

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA
ANÁLISE DE PLACAS COM DEFORMAÇÃO POR CORTANTE

AUTOR: ENG. SAULO FARIA A. BARRETTO

ORIENTADOR: PROF. JOÃO BATISTA DE PAIVA

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA
ANÁLISE DE PLACAS COM DEFORMAÇÃO POR CORTANTE

Eng^o. SAULO FARIA A. BARRETTO

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

São Carlos, Julho de 1990

AGRADECIMENTOS

Agradeço :

Ao amigo e orientador Prof. Dr. João Batista de Paiva, pela

Aos meus pais

Aos meus avós

Aos meus tios Walmir e Meylli, pelo carinho e apoio que nunca me faltou, neste distante Estado

Aos amigos Josafá e Dilma pela hospitalidade e pelo apoio que recebi em São Carlos

R E S U M O

O Método dos Elementos Finitos é utilizado na análise de placas grossas segundo a Teoria proposta por Reissner e os resultados são comparados com os fornecidos pela solução direta da equação diferencial e com os fornecidos pelo Método dos Elementos de Contorno.

O elemento adotado, que inclui as deformações por força cortante como parâmetros nodais, demonstrou ser adequado à análise tanto de placas delgadas como placas grossas.

A B S T R A C T

The Finite Elements Method is adopted for the analysis of thick plates following the Reissner's theory and the results are compared with those given by the direct solution of the differential equation and also with those computed using the Boundary Elements Method.

The adopted element that take the shear force deformations as nodal parameters has demonstrate to be appropriate for the numerical analysis for thin or thick plates in bending.

ÍNDICE

I. INTRODUÇÃO.....	1.
II. EQUAÇÕES GERAIS DA FLEXÃO DE FOLHAS PLANAS.....	3.
II.1 - Introdução.....	3.
II.2 - Hipóteses básicas.....	4.
II.3 - Análise do equilíbrio das tensões.....	4.
II.4 - Relações tensão-deformação.....	6.
II.5 - Equações de equilíbrio das tensões.....	7.
II.6 - Determinação das tensões em função dos deslocamentos W e das distorções γ	9.
II.7 - Determinação dos esforços.....	16.
II.8 - Energia de deformação.....	20.
II.9 - Trabalho externo realizado pelas cargas aplicadas.....	21.
II.10 - Expressão da energia potencial total.....	22.
III. UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO ESTUDO DAS PLACAS DE REISSNER.....	23.
III.1 - O método.....	23.
III.2 - Função aproximadora dos deslocamentos.....	24.
III.3 - Montagem do vetor de deslocamentos do elemento em função dos deslocamentos nodais.....	28.
III.4 - Função aproximadora em coordenadas adimensionais.....	30.
III.5 - Montagem da matriz de rigidez do elemento.....	32.
III.6 - Determinação dos termos da matriz $[C^{-1}]$	37.
III.7 - Determinação dos termos das matrizes $[K_b]$ e $[K_s]$	38.
III.8 - Determinação do vetor de cargas nodais.....	41.
III.9 - Energia potencial total.....	43.
III.10 - Determinação dos esforços resultantes.....	44.
III.11 - Condições de contorno.....	45.

IV. RESULTADOS NUMÉRICOS.....	47.
IV.1 - Introdução.....	47.
IV.2 - Apresentação das tabelas e gráficos.....	48.
IV.3 - Análise dos resultados.....	67.
IV.3.1 - Conclusões.....	72.
 APÊNDICE A - Valores numéricos da matriz $[C^{-1}]$	73.
 BIBLIOGRAFIA.....	75.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O objetivo deste estudo é desenvolver um "software", baseado no método dos elementos finitos, para cálculo de placas sujeitas à deformação por cortante, utilizando-se da Teoria de Reissner.

O método dos elementos finitos foi apresentado, inicialmente, por ZIENKIEVSKY [4], e é encontrado em PRYOR [3], de uma forma bem simples, aplicada à teoria de Reissner.

As equações que regem o comportamento deste tipo de placa foram deduzidas por REISSNER [1], cujo artigo citado é considerado como sendo o mais importante neste caso de análise de placas.

No capítulo seguinte, é feita uma descrição das equações básicas da teoria de placas com deformação por cortante, montando-se, no final, as expressões da energia de deformação e da energia potencial devido ao carregamento externo.

No terceiro capítulo, as expressões da energia de deformação e potencial, do capítulo anterior, são aplicadas ao elemento finito retangular adotado. Com isto pode-se determinar as matrizes de rigidez, assim como o vetor de cargas nodais devido ao carregamento externo. Com isto, monta-se a expressão da energia total, e, a parti dela, chega-se a um sistema de equações lineares dos deslocamentos nodais.

Finalmente, no capítulo quarto, são mostrados os resultados obtidos com o emprego do "software"

desenvolvido, assim como os valores obtidos com a resolução analítica para a teoria de Reissner e para a teoria Clássica, e os valores obtidos com o emprego do Método dos Elementos de Contorno. Com isto permite-se uma comparação dos diversos tipos de análise citados, assim como medir a eficiência do elemento adotado. Estes resultados são obtidos para três tipos de placas com diferentes condições de contorno, e , logo após a apresentação dos resultados, são feitos comentários a respeito do que foi observado.

CAPÍTULO II

EQUAÇÕES GERAIS DA FLEXÃO DE FOLHAS PLANAS

II-1. Introdução

O elemento estrutural placa pode ser definido como sendo um elemento estrutural de superfície limitado por duas superfícies planas, cuja distância entre elas é chamada de espessura, a qual é sempre pequena, quando comparada com as outras dimensões. O plano equidistante às duas superfícies que dividem a placa, é denominado de plano médio.

As placas são definidas quanto à espessura em três tipos : muito delgadas, quando a relação da espessura pela largura (h/a) for menor que $1/150$, delgadas, quando h/a estiver entre os valores de $1/150$ e $1/5$, e espessas, quando h/a for maior que $1/5$. Com relação às propriedades do material, as placas se classificam em : anisótropa (quando as propriedades são diferentes em qualquer direção), ortótropa (quando as propriedades são diferentes em duas direções ortogonais) e isotropa (quando as propriedades são iguais em todas as direções).

Neste trabalho serão analisados os casos das placas espessas e isotropas, submetidas a carregamento transversal ao plano médio, utilizando-se da teoria de Reissner.

II-2. Hipóteses básicas

No estudo da flexão de placas, as hipóteses básicas consideradas são as seguintes :

- a) os deslocamentos transversais ao plano médio são pequenos
- b) a superfície média, ou plano médio, da placa é considerada indeformável no seu plano
- c) as deformações na direção normal (ϵ_z) são consideradas desprezíveis

II-3. Análise do equilíbrio das tensões

Analisando o estado tridimensional de distribuição de tensões representado no elemento infinitesimal de placa, de dimensões dx , dy e dz , indicado na figura 1 ,

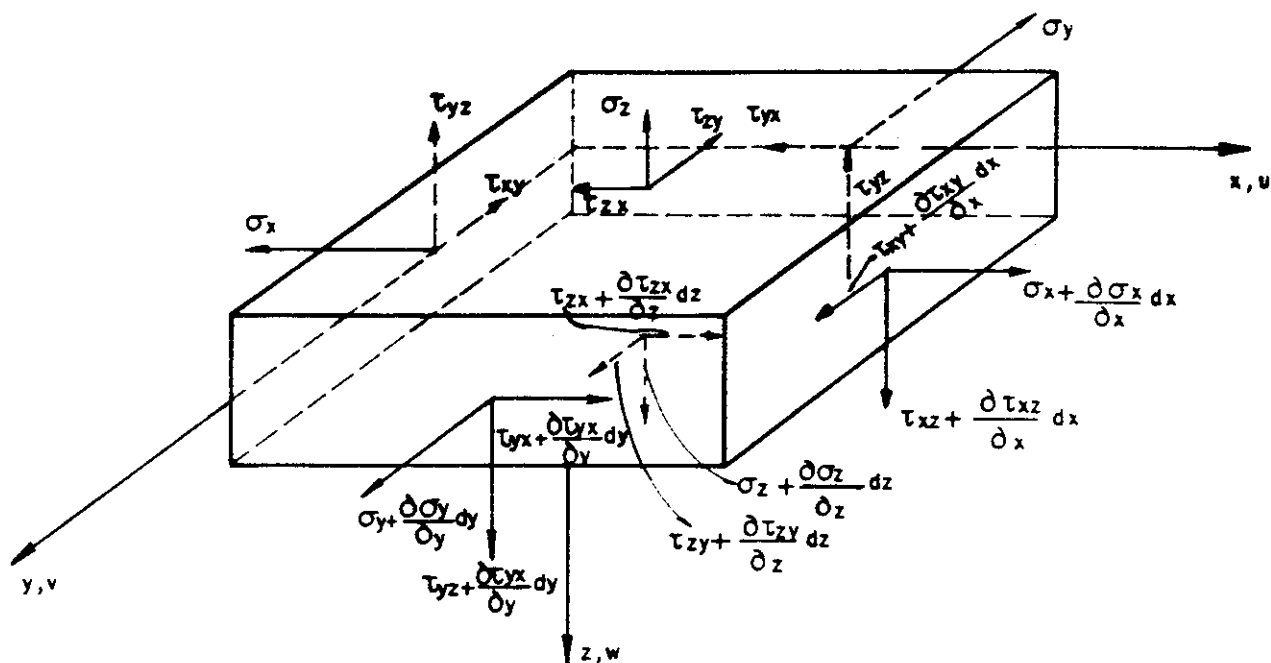


FIG. 1

pode-se obter, fazendo-se os equilíbrios das forças nas direções x, y e z, as seguintes equações de equilíbrio das tensões :

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta z} + X &= 0 \\
 \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta \sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{yz}}{\delta z} + Y &= 0
 \end{aligned}$$

(1)

$$\frac{\delta\tau_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{yz}}{\delta y} + \frac{\delta\sigma_z}{\delta z} + Z = 0$$

onde σ_x , σ_y e σ_z são as tensões normais aplicadas nas direcções dos respectivos eixos, e τ_{xy} , τ_{yz} e τ_{xz} são as tensões tangenciais aplicadas nos respectivos planos. Fazendo-se o equilíbrio dos momentos em relação a um ponto localizado no centro do elemento, deduz-se que : $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. As letras maiúsculas X, Y, Z que aparecem nas relações, representam as componentes de massa por unidade de volume, nas direcções x, y e z, respectivamente.

II-4. Relações tensão-deformação

As relações tensão-deformação são funções lineares, e são conhecidas como Lei de Hooke. Para o estado tridimensional, elas são as seguintes :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{\delta v}{\delta y}$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{\delta w}{\delta z}$$

$$(2) \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} = \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} = \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y}$$

onde $G = \frac{E}{2(1-\nu)}$ é chamado de módulo de deformação

transversal do material, u , v e w são os deslocamentos nas direções x , y e z , respectivamente, ν é o coeficiente de Poisson, e E é o módulo de elasticidade longitudinal. Como foi citado anteriormente, no item das hipóteses básicas, a deformação na direção transversal z é considerada desprezível ($\epsilon_z = 0$), o que permite uma variação linear de algumas das tensões.

II-5. Equações de equilíbrio dos esforços

Analisando novamente o equilíbrio do elemento infinitesimal de placa, onde estão representados os esforços atuantes, conforme indicados na figura 2 ,

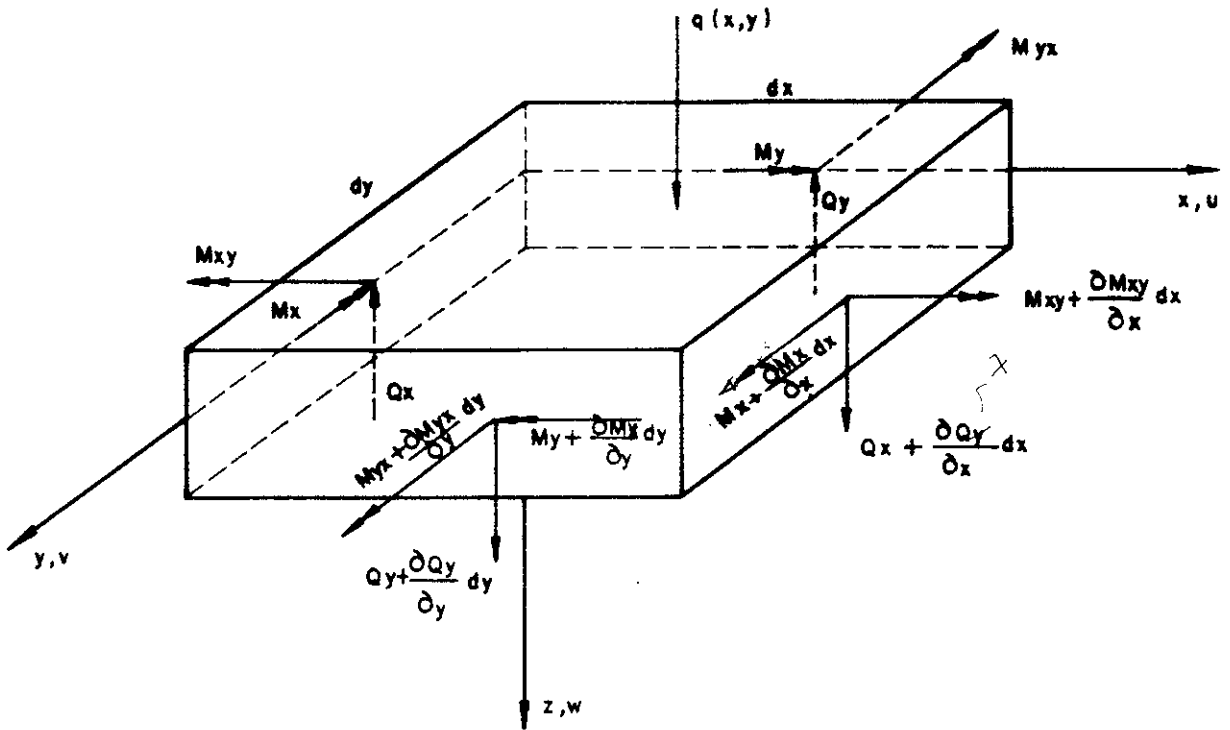


FIG. 2

obtêm-se, fazendo-se o equilíbrio das forças verticais e dos momentos em torno dos eixos x e y, as seguintes equações :

$$\frac{\delta Q_x}{\delta x} + \frac{\delta Q_y}{\delta y} + q(x,y) = 0 \quad \left(\text{forças verticais} \right)$$

$$(3) \quad \frac{\delta M_x}{\delta x} + \frac{\delta M_{xy}}{\delta y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\delta M_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta M_y}{\delta y} - Q_y = 0$$

onde M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y e q , são esforços por unidade de comprimento.

II-6. Determinação das tensões em função dos deslocamentos w e das distorções γ

As tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} variam linearmente, o que pode ser dito já que ϵ_z tende para zero, da forma como estão indicadas na figura 3a, 3b e 3c.

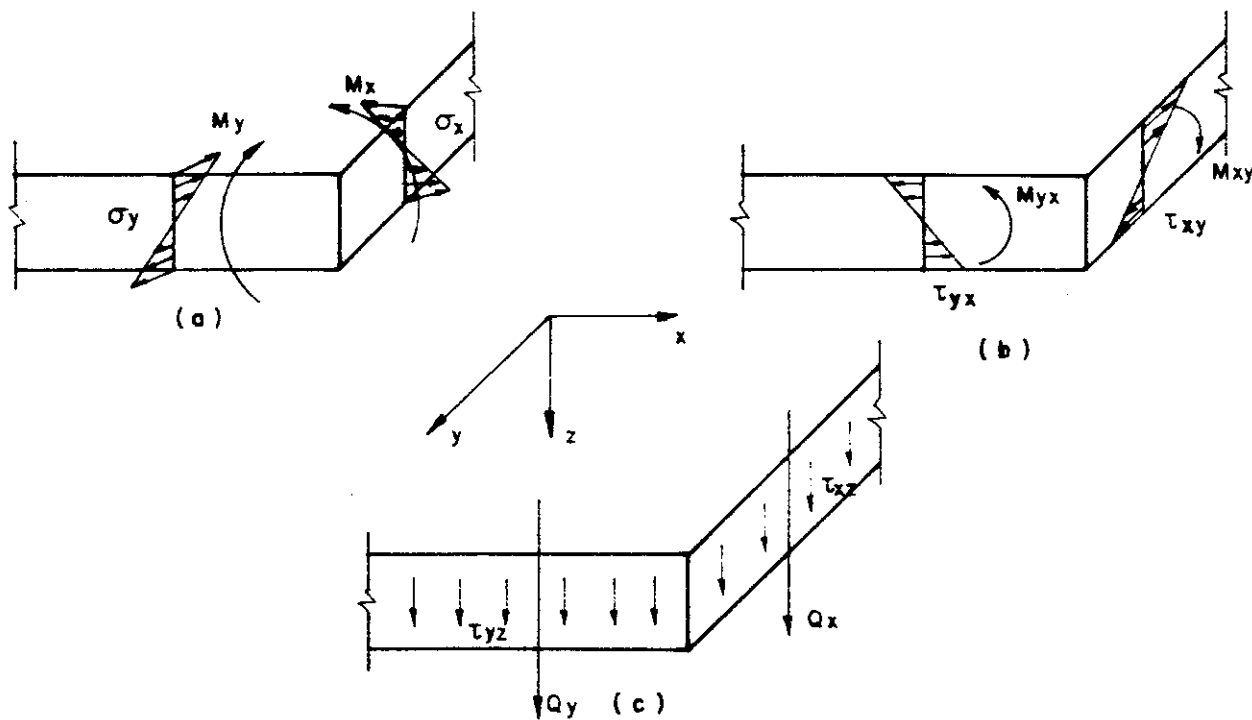


FIG. 3

assim, partindo-se da figura 3a, para uma faixa de largura unitária na direção de x , pode-se escrever :

$$(4a) \quad \sigma_x = \frac{M_x}{I_z} z$$

como $I_z = \frac{1}{12} h^3$, deduz-se que $\sigma_x = \frac{12 M_x z}{h^3}$

analogamente :

$$(4b) \quad \sigma_y = \frac{12 M_y z}{h^3} \quad \tau_{xy} = \frac{12 M_{xy} z}{h^3}$$

A partir da figura 2, têm-se as seguintes condições de contorno :

$$\sigma_z = -q(x, y) \quad \text{para } z = -h/2$$

$$(5) \quad \sigma_z = 0 \quad \text{para } z = +h/2$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{para } z = -h/2$$

Substituindo-se as tensões (4) nas duas ^{primárias} ~~últimas~~ equações de equilíbrio (1), desprezadas as forças de massa, e integrando-se ao longo de z, com o auxílio da última das condições de contorno (5), obtêm-se:

$$\tau_{xz} = \frac{3Qx}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]$$

(6)

$$\tau_{yz} = \frac{3Qy}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]$$

Substituindo-se, agora, as tensões acima (6), na ^{última} primeira das equações de equilíbrio (1), onde também fica desprezada a componente de massa, utilizando-se da primeira das equações de equilíbrio (3) e integrando-se ao longo de z, com o auxílio das duas primeiras condições de contorno (5), obtém-se :

$$(7) \quad \sigma_z = - \frac{3q}{4} \left[\frac{2}{3} - \frac{2z}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right]$$

Como foi considerado, como hipótese básica, que a deformação na direção transversal z, ($\delta w / \delta z$) não é considerada, por estar em contradição com a distribuição linear das tensões, então, introduz-se um valor médio do deslocamento transversal w_0 , assim como valores médios dos giros θ_x e θ_y . Assim, com estes valores médios, considera-se que as seções permaneçam planas, após as deformações. Estes valores são calculados, igualando-se o trabalho realizado para executar os giros médios, e os deslocamentos médios, ao trabalho das tensões correspondentes ao efetuar os deslocamentos reais u, v e



w, ou seja :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x u dz = M_x \phi_x \quad ; \quad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} v dz = M_{xy} \phi_y$$

$$(8) \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y v dz = M_y \phi_y \quad ; \quad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} u dz = M_{xy} \phi_x$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} w dz = Q_x w_0 \quad ; \quad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} w dz = Q_y w_0$$

Utilizando-se das tensões (4) e (6), e substituindo-as em (8), obtém-se :

$$\phi_x = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} u z dz$$

$$(9) \quad \phi_y = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} v z dz$$

$$w_0 = \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} w \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz$$

Partindo-se de que as seções permanecem planas após as deformações, como foi citado anteriormente, têm-se que os valores dos deslocamentos u e v são os seguintes :

$$(10) \quad u = -z \cdot \theta_x \quad ; \quad v = -z \cdot \theta_y$$

Substituindo-se agora, as tensões (6) nas duas últimas relações de (2), multiplicando-se, posteriormente, tudo

por $\frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz$, e integrando-se em relação a z ,

variando de $-h/2$ a $h/2$, obtêm-se os valores dos giros médios :

$$\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta v}{\delta x} = \frac{1}{G} \frac{3Q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]$$

$$\left(\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta v}{\delta x} \right) \left[\frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz \right] =$$

$$= \frac{1}{G} Q_x \left[\frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \right]^2 dz$$

utilizando-se de (10), têm-se que $\delta u/\delta z = -\theta_x$ e que $\delta v/\delta x = -\theta_y$. Assim :

$$\phi_x = \frac{\delta v}{\delta x} - \frac{6}{5} \frac{2(1+\nu)}{Eh} Q_x = \frac{\delta v}{\delta x} + \gamma_x$$

(11)

$$\phi_y = \frac{\delta v}{\delta y} - \frac{6}{5} \frac{2(1+\nu)}{Eh} Q_y = \frac{\delta v}{\delta y} + \gamma_y$$

agora, pode-se reescrever (10) da seguinte forma :

$$u = -z \left[\frac{\delta v}{\delta x} + \bar{\gamma}_x \right]$$

(12)

$$v = -z \left[\frac{\delta v}{\delta y} + \bar{\gamma}_y \right]$$

Substituindo-se as expressões dos deslocamentos (12) nas expressões das deformações (2), obtém-se :

$$\epsilon_x = -z \left[\frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \frac{\delta \bar{\gamma}_x}{\delta x} \right] = z M_x$$

$$\epsilon_y = -z \left[\frac{\delta^2 W}{\delta y^2} + \frac{\delta \bar{\gamma}_y}{\delta y} \right] = z M_y$$

$$(13) \quad \gamma_{xy} = -z \left[2 \frac{\delta^2 W}{\delta x \delta y} + \frac{\delta \bar{\gamma}_x}{\delta y} + \frac{\delta \bar{\gamma}_y}{\delta x} \right] = z M_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = - \frac{\delta v}{\delta x} - \bar{\gamma}_x + \frac{\delta v}{\delta x} = - \bar{\gamma}_x$$

$$\gamma_{yz} = - \frac{\delta v}{\delta y} - \bar{\gamma}_y + \frac{\delta v}{\delta y} = - \bar{\gamma}_y$$

onde M_x e M_y são as curvaturas nas direções x e y ,

respectivamente, κ_{xy} é a distorção no plano xy , provocada pela flexão com interação da cortante, e $\bar{\gamma}_x$ e $\bar{\gamma}_y$ são as deformações médias, por cortante, nas direcções x e y .

Utilizando-se das relações tensão-deformação escritas em (2), e lembrando-se que ϵ_z é considerada desprezível, pode-se escrevê-las da forma inversa, ficando as tensões em função das deformações e da tensão σ_z , ou seja :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (14)$$

Substituindo-se as deformações (13) nas tensões (14), reescritas acima, temos as equações das tensões em função dos deslocamentos w e das distorções γ , ou seja :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\delta^2 v}{\delta x} + \nu \frac{\delta^2 v}{\delta y} + \frac{\delta \bar{\gamma}_x}{\delta x} + \nu \frac{\delta \bar{\gamma}_y}{\delta y} \right] - \\ & - \frac{3q\nu}{4(1-\nu)} \left[\frac{3}{2} - \frac{2z}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right] \end{aligned}$$

$$(15) \quad \sigma_y = - \frac{Ez}{1 - \nu^2} \left[\frac{\delta^2 v}{\delta y^2} + \nu \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\bar{\delta\gamma}_y}{\delta y} + \nu \frac{\bar{\delta\gamma}_x}{\delta x} \right] -$$

$$- \frac{3q\nu}{4(1-\nu)} \left[\frac{2}{3} - \frac{2z}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right]$$

$$\tau_{xy} = - \frac{Ez}{2(1+\nu)} \left[2 \frac{\delta^2 v}{\delta x \delta y} + \frac{\bar{\delta\gamma}_x}{\delta y} + \frac{\bar{\delta\gamma}_y}{\delta x} \right]$$

II-7. Determinação dos esforços

Substituindo-se as tensões escritas em (15), nas escritas em (4), multiplicando-se tudo por $\frac{12z}{h^3} dz$, e integrando-se no domínio da placa, chega-se às seguintes expressões :

$$M_x = -D \left[\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \nu \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} + \frac{\bar{\delta\gamma}_x}{\delta x} + \nu \frac{\bar{\delta\gamma}_y}{\delta y} \right] + \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} q$$

(16)

$$M_y = -D \left[\frac{\delta^2 v}{\delta y^2} + \nu \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\bar{\delta\gamma}_y}{\delta y} + \nu \frac{\bar{\delta\gamma}_x}{\delta x} \right] + \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} q$$

$$M_{xy} = -D (1-\nu) \left[\frac{\delta^2 v}{\delta x \delta y} + \frac{1}{2} \frac{\delta \bar{\gamma}_x}{\delta y} + \frac{1}{2} \frac{\delta \bar{\gamma}_y}{\delta x} \right]$$

onde D é a rigidez transversal da placa, e é dada por :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

as expressões (16) dos momentos, podem ser escritas sob forma matricial, ou seja :

$$(17) [M] = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} + \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [D_b][N] + \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde a matriz [N] é a matriz das curvaturas, e é escrita da seguinte forma :

$$(18) \quad [N] = \begin{bmatrix} -\frac{\delta^2 W}{\delta x^2} & -\frac{\delta \bar{\gamma}_x}{\delta x} & & \\ & -\frac{\delta^2 W}{\delta y^2} & -\frac{\delta \bar{\gamma}_y}{\delta y} & \\ -2\frac{\delta^2 W}{\delta x \delta y} & -\frac{\delta \bar{\gamma}_x}{\delta y} & -\frac{\delta \bar{\gamma}_y}{\delta x} & \end{bmatrix}$$

$\delta \bar{\gamma}_x$
 $\delta \bar{\gamma}_y$

Das expressões das rotações de (11), têm-se que :

$$(19) \quad Q_x = -\frac{6}{5} Gh \bar{\gamma}_x$$

$$Q_y = -\frac{6}{5} Gh \bar{\gamma}_y$$

ou, escrevendo-se sob forma matricial, e indicando-se por $[\gamma]$, a matriz das distorções :

$$(20) \quad [Q] = \frac{6}{5} Gh \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = [D_s] [\gamma] = [D_s] [-\bar{\gamma}]$$

onde $[\gamma]$ é a matriz das distorções, e é escrita da seguinte forma :

$$(21) \quad [\gamma] = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\gamma}_x \\ -\bar{\gamma}_y \end{bmatrix} = [-\bar{\gamma}]$$

Utilizando-se das expressões das cortantes (19), junto com a equação de equilíbrio $\frac{\delta Q_x}{\delta x} + \frac{\delta Q_y}{\delta y} + q = 0$, pode-se reescrever as expressões dos esforços (16), da seguinte forma :

$$M_x = -D \left(\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \nu \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\delta Q_x}{\delta x} - \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} q$$

$$(22) \quad M_y = -D \left(\frac{\delta^2 v}{\delta y^2} + \nu \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\delta Q_y}{\delta y} - \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} q$$

$$M_{xy} = -D (1-\nu) \left(\frac{\delta^2 v}{\delta x \delta y} \right) + \frac{h^2}{10} \left(\frac{\delta Q_x}{\delta y} + \frac{\delta Q_y}{\delta x} \right)$$

II-8. Energia de deformação

A expressão da energia de deformação de um corpo elástico, é dada por :

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV$$

Sabendo-se que $\epsilon_z=0$, e utilizando-se das tensões escritas em (4) e em (6) e das deformações escritas em (12), e integrando-se em z variando de $-h/2$ a $h/2$, chega-se na expressão da energia em função dos esforços e dos deslocamentos :

$$U = \frac{1}{2} \int_A (N_x M_x + N_y M_y + N_{xy} M_{xy}) dA + \frac{1}{2} \int_A (\bar{\gamma}_x Q_x + \bar{\gamma}_y Q_y) dA$$

a qual, posta sob forma matricial, fica da seguinte forma :

$$(23) \quad U = \frac{1}{2} \int_A [N]^t [M] dA + \frac{1}{2} \int_A [\gamma]^t [Q] dA$$

onde as matrizes $[K]$, $[\gamma]$, $[M]$ e $\{Q\}$, estão escritas em (18) e em (20)

II-9. Trabalho externo realizado pelas cargas aplicadas

II-9 a Carregamento distribuído

O carregamento distribuído consiste de uma carga q , uniformemente distribuída, aplicada sobre a placa, na direção transversal z . O trabalho correspondente a este tipo de carregamento, é calculado integrando-se o produto do deslocamento pela carga, em toda a superfície da placa, ou seja

$$(24) \quad \Omega = - \int_S w q(x,y) ds$$

II-9.b Carregamento concentrado

O carregamento concentrado consiste de forças agindo localizadamente na direção da variável correspondente. Em outras palavras, consiste de cargas verticais provocando deslocamentos w , e de momentos fletores provocando rotações, ou seja :

$$(25) \quad \Omega = - (w p + \phi_x M_x + \phi_y M_y)$$

II-10 Expressão da energia potencial total

A energia potencial total pode ser escrita da seguinte forma

$$(26) \quad \pi_p = U + \Omega$$

a qual fica, substituindo-se pelas expressões de U , Ω e Ω , dadas em (23), (24) e em (25), respectivamente :

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_{\pi} [N]^t [M] dA + \frac{1}{2} \int [\gamma]^t [Q] dA - \int w q(x,y) ds$$
$$- (w_q + \theta_x M_x + \theta_y M_y)$$

CAPÍTULO III

UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
NO ESTUDO DAS PLACAS DE REISSNER

III-1 O método

A utilização do método dos elementos finitos para a análise de uma estrutura qualquer consiste em se dividir essa estrutura, considerada o domínio, em subdomínios, os quais são chamados de elementos finitos.

Os tipos mais comuns de elementos finitos, com relação à geometria, são os triangulares e os retangulares. Nos elementos finitos são definidos os nós, que são os pontos localizados nos vértices dos elementos, e que também podem estar definidos nas interfaces destes. Os deslocamentos destes nós são chamados de deslocamentos nodais.

Aos elementos finitos são atribuídos funções aproximadoras dos deslocamentos procurados, os quais são escritos em função dos deslocamentos nodais. À medida em que se divide a estrutura em um número maior de elementos, mais próximo se chega da estrutura real, e deverá ocorrer uma convergência de resultados. Porém, para que esta convergência esteja assegurada, é preciso que haja compatibilidade dos deslocamentos e das derivadas primeiras dos deslocamentos, nos nós dos elementos e nas suas interfaces.

No presente estudo, utiliza-se de um elemento finito retangular com cinco variáveis de deslocamento por

nó, onde os nós estão apenas nos vértices, o que resulta em um elemento com vinte parâmetros nodais. Estes parâmetros, para um determinado nó do elemento, são: deslocamento vertical (W) e os giros (θ_x) e (θ_y), conforme indicados na figura 4a, e as deformações por cortante ($\bar{\gamma}_x$) e ($\bar{\gamma}_y$), conforme indicados na figura 4b.

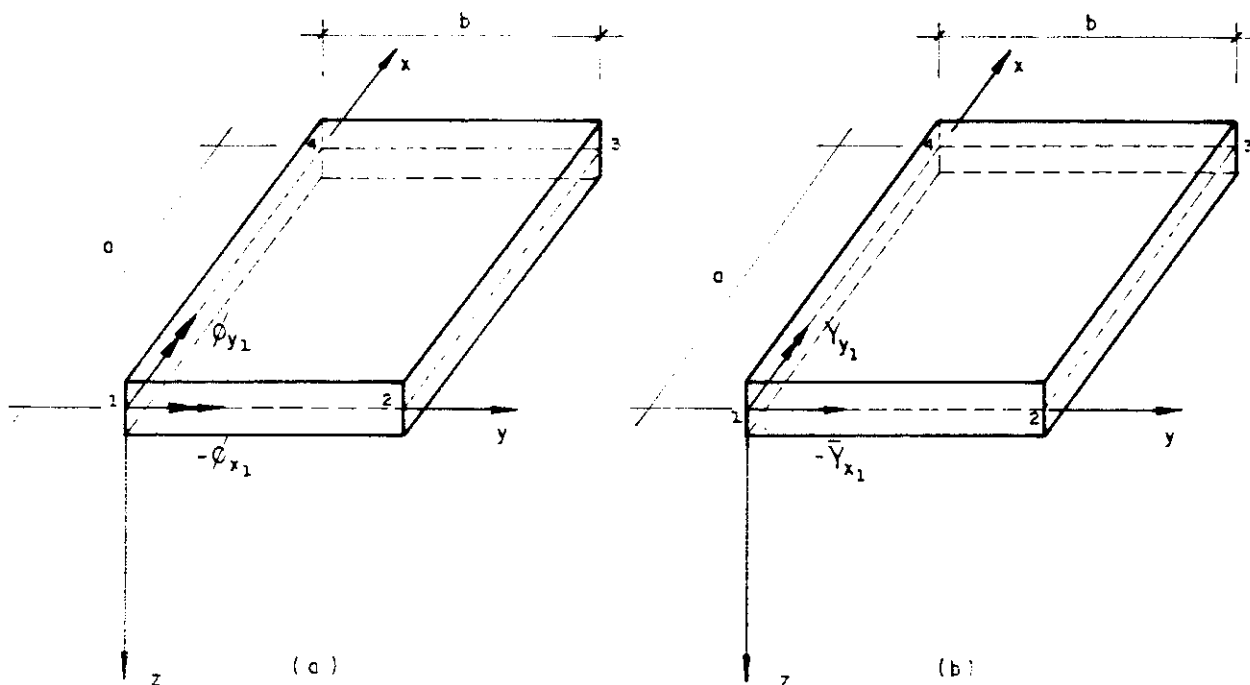


FIG.4

III-2. Função aproximadora dos deslocamentos

Como já foi dito anteriormente, adota-se uma função aproximadora para os deslocamentos no domínio do elemento finito. Neste estudo foi atribuída uma função cúbica completa, com dois termos adicionais, para o

deslocamento vertical, e um polinômio bilinear para as distorções. Ou seja, partindo-se do Triângulo de Pascal,

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & x & & y & \\
 & & & x^2 & & xy & & y^2 \\
 & & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 \\
 & x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4 \\
 & x^5 & & x^4y & & x^3y^2 & & x^2y^3 & & xy^4 & & y^5 \\
 x^6 & & x^5y & & x^4y^2 & & x^3y^3 & & x^2y^4 & & xy^5 & & y^6
 \end{array}$$

os dois termos adicionais, para a função W, são x^3y e xy^3 . Assim, os polinômios aproximadores para W e γ , são

$$\begin{array}{l}
 W \\
 \partial_x \\
 \partial_y
 \end{array} = \left\{ 1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3 \right\} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\gamma_w = \left\{ 1 \quad x \quad y \quad xy \right\} \begin{Bmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{14} \\ \vdots \\ \alpha_{20} \end{Bmatrix}$$

Assim, sabendo-se, de (11), que as rotações totais são dadas por $\theta_x = \frac{\delta W}{\delta z} + \bar{\gamma}_x$ e $\theta_y = \frac{\delta W}{\delta z} + \bar{\gamma}_y$, e chamando-se de $[\alpha]$, o vetor que contém os 20 parâmetros α

generalizados, ou seja

$$[\alpha]^t = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{20}]$$

monta-se o seguinte vetor dos deslocamentos [u]

$$(27) \begin{bmatrix} w \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \bar{Y}_x \\ \bar{Y}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \cdot [\alpha]$$

onde o vetor [u] contém as variáveis de deslocamento de um ponto qualquer dentro do elemento, e [P] é a matriz dos polinômios, isto é

$$(28) [P] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix}$$

Assim, o vetor dos deslocamentos do elemento pode ser escrito da seguinte forma

$$(29) \quad [u] = [P] [\alpha]$$

Com relação à convergência, verifica-se que o elemento é conforme para os deslocamentos e para as distorções, mas não o é para as derivadas primeiras dos deslocamentos. Conforme está indicado na figura 5, têm-se, para cada lado do elemento, quatro parâmetros que garantem a conformidade da função deslocamento, que são os dois deslocamentos w_i e w_j , e as duas derivadas primeiras $w_{i,t}$ e $w_{j,t}$. Essa conformidade está garantida, já que a função deslocamento é uma função do terceiro grau. Com relação às derivadas primeiras, têm-se apenas dois parâmetros, que são as duas derivadas $w_{i,n}$ e $w_{j,n}$. Como a derivada é uma função do segundo grau, o que exigiria três parâmetros, resulta na indeterminação da derivada do deslocamento ao longo do lado do elemento. Com relação às distorções, têm-se dois parâmetros, que são as duas distorções $\bar{\gamma}_x$ e $\bar{\gamma}_y$, para uma função bilinear, o que garante a sua conformidade.

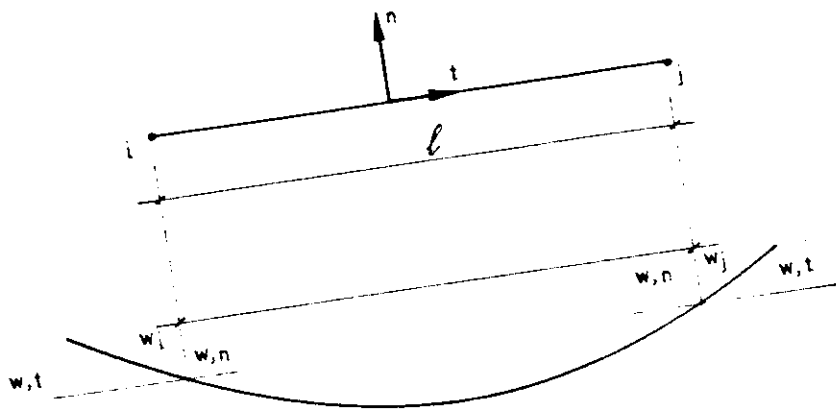


FIG 5

III-3 Montagem do vetor de deslocamentos do elemento em função dos deslocamentos nodais

Analizando-se o elemento indicado na figura 6 :

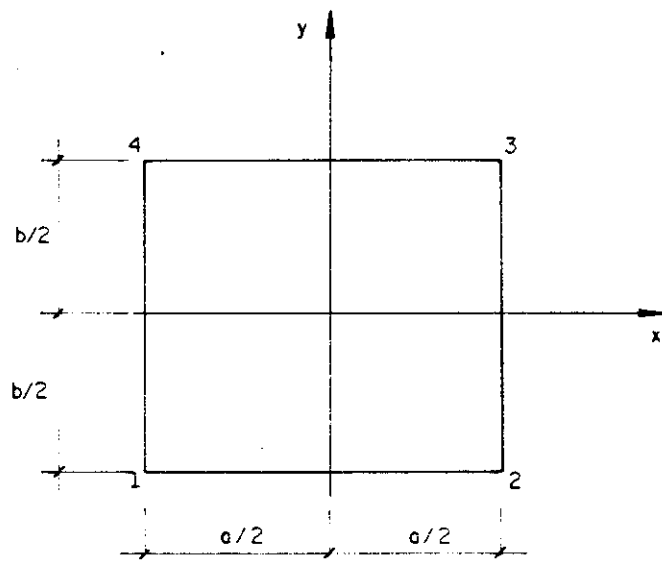


FIG. 6

pode-se montar o vetor dos deslocamentos nodais do elemento, ou seja :

$$(30) \quad [u]^e = \begin{bmatrix} [u]_1^e \\ [u]_2^e \\ [u]_3^e \\ [u]_4^e \end{bmatrix} = [C] [\alpha]$$

onde $[u]^{el} = [W_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \bar{\gamma}_{xi} \ \bar{\gamma}_{yi}]$ ($i = 1, 2, 3, 4$)

A matriz $[C]$ é montada, substituindo-se os valores de x e y , de cada um dos nós do elemento, na matriz dos polinômios (27), ou seja

$$(31) \quad [C] = \begin{bmatrix} [P]_1 \\ [P]_2 \\ [P]_3 \\ [P]_4 \end{bmatrix}^e$$

assí, a partir dos deslocamentos nodais de (27), pode-se escrever que :

$$(32) \quad [\alpha] = [C^{-1}] [u]^{el}$$

que, substituindo-se em (29), resulta em

$$(33) \quad [u] = [P] [C^{-1}] [u]^{el}$$

onde o vetor $[u]$ fica completamente definido em termos dos deslocamentos nodais. Esta expressão pode ser reescrita da seguinte forma :

$$(34) \quad [u] = [N] [u]^e$$

onde :

$$(35) \quad [N] = [P] [C^{-1}]$$

III-4. Função aproximadora em coordenadas adimensionais

Como indicado no item anterior, a matriz $[C]$ precisa ser invertida, e ela está em função das coordenadas retangulares x e y dos nós do elemento. Então deve-se retomar esta mesma operação toda vez que se alterarem as dimensões do elemento. Para se eliminar esse problema, transforma-se o sistema de coordenadas retangulares para o sistema de coordenadas adimensionais ξ e η , como está representado na figura 6.

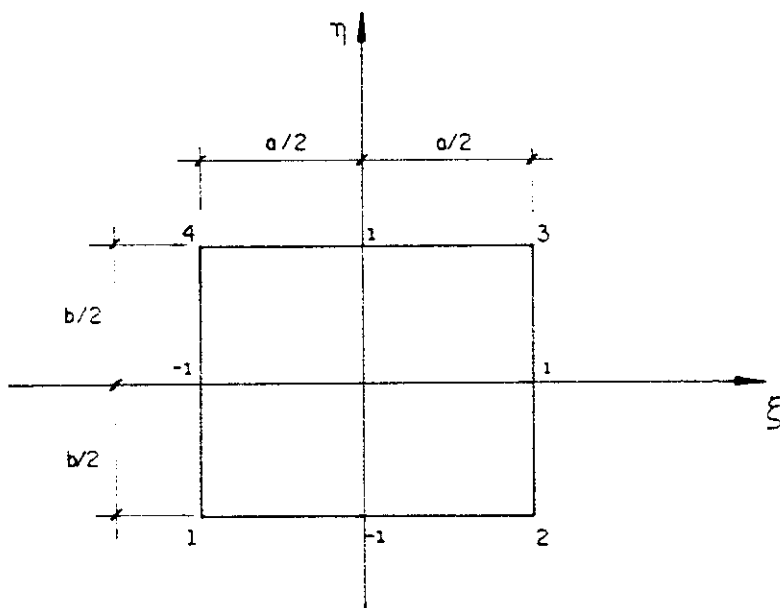


FIG. 7

onde os dois sistemas de coordenadas obedecem às seguintes relações

$$(36) \quad \xi = \frac{2x}{a} \quad e \quad \eta = \frac{2y}{b}$$

$$dx = \frac{a}{2} d\xi \quad e \quad dy = \frac{b}{2} d\eta$$

$$(37) \quad \frac{\delta W}{\delta x} = \frac{\delta W}{\delta \xi} \frac{\delta \xi}{\delta x} = \frac{2}{a} \frac{\delta W}{\delta \xi}$$

$$\frac{\delta W}{\delta y} = \frac{2}{b} \frac{\delta W}{\delta \eta}$$

de posse destas relações, pode-se reescrever a matriz [P] dos polinômios, de (27), agora em coordenadas adimensionais, ou seja :

$$(38) \quad [F] = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 & \xi^3\eta & \xi\eta^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2\xi & \eta & 0 & 3\xi^2 & 2\xi\eta & \eta^2 & 0 & 3\xi^2\eta & \eta^3 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & 2\eta & 0 & \xi^2 & 2\xi\eta & 3\eta^2 & \xi^3 & 3\xi\eta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix}$$

também, a partir de (36) e de (37), pode-se escrever o vetor dos deslocamentos nodais para o novo sistema de coordenadas, ou seja :

$$(39) \quad [u_{x,y}] = [Mt] [u_{\xi,\eta}]$$

onde $[u_{\xi,\eta}]$ passa a ser o novo vetor de deslocamentos nodais, agora no sistema de coordenadas adimensionais, e, $[Mt]$ é a matriz de transformação de coordenadas, e é uma matriz diagonal, cujos termos não nulos são os seguintes

$Mt(1,1) = 1$	$Mt(2,2) = a/2$
$Mt(3,3) = b/2$	$Mt(4,4) = a/2$
$Mt(5,5) = b/2$	$Mt(6,6) = 1$
$Mt(7,7) = a/2$	$Mt(8,8) = b/2$
$Mt(9,9) = a/2$	$Mt(10,10) = b/2$
$Mt(11,11) = 1$	$Mt(12,12) = a/2$
$Mt(13,13) = b/2$	$Mt(14,14) = a/2$
$Mt(15,15) = b/2$	$Mt(16,16) = 1$
$Mt(17,17) = a/2$	$Mt(18,18) = b/2$
$Mt(19,19) = a/2$	$Mt(20,20) = b/2$

assim o vetor de deslocamentos $[u]$ do elemento, (32), fica reescrito da forma

$$(40) \quad [u] = [P] [C]^{-1} [Mt] [u]^e$$

III-5. Montagem da matriz de rigidez do elemento

No desenvolvimento da matriz de rigidez do elemento finito, o efeito da tensão normal σ_x , nesta formulação, não é considerado. Assim, as expressões dos momentos e das cortantes indicadas em (17) e em (20), ficam da seguinte forma :

$$(41) \quad [M] = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = [D_b][N]$$

$$(42) \quad [Q] = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = -\frac{6}{5} \begin{bmatrix} Gh & 0 \\ 0 & Gh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = [D_b][\gamma]$$

onde os termos das matrizes $[N]$ e $[\gamma]$ são dados em (18) e em (21), e podem ser agora reescritos em função das coordenadas adimensionais :

$$(43) \quad [K] = \begin{vmatrix} \frac{4}{a^2} \frac{\delta^2 W}{\delta \xi^2} & & \frac{4}{a^2} \frac{\delta^2 W}{\delta \xi} \\ \frac{4}{b^2} \frac{\delta^2 W}{\delta \eta^2} & & \frac{4}{b^2} \frac{\delta^2 W}{\delta \eta} \\ \frac{B}{ab} \frac{\delta^2 W}{\delta \xi \delta \eta} & \frac{4}{ab} \frac{\delta \bar{\gamma}_\xi}{\delta \eta} & \frac{4}{ab} \frac{\delta \bar{\gamma}_\eta}{\delta \xi} \end{vmatrix}$$

$$(44) \quad [\gamma] = \begin{vmatrix} -\frac{2}{a} \bar{\gamma}_\xi \\ -\frac{2}{b} \bar{\gamma}_\eta \end{vmatrix}$$

A partir de (33), as expressões de $[K]$ e $[\gamma]$ podem ser escritas da seguinte forma :

$$(45) \quad [K] = [R_b] [C^{-1}] [M_t] [u]^e$$

$$(46) \quad [\gamma] = [R_s] [C^{-1}] [M_t] [u]^e$$

onde

$$\begin{aligned}
 [R_b] = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{a^2} & 0 & 0 & -\frac{24F}{a^2} & -\frac{8\eta}{a^2} & 0 & 0 & -\frac{24F\eta}{a^2} & 0 & 0 & -\frac{4}{a^2} & 0 & -\frac{4\eta}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{b^2} & 0 & 0 & -\frac{8F}{b^2} & -\frac{24\eta}{b^2} & 0 & \frac{24F\eta}{b^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{b^2} & -\frac{4\eta}{b^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{ab} & 0 & 0 & \frac{16F}{ab} & \frac{16\eta}{ab} & 0 & -\frac{24F}{ab} & -\frac{24\eta}{ab} & 0 & 0 & -\frac{4}{ab} & -\frac{4F}{ab} & 0 & -\frac{4}{at} & 0 & -\frac{4\eta}{ab} \end{bmatrix} \\
 (47) &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [R_s] = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{a} & \frac{2F}{a} & \frac{2\eta}{a} & \frac{2F\eta}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{b} & \frac{2F}{b} & \frac{2\eta}{b} & \frac{2F\eta}{b} \end{bmatrix} \\
 (48) &
 \end{aligned}$$

os índices b e s, se referem à flexão (bending) e à cortante (shear)

Conforme visto no capítulo anterior, a energia de deformação U, de um elemento finito, é dada por :

$$U = \frac{1}{2} \int_A [N]^t [M] dA + \frac{1}{2} \int_A [\gamma]^t [Q] dA$$

a qual, em coordenadas adimensionais, fica da seguinte forma :

$$(49) \quad U = \frac{ab}{8} \iint [N]^t [M] d\xi d\eta + \frac{ab}{8} \iint [\gamma]^t [Q] d\xi d\eta$$

Substituindo-se os momentos e as cortantes, indicados em

(41) e em (42), na expressão da energia de deformação (49), obtém-se :

$$(50) \quad U = \frac{ab}{8} \iint [K]^t [D^b] [K] d\xi d\eta + \frac{ab}{8} \iint [\gamma]^t [D^e] [\gamma] d\xi d\eta$$

Substituindo-se, agora, as curvaturas e distorções dadas por (45) e por (46) na expressão da energia de deformação (50), obtém-se :

$$(51) \quad U = \frac{ab}{8} \iint [u]^e [C^{-1}]^t [R^b]^t [D^b] [R^b] [C^{-1}] [u]^e d\xi d\eta + \\ \frac{ab}{8} \iint [u]^e [C^{-1}]^t [R^e]^t [D^e] [R^e] [C^{-1}] [u]^e d\xi d\eta$$

a qual pode ser escrita da seguinte forma :

$$(52) \quad U = \frac{1}{2} [u]^e [K]^e [u]^e$$

onde $[K]^e$ é a matriz de rigidez do elemento, e é formada pela soma da matriz de rigidez do elemento devido à flexão com interação da cortante, com a matriz de rigidez do elemento devido apenas à cortante. Ou seja :

$$\begin{aligned}
 [K]^* &= \frac{ab}{4} [C^{-1}]^t [Mt] \left(\iiint [R_b]^t [D_b] [R_b] d\xi d\eta \right) [Mt] [C^{-1}] + \\
 &\quad \frac{ab}{4} [C^{-1}]^t [Mt] \left(\iiint [R_o]^t [D_o] [R_o] d\xi d\eta \right) [Mt] [C^{-1}] \\
 (53) \quad [K]^e &= \frac{ab}{4} [C^{-1}]^t [Mt] [K_b] [Mt] [C^{-1}] + \\
 &\quad \frac{ab}{4} [C^{-1}]^t [Mt] [K_o] [Mt] [C^{-1}]
 \end{aligned}$$

III-6. Determinação dos termos da matriz $[C^{-1}]$

Conforme já visto, em (31), a matriz $[C]$ é formada pelas matrizes dos polinômios $[P]$, de cada um dos nós do elemento. Tomando-se as coordenadas dos nós do elemento da figura 6, têm-se que

$$\begin{aligned}
 (54) \quad \xi(1) &= -1 & \eta(1) &= -1 \\
 \xi(2) &= 1 & \eta(2) &= -1 \\
 \xi(3) &= 1 & \eta(3) &= 1 \\
 \xi(4) &= -1 & \eta(4) &= -1
 \end{aligned}$$

assim, substituindo-se estes valores de ξ e η em

(38), determina-se a matriz [C], cujos valores da sua inversa, [C⁻¹], estão indicados no apêndice A.

III-7. Determinação dos termos das matrizes [K_b] e [K_e]

Pela expressão da matriz de rigidez escrita em (53), têm-se que :

$$[K_b] = \iint [R_b]^t [D_b] [R_b] d\xi d\eta$$

$$[K_e] = \iint [R_e]^t [D_e] [R_e] d\xi d\eta$$

onde as matrizes [R_b] e [R_e] estão escritas em (47) e em (48), e as matrizes [D_b] e [D_e] em (41) e em (42). Então, integrando-se os produtos das matrizes indicados acima, no domínio do elemento, obtém-se os seguintes termos não nulos para as matrizes [K_b] e [K_e] :

$$K_x(4,4) = \frac{256}{a^4}$$

$$K_x(4,6) = \frac{256\nu}{a^2 b^2}$$

$$K_b(4,14) = \frac{128}{a^4}$$

$$K_b(4,19) = \frac{128\nu}{a^2 b^2}$$

$$Kb(5,5) = \frac{128(1-\nu)}{a^2 b^2}$$

$$Kb(5,11) = \frac{128(1-\nu)}{a^2 b^2}$$

$$Kb(5,12) = \frac{128(1-\nu)}{a^2 b^2}$$

$$Kb(5,15) = \frac{64(1-\nu)}{a^2 b^2}$$

$$Kb(5,18) = \frac{64(1-\nu)}{a^2 b^2}$$

$$Kb(6,6) = \frac{256}{b^4}$$

$$Kb(6,14) = \frac{128\nu}{a^2 b^2}$$

$$Kb(6,19) = \frac{128}{b^4}$$

$$Kb(7,7) = \frac{768}{a^4}$$

$$Kb(7,9) = \frac{256\nu}{a^2 b^2}$$

$$Kb(7,20) = \frac{128\nu}{a^2 b^2}$$

$$Kb(8,8) = \frac{256}{3a^4} + \frac{512(1-\nu)}{3a^2 b^2}$$

$$Kb(8,10) = \frac{256\nu}{a^2 b^2}$$

$$Kb(8,16) = \frac{128}{3a^4} + \frac{128(1-\nu)}{3a^2 b^2}$$

$$Kb(9,9) = \frac{256}{3a^4} + \frac{512(1-\nu)}{3a^2 b^2}$$

$$Kb(9,20) = \frac{128}{3b^4} + \frac{128(1-\nu)}{3a^2 b^2}$$

$$Kb(10,10) = \frac{768}{b^4}$$

$$Kb(10,16) = \frac{128\nu}{a^2 b^2}$$

$$K_b(11,11) = \frac{256}{a^4} + \frac{1152(1-\nu)}{5a^2b^2}$$

$$K_b(11,12) = \frac{256\nu}{a^2b^2} + \frac{128(1-\nu)}{a^2b^2}$$

$$K_x(11,15) = \frac{64(1-\nu)}{a^2b^2}$$

$$K_x(11,18) = \frac{64(1-\nu)}{a^2b^2}$$

$$K_b(12,12) = \frac{256}{b^4} + \frac{1152(1-\nu)}{5a^2b^2}$$

$$K_b(12,15) = \frac{64(1-\nu)}{a^2b^2}$$

$$K_b(12,18) = \frac{64(1-\nu)}{a^2b^2}$$

$$K_b(14,14) = \frac{64}{a^4}$$

$$K_b(14,19) = \frac{64\nu}{a^2b^2}$$

$$K_b(15,15) = \frac{32(1-\nu)}{a^2b^2}$$

$$K_b(15,18) = \frac{32(1-\nu)}{a^2b^2}$$

$$K_b(16,16) = \frac{64}{3a^4} + \frac{64(1-\nu)}{3a^2b^2}$$

$$K_b(18,18) = \frac{32(1-\nu)}{a^2b^2}$$

$$K_b(19,19) = \frac{64}{b^4}$$

$$K_b(20,20) = \frac{64}{3b^4} + \frac{32(1-\nu)}{3a^2b^2}$$

$$K_8(13,13) = \frac{16}{a^2}$$

$$K_8(14,14) = \frac{16}{3a^2}$$

$$K_8(15,15) = \frac{16}{3a^2}$$

$$K_8(16,16) = \frac{16}{9a^2}$$

$$K_8(17,17) = \frac{16}{b^2}$$

$$K_8(18,18) = \frac{16}{3b^2}$$

$$K_8(19,19) = \frac{16}{3b^2}$$

$$K_8(20,20) = \frac{16}{9b^2}$$

III-8. Determinação do vetor de cargas nodais

Na determinação da matriz de rigidez $[K]^e$, considerou-se a energia de deformação (U) interna do elemento. Agora, na determinação do vetor de cargas nodais, considerar-se-á o trabalho (Ω) realizado pelas forças externas.

Estas forças externas podem ser tanto cargas nodais concentradas (F_r), quanto cargas distribuídas q , aplicadas uniformemente sobre a placa, na direção z . O trabalho (Ω) realizado pelas forças externas pode ser escrito da seguinte forma :

$$(55) \quad = \frac{1}{2} [u]^{et} [Mt] [Fr]^\circ + \frac{ab}{8} \iint q [Nv] d\xi d\eta$$

onde o vetor $[Nv]$ corresponde à primeira linha da matriz $[N]$, indicada em (35). Pondo-se a parcela de Ω devido às cargas distribuídas, também em função de ξ e η , têm-se :

$$(56) \quad = \frac{1}{2} [u]^{et} [Mt] [Fr]^\circ + \frac{ab}{8} [u]^{et} [Mt] \iint q [Nv]^\circ d\xi d\eta$$

indicando-se o vetor de cargas, para carregamento distribuído, por $[Fq]^{et} = \iint q [Nv]^\circ d\xi d\eta$, e fazendo-se a integração do vetor $[Nv]$, no domínio do elemento, obtém-se :

$$(57) \quad [Fq]^{et} = \frac{qab}{24} \begin{bmatrix} 6 & a & b & -a & -b & 6 & -a & b & a & -b & 6 & -a & -b & a & b \\ & & & & & & & & & & & & & & & 6 & a & -b & -a & b \end{bmatrix}$$

Pondo-se, agora, o vetor dos deslocamentos nodais $[u]^\circ$ e a matriz de transformação $[Mt]$ em evidência, determina-se a energia potencial (Ω) total do elemento, ou seja :

$$(58) \quad \Omega = \frac{1}{2} [u]^{\text{et}} [Mt] [F]^{\circ}$$

onde $[F]^{\circ} = [F_r]^{\circ} + [F_q]^{\circ}$.

III-9. Energia potencial total

Substituindo-se as expressões da energia de deformação U (52) e da energia potencial devido às cargas externas Ω (57), na expressão da energia potencial π_p (26), têm-se que :

$$(59) \quad \pi_p^{\circ} = \frac{1}{2} [u]^{\text{et}} [K]^{\circ} [u]^{\circ} + \frac{1}{2} [u]^{\text{et}} [F]^{\circ}$$

somando-se a contribuição de todos os elementos finitos, e partindo-se do princípio da mínima energia potencial, o qual estabelece que se uma estrutura está em equilíbrio, a variação da energia potencial será nula, pode-se escrever que :

$$\delta \pi_p = \delta [u]^{\text{t}} ([K] [u] - [F]) = 0$$

assim, chega-se à expressão final de equilíbrio da placa :

$$[F] = [K] [u]$$

onde [F] é o vetor de cargas nodais da estrutura, [K] é a matriz de rigidez da estrutura e [u] é o vetor dos deslocamentos nodais incógnitos da estrutura.

III-10. Determinação dos esforços resultantes

Para a determinação dos esforços resultantes, utiliza-se as relações (41) e (42), que são :

$$[M] = \begin{vmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{vmatrix} = -D \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{vmatrix}$$

$$[Q] = \begin{vmatrix} Q_x \\ Q_y \end{vmatrix} = -\frac{6}{5} \begin{vmatrix} Gh & 0 \\ 0 & Gh \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{vmatrix}$$

onde [N] e [γ] estão indicados em (45) e em (46).

Entrando-se com as coordenadas de ζ e η de um determinado ponto, nas expressões de $[R_b]$ e $[R_e]$ indicadas em (47) e (48), obtém-se os valores dos esforços deste ponto. Depois é só verificar o número de elementos que contribuem para este ponto, e calcular os valores médios dos esforços

III-11. Condições de contorno

A formulação do elemento finito em estudo é baseada apenas em função de deslocamentos, e, por isso, somente condições de contorno de deslocamentos poderão ser impostas.

Uma das características da teoria de Reissner é satisfazer a três condições de contorno. No caso de eixos simplesmente apoiados ou engastados, existem dois tipos de condições de contorno, uma das quais conduz à solução exata, enquanto a outra conduz a uma solução aproximada.

No caso de placas retangulares, as condições de contorno para um eixo onde x é constante são as seguintes :

a) eixo simplesmente apoiado:

a.1) solução exata:

Reisser : $W=0$; $M_x=0$; $M_{xy}=0$

El. Finito : $W=0$; $\theta_x \neq 0$; $\theta_y \neq 0$; $\bar{\gamma}_x \neq 0$; $\bar{\gamma}_y \neq 0$

a.2) solução aproximada:

Reissner : $W=0$; $M_x=0$; $\theta_y=0$

El. Finito : $W=0$; $\theta_x \neq 0$; $\theta_y=0$; $\bar{\gamma}_x \neq 0$; $\bar{\gamma}_y=0$

b) eixo engastado

b.1) solução exata:

Reissner : $W=0$; $\theta_x=0$; $M_{xy}=0$
El. Finito : $W=0$; $\theta_x=0$; $\theta_y \neq 0$; $\bar{\gamma}_x=0$; $\bar{\gamma}_y \neq 0$

b.2) solução aproximada:

Reissner : $W=0$; $\theta_x=0$; $\theta_y=0$
El. Finito : $W=0$; $\theta_x=0$; $\theta_y=0$; $\bar{\gamma}_x=0$; $\bar{\gamma}_y=0$

c) eixo livre

Reissner : $M_x=0$; $M_{xy}=0$; $Q_x=0$
El. Finito : $W \neq 0$; $\theta_x \neq 0$; $\theta_y \neq 0$; $\bar{\gamma}_x=0$; $\bar{\gamma}_y \neq 0$

CAPÍTULO IV

RESULTADOS NUMÉRICOS

IV-1. Introdução

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos para três casos de placas com diferentes tipos de contorno, obtidos através do Método dos Elementos Finitos (MEF).

Estas placas têm dupla simetria, de forma que os resultados correspondem a valores obtidos na análise de apenas um quarto da placa. No caso do Método dos Elementos Finitos, foi utilizada uma malha quadrada, com 25 elementos.

A apresentação destes resultados é feita com o uso de tabelas e de gráficos, onde também estão indicados os valores obtidos pela Teoria Clássica e pela Teoria de Reissner, ambas com resolução analítica, e empregando-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC), para que se possa ter uma comparação dos diversos métodos. Após a apresentação das tabelas e dos gráficos, é feita uma avaliação do comportamento do elemento finito utilizado.

Nestas tabelas e gráficos, estão representados apenas os valores máximos da flecha, momentos e cortantes, cujos pontos de localização estão indicados no cabeçalho das tabelas e nas figuras representativas dos exemplos.

Os três exemplos estudados são :

- a) placa com todos os lados simplesmente

- apoiados
- b) placa com lados simplesmente apoiados e engastados, dois a dois
- c) placa com lados simplesmente apoiados e livres, dois a dois

Em todos os casos, foram empregadas as condições de contorno que conduzem a uma solução aproximada, indicadas no capítulo anterior.

IV-2. Apresentação das tabelas e gráficos

Para uma maior facilidade de apresentação das tabelas e dos gráficos, os resultados são escritos em forma de coeficientes adimensionais, os quais estão definidos a seguir :

$$\alpha = \frac{W(x,y) \cdot D}{q \cdot a^4}$$

$$\lambda_x = \frac{M_x(x,y)}{q \cdot a^2}$$

$$\lambda_y = \frac{M_y(x,y)}{q \cdot a^2}$$

$$\lambda_{xy} = \frac{M_{xy}(x,y)}{q \cdot a^2}$$

$$\gamma_x = \frac{Q_x(x,y)}{q \cdot a}$$

$$\gamma_y = \frac{Q_y(x,y)}{q \cdot a}$$

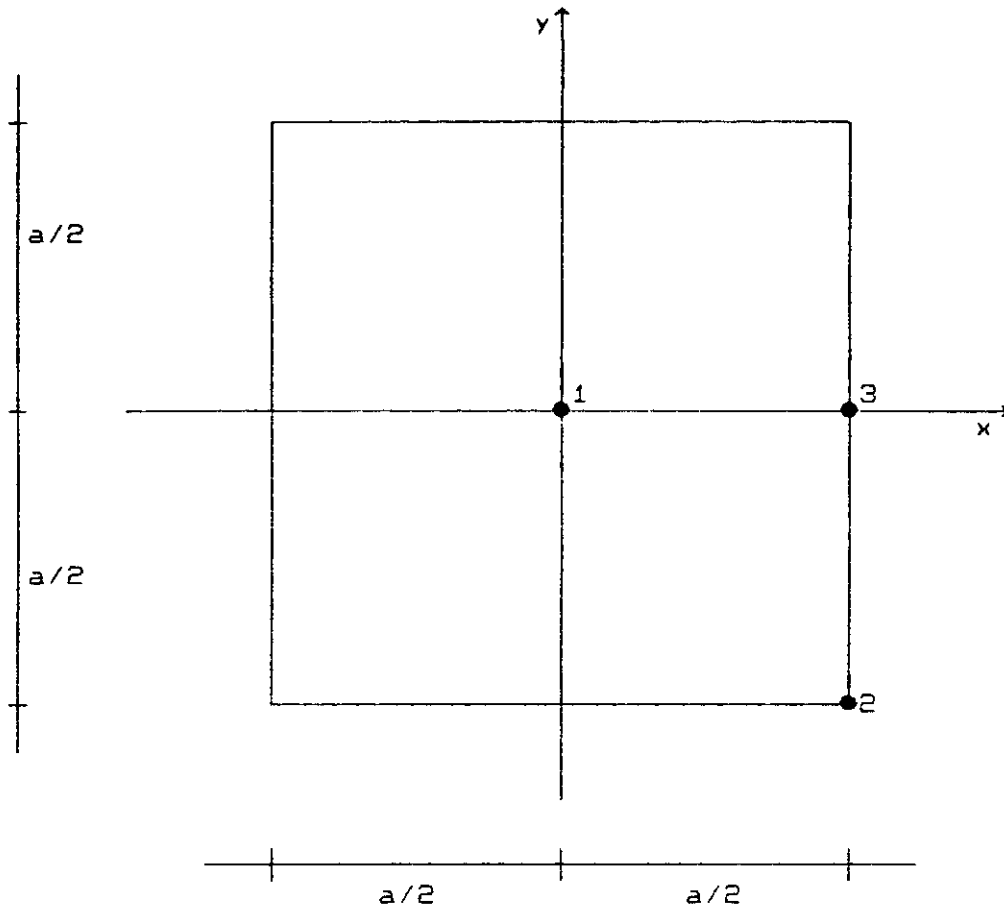
Em todas as tabelas, o único parâmetro que varia, é a relação espessura/largura (h/a) da placa. Todas

as placas analisadas têm coeficiente de Poisson igual a 0,3 e relação entre as larguras (b/a) igual a 1.

Nos gráficos, as relações espessura/largura (h/a) estão indicadas no eixo horizontal, enquanto os coeficientes adimensionais estão indicados nos eixos verticais.

Há casos onde estão faltando valores. A explicação para isto é a de que não foi possível a obtenção destes valores, seja através de softwares fornecidos, no caso do MEC, seja através de resultados já calculados, no caso da resolução analítica da teoria de Reissner.

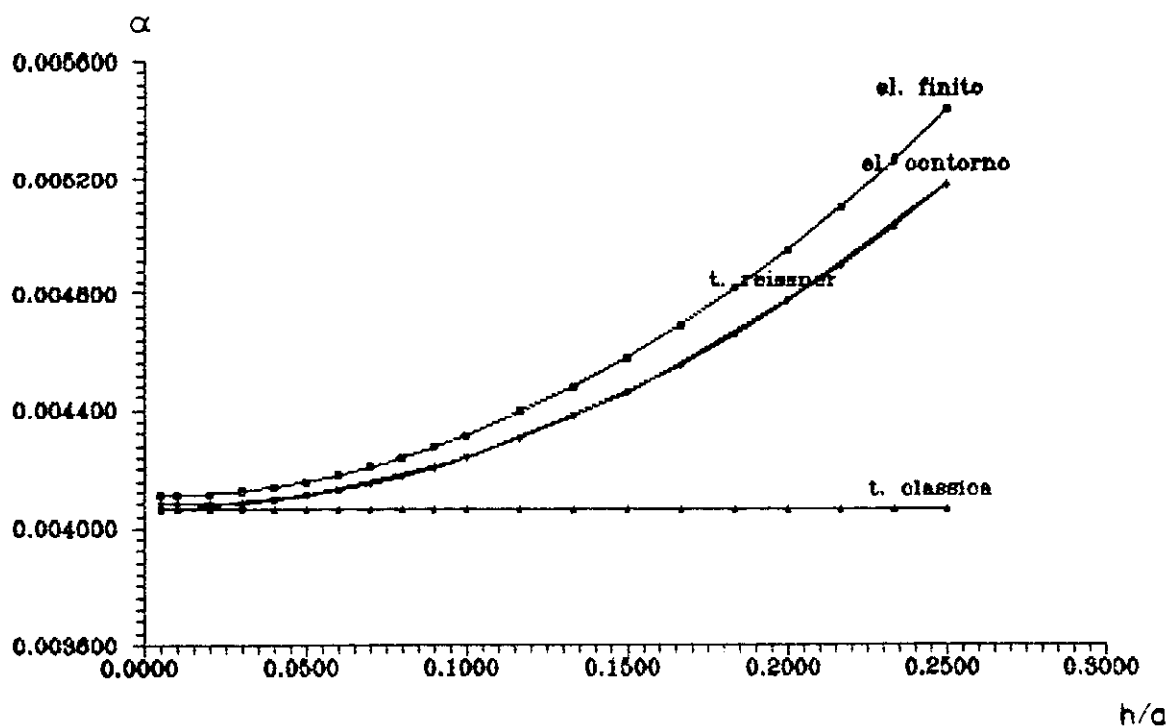
CASO 1
(placa apoiada/apoiada)



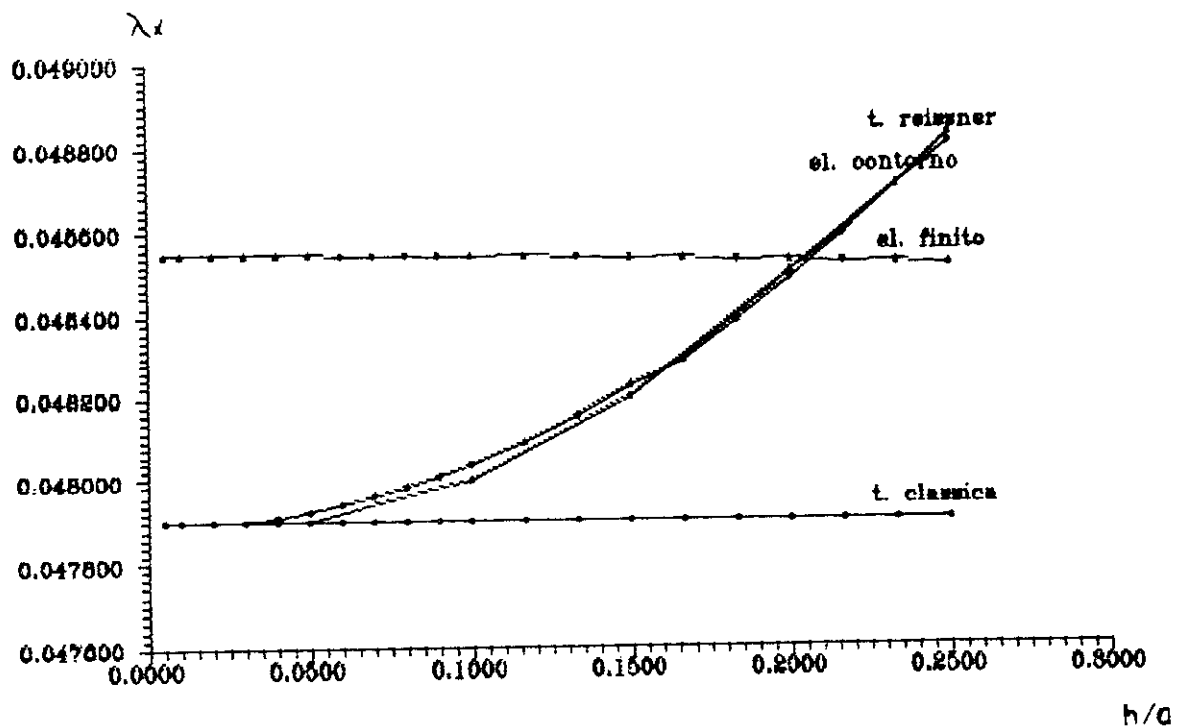
Os resultados apresentados neste caso de placa são :

- deslocamento vertical (W) : ponto 1
- momento fletor (M_x) : ponto 1
- momento torçor (M_{xy}) : ponto 2
- cortante na direção x (Q_x) : ponto 3

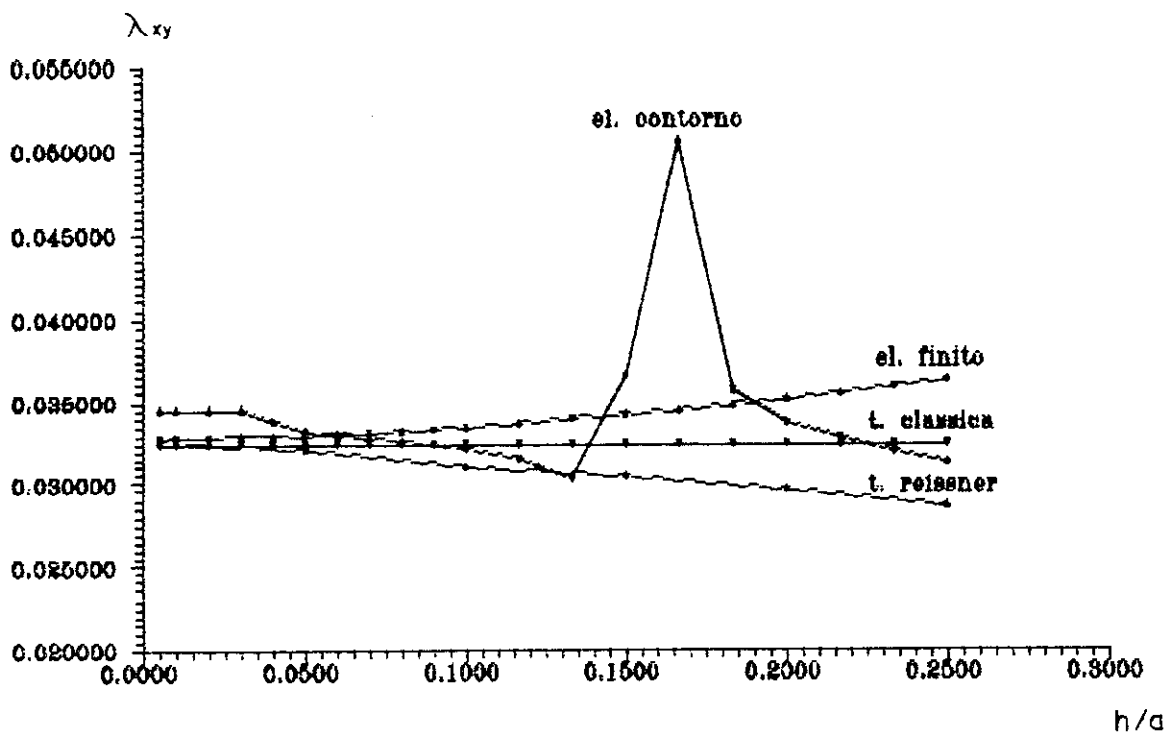
h/a	Valores maximos do α (1)			
	Elemento finito	Teoria Classica	Reissner t. analitica	Elementos de Contorno
0,0050	0,004106	0,00406	0,00406	
0,0100	0,004107	0,00406	0,00406	
0,0200	0,004114	0,00406		
0,0300	0,004124	0,00406		0,004078
0,0400	0,004139	0,00406		0,004091
0,0500	0,004158	0,00406	0,00411	0,004107
0,0600	0,004182	0,00406		0,004127
0,0700	0,004209	0,00406		0,004150
0,0800	0,004241	0,00406		0,004177
0,0900	0,004277	0,00406		0,004207
0,1000	0,004318	0,00406	0,00424	0,004241
0,1167	0,004395	0,00406		0,004306
0,1334	0,004483	0,00406		0,004381
0,1500	0,004584	0,00406	0,00446	0,004465
0,1667	0,004696	0,00406		0,004557
0,1834	0,004820	0,00406		0,004663
0,2000	0,004956	0,00406	0,00478	0,004778
0,2167	0,005103	0,00406		0,004902
0,2334	0,005263	0,00406		0,005036
0,2500	0,005434	0,00406	0,00518	0,005180



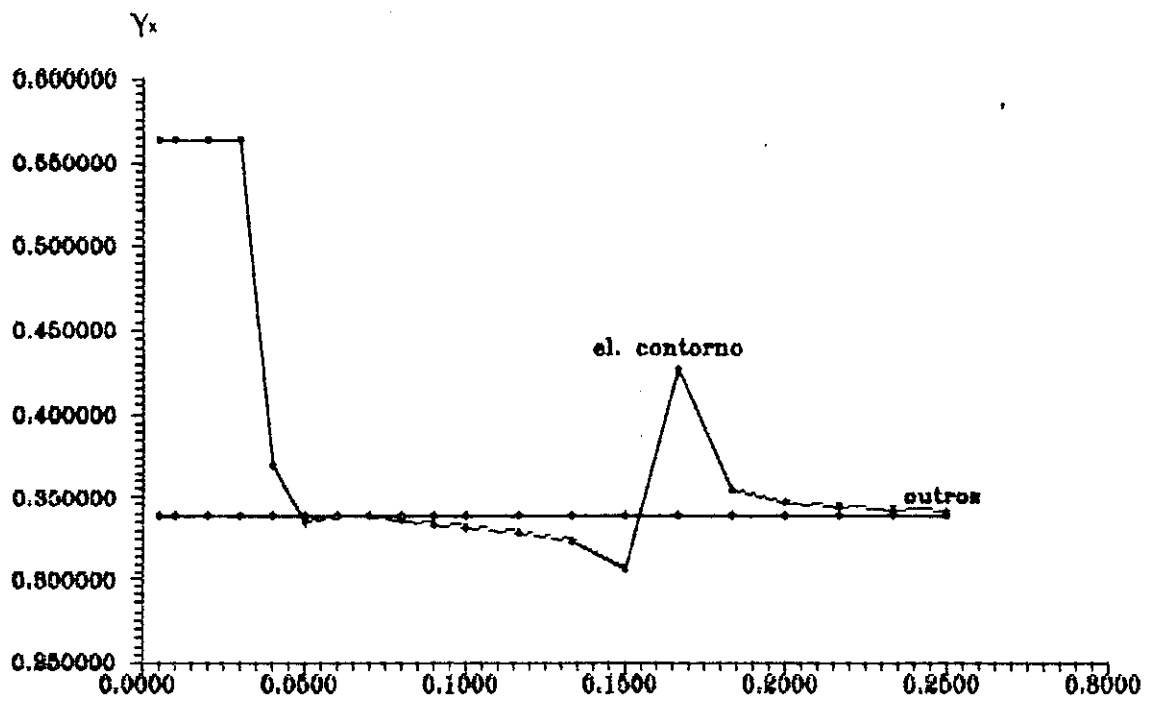
h/a	Valores maximos de λ_x (1)			
	Elemento finito	Teoria Classica	Reissner r. analitica	Elementos de Contorno
0,0050	0,048545	0,0479	0,0479	
0,0100	0,048545	0,0479	0,0479	
0,0200	0,048545	0,0479		
0,0300	0,048544	0,0479		0,047900
0,0400	0,048544	0,0479		0,047910
0,0500	0,048544	0,0479	0,0479	0,047924
0,0600	0,048543	0,0479		0,047940
0,0700	0,048542	0,0479		0,047960
0,0800	0,048542	0,0479		0,047982
0,0900	0,048541	0,0479		0,048008
0,1000	0,048540	0,0479	0,0480	0,048036
0,1167	0,048538	0,0479		0,048091
0,1334	0,048536	0,0479		0,048154
0,1500	0,048534	0,0479	0,0482	0,048227
0,1667	0,048531	0,0479		0,048286
0,1834	0,048528	0,0479		0,048385
0,2000	0,048525	0,0479	0,0485	0,048483
0,2167	0,048522	0,0479		0,048587
0,2334	0,048518	0,0479		0,048700
0,2500	0,048514	0,0479	0,0488	0,048821



h/a	Valores maximos do λ_{xy} (2)			
	Elemento finito	Teoria Classica	Reissner r. analitica	Elementos de Contorno
0,0050	0,032839	0,0325	0,0325	
0,0100	0,032844	0,0325	0,0325	
0,0200	0,032863	0,0325		
0,0300	0,032895	0,0325		0,034516
0,0400	0,032940	0,0325		0,033842
0,0500	0,032997	0,0325	0,0321	0,033262
0,0600	0,033067	0,0325		0,032969
0,0700	0,033149	0,0325		0,032798
0,0800	0,033243	0,0325		0,032641
0,0900	0,033348	0,0325		0,032446
0,1000	0,033465	0,0325	0,0311	0,032192
0,1167	0,033684	0,0325		0,031565
0,1334	0,033931	0,0325		0,030393
0,1500	0,034206	0,0325	0,0305	0,026664
0,1667	0,034506	0,0325		0,050580
0,1834	0,034829	0,0325		0,035733
0,2000	0,035176	0,0325	0,0297	0,033773
0,2167	0,035544	0,0325		0,032845
0,2334	0,035931	0,0325		0,032015
0,2500	0,036338	0,0325	0,0287	0,031349

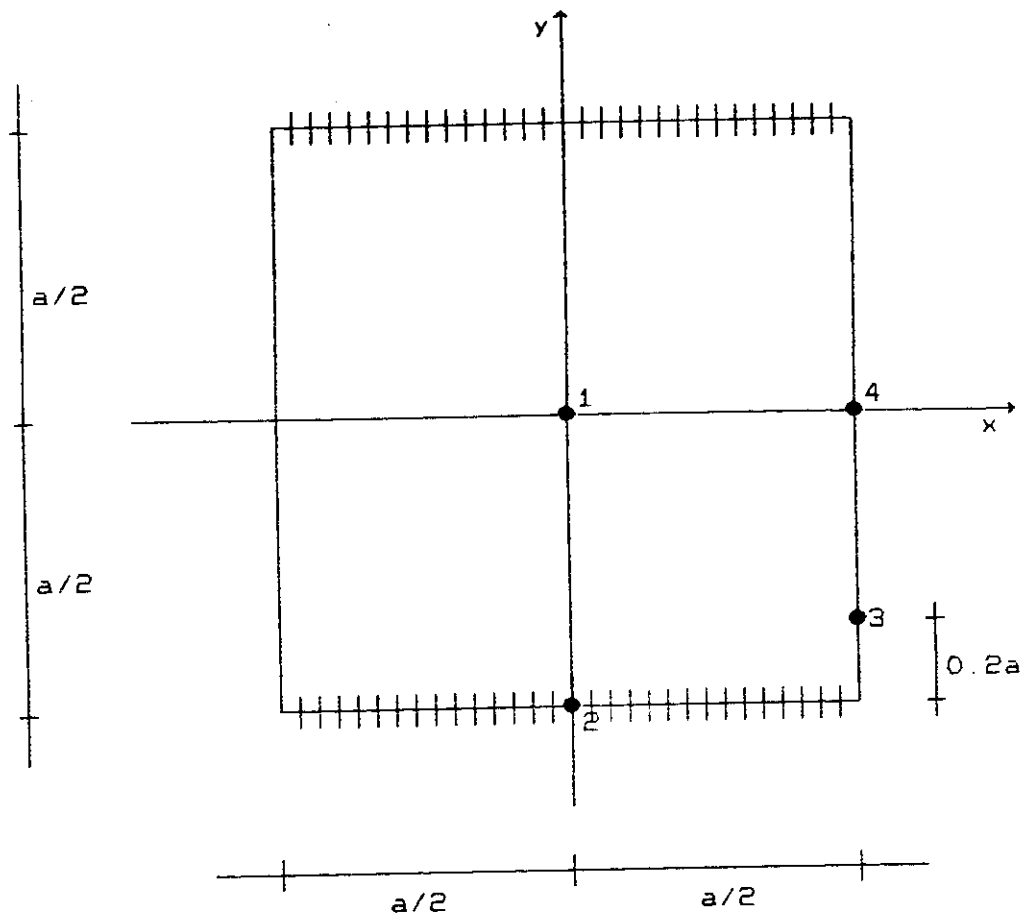


h/a	Valores maximos do γ_x (8)			
	Elemento finito	Teoria Classica	Reissner r. analitica	Elementos de Contorno
0,0050	0,33917	0,338	0,338	
0,0100	0,33917	0,338	0,338	
0,0200	0,33916	0,338		
0,0300	0,33916	0,338		0,56832
0,0400	0,33915	0,338		0,36994
0,0500	0,33914	0,338	0,338	0,33444
0,0600	0,33913	0,338		0,33832
0,0700	0,33913	0,338		0,33802
0,0800	0,33913	0,338		0,33571
0,0900	0,33913	0,338		0,33337
0,1000	0,33913	0,338	0,338	0,33145
0,1167	0,33913	0,338		0,32852
0,1334	0,33913	0,338		0,32372
0,1500	0,33914	0,338	0,338	0,30663
0,1667	0,33914	0,338		0,42659
0,1834	0,33915	0,338		0,35482
0,2000	0,33916	0,338	0,338	0,34698
0,2167	0,33916	0,338		0,34427
0,2334	0,33916	0,338		0,34243
0,2500	0,33915	0,338	0,338	0,34144



h/a

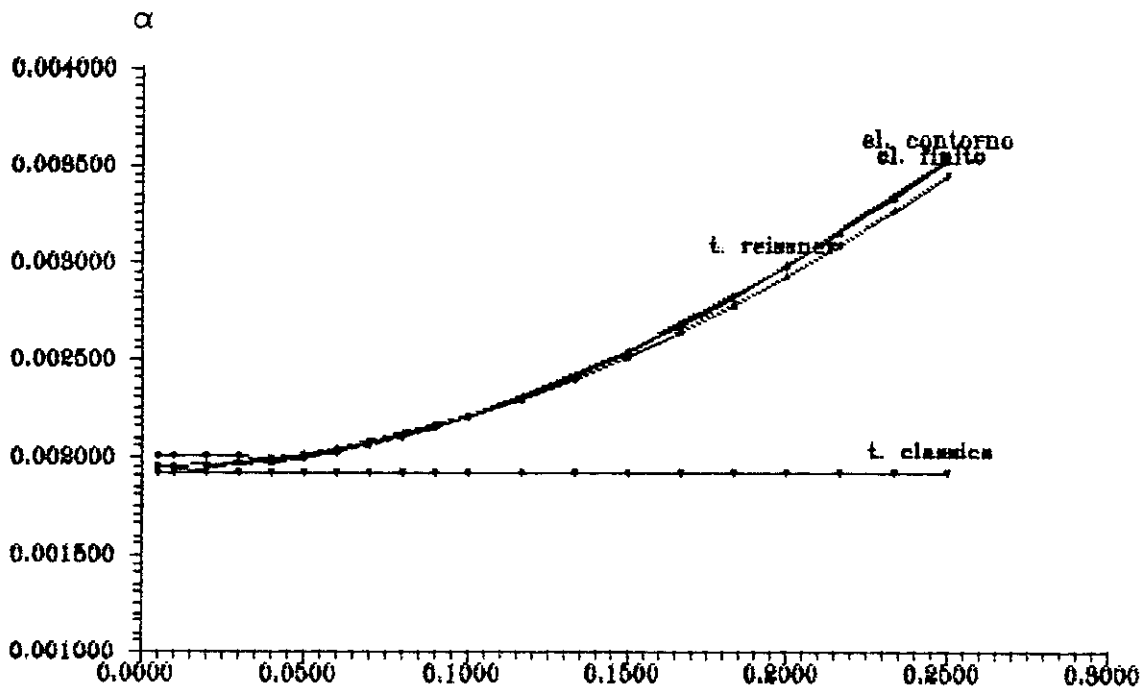
CASO 2
(placa apoiada/engastada)



Os resultados apresentados, neste caso de placa são :

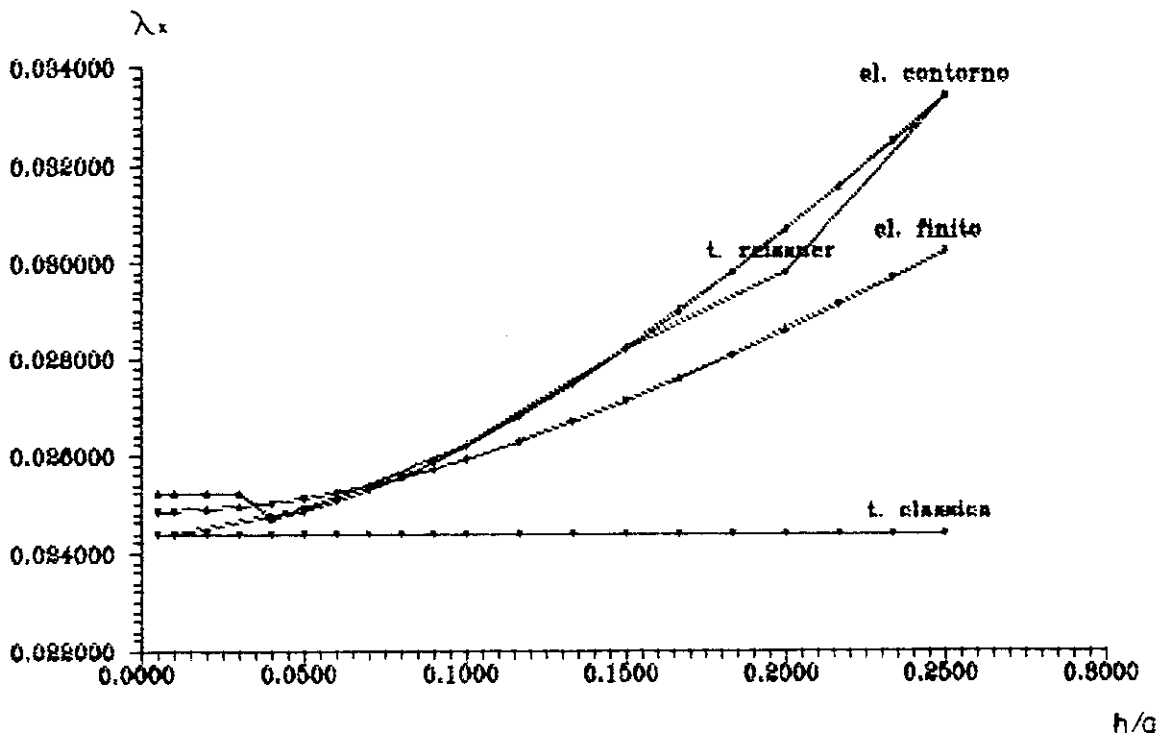
- deslocamento vertical (W) : ponto 1
- momento fletor (M_x) : ponto 2
- momento fletor (M_y) : ponto 1
- momento torçor (M_{xy}) : ponto 3
- cortante na direção x (Q_x) : ponto 4

h/a	Valores maximos de α (1)			
	Elemento finito	Teoria Classica	Reissner r. analitica	Elementos de Contorno
0,0050	0,001948	0,00192	0,00192	
0,0100	0,001950	0,00192	0,00192	
0,0200	0,001957	0,00192		
0,0300	0,001970	0,00192		0,002007
0,0400	0,001988	0,00192		0,001968
0,0500	0,002012	0,00192	0,00199	0,001990
0,0600	0,002040	0,00192		0,002022
0,0700	0,002073	0,00192		0,002059
0,0800	0,002111	0,00192		0,002101
0,0900	0,002154	0,00192		0,002148
0,1000	0,002202	0,00192	0,00220	0,002201
0,1167	0,002292	0,00192		0,002300
0,1334	0,002395	0,00192		0,002412
0,1500	0,002510	0,00192	0,00254	0,002536
0,1667	0,002637	0,00192		0,002673
0,1834	0,002777	0,00192		0,002822
0,2000	0,002927	0,00192	0,00298	0,002982
0,2167	0,003090	0,00192		0,003153
0,2334	0,003263	0,00192		0,003335
0,2500	0,003447	0,00192	0,00353	0,003527

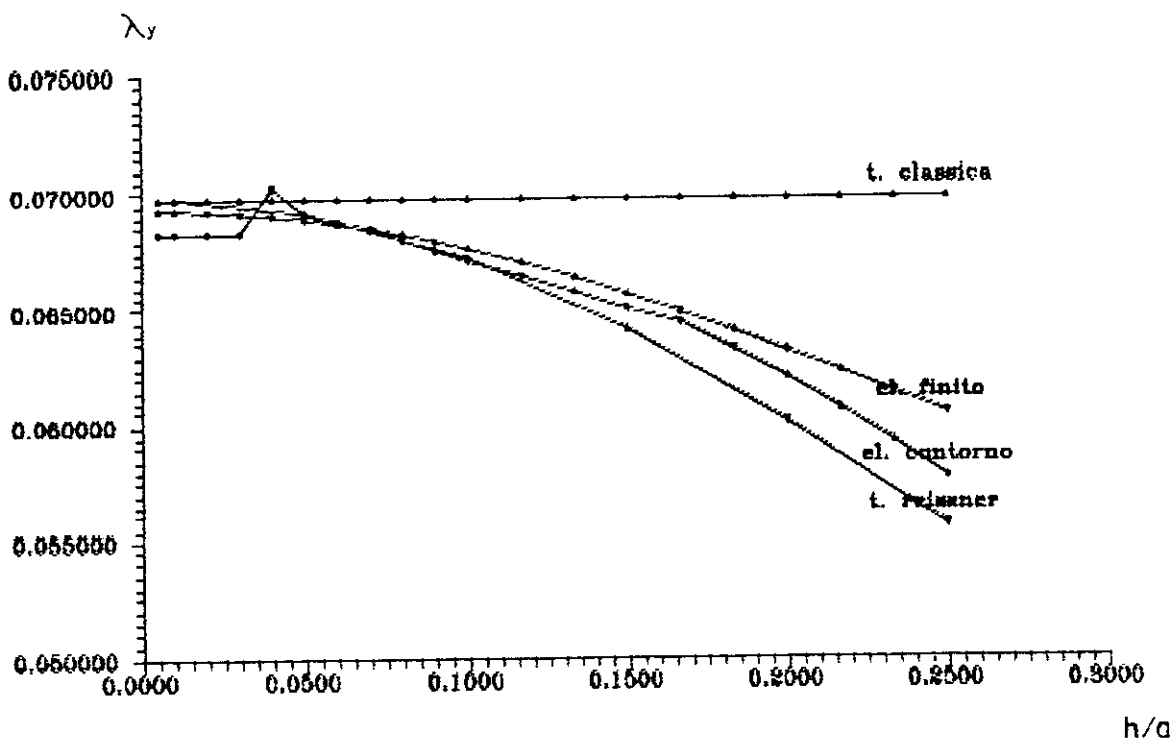


h/a

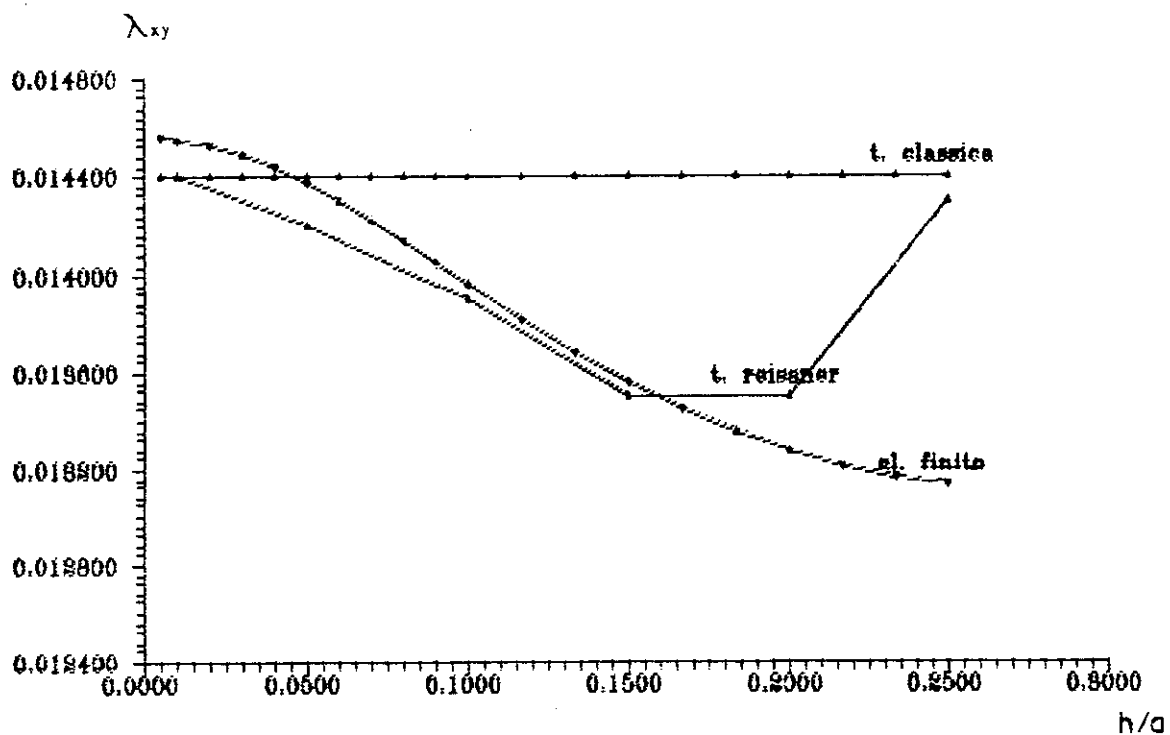
h/a	Valores maximos de λ_x (1)			
	Elemento finito	Teoria Classica	Reissner r. analitica	Elementos de Contorno
0,0050	0,024844	0,0244	0,0244	
0,0100	0,024852	0,0244	0,0244	
0,0200	0,024887	0,0244		
0,0300	0,024944	0,0244		0,025228
0,0400	0,025022	0,0244		0,024702
0,0500	0,025122	0,0244	0,0249	0,024857
0,0600	0,025244	0,0244		0,025062
0,0700	0,025385	0,0244		0,025298
0,0800	0,025545	0,0244		0,025566
0,0900	0,025724	0,0244		0,025865
0,1000	0,025920	0,0244	0,0262	0,026192
0,1167	0,026281	0,0244		0,026796
0,1334	0,026683	0,0244		0,027468
0,1500	0,027121	0,0244	0,0282	0,028199
0,1667	0,027589	0,0244		0,028980
0,1834	0,028083	0,0244		0,029805
0,2000	0,028598	0,0244	0,0298	0,030666
0,2167	0,029131	0,0244		0,031555
0,2334	0,029677	0,0244		0,032467
0,2500	0,030232	0,0244	0,0334	0,033394



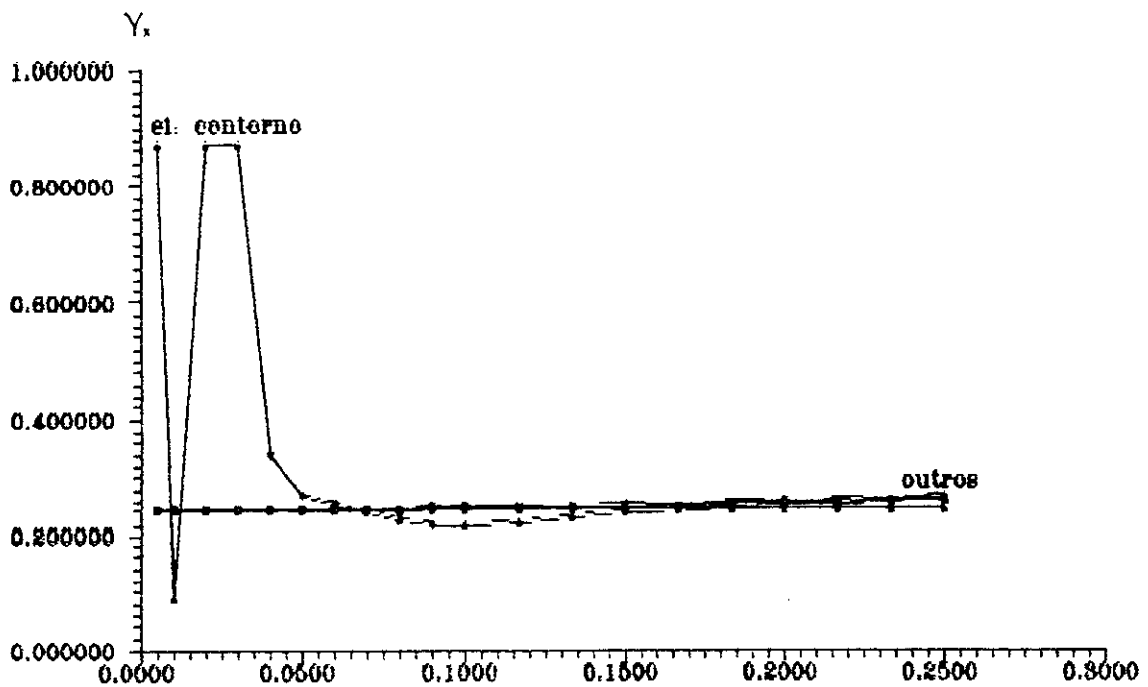
h/a	Valores maximos de λ_y (2)			
	Elemento finito	Teoria Classica	Reissner r. analitica	Elementos de Contorno
0,0050	0,069822	0,0698	0,0698	
0,0100	0,069810	0,0698	0,0698	
0,0200	0,069260	0,0698		
0,0300	0,069178	0,0698		0,068346
0,0400	0,069062	0,0698		0,070277
0,0500	0,068912	0,0698	0,0692	0,069157
0,0600	0,068730	0,0698		0,068774
0,0700	0,068514	0,0698		0,068474
0,0800	0,068266	0,0698		0,068063
0,0900	0,067986	0,0698		0,067600
0,1000	0,067675	0,0698	0,0673	0,067144
0,1167	0,067093	0,0698		0,066466
0,1334	0,066437	0,0698		0,065831
0,1500	0,065716	0,0698	0,0642	0,065062
0,1667	0,064940	0,0698		0,064522
0,1834	0,064119	0,0698		0,063326
0,2000	0,063263	0,0698	0,0602	0,062117
0,2167	0,062380	0,0698		0,060761
0,2334	0,061479	0,0698		0,059338
0,2500	0,060568	0,0698	0,0557	0,057822



h/a	Valores maximos de λ_{xy} (3)			
	Elemento finito	Teoria Classica	Reissner r. analitica	Elementos de Contorno
0,0050	0,014557	0,0144	0,0144	
0,0100	0,014551	0,0144	0,0144	
0,0200	0,014527	0,0144		
0,0300	0,014489	0,0144		
0,0400	0,014437	0,0144		
0,0500	0,014378	0,0144	0,0142	
0,0600	0,014301	0,0144		
0,0700	0,014221	0,0144		
0,0800	0,014137	0,0144		
0,0900	0,014050	0,0144		
0,1000	0,013962	0,0144	0,0139	
0,1167	0,013818	0,0144		
0,1334	0,013682	0,0144		
0,1500	0,013559	0,0144	0,0135	
0,1667	0,013449	0,0144		
0,1834	0,013355	0,0144		
0,2000	0,013277	0,0144	0,0135	
0,2167	0,013215	0,0144		
0,2334	0,013168	0,0144		
0,2500	0,013136	0,0144	0,0143	

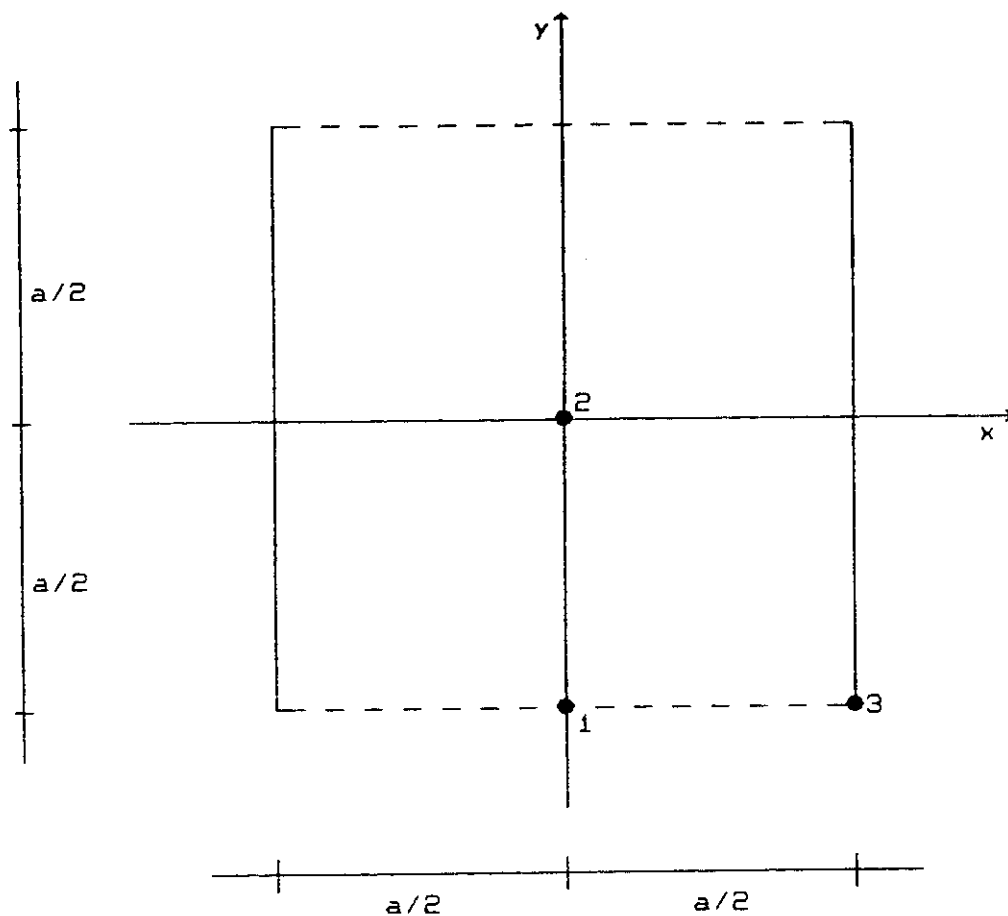


h/a	Valores maximos de γ_x (4)			
	Elemento finito	Teoria Classica	Reissner r. analitica	Elementos de Contorno
0,0050	0,24540	0,244	0,244	
0,0100	0,24544	0,244	0,244	
0,0200	0,24560	0,244		
0,0300	0,24584	0,244		0,80877
0,0400	0,24614	0,244		0,33845
0,0500	0,24647	0,244	0,246	0,27093
0,0600	0,24684	0,244		0,25558
0,0700	0,24724	0,244		0,24043
0,0800	0,24766	0,244		0,22710
0,0900	0,24811	0,244		0,21950
0,1000	0,24860	0,244	0,249	0,21746
0,1167	0,24948	0,244		0,22227
0,1334	0,25044	0,244		0,23131
0,1500	0,25147	0,244	0,254	0,24059
0,1667	0,25255	0,244		0,24410
0,1834	0,25368	0,244		0,25079
0,2000	0,25484	0,244	0,260	0,25484
0,2167	0,25603	0,244		0,25832
0,2334	0,25726	0,244		0,26108
0,2500	0,25852	0,244	0,267	0,26375



h/a

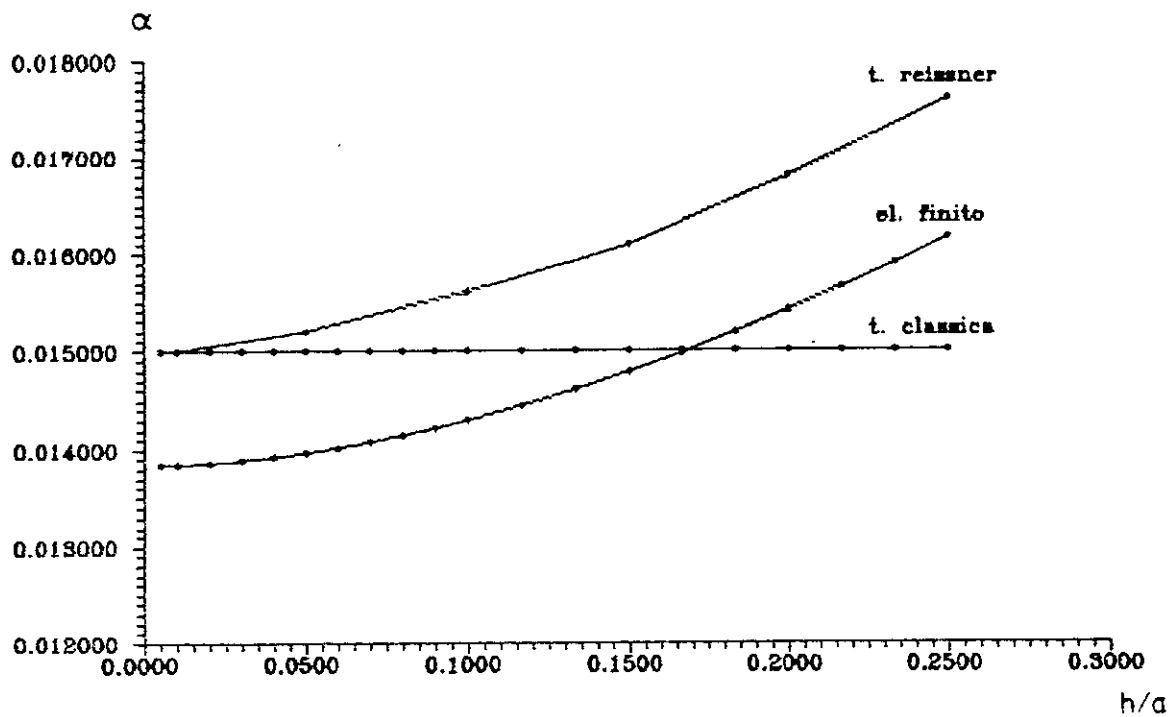
CASO 3
(placa apoiada/livre)



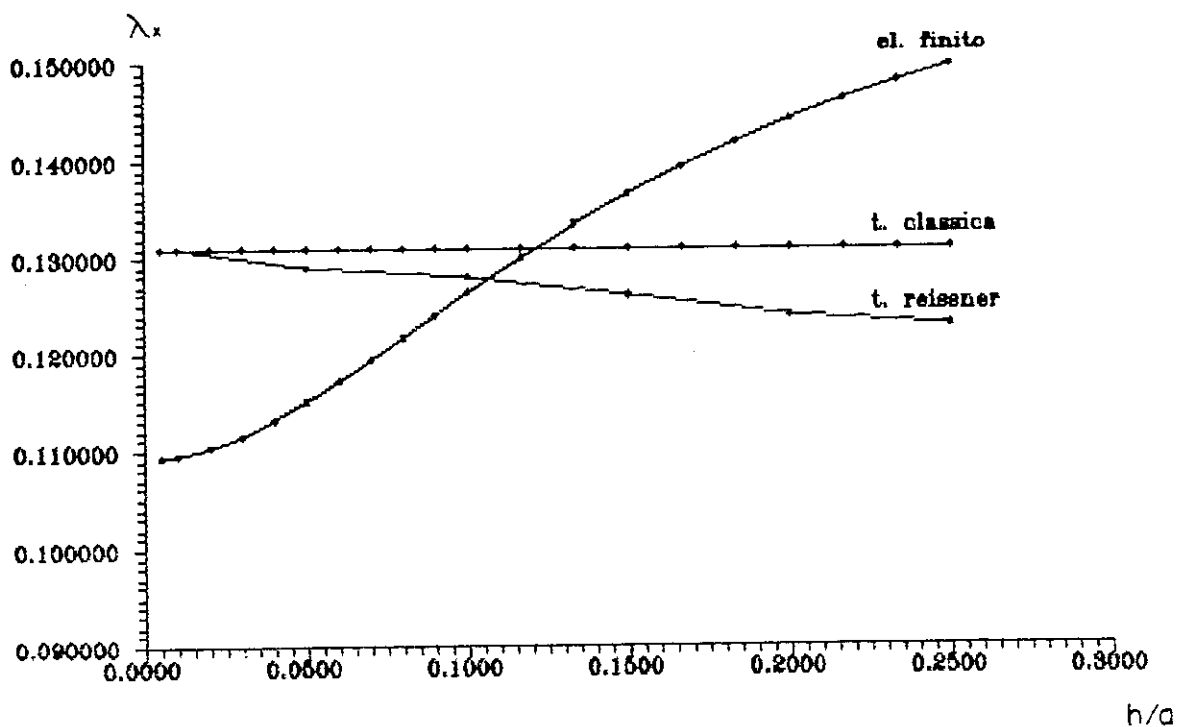
Os resultados apresentados neste caso de placa são :

- deslocamento vertical (W) : ponto 1
- momento fletor (M_x) : ponto 1
- momento fletor (M_y) : ponto 2
- momento torçor (M_{xy}) : ponto 3
- cortante na direção x (Q_x) : ponto 3

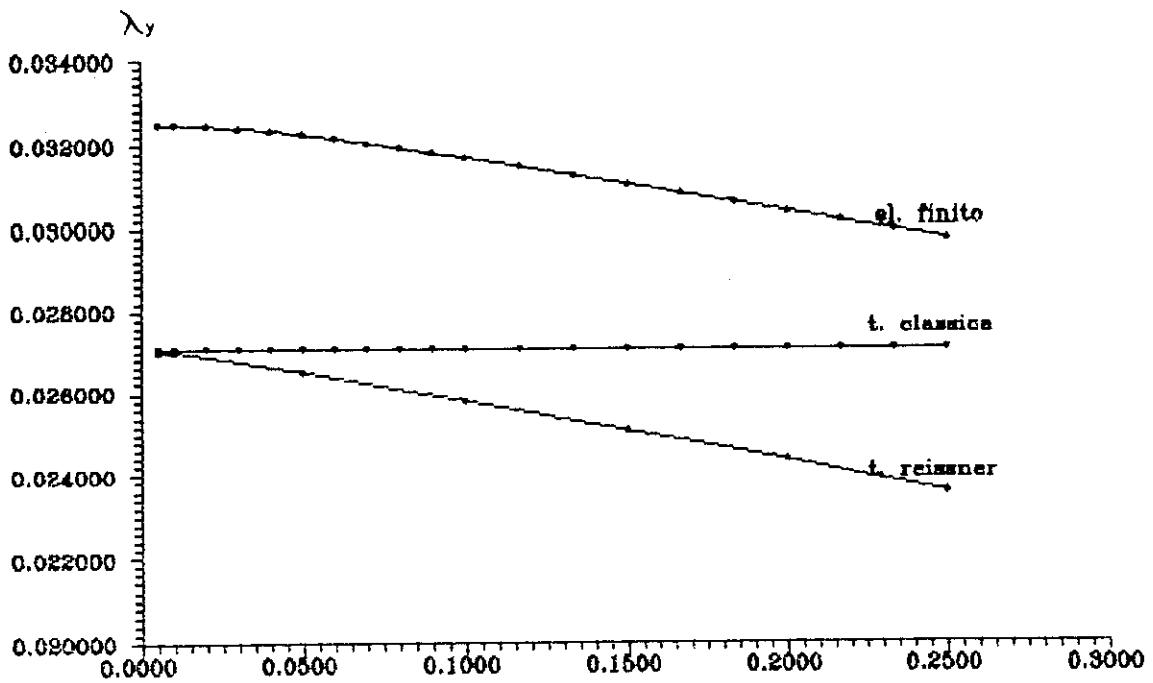
h/a	Valores maximos de α (1)			
	Elemento finito	Teoria Classica	Reissner r. analitica	Elementos de Contorno
0,0050	0,013846	0,0150	0,0150	
0,0100	0,013850	0,0150	0,0150	
0,0200	0,013866	0,0150		
0,0300	0,013891	0,0150		0,011431
0,0400	0,013925	0,0150		0,014117
0,0500	0,013969	0,0150	0,0152	0,015007
0,0600	0,014020	0,0150		0,015181
0,0700	0,014080	0,0150		0,015257
0,0800	0,014146	0,0150		0,015320
0,0900	0,014219	0,0150		0,015381
0,1000	0,014299	0,0150	0,0156	0,015434
0,1167	0,014445	0,0150		0,015446
0,1334	0,014607	0,0150		0,0151808
0,1500	0,014785	0,0150	0,0161	0,014786
0,1667	0,014978	0,0150		0,016419
0,1834	0,015187	0,0150		0,016563
0,2000	0,015410	0,0150	0,0168	0,016731
0,2167	0,015649	0,0150		0,016889
0,2334	0,015903	0,0150		0,016986
0,2500	0,016172	0,0150	0,0176	0,016850



h/a	Valores maximos de λ_x (1)			
	Elemento finito	Teoria Classica	Reissner r. analitica	Elementos de Contorno
0,0050	0,10936	0,131	0,131	
0,0100	0,10955	0,131	0,131	
0,0200	0,11031	0,131		
0,0300	0,11153	0,131		
0,0400	0,11213	0,131		
0,0500	0,11302	0,131	0,129	
0,0600	0,11374	0,131		
0,0700	0,11438	0,131		
0,0800	0,11509	0,131		
0,0900	0,11581	0,131		
0,1000	0,11630	0,131	0,128	
0,1167	0,11996	0,131		
0,1334	0,12337	0,131		
0,1500	0,12648	0,131	0,126	
0,1667	0,12929	0,131		
0,1834	0,13182	0,131		
0,2000	0,13409	0,131	0,124	
0,2167	0,13612	0,131		
0,2334	0,13795	0,131		
0,2500	0,13958	0,131	0,123	

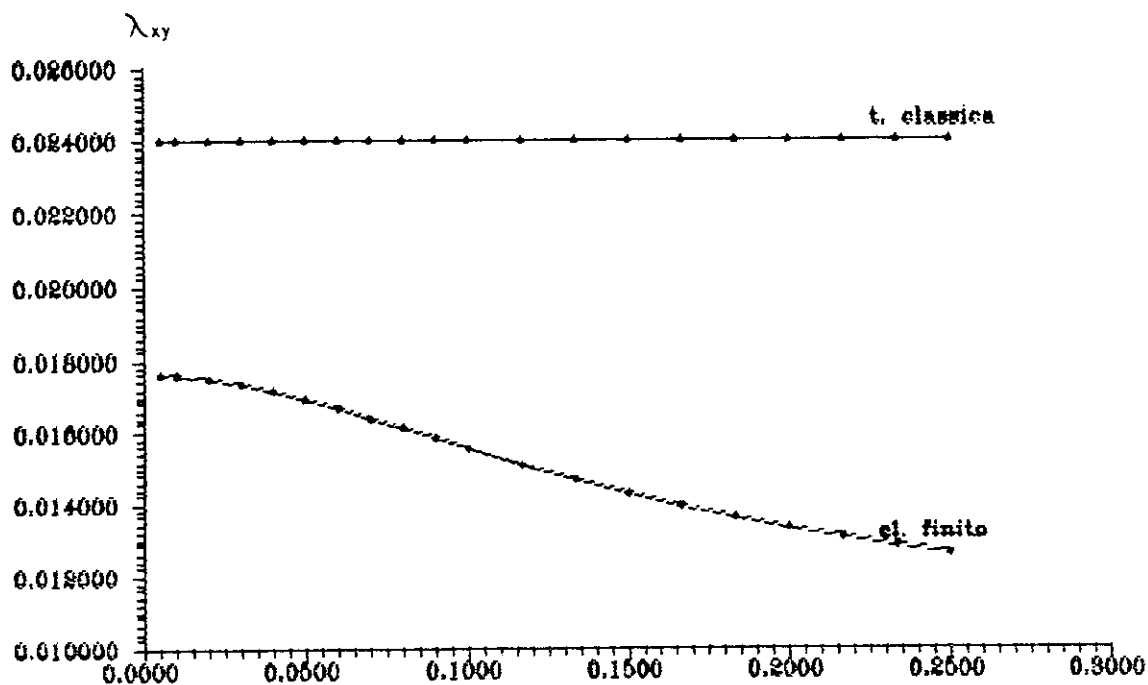


h/a	Valores maximos de λ_y (2)			
	Elemento finito	Teoria Classica	Reissner r. analitica	Elementos de Contorno
0,0050	0,032475	0,0271	0,0270	
0,0100	0,032467	0,0271	0,0270	
0,0200	0,032436	0,0271		
0,0300	0,032385	0,0271		0,044977
0,0400	0,032316	0,0271		0,031838
0,0500	0,032293	0,0271	0,0265	0,027767
0,0600	0,032136	0,0271		0,026865
0,0700	0,032029	0,0271		0,026484
0,0800	0,031914	0,0271		0,026249
0,0900	0,031793	0,0271		0,026070
0,1000	0,031668	0,0271	0,0258	0,025916
0,1167	0,031455	0,0271		0,025697
0,1334	0,031237	0,0271		0,004002
0,1500	0,031019	0,0271	0,0251	0,025078
0,1667	0,030801	0,0271		0,024856
0,1834	0,030585	0,0271		0,024604
0,2000	0,030369	0,0271	0,0244	0,024339
0,2167	0,030155	0,0271		0,024047
0,2334	0,029941	0,0271		0,023739
0,2500	0,029728	0,0271	0,0236	0,023370



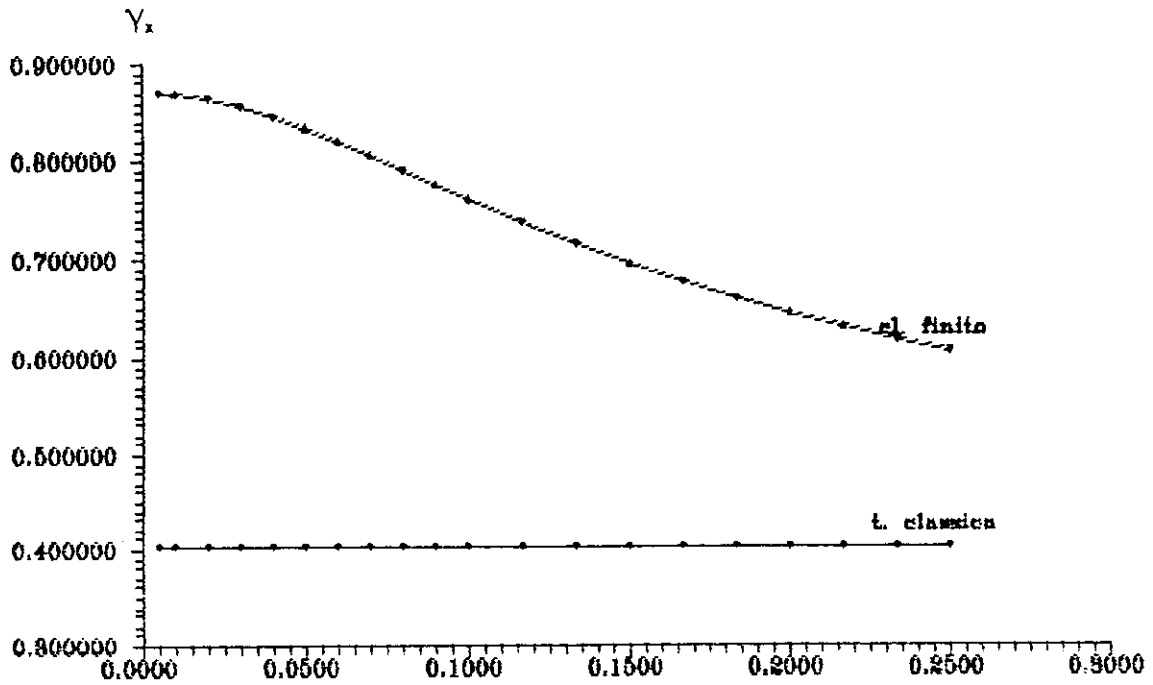
h/a

h/a	Valores maximos de λ_{xy} (8)			
	Elemento finito	Teoria Classica	Reissner r. analitica	Elementos de Contorno
0,0050	0,017631	0,024	0	
0,0100	0,017608	0,024	0	
0,0200	0,017515	0,024		
0,0300	0,017366	0,024		0,194302
0,0400	0,017172	0,024		0,137849
0,0500	0,016941	0,024	0	0,086396
0,0600	0,016685	0,024		0,056937
0,0700	0,016412	0,024		0,034580
0,0800	0,016131	0,024		0,019799
0,0900	0,015847	0,024		0,087108
0,1000	0,015567	0,024	0	0,027712
0,1167	0,015114	0,024		0,037986
0,1334	0,014690	0,024		24,750267
0,1500	0,014298	0,024	0	0,041161
0,1667	0,013940	0,024		0,008130
0,1834	0,013615	0,024		0,051687
0,2000	0,013323	0,024	0	0,105786
0,2167	0,013060	0,024		0,192245
0,2334	0,012823	0,024		0,348663
0,2500	0,012612	0,024	0	0,727734



h/a

h/a	Valores maximos de γ_x (B)			
	Elemento finito	Teoria Classica	Reissner r. analitica	Elementos de Contorno
0,0050	0,87074	0,404	15,718	
0,0100	0,86944	0,404	8,115	
0,0200	0,86433	0,404		
0,0300	0,85622	0,404		78,07841
0,0400	0,84563	0,404		4,87288
0,0500	0,83313	0,404	2,035	0,24843
0,0600	0,81921	0,404		1,11673
0,0700	0,80471	0,404		1,33919
0,0800	0,78976	0,404		1,38668
0,0900	0,77480	0,404		1,27086
0,1000	0,76009	0,404	1,278	1,34472
0,1167	0,73657	0,404		1,38748
0,1334	0,71466	0,404		125,59893
0,1500	0,69452	0,404	1,027	0,72347
0,1667	0,67614	0,404		0,82178
0,1834	0,65942	0,404		0,84164
0,2000	0,64422	0,404	0,902	0,84745
0,2167	0,63038	0,404		0,85609
0,2334	0,61776	0,404		0,87714
0,2500	0,60622	0,404	0,828	0,94215



h/a

IV-3. Análise dos resultados

O objetivo deste parágrafo é tirar conclusões sobre o comportamento do elemento finito utilizado neste trabalho. Para isso, além dos resultados já fornecidos pelas tabelas e gráficos, são mostradas também novas tabelas onde estão indicadas quatro tipos de diferenças percentuais, calculadas para os três tipos de placas, com três relações de espessuras diferentes, que são : 0,005, 0,05 e 0,25. As diferenças percentuais calculadas são :

- dif. 1 : entre o MEF e a Teoria Clássica
- dif. 2 : entre o MEF e a resolução analítica
- dif. 3 : entre a solução exata e a aproximada
- dif. 4 : entre um quarto de malha com 16 elementos e um com 25 elementos

b) relação $h/a = 0.005$

Caso 1 (placa apoiada/apoiada) :

	dif. 1	dif. 2	dif. 3	dif. 4
W	1,127	1,133	0,002	0,586
Mx	1,346	1,347	0,002	0,770
My	1,346	1,347	0,002	0,770
Mxy	1,043	1,043	1,945	0,456
Qx	0,346	0,346	0,930	0,135

Caso 2 (placa apoiada/engastada) :

	dif. 1	dif. 2	dif. 3	dif. 4
W	1,440	1,458	0,008	0,859
Mx	1,821	1,820	0,004	1,039
My	- 0,685	- 0,685	0,008	0,359
Mxy	1,091	1,090	0,795	—
Qx	0,574	0,574	0,318	1,785

Caso 3 (placa apoiada/livre) :

	dif. 1	dif. 2	dif. 3	dif. 4
W	- 7,961	- 7,693	0,003	7,564
Mx	-16,521	-16,519	0,011	20,876
My	19,832	20,278	0,005	-13,039
Mxy	-26,536	—	3,509	25,373
Qx	115,531	—	19,740	20,434

a) relação $h/a = 0.050$

Caso 1 (placa apoiada/apoiada) :

	dif. 1	dif. 2	dif. 3	dif. 4
W	2,423	1,168	1,521	0,381
M _x	1,343	1,344	1,300	0,768
M _y	1,343	1,344	1,300	0,768
M _{xy}	1,530	2,794	-16,461	- 0,390
Q _x	0,337	0,337	-16,880	-19,795

Caso 2 (placa apoiada/engastada) :

	dif. 1	dif. 2	dif. 3	dif. 4
W	4,770	1,106	- 0,004	0,188
M _x	2,963	0,896	- 0,030	0,760
M _y	- 1,272	- 0,418	0,728	0,249
M _{xy}	- 0,185	- 1,218	- 7,272	—
Q _x	1,014	0,191	-18,132	18,484

Caso 3 (placa apoiada/livre) :

	dif. 1	dif. 2	dif. 3	dif. 4
W	- 6,876	- 8,812	7,867	9,572
Mx	-12,196	-12,154	14,023	14,480
My	18,939	21,634	-17,657	14,960
Mxy	-29,411	—	-19,686	26,179
Qx	106,220	—	15,580	1,421

c) relação $h/a = 0.250$

Caso 1 (placa apoiada/apoiada) :

	dif. 1	dif. 2	dif. 3	dif. 4
W	33,844	4,903	13,241	0,585
Mx	1,283	- 0,586	13,136	0,735
My	1,283	- 0,586	13,136	0,735
Mxy	11,808	26,613	-66,372	0,871
Qx	0,341	0,340	12,474	0,256

Caso 2 (placa apoiada/engastada) :

	dif. 1	dif. 2	dif. 3	dif. 4
W	79,551	- 2,951	4,708	0,649
Mx	23,901	- 9,485	4,544	0,554
My	13,226	8,740	6,659	0,295
Mxy	8,781	- 8,140	-47,145	—
Qx	5,950	- 3,176	4,242	0,224

Caso 3 (placa apoiada/livre) :

	dif. 1	dif. 2	dif. 3	dif. 4
W	7,810	- 8,114	3,076	8,800
Mx	14,186	-21,610	2,189	16,438
My	9,699	25,966	- 4,285	17,660
Mxy	-47,451	—	- 2,819	23,102
Qx	50,054	—	20,492	21,677

IV-3.1. Conclusões

Analisando-se todos os resultados apresentados, conclui-se que o elemento não apresenta travamento, e comporta-se muito bem, principalmente nos dois primeiros casos. Os problemas maiores surgem quando se aproxima dos bordos, como pôde ser observado, principalmente para os casos dos momentos torçores e cortantes. Em grande parte isso se deve ao fato de não se poder atingir a solução exata, ou seja, de não se conseguir zerar o M_{xy} nos bordos. No caso do bordo livre, observam-se grandes variações, com exceção da flecha.

Diante deste comportamento, sugere-se a procura de uma formulação mais adequada para o elemento, com a certeza de que assim, os problemas detectados possam ser minimizados.

APÊNDICE A

Os valores não nulos da matriz $[C^{-1}]$, são os seguintes :

$C(1,1)=0.25$	$C(1,2)=0.125$	$C(1,3)=0.125$
$C(1,4)=-0.125$	$C(1,5)=-0.125$	$C(1,6)=0.25$
$C(1,7)=-0.125$	$C(1,8)=0.125$	$C(1,9)=0.125$
$C(1,10)=-0.125$	$C(1,11)=0.25$	$C(1,12)=-0.125$
$C(1,13)=-0.125$	$C(1,14)=0.125$	$C(1,15)=0.125$
$C(1,16)=0.25$	$C(1,17)=0.125$	$C(1,18)=-0.125$
$C(1,19)=-0.125$	$C(1,20)=0.125$	$C(2,1)=-0.375$
$C(2,2)=-0.125$	$C(2,3)=-0.125$	$C(2,4)=0.125$
$C(2,5)=0.125$	$C(2,6)=0.375$	$C(2,7)=-0.125$
$C(2,8)=0.125$	$C(2,9)=0.125$	$C(2,10)=-0.125$
$C(2,11)=0.375$	$C(2,12)=-0.125$	$C(2,12)=-0.125$
$C(2,13)=-0.125$	$C(2,14)=0.125$	$C(2,15)=0.125$
$C(2,16)=-0.375$	$C(2,17)=-0.125$	$C(2,18)=0.125$
$C(2,19)=0.125$	$C(2,20)=-0.125$	$C(3,1)=-0.375$
$C(3,2)=-0.125$	$C(3,3)=-0.125$	$C(3,4)=0.125$
$C(3,5)=0.125$	$C(3,6)=-0.375$	$C(3,7)=0.125$
$C(3,8)=-0.125$	$C(3,9)=-0.125$	$C(3,10)=0.125$
$C(3,11)=0.375$	$C(3,12)=-0.125$	$C(3,13)=-0.125$
$C(3,14)=0.125$	$C(3,15)=0.125$	$C(3,16)=0.375$
$C(3,17)=0.125$	$C(3,18)=-0.125$	$C(3,19)=-0.125$
$C(3,20)=0.125$	$C(4,2)=-0.125$	$C(4,4)=0.125$
$C(4,7)=0.125$	$C(4,9)=-0.125$	$C(4,12)=0.125$
$C(4,14)=-0.125$	$C(4,17)=-0.125$	$C(4,19)=0.125$
$C(5,1)=0.5$	$C(5,2)=0.125$	$C(5,3)=0.125$
$C(5,4)=-0.125$	$C(5,5)=-0.125$	$C(5,6)=-0.5$
$C(5,7)=0.125$	$C(5,8)=-0.125$	$C(5,9)=-0.125$
$C(5,10)=0.125$	$C(5,11)=0.5$	$C(5,12)=-0.125$
$C(5,13)=-0.125$	$C(5,14)=0.125$	$C(5,15)=0.125$
$C(5,16)=-0.5$	$C(5,17)=-0.125$	$C(5,18)=0.125$

$C(5,19)=0.125$	$C(5,20)=-0.125$	$C(6,3)=-0.125$
$C(6,5)=0.125$	$C(6,8)=-0.125$	$C(6,10)=0.125$
$C(6,15)=-0.125$	$C(6,18)=0.125$	$C(6,20)=-0.125$
$C(7,1)=0.125$	$C(7,2)=0.125$	$C(7,4)=-0.125$
$C(7,6)=-0.125$	$C(7,7)=0.125$	$C(7,9)=-0.125$
$C(7,11)=-0.125$	$C(7,12)=0.125$	$C(7,14)=-0.125$
$C(7,16)=0.125$	$C(7,17)=0.125$	$C(7,19)=-0.125$
$C(8,2)=0.125$	$C(8,4)=-0.125$	$C(8,7)=-0.125$
$C(8,9)=0.125$	$C(8,12)=0.125$	$C(8,14)=-0.125$
$C(8,17)=-0.125$	$C(8,19)=0.125$	$C(9,3)=0.125$
$C(9,5)=-0.125$	$C(9,8)=-0.125$	$C(9,10)=0.125$
$C(9,13)=0.125$	$C(9,15)=-0.125$	$C(9,18)=-0.125$
$C(9,20)=0.125$	$C(10,1)=0.125$	$C(10,3)=0.125$
$C(10,5)=-0.125$	$C(10,6)=0.125$	$C(10,8)=0.125$
$C(10,10)=-0.125$	$C(10,11)=-0.125$	$C(10,13)=0.125$
$C(10,15)=-0.125$	$C(10,16)=-0.125$	$C(10,18)=0.125$
$C(10,20)=-0.125$	$C(11,1)=-0.125$	$C(11,2)=-0.125$
$C(11,4)=0.125$	$C(11,6)=0.125$	$C(11,7)=-0.125$
$C(11,9)=0.125$	$C(11,11)=-0.125$	$C(11,12)=0.125$
$C(11,14)=-0.125$	$C(11,16)=0.125$	$C(11,17)=0.125$
$C(11,19)=-0.125$	$C(12,1)=-0.125$	$C(12,3)=-0.125$
$C(12,5)=0.125$	$C(12,6)=0.125$	$C(12,8)=0.125$
$C(12,10)=-0.125$	$C(12,11)=-0.125$	$C(12,13)=0.125$
$C(12,15)=-0.125$	$C(12,16)=0.125$	$C(12,18)=-0.125$
$C(12,20)=0.125$	$C(13,4)=0.25$	$C(13,9)=0.25$
$C(13,14)=0.25$	$C(13,19)=0.25$	$C(14,4)=-0.25$
$C(14,9)=0.25$	$C(14,14)=0.25$	$C(14,19)=-0.25$
$C(15,4)=-0.25$	$C(15,9)=-0.25$	$C(15,14)=0.25$
$C(15,19)=0.25$	$C(16,4)=0.25$	$C(16,9)=-0.25$
$C(16,14)=0.25$	$C(16,19)=-0.25$	$C(17,5)=0.25$
$C(17,10)=0.25$	$C(17,15)=0.25$	$C(17,20)=0.25$
$C(18,5)=-0.25$	$C(18,10)=0.25$	$C(18,15)=0.25$
$C(18,20)=-0.25$	$C(19,5)=-0.25$	$C(19,10)=-0.25$
$C(19,15)=0.25$	$C(19,20)=0.25$	$C(20,5)=0.25$
$C(20,10)=-0.25$	$C(20,15)=0.25$	$C(20,20)=-0.25$

BIBLIOGRAFIA

1. REISSNER, E. "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", Journal of applied mechanics, vol.12, 1945, pp. 69-77
2. TIMOSHENKO, S. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. - Teoria de placas y laminas, Espanha, Urmo, 1970. 621p.
3. PRYOR, CHARLES W. & BARKER, R.M. "Finite element bending analysis of Reissner Plates", Journal of the Engineering Mechanics Division, 1970, pp. 967-983
4. ZIENKIEWICZ, O.C. & CHEUNG, Y.K. - The finite element method in structural and continuum mechanics, London, McGraw-Hill, 1967. 274p.
5. MONTANARI, I ; MARTINELLI, D.A.O. & SAVASSI, W. - Placas elásticas: equações gerais e placas retangulares. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1986. 114p.
6. RIBEIRO, J.R.M. - Estudo da validade da hipótese de KIRCHHOFF-LOVE na teoria das placas. Rio de Janeiro, UFRJ, 1976. 131p.
7. SALERNO, V.L. & GOLDBERG, M.A. "Effect of shear deformation on the bending of rectangular plates", Journal of applied mechanics, vol.27, 1960
8. PAIVA, J.B. de - Instabilidade de folhas planas com vinculações elásticas. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1980, 175p.

9. BREBBIA, C.A. & CONNOR, J.J. - Métodos de los elementos finitos en la ingeniería civil. Madrid, CPPE, 1975, 279p.
10. DOWN, J.D. & BYRD, D.E. - "The identification and elimination of artificial stiffening errors in finite elements", International journal for numerical methods in engineering, vol 26, 1988, pp. 743-762.