

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**  
**ÁREA DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**ANÁLISE DE PEÇAS DE SEÇÃO DELGADA  
COMO ASSOCIAÇÃO DE PLACAS PELO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**



**DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

**ENGº LEANDRO PALERMO JÚNIOR**

**SÃO CARLOS, OUTUBRO DE 1989**

**ANÁLISE DE PEÇAS DE SEÇÃO DELGADA  
COMO ASSOCIAÇÃO DE PLACAS PELO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

**ENG<sup>o</sup> LEANDRO PALERMO JÚNIOR**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia na área de Engenharia de Estruturas

**ORIENTADOR**

**PROF. DR. MUNIR RACHID**

Aos meus pais Durvalina e  
Leandro, aos meus irmãos  
Ana e Sérgio

## A G R A D E C I M E N T O S

Agradeço a todos que contribuíram para a realização deste trabalho e, em particular:

Ao Professor Dr. Munir Rachid meu orientador desde a graduação, na primeira bolsa de Iniciação Científica.

Ao Professor Dr. Wilson Sêrgio Venturini, co-orientador neste trabalho, que muito auxiliou-me e, principalmente, no tratamento com o Método dos Elementos de Contorno.

Ao Professor Dr. João Batista de Paiva que sempre assistiu-me nos trabalhos de pesquisa desde a Iniciação Científica na graduação.

Aos colegas da Faculdade de Engenharia de Limeira Dr. Ronaldo Garcia de Figueiredo e Francisco Antonio Menezes, pela colaboração bem como à direção desta Faculdade pelo total apoio recebido desde o início deste trabalho.

À Srta. Elisabete Miranda Gonçalves pela datilografia, à Sra. Dalva Maria Michel Ferrari e Srta. Cristiane Aparecida Delmondi pelos desenhos e ao Setor Gráfico da Faculdade de Engenharia de Limeira.

Ao Centro de Processamento de Dados da Escola de Engenharia de São Carlos.

Ao Setor de Computação da Faculdade de Engenharia de Limeira.

Ao Centro de Computação da Universidade Estadual de Campinas.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, onde iniciei este trabalho como bolsista.

## R E S U M O

Neste trabalho é proposta a análise de estruturas de parede fina considerando a extensão e flexão da parede. A análise é feita em regime elástico linear para um material homogêneo e isotrópico. A estrutura é assumida como uma associação de lâminas no espaço, onde em cada lâmina existe o estado plano de tensão somado ao de flexão de placas finas. Adicionalmente, diafragmas podem incidir no plano da seção transversal para minimização dos efeitos locais de cargas concentradas ou de vinculação pontual, como para a consideração de ortotropia nas direções transversal e longitudinal da estrutura. Os diafragmas podem manter a seção transversal rígida em seu plano ou impor deformação longitudinal plana ou a associação destes dois efeitos. Na seção transversal, os diafragmas podem atuar em toda seção ou somente em parte dela.

O tratamento numérico da análise foi feito através da formulação direta do método dos elementos de contorno. O sistema final de equações é obtido tratando-se cada lâmina individual, com o estado plano de tensão e flexão de placas finas, como uma subregião. Após as transformações de coordenadas nas equações de cada subregião, procede-se a compatibilização de deslocamentos e equilíbrio de forças entre elas.

Vários exemplos foram resolvidos e os resultados comparados com outras formas de análise dos problemas, quando possível, mostrando a precisão da sistemática proposta.

## A B S T R A C T

In this paper, a thin walled structural analysis is proposed taking into account the stretching and bending of the wall. This is a elastic linear analysis for a homogeneous and isotropic material. The structure is assumed as a strip association in the space, where the plane stress state is jointed to the bending of thin plates. Diaphragms must be included in the transversal direction to reduce local effects of concentrated loads or punctual support, as considered a orthotropic response in the transversal and longitudinal directions of the structure. The diaphragms must increase stiffness in the transversal direction or constrain plane strain of the section or both effects. In the cross section, the diaphragms can be related to the whole section or only a part of it.

A numeric treatment of the analysis is carried on by the direct boundary element formulation. The final system is obtained assuming each individual structural plane element as a subregion. After the necessary transformation of these equations they can be combined together taking into account the displacement compatibility and equilibrium conditions.

Several examples are solved and the results are compared whenever possible with other analysis of the problems, showing the accuracy of the proposed formulation.

## LISTA DE SÍMBOLOS USADOS

Neste trabalho utilizou-se notação inicial com a convenção de somatória de Einstein, onde índices repetidos indicam somatória.

- $\nabla$  - operador diferencial,  $\nabla = i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$
- $\nabla^2$  - operador diferencial escalar,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$
- $\alpha_i$  - função linearmente independente
- $\alpha(\xi)$  - função que fornece o deslocamento do ponto onde se aplicou a equação integral
- $\beta$  - ângulo entre o macro-elemento e o plano  $x_1 x_3$  (xz)
- $\Gamma$  - coordenada que percorre o contorno
- $\Gamma'$  - coordenada que percorre a linha de cargas no domínio
- $\delta_{ij}$  - delta de Kronecker, vale 1 quando  $i = j$  e zero em caso contrário
- $\Delta(x - \xi)$  - função delta de Dirac no argumento  $(x - \xi)$
- $\epsilon_{ij}$  - deformação associada a pequenos deslocamentos, correspondente a deformação ocorrendo no plano perpendicular a  $i$  e na direção  $j$ .
- $n$  - variável que percorre os elementos de contorno
- $\theta_i$  - rotação externa contida na direção  $i$
- $\theta_n$  - rotação externa contida na direção normal ao contorno

- $\theta_s$  - rotação externa contida na direção tangente ao contorno
- $\bar{\theta}_i$  - valor prescrito de  $\theta_i$
- $\bar{\theta}_n$  - valor prescrito de  $\theta_n$
- $\bar{\theta}_s$  - valor prescrito de  $\theta_s$
- $\theta_i^*$  - valor de  $\theta_i$  da solução fundamental
- $\theta_n^*$  - valor de  $\theta_n$  da solução fundamental
- $\theta_s^*$  - valor de  $\theta_s$  da solução fundamental
- $\lambda$  - constante de Lamé, auto-valor (capítulo 7)
- $\lambda'$  - constante de Lamé do estado plano de deformação
- $\mu$  - constante de Lamé ou módulo de elasticidade transversal
- $\nu$  - coeficiente de Poisson
- $\nu'$  - coeficiente de Poisson do estado plano de deformação
- $\xi$  - ponto onde se aplica a equação integral
- $\sigma_{ij}$  - tensão interna atuando no plano perpendicular ao eixo  $i$  e na direção  $j$
- $\bar{\sigma}_{ij}$  - tensão  $\sigma_{ij}$  no problema de instabilidade
- $\bar{\sigma}_{ij}$  - valor médio da tensão  $\sigma_{ij}$  na espessura
- $\phi$  - matriz das funções aproximadoras das variáveis no elemento

- $\phi_x$  - rotação do diafragma em relação ao eixo x
- $\phi_y$  - rotação do diafragma em relação ao eixo y
- $\phi_z$  - rotação do diafragma em relação ao eixo z
- $\psi$  - vetor das funções aproximadoras de variáveis no elemento
- $\Omega$  - coordenada de domínio
- a - distância do nó integrado  $\bar{a}$  extremidade do elemento
- $a^i$  - refere-se  $\bar{a}$  diferença  $(y - y_A)$  ou  $\bar{a}$   $(x - x_A)$  no nó i
- $\tilde{A}$  - matriz dos coeficientes das variáveis incógnitas
- $b_i$  - força externa por unidade de volume na direção i
- $\underline{b}$  - vetor das forças de volume
- $\tilde{b}_i$  - força  $b_i$  no problema de instabilidade
- B - matriz dos coeficientes das variáveis incógnitas
- $c_i$  - coeficientes arbitrários
- $C_{klmn}$  - matriz das constantes elásticas
- D - módulo de rigidez  $\bar{a}$  flexão da placa
- $D_y$  - diferenças entre as coordenadas y ou  $(y_B - y_A)$
- $D_x$  - diferenças entre as coordenadas x ou  $(x_B - x_A)$
- $e_{ij}$  - deformação linearizada associada a  $\epsilon_{ij}$
- $\bar{e}_{ij}$  - deformação  $e_{ij}$  média na espessura

- E - mōdulo de Young ou mōdulo de elasticidade longitudinal
- $f_i$  - deslocamentos no plano mēdio da chapa
- $\underline{F}$  - vetor de Galerkin (capítulo 3); vetor do produto da matriz dos coeficientes pelo vetor com o valor destas variáveis conhecidas e somado ao vetor independente do carregamento distribuído.
- G - mōdulo de elasticidade transversal
- $\underline{G}$  - matriz dos coeficientes das forças
- $\underline{G}'$  - complementar de G devido ao efeito da força normal
- $\underline{G}_{ij}^k$  - submatriz da matriz G dos efeitos de i em j do macro-elemento k
- $\underline{G}_{ij}$  - submatriz da matriz G dos efeitos de i em j
- $h_{ij}$  - elemento da matriz H ou comprimento do elemento de contorno entre os nōs i e j
- $\underline{H}$  - matriz dos coeficientes dos deslocamentos
- $\underline{H}'$  - complementar de H devido ao efeito da força normal
- $\underline{H}_{ij}^k$  - submatriz da matriz H dos efeitos de i em j do macro-elemento k
- $\underline{H}_{ij}$  - submatriz da matriz G dos efeitos de i em j
- I - matriz identidade
- $\ell$  - comprimento do elemento de contorno
- $\ell_i$  - medida da distância entre nōs

- $L_i$  - medida da distância entre nós
- $m_{ij}$  - momento interno de flexão ( $i=j$ ) ou volvente ( $i \neq j$ ) por unidade de comprimento
- $\tilde{m}_{ij}$  - complementar de  $m_{ij}$  devido à força normal
- $M_i$  - momento externo por unidade de comprimento na direção i
- $M_n$  - momento externo por unidade de comprimento para flexão na direção normal ao contorno
- $M_s$  - momento externo por unidade de comprimento para flexão na direção tangente ao contorno (momento torçor ou volvente)
- $\bar{M}_i$  - valor prescrito de  $M_i$
- $\bar{M}_n$  - valor prescrito de  $M_n$
- $\bar{M}_s$  - valor prescrito de  $M_s$
- $M_i^*$  - valor de  $M_i$  da solução fundamental
- $M_n^*$  - valor de  $M_n$  da solução fundamental
- $M_s^*$  - valor de  $M_s$  da solução fundamental
- $\tilde{M}_i$  - complementar de  $M_i$  devido à força normal
- $\tilde{M}_n$  - complementar de  $M_n$  devido à força normal
- $\tilde{M}_s$  - complementar de  $M_s$  devido à força normal
- $M_x$  - momento de flexão em relação ao eixo x no diafragma
- $M_y$  - momento de flexão em relação ao eixo y no diafragma

- $\underline{M}$  - submatriz correspondente às equações adicionais devidas ao diafragma
- $n_j$  - cosseno diretor da normal em relação ao eixo  $j$
- $\underline{n}$  - vetor unitário normal ao contorno no plano da chapa
- $N$  - força axial na direção  $z$  no diafragma
- $p_x$  - força distribuída na parede da seção na direção  $x$
- $p_y$  - força distribuída na parede da seção na direção  $y$
- $p_z$  - força distribuída na parede da seção na direção  $z$
- $p_\alpha^i$  - força distribuída na parede da seção na direção  $\alpha$  e atuando no nó  $i$
- $p_i$  - força externa por unidade de superfície na direção  $i$
- $p_n$  - força externa por unidade de superfície na direção normal ao contorno no plano da chapa
- $p_s$  - força externa por unidade de superfície na direção tangente ao contorno no plano da chapa
- $\bar{p}_i$  - valor prescrito de  $p_i$
- $\bar{p}_n$  - valor prescrito de  $p_n$
- $\bar{p}_s$  - valor prescrito de  $p_s$
- $\tilde{p}_i$  - valor de  $p_i$  do problema de instabilidade
- $\tilde{p}_n$  - valor de  $p_n$  do problema de instabilidade
- $\tilde{p}_s$  - valor de  $p_s$  do problema de instabilidade
- $p_i^!$  - força distribuída por unidade de comprimento que ocorre na linha de cargas internas devido ao diafragma.

- $p_{ij}$  - força que ocorre na direção  $j$  devido a uma força aplicada na direção  $i$ , solução fundamental
- $\underline{p}$  - vetor das forças de um nō
- $P_D$  - forças que ocorrem nos nōs associados ao diafragma e devidas ao diafragma
- $P_i$  - forças associadas aos deslocamentos  $U_i$
- $P_i^j$  - esforços na subregião  $j$
- $P_p$  - forças atuando nos diafragmas
- $\underline{P}$  - vetor das forças de todos os nōs
- $q_i$  - cortantes internas por unidade de comprimento na direção  $i$
- $q_i^*$  - valor de  $q_i$  da solução fundamental
- $\tilde{q}_i$  - complementar de  $q_i$  devido à força normal
- $Q$  - cortante externa por unidade de comprimento
- $Q^*$  - valor de  $Q$  da solução fundamental
- $\bar{Q}$  - valor prescrito de  $Q$
- $\tilde{Q}$  - complementar de  $Q$  devido à força normal
- $Q_x$  - cortante na direção  $x$  no diafragma
- $Q_y$  - cortante na direção  $y$  no diafragma
- $r$  - distância de onde se aplicou o carregamento unitário ao ponto onde se deseja obter o deslocamento ou força na solução fundamental
- $r_{,i}$  - cosseno diretor de  $r$  em relação ao eixo  $i$

- $R$  - erro da função aproximadora no domínio
- $R_c$  - reação de canto
- $R_c^*$  - reação de canto da solução fundamental
- $\bar{R}_c$  - complementar de  $R_c$  devido à força normal
- $s$  - vetor unitário tangente ao contorno
- $T$  - momento torçor em relação ao eixo  $z$  no diafragma
- $u$  - deslocamento na direção  $x$  ou  $l$
- $u_A$  - deslocamento  $u$  do diafragma
- $u_B$  - deslocamento de um ponto  $B$  qualquer no plano do diafragma na direção  $x$
- $u_i$  - deslocamento na direção  $i$
- $\bar{u}_i$  - valor prescrito de  $u_i$ , valor médio de  $u_i$  (capítulo 2)
- $u_i^*$  - valor de  $u_i$  da solução fundamental
- $u_{k\ell}$  - deslocamento  $u$  na direção  $\ell$  devido a uma força aplicada na direção  $k$ , solução fundamental
- $\underline{u}$  - vetor dos deslocamentos de um nó
- $\underline{U}$  - vetor dos deslocamentos de todos os nós
- $U_i$  - deslocamentos exclusivos dos lados independentes da subregião  $i$  ou deslocamento de nós não associados ao diafragma
- $U_p$  - deslocamentos do diafragma

- $v$  - deslocamento na direção  $y$  ou 2
- $v_A$  - deslocamento  $v$  do diafragma
- $v_B$  - deslocamento  $v$  de um ponto B qualquer no plano do diafragma na direção  $y$
- $\underline{V}$  - vetor do carregamento distribuído
- $V_n$  - cortante equivalente por unidade de comprimento
- $\bar{V}_n$  - valor prescrito de  $V_n$
- $V_n^*$  - valor de  $V_n$  da solução fundamental
- $\tilde{V}_n$  - complementar de  $V_n$  devido à força normal
- $\underline{V}'$  - complementar de  $V$  devido à força normal
- $w$  - deslocamento na direção  $z$  ou 3, deslocamento perpendicular ao plano da placa (Plano  $\bar{x} \bar{y}$ )
- $\bar{w}$  - valor prescrito de  $w$
- $w^*$  - valor de  $w$  da solução fundamental de placas
- $w_a$  - função aproximadora
- $w_A$  - deslocamento  $w$  do diafragma
- $w_B$  - deslocamento  $w$  de um ponto B qualquer no plano do diafragma na direção  $z$
- $\bar{x}_i$  - sistema de coordenadas local ( $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$  ou  $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$ )
- $\overline{\bar{x}}_i$  - sistema de coordenadas auxiliar ( $\overline{\bar{x}}_1 \overline{\bar{x}}_2 \overline{\bar{x}}_3$  ou  $\overline{\bar{x}} \overline{\bar{y}} \overline{\bar{z}}$ )
- $x_i$  - sistema de coordenadas globais ( $x_1 x_2 x_3$  ou  $x y z$ )
- $\underline{X}$  - vetor das variáveis incógnitas

## Í N D I C E

<b>1 - INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>2 - SEÇÕES DE PAREDE FINA</b> .....	<b>6</b>
<b>3 - ESTADO PLANO DE TENSÃO E FLEXÃO DE PLACAS FINAS</b> .....	<b>15</b>
3.1 - Introdução .....	15
3.2 - Hipóteses Básicas .....	15
3.3 - Equação de Navier .....	17
3.4 - Estados Planos .....	20
3.5 - Solução Fundamental de Chapas .....	22
3.6 - Flexão de Placas Finas .....	25
3.7 - Solução Fundamental de Placas Finas .....	32
<b>4 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO</b> .....	<b>34</b>
4.1 - Introdução .....	34
4.2 - A Técnica dos Resíduos Ponderados .....	34
4.3 - Equação Integral de Chapas .....	36
4.4 - Equação Integral de Placas .....	41
4.5 - Discretização e os Elementos Utilizados .....	46
4.6 - Equações Integrais Discretizadas nos Macro-Elementos .....	52
4.7 - Montagem do Sistema de Equações .....	60
4.8 - Diafragmas .....	69
4.8.1 - Diafragmas de Extremidade .....	77
4.8.2 - Diafragmas Internos .....	78
4.9 - Integrais Analíticas e Numéricas .....	80
4.10 - Tensões e Curvaturas .....	84
4.10.1 - Tensões Internas e Externas .....	84
4.10.2 - Curvaturas Internas .....	86
4.11 - Integrais de Domínio .....	89
<b>5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS</b> .....	<b>93</b>
5.1 - Introdução .....	93
5.2 - Exemplo Numérico 1 - Seção Aberta (U) .....	93
5.3 - Exemplo Numérico 2 - Seção Fechada Simétrica .....	102

5.4 - Exemplo Numérico 3 - Problema de Vlassov .....	113
5.5 - Exemplo Numérico 4 - Seção não Constante no Comprimento .....	115
5.6 - Exemplo Numérico 5 - Seção Caixa com Balanços ....	119
<b>6 - PROGRAMA PARA ANÁLISE DE BARRAS COM PAREDE FINA .....</b>	<b>125</b>
6.1 - Introdução .....	125
6.2 - Estrutura do Programa .....	126
6.3 - Subrotina INPUT .....	127
6.4 - Subrotina MATRIZ .....	129
6.5 - Subrotinas MATDI e DIAF .....	131
6.6 - Subrotinas DECOMP e SOLVE .....	132
6.7 - Subrotinas STRES e CURVT .....	132
6.8 - Aspectos Gerais .....	134
<b>7 - INSTABILIDADE DE PLACAS .....</b>	<b>137</b>
7.1 - Introdução .....	137
7.2 - Equação Integral para o Problema de Instabilidade de Chapas .....	137
7.3 - Sistema de Equações .....	141
<b>8 - CONCLUSÕES .....</b>	<b>145</b>
<b>9 - BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>147</b>

## 1 - INTRODUÇÃO

As barras de parede fina com seção transversal aberta ou fechada têm grande utilização em engenharia, compreendendo desde perfis em aço dobrados a frio até a asa de um avião, podendo-se incluir, dependendo de suas dimensões, até os núcleos resistentes em edifícios altos e as seções transversais de pontes. Neste trabalho foi feita a análise em regime elástico com teoria de primeira ordem, através do método dos elementos de contorno, de barras cuja linha de esqueleto da seção transversal tenha elementos retos. Assim, tem-se uma barra que é o resultado de uma associação de placas no espaço. É neste sentido que a análise é feita ou seja, a barra é tratada como uma associação espacial de placas retangulares, onde em cada elemento da associação existe um estado plano de tensão somado ao de flexão da placa. É permitida a utilização de diafragmas transversais tanto para aplicação de cargas ao conjunto como para aumento de rigidez.

Para este fim, a resolução das equações diferenciais do problema é tratada com o método dos elementos de contorno. O principal aspecto deste tratamento pode ser mostrado numa rápida comparação com os outros métodos de análise numérica mais conhecidos como o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos.

O método das diferenças finitas foi o primeiro método de tratamento numérico dos problemas de engenharia formulado em bases matemáticas. Este método começou a ser tratado como técnica numérica depois de Southwell [52] ter apresentado seu método de relaxação, apesar de nenhuma automatização computacional ser possível até esta época. O conceito básico deste método consiste na transformação das equações diferenciais, que governam o problema físico, em um sistema de equações algébricas pela aplicação do operador de diferenças. Este operador transforma as derivadas de funções contínuas em diferenças dos valores destas funções tomados em pontos discretos (nós). Os pontos nodais onde as incógnitas são associadas devem ser prescritos e as funções interpoladoras, que governam as derivadas, precisam ser especificadas. A matriz envolvida no sistema de equações é simétrica com banda estreita.

O método dos elementos finitos atraiu a atenção dos pesquisadores pela particularidade de divisão do contínuo numa série de elementos, que podem ser associados a partes físicas, e tra

tã-los como um contínuo reduzido. Nós devem ser associados interna ou externamente a cada elemento e funções aproximadoras, usualmente polinômios, são escolhidas para aproximar a resposta real do domínio. Tendo-se em conta que estas funções são unicamente definidas nos pontos nodais, as equações do método dos elementos finitos podem ser obtidas de várias maneiras, como os princípios variacionais ou a técnica dos resíduos ponderados. O uso de qualquer destes procedimentos resultará na transformação das equações diferenciais num sistema de equações algébricas cujas matrizes são do tipo simétrica e em banda. Pode-se afirmar que este método é mais eficiente que o método das diferenças finitas. O grande interesse dos pesquisadores por este método, no início de 1960, teve duas consequências importantes:

- a) Motivou o desenvolvimento de grande quantidade de trabalhos em técnicas computacionais e programas de engenharia.
- b) Contribuiu para um substancial aumento de pesquisa em princípios físicos básicos como técnicas variacionais e dos resíduos ponderados.

O método das diferenças finitas e o dos elementos finitos são conhecidos como técnicas de domínio nas quais as discretizações são feitas em todo o domínio. Uma alternativa para reduzir o tipo e o número destas aproximações é dado pelas chamadas técnicas de contorno. Estas técnicas consistem na transformação das equações diferenciais do problema, que descrevem o comportamento da solução incôgnita procurada no interior e na superfície que envolve o domínio, numa equação integral que relaciona valores de contorno somente. O resultado desta transformação é que a dimensão do problema é reduzida na maioria dos casos.

As técnicas das equações integrais foram, até recentemente, consideradas como formas analíticas de solução do problema e não tratamentos numéricos. Tornaram-se conhecidas na Europa através de uma série de autores russos, mas não muito populares entre os engenheiros. Um predecessor de alguns destes trabalhos foi Kellogg [40] que aplicou as equações integrais para a solução dos problemas de Laplace. As técnicas das equações integrais são principalmente usadas em Mecânica dos Fluidos e em problemas gerais sobre potenciais, são também conhecidas como métodos das fontes que são métodos de análise indireta pois, as incôgnitas não são as va-

riáveis físicas do problema.

O método das equações integrais de contorno foi uma das primeiras técnicas, mostrando a transformação de uma equação diferencial no domínio em uma equação integral de contorno, ao ser aplicado a problemas de elastostática. Esta técnica ainda permanece entre os métodos de contorno e sua teoria pode ser vista em [33]. Recentemente, o método dos elementos de contorno foi formulado seguindo os mesmos princípios que governam o método das equações integrais de contorno [53]. O nome do método é devido ao tipo de discretização no contorno ser por elementos. Por outro lado, a equação integral também pode ser formulada usando o método dos resíduos ponderados que permite fácil relacionamento do método dos elementos de contorno com outros métodos de domínio como o dos elementos finitos.

Em linhas gerais, no método dos elementos de contorno, a superfície que envolve o domínio é discretizada em elementos e funções polinomiais equivalentes às usadas no método dos elementos finitos são necessárias para interpolar valores da solução aproximada obtida entre os pontos nodais. Como as incógnitas do sistema são relacionadas somente ao contorno, o interior do domínio não precisa ser discretizado. Após o cálculo das integrais no contorno por processos numéricos, são obtidos sistemas de equações com matrizes não simétricas mas, com ordem bem menor que as obtidas com as técnicas de domínio. Após a resolução do sistema de equações, podem ser obtidos valores internos ao domínio como no contorno em pontos prescritos.

Atualmente, as técnicas de contorno têm ganhado grande popularidade entre os métodos numéricos e os principais motivos são:

- a) reduzido sistema de equações;
- b) pequena quantidade de dados;
- c) apropriada modelagem de domínios infinitos;
- d) boas respostas em problemas que trabalham com concentração de tensões.

Os métodos de contornos incluem desde técnicas simples como os métodos indiretos até os métodos diretos, mais versáteis.

Os métodos indiretos são conhecidos como os métodos de contorno menos sofisticados. A forma mais simples destes méto-

dos consiste no uso de soluções singulares unitárias que satisfazem as equações diferenciais do problema no domínio com densidades incógnitas especificadas. Estas densidades não têm significado físico mas, com a sua obtenção a partir da prescrição de condições de contorno num número de pontos, os deslocamentos e tensões podem ser facilmente obtidos. Kupradze [54] estabeleceu as bases das formulações indiretas adotando a solução fundamental de Kelvin [1] para resolver problemas de elastostática.

O ponto inicial das formulações diretas é devido a Rizzo [55] em 1967, seu trabalho, que apresenta a solução do problema bidimensional de elastostática, foi estendido por Cruse [56] para o caso tridimensional.

As formulações diretas dos elementos de contorno, que são mais confiáveis que as técnicas indiretas, são baseados na adoção das variáveis físicas do problema como incógnitas no sistema de equações. Pode-se tomar como exemplo os problemas de elasticidade, onde forças e deslocamentos são encontrados diretamente da solução do sistema de equações. Assim, tensões ou outros deslocamentos podem ser encontrados diretamente dos valores no contorno previamente encontrados.

Assim, o objetivo de tratar as barras de parede fina com esta técnica foi verificar a eficiência da formulação direta do método dos elementos de contorno para este tipo de análise tendo-se em conta os seguintes aspectos:

- a) boas respostas em problemas de concentração de tensões, aqui caracterizados pelo efeito das cargas concentradas, principalmente;
- b) reduzido sistema de equações, que corresponde a possibilidade de tratar-se barras de paredes finas como associação de muitas placas e que teriam dificuldade de ser manipuladas com outras técnicas numéricas.

No capítulo dois, apresentam-se alguns tratamentos da análise de barras com esqueleto da seção transversal tipo poligonal, encontrados na bibliografia, com o objetivo de situar este trabalho.

Como em cada placa componente da barra faz-se uso das equações do estado plano de tensão com as de flexão de placas finas, um resumo desta teoria é apresentado no capítulo três.

No capítulo quatro, é apresentado o método dos elementos de contorno através da técnica dos resíduos ponderados e, também, as modificações introduzidas para a colocação dos diafragmas.

Alguns exemplos tratados através desta forma de análise são mostrados no capítulo cinco, juntamente com algumas conclusões acerca de cada resultado.

No capítulo 6 é apresentada a estrutura do programa desenvolvido, onde são comentados os detalhes de programação do método dos elementos de contorno.

Para a consideração do problema de instabilidade elástica das placas componentes da barra, são sugeridas equações no capítulo sete e as conclusões finais são colocadas no capítulo oito.

## 2 - SEÇÕES DE PAREDE FINA

As peças de parede fina com seção transversal aberta ou fechada são assim chamadas quando a maior espessura das suas paredes é igual ou inferior a um décimo das dimensões características da seção transversal. Neste trabalho, estas peças serão chamadas genericamente de barras e dos seguintes tipos:

- a) barras curtas: aquelas cujo comprimento é inferior a três vezes a maior dimensão da seção transversal.
- b) barras longas: aquelas cujo comprimento é superior a dez vezes a maior dimensão da seção transversal.
- c) barras médias: aquelas cujo comprimento fica entre 3 e 10 vezes a maior dimensão da seção transversal.

Da bibliografia constata-se que, em função do nível de precisão desejada, a forma de calcular estas barras é bastante variada, mesmo tendo-se em conta um material homogêneo e elástico linear, em análise de primeira ordem.

Assim, na teoria elementar de vigas, aplicável a barras de comprimento longo [1], as hipóteses para a flexão são:

- a) a seção transversal é rígida em seu plano ou seja, são nulas as distorções ou deformações existentes neste plano.
- b) a seção permanece plana na deformação ou seja, a distorção devido ao esforço cortante é desprezada.

Para a torção, as hipóteses de Saint-Venant, [1], [2], são:

- a) A seção transversal é rígida em seu plano onde não há distorções.
- b) A rotação da seção é proporcional a sua distância à origem.
- c) O empenamento é igual em todas as seções.

Para as barras com seção aberta e sujeitas a torção não uniforme ou que possuem impedimentos nas extremidades, os resultados obtidos pela teoria de Saint-Venant são muito discrepantes, mesmo pensando em barras longas. Dentre os tratamentos dados

ao problema pelos pesquisadores, Vlassov [3] desenvolveu a teoria das superfícies setoriais, cujo principal aspecto é considerar o equilíbrio da barra em estado tridimensional, ou seja, assume a barra como superfície de uma casca fina e faz simplificações nas equações de equilíbrio e compatibilidade. As hipóteses básicas são:

- a) A seção transversal, admitida constante ao longo do comprimento, é inextensível e rígida em seu plano somente para as barras longas.
- b) A distorção é suposta nula no esqueleto. Desta forma, despreza-se a contribuição à deformação das tensões cisalhantes uniformes na espessura. Somente considera-se a distorção da torção livre, ou de Saint-Venant, onde as tensões cisalhantes tem distribuição linear com valor nulo no esqueleto. A justificativa é que a magnitude das tensões de Saint-Venant é muito maior que a das tensões uniformemente distribuídas devido a diferença entre braços dos respectivos binários.

Em barras longas, obtém-se uma equação para a deformação longitudinal semelhante àquela da teoria elementar de flexão e onde inclui-se um quarto termo que leva em conta o efeito do empenamento restringido ou a não uniformidade do momento torçor. Para barras não longas, chamadas de comprimento médio [3], além desta equação aparece uma segunda equação, também a quatro termos, referente ao equilíbrio à flexão da parede no plano da seção transversal. Neste caso a parede deixa de ser rígida para ser apenas inextensível.

Para barras com seção fechada, analogamente, a solução de Saint-Venant para o problema deixa de ser satisfatória se a torção não for uniforme ou o empenamento for restringido. Para resolver este problema, pode-se citar a solução de Karman [4] cujas hipóteses são:

- a) A seção transversal é rígida em seu plano.
- b) Os deslocamentos consistem de uma rotação no plano transversal e um empenamento paralelo ao eixo longitudinal.

Esta teoria aplicada a asas de aviões tem estas hipóteses garantidas pela existência de enrijecedores transversais e longi-

tudiniais na parte interna, além do comprimento das peças ser longo.

Fazendo-se a análise de seções fechadas ainda como barras de comprimento longo, também usa-se o método devido a Kollbrunner, [5] e [6]. Nesta análise, a seção fechada é suposta aberta através de cortes fictícios nas células e depois restituindo estes cortes com tensões de cisalhamento cujo valor é obtido por considerações de compatibilidade geométrica e equilíbrio de forças. Com relação a este método, tomando-se o problema de torção como exemplo, nota-se:

- a) Nas seções abertas, aparecem as tensões de cisalhamento da torção livre e de flexo-torção com distribuição linear e uniforme na espessura, respectivamente. Assim, apesar de as tensões de flexo-torção equilibrarem a parcela não uniforme do momento torçor, da hipótese de distorção nula no esqueleto despreza-se a sua contribuição nas deformações da barra.
- b) Nas seções fechadas, pode-se dividir as tensões cisalhantes do mesmo modo ou seja, tensões de torção livre de Saint-Venant e de flexo-torção, onde as últimas equilibram a parcela não uniforme do momento torçor ou os efeitos do empenamento impedido. Entretanto, ambas são uniformemente distribuídas na espessura e com a mesma ordem de grandeza (os braços dos respectivos binários são iguais). Neste caso, a hipótese de distorção nula no esqueleto não tem mais sentido (nas seções abertas, as tensões de torção livre estavam de acordo com esta hipótese). Assim, ao se reconstituir uma seção fechada a partir de uma seção aberta, as tensões ou deslocamentos do problema inicial (seção aberta) não estarão corretamente proporcionados para as equações de compatibilidade.

É importante ter em conta este fato na utilização deste método pois, está sendo obtida uma seção indeformável sem distorção, neste tratamento. Além de Kollbrunner, Vlassov [3], dentre outros, também apresenta soluções de seções fechadas partindo de uma seção aberta e retornando a fechada com as equações de compatibilidade.

Entretanto, não é só o problema de torção que afeta

as seções de parede fina com a linha de esqueleto aberta ou fechada. Nas barras com mesas desenvolvidas, é frequente o aparecimento do fenômeno "shear-lag" em carregamentos que produzam flexão em relação aos eixos principais de inércia. O resultado é uma variação não uniforme da tensão normal nas mesas, onde esperava-se distribuição uniforme pela lei das seções planas de Bernoulli. Além deste fato, os valores extremos da tensão normal, nestas mesas, superam os previstos pela lei das seções planas. O motivo para o aparecimento deste efeito é o acréscimo da distorção pelo esforço cortante na deformação das barras. Analogamente, onde há variação linear de tensões, nas almas destas vigas, o fenômeno "shear-lag" promove uma variação curva. Assim, como correção aos resultados obtidos pela teoria convencional de Bernoulli, Reissner [8] introduziu, nas expressões que exprimem os deslocamentos longitudinais das mesas, uma nova função para levar em conta o efeito de "shear-lag". Na literatura, encontram-se estudos para avaliar o efeito de "shear-lag", podendo-se generalizar a teoria de Reissner [9] como simplificá-la [10]. Evidentemente, estas avaliações do efeito "shear-lag" como as recomendações [12] são para situações onde, segundo os autores, não se dispõe de programas sofisticados para análise do problema ou, necessita-se de uma avaliação rápida para ante-projetos. Uma abordagem do problema por uma outra forma é mostrada em [7]; neste caso o autor adota para análise não um material isotrópico mas, um material ortotrópico. Os problemas são resolvidos através de procedimentos inspirados nas soluções de Saint-Venant para flexão e torção [1], [2].

Para levar em conta os efeitos da distorção em seções fechadas multicelulares, em [13] apresentam-se fatores multiplicadores para momentos fletores longitudinais e transversais; por outro lado, seções fechadas com muitas células alinhadas em uma direção do plano transversal assemelham-se já a estruturas tipo placa. Para as seções com muitas células alinhadas em uma direção e com vigas transversais espaçadas no comprimento, encontram-se [14] análises do tipo grelha plana que levam em conta o efeito de "shear-lag".

Vlassov, ao analisar seções fechadas com contorno poligonal, inclui mais alguns elementos no equilíbrio:

- a) A influência das tensões de cisalhamento, a distorção deixa de ser nula no esqueleto e impõe que estas tensões tenham distribuição uniforme na espessura.

- b) Os momentos de flexão da parede no plano da seção transversal, cuja origem ocorre na variação longitudinal das tensões cisalhantes. Como ocorreu nas barras de seção aberta de comprimento médio, a seção é apenas inextensível em seu plano.

Com estas hipóteses, as expressões finais para os deslocamentos não têm semelhança com aquelas das seções abertas de comprimento médio ou longo. Obtém-se um sistema de equações diferenciais até para uma barra com uma única célula (ou uma seção caixão). Para a solução, é proposto um método variacional que numa seção caixão reduz o problema à solução de uma equação diferencial de sexta ordem a uma variável. Entretanto, na análise do método variacional proposto, percebe-se que não está sendo levado em conta o efeito de "shear-lag", apesar de Vlassov incluí-lo nas hipóteses. Mesmo assim, esta análise é por ele chamada de seções deformáveis com distorção e só foi limitada pelo método variacional proposto. A análise da seção caixão, pelo método variacional de Vlassov, estendida para esta seção com mesas laterais em balanço foi programada em [17].

No sentido apontado por Vlassov, ou seja a inclusão dos momentos fletores transversais, existem trabalhos na literatura, [15] e [16], em que foi desprezada a influência das tensões cisalhantes, não sendo possível levar em conta o efeito "shear-lag". Nesta análise, a solução do problema para torção não uniforme ou de empenamento restringido é análoga ao de uma viga sob fundação elástica, enquanto para os deslocamentos de flexão é análogo ao da teoria elementar de vigas. Vlassov também trata este caso e chama de análise de uma seção fechada deformável sem distorção. Em [18] é apresentado, para avaliação do efeito dos momentos fletores transversais em uma seção caixão, o uso do estado plano de tensões. Assim, conhecendo-se uma tensão normal, no caso a tensão longitudinal dada pela lei de Bernoulli para flexão, e fazendo-se uso das equações de equilíbrio, com ausência das forças de volume, determinam-se as outras tensões incógnitas. As tensões encontradas servirão de base, segundo [18], para avaliação dos efeitos dos momentos transversais.

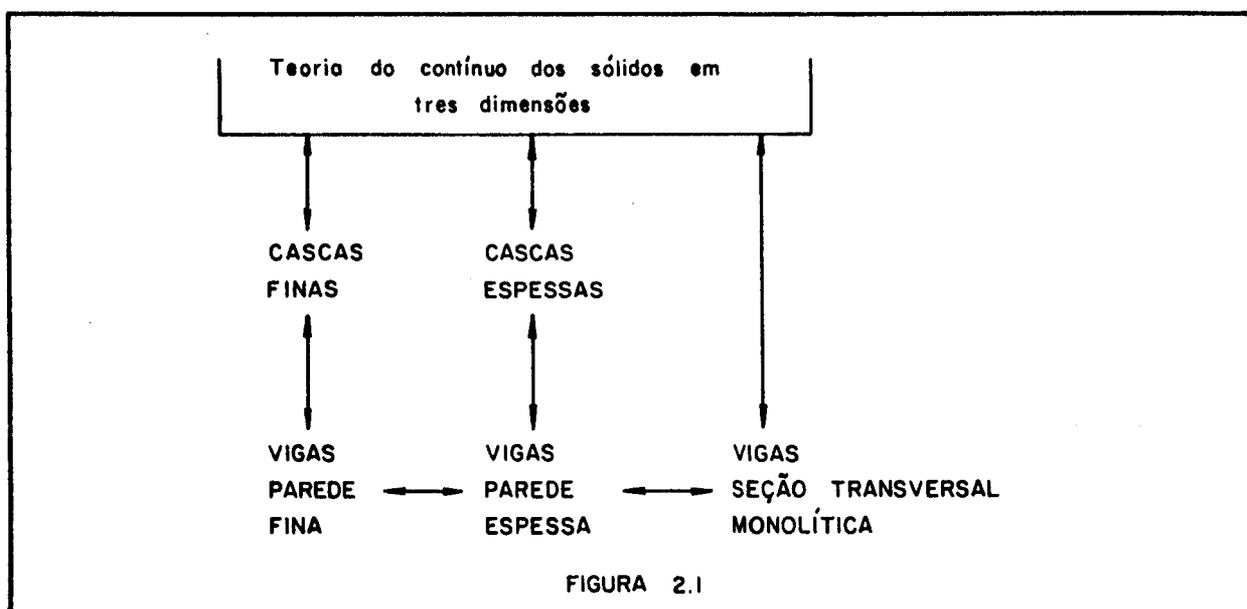
A consideração dos momentos fletores transversais é conhecida na análise de folhas poliédricas [19]. Este caso, normalmente apresentado em manuais de cascas finas como caso particular, [20] e [21], nada mais é que uma análise de barras de comprimento médio com parede fina e seção aberta. Esta análise considera

a estrutura composta por uma associação de laminas e supõe:

- a) nas extremidades, a folha poliédrica é suportada por diafragmas infinitamente rígidos em seu plano mas que permitem o empenamento longitudinal.
- b) cargas perpendiculares ao plano da lâmina são suportadas pela chamada ação de placa, ou momentos de flexão no plano da seção transversal. Os momentos de flexão na direção do eixo longitudinal são nulos pelo comportamento da lâmina ser de placa estreita.
- c) cargas no plano da lâmina são levadas aos diafragmas com a lâmina assumida como viga alta.

Para análise destas folhas, existem soluções fechadas para particulares condições de carga e apoio [20] e [21], como métodos numéricos [22].

O esquema da figura 2.1, apresentado em [27], mostra o relacionamento entre as teorias.



Desta forma, tomando-se como exemplo as vigas de parede fina, chega-se às teorias de cálculo destas barras simplificando a teoria de cascas finas com hipóteses análogas as de flexão de barras de seção monolítica; por outro lado, efeitos como "shear-lag" não podem ser notados.

De modo inverso, para que sejam considerados efei-

tos não previstos em teoria de vigas, o grau de complexidade da análise é aumentado o que faz retornar-se às cascas.

A medida que aumenta a complexidade do tratamento, soluções diretas tornam-se difíceis de serem obtidas e a utilização de métodos numéricos, uma necessidade.

Para tratamento numérico do problema, existem programas que, utilizando a teoria de Vlassov sem os momentos transversais e incluindo os efeitos de distorção (seções transversais indeformáveis com distorção) [23] e [24], resolvem as equações diferenciais com elementos finitos.

Quando o esqueleto da seção transversal aberta ou fechada é poligonal, o que resulta em lâminas formando a barra de comprimento médio ou longo, a análise por elementos finitos de superfície [23] tem como extensão as faixas finitas onde cada lâmina é uma faixa [22], [25] e [26]. As faixas podem conter o estado plano de tensões, sem simplificações, e até os momentos de flexão da parede nas direções transversais e longitudinais.

Pode-se até incluir o efeito da espessura na flexão das lâminas [26] mas, também está sendo generalizado o tratamento das seções de parede fina para as de parede grossa.

O tratamento com elementos finitos de superfície também pode ser simplificado com a eliminação dos efeitos de flexão da parede e só considerando-se o estado plano de tensão, [28] e [29].

Na direção da análise com a consideração de flexão e extensão da parede, sabe-se da teoria de cascas que em cascas curtas, os momentos de flexão da parede no plano longitudinal e as respectivas cortantes não podem ser negligenciados, no equilíbrio, como se faz para as médias e longas.

Tendo-se em conta este fato e com intenção de analisar barras curtas, médias e longas neste trabalho, assumem-se para cada lâmina:

- a) uma ação de placa generalizada ou seja, são considerados os momentos de flexão da parede nos planos longitudinal e transversal.
- b) uma ação de chapa generalizada ou seja, o estado plano de tensões.

Assim, para uma lâmina as duas ações estão desacopladas e são acoplando-se a partir da existência de duas lâminas não

coplanares.

Entretanto, análises deste tipo são, algumas vezes, criticadas na literatura por duas razões:

- a) neste tipo de associação das lâminas não se tem uma noção do efeito do conjunto mas, uma predominância de efeitos locais e nas respostas predominam os efeitos relativos entre lâminas.
- b) o excessivo uso de memória computacional, apesar deste argumento já estar em desuso pela existência de computadores cada vez mais potentes e alguns autores afirmarem que "memória não é um problema".

Como resposta a primeira crítica, este trabalho inclui diafragmas na seção transversal em sua forma generalizada:

- a) os diafragmas associam-se a todos elementos da seção transversal (diafragmas integrais).
- b) os diafragmas associam-se a apenas alguns elementos da seção transversal (diafragmas parciais).

Os tipos de diafragmas são:

- a) rigidez no plano da seção transversal e liberdade para empenamentos longitudinais.
- b) deformação longitudinal plana ou seja, restrição de a seção transversal permanecer plana na deformação, e liberdade para deslocamentos no plano transversal.
- c) a associação dos itens a e b.

O resultado do diafragma é a redução dos graus de liberdade dos pontos da seção transversal pois, os nós que participam têm seus deslocamentos limitados. Como decorrência da redução dos graus de liberdade, a estrutura, tem a sua rigidez aumentada. A necessidade física dos diafragmas é mostrada em [30].

Assim, cargas aplicadas ou restrições de apoio nos diafragmas estão associadas ao efeito de conjunto e não mais ao efeito local.

Com os diafragmas, pode-se simplificar o comportamento de uma estrutura de parede fina assemelhando-o ao de uma barra.

As equações diferenciais do problema são resolvidas por tratamento numérico. Com objetivo de atender a exigência de redução de memória computacional e melhor avaliar os efeitos de cargas concentradas, utilizou-se o método dos elementos de contorno.

Por outro lado, não é frequente na literatura, em análises deste tipo, ser possível a seção transversal poder passar de aberta a fechada e retornar a aberta, sucessivamente, como a formulação usada neste estudo permite.

### 3 - ESTADO PLANO DE TENSÃO E FLEXÃO DE PLACAS FINAS

#### 3.1 - Introdução

Conforme foi mostrado no capítulo anterior, a análise de barras de parede fina a esqueleto poligonal é feita admitindo-se a barra como uma estrutura obtida da associação de placas no espaço. Em cada placa existe um estado plano de tensão superposto a um estado de flexão de placas finas. Tratando-se de análise de primeira ordem, os dois estados estão desacoplados, só acoplando-se a partir da existência de duas placas não coplanares.

A seguir, apresentam-se as hipóteses de cálculo com um breve resumo da teoria envolvida.

#### 3.2 - Hipóteses Básicas

Esta análise será feita em regime elástico linear para um material homogêneo e isotrópico, com as seguintes hipóteses:

- a) Deve-se abandonar as simplificações da análise elementar de vigas e ter-se em mente o comportamento de um sistema espacial.
- b) A barra é constituída de um número finito de placas delgadas e planas. Supõe-se que a ligação entre estas placas, constituídas ao longo das arestas, seja rígida e de tal modo que o deslocamento relativo entre placas seja impedido.
- c) O equilíbrio de cada elemento, e conseqüentemente da barra, é feito na posição indeslocada.

A estas hipóteses, acrescentam-se as referentes às placas:

- d) As deflexões das placas são pequenas e as deformações na direção da espessura pequenas o suficiente para serem desprezadas.

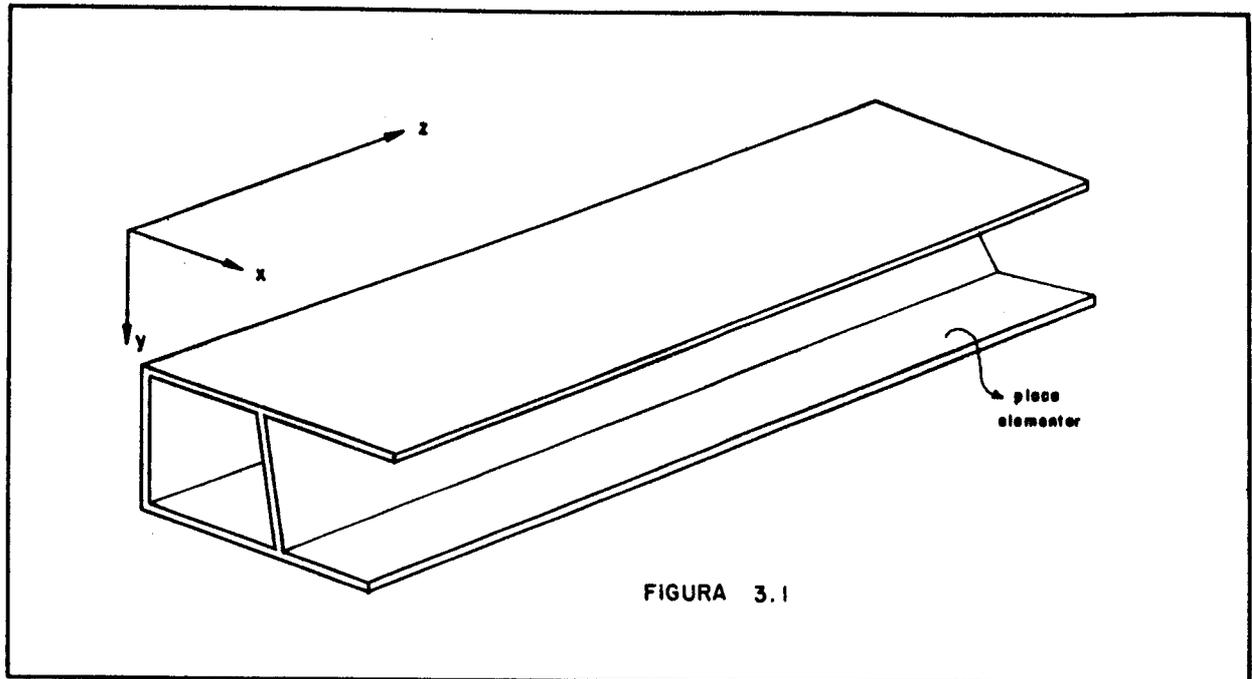
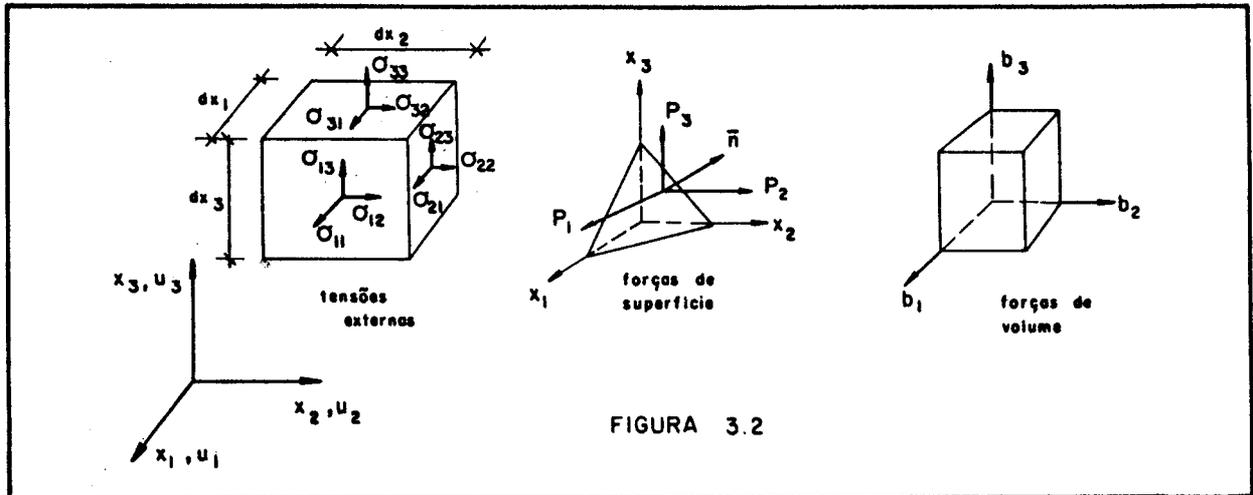


FIGURA 3.1

- e) As tensões normais atuando nos planos paralelos à superfície média são pequenas, quando comparadas com as outras componentes de tensão, e podem ser desprezadas. Esta hipótese só deixa de ser válida nas vizinhanças de cargas concentradas aplicadas perpendicularmente às superfícies das placas.
- f) As componentes de deslocamento nas direções principais, contidas no plano da placa, variam linearmente com a espessura e não tendo necessariamente valor nulo na superfície média.
- g) Supõe-se que as normais à superfície média na posição indeformada permanecem normais após a deformação. Isto significa desprezar as deformações por cortante que causam distorção nestas normais.
- h) Não existem tensões de cisalhamento nas faces externas à superfície média da placa.
- i) Cargas perpendiculares à placa produzem somente flexão mas, não extensão. Cargas no plano da placa produzem extensões mas, não flexão.

### 3.3 - Equação de Navier

As tensões que atuam em um elemento infinitesimal de um sólido, as forças de volume e as forças de superfície são mostradas na figura 3.2.



Sabe-se que as forças externas atuando em um corpo podem ser distribuídas no volume ou na superfície, onde observa-se que as forças de volume atuam interiormente ao corpo, como a gravidade por exemplo. As equações de equilíbrio podem ser escritas, em notação indicial, da seguinte forma:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ no domínio} \dots (3.1)$$

$$p_i = \sigma_{ji} n_j \quad \text{no contorno} \dots (3.2)$$

onde

$\sigma_{ij}$  ou  $\sigma_{ji}$  são tensões internas

$b_i$  são forças externas por unidade de volume

$p_i$  são forças externas por unidade de superfície

Quando não há momentos por unidade de volume, resulta:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \dots (3.3)$$

A figura 3.2 mostra que a cada um dos eixos coordenados está associado um deslocamento  $u_i$ . Quando os deslocamentos são pequenos [1], as deformações associadas a estes deslocamentos são dadas por [2]:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + \delta_{mn} u_{m,i} u_{n,j}) \quad (i, j, m, n = 1 \dots 3) \quad (3.4)$$

onde  $\delta_{mn}$  é o delta de Kronecker.

As deformações podem ser linearizadas [31], onde desprezam-se os efeitos dos produtos entre derivadas dos deslocamentos, resultando as seguintes expressões:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \dots(3.5)$$

Para um material elástico linear, sabe-se que as deformações medidas [1] são proporcionais às cargas ou seja, quando a carga aumenta, ou diminui, a deformação correspondente aumenta, ou diminui, e não podendo ser medida quando a carga é reduzida a zero. Esta é a Lei de Hooke generalizada [1] e pode ser expressa [31] da seguinte forma: "Cada componente do estado de tensão num ponto é uma função linear das componentes do estado de deformação do ponto". A expressão matemática desta lei é dada por:

$$\sigma_{k\ell} = C_{k\ell mn} e_{mn} \quad (k, \ell, m, n, = 1 \dots 3) \quad \dots(3.6)$$

onde  $C_{k\ell mn}$  são constantes elásticas

As 81 constantes elásticas das equações (3.6) são reduzidas a 2 com considerações de simetria do tensor de tensões, da existência da função densidade da energia de deformação e de isotropia [31]. Assim, as equações (3.6) passam a ser escritas:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} e_{nn} \quad (i, j, n = 1 \dots 3) \quad (3.7)$$

onde  $\mu$  e  $\lambda$ , chamadas constantes de Lamé, podem ser expressas em função do módulo de Young e do coeficiente de Poisson  $\nu$  da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \dots\dots(3.8)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \dots\dots(3.9)$$

Também costuma-se chamar  $\mu$  de módulo de elasticidade transversal e sendo notado com a letra G. A soma  $e_{nn}$  é chamada de "dilatação cúbica" ou "dilatação" [1].

Substituindo-se o valor das deformações na expressão (3.7) por suas relações com deslocamentos dadas por (3.5), obtém-se as tensões escritas em função dos deslocamentos e colocando-se este resultado na equação (3.1), obtêm-se as equações de Navier. Esta equação, também chamada de equilíbrio em termos de deslocamento, é dada por:

$$\mu u_{j,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,kj} + b_j = 0$$

ou

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1 - 2\nu} u_{k,kj} + b_j = 0 \dots\dots(3.10)$$

As equações de equilíbrio (3.2), com as forças aplicadas na superfície de contorno, também podem ser escritas em função dos deslocamentos. Assim, utilizando-se (3.5) e (3.7) de forma análoga à obtenção de (3.10), resulta:

$$p_i = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \lambda u_{k,k} n_i$$

ou

$$p_i = G(u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} u_{k,k} n_i \dots\dots(3.11)$$

Encontrada a solução das equações (3.10), esta deve verificar (3.11) mas não precisa satisfazer as equações de compatibilidade porque as deformações são obtidas dos deslocamentos e não vice-versa [31].

### 3.4 - Estados Planos

Estados planos de deformação são caracterizados por duas das funções deslocamentos serem funções de coordenadas de um plano perpendicular a um dos eixos principais e a outra função ser nula ou constante. Por exemplo:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2)$$

$$u_2 = u_2(x_1, x_2)$$

$$u_3 = 0$$

A consequência é que as deformações associadas são nulas, ou seja,  $e_{i3}$  são nulas. Pode-se ainda mostrar que as forças de volume  $b_1$  e  $b_2$  são necessariamente independentes de  $x_3$  e  $b_3$  é nula [31].

O estado plano de tensão caracteriza-se pelas tensões normais e tangenciais que atuam nas faces perpendiculares a um dos eixos principais serem nulas. Pode-se tomar, como exemplo, o caso em que  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  e  $\sigma_{33}$  são nulas. Adicionalmente, mostra-se que as relações tensão-deformação entre estados planos de deformação e estados planos de tensão tornam-se iguais com a modificação de constantes. Sejam as relações tensão-deformação para os estados planos:

- a) estado plano de deformação, a equação (3.7) com  $i, j$  e  $n$  até 2:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij} \lambda e_{nn}$$

- b) estado plano de tensão:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij} \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} e_{nn} \quad (i, j, n = 1, 2) \dots\dots(3.12)$$

Passa-se do estado plano de tensão para o de deformação, fazendo-se:

$$\frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} = \lambda'$$

ou

$$v = \frac{v'}{1 - v'} \quad \dots\dots(3.13)$$

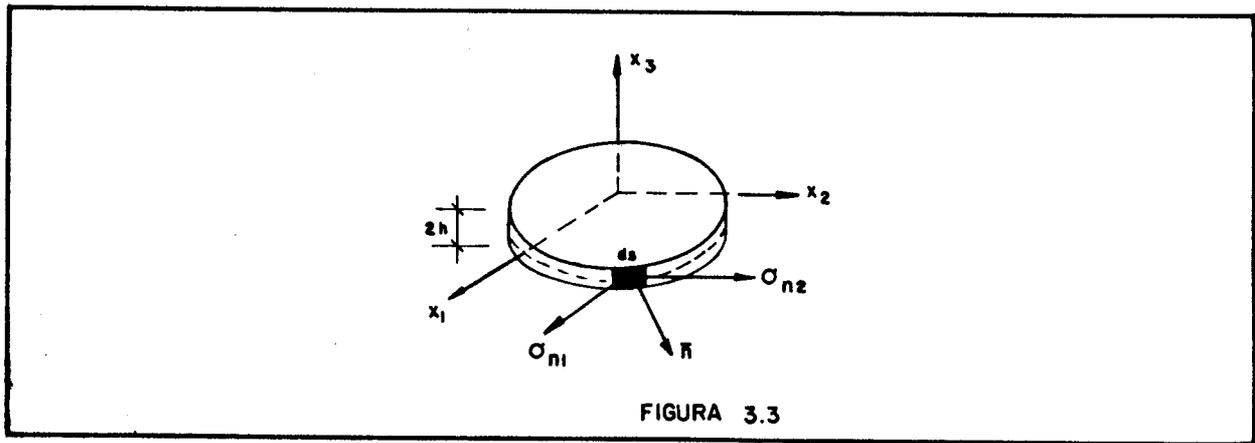
De modo inverso, passa-se do estado plano de deformação para o de tensão, fazendo-se:

$$v' = \frac{v}{1 + v} \quad \dots\dots(3.14)$$

Observando-se que o estado não é alterado, mas apenas as relações tensão-deformação com i,j variando de 1 a 2.

Na análise de uma chapa fina carregada com forças em seu plano, figura 3.3, apesar da ausência de tensões normais e tangenciais nas faces paralelas a este plano, existe deformação na direção da espessura, ou [1]:

$$e_{33} = - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (e_{11} + e_{22}) \quad \dots\dots(3.15)$$



Uma importante generalização é feita com a hipótese da tensão normal  $\sigma_{33}$  ser nula através da chapa e as tensões tangenciais serem nulas apenas nas faces [1]. Neste caso, pode-se tratar os deslocamentos, deformações e tensões no plano como valores mē-

dios, por exemplo:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_1 dx_3 \quad \dots\dots(3.16)$$

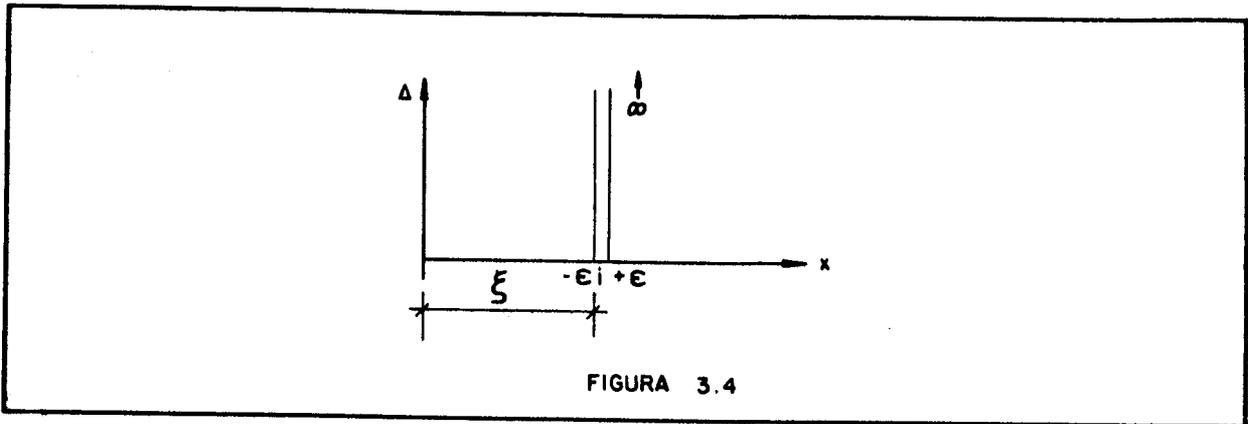
onde estende-se este conceito para os outros deslocamentos, as deformações e as tensões. Observando-se que os valores médios encontrados serão tão próximos dos reais quanto mais fina for a chapa.

Fazendo-se a integração com relação a  $x_3$  das equações de equilíbrio (3.1), obtêm-se as equações de equilíbrio em duas dimensões ( $i, j = 2$ ) com os deslocamentos no sentido de valor médio na espessura. Procedendo-se, nestas equações, analogamente ao feito nas equações (3.1) para a obtenção das equações de Navier (3.10) chega-se a equações para o estado plano idênticas às (3.10) só limitando-se os índices até 2. Este estado é chamado de estado plano de tensões generalizado, os deslocamentos devem ser entendidos no sentido de valores médios e as equações de Navier têm solução análoga à do estado plano de deformação, com a conveniente alteração de  $\lambda$  ou  $\nu$  mostrada em (3.13) ou (3.14).

### 3.5 - Solução Fundamental de Chapas

Com o propósito da utilização no capítulo seguinte, pode-se resolver as equações de Navier (3.10) para uma força discreta aplicada em um ponto. Esta solução, chamada de potencial para problemas de elasticidade [31], tem valor infinito num ponto (polo) [1]. Aqui chamada de solução fundamental [32], ela é definida como uma solução singular da equação de Laplace com não homogeneidade discreta dada pela função delta de Dirac [33].

A função delta de Dirac,  $\Delta(x - \xi)$ , é uma função generalizada que pode ser definida como o limite da função normal (figura 3.4) [34]. No limite, esta função é zero em todos os pontos do domínio exceto onde o argumento é zero, quando ela vale infinito.



A função delta de Dirac tem propriedades muito usadas em engenharia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x - \xi) dx = 1 \quad \dots\dots(3.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Delta(x - \xi) dx = f(\xi) \quad \dots\dots(3.18)$$

Ao observar-se as equações (3.10), nota-se que estas equações não são as de Laplace, ou seja:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1 - 2\nu} u_{k,kj} + b_j = 0$$

ou

$$G \nabla^2 \underline{u} + \frac{G}{1 - 2\nu} \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) + \underline{b} = 0 \quad \dots\dots(3.19)$$

onde  $\underline{u}$  e  $\underline{b}$  são os vetores deslocamento e forças de volume respectivamente.

$\underline{\nabla}$  é um operador diferencial vetorial do tipo:

$$\underline{\nabla} = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \dots\dots(3.20)$$

$\nabla^2$  é um operador diferencial escalar, chamado Laplaciano, dado por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad \dots\dots(3.21)$$

Para utilizar-se como solução fundamental das equações (3.10) ou (3.19) um resultado proveniente de uma solução da equação de Laplace é necessário um artifício. Este artifício consiste em escrever o vetor deslocamentos  $\underline{u}$  como função de um vetor auxiliar  $\underline{F}$  da seguinte forma:

$$\underline{u} = \frac{1}{2G} \left[ 2(1 - \nu) \nabla^2 \underline{F} - \nabla (\nabla \cdot \underline{F}) \right] \quad \dots\dots(3.22)$$

O vetor  $\underline{F}$  é chamado vetor de Galerkin, podendo-se mostrar que para qualquer vetor  $\underline{u}$  é possível encontrar um vetor  $\underline{F}$  satisfazendo (3.22) [39]. A substituição do vetor  $\underline{u}$  definido em (3.22) nas equações (3.10) resulta:

$$(1 - \nu) \nabla^2 (\nabla^2 \underline{F}) + \underline{b} = 0 \quad \dots\dots(3.23)$$

Com a força discreta aplicada em uma direção, pode-se reescrever a equação (3.23) com a função delta de Dirac representando a carga, ou seja:

$$(1 - \nu) \nabla^2 (\nabla^2 \underline{F}) + \underline{\Delta} = 0 \quad \dots\dots(3.24)$$

onde  $\underline{\Delta}$  é a função delta de Dirac definida em forma vetorial ou seja, ela vale  $\infty$  em apenas uma direção no ponto  $\xi$  de aplicação da carga concentrada.

A resolução da equação (3.24) no problema de estado plano de deformação é feita, de modo simples, com o operador Laplaciano  $\nabla^2$  escrito em coordenadas cilíndricas a uma variável, devido a simetria do problema [33], ou seja:

$$\nabla^2 ( ) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} ( ) \right] \quad \dots\dots(3.25)$$

Assim procedendo-se [32], o deslocamento  $u$  na direção  $\ell$  para uma força aplicada na direção  $k$  é dada por:

$$u_{k\ell} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{\ell k} + r_{,\ell} r_{,k} \right] \dots\dots(3.26)$$

onde  $r$  é a distância do ponto de aplicação da força ao ponto onde deseja-se obter o deslocamento. Este resultado é singular no ponto de aplicação da carga e é chamado de solução fundamental para o estado plano de deformação.

Para o estado plano de tensão generalizado, o coeficiente de Poisson na equação (3.26) deve ser substituído pela relação (3.14) ou:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \nu}$$

a solução vale agora para o estado plano de tensão.

A equação (3.26) inclui um movimento de corpo rígido mas, isto não altera a determinação de deformações e tensões, como nota-se em (3.5) e (3.12). Nos fundamentos matemáticos apresentados em [32], também mostra-se por integração de (3.26) que ela representa a solução de uma força discreta aplicada no problema plano. Em [1], resolve-se o estado plano de deformação para uma carga concentrada com uma função de tensão, onde esta função é análoga a de Airy [2] sem forças de volume. A solução obtida difere de (3.26) por um movimento de corpo rígido.

### 3.6 - Flexão de Placas Finas

Seja a figura 3.5 onde mostram-se os sentidos positivos da carga externa, dos giros de seção devido à flexão ( $\theta_i$ ), das cortantes ( $q_i$ ) e dos momentos de flexão e torção ( $m_{ij}$ ).

O estudo da flexão de placas finas tem como aspecto principal a não consideração do efeito das cortantes nas deformações por flexão ou seja, é uma generalização das hipóteses de flexão de vigas longas.

Usando eq. (3.5)

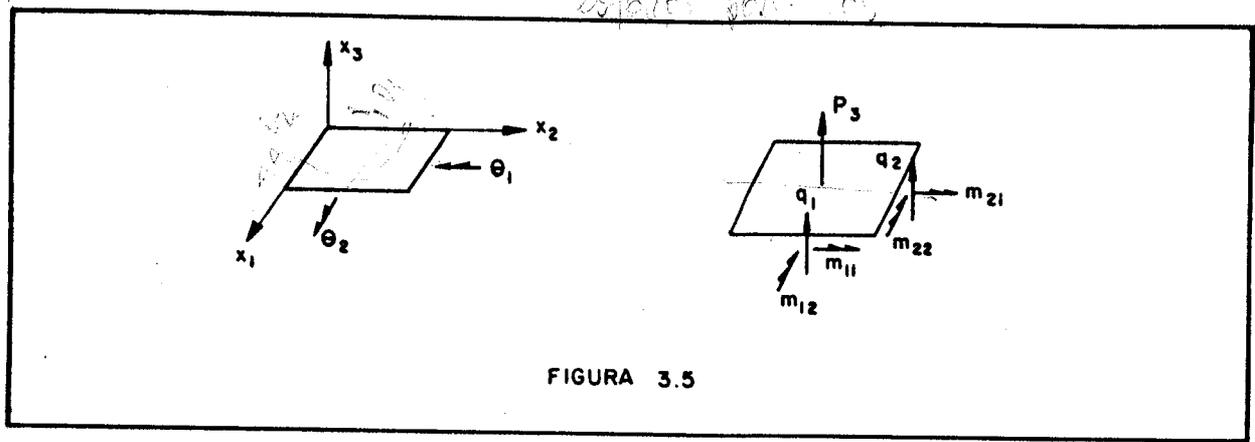


FIGURA 3.5

Das hipóteses, despreza-se a deformação na direção da espessura,  $e_{33}$  de acordo com a figura 3.5, e também a influência da tensão normal ao plano da placa,  $\sigma_{33}$ . A negligência da influência da cortante ocorre com a hipótese de que seções planas permanecem planas após a deformação. Deste modo impõe-se:

$$e_{i3} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \dots\dots(3.27)$$

Chamando-se  $u_3$  de  $w$ ,  $x_3$  de  $z$  e integrando-se as equações (3.27) chega-se a:

$$u_i = f_i(x_1, x_2) - z w_{,i}(x_1, x_2) \quad \dots\dots(3.28)$$

onde  $f_i$  representam deslocamentos no plano médio da chapa que são desprezados. Se estes deslocamentos ( $f_i$ ) forem associados ao estado plano de tensão, pelas hipóteses, eles não causarão flexão. Em [1], mostra-se que as deformações produzidas pelo estado plano de tensão são desprezíveis frente às de flexão.

Cumprindo observar que é comum a dedução das equações de placas integrando-se as equações (3.27), obtendo-se (3.28) e a partir daí chegar-se à equação diferencial de flexão das placas em função de  $w$ . Entretanto, neste procedimento, já está embutida uma outra simplificação que é aproximar a curvatura da flexão da placa pela segunda derivada da função deslocamento ( $w$ ) em relação às correspondentes coordenadas.

Substituindo-se os deslocamentos definidos por (3.28) nas expressões das deformações (3.5), com os índices até 2, e colocando-se o resultado nas expressões das tensões (3.12), obtêm-se:

$$\sigma_{ij} = -z \cdot 2G \left( w_{,ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} w_{,kk} \right) \dots\dots(3.29)$$

onde desprezou-se o efeito das funções  $f_i$

Definem-se os momentos de flexão ( $m_{11}$  e  $m_{22}$ ) e os momentos volventes ( $m_{12}$  e  $m_{21}$ ), todos por unidade de comprimento, da seguinte forma:

$$m_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{ij} dz \dots\dots(3.30)$$

Da integração das equações (3.29), segundo (3.30), resulta:

$$m_{ij} = -D [(1-\nu) w_{,ij} + \nu \delta_{ij} w_{,kk}] \dots\dots(3.31)$$

onde

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \dots\dots(3.32)$$

D é chamado de módulo de rigidez à flexão da placa. Desde que a ordem de diferenciação não é importante para funções com suficiente grau de continuidade, a análise da equação (3.31) leva a:

$$m_{ij} = m_{ji} \dots\dots(3.33)$$

O equilíbrio da placa em função de cortantes, momentos e carga uniformemente distribuída, é dado por [35]:

$$q_{i,i} + p_3 = 0 \dots\dots(3.34)$$

$$q_i = m_{ij,j} \dots\dots(3.35)$$

onde

$q_i$  são cortantes por unidade de comprimento  
 $p_3$  carga distribuída por unidade de superfície

Com a substituição do valor de  $m_{ij}$  dado por (3.31) na expressão (3.35) e fazendo-se a diferenciação, resulta para  $q_i$ :

$$q_i = -D [(1 - \nu) w_{,ijj} + \nu \delta_{ij} w_{,jkk}]$$

ou

$$q_i = -D w_{,ijj} \quad \dots\dots(3.36)$$

Com o valor de  $q_i$  dado por (3.36) substituído em (3.34), fazendo-se a diferenciação, resulta a equação diferencial das placas:

$$D \cdot w_{,ijjj} = p_3$$

ou

$$D \cdot \nabla^2 (\nabla^2 w) = p_3 \quad \dots\dots(3.37)$$

onde o operador  $\nabla^2$  é usado em duas dimensões ( $x_1$  e  $x_2$ ).

Para expressar as condições de vinculação da placa é importante a definição das cortantes e momentos em coordenadas normais e tangenciais à borda. Seja a figura 3.6 onde a cortante de contorno  $Q$  e os momentos  $M_1$  e  $M_2$  são mostrados.

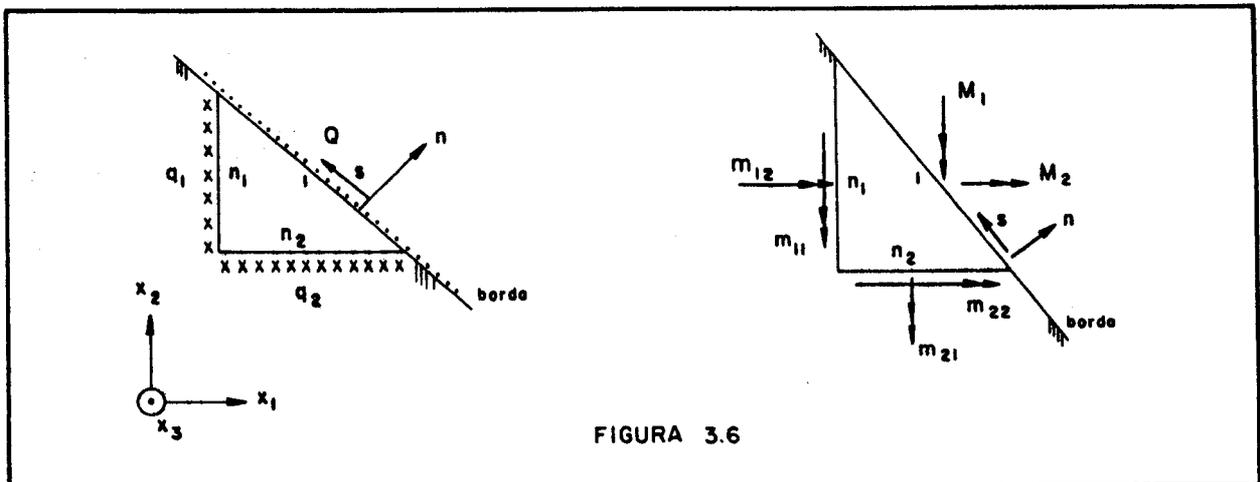


FIGURA 3.6

As coordenadas  $n$  e  $s$  são definidas como:

$n$  é um vetor unitário normal à borda com sentido para o exterior

$s$  é um vetor unitário tangente à borda com sentido de percurso destrógiro sendo dado pelo produto ve torial:

$$\underline{s} = \underline{k} \times \underline{n} \quad \dots\dots(3.38)$$

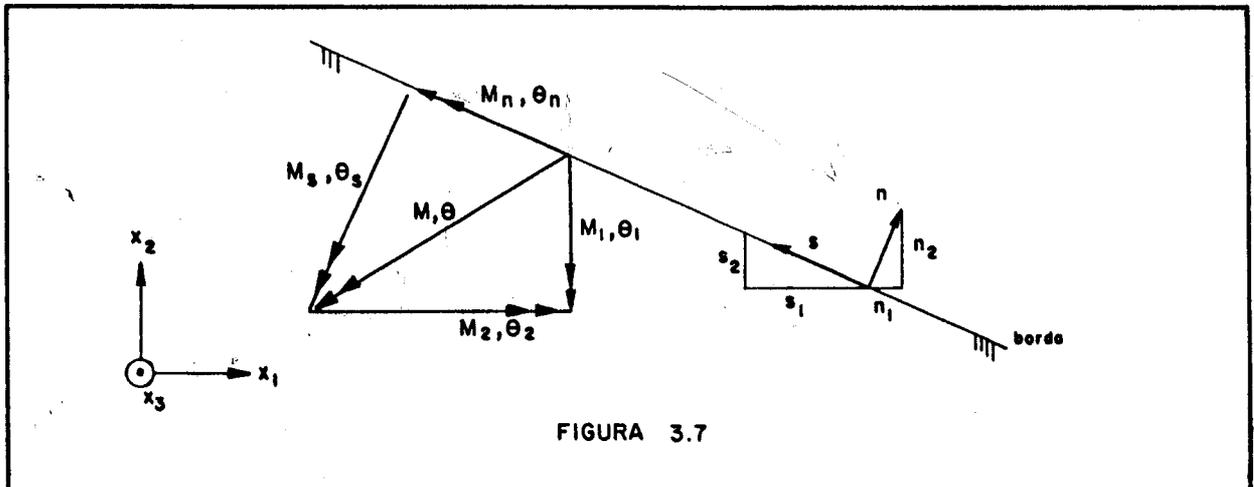
onde  $k$  é um vetor unitário no sentido de  $x_3$

As equações de equilíbrio obtidas da figura 3.6 são:

$$Q = q_i n_i \quad \dots\dots(3.39)$$

$$M_i = - m_{ij} n_j \quad \dots\dots(3.40)$$

A figura 3.7 mostra as componentes normais e tangenciais dos momentos  $M_i$ .



Da figura 3.7 resulta a seguinte equação de equilíbrio:

$$M_i = - M_n n_i - M_s s_i \quad \dots\dots(3.41)$$

ou

$$M_n = - M_i n_i \quad \dots\dots(3.42)$$

$$M_s = - M_i s_i \quad \dots\dots(3.43)$$

onde utilizou-se

$$n_i n_i = 1$$

$$s_i s_i = 1$$

$$n_i s_i = 0$$

Os ângulos de giro  $\theta_1$  e  $\theta_2$  relacionam-se com os ângulos  $\theta_n$  e  $\theta_s$  em expressões análogas às dos momentos  $M_i$  com  $M_n$  e  $M_s$  (conforme figura 3.7).

As condições de vinculação são:

a) Engaste

$$w = 0 \quad \dots\dots(3.44a)$$

$$\theta_n = 0 \quad \dots\dots(3.44b)$$

b) Apoio simples

$$w = 0 \quad \dots\dots(3.45a)$$

$$M_n = 0 \quad \dots\dots(3.45b)$$

Entretanto, como o deslocamento  $w$  é nulo ao longo do apoio, resulta que o giro  $\theta_s$  também é, pois:

$$\theta_s = \frac{\partial w}{\partial s}$$

Assim, a derivada do giro  $\theta_s$  também será nula. Logo, da definição de  $M_n$ , resulta:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \mathcal{D} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$$

ou, devido ao giro  $\theta_s$  ser nulo, chega-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0 \quad \dots\dots(3.45c)$$

c) Borda livre

Na borda livre ocorre:

$$M_n = 0 \quad \dots\dots(3.46a)$$

$$M_s = 0 \quad \dots\dots(3.46b)$$

$$Q = 0 \quad \dots\dots(3.46c)$$

Entretanto, Kirchoff [1] mostrou que somente duas condições são necessárias. Esta inconsistência ocorre devido à negligência dos efeitos de  $\sigma_{13}$  e  $\sigma_{23}$ , dadas em (3.27), e que resultou em expressar todos os esforços em função de uma única variável  $w$ . Assim, através de método variacional, Kirchoff mostrou que as condições naturais neste problema são:

$$M_n = 0 \quad \dots\dots(3.47a)$$

$$Q + \frac{\partial M_s}{\partial s} = 0 \quad \dots\dots(3.47b)$$

A figura 3.8 mostra uma borda com os momentos volventes colocados em forma de binários num elemento infinitesimal e nota-se a contribuição à cortante  $Q$  da variação do momento volvente  $M_s$ .

Notar na figura 3.8 que no equilíbrio da interface de dois elementos infinitesimais consecutivos resulta a equação (3.47b).

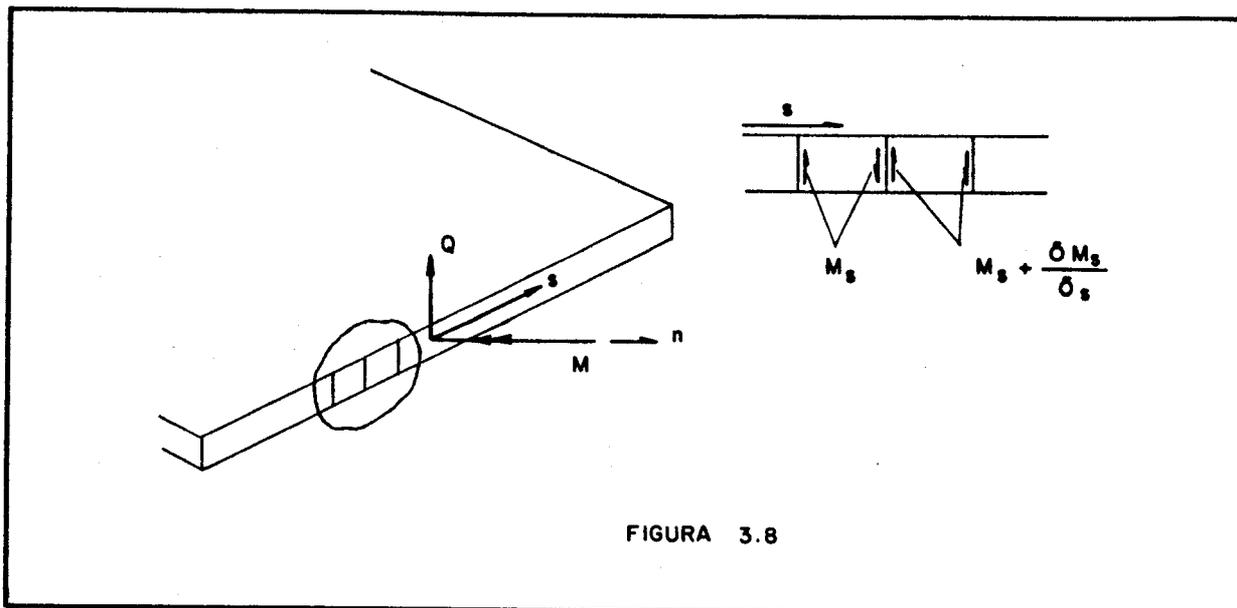


FIGURA 3.8

### 3.7 - Solução Fundamental de Placas Finas

Analogamente ao procedido com relação ao estado plano de tensões, a solução fundamental é obtida com uma carga concentrada aplicada num ponto de uma placa infinita. Para a solução de equação (3.37), utiliza-se o mesmo operador  $\nabla^2$ , definido em (3.25), por considerações de simetria [36]. Seja a equação (3.37):

$$\nabla^2 (\nabla^2 w) = \frac{1}{D} p_3$$

Escrevendo-a com o operador  $\nabla^2$  definido em (3.25) e a função delta de Dirac para a solução fundamental, resulta:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{1}{D} \Delta e_3 \quad \dots\dots(3.48)$$

Integrando-se a equação (3.48) com relação a r, impondo-se as condições essenciais [36]:

$$\frac{dw}{dr} = 0 \quad \text{em} \quad r = 0 \quad \dots\dots(3.49a)$$

$$Q + \frac{dM_s}{dr} = - \frac{1}{2\pi r} \quad \dots\dots(3.49b)$$

e utilizando-se as hipóteses de Danson [35], chega-se:

$$w = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left( \ln(r) - \frac{1}{2} \right) \quad \dots\dots(3.50)$$

O valor de  $w$ , expresso em (3.50), é a solução da equação (3.48) ou, o valor do deslocamento  $w$  numa placa infinita, com uma carga concentrada unitária aplicada num ponto e distante  $r$  de onde deseja-se obter o deslocamento; esta é a solução fundamental de placas.

## 4 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

### 4.1 - Introdução

As equações diferenciais das chapas e placas serão transformadas em equações integrais através do método dos elementos de contorno. Este método que pode ser deduzido a partir da terceira identidade de Green, de teoremas como o de Betti ou do princípio dos trabalhos virtuais, será formulado a partir da técnica dos resíduos ponderados. A vantagem do uso desta técnica é sua generalidade pois, permite a direta extensão do método para resolver equações diferenciais parciais mais complexas, como também pode ser usada para formular outros métodos numéricos. Desta forma, facilita-se o relacionamento do método dos elementos de contorno com outros métodos para a composição de métodos mistos [34].

Após a discretização pelo método dos elementos de contorno nas chapas e placas, a solução das equações integrais é transformada na solução de um sistema de equações lineares. Em seguida, na associação de cada elemento de barra, que contém as equações de chapa e placa, utiliza-se a técnica de subregiões para a definição do sistema geral de equações.

A partir do sistema geral de equações, pode-se ainda incluir diafragmas de extremidade ou interno. Devendo-se notar que a inclusão ou a retirada dos diafragmas é feita com modificações no sistema de equações sem alterar a numeração ou posição dos nós de contorno.

Finalmente, para cada chapa componente da estrutura (ou barra), são apresentadas as expressões para o cálculo das curvaturas e tensões nos pontos internos, como também para as tensões nas extremidades e na interface de ligação das chapas, isto é, nas arestas.

### 4.2 - A Técnica dos Resíduos Ponderados

Tomando-se, como exemplo, a equação diferencial de placas (3.37):

$$\nabla^2 (\nabla^2 w) - \frac{1}{D} p_3 = 0$$

Se a variável  $w$  for aproximada por uma função  $w_a$ , será obtida uma função  $R$  que é o erro da função aproximadora ( $w_a$ ) no domínio de aplicação ( $\Omega$ ) da equação (3.37) ou seja:

$$\nabla^2 (\nabla^2 w_a) - \frac{1}{D} p_3 = R \quad \text{em } \Omega \quad \dots\dots(4.1)$$

onde  $w_a$  é a função aproximadora.

A técnica propõe uma forma de distribuir este erro de forma a ser zero no sentido do valor médio tanto no domínio ( $\Omega$ ) como no contorno deste domínio ( $\Gamma$ ).

Define-se um conjunto de funções  $\alpha_i$  linearmente independentes e não necessariamente satisfazendo condições de contorno homogêneas. A partir de uma combinação linear de  $\alpha_i$ , resulta a função ponderadora  $g$ , ou seja:

$$g = c_i \alpha_i \quad i = 1 \dots k \quad \dots\dots(4.2)$$

onde  $c_i$  são coeficientes arbitrários.

Distribui-se o erro em  $\Omega$  pela multiplicação de  $R$  por  $g$ , ou seja:

$$\int_{\Omega} R g \, d\Omega = 0 \quad \dots\dots(4.3)$$

Com base na hipótese de que os coeficientes  $c_i$  são arbitrários, resultam  $K$  equações do tipo:

$$\int_{\Omega} R \alpha_i = 0 \quad i = 1 \dots k \quad \dots\dots(4.4)$$

A técnica dos resíduos ponderados será utilizada para a formulação direta do método dos elementos de contorno. Assim, utilizando-se a equação (4.1), a aplicação dos resíduos pondera-

dos, no domínio, com a função ponderadora  $g$ , é do tipo:

$$\int_{\Omega} [\nabla^2 (\nabla^2 w_a) - \frac{1}{D} p_3] g d\Omega = 0 \quad \dots\dots(4.5)$$

Como será visto a seguir, a aplicação do método dos elementos de contorno inverte a equação inicial (4.5) através de integrações por partes. Para o conjunto de funções básicas  $\alpha_i$ , são utilizadas aquelas que eliminam as integrais de domínio e reduzem o problema ao contorno somente. Estas funções podem ser funções singulares produzidas pela aplicação de um delta de Dirac em pontos particulares ou funções regulares para aquelas resultantes da solução da equação homogênea.

#### 4.3 - Equação Integral de Chapas

Para formular a equação integral de chapas será utilizado o conceito de superfície regular definida por Kellogg[40] ou seja, regiões regulares são regiões cuja superfície de contorno é regular mas, não necessariamente suave, pois podem ocorrer cantos. As equações de equilíbrio de chapas, neste domínio, são dadas por (3.1) com os índices até 2, ou seja:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \dots\dots(4.6)$$

A superfície de contorno da chapa, notada  $\Gamma$ , reduz-se, para o estado plano de tensão generalizado, a uma linha. No contorno da chapa são prescritos deslocamentos,  $\bar{u}_i$  na porção  $\Gamma_1$  e forças  $\bar{p}_i$  na porção  $\Gamma_2$ , onde a soma das porções  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  corresponde a  $\Gamma$ . As forças externas  $p_i$  são relacionadas com as tensões  $\sigma_{ij}$  através da expressão (3.2) com os índices limitados a 2, ou :

$$p_i = \sigma_{ji} n_j \quad (i, j = 1, 2) \quad \dots\dots(4.7)$$

A expressão dos resíduos ponderados para este problema, onde existem soluções aproximadas no domínio e no contorno, pode ser escrita:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + b_i) u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_i - \bar{p}_i) u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_i - u_i) p_i^* d\Gamma \quad (i, j = 1, 2) \dots (4.8)$$

onde

$\sigma_{ij}$ ,  $p_i$  e  $u_i$  são tensões, forças e deslocamentos da solução a proximadora incôgnita

$u_i^*$  e  $p_i^*$  correspondem às funções ponderadoras.

As forças  $p_i^*$  relacionam-se com os deslocamentos  $u_i^*$  pela expressão (3.11), com os índices limitados a 2, ou:

$$p_i^* = G(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) n_j + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,k}^* n_i \quad (i, j, k = 1, 2) \dots (4.9)$$

onde assumiu-se a validade das relações deformação-deslocamento (3.5), tensão-deformação (3.7) e de equilíbrio (4.6) para as funções ponderadoras.

Assumindo-se válidas as relações (3.5) e (3.7) também para o campo de funções aproximadas  $u_i$ , tendo-se em conta a simetria do tensor de tensões e após integrações por partes [34], chega-se à expressão:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j}^*) u_i d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_i p_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_i p_i^* d\Gamma$$

(i, j = 1, 2) ..... (4.10)

onde da simetria do tensor de tensões utilizou-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \sigma_{ij}^* d\Omega \quad \dots (4.11)$$

onde  $\epsilon_{ij}^*$  e  $\sigma_{ij}^*$  estão associados às funções ponderadoras.

Escolhendo para  $u_i^*$  a solução fundamental de chapas, elimina-se a primeira integral de domínio e, na ausência de forças de volume, tem-se um problema de contorno a partir da técnica

dos resíduos ponderados.

A técnica dos resíduos ponderados não exige considerações adicionais mas, pode-se observar que assumiu-se um domínio infinito  $\Omega^*$  com um contorno  $\Gamma^*$  no infinito contendo o domínio  $\Omega$  do problema da chapa. Admitindo estar em equilíbrio o domínio infinito, este apresenta estados de tensão, de deformação e de deslocamento, devido a um carregamento unitário,  $\Delta$  (função delta de Dirac), aplicado num ponto  $\xi$ . A hipótese da solução aproximada  $u$  estar em equilíbrio é válida pois, o estado de tensões dentro da chapa será dado como combinação das soluções em equilíbrio no domínio  $\Omega^*$ .

Para eliminar a primeira integral de domínio da equação (4.10) com a solução fundamental, escreve-se:

$$\sigma_{ji,j}^* = - \Delta e_i \quad \dots\dots(4.12)$$

onde  $\Delta$  é a função delta de Dirac que representa a carga concentrada aplicada na direção  $e_i$  e ponto  $\xi$ .

A substituição do valor de  $\sigma_{ji,j}^*$  dado por (4.12) na equação (4.10) e usando a propriedade (3.18) da função delta de Dirac, mostrada para um caso unidimensional resulta:

$$u_i(\xi) - \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\ + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) \quad (i, j = 1,2) \dots\dots(4.13)$$

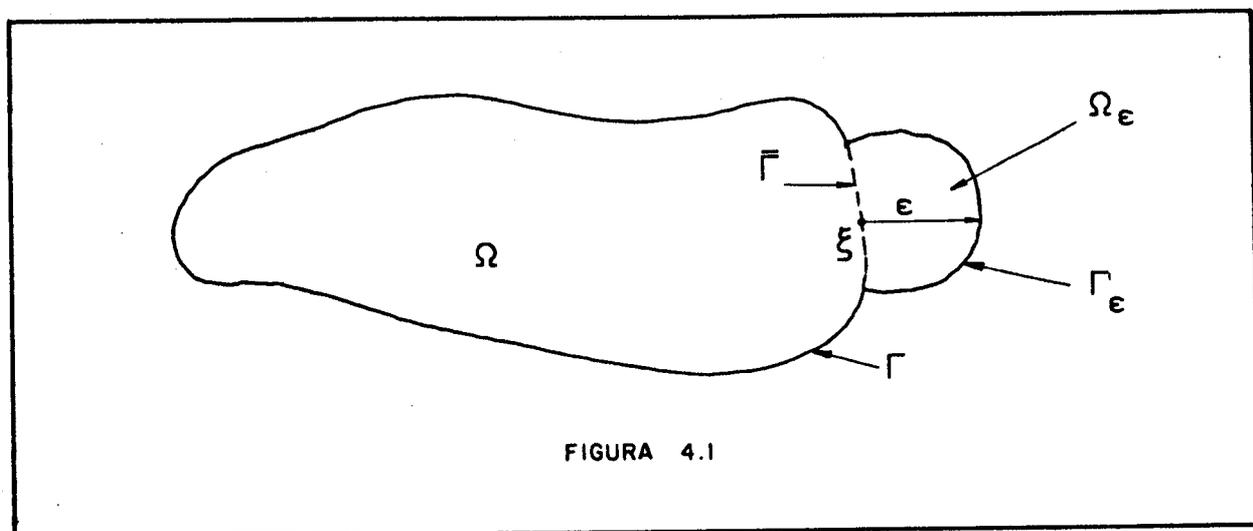
onde removeram-se as condições prescritas  $\bar{u}_i$  e  $\bar{p}_i$  para maior simplicidade de notação.

As equações (4.13) são escritas para cada uma das direções principais e em tantos quantos forem os pontos de aplicação da carga unitária.

A leitura da equação (4.13) mostra que o deslocamento  $u$  na direção  $i$  de um ponto interno na chapa será dado, na ausência de forças de volume  $b_j$ , como a somatória de integrais de deslocamentos  $u_j$  e forças  $p_j$  no contorno ponderados por funções  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$  que são da solução fundamental. Entretanto, esta equação tem

sentido se forem conhecidos os valores dos deslocamentos  $u_j$  e forças  $p_j$  no contorno.

Para transformar a equação (4.13) numa relação com apenas valores do contorno é necessário um artifício. Acrescenta-se ao domínio uma pequena região  $\Omega_\epsilon$  de modo que o novo domínio seja dado por  $\Omega$  e  $\Omega_\epsilon$  com um contorno  $\Gamma + \Gamma_\epsilon - \bar{\Gamma}$ , como mostra a figura 4.1.



Reescrevendo a equação (4.13) para o ponto  $\xi$  neste novo domínio, resulta:

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi) = & - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} p_{ij}^* u_j d\Gamma - \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ij}^* u_j d\Gamma + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega_\epsilon} b_j u_{ij}^* d\Omega \quad \dots\dots(4.14)
 \end{aligned}$$

As integrais sobre  $\Gamma - \bar{\Gamma}$ , quando  $\epsilon$  tende a zero, são entendidas como integrações no sentido do valor principal [37]. Para as integrais sobre o acréscimo do domínio  $\Gamma_\epsilon$  e  $\Omega_\epsilon$  sabe-se que são nulas, exceto:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p^*_{ij} u_j d\Gamma = \bar{c}_{ij} u_j(\xi) \quad \dots\dots(4.15)$$

onde  $\xi$  passa a situar-se no contorno.

A equação integral escrita para pontos do contorno resulta em:

$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p^*_{ij}(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u^*_{ij}(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u^*_{ij}(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \quad \dots\dots(4.16)$$

onde para os pontos do contorno cuja tangente  $\tilde{a}$  linha de contorno  $\tilde{e}$  cont nua, tem-se:

$$c_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad \dots\dots(4.17)$$

Quando existem cargas concentradas aplicadas em pontos internos da chapa, deve-se somar ao segundo membro da equa o (4.16), para cada carga concentrada, a seguinte grandeza:

$$B_j(x) u^*_{ij}(\xi, x) \quad \dots\dots(4.18)$$

onde  $B_j$   $\tilde{e}$  o valor da carga concentrada aplicada em  $x$  na dire o  $j$ .

A equa o (4.16)  $\tilde{e}$  a equa o integral de chapas para pontos de contorno e a equa o integral (4.13) aquela que calcula deslocamentos em pontos internos a partir de valores de deslocamentos e for as conhecidos no contorno. A solu o fundamental  $u^*_{ij}$   $\tilde{e}$  dada por (3.26) e  $p^*_{ij}$  obtida de  $u^*_{ij}$  com a equa o (4.9), ou seja:

$$u^*_{ij} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad \dots\dots(4.19)$$

$$p^*_{ij} = - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} + 2 r_{,i} r_{,j} \right] + (1-2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right\} \dots\dots(4.20)$$

onde

$r$  é a distância entre os pontos  $\xi$  e  $x$ , com orientação de  $\xi$  para  $x$

$r_{,i}$  e  $r_{,j}$  são as derivadas de  $r$  aos eixos coordenados pelos cossenos diretores de  $r$

$n_i$  e  $n_j$  são cossenos diretores do vetor normal à superfície de contorno

$\frac{\partial r}{\partial n}$  é a derivada de  $r$  com relação a  $n$  dada pelo produto escalar entre os respectivos versores

#### 4.4 - Equação Integral de Placas

Analogamente ao procedido na determinação das equações integrais de chapas, a expressão dos resíduos ponderados para a solução da equação (3.37) é do tipo:

$$\int_{\Omega} (Dw_{,iijj} - p_3) w^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} (w - \bar{w}) \left( Q^* + \frac{\partial M^*_s}{\partial s} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\theta_n - \bar{\theta}_n) M^*_n d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (\bar{Q} - Q + \frac{\partial \bar{M}_s}{\partial s} - \frac{\partial M_s}{\partial s}) w^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \theta^*_n (M_n - \bar{M}_n) d\Gamma \dots\dots(4.21)$$

onde

na porção  $\Gamma_1$  do contorno são conhecidos o deslocamento  $\bar{w}$  e rotação  $\bar{\theta}_n$ .

na porção  $\Gamma_2$  do contorno são conhecidos os momentos de flexão  $\bar{M}_n$  e cortante equivalente  $\bar{V}_n$  [36], onde:

$$\bar{V}_n = \bar{Q} + \frac{\partial M}{\partial s} \quad (4.22)$$

Deve-se observar que estas condições impostas podem ser deduzidas a partir dos resultados (3.44) a (3.47).

Admitindo-se válidas as relações (3.31), (3.36) e (3.41) para os domínios  $\Omega$  e  $\Omega^*$ , integrando-se por partes a primeira parcela da integral de domínio da equação (4.21) e após convenientes agrupamentos, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D w_{,ijjj} w^* d\Omega &= \int_{\Gamma} (Q^* w - Q w^* + M_n \theta_n^* + M_s \theta_s^* - M_n^* \theta_n - M_s^* \theta_s) d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} D w_{,ijjj}^* w d\Omega \quad \dots\dots(4.23) \end{aligned}$$

Para tornar a expressão (4.23) com termos correspondentes à equação (4.21) deve-se alterar as integrais de  $M_s \theta_s^*$  e  $M_s^* \theta_s$ ; procedendo-se segundo [36], obtêm-se:

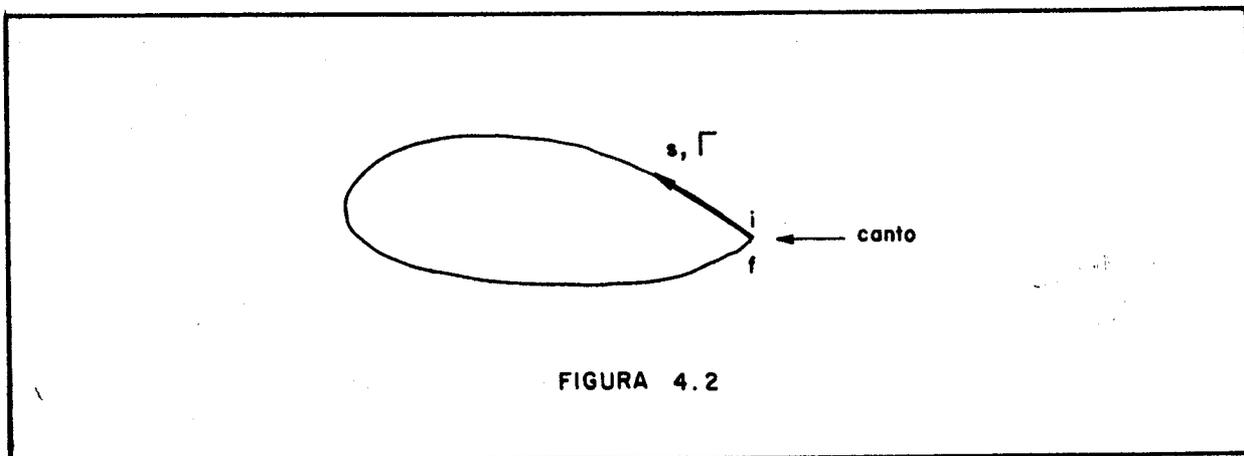
$$\int_{\Gamma} M_s^* \theta_s d\Gamma = - [M_s^* w]_i^f - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_s^*}{\partial s} w d\Gamma \quad \dots\dots(4.24)$$

onde as letras entre colchetes significam que o produto das funções  $M_s$  e  $w$  deve ser calculado nos extremos do contorno, subtraindo-se do valor final (f) o valor inicial (i). Quando o contorno é fechado sem cantos (inclinação da superfície contínua), este termo desaparece e só aparecendo na existência de cantos. Neste último caso, da continuidade da função  $w$  nos cantos, resulta:

$$[M_s^* w]_i^f = [M_s^*]_i^f w_c \quad \dots\dots(4.25)$$

onde estende-se este conceito para  $M_s$  da solução aproximada.

O resultado do termo entre colchetes no segundo membro da equação (4.25) é chamado de reação de canto, notado como  $R_c$ , e os valores final e inicial dos momentos volventes ( $M_s$ ) estão de acordo com a orientação da coordenada  $s$  que percorre o contorno, como mostra a figura 4.2.



A substituição do valor da primeira integral de domínio dado por (4.23) na expressão (4.21), já alterando-se as integrais de  $M_s \theta_s^*$  e  $M_s^* \theta_s$  através do procedimento mostrado em (4.24) e com a utilização da relação (4.22) para as soluções aproximada e fundamental, resulta:

$$\int_{\Omega} D w_{,iijj}^* w \, d\Omega = - \int_{\Gamma} (V_n^* w - M_n^* \theta_n) \, d\Gamma - R_{ci}^* w_{ci} +$$

$$+ \int_{\Gamma} (V_n w^* - M_n \theta_n^*) \, d\Gamma + R_{ci} w_{ci}^* +$$

$$+ \int_{\Omega} p_3 w^* \, d\Omega \quad (i = 1 \dots N_n) \dots (4.26)$$

onde

$R_c^*$  e  $R_c$  são reações de canto das soluções aproximada e fundamental, mostrada em (4.25)

$V_n^*$  e  $V_n$  são cortantes equivalentes das soluções aproximada e fundamental, mostrada em (4.22)

as somatórias das reações de canto estendem-se de  $i$  igual a um até o número de cantos ( $N_c$ ).

Analogamente à equação integral de chapas, removeram-se as condições prescritas na equação (4.26) para uma maior simplicidade de notação (isso é permitido pois, independentemente de o valor ser prescrito ou calculado a sua aproximação é a mesma). Continuando a analogia, pode-se tomar como função ponderadora a solução fundamental de placas e com as propriedades (3.18) da função delta de Dirac aplicada num ponto  $\xi$  interno à placa, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 w(\xi) = & - \int_{\Gamma} (V_n^*(\xi, x) w(x) - M_n^*(\xi, x) \theta_n(x)) d\Gamma(x) - R_{ci}^*(\xi, x_c) w_i(x_c) + \\
 & + \int_{\Gamma} (V_n(x) w^*(\xi, x) - M_n(x) \theta_n^*(\xi, x)) d\Gamma(x) + R_{ci}(x) w_i^*(\xi, x_c) + \\
 & + \int_{\Omega} p_3(x) w^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad (i = 1 \dots N_c) \quad \dots\dots(4.27)
 \end{aligned}$$

onde  $x_c$  é a coordenada dos cantos.

Analogamente à equação (4.13), a equação (4.27) fornece deslocamentos nos pontos internos da placa a partir de cortantes equivalentes ( $V_n$ ), momentos de flexão na direção normal ( $M_n$ ), reações de canto ( $R_c$ ), deslocamentos ( $w$ ) e giros em relação à normal ( $\theta_n$ ) conhecidos no contorno.

Com o objetivo de obter-se uma equação integral somente para os pontos do contorno, procede-se analogamente ao artifício mostrado na Figura 4.1 para a equação integral de chapas. Assim, após as integrações em  $\Gamma_\epsilon$  e com as integrais sobre  $\Gamma - \bar{\Gamma}$  entendidas no sentido do valor principal, quando  $\epsilon$  tende a zero, obtêm-se [36]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w(\xi) + \int_{\Gamma} [V_n^*(\xi, x) w(x) - M_n^*(\xi, x) \theta_n(x)] d\Gamma(x) + R_{ci}^*(\xi, x_c) w_i(x_c) = \\ \int_{\Gamma} [V_n(x) w^*(\xi, x) - M_n(x) \theta_n^*(\xi, x)] d\Gamma(x) + R_{ci} w_i^*(\xi, x_c) + \\ + \int_{\Omega} p_3(x) w^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad (i = 1 \dots N_c) \quad \dots\dots(4.28) \end{aligned}$$

onde  $\xi$  está situado em um ponto no contorno, onde a tangente a esta superfície é contínua.

No caso de cargas concentradas aplicadas ao interior da placa, deve-se acrescentar na equação (4.28), para cada carga concentrada  $P_3$  e momento  $M_i$  na direção  $i$ , a grandeza:

$$P_3(x) w^*(\xi, x) + M_i(x) \theta_i^*(\xi, x) \quad \dots\dots(4.29)$$

onde  $P_3(x)$  e  $M_i(x)$  são os valores das cargas em  $x$ .

Assim a equação (4.28) é a equação integral de placas para pontos de contorno, na ausência de forças no domínio ( $p_3$ ), e a equação (4.27) é aquela que fornece deslocamentos em pontos internos a partir de deslocamentos e forças conhecidas no contorno. A solução fundamental e as outras funções ponderadoras obtidas a partir dela são dadas por:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left( \ln(r) - \frac{1}{2} \right) \quad \dots\dots(4.30)$$

$$\theta_n^* = \frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{1}{4\pi D} r \ln(r) \frac{\partial r}{\partial n} \quad \dots\dots(4.31)$$

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi} \left[ (1 + \nu) \ln(r) + \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right] \quad \dots\dots(4.32)$$

$$V_n^* = \frac{1}{4\pi r} \left[ (1 - \nu)^2 \frac{\partial r}{\partial n} \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 - \frac{\partial r}{\partial n} (3 - \nu) \right] \quad \dots\dots(4.33)$$

$$\theta_i^* = w_{,i}^* = \frac{1}{4\pi D} r \ln(r) r_{,i} \quad \dots\dots(4.34)$$

onde  $\frac{\partial r}{\partial s}$  é a derivada de  $r$  com relação a  $s$  dada pelo produto escalar entre os respectivos versores.

As reações de canto  $R_C^*$  são obtidas a partir dos momentos volventes  $M_S$  segundo (4.25), ou:

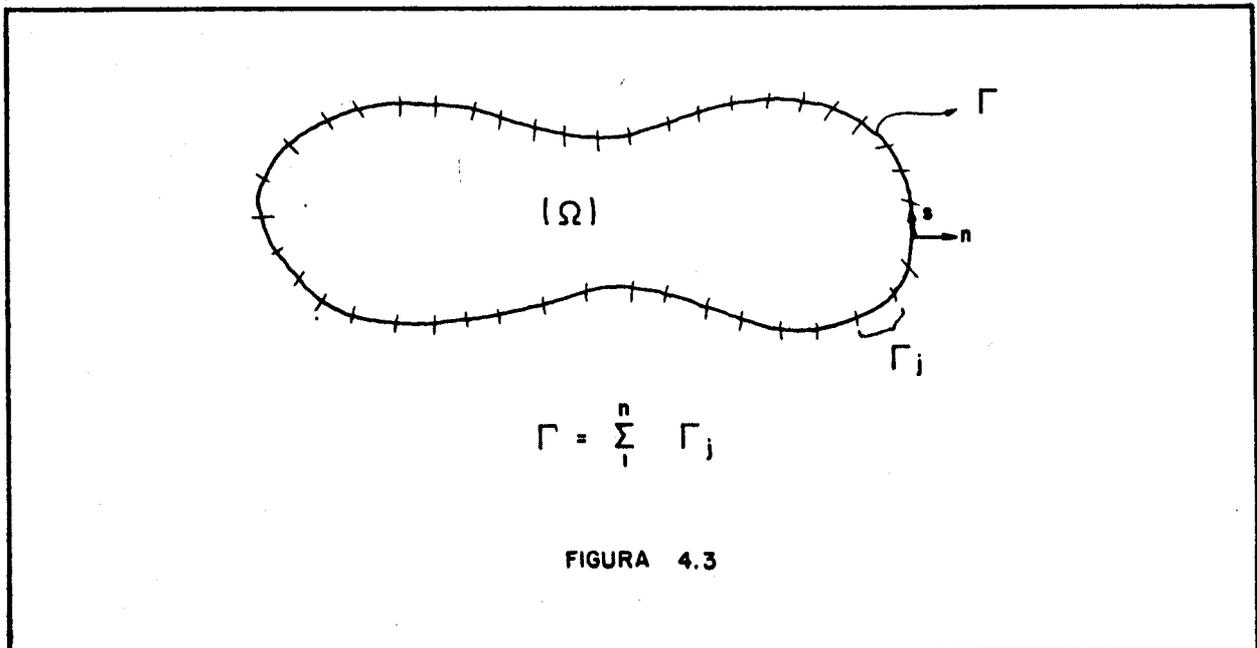
$$R_C^* (\xi, x_C) = M_S^* (\xi, x_f) - M_S^* (\xi, x_i) \quad \dots\dots(4.35)$$

$$M_S^* = - \frac{(1 - \nu)}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} \quad \dots\dots(4.36)$$

onde  $x_f$  e  $x_i$  são os pontos anterior e posterior ao canto, respectivamente (onde as direções de  $n$  e  $s$  sofrem descontinuidade).

#### 4.5 - Discretização e os Elementos Utilizados

Elementos de contorno são sub-regiões do contorno de um domínio bi ou tridimensional que podem ser representados parametricamente. A figura 4.3 mostra o exemplo de um domínio bidimensional ( $\Omega$ ) com o contorno ( $\Gamma$ ) dividido em elementos.



Aos pontos do elemento, relativo aos quais a geometria é definida, chamam-se n̄s. É frequente a adoção das variáveis pertencente ao n̄ para a referência daquelas pertencentes à parte interna do elemento.

Neste estudo, a geometria do elemento utilizado é linear, as coordenadas de um ponto interno podem ser escritas a partir das coordenadas dos n̄s com a seguinte relação:

$$\underline{x} = \underline{\phi}^t x_k^j \quad \dots\dots(4.37)$$

ou, explicitamente:

$$\begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-n) & 0 & \frac{1}{2}(1+n) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-n) & 0 & \frac{1}{2}(1+n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(4.38)$$

onde em x o índice inferior (k) refere-se à direção (1 ou 2), o índice superior (j) refere-se ao número do n̄ e  $-1 \leq n \leq 1$ .

Para deslocamentos ( $u_1, u_2, w, \theta_n$ ) e forças ( $p_1, p_2, V_n, M_n$ ) também utilizaram-se funções lineares, análogas as da geometria, para escrever os valores da parte interna do elemento em função dos valores nodais. As expressões destas aproximações são:

$$\underline{u} = \underline{\phi}^t \underline{u}_k^j \quad \dots\dots(4.39)$$

$$\underline{p} = \underline{\phi}^t \underline{p}_k^j \quad \dots\dots(4.40)$$

$$\underline{w} = \underline{\psi}^t \underline{w}^j \quad \dots\dots(4.41)$$

$$\underline{\theta}_n = \underline{\psi}^t \underline{\theta}_n^j \quad \dots\dots(4.42)$$

$$\underline{M}_n = \underline{\psi}^t \underline{M}_n^j \quad \dots\dots(4.43)$$

$$\underline{V}_n = \underline{\psi}^t \underline{V}_n^j \quad \dots\dots(4.44)$$

onde

$\underline{u}$ ,  $\underline{p}$  são análogos a  $x$

$\underline{u}_k^j$  e  $\underline{p}_k^j$  são análogos a  $x_k^j$

$$\underline{w}^t = \{ w^i \} \quad \dots\dots(4.45)$$

$$\underline{w}^{j,t} = \{ w^1 \quad w^2 \} \quad \dots\dots(4.46)$$

$$\underline{\psi}^t = \left\{ \frac{1}{2}(1 - \eta) \quad \frac{1}{2}(1 + \eta) \right\} \quad \dots\dots(4.47)$$

$\underline{\theta}_n$ ,  $\underline{M}_n$  e  $\underline{V}_n$  são análogos a  $\underline{w}$

$\underline{\theta}_n^j$ ,  $\underline{M}_n^j$  e  $\underline{V}_n^j$  são análogos a  $\underline{w}^j$

Como utilizou-se uma função linear para aproximar a geometria e as variáveis dos nós, este elemento pode ser chamado de isoparamétrico linear. Os elementos podem ser contínuos ou descontínuos. Os elementos contínuos são mostrados na figura 4.3 onde a continuidade da variável aproximada nos nós leva a elementos adjacentes possuírem nós comuns. No caso de elementos descontínuos, não exige-se continuidade da variável em ambos os nós e os elementos adjacentes podem não possuir nó em comum. A figura 4.4 resume os tipos de elementos. Nesta figura, para os elementos descontínuos ou têm-se um nó de extremidade e um central (casos  $b_1$  e  $b_2$ ) ou nenhum nó de extremidade (caso  $b_3$ ).

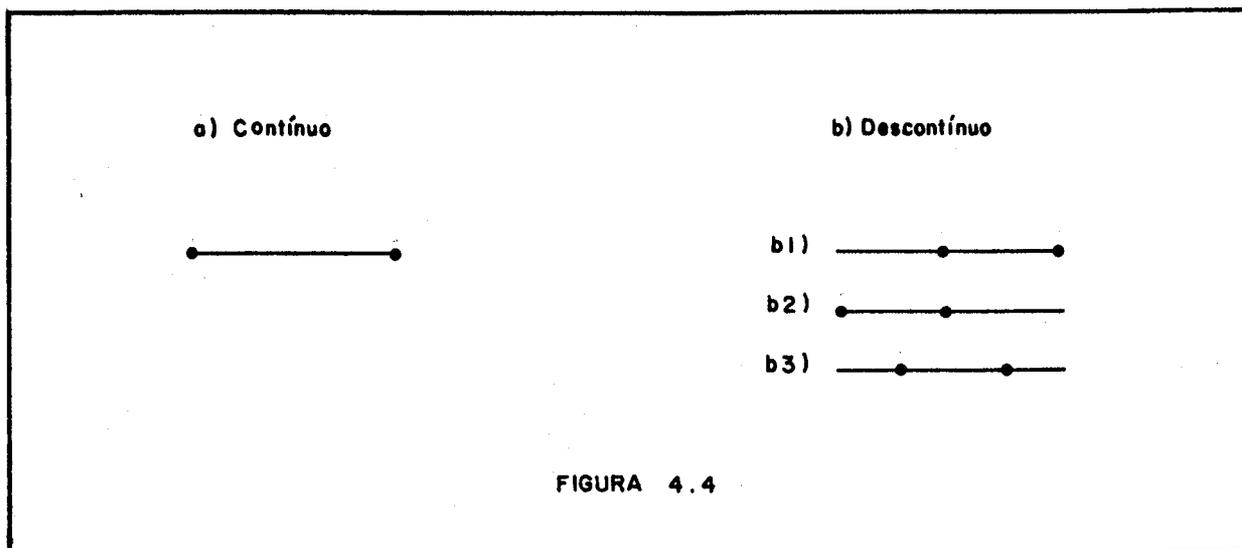


FIGURA 4.4

Para este trabalho a principal aplicação de elementos descontínuos é nos cantos das chapas ou placas. Neste local, estes elementos aproximam melhor uma eventual descontinuidade dos esforços. Assim, nos cantos são definidos dois nós com a mesma coordenada e que depois são levados a parte central de cada um dos elementos concorrentes ao canto.

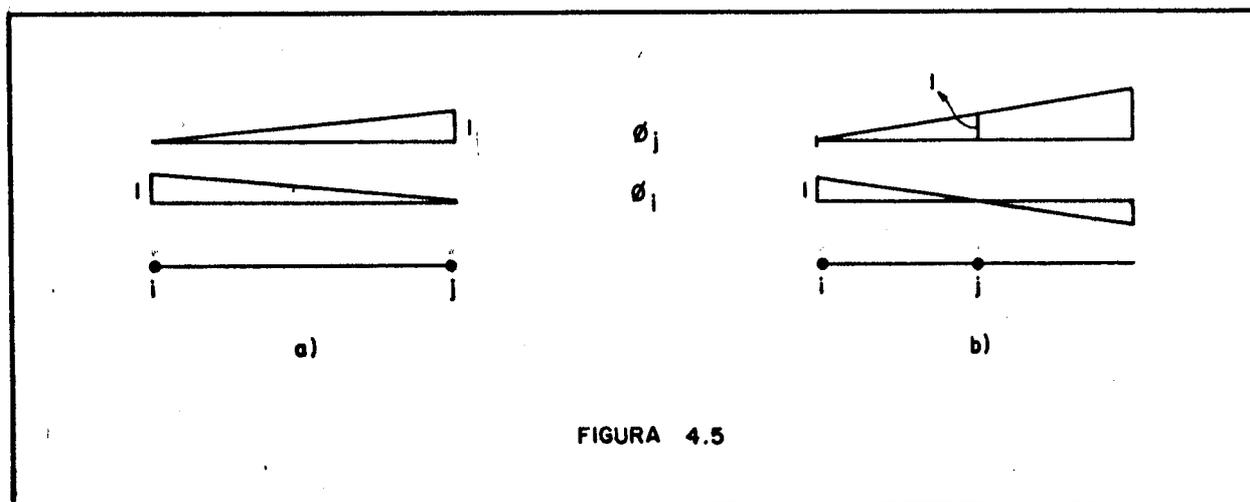


FIGURA 4.5

Entretanto, ao serem utilizados elementos descontínuos, pode-se alterar as funções aproximadoras em relação àquelas utilizadas nos elementos contínuos. O motivo para esta alteração é a necessidade de utilizar as variáveis pertencentes ao nó para a referência daquelas pertencentes à parte interna do elemento. A

figura 4.5 mostra esta alteração:

- a) No elemento contínuo as funções aproximadoras das influências dos n̄s,  $\phi_i$  e  $\phi_j$  respectivamente, valem um nos correspondentes n̄s e zero nos outros n̄s ( $\phi_i$  vale um em i e zero em j,  $\phi_j$  vale um em j e zero em i).
- b) No elemento descontínuo, onde o n̄ j é levado ao centro do elemento, para que as funções  $\phi_i$  e  $\phi_j$  tenham valor unitário no correspondente n̄ e valor zero no outro n̄, é necessário a utilização de funções aproximadoras diferentes daquelas do elemento contínuo (figura 4.5.b).

Neste trabalho, as funções aproximadoras não se alteraram e assim, nos elementos descontínuos, mantiveram-se valendo um em extremidades opostas (como no elemento contínuo, figura 4.5.a). Desta forma, no elemento descontínuo, as variáveis da parte interna do elemento são escritas em função das variáveis de extremidade. A própria variável do n̄ j é escrita como média das correspondentes variáveis de extremidade. Assim, para o elemento descontínuo mostrado na figura 4.5.b e com a variável w como exemplo, resulta:

$$w_j = \frac{1}{2} w_i + \frac{1}{2} w_e \quad \dots\dots(4.48)$$

onde  $w_e$  é a variável da extremidade onde existia o n̄ j, as funções  $\phi_i$  e  $\phi_e$  continuam sendo as mostradas no vetor  $\psi$ , ver (4.47), onde n foi feito zero.

Da análise das funções aproximadoras da figura 4.5 e da equação (4.48), pode parecer sem sentido a explanação de elementos descontínuos, quando neste trabalho as variáveis da parte interna dos elementos sempre foram aproximadas em função das variáveis de extremidade em qualquer um dos tipos de elemento.

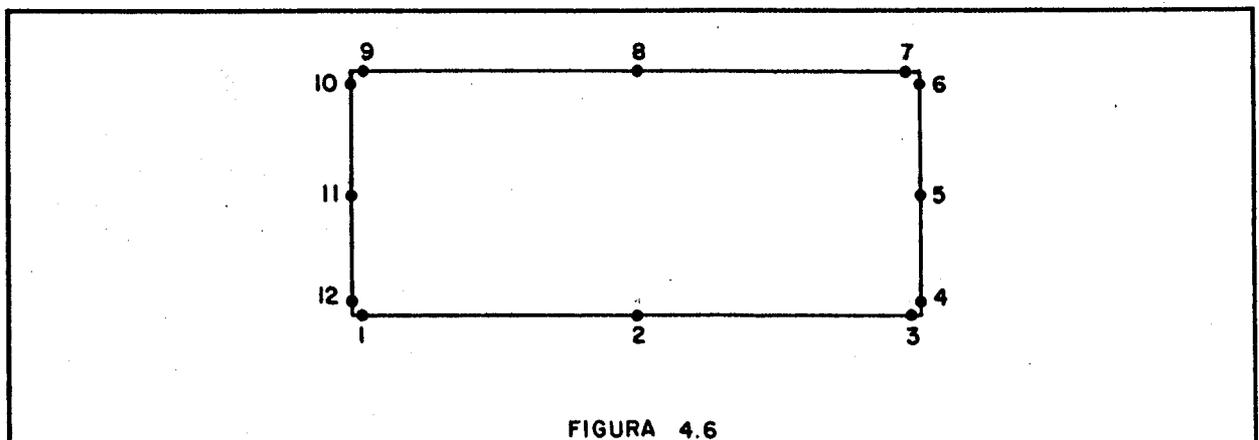
Entretanto, o que utilizou-se foi a essência da definição de elementos descontínuos pois, o que eles permitem é a descontinuidade da função aproximadora. Este objetivo é conseguido quando define-se num mesmo ponto dois n̄s ou dois graus de liberdade. Quanto ao aspecto de os n̄s serem levados ao centro, isto pode ser explicado da seguinte forma: Como será visto a seguir, as equações integrais (4.16) e (4.28) serão aplicadas a cada um dos n̄s. Assim, ao aplicar-se as equações integrais para os n̄s onde

deseja-se tratar a descontinuidade, seriam obtidas equações idênticas pois, os dois nós tem as mesmas coordenadas. Entretanto, se os nós da descontinuidade forem levados ao centro de cada elemento (casos b.1 e b.2 da figura 4.4), a equação integral estará sendo aplicada a pontos distintos. Por outro lado, como foi mostrado no item 4.2, as equações (4.16) e (4.28) devem ser aplicadas em pontos cuja tangente à superfície de contorno, neste local, seja contínua. Casos em que a tangente é descontínua também podem ser tratados, como mostrado em [34] e [36] mas, o esforço computacional é aumentado. Como os nós da descontinuidade são levados ao centro e o elemento tratado é linear, pode-se tirar partido destes fatos com o uso das equações (4.16) e (4.28) pois, a derivada à superfície de contorno é contínua neste local.

Portanto, este trabalho tratou elementos descontínuos com as variáveis internas aproximadas, no elemento, em função dos valores das variáveis de extremidades do elemento e ao ser escrita a equação integral para nós com as mesmas coordenadas, escreveu-se a equação para cada ponto no centro de cada elemento.

Cumpru observar que o tratamento dado aos elementos tipo b.1 e b.2 da figura 4.4 também poderia ser dado ao elemento tipo b.3 de forma semelhante.

A figura 4.6 apresenta o exemplo de uma placa, ou chapa, discretizada com elementos descontínuos, os nós 12 e 1, 3 e 4, 6 e 7, 9 e 10 possuem as mesmas coordenadas e são chamados de nós duplos. Ao serem escritas as equações integrais para cada um dos nós, quando um nó duplo é tratado, somente este nó é levado ao centro do elemento para escrever-se sua equação integral enquanto os outros são mantidos em seus locais de origem. As variáveis internas em cada elemento são aproximadas em função dos valores que



elas tem nas extremidades, mesmo no elemento cujo n̄o duplo é levado ao centro para o cálculo da equação integral.

#### 4.6 - Equações Integrais Discretizadas nos Macro-Elementos

Sejam as equações integrais para pontos do contorno do problema de chapas (4.16):

$$\frac{1}{2} \delta_{ij} u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x)$$

e a do problema de placas (4.28):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w(\xi) + \int_{\Gamma} [V_n^*(\xi, x) w(x) - M_n^*(\xi, x) \theta_n(x)] d\Gamma(x) + R_{ci}^*(\xi, x_c) w_i(x_c) = \\ = \int_{\Gamma} [V_n(x) w^*(\xi, x) - M_n(x) \theta_n^*(\xi, x)] d\Gamma(x) + R_{ci} w_i^*(\xi, x_c) + \\ + \int_{\Omega} p_3 w^*(\xi, x) d\Omega \quad (i = 1 \dots N_c) \end{aligned}$$

Neste ponto, será denominada macro-elemento a cada placa componente da barra (figura 3.1); em cada macro-elemento está definido o estado plano de tensão somado com o de flexão. Assim, procura-se diferenciar o tratamento entre elementos de contorno da discretização das equações integrais e elementos constituintes da barra (macro-elementos) mostrados na figura 3.1.

Para discretizar as equações integrais (4.16) e (4.28) de um macro-elemento, pode-se iniciar pelo estado plano de

tensão e depois passar à flexão como vice-versa pois, as equações estão desacopladas e a discretização de uma não afeta a outra.

Iniciando-se pela equação de flexão (4.28), as variáveis relacionadas neste problema são  $w$ ,  $\theta_n$ ,  $V_n$ ,  $M_n$  e, quando existem cantos,  $R_c$  em cada um dos cantos. Independente das reações de canto  $R_c$ , sabe-se que a partir de condições naturais ou essenciais de cada problema, sempre são conhecidas duas das quatro variáveis mencionadas. Este fato pode ser mostrado das condições de vinculação das placas apresentadas desde (3.44) a (3.47). Reescrevendo-as:

- a) No engaste sabe-se que  $w$  e  $\theta_n$  são nulos; costuma-se chamar estas condições de fixadas ou essenciais. É necessário encontrar as incógnitas  $V_n$  e  $M_n$ .
- b) Na borda livre  $V_n$  e  $M_n$  são conhecidos, quando existem cargas aplicadas, tipo cortante ou flexão distribuídas, têm valores não nulos e valor nulo na inexistência destas cargas. As incógnitas são  $w$  e  $\theta_n$ .
- c) No caso de apoio simples combinam-se as condições a) e b) ou seja, é conhecida uma condição natural, no caso  $M_n$ , e uma condição essencial, no caso  $w$ . A rotação  $\theta_n$  é livre e junto com a cortante  $V_n$  são as incógnitas do problema.

Assim, das quatro variáveis iniciais resultam duas incógnitas e, portanto, são necessárias duas equações integrais. Para resolver este problema, pode-se obter uma segunda equação derivando-se a equação (4.28) em relação a normal [34]. Neste trabalho, utilizou-se a formulação alternativa [36] que consiste em aplicar a equação integral (4.28) em pontos distintos, obtendo-se equações diferentes que relacionam as incógnitas.

A equação integral de placas, escrita para a solução numérica com o método dos elementos de contorno (item 4.5), na ausência de forças distribuídas  $p_3$ , é do seguinte tipo:

$$\alpha(\xi)w^k + \int_{\Gamma_k} V_n^*(\xi, \eta) \psi_k^t(\eta) d\Gamma_k(\eta) \underline{w}^j - \int_{\Gamma_k} M_n^*(\xi, \eta) \psi_k^t(\eta) d\Gamma_k(\eta) \underline{\theta}_n^j +$$

$$\begin{aligned}
 + R_{ci}^* (\xi, \eta_c) w_i (\eta_c) &= \int_{\Gamma_k} w^* (\xi, \eta) \psi_k^t(\eta) d\Gamma_k(\eta) V_n^j - \\
 - \int_{\Gamma_k} \theta_n^* (\xi, \eta) \psi_k^t(\eta) d\Gamma_k(\eta) M_n^j &+ R_{ci} w_i^* (\xi, \eta_c) \\
 (i = 1 \dots N_c) \quad (K = 1 \dots NE) &\dots\dots(4.49)
 \end{aligned}$$

onde

$\eta$  é uma variável que percorre o contorno.  
 $\eta_c$  é valor da variável  $\eta$  nos cantos.  
 $\xi$  é o ponto onde aplica-se a equação integral.  
 $\alpha(\xi)$  é uma função que vale:

$\frac{1}{2}$  quando  $\xi$  encontra-se no contorno com tangente contínua.

1 quando  $\xi$  encontra-se no domínio ( $\Omega$ ). Neste caso, a equação (4.49) passa a ser a discretização da equação (4.27)

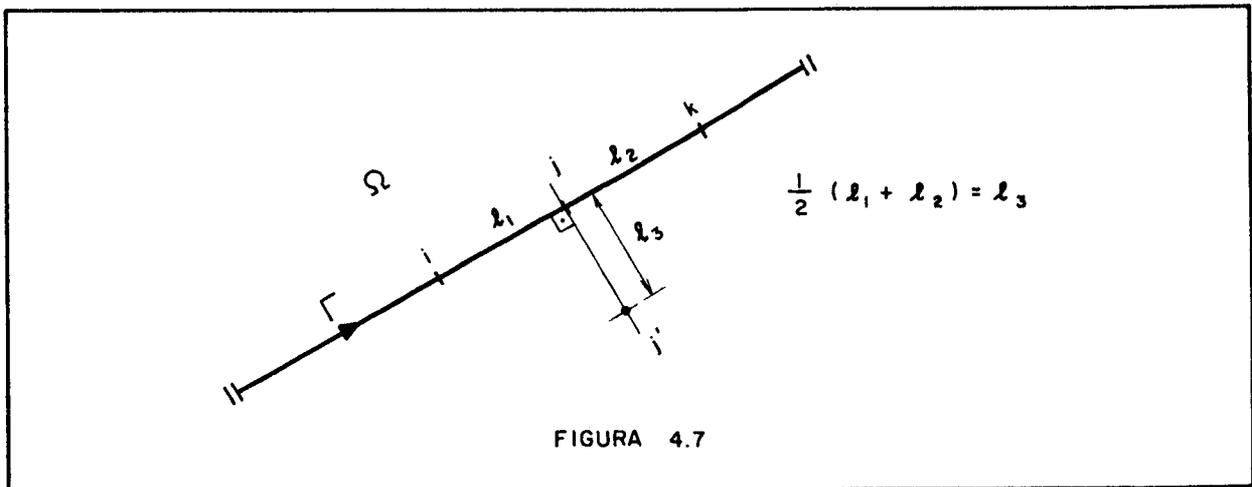
0 (zero) quando o ponto  $\xi$  encontra-se fora do domínio ( $\Omega$ ) e contorno ( $\Gamma$ )

o índice  $k$  varia de um ao número de elementos (NE)  
 o índice  $\lambda$  representa o deslocamento no contorno do ponto de aplicação da equação (4.49)

As integrais mostradas na expressão (4.49) são feitas numericamente para todos os elementos, exceto para os elementos que contêm o ponto de aplicação da equação integral onde elas podem ser feitas analiticamente.

Da análise da equação integral (4.49), após serem efetuadas as integrais, nota-se que se obtém uma relação linear entre valores nodais das variáveis incógnitas e conhecidas ( $w, \theta_n, V_n, M_n$ ) com as reações de canto ( $R_c$ ). Portanto, de uma placa com  $N$  nós resultam duas vezes o número de nós em incógnitas ( $2N$ ) além de uma reação de canto incógnita ( $R_c$ ) para cada canto.

Como utilizou-se a formulação alternativa, aplicou-se a equação integral (4.49) para os pontos de contorno em cada um dos nós (obtendo-se  $N$  equações) e para pontos externos ao domínio, onde se tem um ponto externo para cada nó de contorno (resultando mais  $N$  equações). Cada ponto externo é posicionado na direção normal ao contorno em cada nó associado. A distância usada foi a média dos comprimentos dos elementos de contorno relacionados ao nó considerado [45]. A figura 4.7 mostra o posicionamento do nó externo ( $j'$ ) associado ao nó  $j$  a uma distância ( $l_3$ ) que é a média dos comprimentos dos elementos associados a este nó ( $l_1, l_2$ ).



Assim, encontram-se  $2N$  equações para as variáveis incógnitas, as variáveis conhecidas e as reações de canto. Caso não houvesse cantos, não existiriam reações ( $R_c$ ) incógnitas e o problema poderia ser resolvido. Quando há reações de canto, pode-se tratar o problema de duas maneiras:

- a) Escrever tantas equações (4.49) a mais para tantos quantos forem os números de cantos, tomando-se o cuidado de não serem utilizados pontos que já foram usados para escrever as  $2N$  equações [35]. Neste trabalho, quando se utilizou este tratamento na solução de alguns exemplos de placas, optou-se pelo posicionamento do ponto externamente e na reta que continha a bissetriz do ângulo interno do canto (figura 4.8)

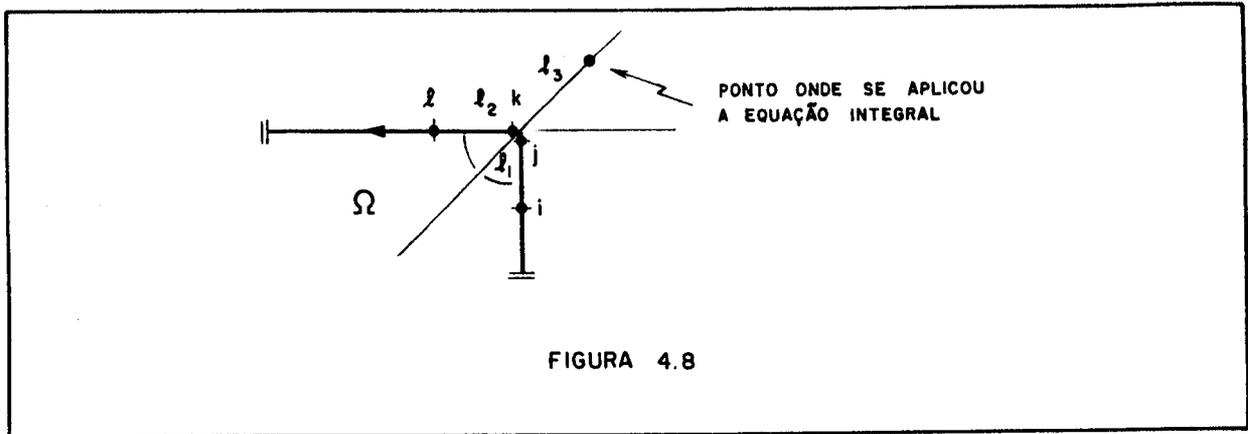


FIGURA 4.8

b) Escreve-se a reação de canto incôgnita em função das rotações  $\theta_n$  com o uso de diferenças finitas. Para este fim, utilizando-se a formulação de [41] e lembrando-se que as reações de canto relacionam-se com os momentos volventes segundo (4.25), resulta:

$$R_c = M_s^f - M_s^i$$

Os momentos volventes relacionam-se com giros ( $\theta_n$ ) por definição, ou:

$$M_s = -D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s}$$

ou

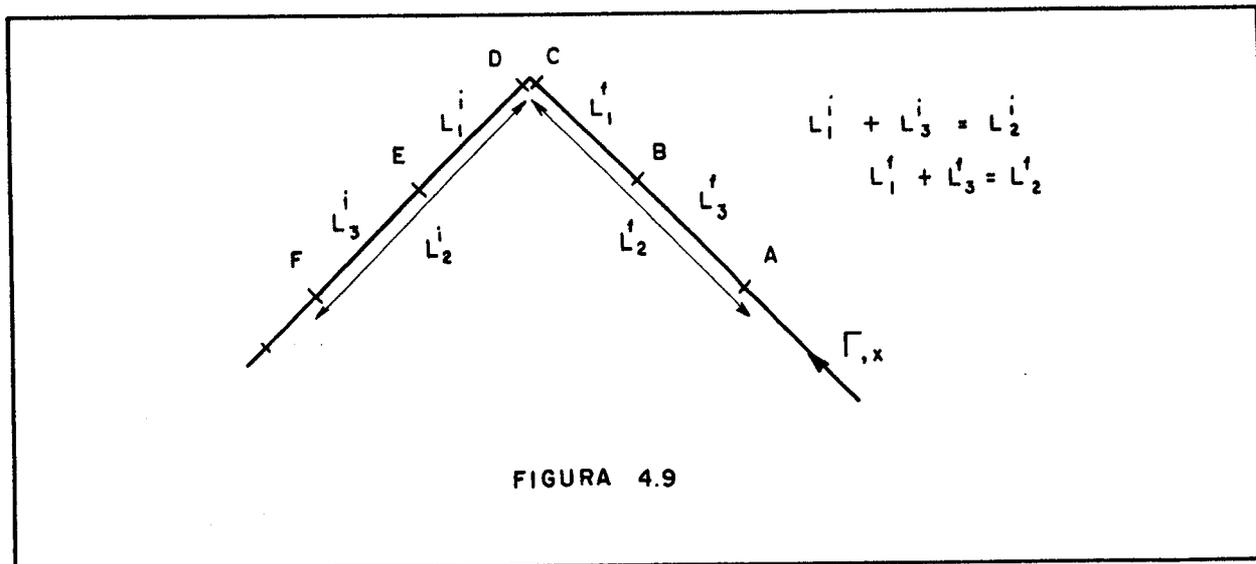
$$M_s = -D (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \theta_n \quad \dots\dots(4.50)$$

A rotação  $\theta_n$  é aproximada, nos trechos anterior e posterior ao canto, com funções tipo parábola de segundo grau.

Assim, a função aproximadora de  $\theta_n$ , em cada trecho, é escrita utilizando os três valores nodais, de cada lado, mais próximos ao canto. Derivando-se cada função, anterior e posterior, para os nós do nó duplo correspondente ao canto, chega-se a:

$$\begin{aligned}
 R_C w^*(\xi, \eta_C) = & -D(1-\nu) \left[ \theta_n^D w^*(\xi, x_D) \left( \frac{1}{L_1^i} + \frac{1}{L_2^i} \right) - \theta_n^E w^*(\xi, x_D) \left( \frac{1}{L_1^i} + \frac{1}{L_3^i} \right) + \right. \\
 & - \theta_n^F w^*(\xi, x_D) \left( \frac{1}{L_2^i} - \frac{1}{L_3^i} \right) + \theta_n^C w^*(\xi, x_C) \left( \frac{1}{L_1^f} + \frac{1}{L_2^f} \right) + \\
 & \left. - \theta_n^B w^*(\xi, x_C) \left( \frac{1}{L_1^f} + \frac{1}{L_3^f} \right) - \theta_n^A w^*(\xi, x_C) \left( \frac{1}{L_2^f} - \frac{1}{L_3^f} \right) \right] \dots\dots(4.51)
 \end{aligned}$$

onde as letras A, B, C, D, E e F indicam pontos do contorno os quais, juntamente com as medidas  $L_1, L_2, L_3$  das porções anterior (f) e posterior (i) ao canto, são mostrados na figura 4.9



Além destas duas formas de tratar o problema, utilizou-se uma formulação em que o termo  $R_C w^*(\xi, \eta_C)$  foi desprezado, ou seja, a reação de canto foi tornada zero em cada um dos cantos.

Particularmente na análise de barras de parede fina, que foram objeto deste trabalho, consideraram-se as reações de canto de duas formas:

- a) Aproximadas por diferenças finitas.
- b) Desprezando-se as reações de canto

Os exemplos tratados tiveram melhores resultados na segunda forma de tratamento.

Para a discretização das equações do estado plano

de tensões (4.16), o procedimento é análogo e até mais simples. As variáveis do problema são dois deslocamentos ( $u_1$  e  $u_2$ ), duas forças externas distribuídas ( $p_1$  e  $p_2$ ) e existem duas equações integrais (uma para cada direção). Na borda livre, as incógnitas são os deslocamentos; na borda engastada, as incógnitas são as forças. Ou qualquer combinação destas condições essenciais e naturais para outras vinculações. Assim, não existindo incógnitas adicionais na ocorrência de cantos, a aplicação das equações integrais aos nós é suficiente. A discretização das equações integrais (4.16), na ausência de forças de volume  $b_i$ , é do seguinte tipo:

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) \delta_{im} u_m^{\lambda} &= \int_{\Gamma_k} p_{im}^* (\xi, \eta) \phi_k^t (\eta) d\Gamma_k (\eta) u_m^j = \\ &= \int_{\Gamma_k} u_{im}^* (\xi, \eta) \phi_k^t (\eta) d\Gamma_k (\eta) p_m^j \\ &(k = 1 \dots NE) \quad (i, j, m = 1, 2) \quad \dots (4.52) \end{aligned}$$

onde

$\eta$  é uma variável que percorre o contorno  
 $\xi$  é o ponto onde se aplica a equação integral  
 $\alpha(\xi)$  é uma função que vale:

$\frac{1}{2}$  quando  $\xi$  encontra-se num ponto de contorno onde a tangente é contínua

1 quando  $\xi$  encontra-se no domínio ( $\Omega$ ) e neste caso a equação (4.52) passa a ser a discretização da equação (4.13)

0 (zero) quando o ponto encontra-se fora do domínio ( $\Omega$ ) e contorno ( $\Gamma$ )

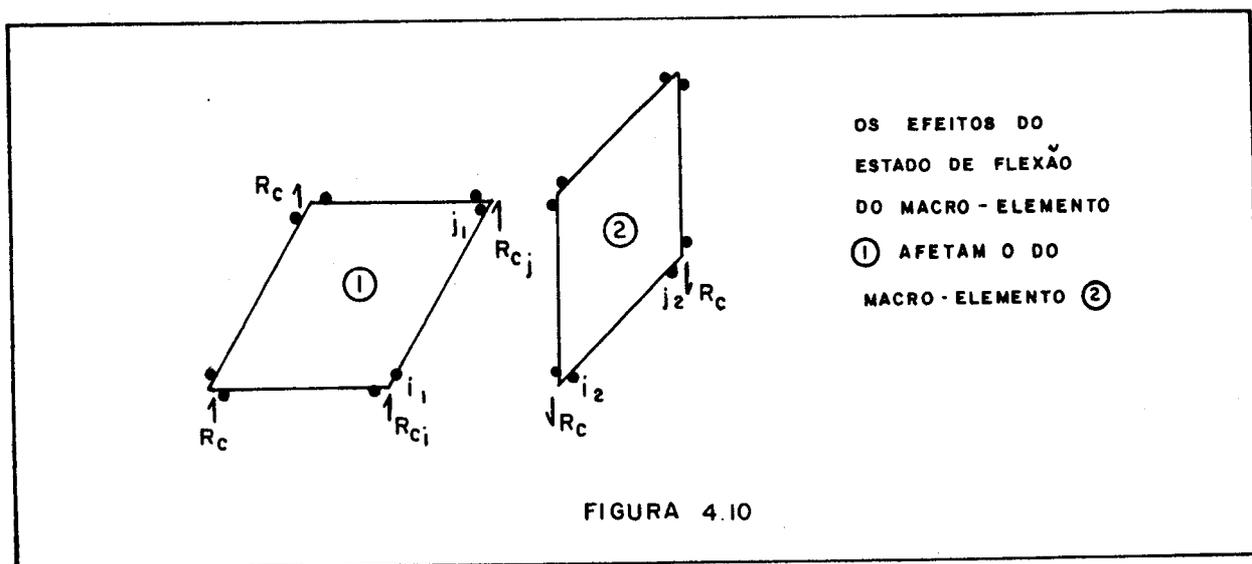
o índice  $k$  varia de um ao número de elementos (NE)

o índice  $\lambda$  representa o deslocamento no contorno do ponto de aplicação da equação (4.52).

Analogamente à equação (4.49), as integrais mostra

das são feitas numericamente para todos os elementos, exceto para aqueles que contêm o ponto de aplicação da equação integral onde pode-se fazê-las analiticamente. Adicionalmente observou-se, nos exemplos de barras de parede fina, que melhores resultados eram conseguidos se as equações integrais fossem escritas para os mesmos pontos externos utilizados para escrever o segundo grupo das equações de placas, em vez de nós do contorno.

Por outro lado, apesar das equações integrais de chapas e placas estarem desacopladas num macro-elemento e só acoplando-se na existência de dois macro-elementos não coplanares; a consideração da reação de canto em um macro-elemento afeta o estado plano de tensão no outro macro-elemento não coplanar como mostra a figura 4.10.



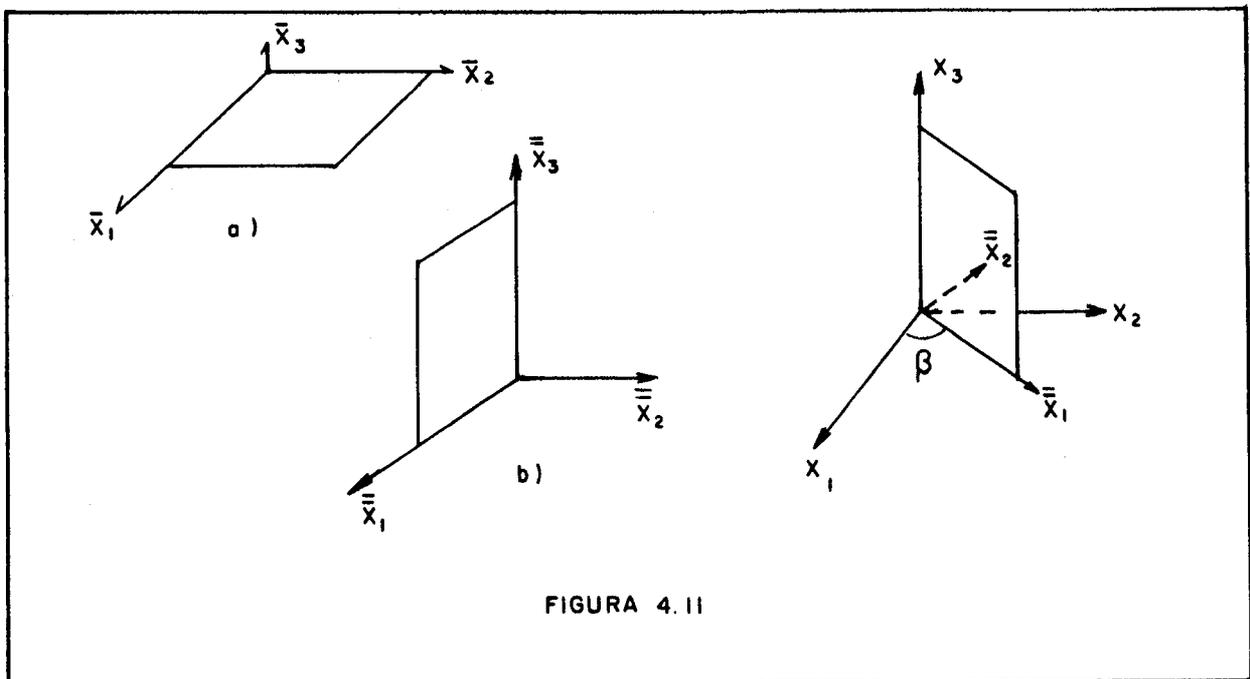
Para o esquema mostrado na figura 4.10, a flexão do macro-elemento 1 leva aos acréscimos tanto ao nó i ( $i_2$ ) como ao nó j ( $j_2$ ) do macro-elemento 2 de forças concentradas  $R_{ci}$  e  $R_{cj}$ , respectivamente. Entretanto, estas forças são incógnitas e, portanto, suas parcelas devem ser somadas ao segundo membro das equações integrais do estado plano de tensões (4.52) no macro-elemento 2. As parcelas destas forças são dadas por:

$$R_{ci} u^*_{m\ell}(\xi, x_i) + R_{cj} u^*_{m\ell}(\xi, x_j) \dots\dots(4.53)$$

onde m refere-se à equação considerada e  $\ell$  a direção de aplicação das reações consideradas.

Caso as reações de canto foram desprezadas, não é necessário o procedimento descrito e as equações integrais de um macro-elemento são (4.52) e (4.49), fazendo-se  $R_{ci}$  zero em (4.49), não considerando, portanto, a somatória  $w^*_i(\xi, \eta_c) R_{ci}$ .

#### 4.7 - Montagem do Sistema de Equações



Para a dedução das equações integrais de flexão e do estado plano de tensão utilizou-se o sistema local de coordenadas mostrado na figura 4.11.a. Apenas por questão de convenção para análise de barras, preferiu-se deixar o eixo  $x_3$  (normalmente associado a  $z$ ) para ser o eixo do comprimento das barras (ver figura 3.1) e os eixos  $x_1$  e  $x_2$  (normalmente associados a  $x$  e  $y$ , respectivamente) para descreverem a seção transversal. Por esta razão, precisa-se trabalhar com matrizes de mudança de coordenadas. Partindo-se dos sistemas local  $\bar{x}_i$ , global  $x_i$  e um sistema auxiliar intermediário  $\bar{\bar{x}}_i$ , as relações entre estes sistemas de coordenadas são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\bar{x}}_1 \\ \bar{\bar{x}}_2 \\ \bar{\bar{x}}_3 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(4.54)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\bar{x}}_1 \\ \bar{\bar{x}}_2 \\ \bar{\bar{x}}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(4.55)$$

onde  $\beta$  é o ângulo que o macro-elemento faz com o plano  $x_1 x_3$

Cumpra observar que os macro-elementos são sempre perpendiculares ao plano  $x_1 x_2$  (ou plano  $xy$ ). Além disto, com alguns cuidados e experiência em sistemas de coordenadas, pode-se passar diretamente do sistema local  $\bar{x}_i$  ao sistema global  $x_i$  sem utilizar o sistema intermediário  $\bar{\bar{x}}_i$ .

Não é difícil perceber que as matrizes de mudança de coordenadas mostradas em (4.54) e (4.55) relacionam-se com as variáveis dos nós ( $u_1, u_2, w, p_1, p_2, V_n$ ) mas, não com o momento de flexão na direção normal logo, deve-se proceder à compatibilização dos giros. A figura 4.12.a mostra os sentidos do momento de flexão  $M_n$  num macro-elemento.

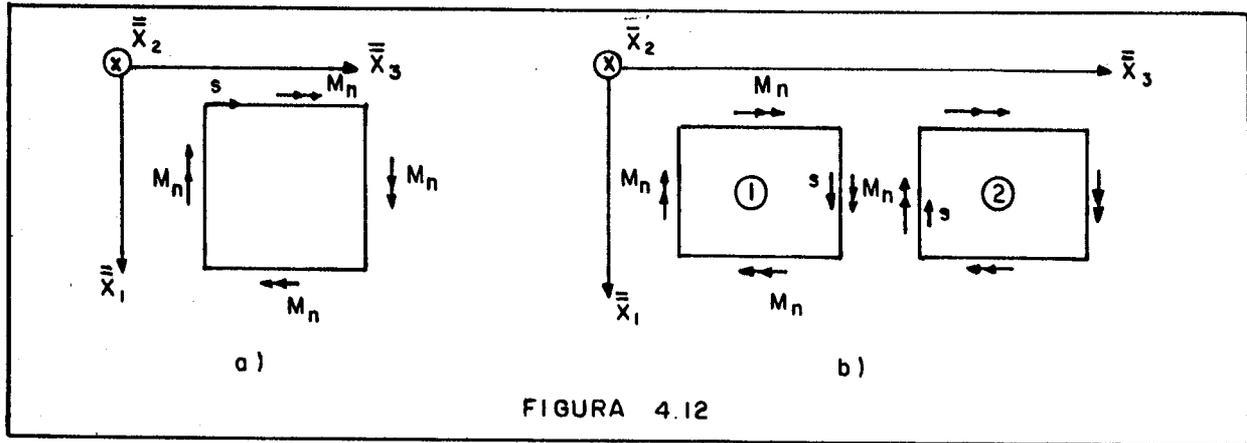


FIGURA 4.12

A figura 4.12.b mostra a associação de dois macro-elementos dispostos ao longo do eixo  $\bar{\bar{x}}_3$  e no plano  $\bar{\bar{x}}_1 \bar{\bar{x}}_3$ . Nota-se na interface que os momentos de flexão  $M_n$  tem sentidos opostos co-

mo o da coordenada  $s$  de orientação do contorno e que as direções das rotações não se alteram, apenas os sentidos. Uma forma de compatibilizar os momentos  $M_n$  (ou as rotações) é associá-los ao sentido de percurso  $s$ . Na interface da figura 4.12.b, define-se como positivo o sentido de  $s$  que concorda com  $\bar{x}_1$  e assim inverte-se o sentido para aqueles momentos  $M_n$  dos elementos onde a coordenada  $s$  não é positiva. Para o sentido de  $s$ , basta inspecionar os cossenos diretores dos elementos de contorno em cada macro-elemento e a partir daí, para aqueles cossenos diretores que são negativos, altera-se os correspondentes sinais de momentos  $M_n$  (e rotações  $\theta_n$ ) dos nós do contorno. Evidentemente, o sinal encontrado vai para o termo obtido do cálculo das equações integrais. Raciocínio análogo pode ser feito para as interfaces paralelas ao eixo  $\bar{x}_3$  e  $\bar{x}_2$ .

Até este ponto, foi mencionado que, da integração numérica no contorno das equações integrais (4.49) e (4.52), obtém-se uma relação linear entre as variáveis. A aplicação destas equações nos pontos externos e do contorno fornece um número de equações lineares suficientes para encontrar o valor das incógnitas. Pensando-se em um macro-elemento, ter-se-ia quatro vezes o número de nós ( $4N$ ) de variáveis incógnitas, onde  $2N$  vem do problema da flexão e  $2N$  do estado plano de tensões,  $4N$  variáveis conhecidas,  $2N$  de cada problema, e  $4N$  equações; as reações de canto da flexão ( $R_c$ ) foram desprezadas ou aproximadas em função das rotações ( $\theta_n$ ) através de diferenças finitas. Das  $4N$  equações encontradas, impondo-se as variáveis conhecidas, após as operações necessárias, pode-se determinar as  $4N$  incógnitas. Observando-se que os estados de flexão e extensão estão desacoplados, as soluções serão sempre independentes.

Na análise da aresta de uma associação de macro-elementos pertencentes ao mesmo plano (figura 4.13) aparecem mais incógnitas. Admitindo-se que os macro-elementos da figura 4.13 tenham  $(N+M)$  nós, onde  $M$  nós pertencem as arestas, cada macro-elemento independente fornece  $4(N+M)$  equações para  $4N$  incógnitas dos três lados não conectados. Para a aresta não foi deduzida nenhuma relação até aqui, resultando  $8M$  incógnitas (existem 8 variáveis por nó ou  $u_1, u_2, w, \theta_n, p_1, p_2, V_n$  e  $M_n$ ). Da soma dos dois macro-elementos resultam  $8(N+M)$  equações a  $8N$  incógnitas dos lados independentes acrescidas de  $16M$  incógnitas da aresta ( $8M$  incógnitas de

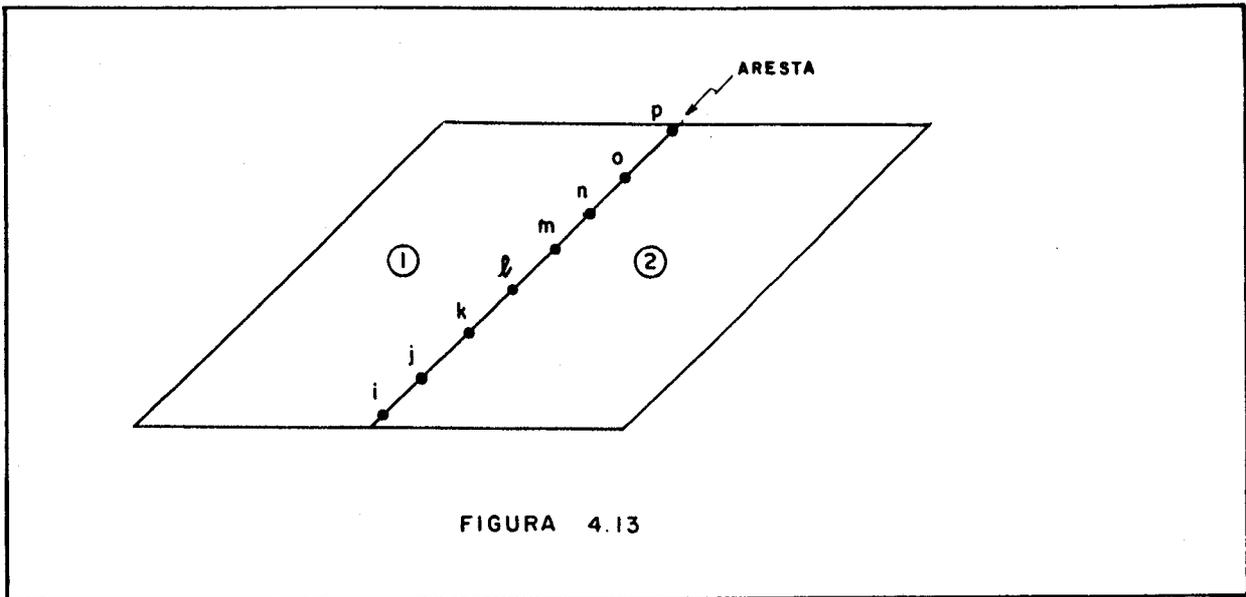


FIGURA 4.13

cada macro-elemento). As restantes 8M condições para a solução do problema são [42]:

a) Da compatibilidade de deslocamentos ( $u_1, u_2, w$  e  $\theta_n$ ) correspondentes, em cada n $\bar{o}$ , resultam 4M condições, ou:

$$u_i^1 = u_i^2 \quad (i = 1, 2) \quad \dots\dots(4.56.a)$$

$$w^1 = w^2 \quad \dots\dots(4.56.b)$$

$$\theta_n^1 = \theta_n^2 \quad \dots\dots(4.56.c)$$

onde os índices superiores referem-se ao número do macro-elemento.

b) Do equilíbrio de forças ( $p_1, p_2, V_n$  e  $M_n$ ) correspondentes em cada n $\bar{o}$  resultam 4M condições, ou:

$$p_i^1 + p_i^2 + p_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \dots\dots(4.57.a)$$

$$V_n^1 + V_n^2 + V_n = 0 \quad \dots\dots(4.57.b)$$

$$M_n^1 + M_n^2 + M_n = 0 \quad \dots\dots(4.57.c)$$

onde os índices superiores referem-se ao número do macro-elemento.

Da análise das equações (4.57), nota-se, além das forças de cada macro-elemento, o aparecimento de forças na aresta (a terceira parcela de cada equação). Entretanto, estas forças relacionam-se com os deslocamentos das arestas, ou quando o deslocamento é incôgnito, a força é conhecida ou vice-versa e sem o aumento do número de incôgnitas.

O que foi descrito, pode ser expresso matricialmente:

- 1) A aplicação das equações integrais escritas para partes externas e no contorno de um macro-elemento conduz a um sistema de equações, organizado com a utilização das relações (4.54) e (4.55), da seguinte forma:

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{P} \quad \dots\dots(4.58)$$

onde  $\underline{U}$  é o vetor dos deslocamentos do macro-elemento, sendo que os deslocamentos de um nó sucedem ao do outro e organizando os deslocamentos em cada nó da seguinte forma:

$$\underline{u} = \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ w \\ u_2 \\ \theta_n \end{array} \right\} \quad \dots\dots(4.59)$$

onde  $\underline{P}$  é o vetor das forças, no macro-elemento, correspondentes a  $\underline{U}$  e organizado da mesma forma para um nó, a sequência de forças é

$$\underline{p} = \left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ v_n \\ p_2 \\ M_n \end{array} \right\} \quad \dots\dots(4.60)$$

As matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{U}$ , não simétricas, são obtidas das operações integrais indicadas nas equações integrais (4.49) e (4.52). Na matriz  $\underline{H}$ , além das operações integrais, é acrescido o deslocamento correspondente ao ponto do contorno no qual foi aplicada a equação (ver (4.49) e (4.52)).

Impondo-se as  $4N$  variáveis conhecidas em (4.58) e após conveniente troca de membros das colunas das matrizes  $H$  e  $G$  obtêm-se o seguinte sistema de  $4N$  equações:

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{F} \quad \dots\dots(4.61)$$

onde

$\underline{X}$  é o vetor com as  $4N$  variáveis incógnitas  
 $\underline{F}$  é o vetor do produto da matriz dos coeficientes das variáveis conhecidas pelo valor destas variáveis  
 $\underline{A}$  é a matriz dos coeficientes das variáveis incógnitas e foi obtida com a troca de colunas das matrizes  $H$  e  $G$

2) Para a análise de dois macro-elementos com uma aresta, como mostra a figura 4.13, o sistema de equações do conjunto, já colocando-se as condições (4.56) e (4.57), tem o arranjo final:

$$\begin{bmatrix} \underline{H}_{11}^1 & \underline{H}_{1i}^1 & \underline{0} & -\underline{G}_{1i}^1 & \underline{0} \\ \underline{H}_{i1}^1 & \underline{H}_{ii}^1 & \underline{0} & -\underline{G}_{ii}^1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{H}_{ii}^2 & \underline{H}_{i2}^2 & \underline{0} & -\underline{G}_{ii}^2 \\ \underline{0} & \underline{H}_{2i}^2 & \underline{H}_{22}^2 & \underline{0} & -\underline{G}_{2i}^2 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & -\underline{I} & -\underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_A \\ \underline{U}_2 \\ \underline{P}_i^1 \\ \underline{P}_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}_{11}^1 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{G}_{1i}^1 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{G}_{i2}^2 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{G}_{22}^2 \\ \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_A \\ \underline{P}_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(4.62)$$

onde

$\underline{U}_1$  e  $\underline{U}_2$  são deslocamentos exclusivos dos lados independentes das sub-regiões (macro-elementos) 1 e 2, respectivamente.

$\underline{P}_1$  e  $\underline{P}_2$  são as forças exclusivas das sub-regiões 1 e 2, respectivamente.

$U_A$  e  $P_A$  são deslocamentos e forças na aresta.

$P_1^1$  e  $P_1^2$  são esforços nas sub-regiões 1 e 2, respectivamente.

$H_{ij}^k$  e  $G_{ij}^k$  são sub-matrizes de coeficientes, análogas às de (4.58), dos efeitos de  $i$  em  $j$  do macro-elemento  $k$ .

$I$  é uma matriz identidade

Conhecendo-se os deslocamentos ( $U_1, U_i, U_2$ ) ou as forças correspondentes ( $P_1, P_i, P_2$ ), procede-se a troca de colunas e variáveis para a obtenção de um sistema de equações, análoga a (4.61), o que permite, também, a determinação das incógnitas.

O tratamento de dois macro-elementos não coplanares terá o sistema de equações, antes da imposição das variáveis conhecidas, análogo a (4.62). A diferença reside no fato que as matrizes de coeficientes  $H$  e  $G$  terão seus elementos alterados pelo uso da matriz (4.55). Tomando-se, como exemplo, a matriz elementar obtida da integração em um elemento com os efeitos de um nó, a componente da matriz  $H$ , para um elemento de um macro-elemento cujo ângulo  $\beta$  da figura 4.11 é zero, é do tipo

$$\begin{bmatrix} h_{11} & 0 & h_{13} & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 & h_{24} \\ h_{31} & 0 & h_{33} & 0 \\ 0 & h_{42} & 0 & h_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w \\ u_2 \\ \theta_n \end{bmatrix} \dots\dots(4.63)$$

Para o ângulo  $\beta$  diferente de zero, ela é da forma:

$$\begin{bmatrix} h_{11} \cos \beta & h_{11} \sin \beta & h_{13} & 0 \\ -h_{22} \sin \beta & h_{22} \cos \beta & 0 & h_{24} \\ h_{31} \cos \beta & h_{31} \sin \beta & h_{33} & 0 \\ -h_{42} \sin \beta & h_{42} \cos \beta & 0 & h_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w \\ u_2 \\ \theta_n \end{bmatrix} \dots\dots(4.64)$$

conclui-se:

- a) A independência entre flexão e tração é mantida nas coordenadas globais com  $\beta$  igual a zero, (4.63).

b) Existe acoplamento entre flexão e tração nas coordenadas globais para  $\beta$  diferente de zero, (4.64).

Os elementos  $h_{24}$  e  $h_{44}$  da rotação  $\theta_n$  são modificados de acordo com o explicado para a figura 4.12.

Analogamente ao mostrado para a matriz H, pode-se mostrar para a matriz G.

Lembrando-se que os elementos são sequenciais (figura 4.3), cada  $n\bar{o}$  produz duas matrizes elementares (4.63) ou (4.64) pois, cada  $n\bar{o}$  está entre dois elementos, exceto os  $n\bar{o}$ s duplos (figura 4.6).

Embora a montagem do sistema de equações (4.62) possa parecer pouco prática, ela permite a fácil extensão do conceito para a associação de mais de dois macro-elementos em uma aresta e, principalmente, reduz o esforço em programação.

O procedimento mostrado, para associar as matrizes dos macro-elementos, foi feito a partir da técnica das sub-regiões [42]. Assim, as equações de cada macro-elemento (sub-regiões) são montadas independentemente e depois acopladas por condições de equilíbrio e compatibilidade.

A matriz da associação de três macro-elementos em uma aresta (figura 4.14) é mostrada a seguir:

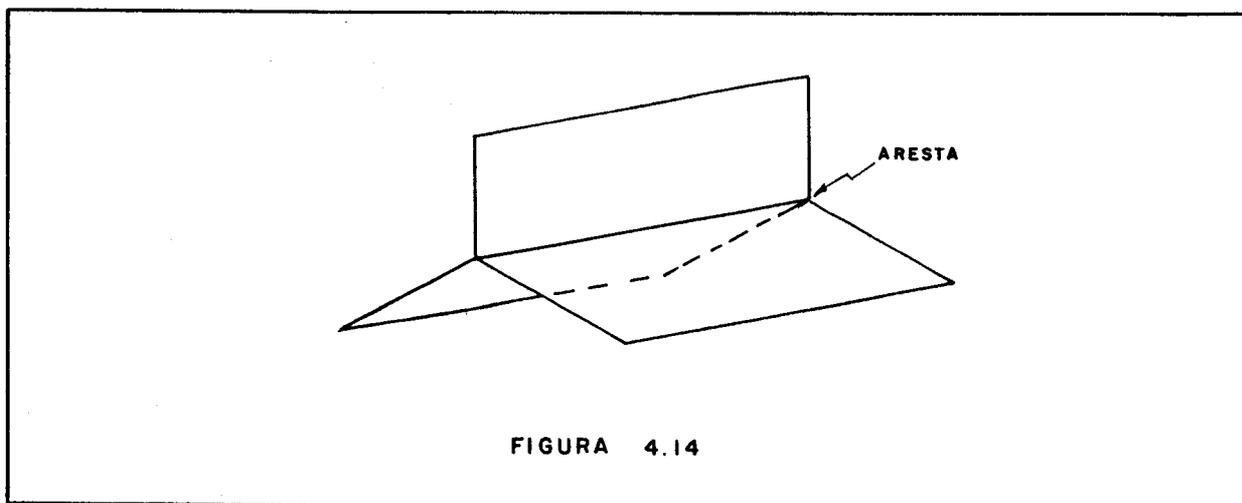


FIGURA 4.14

$$\begin{bmatrix}
 H_{11}^1 & H_{11}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{11}^1 & H_{11}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & H_{11}^2 & 0 & 0 & -G_{11}^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & H_{21}^2 & H_{22}^2 & 0 & 0 & -G_{21}^2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & H_{31}^2 & 0 & H_{33}^2 & 0 & 0 & -G_{31}^2 & 0 \\
 0 & 0 & H_{31}^3 & 0 & H_{33}^3 & 0 & 0 & -G_{31}^3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & -I & -I & -I
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 P_1 \\
 P_2 \\
 P_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 G_{11}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{11}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & G_{12}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & G_{22}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & G_{33}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & G_{33}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 P_1 \\
 P_2 \\
 P_3
 \end{bmatrix}$$

.....(4.65)

#### 4.8 - Diafragmas

A montagem do sistema de macro-elementos com os efeitos de flexão e tração pode ser usada para análise de barras de parede fina em muitos casos. Entretanto, estruturas deste tipo sofrem forte influência de distorção da seção transversal nos locais de aplicação de cargas concentradas. Sem entrar na discussão de existência real de cargas estritamente concentradas, procurou-se minimizar a distorção da seção transversal devida a estas cargas com a possibilidade de se poder contar com diafragmas. Assim, dentre os diversos tipos de diafragmas existentes, procuraram-se aqueles relacionados com os graus de liberdade da seção transversal. Pode-se citar alguns tipos de diafragmas:

- I) Na análise de núcleos resistentes de edifícios altos, as lajes dos andares representam os diafragmas que mantêm a seção transversal indeformada.

Lâminas podem ser distribuídas ao longo do comprimento das barras, no plano da seção transversal, para aumento da rigidez a distorção da seção. Para o espaçamento destas lâminas no comprimento das barras, pode-se citar as conclusões apresentadas em [30] ou pode-se utilizar o programa desenvolvido neste trabalho.

- II) Se as lâminas, distribuídas ao longo do comprimento, tiverem grande espessura, constrange-se a seção transversal a permanecer plana (sem empenamento) além de ficar indeformável no seu plano.

Neste trabalho, pode-se utilizar dois efeitos independentes de diafragma:

- a) Enrijecimento da seção em seu plano mas, com deslocamentos na direção longitudinal (empenamento) livres. Este caso é o que ocorre nos núcleos resistentes dos edifícios altos (exemplo I) e é mostrado na figura 4.15.a, será chamado de diafragma tipo a.
- b) Restrição dos deslocamentos na direção longitudinal, dos pontos da seção transversal, satisfazem a equação de um plano (empenamento restringido) mas, com liberdade de deformação da seção no seu plano. É mostrado na figura 4.15.b, será chamado de diafragma tipo b.

Finalmente, a associação dos dois efeitos é permitida ou seja, seção rígida em seu plano e sem empenamento (exemplo II).

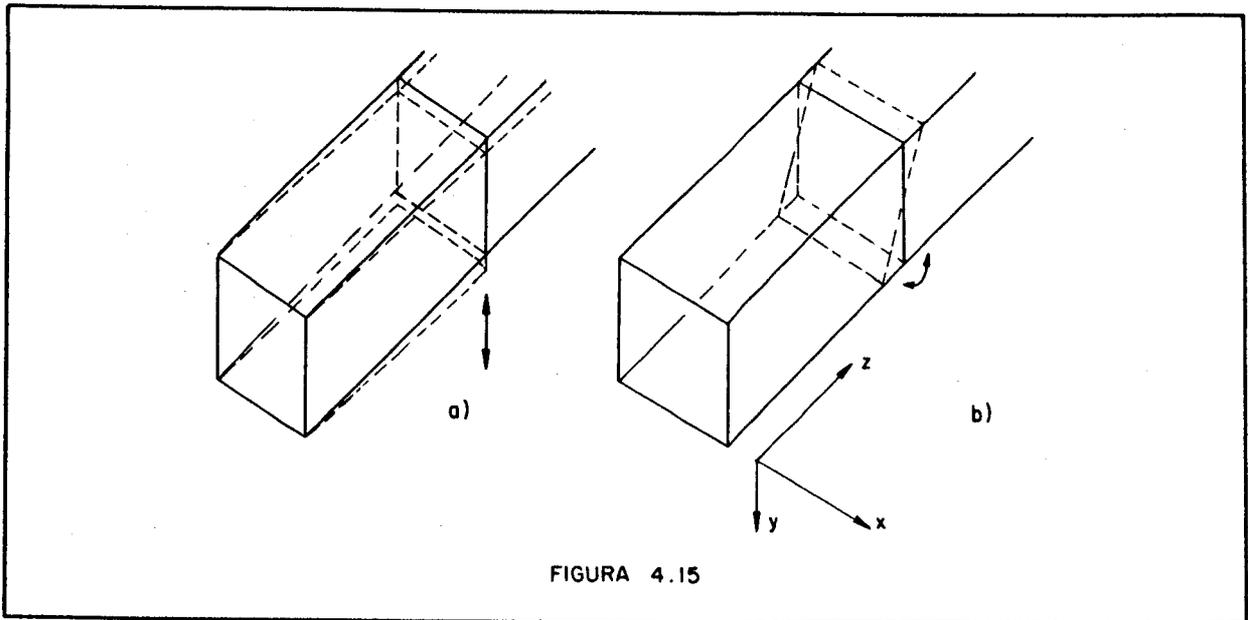


FIGURA 4.15

Em essência, o papel do diafragma é o de possibilitar a redução dos graus de liberdade no seu campo de atuação ou seja, impõe aos infinitos graus de liberdade, dos pontos da seção transversal, os movimentos de um corpo rígido ou mais exatamente, os movimentos de um plano rígido. Desta forma, enquanto na ausência dos diafragmas, os deslocamentos relativos dos pontos da seção transversal são independentes, eles passam a ser dependentes na existência do diafragma. Neste último caso, os deslocamentos de um ponto no plano de atuação do diafragma são relacionados com a distância deste ponto a um ponto adotado para referência dos deslocamentos do diafragma, que é usualmente chamado de polo.

Para que os pontos da seção transversal tenham deslocamentos associados ao de um plano, é necessária a introdução de equações que restrinjam o movimento destes pontos. A seguir, apresentam-se as equações utilizadas para os dois tipos de diafragmas, já tendo-se em conta a utilização de seções celulares:

a) Para os diafragmas tipo a, tem-se:

$$u_B = u_A - (y_B - y_A) \phi_{Z_A} \dots\dots(4.66)$$

$$v_B = v_A + (x_B - x_A) \phi_{zA} \quad \dots\dots(4.67)$$

$$\int_{\Gamma} p_x d\Gamma + Q_{x_A} = 0 \quad \dots\dots(4.68)$$

$$\int_{\Gamma} p_y d\Gamma + Q_{y_A} = 0 \quad \dots\dots(4.69)$$

$$\int_{\Gamma} [p_y(x - x_A) - p_x(y - y_A)] d\Gamma + T_A = 0 \quad \dots\dots(4.70)$$

b) Para os diafragmas tipo b, tem-se:

$$w_B = w_A - (y_B - y_A) \phi_{x_A} + (x_B - x_A) \phi_{y_A} \quad \dots\dots(4.71)$$

$$\int_{\Gamma} p_z d\Gamma + N_A = 0 \quad \dots\dots(4.72)$$

$$\int_{\Gamma} p_z(y - y_A) d\Gamma + M_{x_A} = 0 \quad \dots\dots(4.73)$$

$$\int_{\Gamma} p_z(x - x_A) d\Gamma - M_{y_A} = 0 \quad \dots\dots(4.74)$$

onde

u, v e w são deslocamentos nas direções x, y e z, respectivamente.  $Q_x$  e  $Q_y$  são forças cortantes nas direções x e y, respectivamente.  $M_x$  e  $M_y$  são momentos de flexão em relação aos eixos x e y, respectivamente.

N é a força axial na direção z.

T é o momento torçor em relação ao eixo z.

os deslocamentos u, v e w com índice A referem-se aos deslocamentos do polo do diafragma.

os deslocamentos u, v e w com índice B referem-se aos deslocamentos de um ponto B qualquer, no plano do diafragma.

As forças  $Q_x$ ,  $Q_y$  e  $N$  como os momentos  $M_x$ ,  $M_y$  e  $T$  são esforços concentrados e aplicados no polo considerado (A). A figura 4.16 mostra a seção transversal de uma célula com estes deslocamentos e forças relacionadas. Nota-se que as translações  $u$ ,  $v$  e  $w$  estão relacionadas às forças  $Q_x$ ,  $Q_y$  e  $N$  respectivamente, enquanto as rotações  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  e  $\phi_z$  estão relacionados com os momentos  $M_x$ ,  $M_y$  e  $T$ .

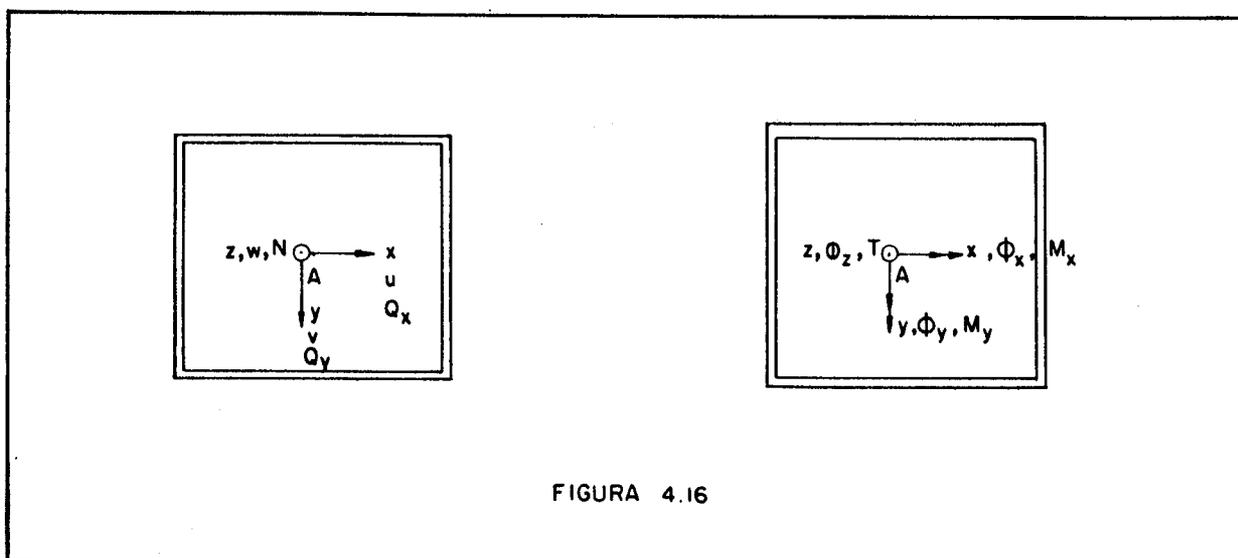


FIGURA 4.16

O outro aspecto a notar nas equações (4.68), (4.69) e (4.70) é o das integrações serem realizadas na porção de contorno ( $dr$ ) e não em  $dy$  ou  $dx$ . Isto ocorre pelo fato de que foram associados estados de flexão e tração, onde na espessura existem forças distribuídas no plano da chapa (estado plano de tensão) e perpendiculares ao plano da chapa (flexão).

Para a inclusão do diafragma, as equações (4.66), (4.67) ou (4.71) devem ser consideradas para restringir os movimentos dos pontos da seção transversal situados no plano de atuação do diafragma. Na barra discretizada, as restrições aos deslocamentos (equações do diafragma) são impostas aos nós e as forças relacionadas com estes deslocamentos ( $p_1$ ,  $V_n$ ,  $p_2$ ), em cada nó, passam a ser incógnitas.

Para a matriz  $H$  que relaciona os deslocamentos do sistema global, as colunas desta matriz que multiplicam deslocamentos de pontos pertencentes ao diafragma devem ser alteradas da seguinte forma:

a) Diafragmas tipo a

Os deslocamentos associados são os correspondentes às direções x e y ( $u_1$  e  $w$  conforme as equações (4.63) ou (4.64)), as colunas correspondentes são substituídas por:

$$\begin{bmatrix} u_B \\ v_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -D_y \\ 0 & 1 & +D_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \phi_{zA} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(4.75)$$

onde

$u_B$  e  $v_B$  são deslocamentos no sistema global nas direções x e y, respectivamente, dos nós pertencentes ao diafragma e que pertencem à matriz H

$u_A$ ,  $v_A$  e  $\phi_{zA}$  são deslocamentos do polo do diafragma no sistema global.

$D_y$  e  $D_x$  são as diferenças entre as coordenadas y ( $y_B - y_A$ ) e x ( $x_B - x_A$ ) do nó e do polo, respectivamente.

b) Diafragma tipo b

Neste caso, os deslocamentos associados são na direção z,  $u_2$  conforme as equações (4.63) ou (4.64) e as colunas correspondentes são substituídas por:

$$[w_B] = [1 \quad D_y \quad -D_x] \begin{bmatrix} w_A \\ \phi_{xA} \\ \phi_{yA} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(4.76)$$

onde

$w_B$  é o deslocamento na direção z dos nós pertencentes ao diafragma e no sistema global

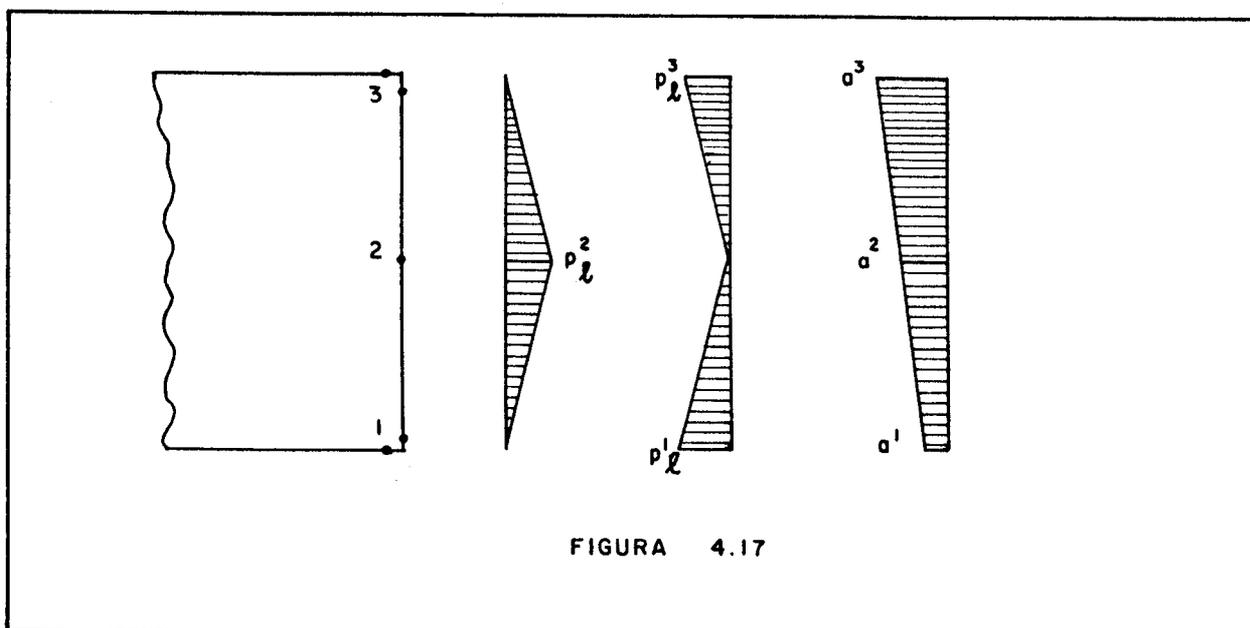
$w_A$ ,  $\phi_{xA}$  e  $\phi_{yA}$  são deslocamentos do polo do diafragma no sistema global.

O resultado destas alterações é a inclusão de colunas referentes aos deslocamentos do diafragma e a eliminação daquelas pertencentes aos nós associados ao diafragma (os deslocamentos destes nós passam a ser combinações lineares dos deslocamentos do diafragma).

Por outro lado, a restrição aos deslocamentos dos nós só é possível mediante a introdução de forças (incógnitas a priori). Logo, a existência do diafragma introduz forças aos nós associados. Assim, as colunas da matriz H, que multiplicavam deslocamentos de nós associados aos diafragmas, são preenchidas pelas correspondentes colunas da matriz G, que multiplicam as forças relacionadas aos deslocamentos dos nós associados.

Como o número de incógnitas do sistema de equações foi aumentado em número de três para cada tipo de diafragma em cada ocorrência, as três equações adicionais são dadas por (4.68), (4.69) e (4.70) ou (4.72), (4.73) e (4.74) em cada tipo de diafragma para cada ocorrência.

Como as forças distribuídas ( $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ ) são aproximadas no contorno de forma linear e os elementos de contorno são sempre retos, pode-se tirar partido deste fato com o uso direto de expressões analíticas nestes locais.



A figura 4.17 mostra um exemplo onde existem dois elementos de contorno adjacentes com nós 1, 2 e 3. As forças distribuídas têm valores nos extremos do elemento de  $p_\ell^1$ ,  $p_\ell^2$  e  $p_\ell^3$ , estan-

do associadas aos n $\bar{o}$ s 1, 2 e 3 respectivamente, onde o  $\bar{l}$  pode significar dire $\tilde{c}$ o x, y ou z. As grandezas  $a^1$ ,  $a^2$  e  $a^3$  referem-se ou as diferen $\tilde{c}$ as  $(y - y_A)$  ou as diferen $\tilde{c}$ as  $(x - x_A)$  e s $\tilde{a}$ o lineares por ser a geometria linear.

As integrais podem ser tratadas para este caso da seguinte forma:

$$\int_1^3 p_{\bar{l}} d\Gamma = \frac{1}{2}(p_{\bar{l}}^1 \cdot h_{12} + p_{\bar{l}}^2 \cdot h_{12} + p_{\bar{l}}^2 \cdot h_{23} + p_{\bar{l}}^3 \cdot h_{23}) \quad (4.77)$$

$$\int_1^3 p_{\bar{l}} a d\Gamma = \frac{1}{6} \left[ p_{\bar{l}}^1 h_{12} (2a^1 + a^2) + p_{\bar{l}}^2 \cdot h_{12} (2a^2 + a^1) + p_{\bar{l}}^2 h_{23} (2a^2 + a^3) + p_{\bar{l}}^3 h_{23} (2a^3 + a^2) \right] \quad (4.78)$$

onde

$h_{12}$  e  $h_{23}$  s $\tilde{a}$ o os comprimentos dos elementos de contorno

Assim, pode-se utilizar as express $\tilde{o}$ es apresentadas em (4.77) e (4.78) nas equa $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s adicionais (4.68) a (4.70) ou (4.72) a (4.74). Devendo-se notar que s $\tilde{a}$ o estas equa $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s adicionais que relacionam as for $\tilde{c}$ as aplicadas aos diafragmas com as que surgem nos n $\bar{o}$ s pela exist $\tilde{e}$ ncia do diafragma ou seja,  $p_{\bar{l}}^1$ ,  $p_{\bar{l}}^2$  e  $p_{\bar{l}}^3$  (que agora s $\tilde{a}$ o inc $\tilde{o}$ gnitas e est $\tilde{a}$ o na matriz H). Evidentemente, as for $\tilde{c}$ as aplicadas ao diafragma ser $\tilde{a}$ o vari $\tilde{a}$ veis adicionais do vetor P, cujos correspondentes coeficientes na matriz G ser $\tilde{a}$ o iguais a unidade. Em forma matricial pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} H_{ii} & -G_{iD} & H_{ip} \\ H_{Di} & -G_{DD} & H_{Dp} \\ \underline{0} & \underline{M} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ P_D \\ U_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ii} & \underline{0} \\ G_{Di} & \underline{0} \\ \underline{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i \\ P_p \end{bmatrix} \quad \dots\dots(4.79)$$

onde

$U_i$  s $\tilde{a}$ o deslocamentos dos n $\bar{o}$ s que n $\tilde{a}$ o pertencem ao diafragma.

$P_D$  são forças que ocorrem nos n̄s que pertencem ao diafragma e devidas ao diafragma.

$U_p$  são deslocamentos correspondentes ao diafragma.

$P_i$  são forças correspondentes a  $U_i$ .

$P_p$  são forças correspondentes a  $U_p$ .

A matriz H da estrutura tem no bloco  $H_{ij}$  os coeficientes que multiplicam os deslocamentos  $U_i$ , cujas linhas foram obtidas de todos os outros pontos da discretização que não pertencem ao diafragma (D). No bloco  $H_{Di}$  existem as linhas da matriz H obtidas dos pontos que pertencem ao diafragma (D) e cujos coeficientes multiplicam os deslocamentos  $U_i$ . O bloco  $H_{iD}$ , complementar de  $H_{ij}$ , que multiplica os deslocamentos dos n̄s que pertencem ao diafragma, e  $H_{DD}$ , complementar de  $H_{Di}$ , são modificados por (4.75) ou (4.76) para tornarem-se  $H_{ip}$  e  $H_{Dp}$ , respectivamente.  $G_{ij}$  e  $G_{Di}$  são sub-matrizes análogas a  $H_{ij}$  e  $H_{Di}$ .  $G_{iD}$  e  $G_{DD}$ , submatrizes da matriz G, estão na matriz H por multiplicarem as forças que ocorrem nos n̄s ( $P_D$ ) devido ao diafragma. O bloco M é obtido das equações adicionais (4.68) a (4.70) ou (4.72) a (4.74), com a utilização de (4.77) e (4.78).

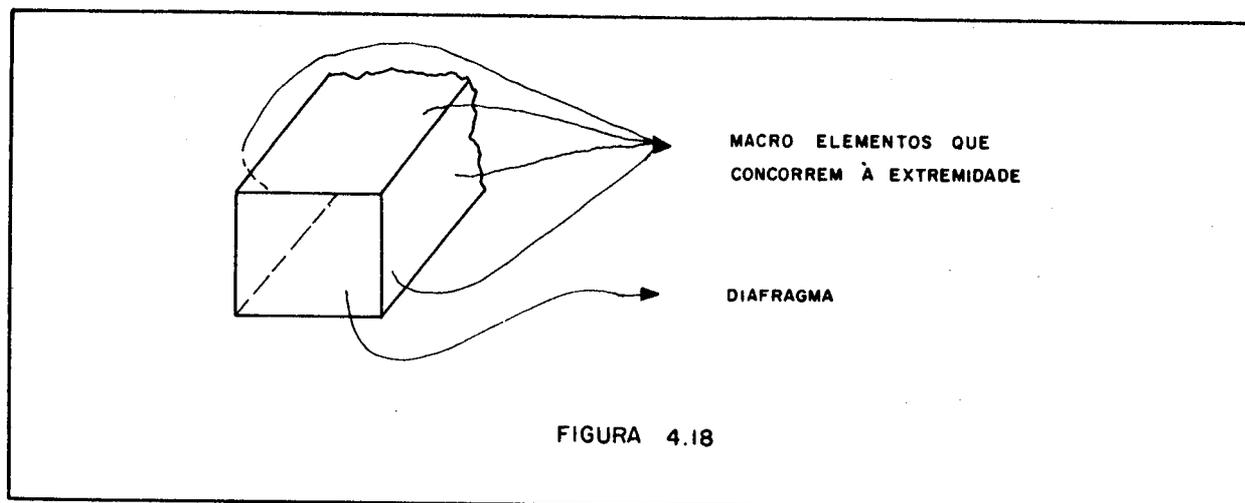
Da existência de deslocamentos  $U_p$  ou forças  $P_p$  conhecidos no diafragma, procede-se a troca de colunas em (4.79) para a resolução do sistema, análoga a (4.61).

A equação (4.79) mostrou como se pode tratar um diafragma em uma forma simplificada. A generalização para o sistema real de equações pode ser feita mas, tendo-se em conta os seguintes aspectos:

- a) Aparecem mais blocos de zero pela própria matriz H ser obtida de sub-regiões.
- b) Os diafragmas ora tratam dos deslocamentos x e y (diafragma tipo a) ora tratam dos deslocamentos z (tipo b).
- c) Nem sempre os n̄s pertencentes a um diafragma agrupados em bloco, eliminam o número de blocos da matriz H.

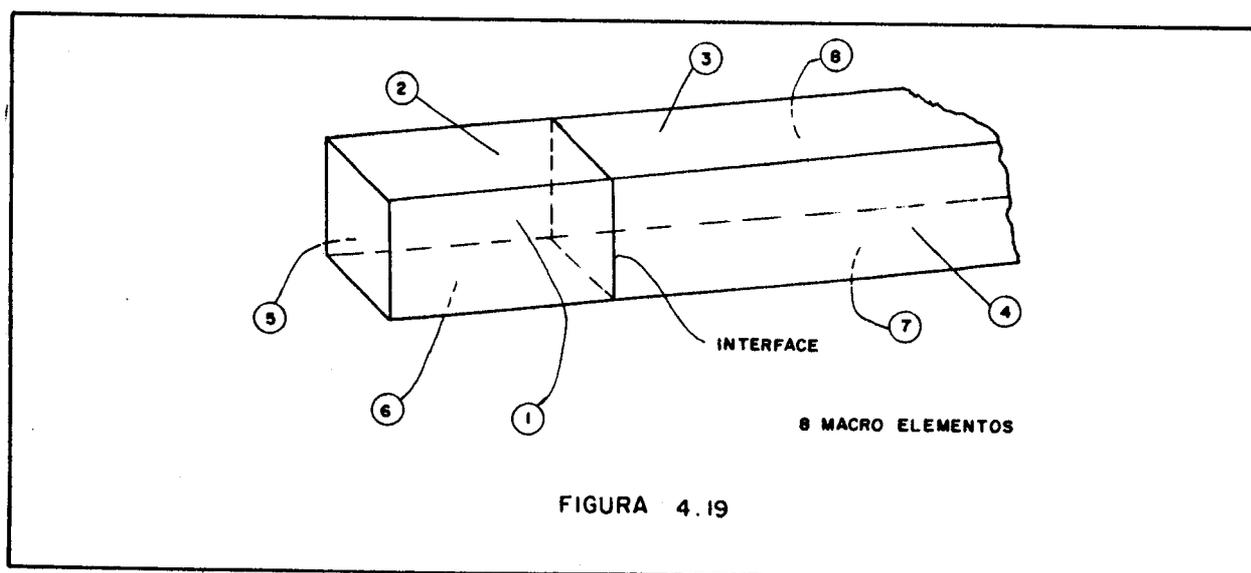
### 4.8.1 - Diafragmas de Extremidade

O nome diafragma de extremidade nasceu do fato que diafragmas que incidem nas extremidades das barras, em seu plano de atuação existem porções de partes do contorno dos macro-elementos que concorrem à extremidade (figura 4.18). Deste fato, as equações do diafragma de extremidade são aplicadas aos nós de contorno.



Assim, em função do tipo do diafragma utilizado, aplicam-se as equações (4.66) a (4.70), ou (4.71) a (4.74), através dos procedimentos apresentados em (4.75) a (4.78).

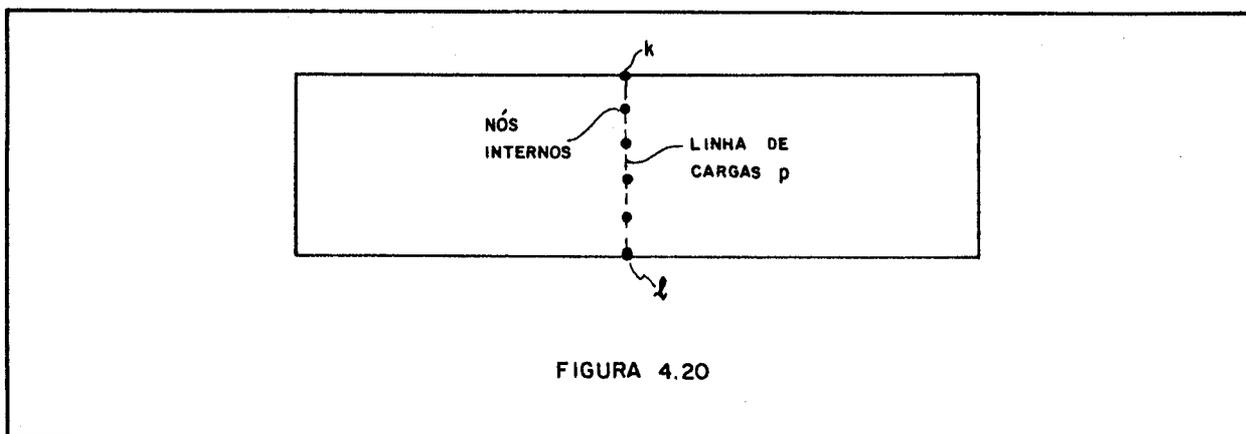
Este procedimento pode ser utilizado para diafragmas internos desde que haja interfaces ou seja, existam nós de contorno na parte interna e portanto macro-elementos consecutivos no mesmo plano. A figura 4.19 mostra este esquema:



O inconveniente deste procedimento é o aumento do número de nós e, conseqüentemente, da memória computacional envolvida com as equações na interface.

#### 4.8.2 - Diafragmas Internos

Com o objetivo de colocar diafragmas ao longo do comprimento ( $z$ ) da barra sem utilizar a mesma quantidade de memória do ítem 4.8.1, recorreu-se à utilização de nós internos.



Conforme foi mostrado na apresentação das equações do diafragma, cada nó associado tem seus deslocamentos restringidos aos do diafragma, mediante a existência de forças nestes nós devidas ao diafragma.

Assim, para que nós internos possam desempenhar função semelhante aos nós de contorno, junto aos deslocamentos destes nós devem estar associadas forças. Para este fim, considerou-se a existência de uma linha de forças aplicada a estes nós. Para estas forças, adotou-se uma distribuição linear, entre os nós, em função dos valores destas forças nos nós internos. Como os deslocamentos são no espaço tridimensional, foram aplicadas forças nas três direções.

Para os macro-elementos com nós internos, escreveram-se as equações integrais relativas aos deslocamentos destes nós em função de deslocamentos e forças aplicadas ao contorno, incluindo os efeitos da linha de forças aplicada ao domínio. A inclusão de vários diafragmas internos resulta em linhas de nós internos paralelas a mostrada na figura 4.20 e tem desenvolvimento análogo.

Assim, utilizando-se (4.16) e (4.28), discretizadas em (4.49) e (4.52), considerando-se o termo da linha de cargas concentradas, obtêm-se para um macro-elemento em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \underline{H}_{ee} & \underline{0} \\ \underline{H}_{ie} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}_e \\ \underline{U}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}_{ee} & \underline{G}_{ei} \\ \underline{G}_{ie} & \underline{G}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{P}_e \\ \underline{P}_i \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(4.80)$$

onde

$\underline{H}_{ee}$  e  $\underline{G}_{ee}$  são matrizes de efeitos do contorno no próprio contorno dadas pelas equações (4.16) e (4.28).

$\underline{H}_{ie}$  e  $\underline{G}_{ie}$  são as matrizes dos coeficientes dos deslocamentos e forças no contorno das equações (4.13) e (4.27).

$\underline{I}$  é a matriz identidade pois contém os coeficientes dos deslocamentos internos nas equações (4.13) e (4.27)

$\underline{G}_{ei}$  e  $\underline{G}_{ii}$  são as matrizes dos coeficientes obtidas da integração na linha de cargas internas de forças  $P_i$  linearmente distribuídas em função dos valores nos nós internos e convenientemente agrupados segundo (4.54).

As integrais utilizadas para determinar os coeficientes das matrizes  $\underline{G}_{ei}$  e  $\underline{G}_{ii}$  são do tipo:

$$\int_{\Gamma'} p_i^! u_{ij}^* d\Gamma' \quad \int_{\Gamma'} p_3^! w^* d\Gamma' \quad (i = 1, 2) \quad (4.81)$$

onde

$\Gamma'$  corresponde ao trecho de integração onde existe a linha de cargas e pertence ao domínio  $\Omega$ .

$u_{ij}^*$  e  $w^*$  são soluções fundamentais.

$p_i^!$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são as forças aproximadas linearmente em função dos valores nodais (nós internos).

Para a determinação dos coeficientes na matriz  $\underline{G}_{ei}$ , usando (4.81), deve-se observar que os pontos, onde são escritas as equações (4.49) e (4.52), situam-se no contorno ( $\Gamma$ ), enquanto para a matriz  $\underline{G}_{ii}$  estão nos nós internos. Adicionalmente quando o ponto,

para onde são escritas as equações integrais, situa-se no trecho de integração, utilizam-se integrais analíticas. Pelas razões mostradas nos elementos descontínuos, nós internos, definidos com a mesma coordenada de um nó do contorno, são levados a uma posição interna intermediária entre o contorno e o nó interno seguinte a este nó duplo interno, no momento de ser escrita a equação para este nó.

Quando a equação (4.80) é escrita em coordenadas globais, com a utilização da equação (4.55), a matriz identidade passa a ser a própria matriz mostrada em (4.55). Na matriz (4.80) escrita em coordenadas globais, introduzem-se os diafragmas através das matrizes (4.75) ou (4.76). Devido ao diafragma, as forças  $p_i^j$ , passam a ser incógnitas e as matrizes  $G_{ei}$  e  $G_{ij}$  vão para a matriz H. Utilizando-se os resultados mostrados em (4.77) e (4.78) nas equações (4.68) a (4.70), ou (4.72) a (4.74), obtêm-se as equações adicionais necessárias. O sistema de equações obtido é análogo a (4.79).

Finalmente, um último cuidado é necessário:

A utilização de diafragma pode restringir deslocamentos nas direções x e y sem restringir o da direção z ou vice-versa. Por outro lado, o uso de equações para nós internos implica em obter-se o sistema (4.80) singular, se estas equações não forem modificadas. Assim, quando num mesmo plano não atuam os dois tipos de diafragmas, deve-se eliminar as equações cuja direção de deslocamento não foi alterada pelo diafragma, para obter-se um sistema de equações não singular.

#### 4.9 - Integrais Analíticas e Numéricas

Na aplicação das equações (4.49) e (4.52) a um ponto pertencente ao elemento a ser integrado, foram utilizadas expressões analíticas nestas integrações. Para o estado plano de tensão, melhores resultados foram conseguidos com os pontos, onde aplicam-se as equações integrais, situados no exterior do domínio. Assim, as equações analíticas apresentadas serão para a equação integral de placas (4.49) e para a linha de cargas  $p_i^j$  utilizadas nos diafragmas internos (4.81). As outras integrais foram feitas numericamente através de quadratura de Gauss [38].

Conforme explicado para os elementos contínuos e descontínuos, as funções aproximadoras  $\phi_i$  e  $\phi_j$ , figura 4.5, tem valor unitário em extremidades opostas. Um elemento cujo ponto situa-se a uma distância  $a$  de uma extremidade é mostrado na figura 4.21.

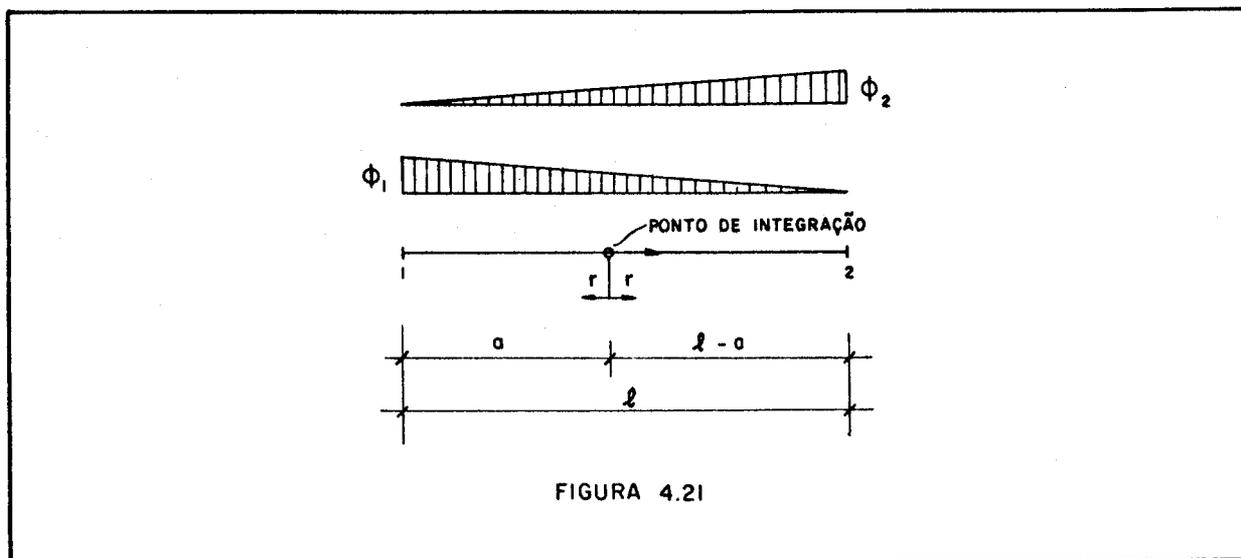


FIGURA 4.21

As funções aproximadoras, para a figura 4.21, são

$$\phi_1 \begin{cases} 1 + \frac{r - a}{l} & (\Gamma \leq 0) \\ 1 - \frac{r + a}{l} & (\Gamma > 0) \end{cases} \dots\dots (4.82)$$

$$\phi_2 \begin{cases} \frac{a - r}{l} & (\Gamma \leq 0) \\ \frac{a + r}{l} & (\Gamma > 0) \end{cases} \dots\dots (4.83)$$

As integrais analíticas da equação integral de placas são dadas por:

$$\int_1^2 M_n^* \phi_1 d\Gamma = - \left\{ \left[ (\ell - a) K_1 + k_2 \right] (1 + \nu) + \frac{\nu \ell^2}{2} \right\} \frac{1}{4\pi \ell} \dots\dots (4.84.a)$$

$$\int_1^2 M_n^* \phi_2 d\Gamma = - \left\{ \left[ a k_1 - k_2 \right] (1 + \nu) + \frac{\nu \ell^2}{2} \right\} \frac{1}{4\pi\ell} \quad \dots\dots(4.84.b)$$

$$\int_1^2 w^* \phi_1 d\Gamma = \left[ \frac{1}{18} (\ell - a) K_3 + \frac{1}{16} K_4 \right] \frac{1}{8\pi D \ell} \quad \dots\dots(4.85.a)$$

$$\int_1^2 w^* \phi_2 d\Gamma = \left[ \frac{1}{18} a K_3 - \frac{1}{16} K_4 \right] \frac{1}{8\pi D \ell} \quad \dots\dots(4.85.b)$$

onde

$$K_1 = (\ell - a) \ln(\ell - a) + a \ln(a) - \ell \quad \dots\dots(4.86)$$

$$K_2 = \left\{ a^2 \left[ 2 \ln(a) - 1 \right] - (\ell - a)^2 \left[ 2 \ln(\ell - a) - 1 \right] \right\} \frac{1}{4} \quad \dots\dots(4.87)$$

$$K_3 = a^3 \left[ 6 \ln(a) - 5 \right] + (\ell - a)^3 \left[ 6 \ln(\ell - a) - 5 \right] \quad \dots\dots(4.88)$$

$$K_4 = a^4 \left[ 4 \ln(a) - 3 \right] - (\ell - a)^4 \left[ 4 \ln(\ell - a) - 3 \right] \quad \dots\dots(4.89)$$

As integrais  $V_n^*$  e  $\theta_n^*$  com  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são nulas.

As integrais para a linha de cargas dos diafragmas internos são dadas por:

$$\int_1^2 \phi_1 u_{ij}^* d\Gamma = \left[ (\ell - a) K_5 + \frac{1}{4} K_6 \right] \frac{1}{8\pi G(1 - \nu)\ell} \quad \dots\dots(4.90.a)$$

$$\int_1^2 \phi_2 u_{ij}^* d\Gamma = \left[ a \cdot K_5 - \frac{1}{4} \cdot K_6 \right] \cdot \frac{1}{8\pi G(1 - \nu)\ell} \quad \dots\dots(4.90.b)$$

onde

$$K_5 = \ell s_i s_j - (3 - 4\nu) \delta_{ij} \left[ (\ell - a) \ln(\ell - a) + a \ln(a) - \ell \right] \dots (4.91)$$

$$K_6 = (3 - 4\nu) \delta_{ij} \left\{ a^2 \left[ 1 - 2 \ln(a) \right] - (\ell - a)^2 \left[ 1 - 2 \ln(\ell - a) \right] \right\} + \\ + 2\ell (2a - \ell) s_i s_j \dots (4.92)$$

onde

$s_i$  e  $s_j$  são cossenos do elemento de contorno no macro-elemento

Os casos em que "a" vale zero ou " $\ell$ " podem ser tratados assumindo-se, nas expressões (4.84) a (4.92), os respectivos logarítimos,  $\ln(a)$  e  $\ln(\ell - a)$ , zero em cada um dos casos. Este procedimento é feito pois, o logarítimo de um argumento nulo é singular.

Em (4.81), aparece nas integrais a função  $w^*$ . Não foram apresentadas as expressões analíticas para este caso pois elas são iguais às mostradas em (4.85).

Para as integrais numéricas, foi utilizada integração seletiva em função da distância do ponto considerado e o elemento a ser integrado. Para referência de ordem de grandeza, utilizou-se o comprimento do elemento a ser integrado ou a distância do ponto ao contorno (figura 4.7). Assim, quando o comprimento do elemento era menor que a distância do ponto ao contorno, o comprimento do elemento era usado para valor de referência da distância e, caso contrário, utilizava-se a distância do ponto ao contorno. Tendo-se em mente este valor de referência, a integração seletiva foi escolhida da seguinte forma:

- a) 4 pontos de Gauss quando a distância do ponto ao elemento a ser integrado era 24 vezes o valor de referência.
- b) 6 pontos, quando a distância do ponto ao elemento a ser integrado situava-se entre 6 e 24 vezes o valor de referência.
- c) 10 pontos, quando a distância situava-se entre 2 a 6 vezes o valor de referência.
- d) 15 pontos, quando a distância situava-se até 2 vezes o valor de referência.

Não foram feitos estudos sobre otimização desta in-

tegração seletiva porém, pôde-se observar em alguns exemplos, que a integração com 15 pontos de Gauss não melhorou significativamente o resultado em relação às integrações com 4, 6 e 10 pontos apenas.

Após o cálculo das integrais analíticas e numéricas, com a consequente montagem da matriz H do macro-elemento ou da estrutura, pode-se conferir as integrais efetuadas a partir de uma propriedade da matriz H [34], [36]. A somatória, em cada linha, dos elementos das colunas que multiplicam deslocamentos na direção x de cada um dos nós, no sistema global, é nula. Este mesmo fato ocorre nas colunas que multiplicam deslocamentos nas direções y e z. Esta propriedade vem dos deslocamentos de corpo rígido, em cada uma das direções. Com relação à rotação pode-se fazer raciocínio análogo mas, esta rotação relaciona-se com as colunas de deslocamentos e o procedimento não é tão simples como o descrito para as translações.

#### 4.10 - Tensões e Curvaturas

Apresenta-se a seguir o cálculo de tensões internas e no contorno de cada macro-elemento como também as curvaturas nos pontos internos aproximadas pela segunda derivada do deslocamento medido na direção normal a placa (w).

##### 4.10.1 - Tensões Internas e Externas

Seja a equação (4.13) na ausência de forças de volume:

$$u_i(\xi) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) \dots (4.93)$$

A equação (4.93) é uma representação contínua dos deslocamentos nos pontos de domínio, podendo-se obter as tensões internas por combinações das derivadas de (4.13). A expressão final da tensão interna, utilizando-se (3.5), na ausência de forças de volume, é dada por [34]:

$$\sigma_{ijk}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) \dots\dots(4.94)$$

onde

$$u_{ijk}^*(\xi, x) = \left[ (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k})(1 - 2\nu) + 2 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \frac{1}{4\pi r} \dots\dots(4.95)$$

$$p_{ijk}^*(\xi, x) = \left\{ \left[ \delta_{ij} \cdot r_{,k} (1 - 2\nu) + (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) 2\nu + \right. \right. \\ \left. \left. - 8 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - \delta_{ij} \cdot n_k \cdot (1 - 4\nu) + 2\nu (r_{,j} r_{,k} n_i + \right. \\ \left. + r_{,k} r_{,i} n_j) + (1 - 2\nu)(\delta_{jk} n_i + \delta_{ik} n_j + 2 r_{,i} r_{,j} n_k) \right\} \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \dots\dots(4.96)$$

onde

$n_i$  e  $n_j$  são os cossenos diretores, no macro-elemento, da normal ao elemento de contorno integrado.

O cuidado na utilização da expressão (4.94) refere-se ao caso do macro-elemento possuir uma interface em comum com outros macro-elementos (figuras 4.13 e 4.14): as forças  $p_k$  devem ser as reações na interface deste macro-elemento, ver  $P_i^1$  e  $P_i^2$  na equação (4.62) ou as condições (4.57).

As tensões na superfície de contorno são calculadas diretamente ou através de diferenças finitas da forma:

$$\sigma_N = p_n \dots\dots(4.97)$$

$$\sigma_{ns} = p_{ns} \dots\dots(4.98)$$

$$\sigma_{ss} = \frac{1}{1 - \bar{\nu}} (\bar{\nu} \sigma_{nn} + 2 G \epsilon_{ss}) \quad \dots\dots(4.99)$$

onde

os índices n e s referem-se as coordenadas normal e tangencial ao contorno.

$\bar{\nu}$  é definido em (3.14).

Da solução do sistema de equações obtêm-se as forças normais ( $p_n$ ) e tangenciais ( $p_{ns}$ ) no contorno e de onde obtêm-se as tensões  $\sigma_n$  e  $\sigma_{ns}$ . Para o cálculo de  $\sigma_{ss}$  é necessário encontrar  $\epsilon_{ss}$ . Sabendo-se que:

$$\epsilon_{ss} = \frac{\partial u_s}{\partial s} \quad \dots\dots(4.100)$$

onde

$u_s$  é o deslocamento na direção tangencial e é obtido também da solução do sistema de equações.

Com procedimento semelhante àquele que aproximou as reações de canto ( $R_c$ ) em função da rotação  $\theta_s$ , ver expressões (4.50) e (4.51), pode-se encontrar a deformação  $\epsilon_{ss}$  utilizando a técnica de diferenças finitas de forma análoga.

Além do cuidado de se trabalhar com as forças de reação na interface de macro-elementos, os deslocamentos e forças obtidas têm representação tridimensional e portanto, deve-se utilizar a transformação (4.55) para a obtenção dos resultados em duas dimensões com o uso das correspondentes forças nas expressões (4.97) e (4.99).

#### 4.10.2 - Curvaturas Internas

Seja a equação (4.27) na ausência de forças de volume:

$$\begin{aligned}
 w(\xi) = & - \int_{\Gamma} (V_n^*(\xi, x) w(x) - M_n^*(\xi, x) \theta_n(x)) d\Gamma(x) - R_{ci}^*(\xi, x_c) w_i(x_c) \\
 & + \int_{\Gamma} (V_n(x) w^*(\xi, x) - M_n(x) \theta_n^*(\xi, x)) d\Gamma(x) + R_{ci}(x_c) w_i(\xi, x_c) \\
 & (i = 1, \dots, N_c) \dots\dots(4.101)
 \end{aligned}$$

Analogamente à equação (4.93), da continuidade de (4.101) pode-se diferenciá-la para obter a curvatura como segunda derivada da função w. A expressão final para a curvatura é do tipo:

$$\begin{aligned}
 w_{,ij}(\xi) = & - \int_{\Gamma} \left[ V_{n,ij}^*(\xi, x) w(x) - M_{n,ij}^*(\xi, x) \theta_n(x) \right] d\Gamma(x) - R_{ci,ij}^*(\xi, x_c) w_c(x_c) + \\
 & \int_{\Gamma} \left[ w_{,ij}^*(\xi, x) V_n(x) - \theta_{n,ij}^*(\xi, x) M_n(x) \right] d\Gamma(x) + R_{ci}(x) w_{c,ij}^*(\xi, x_c) \\
 & (i = 1 \dots N_c) \dots\dots(4.102)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 V_{n,ij}^*(\xi, x) = & \left\{ \left[ (6 r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}) 8 \frac{\partial r}{\partial n} \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 - 8 \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 (r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) \right] + \right. \\
 & - 16 \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} (r_{,i} s_j + r_{,j} s_i) + 4 \frac{\partial r}{\partial s} (s_j n_i + s_i n_j) + \\
 & + 2 \frac{\partial r}{\partial n} (2 s_i s_j - 4 r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij}) + 2 (r_{,i} n_j + r_{,j} s_i) \left. \right\} (1 - \nu) + \\
 & + 4 \frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{ij} - 4 r_{,i} r_{,j}) + 4 (r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) \left. \right\} \frac{1}{4\pi r^3} \\
 & \dots\dots(4.103)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{n,ij}^*(\xi, x) = & - \left\{ \left[ (1 + \nu) - 2 \left( \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right) \right] (\delta_{ij} - 2 r_{,i} r_{,j}) + \right. \\
 & - 4 \frac{\partial r}{\partial n} (r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) - 4 \nu \frac{\partial r}{\partial s} (r_{,i} s_j + r_{,j} s_i) + \\
 & \left. + 4 r_{,i} r_{,j} \left( \left( \frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \right) + 2 n_i n_j + 2 \nu s_i s_j \right\} \frac{1}{4\pi r^2}
 \end{aligned}$$

.....(4.104)

$$w_{,ij}^*(\xi, x) = \left[ \ln(r) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \frac{1}{4\pi D} \quad \text{.....(4.105)}$$

$$\theta_{n,ij}^* = \left[ (\delta_{ij} - 2 r_{,i} r_{,j}) \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_j + r_{,j} n_i \right] \frac{1}{4\pi D r} \quad \text{.....(4.106)}$$

$$R_{ci,ij}^*(\xi, x) = M_{s,ij}(\xi, x_f) - M_{s,ij}(\xi, x_i) \quad \text{.....(4.107)}$$

$$\begin{aligned}
 M_{s,ij}(\xi, x) = & \left\{ 2(\delta_{ij} - 4 r_{,i} r_{,j}) \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} + 2 \left[ (r_{,j} s_i + r_{,i} s_j) \frac{\partial r}{\partial n} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) \frac{\partial r}{\partial s} \right] - n_i s_j - s_i n_j \right\} \frac{(1 - \nu)}{4\pi r^2} \quad \text{..(4.108)}
 \end{aligned}$$

devendo-se notar que a reação de canto foi aproximada pela diferença de momentos volventes conforme (4.35).

Analogamente ao cálculo de tensões, os deslocamentos e forças obtidos do sistema global serão compostos através da transformação (4.55). Com deslocamentos e forças no sistema local, pode-se utilizar aqueles adequados a (4.102). Além disto, para os macro-elementos ligados a pelo menos um outro macro-elemento, deve-se obter as forças do equilíbrio da interface, ver (4.57), para utilizá-las em (4.102).

### 4.11 - Integrais de domínio

Até este ponto, as equações integrais de chapas e placas, (4.49) e (4.52), foram tratadas sem os termos que contêm as integrais sobre o domínio ( $\Omega$ ), onde as forças distribuídas por unidade de área são levadas em conta. Os termos não incluídos foram:

$$\int_{\Omega} b_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad (i, j = 1, 2) \dots\dots(4.109)$$

$$\int_{\Omega} p_3(x) w^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad \dots\dots(4.110)$$

Para o cálculo destas contribuições, pode-se dividir o domínio em células, sobre as quais os valores  $b_j$  e  $p_3$  podem ser aproximados, que são integradas numericamente para os pontos em que são escritas as equações [34].

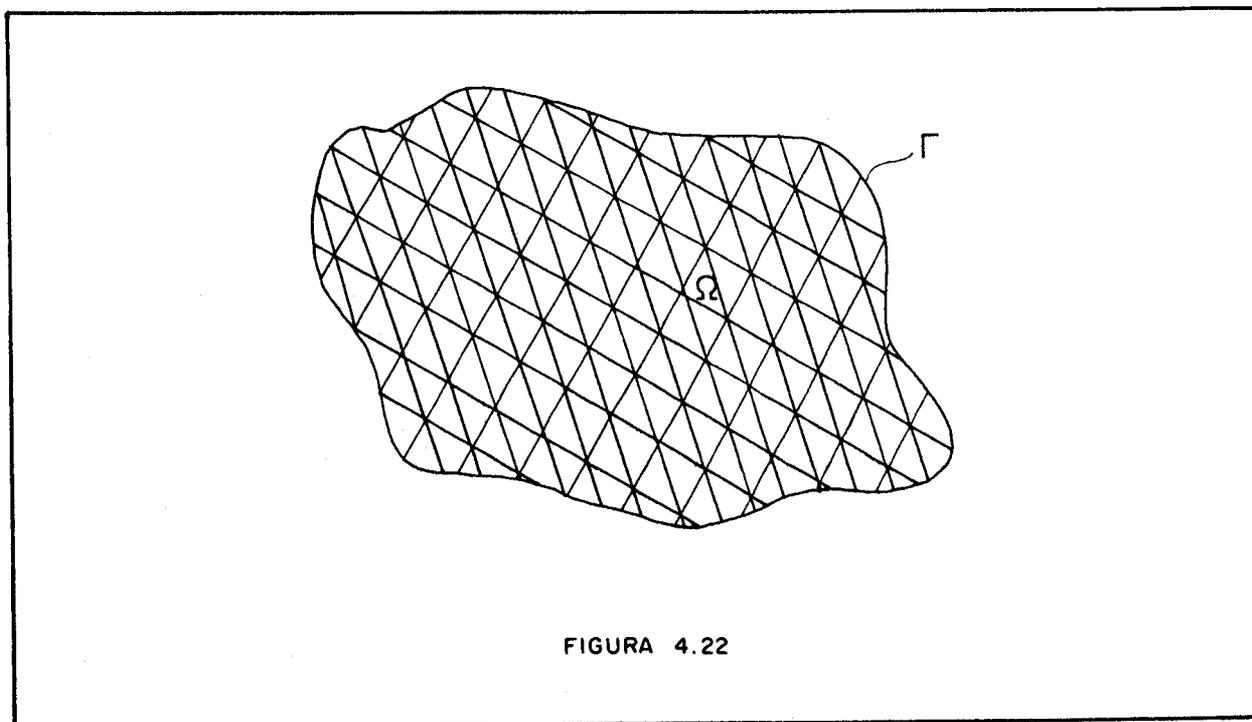


FIGURA 4.22

Quando as forças distribuídas tem expressões analíticas integráveis no domínio, estas integrais, dadas em (4.109) e (4.110), podem ser transformadas em integrais de contorno (integral de linha, nestes casos). Para este fim, utiliza-se o esquema de integração mostrado na figura 4.23 [42]. As integrais passam a ser



$$\int_{\Omega} b_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Omega(x) = \int_{\Gamma} \left[ \int_0^{R(\xi, t)} b_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) r(\xi, x) dr(x) \right] \frac{r_{,\ell} n_{\ell}}{R(\xi, t)} d\Gamma(t)$$

(i, j = 1, 2) .....(4.114)

$$\int_{\Omega} p_3(x) w^*(\xi, x) d\Omega(x) = \int_{\Gamma} \left[ \int_0^{R(\xi, t)} p_3(x) w^*(\xi, x) r(\xi, x) dr(x) \right] \frac{r_{,\ell} n_{\ell}}{R(\xi, t)} d\Gamma(t)$$

.....(4.115)

Para os casos em que as forças distribuídas  $b_j$  e  $p_3$  são constantes, obtêm-se para as expressões (4.114) e (4.115) as seguintes expressões:

$$\int_{\Omega} b_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Omega(x) = \int_{\Gamma} \frac{R \cdot b_j}{16\pi G(1-\nu)} \left[ - (3-4\nu) \left( \ln R - \frac{1}{2} \right) \cdot \delta_{ij} + \right. \\ \left. + R_{,i} R_{,j} \right] R_{,\ell} \cdot n_{\ell} d\Gamma$$

.....(4.116)

$$\int_{\Omega} p_3(x) w^*(\xi, x) d\Omega(x) = \int_{\Gamma} \frac{p_3 R^3}{32\pi D} \left( \ln R - \frac{3}{4} \right) R_{,\ell} n_{,\ell} d\Gamma$$

.....(4.117)

Para o cálculo das curvaturas e tensões internas, as integrais de domínio são do tipo:

$$\int_{\Omega} b_j(x) \cdot u_{ijk}^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad (i, j, k = 1, 2) \quad \text{.....(4.118)}$$

$$\int_{\Omega} p_3(x) w_{,ij}^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad \text{.....(4.119)}$$

A transformação das integrais (4.118) e (4.119) em integrais de contorno, para o caso das forças distribuídas constantes, é dada por:

$$\int_{\Omega} b_j(x) u_{ijk}^*(\xi, x) d\Omega(x) = \int_{\Gamma} \frac{b_j}{4\pi} \left[ (\delta_{ik} R_{,j} + \delta_{jk} R_{,i} - \delta_{ij} R_{,k})(1 - 2\nu) + \right. \\ \left. + 2R_{,i} R_{,j} R_{,k} \right] R_{,\ell} n_{\ell} d\Gamma \quad \dots\dots(4.120)$$

$$\int_{\Omega} p_3(x) w_{ij}^*(\xi, x) d\Omega(x) = \int \frac{p_3 R}{8\pi D} \left[ \left( \ln R - \frac{1}{2} \right) \delta_{ij} + R_{,i} R_{,j} \right] R_{,\ell} n_{\ell} d\Gamma \\ \dots\dots(4.121)$$

A inclusão das forças distribuídas por unidade de domínio altera as equações integrais (4.49), (4.52), (4.93) e (4.101) com o acréscimo de um vetor independente. No caso do sistema de equações (4.58), este passa a ser escrito por:

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{P} + \underline{V}$$

onde  $\underline{V}$  é o vetor que contém os termos independentes de cada equação integral.

Após a troca de colunas entre as matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  para a separação das variáveis incógnitas e conhecidas, chega-se à equação (4.61).

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{F}$$

onde o vetor  $\underline{F}$  contém a soma do vetor  $\underline{V}$  com o produto da matriz dos coeficientes, obtida de  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ , pelos valores das variáveis conhecidas.

Finalmente, pode-se observar que a utilização de pontos externos ao domínio não altera a validade dos procedimentos mostrados a partir da figura 4.22.

## 5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

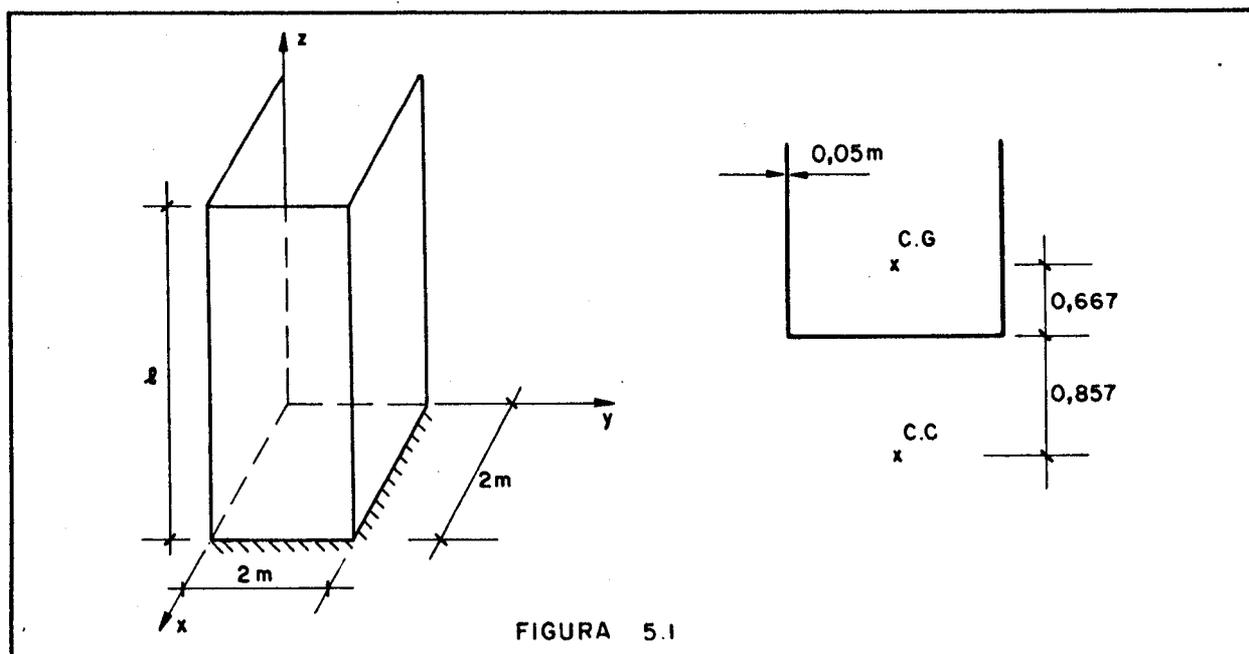
### 5.1 - Introdução

Apresentam-se, a seguir, alguns exemplos com o objetivo de mostrar os principais aspectos da sistemática proposta que foi colocada num programa de computador. Este programa, codificado em linguagem FORTRAN, teve as variáveis reais utilizando precisão dupla (8 bytes por variável), o que significa precisão nos cálculos de até 15 casas decimais aproximadamente.

Serão apresentados cálculos de barras prismáticas com seção aberta, fechada duplamente simétrica, mista (porção de comprimento aberto sucedendo uma porção fechada) e unicelular com mesas laterais em balanço.

### 5.2 - Exemplo Numérico 1 - Seção Aberta (U)

Neste exemplo, analisa-se uma barra com seção transversal em U. A figura 5.1 mostra esta barra com a seção transversal, a mesa e a alma tem mesma largura (2m) e o comprimento foi variável (4m, 8m e 24m). O módulo de Young (E) foi de  $2,0 \text{tf/m}^2$ , o módulo de elasticidade transversal (G)  $1,0 \text{tf/m}^2$  e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) zero. A espessura das paredes foi constante e igual a 0,05m.



A barra foi engastada em uma extremidade ( $z = 0$ ) e os carregamentos aplicados na extremidade livre ( $z = \ell$ ) através de diafragma. Também foi incluído um diafragma na seção intermediária ( $z = 0,5\ell$ ). A discretização, mostrada na figura 5.2, para o menor comprimento ( $\ell = 4\text{m}$ ) teve 36 elementos, 38 nós dispostos no contorno (incluindo as arestas) e 9 nós internos (3 nós/macro-elemento) para colocação do diafragma intermediário.

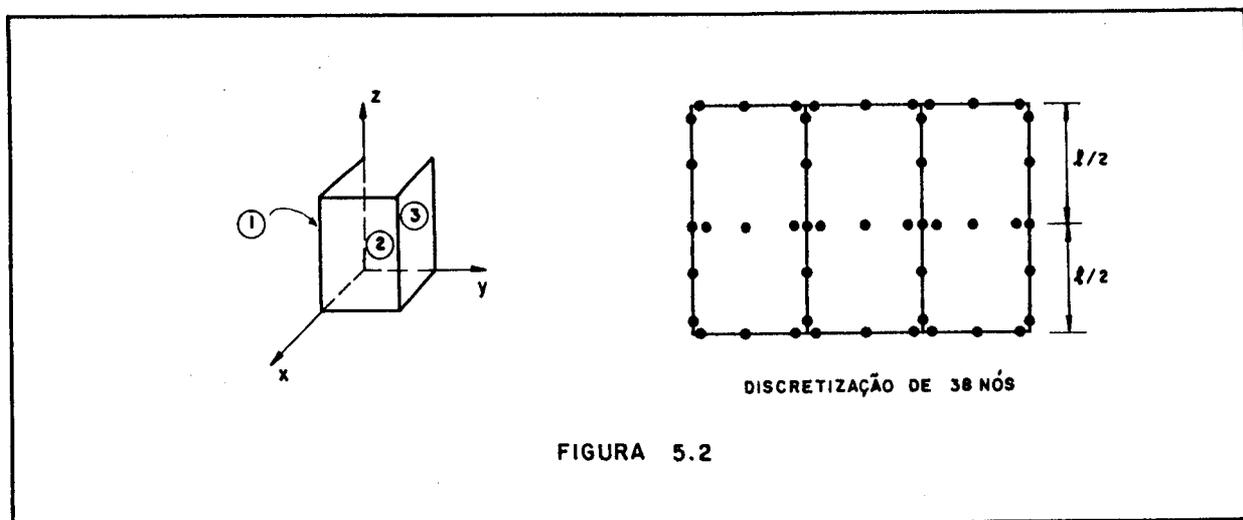


FIGURA 5.2

Os centros de gravidade e de cisalhamento situam-se no eixo de simetria da seção transversal e suas posições foram determinadas de acordo com a Mecânica dos Materiais (ver figura 5.1). Pelo fato do coeficiente de Poisson ser nulo, mesmo utilizando-se outras formulações para a determinação do centro de cisalhamento obtêm-se o mesmo resultado [44].

As respostas dividem-se em dois grupos pelos tipos de diafragmas utilizados:

a) Neste caso os diafragmas impuseram deformação plana na seção e todas as forças são aplicadas no diafragma superior.

a.1) Força normal de 1,0 tf.

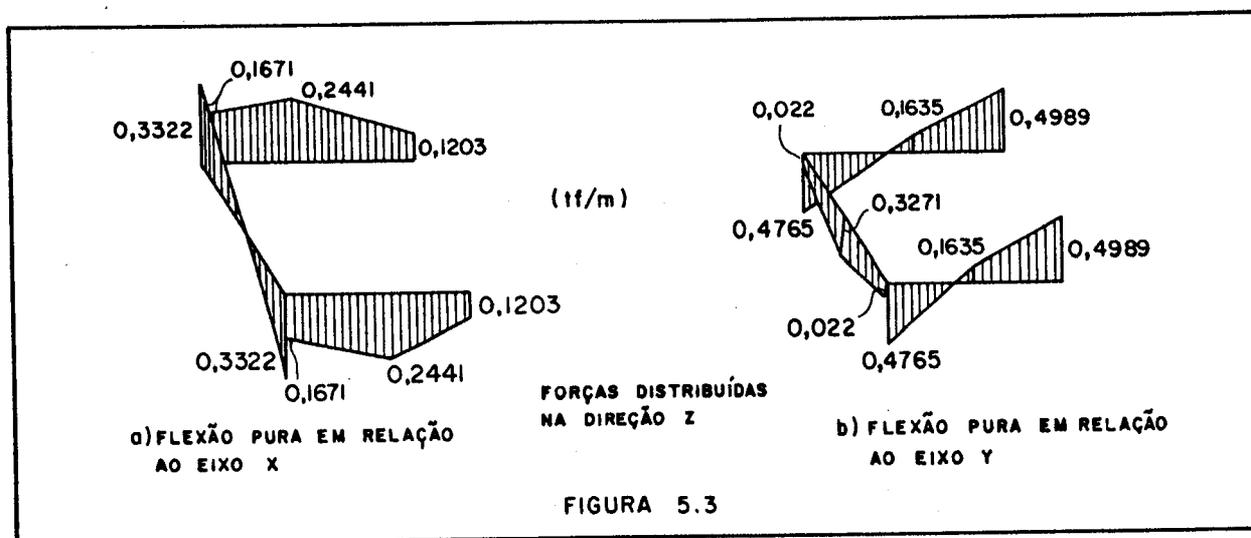
No engaste, obteve-se uma força distribuída de 0,1667tf/m na direção  $z$  ao longo das paredes. Este valor coincide com o da Mecânica dos Materiais pois, da integração resulta uma reação de 1,0 tf.

a.2) Flexão pura de 1,0tf.m em relação ao um eixo paralelo ao eixo x e passando pelo C.G.

No engaste, ao nível das mesas comprimida ou tracionada, obtêm-se uma força distribuída média na direção z de 0,1943tf/m quando a de Mecânica dos Materiais é de 0,2143tf/m (erro de -10,0%). A distribuição das forças obtidas é mostrada na figura 5.3.a, onde nota-se na junção mesa-alma um pico de força de 0,3322tf/m

a.3) Flexão pura de 1,0tf.m em relação a um eixo paralelo ao eixo y e passando pelo C.G.

No engaste, nos extremos das almas, obtêm-se uma força de 0,4989tf/m quando o valor teórico é de 0,5tf/m (erro de -0,22%). Ao nível da mesa a força média é de 0,1747tf/m para um valor teórico de 0,25tf/m (erro de -30,1%). Como nota-se na figura 5.3.b, na junção mesa-alma existe um pico de força de 0,4765tf/m e um valor máximo no centro da mesa de 0,3271tf/m.



A descontinuidade da distribuição na junção mesa-alma é devida à existência de n.º duplo nesta região. Deve-se observar que a média dos valores de forças na junção mesa-alma é 0,2496tf/m na figura 5.3.a (notar a queda dos valores de força na mesa comprimida, ou tracionada) e 0,2492tf/m na figura 5.3.b (a força média na mesa é de 0,1747tf/m). Estes fatos mostram a existência do fenômeno "shear-lag" apesar de os diafragmas imponham deformação plana.

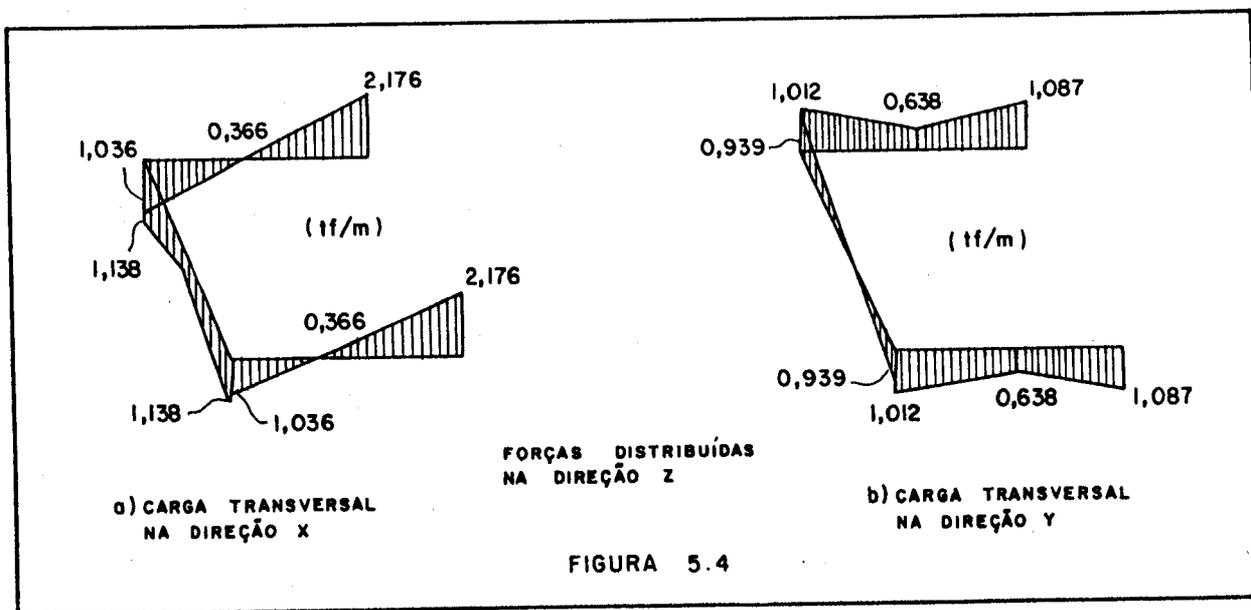
b) Neste caso os diafragmas mantiveram a seção transversal rígida com liberdade para o empenamento.

b.1) Carga transversal de 1,0tf, na direção x, no centro de cisalhamento.

No engaste, a força distribuída na direção z, na extremidade da alma é de 2,176tf/m para um valor teórico de 2,0tf/m (erro de +8,8%). Na mesa a força média foi de 0,9356tf/m para um valor teórico de 1,0tf/m (erro de -6,44%). Na junção alma-mesa observou-se um pico de 1,138tf/m como mostra a figura 5.4.a.

b.2) Carga transversal de 1,0tf, na direção y, no centro de cisalhamento.

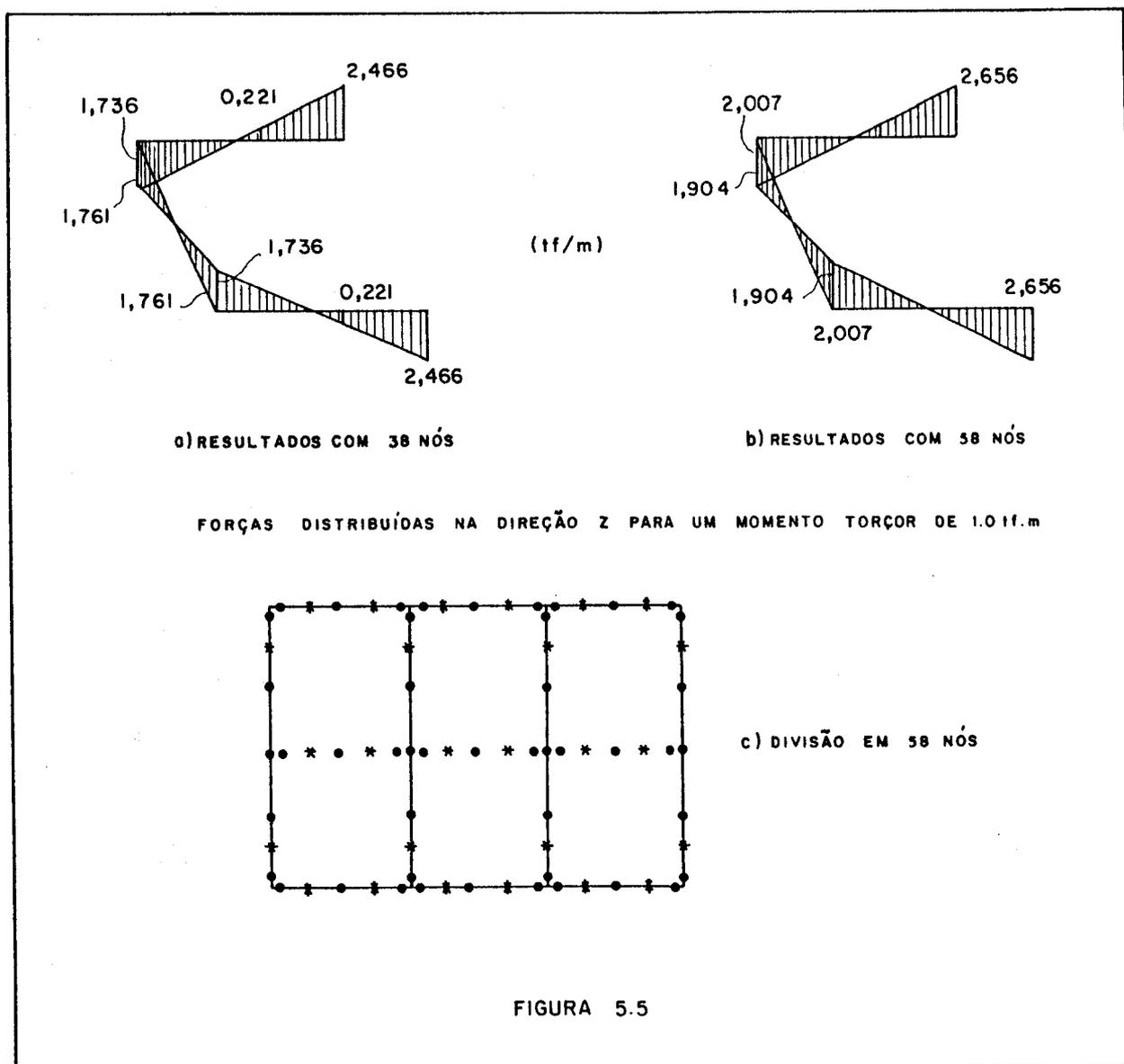
No engaste, a força distribuída média na direção z, obtida ao nível das mesas, foi de 0,8443tf/m para um valor teórico de 0,8572tf/m (erro de -1,5%). A distribuição de forças obtidas é mostrada na figura 5.4.b.



Acredita-se que devido a problemas numéricos o caso b.2 não evidenciou claramente o fenômeno "shear-lag" como os casos a.2 e a.3.

b.3) Momento torçor de 1,0tf.m aplicado no centro de cisalhamento.

Este problema caracteriza um caso de flexo-torção pois o engaste impede o empenamento. A resolução teórica, de acordo com Vlassov [3], fornece uma força na direção z, no engaste, de 2,383 tf/m nos extremos da seção e 1,787tf/m nas junções mesa-alma. Obteve-se 2,466tf/m (erro de +3,5%) nos extremos da seção e 1,736 tf/m (erro de -2,8%) nas junções mesa-alma. A figura 5.5.a mostra estes resultados. Na figura 5.5.b são apresentadas as forças obtidas para uma di



visão com 58 nós de contorno, 20 elementos por macro-elemento, e 15 nós internos (5 nós por macro-elemento) que é mostrada na figura 5.5.c (os nós colocados a mais em relação a primeira discretização estão representados com asterisco para maior evidência). A diferença entre valores obtidos é de cerca de 14% na junção mesa-alma e 8% nos extremos da seção. Acredita-se nos resultados da figura 5.5.b pelas razões:

- a) A teoria de Vlassov é aproximada e com campo de aplicações para barras longas (comprimento a partir de dez vezes a altura) e o caso tratado é de barras curtas (comprimento é duas vezes a altura).
- b) Os momentos de flexão na parede de barras situaram-se nas arestas entre  $10^{-2}$  a  $10^{-3}tf.m$  (a teoria de Vlassov de barras longas não conta com eles).
- c) No diafragma de extremidade, junto à rotação esperada, aparece um deslocamento de flexão na direção y para um deslocamento desprezível na direção x de  $10^{-14}m$ . A consequência destes fatos é a existência do centro instantâneo de rotação (centro de torção, [2], [3] e [44]) não coincidindo com o centro de cisalhamento. Devendo-se lembrar que, na teoria de flexo-torção de Vlassov e num problema exclusivo de torção em primeira ordem, o centro de torção coincide com o de cisalhamento. Assim, neste problema, o centro de torção situou-se no eixo de simetria da seção e 13,3cm distante do centro de cisalhamento (6,65% da altura da seção).

Estas razões motivaram nova discretização para o problema e justificam a resposta obtida com um maior número de nós. Valendo observar que o acoplamento de efeitos entre rotação e flexão na direção y também ocorreu no caso b.2.

Dos resultados obtidos para os casos a e b, cumpre notar que a primeira discretização utilizada, ver figura 5.2, levou em conta:

- a) Nós duplos nos cantos.
- b) Elemento de contorno de comprimentos iguais quando concorrem a um canto.

c) A existência de nós na metade do comprimento da barra ( $l/2$ ) e no meio da mesa ou alma.

Para estas exigências, utilizou-se uma das menores discretizações possíveis.

Quanto aos erros obtidos em relação à teoria convencional de flexão ou flexo-torção, o próprio comprimento da barra, duas vezes a altura da seção, não é adequado às comparações, além das teorias citadas sempre representarem aproximações de modelos mais complexos.

Pode-se afirmar que são considerados aceitáveis os resultados em vista destes fatos. Quanto à questão pendente do problema de flexo-torção e a dependência entre deslocamentos de flexão no eixo  $y$  e de torção, resolveu-se um exemplo com o dobro do comprimento (4 vezes a altura da seção). A figura 5.6 mostra a discretização com a distribuição obtida das forças na direção  $z$ .

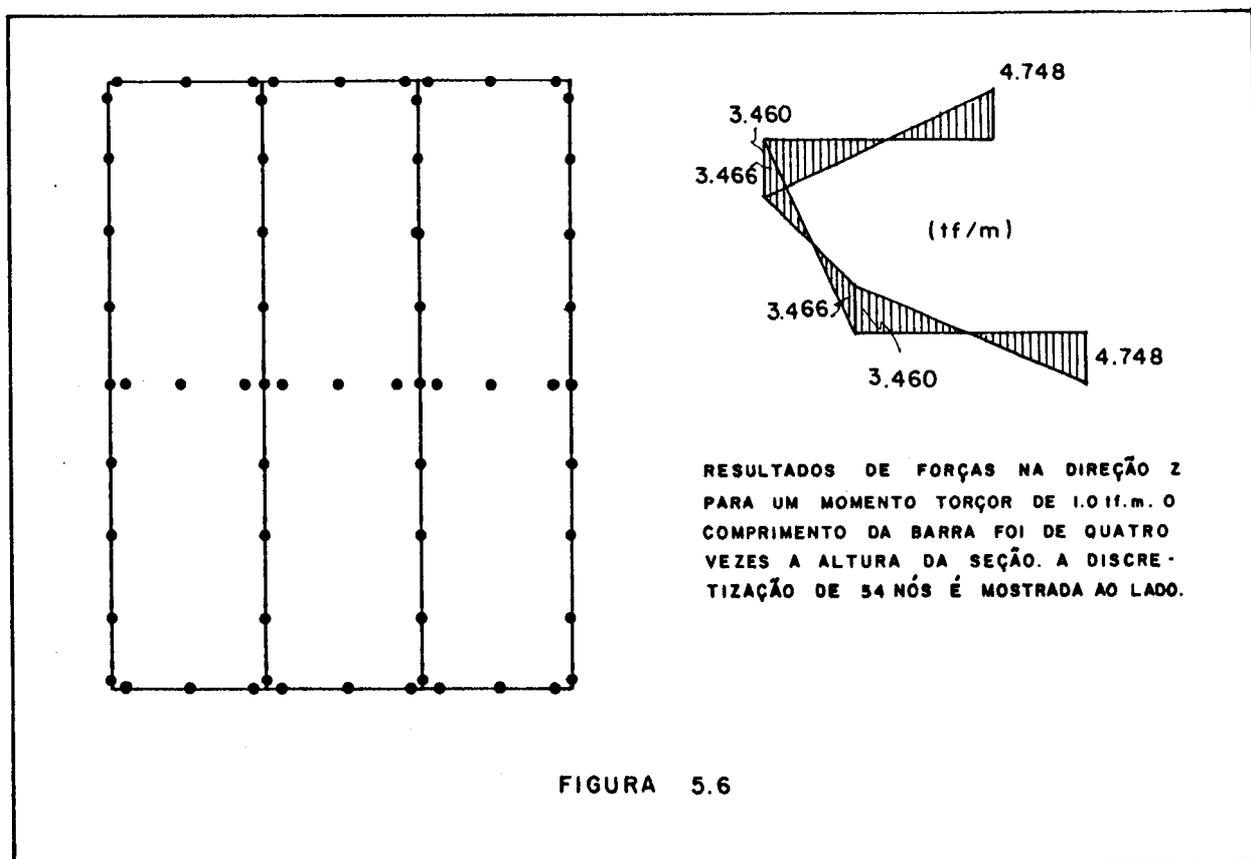


FIGURA 5.6

Foram utilizados 54 nós no contorno (20 elementos por macro-elemento) e 9 nós internos (3 nós por macro-elemento). Os diafragmas mantiveram-se um na extremidade livre e outro na seção

intermediária ( $\ell/2$ ), onde existem os nós internos, com o objetivo de manterem a seção transversal rígida e permitir o empenamento. Nos extremos da seção, o valor pela teoria de Vlassov é 4,670tf/m e o obtido 4,748tf/m (diferença 1,6%). Na junção mesa-alma, o teórico é 3,503tf/m e o obtido 3,460tf/m (diferença 1,2%). O mais importante neste exemplo é que a distância entre os centros de torção e de cisalhamento, no eixo de simetria, foi de 3,9cm (1,95% da altura da seção). Os momentos de flexão na parede, que ocorrem nas arestas, ficaram abaixo de  $10^{-3}$ tf.m.

Finalmente, resolveu-se um exemplo com comprimento longo (12 vezes a altura da seção ou 24m) com 78 nós no contorno (32 elementos por macro-elemento) e 9 nós internos (3 nós por macro-elemento). Os diafragmas que mantêm a seção rígida em seu plano atuaram na extremidade livre e na seção intermediária ( $z = 0,5\ell$ ), onde existem os nós internos. A figura 5.7 mostra a discretização utilizada e as forças na direção z que foram obtidas no engaste e para a espessura de 0,05m e 0,1m. As observações dos resultados são:

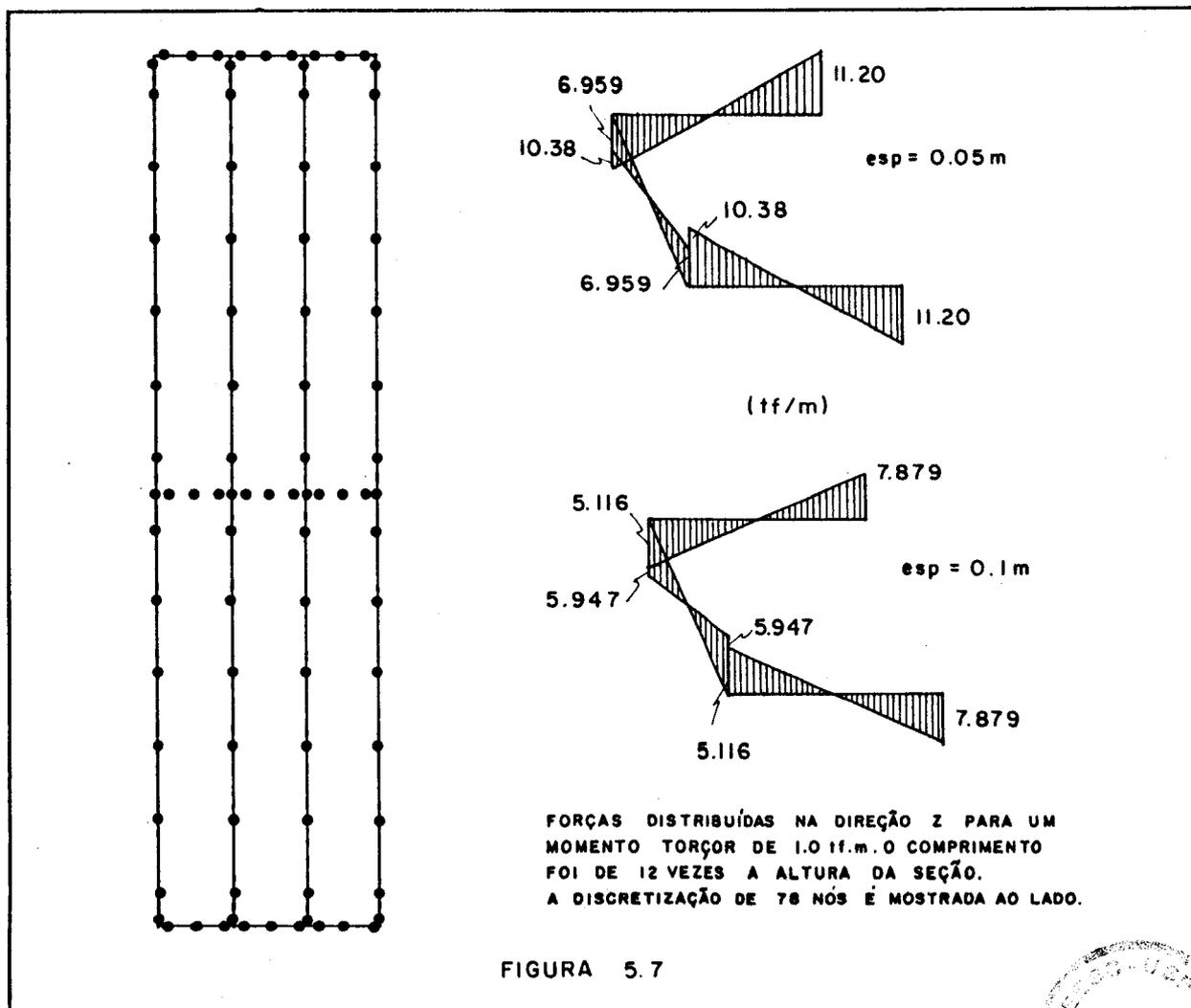


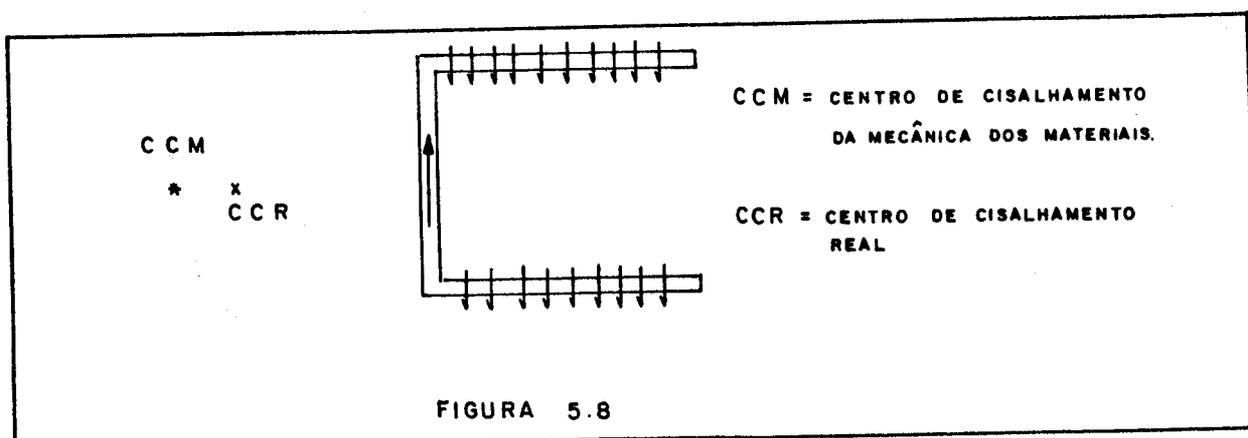
FIGURA 5.7



- a) Para a menor espessura (0,05m), a distância entre os centros de torção e de cisalhamento, no eixo de simetria, foi de 2,2cm (1,1% da altura da seção). As forças na direção z, na junção mesa-alma, pela teoria de Vlassov é 8,708tf/m para um valor obtido de 6,959 e 10,38tf/m (média 8,67tf/m, diferença máxima 25,1% e diferença em relação à média 0,4%); na extremidade livre das mesas, a teoria de Vlassov fornece 11,61tf/m e o valor obtido é 11,2tf/m (diferença 3,7%).
- b) Para a maior espessura (0,1m), a distância entre os centros de torção e de cisalhamento, no eixo de simetria, foi de 1,6cm (0,8% da altura da seção). As forças, na direção z, na junção mesa-alma por Vlassov é 6,019tf/m para um valor obtido de 5,116 e 5,947tf/m (média 5,532tf/m, diferença máxima 17,6% e diferença em relação à média de 8,8%), na extremidade livre a teoria de Vlassov fornece 8,025tf/m e o valor obtido é 7,879tf/m (diferença 1,9%).

Pode-se concluir que o aumento do comprimento levou a uma redução da dependência entre o deslocamento de flexão e a rotação da seção, enquanto as forças obtidas na direção z situaram-se próximos dos previstos pela teoria de Vlassov.

Quanto à origem da dependência entre os deslocamentos de flexão e rotação, o equilíbrio das forças nos nós do engaste mostra que este fato deve-se ao mecanismo de placas. Sabe-se que a existência do efeito de placa leva à ocorrência de forças (cortantes) perpendiculares ao plano do macro-elemento. Assim, forças perpendiculares ao plano das mesas equilibram forças paralelas ao plano da alma (figura 5.8), o que altera a posição do centro de cisalhamento (calculado com a hipótese de inexistência destas forças).



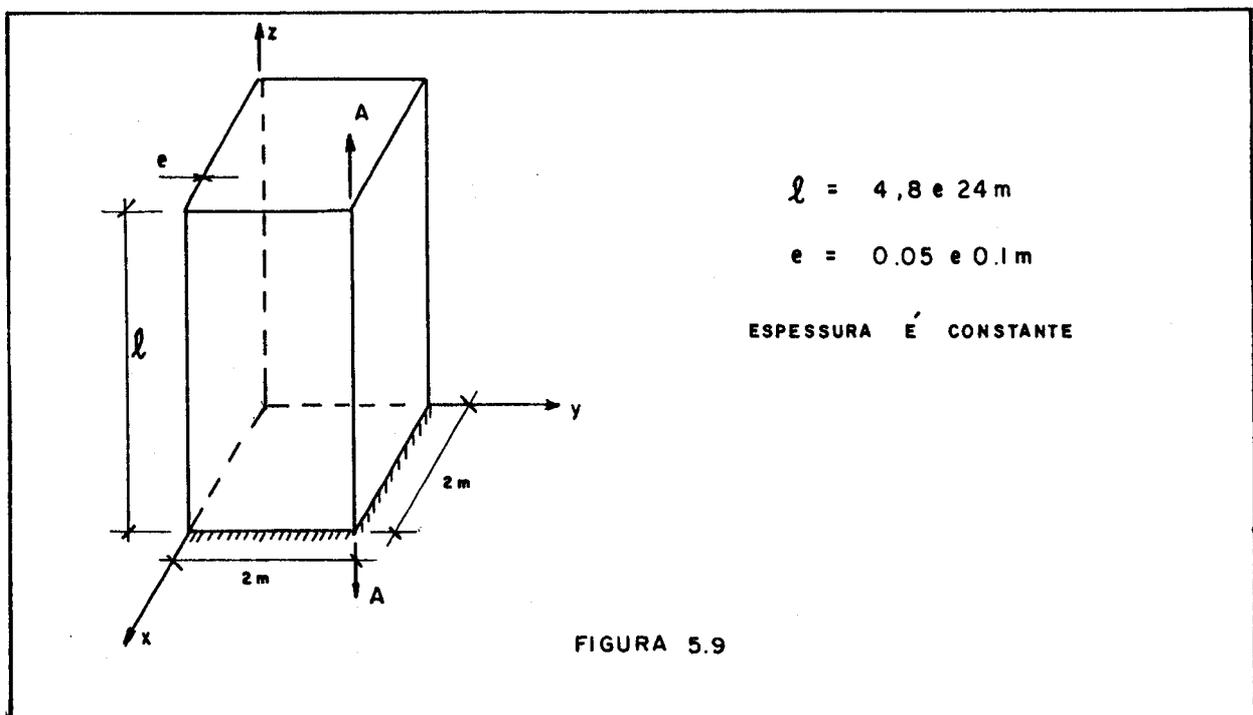
A medida que aumenta-se o comprimento da barra, o comportamento de placa estreita leva à redução destas cortantes devido à flexão no plano longitudinal (só existindo flexão no plano da seção transversal). Por outro lado, o aumento da espessura também reduz o efeito da flexão ou seja, enrijece a seção.

Assim, a hipótese de seção aberta rígida em seu plano no deve ser garantida, na prática, com um número elevado de diafragmas para não ocorrer o fenômeno mostrado.

Finalmente, seções em U com paredes em balanço não tão largas, como a da figura 5.8, contribuiriam para uma minimização do efeito mostrado.

### 5.3 - Exemplo Numérico 2 - Seção Fechada Simétrica

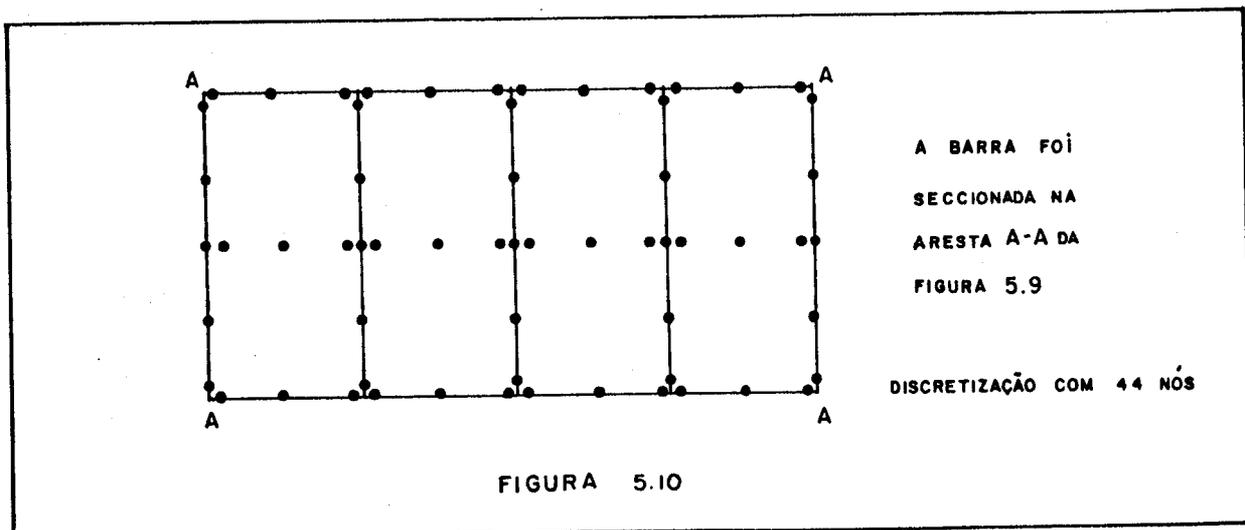
Com objetivo de tratar uma seção fechada, escolheu-se uma obtida do primeiro exemplo e duplamente simétrica. O módulo de Young (E) e o módulo de elasticidade transversal (G) foram mantidos em  $2,0 \text{ tf/m}^2$  e  $1,0 \text{ tf/m}^2$ , respectivamente, com o coeficiente de Poisson zero. A figura 5.9 mostra esta barra, onde o centro de gravidade coincide com o de cisalhamento devido à simetria.



Foram utilizadas 2 espessuras (0,05m e 0,1m) com três comprimentos (4, 8 e 12m). A barra tem uma extremidade engastada ( $z = 0$ ) e uma extremidade livre ( $z = \ell$ ) onde estão aplicados os carregamentos. Existem dois diafragmas sendo um situado na porção intermediária ( $z = 0,5\ell$ ) e outro na extremidade livre que mantêm a seção rígida em seu plano mas permitem o empenamento. Os carregamentos, aplicados no diafragma superior, constaram de uma torção e um carregamento de flexão (devido à dupla simetria da seção, somente um carregamento de flexão é necessário para a análise).

a) Barra com 4m e espessura 0,05m

A discretização usada é mostrada na figura 5.10.



Foram utilizados 44 nós no contorno (incluindo arestas), 12 elementos por macro-elemento, e 12 nós internos (3 por macro-elemento) para colocação do diafragma intermediário. Para o carregamento de flexão (carga concentrada de 1,0tf) foi obtida, nas mesas, uma força média, na direção  $z$ , de 0,7238tf/m para um valor da Mecânica dos Materiais de 0,75tf/m, valendo as mesmas observações sobre precisão dos resultados apresentados no primeiro exemplo.

A figura 5.11.a mostra a distribuição de forças obtidas na região do engaste onde nota-se o fenômeno "shear-lag" e na figura 5.11.b a tendência observada nos macro-elementos paralelos a direção da carga de moverem-se simetricamente a esta direção de modo a afastar-se na mesa superior e aproximar-se na mesa inferior. Acredita-se que esta deformação é devido às tensões de cisalhamento e para ordem de grandeza, o maior deslocamento na direção da mesa é 320 vezes menor que a flecha na extremidade livre.

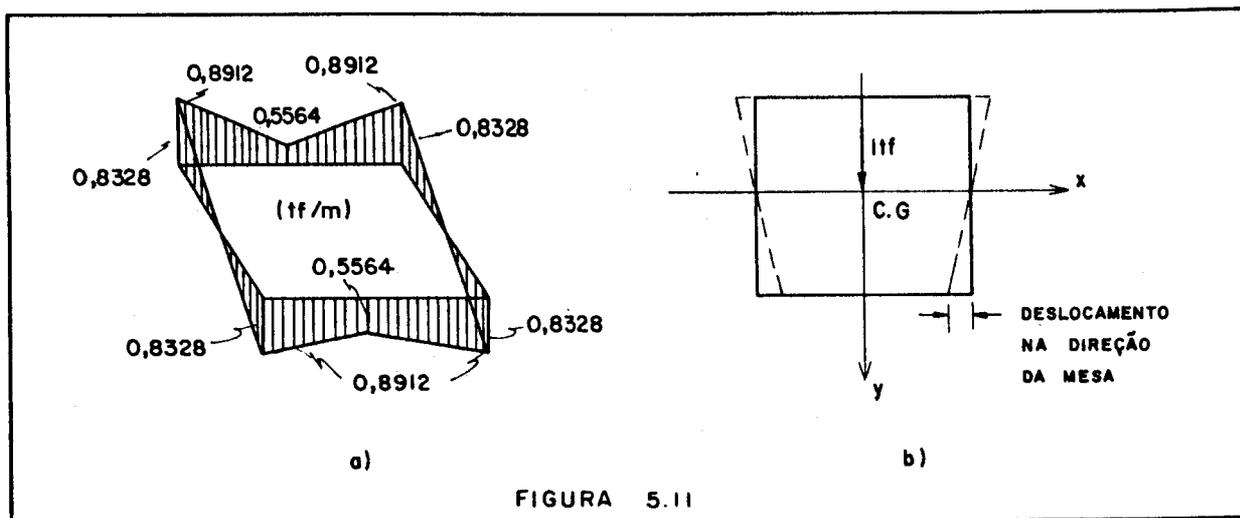


FIGURA 5.11

Além deste tratamento, procurou-se retirar o diafragma na porção intermediária e a maior diferença de resultados foi inferior a 1%.

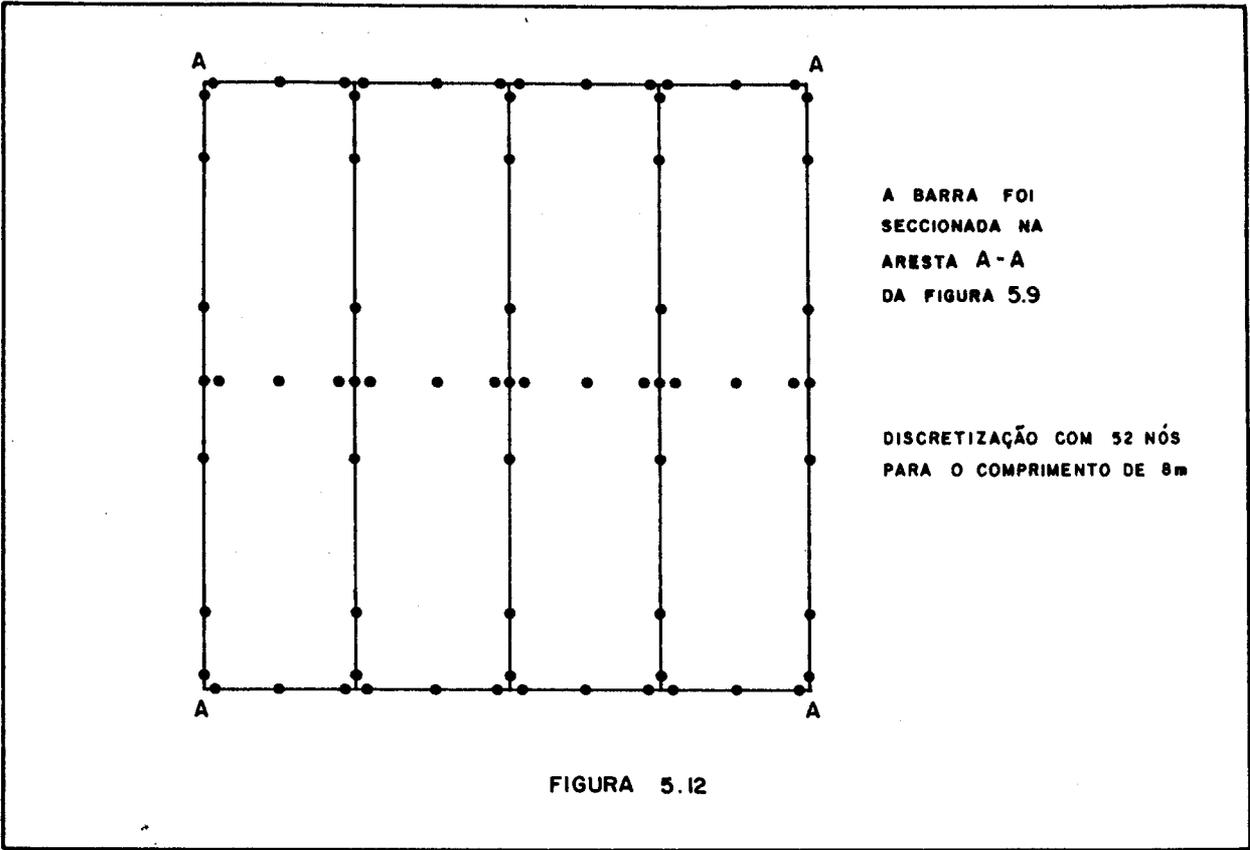
Para o problema de torção, a carga torçora de 1,0tf.m produziu no engaste tensões de cisalhamento, que percorrem a largura da mesa e alma, com valores 0,5% diferentes dos obtidos pela torção de Saint-Venant. A tensão normal do bimomento, que ocorre devido à ausência de empenamento no engaste, ficou 10.000 vezes menor que a tensão de cisalhamento encontrada, fato coerente com os resultados experimentais de Vlassov. Assim, ao contrário das seções abertas, o empenamento impedido passa a ter mais influência local do que global.

Repetiu-se o exemplo de torção mas retirando o diafragma intermediário e, aqui também, as diferenças em relação ao resultado com dois diafragmas não foram superiores a 1%.

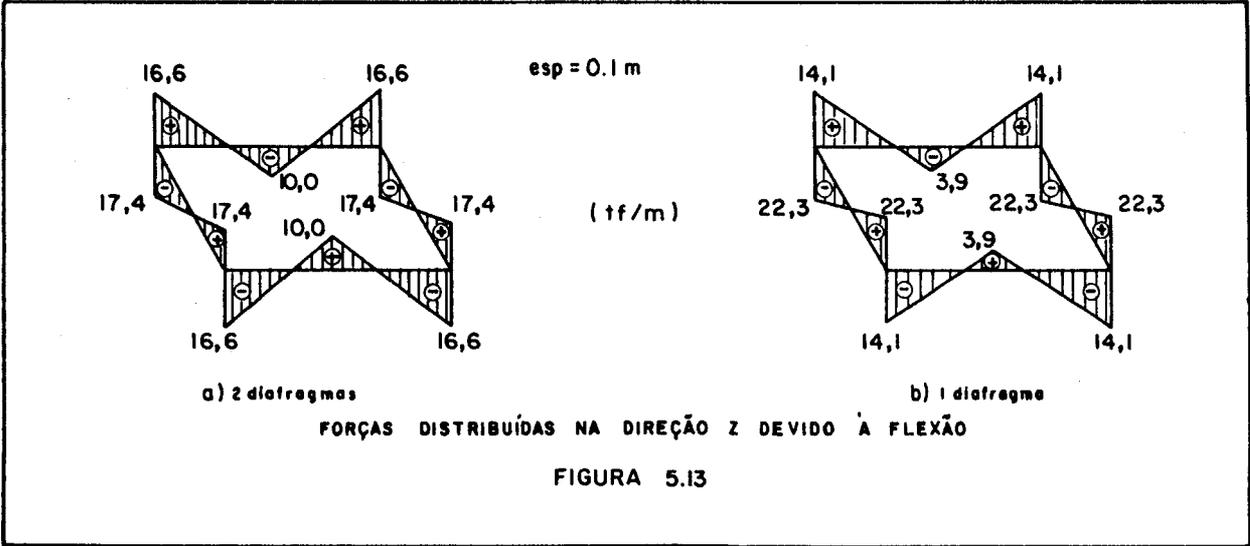
Procurou-se dobrar a espessura ou seja, utilizar-se 0,1m e a diferença dos resultados foi análoga tanto na torção como na flexão.

#### b) Barra com 8m e 0,1m de espessura

A discretização usada é mostrada na figura 5.12. Foram utilizados 52 nós no contorno (incluindo arestas), 16 elementos por macro-elemento, e 12 nós internos (3 por macro-elemento) para colocação do diafragma intermediário. Para o carregamento de fle-

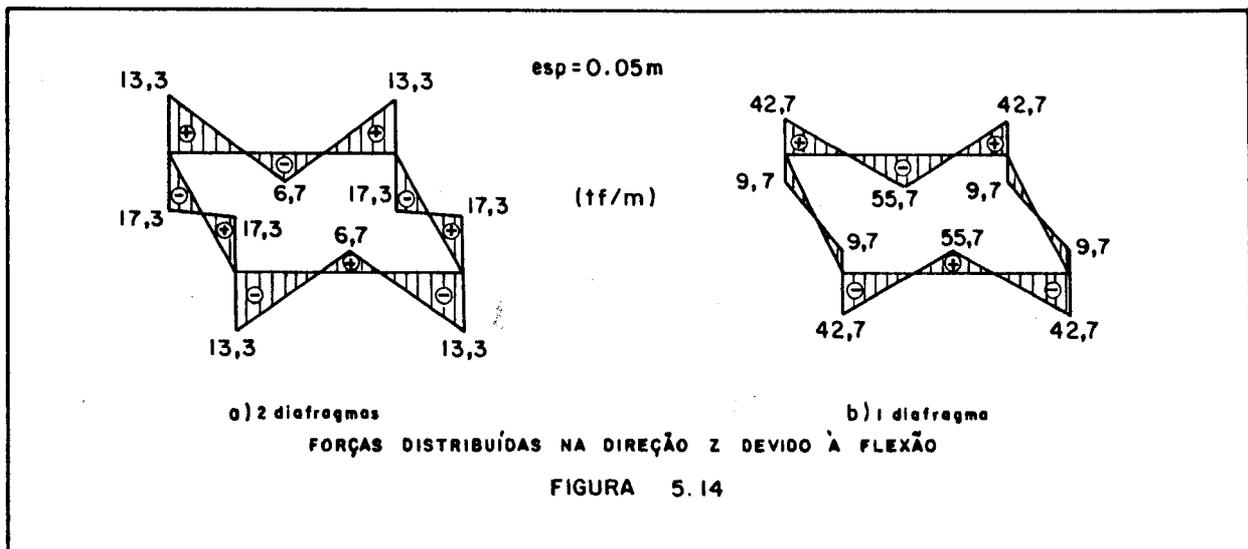


xão foi obtido nas mesas comprimida ou tracionada, no engaste, uma força média, na direção z, de 3,3tf/m com dois diafragmas e 5,1tf/m com um diafragma (retirou-se o da seção intermediária) para um valor da 1,5tf/m da Mecânica dos Materiais. A distribuição das forças obtidas na região do engaste é mostrada na figura 5.13.a para dois diafragmas e 5.13.b para um diafragma e onde nota-se o fenômeno "shear-lag".



O outro aspecto a considerar é o momento de flexão das paredes no plano transversal que enquanto no menor comprimento situou-se entre  $10^{-4}$  e  $10^{-6}$ tf.m, com dois diafragmas passou a situar-se entre  $10^{-1}$  e  $10^{-3}$ tf.m e com um diafragma entre 0,3 e  $10^{-5}$ tf.m.

Procurou-se reduzir a espessura a metade (0,05m). No engaste, a força média na direção z com dois diafragmas permaneceu em 3,3tf/m e com um diafragma passou a 6,5tf/m para um mesmo valor teórico de 1,5tf/m da Mecânica dos Materiais. A distribuição obtida no engaste, para estas forças, é mostrada na figura 5.14.a para dois diafragmas e 5.14.b para um diafragma.

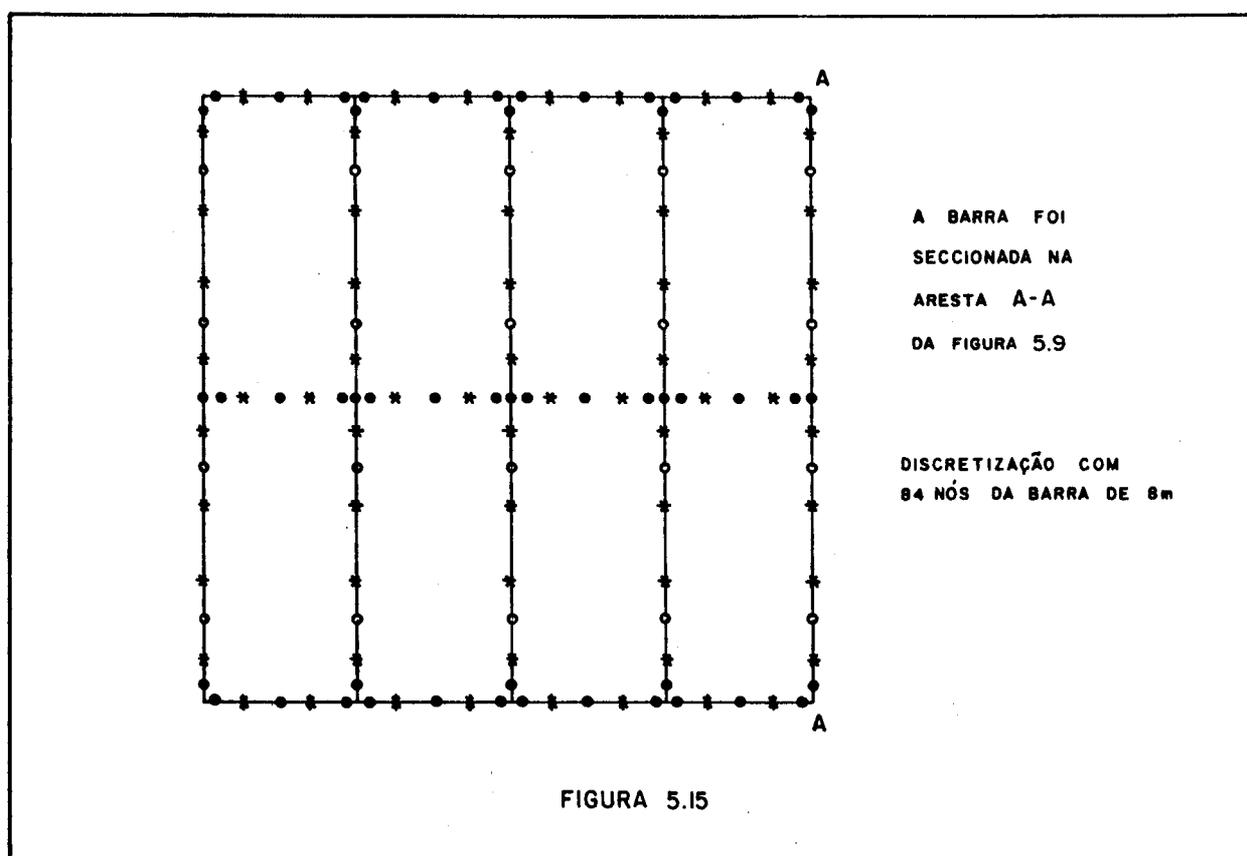


Os momentos de flexão das paredes no plano transversal oscilaram entre  $10^{-2}$  e  $10^{-4}$ tf.m para dois diafragmas e entre 0,3 e  $10^{-3}$ tf.m para um diafragma.

Dos resultados obtidos para as duas espessuras nota-se

- Forte variação das forças normais nas mesas ("shear-lag") e forte descontinuidade de forças normais nas junções mesa-alma.
- Existência de momentos de flexão transversal nas paredes. Vlassov [3] demonstra que a existência de momentos de flexão das paredes no plano da seção transversal está ligada à variação da tensão de cisalhamento ao longo do comprimento da barra. Sabe-se que esta variação pode ser obtida de carregamentos de flexão ou torção distribuídos no comprimento mas, dificilmente de uma carga concentrada na extremidade de um balanço.

Assim, são atribuídos estes resultados a um problema numérico e não a um comportamento mecânico da estrutura. Estes fatos levaram a utilizar-se uma discretização melhor para o problema. Neste sentido, utilizaram-se 84 nós de contorno (incluindo as arestas), 28 elementos por macro-elemento, e 20 nós internos (5 nós por macro-elemento). A figura 5.15 mostra a discretização utilizada, os nós adicionais em relação à primeira discretização (figura 5.12) estão representados com um asterisco e os retirados com um círculo vazio.

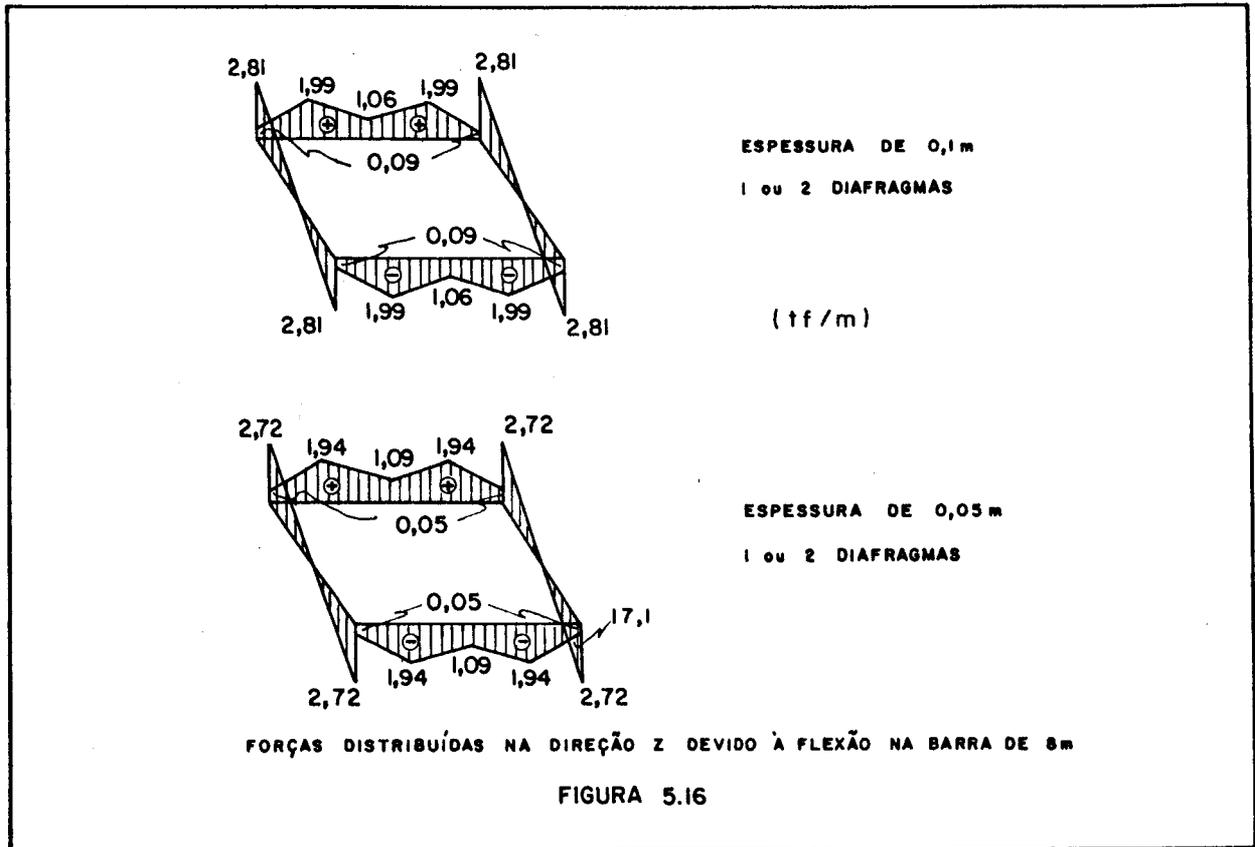


As forças obtidas na direção z, no engaste, têm um valor médio nas mesas oscilando entre 1,2 e 1,3tf/m (valor teórico de 1,5tf/m) com um pico na junção mesa-alma entre 2,7 e 2,8tf/m pois, os valores para as duas espessuras situaram-se próximos. A figura 5.16 apresenta a distribuição, destas forças, obtida ao nível do engaste. Nesta figura, devido ao arredondamento, os resultados com um ou dois diafragmas coincidiram em cada espessura.

Os momentos de flexão da parede, em qualquer dos casos, situaram-se abaixo de  $10^{-3}$ tf.m.

Assim, a melhor discretização evidenciou de modo claro o fenômeno "shear-lag" ou seja, a força que ocorre nas mesas

é inferior aos da lei das seções planas (o valor médio obtido situou-se em 1,2tf/m para o valor teórico de 1,5tf/m) e existem picos na junção mesa-alma que superam os valores da lei das seções planas (ver figura 5.16).



Na distribuição de forças obtidas, a descontinuidade na junção mesa-alma ocorreu pela existência de nós duplos nos cantos. Entretanto, como nota-se na figura 5.15, existem nós em cada aresta, comuns aos macro-elementos, que pertencem às extremidades da barra ou seja, existem 3 nós no diedro da extremidade (figura 5.17).

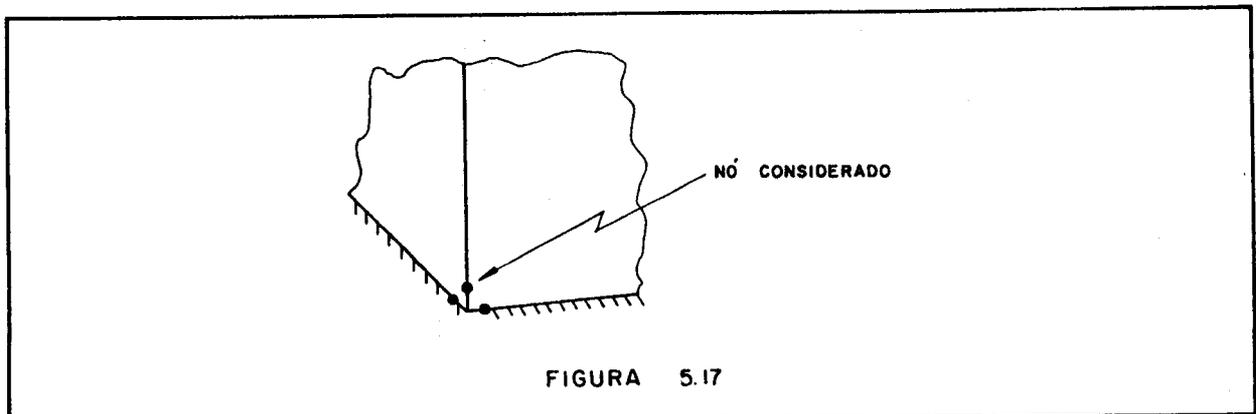
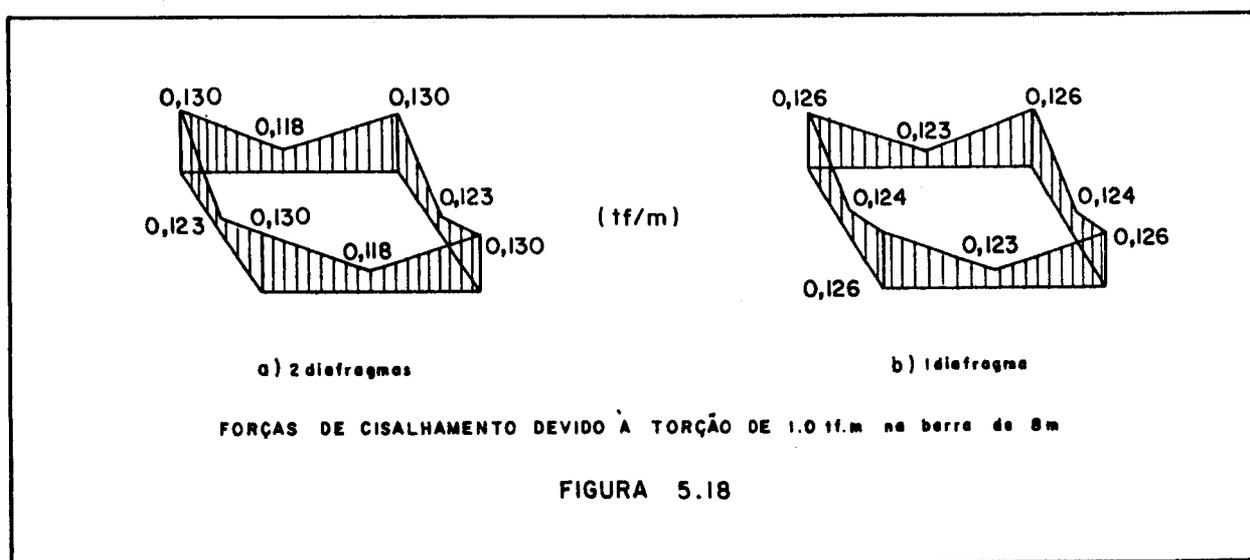


FIGURA 5.17

A força neste nó é de 1,74tf/m para 0,1m de espessura é 1,71tf/m para 0,05m. Nesta resposta, também devido ao arredondamento, os valores com um ou dois diafragmas em tração ou compressão coincidem, mas reafirmam a existência do pico de forças na junção mesa-alma.

Para a torção de 1,0tf.m, com a discretização da figura 5.12, os resultados foram muito próximos da torção livre de Saint-Venant. A distribuição das forças de cisalhamento, no engaste, é mostrada na figura 5.18.a para dois diafragmas e figura 5.18.b para um diafragma.

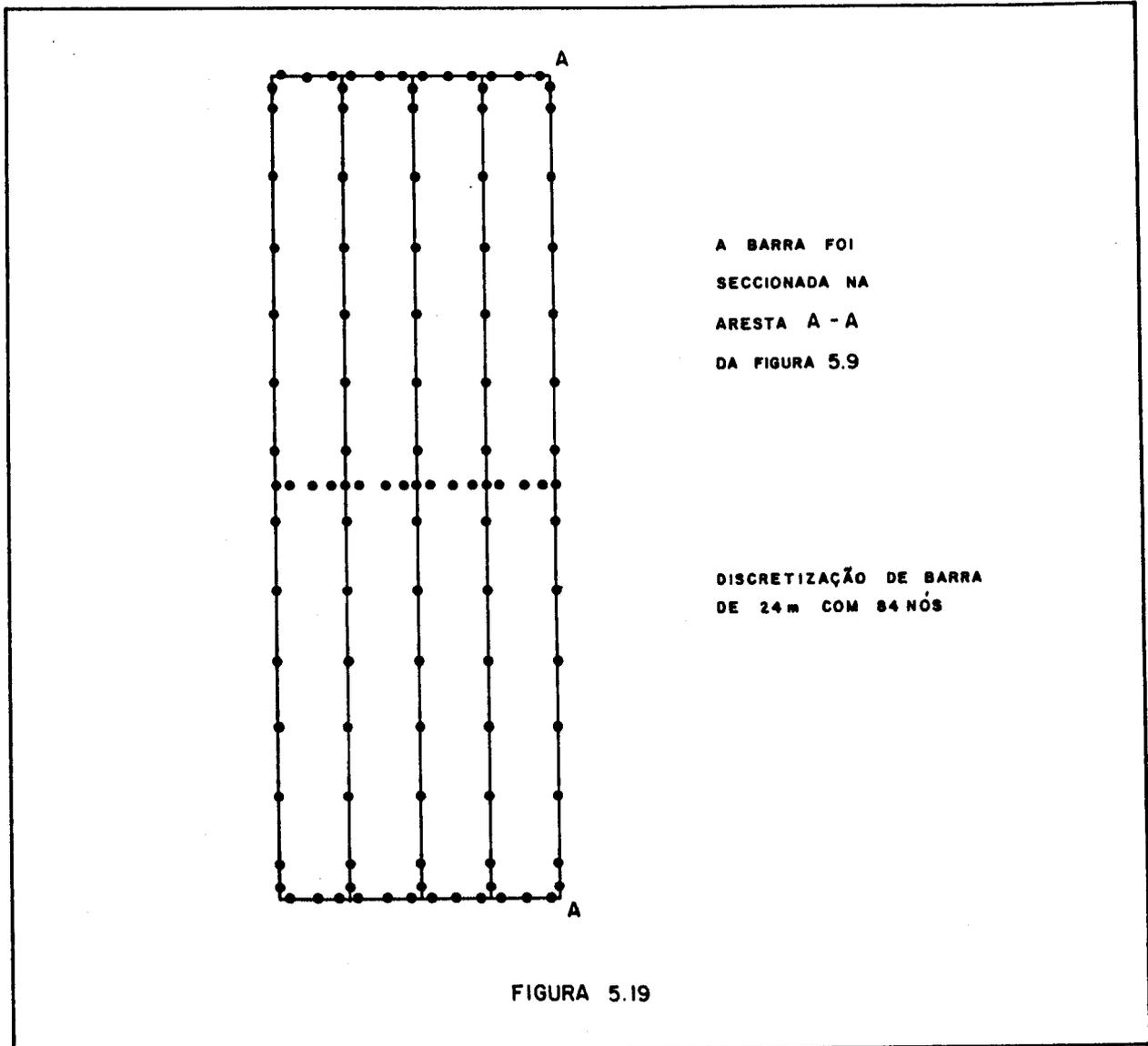


Nota-se na figura 5.18 que as forças de cisalhamento, na direção das paredes, situaram-se próximas do valor teórico de 0,125tf/m da torção livre. Os momentos de flexão na parede situaram abaixo de  $10^{-12}$ tf.m, o que está de acordo com o valor nulo esperado. Quanto ao empenamento restringido, repete-se a conclusão do menor comprimento: As forças na direção z estão abaixo de 1% do valor das forças de cisalhamento, o que reafirma a conclusão de Vlassov que em seções fechadas o empenamento restringido tem efeito local.

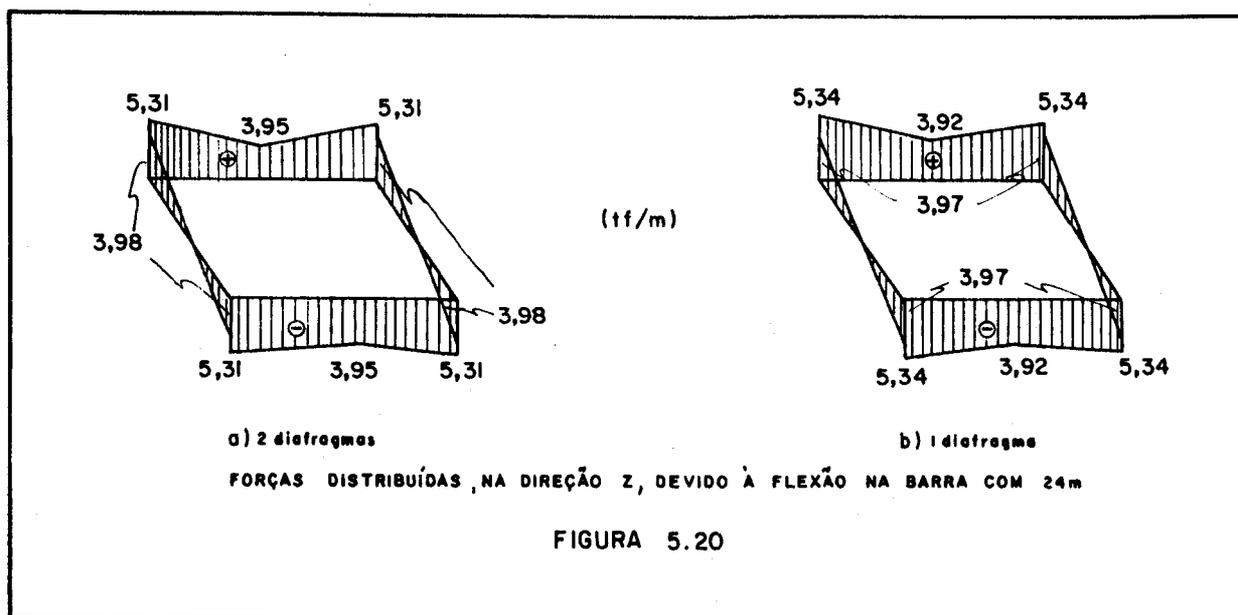
c) Barra com 24m e 0,1m de espessura

Procurou-se analisar o caso de uma barra longa. Foram utilizados 84 nós de contorno (incluindo as arestas), 32 elementos por macro-elemento, e 12 nós internos (3 por macro-elemento) para colocação do diafragma intermediário. Pode-se observar que utilizou-se uma discretização pobre pois, da comparação desta dis-

cretização, mostrada na figura 5.19, com a da figura 5.12, conclui-se que os nós adicionais foram para o aumento do comprimento.

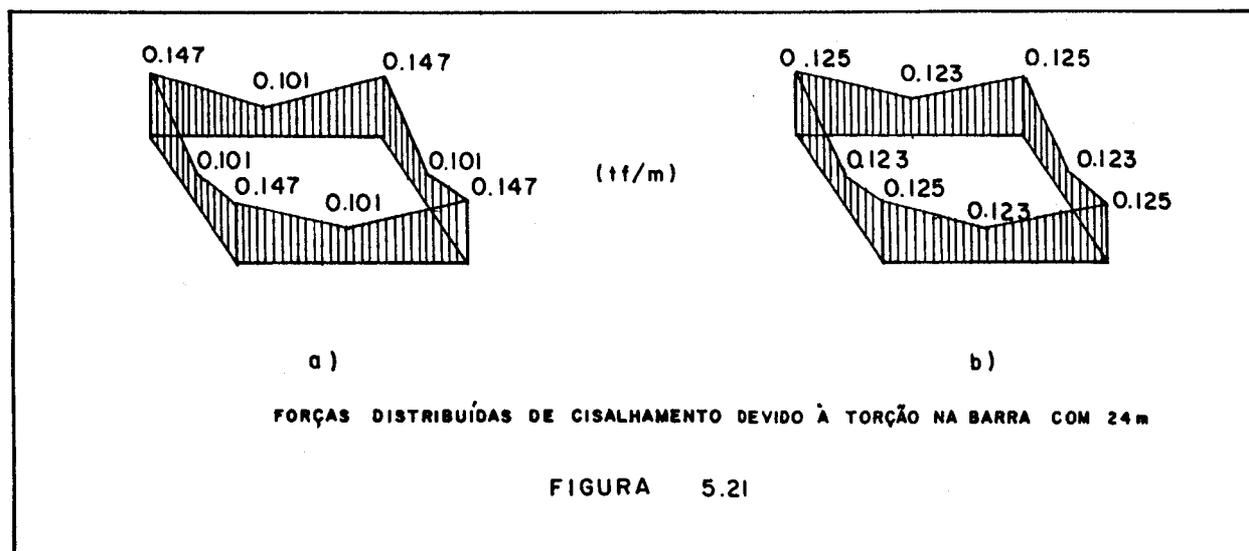


Analogamente ao procedido para os outros comprimentos, foram utilizados diafragmas na extremidade livre e na seção intermediária ( $z = 0,5l$ ) para manter a seção rígida em seu plano. Os resultados para a flexão devidos à carga concentrada evidenciaram o fenômeno "shear-lag". A força média no engaste, na direção  $z$ , obtida ao nível das mesas foi de 4,63tf/m (valor teórico de 4,5tf/m) com picos na junção mesa-alma de 5,31tf/m. A figura 5.20.a apresenta a distribuição destas forças obtidas no engaste com dois diafragmas e na figura 5.20.b para um diafragma.



Os momentos de flexão da parede situaram-se abaixo de  $10^{-2}$ tf.m. Pode-se afirmar que uma maior discretização produziria melhores resultados, analogamente ao procedido para o comprimento médio. Entretanto, os resultados são aceitáveis considerando a discretização pobre.

Para a torção de 1,0tf.m, continuou-se obtendo resultados próximos da torção livre (0,125tf/m), reafirmando que o empennamento restringido tem caráter local. A distribuição das forças de cisalhamento, na direção das paredes, obtida no engaste é mostrada na figura 5.21 com dois diafragmas (5.21.a) e um diafragma (5.21.b).



Finalmente o deslocamento do ponto de aplicação da

carga na extremidade livre (flecha) foi 1,5% superior ao valor da Mecânica dos Materiais, neste comprimento e independente do número de diafragmas.

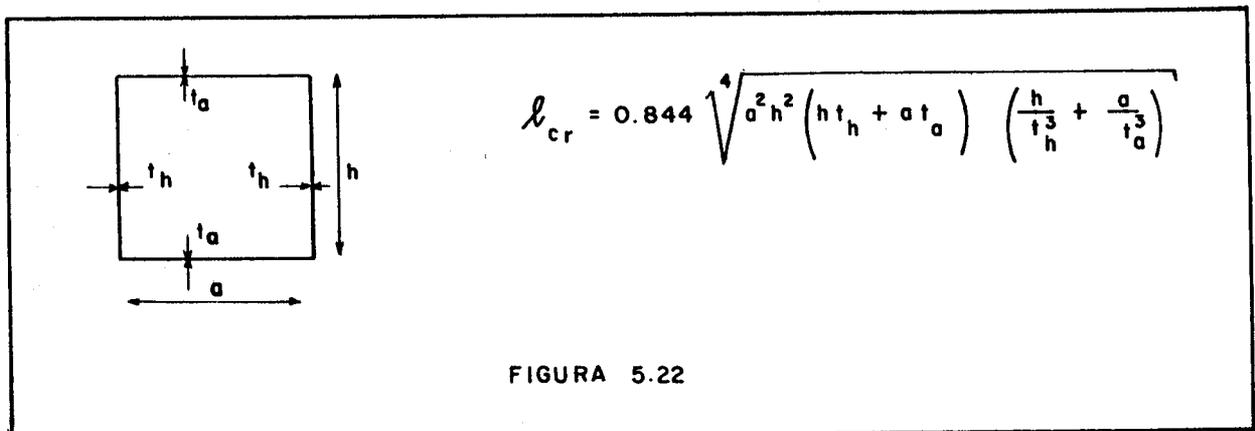
Para o comprimento médio ( $\ell = 8\text{m}$ ):

- a) Na discretização pobre, a flecha no caso de dois diafragmas foi 87% maior que o valor teórico e 50% maior com um diafragma.
- b) Na melhor discretização, a flecha foi 17,5% maior que o valor teórico independente do número de diafragmas.

Observando-se que nestes casos a espessura das paredes foi 0,1m.

Com relação ao problema da torção, uma observação é necessária:

Kristek, [30] e [43], apresenta uma expressão para distância entre diafragmas que mantêm a seção rígida em seu plano. Nestes trabalhos, o autor informa que a partir da distância  $L_{cr}$  entre diafragmas de extremidade, a inclusão de diafragmas intermediários aumentará as tensões normais no problema da torção. A expressão de Kristek é mostrada na figura 5.22.



Entretanto, Kristek não informa sob que condições obteve a expressão, somente que procedeu à variação dos parâmetros, e afirma que condições de carregamento alteram o resultado.

Para a seção transversal considerada neste exemplo, o valor  $L_{cr}$  é 10,68m para 0,1m de espessura e 15,10m para 0,05m de espessura. No caso do comprimento médio ( $\ell = 8\text{m}$ ), a inclusão do

diafragma intermediário aumentou em 6 vezes a força na direção z e para o comprimento longo ( $l = 24\text{m}$ ) a inclusão do diafragma aumentou em 20 vezes. Entretanto, estas forças normais são no máximo 10% da força de cisalhamento (valor de pico no comprimento longo) e com discretizações pobres para o problema.

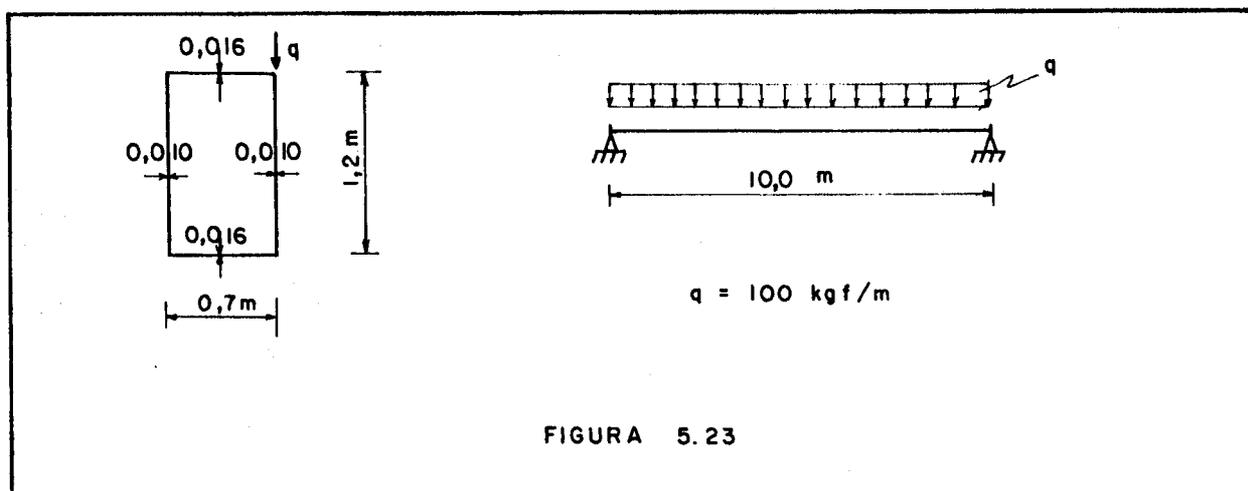
Sem tomar os resultados obtidos como conclusões finais, pois seria necessário um estudo com vários exemplos, prefere-se reafirmar a conclusão de Vlassov, de alguma forma relacionada com o estudo de Kristek:

"Mais importante que o empenamento restringido é a deformabilidade transversal que predomina no comportamento das seções fechadas."

Ressalta-se que os momentos de flexão da parede no plano transversal são importantíssimos ao problema pois, surgem da variação das tensões de cisalhamento no comprimento (fato que ocorre devido a carregamento distribuído) e da deformabilidade da seção em seu plano. Para estes momentos, a inclusão dos diafragmas só tende a diminuir seus efeitos. Nos trabalhos de Kristek, este fato é comprovado.

#### 5.4 - Exemplo Numérico 3 - Problema de Vlassov

Continua-se analisando a seção fechada e mostra-se o aparecimento dos momentos de flexão das paredes no plano transversal com um carregamento distribuído que provoca flexão e torção. A seção transversal é mostrada na figura 5.23.



A barra é simplesmente apoiada com diafragmas extremos que mantêm a seção rígida em seu plano e com giro impedido na extremidade. O empenamento não é restringido e para o sistema de equações não ficar singular, um dos nós de uma das extremidades teve o deslocamento na direção  $z$  (direção que coincide com o comprimento da barra) restringido. O módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ) foi de  $2,0 \text{ kgf/m}^2$ , o módulo de elasticidade transversal ( $G$ ) de  $1,0 \text{ kgf/m}^2$  e o coeficiente de Poisson foi zero.

Para a discretização foram utilizados 76 nós no contorno (incluindo as arestas), 28 elementos por macro-elemento. A superfície lateral da barra seccionada em uma aresta é mostrada na figura 5.24 com a discretização utilizada.

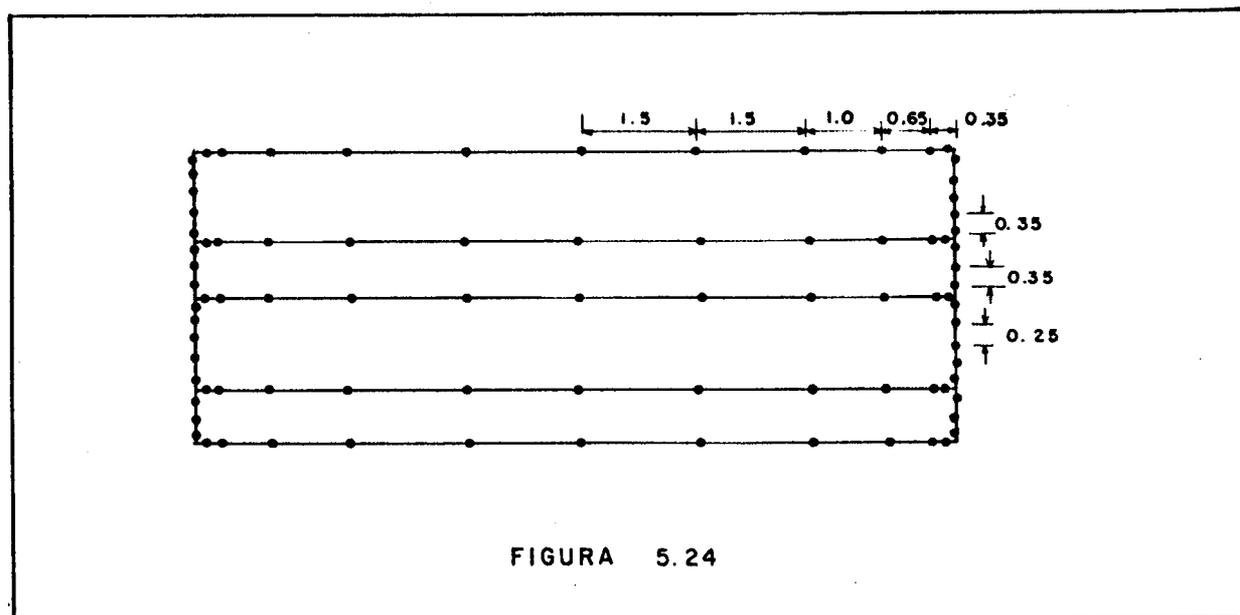


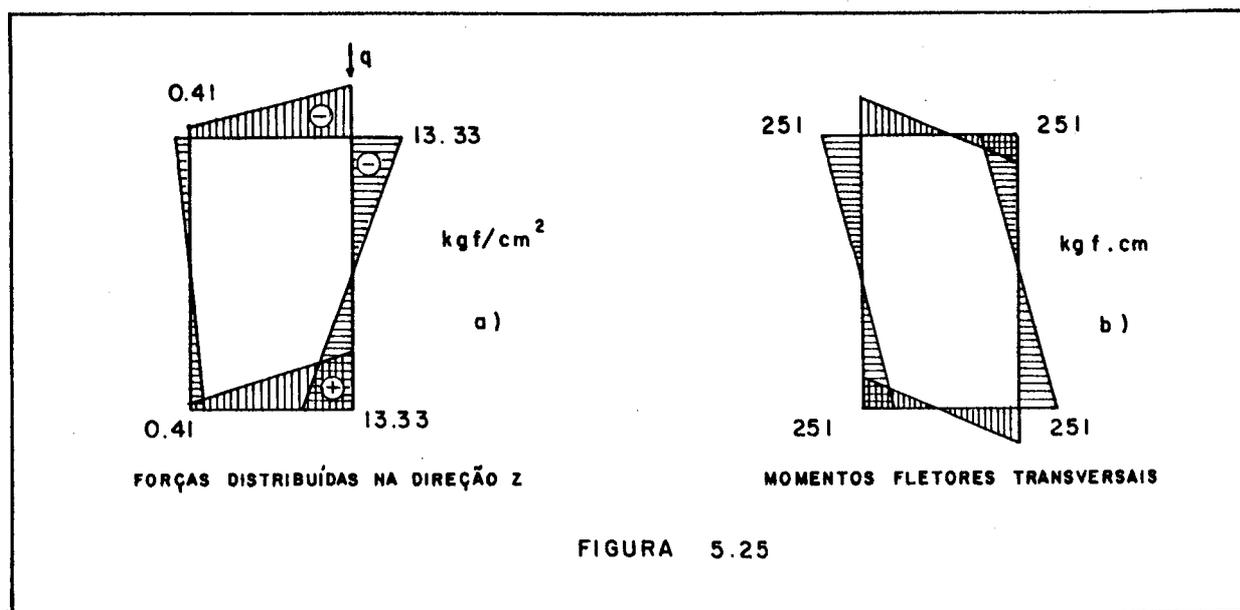
FIGURA 5.24

As tensões normais (direção  $z$ ) no centro do vão e o diagrama de momentos fletores transversais, nesta seção, são mostrados na figura 5.25, onde as tensões normais estão na parte a e os momentos fletores transversais na parte b.

Para as tensões normais, Vlassov [3] obtém  $13,43$  e  $0,27 \text{ kgf/cm}^2$  para o maior e menor valor, respectivamente; Mikkola [17] obtém  $13,64$  e  $0,071 \text{ kgf/cm}^2$  numa análise segundo a formulação de Vlassov num programa de elementos finitos e portanto, próximos dos valores obtidos.

Para os momentos fletores transversais, deve-se observar que, no macro-elemento de menor espessura, eles produzem tensões transversais máximas de  $15,1 \text{ kgf/cm}^2$  que é da ordem de grande-

za da máxima tensão normal ( $13,33\text{kg/cm}^2$ ).

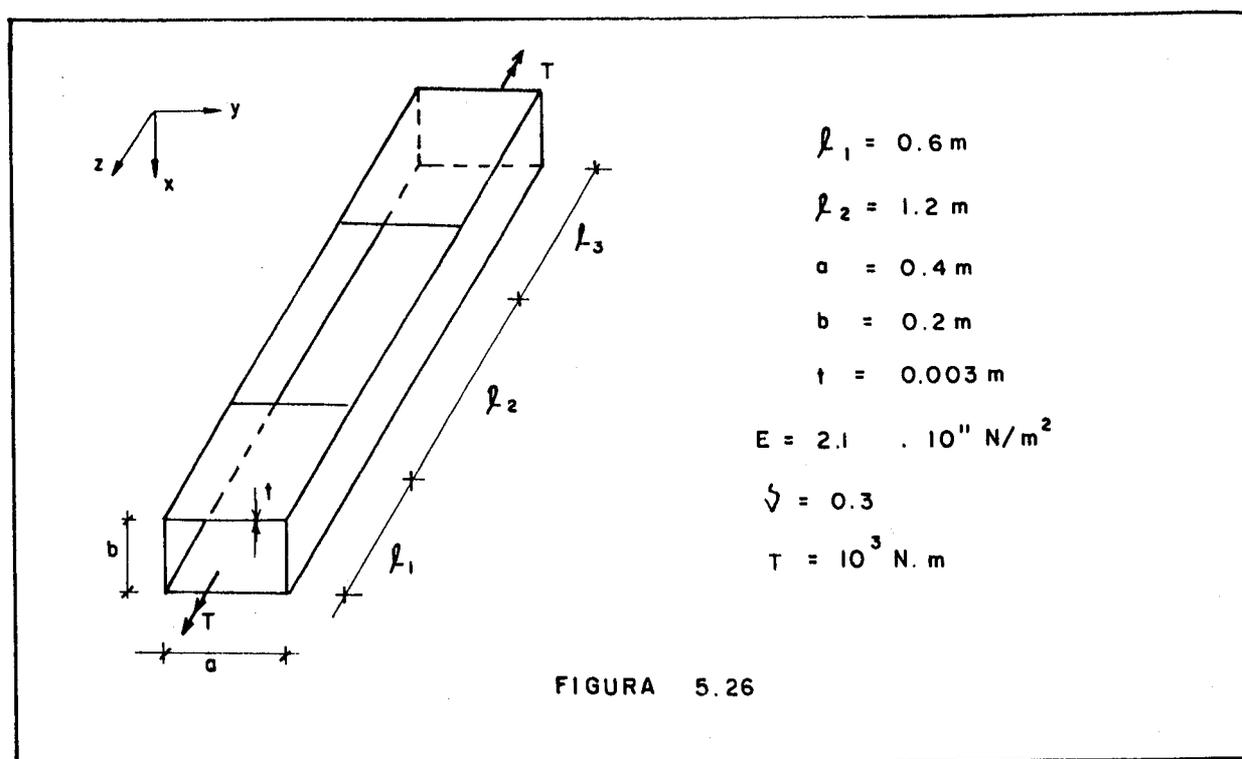


Assim, pode-se mostrar a importância dos momentos fletores transversais.

### 5.5 - Exemplo Numérico 4 - Seção não Constante no Comprimento

Este exemplo, inicialmente tratado em [28] e depois em [29], faz a análise de uma barra com seção não constante ou seja, trecho da barra com seção fechada antecede e depois sucede um trecho com seção aberta.

Como mostra a figura 5.26, a barra tem 2,4m de comprimento com trechos fechados de 0,6m e aberto de 1,2m: a seção transversal tem paredes com largura de 0,4 e 0,2m para uma espessura de 0,003m. O módulo de elasticidade longitudinal é  $2,1 \cdot 10^{11} \text{N/m}^2$  com o coeficiente de Poisson 0,3. A torção aplicada nas extremidades é de  $10^3 \text{N.m}$ . Além destes dados, com o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson, através da expressão (3.9), foi encontrado o módulo de elasticidade transversal de  $0,8076923 \cdot 10^{11} \text{N/m}^2$  e que foi utilizado.



Os artigos [28] e [29] não mencionam diafragmas, como também não detalham a forma de aplicação da carga torçora. Vlasov resolve um problema semelhante mas com a teoria de seções abertas. Para resolver este problema, foram feitas tentativas e listadas a seguir.

Considerando a aplicação do esforço concentrado através de distribuição de tensões na extremidade, dos seguintes tipos:

- Usando a distribuição de uma seção fechada retangular.
- Usando a distribuição de uma seção aberta tipo U e, neste caso a parede da seção fechada que sofre descontinuidade ao longo do comprimento teve tensões nulas ou seja, o problema resolvido é de uma seção U com chapas de extremidade que fecham a seção.

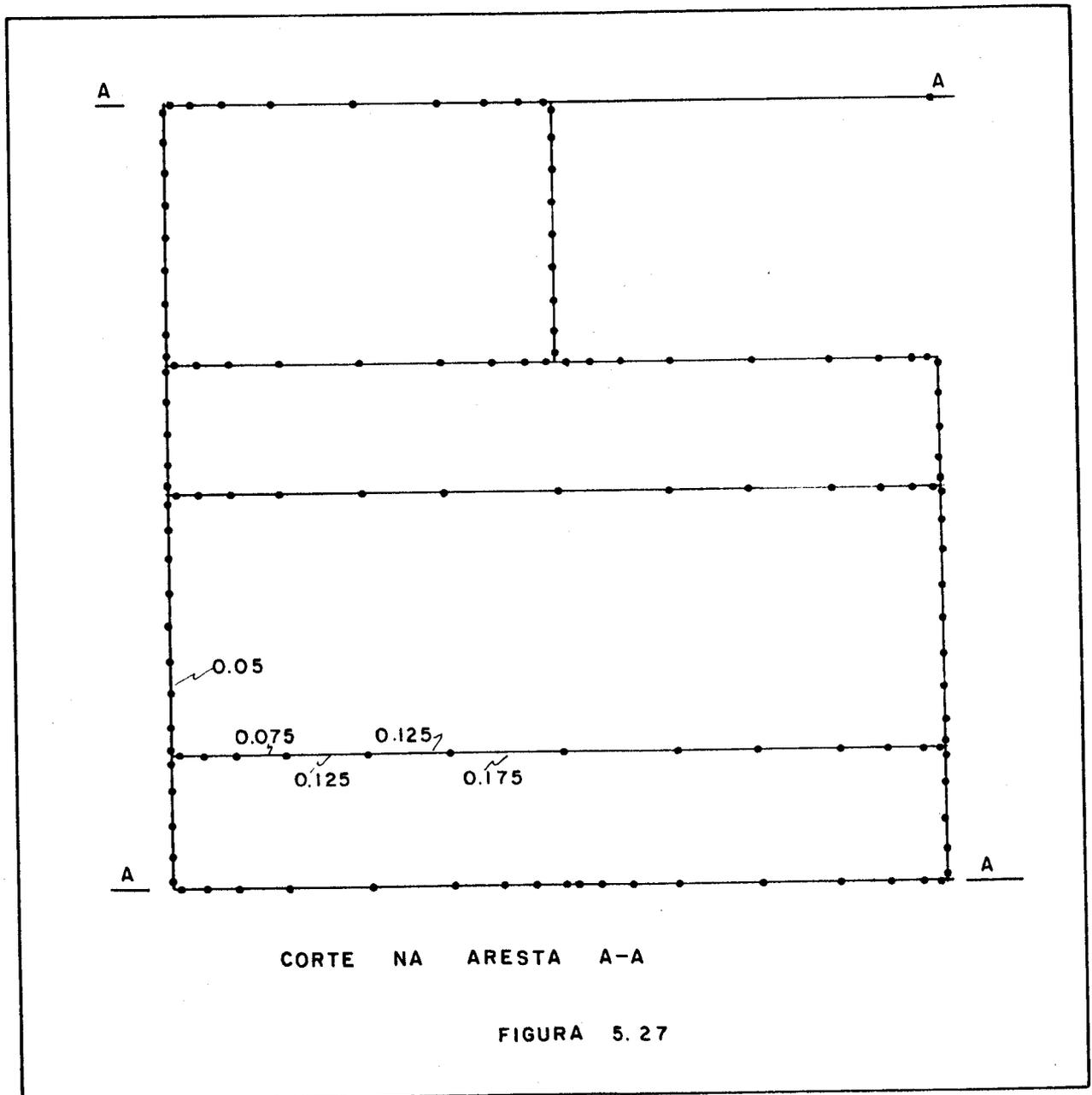
Em ambos os casos a forte deformabilidade da seção ficou evidenciada e os resultados muito discrepantes.

Assim, a aplicação de esforços concentrados na barra sem a utilização de diafragmas, mesmo com distribuição de forças da Mecânica dos Materiais, não conduziu a bons resultados.

Neste problema, pelos dados e ausência de informações, o que se resolveu em [28] e [29] foi, realmente, um problema

considerando metade da barra.

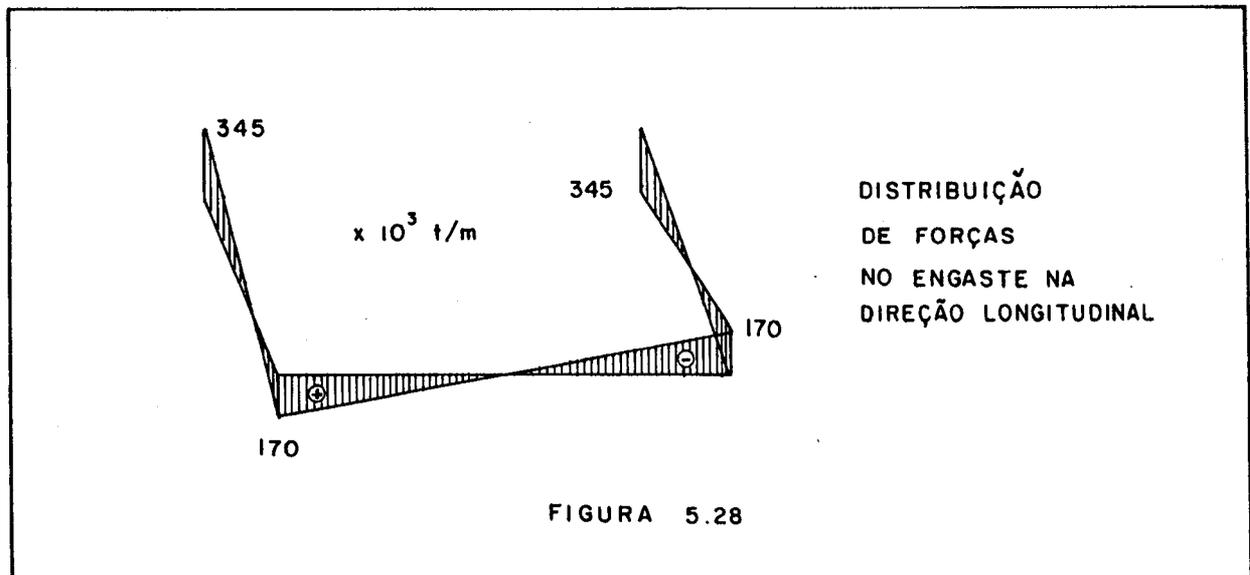
Assim, foram utilizadas considerações de simetria para a solução, como em [28] e [29], cujos modelos matemáticos são mais simples e estão mais próximos da análise de barra do que da de cascas (ver capítulo 2). Assim procedendo-se, trabalhou-se com meia barra e a discretização é mostrada na figura 5.27.



Para a discretização desta metade da barra, utilizam-se 120 nós no contorno, incluindo as arestas, (com 32, 36, 40 e 36 elementos por macro-elemento), e portanto, proporcionalmente comparando, equivale ao dobro da discretização usada para a barra inteira. Engastou-se a extremidade desta meia barra que correspon-

de a seção central da barra inteira. Assim, no engaste são impedidos deslocamentos de todos os nós nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , o que está de acordo com a simetria. O carregamento foi aplicado através de um diafragma na extremidade livre e permitindo o empenamento. Obteve-se um giro de  $8,392 \cdot 10^{-3} \text{rad}$  e o deslocamento na direção  $y$  de  $1,5 \cdot 10^{-3} \text{m}$  na extremidade livre. Em [28] e [29], o melhor resultado conseguido foi um giro de  $6 \cdot 10^{-3} \text{rad}$  na extremidade livre e nada aparece sobre o deslocamento de flexão. Ainda nesta bibliografia, apresenta-se um resultado referente a uma discretização com elementos finitos tipo estado plano de tensão com 768 nós e 720 elementos (metade da barra), onde o giro obtido foi de  $2 \cdot 10^{-3} \text{rad}$ .

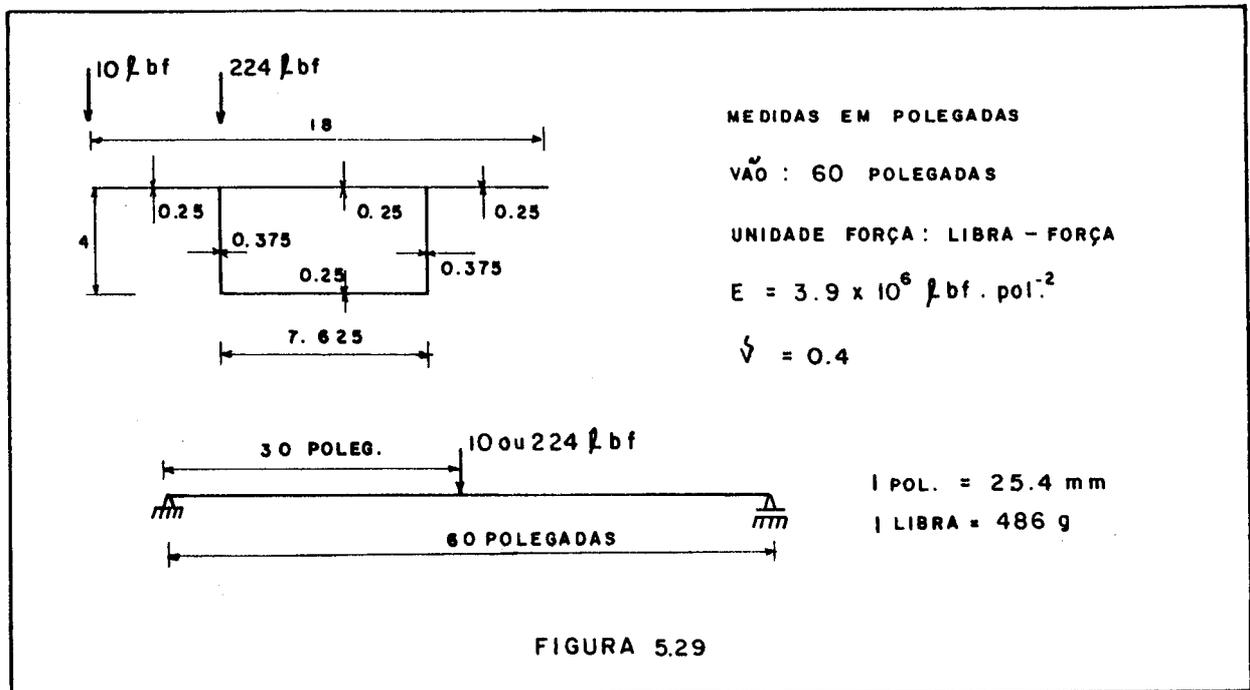
Na região engastada o diagrama de tensões normais obtido é mostrado na figura 5.28, onde nota-se a existência de um bimomento. Da integração das tensões cisalhantes no engaste obteve-se um momento torçor 0,1% inferior ao esperado de 1.000tm.



Atribui-se a diferença entre os resultados da bibliografia (incluindo o de elementos finitos) a utilização de modelos matemáticos que não levam em conta a deformabilidade da seção. Mesmo nos elementos finitos não se leva em conta a flexão da parede pois utiliza-se o estado plano de tensão apenas.

### 5.6 - Exemplo Numérico 5 - Seção caixão com balanços

Será analisada uma barra simplesmente apoiada (garfos), com seção caixão possuindo mesas laterais em balanço como mostra a figura 5.29. Como se pode notar nesta figura, as dimensões indicam tratar-se de uma barra de um modelo experimental.



O carregamento constou de uma carga concentrada aplicada no centro do vão. O primeiro valor foi de 10 libras-forças na extremidade da mesa em balanço e a segunda foi de 224 lbf sobre a alma, conforme mostra a figura 5.29. A partir do módulo de elasticidade longitudinal ( $3,9 \times 10^6 \text{ lbf} \cdot \text{pol}^{-2}$ ) e do coeficiente de Poisson (0,4), com a expressão (3.9), obteve-se o módulo de elasticidade transversal de  $1392857,143 \text{ lbf} \cdot \text{pol}^{-2}$  que foi utilizado no cálculo. Os apoios consistiram de diafragmas rígidos aplicados às extremidades que mantiveram a seção rígida em seu plano. Para a discretização, foram utilizados 142 nós de contorno (incluindo as arestas), com 6 macro-elementos contendo 208 elementos de contorno (44, 38, 32, 34, 32 e 28 elementos de contorno por macro-elemento). Os 6 macro-elementos são mostrados na figura 5.31 e a discretização na figura 5.30.

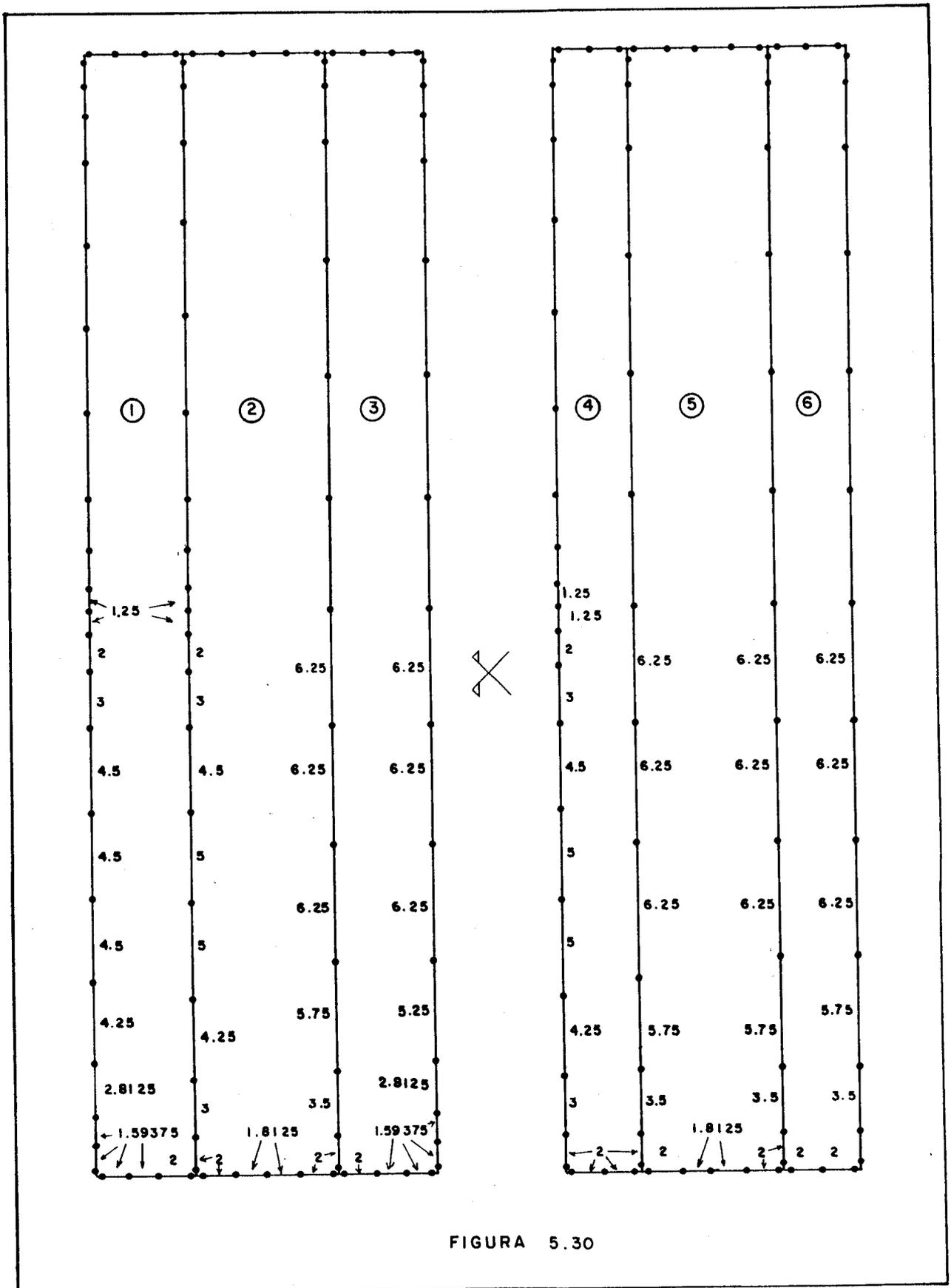


FIGURA 5.30

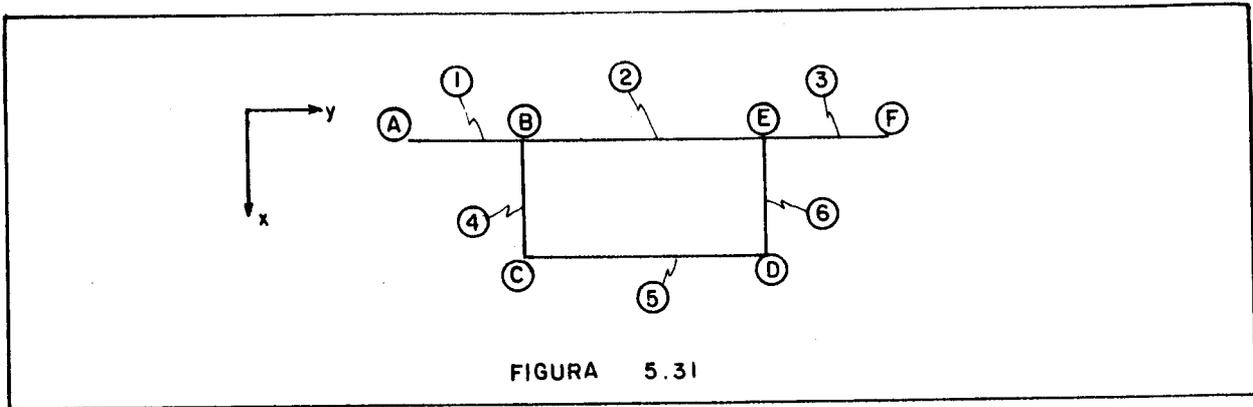


FIGURA 5.31

Tendo este exemplo sido analisado em vários trabalhos, utilizam-se as respostas obtidas que são apresentadas em [17] junto aos resultados deste trabalho para este exemplo.

Para os deslocamentos obtidos, em [17] os valores são apresentados através de curvas obtidas dos resultados. Aqui, será utilizada uma tabela com os valores obtidos nos pontos mostrados na figura 5.31.

- a) Para a carga de 224 lbf, os deslocamentos na direção x, estão mostrados na tabela 5.1, onde M.E.C. é Método dos Elementos de Contorno e M.E.F. é Método dos Elementos Finitos

PONTO	M.E.C. $\times 10^{-1}$ pol	M.E.F. [17]
A	0,1519	0,110
B	0,1480	0,113
C	0,1539	-
D	0,100	-
E	0,1000	0,068
F	0,1120	0,076

TABELA 5.1

b) Para a carga de 10 $\times$ bf, os deslocamentos na direção x, estão mostrados na tabela 5.2

PONTO	M.E.C. $\times 10^{-1}$ pol	M.E.F. [17]
A	0,0968	0,113
B	0,0064	0,005
C	0,0068	-
D	0,0049	-
E	0,0049	0,003
F	0,0051	0,004

TABELA 5.2

Em [17] também são apresentados resultados experimentais para o problema mas, através de curvas e não tendo valores numéricos nos pontos. Nestes pontos, observa-se que os valores experimentais:

- a) Para a carga de 224 $\times$ bf, são maiores que os obtidos em [17]. A extrapolação dos valores experimentais, a partir dos resultados de [17], mostra estes valores próximos dos obtidos neste trabalho.
- b) Para a carga de 10 $\times$ bf, os valores experimentais são menores que os de [17] e portanto, inferiores a este trabalho.

A seguir, apresentam-se as tensões normais, no meio do vão, que ocorrem na seção transversal devido à flexão das paredes no plano da seção (ver tabelas 5.3 e 5.4). Para a referência dos locais de ocorrência destas tensões são adicionados junto as letras (B, C, D, E) da figura 5.31, os índices a, s, i e b que referem-se à região da alma e as regiões da mesa superior, inferior e balanço, respectivamente.

a) Tabela 5.3 - Carga de 224 $\mu$ bf

PONTO	OBTIDO $\mu$ bf. $\text{pol}^{-2}$	[17] $\mu$ bf. $\text{pol}^{-2}$
B/b	-614,0	-101,7
B/s	-569,4	-482,5
B/a	-148,4	-287,6
C/a	+174,3	+287,6
C/i	+392,1	+576,5
D/i	-386,4	-285,5
D/a	-171,7	- 66,9
E/s	+382,1	+294,0
E/b	+2,28	- 49,0
E/a	170,9	+ 66,9

b) Tabela 5.4 - Carga de 10 $\mu$ bf

PONTO	OBTIDO $\mu$ bf. $\text{pol}^{-2}$	[17] $\mu$ bf. $\text{pol}^{-2}$
B/b	+497,3	+587,0
B/s	+111,8	+ 80,3
B/a	-171,1	N.D.
C/a	+ 11,1	+ 5,21
C/i	+ 25,0	+ 11,2
D/i	- 10,1	- 14,8
D/a	- 4,5	- 6,5
E/s	- 16,3	- 37,7
E/b	- 1,0	- 7,3
E/a	- 7,0	N.D.

onde N.D.  $\bar{e}$  n $\bar{a}$ o dispon $\bar{i}$ vel.

Segundo [17], as tens $\bar{o}$ es normais obtidas pertenciam  $\bar{a}$  face externa da se $\bar{c}$ ao transversal mas, n $\bar{a}$ o havia refer $\bar{e}$ ncia sobre as tens $\bar{o}$ es externas nas paredes em balan $\bar{c}$ o. Nos resultados obtidos neste trabalho, tamb $\bar{e}$ m encontraram-se as tens $\bar{o}$ es nas faces externas e na face superior das paredes do balan $\bar{c}$ o.

Cumpre observar que estes resultados de tens $\bar{o}$ es normais (tabelas 5.3 e 5.4) s $\bar{a}$ o apresentados em [17] de modo pouco cla

ro. As tensões são apresentadas através de diagramas na seção transversal, em cujas cotas misturam-se valores. Quanto aos valores da solução experimental, sō existem em alguns locais.

A conclusão que se pode tirar da comparação dos resultados nas tabelas 5.3 e 5.4 ē que os resultados obtidos neste trabalho levam a tensões maiores, principalmente nas arestas onde existem balanços. Deve-se observar que a teoria utilizada em [17] ē a de Vlassov, que ē uma simplificação da teoria utilizada neste trabalho.

Apresenta-se na tabela 5.5 os resultados das tensões normais longitudinais que ocorrem no centro do vāo para a carga de 224&bf.

PONTO	OBTIDO	[17]
A	-3087,0	-145,9
B	- 609,5	-326,5
C	+ 418,8	+543,2
D	+ 214,0	+ 96,5
E	+ 161,0	-126,7
F	+ 135,8	- 94,4

TABELA 5.5

Analogamente às tensões transversais, as tensões longitudinais obtidas neste trabalho são maiores que aquelas em [17].

## 6 - PROGRAMA PARA ANÁLISE DE BARRAS COM PAREDE FINA

### 6.1 - Introdução

O programa desenvolvido foi codificado em linguagem FORTRAN (nível de linguagem 77) tendo as variáveis reais com 8 bytes e as inteiras com 4 bytes de precisão. Todas as matrizes envolvidas foram armazenadas em memória central, e apenas os vetores com características de geometria dos elementos de contorno foram colocados em memória auxiliar.

Durante o desenvolvimento do programa, este foi processado tanto em computadores IBM 370/148 e 370/4341, como VAX/785 da Digital. Na fase de resolução de exemplos, também utilizou-se um outro computador, XA/3090 da IBM, com facilidade de processamento vetorial. Pode-se afirmar que exemplos com até 50 nós consumiram baixo tempo de CPU (até 5 minutos) nos computadores VAX ou 370 e o último exemplo (142 nós e 6 macro-elementos) consumiu 2 minutos de CPU no IBM/3090 com processamento vetorial implementado na compilação do programa. Quanto aos tempos de CPU, cumpre observar que dependem muito da utilização do computador ou seja, o número de outros programas processados simultaneamente e o tamanho da página de memória utilizada, dentre outros aspectos, alteram os valores destes tempos. A título de comparação, este programa compilado no IBM/3090 com processamento vetorial implementado foi 6 vezes mais rápido que o mesmo programa compilado neste computador sem processamento vetorial.

Assim, como o objetivo inicial era apenas testar uma formulação de análise estrutural com o método dos elementos de contorno sem nenhuma preocupação adicional dos aspectos computacionais envolvidos, a disponibilidade de computadores com processamento vetorial sugeriu um novo trabalho:

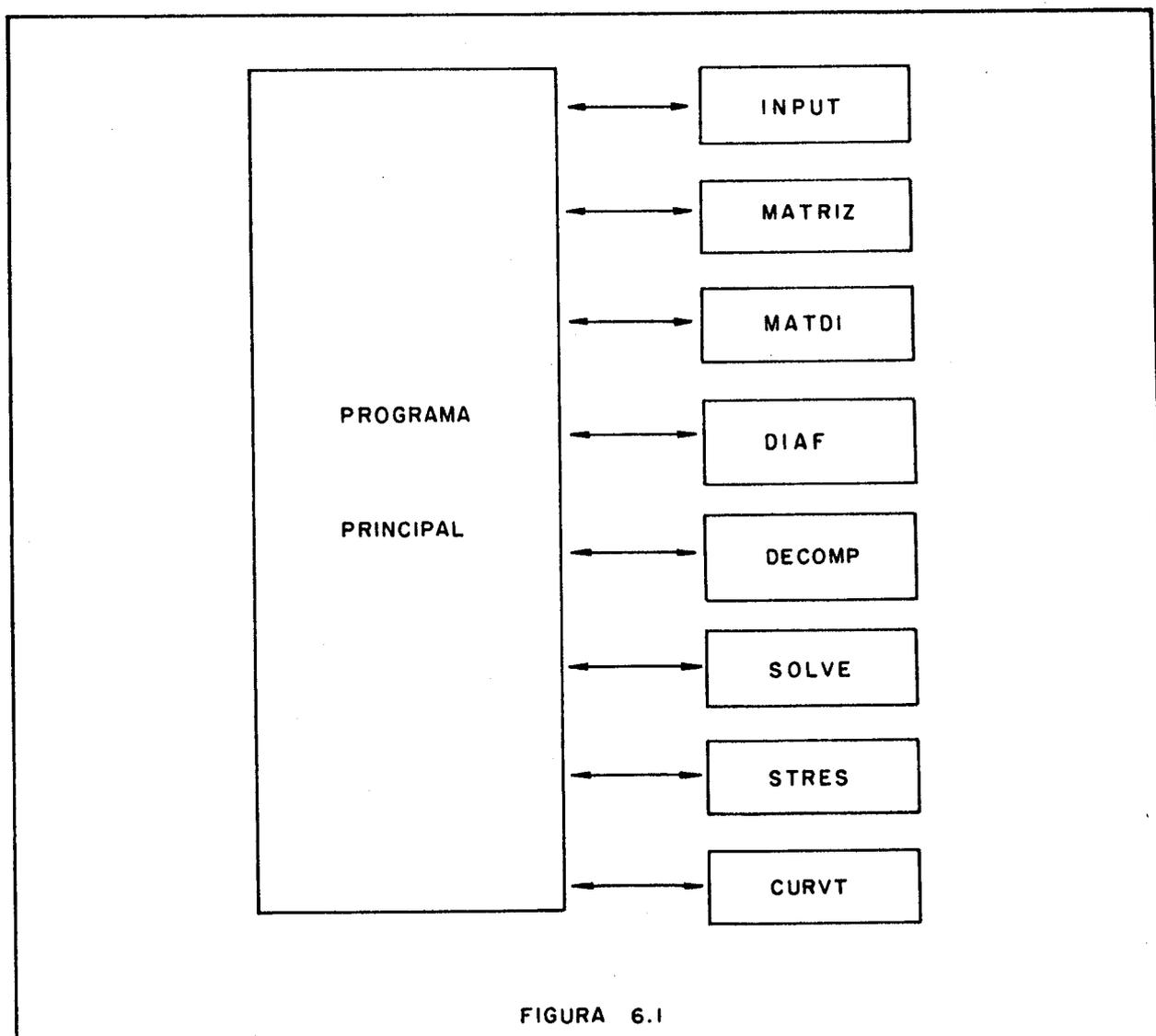
- a) Recodificação do programa com os cuidados necessários para o processamento vetorial, que pode reduzir o tempo de execução ainda mais.
- b) Desenvolvimento de subrotinas para utilização de matrizes armazenadas em blocos reduzindo a memória computacional envolvida. Isto se faz necessário pois, as subrotinas desen-

volvidas em [49] não têm os cuidados necessários para o processamento vetorial.

Com este objetivo, além de uma otimização do programa, pode-se conseguir uma redução do tempo de processamento que, segundo informações de analistas de sistemas, pode chegar a ser 60 vezes menor que em processamento comum.

## 6.2 - Estrutura do programa

O programa desenvolvido tem, além do segmento principal, 19 subrotinas. O relacionamento entre o programa principal e as subrotinas pode ser visto no esquema mostrado na figura 6.1.



Os principais detalhes da estrutura do programa mostrada na figura 6.1, serão resumidos nos itens seguintes.

### 6.3 - Subrotina INPUT

São lidas informações sobre o problema a ser analisado:

- a) Número total de nós do problema, número de macro-elementos e número total de incidências de diafragmas.
- b) Número de nós com carregamento não nulo, módulo de elasticidade longitudinal, módulo de elasticidade transversal, coeficiente de Poisson e balizas que controlam: o tipo de afastamento dos pontos em que se aplicarão as equações integrais (média entre comprimento de elementos consecutivos ou um valor constante), se as reações de canto serão aproximadas por diferenças finitas, se as tensões internas e externas serão calculadas e se as curvaturas internas serão calculadas.
- c) Coordenadas (x, y e z) dos nós da discretização e restrições aos deslocamentos destes nós (x, y, z e a rotação normal ao contorno onde está o nó).
- d) Na existência de diafragmas, as coordenadas do polo do diafragma e se o diafragma é utilizado para aplicação de cargas ou para imposição de deslocamentos (incluindo o deslocamento nulo, caso de apoio fixo), além do tipo do diafragma.
- e) Valor da carga (ou deslocamento), não nula, que está aplicada ao diafragma (ou nó da discretização), sendo acompanhada pelo número de correspondente diafragma (ou nó).

Em seguida, as características de cada macro-elemento são lidas e armazenadas em memória auxiliar. Assim, em cada macro-elemento, são lidos:

- a) Número de nós do contorno, número de pontos internos e orientação do percurso de contorno no plano transversal para a definição dos cossenos diretores do macro-elemento neste plano (Plano xy).

- b) Valor da espessura e das cargas distribuídas. Estas cargas distribuídas tem valor constante na superfície total (domínio) do macro-elemento, podendo atuar nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Número de trecho sem nó duplo, ou seja:

Como os elementos de contorno são sequenciais, na inexistência de nós duplos em um trecho, o nó final de um elemento é o nó inicial do elemento seguinte. Assim, pode-se tirar partido deste fato para a geração da matriz de incidência dos nós em modo automático. A partir da informação do número de trechos sem nó duplo; em cada trecho, é lido o nó inicial e final com o número de elementos de contorno. Deve-se observar que a inclusão do nó final tem a função de verificar a consistência dos dados no trecho.

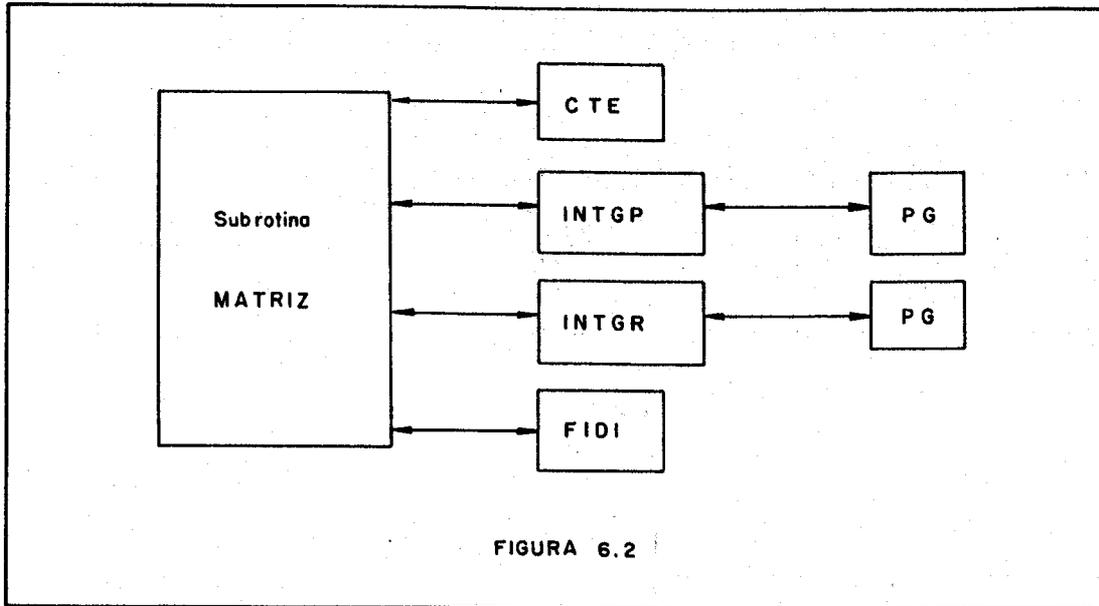
Finalmente, são lidas as coordenadas ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ) dos nós internos e balizas que indicam: se o nó pertence a um diafragma, se devem ser calculadas tensões internas neste nó, se devem ser calculadas as curvaturas e se este nó é um nó duplo de diafragma. Deve-se observar que um macro-elemento não participa de um diafragma interno se não houverem nós internos. Este fato pode ser utilizado na exigência de diafragmas internos parciais (ver capítulo 2).

Nesta subrotina ainda são calculados:

- a) Os cossenos diretores do vetor normal ao contorno para posicionamento do nó externo necessário à segunda equação de placas e ao estado plano de tensão.
- b) Cossenos diretores do elemento de contorno e o seu comprimento.

A matriz de incidência dos nós, vetores com os cossenos diretores do vetor normal ao contorno e do elemento de contorno e os dados são armazenados em memória auxiliar.

#### 6.4 - Subrotina MATRIZ



A subrotina MATRIZ, chamada pelo programa principal, faz uso de outras subrotinas como mostra a figura 6.2.

A subrotina CTE define os valores dos pontos de Gauss (Pesos e coordenadas), da matriz usada para o delta de Kronecker (equação 3.4) e o número  $\pi$ .

As subrotinas INTGP e INTGR realizam as integrações no elemento de contorno, onde INTGP é utilizada para n<sup>o</sup> situado no contorno e INTGR para n<sup>o</sup> externo ao contorno, onde a integração é sempre numérica.

A subrotina PG define o número de pontos de Gauss da integração numérica (ver item 4.9) pois, a integração numérica é feita de modo seletivo.

Quando as reações de canto são aproximadas por diferenças finitas, a subrotina FIDI calcula os coeficientes da rotação ( $\theta_n$ ) (ver expressão 4.51).

Assim, a subrotina MATRIZ monta as matrizes e o sistema (H e G) com as subrotinas INTGP, INTGR e FIDI. Para este fim, os n<sup>os</sup>, onde são escritas as equações integrais, podem situar-se ou no contorno ou no exterior do macro-elemento ou no interior do macro-elemento (ver equações 4.49 e 4.52). Deve-se observar que os pontos internos somente são incluídos na existência de diafragmas

internos. Este procedimento foi feito visando a organização em blocos do sistema de equações.

Em seguida, são impostas as condições de compatibilidade aos macro-elementos (ver equações 4.56 e 4.57). Neste ponto, uma observação é necessária:

Nos trabalhos consultados de organização em blocos dos sistemas de equações [49] [51], não foram feitos estudos se o alojamento num mesmo bloco da matriz H de coeficientes que multiplicam deslocamentos e forças produz instabilidade numérica. Este fato ocorre não só na troca de colunas entre deslocamentos conhecidos e forças incôgnitas no contorno mas, também na compatibilização entre macro-elementos (ver equação 4.62).

Neste trabalho, num mesmo bloco não foram partilhados coeficientes de deslocamentos com os das forças relacionadas a compatibilização dos macro-elementos. A existência de deslocamentos e forças no mesmo bloco só ocorreu na troca de colunas entre deslocamentos conhecidos e forças incôgnitas no contorno. Assim, a montagem das matrizes H e G foi uma generalização da equação (4.62), onde (4.65) é um exemplo. Deve-se observar que esta organização conduziu a um fato, a separação da matriz H em dois blocos de coeficientes, onde um bloco multiplica deslocamentos e outro bloco multiplica forças, pelo menos em modo predominante.

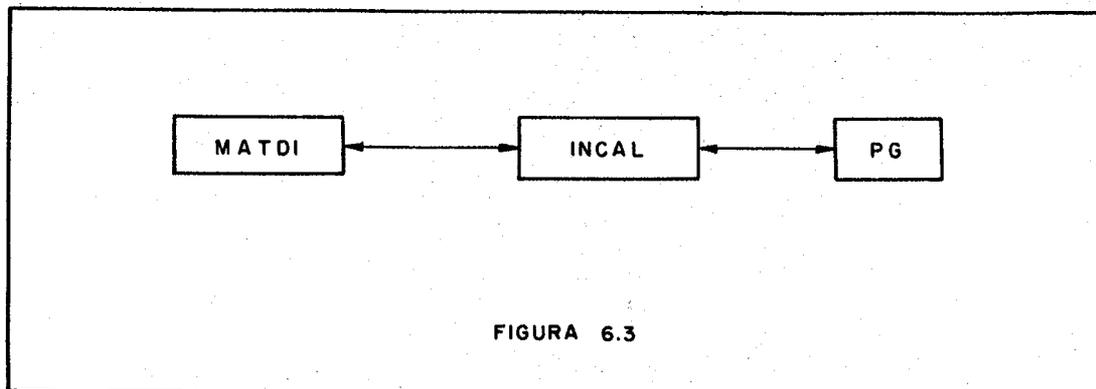
Assim, na montagem de um novo sistema de resolução por blocos para processamento vetorial, pode-se estudar a organização dos coeficientes da matriz H em blocos para minimizar a instabilidade numérica.

Após a compatibilização entre macro-elementos, é feita a troca de colunas entre deslocamentos conhecidos e forças incôgnitas (ver equação 4.61).

Finalmente, a existência de cargas distribuídas leva a montagem simultânea do vetor independente (V, ítem 4.11) com as matrizes H e G, onde as integrações numéricas necessárias são feitas nas subrotinas INTGP e INGR.

### 6.5 - Subrotinas MATDI e DIAF

Estas subrotinas complementam a subrotina MATRIZ na existência de diafragmas internos ou externos. A subrotina MATDI faz uso de outras subrotinas como mostra a figura 6.3.



A função da subrotina MATDI é complementar a subrotina MATRIZ, na montagem da matriz G, quando existem diafragmas internos. Conforme foi mostrado no item 4.82, a inclusão do efeito do diafragma exige a colocação de uma linha de forças internas ao macro-elemento, deste fato surgem as matrizes  $G_{ej}$  e  $G_{ji}$  da equação (4.80). Assim, a subrotina MATDI monta as matrizes  $G_{ej}$  e  $G_{ji}$  e as coloca na matriz H pois, as forças associadas aos nós internos serão incôgnitas, como mostrado no item 4.8.2. Para este fim, a subrotina MATDI faz uso da subrotina INCAL que realiza as integrações numéricas ou analíticas adequadas a cada macro-elemento. Pelo motivo das integrações numéricas serem feitas por um processo seletivo do número de pontos de Gauss, a subrotina PG define o número de pontos utilizados.

A subrotina DIAF introduz as equações adicionais dos diafragmas, (4.68) a (4.70) ou (4.72) a (4.74), bem como as equações que relacionam os deslocamentos dos nós pertencentes ao diafragma, (4.66) e (4.67) ou (4.71). Portanto, ela atua no sistema de equações com as matrizes H e G montadas, com todas as integrações numéricas ou analíticas feitas em todos os elementos de contorno como na linha de cargas dos diafragmas internos (se existirem). Na inclusão das equações adicionais dos diafragmas, é feito o uso das expressões (4.77) e (4.78). Assim, ela se aplica tanto a diafragmas internos como externos. No caso de diafragmas internos,

quando os dois tipos de diafragmas não atuam no mesmo plano, as equações que tornam o sistema de equações singular são eliminadas (ver item 4.8.2).

Após a inclusão das equações de todos os diafragmas do problema, trocam-se as colunas entre as matrizes H e G dos deslocamentos conhecidos do diafragma, analogamente ao procedido para os nós como foi feito na subrotina MATRIZ.

Finalmente, deve-se observar que montado o sistema de equações com as matrizes H e G para todos os diafragmas internos, a retirada de um diafragma interno pode ser feita com a eliminação de linhas e colunas nas matrizes H e G referentes aos nós internos deste diafragma, sem a necessidade de uma nova montagem das matrizes H e G.

#### 6.6 - Subrotinas DECOMP e SOLVE

São subrotinas convencionais de solução de sistemas de equações para matrizes não simétricas. Em análise numérica, o método de solução é chamado de LU devido ao modo de decomposição da matriz para posterior solução. Neste programa, este método de solução utilizou pivotamento parcial. Não foram providos cuidados adicionais para solução de sistema de equações com determinante próximo de zero e nem eliminação de operações em blocos de zero, de acordo com os objetivos deste trabalho mostrados na introdução deste capítulo.

Assim, acredita-se em considerável redução do tempo de execução do programa fazendo-se um tratamento em blocos das matrizes H e G com os cuidados para processamento vetorial.

#### 6.7 - Subrotinas STRES e CURVT

Estas subrotinas de processamento posterior à solução do sistema de equações tem a função de calcular tensões (STRES) e curvaturas internas (CURVT).

A subrotina STRES relaciona-se com outras subrotinas como mostra a figura 6.4.

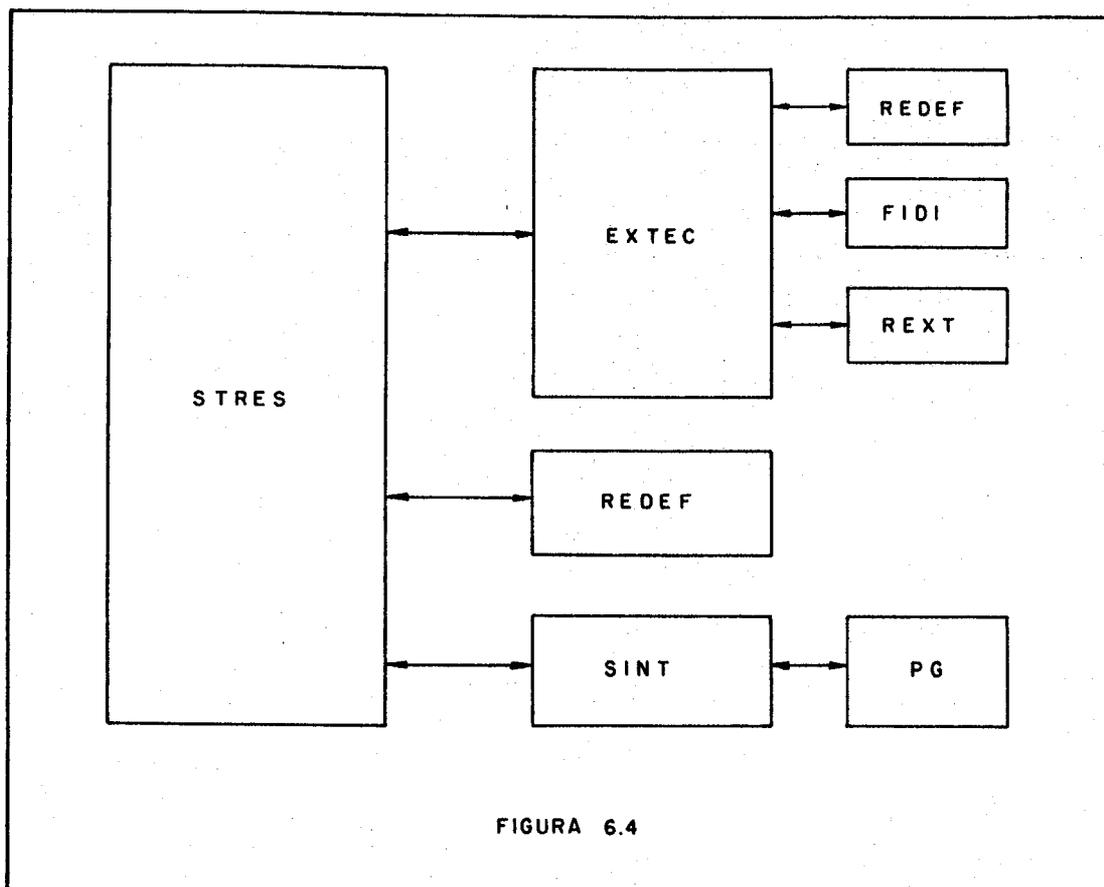


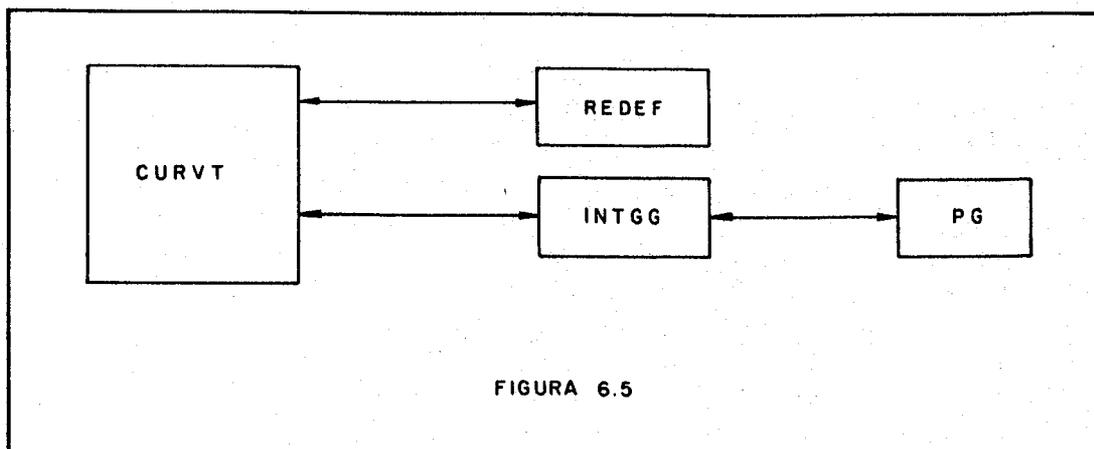
FIGURA 6.4

A subrotina EXTEC calcula tensões externas através de diferenças finitas, ver expressões (4.99) e (4.100), com os coeficientes calculados na subrotina FIDI. As outras tensões externas, expressões (4.97) e (4.98), são calculadas na subrotina REXT.

Para o cálculo das tensões nos pontos internos, a subrotina STRES faz uso da subrotina SINT. A subrotina SINT, que executa as integrações numéricas necessárias (ver item 4.10.1), tem o número de pontos de Gauss da integração seletiva definido na subrotina PG.

A subrotina REDEF, que é usada tanto na subrotina STRES como em CURVT, define as forças nos nós dos macro-elementos. Este procedimento se faz necessário pois, em nós pertencentes a uma interface devem ser tomadas as reações na interface e não a força atuando no nó da interface (ver item 4.10.1).

A subrotina CURVT, que calcula as curvaturas nos pontos internos, relaciona-se com outras subrotinas de acordo com a figura 6.5.



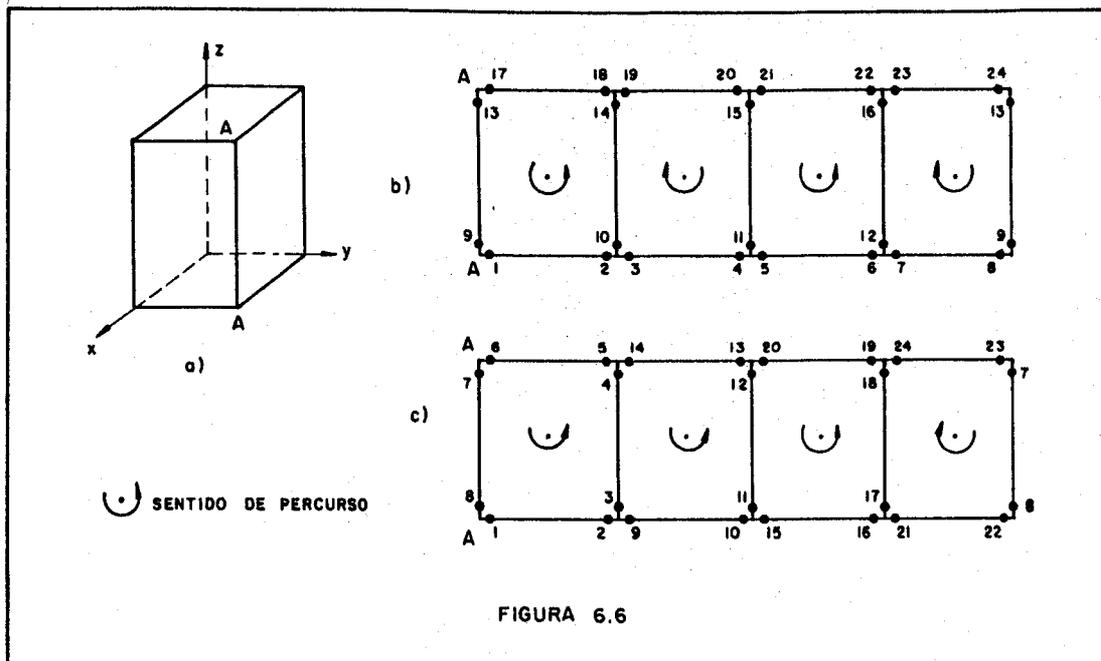
A subrotina CURVT faz uso da subrotina REDEF para definição das reações em nós da interface. As integrações numéricas necessárias são feitas na subrotina INTGG de acordo com o número de pontos de Gauss definidos na subrotina PG.

De acordo com o Ítem 4.10, nas subrotinas STRES e CURVT é feita a composição de forças do estado tridimensional para obtenção das forças adequadas tanto ao cálculo de tensões como ao cálculo de curvaturas.

### 6.8 - Aspectos Gerais

Apesar de não se ter trabalhado com matrizes organizadas em blocos, pode-se observar que a numeração dos nós influi na organização dos blocos de zero. Assim, para a organização em blocos do sistema de equações, deve-se ter em conta o seguinte fato:

A figura 6.6.a mostra a barra, que foi seccionada na aresta A-A, com dois tipos de numeração de nós (figuras 6.6.b e 6.6.c). Como a montagem da matriz é por sub-região (macro-elemento), a numeração na figura 6.1.c favorece o agrupamento de blocos de zero e cujo aspecto final é semelhante às matrizes mostradas nas equações (4.62) e (4.65). Assim, recomenda-se a numeração dos nós por macro-elemento (figura 6.6.c) que otimizará o armazenamento da matriz em blocos não nulos e blocos nulos.



A sequência de percurso em cada macro-elemento, para a definição dos elementos de contorno, deve ser única mas, o sentido de percurso nos macro-elementos adjacentes não precisa ser o mesmo (figura 6.6.b). Entretanto, neste trabalho, utilizou-se a disposição da figura 6.6.c nos exemplos numéricos, sempre que foi possível.

Além destes cuidados, um outro detalhe deve ser lembrado:

A análise dimensional das soluções fundamentais do estado plano de tensão e da flexão de placas mostra que:

- a) No estado plano de tensões a dimensão do módulo  $G$  é unidade de força por comprimento.
- b) Na flexão de placas a dimensão do módulo  $E$  é unidade de forças pelo quadrado do comprimento.

Sabendo-se que a grandeza  $G$  relaciona-se com  $E$  por:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

A grandeza  $G$  que  $\bar{e}$  utilizada nas expressões do estado plano de tensões, de cada macro-elemento,  $\bar{e}$  multiplicada pela espessura deste macro-elemento. Desta forma, evita-se ao usuário o trabalho de relacionamento entre unidades.

A listagem do programa não foi incluída mas, pode ser fornecida aos interessados mediante contato com o autor.

## 7 - INSTABILIDADE DE PLACAS

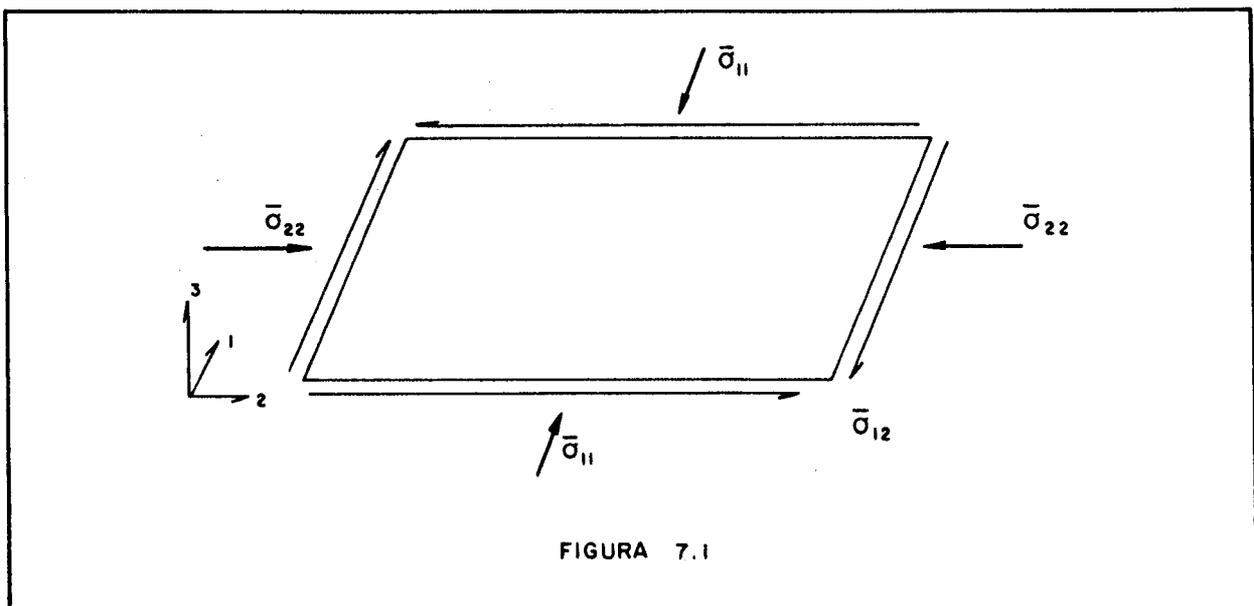
### 7.1 - Introdução

Para a inclusão dos efeitos de não-linearidade geométrica do problema de chapas comprimidas, faz-se uso das equações de Von Karmann. Analogamente ao problema de flambagem de barras por flexão, forças atuando no plano da chapa produzirão deslocamentos de flexão somente em valores determinados, chamados de valores críticos. A ocorrência deste fato vem do equilíbrio da chapa ser feito na posição deslocada, que resulta no acoplamento dos efeitos do estado plano de tensões com o da flexão de placas.

Neste capítulo, deixam de ser satisfeitas as hipóteses (item 3.2) que se referem ao equilíbrio na posição indeslocada (c) e de cargas no plano da placa produzirem extensões mas não flexão (i).

Apresentam-se, a seguir, as equações integrais do problema de instabilidade de uma chapa e depois as modificações no sistema de equações.

### 7.2 - Equação Integral para o Problema de Instabilidade de Chapas



A equação diferencial, que permite a consideração do efeito da não-linearidade geométrica, é do tipo:

$$D \cdot w_{,ijjj} + \tilde{\sigma}_{ij} w_{,ij} - p_3 = 0 \quad (i, j = 1, 2) \dots (7.1)$$

onde

$p_3$  é a carga transversal ao plano da chapa.

$\tilde{\sigma}_{ij}$  são tensões internas devidas às forças no plano da chapa ( $\tilde{p}_i$ ).

$w_{,ij}$  são curvaturas.

Da equação (7.1) sabe-se que:

- a) Quando as forças  $\tilde{p}_i$  são nulas, resultam tensões  $\tilde{\sigma}_{ij}$  nulas e obtém-se o problema de flexão de placas.
- b) Quando a força  $p_3$  é nula, a equação diferencial é homogênea, obtendo-se o problema de flambagem de chapas. Este problema, também chamado de primeira espécie, tem caráter puramente teórico devido à enorme dificuldade prática em ser reproduzido em laboratório.
- c) Quando a força  $p_3$  é diferente de zero, a equação diferencial é não homogênea. Costuma-se chamar este problema de segunda espécie.

Assim, condições de vinculação ou carregamento, na prática, transformam o problema de chapas carregadas em um problema de segunda espécie.

Os deslocamentos são determinados no problema de segunda espécie e indeterminados no problema de flambagem. Este fato ocorre da aproximação para curvaturas ter sido feita pela segunda derivada da função deslocamento. Portanto, a equação (7.1) vale numa vizinhança da posição indeslocada.

Por outro lado, cargas críticas em mecanismos de grandes deslocamentos não serão tratadas e o regime de análise será elástico linear.

A determinação das equações integrais destes problemas a partir da equação diferencial (7.1) é muito semelhante à determinação da equação integral de placas (4.28), ou seja:

$$\int_{\Omega} (D w_{,ijjj} + \bar{\sigma}_{ij} w_{,ij} - p_3) w^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} (w - \bar{w}) V_n^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\theta_n - \bar{\theta}_n) M_n^* d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Gamma_2} (V_n - \bar{V}_n) w^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (M_n - \bar{M}_n) \theta_n^* d\Gamma \quad \dots\dots(7.2)$$

onde

na porção  $\Gamma_1$  do contorno são conhecidos  $\bar{w}$  e  $\bar{\theta}_n$   
 na porção  $\Gamma_2$  do contorno são conhecidos  $\bar{M}_n$  e  $\bar{V}_n$

O desenvolvimento da equação (7.2) para a equação integral com a não-linearidade geométrica é análogo ao da equação (4.23) para (4.28), obtendo-se:

$$\frac{1}{2} w(\xi) + \int_{\Gamma} [V_n^*(\xi, x) w(x) - M_n^*(\xi, x) \theta_n(x)] d\Gamma(x) + R_{ci}^*(\xi, x_c) w_i(x_c) =$$

$$= \int_{\Gamma} [V_n(x) w^*(\xi, x) - M_n(x) \theta_n^*(\xi, x)] d\Gamma(x) + R_{ci} w_i^*(\xi, x_c) +$$

$$+ \int_{\Omega} [p_3(x) - \bar{\sigma}_{ij}(x) \cdot w_{,ij}(x)] w^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad \dots\dots(7.3)$$

Em [41], a análise de instabilidade proposta resolve-se o problema considerando a influência da compressão na flexão (parcela com  $\bar{\sigma}_{ij}$  na integral do domínio da equação 7.3) como um carregamento externo num processo iterativo. Neste caso, as curvaturas (auto-vetores) obtidas numa iteração são usadas para a seguinte:

O teste desta proposta apresentou alguns inconvenientes, podendo-se citar:

- a) Para integração numérica, no domínio, da parcela com  $\bar{\sigma}_{ij}$  é necessária a definição de pontos internos. Nestes pontos, as curvaturas são calculadas a partir de valores de deslocamen

tos e forças conhecidos no contorno (ver ítem 4.10). Além deste procedimento para o cálculo das curvaturas nos pontos de contorno, a utilização de diferenças finitas, para este fim, exige um grande número de pontos para uma boa precisão de resultados.

- b) A integração numérica exige considerável esforço computacional na generalização, para a inclusão do efeito da flambagem local para as barras analisadas neste trabalho.
- c) Aumento de memória computacional devido à inclusão dos pontos internos.

Estas razões levaram a uma nova forma de tratar o efeito da não-linearidade geométrica. Efetuando-se por partes a integral de domínio com a parcela  $\tilde{\sigma}_{ij}$ , obtêm-se a seguinte relação:

$$\int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \cdot w_{,ij} \cdot w^* \, d\Omega = \int_{\Gamma} (\tilde{p}_i \cdot w_{,i} \cdot w^* - \tilde{p}_j \cdot w \cdot w^*_{,j}) \, d\Gamma + \int_{\Omega} (\tilde{b}_i \cdot w_{,i} \cdot w^* + \tilde{b}_j \cdot w \cdot w^*_{,j}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \cdot w \cdot w^*_{,ij} \, d\Omega$$

(i, j = 1, 2) ..... (7.4)

onde admittiram-se válidas as relações (3.1) e (3.2) para as tensões internas ( $\tilde{\sigma}_{ij}$ ), forças externas ( $\tilde{p}_i$ ) e forças de volume ( $\tilde{b}_i$ ) do problema de instabilidade.

Para a integral de domínio em (7.4) com a parcela ( $\tilde{\sigma}_{ij}$ ), pode-se utilizar a seguinte relação:

$$\tilde{\sigma}_{ij} \cdot w = \tilde{m}_{ij} \quad \text{..... (7.5)}$$

onde  $\tilde{m}_{ij}$  é o complementar de  $m_{ij}$  devido ao efeito da força normal.

Admitindo-se válidas as relações (3.35) que relacionam  $\tilde{m}_{ij}$  com  $\tilde{q}_i$  (complementar de  $q_i$  no problema de instabilidade) e da inexistência de variação de  $\tilde{q}_i$  neste problema, obtêm-se:

$$\int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \cdot w \cdot w_{,ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} (\tilde{M}_n \theta_n^* + M_s \theta_s^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} \tilde{Q} \cdot w^* d\Gamma \dots\dots(7.6)$$

onde  $\tilde{M}_n$ ,  $\tilde{M}_s$  e  $\tilde{Q}$  são os complementares de  $M_n$ ,  $M_s$  e  $Q$  no problema de instabilidade.

Assim, o resultado final para a integral de domínio da equação (7.3) com a parcela  $\tilde{\sigma}_{ij}$  é:

$$\int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \cdot w_{,ij} \cdot w^* d\Omega = \int_{\Gamma} [(\tilde{p}_n \theta_n^* + \tilde{p}_s \theta_s^*) w - \tilde{p}_n \theta_n w^* - \tilde{p}_s \theta_s w^*] d\Gamma + \int_{\Gamma} (\tilde{M}_n \theta_n^* - \tilde{V}_n w^*) d\Gamma - \tilde{R}_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} (\tilde{b}_i \cdot w_{,i} \cdot w^* - \tilde{b}_j \cdot w_{,j}^* \cdot w) d\Omega \dots(7.7)$$

onde  $\tilde{R}_{ci}$  é o complementar de  $R_{ci}$  no problema de instabilidade.

Na expressão (7.7) a integral de contorno com o termo  $\tilde{p}_s \theta_s$  pode ser feita através de uma integração por partes, ou seja:

$$\int_{\Gamma} \tilde{p}_s \theta_s w^* d\Gamma = - [w w^* \tilde{p}_s]_i^f - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{p}_s w^*) w d\Gamma \dots\dots(7.8)$$

onde o termo entre colchetes é diferente de zero na existência de cantos.

### 7.3 - Sistema de Equações

Após a inclusão das expressões apresentadas nas equações (7.7) e (7.8) na equação integral (7.3), utilizando-se para os complementares  $\tilde{M}_n$  e  $\tilde{V}_n$  a mesma aproximação usada para  $M_n$  e  $V_n$  no contorno, e após a aplicação da equação integral (7.3) aos pontos externos e de contorno, chega-se a:

$$(\underline{H} + \lambda \underline{H}') \underline{U} = (\underline{G} + \lambda \underline{G}') \underline{P} + (\underline{V} + \lambda \underline{V}') \dots\dots(7.9)$$

onde

as matrizes  $H'$  e  $G'$  são montadas com as equações (7.7) e (7.8) com um valor unitário da tensão normal.

o vetor  $V'$  é montado para um valor unitário da carga distribuída normal.

$\lambda$  é o auto-valor ou o valor da tensão normal.

Na inexistência de cargas distribuídas ( $\tilde{b}_i$  ou  $\tilde{p}_3$ ) e após a troca de membros entre variáveis incógnitas e conhecidas, chega-se

$$(\underline{A} + \lambda \underline{B}) \underline{X} = \underline{F} \quad \dots\dots(7.10)$$

onde a matriz  $B$  é obtida das matrizes  $H'$  e  $G'$ .

Quando não existem variáveis conhecidas no contorno o vetor  $F$  é nulo e obtém-se um problema de auto-valor, caso contrário, um problema de segunda espécie.

Para a solução do problema de auto-valor, sugere-se a iteração vetorial quando se necessita encontrar apenas alguns auto-valores com seus respectivos auto-vetores. Para matrizes simétricas, o uso da iteração vetorial em [46] levou a bons resultados com reduzido número de iterações. Para matrizes não simétricas, o método é semelhante ao das matrizes simétricas com pequenas modificações [47].

## 8 - CONCLUSÕES

O tratamento das barras de parede fina com os efeitos de flexão e extensão nas paredes foi considerado satisfatório em vista dos resultados apresentados.

Por outro lado, como se mostrou no capítulo 2, pode-se utilizar teorias aproximadas para a análise destas barras mas, deve-se esperar que os resultados obtidos serão limitados. Neste sentido, ou seja o uso de teorias aproximadas, os exemplos resolvidos neste trabalho mostrar-se:

- a) Seções abertas: A obtenção de resultados próximos da teoria convencional de flexo-torção só foi possível com a utilização de diafragmas, que mantiveram a seção rígida em seu plano.
- b) Seções fechadas: Estas barras são fortemente influenciadas pela deformabilidade da seção transversal. Neste caso, o uso de teorias que consideram a seção indeformável em seu plano, como hipótese básica, é perigoso. Se a nível de estimativa, utilizar-se a lei das seções planas para a ordem de grandeza de tensões, justifica-se o procedimento pela simplicidade da teoria envolvida. Entretanto, o uso de teorias que resolvem a seção fechada como uma seção aberta, a partir de cortes fictícios na seção fechada e usando a teoria de flexo-torção na seção aberta, implica num processo de cálculo mais longo e com um resultado não muito melhor que o da lei das seções planas. A justificativa deste fato é que, enquanto o empenamento restringido é crítico para as seções abertas, o que motiva o uso da teoria de flexo-torção, ele passa a ter caráter mais local nas seções fechadas.

Por outro lado, a consideração do efeito de flexão nas paredes com o estado plano de tensão permite a verificação direta da variação do módulo das tensões normais, "shear-lag". Neste caso, o uso de expressões aproximadas para levar em conta o efeito "shear-lag", como a proposta por Reissner, somente é possível em carregamentos distribuídos. Deste fato é que resulta a divergência de opiniões, entre os pesquisadores, sobre o fenômeno "shear-lag":

- a) Aqueles ligados a projeto de estruturas, que fazem uso da expressão de Reissner, somente utilizam o nome "shear-lag" nos casos identificados por esta expressão [11].
- b) Entre aqueles ligados à pesquisa em Mecânica das Estruturas, o nome "shear-lag" é generalizado a todos os casos de variação do módulo da tensão normal em estruturas compostas por chapas.

Neste trabalho, a denominação "shear-lag" foi usada de forma generalizada. Prefere-se esta denominação pois, mesmo em projetos de barras compostas por chapas finas, costuma-se trabalhar com larguras efetivas das paredes para levar em conta a plastificação que ocorre nas arestas, devida à não-uniformidade da tensão normal.

Assim, a consideração do efeito de casca (extensão e flexão) com o uso de diafragmas, nas seções de parede fina, permite uma grande liberdade para a construção de variados modelos matemáticos pois, além dos fatos mostrados, uma eventual ortotropia na seção transversal pode ser levada em conta com diafragmas. Pode-se acrescentar que o uso dos diafragmas também permite uma maior generalidade na aplicação de cargas ou vinculação.

Portanto, no atual estágio do trabalho, não são só exemplos simples como os exemplos 1 e 2 (itens 5.2 e 5.3, respectivamente) que podem ser resolvidos mas também a realização de estudos como:

- a) Influência das dimensões da seção transversal ou comprimento da barra no comportamento estrutural.
- b) Efeitos da colocação de diafragma mas, realmente colocando ou alterando a posição destes elementos em pontos discretos no comprimento da barra.
- c) Comparação dos resultados obtidos em um problema com outros obtidos analiticamente ou experimentalmente, onde houver disponibilidade destes dados.

O objetivo desta análise é fornecer um estudo parametrizado de estruturas de parede fina, à semelhança de Kristek mas, documentando a forma de obter os resultados.

Com respeito a estudos futuros, um exemplo seria a consideração das reações de canto do efeito de flexão. Neste trabalho, desprezaram-se estas reações e foram obtidos resultados satisfatórios. A montagem de um novo programa, análogo ao deste trabalho, que considere o efeito da espessura na flexão de placas, utilizando a teoria de flexão de Reissner-Mindlin, poderá fornecer uma resposta melhor a este fato. Observando-se que placas finas podem ser tratadas em programas de placas espessas com a utilização de integração reduzida, semelhante a [26].

Neste sentido, ou seja o desenvolvimento de estudos complementares, pode-se implementar o trabalho para o tratamento de exemplos reais de barras compostas por chapas. Assim, pode-se incluir:

- a) Efeitos de não linearidade física à semelhança de [48] .
- b) Efeitos de flambagem local, podendo-se utilizar a formulação proposta neste trabalho.

Para o tratamento das pontes de concreto, a grande espessura das paredes sugere uma comparação entre os efeitos de casca fina (este trabalho) e os efeitos de cascas espessas (flexão de placas espessas com estado plano de tensões). Ao melhor tratamento, pode-se incluir os efeitos de protensão, trem tipo e deformação lenta, por exemplo, obtendo-se um programa semelhante a [24]

Quanto ao método numérico utilizado, ou o método dos elementos de contorno, ele constituiu-se numa boa representação das estruturas utilizadas, mesmo com um reduzido número de elementos. Desta forma, a utilização desta técnica, mais recente que o método dos elementos finitos, para uma análise deste tipo, imprime um novo impulso para o tratamento de estruturas laminares com os efeitos de casca (flexão e extensão). Assim, pode-se deixar de lado o desenvolvimento de elementos finitos de casca simplificados para a utilização de elementos de contorno com efeitos de casca gerais, sem um gasto expressivo de memória computacional. Para a implementação do programa no aspecto de tratamento numérico, existe o desenvolvimento do tratamento em blocos para processamento vetorial como uma otimização do processo seletivo de integração numérica. Num sentido mais amplo, pode-se adaptar o conceito de elementos finitos hierárquicos para o método dos elementos de contorno [50],

visando com isto a confecção de programas para utilização em projetos.

## 9 - BIBLIOGRAFIA

- [1] LOVE, A. E. H., **A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity**, Dover Publications, New York, U.S.A., 1944.
- [2] TIMOSHENKO, S. P. & GOODIER, J. N., **Teoria da Elasticidade**, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, Brasil, 1980.
- [3] VLASSOV, B. Z., **Pieces Longues en Voiles Minces**, Editions Eyrolles, Paris, France, 1962.
- [4] KARMAN, T. & CHIEN, W. Z., Torsion with Variable Twist, **Journal of the Aeronautical Sciences**, Vol. 13, nº 10, 1946, pp 503-510.
- [5] WALDRON, P., Sectorial Properties of Straight Thin-Walled Beams, **Computers & Structures**, Vol. 24, nº 1, 1986, pp 147-156.
- [6] YOO, C. H. & ACRA, S. V., Cross-Sectional Properties of Thin-Walled Multi-Cellular Section, **Computers & Structures**, Vol. 22, Nº 1, 1986, pp 53-61.
- [7] MASSONET, C. E., A New Approach (including Shear Lag) to Elementary Mechanics of Materials, **Int. J. Solids & Structures**, Vol. 19, nº 1, 1983, pp 33-54.
- [8] FOUTCH, D. A. & CHANG, P. C., A Shear Lag Anomaly, **Journal of the Structural Division**, Proc. ASCE, Vol. 108, nº 7, 1982, pp 1653-1658.
- [9] DEZI, L. & MENTRASTI, L., Nonuniform Bending Stress Distribution (Shear Lag), **Journal of Structural Engineering**, vol. 111, nº 12, 1985, pp 2675-2690.
- [10] KUZMANOVIC, B. O. & GRAHAM, H. J., Shear Lag in Box Girders, **Journal of the Structural Division**, Proc. ASCE, vol. 107, 1981, pp 1701-1712.

- [11] FAUCHART, J., Discussion of "Shear Lag in Box Girders", **Journal of Structural Engineering**, Vol. 109, n<sup>o</sup> 1, 1983, pp 291-293.
- [12] MOFFATT, K. R. & DAWLING, P. J., British Shear Lag Rules for Composite Girders, **Journal of Structural Division**, vol. 104, n<sup>o</sup> 7, 1978, pp 1123-1130.
- [13] BAKHT, B., JAEGER, L. G. & CHEUNG, M. S., Cellular and Voided Slab Bridges, **Journal of the Structural Division**, Proc. ASCE, vol. 107, n<sup>o</sup> 9, 1981, pp 1797-1813.
- [14] EVANS, H. R. & SHANMUGAM, N. E., Simplified Analysis for Cellular Structures, **Journal of the Structural Engineering**, Vol. 110, n<sup>o</sup> 3, 1984, pp 531-543.
- [15] STEFANOOU, G. D., DRITSOS, S. & BAKAS, G. J., The Effects of Additional Deformations in Box-Beam Bridges on the Longitudinal Stresses and Transverse Moments, **Computers & Structures**, Vol. 16, n<sup>o</sup> 5, 1983, pp 613-628.
- [16] ISHAC, I. I. & SMITH, T. R. G., Approximations for Moments in Box Girders, **Journal of the Structural Engineering**, Vol. 111, n<sup>o</sup> 11, 1985, pp 2333-2342.
- [17] MIKKOLA, M. J. & PAAVOLA, S., Finite Element Analysis of Box Girders, **Journal of the Structural Division**, Proc. ASCE, Vol. 106, N<sup>o</sup> 6, 1980, pp 1343-1356.
- [18] SHUSHKEWICH, K. W., Membrane Forces Acting on a Box Girder Bridge, **Journal of Structural Engineering**, Vol. 112, n<sup>o</sup> 8, 1986, pp 1900-1907.
- [19] IFFLAND, J. S. B., Folded Plate Structures, **Journal of the Structural Division**, Proc. ASCE, Vol. 105, n<sup>o</sup> 1, 1979, pp 111-123.
- [20] BILLINGTON, D. P., **Thin Shell Concrete Structures**, McGraw-Hill Book Company, New York, U.S.A., 1965.

- [21] BAIKOV, V. N., **Reinforced Concrete Structures**, Mir Publishers, Moscow, U.R.S.S., 1974.
- [22] VICTOR, F. H. & ELLYIN, F., Assemblage Method for Folded-Plate Analysis, **Journal of the Structural Division**, Proc. ASCE, Vol. 105, n<sup>o</sup> 7, 1979, pp 1509-1524.
- [23] ZHANG, S. H. & LYONS, L. P. R., A Thin-Walled Box Beam Finite Element for Curved Bridge Analysis, **Computers & Structures**, Vol. 18, n<sup>o</sup> 6, 1984, pp 1035-1046.
- [24] HEINS, C. P. & SHEU, F. H., Design/Analysis of Curved Box Girder Bridges, **Computers & Structures**, Vol. 15, n<sup>o</sup> 3, 1982, pp 241-258.
- [25] ARIZUMI, Y., OSHIRO, T. & HAMADA, S., Finite Strip Analysis of Curved Composite Girders with Incomplete Interaction, **Computer & Structures**, Vol. 15, n<sup>o</sup> 6, 1982, pp 603-612.
- [26] ONATE, E. & SUAREZ, B., A Unified Approach for the Analysis of Bridges, Plates and Axisymmetric Shells Using the Linear Mindlin Strip Element, **Computer & Structures**, vol. 17, n<sup>o</sup> 3, 1983, pp 407-426.
- [27] Meredith, D. & Witmer, E. A., A Nonlinear Theory of General Thin-Walled Beams, **Computers & Structures**, Vol. 13, n<sup>o</sup> 1-3, pp 3-9, 1981.
- [28] GUNNLAUGSSON, G. A. & PEDERSEN, P. T., A Finite Element Formulation for Beams with Thin Walled Cross Sections, **Computers & Structures**, Vol. 15, n<sup>o</sup> 6, pp 691-699, 1982.
- [29] TRALLI, A., A Simple Hybrid Model for Torsion and Flexure of Thin Walled Beams, **Computers & Structures**, Vol. 22, n<sup>o</sup> 4, pp 649-658, 1986.
- [30] KRISTEK, V., Tapered Box Girders of Deformable Cross Section, **Journal of the Structural Division**, Proc. ASCE, Vol. 96, n<sup>o</sup> 8, pp 1761-1793, 1969.

- [31] SAADA, A. S., **Elasticity: Theory and Applications**, Pergamon Press Inc., New York, U.S.A., 1974.
- [32] BREBBIA, C. A. & DOMINGUEZ, J., **Boundary Elements: An Introductory Course**, McGraw-Hill Book Company, Avon, Great Britain, 1989.
- [33] Cruse, T.A., **Mathematical Foundations of the Boundary - Integral Equation Method in Solid Mechanics**, United Technologies: Special Scientific Report, East Hartford, U.S.A., 1977.
- [34] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F. & WROBEL, L. C., **Boundary Element Techniques**, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1984.
- [35] DANSON, D. J., **Analysis of Plate Bending Problems by Direct Boundary Element Method**. Southampton, University of Southampton, 1979. (M.Sc. Dissertation)
- [36] PAIVA, J. B., **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Flexão de Placas e suas Aplicações em Engenharia de Estruturas**, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos USP, 1987, 195p (Tese de Doutorado). (Orientador: Wilson S. Venturini).
- [37] GAJOV, F. D., **Problemas de Contorno**, Editorial Mir, Moscow, U.R.S.S., 1980.
- [38] CARNAHAN, B., LUTHER, H. A. & WILKES, J. O., **Applied Numerical Methods**, John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [39] WESTERGAARD, H. M., **Theory of Elasticity and Plasticity**, Dover Publications, New York, 1964.
- [40] KELLOG, O. D., **Foundations of Potential Theory**, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1929.
- [41] COSTA JÚNIOR, J. A., **The Boundary Element Method Applied to Plate Problems**, Southampton, University of Southampton, 1985 (Ph.D. Thesis).

- [42] VENTURINI, W. S., **Application of the Boundary Element Formulation to Solve Geomechanical Problems**, Southampton, University of Southampton, 1982, (Ph.D. Thesis).
- [43] KRISTEK, V., Box Girders of Deformable Cross Section - Some Theory of Elasticity Solutions, **Proc. Institute of Civil Engineers**, Vol. 47, oct, 1970, pp 239-253.
- [44] ABRAMENTO, I., **O Centro de Torção e o Centro de Cisalhamento nas Barras Prismáticas**, São Paulo, Escola Politécnica, USP, 1981, 113p, (Dissertação de Mestrado), (Orientador: Prof. Décio Leal de Zagottis).
- [45] PAIVA, J. B., VENTURINI, W. S., Escolha do Ponto Singular na Análise de Placas pelo Método dos Elementos de Contorno, **IX Congresso Latino-Americano e Ibérico sobre Métodos Computacionais**, Argentina, 1988.
- [46] PALERMO JÚNIOR, L., **Esforços de Flexão e Flexo-Torção em Teoria de Segunda Ordem**, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1985, 151p (Dissertação de Mestrado) (Orientador: Munir Rachid).
- [47] WILKINSON, J. H., **The Algebraic Eigenvalue Problem**, Oxford University Press, London, England, 1972.
- [48] RERKSHANANDANA, N., USAMI, T. & KARASUDHI, P., Ultimate Strength of Eccentrically Loaded Steel Plates and Box Sections, **Computers & Structures**, Vol. 13, nº 4, 1981, pp 467-481.
- [49] CROTTY, J. M., A Block Equation Solver for Large Unsymmetric Matrices Arising in the Boundary Integral Equation Method, **Int. J. Num. Meth. Eng.**, Vol. 18, 1982, pp 997-1017.
- [50] ZIENKIEWICZ, O. C., GAGO, J. P. S. R., KELLY, D. W., The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis, **Computer & Structures**, Vol. 16, nº 1-4, 1983, pp 53-65.

- [51] RODRIGUES, M. R. P., **Sistema de Resolução por Blocos para Matrizes Não-Simétricas (Diretamente Aplicável às Matrizes que Resultam no Método dos Elementos de Contorno)**, Notas do Seminário apresentado em novembro de 1985 na Escola de Engenharia de São Carlos na Universidade de São Paulo, São Carlos, 1985.
  
- [52] SOUTHWELL, R. V., **"Relaxation Methods in Theoretical Physics"**, Oxford University Press, London, 1946.
  
- [53] BREBBIA, C.A., **"The Boundary Element Method for Engineers"** Pentech Press, London, England, 1978.
  
- [54] KUPRADZE, V.D., **"Potential Methods in Theory of Elasticity"**, **Israel Program for Scientific Translations**, Jerusalém, 1965.
  
- [55] RIZZO, F.J., **"An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics"**, **Quart. Appl. Math.**, 25, pp. 83-95, 1967.
  
- [56] CRUSE, T.A., **"Numerical Solutions in Three-Dimensional Elastostatics"**, **Int. J. Solids Struct.**, Vol. 5, pp. 1259-1274, 1969.