

DETERMINAÇÃO DE COEFICIENTE DE IMPACTO
EM PONTES ESTAIADAS SOB A AÇÃO DE
CARGAS MÓVEIS

AUTOR: ANA LUCIA H. EL DEBS

ORIENTADOR: Prof. Dr. FERNANDO VENANCIO FILHO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
ÁREA DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

DETERMINAÇÃO DE COEFICIENTE DE IMPACTO
EM PONTES ESTAIADAS SOB A AÇÃO DE CARGAS MÓVEIS

PROFA. ANA LÚCIA H. C. EL DEBS

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Doutor em Engenharia de Estruturas".

ORIENTADOR:
PROF. DR. FERNANDO VENÂNCIO FILHO

SÃO CARLOS, SETEMBRO DE 1990

RESUMO

Partindo-se do princípio de que as pontes estaiadas são estruturas bastante peculiares, faz-se inicialmente um apanhado geral sobre elas do qual constam histórico e tipologia, e cujo objetivo é o de situar o problema e mostrar a sua importância.

A discretização do problema, no espaço por meio do método dos elementos finitos, e no tempo, com um algoritmo de interpolação das forças de inércia, é feita a seguir.

A partir das expressões obtidas, faz-se um programa para cálculo automático do efeito dinâmico de passagem de veículos nas pontes estaiadas, com o qual se faz a análise de alguns exemplos.

Com base nesses resultados, algumas conclusões são tiradas e novos caminhos para pesquisa sugeridos.

ABSTRACT

Starting from the principle that stayed cable bridges belong to a particular kind of structures, initially a brief review on this subject is presented specially dedicated to its history and tipology in order to situate the problem under analysis and to show its importance.

The structure discretization to apply the finite element method and the time marching to take into account the dynamic effects using an algorithm for the inertial force interpolation are then developed.

From the expressions derived a computer code is written to compute dynamic effects due to the action of moving vehicles on stayed cable bridges. Using this code some examples are analysed.

Some conclusions are taken based on the results obtained and new ways to continue the research are suggested.

**DETERMINAÇÃO DE COEFICIENTE DE IMPACTO EM PONTES ESTAIADAS
SOB A AÇÃO DE CARGAS MÓVEIS**

I - Introdução

- I.1 - Preâmbulo
- I.2 - Histórico
- I.3 - Tipologia
- I.4 - Viabilidade econômica
- I.5 - Estágio atual do cálculo
- I.6 - Objetivos do trabalho
- I.7 - Contúdo do trabalho

II - Equacionamento geral do problema das cargas móveis

- II.1 - Definição do problema
- II.2 - Equação do movimento da estrutura
- II.3 - Modelagem do veículo
- II.4 - Sistema massa-mola e amortecedor-massa suspensa

III - Modelagem da estrutura por meio dos elementos finitos

- III.1 - Introdução
- III.2 - Considerações sobre o elemento de cabo
- III.3 - Determinação das matrizes de rigidez
 - a- Elemento de pórtico
 - b- Elemento de barra
- III.4 - Matrizes de massa a serem utilizadas
 - a- Elemento de pórtico
 - b- Elemento de cabo
- III.5 - Considerações sobre o amortecimento estrutural

IV - Estudo dos algoritmos de integração possíveis

IV.1 - Método da diferença central

IV.2 - Método de Houbolt

IV.3 - Método θ de Wilson

IV.4 - Método de Newmark

IV.5 - Algoritmos baseados na interpolação das forças de inércia

IV.6 - Aplicação do método escolhido ao problema em questão

V - Análise numérica

V.1 - Objetivos

V.2 - Exemplo escolhidos Ponte estaiada com Torre única.

V.3 - Veículo com velocidade constante = 17m/s(60km/h)

V.4 - Veículo com velocidade constante = 28m/s(100km/h)

V.5 - Comentário Finais.

VI - Conclusões

VI.1 - Análise dos resultados obtidos

VI.2 - Continuidade da pesquisa

VII - Bibliografia

Apêndice - Programa para cálculo de pontes estaiadas sob a ação de cargas móveis.

I - INTRODUÇÃO

I.1 - Preâmbulo

A idéia da substituição de apoios intermediários de pontes por cabos tem cerca de quatro séculos mas o desenvolvimento das pontes estaiadas, como hoje se concebem, tem apenas algumas décadas. A concepção inicial era promissora mas a carência de materiais adequados e de um maior conhecimento do comportamento peculiar dessas estruturas ocasionaram sucessivos desastres o que desencorajou a sua utilização por um longo tempo. Nos anos 50, com a necessidade de reconstrução na Alemanha do pós-guerra, esta idéia foi retomada, agora com novos recursos a lhe garantir o sucesso. Após uma análise cuidadosa das primeiras pontes construídas concluiu-se que a principal causa dos fracassos ocorridos foi a demora dos cabos a entrar em serviço, exigindo grandes deformações do tabuleiro para que isso ocorresse. Desta maneira, ocorria a ruína da estrutura antes que os estais atingissem o carregamento previsto. Era necessário, portanto, que se tomassem cuidados especiais na protensão desses cabos, o que só foi possível após o surgimento dos aços de alta resistência, conjuntamente com novos métodos de construção que foram desenvolvidos. Por outro lado, o progresso das análises estruturais teórica, com o uso dos computadores, permitindo a

solução de problemas com alto grau de hiperestacidade, e experimental, por meio da análise de modelos reduzidos, também muito contribuíram para um melhor conhecimento do comportamento peculiar dessas estruturas.

I.2 - Histórico

A técnica de se pendurarem vigas em torres por meio de cabos inclinados, utilizada pelos egípcios para a construção de navios mercantes, ainda na Antiguidade, pode ser considerada como a origem dos atuais "estais".

(Fig.I.1)

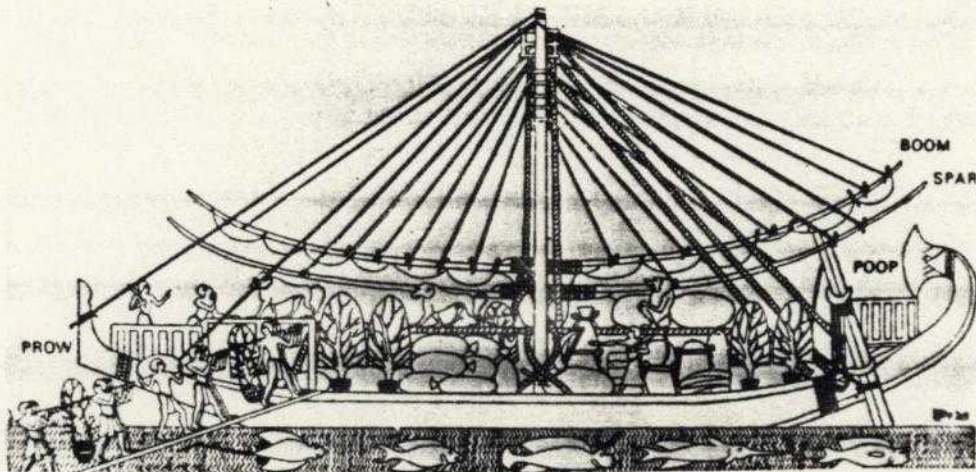


Fig. I.1

Até mesmo algumas precursoras das modernas pontes estaia-
das foram construídas em regiões tropicais da Ásia e África em épocas bastante remotas. Nada mais eram do que passarelas em bambu e cipó, presas às árvores por meio de cipós inclinados. Eram bastante rústicas e primitivas mas já

continham as idéias básicas que caracterizam as pontes estaiadas da atualidade. (Fig.I.2)

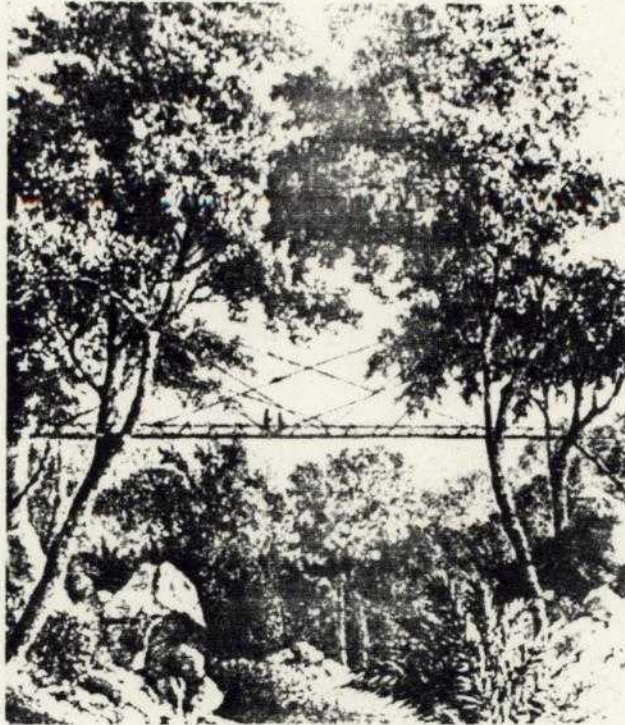


Fig.I.2

Em épocas mais recentes, no entanto, pode-se dizer que as pontes estaiadas surgiram por volta de 1617, quando um engenheiro veneziano de nome Verantius construiu uma ponte com várias correntes, presas a torres laterais, sustentando o tabuleiro. (Fig.I.3)

Desta época em diante, muitos sentiram-se atraídos por esta idéia e várias versões de pontes estaiadas foram sendo construídas.

As primeiras pontes utilizavam correntes ou barras como estais e foi somente com o advento dos cabos estruturais, com sua alta capacidade de carga para substituí-las, que surgiu o termo "pontes de cabo estaiado" que hoje é utilizado como sua designação genérica.

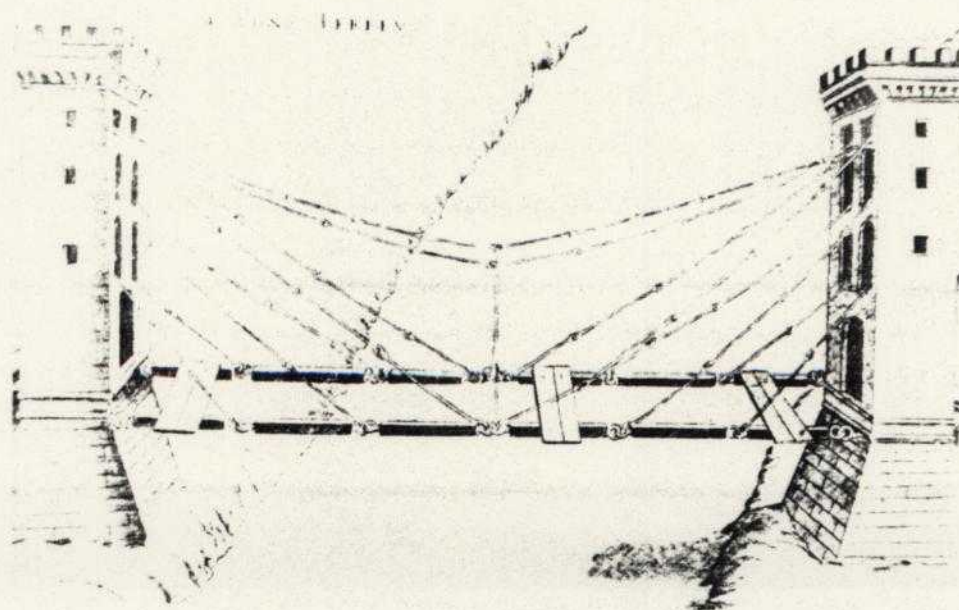


Fig.I.3 - Ponte enrigecida por espias, projeto de Faustus Verantius

Em 1784, um carpinteiro de Friburgo (Suíça), de nome C.J. Loscher, construiu uma ponte suspensa em madeira com 32m de vão, cujo sistema portante era constituído apenas por estais conectados a uma torre. (Fig.I.4)

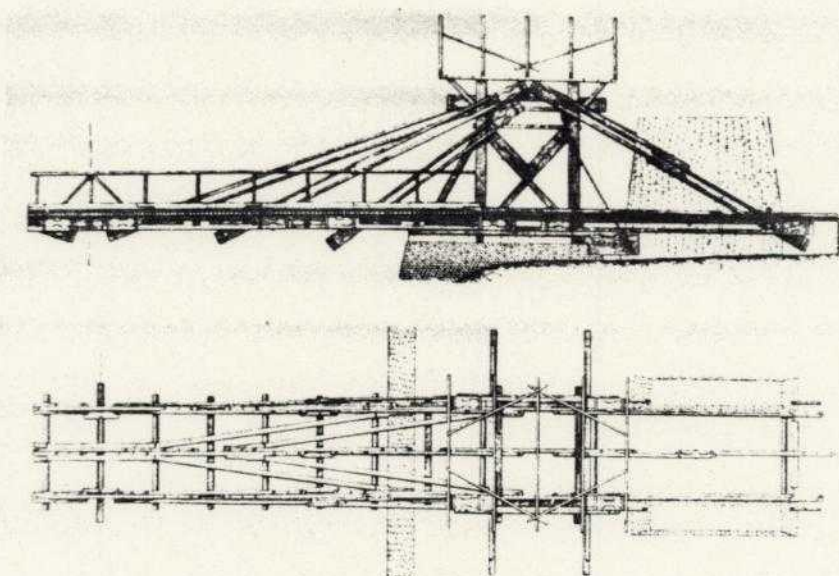


Fig.I.4 - Ponte em madeira enrigecida por estais também em madeira, projeto de Loscher (Alemanha, 1784).

Já em 1817 Redpath e Brown, engenheiros ingleses, construíram a passarela de "King's Meadow", com vão de 33,6m, utilizando estais inclinados, em arame, conectados a torres de ferro. (Fig.I.5)

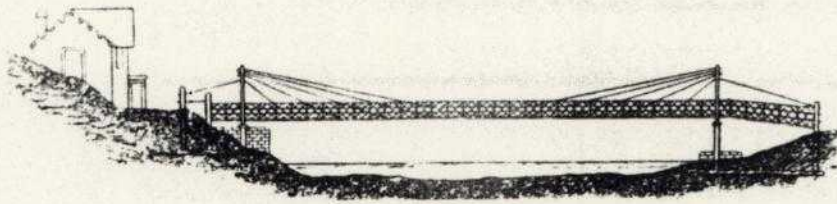


Fig.I.5 - "King's Meadows" (Inglaterra, 1817)

Provavelmente como consequência do sucesso deste empreendimento, o arquiteto francês Poyet sugeriu a construção de uma ponte utilizando estais em barras de aço, suspensos de altas torres, em 1821. (Fig.I.6)

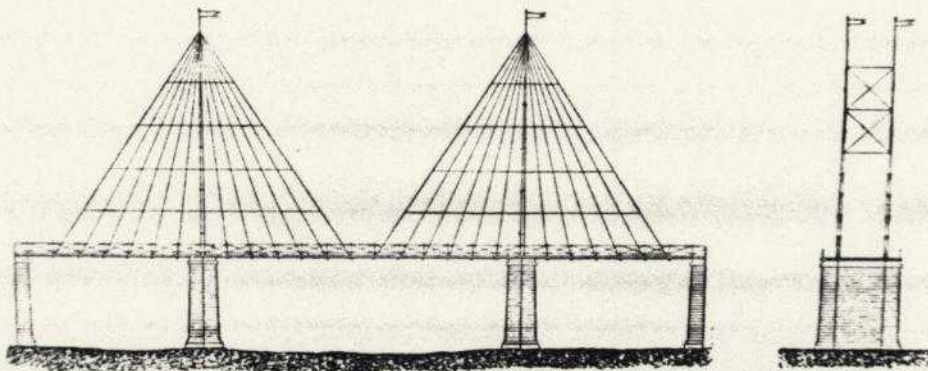


Fig.I.6 - Pontes estaiada com arranjo em leque, proposta por Poyet (França, 1821)

As aplicações do sistema teriam continuado, não fosse o colapso de duas pontes estaiadas ocorrido nesta época. O primeiro deles, em 1818, foi provocado por um temporal. Era uma ponte construída em Dryburgh Abbey sobre o Rio Tweed, com 79,3m de vão e 1,2m de largura (Fig.I.7)

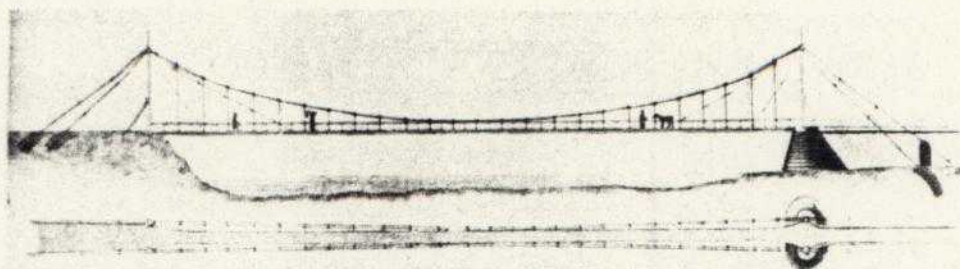


Fig.I.7 - Ponte de Dryburgh Abbey (Inglaterra, 1817)

Vibrações excessivas já tinham sido detectadas anteriormente com a travessia de pedestres, fornecendo indícios do que iria ocorrer. O outro problema ocorreu na Alemanha, em 1824, quando entrou em colapso uma ponte estaiada com 78m de vão, construída sobre o Rio Saale (Fig.I.8). Quando em serviço, esta ponte apresentava grandes deflexões, até que atingiu a ruína ao ser atravessada por um grande número de pessoas, provocando a ruptura dos estais. A causa exata não ficou clara: seria excesso de carga ou defeito de projeto? Entretanto, como o famoso engenheiro francês Navier, ao comentar esse fato, deu um parecer desfavorável, as pontes estaiadas foram preteridas pelas pontes pênséis para a travessia dos rios, permanecendo em relativa obscuridade durante décadas.

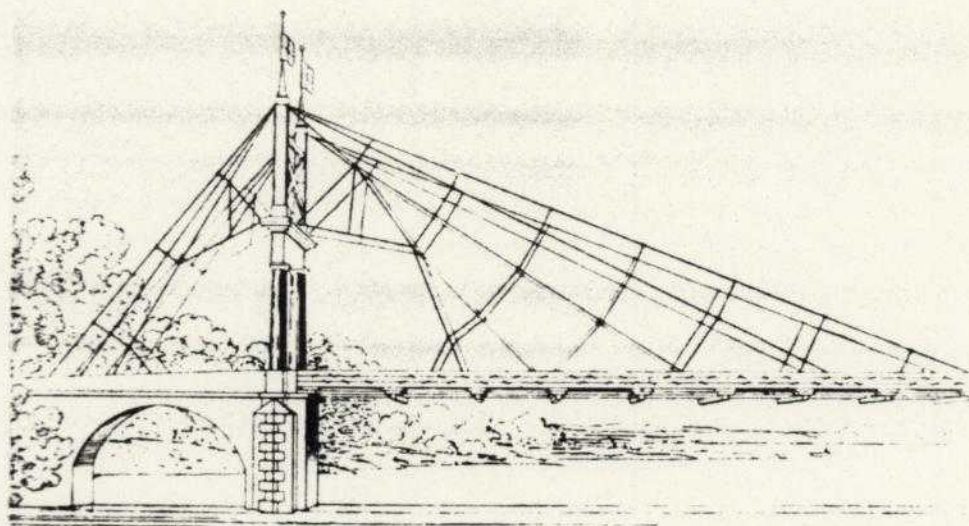


Fig.I.8 - Ponte sobre o Rio Saale (Alemanha, 1824)

A idéia dos estais não foi, no entanto, totalmente esquecida. Surgiram, por exemplo sistemas híbridos, onde as pontes pênséis eram enrijecidas por estais inclinados. O engenheiro americano John Roebling, por exemplo, foi responsável por uma série delas: a ponte Old St. Clair, em Pittsburgh, a ponte próxima às cataratas do Niágara, a ponte Cincinnati, sobre o Rio Ohio e a ponte de Brooklyn, em Nova Iorque. (Figs. I.9; I.10; I.11; I.12)

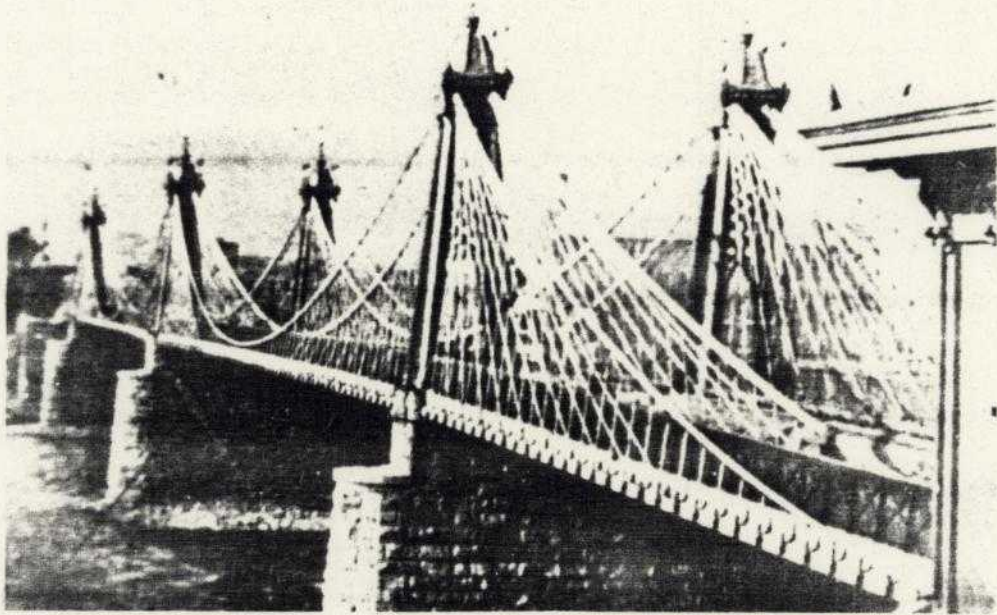


Fig.I.9 - Ponte Old St. Clair (Pittsburgh)

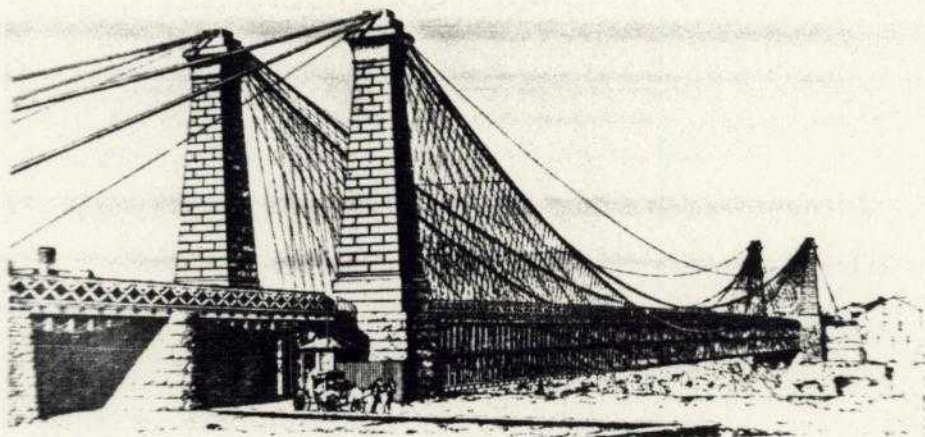


Fig.I.10 - Ponte sobre o Rio Niágara (EUA, 1855)

O funcionamento conjunto desses dois sistemas, no entanto, não era harmonioso, e, nos projetos seguintes de pontes pênséis, os estais foram suprimidos. A influência da idéia de Roebling, no entanto, ainda se fez sentir numa ponte em Wheeling, na Virginia Ocidental. O projeto inicial não previa estais. Estes foram instalados posteriormente, provavelmente como uma tentativa de enrigecimento do

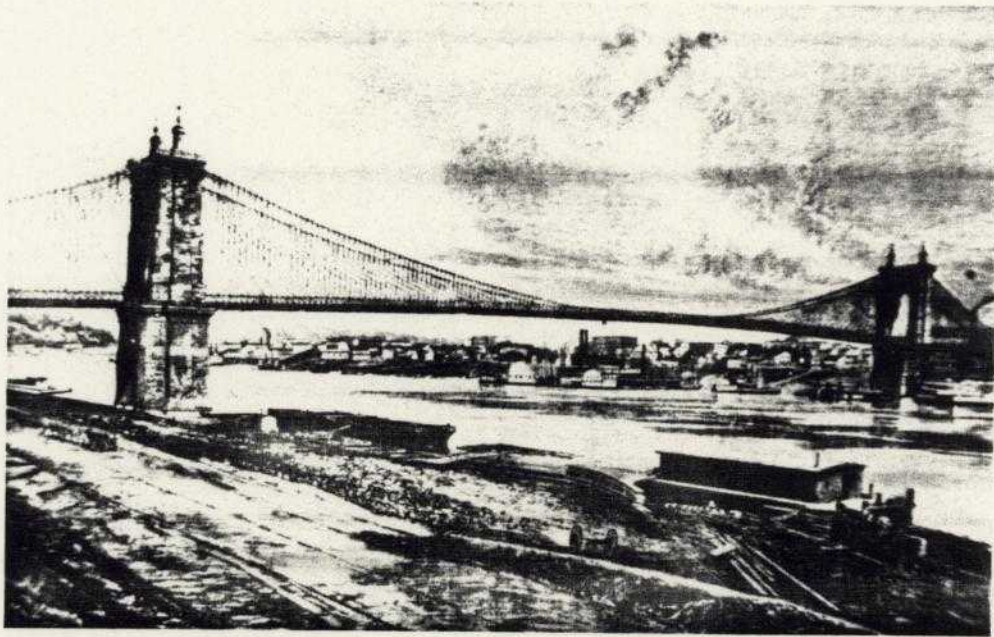


Fig.I.11 - Ponte Cincinnati, sobre o Rio Ohio (EUA, 1867)

sistema pênsil para resistência às pressões do vento. A falência de algumas pontes pênséis, por esta época, como consequência de ações dinâmicas, é que deve ter induzido Roebling a criar esse sistema híbrido, já que os estais realmente diminuem a sensibilidade das pontes pênséis às cargas de vento. O que não se sabe é se o seu projeto era o de uma estrutura onde os dois sistemas trabalhavam conjuntamente, ou de uma estrutura pênsil, onde os estais funcionavam apenas de maneira secundária para resistir às cargas acidentais.

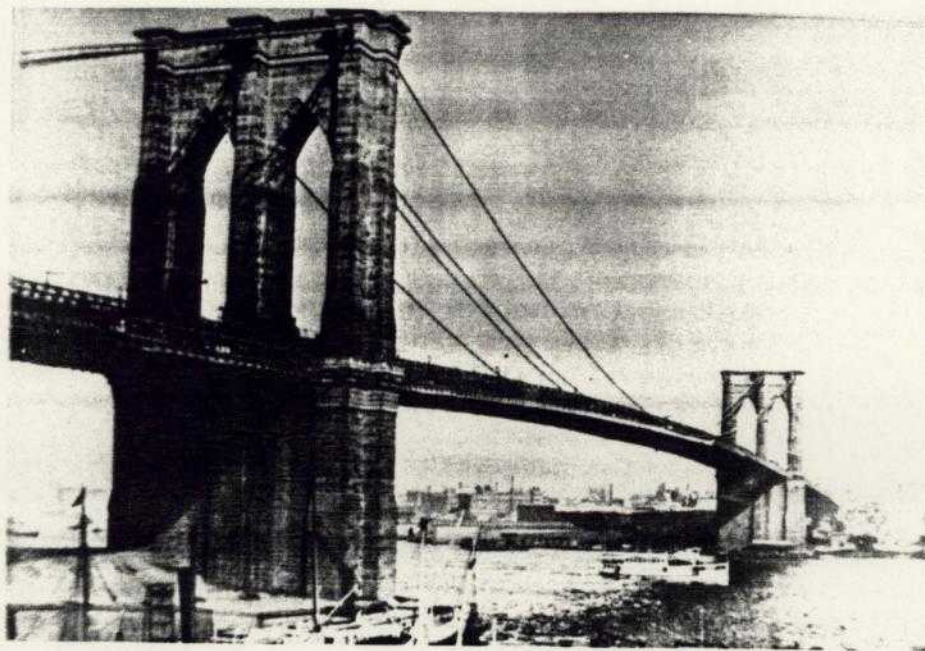


Fig.I.12 - Ponte de Brooklyn (EUA, 1833)

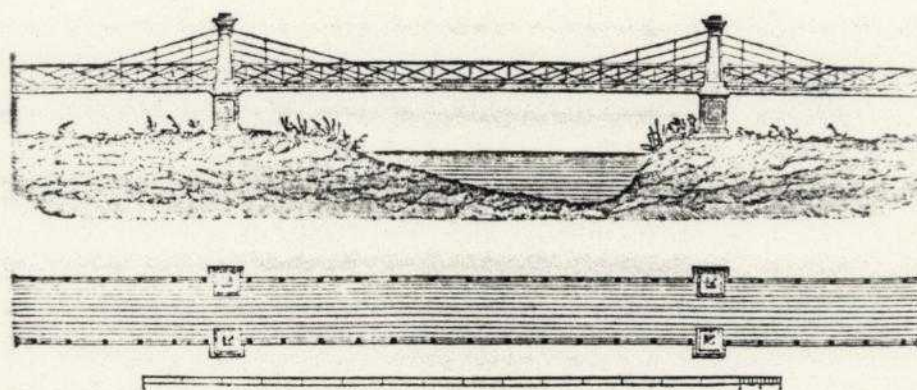


Fig.I.13 - Ponte Tiverton (Inglaterra, 1837)

Depois das críticas de Navier e das ruínas das pontes na Alemanha e Inglaterra, poucos projetos em pontes estaiadas surgiram. Pode-se citar, por exemplo, a ponte em Tiverton (Inglaterra), construída por Motley em 1837, cuja estrutura consistia de balanço duplo com estais paralelos. Com esse mesmo tipo de arranjo, Hatley projetou uma ponte na Inglaterra em 1840 (Fig.I.14)

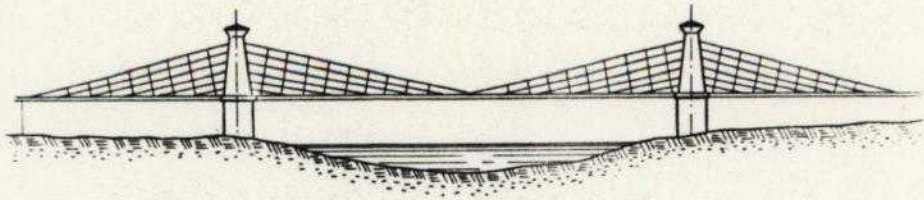


Fig.I.14 - Ponte projetada por Hatley (Inglaterra, 1840)

Outra estrutura interessante a ser citada é a ponte sobre o "Canal de Navio de Manchester", na Inglaterra (Fig.I.16). E, utilizando um sistema um pouco diferente, há o projeto de Clive, datado de 1843 (Fig.I.16).

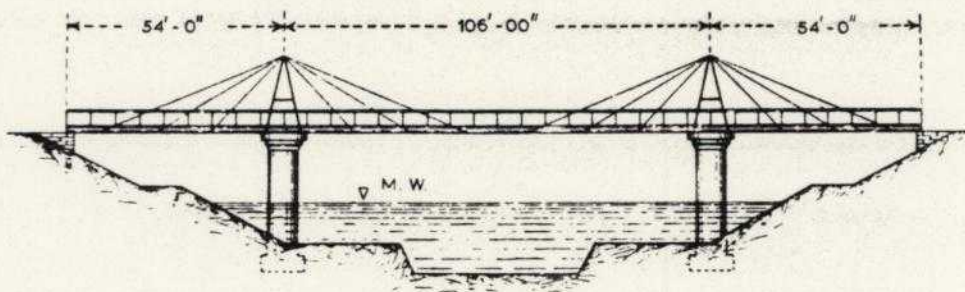


Fig.I.15 - Ponte em Manchester (Inglaterra)

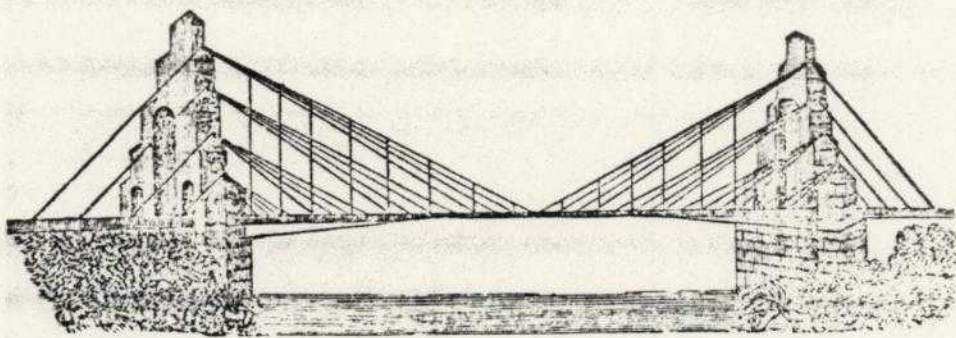


Fig.I.16-Ponte Projetada por Clive

Uma interessante combinação entre a ponte estaia da e a ponte pênsil é representada pela ponte Francisco José (Fig.I.17), projetada por Ordish e Le Feuvre em 1868,

localizada sobre o Rio Moldava, em Praga (Tchecoslováquia).

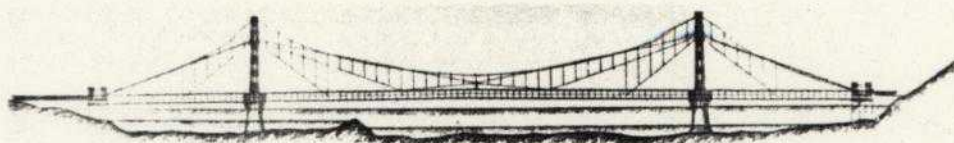


Fig.I.17 - Ponte Francisco José (Tchecoslováquia, 1868)

Também construída por Ordish, tem-se a ponte Alberto, de 1873, sobre o Rio Tâmis, com vão principal de 122m, e estrutura composta de estais convergindo ao topo de 4 torres além do sistema pênsil tradicional (Fig.I.18).



Fig.I.18 - Ponte sobre o Rio Tâmis (Inglaterra 1873)

Com esse breve relato pode-se ter uma idéia da evolução das pontes estaiadas ao longo do tempo e entender as causas que levaram os projetistas a abandonarem o seu uso no final do século 19 e início do século 20. Estas pontes realmente possuíam defeitos que acabavam por levá-las à ruína, e que hoje, com a perspectiva dos anos, podem

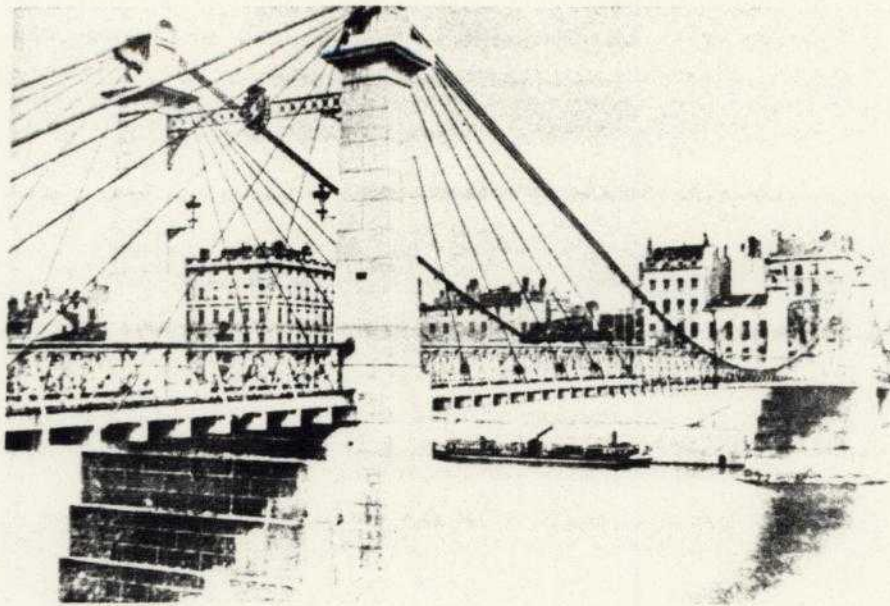


Fig.I.19 - Ponte sobre o Rio Saône (França, 1888)

ser melhor entendidos. Havia, inicialmente, um desconhecimento muito grande do comportamento real dessas estruturas, principalmente no que diz respeito aos cabos. Eram estruturas com alto grau hiperestaticidade, solicitadas por cargas estáticas e dinâmicas que tornavam sua análise efetiva praticamente impossível para os projetistas daquela época. Além disto, existiam também defeitos construtivos que comprometiam todo o esquema resistente das pontes. Os cabos não tinham uma seção transversal adequada e não eram esticados durante a construção. O tabuleiro era obrigado a resistir sozinho até que, com grandes deformações, solicitasse feticivamente os cabos. Isto dava uma idéia falsa de que as pontes estaiadas eram muito flexíveis e inseguras. Foi apenas no

século 20, com a introdução dos cabos de aço e o desenvolvimento do cálculo estrutural, que foi possível a retomada do sistema de pontes estaiadas.

Já no século 20, o engenheiro francês Arnodin projetou uma série de pontes onde os estais inclinados eram utilizados nos quartos de vão próximos às torres, sendo que a parte central do vão é pênsil. Podem ser citadas, por exemplo, a ponte sobre o Rio Saône, em Lyon, com 121m de vão (Fig.I.19), a ponte sobre o Rio Rhône em Avignon (Fig. I.20), a Ponte "Bonhomme" (Fig.I.21), com vão central

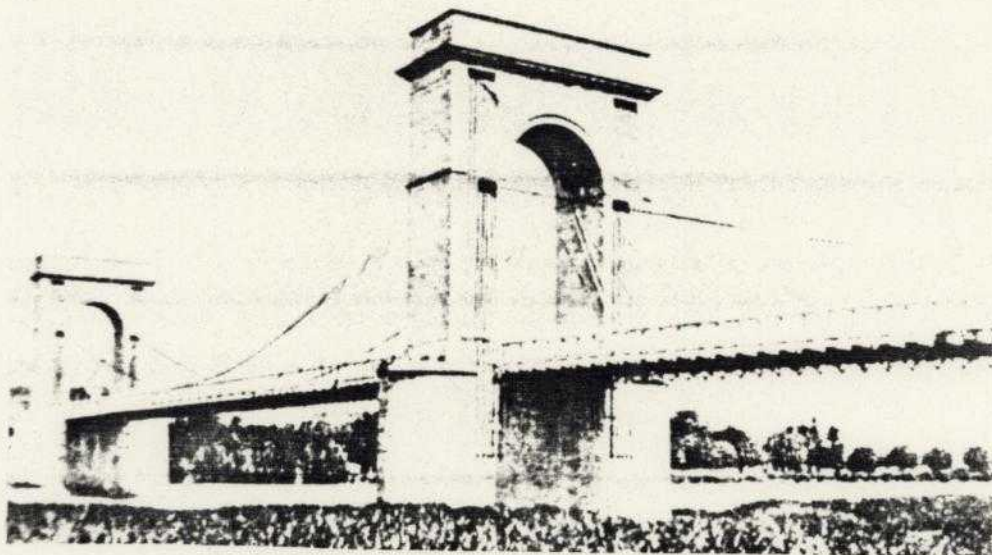


Fig.I.20 - Ponte sobre o Rio Rhône (França, 1904)

de 163m e vãos laterais de 37m cada, datada de 1904, e a ponte construída em Nantes, em 1903, cujas torres treliçadas transmitem uma sensação de leveza e elegância. (Fig.I.22).

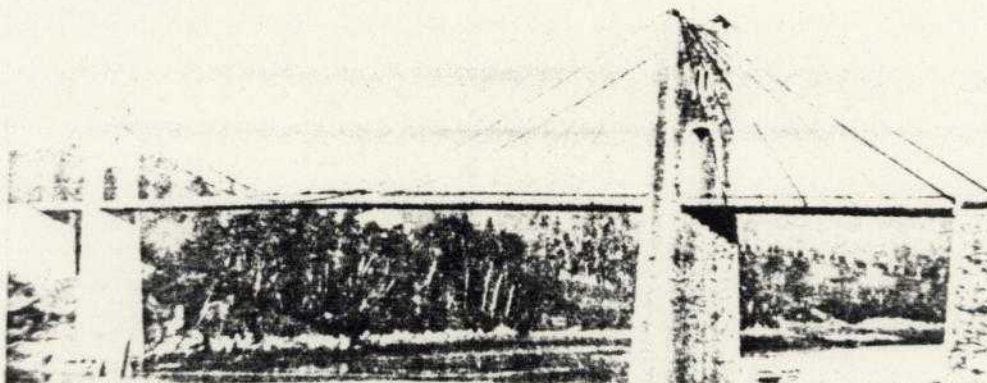


Fig.I.21 - Ponte sobre o Rio Blavet (França, 1904)

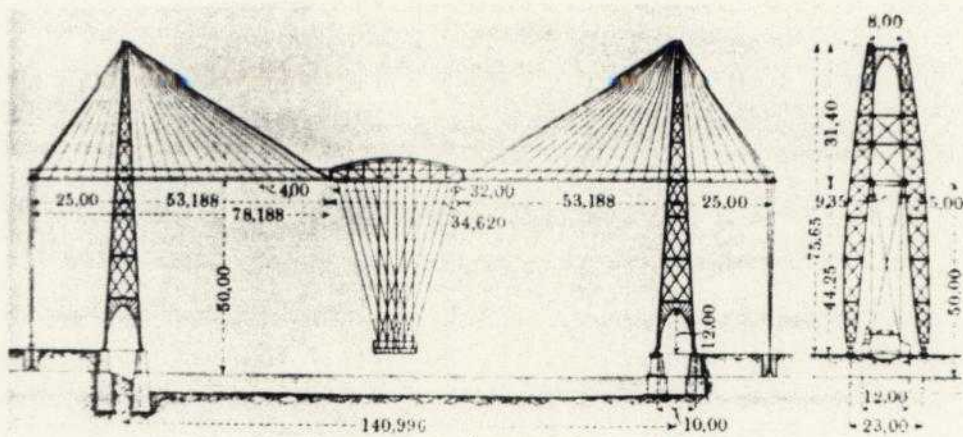


Fig.I.22 - Ponte em Nantes (França, 1903)

Um outro nome a ser lembrado é o de Gisclard, engenheiro francês que criou um sistema bastante estável de treliça de cabos, cujo esquema estático é semelhante ao de um arco triarticulado, onde as diagonais feitas de cabos não transferem para as vigas as componentes horizontais das suas forças (Fig.I.23). Este sistema foi bastante usado na

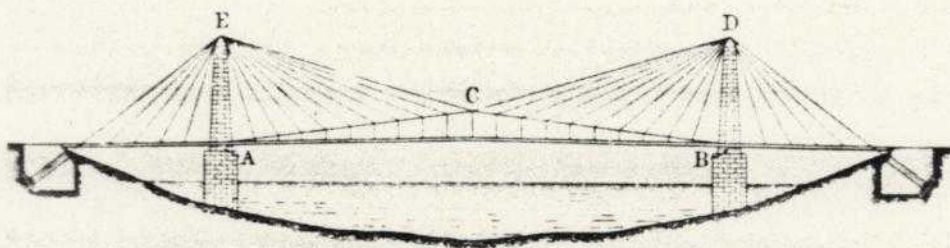


Fig.I.23 - Sistema proposto por Gisclard

França e em suas colônias, e como exemplo típico pode ser lembrada a Ponte Ferroviária de Cassagne, com 156m de vão central, construída em 1907 (Fig. I.24). Seguindo os passos de Gisclard, Leinekugel Le Cocq, outro engenheiro francês, propôs um sistema em que a força horizontal dos cabos é totalmente transferida às vigas, resultando num sistema bastante econômico e pouco deformável. A ponte Lezardrieux sobre o Rio Trieaux, na França, projeto dele, datado de

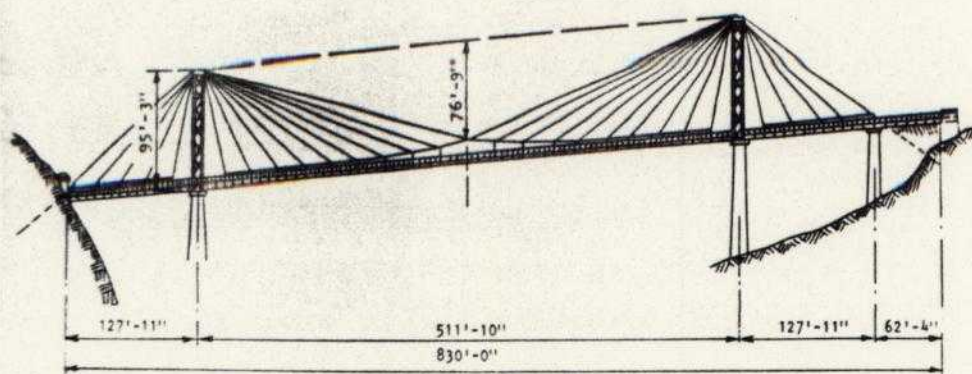


Fig.I.24 - Ponte de Cassagne(França, 1907)

1925, é considerada como sendo a primeira ponte estaiada de concepção moderna (Fig.I.25)

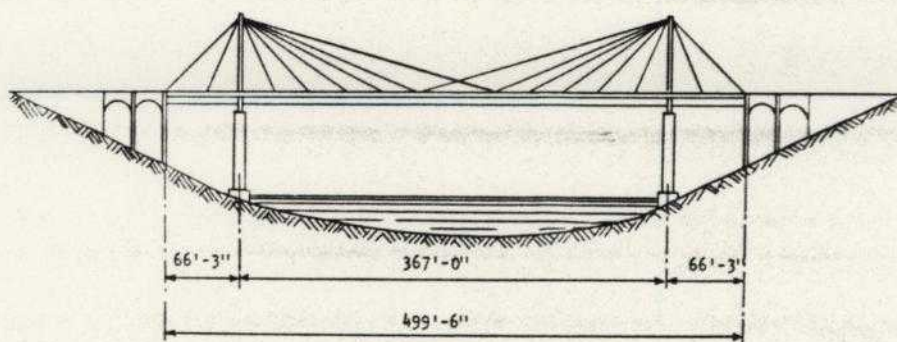


Fig.I.25 - Ponte Lezardrieux (França, 1825)

Dischinger, em 1938, introduziu estais numa ponte pênsil ferroviária de 753m de vão sobre o Rio Elba, percebendo sua contribuição efetiva na rigidez e na estabilidade da estrutura, desde que garantida a sua efetiva participação no esquema estrutural através de uma protensão inicial dos cabos (Fig.I.26).

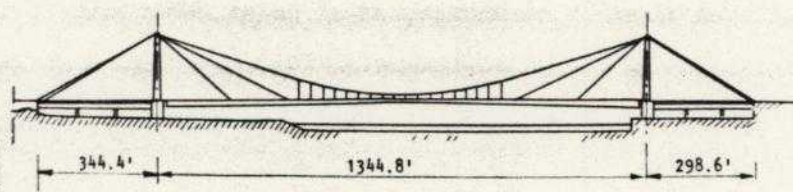


Fig.I.26 - Sistema proposto por Dischinger (Alemanha, 1938)

Durante a II Guerra Mundial, a Alemanha teve cerca de 15.000 pontes destruídas, o que incentivou os projetistas a lançarem mão de novas técnicas construtivas, cujo objetivo principal era o de diminuir o consumo de aço, em falta no mercado da época. Em função disto, houve o desenvolvimento das placas ortotrópicas que, associadas aos estais, resultaram em projetos de pontes com peso 40% inferior aos dos projetos anteriores à II Guerra, com a vantagem adicional da rapidez na construção, o que fez das pontes estaiadas as preferidas para essas reconstruções.

Considerada um marco no desenvolvimento das pontes estaiadas, a ponte de Stromsund, na Suécia, completada em 1955, foi um projeto do engenheiro alemão Dischinger - (Fig.I.27).

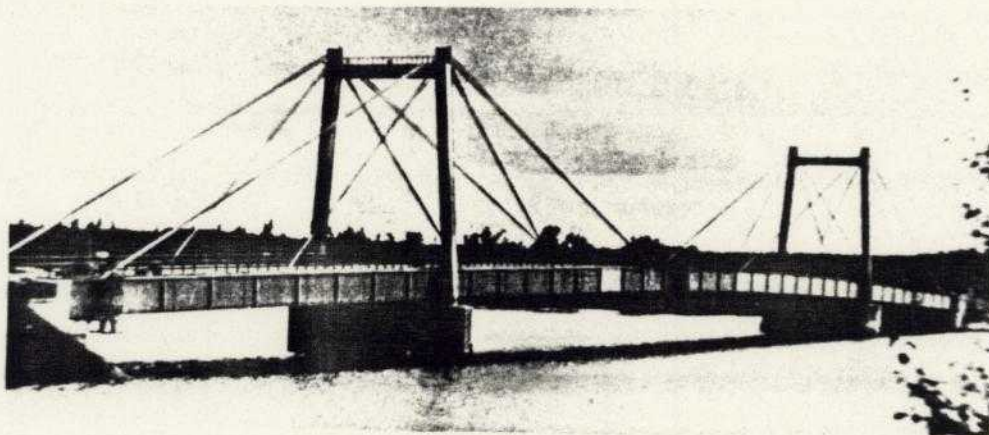


Fig.I.27 - Ponte de Stromsund (Suécia, 1955)

Uma ponte sobre o Reno, em Dusseldorf, utilizando o esquema estrutural semelhante, foi projetada por Leonhardt em 1952 e construída em 1958.

A partir daí, surgiram várias pontes estaiadas, a maioria na Alemanha, algumas distribuídas por outros países do mundo.

Para se ter uma idéia dessa evolução, alguns números podem ser fornecidos. Assim, de 1955 até 1972, 43 pontes estaiadas foram projetadas ou construídas, sendo 13 das quais na Alemanha. Em 1974, já eram 50 ao todo; em 1977, 62, sendo que Alemanha Ocidental contribuiu com 16,

o Japão com 8, os Estados Unidos com 6 e a França com 5. Em 1985, já havia nos Estados Unidos 7 pontes estaiadas em serviço, 6 em construção, e 4 em estudos.

Tudo indica, portanto, uma tendência de crescimento e popularização dessas pontes por todo o mundo, principalmente como consequência de suas qualidades intrínsecas: economia, facilidade de construção e aparência esteticamente satisfatória, justificando-se, assim, o interesse em estudar e conhecer melhor o seu comportamento.

Finalmente, pode-se dizer que as pontes estaiadas estão incorporadas à engenharia de pontes moderna, com os seus insucessos sendo definitivamente superados.

1.3 - Tipologia

A principal característica das pontes estaiadas é a leveza que resulta do fato dos pilares intermediários serem substituídos pelos estais. Desta forma, elas são bastante adequadas quando existe a necessidade de vencer grandes vãos, como é o caso de rios, vales profundos, ou ainda passarelas para pedestres e viadutos, onde a construção de pilares seriam muito difícil, ou causaria obstruções indesejáveis ao tráfego.

Definida a preferência por uma ponte estaiada, resta agora caracterizá-la através do arranjo dos cabos.

Em relação aos vãos, pode-se ter 3 tipos básicos: 2 vãos (simétricos ou assimétricos), 3 vãos ou múltiplos vãos. Nas pontes com 2 vãos assimétricos, o vão maior é da ordem de 60 a 70% do comprimento total. Para pontes com 3 vãos, o vão central representa cerca de 55% do comprimento total. Quando os vãos são em maior número, geralmente têm o mesmo comprimento, exceto os vãos extremos cujas dimensões são funções das condições geográficas do local de implantação.

Em relação aos cabos, as pontes podem ser classificadas pelo seu arranjo transversal e longitudinal.

Transversalmente, os cabos podem estar contidos em um ou dois planos, e podem ser colocados, simetricamente ou não, em planos verticais ou inclinados.

O arranjo com apenas um plano de cabos é geralmente simétrico, dividindo o tabuleiro ao meio, sem contudo se constituir numa barreira visual. A estrutura resultante é econômica e esteticamente bastante satisfatória necessitando, contudo, de uma pequena largura adicional do tabuleiro para o alojamento dos cabos e das torres. Além disto, em função das forças concentradas relativamente altas que os cabos transferem ao tabuleiro, normalmente existe a necessidade de uma armadura e do enrigecimento do tabuleiro para se obter uma melhor distribuição do esforço ao longo da seção transversal dos elementos. Neste tipo de ponte, os cabos resistem apenas ao esforço vertical da gravidade. Os efeitos torsionais provocados pelas cargas dos veículos e do vento, deverão ser absorvidos por uma viga-caixão, que irá transmitir-las posteriormente para os pilares. A colocação do plano dos cabos de maneira assimétrica é possível apenas para passarelas de pedestres, onde a carga torsional é pequena, sendo facilmente absorvida pela estrutura.

Quando os planos que contêm os cabos são dois, pode-se ter o caso onde ambos são verticais, ou então inclinados e convergentes, sempre passando pelas laterais do tabuleiro. No segundo caso, a torre costuma ser um pórtico em forma de A, que recebe os cabos no seu topo. A outra extremidade dos cabos é presa à ponte, podendo estar localizada dentro ou fora do tabuleiro. Se estiver fora, não há necessidade de largura adicional para a ancoragem dos cabos mas, em compensação, vai ser preciso colocar um reforço adicional para transmitir os esforços dos cabos para as vigas principais de superestrutura (Fig.I.28).

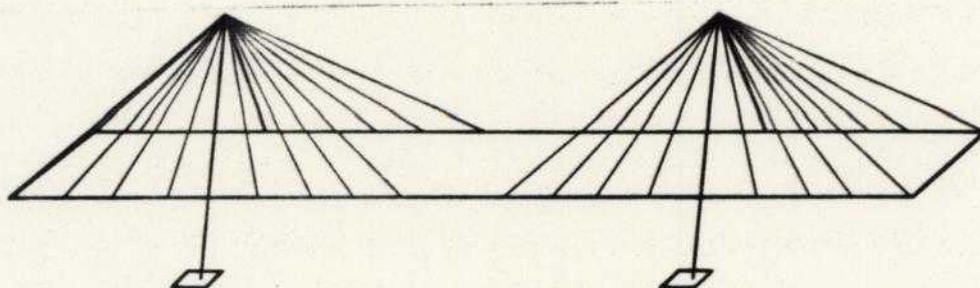


Fig.I.28 - Ponte com 2 planos de cabos

Como curiosidade pode-se citar ainda o caso de uma ponte onde existem 3 planos de cabos, um no meio e dois nas extremidades, arranjo esse bastante adequado para as áreas urbanas, onde o volume de tráfego exige um tabuleiro mais largo.

Quanto ao arranjo longitudinal dos cabos, existem muitas opções, ditadas principalmente pelas dimensões dos vãos e pela altura das torres. Basicamente, os sistemas possíveis são 4: radial, harpa, leque ou estrela (Fig. I.29).

SISTEMA DE CABOS		SIMPLES	DUPLO	TRIPLO	MULTIPLA	VARIÁVEL
		1	2	3	4	5
1	CONVERGENTE OU RADIAL					
2	HARPA OU PARALELO					
3	LEQUE					
4	ESTRELA					

Fig.I.29 - Arranjo longitudinal dos estais

O fator econômico é também um fator de peso na determinação do arranjo e do número dos cabos. Poucos cabos resultam em grandes forças o que dificulta a ancoragem, tanto nas torres quanto no tabuleiro, além de significar reforços adicionais para a absorção das altas cargas concentradas. Além disso, o menor número de cabos implica em maior vão a ser vencido pelas vigas, resultando em peças com maior altura. Um grande número de cabos proporciona um apoio contínuo para as vigas, melhora o comportamento aerodinâmico da estrutura, além de facilitar a construção, com cada novo trecho sendo suportado pelos estais correspondentes, sem necessidade de estruturas de apoio temporárias (técnica dos balanços sucessivos).

Em relação às torres, pode-se dizer que existe a mesma diversidade de opções que há para o arranjo dos cabos. Pode-se ter apenas uma barra em balanço, para o caso de um só plano de cabos, ou duas barras em balanço quando o sistema de cabos é duplo. A ligação na base das torres pode ser engaste ou articulação, função da dimensão da carga vertical e da distribuição dos arranques dos cabos ao longo do seu comprimento. Pórticos do tipo portal, unindo as duas torres, também podem ser utilizados, ou com base articulada, se se quer fugir dos altos momentos, ou engastada, quando a altura das torres for menor, reduzindo os momentos na base.

A extremidade engastada parece ser a preferida, principalmente pelas dificuldades encontradas na construção dos pilares articulados que, sem o travamento dos cabos, necessitam de apoios externos provisórios para se tornarem isostáticos.

Quanto ao tipo de torre utilizada, vários fatores devem ser levados em consideração para se chegar a uma escolha. O pórtico em forma de A, por exemplo, exige um apoio bastante largo para acomodar as suas duas pernas abaixo da superestrutura e isto pode ser prejudicial, caso exista necessidade de espaço livre abaixo dela. Nesse

caso, modificações no pórtico podem ser alternativas viáveis, como por exemplo em forma de diamante ou delta (Fig.I.30)

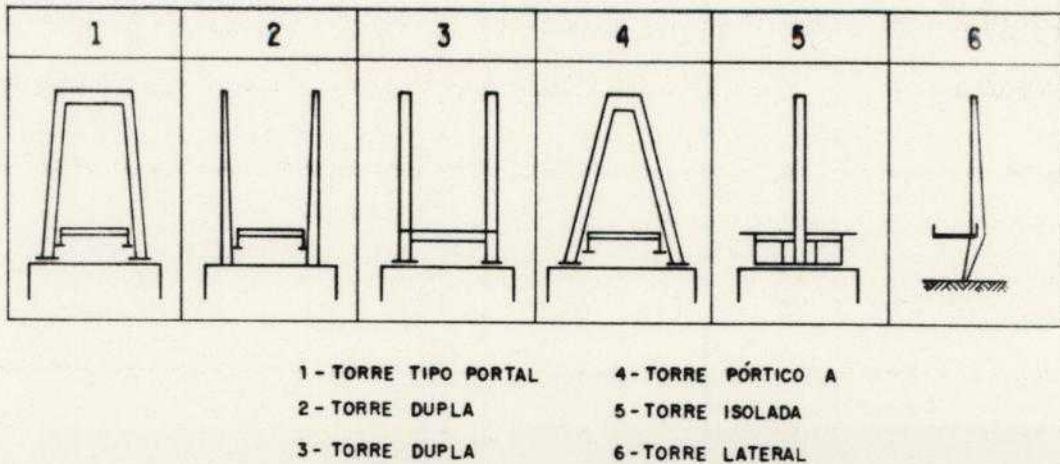


Fig.I.30

Os materiais utilizados para as torres são o aço estrutural ou, quando a opção é pelos materiais disponíveis no local, o concreto armado. A seção, em geral, é celular, tanto para o aço como para o concreto. Atualmente existe uma certa preferência por torres de concreto, mesmo quando o tabuleiro é em aço, principalmente por causa do bom desempenho do concreto à compressão. Um outro parâmetro a ser discutido é a altura das torres, cuja definição depende principalmente da relação vão/altura e do arranjo dos cabos, sem esquecer, é claro, o senso estético do projetista, que pode até projetar uma altura adicional, sem função estrutural, apenas para equilibrar as proporções.

Para o tabuleiro, o grande progresso foi o desenvolvimento das lajes ortotrópicas em aço, solução adotada pela maioria das pontes estaidas, com variações nas seções transversais das vigas longitudinais e, conseqüentemente, nos espaçamentos das vigas transversais. O espaçamento usual para as transversinas de seção aberta é da ordem de 2m e, para as de seção fechada, de cerca de 5m. O tabuleiro funciona como a mesa superior das vigas ou treliças principais. Para vãos pequenos (entre 60 e 90m) pode-

se usar ainda um tabuleiro em concreto com uma grelha em aço, ou mesmo um tabuleiro com vigas em concreto armado ou protendido, tudo agindo monoliticamente. Para estruturas de apoio em aço, pode-se ter vigas tipo I, vigas de seção caixão, retangulares ou trapezoidais, ou ainda, treliças metálicas. O maior problema destes tipos de estrutura é o risco de corrosão, o que exige uma manutenção constante, principalmente das treliças. Quando a opção é pelo concreto, a seção típica é a seção celular formando, em conjunto o tabuleiro, uma estrutura monolítica de grande rigidez e características de amortecimento bastante favoráveis (Fig.I.31 e Fig.I.32).

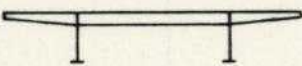
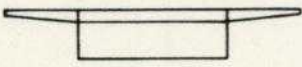
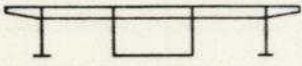
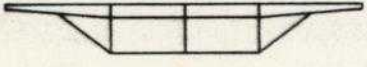
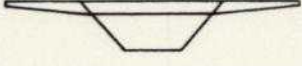
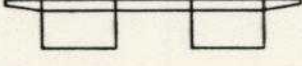
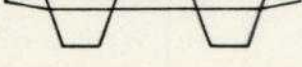
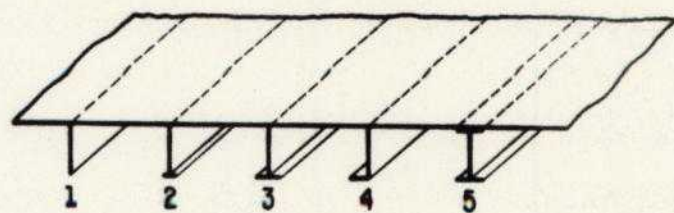
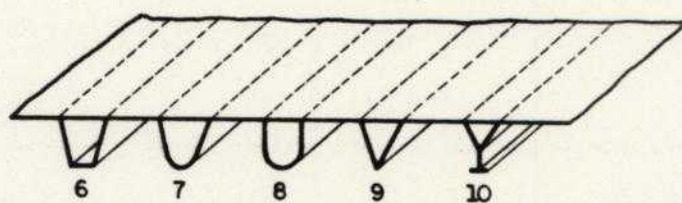
TIPOS DE VIGAS PRINCIPAIS		
ARRANJO		SEÇÃO TRANSVERSAL DO TABULEIRO
1	VIGAS I DUPLAS	
2	VIGA CAIXÃO RETANGULAR ÚNICA	
3	VIGA CAIXÃO CENTRAL E VIGAS LATERAIS ABERTAS	
4	VIGAS CAIXÃO MONOLÍTICAS E SUPORTES LATERAIS INCLINADOS	
5	VIGA CAIXÃO TRAPEZOIDAL	
6	VIGAS CAIXÃO RETANGULARES DUPLAS	
7	VIGAS CAIXÃO TRAPEZOIDAIS DUPLAS	

Fig.I.31



a) Seção aberta, sem resistência à torção



b) Seção caixão, com rigidez à torção

Fig.I.32 - Transversinas Usuais

I.4 - Viabilidade Econômica

Quando se pensa em termos de custo, não existe uma regra a ser seguida. O que existe são estudos para obras já executadas que podem fornecer indícios para a construção de uma nova ponte.

Estudos comparativos mostram que as pontes estaiadas são viáveis para vãos intermediários (vão central de aproximadamente 200 a 250m) no caso de autoestradas, e vãos em torno de 150m para passarelas de pedestres, preenchendo a lacuna entre as pontes em viga e as pontes pênses (ver Fig.I.33)

Na Figura I.33, extraída de Troitsky (1977) os coeficientes C_S , C_H e C_F são adimensionais que, multiplicados por um certo fator, resultam no peso do aço dos cabos utilizados respectivamente nas pontes pênses, estaiadas tipo harpa e estaiadas tipo leque. A variação destes valores em função da relação h/l é apresentada na

figura, e os seus mínimos assinalados. Como se pode perceber entretanto, o mínimo consumo de aço para cabo não corresponde ao mínimo custo da ponte, já que o aço para a altura adicional da torre deve também ser considerado. Nas pontes pênses a relação h/l é da ordem de 1/9 enquanto que para pontes-estaiadas varia de 1/5 a 1/6 o que significa que as pontes pênses necessitam quase duas vezes mais aço para os cabos que as pontes estaiadas.

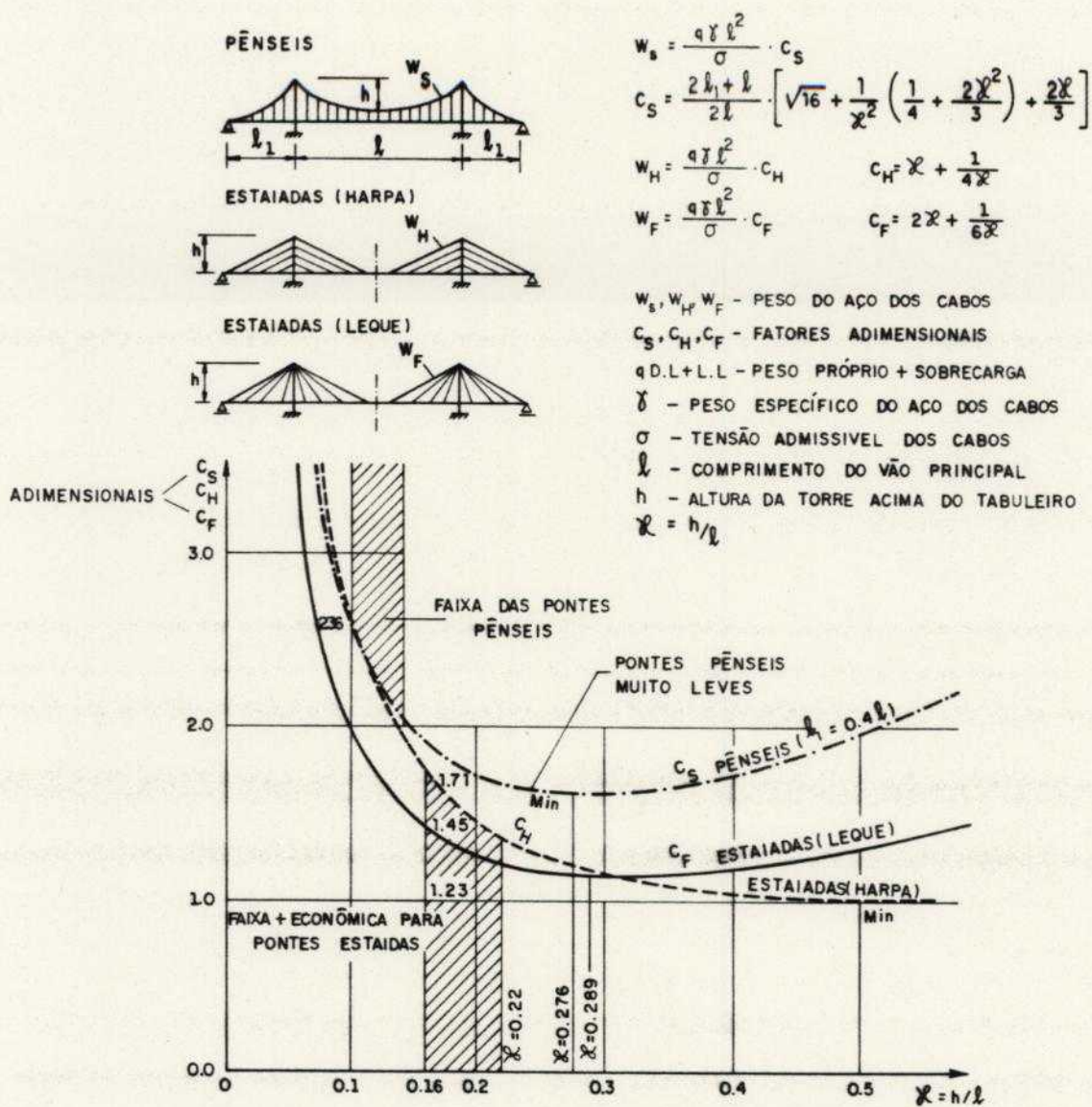


Fig.I.33 - Quantidade de aço para os cabos em função de h/l para pontes pênses e estaiadas.

Leonhardt concluiu que, com as modernas técnicas de construção, as pontes estaiadas já são adequadas a vãos de cerca de 600m, podendo ser construídas até para vãos de 1500m.

Estudos comparativos de custos foram feitos por diversos autores, cada um deles levando em conta as condições do seu país: P.R. Taylor, no Canadá, Dubrova, na União Soviética e Gute, nos Estados Unidos.

Alguns desses resultados podem ser vistos na Figura I.34, também fornecida por Troitsky (1977)

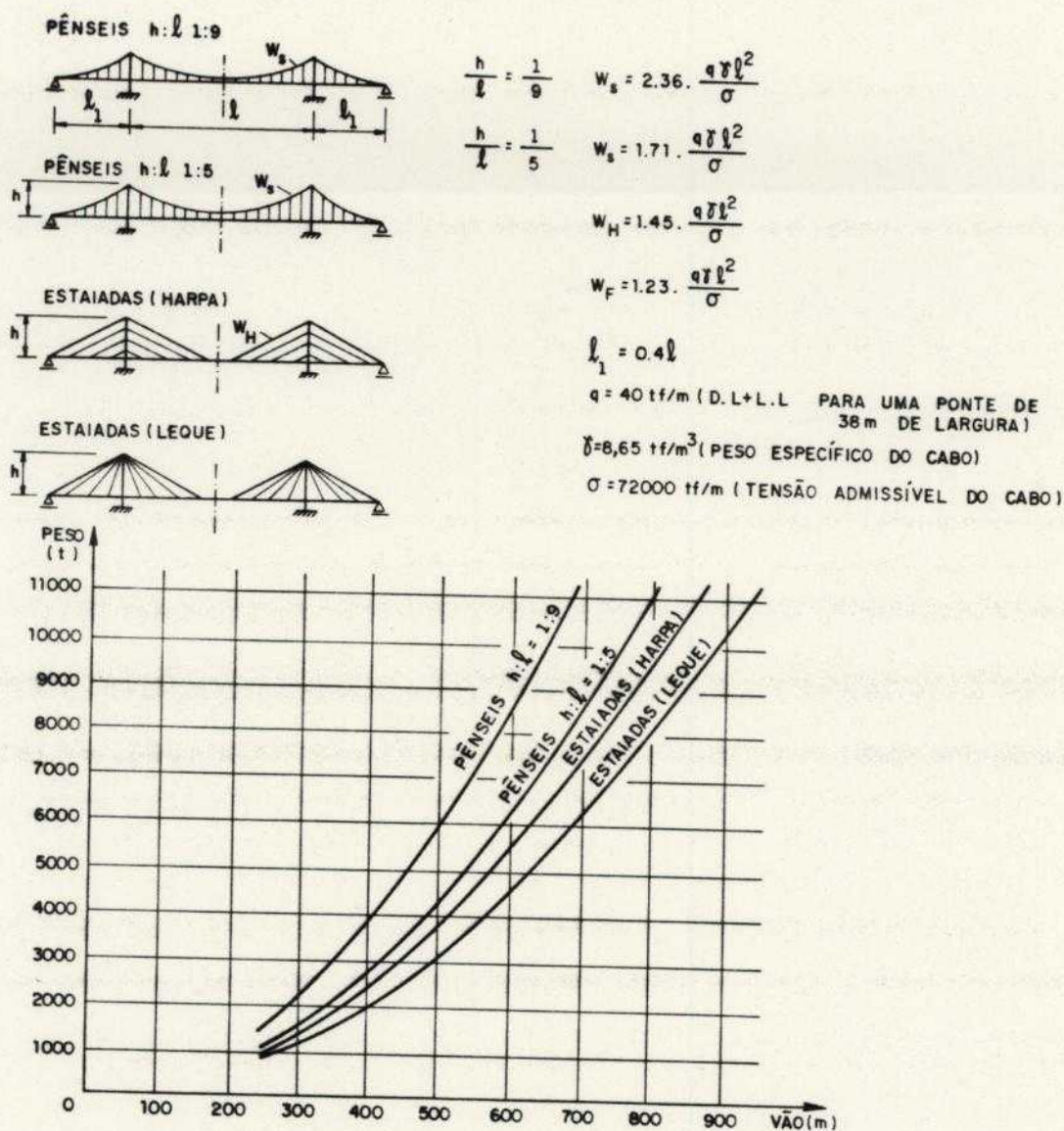


Fig.I.34

O sistema radial, ou convergente, tem os cabos se interceptando em um único ponto no topo da torre, enquanto o sistema em harpa tem os cabos paralelos e equidistantes, com ancoragem em diversas alturas das torres.

Já o arranjo em leque é uma combinação dos anteriores, sendo os cabos conectados, geralmente, ao terço superior das torres, sem manter o paralelismo.

No arranjo em estrela, os cabos saem de diferentes alturas das torres, indo se unir depois nas ancoragens, que, no caso do vão extremo, normalmente ocorrem no pilar extremo da ponte.

A preferência por qualquer desses sistemas é função da geografia do local, do número de pistas necessárias, e também do projetista, razão pela qual, dentre as pontes estaiadas já construídas, encontra-se uma variedade bastante grande de tipos. O sistema radial, por exemplo, é muitas vezes considerado o melhor devido à posição ótima em que ficam os cabos para a absorção dos esforços oriundos do peso próprio e das cargas móveis, já que estão com a máxima inclinação possível, transmitindo, portanto, às vigas, a menor força axial. Por outro lado, este tipo de arranjo vai gerar uma ancoragem mais complexa no topo da torre, além de produzir cortantes e momentos fletores maiores nestas estruturas. O sistema em harpa, com as ancoragens dos cabos distribuídas ao longo das torres, proporciona a estas um carregamento mais razoável, do ponto de vista do projetista. Além disto, quando são usados dois planos de cabos, o arranjo paralelo é preferido por se constituir numa barreira visual bem menos efetiva que o radial, principalmente sob o ângulo de visão oblíquo dos motoristas. O arranjo em leque representa um meio termo entre os dois outros, sendo utilizado principalmente quando existe problema em acomodar todos os cabos no alto das torres. O arranjo em estrela pode ser escolhido apenas em função da estética e a sua característica principal é que dois cabos vão ter a função de apenas um.

Nessa figura têm-se em ordenada, os pesos do aço necessário para uma ponte de 38m de largura em uma auto estrada com carregamento normal, para um vão entre 274m e 1220m, dado em abscissa. Para pontes pêenseis, 2 valores da relação h/l são utilizados: $1/9$ (valor usual) e $1/5$ (irreal, mas adequado às pontes estaiadas). Deve-se notar que, como o peso de aço cresce com o quadrado do vão, a economia de aço permanece da mesma ordem para vãos longos, o que prova sua superioridade, neste aspecto, para todos os vãos acima de 200m.

I.5 - Estágio Atual do Cálculo

Para se iniciar o cálculo de uma ponte estaiada, é necessário fazer simplificações para a obtenção das dimensões das seções. A modelagem matemática da estrutura deve ser feita após esse pré-dimensionamento e deve ser função do tipo de arranjo escolhido. Assim, para sistemas com apenas um plano de cabos, a idealização como pórtico plano é suficiente, com a posterior consideração do efeito da torção sobre a viga principal. Quando houver dois planos de cabos, o modelo de cálculo deve ser um pórtico espacial, com as forças de torção já embutidas na análise. Vários métodos podem ser utilizados para a solução desses problemas. O processo dos deslocamentos tem sido muito usado, mas o processo dos esforços, ou mesmo um processo misto, onde as incógnitas ora são forças, ora deslocamentos, também podem ser utilizados. A consideração das não-linearidades envolvidas deve ser feita ou através de um processo iterativo (Poldolny e Fleming), ou aplicando a matriz de transferência (Tang). A consideração do problema espacial foi feita por Stafford-Smith, Kajita e Cheung, Baron e Lien, sendo que estes últimos calcularam também o efeito dinâmico das cargas de vento.

A maioria dos programas de que se tem notícia faz o cálculo estático considerando as não-linearidades envolvidas, e o dinâmico de maneira simplificada, supondo comportamento linear. Mote fez uma comparação entre a solução linear e não-linear, e chegou à conclusão que para um pórtico plano composto de cabos e barras, a diferença no comportamento dinâmico é muito pequena.

I.6 - Objetivos do Trabalho

A proposta deste trabalho é, utilizando método de integração direta com as forças de inércia sendo aproximadas por algoritmo de ordem superior, fazer uma análise numérica para obtenção do coeficiente de impacto que deve ser considerado quando do dimensionamento de pontes estaiadas solicitadas por cargas móveis.

I.7 - Conteúdo do Trabalho

Para alcançar a meta acima exposta, procurou-se, inicialmente delinear um panorama geral das pontes estaiadas, mostrando sua evolução ao longo do tempo e fornecendo algumas indicações de sua aplicabilidade.

Partiu-se, em seguida, para a modelagem da estrutura por elementos finitos com a obtenção das matrizes de rigidez, massa, e amortecimento correspondentes.

O equacionamento do problema das cargas móveis, com o veículo sendo modelado por um sistema massa suspensa-mola, amortecedor - massa em contato com o tabuleiro, é feito a seguir, obtendo-se desta maneira a equação que rege o comportamento dinâmico do sistema sob a ação da carga móvel, cuja solução deve ser obtida por integração numérica.

Em função das não-linearidades envolvidas no cálculo, faz-se uma discussão dos vários algoritmos de integração possíveis de serem utilizados, com destaque para o algoritmo de ordem superior escolhido. Dependendo do grau de não-linearidade da estrutura, pode-se optar por um cálculo dinâmico linear ou não-linear, este último caso envolvendo várias iterações para a obtenção da solução final em cada intervalo de tempo. Se a estrutura tiver um comportamento fortemente não-linear, deve-se corrigir a matriz de rigidez a cada passo da iteração ou ainda pode-se optar por uma correção única em cada intervalo de tempo, após 2 ou 3 iterações, quando as maiores alterações já se tiverem processado.

Com o roteiro de cálculo todo definido, parte-se para a análise numérica, feita com o auxílio de um programa para computador em linguagem FORTRAN, cuja listagem se encontra no Apêndice I, com o qual vários exemplos são calculados como se pode ser no capítulo V.

Com base nos resultados obtidos, algumas conclusões podem ser tiradas, alcançando-se com isso o objetivo do trabalho, ou seja, o conhecimento de um valor médio para a amplificação dinâmica.

II - EQUACIONAMENTO GERAL DO PROBLEMA DAS CARGAS MÓVEIS

II.1 - Definição do Problema

Ao contrário de outros carregamentos dinâmicos, o problema das cargas móveis apresenta como característica principal a mudança de posição ao longo do tempo, o que torna o seu estudo peculiar dentro da dinâmica estrutural.

O interesse pelo problema surgiu no início do século XIX, quando da construção da primeira ponte ferroviária. Com o passar do tempo, e o aumento de velocidade que os veículos vêm alcançando, cada vez mais se acentua o caráter dinâmico do problema, fato esse agravado ainda mais pela tendência de se obterem estruturas sempre mais e mais esbeltas.

À medida que isto ocorre, aumenta o interesse pela interação do veículo com a estrutura, já que as forças que surgem no contato veículo-estrutura dependem do movimento de ambos, e portanto a análise estrutural não pode ser feita independentemente da consideração do veículo.

Um grande número de artigos têm sido escritos sobre o assunto ao longo dos anos, alguns inclusive fazendo uma espécie de estado-da-arte do assunto, como por exemplo Huang, Kortum e Wormley, Ting e Venancio Filho.

Até cerca de 1940, os analistas utilizavam qua se que exclusivamente métodos analíticos. Com isto, apenas os problemas mais simples podiam ser tratados, como por exemplo o da viga biapoiada sujeita a uma carga móvel.

Com a introdução dos métodos numéricos, estudos muito mais gerais puderam ser feitos. Com o advento do com putador, nos anos 50, a interação veículo-estrutura começou a ser efetivamente tratada.

A estrutura passou a ser discretizada no espaço, e o andamento da carga móvel foi discretizado no tempo. Com isso, a precisão dos resultados passou a ser função apenas da capacidade dos computadores e da sua precisão numérica.

Vários métodos podem ser utilizados nessas discretizações. Em relação ao espaço, por exemplo, um dos primeiros procedimentos adotados foi a concentração das massas em um número limitado de pontos da estrutura. Para esses pontos então são montadas as equações diferenciais nos deslocamentos. As cargas externas, amortecimento, tudo enfim é considerado concentrado nos pontos nodais. Esse procedimento pode ser adequado para estruturas que realmente tenham uma grande parcela de suas massas concentradas em pontos discretos. O método das faixas finitas, com discretização numa direção e aproximações em séries de Fourier, por exemplo, na outra, foi desenvolvido para o cálculo de tabuleiros de pontes (veja a respeito Cheung, e Loo e Cusens), mas se mostra eficiente apenas quando não existem apoios intermediários, o que dificultaria sobremaneira o tratamento contínuo da direção longitudinal (a imposição das condições de contorno torna o método muito trabalhoso). Finalmente, e parece que esse tem sido o método preferido, tem-se o Método dos Elementos Finitos, onde a estrutura é dividida em um certo número de elementos de barra, planos ou tridimensionais, o que possibilita a modelagem de qualquer estrutura. Pode-se escolher os graus de liberdade associados a cada elemento, associando-se a cada um deles uma função aproximadora, válida somente para aquele elemento.

Com isso, a introdução das condições de contorno se torna muito simples (veja a esse respeito, por exemplo, Zienkiewicz). Por tudo isso foi que a discretização espacial por meio dos Elementos Finitos foi a escolhida para este trabalho, podendo ser vista em detalhe no Capítulo III.

Vários autores têm usado esse método para o estudo dos efeitos das cargas móveis em estruturas (Venancio Filho, Hino, Malsch, Ripegard, Schneider, Yoshida, Lund).

Para a discretização no tempo, as opções também são várias. Sendo as pontes estaiadas estruturas sujeitas a vários tipos de não-linearidades, como as relacionadas com o comportamento dos estais e das vigas sujeitas a flexão composta, a superposição modal, baseada no "desacoplamento" das equações de movimento, torna-se complicada já que parte do pressuposto de que as matrizes da estrutura são constantes no tempo.

Com isso, a opção pela integração direta das equações torna-se a mais natural. Adotando-se diferentes formas para a variação das acelerações nodais, obtem-se os vários métodos de integração direta que podem ser utilizados. A opção por um deles deve ser feita após uma explanação geral sobre os mais viáveis, levada o efeito no Capítulo IV.

II.2 - Equação do movimento da estrutura

Existem vários procedimentos que podem ser utilizados para a definição da equação que representa o movimento da estrutura. (ver a esse respeito Clough, por exemplo).

Pode-se, por exemplo, imaginar as equações do movimento como uma extensão das condições de equilíbrio da estrutura, desde que nelas se introduza o conceito de "forças de inércia" considerado no Princípio de d'Alembert. Esta seria a forma mais simples e direta de se obterem essas equações.

A aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais também pode ser um caminho para se atingir este mesmo objetivo, desde que as forças de inércia sejam incluídas na expressão do trabalho virtual das forças externas.

Finalmente, tem-se o princípio de Hamilton, cuja idéia central é a seguinte: "A resposta dinâmica real assumida por uma estrutura entre os instantes t_1 e t_2 é aquela em que a energia total dissipada pelas forças não conservativas é igual à variação de energia do sistema, ao longo do intervalo de tempo compreendido entre t_1 e t_2 ". Sua aplicação é, também, bastante simples.

Qualquer que seja o caminho escolhido a equação de movimento da estrutura discretizada fica:

$$M \ddot{D} + C \dot{D} + R(D) = F(t) \quad (\text{II.1})$$

onde M = matriz de massa da estrutura.

C = matriz de amortecimento da estrutura

$R(D)$ = vetor das forças elásticas da estrutura,
função dos deslocamentos nodais.

$F(t)$ = vetor das ações nodais equivalentes

D = vetor dos deslocamentos nodais

\dot{D} = vetor das velocidades nodais

\ddot{D} = vetor das acelerações nodais

Para estruturas de comportamento linear, pode-se escrever:

$$M \ddot{D} + C \dot{D} + K D = F(t) \quad (\text{II.2})$$

II.3 - Modelagem do veículo

Em função da relação entre a massa do veículo e a massa da estrutura é que se faz a escolha do modelo a ser utilizado. Assim, por exemplo, no caso de uma ponte rodoviária, a massa do veículo é pequena quando comparada à da ponte, podendo-se substituí-lo apenas pelo seu peso; então o modelo da carga móvel percorrendo a estrutura pode ser suficiente para a representação do problema. Nesse caso,

despreza-se a interação entre a estrutura e o veículo, o que significa que o veículo será considerado apenas como carga, não afetando as matrizes da estrutura. Quando a massa do veículo não for desprezível relativamente à da estrutura um modelo um pouco melhor seria obtido com a consideração da massa móvel, onde a contribuição desta na matriz de massa representaria melhor o problema real. O problema da ponte ferroviária se enquadra neste caso, por exemplo. Se, além disto, se quisesse ainda um modelo melhor para o veículo, pode-se-ia utilizar o modelo massa em contato com a estrutura-mola e amortecedor-massa suspensa, dotado de um grau de liberdade, que daria uma idéia mais apropriada do veículo, e de sua influência quando percorrendo a estrutura. Outros modelos mais complexos podem assumir a existência de várias massas acopladas, aumentando o número de graus de liberdade do veículo. A suposição de que o veículo não perde o contato com a estrutura simplifica um pouco a análise, mas, de qualquer forma é necessário que se tenha em mente que, tanto a matriz de massa quanto o vetor de carga se alteram ao longo do tempo.

Todos os modelos anteriormente citados têm a sua aplicabilidade, e, do ponto de vista da análise estrutural o importante é saber adequar o modelo ao problema que se deseja estudar.

Os modelos mais simples, do tipo carga móvel, têm sido utilizados principalmente devido à facilidade de aplicação, não necessitando de correções nas matrizes da estrutura ao longo do tempo.

Quando a massa do veículo é considerada, o sistema estrutura-veículo passa a ter um comportamento variável ao longo do tempo, isto é, a cada tempo, conforme o veículo se desloca, sua massa passa a fazer parte de um elemento da estrutura, o que provoca uma variação na matriz de massa do sistema em função da posição que o veículo ocupa.

Se o modelo de veículo utilizado tiver uma parcela da massa em contato com a estrutura, e o restante suspensa, através de um conjunto mola-amortecedor, além da

alteração da matriz de massa pela passagem do veículo, ainda deveria ser considerado o grau de liberdade adicional da massa suspensa. Para veículos compostos por várias massas acopladas, pode-se estender o raciocínio já feito, considerando-se tantos graus de liberdade quantos forem necessários.

Para o presente estudo, adotar-se-á o modelo mais simples de veículo (sistema massa em contato com a estrutura-mola e amortecedor-massa suspensa), suficiente para o que se pretende analisar, que é o efeito das cargas móveis em pontes estaiadas.

II.4 - Sistema massa em contato com a estrutura-mola e amortecedor-massa suspensa

Tendo em mente que o objetivo do presente trabalho é a análise do efeito dos veículos nas pontes estaiadas, as seguintes hipóteses são assumidas:

1- Os veículos possuem apenas um grau de liberdade. Claro está que se trata de uma simplificação, já que os veículos atuais possuem mais de um eixo, várias molas, amortecedores e pneus, com muitos graus de liberdade associados. A justificativa para essa hipótese é que, ao que se sabe, o movimento mais crítico do veículo com respeito à estrutura ocorre quando todos os seus elementos atuam em fase. Além disso deve-se ressaltar que o objetivo básico deste trabalho é o estudo do comportamento dinâmico da ponte e não do veículo.

2- A maior parcela do peso do veículo (80%) é suposta aplicada no CG da massa suspensa, e o restante (20%) na massa em contato com a estrutura.

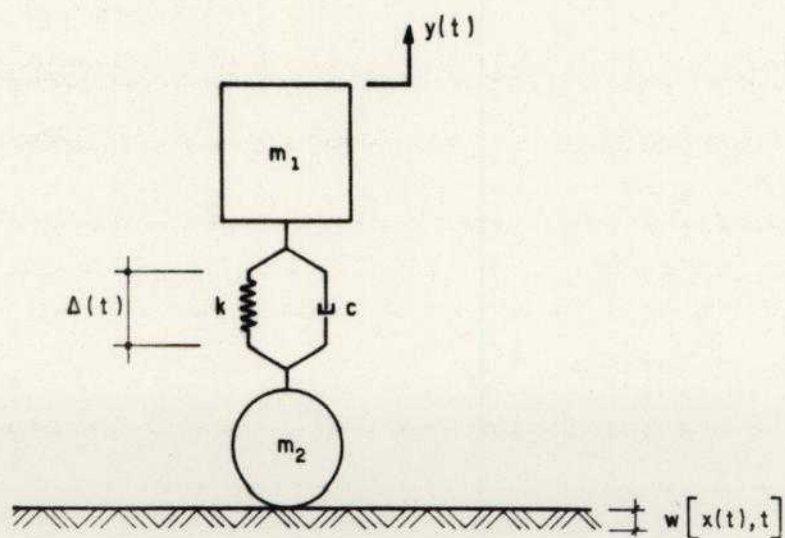


Fig.II.1

A figura acima mostra o modelo escolhido de veículo, onde:

m_1 = massa suspensa do veículo

m_2 = massa em contato com a estrutura

k = constante da mola do veículo

c = constante do amortecedor do veículo

y = deflexão da massa suspensa

$m_1 + m_2 = m_v =$ massa total do veículo

Δ = deflexão da mola

w = deflexão da viga.

A deflexão da mola do veículo pode ser colocada como:

$$\Delta(t) = y(t) - w[x(t), t] \quad (\text{II.3})$$

E a velocidade de m_1 pode ser obtida a partir da derivação da equação anterior com relação ao tempo:

$$\dot{\Delta}(t) = \dot{y}(t) - \dot{w}[x(t), t] \quad (\text{II.4})$$

A equação do movimento da massa suspensa do veículo fica:

$$m_1 \ddot{y}(t) + c \dot{\Delta}(t) + k \Delta(t) = 0 \quad (\text{II.5})$$

Substituindo o valor de $\dot{\Delta}(t)$ e $\Delta(t)$ na equação vem:

$$m_1 \ddot{y}(t) + c[\dot{y}(t) - \dot{w}(x, t)] + k[y(t) - w(x, t)] = 0 \quad (\text{II.6})$$

Mas, pode-se escrever que:

$$\dot{w}(x, t) = \frac{\partial w}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} v + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (\text{II.7})$$

Utilizando as funções interpoladoras, vem:

$$w(x, t) = N_{\underline{v}} D \quad (\text{II.8})$$

$$\dot{w}(x, t) = N_{\underline{v}, x} Dv - N_{\underline{v}} \dot{D} \quad (\text{II.9})$$

A posição do veículo movendo-se com aceleração a_0 no elemento carregado é dada por:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad (\text{II.10})$$

onde v_0 é a velocidade no instante em que o veículo entra no elemento.

As derivadas relativamente ao tempo de x são:

$$\dot{x} = v_0 + a_0 t = v \quad (\text{II.11})$$

e

$$\ddot{x} = a_0 \quad (\text{II.12})$$

Introduzindo agora (II.8) e (II.9) (com v dado por II.11) em (II.6) obtem-se:

$$m_1 \ddot{y} + c \dot{y} - c(v_0 + a_0 t) N_{\underline{v}, x} D + c N_{\underline{v}} \dot{D} + ky - k N_{\underline{v}} D = 0 \quad (\text{II.13})$$

Calculam-se agora as forças que irão surgir no ponto de contato do veículo com a estrutura e que constituirão o vetor de forças nodais equivalentes. Começa-se, por exemplo, pelo peso do veículo.

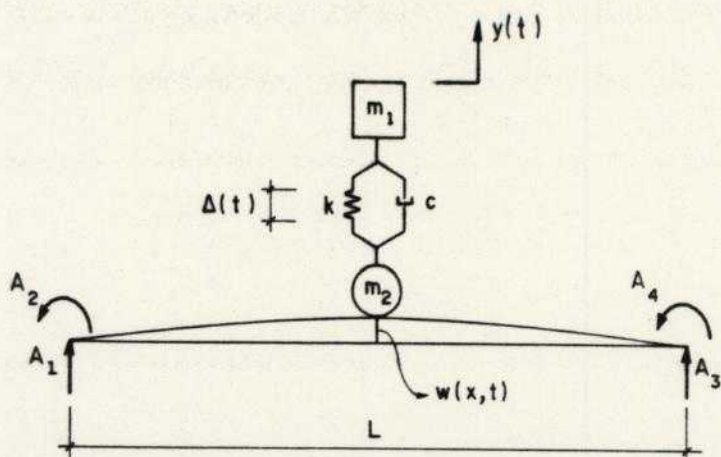


Fig. II.2

$$P = (m_1 + m_2)g \quad (II.14)$$

onde g = aceleração da gravidade

A força de inércia associada à massa m_2 fica:

$$P_1 = -m_2 \ddot{w}(x,t) \quad (II.15)$$

sendo:

$$\ddot{w}(x,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} v^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} v + \frac{\partial w}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (II.16)$$

ou utilizando as funções interpoladoras e (II.11) e (II.12)

$$\ddot{w}(x,t) = (v_0 + a_0 t)^2 N_{v,xx} \underline{D} + 2(v_0 + a_0 t) N_{v,x} \dot{\underline{D}} + a_0 N_{v,x} \underline{D} + N_v \ddot{\underline{D}} \quad (II.17)$$

Deve-se computar também a força exercida pela mola:

$$P_2 = k\Delta(t), \quad (II.18)$$

e a força exercida pelo amortecedor

$$P_3 = c\dot{\Delta}(t) \quad (II.19)$$

Com isso, a força total fica:

$$P_T = P + P_1 + P_2 + P_3 \quad (II.20)$$

Substituindo P , P_1 , P_2 e P_3 das equações anteriores chega-se a:

$$P_T = (m_1 + m_2)g - m_2 w(x, t) + k\ddot{\Delta}(t) + c \quad (II.21)$$

O vetor das ações nodais equivalentes é dado por:

$$A(t) = P_T N_V^t [X(t)] \quad (II.22)$$

Substituindo-se na equação anterior os valores já calculados, vem:

$$\begin{aligned} A(t) = & (m_1 + m_2)g N_V^t - m_2 (v_0 + a_0 t)^2 N_{V,xx}^t D + \\ & -2m_2 (v_0 + a_0 t) N_{V,x}^t \dot{D} - m_2 N_{V,x}^t a_0 D + \\ & -m_2 N_V^t \ddot{D} + ky(t) N_V^t - k N_V^t D + c \dot{y}(t) N_V^t + \\ & -c (v_0 + a_0 t) N_{V,x}^t \dot{D} - c N_V^t \dot{D} \end{aligned} \quad (II.23)$$

Analisando-se a expressão anterior, pode-se perceber que existem termos multiplicando os deslocamentos, velocidades e acelerações (D , \dot{D} e \ddot{D}) dos nós do elemento onde está o veículo. Se se imaginarem estes termos como contribuições do veículo, (m_v , k e c) às matrizes da estrutura, vem:

$$\begin{aligned} M_V &= m_2 N_V^t N_V \\ C_V &= 2m_2 (v_0 + a_0 t) N_{V,x}^t + c N_V^t N_V \\ K_V &= m_2 (v_0 + a_0 t)^2 N_{V,xx}^t + m_2 a_0 N_{V,x}^t + k N_V^t N_V + \\ & + c (v_0 + a_0 t) N_{V,x}^t \end{aligned} \quad (II.24)$$

Seja a equação do movimento da estrutura:

$$M \ddot{D} + C \dot{D} + K D = A(t) \quad (II.25)$$

Substituindo nela o valor de $A(t)$, vem:

$$\begin{aligned} [M + M_V] \ddot{D} + [C + C_V] \dot{D} + [K + K_V] D - ky(t) N_V^t + \\ -c \dot{y}(t) N_V^t = (m_1 + m_2)g N_V^t \end{aligned} \quad (II.26)$$

que é a equação da estrutura percorrida pelo veículo.

Agrupando agora a equação da estrutura, Eq. (II.25), e a do veículo, Eq. (II.13) vem:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \underline{M} + \underline{M}_v & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{D}} \\ \ddot{\underline{y}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C} + \underline{C}_v & -cN_v^t \\ -cN_v & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{D}} \\ \dot{\underline{y}} \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} \underline{K} + \underline{K}_v & -KN_v^t \\ -c(v_0 + a_0 t)N_{v,x} - kN_v & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{D} \\ \underline{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (m_1 + m_2)gN_v^t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.27})
 \end{aligned}$$

A última linha das matrizes representa o grau de liberdade adicional do veículo, cujo efeito se faz sentir também no vetor da carga e nas contribuições \underline{M}_v , \underline{C}_v e \underline{K}_v , atuantes, em cada instante, no elemento que o veículo está percorrendo.

A solução desta equação será estudada no capítulo IV.

III - MODELAGEM DA ESTRUTURA POR MEIO DE ELEMENTOS FINITOS

III.1 - Introdução

As pontes estaiadas são estruturas cujo comportamento, para ser bom representado, necessita de algumas considerações sobre as não-linearidades envolvidas em seu cálculo.

Em primeiro lugar, existe o comportamento peculiar dos estais, que nada mais são que cabos protendidos sem resistência à compressão, e cuja forma curva (catenária) é consequência do carregamento (peso próprio) distribuído ao longo do cabo. Quanto maior for a protensão, menor será a curvatura e, conseqüentemente, mais rígido ficará o estai. Dessa forma, o tratamento do cabo como uma barra de treliça seria uma aproximação, já que o comportamento real apresenta uma não-linearidade bastante acentuada.

Além disso, existe ainda o problema das vigas longitudinais que, solicitadas simultaneamente por flexão e compressão, apresentam também um comportamento não-linear, já que a curvatura advinda da flexão gera uma excentricidade para a força normal, surgindo assim um acréscimo de momento que deverá necessariamente ser considerado.

A forma mais simples de se levar em conta essas não-linearidades geométricas é através de processos iterativos, onde, em cada passo é feito um cálculo linearizado, até que o equilíbrio seja atingido.

Assim, as matrizes de rigidez, massa e amortecimento dos elementos são funções da posição final de equilíbrio da estrutura, isto é, o equilíbrio deverá ser feito considerando-se a posição da estrutura já deslocada (deslocamentos não-infinitesimais).

III.2 - Considerações sobre o elemento de cabo (estai)

Como já foi dito, o comportamento dos estais necessita de um tratamento diferente do que se dá a uma barra de treliça para ser bem representado, já que a sua rigidez só pode ser dada como função dos deslocamentos de seus nós de extremidade.

Para se entender melhor o efeito desses deslocamentos sobre os cabos, pode-se, didaticamente, reparti-lo em 3 parcelas:

1 - variação da deformação do cabo, considerada linear em função do seu módulo de elasticidade E.

2 - rearranjo dos fios componentes do cabo devido à variação de carga. Desse total, uma parcela se constitui em estiramento permanente, a qual é normalmente eliminada pelo fabricante mediante o pré-estiramento, enquanto a outra não-permanente, resulta em uma aparente redução do módulo de elasticidade do material do cabo.

3 - variação da flecha do cabo, além de deformação do material.

Dessa forma, a flecha não vai variar linearmente com a tração no cabo, causando então uma relação força-deformação não-linear.

Uma maneira conveniente de se levar em conta, segundo Fleming e Egeseli, é a consideração de um elemento reto de corda com um "módulo de elasticidade equivalente".

Neste valor, estariam embutidos os efeitos das deformações isto é, a rigidez axial do elemento, para qualquer flecha do cabo real, será exatamente a mesma deste. O conceito de "módulo de elasticidade equivalente" foi introduzido por Ernst, e verificado mais tarde por vários outros pesquisadores.

Assim, tem-se:

$$E_{eq} = f.E \quad (III.1)$$

onde f é a influência da curvatura do cabo na rigidez axial efetiva do mesmo.

A dedução do fator de correção f pode ser feita, de maneira simples, através da equação diferencial do cabo.

Seja, portanto, o elemento da figura abaixo:

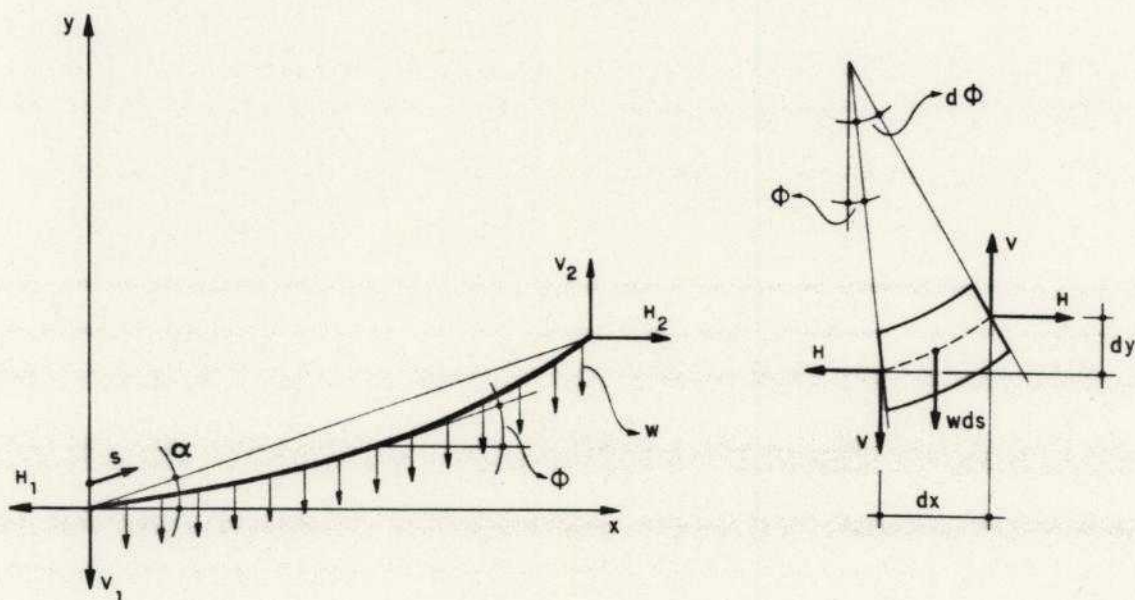


Fig.III.1 - Carga distribuída no cabo.

Desprezando os infinitésimos de ordem superior, pode-se dizer que:

$$V = H \operatorname{tg} \phi \quad (III.2)$$

$$\text{onde } \operatorname{tg} \phi = dy/dx \quad (III.3)$$

Logo:

$$V = H dy/dx \quad (III.4)$$

O equilíbrio vertical fornece:

$$dV = w \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \quad (\text{III.6})$$

Substituindo (III.5) em (III.6), vem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (\text{III.7})$$

A solução dessa equação diferencial fornece a equação da catenária, que tem a seguinte forma:

$$y = \frac{1}{2c} (e^{cx} + e^{-cx} - 2) \quad (\text{III.8})$$

onde $c = w/H$.

Quando a flecha do cabo é pequena, é usual aproximar a catenária pela parábola, o que é equivalente a se considerar a carga distribuída ao longo da corda, e não ao longo do cabo.

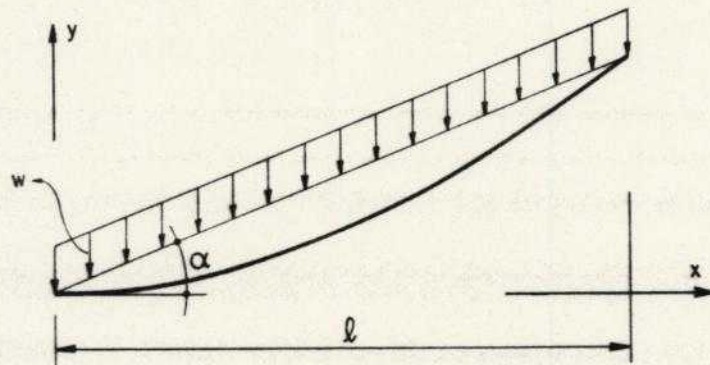


Fig.III.2 - Carga distribuída ao longo da corda.

Assim, o equilíbrio vertical fornece:

$$dV = w dx \sec \alpha \quad (\text{III.9})$$

Mas:

$$\frac{dV}{dx} = H \frac{d^2y}{dx^2} \quad (\text{III.10})$$

Substituindo (III.10) em (III.9), vem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H} \sec\alpha \quad (\text{III.11})$$

A solução de (III.8) é a seguinte parábola:

$$y = \frac{wx^2 \sec\alpha}{2H} + \left(\text{tg}\alpha - \frac{wL}{2H}\right)x \quad (\text{III.12})$$

que é válida somente para cabos abatidos.

Com essa aproximação, pode-se calcular o comprimento s do cabo, que, somente com os 2 primeiros termos da série, fornece:

$$s = L \left(1 + G^2 \frac{\cos^4\alpha}{24H^2}\right) \quad (\text{III.13})$$

com G = peso total do cabo

Derivando (III.13), vem:

$$ds = \left(1 + G^2 \frac{\cos^4\alpha}{24H^2}\right)dL + \left(\frac{LG^2 \cos^4\alpha}{12H^3}\right)dH \quad (\text{III.14})$$

A deformação do cabo pode ser então obtida:

$$\epsilon = \frac{ds}{s} = \frac{\sigma}{E} = \frac{1}{E} \frac{dH}{\cos\alpha} \frac{1}{A_0}, \quad \text{com } A_0 = \text{área do cabo.} \quad (\text{III.15})$$

Por outro lado, de (III.14), obtém-se:

$$\frac{ds}{dH} = \left(1 + \frac{G^2 \cos^4\alpha}{24H^2}\right) \frac{dL}{dH} + \left(\frac{LG^2 \cos^4\alpha}{12H^3}\right) \frac{dH}{dH} \quad (\text{III.16})$$

O termo $G^2 \cos^4\alpha / 24H^2$, no caso, pode ser desprezado em relação à unidade.

Introduzindo o valor $\frac{ds}{dH}$ de (III.15) em (III.16), vem:

$$\frac{dL}{dH} = \frac{s}{EA_0 \cos\alpha} + \frac{LG^2 \cos^4\alpha}{12H^3} \quad (\text{III.17})$$

Na equação (III.17), o primeiro termo do segundo membro é o chamado "alongamento elástico", enquanto que o segundo quantifica a não-linearidade, pois é função de H^3 , isto é, função da mudança de curvatura do cabo devida ao peso próprio.

Pode-se escrever (III.17) como sendo:

$$\frac{dL}{dH} = \frac{L}{(EA_0)_{\text{mod}} \cos \alpha} \quad (\text{III.18})$$

onde $(EA_0)_{\text{mod}}$ = módulo de elasticidade modificado, que já leva em conta o efeito da curvatura do cabo.

Fazendo $N = H/\cos \alpha$, onde N é a força do cabo na direção da corda, vem:

$$1 + \frac{G^2 EA_0 \cos^2 \alpha}{12 N^3} = \frac{EA_0}{(EA_0)_{\text{mod}}} \quad (\text{III.19})$$

Ou seja,

$$(EA_0)_{\text{mod}} = f(EA_0)$$

onde f é o fator que mede a influência da curvatura do cabo, e cujo valor é:

$$f = \frac{1}{1 + \frac{G^2 \cos^2 \alpha EA_0}{12 N^3}} \quad (\text{III.20})$$

Dessa forma, o cabo pode ser tratado como uma barra de treliça que passa pelos nós inicial e final do cabo, desde que o produto EA_0 seja modificado pelo fator f , função da força no cabo. Se o problema é fortemente não-linear, pode haver a necessidade de se alterar o valor da força ao longo do cálculo, alterando, portanto, o fator f . Com isso, o tratamento dos estais como barras de treliça se torna bastante preciso.

A matriz de rigidez dos estais, portanto, vai ter a mesma forma da treliça, corrigida de maneira conveniente pelo método de elasticidade equivalente.

III.3 - Matrizes de Rigidez

a) Elemento da Viga

A matriz de rigidez a ser utilizada deverá ser a matriz usual de viga mais a matriz geométrica, no caso em que um referencial euleriano, associado a um processo iterativo de resolução da estrutura, tiver sido o escolhido.

Seja uma barra de viga de comprimento L , seção transversal A , rigidez I e deformabilidade E .

Com o emprego das funções de interpolação de Hermite, lineares para o deslocamento axial:

$$N_u = \left[\left(1 - \frac{X}{L}\right) \quad 0 \quad 0 \quad \frac{X}{L} \quad 0 \quad 0 \right] \quad (\text{III.21})$$

e cúbicas para o deslocamento transversal.

$$N_v = \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \left[1 - 3 \left(\frac{X}{L}\right)^2 + 2 \left(\frac{X}{L}\right)^3 \right] \quad \left[X + \left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 \right] \\ 0 \quad \left[3 \left(\frac{X}{L}\right)^2 - 2 \left(\frac{X}{L}\right)^3 - 2 \right] \quad \left[\frac{X^2}{L} \left(\frac{X}{L} - 1\right) \right] \end{array} \right\} \quad (\text{III.22})$$

e considerando os deslocamentos nodais da figura abaixo:

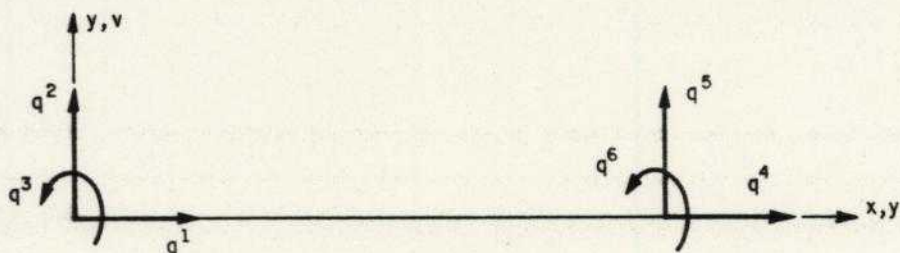


Fig. III.3 - Deslocamentos nodais

um deslocamento genérico $w(x)$ do elemento de pórtico pode ser expresso, como função dos deslocamentos nodais, da seguinte forma:

$$w(x) = \underline{N}(x) \underline{q} \quad (\text{III.23})$$

onde $\underline{N}(x)$ é a matriz das funções de interpolação, e \underline{q} é o vetor dos deslocamentos nodais.

Lembrando que a matriz de rigidez é botida da variação da energia do sistema quando da aplicação de um deslocamento virtual δ , pode-se, a partir de expressão da

energia de deformação do sistema, obter a matriz de rigidez do elemento de pórtico plano. Ver a esse respeito, por exemplo, Venancio Filho.

Com as funções de interpolação escolhidas, a matriz de rigidez do elemento, em sua forma explícita, fica:

$$\begin{aligned}
 K^e = \frac{EA_0}{L} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} + \\
 & \text{SIMÉTRICA} \\
 +EI & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & & \frac{4}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ & & & 0 & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ & & & & & \frac{4}{L} \end{bmatrix} + \\
 & \text{SIM} \\
 +EA_0 \epsilon_0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ & & \frac{2}{12L} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ & & & & & \frac{2}{15L} \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{III.24}$$

b) Elemento de barra

A matriz de rigidez da barra de treliça, com a consideração de grandes deslocamentos, será:

$$\begin{aligned}
 k^e = \frac{EA_0}{L} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \text{SIM} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} + \\
 + \frac{EA_0 \epsilon_0}{L} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{SIM} & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})
 \end{aligned}$$

Deve-se salientar que, no caso de aplicação dos cabos, o valor EA_0 deverá ser substituído por $(EA_0)_{\text{mod}}$, para se levar em consideração a influência da curvatura do cabo.

III.4 - Matrizes de massa a serem utilizadas

Quando se pensa em matrizes de massa, a primeira idéia que se tem, e também a mais simples, é utilizar a matriz diagonal das massas supostas concentradas nos nós da estrutura. Esse procedimento tem vários defensores, já que, o que teoricamente se perde ao se aproximar uma estrutura contínua por massa discretas, ganha-se na redução das operações algébricas envolvidas (na inversão da matriz de massa, principalmente).

Por outro lado, a opção pela matriz de massa consistente, isto é, aquela obtida da utilização das mesmas funções da interpolação utilizadas no cálculo da matriz de rigidez (e por isso mesmo chamada consistente), tem como vantagem o tratamento mais preciso na discretização da estrutura com massa efetivamente distribuídas ao longo dos elementos.

Uma solução intermediária que tem surgido há já algum tempo (1970) seria a "concentração" da matriz de massa consistente, isto é, às diagonais desta somar-se-iam os elementos mais importantes das respectivas linhas, obtendo-se assim uma matriz diagonal, com todas as vantagens que isso acarreta, mas que deve representar melhor a estrutura real que a matriz de massa concentrada usual.

Nesse trabalho, optou-se por este último procedimento, e a obtenção da matriz de massa será feita a seguir, primeiro da matriz de massa consistente, e depois, a sua diagonalização.

a). Elemento de Viga

Para a obtenção da matriz de massa deve-se lembrar que ela resulta, quando da aplicação do princípio de Hamilton, da expressão da energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \mu v^2 dV \quad (III.28)$$

onde:

- μ = massa específica do material
- v = velocidade do elemento dV
- V = volume do elemento finito

O elemento de viga para o qual se quer obter a matriz de massa tem eixo reto de comprimento L e seção transversal constante de área A , simétrica em relação ao plano das cargas. A figura (III.4) mostra os deslocamentos considerados.

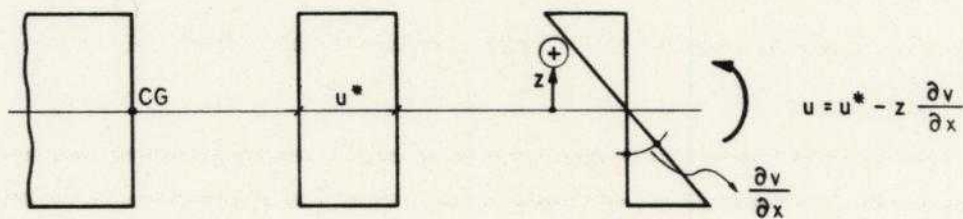


Fig.III.4

Utilizando como funções de interpolação as mes mas funções utilizadas na obtenção da matriz de rigidez, vem:

$$\underline{M}^e = \mu AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ & \frac{13}{35} & \frac{11}{210}L & 0 & \frac{9}{70} & \frac{-13}{420}L \\ & & \frac{1}{105}L^2 & 0 & \frac{13}{420}L & \frac{-1}{140}L^2 \\ & & & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{13}{35} & \frac{-11}{210}L \\ \text{SIM} & & & & & \frac{1}{105}L^2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \mu I \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{-6}{5L} & \frac{1}{10} \\ & & \frac{2L}{15} & 0 & \frac{-1}{10} & \frac{-L}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{6}{5L} & \frac{-1}{10} \\ \text{SIM} & & & & & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

A primeira parcela corresponde à inércia de translação e a segunda, à de rotação.

O procedimento empregado para a diagonalização da matriz de massa consistente, resume-se na distribuição da massa total do elemento de maneira proporcional aos elementos da diagonal principal desta.

Para elementos utilizando aproximações lineares e parabólicas para os deslocamentos, pode-se utilizar o procedimento indicado na figura (III.5).

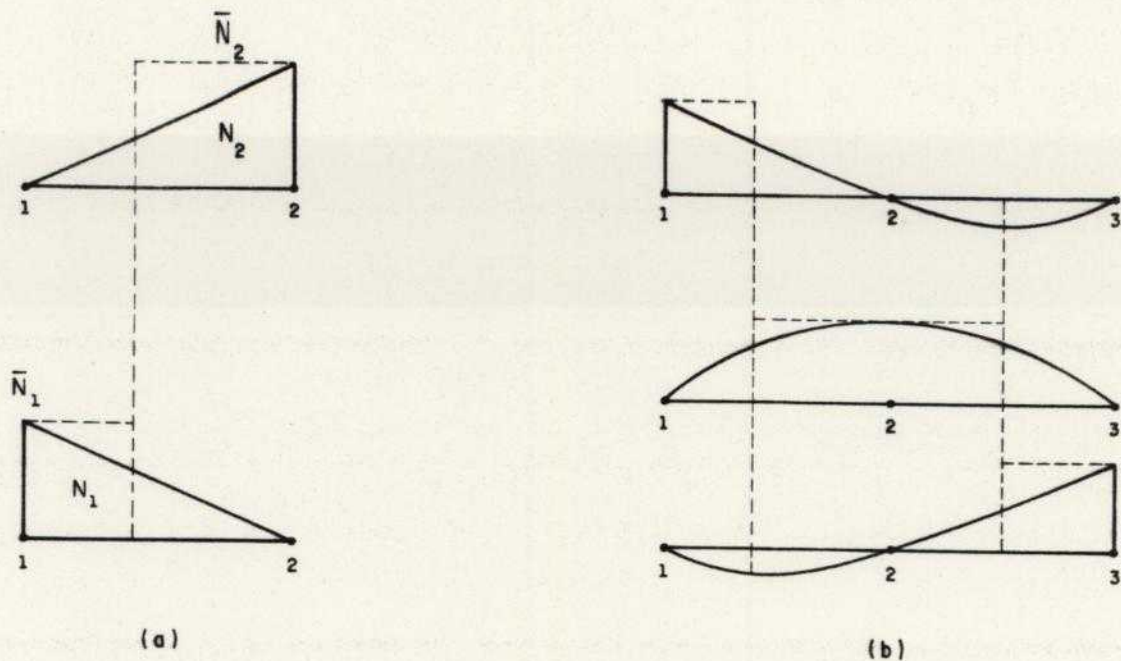


Fig.III.5 - Funções aproximadoras para deslocamentos su postos lineares (a) e parabólicos (b).

Para que as funções \bar{N} satisfaçam às condições de convergência é necessário que

$$N_i = 1 \text{ em } x_i \quad (a)$$

$$N_i = 0 \text{ em } x_j \quad (b)$$

$$\sum N_i = 1 \quad (c)$$

(III.30)

Por outro lado, é desejável que essas funções sejam simples e descontínuas para que a diagonalização seja efetuada.

Face às infinitas possibilidades oferecidas pela condição (III.28), o procedimento escolhido deve ser aquele que calcule os elementos das matrizes de massa consistente e então escalone esses termos de forma a preservar a massa total do elemento.

Com isso, obtém-se uma matriz positiva definida, o que é essencial para a maioria dos problemas computacionais.

Uma forma de se fazer isso é utilizando a matriz de massa diagonal composta pelos seguintes elementos:

$$M_{11}^D = m_{11} + m_{14}$$

$$M_{12}^D = m_{22} + m_{25}$$

$$M_{33}^D = m_{33} + m_{36}$$

(III.31)

$$M_{44}^D = m_{44} + m_{41}$$

$$M_{55}^D = m_{55} + m_{52}$$

$$M_{66}^D = m_{66} + m_{63}$$

Desta maneira, a matriz de massa finalmente resulta:

$$\tilde{M}^e = \left[\frac{1}{2} \mu AL \quad \frac{1}{2} \mu AL \quad \frac{1}{420} \mu AL^3 \quad \frac{1}{3} \mu AL \quad \frac{1}{420} \mu AL^3 \right] +$$

$$+ \left[0 \quad 0 \quad \frac{1}{10} \mu IL \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{10} \mu IL \right]$$

(III.32)

Analogamente ao que foi feito anteriormente, a primeira parcela representa a inércia da translação, e a segunda, a de rotação.

A esse respeito, pode-se consultar trabalho de Ebecken e Barbosa (ver bibliografia), que fornece detalhes sobre o assunto.

b) Elemento da barra

A matriz de massa do cabo a ser utilizado deverá ser idêntica à da treliça, isto é, será aquela obtida a partir dos deslocamentos nodais q indicados na figura:

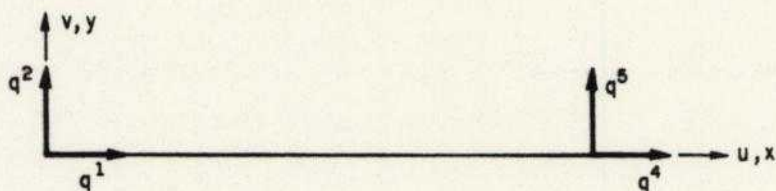


Fig.III.5

Com as mesmas funções de interpolação de Hermite, a matriz de massa consistente fica:

$$\underline{M}^e = \mu AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \text{SIM} & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

E a matriz diagonalizada, obtida a partir desta, fica:

$$M^e = AL \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

III.5 - Considerações sobre o amortecimento estrutural

O amortecimento estrutural aqui considerado será do tipo viscoso, isto é, as forças por ele geradas serão supostas proporcionais à velocidade.

A matriz de amortecimento propriamente dita, será construída a partir das matrizes de massa e rigidez, da forma usual para o amortecimento de Rayleigh,

$$\underline{C} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{k} \quad (\text{III.34})$$

onde α e β são constantes determinadas em função da estrutura considerada, quando se possuir uma idéia realista da razão de amortecimento ξ_i para dois diferentes modos i de frequência ω_i escolhidas.

Sendo proporcional a forma de amortecimento adotada, a decomposição modal é possível, e nesse caso, pode-se escrever:

$$\phi_i^t C \phi_j = 2 \omega_i \xi_i \delta_{ij} \quad (\text{III.35})$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e ϕ_i são os auto-vetores:

Para $i = j$, tem-se:

$$C_i = 2\omega_i \xi_i = \alpha + \beta \omega_i^2 \quad (\text{III.36})$$

Ou ainda:

$$\xi_i = \frac{\alpha + \beta \omega_i^2}{2\omega_i} \quad (\text{III.37})$$

Dessa forma, percebe-se que, para a matriz de amortecimento proporcional à de massa, ξ decresce com ω , enquanto que para a matriz proporcional à de rigidez ξ aumenta com ω .

O que se sabe é que, para problema onde a frequência da carga é da ordem de grandezas das frequências naturais da estrutura, a amplificação dinâmica pode ser muito grande, e, portanto, o amortecimento se torna mais importante. Em outras palavras, quando a frequência da carga é muito alta em relação à de um certo modo, o sistema não chega a responder; quando essa relação é muito baixa, a resposta da estrutura é simplesmente a resposta estática. O problema real vai surgir entre esses dois casos, quando a frequência da carga for da ordem de grandeza das primeiras frequências naturais da estrutura.

Admitindo-se uma certa porcentagem de amortecimento estrutural (ξ_i) para os 2 primeiros modos, por exemplo, consegue-se, a partir da expressão (III.37), determinar α e β , e, portanto, a matriz de amortecimento da estrutura.

O valor de ξ , na verdade, pode ser determinado para estruturas convencionais. Assim, Chopra (1980) obteve os valores de ξ associados às primeiras frequências de um edifício. Para o presente caso, o amortecimento das pontes estaiadas será equivalente a um $\xi = 3\%$ para o primeiro modo e 2% para o segundo modo (ver a esse respeito Walther, 1988). A avaliação das primeiras frequências das pontes foi obtida em um relatório de ensaios de uma ponte estaiada, (ver esse respeito Walther, Relatório de Ensaio, 1988), sendo $\omega_1 = 0,40\text{Hz}$ e $\omega_2 = 0,55\text{Hz}$, o que resultou em $\alpha = 0,0139$ e $\beta = 0,63$, valores esses que serão utilizados para todas as estruturas calculadas.

IV - ESTUDO DOS ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA POSSÍVEIS

Deve-se considerar inicialmente a possibilidade de se utilizar a superposição modal (ver a esse respeito - Olsson, 1986) mesmo para um problema não-linear como é o caso das pontes estaiadas, desde que algumas considerações adicionais sejam feitas. Aqui, entretanto, parte-se diretamente para a adoção de um dos vários métodos de integração direta possíveis de serem aplicados, como já foi dito.

Para a utilização de qualquer deles, não é necessário que se faça modificação alguma na equação de movimento da estrutura. Integra-se numericamente o sistema original acoplado, passo a passo, desde que se conheçam as condições iniciais do problema.

Uma maneira de se fazer isso seria através das diferenças finitas, discretizando-se o operador diferencial, o que resulta no chamado método da diferença central.

A adoção de formas de variação para as acelerações, velocidades e deslocamentos ao longo do tempo, em cada intervalo de integração, satisfazendo as equações de movimento nos extremos desses intervalos, é uma outra maneira de se fazer essa integração. Nessa categoria estão o método da aceleração linear e o método θ de Wilson.

Uma variação desse procedimento seria, após assumir formas de variação para acelerações, velocidades e deslocamentos ao longo do intervalo de integração, aplicar um critério de aproximação, como por exemplo o de Galerkin.

De qualquer forma, todos esses procedimentos resultam numa fórmula de recorrência, que permite que a solução da equação seja obtida, passo a passo, ao longo do tempo, e cuja forma é a seguinte:

$$\underline{D}_1 \bar{u}(t_{n+1}) = \underline{D}_0 \bar{u}(t_n, t_{n-1}, \dots) + \underline{P} \quad (\text{IV.1})$$

com:

$$\bar{u}(t_{n+1}) = \begin{Bmatrix} u(t_{n+1}) \\ \dot{u}(t_{n+1}) \\ \ddot{u}(t_{n+1}) \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{u}(t_n, t_{n-1}, \dots) = \begin{Bmatrix} u(t_n) \\ u(t_{n-1}) \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

\underline{D}_0 e \underline{D}_1 são exatamente as matrizes que fazem a transformação dos vetores aceleração, velocidade e deslocamento dos tempos anteriores t_n, t_{n-1} , no tempo seguinte t_{n+1} , e \underline{P} leva em conta as ações externas.

As matrizes \underline{D}_0 e \underline{D}_1 , além de serem funções das matrizes do sistema, também são funções do intervalo de integração $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ adotado.

Sendo \underline{D}_1 inversível, pode-se escrever que:

$$\bar{u}(t_{n+1}) = \underline{D}_1^{-1} \underline{D}_0 \bar{u}(t_n, t_{n-1}, \dots) + \underline{D}_1^{-1} \cdot \underline{P} \quad (\text{IV.2})$$

Quando as matrizes do sistema não são funções nem dos deslocamentos, nem de suas derivadas, a transformação é dita linear.

Se o vetor $u(t_{n+1})$ é obtido apenas através de valores do intervalo anterior, o método é chamado de "um passo" (one step), se contém informações dos tempos anteriores é dito de múltiplos passos (multi-step).

Se a matriz D_1 puder ser colocada na forma triangular, o algoritmo é dito explícito; caso contrário, ele é implícito.

Outra classificação importante diz respeito à estabilidade do operador. Se todos os operadores do conjunto A^n ($n = 1, 2, \dots$) dos operadores das matrizes do sistema forem uniformemente limitados, ou seja, se existem constantes positivas k_n tal que:

$$\|A \underline{v}\| \leq \|k_n \underline{v}\| \quad (\text{IV.3})$$

diz-se que o algoritmo é estável (as barras duplas significam norma do vetor e \underline{v} um vetor qualquer).

Um operador é incondicionalmente estável se a solução, qualquer que seja a condição inicial, não cresce indefinidamente no tempo, qualquer que seja o intervalo Δt utilizado.

Quando isto só ocorrer para valores de Δt inferiores a um certo valor (Δt crítico), o operador é dito condicionalmente estável, e se, para qualquer Δt , a convergência não ocorre, o processo é dito incondicionalmente instável.

Além disso, os operadores de integração normalmente introduzem na solução erros na amplitude e no período, em problema oscilatórios, existindo inclusive fórmulas para estimá-los.

Para que se possa avaliar melhor os vários métodos de integração direta disponíveis, faz-se uma pequena exposição sobre alguns deles, para finalmente escolher o que parece ser o mais adequado ao problema em questão.

IV.1 - Método da Diferença Central

Ao se encarar as equações de equilíbrio como um sistema de equações diferenciais ordinárias, podem-se utilizar as expressões das diferenças finitas para aproximar acelerações e velocidades, em termos de deslocamentos, e com isso montar um sistema passível de ser resolvido a cada tempo.

Fazendo, por exemplo:

$$\begin{aligned}u(t) &= 1/\Delta t^2 [u(t - \Delta t) - 2u(t) + u(t + \Delta t)] \\ \dot{u}(t) &= 1/2\Delta t [-u(t - \Delta t) + u(t + \Delta t)]\end{aligned}\tag{IV.4}$$

os deslocamentos $u(t + \Delta t)$ são calculados considerando a equação do movimento da estrutura no tempo t :

$$\underline{M} \ddot{u}(t) + \underline{C} \dot{u}(t) + \underline{K} u(t) = \underline{R}(t)\tag{IV.5}$$

Como, para a obtenção dos deslocamentos no tempo $(t + \Delta t)$ utiliza-se a condição de equilíbrio no tempo t , o método da diferença central é dito "explícito", não necessitando, inclusive, de inversão da matriz de rigidez para a sua solução, em cada passo. Por outro lado, métodos como os de Houbolt, Wilson e Newmark, sobre os quais se falará a seguir, são chamados métodos de integração implícitos, por se utilizarem, para a sua solução, das condições de equilíbrio no tempo $(t + \Delta t)$.

Sendo este um método apenas condicionalmente estável, exige-se que:

$$\Delta t \leq t_{crit} = T_{min}/\pi\tag{IV.6}$$

onde T_{min} é o menor período do modelo discreto adotado.

IV.2 - Método de Houbolt

O método de Houbolt tem uma certa semelhança com o método da diferença central pela forma das expressões utilizadas para aproximar velocidades e acelerações como funções dos deslocamentos, que também são expressões de diferenças finitas, só que de grau mais alto.

Assim, tem-se:

$$\ddot{u}(t + \Delta t) = 1/\Delta t^2 [2 u(t + \Delta t) - 5 u(t) + 4u(t - \Delta t) - u(t - 2\Delta t)] \quad (\text{IV.7})$$

$$\dot{u}(t + \Delta t) = 1/6\Delta t [11 u(t + \Delta t) - 18u(t) + 9u(t - \Delta t) - 2u(t - 2\Delta t)]$$

Considerando agora a equação do movimento de estrutura no tempo $(t + \Delta t)$, vem:

$$\underline{M} \ddot{u}(t + \Delta t) + \underline{C} \dot{u}(t + \Delta t) + \underline{K} u(t + \Delta t) = \underline{R}(t + \Delta t) \quad (\text{IV.8})$$

cuja solução é obtida com a substituição da velocidade e da aceleração, dadas nas expressões acima.

A diferença básica entre o método de Houbolt e o da Diferença Central é que neste a matriz de rigidez K aparece como multiplicador dos deslocamentos procurados $u(t + \Delta t)$. Isto ocorre porque o equilíbrio é feito no tempo $(t + \Delta t)$, e não no tempo (t) , como no método da Diferença Central, constituindo-se, por isso, num esquema de integração implícito.

Quanto ao intervalo de integração, não há Δt limite, e, geralmente o intervalo de integração usado é muito maior que no caso do método da diferença central.

Para o caso de massa e amortecimento iguais a zero, o método de Houbolt reduz-se, automaticamente, ao caso estático com carga dependente do tempo, enquanto que o método da Diferença Central não pode ser utilizado.

IV.3 - O Método θ de Wilson

O método θ de Wilson pode ser considerado como uma extensão do método da aceleração linear, onde se assume uma variação linear para aceleração dentro de um intervalo de integração, assumindo sempre $\theta \geq 1,0$. Para o caso $\theta = 1,0$, o método reduz-se ao esquema da aceleração linear. Verificou-se, entretanto que o método se torna incondicionalmente estável para valores de $\theta \geq 1,37$, e por isso emprega-se, normalmente, $\theta = 1,40$.

Dessa forma, as expressões para a aceleração, velocidade e deslocamento, para o tempo $(t + \theta\Delta t)$, ficam:

$$\ddot{u}(t+\theta\Delta t) = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2} [u(t+\theta\Delta t) - u(t)] - \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{u}(t) - 2\ddot{u}(t) \quad (\text{IV.9})$$

$$\dot{u}(t+\theta\Delta t) = \frac{3}{\theta\Delta t} [u(t+\theta\Delta t) - u(t)] - 2\dot{u}(t) - \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{u}(t)$$

Considerando-se, agora, a equação de equilíbrio dinâmico da estrutura em $t = (t + \theta\Delta t)$, vem:

$$M \ddot{u}(t + \theta\Delta t) + C \dot{u}(t + \theta\Delta t) + K u(t + \theta\Delta t) = \bar{R}(t + \theta\Delta t) \quad (\text{IV.10})$$

com
$$\bar{R}(t + \theta\Delta t) = R(t) + \theta [R(t + \theta\Delta t) - R(t)]$$

Substituindo-se (IV.9) na equação do sistema, (IV.10), obtém-se uma expressão para $u(t + \theta\Delta t)$ que, voltando às mesmas equações, permite o cálculo de $\ddot{u}(t + \theta\Delta t)$ e $\dot{u}(t + \theta\Delta t)$.

IV.4 - O Método de Newmark

O Método de Newmark também pode ser encarado como uma extensão do método da aceleração linear.

As seguintes expressões são utilizadas:

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + [(1 - \delta)\ddot{u}(t) + \delta\ddot{u}(t + \Delta t)]\Delta t \quad (\text{IV.11})$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \dot{u}(t)\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{u}(t) + \right. \\ \left. - \alpha\ddot{u}(t + \Delta t)\right] \Delta t^2$$

onde α e δ são parâmetros adotados em função da precisão e da estabilidade a serem obtidos na integração.

Para $\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/6$, as relações anteriores correspondem ao método da aceleração linear. Quando $\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/4$, o algoritmo se transforma a famosa "regra do trapézio", e corresponde ao método da aceleração média constante, que é incondicionalmente estável.

Qualquer um dos métodos anteriores pode ser aplicado a problemas não-lineares, já que não existem restrições às matrizes de massa, amortecimento e rigidez.

IV.5 - Algoritmos baseados na interpolação das forças de inércia

Rearranjando-se a equação de equilíbrio dinâmico do sistema, (Eq.II.21), de maneira conveniente, vem:

$$\underline{R} = \underline{\bar{M}} \ddot{\underline{u}} = \underline{F}(t) - \underline{\bar{C}} \dot{\underline{u}} - \underline{R}_E \quad (\text{IV.12})$$

Com

\underline{R} = vetor das forças de inércia

\underline{R}_E = vetor das forças elásticas de restituição

$\underline{\bar{M}}$ e $\underline{\bar{C}}$ = matrizes de massa e amortecimento do sistema como um todo, a serem definidas no item (IV.6).

Considere-se agora o intervalo de tempo $\Delta t = t_{1+1} - t_1 = \delta$, onde se fará a interpolação das forças de inércia (\underline{R}).

Pode-se encarar a sequência de intervalos como elementos finitos no tempo, os quais permitirão o estudo integral do problema.

A interpolação das forças de inércia deverá ser feita pelos polinômios de Hermite, a partir de valores assumidos para \underline{R} e $\dot{\underline{R}}$ nos extremos do intervalo de tempo considerado.

Assim, em função dos polinômios adotados, a interpolação poderá ser linear, cúbica, etc.

a) Interpolação Linear:

Sejam por exemplo, as seguintes funções:

$$\phi_1 = 1 - \xi \quad (IV.13)$$

$$\phi_2 = \xi$$

onde $\xi = t/\tau$

A interpolação fica:

$$\underline{R} = \phi_1 \underline{R}_0 + \phi_2 \underline{R}_1 \quad (IV.14)$$

ou, substituindo as funções interpoladoras:

$$\underline{R} = (1 - \xi) \underline{R}_0 + \xi \underline{R}_1 \quad (IV.15)$$

com \underline{R}_0 e \underline{R}_1 representando os valores das forças de inércia no início e no final do intervalo de tempo.

Seja, agora, a equação do movimento da estrutura:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} = \underline{R}(t), \quad (IV.16)$$

que, integrada de t_0 a t , num intervalo genérico τ , fornece:

$$\underline{M} \dot{\underline{u}} = \underline{M} \dot{\underline{u}}_0 + \int_0^\xi \underline{R} \tau d\xi \quad (IV.17)$$

Integrando novamente, vem:

$$\underline{M} \underline{u} = \underline{M} \underline{u}_0 + \xi \tau \underline{M} \underline{u}_0 + \int_0^\xi \int_0^\xi \underline{R} \frac{\tau^2}{2} d\xi d\xi \quad (\text{IV.18})$$

Introduzindo em (IV.17 e IV.18) o valor das forças de inércia dado em (IV.15), vem, respectivamente.

$$\begin{aligned} \underline{M} \underline{u}_1 &= \underline{M} \underline{u}_0 + \tau/2 (\underline{R}_0 + \underline{R}_1) \\ \underline{M} \underline{u}_1 &= \underline{M} \underline{u}_0 + \tau \underline{M} \underline{u}_0 + \tau^2/3 \underline{R}_0 + \tau^2/6 \underline{R}_1 \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

As expressões obtidas são as mesmas do método da aceleração linear, como seria de se esperar, já que neste caso, as forças de inércia estão sendo interpoladas por funções lineares:

b) Interpolação Cúbica

Considerem-se, agora, os polinômios de Hermite do terceiro grau:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 1 - \xi^2 + 2\xi^3 \\ \phi_2 &= -2\xi^2 + \xi^3 \\ \phi_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ \phi_4 &= -\xi^2 + \xi^3 \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

Com essas funções, a interpolação fica:

$$\underline{R} = \phi_1 \underline{R}_0 + \phi_2 \frac{d}{d\xi} \underline{R}_0 + \phi_3 \underline{R}_1 + \phi_4 \frac{d}{d\xi} \underline{R}_1 \quad (\text{IV.21})$$

lembrando que:

$$\frac{d}{d\xi} \underline{R} = \frac{d}{dt} \underline{R} \frac{dt}{d\xi} = \underline{R} \tau, \quad (\text{IV.22})$$

vem:

$$\underline{R} = \phi_1 \underline{R}_0 + \phi_2 \tau \underline{R}_0 + \phi_3 \underline{R}_1 + \phi_4 \tau \underline{R}_1 \quad (\text{IV.23})$$

Introduzindo nesta equação as funções interpoladoras de IV.20 e a equação resultante em IV.17 e IV.18 vem respectivamente:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}_1 = \underline{M} \ddot{\underline{u}}_0 + \tau/12 (6\underline{R}_0 + \tau \dot{\underline{R}}_0 + 6\underline{R}_1 - \tau \dot{\underline{R}}_1) \quad (\text{IV.24})$$

$$\underline{M} \underline{u}_1 = \underline{M} \underline{u}_0 + \underline{M} \dot{\underline{u}}_0 + \tau^2/60 (21 \underline{R}_0 + 3\tau \dot{\underline{R}}_0 + 9\underline{R}_1 - 2\tau \dot{\underline{R}}_1)$$

A variação cúbica assumida para as forças de inércia resulta, é claro, numa variação idêntica para as acelerações, sendo, portanto superior à maioria dos métodos, onde a aceleração é normalmente suposta como tendo uma variação linear.

Tendo em vista que as equações (IV.24) não podem ser resolvidas diretamente, já que existe a necessidade de se conhecerem os valores das forças de inércia e suas derivadas ao final do intervalo, o método deve ser iterativo.

A maneira de se avaliar essas forças, utilizando a equação de equilíbrio dinâmico da estrutura, apresenta alguma variação em função do problema em questão ser ou não linear.

Apesar das estruturas das pontes estaiadas serem, em princípio, de comportamento geometricamente não-linear, qualquer dos métodos de integração direta anteriormente citados poderiam ser utilizadas, já que não existe restrição alguma com relação às matrizes da estrutura que o impeça, e desde que essa não-linearidade seja adequadamente considerada.

Como o método de integração das forças de inércia já é um processo iterativo, talvez ele seja especialmente interessante para os casos não-lineares, e foi por esta razão que foi o escolhido.

Para ser aplicado, algumas considerações devem ser feitas, e é exatamente disto que se tratará a seguir.

IV.6 - Aplicação do método escolhido ao problema em questão

Sendo as pontes estaiadas estruturas de comportamento geométricamente não-linear, a relação entre as forças elásticas de restituição \underline{R}_E e os deslocamentos \underline{u} , também o será, e a equação do movimento da estrutura será representada por (IV.12).

A derivada em relação ao tempo de \underline{R} daquela equação, fornece

$$\dot{\underline{R}} = \underline{M} \ddot{\underline{u}} = \underline{F}(t) - \underline{C} \dot{\underline{u}} - \underline{K}(\underline{u}) \underline{u} \quad (\text{IV.27})$$

Isto porque:

$$\dot{\underline{R}}_E = (\partial \underline{R}_E / \partial \underline{u}) \dot{\underline{u}} = \underline{K}(\underline{u}) \dot{\underline{u}} \quad (\text{IV.28})$$

Desde que sejam adotados intervalos bastante pequenos, pode-se linearizar a relação (III.28) no intervalo:

$$\begin{aligned} \underline{R}_{Ei+1} &= \underline{R}_{Ei} + \underline{K}_0 (\underline{u}_{i+1} - \underline{u}_i) \\ \dot{\underline{R}}_{Ei+1} &= \underline{K}_0 \dot{\underline{u}}_i \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

onde o índice "i+1" indica valores ao final do intervalo, e o índice "i", os do início.

Assim, talvez fosse mais adequado utilizar-se \underline{K}_1 (matriz de rigidez ao final do intervalo), ao invés de \underline{K}_0 , o que será feito para evitar a necessidade de se guardar ambas as matrizes ao mesmo tempo.

Além disso, para evitar o cálculo da matriz de rigidez a cada passo do esquema iterativo, o que se faz é, após algumas iterações, calculadas com a matriz \underline{K}_0 , obter-se uma nova matriz (\underline{K}_1), trabalhando-se a partir daí com um tipo de matriz que poderia ser chamada de "secante", no intervalo:

$$\bar{K}_0 = 1/2 [K_0 + K_1] \quad (IV.30)$$

Com isso, as forças elásticas ao final do intervalo poderiam ser calculadas mediante a expressão:

$$\underline{R}_{Ei+1} = \underline{R}_{Ei} + \underline{K}_0 (\underline{u}_{i+1} - \underline{u}_i) \quad (IV.31)$$

e não a partir dos deslocamentos finais \underline{u}_{i+1} .

A descrição do processo iterativo completo, é dado a seguir, e para isso deve-se definir, inicialmente as matrizes do sistema:

$$\begin{aligned} \underline{\ddot{u}} &= \begin{Bmatrix} \underline{\ddot{D}} \\ \underline{\ddot{Y}} \end{Bmatrix} & \underline{\dot{u}} &= \begin{Bmatrix} \underline{\dot{D}} \\ \underline{\dot{Y}} \end{Bmatrix} & \underline{u} &= \begin{Bmatrix} \underline{D} \\ \underline{Y} \end{Bmatrix} \\ \\ \underline{M} &= \begin{bmatrix} \underline{M} + \underline{M}_{\underline{V}} & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix} & \underline{K} &= \begin{bmatrix} \underline{K} + \underline{K}_{\underline{V}} & -k\underline{N}_{\underline{V}}^t \\ c\underline{v}\underline{N}_{\underline{V},x} - k\underline{N}_{\underline{V}} & k \end{bmatrix} \\ \\ \underline{C} &= \begin{bmatrix} \underline{C} + \underline{C}_{\underline{V}} & -c\underline{N}_{\underline{V}}^t \\ -c\underline{N}_{\underline{V}} & c \end{bmatrix} \\ \\ \underline{F}(t) &= \begin{Bmatrix} (m_1 + m_2) g \underline{N}_{\underline{V},x}^t \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (IV.32)$$

1º Passo: Para dar início ao processo iterativo, supõe-se que a estrutura parta do repouso, condição essa que poderia ser modificada sem maiores dificuldades.

Assim, adota-se:

$$\begin{aligned} \underline{D}_0 &= 0 & \dot{\underline{D}}_0 &= \underline{0} \\ \underline{y}_0 &= 0 & \underline{y}_0 &= 0 & \ddot{\underline{y}}_0 &= 0 \\ \ddot{\underline{D}}_0 &= -[\underline{M} + \underline{M}_V]^{-1} (m_1 + m_2) g \underline{N}_V^T \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

2º Passo: Calculam-se as forças de inércia e sua derivada:

$$\begin{aligned} \underline{R}_0 &= \underline{\bar{M}} \ddot{\underline{u}}_0 \\ \dot{\underline{R}}_0 &= \dot{\underline{F}}(t) - \underline{\bar{C}} \dot{\underline{u}}_0 \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

3º Passo: Processo iterativo no intervalo $[t_{i+1} - t_i] = \tau$

Faz-se uma primeira estimativa do valor das forças de inércia, ao final do intervalo de tempo genérico considerado, através da fórmula "predictor".

$$\begin{aligned} \dot{\underline{R}}_{i+1}^{(1)} &= \dot{\underline{R}}_i \\ \underline{R}_{i+1}^{(1)} &= \underline{R}_i + \tau \dot{\underline{R}}_i, \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

onde \underline{R}_i e $\dot{\underline{R}}_i$ são os valores no final do intervalo anterior e $\underline{R}_{i+1}^{(1)}$ e $\dot{\underline{R}}_{i+1}^{(1)}$, os valores estimados para o final do intervalo de tempo considerado, em uma primeira avaliação.

4º Passo: Calculam-se os deslocamentos, velocidades e acelerações, no tempo $(i+1)$, mediante a utilização das funções de interpolação escolhidas.

Assim:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{i+1}^{(k+1)} &= \bar{M}^{-1} R_{i+1}^{(k)} \\ \dot{u}_{i+1}^{(k+1)} &= \dot{u}_1 + \tau/12 \bar{M}^{-1} (6R_i + \dot{R}_i + 6R_{i+1}^{(k)} - \tau R_{i+1}^{(k)}) \\ u_{i+1}^{(k+1)} &= u_1 + \tau \dot{u}_1 + \tau^2/70 \bar{M}^{-1} (21R_i + 3\tau \dot{R}_i + 9R_{i+1}^{(k)} - \\ &\quad - 2\tau \dot{R}_{i+1}^{(k)}) \end{aligned} \quad (IV.36)$$

onde k representa a ordem da iteração no intervalo $[t_{i+1}, t_i]$ com $k = 1, 2, 3 \dots$

5º Passo: Recalculam-se, a partir dos deslocamentos, velocidades e acelerações obtidas no passo anterior, as forças de inércia e suas derivadas, utilizando, para isso, a equação de movimento da estrutura:

$$\begin{aligned} R_{i+1}^{(k+1)} &= F(t_{i+1}) - C \dot{u}_{i+1}^{(k+1)} - \bar{K}_0 (u_{i+1}^{(k+1)} - u_i) - R_{Ei} \\ \dot{R}_{i+1}^{(k+1)} &= \dot{F}(t_{i+1}) - \bar{C} \ddot{u}_{i+1}^{(k+1)} - \bar{K}_0 \dot{u}_{i+1}^{(k+1)} \end{aligned} \quad (IV.37)$$

6º Passo: Idêntico ao 4º passo, utilizando agora os valores das forças de inércia obtidos no passo anterior para calcular os deslocamentos, velocidades e aceleração.

7º Passo: Calcula-se o erro nos deslocamentos, por meio de:

$$\frac{\|u_{i+1}^{(k+1)} - u_{i+1}^{(k)}\|}{\|u_i^{(k)}\|} \leq \epsilon_1, \quad \epsilon_1 = \text{constante}$$

Se a inequação for satisfeita, passa-se ao passo seguinte. Caso contrário, volta-se ao 5º passo.

8º Passo: Calcula-se:

$$\underline{K}_0 = 1/2 [\underline{K}_0 + \underline{K}_1] \quad (\text{IV.39})$$

e com este valor, recalculam-se as forças de inércia, como no 5º passo, $\underline{R}_{i+1}^{(k+1)}$ e $\dot{\underline{R}}_{i+1}^{(k+1)}$

9º Passo: Estima-se o erro nas forças de inércia:

$$\frac{\|\underline{R}_{i+1}^{(k+1)} - \underline{R}_{i+1}^{(k)}\|}{\|\underline{R}_{i+1}^{(k)}\|} \leq \epsilon_2, \quad \epsilon_2 = \text{constante} \quad (\text{IV.40})$$

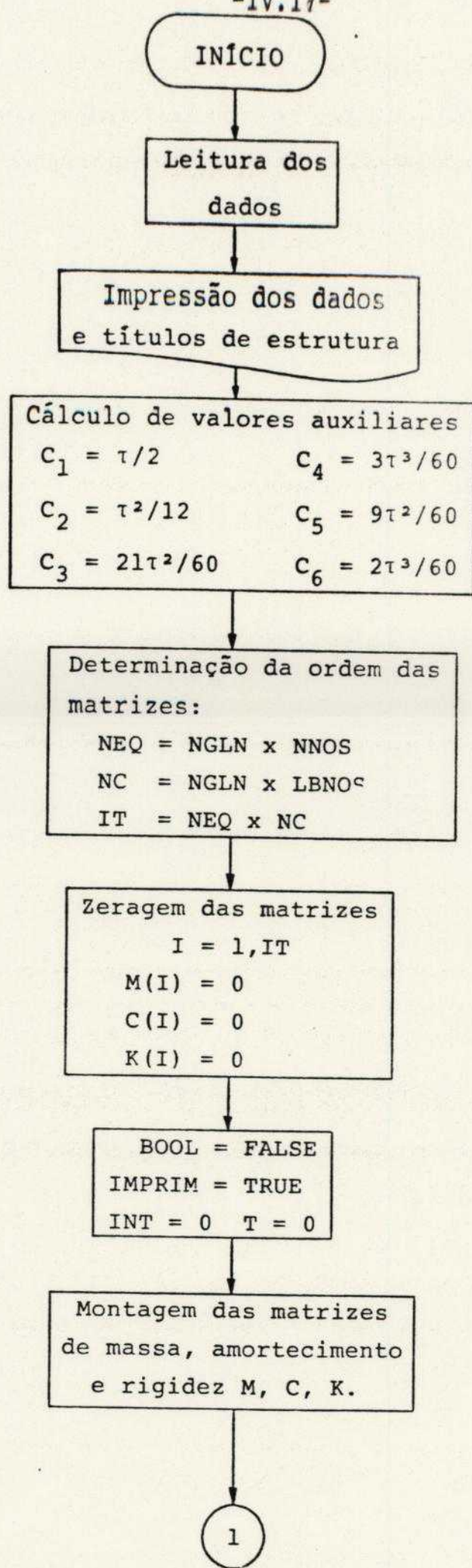
Se a inequação for satisfeita, passa-se para o próximo intervalo de tempo, retomando o processo a partir do 3º passo, e, sucessivamente, sobre todos os intervalos até o tempo final.

Tendo em vista que o processo é condicionalmente estável, deve-se ter o cuidado de utilizar um intervalo de integração compatível. Para que haja convergência, recomenda-se a utilização de um valor da ordem de grandeza do menor período da estrutura discretizada. Para se ter uma idéia deste valor, sem que haja necessidade de se obterem todos os auto-valores da estrutura, basta que se calcule o menor período dos elementos que a compõem.

A seguir, fornece-se um fluxograma do processo em questão, com o objetivo de esclarecer quaisquer dúvidas que possam persistir em torno do assunto.

-IV.16-

"FLUXOGRAMA"



1

Obtenção das forças
 R_{SO}
elástica em $T = 0$

Fixas as condições
iniciais: $D_o = \dot{D}_o = 0$

Inicialização da carga
móvel: $NELP = 0$
 $XLOCAL = 0$
 $XEL = 0$

Montagem do vetor de
carga e sua derivada
 $F(T)$ $\dot{F}(T)$

Imposição das condições
de contorno em deslocamentos
na matriz de massa e no
vetor de carga.

Impressão das matrizes de
massa amortecimento e
rigidez

Início da integração numérica
obtenção dos valores iniciais:
 $R_o = \underline{F}(T) - R_{SO} - \underline{C}\dot{D}_o$

2

2

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{M}}\underline{D}_0 &= \underline{R}_0 \\ \ddot{\underline{D}}_0 &= \underline{M}^{-1}\underline{R}_0 \\ \dot{\underline{R}}_0 &= \dot{\underline{F}}(T) - \underline{K}_0\dot{\underline{D}}_0 - \underline{C}\ddot{\underline{D}}_0 \end{aligned}$$

INT = INT + 1
T = INT x τ

$T \geq T_{max}$ v FIM

ITERA = 0

Obtenção da 1ª aproximação para as forças de inércia ao final do intervalo:
 $\dot{\underline{R}}_1 = \dot{\underline{R}}_0$
 $\underline{R}_1 = \underline{R}_0 + \tau\dot{\underline{R}}_0$

Cálculo dos deslocamentos, velocidades e acelerações:
 $\ddot{\underline{D}}_1 = \underline{M}^{-1}\underline{R}_1$
 $\dot{\underline{\Delta}}\underline{D} = \underline{M}^{-1}(C_1\underline{R}_0 + C_2\dot{\underline{R}}_0 + C_1\underline{R}_j - C_2\dot{\underline{R}}_1)$
 $\dot{\underline{D}}_1 = \dot{\underline{D}}_0 + \dot{\underline{\Delta}}\underline{D}$
 $\underline{\Delta}\underline{D} = \tau\dot{\underline{D}}_0 + \underline{M}^{-1}(C_3\underline{R}_0 + C_4\dot{\underline{R}}_0 + C_5\underline{R}_1 - C_6\dot{\underline{R}}_1)$
 $\underline{D}_1 = \underline{D}_0 + \underline{\Delta}\underline{D}$

ITERA = ITERA + 1

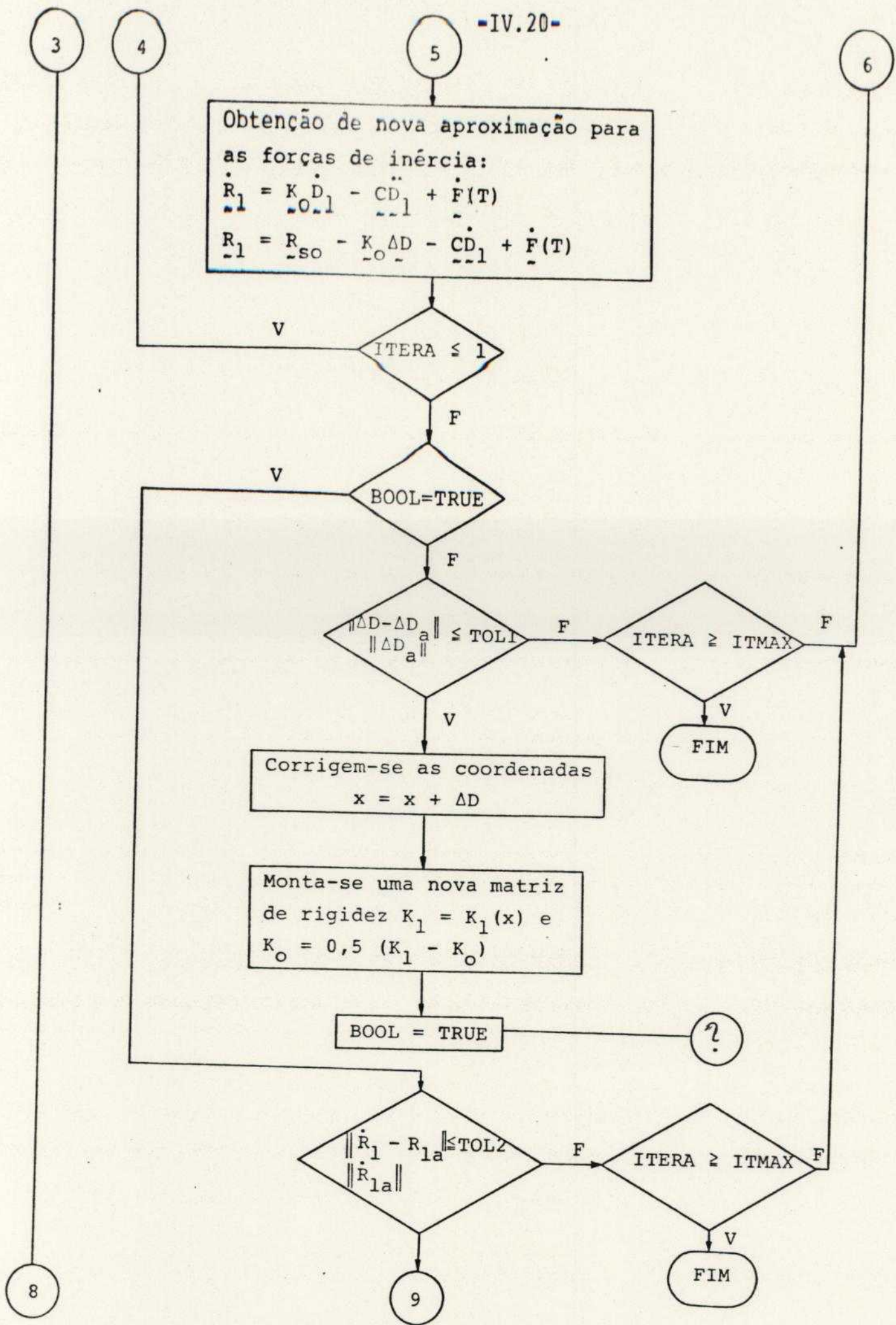
3

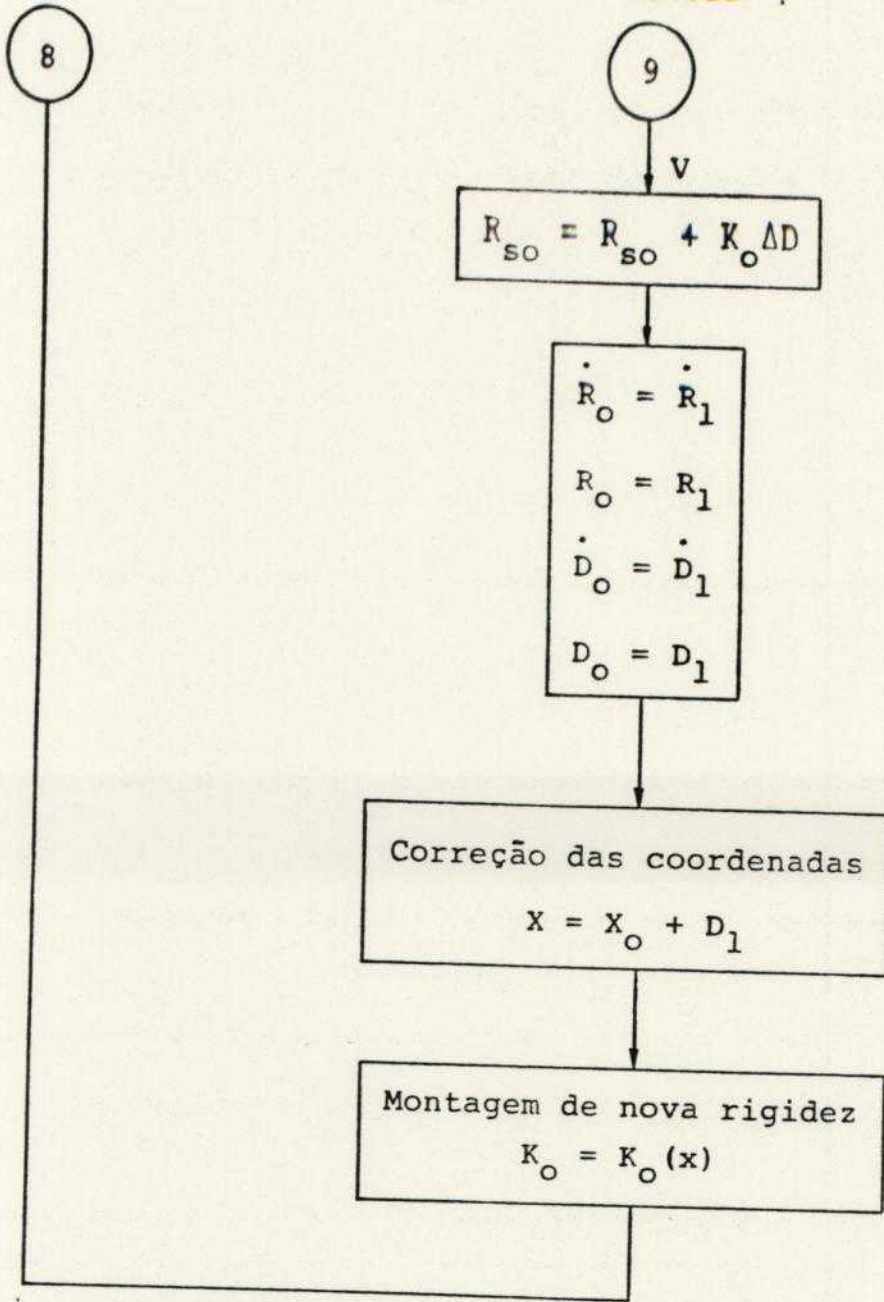
4

5

7

6





V - ANÁLISE NUMÉRICA

V.1 - Objetivo

O objetivo deste capítulo é em suma, o principal objetivo do trabalho. Isto é, utilizando-se as ferramentas anteriormente apresentadas, calcula-se um exemplo típico de ponte estaiada, comparando-se sempre os resultados obtidos sob a ação da carga móvel, com os resultados do mesmo carregamento aplicado estaticamente. Dessa comparação sai o valor de amplificação dinâmica, cujo valor se busca definir.

Para isso é necessário que os exemplos sejam tão próximos quanto possível de projetos reais, e representam, de fato a estrutura de uma ponte estaiada. Espera-se conseguir isso com o auxílio de um relatório de ensaios da Escola Politécnica de Lausanne (França, 1988), cujos dados vão ser utilizados a seguir.

V.2 - Exemplo escolhido: Ponte estaiada com torre única

Tendo em vista que o supracitado relatório tinha por objetivo primeiramente mostrar a viabilidade técnica e econômica das pontes estaiadas, e, em seguida, fornecer subsídios para a sua construção foram feitos dois modelos reduzidos, ambos em escala 1:20. Um, mais simples, para satisfazer o item

viabilidade e o outro, com maior riqueza de detalhes, para tentar antecipar os problemas que iriam surgir depois na construção da obra, uma ponte sobre o Reno de 97,00m de vão central, em Diepoldsau.

Como as pontes estaiadas são estruturas extremamente leves (um tabuleiro de 200m de vão, com 40cm de espessura, por exemplo), tem-se uma sensação de instabilidade ao contemplá-la, inspirada, principalmente, na sua esbelteza visual ($h/l = 1/500$). Deve-se ter em mente, entretanto, que isso é apenas aparente já que, a mesma laje, apoiada a cada 5.00m, e submetida aos mesmos esforços, apesar de parecer intuitivamente mais estável, têm exatamente a mesma segurança. Entretanto, para se afastar quaisquer dúvidas, os projetistas da ponte em questão fizeram uma série de ensaios, que irão servir, no caso deste trabalho, para corroboração dos resultados.

V.3 - Descrição do modelo matemático

O modelo reduzido em questão, na escala 1:20 tenta reproduzir todas as características reais da estrutura.

Possui uma torre metálica única e um tabuleiro em microconcreto armado.

A torre é composta de 2 tubos verticais de secção 80 x 50 x 5mm, unidas por perfis tipo U de 80mm. A largura do tabuleiro é de 210mm, com 25mm de espessura ao longo dos vãos, chegando a 35mm próximo à torre. Os estais são fios de aço de alta resistência do tipo corda de piano, com diâmetros variáveis entre 1,2 e 1,5mm, e resistência última $f_{yd} = 1700 \text{ N/mm}^2$.

O módulo de elasticidade do tabuleiro é de 45kN/mm², e o dos estais, 205kN/mm².

As cargas aplicadas ao modelo reduzido foram: $g = 3,52 \text{ kN/m}$, para as cargas permanentes, e $q = 0,79 \text{ kN/m}$ para a sobrecarga de serviço (70,35kN/m e 15,80kN/m no protótipo).

Tendo em vista as leis de similaridade existentes entre o modelo reduzido e o protótipo, este teria as características esquematizadas na Figura V.1-

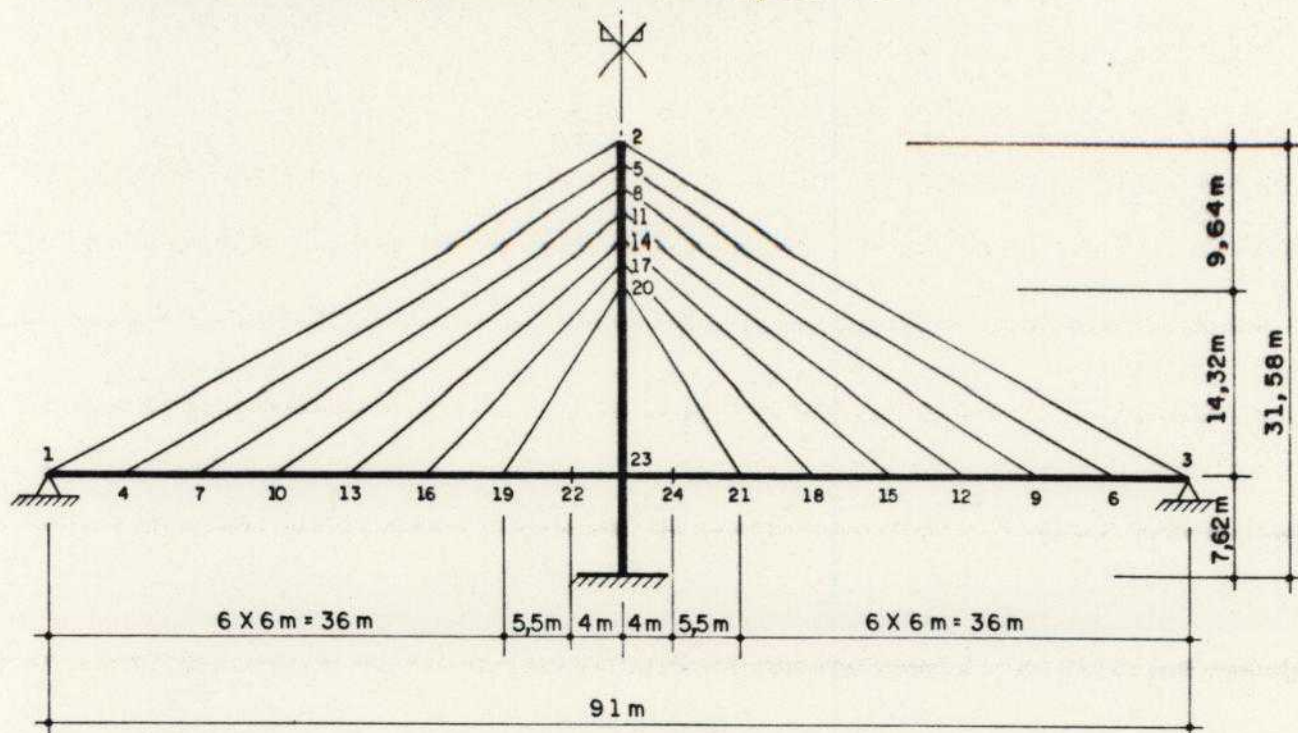


Fig. V.1.

As forças normais nos elementos estruturais do protótipo sob a ação das cargas permanentes e sobrecargas, podem ser vistas no esquema fornecido na Figura V.2. (forças no protótipo).

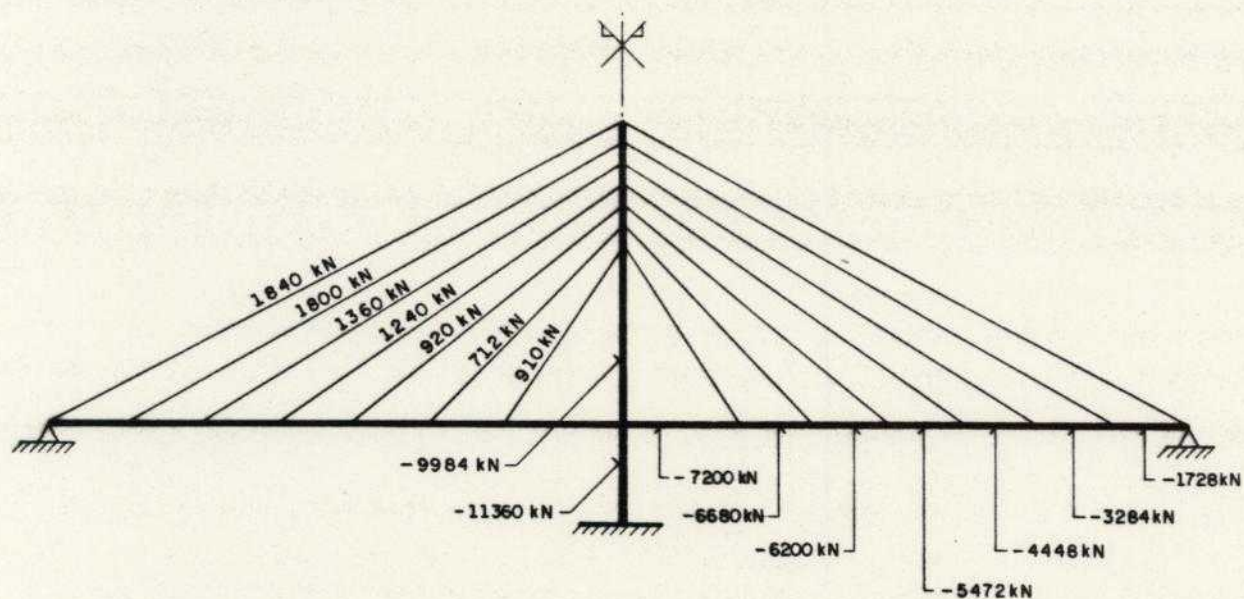


Fig. V.2.

Com a utilização de um programa auxiliar, faz-se o cálculo do efeito estático da carga móvel considerada. Isto foi feito aplicando-se essa carga nos nós 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 24, 21, 18, 15, 12, 9 e 6, do tabuleiro, e calculando-se a posição de equilíbrio e os esforços para cada uma das situações. O programa em questão é também iterativo, para que a variação na geometria que porventura possa ocorrer seja levada em conta na solução final.

As características dos elementos estruturais na análise do modelo matemático, assim como a numeração dos elementos, são dadas na figura V.3.

- a) **Tabuleiro** - Área = $4,20 \times 0,50 \text{ m}^2$ ($2,10\text{m}^2$)
Momento de inércia = $0,044\text{m}^4$
Peso específico = $22,8\text{kN/m}^3$
- b) **Torre** - Área = $0,5\text{m}^2$
Momento de inércia = $0,177\text{m}^4$
Peso específico = 77kN/m^3
- c) **Estais** - Área = $15,16\text{cm}^2$ (estais 17, 18, 29 e 30)
 $12,32\text{cm}^2$ (18, 20, 21, 26, 27 e 28)
 $9,04\text{cm}^2$ (22 e 25)
 $10,64\text{cm}^2$ (23 e 24)
Peso específico = 77kN/m^3
Inércia à flexão = suposta nula

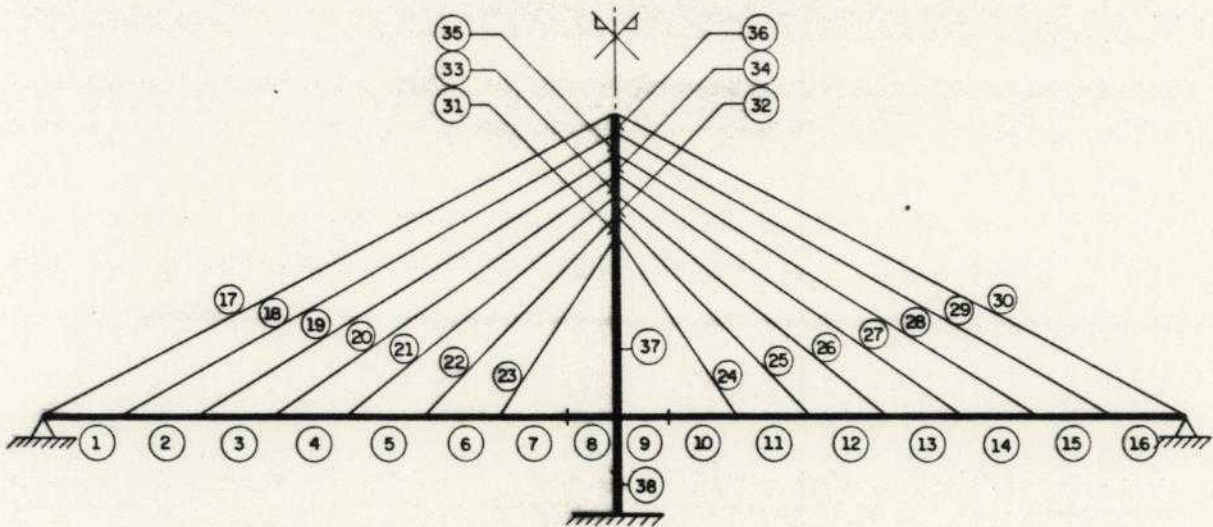


Fig.V.3-

Com o programa para o cálculo do efeito das cargas móveis em pontes estaiadas, foram analisadas os seguintes casos:

V.4 - Veículo com velocidade constante = 16,67m/s (60km/h)
(tempo de travessi = 5,46s)

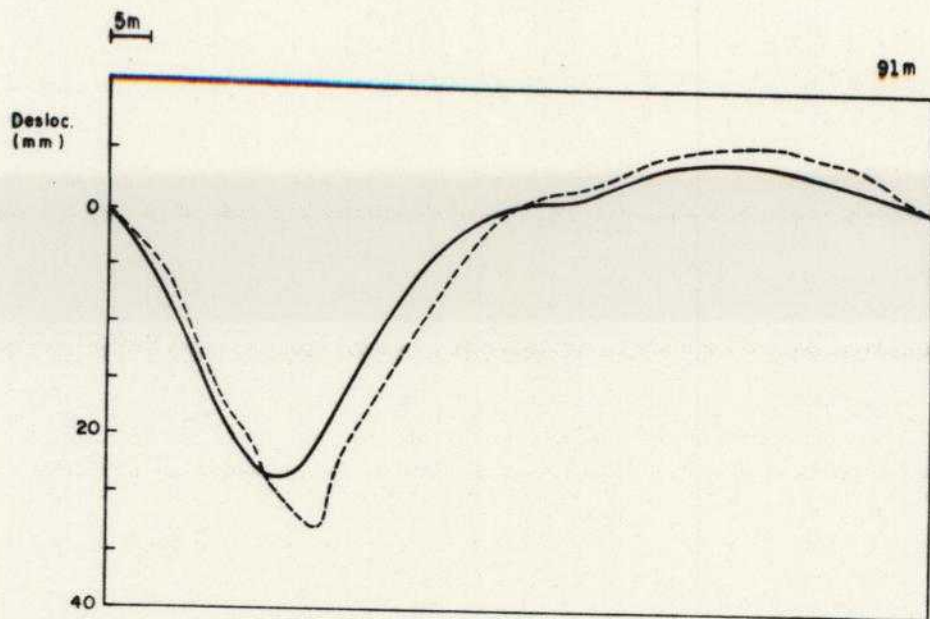


Fig.V.4 - Deslocamento do nó 10

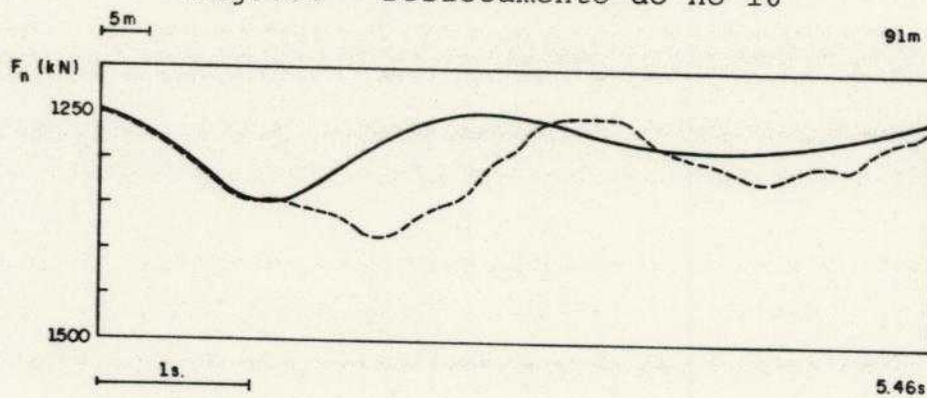


Fig.V.5 - Força no estai 20

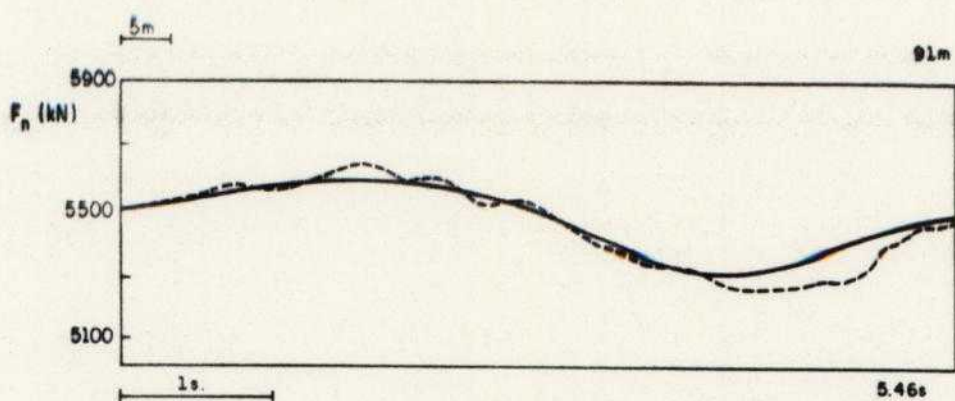


Fig.V.6 - Força normal no elemento 4

V.5 - Veículo com velocidade constante = 28m/s (100k/h)

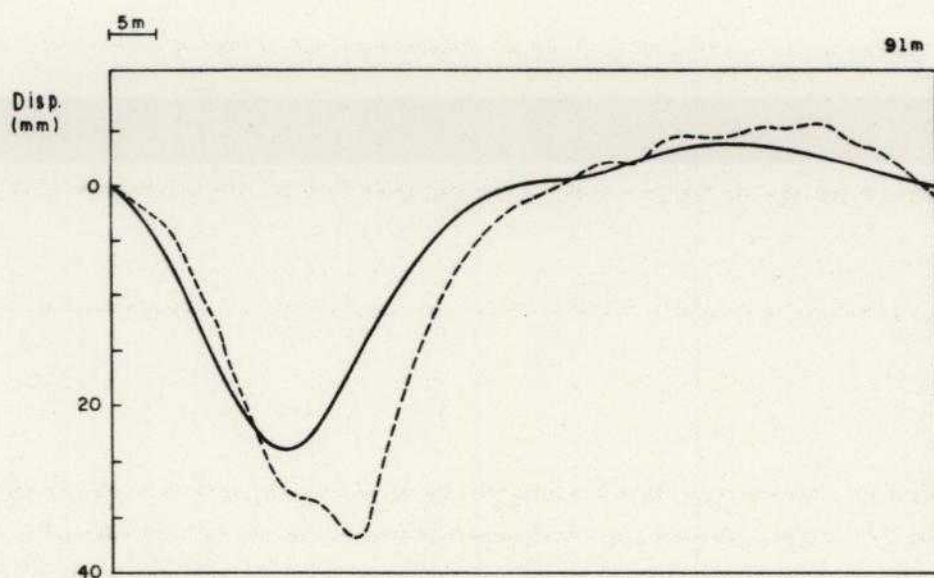


Fig.V.7 - Deslocamento do nó 10

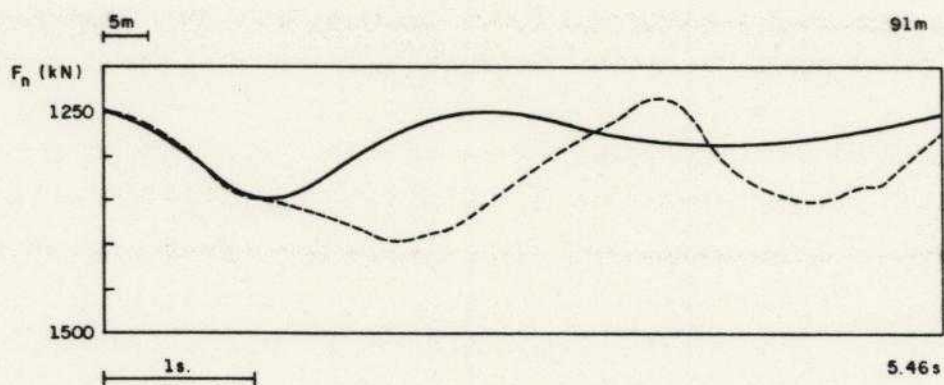


Fig.V.8 - Força no estai 20

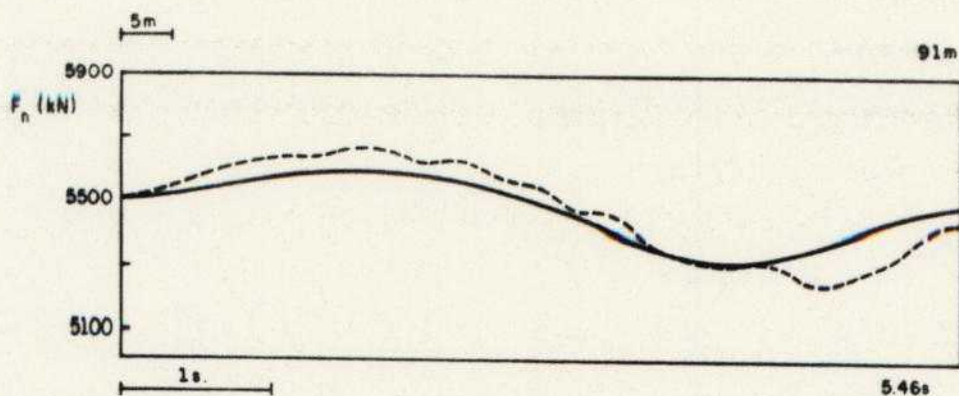


Fig.V.9 - Força no elemento 4

V.6 - Comentários Finais

Além disso, várias experimentações numéricas foram feitas, no sentido de se investigar a influência dos vários parâmetros em seu comportamento dinâmico.

Assim, verificou-se, por exemplo, que a rigidez do tabuleiro não tem grande influência nos deslocamentos: a estrutura funciona como que "pendurada" nos estais e na torre. Talvez por isso mesmo, em contrapartida, a influência da rigidez da torre seja muito importante, o que fez surgir a idéia de um refinamento maior do cálculo, qual seja o de se considerar a influência da curvatura de cada um de seus elementos através das chamadas funções de forma.

Em relação aos estais, importante é a rigidez efetiva, proveniente da sua pretensão no estado inicial com cargas permanentes, cuja influência se faz sentir principalmente nos deslocamentos da torre e do tabuleiro.

Outras tentativas foram feitas no sentido de se investigar outros carregamentos dinâmicos. Velocidades menores do veículo, por exemplo não despertavam maior interesse por se aproximarem cada vez mais da solução estática. As velocidades maiores foram deixadas de lado, por não serem viáveis para um veículo de 250kN.

Além disso, investigou-se também os casos de veículos velocidades variáveis (aceleração constante), mas com $v_0 = 0$ e $v_1 = 100\text{km/h}$, por exemplos, verificou-se que o efeito dinâmico era sensivelmente mais brando que nos casos em que a velocidade inicial era alta.

Por outro lado, verificou-se que, sendo o método apenas condicionalmente estável, à medida que o tempo de percurso cresce, o programa começa a atingir um tempo de processamento proibitivo, inviabilizando o processo para estruturas maiores, já que o intervalo de integração é, necessariamente pequeno (da ordem de $0,2 T_{\min}$, onde T_{\min} é o menor período dos elementos componentes da estrutura).

VI - CONCLUSÕES

VI.1 - Análise dos resultados obtidos

Ao contrário do esperado, a estrutura mostrou-se bastante rígida, mesmo quando considerado o efeito do carregamento dinâmico sobre ele. A majoração de deslocamentos, no pior caso (veículo a 30m/s) é da ordem de 35%. Para velocidade menor (17m/s), esse valor não chega a 32%.

No caso do esforço normal no tabuleiro, o efeito dinâmico é também pequeno (30%), enquanto que o caso do esforço nos estais esse valor tenderia aumentar um pouco (38%), já que é função, principalmente da calibragem dos cabos. Embora esses valores sejam confiáveis, existe a necessidade de se analisar um maior número de estruturas para que um valor de coeficiente de impacto realmente significativo possa ser obtido.

De qualquer forma, mesmo com valores da ordem de 1,5 para o coeficiente de amplificação dinâmica em pontes estaiadas, fica mais do que justificada a confiabilidade que envolve essas estruturas na atualidade.

Em relação ao relatório de ensaios de onde os dados utilizados no capítulo anterior foram extraídos, percebe-se que os valores lá encontrados indicam um fator de amplificação dinâmica um pouco maior (40%), provavelmente devido à maior flexibilidade da estrutura lá ensaiada (200m de vão central).

VI.2- Continuidade de pesquisa

Em face das dificuldades computacionais envolvidas no algoritmo de integração utilizado, sugere-se a utilização de um algoritmo incondicionalmente estável (Newmark, por exemplo) para que o tempo de processamento fique compatível com a utilização do programa.

Um tratamento mais sofisticado das torres, como já sugerido também seria interessante, para que se pudesse investigar a participação efetiva da torre no comportamento não-linear da estrutura.

A determinação do amortecimento real da estrutura também é um dado a ser criteriosamente investigado. Os valores utilizados, obtidos através de ensaios, parecem bastante baixos em relação aos utilizados normalmente na bibliografia.

O efeito real das não-linearidades nos parece o ponto mais importante a ser estudado. Deveria ser investigada uma separação de influência dos vários fatores já citados. Os grandes deslocamentos, para uma estrutura bem calibrada, provavelmente nem chegarão a ocorrer, mas o efeito da força normal nos momentos, principalmente nas torres, deve, necessariamente, ser considerado.

O problema da fadiga dos estais, quando a variação das forças chegar a níveis mais altos também pode se fazer necessário.

Dessa forma, vários caminhos se abrem à pesquisa com a dinâmica estrutural associando-se de maneira irreversível ao cálculo não-linear.

Os subsídios que se fizeram necessários para conclusão desta tese, com certeza poderão vir a ser utilizadas como base para estudos nos mais diversos campos de engenharia de estruturas.

VII - BIBLIOGRAFIA

1. ABDEL-GHAFFAR, A.M. & NAZMY, A.S. Three-dimensional nonlinear static analysis of cable-stayed bridges. Computers & Structures, Vol.34, nº 2, pp. 257-271, 1990.
2. ARGYRIS, J.H.; DUNES, P.C.; ANGELOPOULOS, T. Non-linear oscillations using the finite element technique. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2, 1973.
3. BARBOSA, C.J.H. Um algoritmo de ordem superior para a integração direta das equações da dinâmica estrutural. Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1978.
4. BARBOSA, H.J.C. & EBECKEN, N.F.F. Matriz de massa diagonal para elementos finitos em ordem superior. In: SIMPÓSIO SOBRE SISTEMAS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA CIVIL, 2., São Paulo, SP, 1978. Anais. p.61-83.
5. BARON, F. & LIEEN, S.Y. Analytical studies of a cable stayed girder bridge, Computer and Structures Vol.3. New York, N.Y., Pergamon Press, Publication 33-11, 1973.
6. BATHE, K.J. Finite element procedures in engineering analysis. New Jersey, Prentice-Hall, 1982.
7. CHEUNG, Y.K. Finite strip method in structural analysis Sydney, Pergamon Press, 1976.
8. CLOUGH, R.W. & PENZIEN, J. Dynamics of structures: New York, McGraw-Hill, 1975.

9. FALABELLA, J.E. Resposta dinâmica de estruturas reticuladas a cargas móveis, pelo método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
10. FLEMING, J.F. & ROMUALDI, J.P. Dynamic response of highway bridges. Journal of the Structural Division, ASCE, 87 (7): 31-61, 1961.
11. GENIN, J. & CHUNG, Y.I. Response of a continuous guideway on equally spaced supports traversed by a moving vehicle. Journal of Sound and Vibration, 67 (2): 245-251, 1979.
12. GUPTA, R.K. & TRAILL-NASH, R.W. Bridge dynamic loading due to road surface irregularities and braking of vehicle. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 8: 83-96, 1980.
13. HINO, J.; YOSHIMURA, T.; KONISHI K. A finite element method prediction of the vibration of a bridge subjected to a moving vehicle load. Journal of Sound and Vibration, 96 (1): 45-53.
14. HINTON, E.; ROCK, T.; ZIENKIEWICZ, O.C. A note on mass lumping and related process in the finite element Method. Structural Dynamics, 4, 1970.
15. HUANG, T. Vibration of bridges. Shock and Vibration Digest, 8: 61-76, 1976.
16. JOSEPH; T.P. & WILSON, J.F. Vibration of curved spans for mass transit. Journal of the Engineering Mechanics Division. ASCE, 106 (2): 255-272, 1980.

17. KAZITA, T. & CHEUNG, Y.K. Finite element analysis of cable stayed bridges. Publication 33-11, International Association for Bridge and Structural Engineering, 1973.
18. KORTUM, W. & WORMLEY, D.N. Dynamic Interaction between travelling vehicles and guideway systems. Vehicle System Dynamics, 10: 285-317, 1981.
19. LOO, Y.C. & CUSENS, A.R. The finite-strip method in bridge engineering. London, Viewpoint Publications, Alden Press, 1978.
20. LUNDEN, R. & AKESSON, B. Damped second-order Rayleigh-Timoshenko beam vibration in space: an exact complex dynamic member stiffness matrix. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19: 431-449, 1983.
21. MOTE, S.H. Nonlinear vibration of cable trusses Ph.D. Thesis, Illinois Institute of Technology, 1975.
22. NEWMARK, N.M. A method of computation for structural dynamics. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 85 (3): 67-94, 1959.
23. ODEN, J.T. & RIPERGER, E.A. Mechanics of elastic structures. 2nd.ed. New York, McGraw-Hill, 1981.
24. OLSSON, M. Analysis of structures subjected to moving loads. Ph.D. Thesis, Lund Institute of Technology 1987.
25. OLSSON, M. Finite element, modal co-ordinate analysis of structures subjected to moving loads. Journal of Sound and Vibration, 99 (1): 1-12, 1985.

26. PAZ, M. Structural dynamics: theory and computation, New York, Van Nostrand Reinhold, 1980.
27. PODOLNY JR., W. Design considerations in cable stayed bridges. Paper presented at the 1974, ASCE
28. PODOLNY JR., W. & SCALZI, B:J. Construction and design of cable-stayed bridges. New York, John Wiley & Sons, 1986.
29. POPP, K.; KRAUS, A.; HEISS, T. Dynamical analysis of a simple vehicle on a periodic guideway. Vehicle System Dynamics. 11: 107-120, 1982.
30. POSKITT, T.J. The application of elastic catenary formation to the analysis of suspended cable structures. The Structural Engineers, 41, (5), May, 1963.
31. PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of matrix structural analysis. New York, McGraw-Hill, 1968.
32. RICHARDSON, H.H. & WORMLEY; D.N. Transportation vehicle/beam-elevated guideway dynamic interactions: a state-of-the-art review. Journal of Dynamic Systems Measurements and Control, ASME, 96 (2): 169-179, 1974.
33. SADEK, E.A. On the dynamics of framed structures. Computers and Structures, 20 (6): 1013-1019, 1985.
34. SMITH, J.W. Finite strip analysis of the dynamic response of beam and slab highway bridges. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1: 357-370, 1973.

35. SRINIVASAN, R.S. & MUNASWAMY, K. Dynamic response of skew bridge decks. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 6: 139-156, 1976.
36. SZABO, B.A. Some recent developments in finite element analysis. Computers and Mathematics with Applications, 5: 99-115, 1979.
37. TAN, C.P. & SHORE, S. Response of horizontally curved bridge to moving load. Journal of the Structural Division, ASCE, 94 (8): 2135-2151, 1968.
38. TING, E.C.; GENIN, J. ; GINSBERG, J.H. A general algorithm for moving mass problems. Journal of Sound and Vibration, 33 (1): 49-58, 1974.
39. TING, E.C.; GENIN, J.; GINSBERG, J.H. Literature review: dynamic interaction of bridge structures and vehicles. Shock and Vibration Digest, 7 (11): 61-69, 1975.
40. TING, E.C. & YENER, M. Vehicle-structure interactions in bridge dynamics. Shock and Vibration Digest, 15 (2): 3-9, 1983.
41. TROITSKI; M.S. Calbe-stayed bridges. London, Crosby Lockwood Staples, 1977.
42. VELETOS, A.S. & HUANG, T. Analysis of dynamic response of highway bridges. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 96 (5): 593-620, 1970.
43. VENANCIO FILHO F. Análise matricial de estruturas, estática, estabilidade, dinâmica, Rio de Janeiro, Almeida Neve, 1975.

44. VENANCIO FILHO; F. Dynamic influence lines of beams and frames. Journal of the Structural Division, ASCE, 92 (2): 371-386, 1966.
45. VENANCIO FILHO, F. Finite element analysis of structures under moving loadas. Shock and Vibration Digest, 10 (8): 27-35, 1978.
46. WARBURTON, G.B. The dynamic behaviour of structures. 2nd. ed. Oxford, Pergamon Press, 1976.
47. WALTHER, Rapport d'Essai: Ponts haubanés à tablier mince. Lausanne, 1988.
48. WILSON, J.F. Model experiments for span-vehicle dynamics, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 103 (4): 701-715, 1977.
49. WOOD, W.L. A further look at Newmark, Houbolt, etc., time-stepping formulae. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20: 1009-1017, 1984.
50. WOOD, W.L. On the Zienkiewicz four-time-level scheme for the numerical integration of vibration problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11: 1519-1528, 1977.
51. YOSHIDA, D.M. & WEAVER, W. Finite element analysis of beams and plates with moving loads. Publication International Association for Bridge and Structural Engineering, 31 (1): 179-195, 1971.
52. ZIENKIEWICZ; O.C. The finite element method. 3rd.ed. London, McGraw-Hill, 1977.

53. ZIENKIEWICZ, O.C.; DE, S.R.; GAGO, J.P.; KELLY, D.W.
The hierarchical concept in finite element analysis.
Computers and Structures, 16 (-4): 53-65, 1983.

54. ZIENKIEWICZ, O.C.; WOOD, W.L.; TAYLOR, R.L.
A unified set of single step algorithms - Part 1:
general formulation and application. International
Journal for Numerical Methods in Engineering, 20:
1529-1552, 1984.

Obs.: As referências bibliográficas acham-se incluídas na
bibliografia.

"APÊNDICE"

Listagem do programa em linguagem FORTRAN


```

C*****
C  SUBROTINA PARA LEITURA E IMPRESSAO DE DADOS
C*****
SUBROUTINE DADOS(NO,ED,MCC,RLOCAL,NEF,MCCF)
INTEGER CONEC,TIPAN,ESTAB,CARREG
REAL MESP,IZ,M1,M2,KV,LZERO
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS,
*TIPAN,ESTAB,INROT,MASSA,IAMOR,ALFA,BETA,TOL1,TOL2,TF,TAU,
*IMPRES,CARREG
COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100),Y(100),
*Z(100),E(100),IZ(100),ITIPO(100),LZERO(100),XZERO(100),
*YZERO(100),ZZERO(100),ANGZ(100),FZERO(100)
COMMON /IMPRE/IMPS1,IMPDVA(100),IMPS2,IMPFOR(100)
COMMON /MOVEL/PV,VI,A,NEP,KV,CV,M1,M2
DIMENSION NO(50),ED(50,9),MCC(20,5),RLOCAL(20,9),MCCF(10,7)

C
C  LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS GERAIS DA ESTRUTURA
C
READ(IR,*)NNOS,NELEM,NAP,NNED,TIPAN,ESTAB,CARREG,MASSA
WRITE(IW,101)NELEM,NNOS,NAP,NNED,TIPAN,ESTAB,CARREG,MASSA
101  FORMAT(////,15X,'DADOS GERAIS DA ESTRUTURA',//,10X,'NUMERO',
*' DE ELEMENTOS=',I3,/,10X,'NUMERO DE NOS=',I3,/,10X,'NUME',
*' RO DE APOIOS=',I3,/,10X,'NUMERO DE NOS COM ELEMENTOS DISCR',
*' ETOS=',I3,/,10X,'TIPO DE ANALISE=',I3,/,10X,'ALGORITIMO U',
*' TILIZADO=',I3,/,10X,'CARREGAMENTO CONSIDERADO=',I3,/,10X,
*' MATRIZ DE MASSA TIPO=',I3)
READ(IR,*)INROT,IAMOR,ALFA,BETA,TOL1,TOL2,TF,TAU,IMPRES
IF( INROT .NE. 0 ) INROT=1
IF( IAMOR .LT. 1 .OR. IAMOR .GT. 3 ) IAMOR=1
WRITE(IW,105)INROT,IAMOR,ALFA,BETA,TOL1,TOL2,TF,TAU,IMPRES
105  FORMAT(10X,'INERCIA DE ROTACAO=',I3,/,10X,'TIPO DE AMO',
*' RTECIMENTO=',I3,/,10X,'ALFA=',E10.4,/,10X,'BETA=',E10.4,
*/,10X,'TOLERANCIA DOS DESLOCAMENTOS=',E10.4,/,10X,'TOLERANC',
*' IA DAS FORCAS DE INERCIA=',E10.4,/,10X,'TEMPO FINAL=',
*E10.4,/,10X,'INTERVALO DE INTEGRACAO=',E10.4,/,10X,'INTERV',
*' ALO DE IMPRESSAO DOS RESULTADOS=',I3,/)

C
C  LEITURA E IMPRESSAO DAS COORDENADAS DOS NOS
C
DO 25 J=1,NNOS
READ(IR,*)I,X(I),Y(I),Z(I),IMPDVA(I)
25  CONTINUE
WRITE(IW,103)
103  FORMAT(//,10X,'COORDENADAS DOS NOS',//,10X,'NO',10X,'X',10X,
*' Y',10X,'Z',10X,'IMPDVA'//)
DO 26 I=1,NNOS
WRITE(IW,107)I,X(I),Y(I),Z(I),IMPDVA(I)
107  FORMAT(7X,I5,3(2X,F10.4),10X,I2)
26  CONTINUE

C
C  LEITURA E IMPRESSAO DAS PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS
C
DO 10 L=1,NELEM

```



```

      READ(IR,*)I,ITIPO(I),CONEC(I,1),CONEC(I,2),E(I),MESP(I),
10  *AX(I),IZ(I),FZERO(I),IMPFOR(I)
      CONTINUE
      LBNOS=0
      JFIM=NNE-1
      IMPS2=0
      DO 14 I=1,NELEM
      IMPS2=IMPS2+IMPFOR(I)
      DO 13 J=1,JFIM
      KIN=J+1
      DO 12 K=KIN,NNE
      L=IABS(CONEC(I,J)-CONEC(I,K))
      IF(LBNOS-L)11,12,12
11  LBNOS=L
12  CONTINUE
13  CONTINUE
14  CONTINUE
      LBNOS=LBNOS+1
      IMPS1=0
      DO 15 I=1,NNOS
      IMPS1=IMPS1+IMPDVA(I)
      XZERO(I)=X(I)
      YZERO(I)=Y(I)
15  ZZERO(I)=Z(I)
      DO 16 I=1,NELEM
      NI=CONEC(I,1)
      NF=CONEC(I,2)
      DX=X(NF)-X(NI)
      DY=Y(NF)-Y(NI)
      DZ=Z(NF)-Z(NI)
      LZERO(I)=SQRT(DX*DX+DY*DY+DZ*DZ)
      IF(TIPAN .GT. 1) LZERO(I)=LZERO(I)/(1.+FZERO(I)/AX(I)/E(I))
      ANGZ(I)=ATAN2(DY,DX)
16  CONTINUE
      WRITE(IW,501)(I,ITIPO(I),CONEC(I,1),CONEC(I,2),E(I),MESP(I)
501 * ,AX(I),IZ(I),FZERO(I),LZERO(I),ANGZ(I),IMPFOR(I),I=1,NELEM)
      FORMAT(//,10X,'CARACTERISTICAS DOS ELEMENTOS',///,1X,'EL.'
      *,1X,'TIPO',1X,'NOI',1X,'NOF',1X,'MOD.EL.',1X,'MASSA ESP.'
      *,2X,'AREA',2X,'INERCIA',1X,'FORCA IN.',1X,'COMP.IN.',1X,
      *'ANGULO',1X,'IMP.FORCA',//,(1X,I3,1X,I3,1X,I3,1X,I3,7(1X,
      *E10.4),4X,I1))
C
C  ELEMENTOS DISCRETOS
C
      IF(NNED)2,2,1
1  CONTINUE
      DO 27 I=1,NNED
      READ(IR,*)NO(I),(ED(I,J),J=1,9)
27  CONTINUE
      WRITE(IW,601)
601  FORMAT(//,10X,'ELEMENTOS DISCRETOS',///,4X,'NO',8X,'M1',12X,
      *'M2',12X,'M3',12X,'C1',12X,'C2',12X,'C3',12X,'K1',12X,'K2',
      *12X,'K3',//)

```



```

DO 28 I=1,NNED
WRITE(IW,29)(NO(I),ED(I,J),J=1,9)
29  FORMAT(3X,13,9(4X,E10.4))
28  CONTINUE
C
C   CONDICÕES DE CONTORNO
C
2   CONTINUE
DO 22 I=1,NAP
READ(IR,*)(MCC(I,J),J=1,5),(RLOCAL(I,K),K=1,9)
22  CONTINUE
WRITE(IW,701)
701  FORMAT(/,10X,'CONDICOES DE CONTORNO',/,4X,'NO',2X,'DIR.1'
*,2X,'DIR.2',2X,'DIR.3',2X,'ROTACAO',22X,'MATRIZ DE ROTACAO')
DO 23 I=1,NAP
WRITE(IW,702)(MCC(I,J),J=1,5),(RLOCAL(I,K),K=1,9)
702  FORMAT(5X,5I5,5X,9E10.4)
23  CONTINUE
READ(IR,*)NEF
WRITE(IW,705)NEF
705  FORMAT(2X,'CONDICOES DE CONTORNO EM FORCA EM ',I3,'ELEMENTOS',/)
DO 720 I=1,NEF
READ(IR,*)(MCCF(I,J),J=1,7)
720  WRITE(IW,703)(MCCF(I,J),J=1,7)
703  FORMAT(2X,7(I5,2X))
C
C   LEITURA E IMPRESSAO DOS PARAMETROS DAS CARGAS MOVEIS
C
READ(IR,*)PV,M1,M2,KV,CV,VI,A,NEP
IF( CARREG .EQ. 2 ) WRITE(IW,301) M1,M2,KV,CV,VI,A,PV,NEP
301  FORMAT(/,15X,'CARACTERISTICAS DAS CARGAS MOVEIS',/,10X,'MASSA',
*,15X,'SUSPENSA=',E12.5,/,10X,'MASSA EM CONTACTO COM A ESTRUTURA=',
*,15X,'CONSTANTE DE MOLA DO VEICULO=',E12.5,/,10X,
*,15X,'AMORTECIMENTO DO VEICULO=',E12.5,/,10X,'VELOCIDADE=',E12.5,
*/,10X,'ACELERACAO=',E12.5,/,10X,'PESO DO VEICULO=',F10.0,/,10X,
*,15X,'NUMERO DE ELEMENTOS PERCORRIDOS=',I5)
C
C   IMPRESSAO DA LARGURA DA BANDA
C
WRITE(IW,800) LBNOS
800  FORMAT(10X,'LARGURA DA BANDA EM NOS=',I3,/)
RETURN
END
C*****
C   SUBROTINA PARA MONTAGEM DO VETOR DE CARGA
C*****
SUBROUTINE EXCITA(T,F,DF,NEQ,NEF,MCCF,RIGEL)
INTEGER CONEC
REAL MESP,M1,M2,KV
COMMON /GERAL/IR,IW
COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100)
COMMON /MOVEL/ PV,VI,A,NEP,KV,CV,M1,M2,NELP,XLOCAL,XEL
DIMENSION F(NEQ),DF(NEQ),MCCF(10,7),RIGEL(100,6,6)

```



```

IND=0
DO 1 L=1,NEF
IF((MCCF(L,1)-NELP) .EQ. 0) IND=1
1 CONTINUE
XL=XEL
NEL=NELP
DO 10 I=1,NEQ
F(I)=0.
10 DF(I)=0.
IF(T .NE. 0.) GO TO 11
XL=X(CONEC(1,2))
NEL=1
11 E=XLOCAL/XL
E2=E*E
E3=E2*E
V=VI+A*T
I=(CONEC(NEL,1)-1)*3
J=(CONEC(NEL,2)-1)*3
C WRITE(IW,50)PV,V,T,XLOCAL,XL,E,E2,E3
C50 FORMAT(8(1X,E12.5))
F(I+2)=PV*(1.-3.*E2+2.*E3)
F(I+3)=PV*XL*E*(1.-E)*(1.-E)
F(J+2)=PV*(3.*E2-2.*E3)
F(J+3)=PV*XL*E2*(E-1.)
DF(I+2)=PV*V*(-6.*E+6.*E2)/XL
DF(I+3)=PV*V*(1.-4.*E+3*E2)
DF(J+2)=-DF(I+2)
DF(J+3)=PV*V*(3.*E2-2.*E)
C WRITE(IW,51)(K,F(K),DF(K),K=1,NEQ)
C51 FORMAT(I5,2X,E14.7,2X,E14.7,/)
IF(IND .EQ. 1 ) GO TO 2
RETURN
2 DO 3 L=1,6
IF(L .EQ. 1 .OR. L .EQ. 4) GO TO 3
IF(MCCF(NEL,L+1) .EQ. 0) GO TO 3
IF(L-3)6,6,7
6 CORR=F(I+L)/RIGEL(NEL,L,L)
P=DF(I+L)
GO TO 4
7 CORR=F(J+L-3)/RIGEL(NEL,L,L)
P=DF(J+L-3)
4 DO 8 K=2,3
F(I+K)=F(I+K)-CORR*RIGEL(NEL,K,L)
F(J+K)=F(J+K)-CORR*RIGEL(NEL,K+3,L)
DF(I+K)=DF(I+K)-P*RIGEL(NEL,K,L)/RIGEL(NEL,L,L)
DF(J+K)=DF(J+K)-P*RIGEL(NEL,K+3,L)/RIGEL(NEL,L,L)
8 CONTINUE
3 CONTINUE
C WRITE(IW,51)(K,F(K),DF(K),K=1,NEQ)
RETURN
END
C*****
C SUBROTINA PARA A INTRODUCAO DAS CONDICAOES DE CONTORNO

```



```

C*****
SUBROUTINE APOIO(MAT,VET,NEQ,NVET,RLOCAL,MCC,KOD)
REAL MAT
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS
DIMENSION P(3),P1(3),C(3,3),CT(3,3),R(3,3),RT(3,3),TEMP(3,3
*),RLOCAL(20,9),MCC(20,5),REMP(3,3),SEMP(3,3),VET(NEQ),
*MAT(IT)
DO 10 MM=1,NAP
N=MCC(MM,1)
DO 20 I=1,NGLN
DO 30 J=1,NGLN
C(I,J)=0.
30 R(I,J)=0.
C(I,I)=1-MCC(MM,I+1)
20 R(I,I)=1.
IF(MCC(MM,NGLN+2))1,2,1
1 CALL ROT(R,RLOCAL,CX,CY,CZ,MM)
CALL MULTM(C,C,R,NGLN,NGLN,NGLN)
2 GO TO(42,21,21),KOD
21 DO 22 I=1,NGLN
DO 22 J=1,NGLN
RT(J,I)=R(I,J)
22 CT(J,I)=C(I,J)
IFIM=LBNOS-1
DO 40 I=1,IFIM
J=N-I
IF(J)5,5,3
3 CALL SACA(TEMP,J,N,MAT)
CALL MULTM(SEMP,TEMP,CT,NGLN,NGLN,NGLN)
CALL BOTAP(SEMP,J,N,MAT)
5 J=N+I
IF(NNOS-J)40,6,6
6 CALL SACA(TEMP,N,J,MAT)
CALL MULTM(SEMP,C,TEMP,NGLN,NGLN,NGLN)
CALL BOTAP(SEMP,N,J,MAT)
40 CONTINUE
CALL SACA(TEMP,N,N,MAT)
GO TO(42,42,43),KOD
42 DO 120 KK=1,NVET
CALL SACAP(KK,P,N,VET,NEQ)
CALL MULTV(P1,C,P,NGLN,NGLN,0)
CALL BOTAP(KK,P1,N,VET,NEQ)
120 CONTINUE
43 GO TO (10,121,121),KOD
121 CALL MULTM(SEMP,TEMP,CT,NGLN,NGLN,NGLN)
CALL MULTM(TEMP,C,SEMP,NGLN,NGLN,NGLN)
DO 160 LL=1,NGLN
160 TEMP(LL,LL)=TEMP(LL,LL)+MCC(MM,LL+1)
CALL BOTAP(TEMP,N,N,MAT)
10 CONTINUE
GO TO(181,11,11),KOD
11 DO 180 I=1,NNOS
IND=LBNOS*NGLN*(NGLN*(I-1)+2)+1

```



```

      IF(MAT(IND))180,170,180
170  MAT(IND)=1.
180  CONTINUE
181  RETURN
      END
C*****
C  SUBROTINA PARA TRIANGULARIZAR MATRIZ
C*****
      SUBROUTINE TRIANG(A,NEA,NEQ)
      DIMENSION A(NEA)
      LB=NEA/NEQ
      DO 30 N=1,NEQ
      I=N
      DO 29 L=2,LB
      I=I+1
      IND=L+(N-1)*LB
      IF(A(IND))24,29,24
24  C=A(IND)/A(1+IND-L)
      J=0
      DO 27 K=L,LB
      J=J+1
      IND1=K+(N-1)*LB
      IF(A(IND))26,27,26
26  IND2=J+(I-1)*LB
      A(IND2)=A(IND2)-C*A(IND1)
27  CONTINUE
      A(IND)=C
29  CONTINUE
30  CONTINUE
      RETURN
      END
C*****
C  SUBROTINA PARA RESOLUCAO DO SISTEMA
C*****
      SUBROUTINE RESOB(A,NEA,B,NEB,NVET)
      DIMENSION A(NEA),B(NEB)
      NEQ=NEB/NVET
      LB=NEA/NEQ
      DO 30 N=1,NEQ
      I=N
      DO 29 L=2,LB
      I=I+1
      IND=L+(N-1)*LB
      IF(A(IND))28,29,28
28  DO 281 IV=1,NVET
      INC=(IV-1)*NEQ
281  B(I+INC)=B(I+INC)-A(IND)*B(N+INC)
29  CONTINUE
      DO 291 IV=1,NVET
      INDV=N+(IV-1)*NEQ
291  B(INDV)=B(INDV)/A(1+(N-1)*LB)
30  CONTINUE
      N=NEQ

```



```

35     N=N-1
      IF(N)50,50,36
36     L=N
      DO 40 K=2, LB
      L=L+1
      IND=K+(N-1)*LB
      IF(A(IND))37,40,37
37     DO 371 IV=1, NVET
      INC=(IV-1)*NEQ
371    B(N+INC)=B(N+INC)-A(IND)*B(L+INC)
40     CONTINUE
      GO TO 35
50     RETURN
      END
C*****
C     SUBROTINA PARA SOLUCAO DE SISTEMAS COM MATRIZ DIAGONAL
C*****
      SUBROUTINE RESOD(A,NEA,B,NEB,NVET)
      DIMENSION A(NEA),B(NEB)
      NEQ=NEB/NVET
      LB=NEA/NEQ
      DO 20 IV=1, NVET
      IVET=(IV-1)*NEQ
      DO 10 I=1, NEQ
10     B(I+IVET)=B(I+IVET)/A((I-1)*LB+1)
20     CONTINUE
      RETURN
      END
C*****
C     SUBROTINA PARA MUDANCA DE COORDENADAS
C*****
      SUBROUTINE GLOBAL(P,NP,MCC,RLOCAL)
      COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP
      DIMENSION P(NP),RLOCAL(20,9),R(3,3),U1(3),U2(3),MCC(20,5)
      NVET=NP/(NGLN*NNOS)
      DO 10 I=1, NAP
      IF(MCC(I,5))1,10,1
1     CALL ROT(R,RLOCAL,CX,CY,CZ,I)
      DO 20 J=1, NVET
      CALL SACAP(J,U1,MCC(I,1),P,NP)
      CALL MULTV(U2,R,U1,NGLN,NGLN,1)
20    CALL BOTAP(J,U2,MCC(I,1),P,NP)
10    CONTINUE
      RETURN
      END
C*****
C     SUBROTINA PARA MONTAGEM DAS MATRIZES DA ESTRUTURA
C*****
      SUBROUTINE MONTA(MAT,NO,ED,MOUK,NEF,MCCF)
      LOGICAL BOOL,IMPRIM
      INTEGER TIPEL,CONEC,TIPAN,ESTAB
      REAL MAT,IZ,MESP,LZERO
      COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS,

```



```

*TIPAN, ESTAB, INROT, MASSA
COMMON /PROP/AX(100), MESP(100), CONEC(100,2), X(100), Y(100),
*Z(100), E(100), IZ(100), ITIPO(100), LZERO(100), XZERO(100),
*YZERO(100), ZZERO(100), ANGZ(100), FZERO(100), RIGEL(100,6,6),
*FORCA(100,6), D2(300), FE(300)
COMMON /LOGICO/ BOOL, IMPRIM, INT
DIMENSION RIGE(6,6), TEMP(3,3), NO(50), ED(50,9), MAT(IT), MCCF(10,7)
IF( MOUK .NE. 1 ) GO TO 111
IF( MASSA .EQ. 3 )GO TO 222
111 DO 20 NEL=1, NELEM
TIPEL=ITIPO(NEL)
GO TO (1,2), MOUK
1 GO TO (3,4,4,4,4), TIPEL
3 CALL MASSP(NEL, RIGE, INROT, MASSA)
GO TO 7
4 CALL MASSC(NEL, RIGE, MASSA)
GO TO 7
2 GO TO (5,6,6,6,6), TIPEL
5 CALL RIGEP(NEL, RIGE, NEF, MCCF)
GO TO 7
6 CALL RIGEC(NEL, RIGE)
7 DO 30 I=1, NNE
N1=CONEC(NEL, I)
DO 40 J=1, NNE
N2=CONEC(NEL, J)
IF(N1-N2)11, 12, 12
11 N11=N2
N22=N1
GO TO 13
12 N11=N1
N22=N2
13 CALL SACA(TEMP, N22, N11, MAT)
IF(N1-N2)15, 16, 14
14 DO 50 KK=1, NGLN
IK=NGLN*(I-1)+KK
DO 50 L=1, NGLN
IL=NGLN*(J-1)+L
50 TEMP(L, KK)=RIGE(IK, IL)+TEMP(L, KK)
GO TO 71
15 DO 60 KK=1, NGLN
IK=NGLN*(I-1)+KK
DO 60 L=1, NGLN
IL=NGLN*(J-1)+L
60 TEMP(KK, L)=TEMP(KK, L)+RIGE(IK, IL)
GO TO 71
16 DO 70 KK=1, NGLN
IK=NGLN*(I-1)+KK
DO 70 L=KK, NGLN
IL=NGLN*(I-1)+L
70 TEMP(KK, L)=TEMP(KK, L)+RIGE(IK, IL)
71 CALL BOTA(TEMP, N22, N11, MAT)
40 CONTINUE
30 CONTINUE

```



```

20  CONTINUE
C   DO 81 I=1,NEQ
C   IN=LBNOS*NGLN*(I-1)+1
C   WRITE(IW,54)IN,MAT(IN)
C54  FORMAT(2X,I5,1X,E14.7)
C81  IF(MAT(IN) .EQ. 0.) MAT(IN)=1.
222  IF( NNED .LT. 1 ) RETURN
      JJ=2*NGLN
      IF(MOUK .EQ. 1 ) JJ=0
      DO 80 I=1,NNED
      NOI=NO(I)-1
      DO 90 J=1,NGLN
      IND=LBNOS*NGLN*(NGLN*NOI+J-1)+1
      MAT(IND)=MAT(IND)+ED(I,J+JJ)
90   CONTINUE
80   CONTINUE
      IF( TIPAN .NE. 3 .OR. MOUK .NE. 2 .OR. .NOT. BOOL )RETURN
      DO 82 I=1,NNED
      II=NGLN*NO(I)+1
      DO 82 J=1,NGLN
82   FE(II-J)=FE(II-J)+D2(II-J)*ED(I,J+JJ)
      RETURN
      END
C*****
C   SUBROTINA MONTADORA DA MATRIZ DOS COSSENOS DIRETORES
C*****
      SUBROUTINE ROT(R,RLOCAL,CX,CY,CZ,K)
      DIMENSION R(3,3),RLOCAL(20,9)
      IF( K .EQ.0 ) GO TO 2
      DO 10 I=1,3
      R(1,I)=RLOCAL(K,I)
      R(2,I)=RLOCAL(K,I+3)
10   R(3,I)=RLOCAL(K,I+6)
      RETURN
2   Q=SQRT(CX*CX+CZ*CZ)
      IF( Q .GT. 0.0001 ) GO TO 3
      R(1,1)=0.
      R(1,2)=CY
      R(1,3)=0.
      R(2,1)=-CY
      R(2,2)=0.
      R(2,3)=0.
      R(3,1)=0.
      R(3,2)=0.
      R(3,3)=1.
      RETURN
3   R(1,1)=CX
      R(1,2)=CY
      R(1,3)=CZ
      R(2,1)=-CX*CY/Q
      R(2,2)=Q
      R(2,3)=-CY*CZ/Q
      R(3,1)=-CZ/Q

```



```

R(3,2)=0.
R(3,3)=CX/Q
RETURN
END
C*****
C   SUBROTINA MONTADORA DA MATRIZ DE ROTACAO DO ELEMENTO
C*****
SUBROUTINE ROTM(RTSR,S,R)
DIMENSION RTSR(6,6),S(6,6),R(3,3)
DO 1 I=1,3
DO 1 J=1,3
E=0.
F=0.
G=0.
DO 2 N=1,3
RT=R(N,I)
DO 2 K=1,3
E=E+RT*S(N,K)*R(K,J)
F=F+RT*S(N,K+3)*R(K,J)
2 G=G+RT*S(N+3,K+3)*R(K,J)
RTSR(I,J)=E
RTSR(I,J+3)=F
1 RTSR(I+3,J+3)=G
DO 3 I=1,5
II=I+1
DO 3 J=II,6
3 RTSR(J,I)=RTSR(I,J)
RETURN
END
C*****
C   SUBROTINA PARA MULTIPLICAR VETOR POR MATRIZ QS ARMAZENADA
C   EM BANDA
C*****
SUBROUTINE MULTB(A,V,P,NA,NV)
DIMENSION A(NA),V(NV),P(NV)
LB=NA/NV
DO 30 I=1,NV
P(I)=0.
DO 20 J=1,NV
JB=J-I+1
IF(JB-LB)9,9,30
9 IF(I-J)10,10,11
10 IND=JB+(I-1)*LB
GO TO 19
11 IB=I-J+1
IF(IB-LB)12,12,20
12 IND=IB+(J-1)*LB
19 P(I)=P(I)+A(IND)*V(J)
20 CONTINUE
30 CONTINUE
RETURN
END
C*****

```



```

C      SUBROTINA QUE MULTIPLICA MATRIZ POR VETOR
C*****
      SUBROUTINE MULTV(VT1,A,VT2,N1,N2,ITRANS)
      DIMENSION VT1(N1),VT2(N2),A(N1,N2)
      IF( ITRANS.NE.0) GO TO 2
      DO 10 I=1,N1
      VT1(I)=0.
      DO 20 J=1,N2
20     VT1(I)=VT1(I)+A(I,J)*VT2(J)
10     CONTINUE
      RETURN
2      DO 30 I=1,N1
      VT1(I)=0.
      DO 40 J=1,N2
40     VT1(I)=VT1(I)+A(J,I)*VT2(J)
30     CONTINUE
      RETURN
      END
C*****
C      SUBROTINA PARA MULTIPLICAR MATRIZES
C*****
      SUBROUTINE MULTM(C,A,B,N1,N2,N3)
      DIMENSION C(N1,N3),A(N1,N2),B(N2,N3),V(3)
      DO 10 I=1,N1
      DO 20 J=1,N3
      V(J)=0.
      DO 20 K=1,N2
20     V(J)=V(J)+A(I,K)*B(K,J)
      DO 30 J=1,N3
30     C(I,J)=V(J)
10     CONTINUE
      RETURN
      END
C*****
C      SUBROTINA PARA TIRAR UM VETOR DE OUTRO
C*****
      SUBROUTINE SACAP(I,P,N,VET,NV)
      COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS
      DIMENSION P(NGLN),VET(NV)
      K1=NGLN*(NNOS*(I-1)+N-1)
      DO 10 K=1,NGLN
      KK=K1+K
10     P(K)=VET(KK)
      RETURN
      END
C*****
C      SUBROTINA PARA COLOCAR UM VETOR EM OUTRO
C*****
      SUBROUTINE BOTAP(I,P,N,VET,NV)
      COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS
      DIMENSION P(NGLN),VET(NV)
      K1=NGLN*(NNOS*(I-1)+N-1)
      DO 10 K=1,NGLN

```



```

      KK=K1+K
10    VET(KK)=P(K)
      RETURN
      END
C*****
C    SUBROTINA PARA RETIRAR SUBMATRIZ DE MATRIZ
C*****
      SUBROUTINE SACA(TEMP,N1,N2,VET)
      COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS
      DIMENSION TEMP(NGLN,NGLN),VET(IT)
      K1=NGLN*(N1-1)
      K2=NGLN*(N2-N1)
      IF(N1-N2)10,11,12
10    DO 20 I=1,NGLN
      DO 20 J=1,NGLN
      IND=NGLN*LBNOS*(K1+I-1)+K2+J-I+1
20    TEMP(I,J)=VET(IND)
      RETURN
11    DO 30 I=1,NGLN
      DO 30 J=I,NGLN
      IND=NGLN*LBNOS*(K1+I-1)+J-I+1
      TEMP(I,J)=VET(IND)
30    TEMP(J,I)=TEMP(I,J)
      RETURN
12    WRITE(IW,100)N1,N2
100   FORMAT(//10X,'ERRO NA SUBROTINA SACA. N1=',I3,'N2=',I3)
      CALL EXIT
      END
C*****
C    SUBROTINA PARA COLOCAR SUBMATRIZ EM MATRIZ
C*****
      SUBROUTINE BOTA(TEMP,N1,N2,VET)
      COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS
      DIMENSION TEMP(NGLN,NGLN),VET(IT)
      K1=NGLN*(N1-1)
      K2=NGLN*(N2-N1)
      IF(N1-N2)10,11,12
10    DO 20 I=1,NGLN
      DO 20 J=1,NGLN
      IND=NGLN*LBNOS*(K1+I-1)+K2+J-I+1
20    VET(IND)=TEMP(I,J)
      RETURN
11    DO 30 I=1,NGLN
      DO 30 J=I,NGLN
      IND=NGLN*LBNOS*(K1+I-1)+J-I+1
30    VET(IND)=TEMP(I,J)
      RETURN
12    WRITE(IW,100)N1,N2
100   FORMAT(//10X,'ERRO NA SUBROTINA BOTA. N1=',I3,'N2=',I3)
      CALL EXIT
      END
C*****
C    SUBROTINA PARA TESTAR A CONVERGENCIA

```



```

C*****
SUBROUTINE CONV(V1,V2,N,TOL,ICONV)
REAL NORM1,NORMD
COMMON /GERAL/IR,IW
DIMENSION V1(N),V2(N)
ICONV=1
NORM1=0.
NORMD=0.
DO 10 I=1,N
NORM1=NORM1+V1(I)*V1(I)
10  NORMD=NORMD+(V2(I)-V1(I))**2
NORM1=SQRT(NORM1)
NORMD=SQRT(NORMD)
IF(NORM1-1.E-15)101,101,102
101 WRITE(IW,100)
100 FORMAT(/,10X,'NORMA DO VETOR MENOR QUE 1.E-15')
NORM1=1.
102 IF((NORMD/NORM1)-TOL)12,12,11
11  ICONV=2
12  RETURN
END

C*****
C  SUBROTINA PARA CALCULO DA MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO
C  DE PORTICO
C*****
SUBROUTINE MASSP(NEL,RTSR,INROT,MASSA)
INTEGER CONEC
REAL MESP,IZ
COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100),Y(100),
*Z(100),E(100),IZ(100),ITIPO(100)
DIMENSION RIGE(6,6),RTSR(6,6),R(3,3),RLOCAL(20,9)
DX=X(CONEC(NEL,2))-X(CONEC(NEL,1))
DY=Y(CONEC(NEL,2))-Y(CONEC(NEL,1))
XL=SQRT(DX*DX+DY*DY)
CX=DX/XL
CY=DY/XL
F=MESP(NEL)*AX(NEL)*XL
G=MESP(NEL)*IZ(NEL)*INROT
GO TO (1,2,3),MASSA
1  RIGE(1,1)=F/3.
RIGE(1,2)=0.
RIGE(1,3)=0.
RIGE(1,4)=F/6.
RIGE(1,5)=0.
RIGE(2,2)=F*13./35.+G*1.2/XL
RIGE(2,3)=F*11./210.*XL+G*0.1
RIGE(2,4)=0.
RIGE(2,5)=F*9./70.-G*1.2/XL
RIGE(2,6)=-F*13./420.*XL+G*0.1
RIGE(3,3)=F/105.*XL*XL+G*2./15.*XL
RIGE(3,4)=0.
RIGE(3,5)=-RIGE(2,6)
RIGE(3,6)=-F/140.*XL*XL-G/30.*XL

```



```

RIGE(4,4)=RIGE(1,1)
RIGE(4,5)=0.
RIGE(4,6)=0.
RIGE(5,5)=RIGE(2,2)
RIGE(5,6)=-RIGE(2,3)
RIGE(6,6)=RIGE(3,3)
DO 10 I=1,5
  II=I+1
  DO 10 J=II,6
10  RIGE(J,I)=RIGE(I,J)
    CALL ROT(R,RLOCAL,CX,CY,0,0)
    CALL ROTM(RTSR,RIGE,R)
    RETURN
2   DO 20 I=1,6
    DO 20 J=1,6
20  RTSR(I,J)=0.
    RTSR(1,1)=F*0.5
    RTSR(2,2)=RTSR(1,1)
    RTSR(3,3)=F*XL*XL/420.+G*XL*0.1
    RTSR(4,4)=RTSR(1,1)
    RTSR(5,5)=RTSR(1,1)
    RTSR(6,6)=RTSR(3,3)
3   RETURN
    END
C*****
C   SUBROTINA PARA O CALCULO DA MATRIZ DE MASSA DO CABO
C*****
SUBROUTINE MASSC(NEL,RTSR,MASSA)
  INTEGER CONEC, TIPEL
  REAL MESP
  COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100),Y(100),
  *Z(100),E(100),IZ(100),ITIPO(100)
  DIMENSION RIGE(6,6),RTSR(6,6),R(3,3),RLOCAL(20,9)
  TIPEL=ITIPO(NEL)
  DX=X(CONEC(NEL,2))-X(CONEC(NEL,1))
  DY=Y(CONEC(NEL,2))-Y(CONEC(NEL,1))
  DZ=Z(CONEC(NEL,2))-Z(CONEC(NEL,1))
  IF( TIPEL .LT. 4 ) DZ=0.
  XL=SQRT(DX*DX+DY*DY+DZ*DZ)
  CX=DX/XL
  CY=DY/XL
  CZ=DZ/XL
  GO TO (111,222,333),MASSA
111 F=MESP(NEL)*AX(NEL)*XL/3.
    RIGE(1,1)=F
    RIGE(1,2)=0.
    RIGE(1,3)=0.
    RIGE(1,4)=F*0.5
    RIGE(1,5)=0.
    RIGE(1,6)=0.
    RIGE(2,2)=F
    RIGE(2,3)=0.
    RIGE(2,4)=0.

```



```

RIGE(2,5)=F*0.5
RIGE(2,6)=0.
RIGE(3,3)=0.
RIGE(3,4)=0.
RIGE(3,5)=0.
RIGE(3,6)=0.
RIGE(4,4)=F
RIGE(4,5)=0.
RIGE(4,6)=0.
RIGE(5,5)=F
RIGE(5,6)=0.
RIGE(6,6)=0.
GO TO(70,2,2,1,1),TIPEL
1  RIGE(3,3)=F
   RIGE(6,6)=F*0.5
   RIGE(6,6)=F
2  DO 10 I=1,5
   II=I+1
   DO 10 J=II,6
10  RIGE(J,I)=RIGE(I,J)
   CALL ROT(R,RLOCAL,CX,CY,CZ,0)
   CALL ROTM(RTSR,RIGE,R)
   RETURN
222 DO 20 I=1,6
   DO 20 J=1,6
20  RTSR(I,J)=0.
   RTSR(1,1)=MESP(NEL)*AX(NEL)*XL*0.5
   RTSR(2,2)=RTSR(1,1)
   RTSR(4,4)=RTSR(1,1)
   RTSR(5,5)=RTSR(1,1)
   GO TO (70,333,333,30,30),TIPEL
30  RTSR(3,3)=RTSR(1,1)
   RTSR(6,6)=RTSR(1,1)
333 RETURN
70  CALL EXIT
   END
C*****
C   SUBROTINA PARA O CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO PORTICO
C*****
SUBROUTINE RIGEP(NEL,RTSR,NEF,MCCF)
LOGICAL BOOL,IMPRIM
INTEGER CONEC,TIPAN
REAL IZ,MESP,LZERO
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS,
*TIPAN
COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100),Y(100),
*Z(100),E(100),IZ(100),ITIPO(100),LZERO(100),XZERO(100),
*YZERO(100),ZZERO(100),ANGZ(100),FZERO(100),RIGEL(100,6,6),
*FORCA(100,6),D2(300),FE(300)
COMMON /LOGICO/BOOL,IMPRIM,INT
DIMENSION RIGE(6,6),RTSR(6,6),R(3,3),RLOCAL(20,9),
*F1(3),F2(3),V1(3),V2(3),FEL(6),VG(6),MCCF(10,7),RIG(6,6)
EQUIVALENCE (FEL(1),F1(1)),(FEL(2),F1(2)),(FEL(3),F1(3)),

```



```

*(FEL(4),F2(1)),(FEL(5),F2(2)),(FEL(6),F2(3)),(VG(1),V1(1)),
*(VG(2),V1(2)),(VG(3),V1(3)),(VG(4),V2(1)),(VG(5),V2(2)),
*(VG(6),V2(3))
DO 50 I=1,6
FEL(I)=0.
FORCA(NEL,I)=0.
DO 50 J=1,6
50 RIGE(I,J)=0.
DX=X(CONEC(NEL,2))-X(CONEC(NEL,1))
DY=Y(CONEC(NEL,2))-Y(CONEC(NEL,1))
XL=SQRT(DX*DX+DY*DY)
CX=DX/XL
CY=DY/XL
CALL ROT(R,RLOCAL,CX,CY,0,0)
EA=E(NEL)*AX(NEL)
EI=E(NEL)*IZ(NEL)
NEQ=NGLN*NNOS
GO TO(1,2,2),TIPAN
1 F=FZERO(NEL)
GO TO 3
2 F=(XL-LZERO(NEL))/LZERO(NEL)*EA
3 RIGE(1,1)=EA/XL
RIGE(1,2)=0.
RIGE(1,3)=0.
RIGE(1,4)=-RIGE(1,1)
RIGE(1,5)=0.
RIGE(1,6)=0.
RIGE(2,2)=12.*EI/(XL**3)+F*1.2/XL
RIGE(2,3)=6.*EI/(XL*XL)+F*0.1
RIGE(2,4)=0.
RIGE(2,5)=-RIGE(2,2)
RIGE(2,6)=RIGE(2,3)
RIGE(3,3)=4.*EI/XL+F*2./15.*XL
RIGE(3,4)=0.
RIGE(3,5)=-RIGE(2,3)
RIGE(3,6)=2.*EI/XL-F/30.*XL
RIGE(4,4)=RIGE(1,1)
RIGE(4,5)=0.
RIGE(4,6)=0.
RIGE(5,5)=RIGE(2,2)
RIGE(5,6)=RIGE(3,5)
RIGE(6,6)=RIGE(3,3)
DO 10 I=1,5
II=I+1
DO 10 J=II,6
10 RIGE(J,I)=RIGE(I,J)
DO 40 I=1,6
DO 40 J=1,6
40 RIGEL(NEL,I,J)=RIGE(I,J)
DO 12 I=1,NEF
IF(MCCF(I,1)-NEL)12,11,12
12 CONTINUE
GO TO 18

```



```

11 DO 13 J=2,7
    N=J-1
    IF(MCCF(I,J))14,13,14
14 DO 17 L=1,6
    DO 17 K=1,6
    RIG(L,K)=RIGE(L,K)-RIGE(L,N)*RIGE(N,K)/RIGE(N,N)
17 CONTINUE
    DO 15 L=1,6
    DO 15 K=1,6
15 RIGE(L,K)=RIG(L,K)
13 CONTINUE
18 CONTINUE
C WRITE(IW,202)NEL
C202 FORMAT(1X,'MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO ',I3,/)
C DO 200 I=1,6
C WRITE(IW,201)(RIGE(I,J),J=1,6)
C201 FORMAT(6(1X,E14.4))
C200 CONTINUE
    GO TO (45,41,22),TIPAN
45 IF(INT .NE. 0) GO TO 4
41 IF(.NOT. IMPRIM) GO TO 4
22 IF(INT .NE. 0) GO TO 25
    DO 26 I=1,NEQ
26 D2(I)=0.
25 CALL SACAP(1,F1,CONEC(NEL,1),D2,NEQ)
    CALL SACAP(1,F2,CONEC(NEL,2),D2,NEQ)
C WRITE(IW,28)F1(1),F1(2),F1(3),F2(1),F2(2),F2(3)
C28 FORMAT(1X,6(E14.7,1X))
    CALL MULTV(V1,R,F1,3,3,0)
    CALL MULTV(V2,R,F2,3,3,0)
    CALL MULTV(FEL,RIGE,VG,6,6,0)
    FEL(1)=FEL(1)-FZERO(NEL)
    FEL(4)=FEL(4)+FZERO(NEL)
C WRITE(IW,29)(FEL(I),I=1,6)
C29 FORMAT(6(1X,E14.4))
C FEL(1)=-F
C FEL(2)=(V1(2)-V2(2))*12.*EI/(XL**3)+(V1(3)+V2(3))*6.*EI/
C *(XL*XL)
C FEL(3)=(V1(2)-V2(2))*6.*EI/(XL*XL)+(V2(3)+2*V1(3))*2.*EI/
C *XL
C FEL(4)=F
C FEL(5)=-FEL(2)
C FEL(6)=(V1(2)-V2(2))*6.*EI/(XL*XL)+(V1(3)+2.*V2(3))*2.*EI/
C *XL
C DO 28 I=1,NEF
C IF(MCCF(I,1)-NEL)28,29,28
C28 CONTINUE
C GO TO 21
C29 KONT=0
C DO 20 J=2,7
C IF(MCCF(I,J))31,20,31
C31 IF((J-1) .NE. 1 .AND. (J-1) .NE. 4) GO TO 33
C FEL(1)=0.

```



```

C      FEL(4)=0.
C      GO TO 20
C33   IF((J-1) .NE. 2 .AND. (J-1) .NE. 5) GO TO 35
C      FEL(2)=0.
C      FEL(5)=0.
C      GO TO 20
C35   IF((J-1) .NE. 3) GO TO 37
C      FEL(3)=0.
C      FEL(6)=3*EI/XL**2*(V1(2)-V2(2))+EI/XL*(2*V1(3)+3*V2(3))
C      FEL(2)=(V1(2)-V2(2))*3*EI/XL**3+(V2(3)+V1(3))*3*EI/XL**2
C      FEL(5)=-FEL(2)
C      KONT=1
C      GO TO 20
C37   IF((J-1) .NE. 6) GO TO 20
C      FEL(6)=0.
C      FEL(5)=(V2(2)-V1(2))*3*EI/XL**3-(V2(3)+V1(3))*3*EI/XL**2
C      FEL(2)=-FEL(5)
C      FEL(3)=3*EI/XL**2*(V1(2)-V2(2))+EI/XL*(2*V2(3)+3*V1(3))
C      IF(KONT .EQ. 0) GO TO 20
C      FEL(3)=0.
C      FEL(5)=-((V2(3)+V1(3))*3*EI/XL**2)
C      FEL(2)=-FEL(5)
C20   CONTINUE
C21   CONTINUE
      DO 60 I=1,6
      60  FORCA(NEL,I)=FEL(I)
      23  CONTINUE
C23   DO 40 I=1,6
C      DO 40 J=1,6
C40   RIGEL(NEL,I,J)=RIGE(I,J)
      4   CALL ROTM(RTSR,RIGE,R)
      IF( INT .EQ. 0 ) GO TO 5
      IF( TIPAN .NE. 3 .OR. .NOT. BOOL)RETURN
      5   CALL MULTV(V1,R,F1,3,3,1)
      CALL MULTV(V2,R,F2,3,3,1)
      CALL SACAP(1,F1,CONEC(NEL,1),FE,NEQ)
      CALL SACAP(1,F2,CONEC(NEL,2),FE,NEQ)
      DO 30 I=1,6
      30  FEL(I)=FEL(I)+VG(I)
      CALL BOTAP(1,F1,CONEC(NEL,1),FE,NEQ)
      CALL BOTAP(1,F2,CONEC(NEL,2),FE,NEQ)
      RETURN
      END
C*****
C      SUBROTINA PARA O CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO CABO
C*****
      SUBROUTINE RIGEC(NEL,RTSR)
      LOGICAL BOOL
      INTEGER CONEC,TIPAN,TIPEL
      REAL MESP,IZ,LZERO
      COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS,
      *TIPAN
      COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100),Y(100),

```



```

*Z(100),E(100),IZ(100),ITIPO(100),LZERO(100),XZERO(100),
*YZERO(100),ZZERO(100),ANGZ(100),FZERO(100),RIGEL(100,6,6),
*FORCA(100,6),D2(300),FE(300)
COMMON /LOGICO/BOOL,IMPRIM,INT
DIMENSION RIGE(6,6),RTSR(6,6),R(3,3),RLOCAL(20,9),
*F1(3),F2(3),V1(3),V2(3),FEL(6),VG(6)
EQUIVALENCE (FEL(1),F1(1)),(FEL(2),F1(2)),(FEL(3),F1(3)),
*(FEL(4),F2(1)),(FEL(5),F2(2)),(FEL(6),F2(3)),(VG(1),V1(1)),
*(VG(2),V1(2)),(VG(3),V1(3)),(VG(4),V2(1)),(VG(5),V2(2)),
*(VG(6),V2(3))
TIPEL=ITIPO(NEL)
DX=X(CONEC(NEL,2))-X(CONEC(NEL,1))
DY=Y(CONEC(NEL,2))-Y(CONEC(NEL,1))
DZ=Z(CONEC(NEL,2))-Z(CONEC(NEL,1))
IF( TIPEL .LT. 4 ) DZ=0.
XL=SQRT(DX*DX+DY*DY+DZ*DZ)
CX=DX/XL
CY=DY/XL
CZ=DZ/XL
DO 50 I=1,6
FEL(I)=0.
FORCA(NEL,I)=0.
50 DO 50 J=1,6
RIGE(I,J)=0.
GO TO (2,1,1),TIPAN
1 F=(XL-LZERO(NEL))/LZERO(NEL)*AX(NEL)*E(NEL)/XL
IF(F .GT. 0.) GO TO 3
GO TO (70,3,20,3,20),TIPEL
2 F=FZERO(NEL)/XL
3 RIGE(1,1)=E(NEL)*AX(NEL)/XL
RIGE(1,4)=-RIGE(1,1)
RIGE(4,1)=RIGE(1,4)
RIGE(4,4)=RIGE(1,1)
RIGE(2,2)=F
RIGE(2,5)=-F
RIGE(5,2)=-F
RIGE(5,5)=F
GO TO (70,60,60,40,40),TIPEL
40 RIGE(3,3)=F
RIGE(3,6)=-F
RIGE(6,3)=-F
RIGE(6,6)=F
60 IF(INT .EQ. 0 .OR. TIPAN .NE. 1) GO TO 4
GO TO 5
4 U2=(XL-LZERO(NEL))/LZERO(NEL)*XL
FORCA(NEL,1)=U2*RIGE(1,4)
FORCA(NEL,4)=-FORCA(NEL,1)
FEL(1)=FORCA(NEL,1)
FEL(4)=-FEL(1)
5 DO 10 I=1,6
DO 10 J=1,6
10 RIGEL(NEL,I,J)=RIGE(I,J)
CALL ROT(R,RLOCAL,CX,CY,CZ,0)

```



```

CALL ROTM(RTSR,RIGE,R)
IF( INT .EQ. 0 ) GO TO 7
IF( TIPAN .NE. 3 .OR. . NOT. BOOL)RETURN
7  NEQ=NGLN*NNOS
CALL MULTV(V1,R,F1,3,3,1)
CALL MULTV(V2,R,F2,3,3,1)
CALL SACAP(1,F2,CONEC(NEL,2),FE,NEQ)
CALL SACAP(1,F1,CONEC(NEL,1),FE,NEQ)
DO 30 I=1,6
30  FEL(I)=FEL(I)*VG(I)
CALL BOTAP(1,F1,CONEC(NEL,1),FE,NEQ)
CALL BOTAP(1,F2,CONEC(NEL,2),FE,NEQ)
20  RETURN
70  CALL EXIT
END
C*****
C  SUBROTINA PARA O CALCULO DAS CONTRIBUICOES DA MASSA DO
C  VEICULO
C*****
SUBROUTINE VEIC(XM1,XM2,X,V,A,XL,XK,XC,CMS,CS,SS)
DIMENSION CMS(7,7),CS(7,7),SS(7,7),GO(6),G1(6),G2(6)
X2=X*X
X3=X2*X
EL2=XL*XL
EL3=EL2*XL
C1=2.0*XM2*V
C2=XM2*V*V
C3=XM2*A
GO(1)=0.0
GO(2)=1.0-3.0*X2/EL2+2*X3/EL3
GO(3)=X-2.0*X2/XL+X3/EL2
GO(4)=0.0
GO(5)=3*X2/EL2-2.0*X3/EL3
GO(6)=-X2/XL+X3/EL2
G1(1)=0.0
G1(2)=-6.0*X/EL2+6.0*X2/EL3
G1(3)=1.0-4.0*X/XL+3.0*X2/EL2
G1(4)=0.0
G1(5)=6.0*X/EL2-6.0*X2/EL3
G1(6)=-2.0*X/XL+3.0*X2/EL2
G2(1)=0.0
G2(2)=-6.0/EL2+12.0*X/EL3
G2(3)=-4.0/XL+6.0*X/EL2
G2(4)=0.0
G2(5)=6.0/EL2-12.0*X/EL3
G2(6)=-2.0/XL+6.0*X/EL2
DO 100 I=1,6
DO 100 J=1,6
SS(I,J)=C2*GO(I)*G2(J)+C3*GO(I)*G1(J)+XK*GO(I)*GO(J)+
*XC*V*GO(I)*G1(J)
100 CS(I,J)=C1*GO(I)*G1(J)+XC*GO(I)*GO(J)
CMS(I,J)=XM2*GO(I)*GO(J)
DO 200 I=1,7

```



```

      SS(I,7)=0.0
      CS(I,7)=0.0
200   CMS(I,7)=0.0
      DO 300 J=1,7
      SS(7,J)=0.0
      CS(7,J)=0.0
300   CMS(7,J)=0.0
      SS(7,7)=XK
      CS(7,7)=XC
      CMS(7,7)=XM1
      DO 400 I=1,6
      SS(I,7)=-XK*GO(I)
400   CS(I,7)=-XC*GO(I)
      DO 500 J=1,6
      CS(7,J)=-XC*GO(J)
500   SS(7,J)=-XC*V*G1(J)-XK*GO(J)
      RETURN
      END
C*****
C   SUBROTINA QUE CALCULA OS ESFORÇOS PELA TEORIA DE 1A ORDEM
C*****
      SUBROUTINE ESFLIN
      INTEGER CONEC
      REAL MESP, IZ, LZERO
      COMMON /GERAL/IR, IW, IT, NNE, NGLN, NNOS, NELEM
      COMMON /PROP/AX(100), MESP(100), CONEC(100,2), X(100), Y(100),
      *Z(100), E(100), IZ(100), ITIPO(100), LZERO(100), XZERO(100),
      *YZERO(100), ZZERO(100), ANGZ(100), FZERO(100), RIGEL(100,6,6),
      *FORCA(100,6), D2(300)
      COMMON /IMPRE/IMPS1, IMPDVA(100), IMPS2, IMPFOR(100)
      DIMENSION RIGE(6,6), V1(3), V2(3), V3(3), V4(3), V(6), R(3,3),
      *F(6), U(6), RLOCAL(20,9)
      EQUIVALENCE (V3(1), V(1)), (V3(2), V(2)), (V3(3), V(3)),
      *(V4(1), V(4)), (V4(2), V(5)), (V4(3), V(6)), (V1(1), U(1)),
      *(V1(2), U(2)), (V1(3), U(3)), (V2(1), U(4)), (V2(2), U(5)),
      *(V2(3), U(6))
      NEQ=NGLN*NNOS
      WRITE(IW,200)
200   FORMAT(//,2X,'ELEM.      NO 1:      ESF. 1',12X,'ESF. 2',12X,
      *'ESF. 3',8X,'NO 2:      ESF. 1',12X,'ESF. 2',12X,'ESF. 3',/)
      DO 10 I=1,NELEM
      IF(IMPFOR(I).NE.1) GO TO 10
      DO 30 J=1,6
      DO 30 K=1,6
30    RIGE(J,K)=RIGEL(I,J,K)
      CALL SACAP(1,V1,CONEC(I,1),D2,NEQ)
      CALL SACAP(1,V2,CONEC(I,2),D2,NEQ)
      IF(ANGZ(I).EQ.0. .AND. ITIPO(I).LT.4) GO TO 20
      CX=(XZERO(CONEC(I,2))-XZERO(CONEC(I,1)))/LZERO(I)
      CY=(YZERO(CONEC(I,2))-YZERO(CONEC(I,1)))/LZERO(I)
      CZ=(ZZERO(CONEC(I,2))-ZZERO(CONEC(I,1)))/LZERO(I)
      IF(ITIPO(I).LT.4) CZ=0.
      CALL ROT(R,RLOCAL,CX,CY,CZ,0)

```



```

CALL MULTV(V3,R,V1,NGLN,NGLN,0)
CALL MULTV(V4,R,V2,NGLN,NGLN,0)
CALL MULTV(F,RIGE,V,6,6,0)
GO TO 40
20 CALL MULTV(F,RIGE,U,6,6,0)
40 F(1)=F(1)-FZERO(I)
   F(4)=F(4)+FZERO(I)
   WRITE(IW,300)I,(F(J),J=1,6)
300 FORMAT(I4,'.....',3E18.7,4X,'*',3E18.7)
10 CONTINUE
   RETURN
   END
C*****
C   SUBROTINA PARA DAR OS RESULTADOS AO FINAL DO PROGRAMA
C*****
SUBROUTINE SAIDA(T,ITERAD,ITERA,D2,V2,A2,NEQ)
INTEGER ESTAB,TIPAN,CARREG
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS,
* TIPAN,ESTAB,INROT,MASSA,IAMOR,ALFA,BETA,TOL1,TOL2,TF,TAU,
* IMPRES,CARREG
COMMON /IMPRE/IMPS1,IMPDVA(100)
DIMENSION D2(NEQ),V2(NEQ),A2(NEQ)
GO TO (1,2),CARREG
1  WRITE(IW,100)T,ITERAD,ITERA
   GO TO 3
2  TR=2.*T/TF
   WRITE(IW,100)TR,ITERAD,ITERA
100 FORMAT(/10X,'TEMPO ',E15.7,5X,'ITERACOES',I2,',',I2,/)
3  IF(IMPS1.EQ.0)RETURN
   WRITE(IW,200)
200 FORMAT(//,3X,'NO',10X,'D1',11X,'V1',11X,'A1',13X,'D2',11X,
* 'V2',11X,'A2',13X,'D3',11X,'V3',11X,'A3',/)
   DO 10 J=1,NNOS
     I=3*J-2
     IF(IMPDVA(J).EQ.1) WRITE(IW,300) J,D2(I),V2(I),A2(I),
* D2(I+1),V2(I+1),A2(I+1),D2(I+2),V2(I+2),A2(I+2)
300 FORMAT(I4,4X,3E13.5,2X,3E13.5,2X,3E13.5)
10 CONTINUE
   RETURN
   END
C*****
C   SUBROTINA QUE COLOCA AS CONTRIBUICOES DO VEICULO NAS
C   MATRIZES DA ESTRUTURA
C*****
SUBROUTINE CONTR(M,CMS,IT,N11,N22,NGLN)
REAL M
DIMENSION M(IT),CMS(7,7),TEMP(3,3)
CALL SACA(TEMP,N11,N22,M)
DO 13 I=1,NGLN
DO 13 J=1,NGLN
13 TEMP(I,J)=TEMP(I,J)+CMS(I,J+3)
CALL BOTA(TEMP,N11,N22,M)
CALL SACA(TEMP,N11,N11,M)

```



```

DO 14 I=1,NGLN
DO 14 J=1,NGLN
14  TEMP(I,J)=TEMP(I,J)+CMS(I,J)
    CALL BOTTA(TEMP,N11,N11,M)
    CALL SACA(TEMP,N22,N22,M)
    DO 15 I=1,NGLN
    DO 15 J=1,NGLN
15  TEMP(I,J)=TEMP(I,J)+CMS(I+3,J+3)
    CALL BOTTA(TEMP,N22,N22,M)
    RETURN
END

```

```

C*****
C  SUBROTINA PARA ACRESCENTAR UM GRAU DE LIBERDADE AO SISTEMA
C  EM FUNCAO DA MASSA DO VEICULO
C*****
SUBROUTINE CORRET(A2,V2,D2,FI1,FI2,DFI1,DFI2,FI22,DFI22,CS,
*SS,M1,TAU,NEQ,N1,N2,V1,D1)
DIMENSION A2(300),V2(300),D2(300),FI1(300),DFI1(300),
*FI2(300),DFI2(300),FI22(300),DFI22(300),CS(7,7),SS(7,7),
*V1(300),D1(300)
A2(NEQ+1)=FI2(NEQ+1)/M1
V2(NEQ+1)=V1(NEQ+1)+TAU/(12*M1)*(6*FI1(NEQ+1)+TAU*DFI1(NEQ+1)
*+6*FI2(NEQ+1)-TAU*DFI2(NEQ+1))
D2(NEQ+1)=D1(NEQ+1)+TAU*V1(NEQ+1)+TAU**2/60.*1./M1*(21*FI1(
*NEQ+1)+3*TAU*DFI1(NEQ+1)+9*FI2(NEQ+1)+2*TAU*DFI2(NEQ+1))
DFI22(3*N1-2)=DFI22(3*N1-2)-CS(1,7)*A2(NEQ+1)-SS(1,7)*V2(NEQ+1)
DFI22(3*N1-1)=DFI22(3*N1-1)-CS(2,7)*A2(NEQ+1)-SS(2,7)*V2(NEQ+1)
DFI22(3*N1)=DFI22(3*N1)-CS(3,7)*A2(NEQ+1)-SS(3,7)*V2(NEQ+1)
DFI22(3*N2-2)=DFI22(3*N2-2)-CS(4,7)*A2(NEQ+1)-SS(4,7)*V2(NEQ+1)
DFI22(3*N2-1)=DFI22(3*N2-1)-CS(5,7)*A2(NEQ+1)-SS(5,7)*V2(NEQ+1)
DFI22(3*N2)=DFI22(3*N2)-CS(6,7)+A2(NEQ+1)-SS(6,7)*V2(NEQ+1)
DFI22(NEQ+1)=-CS(7,1)*A2(3*N1-2)-CS(7,2)*A2(3*N1-1)-CS(7,3)*
*A2(3*N1)-CS(7,4)*A2(3*N2-2)-CS(7,5)*A2(3*N2-1)-CS(7,6)*A2(3*N2)
*-CS(7,7)*A2(NEQ+1)-SS(7,1)*V2(3*N1-2)-SS(7,2)*V2(3*N1-1)-SS(7,3)
**V2(3*N1)-SS(7,4)*V2(3*N2-2)-SS(7,5)*V2(3*N2-1)-SS(7,6)*V2(3*N2)
*-SS(7,7)*V2(NEQ+1)
FI22(3*N1-2)=FI22(3*N1-2)-CS(1,7)*V2(NEQ+1)-SS(1,7)*D2(NEQ+1)
FI22(3*N1-1)=FI22(3*N1-1)-CS(2,7)*V2(NEQ+1)-SS(2,7)*D2(NEQ+1)
FI22(3*N1)=FI22(3*N1)-CS(3,7)*V2(NEQ+1)-SS(3,7)*D2(NEQ+1)
FI22(3*N2-2)=FI22(3*N2-2)-CS(4,7)*V2(NEQ+1)-SS(4,7)*D2(NEQ+1)
FI22(3*N2-1)=FI22(3*N2-1)-CS(5,7)*V2(NEQ+1)-SS(5,7)*D2(NEQ+1)
FI22(3*N2)=FI22(3*N2)-CS(6,7)*V2(NEQ+1)-SS(6,7)*D2(NEQ+1)
FI22(NEQ+1)=-CS(7,1)*V2(3*N1-2)-CS(7,2)*V2(3*N2-1)-CS(7,3)*
*V2(3*N1)-CS(7,4)*V2(3*N2-2)-CS(7,5)*V2(3*N2-1)-CS(7,6)*
*V2(3*N2)-CS(7,7)*V2(NEQ+1)-SS(7,1)*D2(3*N1-2)-SS(7,2)*D2(3*N1-1)
*-SS(7,3)*D2(3*N1)-SS(7,4)*D2(3*N2-2)-SS(7,5)*D2(3*N2-1)-
*SS(7,6)*D2(3*N2)-SS(7,7)*D2(NEQ+1)
RETURN
END
C*****
C  PROGRAMA PARA CALCULO DE ESTRUTURAS SOB CARGAS MOVEIS
C*****
LOGICAL BOOL,IMPRIM

```



```

INTEGER CONEC,TIPAN,ESTAB,CARREG
REAL M(10000),K(10000),MESP,IZ,M1,M2,KV,LZERO
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS,
*TIPAN,ESTAB,INROT,MASSA,IAMOR,ALFA,BETA,TOL1,TOL2,TF,TAU,
*IMPRES,CARREG
COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100),Y(100),
*Z(100),E(100),IZ(100),ITIPO(100),LZERO(100),XZERO(100),
*YZERO(100),ZZERO(100),ANGZ(100),FZERO(100),RIGEL(100,6,6),
*FORCA(100,6),D2(300),FE(300)
COMMON /LOGICO/ BOOL,IMPRIM,INT
COMMON /IMPRE/IMPS1,IMPDVA(100),IMPS2,IMPFOR(100)
COMMON /MOVEL/ PV,VI,A,NEP,KV,CV,M1,M2,NELP,XLOCAL,XEL
DIMENSION ED(50,9),MCC(20,5),RLOCAL(20,9),NO(50),CAD(8),
*C(10000),P(900),F(300),DF(300),D1(300),V1(300),FI1(300),
*DFI1(300),FI2(300),DFI2(300),DD(300),DDZ(300),V2(300),
*A2(300),FI22(300),DFI22(300),AA(300),BB(300),CC(300),
*AA1(300),BB1(300),CC1(300),FV(6),FV1(3),FV2(3),CS(7,7),
*SS(7,7),CMS(7,7),MCCF(10,7)
C DATA CAD/21.,3.,9.,2.,20.,2.5,10.,2.5/
OPEN(UNIT=1,STATUS='OLD',FILE='DEDOS',ACCESS='SEQUENTIAL',
*FORM='FORMATTED')
C
C PROGRAMA PRINCIPAL
C
C IR=1
C IW=3
C TEMPO=TIME(2)
C ITMAX=30
C NNE=2
C NGLN=3
C
C IMPRESSAO DOS TITULOS REFERENTES AO TRABALHO
C
C WRITE(IW,1)
1 FORMAT(//////,10X,'PROGRAMA DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS',//
*,10X,'ANA LUCIA DE CRESCE',/,10X,'ANALISE DINAMICA DE PON',
*'TES ESTAIADAS',//)
C
C IMPRESSAO DE TITULOS REFERENTES A ESTRUTURA A SER ANALISADA
C
C READ(IR,2)TIT1
C2 FORMAT(18A4)
C READ(IR,3)TIT2
C3 FORMAT(18A4)
C WRITE(IW,2)TIT1
C WRITE(IW,3)TIT2
C
C LEITURA DOS DADOS
C
CALL DADOS(NO,ED,MCC,RLOCAL,NEF,MCCF)
C1=TAU*0.5
C2=TAU*TAU/12.
C3=TAU*TAU/60.*21.*(4*ESTAB+1)

```



```

C4=TAU*TAU/60.*TAU*3.*(4*ESTAB+1)
C5=TAU*TAU/60.*9.*(4*ESTAB+1)
C6=TAU*TAU/60.*TAU*2.*(4*ESTAB+1)
C WRITE(IW,4000)C1,C2,C3,C4,C5,C6
C4000 FORMAT(6(2X,E12.5))
INCLI=0
DO 5 I=1,NAP
IF(MCC(I,5))6,5,6
5 CONTINUE
GO TO 7
6 INCLI=1
7 NEQ=NGLN*NNOS
NC=NGLN*LBNOS
IT=NEQ*NC
C
C ZERAGEM DAS MATRIZES DE MASSA,RIGIDEZ,AMORTECIMENTO
C
DO 10 I=1,IT
M(I)=0.
C(I)=0.
10 K(I)=0.
DO 12 I=1,NEQ
12 FE(I)=0.
BOOL=.FALSE.
IMPRIM=.TRUE.
INT=0
C
C MONTAGEM DAS MATRIZES DE RIGIDEZ,MASSA,AMORTECIMENTO
C
CALL MONTA(K,NO,ED,2,NEF,MCCF)
IMPRIM=.FALSE.
CALL MONTA(M,NO,ED,1,NEF,MCCF)
WRITE(IW,3902)(FE(I),I=1,NEQ)
3902 FORMAT(/10X,'FORÇAS ELASTICAS EM T=0',/, (10X,3E15.7))
GO TO (103,101,102),IAMOR
101 DO 11 I=1,IT
11 C(I)=ALFA*M(I)+BETA*K(I)
IF(NNED.LT.1) GO TO 103
DO 110 I=1,NNED
NOI=NO(I)-1
DO 110 J=1,NGLN
IND=LBNOS*NGLN*(NGLN*NOI+J-1)+1
110 C(IND)=C(IND)+ED(I,J+NGLN)
GO TO 103
102 READ(IR,*)(C(I),I=1,IT)
103 T=0.
GO TO (106,104),CARREG
C
C INICIALIZACAO DA CARGA MOVEL
C
104 COMP=X(CONEC(NEP,2))-X(CONEC(1,1))
NELP=0
XLOCAL=0.

```



```

X0=0.
XEL=0.
F(NEQ+1)=0.
DF(NEQ+1)=0.
106 CALL EXCITA(T,F,DF,NEQ,NEF,MCCF,RIGEL)
DO 30 I=1,NEQ+1
CC1(I)=0.
CC(I)=0.
AA(I)=0.
BB(I)=0.
AA1(I)=0.
BB1(I)=0.
D1(I)=0.
V1(I)=0.
FI1(I)=F(I)
30 CONTINUE
C30 WRITE(IW,1010)I,FI1(I)
C1010 FORMAT(5X,'FI1(',I5,')=',E12.5)
CALL APOIO(M,F,NEQ,1,RLOCAL,MCC,2)
C
C IMPRESSAO DAS MATRIZES DE MASSA,AMORTECIMENTO,RIGIDEZ
C
WRITE(IW,100)(M(I),I=1,IT)
100 FORMAT(10X,'MATRIZ DE MASSA',//,(6E15.7))
IF( IAMOR .NE.1 ) WRITE(IW,600)(C(I),I=1,IT)
600 FORMAT(//,10X,'MATRIZ DE AMORTECIMENTO',//,(6E15.7))
WRITE(IW,900)(K(I),I=1,IT)
900 FORMAT(//,10X,'MATRIZ DE RIGIDEZ',//,(6E15.7))
C
C INICIO DA INTEGRACAO NUMERICA
C
N1=CONEC(1,1)
N2=CONEC(1,2)
IF(N1-N2)175,175,176
175 N11=N1
N22=N2
GO TO 177
176 N11=N2
N22=N1
177 CONTINUE
C CALL VEIC(M1,M2,X0,VI,A,LZERO(1),KV,CV,CMS,CS,SS)
C CALL CONTR(M,CMS,IT,N11,N22,NGLN)
C CALL APOIO(M,F,NEQ,1,RLOCAL,MCC,2)
C WRITE(IW,100)(M(I),I=1,IT)
C CALL CONTR(C,CS,IT,N11,N22,NGLN)
C WRITE(IW,600)(C(I),I=1,IT)
C CALL CONTR(K,SS,IT,N11,N22,NGLN)
C WRITE(IW,900)(K(I),I=1,IT)
C CALL SACAP(1,FV1,N11,F,IT)
C CALL SACAP(1,FV2,N22,F,IT)
C FV(1)=FV1(1)
C FV(2)=FV1(2)
C FV(3)=FV1(3)

```



```

C      FV(4)=FV2(1)
C      FV(5)=FV2(2)
C      FV(6)=FV2(3)
      IF(MASSA .GT. 1) GO TO 31
      CALL TRIANG(M,IT,NEQ)
      CALL RESOB(M,IT,F,NEQ,1)
      GO TO 32
31     CALL RESOD(M,IT,F,NEQ,1)
32     IF(INCLI .GT. 0) CALL GLOBAL(F,NEQ,MCC,RLOCAL)
      GO TO (34,33,33),IAMOR
33     CALL MULTB(C,F,AA,IT,NEQ)
34     DO 40 I=1,NEQ
      DFI1(I)=DF(I)-AA(I)
      40  CONTINUE
C40    WRITE(IW,1011)I,DFI1(I)
C1011  FORMAT(5X,'DFI1(',I5,')=' ,E12.5)
C      DO 300 I=1,6
C300   DFI1(NEQ+1)=CS(7,I)*FV(I)+DFI1(NEQ+1)
C
C      DEFINICAO DE UM NOVO INTERVALO DE TEMPO
C
1000   INT=INT+1
      T=INT*TAU
      ITERA=0
      ITERAD=0
      BOOL=.FALSE.
      IMPRIM=.FALSE.
      IF((INT/IMPRES)*IMPRES .EQ. INT) IMPRIM=.TRUE.
      DO 13 I=1,NEQ+1
      DFI2(I)=DFI1(I)
      FI2(I)=FI1(I)+TAU*DFI1(I)
C      WRITE(IW,1012)FI2(I),DFI2(I),I
C1012  FORMAT(5X,'FI2',10X,'DFI2',/, (2X,E12.5,2X,E12.5,2X,I5,/))
      AA(I)=C1*FI1(I)+C2*DFI1(I)
13     BB(I)=C3*FI1(I)+C4*DFI1(I)
      GO TO (44,131),CARREG
131    S=VI*T+0.5*A*T*T
      V=VI+A*T
      XLOCAL=S-X0
      IF(S-COMP)43,43,41
41     DO 42 I=1,NEQ
      F(I)=0.
42     DF(I)=0.
      M1=0.
      M2=0.
      KV=0.
      CV=0.
      WRITE(IW,3000)T
3000   FORMAT(5X,'T=' ,E14.7, '-O VEICULO ACABA DE DEIXAR A ESTRUTURA')
      GO TO 2000
43     IF(XLOCAL.LE.XEL) GO TO 44
      NELP=NELP+1
      IF( NELP .GT. NEP ) GO TO 41

```



```

      NI=CONEC(NELP,1)
      NF=CONEC(NELP,2)
      XEL=X(NF)-X(NI)
      XO=ABS(X(NI)-X(CONEC(1,1)))
      XLOCAL=S-XO
      IF(NI.LE.NF) GO TO 201
      N11=NF
      N22=NI
      GO TO 205
201  N11=NI
      N22=NF
205  WRITE(IW,601)T,S,XEL,NELP
601  FORMAT(/,18X,'T',18X,'S',18X,'XEL',12X,'NELP',//,10X,
*3(E15.7,5X),15,/)
44  CALL EXCITA(T,F,DF,NEQ,NEF,MCCF,RIGEL)
C   WRITE(IW,4001)(I,F(I),DF(I),I=1,NEQ)
C4001 FORMAT(5X,'VETOR DE CARGA E DERIVADA',/,2X,I5,2X,E12.5,2X,E12.5/)
C
C   INICIO DE NOVA ITERACAO DENTRO DO MESMO INTERVALO
C
2000 ITERA=ITERA+1
      DO 14 I=1,NEQ
      P(I)=FI2(I)
      P(I+NEQ)=AA(I)+C1*FI2(I)-C2*DFI2(I)
      P(I+2*NEQ)=BB(I)+C5*FI2(I)-C6*DFI2(I)
14  CONTINUE
C14  WRITE(IW,1013)I,P(I),P(I+NEQ),P(I+2*NEQ)
C1013 FORMAT(5X,I5,E12.5,2X,E12.5,2X,E12.5)
      CALL APOIO(M,P,3*NEQ,3,RLOCAL,MCC,1)
      IF(MASSA .GT. 1) GO TO 15
      CALL RESOB(M,IT,P,3*NEQ,3)
      GO TO 16
15  CALL RESOD(M,IT,P,3*NEQ,3)
16  IF(INCLI .GT. 0) CALL GLOBAL(P,3*NEQ,MCC,RLOCAL)
      DO 17 I=1,NEQ
      DD(I)=P(I+2*NEQ)+TAU*V1(I)
      D2(I)=D1(I)+DD(I)
      V2(I)=V1(I)+P(I+NEQ)
      A2(I)=P(I)
17  CONTINUE
C   WRITE(IW,1008)I,DD(I),D2(I),V2(I),A2(I)
C1008 FORMAT(5X,I5,4(2X,E12.5))
      GO TO (172,171,171),IAMOR
171  CALL MULTB(C,A2,AA1,IT,NEQ)
      CALL MULTB(C,V2,BB1,IT,NEQ)
172  CALL MULTB(K,V2,CC,IT,NEQ)
      CALL MULTB(K,DD,CC1,IT,NEQ)
      DO 18 I=1,NEQ
      DFI22(I)=DF(I)-CC(I)-AA1(I)
      FI22(I)=F(I)-FE(I)-CC1(I)-BB1(I)
18  CONTINUE
C18  WRITE(IW,1009)DFI22(I),FI22(I),I
C1009 FORMAT(5X,E10.4,2X,E10.4,2X,I5)

```



```

C      CALL CORRET(A2,V2,D2,FI1,FI2,DFI1,DFI2,FI22,DFI22,CS,
C      *SS,M1,TAU,NEQ,N11,N22,V1,D1)
      IF(BOOL.OR.TIPAN.EQ.1) GO TO 20
      IF( ITERA .LE. 1 ) GO TO 208
      CALL CONV(DDZ,DD,NEQ,TOL1,ICONV)
      GO TO (202,207),ICONV
202    DO 204 I=1,NNOS
      X(I)=X(I)+DD(3*I-2)
      Y(I)=Y(I)+DD(3*I-1)
204    Z(I)=Z(I)+DD(3*I)
      ITERAD=ITERA
      CALL MONTA(K,NO,ED,2,NEF,MCCF)
C      CALL VEIC(M1,M2,XLOCAL,V,A,XEL,KV,CV,CMS,CS,SS)
C      CALL CONTR(K,SS,IT,N11,N22,NGLN)
      DO 206 I=1,IT
206    K(I)=0.5*K(I)
      BOOL=.TRUE.
      GO TO 172
207    IF(ITERA.GT.ITMAX) GO TO 241
208    DO 210 I=1,NEQ+1
      DFI2(I)=DFI22(I)
      FI2(I)=FI22(I)
210    DDZ(I)=DD(I)
      GO TO 2000
20    CALL CONV(DFI2,DFI22,NEQ,TOL2,ICONV)
      GO TO (25,21),ICONV
21    IF( ITERA .GE. ITMAX ) GO TO 241
      DO 24 I=1,NEQ+1
      DFI2(I)=DFI22(I)
24    FI2(I)=FI22(I)
      GO TO 2000
C
C      FINAL DA INTEGRACAO NUMERICA
C
241    WRITE(IW,301)ITMAX
301    FORMAT(//,10X,'NAO HOUVE CONVERGENCIA APOS',I3,'ITERACOES',
*3X,'EXECUCAO INTERROMPIDA'///,10X,'VALORES FINAIS:')
      GO TO 2501
25    IF(.NOT. IMPRIM) GO TO 251
2501   CALL SAIDA(T,ITERAD,ITERA,D2,V2,A2,NEQ)
      IF(IMPRIM .AND.TIPAN.EQ. 1 .AND.IMPS2 .NE. 0)CALL ESFLIN
      IF(.NOT.BOOL.AND.TIPAN.GT.1) WRITE(IW,500)
500    FORMAT(//,10X,'NAO HOUVE CONVERGENCIA NOS DESLOCAMENTOS.')
      GO TO (251,26),ICONV
251    IF(T-TF)27,252,252
252    CONTINUE
C252   TEMPO=(TIME(2)-TEMPO)/60.
C      WRITE(IW,1591) TEMPO
C1591  FORMAT(//,10X,'TEMPO DE PROCESSAMENTO:',E12.5)
26    CALL EXIT
27    CONTINUE
      DO 28 I=1,NEQ+1
      DFI1(I)=DFI22(I)

```



```

      FI1(I)=FI22(I)
      D1(I)=D2(I)
28     V1(I)=V2(I)
      GO TO (29,29,50),TIPAN
29     DO 291 I=1,NEQ
291    FE(I)=FE(I)+CC1(I)
      GO TO (1000,50,50),TIPAN
50     DO 52 I=1,NNOS
      X(I)=XZERO(I)+D2(3*I-2)
      Y(I)=YZERO(I)+D2(3*I-1)
52     Z(I)=ZZERO(I)+D2(3*I)
      DO 54 I=1,IT
54     K(I)=0.
      GO TO (1000,90,55),TIPAN
55     DO 70 I=1,NEQ
70     FE(I)=0.
90     CONTINUE
C      CALL MONTA(M,NO,ED,1,NEF,MCCF)
      CALL MONTA(K,NO,ED,2,NEF,MCCF)
C      CALL VEIC(M1,M2,XLOCAL,V,A,XEL,KV,CV,CMS,CS,SS)
      GO TO(403,401,402),IAMOR
401    DO 404 I=1,IT
404    C(I)=ALFA*M(I)+BETA*K(I)
402    CONTINUE
C      CALL CONTR(C,CS,IT,N11,N22,NGLN)
403    CONTINUE
C      CALL CONTR(M,CMS,IT,N11,N22,NGLN)
C      CALL CONTR(K,SS,IT,N11,N22,NGLN)
      IF(.NOT. IMPRIM .OR. IMPS2 .EQ. 0) GO TO 1000
      WRITE(IW,800)
800    FORMAT(//,2X,'ELEM.      NO 1:      ESF. 1',12X,'ESF. 2',12X,
* 'ESF. 3',8X,'NO 2:      ESF. 1',12X,'ESF. 2',12X,'ESF. 3',/)
      DO 60 I=1,NELEM
      IF(IMPFOR(I) .EQ. 1) WRITE(IW,700)I,(FORCA(I,J),J=1,6)
700    FORMAT(I4,'.....',3E18.7,4X,'*',3E18.7)
60     CONTINUE
      GO TO 1000
      END

```