trabalhos de Bell[5.77] em 1970 e de Jofriet e McNeice[5.78] em 1971; a segunda em que as relações tensão-deformação são idealizadas para o concreto e o aço, com alguma hipótese sobre a compatibilidade de deformações entre esses dois materiais, como nos trabalhos apresentados em 1973 por Hand et. al[5.79] e Dotreppe et. al.[5.80]. Dentre essas duas aproximações, a segunda tem sido a mais utilizada para a modelagem de lajes e cascas de concreto armado. Normalmente consideram a estrutura (placa ou casca) estratificada em uma série de camadas superpostas , possibilitando-se a representação de variações nas propriedades do material ao longo da espessura. São trabalhos expressivos da época os de Lin e Scordelis[5.81] e Bashur e Darwin[5.82]. Em 1979 Bergan e Holand[5.83] publicam denso artigo, que resume os principais aspectos da utilização do MEF para a análise não-linear de estruturas de CA, apresentando um total de setenta e quatro referências.

A partir da década de 1980 ocorreu uma multiplicação inumerável de trabalhos nessa área, voltados para as estruturas de concreto armado em geral , e para as lajes, em particular. Basicamente o desenvolvimento tem ocorrido no sentido de:

- aplicar elementos mais eficientes na análise não-linear

- melhorar a representação do comportamento dos materiais concreto e aço, alterando-se critérios de "escoamento", regras de endurecimento, regras de fluxo, etc.

- buscar representações mais realistas de fenômenos como a fissuração, o efeito "pino", a aderência, etc.

Destaquem-se, na primeira metade da década, a publicação do ASCE de 1982[5.84], sobre a aplicação do MEF na análise de estruturas de CA, o texto clássico de Chen[5.85] sobre plasticidade em CA e a tese de doutoramento de Figueiras[5.86], sobre a análise limite de

placas e cascas anisotrópicas e de CA, com não-linearidades geométrica e física, excelente e detalhado estudo sobre o assunto.

Em 1986 Hinton e Owen editam uma coletânea de trabalhos sobre a modelagem computacional de estruturas de CA. Dentre eles alguns referem-se diretamente à análise de lajes. Cope[5.87] apresenta uma revisão detalhada de modelos constitutivos para as lajes de CA. Klein[5.88] desenvolve elemento finito de placa em camadas para estudo do efeito da distribuição não-linear de distorções ao longo da espessura da laje. Aufere et. al.[5.89] analisam lajes em comportamento elastoplástico sob carregamento dinâmico. Cervera e Hinton[5.90] utilizam elemento finito tridimensional na análise de placas e cascas de CA.

Recentemente Hu e Schnobrich [5.91] publicam trabalho sobre a aplicação do MEF à análise de placas e cascas de CA sob carregamento monotonicamente crescente. É assumido o modelo em camadas, com sofisticação nas relações constitutivas dos materiais, incluindo-se regra de fluxo não-associativa para o concreto.

5.6.2 Análise Elastoplástica de Placas - Modelo Não-Estratificado

O modelo mais simples para a consideração do comportamento elastoplástico de placas consiste em admitir-se que o critério de escoamento se escreva em função de momentos atuantes na placa (variáveis generalizadas) e de um parâmetro de endurecimento , determinado a partir de ensaio momento-curvatura com flexão segundo um único eixo de atuação [5.92]. O equacionamento do problema, mostrado no Apêndice 2 para a plasticidade associativa, pode ser adaptado à análise de placas, desde que sejam feitas as correspondências entre tensões e momentos, e entre deformações e curvaturas. De acordo com o modelo de placa adotado no presente trabalho qualquer ponto

é assumido em estado plano de tensão, com as componentes σ_x , σ_y e τ_{xy} .

Em comportamento elástico as relações incrementais entre momentos e curvaturas se escrevem, com base em (5.52),

$$d\tilde{M} = \tilde{D} d\tilde{\chi} \quad \dots(5.91)$$

O critério de escoamento pode ser escrito como

$$\begin{aligned} F(\tilde{M}, k) &= 0 \quad \text{ou} \\ f(\tilde{M}) - M_p(k) &= 0 \end{aligned} \quad \dots(5.92)$$

Nas expressões anteriores note-se que f , função exclusiva dos momentos M_x , M_y e M_{xy} , pode ser interpretada como um momento equivalente. Já M_p , função exclusiva do parâmetro k , que depende do nível de deformação (curvatura) plástica ocorrida, pode ser interpretada como um valor convencional do momento de escoamento.

Os incrementos de curvatura são calculados pela soma de contribuições elásticas e plásticas

$$d\tilde{\chi} = d\tilde{\chi}_e + d\tilde{\chi}_p \quad \dots(5.93)$$

O vetor fluxo, escrito em função dos momentos, resulta

$$\tilde{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \tilde{M}} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial M_x}, \frac{\partial F}{\partial M_y}, \frac{\partial F}{\partial M_{xy}} \right\} \quad \dots(5.94)$$

Em comportamento elastoplástico as relações incrementais entre momentos e curvaturas são

$$d\tilde{M} = \tilde{D}_{ep} d\tilde{\chi} \quad \dots(5.95)$$

onde

$$\tilde{D}_{ep} = \tilde{D} - \frac{\tilde{D} \tilde{a} \tilde{a}^T \tilde{D}}{A + \tilde{a}^T \tilde{D} \tilde{a}} \quad \dots(5.96)$$

Dos quatro critérios de escoamento citados no Apêndice

2, dois podem ser facilmente escritos em função dos momentos de placa: o de Tresca e o de Von Mises, devido à possibilidade de corresponder à tensão de escoamento $Y(k)$ um momento convencional de escoamento $M_p(k)$.

O critério de Von Mises expresso pela equação A2.31 escrito para um estado bidimensional de tensões no plano xy , utilizando-se as equações A2.27 e A2.28

$$\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} = Y(k) \quad \dots(5.97)$$

A adaptação para a placa é dada por

$$\left[M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3 M_{xy}^2 \right]^{1/2} = M_p(k) \quad \dots(5.98)$$

O primeiro membro da equação anterior fornece o momento equivalente \bar{M} .

Com endurecimento por trabalho plástico e o momento equivalente igual ao primeiro membro da equação 5.98, demonstra-se que o parâmetro A da equação 5.96 se iguala ao parâmetro de endurecimento H' [5.92]. Observe-se que H' é determinado a partir do diagrama momento-curvatura uniaxial por

$$H' = \frac{dM}{d\alpha_p} \quad \dots(5.99)$$

5.6.3 Aplicação do MEF - Solução pelo Método das "Tensões" Iniciais

O Método das Tensões Iniciais, proposto em [5.74], baseia-se no cálculo das forças nodais equivalentes a uma distribuição de tensões iniciais em um elemento finito. No caso das placas o mesmo procedimento se aplica considerando-se uma distribuição de momentos iniciais. Para dar seqüência ao equacionamento do problema é necessário voltar-se ao campo de curvaturas de um elemento de placa, já definido em 5.72, e dado por

$$\underline{\chi} = \underline{B} \underline{Q} \quad \dots(5.100)$$

Na expressão anterior os parâmetros nodais de deslocamento \underline{Q} referem-se apenas aos nós do elemento considerado. Se existe no elemento um campo de momentos iniciais $\Delta \underline{M}_0$ a determinação das forças nodais que equilibram esse campo pode ser feita com aplicação do PTV. Considerando-se uma variação virtual dos deslocamentos nodais $\delta \underline{Q}$, a igualdade entre o trabalho virtual interno e o externo fornece

$$\underline{F}_0^T \delta \underline{Q} = \int_A \Delta \underline{M}_0^T \delta \underline{\chi} \, dA \quad \dots(5.101)$$

Levando-se a equação 5.100 em 5.101, lembrando-se que $\delta \underline{Q}$ é arbitrário, chega-se a

$$\underline{F}_0 = \int_A \underline{B}^T \Delta \underline{M}_0 \, dA \quad \dots(5.102)$$

O procedimento para a solução do problema da flexão de placas com não-linearidade associada ao seu comportamento elastoplástico pode ser feito com a utilização de matriz de rigidez constante, conforme breve exposição apresentada no Apêndice 1. O procedimento adotado no presente trabalho segue o roteiro sumarizado a seguir, baseado no Método das "Tensões" Iniciais, ou dos Momentos Iniciais, no caso das placas com modelo não-estratificado.

- a) O vetor de cargas total a ser aplicado \underline{F} é dividido em um número finito de incrementos $\Delta \underline{F}$ que devem ser aplicados sequencialmente à estrutura.
- b) A matriz de rigidez elástica linear é determinada.
- c) Para cada incremento de cargas aplica-se $\Delta \underline{F}$, adicionando-se o vetor de forças residuais $\Delta \underline{F}_0$ do final do incremento anterior, quando houver.
- d) Resolve-se o sistema de equações lineares determinando-se o incremento de deslocamento $\Delta \underline{Q}_i$ correspondente à iteração i dentro do incremento de cargas

considerado.

e) Com base nos deslocamentos ΔQ_i em cada elemento determinam-se as curvaturas $\Delta \chi_i$ nos pontos-amostra escolhidos (Pontos de Gauss) e as estimativas elásticas de incrementos de momentos $\Delta M_{\tilde{e}i}$.

$$\Delta M_{\tilde{e}i} = D \Delta \chi_i \quad \dots(5.103)$$

f) Adicionam-se $\Delta M_{\tilde{e}i}$ aos momentos correspondentes à iteração anterior $M_{\tilde{e}i-1}$ encontrando-se os momentos $M_{\tilde{e}i}$.

$$M_{\tilde{e}i} = M_{\tilde{e}i-1} + \Delta M_{\tilde{e}i} \quad \dots(5.104)$$

g) Se $F(M_{\tilde{e}i}, k) < 0$, com k atualizado no final da iteração i-1, o comportamento é elástico e a estimativa $M_{\tilde{e}i}$ está correta.

h) Se $F(M_{\tilde{e}i}, k) \geq 0$ e $F(M_{\tilde{e}i-1}, k) = 0$ significa que havia ocorrido escoamento no início do incremento, devendo-se ajustar a estimativa de incremento de momentos, de modo que o critério de escoamento seja obedecido, isto é,

$$\Delta M_{\tilde{e}i} = D_{ep} \Delta \chi_i \quad \dots(5.105)$$

Calculam-se os resíduos de momentos

$$\Delta M_{\tilde{o}i} = \Delta M_{\tilde{e}i} - \Delta M_{\tilde{e}i} \quad \dots(5.106)$$

Armazenam-se momentos e curvaturas correntes

$$M_i = M_{\tilde{e}i} - \Delta M_{\tilde{o}i}$$

$$\chi_i = \chi_{i-1} + \Delta \chi_i \quad \dots(5.107)$$

Atualiza-se o valor do parâmetro k do ponto.

i) Se $F(M_{\tilde{e}i}, k) > 0$ e $F(M_{\tilde{e}i-1}, k) < 0$, significa que não havia escoado no início e que escoo durante a presente iteração; é necessário determinar-se quando inicia-se o escoamento e, a partir desse nível de momentos retomar o passo anterior.

j) Determinam-se as forças nodais residuais em cada elemento, correspondentes à integração dos resíduos de momento $\Delta M_{\tilde{o}i}$. Essa integração é feita por processo numérico, a partir dos pontos de Gauss escolhidos.

Somando-se as contribuições de todos os elementos obtém-se o vetor global de cargas residuais.

$$\Delta \tilde{F}_{oi} = \sum_{ne} \int_A B \tilde{M}_{oi} dA \quad \dots(5.108)$$

k) Verifica-se a convergência. Caso não tenha ocorrido carrega-se a estrutura com o vetor de cargas residuais, retornando-se ao passo "d", para uma nova iteração $i=i+1$. Se o critério de convergência foi obedecido retorna-se ao passo "c", com um novo incremento de cargas.

Considere-se uma solicitação uniaxial de momentos em uma placa cujo material segue o diagrama momento curvatura indicado na figura 5.20. O comportamento plástico inicia-se no ponto B, sendo o endurecimento linear. A partir do ponto A, onde o momento vale M_{i-1} , considera-se o incremento de curvatura $\Delta \chi_i$, correspondente a uma iteração i . A esse incremento de curvatura corresponde uma estimativa elástica de incremento de momento igual a ΔM_{ei} que adicionada a M_{i-1} fornece o momento M_{ei} no ponto C. A determinação do incremento de momento a partir do qual inicia-se o comportamento plástico é dado por $(1-R)\Delta M_{ei}$ onde R pode ser calculado por considerações geométricas na figura como

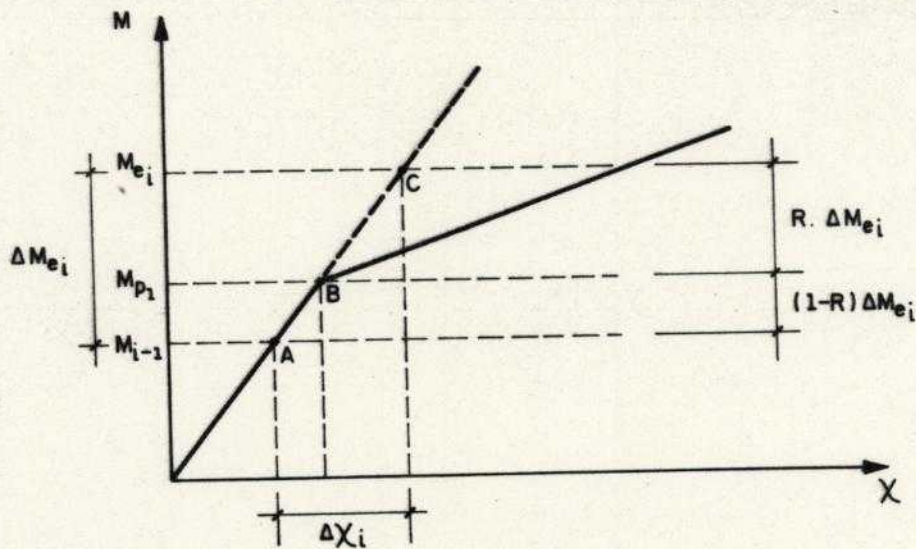


Fig. 5.20 Transição de estado elástico para estado plástico
Caso uniaxial

$$R = \frac{M_{ei} - M_{p1}}{M_{ei} - M_{i-1}} \quad \dots(5.109)$$

A condição descrita no passo "i" corresponde a uma violação da superfície de escoamento produzida pela estimativa elástica de incrementos de momentos. A representação no espaço dos momentos é mostrada na figura 5.21. Se o endurecimento é linear pode-se estender o procedimento anterior para o caso de solicitação de flexão genérica, calculando-se o fator R com a expressão (5.109), sendo os momentos em A e C substituídos pelos seus valores equivalentes.

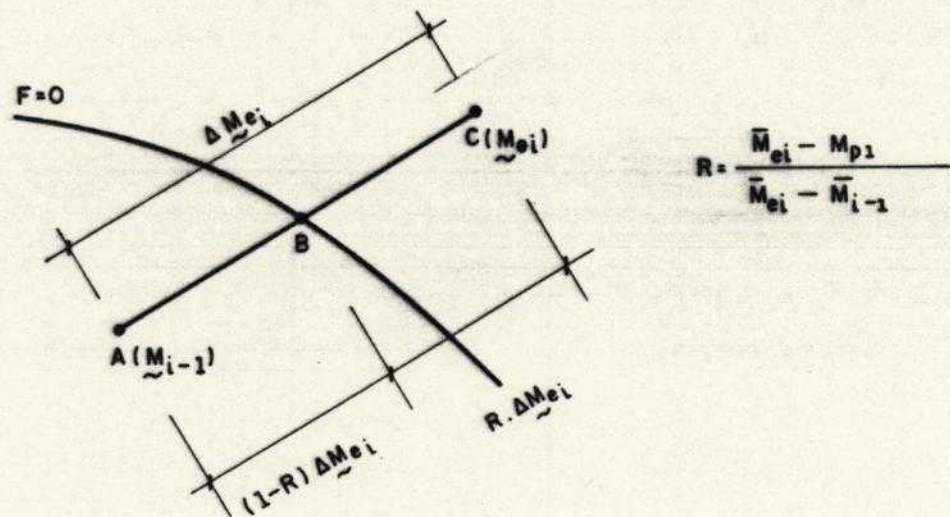


Fig. 5.21 Transição de estado elástico para estado plástico
Caso geral

A situação descrita no passo "h" está representada graficamente na figura 5.22, para o caso elastoplástico perfeito. Observe-se que a estimativa de ΔM_i é calculada com um incremento finito de curvaturas $\Delta \chi_i$, fazendo-se com que o ponto D se afaste da superfície de escoamento. O ponto D

pode ser aproximado à superfície multiplicando-se todas as componentes de \tilde{M}_i por um fator de escala[5.92] de tal modo que o momento equivalente iguale-se ao momento de escoamento M_p calculado com o valor de k atualizado. Assim

$$\tilde{M}'_i = \tilde{M}_i \frac{M_p(k)}{\tilde{M}_i} \quad \dots(5.110)$$

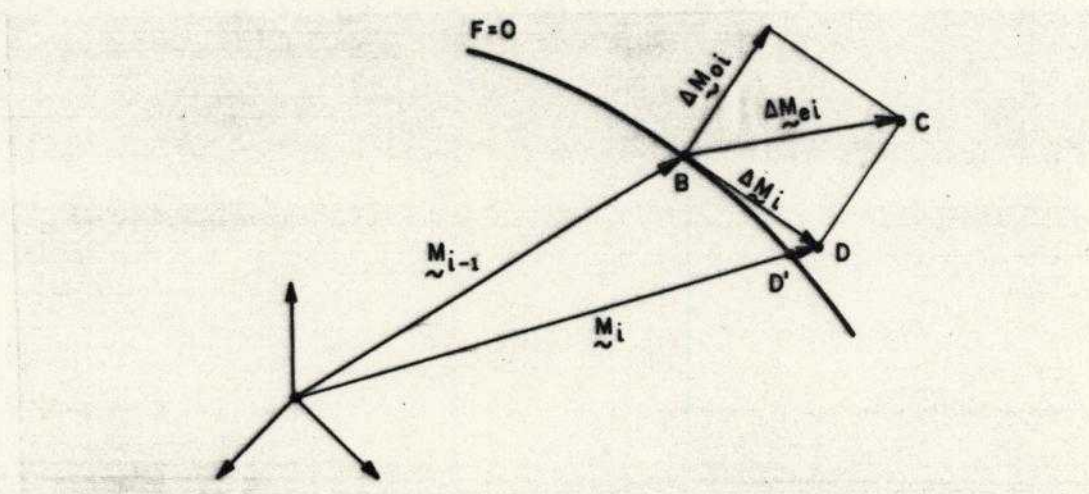


Fig. 5.22 Comportamento elastoplástico - Obediência à condição de escoamento

Owen e Hinton[5.92] sugerem que para a melhoria da precisão do algoritmo, pode-se fazer com que o excesso de tensões em relação à superfície de escoamento seja eliminado em vários estágios. Esse procedimento é adotado no presente trabalho.

5.6.4 Implementação Computacional

Os elementos triangulares para a flexão de placas, anteriormente descritos neste capítulo, foram adaptados para incluir o comportamento elastoplástico sob carregamento estático monotonamente crescente. Foram

utilizados os procedimentos descritos no item anterior, para o modelo não-estratificado, com as características expostas a seguir.

Admite-se plasticidade associativa. O critério de escoamento escolhido é o de Von Mises. O comportamento do material é o mostrado na figura 5.23 pelo diagrama momento-curvatura uniaxial trilinear. O comportamento plástico inicia-se no ponto B, com endurecimento linear isotrópico e possibilidade de mudança de H' no ponto C. Descargas são sempre consideradas paralelas ao trecho elástico. Para a aplicação do critério de escoamento, determinação do vetor fluxo, e cálculo de resíduos de momentos foram adaptadas rotinas em FORTRAN, apresentadas em [5.92].

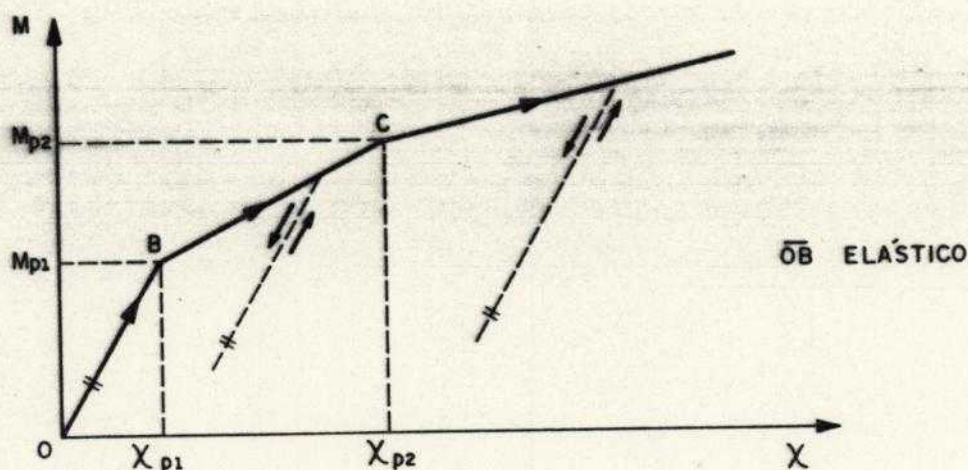
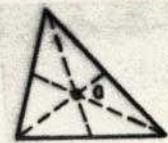
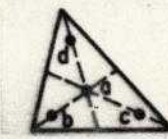


Fig. 5.23 Diagrama momento-curvatura trilinear

Para a avaliação numérica das forças residuais em cada elemento o programa permite a consideração em cada triângulo de um ou quatro pontos de Gauss (vide tabela 5.7), resguardando-se o centróide como ponto-amostra.

Grau de Precisão	Fig.	Pontos de Integração	Coordenadas Homogêneas	Pesos
Linear		a	1/3, 1/3, 1/3	1
Cúbico		a b c d	1/3, 1/3, 1/3 0.6, 0.2, 0.2 0.2, 0.6, 0.2 0.2, 0.2, 0.6	-27/48 25/48 25/48 25/48

Tab. 5.7 Integração Numérica em Triângulos [5.93]

5.6.5 Um Exemplo Simples

A figura 5.24 apresenta as características de uma placa quadrada simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniforme p , cujo material constituinte é elastoplástico perfeito com tensão de escoamento σ_0 . Note-se que o momento de plastificação é dado por $\sigma_0 h^2/4$, admitindo-se plastificação instantânea da seção. Owen e Hinton [5.92] analisam a placa, discretizando um quarto da sua superfície com quatro elementos Heterosis, e aplicando o carregamento em cerca de uma centena de incrementos, com tolerância de 10% para a convergência e um número máximo de 60 iterações por incremento.

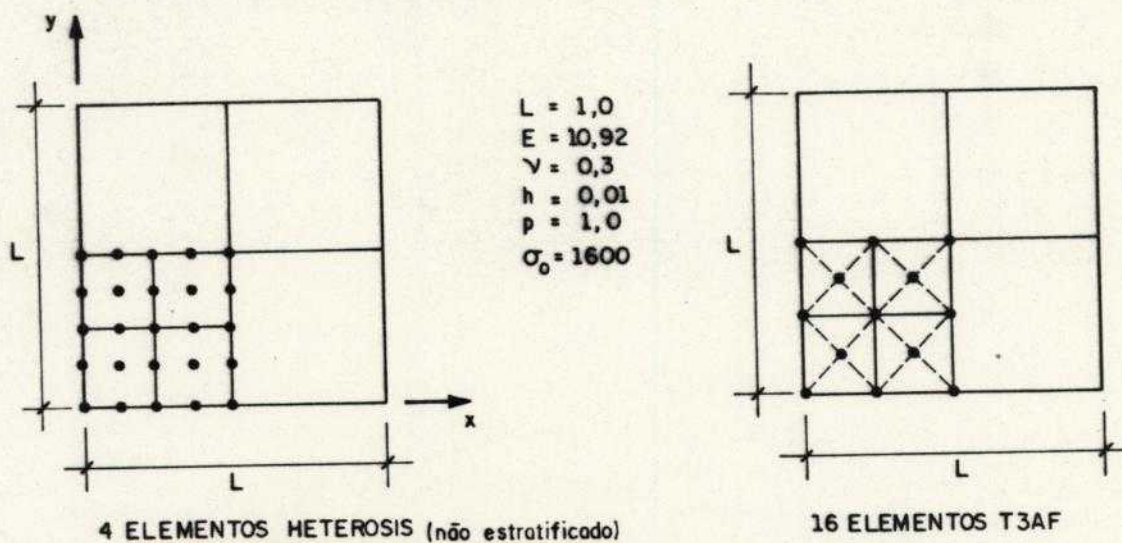


Fig. 5.24 Placa apoiada - Carregamento uniforme

Com o objetivo de comparação, um quarto de placa foi discretizado em quatro quadriláteros formados por quatro elementos T3AF. O carregamento foi aplicado em sete incrementos de carga, progressivamente decrescentes, com tolerâncias em deslocamento e em força iguais a 0,1% e 1%, respectivamente, não admitindo-se mais do que cem iterações por incremento. Os resíduos de força foram calculados com quatro pontos de Gauss em cada triângulo. Foram adotadas condições de tolerância mais restritivas em relação ao trabalho de Owen e Hinton[5.92], devido ao número reduzido de incrementos assumido. A relação entre o carregamento e a translação do ponto central está mostrada na figura 5.25, onde é óbvia a boa correlação entre os resultados das duas análises. Não houve convergência no último incremento para a presente análise após cem iterações.

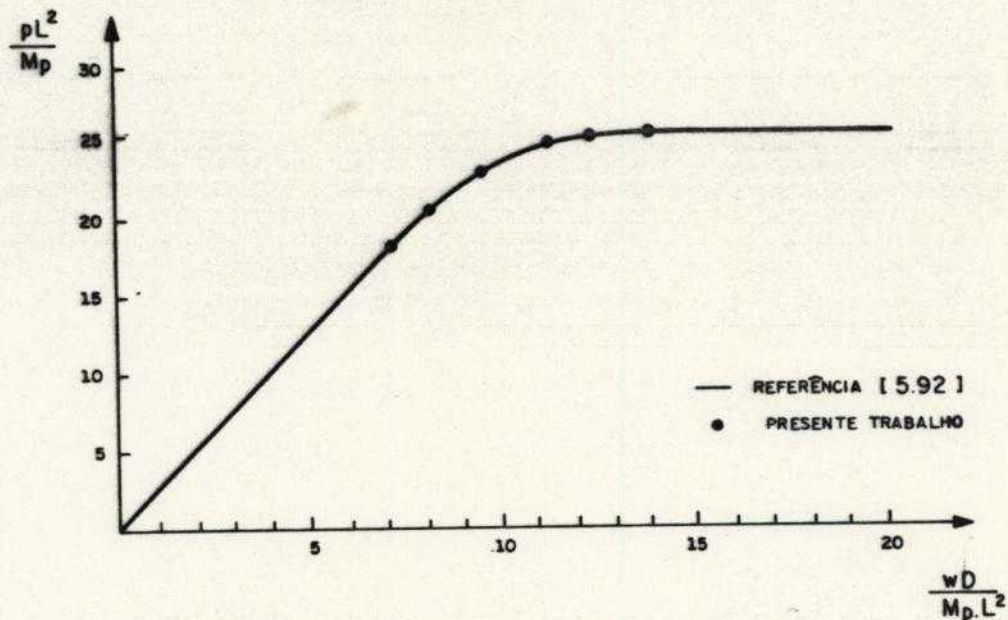


Fig. 5.25 Carregamento x flecha no centro

Em [5.92] estão tabulados os resultados para $p=0,856$, correspondente a 30 incrementos de carga. Buscando-se enriquecer a comparação, foi considerada a aplicação de $p=0,856$ em quatro incrementos (80%, 10%, 5% e 5%). Na tabela 5.8 estão mostrados alguns desses resultados: a

flecha w_c no ponto central da placa, o momento M_x e a curvatura plástica equivalente χ_p , junto à região central. Esses dois últimos resultados foram tomados nos pontos-amostra mais próximos do centro da placa. Para a discretização com o elemento Heterosis, esse ponto está mais próximo do centro e localizado na diagonal do quadrado. Para a discretização com o elemento T3AF como não há ponto-amostra na diagonal tomou-se a média de dois pontos-amostra localizados em posições simétricas em relação à referida diagonal.

Análise	w_c	M_x	χ_p
Presente	0,35117	0,03999	0,15990
Referência[5.92]	0,34963	0,04000	0,19186

Tab. 5.8 Resultados na região central da placa

É patente a proximidade de resultados, devendo-se realçar que é coerente χ_p maior na análise com o elemento Heterosis, pois o ponto-amostra utilizado neste caso é mais próximo do centro da placa do que com o elemento T3AF.

5.6.6 Um Modelo Simples para a Laje de Concreto Armado

As noções de fluxo plástico, escoamento, regra de normalidade, etc. estão associadas ao comportamento dos metais dúcteis. No concreto não há fluxo plástico e é questionável, sob o ponto de vista conceitual, a aplicação da regra de normalidade. Em termos práticos a aplicação desses conceitos ao concreto tem fornecido resultados satisfatórios, permitindo representar bem o seu comportamento, como atestado em um número incontável de trabalhos. Vejam-se, por exemplo, [5.79-5.90] e [5.94], entre outros.

Os modelos estratificados são potencialmente mais poderosos, mesmo para a representação de placas metálicas

pois permitem a análise do espalhamento da plastificação ao longo da espessura. Para o concreto armado com mais forte razão, devido à presença de mais do que um material e a diferença de comportamento entre o concreto tracionado e o concreto comprimido. Inúmeros modelos têm sido desenvolvidos, alguns com grande sofisticação como o de Hu et al.[5.91] e o de Figueiras[5.86]. Em cada uma das camadas admite-se um comportamento elastoplástico, sendo esse comportamento representado de maneira cada vez mais aperfeiçoado nos últimos anos, claro que com aumento do esforço computacional e do custo dos processamentos realizados para análise dos problemas enfrentados.

É proposta deste trabalho analisar modelos simples, que possam ser utilizados e assimilados facilmente pelo projetista de estruturas. Esses modelos devem permitir uma análise que seja viável para aplicação em microcomputadores, hoje acessíveis aos escritórios de projeto. A idéia básica consiste em aplicar o modelo elastoplástico não-estratificado descrito nos itens anteriores, buscando-se representar o comportamento bidimensional das lajes de concreto armado. São realçados dois fenômenos dominantes no comportamento não-linear das lajes: a fissuração e o escoamento das armaduras. Não se tem a pretensão de produzir modelo tão preciso como os estratificados, porque o ponto de partida é mais pobre. Deseja-se utilizar um modelo simples, que não demande grande esforço computacional, para a distribuição de esforços em lajes, considerando-se as plastificações. A sua aplicação está restrita a carregamentos estáticos monotonicamente crescentes. Não se objetiva a determinação de carregamentos limites, mas a representação do comportamento da estrutura em serviço.

Admite-se o comportamento elastoplástico da laje, com a utilização do critério de Von Mises. Observe-se que para o concreto em compressão biaxial a superfície de Von Mises já foi utilizada com sucesso por Lin et al.[5.81] e Hu et

al.[5.91].

A figura 5.26 apresenta um típico diagrama uniaxial momento-curvatura para uma laje de concreto armado. A reta r_1 corresponde ao comportamento elástico no estágio IA com o concreto não fissurado, enquanto a reta r_2 corresponde ao estágio II, desprezando-se a contribuição do concreto tracionado. Observe-se que no estágio II, para um mesmo nível de solicitação, as curvaturas reais são menores do que as representadas com a reta r_2 , devido à contribuição do concreto existente entre duas fissuras adjacentes ("tension stiffning"). Para as percentagens usuais de armadura em lajes, as armaduras atingem o escoamento antes que o concreto se plastifique. A evolução do processo vai até que se chegue ao momento último suportado pela peça.

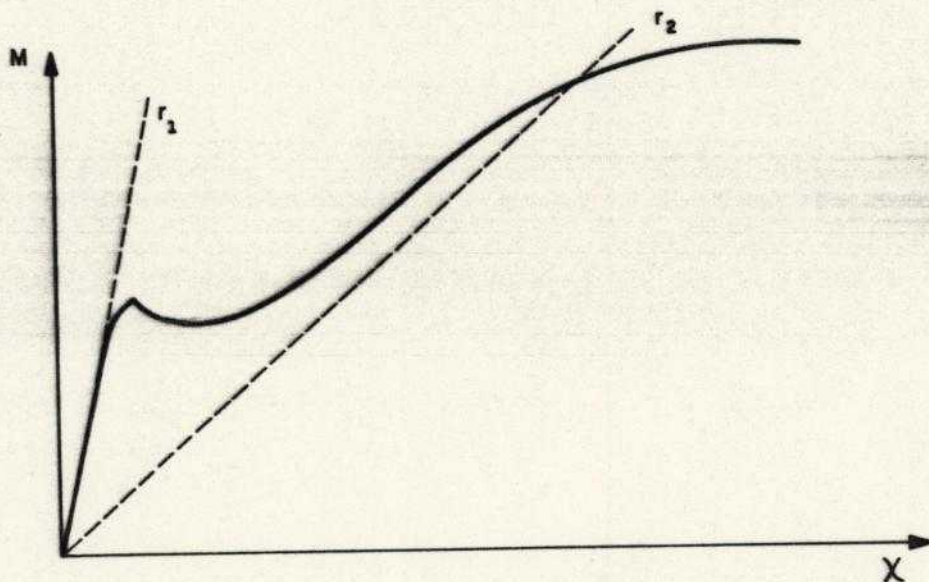


Fig. 5.26 Diagrama momento-curvatura uniaxial

Admite-se um diagrama momento-curvatura convencional como se mostra na figura 5.27, supondo-se que o comportamento plástico inicia-se com o aparecimento da primeira fissura em A. A determinação dos pontos A, B e C são fundamentais para a fixação do diagrama.

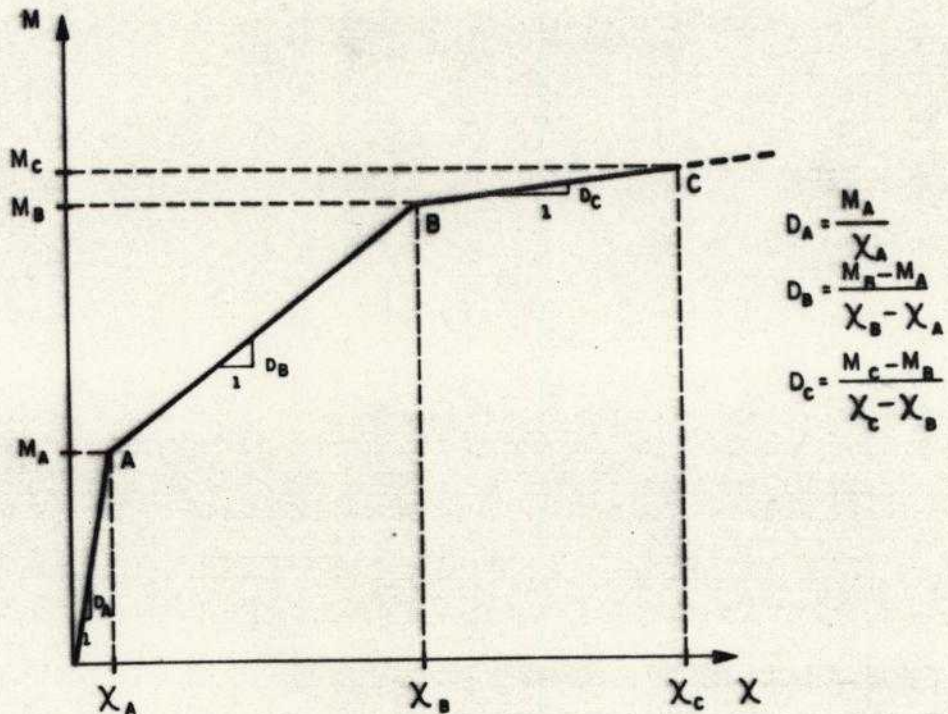


Fig. 5.27 Diagrama momento-curvatura convencional

Os parâmetros de endurecimento, correspondentes aos trechos AB e BC, são calculados com base na equação A2.5.

$$H'_B = \frac{D_B}{1 - D_B/D_A} \quad \text{e} \quad H'_C = \frac{D_C}{1 - D_C/D_A} \quad \dots(5.111)$$

O ponto A é determinado desprezando-se a presença da armadura, com a seção homogênea de concreto com módulo de deformação E_c e supondo-se que a máxima tensão de tração no concreto atinge o valor f_{tk} . A figura 5.28 representa graficamente essa situação.

O momento M_A , igual ao momento de fissuração M_f , é calculado por

$$M_A = f_{tk} b h^2 / 6 \quad \dots(5.112)$$

A curvatura χ_A é dada por

$$\chi_A = \frac{2 f_{tk}}{E_c h} \quad \dots(5.113)$$

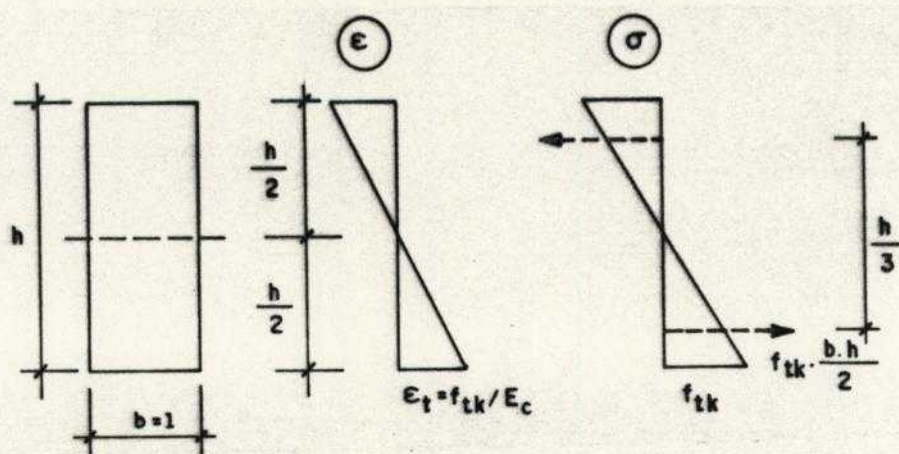


Fig. 5.28 Ponto A - Fissuração

Para a determinação do ponto B supõe-se que o concreto tracionado não contribui, que as tensões de compressão no concreto são proporcionais às deformações, com módulo de deformação E_c igual ao da fase anterior, e que as armaduras iniciam o seu escoamento, com tensão normal σ_s igual a f_{yk} . Vide figura 5.29.

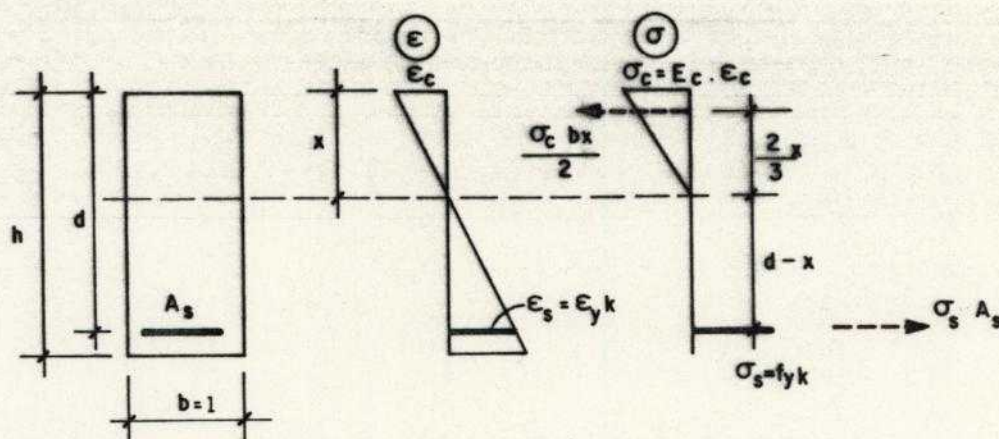


Fig. 5.29 Ponto B - Escoamento das armaduras

Igualando-se as resultantes de tração e de compressão na seção transversal e impondo-se a compatibilidade de deformações, determina-se a distância x que permite fixar a posição da linha neutra.

$$x = -m + \sqrt{m^2 + 4 m d} \quad \text{com} \quad m = 2 \frac{E_s A_s}{E_c b} \quad \dots(5.114)$$

O momento M_B e a curvatura χ_B são dados por

$$M_B = \sigma_s A_s (d - 2 x / 3) \quad \text{com} \quad \sigma_s = f_{yk} \quad \dots(5.115)$$

$$\chi_B = \frac{\varepsilon_s}{d - x} \quad \text{com} \quad \varepsilon_s = \varepsilon_{yk} \quad \dots(5.116)$$

As condições últimas estabelecidas para o ponto C estão esquematizadas na figura 5.30. A região mais comprimida do concreto atinge a resistência característica f_{ck} , com deformação ε_c compreendida entre 0,20% e 0,35%, enquanto as armaduras escoam, com tensão σ_s igual a resistência característica do aço à tração f_{yk} . Quanto à distribuição de deformações na seção pode ocorrer uma deformação na fibra mais comprimida do concreto que atinge o valor 0,35%, permanecendo, ainda, a deformação no aço entre ε_{yk} e 1,00% ou que a primeira esteja entre 0,20% e 0,35% enquanto que no aço tenha sido atingido o limite 1,00%. Observe-se que o diagrama parábola-retângulo de tensões de compressão no concreto está substituído pelo retângulo equivalente, como permite a NBR 6118[5.64].

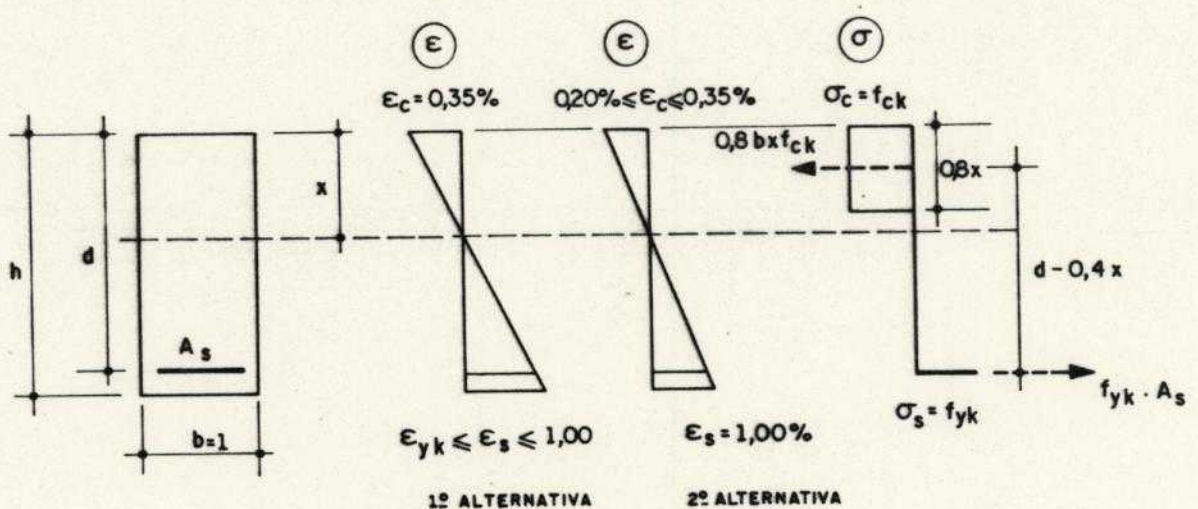


Fig. 5.30 Ponto C - Situação última

Igualando-se as resultantes de compressão no concreto e de tração no aço, determina-se a distância x

$$x = \frac{A_s f_{yk}}{0,8 b f_{ck}} \quad \dots(5.117)$$

O momento M_c é calculado por

$$M_c = 0,8 x b f_{ck} (d - 0,4 x) \quad \dots(5.118)$$

Para a determinação da curvatura deve-se considerar as duas alternativas e, evidentemente, escolher a menor dentre elas. Essas curvaturas podem ser calculadas como

$$\chi_{c1} = \frac{0,0035}{x} \quad e \quad \chi_{c2} = \frac{0,010}{d - x} \quad \dots(5.119)$$

Para cargas de longa duração, como é usual no caso de edifícios, pode-se optar por substituir nas expressões anteriores f_{ck} por $0,85 f_{ck}$, para se levar em conta, de maneira aproximada, o efeito Rusch.

Quanto ao diagrama $M-x$ adotado no presente trabalho ressalte-se que ele se assemelha ao que está proposto no código modelo do CEB-FIP de 1990 [5.95]. Diagrama trilinear é proposto também em [5.96], com comprovação experimental.

Aufare et al [5.89] propõem modelo não-estratificado para análise elastoplástica de lajes de concreto armado com as seguintes características : elemento BCIZ1 para a flexão de placas delgadas; critério de escoamento de Johansen [5.97] , menos restritivo que o de Von Mises; diagrama momento-curvatura bilinear como representado na figura 5.31; endurecimento isotrópico; solicitação dinâmica. Mesmo com elemento e diagrama momento-curvatura mais pobres e condições de carregamento mais severas do que no presente trabalho, os pesquisadores franceses conseguiram modelo de bom desempenho, o que está relatado na referência citada, em que resultados numéricos e experimentais são comparados. Este ponto reforça as possibilidades de modelos simples como o que aqui se apresenta. O diagrama bilinear, usado por eles, por subestimar a rigidez antes da ocorrência da

fissuração, tende a superestimar os deslocamentos nesse estágio do comportamento.

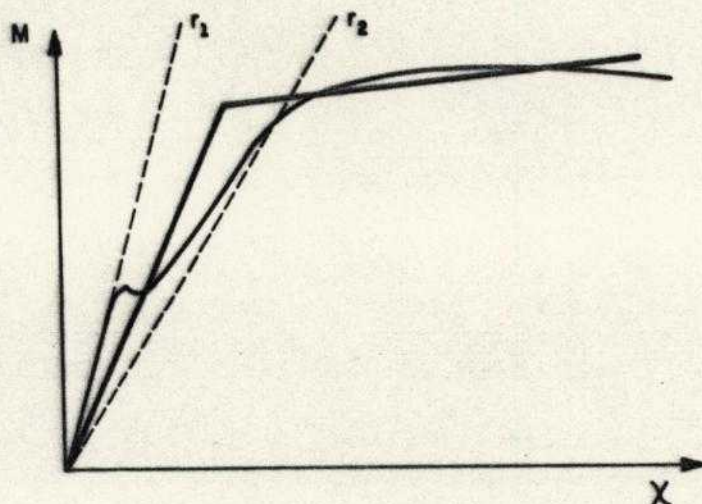


Fig. 5.31 Diagrama momento-curvatura bilinear de AUFARE et al.[5.89]

5.6.7 Primeiro Exemplo de Aferição do Modelo - Viga de Bresler- Scordelis

Bresler e Scordelis [5.98] experimentaram uma série de vigas de concreto armado. Uma delas é aqui utilizada, buscando-se comparar resultados experimentais e resultados numéricos apresentados por Cervera e Hinton [5.90] com os provenientes do uso do modelo proposto no presente trabalho. São mantidas as unidades que aparecem no artigo original. A viga, como se mostra na figura 5.32, tem um vão de 12 ft com seção transversal de 9in x 21,75in. A armadura longitudinal é constituída por quatro barras iguais perfazendo uma área total de 4 in². A viga é sujeita a uma carga concentrada no centro do vão e a ruptura, determinada no experimento, acontece com 58 kips, por esmagamento do concreto. Os dados experimentais são considerados de grande confiabilidade e a viga tem sido utilizada em inúmeros trabalhos para a aferição de formulações analíticas e numéricas.

Cervera e Hinton [5.90] utilizam, para análise da viga, elemento finito tridimensional, adaptado à aplicação em peças de concreto armado, baseado em comportamento elastoplástico. O modelo é bastante sofisticado, incluindo regra de endurecimento não linear, critério de escoamento semelhante ao de Kupfer, consideração de fissuração e "tension stiffening", e condição de esmagamento do concreto. Metade do vão da viga é discretizada alternativamente em cinco elementos iguais e em dez elementos iguais, dispostos em duas filas ao longo da altura.

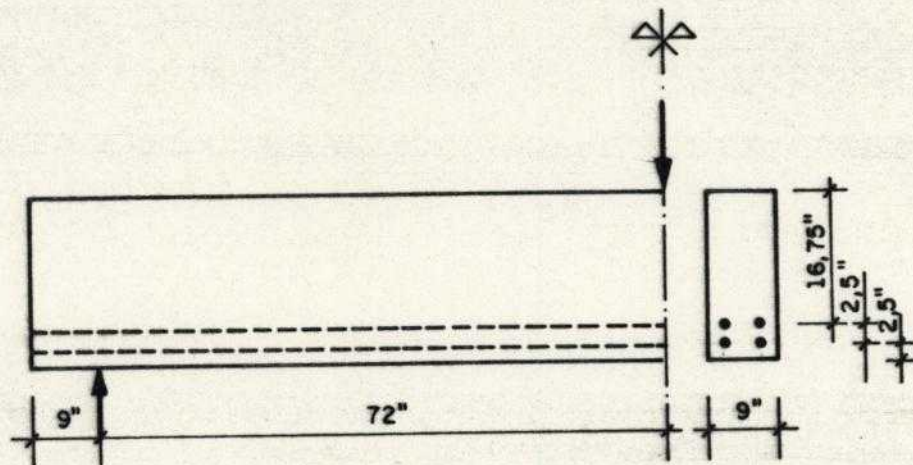


Fig. 5.32 Viga de Bresler-Scordelis

Os dados relativos aos materiais utilizados em [5.90] são para o concreto: $E_c = 3300$ kips/in², $f_c = 3,16$ kips/in², $f_t =$ kips/in², $\nu = 0,2$. E para o aço: $E_s = 27800$ kips/in², $f_y = 60$ kips/in².

No presente trabalho a metade do vão é discretizada em oito elementos quadrados, compostos por quatro triângulos T3AF. Inicialmente o processamento foi feito com as seguintes características: carga de 62 kips, aplicada em cinco incrementos iguais; tolerância em força de 1% e em deslocamento 0,1%; máximo número de iterações por incremento igual a 100; integração de resíduos com quatro pontos de Gauss.

Para a determinação dos pontos A, B e C do diagrama

convencional momento-curvatura é preciso que sejam feitas algumas adaptações. Ao invés de f_{ck} , f_{tk} e f_{yk} são usados os valores correspondentes ao ensaio : f_c , f_t e f_y . Como o ensaio é rápido deve-se evitar a redução de 15% na resistência do concreto devida ao efeito Rusch. A determinação do ponto B pressupõe que as armaduras escoem antes que o concreto ultrapasse o seu limite de resistência. É óbvio que é preciso verificar se tal condição acontece. Em um projeto e, em especial no caso de lajes, é relativamente fácil ajustar armaduras de modo que isso aconteça. No caso da viga em análise a condição adotada para a determinação do ponto B, no item anterior, não ocorre e o ponto B é fixado a partir da igualdade da máxima tensão no concreto com f_c . Observe-se que, nessas condições, foi necessário verificar outra possibilidade para a determinação do ponto C : a de que o concreto se plastifique sem haver escoamento da armadura. Tal hipótese não ocorre neste caso. Antecipe-se que nos demais exemplos a serem apresentados a particularidade que acaba de se apresentar não aparece.

Na figura 5.33 a curva carga-deslocamento no centro do vão é comparada com as curvas previstas, utilizando-se as duas redes de Cervera e Hinton e a do presente trabalho. É patente a boa aproximação dos resultados teóricos com os experimentais. O modelo simples aqui proposto fornece resultados bastante próximos dos experimentais, embora um pouco mais pobres que os da referência [5.90], como era de se esperar.

Cabe observar-se que apesar do critério de convergência ser bastante rigoroso e o número de incrementos pequeno, foram suficientes poucas iterações para se atingir a convergência em cada passo. Não mais que oito nos quatro primeiros e vinte e dois no último. Cedolin e Nilson [5.99], abordando a questão da convergência, com o uso do MEF para análise da viga de Bresler-Scordelis, concluem que oito incrementos de carga e não mais do que

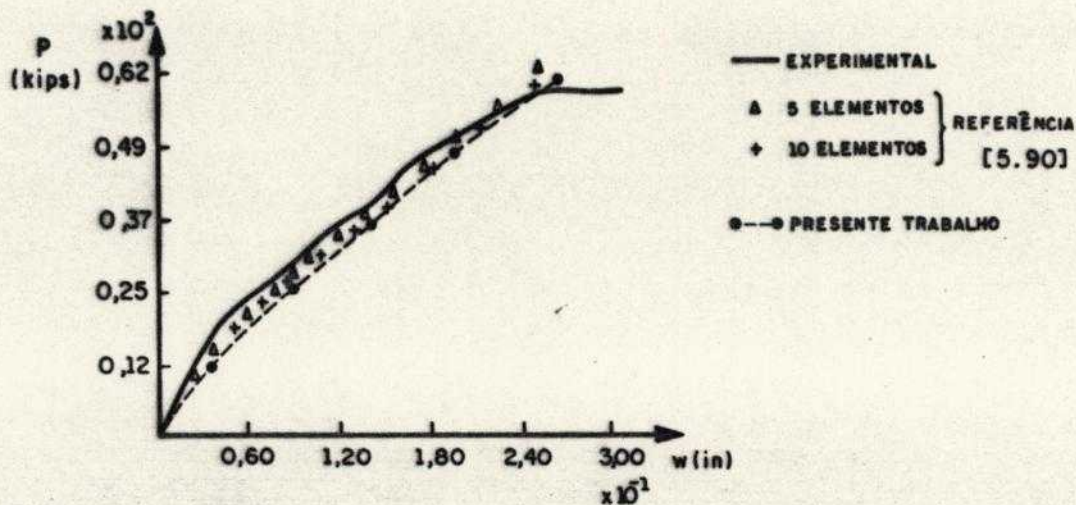


Fig. 5.33 Viga Bresler-Scordelis - Curva carga-deslocamento

vinte iterações por incremento são suficientes para modelar as características importantes do comportamento da peça. No presente estudo outros processamentos foram feitos dobrando-se o número de incrementos, decuplicando-se as tolerâncias, alterando-se o elemento triangular para o T3AE, integrando-se os resíduos com apenas um ponto de Gauss, sem que se percebesse mudança significativa na curva carga-deslocamento em relação à apresentada.

5.6.8 Segundo Exemplo de Aferição do Modelo - Laje Simplesmente Apoiada com Carga Concentrada

A figura 5.34 representa uma laje quadrada simplesmente apoiada, submetida a uma carga concentrada no ponto central, analisada por Dotrepe et al [5.80], com o uso de elemento finito de placa estratificado em camadas de comportamento elastoplástico. O concreto em compressão biaxial atende ao critério de Kupfer, Hilsdorf e Rush e o aço é assumido elastoplástico perfeito.

Dotrepe et al. discretizaram um quarto da laje em 64 elementos quadrados iguais, estratificados em seis camadas e aplicaram carga de 80 kips em dez incrementos iguais. Adotaram como características do concreto: $E_c = 4 \times 10^6$ psi, $f_c = 6920$ psi, $\nu = 0,15$. E para o aço: $E_s = 30 \times 10^6$ psi,

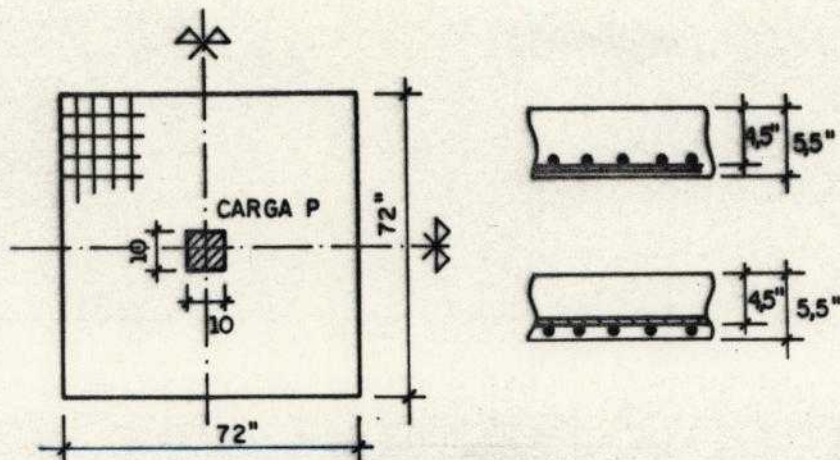


Fig. 5.34 Laje simplesmente apoiada

$f_y = 44000$ psi. A armadura tem distribuição isotrópica com taxa geométrica $\rho = 0,99\%$ referida à altura útil $d = 4,5$ in. Como não há especificação da resistência do concreto à tração adotou-se o valor de 624 psi que corresponde à recomendação do ACI, conforme Resheidat [5.100].

No presente trabalho um oitavo da laje foi discretizado em dezesseis elementos triangulares T3AF iguais. Como primeira opção o processamento foi feito com as seguintes características: carga de 80 kips, aplicada em doze incrementos: quatro de 10 kips e oito de 5 kips; tolerância em força de 1% e em deslocamento 0,1%; máximo número de iterações por incremento igual a 100; integração de resíduos com quatro pontos de Gauss.

A figura 5.35 apresenta a curva experimental carga-deslocamento central e os resultados obtidos por Dotrepe et al., juntamente com os calculados com o processo proposto.

A previsão com o modelo simples proposto é boa, competitiva, neste caso, com o de Dotrepe. Em especial quanto à previsão de ruína que ocorre com carga em torno de 75 kips. A partir do oitavo incremento, em que se atinge cerca de 80% da carga de ruína da laje, na primeira opção, o número de iterações para alcançar a convergência se torna superior a cinquenta. No último incremento, em que se chega a 80 kips não há convergência com 100 iterações.

Novo processamento foi feito, alterando-se a integração de resíduos para apenas um ponto de Gauss. Praticamente os resultados não se alteraram. A seguir, decuplicando-se as tolerâncias em força e deslocamento percebeu-se alguma mudança significativa apenas nos resultados correspondentes ao último incremento. Os resultados estão assinalados na figura 5.35 como opção 2.

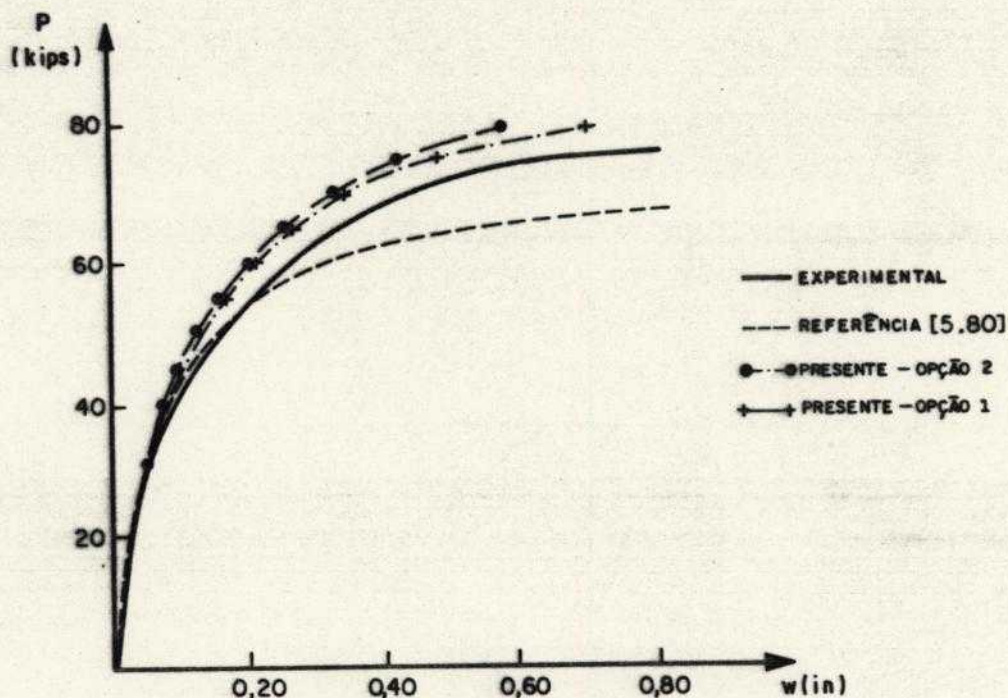


Fig. 5.35 Laje simplesmente apoiada sob carga concentrada
Curva carga-deslocamento

5.6.9 Terceiro Exemplo de Aferição do Modelo - Laje Apoiada nos Cantos Submetida a Carga Concentrada

A figura 5.36 apresenta uma laje ensaiada e analisada teoricamente por Jofriet e McNeice em 1971 [5.78]. A laje é quadrada, apoiada em seus quatro cantos, e submetida a uma carga concentrada no ponto central.

Inúmeros pesquisadores têm analisado essa laje, sendo aqui utilizados os resultados devidos a Scanlon, obtidos na

referência [5.84], para efeitos de comparação. No trabalho de Scanlon elementos finitos retangulares estratificados em dez camadas são utilizados, com a discretização mostrada na figura 5.37a. As características do concreto são: $E_c = 4,15 \times 10^6$ psi, $f_c = 5500$ psi, $\nu = 0,15$. E para o aço: $E_s = 29 \times 10^6$ psi. A armadura tem distribuição isotrópica com taxa geométrica $\rho = 0,85\%$ referida à altura útil $d = 1,31$ in. Como não há especificação da resistência do concreto à tração e da resistência do aço, foram adotados respectivamente os valores $f_t = 550$ psi e $f_y = 60000$ psi, como no trabalho de Figueiras [5.86]. Como segunda opção arbitrou-se $f_y = 50000$ psi.

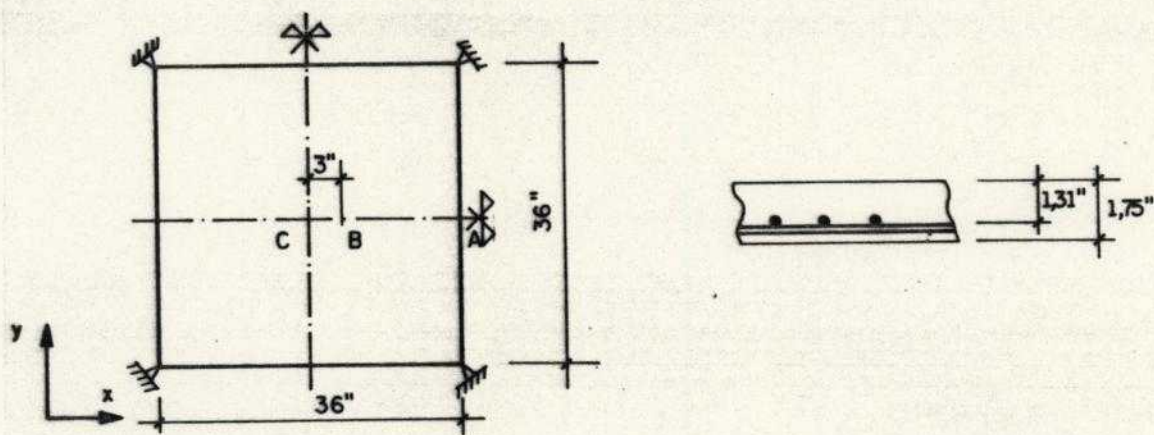


Fig. 5.36 Laje apoiada nos cantos submetida a carga concentrada no ponto central

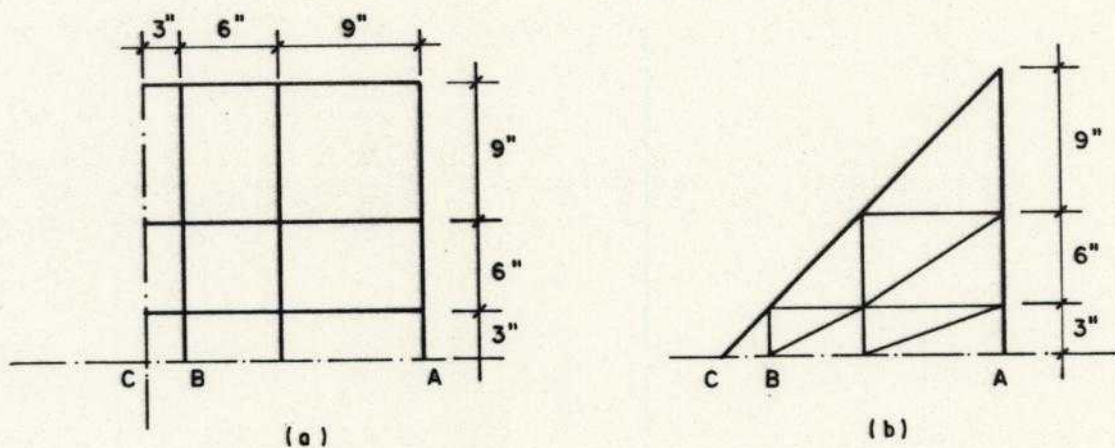


Fig. 5.37 Discretizações

No presente trabalho um oitavo da laje foi discretizado em doze elementos triangulares T3AF, como se mostra na figura 5.37b. O processamento foi feito com as seguintes características : carga de 3,2 kips, aplicada em doze incrementos: um de 1,0 kip e onze de 0,2 kips; tolerância em força de 1% e em deslocamento 0,1%; máximo número de iterações por incremento igual a 100; integração de resíduos com quatro pontos de Gauss.

A figura 5.38 apresenta a curva experimental carga-deslocamento do ponto B (vide figura 5.36), os resultados previstos por Scanlon e os correspondentes às duas opções aqui adotadas. Ressalte-se que os resultados devidos a Scanlon são os alcançados com módulo de deformação do concreto tracionado, após a fissuração, igual a 10% de E_c .

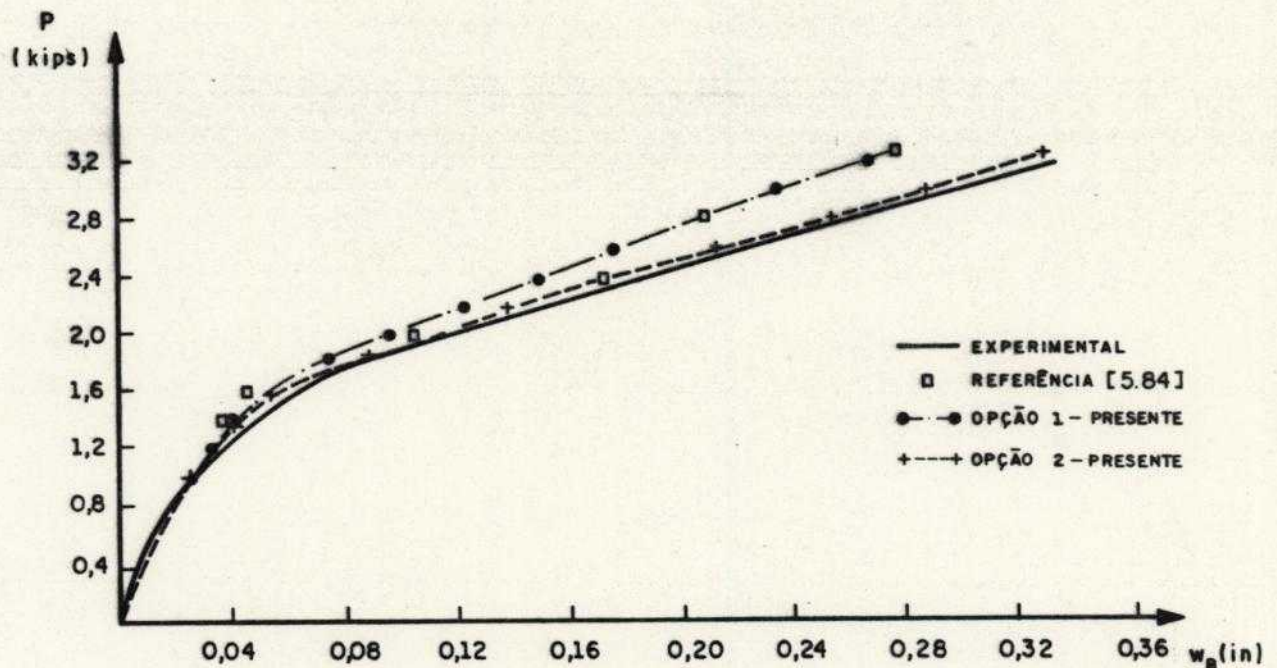


Fig. 5.38 Laje apoiada nos cantos sob carga concentrada
Curva carga-deslocamento

Como se pode observar, o modelo simplificado proposto

neste trabalho fornece resultados próximos dos experimentais, em especial a segunda opção, com o aço menos resistente. Buscando-se ampliar a comparação observem-se os resultados correspondentes à variação do momento M_y ao longo do segmento AC. São apresentadas nas figuras 5.39 e 5.40 as razões M_y/P para P igual a 1,6, 2,4 e 3,2 kips, devidas a Scanlon e à primeira opção aqui adotada, respectivamente. Esta opção foi escolhida devido à maior proximidade em deslocamentos com a análise de Scanlon.

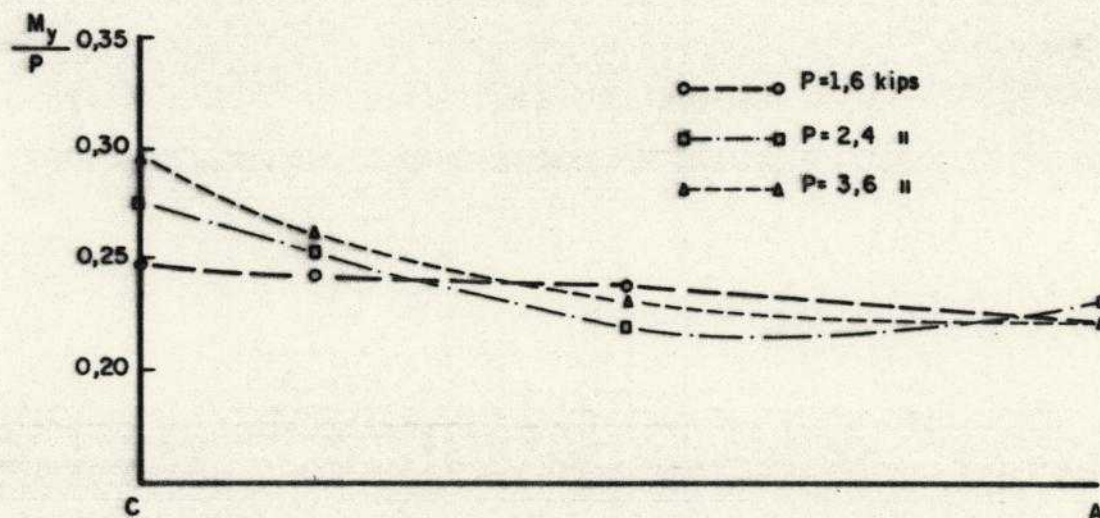


Fig. 5.39 Variação de M_y/P ao longo de AC - Scanlon

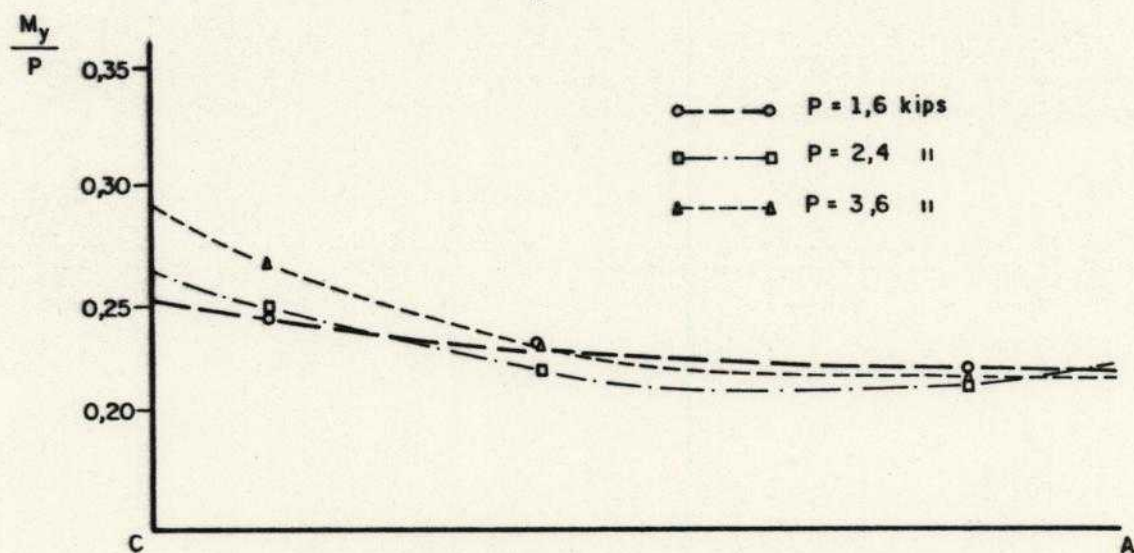


Fig. 5.40 Variação de M_y/P ao longo de AC - Presente

Comparando-se as distribuições apresentadas nas duas últimas figuras pode-se perceber que são próximas. É oportuno ressaltar que os resultados da presente análise foram tomados nos pontos-amostra mais próximos do segmento AC, sem extrapolação, ou seja, em condições desfavoráveis. É interessante observar-se a distribuição de momentos após a fissuração. Para cargas inferiores a 1,0 kip, o comportamento é elástico com um pico de momentos sob a carga concentrada, região onde inicia-se o processo de fissuração, com redução de rigidez. Isto promove uma redistribuição de momentos, de modo que para carga igual a 1,6 kips (vide figura 5.39 ou 5.40), o momento praticamente se uniformiza ao longo de AC. À medida em que a carga é aumentada a fissuração se estende a regiões afastadas do centro, tendendo a igualar a distribuição de rigidez pela laje. Então a tendência de atrair grande parte do momento para o centro novamente aparece, como se percebe observando-se os resultados para $P = 2,4$ e $P = 3,2$ kips.

No processamento realizado a convergência foi alcançada em todos os incrementos de carga, sendo no último necessárias trinta e uma iterações, enquanto no primeiro o comportamento foi elástico linear. Outros processamentos foram feitos com apenas um ponto de Gauss para a integração de resíduos, e tolerâncias decuplicadas, sem que diferenças apreciáveis nos resultados pudessem ter sido percebidas.

5.7 Exemplo de Aplicação - Análise Não-Linear

A figura 5.41 esquematiza metade da forma do pavimento tipo simétrico de um edifício de escritórios, estudado por França [5.101] quanto aos efeitos das ações laterais. O pavimento de concreto armado é constituído por laje plana maciça de dezesseis centímetros de espessura. Há vigas apenas no poço dos elevadores e caixa da escada, ligando os pilares-paredes que os limitam. O pavimento é aqui analisado para carregamento estático transversal, monotonicamente crescente. Inicialmente é considerado o comportamento elástico linear e, a seguir, o comportamento não-linear, representando-se a laje de concreto armado de maneira simplificada, como se descreveu nos itens anteriores.

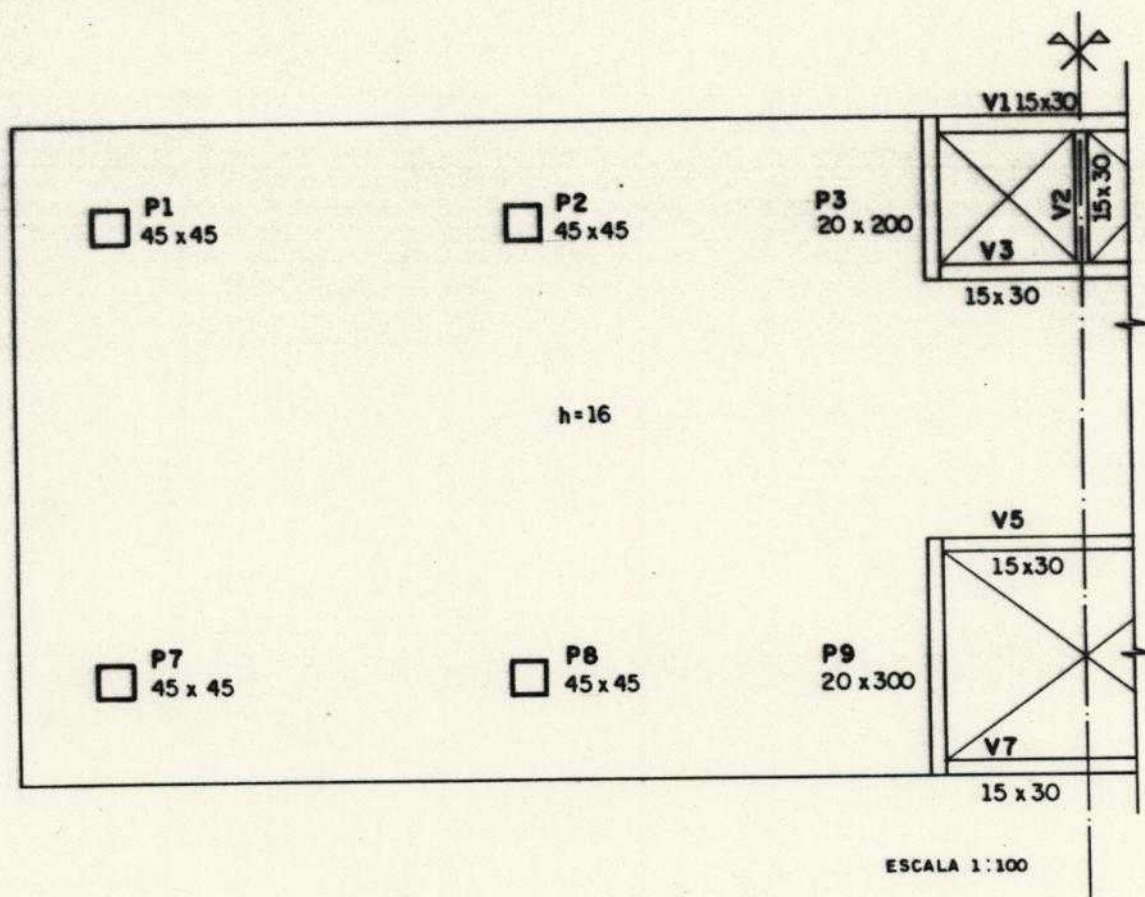


Fig. 5.41 Pavimento tipo - Laje plana

As características geométricas de vigas e pilares podem ser observadas na figura 5.41. A distância de piso a piso é igual a 2,90 m . O concreto armado foi assumido com peso próprio de 25 kN/m^3 , módulo de deformação longitudinal $1,80 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson igual a 0,15. Conforme [5.101], além do próprio peso, o carregamento é constituído por revestimento de $1,0 \text{ kN/m}^2$, divisórias equivalentes a $1,0 \text{ kN/m}^2$ e sobrecarga de utilização de $3,0 \text{ kN/m}^2$.

O modelo considerado para a representação de metade do pavimento é constituído de 250 nós, 204 elementos finitos quadrilaterais de placa, compostos por quatro triângulos T3AF, 19 barras para a simulação de vigas e pilares e 10 molas para a representação dos pilares-parede. A discretização utilizada está representada na figura 5.42.

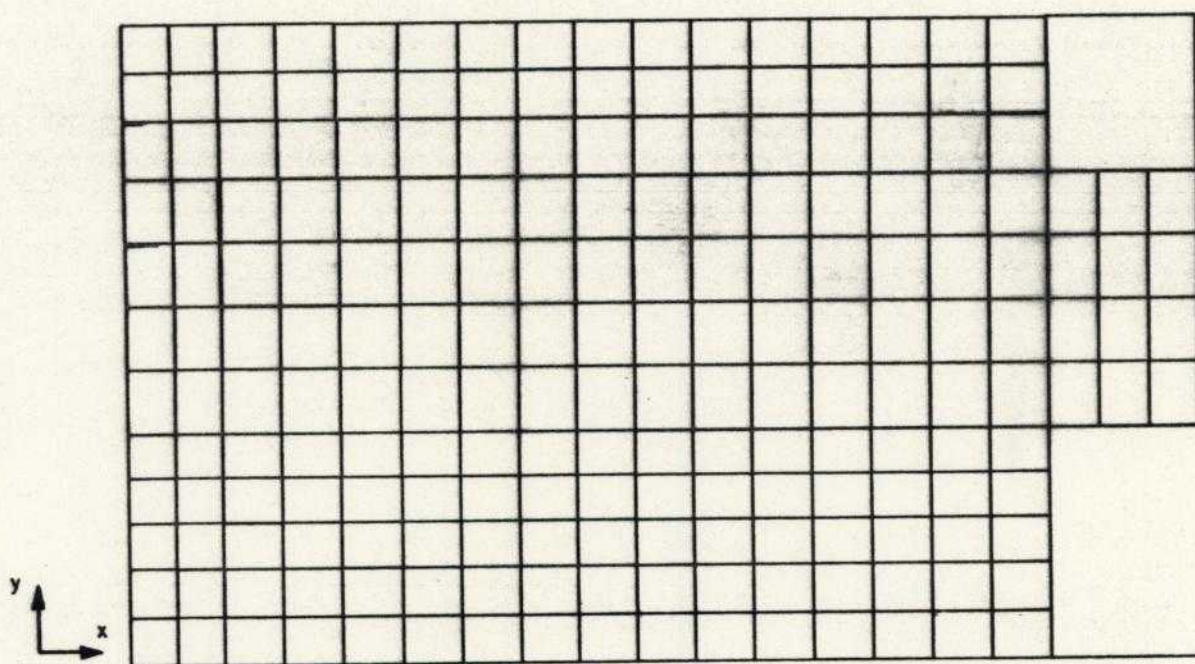


Fig. 5.42 Discretização do pavimento

Os resultados referentes aos momentos na laje e deslocamentos transversais estão apresentados nas figuras 5.43 a 5.46. As ações estão majoradas com o coeficiente parcial $\gamma_{f1} = 1,25$, pois se deseja a comparação com os

resultados provenientes da análise não-linear do pavimento, considerando-se a plasticidade no concreto. Como se lembrou no item 4.13 o coeficiente parcial γ_{f1} leva em conta a variabilidade das ações. É considerada uma combinação última normal com $\gamma_q = \gamma_g = 1,4$.

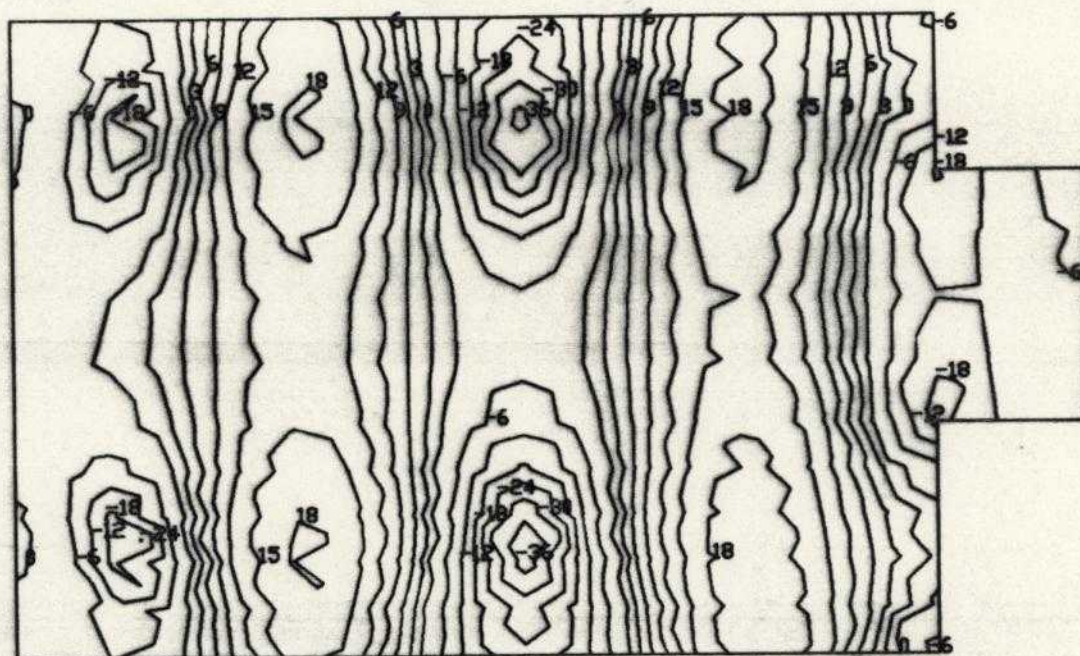


Fig. 5.43 Momentos M_x - kNm/m - Linear

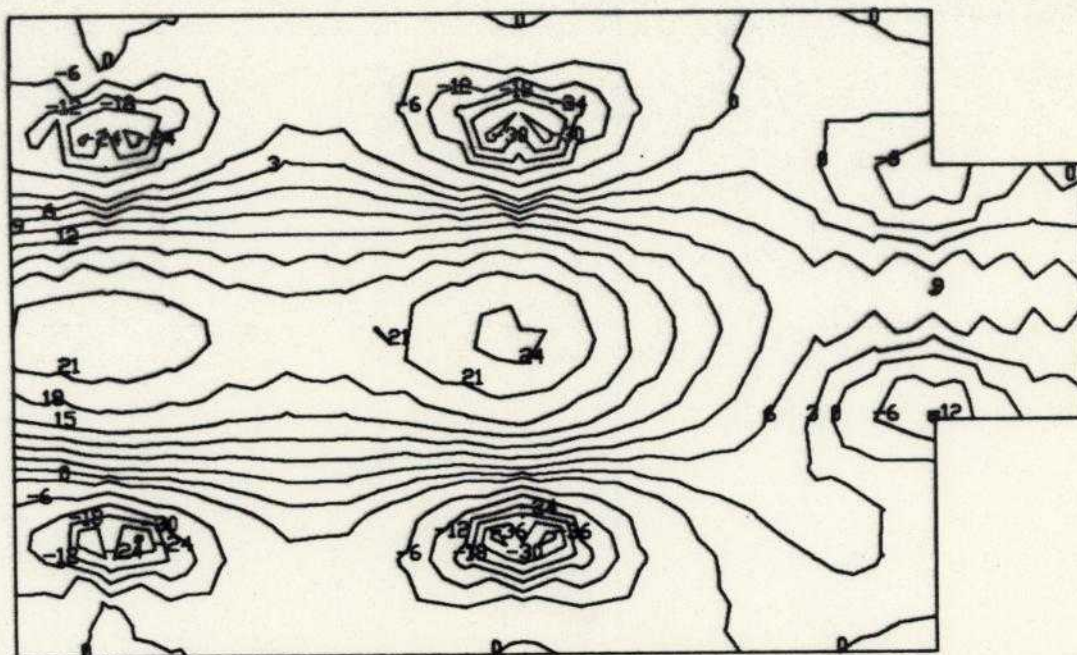


Fig. 5.44 Momentos M_y - kNm/m - Linear

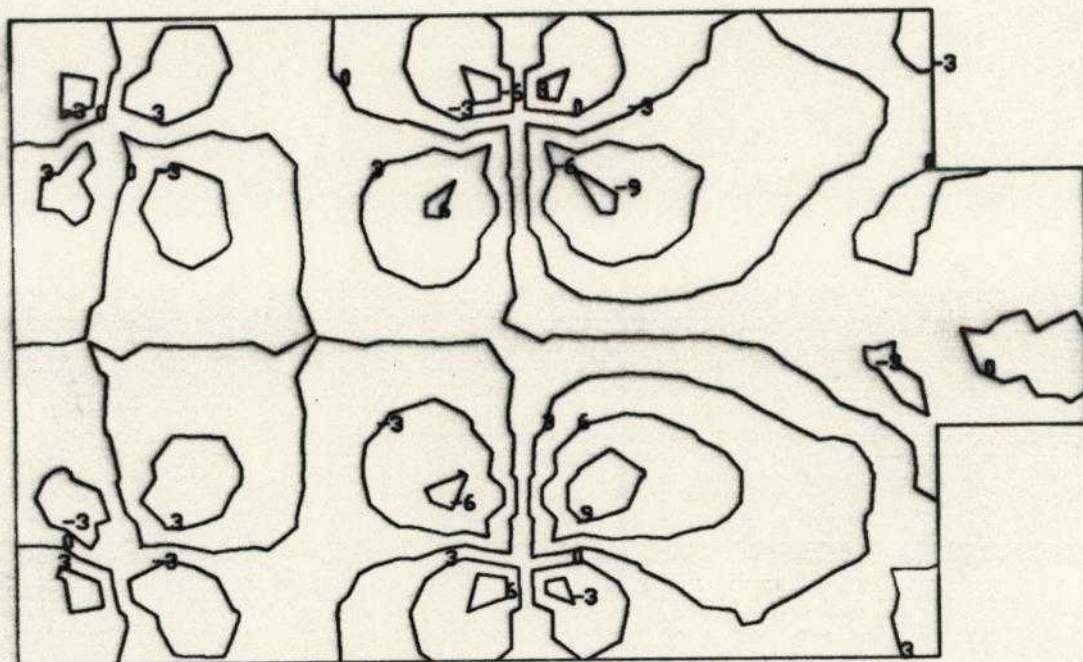


Fig. 5.45 Momentos M_{xy} - kNm/m - Linear

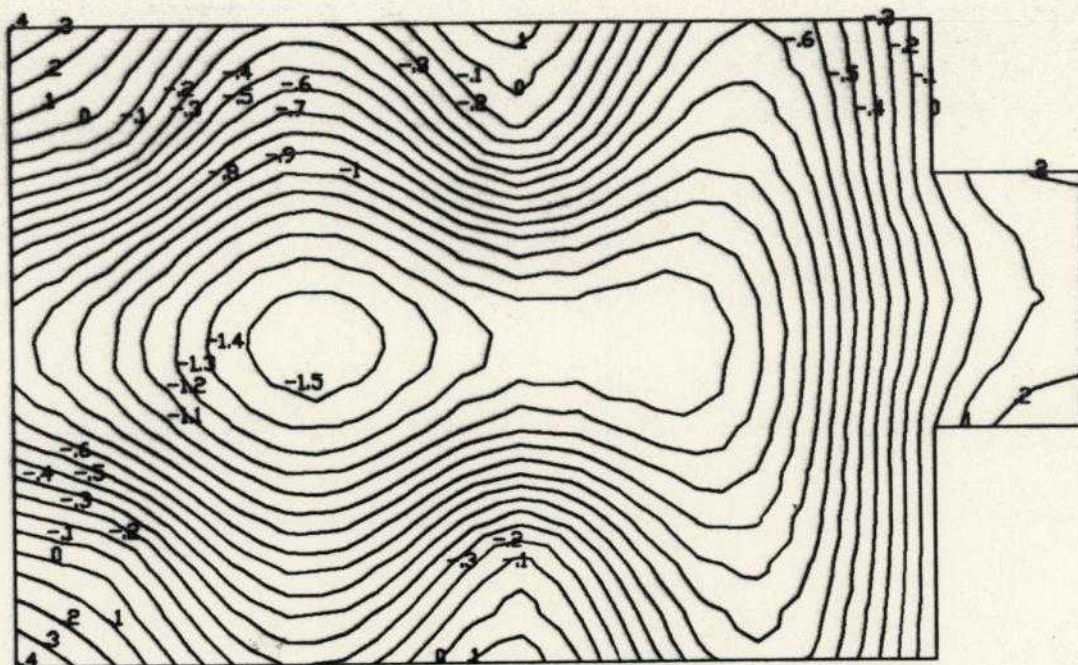


Fig. 5.46 Deslocamentos verticais - cm - Linear

As reações dos pilares mais carregados sobre a laje estão listadas na tabela 5.8. Esses valores estão majorados em 25%, e não contêm o peso próprio do tramo do pilar que faz parte do modelo.

Pilar	Fz	Mx	My
P1	177,65	-62,95	-44,05
P2	272,37	-68,79	-0,93
P7	177,01	62,08	-43,78
P8	275,89	68,02	-3,24

Tab. 5.8 Reações de Apoio - Unidades : kN , m

Com $f_{ck} = 18$ MPa não há problemas em relação à punção, segundo as especificações da NBR 6118 [5.64]. As maiores solicitações de flexão da laje ocorrem junto ao pilar P8, com momento M_{xy} próximo de zero e momentos M_x e M_y com valores próximos de 30 kNm/m. Com o uso de aço CA 50A e admitindo-se altura útil d igual a 14 cm, a armadura necessária para o combate desse momento estaria em torno de $7,5 \text{ cm}^2/\text{m}$. Imagine-se que o projetista deseje reduzir em 20% esse momento. Com momento fletor de 24 kNm/m a armadura necessária seria de $6,0 \text{ cm}^2/\text{m}$. Supõe-se, como primeira aproximação, que a armadura em qualquer região da laje não poderá superar esse último valor. Para que se possa iniciar a análise elastoplástica do pavimento é necessário determinar-se o diagrama convencional momento-curvatura trilinear. Em relação aos dados já apresentados é preciso complementar com o módulo de Young do aço e a resistência característica do concreto à tração. Utilizando-se as especificações contidas em [5.64] encontram-se $E_s = 2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ e $f_{tk} = 1,8$ MPa. O referido diagrama é apresentado na figura 5.47.

O carregamento é aplicado em seis incrementos de carga: o primeiro correspondente a 50% da carga total e os cinco outros com 10%. As tolerâncias assumidas para deslocamento e força são iguais a 1% e 5%, admitindo-se um número máximo de 50 iterações por incremento. A integração de resíduos foi feita com um ponto de Gauss em cada triângulo, o que corresponde a quatro no quadrilátero. A convergência foi atingida em todos os incrementos, não sendo necessárias mais do que nove iterações.

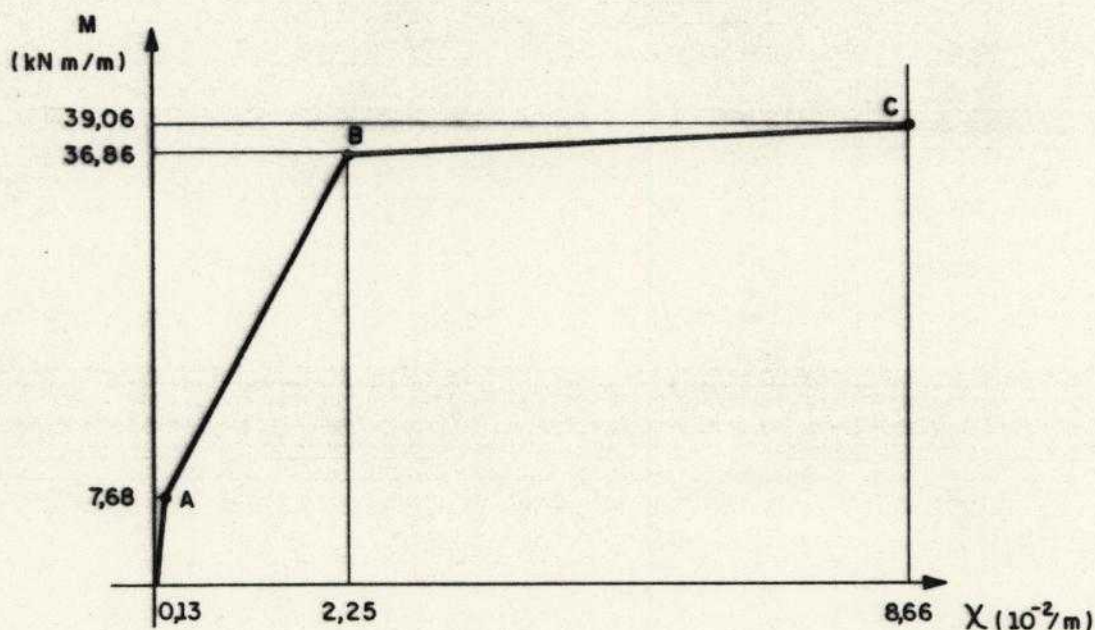


Fig. 5.47 Diagrama momento-curvatura convencional

Alguns resultados da análise elastoplástica realizada estão expostos nas figuras 4.48, 4.49 e 4.50, onde são apresentadas as distribuições dos momentos fletores M_x , M_y e do momento volvente M_{xy} .

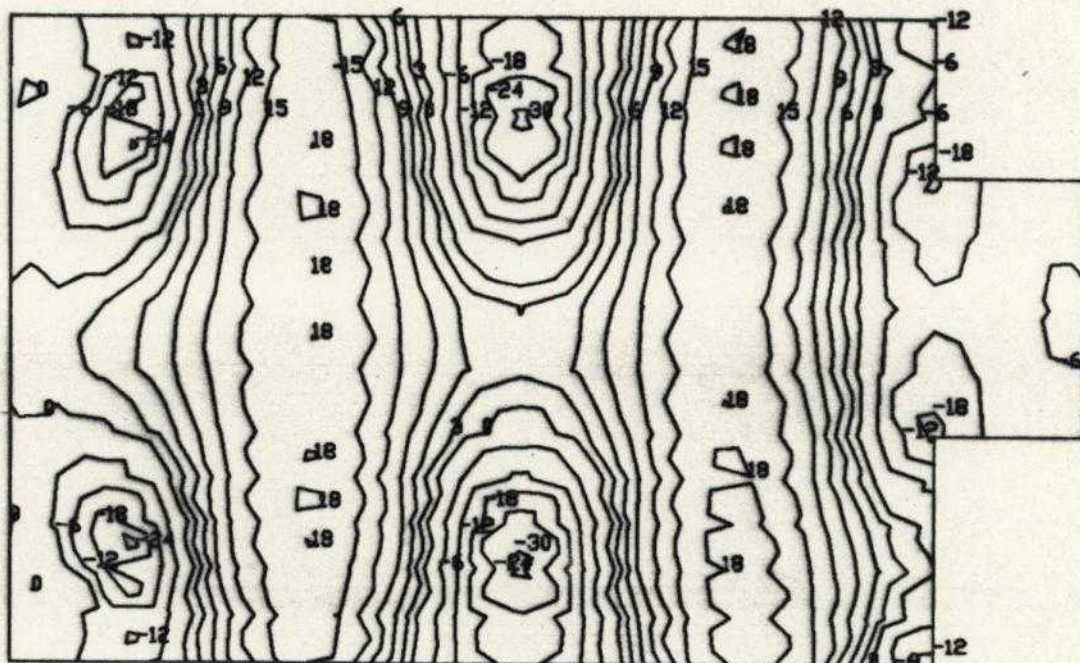


Fig. 5.48 Momentos M_x - kNm/m - Não-linear

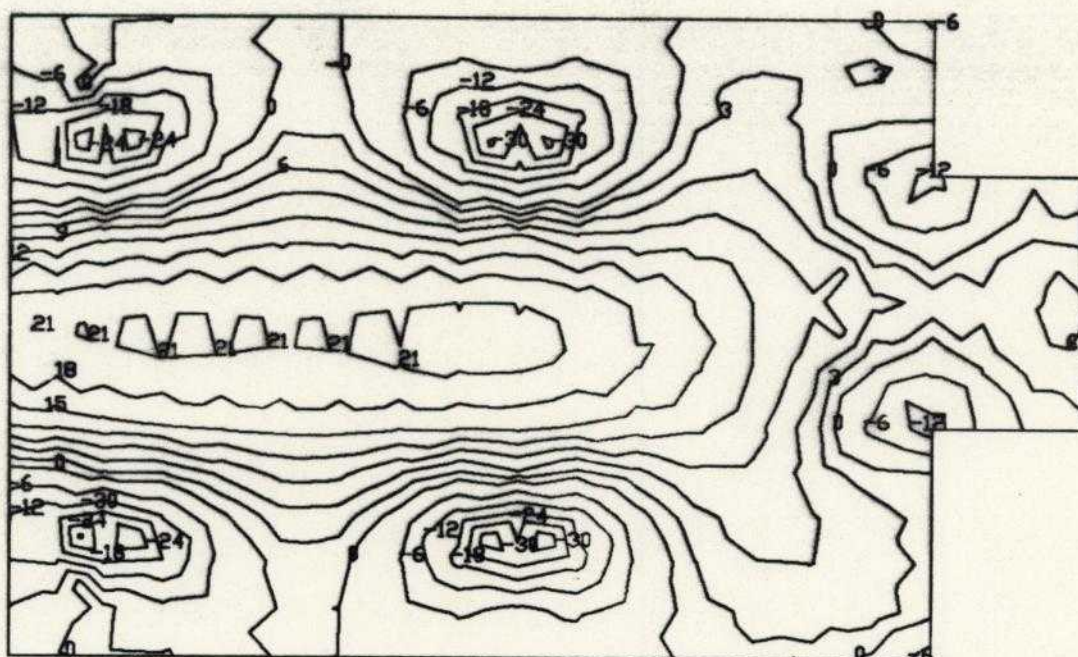


Fig. 5.49 Momentos M_y - kNm/m - Não-linear

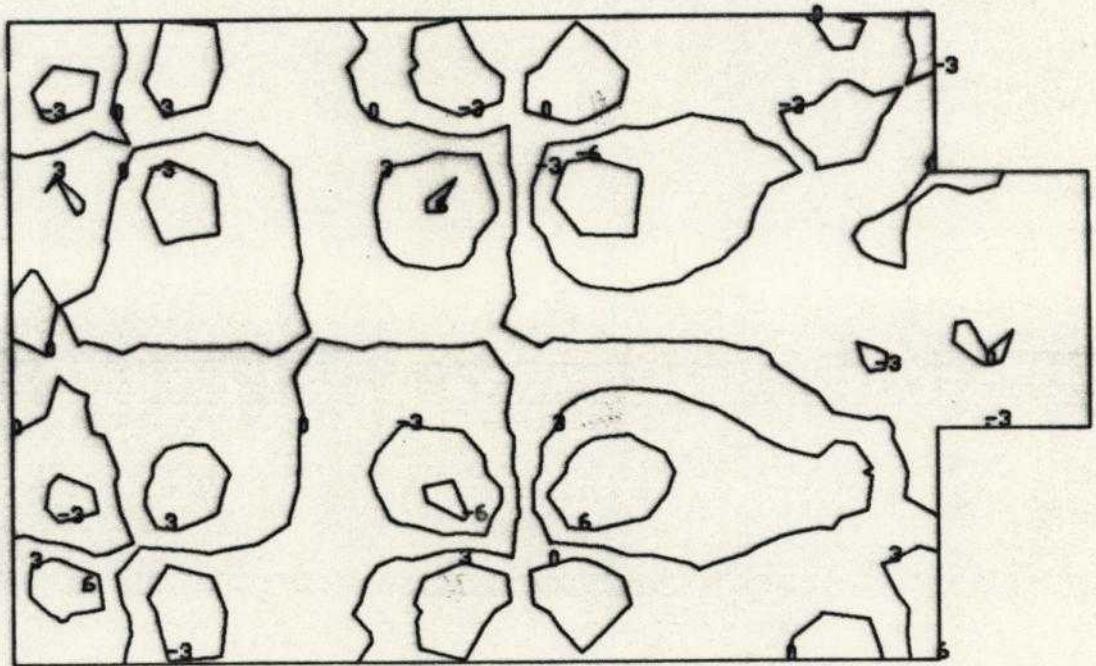


Fig. 5.50 Momentos M_{xy} - kNm/m - Não-linear

As reações dos pilares mais carregados sobre a laje estão listadas na tabela 5.9. Assim como na tabela 5.8 esses valores estão majorados em 25%, e não contêm o peso próprio do tramo do pilar que faz parte do modelo.

Pilar	Fz	Mx	My
P1	182,89	-69,68	-51,46
P2	263,11	-68,69	-0,51
P7	180,87	64,64	-50,04
P8	263,61	60,61	-3,05

Tab. 5.9 Reações de Apoio - Unidades : kN , m

A comparação dos resultados exibidos nas tabelas 5.8 e 5.9 permite perceber a tendência de alívio dos pilares P2 e P8 com acréscimos nos pilares P1 e P7. Há uma mudança no fluxo de cargas em função das reduções de rigidez ocorridas nas regiões mais solicitadas, devida à fissuração. Ao longo do processo de carregamento as regiões com maiores

reservas de resistência tendem a absorver mais os acréscimos de esforços, como se pode notar confrontando-se os resultados dos momentos correspondentes às duas análises. Quanto aos momentos de flexão negativos observe-se, na análise não-linear, a redução junto aos pilares P2 e P8, com aumentos pouco significativos em P1 e P7. Já com os momentos positivos ocorre uma tendência de maior espalhamento dos momentos sem aumento dos valores máximos. Ressalte-se o comportamento na região entre os quatro pilares quadrados, com propensão para a uniformização de momentos. Para os momentos volventes M_{xy} a tendência é a mesma, com redução de valores junto aos pilares mais carregados.

Os deslocamentos, evidentemente, são maiores no comportamento não-linear, em decorrência das reduções de rigidez por fissuração. Os deslocamentos verticais, mostrados na figura 5.51, chegam a ser superiores aos da análise linear em 140%.

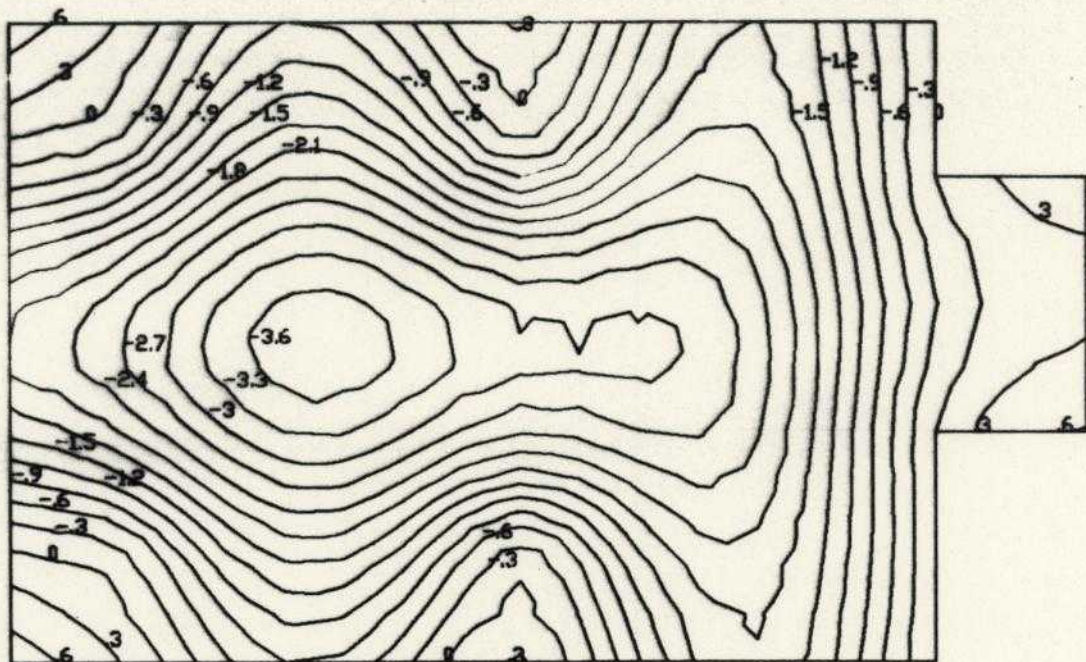


Fig. 5.51 Deslocamentos verticais - cm - Não-linear

Ressalte-se que os valores apresentados não seriam os utilizados para a verificação do estado limite de utilização. Neste caso, segundo a norma de ações e segurança nas estruturas [5.102], o coeficiente de ponderação das ações γ_f deve ser tomado com valor unitário. Considerando-se uma combinação quase-permanente de utilização, as ações variáveis devem ser ponderadas com ψ_2 , adotado igual a 0,4. Nessas condições os deslocamentos verticais se distribuem de acordo com o que se apresenta na figura 5.52. O máximo valor é admissível de acordo com as prescrições da NBR 6118 [5.64]. Comparado ao correspondente valor máximo conseguido com a análise elástica linear, tem-se um acréscimo de 80%.

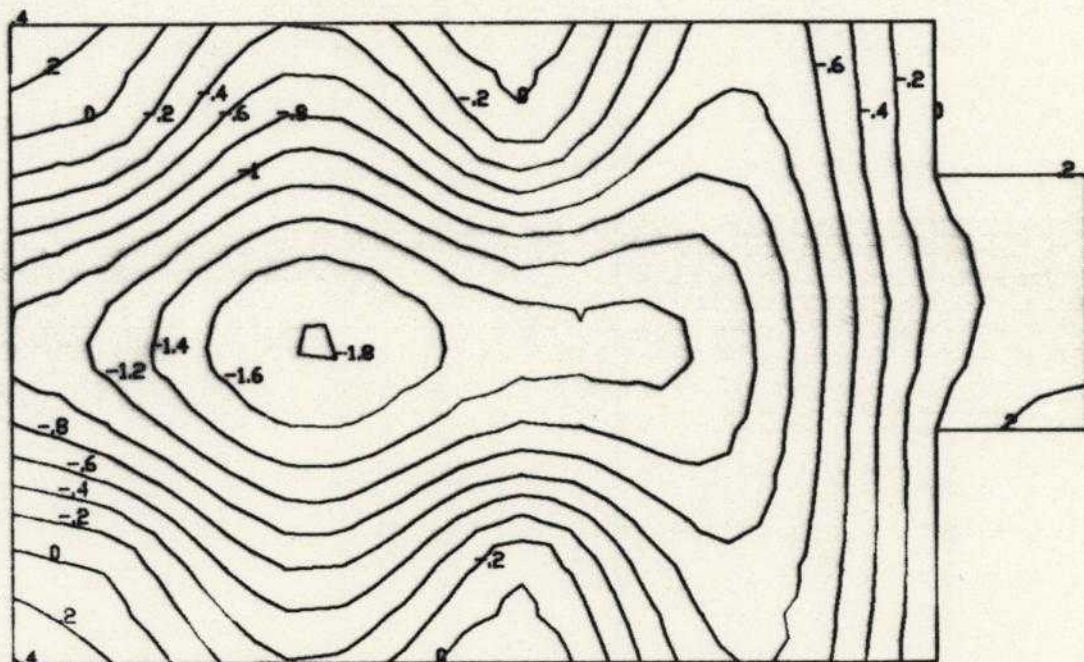


Fig. 5.52 Deslocamentos verticais - cm - Não-linear
Estado limite de utilização

Foram feitos outros processamentos refinando-se a rede de elementos finitos, aumentando-se o número de incrementos, reduzindo-se as tolerâncias e aumentando-se o número de pontos de integração para os resíduos de momentos, sem que alterações significativas tivessem sido

observadas.

O tempo de processamento consumido na análise linear aqui descrita foi de 155,44 segundos (2 min. 35,44 s.). Na análise não-linear foram gastos 2385,01 segundos (39 min. 45,01 s.).

Sob o ponto de vista de projeto, o processo poderia não ser interrompido ao nível da primeira distribuição de armaduras considerada. O projetista pode e deve intervir no processo, ajustando armaduras de acordo com os resultados obtidos em cada processamento. A bem da simplicidade aqui só foi apresentada a primeira fase do processo, com a consideração de um único limite para a taxa geométrica de armaduras, embora o "software" desenvolvido permita a fixação de inúmeros diagramas momento-curvatura, aos quais se associam diferentes grupos de elementos de placa. Em função do tempo de processamento obtido na análise não-linear é viável a repetição sucessiva de alguns processamentos na busca de distribuições de armaduras mais adequadas, considerando-se condições de exequibilidade e economia.

5.8 CONCLUSÕES

Cabe ao meio técnico não apenas a aquisição de ferramentas que permitam modelar com maior acuidade o pavimento do edifício, mas também a busca de habilitação no uso dessa ferramenta. O MEF é uma opção bastante interessante, com acesso favorecido pela crescente disseminação de "softwares" para uso em microcomputadores.

Cabe ao meio acadêmico a divulgação ampla do assunto, em linguagem a menos complexa possível, buscando sensibilizar o projetista sobre a necessidade e a viabilidade da melhoria dos modelos empregados no projeto do edifício, de um modo geral, e do pavimento em particular. Parece importante que o acesso aos processos

numéricos seja cada vez mais facilitado e implementado nos cursos de graduação, buscando-se mostrá-los como ferramentas a serem utilizadas no cotidiano do escritório de projetos estruturais.

Na análise de pavimentos de edifícios é fundamental a utilização de modelos mais aperfeiçoados que integrem a laje aos demais componentes estruturais. Em especial quando a distribuição de pilares não é uniforme, com a presença de grandes vãos e diferenças de rigidez apreciáveis entre regiões contíguas.

Em um pavimento concebido como subsistema laje-viga a consideração da laje isolada do vigamento é uma representação pobre do seu comportamento. A idéia de que o desligamento das peças, devido ao fato de não representar muitos vínculos existentes, produz modelos menos rígidos e, portanto, a favor da segurança, é errônea. A desconsideração do comportamento conjunto pode levar não apenas a uma representação mais pobre, mas a uma condição menos segura, pois a rigidez relativa dos componentes estruturais é que define os fluxos de carga pelo sistema estrutural hiperestático. O uso intensivo de geradores de dados e eficientes recursos gráficos viabiliza a utilização de processos numéricos como ferramenta a ser usada cotidianamente.

Os elementos finitos de placa apresentados neste trabalho têm desempenho excelente, podendo ser utilizados com segurança na biblioteca de sistemas computacionais para a análise de placas. Tais elementos desenvolvidos com a formulação livre possibilitam atingir resultados suficientemente precisos, sob o ponto de vista prático, com discretizações relativamente pobres.

O modelo elastoplástico simples, proposto neste trabalho é potencialmente bom e pode ser utilizado para a simulação do comportamento não-linear físico de lajes de concreto armado, sob carregamento estático monotonicamente crescente. Especialmente em condições de serviço, o modelo

permite representar bem a distribuição de esforços e deslocamentos em pavimentos de concreto armado. Ressalte-se que só foi considerada a possibilidade de distribuição isotrópica de armaduras. O avanço que se pretende realizar em futuros trabalhos consiste na consideração de distribuições anisotrópicas de armaduras com o uso do critério generalizado de Von Mises . É intenção do autor estudar , com o modelo simples desenvolvido, o efeito das variações de disposição de armaduras no comportamento do pavimento do edifício, bem como a sua otimização.

Em todos os casos analisados, o comportamento não-linear foi bem representado com um número reduzido de incrementos . Mesmo quando o carregamento foi tal que provocou a ruína da laje, não houve necessidade de considerar um número elevado. Em torno de uma dezena de incrementos parece suficiente para a divisão do carregamento. Tolerâncias em torno de 1% para deslocamentos e 10% para as cargas mostraram-se satisfatórios em serviço, com a integração de resíduos com apenas um ponto de Gauss em cada elemento triângulo , o que corresponde a quatro pontos no quadrilátero. Um número relativamente pequeno de iterações foi necessário para a convergência em cada incremento, sendo que nas primeiras iterações ocorrem as maiores alterações nos resultados.

É boa regra de conduta a realização de análises alternativas variando-se discretizações, número de incrementos, tolerâncias, etc., para captar a representatividade do modelo que simula o comportamento estrutural.

O uso do MEF na análise de pavimento de edifícios em comportamento linear ou não-linear é viável como ferramenta a ser aplicada na rotina de escritórios de projeto. Possibilita uma boa representatividade ao modelo, riqueza de resultados e condições para se desenvolver projetos de maneira segura e econômica. O custo dos processamentos é reduzido devido à possibilidade de utilização em

microcomputadores. Mesmo na análise não-linear, com uso de matriz constante, os tempos de processamento são razoáveis para as discretizações de pavimentos usuais.

5.9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[5.1] Ramalho, M.A.; "Sistema Para Análise de Estruturas Considerando Interação com o Meio Elástico"; Tese de Doutorado; EESC-USP; 1990.

[5.2] Hendry, A.W.; "Structural Brickwork"; The MacMillan Press Ltd.; London; 1981.

[5.3] Davies, S.R., Ahmed, A.E.; "An Approximate Method for Analysing Composite Wall/Beams"; Proc. Br. Ceram. Soc.; 27; 305-320; 1978.

[5.4] Stafford Smith, B., Riddington, J.R.; "The Composite Behaviour of Elastic Wall-Beam Systems"; Proc. Instn. Civ. Engrs; 63; 377-391; 1977.

[5.5] Wood, R.H., Simms, L.G.; "A Tentative Design Method for the Composite Action of Heavily Loaded Brick Panels Supported on Reinforced Concrete Beams"; BRS CP26/29; Building Research Station; Watford; 1969.

[5.6] Corrêa, M.R.S., Ramalho, M.A.; "Sistema LASER de Análise Estrutural"; V Simpósio Nacional de Tecnologia de Construção : Software para o Projeto do Edifício; EPUSP; São Paulo; 1987.

[5.7] Costa, J.B.; "Automação do Dimensionamento do Vigamento de Pavimento Tipo de Edifícios de Concreto Armado"; Dissertação de Mestrado; EESC-USP; 1990.

[5.8] Oliveira, M.E.A.; "Algoritmos Computacionais para Projetos de Vigas de Edifícios de Concreto Armado"; Dissertação de Mestrado; EESC-USP; 1990.

[5.9] Corley, W.G., Jirsa, J.O.; "Equivalent Frame Analysis for Slab Design"; Journal of the American Concrete Institute; 11; Nov. 1970.

[5.10] American Concrete Institute; "Manual of Concrete Practice, 3, Use of Concrete in Buildings - Design, Specifications and Related Topics"; (ACI 435.6R-74); ACI; Detroit; Michigan; 1987.

[5.11] Ewell, W.W. et al.; "Deflections in Gridworks and Slabs"; Trans. ASCE; 117; 1952.

[5.12] Lightfoot, E., Sawko, F.; "The Analysis of Grid Frameworks and Floor Systems by the Electronic Computer"; Struct. Eng.; 38(3); 79-87; 1960.

[5.13] Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S.; "Theory of Plates and Shells"; McGraw Hill Book Company, Inc.; New York, N.Y.; 1959.

[5.14] Szilard, R.; "Theory and Analysis of Plates"; Prentice Hall, Inc.; Englewood Cliffs, New Jersey; 1974.

[5.15] Bézine, G.P.; "Boundary Integral Formulation Plate Flexure with Arbitrary Boundary Conditions"; Mech. Res. Commun.; 5; 197-206; 1978.

[5.16] Stern, M.; "A General Boundary Integral Formulation for the Numerical Solution of Plate Bending Problems"; Int. J. Solids Struct.; 15; 769-782; 1978.

[5.17] Paiva, J.B.; "Formulação do Método dos Elementos de

Contorno para a Flexão de Placas e suas Aplicações em Engenharia de Estruturas"; Tese de Doutorado; EESC-USP; 1987.

[5.18] Hrabok, M.M., Hrudey, T.M.; "A Review and Catalogue of Plate Bending Finite Elements"; Comput. & Struct.; 19; 479-498; 1984.

[5.19] Batoz, J.L., Bathe, K.J., Ho, L.W.; "A Study of Three-node Triangular Plate Bending Elements"; Int. J. Num. Meths. Engrg.; 15; 1771-1812; 1980.

[5.20] Clough, R.W., Tocher, J.L.; "Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending"; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics; 515-545; WPAFB; Ohio; 1965.

[5.21] Clough, R.W., Felippa, C.A.; "A Refined Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending"; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics; 399-440; WPAFB; Ohio; 1968.

[5.22] Bazeley, G.P., Cheung, Y.K., Irons, B.M., Zienkiewicz, O.C.; "Triangular Elements in Plate Bending - Conforming and Non-conforming Solutions"; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics; 547-576; WPAFB; Ohio; 1965.

[5.23] Argyris, J.H., Fried, I., Scharpf, D.W.; "The TUBA Family of Plate Elements for the Matrix Displacement Method"; The Aeronaut. J. Royal Aeronaut. Soc.; 72; 701-709; 1968.

[5.24] Bell, K.; "A Refined Triangular Plate Bending Finite Element"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 1; 101-122; 1969.

[5.25] Razzaque,A. "Program for Triangular Bending Elements with Derivative Smoothing"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 6; 333-343; 1973.

[5.26] Pian,T.H.H.; "Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions"; AIAA J.; 2; 1333-1336; 1964.

[5.27] Zienkiewicz,O.C.; "The Finite Element Method"; McGraw-Hill Book Company; London; 1985.

[5.28] Allwood,R.J., Cornes,G.M.; "A Poligonal Finite Element for Plate Bending Problems Using the Assumed Stress Approach"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 1; 135-149; 1969.

[5.29] Neale,B.K., Henshell,R.D., Edwards,G.; "Hybrid Plate Bending Elements"; J. Sound Vibration; 23;101-112; 1972.

[5.30] Allman,D.J.; "Triangular Finite Elements for Plate Bending with Constant and Linearly Varying Bending Moments"; Proc. IUTAM Conf. on High Speed Computing of Elastic Structures; 105-136; Liège; Belgium; 1970.

[5.31] Melosh,R.J.; "A Flat Triangular Shell Element Stiffness Matrix"; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics; 503-509; WPAFB; Ohio; 1965.

[5.32] Zienckiewicz,O.C. , Taylor,R.L., Too,J.M.; "Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shell"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 3; 575-586; 1971.

[5.33] Hughes,T.,Taylor,R., Kanoknukulchai,W.; "A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 11; 1529-1543; 1977.

[5.34] Pugh,E.D., Hinton,E., Kienkiewicz,O.C.; "A Study of

Quadrilateral Plate Bending Elements with Reduced Integration"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 12;1059-1078; 1978.

[5.35] Argyris,J.H., Dunne,P.C., Malejannakis,G.A., Schelkle,E.; "A Simple Triangular Facet Shell Element with Applications to Linear and Nonlinear Equilibrium and Elastic Stability Problems"; Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.; 11; 97-131; 1977.

[5.36] Belytschko,T., Stolarski,H., Carpenter,N.; "A C^0 Triangular Plate Element with One-Point Quadrature"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 20; 787-802; 1984.

[5.37] Tessler,A., Hughes,T.J.R.; A Three-node Mindlin Plate Element with Improved Transverse Shear"; Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.; 50; 71-101; 1985.

[5.38] Zienkiewicz,O.C., Lefebvre,D. ; "A Robust Triangular Plate Bending Element of the Reissner-Mindlin Type"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 26; 1169-1184; 1988.

[5.39] Papadopoulos,P., Taylor,R.; "A Triangular Element Based on Reissner-Mindlin Plate Theory"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 30; 1029-1049; 1990.

[5.40] Wempner,G.A., Oden,J.T., Dross,D.K.; "Finite Element Analysis of Thin Shells"; J. Eng. Mech. Div. ASCE; 94; 1273-1294; 1968.

[5.41] Striclin,J.A., Haisler,W.E., Tisdale,P.R., Gunderson,R.; "A Rapidly Converging Triangular Plate Element"; AIAA J.; 7; 180-181; 1969.

[5.42] Batoz,J.L; "An Explicit Formulation for an Efficient Triangular Plate-Bending Element; Int. J. Num. Meth.

Engrg.; 18; 1077-1089; 1982.

[5.43] Zienkiewicz,O.C., Taylor,R.L., Papadopoulos,P., Oñate,E.; "Plate Bending Elements with Discret Constraints: New Triangular Elements"; Comput. & Struct.; 35; 505-522; 1990.

[5.44] Bergan,P.G., Hanssen,L.; "A New Approach for Deriving 'Good' Element Stiffness Matrices"; in:Whiteman,J.R.,ed.; The Mathematics of Finite Elements and Applications II; Academic Press; London; 483-498; 1975.

[5.45] Hanssen,L., Bergan,P.G., Syverstsen,T.G.; "Stifness Derivation Based on Element Convergence Requirements"; in:Whiteman,J.R.,ed.; The Mathematics of Finite Elements and Applications III; Academic Press; London; 83-96; 1978.

[5.46] Bergan,P.G.; "Finite Elements Based on Energy Orthogonal Functions"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 11; 1529-1543; 1980.

[5.47] Bergan,P.G., Nygard.M.K.; "Finite Elements with Increased Freedom in Choosing Shape Functions"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 20; 643-663; 1984.

[5.48] Bergan,P.G., Wang,X.; "Quadrilateral Plate Bending Elements with Shear Deformations"; Comput. & Struct.; 19; 25-34; 1984.

[5.49] Bergan,P.G., Nygard,M.K.; Nonlinear Shell Analysis Using Free Formulation Finite Elements"; in: Bergan,P.G., Bathe,K.J., Wunderlich,W.,eds.; Finite Element Methods for Nonlinear Problems; Springer Verlag; Berlin; 317-338; 1985.

[5.50] Nygard,M.K., Bergan,P.G.; "Nonconforming Finite Elements Based on the Free Formulation"; in: Kuhn,G.,

Mang,H., eds.; Discretization Methods in Structural Mechanics; Springer Verlag; 71-82; 1989.

[5.51] Irons,B.M.; "Putative High-Performance Plate Bending Element"; Carta ao Editor, Int. J. Num. Meth. Engrg.; 19; 310; 1983.

[5.52] Felippa,C.A, Bergan,P.G.; "A Triangular Bending Element Based on an Energy-Orthogonal Free Formulation"; Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.; 61; 129-160; 1987.

[5.53] Bergan,P.G., Felippa,C.A. ; "A Triangular Membrane Element with Rotational Degrees of Freedom"; Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.; 50; 25-69; 1985.

[5.54] Bathe,K.J.; "Finite Element Procedures in Engineering Analysis"; Prentice-Hall,Inc.; Englewoof Cliffs; N.J.; 1982.

[5.55] Holand,I.; "Stiffness Matrices for Plate Bending Elements"; in: Holand,I., Bell,K.ed.; Finite Element Methods in Stress Analysis; Tapir; Trondheim; 159-178; 1969.

[5.56] Irons,B.M., Ahmad,S.; "Techniques of Finite Elements"; Ellis Horwood Ltd.; Chicester; 1980.

[5.57] Nygard,M.K.; "The Free Formulation for Nonlinear Finite Element Analysis with Applications to Shells"; Tese de Doutoramento; Rept. 86-1; Division of Structural Mechanics; The Norwegian Institute of Technology; Trondheim; 1986.

[5.58] Wilson,E.L.; "Structural Analysis of Axisymmetric Solids"; AIAA J.; 3; 2269-2274; 1965.

- [5.59] Wilson,E.L.; "The Static Condensation Algorithm"; Int. J. Num. Meth. Engrg.; 8; 198-203; 1974.
- [5.60] Hughes,T.J.R., Cohen,M.; "The Heterosis Finite Element for Plate Bending"; Comput. & Struct.; 9; 445-450; 1978.
- [5.61] Severn,R.T., Taylor,P.R.; "The Finite Element Method for Flexure of Slabs when Stress Distributions are Assumed"; Proceedings of the Institution of Civil Engineers; 34; 153-170; 1966.
- [5.62] Hrabok,M.M., Hruday,T.M.; "Finite Element Analysis in Design of Floor Systems"; J. Struct. Engng.; ASCE 109; 909-925; 1983.
- [5.63] Cheung,Y.K, King,I.P., Kienkiewicz,O.C.; "Slab Bridges with Arbitrary Shape and Support Conditions : a General Method of Analysis Based on Finite Elements"; Proceedings of the Institution of Civil Engineers; 40; 9-36; 1968.
- [5.64] Associação Brasileira de Normas Técnicas; "Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado"; ABNT; Rio de Janeiro; 1978 (NBR 6118/78).
- [5.65] Bares,R.; "Tablas para el Calculo de Placas y Vigas Pared"; Ed. Gustavo Gili; Barcelona; 1972.
- [5.66] Hill,R.; "The Mathematical Theory of Plasticity"; Oxford University Press; Oxford; 1950.
- [5.67] Prager,W., Hodge,P.G.; "Theory of Perfectly Plastic Solids"; John Wiley and Sons,Inc.; New York, 1963.
- [5.68] Mendelson,A.; "Plasticity: Theory and Application";

Robert E. Krieger Publ. Co.; 1968.

[5.69] Marçal,P.V., King,I.P.; "Elasto-Plastic Analysis of Two-Dimensional Stress Systems by the Finite Element Method"; Int. J. Mech. Sci.; 9; 143-155; 1967.

[5.70] Yamada,Y. , Yishimura,N., Sakurai,T.; "Plastic Stress-Strain Matrix and its Applications for the Solution of Elasto-plastic Problems by the Finite Element Method"; Int. J. Mech. Sci.; 10; 343-354; 1968.

[5.71] Armen,H., Pifko,A., Levine,H.; "A Finite Element Method for the Plastic Bending Analysis of Structures"; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics; WPAFB; Ohio; 1968.

[5.72] Mallet,R., Marçal,P.V.; "Elastic-Plastic Analysis of Flat Plates by the Finite Element Method"; ASME Winter Annual Meeting and Energy Systems Exposition; New York; 1968.

[5.73] Whang,B.; "Elasto-Plastic Orthotropic Plates and Shells; Proc. Symp. on Applications on Finite Element Methods in Civil Engineering; Vanderbilt University; Tennessee; 481-513; 1969.

[5.74] Zienkiewicz,O.C., Valliapan,S., King,I.P.; "Elasto-Plastic Solutions os Engineering Problems - 'Initial Stress', Finite Element Approach"; Int. J. Num. Meths. Engrg.; 1; 75-100; 1969.

[5.75] Nayak,G.C., Zienkiewicz,O.C.; "Elasto-Plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening"; Int. J. Num. Meths. Engrg.; 5; 113-135; 1972.

- [5.76] Belytschko, T., Velebit, M.; "Finite Element Method for Elastic Plastic Plates"; J. Eng. Mech. Div. ASCE; 98; 227-242; 1972.
- [5.77] Bell, J.C.; "A Complete Analysis for Reinforced Concrete Slabs and Shells"; Tese de Doutorado; University of Canterbury; Christchurch; 1970.
- [5.78] Jofriet, J.C., McNeice, G.M.; "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs"; J. Struct. Div., ASCE; 97; 785-806; 1971.
- [5.79] Hand, F.R., Pecknold, D.A., Schnobrich, W.C.; "Nonlinear Layered Analysis of RC Plates and Shells"; J. Struct. Div., ASCE; 99; 1491-1504; 1973.
- [5.80] Dotreppe, J.-C., Schnobrich, W.C., Pecknold, D.A.; "Layered Finite Element Procedure for Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Slabs"; IABSE Publications; 33-11; 53-68; 1973.
- [5.81] Lin, C.S., Scordelis, A.C.; "Nonlinear Analysis of RC Shells of General Form"; J. Struct. Div., ASCE; 101; 523-538; 1975.
- [5.82] Bashur, F.K., Darwin, D.; "Nonlinear Model for Reinforced Concrete Slabs"; J. Struct. Div., ASCE; 104; 157-170; 1978.
- [5.83] Bergan, P.G., Holand, I.; "Nonlinear Finite Element Analysis of Concrete Structures"; Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.; 17/18; 443-467; 1979.
- [5.84] American Society of Civil Engineers; "State-of-the-Art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete"; ASCE; New York; 1982.

[5.85] Chen,W.F; "Plasticity in Reinforced Concrete"; McGraw-Hill,Inc.; New York; 1982.

[5.86] Figueiras,J.A.; "Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete Plates and Shells"; Tese de Doutorado; Depart. of Civil Eng.; University College of Swansea; 1983.

[5.87] Cope,R.J; "Nonlinear Analysis of Concrete Slabs"; in: Hinton,E., Owen,R., ed.; Computacional Modelling of Reinforced Concrete Structures; Pineridge Press; Swansea; 3-43; 1986.

[5.88] Klein,D.G.; "A Finite Element Model for Reinforced Concrete Slabs with Consideration of Transverse Shear Deformation"; in: Hinton,E., Owen,R., ed.; Computacional Modelling of Reinforced Concrete Structures; Pineridge Press; Swansea; 189-216; 1986.

[5.89] Aufare,M., Chauvel,D., L'Huby,Y.; "Dynamic Elasto-Plastic Analysis of Reinforced Concrete Slabs and Application to Plastic Design of Some Building Structures"; in: Hinton,E., Owen,R., ed.; Computacional Modelling of Reinforced Concrete Structures; Pineridge Press; Swansea; 303-326; 1986.

[5.90] Cervera,M., Hinton,E.; "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Plates and Shells Using a Three Dimension Model"; in: Hinton,E., Owen,R., ed.; Computacional Modelling of Reinforced Concrete Structures; Pineridge Press; Swansea; 327-370; 1986.

[5.91] Hu,H.-T., Schnobrich,W.C.; "Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Plates and Shells under Monotonic Loading"; Comput. & Struct.; 38; 637-651; 1991.

[5.92] Owen,D., Hinton,E.; "Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice"; Pineridge Press Ltd.; Swansea; 1980.

[5.93] Lannoy,F.G.; "Triangular Finite Elements and Numerical Integration"; Comput. & Struct.; 7; 613; 1977.

[5.94] Proença,S.P.B.; "Sobre Modelos Matemáticos do Comportamento não Linear do Concreto: Análise Crítica e Contribuições"; Tese de Doutorado; SET-EESS-USP; São Carlos; 1988.

[5.95] CEB; "CEB-FIP Model Code 1990 - Final Draft"; Bulletin D'Information; n. 203-205; 1991.

[5.96] Rao,P.S., Subrahmanyam,B.V; "Trisegmental Moment-Curvature Relations for Reinforced Concrete Members"; Proc. of the American Concrete Institute; 70; 5; 346-351; 1973.

[5.97] Save,M.A., Massonet,C.E.; "Plastic Analysis and Design of Plates, Shells and Disks"; North-Holland Publishing Company; Amsterdam; 1972.

[5.98] Bresler, B., Scordelis, A.C.; "Shear Strength of Reinforced Concrete Beams"; Proc. of the American Concrete Institute; 60; 1; 51-74; 1963.

[5.99] Cedolin,L., Nilson,A.H.; "A Convergence Study of Iterative Methods Applied to Finite Analysis of Reinforced Concrete"; Int. J. Num. Meths.Engng.; 12; 437-451; 1978.

[5.100] Resheidat,M.R.; "Deflections of Reinforced Concrete Slabs"; in: Sabnis,G.,ed.; Deflections of Concrete Structures; SP-86;ACI; Detroit; 407-418; 1985.

[5.101] França, R.L.; "Exemplo de Cálculo do Esforço de Segunda Ordem Global em um Edifício de Concreto Armado"; in: Colóquio Sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado; IBRACON; São Paulo; 1985.

[5.102] Associação Brasileira de Normas Técnicas; "Ações e Segurança nas Estruturas"; ABNT; Rio de Janeiro; 1984 (NBR 8681/84).

APÊNDICE 1
SOLUÇÃO DE SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

A1.1 PROCESSOS ITERATIVOS

O sistema de equações de equilíbrio representado pela equação matricial $\tilde{K}_S \tilde{Q} = \tilde{F}$ pode ser reescrito

$$[\tilde{K}_L + \tilde{K}_N] \tilde{Q} = \tilde{F}$$

onde

\tilde{K}_L é a parcela linear da matriz de rigidez secante

\tilde{K}_N é a parcela não linear, dependente dos deslocamentos

...(A1.1)

Várias técnicas foram desenvolvidas para a solução desse sistema de equações. Uma das mais atraentes é a da iteração direta, que consiste em uma sucessão de atualizações da matriz de rigidez secante, a partir de correspondentes estimativas de deslocamento, até que se encontre a configuração final de equilíbrio. O algoritmo a ser utilizado pode ser resumido como se apresenta a seguir.

ITER.	MATRIZ SECANTE	VETOR DESLOCAMENTO	VETOR FORÇA CORRESPONDENTE
1	$\tilde{K}_L + 0$	$\tilde{Q}_1 = \tilde{K}_L^{-1} \tilde{F}_T$	$\tilde{F}_1 = [\tilde{K}_L + \tilde{K}_N(\tilde{Q}_1)] \tilde{Q}_1$
2	$\tilde{K}_L + \tilde{K}_N(\tilde{Q}_1)$	$\tilde{Q}_2 = [\tilde{K}_L + \tilde{K}_N(\tilde{Q}_1)]^{-1} \tilde{F}_T$	$\tilde{F}_2 = [\tilde{K}_L + \tilde{K}_N(\tilde{Q}_2)] \tilde{Q}_2$
:	:	:	:
i	$\tilde{K}_L + \tilde{K}_N(\tilde{Q}_{i-1})$	$\tilde{Q}_i = [\tilde{K}_L + \tilde{K}_N(\tilde{Q}_{i-1})]^{-1} \tilde{F}_T$	$\tilde{F}_i = [\tilde{K}_L + \tilde{K}_N(\tilde{Q}_i)] \tilde{Q}_i$
:	:	:	:

Tab. A1.1 Iteração direta

Graficamente pode se representar o algoritmo como na figura. A1.1a.

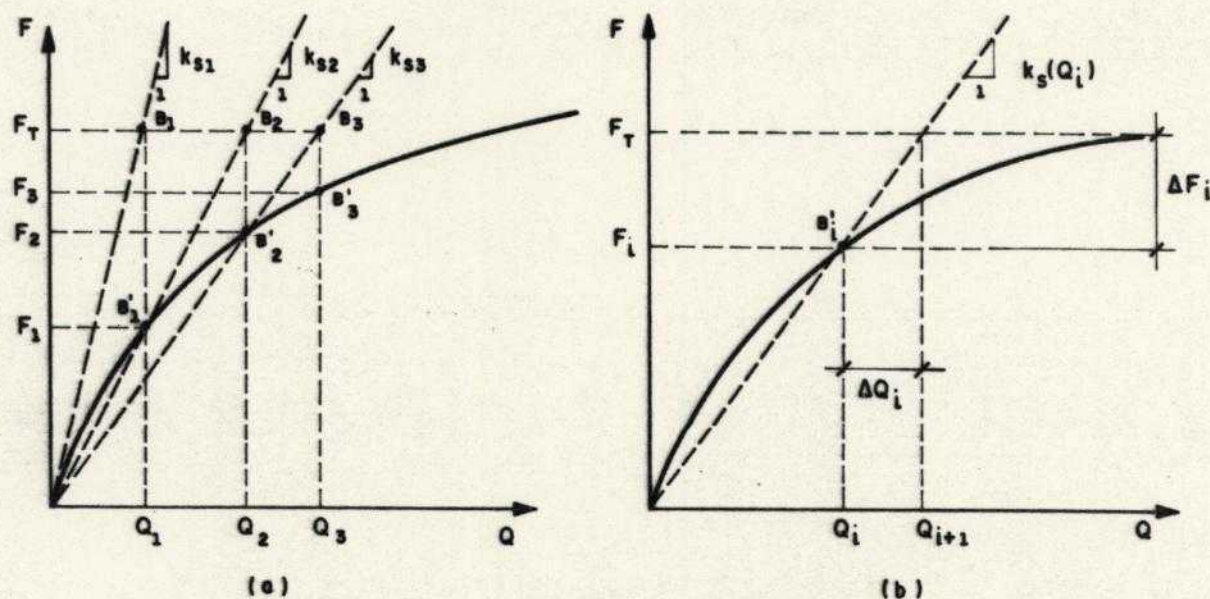


Fig. A1.1 Iteração direta - Representação gráfica para um grau de liberdade.

O fluxo do algoritmo se interrompe quando \tilde{F}_i é suficientemente próximo de \tilde{F}_T , ou em termos gráficos, quando B_i e B'_i se tornam suficientemente próximos, ou seja, quando ocorre convergência.

A partir das expressões apresentadas no algoritmo anterior pode-se escrever que

$$\tilde{F}_i = \tilde{K}_S(Q_i) \tilde{Q}_i \quad \text{e} \quad \tilde{Q}_i = \tilde{K}_S^{-1}(Q_i) \tilde{F}_T \quad \dots (A1.2)$$

Invertendo-se a primeira das equações (A1.2) e subtraindo-se membro a membro as duas, chega-se a

$$\tilde{Q}_{i+1} - \tilde{Q}_i = \tilde{K}_S^{-1}(Q_i) (\tilde{F}_T - \tilde{F}_i) \quad \text{ou}$$

$$\Delta \tilde{Q}_i = \tilde{K}_S^{-1}(Q_i) \Delta \tilde{F}_i \quad \dots (A1.3)$$

Ao se observar a figura A1.1b percebe-se a possibilidade da interpretação de $\Delta \tilde{F}_i$ como sendo um desequilíbrio do vetor de forças no passo i . Tenta-se eliminar o desequilíbrio $\Delta \tilde{F}_i$ estimando-se o acréscimo de deslocamento $\Delta \tilde{Q}_i$ que ele provoca, a partir da matriz de rigidez secante válida para o nível de deslocamentos \tilde{Q}_i . A

nova estimativa do deslocamento é dada por $Q_{i+1} = Q_i + \Delta Q_i$ e o processo recomeça.

Uma alternativa interessante ao algoritmo apresentado consiste em tratar o problema de modo que o produto da parcela não-linear da matriz de rigidez pelo vetor deslocamento seja levado ao segundo membro. Esse produto passa a ser interpretado como uma "correção" do vetor de forças. Assim, a partir da equação (A1.1) tem-se

$$K_L Q = F - K_N Q \quad \dots(A1.4)$$

Em cada iteração a estimativa da parcela corretiva é feita com valores de K_N e Q correspondentes à iteração anterior. O algoritmo pode ser descrito de forma muito parecida com o anterior, alterando-se na tabela A1.1 a estimativa de deslocamento que, agora, é calculada por

$$Q_i = K_L^{-1} [F_T - K_N(Q_{i-1}) Q_{i-1}] \quad \dots(A1.5)$$

Observe-se que, neste caso, a matriz do sistema para a estimativa de Q_i é sempre a mesma, o que, em termos computacionais, simplifica bastante o problema. A estimativa de Q_{i+1} e o cálculo do vetor força F_i , correspondente ao nível de deslocamentos Q_i , são dados por

$$K_L^{-1} [F_T - K_N(Q_i) Q_i] = Q_{i+1}$$

$$F_i = K_L Q_i + K_N(Q_i) Q_i \quad \dots(A1.6)$$

Pré-multiplicando-se a primeira das equações (A1.6) por K_L e subtraindo-se a segunda, membro a membro, vem

$$F_T - F_i = K_L (Q_{i+1} - Q_i) \quad \dots(A1.7)$$

podendo-se escrever

$$\Delta \tilde{Q}_i = \tilde{K}_L^{-1} \Delta \tilde{F}_i$$

onde

$$\Delta \tilde{Q}_i = \tilde{Q}_{i+1} - \tilde{Q}_i$$

$$\Delta \tilde{F}_i = \tilde{F}_T - \tilde{F}_i \quad \dots (A1.8)$$

Cabem aqui interpretações análogas àquelas feitas para o primeiro algoritmo apresentado. A estimativa do novo incremento é feita a partir da matriz de rigidez \tilde{K}_L , inalterada durante todo o procedimento. Tem-se a vantagem da conservação da matriz do sistema, mas, em geral, o aumento do número de iterações para se atingir a convergência mantendo-se o mesmo nível de erro. A figura A1.2 representa simbolicamente a solução descrita.

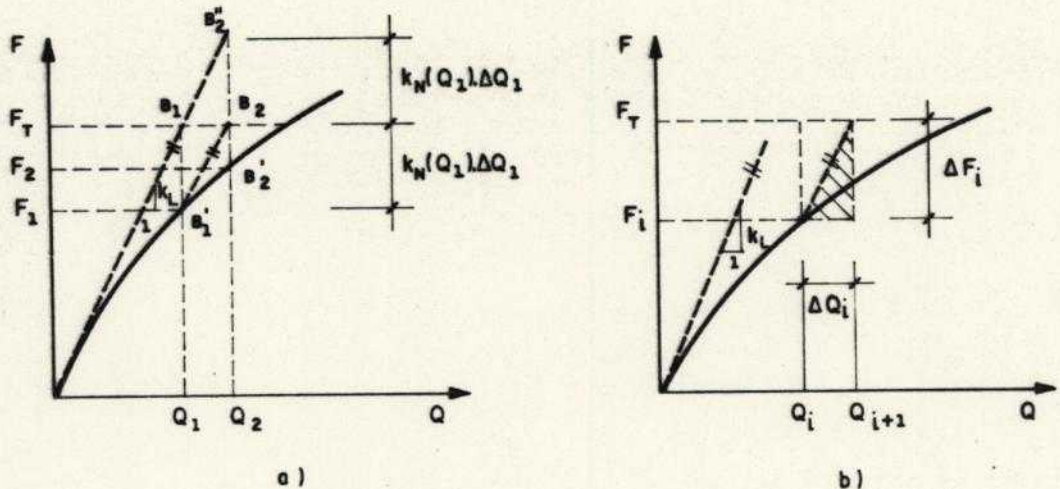


Fig. A1.2 Iteração direta - Alternativa

Um dos procedimentos iterativos mais utilizados para a solução do sistema de equações não-lineares é o método de Newton-Raphson. Pode ser interpretado como mais uma variante dos anteriormente apresentados, só que com a utilização de matriz tangente para a estimativa dos incrementos $\Delta \tilde{Q}_i$ em cada nível de deslocamento \tilde{Q}_i . Ou seja

$$\Delta \tilde{Q}_i = \tilde{K}_T(Q_i) \Delta \tilde{F}_i \quad \dots(A1.9)$$

Graficamente a sua representação se encontra na figura A1.3.

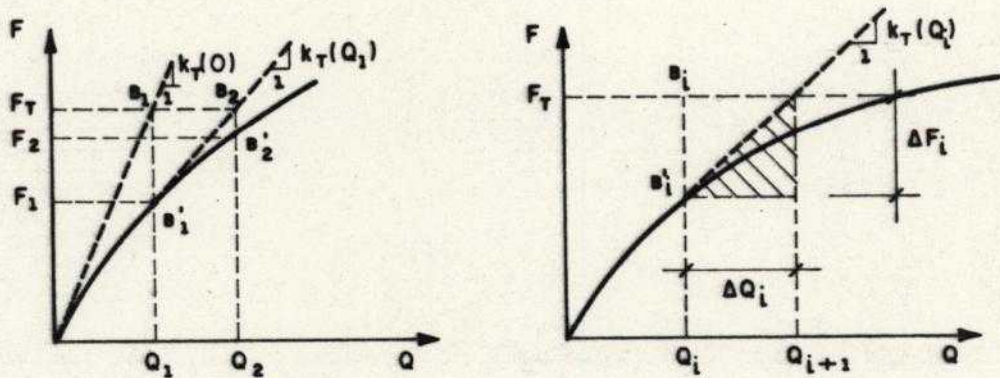


Fig. A1.3 Iteração de Newton-Raphson

Em geral, a aplicação do Método de Newton-Raphson leva a uma convergência mais rápida que o processo da iteração direta, seja o que utiliza a matriz secante atualizada ou o que mantém a matriz constante. Este último é também conhecido por Método de Newton-Raphson modificado. Há ainda outras opções, como por exemplo, a que promove apenas uma atualização da matriz, correspondente aos deslocamentos \tilde{Q}_1 , mantendo-a fixa até atingir-se a convergência. A escolha da matriz a ser utilizada para a estimativa de $\Delta \tilde{Q}_i$ apenas influencia a velocidade de convergência, podendo ser usada qualquer uma delas. Portanto, a matriz de rigidez pode ser interpretada como um "espalhador" de deslocamentos ao longo do sistema estrutural. A partir desses deslocamentos determinam-se as deformações e, com aplicação das equações constituintes do material, as tensões. Integradas as tensões, tem-se os esforços internos que podem ou não equilibrar as ações externas. Quando equilibram, o processo atinge a convergência. Quando não, há a necessidade de se

corrigir deslocamentos e retomar todo o procedimento até que a convergência se dê. Sendo conhecida a matriz secante, é fácil verificar o equilíbrio, bastando aplicar-se a equação básica que rege o fenômeno, (A1.1).

A1.2 PROCEDIMENTOS INCREMENTAIS

Quando o nível de não-linearidade é grande, há a necessidade de se adotar um procedimento incremental, para que se possa ter o indicativo de que a solução convergirá para o equilíbrio real, bem como, para acomodar a solução a hipóteses básicas (como a das pequenas rotações). Um procedimento incremental pode ser direto ou iterativo. No primeiro deles opta-se por utilização de incrementos suficientemente pequenos para que a linearização promovida pela utilização da matriz tangente, seja representativa. No segundo, adota-se uma opção iterativa para promover a redução de resíduos não equilibrados em cada incremento. A figura A1.4 ilustra as duas opções.

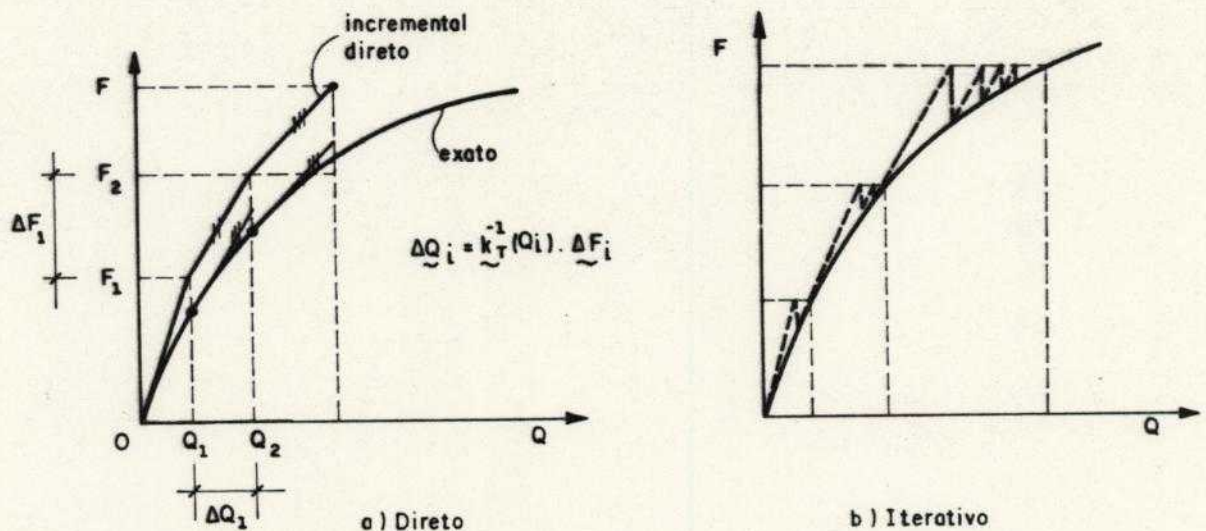


Fig. A1.4 Processos incrementais

Como no processo incremental direto não há verificação do equilíbrio, as respostas podem se afastar muito da

solução exata, a menos que sejam considerados incrementos tão pequenos que permitam substituir-se o incremento de uma função pela sua expansão em série de Taylor, truncada no segundo termo.

$$\underline{F}_{i+1} \cong \underline{F}_i + \underline{K}_T(Q_i) (\underline{Q}_{i+1} - \underline{Q}_i) \quad \dots(A1.10)$$

O processo incremental-iterativo é sempre preferível pela aproximação que produz do equilíbrio real.

Há inúmeros outros processos de solução do sistema de equações não-lineares que não serão aqui comentados. Para maiores detalhes recomendam-se as referências [A1.1] e [A1.2] pelo seu conteúdo e pelo número de trabalhos no assunto a que tais referências remetem.

A1.3 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

A definição do fim de um processo iterativo deve ser feita através de um critério e segundo uma tolerância pré-definida. Basicamente há três critérios que envolvem, respectivamente deslocamentos, forças nodais e energia.

Um critério em deslocamento pode ser estabelecido por

$$\frac{\|\Delta \underline{Q}_i\|}{\|\underline{Q}_f\|} \leq \epsilon_a$$

onde $\| \quad \|$ representa a norma Euclidiana de um vetor

$\Delta \underline{Q}_i$ vetor dos incrementos de deslocamentos na iteração i

\underline{Q}_f vetor dos deslocamentos do estado de equilíbrio final do incremento

ϵ_a tolerância em deslocamento $\dots(A1.11)$

Como \underline{Q}_f não é conhecido ao longo da resolução do sistema de equações, é usual utilizar-se como aproximação de \underline{Q}_f o último resultado obtido para o vetor dos deslocamentos, \underline{Q}_{i+1} . Se houver uma tendência geral de crescimento dos deslocamentos, como em um problema de

redução de rigidez, a norma $\|Q_{i+1}\|$ deverá ser menor que $\|Q_i\|$. Então o critério escrito em função de $\|Q_{i+1}\|$ no lugar de $\|Q_i\|$ atende ao original, sendo até mais rigoroso. Para evitarem-se inconsistências de dimensões separa-se, às vezes, o critério de deslocamentos em dois outros: um envolvendo apenas translação e o outro rotação, quando for o caso.

Um segundo critério bastante utilizado, semelhante ao primeiro, baseia-se na medida do vetor de forças desequilibradas. A norma de vetor de desequilíbrio deve ser menor que uma percentagem pré-estabelecida da norma do vetor de forças correspondente ao incremento analisado.

$$\frac{\|\Delta \tilde{F}_i\|}{\|\tilde{F}_f\|} \leq \epsilon_F$$

onde $\Delta \tilde{F}_i$ é o vetor de forças desequilibradas

\tilde{F}_f é o vetor dos incrementos de força

ϵ_F tolerância em força ... (A1.12)

Observe-se que \tilde{F}_f pode ser o vetor de forças total, quando a análise não é incremental. Em geral o valor \tilde{F}_f é conhecido desde o início da análise, inexistindo a necessidade de aproximá-lo como se faz com Q_i no critério de deslocamento.

Buscando evitar-se inconsistência de dimensões pode-se separar o critério considerando-se isoladamente componentes força e componentes momento.

Em alguns casos a utilização de um dos critérios anteriores pode falhar, não dando bom indicativo do término do processo.

Por exemplo a utilização exclusiva do critério de deslocamentos e do critério de forças nas situações apresentadas, respectivamente, na figura A1.5a e A1.5b.

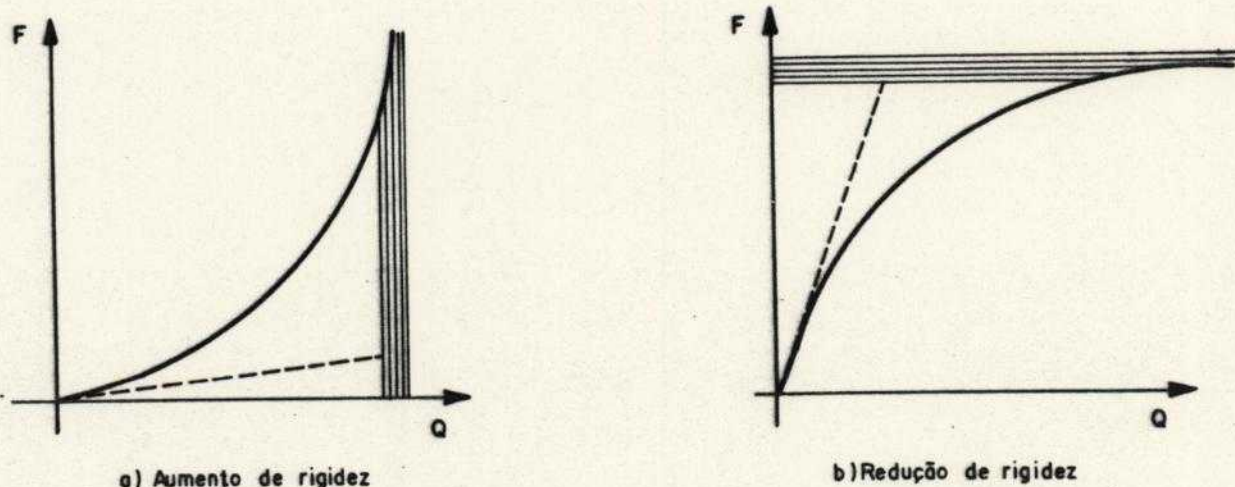


Fig. A1.5 Problemas em critérios de convergência

No primeiro caso, para pequenas variações de Q pode-se ter grandes variações de F , enquanto, no segundo caso a situação se inverte. Pode-se então, em cada análise, aplicarem-se simultaneamente os dois critérios ou fazer a opção por um critério misto, baseado no incremento de energia interna durante cada iteração. O trabalho realizado pelo vetor de desequilíbrio de forças sobre os incrementos de deslocamentos pode ser comparado ao do início do incremento. Este critério contempla a indicação de proximidade tanto de deslocamentos como de forças aos seus valores de equilíbrio [1], além de resolver a questão de inconsistência dimensional.

Pode ser estabelecido como:

$$\Delta \tilde{F}_i^T \Delta \tilde{Q}_i \leq \epsilon_E \Delta \tilde{F}_0^T \Delta \tilde{Q}_0$$

onde ϵ_E é a tolerância pré-estabelecida

...(A1.13)

Graficamente o critério pode ser representado como na figura A1.6.

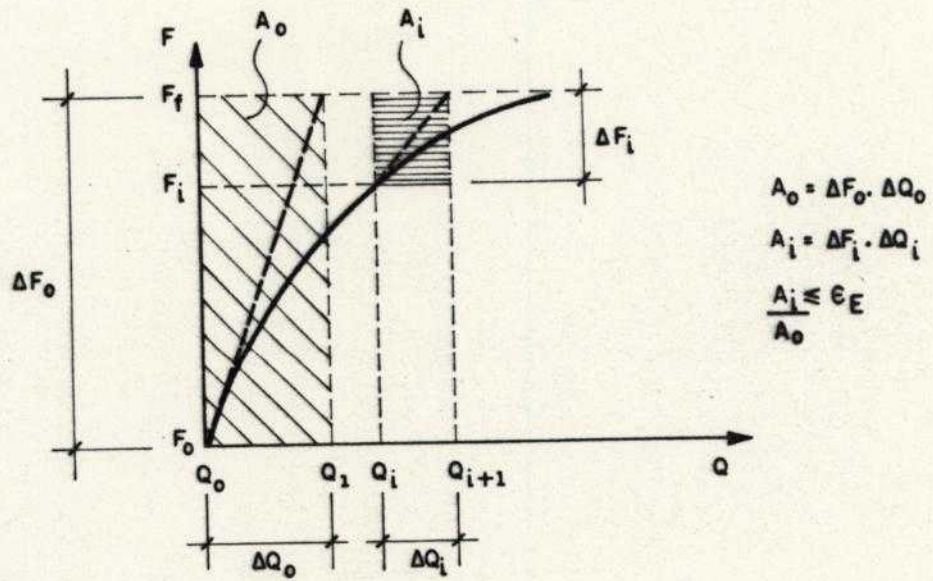


Fig. A1.6 Critério de convergência em energia

A1.4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[A1.1] Haisler, W.E., Stricklin, J.A.; "Development and Evaluation of Solution Procedures for Geometrically Nonlinear Structural Analysis"; AIAA J.; 10; 264-272; 1972.

[A1.2] Bathe, K.-J., Cimento, A.P.; "Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations"; Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.; 22; 59-85; 1990.

APÊNDICE 2

NOÇÕES ELEMENTARES DA TEORIA DA PLASTICIDADE

A2.1 INTRODUÇÃO

Diz-se que há não-linearidade física quando as relações tensão-deformação são dependentes das deformações, não podendo ser resumidas por matriz de constantes elásticas. Uma das causas mais comuns de comportamento não-linear é a presença de fluxo plástico.

O comportamento plástico é caracterizado pelo aparecimento de deformações, que a partir de determinados níveis de tensão, se tornam irreversíveis, mesmo que haja total descarga, com o anulamento das tensões atuantes, como se mostra na figura A2.1. O comportamento do corpo é dependente da história do carregamento.

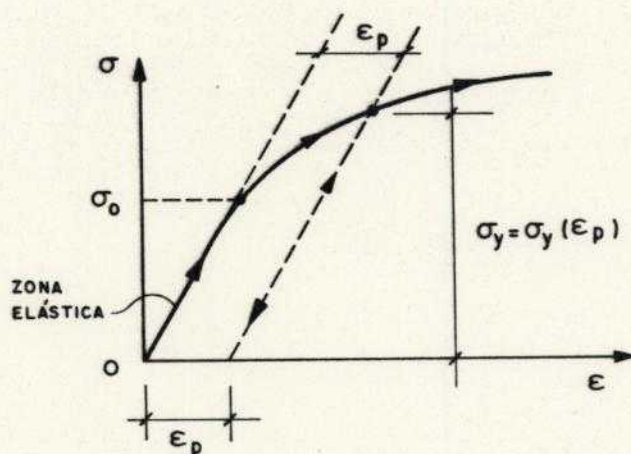


Fig. A2.1 Comportamento plástico

A2.2 ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA UNIDIMENSIONAL

A figura A2.2 apresenta um diagrama tensão-deformação convencional de um corpo de prova, de comportamento

elastoplástico, submetido a um estado de tensão unidimensional. Inicialmente o comportamento é elástico, no trecho OA, com módulo de elasticidade E até que a tensão normal atinja o valor σ_0 , característico do material, em que o escoamento se inicia. O subsequente aumento da tensão normal, a partir do ponto A, provoca o incremento da deformação, segundo um módulo tangente E_T . Então, após o escoamento inicial,

$$d\sigma = E_T d\epsilon \quad \dots(A2.1)$$

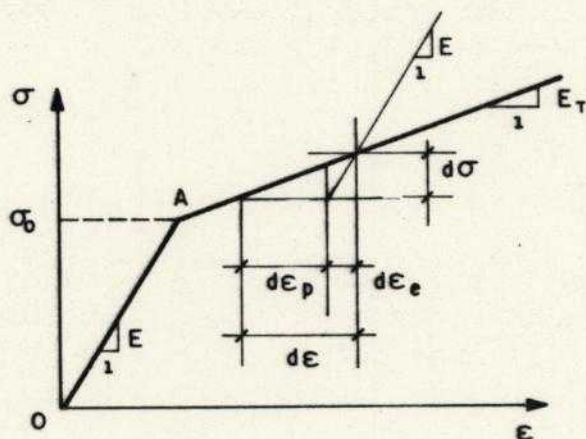


Fig. A2.2 Material elastoplástico

Quando $E_T = 0$ o material é chamado elastoplástico perfeito. Quando $E_T \neq 0$, a tensão de escoamento se altera à medida em que a deformação plástica ocorre, o que é denominado endurecimento do material.

Admitindo-se que a deformação, para um incremento de tensões posterior ao escoamento inicial, possa ser decomposta em uma parcela elástica e outra plástica, tem-se

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \quad \dots(A2.2)$$

O incremento de tensões, em função da parcela de deformação elástica, pode ser escrito como

$$d\sigma = E d\varepsilon_e$$

$$d\sigma = E (d\varepsilon - d\varepsilon_p) \quad \dots(A2.3)$$

Ou em função da parcela de deformação plástica como

$$d\sigma = H' d\varepsilon_p \quad \dots(A2.4)$$

H' é denominado parâmetro de endurecimento, característico do material. Manipulando-se as expressões anteriores é possível escrever-se a relação existente entre H' , E e E_T como

$$H' = \frac{E_T}{1 - E_T / E} \quad \dots(A2.5)$$

Observe-se que para o material elastoplástico perfeito o parâmetro de endurecimento é nulo e que no caso geral, apresentado na figura A2.1, E_T e H' variam continuamente, permanecendo válidas as relações expressas nas equações anteriores em cada ponto da curva tensão-deformação.

Qualquer descarga se dá com o módulo de elasticidade E . Imaginando-se que ocorra descarga total a partir do ponto B do gráfico da figura A2.3, observa-se que há um resíduo de deformação plástica ε_p no ponto C. Recarregando-se a partir de C a resposta será elástica até que a tensão normal atinja o valor σ_B , em que novo escoamento ocorre. A tensão de escoamento σ_B pode ser calculada, partindo-se do valor inicial σ_o em A e

- relações tensão-deformação sob condições elásticas.
- critério de escoamento que estabelece o nível de tensão em que se inicia o fluxo plástico.
- regra de endurecimento que descreve como o critério de escoamento é alterado pela história do fluxo plástico.
- regra de fluxo constituída pelo conjunto de relações tensão-deformação que descrevem o comportamento após o escoamento inicial.

A2.3 ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA MULTIDIMENSIONAL

A extensão da análise elastoplástica aos estados bi e triaxiais de tensão é feita, na teoria da plasticidade, de maneira sintética, generalizando-se os conceitos estabelecidos para o estado uniaxial, aproveitado sempre como referência básica.

A2.3.1 Comportamento Elástico

Na ausência de escoamento, as relações incrementais entre tensão e deformação podem ser escritas como

$$d\sigma = \underline{\underline{E}} d\varepsilon \quad \dots(A2.7)$$

Onde $\underline{\underline{E}}$ é a matriz das constantes elásticas do material e os vetores σ e ε reúnem as componentes dos estados de tensão e deformação, respectivamente.

A2.3.2 Critério de Escoamento

O critério de escoamento, que especifica o estado de tensões no qual se inicia o fluxo plástico, e como ele progride para carregamento subsequente, pode ser escrito de forma genérica como

$$F(\sigma, k) = 0 \quad \dots(A2.8)$$

σ corresponde ao estado de tensões atual, sendo representado pelas componentes de tensão ou seus invariantes, e k é um parâmetro associado à regra de endurecimento, sendo dependente do nível de deformação plástica, como se mostrará no próximo item.

Se em um dado instante calcula-se o valor de F , correspondente aos atuais σ e k , os valores possíveis são $F < 0$ e $F = 0$, que correspondem, respectivamente, ao comportamento elástico e ao escoamento. O resultado $F > 0$ é fisicamente impossível, correspondendo a um estado de tensão que não obedece às leis constitutivas do material. De forma similar o resultado $dF < 0$ implica em descarga elástica e $dF=0$ em continuação do escoamento. No regime plástico não é possível obter-se $dF > 0$.

A condição expressa pela equação (A2.8) pode ser representada, no espaço de tensões, por uma superfície que separa os estados de tensão elásticos daqueles que produzem deformações permanentes.

A equação (A2.8) pode ser reescrita como

$$f(\sigma) - Y(k) = 0 \quad \dots(A2.9)$$

A função f é exclusiva das tensões, podendo ser interpretada como uma tensão equivalente uniaxial $\bar{\sigma}$. A função Y , que depende exclusivamente do parâmetro k , pode ser interpretada como um valor convencional da tensão de escoamento. Observe-se que no caso unidimensional apresentado no item anterior, o critério de escoamento poderia ser escrito como

$$\begin{aligned} \sigma - Y &= 0 \\ \text{com } Y &= \sigma_0 + H' \epsilon_P \\ \text{sendo } k &= \epsilon_P \end{aligned} \quad \dots(A2.10)$$

Posteriormente serão citados alguns critérios clássicos.

A2.3.3 Regra de Endurecimento

A regra de endurecimento descreve a maneira como o critério de escoamento se altera de acordo com o progresso das deformações plásticas, ou seja, como a função F se altera com o parâmetro k . Geometricamente pode-se interpretar o fenômeno pela evolução sofrida pela superfície de escoamento. Quando a alteração da superfície é uniforme, mantendo-se o seu aspecto e orientação, sem translação, o endurecimento é chamado isotrópico, adequado para situações em que o carregamento é monotonicamente crescente. Caso a superfície translade, mantendo a sua forma original, o endurecimento é dito cinemático, adequado para a simulação de carregamentos cíclicos, com a presença do efeito Bauschinger. De um modo genérico pode-se montar um modelo de endurecimento misto, compondo o isotrópico e o cinemático, o que, em geral, leva a uma grande complexidade no tratamento teórico. Neste trabalho adota-se, por simplicidade o modelo isotrópico que, para baixos níveis de deformação plástica, produz resultados suficientemente precisos. Observe-se que quando o material tem comportamento plástico perfeito não há endurecimento, produzindo uma superfície de escoamento inalterável no espaço das tensões.

Em um endurecimento isotrópico a função $f(\sigma)$ não se altera e a expansão da superfície de escoamento pode ser definida em termos da variação sofrida por $Y(k)$, enquanto o endurecimento ocorre. Duas hipóteses são consideradas para a medida do endurecimento. A primeira assume que o endurecimento depende apenas do trabalho plástico total por unidade de volume W_p sendo independente da história do carregamento. Neste caso $k = W_p$, onde

$$W_p = \int \sigma^T d\epsilon_p \quad \dots(A2.11)$$

A determinação da tensão de escoamento convencional Y ,

função do trabalho plástico W_p , pode ser feita experimentalmente a partir do ensaio de tração simples, determinando-se para cada W_p o correspondente valor de Y .

A segunda hipótese estabelece que o endurecimento é função exclusiva da deformação plástica equivalente, definida como

$$\bar{\epsilon}_p = \int d\epsilon_p$$

$$\text{onde } d\bar{\epsilon}_p = \left[C d\epsilon_p^T d\epsilon_p \right]^{1/2}$$

C constante ...(A2.12)

De um modo geral a relação existente entre a tensão equivalente $\bar{\sigma}$ e a deformação plástica equivalente $\bar{\epsilon}_p$ pode ser expressa como

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}_p) \quad \dots(A2.13)$$

A função $f(\sigma)$ e a constante C podem ser escolhidas de modo que $\bar{\sigma}$ e $\bar{\epsilon}_p$ representem a tensão σ e a deformação ϵ_p quando o estado de tensão é unidimensional. Então a relação incremental $d\bar{\sigma} = H' d\bar{\epsilon}_p$ é tal que H' coincide com a tangente ao diagrama $\sigma - \epsilon_p$. Assumindo-se que o material obedeça à condição de incompressibilidade ao plastificar, com coeficiente de Poisson efetivo 0,5 chega-se a $C=2/3$.

A2.3.4 Regra de Fluxo

Define-se como potencial plástico uma função escalar das tensões e do parâmetro k , que tem a dimensão de tensão

$$Q = Q(\sigma, k) \quad \dots(A2.14)$$

Sendo $d\lambda$ um escalar denominado multiplicador plástico os incrementos de deformação plástica são, em forma compacta, dados por

$$d\tilde{\epsilon}_P = d\lambda \left[\partial Q / \partial \tilde{\sigma} \right] \quad \dots(A2.15)$$

Ou, explicitamente,

$$\begin{aligned} d(\epsilon_x)_P &= d\lambda \partial Q / \partial \sigma_x \\ d(\epsilon_y)_P &= d\lambda \partial Q / \partial \sigma_y \\ &\vdots \\ d(\tau_{xy})_P &= d\lambda \partial Q / \partial \tau_{xy} \\ &\vdots \end{aligned} \quad \dots(A2.16)$$

A condição expressa pelas equações (A2.15) ou (A2.16) é denominada regra de fluxo. Na condição em que o potencial plástico pode ser feito igual à função que define o critério de escoamento, a plasticidade é dita associativa. Neste caso a regra de fluxo pode ser escrita como

$$d\tilde{\epsilon}_P = d\lambda \left[\partial F / \partial \tilde{\sigma} \right] \quad \dots(A2.17)$$

e passa a ser condição de normalidade já que $\partial F / \partial \tilde{\sigma}$ constitui um vetor normal à superfície de escoamento relativo ao ponto que representa o estado de tensões que se analisa, como se ilustra na figura A2.4.

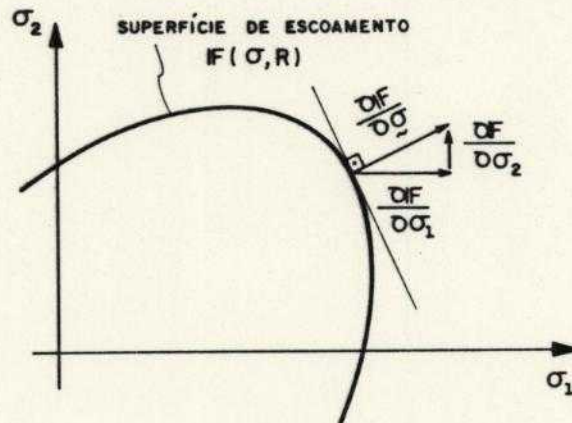


Fig. A2.4 Condição de normalidade em espaço bidimensional de tensões principais

A2.3.5 Relações Tensão-Deformação

Assumindo-se que os incrementos de deformação possam ser calculados pela soma de contribuições elásticas e plásticas tem-se que

$$d\tilde{\varepsilon} = d\tilde{\varepsilon}_e + d\tilde{\varepsilon}_p \quad \dots(A2.18)$$

Combinando-se a equação anterior com A2.17 e A2.7 chega-se a

$$d\tilde{\varepsilon} = \tilde{E}^{-1} d\tilde{\sigma} + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \tilde{\sigma}} \quad \dots(A2.19)$$

Como durante a ocorrência da deformação plástica $dF=0$, pode-se escrever,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad \dots(A2.20)$$

Ou

$$\tilde{a}^T d\tilde{\sigma} - \Lambda dk = 0 \quad \dots(A2.21)$$

onde \tilde{a} , denominado vetor fluxo, é dado por

$$\tilde{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\sigma}} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right\} \quad \dots(A12.22)$$

e o parâmetro Λ é definido como

$$\Lambda = - \frac{1}{dk} \frac{\partial F}{\partial k} dk \quad \dots(A12.23)$$

Pré-multiplicando-se a equação A12.19, membro a membro, pela matriz \tilde{E} e, levando-se em conta a equação A12.22, chega-se a

$$\underline{\underline{E}} d\tilde{\epsilon} = d\tilde{\sigma} + \underline{\underline{E}} \tilde{a} d\lambda \quad \dots(\text{A12.24})$$

A equação anterior pré-multiplicada, membro a membro, por \tilde{a}^T , fornece, tendo em vista a equação A12.21,

$$d\lambda = \frac{\tilde{a}^T \underline{\underline{E}}}{A + \tilde{a}^T \underline{\underline{E}} \tilde{a}} d\tilde{\epsilon} \quad \dots(\text{A12.25})$$

Explicitando-se o vetor dos incrementos de tensão, na equação A12.24 e substituindo-se $d\lambda$ dado por A12.25, obtém-se

$$d\tilde{\sigma} = \underline{\underline{E}}_{ep} d\tilde{\epsilon}$$

onde

$$\underline{\underline{E}}_{ep} = \underline{\underline{E}} - \frac{\underline{\underline{E}} \tilde{a} \tilde{a}^T \underline{\underline{E}}}{A + \tilde{a}^T \underline{\underline{E}} \tilde{a}} \quad \dots(\text{A12.26})$$

Fica assim determinada a relação elastoplástica incremental entre tensões e deformações. A matriz elastoplástica $\underline{\underline{E}}_{ep}$, simétrica na plasticidade associativa, é formalmente semelhante ao módulo tangente E_T que aparece na expressão A2.1.

O parâmetro A está associado ao parâmetro de endurecimento H' . Como já foi observado, H' relaciona incrementos de tensão a incrementos de deformação, sendo que em estados multiaxiais de tensão devem ser tomados os seus valores equivalentes.

A2.4 ALGUNS CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO

O critério de escoamento sendo independente da orientação do sistema de coordenadas empregado é usualmente expresso em função dos três invariantes principais de tensão I_1 , I_2 e I_3 , dados por

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad \dots(A2.27)$$

Opcionalmente são utilizados os invariantes principais J_1, J_2 e J_3 , escritos em função das parcelas desviatórias de tensão. Esses invariantes são calculados de forma análoga à apresentada em A2.27, devendo-se substituir as tensões normais σ_x, σ_y e σ_z por S_x, S_y e S_z onde

$$S_x = \sigma_x - \sigma_m, \quad S_y = \sigma_y - \sigma_m, \quad S_z = \sigma_z - \sigma_m$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad \dots(A2.28)$$

Como se comprova facilmente $J_1 = 0$.

Uma opção usual consiste em substituir-se o terceiro invariante J_3 pelo ângulo de Lode, dado por

$$\theta = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^{-1} \left[-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right]$$

$$\text{onde} \quad -\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6 \quad \text{rad} \quad \dots(A2.29)$$

A seguir, a título de ilustração, e de maneira muito sucinta, são destacados alguns critérios clássicos de escoamento.

A2.4.1 Critério de Tresca

Formulado em 1864 estabelece que o escoamento do material inicia-se quando a máxima tensão de cisalhamento

em um ponto atinge um valor crítico, que pode ser determinado em um ensaio de tração simples para materiais dúcteis e de compressão simples para materiais frágeis. Essa condição pode ser expressa em função dos invariantes como

$$F = 2 J_2^{1/2} \cos \theta - Y(k) = 0 \quad \dots(A2.30)$$

É possível mostrar-se que a condição de escoamento é representada no espaço das tensões principais por uma superfície prismática hexagonal, infinitamente longa, cujo eixo longitudinal coincide com o eixo hidrostático ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). A seção transversal é um hexágono regular inalterável. Estados de tensão hidrostáticos, segundo este critério, não produzem escoamento, o que está expresso pela independência do critério em relação ao invariante I_1 .

A2.4.2 Critério de Von Mises

Von Mises postulou em 1913 que o escoamento inicia-se quando J_2 atinge um valor crítico, característico do material, o que pode ser expresso por

$$F = \sqrt{3} J_2 - Y(k) = 0 \quad \dots(A2.31)$$

A condição expressa pelo critério de Von Mises, representada no espaço das tensões principais, produz uma superfície cilíndrica de eixo coincidente com a superfície de Tresca, de seção transversal circular constante para cada valor da tensão de escoamento $Y(k)$, que circunscreve o prisma de Tresca, conforme se mostra na figura A2.5. É possível mostrar que a aplicação dos critérios de Tresca e Von Mises não produz diferenças superiores a 15%.

O critério de Von Mises, assim como o de Tresca, só depende do segundo invariante J_2 , cabendo as mesmas observações quanto aos estados de tensão hidrostáticos.

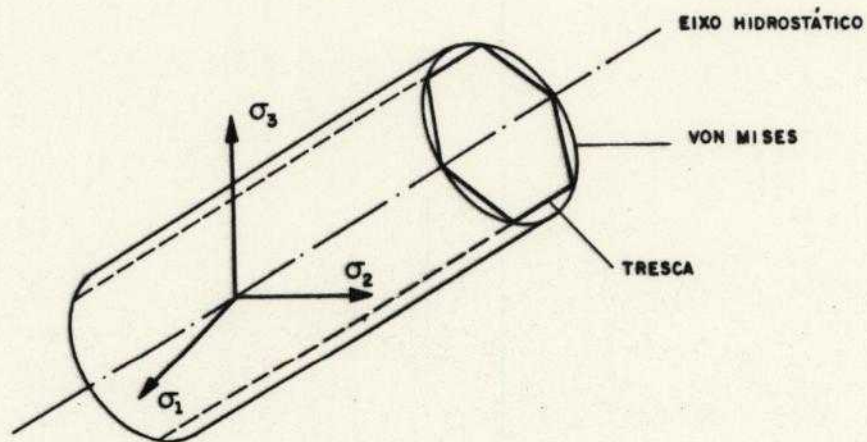


Fig. A2.5 Superfícies de Tresca e de Von Mises

A2.3.3 Critério de Mohr-Coulomb

Mohr, em 1900, generalizou o critério proposto por Coulomb em 1773, que estabelece que a tensão de cisalhamento limite em um plano depende da tensão normal nesse plano segundo a equação

$$|\tau| = c - \sigma \operatorname{tg} \phi \quad \dots(A2.32)$$

Observe-se que, na expressão anterior, c é a tensão de coesão do material e ϕ o ângulo de atrito interno.

Em função dos invariantes o critério se escreve

$$F = \frac{I_1}{3} \operatorname{sen} \phi + J_2^{1/2} \cos \theta - \frac{J_2^{1/2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta - c \cos \phi \quad \dots(A2.33)$$

No espaço das tensões principais o critério é representado por uma superfície piramidal, cuja seção transversal é um hexágono irregular, conforme se mostra na figura A2.6. No presente caso a função definidora do

critério depende da parcela hidrostática do estado de tensões, representada pelo invariante I_1 . Observe-se que um estado hidrostático ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), que atende à equação A2.33, fornece $\sigma_m = c/\text{tg}\phi$, representado pelo vértice da pirâmide.

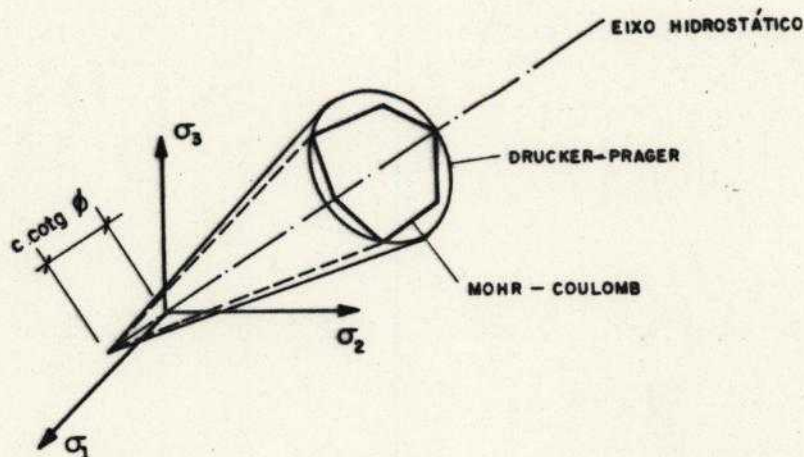


Fig. A2.6 Superfícies de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager

A2.3.4 Critério de Drucker-Prager

Em 1952 Drucker e Prager propuseram um critério que pode ser encarado como uma aproximação do critério de Mohr-Coulomb, eliminando-se as arestas da superfície de escoamento representada no espaço das tensões principais, transformando a pirâmide em um cone circular, tornando-a, também, simétrica em relação ao eixo hidrostático. Alternativamente pode ser visto como uma adaptação do critério de Von Mises, mediante a introdução da influência da parcela hidrostática, com a inclusão do invariante I_1 .

A função definidora do critério se escreve

$$F = \alpha I_1 + J_2^{1/2} - K = 0 \quad \dots(A2.34)$$

Onde

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3} (3 \pm \operatorname{sen} \phi)}$$

$$K = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 \pm \operatorname{sen} \phi)} \dots(\text{A2.35})$$

Nas expressões anteriores tomando-se o sinal "+" ou o sinal "-" no denominador, o círculo de Drucker-Prager passa, respectivamente, pelos três vértices do hexágono de Mohr-Coulomb menos ou mais distantes do eixo hidrostático, como se exhibe na figura A2.7.

Outras relações para α e K podem ser usadas para ajustar a pirâmide de Mohr-Coulomb ao cone de Drucker-Prager.

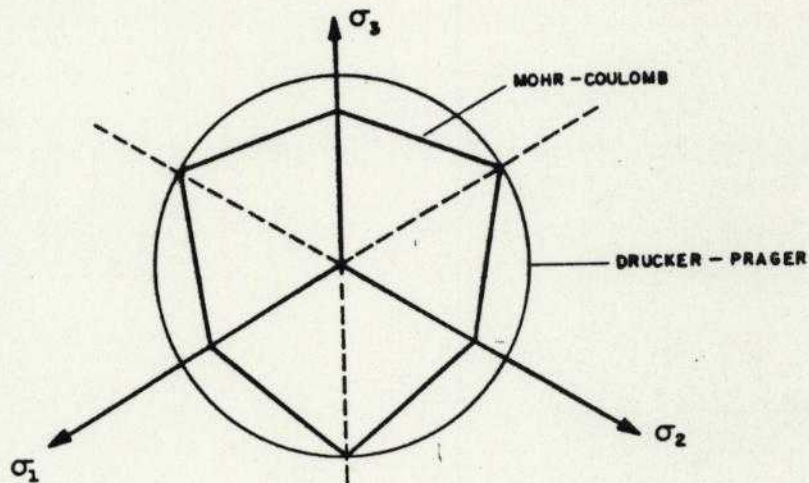


Fig. A2.7 Superfícies de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager
Seções trasversais (Plano $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$)