

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

EDIFÍCIOS ALTOS: INTERAÇÃO TRIDIMENSIONAL
DAS PEÇAS DE CONTRAVENTAMENTO

ORIENTADORA: PROF^a. DR^a. HELENA M.C. CARMO ANTUNES
ORIENTADO : ENG^o. EDSON PAULO BECKER

SÃO CARLOS, JULHO DE 1989

Aos meus pais, Paulo e Valda
e demais familiares.
À Maura, minha esposa.
À Priscilla, minha filha.
À Família Ruy Gibim.

RESUMO

A análise de estruturas de edifícios altos vem caminhando - à exemplo das pesquisas em outras áreas do conhecimento - a passos largos, desde que surgiu o computador.

O intuito deste trabalho é apresentar uma análise de estruturas de edifícios altos, na qual foi utilizada o método dos deslocamentos. Este método tornou-se viável, pelo menos para estruturas mais complexas (traduzidas por matrizes de rigidez de ordem elevada), devido ao computador.

A experiência mostra que núcleos estruturais (caixas para escadas ou elevadores, p.ex.) presentes nas estruturas de edifícios altos, são grandes responsáveis pela estabilidade global do sistema estrutural. A associação destes elementos aos pórticos, contraventados entre si pelas lajes e barras horizontais, centralizam as atenções deste estudo. Em particular, as atenções voltaram-se principalmente à reação do conjunto às cargas impostas pelo vento.

Será levada em conta a rigidez do núcleo às deformações por empenamento (ou primeira derivada da torção). Por suas características elásticas e geométricas esta peça sempre estará sujeita ao empenamento quando as ações lhe impuserem esforços de torção e/ou flexo-torção.

Na biblioteca do SET-EESC-USP encontra-se uma cópia do programa desenvolvido (para o IBM-4341, em linguagem FORTRAN) com base na formulação exposta neste trabalho, o qual forneceu os resultados dos exemplos que ilustram esta dissertação.

AGRADECIMENTOS

À Profª Drª Helena M. C. Carmo Antunes, que pela sua objetividade, segurança, praticidade, e orientação teórica, tornou possível a realização da presente dissertação.

À Srª Rosi Aparecida Jordão Rodrigues e ao Sr. Antônio Valdair Carneiro, pela atenção e qualidade que reservaram aos trabalhos datilográficos.

À Srª Maria Nadir Minatel pelos serviços bibliográficos.

Aos funcionários do CPD, da Escola de Engenharia de São Carlos-USP, pelos serviços prestados quanto à utilização do computador.

À Escola de Engenharia de São Carlos-USP, por possibilitar a concretização deste trabalho.

Aos amigos, pelas sugestões e, sobretudo, pelo convívio.

ABSTRACT

The tall building structure analysis is progressing - at the same rate as researches in other knowledge areas - on wide steps, since the computer appeared.

The aim of this work is to show a tall building structure analysis, in which a displacement method was used. This method has become available, at least, to more complex structures (translated into high order stiffness matrixes) due to the computer.

The experience shows that core walls (boxes to stairs or elevators, f.ex.) presented in tall building structures are greatly responsible for the structural system global stability. The association of those elements to the frames constrained in each other by the slabs and horizontal bars, centralize this study. Attentions are returned to the reaction of the set to the imposed loads, specially by the wind.

It will be considered the core warping stiffness (or first derivated from the torsion). By its elastic and geometric characteristics this part will always be subjected to warping when the actions impose to it efforts of torsion and/or combined bending and torsion.

At the SET-EESC-USP library can be found a copy of the developed program (to IBM-4341, in FORTRAN code) based in the formulation in this work wich gave the results of the examples which elucidate this assey.

ÍNDICE

I- INTRODUÇÃO

I.1- CONSIDERAÇÕES GERAIS	1
I.2- CARACTERÍSTICAS ESTRUTURAIS.	3
I.3- METODOLOGIA DE CÁLCULO	5
I.3.1- Método	5
I.3.2- Etapas	5
I.3.2.1- rigidez e ações dos pilares individuais. .	6
I.3.2.2- rigidez e ações dos painéis.	7
I.3.2.3- rigidez dos núcleos.	7
I.3.2.4- rigidez dos lintéis.	8
I.3.2.5- rigidez das vigas pilar-pilar.	8
I.3.2.6- rigidez das vigas pilar-núcleo	9
I.3.2.7- carregamento horizontal.	9
I.3.2.8- carregamento vertical.	9
I.3.2.9- redução da matriz de rigidez da subestrutu <u>ra</u> e do correspondente vetor das ações . .	10
I.3.2.10- eliminação em série	10
I.3.2.11- cálculo dos deslocamentos e esforços in- ternos nos elementos componentes das subestruturas	14
I.4- DESCRIÇÃO DOS ELEMENTOS ESTRUTURAIS.	15
I.4.1- Paineis	15
I.4.1.1- viga	15
I.4.1.2- pilar.	16
I.4.2- Pilar individual	16

I.4.3-	Vigas pilar-pilar.	16
I.4.4-	Vigas pilar-núcleo	16
I.4.5-	Lintel	17
I.4.6-	Núcleo	17
I.4.7-	Laje	17
I.4.8-	Subestrutura	17
I.5-	CARREGAMENTO	18
I.6-	SISTEMAS DE REFERÊNCIA	18
I.6.1-	Sistema de referência para a estrutura . . .	18
I.6.2-	Sistema de referência para os painéis de uma subestrutura	18
I.6.2.1-	sistema de referência para os pilares de um painel.	20
I.6.2.2-	sistema de referência para as vigas de um painel	20
I.6.3-	Sistema de referência para os pilares indivi <u>i</u> duais.	20
I.6.4-	Sistema de referência para as vigas pilar- pilar.	21
I.6.5-	Sistema de referência para as vigas pilar- núcleo	21
I.6.6-	Sistema de referência para os lintéis. . . .	22
I.6.7-	Sistema de referência para os núcleos. . . .	22
I.7-	COORDENADAS DESLOCAMENTOS.	22
I.7.1-	Coordenadas deslocamentos para as subestrutu <u>u</u> ras.	23
I.7.1.1-	coordenadas deslocamentos para os pai- néis	24

I.7.1.2-	coordenadas deslocamentos para os tramos de pilares individuais	26
I.7.1.3-	coordenadas deslocamentos para as vigas pilar-pilar, vigas pilar-núcleo e lintéis	27
I.7.1.4-	coordenadas deslocamentos para os núcleos.	29
II-	ANÁLISE DO SISTEMA ESTRUTURAL.	30
II.1-	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.	30
II.2-	CONTRIBUIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM TRAMO DE PILAR INDIVIDUAL NA MATRIZ DE RIGIDEZ DA SUBESTRUTURA.	30
II.2.1-	Matriz de rigidez dos pilares individuais .	30
II.2.2-	Matriz que relaciona os deslocamentos da subestrutura aos deslocamentos do tramo de pilar individual.	33
II.2.3-	Rigidez do pilar individual na rigidez da subestrutura.	34
II.3-	CONTRIBUIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DAS AÇÕES NOS PAINÉIS NA MATRIZ DE RIGIDEZ E NO VETOR DAS AÇÕES NA SUBESTRUTURA.	35
II.3.1-	Matriz de rigidez dos painéis	35
II.3.1.1-	matriz de rigidez dos tramos de pilares	35
II.3.1.2-	matriz de rigidez das vigas.	36
II.3.1.3-	matriz de rigidez de um painel.	36
II.3.2-	Matriz de rigidez e vetor das ações de um painel reduzidos às suas coordenadas externas	38

II.3.3-	Matriz de rigidez e vetor das ações de um painel na matriz de rigidez e no vetor das ações da subestrutura tridimensional. . . .	48
II.4-	INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DO NÚCLEO NA RIGIDEZ DA SUBESTRUTURA.	51
II.4.1-	Obtenção da matriz de rigidez para um tramo de núcleo	51
II.4.1.1-	rigidez à flexão para as coordenadas refe- ridas à um sistema de eixos passando pelo centro de gravidade	53
II.4.1.2-	rigidez segundo às coordenadas de flexão referidas ao sistema de eixos locais (x_n , y_n e z_n).	56
II.4.1.3-	rigidez segundo às coordenadas de tor- ção	61
II.4.1.3.1-	caso particular: $J_w = 0$	69
II.4.2-	Matriz de rigidez para um tramo de nú- cleo.	72
II.4.3-	Contribuição da matriz de rigidez do núcleo na matriz de rigidez da subestrutura. . . .	78
II.5-	INFLUÊNCIA DA VIGA PILAR-NÚCLEO, DA VIGA PI- LAR-PILAR, E DO LINTEL, NA RIGIDEZ DA SUBES- TRUTURA	80
II.5.1-	Rigidez das vigas pilar-pilar na rigidez da subestrutura.	85
II.5.1.1-	transformação à rotação	85
II.5.1.2-	transformação à translação.	87
II.5.2-	Rigidez das vigas pilar-núcleo na rigidez da subestrutura	88
II.5.2.1-	transformação à rotação	90
II.5.2.2-	transformação à translação.	91

II.5.3- Rigidez do lintel na rigidez da subestrutu <u>ra</u>	95
II.5.3.1- transformação à rotação	97
II.5.3.2- transformação à translação.	97
II.6- RIGIDEZ E AÇÕES NA SUBESTRUTURA	99
II.7- MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DAS AÇÕES DA SUBES- TRUTURA REDUZIDOS ÀS SUAS COORDENADAS DE TOPO E DE BASE	99
II.8- ELIMINAÇÃO EM SÉRIE	101
II.9- CONDIÇÕES DE CONTORNO	104
II.10- DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS NOS ELEMENTOS QUE COMPOEM AS SUBESTRUTURAS	107
II.10.1- Deslocamentos e esforços nas barras que compoem os painéis	108
II.10.1.1- deslocamentos e esforços nos extremos da viga de uma painel	109
II.10.1.2- deslocamentos e esforços nos extremos do pilar de um painel	109
II.10.2- Deslocamentos e esforços nos extremos de um tramo de pilar individual	109
II.10.3- Deslocamentos e esforços nos extremos do tramo de núcleo.	110
II.10.4- Deslocamentos e esforços nos extremos das vigas pilar-pilar.	111
II.10.5- Deslocamentos e esforços nos extremos das vigas pilar-núcleo	111
II.10.6- Deslocamentos e esforços nos extremos dos lintéis.	112

III- EXEMPLOS.	113
III.1- GENERALIDADES.	113
III.2- EXEMPLO Nº 1	115
III.3- EXEMPLO Nº 2	120
III.4- EXEMPLO Nº 3	123
III.5- EXEMPLO Nº 4	128
III.6- EXEMPLO Nº 5	134
III.7- EXEMPLO Nº 6	157
IV- CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES	174
V- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	177
VI- BIBLIOGRAFIA	179

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1- CONSIDERAÇÕES GERAIS

A exploração dos recursos computacionais vem permitindo aos pesquisadores a obtenção de um retrato mais nítido a respeito do comportamento, da estaticidade, da resposta das estruturas aos diversos agentes solicitantes que lhes são impostos.

Além da velocidade no processamento das diversas operações de cálculo, o computador torna possível a aplicação de técnicas, para a resolução de estruturas, que ficavam presas às limitações dos processos de cálculo ou dos meios que dispunham-se para operá-los. É óbvio que os computadores também são limitados, como também é evidente a superioridade do seu campo de ação, frente aos recursos que os precederam. Porém, quando esbarram neste problema, os pesquisadores novamente aliam ao computador a criatividade; aí surgem os processos de otimização, e o problema, geralmente, é resolvido.

No caso das estruturas de edifícios altos, diversos trabalhos têm sido desenvolvidos, buscando-se sempre o aperfeiçoamento através da eficiência, precisão, rapidez, técnicas de cálculo, e hipóteses, tentando-se ficar com uma

análise cada vez mais próxima da realidade.

PRUDENTE, M. [1], baseando-se em trabalhos de diversos autores, - tais como GERE & WEAVER [2], que analisaram os sistemas de estruturas reticuladas, MANCINI, E. [3], em seu trabalho "Estrutura Tubular de Edifícios Altos", ANTUNES, H.M.C.C. [4], que desenvolveu uma análise em segunda ordem, e um estudo sobre carregamento crítico de instabilidade geral para estruturas tridimensionais de edifícios altos, entre muitos outros - analisou estruturas tridimensionais usuais de edifícios altos, levando em conta os painéis, formados por pilares e vigas rigidamente conectados entre si, e os pilares isolados, somando, para estes sua rigidez à torção.

BARBOSA, J.A. [5], com base, entre outros, nos estudos desenvolvidos por HEIDEBRECHT & SMITH [6], que abordaram uma análise do comportamento das paredes de secção aberta como barras de secção delgada, e em trabalhos desenvolvidos por MANCINI, E. [7], apresenta uma abordagem da Técnica do Meio Contínuo em seu trabalho intitulado "Edifícios com paredes de secção aberta contraventados por lintéis sob carga lateral". Neste mesmo trabalho o autor apresenta o tratamento discreto, para o qual tomou como base o estudo desenvolvido por HEIDEBRECHT & SWIFT [8], que consideraram cada parede de secção aberta como um membro linear com sete deslocamentos por andar; os seis já conhecidos do tratamento espacial, mais aquele atribuído ao empenamento.

Neste trabalho serão analisadas, via tratamento discreto, com a utilização do método dos deslocamentos, as estruturas tridimensionais de edifícios altos, que se compoem de pórticos, pilares isolados, e núcleos. Será equacionada a interação tridimensional destes elementos estruturais, contraventados horizontalmente pelas lajes, às quais serão consideradas como placas com rigidez infinita em seu plano e completamente flexíveis nos planos concorrentes. Além das lajes, estes três elementos, pórticos, pilar isola

do, ou pilar parede, ou ainda, pilar individual, e núcleo, podem ser contraventados entre si, ao nível das lajes, por barras horizontais (FIG.I.1). Esta interação se constitui na principal contribuição deste trabalho.

Quanto ao carregamento a estrutura poderá estar sujeita a cargas horizontais e verticais.

I.2- CARACTERÍSTICAS ESTRUTURAIS

A estrutura será subdividida em subestruturas. Estas por sua vez serão formadas por pórticos, núcleos, pilares individuais e as barras horizontais de contraventamento.

Entre as barras horizontais figurarão, além das vigas dos pórticos, os seguintes elementos (FIG.I.1.2):

a) as vigas que contraventam os pilares individuais (pilares isolados) entre si, às quais será dado o nome de vigas pilar-pilar;

b) as vigas que contraventam os núcleos internamente ou entre si, às quais, a exemplo de outros autores, será dado o nome de lintel;

c) as vigas que contraventam pilares individuais e núcleos, ou pórticos e núcleos, que serão designadas por vigas pilar-núcleo;

d) as vigas que ligam os pórticos aos pilares isolados, que serão tratadas como vigas comuns, pertencentes a um painel que, para efeito de facilidade na criação de um algoritmo que conduza à automatização das operações de cálculo, será visto como um pórtico desprovido de pilares nesta prumada, ou provido de pilares com dimensões desprezíveis em presença dos demais.

Todos os elementos estruturais devem ser prismáticos, porém as secções "podem" variar de tramo para tramo. Cabe aqui observar que esta variação, se for de proporções

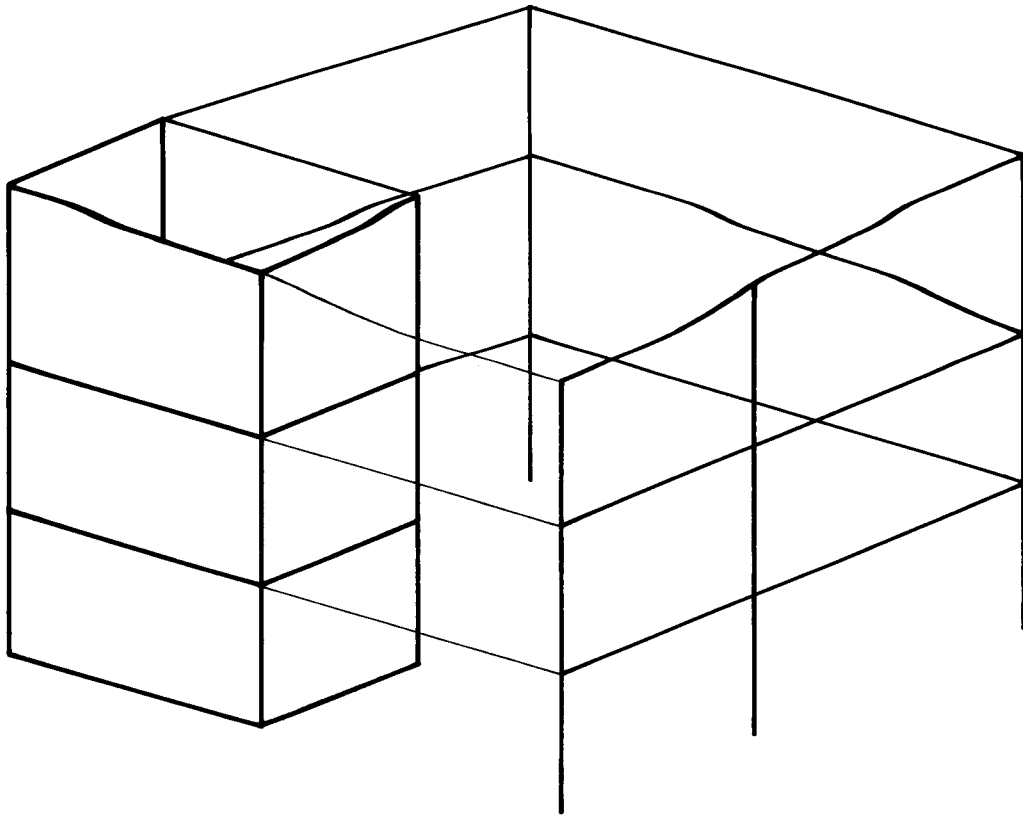


FIG. I. 1. 1. - Perspectiva.

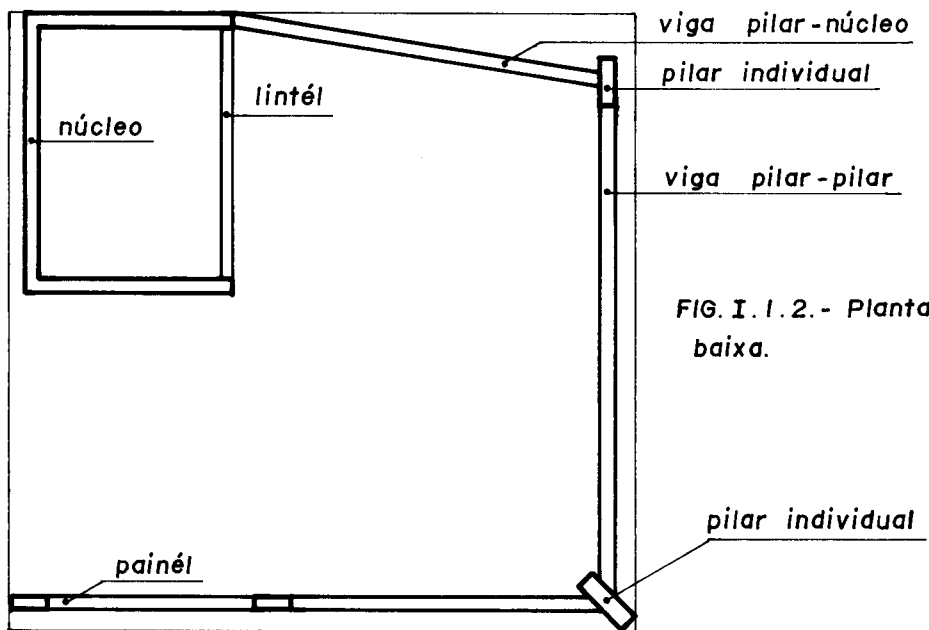


FIG. I. 1. 2. - Planta baixa.

FIG. I. 1. - Subestrutura.

consideráveis, poderá acarretar erros (a teoria que será aqui desenvolvida não preverá estes casos) devidos ao desalinhamento entre os eixos das diversas barras; eixos estes que passam pelos centros de gravidade das barras comuns e eixos que passam pelos centros de torção dos núcleos. Estes erros serão tão menores, evidentemente, quanto menor for a excentricidade definida entre o eixo de uma barra e o eixo de sua barra vizinha. Caberá, portanto, ao leitor, a adoção de critérios, - baseados, por exemplo, em testes de modelos estruturais com alguma variação de excentricidade - que o conduzam a resultados satisfatórios.

Quanto à geometria em planta da estrutura: os painéis poderão concorrer entre si em ângulos quaisquer, o mesmo acontecendo para as paredes que concorrem para formarem os núcleos.

As diversas partes que compoem a subestrutura, quais sejam: núcleos, pórticos, pilares individuais, lintéis, vigas pilar-pilar e vigas pilar-núcleo, podem diferir entre si quanto ao tipo de material, ou seja, podem ser de diferentes módulos de elasticidade.

I.3- METODOLOGIA DE CÁLCULO

Será descrita a seguir a sequência adotada para equacionar e resolver o problema.

I.3.1- Método

Empregar-se-á, para resolução da estrutura, o método dos deslocamentos.

I.3.2- Etapas

Serão descritas, a seguir, as diversas etapas, que vão da montagem da matriz de rigidez ao cálculo dos esforços.

ços nas barras da subestrutura.

Antes, porém, deseja-se mencionar as simplificações decorrentes do fato de considerar-se as lajes como diafragmas com rigidez infinita no seu plano. O movimento de corpo rígido será representado por três deslocamentos por andar, a saber:

1º) translação segundo um eixo horizontal, cartesiano, de referência para a subestrutura;

2º) translação segundo um outro eixo cartesiano horizontal;

3º) rotação segundo o eixo vertical.

Isto acarretará uma redução sensível do número de coordenadas que registrarão os deslocamentos da estrutura, pois desta forma, restarão aos pilares individuais, ou pilares isolados, apenas três deslocamentos independentes, quais sejam, duas rotações e um deslocamento vertical; e, para os núcleos, além dos mesmos deslocamentos independentes citados para os pilares individuais, restará o empenamento. Aos painéis restarão, como deslocamentos independentes, a rotação segundo o seu eixo normal, e o deslocamento axial, em cada nó comum a duas subestruturas ou a dois ou mais painéis. As razões de citar-se estes nós em particular, para os painéis, serão descritas em seguida.

I.3.2.1- Rigidez e ações dos pilares individuais

Nesta etapa dar-se-á a contribuição da rigidez dos pilares individuais bem como a contribuição do vetor das ações que atuam nos mesmos à matriz de rigidez e vetor das ações nas coordenadas da subestrutura.

Ficará, portanto, dado o primeiro passo para a formação da matriz de rigidez e vetor das ações de uma subestrutura.

I.3.2.2- Rigidez e ações dos painéis

O próximo passo será montar a matriz de rigidez e vetor das ações dos painéis. Feito isto, estas matrizes e vetores serão reduzidos às suas coordenadas externas. Serão consideradas coordenadas externas dos painéis aquelas comuns à dois ou mais painéis, juntamente com as de topo e base dos mesmos. Neste estágio os vetores coordenadas dos painéis terão os mesmos pontos de aplicação dos vetores coordenadas das subestruturas, a menos dos correspondentes às coordenadas horizontais. Através das matrizes de transformação de deslocamentos dar-se-á, então, a contribuição das matrizes de rigidez e vetor das ações nos painéis aos correspondentes da subestrutura tridimensional.

Nesta etapa ter-se-á, portanto, montando a matriz de rigidez e vetor dos esforços da subestrutura em termos dos pilares individuais e painéis.

I.3.2.3- Rigidez dos núcleos

Nesta fase será composta a matriz de rigidez dos núcleos em dois estágios:

1º) obter-se-á a matriz de rigidez para os termos de flexão, referidos aos centros de gravidade dos núcleos, com as coordenadas orientadas segundo os eixos principais de inércia;

2º) montar-se-á a matriz de compatibilidade cinemática, que relacionará os deslocamentos dos centros de cisalhamento com os dos centros de gravidade dos respectivos núcleos, para, através desta, referir-se os coeficientes de rigidez à flexão aos respectivos centros de torção, que serão agora, juntamente com os termos de rigidez à torção, os coeficientes das matrizes de rigidez dos núcleos.

Serão obtidas, então, as matrizes que relacionam os deslocamentos, ou matriz de incidência cinemática, da subestrutura aos deslocamentos dos núcleos, através das

quais será dada a contribuição da matriz de rigidez do núcleo na matriz de rigidez da subestrutura.

I.3.2.4- Rigidez dos lintéis

Serão montadas as matrizes de rigidez dos lintéis com relação aos seus sistemas de eixos locais.

Em seguida, através das matrizes de transformação à rotação, referir-se-á estas matrizes a um sistema de eixos com a mesma origem dos sistemas de referência locais dos lintéis, porém, paralelos os eixos dos núcleos nos quais se apoiam.

Num terceiro estágio, será calculada para cada lintel, a matriz que relaciona os deslocamentos do ponto situado na origem do sistema de eixos que concorrem no centro de cisalhamento, aos do ponto coincidente com o centro de gravidade da secção do lintel que está sobre o ponto de apoio no respectivo núcleo. Com esta matriz expressar-se-á a rigidez do lintel segundo o sistema de eixos do núcleo no qual se apoia, ficando, portanto, dada a contribuição da rigidez do lintel à matriz de rigidez da subestrutura.

I.3.2.5- Rigidez das vigas pilar-pilar

As vigas pilar-pilar que, conforme já citou-se, são as vigas que se apoiam exclusivamente em pilares individuais, receberão o mesmo tratamento que será dado aos lintéis, a menos da última transformação (quando referir-se-á a rigidez do lintel ao centro de cisalhamento do núcleo), uma vez que as características geométricas dos pilares individuais deverão ser tais que seus centros de torção e de gravidade sejam coincidentes. Em resumo, serão montadas as matrizes de rigidez das vigas pilar-pilar segundo seus sistemas locais de coordenadas para, em seguida, através das matrizes de transformação à rotação, ficarem referidas aos sistemas de eixos que concorrem nos centros de gravidade dos pilares individuais nos quais se apoiam.

Os sistemas de referência locais das vigas pilar-pilar e dos pilares individuais, que lhes servem de apoio, serão supostos de origens coincidentes.

Fica, desta forma, dada a contribuição da rigidez das vigas pilar-pilar à matriz de rigidez da subestrutura.

I.3.2.6- Rigidez das vigas pilar-núcleo

Para as vigas pilar-núcleo que, relembrando-se, são as vigas que se apoiam num extremo a um pilar individual e no outro a um núcleo, proceder-se-á de forma análoga aos dois casos anteriores, ou seja: montar-se-á suas matrizes de rigidez para seus sistemas de referência local, para, em seguida, através das matrizes de transformação à rotação, obter-se as matrizes de rigidez destas vigas segundo os sistemas de eixos dos pilares individuais, num extremo, e, no outro extremo, aos sistemas de eixos paralelos aos dos núcleos que lhes apoiam.

Em seguida, através de nova matriz de incidência cinemática, serão produzidas as matrizes de rigidez das vigas pilar-núcleo referidas às coordenadas dos pilares individuais e dos núcleos, as quais, como já mencionou-se, farão parte das coordenadas da subestrutura.

I.3.2.7- Carregamento horizontal

As ações do vento serão supostas concentradas aos níveis das lajes, e atuantes segundo as três coordenadas que definirão o movimento de corpo rígido destas peças.

I.3.2.8- Carregamento vertical

As ações verticais que atuam diretamente sobre as coordenadas da subestrutura serão diretamente adicionadas ao vetor das ações na mesma, a exemplo de como descreveu-se para os pilares individuais no item I.3.2.1.

Ter-se-á, a esta altura, montando a matriz de rigidez da subestrutura, bem como o vetor das ações que lhes são impostas.

I.3.2.9- Redução da matriz de rigidez da subestrutura e do correspondente vetor das ações

De posse da matriz de rigidez e do vetor das ações da subestrutura, será aplicado aos mesmos o mesmo processo algébrico que aplicar-se-á aos painéis, a fim de obter-se as matrizes de rigidez e o vetor das ações decompostos, ou seja, reduzidos às suas coordenadas externas. A este processo também chama-se, neste caso, de processo de eliminação em paralelo. Serão consideradas coordenadas externas da subestrutura, aquelas coordenadas referentes ao topo e à base desta subestrutura. No item que se segue serão esclarecidas as razões de estar-se procedendo desta forma.

I.3.2.10- Eliminação em série

O vetor das ações e a matriz de rigidez da subestrutura, que serão obtidos com o procedimento descrito no item anterior sofrerão, agora, o mesmo processo algébrico tratado naquele item. Desta vez as coordenadas externas serão as de base da subestrutura. A este processo dá-se o nome de processo de eliminação em série. Descrever-se-á adiante, a diferença entre os dois processos de eliminação.

A esta altura é conveniente descrever-se a idéia global do roteiro que se está desenvolvendo. Para isto, descrever-se-á em torno de um exemplo simbólico.

Supondo-se que deseja-se calcular o edifício representado esquematicamente na FIG.I.2.1, na qual, para facilitar este trabalho, representa-se simbolicamente as três subestruturas A, B, e C que o integram, pois deixou-se de representar aí as diversas barras que lhes pertencem, fato este que não acarretará qualquer problema aos presentes pro

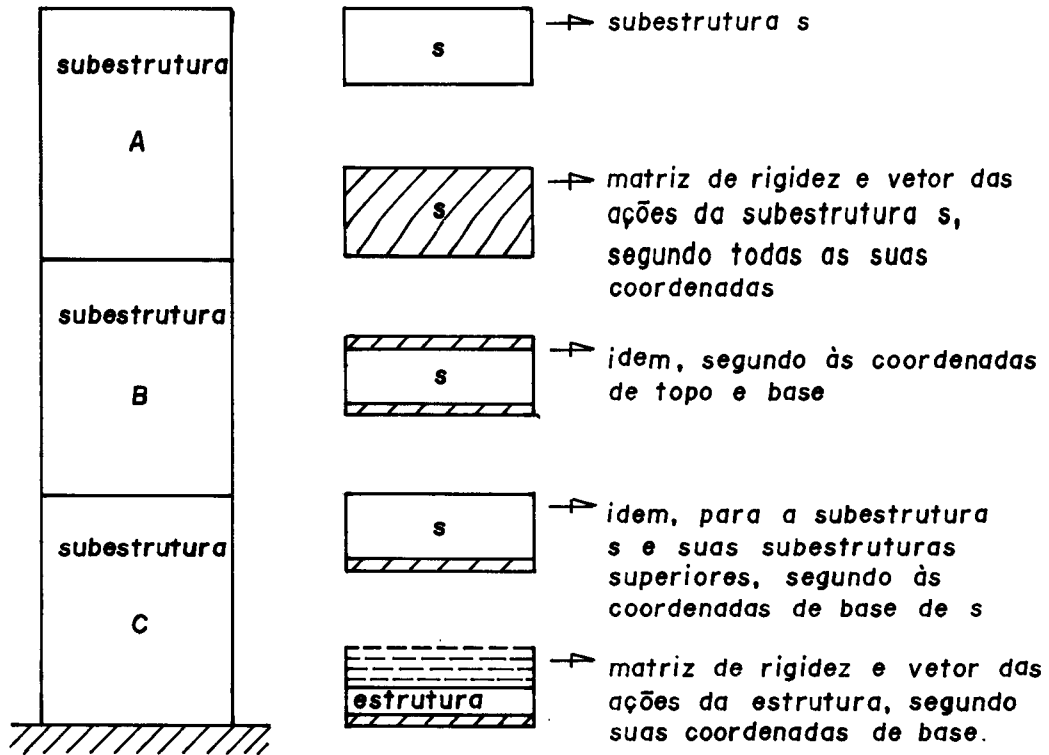


FIG. I. 2.1. - Estrutura simbólica.

FIG. I. 2.2. - Simbologia.

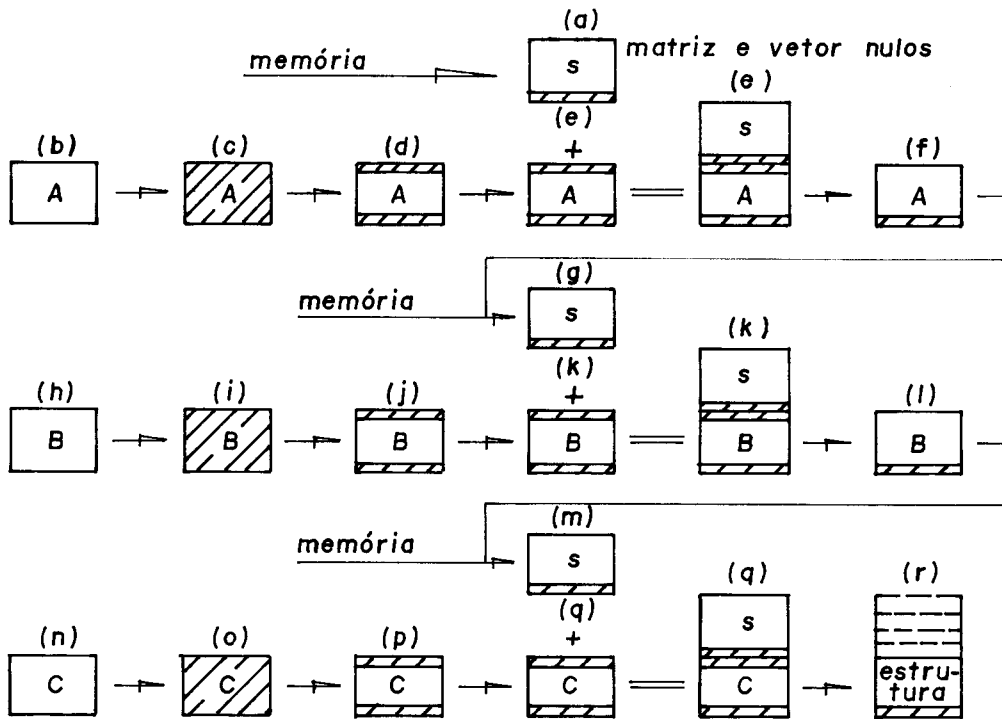


FIG. I. 2.3. - Ordem das operações.

FIG. I. 2. - Sequência de operações para um exemplo simbólico.

pósitos. As três subestruturas têm, cada uma, vários andares. Raciocine-se, agora, com base em todas as etapas descritas:

1º) Primeiramente toma-se a subestrutura A (FIG. I.2.3.b), compõe-se sua matriz de rigidez e seu vetor de ações (FIG. I.2.3.c).

2º) Opera-se uma eliminação em paralelo nestes conjuntos com o fim de obter-se a matriz de rigidez e o vetor das ações expressos segundo as coordenadas de bordo da subestrutura, que são as de topo e de base (FIG.I.2.3.d).

3º) Em seguida, soma-se a esta matriz (FIG.I.2.3.e), nas coordenadas de topo, que são as coordenadas de base da subestrutura anterior (FIG.I.2.3.a) - subestrutura que está sobre a subestrutura em questão -, a matriz de rigidez da subestrutura que a precede, e que está reduzida às suas coordenadas de base, bem como adiciona-se seus vetores de ações nestas coordenadas. No caso presente, será nula esta matriz, evidentemente, pois A é a primeira subestrutura. Descreve-se assim com o intuito de ilustrar as operações de automatização. Feito isto, a matriz referida às coordenadas de topo e de base da subestrutura A, "conterá", agora, a influência da subestrutura que a precede (observa-se aqui que subestrutura precedente, subestrutura anterior ou subestrutura superior, deve ser interpretada como aquela que está localizada sobre a subestrutura da qual está se tratando).

4º) Elimina-se em seguida os coeficientes nas coordenadas de topo da subestrutura A, desta matriz, para obter-se uma matriz referida às coordenadas de base dessa subestrutura (FIG.I.2.3.f). Assim procedendo, está-se processando a eliminação em série a que referiu-se no presente item. Nesta fase esta matriz substituirá a matriz nula, a qual referiu-se acima, na memória central do computador (FIG.I.2.3.g). Neste estágio ter-se-á armazenados nos discos de memória auxiliar, todos os vetores e matrizes dos painéis desta subestrutura, bem como sua própria matriz e

vetores de ações, os quais permitirão, posteriormente, calcular seus deslocamentos, bem como os deslocamentos e esforços a que seus componentes estarão sujeitos. Fica por aqui a análise da subestrutura A, na busca dos deslocamentos das subestruturas.

5º) Procede-se com a subestrutura B de forma inteiramente análoga ao que se fez para a subestrutura A (FIG. I.2.3.h...m).

Entende-se ser agora o momento adequado para tentar-se esclarecer o que caracteriza a diferença entre os processos de eliminação em série e em paralelo.

A matriz resultante do processo de eliminação em paralelo fica referida às coordenadas que delimitam mais do que uma vizinhança com subestruturas adjacentes. Por exemplo, no caso da subestrutura B, da qual se está tratando, esta eliminação deixou caracterizada uma vizinhança com as subestruturas A e C (FIG.I.2.3.j), ao mesmo tempo em que eliminou-se as coordenadas internas de B.

Por outro lado, a matriz resultante de um processo de eliminação em série limita à apenas uma vizinhança com uma das subestruturas que lhes cercam. No caso em questão (subestrutura B) ao eliminar-se na matriz de rigidez, seus coeficientes referentes às suas coordenadas de topo, para obter-se uma nova matriz, referida às coordenadas de base a penas, já se está levando em conta a rigidez trazida da subestrutura A. Fica-se pois, desta forma, com uma matriz representante da rigidez, nas coordenadas de base da subestrutura B (FIG.I.2.3.l), enquanto todas as demais coordenadas acima destas, inclusive as da subestrutura superior, são livres para se deslocarem.

6º) Tendo-se em mãos, agora, os dados da subestrutura C (FIG.I.2.3.n), repete-se para esta o tratamento dispensado para suas subestruturas superiores (FIG.I.2.3.o...r).

Ter-se-á, finalmente, uma matriz e um vetor que

representem a rigidez do edifício bem como as ações impostas ao mesmo, segundo suas coordenadas de base, ou no plano comum à estrutura e sua fundação (FIG.I.3.2.r), respectivamente.

7º) Pode-se ter na ligação estrutura-fundação algum deslocamento conhecido; deslocamentos nulos, no caso de ligações de engaste perfeito entre os pilares e a fundação; ou recalques de apoio (impostos somente nos pilares, pois os núcleos deverão estar sempre na condição de engaste perfeito), a fim de analisar-se as reações da estrutura. Rearranja-se, então, a matriz em função destes deslocamentos conhecidos, e calcula-se os incógnitos.

I.3.2.11- Cálculo dos deslocamentos e esforços internos nos elementos componentes das subestruturas

Como pode-se observar, montar-se-á a matriz de rigidez e o vetor das ações na estrutura, a partir da subestrutura de topo para a de base.

Todos os deslocamentos das subestruturas e deslocamentos nos extremos das barras que as constituem serão calculados seguindo-se a ordem inversa com que as respectivas matrizes e vetores terão sido montados, ou seja, partir-se-á da subestrutura de base para a subestrutura de topo. Seria impossível fazê-lo de outra forma, evidentemente, uma vez que os deslocamentos na ligação estrutura-fundação serão as condições de contorno para o cálculo dos deslocamentos no topo da subestrutura-base; estes, por sua vez, serão as condições de contorno para o cálculo da subestrutura superior, e assim sucessivamente.

Resolve-se integralmente uma subestrutura antes de passar-se para outra.

Encontrados os deslocamentos externos (deslocamentos de base e de topo) e internos de uma subestrutura, restarão como incógnitas os deslocamentos nas barras dos painéis,

pois entre os deslocamentos internos da subestrutura figurarão aqueles que serão externos aos painéis (não incluídos os internos). De posse das matrizes e vetores dos painéis, que representarão, a esta altura, rigidezes e ações decompostas, poder-se-á, juntamente com seu vetor de deslocamentos externos, calcular-se os internos.

Finalmente, com o uso dos vetores deslocamentos e matrizes de rigidez de cada barra, serão calculados os esforços que as solicitam.

I.4- DESCRIÇÃO DOS ELEMENTOS ESTRUTURAIS

Descrever-se-á, a seguir, os diversos componentes estruturais que, associados, formarão as subestruturas. A associação das subestruturas chamar-se-á simplesmente estrutura.

I.4.1- Paineis

O painel será composto pela associação plana das vigas e pilares, cujas características descrever-se-á a seguir. Supor-se-á vigas e pilares perfeitamente engastados entre si nos nós de intersecção. Desprezar-se-á a rigidez à torção e à flexão no plano que não seja o do painel. Os painéis poderão, em determinadas prumadas e andares, ter ausência de pilares e vigas, desde que os elementos faltantes sejam substituídos por elementos fictícios com rigidez à flexão e rigidez axial (caso dos pilares) nulas. As deformações provenientes da ação do esforço cortante serão consideradas desprezíveis.

I.4.1.1- Viga

Limitar-se-á, neste estudo, à análise da presença das vigas prismáticas.

Não serão levadas em conta as rigidezes dos ele-

mentos cujas coordenadas estejam contidas num plano coincidente com o da laje (rigidezes ao deslocamento axial, ao deslocamento lateral e à flexão lateral). Não faria sentido o emprego destas, uma vez que considerar-se-á a laje como infinitamente rígida no seu plano.

I.4.1.2- Pilar

A exemplo das vigas, esta análise será limitada à presença dos pilares prismáticos, para os quais serão levadas em conta: rigidez axial, rigidez ao deslocamento lateral, além da rigidez à flexão lateral; estas duas últimas atuantes no plano do painel ao qual pertencem.

I.4.2- Pilar individual

Aos pilares isolados, ou àqueles existentes na intersecção de painéis, designar-se-á pilares individuais. Para estes serão levadas em conta as rigidezes a todas as componentes de deslocamentos no espaço (translação e rotação). Esta análise limitar-se-á aos pilares individuais prismáticos.

I.4.3- Vigas pilar-pilar

Serão chamadas de vigas pilar-pilar as vigas suportadas nos dois extremos por pilares individuais. Levar-se-á em conta, além das rigidezes segundo as coordenadas que serão adotadas para as vigas comuns, a rigidez à torção destas peças. Vale aqui a mesma observação que se fez no item I.4.1.1.

I.4.4- Vigas pilar-núcleo

Às vigas apoiadas num extremo a um pilar individual e no outro à um núcleo (será definido a seguir) dar-se-á o nome de vigas pilar-núcleo. As rigidezes que serão levadas em conta serão segundo as mesmas coordenadas que

considerar-se-á para as vigas pilar-pilar (válida também aqui a observação do item I.4.1.1).

I.4.5- Lintel

À viga que se apoia exclusivamente em núcleo (contraventando-o internamente) ou em núcleos, chamar-se-á, a exemplo de outros autores, de lintel. Quanto às rigidezes: serão segundo as mesmas coordenadas consideradas para as vigas pilar-pilar ou vigas pilar-núcleo. Valerá, também aqui, a observação do item I.4.1.1.

I.4.6- Núcleo

À associação de duas ou mais paredes planas de tal modo que formem uma secção aberta delgada será chamada de núcleo. Para esta peça será levada em conta a rigidez ao empenamento, além das rigidezes do tratamento espacial.

I.4.7- Laje

A laje será considerada como diafragma com rigidez infinita no seu plano, conforme já mencionou-se, e completamente flexível em planos normais ao mesmo.

I.4.8- Subestrutura

À associação espacial de todos os elementos estruturais descritos nos itens anteriores (I.4.1 a I.4.7) limitada a um certo número de andares denominar-se-á subestrutura. A presença de vigas e lajes só não serão concebidas ao nível da base da subestrutura. Todos os elementos componentes das subestruturas, além das vigas e pilares, devem ser prismáticos.

I.5- CARREGAMENTO

As ações aplicadas em cada subestrutura se subdividirão nas ações horizontais (ações do vento) e nas cargas verticais (permanentes e acidentais).

As resultantes do carregamento horizontal poderão ser aplicadas diretamente nas coordenadas referentes aos deslocamentos das lajes ou nos painéis na altura das lajes.

Quanto ao carregamento vertical, este deverá ser transformado em carregamento nodal equivalente, aplicado diretamente às demais coordenadas da subestrutura.

I.6- SISTEMAS DE REFERÊNCIA

I.6.1- Sistema de referência para a estrutura

A estrutura terá como referência os eixos cartesianos X , Y e Z , com origem "O" situada num ponto qualquer do plano que contém a base da estrutura, no qual estarão situados os eixos Y e Z com orientações arbitrárias. O eixo X será vertical, orientado da base para o topo da estrutura. (FIG.I.3)

I.6.2- Sistema de referência para os painéis de uma subestrutura

O sistema de referência para um painel genérico de uma subestrutura, será formado pelos eixos cartesianos x_j , y_j e z_j com origem " O_j " situada na base da mesma, no nó inicial do painel. O eixo x_j será vertical e terá o mesmo sentido de X ; y_j estará contido no plano do painel e será orientado do início para o fim do mesmo; já o eixo z_j será perpendicular ao plano do painel.

A relação entre os sistemas de referência X , Y ,

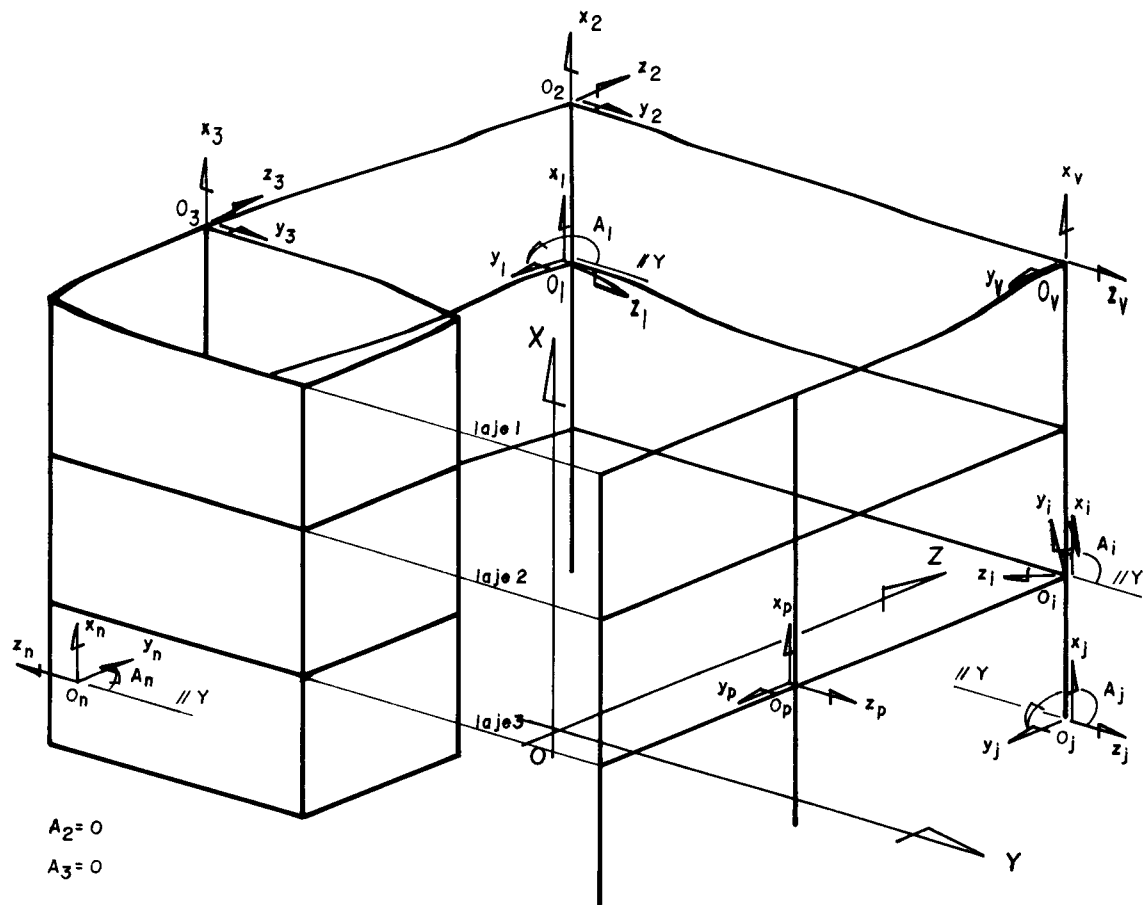


FIG. I.3.1.- Eixos de referência.

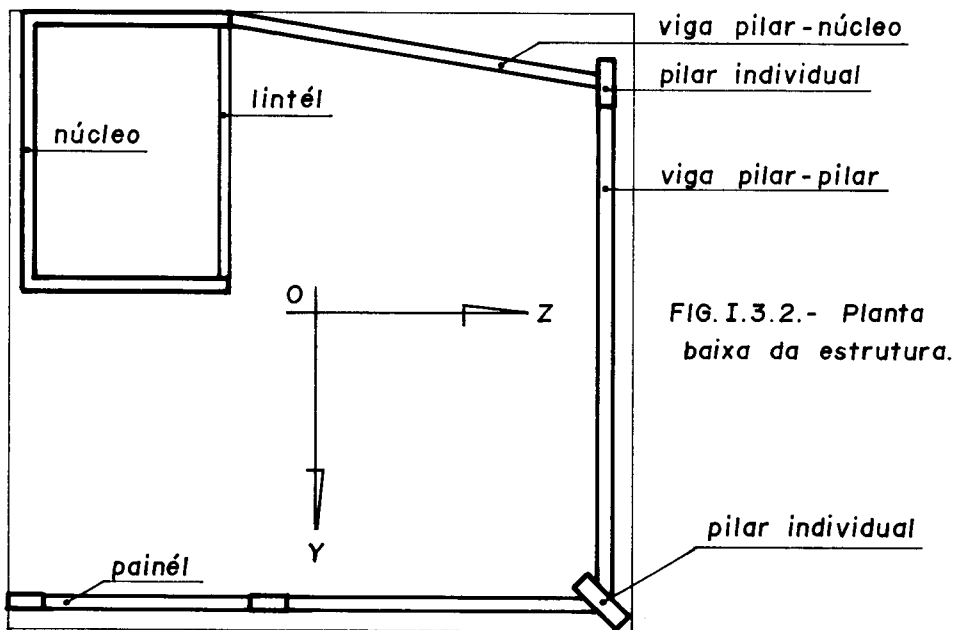


FIG. I.3.2.- Planta baixa da estrutura.

FIG. I.3.- Sistemas de referência.

Z e x_j , y_j e z_j será definida pelo ângulo A_j formado entre os eixos Y e y_j , medido sempre do primeiro para o segundo no sentido de X .

Por facilidade, na referência dos elementos componentes do painel, será conveniente que o mesmo seja visto de tal forma que seu nó inicial fique à esquerda do observador.

I.6.2.1- Sistema de referência para os pilares de um painel

Para os tramos de pilares de um painel genérico de uma subestrutura serão adotados como referência os eixos coordenados x_p , y_p e z_p , cuja origem " O_p " se situa num plano paralelo às lajes, este por sua vez situado na base de cada tramo. O eixo x_p será vertical e terá o mesmo sentido de X ; os eixos y_p e z_p terão a mesma direção e sentido dos eixos y_j e z_j , respectivamente, e passarão pelo centro de gravidade da secção transversal do pilar.

I.6.2.2- Sistema de referência para as vigas de um painel

Para o tramo de viga situado entre duas prumadas de pilares de um painel pertencente a uma subestrutura, serão adotados como referência os eixos x_v , y_v e z_v , com origem " O_v " no centro de gravidade da secção transversal da viga onde se interceptam o referido tramo de viga e o pilar da esquerda, no caso do painel estar sendo visto de forma a se ter o nó inicial à esquerda do observador. O eixo y_v será horizontal com a mesma direção e sentido de y_j ; os eixos x_v e z_v serão paralelos a x_j e z_j , respectivamente.

I.6.3- Sistema de referência para os pilares individuais

Para os tramos de pilares individuais, serão adotados como referência os eixos cartesianos x_i , y_i e z_i , passando pelo centro de gravidade das secções dos tramos, com origem " O_i " situada no plano da laje da base de cada tramo. O eixo x_i será vertical e terá o mesmo sentido de X . Os ei-

xos y_i e z_i serão coincidentes com os eixos principais de inércia da secção transversal dos referidos tramos. A relação entre os sistemas de eixos da estrutura e do pilar individual será dada pelo ângulo A_i , entre os eixos Y e y_i , medido a partir do primeiro no sentido de X .

I.6.4- Sistema de referência para as vigas pilar-pilar

Para o tramo de viga situado entre duas prumadas de pilares individuais serão adotados, como referência, os eixos cartesianos x_2 , y_2 e z_2 , com origem " O_2 " no centro de gravidade da secção transversal da viga num de seus extremos. O eixo y_2 será horizontal com direcção coincidente com o eixo da viga, e sentido determinado pelo extremo oposto ao da origem; o eixo x_2 será vertical no sentido de X ; o eixo z_2 será conhecido aplicando-se a regra da mão direita (*).

I.6.5- Sistema de referência para as vigas pilar-núcleo

O tramo de viga apoiado num extremo a um pilar individual, e, no outro extremo a um núcleo, será referenciado pelo sistema cartesiano x_1 , y_1 e z_1 . Sua origem " O_1 " estará situada na secção transversal localizada no extremo apoiado ao pilar individual, no ponto que coincide com o centro de gravidade desta secção. O eixo x_1 será vertical com o mesmo sentido de X ; o eixo y_1 terá direcção coincidente com o eixo da viga, com o sentido pilar-núcleo; o eixo z_1 ficará automaticamente conhecido aplicando-se a regra da mão direita (*).

(*) A relação entre os sistemas X , Y e Z e x_b , y_b e z_b , ficará definida pelo ângulo A_b , medido entre Y e y_b , a partir do primeiro no sentido de X (regra da mão direita), e o índice b deve ser substituído por 1, 2 ou 3, para referir-se a uma viga pilar-núcleo, viga pilar-pilar, ou a um lintel, respectivamente.

I.6.6- Sistema de referência para os lintéis

Para um tramo de lintel adotar-se-á o sistema de eixos cartesianos x_3 , y_3 e z_3 , com origem " O_3 " no centro de gravidade da secção transversal do lintel. O eixo x_3 será vertical com o mesmo sentido de X; o eixo y_3 terá a mesma direcção do eixo do lintel e sentido apontando para o outro extremo; com a aplicação da regra da mão direita determinar-se-á o sentido de z_3 (*).

I.6.7- Sistema de referência para os núcleos

Para um tramo de núcleo situado entre duas lajes vizinhas adotar-se-á o sistema de eixos cartesianos x_n , y_n e z_n , com origem " O_n " no centro de cisalhamento da secção transversal situada no plano da laje inferior. O eixo x_n será vertical e terá o mesmo sentido de X; o eixo y_n será paralelo a um dos eixos principais de inércia e com sentido arbitrado; conhecidos x_n e y_n , determinar-se-á o sentido de z_n usando-se a regra da mão direita.

A relação entre os sistemas de referência X, Y e Z da estrutura, e x_n , y_n e z_n , do núcleo, será definida pelo ângulo A_n , formado entre Y e y_n , medido a partir do primeiro no sentido de X.

I.7 - COORDENADAS DESLOCAMENTOS

As coordenadas deslocamentos serão vetores na direcção dos possíveis deslocamentos independentes de cada componente da estrutura, salvo menções em contrário, com sentiu

(*) A relação entre os sistemas X, Y e Z e x_b , y_b e z_b , ficará definida pelo ângulo A_b , medido entre Y e y_b , a partir do primeiro no sentido de X (regra da mão direita), e o índice b deve ser substituído por 1, 2 ou 3, para referir-se a uma viga pilar-núcleo, viga pilar-pilar, ou a um lintel, respectivamente.

do positivo de acordo com as convenções adotadas para seus sistemas de referência.

I.7.1- Coordenadas deslocamentos para as subestruturas

Tendo-se em mente que pilares individuais são os pilares isolados, ou aqueles, mesmo que fictícios, sempre existentes nas intersecções de painéis, e chamando-se de nós tipo B às intersecções das lajes com tais pilares; e chamando-se de nós tipo E, os nós pertencentes a duas subestruturas subsequentes, desde que estes pertençam a um único painel; e, chamando-se ainda de nós tipo N às intersecções das lajes com os núcleos, ter-se-á para as subestruturas as seguintes coordenadas deslocamentos (FIG.I.4):

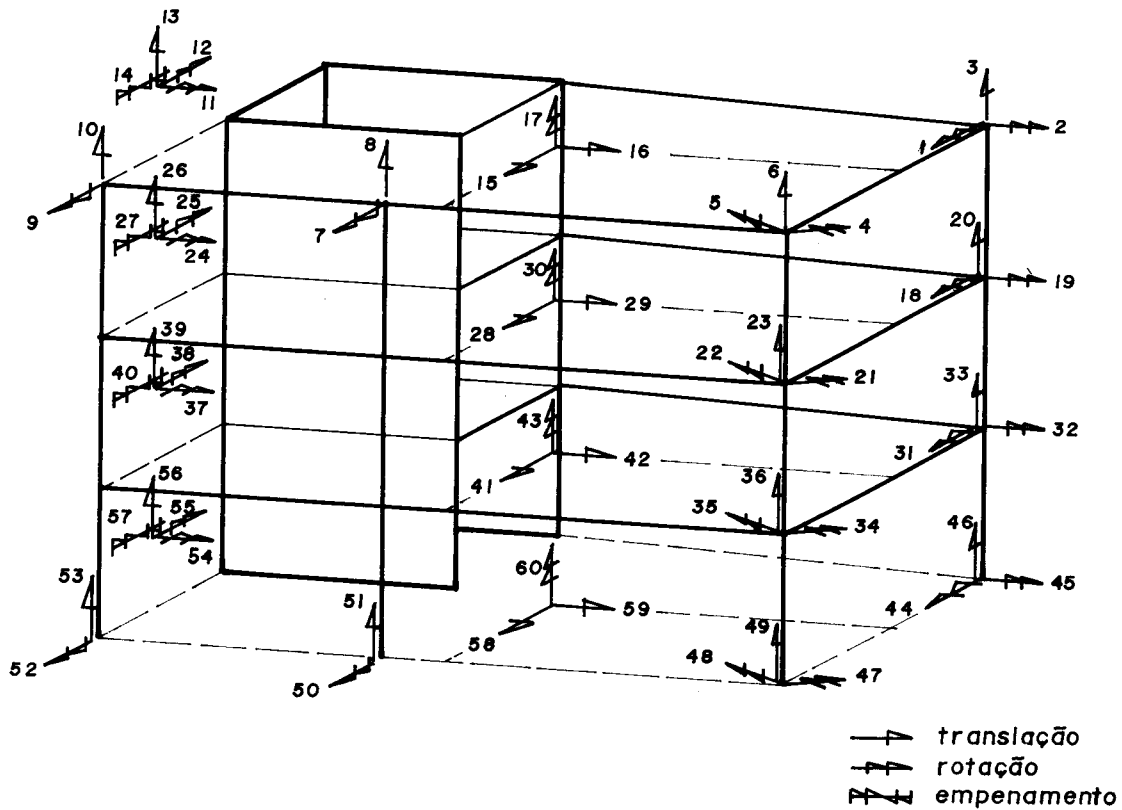


FIG. I. 4.- Coordenadas deslocamentos para uma subestrutura.

a) para cada nó tipo B: rotações segundo os eixos y_i e z_i e o deslocamento linear segundo o eixo x_i ;

b) para cada nó tipo E: a rotação segundo o eixo z_j , e o deslocamento linear segundo o eixo x_j , sendo z_j e x_j eixos de referência do painel ao qual pertence o referido nó;

c) para cada nó tipo N: as rotações segundo os eixos y_n e z_n ; o deslocamento linear segundo o eixo x_n , e o empenamento da secção ou a primeira derivada do giro em torno de x_n ;

d) finalmente, para cada laje: os deslocamentos de corpo rígido em seu plano, ou seja, as translações segundo os eixos Y e Z e a rotação segundo o eixo X.

I.7.1.1- Coordenadas deslocamentos para os painéis

Para um painel j qualquer de uma subestrutura, serão adotadas como coordenadas deslocamentos, aquelas que indicam a translação segundo y_j de cada andar da subestrutura, mais os deslocamentos de cada nó, ou seja, a rotação segundo z_j e a translação segundo x_j (FIG.I.5).

As translações horizontais dos andares serão numeradas primeiramente, de cima para baixo, depois virão a rotação e a translação vertical de cada nó, numeradas de cima para baixo e da esquerda para a direita.

Para um tramo de pilar pertencente a um painel de uma subestrutura, situado entre duas lajes subsequentes, as coordenadas deslocamentos, em número de 6 (seis), estão representadas na FIG.I.6.

Para uma viga entre duas prumadas de pilares e ao nível de uma determinada laje as coordenadas deslocamentos em número de 4 (quatro) estão representadas na FIG.I.7.

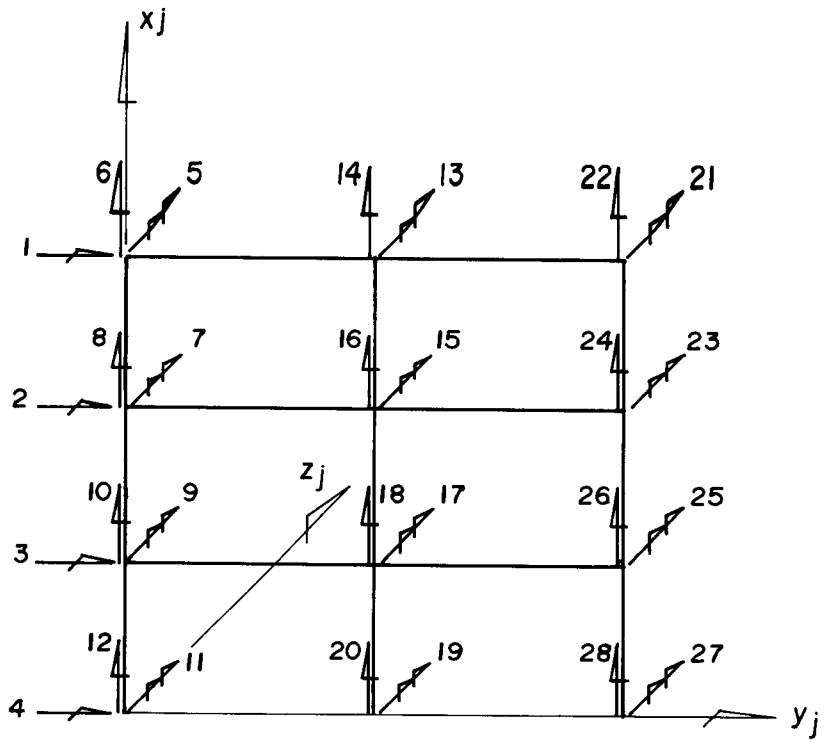


FIG. I.5. - Coordenadas deslocamentos para um painél.

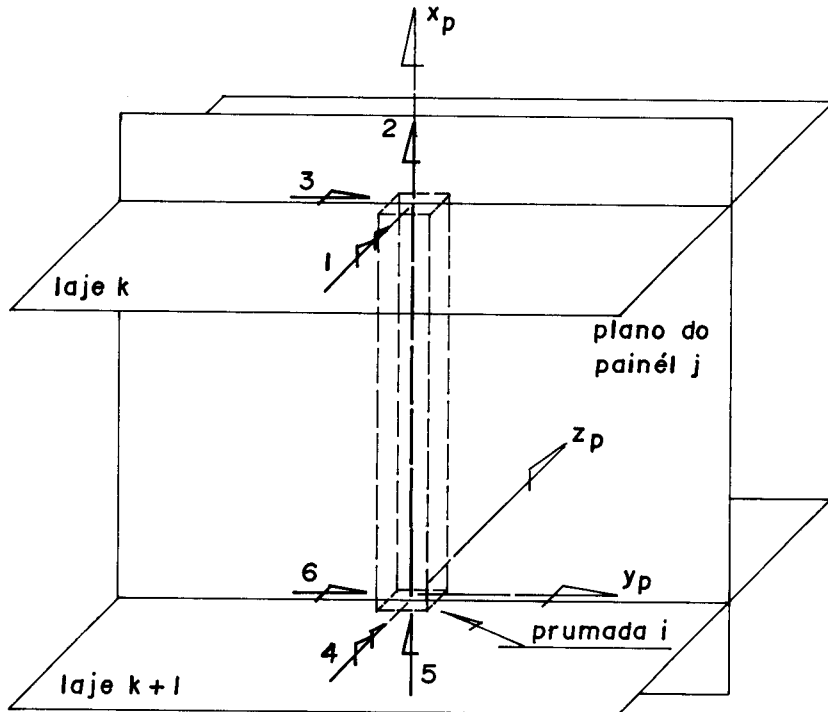


FIG. I. 6. - Coordenadas deslocamentos para o tramo de pilar i, andar (k+1), do painél j, subestrutura s.

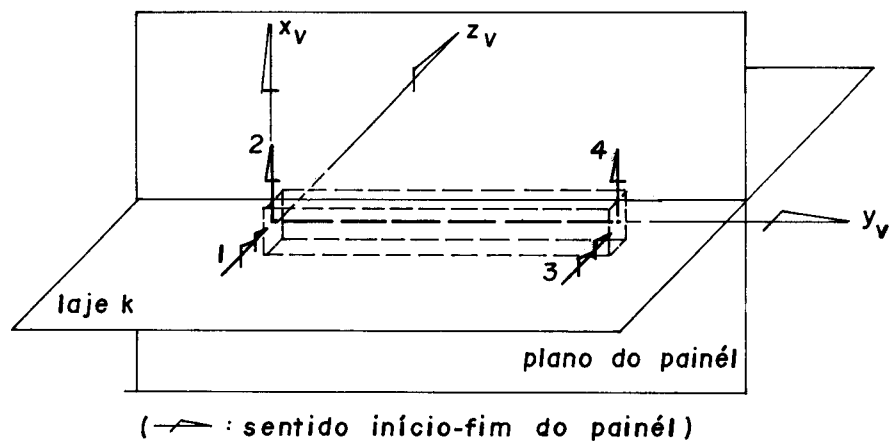


FIG.I.7. - Coordenadas deslocamentos para um tramo de viga pertencente a um painel.

I.7.1.2- Coordenadas deslocamentos para os tramos de pilares individuais

Ao nível de cada laje, ter-se-ã as seguintes coordenadas deslocamentos na sequênçia:

- a) as rotações segundo y_i e z_i ;
- b) as translações segundo x_i , y_i e z_i , e,
- c) as rotações segundo x_i .

Para um tramo de pilar individual compreendido entre duas lajes subsequentes, as 12 (doze) coordenadas deslocamentos estão representadas na FIG.I.8.

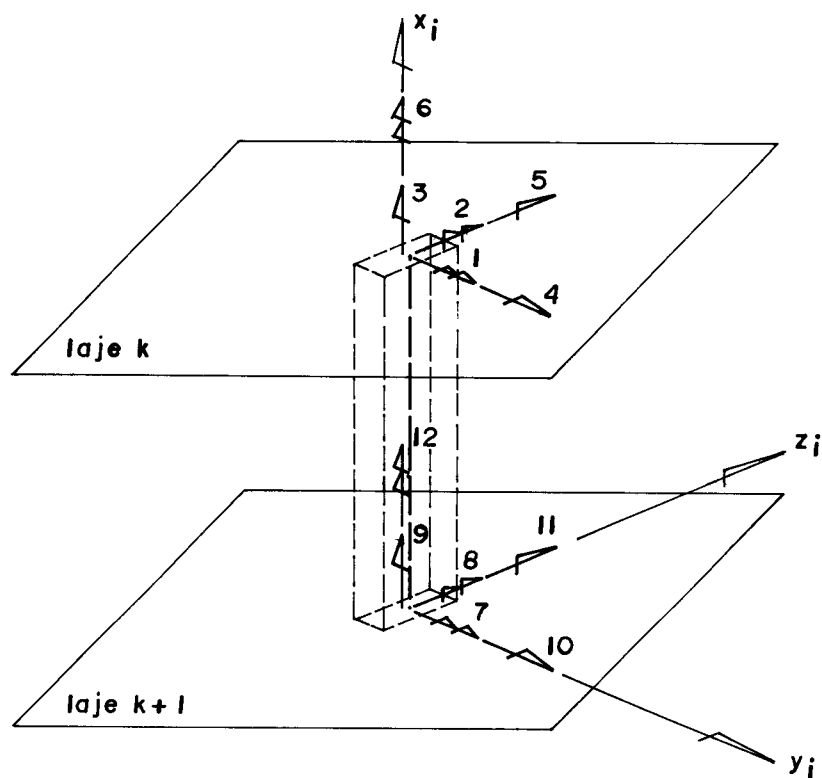


FIG.I. 8. - Coordenadas deslocamentos para um tramo de pilar individual.

I.7.1.3- Coordenadas deslocamentos para as vigas pilar-pilar, vigas pilar-núcleo e lintéis

Para os tramos de vigas pilar-pilar, vigas pilar-núcleo, e lintéis, as coordenadas deslocamentos serão:

- a) as rotações em torno do eixo y_b (longitudinal), ou torção;
- b) as rotações segundo o eixo z_b , e,
- c) deslocamento linear segundo o eixo x_b .

A letra b deverá ser substituída por 1, 2 ou 3, para o caso em que a barra represente uma viga pilar-núcleo, viga pilar-pilar ou um lintel, respectivamente.

As coordenadas deslocamentos para estes três tipos de vigas estão representadas nas FIGS.I.9.1, I.9.2 e I.9.3, respectivamente.

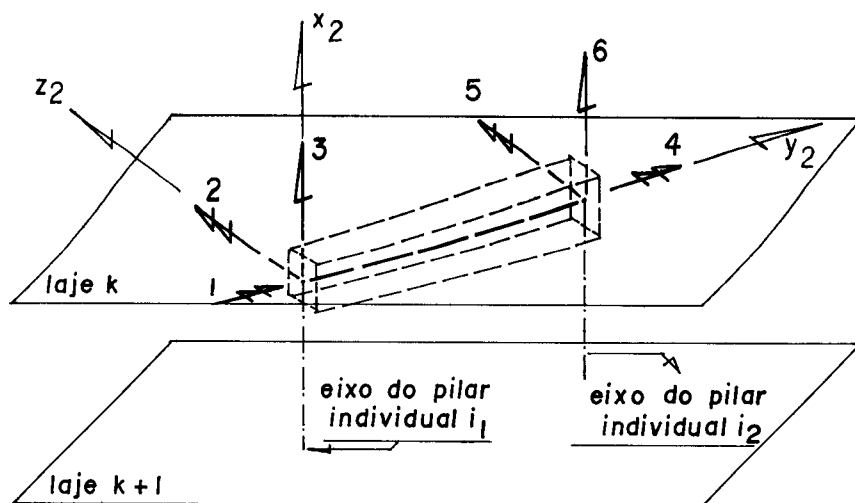


FIG. I. 9. 1. - Coordenadas deslocamentos para as vigas pilar-pilar.

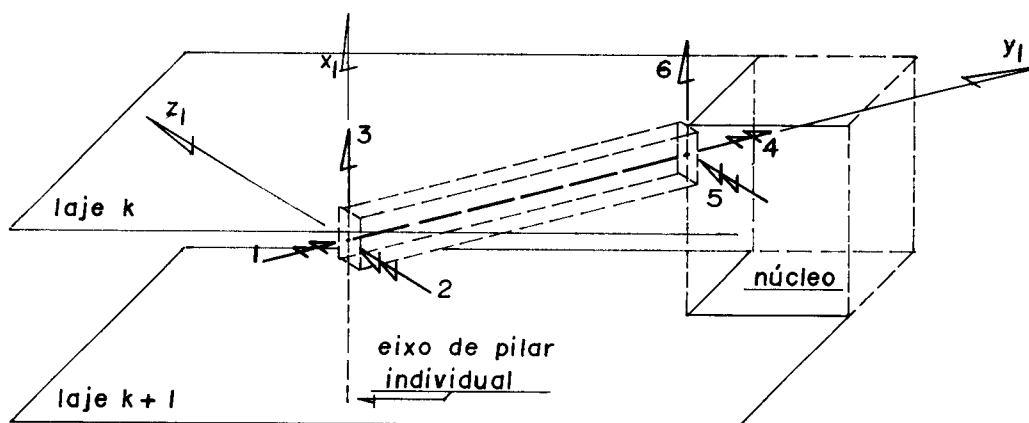


FIG. I. 9. 2. - Coordenadas deslocamentos para as vigas pilar-núcleo.

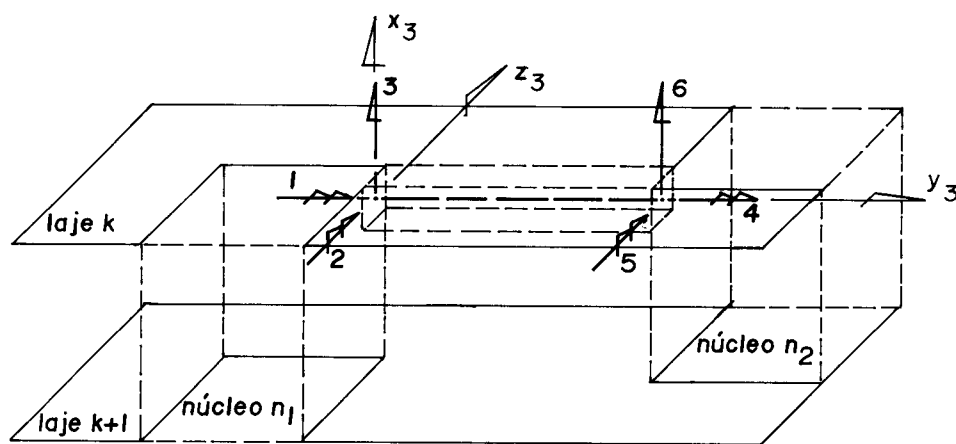


FIG. I. 9. 3. - Coordenadas deslocamentos para os lintéis.

FIG. I. 9. - Coordenadas deslocamentos para vigas pilar-pilar, vigas pilar-núcleo, e lintéis.

I.7.1.4- Coordenadas deslocamentos para os núcleos

Para um tramo de núcleo, compreendido entre duas lajes subsequentes, as coordenadas deslocamentos serão:

- a) rotações em torno de y_n e z_n ;
- b) deslocamento axial (segundo x_n);
- c) deslocamentos lineares segundo os eixos y_n e z_n ;
- d) rotação segundo o eixo x_n , ou torção, e,
- e) empenamento, ou primeira derivada da torção.

Para um tramo genérico de núcleo, pertencente a uma subestrutura s , as coordenadas deslocamentos estão representadas na FIG.I.10.

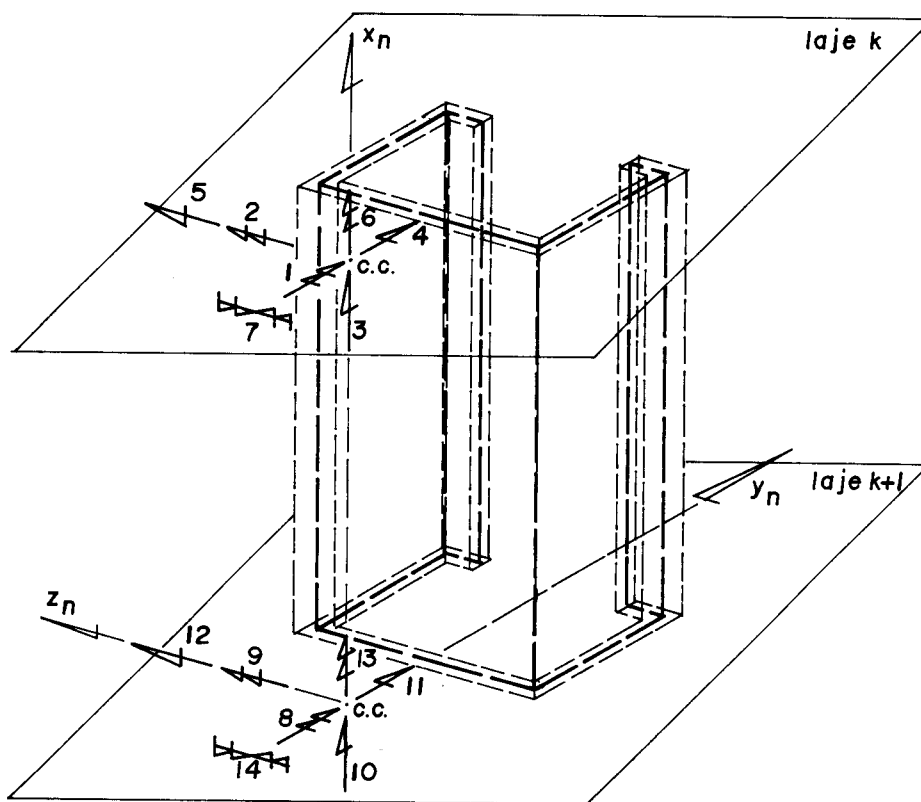


FIG.I. 10.- Coordenadas deslocamentos para um tramo de núcleo.

CAPÍTULO II

ANÁLISE DO SISTEMA ESTRUTURAL

II.1- CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A matriz de rigidez de uma subestrutura será obtida através das contribuições das rigidezes de todos os painéis, pilares individuais, vigas pilar-pilar, vigas pilar-núcleo, lintéis, e de todos os núcleos que compoem a subestrutura, nas coordenadas da mesma.

O vetor das ações será obtido também pela contribuição dos vetores das ações em cada painel, somados com o das ações externas diretamente aplicados sobre as coordenadas da subestrutura.

II.2- CONTRIBUIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM TRAMO DE PILAR INDIVIDUAL NA MATRIZ DE RIGIDEZ DA SUBESTRUTURA

II.2.1- Matriz de rigidez dos pilares individuais

Para os pilares individuais de secções prismáticas, serão previstas as seguintes hipóteses:

a) os centros de torção e de gravidade serão coincidentes;

b) não haverá distorção da secção transversal no seu plano;

c) os materiais obedecem a Lei de Hooke.

Para um tramo de pilar individual i , abaixo da l e k , pertencente à subestrutura s , ter-se-á a seguinte matriz de rigidez:

$$[r_i]_s^{i,k} = \begin{bmatrix} [r_{i11}] & [r_{i12}] \\ [r_{i21}] & [r_{i22}] \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$

onde $[r_{i11}]$ é uma matriz de ordem 6×6 , simétrica, que relaciona as coordenadas numeradas de 1 a 6 entre si, dada por:

$$[r_{i11}] = \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot E_i \cdot I_{yi}}{L_i} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 \cdot E_i \cdot I_{yi}}{L_i^2} & 0 \\ & \frac{4 \cdot E_i \cdot I_{zi}}{L_i} & 0 & \frac{-6 \cdot E_i \cdot I_{zi}}{L_i^2} & 0 & 0 \\ & & \frac{E_i \cdot A_{xi}}{L_i} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{12 \cdot E_i \cdot I_{zi}}{L_i^3} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12 \cdot E_i \cdot I_{yi}}{L_i^3} & 0 \\ & & & & & \frac{G_i \cdot J_{ti}}{L_i} \end{bmatrix}$$

(simétrica)

em que:

E_i = módulo de elasticidade longitudinal do material do pilar individual;

G_i = módulo de elasticidade transversal do material do pilar individual;

J_{ti} = momento de inércia à torção do pilar individual;

I_{yi} = momento principal de inércia do pilar individual relativamente ao eixo y_i ;

I_{zi} = idem, relativamente ao eixo z_i ;

A_{xi} = área da secção transversal do pilar individual; e,

L_i = altura do pilar individual.

$[r_{i12}]$ é uma matriz de ordem 6x6, e representa a matriz de rigidez segundo as coordenadas de 1 a 6, obtida pela imposição de deslocamentos unitários, um por vez, nas coordenadas de 7 a 12, dada por:

$$[r_{i12}] = \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot E_i \cdot I_{yi}}{L_i} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6 \cdot E_i \cdot I_{yi}}{L_i^2} & 0 \\ 0 & \frac{2 \cdot E_i \cdot I_{zi}}{L_i} & 0 & \frac{6 \cdot E_i \cdot I_{zi}}{L_i^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-E_i \cdot A_{xi}}{L_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6 \cdot E_i \cdot I_{zi}}{L_i^2} & 0 & \frac{-12 \cdot E_i \cdot I_{zi}}{L_i^3} & 0 & 0 \\ \frac{6 \cdot E_i \cdot I_{yi}}{L_i^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12 \cdot E_i \cdot I_{yi}}{L_i^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-G_i \cdot J_{ti}}{L_i} \end{bmatrix}$$

$[r_{i21}]$ representa a matriz de rigidez segundo as coordenadas de 7 a 12, obtida por deslocamentos impostos, unitários, um por vez, nas coordenadas de 1 a 6, e é dada pela transposta de $[r_{i12}]$.

$[r_{i22}]$ é a matriz que relaciona as coordenadas de 7 a 12 entre si, e é igual à $[r_{i11}]$ a menos dos coeficientes (1,5), (2,4) e seus simétricos, que trocam de sinal.

II.2.2- Matriz que relaciona os deslocamentos da subestrutura aos deslocamentos do tramo de pilar individual

Os deslocamentos $\{d_i\}_s^{i,k}$ do tramo de pilar individual i , abaixo da laje k , pertencente à subestrutura s , são relacionados com os deslocamentos $\{d_s\}_s$ da subestrutura s à qual pertence através da relação:

$$\{d_i\}_s^{i,k} = [\beta_i]_s^{i,k} \cdot \{d_s\}_s \quad (\text{II.2})$$

A matriz de transformação $[\beta_i]$, genérica, é composta da seguinte forma:

$$[\beta_i] = \begin{bmatrix} \dots & \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} & & & & & & & \\ & & \dots & \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} & & & & & \\ & & & & \dots & \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} & & & \\ & & & & & & \dots & \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} & \dots \end{bmatrix} \quad (12 \times \text{NCS})$$

onde:

$[I]$ = matriz identidade de ordem 3x3;

$[L]$ = submatriz que correlaciona os deslocamentos da laje (deslocamentos de corpo rígido), com os deslocamentos do pilar individual, e é dada por:

$$[L] = \begin{bmatrix} C & S & B \\ -S & C & D \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ na qual}$$

$$C = \cos (A_i(i));$$

$$S = \text{sen} (A_i(i));$$

$$B = Y(i).S - Z(i).C;$$

$$D = Y(i).C + Z(i).S;$$

$Y(i)$ = coordenada Y do pilar individual em relação ao sistema de eixos da estrutura; e,

$Z(i)$ = idem, para a coordenada Z.

$[\beta_i]$ é de ordem $12 \times \text{NCS}$, onde NCS é igual ao número de coordenadas da subestrutura, e é dada por:

$$\text{NCS} = (3.(\text{NNB}+1) + 4.\text{NNN}).(\text{NA}(s) + 1) + 4.\text{NNE}$$

e NNB é igual ao número de nós tipo B; NNE é igual ao número de nós tipo E; NNN é igual ao número de nós tipo N; e, NA(s) é igual ao número de andares da subestrutura s.

II.2.3- Rigidez do pilar individual na rigidez da subestrutura

A matriz de rigidez $[r_i]_s$ da subestrutura s, devida apenas às contribuições dos tramos de pilares individuais desta subestrutura será:

$$[r_i]_s = \sum_{i=1}^{\text{NNB}} \sum_{k=1}^{\text{NA}(s)} ([\beta_i]_s^{i,k})^t \cdot [r_i]_s^{i,k} \cdot [\beta_i]_s^{i,k}$$

II.3- CONTRIBUIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DAS AÇÕES NOS PAINÉIS NA MATRIZ DE RIGIDEZ E NO VETOR DAS AÇÕES NA SUBESTRUTURA

II.3.1- Matriz de rigidez dos painéis

II.3.1.1- Matriz de rigidez dos tramos de pilares

Para um pilar (i,k) da prumada i e abaixo da laje k, de um painel j, pertencente à subestrutura s, ter-se-á a seguinte matriz de rigidez de ordem 6x6 nas coordenadas correspondentes do mesmo:

$$[r_p]_{j,s}^{i,k} = \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p} & 0 & \frac{-6 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p} & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p^2} \\ 0 & \frac{E \cdot a_{xp}}{L_p} & 0 & 0 & \frac{-E \cdot a_{xp}}{L_p} & 0 \\ \frac{-6 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p^3} & \frac{-6 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p^2} & 0 & \frac{-12 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p^3} \\ \frac{2 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p} & 0 & \frac{-6 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p} & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p^2} \\ 0 & \frac{-E \cdot a_{xp}}{L_p} & 0 & 0 & \frac{E \cdot a_{xp}}{L_p} & 0 \\ \frac{6 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p^2} & 0 & \frac{-12 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_{zp}}{L_p^3} \end{bmatrix}$$

onde:

E = módulo de elasticidade longitudinal do material do pilar;

I_{zp} = momento principal de inércia do pilar com relação ao eixo z_p ;

a_{xp} = área da secção transversal do pilar; e,

L_p = altura do pilar.

II.3.1.2- Matriz de rigidez das vigas

Para um tramo de viga (i,k) imediatamente à direita da prumada de pilares i (com o nó inicial à esquerda do observador), e no nível da laje k do painel j, pertencente à subestrutura s, ter-se-á a seguinte matriz de rigidez de ordem 4x4 nas coordenadas correspondentes da mesma:

$$[r_v]_{j,s}^{i,k} = \begin{bmatrix} \frac{4.E.I_{zv}}{L_v} & \frac{-6.E.I_{zv}}{L_v^2} & \frac{2.E.I_{zv}}{L_v} & \frac{6.E.I_{zv}}{L_v^2} \\ \frac{-6.E.I_{zv}}{L_v^2} & \frac{12.E.I_{zv}}{L_v^3} & \frac{-6.E.I_{zv}}{L_v^2} & \frac{-12.E.I_{zv}}{L_v^3} \\ \frac{2.E.I_{zv}}{L_v} & \frac{-6.E.I_{zv}}{L_v^2} & \frac{4.E.I_{zv}}{L_v} & \frac{6.E.I_{zv}}{L_v^2} \\ \frac{6.E.I_{zv}}{L_v^2} & \frac{-12.E.I_{zv}}{L_v^3} & \frac{6.E.I_{zv}}{L_v^2} & \frac{12.E.I_{zv}}{L_v^3} \end{bmatrix}$$

na qual:

E = módulo de elasticidade do material da viga;

I_{zv} = momento principal de inércia da viga em relação ao eixo z_v ; e,

L_v = comprimento da viga.

II.3.1.3- Matriz de rigidez de um painel

Os deslocamentos $\{d_p\}_{j,s}^{i,k}$ do pilar (i,k) e $\{d_v\}_{j,s}^{i,k}$ da viga (i,k) podem ser relacionados aos deslocamen

tos $\{d_j\}_s^j$ do painel j pertencente à subestrutura s , através da matriz de transformação de deslocamentos $[\beta_p]_{j,s}^{i,k}$ de ordem $6x((NA(s)+1).(2.NC(j)+1))$, para os pilares; e, da matriz $[\beta_v]_{j,s}^{i,k}$ de ordem $4x((NA(s)+1).(2.NC(j)+1))$, para as vigas; cujas formas são as seguintes:

$$[\beta_p]_{j,s}^{i,k} = \begin{matrix} 2.(NA(s)+1).(i-1) + 2.k-2 + (NA(s)+1) \\ \overbrace{\hspace{10em}}^{k-1} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0\dots 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 \\ 0\dots 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\dots 0 \\ 0\dots 0 & 1 & 0 & 0\dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 \\ 0\dots 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\dots 0 \\ 0\dots 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\dots 0 \\ 0\dots 0 & 0 & 1 & 0\dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

e,

$$[\beta_v]_{j,s}^{i,k} = \begin{matrix} 2.(NA(s)+1).(i-1) + 2.k-2 + (NA(s)+1) \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 0\dots 0 & 1 & 0 & 0\dots 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 \\ 0\dots 0 & 0 & 1 & 0\dots 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 \\ 0\dots 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 & 1 & 0 & 0\dots 0 \\ 0\dots 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 & 0 & 1 & 0\dots 0 \end{array} \right] \\ 2.(NA(s)+1).i + 2.k-2 + (NA(s)+1) \end{matrix}$$

nas quais:

NA(s) = número de andares da subestrutura s ;

NC(j) = número de prumadas do painel j .

As relações entre os deslocamentos das barras dos painéis e os dos próprios painéis serão, então, dadas por:

$$\{d_p\}_{j,s}^{i,k} = [\beta_p]_{j,s}^{i,k} \cdot \{d_j\}_s^j, \quad e$$

$$\{d_v\}_{j,s}^{i,k} = [\beta_v]_{j,s}^{i,k} \cdot \{d_j\}_s^j$$

Finalmente, a matriz de rigidez do painel j , pertencente à subestrutura s , será:

$$[r_j]_s^j = \sum_{i=1}^{NC(j)} \sum_{k=1}^{NA(s)} ([\beta_p]_{j,s}^{i,k})^t \cdot [r_p]_{j,s}^{i,k} \cdot [\beta_p]_{j,s}^{i,k} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{NC(j)-1} \sum_{k=1}^{NA(s)} ([\beta_v]_{j,s}^{i,k})^t \cdot [r_v]_{j,s}^{i,k} \cdot [\beta_v]_{j,s}^{i,k}$$

$[r_j]_s^j$ será de ordem $(NA(s)+1) \cdot (2 \cdot NC(j)+1) \times (NA(s)+1) \cdot (2 \cdot NC(j)+1)$.

II.3.2- Matriz de rigidez e vetor das ações de um painel reduzidos às suas coordenadas externas

Os painéis serão classificados em três tipos, dependendo da existência ou não de pilares individuais nos nós de extremidades dos mesmos (FIG.II.1), lembrando-se que, se num nó de extremidade do painel existe um pilar individual, para o painel neste nó existirá um pilar fictício de rigidez e área nulas.

Os deslocamentos $\{d_j\}_s^j$ serão organizados em deslocamentos segundo as coordenadas externas (e) e internas (i), sendo que as coordenadas externas dos painéis serão aquelas dos nós comuns a dois ou mais painéis, ou a duas subestruturas.

Assim, para os painéis do tipo (1):

$$\{d_{je}\}_s^j = \{\{d_j\}_h, \{d_j\}_1, \{d_j\}_{nc}\}^t, \quad e$$

$$\{d_{ji}\}_s^j = \{\{d_j\}_2, \{d_j\}_3, \dots, \{d_j\}_{nc-1}\}^t$$

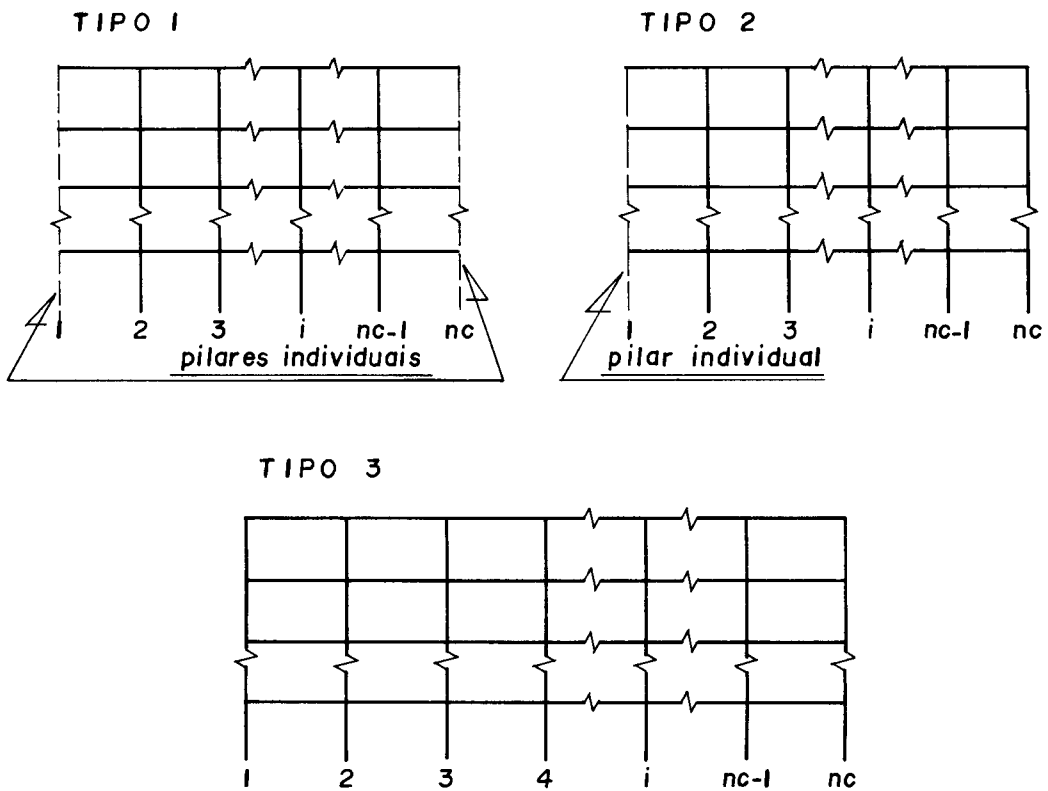


FIG. II. 1. - Tipos de painél.

Para os painéis do tipo (2):

$$\{d_{je}\}_s^j = \{\{d_j\}_h, \{d_j\}_1\}^t, \quad e$$

$$\{d_{ji}\}_s^j = \{\{d_j\}_2, \{d_j\}_3, \dots, \{d_j\}_{nc}\}^t$$

Para os painéis do tipo (3):

$$\{d_{je}\}_s^j = \{d_j\}_h, \quad e$$

$$\{d_{ji}\}_s^j = \{\{d_j\}_1, \{d_j\}_2, \dots, \{d_j\}_{nc}\}^t$$

O subvetor $\{d_j\}_h$ contém os deslocamentos horizontais, ao nível das lajes, mais as rotações, segundo z_j , e as translações, segundo x_j , aos níveis de topo e de base dos painéis. Os demais subvetores contém os outros deslocamentos do painel.

A partir do exposto, o próximo passo será rearranjar a matriz $[r_j]_s^j$ e o vetor das ações $\{f_j\}_s^j$ do painel j , pertencente à subestrutura s , através de trocas de linhas e colunas, até se obter:

$$\begin{bmatrix} [r_{jii}] & [r_{jie}] \\ [r_{jei}] & [r_{jee}] \end{bmatrix}_s^j \cdot \begin{Bmatrix} \{d_{ji}\} \\ \{d_{je}\} \end{Bmatrix}_s^j = \begin{Bmatrix} \{f_{ji}\} \\ \{f_{je}\} \end{Bmatrix}_s^j \quad (\text{II.3})$$

Os deslocamentos internos $\{d_{ji}\}$ podem ser substituídos pela soma de dois outros, $\{d_{ji}^0\}$ e $\{d_{ji}^*\}$. O primeiro, $\{d_{ji}^0\}$, contendo os deslocamentos internos provocados pelos esforços internos $\{f_{ji}\}$ quando se impõe que todos os deslocamentos $\{d_{je}\}$ sejam nulos, aplicando-se segundo essas coordenadas externas, esforços $\{f_{je}^0\}$ de engastamento perfeito. O outro, $\{d_{ji}^*\}$, contendo os deslocamentos internos devidos à superposição dos esforços externos $\{f_{je}\}$ com $(-1) \cdot \{f_{je}^0\}$. Assim os deslocamentos $\{d_j\}_s^j$ ficarão:

$$\{d_j\}_s^j = \begin{Bmatrix} \{d_{ji}\} \\ \{d_{je}\} \end{Bmatrix}_s^j = \begin{Bmatrix} \{d_{ji}^0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}_s^j + \begin{Bmatrix} \{d_{ji}^*\} \\ \{d_{je}\} \end{Bmatrix}_s^j \quad (\text{II.4})$$

Os esforços $\{f_j\}_s^j$ correspondentes serão:

$$\{f_j\}_s^j = \begin{Bmatrix} \{f_{ji}\} \\ \{f_{je}\} \end{Bmatrix}_s^j = \begin{Bmatrix} \{f_{ji}\} \\ \{f_{je}^0\} \end{Bmatrix}_s^j + \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f_{je}^*\} \end{Bmatrix}_s^j \quad (\text{II.5})$$

Os quatro vetores introduzidos, $\{d_{ji}^0\}$, $\{d_{ji}^*\}$, ... $\{f_{je}^0\}$ e $\{f_j^*\}$ podem ser determinados substituindo-se as equações (II.4) e (II.5) na equação (II.3); tem-se:

Para deslocamentos externos nulos:

$$\begin{bmatrix} [r_{jii}] & [r_{jie}] \\ [r_{jei}] & [r_{jee}] \end{bmatrix}_s^j \cdot \begin{Bmatrix} \{d_{ji}^0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}_s^j = \begin{Bmatrix} \{f_{ji}\} \\ \{f_{je}^0\} \end{Bmatrix}_s^j$$

donde:

$$\{d_{ji}^0\} = [r_{jii}]^{-1} \cdot \{f_{ji}\} \quad (II.6)$$

$$\{f_{je}^0\} = [r_{jei}] \cdot [r_{jii}]^{-1} \cdot \{f_{ji}\} \quad (II.7)$$

Para a outra parcela dos deslocamentos:

$$\begin{bmatrix} [r_{jii}] & [r_{jie}] \\ [r_{jei}] & [r_{jee}] \end{bmatrix}_s^j \cdot \begin{Bmatrix} \{d_{ji}^*\} \\ \{d_{je}\} \end{Bmatrix}_s^j = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f_j^*\} \end{Bmatrix}_s^j$$

que fornece:

$$\{d_{ji}^*\} = - [r_{jii}]^{-1} \cdot [r_{jie}] \cdot \{d_{je}\} \quad (II.8)$$

$$\{f_j^*\} = [r_{jei}] \cdot \{d_{ji}^*\} + [r_{jee}] \cdot \{d_{je}\} \quad (II.9)$$

Pela substituição de (II.8) em (II.9) tem-se:

$$\{f_j^*\} = ([r_{jee}] - [r_{jei}] \cdot [r_{jii}]^{-1} \cdot [r_{jie}]) \cdot \{d_{je}\}$$

Chamando-se $[r_j^*]$ de matriz de rigidez do painel reduzida às suas coordenadas externas:

$$[r_j^*] = [r_{jee}] - [r_{jei}] \cdot [r_{jii}]^{-1} \cdot [r_{jie}] \quad (\text{II.10})$$

$$\{f_j^*\} = [r_j^*] \cdot \{d_{je}\} \quad (\text{II.11})$$

Substituindo-se os valores de $\{f_{je}^0\}$ da equação (II.7) em:

$$\{f_{je}\} = \{f_{je}^0\} + \{f_j^*\}$$

tem-se:

$$\{f_j^*\} = \{f_{je}\} - [r_{jei}] \cdot [r_{jii}]^{-1} \cdot \{f_{ji}\} \quad (\text{II.12})$$

Pela substituição dos valores de $\{d_{ji}^0\}$ da equação (II.6) e $\{d_{ji}^*\}$ da equação (II.8) em:

$$\{d_{ji}\} = \{d_{ji}^0\} + \{d_{ji}^*\}$$

tem-se:

$$\{d_{ji}\} = [r_{jii}]^{-1} \cdot \{f_{ji}\} - [r_{jii}]^{-1} \cdot [r_{jie}] \cdot \{d_{je}\} \quad (\text{II.13})$$

Como pode-se observar, no desenvolvimento acima aparece a inversa de uma matriz. Porém, em tratamentos computacionais isto não é muito aconselhável, pois traz problema

mas de precisão e é de eficiência duvidosa. Adotar-se-á então, buscando-se uma melhor precisão numérica, o processo proposto em (9), que visa encontrar as matrizes de rigidez e vetores de ações de estruturas reduzidos às suas coordenadas externas, $[r_j^*]$ e $\{f_j^*\}$, bem como os deslocamentos internos das mesmas. Este processo consiste em se transformar as matrizes de rigidez, já rearranjadas, com as rigidezes referentes às coordenadas internas nas primeiras linhas e colunas, em um triplo produto matricial, conforme se segue:

$$\begin{bmatrix} [r_{jii}] & [r_{jie}] \\ [r_{jei}] & [r_{jee}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \end{bmatrix}^t \quad (\text{II.14})$$

onde

$$\begin{bmatrix} M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [RN] & [I] \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

e

$$\begin{bmatrix} M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [K^*] \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

nas quais:

[L] = matriz triangular inferior com a diagonal principal unitária;

[RN] = matriz retangular;

[0] = matriz nula;

[I] = matriz identidade;

[D] = matriz diagonal, e,

[K*] = matriz simétrica.

Efetuando-se o triplo produto matricial obtêm-se as relações que se seguem:

$$[r_{jii}] = [L] \cdot [D] \cdot [L]^t \quad (\text{II.17})$$

$$[r_{jei}] = [r_{jie}]^t = [RN] \cdot [D] \cdot [L]^t \quad (\text{II.18})$$

$$[r_{jee}] = [K^*] + [RN] \cdot [D] \cdot [RN]^t \quad (\text{II.19})$$

A equação (II.17) representa uma decomposição de Choleski da matriz $[r_{jii}]$. Da equação (II.18) pode ser derivada uma expressão para a matriz $[RN]$:

$$[RN] = [r_{jei}] \cdot \left[[D] \cdot [L]^t \right]^{-1} \quad (\text{II.20})$$

e da equação (II.19):

$$[K^*] = [r_{jee}] - [RN] \cdot [D] \cdot [RN]^t \quad (\text{II.21})$$

Das equações (II.20) e (II.21) são obtidas as seguintes equações genéricas para um elemento (i,j) de $[RN]$ e de $[K^*]$, respectivamente:

$$RN_{i,j} = \frac{1}{D_{j,j}} \cdot (r_{j(i+NI,j)} - \sum_{k=1}^{j-1} RN_{i,k} \cdot L_{j,k} \cdot D_{k,k}) \quad (\text{II.22})$$

e

$$K_{i,j}^* = r_{j(i+NI,j+NI)} - \sum_{k=1}^{NI} L_{i,k}^2 \cdot D_{k,k} \quad (\text{II.23})$$

onde NI é o número de coordenadas internas do painel.

Analisando-se a equação (II.22), nota-se que [RN] nada mais é do que a tranposta de uma matriz obtida, quando se triangulariza a matriz de rigidez de acordo com a equação (II.17) até a coluna referente ao número de coordenadas internas. Do mesmo modo, analisando-se a equação (II.23), nota-se que [K*] é também uma submatriz conseguida desta triangularização e que é idêntica à [r_j*] da equação (II.10). Assim:

$$\begin{bmatrix} [r_{jii}] & [r_{jie}] \\ [r_{jei}] & [r_{jee}] \end{bmatrix}_s^j \xrightarrow[\text{triangularização}]{\text{processo de}} \begin{bmatrix} [L]^t & [RN]^t \\ [0] & [K^*] \end{bmatrix}_s^j \quad (\text{II.24})$$

Substituindo-se o triplo produto matricial na equação (II.3) tem-se:

$$\begin{bmatrix} M_2 \end{bmatrix}_s^j \cdot \begin{Bmatrix} \{d_{ji}^*\} \\ \{d_{je}^*\} \end{Bmatrix}_s^j = \begin{Bmatrix} \{f_{ji}^*\} \\ \{f_j^*\} \end{Bmatrix}_s^j \quad (\text{II.25})$$

na qual:

$$\begin{Bmatrix} \{d_{ji}^*\} \\ \{d_{je}^*\} \end{Bmatrix}_s^j = \begin{bmatrix} M_1 \end{bmatrix}_s^j \cdot \begin{Bmatrix} \{d_{ji}\} \\ \{d_{je}\} \end{Bmatrix}_s^j \quad (\text{II.26})$$

e

$$\begin{Bmatrix} \{f_{ji}\} \\ \{f_{je}\} \end{Bmatrix}_s^j = \begin{bmatrix} M_1 \end{bmatrix}_s^j \cdot \begin{Bmatrix} \{f_{ji}^*\} \\ \{f_j^*\} \end{Bmatrix}_s^j \quad (\text{II.27})$$

Da equação (II.25), com o uso de (II.16), obtém-se:

$$[D] \cdot \{d_{ji}^*\} = \{f_{ji}^*\} \quad (\text{II.25.1})$$

e

$$[K^*] \cdot \{d_{je}^*\} = \{f_j^*\} \quad (\text{II.25.2})$$

na qual

$$[K^*] = [r_j^*],$$

e da equação (II.26), com o uso de (II.15):

$$\{d_{ji}^*\} = [L]^t \cdot \{d_{ji}\} + [RN]^t \cdot \{d_{je}\} \quad (\text{II.26.1})$$

e

$$\{d_{je}^*\} = \{d_{je}\} \quad , \quad (\text{II.26.2})$$

e, da equação (II.27), juntamente com (II.15):

$$\{f_{ji}\} = [L] \cdot \{f_{ji}^*\} \quad (\text{II.27.1})$$

e

$$\{f_{je}\} = [RN] \cdot \{f_{ji}^*\} + \{f_j^*\} \quad (\text{II.27.2})$$

Da equação (II.27.1):

$$\{f_{ji}^*\} = [L]^{-1} \cdot \{f_{ji}\} \quad (\text{II.27.1.1})$$

Esta igualdade substituída na equação (II.27.2) fornece:

$$\{f_j^*\} = \{f_{je}\} - [RN] \cdot \{f_{ji}^*\} \quad (\text{II.27.2.1})$$

e a substituição da equação (II.27.1.1) na equação (II.25.1) fornece:

$$\{d_{ji}^*\} = [D]^{-1} \cdot \{f_{ji}^*\} \quad (\text{II.25.1.1})$$

A substituição da equação (II.27.2.1) na (II.25.2) fornece:

$$\{d_{je}^*\} = [K^*]^{-1} \cdot \{f_j^*\} \quad (\text{II.25.2.1})$$

que é o próprio vetor dos deslocamentos externos do painel, conforme sabe-se da equação (II.26.2).

Finalmente, para obter-se os deslocamentos internos do painel, basta substituir-se a equação (II.25.1.1) e a (II.25.2.1), na qual $\{d_{je}^*\}$ é igual a $\{d_{je}\}$, na equação (II.26.1):

$$\{d_{ji}\} = [L]^t \cdot (\{d_{ji}^*\} - [RN]^t \cdot \{d_{je}\}) \quad (\text{II.26.1.1})$$

Em termos físicos a matriz de rigidez reduzida representa a matriz de rigidez de uma estrutura segundo apenas algumas coordenadas (e), enquanto as demais (i), são livres para se deslocarem; ou seja, processar-se-á as matrizes que representam a rigidez da estrutura aos seus deslocamentos considerados externos.

II.3.3- Matriz de rigidez e vetor das ações de um painel na matriz de rigidez e no vetor das ações da subestrutura tridimensional

Feita a redução às coordenadas externas, da matriz de rigidez e do vetor das ações de um painel, passar-se-á agora à contribuição destas na matriz de rigidez e no vetor das ações da subestrutura. Estas contribuições serão feitas através da matriz de incidência cinemática $[\beta_j]_s^j$, que relaciona os deslocamentos da subestrutura s aos do painel j que lhe pertence:

$$[r_j]_s = \sum_{j=1}^{NP} [\beta_j]_s^{jt} \cdot [r_j^*]_s^j \cdot [\beta_j]_s^j$$

e,

$$\{f_j\}_s = \sum_{j=1}^{NP} [\beta_j]_s^{jt} \cdot \{f_j^*\}_s^j ,$$

onde:

$[r_j]_s$ e $\{f_j\}_s$ são, respectivamente, a matriz de rigidez e o vetor das ações da subestrutura tridimensional genérica s , levando em conta a contribuição dos painéis apenas, e que serão adicionadas às contribuições dos tramos de pilares individuais, na matriz $[r_s]_s$ de rigidez da subestrutura s e no vetor $\{f_s\}_s$ das ações na subestrutura s , respectivamente.

A matriz de transformação $[\beta_j]_s^j$, de ordem $NEJ \times ((3 \cdot (NNB+1) + 4 \cdot NNN) \cdot (NA(s)+1) + 4 \cdot NNE)$, onde NEJ é igual ao número de coordenadas externas do painel j , vai depender do número de prumadas de pilares, da posição do painel na subestrutura e do tipo do mesmo.

Por exemplo, para o painel j , tipo 1, numa posição qualquer na subestrutura s (FIG.II.2), $[\beta_j]_s^j$ é dada por:

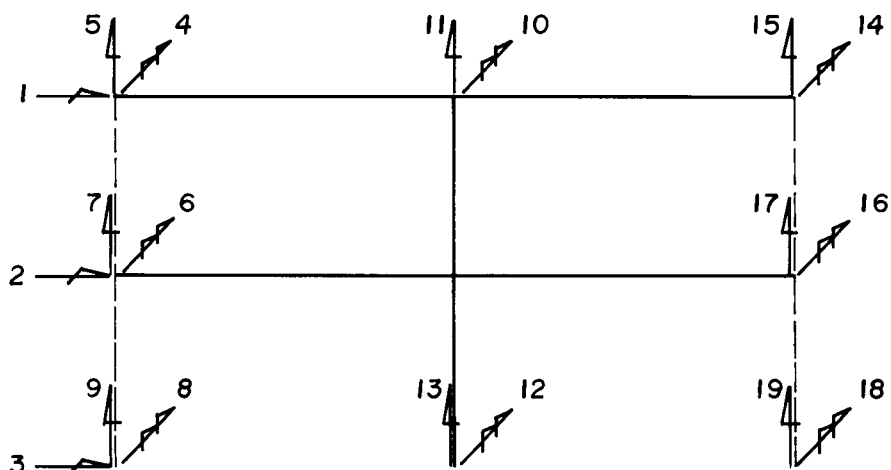


FIG. II. 2. - Painel j, tipo I, da subestrutura s.

na qual:

$$[a] = \begin{bmatrix} -\text{sen}(A_j(j) - A_i(i)) & \cos(A_j(j) - A_i(i)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[b] = \begin{bmatrix} -\text{sen}(A_j(j) - A_i(f)) & \cos(A_j(j) - A_i(f)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e$$

$[c] = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]$, nas quais:

$A_i(i) = \hat{\text{ângulo}} A_i$ para o nó inicial do painel;

$A_i(f) = \hat{\text{ângulo}} A_i$ para o nó final do painel;

$c_1 = \cos(A_j(j))$;

$c_2 = \text{sen}(A_j(j))$; e,

$c_3 = -Z(i) \cdot c_1 + Y(i) \cdot c_2$;

[I] = matriz identidade de ordem 2x2; e,

[0] = matriz nula (com ordem definida em função das ordens das matrizes vizinhas).

II.4- INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DO NÚCLEO NA RIGIDEZ DA SUBESTRUTURA

II.4.1- Obtenção da matriz de rigidez para um tramo de núcleo

Na FIG.II.3 mostra-se o sistema local de eixos coordenados para um tramo de núcleo, assim como suas coordenadas deslocamentos, em seus sentidos convencionados positivos na presente análise estrutural.

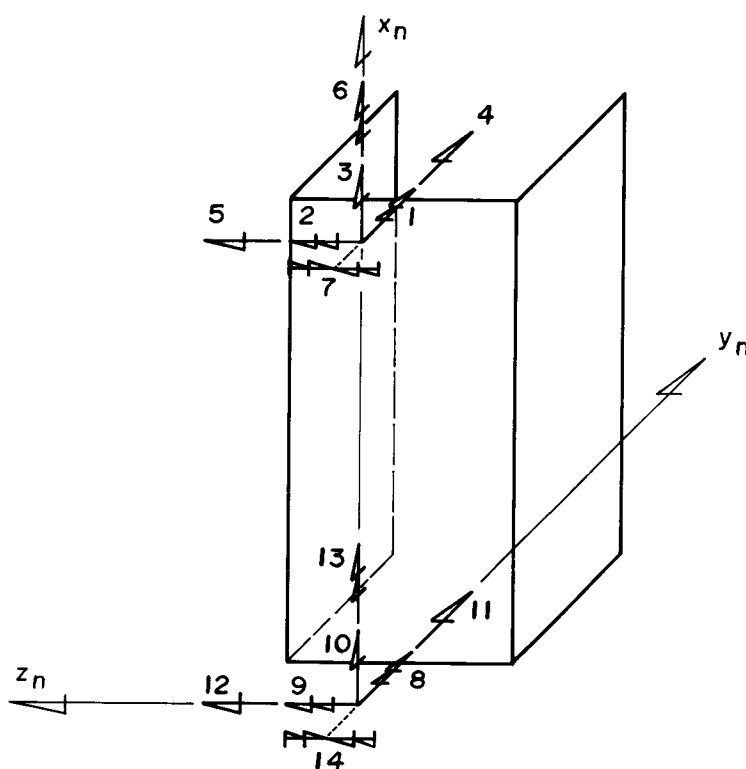


FIG.II.3.- Sistema de eixos locais para um tramo de núcleo.

A determinação das propriedades de rigidez dos núcleos é baseada na hipótese de que estes se comportam como as vigas de paredes de secção delgada. A inclusão do empenamento da secção transversal supõe que esta é indeformável no seu plano e que a deformação por cisalhamento da linha média da secção é desprezível.

O vetor deslocamentos para um tramo de núcleo, segundo as coordenadas de seu extremo superior, é composto da seguinte forma:

$$\{d_n^s\} = \begin{Bmatrix} \theta_{yn}^s \\ \theta_{zn}^s \\ \delta_{xn}^s \\ \delta_{yn}^s \\ \delta_{zn}^s \\ \phi_n^s \\ \phi_n^{s'} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

no qual:

θ_{yn}^s , θ_{zn}^s e ϕ_n^s são as rotações em torno dos eixos y_n , z_n e x_n , respectivamente, que concorrem no centro de cisalhamento do núcleo;

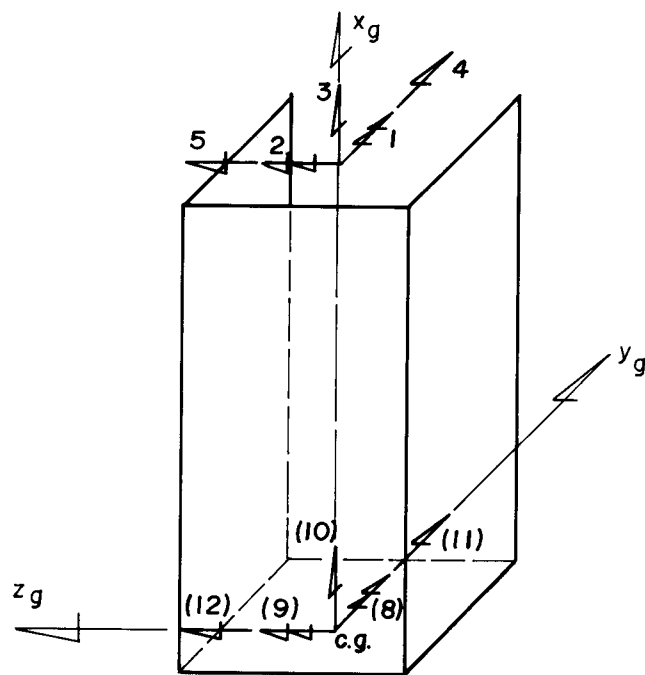
δ_{xn}^s , δ_{yn}^s e δ_{zn}^s são os deslocamentos lineares ao longo dos eixos x_n , y_n e z_n , respectivamente, e;

$\phi_n^{s'}$ é a primeira derivada da torção.

Encontrar-se-á primeiramente as expressões - coeficientes da matriz - para os termos de flexão, para, em seguida analisar-se os de torção.

II.4.1.1- Rigidez à flexão para as coordenadas referidas à um sistema de eixos passando pelo centro de gravidade

Para encontrar-se os coeficientes de $[r_{ng}]$, - matriz que representa a rigidez segundo as coordenadas de flexão, FIG.II.4, referidas a um sistema de eixos x_g , y_g e z_g de origem O_g situada no centro de gravidade da secção transversal do núcleo, e sejam paralelos aos seus eixos locais (que concorrem no centro de torção)-o procedimento é análogo ao das barras prismáticas simples (vigas e pilares), ou seja, impõe-se deslocamentos unitários segundo todas as coordenadas, um por vez, e encontra-se a expressão que represente o esforço para todas as demais coordenadas a fim de que essa configuração deformada seja mantida.



obs.: entre parênteses indica-se o numero que aquelas coordenadas têm quando são referidas ao centro de cisalhamento.

FIG.II.4.- Sistema de referência, concorrente no c.g., para um tramo de núcleo.

A matriz $[r_{ng}]$ pode ser composta da seguinte forma:

$$[r_{ng}] = \begin{bmatrix} [r_{ng}]_{ss} & [r_{ng}]_{si} \\ [r_{ng}]_{is} & [r_{ng}]_{ii} \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

em que:

$[r_{ng}]_{il,i2}$ = sub-matriz para as coordenadas de flexão, referidas ao centro de gravidade, situadas no nível $i1$, quando impõe-se deslocamentos unitários segundo as coordenadas do nível $i2$ ($in=s$, para as coordenadas do nível superior (1 a 5), ou topo do tramo; $in=i$, para o nível inferior (8 a 12), ou base do tramo).

A obtenção das submatrizes é direta:

$$[r_{ng}]_{ss} = \begin{bmatrix} 2.k_y & 0 & 0 & 0 & \frac{3.k_y}{L_n} \\ & 2.k_z & 0 & \frac{-3.k_z}{L_n} & 0 \\ & & k_x & 0 & 0 \\ \text{(simétrica)} & & & \frac{6.k_z}{L_n^2} & 0 \\ & & & & \frac{6.k_y}{L_n^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

na qual:

$$k_y = \frac{2 \cdot E_n \cdot I_{yn}}{L_n} \quad , \quad k_z = \frac{2 \cdot E_n \cdot I_{zn}}{L_n} \quad \text{e} \quad k_x = \frac{E_n \cdot A_{xn}}{L_n}$$

E_n = módulo de elasticidade longitudinal do material do núcleo;

I_{yn} = momento principal de inércia do núcleo relativamente ao eixo y_g ;

I_{zn} = idem, relativamente ao eixo z_g ;

A_{xn} = área da secção transversal do núcleo; e,

L_n = altura do tramo de núcleo.

$[r_{ng}]_{ii}$ é igual à $[r_{ng}]_{ss}$ com exceção dos coeficientes (1,5), (2,4) e seus simétricos, que trocam de sinal.

$[r_{ng}]_{si}$ é dada por:

$$[r_{ng}]_{si} = \begin{bmatrix} k_y & 0 & 0 & 0 & \frac{-3 \cdot k_y}{L_n} \\ 0 & k_z & 0 & \frac{3 \cdot k_z}{L_n} & 0 \\ 0 & 0 & -k_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3 \cdot k_z}{L_n} & 0 & \frac{-6 \cdot k_z}{L_n^2} & 0 \\ \frac{3 \cdot k_y}{L_n} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6 \cdot k_y}{L_n^2} \end{bmatrix}$$

(II.31)

$[r_{ng}]_{is}$ é igual à transposta de $[r_{ng}]_{si}$.

II.4.1.2- Rigidez segundo as coordenadas de flexão referidas ao sistema de eixos locais (x_n, y_n e z_n)

Obtém-se a rigidez segundo as coordenadas de flexão, referidas ao sistema de eixos locais do núcleo, com o emprego da matriz $[\beta_{ng}]$, matriz que relaciona os deslocamentos do centro de cisalhamento com os do centro de gravidade do núcleo, através da expressão:

$$[r_{nc}] = [\beta_{ng}]^t \cdot [r_{ng}] \cdot [\beta_{ng}] \quad (II.32)$$

Para obter-se a matriz $[\beta_{ng}]$ far-se-á uso da hipótese da indeformabilidade da secção transversal do núcleo no seu plano, o que garante que não ocorrerão deslocamentos relativos entre o centro de torção e o centro de gravidade no plano da secção.

A FIG.II.5 auxiliará na obtenção de $[\beta_{ng}]$. Apresenta-se aí dois sistemas de eixos paralelos, um com origem no centro de cisalhamento e outro com origem no centro de gravidade, de coordenadas \bar{y}_g e \bar{z}_g em relação ao primeiro.

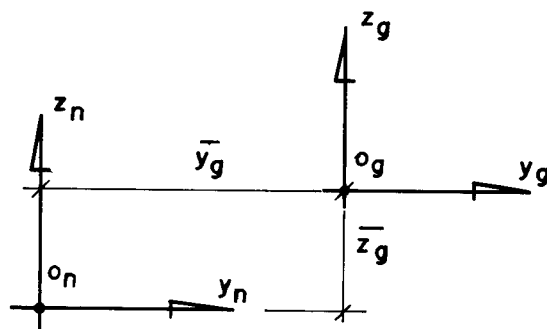


FIG.II. 5. - Posição relativa entre sistemas de eixos coordenados.

Relacionar-se-á as componentes de deslocamentos entre os dois sistemas através da expressão:

$$[d_{ng}] = [\bar{\beta}_{ng}] \cdot [d_{nc}] \quad (\text{II.33})$$

onde:

$\{d_{ng}\}$ = componentes de deslocamentos para o sistema de eixos com origem no centro de gravidade do núcleo;

$\{d_{nc}\}$ = idem, para a origem no centro de cisalhamento; e que são dados por:

$$\{d_{ng}\} = \begin{Bmatrix} \theta_{yng}^s \\ \theta_{zng}^s \\ \delta_{xng}^s \\ \delta_{yng}^s \\ \delta_{zng}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

e

$$\{d_{nc}\} = \begin{Bmatrix} \theta_{yn}^s \\ \theta_{zn}^s \\ \delta_{xn}^s \\ \delta_{yn}^s \\ \delta_{zn}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

para o extremo superior do tramo de núcleo.

A matriz $[\bar{\beta}_{ng}]$ será, então, dada por:

$$[\bar{\beta}_{ng}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{z}_g & -\bar{y}_g & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

e

$$[\beta_{ng}] = \begin{bmatrix} [\bar{\beta}_{ng}] & [0] \\ [0] & [\bar{\beta}_{ng}] \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

Pode-se, agora, efetuar o triplo produto matricial dado pela expressão (II.32) para obter-se:

$$[r_{nc}] = \begin{bmatrix} [r_{nc}]_{ss} & [r_{nc}]_{si} \\ [r_{nc}]_{is} & [r_{nc}]_{ii} \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

com a interpretação indicial idêntica ao caso anterior.

As submatrizes serão dadas por:

$$[r_{nc}]_{ss} = \begin{bmatrix} 2 \cdot k_y + k_x \cdot \bar{z}_g^2 & -k_x \cdot \bar{y}_g \cdot \bar{z}_g & k_x \cdot \bar{z}_g & 0 & \frac{3 \cdot k_y}{L_n} \\ -k_x \cdot \bar{y}_g \cdot \bar{z}_g & 2 \cdot k_z + k_x \cdot \bar{y}_g^2 & -k_x \cdot \bar{y}_g & -\frac{3 \cdot k_z}{L_n} & 0 \\ k_x \cdot \bar{z}_g & -k_x \cdot \bar{y}_g & k_x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3 \cdot k_z}{L_n} & 0 & \frac{6 \cdot k_z}{L_n^2} & 0 \\ \frac{3 \cdot k_y}{L_n} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 \cdot k_y}{L_n^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

(simétrica)

$$[r_{nc}]_{si} = \begin{bmatrix} k_x \bar{z}_g \bar{z}_g^2 & k_x \bar{y}_g \bar{z}_g & -k_x \bar{z}_g & 0 & 3 \cdot k_y / L_h \\ k_x \bar{y}_g \bar{z}_g & k_z - k_x \bar{y}_g^2 & k_x \bar{y}_g & -k_x & 0 \\ -k_x \bar{z}_g & k_x \bar{y}_g & -k_x & 0 & 0 \\ 0 & -3 \cdot k_z / L_h & 0 & -6 \cdot k_z / L_h^2 & 0 \\ 3 \cdot k_y / L_h & 0 & 0 & 0 & -6 \cdot k_y / L_h^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.40})$$

$[r_{nc}]_{is}$ é igual à transposta de $[r_{nc}]_{si}$, e $[r_{nc}]_{ii}$ é igual à $[r_{nc}]_{ss}$, exceto os elementos (1,5), (2,4) e seus simétricos, que trocam de sinais.

II.4.1.3- Rigidez segundo as coordenadas de torção

A equação que exprime o comportamento à torção, das vigas de paredes de secção delgada, e que usar-se-á como regente do comportamento dos núcleos, é dada, numa cota genérica x ($0 \leq x \leq L_n$), na convenção apresentada em (10), por:

$$\bar{T}_n = G_n \cdot J_{tn} \cdot \bar{\phi}_n'' - E_n \cdot J_w \cdot \bar{\phi}_n'''' \quad (\text{II.41})$$

na qual estão incluídas as deformações por empenamento, e:

\bar{T}_n = momento torçor distribuído;

G_n = módulo de elasticidade transversal do material do núcleo;

J_{tn} = momento de inércia à torção da secção transversal, e,

J_w = momento de inércia setorial.

Usar-se-á o símbolo "—" para indicar esforços e deslocamentos na convenção da teoria da flexo-torção. Nesta convenção uma rotação em torno do eixo x_n , $\bar{\phi}_n$, é positiva no sentido anti-horário para um observador colocado sobre o eixo x_n e olhando no seu sentido positivo, e os esforços positivos nas extremidades de um elemento, ou tramo, de núcleo, \bar{T}_n^s , \bar{T}_n^i , \bar{B}_n^s e \bar{B}_n^i , são os apresentados na FIG.II.6.

A solução completa da equação (II.41) para cargas concentradas nos extremos do tramo ($\bar{T}_n = 0$) é dada por:

$$\bar{\phi}_n = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) + C_4 \cdot \sinh(\alpha \cdot x) \quad (\text{II.42})$$

onde α é um parâmetro dependente das características geométricas e elásticas do núcleo, e é dado por:

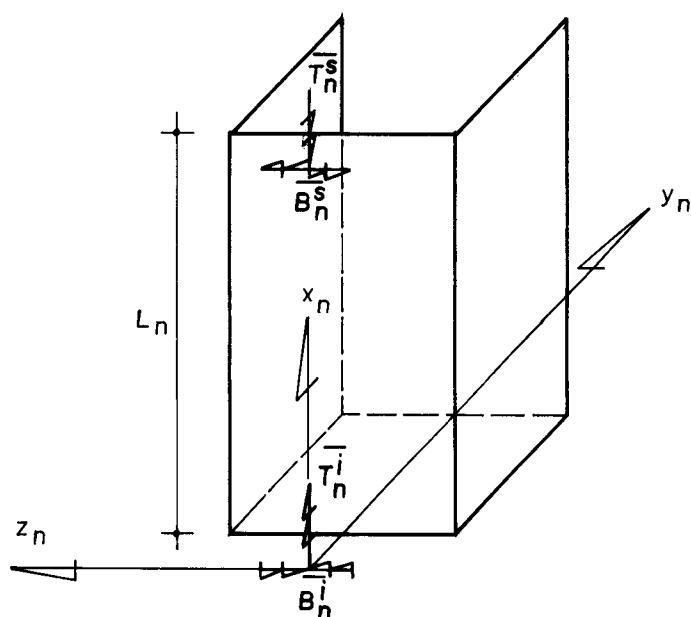


FIG. II.6. - Convenção de esforços positivos, da teoria de flexo-torção, em um elemento de núcleo.

$$\alpha = \sqrt{\frac{G_n \cdot J_{tn}}{E_n \cdot J_w}} \quad (\text{II.43})$$

e através das condições de contorno, na base do tramo, determina-se as expressões das constantes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 .

Tem-se:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi}_0 &= \bar{\phi}_n^i \\ \bar{\phi}'_0 &= \bar{\phi}'_n^i \\ E_n \cdot J_w \cdot \bar{\phi}''_0 &= \bar{B}_n^i \\ G_n \cdot J_{tn} \cdot \bar{\phi}'_0 - E_n \cdot J_w \cdot \bar{\phi}'''_0 &= \bar{T}_n^i \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.44})$$

Derivando-se até a 3ª ordem a equação (II.42) e fazendo-se uso das condições (II.44), chega-se a:

$$\left. \begin{aligned}
 C_1 &= \bar{\phi}_n^i - \frac{\bar{B}_n^i}{G_n \cdot J_{tn}} \\
 C_2 &= \frac{\bar{T}_n^i}{G_n \cdot J_{tn}} \\
 C_3 &= \frac{\bar{B}_n^i}{G_n \cdot J_{tn}} \\
 C_4 &= \frac{\bar{\phi}_n^{i'}}{\alpha} - \frac{\bar{T}_n^i}{\alpha \cdot G_n \cdot J_{tn}}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.45})$$

Combinando-se estas expressões de constantes com a equação (II.42), e lembrando-se que:

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{B}_n &= E_n \cdot J_w \cdot \bar{\phi}_n^{''} \\
 \bar{T}_n &= G_n \cdot J_{tn} \cdot \bar{\phi}_n^{'} - E_n \cdot J_w \cdot \bar{\phi}_n^{'''}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.46})$$

chega-se a:

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}_n &= \bar{\phi}_n^i + \frac{\bar{\phi}_n^{i'}}{\alpha} \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + \frac{\bar{B}_n^i}{G_n \cdot J_{tn}} \cdot (\cosh(\alpha \cdot x) - 1) + \\
 &+ \frac{\bar{T}_n^i}{\alpha \cdot G_n \cdot J_{tn}} \cdot (\alpha \cdot x - \sinh(\alpha \cdot x)) \quad (\text{II.47})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}_n^{'} &= \bar{\phi}_n^{i'} \cdot \cosh(\alpha \cdot x) + \frac{\bar{B}_n^i}{G_n \cdot J_{tn}} \cdot \alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + \\
 &+ \frac{\bar{T}_n^i}{G_n \cdot J_{tn}} \cdot (1 - \cosh(\alpha \cdot x)) \quad (\text{II.48})
 \end{aligned}$$

$$\bar{B}_n = \frac{\bar{\phi}_n^{i'} \cdot G_n \cdot J_{tn} \cdot \sinh(\alpha \cdot x)}{\alpha} + \bar{B}_n^i \cdot \cosh(\alpha \cdot x) - \frac{\bar{T}_n^i \cdot \sinh(\alpha \cdot x)}{\alpha} \quad (II.49)$$

$$\bar{T}_n = \bar{T}_n^i \quad (II.50)$$

Essas equações podem ser representadas matricialmente, como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{\phi}_n^{i'} \\ \bar{B}_n \\ \bar{T}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{S_x}{\alpha} & \frac{C_x - 1}{G_n \cdot J_{tn}} & \frac{\alpha \cdot x - S_x}{\alpha \cdot G_n \cdot J_{tn}} \\ 0 & C_x & \frac{\alpha \cdot S_x}{G_n \cdot J_{tn}} & \frac{1 - C_x}{G_n \cdot J_{tn}} \\ 0 & \frac{G_n \cdot J_{tn} \cdot S_x}{\alpha} & C_x & \frac{-S_x}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_n^i \\ \bar{\phi}_n^{i'} \\ \bar{B}_n^i \\ \bar{T}_n^i \end{Bmatrix} \quad (II.51)$$

onde:

$$S_x = \sinh(\alpha \cdot x) \quad e,$$

$$C_x = \cosh(\alpha \cdot x)$$

Os valores de $\bar{\phi}_n$, $\bar{\phi}_n^{i'}$, \bar{B}_n e \bar{T}_n , determinados da expressão matricial (II.51) para x igual a L_n , extremidade superior do núcleo, e indicados respectivamente por $\bar{\phi}_n^s$, $\bar{\phi}_n^{s'}$, \bar{B}_n^s e \bar{T}_n^s , são:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\phi}_n^s \\ \bar{\phi}_n^{s'} \\ \bar{B}_n^s \\ \bar{T}_n^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{S_s}{\alpha} & \frac{C_s - 1}{G_n \cdot J_{tn}} & \frac{\alpha \cdot L_n - S_s}{\alpha \cdot G_n \cdot J_{tn}} \\ 0 & C_s & \frac{\alpha \cdot S_s}{G_n \cdot J_{tn}} & \frac{1 - C_s}{G_n \cdot J_{tn}} \\ 0 & \frac{G_n \cdot J_{tn} \cdot S_s}{\alpha} & C_s & \frac{-S_s}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_n^i \\ \bar{\phi}_n^{i'} \\ \bar{B}_n^i \\ \bar{T}_n^i \end{Bmatrix} \quad (II.52)$$

em que:

$$S_s = \sinh(\alpha \cdot L_n), \quad e,$$

$$C_s = \cosh(\alpha \cdot L_n).$$

Será feita agora uma troca conveniente de sinais na expressão matricial (II.52) visando conduzir os esforços e deformações da convenção de sinais da teoria da flexo-torção, exposta em [11], para a da convenção usada nesta análise.

Do confronto das duas convenções (FIG.II.7.a e FIG.II.7.b) pode-se notar que:

$$\left. \begin{aligned} T_n^i &= \bar{T}_n^i \\ B_n^i &= \bar{B}_n^i \\ T_n^s &= -\bar{T}_n^s \\ B_n^s &= -\bar{B}_n^s \end{aligned} \right\} \quad (II.53)$$

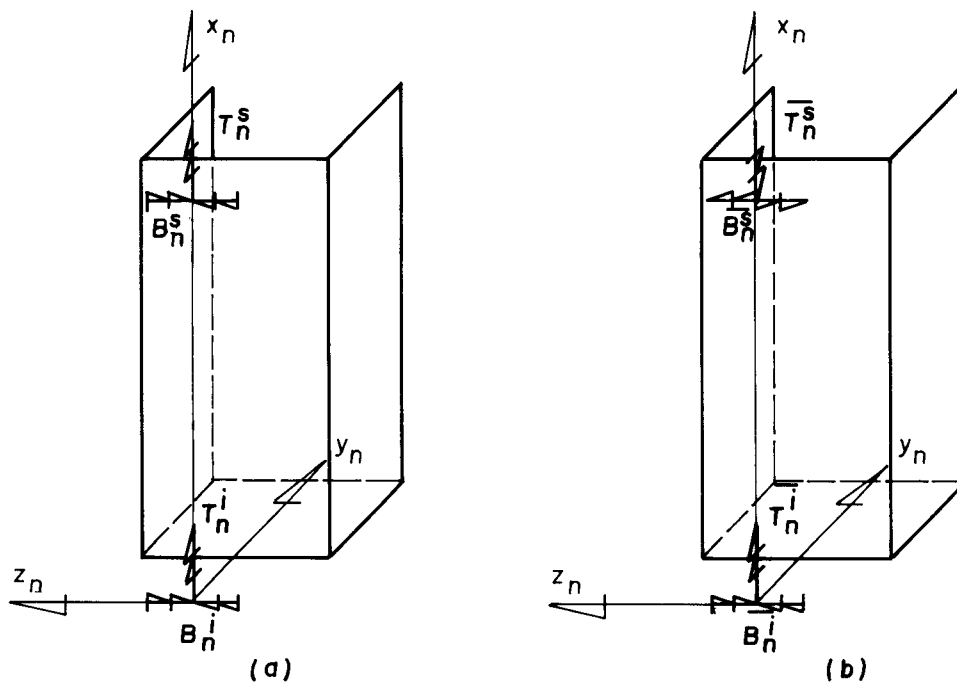


FIG. II. 7. - Convenção de esforços positivos para:
 a) análise matricial; b) teoria da flexo-torção.

Além disso, a convenção para a rotação e sua primeira derivada, utilizada na teoria da flexo-torção, é oposta a que é utilizada nesta análise. Segue-se que:

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_n^i &= -\bar{\phi}_n^i \\
 \phi_n^s &= -\bar{\phi}_n^s \\
 \phi_n^{i'} &= -\bar{\phi}_n^{i'} \\
 \phi_n^{s'} &= -\bar{\phi}_n^{s'}
 \end{aligned} \right\} \quad (II.54)$$

Pode-se, com o conjunto de expressões (II.53) e (II.54), através da equação matricial (II.52), escrever a relação entre as deformações e esforços no nível superior do tramo e aquelas do seu nível inferior, respeitando-se a con-

venção utilizada na presente análise:

$$\begin{Bmatrix} -\phi_n^S \\ -\phi_n^{S'} \\ -B_n^S \\ -T_n^S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{S_s}{\alpha} & \frac{C_s - 1}{G_n \cdot J_{tn}} & \frac{\alpha \cdot L_n - S_s}{\alpha \cdot G_n \cdot J_{tn}} \\ 0 & C_s & \frac{\alpha \cdot S_s}{G_n \cdot J_{tn}} & \frac{1 - C_s}{G_n \cdot J_{tn}} \\ 0 & \frac{G_n \cdot J_{tn} \cdot S_s}{\alpha} & C_s & \frac{-S_s}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\phi_n^i \\ -\phi_n^{i'} \\ B_n^i \\ T_n^i \end{Bmatrix} \quad (II.55)$$

Obtêm-se as expressões dos coeficientes de rigidez, pertencentes à matriz do tramo de núcleo, segundo às coordenadas de torção, impondo-se deslocamentos unitários em cada uma das coordenadas representantes de ϕ_n^i , $\phi_n^{i'}$, ϕ_n^S e $\phi_n^{S'}$, um por vez, e determinando-se os esforços B_n^i , T_n^i , B_n^S e T_n^S necessários à manutenção desta configuração deformada.

Por exemplo, para $\phi_n^i = 1$, $\phi_n^S = 0$, $\phi_n^{i'} = 0$ e $\phi_n^{S'} = 0$ na equação (II.55), tem-se:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -1 + B_n^i \cdot \frac{(C_s - 1)}{G_n \cdot J_{tn}} + T_n^i \cdot \frac{(\alpha \cdot L_n - S_s)}{\alpha \cdot G_n \cdot J_{tn}} \\ 0 &= B_n^i \cdot \frac{(\alpha \cdot S_s)}{G_n \cdot J_{tn}} + T_n^i \cdot \frac{(1 - C_s)}{G_n \cdot J_{tn}} \\ -B_n^S &= B_n^i \cdot C_s - T_n^i \cdot \frac{S_s}{\alpha} \\ -T_n^S &= T_n^i \end{aligned} \right\} \quad (II.56)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (II.56) tem-se:

$$\left. \begin{aligned} T_n^i &= \gamma \cdot \alpha \cdot S_s \\ T_n^S &= -\gamma \cdot \alpha \cdot S_s \\ B_n^i &= \gamma \cdot (C_s - 1) \\ B_n^S &= \gamma \cdot (C_s - 1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.57})$$

onde:

$$\gamma = \frac{G_n \cdot J_{tn}}{2 - 2 \cdot C_s + \alpha \cdot L_n \cdot S_s} \quad (\text{II.58})$$

As expressões dadas pelo conjunto (II.57) serão os coeficientes pertencentes à terceira coluna de $[r_{nt}]$, que representará a matriz de rigidez, segundo as coordenadas de torção, referidas ao sistema local de eixos (x_n , y_n e z_n) do tramo de núcleo.

Encontrando-se as expressões que definem os esforços necessários aos demais estados de deslocamentos, com raciocínio análogo ao anterior, pode-se chegar à matriz de rigidez do tramo de núcleo, para as coordenadas de torção:

$$[r_{nt}] = \gamma \cdot \begin{bmatrix} \alpha \cdot S_s & -(C_s - 1) & -\alpha \cdot S_s & -(C_s - 1) \\ -(C_s - 1) & L_n \cdot C_s - \frac{S_s}{\alpha} & C_s - 1 & \frac{S_s}{\alpha} - L_n \\ -\alpha \cdot S_s & C_s - 1 & \alpha \cdot S_s & C_s - 1 \\ -(C_s - 1) & \frac{S_s}{\alpha} - L_n & C_s - 1 & L_n \cdot C_s - \frac{S_s}{\alpha} \end{bmatrix}$$

(II.59)

II.4.1.3.1- Caso particular: $J_w = 0$

Será analisado neste item o caso particular dos núcleos em que as paredes que o compoem são todas concorrentes segundo uma única reta. A FIG.II.8 ilustra alguns exemplos das secções transversais destes núcleos. As secções com estas características também são chamadas perfis estrela. Núcleos com esta particularidade serão submetidos à torção sem empenamento da secção transversal, ou seja, para cargas concentradas ao nível dos pisos, ter-se-á para esta peça, torção livre. A lei que define a relação entre deformação e esforço, neste caso, e respeitando-se a convenção da teoria da flexo-torção é:

$$\bar{T}_n = G_n \cdot J_{tn} \cdot \bar{\phi}'_n \quad (II.60)$$

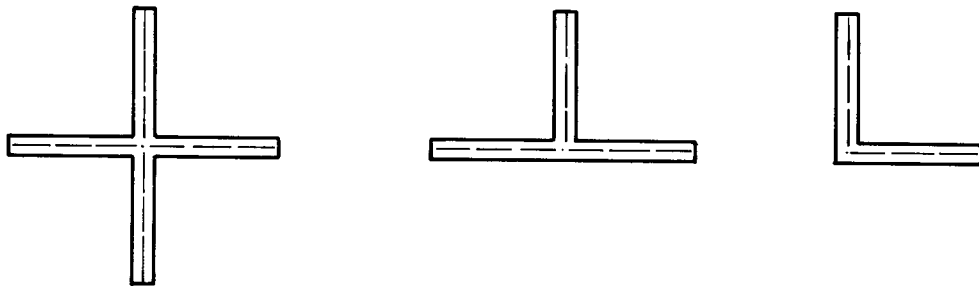


FIG.II.8.- Perfis com $J_w = 0$.

Como se sabe, na torção livre a derivada do ângulo permanece constante ao longo do eixo x_n , o que permite escrever:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi}'_n &= C_1 \\ \bar{\phi}_n &= C_1 \cdot x + C_2 \end{aligned} \right\} \quad (II.61)$$

onde C_1 e C_2 são constantes determinadas a partir das condições de contorno, que, para a extremidade i do elemento de núcleo, são dadas por:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi}_0 &= \bar{\phi}_n^i \\ G_n \cdot J_{tn} \cdot \bar{\phi}'_0 &= \bar{T}_n^i \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.62})$$

Combinando-se (II.61) e (II.62), chega-se a:

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \bar{\phi}_n^i \\ C_1 &= \frac{\bar{T}_n^i}{G_n \cdot J_{tn}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.63})$$

Substituindo-se C_1 e C_2 , expressas pelo conjunto de equações (II.63), no conjunto de equações (II.61) para, em seguida, substituir-se a primeira equação deste conjunto ($\bar{\phi}'_n = \bar{T}_n^i / (G_n \cdot J_{tn})$) na expressão (II.60), pode-se escrever o momento torsor e a rotação em torno do eixo x_n na extremidade superior do núcleo como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{\phi}_n^s \\ \bar{T}_n^s \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{L_n}{G_n \cdot J_{tn}} \\ 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \bar{\phi}_n^i \\ \bar{T}_n^i \end{array} \right\} \quad (\text{II.64})$$

De acordo com o que foi visto nas equações (II.53) e (II.54), tem-se:

$$\left. \begin{aligned} T_n^i &= \overline{T}_n^i \\ T_n^s &= -\overline{T}_n^s \\ \phi_n^i &= -\overline{\phi}_n^i \\ \phi_n^s &= -\overline{\phi}_n^s \end{aligned} \right\} \quad (II.65)$$

Através das equações (II.64) e (II.65), obtêm-se as deformações e esforços na extremidade s do tramo de núcleo, em função dos valores na extremidade i, na convenção utilizada nesta análise, como:

$$\begin{Bmatrix} -\phi_n^s \\ -T_n^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L_n}{G_n \cdot J_{tn}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\phi_n^i \\ T_n^i \end{Bmatrix} \quad (II.66)$$

A contribuição para a matriz de rigidez segundo as coordenadas de torção, para um tramo de núcleo com momento de inércia setorial nulo, é obtida fazendo-se cada uma das rotações ϕ_n^i e ϕ_n^s assumirem sucessivamente valores unitários, com todas as demais deformações nulas, e determinando-se as expressões dos momentos torsores superior e inferior necessários a esta deformação. Portanto, apenas estas expressões farão parte da matriz, uma vez que, neste caso, o bimomento será nulo.

Nestas condições a matriz $[r_{nt}]$, para um tramo de núcleo com momento de inércia setorial nulo, será dada por:

$$[r_{nt}] = \frac{G_n \cdot J_{tn}}{L_n} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (II.67)$$

II.4.2- Matriz de rigidez para um tramo de núcleo

A matriz de rigidez para um tramo de núcleo, com relação ao seu sistema local de coordenadas, é obtida por uma superposição das contribuições calculadas nos itens II.4.1.2., II.4.1.3 e II.4.1.3.1. Denominando-se esta matriz por $[r_n]$, pode-se representá-la na forma particionada como:

$$[r_n] = \begin{bmatrix} [r_n]_{ss} & [r_n]_{si} \\ [r_n]_{is} & [r_n]_{ii} \end{bmatrix} \quad (\text{II.68})$$

onde as submatrizes são dadas, para um elemento de núcleo com momento de inércia setorial não nulo, pela superposição dos resultados das equações (II.39) e (II.40) com (II.59):

$$\begin{aligned}
 [r_n]_{ss} = & \begin{bmatrix} 2 \cdot k_y + k_x \cdot z_g^2 & -k_x \cdot \bar{y}_g \cdot z_g & k_x \cdot z_g & 0 & 0 & 0 \\ 2 \cdot k_z + k_x \cdot \bar{y}_g^2 & -k_x \cdot \bar{y}_g & -k_x \cdot \bar{y}_g & -3 \cdot k_z / L_n & 0 & 0 \\ k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 \cdot k_z / L_n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 \cdot k_y / L_n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma \cdot \alpha \cdot S_s & -\gamma \cdot (C_s - 1) & \gamma \cdot (L_n \cdot C_s - \frac{S_s}{\alpha}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \text{(simétrica)} \\
 & \text{(II.69)}
 \end{aligned}$$

$$[r_n]_{si} = \begin{bmatrix} k_y - k_x \cdot \bar{z}_g^2 & k_x \cdot \bar{y}_g \cdot \bar{z}_g & -k_x \cdot \bar{z}_g & 0 & \frac{-3 \cdot k_y}{L_n} & 0 & 0 \\ k_x \cdot \bar{y}_g \cdot \bar{z}_g & 2 \cdot k_z - k_x \cdot \bar{y}_g^2 & k_x \cdot \bar{y}_g & \frac{3 \cdot k_z}{L_n} & 0 & 0 & 0 \\ -k_x \cdot \bar{z}_g & k_x \cdot \bar{y}_g & -k_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3 \cdot k_z}{L_n} & 0 & -\frac{6 \cdot k_z}{L_n^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3 \cdot k_y}{L_n} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6 \cdot k_y}{L_n^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma \cdot \alpha \cdot s_s & -\gamma \cdot (C_s - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \cdot (C_s - 1) & \gamma \cdot \frac{(S_s - L_n)}{\alpha} \end{bmatrix}$$

(II.70)

$[r_n]_{ii}$ é igual à $[r_n]_{ss}$, a menos dos elementos (1,5), (2,4), (6,7) e seus simétricos, que trocam de sinal, e $[r_n]_{is}$ é igual à transposta de $[r_n]_{si}$.

II.4.2.1- Matriz de rigidez para um tramo de núcleo com momento de inércia setorial nulo

Para um tramo de núcleo com momento de inércia setorial nulo as submatrizes $[r_n]_{ss}$ e $[r_n]_{si}$, dadas pela superposição das matrizes expressas por (II.39), (II.40) e (II.67), são dadas por:

$$[r_n]_{ss} = \begin{bmatrix}
 2 \cdot k_y + k_x \cdot \overline{z_g}^2 & -k_x \cdot \overline{y_g} \cdot \overline{z_g} & k_x \cdot \overline{z_g} & 0 & \frac{3 \cdot k_y}{L_n} & 0 & 0 & 0 \\
 -k_x \cdot \overline{y_g} \cdot \overline{z_g} & 2 \cdot k_z + k_x \cdot \overline{y_g}^2 & -k_x \cdot \overline{y_g} & -\frac{3 \cdot k_z}{L_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_x \cdot \overline{z_g} & -k_x \cdot \overline{y_g} & k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{3 \cdot k_z}{L_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{3 \cdot k_y}{L_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G_n \cdot J_{tn}}{L_n} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6 \cdot k_y}{L_n^2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{6 \cdot k_z}{L_n^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (II.71)$$

(simétrica)

$$\begin{aligned}
 [r_n] \text{ si} = & \begin{bmatrix}
 k_y - k_x \cdot \bar{z}_g^2 & k_x \cdot \bar{y}_g \cdot \bar{z}_g & -k_x \cdot \bar{z}_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 k_x \cdot \bar{y}_g \cdot \bar{z}_g & 2 \cdot k_z - k_x \cdot \bar{y}_g^2 & k_x \cdot \bar{y}_g & 3 \cdot k_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -k_x \cdot \bar{z}_g & k_x \cdot \bar{y}_g & -k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -3 \cdot k_z & 0 & -6 \cdot k_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 3 \cdot k_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \cdot k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_n \cdot J_{tn} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{II.72}$$

$[r_n]_{ii}$ é igual à $[r_n]_{ss}$, exceto os coeficientes (1,5) e (2,4), juntamente com seus simétricos, que trocam de sinal; e, $[r_n]_{is}$ é igual à transposta de $[r_n]_{si}$.

II.4.3- Contribuição da matriz de rigidez do núcleo na matriz de rigidez da subestrutura

A contribuição da rigidez do núcleo na rigidez da subestrutura será dada pela expressão:

$$[r_n]_s = \sum_{i=1}^{NNN} \sum_{k=1}^{NA(s)} ([\beta_n]_s^{i,k})^t \cdot [r_n]_s^{i,k} \cdot [\beta_n]_s^{i,k} \quad (II.73)$$

onde $[r_n]_s$ é a matriz de rigidez da subestrutura s levando em conta a rigidez dos tramos de núcleo apenas, e que será somada à $[r_s]_s$; $([\beta_n]_s^{i,k})^t$ é a transposta da matriz que relaciona os deslocamentos da subestrutura s aos deslocamentos do tramo de núcleo i , imediatamente abaixo da laje k , e, $[r_n]_s^{i,k}$ é a matriz de rigidez do tramo de núcleo.

Assim, o vetor deslocamentos $\{d_n\}_s^{i,k}$, para um tramo de núcleo genérico, será dado por:

$$\{d_n\}_s^{i,k} = [\beta_n]_s^{i,k} \cdot \{d_s\}_s \quad (II.74)$$

A matriz de transformação $[\beta_n]$, genérica, de ordem: $14 \times ((3 \cdot (NNB+1) + 4 \cdot NNN) \cdot (NA(s)+1) + 4 \cdot NNE)$ é composta da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 [\beta_n] = & \\
 & \left[\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & C & S & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & 0 & 0 & 0 & -S & C & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C & S & B \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S & C & D \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} (01) \\ (02) \\ (03) \\ (04) \\ (05) \\ (06) \\ (07) \\ (08) \\ (09) \\ (10) \\ (11) \\ (12) \\ (13) \\ (14) \end{array}
 \end{aligned}$$

\swarrow Coluna n_1 \swarrow Coluna n_2 \swarrow Coluna n_3 \swarrow Coluna n_4

(II.75)

na qual:

- $C = \cos(A_n(i));$
- $S = \text{sen}(A_n(i));$
- $B = Y(i).S - Z(i).C;$
- $D = Y(i).C + Z(i).S;$
- $Y(i)$ = coordenada Y do núcleo i em relação ao sistema de eixos da estrutura; e,
- $Z(i)$ = idem, para a coordenada Z.
- n_1 = número da coordenada global correspondente à primeira coordenada local do tramo de núcleo;
- n_2 = número da coordenada global correspondente ao deslocamento da laje na direção Y, no andar k;
- n_3 = número da coordenada global correspondente à oitava coordenada local do tramo de núcleo; e,
- n_4 = número da coordenada global correspondente ao deslocamento da laje na direção Y, no andar (k+1).

II.5 - INFLUÊNCIA DA VIGA PILAR-NÚCLEO, DA VIGA PILAR-PILAR, E DO LINTEL, NA RIGIDEZ DA SUBESTRUTURA

Será analisada agora a influência da rigidez de três tipos particulares de barras horizontais na rigidez da subestrutura.

Estas três barras se diferenciarão entre si, com relação ao sistema estrutural, apenas quanto às suas funções de contraventamento.

Será visto em primeiro lugar o caso da barra que contraventa pilares individuais entre si (FIG. II.9) as quais serão tratadas por vigas pilar-pilar.

Em seguida será analisada a barra que contraventa pilar individual a núcleo (FIG. II.10), a qual será designada por viga pilar-núcleo.

Por fim, será estudado o caso da barra que contraventa núcleos entre si, ou que contravente um núcleo internamente (FIG. II.11), a qual será tratada por lintel.

Para facilitar o desenvolvimento do presente capítulo escolheu-se, para estes três tipos de barras, sistemas locais de coordenadas (item I.7.1.3) que tenham em comum a orientação dos eixos x_b , y_b , z_b , ($b=1$, para vigas pilar-núcleo; $b=2$, para vigas pilar-pilar; e, $b=3$, para lintéis), coordenados, em relação à geometria da barra; ou seja, o eixo y_b é coincidente com o eixo longitudinal da barra; o eixo z_b é normal à y_b , está contido num plano horizontal, e juntamente com o eixo x_b , vertical, com sentido voltado de baixo para cima, obedece a regra da mão direita (FIG. II.12). Esta opção possibilitou a escolha de uma sequência de numeração das coordenadas deslocamentos comum aos três tipos de barras, o que permite escrever que para estas vigas a matriz de rigidez, genérica, será dada por:

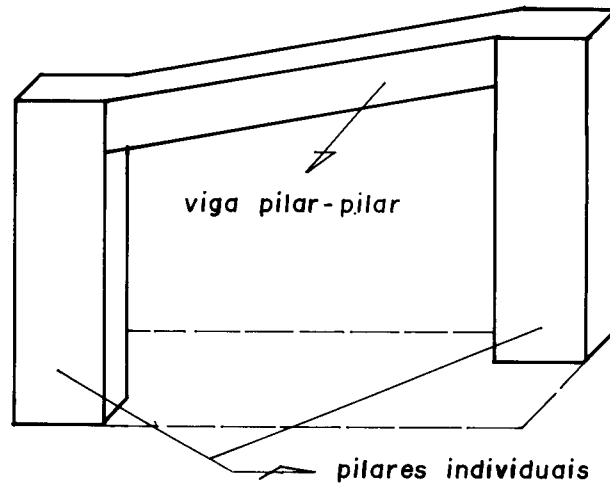


FIG.II. 9. - *Contraventamento entre pilares individuais.*

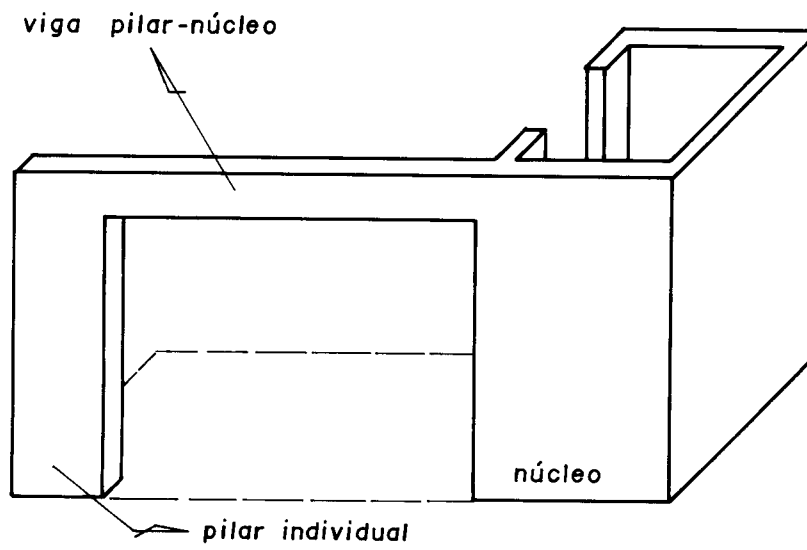


FIG.II. 10. - *Contraventamento entre pilar individual e núcleo.*

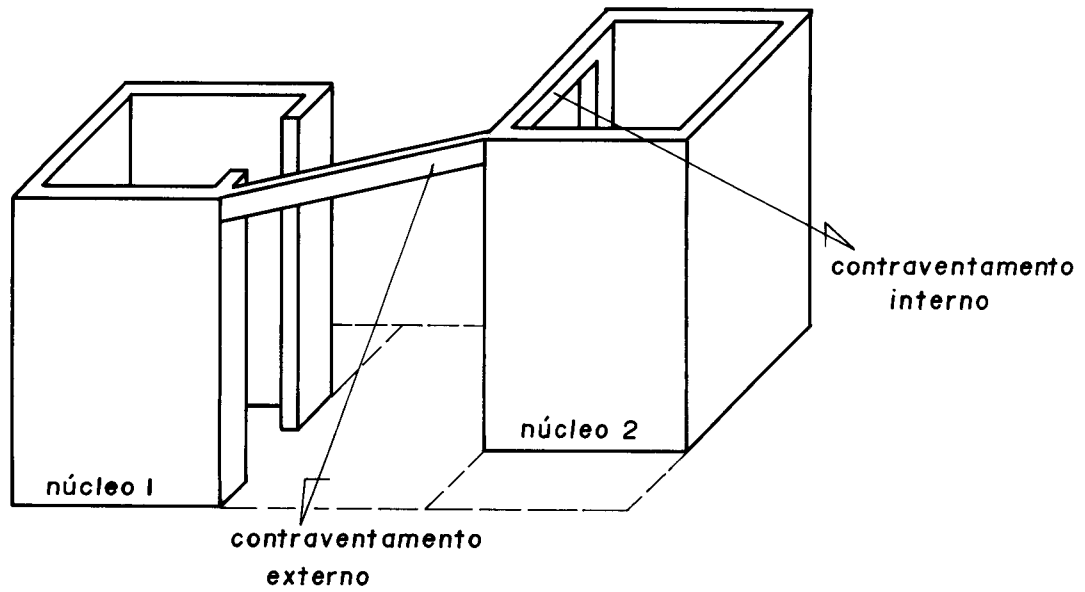


FIG. II. 11. - Contraventamento entre núcleos.

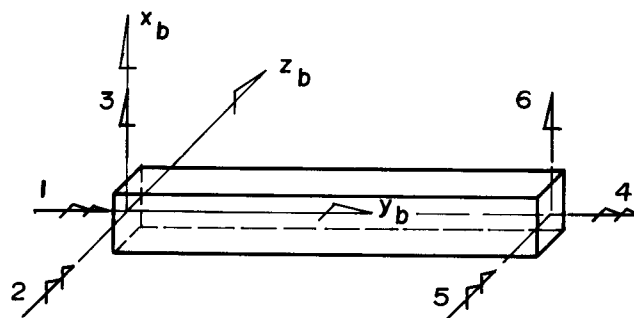


FIG. II. 12. - Sistema de referência genérico.

$$[r_b] = \begin{bmatrix} k_y & 0 & 0 & -k_y & 0 & 0 \\ & 2 \cdot k_z & \frac{-3 \cdot k_z}{L_b} & 0 & k_z & \frac{3 \cdot k_z}{L_b} \\ & & \frac{6 \cdot k_z}{L_b^2} & 0 & \frac{-3 \cdot k_z}{L_b} & \frac{-6 \cdot k_z}{L_b^2} \\ & & & k_y & 0 & 0 \\ & & & & 2 \cdot k_z & \frac{3 \cdot k_z}{L_b} \\ & & & & & \frac{6 \cdot k_z}{L_b^2} \end{bmatrix}$$

(simétrica)

(II.76)

na qual:

$$k_y = \frac{G_b \cdot J_{tb}}{L_b} \quad , \quad k_z = \frac{2 \cdot E_b \cdot I_{zb}}{L_b}$$

e,

G_b = módulo de elasticidade transversal do material da barra;

J_{tb} = momento de inércia à torção para a viga b;

I_{zb} = momento de inércia à flexão para a viga b, relativamente ao eixo z_b ;

L_b = comprimento da viga b; e,

E_b = módulo de elasticidade longitudinal do material da viga b.

Para a barra genérica b os vetores dos esforços $\{f_b\}$, e das deformações $\{d_b\}$ são, respectivamente, dados por:

$$\{f_b\} = \left\{ \begin{array}{c} T_b^e \\ M_b^e \\ Q_b^e \\ T_b^d \\ M_b^d \\ Q_b^d \end{array} \right\} \quad (\text{II.77})$$

e,

$$\{d_b\} = \left\{ \begin{array}{c} \delta_b^e \\ \theta_b^e \\ \delta_b^e \\ \delta_b^d \\ \theta_b^d \\ \delta_b^d \end{array} \right\} \quad (\text{II.78})$$

II.5.1- Rigidez das vigas pilar-pilar na rigidez da subestrutura

Após a obtenção da matriz de rigidez de uma viga pilar-pilar com relação ao seu sistema local de coordenadas, esta deverá sofrer uma transformação de modo a ficar referida às coordenadas da subestrutura.

II.5.1.1- Transformação à rotação

Uma vez que as vigas pilar-pilar se apoiam exclusivamente em pilares individuais, que por sua vez têm suas coordenadas locais pertencentes ao conjunto de coordenadas da subestrutura, deve-se calcular a matriz $[\beta_{2r}]$ que relaciona os deslocamentos dos referidos pilares aos deslocamentos das respectivas vigas.

A FIG. II.13 representa uma vista superior de uma viga pilar-pilar e seus dois pilares de apoio.

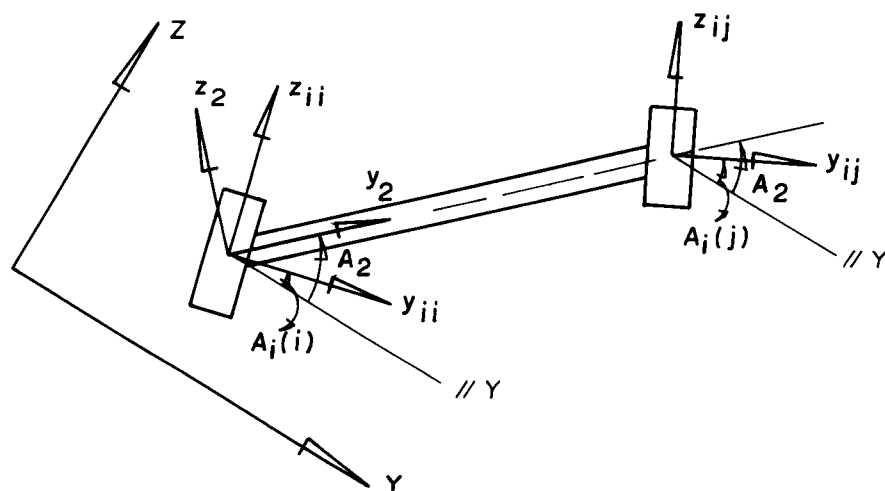


FIG. II.13. - Viga pilar-pilar e pilares individuais: relação entre sistemas de referência.

Na figura estão indicados os sistemas de eixos coordenados Y e Z da subestrutura; Y_{ii}, z_{ii} e Y_{ij}, z_{ij} para os pilares individuais i e j; e, y_2, z_2 para a viga pilar-pilar.

Para a montagem da matriz de transformação à rotação das coordenadas é necessário que se conheça também os ângulos $A_i(i)$, $A_i(j)$ e A_2 .

$[\beta_{2r}]$ será, então, dada por:

$$[\beta_{2r}] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C} & \bar{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{S} & \bar{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.79})$$

na qual:

$$\begin{aligned} C &= \cos(A_2 - A_i(i)); \\ S &= \text{sen}(A_2 - A_i(i)); \\ \bar{C} &= \cos(A_2 - A_i(j)); \text{ e,} \\ \bar{S} &= \text{sen}(A_2 - A_i(j)). \end{aligned}$$

Em seguida calcula-se a matriz $[r_{2r}]$ de rigidez da viga pilar-pilar número i, andar k, pertencente à subestrutura s; referida a um sistema de coordenadas coincidente com o sistema de referência dos pilares aos quais se apoia, através da expressão:

$$[r_{2r}]_s^{i,k} = ([\beta_{2r}]_s^{i,k})^t \cdot [r_2]_s^{i,k} \cdot [\beta_{2r}]_s^{i,k} \quad (\text{II.80})$$

II.5.1.2- Transformação à translação

Finalmente, obtêm-se a matriz de rigidez $[r_2]_s$, da subestrutura s , levando em conta a rigidez das vigas pilar-pilar apenas (e que deverá ser somada às contribuições dos demais componentes estruturais, para a obtenção da matriz de rigidez da subestrutura s) com o uso da expressão:

$$[r_2]_s = \sum_{i=1}^{nv2} \sum_{k=1}^{NA(s)} ([\beta_2]_s^{i,k})^t \cdot [r_{2r}]_s^{i,k} \cdot [\beta_2]_s^{i,k} \quad (II.81)$$

na qual:

$nv2$ = número de vigas pilar-pilar (em planta);

$[\beta_2]_s^{i,k}$ = matriz que relaciona os deslocamentos da subestrutura s aos da viga pilar-pilar, número i , andar k , e é dada por:

$$[\beta_2] = \begin{bmatrix} 0 \dots 1 & 0 & 0 \dots 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 1 & 0 \dots 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & 1 \dots 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \dots 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \dots 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \dots 0 & 0 & 1 \dots 0 \end{bmatrix} \quad (II.82)$$

\swarrow Coluna n_1 \swarrow Coluna n_2

(6xNCS)

em que:

NCS = número de coordenadas da subestrutura =
 $(3 \cdot (NNB+1) + 4 \cdot NNN) \cdot (NA(s)+1) + 4 \cdot NNE$;

n_1 = número da primeira coordenada global referente ao pilar individual cujo centro de gravidade coincide com a origem do sistema de eixos da viga que nele se apoia; e,

n_2 = idem, para o pilar que apoia o outro extremo da viga.

II.5.2- Rigidez das vigas pilar-núcleo na rigidez da subestrutura

Na FIG. II.14 está a representação em planta de uma viga pilar-núcleo e os elementos estruturais que lhe servem de apoio, na qual se destacam os eixos coordenados:

- Y e Z: da subestrutura;
- y_i e z_i : do pilar individual;
- y_n e z_n : do núcleo; e,
- y_1 e z_1 : da viga pilar-núcleo.

A_i , A_n e A_1 , como já foi visto, são os ângulos formados entre os eixos y_i , y_n e y_1 , respectivamente, e o eixo Y, medidos a partir deste, no sentido de X.

Adotar-se-á como origem do sistema de eixos da viga o ponto de intersecção entre o eixo desta e o eixo do pilar individual.

A rigidez da viga será referida às coordenadas da subestrutura em duas etapas. Numa primeira etapa calcular-se-á a matriz de rigidez $[r_{1r}]$ da viga pilar-núcleo, para seu sistema local de coordenadas "rotacionado", de forma que tais coordenadas fiquem paralelas aos eixos do pilar e núcleo, nos extremos inicial e final, respectivamente. Numa segunda etapa deverá encontrar-se a matriz que relaciona os deslocamentos do centro de gravidade do pilar e do centro de cisalhamento do núcleo - que é o ponto origem do sistema de coordenadas deste e estas farão parte do conjunto de coordenadas da subestrutura - aos deslocamentos da viga, segundo o seu sistema local de eixos rotacionados. Desde já, pode-se concluir que estará presente nesta matriz uma submatriz identidade, de ordem 3x3, visto que na primeira etapa deste processo as 3 coordenadas, concorrentes na origem do sistema de eixos da viga, ficarão coincidentes com as coordenadas do pilar individual, que por sua vez farão parte do conjunto de coordenadas da subestrutura.

De posse desta matriz, e da matriz de rigidez obtida na fase inicial pode-se obter a matriz de rigidez da viga pilar-núcleo relativamente às coordenadas da subestrutura.

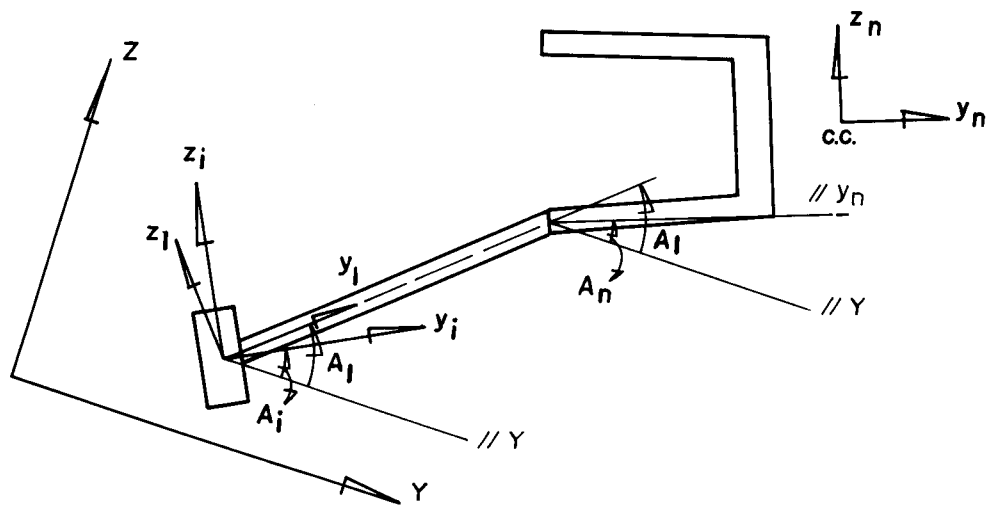


FIG. II. 14. - Viga pilar-núcleo, pilar individual, e núcleo: relação entre sistemas de referência.

II.5.2.1- Transformação à rotação

A matriz que relaciona os deslocamentos do pilar individual e do ponto de apoio da viga no núcleo (neste ponto com as coordenadas orientadas segundo um sistema de eixos paralelos aos do núcleo) aos deslocamentos da viga (vide FIG.II.15) é dada por:

$$[\beta_{1r}] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C} & \bar{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{S} & \bar{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.83})$$

na qual:

$$\begin{aligned} C &= \cos(A_1 - A_i); \\ S &= \text{sen}(A_1 - A_i); \\ \bar{C} &= \cos(A_1 - A_n); \text{ e,} \\ \bar{S} &= \text{sen}(A_1 - A_n). \end{aligned}$$

Obtém-se a matriz de rigidez $[r_{1r}]_s^{i,k}$, da viga pilar-núcleo número i , andar k , para um sistema de eixos paralelos às coordenadas do pilar individual e núcleo da subestrutura s , através da relação:

$$[r_{1r}]_s^{i,k} = ([\beta_{1r}]_s^{i,k})^t \cdot [r_1]_s^{i,k} \cdot [\beta_{1r}]_s^{i,k} \quad (\text{II.84})$$

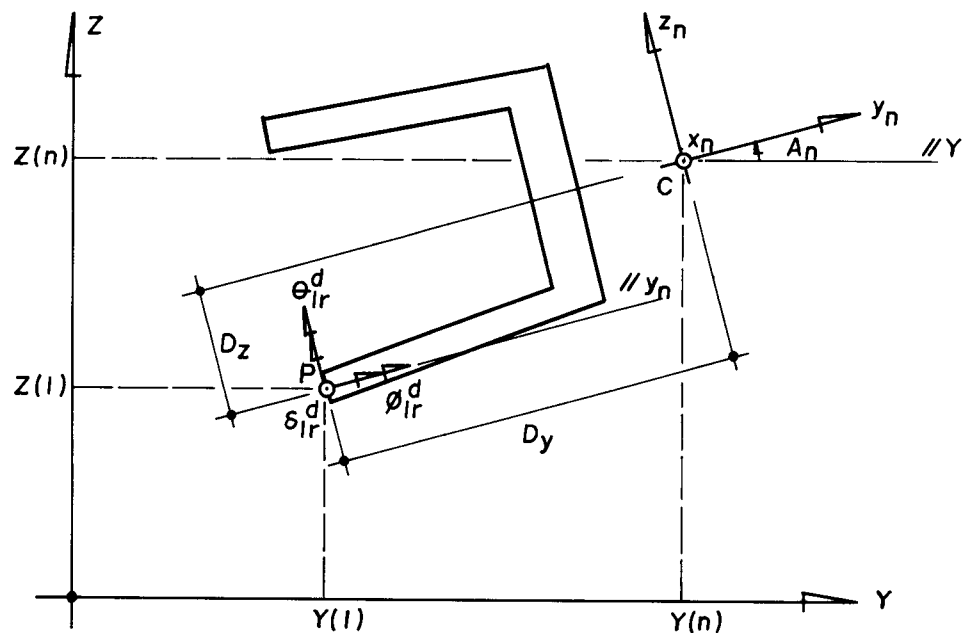


FIG. II. 15. - Posições relativas entre extremo de viga e centro de torção de núcleo.

II.5.2.2- Transformação à translação

Para obter-se a matriz $[\beta_1]$ que relaciona os deslocamentos do centro de gravidade do pilar individual e do centro de torção do núcleo aos deslocamentos da viga far-se-á uso da hipótese da indeformabilidade da laje no seu plano (ou deformações desprezíveis em presença das deformações das demais peças), o que garante a "inexistência" de deslocamentos relativos, no plano da laje, entre o ponto em que a viga se apoia no núcleo e o centro de cisalhamento deste.

A figura II.15 mostra em detalhe o núcleo, o ponto P de apoio da viga e o ponto C do centro de cisalhamento, bem como os sistemas de eixos y_n , z_n e x_n , do núcleo; Y e Z da subestrutura; e as respectivas coordenadas que orientam os deslocamentos que devem ser relacionados entre si. Observa-se que para P as coordenadas já sofreram a devida rotação, de modo a tornarem-se paralelas às de C.

Com o uso da expressão:

$$\begin{Bmatrix} D_Y \\ D_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(A_n) & \text{sen}(A_n) \\ -\text{sen}(A_n) & \cos(A_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y(1) - Y(n) \\ Z(1) - Z(n) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.85})$$

obtêm-se as coordenadas de P (D_Y, D_Z) relativamente ao sistema de referência do núcleo.

Impondo-se uma rotação unitária segundo y_n obtém-se:

$$\theta_{yn} = 1 \longrightarrow \phi_{lr}^d = 1, \quad \theta_{lr}^d = 0, \quad \delta_{lr}^d = D_Z$$

Impondo-se uma rotação unitária segundo z_n obtém-se:

$$\theta_{zn} = 1 \longrightarrow \phi_{lr}^d = 0, \quad \theta_{lr}^d = 1, \quad \delta_{lr}^d = -D_Y$$

Impondo-se um deslocamento linear unitário segundo x_n :

$$\delta_{xn} = 1 \longrightarrow \phi_{lr}^d = 0, \quad \theta_{lr}^d = 0, \quad \delta_{lr}^d = 1$$

Impondo-se um deslocamento linear unitário segundo y_n :

$$\delta_{yn} = 1 \longrightarrow \phi_{lr}^d = 0, \quad \theta_{lr}^d = 0, \quad \delta_{lr}^d = 0$$

Impondo-se um deslocamento linear unitário segundo z_n :

$$\delta_{zn} = 1 \longrightarrow \phi_{lr}^d = 0, \quad \theta_{lr}^d = 0, \quad \delta_{lr}^d = 0$$

Impondo-se uma rotação qualquer segundo x_n :

$$\phi_n = k \longrightarrow \phi_{1r}^d = 0, \quad \theta_{1r}^d = 0, \quad \delta_{1r}^d = 0$$

e o ponto P sofrerá uma translação de componentes:

$$\delta_{y1r}^d = -D_z \cdot \phi_n, \quad e \quad (II.86)$$

$$\delta_{z1r}^d = D_y \cdot \phi_n, \quad (II.87)$$

nas direções de y_n e z_n , respectivamente.

Derivando-se as expressões (II.86) e (II.87) relativamente a x_n , tem-se:

$$\frac{d(\delta_{y1r}^d)}{d(x_n)} = -D_z \cdot \phi_n' \quad (II.88)$$

e

$$\frac{d(\delta_{z1r}^d)}{d(x_n)} = D_y \cdot \phi_n' \quad (II.89)$$

Lembrando-se que:

$$\frac{d(\delta_{y1r}^d)}{d(x_n)} = \theta_{1r}^d \quad (II.90)$$

e

$$\frac{d(\delta_{z1r}^d)}{d(x_n)} = -\phi_{1r}^d \quad (II.91)$$

chega-se, com o uso de (II.88), (II.89), (II.90) e (II.91), a:

$$\theta_{1r}^d = -D_z \cdot \phi_n' \quad (II.92)$$

e

$$\phi_{1r}^d = -D_y \cdot \phi_n' \quad (II.93)$$

Portanto, impondo-se unitária a derivada do giro segundo x_n , obtém-se:

$$\phi_n' = 1 \longrightarrow \phi_{1r}^d = -D_y, \quad \theta_{1r}^d = -D_z, \quad \delta_{1r}^d = -w$$

onde w é igual a área setorial do núcleo no ponto P.

Então, a matriz que relaciona os deslocamentos da subestrutura aos da viga pilar-núcleo será dada por:

$$[\beta_1] = \begin{bmatrix} 0 \dots 1 & 0 & 0 \dots 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 1 & 0 \dots 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & 1 \dots 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \dots 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_y & \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \dots 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_z & \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \dots D_z & -D_y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -w & \dots 0 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{coluna } n_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{coluna } n_2}$

(6xNCS)
(II.94)

onde:

n_1 = número da primeira coordenada global referente ao pilar individual cujo centro de gravidade coincide com a origem do sistema de eixos da viga que nele se apoia, e,

n_2 = número da primeira coordenada global, referente ao sistema de eixos que concorrem no centro de torção do núcleo que serve de apoio ao outro extremo da viga.

Através da expressão:

$$[r_1]_s = \sum_{i=1}^{nvl} \sum_{k=1}^{NA(s)} ([\beta_1]_s^{i,k})^t \cdot [r_{1r}]_s^{i,k} \cdot [\beta_1]_s^{i,k}$$

(II.95)

obtém-se a matriz de rigidez da subestrutura s , levando-se em conta a matriz de rigidez das vigas pilar-núcleo apenas. $[r_1]_s$ deverá ser somada às contribuições dos demais elementos estruturais.

II.5.3- Rigidez do lintel na rigidez da subestrutura

A análise da contribuição da rigidez do lintel na rigidez da subestrutura é feita de forma análoga ao caso anterior, focalizando-se neste, evidentemente, apenas o tratamento dispensado ao núcleo.

Na FIG. II.16 estão representados o lintel, os núcleos "e" e "d" que apoiam os extremos convencionados "esquerdo" e "direito" (no extremo esquerdo deverá estar situada a origem "O₃"); os sistemas de eixos cartesianos:

- Y e Z: da subestrutura,
- y_{ne} e z_{ne}: do núcleo esquerdo,
- y_{nd} e z_{nd}: do núcleo direito, e
- y₃ e z₃: do lintel;

e destaca-se ainda os ângulos:

- A₃: entre y₃ e Y,
- A_n(e): entre y_{ne} e Y, e
- A_n(d): entre y_{nd} e Y,

sempre medidos a partir de Y, no sentido de X.

- cc_e e cc_d são os centros de cisalhamento dos tramos de núcleo "e" e "d".

- "a" e "b" são os pontos extremos esquerdo e direito do lintel.

Com o uso da expressão:

$$\begin{Bmatrix} D_{yi} \\ D_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(A_n(j)) & \text{sen}(A_n(j)) \\ -\text{sen}(A_n(j)) & \cos(A_n(j)) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y(i) - Y(j) \\ Z(i) - Z(j) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.96})$$

obtêm-se as coordenadas do ponto extremo i do lintel relativamente ao sistema de eixos concorrentes no cc_j , onde as letras i e j devem ser substituídas por \underline{a} e \underline{e} ou \underline{b} e \underline{d} conforme o extremo em questão.

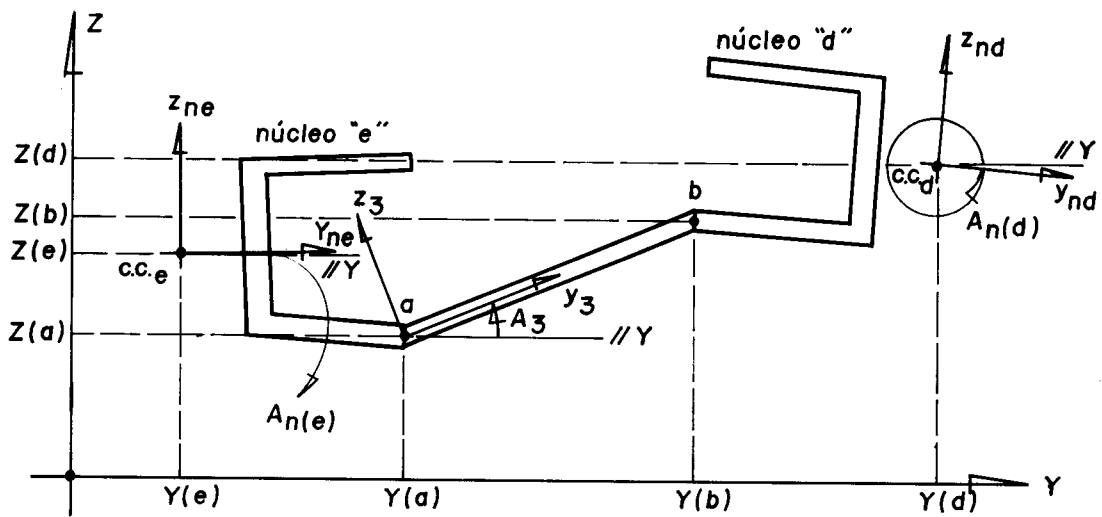


FIG.II. 16.- Relação entre sistemas de referência de subestrutura, lintel e núcleo.

II.5.3.1- Transformação à rotação

Os deslocamentos dos pontos "a" e "b" segundo sistemas de eixos paralelos aos dos núcleos esquerdo e direito, são relacionados aos deslocamentos destes mesmos pontos segundo o sistema local de eixos do lintel, através da matriz:

$$[\beta_{3r}] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C} & \bar{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{S} & \bar{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.97})$$

onde:

$$\begin{aligned} C &= \cos(A_3 - A_n(e)); \\ S &= \text{sen}(A_3 - A_n(e)); \\ \bar{C} &= \cos(A_3 - A_n(d)); \text{ e,} \\ \bar{S} &= \text{sen}(A_3 - A_n(d)). \end{aligned}$$

A matriz $[r_{3r}]_s^{i,k}$, do lintel número i , andar k , pertencente à subestrutura s , para um sistema local de eixos, rotacionado, será dada por:

$$[r_{3r}]_s^{i,k} = ([\beta_{3r}]_s^{i,k})^t \cdot [r_3]_s^{i,k} \cdot [\beta_{3r}]_s^{i,k} \quad (\text{II.98})$$

II.5.3.2- Transformação à translação

Com procedimento análogo ao que se fez no item II.5.2.2. pode-se obter a matriz $[\beta_3]$ de transformação à translação do lintel, que relaciona os deslocamentos do sistema local de eixos rotacionados aos deslocamentos dos núcleos, segundo seus sistemas de referência:

$$[\beta_3] = \begin{bmatrix} [0]_1 & [A] & [0]_2 & [0]_3 & [0]_4 \\ [0]_1 & [0]_3 & [0]_2 & [B] & [0]_4 \end{bmatrix} \quad (\text{II.99})$$

(6xNCS)

onde:

$[0]_1$ = matriz nula de ordem $3 \times (n_1 - 1)$;

$[0]_2$ = matriz nula de ordem $3 \times ((n_2 - 1) - (n_1 + 6))$;

$[0]_3$ = matriz nula de ordem 3×7 ;

$[0]_4$ = matriz nula de ordem $3 \times (\text{NCS} - (n_2 + 6))$;

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_{ya} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_{za} \\ D_{za} & -D_{ya} & 1 & 0 & 0 & 0 & -w_a \end{bmatrix} ;$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_{yb} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_{zb} \\ D_{zb} & -D_{yb} & 1 & 0 & 0 & 0 & -w_b \end{bmatrix}$$

e

n_1 = número da primeira coordenada global referente ao sistema de eixos que concorrem no centro de torção do núcleo "e", andar k, subestrutura s;

n_2 = idem, para o núcleo "d";

NCS= número de coordenadas da subestrutura;

w_a = área setorial do núcleo "e" no ponto "a"; e,

w_b = área setorial do núcleo "d" no ponto "b".

A expressão:

$$[r_3]_s = \sum_{i=1}^{nv3} \sum_{k=1}^{NA(s)} ([\beta_3]_s^{i,k})^t \cdot [r_{3r}]_s^{i,k} \cdot [\beta_3]_s^{i,k} \quad (\text{II.100})$$

fornece a matriz de rigidez da subestrutura s , levando em conta a rigidez do lintel apenas.

II.6- RIGIDEZ E AÇÕES NA SUBESTRUTURA

Pode-se, finalmente, compor a matriz de rigidez $[r_s]_s$ da subestrutura s como a soma de todas as matrizes de rigidez dos elementos que a compoem:

$$[r_s]_s = [r_i]_s + [r_j]_s + [r_n]_s + [r_1]_s + [r_2]_s + [r_3]_s \quad (\text{II.101})$$

e o vetor das ações $\{f_s\}_s$ a que a subestrutura s estará sujeita será dado por:

$$\{f_s\}_s = \{f_j\}_s + \{f_o\}_s \quad (\text{II.102})$$

onde $\{f_o\}_s$ são as ações impostas diretamente sobre a subestrutura, segundo suas coordenadas de corpo rígido (laje); coordenadas dos núcleos e coordenadas dos pilares individuais (nós tipo N e nós tipo B, respectivamente).

II.7- MATRIZ DE RIGIDEZ E VETOR DAS AÇÕES DA SUBESTRUTURA REDUZIDOS ÀS SUAS COORDENADAS DE TOPO E DE BASE

Obtida a matriz de rigidez $[r_s]_s$ da subestrutura e o vetor $\{f_s\}_s$ das ações da mesma segundo seu sistema global de coordenadas (FIG. II.17), estes sofrerão uma redução, de modo a ficarem referidos às coordenadas de topo e de base (eliminação em paralelo - vide I.3.2.8), mostradas na FIG. II.18. Esta redução é conseguida de maneira idêntica à utilizada para reduzir as matrizes de rigidez e os vetores das ações dos painéis às suas coordenadas externas, ou seja, rearranjando-as de tal forma que as rigidezes e ações referentes às coordenadas internas ocupem as primeiras posições, e aplicando-se o algoritmo abordado anteriormente.

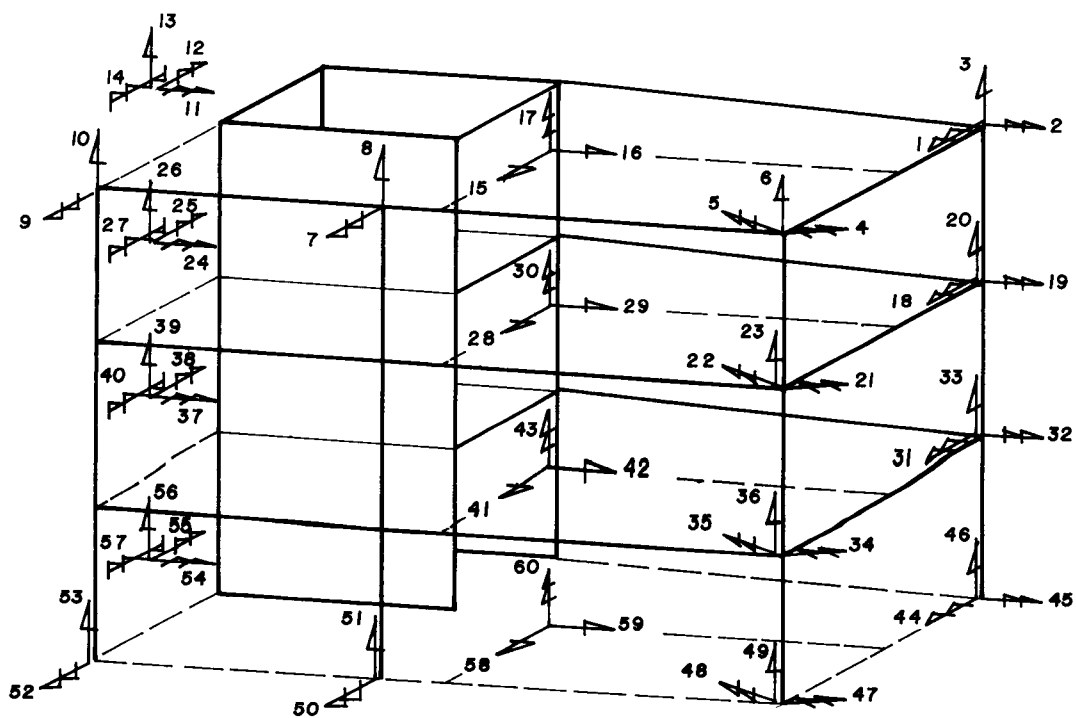


FIG. II. 17. - Subestrutura: coordenadas globais.

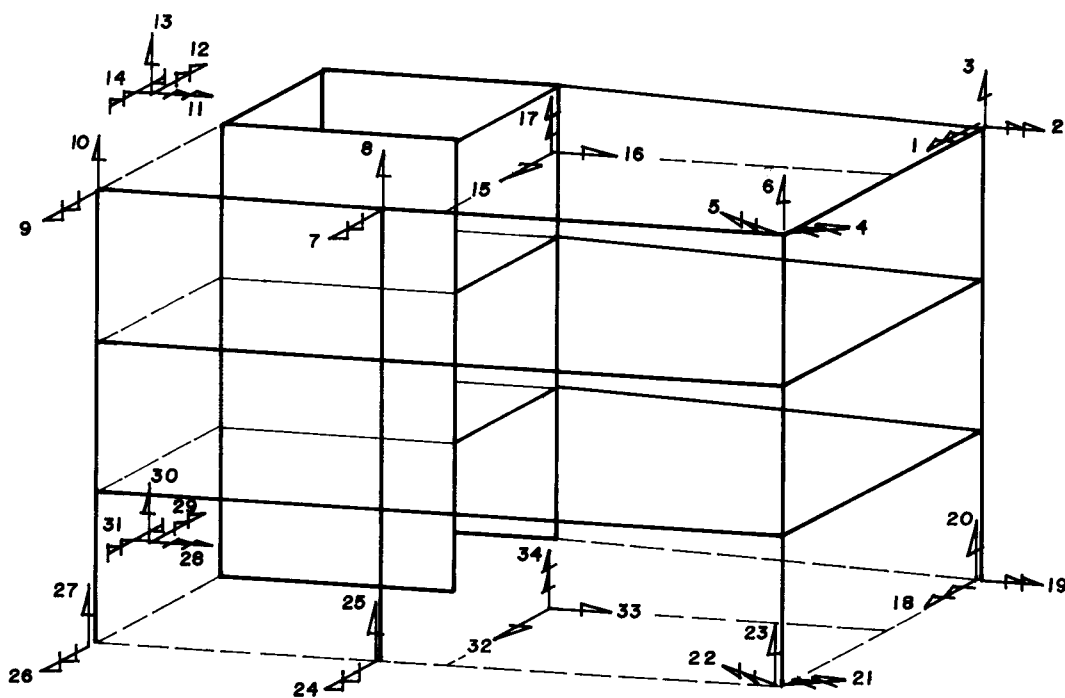


FIG. II. 18. - Subestrutura: coordenadas de topo e de base

$$\begin{aligned}
 [R]_{i+1,i} \{D\}_i + [R]_{i+1,i+1} \{D\}_{i+1} + [R]_{i+1,i+2} \{D\}_{i+2} &= \\
 = \{F\}_{i+1} & \qquad \qquad \qquad (i+1)
 \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
 [R]_{n-1,n-2} \{D\}_{n-2} + [R]_{n-1,n-1} \{D\}_{n-1} + [R]_{n-1,n} \{D\}_n &= \\
 = \{F\}_{n-1} & \qquad \qquad \qquad (n-1)
 \end{aligned}$$

$$[R]_{n,n-1} \{D\}_{n-1} + [R]_{n,n} \{D\}_n = \{F\}_n \qquad (n)$$

Conforme já se mencionou, cada índice das submatrizes denota um grupo de nós de determinado nível, topo ou base, associados a uma subestrutura. Certamente duas subestruturas adjacentes terão nós em comum, e é assumido que os deslocamentos nodais comuns às subestruturas i e $i+1$ estarão incluídos no vetor $\{D\}_{i+1}$.

O método de eliminação em série, conforme o próprio nome diz, consiste em se eliminar os deslocamentos das equações de equilíbrio, num processo de substituições para a frente, as quais serão iniciadas eliminando-se os deslocamentos de topo da primeira subestrutura (topo da estrutura), $\{D\}_1$, ou seja:

da equação (a):

$$\{D\}_1 = [R]_{1,1}^{-1} (\{F\}_1 - [R]_{1,2} \{D\}_2) \qquad (II.104)$$

Substituindo-se a equação (II.104) na equação (b) e juntando-se os termos tem-se:

$$[R]_{2,2}^* \{D\}_2 + [R]_{2,3} \{D\}_3 = \{F\}_2^* \qquad (II.105)$$

na qual:

$$[R]_{2,2}^* = [R]_{2,2} - [R]_{2,1} [R]_{1,1}^{-1} [R]_{1,2} \qquad (II.106)$$

e

$$\{F\}_2^* = \{F\}_2 - [R]_{2,1} [R]_{1,1}^{-1} \{F\}_1 \quad (\text{II.107})$$

Este processo é repetido para cada subestrutura, e as equações de recorrência para a eliminação de $\{D\}_i$, para a i -ésima subestrutura, são:

$$\{D\}_i = [R]_{i,i}^{*-1} (\{F\}_i^* - [R]_{i,i+1} \{D\}_{i+1}) \quad (\text{II.108})$$

$$[R]_{i+1,i+1}^* \{D\}_{i+1} + [R]_{i+1,i+2} \{D\}_{i+2} = \{F\}_{i+1}^* \quad (\text{II.109})$$

nas quais:

$$[R]_{i+1,i+1}^* = [R]_{i+1,i+1} - [R]_{i+1,i} [R]_{i,i}^{*-1} [R]_{i,i+1} \quad (\text{II.110})$$

$$\{F\}_{i+1}^* = \{F\}_{i+1} - [R]_{i+1,i} [R]_{i,i}^{*-1} \{F\}_i^* \quad (\text{II.111})$$

A última eliminação da série é representada pelas seguintes equações:

$$\{D\}_{n-1} = [R]_{n-1,n-1}^{*-1} (\{F\}_{n-1}^* - [R]_{n-1,n} \{D\}_n) \quad (\text{II.112})$$

$$[R]_{n,n}^* \{D\}_n = \{F\}_n^* \quad (\text{II.113})$$

onde:

$$[R]_{n,n}^* = [R]_{n,n} - [R]_{n,n-1} [R]_{n-1,n-1}^{*-1} [R]_{n-1,n} \quad (\text{II.114})$$

$$\{F\}_n^* = \{F\}_n - [R]_{n,n-1} [R]_{n-1,n-1}^{*-1} \{F\}_{n-1}^* \quad (\text{II.115})$$

Já que $\{D\}_n$ é apenas um vetor deslocamentos na equação (II.113), os deslocamentos para a última subestrutura na ligação estrutura-fundação, podem ser impostos para as coordenadas onde os deslocamentos são impedidos ou exis-

tem recalques diferenciais, e calculados para as coordenadas onde os deslocamentos são livres.

Os deslocamentos nas coordenadas de topo desta subestrutura, que serão os de base da subestrutura imediatamente acima, serão determinados substituindo-se $\{D\}_n$ na equação (II.112), e assim, por retro-substituições, é possível se calcular os deslocamentos em todas as coordenadas da estrutura.

II.9- CONDIÇÕES DE CONTORNO

Observando-se as equações de (II.104) a (II.115) nota-se que o processo de eliminação em série, nada mais é do que uma redução da matriz de rigidez e do vetor das ações às coordenadas de base de uma subestrutura tridimensional (FIG. II.19), acompanhada de uma soma dos mesmos, com os equivalentes da subestrutura subsequente, nas coordenadas de topo. Com isto pode-se utilizar nesta fase o mesmo

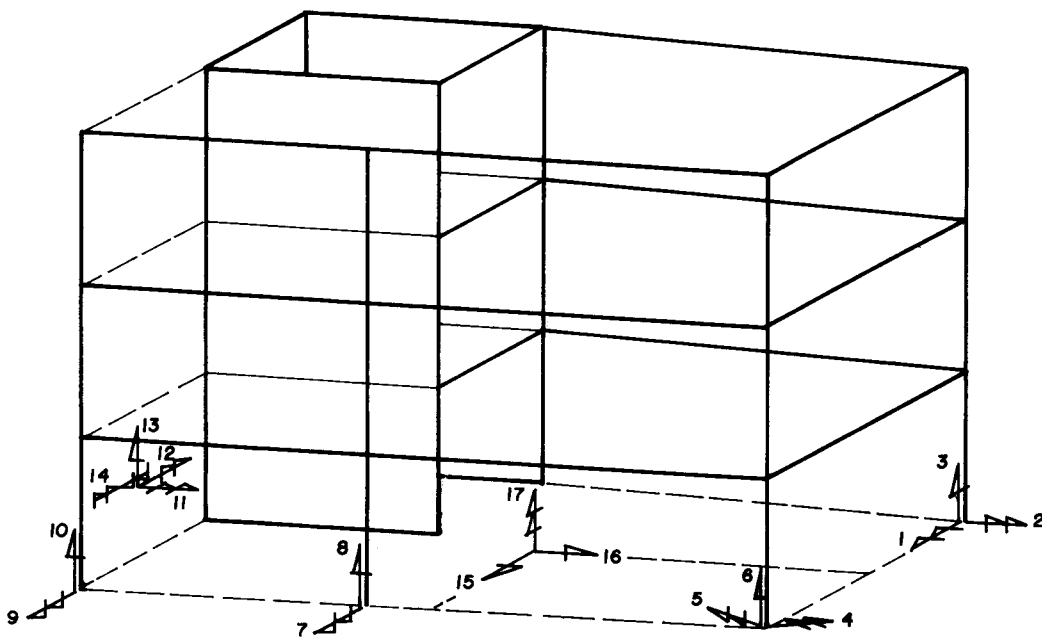


FIG. II. 19.- Subestrutura: coordenadas de base.

algoritmo de cálculo [13], para se reduzir matrizes de rigidez e vetores de ações às coordenadas externas, sendo que neste ponto as coordenadas externas serão aquelas de base das subestruturas. Portanto o processo se iniciará na subestrutura superior, e se repetirá até que se chegue na ligação estrutura-fundação, onde se terá três tipos de nós, em função das possibilidades de deslocamentos:

- a) nós com deslocamentos nulos (caso de engastamento perfeito);
- b) nós com deslocamentos impostos e diferentes de zero, para os casos de recalques diferenciais;
- c) nós com deslocamentos livres.

O terceiro tipo de nós contém as coordenadas deslocamentos que serão as incógnitas do sistema de equações resultante do processo de eliminação em série. Para se resolver este sistema será utilizado o processo apresentado em [14]. Assim, para o sistema de equações genérico abaixo:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \dots & R_{3n} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & \dots & R_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (a)$$

Se $D_1 = \alpha$, onde α é um deslocamento imposto, é feita uma modificação no vetor carregamento de forma que:

$$\bar{F}_i = F_i - R_{i1} \cdot \alpha, \text{ para } i=2, i=3, \dots, i=n;$$

e

$$\bar{F}_1 = \alpha$$

A linha e a coluna da matriz correspondentes ao deslocamento imposto, serão tornadas nulas, exceto para o elemento da diagonal principal, o qual assumirá o valor unitário. O sistema de equações, após as modificações correspondentes ao deslocamento imposto D_1 , será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{22} & R_{23} & R_{24} \dots R_{2n} \\ 0 & R_{32} & R_{33} & R_{34} \dots R_{3n} \\ 0 & R_{42} & R_{43} & R_{44} \dots R_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & R_{n2} & R_{n3} & R_{n4} \dots R_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ F_2 - R_{21} \cdot \alpha \\ F_3 - R_{31} \cdot \alpha \\ F_4 - R_{41} \cdot \alpha \\ \vdots \\ F_n - R_{n1} \cdot \alpha \end{Bmatrix} \quad (b)$$

de tal maneira que a solução para D_1 seja α . Caso existam mais deslocamentos impostos, por exemplo: $D_1 = \alpha$ e $D_3 = \beta$, fazendo-se modificações análogas às anteriores, para D_1 e D_3 , obter-se-á o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{22} & 0 & R_{24} \dots R_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{42} & 0 & R_{44} \dots R_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & R_{n2} & 0 & R_{n4} \dots R_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ F_2 - R_{21} \cdot \alpha - R_{23} \cdot \beta \\ \beta \\ F_4 - R_{41} \cdot \alpha - R_{43} \cdot \beta \\ \vdots \\ F_n - R_{n1} \cdot \alpha - R_{n3} \cdot \beta \end{Bmatrix} \quad (c)$$

Assim, para i deslocamentos impostos, o procedimento será o mesmo, e, obtido o sistema de equações modificado, bastará resolvê-lo para se obter o vetor deslocamen-

tos na ligação estrutura-fundação, no qual estarão incluídos os deslocamentos impostos e os deslocamentos livres.

Portanto, a partir deste ponto, estarão determinadas as primeiras incógnitas do problema.

Como se pode observar, as matrizes que servirão de base para a composição da matriz de rigidez da estrutura, referida às suas coordenadas de base apenas, começarão a ser montadas a partir das peças que compoem a subestrutura de topo do edifício, seguindo-se pela subestrutura subsequente, e assim por diante, até chegar-se à base da estrutura.

Para o cálculo dos deslocamentos o caminho será inverso, ou seja, serão calculados a partir da base para o topo do edifício e o algoritmo a ser usado será o mesmo que utilizou-se anteriormente [15].

II.10- DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS NOS ELEMENTOS QUE COMPOEM AS SUBESTRUTURAS

Conforme se pode observar, o algoritmo apresentado em [16] foi empregado três vezes até se encontrar os valores das primeiras incógnitas do problema, que são os deslocamentos livres ao nível da base do edifício.

Na primeira das aplicações, ter-se-á calculado a matriz de rigidez e vetor das ações dos painéis, reduzidos às suas coordenadas externas. Numa etapa seguinte o algoritmo terá servido para a formação da matriz de rigidez e vetor das ações da subestrutura segundo suas coordenadas de topo e de base (eliminação em paralelo). Finalmente, num terceiro estágio, o algoritmo terá ajudado a montar a matriz de rigidez e vetor das ações da subestrutura, reduzidos às suas coordenadas de base.

Portanto, o equacionamento apresentado no item II.3.2, para os painéis, a partir da equação II.14 até II.26.1.1 terá sido empregado três vezes, e esta última, de

forma generalizada, pode ser escrita como:

$$\{d_i\} = [L]^t^{-1} \cdot (\{d_i^*\} - [RN]^t \cdot \{d_e\}) \quad (\text{II.116})$$

que será útil, a fim de se calcular para cada subestrutura:

1º) os deslocamentos segundo suas coordenadas de topo, que serão também os deslocamentos segundo as coordenadas de base da subestrutura superior. Neste estágio $\{d_e\}$ será formado pelos deslocamentos de base da subestrutura.

2º) os deslocamentos internos (entre topo e base).

Agora $\{d_e\}$ conterà os deslocamentos de topo e de base da subestrutura em questão. A esta altura poder-se-á compor, portanto, $\{d_s\}_s$.

3º) os deslocamentos internos dos painéis que a formam.

O vetor $\{d_e\}$ conterà os deslocamentos dos painéis segundo suas coordenadas externas, e será dado por:

$$\{d_e\} = \{d_{je}\} = [\beta_j]_s^j \cdot \{d_s\}_s \quad (\text{II.117})$$

e o vetor $\{d_j\}_s^j$ poderá ser, também, composto.

Nos três estágios acima descritos, $[L]$ e $[RN]$ serão, evidentemente, submatrizes resultantes do processo de triangularização da matriz de rigidez da peça que se esteja tratando (painel ou subestrutura); bem como $\{d_i^*\}$, em função de suas ações internas.

II.10.1- Deslocamentos e esforços nas barras que compoem os painéis

Uma vez calculado o vetor $\{d_j\}_s^j$ segundo as coordenadas deslocamentos do painel j , pertencente à subestrutura s , poder-se-á calcular os deslocamentos e esforços nos extremos das barras que o compoem.

II.10.1.1- Deslocamentos e esforços nos extremos da viga de um painel

Com o uso da expressão:

$$\{d_v\}_{j,s}^{i,k} = [\beta_v]_{j,s}^{i,k} \cdot \{d_j\}_s^j \quad (\text{II.118})$$

poder-se-ã obter os deslocamentos da viga (i,k), pertencente ao painel j da subestrutura s, e através de:

$$\{f_v\}_{j,s}^{i,k} = [r_v]_{j,s}^{i,k} \cdot \{d_v\}_{j,s}^{i,k} \quad (\text{II.119})$$

obter-se-ã os esforços que atuarão segundo suas coordenadas.

II.10.1.2- Deslocamentos e esforços nos extremos do pilar de um painel

Analogamente ao caso das vigas, a expressão:

$$\{d_p\}_{j,s}^{i,k} = [\beta_p]_{j,s}^{i,k} \cdot \{d_j\}_s^j \quad (\text{II.120})$$

permitirá a obtenção dos deslocamentos nos extremos de um tramo de pilar, que usados na equação:

$$\{f_p\}_{j,s}^{i,k} = [r_p]_{j,s}^{i,k} \cdot \{d_p\}_{j,s}^{i,k} \quad (\text{II.121})$$

produzirão o vetor dos esforços a que o pilar estará sujeito.

II.10.2- Deslocamentos e esforços nos extremos de um tramo de pilar individual

A relação:

$$\{d_i\}_s^{i,k} = [\beta_i]_s^{i,k} \cdot \{d_s\}_s \quad (\text{II.122})$$

fornecerá os deslocamentos nos extremos do tramo de pilar individual i , imediatamente abaixo da laje k , pertencente à subestrutura s ; e a expressão:

$$\{f_i\}_s^{i,k} = [r_i]_s^{i,k} \cdot \{d_i\}_s^{i,k} \quad (\text{II.123})$$

permitirá o cálculo das solicitações nos extremos deste elemento.

II.10.3- Deslocamentos e esforços nos extremos do tramo de núcleo

O vetor deslocamentos $\{d_n\}_s^{i,k}$ para um tramo de núcleo, genérico, número i , imediatamente abaixo do andar k , da subestrutura s , será dado por:

$$\{d_n\}_s^{i,k} = [\beta_n]_s^{i,k} \cdot \{d_s\}_s \quad (\text{II.124})$$

Este vetor será subdividido em dois; $\{d_{nc}\}_s^{i,k}$ que conterà os deslocamentos segundo os termos de flexão, e $\{d_{nt}\}_s^{i,k}$ que terá como componentes os deslocamentos de torção e empenamento.

Com o uso de:

$$\{d_{ng}\}_s^{i,k} = [\beta_{ng}]_s^{i,k} \cdot \{d_{nc}\}_s^{i,k} \quad (\text{II.125})$$

chegar-se-á aos deslocamentos dos extremos de um tramo de núcleo, segundo as coordenadas de flexão referidas ao seu centro de gravidade e, aplicando-se:

$$\{f_{ng}\}_s^{i,k} = [r_{ng}]_s^{i,k} \cdot \{d_{ng}\}_s^{i,k} \quad (\text{II.126})$$

obter-se-á as solicitações de flexão a que o núcleo estará sujeito.

Para obter-se os esforços segundo suas coordena-

das de torção far-se-á uso da equação:

$$\{f_{nt}\}_s^{i,k} = [r_{nt}]_s^{i,k} \cdot \{d_{nt}\}_s^{i,k} \quad (II.127)$$

$[r_{ng}]$ e $[r_{nt}]$, conforme se abordou nos itens II.4.1.1 e II.4.1.3, serão as matrizes de rigidez para um tramo de núcleo segundo os termos de flexão, com relação ao seu centro de gravidade; e segundo os termos de torção, relativamente ao seu centro de cisalhamento, respectivamente.

II.10.4- Deslocamentos e esforços nos extremos das vigas pilar-pilar

Calcular-se-á os deslocamentos nos extremos da viga pilar-pilar (i,k) da subestrutura s através da equação:

$$\{d_2\}_s^{i,k} = [\beta_{2r}]_s^{i,k} \cdot ([\beta_2]_s^{i,k} \cdot \{d_s\}_s) \quad (II.128)$$

e as respectivas solicitações poderão ser obtidas através de:

$$\{f_2\}_s^{i,k} = [r_2]_s^{i,k} \cdot \{d_2\}_s^{i,k} \quad (II.129)$$

II.10.5- Deslocamentos e esforços nos extremos das vigas pilar-núcleo

A expressão:

$$\{d_1\}_s^{i,k} = [\beta_{1r}]_s^{i,k} \cdot ([\beta_1]_s^{i,k} \cdot \{d_s\}_s) \quad (II.130)$$

fornece os deslocamentos segundo as coordenadas locais da viga pilar-núcleo (i,k) da subestrutura s, e os respectivos esforços serão conseguidos através de:

$$\{f_1\}_s^{i,k} = [r_1]_s^{i,k} \cdot \{d_1\}_s^{i,k} \quad (II.131)$$

II.10.6- Deslocamentos e esforços nos extremos dos lintéis

Os deslocamentos nos lintéis, segundo as coordenadas de seu sistema local, serão dados por:

$$\{d_3\}_s^{i,k} = [\beta_{3r}]_s^{i,k} \cdot ([\beta_3]_s^{i,k} \cdot \{d_s\}_s) \quad (\text{II.132})$$

e as respectivas solicitações poderão ser calculadas através de:

$$\{f_3\}_s^{i,k} = [r_3]_s^{i,k} \cdot \{d_3\}_s^{i,k} \quad (\text{II.133})$$

CAPITULO III

EXEMPLOS

III.1- GENERALIDADES

Neste capítulo serão analisados vários exemplos que têm por objetivo a expressão de uma forma prática da teoria que foi aqui exposta.

Os resultados foram conseguidos através de um programa, cuja cópia encontra-se na Biblioteca do SET-EESC-USP, desenvolvido em linguagem FORTRAN, para o computador IBM-4341, com base no equacionamento apresentado neste trabalho.

Para um dado carregamento horizontal atuante em determinada estrutura, este programa calcula os deslocamentos de corpo rígido para as várias lajes e os deslocamentos e esforços a que ficarão sujeitas as várias peças componentes da estrutura em questão, tratando-a como um corpo espacial, ou seja, fazendo uma análise estática tridimensional. Desta maneira os resultados abrangerão a interação entre todas as peças.

Alguns exemplos são próprios, outros foram extraídos de trabalhos de outros autores, com o intuito de se poder comparar os resultados, e os valores destes serão designados por R1, ao passo que os resultados obtidos com o pro-

grama aqui desenvolvido serão anotados como R2.

A fim de facilitar a apresentação dos exemplos que se seguirão, designou-se por símbolos especiais e letras, algumas características e nomenclatura de peças a que se queira referir. Os caracteres e símbolos são os seguintes:

- viga pilar-pilar nº n: $v2_n$; estas vigas terão seu extremo, considerado esquerdo, no nó de numeração inferior. A viga pilar-pilar nº 5, $v2_5$, a título de ilustração, do 5º exemplo (FIG.III.18), tem seu nó esquerdo no pilar nº 4;

- viga pilar-núcleo nº n: $v1_n$; estas vigas terão seu extremo, considerado esquerdo, no nó correspondente ao pilar individual que lhe serve de apoio;

- lintel nº n: L_n ;

- núcleo nº n: N_n ;

- orientação início-fim, ou sentido esquerdo-direito do painel j: \underline{j} .

Os sinais dos deslocamentos e esforços estão em concordância com a convenção exposta no cap. I, item I.7.

Informações adicionais que se fizerem necessárias estarão anexas aos exemplos.

III.2- EXEMPLO Nº 1

A estrutura que será aqui analisada está apresentada na FIG.III.1.

Trata-se de um edifício composto por um único núcleo, contraventado, ao nível dos andares, por lintéis.

Características estruturais:

- módulo de elasticidade longitudinal:
 $E = 5,76 \times 10^8 \text{ lb/ft}^2$ e coeficiente de Poisson igual a 0,15.
- espessuras das paredes do núcleo : 1 ft.
- dimensões da secção transversal do lintel:
 $1,0 \times 1,5 \text{ ft}^2$.
- pé direito: 12,5 ft.
- número de andares: 15.

Carregamento:

- carga uniformemente distribuída de 1.250 lb/ft, horizontal, ao longo da altura, na direção e sentido do eixo Z

Este edifício foi calculado anteriormente por [17], e nas figuras que se sucedem (FIGS. III.2 a III. 4), confronta-se os seus resultados aos obtidos com o programa originado deste trabalho.

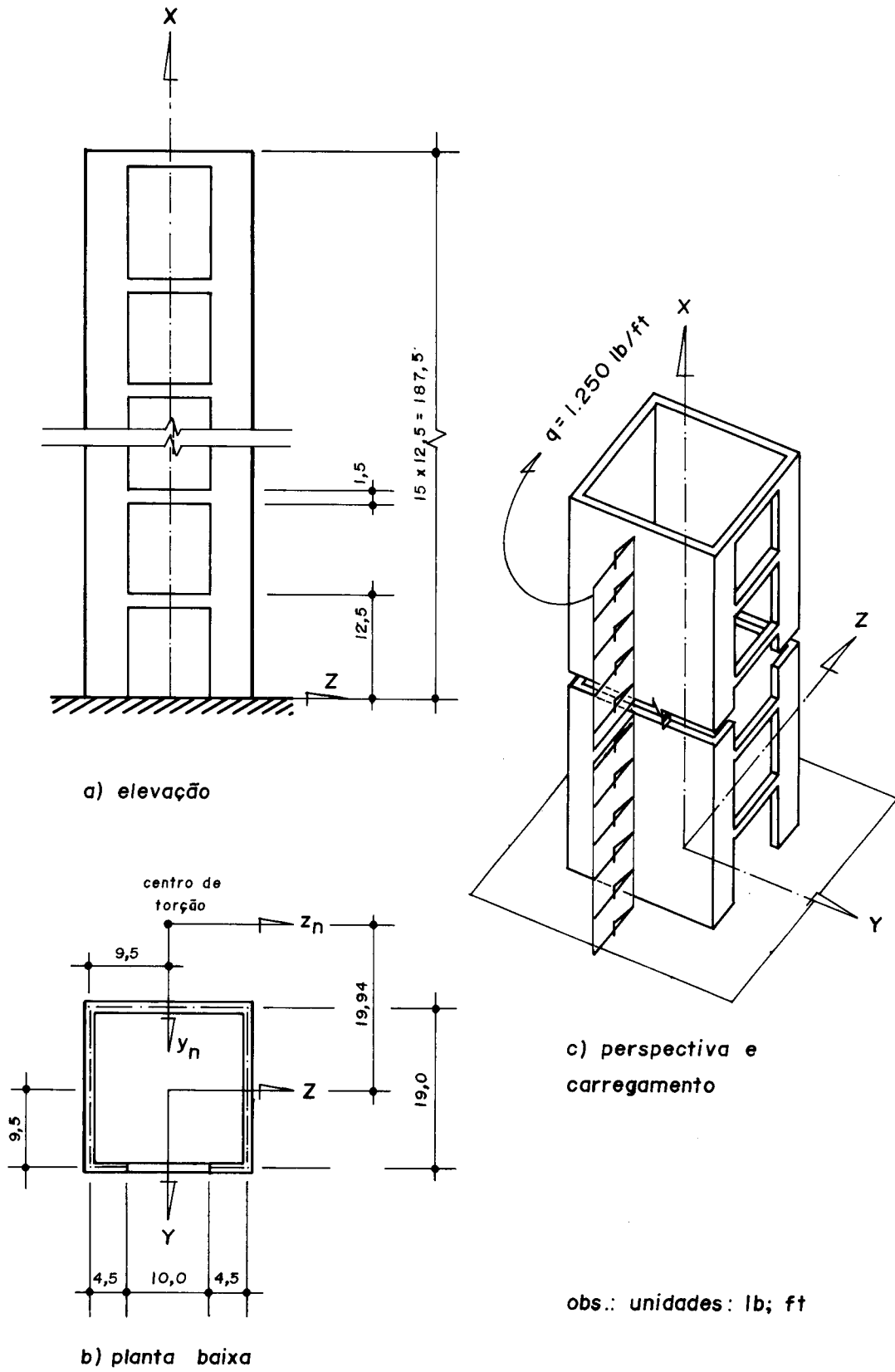


FIG. III.1.- Exemplo nº 1 - elevação, planta baixa e carregamento.

EXEMPLO Nº 1

deslocamento linear das lajes

andar	deslocamento ($\times 10^{-1}$ ft)	
	R1	R2
15	1,346	1,346
14	1,252	1,252
13	1,156	1,156
12	1,057	1,057
11	0,955	0,955
10	0,850	0,850
9	0,743	0,743
8	0,634	0,634
7	0,525	0,525
6	0,417	0,417
5	0,314	0,314
4	0,218	0,218
3	0,133	0,133
2	0,064	0,064
1	0,018	0,018

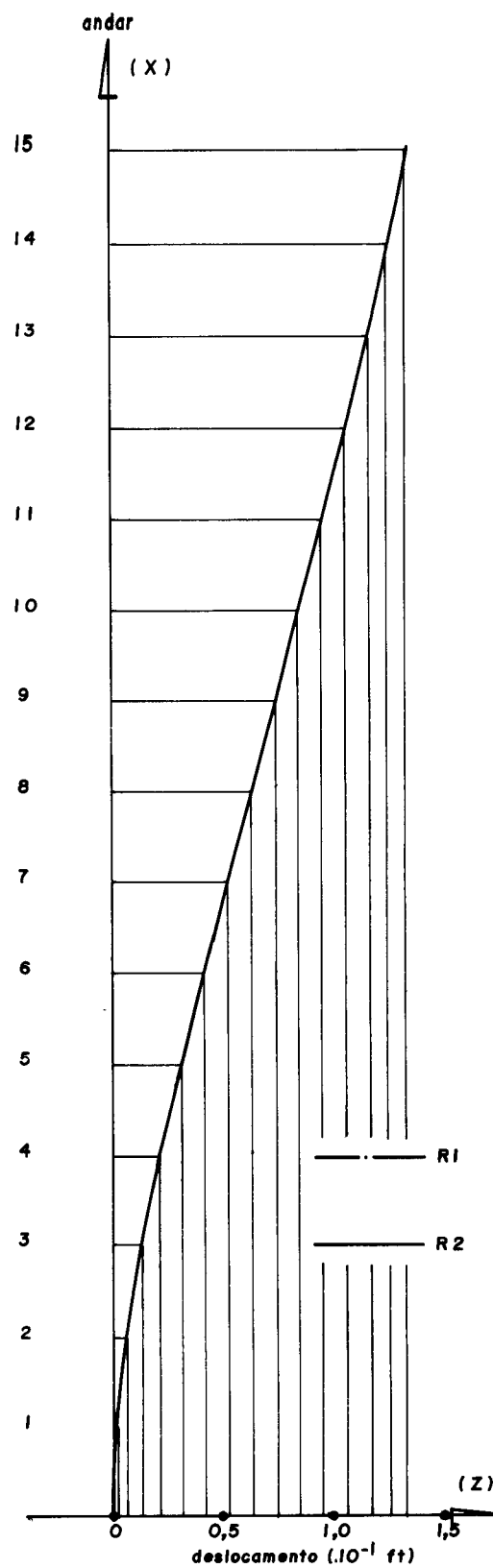


FIG. III.2.- Exemplo nº 1 - deslocamento linear (segundo Z).

EXEMPLO Nº 1		
rotação das lajes		
andar	rotação ($\times 10^{-3}$ rad)	
	R1	R2
15	3,00	3,00
14	2,86	2,86
13	2,71	2,71
12	2,55	2,55
11	2,37	2,37
10	2,17	2,17
9	1,94	1,94
8	1,70	1,70
7	1,45	1,45
6	1,18	1,18
5	0,91	0,91
4	0,65	0,65
3	0,41	0,41
2	0,20	0,20
1	0,06	0,06

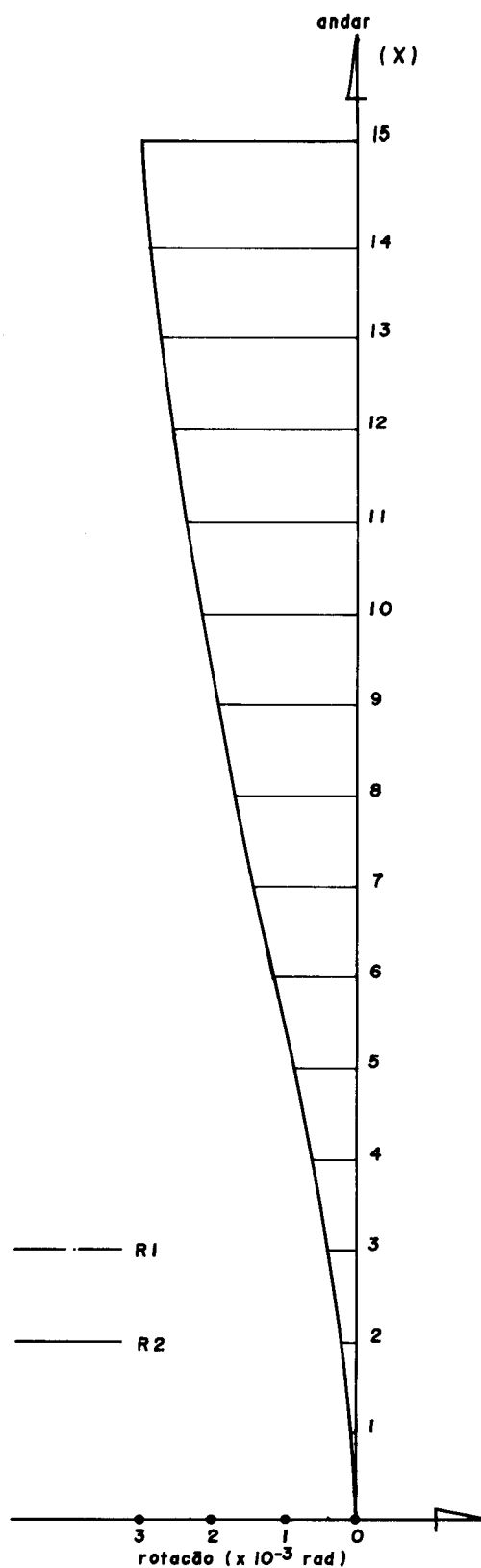


FIG. III. 3.- Exemplo nº 1 - rotação das lajes.

ELEMENTO: NÚCLEO		
bimomento ($\times 10^8$ lb.ft ²)		
tramo	bimomento no topo bimomento na base	
	R1	R2
15 - 14	-0,108	-0,108
	0,097	0,096
14 - 13	-0,211	-0,211
	0,161	0,161
13 - 12	-0,286	-0,286
	0,197	0,197
12 - 11	-0,337	-0,337
	0,210	0,210
11 - 10	-0,365	-0,365
	0,201	0,201
10 - 9	-0,373	-0,373
	0,171	0,171
9 - 8	-0,359	-0,359
	0,119	0,119
8 - 7	-0,320	-0,320
	0,042	0,042
7 - 6	-0,254	-0,254
	-0,062	-0,062
6 - 5	-0,155	-0,155
	-0,200	-0,200
5 - 4	-0,017	-0,017
	-0,378	-0,378
4 - 3	0,172	0,172
	-0,606	-0,607
3 - 2	0,424	0,424
	-0,899	-0,899
2 - 1	0,754	0,754
	-1,272	-1,272
1 - 0	1,187	1,187
	-1,745	-1,748

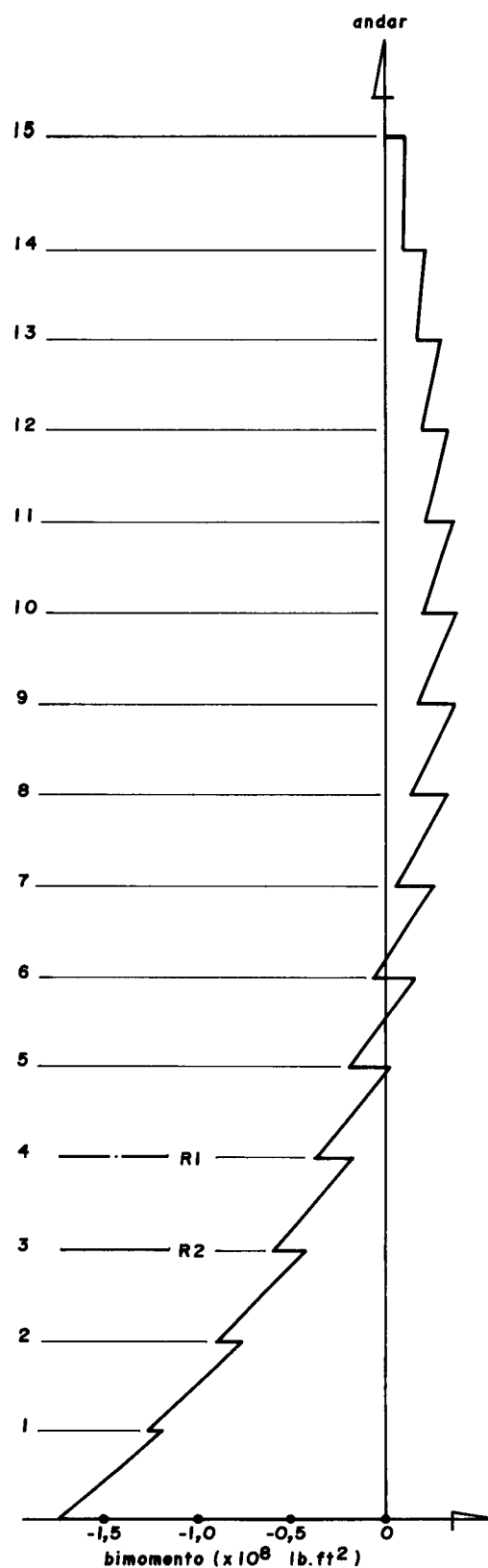


FIG. III.4.- Bimomento no núcleo do exemplo nº 1.

III.3- EXEMPLO Nº 2

Neste espaço analisar-se-á a estrutura com planta baixa e elevação expostas na FIG.III.5, que tem as seguintes características:

- tratam-se de dois núcleos, contraventados ao nível de cada laje por dois lintéis;

- módulo de elasticidade longitudinal:

$E = 4,32 \times 10^8 \text{ lb/ft}^2$, e coeficiente de Poisson igual a 0,25.

- características geométricas dos núcleos: vide figura;

- dimensões da secção transversal dos lintéis: $2,0 \times 2,5 \text{ ft}^2$;

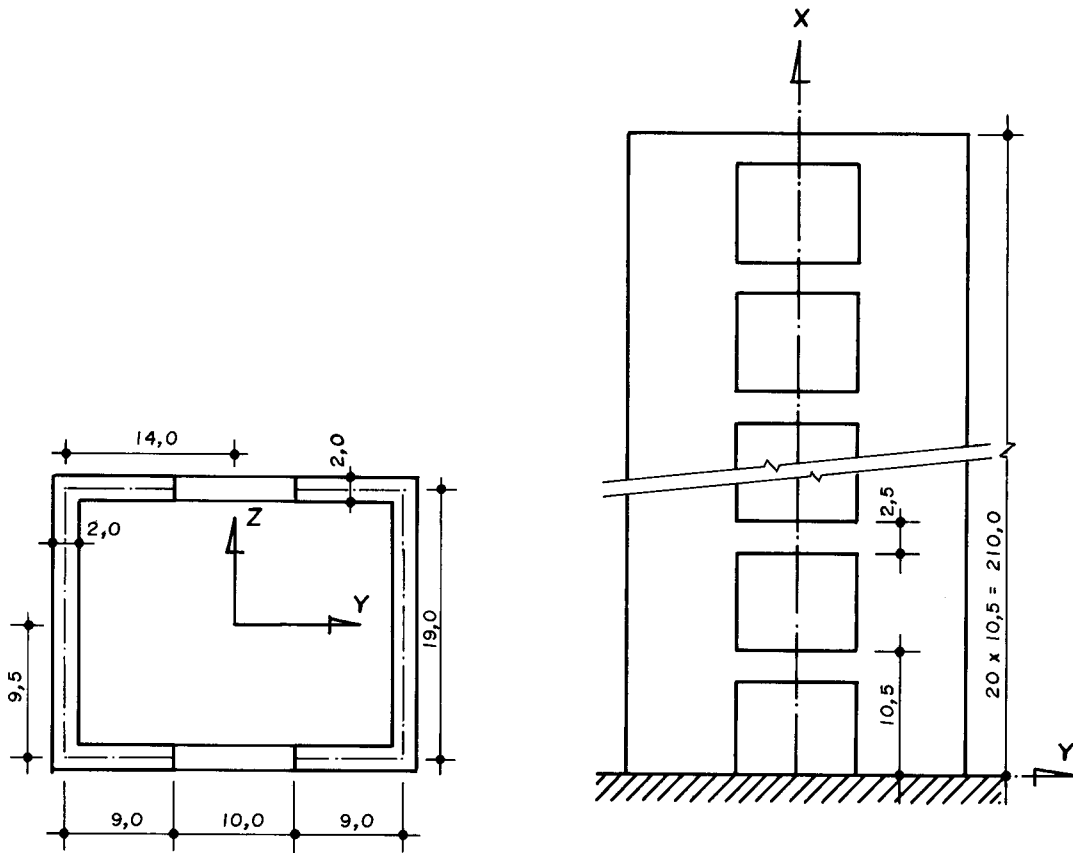
- pé direito: 10,5 ft;

- número de andares: 20.

Carregamento:

- momento torsor uniformemente distribuído, com intensidade de 64 lb.ft/ft, com direção e sentido concordante com o eixo X.

A aplicação aqui exposta foi também considerada por [18], e o comportamento das lajes quanto aos movimentos de rotação é aqui analisado (FIG.III.6). Verifica-se que a diferença máxima deu-se no topo da estrutura, e é da ordem de 2%.



a) planta baixa

b) elevação

obs.: medidas em ft

FIG. III.5.- Exemplo nº 2 - planta baixa e elevação.

EXEMPLO Nº 2		
rotação das lajes		
andar	rotação ($\times 10^{-6}$ rad)	
	R1	R2
20	1,279	1,305
19	1,249	1,273
18	1,216	1,239
17	1,179	1,201
16	1,137	1,157
15	1,089	1,108
14	1,034	1,052
13	0,974	0,990
12	0,906	0,921
11	0,832	0,846
10	0,753	0,765
9	0,668	0,679
8	0,579	0,588
7	0,487	0,495
6	0,394	0,400
5	0,302	0,306
4	0,213	0,216
3	0,133	0,134
2	0,065	0,066
1	0,018	0,018

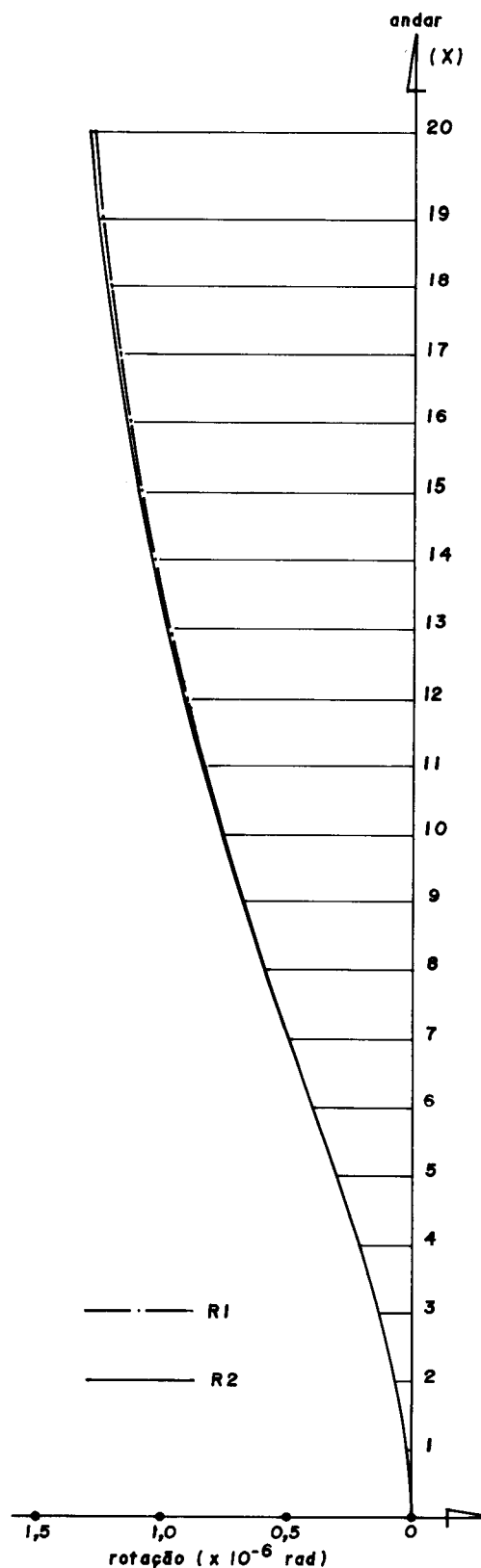


FIG. III.6.- Exemplo nº 2 - rotação das lajes.

III.4- EXEMPLO Nº 3

Será vista aqui a estrutura apresentada em [19], cuja planta baixa está mostrada na FIG.III.7.

Trata-se de um edifício composto por núcleo e um conjunto de 17 painéis. Núcleo e painéis estão interligados entre si apenas pelas lajes e um par de vigas, estas introduzidas com o simples propósito de conferir maior rigidez àquelas. Porém, para fins de confronto de resultados, serão vistas como infinitamente flexíveis, ou seja, não serão levadas em conta.

Características da estrutura (para todos os andares):

- módulos de elasticidade longitudinal e transversal iguais a 2×10^6 tf/m² e 8×10^5 tf/m², respectivamente;
- secção transversal dos pilares: $0,40 \times 0,40$ m²;
- espessuras das paredes do núcleo : 0,25 m;
- secção transversal das vigas: $0,25 \times 0,90$ m²;
- pé direito: 3,30 m;
- número de andares: 15.

A estrutura é solicitada por uma carga de: 100 kgf/m² atuando normalmente ao plano XY, no sentido do eixo Z (vide FIG.III.7).

Nas figuras III.8, III.9 e III.10, são mostrados os deslocamentos de corpo rígido dos diafragmas, obtidos pelo referido autor [R1], e os obtidos pelo programa gerado com base na teoria exposta neste trabalho [R2].

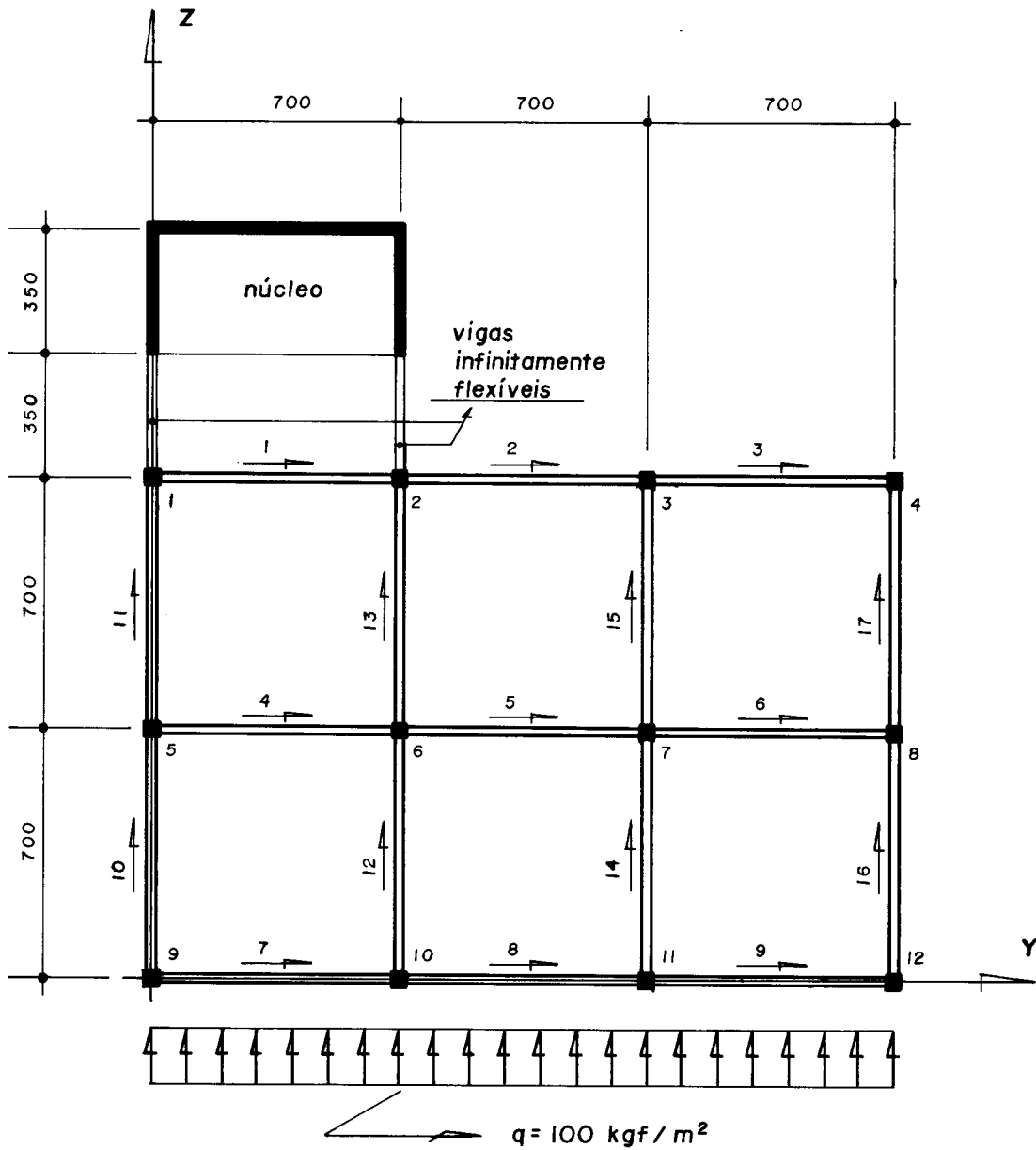


FIG. III.7. - Exemplo nº 3 : estrutura (planta baixa) e carregamento atuante.

EXEMPLO Nº 3

deslocamento linear das lajes

andar	deslocamento (cm)	
	R1 (*)	R2
15	4,25	4,15
14	4,00	3,86
13	3,65	3,57
12	3,36	3,27
11	3,05	2,95
10	2,71	2,63
9	2,40	2,29
8	2,06	1,95
7	1,70	1,61
6	1,36	1,27
5	1,04	0,94
4	0,73	0,64
3	0,49	0,37
2	0,25	0,17
1	0,09	0,04

* resultados obtidos de gráfico.

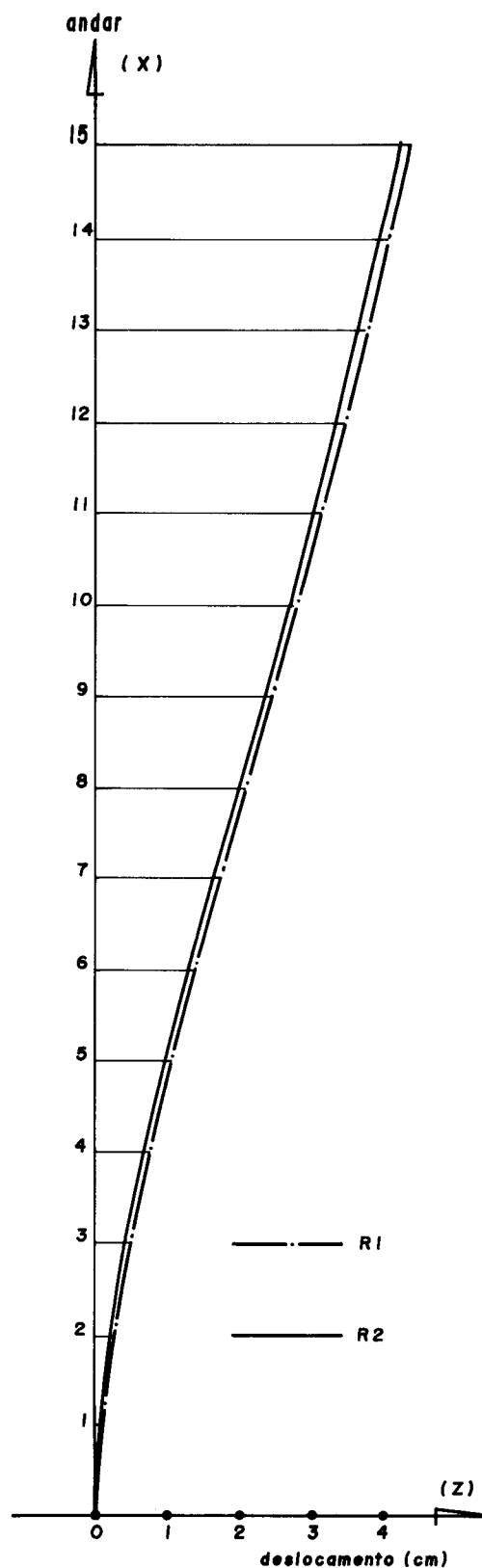


FIG. III.8.- Deslocamento linear do nó nº 9 na direção do eixo Z.

EXEMPLO Nº 3

deslocamento linear das lajes

andar	deslocamento (cm)	
	R1 *	R2
15	5,51	5,45
14	5,30	5,20
13	5,02	4,94
12	4,70	4,64
11	4,34	4,32
10	4,00	3,97
9	3,62	3,59
8	3,26	3,18
7	2,83	2,75
6	2,39	2,31
5	1,90	1,85
4	1,40	1,39
3	0,99	0,94
2	0,56	0,53
1	0,16	0,17

* resultados obtidos de gráfico.

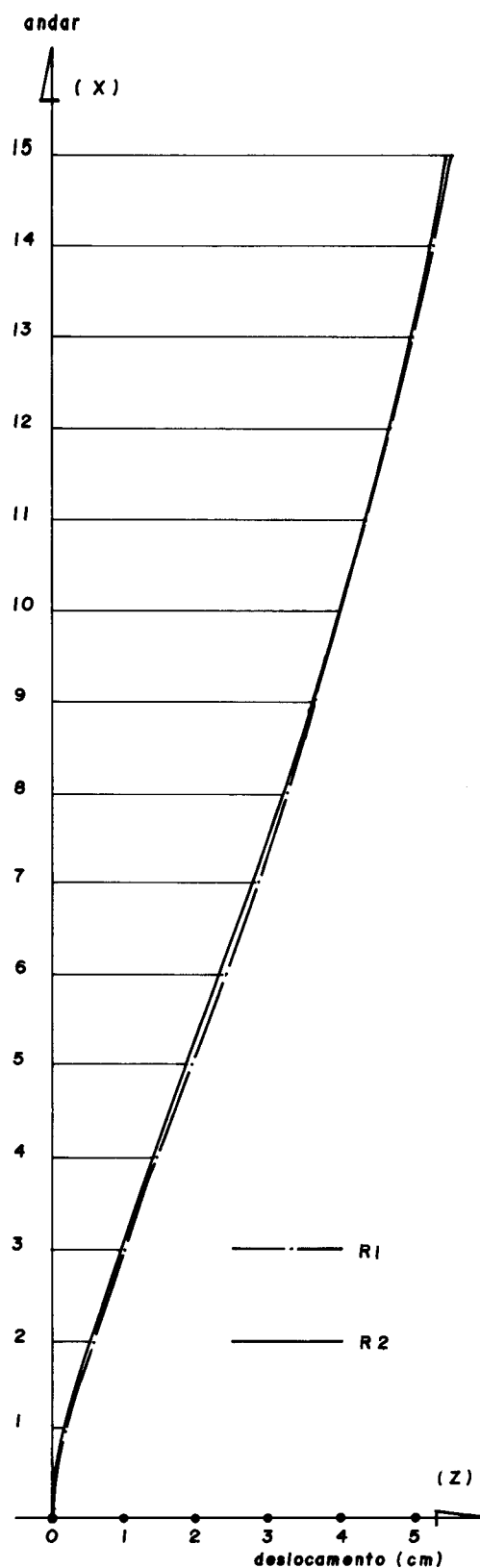


FIG. III 9.- Deslocamento linear do nó nº 12 na direção do eixo Z.

EXEMPLO Nº 3		
rotação das lajes		
andar	rotação ($\times 10^{-4}$ rad)	
	R1 *	R2
15	6,20	6,19
14	6,55	6,38
13	6,68	6,51
12	6,70	6,55
11	6,55	6,50
10	6,38	6,37
9	6,08	6,16
8	5,78	5,85
7	5,43	5,46
6	4,93	4,96
5	4,31	4,34
4	3,53	3,60
3	2,63	2,72
2	1,65	1,71
1	0,65	0,64

* resultados obtidos de gráfico.

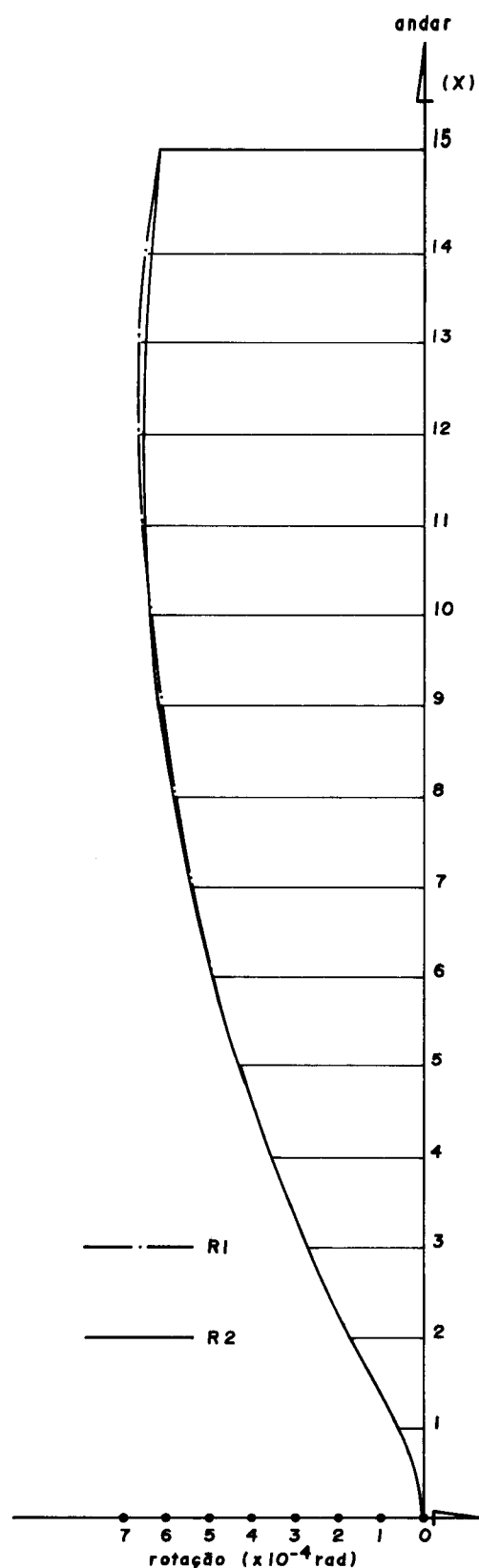


FIG. III.10.- Exemplo nº 3 - rotação das lajes.

III.5- EXEMPLO Nº 4

Analisa-se a estrutura de um edifício de 9 andares, composto de 1 núcleo, 12 painéis, 10 pilares e 3 vigas pilar-núcleo (FIG.III.11), além de 1 lintel.

A estrutura deste exemplo, bem como a dos seguintes, foram criadas visando-se a análise de edifícios de plantas mais complexas, nas quais se tenta explorar as diversas hipóteses possíveis de arranjo estrutural, que o programa permite.

No exemplo em questão adotou-se para módulos de elasticidade longitudinal e transversal os valores: 200 tf/cm² e 80 tf/cm², respectivamente.

As características geométricas são as seguintes:

- os pilares 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 possuem secção transversal de dimensões: 30x60 cm²; o pilar 5 possui secção transversal de 30x90 cm²;
- as paredes que formam o núcleo possuem 20cm de espessura;
- as dimensões das vigas pilar-núcleo são 20x40 cm²;
- as dimensões dos lintéis são 20x40 cm²;
- dimensões das vigas dos painéis: 20x40 cm²;
- pé direito: 300 cm.

Atua sobre o edifício uma carga horizontal, ao longo da altura, de 866,67 kgf/m (plano vertical passando do pelo eixo Z), com direção e sentido de Z.

Os elementos verticais são engastados à fundação.

As figuras que se seguem (FIGS.III.12 a III.17) mostram, além das translações das lajes (FIG.III.12), um gráfico (FIG.III.13) que fornece uma idéia do comportamento das peças verticais quanto à absorção do esforço horizontal, através do qual verifica-se que, no exemplo em questão,

o núcleo foi responsável pela atração de mais de 95% do esforço cortante, atuante ao nível da fundação, ao mesmo tempo em que possui, aproximadamente, 55% da soma total das secções transversais das peças que chegam à base do edifício.

Apresenta-se, também, os esforços nas vigas pilar núcleo nº 1: torção, flexão e cortante, nas figuras III.14, III.15 e III.16, respectivamente.

O diagrama de momentos fletores no núcleo (FIG. III.17) está referido ao seu eixo z_n , cuja origem, O_n , tem as coordenadas $O_n(0,00; 178,84 \text{ cm})$ (dados fornecidos pelo programa) e defasa de 90 graus em relação ao eixo Z, no sentido de X (regra da mão direita).

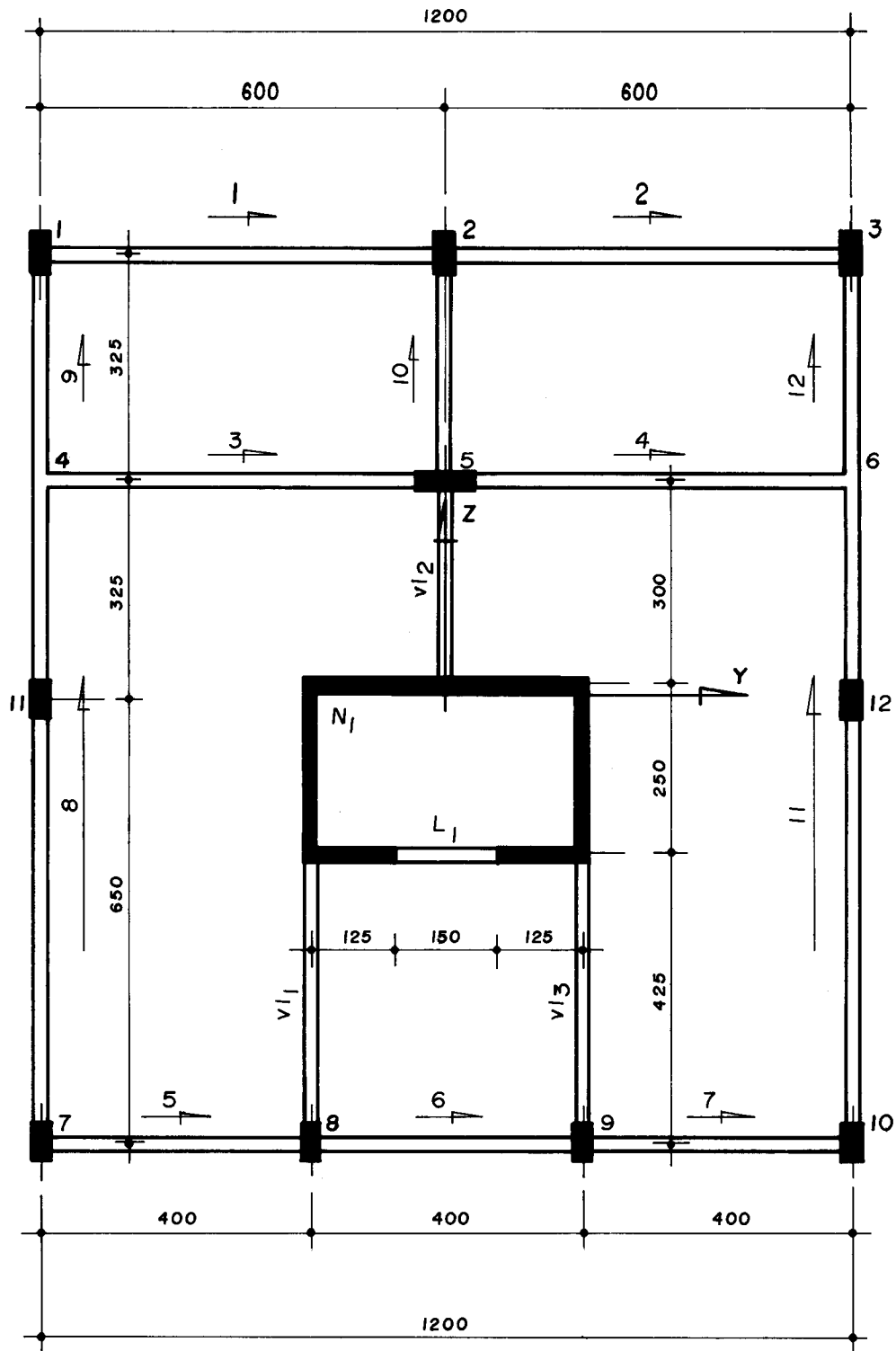


FIG. III.11.- Exemplo nº 4: estrutura (planta baixa).

EXEMPLO Nº 4	
deslocamento linear das lajes	
andar	deslocamento (mm)
9	5,74
8	5,02
7	4,27
6	3,49
5	2,71
4	1,94
3	1,22
2	0,61
1	0,17

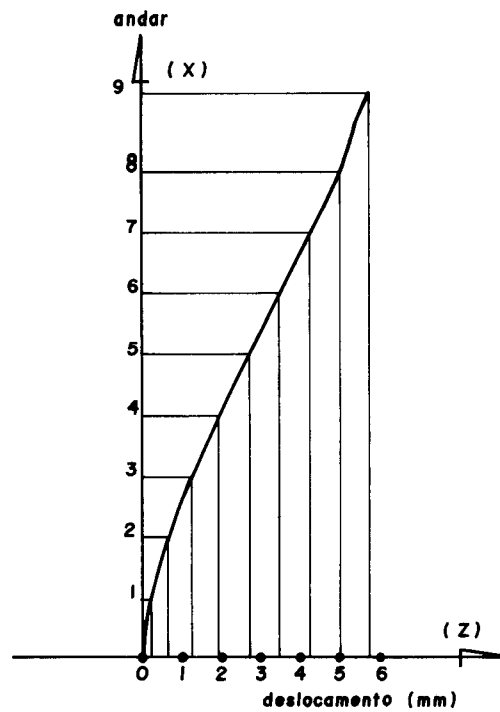


FIG. III.12.- Exemplo nº 4 - deslocamento linear.

ELEMENTO: NÚCLEO e PILARES		
esforço cortante		
tramo	Σ e.c. pilares	e.c. núcleo
9 - 8	3,56	-2,26
8 - 7	2,30	1,60
7 - 6	2,76	3,74
6 - 5	2,80	6,30
5 - 4	2,84	8,86
4 - 3	2,73	11,57
3 - 2	2,44	14,46
2 - 1	1,91	17,59
1 - 0	1,02	21,08

Σ e. c. pilares = somatório dos e. c. de todos os pilares

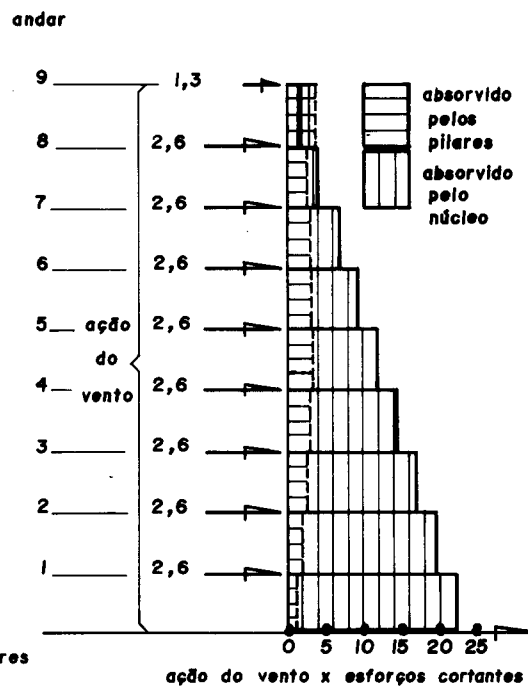


FIG. III.13.- Esforços cortantes nos pilares e núcleo (comparativo).

ELEMENTO: VI₁

momento torsor ($\times 10^{-1}$ tf.cm)

andar	m. t. esq.	m. t. dir.
9	-0,10	0,10
8	-0,54	0,54
7	-0,58	0,58
6	-0,54	0,54
5	-0,48	0,48
4	-0,41	0,41
3	-0,33	0,33
2	-0,23	0,23
1	-0,12	0,12

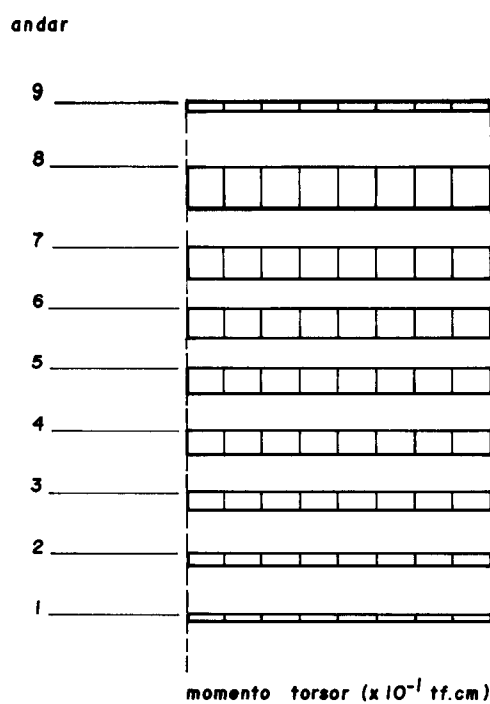


FIG. III. 14.- Momento torsor na viga pilar-núcleo nº 1.

ELEMENTO: VI₁

momento fletor

andar	m. f. esq.	m. f. dir.
9	77,02	81,71
8	86,00	87,24
7	87,83	90,03
6	91,38	93,44
5	92,34	94,49
4	89,64	91,71
3	81,24	83,14
2	65,12	66,65
1	38,87	39,82

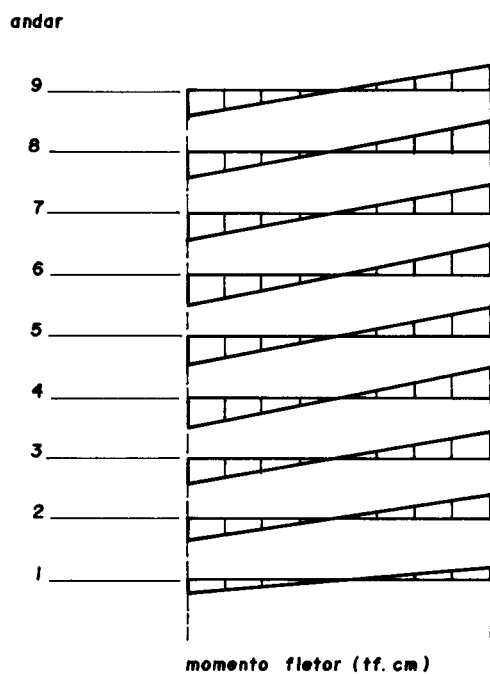


FIG. III. 15.- Momento fletor na viga pilar-núcleo nº 1.

ELEMENTO: VI ₁		
esforço cortante		
andar	e. c. esq.	e. c. dir.
9	-0,37	0,37
8	-0,41	0,41
7	-0,42	0,42
6	-0,43	0,43
5	-0,44	0,44
4	-0,43	0,43
3	-0,39	0,39
2	-0,31	0,31
1	-0,19	0,19

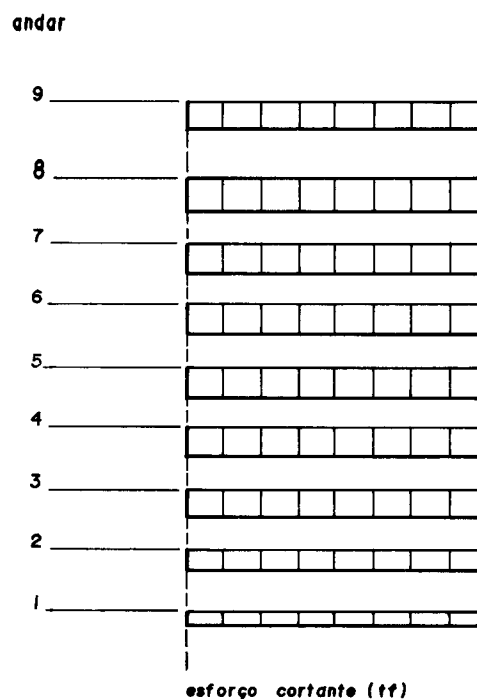


FIG. III.16.- Esforço cortante na viga pilar - núcleo nº 1.

ELEMENTO: NÚCLEO I		
momento fletor segundo z _n		
tramo	m. f. topo	m. f. base
9 - 8	-439,80	1116,62
8 - 7	-1607,43	1127,42
7 - 6	-1630,37	509,81
6 - 5	-1031,57	-858,92
5 - 4	331,94	-2989,38
4 - 3	2478,41	-5948,92
3 - 2	5486,27	-9824,75
2 - 1	9454,29	-14732,5
1 - 0	14511,7	-20835,4

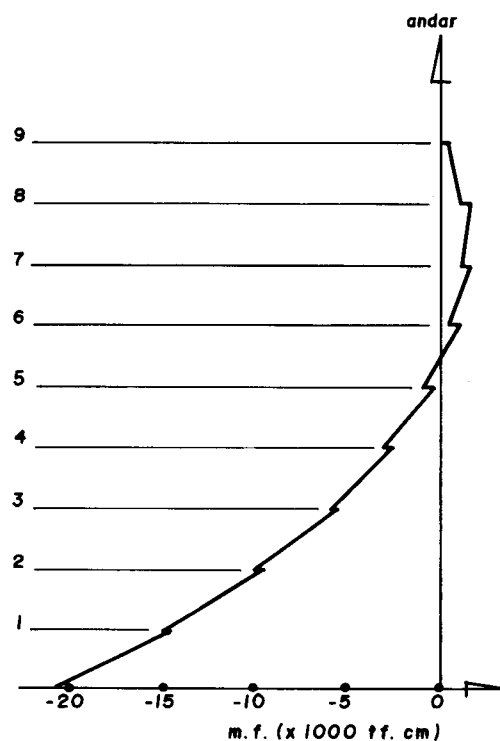


FIG. III.17.- Momentos fletores no núcleo I.

III.6- EXEMPLO Nº 5

A estrutura deste exemplo tem a planta baixa indicada na FIG.III.18. O edifício é composto por 4 núcleos, 7 pilares, 5 vigas pilar-pilar, 6 vigas pilar-núcleo, 6 lintéis e 3 painéis.

Suas características, quanto à geometria e elasticidade são:

- dimensões das secções transversais dos pilares 1 e 2: $30 \times 60 \text{ cm}^2$; dos pilares 3, 4, 5 e 6: $30 \times 30 \text{ cm}^2$; e do pilar 9: $40 \times 80 \text{ cm}^2$;
- os núcleos 1 e 2 possuem paredes com 15 cm de espessura; e as dos núcleos 3 e 4 possuem 7,5 cm;
- as vigas que formam os painéis 1 e 2 têm secções transversais de $20 \times 40 \text{ cm}^2$; as que formam o painel 3 têm $30 \times 40 \text{ cm}^2$;
- todas as vigas pilar-pilar têm dimensões da secção transversal iguais a $20 \times 40 \text{ cm}^2$;
- as vigas pilar-núcleo 1, 2, 3 e 4 possuem secção transversal de dimensões $10 \times 30 \text{ cm}^2$; as de nº 5 e 6 têm $10 \times 50 \text{ cm}^2$;
- os lintéis 1 e 2 possuem secções transversais cujas dimensões são: $10 \times 30 \text{ cm}^2$; os lintéis 3 e 4 têm $7,5 \times 30 \text{ cm}^2$, e os lintéis 5 e 6 têm $7,5 \times 20 \text{ cm}^2$;
- todos os andares têm 300 cm de pé direito;
- o edifício é formado de 16 andares.

Adotou-se para módulos de elasticidade longitudinal e transversal, os valores 200 tf/cm^2 e 80 tf/cm^2 , respectivamente.

Atua sobre a estrutura uma carga de $4/3 \text{ tf/m}$, horizontal, ao longo da altura, na direção e sentido do eixo

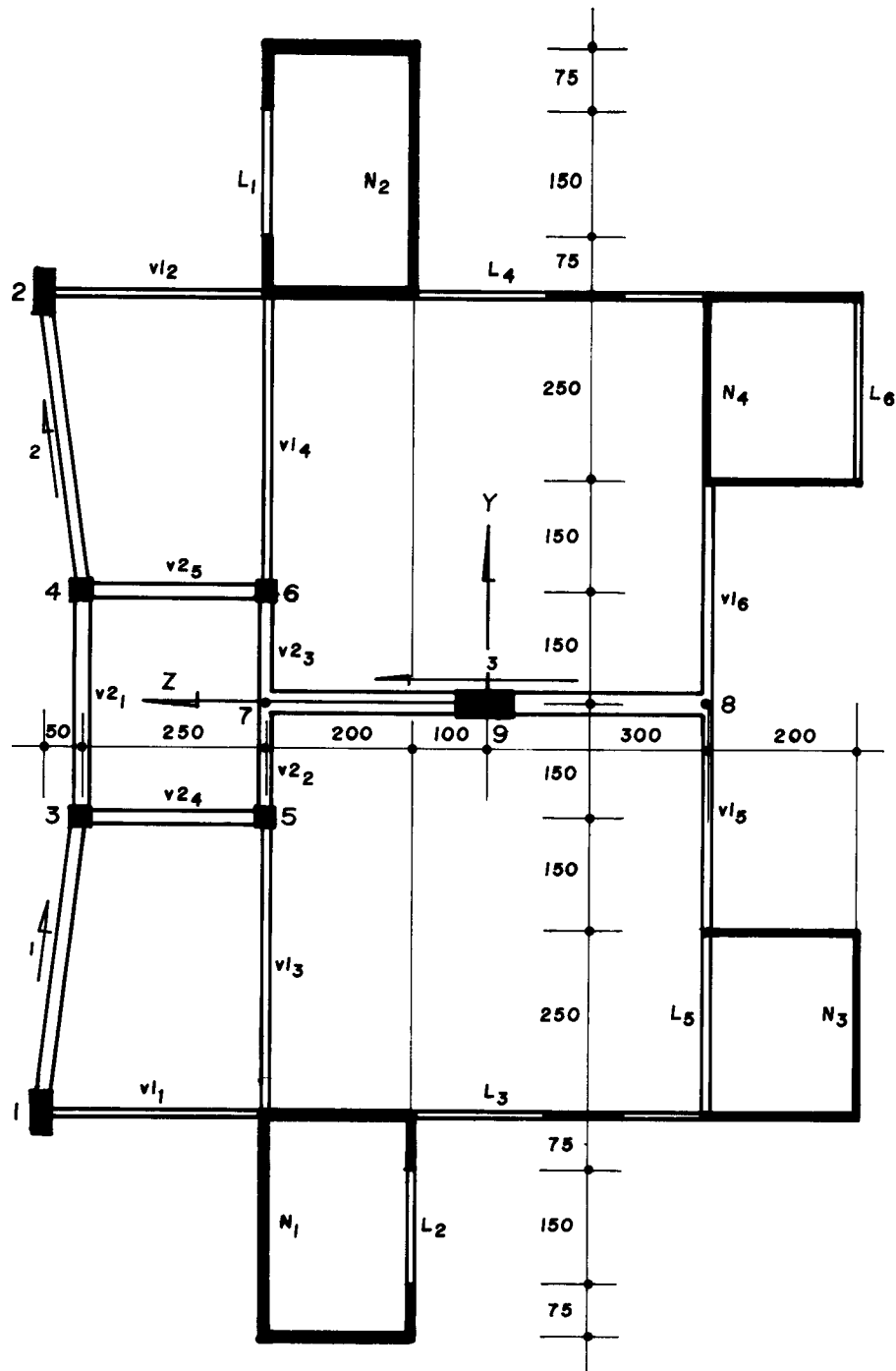


FIG. III. 18.- Exemplo nº 5: estrutura (planta baixa).

Z.

A ligação estrutura-fundação é completamente restringida à deslocamentos.

Nas figuras III.19, III.20 e III.21, tem-se os deslocamentos ao nível das lajes. Pode-se observar que o simples fato de se ter disposto diferentemente entre si (disposição não simétrica) as aberturas dos núcleos 1 e 2, e 3 e 4, quebrando-se, desta forma, a aparente simetria da estrutura relativamente ao plano XZ, foi suficiente para despertar deslocamentos na direção de Y, e rotação do edifício. Estes deslocamentos não ocorreriam caso a estrutura fosse simétrica em relação ao mencionado plano, já que o carregamento o é.

Na FIG.III.22 esboça-se o diagrama de momentos fletores nas barras do painel 3, e aí pode-se verificar o equilíbrio do nó nº 9, quanto a estes esforços.

As figuras III.23 a III.29 ilustram os diagramas de esforços segundo todas as coordenadas do núcleo nº 1, cuja origem do sistema de eixos, O_n , tem coordenadas (concorrentes no centro de torção) O_n (-700,00 cm; 414,89 cm) enquanto que o eixo y_n defasa de 90 graus em relação ao eixo Y, no sentido de X.

Os esforços na viga pilar-núcleo nº 1, cuja origem está no nó nº 1 (origem no pilar, conforme já se mencionou) estão apresentados nas figuras III.30, III.31 e III.32.

As figuras III.33, III.34 e III.35 apresentam os esforços na viga pilar-pilar nº 5, cuja origem de seu sistema, O_2 , situa-se no nó nº 4 (pilar nº 4, que corresponde, para esta viga, ao nó de numeração inferior, em concordância com o que se observou na introdução do presente capítulo).

O lintel nº 3, cuja origem do sistema local de coordenadas, O_3 , está no núcleo nº 3, tem seus esforços indicados nas figuras III.36, III.37 e III.38.

EXEMPLO: Nº 5

deslocamento linear das lajes

andar	deslocamento ($\times 10^{-2}$ cm)
16	-3,77
15	-3,43
14	-3,08
13	-2,75
12	-2,42
11	-2,09
10	-1,78
9	-1,49
8	-1,21
7	-0,95
6	-0,71
5	-0,51
4	-0,33
3	-0,19
2	-0,08
1	-0,02

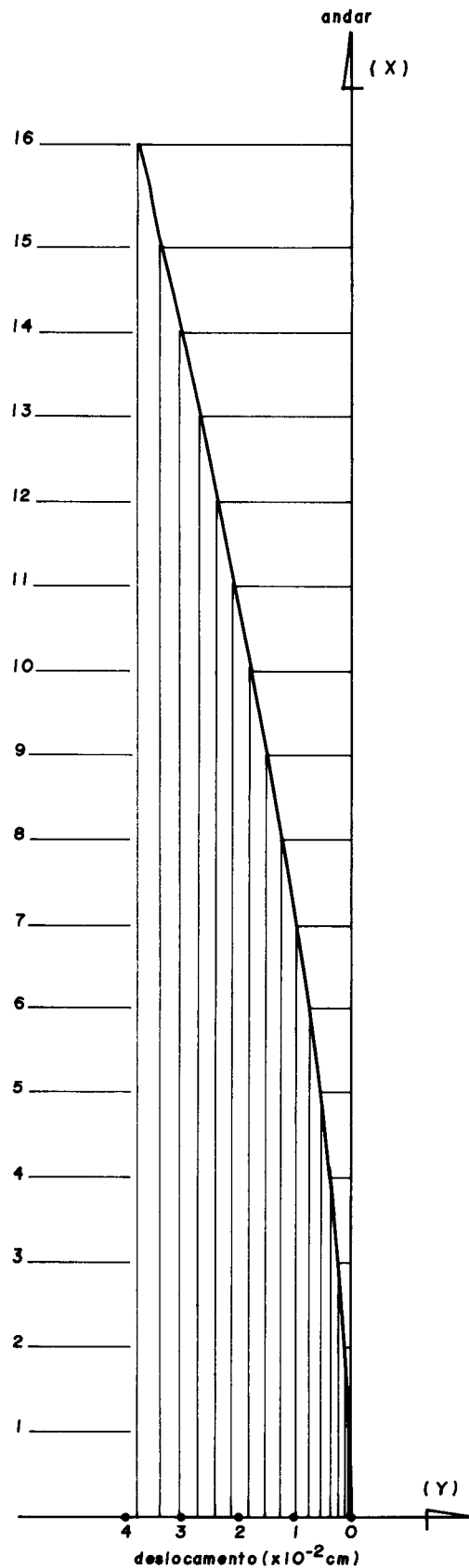


FIG. III. 19. - Exemplo nº 5 - deslocamento linear (segundo Y).

EXEMPLO Nº 5

deslocamento linear das lajes

andar	deslocamento (cm)
16	8,43
15	7,86
14	7,28
13	6,69
12	6,09
11	5,47
10	4,83
9	4,19
8	3,55
7	2,91
6	2,29
5	1,70
4	1,17
3	0,71
2	0,34
1	0,09

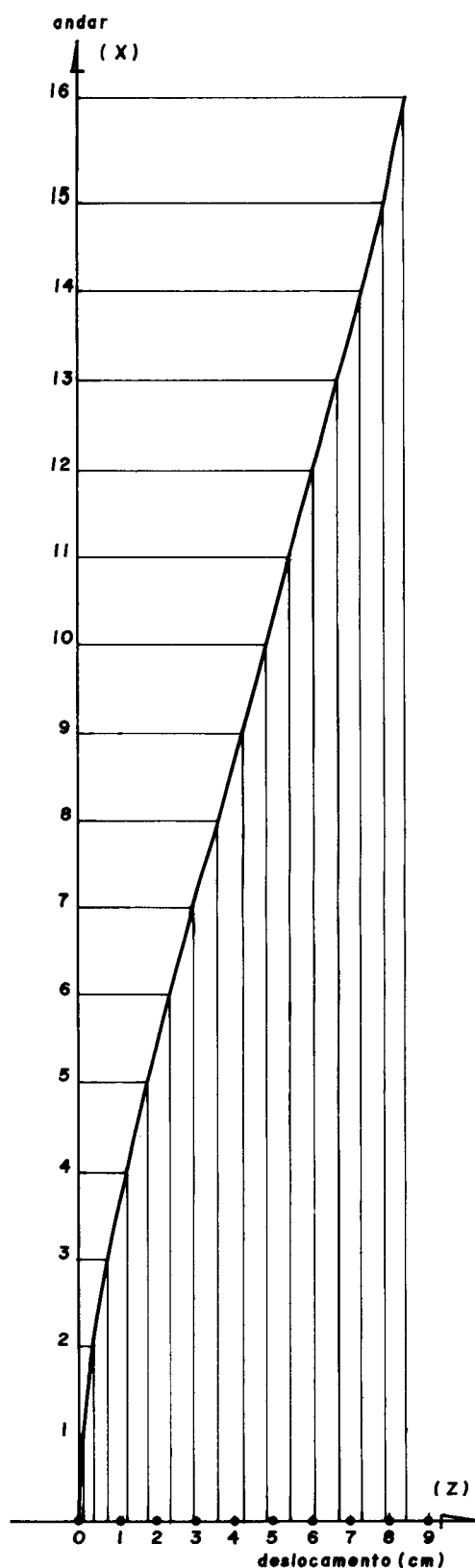


FIG. III. 20.- Exemplo nº 5 - deslocamento linear (segundo Z).

EXEMPLO Nº 5	
rotação das lajes	
andar	rotação ($\times 10^{-6}$ rad)
16	10,08
15	9,36
14	8,65
13	7,92
12	7,19
11	6,43
10	5,65
9	4,86
8	4,07
7	3,30
6	2,55
5	1,86
4	1,24
3	0,72
2	0,33
1	0,08

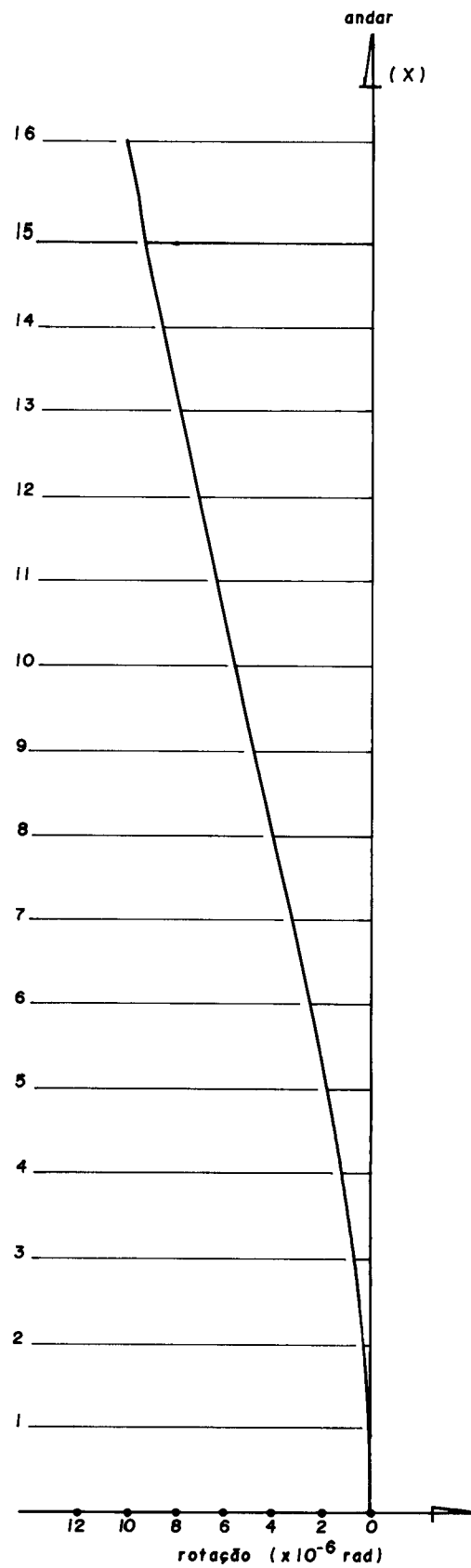


FIG. III.21.- Exemplo nº 5 - rotação das lajes.

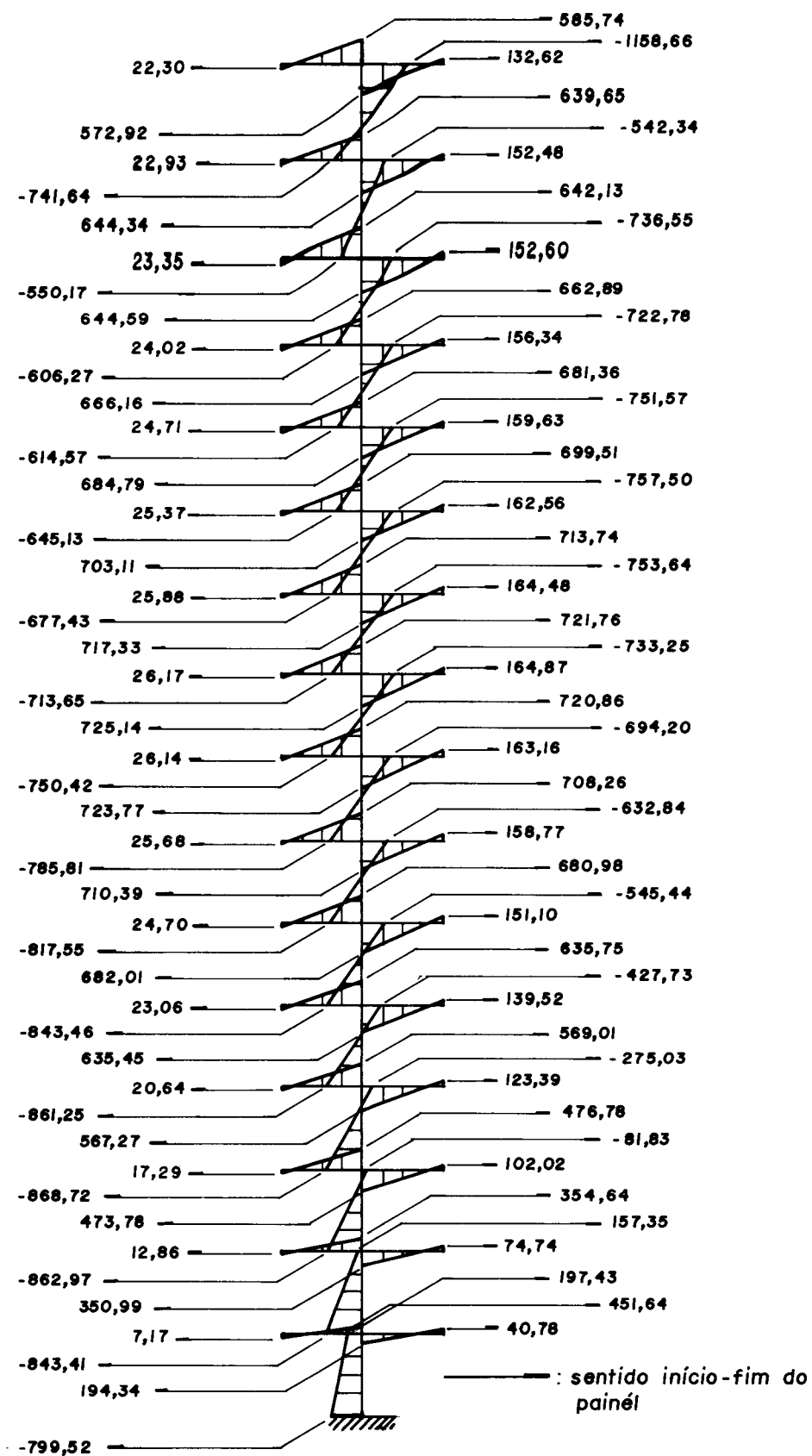


FIG. III. 22.- Momentos fletores nas barras do painél 3.

ELEMENTO: NÚCLEO I		
momento fletor segundo y_n		
tramo	m. f. topo	m. f. base
16 - 15	-137,95	-76,35
15 - 14	-73,34	-52,58
14 - 13	-99,96	-53,55
13 - 12	-106,69	-46,90
12 - 11	-121,00	-40,01
11 - 10	-135,78	-30,39
10 - 9	-152,46	-18,18
9 - 8	-170,14	-2,99
8 - 7	-188,32	15,27
7 - 6	-206,21	36,64
6 - 5	-222,85	60,97
5 - 4	-237,07	88,00
4 - 3	-247,44	117,23
3 - 2	-252,20	148,03
2 - 1	-249,34	179,19
1 - 0	-236,04	210,48

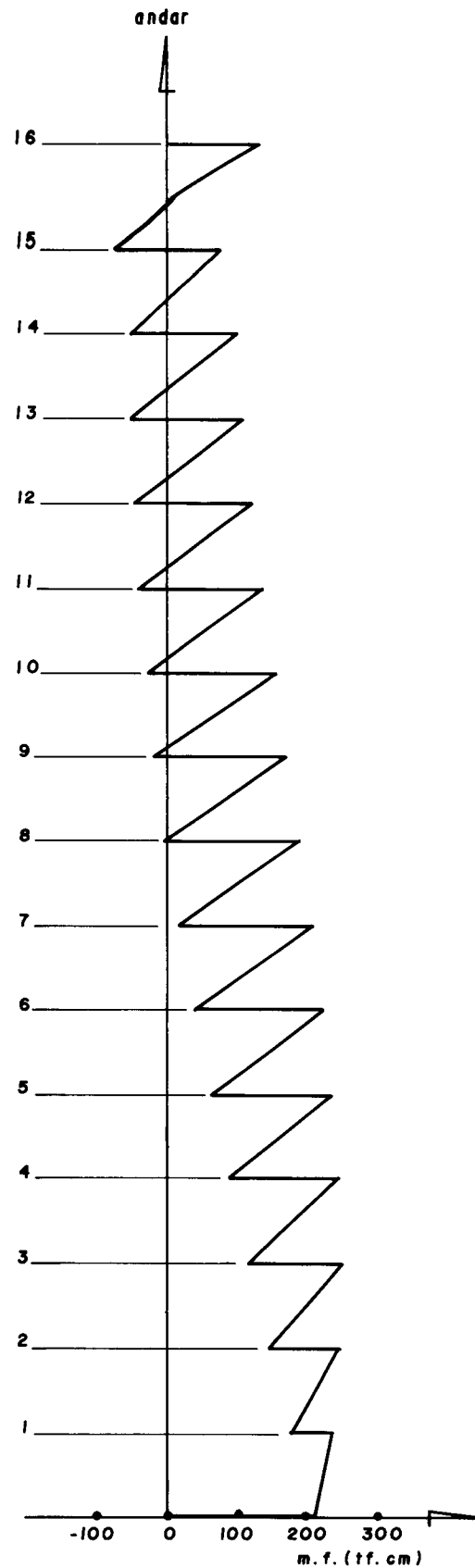


FIG. III.23.- Momentos fletores no núcleo I.

ELEMENTO: NÚCLEO I		
momento fletor segundo z_n		
tramo	m. f. topo	m. f. base
16 - 15	-376,29	1.685,47
15 - 14	-2.080,09	2.365,51
14 - 13	-2.768,10	2.760,44
13 - 12	-3.178,23	2.717,50
12 - 11	-3.150,95	2.281,43
11 - 10	-2.730,43	1.439,38
10 - 9	-1.901,69	183,49
9 - 8	-655,12	-1.504,84
8 - 7	1.029,85	-3.651,53
7 - 6	3.181,14	-6.291,37
6 - 5	5.835,72	-9.468,60
5 - 4	9.040,25	-13.238,1
4 - 3	12.852,3	-17.666,8
3 - 2	17.341,4	-22.835,4
2 - 1	22.592,0	-28.838,7
1 - 0	28.702,4	-35.799,2

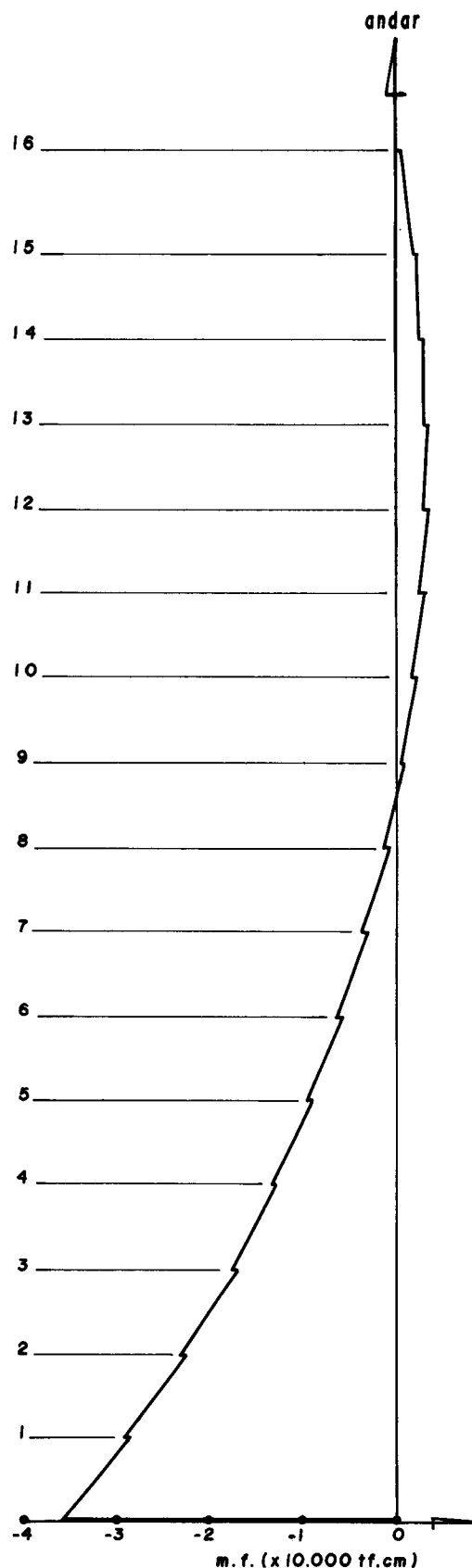


FIG. III.24.- Momentos flectores no núcleo I (segundo z_n).

ELEMENTO: NÚCLEO 1		
esforço normal		
tramo	e. n. topo	e. n. base
16 - 15	0,71	-0,71
15 - 14	1,51	-1,51
14 - 13	2,31	-2,31
13 - 12	3,16	-3,16
12 - 11	4,06	-4,06
11 - 10	5,00	-5,00
10 - 9	5,98	-5,98
9 - 8	7,00	-7,00
8 - 7	8,03	-8,03
7 - 6	9,07	-9,07
6 - 5	10,08	-10,08
5 - 4	11,04	-11,04
4 - 3	11,92	-11,92
3 - 2	12,68	-12,68
2 - 1	13,22	-13,22
1 - 0	13,53	-13,53

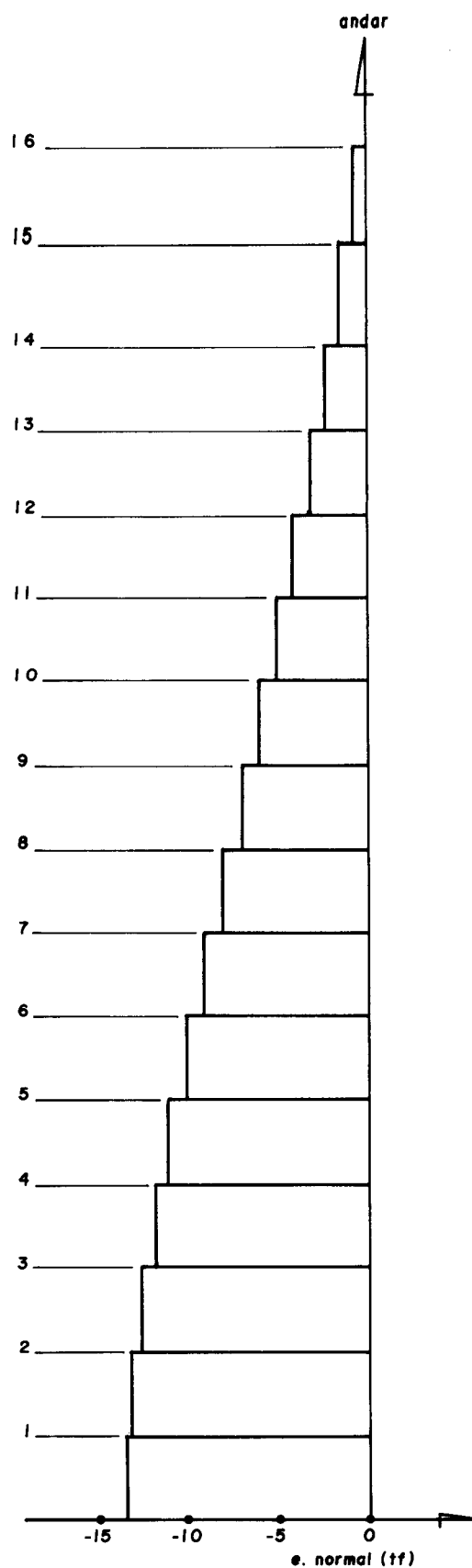


FIG. III.25.- Esforços normais no núcleo 1.

ELEMENTO: NÚCLEO 1		
esforço cortante (segundo y_n)		
tramo	cort. topo	cort. base
16 - 15	-4,36	4,36
15 - 14	-0,95	0,95
14 - 13	0,03	-0,03
13 - 12	1,54	-1,54
12 - 11	2,90	-2,90
11 - 10	4,30	-4,30
10 - 9	5,73	-5,73
9 - 8	7,20	-7,20
8 - 7	8,74	-8,74
7 - 6	10,37	-10,37
6 - 5	12,11	-12,11
5 - 4	13,99	-13,99
4 - 3	16,05	-16,05
3 - 2	18,31	-18,31
2 - 1	20,82	-20,82
1 - 0	23,66	-23,66

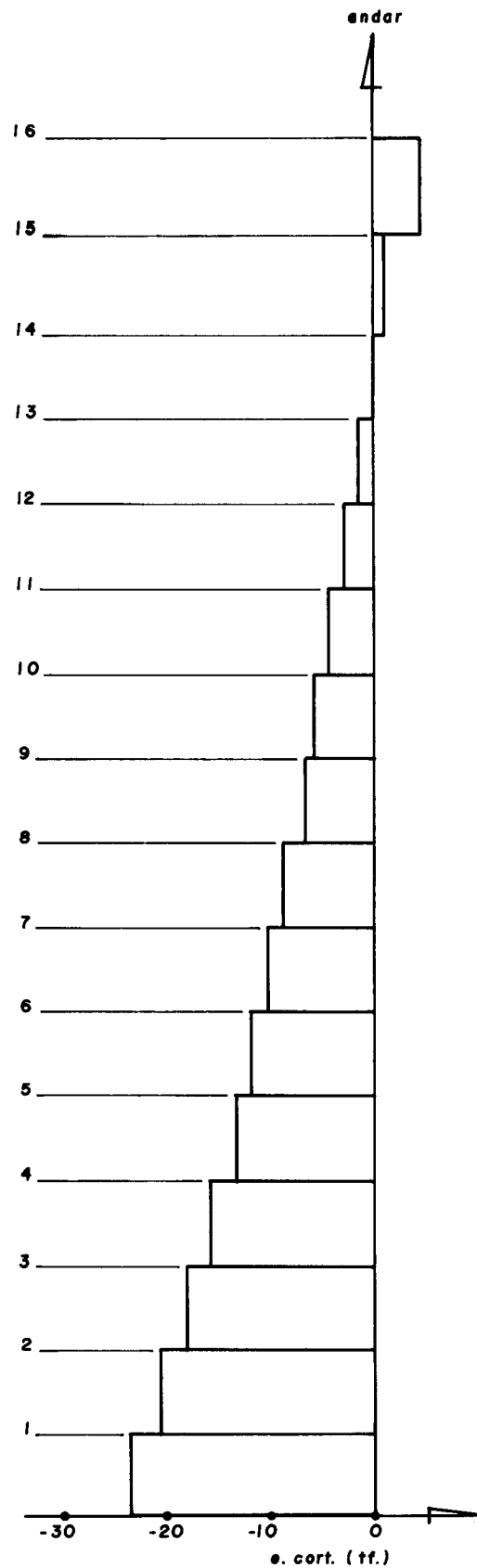


FIG. III.26.- Esforço cortante no núcleo 1 (segundo y_n).

ELEMENTO: NÚCLEO I		
esforço cortante (segundo z_n)		
tramo	cort. topo	cort. base
16 - 15	-0,71	0,71
15 - 14	-0,42	0,42
14 - 13	-0,51	0,51
13 - 12	-0,51	0,51
12 - 11	-0,54	0,54
11 - 10	-0,55	0,55
10 - 9	-0,57	0,57
9 - 8	-0,58	0,58
8 - 7	-0,58	0,58
7 - 6	-0,57	0,57
6 - 5	-0,54	0,54
5 - 4	-0,50	0,50
4 - 3	-0,43	0,43
3 - 2	-0,35	0,35
2 - 1	-0,23	0,23
1 - 0	-0,09	0,09

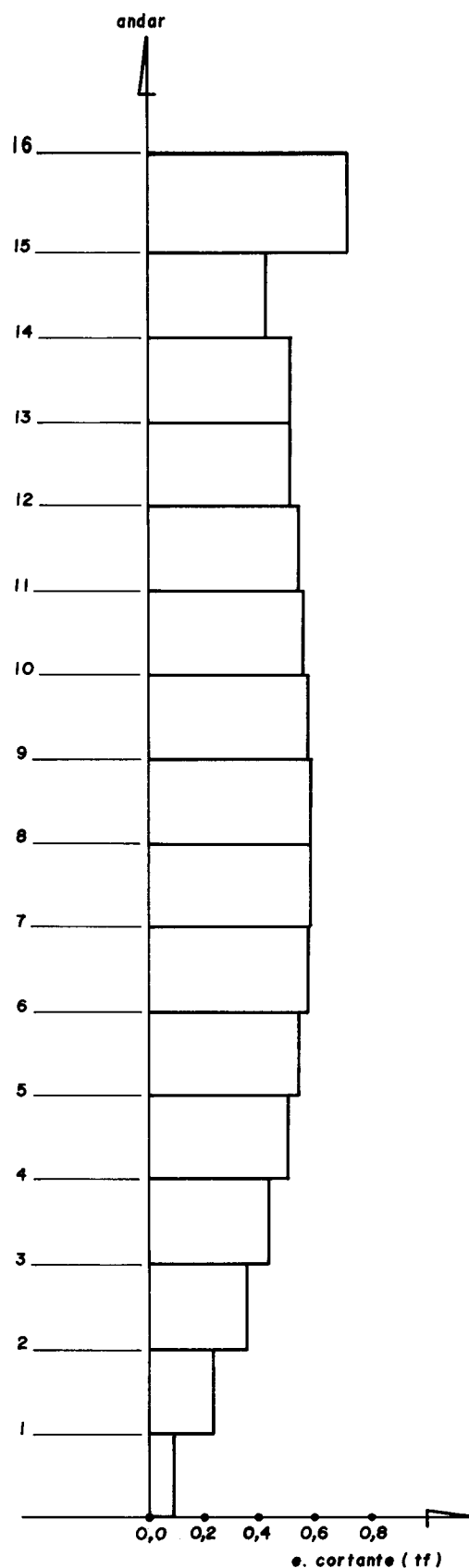


FIG. III.27.- Esforço cortante no núcleo I (segundo z_n).

ELEMENTO: NÚCLEO I		
momento torsor		
tramo	m. t. topo	m. t. base
16 - 15	138,88	-138,88
15 - 14	73,38	-73,38
14 - 13	93,50	-93,50
13 - 12	91,61	-91,61
12 - 11	95,67	-95,67
11 - 10	97,84	-97,84
10 - 9	99,75	-99,75
9 - 8	100,50	-100,50
8 - 7	99,82	-99,82
7 - 6	97,27	-97,27
6 - 5	92,42	-92,42
5 - 4	84,78	-84,78
4 - 3	73,83	-73,83
3 - 2	58,94	-58,94
2 - 1	39,66	-39,66
1 - 0	14,45	-14,45

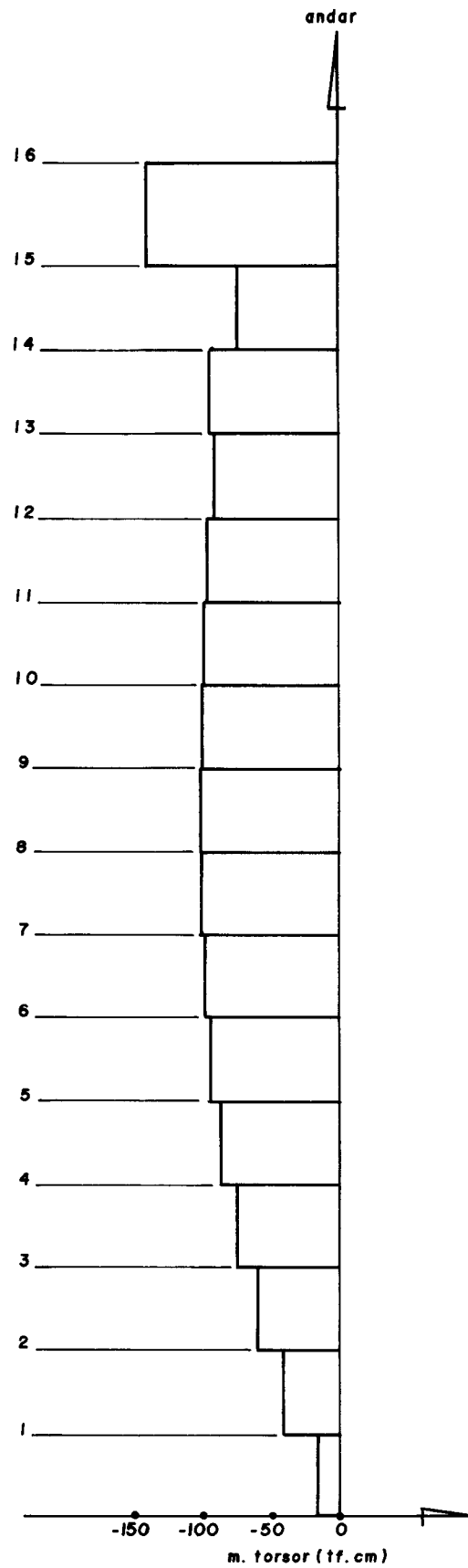


FIG. III.28.- Momento torsor no núcleo I.

ELEMENTO: NÚCLEO I		
bimomento		
tramo	bim. topo	bim. base
16 - 15	-25.305,1	-16.304,1
15 - 14	-9.751,42	-12.206,5
14 - 13	-14.321,2	-13.674,3
13 - 12	-13.653,6	-13.771,5
12 - 11	-14.375,9	-14.265,8
11 - 10	-14.668,6	-14.625,6
10 - 9	-14.941,7	-14.923,8
9 - 8	-15.017,3	-15.070,8
8 - 7	-14.870,9	-15.015,1
7 - 6	-14.435,2	-14.689,1
6 - 5	-13.651,1	-14.022,3
5 - 4	-12.452,3	-12.934,2
4 - 3	-10.769,8	-11.340,1
3 - 2	-8.524,29	-9.126,63
2 - 1	-5.647,12	-6.231,17
1 - 0	-1.996,32	-2.333,47

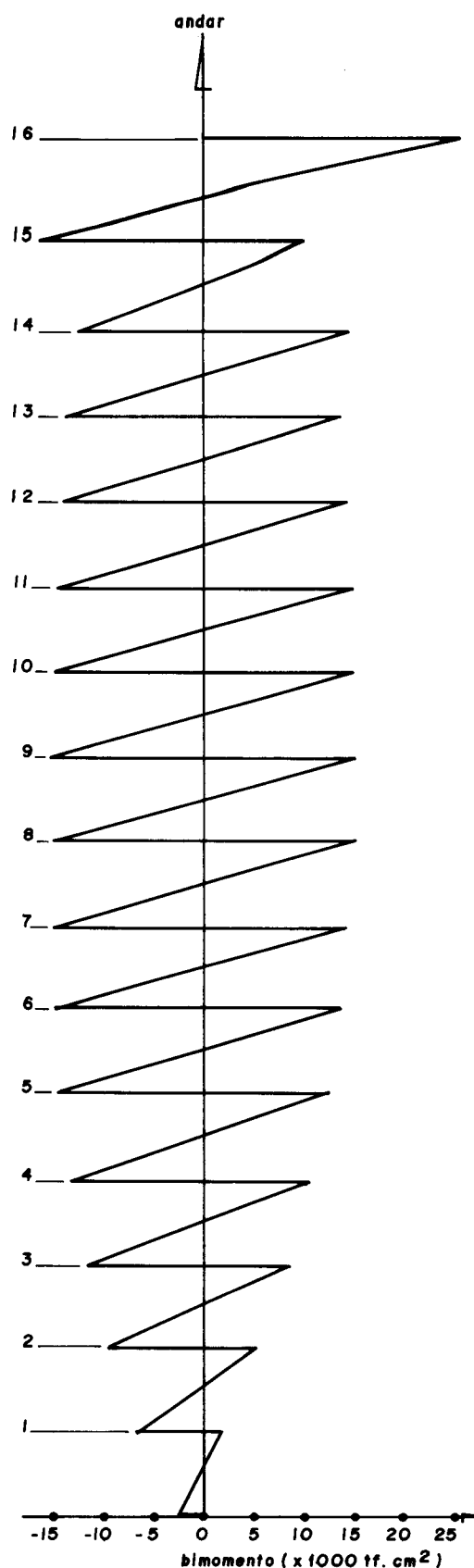


FIG. III.29.- Bimomento no núcleo I.

ELEMENTO: VI ₁		
momento torsor ($\times 10^{-2}$ tf.cm)		
andar	m. t. esq.	m. t. dir.
16	-11,68	11,68
15	-4,07	4,07
14	-5,86	5,86
13	-5,53	5,53
12	-5,68	5,68
11	-5,70	5,70
10	-5,70	5,70
9	-5,64	5,64
8	-5,51	5,51
7	-5,29	5,29
6	-4,97	4,97
5	-4,52	4,52
4	-3,94	3,94
3	-3,21	3,21
2	-2,32	2,32
1	-1,26	1,26

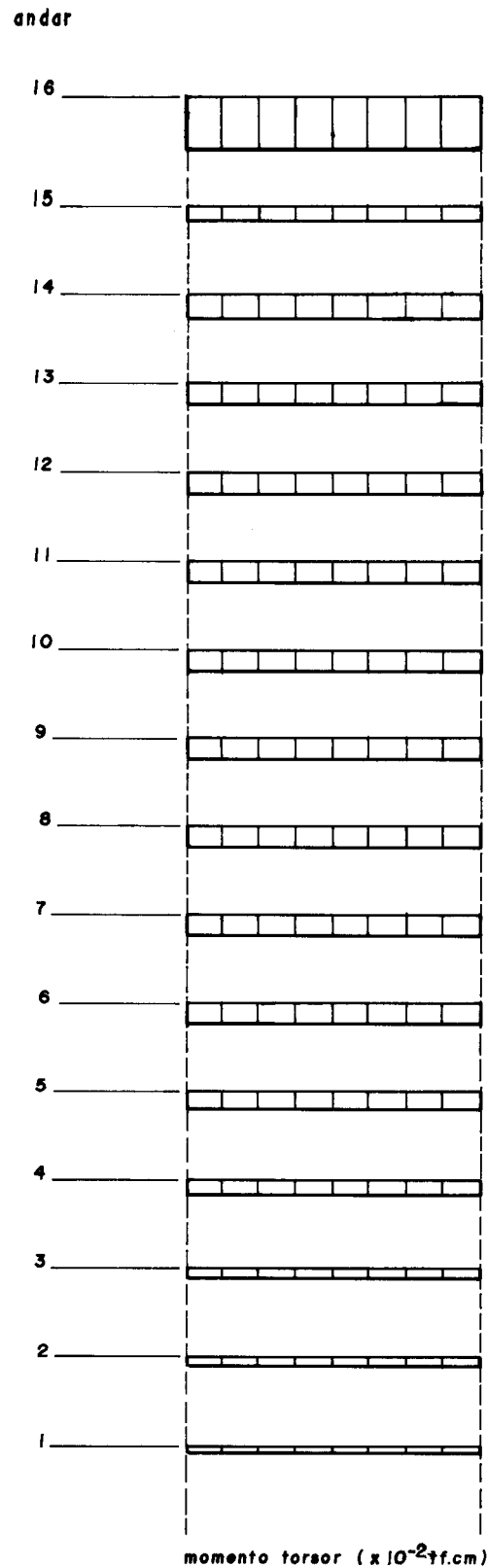


FIG. III.30.- Momento torsor na viga pilar - núcleo nº 1.

ELEMENTO: VI ₁		
momento fletor		
andar	m. f. esq.	m. f. dir.
16	-134,89	-145,54
15	-152,67	-155,69
14	-154,01	-159,04
13	-161,45	-166,22
12	-168,54	-173,63
11	-175,89	-181,16
10	-182,40	-187,86
9	-187,35	-192,95
8	-189,92	-195,58
7	-189,22	-194,86
6	-184,33	-189,81
5	-174,21	-179,39
4	-157,73	-162,41
3	-133,59	-137,56
2	-100,38	-103,37
1	-56,39	-58,11

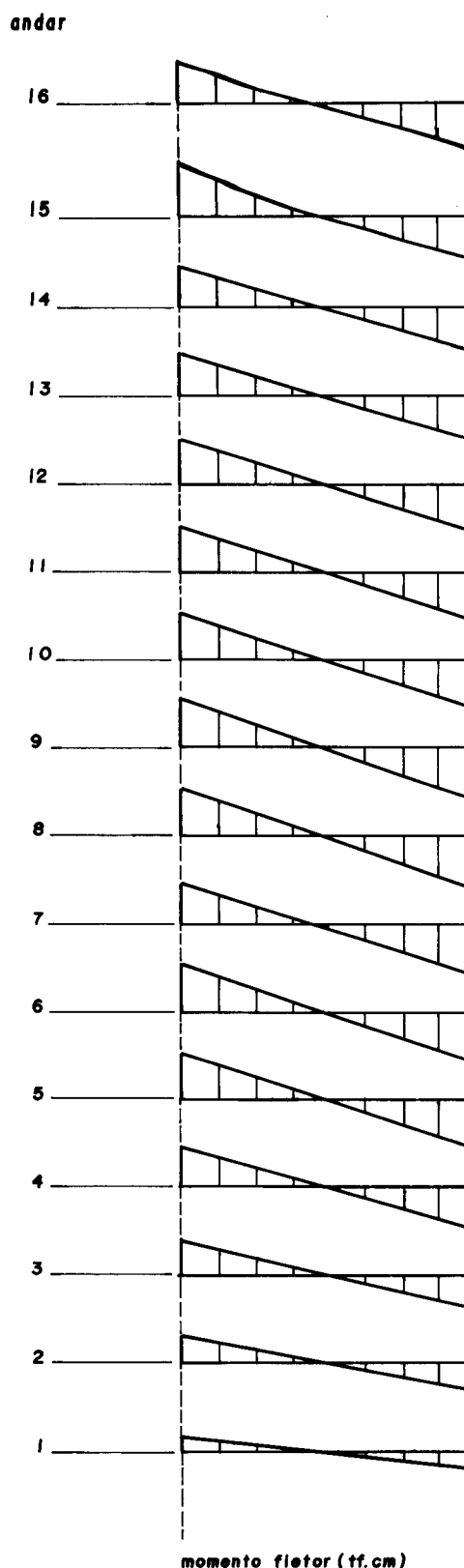


FIG. III. 31.- Momento fletor na viga pilar-núcleo nº 1.

ELEMENTO: VI ₁		
esforço cortante		
andar	e. c. esq.	e. c. dir.
16	0,93	-0,93
15	1,03	-1,03
14	1,04	-1,04
13	1,09	-1,09
12	1,14	-1,14
11	1,19	-1,19
10	1,23	-1,23
9	1,27	-1,27
8	1,28	-1,28
7	1,28	-1,28
6	1,25	-1,25
5	1,18	-1,18
4	1,07	-1,07
3	0,90	-0,90
2	0,68	-0,68
1	0,38	-0,38

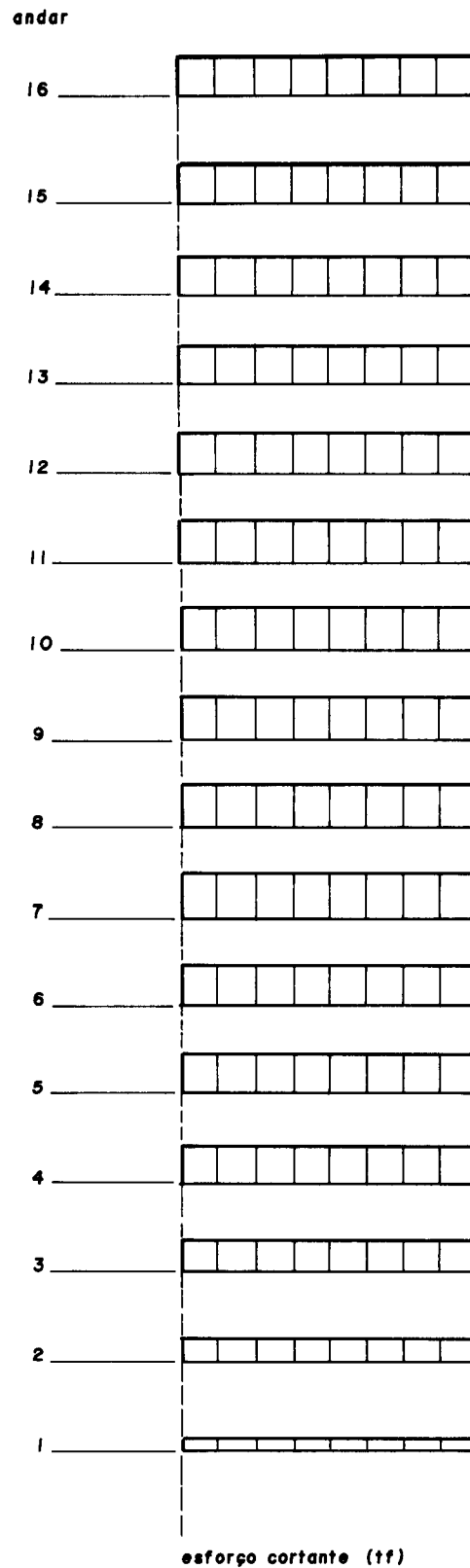


FIG. III.32.- Esforço cortante na viga pilar-núcleo nº 1.

ELEMENTO: V2 ₅		
momento torsor		
andar	m. t. esq.	m. t. dir.
16	1,52	-1,52
15	1,21	-1,21
14	1,23	-1,23
13	1,22	-1,22
12	1,21	-1,21
11	1,18	-1,18
10	1,15	-1,15
9	1,10	-1,10
8	1,03	-1,03
7	0,95	-0,95
6	0,85	-0,85
5	0,73	-0,73
4	0,60	-0,60
3	0,45	-0,45
2	0,29	-0,29
1	0,13	-0,13

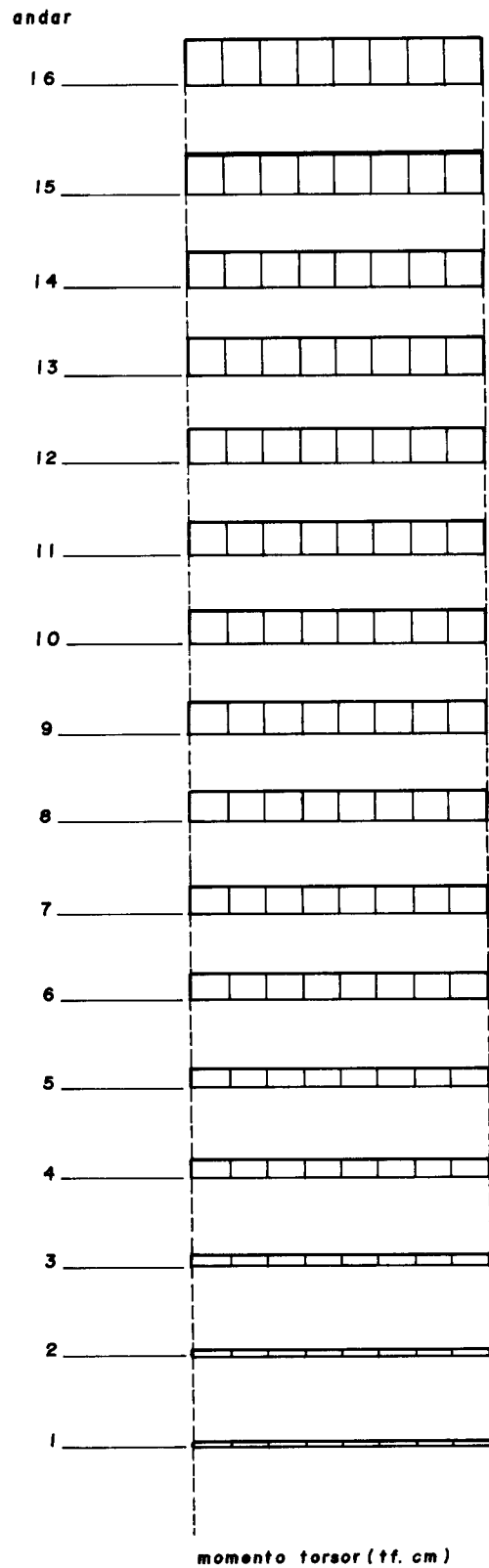


FIG. III.33.- Momento torsor na viga pilar-pilar nº 5.

ELEMENTO: V25		
momento fletor		
andar	m. f. esq.	m. f. dir.
16	-102,60	-78,71
15	-181,86	-168,02
14	-185,44	-169,85
13	-200,92	-185,17
12	-218,27	-202,13
11	-236,76	-220,30
10	-254,92	-238,22
9	-271,27	-254,50
8	-284,30	-267,67
7	-292,32	-276,10
6	-293,43	-277,95
5	-285,42	-271,08
4	-265,70	-252,98
3	-231,15	-220,59
2	-178,10	-170,31
1	-101,60	-97,28

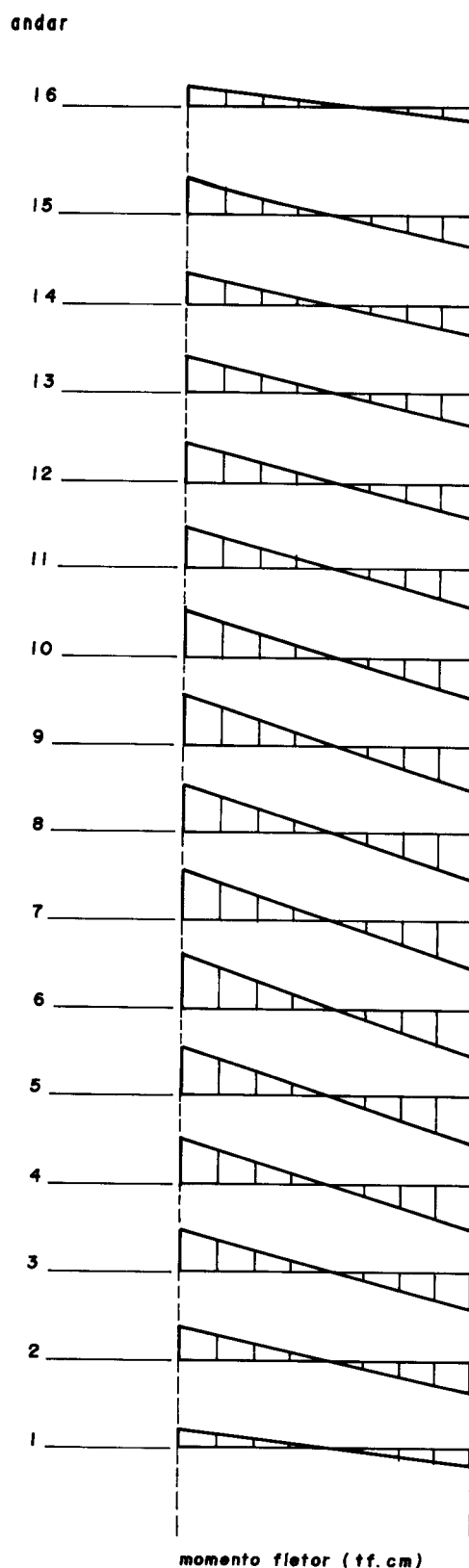


FIG. III.34.- Momento fletor na viga pilar-pilar nº 5.

ELEMENTO: V2 ₅		
esforço cortante		
andar	e. c. esq.	e. c. dir.
16	0,73	-0,73
15	1,40	-1,40
14	1,42	-1,42
13	1,54	-1,54
12	1,68	-1,68
11	1,83	-1,83
10	1,97	-1,97
9	2,10	-2,10
8	2,21	-2,21
7	2,27	-2,27
6	2,29	-2,29
5	2,23	-2,23
4	2,07	-2,07
3	1,81	-1,81
2	1,39	-1,39
1	0,80	-0,80

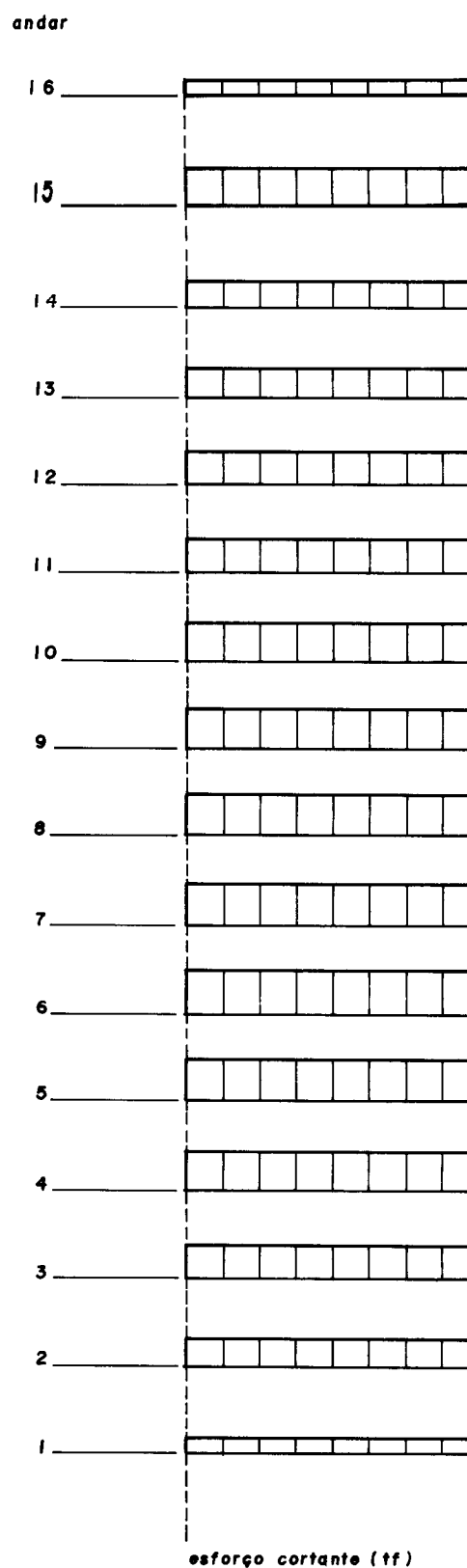


FIG. III.35.- Esforço cortante na viga pilar-pilar nº 5.

ELEMENTO: LINTÉL 3		
momento torsor ($\times 10^{-2}$ tf. cm)		
andar	m. t. esq.	m. t. dir.
16	-2,31	2,31
15	-0,54	0,54
14	-1,01	1,01
13	-0,92	0,92
12	-0,98	0,98
11	-1,00	1,00
10	-1,03	1,03
9	-1,04	1,04
8	-1,04	1,04
7	-1,03	1,03
6	-0,99	0,99
5	-0,93	0,93
4	-0,84	0,84
3	-0,71	0,71
2	-0,53	0,53
1	-0,31	0,31

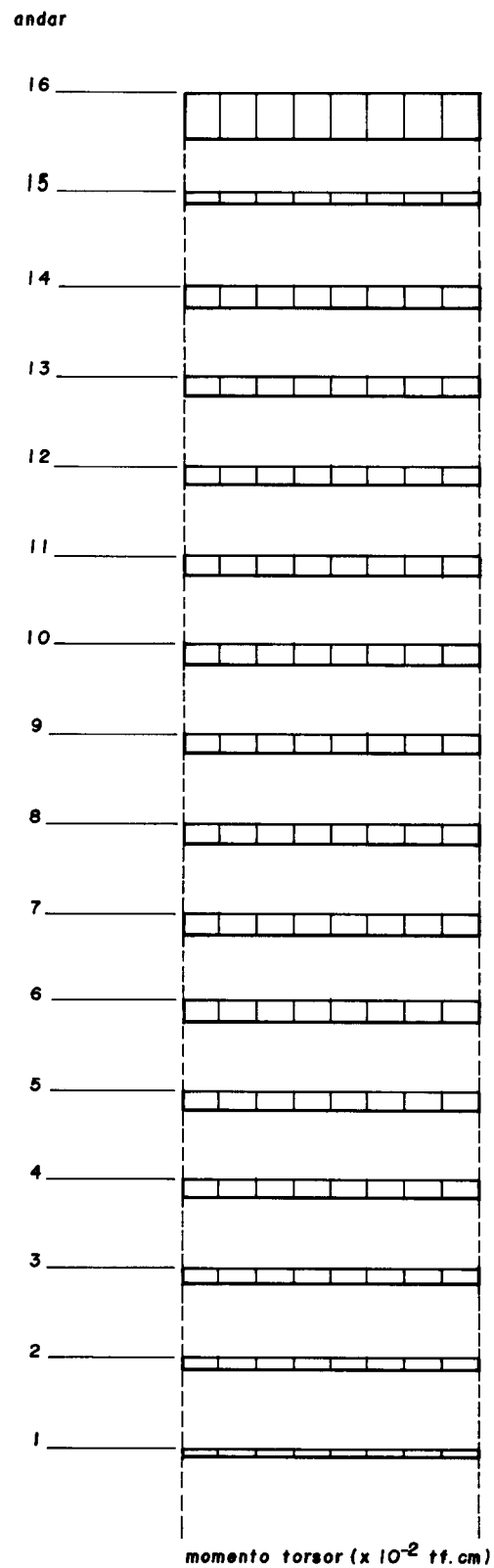


FIG. III. 36.- Momento torsor no lintél nº 3.

ELEMENTO: LINTÉL 3		
momento fletor		
andar	m. f. esq.	m. f. dir.
16	148,86	149,16
15	151,10	151,17
14	154,33	154,46
13	158,63	158,75
12	163,20	163,32
11	167,48	167,61
10	170,88	171,01
9	172,78	172,91
8	172,54	172,68
7	169,51	169,64
6	162,96	163,09
5	152,13	152,25
4	136,15	136,25
3	114,07	114,16
2	84,85	84,92
1	47,28	47,32

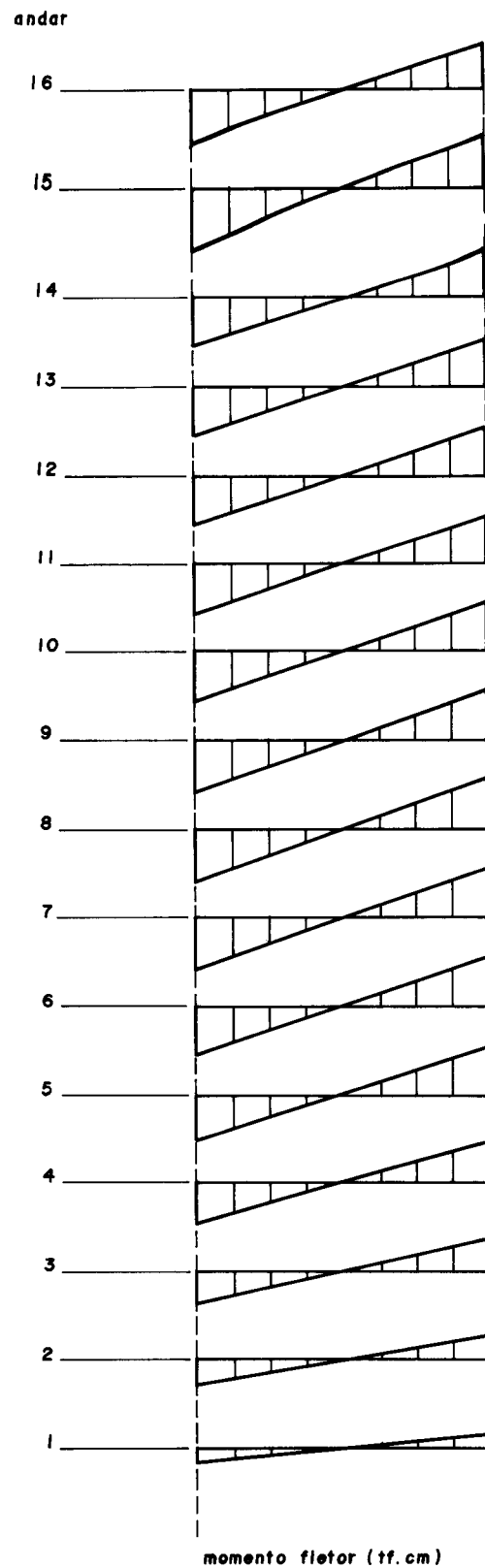


FIG. III.37. - Momento fletor no lintél nº 3.

ELEMENTO: LINTÉL 3		
esforço cortante		
andar	e. c. esq.	e. c. dir.
16	-0,75	0,75
15	-0,76	0,76
14	-0,77	0,77
13	-0,79	0,79
12	-0,82	0,82
11	-0,84	0,84
10	-0,85	0,85
9	-0,86	0,86
8	-0,86	0,86
7	-0,85	0,85
6	-0,82	0,82
5	-0,76	0,76
4	-0,68	0,68
3	-0,57	0,57
2	-0,42	0,42
1	-0,24	0,24

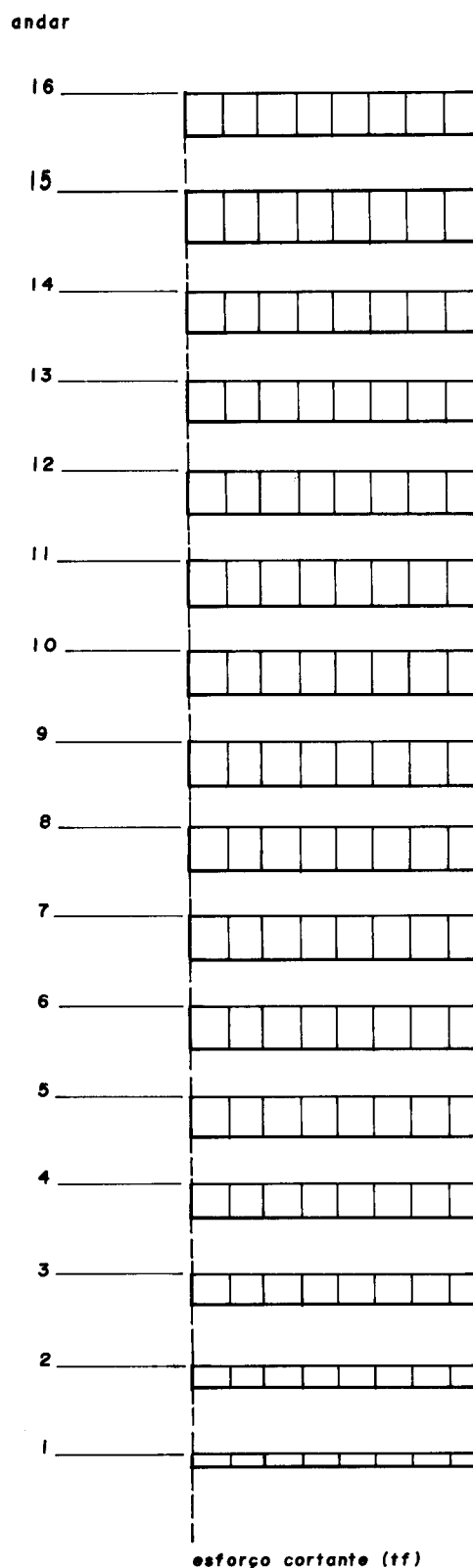


FIG. III.38.- Esforço cortante no lintel nº 3.

III.7- EXEMPLO Nº 6

Trata-se do edifício de 12 andares, que tem a planta baixa representada pela FIG.III.39, e que é solicitado pelo carregamento indicado na FIG.III.40.

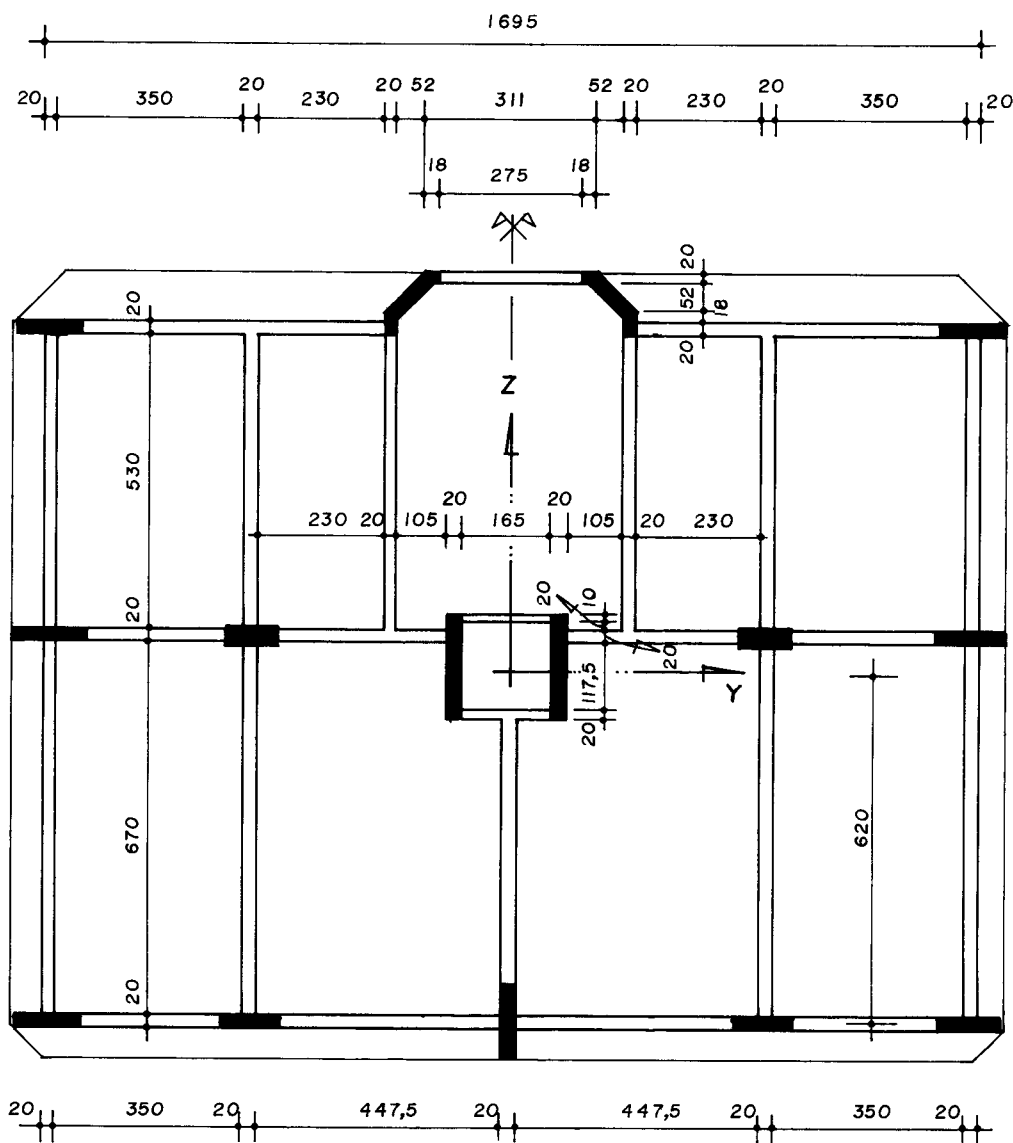


FIG.III.39. - Exemplo nº 6: estrutura (planta baixa).

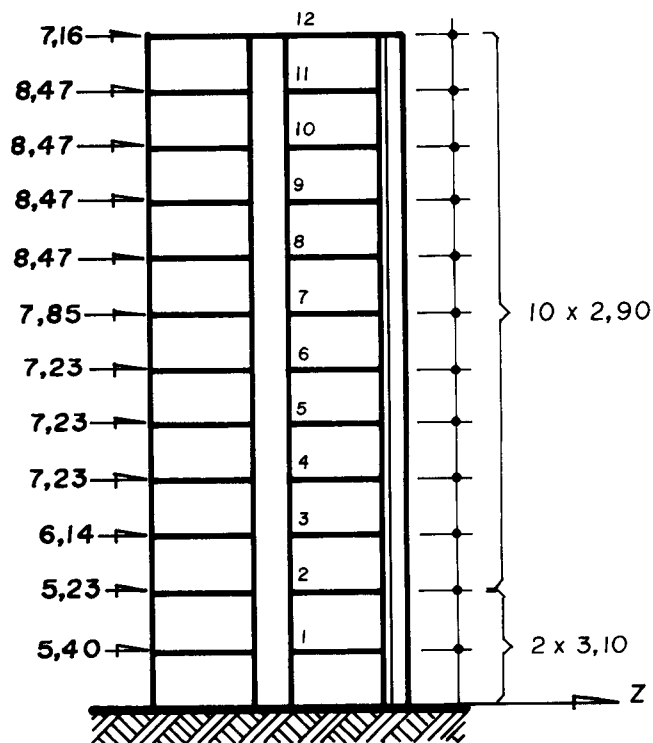


FIG. III.40.- Carga de vento (tf).

Para análise, via computador, o modelo discretizado está mostrado na FIG.III.41, que mostra também, em detalhe, o arranjo estrutural escolhido para as barras centrais do edifício (FIG.III.41.2 e III.41.3). Visto que as barras horizontais, que se apoiam nos pilares centrais, não concorrem no seu centro de gravidade, característica esta que foge à limitação do programa, optou-se pelo seguinte artifício: 1) transformou-se cada pilar central em um painel (FIG.III.41.3) que por sua vez: 2) se subdivide em três, pela necessidade das prumadas onde concorrem as barras horizontais ($v2_3$, $v2_4$ e $v2_6$, para o pilar da esquerda, p.ex.), prumadas estas, dotadas com pilares de rigidez nula e vigas de rigidez infinita, enquanto que toda rigidez do pilar fica concentrada nos nós que situam-se no seu eixo (p.ex.: nó 14, para o pilar da esquerda). Outros pilares fictícios (pilares com rigidez desprezível) se fizeram necessários em outros pontos, onde só concorrem barras horizontais. Os círcu

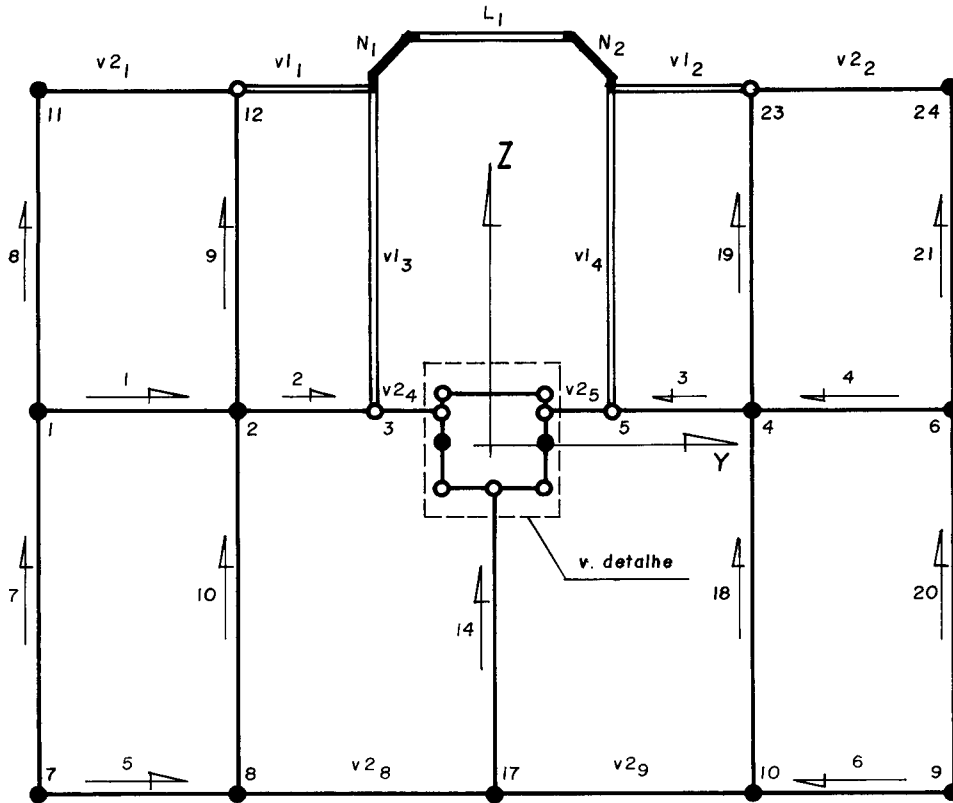


FIG. III. 41.1. - Forma (para análise automática).

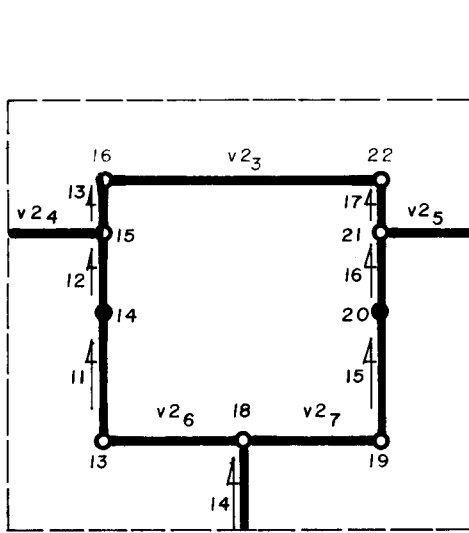


FIG. III. 41.2. - Detalhes dos pilares 14 e 20.

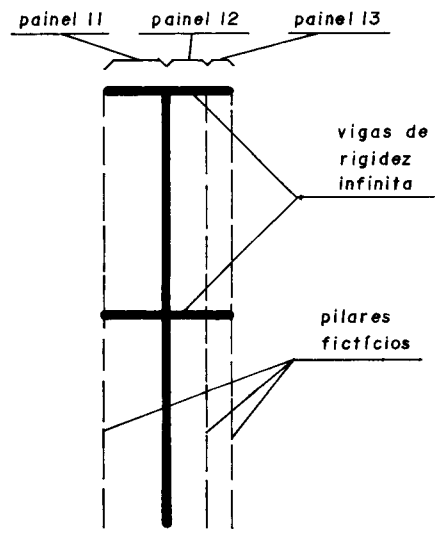


FIG. III. 41.3. - Pilar 14 visto como um painel.

FIG. III. 41. - Exemplo 6 - modelo discreto (planta baixa e detalhes).

los brancos representam nós com estes pilares, ao passo que os círculos pretos representam os demais (p.ex.: 23 e 24, respectivamente, FIG.III.41.1).

Adotou-se 200 tf/cm^2 para módulo de elasticidade longitudinal e coeficiente de Poisson igual a 0,25.

As secções transversais dos elementos possuem as seguintes dimensões:

- pilares 1, 6 e 17: $20 \times 120 \text{ cm}^2$; pilares 2 e 4: $30 \times 90 \text{ cm}^2$; pilares 7, 8, 9, 10, 11 e 24: $20 \times 100 \text{ cm}^2$; e os pilares 14 e 20 possuem $20 \times 185 \text{ cm}^2$;
- os núcleos 1 e 2 têm suas secções transversais detalhadas na FIG.III.42, que indica, inclusive, a situação de seus sistemas locais de referência (calculada pelo programa), cujos centros de torção têm as coordenadas:
 - . c.c.₁ (-203,62 cm; 661,94 cm), para o núcleo 1; e, c.c.₂ (203,62 cm; 661,94 cm), para o núcleo 2; relativamente aos eixos concorrentes nos seus centros de torção (O_n, x_n, y_n, z_n) os núcleos têm seus centros de gravidade nos pontos:

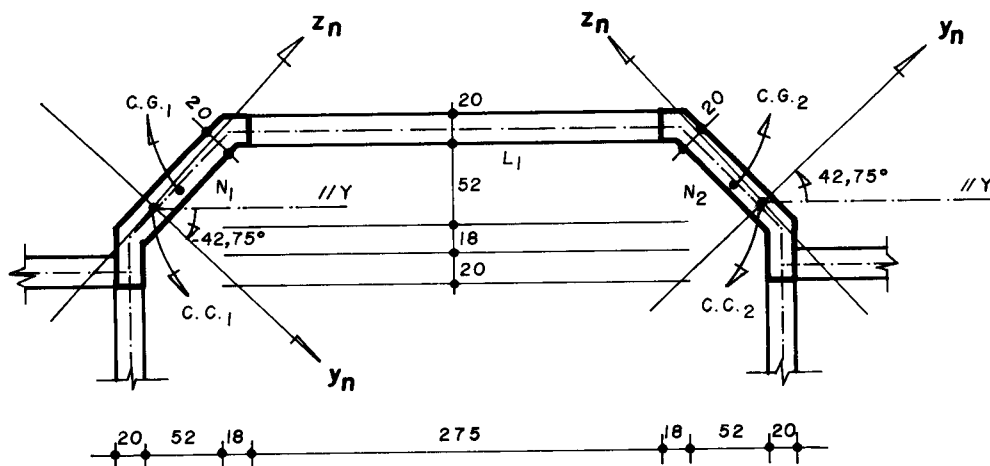


FIG. III.42. - Detalhes dos núcleos.

- . c.g.₁ (5,78 cm; 19,37 cm), para o núcleo 1; e,
- c.g.₂ (-5,78 cm; 19,37 cm), para o núcleo 2.

Com exceção das vigas dos painéis 11, 12, 13, 15, 16 e 17, que têm rigidez infinita, e da viga pilar-pilar nº 3, cuja secção transversal tem dimensões 10x60 cm², todas as demais barras horizontais têm dimensões 20x60 cm².

Os andares têm suas alturas indicadas na FIG.III.40.

Alguns dos resultados fornecidos pelo programa es tão representados pelas figuras que se seguem.

O carregamento e a estrutura são simétricos, rela tivamente ao eixo Z, por consequência a laje desloca-se pa- ralelamente a este eixo, sem rotacionar-se. Estes desloca- mentos, de corpo rígido, estão indicados na FIG.III.43.

Nas FIG.III.44 a III.50, tem-se os valores e dia- gramas das solicitações do núcleo 1, entre as quais pode-se observar que apesar da estrutura não rotacionar, surge no núcleo esforço de torção, oriundo de suas deformações por empenamento.

Na FIG.III.51 tem-se o diagrama que comprova o e- quilíbrio de momentos, segundo o eixo Y, nos nós 17 e 18. Em primeiro plano tem-se as vigas pilar-pilar nºs 8 e 9 e o pilar nº 17; no plano intermediário tem-se as vigas que for mam o painel 14, e, no plano de fundo as vigas pilar-pilar nºs 6 e 7 fecham o diagrama.

As vigas do painel 7 têm seus diagramas de momen- tos fletores e esforços cortantes representados nas figuras III.52 e III.53.

As vigas pilar-núcleo levam em conta a absorção de esforços de torção, e para a de nº 1 estes esforços, a- lém dos de flexão e cortante, estão representados nas figu- ras III.54, III.55 e III.56, respectivamente.

A viga pilar-pilar nº 4 fica sujeita aos esforços

indicados nas figuras III.57, III.58 e III.59. Conforme se equacionou, estas barras também levam em conta sua rigidez à torção, aliás, no presente exemplo, a referida viga está sujeita aos esforços de torção em intensidade superior aos de flexão.

Apesar de sua posição particular na estrutura, por ter uma secção transversal de simetria pertencente, também, ao plano XZ, de simetria da estrutura e carregamento, o lintel estará sujeito a esforços de flexão, ao contrário, por exemplo, do lintel do exemplo nº 4, que, em situação particular semelhante, não estará sujeito a qualquer esforço, devido às ações horizontais lá atuantes. No corrente exemplo, porém, as deformações por flexão e empenamento dos núcleos solicitam suas barras de contraventamento. Para o lintel estes esforços estão indicados na figura III.60.

O pilar nº 14, que tem seus eixos de referência, com origem no seu centro de gravidade, paralelos e de sentidos coincidentes aos da estrutura ($y_i//Y$, $z_i//Z$ e $x_i//X$), tem seus esforços indicados nas figuras III.61, III.62 e III.63, que trazem, respectivamente, os diagramas de momentos (segundo y_i), esforço normal e esforço cortante (segundo z_i); com relação às demais coordenadas, os esforços são nulos (flexão(segundo z_i), cortante(em relação a y_i) e torção).

Por fazer com o pilar 14 uma composição simétrica, o pilar 20 estará sujeito exatamente aos mesmos esforços, e pode-se observar então a absorção expressiva, junto à fundação, dos esforços horizontais por este par de peças; das 87,35 tf a que o edifício está sujeito, 52,96 tf são atraídas pelos pilares 14 e 20, ou seja, a reação horizontal que aí se desperta, corresponde a aproximadamente 60% da ação imposta.

EXEMPLO Nº 6

deslocamento linear das lajes

andar	deslocamento (cm)
12	6,61
11	6,35
10	6,04
9	5,65
8	5,18
7	4,62
6	3,97
5	3,25
4	2,49
3	1,70
2	0,95
1	0,29

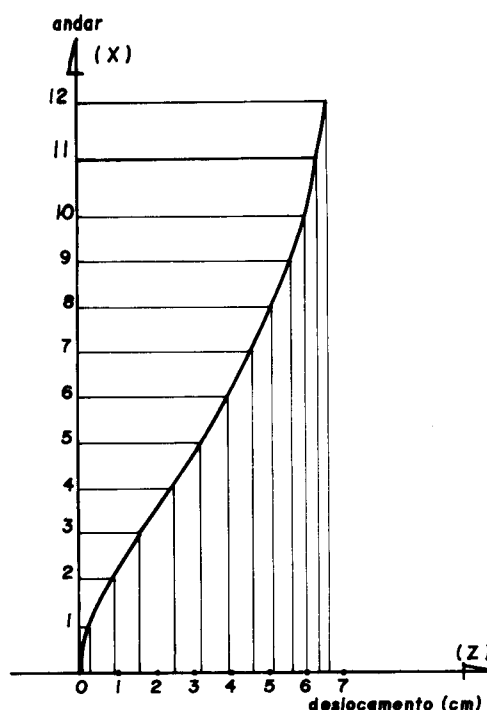


FIG. III.43.- Exemplo nº 6 - deslocamento linear.

ELEMENTO: NÚCLEO I

momento fletor segundo y_n

tramo	m. f. topo	m. f. base
12 - 11	398,29	-94,38
11 - 10	584,72	-195,43
10 - 9	831,26	-155,48
9 - 8	976,93	-70,75
8 - 7	1090,47	62,81
7 - 6	1153,36	226,23
6 - 5	1170,08	418,79
5 - 4	1127,75	668,76
4 - 3	976,84	1017,78
3 - 2	637,65	1529,26
2 - 1	-17,75	2479,84
1 - 0	-1437,14	3965,34

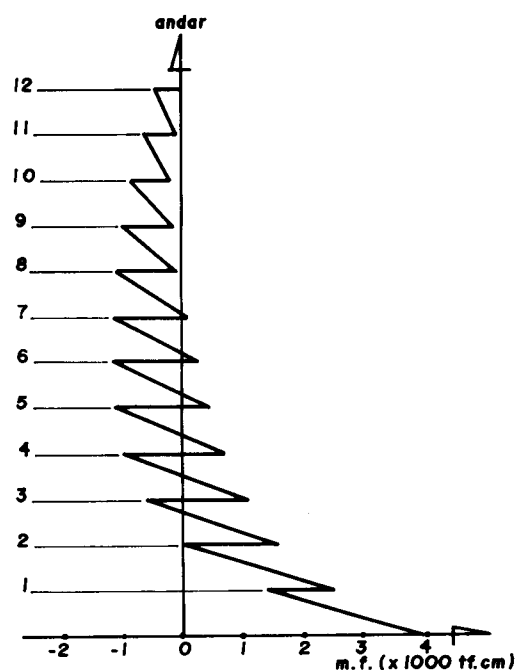


FIG. III.44.- Momentos fletores no núcleo I.

ELEMENTO: NÚCLEO I

momento fletor segundo z_n

tramo	m. f. topo	m. f. base
12 - 11	43,39	38,00
11 - 10	47,82	43,68
10 - 9	61,71	56,19
9 - 8	76,22	70,39
8 - 7	90,93	85,22
7 - 6	104,59	99,48
6 - 5	116,26	112,18
5 - 4	124,73	122,35
4 - 3	127,62	128,08
3 - 2	121,38	127,22
2 - 1	91,97	106,83
1 - 0	34,00	63,42

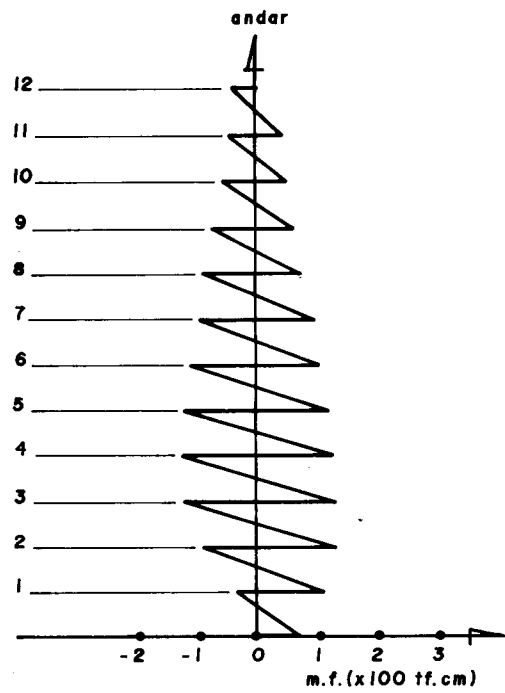


FIG. III.45.- Momentos fletores no núcleo I (segundo z_n).

ELEMENTO: NÚCLEO I

esforço normal

tramo	e. n. topo	e. n. base
12 - 11	-1,04	1,04
11 - 10	-2,37	2,37
10 - 9	-4,10	4,10
9 - 8	-6,33	6,33
8 - 7	-9,11	9,11
7 - 6	-12,43	12,43
6 - 5	-16,24	16,24
5 - 4	-20,46	20,46
4 - 3	-24,95	24,95
3 - 2	-29,48	29,48
2 - 1	-33,60	33,60
1 - 0	-36,42	36,42

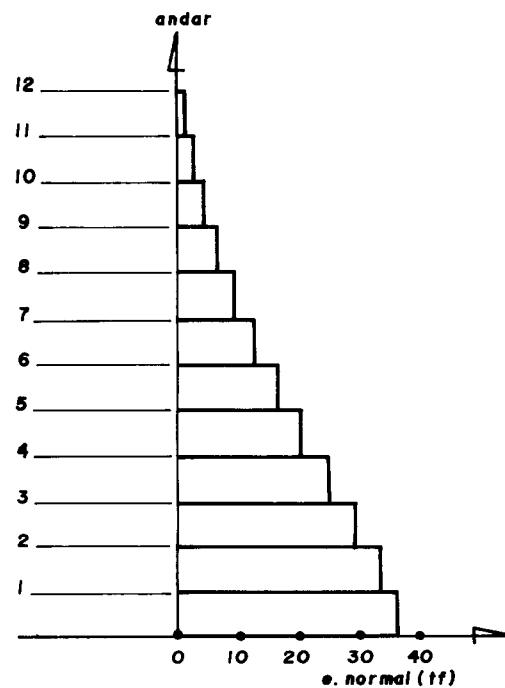


FIG. III.46.- Esforços normais no núcleo I.

ELEMENTO: NÚCLEO I

esforço cortante (segundo y_n)

tramo	cort. topo	cort. base
12 - 11	-0,28	0,28
11 - 10	-0,32	0,32
10 - 9	-0,41	0,41
9 - 8	-0,51	0,51
8 - 7	-0,61	0,61
7 - 6	-0,70	0,70
6 - 5	-0,79	0,79
5 - 4	-0,85	0,85
4 - 3	-0,88	0,88
3 - 2	-0,86	0,86
2 - 1	-0,64	0,64
1 - 0	-0,31	0,31

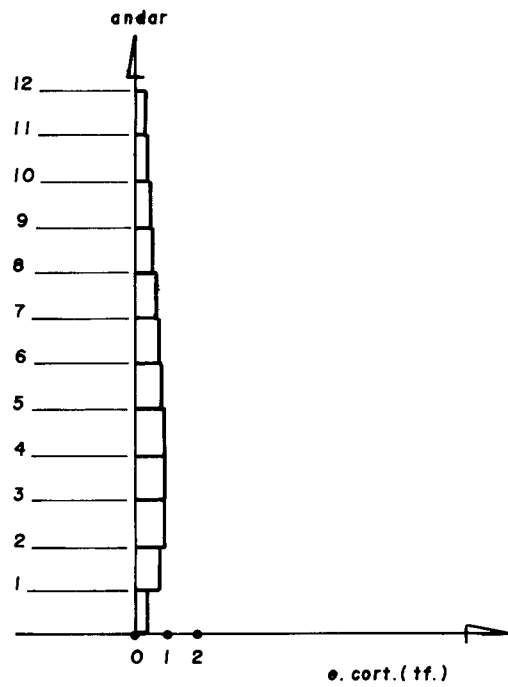


FIG. III.47.- Esforço cortante no núcleo I (segundo y_n).

ELEMENTO: NÚCLEO I

esforço cortante (segundo z_n)

tramo	cort. topo	cort. base
12 - 11	1,05	-1,05
11 - 10	1,34	-1,34
10 - 9	2,33	-2,33
9 - 8	3,12	-3,12
8 - 7	3,98	-3,98
7 - 6	4,76	-4,76
6 - 5	5,48	-5,48
5 - 4	6,19	-6,19
4 - 3	6,88	-6,88
3 - 2	7,47	-7,47
2 - 1	7,94	-7,94
1 - 0	8,16	-8,16

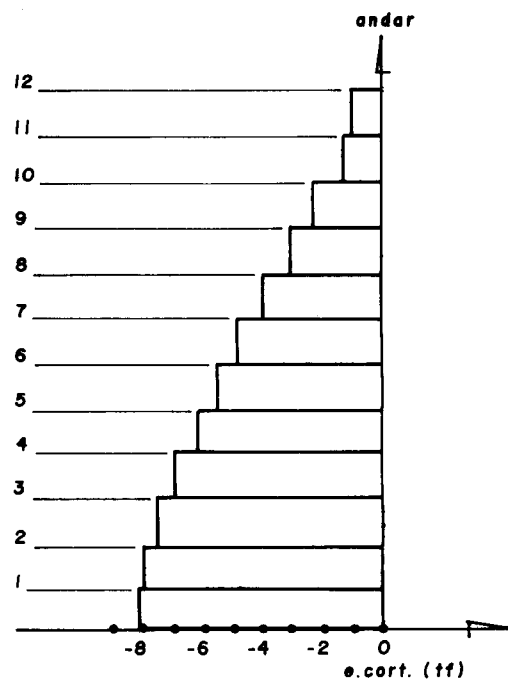


FIG. III.48.- Esforço cortante no núcleo I (segundo z_n).

ELEMENTO: NÚCLEO I		
momento torsor		
tramo	m. t. topo	m. t. base
12 - 11	-4,23	4,23
11 - 10	-4,11	4,11
10 - 9	-4,86	4,86
9 - 8	-5,65	5,65
8 - 7	-6,46	6,46
7 - 6	-7,20	7,20
6 - 5	-7,82	7,82
5 - 4	-8,22	8,22
4 - 3	-8,28	8,28
3 - 2	-7,81	7,81
2 - 1	-5,86	5,86
1 - 0	-2,41	2,41

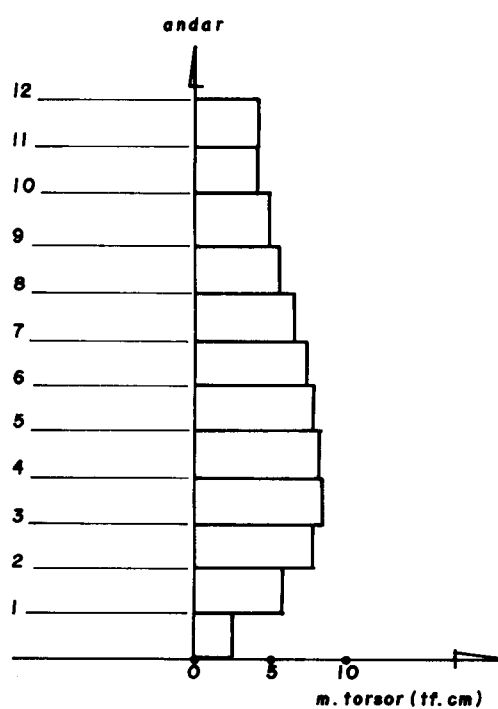


FIG. III.49.- Momento torsor no núcleo I.

ELEMENTO: NÚCLEO I		
bimomento		
tramo	bim. topo	bim. base
12 - 11	675,89	550,77
11 - 10	548,82	642,96
10 - 9	655,09	753,74
9 - 8	766,64	872,87
8 - 7	885,97	987,88
7 - 6	999,91	1089,20
6 - 5	1099,13	1167,57
5 - 4	1174,12	1209,88
4 - 3	1210,81	1189,76
3 - 2	1182,22	1083,46
2 - 1	1051,79	764,37
1 - 0	708,50	39,09

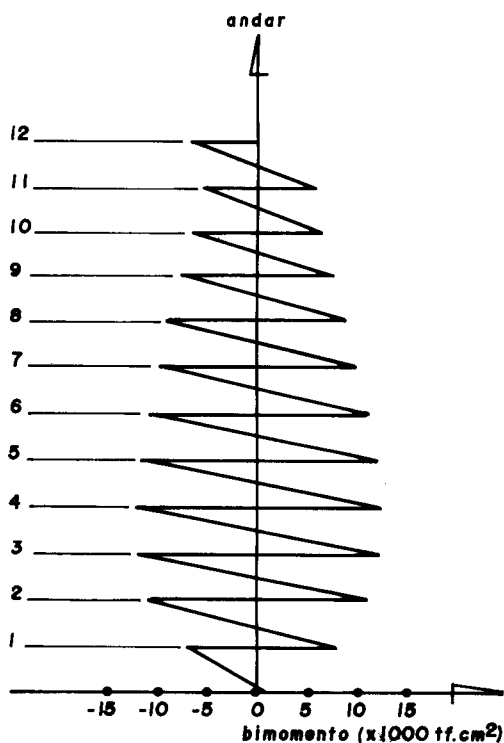


FIG. III.50.- Bimomento no núcleo I.

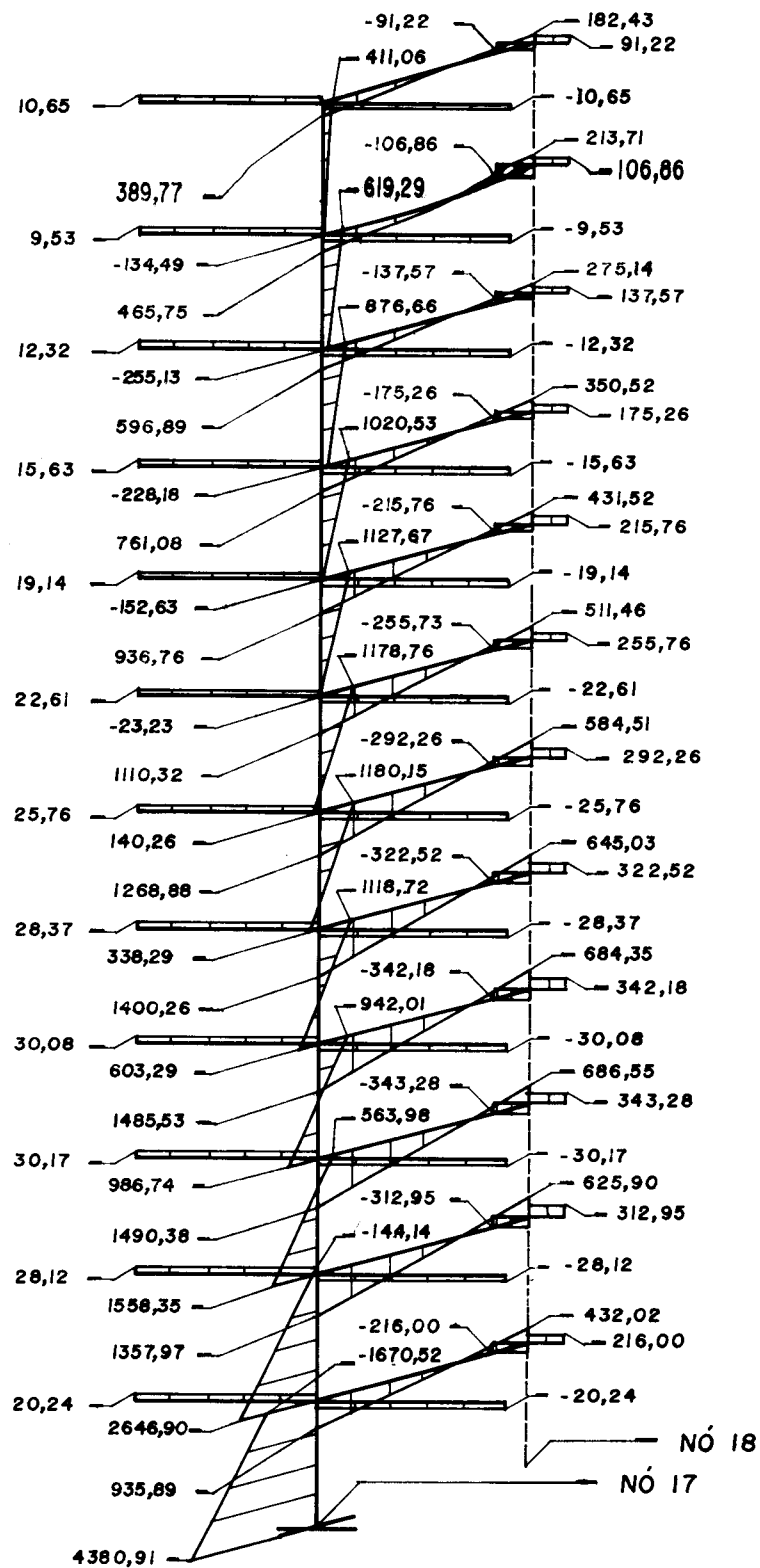


FIG. III. 51.- Verificação de equilíbrio de momentos na direção Y para os nós 17 e 18.

ELEMENTO: VIGAS DO PAINÉL 7		
momento fletor		
andar	m. f. esq.	m. f. dir.
12	134,12	111,08
11	251,07	211,79
10	304,70	257,01
9	382,28	320,17
8	464,60	387,60
7	545,73	453,91
6	619,40	513,98
5	679,45	562,64
4	716,30	592,02
3	714,79	589,43
2	631,22	516,78
1	409,27	331,10

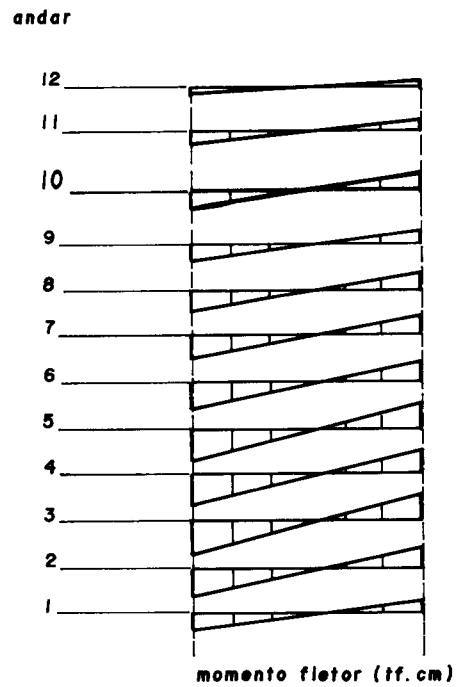


FIG. III.52.- Momento fletor nas vigas do painel 7.

ELEMENTO: VIGAS DO PAINÉL 7		
esforço cortante		
andar	e. c. esq.	e. c. dir.
12	0,36	-0,36
11	0,67	-0,67
10	0,81	-0,81
9	1,02	-1,02
8	1,24	-1,24
7	1,45	-1,45
6	1,64	-1,64
5	1,80	-1,80
4	1,90	-1,90
3	1,89	-1,89
2	1,66	-1,66
1	1,07	-1,07

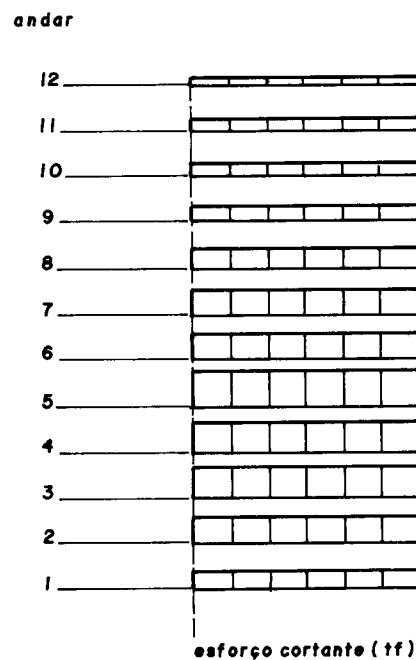


FIG. III.53.- Esforço cortante nas vigas do painel 7.

ELEMENTO: VI ₁		
momento torsor		
andar	m. t. esq.	m. t. dir.
12	90,80	-90,80
11	61,67	-61,67
10	99,89	-99,89
9	100,29	-100,29
8	85,18	-85,18
7	94,10	-94,10
6	62,65	-62,65
5	74,41	-74,41
4	39,60	-39,60
3	50,76	-50,76
2	22,68	-22,68
1	31,21	-31,21

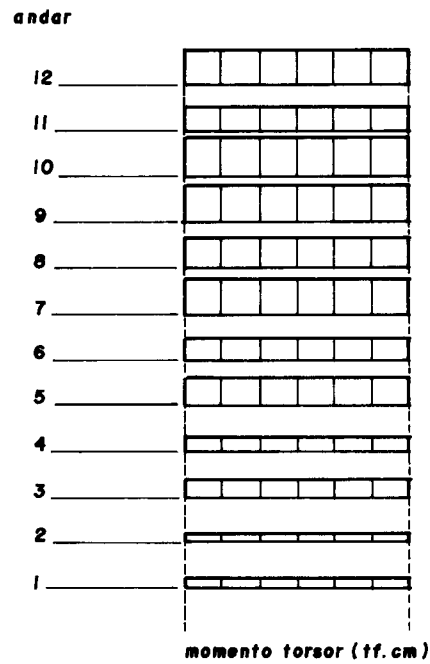


FIG. III.54.- Momento torsor na viga pilar-núcleo nº 1.

ELEMENTO: VI ₁		
momento fletor		
andar	m. f. esq.	m. f. dir.
12	17,12	518,83
11	6,98	361,08
10	22,18	560,45
9	22,35	565,03
8	18,77	473,10
7	20,91	525,44
6	13,38	342,77
5	16,19	410,68
4	7,79	210,27
3	10,63	274,34
2	-11,29	140,10
1	7,93	159,76

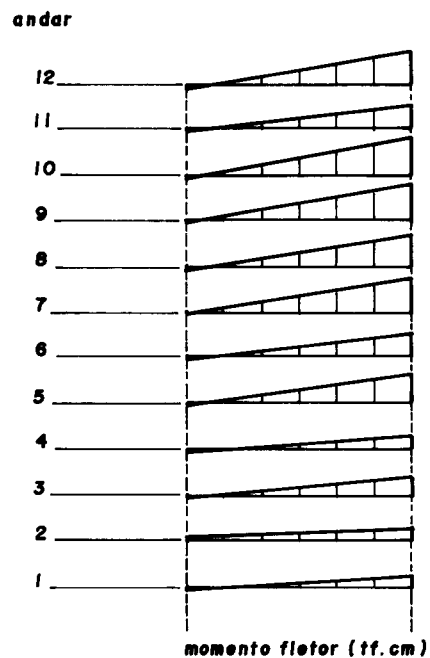


FIG. III.55.- Momento fletor na viga pilar-núcleo nº 1.

ELEMENTO: VI ₁		
esforço cortante		
andar	e.c. esq.	e.c. dir.
12	-1,91	1,91
11	-1,31	1,31
10	-2,08	2,08
9	-2,10	2,10
8	-1,76	1,76
7	-1,95	1,95
6	-1,27	1,27
5	-1,52	1,52
4	-0,78	0,78
3	-1,02	1,02
2	-0,46	0,46
1	-0,60	0,60

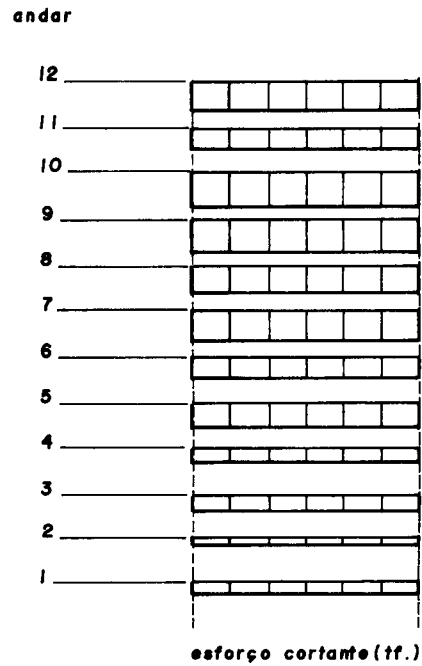


FIG. III.56.- Esforço cortante na viga pilar-núcleo nº 1.

ELEMENTO: V2 ₄		
momento torsor		
andar	m.t. esq.	m. t. dir.
12	72,31	-72,31
11	86,94	-86,94
10	112,47	-112,47
9	144,02	-144,02
8	177,93	-177,93
7	211,43	-211,43
6	242,09	-242,09
5	267,56	-267,56
4	284,20	-284,20
3	285,39	-285,39
2	260,06	-260,06
1	179,16	-179,16

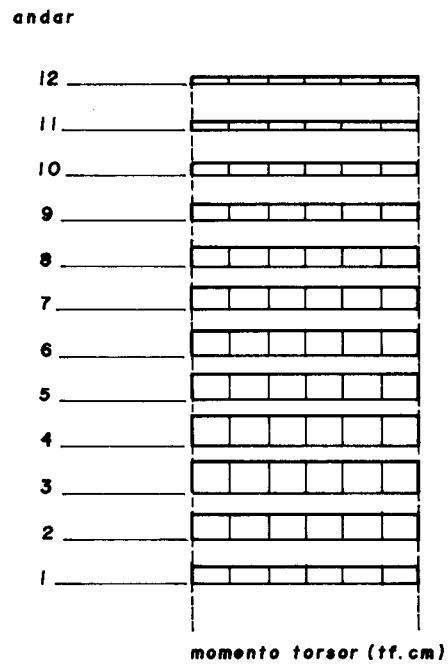


FIG. III.57.- Momento torsor na viga pilar-pilar nº 4.

ELEMENTO: V2 ₄		
momento fletor		
andar	m. f. esq.	m. f. dir.
12	-58,43	0,00
11	-73,31	0,00
10	-92,73	0,00
9	-117,58	0,00
8	-144,08	0,00
7	-170,25	0,00
6	-194,12	0,00
5	-213,82	0,00
4	-226,47	0,00
3	-226,90	0,00
2	-205,95	0,00
1	-141,03	0,00

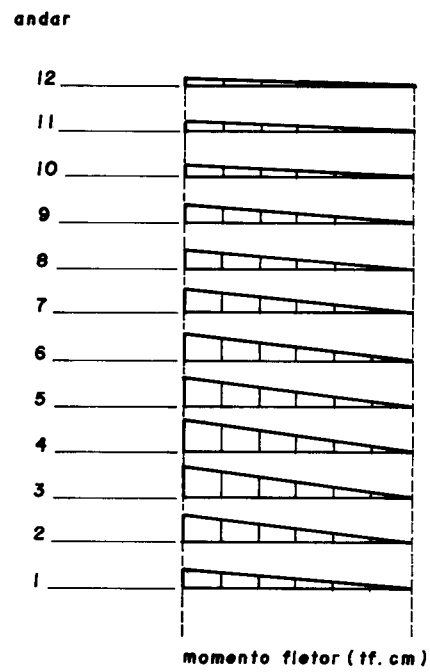


FIG. III.58.- Momento fletor na viga pilar-pilar nº 4.

ELEMENTO: V2 ₄		
esforço cortante		
andar	e. c. esq.	e. c. dir.
12	0,47	-0,47
11	0,59	-0,59
10	0,74	-0,74
9	0,94	-0,94
8	1,15	-1,15
7	1,36	-1,36
6	1,55	-1,55
5	1,71	-1,71
4	1,81	-1,81
3	1,82	-1,82
2	1,65	-1,65
1	1,13	-1,13

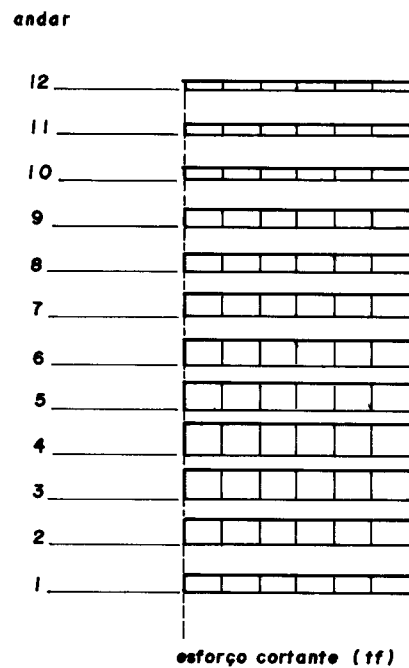


FIG. III.59.- Esforço cortante na viga pilar-pilar nº 4.

ELEMENTO: LINTÉL 1

momento fletor		
andar	m. f. esq.	m. f. dir
12	64,64	-64,64
11	67,83	-67,83
10	89,18	-89,18
9	115,13	-115,13
8	142,84	-142,84
7	170,28	-170,28
6	195,42	-195,42
5	216,44	-216,44
4	230,45	-230,45
3	232,02	-232,02
2	215,39	-215,39
1	153,28	-153,28

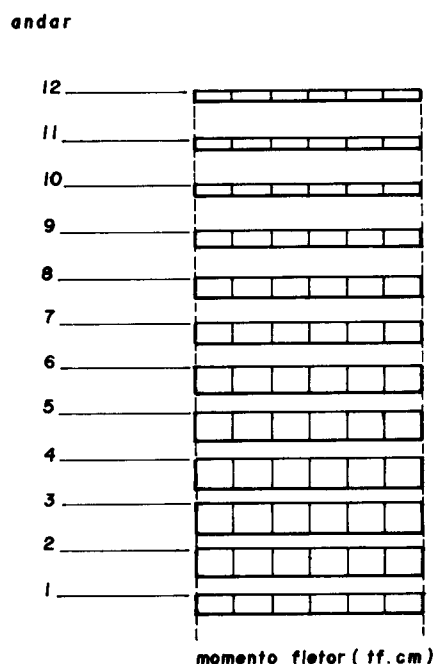


FIG. III. 60.- Momento fletor no lintél nº 1.

ELEMENTO: P. INDIVIDUAL Nº14

momento fletor segundo y _i		
tramo	m. f. topo	m. f. base
12 - 11	232,08	-1352,40
11 - 10	1629,25	-1769,45
10 - 9	2125,52	-1980,10
9 - 8	2434,26	-1968,10
8 - 7	2527,55	-1781,26
7 - 6	2444,67	-1447,12
6 - 5	2205,56	-950,16
5 - 4	1787,37	-150,81
4 - 3	1039,21	1204,50
3 - 2	-313,08	3360,48
2 - 1	-2548,37	7827,96
1 - 0	-7268,35	15478,60

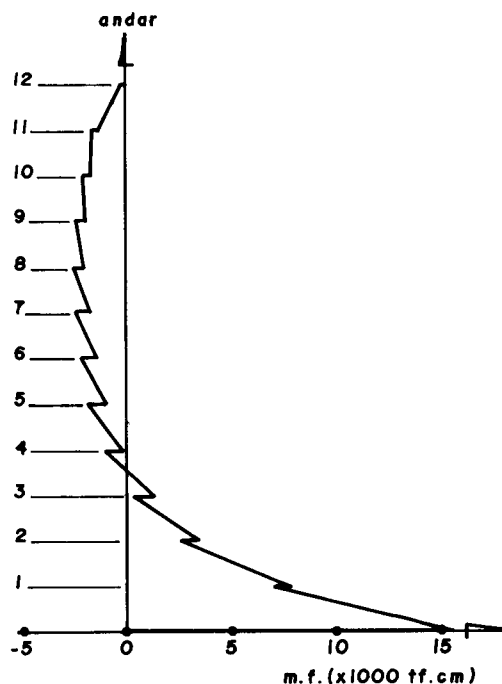


FIG. III. 61.- Momento fletor no pilar individual nº 14 (segundo y_i)

ELEMENTO: P. INDIVIDUAL Nº 14		
esforço normal		
tramo	e. n. topo	e. n. base
12 - 11	-0,05	0,05
11 - 10	-0,08	0,08
10 - 9	-0,13	0,13
9 - 8	-0,19	0,19
8 - 7	-0,28	0,28
7 - 6	-0,38	0,38
6 - 5	-0,51	0,51
5 - 4	-0,65	0,65
4 - 3	-0,80	0,80
3 - 2	-0,95	0,95
2 - 1	-1,10	1,10
1 - 0	-1,21	1,21

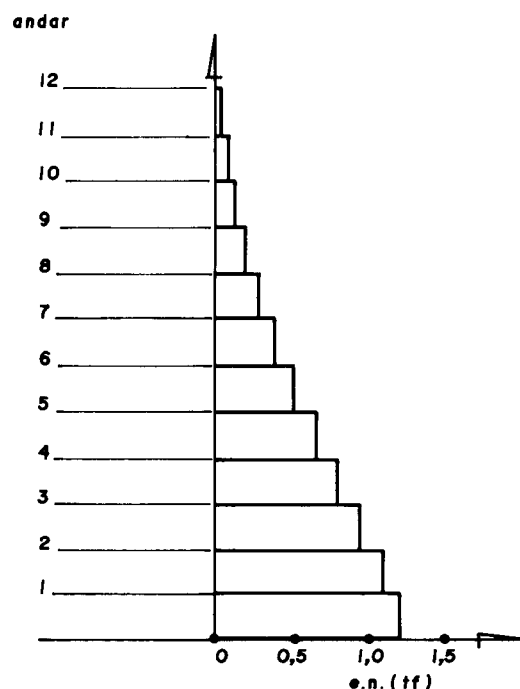


FIG. III. 62.- Esforço normal no pilar individual nº 14.

ELEMENTO: P. INDIVIDUAL Nº 14		
esforço cortante segundo z_i		
tramo	e. c. topo	e. c. base
12 - 11	-3,86	3,86
11 - 10	-0,48	0,48
10 - 9	0,50	-0,50
9 - 8	1,61	-1,61
8 - 7	2,57	-2,57
7 - 6	3,44	-3,44
6 - 5	4,33	-4,33
5 - 4	5,64	-5,64
4 - 3	7,74	-7,74
3 - 2	10,51	-10,51
2 - 1	17,03	-17,03
1 - 0	26,48	-26,48

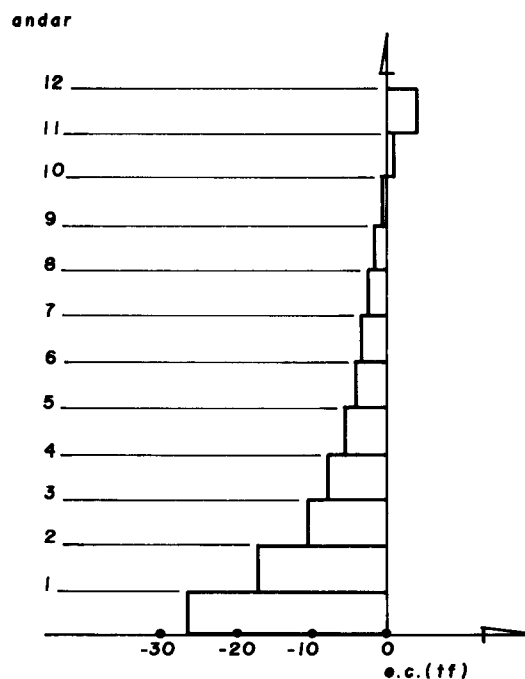


FIG. III. 63.- Esforço cortante no pilar individual nº 14 (segundo z_i).

CAPÍTULO IV

CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES

Um estudo da interação tridimensional entre pórticos, núcleos, pilares isolados, e barras horizontais, foi aqui apresentado.

Na análise exposta, sob forma matricial, via tratamento discreto, procurou-se conduzir o equacionamento de modo a permitir com que determinada estrutura de edifício, a ser analisada, possa ter seu modelo discretizado em várias versões. Deste modo, o projetista, ao se deparar com determinada dúvida, tem a possibilidade de confrontar modelos de concepções estruturais diferentes, e, tomar suas decisões. Igualmente, o projetista mais experiente, pode optar por um arranjo estrutural do qual fazem parte somente as peças que julgar importantes para a resistência à solicitação imposta ao edifício. Por exemplo, a discretização estrutural da 3ª aplicação, cap.III, acusa a não consideração da rigidez à torção das barras horizontais. Seria necessário levá-la em conta? Caso o projetista perceba que para esta concepção, a estrutura seja muito sensível, ou seja, os deslocamentos assumem proporções inaceitáveis diante da ação considerada, e imposições arquitetônicas restringem sua liberdade de enrijecer os elementos verticais, este poderá lançar mão do recurso de adotar as barras horizontais de

secção transversal, na medida do possível, com dimensões tais que sejam significantes suas rigidezes à torção (características das vigas pilar-pilar). No caso, não se tem a pretensão de dizer que isto seria o bastante, é óbvio, mas talvez atenua o problema. Outro recurso, talvez mais interessante, seria a adoção de vigas de rigidez considerável, a fim de contraventar núcleo e pórticos (vigas pilar-núcleo). Ter-se-ia, portanto, desta forma, duas novas versões de sistema estrutural para o mesmo edifício.

Quanto às vigas pilar-núcleo e lintéis, julga-se necessário observar que deve-se proceder com critério no uso da formulação exposta neste trabalho. Verifica-se que núcleos, de uma maneira geral, têm rigidez relativamente alta, porém, referida ao seu centro de torção, e, as barras que contraventam estes elementos nem sempre se lhes apoiam em pontos que reproduzem, localizadamente, a boa rigidez, à flexão, mais especificamente, da qual o núcleo é dotado. Caso isto ocorra, e a barra horizontal está sujeita a valores elevados quanto às solicitações de torção e/ou flexão, deve-se verificar se o núcleo, no ponto que apóia tal elemento, tem condições de suportar aquele esforço; caso não, pode-se ter caracterizada, aí, flambagem localizada. A título de ilustração, retorne-se à FIG. III.18. O lintel nº 6, que contraventa internamente o núcleo nº 4, da estrutura apresentada no 5º exemplo, apoia-se em pontos que não reproduzem a rigidez do núcleo, à flexão, quanto ao seu eixo local, concorrente no seu centro de torção, e paralelo à Z. Na hipótese do lintel estar sujeito a momentos fletores de intensidade elevada, seus extremos poderão impor ao núcleo, neste ponto, deformações de ordem diferente daquelas que ocorrerão na origem de seu sistema de referência; lembrando-se que raciocina-se aqui apenas quanto às deformações por flexão em torno do referido eixo. Por outro lado, a viga pilar-núcleo nº 3, v_{l_3} , no mesmo exemplo, tem em seu ponto de apoio no núcleo, condições de rigidez mais favoráveis. O efeito localizado não teria condições de ocorrer neste ponto. Estas observações são de caráter intuitivo,

e a teoria, aqui mostrada, não adentrou a estes limites. Ficam como sugestões: 1) ao leitor, o uso de critérios práticos, tal como, tornar desprezível, para efeito de cálculo, a rigidez da barra, segundo a coordenada que eventualmente provoque o mencionado efeito; e, 2) aos pesquisadores, em especial, aos do campo do método dos elementos finitos, o estudo do efeito.

A verificação do desalinhamento entre o eixo das barras vizinhas (cap.I, item I.2), que aqui foram supostos concorrentes, formando um nó; a introdução das vigas com extremo de rigidez infinita, como por exemplo, as vigas que formam o painel 14, extremo que chega ao pilar 17; a consideração de barras inclinadas; a variação, em planta, da estrutura ao longo dos níveis dos andares, via decomposição em subestruturas, por exemplo; o cálculo do carregamento crítico de instabilidade; ficam, também, como sugestões ao prosseguimento do presente trabalho.

Nos exemplos apresentados, o objetivo foi o de mostrar o confronto de resultados, entre outros, de algumas das estruturas testadas por outros autores, além de, com os exemplos próprios, dar uma visão prática da abrangência deste estudo.

CAPÍTULO V

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] PRUDENTE, M. Análise de estruturas tridimensionais u
suais de edifícios altos. São Carlos, Escola de
Engenharia de São Carlos - USP, 1983. 150p.
- [2] GERE, J.M. & WEAVER, JR., W. Análise de estruturas re
ticuladas. Rio de Janeiro, Ed. Guanabara Dois,
1981. 443p.
- [3] MANCINI, E. Estrutura tubular de edifícios altos.
São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP,
1980. 29p.
- [4] ANTUNES, H.M.C.C. Análise em segunda ordem de estru-
turas tridimensionais de edifícios altos. In: SIM
PÓSIO SOBRE SISTEMAS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA
CIVIL, (3), Porto Alegre, 1979. Anais. Porto Ale-
gre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
1979. p.195-214.
- [5] BARBOSA, J.A. Edifícios com paredes de secção aberta
contraventadas por lintéis, sob carga lateral. São
Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP,
1978. 342p.
- [6] HEIDEBRECHT, A.C. & SMITH, B.S. Approximate analysis
of open-section shear walls subject to torsional
loading. Journal of the Structural Division, ASCE

Vol. 99, nº ST12, Proc. Paper 10234, pp. 2355-2373,
Dec. 1973.

- [7] MANCINI, E. Análise contínua de estruturas de edifícios elevados sujeitas à ação do vento. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1973, 140p. (Publ. nº 184).
- [8] HEIDEBRECHT, A.C. & SWIFT, R.D. Analysis of asymmetrical coupled shear walls. Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 97, nº ST5, Proc. Paper 8100, pp. 1407-1422, May 1971.
- [9] RUBINSTEIN, M.F. & ROSEN, R. Substructure analysis by matrix decomposition. Journal of the Structural Division. Proc. ASCE, New York, 96 (3): 663-670, Mar. 1970.
- [10] RACHID, M. Instabilidade de barras de secção delgada. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, Fev. 1975. 119p.
- [11] Loc.cit.
- [12] PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of matrix structural analysis. New York, McGraw-Hill, 1968. 467p.
- [13] RUBINSTEIN, M.F. & ROSEN, R. loc.cit.
- [14] CHEUNG, Y.K. & KING, I.P. Computer methods and computer programs. In: ZIENKIEWICZ, O.C. The Finite Element Method in Engineering Science. London, McGraw-Hill, 1971. p.450-463.
- [15] RUBINSTEIN, M.F. & ROSEN, R. loc.cit.
- [16] Loc.cit.
- [17] BARBOSA, J.A. loc.cit.
- [18] Loc.cit.
- [19] RIBEIRO, S.R.S. Associação tridimensional de pórticos e paredes de secção aberta de estruturas de edifícios altos. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, ago.1987. 224p.

CAPÍTULO VI

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANTUNES, H.M.C.C. Carregamento crítico de instabilidade geral para estruturas tridimensionais de edifícios altos. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1978. 160p.
- [2] ANTUNES, H.M.C.C. Análise em segunda ordem de estruturas tridimensionais de edifícios altos. In: SIMPÓSIO SOBRE SISTEMAS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA CIVIL, (3), Porto Alegre, 1979. Anais. Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1979. p.195-214.
- [3] BARBOSA, J.A. Edifícios com parede de secção aberta contraventada por lintéis, sob carga lateral. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1978. 342p.
- [4] CHEUNG, Y.K. & KING, I.P. Computer methods and computer programs. In: ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method in engineering science. London, McGraw-Hill, 1971. p.450-463.
- [5] FERRY BORGES, J. & RAVARA, A. Estudo do comportamento de estruturas de edifícios elevados sob ação de forças horizontais. IIª Jornadas Luso-brasileiras de Engenharia Civil, Rio de Janeiro-São Paulo, Agosto, 1967. 30p.

- [6] GERE, J.M. & WEAVER. JR., W. Análise de estruturas reticuladas. Rio de Janeiro, Ed. Guanabara Dois, 1981. 443p.
- [7] HEIDEBRECHT, A.C. & SMITH, B.S. Approximate analysis of open-section shear walls subject to torsional loading. Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 99, nº ST12, Proc. Paper 10234, pp.2355-2373. Dec. 1973.
- [8] HEIDEBRECHT, A.C. & SWIFT, R.D. Analysis of asymmetrical coupled shear walls. Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 97, nº ST5, Proc. Paper 8100, pp.1407-1422, May 1971.
- [9] MANCINI, E. Estrutura tubular de edifícios altos. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1980. 29p.
- [10] MICHAEL, D. Torsional coupling of core walls in tall buildings. The Structural Engineer. Vol.47, nº 2, pp.67-71, Feb.1969.
- [11] PRUDENTE, M. Análise de estruturas tridimensionais usuais de edifícios altos. São Carlos, Escola de Engenharia de São carlos - USP, 1983. 150p.
- [12] PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of matrix structural analysis. New York, McGraw-Hill, 1968. 467p.
- [13] RACHID, M. Instabilidade de barras de secção delgada. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, Fev. 1975. 119p.
- [14] ROSMAN, R. Torsion of perforated concrete shafts. Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 95, nº ST5, Proc. Paper 6578, pp.991-1010, May 1969.
- [15] RUBINSTEIN, M.F. & ROSEN, R. Substructure analysis by matrix decomposition. Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 96, nº ST3, Proc. Paper 7169, pp.663-670, Mar. 1970.

- [16] SANTANA, M.J. Características geométricas para o estudo da flexão, flexo-torção e instabilidade de barras com secção delgada. (Trabalho de Iniciação Científica - relatórios, proc. nº 78/0076 - FAPESP). São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos/USP, 1978. Relatório nº 1 - 56p., relatório nº 2- 79p.
- [17] SCHIEL, F. Barras de seção delgada. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1964-1965.
- [18] SMITH, B.S. & TARANATH, B.S. The analysis of tall core-supported structure subject to torsion. Proc. ICE, Vol.53, Proc. Paper 7466, pp.173-187, Nov.1972.
- [19] STAMATO, M.C. Estado atual da análise de estruturas tridimensionais de edifícios elevados. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1972. 26p. (Publ. nº 163)
- [20] TALL BUILDINGS - Proceedings of Symposium on Tall Buildings, Southampton, Pergamon Press, Apr. 1966.
- [21] TSO, W.K. & BISWAS, J.K. Analysis of core wall structure subjected to applied torque. Build. Sci. Vol. 8, Pergamon Press 1973, pp.251-257.
- [22] TSO, W.K. & BISWAS, J.K. General analysis of nonplanar coupled shear walls. Journal of the Structural Division, ASCE Vol. 99, nº ST3, Proc. Paper 9604, pp. 365-380, Mar. 1973.
- [23] VASQUEZ, J. & RAFAEL, R. Thin-walled core element for multistory buildings. Journal of Structural Engineering, vol.110, nº 5, pp.1021-1034, May, 1984.
- [24] VLASOV, V.Z. Thin-walled elastic beams. Israel, Israel Program for Scientific Translation, 1961.
- [25] WEAVER, JR., W. Computer programs for structural analysis. Princeton, S. Van Nostrand Company, INC., 1967. 300p.