

VIBRAÇÕES LIVRES EM FLEXO-TORÇÃO DE BARRAS  
DE SECÇÃO DELGADA SOB A AÇÃO DE FORÇAS  
AXIAIS ESTÁTICAS

AUTOR : WALTER LIBARDI

ORIENTADOR : PROF. Dr. MUNIR RACHID

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

VIBRAÇÕES LIVRES EM FLEXO - TORÇÃO DE BARRAS  
DE SECÇÃO DELGADA SOB A AÇÃO DE FORÇAS  
AXIAIS ESTÁTICAS

ENG. WALTER LIBARDI

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São  
Carlos da Universidade de São Paulo como parte  
dos requisitos para obtenção do título de  
"Doutor em Engenharia Civil".

ORIENTADOR : PROF. DR. MUNIR RACHID

SÃO CARLOS, JULHO DE 1990.

·  
A  
ALICE  
SARA  
E  
MEUS PAIS

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof.Dr. Munir Rachid, pela orientação desta tese e de muitos outros trabalhos que realizamos juntos.

Ao Prof. Angelo Rubens Migliore Jr., pelo apoio durante a elaboração deste trabalho.

Aos colegas dos Departamentos de Matemática da UFSCar e da USP, pelas discussões dos problemas matemáticos.

Ao Sr. Francisco Carlos Guete de Brito, pela realização esmerada dos desenhos.

## RESUMO

Um estudo da influência da força axial estática sobre as frequências naturais e os modos naturais de vibração de barras de secção delgada é apresentado.

Obtém-se, inicialmente, um conjunto de equações diferenciais usando o método da energia. São incluídos, além dos momentos e bimomentos estáticos aplicados nas extremidades da barra, a inércia de rotação e a inércia setorial.

O método dos elementos finitos é aplicado para análise de vibrações livres. As matrizes de massa, de rigidez e de rigidez geométrica são determinadas considerando campo de deslocamento cúbico .

Através de alguns exemplos, mostra-se que o bimomento pode afetar significativamente os valores das frequências e dos modos naturais.

## ABSTRACT

A study of the influence of the statical axial force on the natural frequencies and natural modes of vibration of thin-walled bars is presented.

One obtains initially a set of differential equations by making use of the energy method. In addition to the statical moments and bimoments applied at the bar's ends, both the rotary and the warping inertias are taken into account.

The finite element method is employed for the analysis of free vibrations. The mass, stiffness, and geometric stiffness matrices are determined in the case of a cubic displacement field.

By means of some examples, one shows that the bimoment may affect, in a significant way, the values of the natural frequencies and modes.

# ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO .....	1
2. CONSIDERAÇÕES SOBRE FLEXO-TORÇÃO .....	4
2.1. Introdução .....	4
2.2. Deslocamentos .....	4
2.3. Tensões .....	11
2.4. A equação do bimomento .....	20
3. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO .....	23
3.1. Introdução .....	23
3.2. Energia de deformação .....	26
3.3. Energia cinética .....	28
3.4. Potencial das forças externas .....	30
3.5. Princípio de Hamilton .....	33
4. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	42
4.1. Introdução .....	42
4.2. Determinação das matrizes do elemento .....	43
4.2.1. Matriz de rigidez do elemento .....	45
4.2.2. Matriz de massa do elemento .....	48
4.2.3. Matriz de rigidez geométrica do elemento .....	51
4.3. As equações de movimento em coordenadas globais .....	54
4.4. O problema de auto-valor .....	58
5. RESULTADOS NUMÉRICOS .....	61
5.1. Introdução .....	61
5.2. O efeito do bimomento nas vibrações flexo - torcionais .....	62
5.3. O efeito do bimomento nas vibrações acopladas flexionais e flexo-torcionais .....	67
5.4. Outros casos de vinculação .....	71
5.4.1. Extremidades engastada-livre .....	72

5.4.2. Extremidades engastada-garfo.....	74
5.4.3. Comparação de resultados.....	78
5.5. Conclusões.....	78
APÊNDICE A.....	80
APÊNDICE B.....	82
BIBLIOGRAFIA.....	88
LISTA DE SIMBOLOS.....	100



# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Barras de secção delgada têm sido amplamente utilizadas em Engenharia Civil, Mecânica e Aeronáutica por serem consideradas altamente eficientes do ponto de vista de menor peso para uma dada resistência. Estas estruturas podem sofrer combinações de cargas estáticas e dinâmicas e, em muitos casos, o comportamento dinâmico depende significativamente das cargas estáticas.

Por causa de sua importante aplicação prática, o comportamento dinâmico de barras de secção delgada mereceu considerável atenção no passado. A teoria geral para as vibrações de barras de secção delgada, incluindo inércia de rotação, inércia setorial e ainda o efeito de forças axiais estáticas aplicadas nas extremidades das barras, foi apresentada por *Vlassov* [1]. *Gere* [4] determinou as frequências naturais flexo-torcionais de vibração sob várias condições de contorno, usando o método analítico. *Gere e Lin* [5] determinaram as frequências naturais acopladas flexionais e flexo-torcionais sob várias condições de contorno usando o método exato e o de *Rayleigh - Ritz*. *Too* [6] estendeu as equações diferenciais de vibração de *Vlassov* para incluir a deformação por força cortante. *Roberts* [7] estudou, para o comportamento flexional e torcional, a influência da força axial incluindo os momentos aplicados nas extremidades das barras. *Mei* [8] determinou através do método dos elementos finitos, para o comportamento torcional e flexional, as matrizes de rigidez e de massa usando um campo de deslocamento cúbico. *Venâncio e Iguti* [8] incluíram nestas matrizes a deformação por cortante e as inércias de rotação e setorial. *Krajcinovic* [10] determinou, para o comportamento flexional e torcional, as matrizes de

massa, de rigidez e de rigidez geométrica usando como campo de deslocamento as soluções das equações diferenciais do problema estático. *Friberg* [11] determinou a matriz de rigidez dinâmica a partir das equações diferenciais obtidas por *Vlassov*.

Neste trabalho, estuda-se a influência da força axial estática nas frequências naturais de vibração flexional (somente flexão), flexo-torcional (somente flexo-torção) e flexional-torcional (flexão e flexo-torção acopladas) incluindo momentos e bimomentos estáticos aplicados nas extremidades das barras.

No capítulo 2, faz-se um resumo sobre a teoria de flexo-torção onde procura-se apresentar hipóteses, convenções de sinal e as grandezas envolvidas.

No capítulo 3, obtém-se as equações de movimento através do Cálculo Variacional. Deduzem-se, então, as expressões da energia cinética, energia potencial e do potencial das cargas externas e, em seguida, aplica-se o princípio de *Hamilton*.

No capítulo 4, partindo-se das expressões de energia obtidas no capítulo anterior, determinam-se através do método dos elementos finitos as matrizes de massa, de rigidez e de rigidez geométrica, usando campo de deslocamento cúbico. A equação de movimento na forma matricial é obtida.

No capítulo 5, estuda-se através de alguns exemplos a influência da força axial estática nas frequências e nos modos naturais de vibração quando se considera o bimomento.

No apêndice A, encontram-se algumas matrizes que são definidas ao longo do trabalho e no apêndice B,

apresenta-se uma descrição do programa VIBRADEL utilizado no cálculo da carga crítica e das frequências naturais de vibração e seus respectivos modos.

## CAPÍTULO 2

### CONSIDERAÇÕES SOBRE FLEXO - TORÇÃO

#### 2.1. INTRODUÇÃO

Uma barra é dita ser de secção delgada quando cada uma das suas dimensões é de uma ordem de grandeza diferente das outras duas, ou seja, a espessura da parede é pequena em relação à dimensão característica da sua secção transversal e esta por sua vez é pequena em relação ao comprimento da barra *Vlassov* [1].

Seja então uma barra de secção delgada aberta referida a um sistema de eixos  $xyz$ , conforme a figura 2.1, sendo que os eixos  $y$  e  $z$  são principais de inércia e o eixo  $x$  longitudinal passando pelos centros de gravidade da secção. Ainda nesta figura, está representada uma linha que divide a espessura ao meio, chamada linha de esqueleto, sendo percorrida por uma ordenada  $s$  que será considerada positiva quando o raio vetor, que une o centro de torção  $D$  com o ponto genérico da linha de esqueleto, gira no sentido horário para um observador olhando no sentido positivo do eixo  $x$ . A origem desta ordenada deve ser convenientemente escolhida.

Para a teoria a se desenvolver neste trabalho, serão feitas as seguintes hipóteses de carácter genérico: as dimensões da secção não variam ao longo do comprimento da barra, a secção transversal é indeformável em seu plano e a deformação por distorção na linha de esqueleto é nula.

#### 2.2. DESLOCAMENTOS

Suponha-se que a barra sofra uma deformação

qualquer. Um ponto arbitrário da linha de esqueleto desta barra ocupará uma nova posição através das componentes do deslocamento deste ponto.

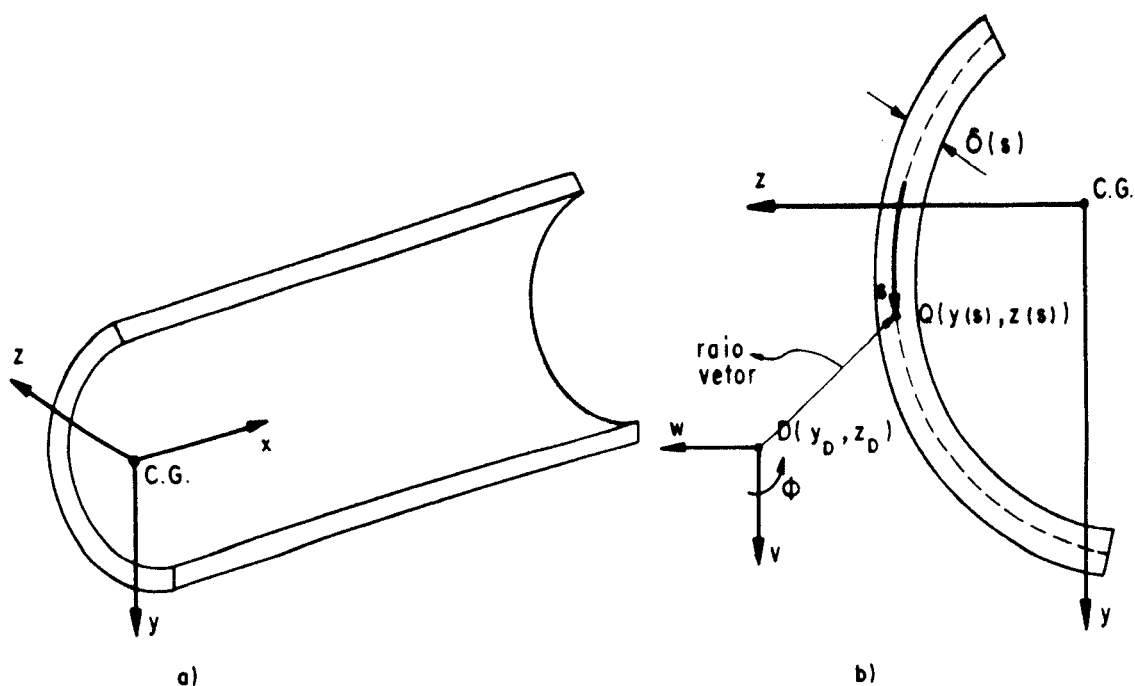


FIGURA 2.1

Inicialmente, determinam-se os deslocamentos no plano da secção transversal. Tendo em vista a hipótese de indeformabilidade no plano da secção transversal, esta secção pode ser considerada como rígida quanto aos seus deslocamentos. Portanto, qualquer ponto da linha de esqueleto ficará caracterizado pelas funções  $v(x)$  e  $w(x)$  do centro de torção nas direções y e z, respectivamente, e do ângulo de rotação  $\phi(x)$  de toda a secção transversal em torno do centro de torção.

A figura 2.1.b mostra esses deslocamentos com o seu sentido positivo. Os deslocamentos  $v(x)$  e  $w(x)$  positivos no sentido positivo de y e z, respectivamente e o giro  $\phi(x)$  positivo quando o giro é anti-horário para um observador olhando no sentido positivo do eixo x.

Sejam  $y_D$  e  $z_D$  as coordenadas do centro de torção e

$y(s)$  e  $z(s)$  as coordenadas de um ponto arbitrário  $Q$  na linha de esqueleto, respectivamente, nas direções  $y$  e  $z$ . Considerando-se pequenos deslocamentos as expressões de deslocamento, deste ponto  $Q$ , são :

$$\left. \begin{aligned} v_s(x,s) &= v(x) + [z(s) - z_D] \phi(x) \\ w_s(x,s) &= w(x) - [y(s) - y_D] \phi(x) \end{aligned} \right\} (2.1)$$

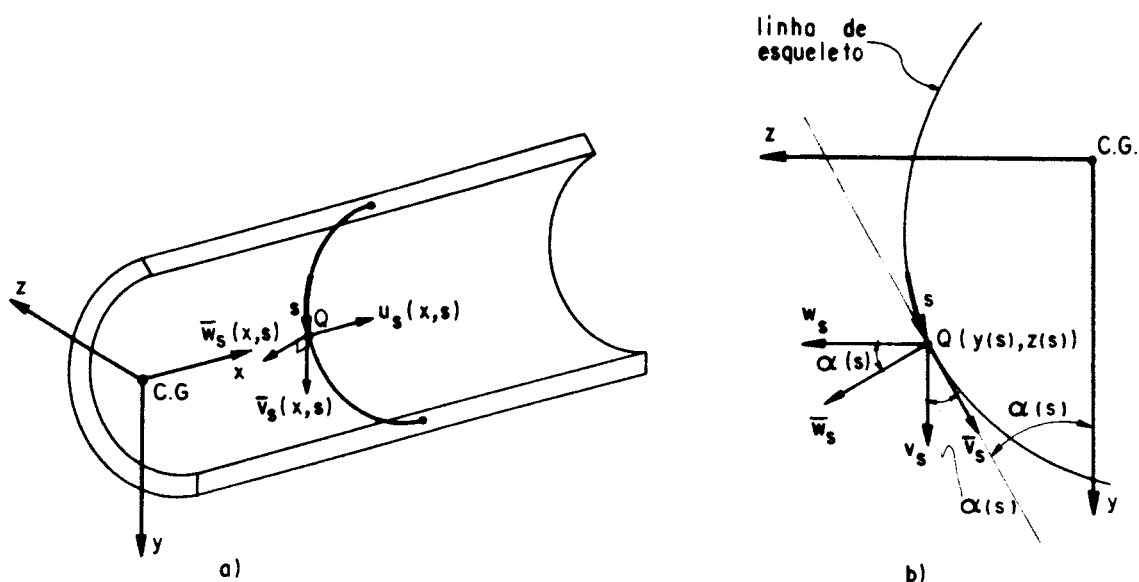


FIGURA 2.2

Será considerado agora o deslocamento do ponto arbitrário  $Q$  na direção de  $x$ . Sejam então, os deslocamentos  $u_s(x,s)$ ,  $\bar{v}_s(x,s)$  e  $\bar{w}_s(x,s)$  nas direções  $x$ , tangente à linha de esqueleto no ponto  $Q$  e normal à linha de esqueleto neste ponto, respectivamente, conforme a figura 2.2. Chamando-se  $\alpha(s)$  o ângulo entre a tangente à linha de esqueleto no ponto  $Q$  e o eixo  $y$ , pode-se obter as seguintes expressões para os deslocamentos tangencial e normal, respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_s(x,s) &= v_s(x,s)\cos\alpha(s) - w_s(x,s)\sin\alpha(s) \\ \bar{w}_s(x,s) &= v_s(x,s)\sin\alpha(s) + w_s(x,s)\cos\alpha(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

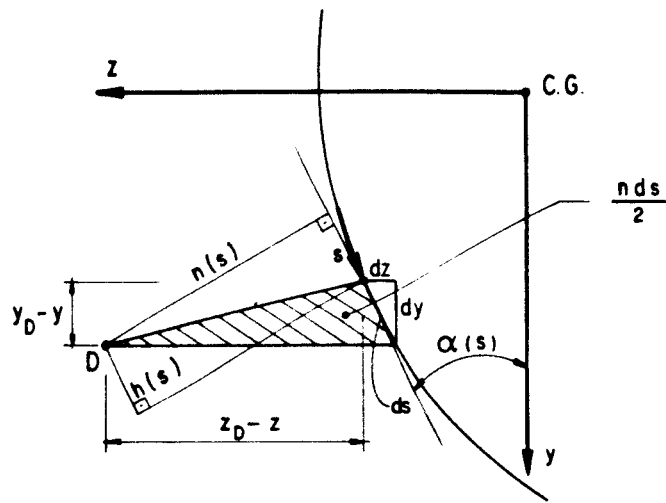


FIGURA 2.3

Substituindo-se os valores das expressões (2.1) nas expressões (2.2), vem:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_s(x,s) &= v(x)\cos\alpha(s) - w(s)\sin\alpha(s) + \\ &+ \left[ \left[ z(s) - z_D \right] \cos\alpha(s) + \left[ y(s) - y_D \right] \sin\alpha(s) \right] \phi(x) \\ \bar{w}_s(x,s) &= v(x)\sin\alpha(s) + w(x)\cos\alpha(s) + \\ &+ \left[ \left[ z(s) - z_D \right] \sin\alpha(s) - \left[ y(s) - y_D \right] \cos\alpha(s) \right] \phi(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Da figura 2.3 pode-se afirmar que :

$$\left. \begin{aligned} n(s) &= - \left[ \left[ z(s) - z_D \right] \cos \alpha(s) + \left[ y(s) - y_D \right] \sin \alpha(s) \right] \\ h(s) &= - \left[ \left[ z(s) - z_D \right] \sin \alpha(s) - \left[ y(s) - y_D \right] \cos \alpha(s) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

onde  $n(s)$  e  $h(s)$  são as distâncias do centro de torção à tangente à linha de esqueleto no ponto  $Q$  e do centro de torção à normal à linha de esqueleto no ponto  $Q$ , respectivamente. Das expressões (2.3) e (2.4), tem-se :

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_s(x,s) &= v(x) \cos \alpha(s) - w(x) \sin \alpha(s) - \phi(x) n(s) \\ \bar{w}_s(x,s) &= v(x) \sin \alpha(s) + w(x) \cos \alpha(s) - \phi(x) h(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Considere-se agora um elemento diferencial  $dsdx$  situado na superfície média da barra. Sabe-se da teoria da elasticidade que a distorção  $\gamma$  neste elemento é :

$$\gamma = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial x} \quad (2.6)$$

Como, por hipótese, a distorção é nula na linha de esqueleto tem-se então:

$$\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

ou



$$u_s(x, s) = u(x) - \int_{a_1}^a \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial x} ds \quad (2.8)$$

onde  $u(x)$  é uma função somente de  $x$  que representa o deslocamento longitudinal do ponto  $Q_1$ , origem da ordenada  $s$ .

Derivando-se a primeira das expressões (2.5) em relação a  $x$  e multiplicando-se os dois membros por  $ds$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial x} ds &= v'(x) \cos \alpha(s) ds - w'(x) \operatorname{sen} \alpha(s) ds - \\ &- \phi'(x) n(s) ds \end{aligned} \quad (2.9)$$

na qual o apóstrofo representa derivada em relação à variável  $x$ .

Ainda, na figura 2.3, pode -se observar que :

$$\left. \begin{aligned} ds \cdot \cos \alpha(s) &= dy \\ ds \cdot \operatorname{sen} \alpha(s) &= -dz \\ ds \cdot n(s) &= d\omega \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

onde  $ds$  representa o diferencial do arco da linha de esqueleto e os diferenciais  $dy$  e  $dz$  representam as projeções do elemento  $ds$  nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente, e  $d\omega$  duas vezes a área do setor elementar tendo como polo o centro de torção e compreendendo o elemento  $ds$  e altura  $n(s)$ . A função  $\omega$  será chamada de "área setorial" e o seu diferencial  $d\omega$  é igual a duas vezes a área do triângulo elementar de base  $ds$  e altura  $n(s)$ .

Levando-se as expressões (2.10) na expressão (2.8), vem :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} ds = v'(x)dy + w'(x)dz - \phi'(x)d\omega \quad (2.11)$$

A substituição da expressão (2.11) na expressão (2.8), e a integração desta, fornece :

$$u_s(x,s) = u(x) - v'(x)y(s) - w'(x)z(s) + \phi'(x)\omega(s) \quad (2.12)$$

Os três primeiros termos desta expressão exprimem a lei de *Bernoulli-Navier*, isto é, secção plana antes da deformação permanece plana depois da deformação. O último termo, desta expressão, que resulta da torção da barra não segue a lei de *Bernoulli-Navier* e é chamado de empenamento.

As expressões (2.12) e (2.1) são as componentes de deslocamento, de um ponto arbitrário Q, nas direções x, y e z, respectivamente.

Como as coordenadas y(s) e z(s), a coordenada  $\omega(s)$  será também escolhida de uma forma conveniente. Pelo fato das coordenadas y(s) e z(s) terem como origem o centro de gravidade (c.g.), pode-se dizer que :

$$\int_S 1 \cdot y(s) dS = \int_S 1 \cdot z(s) dS = 0 \quad (2.13)$$

e por serem eixos principais de inércia,

$$\int_S y(s)z(s)dS = 0 \quad (2.14)$$

Para a coordenada  $\omega(s)$ , inicialmente, deve-se escolher a origem da ordenada  $s$  de tal forma que :

$$\int_S 1.\omega(s)dS = 0 \quad (2.15)$$

e como o centro de torção foi escolhido como polo da área setorial, demonstra-se que :

$$\int_S y(s)\omega(s)dS = \int_S z(s)\omega(s)dS = 0 \quad (2.16)$$

As expressões de (2.13) a (2.16) formam as condições de ortogonalidade entre as funções 1,  $y(s)$ ,  $z(s)$  e  $\omega(s)$ .

### 2.3. TENSÕES

Quando uma barra passa para um estado de deformação, formam-se nela forças elásticas internas. Estas forças são resultantes da distribuição de tensões normais  $\sigma$  e tangenciais  $\tau$ . Supõe-se, aqui, que existem tensões normais somente em cortes transversais e que estas se distribuem uniformemente ao longo da espessura da barra. Para as tensões tangenciais supõe-se que uma parte se distribui uniformemente ao longo da espessura e a outra parte com uma variação linear. A figura 2.4. mostra estas distribuições.

Sendo  $\sigma_x$  a tensão normal e  $\varepsilon_x$  a deformação

específica na direção  $x$ , pela lei de *Hooke*, tem-se :

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \quad (2.17.a)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material da barra.

A hipótese da existência de tensões normais, somente, em cortes transversais assumida neste parágrafo contradiz a hipótese de indeformabilidade da seção assumida anteriormente. Partindo-se desta segunda hipótese, demonstra-se que :

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} \epsilon_x \quad (2.17.b)$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de *Poisson*. Desprezando-se  $\mu^2$  diante da unidade observa-se que as expressões (2.17.a) e (2.17.b) tornam-se iguais.

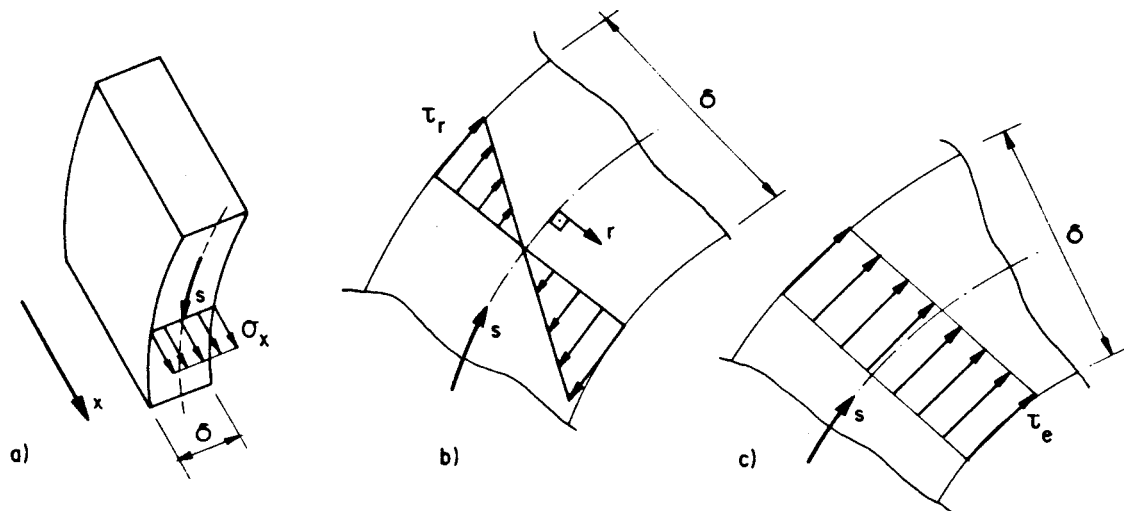


FIGURA 2.4

Da teoria da elasticidade pode-se escrever que :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.18)$$

Aplicando-se a expressão (2.12) em (2.18) e esta em (2.17), vem :

$$\sigma_x(x,s) = E. \left[ u'(x) - v''(x)y(s) - w''(x)z(s) + \right. \\ \left. + \phi''(x)\omega(s) \right] \quad (2.19)$$

A expressão (2.19) relaciona a tensão normal com as quatro grandezas cinemáticas  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $w(x)$  e  $\phi(x)$ . Pode-se relacionar esta mesma tensão com os esforços internos como resultantes da distribuição desta tensão em toda secção. Assim, da figura 2.5.a, pode-se afirmar que :

$$\left. \begin{aligned} N(x) &= \int_S \sigma_x(x,s) dS \\ M_z(x) &= \int_S \sigma_x(x,s) y(s) dS \\ M_y(x) &= \int_S \sigma_x(x,s) z(s) dS \\ B(x) &= \int_S \sigma_x(x,s) \omega(s) dS \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

As três primeiras fórmulas definem os esforços internos :força normal, momento fletor em torno do eixo  $z$  e momento fletor em torno do eixo  $y$ , respectivamente. A quarta fórmula define um esforço interno auto-equilibrado chamado bimomento.

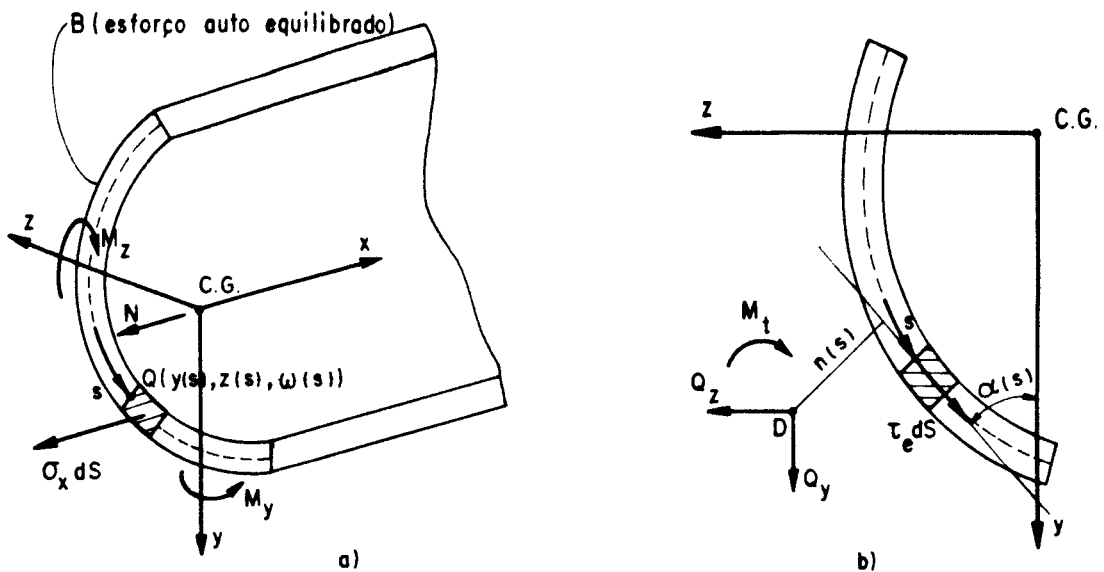


FIGURA 2.5

Levando-se a expressão (2.19) nas fórmulas (2.20) e, tendo em vista as condições de ortogonalidade (2.13) a (2.16), vem :

$$\left. \begin{aligned}
 u'(x) &= \frac{N(x)}{ES} \\
 v''(x) &= -\frac{M_z(x)}{EJ_z} \\
 w''(x) &= -\frac{M_y(x)}{EJ_y} \\
 \phi''(x) &= \frac{B(x)}{EJ_\omega}
 \end{aligned} \right\} (2.21)$$

onde :

$$S = \int_S dS \quad (\text{área da secção transversal})$$

$$J_z = \int_S y^2(s) dS \quad (\text{momento de inércia em relação ao eixo } z)$$

$$J_y = \int_S z^2(s) dS \quad (\text{momento de inércia em relação ao eixo } y)$$

$$J_\omega = \int_S \omega^2(s) dS \quad (\text{momento de inércia setorial})$$

Eliminando-se as deformações na expressão (2.19) pelas expressões (2.21), tem-se que :

$$\sigma_x(x,s) = \frac{N(x)}{S} + \frac{M_y(x)}{J_y} z(s) + \frac{M_z(x)}{J_z} y(s) + \frac{B(x)}{J_\omega} \omega(s) \quad (2.22)$$

O último termo desta fórmula determina as tensões normais referentes à deformação por torção, chamadas de tensões normais de flexo - torção.

Para a tensão tangencial com distribuição uniforme considera-se o elemento diferencial representado na figura 2.6. O equilíbrio deste elemento na direção  $x$  fornece :

$$\frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} = \frac{\partial(\sigma_x \delta)}{\partial x} \quad (2.23)$$

ou

$$\tau_{\bullet}(x, s) = \frac{1}{\delta} \left[ T(x) + \int_{s_1}^s \frac{\partial \sigma_x \delta}{\partial x} ds \right] \quad (2.24)$$

onde  $T(x)$  é uma função somente de  $x$  e que pode ter o seu valor encontrado conhecendo-se  $\tau_{\bullet}(x, s)$  na posição  $s = s_1$ . No caso de ausência de tensões cisalhantes na extremidade  $s_1$ ,  $T(x)$  é nula. Assim, a equação (2.24) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\tau_{\bullet}(x, s) = \frac{1}{\delta} \int_{s_1}^s \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} ds \quad (2.25)$$

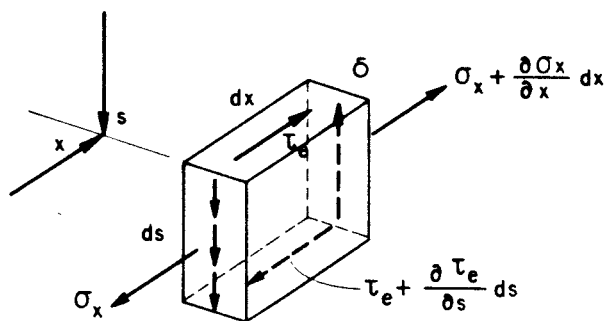


FIGURA 2.6



Derivando-se a expressão (2.18), em relação a  $x$ , e multiplicando-se seus dois membros por  $dS$ , vem :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} dS = E \left[ u'' dS - v''' y dS - w''' z dS + \phi''' \omega dS \right] \quad (2.26)$$

Levando-se a expressão (2.26) na expressão (2.25) e integrando-a, vem:

$$\tau_x(x, s) = \frac{E}{\delta(s)} \left[ u''(x)S(s) - v'''(x)S_z(s) - w'''(x)S_y(s) + \phi'''(x)S_\omega(s) \right] \quad (2.27)$$

onde  $S(s)$ ,  $S_y(s)$ ,  $S_z(s)$  são, respectivamente, a área e os momentos estáticos em relação aos eixos  $y$  e  $z$  da parte da secção compreendida entre as ordenadas  $s_1$  e  $s$ . São calculadas da seguinte forma :

$$S(s) = \int_{s_1}^s dS, \quad S_y(s) = \int_{s_1}^s z(s) dS, \quad S_z(s) = \int_{s_1}^s y(s) dS \quad (2.28)$$

$S_\omega(s)$  é uma característica geométrica chamada momento estático setorial e se calcula da seguinte maneira :

$$S_\omega(s) = \int_{s_1}^s \omega(s) dS \quad (2.29)$$

Aplicando-se a expressão (2.27) para  $s$  correspondentes às bordas longitudinais da barra, demonstra-se que  $u''(x)$  é nula, por não se ter tensões tangenciais aplicadas nestas bordas. A expressão (2.27) se escreve, então :

$$\tau_{\bullet}(x,s) = \frac{E}{\delta(s)} \left[ -v'''(x)S_z(s) - w'''(x)S_y(s) + \phi'''(x)S_{\omega}(s) \right] \quad (2.30)$$

As duas primeiras componentes desta expressão são tensões tangenciais ligadas as forças cortantes em relação aos dois eixos. O último termo é chamado de tensão tangencial de flexo - torção ( $\tau_{ft}$ ).

Analogamente às tensões normais, pode-se relacionar as tensões tangenciais com os esforços internos. Assim da figura 2.5.b. e utilizando as expressões (2.10), definem-se os esforços internos da seguinte forma:

$$\left. \begin{aligned} Q_y(x) &= \int_S [\tau_{\bullet}(x,s)\delta(s)] dy ; & Q_z(x) &= \int_S [\tau_{\bullet}(x,s)\delta(s)] dz \\ M_{ft}(x) &= \int_S [\tau_{\bullet}(x,s)\delta(s)] nds = \int_S [\tau_{\bullet}(x,s)\delta(s)] d\omega \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

onde  $Q_y(x)$  e  $Q_z(x)$  são as forças cortantes que atuam na secção transversal nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente, e  $M_{ft}(x)$  é o momento de flexo - torção em relação ao centro de torção.

Substituindo-se o valor de  $\tau_{\bullet}(x,s)$  dado pela

expressão (2.30) nas expressões (2.31) , efetuando-se a integração por partes e usando as condições de ortogonalidade, obtêm-se:

$$\left. \begin{aligned} v'''(x) &= \frac{Q_y(x)}{EJ_z} \\ w'''(x) &= \frac{Q_z(x)}{EJ_y} \\ \phi'''(x) &= - \frac{M_{ft}(x)}{EJ_\omega} \end{aligned} \right\} (2.32)$$

Eliminando-se as deformações na expressão (2.30) pelas expressões (2.32), tem-se :

$$\tau_\theta(x,s) = - \frac{1}{\delta(s)} \left[ \frac{Q_y(x)}{J_z} S_z(s) + \frac{Q_z(x)}{J_y} S_y(s) + \frac{M_{ft}(x)}{J_\omega} S_\omega(s) \right] \quad (2.33)$$

A tensão tangencial com distribuição linear  $\tau_r$  corresponde ao momento de torção livre  $M_t$ . A relação entre  $\tau_r$  e  $M_t$  pode ser obtida da Resistência dos Materiais como :

$$\tau_r(x,r,s) = \frac{2M_t}{J_t} r(s) \quad (2.34)$$

onde a ordenada  $r(s)$  está indicada na figura 2.4 e  $J_t$  é o momento de inércia à torção e para secção aberta de parede fina, tem-se que :

$$J_t = \frac{1}{3} \int_s \delta^3(s) ds \quad (2.35)$$

$$M_t(x) = GJ_t \phi'(x) \quad (2.36)$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal do material da barra.

#### 2.4. A EQUAÇÃO DO BIMOMENTO

Das tensões tangenciais que se formam na parede das barras de secção delgada duas delas correspondem ao momento torçor. Uma delas é  $\tau_r$  correspondente ao momento de torção livre  $M_t$ , a outra é  $\tau_{ft}$  que tem o momento de flexo-torção  $M_{ft}$  como resultante. Assim, o momento total resultante  $M_t$  é escrito da seguinte forma :

$$M_t(x) = M_t(x) + M_{ft}(x) \quad (2.37)$$

Substituindo-se  $M_t$  da expressão (2.36) e  $M_{ft}$  da expressão (2.32) na expressão (2.37), vem:

$$M_t(x) = GJ_t \phi'(x) - EJ_\omega \phi'''(x) \quad (2.38)$$

Derivando-se esta expressão, em relação a  $x$ , tem-se :

$$EJ_{\omega} \phi^{iv}(x) - GJ_t \phi''(x) = -M'_t(x) \quad (2.39)$$

Considere-se a última das expressões (2.21)

$$\phi''(x) = \frac{B(x)}{EJ_{\omega}} \quad (2.40)$$

Derivando-se duas vezes, em relação a  $x$ , esta expressão fornece :

$$\phi^{iv}(x) = \frac{B''(x)}{EJ_{\omega}} \quad (2.41)$$

Levando-se  $\phi''(x)$  da expressão (2.40) e  $\phi^{iv}(x)$  da expressão (2.41) na expressão (2.39), tem-se que:

$$r^2 B''(x) - B(x) = -r^2 M'_t(x) \quad (2.42)$$

onde  $r$  é chamado de segmento característico e é definido como:

$$r = \sqrt{\frac{EJ_{\omega}}{GJ_t}} \quad (2.43)$$

No caso de não se ter carga torçora distribuída  $M'_t(x)$  é nula. Assim, a expressão (2.42) fica:

$$r^2 B''(x) - B(x) = 0 \quad (2.44)$$

cuja solução geral é :

$$B(x) = A_1 \sinh \frac{x}{r} + A_2 \cosh \frac{x}{r} \quad (2.45)$$

com as constantes  $A_1$  e  $A_2$  dependendo das condições de contorno do problema.

## CAPÍTULO 3

### EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

#### 3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, determinam-se pelo método da energia, as equações diferenciais de movimento de uma barra submetida a forças axiais estáticas aplicadas de uma maneira tal que o problema se mantém conservativo. A formulação parte do cálculo da energia de deformação, cinética e o potencial das forças externas e, em seguida, aplicam-se as técnicas do cálculo variacional.

As hipóteses consideradas, aqui, com relação à geometria e à distribuição de tensões, são as mesmas do capítulo 2. Portanto, continuam valendo as expressões deduzidas naquele capítulo incluindo, somente, a variável de tempo  $t$  nas funções envolvidas.

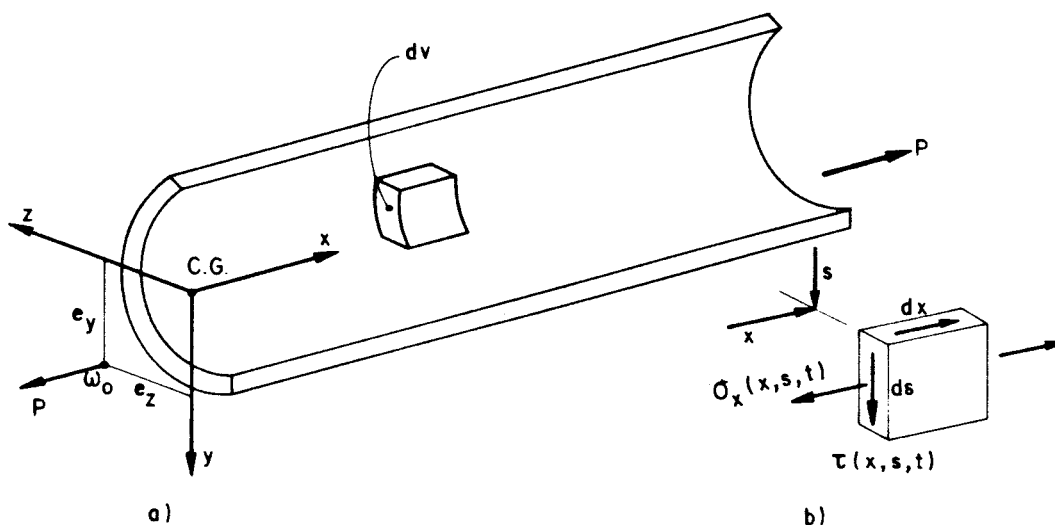


FIGURA 3.1

Considere-se então uma barra de secção delgada submetida a forças axiais estáticas aplicadas em pontos arbitrários da secção transversal, com coordenadas  $e_y$ ,  $e_z$  nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente, sendo  $\omega_0$  o valor da coordenada setorial generalizada deste mesmo ponto, conforme a figura 3.1. Suponha-se que a força  $P$  seja a resultante das forças longitudinais aplicadas nas secções extremas da barra. Nestas condições, as funções  $N(x)$ ,  $M_y(x)$  e  $M_z(x)$  são constantes e iguais a  $P$ ,  $Pe_z$  e  $Pe_y$ , respectivamente. A função  $B(x)$  é variável com  $x$ , sendo que nas secções extremas  $B(x)$  tem que ser calculado através dos bimomentos de cada componente. No caso de uma única carga, como na figura 3.1, o bimomento é igual a  $P \cdot \omega_0$ . Assim, da expressão (2.22), a tensão normal que se forma em um ponto qualquer da barra é :

$$\sigma_x(x,s) = \frac{P}{S} + \frac{Pe_z}{J_y} z + \frac{Pe_y}{J_z} y + \frac{B(x)}{J_\omega} \omega \quad (3.1)$$

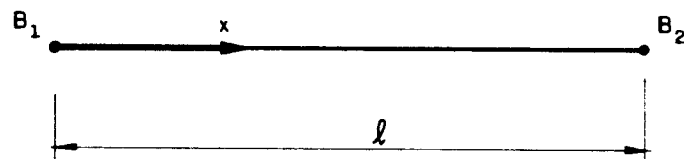


FIGURA 3.2

A expressão do bimomento  $B(x)$  será determinada pela expressão (2.45). Assim, quando se conhecem os valores do bimomento nas secções extremas de um trecho da barra, e adotando-se como origem do sistema de coordenadas uma das



secções extremas, conforme a figura 3.2., pode-se afirmar que:

$$B(0) = B_1 \quad \text{e} \quad B(l) = B_2 \quad (3.2)$$

Da aplicação, destas condições, na expressão (2.45) determinam-se as constantes de integração  $A_1$  e  $A_2$ . Assim,

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{B_2 - B_1 \cosh \frac{l}{r}}{\sinh \frac{l}{r}} \\ A_2 &= B_1 \end{aligned} \right\} (3.3)$$

Levando-se os valores das constantes  $A_1$  e  $A_2$  dados pelas expressões (3.3) na expressão (2.45), tem-se a expressão do bimomento :

$$B(x) = \left[ \frac{B_2 - B_1 \cosh \frac{l}{r}}{\sinh \frac{l}{r}} \sinh \frac{x}{r} + B_1 \cosh \frac{x}{r} \right] (3.4)$$

ou

$$B(x) = \bar{B}_1 \sinh \frac{x}{r} + B_1 \cosh \frac{x}{r} \quad (3.5)$$

onde

$$\bar{B}_1 = \frac{B_2 - B_1 \cosh \frac{l}{r}}{\sinh \frac{l}{r}} \quad (3.6)$$

### 3.2. ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Seja então a barra representada na figura 3.1. Durante as vibrações livres desta barra um ponto arbitrário da linha de esqueleto se encontra em movimento. O seu deslocamento, agora, não dependerá somente de sua posição mas também do tempo. Assim, as componentes de deslocamento, deste ponto, são definidas pelas expressões (2.1) e (2.12):

$$\left. \begin{aligned} v_s(x, s, t) &= v(x, t) + [z(s) - z_D] \phi(x, t) \\ w_s(x, s, t) &= w(x, t) - [y(s) - y_D] \phi(x, t) \\ u_s(x, s, t) &= u(x, t) - v'(x, t)y(s) - w'(x, t)z(s) + \phi'(x, t)\omega(s) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Estes deslocamentos são os responsáveis pelo aparecimento das tensões  $\sigma_x(x, s, t)$  e  $\tau(x, s, t)$ . Sendo  $\varepsilon_x(x, s, t)$  e  $\gamma(x, s, t)$  as deformações correspondentes a estas tensões e  $dV$  o elemento diferencial de volume, a energia de deformação da barra pode ser escrita como segue :

$$u_i = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \varepsilon_x + \tau \gamma] dV \quad (3.8)$$

Aplicando-se a lei de Hooke na expressão acima,

obtem-se:

$$u_i = \frac{E}{2} \int_0^l \int_S \epsilon_x^2 dS dx + \frac{1}{2G} \int_0^l \int_S \tau^2 dS dx \quad (3.8)$$

Para o primeiro termo desta expressão o valor de  $\epsilon_x$  se obtém a partir da última expressão (3.7). Assim :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u' - v''y - w''z + \phi''\omega \quad (3.10)$$

Para o segundo termo será considerada, somente, a contribuição do momento de torção livre, representada pela expressão (2.34). A contribuição das forças cortantes e do momento de flexo-torção, representada pela expressão (2.33), será desprezada. Assim :

$$\tau = \frac{2M_t}{J_t} r \quad (3.11)$$

Levando-se as expressões (3.10) e (3.11) na expressão (3.8), pode-se escrever :

$$u_i = \frac{E}{2} \int_0^l \int_S \left[ u' - v''y - w''z + \phi''\omega \right]^2 dS dx + \frac{1}{2G} \int_0^l \int_S \int_{-t/2}^{t/2} \frac{4M_t^2}{J_t^2} r^2 dr dS dx \quad (3.12)$$

Efetuada-se as operações indicadas, integrando-se em  $S$  o primeiro termo desta expressão e em  $r$  e  $s$  o segundo termo da mesma, com as condições de ortogonalidade, tem-se :

$$u_i = \frac{E}{2} \int_0^l \left[ S u'^2 + J_z v''^2 + J_y w''^2 + J_\omega \phi''^2 \right] dx + \frac{1}{2G} \int_0^l \frac{M_i^2}{J_t} dx \quad (3.13)$$

Por se tratar de um movimento desacoplado dos demais e, em geral, com frequências naturais bem superiores, o movimento axial será excluído da análise. Abandonando-se, então, o termo  $S u'^2$  da expressão (3.13) e substituindo-se  $M_i$  pela relação (2.36), a expressão da energia de deformação, finalmente, é obtida :

$$u_i = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ E J_z v''^2 + E J_y w''^2 + E J_\omega \phi''^2 + G J_t \phi'^2 \right] dx \quad (3.14)$$

### 3.3. ENERGIA CINÉTICA

Considere-se agora a energia cinética da barra, representada na figura 3.1, quando ela vibra com velocidades  $\dot{v}(x,t)$ ,  $\dot{w}(x,t)$  e  $\dot{\phi}(x,t)$ . O ponto representa a derivada em relação à variável  $t$ .

Derivando-se  $v_s$ ,  $w_s$  e  $\phi_s$  dados pela expressão (3.7), em relação ao tempo, determinam-se as velocidades de um ponto arbitrário da linha de esqueleto. Assim:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_* &= \dot{v} + (z - z_D)\dot{\phi} \\ \dot{w}_* &= \dot{w} - (y - y_D)\dot{\phi} \\ \dot{u}_* &= \dot{u} - \dot{v}'y - \dot{w}'z + \dot{\phi}'\omega \end{aligned} \right\} (3.15)$$

Sendo  $\rho$  a massa por unidade de volume do material da barra, a energia cinética desta barra pode ser escrita como segue:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_S \rho (\dot{u}_*^2 + \dot{v}_*^2 + \dot{w}_*^2) dS dx \quad (3.16)$$

Substituindo-se as expressões (3.15) na expressão (3.16), vem :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_S \rho \left\{ \left[ \dot{u} - \dot{v}'y - \dot{w}'z + \dot{\phi}'\omega \right]^2 + \left[ \dot{v} + (z - z_D)\dot{\phi} \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ \dot{w} - (y - y_D)\dot{\phi} \right]^2 \right\} dS dx \quad (3.17) \end{aligned}$$

Efetuando-se as operações indicadas, integrando-se em  $S$  e usando as condições de ortogonalidade, tem-se :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left[ S (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + i_D^2 \dot{\phi}^2) + J_z \dot{v}'^2 + J_y \dot{w}'^2 + \right.$$

$$+ J_{\omega} \dot{\phi}'^2 + 2S \left[ y_D \dot{w} \dot{\phi} - z_D \dot{v} \dot{\phi} \right] dx \quad (3.18)$$

onde  $i_D$  é o raio de giração polar em relação a um eixo passando pelo centro de torção e se calcula da seguinte forma:

$$i_D^2 = y_D^2 + z_D^2 + \frac{J_y + J_z}{S} \quad (3.19)$$

Na expressão (3.18) os termos  $J_z \dot{v}'^2$  e  $J_y \dot{w}'^2$  provém da inércia de rotação em flexão e o termo  $J_{\omega} \dot{\phi}'^2$  provém da inércia de empenamento em torção.

Abandonando-se o primeiro termo da expressão (3.18), analogamente ao que foi feito para a energia de deformação se obtém, finalmente, a expressão da energia cinética :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left[ S \left( \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + i_D^2 \dot{\phi}^2 \right) + J_z \dot{v}'^2 + J_y \dot{w}'^2 + J_{\omega} \dot{\phi}'^2 + \right. \\ \left. + 2S \left[ y_D \dot{w} \dot{\phi} - z_D \dot{v} \dot{\phi} \right] \right] dx \quad (3.20) \end{aligned}$$

### 3.4. POTENCIAL DAS FORÇAS EXTERNAS

Considere-se novamente a barra da figura 3.1. Seja o elemento diferencial  $dV$ , desta barra, conforme a

figura 3.1.b. Considerando-se agora somente os deslocamentos de segunda ordem na direção longitudinal, pode-se demonstrar que o elemento sofrerá um encurtamento de:

$$\Delta = \frac{1}{2} \left( v'_{\bullet}{}^2 + w'_{\bullet}{}^2 \right) dx \quad (3.21)$$

Portanto, o trabalho da força normal que provoca tensões normais distribuídas segundo a expressão (3.1), estendido a toda a barra, tem a seguinte forma :

$$\mathcal{W} = - \int_0^l \int_S \sigma(x, s) dS \Delta \quad (3.22)$$

O sinal negativo nesta expressão indica que  $\sigma(x, s)$  de tração produz trabalho negativo com o encurtamento  $\Delta$ . A contribuição da tensão tangencial de flexo-torção com a respectiva deformação será desprezada.

Levando-se as expressões (3.1) e (3.21) na expressão (3.22) e fazendo a energia potencial  $u_{\bullet} = - \mathcal{W}$ , pode-se escrever :

$$u_{\bullet} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_S \left[ \frac{N}{S} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{B}{J_{\omega}} \omega \right] \left( v_{\bullet}'{}^2 + w_{\bullet}'{}^2 \right) dS dx \quad (3.23)$$

Derivando-se as funções  $v_{\bullet}$  e  $w_{\bullet}$  que constam da expressão (3.7) em relação à variável  $x$ , e as substituindo na expressão (3.23), tem-se:

$$u_{\bullet} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_S \left\{ \left[ \frac{N}{S} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{B}{J_{\omega}} \omega \right] \right. \\ \left. \left[ \left\{ v' + \left( z - z_D \right) \phi' \right\}^2 + \left\{ w' - \left( y - y_D \right) \phi' \right\}^2 \right] \right\} dS dx \quad (3.24)$$

Efetutando-se as operações indicadas, integrando-se em  $S$  e usando as condições de ortogonalidade, obtém-se, finalmente, a expressão do potencial das forças externas:

$$u_{\bullet} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ N \left( v'^2 + w'^2 + i_D^2 \phi'^2 - 2z_D v' \phi' + 2y_D w' \phi' \right) + \right. \\ \left. + 2M_y \left( k_z - z_D \right) \phi'^2 + 2M_z \left( k_y - y_D \right) \phi'^2 + 2M_y v' \phi' - \right. \\ \left. - 2M_z w' \phi' + \frac{B}{J_{\omega}} U_{\omega} \phi'^2 \right] dx \quad (3.25)$$

onde foram introduzidas as seguintes características geométricas da secção :



$$\left. \begin{aligned}
 k_y &= \frac{1}{2J_z} \int_S y(y^2 + z^2) dS \\
 k_z &= \frac{1}{2J_y} \int_S z(y^2 + z^2) dS \\
 U_\omega &= \int_S \omega(y^2 + z^2) dS
 \end{aligned} \right\} (3.26)$$

As duas primeiras características  $k_y$  e  $k_z$  são as coordenadas do centro do círculo de estabilidade nos eixos  $y$  e  $z$ , respectivamente. A última característica geométrica foi introduzida por *Vlassov* [ 1 ] e ela é nula para secção com pelo menos um eixo de simetria . Isto significa que, nesta condição, o bimomento não tem efeito nos deslocamentos de 2ª. ordem.

### 3.5. PRINCÍPIO DE HAMILTON

O princípio de *Hamilton* é um princípio variacional utilizado para problemas em dinâmica . Seja o funcional  $\mathcal{F}$ , que relaciona as energias de deformação  $U_i$ , cinética  $\mathcal{T}$  e o potencial das cargas externas  $U_\bullet$ , definido da seguinte forma :

$$\mathcal{F} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ U_i + U_\bullet - \mathcal{T} \right] dt \quad (3.27)$$

O princípio de *Hamilton* afirma [12] : entre dois instantes genéricos  $t_1$  e  $t_2$ , de todas as trajetórias admissíveis, satisfazendo a configuração real do sistema nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ , a trajetória real é aquela que torna

estacionário o funcional  $\mathcal{F}$ . Assim,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{U}_i + \mathcal{U}_\bullet - \mathcal{J}) dt = 0 \quad (3.28)$$

onde  $\mathcal{U}_i + \mathcal{U}_\bullet - \mathcal{J}$  é conservativo, nos problemas aqui tratados.

Fazendo-se  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_i + \mathcal{U}_\bullet$ , a expressão (3.28) pode ser escrita da seguinte maneira :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \mathcal{U} - \delta \mathcal{J}) dt = 0 \quad (3.29)$$

Seja, então, o funcional  $\mathcal{U}$  obtido pela soma das expressões (3.14) e (3.25). Para este funcional, calculam-se as variações:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U} = & \int_0^l \left\{ EJ_z v'' \delta v'' + EJ_y w'' \delta w'' + EJ_\omega \phi'' \delta \phi'' + \right. \\ & + \left[ Nv' + (M_y - Nz_D) \phi' \right] \delta v' + \left[ Nw' - (M_z - Ny_D) \phi' \right] \delta w' + \\ & + \left[ (M_y - Nz_D) v' - (M_z - Ny_D) w' + (GJ_t + Ni_D^2 + \right. \\ & \left. + 2M_y (k_z - z_D) + 2M_z (k_y - y_D) + \frac{B}{J_\omega} U_\omega \right] \phi' \left. \right\} dx \quad (3.30) \end{aligned}$$

Integrando-se por partes duas vezes a expressão (3.30) em relação a  $x$ , vem:

$$\begin{aligned}
\delta U = & \int_0^l \left\{ \left[ EJ_z v^{iv} - Nv'' - (M_y - Nz_D) \phi'' \right] \delta v + \left[ EJ_y w^{iv} - Mw'' + \right. \right. \\
& + \left. \left. (M_z - Ny_D) \phi'' \right] \delta w + \left[ EJ_\omega \phi^{iv} - (M_y - Nz_D) v'' + (M_z - \right. \right. \\
& - \left. \left. Ny_D) w'' - \left[ GJ_t + Ni_D^2 + 2M_y (k_z - z_D) + 2M_z (k_y - y_D) \right] \phi'' - \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{U_\omega}{J_\omega} (B\phi')' \right] \delta \phi \right\} dx + \left\{ EJ_z v'' \delta v' + EJ_y w'' \delta w' + EJ_\omega \phi'' \delta \phi' + \right. \\
& + \left. \left[ Nv' + (M_y - Nz_D) \phi' - EJ_z v''' \right] \delta v + \left[ Mw' - (M_z - Ny_D) \phi' - \right. \right. \\
& - \left. \left. EJ_y w''' \right] \delta w + \left\{ \left[ (M_y - Nz_D) v' - (M_z - Ny_D) w' + \left[ GJ_t + \right. \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. Ni_D^2 + 2M_y (k_z - z_D) + 2M_z (k_y - y_D) + B \frac{U_\omega}{J_\omega} \right] \phi' - \right. \right. \\
& \left. \left. - EJ_\omega \phi''' \right\} \delta \phi' \right\} \Big|_0^l \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Seja agora o funcional  $\mathcal{J}$ . As variações para este funcional são :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{T} = & \int_0^l \rho \left[ S \left( \dot{v}\delta v + \dot{w}\delta w + i_D^2 \dot{\phi}\delta\phi \right) + J_z \dot{v}'\delta v' + J_y \dot{w}'\delta w' + \right. \\
& \left. + J_\omega \dot{\phi}'\delta\phi' + S y_D \left( \dot{w}\delta\phi + \dot{\phi}\delta w \right) - S z_D \left( \dot{v}\delta\phi + \dot{\phi}\delta v \right) \right] dx
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Integrando-se esta expressão na variável  $t$ , entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  e invertendo a ordem da integração, vem:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{T} dt = & \int_0^l \rho \int_{t_1}^{t_2} \left[ S \left( \dot{v}\delta v + \dot{w}\delta w + i_D^2 \dot{\phi}\delta\phi \right) + J_z \dot{v}'\delta v' + J_y \dot{w}'\delta w' + \right. \\
& \left. + J_\omega \dot{\phi}'\delta\phi' + S y_D \left( \dot{w}\delta\phi + \dot{\phi}\delta w \right) - S z_D \left( \dot{v}\delta\phi + \dot{\phi}\delta v \right) \right] dt dx
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Integrando-se, agora, por partes em relação à variável  $t$ , a expressão (3.33) e notando que os deslocamentos  $v(x,t)$ ,  $w(x,t)$  e  $\phi(x,t)$  são prescritos em  $t = t_1$  e  $t = t_2$ , obtém-se :

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{T} dt = & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \rho \left[ S \left( \ddot{v} - z_D \ddot{\phi} \right) \delta v + S \left( \ddot{w} + y_D \ddot{\phi} \right) \delta w + \right. \\
& \left. + S \left( i_D^2 \ddot{\phi} + y_D \ddot{w} - z_D \ddot{v} \right) \delta\phi + J_z \ddot{v}'\delta v' + J_y \ddot{w}'\delta w' + \right. \\
& \left. + J_\omega \ddot{\phi}'\delta\phi' \right] dx dt
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Integrando-se por partes em relação à variável  $x$  os três últimos termos da expressão (3.34), vem:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{J} dt = & - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \rho \left[ S \left( \ddot{v} - z_D \ddot{\phi} \right) - J_z \ddot{v}'' \right] \delta v + \left[ S \left( \ddot{w} + y_D \ddot{\phi} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - J_y \ddot{w}'' \right] \delta w + \left[ S \left( i_D^2 \ddot{\phi} + y_D \ddot{w} - z_D \ddot{v} \right) - J_\omega \ddot{\phi}'' \right] \delta \phi \right\} dx + \\ & + \rho \left[ J_z \dot{v}' \delta v + J_y \dot{w}' \delta w + J_\omega \dot{\phi}' \delta \phi' \right] \Big|_0^l dt \quad (3.35) \end{aligned}$$

Levando-se as expressões (3.31) e (3.35) na expressão (3.29), vem :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \left[ EJ_z v^{iv} - Nv'' - \left( M_y - Nz_D \right) \phi'' + \rho S \left( \ddot{v} - z_D \ddot{\phi} \right) - J_z \ddot{v}'' \right] \delta v + \right. \\ \left. + \left[ EJ_y w^{iv} - Nw'' + \left( M_z - Ny_D \right) \phi'' + \rho S \left( \ddot{w} + y_D \ddot{\phi} \right) - J_y \ddot{w}'' \right] \delta w \right. \\ \left. + \left[ EJ_\omega \phi^{iv} - \left( M_y - Nz_D \right) v'' + \left( M_z - Ny_D \right) w'' - \left\{ GJ_t + Ni_D^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 2M_y \left[ k_z - z_D \right] + 2M_z \left[ k_y - y_D \right] \right\} \phi'' - \frac{U_\omega}{J_\omega} (B\phi')' + \right. \end{aligned}$$

$$+ \rho S \left\{ i_D^2 \ddot{\phi} + y_D \ddot{w} - z_D \ddot{v} \right\} - J_\omega \ddot{\phi}'' \delta \phi \Big\} dx dt = 0 \quad (3.36)$$

As condições de contorno associadas a esta equação são:

$$EJ_z v'' \delta v' \Big|_0^l = 0, \quad EJ_y w'' \delta w' \Big|_0^l = 0, \quad EJ_\omega \phi'' \delta \phi' \Big|_0^l = 0$$

$$\left[ Nv' + \left( M_y - Nz_D \right) \phi' + \rho J_z \ddot{v}' - EJ_z v'''' \right] \delta v \Big|_0^l = 0$$

$$\left[ Nw' - \left( M_z - Ny_D \right) \phi' + \rho J_y \ddot{w}' - EJ_y w'''' \right] \delta w \Big|_0^l = 0$$

$$\left\{ \left[ M_y - Nz_D \right] v' - \left[ M_z - Ny_D \right] w' + \left[ GJ_t + Ni_D^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2M_y \left[ k_z - z_D \right] + 2M_z \left[ k_y - y_D \right] + B \frac{U_\omega}{J_\omega} \right] \phi' - \right. \\ \left. + \rho J_\omega \ddot{\phi}' - EJ_\omega \phi'''' \right\} \delta \phi' \Big|_0^l = 0 \quad (3.37)$$

Como o intervalo de tempo  $t_1$  a  $t_2$  é arbitrário, o integrando da expressão (3.36), no tempo é nulo e como  $\delta v$ ,  $\delta w$  e  $\delta \phi$  são, também, arbitrários exceto nos contornos, obtém-se desta expressão :

$$EJ_z v^{iv} - \rho J_z \ddot{v}'' + \rho S \ddot{v} - N v'' - \rho S z_D \ddot{\phi} - \left( M_y - N z_D \right) \phi'' = 0$$

$$EJ_y w^{iv} - \rho J_y \ddot{w}'' + \rho S \ddot{w} - N w'' + \rho S y_D \ddot{\phi} + \left( M_z - N y_D \right) \phi'' = 0$$

$$EJ_\omega \phi^{iv} - \rho J_\omega \ddot{\phi}'' + \rho S i_D^2 \ddot{\phi} - GJ_t \phi'' - \left[ Ni_D^2 + 2M_y \left( k_x - z_D \right) + \right. \\ \left. + 2M_z \left( k_y - y_D \right) \right] \phi'' - \left( M_y - N z_D \right) v'' + \left( M_z - N y_D \right) w'' +$$

$$\rho S y_D \ddot{w} - \rho S z_D \ddot{v} - \frac{U_\omega}{J_\omega} (B\phi')' = 0 \quad (3.38)$$

As equações (3.38) formam um sistema de equações diferenciais parciais e homogêneas. Elas definem, com as condições iniciais e as condições de contorno (3.37), as vibrações livres em flexo-torção de uma barra delgada de seção aberta qualquer.

Estas equações diferem das equações obtidas por *Vlassov* [1] apenas pelo termo  $\frac{U_\omega}{J_\omega} (B\phi')'$  da última equação tornando-a como consequência, uma equação diferencial com coeficiente variável. Este fato faz com que esta equação não tenha solução explícita, mesmo para condições de contorno particulares, necessitando portanto, de se recorrer a métodos numéricos de integração.

Admitindo-se que as vibrações da barra são harmônicas, as soluções das equações dadas pela expressão (3.38) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\left. \begin{aligned}
 v(x, t) &= V(x) \text{sen } qt \\
 w(x, t) &= W(x) \text{sen } qt \\
 \phi(x, t) &= \Phi(x) \text{sen } qt
 \end{aligned} \right\} (3.38)$$

onde  $q$  é a frequência natural de vibração livre e  $V(x)$ ,  $W(x)$  e  $\Phi(x)$  são os modos de vibrações correspondentes, funções, somente, da variável  $x$ .

A substituição das expressões (3.39) nas expressões (3.38) resulta:

$$EJ_z V^{iv} + q^2 \rho J_z V'' - q^2 \rho S V - N V'' + q^2 \rho S z_D \Phi - \left[ M_y - N z_D \right] \Phi'' = 0$$

$$EJ_y W^{iv} + q^2 \rho J_y W'' - q^2 \rho S W - N W'' - q^2 \rho S y_D \Phi + \left[ M_z - N y_D \right] \Phi'' = 0$$

$$EJ_\omega \Phi^{iv} - GJ_t \Phi'' + q^2 \rho J_\omega \Phi'' - q^2 \rho S i_D^2 \Phi - \left[ N i_D^2 + 2M_y \left[ k_z - z_D \right] + \right.$$

$$\left. 2M_z \left[ k_y - y_D \right] \right] \Phi'' - \left[ M_y - N z_D \right] V'' + \left[ M_z - N y_D \right] W'' - q^2 \rho S y_D W +$$

$$+ q^2 \rho S z_D V - \frac{U_\omega}{J_\omega} (B\Phi')' = 0 \quad (3.40)$$

As equações diferenciais dadas pela expressão (3.40) são ordinárias e homogêneas e elas representam um



problema de auto valor em  $q^2$ , frequência natural, ou em  $N$ , parâmetro de carga. Observa-se que não existe somente um valor de  $q$  ou  $N$  que satisfaça estas equações. Através deste sistema de equações ordinárias e homogêneas com as condições de contorno derivadas da expressão (3.37), determinam-se os valores destes parâmetros e de suas correspondentes auto - funções .

## CAPÍTULO 4

### MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

#### 4.1. INTRODUÇÃO

Devido à impossibilidade de serem obtidas soluções analíticas para as equações (3.40), deve-se recorrer a métodos numéricos que fornecem soluções aproximadas, mas aceitáveis. O método dos elementos finitos tem-se mostrado como um método muito eficiente para a solução numérica em problemas de vibrações de barras. Ele se baseia na subdivisão da barra em um conjunto de subdomínios e ao invés de se integrar as equações para todo o domínio em uma só operação, integra-se para cada subdomínio. Os resultados desta integração são combinados convenientemente de modo a obter os resultados para o domínio total da barra.

Neste trabalho, a formulação do método dos elementos finitos será feita a partir do método de *Rayleigh - Ritz* que utiliza a formulação variacional. Este método permite resolver as equações do problema de forma aproximada, em um subespaço de dimensão finita, na qual as soluções propostas têm a seguinte forma :

$$f_i = \sum_{r=1}^N C_r(t) \theta_r(x) \quad (4.1)$$

onde  $\theta_r(x)$  são funções escolhidas linearmente independentes e  $C_r(t)$  são funções a serem determinadas.

A substituição das soluções, na forma da expressão (4.1), na expressão (3.27) faz o funcional

dependem das funções  $C_r(t)$ . Portanto deve-se impor a condição que torna estacionário o funcional :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \mathcal{U}_i(C_r) + \mathcal{U}_e(C_r) - \mathcal{J}(C_r) \right] dt \quad (4.2)$$

$$r = 1, 2, \dots, N$$

obtendo N equações para os parâmetros  $C_r$ .

#### 4.2. DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES DO ELEMENTO

Seja a barra esquematizada na figura 4.1, subdividida em segmentos chamados elementos finitos, referida a um sistema de eixos global  $xyz$ . Os pontos de ligação entre os elementos finitos são chamados de nós.

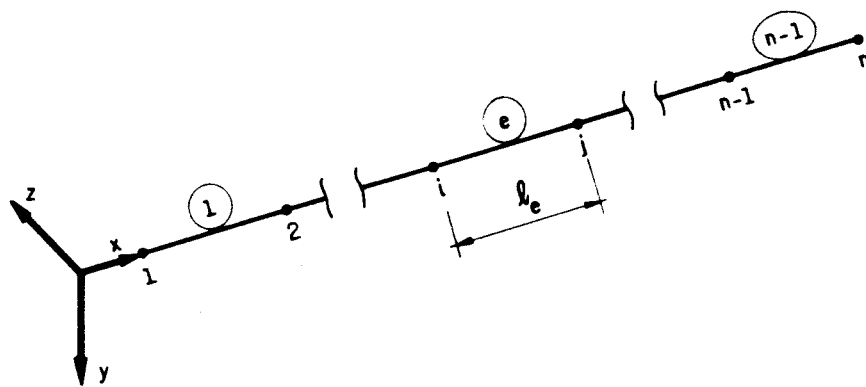


FIGURA 4.1

Seja agora o elemento finito  $e$  desta barra, representado na figura 4.2, com os parâmetros nodais deste elemento referidos a um sistema de eixo local  $x_e y_e z_e$ . Estes parâmetros nodais são os valores das funções deslocamentos e suas derivadas nestes nós. O número destes parâmetros é

escolhido para ser igual ao número de graus de liberdade do elemento. Como não estão sendo considerados movimentos na direção longitudinal, este elemento terá doze graus de

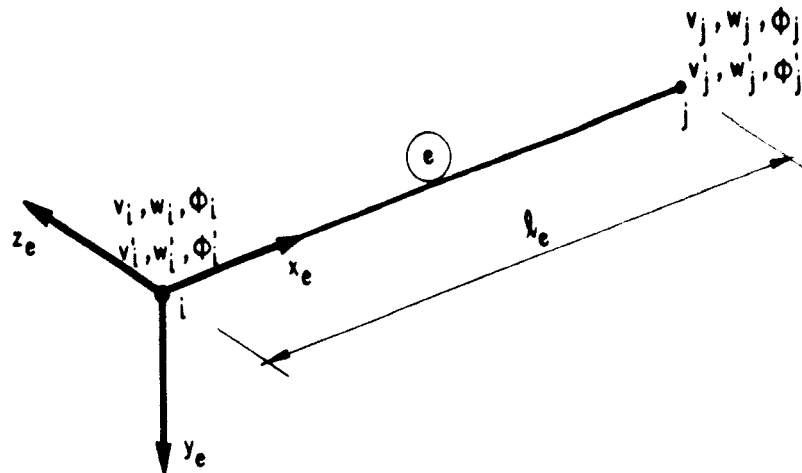


FIGURA 4.2

liberdade, quatro para cada função deslocamento. Assim, se os parâmetros nodais são escolhidos para serem os parâmetros desconhecidos  $C_r(t)$  e se as funções escolhidas são polinômios do terceiro grau, pode-se escrever as funções aproximadoras na seguinte forma matricial :

$$\left. \begin{aligned} v_\alpha(x, t) &= \mathbf{h}(x) \mathbf{V}(t) \\ w_\alpha(x, t) &= \mathbf{h}(x) \mathbf{W}(t) \\ \phi_\alpha(x, t) &= \mathbf{h}(x) \mathbf{\Phi}(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

onde o índice  $\alpha$  distingue as soluções aproximadas  $v_\alpha(x, t)$ ,  $w_\alpha(x, t)$  e  $\phi_\alpha(x, t)$  das soluções exatas  $v(x, t)$ ,  $w(x, t)$  e  $\phi(x, t)$ , as letras em negrito indicam matrizes e

$$\mathbf{h}(x) = \left\{ 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}, x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, 3\frac{x^2}{l^2} - \right.$$

$$\left. - 2\frac{x^3}{l^3}, -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right\} \quad (4.4)$$

sendo que a matriz  $h(x)$  satisfaz as condições de contorno do elemento  $e$  e

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}^T(t) &= \left\{ V_i(t), V_i'(t), V_j(t), V_j'(t) \right\} \\ \mathbf{W}^T(t) &= \left\{ W_i(t), W_i'(t), W_j(t), W_j'(t) \right\} \\ \Phi^T(t) &= \left\{ \Phi_i(t), \Phi_i'(t), \Phi_j(t), \Phi_j'(t) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

onde o expoente  $\tau$  indica matriz transposta.

#### 4.2.1. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

Da expressão (3.14), a energia de deformação do elemento finito  $e$  pode ser calculada como :

$$u_i^e = \frac{1}{2} \int_0^l e \left[ EJ_z v''^2 + EJ_y w''^2 + EJ_\omega \phi''^2 + GJ_t \phi'^2 \right] dx \quad (4.6)$$

Derivando-se duas vezes em relação a  $x$  as três funções dadas pela expressão (4.3) e uma vez a última função e levando-se estes valores para a expressão (4.6), vem :

$$\begin{aligned}
u_i^e = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{v}^T \left[ \int_0^l h''^T E J_z h'' dx \right] \mathbf{v} + \mathbf{w}^T \left[ \int_0^l h''^T E J_y h'' dx \right] \mathbf{w} + \right. \\
\left. + \Phi^T \left[ \int_0^l \left( h''^T E J_\omega h'' + h'^T G J_t h' \right) dx \right] \Phi \right\} \quad (4.7)
\end{aligned}$$

ou

$$u_i^e = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{v}^T \mathbf{k}_{yy}^e \mathbf{v} + \mathbf{w}^T \mathbf{k}_{zz}^e \mathbf{w} + \Phi^T \mathbf{k}_{xx}^e \Phi \right] \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{k}_{yy}^e$ ,  $\mathbf{k}_{zz}^e$  e  $\mathbf{k}_{xx}^e$  são, respectivamente, as matrizes (4x4) rigidez do elemento à flexão na direção y, à flexão na direção z e à torção e são definidas da seguinte forma :

$$\mathbf{k}_{yy}^e = \int_0^l h''^T E J_z h'' dx \quad (4.9)$$

$$\mathbf{k}_{zz}^e = \int_0^l h''^T E J_y h'' dx \quad (4.10)$$

$$\mathbf{k}_{xx}^e = \int_0^l \left( h''^T E J_\omega h'' + h'^T G J_t h' \right) dx \quad (4.11)$$

Derivando-se a matriz  $\mathbf{h}$ , dada pela expressão (4.4), em relação a x, uma e duas vezes e levando-se estes valores nas expressões (4.9), (4.10) e (4.11), tem-se :

$$k_{yy}^e = E J_z B^e \quad (4.12)$$

$$k_{zz}^e = E J_y B^e \quad (4.13)$$

$$k_{xx}^e = E J_\omega B^e + G J_t C^e \quad (4.14)$$

onde

$$B^e = \int_0^l h''^T h'' dx \quad (4.15)$$

e

$$C^e = \int_0^l h'^T h' dx \quad (4.16)$$

Estas matrizes estão mostradas no Apêndice A.

Seja agora, a matriz  $q^e(t)$  definida da seguinte maneira :

$$q^{eT}(t) = \left\{ V_i(t), V_i'(t), W_i(t), W_i'(t), \Phi_i(t), \Phi_i'(t), \right. \\ \left. V_j(t), V_j'(t), W_j(t), W_j'(t), \Phi_j(t), \Phi_j'(t) \right\} \quad (4.17)$$

As seguintes relações podem ser escritas :

$$V = R_y q^e \quad (4.18)$$

$$W = R_z q^e \quad (4.19)$$

$$\phi = R_x q^e \quad (4.20)$$

onde  $R_y$ ,  $R_z$  e  $R_x$  são, respectivamente, as matrizes projeção do vetor  $q$  nos vetores  $V$ ,  $W$  e  $\phi$ . Estas matrizes, com ordem  $4 \times 12$ , são constituídas somente de elementos iguais a um ou zero e elas estão apresentadas no Apêndice A.

Levando-se as expressões (4.18), (4.19) e (4.20) na expressão (4.8), vem :

$$u_i^e = \frac{1}{2} q^{eT} k^e q^e \quad (4.21)$$

onde  $k^e$  é a matriz de rigidez total do elemento  $e$  e é definida da seguinte forma :

$$k^e = R_y^T k_{yy}^e R_y + R_z^T k_{zz}^e R_z + R_x^T k_{xx}^e R_x \quad (4.22)$$

também mostrada no Apêndice A.

#### 4.2.2. MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO

A expressão (3.20) fornece o valor da energia cinética de uma barra. Assim, o valor da energia cinética do elemento finito  $e$  pode ser calculada como :



$$\begin{aligned} \mathcal{J}^e = & \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left[ S(\dot{v}_a^2 + \dot{w}_a^2 + i_D^2 \dot{\phi}_a^2) + J_z \dot{v}_a'^2 + J_y \dot{w}_a'^2 + \right. \\ & \left. + J_\omega \dot{\phi}_a'^2 + 2S(y_D \dot{w}_a \dot{\phi}_a - z_D \dot{v}_a \dot{\phi}_a) \right] dx \end{aligned} \quad (4.23)$$

Derivando-se as funções  $v_a$ ,  $w_a$  e  $\phi_a$ , dadas pela expressão (4.3), em relação ao tempo  $t$ , tem-se:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_a(x, t) &= \mathbf{h}(x) \dot{\mathbf{V}}(t) \\ \dot{w}_a(x, t) &= \mathbf{h}(x) \dot{\mathbf{W}}(t) \\ \dot{\phi}_a(x, t) &= \mathbf{h}(x) \dot{\Phi}(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Derivando-se as funções  $\dot{v}_a$ ,  $\dot{w}_a$  e  $\dot{\phi}_a$ , dadas pela expressão (4.24) em relação a variável  $x$ , e levando estas derivadas e mais (4.24) para a expressão (4.23), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^e = & \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{V}}^T \left[ \int_0^l \rho (\mathbf{h}^T S \mathbf{h} + \mathbf{h}'^T J_z \mathbf{h}') dx \right] \dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{W}}^T \left[ \int_0^l \rho (\mathbf{h}^T S \mathbf{h} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{h}'^T J_y \mathbf{h}') dx \right] \dot{\mathbf{W}} + \dot{\Phi}^T \left[ \int_0^l \rho (\mathbf{h}^T S i_D^2 \mathbf{h} + \mathbf{h}'^T J_\omega \mathbf{h}') dx \right] \dot{\Phi} + \right. \\ & \left. + y_D \dot{\mathbf{W}}^T \left[ \int_0^l \rho \mathbf{h}^T S \mathbf{h} dx \right] \dot{\Phi} + y_D \dot{\Phi}^T \left[ \int_0^l \rho \mathbf{h}^T S \mathbf{h} dx \right] \dot{\mathbf{W}} - \right. \\ & \left. - z_D \dot{\mathbf{V}}^T \left[ \int_0^l \rho \mathbf{h}^T S \mathbf{h} dx \right] \dot{\Phi} - z_D \dot{\Phi}^T \left[ \int_0^l \rho \mathbf{h}^T S \mathbf{h} dx \right] \dot{\mathbf{V}} \right\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Seja a matriz  $A^e$ , também mostrada no Apêndice A, definida como :

$$A^e = \int_0^l h^T h dx \quad (4.26)$$

Levando-se as expressões (4.16) e (4.26) na expressão (4.25), obtém-se :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^e = \frac{1}{2} \left[ \dot{V}^T m_{yy}^e \dot{V} + \dot{W}^T m_{zz}^e \dot{W} + \dot{\Phi}^T m_{xx}^e \dot{\Phi} + \dot{W}^T m_{zx}^e \dot{\Phi} + \dot{\Phi}^T m_{xz}^e \dot{W} - \right. \\ \left. - \dot{V}^T m_{yx}^e \dot{\Phi} - \dot{\Phi}^T m_{xy}^e \dot{V} \right] \quad (4.27) \end{aligned}$$

onde :

$$m_{yy}^e = \rho \left[ S A^e + J_z C^e \right] \quad (4.28)$$

$$m_{zz}^e = \rho \left[ S A^e + J_y C^e \right] \quad (4.29)$$

$$m_{xx}^e = \rho \left[ S I_D^2 A^e + J_\omega C^e \right] \quad (4.30)$$

$$m_{zx}^e = m_{xz}^e = y_D \rho S A^e \quad (4.31)$$

$$m_{yx}^e = m_{xy}^e = z_D \rho S A^e \quad (4.32)$$

Derivando-se  $V$ ,  $W$  e  $\Phi$  dadas pelas expressões (4.18), (4.19) e (4.20), respectivamente, em relação a variável  $t$  e levando-as para a expressão (4.27), tem-se:

$$\mathcal{P}^e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^e \mathbf{m}^e \dot{\mathbf{q}}^e \quad (4.33)$$

onde  $\mathbf{m}^e$  é a matriz de massa total do elemento  $e$  e é definida da seguinte maneira :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^e = & \mathbf{R}_y^T \mathbf{m}_{yy}^e \mathbf{R}_y + \mathbf{R}_z^T \mathbf{m}_{zz}^e \mathbf{R}_z + \mathbf{R}_x^T \mathbf{m}_{xx}^e \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_z^T \mathbf{m}_{zx}^e \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_x^T \mathbf{m}_{xz}^e \mathbf{R}_z - \\ & - \mathbf{R}_y^T \mathbf{m}_{yx}^e \mathbf{R}_x - \mathbf{R}_x^T \mathbf{m}_{xy}^e \mathbf{R}_y \end{aligned} \quad (4.34)$$

também mostrada no Apêndice A.

#### 4.2.3. MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA DO ELEMENTO

A expressão (3.25) fornece o valor do potencial das forças externas. Assim, o valor do potencial do elemento finito  $e$  é :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_e^e = & \frac{1}{2} \int_0^l \left[ N \left( v_a'^2 + w_a'^2 + t_D^2 \phi_a'^2 - 2z_D v_a' \phi_a' + 2y_D w_a' \phi_a' \right) + \right. \\ & + 2M_y \left( k_z - z_D \right) \phi_a'^2 + 2M_z \left( k_y - y_D \right) \phi_a'^2 + 2M_y v_a' \phi_a' - \\ & \left. - 2M_z w_a' \phi_a' + \frac{B}{J_\omega} U_\omega \phi_a'^2 \right] dx \end{aligned} \quad (4.35)$$

Derivando-se  $v_a$ ,  $w_a$  e  $\phi_a$ , dados por (4.3), em relação a variável  $x$ , e levando-os para a expressão (4.35), tem-se:

$$\begin{aligned}
u_{\bullet}^e = & \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{v}^T \left[ \int_0^l \dot{\mathbf{h}}'^T N \mathbf{h}' dx \right] \mathbf{v} + \mathbf{w}^T \left[ \int_0^l \dot{\mathbf{h}}'^T N \mathbf{h}' dx \right] \mathbf{w} + \right. \\
& + \Phi^T \left[ \int_0^l \dot{\mathbf{h}}'^T \left\{ N i_D^2 + 2 M_y (k_z - z_D) + 2 M_z (k_y - y_D) + \right. \right. \\
& \left. \left. + B \frac{U_{\omega}}{J_{\omega}} \right\} \mathbf{h}' dx \right] \Phi + \mathbf{v}^T \left[ \int_0^l \dot{\mathbf{h}}'^T (M_y - N z_D) \mathbf{h}' dx \right] \Phi + \\
& + \Phi^T \left[ \int_0^l \dot{\mathbf{h}}'^T (M_y - N z_D) \mathbf{h}' dx \right] \mathbf{v} - \mathbf{w}^T \left[ \int_0^l \dot{\mathbf{h}}'^T (M_z - \right. \\
& \left. - N y_D) \mathbf{h}' dx \right] \Phi - \Phi^T \left[ \int_0^l \dot{\mathbf{h}}'^T (M_z - N y_D) \mathbf{h}' dx \right] \mathbf{w}^T
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Levando -se  $C^e$ , dada pela expressão (4.16), na expressão (4.36) pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}
u_{\bullet}^e = & \frac{1}{2} \left[ \mathbf{v}^T \mathbf{g}_{yy}^e \mathbf{v} + \mathbf{w}^T \mathbf{g}_{yy}^e \mathbf{w} + \Phi^T \mathbf{g}_{xx}^e \Phi + \mathbf{v}^T \mathbf{g}_{yx}^e \Phi + \Phi^T \mathbf{g}_{xy}^e \mathbf{v} + \right. \\
& \left. + \mathbf{w}^T \mathbf{g}_{zx}^e \Phi + \Phi^T \mathbf{g}_{xz}^e \mathbf{w} \right]
\end{aligned} \tag{4.37}$$

onde :

$$\mathbf{g}_{yy}^e = \mathbf{g}_{zz}^e = N C^e \tag{4.38}$$

$$\mathbf{g}_{xx}^e = \left[ N i_D^2 + 2 M_y (k_z - z_D) + 2 M_z (k_y - y_D) \right] C^e + D^e \tag{4.39}$$

$$\mathbf{g}_{yx}^e = \mathbf{g}_{xy}^e = \left[ M_y - N z_D \right] C^e \tag{4.40}$$

$$g_{zx}^e = g_{xz}^e = \left( M_z - My_D \right) c^e \quad (4.41)$$

A matriz  $D^e$  usada na expressão (4.38) é definida da seguinte forma:

$$D^e = \frac{U_\omega}{J_\omega} \int_0^l h'^T B h' dx \quad (4.42)$$

Esta matriz, também mostrada no Apêndice A, ao contrário dos outros casos, não pode ser colocada em uma forma mais simples. Isto porque o bimomento  $B$  é uma função de  $x$ , expressão (3.5), não podendo ser retirado do integrando.

Levando-se as matrizes  $V$ ,  $W$  e  $\Phi$ , dadas pelas expressões (4.18), (4.19) e (4.20), respectivamente, na expressão (4.37), vem :

$$u_\bullet^e = \frac{1}{2} q^e g^e q^e \quad (4.43)$$

onde  $g^e$ , também mostrada no Apêndice A, é a matriz de rigidez geométrica total do elemento  $e$  e é definida da seguinte forma :

$$g^e = R_y^T g_{yy}^e R_y + R_z^T g_{zz}^e R_z + R_x^T g_{xx}^e R_x + R_y^T g_{yx}^e R_x + \\ + R_x^T g_{xy}^e R_y + R_z^T g_{zx}^e R_x + R_x^T g_{xz}^e R_z \quad (4.44)$$

#### 4.3.4. AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO EM COORDENADAS GLOBAIS

Determinam-se, agora, as expressões da energia de deformação, da energia cinética e do potencial das forças externas para a barra toda, partindo das expressões correspondentes dos elementos finitos. A continuidade dos deslocamentos nodais deve ser garantida. Assim, o deslocamento do nó  $j$  do elemento  $e-1$  é igual ao deslocamento do nó  $i$  do elemento  $e$ . A partir da aplicação do princípio de *Hamilton* determina-se a equação de movimento nas coordenadas globais.

Seja o sistema estrutural, esquematizado na figura 4.1, constituído de  $n$  nós e  $N=6n$  deslocamentos nodais. Estes deslocamentos constituirão, no sistema de eixos global, a matriz  $Q$  de ordem  $(N \times 1)$ :

$$Q^T(t) = \left\{ \begin{array}{l} V_1(t) , V_1'(t) , W_1(t) , W_1'(t) , \Phi_1(t) , \Phi_1'(t) , \dots \\ \dots \dots \dots V_n(t) , V_n'(t) , W_n(t) , W_n'(t) , \Phi_n(t) , \Phi_n'(t) \end{array} \right\} \quad (4.45)$$

Os deslocamentos nodais  $q^e$  do elemento genérico  $e$  podem ser representados como:

$$q^e = R^e Q \quad (4.46)$$

onde  $R^e$  é a matriz projeção do vetor  $Q$  sobre o vetor  $q^e$ . Os elementos em cada linha de  $R^e$  são todos zeros, com exceção de um elemento nesta linha que é igual a um. A posição em cada linha do elemento igual a um varia de posição conforme o elemento considerado da barra. Esta matriz está representada, para um elemento genérico  $e$ , no Apêndice A.

A energia de deformação, a energia cinética e o potencial das forças externas, para toda a barra, podem ser obtidos pela adição das contribuições de todos os elementos finitos, ou seja :

$$u_i = \sum_{e=1}^{n-1} u_i^e \quad (4.47)$$

$$\tau = \sum_{e=1}^{n-1} \tau^e \quad (4.48)$$

$$u_{\bullet}^e = \sum_{e=1}^{n-1} u_{\bullet}^e \quad (4.49)$$

Usando-se as expressões de  $u_i^e$ ,  $\tau^e$  e  $u_{\bullet}^e$ , respectivamente, (4.21), (4.33) e (4.43), tem-se:

$$u_i = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n-1} q^{eT} k^e q^e \quad (4.50)$$

$$\tau = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n-1} \dot{q}^{eT} m^e \dot{q}^e \quad (4.51)$$

$$u_{\bullet} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n-1} q^{eT} g^e q^e \quad (4.52)$$

Introduzindo-se  $q^e$ , dada pela expressão (4.46), nas expressões (4.50) e (4.52) obtém-se :

$$u_i = \frac{1}{2} Q^T \sum_{e=1}^{n-1} R^{eT} k^e R^e Q \quad (4.53)$$

$$u_{\bullet} = \frac{1}{2} Q^T \sum_{e=1}^{n-1} R^{eT} g^e R^e Q \quad (4.54)$$

Derivando-se  $q^e$  conforme expressão (4.46) e introduzindo  $\dot{q}^e$  na expressão (4.51), tem-se :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \dot{Q}^T \sum_{e=1}^{n-1} R^{eT} m^e R^e \dot{Q} \quad (4.55)$$

Definem-se, para a estrutura toda, respectivamente, as matrizes de rigidez, de rigidez geométrica e de massa :

$$K = \sum_{e=1}^{n-1} R^{eT} k^e R^e \quad (4.56)$$

$$G = \sum_{e=1}^{n-1} R^{eT} g^e R^e \quad (4.57)$$

$$M = \sum_{e=1}^{n-1} R^{eT} m^e R^e \quad (4.58)$$

As expressões (4.53) a (4.55) se transformam, então, em :

$$u_{\bullet} = \frac{1}{2} Q^T K Q \quad (4.59)$$



$$u_{\bullet} = \frac{1}{2} Q^T G Q \quad (4.60)$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \dot{Q}^T M \dot{Q} \quad (4.61)$$

Levando-se as expressões (4.59) a (4.61) na expressão (3.27) e considerando-se a condição dada pela expressão (4.2), vem :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta Q^T (K + G) Q - \delta \dot{Q}^T M \dot{Q} \right] dt = 0 \quad (4.62)$$

Integrando-se, por partes, a segunda parcela da expressão (4.62), em relação à variável  $t$ , e tendo em vista que os deslocamentos  $Q$  são prescritos em  $t = t_1$  e  $t = t_2$ , obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \dot{Q}^T M \dot{Q} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta Q^T M \ddot{Q} dt \quad (4.63)$$

A introdução da expressão (4.63) na expressão (4.62) fornece :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta Q^T \left[ (K + G) Q + M \ddot{Q} \right] dt = 0 \quad (4.64)$$

Como os deslocamentos do vetor  $\delta Q$  são arbitrários, decorre da expressão (4.64) :

$$M \ddot{Q} + (K + G) Q = 0 \text{ (matriz nula)} \quad (4.65)$$

que é o sistema de  $N=6n$  equações diferenciais das vibrações livres não amortecidas do conjunto de elementos finitos em que foi dividida a barra.

Quando as condições de contorno são impostas, alguns dos elementos do vetor  $Q$  são nulos. Portanto, é necessário introduzir estas condições na equação (4.65), retirando-se, assim, os movimentos de corpo rígido da barra. Um dos métodos se baseia em eliminar linhas e colunas das matrizes  $M$ ,  $K$ ,  $G$  e  $Q$  correspondentes aos deslocamentos nulos. Assim, novas matrizes são obtidas reduzindo-se a equação de movimento dada pela expressão (4.65) para :

$$\bar{M} \ddot{\bar{Q}} + (\bar{K} + \bar{G}) \bar{Q} = \bar{0} \quad (4.66)$$

onde  $\bar{M}$ ,  $\bar{K}$  e  $\bar{G}$  são matrizes de ordem  $(\bar{N} \times \bar{N})$ ,  $\bar{Q}$  e  $\bar{0}$  de ordem  $(\bar{N} \times 1)$ , sendo  $\bar{N}$  o número total de deslocamentos nodais desconhecidos.

#### 4.25. O PROBLEMA DE AUTO - VALOR

Durante as vibrações livres não amortecidas, em um dos modos, os deslocamentos nodais da barra variam harmonicamente com a mesma frequência e fase. Portanto, os deslocamentos nodais podem ser escritos como :

$$\bar{Q}(t) = \bar{Q}_0 \cos q t \quad (4.67)$$

onde  $q$  é a frequência natural de vibração do sistema estrutural em um de seus modos naturais de vibração e  $\bar{Q}_0$  é a matriz coluna constituída pelas amplitudes máximas relativas dos deslocamentos  $\bar{Q}(t)$ . Introduzindo-se na expressão (4.66) os valores de  $\bar{Q}(t)$  e  $\bar{Q}''(t)$  a partir da expressão (4.67), obtém-se :

$$(\bar{K} + \bar{G}) \bar{Q}_0 = q^2 \bar{M} \bar{Q}_0 \quad (4.68)$$

que é o problema de auto-valor para análise dinâmica, nos quais calculam-se as frequências naturais de vibração  $q^2$  e os modos naturais de vibração.

Com  $q = 0$  tem-se um caso limite e a equação (4.68) se reduz a :

$$\bar{K} \bar{Q}_0 = - \lambda \bar{G}^* \bar{Q}_0 \quad (4.69)$$

onde

$$\bar{G}^* = \bar{G}(P=1) \quad (4.70)$$

A expressão (4.69) representa o problema de auto-valor para a análise de estabilidade elástica .

Na expressão (4.69), o coeficiente  $\lambda$  representa a relação entre a carga crítica de flambagem e o esforço  $P$  , que é usada para gerar a matriz de rigidez geométrica  $\bar{G}$ , ou seja,  $P_{CR} = \lambda P$ . No caso de se adotar  $P = 1$  o coeficiente  $\lambda$  será igual ao valor da carga crítica  $P_{CR}$ .

As equações (4.68) e (4.69) são análogas, e as frequências naturais de vibração  $q^2$  são análogas aos coeficientes de carga crítica  $\lambda$ .

Na análise da estabilidade elástica, tem-se interesse somente na menor carga crítica, conseqüentemente, a solução para o menor valor da carga que satisfaz a equação (4.69). Já na análise dinâmica tem-se interesse em algumas frequências que satisfazem a equação (4.68). Para se estudar a influência da força axial nas frequências naturais determinam-se, para cada valor de  $P$ , os elementos da matriz  $\bar{G}$  e as correspondentes frequências naturais  $q^2$  dado pelo problema de auto-valor da equação (4.68). Neste trabalho, o interesse na determinação da menor carga crítica serve também como orientação para a variação da carga  $P$  no estudo das frequências naturais.

# CAPÍTULO 5

## RESULTADOS NUMÉRICOS

### 5.1 INTRODUÇÃO

Considere o sistema de equações diferenciais (3.40) apresentado no capítulo 3. Em alguns casos particulares de geometria e carregamento, pode ocorrer que as equações fiquem desacopladas : a primeira só depende de  $v$ , a segunda só de  $w$  e a terceira só de  $\phi$ . Pode ocorrer também que a primeira ou segunda equação fique com uma só função e as outras duas com as demais funções. Mas, no caso geral, isto não ocorre ou seja o sistema tem que ser resolvido simultaneamente em  $v$ ,  $w$  e  $\phi$ . Isto significa que os movimentos de flexão e torção, no caso geral, são acoplados, isto é, a barra sofre simultaneamente flexão e torção.

A interação entre as vibrações flexionais e flexo-torcionais é provocada tanto pela assimetria da secção transversal quanto pela excentricidade da carga estática aplicada na extremidade da barra. Se o acoplamento entre as equações é dado através dos coeficientes proporcionais às acelerações, diz-se que o acoplamento é dinâmico, caso contrário diz-se que o acoplamento é estático. Deste modo, pode-se observar que a assimetria da secção transversal acopla os movimentos de torção e flexão estática e dinamicamente, enquanto os momentos fletores acoplam só estaticamente.

O bimomento estático aparece somente na última das equações (3.40). Assim, no caso de se ter vibrações desacopladas o bimomento influirá apenas nas vibrações torcionais. A influência do bimomento nas vibrações

flexionais se dá de uma forma indireta quando se têm vibrações acopladas; neste caso, as frequências naturais são chamadas de frequências naturais flexionais e flexo-torcionais.

Neste capítulo, estuda-se o efeito do binomento através de alguns exemplos numéricos. Considera-se, inicialmente, o caso de vibrações desacopladas estudando somente as vibrações flexo-torcionais e em seguida o caso de vibrações acopladas com vários graus de acoplamento. Finalmente, estudam-se outros exemplos de vinculação.

Todos os resultados considerados neste capítulo foram obtidos pelo programa VIBRADEL desenvolvido segundo as equações determinadas no capítulo 4, adotando-se uma divisão em oito elementos. A fixação de um número de elementos se deve basicamente à uniformização da precisão destes resultados e aquele número foi escolhido por ter apresentado excelentes resultados quando comparados com exemplos conhecidos (os resultados obtidos nunca diferiram dos exatos por mais de 1% , até os três primeiros modos de vibração para cada deslocamento ) ou mesmo quando se verificava a convergência destes resultados. O material da barra considerado também em todos os exemplos foi o aço com as seguintes características elásticas: módulo de elasticidade igual a  $2100 \text{ tf/cm}^2$  , módulo de elasticidade transversal igual a  $800 \text{ tf/cm}^2$  e massa específica igual a  $80,265 \times 10^{-10} \text{ tf} \times \text{s}^2/\text{cm}^4$ .

## 5.2. O EFEITO DO BIMOMENTO NAS VIBRAÇÕES FLEXO - TORCIONAIS

A seguir, analisa-se o efeito do binomento somente nas vibrações flexo-torcionais. Portanto, deve-se considerar um exemplo que seja totalmente desacoplado, isto é, estática e dinamicamente.

Seja então uma barra com vínculos de garfo nas extremidades submetida a uma força axial estática de compressão  $P$  aplicada no centro de gravidade da secção transversal, conforme a figura 5.1. Esta força axial estática provoca um binomente estático cujo valor, nas secções extremas, pode ser calculado como o produto da força pelo valor da área setorial no seu ponto de aplicação :

$$B_1 = B_2 = -16,0714P \quad (5.1)$$

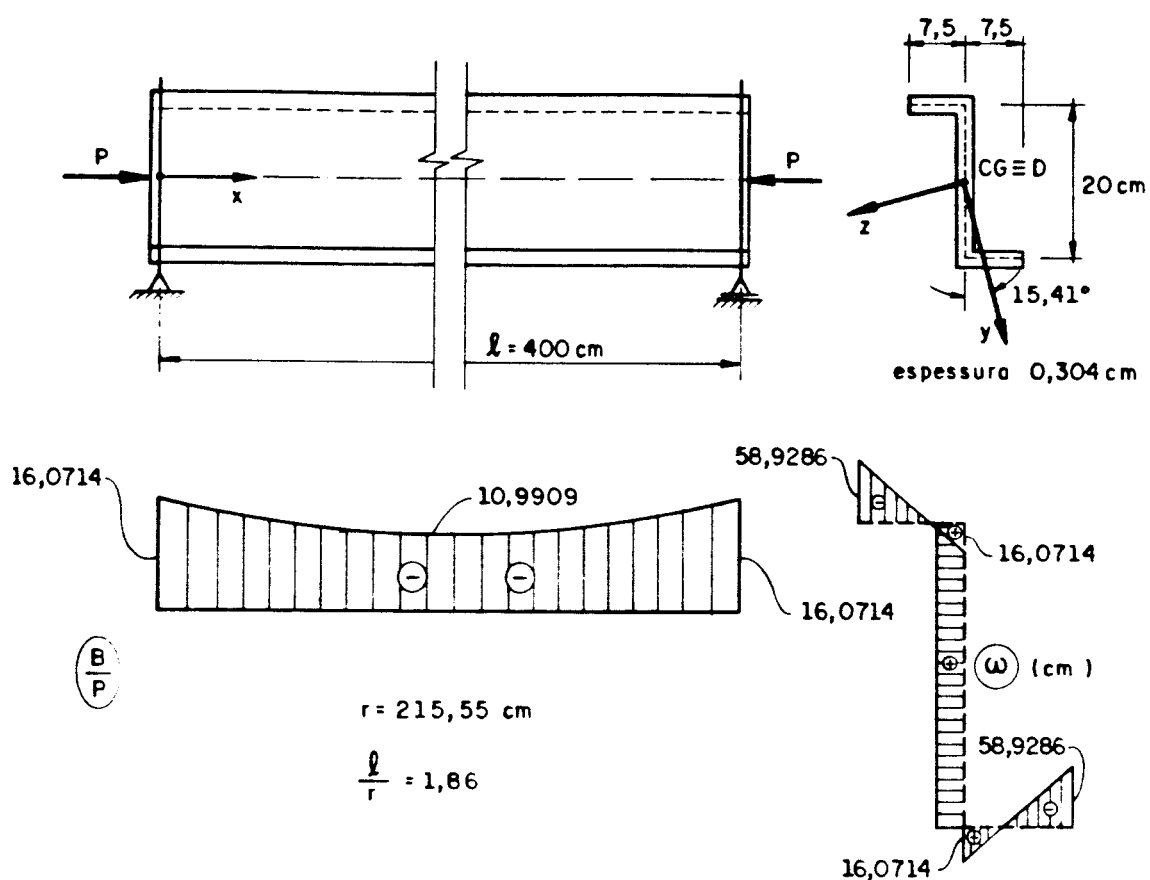


FIGURA 5.1

Levando-se agora os valores dos bimotores dados pela expressão (5.1) nas expressões (3.5) e (3.6) a expressão do bimotores fica:

$$B(x) = -16,0714P \left[ \frac{1 - \cosh \frac{l}{r}}{\sinh \frac{l}{r}} \sinh \frac{x}{r} + \cosh \frac{x}{r} \right] \quad (5.2)$$

Esta expressão está representada, em forma de diagrama, na figura 5.1.

As características geométricas da secção transversal são:

$$J_y = 38,4 \text{ cm}^4 \quad ; \quad S = 10,64 \text{ cm}^2$$

$$J_z = 705,8 \text{ cm}^4 \quad ; \quad k_y = 0$$

$$J_\omega = 5802 \text{ cm}^6 \quad ; \quad k_z = 0$$

$$J_t = 0,3278 \text{ cm}^4 \quad ; \quad y_D = 0$$

$$U_\omega = -9950 \text{ cm}^6 \quad ; \quad z_D = 0$$

A tabela 1 apresenta alguns resultados para estes dados.  $\bar{q}_\phi$  é a frequência natural flexo-torcional quando se leva em consideração o bimotores, enquanto que  $q_\phi$  é a frequência natural flexo-torcional quando não se considera o bimotores. A carga crítica flexo-torcional, quando se leva em consideração o bimotores,  $P_\phi$  é igual a 21,7807 tf e aquela tabela foi construída para uma força axial  $P = 0,6P_\phi$ .



TABELA 1			
	$\bar{q}_\phi (s^{-1})$	$q_\phi (s^{-1})$	diferença
1o. modo	65,06	31,82	51,08%
2o. modo	330,27	311,65	5,64%
3o. modo	770,54	753,19	2,25%

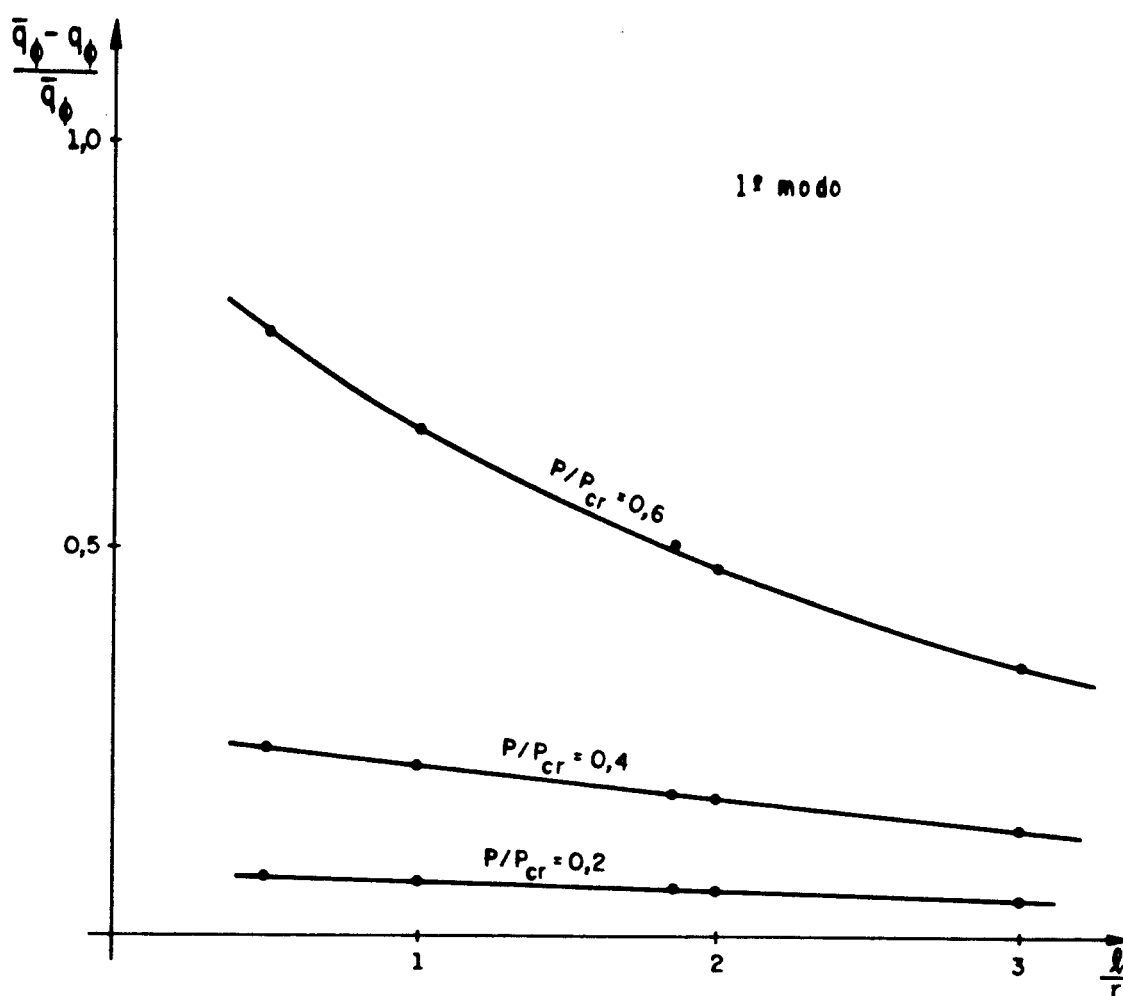


FIGURA 5.2

As figuras 5.2. e 5.3. apresentam resultados numéricos mostrando a influência do parâmetro  $l/r$  na diferença das frequências naturais flexo-torcionais quando não se considera o bimomento. A variação do parâmetro  $l/r$  pode ser obtida de várias maneiras : através da variação de  $l$ , da variação das características elásticas  $E$  e  $G$  ou ainda

das características geométricas  $J_{\omega}$  e  $J_t$ . No caso em estudo, optou-se por variar  $J_t$ . É possível assumir a variação de  $J_t$  sem influência apreciável nas demais características geométricas da secção. *Vlassov* [1] mostra que se pode até fazer  $J_t = 0$  quando a relação entre a espessura e as dimensões do esqueleto estiver abaixo de um determinado limite, caso em que a analogia entre flexão e flexo-torção, já bastante notável, torna-se completa.

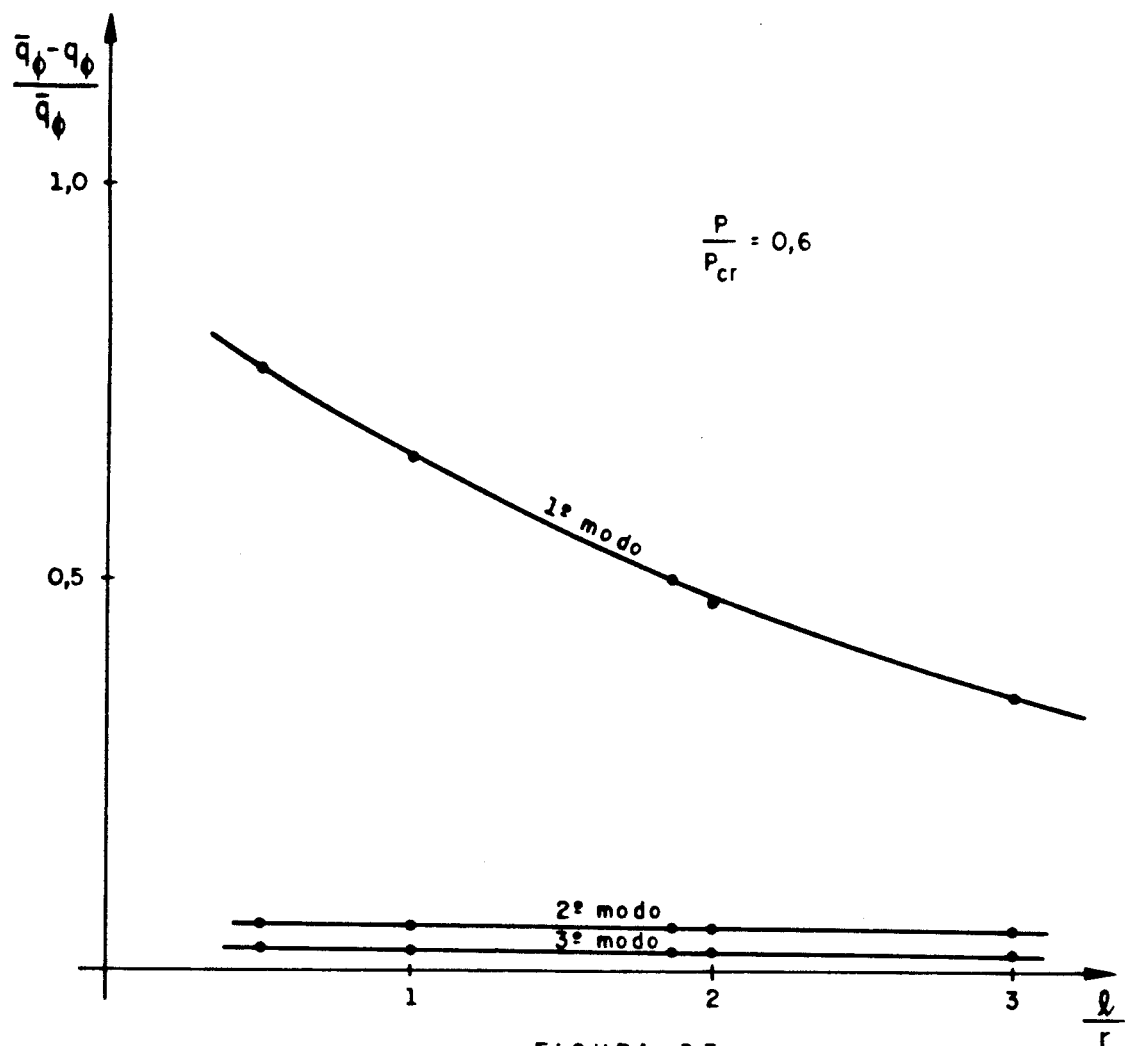


FIGURA 5.3

As curvas dos gráficos das figuras 5.2 e 5.3 foram construídas utilizando-se como cargas críticas  $P_\phi$ . Assim, assumiu-se também que não haverá perda de estabilidade flexional, tanto na direção  $y$  quanto na direção  $z$ , antes de atingir os valores destas cargas críticas. Isto pode ser

conseguido por exemplo através de um contraventamento lateral nas direções  $y$  e  $z$ . Para as curvas do gráfico da figura 5.3 fixou-se a carga axial  $P$  em  $0,6P_{\phi}$ .

Pode-se observar naquelas figuras que a influência do binomento aumenta quando a relação  $l/r$  diminui e quando a força axial aumenta. A influência do binomento é pequena para os modos mais altos de vibração mesmo para valores altos de  $P$  e baixos de  $l/r$ .

### 5.3. O EFEITO DO BIMOMENTO NAS VIBRAÇÕES ACOPLADAS FLEXIONAIS E FLEXO - TORCIONAIS

Neste parágrafo, estuda-se o efeito do binomento nas vibrações acopladas flexionais e flexo-torcionais. Definem-se agora as frequências naturais  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  que correspondem aos modos naturais de vibração predominantemente flexional nas direções  $y$  e  $z$  e predominantemente torcional, respectivamente. Estes modos são determinados através das análises dos auto-vetores (modos naturais de vibração) correspondentes a cada auto-valor (frequência natural de vibração). Auto-vetores que apresentam componentes com predominância torcional são chamados de modos predominantemente torcionais; caso contrário, são chamados de modos predominantemente flexionais.

A barra considerada aqui é a mesma do parágrafo anterior com o parâmetro  $l/r$  igual a 1,86. A força axial pode ser tanto de tração quanto de compressão e o acoplamento dos modos de vibração é dado através dos momentos fletores estáticos aplicados nas extremidades da barra, assim tem-se somente acoplamento estático. As variações destes momentos podem ser obtidas pelas excentricidades da carga aplicada. Esta carga deve percorrer

a linha de esqueleto da secção transversal no trecho onde a área setorial é constante.

Os gráficos das figuras 5.4, 5.5 e 5.6 apresentam os resultados para o modo correspondente à primeira frequência natural predominantemente flexional nas direções  $y$  e  $z$  e predominantemente torcional, respectivamente. Eles mostram a influência dos parâmetros  $\bar{P} = P / P_{CR}$  e  $\bar{M} = M / M_{CR}$  nas frequências naturais de vibração.  $P_{CR} = 4,9745$  tf é o valor da menor carga crítica de flambagem de EULER (flexão) e  $M_{CR} = 73,5170$  tf.cm é o menor valor crítico do momento fletor de instabilidade lateral. As linhas cheias representam as soluções quando não se considera o bimomento, enquanto que as linhas tracejadas são as soluções quando se considera o bimomento.

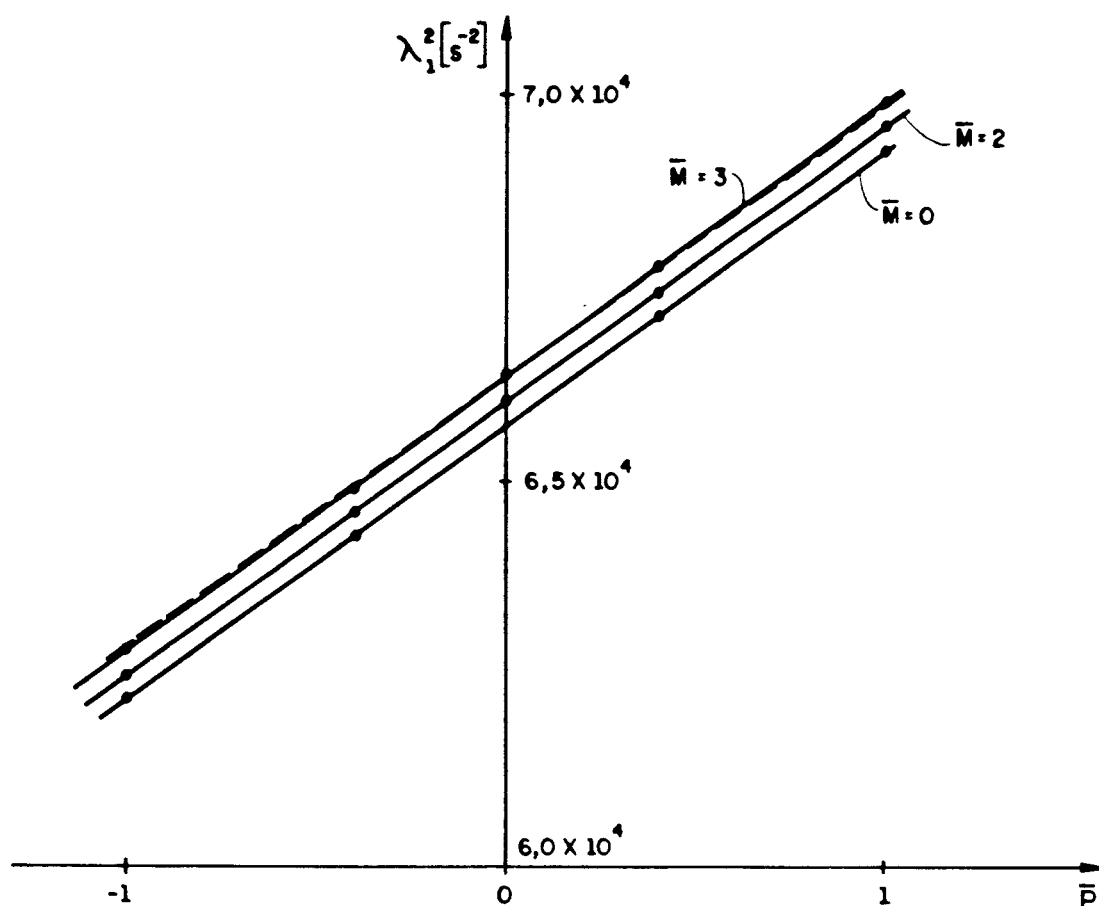


FIGURA 5.4

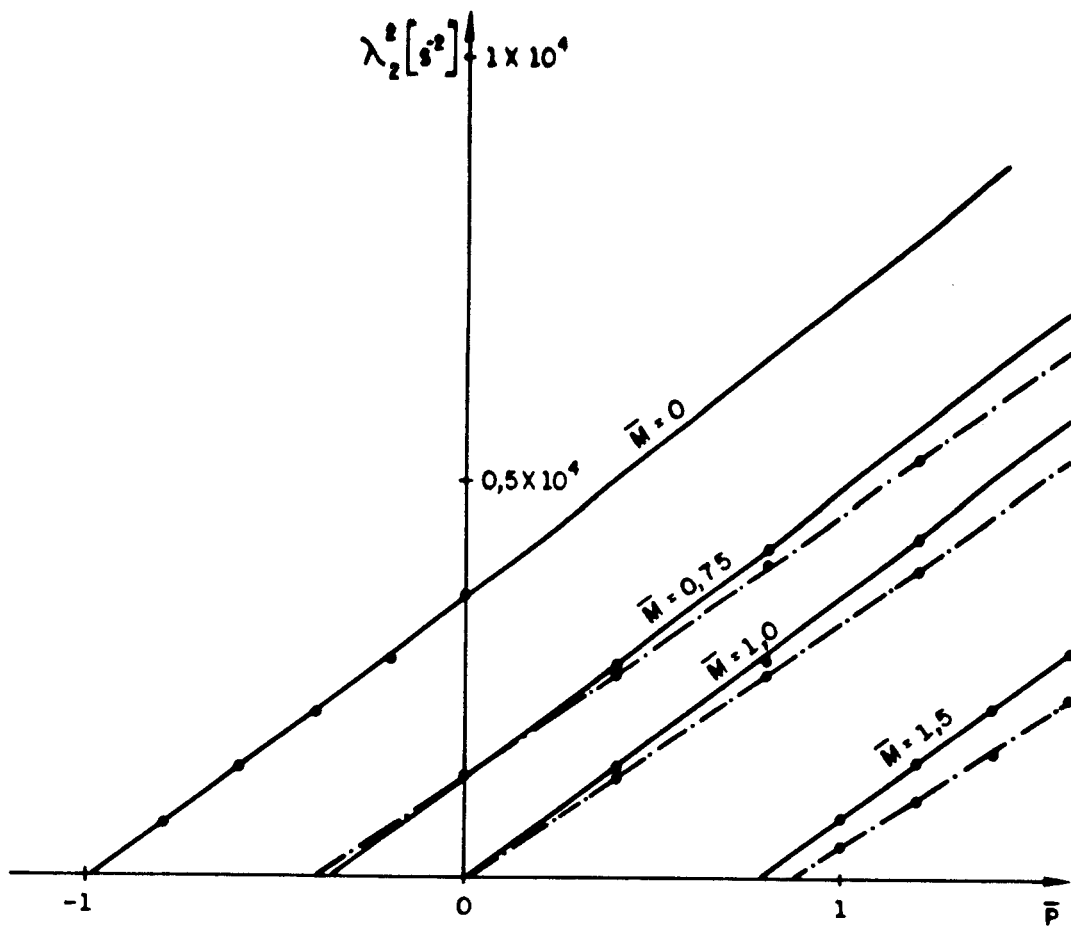


FIGURA 5.5

Os valores  $\lambda_1^2$ ,  $\lambda_2^2$  e  $\lambda_3^2$  são lineares com  $\bar{P}$  e as inclinações são independentes do parâmetro  $\bar{M}$  quando não se considera o bimomento e dependentes quando se considera o bimomento. A linha correspondente a  $\bar{M} = 0$  nos gráficos das figuras 5.4 e 5.5 representam as vibrações desacopladas flexionais nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente. No gráfico da figura 5.5 esta linha corta o eixo horizontal no ponto  $\bar{P} = -1$  que corresponde à carga de flambagem de EULER. Já a linha correspondente a  $\bar{M} = 1$ , neste mesmo gráfico, passa pela origem ( $\lambda_2^2 = 0$  e  $\bar{P} = 0$ ) e este ponto corresponde à instabilidade lateral na direção  $z$ . Outras linhas, com exceção de  $\bar{M} = 0$ , cortam o eixo horizontal no ponto correspondente à carga de instabilidade lateral. Para  $\bar{M} > 1$ ,

momentos maiores que o valor crítico, estas linhas cortam o eixo  $\bar{P}$  na parte de tração. O significado de  $\bar{P}$ , neste caso, é de um limite inferior que deve ser obedecido pela carga axial, para a estabilidade da barra. A linha correspondente a  $\bar{M} = 0$  no gráfico da figura 5.6 representa as vibrações desacopladas flexo-torcionais. Nota-se que o binomento tem nas frequências naturais o mesmo tipo de influência que na instabilidade *Rachid* [13] e *Mori* [14].

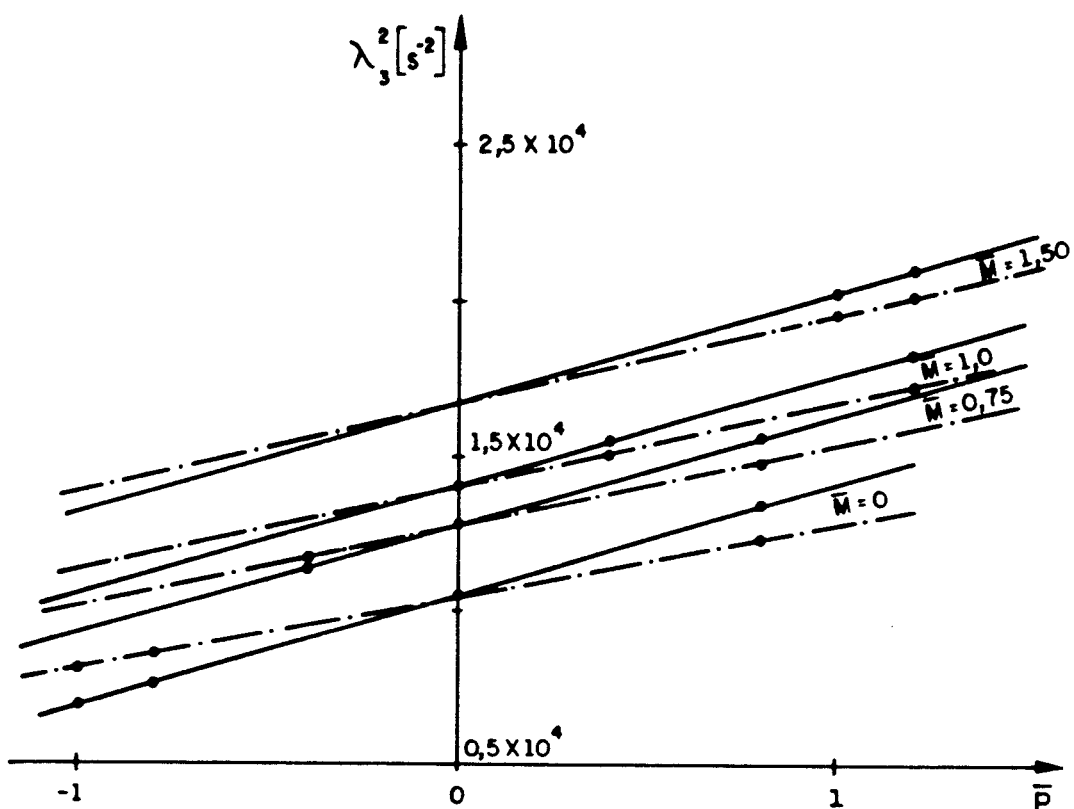


FIGURA 5.6

Os desvios apresentados nas linhas quando se considera o binomento é insignificante nas frequências naturais  $\lambda_1$  e isto ocorre porque as forças axiais aplicadas ainda são muito pequenas comparadas com a carga crítica nesta direção. Pode-se ter uma influência grande do binomento para aquelas forças aplicadas, desde que se tenha

um grau de acoplamento bem maior do que aqueles representados nos gráficos.

Já para as frequências naturais  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , o efeito do binomento é significativo. Para vibrações desacopladas ( $\bar{M}=0$ ) este efeito somente se verifica nas frequências naturais flexo - torcionais e à medida que se aumenta o grau de acoplamento diminui-se este efeito nas frequências naturais predominantemente flexo-torcionais  $\lambda_3$ . Para  $\bar{M} = 0$  o efeito do binomento é nulo nas frequências naturais flexionais e aumenta nas frequências naturais predominantemente flexionais à medida que aumenta o grau de acoplamento.

#### 5.4. OUTROS CASOS DE VINCULAÇÃO

Nos dois parágrafos anteriores, estudaram-se os casos de vibrações desacopladas flexo-torcionais e vibrações acopladas flexionais e flexo-torcionais considerando-se, em ambos os casos, o mesmo tipo de vinculação, ou seja, garfo nas duas extremidades. Pretende-se agora verificar outros tipos de vinculação; estudam-se, então, para o caso de vibrações desacopladas flexo-torcionais mais dois tipos de exemplos: extremidades engastada e livre e extremidades engastada e com garfo. Os resultados destes dois exemplos são comparados entre si e com o caso de garfos em ambas as extremidades resolvido no 5.2.

Para se determinar a distribuição de binomento estático ao longo da barra nestes dois novos exemplos, necessita-se desenvolver a equação estática do ângulo de rotação  $\phi(x)$ .

Seja então a equação diferencial representada pela expressão (2.39)

$$EJ_{\omega} \phi^{iv}(x) - GJ_t \phi''(x) = -M'_t(x) \quad (5.3)$$

Como não existe carga torçora o momento torçor que aparece ao longo da barra é nulo ou constante. Assim, a expressão (5.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\phi^{iv}(x) - \frac{1}{r^2} \phi''(x) = 0 \quad (5.4)$$

cuja solução geral é :

$$\phi(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cosh \frac{x}{r} + C_4 \sinh \frac{x}{r} \quad (5.5)$$

ondé  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são constantes de integração e dependem das condições de contorno.

#### 5.4.1. EXTREMIDADES ENGASTADA - LIVRE

Seja uma barra engastada em uma de suas extremidades e livre na outra, submetida a uma força axial estática  $P$ , conforme a figura 5.7. Na extremidade livre da barra além da força axial estática considera-se, também, o bimomento  $B_1 = 16,0714P$ .

Para esta vinculação as condições de contorno são:



$$\left. \begin{aligned} \phi''(0) &= 16,0714 \frac{P}{EJ_{\omega}} \\ \phi(l) &= 0 \\ \phi'(l) &= 0 \end{aligned} \right\} (5.8)$$

A primeira vem da última (2.21) e a última vem de (2.12) impondo que o deslocamento  $u$  seja nulo para qualquer ponto da linha de esqueleto.

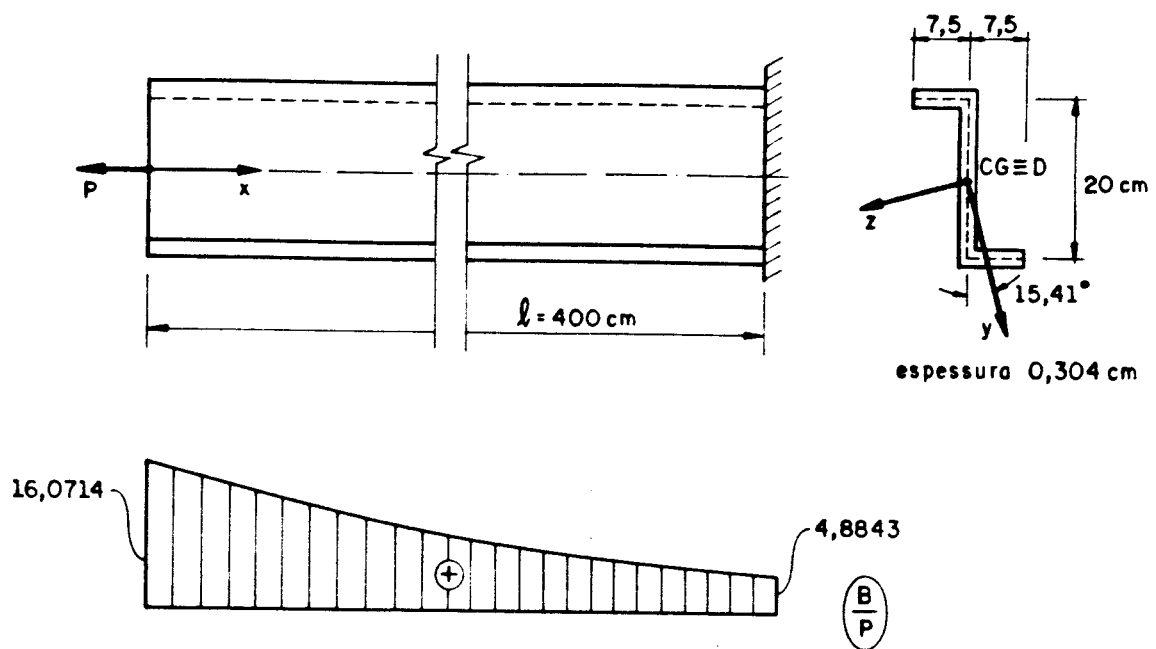


FIGURA 5.7

Como a carga torçora neste caso é nula, pode-se escrever para toda a barra que :

$$M_t = EJ_{\omega} \phi''' - GJ \phi_t' = 0 \quad (5.7)$$

Levando-se a terceira condição de contorno, dada pela expressão (5.6), na expressão (5.7) pode-se escrever que :

$$\phi'''(l) = 0 \quad (5.8)$$

Utilizando-se as três condições de contorno dadas pelas expressões (5.6) e a condição de contorno dada pela expressão (5.8), determinam-se as constantes de integração  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ . A substituição destas constantes na função  $\phi(x)$  dada pela expressão (5.5) fornece :

$$\phi(x) = 16,0714 \frac{P r^2}{EJ_\omega} \left[ - \frac{1}{\cosh \frac{l}{r}} + \cosh \frac{x}{r} - \right. \\ \left. - \tanh \frac{l}{r} \cdot \sinh \frac{x}{r} \right] \quad (5.9)$$

Derivando-se (5.9) duas vezes, de (2.40), vem :

$$B(x) = 16,0714P \left[ \cosh \frac{x}{r} - \tanh \frac{l}{r} \cdot \sinh \frac{x}{r} \right] \quad (5.10)$$

A equação do bimomento dada pela expressão (5.10) está representada na figura 5.7.

#### 5.4.2. EXTREMIDADES ENGASTADA - GARFO

Considere-se a extremidade livre, figura 5.7, vinculada por garfo conforme a figura 5.8.

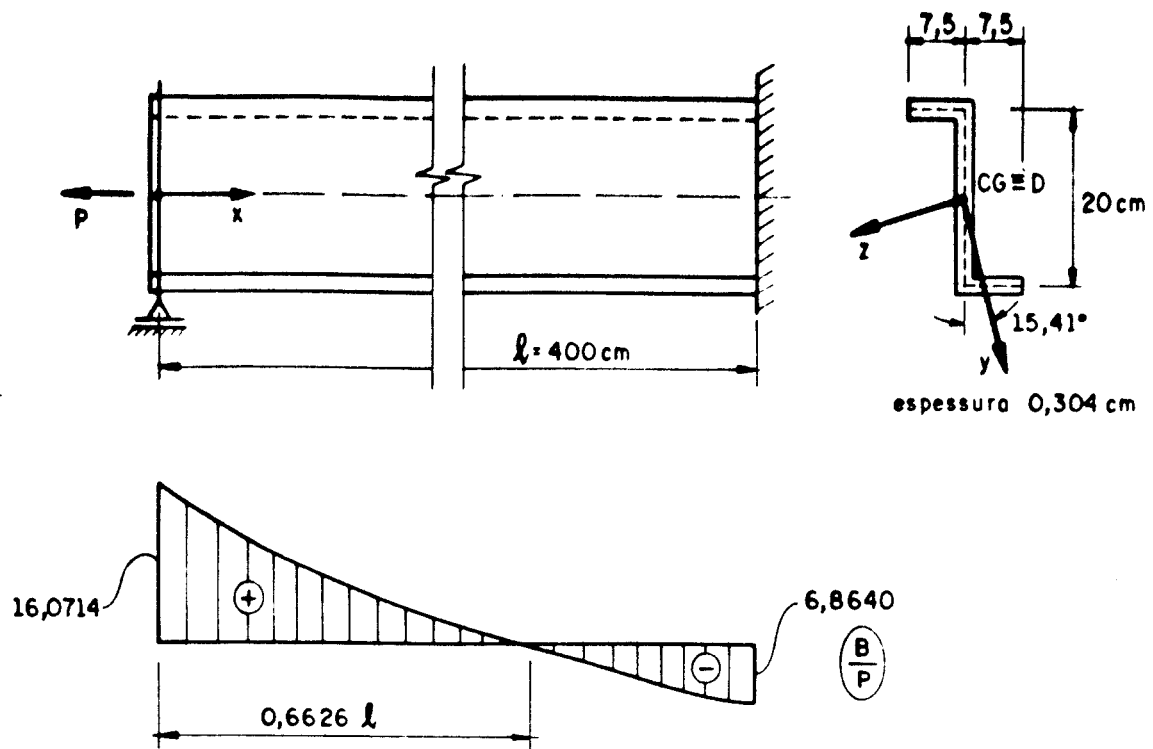


FIGURA 5.8

As condições de contorno neste exemplo são :

$$\left. \begin{aligned}
 \phi(0) &= 0 \\
 \phi(l) &= 0 \\
 \phi'(l) &= 0 \\
 \phi''(0) &= 16,0714 \frac{P}{EJ_{\omega}}
 \end{aligned} \right\} (5.11)$$

Utilizando-se as condições de contorno dadas pelas expressões (5.11), determinam-se as constantes de integração  $C_3$  e  $C_4$ . A substituição destas constantes na função  $\phi(x)$

dada pela expressão (5.5) fornece :

$$\phi(x) = C_1 + C_2 x + 16,0714 \frac{P r^2}{EJ_\omega} \left[ \cosh \frac{x}{r} + \frac{1 - \cosh \frac{l}{r} + \frac{l}{r} \operatorname{senh} \frac{l}{r}}{\operatorname{senh} \frac{l}{r} - \frac{l}{r} \cosh \frac{l}{r}} \operatorname{senh} \frac{x}{r} \right] \quad (5.12)$$

Derivando-se (5.12) duas vezes, de (2.40), vem :

$$B(x) = 16,0714P \left[ \cosh \frac{x}{r} + \frac{1 - \cosh \frac{l}{r} + \frac{l}{r} \operatorname{senh} \frac{l}{r}}{\operatorname{senh} \frac{l}{r} - \frac{l}{r} \cosh \frac{l}{r}} \operatorname{senh} \frac{x}{r} \right] \quad (5.13)$$

A equação do bimomento dada pela expressão (5.13) está representada na figura 5.8.

### 5.4.3. COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

O gráfico da figura 5.9 apresenta resultados numéricos mostrando a influência da vinculação no erro das frequências naturais flexo-torcionais quando não se considera o bimomento.

Como no exemplo do parágrafo 5.2, as curvas do

gráfico da figura 5.8 foram construídas utilizando-se como parâmetro  $P_\phi$  o menor valor crítico de flambagem puramente torcional para o caso de garfos em ambas as extremidades quando se leva em consideração o binomento.

Pode ser visto naquelas curvas que a influência do binomento é maior no caso garfo-garfo (G-G) e o que menos influi é o caso engastado-livre (E-L). O gráfico mostra também o caso engastado-garfo (E-G).

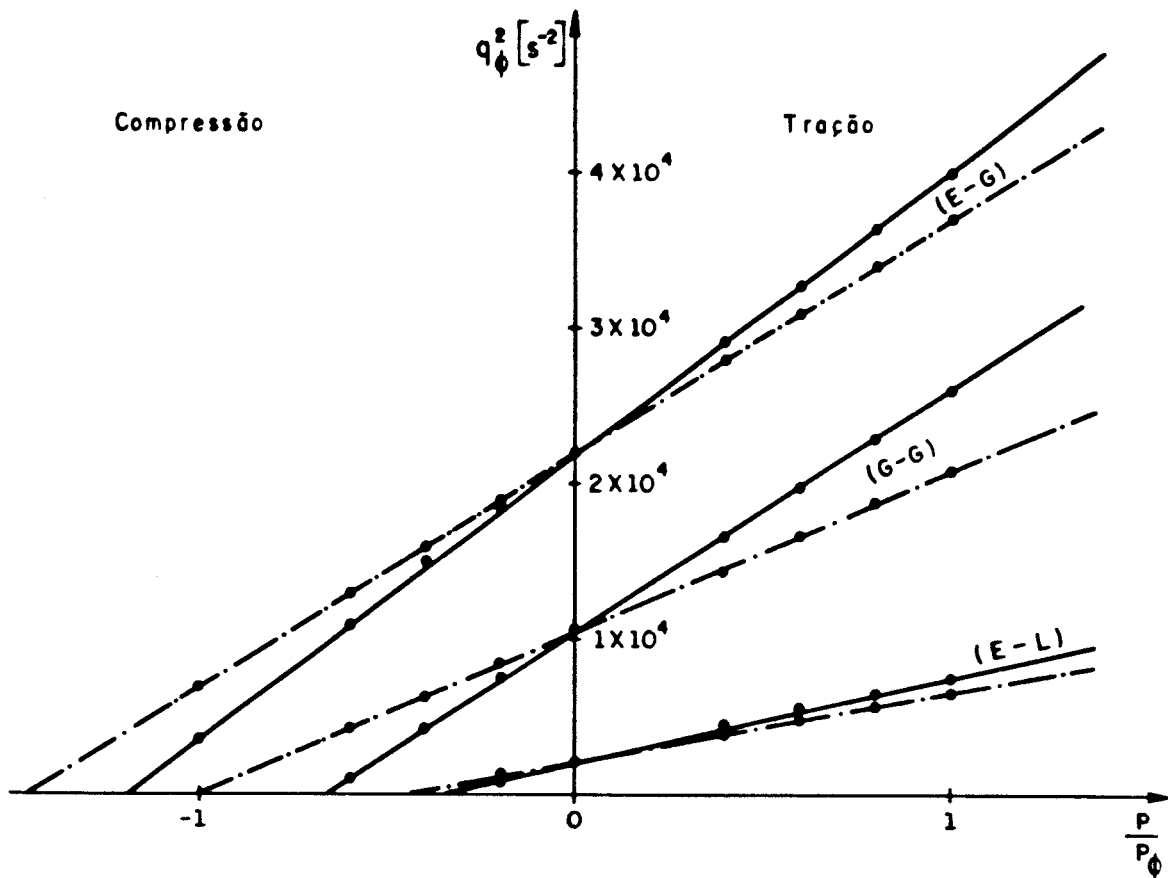


FIGURA 5.9

Estas curvas são bem próximas de retas ou mesmo retas no caso garfo-garfo [15]. Considerando-se ainda que estas curvas cortam o eixo horizontal nos valores críticos das cargas, e o eixo vertical nos quadrados das frequências naturais, na ausência de força axial. As frequências

naturais podem então ser bem aproximadas pela seguinte equação :

$$q^2 = q_0^2 \left[ 1 + \frac{N}{N_{CR}} \right] \quad (5.14)$$

onde  $N$  é a força axial estática,  $N_{CR}$  é a carga crítica correspondente ao modo de flambagem e  $q_0$  é a frequência natural da barra quando a força axial é nula.

O fato de se levar em consideração o bimomento não invalida a equação das frequências naturais dadas pela expressão (5.14). Neste caso, basta substituir nesta expressão o valor da carga crítica  $N_{CR}$  quando se considera o bimomento.

## 5.5. CONCLUSÕES

Este trabalho permitiu considerar o bimomento nas equações regentes do movimento de uma barra de secção delgada. A teoria mostrou que o bimomento estático aplicado nas extremidades das barras de secção delgada pode modificar significativamente os valores calculados das frequências naturais destas barras.

As frequências naturais flexo-torcionais correspondentes aos primeiros modos de vibrar sofrem uma acentuada influência do bimomento, quando a relação  $l/r$  é relativamente pequena. Os gráficos das figuras 5.2 e 5.3 mostram que, para as relações  $l/r = 1$  e  $P/P_\phi = 0,6$  a diferença relativa é de 65 % .

Para as vibrações acopladas flexionais e flexo-torcionais as frequências naturais predominantemente

flexionais sofrem um desvio significativo, desde que haja um grau de acoplamento suficientemente alto. O gráfico da figura 5.5 mostra que, para  $\bar{M} = 1,5$  e  $\bar{P} = 1,2$ , a diferença é de 37,5 % .

A forma de vinculação de uma barra influi nos valores dos desvios. Os gráficos da figura 5.9 mostram que para a relação  $P/P_{\phi} = 1$ , enquanto a barra com garfos nas extremidades apresenta uma diferença de 45,5% a barra engastada - livre apresenta uma diferença de apenas 15,4% no cálculo das frequências naturais; esta diferença para a barra com garfo e engastamento é de 8,1% .

Uma equação simples e geral, (5.14), que relaciona a frequência natural com a força axial pode ser utilizada com uma boa precisão.

## APÊNDICE A

Neste apêndice são apresentadas algumas matrizes e seus elementos.

Fazendo-se uso das expressões (4.4), (4.15), (4.16) e (4.26), obtêm-se os valores das matrizes  $B^e$ ,  $C^e$  e  $A^e$ :

$$B^e = \frac{1}{l_e^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{pmatrix} \quad (A.1)$$

$$C^e = \frac{1}{l_e^3} \begin{pmatrix} \frac{6}{5} l_e^2 & \frac{1}{10} l_e^3 & -\frac{6}{5} l_e^2 & \frac{1}{10} l_e^3 \\ \frac{1}{10} l_e^3 & \frac{2}{15} l_e^4 & -\frac{1}{10} l_e^3 & -\frac{1}{30} l_e^4 \\ -\frac{6}{5} l_e^2 & -\frac{1}{10} l_e^3 & \frac{6}{5} l_e^2 & -\frac{1}{10} l_e^3 \\ \frac{1}{10} l_e^3 & -\frac{1}{30} l_e^4 & -\frac{1}{10} l_e^3 & \frac{2}{15} l_e^4 \end{pmatrix} \quad (A.2)$$



$$A^e = \frac{1}{l_e^3} \begin{pmatrix} \frac{13}{35} l_e^4 & \frac{11}{210} l_e^5 & \frac{9}{70} l_e^4 & \frac{-13}{420} l_e^5 \\ \frac{11}{210} l_e^5 & \frac{1}{105} l_e^6 & \frac{13}{420} l_e^5 & \frac{-1}{140} l_e^6 \\ \frac{9}{70} l_e^4 & \frac{13}{420} l_e^5 & \frac{13}{35} l_e^4 & \frac{-11}{210} l_e^5 \\ \frac{-13}{420} l_e^5 & \frac{-1}{140} l_e^6 & \frac{-11}{210} l_e^5 & \frac{1}{105} l_e^6 \end{pmatrix} \quad (A.3)$$

As matrizes projeção  $R_y$ ,  $R_z$  e  $R_x$ , relacionadas nas expressões (4.18), (4.19) e (4.20) são :

$$R_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.4)$$

$$R_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.5)$$

$$R_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A.6)$$

Levando-se o valor da matriz  $B^e$ , dado pela expressão (A.1), na expressões (4.12), (4.13) e (4.14) e o valor da matriz  $C^e$ , dado pela expressão (A.2), na expressão (4.14) e os valores destas mais os valores de  $R_y$ ,  $R_z$  e  $R_x$ , dados por (A.3), (A.4) e (A.5), na expressão (4.22), obtém-se o valor da matriz de rigidez do elemento  $e$  :

$$k^e = \frac{1}{l_e^3} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{17} & k_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{27} & k_{28} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & k_{33} & k_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{39} & k_{310} & 0 & 0 \\ & & & k_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{49} & k_{410} & 0 & 0 \\ & & & & k_{55} & k_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{511} & k_{512} \\ & & & & & k_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{611} & k_{612} \\ & & & & & & k_{77} & k_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & k_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & k_{99} & k_{910} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & k_{1010} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & k_{1111} & k_{1112} \\ & & & & & & & & & & & k_{1212} \end{pmatrix}$$

simétrica

(A.7)

onde:

$$k_{11} = -k_{17} = k_{77} = 12 EJ_z$$

$$k_{12} = k_{18} = -k_{27} = -k_{78} = 6EJ_z l_e$$

$$k_{22} = 2k_{28} = k_{88} = 4EJ_z l_e^2$$

$$k_{33} = -k_{39} = k_{99} = 12 EJ_y$$

$$k_{34} = k_{310} = -k_{49} = -k_{910} = 6 EJ_y l_e$$

$$k_{44} = 2k_{410} = k_{1010} = 4 J_y l_e^2$$

$$k_{55} = -k_{511} = k_{1111} = 12 EJ_\omega + \frac{6}{5} GJ_t l_e^2$$

$$k_{56} = k_{512} = -k_{611} = -k_{1112} = 6EJ_\omega l_e + \frac{1}{10} GJ_t l_e^3$$

$$k_{66} = k_{1212} = 4 EJ_\omega l_e^2 + \frac{2}{15} GJ_t l_e^4$$

$$k_{612} = 2 EJ_\omega l_e^2 + \frac{1}{30} GJ_t l_e^3$$

Levando-se o valor de  $A^e$ , dado pela expressão (A.3), nas expressões (4.28), (4.29), (4.30), (4.31) e (4.32) e o valor de  $C^e$ , dado pela expressão (A.2), nas expressões (4.28) e (4.29) e (4.30), obtém-se os valores matriciais de  $m_{yy}^e$ ,  $m_{zz}^e$ ,  $m_{xx}^e$ ,  $m_{zx}^e$ ,  $m_{yx}^e$ ,  $m_{xz}^e$  e  $m_{xy}^e$ . A substituição destes valores na expressão (4.34) fornece o valor da matriz de massa do elemento  $e$ :

$$m^e = \frac{\rho}{l_e^3} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 & m_{15} & m_{16} & m_{17} & m_{18} & 0 & 0 & m_{111} & m_{112} \\ & m_{22} & 0 & 0 & m_{25} & m_{26} & m_{27} & m_{28} & 0 & 0 & m_{211} & m_{212} \\ & & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} & 0 & 0 & m_{39} & m_{310} & m_{311} & m_{312} \\ & & & m_{44} & m_{45} & m_{46} & 0 & 0 & m_{49} & m_{410} & m_{411} & m_{412} \\ & & & & m_{55} & m_{56} & m_{57} & m_{58} & m_{59} & m_{510} & m_{511} & m_{512} \\ & & & & & m_{66} & m_{67} & m_{68} & m_{69} & m_{610} & m_{611} & m_{612} \\ & & & & & & m_{77} & m_{78} & 0 & 0 & m_{711} & m_{712} \\ & & & & & & & m_{88} & 0 & 0 & m_{811} & m_{812} \\ & & & & & & & & m_{99} & m_{910} & m_{911} & m_{912} \\ & & & & & & & & & m_{1010} & m_{1011} & m_{1012} \\ & & & & & & & & & & m_{1011} & m_{1112} \\ & & & & & & & & & & & m_{1212} \end{pmatrix}$$

*simétrica*

(A.8)

onde :

$$m_{11} = m_{77} = \frac{13}{35} S l_e^4 + \frac{6}{5} J_z l_e^2$$

$$m_{12} = -m_{78} = \frac{11}{210} S l_e^5 + \frac{1}{10} J_z l_e^3$$

$$m_{15} = m_{711} = -\frac{13}{35} S z_D l_e^4$$

$$m_{16} = m_{25} = -m_{712} = -m_{811} = -\frac{11}{210} S z_D l_e^5$$

$$m_{17} = \frac{9}{70} S l_e^4 - \frac{6}{5} J_z l_e^2$$

$$m_{18} = -m_{27} = -\frac{13}{420} S l_e^5 + \frac{1}{10} J_z l_e^3$$

$$m_{111} = m_{57} = -\frac{9}{70} S z_D l_e^4$$

$$m_{112} = -m_{211} = m_{58} = -m_{67} = \frac{13}{420} S z_D l_e^5$$

$$m_{22} = m_{88} = \frac{1}{105} S l_e^6 + \frac{2}{15} J_z l_e^4$$

$$m_{26} = -m_{812} = -\frac{1}{105} S z_D l_e^6$$

$$m_{28} = -\frac{1}{140} S l_e^6 - \frac{1}{30} J_z l_e^4$$

$$m_{212} = m_{68} = \frac{1}{140} S z_D l_e^6$$

$$m_{33} = m_{99} = \frac{13}{35} S l_e^4 + \frac{6}{5} J_y l_e^2$$

$$m_{34} = -m_{910} = \frac{11}{210} S l_e^5 + \frac{1}{10} J_y l_e^3$$

$$m_{35} = m_{911} = \frac{13}{35} S y_D l_e^4$$

$$m_{36} = m_{45} = -m_{912} = -m_{1011} = \frac{11}{210} S y_D l_e^5$$

$$m_{39} = \frac{9}{70} S l_e^4 - \frac{6}{5} J_y l_e^2$$

$$m_{310} = -m_{49} = -\frac{13}{420} S l_e^5 + \frac{1}{10} J_y l_e^3$$

$$m_{311} = m_{59} = \frac{9}{70} S y_D l_e^4$$

$$m_{312} = -m_{411} = m_{510} = -m_{69} = -\frac{13}{420} S y_D l_e^5$$

$$m_{44} = m_{1010} = \frac{1}{105} S l_e^6 + \frac{2}{15} J_y l_e^4$$

$$m_{46} = m_{1012} = \frac{1}{105} S y_D l_e^6$$

$$m_{410} = -\frac{1}{140} S l_e^6 - \frac{1}{30} J_y l_e^4$$

$$m_{412} = m_{610} = -\frac{1}{140} S y_D l_e^6$$

$$m_{55} = m_{1111} = \frac{13}{35} S i_D^2 l_e^4 + \frac{6}{5} J_\omega l_e^2$$

$$m_{56} = -m_{1112} = \frac{11}{210} S i_D^2 l_e^5 + \frac{1}{10} J_\omega l_e^3$$

$$m_{511} = \frac{9}{70} Si_D^2 l_e^4 - \frac{6}{5} J_\omega l_e^2$$

$$m_{512} = -m_{511} = -\frac{13}{420} Si_D^2 l_e^5 + \frac{1}{10} J_\omega l_e^3$$

$$m_{66} = m_{1212} = \frac{1}{105} Si_D^2 l_e^6 + \frac{2}{15} J_\omega l_e^4$$

$$m_{612} = -\frac{1}{140} Si_D^2 l_e^6 - \frac{1}{30} J_\omega l_e^4$$

A introdução da expressão (3.4) na expressão (4.42) e, em seguida, a integração desta fornece :

$$D^e = \frac{U_\omega}{J_\omega} \begin{pmatrix} \bar{B}_1 C_1 + B_1 C_2 & \bar{B}_1 C_7 + B_1 C_8 & -\bar{B}_1 C_{11} - B_1 C_{12} & \bar{B}_1 C_9 + B_1 C_{10} \\ \text{simétrica} & \bar{B}_1 C_3 + B_1 C_4 & -\bar{B}_1 C_{17} - B_1 C_{18} & \bar{B}_1 C_{11} + B_1 C_{12} \\ & & \bar{B}_1 C_{11} + B_1 C_{12} & -\bar{B}_1 C_{19} - B_1 C_{10} \\ & & & \bar{B}_1 C_{15} + B_1 C_{16} \end{pmatrix}$$

(A.9)

onde :

$$C_1 = \frac{72}{H^5 l_e} \left\{ \left[ H^2 + 12 \right] \cosh H - 6 H \sinh H - H^2 - 12 \right\}$$

$$C_2 = \frac{72}{H^5 l_e} \left\{ \left[ H^2 + 12 \right] \operatorname{senh} H - 6 H \operatorname{cosh} H - 6H \right\}$$

$$C_3 = \frac{l_e}{H^5} \left\{ 8 \left[ H^2 + 27 \right] \operatorname{cosh} H - 72H \operatorname{senh} H - H^4 - 44H^2 - 216 \right\}$$

$$C_4 = \frac{l_e}{H^5} \left\{ 8 \left[ H^2 + 27 \right] \operatorname{senh} H - 72H \operatorname{cosh} H - 8H^3 - 144H \right\}$$

$$C_5 = \frac{l_e}{H^5} \left\{ \left[ H^4 + 44H^2 + 216 \right] \operatorname{cosh} H - 8 \left[ H^3 + 18H \right] \operatorname{senh} H - 8H^2 - 216 \right\}$$

$$C_6 = \frac{l_e}{H^5} \left\{ \left[ H^4 + 44H^2 + 216 \right] \operatorname{senh} H - 8 \left[ H^3 + 18H \right] \operatorname{cosh} H - 72H \right\}$$

$$C_7 = \frac{6}{H^5} \left\{ 4 \left[ H^2 + 18 \right] \operatorname{cosh} H - 30H \operatorname{senh} H - 10H^2 - 72 \right\}$$

$$C_8 = \frac{6}{H^5} \left\{ 4 \left[ H^2 + 18 \right] \operatorname{senh} H - 30H \operatorname{cosh} H - H^2 - 42H \right\}$$

$$C_{9} = \frac{6}{H^5} \left\{ - \left[ H^3 + 42H \right] \sinh H + \left[ 10H^2 + 72 \right] \cosh H - 42H^2 - 72 \right\}$$

$$C_{10} = \frac{6}{H^5} \left\{ - \left[ H^3 + 42H \right] \cosh H + \left[ 10H^2 + 72 \right] \sinh H - 30H \right\}$$

$$C_{11} = \frac{2l_e}{H^5} \left\{ - \left[ H^3 + 54H \right] \sinh H + \left[ 11H^2 + 108 \right] \cosh H - 11H^2 - 108 \right\}$$

$$C_{12} = \frac{2l_e}{H^5} \left\{ - \left[ H^3 + 54H \right] \cosh H + \left[ 11H^2 + 108 \right] \sinh H - H^3 - 54H \right\}$$

com  $H = \frac{l_e}{r}$  .

Levando-se o valor de  $C^e$ , dado pela expressão (A.2) nas expressões (4.38), (4.39), (4.40) e (4.41) e o valor de  $D^e$ , dado pela expressão (A.9) na expressão (4.39), obtêm-se os valores de  $g_{yy}^e$ ,  $g_{zz}^e$ ,  $g_{xx}^e$ ,  $g_{zx}^e$  e  $g_{yx}^e$ . A substituição destes valores na expressão (4.44) fornece o valor da matriz de rigidez geométrica do elemento  $e$  :



$$g^e = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 & 0 & g_{15} & g_{16} & g_{17} & g_{18} & 0 & 0 & g_{111} & g_{112} \\ & g_{22} & 0 & 0 & g_{25} & g_{26} & g_{27} & g_{28} & 0 & 0 & g_{211} & g_{212} \\ & & g_{33} & g_{34} & g_{35} & g_{36} & 0 & 0 & g_{39} & g_{310} & g_{311} & g_{312} \\ & & & g_{44} & g_{45} & g_{46} & 0 & 0 & g_{49} & g_{410} & g_{411} & g_{412} \\ & & & & g_{55} & g_{56} & g_{57} & g_{58} & g_{59} & g_{510} & g_{511} & g_{512} \\ & & & & & g_{66} & g_{67} & g_{68} & g_{69} & g_{610} & g_{611} & g_{612} \\ & & & & & & g_{77} & g_{78} & 0 & 0 & g_{711} & g_{712} \\ & & & & & & & g_{88} & 0 & 0 & g_{811} & g_{812} \\ & & & & & & & & g_{99} & g_{910} & g_{911} & g_{912} \\ & & & & & & & & & g_{1010} & g_{1011} & g_{1012} \\ & & & & & & & & & & g_{1011} & g_{1112} \\ & & & & & & & & & & & g_{1212} \end{pmatrix}$$

simétrica

(A.10)

onde :

$$g_{11} = -g_{17} = g_{33} = -g_{39} = g_{77} = g_{99} = \frac{6}{5} \frac{N}{l_e}$$

$$g_{12} = g_{18} = -g_{27} = g_{34} = g_{310} = -g_{49} = -g_{78} = -g_{910} = \frac{N}{10}$$

$$g_{15} = -g_{111} = -g_{57} = g_{711} = \frac{6}{5} \frac{N}{l_e} \left( M_y - Nz_D \right)$$

$$g_{16} = g_{112} = g_{25} = -g_{211} = g_{58} = -g_{67} = -g_{712} = -g_{811} = \frac{1}{10} \left( M_y - Nz_D \right)$$

$$g_{22} = g_{44} = g_{88} = g_{1010} = \frac{2}{15} Nl_e$$

$$g_{26} = g_{812} = \frac{2}{15l_e} \left( M_y - Nz_D \right)$$

$$g_{28} = g_{410} = -\frac{1}{30} Nl_e$$

$$g_{212} = g_{008} = -\frac{1}{30} \left( M_y - N z_D \right) l_e$$

$$g_{205} = -g_{211} = -g_{509} = g_{911} = -\frac{6}{5l_e} \left( M_z - N y_D \right)$$

$$g_{306} = g_{312} = g_{45} = -g_{411} = g_{510} = -g_{609} = -g_{912} = -g_{1011} =$$

$$= -\frac{1}{10} \left( M_z - N y_D \right)$$

$$g_{406} = g_{1012} = -\frac{2}{15} \left( M_z - N y_D \right) l_e$$

$$g_{412} = g_{610} = \frac{1}{30} \left( M_z - N y_D \right) l_e$$

$$g_{55} = -g_{511} = g_{1111} = \frac{6}{5l_e} \left[ N i_D^2 + 2M_y \left( k_z - z_D \right) + 2M_z \left( k_y - y_D \right) \right] +$$

$$+ \frac{U_\omega}{J_\omega} \left[ \bar{B}_1 C_1 + B_1 C_2 \right]$$

$$g_{506} = -g_{611} = \frac{1}{10} \left[ N i_D^2 + 2M_y \left( k_z - z_D \right) + 2M_z \left( k_y - y_D \right) \right] +$$

$$+ \frac{U_\omega}{J_\omega} \left[ \bar{B}_1 C_7 + B_1 C_8 \right]$$

$$g_{512} = -g_{1112} = \frac{1}{10} \left[ N i_D^2 + 2M_y \left( k_z - z_D \right) + 2M_z \left( k_y - y_D \right) \right] +$$

$$+ \frac{U_\omega}{J_\omega} \left[ \bar{B}_1 C_9 + B_1 C_{10} \right]$$

$$g_{606} = \frac{2l_e}{15} \left[ N i_D^2 + 2M_y \left( k_z - z_D \right) + 2M_z \left( k_y - y_D \right) \right] +$$

$$+ \frac{U_\omega}{J_\omega} \left[ \bar{B}_1 C_3 + B_1 C_4 \right]$$

$$g_{e12} = - \frac{l_e}{30} \left[ Ni_D^2 + 2M_y (k_z - z_D) + 2M_z (k_y - y_D) \right] + \frac{U_\omega}{J_\omega} \left( \bar{B}_1 C_{11} + B_1 C_{12} \right)$$

$$g_{e1212} = \frac{2l_e}{15} \left[ Ni_D^2 + 2M_y (k_z - z_D) + 2M_z (k_y - y_D) \right] + \frac{U_\omega}{J_\omega} \left( \bar{B}_1 C_5 + B_1 C_6 \right)$$

A matriz  $R^e$  relacionada na expressão (4.46) é constituída de sub-matrizes onde uma delas de ordem  $12 \times 12$  é a identidade e outras  $n-2$  (onde  $n$  é o número de nós) matrizes de ordem  $12 \times 6$  são nulas. A disposição destas sub-matrizes naquela matriz para o elemento  $e$  é :

$$R^e = \begin{bmatrix} \overbrace{\left[ \begin{matrix} [0]_{12 \times 6} & \dots & [0]_{12 \times 6} \end{matrix} \right]}^{e-1} & [I]_{12 \times 12} & [0]_{12 \times 6} & \dots & [0]_{12 \times 6} \end{bmatrix} \quad (A.11)$$

onde  $[I]$  é a sub-matriz identidade e  $[0]$  é a sub-matriz nula.

## APÊNDICE B

O programa VIBRADEL, cuja estrutura está mostrada na figura B.1, foi preparado para resolver problemas de cargas críticas e frequências naturais. Em ambos os casos o problema se resume em calcular os auto-valores e auto-vetores das expressões (4.68) e (4.69). Este programa que contém aproximadamente mil linhas foi escrito em linguagem FORTRAN e adaptado para rodar em computador pessoal (640K).

As matrizes de rigidez e de massa da barra toda, obtidas pelo método dos elementos finitos, têm algumas propriedades especiais que são de grande importância para a eficiência de resolução do problema de auto-valor. Estas matrizes são simétricas e definidas positivas e foram arranjadas de tal modo que elas são em forma de banda.

A solução do problema de auto-valor e auto-vetor apresentada aqui envolve primeiro a redução do problema geral de auto-valor para uma forma mais simples.

Sejam então as equações representadas pelas expressões (4.68) e (4.69) escritas na seguinte forma :

$$AX = \lambda BX \quad (B.1)$$

onde as matrizes **A** e **B** são simétricas e pelo menos uma delas é definida positiva.

Se **B** é definida positiva ela pode ser decomposta pelo método de CHOLESKY, ou seja pode ser escrita da seguinte forma :

$$B = S^T S \quad (B.2)$$

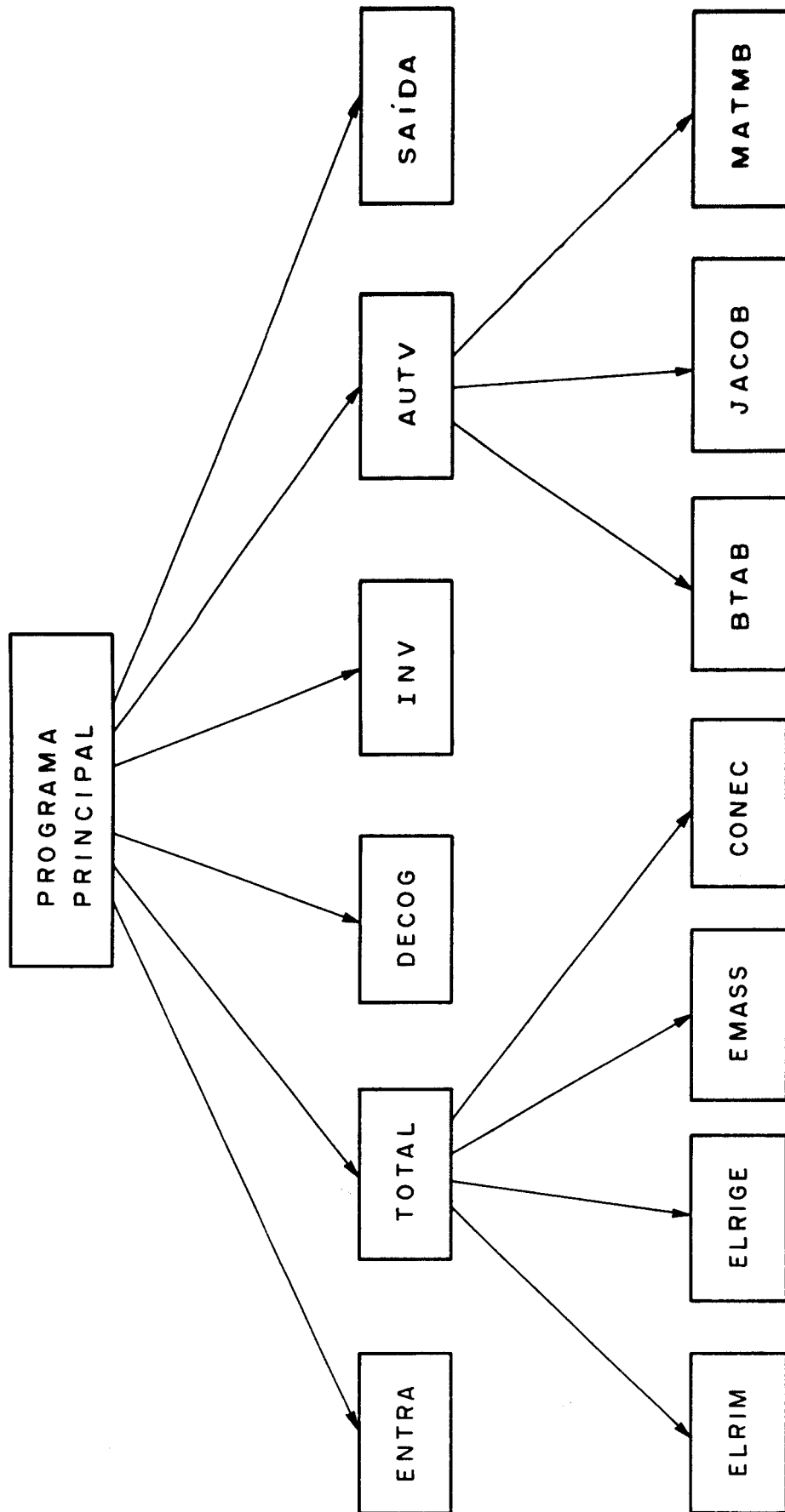


Fig.B.1 - Estrutura do Programa VIBRADEL

onde  $S$  é uma matriz triangular superior.

Levando-se a expressão (B.2) na expressão (B.1), tem-se :

$$AX = \lambda S^T SX \quad (B.3)$$

A expressão (B.3), ainda, pode ser escrita da seguinte forma :

$$AS^{-1}SX = \lambda S^T SX \quad (B.4)$$

Multiplicando-se a expressão (B.4), em ambos os termos, por  $(S^T)^{-1}$  e notando-se que  $(S^T)^{-1} = (S^{-1})^T$ , obtém-se que :

$$(S^{-1})^T AS^{-1}SX = \lambda SX \quad (B.5)$$

Definindo-se agora um novo vetor :

$$Y = SX \quad (B.6)$$

a expressão (B.5) pode ser escrita como :

$$CY = \lambda Y \quad (B.7)$$

onde :

$$C = (S^{-1})^T AS^{-1} \quad (B.8)$$

Os auto-valores da expressão (B.7) são os mesmos da expressão (B.1) e os auto-vetores desta segunda expressão podem ser calculados invertendo-se a expressão (B.6). Assim, tem-se :

$$X = S^{-1}Y \quad (B.9)$$

O cálculo dos auto-valores e auto-vetores da expressão (B.7) pode ser feito através do método de rotação de JACOBI, desde que a matriz C seja simétrica. Esta condição pode ser verificada na expressão (B.8) pois a matriz A é simétrica.

A seguir apresenta-se uma descrição das sub-rotinas utilizadas no programa VIBRADEL :

- ENTRA - Lê todos os dados do problema, como as coordenadas dos pontos nodais, as características geométricas e elásticas de todos os elementos, condições de carregamento e condições de contorno. Ainda, calcula o número total  $\bar{N}$  de deslocamentos desconhecidos.
- ELRIM - Gera a matriz de rigidez para cada elemento segundo a expressão (A.7).
- ELRIGE - Gera a matriz de rigidez geométrica para cada elemento segundo a expressão (A.10).
- EMASS - Gera a matriz de massa para cada elemento segundo a expressão (A.8).
- CONEC - Faz a adição dos elementos das matrizes elementares de rigidez, de rigidez geométrica e de massa nas matrizes totais de rigidez, de rigidez geométrica e de massa, respectivamente.
- TOTAL - Monta as matrizes totais de rigidez, de rigidez geométrica e de massa. Ela percorre todos os elementos da barra e para cada um chama a sub - rotina ELRIM, para calcular os elementos da matriz de rigidez, ELRIGE, para calcular os elementos da matriz de rigidez

geométrica, EMASS, para calcular os elementos da matriz de massa e CONEC, para adicionar as contribuições dos elementos destas matrizes nas matrizes totais de rigidez, de rigidez geométrica e de massa, respectivamente.

- DECOG - Decompõe a matriz a ser invertida pelo método de CHOLESKY como apresentada na expressão (B.2).
- INV - Calcula a inversa de uma matriz triangular superior.
- BTAB - Efetua a operação matricial do tipo:  $B^T AB$ .
- JACOB - Calcula os auto-valores e auto-vetores de um sistema do tipo representado pela expressão (B.7) usando o método de rotação de JACOBI. No final os auto-valores são colocados na diagonal de uma matriz diagonal e os auto-vetores armazenados em colunas em uma matriz quadrada.
- MATMB - Calcula o produto entre duas matrizes.
- AUTV - Calcula os auto-valores e auto-vetores de um sistema do tipo representado pela expressão (B.1). Inicialmente, chama a sub-rotina BTAB, para realizar a operação matricial definida pela expressão (B.8), chama a sub-rotina JACOB, para calcular os auto-valores e auto-vetores de um sistema do tipo representado pela expressão (B.7) e chama finalmente a sub-rotina MATMB para calcular os auto-vetores.
- SAIDA - Escreve os resultados.



Para a determinação das frequências naturais e dos modos naturais de vibração pelo programa VIBRADEL, transforma-se a expressão (4.68) na seguinte forma :

$$(\bar{M})^{-1}(\bar{K} + \bar{G})\bar{Q}_o = \omega^2 \bar{Q}_o \quad (B.10)$$

Assim, a matriz a ser decomposta para invertê-la é a matriz de massa.

A determinação das cargas críticas por aquele programa tem a expressão (4.69) transformada em :

$$(\bar{K})^{-1}\bar{G} \bar{Q}_o = -1/\lambda \bar{Q}_o \quad (B.11)$$

Neste caso, a matriz a ser decomposta é a matriz de rigidez por ser definida positiva e o valor da carga crítica é  $\lambda$  que é o inverso do maior auto-valor da equação (B.11).

## BIBLIOGRAFIA

1. VLASSOV, B. Z. Pièces Longues en Voiles Minces . Eyrolles, 1962.
2. PRZEMIENIECKI, J. S. Theory of Matrix Structural Analysis. New York, McGraw-Hill, 1968.
3. HURT, W. C. & RUBINSTEIN, M. F. Dynamics of Structures. N.J., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.
4. GERE, J.M. Torsional Vibrations of Beams of Thin-Walled Open Section. Journal of Applied Mechanics. 25. 381-385. Dec. 1954.
5. GERE J.M. & LIN, Y.K. Coupled Vibrations of Thin-Walled Beams of Open Cross Section. Journal of Applied Mechanics. 25 . 373-378. Sep. 1958.
6. TSO, W. K. Coupled Vibrations of Thin-Walled Elastic Bars. Journal Eng. Mech. Div. ASCE. 91 (EM3). 33-52. 1965.
7. ROBERTS, T. M. Natural Frequencies of Thin-Walled Bars of Open Cross Section . Journal of Eng. Mech. 113(10). 1584-1593. 1987.
8. MEI, C. Coupled Vibrations of Thin-Walled Beams of Open Section Using the Finite Element Method . Int. J. Mech. Sci. 12 . 883-891. 1970.
9. VENANCIO, F. F. & IGUTI, F. Vibrations of Grids by the Finite Element Method. Computers & Structures. 3 . 1331-1344. 1973.
10. KRAJGINOVIC, D. A Consistent Discrete Elements

Technique for Thinwalled Assemblages . Int. Jour. Sol. Struct. 5 . 839-863. 1968.

11. FRIBERG, P. O. Beam Element Matrices Derived from Vlassov's Theory of Open Thin-Walled Elastic Beams. Int. Journ. for Numerical Methods in Engin. 21 . 1205-1228. 1985.
12. MAGRAB, E. B. Vibrations of Elastic Structural Member. Maryland, Sijthoff & Noordhoff. 1979.
13. RACHID, M. Instabilidade de Barras de Secção Delgada . São Carlos, 1976. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos da USP.
14. MORI, D.D. Flexo-Torção : Teorias de 1ª. e 2ª. Ordem Automatização do Cálculo . São Carlos, 1978. Dissertação (Mestrado) . Escola de Engenharia de São Carlos da USP.
15. WARBURTON, G.B. The Dynamical Behavior of Structures . N.Y. Pergamon Press. 1976

## LISTA DE SÍMBOLOS

$x$	Eixo Longitudinal
$y, z$	Eixos Principais de Inércia com Origem no c.g.
$s$	Ordenada que percorre a Linha de Esqueleto
$t$	Variável Tempo
$u, v, w$	Deslocamentos nas Direções dos Eixos
$\phi$	Angulo de Rotação em Torno do Centro de Torção
$y_D, z_D$	Coordenadas do Centro de Torção
$n(s), h(s)$	Distâncias do Centro de Torção à um Ponto Genérico da Linha de Esqueleto
$\omega$	Área Setorial
$\delta$	Espessura da Parede
$\tau_e$	Tensão Tangencial com Distribuição Uniforme
$\tau_r$	Tensão Tangencial com Distribuição Linear
$\sigma_x$	Tensão Normal na Direção $x$
$\epsilon_x$	Deformação Específica na Direção $x$
$\gamma$	Distorção
$E$	Módulo de Elasticidade
$G$	Módulo de Elasticidade Transversal
$\rho$	Massa por Unidade de Volume
$N$	Força Normal
$M_y, M_z$	Momentos Fletores
$B$	Bimomento
$S$	Área da Secção Transversal
$J_y, J_z$	Momentos de Inércia à Flexão
$J_t$	Momento de Inércia à Torção

$J_{\omega}$	Momento de Inércia Setorial
$U_{\omega}$	Característica Geométrica de Vlassov
$k_y, k_z$	Coordenadas do Centro do Círculo de Estabilidade
$i_D$	Raio de Giração Polar
$r$	Segmento Característico; indica também Ordenada Perpendicular ao Esqueleto
$S(s)$	Área de uma Parte da Secção
$S_y(s), S_z(s)$	Momentos Estáticos
$S_{\omega}(s)$	Momento Estático Setorial
$Q_y, Q_z$	Forças Cortantes
$M_l$	Momento de Torção Livre
$M_{ft}$	Momento de Flexo-Torção
$u_i$	Energia de Deformação
$u_e$	Potencial da Forças Externas
$W$	Trabalho das Forças Externas
$\mathcal{T}$	Energia Cinética
$\Delta$	Encurtamento de Segunda Ordem
$q_n$	Frequências Naturais de Vibração
$q_{\phi}$	Frequência Natural Flexo-Torcional
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Frequências Naturais Acopladas
$\lambda$	Parâmetro de Carga
$x_e, y_e, z_e$	Sistema de Eixos Local
$h$	Vetor Definido pela Expressão (4.4)
$v, w, \phi$	Vetores Deslocamentos Nodais do Elemento
$q^e$	Vetor Deslocamento Nodal Total do Elemento
$Q$	Vetor Deslocamento Nodal
$A^e, B^e, C^e, D^e$	Matrizes Definidas pelas Expressões (4.26), (4.15), (4.16), (4.42)
$R_x^e, R_y^e, R_z^e, R^e$	Matrizes Projeção
$k^e, m^e, g^e$	Matrizes de Rigidez, de Massa e de Rigidez Geométrica do Elemento
$K, M, G$	Matrizes de Rigidez, de Massa e de Rigidez Geométrica da Barra Toda.