

"ANÁLISE DA VIBRAÇÃO LIVRE DE MEIOS ELÁSTICOS  
BIDIMENSIONAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO"

ENG. HUMBERTO BREVES CODA

ORIENTADOR: PROF.DR. WILSON SÉRGIO VENTURINI

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

"ANÁLISE DA VIBRAÇÃO LIVRE DE MEIOS ELÁSTICOS  
BIDIMENSIONAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO"

ENG. HUMBERTO BREVES CODA

ORIENTADOR: PROF. DR. WILSON SÉRGIO VENTURINI

Dissertação apresentada à Escola  
de Engenharia de São Carlos, da  
Universidade de São Paulo, como  
parte dos requisitos para obten-  
ção do título de "Mestre" em En-  
genharia de Estruturas.

São Carlos  
Junho de 1990

"Se te parece que sabes muito  
e o entendes muito bem, tem  
por certo que é muito mais  
o que ignoras."

Imitação de Cristo

Livro I Cap. II.

Aos meus pais.

## AGRADECIMENTOS

À Eveline, minha esposa, que em todos os momentos esteve presente me estimulando e apoiando.

Ao Professor Wilson Sérgio Venturini pela excelente orientação e dedicação durante toda elaboração deste trabalho.

Ao Professor José Elias Laier pela colaboração, sem a qual os conhecimentos não estariam tão bem fundamentados.

Ao Professor Hermano de Souza Ribeiro pelo apoio e incentivo.

Ao Sr. Antonio Valdair Carneiro pela datilografia à Sra. Sylvia Helena M. Villani pelas ilustrações, à Sra. Maria Nadir Minatel pela revisão das Referências bibliográficas e ao Sr. Laerte A. Soares pela animação e serviços prestados.

Finalmente à todos os colegas, professores e funcionários que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Neste trabalho, o problema da vibração livre é estudado através da formulação direta do Método dos Elementos de Contorno empregando a solução fundamental de Kelvin. A integral de domínio resultante deste procedimento contém as características inerciais do corpo estudado. Esta integral é tratada de três formas distintas, gerando conseqüentemente formulações diferentes. No primeiro caso, o domínio do corpo é subdividido em células que permitem determinar, através da integração da aproximação celular, a contribuição inercial dos nós internos e de contorno. A segunda formulação é conhecida como processo da dupla reciprocidade e transforma a integral de domínio em uma soma de integrais de contorno, evitando-se assim a discretização interna. Finalmente a terceira é uma formulação alternativa que também transforma a integral de domínio em uma soma de integrais de contorno através da aplicação finita do teorema de Gauss-Ostrogradsky. Apresentam-se ainda exemplos numéricos visando comparar a eficiência das formulações apresentadas.

## **ABSTRACT**

In this work the free vibration problem is studied by the direct formulation of Boundary Element Method employing the Kelvin fundamental solution. The resulting domain integral of this procedure contain the inertial characteristics of the body under analysis. This integral is treated by three distinct ways producing consequently different formulations. In the first case, the body domain is divided into cells, which gives the determination of the internal and boundary nodal inertial contributions by integrating the term with cellular approximation. The second formulation is the known dual reciprocity process that transforms domain integral into a summation of boundary integral, avoiding therefore the internal discretization. Finally third way to treat the problem is an alternative formulation which also transforms the domain integral into a summation of boundary integrals through finite application of the Gauss-Ostrogradsky theorem. In addition numerical exemples are presented emphasizing the efficiency of given formulations.

## Í N D I C E

I.	INTRODUÇÃO.....	1
II.	TEORIA BÁSICA E EQUAÇÕES INTEGRAIS.....	7
	2.1 - Equações que regem a elastodinâmica.....	7
	2.2 - Simplificação para o caso de vibração livre de corpos finitos.....	14
	2.3 - Solução fundamental.....	18
	2.4 - Equação integral de contorno.....	21
	2.4.1 - Equação integral de contorno para pontos internos.....	21
	2.4.2 - Equação integral de contorno para pontos de contorno.....	22
	2.4.3 - Equação integral de contorno para pontos externos .....	25
	2.4.4 - Equação integral de contorno para tensões.....	25
III.	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	27
	3.1 - Introdução.....	27
	3.2 - Descrição geral do método.....	28
	3.3 - Discretização geométrica.....	28
	3.4 - Discretização das variáveis.....	31
	3.4.1 - Elemento linear contínuo.....	33
	3.4.2 - Elemento linear descontínuo.....	34



3.5 - Transformação da equação integral em um sistema algébrico.....	39
3.6 - Integração sobre os elementos.....	43
3.6.1 - Integração numérica.....	44
3.6.2 - Integração analítica.....	45
3.7 - Propriedades da matriz H .....	46
IV. A DUPLA RECIPROCIDADE APLICADA A VIBRAÇÃO LIVRE DE DOMÍNIOS FINITOS.....	48
4.1 - Introdução.....	48
4.2 - Definição do problema.....	48
4.3 - Transformação da integral de domínio em integral de contorno.....	49
4.4 - Obtenção do sistema algébrico de equações.....	51
4.5 - Obtenção da solução numérica.....	54
4.5.1 - Corpos livres de restrição.....	54
4.5.2 - Corpos com graus de liberdade restritos.....	57
V. PROCESSO DA INTEGRAÇÃO DIRETA.....	60
5.1 - Introdução.....	60
5.2 - Definição do problema.....	61
5.3 - Discretização geométrica do domínio.....	62
5.4 - Aproximação dos deslocamentos para pontos internos.....	66
5.5 - Transformação da equação integral em um sistema algébrico.....	68
5.6 - Obtenção da solução numérica.....	71
5.7 - Integração sobre as células.....	72
VI. FORMULAÇÃO PROPOSTA .....	78
6.1 - Introdução.....	78
6.2 - Definição do problema.....	79
6.3 - Aproximação das variáveis de domínio.....	80
6.4 - Transformação alternativa da integral de domínio.....	90

6.5 - Transformação da equação integral em sistema algébrico.....	98
6.6 - Solução numérica do problema.....	109
6.7 - Integração sobre os elementos.....	109
VII. EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	110
7.1 - Introdução.....	110
7.2 - Autovalores e autovetores de uma viga engastada.....	111
7.3 - Quadrado com furo.....	115
VIII. DISCUSSÕES E CONCLUSÕES.....	117
IX. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	122

## CAPÍTULO I

### Introdução

Na Teoria Matemática da Elasticidade procurou-se, durante muito tempo e ainda hoje se vem fazendo, determinar o Estado de Tensão, ou de deformação, no interior de um corpo sólido elástico submetido a ação de um sistema equilibrado de forças, ou que esteja em um estado de pequeno movimento relativo interior (Elastodinâmica), com o objetivo de obter resultados úteis e de importância prática para os diversos ramos da engenharia [3].

As equações gerais de equilíbrio e vibração de sólidos elásticos foram introduzidas por Navier [1] em 1821 e por Cauchy [2] em 1828.

Na teoria matemática foram desenvolvidos métodos para a obtenção de soluções exatas das equações diferenciais de todos os ramos da física. Em particular, para a elasticidade existem inúmeros trabalhos como por ex. [3,4,5 e 6], que determinam soluções exatas para muitos problemas, porém os casos estudados são limitados por sua geometria e hipóteses bastante simplificadoras.

Da necessidade de resolver problemas mais gerais surgiram os métodos aproximados e, com eles, os métodos numéricos. O primeiro método numérico fundamentado em bases matemáticas foi o método das diferenças finitas [7]. Isto se deu antes de haver uma automatização computacional [8]. Após o surgimento dos computadores automatizados, as técnicas numéricas receberam grande atenção por parte dos pesquisadores; com isto desenvolveram-se vários métodos, dos quais podem-se destacar o já mencionado Método das Diferenças Finitas (MDF), que ganhou novo impulso e até hoje é aplicado, e o método dos Elementos Finitos (MEF) [48, 49, 50].

Estes métodos por serem baseados na aproximação da solução em todo o domínio, o primeiro (MDF) na aplicação ponto a ponto do operador diferença sobre a equação diferencial e o segundo (MEF) por subdividir todo o corpo em pequenos subdomínios, são conhecidos como Técnicas de Domínio, o que se traduz, na prática, pela necessidade de uma exaustiva discretização de todo o domínio para a resolução de um problema.

Uma alternativa para reduzir o número de aproximações é a utilização das chamadas Técnicas de Contorno, nas quais as discretizações são impostas apenas no contorno do sistema em consideração. Estas técnicas têm como origem um dos procedimentos usados na teoria matemática para obter a solução exata das equações diferenciais parciais, que as transformam em suas formas integrais ou, mais simplesmente, nas chamadas equações integrais.

As equações integrais, segundo Eliot [9], já são conhecidas desde 1823, quando Abel [10] utilizou este procedimento para resolver o problema do pêndulo isócrono [11], porém sua introdução mais generalizada ocorreu em 1828 com Green [12].

Com relação a teoria da elasticidade, em 1872 Betti [13] demonstrou o teorema da reciprocidade e Somigliana [14] obteve, em 1885 e 1886, a chamada Identidade Somigliana, que é a base dos métodos diretos das equações integrais [15].

Em 1903, Fredholm [16] demonstrou a existência e a unicidade de soluções das equações integrais de contorno, baseando-se em sua técnica de discretização limite. Este procedimento deu origem a uma forma de se construir as soluções numericamente com erros bastante toleráveis [17].

Neste contexto surgiram duas formulações distintas do Método dos Elementos de Contorno; a formulação indireta, na qual as variáveis envolvidas não são as variáveis físicas do problema, introduzida por Kupradze [18], e a direta, cujas variáveis têm significado físico, introduzida por Rizzo [19] em 1967.

O Método dos Elementos Finitos é, atualmente, uma das ferramentas mais difundidas para solucionar diversos problemas da engenharia. Sua utilização não abrange apenas a mecânica estrutural mas, também, muitas outras áreas como a geofísica, eletromagnetismo, mecânica dos fluídos, transferência de calor etc. Sendo um método de domínio, este possui algumas complicações com relação a problemas de domínio infinito, pois é necessário que se interrompa o domínio para que se tenha uma malha finita que ocasiona a formação de um contorno fictício prejudicando, principalmente, análises dinâmicas, pois este contorno produz reflexões de ondas inexistentes no problema real. Dificuldades também aparecem quando as concentrações de tensão estão presentes no problema modelado, pois necessita-se de um refinamento exageradamente grande da malha para avaliá-las com alguma precisão [20].

Neste aspecto algumas vantagens são oferecidas pelo Método dos Elementos de Contorno, como modelagem própria para domínios infinitos e ótima representação para concentração de tensão. Além disso, conduzem a um menor número de equações e volume de dados e à inexistência de erros de interpolação no domínio [8].

Existe, no entanto, um preço pago por todas estas vantagens. A matriz final não é simétrica e é totalmente cheia, portanto as técnicas largamente empregadas para resolver problemas de matrizes simétricas em banda não terão a menor utilidade.

Atualmente já não se pode dizer que um método é melhor que o outro, porém podemos dizer que já existem alternativas para que se escolha o melhor método para a solução de um dado problema.

Alguns dos primeiros estudos em elastodinâmica pelo método dos elementos de contorno foram apresentados, em 1963, por Banaugh e Goldsmith [21], Friedman e Shaw [22] e Chen e Schweikert [23], porém todos na formulação indireta. O marco inicial da formulação direta para a elastodinâmica foi em 1968, com Cruze e Rizzo [24] e Cruse [25], que solucionaram, pela primeira vez, um problema transiente de propagação de onda em um semi-plano no espaço transformado de Laplace [26]. Alguns trabalhos posteriores, utilizando transformada de Laplace, podem ser citados, como por exemplo Manolis e Beskos [27], Manolis [28] e Manolis e Beskos [29].

Estudos de vibrações harmônicas e problemas transientes utilizando transformadas de Fourier foram feitos por Niwa et al. [30, 31, 32] e Kobayashi e Mishimura [33, 34].

Em 1983, Mansur e Brebbia [35, 36] desenvolveram a formulação geral no domínio do tempo para análise da elastodinâmica transiente, que usa núcleos bidimensionais e é bastante suscetível à análise numérica. Outras referências para o desenvolvimento deste procedimento são Mansur e Brebbia [37] e Mansur [38]. Maiores detalhes da história e dos aspectos matemáticos das várias formulações podem ser vistos em Beskos [26], Alarcon [40], Cruse [41] e Mansur [39].

Uma das mais recentes alternativas no tratamento de problemas transientes e de vibrações harmônicas foi proposta inicialmente por Nardini e Brebbia [42, 46], que recebeu o nome de Dupla Reciprocidade.

Essa técnica permite tratar os problemas da Elastodinâmica com o conceito de matriz de massa. Com o intuito de estudar a vibração livre de corpos finitos, para

os estados planos de tensão e deformação de materiais elásticos lineares e isotrópicos, dentro da teoria das pequenas deformações, apresenta-se neste trabalho uma revisão da Reciprocidade Dual e desenvolvem-se duas outras alternativas que se encaixam no tratamento de matriz de massa.

A primeira, fugindo um pouco do interesse básico do MEC, que o da eliminação das integrais de domínio, desenvolve a integração dos termos inerciais, através de uma subdivisão do domínio por células triangulares com parametrização nodal e linear.

A segunda, totalmente de acordo com os interesses do MEC, substitui os termos inerciais por uma interpolação, feita por uma soma de funções especiais, que nos permite aplicar o teorema de Gauss de forma finita, transformando-se, assim, a integral em questão em uma integral de contorno parametrizada pelas mesmas variáveis do problema apresentado.

Para atingir tal propósito, no capítulo II apresentam-se as equações gerais que governam os problemas da elastodinâmica, restringindo-as, para o caso particular de vibrações livres de meios elásticos planos isotrópicos e finitos, transformando-as, em seguida, em equações integrais, através da utilização do teorema generalizado de Maxwell-Betti [42, 43, 13], tendo como estado virtual a solução do problema de Kelvin [3, 54, 55].

Limitando as ações externas apenas àquelas atuantes no contorno, e deixando de lado, temporariamente, a integral dos termos inerciais, no Cap. III descreve-se a formulação estática do MEC para problemas planos elásticos isotrópicos, utilizando uma discretização linear do contorno, com funções interpoladoras também lineares nos elementos.

Nos capítulos IV, V e VI incorpora-se, na formulação básica, a matriz de massa vinda da integração dos termos inerciais, pelos processos da reciprocidade dual, células e funções especiais, respectivamente.

Alguns exemplos numéricos são mostrados no capítulo VII, bem como um estudo do comportamento das propostas apresentadas.

Apresentam-se ainda, nos capítulos VI e VIII, discussões sobre as várias funções aproximadoras auxiliares possíveis, em particular sobre a função proposta neste trabalho e, também, uma síntese sobre o tratamento de problemas transientes através da utilização do conceito de matriz de massa.



## CAPÍTULO II

### Teoria Básica e Equações Integrais

#### 2.1. Equações que regem a elastodinâmica:

Antes de se discutir as equações que governam os movimentos de um corpo isotrópico elástico linear, cabe dizer que estas serão expressas em forma de notação indicial representado no sistema de coordenadas cartesianas convencional  $(x, y, z)$ . Para uma fácil compreensão, resumem-se aqui as seguintes regras básicas:

a) Convenção de somatório:

A repetição de um índice num termo indica a soma de todas as componentes com respeito a este índice em toda a sua variação, por exemplo:

$$a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} = a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

ou

$$a_{ij}b_i = a_{1j}b_1 + a_{2j}b_2 + a_{3j}b_3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

(2.1)

$$f_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = u_i \quad (2.6)$$

onde  $u_i$  é o deslocamento na direção  $i$  e  $t$  é o tempo.

Substituindo (2.6) em (2.4) vem:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \cdot u_i \quad (2.7)$$

que é a equação diferencial do movimento em termo das tensões.

Quando se conhecem as componentes de tensão ( $\sigma_{ij}$ ) em um ponto qualquer, pode-se calcular as respectivas forças de superfície (fig. 2.3) através da relação:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.8)$$

onde  $n_j$  são os cossenos diretores da normal à superfície em questão com relação ao sistema de coordenadas cartesianas em vigor. Esta expressão é muito importante para a adequação das condições de contorno à equação diferencial (2.7).

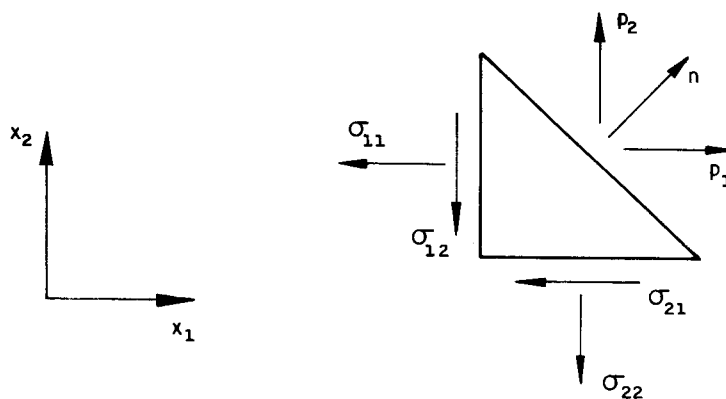


Fig. 2.3 - Representação das forças de superfície no contorno do corpo.

Sob a ação de um sistema de forças, um corpo elástico se deforma de sua posição inicial, podendo se deformar de maneira estática - forças aplicada gradualmente até seus valores finais, ou de maneira dinâmica - forças aplicadas bruscamente ou que não possuam valor final constante no tempo. Em ambos os casos, para um instante  $t$  qualquer, denotando-se ainda  $u_i$  como as componentes de deslocamento no contexto da teoria das pequenas deformações, a seguinte relação entre deformação e deslocamento pode ser escrita [3,4, 47]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.9)$$

onde  $\varepsilon_{ij}$  é o tensor deformação e representa as componentes de deformação em um ponto qualquer do sólido.

O tensor de tensão ( $\sigma_{ij}$ ) relaciona-se com o tensor deformação ( $\varepsilon_{ij}$ ) através da Lei de Hooke generalizada que, para materiais isotrópicos, é baseada em duas constantes, o módulo de Young ou de elasticidade ( $E$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

Para o caso tridimensional e o estado plano de deformação ( $u_{1,3} = u_{2,3} = u_3 = 0$ ) a relação entre tensão e deformação é dada por:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (2.10)$$

onde  $\lambda$  e  $G$  são denominadas constantes de Lamé e se expressam em termos de  $E$  e  $\nu$  como segue:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.11)$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \quad (2.12)$$

A constante  $G$  também é conhecida como módulo de elasticidade transversal.

Para o estado plano de tensões ( $\sigma_{3i} = 0$ ), devemos definir valores equivalentes:

$$\begin{aligned}\bar{G} &= G \\ \bar{E} &= E (1+2\nu) / (1+\nu)^2 \\ \bar{\nu} &= \nu / (1+\nu)\end{aligned}\tag{2.13}$$

para que as equações anteriores (2.10-12), e também as subsequentes sejam válidas.

Substituindo a expressão (2.9) na expressão (2.10), a Lei de Hooke é escrita em termos dos deslocamentos:

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{j,i} + u_{i,j})\tag{2.14}$$

Levando em conta as expressões (2.7) e (2.14) obtém-se a equação de Navier - Cauchy [1,2]:

$$G u_{i,jj} + (\lambda+G) u_{j,ji} + b_i = \rho \ddot{u}_i\tag{2.15}$$

Muitas vezes essa equação é encontrada em sua notação vetorial:

$$G \nabla^2 \underline{u} + (\lambda+G) \cdot \nabla \nabla \cdot \underline{u} + \underline{b} = \rho \cdot \ddot{\underline{u}}\tag{2.16}$$

onde o operador vetorial  $\nabla$  é definido como

$$\nabla = \underline{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \underline{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \underline{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\tag{2.17}$$

A equação de Navier - Cauchy (2.15) governa, portanto, o comportamento dinâmico de um corpo elástico, homogêneo e isotrópico  $\Omega + \Gamma$ , onde  $\Omega$  define seu domínio e  $\Gamma$  seu contorno. Este movimento só fica definido quando se conhecem as condições às quais o corpo foi submetido, que são dadas a seguir,

a) Condições de contorno (mistas):

$$\begin{aligned}u_i &= \bar{u}_i (S, t) \quad S \in \Gamma_1 \\ p_i &= \bar{p}_i (S, t) \quad S \in \Gamma_2\end{aligned}\tag{2.18}$$

Na teoria das pequenas oscilações de sistemas dinâmicos com número finito de graus de liberdade, é mostrado que os movimentos mais gerais da vibração livre, de um sistema sem amortecimento, podem ser simplificados na análise de uma quantidade finita de movimentos periódicos e independentes entre si. O número destes movimentos especiais é igual ao número de graus de liberdade do sistema. Cada um deles é caracterizado pelas seguintes propriedades:

- (i) O movimento de cada partícula do sistema é harmônico simples,
- (ii) O período e a fase do movimento harmônico simples são os mesmos para todas as partículas,
- (iii) O deslocamento de qualquer partícula com relação à sua posição de equilíbrio, estimada em qualquer direção, guarda uma relação definida com o deslocamento de qualquer outra partícula escolhida, em qualquer direção definida.

Cada um destes movimentos especiais do sistema é chamado de modo normal de vibração. Uma vibração livre devida à qualquer perturbação pode ser representada como uma superposição dos modos normais de vibração do sistema em questão.

Com o objetivo de generalizar esta teoria, de forma a aplicá-la em sistemas contínuos com infinitos graus de liberdade, pode-se descrever um dos possíveis procedimentos seguidos na teoria matemática da elasticidade.

Da existência e unicidade [5,51] da solução do problema geral regido pelas equações (2.15), (2.18) e (2.19) para um corpo que, além de seguir as hipóteses já assumidas, representa uma região regular no conceito de Kelog [52], conclui-se que a equação (2.20), acompanhada das condições iniciais (2.21) e de contorno (2.22), também possui solução e esta é única. Supõe-se então, como sugerido pela teoria discreta, que a solução é do tipo:

$$u_i(s,t) = u_i'(s) e^{-i\omega t}, \quad s \in \Omega \quad (2.23)$$

Através de (2.8), (2.9) e (2.10) pode-se escrever (2.22) como:

$$u_i = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (2.24)$$

$$p_i = G(u_{i,n} + u_{j,i} n_j + \frac{2\nu}{1-2\nu} u_{j,j} n_i) = 0 \quad \text{em } \Gamma_2$$

e substituindo (2.23) em (2.20) e (2.24) obtém-se:

$$G u'_{i,jj} + (\lambda + G) u'_{j,ji} = w^2 \rho u'_i \quad (2.25)$$

$$u'_i e^{-iwt} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (2.26)$$

$$G(u'_{i,n} + u'_{j,i} n_j + \frac{2\nu}{1-2\nu} u'_{j,j} n_i) e^{-iwt} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (2.27)$$

As equações (2.26) e (2.27) levam a infinitas raízes para a frequência  $w$ . Chega-se, portanto, ao seguinte problema de autovalores:

$$G u'_{i,ij} + (\lambda + G) u'_{j,ji} = w^2 \rho u'_i \quad \text{em } \Omega \quad (2.25)$$

que deve satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$u'_i(s) = 0 \quad S \in \Gamma_1 \quad (2.28)$$

$$p_i(s) = G(u'_{i,n} + u'_{j,i} n_j) + \frac{2\nu}{1-2\nu} u'_{j,j} n_i = 0 \quad S \in \Gamma_2$$

A partir das expressões apresentadas acima pode-se provar que:

- i) Todos os autovalores  $w^2$  são reais [5],
- ii) Todos os autovalores  $w^2$  são não negativos [5],
- iii) As autofunções  $u'_i(x)$  formam um conjunto de funções ortormais completo [5, 51].

Através deste resultado, além da existência e unicidade, demonstra-se que a solução formal do problema de vibração livre é representada pela superposição de infinitos ou finitos modos de vibração (autofunções), através de uma generalização do teorema de Fourier, que são os chamados teoremas de expansão [3,5,53], ou seja

$$u_i(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u'_{in}(s) e^{-i\omega_n t} \quad s \in \Omega \quad (2.29)$$

Os coeficientes  $a_n$  de (2.29) são definidos pelas condições iniciais do problema. Se tais condições representarem uma composição finita de modos de vibrações a soma em (2.29) será finita, caso contrário existirão infinitos valores de  $a_n$  e esta soma será infinita.

Assim, o problema de vibração livre se reduz ao estudo do problema de autovalor e autofunção a ele associado e, portanto, a equação de movimento (2.20) se simplifica para:

$$Gu'_{i,jj} + (\lambda+G)u'_{j,ji} = \rho w^2 u'_i \quad (2.30)$$

onde  $u'$  não depende do tempo.

Para determinar todos os possíveis autovalores e autofunções, utilizam-se as condições de contorno (2.22) na forma

$$\begin{aligned} u'_i &= 0 & S \in \Gamma_1 \\ p'_i &= 0 & S \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

que representam os graus de liberdade do problema.

Através das condições iniciais

$$\begin{aligned} u'_{io} &= \bar{u}_{io} & s \in \Omega \\ v'_{io} &= \bar{v}_{io} & s \in \Omega \end{aligned} \quad (2.32)$$

encontram-se as contribuições de cada modo de vibração no movimento total, representados pelas constantes  $a_n$  de (2.29).

Além disso cabe salientar que a soma representada na equação (2.29) representa qualquer deformação possível para o corpo elástico, visto que este pode se amoldar a qualquer condição inicial.

### 2.3. Solução Fundamental

Para desenvolver formulações do método dos elementos de contorno deve-se utilizar as chamadas soluções fundamentais, obtidas de problemas específicos da área em estudo. Neste trabalho, em particular, usar-se-á a solução de Kelvin [3] que representa fisicamente o efeito de uma carga unitária estática atuando em um domínio infinito.

Este problema se expressa na equação geral de movimento de Navier-Cauchy (2.15), em sua forma estática ( $\ddot{u}_i = 0$ ) com as forças de volume  $b_i$  substituídas pela distribuição conhecida como Delta de Dirac  $\delta(s, q)$ . Assim, tem-se o termo independente

$$b_i(q) = \delta(s, q) \delta_{ki} \quad (2.33)$$

e a equação de Navier-Cauchy

$$G u_{ki,jj}^* + (\lambda + G) u_{kj,ji}^* + \delta(s, q) \delta_{ki} = 0 \quad (2.34)$$

onde  $s$  é o ponto onde a força está sendo aplicada,  $q$  representa os pontos do domínio,  $\delta_{ki}$  é o delta de Kronecker indicando a atuação da força na direção  $k$  em  $s$  e o símbolo  $*$  é usado para indicar a solução fundamental.

A distribuição Delta de Dirac tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \delta(s, q) &= \infty && \text{se } q=s \\ \delta(s, q) &= 0 && \text{se } q \neq s \end{aligned} \quad (2.35)$$

e

$$\int_{\Omega} g(q) \delta(s, q) d\Omega(q) = g(s)$$

A solução da equação (2.34) para domínio infinito e para o estado plano de deformações é dada por [54,55,56]

$$u_{ki}^*(s, q) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ki} - r_{,i} r_{,k}] \quad (2.36)$$

correspondendo o primeiro índice à direção de aplicação da carga unitária, o segundo à direção do deslocamento e



$r = r(q,s)$  é a distância entre os pontos  $q$  e  $s$  (fig. 2.6)

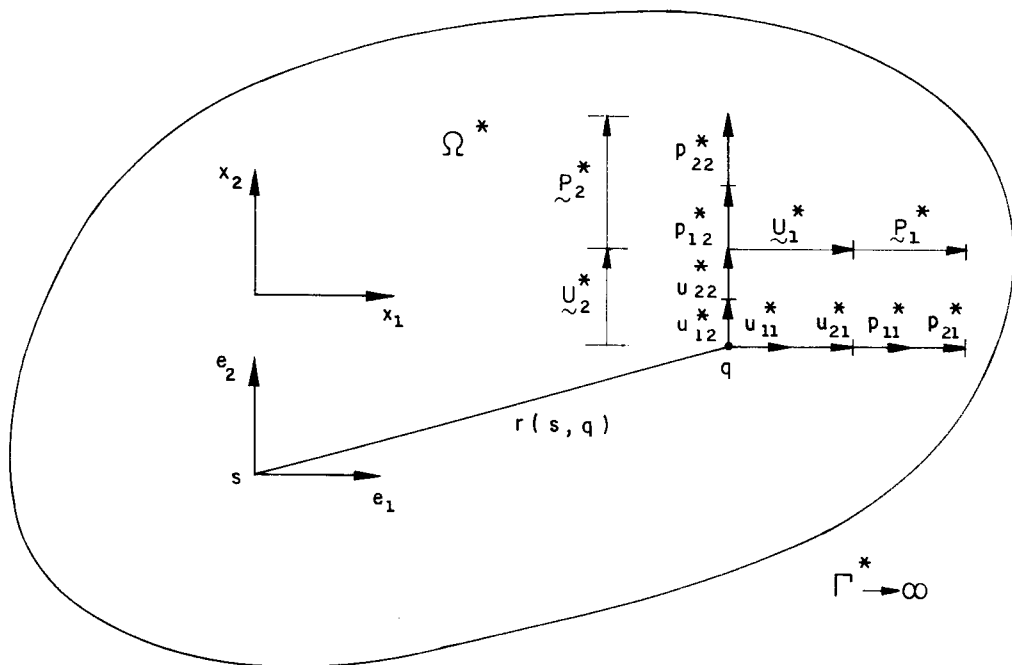


Fig. 2.6 - Soluções Fundamentais.

Usando (2.36) em (2.9) obtêm-se as componentes fundamentais de deformação ( $\epsilon_{kji}$ ) em um ponto  $q$  devido a uma força unitária em  $s$  na direção  $k$  como segue:

$$\epsilon_{kji}^*(s,q) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)Gr} [(1-2\nu)(r_{,i}\delta_{kj} + r_{,j}\delta_{ki}) - r_{,k}\delta_{ji} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (2.37)$$

Da mesma forma para as tensões de (2.37) em (2.10) escreve-se:

$$\sigma_{kji}^*(s, q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)r_{,i}\delta_{kj} + r_{,j}\delta_{ki} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (2.38)$$

e ainda de (2.36) em (2.28) obtém-se as forças de superfície nas direções  $j$ , devidas à carga unitária em  $s$  na direção  $i$ , em uma superfície definida pelos cossenos diretores  $(n_j)$  de um vetor normal a esta:

$$p_{ki}^*(s, q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)\delta_{ki} + r_{,i}r_{,k}]r_m n_m + (1-2\nu)(r_{,k}n_i - r_{,i}n_k) \quad (2.39)$$

Os valores fundamentais  $u_{ki}^*$  e  $P_{ki}^*$  podem ser expressos nas suas formas vetoriais, (fig. 2.6):

$$U_i^*(s, q) = u_{ki}^*(s, q) \cdot e_k(s) \quad (2.40)$$

$$P_k^*(s, q) = P_{ki}^*(s, q) \cdot e_k(s)$$

onde  $e_k$  são vetores unitários na direção  $k$ .

Para o método dos elementos de contorno, esta superfície vai representar o contorno do corpo estudado.

Cabe ainda ressaltar que para a validade das soluções fundamentais acima se estender para o estado plano de tensões, basta substituir  $\nu$  por  $\bar{\nu} = 1/(1+\nu)$ .

## 2.4. Equação Integral de contorno

### 2.4.1 - Equação Integral de contorno para pontos internos

Para simplificar a escrita, escreve-se daqui por diante no lugar de  $u_i^!$ ,  $\sigma_{ij}^!$ , etc.  $u_i$ ,  $\sigma_{ij}$  etc.

Pode-se assim reescrever a equação (2.30) na forma de tensão, ou seja:

$$\sigma_{ij,j} = \rho w^2 u_i \quad (2.41)$$

O teorema generalizado de Maxwell-Betti [42, 43, 13], relacionando dois modos de deslocamentos independentes de um corpo, pode ser escrito como se segue,

$$\int_{\Omega} (u_{ki}^*(S,q) \sigma_{ij,j}(q) - u_i(q) \sigma_{kij,j}^*(S,q)) d\Omega(q) = \int_{\Gamma} (u_{ki}^*(S,Q) p_i(Q) - u_i(Q) p_{ki}^*(S,Q)) d\Gamma(Q) \quad (2.42)$$

onde  $S$  é ponto fonte no contorno,  $Q$  é ponto do contorno e  $q$  ponto do domínio. Esta equação é válida, também, substituindo-se  $S$  por  $s$ , fonte no domínio, que é como será utilizada neste item.

Nesta igualdade, relacionam-se dois estados de deslocamentos distintos, a saber,  $u_i$ ,  $\sigma_{ij}$  e  $p_i$ , representando um dos possíveis modos de vibração do corpo, e  $u_{ki}^*$ ,  $\sigma_{kij}^*$  e  $p_{ki}^*$  que, como se sabe, é a solução do problema de Kelvin para carga unitária atuando na direção  $k$ .

Pode-se escrever a equação (2.34) em termos de tensões:

$$\sigma_{kij,j}^* = - \delta(s,q) \delta_{ki} \quad (2.43)$$

Substituindo este valor em (2.42) obtemos

$$\int_{\Omega} u_{ki}^*(s,q) \sigma_{ij,j}(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega} \delta(s,q) \delta_{ki} u_i(q) d\Omega(q) = \int_{\Gamma} (u_{ki}^*(s,Q) p_i(Q) - u_i(Q) p_{ki}^*(s,Q)) d\Gamma(Q) \quad (2.44)$$

Utilizando a propriedade (2.35) do delta da Dirac, substituindo (2.41) no primeiro termo da esquerda de (2.44), tem-se:

$$u_k(s) = \int_{\Gamma} u_{ki}^*(s, Q) \cdot p_k(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} p_{ki}^*(s, Q) \cdot u_k(Q) d\Gamma(Q) - \rho w^2 \int_{\Omega} u_{ki}^*(s, q) \cdot u_i(q) d\Omega(q) \quad (2.45)$$

Esta expressão é uma variação da Identidade Somigliana [11] para deslocamentos. Uma forma simples de obtê-la é exprimir o termo  $b_i(s)$ , da expressão original, como sendo igual à  $-\rho w^2 u_k(s)$

#### 2.4.2 - Equação Integral de contorno para pontos no contorno:

A Identidade Somigliana (2.45) é válida para pontos  $s$  contidos no interior do corpo " $\Omega$ ". Quando o ponto fonte está no contorno " $\Gamma$ " a obtenção de uma expressão similar é elaborada através do processo limite [11,18,52, 57, 58] mostrado a seguir.

A equação integral (2.45) pode ser aplicada em um ponto " $S$ " do contorno se o domínio " $\Omega$ " for incrementado por uma vizinhança infinitesimal " $\Omega_\epsilon$ " que contenha " $S$ " (Fig. 2.7).

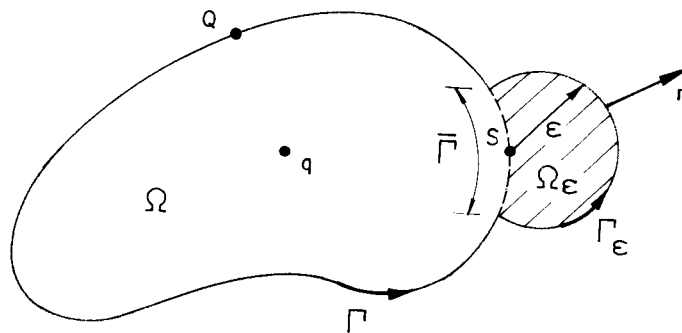


Fig.2.7 - Inclusão do ponto "S" do contorno ao domínio.

Com esta modificação o contorno do novo domínio  $\Omega + \Omega_\epsilon$  passa a ser  $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon$ , para os quais a equação (2.45), pode ser aplicada,

$$u_i(S) \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon} u_{ij}^*(S, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon} P_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) - \rho w^2 \int_{\Omega + \Omega_\epsilon} u_{ij}^*(S, q) u_i(q) d\Omega(q) \quad (2.46)$$

Dividindo-se as integrais para cada trecho do domínio e do contorno tem-se:

$$u_i(S) = \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} u_{ij}^*(S, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma_\epsilon} u_{ij}^*(S, Q) P_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} P_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma_\epsilon} P_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) - \rho w^2 \int_{\Omega + \Omega_\epsilon} u_{ij}^*(S, q) u_j(q) d\Omega(q) \quad (2.47)$$

Denominam-se [18,52] as integrais em  $\Gamma_\epsilon$  com núcleos semelhantes a  $u_{ij}^*$  como integrais singulares de camada simples, e demonstra-se que, no caso, para " $\epsilon \rightarrow 0$ " o seu limite é nulo, já a integral sobre  $\Gamma_\epsilon$  de núcleo  $P_{ij}^*$  é chamada de camada dupla e espera-se uma descontinuidade no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Este limite pode ser escrito como segue:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} P_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma_\epsilon(Q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} P_{ij}^*(S, Q) [u_j(Q) - u_j(S)] d\Gamma_\epsilon(Q) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_j(S) \int_{\Gamma_\epsilon} P_{ij}^*(S, Q) d\Gamma_\epsilon(Q) \quad (2.48)$$

sendo o primeiro termo do lado direito da expressão identicamente nulo, pois o campo dos deslocamentos  $u_j$  obedece à condição de Hölder.

$$[u_j(Q) - u_j(S)] < A r(S, Q)^\alpha \quad \text{com } A, \alpha > 0 \quad (2.49)$$

Portanto a descontinuidade fica definida pelo limite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_j(S) \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ij}^*(S, Q) d\Gamma_\epsilon(Q) \quad (2.50)$$

O termo integral que se desenvolve na parte do contorno  $\Gamma - \bar{\Gamma}$  pode ser expresso como:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} p_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) \quad (2.51)$$

desde que a integral do lado direito da igualdade seja calculada de acordo com o conceito de valor principal de Cauchy.

As outras integrais da equação 2.47 não apresentam nenhuma singularidade especial e seus limites são interpretados como integrais definidas. Portanto, a equação integral para pontos "S" no contorno fica:

$$c_{ij}(S) u_j(S) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) - \rho w^2 \int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) u_j(q) d\Omega(q) \quad (2.52)$$

onde o coeficiente  $c_{ij}$  contém a contribuição da descontinuidade, podendo ser definido como segue:

$$c_{ij}(S) = \delta_{ij} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ij}^*(S, Q) d\Gamma_\epsilon(S) \quad (2.53)$$

Este coeficiente depende apenas da solução fundamental e da geometria do contorno [59]; para pontos do contorno com uma única tangente o valor de  $c_{ik}(S)$  é dado por [54]:

$$c_{ik}(S) = \delta_{ik}/2 \quad (2.54)$$

Para pontos definidos em angulosidade apresentar-se-ão os valores de  $c_{ik}$  em ocasião oportuna.

A aproximação numérica da equação (2.52) dá origem ao Método dos Elementos de Contorno; neste caso, nota-se que a equação (2.52), a menos do termo inercial tratado nos capítulos IV, V e VI, expressa uma relação entre os

deslocamentos  $u_i$  e as forças de superfície  $p_i$  dos pontos do contorno  $\Gamma$  do sólido em análise. Como as variáveis envolvidas possuem significado real para o problema, esta formulação é chamada de formulação direta do MEC.

#### 2.4.3 - Equação Integral para Pontos Externos:

É interessante, também, obter-se uma igualdade muito útil na aplicação do MEC em problemas com descontinuidade de reações de contorno ocasionada por deslocamentos prescritos. Para tal, considera-se o campo virtual de deslocamentos  $u_{ij}^*$  como causado por uma carga unitária que não esteja contida na região ocupada pelo corpo estudado, daí tira-se que:

$$\int_{\Omega} \delta(s, q) \delta_{ik} u_i(q) d\Omega(q) = 0 \quad s \in \{\Omega_{\infty} - \Omega - \Gamma\} \quad (2.55)$$

e portanto temos:

$$\int_{\Gamma} u_{ij}^*(f, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(f, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) = \rho w^2 \int_{\Omega} u_{ij}^*(f, q) u_j(q) d\Omega(q) \quad (2.56)$$

#### 2.4.4 - Equação Integral de Contorno para Tensões:

Para que se possa considerar um problema elástico, tanto estático como dinâmico, totalmente resolvido, deve-se estar apto a obter todas as componentes de tensão em qualquer ponto do sólido analisado ; isto é feito a partir da relação tensão deformação:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{j,i} + u_{i,j}). \quad (2.14)$$

Substituindo-se o valor de  $u_i(s)$  pela sua expressão integral (2.45) obtém-se:

$$\sigma_{ij}(s) = \int_{\Gamma} D_{kij}(s, Q) p_k(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} S_{kij}(s, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) - \rho w^2 \int_{\Omega} D_{kij}(s, q) u_k(q) d\Omega(q) \quad (2.57)$$

onde os tensores de terceira ordem  $S_{kij}$  e  $D_{kij}$  são dados por:

$$D_{kij} = [\lambda \delta_{ij} u_{k,\ell}^* + G(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*)] \quad (2.58)$$

e

$$S_{kij} = [\lambda \delta_{ij} p_{k,\ell}^* + G(p_{ik,j}^* + p_{jk,i}^*)] \quad (2.59)$$

Para o estado plano de deformações, os valores  $D_{kij}$  e  $S_{kij}$  são dados por:

$$D_{kij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)\Omega} [(1-2\nu)\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}] + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \quad (2.60)$$

$$S_{kij} = \frac{2G}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{ik}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + 2\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad (2.61)$$

Para o estado plano de tensão basta substituir-se  $\nu$  por  $\bar{\nu} = 1/(1+\nu)$ . Observa-se ainda que a equação (2.57), por ter sido derivada de (2.45), expressa as tensões para pontos interiores. Para pontos do contorno sem angulosidade, a equação (2.57) fornece o dobro dos valores reais no ponto; porém, se houver angulosidade no ponto do contorno em questão, deve-se calcular as tensões desejadas a partir de forças de superfície e deslocamentos.



## CAPÍTULO III

### Método dos Elementos de Contorno

(Fundamentos básicos)

#### 3.1. Introdução:

No capítulo anterior, restringiu-se o estudo da vibração livre (2.20-22) ao do problema de autovalor associado (2.25 e 2.28); obteve-se ainda a equação integral que relaciona forças de superfície, deslocamentos no contorno e termos inerciais que dependem dos deslocamentos de pontos interiores (2.52-53). Deixando-se de lado os termos inerciais, que serão tratados nos capítulos subsequentes, adotar-se-á uma aproximação numérica para a equação integral, obtendo-se um conjunto de equações algébricas lineares, que permitirão a resolução de diversos problemas cujas soluções não são conhecidas explicitamente.

### 3.2. Descrição Geral do Método:

Tomando-se a equação integral para pontos do contorno (2.52 e 2.53) e eliminando-se os termos inerciais obtêm-se a seguinte equação:

$$c_{ij}(S)u_j(S) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S,Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S,Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) \quad (3.1)$$

onde

$$c_{ij}(S) = \delta_{ij} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} p_{ij}^*(S,Q) d\Gamma_{\epsilon}(S) \quad (3.2)$$

que pode ser considerada como a equação integral para problemas estáticos isentos de forças de volume.

De maneira geral, a aproximação envolve a discretização do contorno de um corpo qualquer  $\Gamma$  em elementos  $\Gamma_j$ , exatos ou aproximados, sobre os quais os valores dos deslocamentos e forças de superfície são interpolados por funções polinomiais (ver Figura 3.1) associadas a um certo número de "nós" ou "pontos nodais" do elemento. Os valores das variáveis associadas aos "nós" são chamados de "valores nodais".

Neste trabalho, em particular, utilizar-se-á os elementos isoparamétricos lineares, ou seja, tanto a geometria quanto as variáveis do problema serão aproximadas por polinômios de primeira ordem.

### 3.3. Discretização Geométrica:

Como comentado no item anterior, o contorno  $\Gamma$  do corpo  $\Omega$  será aproximado por segmentos de reta  $\Gamma_j$  (elementos de contorno) definidos por seus "nós" extremos, os quais pertencem ao contorno real (Fig. 3.1).

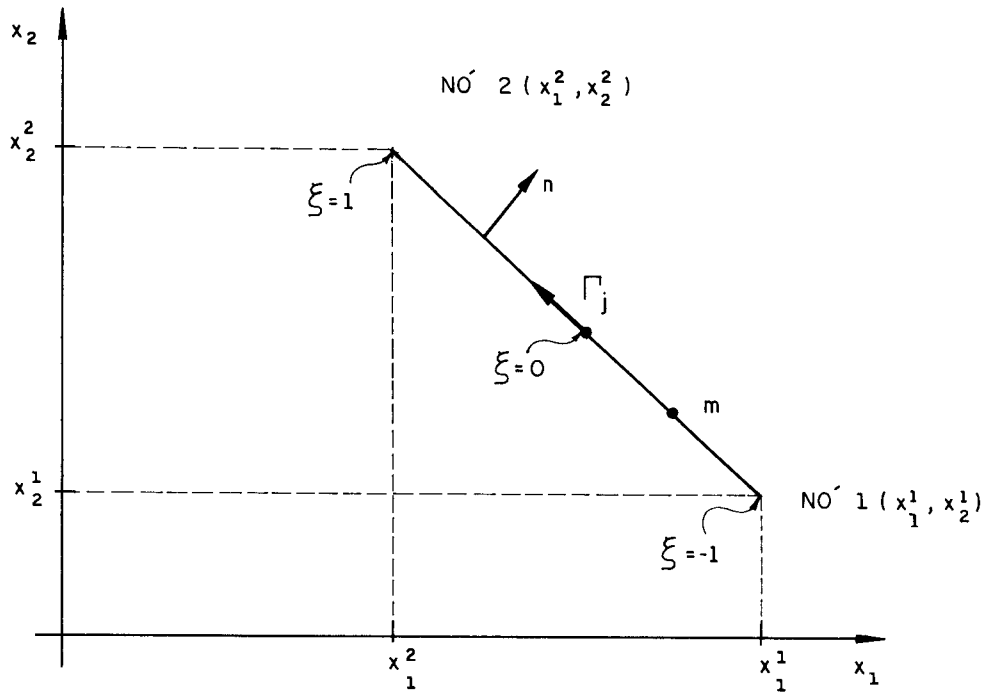


Fig. 3.2 - Descrição geométrica do elemento linear.

Desta forma obtem-se a expressão:

$$\underline{\tilde{x}}^m = \underline{\psi}^T(\xi) \underline{\tilde{x}}^{(N)} \quad (3.3)$$

onde:

$$\underline{\tilde{x}}^m = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^m \quad (3.4)$$

$$\underline{\psi}^T(\xi) = \begin{bmatrix} \underline{\phi}^T(\xi) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\phi}^T(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\underline{\tilde{x}}^{(N)} = \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

É importante notar que foi adotada a notação  $(x_1, x_2)$  para coordenadas cartesianas, o índice (N) para valores nodais.

O vetor das funções aproximadoras  $\underline{\phi}(\xi)$ , ou mais simplesmente  $\underline{\phi}$ , é dado por:

$$\underline{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2} (1-\xi) \quad (3.8.a)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} (1+\xi) \quad (3.8.b)$$

Pode-se assim escrever a expressão (3.3) explicitamente como segue:

$$\begin{Bmatrix} x_1^m \\ x_2^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\phi_1 & \phi_2\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\phi_1 & \phi_2\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

### 3.4. Discretização das variáveis :

A aproximação discretizada das variáveis é feita da mesma forma que a discretização geométrica, ou seja, pode-se aproximar os valores das variáveis  $u$  ou  $p$ , em cada ponto "m" pertencente a cada elemento "j", pela sua parametrização com relação aos seus valores nodais, através de coordenadas locais homogêneas " $\xi$ " fig.(3.3).



3.4.1 - Elemento Linear Contínuo:

Um elemento linear é totalmente contínuo quando os valores que as variáveis assumem em seus nós são únicos, ou seja, não há descontinuidade de carregamentos ou reações nas ligações do mesmo com os elementos vizinhos (Fig. 3.5).

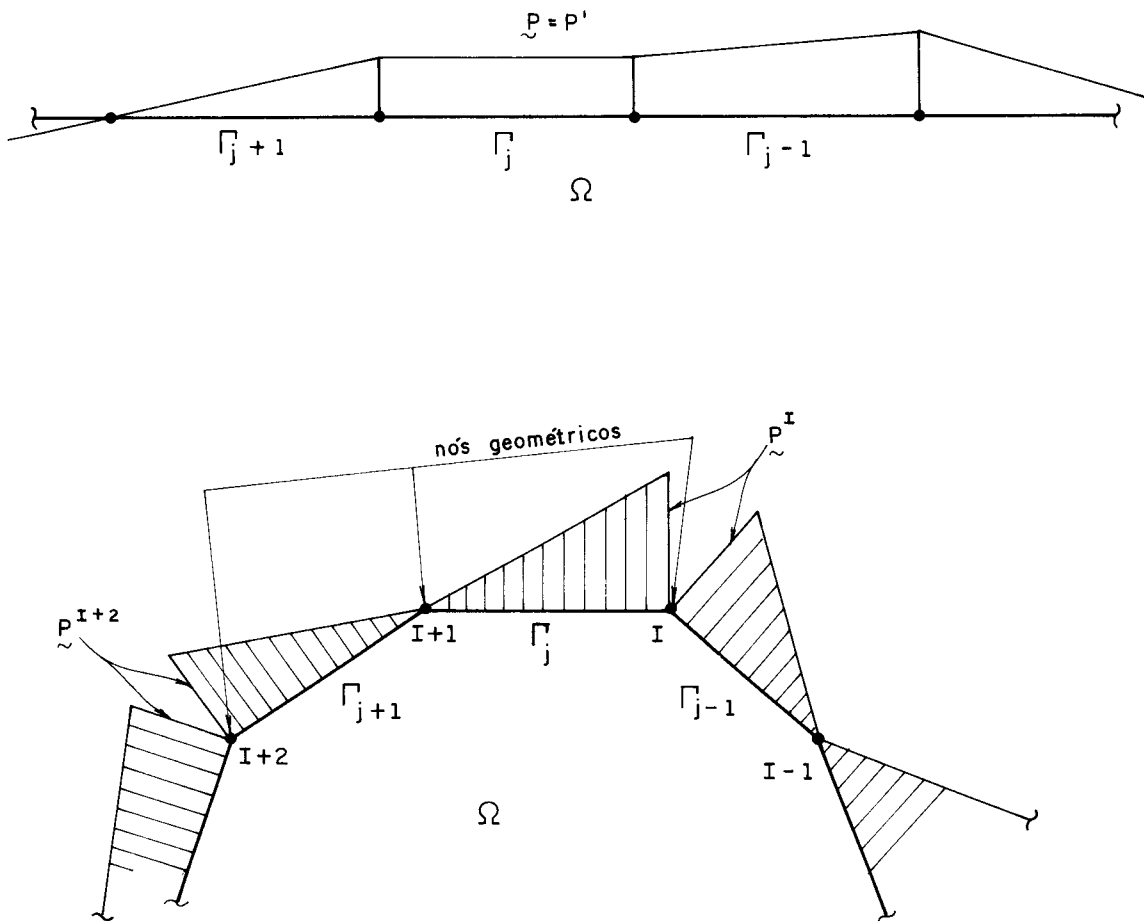


Fig. 3.5 - Elementos Lineares, carregamento contínuo.

Neste caso, a aproximação das variáveis é feita de forma idêntica à da geometria (Fig. 3.3), ou seja:

$$\tilde{u}^m = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^m = \tilde{\psi}^T(\xi) \tilde{U}^{(N)} = \begin{bmatrix} \{\phi_1 \ \phi_2\} & \underline{0} \\ \underline{0} & \{\phi_1 \ \phi_2\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\tilde{p}^m = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^m = \tilde{\psi}^T(\xi) \tilde{P}^{(N)} = \begin{bmatrix} \{\phi_1 \ \phi_2\} & \underline{0} \\ \underline{0} & \{\phi_1 \ \phi_2\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_2^1 \\ P_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

onde  $\tilde{U}^{(N)}$  e  $\tilde{P}^{(N)}$  são valores assumidos nos nós geométricos (extremos) do elemento.

### 3.4.2 - Elemento Linear descontínuo:

Um elemento linear é totalmente descontínuo quando os valores nos pontos extremos são independentes dos valores adjacentes dos elementos vizinhos (fig. 3.6).

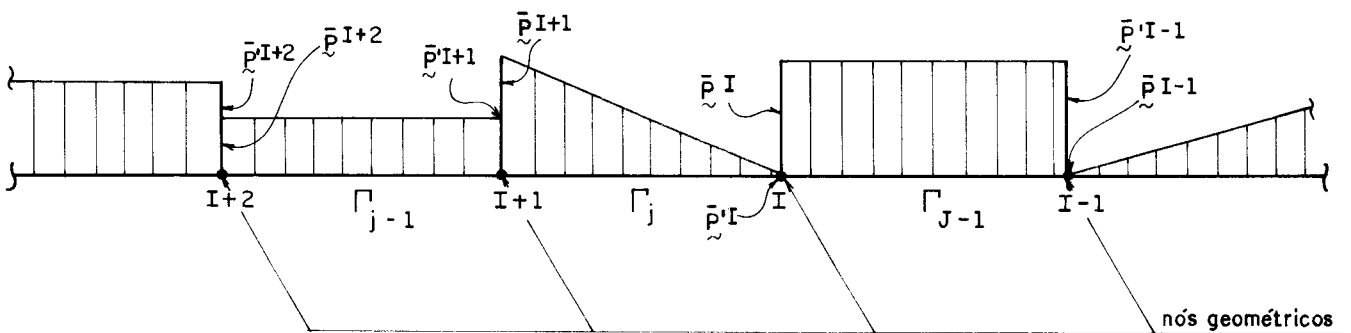


Fig. 3.6 - Elementos Lineares, carregamento descontínuo.

Destacam-se aqui duas maneiras de se considerar a descontinuidade de tais elementos.

a) Elemento Descontínuo Singular:

Neste tipo de elemento parametrizam-se as variáveis com relação a pontos nodais que não correspondem aos extremos geométricos dos elementos, e os pontos fontes "S" para a montagem das equações integrais (3.1) continuam coincidentes com os nós parametrizantes, isto permite que nas extremidades adjacentes de elementos descontínuos vizinhos as variáveis não assumam o mesmo valor, (Fig.3.7).

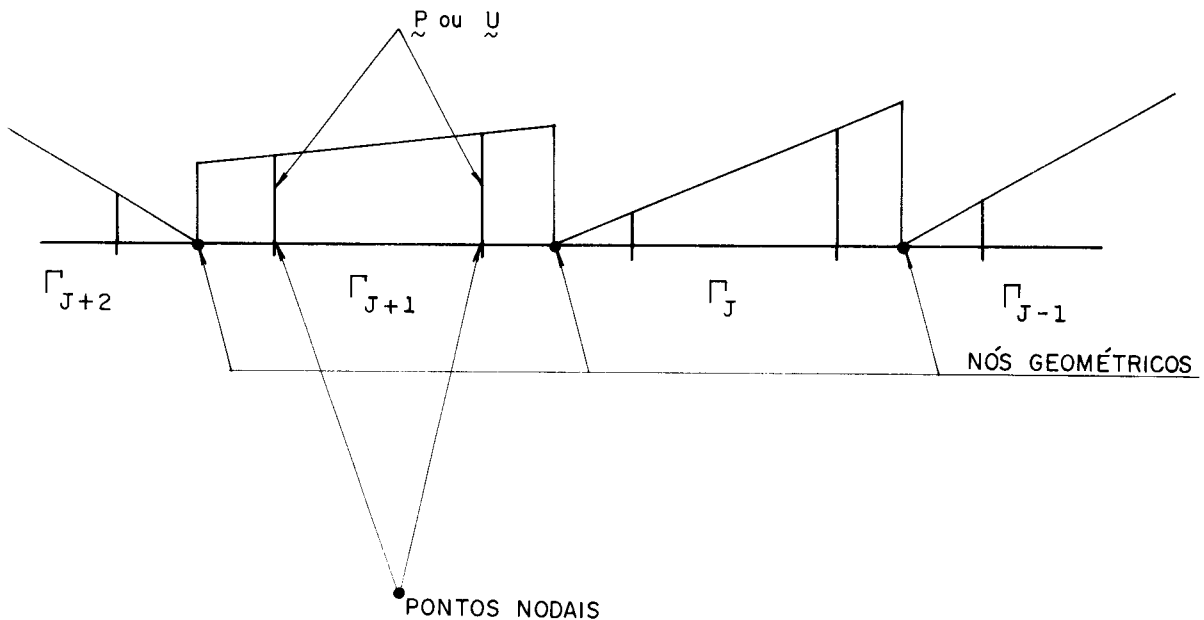


Fig. 3.7 - Elementos descontínuos singulares.

As aproximações das variáveis neste caso ficam da das por funções polinomiais do seguinte tipo,

$$\phi_1 = \frac{1}{c_1 + c_2} (c_2 - \xi) \quad (3.12.a)$$



$$\phi_2 = \frac{1}{c_1 + c_2} (c_1 - \xi) \quad (3.12.b)$$

onde, conforme figura (3.8), tem-se:

$c_1$  - Posição do nó direito com relação ao centro do elemento, em coordenadas homogêneas;

$c_2$  - Posição do nó direito com relação ao centro do elemento, em coordenadas homogêneas;

$\xi$  - coordenada homogênea;

$l$  - comprimento do elemento;

$\phi_i$  - Função interpoladora.

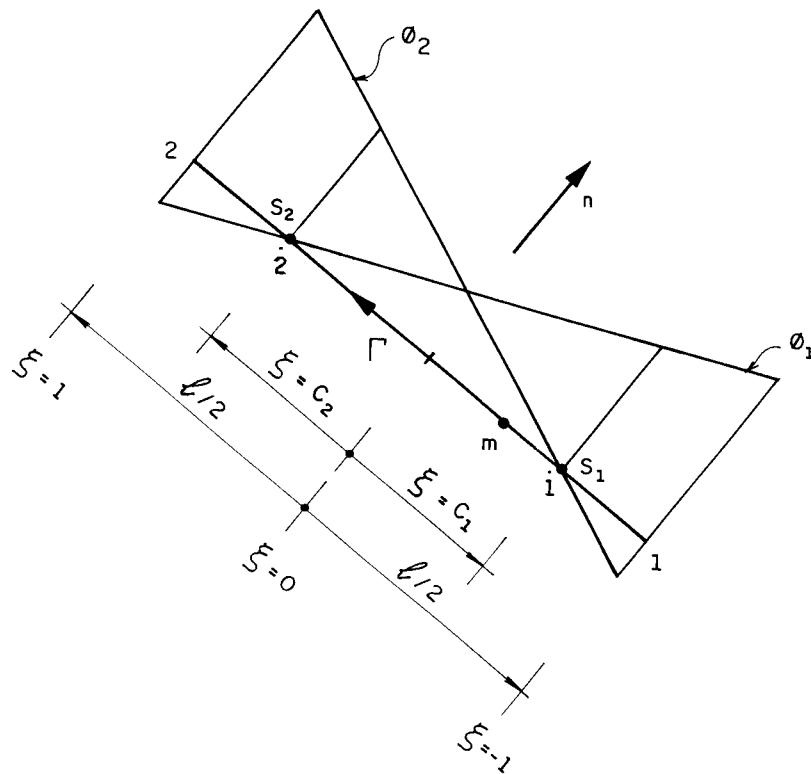


Fig. 3.8 - Funções aproximadoras, elemento descontínuo singular.

Utilizam-se, portanto, para a parametrização, as expressões (3.10) e (3.11) considerando  $\phi_1$  e  $\phi_2$  dados em (3.12.a e b) e os valores nodais  $U^{(N)}$  e  $P^{(N)}$  definidos nos novos pontos nodais ( $i$  e  $2$ ) como nas figuras (3.7) e (3.8).

b) Elemento Descontínuo Não Singular:

Para o tratamento da descontinuidade das variáveis no contorno, utilizar-se-á, neste trabalho, um procedimento que elimina o problema da singularidade das Integrais nos elementos. Para tanto, levam-se os pontos fonte "S", originalmente localizados nos pontos nodais, para o exterior do corpo  $\Omega + \Gamma$ , gerando assim, para estes pontos, uma integral do contorno para pontos externos, equação (3.1) com  $c_{ij}(S) = 0$ . Desta forma, não é necessário mudar a posição dos pontos nodais.

Para garantir a descontinuidade dos carregamentos e reações basta definir "nós duplos" na interface dos elementos (Fig. 3.9).

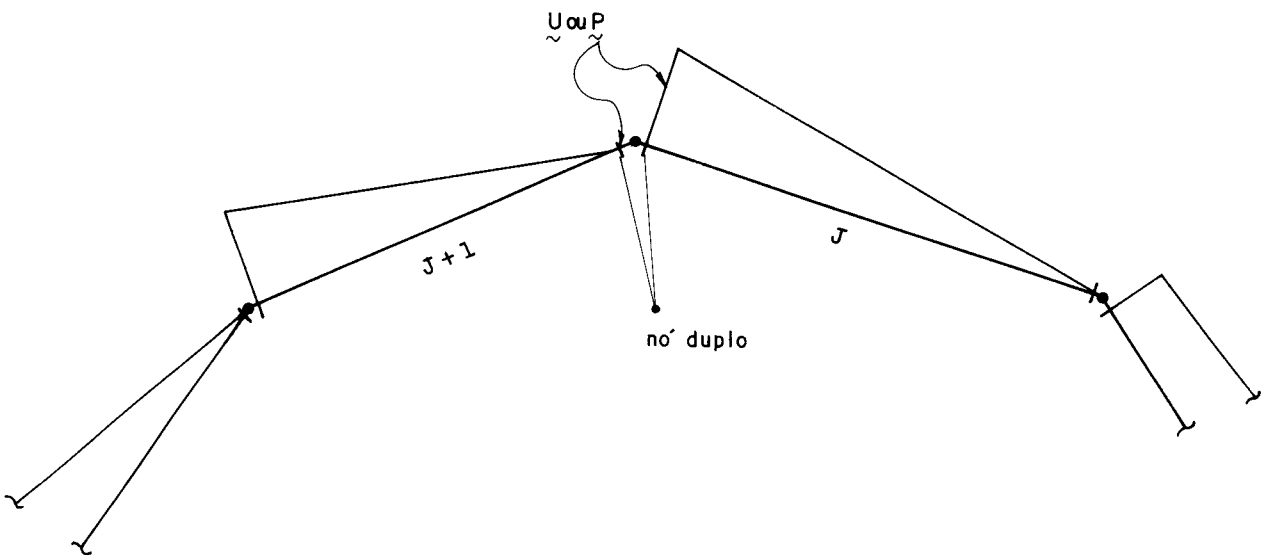


Fig. 3.9 - Descontinuidade por nó duplo coincidente com nó geométrico.

Estando os pontos nodais localizados nos extremos dos elementos estes também definem, como no caso dos elementos contínuos, a geometria do problema. A aproximação das variáveis fica como nas expressões (3.10 e 11) com  $\phi_1$  e  $\phi_2$  dados pelas expressões (3.8.a) e (3.8.b) e visualizadas na

(Fig. 3.3). Os pontos fontes são deslocados para o exterior do problema, ortogonalmente ao elemento e fixados a uma distância proporcional ao comprimento do mesmo (Fig.3.10).

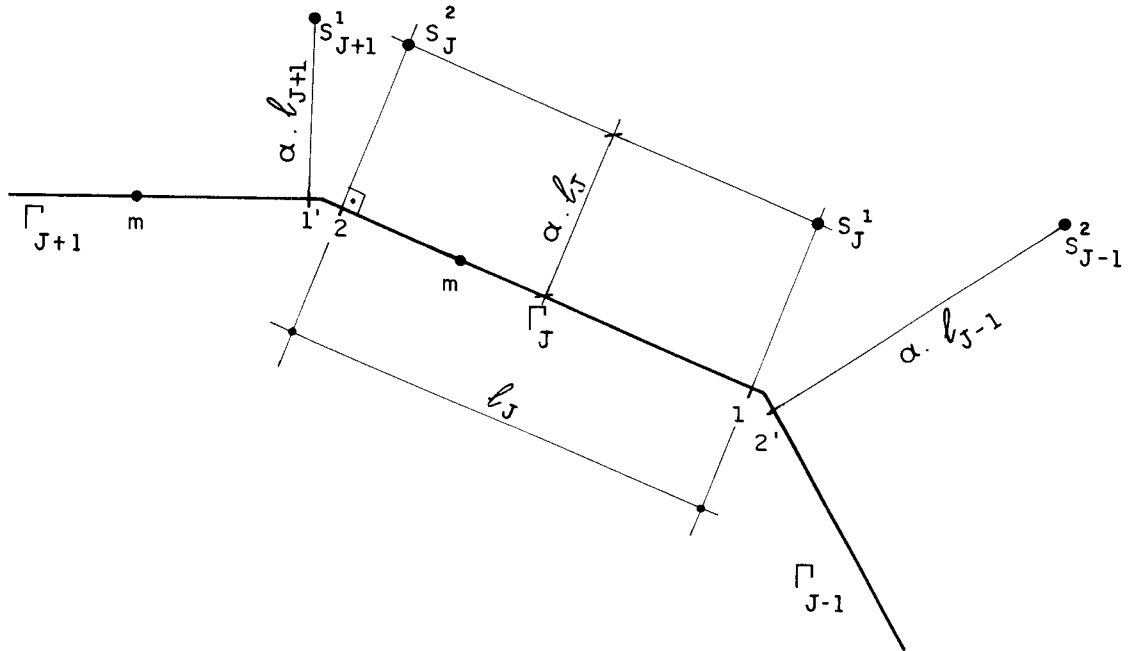


Fig. 3.10 - Esquema do novo posicionamento do ponto fonte para elementos descontínuos não singulares.

Basta comparar as figuras 3.5, 3.7 e 3.9 para concluir que a adoção de elementos descontínuos acarreta um aumento de incógnitas na resolução de um certo problema. Para evitar que a escolha de elementos contínuos ou descontínuos acarrete a utilização exclusiva deste ou daquele tipo de elemento, definem-se os elementos mistos, nos quais um dos seus nós é tratado como contínuo e o outro como nó duplo (ver Fig. 3.11).

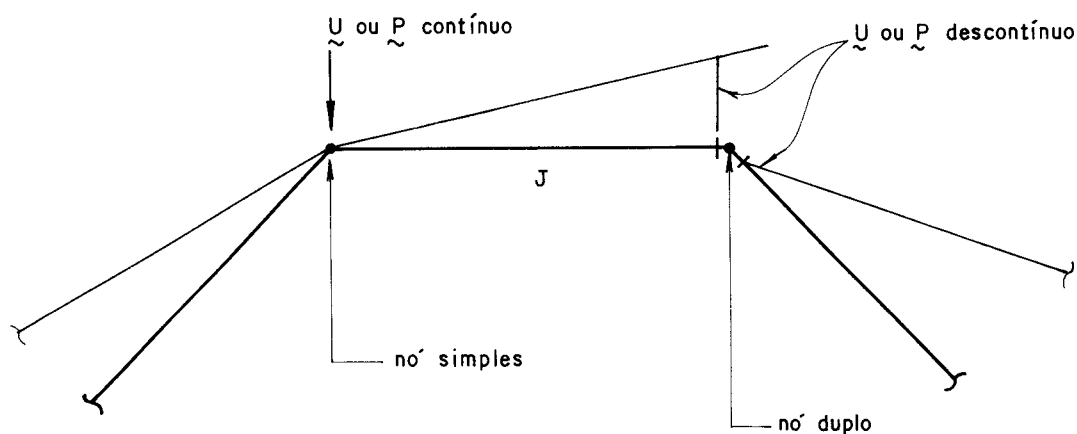


Fig. 3.11 - Elemento Misto.

### 3.5. Transformação da Equação Integral em um Sistema Algébrico:

Tendo-se discretizado o contorno  $\Gamma$  em elementos contorno  $\Gamma_j$  definidos pelos seus nós  $I$ , simples ou duplos, que permitem uma aproximação das variáveis parametrizadas por seus valores nodais, a equação integral para o nó  $S$ , representada pelas expressões 3.1 e 3.2, com  $c_{ij} = 0$  para  $S=f$  exterior, será substituída por um somatório de todas as integrais desenvolvidas em cada elemento  $\Gamma_j$  que compõe  $\Gamma$  (Fig. 3.12), resultando:

$$\begin{aligned}
 c_{ik}(S)u_k(S) + \sum_{j=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_j} p_{ik}^*(S,Q) \psi_k^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \underline{u}^{(N_j)}(Q) = \\
 = \sum_{j=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_j} u_{ik}^*(S,Q) \psi_k^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \underline{p}^{(N_j)}(Q) \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

para  $k$  e  $i$  variando de 1 a 2., e  $NE$  sendo o número de elementos, onde  $\psi_k^T(Q)$  representa a linha  $k$  da matriz  $\psi^T(Q)$  e  $\underline{p}^{(N_j)}$  ou  $\underline{u}^{(N_j)}$  o vetor  $\underline{p}^{(N)}$  ou  $\underline{u}^{(N)}$  do  $j$  ésimio elemento como em (3.10) e (3.11).

Cabe observar que  $u_k(S)$  (em 3.13) possui significado apenas para  $S \in \Gamma$  ou  $s \in \Omega$ ; porém, para  $f$  exterior  $u_k(f)$  não tem significado físico e desaparece da equação por ser  $c_{ik}(f) = 0$ .

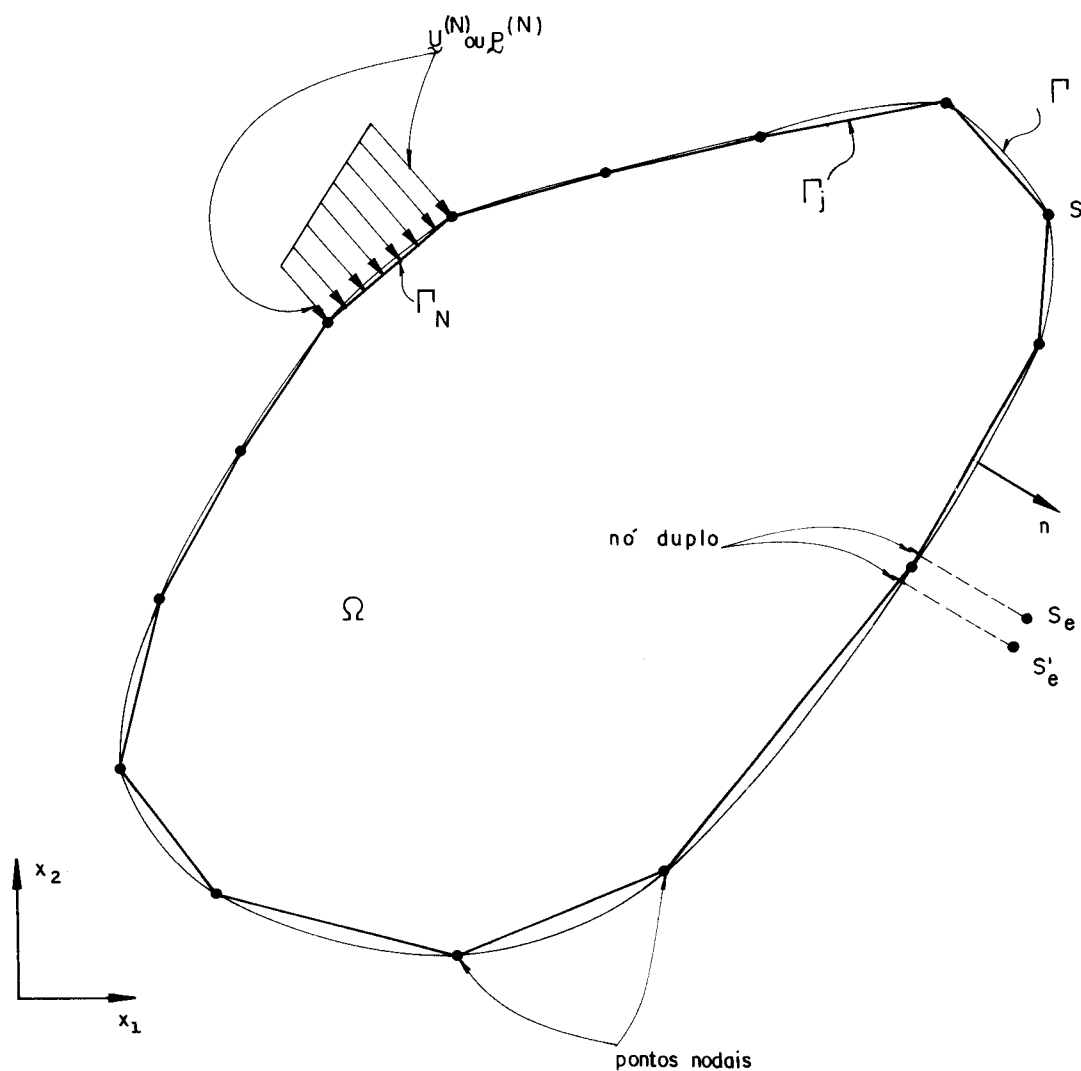


Fig. 3.12 - Discretização do contorno em Elementos Lineares.

Desenvolvendo-se adequadamente todas as integrais (Item 3.6) da equação (3.13): pode-se reescrevê-la para cada ponto S na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \underline{c}_S \underline{U}_S + [\underline{\hat{h}}^{S1} \quad \underline{\hat{h}}^{S2} \quad \dots \quad \underline{\hat{h}}^{SS} \quad \dots \quad \underline{\hat{h}}^{SN}] \begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_S \\ \vdots \\ \underline{U}_N \end{Bmatrix} = \\ = [\underline{g}^{S1} \quad \dots \quad \underline{g}^{SS} \quad \dots \quad \underline{g}^{SN}] \begin{Bmatrix} \underline{P}_1 \\ \vdots \\ \underline{P}_S \\ \vdots \\ \underline{P}_N \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde N é o número total de nós, cada submatriz  $\underline{\hat{h}}^{S\ell}$  e  $\underline{g}^{S\ell}$  contém os coeficientes da influência do nó "l" no ponto nodal "S", sendo sua dimensão 2x2 no caso bi dimensional; e  $\underline{c}$  é obtida por considerações geométricas (Item 2.4.2) do contorno, para cada ponto "S":

$$\underline{c}(S) = \underline{I} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_E} \underline{P}^*(S, Q) d\Gamma(Q) \quad (3.15)$$

onde  $\underline{I}$  é a matriz identidade que para o caso plano é:

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

O limite restante de (3.15), após calculado para o canto aproximado da figura (3.13), resulta [59]:

$$\underline{c}(S) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos(2\gamma) \text{sen}\alpha}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\text{sen}(2\gamma) \text{sen}\alpha}{4\pi(1-\nu)} \\ \frac{\text{sen}(2\gamma) \text{sen}\alpha}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{\cos(2\gamma) \text{sen}\alpha}{4\pi(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

onde  $\alpha$  e  $\gamma$  são determinados geometricamente como mostra a (Fig. 3.13).

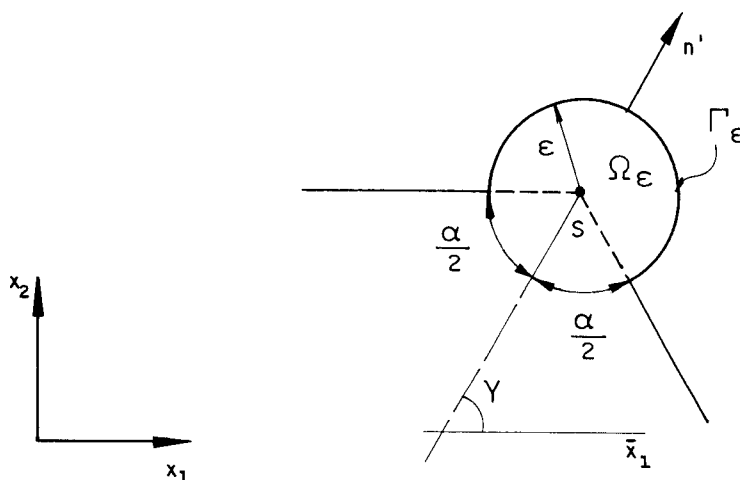


Fig. 3.13 - Configuração geométrica para determinação de  $c(S)$ .

Pode-se escrever equações algébricas como (3.14) para qualquer ponto "S" em consideração. Escolhendo-se adequadamente um número de pontos fontes igual ao número de nós do problema tem-se,

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}^{11} & \hat{h}^{12} & \dots & \hat{h}^{1N} \\ \tilde{h}^{21} & \tilde{h}^{22} & \dots & \tilde{h}^{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{h}^{N1} & \hat{h}^{N2} & \dots & \tilde{h}^{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{g}^{11} & \dots & \tilde{g}^{1N} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{g}^{N1} & \dots & \tilde{g}^{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_N \end{Bmatrix} \quad (3.18.a)$$

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} \quad (3.18.b)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{h}^{SS} &= \hat{h}^{SS} + c(S) \\ \tilde{h}^{SQ} &= \hat{h}^{SQ} \end{aligned} \quad (3.18.c)$$

O sistema de equações apresentado na expressão (3.18a ou b) pode ser facilmente resolvido através das técnicas usuais do cálculo numérico, obtendo-se assim os deslocamentos e as reações incógnitas a partir dos valores prescritos.

Com um procedimento similar àquele que permitiu a dedução das equações (3.18), obtém-se a partir da equação (2.45) a expressão que fornece os deslocamentos  $U'$  nos pontos internos  $s$ , dada matricialmente por,

$$\underline{U}' = -\underline{H}\underline{U} + \underline{G}\underline{P} \quad (3.19)$$

Da mesma forma, para o cálculo das tensões de (2.57) obtém-se:

$$\underline{\sigma} = -\underline{H}'\underline{U} + \underline{G}'\underline{P} \quad (3.20)$$

onde  $\underline{H}'$  e  $\underline{G}'$  são as matrizes obtidas ao se efetuar a integração sobre todos os elementos  $\Gamma_j$  do contorno, considerando-se os termos integrais de 2.57.

Das expressões (3.18) e (3.19) pode-se obter a solução numérica completa para o problema estático relacionado ao problema de autovalor em estudo. Esta solução tem grande importância na análise das condições iniciais. A expressão (3.18.b) será ainda adaptada para solucionar o problema dinâmico abordado como é mostrado nos capítulos IV, V e VI.

### 3.6. Integração sobre os elementos:

As integrais sobre os elementos  $\Gamma_j$  indicados na equação (3.13) geram submatrizes " $\underline{h}$ " e " $\underline{g}$ " que compõem, respectivamente, as matrizes globais " $\underline{H}$ " e " $\underline{G}$ " (equação 3.14). Estas integrais serão desenvolvidas aqui de duas maneiras distintas, dependendo da posição do ponto fonte em relação ao elemento a ser integrado.



### 3.6.1 - Integração Numérica:

Este tipo de integração é utilizado quando o ponto fonte não está contido no elemento considerado, aplicando-se para tanto a quadratura de Gauss, dada pela expressão [60]:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad (3.21)$$

onde  $n$  = número total de pontos de integração;  
 $\xi_i$  = coordenada adimensional do  $i$ -ésimo ponto de integração, definida em função de  $n$ ;  
 $w_i$  = fator ponderador, definido em função de  $n$ .

Desta maneira, transformando-se as expressões a serem integradas sobre os elementos em funções dependentes de coordenadas locais homogêneas, tem-se para cada elemento as submatrizes locais:

$$h_{ik}^m(s) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 p_{ik}^*(s, Q) \phi^m(Q, \xi) d\xi$$
$$g_{ik}^m(s) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 u_{ik}^*(s, Q) \phi^m(Q, \xi) d\xi \quad (3.22)$$

onde as letras auxiliares indicam:

$S$  ou  $s$  = nó singular, isto é, ponto onde a carga unitária é aplicada (fonte); é o ponto para o qual se escreve a equação. Pode ser interno "s" ou externo "f", ou ainda pertencente ao contorno "S".

$Q$  = pontos pertencentes ao elemento integrado;

$i$  = direção da carga unitária no nó singular;

$k$  = direção da força ou deslocamento medido sobre o elemento em análise;

$m$  = índice que determina qual a função aproximada utilizada.

O número de pontos de integração necessário para que os resultados sejam suficientemente precisos depende principalmente da distância do nó singular ao elemento, da função a ser integrada, do comprimento do elemento e do ângulo formado pelo vetor posição, definido pelos pontos fonte e de integração, e o elemento.

Os limites adequados para a escolha do número de pontos de integração foram estudados por Rodrigues[11] e podem ser escolhidos em função da precisão desejada.

### 3.6.2 - Integração Analítica:

Quando o ponto fonte pertence ao elemento, a integração sobre o elemento não é bem representada pela quadratura de Gauss, portanto deve ser realizada analiticamente sob o conceito de integral principal, ou não, dependendo da singularidade envolvida.

Optando-se por não usar os elementos descontínuos singulares, as integrais analíticas aqui desenvolvidas serão aplicadas apenas para os elementos contínuos. Para elementos contínuos vizinhos, o nó que os divide lhes é comum (Fig. 3.14) e, quando o ponto fonte se localiza neste nó as integrais singulares ficam analiticamente dadas por [61]:

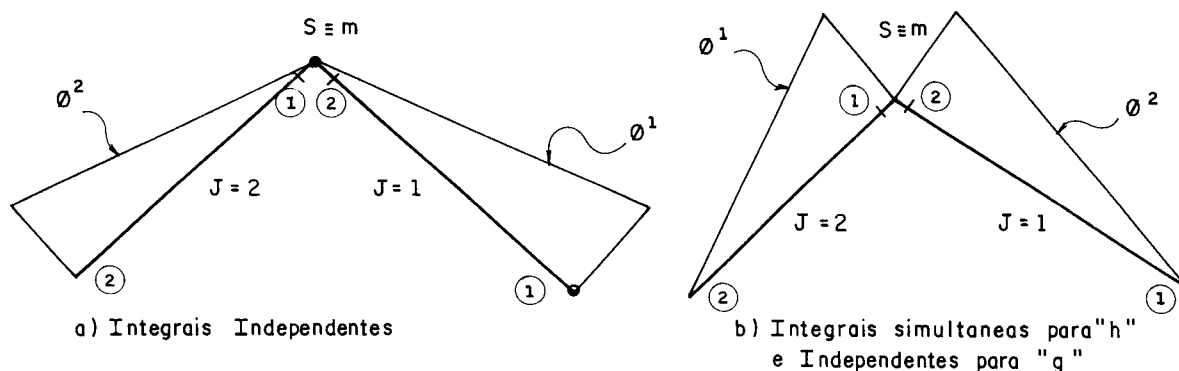


Fig. 3.14 - Elementos contínuos vizinhos com fonte na interface.

$$g_{ik}^{mn} = \frac{\ell}{16\pi(1-\nu)G} \left\{ - (3-4\nu) \left( \ln \ell - \frac{1}{2} - \delta_{mn} \right) \delta_{ik} + r_{,i} r_{,k} \right\} \quad (3.23)$$

onde "m" é a numeração local do nó "S", por exemplo, para o elemento 1 da Fig.3.14 m=2 e para o elemento 2 m=1.

$$h_{ik}^{mn} = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} (k-i) (m-n) \text{ para } m \neq n \quad (3.24)$$

Quando "m = n" a obtenção das submatrizes "h" exige que se trate, simultaneamente, as integrais sobre os elementos em questão, para obtenção do valor principal, levando aos seguintes valores já expressos, por simplicidade, em forma global:

$$H_{ik} = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \ln \left( \frac{\ell_2}{\ell_1} \right) (i-k) \quad (3.25)$$

Obs.: Uma alternativa para a solução destas integrais principais é a utilização normal da quadratura de Gauss para as submatrizes "h", nas quais a singularidade é do tipo (1/r) e o erro cometido não é muito grande; para obter as submatrizes "g" pode-se ainda utilizar as fórmulas especiais da quadratura de Gauss para singularidades do tipo  $\ln r$  [56] realizando integrais com bastante precisão.

### 3.7. Propriedade da Matriz "H":

A matriz "H" (Expressões 3.18) possui uma propriedade muito interessante, que permite verificar a precisão das integrações realizadas sobre elementos de contorno.

Supondo que um corpo finito sofreu um deslocamento de corpo rígido unitário (livre de cargas externas) na direção "i", cada nó "m" terá seu deslocamento expresso por:

$$U_j^m = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2 ; m = 1, \dots, N) \quad (3.26)$$

como as forças de superfície são nulas,

$$P_j^m = 0 \quad (m = 1, \dots, N) \quad (3.27)$$

a equação matricial (Eq.3.18.a) fica:

$$\begin{bmatrix} h^{11} & h^{12} & \dots & h^{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h^{21} & h^{22} & \dots & h^{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h^{N1} & h^{N2} & \dots & h^{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbb{I} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbb{I} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\sum_{n=1}^N h_{ij}^{mn} = 0 \quad \begin{matrix} (m, n = 1 \dots N) \\ (i, j = 1, 2) \end{matrix} \quad (3.29)$$

Este fato pode ser usado também como uma alternativa para se obter as submatrizes diagonais  $h_{ij}^{nm}$ , como segue, de (3.18.c) em (3.29):

$$h_{ij}^{nn} = - \sum_{\substack{n=1 \\ (m \neq n)}}^N h_{ij}^{mn} \quad (3.30)$$

Para problemas de domínios infinitos, a expressão (3.29) fica [56]:

$$\sum_{n=1}^N h_{ij}^{mn} = \delta_{ij} \quad (3.31)$$

e (3.30) fica:

$$h_{ij}^{nn} = \delta_{ij} - \sum_{\substack{n=1 \\ (m \neq n)}}^N h_{ij}^{mn} \quad (3.32)$$

## CAPÍTULO IV

### A Dupla Reciprocidade Aplicada a Vibração Livre de Domínios Finitos:

#### 4.1. Introdução:

No capítulo anterior descreveram-se os fundamentos básicos do Método dos Elementos de Contorno aplicados ao problema estático plano; para tanto, eliminou-se do problema de autovalor associado (relativo à vibração livre, ítem 2.2) seus termos inerciais que serão agora tratados com ênfase particular.

#### 4.2. Definição do Problema:

Reescreve-se então o problema completo, dado pela correspondente equação diferencial:

$$G u_{i,jj} + (\lambda + G) u_{j,ji} = \rho w^2 u_i \quad (2.30)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= 0 & S \in \Gamma_1 \\ \bar{p}_i &= 0 & S \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

e condições iniciais:

$$\begin{aligned} u_{i0} &= \bar{u}_i & s \in \Omega \\ v_{i0} &= \bar{v}_i & s \in \Omega \end{aligned} \quad (2.32)$$

Como foi descrito no capítulo 2, a equação diferencial (2.30) dá origem a uma equação integral após a aplicação do teorema generalizado de Maxwell-Betti [42, 43, 13], tendo como estado de deslocamento virtual a solução fundamental de Kelvin. Nesta equação integral o termo de massa (ou Inercial) aparece como sendo força volumétrica,

$$\begin{aligned} c_{ij}(S) u_{ij}(S) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) - \\ & - \rho \omega^2 \int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) u_j(q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde  $c_{ij}$  assume os mesmos valores já discutidos anteriormente.

#### 4.3. Transformação da Integral de Domínio em Integral de Contorno:

A integral de domínio a ser transformada é:

$$\int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) u_j(q) d\Omega(q) \quad (4.1)$$

Para tanto, aproximam-se os deslocamentos incôgnitos [42-46] por uma soma de funções aproximadoras conhecidas  $f(k, q)$  quaisquer ponderadas por coeficientes  $\alpha_j^k$  incôgnitos, ou seja:

$$u_j(q) \cong \alpha_j^k \cdot f(k,q) = \alpha_j^k f^k(q) \quad (k=1, \dots, m) \quad (4.2)$$

onde "m" representa o número total de funções  $f^k$ , que se pretende utilizar para aproximar os deslocamentos nas direções "j", q é um ponto qualquer do domínio e k é o ponto base da função f(k,q).

Substituindo-se os deslocamentos  $u_j(q)$  de (4.1) pela aproximação (4.2):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{ij}^*(S,q) u_j(q) d\Omega(q) &\cong \alpha_j^k \int_{\Omega} f(k,q) u_{ij}^*(S,q) d\Omega(q) = \\ &= \alpha_j^k \int_{\Omega} \delta_{lj} f^k(q) u_{ij}^*(S,q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Toma-se agora o seguinte problema estático hipotético em um domínio infinito:

$$\sigma_{ljm,n}(k,q) + \delta_{lj} f^k(q) = 0 \quad (4.4)$$

A solução em termos de deslocamentos deste problema será chamada de  $\psi_{lj}^k$ , e as suas correspondentes forças de superfície serão  $\eta_{lj}^k$ , onde o índice superior "k" representa a base da função carregamento em questão, os índices inferiores l, j são, respectivamente, a direção em que o carregamento f(k,q) atua e a direção do deslocamento ou da força de superfície resultante. Pode-se, portanto, escrever o teorema generalizado de Maxwell - Betti (Equação 2.42) relacionando dois estados de deslocamento distintos, a saber, o do problema representado na equação (4.4) e o do problema de Kelvin:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_{ij}^*(S,q) \sigma_{ljm,n}(k,q) - \psi_{lj}^k(q) \sigma_{ijm,n}^*(S,q)) d\Omega(q) = \\ \int_{\Gamma} (u_{ij}^*(S,Q) \eta_{lj}^k(Q) - \psi_{lj}^k(Q) p_{ij}^*(S,Q)) d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Das expressões (4.4) e (4.5):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{ij}^*(S,q) \delta_{lj} f^k(q) d\Omega(q) = c_{ij}(S) \cdot \psi_{lj}^k(S) - \\ \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S,Q) \eta_{lj}^k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S,Q) \psi_{lj}^k(Q) d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (4.6)$$

que substituindo em (4.3) fica:

$$\int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) u_j(q) d\Omega(q) \cong [c_{ij}(S) \psi_{lj}^k(S) - \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q) \eta_{lj}^k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q) \cdot \psi_{lj}^k(Q) d\Gamma(Q)] \alpha_{\ell}^k \quad (4.7)$$

Escolhendo-se funções aproximadoras para as quais se conhece a solução do problema hipotético da expressão (4.4), a expressão (4.7) fica totalmente conhecida a menos das constantes  $\alpha_j^k$ . Substituindo esta expressão em (2.52) obtem-se a seguinte equação:

$$c_{ij}(S) u_j(S) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) + \rho \omega^2 [c_{ij}(S) \psi_{lj}^k(S) - \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q) \eta_{lj}^k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q) \psi_{lj}^k(Q) d\Gamma(Q)] \alpha_{\ell}^k = 0 \quad (4.8)$$

que representa a equação integral de contorno para o problema de vibração livre.

Pode-se observar que o procedimento descrito acima é chamado de dupla reciprocidade pela aplicação do teorema da reciprocidade de Betti, uma segunda vez, na transformação da integral do domínio em uma soma de integrais de contorno.

#### 4.4 Obtenção do Sistema Algébrico de Equações:

Obviamente os três primeiros termos da Equação (4.8) são os mesmos já dados na equação (3.1), portanto, o processo de transformação destas integrais em termos algébricos aproximados é o mesmo descrito no capítulo III.

Para os termos restantes, entre colchetes, os valores das funções  $\psi$  e  $\eta$  são conhecidos em todo o contorno, portanto, as integrais que os contém poderiam ser calculadas diretamente. Entretanto, tais integrais seriam feitas em um número igual ao das bases adotadas. Assim, é conveniente aproximar estas funções ao longo do contorno



da mesma forma que  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$  foram aproximados. Isto deverá levar à obtenção das mesmas matrizes já analisadas no item (3.4), possibilitando, portanto, a integração de uma única vez dos termos indicados, como é feito a seguir.

Para um melhor entendimento mostra-se agora a aproximação linear adotada, em um elemento, para as forças de superfície e deslocamentos do problema fictício:

$$\begin{bmatrix} \psi_{11}^k & \psi_{12}^k \\ \psi_{21}^k & \psi_{22}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{11}^{1k} & \psi_{12}^{1k} \\ \psi_{11}^{2k} & \psi_{12}^{2k} \\ \psi_{21}^{1k} & \psi_{22}^{1k} \\ \psi_{21}^{2k} & \psi_{22}^{2k} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} \eta_{11}^k & \eta_{12}^k \\ \eta_{21}^k & \eta_{22}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{11}^{1k} & \eta_{12}^{1k} \\ \eta_{11}^{2k} & \eta_{12}^{2k} \\ \eta_{21}^{1k} & \eta_{22}^{1k} \\ \eta_{21}^{2k} & \eta_{22}^{2k} \end{bmatrix}$$

Reescrevendo (4.9) em notação indicial obtém-se:

$$\begin{aligned} \psi_{ij}^k &= \phi_n & \psi_{ij}^{nk} &= \phi_n^T \psi_{ij}^K \\ \eta_{ij}^k &= \phi_n & \eta_{ij}^{nk} &= \phi_n^T \eta_{ij}^K \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde  $n$  representa a numeração local dos nós de cada elemento,  $\phi_n(\xi)$  são as funções aproximadoras dadas nas expressões (3.8.a e b), e  $\psi_{ij}^{nk}$  e  $\eta_{ij}^{nk}$  são os valores nos nós  $n$  das funções  $\psi_{ij}^k$  e  $\eta_{ij}^k$ , correspondentes a uma base genérica  $k$ .

Desta forma pode-se escrever, de maneira equivalente ao item 3.5, uma expressão para a equação integral (4.8) relativa a cada ponto fonte S na forma de um somatório de integrais sobre todos os elementos  $\Gamma_\ell$  que compõem  $\Gamma$ , como segue:

$$\begin{aligned}
 c_{ij}(S) + \sum_{\ell=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_\ell} p_{ij}^*(S, Q) \phi^T(Q) d\Gamma(Q) \underline{U}_j - \int_{\Gamma_\ell} u_{ij}^*(S, Q) \phi^T(Q) d\Gamma(Q) \underline{P}_i \right] + \\
 + \rho w^2 \left\{ c_{ij}(S) \underline{\psi}_{\ell j}^k + \sum_{\ell=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_\ell} p_{ij}^*(S, Q) \phi^T(Q) d\Gamma(Q) \underline{\psi}_{\ell j}^k - \right. \right. \\
 \left. \left. - \int_{\Gamma_\ell} u_{ij}^*(S, Q) \phi^T(Q) d\Gamma(Q) \underline{\eta}_{\ell j}^k \right] \right\} \alpha_\ell^k = 0 \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Seguindo procedimento análogo ao do item 3.5 chega-se ao seguinte sistema de equações lineares expresso em forma de matrizes globais:

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} + \rho w^2 (\underline{\underline{H}} \underline{\underline{\psi}} - \underline{\underline{G}} \underline{\underline{\eta}}) \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{0}} \quad (4.12)$$

As colunas das matrizes  $\underline{\underline{\psi}}$  e  $\underline{\underline{\eta}}$  dão os valores nodais dos deslocamentos e forças de superfície relativos à cada função aproximadora  $f(k, q)$  e o vetor incógnito  $\underline{\underline{\alpha}}$  vai ser expresso matricialmente, de acordo com a definição (4.2), como se segue:

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\alpha}} \quad (4.13)$$

ou

$$\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{U}} \quad (4.14)$$

onde  $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{F}}^{-1}$ . Os elementos da matriz  $\underline{\underline{F}}$  são os valores das funções  $f(k, q)$  quando calculados para  $q$  coincidente com todos os nós do problema; normalmente se faz coincidir os nós do problema com os pontos base das funções aproximadoras.

Assim, substituindo (4.14) em (4.12), chega-se à:

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} + \rho w^2 (\underline{\underline{H}} \underline{\underline{\psi}} - \underline{\underline{G}} \underline{\underline{\eta}}) \underline{\underline{E}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{0}} \quad (4.15)$$

ou de forma simplificada :

$$\underline{\underline{H}}\underline{\underline{U}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}}\underline{\underline{P}} \quad (4.16)$$

onde  $\underline{\underline{M}}$  é chamada de matriz de massa e é dada por:

$$M = -\rho (\underline{\underline{H}}\underline{\underline{\psi}} - \underline{\underline{G}}\underline{\underline{\eta}}) \underline{\underline{E}}$$

A expressão (4.16) representa o problema de autovalor e autofunção (Equação 2.30) associado à vibração livre de corpos finitos pelo método dos elementos de contorno, utilizando a técnica da dupla reciprocidade, e nada mais é que um problema de autovalor e autovetor. Para solucioná-lo, levando em consideração as condições de contorno e condições iniciais, seguiu-se o procedimento descrito no item abaixo:

#### 4.5. Obtenção da Solução Numérica:

Como foi mostrado na equação (4.16), o caso da vibração livre reduziu-se a um problema de autovalor generalizado. Visto que as matrizes envolvidas  $\underline{\underline{H}}$ ,  $\underline{\underline{G}}$  e  $\underline{\underline{M}}$  não são simétricas, a escolha de um método para sua solução ficou bastante limitada. Entretanto, como a ordem das matrizes é muito menor que aquela usada nas formulações de domínio (Elementos Finitos e Diferenças Finitas), o tempo de processamento não é tão crítico, permitindo a escolha de um método que, apesar de "lento", é bastante preciso.

O método aqui escolhido começa com a redução do problema generalizado de autovalor para o problema padronizado; esta redução, no caso, dependerá das condições de contorno.

##### 4.5.1 - Corpos Livres de Restrições:

Este caso é caracterizado quando as condições de contorno prescritas são apenas as forças de superfície e seus valores são nulos, ou seja, a expressão (2.31) se reduz para:

$$\bar{P}_i = 0 \quad S \in \Gamma \quad (4.18)$$

Aplicando tal condição de contorno na expressão (4.16), pode-se escrevê-la da seguinte forma:

$$\underline{H}\underline{U} = w^2 \underline{M}\underline{U} \quad (4.19)$$

Reduz-se agora a expressão acima a um problema padronizado através da inversão da matriz  $\underline{M}$  obtendo-se:

$$\underline{A} \cdot \underline{U} = \lambda \cdot \underline{U} \quad (4.20)$$

sendo:

$$\underline{A} = \underline{M}^{-1} \cdot \underline{H} \quad e \quad \lambda = w^2 \quad (4.21)$$

A partir daí, a matriz "A" é transformada em uma forma tri-diagonal pelo algoritmo de Householder [62] e, então, os autovalores e autovetores da matriz transformada são encontrados pelo algoritmo QR[63, 64].

Obtidos todos os autovalores e autovetores como descrito acima, determina-se a contribuição proporcional que cada modo tem com relação ao movimento total, a partir das condições iniciais, como segue:

A solução geral do problema, que representa todos os movimentos possíveis do corpo, é:

$$\underline{u}(s,t) = \sum_{n=1}^N a_{(n)} \cdot \underline{U}_{(n)} e^{i w_{(n)} t} \quad (4.22)$$

onde  $w_n$  representa o n-ésimo autovalor do problema e  $U_n$  é o n-ésimo autovetor. Note que na equação (4.22) o índice n foi utilizado entre parêntese significando que, apesar deste estar repetido, não há soma implícita.

Resta ainda dizer que, na equação (4.22), " $a_n$ " são constantes a se determinar e N é o número de graus de liberdade nas duas direções.

Pode-se escrever (4.22) de maneira matricial:

$$\begin{bmatrix} U_1^1 e^{iw_1 t} & \dots & U_j^1 e^{iw_j t} & \dots & U_N^1 e^{iw_N t} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ U_1^j e^{iw_1 t} & \dots & U_j^j e^{iw_j t} & \dots & U_N^j e^{iw_N t} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ U_1^N e^{iw_1 t} & \dots & U_j^N e^{iw_j t} & \dots & U_N^N e^{iw_N t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_j(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Aplicando-se agora as condições iniciais (2.32) à expressão matricial (4.23) obtém-se:

i) Se em  $t=0$  prescreveu-se  $u_k(0) = u_{0k}$  então:

$$U_{(j)}^k e^{iw_{(j)} 0} = U_j^k \quad p/ (j=1, \dots, N)$$

ii) Se em  $t=0$  prescreveu-se  $v_k(0) = \dot{u}_k(0) = \bar{v}_{0k}$  então:

$$w_{(j)} U_{(j)}^m e^{iw_{(j)} 0} = w_{(j)} U_{(j)}^m \quad p/ (j=1, \dots, N)$$

e a expressão (4.27) se transforma no seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} U_1^1 & \dots & U_j^1 & \dots & U_N^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_{(m)} U_1^{(m)} & \dots & w_{(m)} U_j^{(m)} & \dots & w_{(m)} U_N^{(m)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ U_1^k & \dots & U_j^k & \dots & U_N^k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_{(N)} U_1^{(N)} & & w_{(N)} U_j^{(N)} & \dots & w_{(N)} U_N^{(N)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{01} \\ \vdots \\ \bar{v}_{0m} \\ \vdots \\ u_{0k} \\ \vdots \\ \bar{v}_{0N} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

onde, por motivos apenas de ilustração, considerou-se que em  $t=0$  prescreveu-se  $\bar{u}_{01}$  e  $\bar{v}_{0N}$ .

Este sistema é resolvido por qualquer dos métodos tradicionais, obtendo-se assim os valores de  $a_n$ ; desta maneira a expressão (4.22) irá descrever o movimento completo do corpo em análise.

Cabe ressaltar que, para se obter a equação (4.24), aplicam-se as condições iniciais de forma fictícia, diretamente no contorno, sendo que estas são, de maneira geral, prescritas em todo o corpo; quando isto acontece basta utilizar, por exemplo, o método da dupla reciprocidade para transformar a densidade de domínio das condições iniciais em condições iniciais de contorno.

#### 4.5.8 - Corpos com Graus de Liberdade Restritos:

Neste caso, as condições de contorno expressas em (2.31) ficam em sua forma completa.

Para se aplicar as condições de contorno na equação (4.16) torna-se necessário, para melhor entendimento, representá-la da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A_{11} \cdots A_{1k} \cdots A_{1j} \cdots A_{1N} \\ \vdots \\ A_{k1} \cdots A_{kk} \cdots A_{kj} \cdots A_{kN} \\ \vdots \\ A_{j1} \cdots A_{jk} \cdots A_{jj} \cdots A_{jN} \\ \vdots \\ A_{m1} \cdots A_{mk} \cdots A_{mj} \cdots A_{mN} \\ \vdots \\ A_{N1} \cdots A_{Nk} \cdots A_{Nj} \cdots A_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_k \\ \vdots \\ U_j \\ \vdots \\ U_m \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} \cdots G_{1k} \cdots G_{1j} \cdots G_{1N} \\ \vdots \\ G_{k1} \cdots G_{kk} \cdots G_{kj} \cdots G_{kN} \\ \vdots \\ G_{j1} \cdots G_{jk} \cdots G_{jj} \cdots G_{jN} \\ \vdots \\ G_{m1} \cdots G_{mk} \cdots G_{mj} \cdots G_{mN} \\ \vdots \\ G_{N1} \cdots G_{Nk} \cdots G_{Nj} \cdots G_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \vdots \\ P_k \\ \vdots \\ \bar{P}_j \\ \vdots \\ \bar{P}_m \\ \vdots \\ \bar{P}_N \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

onde

$$A_{ij} = H_{ij} - w^2 M_{ij} \quad (4.26)$$

e

$$\bar{U}_k = 0 \quad \text{e} \quad \bar{P}_j = 0 \quad (J=1, \dots, N, \text{ e } J \neq k)$$

Desta forma, pode-se trocar, da maneira usual, as colunas "k" das matrizes  $A_{ij}$  e  $G_{ij}$  dando:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & -b G_{1k} & \dots & A_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \dots & -b G_{kk} & \dots & A_{kN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{M1} & \dots & -b G_{Nk} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ \bar{P}_k/b \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & -A_{1k} & \dots & G_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{k1} & \dots & -A_{kk} & \dots & G_{kN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{N1} & \dots & -A_{Nk} & \dots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.27)$$

onde  $b$  é uma constante para manter a mesma ordem de grandeza para os elementos da matriz resultante da operação.

Rearranjando a matriz resultante obtém-se:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \dots & -b G_{1k} & \dots & H_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{k1} & \dots & -b G_{kk} & \dots & H_{kN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{N1} & \dots & -b G_{Nk} & \dots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ P_k \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix} = w^2 \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & 0_{1k} & \dots & M_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{k1} & \dots & 0_{kk} & \dots & M_{kN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{N1} & \dots & 0_{Nk} & \dots & M_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ P_k \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

ou

$$\hat{H}\hat{U} = \hat{M}\hat{U}$$

Chegou-se assim a um problema generalizado de autovalores; sua transformação, para o problema padronizado, se faz através da inversão da matriz  $\hat{H}$ , visto que a matriz de massa é singular para este caso, ficando:

$$A \hat{U} = \lambda \hat{U} \quad (4.29)$$

onde

$$A = \hat{H}^{-1} \hat{M} \quad \text{e} \quad \lambda = 1/w^2 \quad (4.30)$$

A expressão (4.29) é análoga à expressão (4.20), e, portanto, deve ser tratada de forma análoga à que foi descrita no item anterior para a obtenção dos autovalores e composição final da solução completa.

Deve-se notar ainda, que, na solução final do problema, as componentes relacionadas com os índices "k", para os quais as colunas foram trocadas, não correspondem mais a deslocamentos, mas sim às forças de contorno incógnitas.



## CAPÍTULO VI

### Formulação Proposta

#### 6.1. Introdução:

O processo da dupla reciprocidade tem sido aplicado a vários tipos de problemas da Engenharia desde 1981 [42-46]; entretanto, algumas particularidades observadas para várias aplicações recomendam novos estudos para aumentar sua precisão e confiabilidade.

Uma das principais dificuldades verificadas para este processo é a pequena flexibilidade oferecida pela transformação, dificultando a generalização do procedimento para o tratamento de qualquer tipo de integrais de domínio que possam existir para diferentes problemas. Esta pequena flexibilidade é caracterizada pelo que é mostrado na equação (4.6), onde as equações integrais de contorno possuem núcleos com a mesma singularidade da integral de domínio original e, também, com singularidade mais forte. Isto faz com que, para problemas cujos núcleos das

integrais de domínio são definidos pela primeira ou segunda derivada da solução fundamental, como, por exemplo, uma distribuição de tensões ou deformações no interior de um corpo elástico, este procedimento seja mal aplicado. A solução destes problemas requer o cálculo de novas matrizes H e G baseadas em integrais de contorno com núcleos com singularidades muito fortes.

Outra característica que pode desencorajar o uso deste procedimento é o tipo de aproximação usada para descrever as variáveis sobre o domínio. Como foi mencionado no capítulo IV, as "m" funções aproximadoras  $f(s,k)$  selecionadas devem satisfazer a equação de Navier. Deste modo, apenas algumas funções  $f(s,k)$  muito simples têm sido rotineiramente empregadas para aproximar as densidades das integrais de domínio em diversos tipos de problemas, inclusive o tratado aqui.

Neste capítulo propõe-se uma forma alternativa para transformar as integrais de domínio em integrais de contorno, cujos núcleos possuam singularidades mais fracas que as originais, utilizando para tanto, uma forma de aproximação das densidades de domínio semelhante à adotada na dupla reciprocidade, onde porém, as funções aproximadoras adotadas não precisam satisfazer a equação de Navier.

## 6.2. Definição do Problema:

Como nos capítulos IV e V, estuda-se neste capítulo a vibração livre de corpos finitos, com material elástico linear homogêneo e isotrópico; portanto, as mesmas equações desenvolvidas nos capítulos II e III devem ser novamente escritas.

A equação que rege o movimento é portanto:

$$Gu_{i,jj} + (\lambda+G)u_{j,ji} = \rho w^2 u_i \quad (2.30)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u_i &= 0 & S \in \Gamma_1 \\ p_i &= 0 & S \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

e condições iniciais,

$$\begin{aligned} u_{i0} &= \bar{u}_i & s \in \Omega \\ v_{i0} &= \bar{v}_i & s \in \Omega \end{aligned} \quad (2.32)$$

A equação diferencial (2.30) foi transformada, no capítulo II, para a seguinte equação integral:

$$\begin{aligned} c_{ij}(S)u_j(S) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S,Q)p_i(Q)d\Gamma(Q) - \int_{\Omega} p_{ij}^*(S,Q)u_j(Q)d\Gamma(Q) - \\ &- \rho w^2 \int_{\Omega} u_{ij}^*(s,q)u_j(q)d\Omega(q) \end{aligned} \quad (2.52)$$

sendo  $c_{ij}$  dado pelos valores já discutidos anteriormente.

Os termos na integral de domínio são aqueles que serão tratados pela função aproximadora proposta neste capítulo.

### 6.3. Aproximação das Variáveis de Domínio:

Como foi dito anteriormente, as funções  $f(q,k)$  empregadas na técnica da dupla reciprocidade são bastante simples para muitos casos mostrados na literatura; pode-se ver que a principal particularidade dessas funções consiste em serem sempre fundamentadas na distância entre os pontos do domínio e os pontos escolhidos como bases. A função mais frequentemente adotada é dada simplesmente por esta distância, entretanto, outras funções, como potências inteiras desta distância, já foram tentadas. Esta aproximação, dependente linearmente da distância, pode ser entendida como uma superposição de várias superfícies cônicas

(fig. 6.1) com vértices definidos nas respectivas bases, ponderadas pelas constantes  $\alpha^k$ . De agora em diante, esta será chamada de aproximação cônica devido às características acima descritas.

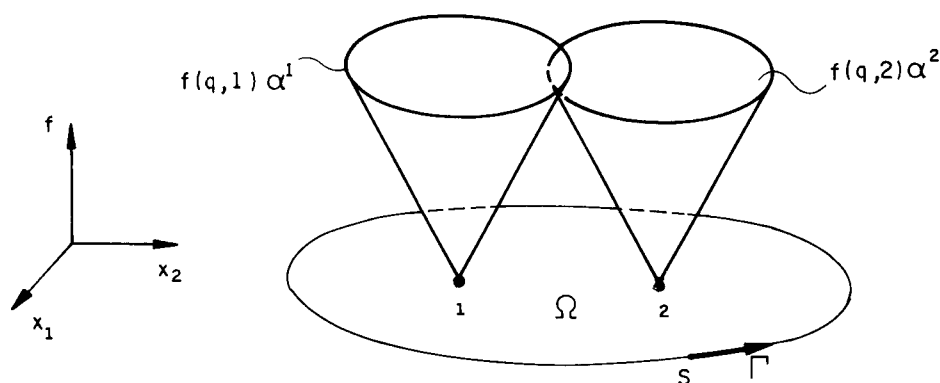


Fig. 6.1 - Aproximação Cônica

Partindo-se da série de funções cônicas escreve-se então a aproximação aplicada a uma função qualquer "g(q)" da seguinte forma:

$$g_a(q) = f(q,k)\alpha^k = r(q,k)\alpha^k \quad (6.1)$$

onde o índice "a" designa a função aproximada de "g".

Define-se agora a aproximação proposta neste trabalho pela expressão abaixo:

$$g_a(q) = f(q,k)\alpha^k = |x_1(q) - x_1(k)| |x_2(q) - x_2(k)|\alpha^k \quad (6.2)$$

cuja forma pode ser vista na fig. (6.2), que, por não possuir uma fácil definição geométrica, será chamada simplesmente de aproximação proposta.

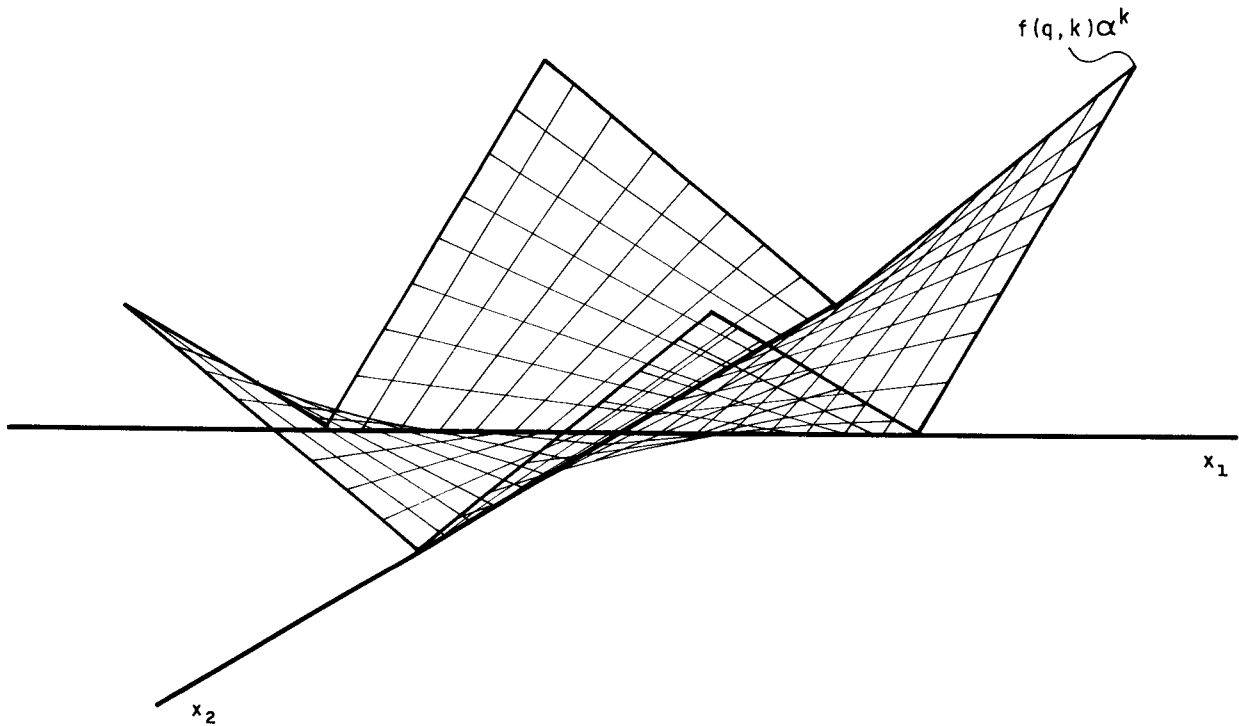


Fig. 6.2 - Aproximação Proposta

Desenvolveu-se, neste trabalho, um algoritmo simples que possibilita a avaliação da precisão das funções aproximadoras em análise. De maneira geral, este se baseia na expressão geral implícita nas equações (6.1) e (6.2) que é:

$$g_a(q) = f(q,k)\alpha^k \quad (k = 1, \dots, m) \quad (6.3)$$

Sendo  $g(q)$  uma função conhecida, pode-se calcular o valor desta função quando "q" coincide com a posição de uma base "i" qualquer. Fazendo com que a aproximação assuma valores exatos nestes pontos, a expressão (6.3) torna-se:

$$g(i) = g_a(i) = f(i,1)\alpha^1 + \dots + f(i,i)\alpha^i + \dots + f(i,m)\alpha^m \quad (6.4)$$

Repetindo o cálculo acima para "i" variando da primeira à última base "m", (6.4) pode ser escrita de forma matricial com segue:

$$\begin{Bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_i \\ \vdots \\ g_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f(1,1) \dots f(1,i) \dots f(1,m) \\ \vdots \\ f(i,1) \dots f(i,i) \dots f(i,m) \\ \vdots \\ f(m,1) \dots f(m,i) \dots f(m,m) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_m \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

ou de forma compacta,

$$\underline{g} = \underline{F} \underline{\alpha} \quad (6.6)$$

Como  $\underline{g}$  é conhecido basta inverter-se  $\underline{F}$  para obter-se  $\underline{\alpha}$ , ou seja:

$$\underline{\alpha} = \underline{F}^{-1} \underline{g} \quad (6.7)$$

Obtidos os valores de  $\alpha^k$  em (6.7) ter-se-á avaliado os coeficientes da expressão (6.3), que representa a aproximação da função  $g(q)$ . Pode-se agora avaliar a precisão da aproximação, comparando-se valores calculados pela expressão (6.3), para pontos "q" quaisquer do domínio, com os valores reais da função  $g$  nestes pontos.

Além de avaliar a precisão de um conjunto de funções aproximadoras adotadas, o procedimento descrito acima permite identificar, antecipadamente, a validade da adoção de certos tipos de funções na tentativa de aproximar densidades no domínio de corpos. Faz-se a seguir uma análise comparativa entre as aproximações cônica e proposta.

Apesar destas aproximações terem sido analisadas para várias formas de domínios e diversas funções a aproximar, os resultados apresentados aqui são os obtidos para um domínio retangular  $1 \times 4$ , onde se aproximou três distribuições diferentes, a saber: constante, linear e senoidal.

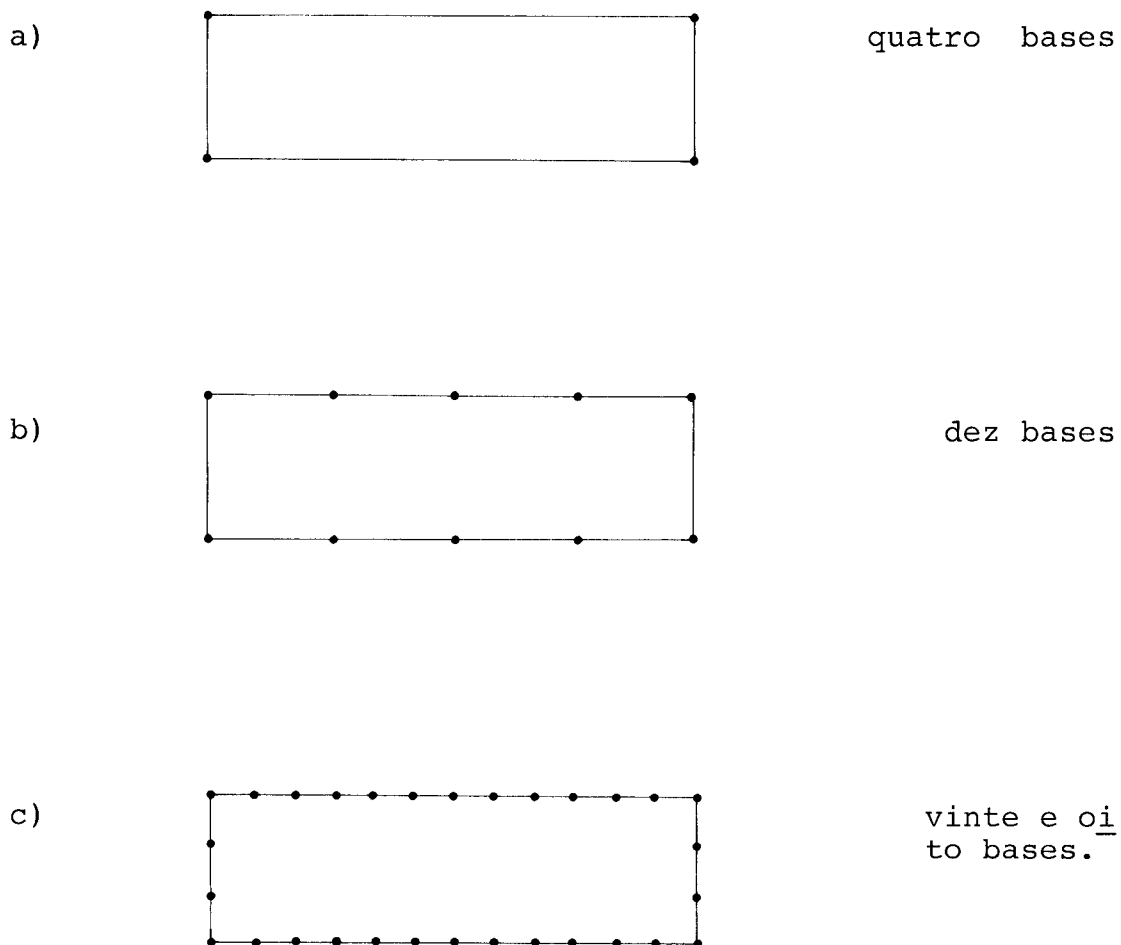


Fig. 6.3 - Domínio retangular com bases indicadas

Os resultados mostrados da tabela 1 a 8 foram obtidos para casos onde apenas bases no contorno foram consideradas (fig.6.3) para a aproximação dos valores sobre o domínio.

As duas primeiras tabelas comparam os valores obtidos quando distribuições constante e linear são aproximadas usando apenas quatro bases, como indicado na figura

(6.3-a). As seis tabelas restantes apresentam, perspectiva<sub>mente</sub>, os valores calculados quando são adotados 10 e 28 ba<sub>ses</sub>, mostradas nas figuras (3.6-b e c), para as três dis<sub>tribuições</sub> mencionadas acima.

Tabela 1 - Aproximação de uma função constante sobre um do<sub>mínio</sub> retangular usando quatro bases.

Coordenadas Cartesianas		Valores Exatos	Valores Calculados	
x	y		aprox. cônica	aprox. proposta
0,52	0,13	1,0	0,9447	1,0
1,0	0,25	1,0	0,9189	1,0
2,0	0,50	1,0	0,9038	1,0

Tabela 2 - Aproximação de uma função linear sobre um domí<sub>nio</sub> retangular usando quatro bases.

Coordenadas Cartesianas		Valores Exatos	Valores Calculados	
x	y		aprox. cônica	aprox. proposta
0,52	0,13	0,65	0,552	0,65
1,0	0,25	1,25	1,090	1,25
2,0	0,50	2,50	2,259	2,50



Tabela 3 - Aproximação de uma função constante sobre um domínio retangular usando dez bases.

Coordenadas Cartesianas		Valores Exatos	Valores Calculados	
x	y	g=1	aprox. cônica	aprox. proposta
0,52	0,13	1,0	0,9769	1,0
1,0	0,25	1,0	0,9773	1,0
2,0	0,50	1,0	0,9775	1,0

Tabela 4 - Aproximação de uma função linear sobre um domínio retangular usando dez bases.

Coordenadas Cartesianas		Valores Exatos	Valores Calculados	
x	y	g=x+y	aprox. Cônica	aprox. proposta
0,52	0,13	0,65	0,569	0,65
1,0	0,25	1,25	1,159	1,25
2,0	0,50	2,5	2,443	2,50

Tabela 5 - Aproximação de uma função senoidal sobre um domínio retangular usando dez bases.

Coordenadas Cartesianas		Valores Exatos	Valores Calculados	
x	y	$g = \text{sen} \frac{\pi x}{2} + \text{sen} \pi y$	aprox. Cônica	aprox. proposta
0,52	0,13	1,126	0,728	0,780
1,0	0,25	1,707	0,953	1,500
2,0	0,50	1,000	0,003	1,000

Tabela 6 - Aproximação de uma função constante sobre um domínio retangular usando 28 bases.

Coordenadas Cartesianas		Valores Exatos	Valores Calculados	
x	y	g=1,0	aprox. cônica	aprox. proposta
0,52	0,13	1,0	0,9845	1,0
1,0	0,25	1,0	0,9794	1,0
2,0	0,50	1,0	0,9779	1,0

Tabela 7 - Aproximação de uma função linear sobre um domínio retangular usando 28 bases.

Coordenadas Cartesianas		Valores Exatos	Valores Calculados	
x	y	g=1,0	aprox. cônica	aprox. proposta
0,52	0,13	0,650	0,575	0,650
1,0	0,25	1,250	1,163	1,250
2,0	0,50	2,500	2,444	2,500

Tabela 8 - Aproximação de uma função senoidal sobre um domínio retangular usando 28 bases.

Coordenadas Cartesianas		Valores Exatos	Valores Calculados	
x	y	$g = \frac{\pi x}{2} + \text{sen } \pi y$	aprox. cônica	aprox. proposta
0,52	0,13	1,126	0,799	1,064
1,0	0,25	1,707	1,014	1,658
2,0	0,50	1,000	0,015	1,000

Estes resultados ilustram muito bem a dificuldade de se aproximar qualquer distribuição utilizando funções do tipo  $r(q,k)$ , como recomendado para o processo da dupla reciprocidade. Como pode ser visto, a combinação cônica não modela bem, até mesmo distribuições simples como funções constantes ou lineares, enquanto a aproximação proposta pode re-representá-las exatamente, mesmo quando foram adotadas poucas bases. A aproximação cônica, equação (6.1), mostrou erros significativos para todos os testes executados.

Tabela 9 - Aproximação das três funções para o ponto interno  $x = 2,0$   $y = 0,25$  para 4,10 e 28 pontos base.

Número de bases	Função Constante Exato 1,00		Função Linear Exato 2,50		Função Senoidal Exato 1,00	
	Aproximação		Aproximação		Aproximação	
	cônica	prop.	cônica	prop.	cônica	prop.
4	0,9038	1,0	2,259	2,50	0,00	0,00
10	0,9775	1,0	2,443	2,50	0,003	1,00
28	0,9779	1,0	2,444	2,50	0,015	1,00

As tabelas 5 e 8 exibem o teste das aproximações aplicado à uma função senoidal. Neste caso, a adequação dos valores aproximados foi ruim quando comparada com os casos anteriores mas, também aqui, a aproximação proposta é mais precisa. Usando 28 bases, o erro máximo observado na modelagem de tal função foi de 56% e 5,3%, respectivamente, para as aproximações cônica e proposta. Estes erros foram calculados com respeito ao máximo valor que a função senoidal apresenta na diagonal do retângulo. Deve-se enfatizar, também, que o erro de 5,3% é um valor obtido para um único ponto interno. Para a maioria dos pontos internos, os erros observados para a aproximação proposta foram menores do que 2%, o que representa uma

aproximação razoável para aquela distribuição bastante complexa.

A tabela 9 mostra o comportamento dos valores aproximados, calculados para um ponto particular, para um aumento do número de bases no contorno. Para os três casos de distribuição estudados, como pode ser visto na tabela 9, a aproximação cônica converge muito mais devagar para uma boa representação do que a aproximação proposta.

O mesmo tipo de teste foi desenvolvido utilizando bases internas para modelar as distribuições de domínio. Observou-se que ambas as aproximações modelam melhor todos os valores internos, mas esta melhora não é significativa quando se usa um número muito pequeno de bases internas. Estas devem ser adotadas se o problema a ser modelado apresentar um comportamento onde se necessite muita precisão. Para muitos problemas práticos, quando se usa a aproximação proposta, é possível representar com precisão aceitável valores internos utilizando apenas bases no contorno. Por outro lado, mesmo para problemas com distribuições internas muito simples, a utilização da aproximação cônica requer a adoção de bases internas.

Verificou-se que o mesmo comportamento descrito aqui se repete para domínios com outras formas e distribuições quaisquer.

A função aproximadora proposta aqui foi sugerida inicialmente por Venturini [66] na seguinte forma:

$$g_a(q) = (|x_1(q) - x_1(k)| + |x_2(q) - x_2(k)| + |x_1(q) - x_1(k)| |x_2(q) - x_2(k)|) \alpha^k \quad (6.8)$$

Porém, mostrou-se, para vários casos, que os termos lineares em nada contribuem para a precisão da aproximação. Para tanto tomou-se isoladamente,

$$f(q,k) = |x_1(q) - x_1(k)| + |x_2(q) - x_2(k)| \quad (6.9)$$

e efetuar o teste de validade. Escolheu-se então um número "m" qualquer de pontos base "k" e, a partir da expressão (6.9), calculou-se a matriz  $\tilde{F}$  como em (6.5). Facilmente verificou-se que esta matriz era singular. Desta forma a função interpoladora escolhida como em (6.9) não representou aproximação alguma e, portanto, não possui nenhuma influência na expressão (6.8). Assim, para este trabalho escolheu-se apenas o termo do segundo grau como função aproximadora proposta.

Alguns autores têm mostrado através de exemplos complexos que, para o processo da dupla reciprocidade, as utilizações de funções aproximadoras do tipo

$$f(q,k) = \sum_{n=1}^N (r(q,k))^n \quad \text{para } n = 1, \dots, N \quad (6.10)$$

não melhoram os resultados quando comparados com aqueles obtidos pela função  $r(q,k)$ ; isto fica óbvio quando se realizam os testes aqui descritos. O teste da validade nos mostra que todas as funções com "n" par geram matrizes singulares, portanto, não representam aproximação alguma. Para  $n=3$  e  $n=5$  as matrizes são mal condicionadas e as aproximações resultantes são bem piores que a proporcionada pela própria aproximação cônica; além disso, para  $n > 5$  as matrizes já podem ser consideradas singulares.

#### 6.4. Transformação Alternativa da Integral de Domínio:

A transformação da integral de domínio da equação (2.52) em integral de contorno será feita aqui baseada na aproximação da densidade dos deslocamentos em termos da soma das funções aproximadoras propostas no item anterior e expressa para cada direção "j" da seguinte forma:

$$u_j(q) \cong f(q,k) \alpha_j^k = |x_1(q) - x_1(k)| |x_2(q) - x_2(k)| \cdot \alpha_j^k \quad (6.11)$$

que, substituindo na integral em questão, fica:

$$\int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) u_j(q) d\Omega(q) \cong \int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) f(q, k) d\Omega(q) \alpha_j^k \quad (6.12)$$

O teorema de Gauss - Ostrogadsky [67,4] pode ser escrito para uma função vetorial qualquer " $\theta$ " como segue:

$$\int_{\Omega} \text{Div.} \theta d\Omega = \int_{\Gamma} \theta_j n_j d\Gamma \quad (6.13)$$

onde  $n_j$  são os cossenos diretores do vetor normal à superfície em questão e  $\theta_j$  as componentes "j" da primitiva do  $\text{Div}\theta$ . Existe uma maneira bastante simples de se determinar a primitiva da função  $u_{ij}^*(S, q)$ . Inicialmente tem-se do capítulo II:

$$u_{ij}^*(S, q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} [(4\nu-3) \ln(r) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}] \quad (2.36)$$

onde para "r" lê-se  $r(S, q)$ .

A integral de  $u_{ij}^*$  no domínio fica, portanto, dada por;

$$\int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) d\Omega(q) = \int_{\theta} \int_r \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} [(4\nu-3) \ln(r) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}] r dr d\theta \quad (6.14)$$

Desenvolvendo a integral em (6.14) para a variável r esta se transforma em:

$$\int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) d\Omega(q) = \int_{\theta} \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} [\delta_{ij} (4\nu-3) \frac{r}{2} (\ln r - 1/2) + r_{,i} r_{,j} r/2] r d\theta + K(\theta) \quad (6.15)$$

Observando agora a figura (6.4) conclui-se que:

$$d\Gamma (\partial r / \partial n) = r d\theta \quad (6.16)$$

e

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} = r_{, \ell} n_{\ell} \quad (6.17)$$

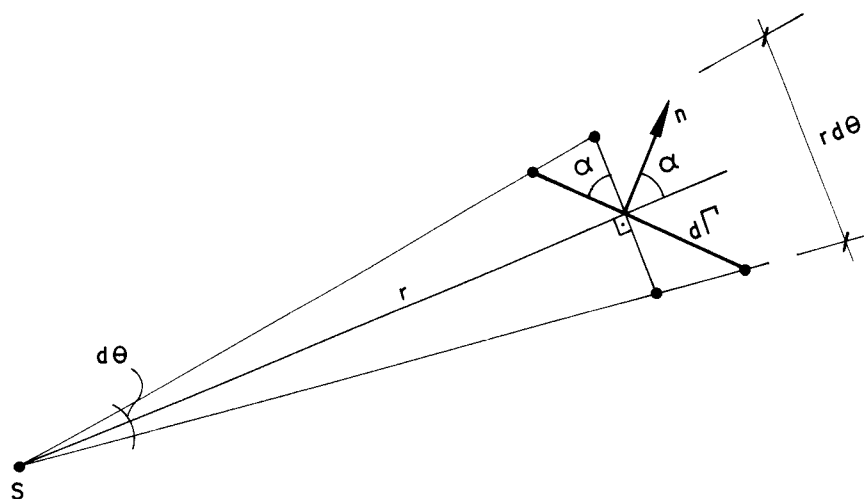


Fig. 6.4 - Relações Geométricas  $d\Gamma/rd\theta$

Assim, reunindo (6.17) e (6.16) e substituindo-as em (6.13) obtém-se a expressão final:

$$\int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) d\Omega(q) = \int_{\Gamma} B_{ij\ell}^*(S, Q) n_{\ell} d\Gamma(Q) \quad (6.18)$$

onde

$$B_{ij\ell}^*(S, Q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \cdot r/2 [\delta_{ij}(4\nu-3)(\ln r - 1/2) + r_{,i}r_{,j}r_{,\ell}] \quad (6.19)$$

é a primitiva de  $u_{ij}^*(S, q)$ . Agora para "r" lê-se  $r(S, Q)$ , porém esta função pode ser calculada para qualquer ponto que se deseje.

De posse da primitiva de  $u_{ij}^*(S, q)$  pode-se calcular a primeira integração da equação (6.12); para tanto basta chamar:

$$\Theta_{\ell}(S, q, k) = f(q, k) B_{ij\ell}^*(S, q) \quad (6.20)$$

e aplicar a seguinte propriedade do divergente:

$$\operatorname{div}\theta(S, q, k) = f(q, k) ,_{\ell} B_{ij\ell}^*(S, q) + f(q, k) B_{ij\ell, \ell}^*(S, q)$$

ou (6.21)

$$\operatorname{div}\theta(S, q, k) = f(q, k) ,_{\ell} B_{ij\ell}^*(S, q) + f(q, k) u_{ij}^*(S, q)$$

Integrando-se em  $\Omega$  tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}\theta(S, q, k) d\Omega(q) &= \int_{\Omega} f(q, k) u_{ij}^*(S, q) d\Omega(q) + \\ &+ \int_{\Omega} f(q, k) ,_{\ell} B_{ij\ell}^*(S, q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Mas de (6.13) e (6.20) em (6.22) tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(q, k) u_{ij}^*(S, q) d\Omega(q) &= \int_{\Gamma} f(q, k) B_{ij\ell}^*(S, Q) n_{\ell} d\Gamma(Q) - \\ &- \int_{\Omega} f(q, k) ,_{\ell} B_{ij\ell}^*(S, q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad (6.23)$$

Chama-se este processo de integração por partes, e nota-se que o termo que surge no núcleo da integral de domínio restante, do lado esquerdo da igualdade (6.23), possui derivadas parciais da função aproximadora proposta, que são expressas por:

$$f(q, k) ,_1 = \frac{[x_1(q) - x_1(k)]}{|x_1(q) - x_1(k)|} |x_2(q) - x_2(k)| \quad (6.24)$$

$$f(q, k) ,_2 = \frac{[x_2(q) - x_2(k)]}{|x_2(q) - x_2(k)|} |x_1(q) - x_1(k)|$$



Essas funções não são mais quadráticas mas sim lineares. Deste fato conclui-se que, ao se aplicar mais duas vezes o procedimento descrito acima para as integrais de domínio restantes, todas se transformam em integrais de contorno.

Executando-se então a integral por partes do termo de domínio excedente em (6.23) chega-se à seguinte igualdade:

$$\int_{\Omega} f(q,k) ,_{\ell} B_{ij\ell}^* (S,q) d\Omega(q) = \int_{\Gamma} f(q,k) ,_{\ell} T_{ij\ell m}^* (S,Q) n_m d\Gamma(Q) - \int_{\Omega} f(q,k) ,_{\ell m} T_{ij\ell m}^* (S,q) d\Omega(q) \quad (6.25)$$

onde

$$T_{ij\ell m}^* (S,Q) = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \frac{r^2}{3} [\delta_{ij} (4\nu-3) [\ell nr - \frac{5}{6}] + r_{,i} r_{,j}] r_{,\ell} r_{,m} \quad (6.26)$$

e ainda:

$$\begin{aligned} f(q,k) ,_{11} &= 0 \\ f(q,k) ,_{22} &= 0 \\ f(q,k) ,_{12} &= f(q,k) ,_{21} = \frac{[x_1(q) - x_1(k)]}{|x_1(q) - x_1(k)|} \cdot \frac{[x_2(q) - x_2(k)]}{|x_2(q) - x_2(k)|} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Finalmente integrando-se, por partes, o termo de domínio restante na expressão (6.25) obtem-se a seguinte igualdade:

$$\int_{\Omega} f(q,k) ,_{\ell m} T_{ij\ell m}^* (S,q) d\Omega(q) = \int_{\Gamma} f(q,k) ,_{\ell m} Q_{ij\ell mp}^* (S,Q) n_p d\Gamma(Q) \quad (6.28)$$

onde

$$Q_{ij\ell mp}^*(S, Q) = \frac{1}{48\pi G(1-\nu)} \frac{r^3}{4} [\delta_{ij} (4\nu-3) [\ell nr-26/24] +$$

$$+ r_{,i} r_{,j}] r_{,\ell} r_{,m} r_{,p} \quad (6.29)$$

O termo de domínio que restaria não existe, pois

$$f(S, k)_{,\ell mp} = 0 \quad (6.30)$$

Substituindo-se (6.28) e (6.25) em (6.23) chega-se finalmente em:

$$\int_{\Omega} f(q, k) u_{ij}^*(S, q) d\Omega(q) = \int_{\Gamma} f(q, k) B_{ij\ell}^*(S, Q) n_{\ell} d\Gamma(Q) -$$

$$- \int_{\Gamma} f(q, k)_{,\ell} T_{ij\ell m}^*(S, Q) n_m d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} f(q, k)_{,\ell m} Q_{ij\ell mp}^*(S, Q) n_p d\Gamma(Q) \quad (6.31)$$

Ou, de forma mais completa, quando se substitui (6.31) em (6.12) esta se torna:

$$\int_{\Omega} f(q, k) u_{ij}^*(S, q) d\Omega(q) \alpha_j^k = \{ \int_{\Gamma} f(q, k) B_{ij\ell}^*(S, Q) n_{\ell} d\Gamma(Q) -$$

$$- \int_{\Gamma} f(q, k)_{,\ell} T_{ij\ell m}^*(S, Q) n_m d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} f(q, k)_{,\ell m} Q_{ij\ell mp}^*(S, Q) n_p d\Gamma(Q) \} \alpha_j^k \quad (6.32)$$

que é a expressão final da transformação da integral de domínio dos termos inerciais em uma soma de integrais de contorno.

Deve-se, entretanto, observar que as funções aproximadoras adotadas não satisfazem, para todo o domínio, as condições necessárias para a aplicação direta do teorema de Gauss-Ostrogradsky. A saber, a primeira derivada destas funções não é contínua em todo o domínio, bem como a segunda derivada. Esta descontinuidade, porém, é bem localizada e de fácil tratamento.

É fácil concluir da figura (6.2) ou da expressão (6.2) que tais descontinuidades ocorrem nos eixos paralelos aos eixos coordenados que se cruzam no ponto base. Estes eixos dividem o domínio em subdomínios (fig. 6.5) nos quais a função possui derivadas contínuas; portanto, aplica-se, sem perda de generalidade, o teorema de Gauss-Ostrogradsky isoladamente para cada uma dessas regiões.

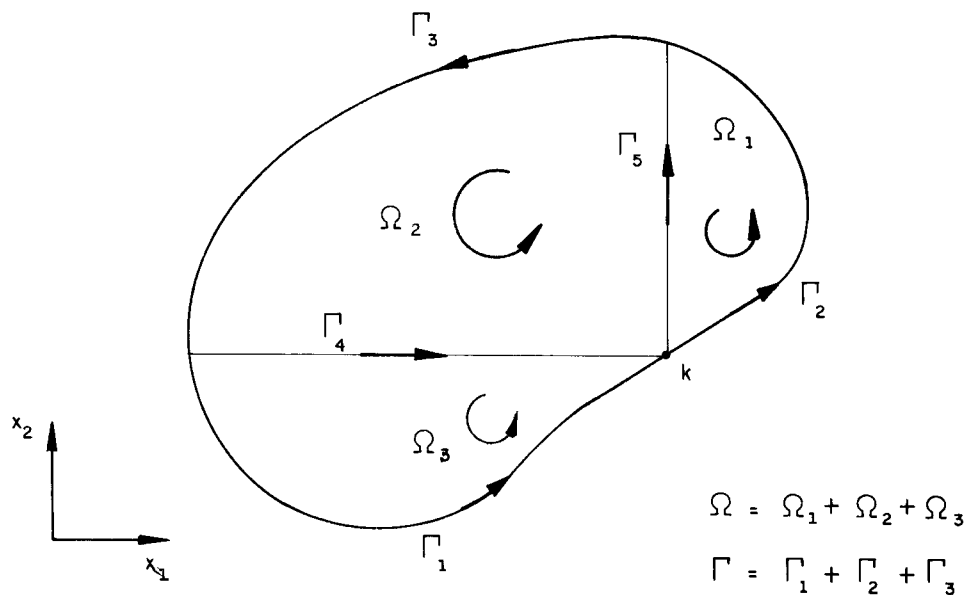


Fig. 6.5 - Divisão do domínio em subdomínios para uma base "k" qualquer no contorno.

Desta forma a integral sobre  $\Omega$  se torna:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Omega(q) &= \int_{\Omega_1} u_{ij}^*(s, q_1) u_j(q_1) d\Omega(q_1) + \\
 + \int_{\Omega_2} u_{ij}^*(s, q_2) u_j(q_2) d\Omega(q_2) &+ \int_{\Omega_3} u_{ij}^*(s, q_3) u_j(q_3) d\Omega(q_3)
 \end{aligned}
 \tag{6.33}$$

onde o índice do ponto  $q$  representa o subdomínio ao qual este ponto pertence.

Escolhendo-se a orientação indicada na figura (6.5) para contornos e sentido de integração (antihorário), pode-se utilizar o teorema de Gauss-Ostrogradsky, equação (6.32), para o caso em análise como segue:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f(q,k) u_{ij}^*(S,q) d\Omega(q) \alpha_i^k = & \left\{ \int_{\Gamma} f(Q,k) B_{ij\ell}^*(S,Q) n_{\ell} d\Gamma(Q) - \right. \\
 - \int_{\Gamma} f(Q,k) ,_{\ell} T_{ij\ell m}^*(S,Q) n_m d\Gamma(Q) & + \int_{\Gamma} f(Q,k) ,_{\ell m} Q_{ij\ell mp}^*(S,Q) n_p d\Gamma(Q) + \\
 + \int_{\Gamma_4} (f(Q_2,k) ,_{\ell} - f(Q_3,k) ,_{\ell}) T_{ij\ell m}^*(S,Q) n_m d\Gamma(Q) & + \\
 + \int_{\Gamma_5} (f(Q_2,k) ,_{\ell} - f(Q_1,k) ,_{\ell}) T_{ij\ell m}^*(S,Q) n_m d\Gamma(Q) & + \\
 + \int_{\Gamma_4} (f(Q_2,k) ,_{\ell m} - f(Q_3,k) ,_{\ell m}) Q_{ij\ell mp}^*(S,Q) n_p d\Gamma(Q) & + \\
 + \int_{\Gamma_5} (f(Q_2,k) ,_{\ell m} - f(Q_1,k) ,_{\ell m}) Q_{ij\ell mp}^*(S,Q) n_p d\Gamma(Q) \left. \right\} \alpha_i^k & \\
 & (6.34)
 \end{aligned}$$

onde o índice do ponto "Q" representa que a função em questão deve assumir o valor referente ao domínio que este índice indica, figura (6.6).

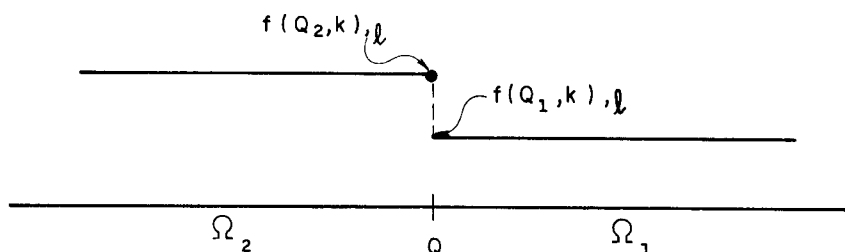


Fig. 6.6 - Ilustração da convenção de valores assumidos para integrações.

A expressão (6.34) é chamada classicamente [4] de condição de salto. Cabe ainda dizer que, conforme a posição do ponto base "k", vide figura (6.5), o domínio pode ser subdividido em 2 a 4 subdomínios e, para cada caso, pode-se escrever uma expressão análoga à expressão (6.34).

### 6.5. Transformação da equação Integral em Sistema Algébrico:

Substituindo-se a equação (6.32) em (2.52) chega-se à equação integral de contorno que é o ponto de partida para a aplicação do método dos Elementos de contorno, mostrada a seguir:

$$\begin{aligned}
 & -c_{ij}(S)u_j(S) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S,Q)p_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S,Q)u_j(Q) d\Gamma(Q) = \\
 & -\rho w^2 \left\{ \int_{\Gamma} f(Q,k) B_{ij\ell}^*(S,Q)n_{\ell} d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} f(Q,k) {}_{\ell}T_{ij\ell m}^*(S,Q)n_m d\Gamma(Q) + \right. \\
 & \left. + \int_{\Gamma} f(Q,k) {}_{\ell m}Q_{ij\ell mp}^*(S,Q)n_p d\Gamma(Q) \right\} \alpha_i^k \quad (6.35)
 \end{aligned}$$

A equação acima (6.35) foi escrita para "S" ponto fonte no contorno, mas pode ser escrita para "s" ponto fonte no interior, bastando para isso trocar, na expressão, "S" por "s", levando-se em consideração os valores já discutidos de  $c_{ij}(S)$  e  $c_{ij}(s)$ .

O lado esquerdo da igualdade (6.35) é análogo ao da equação (3.1) e sua transformação para a correspondente forma algébrica se faz como descrito no capítulo III.

A transformação da parte restante será feita baseada no mesmo princípio adotado no capítulo III, porém alguns cuidados devem ser tomados para não introduzir erros desnecessários na integração dos elementos.

Inicia-se o processo com a aproximação linear das funções  $f(Q,k)$ ,  $f(Q,k)_{,\ell}$  e  $f(Q,k)_{,\ell m}$  sobre os elementos de contorno como mostra a figura (6.7).

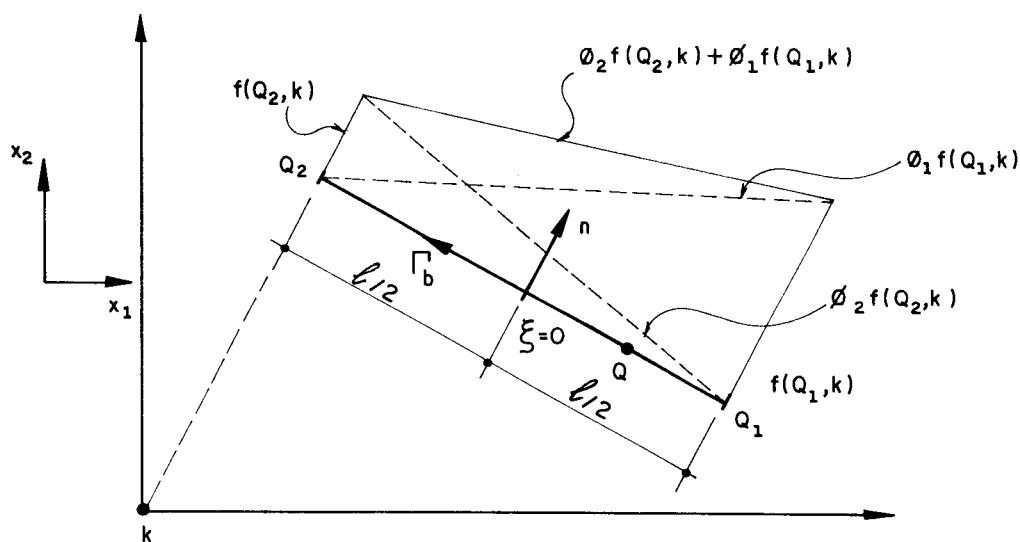


Fig. 6.7 - Aproximação Linear da função  $f(Q,k)$ .

Desta forma escreve-se:

$$f(Q,k) = \phi_1(\xi) f(Q_1, k) + \phi_2(\xi) f(Q_2, k) \quad (6.36)$$

onde as funções aproximadoras  $\phi_1(\xi)$  e  $\phi_2(\xi)$  são dadas nas equações (3.8-a e b), e  $f(Q_1, k)$  e  $f(Q_2, k)$  são os valores nodais que a função "f" com base em "k" assume nos nós extremos  $Q_1$  e  $Q_2$  do elemento " $\Gamma_b$ " em consideração.

O mesmo pode ser feito para as funções  $f(Q,k)_{,\ell}$  e  $f(Q,k)_{,\ell m}$  que ficam:

$$f(Q,k)_{,\ell} = \phi_1(\xi) f(Q_1,k)_{,\ell} + \phi_2(\xi) f(Q_2,k)_{,\ell}$$

e

(6.37)

$$f(Q,k)_{,\ell m} = \phi_1(\xi) f(Q_1,k)_{,\ell m} + \phi_2(\xi) f(Q_2,k)_{,\ell m}$$

Observa-se que no caso da figura (6.7) o elemento  $\Gamma_b$  se encontra em uma região onde as funções em questão são totalmente contínuas. Para o caso onde isto não é verdade deve-se fazer a descontinuidade coincidir com os nós do problema; caso isto não ocorra, um erro de aproximação do tipo mostrado esquematicamente para alguns casos na figura (6.7) será incluído na formulação.

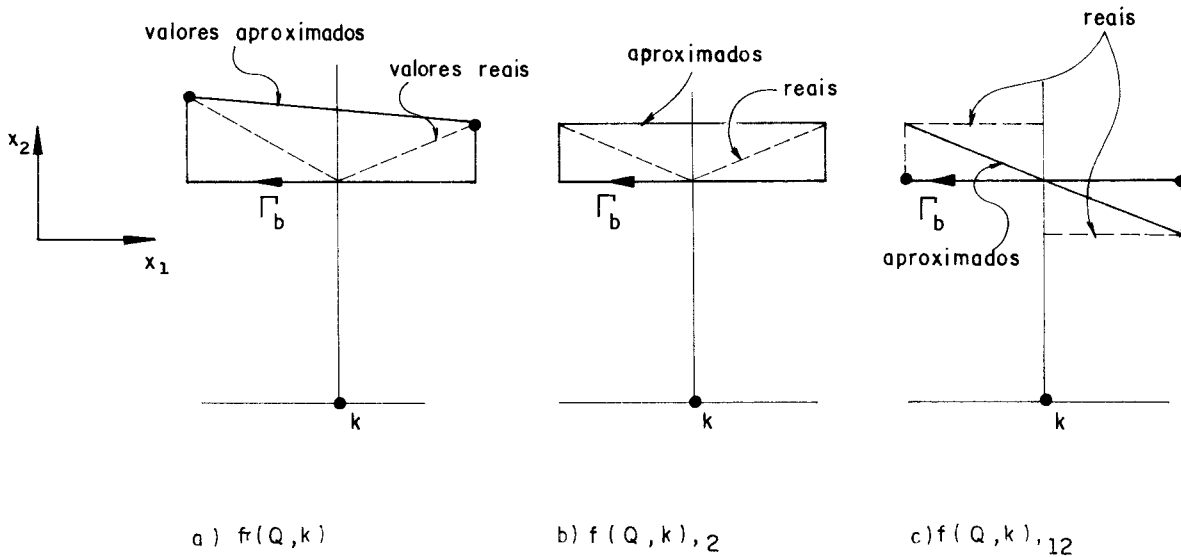


Fig. 6.8 - Erro de Aproximação para alguns casos possíveis.

Na figura (6.9) são mostradas possíveis irregularidades no comportamento da função proposta. Como pode ser visto, esta função possui comportamentos diferentes para cada lado da geratriz. Quando a geratriz coincide com o nó, fica possível aproximar cada trecho isoladamente, eliminando-se o erro mostrado anteriormente.

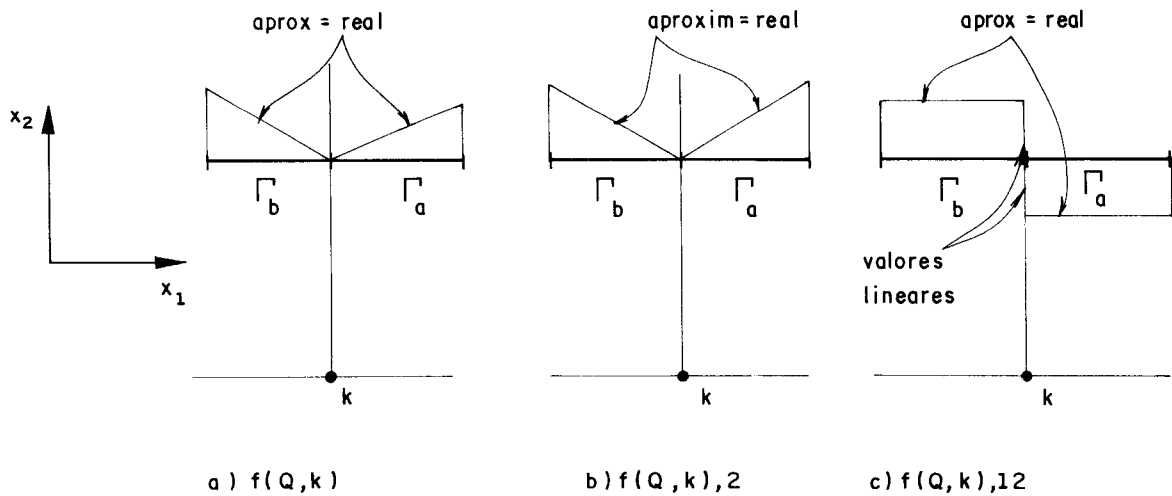


Fig.6.9 - Eliminação do erro para nó pertencente à geratriz.

O procedimento descrito acima se aplica a qualquer tipo de irregularidade. Portanto, quando se considera as integrais à direita da expressão (6.35) como uma soma das integrais sobre todos os elementos de contorno, como no capítulo III, tem-se:



$$\begin{aligned}
 & -c_{ij}(S)u_j(S) + \sum_{b=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_b} u_{ij}^*(S,Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma_b} p_{ij}^*(S,Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) \right] = \\
 & = \rho w^2 \sum_{b=1}^{NG} \left[ \int_{\Gamma_b} f(Q,k) B_{ij\ell}^*(S,Q) n_\ell d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma_b} f(Q,k),_{\ell} T_{ij\ell m}^*(S,Q) n_m d\Gamma(Q) + \right. \\
 & \quad \left. + \int_{\Gamma_b} f(Q,k),_{\ell m} Q_{ij\ell mp}^*(S,Q) n_p d\Gamma(Q) \right] \alpha_i^k \quad (6.38)
 \end{aligned}$$

onde "NE" é o número de elementos de contorno e "NS" é o número total de elementos, quando considerados os elementos auxiliares devidos às descontinuidades nas geratrizes das funções.

Este tipo de elemento pode ser visto na figura (6.10) para um ponto base "k" sobre o contorno definido para o sólido.

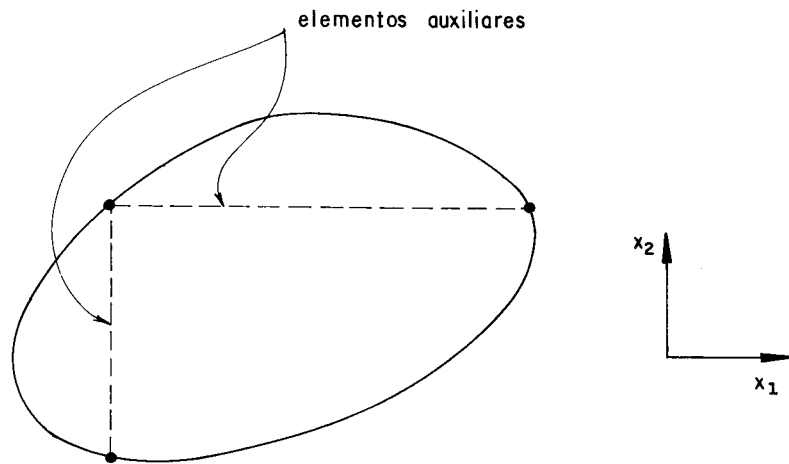


Fig. 6.10- Contorno  $\Gamma_b$  auxiliar

A aproximação das funções  $f(Q,k)$ ,  $f(Q,k),_{\ell}$  e  $f(Q,k),_{\ell m}$  é feita exatamente como nos elementos do contorno. O tamanho do elemento não acarreta erro de aproximação, pois as funções aproximadas assumem valores lineares ao longo das geratrizes, observando a definição de valores imediatamente internos ao domínio no qual o teorema de Gauss

está sendo aplicado.

Pode-se agora escrever a seguinte expressão geral para cada elemento:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_b} f(Q, k) B_{ij\ell}^* (S, Q) n_\ell d\Gamma(Q) \alpha_j^k = \\
 & = \int_{\Gamma_b} (f(Q_1, k) \phi_1 + f(Q_2, k) \phi_2) B_{ij\ell}^* n_\ell d\Gamma(Q) \alpha_j^k = \\
 & = \int_{\Gamma_b} \phi^z \bar{B}_{ij} d\Gamma(Q) f(Q_z, k) \alpha_j^k \quad (6.39)
 \end{aligned}$$

onde  $f(Q_z, k)$  são os valores de "f" com base em "k" calculados para os nós " $Q_z$ ", definidos nos extremos do elemento " $\Gamma$ ";  $\phi^z$  representa a função aproximadora relativa a cada nó " $Q_z$ " e  $\bar{B}_{ij} = B_{ij\ell}^* n_\ell$ .

De maneira análoga, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_b} f(Q, k) T_{ij\ell m}^* (S, Q) n_m d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma_b} \phi^z \bar{T}_{ij1} d\Gamma(Q) + f(Q_z, k) ,_1 \alpha_j^k + \\
 & + \int_{\Gamma_b} \phi^z \bar{T}_{ij2} d\Gamma(Q) f(Q_z, k) ,_2 \alpha_j^k \quad (6.40)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_b} f(Q, k) Q_{ij\ell mp}^* n_p d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma_b} \phi^z \bar{Q}_{ij12} d\Gamma(Q) f(Q_z, k) ,_{12} \alpha_i^k + \\
 & + \int_{\Gamma_b} \phi^z \bar{Q}_{ij21} d\Gamma(Q) f(Q_z, k) ,_{21} \alpha_i^k = 2 \int_{\Gamma_b} \phi^z \bar{Q}_{ij12} d\Gamma(Q) f(Q_z, k) ,_{12} \alpha_i^k \quad (6.41)
 \end{aligned}$$

Nas duas últimas expressões a notação utilizada é análoga a da expressão (6.39). A última igualdade da expressão (6.41) se deve à simetria de  $f(Q_z, k)_{, \ell m}$  e  $\bar{Q}_{ij \ell m}$ . Além disso, os termos onde  $\ell = m$  não aparecem, pois  $f(Q, k)_{, ii} = 0$ .

Para se compreender melhor os próximos passos, escrevem-se as expressões (6.39), (6.40) e (6.41) em suas formas matriciais explícitas, já apresentando a transformação da integral sobre " $\Gamma_b$ " para sua forma parametrizada em " $\xi$ ", como segue:

$$\frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \phi_1 \bar{B}_{11} & \phi_1 \bar{B}_{12} & \phi_2 \bar{B}_{11} & \phi_2 \bar{B}_{12} \\ \phi_1 \bar{B}_{21} & \phi_1 \bar{B}_{22} & \phi_2 \bar{B}_{21} & \phi_2 \bar{B}_{22} \end{bmatrix} d\xi \begin{Bmatrix} f(Q_1, k) & 0 \\ 0 & f(Q_1, k) \\ f(Q_2, k) & 0 \\ 0 & f(Q_2, k) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1^k \\ \alpha_2^k \end{Bmatrix} =$$

$$= \int_{\Gamma_b} f(Q, k) B_{ij \ell}^*(S, Q) n_\ell d\Gamma(Q) \alpha_j^k \quad (6.42)$$

$$\frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \phi_1 \bar{T}_{111} & \phi_1 \bar{T}_{121} & \phi_2 \bar{T}_{111} & \phi_2 \bar{T}_{121} \\ \phi_1 \bar{T}_{211} & \phi_1 \bar{T}_{221} & \phi_2 \bar{T}_{211} & \phi_2 \bar{T}_{221} \end{bmatrix} d\xi \begin{Bmatrix} f(Q_1, k)_{, 1} & 0 \\ 0 & f(Q_1, k)_{, 1} \\ f(Q_2, k)_{, 1} & 0 \\ 0 & f(Q_2, k)_{, 1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1^k \\ \alpha_2^k \end{Bmatrix}$$

$$+ \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \phi_1 \bar{T}_{112} & \phi_1 \bar{T}_{122} & \phi_2 \bar{T}_{112} & \phi_2 \bar{T}_{122} \\ \phi_1 \bar{T}_{212} & \phi_1 \bar{T}_{222} & \phi_2 \bar{T}_{212} & \phi_2 \bar{T}_{222} \end{bmatrix} d\xi \begin{Bmatrix} f(Q_1, k)_{, 2} & 0 \\ 0 & f(Q_1, k)_{, 2} \\ f(Q_2, k)_{, 2} & 0 \\ 0 & f(Q_2, k)_{, 2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1^k \\ \alpha_2^k \end{Bmatrix} =$$

$$= \int_{\Gamma_b} f(Q, k)_{, \ell} T_{ij \ell m}^*(S, Q) n_m d\Gamma(Q) \quad (6.43)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{\Gamma_b} \begin{bmatrix} \phi_1 \bar{Q}_{1112} & \phi_1 \bar{Q}_{1212} & \phi_2 \bar{Q}_{2112} & \phi_2 \bar{Q}_{2212} \\ \phi_1 \bar{Q}_{2112} & \phi_1 \bar{Q}_{2212} & \phi_2 \bar{Q}_{2112} & \phi_2 \bar{Q}_{2212} \end{bmatrix} d\xi \begin{Bmatrix} f(Q_1, k)_{,12} & 0 \\ 0 & f(Q_1, k)_{,12} \\ f(Q_2, k)_{,12} & 0 \\ 0 & f(Q_2, k)_{,12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1^k \\ \alpha_2^k \end{Bmatrix} =$$

$$= \int_{\Gamma_b} f(Q, k)_{, \ell m} Q_{ij \ell mp}^* (S, Q) n_p d\Gamma(Q) \quad (6.44)$$

ou efetuando-se as integrações numéricas sobre os elementos indicados acima, pode-se escrever de forma compacta:

$$\int_{\Gamma_b} f(Q, k) B_{ij \ell}^* (S, Q) n_\ell d\Gamma(Q) \alpha_j^k = \underset{2 \times 4}{\bar{B}_b} \underset{4 \times 2}{\bar{f}_b^k} \underset{2 \times 1}{\alpha^k} \quad (6.45)$$

$$\int_{\Gamma_b} f(Q, k)_{, \ell} T_{ij \ell m}^i (S, Q) n_m d\Gamma(Q) \alpha_j^k = \left[ \underset{2 \times 4}{\bar{T}(1)_b} \underset{4 \times 2}{\bar{f}_b^k(1)} + \underset{2 \times 4}{\bar{T}(2)_b} \underset{4 \times 2}{\bar{f}_b^k(2)} \right] \underset{2 \times 1}{\alpha^k} \quad (6.46)$$

e

$$\int_{\Gamma_b} f(Q, k)_{, \ell m} Q_{ij \ell mp}^* (S, Q) n_p d\Gamma(Q) = \underset{2 \times 4}{\bar{Q}_b} \underset{4 \times 2}{\bar{f}_b^k(1, 2)} \underset{2 \times 1}{\alpha^k} \quad (6.47)$$

onde  $b$  representa o elemento, "k" o ponto base e o índice entre parenteses em  $\bar{f}_b^k()$  as derivadas parciais em questão.

Substituindo-se o lado esquerdo da equação (6.38) por uma forma rearranjada da expressão (3.14), utilizando-se as igualdades (6.45), (6.46) e (6.47) no lado direito, integrando-se os "NG" elementos e fazendo-se variar os "m" pontos

base "k" das funções aproximadoras, escreve-se a seguinte equação algébrica para um ponto fonte "S":

$$c_{S^u} + [\tilde{h}_{S1} \dots \tilde{h}_{SS} \dots \tilde{h}_{SN}] \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \vdots \\ \tilde{U}_S \\ \vdots \\ \tilde{U}_N \end{Bmatrix} - [g_{S1} \dots g_{SS} \dots g_{SN}] \begin{Bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \vdots \\ \tilde{P}_S \\ \vdots \\ \tilde{P}_N \end{Bmatrix} =$$

$$= -\rho w^2 \left\{ [B_{\tilde{1}} \dots B_{\tilde{p}} \dots B_{\tilde{NG}}] \begin{bmatrix} \tilde{f}_{\tilde{1}}^1 \dots \tilde{f}_{\tilde{1}}^S \dots \tilde{f}_{\tilde{1}}^m \\ \vdots \\ \tilde{f}_{\tilde{p}}^1 \dots \tilde{f}_{\tilde{p}}^S \dots \tilde{f}_{\tilde{p}}^m \\ \vdots \\ \tilde{f}_{\tilde{NG}}^1 \dots \tilde{f}_{\tilde{NG}}^S \dots \tilde{f}_{\tilde{NG}}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}^S \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}^m \end{Bmatrix} - \right.$$

$$\left. - [\tilde{T}_{\tilde{1}}(1) \dots \tilde{T}_{\tilde{p}}(1) \dots \tilde{T}_{\tilde{NG}}(1)] \begin{bmatrix} \tilde{f}_{\tilde{1}}^1(1) \dots \tilde{f}_{\tilde{1}}^S(1) \dots \tilde{f}_{\tilde{1}}^m(1) \\ \vdots \\ \tilde{f}_{\tilde{p}}^1(1) \dots \tilde{f}_{\tilde{p}}^S(1) \dots \tilde{f}_{\tilde{p}}^m(1) \\ \vdots \\ \tilde{f}_{\tilde{NG}}^1(1) \dots \tilde{f}_{\tilde{NG}}^S(1) \dots \tilde{f}_{\tilde{NG}}^m(1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}^S \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}^m \end{Bmatrix} - \right.$$

$$\left. - [\tilde{T}_{\tilde{1}}(2) \dots \tilde{T}_{\tilde{p}}(2) \dots \tilde{T}_{\tilde{NG}}(2)] \begin{bmatrix} \tilde{f}_{\tilde{1}}^1(2) \dots \tilde{f}_{\tilde{1}}^S(2) \dots \tilde{f}_{\tilde{1}}^m(2) \\ \vdots \\ \tilde{f}_{\tilde{p}}^1(2) \dots \tilde{f}_{\tilde{p}}^S(2) \dots \tilde{f}_{\tilde{p}}^m(2) \\ \vdots \\ \tilde{f}_{\tilde{NG}}^1(2) \dots \tilde{f}_{\tilde{NG}}^S(2) \dots \tilde{f}_{\tilde{NG}}^m(2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}^S \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}^m \end{Bmatrix} + \right.$$

$$+ [Q_1 \cdots Q_p \cdots Q_{NG}] \begin{bmatrix} f_1^1(1,2) \dots f_1^S(1,2) \dots f_1^m(1,2) \\ \vdots \\ f_p^1(1,2) \dots f_p^S(1,2) \dots f_p^m(1,2) \\ \vdots \\ f_{NG}^1(1,2) \dots f_{NG}^S(1,2) \dots f_{NG}^m(1,2) \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^S \\ \vdots \\ \alpha^m \end{matrix} \right\} \quad (6.48)$$

onde "m" é o número de pontos base e "p" é uma base qualquer.

Pode-se escrever equações algébricas como (6.48) para qualquer ponto "S" em consideração. Escolhendo-se adequadamente um número de pontos fonte igual ao número de nós do problema, tem-se:

$$[\underline{H}\underline{U} - \underline{G}\underline{P} = \rho w^2 [\underline{B} \underline{f} - \underline{T}(1) \underline{f}(1) - \underline{T}(2) \underline{f}(2) + \underline{Q} \underline{f}(1,2)]]_{2N \times 2m} \quad \underline{\alpha}_{2m \times 1} \quad (6.49)$$

Considerando-se o número de pontos fonte igual ao número de pontos base ou seja "m=N", a expressão (6.49) fica:

$$\underline{H}\underline{U} - \underline{G}\underline{P} = -w^2 \hat{\underline{M}} \underline{\alpha} \quad (6.50)$$

onde

$$\hat{\underline{M}} = \rho [\underline{B} \underline{f} - \underline{T}(1) \underline{f}(1) - \underline{T}(2) \underline{f}(2) + \underline{Q} \underline{f}(1,2)]_{2N \times 2N} \quad (6.51)$$

Fazendo-se, agora, os pontos base "k" coincidentes com os pontos fonte "S", pode-se calcular, como em (6.5), os coeficientes da matriz "F" que relaciona os valores de  $\underline{U}$  com as constantes contidas em  $\underline{\alpha}$ . O cálculo destes coeficientes é direto, ou seja, não é preciso usar conceito de valor limite pois  $f(Q,k)$  é uma função contínua.

A montagem da matriz, considerando-se a numeração global, é mostrada abaixo:

$$\begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ \vdots \\ U_1^i \\ U_2^i \\ \vdots \\ U_1^N \\ U_2^N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f(S_1, S_1) & 0 & \dots & f(S_1, S_i) & \dots & 0 & \dots & f(S_1, S_N) & \dots & 0 \\ 0 & f(S_1, S_1) & \dots & 0 & & f(S_1, S_i) & \dots & 0 & & f(S_1, S_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f(S_i, S_1) & 0 & \dots & f(S_i, S_i) & \dots & 0 & \dots & f(S_i, S_N) & \dots & 0 \\ 0 & f(S_i, S_1) & \dots & 0 & & f(S_i, S_i) & \dots & 0 & & f(S_i, S_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f(S_N, S_1) & 0 & \dots & f(S_N, S_i) & \dots & 0 & \dots & f(S_N, S_N) & \dots & 0 \\ 0 & f(S_N, S_1) & \dots & 0 & & f(S_N, S_i) & \dots & 0 & & f(S_N, S_N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \vdots \\ \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \\ \vdots \\ \alpha_1^N \\ \alpha_2^N \end{Bmatrix} \quad (6.52)$$

onde  $U_j^i$  é o deslocamento na direção  $j$  no ponto " $i$ " e " $\alpha_j^i$ " é a constante referente a base " $i$ " da distribuição aproximada na direção  $j$ .

Pode-se escrever então (6.52) em sua forma compacta como segue :

$$\underline{U} = \underline{F} \underline{\alpha} \quad (6.53)$$

e obter-se a relação

$$\underline{\alpha} = \underline{F}^{-1} \underline{U} \quad (6.54)$$

Substituindo a relação (6.54) na expressão (6.50) e rearranjando, chega-se finalmente em:

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{P} + w^2 \underline{M} \underline{U} \quad (6.55)$$

onde

$$\underline{M} = -\hat{\underline{M}} \underline{F}^{-1} \quad (6.56)$$

A equação (6.55) representa um problema de autovalor e autovetor análogo ao das expressões (5.24) e (4.16).

### 6.6. Solução Numérica do Problema:

Por analogia, a transformação do problema de autovalor generalizado, expresso na equação (6.55), para o problema padrão de autovalor e autovetor e sua consequente solução, segue os procedimentos descritos no item 4.5, que incluem os problemas de corpos livres de restrição e os com graus de liberdade restritos.

Para que esta analogia fique completa, as condições de contorno, como o próprio nome o diz, são impostas apenas para nós pertencentes ao contorno do corpo, ficando livres de restrições os pontos pertencentes ao domínio.

Resta ainda dizer que as condições iniciais que, de maneira geral, são prescritas no domínio do corpo (Equação 2.32) devem ser transformadas para expressões de contorno utilizando-se, por exemplo, a formulação alternativa desenvolvida neste capítulo.

### 6.7. Integração sobre os Elementos:

Na passagem das equações (6.42), (6.43) e (6.44) para as equações (6.45), (6.46) e (6.47), respectivamente, efetuou-se uma integração sobre um elemento.

Estas integrações são efetuadas numericamente, como no item 3.6, onde, para elementos não singulares, utiliza-se a quadratura de Gauss normal e, para os elementos singulares, utiliza-se a fórmula especial da quadratura de Gauss para singularidade do tipo " $\ln r$ " [56], que é a singularidade dos núcleos das integrais de contorno resultante da transformação alternativa sugerida aqui neste trabalho.



## CAPÍTULO V

### Processo da Integração direta

#### 5.1. Introdução:

No capítulo anterior descreveu-se a técnica da dupla reciprocidade para a resolução da vibração livre de meios finitos; uma alternativa mais simples, para o tratamento de tal problema, é aproximar os termos inerciais incôgnitos, por polinômios interpoladores parametrizados em subdomínios chamados células, que compõem toda a superfície do corpo (problema bidimensional).

Tal procedimento leva à integração de todo o domínio em forma discretizada e, portanto, os valores internos com relação aos quais a densidade inercial foi parametrizada entram na resolução final do problema [65].

Essa prática não está muito de acordo com a filosofia básica do Método dos Elementos de Contorno, que é tratar os problemas gerais de domínios finitos ou infinitos

apenas por considerações de contorno. Apesar disso, os resultados que este procedimento apresenta são bastante confiáveis, motivo pelo qual este será aqui apresentado.

## 5.2. Definição do Problema:

O problema a ser estudado é idêntico ao do capítulo anterior:

$$Gu_{i,jj} + (\lambda+G)u_{j,ji} = \rho w^2 u_i \quad (2.30)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= 0 & s \in \Gamma_1 \\ \bar{p}_i &= 0 & s \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

e condições iniciais:

$$\begin{aligned} u_{i0} &= \bar{u}_i & s \in \Omega \\ v_{i0} &= \bar{v}_i & s \in \Omega \end{aligned} \quad (2.32)$$

Para a solução deste problema pelo método dos elementos de contorno transformou-se, no capítulo II, a equação (2.30) na seguinte equação integral:

$$\begin{aligned} c_{ij}(S)u_j(S) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S,Q)p_j(Q)d\Gamma(Q) - \\ &- \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S,Q)u_j(Q)d\Gamma(Q) - \rho w^2 \int_{\Omega} u_{ij}^*(S,q)u_j(q)d\Omega(q) \end{aligned} \quad (2.52)$$

sendo  $c_{ij}(S)$  dado pelos valores já discutidos anteriormente.

Os termos que aparecem na integral de domínio são aqueles que serão transformados em algébricos com o emprego da técnica da discretização do domínio por células.

### 5.3. Discretização Geométrica do Domínio:

Como comentado anteriormente, o domínio  $\Omega$  será dividido em células triangulares  $\Omega_i$  definidas por seus nós extremos (Fig. 5.1). Com o intuito de facilitar as integrações sobre tais células (item 5.7), é interessante relacionar a posição de cada ponto  $q$  pertencente à uma célula  $I$  com relação a posição dos vértices  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ . Isto é feito através de coordenadas homogêneas " $\xi$ " (Fig. 5.2) definidas como no método dos elementos finitos [8]:

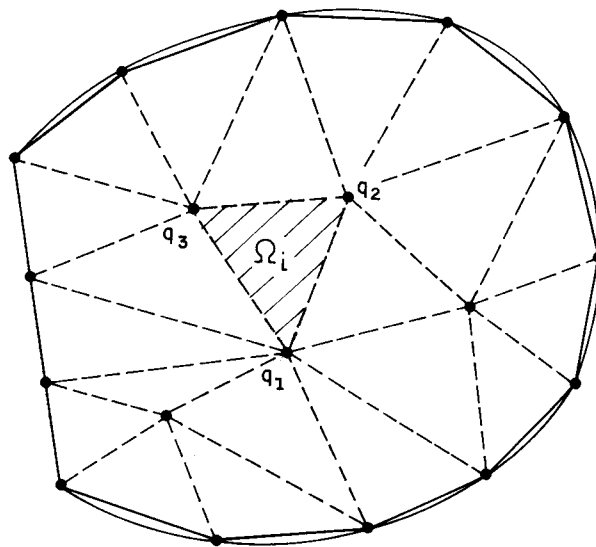


Fig. 5.1 - Divisão do domínio em células internas  $\Omega_i(q_1, q_2, q_3)$ .

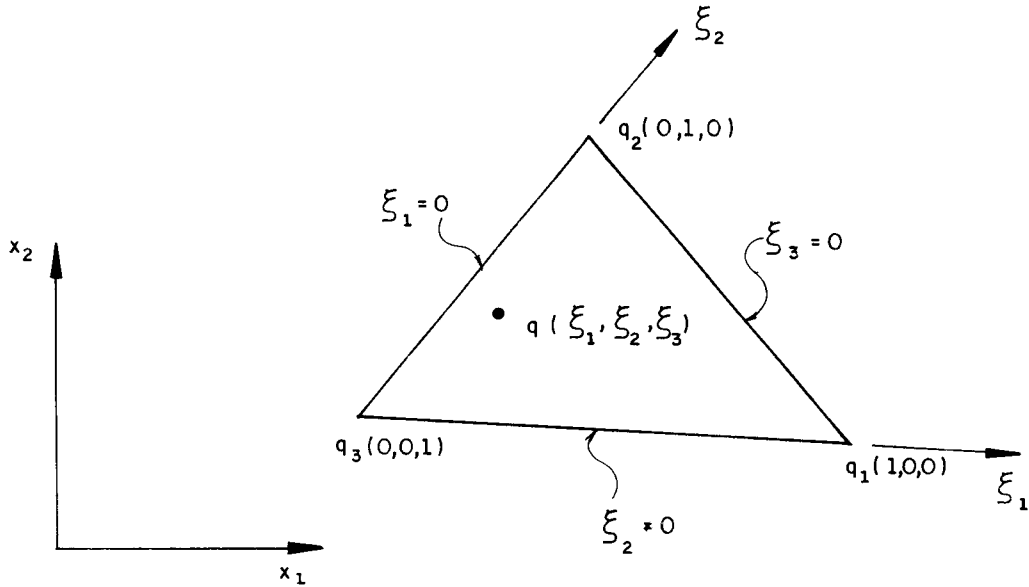


Fig. 5.2 - Célula 'I' com coordenadas homogêneas indicadas.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^q = \underset{\sim}{\chi}_q^T \underset{\sim}{X}^{(N)} \quad (5.1)$$

$$\underset{\sim}{\chi}_q^T = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\eta}_q^T & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\eta}_q^T \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\underset{\sim}{X}^{(N)} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{X}_1^{(N)} \\ \underset{\sim}{X}_2^{(N)} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\underset{\sim}{\eta}_q = \begin{Bmatrix} \xi_1^q \\ \xi_2^q \\ \xi_3^q \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\underline{x}_j^{(N)} = \begin{Bmatrix} x_j^1 \\ x_j^2 \\ x_j^3 \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

onde (N) representa a numeração local dos vértices e j a coordenada em questão.

Explicitamente, a coordenada  $x_j$  do ponto q (Fig. 5.2) pode ser escrita como abaixo:

$$x_j^q = \xi_1^q x_j^1 + \xi_2^q x_j^2 + \xi_3^q x_j^3 \quad (5.6)$$

Escrevendo-se a variável adimensional  $\xi_\alpha^q$  para o ponto q, em função do sistema de coordenadas  $(x_1, x_2)$ , obtém-se:

$$\xi_\alpha^q = \frac{1}{2A} (2 \cdot A_O^\alpha + b^\alpha x_1^q + a^\alpha x_2^q) \quad (5.7)$$

onde

$$a^\alpha = x_1^k - x_1^m \quad (5.8)$$

$$b^\alpha = x_2^m - x_2^k \quad (5.9)$$

$$2A_O = x_1^m x_2^k - x_1^k x_2^m \quad (5.10)$$

$$A = \frac{1}{2} (b^1 a^2 - b^2 a^1) \quad (5.11)$$

$$\alpha = 1, 2, 3 \quad m = 2, 3, 1 \quad e \quad k = 3, 1, 2$$

Como a integral de domínio existente na equação (2.52) envolve a solução fundamental  $(u_{1k}^*)$  que é função do vetor posição "r(s,q)" do ponto "q" medido em relação ao ponto fonte "s" (ou "S") e do ângulo  $\theta$  entre a direção deste e o eixo  $x_1$ , é conveniente expressar a equação (5.7) em função do sistema de coordenadas polares (r,  $\theta$ ), com origem no ponto "s" (Fig. 5.3).

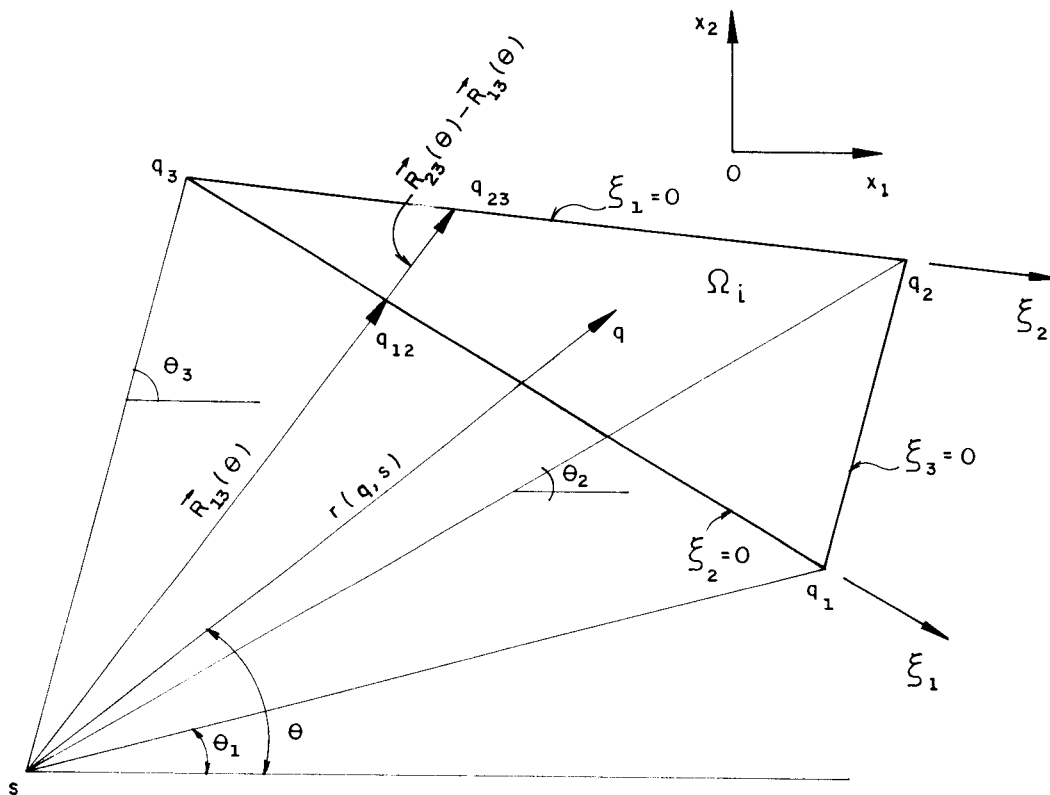


Fig. 5.3 - Célula interna e os sistemas de coordenadas  $(x_1, x_2)$ ,  $(\xi_1, \xi_2)$  e  $(r, \theta)$

Desta forma a equação (5.7) se modifica para:

$$\xi_\alpha^q = \xi_\alpha^s + \frac{r}{2A} (b^\alpha \cos \theta + a^\alpha \sin \theta) \quad (5.12)$$

onde os valores de  $a^\alpha$  e  $b^\alpha$  são dados pelas expressões (5.8) e (5.9), e  $\xi_\alpha^s$  é obtido diretamente da expressão (5.10) para o ponto "s".

Assim, determinam-se as coordenadas homogêneas de um ponto "q" em uma célula "i" a partir da distância deste ponto ao ponto "s" conhecido, e do ângulo que o vetor formado pela linha que une "s" à "q" possui com relação ao eixo  $x_1$ .

Da equação (5.12) chega-se aos valores das distâncias  $R_{m\lambda}$  indicadas nas figuras (5.3) e (5.6), que vão facilitar a integração numérica sobre a célula ainda a ser apresentada:

$$R_{m\ell}(s, \theta) = \frac{-2A\xi_k^s}{b^k \cos\theta + a^k \sin\theta} \quad (5.13)$$

$R_{m\ell}(s, \theta)$  é a distância de  $s$  a um ponto  $q$  pertencente ao lado definido pelos pontos  $q_m$  e  $q_\ell$ , quando o triângulo é definido pelos pontos  $q_m$ ,  $q_\ell$  e  $q_k$ , como na figura (5.3) onde  $m = 1$ ,  $\ell = 3$  e  $k = 2$ , ou genericamente mostrado na figura (5.6).

#### 5.4. Aproximação dos deslocamentos para pontos internos:

A aproximação discretizada dos deslocamentos é feita da mesma forma que a discretização geométrica, ou seja, pode-se interpolar os valores dos deslocamentos incógnitos  $u$ , de cada ponto "q" pertencente a cada célula  $i$ , através da sua parametrização com relação aos seus valores nodais, usando coordenadas locais homogêneas  $\xi$ . A interpolação aqui escolhida lineariza os deslocamentos no interior de cada célula, figura (5.4).

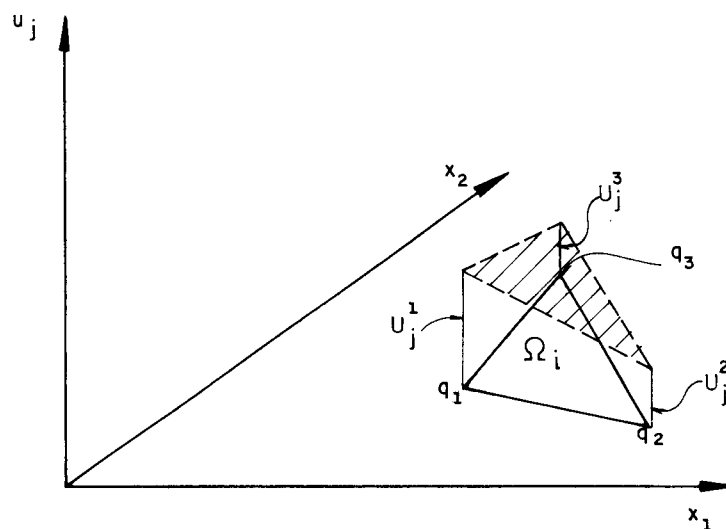


Fig. 5.4- Interpolação Linear dos deslocamentos em cada célula triangular.

Desta forma tem-se [8]:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^q = \tilde{\chi}^T(q) \tilde{U}^{(N)} \quad (5.14)$$

$$\tilde{\chi}(q) = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_q^T & 0 \\ 0 & \tilde{\eta}_q^T \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\tilde{U}^{(N)} = \begin{Bmatrix} U_1^{(N)} \\ U_2^{(N)} \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\tilde{\eta}_q = \begin{Bmatrix} \xi_1^q \\ \xi_2^q \\ \xi_3^q \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

$$\tilde{U}_j^{(N)} = \begin{Bmatrix} U_j^1 \\ U_j^2 \\ U_j^3 \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

De maneira explicita se escreve o valor aproximado de  $u_j$  para o ponto  $q$  da seguinte forma:

$$u_j^q = \xi_1^q U_j^1 + \xi_2^q U_j^2 + \xi_3^q U_j^3 \quad (5.19)$$

onde as coordenadas dimensionais do ponto "q" são dadas pela expressão (5.12).



### 5.5. Transformação da Equação Integral em um Sistema Algébrico:

Após ter-se discretizado o contorno em elementos  $\Gamma_k$  e o domínio em células  $\Omega_k$ , a equação integral (2.52), seguindo procedimento análogo ao item (3.5), pode ser escrita como uma soma de integrais sobre os elementos do contorno e sobre as células (Fig. 5.5):

$$\begin{aligned}
 c_{ij}(S)u_j(S) = & - \sum_{k=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_k} p_{ij}^*(S,Q) \phi^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \underline{u}_j^{(k)}(Q) + \\
 & + \sum_{k=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_k} u_{ij}^*(S,Q) \phi^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \underline{p}_j^{(k)} - \\
 & - w^2 \sum_{m=1}^{NC} [\rho]_{\Omega_m} \left[ \int_{\Omega_m} u_{ij}^*(S,q) \chi^T(q) d\Omega(q) \right] \underline{u}_j^{(m)}(q)
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

onde NC é o número de células internas.

A equação (5.20) é a equação integral de contorno e domínio para pontos do contorno, porém, como os valores dos deslocamentos internos também são incógnitos, deve-se escrever tal equação para os pontos internos onde a única mudança na grafia de (5.20) é a substituição da letra "S" pela letra "s" que significa considerar o ponto fonte no interior do corpo; neste caso, a constante  $c_{ij}(s)$  seria igual a  $\delta_{ij}$ , como comentado no capítulo II.

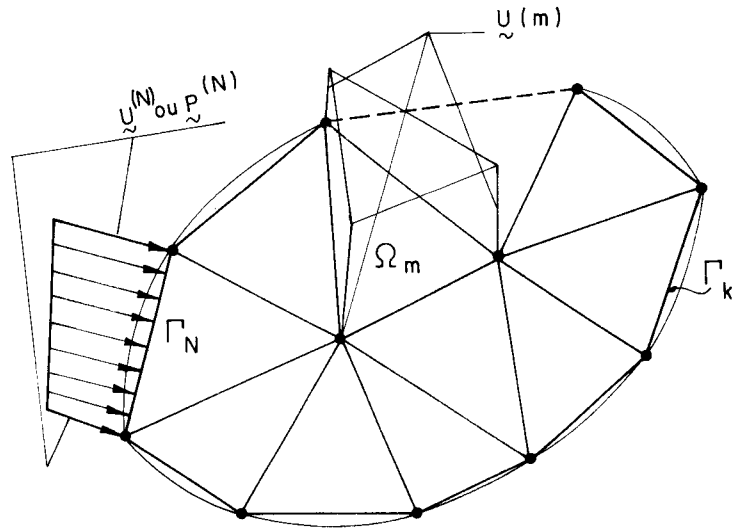


Fig. 5.5 - Representação do corpo com domínio e contorno discretizados.

Calculando-se adequadamente todas as integrais (i tens 3.6 e 5.7) da equação (5.50), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \underline{c}_S \underline{U}_S + [\hat{h}^{S1} \dots \hat{h}^{SS} \dots \hat{h}^{SN}] \begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_S \\ \vdots \\ \underline{U}_N \end{Bmatrix} &= [\underline{g}^{S1} \dots \underline{g}^{SS} \dots \underline{g}^{SN}] \begin{Bmatrix} \underline{P}_1 \\ \vdots \\ \underline{P}_S \\ \vdots \\ \underline{P}_N \end{Bmatrix} - \\
 -w^2 [m^{S1} \dots m^{SS} \dots m^{SN} \dots m^{Sq} \dots m^{SM}] \begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \vdots \\ \underline{U}_S \\ \vdots \\ \underline{U}_N \\ \vdots \\ \underline{U}_S \\ \vdots \\ \underline{U}_M \end{Bmatrix} & \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

onde as submatrizes " $\tilde{h}^{S\ell}$ ", " $\tilde{g}^{S\ell}$ " e  $\tilde{c}$  têm o significado descrito no item (3.5) e " $\tilde{m}^{S\ell}$ " contém os coeficientes que dão a influência mássica do nó " $\ell$ " no ponto nodal " $S$ ", sendo sua dimensão (2x2) no caso bidimensional.

Cabe ainda especificar que, na equação (5.21),  $N$  é o número de nós do contorno,  $M$  é o número total de nós do problema e, conseqüentemente,  $(M-N)$  é o número de nós internos do problema, além disso, para facilitar o entendimento das expressões (5.21) e das subsequentes, adotou-se, na numeração global dos nós, nós internos com numeração sempre maior que os do contorno, separando-se, de maneira clara, os vetores e as matrizes.

Tomando-se cuidado de observar que:

$$\tilde{c}_S + \tilde{h}^{SS} = \tilde{h}^{SS} \quad S \in \Gamma \quad (3.18.c)$$

e

$$\tilde{c}_s = \tilde{I} \quad s \in \Omega \quad (5.22)$$

Não deixando de lado, ainda, que os termos em " $\tilde{h}$ " e em " $\tilde{g}$ " estão relacionados apenas com deslocamentos e forças nos nós do contorno, pode-se escrever de maneira global:

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}^{11} & \dots & \tilde{h}^{1N} & 0^{1(N+1)} & \dots & 0^{1M} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{h}^{N1} & \dots & \tilde{h}^{NN} & 0^{N(N+1)} & \dots & 0^{NM} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{h}^{M1} & \dots & \tilde{h}^{MN} & 0^{M(N+1)} & \dots & \tilde{I}^{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \vdots \\ \tilde{U}_N \\ \vdots \\ \tilde{U}_M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{g}^{11} & \dots & \tilde{g}^{1N} & 0^{1(N+1)} & \dots & 0^M \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}^{N1} & \dots & \tilde{g}^{NN} & 0^{N(N+1)} & \dots & 0^{NM} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}^{M1} & \dots & \tilde{g}^{MN} & 0^{M(N+1)} & \dots & 0^{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \vdots \\ \tilde{P}_N \\ \vdots \\ \tilde{P}_M \end{Bmatrix} +$$

$$+ \rho w^2 \begin{bmatrix} -\tilde{m}^{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & -\tilde{m}^{1M} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -\tilde{m}^{M1} & \dots & \dots & \dots & \dots & -\tilde{m}^{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \vdots \\ \tilde{U}_N \\ \vdots \\ \tilde{U}_M \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

onde as submatrizes  $\underline{0}$  para índices maiores que "N" representam o não relacionamento direto entre os termos de contorno e as variáveis de domínio, e as submatrizes  $\underline{I} = \delta_{ij}^{sl}$  são os valores de  $\underline{c}(s)$  e representam a existência de um ponto fonte em "s" e, conseqüentemente, um valor incógnito a se considerar.

Pode-se aqui, também, escrever a equação 5.23 em sua forma compacta:

$$\underline{H}\underline{U} = \underline{G}\underline{P} + w^2\underline{M}\underline{U} \quad (5.24)$$

que é um problema de autovalores e autovetor análogo ao expresso pela equação (4.16).

#### 5.6. Obtenção da Solução Numérica:

Por analogia, a transformação do problema de autovalor generalizado, expresso na equação (5.27), para o problema padrão de autovalor e autovetor e sua consequente solução, segue os procedimentos descritos no item 4.5, que incluem os problemas de corpos livres de restrições e com graus de liberdade restritos.

Para que esta analogia fique completa as condições de contorno, como o próprio nome o diz, são impostas apenas para nós pertencentes ao contorno do corpo, ficando livres de restrições os nós do seu interior.

Resta ainda dizer que as condições iniciais que, de maneira geral, são prescritas no domínio do corpo (Equação 2.32), devem ser tratadas através da integração de suas densidades em todo o domínio pelo processo da aproximação sobre células, ou seja, pelo processo descrito neste capítulo para o caso particular da matriz de massa.

**5.7. Integração sobre as Células :**

Utilizando-se as notações empregadas nos itens 5.3 e 5.4, pode-se escrever o termo que representa a integração sobre uma célula como segue:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \rho \int_{\Omega_k} u_{ij}^* (S, q) \chi_{\sim j}^T (q) d\Omega (k) \right] U_j^{(k)} = \\
 & = \left[ \int_{\theta_m}^{\theta_M} \int_{R_m}^{R_M} \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^q & \xi_2^q & \xi_3^q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1^q & \xi_2^q & \xi_3^q \end{bmatrix} r dr d\theta \right] \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ u_1^3 \\ u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_2^3 \\ u_3^1 \\ u_3^2 \\ u_3^3 \end{Bmatrix} \tag{5.25}
 \end{aligned}$$

onde  $U_a^b$  é o deslocamento na direção a do nó b e  $\theta_m$  e  $\theta_M$  representam os ângulos extremos de varredura do vetor  $r(S, q)$  e  $R_m$  e  $R_M$  representam os valores extremos que o vetor  $r(S, q)$  pode assumir.

Usando a expressão (5.12) pode-se escrever (5.28) como segue:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_k} u_{ij}^* \chi_{\sim j}^T (q) d\Omega U_j = \int_{\theta_m}^{\theta_M} \int_{R_m}^{R_M} z_{ij} dr d\theta \chi_{\sim j}^T (s) + \\
 & + \int_{\theta_m}^{\theta_M} \int_{R_m}^{R_M} y_{ij} \zeta^T (\theta) dr d\theta \tag{5.26}
 \end{aligned}$$

onde

$$z_{ij} = u_{ij}^* r^2$$

$$y_{ij} = u_{ij}^* r^2$$

$$\tilde{\chi}^T(s) = \begin{bmatrix} \xi_1^s & \xi_2^s & \xi_3^s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1^s & \xi_2^s & \xi_3^s \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

e

$$\tilde{\zeta}^T(\theta) = \begin{bmatrix} \zeta_1^\theta & \zeta_2^\theta & \zeta_3^\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_1^\theta & \zeta_2^\theta & \zeta_3^\theta \end{bmatrix}$$

com

$$\zeta_\alpha^\theta = \frac{1}{2A} (b^\alpha \cos\theta + a^\alpha \sin\theta)$$

Pode-se facilmente determinar de forma analítica, as primitivas em "r" das funções  $Z_{ij}$  e  $Y_{ij}$  que são expressas abaixo:

$$\int_r Z_{ij} dr = M_{ij} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \{ (3-4\nu) \delta_{ij} \left[ \frac{r^2}{2} (\ln r - \frac{1}{2}) \right] + \frac{r^2}{2} r_{,i} r_{,j} \} \quad (5.28)$$

$$\int_r Y_{ij} dr = O_{ij} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \{ (3-4\nu) \delta_{ij} \left[ \frac{r^3}{3} (\ln r - \frac{1}{3}) \right] + \quad (5.29)$$

Os limites de integração ( $R_M$  e  $R_m$ ) são dados pela expressão (5.13) que define a equação de cada aresta que limita a célula em questão. Deve-se tomar cuidado com o fato de sempre haver um dos extremos ( $R_M$  ou  $R_m$ ) representado por duas equações diferentes, devendo-se, para tanto, dividir o intervalo de integração em dois.

Para o caso da Fig.(5.6) tem-se:

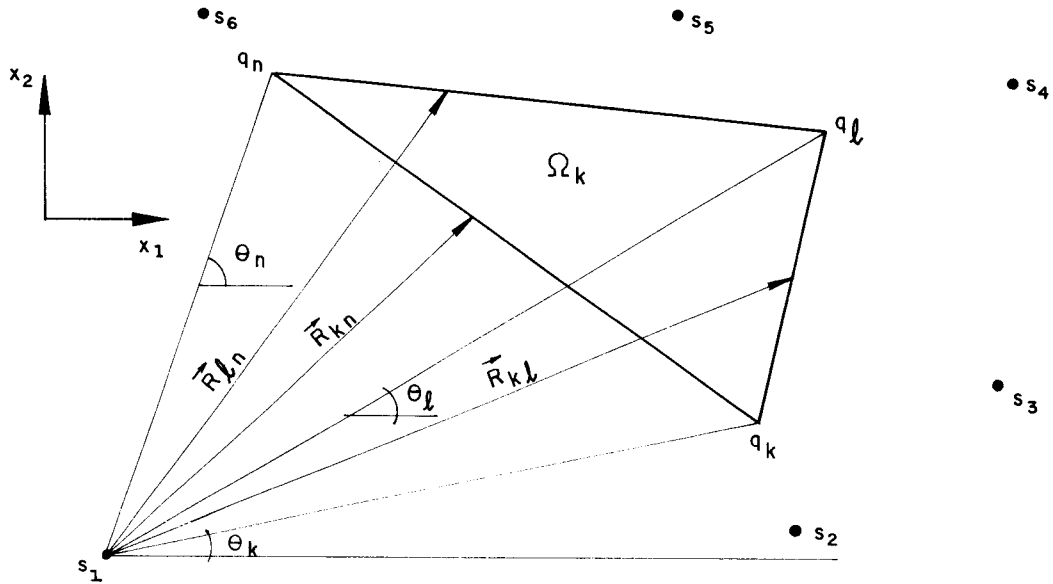


Fig. 5.6 - Extremos de Integração para ponto fonte em  $s_1$  (ou  $S_1$ )

$$\int_{\Omega_k} u_{ij}^T \chi(q) d\Omega = \left[ \int_{\theta_k}^{\theta_l} M_{ij} \begin{vmatrix} R_{kl} \\ R_{kn} \end{vmatrix} d\theta + \int_{\theta_l}^{\theta_n} M_{ij} \begin{vmatrix} R_{ln} \\ R_{kn} \end{vmatrix} d\theta \right] \chi(s) +$$

$$+ \int_{\theta_k}^{\theta_l} O_{ij} \begin{vmatrix} R_{kl} \\ R_{kn} \end{vmatrix} \zeta(\theta) d\theta + \int_{\theta_l}^{\theta_n} O_{ij} \begin{vmatrix} R_{ln} \\ R_{kn} \end{vmatrix} \zeta(\theta) d\theta \quad (5.30)$$

onde  $s_1$  (ou  $S_1$ ) foi adotado como fonte, ficando os extremos  $\theta_M$ ,  $\theta_m$ ,  $R_M$  e  $R_m$  devidamente definidos; a figura mostra ainda outras 5 (cinco) possíveis posições relativas para o ponto fonte; neste caso a escolha dos extremos é feita de maneira análoga a indicada para  $s_1$ , bastando que se leve em conta a ordem crescente de  $\theta$  e a magnitude de  $r$ .

Existem ainda outras posições possíveis não mostradas na Fig. 5.6 para o ponto fonte; são aquelas nas quais o ponto fonte coincide com um dos cantos da célula. Para estas posições os limites de integração são mais simples e são mostrados na figura abaixo:

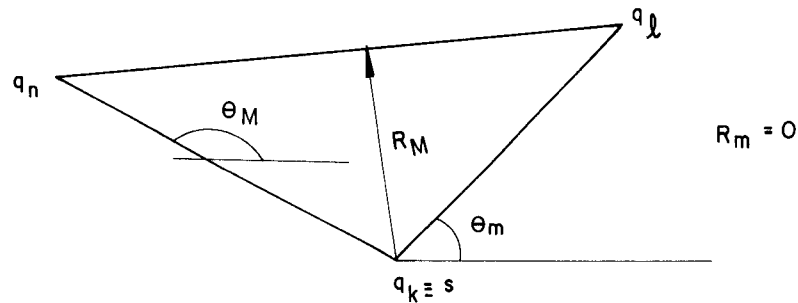


Fig. 5.7 - Limites de Integração para fonte em um dos vértices da célula.

Para este caso, quando se calcula as integrais definidas de (5.30), basta substituir os extremos inferiores, da variável  $r$ , por "0" (zero) e levar em conta os valores dos limites abaixo.

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} M_{ij} = 0 \tag{5.31}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} O_{ij} = 0$$

Reescrevendo a equação (5.30) de forma mais compacta tem-se:

$$\int_{\Omega_k} u_{ij} \chi^T(q) d\Omega = \left[ \int_{\theta_k}^{\theta_l} M_{ij}^1(\theta) d\theta + \int_{\theta_l}^{\theta_n} M_{ij}^2(\theta) d\theta \right] \chi(s) +$$



$$+ \int_{\theta_k}^{\theta_\ell} O_{ij}^1(\theta) \zeta(\theta) d\theta + \int_{\theta_\ell}^{\theta_n} O_{ij}^2(\theta) \zeta(\theta) d\theta \quad (5.32)$$

onde os índices superiores "P" nas matrizes  $M_{ij}^P$  e  $O_{ij}^P$  representam os extremos de integração, no caso  $R_{kn} - R_{k\ell}$  (P=1) e  $R_{kn} - R_{\ell n}$  (P=2) vistos na figura (5.6) com  $s_1$  fonte.

Pode-se, então, transformar as integrais em  $\theta$  para integrais adimensionais nas variáveis  $\eta^1$  e  $\eta^2$  conforme o intervalo de integração.

Neste caso tem-se:

$$\eta^1 = \frac{2}{\theta_\ell - \theta_k} \cdot \left( \theta - \frac{(\theta_\ell + \theta_k)}{2} \right) \quad \text{p/ o intervalo } [\theta_k, \theta_\ell] \quad (5.33)$$

$$\eta^2 = \frac{2}{\theta_n - \theta_\ell} \cdot \left( \theta - \frac{(\theta_n + \theta_\ell)}{2} \right) \quad \text{p/ o intervalo } [\theta_\ell, \theta_n] \quad (5.34)$$

e conseqüentemente

$$d\eta^1 = \frac{2}{(\theta_\ell - \theta_k)} d\theta \quad \text{em } [\theta_k, \theta_\ell] \quad (5.35)$$

$$d\eta^2 = \frac{2}{(\theta_n - \theta_\ell)} d\theta \quad \text{em } [\theta_\ell, \theta_n] \quad (5.36)$$

Fazendo-se a transformação, a expressão (5.32) fica,

$$\int_{\Omega_k} u_{ij} \chi^T(q) d\Omega = \left[ \frac{\theta_\ell - \theta_k}{2} \int_{-1}^1 M_{ij}^1 d\eta^1 + \frac{\theta_n - \theta_\ell}{2} \int_{-1}^1 M_{ij}^2 d\eta^2 \right] \chi(s) + \frac{\theta_\ell - \theta_k}{2} \int_{-1}^1 O_{ij}^1 \zeta d\eta^1 + \frac{\theta_n - \theta_\ell}{2} \int_{-1}^1 O_{ij}^2 \zeta d\eta^2 \quad (5.37)$$

Observa-se novamente que, para cada posição relativa do ponto fonte (Fig. 5.6), obtém-se uma expressão análoga a (5.37). Para isto basta que os extremos de integração sejam respeitados.

No caso do ponto fonte ser coincidente com um vértice, uma das integrais em  $\theta$  deixa de existir pois, para este caso, os extremos em  $r$  são expressos apenas por uma expressão Fig. (5.7)

Para concluir a obtenção dos coeficientes, integra-se numericamente a expressão (5.37), utilizando a quadratura de Gauss (Item 3.6.1). Após executar todas as somas e produtos necessários chega-se à seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} u_{ij}^* (S, q) \chi_j^T(q) d\Omega(q) U_j^{(I)} =$$

$$= \begin{bmatrix} m_{11}^k & m_{11}^\ell & m_{11}^n & m_{12}^k & m_{12}^\ell & m_{12}^n \\ m_{21}^k & m_{21}^\ell & m_{21}^n & m_{21}^k & m_{21}^\ell & m_{21}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^k \\ U_1^\ell \\ U_1^n \\ U_2^k \\ U_2^\ell \\ U_2^n \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

ou, rearranjando para a forma usual adotada pelo método, tem-se:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \vdots & m_{11} & m_{12} & \vdots & m_{11} & m_{12} & \vdots \\ m_{21} & m_{22} & \vdots & m_{21} & m_{22} & \vdots & m_{21} & m_{22} & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{ U_1 \right\}^k \\ \left\{ U_2 \right\}^\ell \\ \left\{ U_1 \right\}^n \\ \left\{ U_2 \right\}^n \end{Bmatrix} =$$

$$= \int_{\Omega} u_{ij}^* (S, q) \chi_j^T(q) d\Omega(q) U_j^{(I)} \quad (5.39)$$

onde as submatrizes  $m_{ij}^{Sq}$  são as submatrizes da matriz global  $\underline{M}$  mostrada no item anterior.

## CAPÍTULO VII

### Exemplos Numéricos

#### 7.1. Introdução

Nos três capítulos precedentes mostraram-se três maneiras diferentes de tratar o problema de vibração livre pelo Método dos Elementos de Contorno utilizando o conceito de matriz de massa. O processo da dupla reciprocidade já é bastante explorado e várias referências [42-46,68] trazem resultados diversos de sua aplicação. Por este motivo, desenvolveram-se para este trabalho, dois programas principais que resolvem os problemas de vibração livre pelos processos da integração de células e alternativo, descritos nos capítulos V e VI respectivamente.

Resolvem-se então, com estes programas, dois exemplos da literatura, e comparam-se seus resultados com os já existentes para a dupla reciprocidade. Cabe ainda recordar que os elementos de contorno utilizados neste trabalho são lineares com aproximação linear.

## 7.2. Autovalores e Autovetores de uma Viga Engastada:

Analisaram-se os cinco primeiros modos de vibração da viga engastada mostrada na figura (7.1), utilizando-se diferentes discretizações de contorno. As propriedades consideradas para esse meio contínuo foram as mesmas já adotadas por outros autores quando da resolução via dupla reciprocidade:  $h = 6$ ,  $\ell = 24$ ,  $E/\rho = 10^4$  e  $\nu = 0,2$ .

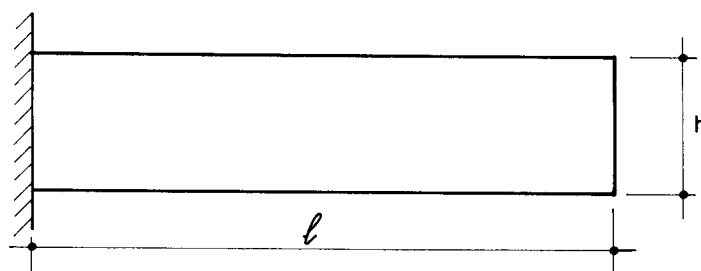


Fig. 7.1 - Viga Engastada

Reproduzem-se na figura (7.2) os resultados da dupla reciprocidade obtidos por Nardini e Brebbia [43], onde utilizaram-se elementos de contorno quadráticos, pontos base internos e funções cônicas como aproximadoras. Estes resultados são comparados, na mesma figura, com uma solução obtida pelo método dos elementos finitos usando elementos retangulares e contendo 451 nós.

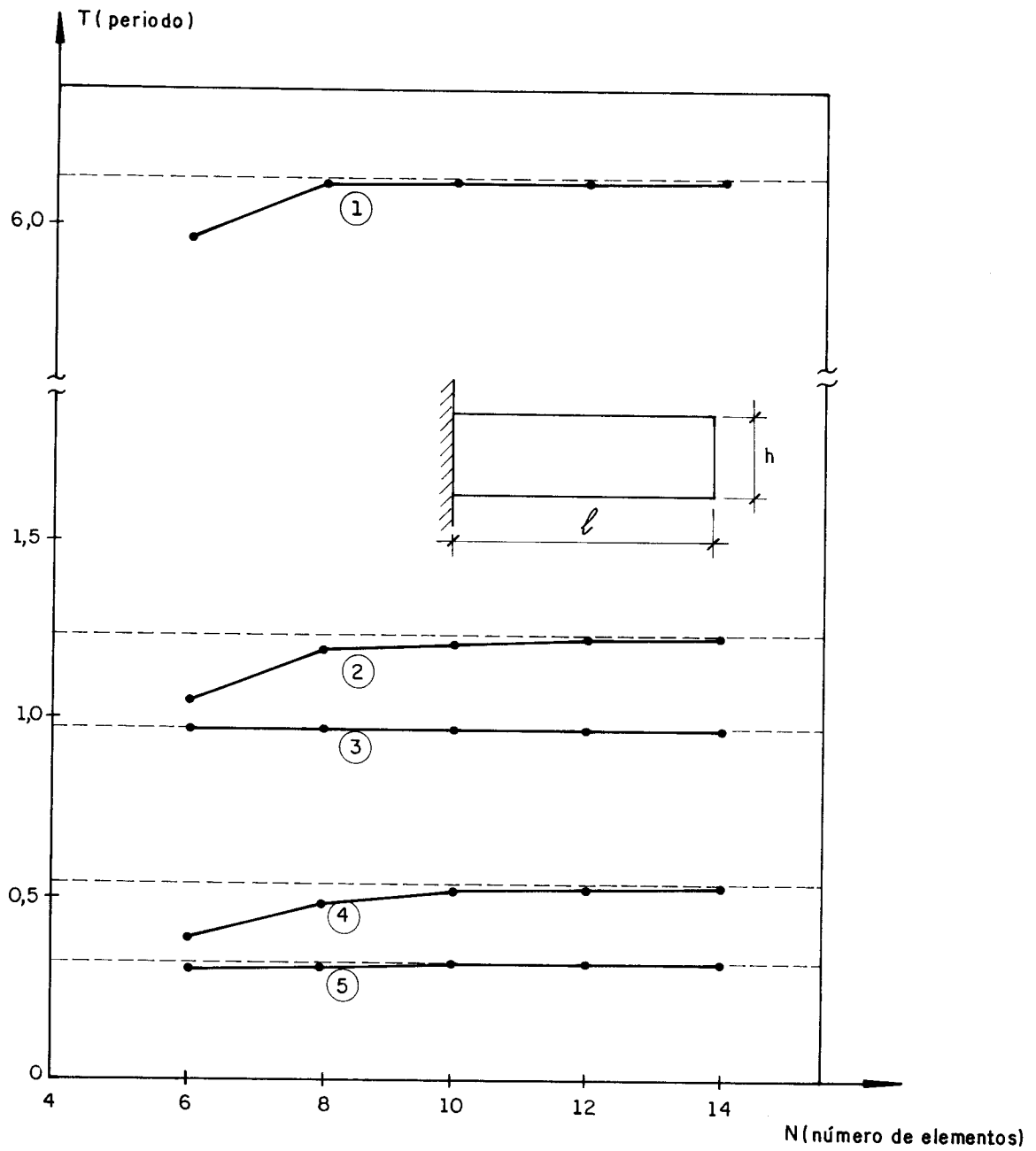


Fig. 7.2 - Dupla Reciprocidade Nardini e Brebbia

Na figura 7.3 mostra-se o mesmo tipo de análise feita para a integração direta e para o processo alternativo.

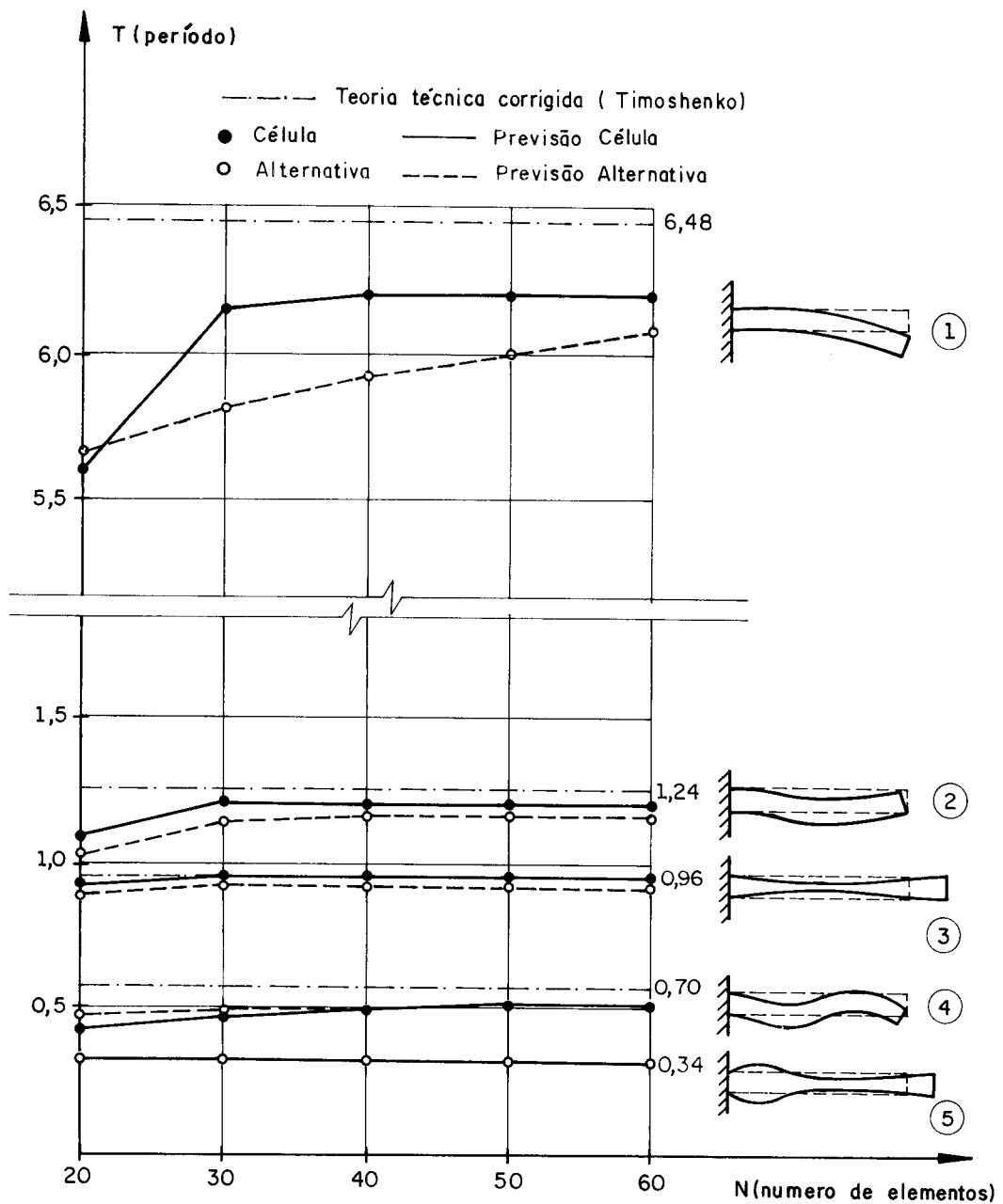


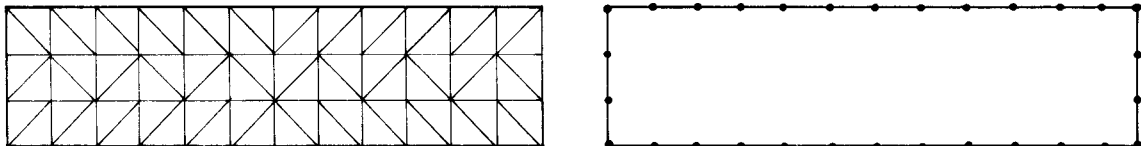
Fig. 7.3 - Integração Direta e processo alternativo.

Devido a utilização de tipos diferentes de elementos de contorno, e de não se saber exatamente quantas bases internas foram empregadas pela solução encontrada na figura (7.2), torna-se inviável uma comparação direta da eficiência da dupla reciprocidade e dos processos aqui

empregados. Porém na figura (7.3) pode-se notar que ambas as aproximações mostradas apresentaram ótimos resultados quando comparados com o método dos elementos finitos.

Observa-se na figura (7.3) que o processo de integração direta foi mais eficiente do que o processo alternativo; isto se dá, obviamente, pela melhor aproximação das densidades do domínio quando aproximadas por células internas. Porém, para que isto fosse possível, utilizaram-se pontos internos, acarretando um maior volume de dados e afastando o objetivo principal do método dos elementos de contorno, que é o de limitar as incógnitas principais do problema a valores no contorno.

Além disso, aumentou-se o esforço computacional visto que os sistemas matriciais ficaram com ordens superiores aos equivalentes do processo alternativo. Para que isto fique claro, mostram-se na figura (7.4) as discretizações utilizadas pelos processos de integração direta e alternativo para a solução do problema da figura (7.1), com trinta elementos de contorno.



a) Integração direta

b) Integração alternativa

Fig. 7.4 - Discretizações para Integração Direta e Alternativa.

### 7.3. Quadrado com Furo:

Os quatro primeiros modos de vibração foram calculados para a estrutura plana mostrada na figura (7.5), ( $E/\rho = 10^3$  e  $\nu = 0,25$ ). No processo de integração direta (ID) utilizaram-se 40 elementos de contorno e 80 células internas (fig. 7.6-a). No processo alternativo utilizaram-se 56 elementos de contorno (fig. 7.6-b). Os resultados (fig. 7.7) foram comparados às soluções dadas por Nardini e Brebbia [68], pelo processo da dupla reciprocidade (D.R), com 24 elementos quadráticos, e pelo Método dos Elementos Finitos (E.F), utilizando 180 nós para elementos retangulares quadráticos.

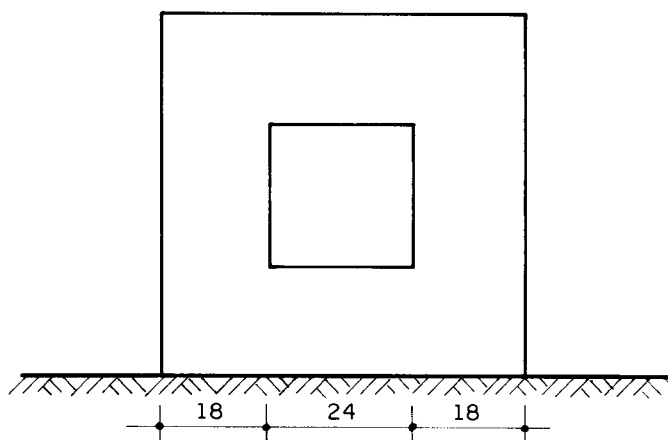


Fig. 7.5 - Quadrado com Furo.

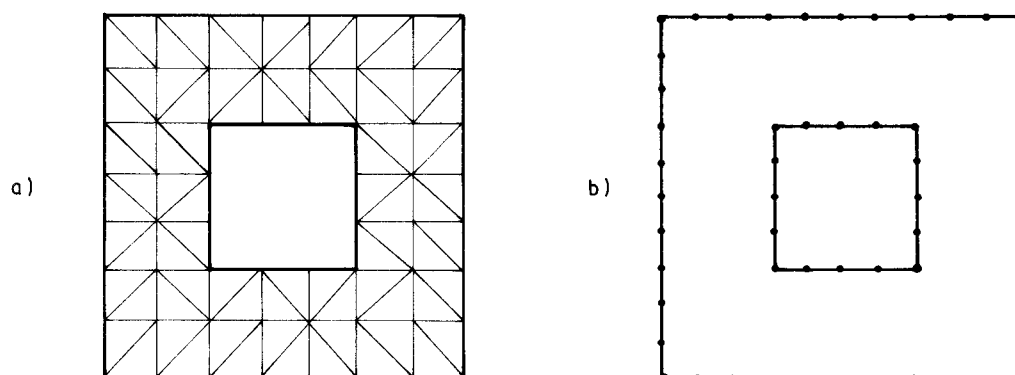
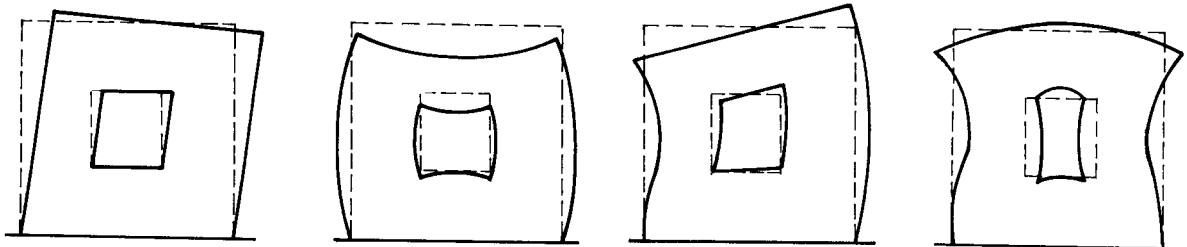


Fig. 7.6 - Discretizações utilizadas.





DR: 2,429	6,366	8,406	10,04
FE: 2,402	6,337	8,419	9,92
ID: 2,482	6,406	8,507	10,31
PA: 2,493	6,540	8,610	10,92

Fig. 7.7 - Comparação dos resultados em frequências naturais.

Como pode ser visto, as diferenças máximas entre os valores das frequências calculados para os quatro primeiros modos são de 4%, 3%, 2% e 9%, respectivamente. Conclui-se daí que a aproximação proposta é muito eficiente pela pequena diferença entre os valores obtidos em face à relativa pobreza da discretização empregada.

## CAPÍTULO VIII

### Discussões e Conclusões

Neste trabalho estudaram-se três formas diferentes de tratar o problema de vibração livre de meios finitos pelo Método dos Elementos de Contorno utilizando o conceito de matriz de massa. Estes processos podem ser estendidos para casos transientes como mostram, usando o processo da dupla reciprocidade, Nardini e Brebbia [43, 68]. Destes três processos, dois têm uma grande importância para o desenvolvimento no Método dos Elementos de Contorno, a saber, o Processo da Dupla Reciprocidade e o Processo Alternativo aqui sugerido.

Sua importância está relacionada com três vantagens principais; a primeira delas é que, por usarem a solução fundamental do problema estático, reduzem consideravelmente o esforço computacional para o tratamento de problemas

transientes, que antes eram tratados através de soluções fundamentais dependentes do tempo ou das frequências - (Transformada de Fourier). A segunda vantagem é que, para certos problemas de engenharia, basta a determinação das frequências naturais da estrutura para se analisar a validade de um projeto. Esta determinação é feita diretamente nos processos que utilizam o conceito de matriz da massa, enquanto que, nos outros processos, isto é feito de maneira indireta onde, para tanto, impõe-se solicitações harmônicas com frequências variáveis até que se atinjam condições de ressonância (singularidade do sistema), o que, além de exaustivo, é bastante impreciso [20].

Finalmente, a última vantagem é aquela inerente a todo o Método dos Elementos de Contorno, que é a de reduzir o problema dinâmico de um corpo qualquer à análise de seu contorno. Trazendo assim, quando comparado com as técnicas de domínio, uma redução do volume de dados, número de equações e esforço computacional.

O processo de integração direta células, apesar de fugir da filosofia básica do Método dos Elementos de Contorno devido à necessária discretização do interior do corpo, foi aqui apresentado devido à ótima aproximação das densidades que a interpolação por células proporciona. Como era esperado, sua convergência para o resultado correto foi ótima, porém observou-se que sua adequação à descontinuidade no contorno não é muito boa, pois surge uma inconsistência na matriz de massa "M", que é explicada pela introdução de uma descontinuidade no interior do corpo (figura 8.1- , que não é representada nas matrizes "H" e "G" geradas apenas pelas integrações dos elementos de contorno.

Este pequeno problema foi facilmente resolvido através da redução desta descontinuidade, como mostra a figura (8.1-b). É obvio, também, que as respostas convergem para o valor exato mesmo não adotando tal procedimento; porém esta convergência não é tão rápida como se constatou.

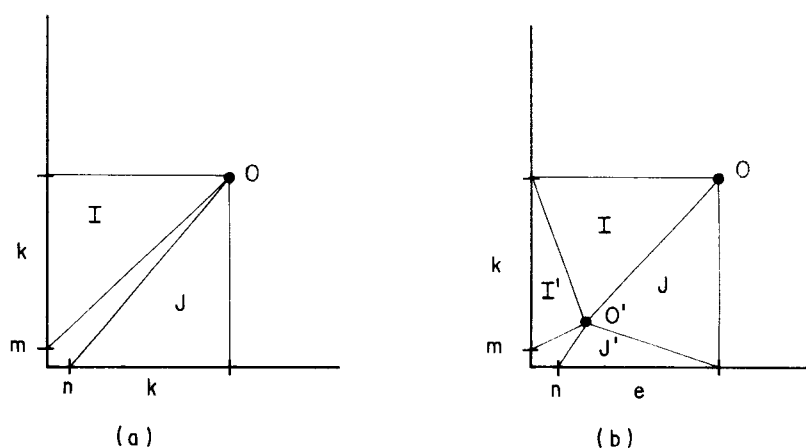


Fig. 8.1 - Descontinuidade do domínio.

A comparação entre os processo da dupla reciprocidade e o proposto aqui é feita enfocando-se dois aspectos principais, que são a qualidade da aproximação das densidades de domínio e a diversidade de aplicações que cada formulação possibilita.

Com relação ao primeiro aspecto, no capítulo VI, foram executados testes bastante detalhados, que levam a conclusão que a aproximação proposta aqui é mais eficiente que aquelas normalmente utilizadas para aproximar as densidades de domínio no processo da dupla reciprocidade. Isto foi confirmado ainda na execução de exemplos numéricos, capítulo VII, onde, para o processo alternativo, não se detectou nenhuma frequência complexa em todos os espectros gerados; o mesmo não ocorre para o processo da dupla reciprocidade, como afirmam Nardini e Brebbia [43].

No que diz respeito à diversidade de aplicações, como já foi mencionado no capítulo VI, o processo da dupla reciprocidade deixa a desejar, pois, se na densidade de domínio a ser transformada estiver presente a primeira ou segunda derivada da solução fundamental, como por exemplo no caso de problemas que envolvem materiais plásticos, as integrais de contorno resultantes terão núcleos com singularidades iguais e superiores às dos núcleos da integral

de domínio original. Desta forma as Matrizes globais resultantes da transformação não serão mais "H" e "G" mas sim outras, cuja obtenção é agravada por singularidades muito fortes e de difícil Integração.

Já a transformação sugerida no processo alternativo gera sempre integrais de contorno com núcleos menos singulares do que os núcleos da integral de domínio original. A integração no contorno é feita, então, sem dificuldades para qualquer tipo de problema que se deseje resolver.

Resta, ainda, comentar que as geratrizes das funções aproximadoras foram descritas como sendo ortogonais entre si, vertical e horizontal, respectivamente. Obviamente, as direções das geratrizes podem variar de base para base, contanto que se mantenham ortogonais, no intuito de otimizar a discretização do contorno, respeitando-se a condição de coincidir as geratrizes e os pontos do problema, como mostra a figura abaixo:

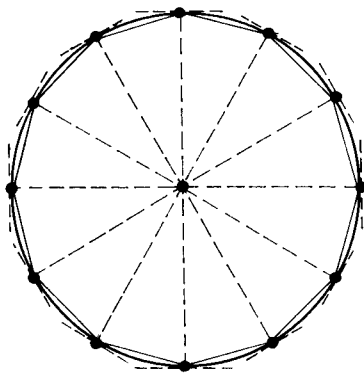


Fig. 8.2 - Discretização de um círculo com função proposta rotacionada.

Devido a flexibilidade do processo alternativo aqui sugerido, abre-se uma frente muito ampla de aplicações, que é a sua diversificação para outros problemas da engenharia; além disso, esta pesquisa pode ser implementada para a adequação desse processo à domínios infinitos, as sim como propôs Leoffler [69] para a Dupla Reciprocidade.

## CAPÍTULO IX

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] NAVIER. Mém. Acad. Sciences, Paris, 7, 1827. apud LOVE, A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4th.ed. New York, Dover, 1944.
  
- [2] CAUCHY, A.L. Exercices de mathématique, 'Sur l'équilibre et le mouvement d'un systemé de points matériels par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. 1828. apud LOVE, A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4th.ed. New York, Dover, 1944.
  
- [3] LOVE, A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4th.ed. New York, Dover, 1944.
  
- [4] ERINGEN, A.C. & SUHUBI, E.S. Elastodynamics: finite motions. New York/London, Academic Press, 1974. v.1.

- [5] ERINGEN, A.C. & SUHUBI, E.S. Elastodynamics: linear theory. New York/London, Academic Press, 1974. v.2
- [6] ACHENBACH, J.D. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, North-Holland, 1973.
- [7] SOUTHWELL; R.V. Relaxation methods in theoretical physics. London, Oxford University Press, 1946. (The Oxford Engineering Science Series)
- [8] VENTURINI, W.S. Application of the boundary element method to solve geomechanical problems. Southampton, University of Southampton, 1982. (Ph.D. Thesis)
- [9] ANDERSSSEN, R.S. et alii. The application and numerical solution of integral equations. Alphen aan den Rijn, The Netherlands, Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [10] ABEL, N.H. Ouevres completes. Norvegien Christiania, 1, 1881. 621p.
- [11] GIL RODRIGUEZ, J.C. Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1986. (Dissertação de mestrado)
- [12] GREEN, G. An essay on the application of mathematical analysis to the theories of eletricity and magnetism. Nottingham, 1828.
- [13] BETTI, E. Teoria dell elasticita. Il Nuovo Cimento (Ser.3), 6-10, 1872.



- [14] SOMIGLIANA; C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo. Il Nuovo Cimento (Ser.3). 17-20, 1885, 1886.
- [15] KOBAYASHI, S. Fundamentals of boundary integral equation methods in elastodynamics. In: BREBBIA, C. A., ed. Topics in boundary element research - 2. Berlin, Springer-Verlag, 1985. p.1-54.
- [16] FREDHOLM, I. Sur une classe d'equations fonctionnelles. Acta Math., 27: 365-390, 1903.
- [17] JASWON, M.A. A review of the theory. In: BREBBIA, C. A., ed. Topics in boundary element research - 1. Berlin, Springer-Verlag, 1985. p.13-40
- [18] KUPRADZE, V.D. Potential methods in theory of elasticity. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1965.
- [19] RIZZO, F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quart. Appl. Math., 25: 83-95, 1967.
- [20] POON, H.C. Application of boundary element methods in elastodynamics. Southampton, University of Southampton, 1981. (M.Sc. Dissertation)
- [21] BANAUGH; R.P. & GOLDSMITH, W. Diffraction of steady elastic waves by surfaces of arbitrary shape. J. Appl. Mech., 29: 589-597, 1963.
- [22] FRIEDMAN, M.B. & SHAW, R.P. Diffraction of pulses by cylindrical obstacles of arbitrary cross-section. J. Appl. Mech., 29: 40-46, 1962.

- [23] CHEN, L.H. & SCHWEIKERT, J. Sound radiation from an arbitrary body. J. Acoust. Soc. Am., 35: 1626-1632, 1963.
- [24] CRUSE, T.A. & RIZZO, F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem - I. J. Math. Anal. Appl., 22: 244-259, 1968.
- [25] CRUSE, T.A. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem II. J. Math. Anal. Appl., 22: 341-355, 1968.
- [26] BESKOS, D.E. Boundary element methods in dynamic analysis. Appl. Mech. Rev., 40: 1-23, 1988.
- [27] MANOLIS, G.D. & BESKOS, D.E. Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and Laplace transform. Int. J. Num. Meth. Engng., 17: 573-599, 1981.
- [28] MANOLIS, G.D. A comparative study on three boundary element method approaches to problems in elastodynamics. Int. J. Num. Meth. Engng., 19: 73-91, 1983.
- [29] MANOLIS, G.D. & BESKOS, D.E. Dynamic response of lined tunnel by an isoparametric boundary element method. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 36: 291-307, 1983.
- [30] NIWA, Y.; KOBAYASHI, S.; YOKOTA, Y. Application of integral equation methods to the determination of static and steady-state dynamic stresses around cavities of arbitrary shape. Proc. Japan Soc. Civil Eng., 195: 27-35, 1971.

- [31] NIWA, Y.; KOBAYASHI, S.; FUKUI, T. Application of integral equation method to some geomechanical problems. In: INT. CONF. NUM. METH. GEOMECH., 2nd., ASCE, 1976. Proc. p.120-131
- [32] NIWA, Y.; KOBAYASHI, S.; AZUMA, N. An analysis of transient stresses produced around cavities of an arbitrary shape during the passage of travelling wave. Memo. Fac. Eng., Kyoto Univ., 37 (2): 28-46, 1975.
- [33] KOBAYASHI, S. & NISHIMURA, N. Dynamic analysis of underground structures by the integral equation method. In: INT. CONF. METH. GEOMECH., 4th., Balkema, 1982. Proc. v.1, p.401-409.
- [34] KOBAYASHI, S. & NISHIMURA, N. Transient stress analysis of tunnels and cavities of arbitrary shape due travelling waves. In: BANERJEE, P.K. & SHAW, R.P., eds. Developments in boundary element methods - 2. Applied Science, 1982. chap. 7
- [35] MANSUR, W.J. A time-stepping technique to solve wave propagation problems using boundary element method. Southampton, University of Southampton, 1983. (Ph.D. Thesis)
- [36] MANSUR, W.J. & BREBBIA, C.A. Transient elastodynamic using a time-stepping technique. In: BREBBIA, C. A.; FUTAGAMI, T.; TANAKA, M., eds. Proc. 5th. Int. Sem. BEM Eng. Berlin, Springer-Verlag, 1983. p.677-698.
- [37] MANSUR, W.J. & BREBBIA, C.A. Transient elastodynamics. In: BREBBIA, C.A. ed. Topics in boundary element research - 2. Berlin, Springer-Verlag, 1985. p.124-155.

- [38] MANSUR, W.J. O método dos elementos de contorno aplicado à análise de propagação transiente de ondas. RBE, 2 (2): 49-82, 1984.
- [39] MANSUR, W.J. Boundary element method applications in two-dimensional transient elastodynamics. In: BREBBIA, C.A., ed. Boundary elements X. Southampton, CML; Berlin, Springer-Verlag, 1988. v.4, p. 387-399.
- [40] DOMINGUEZ, J. & ALARCON, E. Elastodynamics. In: BREBBIA, C.A. ed. Progress in boundary element methods - 1. New York, Halsted Press, 1981. p.213-257.
- [41] CRUSE, T.A. Recent advances in boundary element analysis methods. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 62: 227-244, 1987.
- [42] NARDINI, D. & BREBBIA, C.A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. In: BREBBIA, C.A. ed. Boundary elements methods in engineering. Berlin, Springer-Verlag, 1982. p.312-326.
- [43] NARDINI, D. & BREBBIA, C.A. Boundary integral formulation of mass matrices for dynamic analysis. In: BREBBIA, C.A., ed. Topics in boundary element research - 2. Berlin, Springer-Verlag, 1985. p. 191-208.
- [44] BREBBIA, C.A. & NARDINI, D. Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure. Int. J. Soil Dyn. Earthquake Eng., 2, 1983.

- [45] NARDINI, D. & BREBBIA, C.A. Transient dynamic analysis by the boundary element method. In: BREBBIA, C.A.; FUTAGAMI, T.; TANAKA, M., eds. Boundary elements. Berlin, Springer-Verlag, 1983. p.719-730
- [46] NARDINI, D. & BREBBIA, C.A. The solution of parabolic and hiperbolic problems using an alternative boundary element formulation. In: BREBBIA, C.A. & MAIER, G., eds. Boundary elements VII. Berlin, Springer-Verlag, 1985. p.3.87-3.97
- [47] TIMOSHENKO; S.P. & GOODIER; J.N. Theory of elasticity. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, 1970.
- [48] ARGYRIS, J.H. & KELSET, S. Energy theorems and structural analysis. London, Butterworths, 1960.
- [49] TURNER, M.J. et alii. Stiffness and deflection analysis of complex structures. J. Aero. Sci., 23: 805-823, 1956.
- [50] CLOUGH, R.W. The finite element in plane stress analysis. In: ASCE CONF. ON ELETRONIC COMP., 2nd., Pittsburg, 1960. Proc.
- [51] FICHERA, G. Existence theorems in elasticity. In: TRUESDELL, C., ed. Handbuch der Physik. Berlin-New York, Springer-Verlag, 1972. VIa/2, p. 347-389.
- [52] KELLOGG; P.D. Foundations of potential theory. New York, Dover, 1953.
- [53] REISMANN, H. On the forced motion of elastic solids. Appl. Sci. Res., 18: 156-165, 1967.

- [54] BREBBIA, C.A. The boundary element method for engineers. London, Pentech Press, 1978.
- [55] BREBBIA, C.A. & WALKER, S. Boundary element techniques in engineering. London, Newnes-Butterworths, 1980.
- [56] BREBBIA, C.A. TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C. Boundary element techniques. Berlin, Springer-Verlag, 1984.
- [57] CRUSE, T.A. Mathematical foundations of the boundary integral equation method in solid mechanics. Bolling AFB, Air Force Office of Scientific Research, USA, 1977. 116p. (Report n. AFOSR-IR-77-1002)
- [58] WEBSTER, A.G. Partial differential equations of mathematical physics. New York, Dover, 1955. 440p.
- [59] HARTMANN, F. Computing the C-matrix on non-smooth boundary points, In: BREBBIA, C.A., ed. New developments in boundary element methods. Southampton, CML Publ., 1980.
- [60] STROUD; A.H. & SECREST, D. Gaussian quadrature formulas. New York, Prentice-Hall, 1966.
- [61] VENTURINI, W.S. Boundary element method in geomechanics. Berlin, Springer-Verlag, 1983. 246p. (Lecture Note in Engineering, 4)
- [62] GOLUB, G.H. & VAN LOAN, C.F. Matrix computations. The Johns Hopkins University Press, 1985.

- [63] GRAD, J. & BREBNER, M.A. Algorithm 343 eigenvalues and eigenvectors of a real general matrix. Comm. ACM II, 1968. p.820-826
- [64] WILKINSON, J.H. The algebraic eigenvalue problem. Oxford, Oxford University Press, 1965.
- [65] COSTA JR., J.A. An Alternative procedure to solve Helmholtz problems by BEM. In: BREBBIA, C.A. ed. Boundary element X. Berlin, Springer-Verlag, 1988. v.4, p.245-253.
- [66] VENTURINI, W.S. Domain integral transformations in the boundary element method. Paper presented at 10th. int. Conf. on Boundary Element Methods. University of Southampton, UK, 1988.
- [67] PISKOUNOV, N. Cálculo diferencial e integral. Porto, Lopes da Silva Ed., 1979. v.2
- [68] NARDINI, D. & BREBBIA, C.A. Solution of parabolic and hyperbolic time dependent problems using boundary elements. Comp. & Maths. with Appls., 12B (516): 1061-1072, 1986.
- [69] LEOFFLER NETO, C.F. Uma formulação alternativa do método dos elementos de contorno aplicada a problemas de campo escalar. Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1988. (Tese de doutorado)