

"APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS  
DE CONTORNO À ANÁLISE DE PLACAS SOBRE  
FUNDAÇÕES ELÁSTICAS"

ENG. NEY AMORIM SILVA

ORIENTADOR: PROF. DR. WILSON S. VENTURINI

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

"APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
À ANÁLISE DE PLACAS SOBRE FUNDAÇÕES ELÁSTICAS"

ENG. NEY AMORIM SILVA

ORIENTADOR: PROF. DR. WILSON SÉRGIO VENTURINI

Dissertação apresentada à Escola  
de Engenharia de São Carlos, da  
Universidade de São Paulo, como  
parte dos requisitos para obten-  
do título de "Mestre em Engenha-  
ria de Estruturas"

COMISSÃO EXAMINADORA:

Wilson Sergio Venturini - Orientador (EESC/USP)

João Batista de Paiva (EESC/USP)

Aluisio Ernesto Assan (FEL/UNICAMP)

São Carlos

Outubro de 1988

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Aos meus pais, que há muito, ima-  
ginaram este dia.

À Amélia, Izabela, Raquel e Gus-  
tavo, esposa e filhos, que com  
carinho e abnegação tornaram pos-  
sível este dia.

#### AGRADECIMENTOS

Ao Professor Wilson Sérgio Venturini pelo apoio, disponibilidade e grande interesse com que orientou este trabalho.

Ao Professor Sérgio P.B. Proença pelas sugestões dadas na análise não-linear para a resposta do solo.

Ao Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia da UFMG pelo estímulo e oportunidade.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, através do Programa Institucional de Capacitação Docente - PICD/UFMG, pela concessão de bolsa de estudos.

Aos colegas, professores e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC/USP, pela amizade e colaboração prestadas no decorrer deste trabalho.

Ao Sr. Rui Roberto Casale e Sra. Wilma P. Vall pela datilografia, ao Sr. Francisco C.G. Brito pelos desenhos e à bibliotecária Maria Nadir Minatel pela revisão das referências bibliográficas.

A Deus por tudo!

## R E S U M O

Neste trabalho a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno é utilizada na resolução de placas apoiadas em fundações elásticas. As reações da fundação são consideradas introduzindo-se outras integrais de domínio na representação integral usual dos deslocamentos. Estas integrais são tratadas de duas formas distintas, originando as duas formulações desenvolvidas neste trabalho. Na primeira, o domínio da placa é subdividido em células, com as quais pode-se estabelecer os coeficientes de influência dos nós internos. Na segunda formulação, as integrais de domínio são transformadas, pelo processo da reciprocidade dual, em integrais sobre o contorno, evitando-se assim a discretização interna. Considerando-se para o material da fundação, um critério de plastificação simples e bilinear, o efeito da não-linearidade, para a resposta do solo, é levado em conta. Finalmente são apresentadas aplicações numéricas, visando mostrar a eficiência da formulação proposta.

### A B S T R A C T

In this work the direct formulation of the Boundary Element Method is used to solve plates on elastic foundations. The subgrade reactions are considered by introducing another domain integrals, in the usual integral representation of the displacements. These integrals are treated by two distinct ways, leading to the two formulations developed in this work. In the first case, the plate domain is divided into cells, what allows one to compute influence coefficients for internal nodes. In the second formulation the domain integrals are transformed, by the dual reciprocity process, into integrals on the boundary, avoiding therefore the internal discretization. Considering for the foundation a simple and bilinear plastic criterion, the nonlinear effects for the subgrade reactions are taken into account. Finally are presented numerical examples showing the efficiency of the proposed formulation.

## S U M Á R I O

I. INTRODUÇÃO .....	1
II. FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS DELGADAS .....	8
2.1 - Introdução .....	8
2.2 - Hipóteses básicas .....	9
2.3 - Relações básicas para placas delgadas .....	9
2.4 - Equações de placas em coordenadas polares ...	23
2.5 - Soluções fundamentais de placas .....	29
XIII. EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO EM PLACAS .....	39
3.1 - Introdução .....	39
3.2 - Equação integral para um ponto do domínio ..	40
3.3 - Equação integral para um ponto do contorno .	50
3.4 - Integrais de domínio para o carregamento ...	58
IV. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO .....	62
4.1 - Introdução .....	62
4.2 - Discretização das equações integrais .....	63
4.2.1 - Elemento linear contínuo .....	64
4.2.2 - Equações matriciais .....	68

4.3	- Montagem das matrizes $\underline{H}$ e $\underline{G}$ .....	73
4.3.1	- Integração sobre os elementos .....	73
4.3.2	- Contribuição dos cantos na matriz $\underline{H}$ ..	80
4.4	- Deslocamentos e esforços para pontos inter- nos .....	88
4.4.1	- Deslocamento transversal $w(q)$ e sua derivada $\frac{\partial w(q)}{\partial m}$ .....	88
4.4.2	- Momento fletor e força cortante para pontos internos .....	90
4.5	- Propriedades da matriz $\underline{H}$ .....	98
4.6	- Aplicações numéricas .....	100
4.6.1	- Exemplo 1 - Placa quadrada uniforme- mente carregada ....	100
4.6.2	- Exemplo 2 - Placa quadrada submeti- da a carregamento distribuído em pe- quena área central .....	102
4.6.3	- Exemplo 3 - Placa com condições de carregamento e contorno variados ....	103
V.	PLACAS SOBRE FUNDAÇÕES ELÁSTICAS .....	106
5.1	- Introdução .....	106
5.2	- Equações básicas .....	107
5.3	- Integração sobre células internas .....	109
5.4	- Processo da reciprocidade dual .....	120
5.5	- Comportamento não-linear para a resposta do solo .....	127
5.6	- Aplicações numéricas .....	132
5.6.1	- Placa com carga centrada .....	132
5.6.2	- Placa com carga excêntrica .....	137
5.6.3	- Efeito da não-linearidade para a res- posta do solo .....	141
VI.	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	151
VII.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	154



## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Com o aperfeiçoamento dos computadores de grande capacidade, tornou-se possível e prático a utilização de métodos numéricos para a solução de problemas físicos, governados por equações diferenciais, cuja solução analítica só é conhecida para casos muito particulares.

Os primeiros métodos numéricos, como o método das diferenças finitas - MDF [1] e o método dos elementos finitos - MEF [2, 3, 4], utilizam técnicas que discretizam o domínio. Estes métodos já são bastante conhecidos, notadamente o MEF, que nos últimos 25 anos tornou-se o método numérico mais difundido em todos os ramos da engenharia [5], com convergência e eficiência comprovadas.

O método dos elementos de contorno - MEC, é um método numérico mais moderno, mas que vem experimentando um grande avanço nos últimos tempos. Isto, se deve a vários fatores, entre eles a sua melhor adaptação para determinados problemas específicos, como as regiões de concentração de tensões e regiões infinitas [6], e a outro fator muito

importante, que é o reduzido volume de dados necessários para a definição de uma região, em comparação com o MEC. O MEC - assim chamado pois é formulado a partir de equações integrais de contorno, caracterizasse principalmente por reduzir em uma unidade a dimensão do problema, uma vez que a discretização é feita apenas no contorno.

Embora o método dos elementos de contorno tenha aparecido recentemente, as equações integrais segundo Eliot [7], já são conhecidas desde 1823, quando Abel [8] deduziu uma equação integral para resolver o problema chamado de pêndulo isócrono [9]. As equações integrais experimentaram um avanço decisivo com o estudo dos problemas da teoria do potencial, destacando-se Volterra [10], que estudou em 1884 a distribuição de cargas elétricas na superfície de uma esfera, realizando estudos posteriores em 1896. Em 1903, Fredholm [11] demonstrou que podem ser encontradas soluções para equações integrais e posteriormente desenvolveu condições para determinação da existência e unicidade de tais soluções, na forma dos Teoremas de Fredholm. Estes estudos influenciaram muitos trabalhos posteriores, como os realizados por Hilbert [12], entre 1904 e 1910. Ainda sobre teoria do potencial é importante citar o trabalho de Kellogg [13].

Historicamente, segundo Love [14], o método integral foi primeiramente aplicado na teoria clássica da elasticidade por Betti em 1872. Trabalhos posteriores nesta área foram completados por Somigliana por volta de 1880. Nesta mesma época Cerruti aplicou o método para problemas de elasticidade plana [15].

Após este período, foram realizados outros estudos por matemáticos russos, entre eles Muskhelishvili [16], que aplicou as equações integrais para resolver problemas de elasticidade linear bidimensional. Muskhelishvili, Mikhailin [17] e Kupradze [18] utilizaram equações integrais singulares baseadas na teoria das variáveis complexas [9]. As variáveis envolvidas neste método não são as variáveis físicas do problema estudado, daí ser chamado de método

Indireto, cuja implementação numérica além de difícil apresenta uma certa instabilidade [19]. Seguindo o tratamento indireto, outros trabalhos foram realizados por pesquisadores como Massonet, Oliveira, Watson e Van Buren (ver Banerjee [20]). Jaswon e Symm [21, 22, 23], introduziram em 1963, um equacionamento do problema usando variáveis reais, a fim de manter uma função de tensão auxiliar, caracterizando o que alguns autores [20] chamam de Método semi-direto.

O método dos elementos de contorno é chamado direto, quando a formulação integral é obtida em termos das variáveis reais do problema. Neste contexto, Rizzo [24], em 1967, apresentou um método para elasticidade plana relacionando variáveis reais do contorno, isto é, deslocamentos e esforços. Cruse [19], estendeu este método para a elasticidade tridimensional. Nestes trabalhos a equação integral é discretizada, dividindo-se o contorno em elementos, sobre os quais os deslocamentos e esforços são aproximados por uma função constante. A aproximação linear para tais variáveis em problemas de duas e três dimensões, foram introduzidas respectivamente por Riccardella [25] e Cruse [26]. Lachat [27], desenvolveu posteriormente elementos com aproximações de ordem superior.

Os problemas de flexão em placas, usualmente analisados por MDF ou MEF, também podem ser resolvidos por elementos de contorno. Recentemente alguns trabalhos tem se desenvolvido para resolver tais problemas. A primeira aplicação dos problemas de placa utilizando-se as equações integrais de contorno foi introduzida por Jaswon et alii [28], que propôs a solução de equação biharmônica, via equação integral e posteriormente aplicou-a na solução de placas [29].

Recentemente Altiero e Sikarskie [30], apresentaram uma técnica que consiste em considerar a placa real contida numa placa fictícia, cuja função de Green é conhecida. Os autores somente analisaram placas engastadas, devido a complexidade associada a outras condições de contorno. Em trabalho posterior Wu e Altiero [31], estenderam eq

ta técnica para incluir condições arbitrárias de contorno, admitindo que a densidade da distribuição de forças e momentos, agiriam a uma distância qualquer ao redor do contorno real. Embora apropriada para resolver uma variedade de problemas, esta técnica apresenta uma desvantagem devido a necessidade de se definir uma distância ideal de localização do contorno fictício. Um trabalho similar foi desenvolvido por Tottenham [32], que também apresentou uma formulação integral para cascas abatidas.

A formulação direta para placas foi simultaneamente introduzida por Bezi $\tilde{n}$ e [33, 34] e Stern [35, 36]. Bezi $\tilde{n}$ e apresentou uma formulação integral usando elementos constantes. Os resultados obtidos ficaram restritos ao estudo de cargas concentradas, uma vez que na sua formulação a integral de domínio da carga aplicada não foi reduzida para o contorno. Stern desenvolveu uma formulação integral geral para resolver problemas de placas, mas não levou em conta na sua formulação a possibilidade da descontinuidade das condições de contorno nos nós de canto.

Outros trabalhos subsequentes foram desenvolvidos para a análise dos mais diversos problemas de placas, destacando-se Bezi $\tilde{n}$ e [37], Kamiya [38, 39], Tanaka [40]. Van der Wee $\tilde{e}$ n [41] desenvolveu uma formulação para placas espessas, baseada na teoria de Reissner [42].

A aplicação do MEC para resolver problemas de placas sobre fundação elástica, assunto este tratado no presente trabalho, não tem sido extensivamente estudado até agora, devido possivelmente a complexidade matemática da sua formulação. O primeiro trabalho neste campo foi desenvolvido por Tottenham [32] em 1979. Recentemente Katsikadelis e Armenakas [43, 44], apresentaram duas formulações diferentes para analisar placas sobre fundação elástica, baseada na teoria de Winkler [45]. Mais recentemente citam-se os trabalhos de Costa e Brebbia [15, 46, 47, 48]. Embora nestes últimos trabalhos as integrais de domínio para a carga já tenham sido transformadas em integrais sobre o contorno, a

resposta do solo é sempre elástica, não se admitindo o comportamento não-linear da fundação.

O método dos elementos de contorno tem sido aplicado a materiais com comportamento não-linear [25, 49, 50, 51, 52]. Telles e Brebbia [53], propuseram a resolução de problemas elastoplásticos e visco-plásticos introduzindo no equacionamento do MEC, esforços e deformações iniciais. Venturini [54, 55] aplicou o método na área da mecânica dos solos, analisando comportamento plástico, visco-plástico e materiais rochosos sem resistência à tração. Recentemente outros trabalhos tratando a não-linearidade tem sido desenvolvidos [56, 57, 58].

Alguns autores tem estudado a combinação do MEC com outras técnicas numéricas, principalmente o MEF [59 a 71]. Esta combinação tem como finalidade principal utilizar o método numérico mais apropriado para cada região do corpo em estudo, de forma a se obter resultados mais precisos com a redução no número de operações e o mínimo de tempo de processamento. Em geral isto é feito desenvolvendo-se uma matriz de rigidez a partir da equação obtida com o MEC para a região de elementos de contorno, é equivalente à matriz de rigidez obtida com o MEF. Esta matriz, assim obtida terá o mesmo tratamento das matrizes de rigidez de cada elemento finito, e o problema será resolvido com as técnicas computacionais desenvolvidas para o MEF.

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma formulação direta do método dos elementos de contorno aplicado à placas sobre fundação elástica. A formulação de elementos de contorno já proposta para este caso [43], requer uma solução fundamental particular na qual a reação do solo é considerada. Embora esta formulação elimine a integral da reação do solo, isto restringe sua aplicação, a casos particulares, nos quais somente reações elásticas em todo o domínio da placa são levadas em conta.

No presente trabalho o assunto é revisto e a reação do solo é considerada pelo acréscimo de uma integral

do domínio, na representação integral usual dos deslocamentos [33, 35]. Esta integral de domínio é inicialmente considerada pela definição de células internas, sobre as quais a reação do solo e seus incrementos, quando é assumida a não-linearidade para a resposta do solo, são aproximados. O processo da reciprocidade dual [72], é introduzido posteriormente na formulação, como uma alternativa para tratar o integral de domínio, transformando-a em integral de contorno, evitando-se desta forma a discretização interna.

Inicialmente é desenvolvida toda a formulação teórica das equações integrais, do método dos elementos de contorno, bem como um resumo da teoria de Kirchhoff [73] para placas. Após o estudo teórico, chega-se a análise numérica da formulação, apresentando-se nos capítulos finais exemplos práticos de aplicação do método.

No capítulo II é apresentado um resumo da teoria de placas delgadas, onde são obtidas expressões dos esforços em termos do deslocamento transversal  $w$  da placa, escritas em coordenadas cartesianas e polares. São determinadas também soluções fundamentais de placas, cujas equações de deslocamentos e esforços para uma placa infinita submetida a um carregamento transversal unitário, representado matematicamente pela distribuição Delta de Dirac.

No capítulo III utilizando-se as soluções fundamentais obtidas no capítulo II, são obtidas as representações integrais do deslocamento transversal  $w$  da placa e de sua derivada direcional, para pontos do domínio e do contorno [74]. A integral de domínio correspondente à ação do carregamento transversal atuante na placa é transformada numa integral sobre seu contorno.

No capítulo IV, após a discretização do contorno em elementos, onde são aproximados os deslocamentos e esforços por funções previamente escolhidas, as equações integrais obtidas no capítulo anterior, são transformadas em equações algébricas lineares. Estas equações quando escritas para todos os nós do contorno definem um sistema de equações lineares, que após a imposição das condições de

contorno e de sua resolução, fornecem os valores incógnitos do contorno, com os quais se determinam esforços e deslocamentos para pontos do domínio. Este sistema de equações é obtido considerando-se para cada ponto do contorno, duas equações integrais, referentes ao deslocamento transversal  $w$  e de sua derivada direcional. A fim de se evitar integrais singulares sobre os elementos, os pontos inicialmente no contorno, são deslocados para fora do domínio da placa. Em seguida são apresentadas algumas aplicações numéricas do método à placas isoladas e os resultados são comparados com formulações já conhecidas.

No capítulo V, a formulação do MEC, estudada no capítulo anterior é aplicada na solução de placas sobre fundação elástica. A equação integral é redefinida, com o acréscimo da integral de domínio referente à reação do solo, que inicialmente é considerada perfeitamente elástica. São apresentadas duas formulações para levar em conta esta nova integral de domínio. A primeira, consiste numa discretização do domínio em células internas, onde os deslocamentos e reações são aproximados por funções lineares. Posteriormente o comportamento não-linear da resposta do solo é considerado e os incrementos de reação também são aproximados sobre as células internas, usando-se as mesmas funções aproximadoras. A resposta final do solo é obtida de forma iterativa. A segunda formulação consiste numa alternativa de se evitar a discretização do domínio, usando-se o processo da reciprocidade dual para transformar a integral de domínio das reações em integral de contorno. Finalmente, são apresentadas aplicações de ambas as formulações em várias placas apoiadas continuamente em fundações elásticas, mostrando-se um estudo comparativo da eficiência dos métodos com outros já conhecidos.

## CAPÍTULO II

### FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS DELGADAS

#### 2.1 - Introdução

Os elementos estruturais podem ser classificados em três grandes categorias: lineares, de superfície e tridimensionais, conforme tenham respectivamente duas, uma, ou nenhuma dimensão pequena se comparada às outras.

Dentre os elementos estruturais de superfície destaca-se a placa por ser um dos mais empregados nas estruturas usuais. A placa é definida usualmente como um corpo limitado por duas superfícies planas, admitindo-se no entanto pequena curvatura. A distância entre estas superfícies, denominada espessura, é pequena se comparada às outras dimensões. A superfície equidistante às superfícies limítrofes é chamada superfície média, ou mais comumente plano médio.

Neste trabalho só serão consideradas placas submetidas a carregamentos verticais, transversais ao plano médio.



Dependendo das propriedades do material que a constitui a placa pode ser classificada como: anisôtrópa - com propriedades diferentes em qualquer direção; ortôtrópa - com propriedades diferentes em duas direções ortogonais; ou isôtrópa - com as mesmas propriedades em qualquer direção.

Dependendo da espessura a placa pode ser classificada como muito delgada, delgada e espessa.

Neste capítulo será estudada a placa delgada, baseada na teoria de Kirchhoff, que em geral interpreta suficientemente bem o comportamento das placas com relação espessura/menor dimensão ( $h/a$ ) entre 1/5 a 1/100 [75].

## 2.2 - Hipóteses básicas

As hipóteses descritas a seguir, são necessárias à determinação das relações e equações diferenciais básicas das placas delgadas:

- a placa é constituída de material elástico-linear homogêneo.
- os deslocamentos transversais são pequenos se comparado à espessura  $h$  da placa.
- uma reta inicialmente normal ao plano médio permanece reta, após a flexão da placa, e perpendicular ao plano médio deformado. Isto, equivale a dizer que as tensões normais, paralelas ao plano médio, variam linearmente com a espessura.
- as tensões aplicadas em suas faces são pequenas em relação às tensões normais de flexão, paralelas ao plano médio.

## 2.3 - Relações básicas para placas delgadas

A partir das simplificações envolvidas nas hipóteses básicas pode-se determinar as relações básicas para placas delgadas isôtrópicas.

De acordo com a última hipótese básica, as tensões aplicadas sobre as superfícies limites são desprezíveis, podendo-se escrever:

$$\sigma_{zx} \approx 0 \quad (2.1.a)$$

$$\sigma_{zy} \approx 0 \quad (2.1.b)$$

$$\sigma_{zz} \approx 0 \quad (2.1.c)$$

As demais tensões que aparecem no estudo das placas estão indicadas no elemento genérico mostrado na figura (2.1).

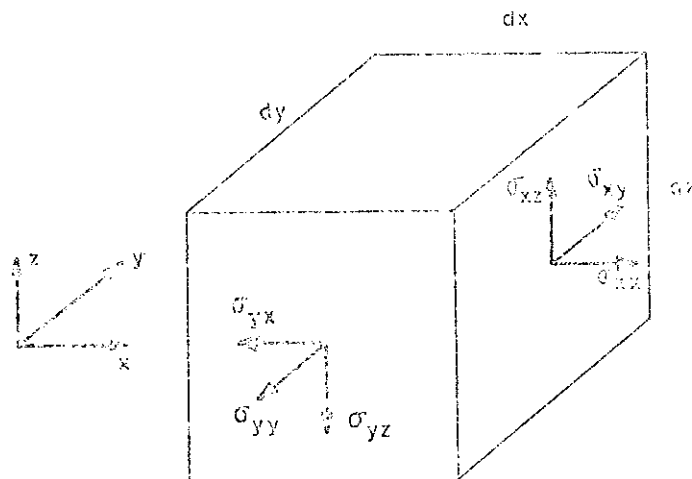


Fig. 2.1 - Elemento da placa com suas respectivas tensões.

A primeira hipótese do item 2.2 equivale a dizer que o material de que é constituída a placa segue a lei de Hooke, que escrita de uma forma indicial em termos de tensões, pode ser resumida em:

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kl} \delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij} \quad (2.2)$$

Inversamente tem-se:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{zz} \delta_{ij}) \tag{2.3}$$

com

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.4}$$

onde:

E: módulo de elasticidade longitudinal;

G: módulo de elasticidade transversal;

$\nu$ : coeficiente de Poisson.

Considera-se também neste trabalho que a placa está submetida apenas a pequenos deslocamentos  $u_i$  de tal forma que a relação deformação/deslocamento fique dada por:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{2.5}$$

Substituindo-se os valores de (2.1) e (2.4) em (2.3) e igualando-se a (2.5) obtém-se em notação clássica para a direção z:

$$\epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0 \tag{2.6}$$

$$\epsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0 \tag{2.7}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{2.8}$$

A partir da terceira hipótese do item 2.2 tem-se:

$$\sigma_{xz} = a_1(x, y) + b_1(x, y)z \quad (2.9.a)$$

$$\sigma_{yy} = a_2(x, y) + b_2(x, y)z \quad (2.9.b)$$

Substituindo-se (2.9) em (2.8) e integrando-se em  $z$  obtêm-se:

$$u_z = w(x, y) - \frac{\nu}{E} \left[ a_1(x, y) + b_1(x, y) \right] z + \\ - \frac{\nu}{E} \left[ a_2(x, y) + b_2(x, y) \right] \frac{z^2}{2} \quad (2.10)$$

A função  $w(x, y)$  representa o deslocamento transversal do plano médio, onde a coordenada  $z$  vale zero.

Em vista da espessura da placa, os dois últimos termos de (2.10) são em geral pequenos e poderão ser desprezados em comparação com  $w(x, y)$  [79].

A equação (2.10) pode portanto ser reescrita como:

$$u_z = w(x, y) \quad (2.11)$$

De (2.6) e (2.7) obtêm-se respectivamente:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = - \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.12.a)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = - \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (2.12.b)$$

Substituindo-se (2.11) nas equações (2.12) e integrando-se em  $z$  obtêm-se:

$$u_x = u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) \quad (2.13.a)$$

$$u_y = v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \quad (2.13.b)$$

As funções  $u(x,y)$  e  $v(x,y)$  são os deslocamentos tangenciais dos pontos do plano médio.

Por simplicidade os deslocamentos  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$  e  $w(x,y)$  serão escritos a partir de agora como  $u$ ,  $v$  e  $w$ .

De (2.5) e (2.13) obtêm-se:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.14.a)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.14.b)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.14.c)$$

De (2.1) e (2.2) obtêm-se as relações entre as tensões e as deformações dadas por:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu} \epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy} \quad (2.15.a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu} \epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx} \quad (2.15.b)$$

$$\sigma_{xy} = 2G \epsilon_{xy} \quad (2.15.c)$$

Substituindo-se as equações (2.14) em (2.15) obtêm-se as relações entre as tensões e os deslocamentos:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad (2.16.a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \quad (2.16.b)$$

$$\sigma_{xy} = 2G \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (2.16.c)$$

A partir da equação indicial genérica de equilíbrio para um sólido tridimensional pode-se escrever:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (2.17.a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (2.17.b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0 \quad (2.17.c)$$

onde X, Y e Z são forças de massa por unidade de volume.

Como o problema estudado neste capítulo trata dos fundamentos da teoria de placas delgadas, só interessam portanto as relações de flexão. Tais relações são obtidas multiplicando-se as duas primeiras equações de equilíbrio por  $zdz$  e a última por  $dz$ , e integrando-as na espessura. Antes porém de se obter as equações de equilíbrio em termos de flexão é necessário que se definam os momentos e forças cortantes por unidade de comprimento.

Definem-se os momentos de flexão e de torção por unidade de comprimento, respectivamente, como:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz \quad (2.18.a)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz \quad (2.18.b)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \quad (2.18.c)$$

Substituindo-se  $\sigma_{xx}$  dado em (2.16.a) na equação (2.18.a) e integrando-se na espessura obtêm-se:

$$M_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{z^2}{2} \right]_{-h/2}^{h/2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{z^3}{3} \left[ \frac{h/2}{-h/2} \right] \quad (2.19)$$

Como o primeiro termo de (2.19) se anula, nota-se que, para a teoria linear de placas considerando-se pequenos deslocamentos, as relações de flexão são independentes dos deslocamentos tangenciais do plano médio,  $u$  e  $v$ .

Substituindo-se os limites em (2.19) e fazendo-se procedimento análogo para as equações (2.18.b) e (2.18.c) obtém-se:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.20.a)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.20.b)$$

$$M_{xy} = -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.20.c)$$

onde:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.21)$$

é a rigidez da placa à flexão.

Para completar as definições de esforços sollicitantes consideram-se as forças cortantes por unidade de comprimento dadas por:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \quad (2.22.a)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz \quad (2.22.b)$$

Efetuaudo-se a integração das duas primeiras equações de (2.17) multiplicadas por  $zdz$  e utilizando-se as de-

definições de  $M_x$  e  $M_{xy}$  dadas em (2.19), pode-se escrever:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} z dz + \int_{-h/2}^{h/2} X z dz = 0 \quad (2.23.a)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} z dz + \int_{-h/2}^{h/2} Y z dz = 0 \quad (2.23.b)$$

podendo os dois últimos termos das equações (2.23) serem escritos da seguinte forma:

$$\sigma_{xz} z \left[ \begin{array}{c} h/2 \\ -h/2 \end{array} \right] - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz + \int_{-h/2}^{h/2} X z dz = -Q_x + m_x \quad (2.24.a)$$

$$\sigma_{yz} z \left[ \begin{array}{c} h/2 \\ -h/2 \end{array} \right] - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz + \int_{-h/2}^{h/2} Y z dz = -Q_y + m_y \quad (2.24.b)$$

onde  $m_x$  e  $m_y$  são definidos como os momentos externos resultantes, por unidade de área, atuando no plano médio da placa e valem respectivamente:

$$m_x = \frac{h}{2} \left[ \sigma_{xz}(h/2) - \sigma_{xz}(-h/2) \right] + \int_{-h/2}^{h/2} X z dz \quad (2.25.a)$$

$$m_y = \left[ \frac{h}{2} \sigma_{yz}(h/2) - \sigma_{yz}(-h/2) \right] + \int_{-h/2}^{h/2} Y z dz \quad (2.25.b)$$

A equação (2.17.c) integrada na espessura fica:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \left[ \sigma_{zz}(h/2) - \sigma_{zz}(-h/2) + \int_{-h/2}^{h/2} Z dz \right] = 0 \quad (2.26)$$

O termo entre colchetes de (2.26), denominado  $g$ , pode ser definido como a resultante total de cargas trans-



versais aplicadas à placa, incluindo-se também o peso próprio ( $\int_{-h/2}^{h/2} z \, dz$ ).

Finalmente levando-se (2.24) em (2.23) e reescrevendo-se (2.26) obtêm-se as equações de equilíbrio das placas:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + m_x = 0 \quad (2.27.a)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + m_y = 0 \quad (2.27.b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + g = 0 \quad (2.27.c)$$

Explicitando-se  $Q_x$  e  $Q_y$  nas duas primeiras equações de (2.27) e substituindo-se na terceira, obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -g - \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_y}{\partial y} \quad (2.28)$$

Esta expressão representa a equação diferencial geral de placas escrita em termos de esforços.

Em vista da terceira hipótese adotada no item 2.2 e considerando-se apenas carregamento transversal aplicado à placa tem-se que os valores de  $m_x$  e  $m_y$  são nulos.

Substituindo-se agora os valores (2.20) em (2.28) obtêm-se a equação diferencial geral de placas escrita em termos do deslocamento transversal  $w$ :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{g}{D} \quad (2.29)$$

A equação (2.29) é comumente escrita na sua forma implícita:

$$\Delta \Delta w = \frac{g}{D} \quad (2.30)$$

onde:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.31)$$

A partir de (2.27) explicitando-se  $Q_x$  e  $Q_y$  obtêm-se:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (2.32.a)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (2.32.b)$$

Substituindo-se (2.20) em (2.32) obtêm-se  $Q_x$  e  $Q_y$  escritos em função do deslocamento  $w$ :

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \quad (2.33.a)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \quad (2.33.b)$$

As equações (2.20) podem ser escritas indicialmente da seguinte forma:

$$M_{ij} = -D \left[ \nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_l \partial x_l} + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad (2.34)$$

Analogamente as equações (2.33) escritas de uma forma indicial, resultam em:

$$Q_i = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_l \partial x_l} \quad (2.35)$$

Na figura (2.2) estão representados os valores (2.34) e (2.35)

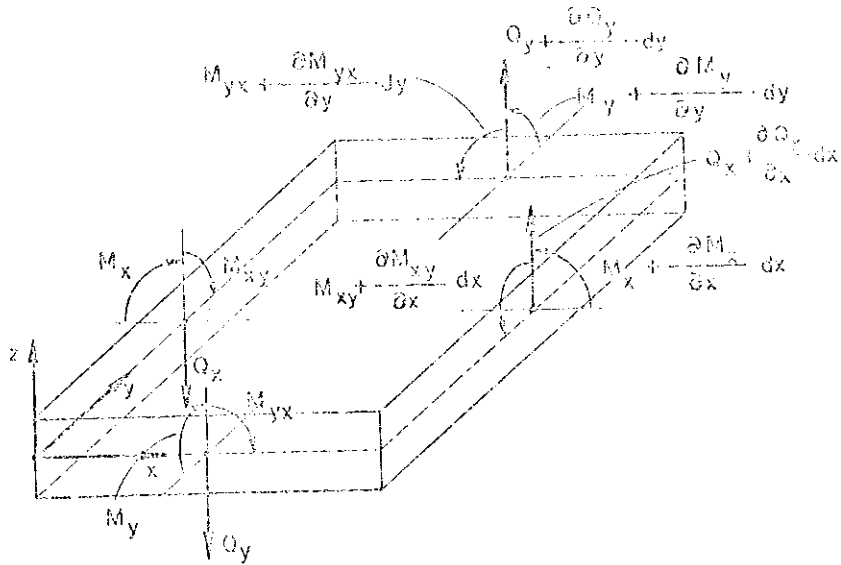


Fig. 2.2 - Valores de  $M_{ij}$  e  $Q_i$

Os momentos e cortantes por unidade de comprimento definidos anteriormente estão referidos a um sistema global de coordenadas  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$ . Eles podem agora ser reescritos em relação a um sistema particular de coordenadas  $\underline{n}$  e  $\underline{s}$ , conforme está mostrado na figura 2.3.

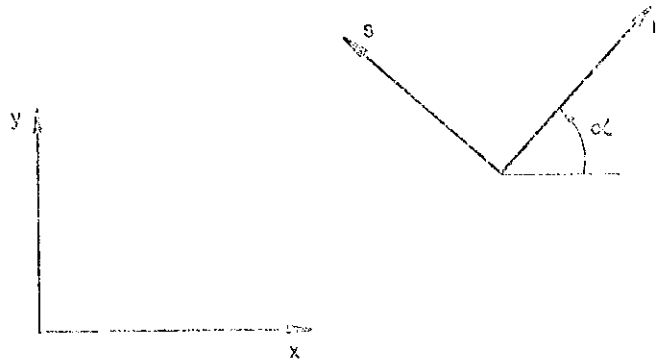


Fig. 2.3 - Sistemas de coordenadas  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$  e  $\underline{n}$ ,  $\underline{s}$ .

Considerando-se a transformação entre os sistemas de coordenadas definidos, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} \quad (2.36.a)$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} = [T]^t \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2.36.b)$$

onde a matriz de transformação  $[T]$  é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Para se obter momentos e cortantes no novo sistema de coordenadas  $\underline{n}$  e  $\underline{s}$ , a partir dos valores já conhecidos no sistema  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$ , basta proceder-se como a seguir:

$$[H_{(n,s)}] = [T]^t [M_{(x,y)}] [T] \quad (2.38)$$

$$\{Q_{(n,s)}\} = [T]^t \{Q_{(x,y)}\} \quad (2.39)$$

A equação (2.38) será dada explicitamente pelas seguintes relações:

$$M_n = M_x \cos^2\alpha + 2M_{xy} \text{sen}\alpha\cos\alpha + M_y \text{sen}^2\alpha \quad (2.40.a)$$

$$M_{ns} = (M_y - M_x) \text{sen}\alpha\cos\alpha + M_{xy} (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) \quad (2.40.b)$$

$$M_s = M_x \text{sen}^2\alpha - 2M_{xy} \text{sen}\alpha\cos\alpha + M_y \cos^2\alpha \quad (2.40.c)$$

De (2.39) obtém-se uma relação entre o cortante nas direções  $\underline{n}$  e  $\underline{s}$ , com os cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$ :

$$Q_n = Q_x \cos\alpha + Q_y \text{sen}\alpha \quad (2.41.a)$$

$$Q_s = -Q_x \text{sen}\alpha + Q_y \cos\alpha \quad (2.41.b)$$

De forma análoga a transformação (2.38), pode-se obter as tensões normais e tangenciais no sistema  $\underline{n}$  e  $\underline{s}$  a partir das tensões conhecidas no sistema  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$ .

$$[\sigma_{(n,s)}] = [T]^t [\sigma_{(x,y)}] [T] \quad (2.42)$$

ou explicitamente:

$$\sigma_n = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + 2\sigma_{xy} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \operatorname{sen}^2 \alpha \quad (2.43.a)$$

$$\sigma_{ns} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \sigma_{xy} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \quad (2.43.b)$$

Para melhor visualizar esta mudança de coordenadas a figura 2.4 mostra um elemento triangular abc, paralelo ao plano médio, e deste distante z, com os lados ab e bc paralelos respectivamente aos eixos y e x, sendo o lado ac contido no eixo s.

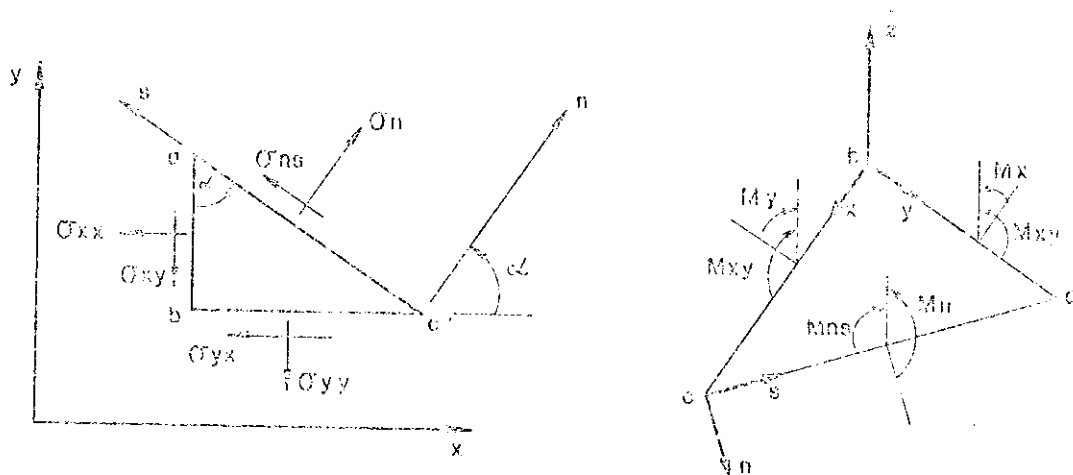


Fig. 2.4 - Componentes de tensão no elemento de placa abc e respectivos esforços resultantes.

Como será visto no capítulo 3, a resolução da equação diferencial da placa recairá na solução de um sistema de equações lineares onde as incógnitas estarão relacionadas ao contorno, definindo-se em cada ponto genérico P um sistema de coordenadas n e s, respectivamente normal e tangencial a este contorno.

Será necessário impor condições de contorno com relação ao deslocamento w, à sua derivada,  $\partial w / \partial n$ , e aos es

forças  $M_n$ ,  $M_{ns}$  e  $Q_n$  (deslocamentos e esforços referidos ao sistema local). Conforme é demonstrado em [74], segundo KIRCHHOFF [73], é possível agrupar as condições de contorno relativas à cortante,  $Q_n$ , e ao momento volvente,  $M_{ns}$ , numa única condição.

Na figura 2.5.a vê-se o ponto P, o sistema de referência cartesiano  $\underline{n}$  e  $\underline{s}$ , definido anteriormente, e dois elementos de comprimento  $ds$  do contorno da placa.

O momento volvente resultante num elemento de comprimento  $ds$  é  $M_{ns} ds$  (figura 2.5.b). Este momento pode ser interpretado como a resultante de um binário de forças com intensidade  $M_{ns}$  aplicadas nas extremidades do elemento (fig. 2.5.c). Analogamente, no elemento adjacente, está atuando um momento volvente resultante, equivalente a um binário de forças de intensidade  $[M_{ns} + (\partial M_{ns} / \partial s)]$  aplicadas conforme figura 2.5.d, nas extremidades deste elemento. Na junção dos dois elementos a resultante das forças aplicadas é  $(\partial M_{ns} / \partial s) ds$ , que somada à resultante da força cortante  $Q_n ds$  resulta no esforço denominado cortante equivalente, cuja intensidade por unidade de comprimento vale:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (2.44)$$

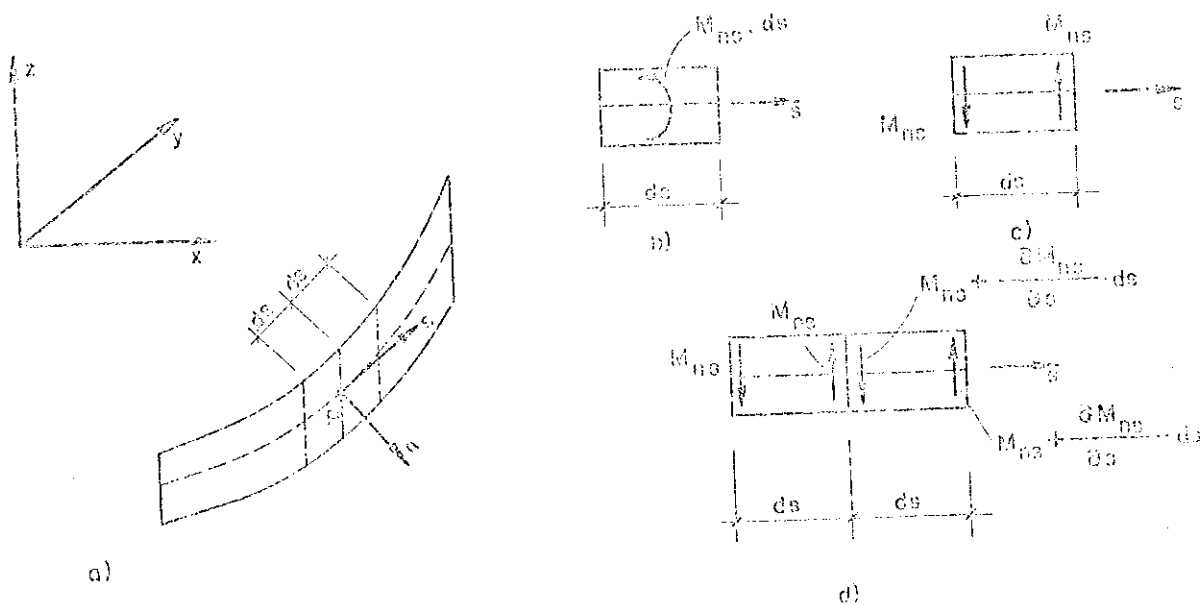


FIG. 2.5 - Momento volvente no canto.

Analogamente é definido a força cortante equivalente para as direções  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$ , como sendo:

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M}{\partial y} \frac{xy}{y} \quad (2.45.a)$$

$$V_y = Q_y + \frac{\partial M}{\partial x} \frac{xy}{x} \quad (2.45.b)$$

#### 2.4 - Equações de placas em coordenadas polares

Em certos problemas de análise de placas, notadamente neste trabalho, onde são empregadas equações integrais envolvendo soluções fundamentais expressas em coordenadas polares, torna-se necessário escrever a equação diferencial das placas, referida a este sistema de coordenadas. Considere-se a figura 2.6, onde estão representados os sistemas de coordenadas cartesianas e polares. O ponto P, antes definido pelas coordenadas  $(x,y)$ , passa agora a ser definido por  $r$  e  $\theta$ , respectivamente distância de P à origem do sistema de coordenadas e ângulo entre o semi-eixo positivo de  $\underline{x}$  e a direção  $r$ . As relações entre um sistema e outro são facilmente determinadas.

$$x = r \cos \theta \quad (2.46.a)$$

$$y = r \sin \theta \quad (2.46.b)$$

ou inversamente:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (2.47.a)$$

$$\theta = \arctg \frac{y}{x} \quad (2.47.b)$$

A partir de (2.46) e (2.47) pode-se obter as relações derivadas entre os dois sistemas, dadas a seguir:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta \quad (2.48.a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \text{sen}\theta \quad (2.48.b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\text{sen}\theta}{r} \quad (2.48.c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\text{cos}\theta}{r} \quad (2.48.d)$$

Para se obter a equação (2.30) expressa em coordenadas polares é necessário determinar-se o operador diferencial de Laplace, dado em (2.31), também expresso neste mesmo sistema. Para isto, serão determinadas primeiramente as derivadas primeira e segunda de  $w$  em relação a  $x$ , e posteriormente em relação a  $y$ . Usando-se as derivadas (2.48.a) e (2.48.c), a derivada  $\partial w / \partial x$ , pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \text{cos}\theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\text{sen}\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (2.49)$$

Segundo (2.49) pode-se definir o operador diferencial  $\frac{\partial}{\partial x}$ , escrito em função das coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ , dado por:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \text{cos}\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\text{sen}\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.50)$$

A partir das expressões (2.49) e (2.50) determinar-se a derivada segunda de  $w$  em relação a  $x$ , definida por:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left( \text{cos}\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\text{sen}\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \text{cos}\theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\text{sen}\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (2.51)$$

que, após as derivações fica:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \text{cos}^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - 2\text{sen}\theta\text{cos}\theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \text{sen}^2\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.52)$$



Analogamente às expressões (2.49) e (2.52), determinam-se as derivadas primeira e segunda de  $w$  em relação a  $y$ , dadas respectivamente pelas seguintes expressões:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \cos^2\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

O operador diferencial de Laplace em coordenadas polares será obtido comendo-se as expressões (2.52) e (2.54), isto é:

$$\Delta w = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w \quad (2.55)$$

A equação diferencial de placas (2.30), ficará portanto em coordenadas polares dada pela seguinte equação:

$$\Delta \Delta w = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q}{D} \quad (2.56)$$

A derivada mista pode também ser expressa em coordenadas polares, derivando-se (2.49) em relação a  $y$ . Após as derivações necessárias obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (2.57)$$

Substituindo-se os valores (2.52), (2.54) e (2.57) nas equações (2.20) e (2.33) obtêm-se os momentos e forças cortantes em coordenadas polares dados a seguir:

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.58.a)$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.58.b)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \left[ \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.58.c)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w = -D \left[ \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \Delta w - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w \right] \quad (2.59.a)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w = -D \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \Delta w + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w \right] \quad (2.59.b)$$

Uma vez conhecidas as expressões de  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ ,  $Q_x$  e  $Q_y$  em coordenadas polares, pode-se agora deduzir as expressões de  $M_n$ ,  $M_{ns}$  e  $V_n$ , para um ponto P, genérico do contorno, onde se define o sistema de coordenadas cartesianas (n,s), respectivamente, direção normal e tangencial ao contorno (ver fig. 2.6).

Conforme já definido na figura 2.3, o ângulo  $\alpha$ , entre a direção x e a normal ao contorno em P, é igual a soma dos ângulos  $\theta$  e  $\beta$ , respectivamente, ângulo entre a direção do semi-eixo positivo dos x e a direção de r (vetor posição do ponto P) e ângulo entre o vetor r e o vetor normal n.

Substituindo-se em (2.40) o valor de  $\alpha = \theta + \beta$  e os valores de  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$  dados em (2.58) obtêm-se os valores de  $M_n$ ,  $M_s$  e  $M_{ns}$  em P, reescritos em coordenadas polares.

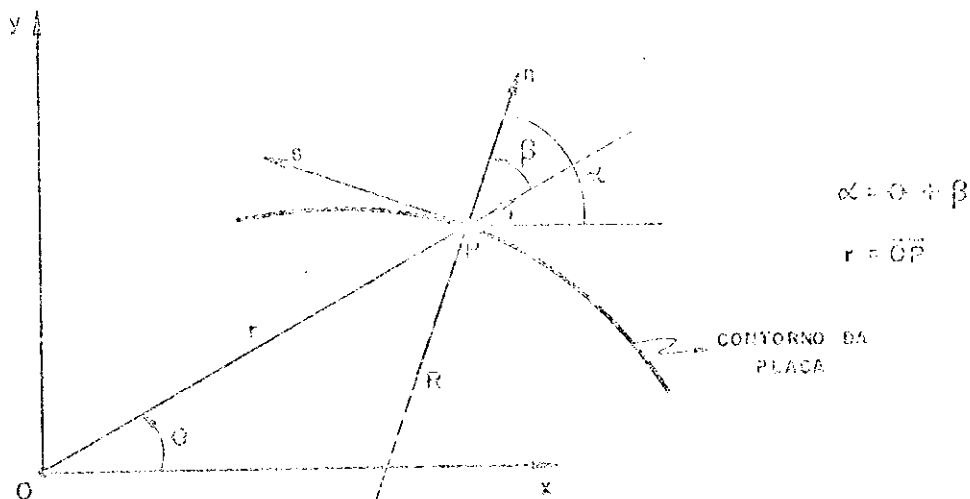


FIG. 2.6 - Sistemas de coordenadas cartesianas e polares para um ponto P de contorno, com os respectivos valores de r,  $\theta$  e  $\alpha$ .

$$M_{\theta} = -D \left[ (\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2(1-\nu) \sin \beta \cos \beta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.60.a)$$

$$M_s = -D \left[ (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2(1-\nu) \sin \beta \cos \beta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.60.b)$$

$$M_{rs} = -D (1-\nu) \left[ \sin \beta \cos \beta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.60.c)$$

A força cortante equivalente,  $V_{\theta}$ , será escrita em coordenadas polares a partir da expressão (2.44), escrevendo-se  $Q_{\theta}$ , dado em (2.41.a), em coordenadas polares e derivando-se  $M_{rs}$ , dado em (2.60.c) em relação a coordenada  $s$ , do contorno. Substituindo-se em (2.41.a) os valores de  $Q_x$  e  $Q_y$  dados respectivamente em (2.59.a) e (2.59.b) e fazendo-se o ângulo  $\alpha = \theta + \beta$  (ver fig. 2.6), obtêm-se a seguinte expressão de  $Q_{\theta}$  em coordenadas polares:

$$Q_n = -D \left( \frac{\partial}{\partial r} \Delta v \cos \beta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta v \sin \beta \right) \quad (2.61)$$

A função  $M_{ns}$ , conforme (2.60.c) é função de  $r$ ,  $\theta$  e  $\beta$ , portanto sua derivada em função de  $s$ , será obtida a partir da seguinte expressão:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} \quad (2.62)$$

A derivada  $\partial r / \partial s$  será obtida a partir de (2.48.a) e (2.48.b) e das derivadas dos valores de  $x$  e  $y$  dadas em (2.36.a) em relação a direção  $s$ , chegando-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = -\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha = -\sin \beta \quad (2.63)$$

Analogamente a partir de (2.48.c) e (2.48.d) e das mesmas derivadas de  $x$  e  $y$ , dados em (2.36.a), em relação a  $s$ , chega-se a expressão de  $\partial \theta / \partial s$ , dada por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = -\frac{\sin \theta}{r} \sin \alpha + \frac{\cos \theta}{r} \cos \alpha = \frac{1}{r} \cos \beta \quad (2.64)$$

Sabe-se ainda que:

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \quad (2.65)$$

onde  $R$  é o raio de curvatura do contorno no ponto  $P$  (ver fig. 2.6) [74].

Substituindo-se em (2.62) os valores (2.63), (2.64) e (2.65) obtêm-se:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = -\frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \sin \beta + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \cos \beta + \left( \frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \right) \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \quad (2.66)$$

A expressão final do cortante equivalente,  $V_n$ , será obtida substituindo-se em (2.44) os valores de  $Q_n$  e

$\partial M_{ns} / \partial s$  dados em coordenadas polares, respectivamente (2.61) e (2.66). Com isto obtêm-se:

$$v_n = \left(-D \frac{\partial}{\partial r} \Delta w + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta}\right) \cos \beta + \left(D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w + \frac{\partial M_{ns}}{\partial r}\right) \sin \beta + \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r}\right) \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \quad (2.67)$$

## 2.5 - Soluções fundamentais de placas

Como este trabalho tem por base o uso de equações integrais para representação dos deslocamentos  $w$  e da sua derivada direcional, torna-se necessário o estudo das soluções fundamentais das placas. Deve ser entendido por solução fundamental a resposta em um ponto genérico  $p$  de um domínio (em geral infinito), denominado domínio fundamental, devido à aplicação de uma carga unitária em outro ponto  $q$  deste mesmo domínio. Para o caso particular de placas, a solução fundamental é o deslocamento transversal,  $w^*$ , em um ponto  $p$ , de coordenadas  $x(p)$ ,  $y(p)$ , denominado ponto de deslocamento, devido a uma carga unitária aplicada num ponto  $q$ , ponto de carregamento, de coordenadas  $x(q)$ ,  $y(q)$ . A solução fundamental  $w^*$ , será obtida a partir da seguinte equação:

$$\Delta \Delta w^* = \delta(q, p) / D \quad (2.68)$$

onde  $\delta(q, p)$  é a distribuição delta de Dirac.

A distribuição delta de Dirac apresenta as seguintes propriedades:

$$\delta(q, p) = 0 \quad \text{se} \quad p \neq q \quad (2.69.a)$$

$$\delta(q, p) = \omega \quad \text{se} \quad p = q \quad (2.69.b)$$

$$\int_{\Omega} \phi(p) \delta(q,p) d\Omega = \phi(q) \quad (2.70)$$

onde,  $\phi(p)$  é uma função qualquer definida no domínio  $\Omega$ .

A partir de (2.70) pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \delta(q,p) d\Omega = 1 \quad (2.71)$$

ou seja, integrando-se a distribuição delta de Dirac no domínio obtém-se a carga unitária, que é a resultante do carregamento aplicado à placa.

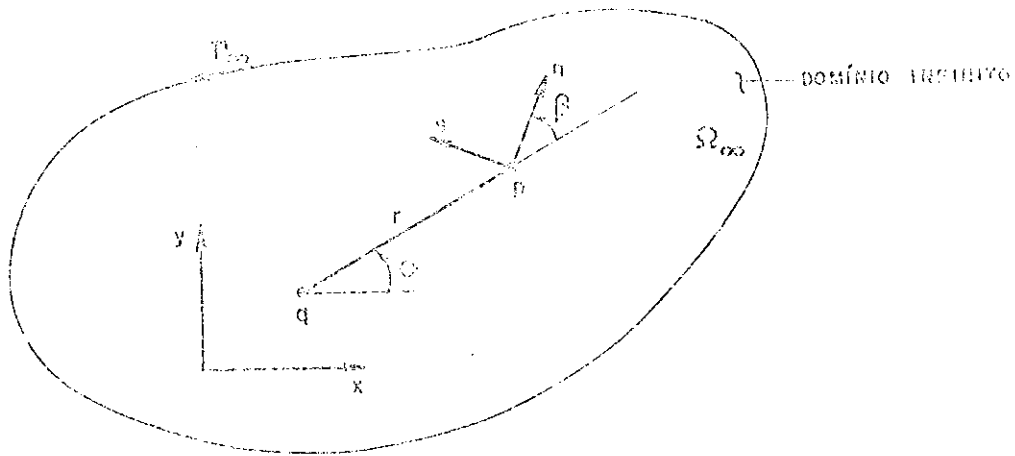


Fig. 2.7 - Pontos de carregamento (q) e de deslocamento (p).

A solução fundamental  $w^*$ , será obtida a partir da equação diferencial (2.68) aplicada a todos os pontos do domínio, exceto o ponto de carregamento  $q$ . Portanto a equação (2.68) fica:

$$\Delta \Delta w^* = 0 \quad (2.72)$$

Considerando-se um sistema de coordenadas polares com origem no ponto  $q$ , (ver fig. 2.7) e com simetria em relação ao ponto  $q$ , (domínio infinito) pode-se reescrever a equação (2.72) a partir de (2.56):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr}\right) = 0 \quad (2.73)$$

O diferencial agora é total, porque  $w^*$  só depende de  $r$  ( $\partial w/\partial \theta = 0$ ).

Aplicando-se o operador indicado em (2.73) obtêm-se:

$$\frac{d^4 w^*}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w^*}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw^*}{dr} = 0 \quad (2.74)$$

A solução da equação diferencial (2.74) é conhecida e tem a seguinte forma:

$$w^* = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D \quad (2.75)$$

Considerando-se a condição de simetria em relação ao ponto  $q$ , tem-se que a derivada  $dw^*/dr$  para este ponto é nula, o que implica em:

$$A = 0$$

A constante  $B$  é obtida a partir da condição de equilíbrio de forças verticais em um círculo de raio  $r$  cujo centro é o ponto  $q$ , de aplicação da carga unitária (ver fig. 2.8). Assim a cortante equivalente  $V_n$ , atuando em todos os

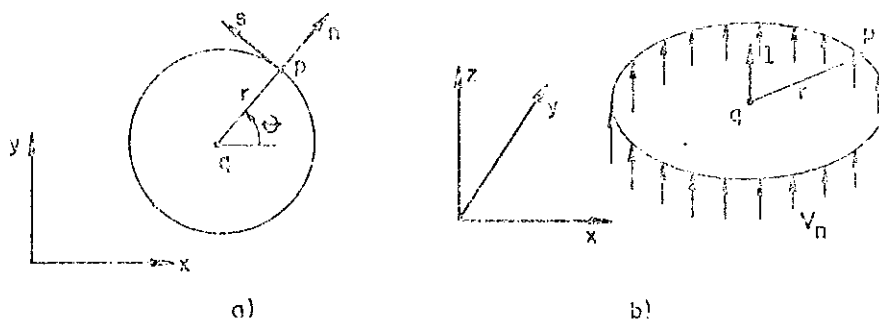


Fig. 2.8 - Forças verticais atuantes no círculo de raio  $r$  e centro em  $q$ .

pontos do círculo de raio  $r$ , deverá equilibrar a carga unitária aplicada em  $q$ .

$$(V_n) \times (2\pi r) + 1 = 0$$

ou,

$$V_n = - \frac{1}{2\pi r} \quad (2.76)$$

A partir da equação de  $V_n$ , dada em (2.67), impondo-se as condições de simetria do problema ( $\partial w^*/\partial \theta = 0$ ) e notando-se que  $\beta = 0$  para todos os pontos da circunferência, chega-se em:

$$V_n = - D \frac{d}{dr} \Delta w^* \quad (2.77)$$

Expressando-se o operador Laplaceano em coordenadas polares tem-se:

$$V_n = - D \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} \right) = - \frac{1}{2\pi r} \quad (2.78)$$

Derivando-se  $w^*$  dado em (2.75) conforme (2.78) obtêm-se o valor da constante B:

$$B = \frac{1}{8\pi D} \quad (2.79)$$

Substituindo-se os valores de A e B na equação (2.75) obtêm-se:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r + Cr^2 + D \quad (2.80)$$

As constantes C e D serão obtidas a partir das condições de contorno da placa a ser analisada. No caso específico em estudo, placa fundamental de raio infinito, estes valores podem ser quaisquer. STERN[35] e BEZINE[33] adotam:



$$C = D = 0$$

Portanto:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad (2.81)$$

Segundo DANSON [76], os valores de C e D são os seguintes:

$$C = -\frac{1}{16\pi D} \quad e \quad D = 0$$

A solução fundamental,  $w^*$ , ficará portanto:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (2.82)$$

onde  $r$  é dado por:

$$r = \left\{ [x(p) - x(q)]^2 + [y(p) - y(q)]^2 \right\}^{1/2} \quad (2.83)$$

A partir de (2.82) obtêm-se as expressões dos deslocamentos e esforços fundamentais referidos ao ponto  $p$  do domínio. Conforme se verá no próximo capítulo será necessária a determinação da solução fundamental da derivada do deslocamento, além das soluções fundamentais dos esforços em relação ao sistema  $(n, s)$ , definido no ponto  $p$  (ver fig. 2.7). Assim:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{\partial w^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.84)$$

Como a derivada está sendo calculada no ponto  $p$ , tem-se:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x(p)} \frac{\partial x(p)}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y(p)} \frac{\partial y(p)}{\partial n} \quad (2.85)$$

As derivadas primeira e segunda de  $r$ , em relação à direção  $x_1$ , definida no ponto  $p$ , são obtidas a partir de (2.83) e valem:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(p)} = r_{,i} = \frac{x_i(p) - x_i(q)}{r} \quad (2.86.a)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i(p) \partial x_j(p)} = r_{,ij} = \frac{\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}}{r} \quad (2.86.b)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker

Derivando-se  $x$  e  $y$  dados em (2.36) em relação a  $n$ , obtêm-se:

$$\frac{\partial x(p)}{\partial n} = \cos\alpha \quad (2.87.a)$$

$$\frac{\partial y(p)}{\partial n} = \sin\alpha \quad (2.87.b)$$

Observando-se a figura 2.7 nota-se que a expressão (2.86.a), pode ser escrita explicitamente da seguinte forma:

$$\frac{\partial r}{\partial x(p)} = r_{,x} = \cos\theta \quad (2.88.a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y(p)} = r_{,y} = \sin\theta \quad (2.88.b)$$

Analogamente ao que foi encontrado em (2.63) deduz-se que:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \cos\theta \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha = \cos\beta \quad (2.89)$$

e finalmente:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r \cos\beta \quad (2.90)$$

Considerando-se que  $\vec{r}$  e  $\vec{n}$  são versores associados respectivamente às direções de  $r$  e  $n$ , (2.90) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r (\vec{n} \cdot \vec{r}) \quad (2.91)$$

ou:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln n (n_x r_x + n_y r_y) \quad (2.92)$$

onde  $n_x = \cos\alpha$ ,  $r_x = r_x$ ,  $n_y = \sin\alpha$  e  $r_y = r_y$ , são respectivamente as projeções de  $n$  e  $r$  nas direções  $x$  e  $y$ .

A expressão (2.92) poderá ser escrita com uma notação indicial:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r (n_i r_i) \quad (2.93)$$

Para se obter as expressões de  $M_n^*$ ,  $M_{ns}^*$  e  $V_n^*$ , parte-se das equações (2.60) e (2.67), impondo-se as condições da placa fundamental agora analisada. Assim:

$$M_n^* = -D \left[ (\cos^2\beta + \nu \sin^2\beta) \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^2} + (\sin^2\beta + \nu \cos^2\beta) \frac{1}{r} \frac{\partial w^*}{\partial r} \right] \quad (2.94)$$

$$M_{ns}^* = -D(1-\nu) \left[ \sin\beta \cos\beta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w^*}{\partial r} - \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^2} \right) \right] \quad (2.95)$$

$$V_n^* = -D \left( \frac{\partial}{\partial r} \Delta w^* \cos\beta \right) - \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial r} \sin\beta + \left( \frac{1}{R} - \frac{\cos\beta}{r} \right) \frac{\partial M_{ns}^*}{\beta} \quad (2.96)$$

Estas expressões após as derivações resultam:

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi} \left[ (1+\nu) \ln r + (1-\nu) \cos^2\beta + \nu \right] \quad (2.97)$$

$$M_{ns}^* = \frac{1-\nu}{8\pi} \sin 2\beta \quad (2.98)$$

$$V_n^* = \frac{\cos\beta}{4\pi r} \left[ 2(1-\nu) \sin^2\beta - 3 + \nu \right] + \frac{1-\nu}{4\pi R} \cos 2\beta \quad (2.99)$$

onde:  $\cos\beta = n_i r_i$

$\sin\beta = -s_i r_i$

Conforme se verá no capítulo 3, tem especial interesse as derivadas de deslocamento fundamental  $w^*$ , sua derivada  $\partial w^*/\partial n$ , bem como dos esforços  $M_n^*$ ,  $M_{ns}^*$  e  $V_n^*$ , em relação à coordenada  $n$ , de um sistema de referência cartesiano  $(n,u)$  com origem em  $q$ . (Ver figura 2.9).

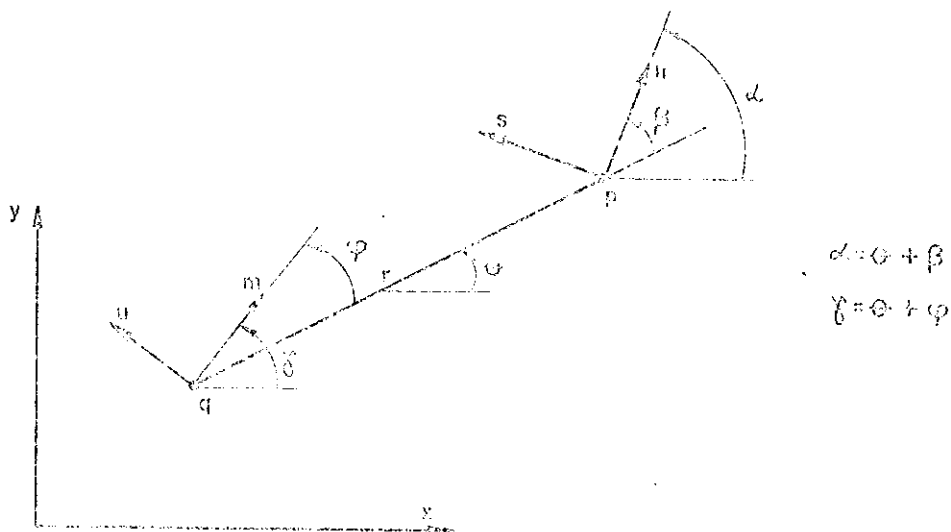


Fig. 2.9 - Sistemas de coordenadas  $(n,s)$  e  $(m,u)$ .

Da mesma forma que foram calculados os deslocamentos e esforços fundamentais em relação ao ponto  $p$ , serão calculados agora em relação ao ponto  $q$ .

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{\partial w^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial m} \quad (2.100)$$

onde:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial x(q)} \frac{\partial x(q)}{\partial m} + \frac{\partial r}{\partial y(q)} \frac{\partial y(q)}{\partial m} \quad (2.101)$$

Analogamente ao que foi encontrado em (2.86), são obtidas as derivadas primeira e segunda de  $r$  em relação à direção  $x_j$ , definida no ponto  $q$ , dadas pelas seguintes expressões:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(q)} = - \frac{x_i(p) - x_i(q)}{r} = - r_{,i} \quad (2.102.a)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i(q) \partial x_j(q)} = - \frac{\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}}{r} = - r_{,ij} \quad (2.102.b)$$

Usando-se a mesma transformação dada em (2.36), para o sistema de coordenadas  $(m, \mu)$ , definido conforme figura 2.9, encontram-se as derivadas de  $x(q)$  e  $y(q)$  em relação a direção  $m$ , dadas por:

$$\frac{\partial x(q)}{\partial m} = \cos\gamma = m_x \quad (2.103.a)$$

$$\frac{\partial y(q)}{\partial m} = \text{sen}\gamma = m_y \quad (2.103.b)$$

onde,  $m_x$  e  $m_y$  são as projeções do vetor  $\vec{m}$  nas direções  $x$  e  $y$ .

Levando-se as expressões (2.102) e (2.103) em (2.101), obtém-se:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = m_x r_{,x}(q) + m_y r_{,y}(q) = \vec{m} \cdot \vec{r} = - (m_x r_x + m_y r_y) \quad (2.104)$$

Portanto  $\partial w^*/\partial m$  fica:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{r}{4\pi D} \ln r(\vec{m}, \vec{r}) = - \frac{r}{4\pi D} \ln r \cos\phi \quad (2.105)$$

onde:

$$\cos\phi = \cos(\gamma - \theta) = \cos\gamma \cos\theta + \text{sen}\gamma \text{sen}\theta \quad (2.106)$$

Indicialmente pode-se escrever:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = - \frac{r}{4\pi D} \ln r (m_i r_i) \quad (2.107)$$

A derivada  $\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n} \right)$  será obtida a partir da expressão (2.92).

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) \frac{\partial r}{\partial m} \quad (2.108)$$

Fazendo-se as derivações necessárias obtêm-se:

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) = - \frac{1}{4\pi D} \left[ (m_x r_x + m_y r_y) (n_x r_x + n_y r_y) + (m_x n_x + m_y n_y) \ell_{nr} \right] \quad (2.109)$$

ou indicialmente:

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) = - \frac{1}{4\pi D} \left[ (m_i r_i) (n_i r_i) + (m_i n_i) \ell_{nr} \right] \quad (2.110)$$

Para as demais soluções fundamentais, derivadas em  $m$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_n^*}{\partial m} &= \frac{1}{4\pi r} \left\{ (1+\nu) (m_i r_i) + 2(1-\nu) (n_i r_i) \left[ (m_i n_i) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (m_i r_i) (n_i r_i) \right] \right\} \quad (2.111) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial m} &= \frac{1-\nu}{4\pi r} \left[ (m_i n_i) (s_i r_i) + (m_i s_i) (n_i r_i) + \right. \\ &\quad \left. - 2(m_i r_i) (n_i r_i) (s_i r_i) \right] \quad (2.112) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n^*}{\partial m} &= \frac{1}{4\pi r} \left\{ 2(1-\nu) (s_i r_i) \left[ 4(s_i r_i) (m_i r_i) (n_i r_i) - 2(m_i s_i) (n_i r_i) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (s_i r_i) (m_i n_i) \right] + (3-\nu) \left[ (m_i n_i) - 2(m_i r_i) (n_i r_i) \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{1-\nu}{\pi Rr} (s_i r_i) \left[ (m_i s_i) - (m_i r_i) (r_i s_i) \right] \quad (2.113) \end{aligned}$$

### CAPÍTULO III

#### EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO EM PLACAS

##### 3.1 - Introdução

Para a formulação do método dos elementos de contorno a ser tratada no próximo capítulo, é necessário a obtenção de equações integrais, envolvendo as soluções fundamentais vistas no capítulo anterior.

Estas equações integrais serão obtidas a partir da aplicação do primeiro teorema de Betti, ou teorema da reciprocidade, a uma placa submetida a dois carregamentos não simultâneos  $g$  e  $g^*$ , que dão origem a dois estados de tensão e deslocamento distintos.

Integrando-se por partes a expressão obtida pela aplicação do teorema de Betti, obtêm-se equações integrais finais, relacionando o deslocamento  $w(q)$  de um ponto qualquer do domínio a deslocamentos e esforços no contorno. Daí, estas equações integrais também serem chamadas de equações integrais de contorno.

Com a finalidade de se compatibilizar o número de incógnitas e equações, optou-se neste trabalho por uma formulação que utiliza duas equações integrais, a do deslocamento transversal  $w(q)$  e da sua derivada direcional  $\partial w(q)/\partial m$ .

### 3.2 - Equação integral para um ponto do domínio

Seja uma placa isotrópica qualquer de contorno  $\Gamma$  e domínio  $\Omega$ , contida em uma placa infinita de contorno  $\Gamma_\infty$  e domínio  $\Omega_\infty$ , conforme figura 3.1.

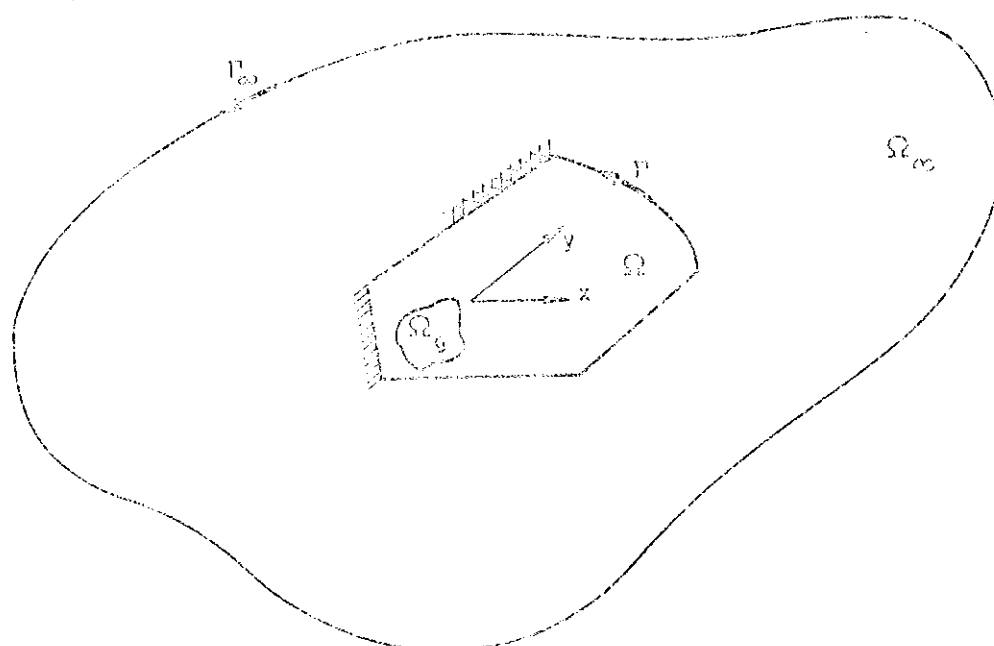


Fig. 3.1 - Placa finita contida em uma placa infinita.

A placa de dimensões finitas será submetida a dois carregamentos não simultâneos,  $g$ , distribuído na área  $\Omega_g$  e  $g^*$ . O símbolo  $*$  será usado para definir carregamento e soluções fundamentais, sendo as superfícies elásticas associadas aos dois carregamentos definidas respectivamente por  $w$  e  $w^*$ .

Considerando-se os dois estados de tensão produzidos por  $g$  e  $g^*$ ,  $\sigma_{ij}$  e  $\sigma_{ij}^*$  e seus respectivos estados de deformação,  $\epsilon_{ij}$  e  $\epsilon_{ij}^*$ , pode-se escrever:



$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV \quad (3.1)$$

$i, j = 1, 2, 3$

A identidade (3.1) é conhecida como primeiro teorema de Betti [77], ou teorema da reciprocidade.

O produto tensorial do termo da direita em (3.1) pode ser escrito em notação clássica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* &= \sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \sigma_z \varepsilon_z^* + \\ &+ 2(\sigma_{xy} \varepsilon_{xy}^* + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz}^* + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz}^*) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Desprezando-se as tensões relativas à direção normal ao plano da placa e denominando-se o termo da direita em (3.1) de U, obtém-se:

$$U = \int_V (\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy}^*) dV \quad (3.3)$$

Substituindo-se os valores de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_{xy}$  dados em (2.16) e  $\varepsilon_x^*$ ,  $\varepsilon_y^*$  e  $\varepsilon_{xy}^*$  dados em (2.14), e desprezando-se os infinitésimos de ordem superior, nos deslocamentos tangenciais u, v e  $u^*$ ,  $v^*$ , obtém-se para a integral do primeiro termo de U a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_x \varepsilon_x^* dV &= \int_V \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ -z \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial u^*}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right] + \right. \\ &\left. + z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right\} dV \end{aligned} \quad (3.4)$$

Integrando-se a equação acima na espessura, o termo em "z" se anula e (3.4) transforma-se numa integral sobre o domínio  $\Omega$ , isto é:

$$\int_V \sigma_x \varepsilon_x^* dV = \int_{\Omega} D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega \quad (3.5)$$

onde a rigidez à flexão  $D$  é dada na expressão (2.21).

Procedendo-se de forma análoga para os outros dois termos de (3.3) obtêm-se:

$$U = \int_{\Omega} \left[ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + 2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right] d\Omega \quad (3.6)$$

A partir das expressões de  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$  definidas em (2.20), a expressão (3.6) pode ser escrita da seguinte forma:

$$U = \int_{\Omega} \left( -M_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right) d\Omega \quad (3.7)$$

A expressão (3.7) representa a redução da integral sobre o volume (3.3) em uma integral sobre o domínio. Esta integral agora deve ser transformada em integral sobre o contorno, o que será feito isoladamente para cada parcela de (3.7), denominadas  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ .

Integrando-se por partes a primeira parcela de (3.7), na direção  $x$ , obtêm-se:

$$u_1 = - \int_{\Omega} M_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = - \int_{\Gamma} M_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \eta_x d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} d\Omega \quad (3.8)$$

onde  $\eta_x$  é o cosseno diretor do versor normal ao contorno na direção  $x$ . Conforme a figura 3.2, pode-se escrever:

$$\eta_x = \cos \alpha \quad (3.9.a)$$

$$\eta_y = \sin \alpha \quad (3.9.b)$$

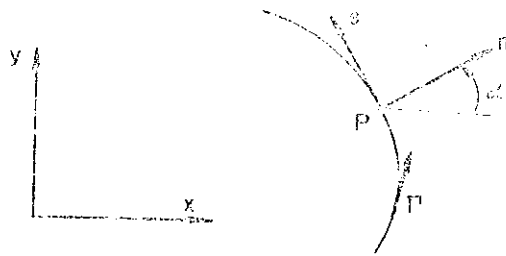


Fig. 3.2 - Sistema de coordenadas (n,s), normal e tangente ao contorno.

Integrando-se por partes a segunda parcela de (3.8), o valor de  $u_1$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$u_1 = \int_{\Gamma} \left( -M_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial M_x}{\partial x} w^* \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} w^* d\Omega \quad (3.10)$$

Integrando-se por partes a segunda parcela de (3.7), na direção  $y$ , obtêm-se:

$$u_2 = \int_{\Omega} -M_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} d\Omega = - \int_{\Gamma} M_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial y} d\Omega \quad (3.11)$$

Integrando-se novamente por partes, chega-se a seguinte expressão para  $u_2$ :

$$u_2 = \int_{\Gamma} \left( M_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + \frac{\partial M_y}{\partial y} w^* \sin \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} w^* d\Omega \quad (3.12)$$

A terceira parcela de (3.7), denominada  $u_3$ , pode ser escrita da seguinte forma:

$$u_3 = - \int_{\Omega} M_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega - \int_{\Omega} M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} d\Omega \quad (3.13)$$

Integrando-se por partes a primeira parcela de (3.13) em relação a  $x$  e a segunda em relação a  $y$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 u_3 = & - \int_{\Gamma} M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha \, d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial y} \, d\Omega + \\
 & - \int_{\Gamma} M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \, d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial x} \, d\Omega
 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Integrando-se mais uma vez por partes e agrupando-se as integrais de contorno e domínio, chega-se a:

$$\begin{aligned}
 u_3 = & \int_{\Gamma} \left( -M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha - M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} w^* \cos \alpha + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} w^* \sin \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} w^* \, d\Omega
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

com os valores de  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  dados em (3.10), (3.12) e (3.15) obtêm-se o valor de  $U$ .

$$\begin{aligned}
 U = & - \int_{\Gamma} \left( M_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + M_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha + \right. \\
 & \left. + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} \left[ \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cos \alpha + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \sin \alpha \right] w^* \, d\Gamma - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right) w^* \, d\Omega
 \end{aligned} \quad (3.16)$$

A partir de (3.16), (2.27), (2.28) e (2.41) pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 U = & - \int_{\Gamma} \left( M_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + M_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha + \right. \\
 & \left. + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n w^* \, d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* \, d\Omega
 \end{aligned} \quad (3.17)$$

A partir de (2.36) pode-se escrever:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \quad (3.18.a)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial y} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \operatorname{sen} \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \operatorname{coss} \alpha \quad (3.18b)$$

Substituindo-se  $\partial w^*/\partial x$  e  $\partial w^*/\partial y$  dados em (3.18) na expressão (3.17) e agrupando-se os termos em  $\partial w^*/\partial n$  e  $\partial w^*/\partial s$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned} U = & - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial n} (M_x \cos^2 \alpha + 2M_{xy} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{coss} \alpha + M_y \operatorname{sen}^2 \alpha) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial w^*}{\partial s} [(M_y - M_x) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{coss} \alpha + M_{xy} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)] \right\} d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma} Q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \end{aligned} \quad (3.19)$$

De (3.19) e (2.40), obtêm-se:

$$U = - \int_{\Gamma} (M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - Q_n w^*) d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.20)$$

Integrando-se por partes o segundo termo da integral de contorno em (3.20), obtêm-se:

$$\int_{\Gamma} (M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s}) d\Gamma = M_{ns} w^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (3.21)$$

onde,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são as coordenadas dos limites do contorno no qual se realiza a integração.

Para o caso de um contorno fechado, cuja representação paramétrica e a respectiva derivada sejam contínuas, ou seja, contorno sem cantos, a primeira parcela de (3.21) se anula.

Quando o contorno apresenta cantos, esta parcela não se anula (ver figura 3.3), dando origem às reações de canto das placas.

Aplicando-se a primeira parcela de (3.21), agora transformada em somatório sobre todos os lados do contorno,

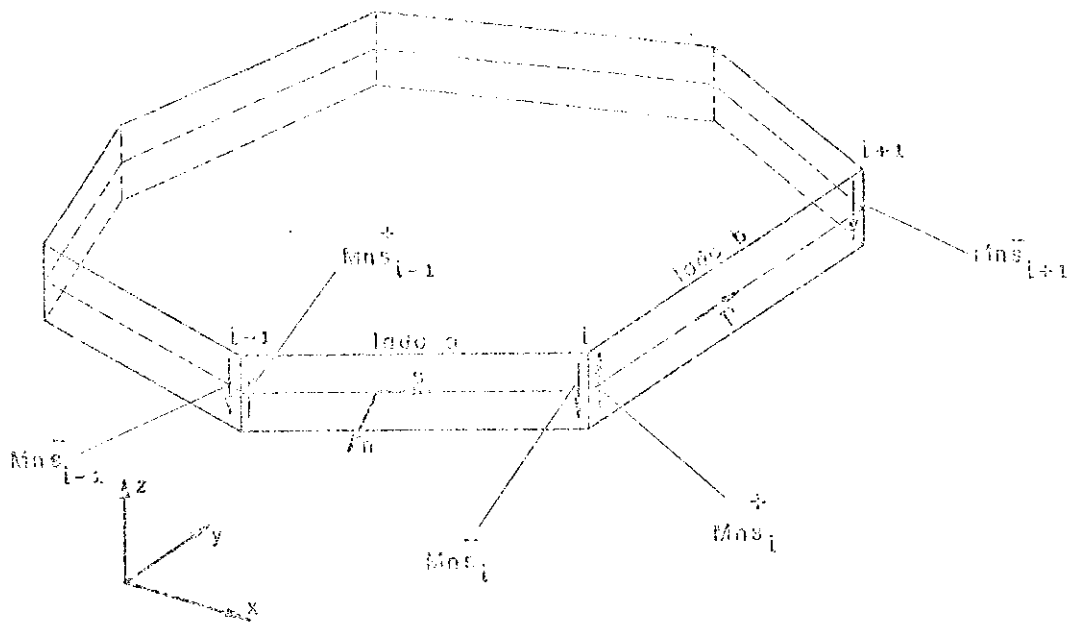


Fig. 3.3 - Canto i da placa

apenas nos lados a e b mostrados na figura 3.3, obtêm-se:

$$(M_{ns, i}^- w_i^* - M_{ns, i-1}^+ w_{i-1}^*) + (M_{ns, i+1}^- w_{i+1}^* - M_{ns, i}^+ w_i^*) \quad (3.22)$$

De (3.22), considerando-se apenas o canto i, pode-se escrever:

$$= (M_{ns, i}^+ - M_{ns, i}^-) w_i^* \quad (3.23)$$

A expressão (3.23) é válida para todos os cantos, ficando portanto a primeira parcela de (3.21) estendida a todo o contorno, dada por:

$$\sum_{j=1}^{N_l} M_{ns, j} w_j^* \Big|_{\Gamma_{j1}}^{\Gamma_{j2}} = - \sum_{i=1}^{N_c} (M_{ns, i}^+ - M_{ns, i}^-) w_{ci}^* \quad (3.24)$$

- onde:
- $N_l$  = número de lados
  - $N_c$  = número de cantos
  - $w_{ci}^*$  = deslocamento fundamental do canto i

O termo  $(M_{ns_i}^+ - M_{ns_i}^-)$  pode ser interpretado como uma reação de canto para o ponto  $i$  [74], podendo-se escrever:

$$R_{ci} = M_{us_i}^+ - M_{ns_i}^- \quad (3.25)$$

Substituindo-se (3.25) em (3.24) resulta:

$$\sum_{j=1}^{N_c} M_{ns_j} w_j^* \left[ \int_{\Gamma_{j2}} - \int_{\Gamma_{j1}} \right] = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* \quad (3.26)$$

Portanto a expressão (3.21) pode ser reescrita usando-se (3.26):

$$\int_{\Gamma} (M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s}) d\Gamma = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (3.27)$$

Levando-se (3.27) em (3.20) resulta:

$$U = \int_{\Gamma} (Q_n w^* + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.28)$$

Usando-se a equação (2.44) em (3.28) obtêm-se:

$$U = \int_{\Gamma} (V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.29)$$

A integral de domínio em (3.29), pode ser reescrita levando-se em conta que a carga  $g$  só existe no domínio  $\Omega_g$ .

$$\int_{\Omega} g w^* d\Omega = \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (3.30)$$

Obtendo-se finalmente:

$$U = \int_{\Gamma} (V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (3.31)$$

O termo da esquerda de (3.1), pode ser determinado analogamente:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_j dV = \int_{\Gamma} (V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega \quad (3.32)$$

De (3.31) e (3.32) chega-se a expressão final do teorema de Betti aplicado às placas.

$$\int_{\Gamma} (V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega =$$

$$\int_{\Gamma} (V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (3.33)$$

Conforme já mencionado,  $g^*$ , é uma carga unitária aplicada num ponto  $q$  qualquer do domínio da placa e sua representação matemática é a distribuição delta de Dirac,  $\delta(q,p)$ . Os deslocamentos e esforços oriundos de  $g^*$ , denominados fundamentais, são funções do ponto de aplicação da carga, ponto de carregamento  $q$ , e do ponto de deslocamento  $p$ , no domínio ou  $P$  se estiver no contorno.

Os deslocamentos e esforços provenientes da carga distribuída  $g$ , uma vez que a mesma tem posição previamente fixada, só dependem do ponto onde os efeitos de  $g$  são medidos, ou seja, do ponto de deslocamento  $p$  ou  $P$ .

Substituindo-se em (3.33)  $g^*$  por  $\delta(q,p)$  e escrevendo-se cada variável em função de dois pontos quando se tratar de solução fundamental e de um ponto em caso contrário, obtêm-se:

$$\int_{\Omega} \delta(q,p) w(p) d\Omega(p) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(q,P) w(P) - M_n^*(q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) +$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q,P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) w^*(q,P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] d\Gamma(P) +$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q,P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega_g(p) \quad (3.34)$$



Aplicando-se a propriedade (2.70) ao primeiro termo de (3.34) obtêm-se:

$$\int_{\Omega} \delta(q, p) w(p) d\Omega(p) = w(q) \quad (3.35)$$

Portanto a expressão final do teorema de Betti para placas fica:

$$\begin{aligned} w(q) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.36) \end{aligned}$$

A expressão (3.36) é a representação integral do deslocamento  $w$ , de um ponto  $q$  do domínio da placa, envolvendo soluções fundamentais, obtidas no capítulo 2, e variáveis do contorno: os deslocamentos  $w(P)$ ,  $\partial w(P)/\partial n$  e seus correspondentes esforços  $V_n(P)$ ,  $M_n(P)$ .

Conforme se verá posteriormente, na formulação adotada será preciso além da equação integral do deslocamento  $w(q)$ , a equação da sua derivada em relação à direção  $n$ , definida no ponto  $q$  (ver figura 2.9).

Derivando-se portanto (3.36) em relação a  $m$ , obtêm-se a representação integral da derivada  $\partial w/\partial m$ , para um ponto  $q$  do domínio da placa.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(q)}{\partial m} + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) + \right. \\ \left. - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(q, P) + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial n} (q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.37)$$

### 3.3 - Equação integral para um ponto do contorno

As equações (3.36) e (3.37) foram definidas para pontos "q" do domínio; entretanto, para a formulação do problema de flexão de placas pelo método dos elementos de contorno é necessária a obtenção de equações integrais para pontos Q do contorno.

Considere-se a figura 3.4, onde um ponto Q inicialmente do contorno, torna-se pertencente ao domínio pelo acréscimo do contorno circular  $\Gamma_\xi$ , de centro em Q e raio  $\xi$ .

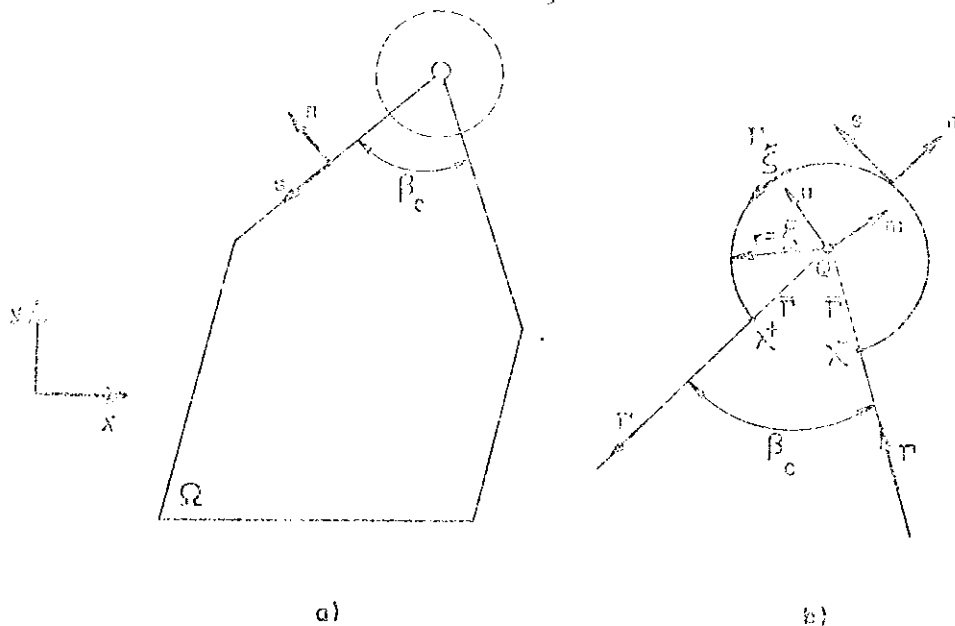


Fig. 3.4 - Contorno circular acrescido a um canto Q da placa.

A equação integral do ponto Q, agora com o contorno alterado, poderá ser escrita a partir da equação (3.36).

$$w(Q) + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[ V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n} (P) \right] d\Gamma(P) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Gamma_{\xi}} \left[ V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_{\xi}(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_{c-1}} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) + R_{c\lambda-}^*(Q, P) w_{c\lambda-}(P) + R_{c\lambda+}^*(Q, P) w_{c\lambda+}(P) = \\
 & = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \int_{\Gamma_{\xi}} \left[ V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma_{\xi}(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_{c-1}} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + R_{c\lambda-}(P) w_{c\lambda-}^*(Q, P) + R_{c\lambda+}(P) w_{c\lambda+}^*(Q, P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

O ponto Q será do contorno quando o raio  $\xi$  tender a zero e  $w(Q)$  será calculado na condição limite.

$$\begin{aligned}
 w(Q) & + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \left[ V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_{\xi}(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_{c-1}} R_{ci}^*(Q, P) w(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ R_{c\lambda-}^*(Q, P) w_{c\lambda-}(P) + R_{c\lambda+}^*(Q, P) w_{c\lambda+}(P) \right] = \\
 & = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \left[ V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma_{\xi}(P) + \sum_{i=1}^{N_{c-1}} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ R_{c\lambda-}(P) w_{c\lambda-}^*(Q, P) + R_{c\lambda+}(P) w_{c\lambda+}^*(Q, P) \right] + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

Os limites das integrais sobre  $\Gamma-\tilde{\Gamma}$  indicadas em (3.39), por definição, representam o valor principal das mesmas [74]. Assim pode-se escrever:

$$\lim_{\tilde{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\tilde{\Gamma}} \left[ v_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) = \int_{\Gamma} \left[ v_n^*(Q,P)w(P) + M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) \quad (3.40)$$

$$\lim_{\tilde{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\tilde{\Gamma}} \left[ v_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) = \int_{\Gamma} \left[ v_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) \quad (3.41)$$

Segundo [74] pode-se escrever:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \left[ v_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_{\xi}(P) = - \frac{2\pi - \beta_c}{2\pi} w(Q) \quad (3.42)$$

onde:

$\beta_c$  = ângulo do canto Q da placa.

Ainda segundo [74] os demais limites sobre  $\xi$  se anulam e a equação (3.39) pode ser escrita na seguinte forma:

$$K(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left[ v_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q,P)w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[ v_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(P)w^*(Q,P)d\Omega_g(P) \quad (3.43)$$

onde:

$$K(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \quad (3.44)$$

Para o caso particular em que o ponto Q não pertencer a um canto do contorno, a expressão (3.44) resulta em:

$$K(Q) = \frac{1}{2} \quad (3.45)$$

A equação (3.43) é portanto a representação integral do deslocamento w de um ponto Q do contorno.

Conforme foi visto no final do item 3.2, será preciso calcular a derivada  $\partial w(Q)/\partial m$  a partir da equação (3.38), obtendo-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(Q)}{\partial m} + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m} (Q,P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m} (Q,P) \frac{\partial w}{\partial n} (P) \right] d\Gamma(P) + \\ \int_{\Gamma_{\xi}} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m} (Q,P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m} (Q,P) \frac{\partial w}{\partial n} (P) \right] d\Gamma_{\xi}(P) + \\ \sum_{i=1}^{N_c-1} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial m} (Q,P) w_{c_i}(P) + \frac{\partial R_{c_{\lambda^-}}^*}{\partial m} (Q,P) w_{c_{\lambda^-}}(P) + \\ + \frac{\partial R_{c_{\lambda^+}}^*}{\partial m} (Q,P) w_{c_{\lambda^+}}(P) = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left\{ v_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q,P) + \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial n} (Q,P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{c_i}(P) \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial m} (Q,P) + \\ + R_{c_{\lambda^-}}(P) \frac{\partial w_{c_{\lambda^-}}^*}{\partial m} (Q,P) + R_{c_{\lambda^+}}(P) \frac{\partial w_{c_{\lambda^+}}^*}{\partial m} (Q,P) + \int_{\Omega_g} g(P) w^*(Q,P) d\Omega_g(P) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Analogamente ao que foi feito para o deslocamento w(Q), a expressão (3.46) representará a derivada de um ponto Q do contorno quando se calcularem os limites indicados a seguir:

$$\frac{\partial w(Q)}{\partial m} + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m} (Q,P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m} (Q,P) \frac{\partial w}{\partial n} (P) \right] d\Gamma(P) +$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m} (Q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m} (Q, P) \frac{\partial w}{\partial n} (P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
& \sum_{i=1}^{N_{c-1}} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m} (Q, P) w_{ci}(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial R_c^*}{\partial m} \lambda^- (Q, P) w_{c\lambda^-}(P) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial R_c^*}{\partial m} \lambda^+ (Q, P) w_{c\lambda^+}(P) \right] = \lim_{\tilde{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\tilde{\Gamma}-\tilde{\Gamma}} \left\{ v_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) + \right. \\
& \left. - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n} (Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ v_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) + \right. \\
& \left. - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n} (Q, P) \right] \right\} d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{N_{c-1}} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m} (Q, P) + \\
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ R_{c\lambda^-}(P) \frac{\partial w_c^*}{\partial m} \lambda^- (Q, P) + R_{c\lambda^+}(P) \frac{\partial w_c^*}{\partial m} \lambda^+ (Q, P) \right] + \\
& + \int_{\Omega_g} \varepsilon(P) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) d\Omega_g(P) \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Para remover a singularidade envolvida na equação (3.47) quando  $\xi \rightarrow 0$ , é conveniente dar a placa um deslocamento vertical de corpo rígido igual a  $-w(Q)$  [74]. Todas as derivadas permanecem inalteradas e lembrando que os limites das integrais sobre  $\tilde{\Gamma}-\tilde{\Gamma}$ , são os valores principais das integrais sobre  $\tilde{\Gamma}$ , a equação (3.47) fica:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w(Q)}{\partial m} + \int_{\tilde{\Gamma}} \left\{ \frac{V_n^*}{\partial m} (Q, P) [w(P) - w(Q)] - \frac{\partial M_n^*}{\partial m} (Q, P) \frac{\partial w}{\partial n} (P) \right\} d\tilde{\Gamma}(P) + \\
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial m} (Q, P) [w(P) - w(Q)] - \frac{\partial M_n^*}{\partial m} (Q, P) \frac{\partial w}{\partial n} (P) \right\} d\Gamma_\xi(P) + \\
& \sum_{i=1}^{N_{c-1}} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m} (Q, P) [w_{ci}(P) - w(Q)] + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial R_c^*}{\partial m} \lambda^- (Q, P) [w_{c\lambda^-}(P) + \right. \\
& \left. - w(Q)] + \frac{\partial R_c^*}{\partial m} \lambda^+ (Q, P) [w_{c\lambda^+}(P) - w(Q)] \right\} = \int_{\tilde{\Gamma}} \left\{ v_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n} (Q, P) \right] d\Gamma(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ v_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) + \right. \\
& - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) \right] \left. \right\} d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{c_i}(P) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ R_{c_{\lambda-}}(P) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) + R_{c_{\lambda+}}(P) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) \right] + \\
& + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Os limites quando  $\xi \rightarrow 0$  ficam [74]:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ \frac{\partial v_n^*}{\partial m} (Q, P) \left[ w(P) - w(Q) \right] - \frac{\partial M_n^*}{\partial m} (Q, P) \frac{\partial w}{\partial n} (P) \right\} d\Gamma_\xi(P) = \\
& - \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[ (4\pi - 2\beta_c) + \text{sen}2(\gamma + \beta_c) - \text{sen}2\gamma \right] \frac{\partial w}{\partial m} (Q) + \left[ \cos2(\gamma + \beta_c) + \right. \right. \\
& \left. \left. - \cos2\gamma \right] \frac{\partial w}{\partial u} (Q) \right\} \quad (3.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial R_{c_{\lambda-}}^*}{\partial m} (Q, P) \left[ w_{c_{\lambda-}}(P) - w(Q) \right] + \frac{\partial R_{c_{\lambda+}}^*}{\partial m} (Q, P) \left[ w_{c_{\lambda+}}(P) + \right. \right. \\
& \left. \left. - w(Q) \right] \right\} = \frac{1-\nu}{4\pi} \left\{ - \left[ \text{sen}2\gamma - \text{sen}2(\gamma + \beta_c) \right] \frac{\partial w}{\partial m} (Q) + \right. \\
& \left. + \left[ -\cos2\gamma + \cos2(\gamma + \beta_c) \right] \frac{\partial w}{\partial u} (Q) \right\} \quad (3.50)
\end{aligned}$$

onde  $\gamma$  é o ângulo entre os sistemas de coordenadas  $(n, s_1)$  e  $(m, u)$  (ver figura 3.5).

Os demais limites indicados em (3.48) dependentes de  $\xi$  são nulos [74].

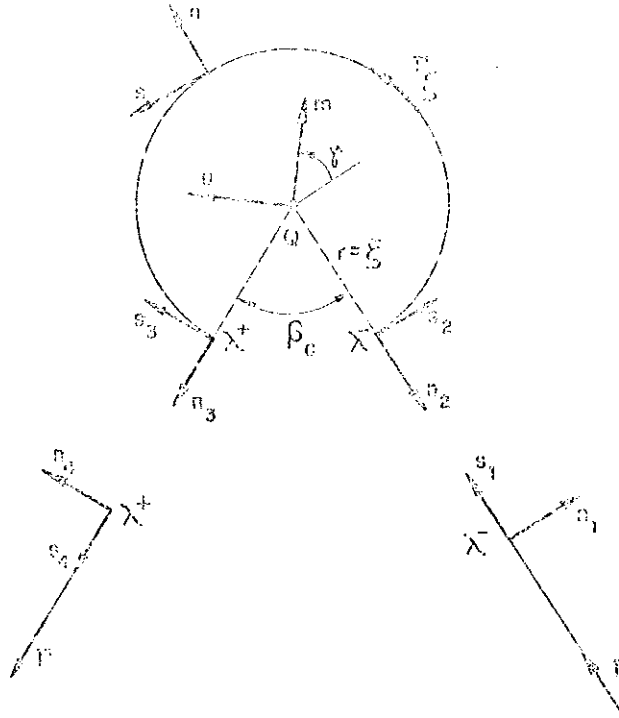


Fig. 3.5 - Sistemas de coordenadas associados aos pontos anterior e posterior ao canto.

Levando-se (3.49) e (3.50) em (3.48), e agrupando-se os termos em  $\partial w(Q)/\partial m$  e  $\partial w(Q)/\partial u$  chega-se a [74]:

$$\begin{aligned}
 & K_1 \frac{\partial w(Q)}{\partial m} + K_2 \frac{\partial w(Q)}{\partial u} + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m} (Q, P) w(P) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial M_n^*}{\partial m} (Q, P) \frac{\partial w}{\partial n} (P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m} (Q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left\{ v_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) + \right. \\
 & \left. - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n} (Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} K_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m} (Q, P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(P) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) d\Omega_g(P) \quad (3.51)
 \end{aligned}$$



onde,

$$K_1 = \frac{\beta_c}{2\pi} + \frac{\nu}{4\pi} \left[ \operatorname{sen} 2\gamma - \operatorname{sen} 2(\gamma + \beta_c) \right] \quad (3.52a)$$

$$K_2 = \frac{\nu}{4\pi} \left[ \operatorname{cos} 2\gamma - \operatorname{cos} 2(\gamma + \beta_c) \right] \quad (3.52b)$$

$$K_w = K_1 \frac{\partial w(Q)}{\partial n} + K_2 \frac{\partial w(Q)}{\partial u} \quad (3.52c)$$

A coordenada  $m$ , sendo qualquer pode assumir direções normais ao contorno da placa em ambos os lados do canto  $Q$ , respectivamente  $m = n_1$  e  $m = n_4$  (ver figura 3.5).

Para  $m = n_1$  e escrevendo-se (3.52.b) só em função das normais aos lados,  $n_1$  e  $n_4$  [74], obtêm-se:

$$K_w = \frac{\beta_c}{2\pi} \frac{\partial w(Q)}{\partial n_1} + \frac{\nu}{2\pi} \operatorname{sen} \beta_c \frac{\partial w(Q)}{\partial n_4} \quad (3.53)$$

Analogamente para  $m = n_4$ , obtêm-se:

$$K_w = \frac{\nu}{2\pi} \operatorname{sen} \beta_c \frac{\partial w(Q)}{\partial n_1} + \frac{\beta_c}{2\pi} \frac{\partial w(Q)}{\partial n_4} \quad (3.54)$$

Portanto pode-se escrever, para cada canto  $Q$  do contorno, duas equações integrais para as derivadas do deslocamento em relação às duas direções normais aos lados que concorrem no canto. Estas duas equações serão relativas aos pontos anterior e posterior ao canto, e são obtidas respectivamente pela substituição de (3.53) e (3.54) em (3.51).

Para pontos do contorno com uma única tangente, ou seja, uma única normal, tem-se  $\beta_c = \pi$  e portanto as equações (3.53) e (3.54) são idênticas. Considerando-se ainda que  $m$  coincida com a direção normal ao contorno no ponto  $Q$  tem-se finalmente a equação integral da derivada do deslocamento  $w$  do ponto  $Q$  do contorno em relação à direção normal ao mesmo.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial w(Q)}{\partial m} + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial v^*}{\partial m} (Q, P) v(P) - \frac{\partial M^*}{\partial m} (Q, P) \frac{\partial v}{\partial n} (P) \right] d\Gamma(P) + \\
& \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R^*}{\partial m} c_i (Q, P) w_{c_i}(P) = \int_{\Gamma} \left\{ v_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) + \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} P_{c_i}(P) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) + \\
& + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m} (Q, P) d\Omega_g(P) \quad (3.55)
\end{aligned}$$

### 3.4 - Integrais de domínio para o carregamento

As integrais de domínio que aparecem nas equações (3.36), (3.37), (3.43) e (3.55), serão aqui transformadas em integrais sobre o contorno da região carregada  $\Omega_g$ .

Considere-se a figura 3.6 onde estão representados a região carregada  $\Omega_g$  e seu contorno  $\Gamma_g$ , além do ponto  $q$ , ponto de carregamento.

As integrais de domínio a serem transformadas são:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.56)$$

$$\int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m} (q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.57)$$

$$\text{onde: } w^* = \frac{r^2}{8\pi D} (\lambda r r - \frac{1}{2}) \quad e, \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = - \frac{r}{4\pi D} \lambda n r \cos \phi \quad (2.105)$$

Admitindo-se que a carga  $g$  varia linearmente na região  $\Omega_g$ , obtêm-se a expressão de  $g$  em relação ao sistema de coordenadas  $(x, y)$ .

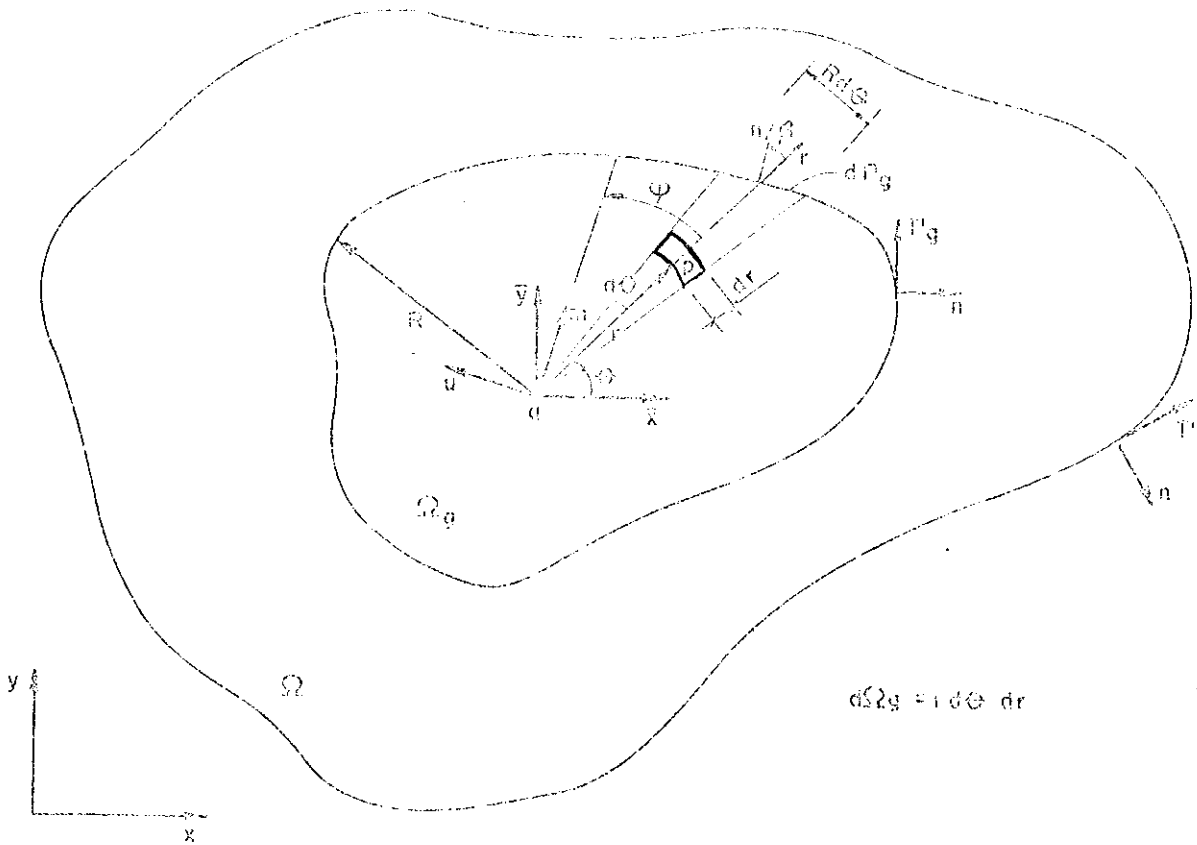


Fig. 3.6 - Região carregada  $\Omega_g$

$$g = Ax(p) + By(p) + C \quad (3.58)$$

Em relação ao sistema  $(\bar{x}, \bar{y})$ , de origem em  $q$  (ver figura 3.6), obtêm-se:

$$x(p) = x(q) + \bar{x}(p) \quad (3.59.a)$$

$$y(p) = y(q) + \bar{y}(p) \quad (3.59.b)$$

A equação (3.58) pode agora ser reescrita:

$$g = Ax(q) + By(q) + C + A\bar{x}(p) + B\bar{y}(p) = g(q) + A\bar{x}(p) + B\bar{y}(p) \quad (3.60)$$

onde  $g(q)$  é o valor da intensidade da carga  $g$  no ponto  $q$ .

Levando-se a equação (3.50) escrita em coordenadas polares, na equação (3.56) obtêm-se:

$$\int_{\Omega_g} g(p)w^*(q,p)d\Omega_g(p) = \int_{\Omega_g} \left[ g(q) + A\cos\theta + B\text{sen}\theta \right] w^*(q,p)d\Omega_g(p) \quad (3.61)$$

Substituindo-se (2.82) em (3.61) e lembrando que  $g(q)$  é uma constante, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} g(p)w^*(q,p)d\Omega_g(p) &= \frac{g(q)}{8\pi D} \int_0^\theta \left[ \int_0^R r^3 \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) dr \right] d\theta + \\ &+ \frac{1}{8\pi D} \int_0^\theta \left[ \int_0^R (A\cos\theta + B\text{sen}\theta) r^4 \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) dr \right] d\theta \end{aligned} \quad (3.62)$$

Fazendo-se a integração em  $r$ , com o ângulo  $\theta$  constante, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} g(p)w^*(q,p)d\Omega_g(p) &= \frac{g(q)}{32\pi D} \int_0^\theta R^4 (\ln R - 0,75) d\theta + \\ &+ \frac{1}{40\pi D} \int_0^\theta R^5 (\ln R - 0,70) (A\cos\theta + B\text{sen}\theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.63)$$

Da figura 3.6 pode-se escrever:

$$d\Gamma_g \cos\beta = R d\theta \quad (3.64.a)$$

ou

$$d\theta = \frac{d\Gamma_g \cos\beta}{R} \quad (3.64.b)$$

Substituindo-se (3.64) em (3.63) obtêm-se a integral de domínio (3.56), transformada numa integral sobre o contorno  $\Gamma_g$ .

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega_g(p) = \frac{1}{40\pi D} \int_{\Gamma_g} R^4(\ln R - 0,70) (A \cos \theta + B \sin \theta) \cos \beta d\Gamma_g +$$

$$+ \frac{g(q)}{32\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3(\ln R - 0,75) \cos \beta d\Gamma_g \quad (3.65)$$

Procedendo-se de forma análoga, a integral de domínio (3.57) transforma-se na seguinte integral sobre o contorno de  $\Omega_g$  :

$$\int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial n} (q,p) d\Omega_g(p) = - \frac{1}{16\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3(\ln R - 0,25) (A \cos \theta +$$

$$+ B \sin \theta) \cos \phi \cos \beta d\Gamma_g - \frac{g(q)}{12\pi D} \int_{\Gamma_g} R^2(\ln R - 1/3) \cos \phi \cos \beta d\Gamma_g \quad (3.66)$$

Nas equações (3.65) e (3.66) a carga transversal  $g(p)$  é de variação linear. Para uma carga  $g(p)$  qualquer, as integrais (3.56) e (3.57) podem ser resolvidas, dividindo-se a região  $\Omega_g$  em subregiões menores, ou células, e fazendo-se o somatório das integrais sobre todas as células internas. A transformação da integral de domínio em integrais sobre células internas será vista no capítulo 5.

## CAPÍTULO IV

### MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

#### 4.1 - Introdução

No capítulo anterior foram obtidas as representações integrais dos deslocamentos e suas derivadas direcionais, relacionando-se deslocamentos e esforços no contorno.

A solução analítica destas equações é praticamente impossível para a maioria dos casos de análise estrutural, tornando-se a solução numérica aproximada, a alternativa viável para resolvê-las, transformando-as em equações algébricas. A transformação se efetua quando o contorno é dividido em segmentos, chamados "elementos de contorno", onde os deslocamentos e esforços são aproximados por funções previamente escolhidas.

Analisando-se as equações (3.43) e (3.55) nota-se que ambas expressam relações entre deslocamentos  $w$ ,  $\partial w/\partial n$  e esforços  $V_n$  e  $M_n$  para pontos do contorno. A aproximação numérica destas equações dão origem ao Método dos Elementos de Contorno - MEC que será descrito posteriormente.

to. Como as variáveis envolvidas são as reais do problema físico, esta formulação é dita direta [9].

As equações algébricas resultantes das transformações das equações integrais para todos os pontos do contorno, dão origem a um sistema de equações lineares, onde as incógnitas são os próprios deslocamentos e esforços do contorno. Satisfazendo as condições de contorno do problema, este sistema é resolvido e posteriormente valores de deslocamentos para pontos do domínio poderão ser obtidos a partir das equações (3.36) e (3.37).

Após a formulação do NEC serão apresentadas algumas aplicações práticas e os resultados serão comparados aos obtidos com a solução analítica da equação diferencial de placas, bem como aos de outras técnicas numéricas.

#### 4.2 - Discretização das equações integrais

Na figura 4.1 mostra-se uma placa cujo contorno foi dividido em um número finito de segmentos ou "elementos de contorno"  $\Gamma_i$ . Para um contorno de forma qualquer, o número e a forma dos elementos são escolhidos, visando-se a discretização mais adequada para representar o contorno real.

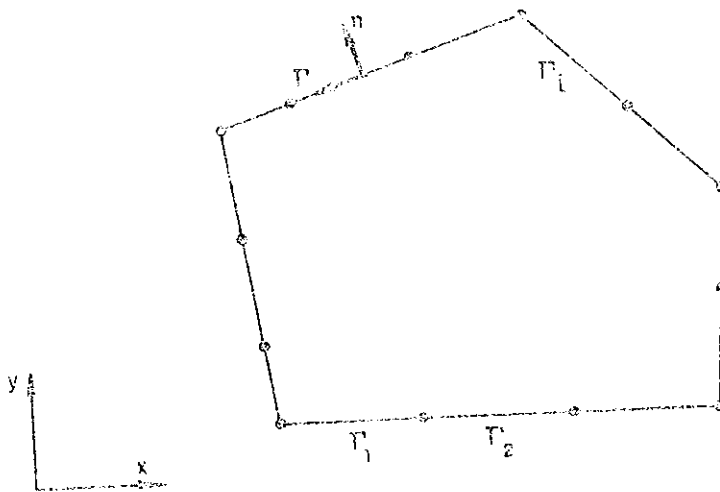


Fig. 4.1 - Discretização do contorno da placa

Os deslocamentos e esforços são aproximados em cada elemento por funções polinomiais, que definirão o número de "nós" ou "pontos nodais" do elemento. Os valores das variáveis associadas aos "nós" são chamados de "valores nodais".

Neste trabalho será considerado apenas o elemento linear contínuo, ou seja, geometria e esforços variando linearmente ao longo do elemento. Cada elemento é definido apenas por dois pontos situados nas suas extremidades.

#### 4.2.1 - Elemento linear contínuo

A aproximação da geometria para este elemento é linear, o que implica em "elementos de contorno" retos.

Os deslocamentos e esforços do contorno são também aproximados por funções lineares. Assim, sendo utilizada a mesma função linear para aproximar a geometria e as variáveis, tem-se o elemento isoparamétrico linear.

É conveniente, para a integração numérica sobre o elemento (ver item 4.3.1), expressar as coordenadas de cada ponto em função de coordenadas locais homogêneas " $\xi$ ". Para um ponto "m" qualquer do elemento "j" (ver fig. 4.2), pode-se escrever:

$$\underline{x}^m = \underline{\phi}^T(\xi) \underline{X}^{(R)} \quad (4.1)$$

onde:

$$\underline{x}^m = \left\{ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} \right\}^m \quad (4.2)$$

$$\underline{\phi}^T(\xi) = \begin{bmatrix} \underline{\phi}^T & 0 \\ 0 & \underline{\phi}^T \end{bmatrix} \quad (4.3)$$



$$\vec{x}^{(N)} = \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

O sistema de coordenadas  $(x,y)$  foi aqui substituído por  $(x_1, x_2)$  e o índice  $(N)$  utilizado para indicar valores nodais.

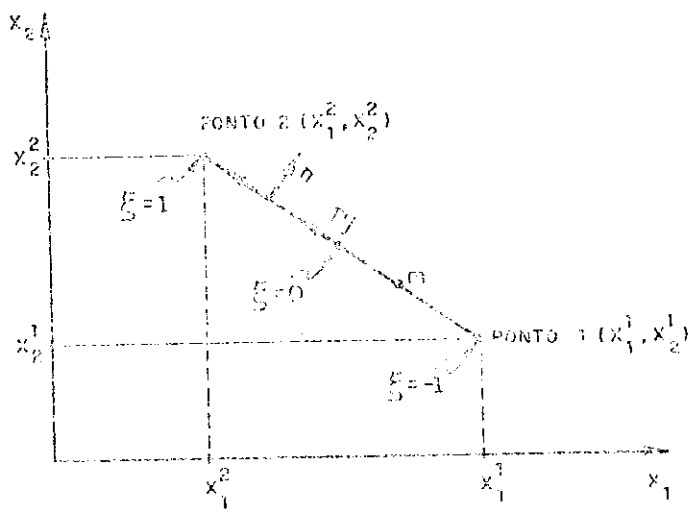


Fig. 4.2 - Descrição geométrica do elemento linear

O vetor das funções aproximadoras  $\vec{\phi}$  é dado por:

$$\vec{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

onde:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad (4.6.a)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad (4.6.b)$$

A expressão (4.1) pode ser escrita de uma forma explícita, como indicado abaixo:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} & \underline{0} \\ \underline{0} & \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_1^2 \\ X_2^1 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

A aproximação das variáveis pode ser feita da mesma forma (ver fig. 4.3).

$$\underline{u}^m = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^m = \underline{\phi}^T(\xi) \underline{U}^{(N)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} & \underline{0} \\ \underline{0} & \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\underline{p}^m = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^m = \underline{\phi}^T(\xi) \underline{P}^{(N)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} & \underline{0} \\ \underline{0} & \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_2^1 \\ P_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Os deslocamentos serão representados genericamente por  $u$ , para um ponto qualquer do elemento e por  $U$  para os pontos nodais. Assim para o elemento  $j$  (ver fig. 4.3), tem-se:

$$\begin{aligned} u_1^m &= w^m & U_1^1 &= w^1 & U_1^2 &= w^2 \\ u_2^m &= \frac{\partial w^m}{\partial n} & U_2^1 &= \frac{\partial w^1}{\partial n} & U_2^2 &= \frac{\partial w^2}{\partial n} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Analogamente para os esforços, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} p_1^m &= V_n^m & p_1^1 &= V_n^1 & p_1^2 &= V_n^2 \\ p_2^m &= M_n^m & p_2^1 &= M_n^1 & p_2^2 &= M_n^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

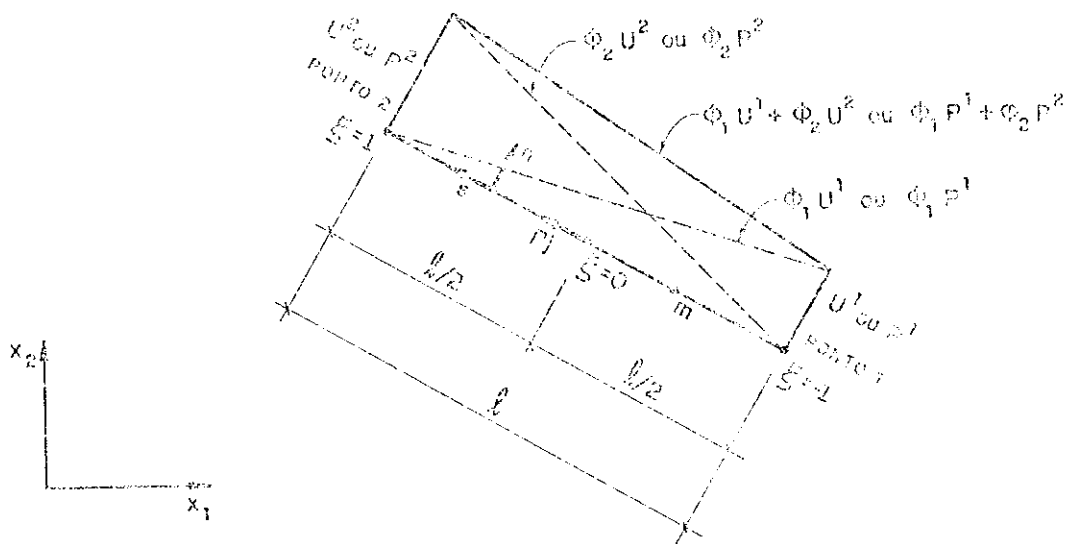


Fig. 4.3 - Elemento linear contínuo

Como as equações integrais envolvidas, (3.43) e (3.55), referem-se à integrações sobre o contorno  $\Gamma$ , e as aproximações na geometria e incógnitas sobre o elemento estão em função da variável adimensional " $\xi$ ", torna-se necessária uma mudança da variável  $\Gamma$  para  $\xi$ . Observando-se a figura 4.3 pode-se escrever:

$$\Gamma = \frac{l}{2} \xi \quad (4.12)$$

O determinante Jacobiano da transformação (4.12) é portanto:

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{l}{2} \quad (4.13)$$

obtendo-se assim:

$$dI = \frac{\rho}{2} dz \tag{4.14}$$

Como neste trabalho s3o se usa elementos lineares e cont3nuos, torna-se necess3rio em algumas situa33es, onde existam descontinuidade dos esfor3os, a utiliza33o de mais de um n3o, com as mesmas coordenadas, para definir um 3nico ponto do contorno, caracterizando-se assim e chamado n3o duplo (ver figura 4.4). 3 esta por exemplo, a situa33o de um canto de placa onde um lado 3 engastado e o outro livre. Os n3os duplos, assim chamados por terem as mesmas coordenadas, tornam independentes os valores nodais anterior e posterior ao canto considerado, ou no caso geral, servem para representar descontinuidades dos esfor3os e deslocamentos.

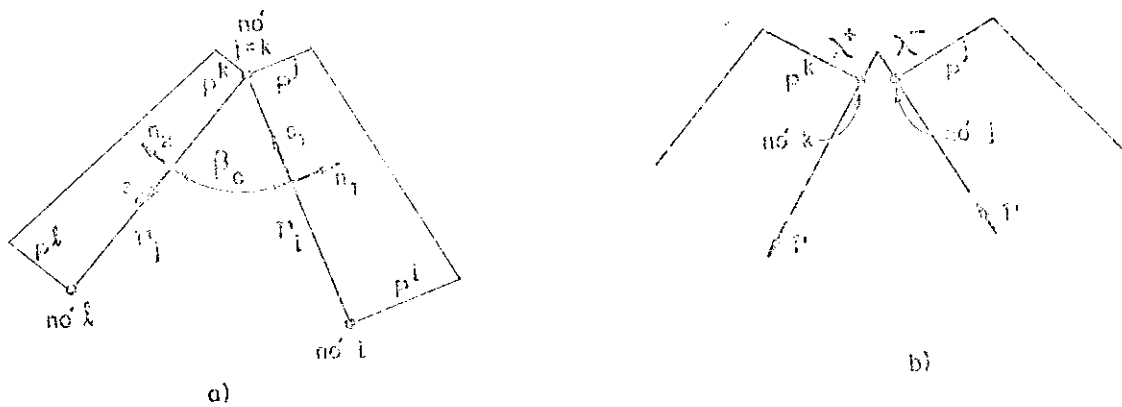


Fig. 4.4 - N3o duplo em canto de placa

#### 4.2.2 - Equa33es matriciais

As equa33es (3.43) e (3.55) que s3o respectivamente a representa33o integral dos deslocamentos  $w$  e  $\partial w / \partial n$  para um ponto "Q", qualquer do contorno, podem ser agrupadas em uma 3nica equa33o. Desta forma pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\underline{C}(Q)\underline{u}(Q) + \int_{\Gamma} \underline{p}^*(Q,P)\underline{u}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q,P)w_{ci}(P) = \\
\int_{\Gamma} \underline{u}^*(Q,P)\underline{p}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P)\underline{u}_{ci}^*(Q,P) + \\
\int_{\Omega_g} g(P)\underline{u}_g^*(Q,P) d\Omega_g(P) \quad (4.15)
\end{aligned}$$

onde:

$$\underline{C}(Q) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\underline{u}(Q) = \begin{Bmatrix} u_1(Q) \\ u_2(Q) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(Q) \\ \frac{\partial w}{\partial m}(Q) \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\underline{p}^*(Q,P) = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_n^*(Q,P) - u_n^*(Q,P) \\ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q,P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q,P) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\underline{u}(P) = \begin{Bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(P) \\ \frac{\partial w}{\partial n}(P) \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

$$R_{ci}^*(Q,P) = \begin{Bmatrix} R_{ci}^*(Q,P) \\ \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(Q,P) \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\underline{u}^*(Q,P) = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^*(Q,P) - \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \\ \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P) - \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\underline{p}(P) = \begin{Bmatrix} p_1(P) \\ p_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_n(P) \\ M_n(P) \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\underline{u}_{ci}^*(Q, P) = \begin{Bmatrix} w_{ci}^*(Q, P) \\ \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\underline{u}_g^*(Q, p) = \begin{Bmatrix} w^*(Q, p) \\ \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Supondo-se o contorno discretizado, como na figura 4.1, as integrais sobre o contorno em (4.15) podem ser transformadas na soma de todas as integrais sobre cada elemento. Assim, a equação (4.15) será reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \underline{c}(Q)\underline{u}(Q) + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} \underline{p}^*(Q, P)\underline{u}(P) d\Gamma_j(P) + \sum_{i=1}^{N_e} R_{ci}^*(Q, P)w_{ci}(P) = \\ = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} \underline{u}^*(Q, P)\underline{p}(P) d\Gamma_j(P) + \sum_{i=1}^{N_e} R_{ci}(P)\underline{u}_{ci}^*(Q, P) + \\ + \int_{\Omega_g} g(p)\underline{u}_g^*(Q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde,  $N_e$ , é o número de elementos do contorno.

Substituindo-se  $\underline{u}(P)$  e  $\underline{p}(P)$  em (4.25), por seus valores aproximados em função dos "valores nodais" conforme (4.8) e (4.9), e fazendo-se a mudança da variável  $\Gamma$  para  $\xi$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 & \underline{c}(Q)\underline{u}(Q) + \sum_{j=1}^{N_c} \int_{-1}^1 |J| \underline{u}^*(Q,P) \underline{\phi}_j^T(P) d\xi(P) \underline{u}_j^{(N)} + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q,P) w_{ci}(P) + \sum_{j=1}^{N_g} \int_{-1}^1 |J| \underline{u}^*(Q,P) \underline{\phi}_j^T(P) d\xi(P) \underline{u}_j^{(N)} + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \underline{u}_{ci}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(p) \underline{u}_g^*(Q,p) d\Omega_g(p) \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

Enquanto na expressão (4.25) as variáveis do contorno se referiam a um ponto P qualquer do elemento, em (4.26), estas variáveis são os próprios "valores nodais".

A expressão discretizada (4.26), resultante da junção das equações integrais (3.43) e (3.55), representa a transformação destas equações integrais em equações algébricas do tipo:

$$\begin{aligned}
 a_{ij} v_j + b_{ij} \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right)_j &= c_{ij} v_{nj} + d_{ij} N_{nj} + f_{ik} R_{ck} + t_i \\
 i &= 1, 2 \quad , \quad j = 1, NNC \quad , \quad k = 1, N_c \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

onde os índices repetidos indicam somatório e NNC é o número de nós do contorno.

Os coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  e  $d_{ij}$  que aparecem na equação (4.27), representam as integrais sobre os elementos na equação (4.26). Levando-se a contribuição do coeficiente  $f_{ik}$ , referente à reação de canto, aos coeficientes  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$ , e aplicando-se (4.27) a todos os NNC pontos do contorno, obtêm-se um sistema de equações lineares, com  $2(NNC)$  equações, relacionando deslocamentos e esforços no contorno. É interessante mencionar que as integrais sobre o elemento e a contribuição da reação de canto serão assuntos discutidos posteriormente. Assim pode-se escrever a seguinte equação matricial:

$$\underline{HU} = \underline{GP} + \underline{T} \quad (4.28)$$

onde,  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ , são matrizes de influência, que dependem apenas da geometria do problema,  $\underline{U}$  e  $\underline{P}$ , respectivamente são vetores dos deslocamentos e esforços para todos os nós do contorno, e  $\underline{T}$  é o vetor resultante da integração sobre a região  $\Omega_g$ , para todos os nós do contorno.

As matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  são quadradas de ordem  $2NNC$  e os vetores  $\underline{U}$ ,  $\underline{P}$  e  $\underline{T}$  tem  $2NNC$  elementos.

$$\underline{U}^T = \left\{ w^1 \frac{\partial w^1}{\partial n} \dots \dots \dots w^{NNC} \frac{\partial w^{NNC}}{\partial n} \right\} \quad (4.29)$$

$$\underline{P}^T = \left\{ V_n^1 M_n^1 \dots \dots \dots V_n^{NNC} M_n^{NNC} \right\} \quad (4.30)$$

A expressão (4.28) representa portanto um sistema de equações lineares, sendo que para um problema com 'NNC' pontos nodais tal sistema conterá '2NNC' equações. Para uma placa em equilíbrio, com condições de contorno impostas, necessariamente conhecem-se  $N_1$  deslocamentos e  $N_2$  valores de esforços no contorno, tal que  $N_1 + N_2 = 2NNC$ . Neste caso os valores das incógnitas do sistema serão  $N_1$  reações (esforços) e  $N_2$  deslocamentos.

Levando-se todas as incógnitas do sistema, para o primeiro membro de (4.28) e efetuando-se a multiplicação de  $\underline{G}$  pelos vetores das variáveis conhecidas e somando-se ao vetor  $\underline{T}$ , obtém-se:

$$\underline{AX} = \underline{B} \quad (4.31)$$

onde  $\underline{X}$  é o vetor das incógnitas do problema.

Resolvendo-se o sistema (4.31), obtêm-se os valores nodais incógnitos do contorno. Para se obter deslocamentos  $w$  em pontos internos basta aplicar a equação integral (3.36). Os valores de esforços em pontos internos, força cortante e momento, serão resolvidos posteriormente.



### 4.3 - Montagem das matrizes $\underline{H}$ e $\underline{C}$

#### 4.3.1 - Integração sobre os elementos

As características das integrais indicadas na equação (4.25) permitem que estas sejam efetuadas numericamente já que este procedimento é simples e adequado para o tratamento computacional do método [ 9 ]. Com esta finalidade foi feita a mudança da variável  $\tilde{r}$  para  $\xi$ , e a equação (4.25) transformou-se na (4.26).

Para efetuar-se a integração numérica das integrais de (4.25) ou (4.26) será empregada a quadratura de Gauss, dada pela expressão abaixo [ 78 ]:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad (4.32)$$

onde:  $n$  - número de pontos de integração.  
 $\xi_i$  - coordenada adimensional do  $i$ -ésimo ponto de integração, definida em função de  $n$ .  
 $w_i$  - fator ponderador, também calculado em função de  $n$ .

Assim para cada elemento de contorno serão obtidas integrais do tipo:

$$\int_{-1}^1 |J| \underline{p}^*(Q,P) \underline{\phi}^T(P) d\xi(P) \quad (4.33)$$

$$\int_{-1}^1 |J| \underline{u}^*(Q,P) \underline{\phi}^T(P) d\xi(P) \quad (4.34)$$

Como as soluções fundamentais são funções do vetor posição  $\vec{r}$ , que depende da posição do ponto  $P$ , definido agora em função de  $\xi$ , as equações (4.33) e (4.34) são seme

lhantes à equação (4.32), podendo-se portanto efetuar a integração numérica.

A partir de (4.33) e (4.34) pode-se escrever:

$$h_{ik}^n(Q) = \int_{-1}^1 |J| p_{ik}^*(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.35)$$

$$g_{ik}^n(Q) = \int_{-1}^1 |J| v_{jk}^*(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.36)$$

onde:

n - representa o nó local do elemento onde se mede a resposta ao carregamento unitário aplicado. Para n = 1, o ponto P do elemento será o nó local 1, e para n = 2 o nó local P será o 2.

Q - nó singular, isto é, o ponto onde é aplicada a carga unitária ou para o qual se escrevem as equações.

i - indica qual equação se está obtendo para o ponto Q. Se i = 1 é a equação de w(Q), se i = 2 é a equação de  $\partial w(Q)/\partial m$ . Em outras palavras i indica a ação unitária aplicada em Q. Se i = 1 tem-se carga unitária e se i = 2, momento unitário.

k - indica a natureza da resposta medida em P. Se k = 1, a resposta fundamental é relativa à força cortante equivalente  $V_n^*$  ou ao correspondente deslocamento transversal fundamental  $w^*$ . Para k = 2, a resposta fundamental é relativa ao momento  $M_n^*$  ou ao correspondente deslocamento  $\partial w^*/\partial n$ .

Para exemplificar o cálculo das integrais (4.35) e (4.36) sobre um elemento qualquer  $j$  do contorno e qual a posição que ambas ocuparão nas matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{Q}$ , considere-se a placa da figura 4.5.a discretizada em 7 elementos de contorno, com 11 pontos nodais.

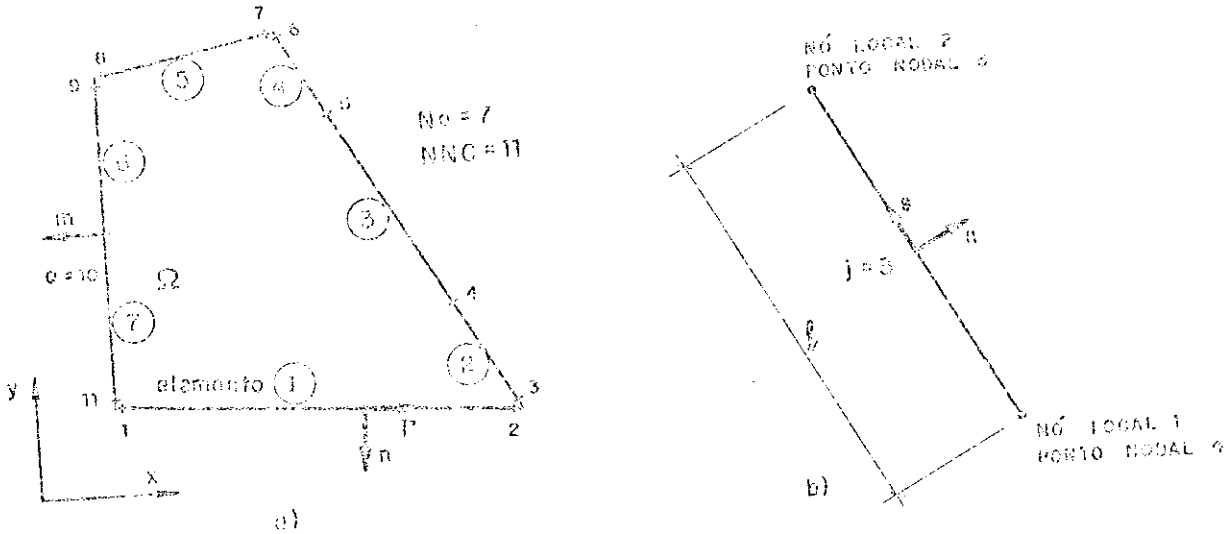


Fig. 4.5 - a) Placa discretizada  
 b) Elemento 3 com seus nós locais e pontos nodais equivalentes no contorno.

Na figura 4.5.b o elemento genérico  $j = 3$ , está representado com seus dois nós locais 1 e 2, onde estão associados os valores nodais do elemento.

Considerando-se o nó  $Q$  igual ao ponto 10 do contorno, e lembrando-se que para cada ponto do contorno serão criadas duas equações, tem-se que as equações algébricas a que foram transformadas as equações integrais correspondentes aos deslocamentos  $w$  e  $\partial w / \partial m$  do ponto  $Q$ , ocuparão respectivamente as linhas 19 e 20 do sistema de equações lineares (4.28).

De (4.13), (4.18) e (4.35) pode-se calcular para o nó local  $n = 1$  do elemento  $j = 3$ , ou ponto nodal  $P = 4$  do contorno, em relação ao ponto  $Q = 10$ , os seguintes coeficientes:

$$h_{11}^1(10) = \frac{\xi}{2} \int_{-1}^1 v_n^*(Q, P) \phi_1 d\xi \quad (4.37)$$

$$h_{12}^1(10) = -\frac{\xi}{2} \int_{-1}^1 M_n^*(Q, P) \phi_1 d\xi \quad (4.38)$$

$$h_{21}^1(10) = \frac{\xi}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial v_n^*}{\partial m}(Q, P) \phi_1 d\xi \quad (4.39)$$

$$h_{22}^1(10) = -\frac{\xi}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \phi_1 d\xi \quad (4.40)$$

Analogamente, de (4.13), (4.21) e (4.36) pode-se obter para  $P = 4$  e  $Q = 10$ :

$$g_{11}^1(10) = \frac{\xi}{2} \int_{-1}^1 w^*(Q, P) \phi_1 d\xi \quad (4.41)$$

$$g_{12}^1(10) = -\frac{\xi}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \phi_1 d\xi \quad (4.42)$$

$$g_{21}^1(10) = \frac{\xi}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) \phi_1 d\xi \quad (4.43)$$

$$g_{22}^1(10) = -\frac{\xi}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \phi_1 d\xi \quad (4.44)$$

onde as soluções fundamentais estão dadas no capítulo 2.

Analisando-se as integrais (4.35) e (4.36) com os seus índices  $\underline{i}$  e  $\underline{k}$ , pode-se determinar qual a posição ocu-

pada pelos coeficientes (4.37) a (4.40) e (4.41) a (4.44) respectivamente nas matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ .

As colunas das duas linhas geradas na matriz  $\underline{H}$  para cada ponto Q, deverão conter a influência dos deslocamentos  $w$  e  $\partial w/\partial n$  para todos os pontos P do contorno. As colunas ímpares conterão a influência dos deslocamentos verticais,  $w$ , e as pares, das suas respectivas derivadas,  $\partial w/\partial n$ .

Analogamente, na matriz  $\underline{G}$ , as colunas ímpares conterão a influência dos esforços  $V_n$ , enquanto as pares, conterão a influência dos esforços  $M_n$ .

Tem-se portanto, para cada ponto local de um elemento, uma contribuição em quatro posições distintas de  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ .

Assim os coeficientes (4.37) a (4.40) e (4.41) a (4.44), ocuparão respectivamente nas matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  as posições (19,7), (19,8), (20,7) e (20,8).

Para o nó local  $n = 2$ , do elemento  $j = 3$ , correspondente ao ponto nodal  $P = 5$  do contorno, integrando-se em relação ao ponto  $Q = 10$ , podem ser determinados os coeficientes análogos aos obtidos pelas expressões (4.37) a (4.44) bastando para isto substituir a função aproximadora  $\phi_1$  pela função aproximadora  $\phi_2$ . Estes coeficientes ocuparão respectivamente nas matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  as posições (19,9), (19,10), (20,9) e (20,10).

Analisando-se a figura 4.5.a vê-se que os nós 4 e 5 limites do elemento 3, pertencem também a outros elementos, sendo respectivamente o nó local 2 do elemento 2 e o nó local 1 do elemento 4. Integrando-se todos os elementos em relação ao ponto Q serão geradas as linhas 19 e 20 das matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ , tendo nas colunas correspondentes aos nós pertencentes a dois elementos a contribuição conjunta de ambos.

O exemplo da figura 4.5 serve para ilustrar a forma como cada elemento contribui nas matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ . Neste exemplo, considerando-se o elemento 3, o ponto Q não

pertence ao elemento sobre o qual se faz a integração ; no entanto, considerando-se os elementos 6 ou 7, e ainda integrando-se em relação ao mesmo ponto Q, tem-se agora uma integral singular, cujo valor obtido pela integração numérica, anteriormente descrita, poderá conter erros [ 9 ]. Assim, recomenda-se a utilização de integração analítica ou de técnicas de integração numérica que levem em conta essas singularidades. Neste trabalho, para se evitar dois tipos de integração sobre o elemento, a numérica, quando o ponto singular não pertencer ao mesmo e a analítica em caso contrário, será adotada uma formulação onde o ponto Q passará agora a ser considerado fora do domínio (ver fig. 4.6), o que implicará unicamente em integrações numéricas para todos os elementos.

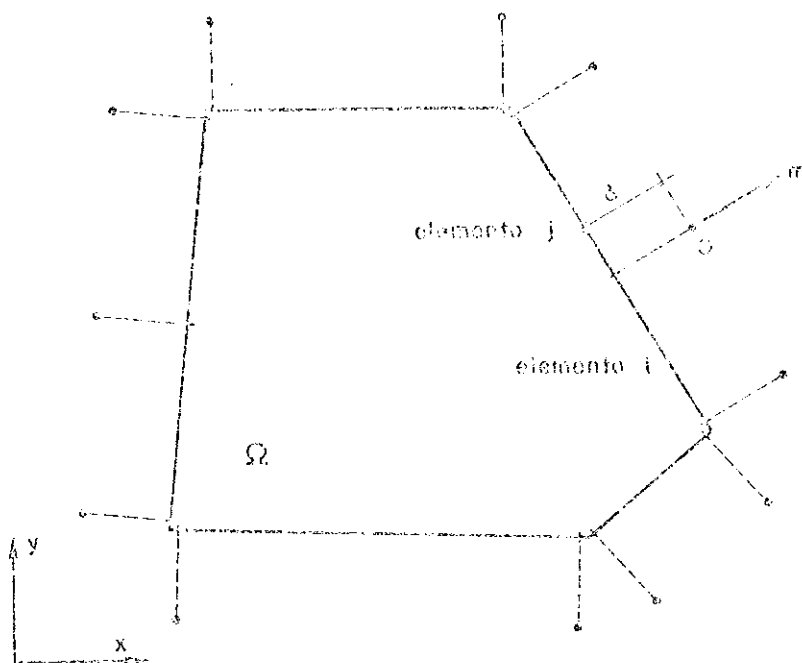


Fig. 4.6 - Pontos do contorno deslocados para fora do domínio.

A nova posição para o ponto Q será definida na direção normal ao elemento, a uma distância do contorno da da por:

$$d = a \cdot l_n \tag{4.45}$$

onde:

$a$  = coeficiente maior que zero

$\Delta m$  = média dos comprimentos dos elementos concorrentes no ponto, ou simplesmente o comprimento do elemento, no caso de nós de canto.

O valor de " $a$ " pode ser qualquer, desde valores próximos de zero, onde os resultados da integração numérica sobre o elemento próximo ao nó  $Q$ , podem apresentar erros, até valores elevados, o que implicará em vetores posição  $r(Q,P)$  grandes e conseqüentemente as relações obtidas perderão o seu significado físico.

O valor de " $a$ " para este trabalho estará situado entre 0,5 e 1,5.

Além da distância do nó ao elemento, referida acima, outros fatores como a função a ser integrada, comprimento do elemento e ângulos formados entre os vetores posição e o elemento, contribuem para a determinação do número de pontos de integração necessário para se obter resultados satisfatórios [ 9 ].

A formulação desenvolvida neste trabalho exige que o ponto de carregamento  $Q$  seja tomado fora do domínio, como visto acima. Deve-se portanto reescrever a equação (4.15) válida para ponto  $Q$  pertencente ao contorno.

Quando se usa como carregamento fundamental a distribuição delta de Dirac, tomando-se  $Q$  fora do domínio, tem-se que o primeiro termo da equação (3.34), que expressa o teorema de Betti aplicado às placas, se anula, ou seja:

$$\int_{\Omega} \delta(Q,P) w(P) d\Omega(P) = 0 \quad (4.46)$$

De (4.46) obtém-se  $\underline{c}(Q) = 0$  na equação (4.15), levando portanto a equação discretizada (4.26), para um ponto  $Q$  fora do domínio a ser dada por:

$$\int_{\Gamma} \underline{p}^*(Q,P) \underline{u}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \underline{R}_{ci}^*(Q,P) \underline{w}_{ci}(P) =$$

$$\int_{\Gamma} \underline{u}^*(Q,P) \underline{p}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \underline{R}_{ci}(P) \underline{u}_{ci}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} \underline{g}(p) \underline{u}_g^*(Q,p) d\Omega_g(p) \quad (4.47)$$

onde  $\underline{p}^*(Q,P)$ ,  $\underline{u}(P)$ ,  $\underline{R}_{ci}^*(Q,P)$ ,  $\underline{u}^*(Q,P)$ ,  $\underline{p}(P)$ ,  $\underline{u}_{ci}^*(Q,P)$

e  $\underline{u}_g^*(Q,p)$  são definidos respectivamente pelas expressões (4.18) a (4.24).

#### 4.3.2 - Contribuição dos cantos na matriz $\underline{R}$

Como visto anteriormente, para se evitar eventuais descontinuidades nos esforços, foi adotado o nó duplo nos cantos. Além da contribuição normal destes dois nós, pertencentes a dois elementos distintos, gerando quatro linhas e quatro colunas da matriz  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ , existe uma outra contribuição à matriz  $\underline{H}$ , referente à reação de canto, que aparece na equação (4.15), sobre a forma de dois somatórios:

$$\sum_{i=1}^{N_c} \underline{R}_{ci}^*(Q,P) \underline{w}_{ci}(P) \quad (4.48)$$

e

$$\sum_{i=1}^{N_c} \underline{R}_{ci}(P) \underline{u}_{ci}^*(Q,P) \quad (4.49)$$

onde  $\underline{R}_{ci}^*(Q,P)$  e  $\underline{u}_{ci}^*(Q,P)$  estão definidos nas equações (4.20) e (4.23), respectivamente.

Analisando-se primeiramente a expressão (4.48), pode-se escrever a partir de (3.25):



$$R_{ci}^*(Q,P) = \begin{Bmatrix} R_{ci}^*(Q,P) \\ \frac{\partial R_{ci}^*(Q,P)}{\partial m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{ns,i}^{*+} \dots M_{ns,i}^{*-} \\ \frac{\partial M_{ns,i}^{*+}}{\partial m} \dots \frac{\partial M_{ns,i}^{*-}}{\partial m} \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

onde as soluções fundamentais  $M_{ns,i}^*$  e  $\partial M_{ns,i}^* / \partial m$  são dadas nas equações (2.98) e (2.112) respectivamente.

Seja a figura 4.7.a onde está representado um canto genérico "i", mostrando o nó duplo, com os pontos nodais "j" e "k" correspondentes respectivamente ao nó anterior e posterior ao canto.

Como o canto "i" dois nós com deslocamentos  $w_{ci}^j$  e  $w_{ci}^k$  independentes, pode-se dividir (4.48) em dois termos, de tal forma a se obter a contribuição do nó anterior e posterior ao canto isoladamente. Desta forma pode-se escrever:

$$\sum_{i=1}^{N_c} \left[ \begin{Bmatrix} M_{ns,i}^{*+} \\ \frac{\partial M_{ns,i}^{*+}}{\partial m} \end{Bmatrix} w_{ci}^k - \begin{Bmatrix} M_{ns,i}^{*-} \\ \frac{\partial M_{ns,i}^{*-}}{\partial m} \end{Bmatrix} w_{ci}^j \right] \quad (4.51)$$

Nota-se que na expressão (4.51) os dois termos com soluções fundamentais estão multiplicados por deslocamentos transversais  $w_{ci}$  do nó anterior e posterior ao canto. Pode-se portanto levar para a matriz  $\underline{H}$  a contribuição de cada canto da placa.

O primeiro termo de (4.51) corresponde ao nó posterior k do canto i. Lembrando-se que o nó Q é qualquer no contorno e que pela formulação adotada o mesmo é levado para fora do domínio, tem-se que a contribuição de  $M_{ns,i}^{*+}(Q,P)$  e  $\partial M_{ns,i}^{*+}(Q,P) / \partial m$  serão respectivamente levadas para as linhas (2Q-1) e (2Q) da matriz  $\underline{H}$ , ocupando nestas linhas a posição da coluna (2k-1).

Analogamente analisando-se o segundo termo de (4.51) vê-se que as contribuições  $-M_{ns}^*(Q,P)$  e  $-\partial M_{ns}^*(Q,P)/\partial m$  irão para as linhas  $(2Q-1)$  e  $(2Q)$  respectivamente, na coluna  $(2j-1)$ , da matriz  $\underline{H}$ .

Fazendo-se este procedimento para os  $N_c$  cantos do contorno, serão obtidas as contribuições de (4.48) na matriz  $\underline{H}$ . Por se tratar de uma multiplicação por deslocamento transversal  $w$ , esta contribuição só se fará em colunas ímpares.

Será desenvolvida agora a contribuição do somatório (4.49) na matriz  $\underline{H}$  e para tanto esta expressão pode ser reescrita como:

$$\sum_{i=1}^{N_c} (M_{ns_i}^+ - M_{ns_i}^-) \left\{ \begin{array}{l} w_{ci}^*(Q,P) \\ \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(Q,P) \end{array} \right\} \quad (4.52)$$

onde as soluções fundamentais  $w_{ci}^*(Q,P)$  e  $\frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(Q,P)$  são dadas respectivamente nas equações (2.82) e (2.105).

O valor do momento  $M_{ns}$  é obtido a partir de (2.34), resultando a seguinte expressão:

$$M_{ns} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} \quad (4.53.a)$$

ou

$$M_{ns} = -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) \quad (4.53.b)$$

onde  $(n,s)$  é o sistema de coordenadas associado às direções normal e tangencial ao elemento.

Observando-se a expressão (4.53.b) nota-se que  $M_{ns}$  é função da derivada  $\partial w/\partial n$ , e que portanto a contribuição de (4.49) em  $\underline{H}$  deverá ocorrer apenas nas colunas pares, se esta componente de momento for expressa em termos deste deslocamento.

Existem várias alternativas para analisar a contribuição deste termo na matriz  $\underline{H}$ , que vão desde a sua não

consideração até a uma reformulação das equações integrais utilizando teorias menos aproximadas para análise de placa, como por exemplo a teoria de KLEISSNER.

Neste trabalho a alternativa utilizada foi a de calcular tal contribuição expressando-se o termo (4.53) através de diferenças finitas, usando-se funções interpoladoras do 2º grau para a derivada  $\partial w / \partial n$ .

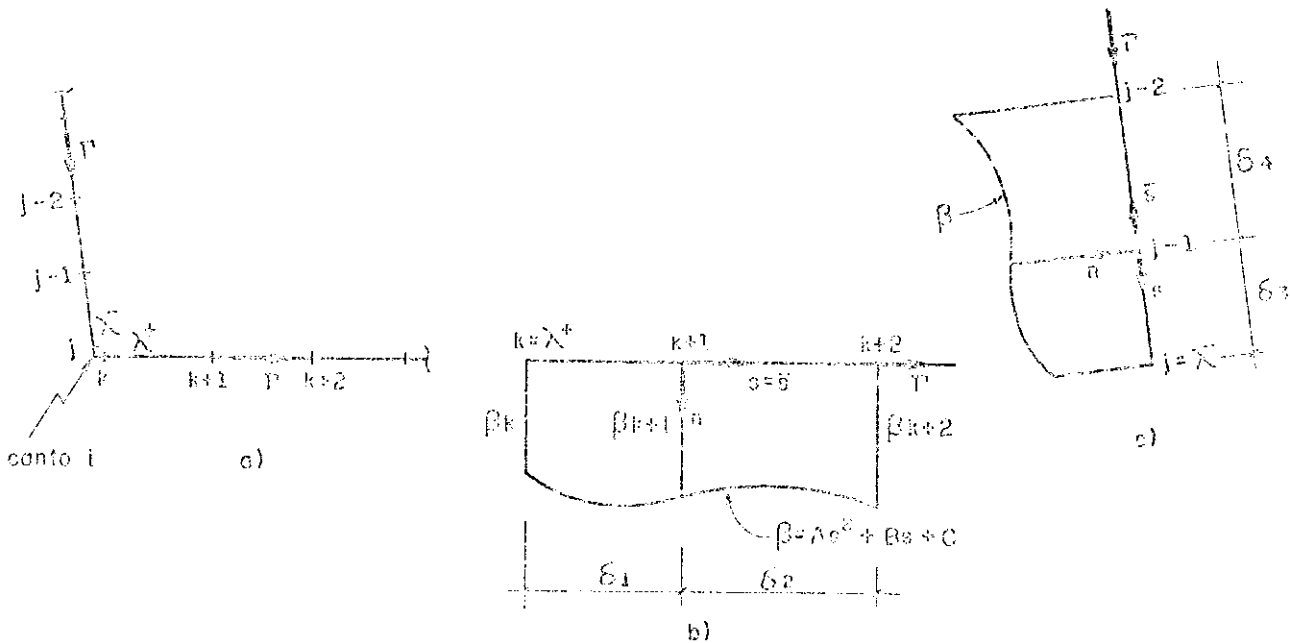


Fig. 4.7 - Canto "i" da placa com os nós anteriores e posteriores necessários às contribuições da reação de canto na matriz  $\underline{H}$ .

Na figura 4.7.a é mostrado o canto genérico "i", com seus pontos nodais anterior e posterior, j e k, além dos nós (j-1), (j-2), (k+1) e (k+2) necessários à determinação dos coeficientes envolvidos na função interpoladora. Como se vê, este cálculo da contribuição de (4.49) na matriz  $\underline{H}$  exige em cada lado concorrente no canto pelo menos dois nós, além dos próprios nós j e k do canto.

A função  $\frac{\partial w}{\partial n}$  será aproximada por uma parábola do 2º grau da seguinte forma:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = A s^2 + B s + C \quad (4.54)$$

Na figura 4.7.1 mostramos o lado posterior ao canto "i" com dois elementos de contorno de comprimento  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , e também a função  $\frac{\partial w}{\partial n}$  que será aqui chamada  $\beta$ , por simplicidade.

Definindo-se um sistema de coordenadas auxiliar  $(n, \bar{s})$  com origem no nó  $(k+1)$ , pode-se escrever:

$$\bar{s} = s \quad (4.55.a)$$

$$d\bar{s} = ds = d\bar{\Gamma} \quad (4.55.b)$$

e

$$\beta = A\bar{s}^2 + B\bar{s} + C \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) = \frac{\partial \beta}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial \beta}{\partial \bar{\Gamma}} = 2A\bar{s} + B \quad (4.57)$$

A partir das condições de contorno do elemento posterior determinam-se os seguintes valores para A e B:

$$A = \frac{(\beta_{k+2} - \beta_{k+1})\delta_1 + (\beta_k - \beta_{k+1})\delta_2}{\delta_1\delta_2^2 + \delta_1^2\delta_2} \quad (4.58)$$

$$B = \frac{(\beta_{k+2} - \beta_{k+1})\delta_1^2 - (\beta_k - \beta_{k+1})\delta_2^2}{\delta_1\delta_2^2 + \delta_1^2\delta_2} \quad (4.59)$$

Substituindo-se os valores de A e B em (4.57) e fazendo-se  $\bar{s} = -\delta_1$ , obtém-se o valor da derivada  $\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)$  para o ponto k do canto "i", com a qual se calculará  $M_{ns_i}^+$ . Desta forma obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_k = - \frac{(\delta_2^2 + 2\delta_1\delta_2)\beta_k - (\delta_1 + \delta_2)^2\beta_{k+1} + (\delta_1^2)\beta_{k+2}}{\delta_1\delta_2^2 + \delta_1^2\delta_2} \quad (4.60)$$

O valor da derivada  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_k$  será portanto função dos comprimentos  $\delta_1$  e  $\delta_2$  dos dois elementos de contorno do lado posterior ao canto "i", e das derivadas  $\partial w / \partial n$  dos pontos  $k, (k+1)$  e  $(k+2)$  (ver fig. 4.7.b).

De (4.50) e (4.53) pode-se determinar a contribuição do termo  $M_{ns_i}^+$  na expressão (4.52).

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k \frac{\partial w}{\partial n}_k + A_{k+1} \frac{\partial w}{\partial n}_{k+1} + A_{k+2} \frac{\partial w}{\partial n}_{k+2} \\ B_k \frac{\partial w}{\partial n}_k + B_{k+1} \frac{\partial w}{\partial n}_{k+1} + B_{k+2} \frac{\partial w}{\partial n}_{k+2} \end{array} \right\} \quad (4.61)$$

onde:

$$A_k = C_+ (\delta_2^2 + 2\delta_1\delta_2) \quad (4.62)$$

$$A_{k+1} = -C_+ (\delta_1 + \delta_2)^2 \quad (4.63)$$

$$A_{k+2} = C_+ (\delta_1)^2 \quad (4.64)$$

$$B_k = E_+ (\delta_2^2 + 2\delta_1\delta_2) \quad (4.65)$$

$$B_{k+1} = -E_+ (\delta_1 + \delta_2)^2 \quad (4.66)$$

$$B_{k+2} = E_+ (\delta_1)^2 \quad (4.67)$$

com:

$$C_+ = \frac{D(1-\nu)w^*(Q,P)}{\delta_1\delta_2^2 + \delta_1^2\delta_2} \quad (4.68)$$

$$E_+ = \frac{D(1-\nu) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q,P)}{\delta_1\delta_2^2 + \delta_1^2\delta_2} \quad (4.69)$$

Nas expressões acima o ponto Q é qualquer ponto nodal do contorno e o ponto P é o nó k do canto "j" (ver fig. 4.7).

Analisando-se a equação integral discretizada (4.26) nota-se que o somatório (4.49) e a integral que origina H estão em lados opostos da referida equação. Os coeficientes A e B em (4.61) devem portanto ser levados à matriz H com o sinal trocado.

Os coeficientes  $A_k$ ,  $A_{k+1}$  e  $A_{k+2}$  deverão ocupar na matriz H a linha  $2Q-1$  nas colunas  $2k$ ,  $2(k+1)$  e  $2(k+2)$  respectivamente enquanto os coeficientes  $B_k$ ,  $B_{k+1}$  e  $B_{k+2}$  ocuparão as mesmas colunas da linha  $2Q$ .

Tomando-se agora a figura 4.7.c, pode-se definir analogamente um sistema de coordenadas auxiliar  $(n, \bar{s})$  com origem no nó  $(j-1)$ , de tal forma que:

$$\bar{s} = -s \tag{4.70.a}$$

$$d\bar{s} = -ds = -dP \tag{4.70.b}$$

A derivada  $\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)$  no ponto "j" pode ser obtida de forma análoga ao que foi desenvolvido em (4.60). Desta forma pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_j = - \frac{(\delta_3^2 + 2\delta_3\delta_4)\beta_j - (\delta_3 + \delta_4)^2\beta_{j-1} + (\delta_3)^2\beta_{j-2}}{\delta_3\delta_4^2 + \delta_3^2\delta_4} \tag{4.71}$$

De (4.71) e (4.53) chega-se a contribuição do termo  $-M_{ns_i}$  na expressão (4.52).

$$\left\{ \begin{array}{l} A_j \frac{\partial w}{\partial n}_j + A_{j-1} \frac{\partial w}{\partial n}_{j-1} + A_{j-2} \frac{\partial w}{\partial n}_{j-2} \\ B_j \frac{\partial w}{\partial n}_j + B_{j-1} \frac{\partial w}{\partial n}_{j-1} + B_{j-2} \frac{\partial w}{\partial n}_{j-2} \end{array} \right\} \tag{4.72}$$

onde:

$$A_j = C_- (\delta_3^2 + 2\delta_3 \delta_4) \quad (4.73)$$

$$A_{j-1} = -C_- (\delta_3 + \delta_4)^2 \quad (4.74)$$

$$A_{j-2} = C_- (\delta_3)^2 \quad (4.75)$$

$$B_j = E_- (\delta_3^2 + 2\delta_3 \delta_4) \quad (4.76)$$

$$B_{j-1} = -E_- (\delta_3 + \delta_4)^2 \quad (4.77)$$

$$B_{j-2} = E_- (\delta_3)^2 \quad (4.78)$$

com:

$$C_- = \frac{D(1-\nu) w^*(Q, P)}{\delta_3 \delta_4^2 + \delta_3^2 \delta_4} \quad (4.79.a)$$

$$E_- = \frac{D(1-\nu) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P)}{\delta_3 \delta_4^2 + \delta_3^2 \delta_4} \quad (4.79.b)$$

Para as expressões acima Q é um ponto qualquer do contorno e P é o ponto "j" do canto "i". Os coeficientes  $A_j$ ,  $A_{j-1}$  e  $A_{j-2}$ , com o sinal trocado, deverão ocupar a linha  $2Q-1$  de  $H$  nas colunas  $2j$ ,  $2(j-1)$  e  $2(j-2)$  respectivamente, enquanto os coeficientes  $B_j$ ,  $B_{j-1}$  e  $B_{j-2}$ , ocuparão as mesmas colunas da linha  $2Q$ .

Determinando-se (4.61) e (4.72) para todos os  $N_c$  cantos do contorno, obtém-se a contribuição do somatório (4.49) na matriz  $H$  que se fará apenas em colunas pares.

#### 4.4 - Deslocamentos e esforços para pontos internos

##### 4.4.1 - Deslocamento transversal $w(q)$ e sua derivada

$$\partial w(q) / \partial m$$

Uma vez resolvido o sistema (4.31), acham-se as incógnitas do contorno. Para se obter deslocamentos transversais em pontos internos  $w(q)$ , e suas derivadas em relação a uma direção qualquer  $m$ ,  $\partial w(q) / \partial m$ , basta aplicar as equações (3.36) e (3.37) respectivamente. Aplicando-se estas equações a todos os pontos internos, obtém-se de forma análoga à equação (4.28) a seguinte equação matricial:

$$\underline{w}(q) + \underline{H}' \underline{U} = \underline{G}' \underline{P} + \underline{T}' \quad (4.80)$$

onde:

$$\underline{w}(q) = \begin{Bmatrix} \underline{w}_1 \\ \vdots \\ \underline{w}_{Nip} \end{Bmatrix}, \quad \text{com} \quad \underline{w}_1 = \begin{Bmatrix} w \\ \partial w / \partial m \end{Bmatrix}_1$$

- $Nip$  - número de pontos internos.
- $\underline{H}'$  e  $\underline{G}'$  - são matrizes de influência, semelhantes a  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ , só que para pontos internos.
- $\underline{U}$  e  $\underline{P}$  - vetores dos deslocamentos e esforços para os nós do contorno.
- $\underline{T}'$  - vetor resultante da integração sobre a região  $\Omega_g$ , para todos os pontos internos, análogo ao vetor  $\underline{T}$  em (4.28).

As matrizes  $\underline{H}'$  e  $\underline{G}'$  terão duas ou três linhas para cada ponto interno e seus elementos serão calculados de forma análoga ao que foi feito para as matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ . Como o ponto  $q$  é interno, não se pode aqui definir para a direção  $m$  a direção normal ao elemento, como foi feito pa



ra pontos Q do contorno. A direção "n" para pontos internos será definida como a direção do eixo x, como poderia ser y, ou ambas, desde que se escrevesse duas equações derivadas para cada ponto interno.

Para um ponto "i" qualquer de um elemento, tem-se:

$$h_{11}^i(q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 V_n^*(q, P) \phi_i d\xi \quad (4.81)$$

$$h_{12}^i(q) = -\frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 M_n^*(q, P) \phi_i d\xi \quad (4.82)$$

$$h_{21}^i(q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial V_n^*}{\partial m} (q, P) \phi_i d\xi \quad (4.83)$$

$$h_{22}^i(q) = -\frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial M_n^*}{\partial m} (q, P) \phi_i d\xi \quad (4.84)$$

$$g_{11}^i(q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 w^*(q, P) \phi_i d\xi \quad (4.85)$$

$$g_{12}^i(q) = -\frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \phi_i d\xi \quad (4.86)$$

$$g_{21}^i(q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial w^*}{\partial m} (q, P) \phi_i d\xi \quad (4.87)$$

$$g_{22}^i(q) = -\frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial u} (q, P) \right] \phi_i d\xi \quad (4.88)$$

com  $i = 1, 2$

As soluções fundamentais nas expressões acima, estão dadas no capítulo 2 (item 2.5).

As contribuições dos cantos serão também levadas para a matriz  $H'$ , e serão calculadas de forma análoga

As expressões (4.51), (4.61) e (4.72), lembrando-se que agora estas contribuições serão relativas a um ponto qualquer "q" do domínio.

#### 4.3.2 - Momento fletor e força cortante para pontos internos

O momento fletor e a força cortante podem ser expressos de uma forma indicial por:

$$M_{ij} = -D \left[ \nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_\lambda \partial x_\lambda} + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad (2.34)$$

$$Q_i = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_\lambda \partial x_\lambda} \quad (2.35)$$

com  $i, j = 1, 2$

Substituindo-se nas expressões (2.34) e (2.35) o valor de  $w$  dado na equação (3.36), obtém-se após as derivações necessárias, as representações integrais do momento fletor e da força cortante para pontos internos, dadas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} M_{ij}(q) = & - \int_{\Gamma} \left[ V_{n_{ij}}^*(q, P) w(P) - M_{n_{ij}}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ & - \sum_{c=1}^{N_c} R_{c_{ij}}^*(q, P) w_c(P) + \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) w_{ij}^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w_{ij}^*(q, P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} R_n(P) w_{c_{ij}}^*(q, P) + \int_{\Omega_g} g(P) w_{ij}^*(q, P) d\Omega_g(P) \quad (4.89) \end{aligned}$$

$$Q_i(q) = - \int_{\Gamma} \left[ V_{n_i}^*(q, P) w(P) - M_{n_i}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) +$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{c=1}^{N_c} R_{c_i}^* (q, P) w_c (P) + \int_{\Gamma} \left[ V_n (P) w_1^* (q, P) + M_n (P) \frac{\partial w_1^*}{\partial n} (q, P) \right] d\Gamma (P) + \\
 & + \sum_{c=1}^{N_c} R_c (V) w_{c_i}^* (q, P) + \int_{\Omega_B} g (P) w_1^* (q, P) d\Omega_B (P) \quad (4.90)
 \end{aligned}$$

onde:

$$V_{n_{ij}}^* (q, P) = -D \left[ \nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 v_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 v_n^*}{\partial x_i \partial x_j} (q, P) \right] \quad (4.91)$$

$$M_{n_{ij}}^* (q, P) = -D \left[ \nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j} (q, P) \right] \quad (4.92)$$

$$w_{ij}^* (q, P) = -D \left[ \nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j} (q, P) \right] \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) = -D \left\{ \nu \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right] + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right] \right\} \quad (4.94)$$

$$v_{n_i}^* (q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 v_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) \right] \quad (4.95)$$

$$M_{n_i}^* (q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) \right] \quad (4.96)$$

$$R_{c_i}^* (q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) \right] \quad (4.97)$$

$$w_i^* (q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) \right] \quad (4.98)$$

$$\frac{\partial w_i^*}{\partial n} (q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right] \right\} \quad (4.99)$$

$$R_{c_{ij}}^* (q, P) = -D \left[ \nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) + (1-\nu) \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_i \partial x_j} (q, P) \right] \quad (4.100)$$

As soluções fundamentais envolvidas nas expressões acima estão apresentadas no capítulo 2.

A partir das equações (4.89) e (4.90), discretizando-se o contorno e aproximando-se os valores nodais conforme expressões (4.8) e (4.9), obtêm-se as equações discretizadas para as representações integrais dos esforços internos, que expressas em termos da variável adimensional  $\xi$  resultam:

$$\begin{aligned}
 M_{ij}(q) = & - \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma_k} |J| \left[ v_{n_{ij}}^*(q, P) - M_{n_{ij}}^*(q, P) \right] \left[ \begin{matrix} \phi^T & 0 \end{matrix} \right] d\xi U_k^{(N)} + \\
 & - \sum_{c=1}^{N_c} R_{c_{ij}}^*(q, P) w_c(P) + \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma_k} |J| \left[ w_{ij}^*(q, P) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial w_{ij}^*}{\partial n} (q, P) \right] \left[ \begin{matrix} \phi^T & 0 \end{matrix} \right] d\xi U_k^{(N)} + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(P) w_{c_{ij}}^*(q, P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(P) w_{ij}^*(q, P) d\Omega_g(P) \quad (4.101)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_i(q) = & - \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma_k} |J| \left[ v_{n_i}^*(q, P) - M_{n_i}^*(q, P) \right] \left[ \begin{matrix} \phi^T & 0 \end{matrix} \right] d\xi U_k^{(N)} + \\
 & - \sum_{c=1}^{N_c} R_{c_i}^*(q, P) w_c(P) + \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma_k} |J| \left[ w_i^*(q, P) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial w_i^*}{\partial n} (q, P) \right] \left[ \begin{matrix} \phi^T & 0 \end{matrix} \right] d\xi U_k^{(N)} + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(P) w_{c_i}^*(q, P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(P) w_i^*(q, P) d\Omega_g(P) \quad (4.102)
 \end{aligned}$$

Para a obtenção dos esforços internos dados em (4.101) e (4.102), é necessário determinar as derivadas das

soluções fundamentais que aparecem nas expressões (4.91) e (4.100). Partindo-se das derivadas em relação a um eixo qualquer "m", definido no ponto "q", e já determinadas anteriormente, são obtidas as derivadas em relação a um eixo particular  $x_i$  (ver figura 4.8). Estas, e as demais derivadas das soluções fundamentais necessárias à determinação de  $M_{ij}(q)$  e  $Q_i(q)$  são apresentadas a seguir:

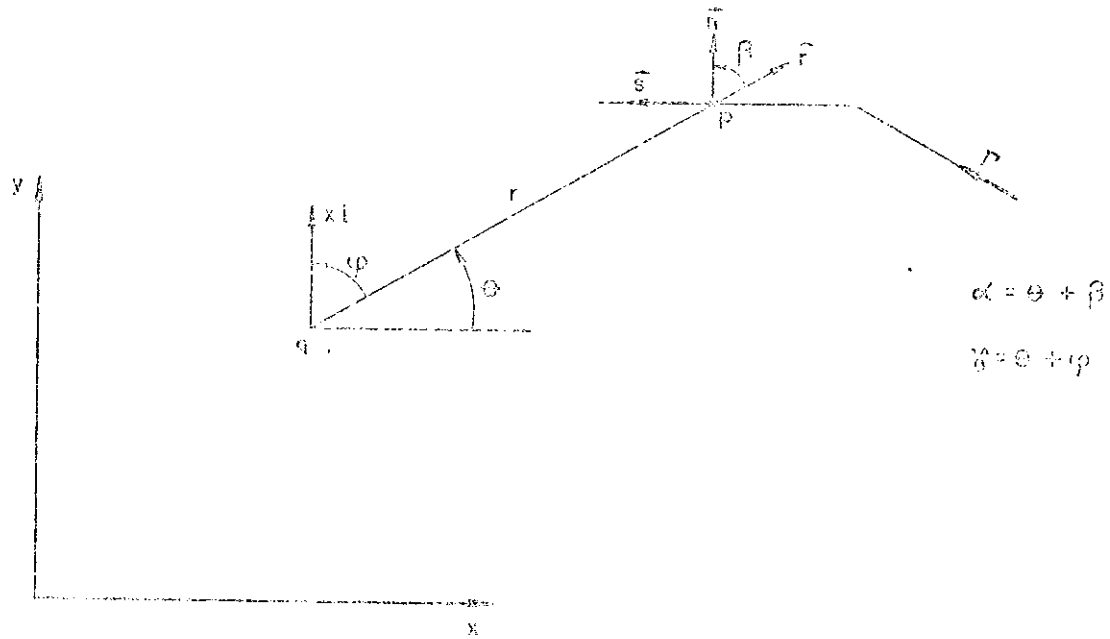


Fig. 4.8 - Representação do vetor posição  $r(q,P)$

$$\frac{\partial w^*}{\partial x_i}(q,P) = -\frac{r}{4\pi D} \ln r \quad r_i \quad (4.103.a)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,P) = \frac{1}{4\pi D} (r_i r_j + \delta_{ij} \ln r) \quad (4.103.b)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_\ell^2 \partial x_\ell}(q,P) = \frac{1}{4\pi D} (1+2 \ln r) \quad (4.103.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell}(q,P) \right] = -\frac{1}{2\pi r D} r_i \quad (4.103.d)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial r}(q,P) \right] = -\frac{1}{4\pi D} \left[ r_i (n_k r_k) + n_i \ln r \right] \quad (4.104.a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right] = - \frac{1}{4\pi r D} \left[ (2r_i r_j - \delta_{ij}) (n_k r_k) + n_i r_j + n_j r_i \right] \quad (4.104.b)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right] = \frac{1}{2\pi r D} (n_k r_k) \quad (4.104.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right] \right\} = - \frac{j}{2\pi r^2 D} n_i \quad (4.104.d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n^*}{\partial x_i} (q, P) &= \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu) (s_\ell r_\ell)^2 \left[ 4r_i (n_k r_k) - n_i \right] + \right. \\ &\left. - 4(1-\nu) (s_\ell r_\ell) (n_k r_k) s_i + (3-\nu) \left[ n_i - 2r_i (n_k r_k) \right] \right\} \quad (4.105.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_n^*}{\partial x_i \partial x_j} (q, P) &= \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 2(1-\nu) (s_\ell r_\ell)^2 \left[ 24r_i r_j (n_k r_k) + \right. \right. \\ &\left. - 4 \left[ n_i r_j + n_j r_i + \delta_{ij} (n_k r_k) \right] \right\} + 2(1-\nu) (s_\ell r_\ell) \left[ 2(n_i s_j + n_j s_i) + \right. \\ &\left. - 3(n_k r_k) (s_i r_j + s_j r_i) \right] + 4(1-\nu) (n_k r_k) (s_i s_j) + \\ &\left. + (3-\nu) \left[ 2\delta_{ij} (n_k r_k) - 8r_i r_j (n_k r_k) + 2(n_i r_j + n_j r_i) \right] \right\} \quad (4.105.b) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 v_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) = - \frac{1}{\pi r^3} \left\{ (1-\nu) (n_k r_k) \left[ 4(s_\ell r_\ell)^2 - 1 \right] \right\} \quad (4.105.c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 v_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) \right] &= - \frac{1-\nu}{\pi r^4} \left\{ (s_\ell r_\ell)^2 \left[ 24r_i (n_k r_k) - 4n_i \right] + \right. \\ &\left. - (n_k r_k) \left[ 8s_i (s_\ell r_\ell) - 4r_i \right] + n_i \right\} \quad (4.105.d) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial x_i} (q, P) = \frac{1}{4\pi r} \left\{ (1+\nu) r_i - 2(1-\nu) (n_k r_k) \left[ r_j (n_k r_k) - n_i \right] \right\} \quad (4.106.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j} (q, P) = & - \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ (1+\nu) (\delta_{ij} - 2r_i r_j) + 2(1-\nu) \left[ n_i n_j + \right. \right. \\ & - 2n_i r_j (n_k r_k) - (\delta_{ij} - 2r_i r_j) (n_k r_k)^2 - 2r_i (n_k r_k) \left[ n_j + \right. \\ & \left. \left. - r_j (n_k r_k) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.106.b)$$

$$\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) = - \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu) \left[ 1 - 2(n_k r_k)^2 \right] \right\} \quad (4.106.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) \right] = - \frac{1-\nu}{\pi r^3} \left[ r_i + 2n_i (n_k r_k) - 4r_i (n_k r_k)^2 \right] \quad (4.106.d)$$

$$\frac{\partial M_{ns}^*}{\partial x_i} (q, P) = - \frac{1-\nu}{4\pi r} \left[ 2r_i (n_k r_k) (s_\ell r_\ell) - n_i (s_\ell r_\ell) - s_i (n_k r_k) \right] \quad (4.107.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_i \partial x_j} (q, P) = & \frac{1-\nu}{4\pi r^2} \left\{ 2 \left[ (s_\ell r_\ell) (n_i r_j + n_j r_i) + (n_k r_k) (s_i r_j + s_j r_i) \right] + \right. \\ & \left. + 2(n_k r_k) (s_\ell r_\ell) (\delta_{ij} - 4r_i r_j) - n_j s_i + n_i s_j \right\} \end{aligned} \quad (4.107.b)$$

$$\frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) = \frac{1-\nu}{\pi r^2} \left[ (n_k r_k) (s_\ell r_\ell) \right] \quad (4.107.c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_\ell \partial x_\ell} (q, P) \right] = & \frac{1-\nu}{\pi r^3} \left[ 4r_i (n_k r_k) (s_\ell r_\ell) - n_i (s_\ell r_\ell) + \right. \\ & \left. - s_i (n_k r_k) \right] \end{aligned} \quad (4.107.d)$$

com:  $i, j = 1, 2$

onde:

$$r_1 = r_x = \cos\theta \quad (4.108.a)$$

$$r_2 = r_y = \sin\theta \quad (4.108.b)$$

$$n_1 = n_x = \cos\alpha \quad (4.109.a)$$

$$n_2 = n_y = \sin\alpha \quad (4.109.b)$$

$$s_1 = s_x = \cos(\alpha+90) = -\sin\alpha \quad (4.110.a)$$

$$s_2 = s_y = \sin(\alpha+90) = \cos\alpha \quad (4.110.b)$$

$$n_k r_k = n_x r_x + n_y r_y = \cos\alpha \cos\theta + \sin\alpha \sin\theta = \cos\beta \quad (4.111)$$

$$s_k r_k = s_x r_x + s_y r_y = -\sin\alpha \cos\theta + \cos\alpha \sin\theta = -\sin\beta \quad (4.112)$$

Aplicando-se as equações (4.101) e (4.102) a todos os NIP, pontos internos, obtém-se um sistema de equações que pode ser escrito matricialmente da seguinte forma:

$$\underline{\tilde{E}} = \underline{\tilde{S}} \underline{\tilde{U}} + \underline{\tilde{R}} \underline{\tilde{P}} + \underline{\tilde{T}}_e \quad (4.113)$$

onde:

$$\underline{\tilde{E}} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\tilde{E}}_1 \\ \underline{\tilde{E}}_i \\ \vdots \\ \underline{\tilde{E}}_{NIP} \end{array} \right\} \quad (4.114)$$



$$\underline{E}_i = \left\{ \begin{array}{c} M_x \\ M_{xy} \\ M_y \\ Q_x \\ Q_y \end{array} \right\}_i \quad (4.115)$$

$\underline{U}$  e  $\underline{P}$  - vetores contendo os valores nodais, deslocamentos e esforços respectivamente.

$\underline{S}$  e  $\underline{R}$  - matrizes análogas a  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ , determinadas a partir das soluções fundamentais (4.91) a (4.100).

$\underline{T}_e$  - vetor resultante das integrais de domínio que aparecem em (4.89) e (4.90).

Enquanto nas matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  os seus elementos são obtidos diretamente a partir das soluções fundamentais de  $V_n^*$ ,  $M_n^*$ ,  $w^*$ ,  $\partial w^*/\partial n$ , em  $\underline{S}$  e  $\underline{R}$ , os mesmos são determinados a partir das derivações destas soluções fundamentais conforme expressões (4.91) a (4.100). As montagens das matrizes  $\underline{S}$  e  $\underline{R}$  e  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  são feitas de forma análoga, observando-se que aqui também, a contribuição dos cantos será levada para a matriz  $\underline{S}$ .

Para cada ponto interno serão geradas cinco linhas na matriz  $\underline{S}$  e  $\underline{R}$ , sendo as três primeiras correspondentes aos momentos fletores  $M_x$ ,  $M_{xy}$  e  $M_y$ , e as outras duas correspondentes às forças cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$ . Analogamente às matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ , as colunas ímpares de  $\underline{S}$  e  $\underline{R}$  são ocupadas por elementos cujas soluções fundamentais envolvem  $V_n^*$  e  $w^*$ , respectivamente. As colunas pares são formadas por elementos obtidos com soluções fundamentais envolvendo  $M_n^*$  e  $\partial w^*/\partial n$ , respectivamente, para as matrizes  $\underline{S}$  e  $\underline{R}$ .

4.3 - Propriedades da matriz  $\underline{H}$

Considere-se a placa da figura 4.9, discretizada em elementos de contorno, onde o carregamento transversal será admitido nulo.

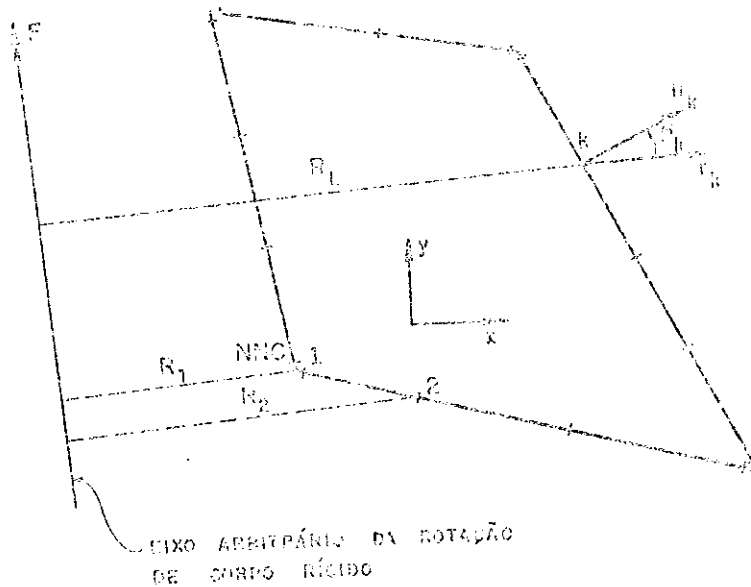


Fig. 4.9 - Placa com carregamento transversal nulo.

Se o carregamento transversal for nulo, também serão nulos os vetores dos esforços nodais e da integração sobre a região carregada  $\Omega_g$ , respectivamente,  $\underline{P}$  e  $\underline{T}$ , que aparecem no sistema (4.28), reescrito agora como:

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{0} \quad (4.116)$$

Este sistema de equações admite soluções não triviais, correspondentes aos movimentos de corpo rígido, isto é, deslocamento vertical e rotação em torno de um eixo arbitrário [74].

Admitindo-se para o movimento vertical, o deslocamento de corpo rígido  $w_0$ , de tal forma que:

$$U(2k-1) = w_0 \quad (4.117.a)$$

$$U(2k) = 0 \quad (4.117.b)$$

podese escrever a seguinte propriedade, envolvendo apenas os elementos ímpares da matriz  $\tilde{H}$ :

$$\sum_{k=1}^{NNC} h_{i,2k-1} = 0 \quad (4.118)$$

com  $i = 1, 2 \text{ NNC}$

Considerando-se agora uma rotação de corpo rígido  $\alpha$ , em relação a um eixo arbitrário F, no sentido deste, tem-se para um nó qualquer k:

$$U(2k-1) = \alpha \cdot R_k \quad (4.119.a)$$

$$U(2k) = \alpha \cdot \cos \beta_k \quad (4.119.b)$$

Levando-se os deslocamentos (4.119.a) e (4.119.b) em (4.116) obtém-se a seguinte propriedade para uma linha i genérica de  $\tilde{H}$ :

$$\sum_{k=1}^{NNC} (h_{i,2k-1} R_k + h_{i,2k} \cdot \cos \beta_k) = 0 \quad (4.120)$$

As propriedades (4.118) e (4.120) da matriz  $\tilde{H}$ , ser virão neste trabalho apenas para verificação da mesma, uma vez que na formulação usada o ponto singular Q foi deslocado do contorno para uma posição fora do domínio, evitando-se assim a singularidade na integração sobre o elemento que contém o nó Q.

Além da verificação, estas propriedades de  $\tilde{H}$  servem para obter os elementos da diagonal principal, correspondentes às integrais com singularidades, quando o cálculo sobre os elementos adjacentes for evitado [74].

#### 4.6 - Aplicações numéricas

A partir da formulação dos elementos de contorno para problemas de flexão de placas, já desenvolvida neste capítulo, apresentam-se agora algumas aplicações do método a placas isoladas.

Os resultados obtidos com a formulação do MEC são comparados com a solução exata, quando a solução analítica para o problema se encontrar em TIMOSHENKO [75], e em caso contrário, com outras técnicas numéricas.

Em todos os exemplos analisados o elemento usado é o linear contínuo, o coeficiente de Poisson é adotado igual a 0,3 e, excetuando-se o primeiro exemplo, o valor "a" é assumido como 0,5.

##### 4.6.1 - Exemplo 1: placa quadrada uniformemente carregada

Neste exemplo é analisada uma placa quadrada simplesmente apoiada no contorno com carregamento uniformemente distribuído, conforme figura 4.10.a.

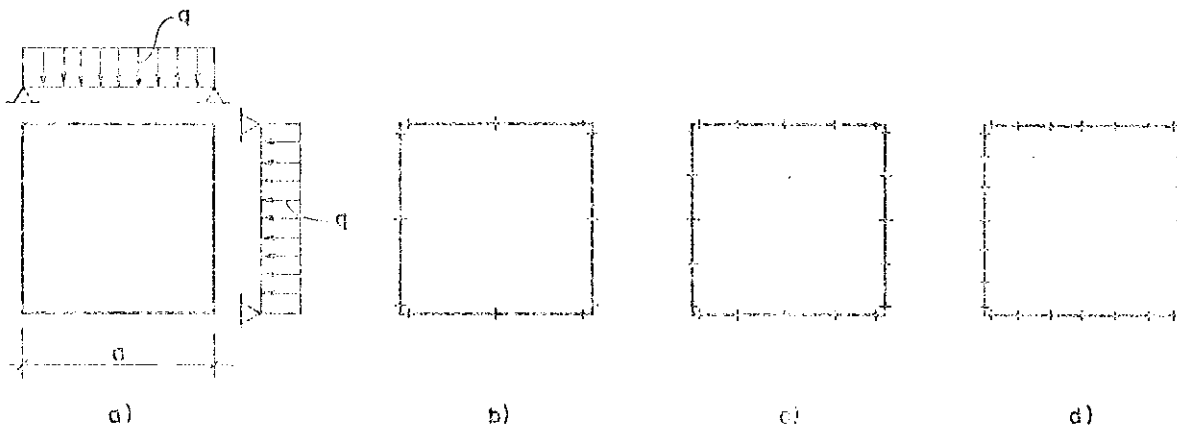


Fig. 4.10 - a) Placa quadrada submetida a um carregamento uniformemente distribuído.  
b) Discretização para 8 elementos de contorno.  
c) Discretização para 16 elementos de contorno.  
d) Discretização para 24 elementos de contorno.

Nas figuras (4.10.b), (4.10.c) e (4.10.d) são mostrados as três discretizações adotadas no exemplo. Os valores obtidos com estas discretizações para diferentes valores de "a" estão mostrados na tabela 4.1, além dos valores exatos, que se encontram na parte superior de cada coluna. A discretização de contorno da região carregada (que neste caso é toda a placa), é feita considerando-se apenas 4 elementos.

Tabela 4.1 - Resultados para o primeiro exemplo

NE	a	$W_{m\acute{a}x}$	$M_{m\acute{a}x}$	$V_{m\acute{a}x}$	Reação de Canto
		0,00406 $qa^4/D$	0,0479 $qa^2$	0,42 $qa$	0,065 $qa^2$
8	0,5	0,00406	0,0479	0,46	0,080
	1,0	0,00406	0,0480	0,45	0,086
	1,5	0,00406	0,0481	0,44	0,087
16	0,5	0,00406	0,0479	0,45	0,077
	1,0	0,00406	0,0479	0,49	0,093
	1,5	0,00407	0,0480	0,79	0,081
24	0,5	0,00406	0,0479	0,45	0,070
	1,0	0,00406	0,0479	0,46	0,072
	1,5	0,00406	0,0479	1,17	0,181

As perturbações maiores nos resultados são notadas nos valores de  $V_{m\acute{a}x}$  e da reação de canto quando "a" assume valores grandes. Foi observado que mesmo para uma discretização pobre, quando se diminui o valor de "a" para valores próximos de zero, por exemplo NE = 8 e "a" = 0,05, chegou-se a valores de reação de canto quase exatos, ou seja 0,065  $qa^2$ . Entretanto valores pequenos de "a" devem ser evitados. A precisão conseguida neste caso deve ser apenas vista como um caso particular.

#### 4.6.2 - Exemplo 2 - Placa quadrada submetida a carregamento distribuído em pequena área central

Mostre-se neste exemplo, de acordo com a figura 4.11, uma placa simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído  $q_0$ , atuando em uma área central de dimensões  $u$  e  $v$ .

São consideradas duas situações para as relações  $u/a$  e  $v/a$ . Na primeira, estas relações são adotadas próximas de zero, e o valor de deslocamento  $W_{\max}$  é comparado com a solução analítica para o caso de carga concentrada. Na segunda situação são calculados valores de  $W_{\max}$  e  $M_{\max}$  para relações  $u/a$  e  $v/a$  iguais a 0,10, e os valores são comparados aos obtidos com a solução exata (ver tabela 4.2). A discretização do contorno é a mesma da figura 4.10.b e a região carregada tem também o seu contorno discretizado em 4 elementos.

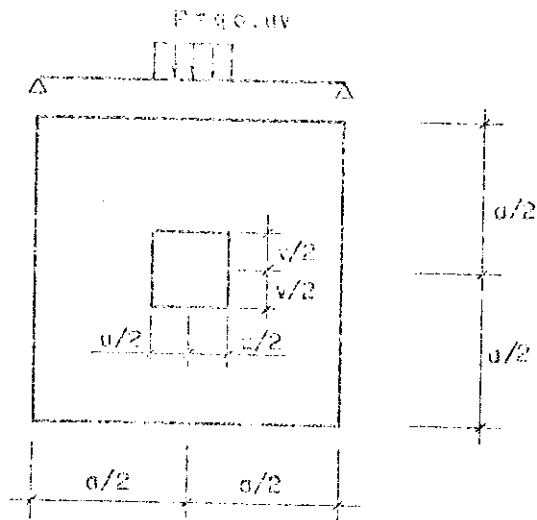


Fig. 4.11 - Placa quadrada com carregamento parcialmente distribuído.

Tabela 4.2 - Resultados para o segundo exemplo

u/a = v/a	$W_{\text{máx}}$		$M_{\text{máx}}$	
	MEC	TIMOSHENKO	MEC	TIMOSHENKO
0,005	0,01159	0,01160	0,594	-----
0,10	0,01156	-----	0,284	0,284

Pelos resultados mostrados na tabela 4.2, nota-se a precisão do método. Para  $u/a = v/a = 0,005$  os resultados  $W_{\text{máx}}$  e  $M_{\text{máx}}$  são obtidos normalmente pelo MEC, enquanto só é possível a determinação de  $W_{\text{máx}}$  pela solução exata. Para a outra relação  $u/a$ , embora possível a determinação de  $W_{\text{máx}}$ , TIMOSHENKO [75], só apresenta o valor de  $M_{\text{máx}}$ .

#### 4.6.3 - Exemplo 3 - Placa com condições de carregamento e contorno variáveis

Na figura 4.12, mostra-se uma placa engastada em um dos lados, apoiadas em dois outros e com borda livre no quarto lado. Esta placa está submetida a um carregamento uniformemente distribuído de  $1,0 \text{ tf/m}^2$ , além de uma carga concentrada de  $4 \text{ tf}$  no ponto 4. O módulo de elasticidade longitudinal  $E = 1,8 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ , o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e a espessura  $h = 0,18 \text{ m}$ .

São consideradas duas discretizações do contorno, mostradas na figura 4.12.b e 4.12.c. Em ambas, o contorno da região carregada é discretizado em 8 elementos, de comprimento  $4 \text{ m}$  nos lados maiores e  $3 \text{ m}$  nos lados menores. A carga concentrada de  $4 \text{ tf}$  foi considerada como uma carga uniformemente distribuída na área quadrada de lado igual a  $0,2 \text{ m}$ , com centro no ponto 4. Esta nova região carregada tem o seu contorno discretizado em 4 elementos.

Os resultados obtidos com o MEC são comparados aos obtidos com o MEF [80], para uma malha de elementos finitos

mostradas na figura 4.12.d, utilizando-se o programa ICES STRUPL-II.

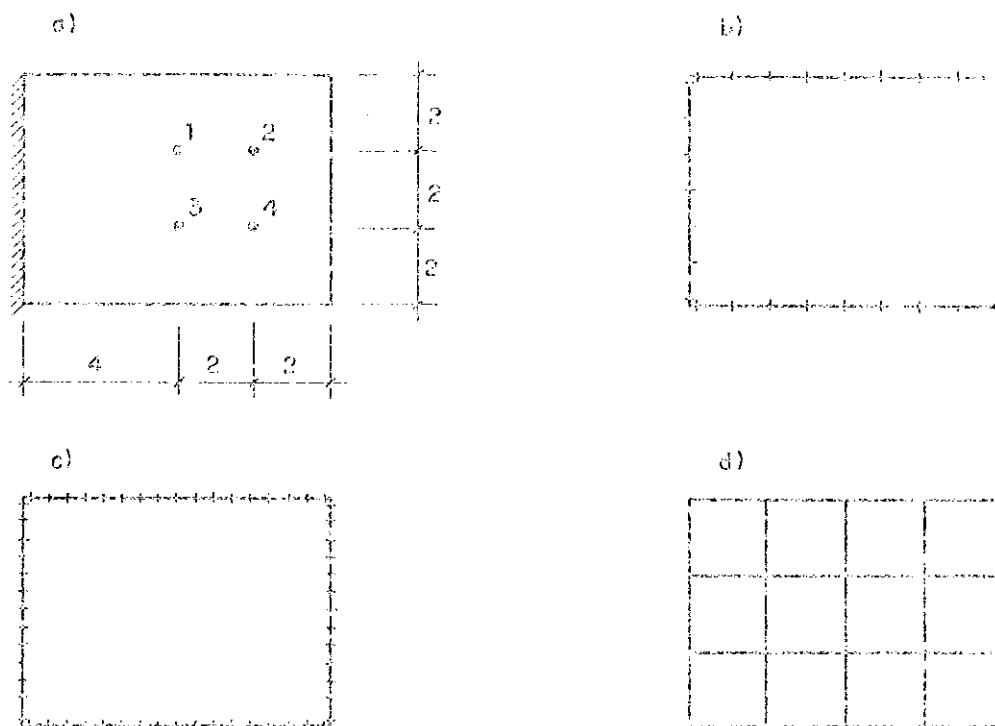


Fig. 4.12 - a) Geometria da placa analisada  
b) Discretização de contorno em 28 elementos  
c) Discretização de contorno em 56 elementos  
d) Malha de elementos finitos

Na tabela 4.3 a unidade do deslocamento  $\tilde{w}$  é cm e para os momentos é  $\text{kgf.m/m}$ . Pelos resultados apresentados acima nota-se já para a placa com 28 elementos uma razoável precisão, quando comparado aos resultados do MEF. Esta precisão melhora quando a discretização aumenta. Este mesmo exemplo foi também executado com a formulação apresentada em [74], para 40 elementos, e os resultados obtidos confirmam também a eficiência do método.



Tabela 4.3 - Resultados para o terceiro exemplo.

MÉTODO	VALORES	PONTO 1	PONTO 2	PONTO 3	PONTO 4
MEC 28 EL.	W	-1,899	-1,593	-1,192	-1,031
	$M_x$	3250	3374	2045	4219
	$M_y$	1137	1012	1611	3406
	$M_{xy}$	187	561	429	980
MEC 56 EL.	W	-1,875	-1,588	-1,133	-1,048
	$M_x$	3534	3257	2219	3960
	$M_y$	1605	1460	1860	3405
	$M_{xy}$	172	525	422	996
MEF	W	-1,909	-1,615	-1,195	-1,055
	$M_x$	3620	3738	2208	-----
	$M_y$	1530	1184	1970	-----
	$M_{xy}$	168	512	432	-----

## CAPÍTULO V

### PLACAS SOBRE FUNDAÇÕES ELÁSTICAS

#### 5.1 - Introdução

Até agora foi desenvolvida uma formulação do método dos elementos de contorno aplicada ao problema de flexão de placas. Neste capítulo mostra-se a extensão deste método para a análise de placas apoiadas sobre fundações elásticas.

A formulação de elementos de contorno já proposta para este caso [43], requer uma solução fundamental particular, na qual a reação do solo já é considerada. A vantagem desta formulação consiste na eliminação da integral da reação do solo, embora isto restrinja a aplicação do método a casos particulares, nos quais somente reações elásticas em todo o domínio são levadas em conta.

A reação do solo será aqui considerada pelo acréscimo de uma integral de domínio na representação integral usual dos deslocamentos.

Serão consideradas duas maneiras distintas no cálculo desta nova integral; primeiramente será resolvida pela

discretização do domínio em células e, posteriormente, como alternativa para se evitar a discretização interna, será transformada em integral sobre o contorno, utilizando-se para isto o processo da reciprocidade dual.

## 5.2 - Equações básicas

Considerando-se a equação diferencial (2.30), pode-se escrever para uma placa delgada apoiada sobre fundação elástica, e submetida a um carregamento transversal  $g_a$  (figura 5.1), a seguinte equação diferencial:

$$\Delta \Delta w(q) = [g_a(p) - g_s(p)]/D \quad (5.1)$$

onde  $g_s(p)$  é a reação do solo, dada pelo produto do coeficiente específico do solo pelo afundamento da placa no ponto  $p$ , isto é,

$$g_s(p) = Kw(p) \quad (5.2)$$

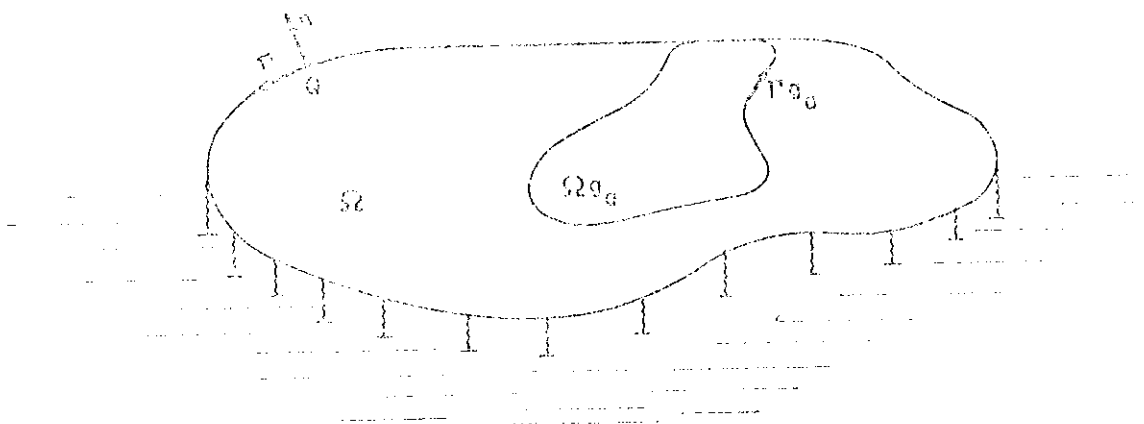


Fig. 5.1 - Placa apoiada sobre fundação elástica

A partir das representações integrais dos deslocamentos  $w(q)$  e da sua derivada direcional  $\partial w(q)/\partial m$ , dadas respectivamente nas expressões (3.36) e (3.37), e conside-

random-se  $g_a(p)$  e  $g_s(p)$  duas ações independentes, podem ser escritas as seguintes equações integrais:

$$\begin{aligned}
 w(q) &+ \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] d\Gamma(P) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \int_{\Omega_{g_a}} w^*(q, p) g_a(p) d\Omega_{g_a}(p) + \\
 &- \int_{\Omega_{g_s}} K w^*(q, p) w(p) d\Omega_{g_s}(p) \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial m}(q) &+ \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) - \right. \\
 &- M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \left. \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(q, P) + \\
 &+ \int_{\Omega_{g_a}} \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) g_a(p) d\Omega_{g_a}(p) + \int_{\Omega_{g_s}} K \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) w(p) d\Omega_{g_s}(p) \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

Conforme já visto no capítulo 3, para pontos  $Q$  do contorno, as representações integrais dos deslocamentos  $w(Q)$  e  $\partial w(Q)/\partial m$  são obtidas substituindo-se em (5.3) e (5.4), respectivamente  $w(q)$  e  $\partial w(q)/\partial m$ , por  $K(Q)w(Q)$  e  $K_1 \partial w(Q)/\partial m + K_2 \partial w(Q)/\partial u$ . Estas constantes são dadas nas expressões (3.44) e (3.52), sendo que para o caso de pontos  $Q$  situados fora do domínio estas constantes se anulam.

O equacionamento agora s $\tilde{a}$  se diferencia do anterior, devido ao acr $\tilde{e}$ scimo do  $\tilde{u}$ ltimo termo integral, que aparece nas equa $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s (5.3) e (5.4). Dependendo-se da forma como esta integral for tratada, discretizando-se o dom $\tilde{i}$ nio em c $\tilde{e}$ lulas ou transformando-a em integral sobre o contorno, s $\tilde{e}$  r $\tilde{a}$ o desenvolvidas duas formula $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s distintas para a an $\tilde{a}$ lise de placas sobre funda $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s el $\tilde{a}$ sticas: integra $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$  sobre c $\tilde{e}$ lulas internas e processo de reciprocidade dual a serem disc $\tilde{c}$ utidos nos itens subsequentes.

### 5.3 - Integra $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ sobre c $\tilde{e}$ lulas internas

Esta formula $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$  consiste na discretiza $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$  do dom $\tilde{i}$ nio em c $\tilde{e}$ lulas internas, onde os deslocamentos, e consequentemente as rea $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s do solo, s $\tilde{e}$ r $\tilde{a}$ o aproximados. Assim as integrais de dom $\tilde{i}$ nio,

$$\int_{\Omega_{e_s}} K w^*(q, p) w(p) d\Omega_{e_s}(p) \tag{5.5}$$

$$\int_{\Omega_{e_s}} K \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) w(p) d\Omega_{e_s}(p) , \tag{5.6}$$

s $\tilde{e}$ r $\tilde{a}$ o transformadas em somat $\tilde{o}$ rios de integrais sobre subdom $\tilde{i}$ nios ou c $\tilde{e}$ lulas, para todos os pontos "q" internos, e "Q" do contorno.

Na figura 5.2.a mostra-se uma placa gen $\tilde{e}$ rica, com uma discretiza $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$  qualquer do seu dom $\tilde{i}$ nio em c $\tilde{e}$ lulas internas triangulares. Na figura 5.2.b uma c $\tilde{e}$ lula  $\tilde{e}$  destacada, indicando-se na mesma um sistema de coordenadas homog $\tilde{e}$ neas, similar ao usado na formula $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$  do m $\tilde{e}$ todo dos elementos finitos [55].

Um ponto "p" da c $\tilde{e}$ lula "i", de coordenadas  $(x_1^p, x_2^p)$ , pode ser definido em fun $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$  das coordenadas dos v $\tilde{e}$ rtes da c $\tilde{e}$ lula,  $p_1, p_2$  e  $p_3$ , da seguinte forma:

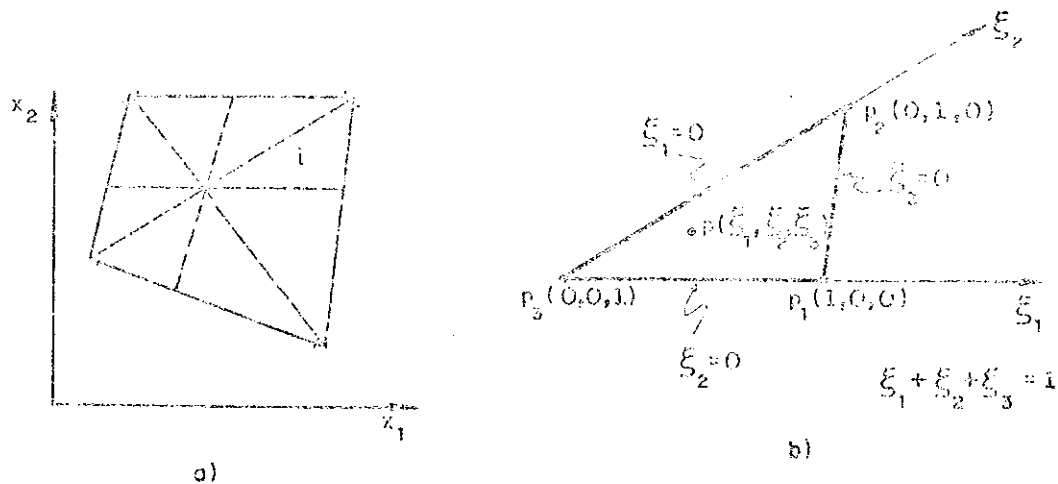


Fig. 5.2 - a) Placa com uma discretização qualquer.  
 b) Célula "i" com o sistema de coordenadas homogêneas indicado.

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}^P = \tilde{\psi}^T \tilde{X}^{(N)} \quad (5.7)$$

onde

$$\tilde{\psi}^T = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}^T & 0 \\ 0 & \tilde{\phi}^T \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

e

$$\tilde{X}^{(N)} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_1^{(N)} \\ \tilde{X}_2^{(N)} \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

com

$$\tilde{\phi} = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

e

$$x_i^{(N)} = \begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ x_i^3 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Explicitamente a coordenada  $x_i$  do ponto "p" pode ser escrita da seguinte forma:

$$x_i^p = \xi_1^p x_i^1 + \xi_2^p x_i^2 + \xi_3^p x_i^3 \quad (5.12)$$

Escrevendo-se a variável adimensional  $\xi_\alpha^p$ , para o ponto "p", em função do sistema de coordenadas  $(x_1, x_2)$ , obtêm-se [55]:

$$\xi_\alpha^p = \frac{1}{2A} (2A_\alpha + b^\alpha x_1^p + a^\alpha x_2^p) \quad (5.13)$$

onde:

$$a^\alpha = x_1^k - x_1^j \quad (5.14)$$

$$b^\alpha = x_2^j - x_2^k \quad (5.15)$$

$$2A_\alpha = x_1^j x_2^k - x_1^k x_2^j \quad (5.16)$$

$$A = \frac{1}{2} (b^1 a^2 - b^2 a^1) \quad (5.17)$$

com  $\alpha = 1, 2, 3$   $j = 2, 3, 1$  e  $k = 3, 1, 2$

Como as integrais (5.5) e (5.6) envolvem soluções fundamentais que são funções do vetor posição  $r(q,p)$ , e do ângulo  $\theta$ , entre a direção deste e o eixo  $x_1$ , é conveniente expressar a equação (5.13) em função do sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$ , com origem no ponto "q" (ver figura 5.3).

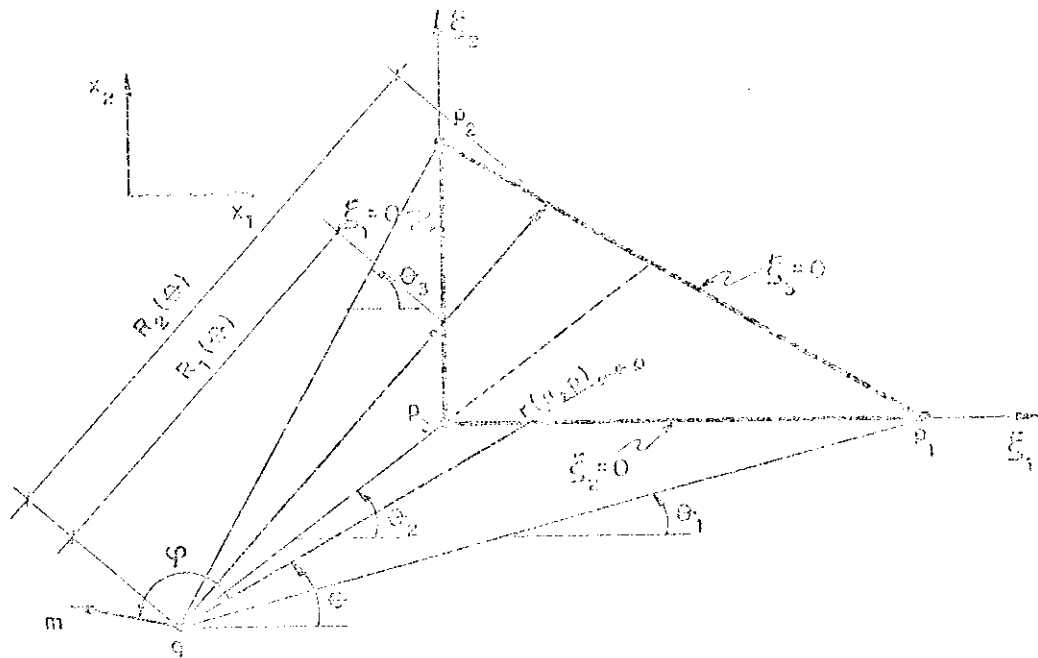


Fig. 5.3 - Célula interna e os três sistemas de coordenadas  $(x_1, x_2)$ ,  $(\xi_1, \xi_2)$  e  $(r, \theta)$ .

Com esta finalidade a equação (5.13) pode ser reescrita em função de  $(r, \theta)$ , da seguinte forma:

$$\xi_{\alpha}^p = \xi_{\alpha}^q + \frac{r}{2\Delta} (b^{\alpha} \cos\theta + a^{\alpha} \sin\theta) \quad (5.18)$$

onde os valores de  $a^{\alpha}$  e  $b^{\alpha}$  são os dados pelas expressões (5.14) e (5.15), e  $\xi_{\alpha}^q$  é obtido com a equação (5.13), para o ponto "q".

Deve-se notar que quando o ponto "q" coincidir com um dos cantos  $\alpha$  da célula, tem-se  $\xi_{\alpha \neq q}^q = 1$ , e para os outros dois nós  $\xi_{\alpha \neq q}^q = 0$ .

Considerando-se a placa discretizada conforme a figura (5.2.a), as integrais (5.5) e (5.6) podem ser transformadas em somatório de integrais sobre todas as células do domínio, obtendo-se as seguintes expressões:

$$\sum_{i=1}^{N_{cel}} \int_{\Omega_{\xi_{si}}} Kw^*(q, p) w(p) d\Omega_{\xi_{si}}(p) \quad (5.19.a)$$



$$\sum_{i=1}^{N_{\text{cel}}} \int_{\Omega_{g_{si}}} K \frac{\partial w^*}{\partial m} (q,p) w(p) d\Omega_{g_{si}} (p) \quad (5.19.b)$$

onde  $N_{\text{cel}}$  é o número de células.

O deslocamento transversal  $w(p)$ , para um ponto qualquer da célula, pode ser escrito em função dos deslocamentos verticais dos vértices, analogamente à expressão (5.7), resultando:

$$w(p) = \underline{\phi}^T \underline{w}^{(N)} \quad (5.20)$$

onde  $\phi$  é dado na expressão (5.10) e  $\underline{w}^{(N)}$ , representa os deslocamentos verticais  $w^1$ ,  $w^2$  e  $w^3$  dos nós.

Substituindo-se em (5.18) e (5.19) o valor de  $w(p)$ , dado em (5.20) e considerando-se apenas uma célula genérica  $i$ , pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_i} K w^*(q,p) w(p) d\Omega_i (p) = \left\{ \int_{\Omega_i} \xi_1^p w^*(q,p) d\Omega_i (p) \int_{\Omega_i} \xi_2^p w^*(q,p) d\Omega_i (p) \int_{\Omega_i} \xi_3^p w^*(q,p) d\Omega_i (p) \right\} K \begin{Bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

$$\int_{\Omega_i} K \frac{\partial w^*}{\partial m} (q,p) w(p) d\Omega_i (p) = \left\{ \int_{\Omega_i} \xi_1^p \frac{\partial w^*}{\partial m} (q,p) d\Omega_i (p) \int_{\Omega_i} \xi_2^p \frac{\partial w^*}{\partial m} (q,p) d\Omega_i (p) \int_{\Omega_i} \xi_3^p \frac{\partial w^*}{\partial m} (q,p) d\Omega_i (p) \right\} K \begin{Bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

onde por simplicidade  $\Omega_i = \Omega_{g_{si}}$ .

Considerando-se  $\xi_\alpha^p$  escrito em função das coordenadas polares  $(r,\theta)$ , conforme expressão (5.18), e substituindo-se  $w^*(q,p)$  e  $\frac{\partial w^*}{\partial m} (q,p)$  pelos seus valores dados nas equações (2.82) e (2.105), pode-se escrever para as integrais de (5.21) e (5.22) as seguintes expressões:

$$\int_{\Omega_i} \xi_{\alpha}^p w^*(q, p) d\Omega_i(p) = \frac{1}{8\pi D} \int_{\Omega_i} \left[ \xi_{\alpha}^q + \frac{r}{2\Lambda} (b^{\alpha} \cos\theta + a^{\alpha} \sin\theta) \right] \left[ r^2 (\ln r - \frac{1}{2}) \right] d\Omega_i \quad (5.23)$$

$$\int_{\Omega_i} \xi_{\alpha}^p \frac{\partial w^*}{\partial m} (q, p) d\Omega_i(p) = - \frac{1}{4\pi D} \int_{\Omega_i} \left[ \xi_{\alpha}^q + \frac{r}{2\Lambda} (b^{\alpha} \cos\theta + a^{\alpha} \sin\theta) \right] (r \ln r \cos\phi) d\Omega_i \quad (5.24)$$

Transformando-se as integrais sobre o domínio  $\Omega_i$  em integrais sobre  $r$  e  $\theta$ , e integrando-se em relação a  $r$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \xi_{\alpha}^p w^*(q, p) d\Omega_i(p) &= \frac{1}{32\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi_{\alpha}^q \left[ R_2^4 (\ln R_2 - \frac{3}{4}) + \right. \\ &- \left. R_1^4 (\ln R_1 - \frac{3}{4}) \right] d\theta + \frac{1}{80\pi \Lambda D} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (b^{\alpha} \cos\theta + a^{\alpha} \sin\theta) \left[ R_2^5 (\ln R_2 - \frac{7}{10}) + \right. \\ &- \left. R_1^5 (\ln R_1 - \frac{7}{10}) \right] d\theta \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \xi_{\alpha}^p \frac{\partial w^*}{\partial m} (q, p) d\Omega_i(p) &= - \frac{1}{12\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi_{\alpha}^q \left[ R_2^3 (\ln R_2 - \frac{1}{3}) + \right. \\ &- \left. R_1^3 (\ln R_1 - \frac{1}{3}) \right] \cos\phi d\theta - \frac{1}{32\pi \Lambda D} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (b^{\alpha} \cos\theta + a^{\alpha} \sin\theta) \left[ R_2^4 (\ln R_2 - \frac{1}{4}) + \right. \\ &- \left. R_1^4 (\ln R_1 - \frac{1}{4}) \right] \cos\phi d\theta \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde  $R_1$  e  $R_2$  são funções do ângulo  $\theta$ , e são obtidas a partir da equação (5.18) para  $\xi_{\alpha}^p = 0$ .

Observando-se a figura 5.3 nota-se que o valor de  $R_1$  será obtido nesta situação para dois intervalos distintos de variação do ângulo  $\theta$ . Se o intervalo for  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , obtêm-se  $R_1$  fazendo-se  $\xi_2^p = 0$ , enquanto para o intervalo  $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$ ,  $R_1$  será obtido com  $\xi_1^p = 0$ . Desta forma, obtêm-se duas expressões distintas para  $R_1$ , dadas a seguir:

$$R_1 = - \frac{2\Delta\xi_2^q}{b^2 \cos\theta + a^2 \operatorname{sen}\theta}, \quad 0_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad (5.27)$$

$$R_1 = - \frac{2\Delta\xi_1^q}{b^1 \cos\theta + a^1 \operatorname{sen}\theta}, \quad \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3 \quad (5.28)$$

De maneira análoga  $R_2$  será obtido, fazendo-se  $\xi_3^P = 0$ , obtendo-se a seguinte expressão:

$$R_2 = - \frac{2\Delta\xi_3^q}{b^3 \cos\theta + a^3 \operatorname{sen}\theta}, \quad 0_1 \leq \theta \leq \theta_3 \quad (5.29)$$

Isto pode ser evitado dividindo-se cada célula em duas, quando necessário, conforme figura 5.4.a, e fazendo-se a integração isoladamente para  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  e  $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$ . Se na figura 5.4.a o ângulo  $\theta_1$  for igual a  $\theta_2$ , ou  $\theta_2$  igual  $\theta_3$ , não é necessário esta subdivisão da célula  $i$ .

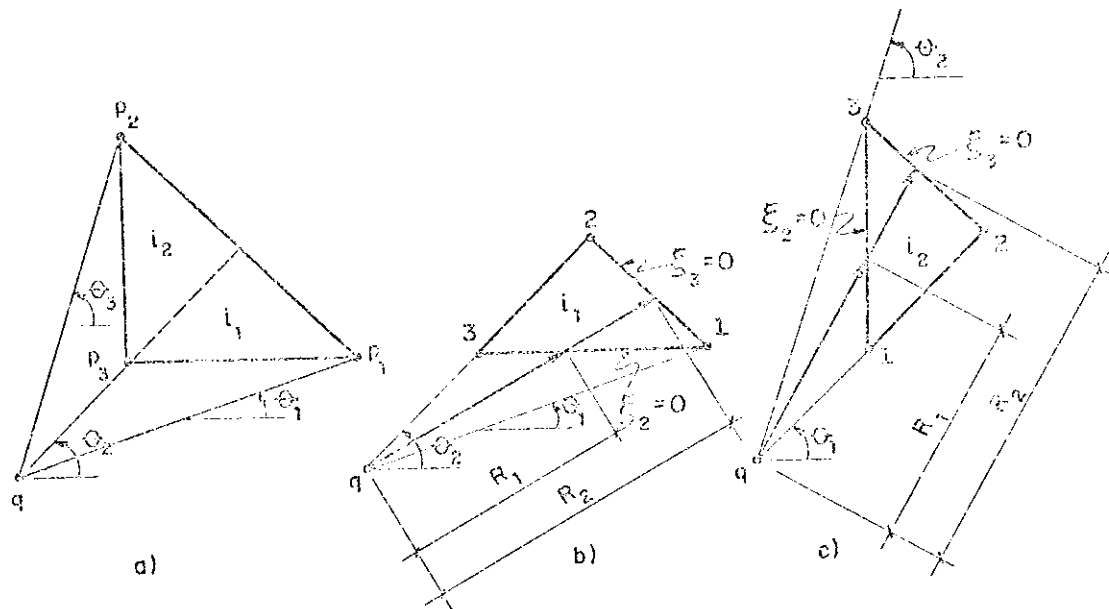


Fig. 5.4 - a) Célula  $i$  subdividida nas células  $i_1$  e  $i_2$   
 b) Célula  $i_1$  com os novos valores de  $\theta$  e  $R$   
 c) Célula  $i_2$  com os novos valores de  $\theta$  e  $R$

As duas células  $i_1$  e  $i_2$ , resultantes da divisão da célula  $i$ , estão mostradas nas figuras 5.4.b e 5.4.c, com a numeração local dos seus vértices seguindo a mesma orientação anterior. São considerados também para estas células, uma nova definição local dos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , com  $\theta_2 > \theta_1$ , e dos raios  $R_1$  e  $R_2$ , com  $R_2 > R_1$ . Desta forma, as integrais (5.25) e (5.26) em relação a célula  $i$ , são transformadas na soma das integrais sobre as novas células  $i_1$  e  $i_2$ . Considerando-se apenas uma das células  $i_1$  ou  $i_2$ , pode-se escrever as integrais (5.25) e (5.26) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \xi_{\alpha}^p w^*(q,p) d\Omega_i(p) &= \frac{1}{32\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi_{\alpha}^q \left[ R_2^4 (\ln R_2 - \frac{3}{4}) + \right. \\ &- R_1^4 (\ln R_1 - \frac{3}{4}) \left. \right] d\theta + \frac{1}{80\pi AD} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (b^{\alpha} \cos\theta + a^{\alpha} \sin\theta) \left[ R_2^5 (\ln R_2 - \frac{7}{10}) + \right. \\ &- R_1^5 (\ln R_1 - \frac{7}{10}) \left. \right] d\theta \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \xi_{\alpha}^p \frac{\partial w^*}{\partial m}(q,p) d\Omega_i(p) &= - \frac{1}{12\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi_{\alpha}^q \left[ R_2^3 (\ln R_2 - \frac{1}{3}) + \right. \\ &- R_1^3 (\ln R_1 - \frac{1}{3}) \left. \right] \cos\phi d\theta - \frac{1}{32\pi AD} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (b^{\alpha} \cos\theta + a^{\alpha} \sin\theta) \left[ R_2^4 (\ln R_2 - \frac{1}{4}) + \right. \\ &- R_1^4 (\ln R_1 - \frac{1}{4}) \left. \right] \cos\phi d\theta \end{aligned} \quad (5.31)$$

Onde o índice "i" pode representar a célula  $i_1$  ou  $i_2$ , o raio  $R_1$  é sempre obtido para  $\xi_2^p = 0$ , conforme expressão (5.27) e  $R_2 > R_1$ .

As integrais (5.30) e (5.31) podem ser transformadas em integrais numéricas, fazendo-se a mudança da variável  $\theta$  para uma variável adimensional  $\eta$ , definida pela seguinte expressão:

$$\eta = \frac{2}{\theta_2 - \theta_1} \left( \theta - \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \right) \quad (5.32)$$

onde, para  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , implica em  $-1 \leq \eta \leq 1$ .

A partir de (5.32) pode-se escrever:

$$d\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} d\eta \quad (5.33)$$

Substituindo-se o valor (5.33) em (5.30) e (5.31) obtêm-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \xi_{\alpha}^p v^*(q, P) d\Omega_i(p) &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{64\pi D} \int_{-1}^1 \xi_{\alpha}^q \left[ R_2^4 (\ln R_2 - \frac{3}{4}) + \right. \\ &- R_1^4 (\ln R_1 - \frac{3}{4}) \left. \right] d\eta + \frac{\theta_2 - \theta_1}{160\pi AD} \int_{-1}^1 (b^{\alpha} \cos \theta + a^{\alpha} \sin \theta) \left[ R_2^5 (\ln R_2 - \frac{7}{10}) + \right. \\ &- R_1^5 (\ln R_1 - \frac{7}{10}) \left. \right] d\eta \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \xi_{\alpha}^p \frac{\partial w^*}{\partial m} (q, P) d\Omega_i(p) &= - \frac{\theta_2 - \theta_1}{24\pi D} \int_{-1}^1 \xi_{\alpha}^q \left[ R_2^3 (\ln R_2 - \frac{1}{3}) + \right. \\ &- R_1^3 (\ln R_1 - \frac{1}{3}) \left. \right] \cos \phi d\eta - \frac{\theta_2 - \theta_1}{64\pi AD} \int_{-1}^1 (b^{\alpha} \cos \theta + a^{\alpha} \sin \theta) \left[ R_2^4 (\ln R_2 - \frac{1}{4}) + \right. \\ &- R_1^4 (\ln R_1 - \frac{1}{4}) \left. \right] \cos \phi d\eta \end{aligned} \quad (5.35)$$

Levando-se as integrais (5.34) e (5.35) para as duas células  $i_1$  e  $i_2$ , nas expressões (5.21) e (5.22), obtêm-se finalmente as integrais de domínio (5.5) e (5.6) para célula genérica "i", dadas pelas seguintes equações:

$$\int_{\Omega_i} K w^*(q, p) w(p) d\Omega_i(p) = \left\{ \Lambda^1 \quad \Lambda^2 \quad \Lambda^3 \right\} K \begin{Bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

$$\int_{\Omega_i} K \frac{\partial w^*}{\partial m} (q, p) w(p) d\Omega_i(p) = \left\{ B^1 \quad B^2 \quad B^3 \right\} K \begin{Bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{Bmatrix} \quad (5.37)$$

onde

$$\Omega_i = \Omega_{i_1} + \Omega_{i_2} \quad (5.38)$$

$$A^\alpha = \int_{\Omega_{i_1}} \xi_\alpha^p w^*(q, p) d\Omega_{i_1}(p) + \int_{\Omega_{i_2}} \xi_\alpha^p w^*(q, p) d\Omega_{i_2}(p) \quad (5.39)$$

$$B^\alpha = \int_{\Omega_{i_1}} \xi_\alpha^p \frac{\partial w^*}{\partial m} (q, p) d\Omega_{i_1}(p) + \int_{\Omega_{i_2}} \xi_\alpha^p \frac{\partial w^*}{\partial m} (q, p) d\Omega_{i_2}(p) \quad (5.40)$$

para  $\alpha = 1, 2, 3$

Analisando-se as expressões (5.36) e (5.37), nota-se que, em ambas, os coeficientes  $KA^\alpha$  e  $KB^\alpha$  estão multiplicados pelos valores dos deslocamentos verticais  $w$ , correspondentes aos v\u00e9rtices " $\alpha$ " da c\u00e9lula  $i$ , ou aos pontos " $p_\alpha$ " do dom\u00ednio da placa. Portanto a contribui\u00e7\u00e3o destes coeficientes pode ser levadas para a matriz  $\underline{H}$ , ocupando as linhas  $2q$  e  $2q-1$ , nas colunas  $(2p_\alpha-1)$ , para  $\alpha = 1, 2, 3$ . Desta forma, na resolu\u00e7\u00e3o do sistema (4.28), a integral de dom\u00ednio referente \u00e0 rea\u00e7\u00e3o do solo estar\u00e1 sendo levada em conta. Assim com a influ\u00eancia destes termos de dom\u00ednio, no vo sistema de equa\u00e7\u00f5es pode ser escrito matricialmente da seguinte forma:

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{P} + \underline{T} - K \begin{bmatrix} \underline{S}^c & \underline{S}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U} \\ \underline{U}^i \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

Onde  $\tilde{S}$  é uma matriz cujos elementos são os valores  $A^c$  e  $B^c$  dados nas expressões (5.39) e (5.40) resultantes da integração sobre células internas.  $\tilde{S}^c$  e  $\tilde{S}^i$  são submatrizes para pontos do contorno e internos, respectivamente.

Na equação (5.41) foram incluídas incógnitas internas  $\tilde{U}^i$ , portanto novas equações se fazem necessárias. Usando-se a equação (3.36), a representação integral pode ser estendida para pontos internos, resultando a seguinte expressão matricial:

$$\tilde{U}^i = -\tilde{H}'\tilde{U} + \tilde{C}'\tilde{P} + \tilde{T}' - K[\tilde{S}'^c \quad \tilde{S}'^i] \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

Agrupando-se as equações (5.41) e (5.42), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} [\tilde{H} + K\tilde{S}'^c] & [K\tilde{S}'^i] \\ [\tilde{H}' + K\tilde{S}'^c] & [\tilde{I} + K\tilde{S}'^i] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{U}^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}' \end{Bmatrix} \tilde{P} + \begin{Bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{T}' \end{Bmatrix} \quad (5.43)$$

Levando-se em conta que o sistema de equações acima, contém vetores e matrizes equivalentes àquelas da formulação usual de contorno, a equação (5.43) pode simplesmente ser escrita como:

$$\tilde{H} \tilde{U} = \tilde{G} \tilde{P} + \tilde{T} \quad (5.44)$$

Após o cálculo dos valores de domínio e a imposição das condições de contorno, a equação (5.44) se transforma em:

$$\tilde{A} \tilde{X} = \tilde{F} \quad (5.45)$$

onde  $\tilde{X}$  é o vetor das incógnitas e  $\tilde{A}$  é a matriz definida pelos coeficientes de influência dos deslocamentos e esforços.

Resolvendo-se (5.45) obtêm-se:

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{F} \tag{5.46}$$

Ficam portanto determinados pela equação (5.46) os deslocamentos incógnitos, com os quais usando-se a equação (5.2) determinam-se elásticamente as reações do solo.

Os esforços internos, momento fletor e força cortante, são obtidos analogamente ao que foi feito no capítulo 4, bastando agora acrescentar o último termo integral, referente à reação do solo, na representação usual do deslocamento  $w(q)$ .

#### 5.4 - Processo da reciprocidade dual

A formulação previamente descrita requer uma integração sobre um domínio, que usualmente demanda um longo tempo computacional. Uma alternativa para serem tratadas as integrais (5.5) e (5.6) é dada pelo processo da reciprocidade dual, aplicado com sucesso para outros tipos de problemas [72]. Usando-se esta técnica, as integrais de domínio para as reações do solo, podem ser transformadas em integrais sobre o contorno da placa, pela adoção de uma aproximação para a função  $w(p)$ , dada por:

$$w(p) = f(m,p)\alpha^m \tag{5.47}$$

onde o índice "m" repetido implica em somatório;  $f(m,p)$  representa um grupo de funções relacionadas aos "m" pontos ou nós duais, e  $\alpha^m$ , são coeficientes a serem determinados posteriormente.

Reescrevendo-se a equação diferencial (2.30) na forma

$$\Delta\Delta\hat{w}(q) = f(m,p)/D \tag{5.48}$$



onde a função  $f(m,p)$  pode ser definida como uma pseudo-carga vertical, associada consequentemente a pseudo-deslocamentos verticais  $\tilde{w}(m,p)$ , às suas correspondentes rotações  $\partial\tilde{w}(m,p)/\partial x_i$ , momentos fletores  $\tilde{M}_{ij}(m,p)$ , força cortante equivalente  $\tilde{V}_n(m,p)$  e reações de canto  $\tilde{K}_c(m,p)$ . O símbolo " $\tilde{\phantom{x}}$ " será usado para definir esforços e deslocamentos duais.

Em particular uma função  $f(m,p)$  muito simples pode ser definida pela adoção de um campo de pseudo-deslocamentos  $\tilde{w}(m,p)$ , que satisfaça a equação diferencial (5.48), definida pela seguinte expressão:

$$\tilde{w}(m,p) = \frac{C}{64D} R^4(m,p) + \frac{1}{225D} R^5(m,p) \quad (5.49)$$

onde  $C$  é uma constante com unidade de comprimento; por exemplo a maior dimensão do corpo.

Levando-se na equação (5.48) o valor  $\tilde{w}(m,p)$  dado em (5.49), chega-se após as derivações necessárias, ao valor da pseudo-carga vertical  $f(m,p)$ . Nas derivações envolvidas em (5.48) aparecem derivadas de  $R(m,p)$  do tipo:

$$R_{,i} = \frac{x_i^p - x_i^m}{R} = R_{,i} \quad (5.50.a)$$

$$R_{,ij} = \frac{1}{R} (\delta_{ij} - R_{,i} R_{,j}) \quad (5.50.b)$$

$$R_{,ijk} = -\frac{1}{R^2} (R_{,i} \delta_{jk} + R_{,j} \delta_{ik} + R_{,k} \delta_{ij} - 3R_{,i} R_{,j} R_{,k}) \quad (5.50.c)$$

$$R_{,ijkl} = \frac{1}{R^3} \left[ 3(R_{,i} R_{,j} \delta_{kl} + R_{,i} R_{,k} \delta_{jl} + R_{,i} R_{,l} \delta_{jk} + R_{,j} R_{,k} \delta_{il} + R_{,j} R_{,l} \delta_{ik} + R_{,k} R_{,l} \delta_{ij}) - 15 R_{,i} R_{,j} R_{,k} R_{,l} - \delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} \right] \quad (5.50.d)$$

onde

$$R(m,p) = \left[ (x^p - x^m)^2 + (y^p - y^m)^2 \right]^{1/2} \quad (5.51)$$

A função  $f(m, p)$  assim obtida é dada pela seguinte equação, que representa uma superfície cônica:

$$f(m, p) = C + R(m, p) \quad (5.52)$$

Nas representações integrais dos deslocamentos  $w(q)$  e  $\partial w(q) / \partial m$ , dadas respectivamente nas equações (3.36) e (3.37), aparecem integrais de domínio referentes ao carregamento transversal aplicado à placa  $g(p)$ , relacionado na equação diferencial (2.30) aos deslocamentos transversais reais  $w(q)$ . Podem-se escrever, analogamente, representações integrais para os deslocamentos duais  $\hat{w}(m, p)$  e  $\partial \hat{w}(m, p) / \partial m$ , onde as integrais de domínio são escritas em função de  $f(m, p)$ , relacionado aos deslocamentos duais  $\hat{w}(q)$  pela equação diferencial (5.48). Desta forma as equações (3.36) e (3.37) podem ser redefinidas de uma forma dual, pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \hat{w}(q) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(q, P) \hat{w}(m, P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}(m, P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) \hat{w}_{ci}(m, P) = \int_{\Gamma} \left[ w^*(q, P) \hat{V}_n(m, P) - \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \hat{M}_n(m, P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} \hat{R}_{ci}(m, P) w_{ci}^*(q, P) + \int_{\Omega_f} f(m, p) w^*(q, p) d\Omega_f(p) \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{w}}{\partial m}(q) + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) \hat{w}(m, P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, P) \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}(m, P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(q, P) \hat{w}_{ci}(m, P) = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) \hat{V}_n(m, P) + \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \hat{M}_n(m, P) \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \hat{R}_{ci}(m, P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(q, P) + \\ + \int_{\Omega_f} f(m, p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) d\Omega_f(p) \end{aligned} \quad (5.54)$$

Explicitando-se as integrais de domínio nas equações (5.53) e (5.54), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_f} f(m, p) w^*(q, p) d\Omega_f(p) &= \hat{w}(q) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(q, P) \hat{w}(m, P) + \right. \\
 &- M_n^*(q, P) \left. \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}(m, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) \hat{w}_{ci}(m, P) + \\
 &- \int_{\Gamma} \left[ w^*(q, P) \hat{V}_n(m, P) - \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \hat{M}_n(m, P) \right] d\Gamma(P) + \\
 &- \sum_{i=1}^{N_c} \hat{R}_{ci}(m, P) w_{ci}^*(q, P) \tag{5.55}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_f} f(m, p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) d\Omega_f(p) &= \frac{\partial \hat{w}}{\partial m}(q) + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) \hat{w}(m, P) + \right. \\
 &- \left. \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, P) \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}(m, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(q, P) \hat{w}_{ci}(m, P) + \\
 &- \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) \hat{V}_n(m, P) - \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \hat{M}_n(m, P) \right\} d\Gamma(P) + \\
 &- \sum_{i=1}^{N_c} \hat{R}_{ci}(m, P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(q, P) \tag{5.56}
 \end{aligned}$$

Embora todos os valores indicados pelo símbolo " $\sim$ " sejam dados por expressões conhecidas, eles serão aproximados nos elementos com as mesmas funções aproximadoras usadas para o caso das variáveis reais. Desta forma, para o contorno discretizado em elementos, encontrar-se-ão os mesmos valores para as integrações sobre os elementos que deram origem as matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ , uma vez que os mesmos dependem apenas da geometria, das soluções fundamentais e da aproximação adotada.

Considerando-se todos os pontos do contorno, as integrais de domínio dadas nas equações (5.55) e (5.56) podem ser escritas matricialmente da seguinte forma:

$$\left\{ \underline{M} \right\}_m = \underline{H} \left\{ \underline{\hat{U}} \right\}_m - \underline{G} \left\{ \underline{\hat{P}} \right\}_m \quad (5.57.a)$$

A expressão (5.57.a) representa uma coluna da matriz  $\underline{M}$ , correspondente ao nó dual "m". Considerando-se todos os nós duais, (5.57.a) transforma-se em:

$$\underline{M} = \underline{H} \underline{\hat{U}} - \underline{G} \underline{\hat{P}} \quad (5.57.b)$$

onde as matrizes  $\underline{\hat{U}}$  e  $\underline{\hat{P}}$  contêm respectivamente em cada linha os deslocamentos e esforços duais correspondentes aos "m" pontos duais.

Substituindo-se nas integrais de domínio (5.5) e (5.6), que representam a contribuição da reação do solo  $g_s$ , o deslocamento  $w(p)$  dado pela equação (5.47), obtém-se:

$$\left[ \int_{\Omega_{g_s}} f(m,p) w^*(q,p) d\Omega_{g_s}(p) \right] K \alpha^m \quad (5.58)$$

$$\left[ \int_{\Omega_{g_s}} f(m,p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q,p) d\Omega_{g_s}(p) \right] K \alpha^m \quad (5.59)$$

Transformando-se as integrais de domínio em (5.58) e (5.59) em integrais sobre o contorno, conforme as expressões (5.55) e (5.56), obtidas de forma dual, e estendendo-se estas integrais para todos os pontos do contorno, obtém-se analogamente a (5.57.b), a seguinte equação matricial:

$$K \underline{M} \underline{\alpha} = K \left[ \underline{H} \underline{\hat{U}} - \underline{G} \underline{\hat{P}} \right] \underline{\alpha} \quad (5.60)$$

onde  $\underline{\alpha}$  é um vetor contendo os coeficientes  $\alpha^m$ .

Levando-se na equação (4.28) a parcela referente à reação do solo desenvolvida de forma dual, conforme expressão (5.60), este sistema pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\alpha}} \quad (5.61)$$

Aplicando-se a equação (5.47) a todos os pontos da placa, para  $f(m,p)$  dado na equação (5.52), pode-se determinar o vetor dos coeficientes  $\underline{\underline{\alpha}}^m$ , dado pela seguinte equação:

$$\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{Bmatrix} \quad (5.62)$$

Com o valor de  $\underline{\underline{\alpha}}$  dado em (5.62), a equação (5.61) pode ser reescrita, resultando:

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{K}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}^c & \underline{\underline{M}}^i \end{bmatrix} \underline{\underline{F}}^{-1} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{Bmatrix} \quad (5.63)$$

onde  $\underline{\underline{M}}^c$  e  $\underline{\underline{M}}^i$  são submatrizes de  $\underline{\underline{M}}$  para pontos do contorno e internos.

Estendendo-se a representação matricial (5.61) para pontos internos e agrupando-a à equação (5.63), obtêm-se analogamente ao caso da integração por células, a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \left[ \underline{\underline{H}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^c \underline{\underline{F}}^{-1} \right] \left[ \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^i \underline{\underline{F}}^{-1} \right] \\ \left[ \underline{\underline{H}}^i + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{i,c} \underline{\underline{F}}^{-1} \right] \left[ \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{i,i} \underline{\underline{F}}^{-1} \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{G}}^i \end{bmatrix} \underline{\underline{P}} + \begin{Bmatrix} \underline{\underline{T}} \\ \underline{\underline{T}}^i \end{Bmatrix} \quad (5.64)$$

Resolvendo-se o sistema (5.64), determinam-se os deslocamentos verticais para os pontos da placa, que levados à equação (5.2) resultam nas reações do solo calculadas de forma elástica.

Na equação (5.64), excetuando-se os coeficientes da matriz  $\underline{M}$ , todos os outros são conhecidos. Os coeficientes de  $\underline{M}$  por sua vez são determinados conforme equação (5.57), onde as matrizes  $\underline{U}$  e  $\underline{G}$  já foram calculadas anteriormente e os deslocamentos e esforços duais,  $\hat{U}$  e  $\hat{P}$ , são determinados a partir das suas definições, usando-se a expressão do deslocamento dual  $\hat{w}$ , dado em (5.49). Para cada ponto dual "m", são determinados, assim,  $\hat{w}$ ,  $\partial\hat{w}/\partial n$ ,  $\hat{V}_n$  e  $\hat{M}_n$ , para todos os pontos do contorno, e  $\hat{w}$ , para todos os pontos internos.

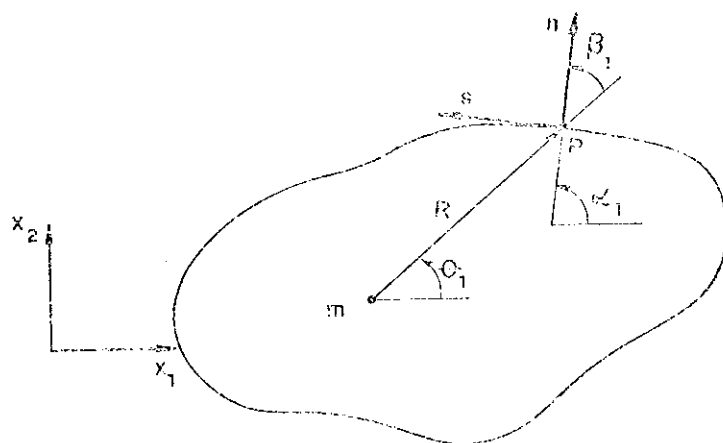


Fig. 5.5 -- Definição do raio  $k(m,P)$  dual

As expressões da pseudo-rotação  $\frac{\partial\hat{w}}{\partial n}$  e dos pseudo-esforços  $\hat{V}_n$  e  $\hat{M}_n$ , necessários à obtenção da matriz  $\underline{M}$ , são agora apresentadas a partir das definições de deslocamentos e esforços dadas no capítulo 2, e adotando-se os ângulos dados na figura 5.5. Desta forma obtêm-se:

$$\frac{\partial\hat{w}}{\partial n}(m,P) = \frac{1}{D} \left( \frac{R^4}{45} + \frac{CR^3}{16} \right) \cos\beta_1 \quad (5.65)$$

$$\hat{V}_n(m,P) = - \left\{ \left( \frac{R^2}{3} + \frac{CR}{2} \right) \cos\beta_1 + (1-\nu)(n_x n_y) \left[ \frac{R^2}{15} R_x R_y (R_y s_x - R_x s_y) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{R^2}{15} (R_y^3 s_y - R_x^3 s_x) + \left( \frac{6}{45} R^2 + \frac{CR}{4} \right) (R_y s_y - R_x s_x) \right] + (n_x^2 - n_y^2) \left[ \frac{R^2}{15} R_x R_y (R_x s_x + \right. \right. \\ \left. \left. + R_y s_y) + \left( \frac{R^2}{15} + \frac{CR}{8} \right) (R_x s_y + R_y s_x) \right] \right\} \quad (5.66)$$

$$\hat{M}_n = \left( \frac{R^3}{15} + \frac{CR^2}{6} \right) (\cos^2 \beta_1 + \nu \sin^2 \beta_1) + (1+\nu) \left( \frac{R^3}{45} + \frac{CR^2}{16} \right) \quad (5.67)$$

$$\hat{M}_{ns} = - (1-\nu) \left( \frac{R^3}{15} + \frac{CR^2}{8} \right) \left[ (R_y^2 - R_x^2) n_x n_y + R_x R_y (n_x^2 - n_y^2) \right] \quad (5.68)$$

onde

$$R_x = \cos \theta_1 \quad (5.69.a)$$

$$R_y = \sin \theta_1 \quad (5.69.b)$$

$$n_x = \cos \alpha_1 \quad (5.70.a)$$

$$n_y = \sin \alpha_1 \quad (5.70.b)$$

$$s_x = -n_y \quad (5.71.a)$$

$$s_y = n_x \quad (5.71.b)$$

$$\cos \beta_1 = R_x n_x + R_y n_y \quad (5.72)$$

### 5.5 - Comportamento não-linear para a resposta do solo

As duas formulações anteriormente desenvolvidas consideraram apenas comportamento elástico para a reação do solo. Considerando-se agora a reação do solo, atuante na interface solo-placa, governada por uma relação reação-deslocamento bi-linear simples e sem resistência à tração (fig. 5.6), pode-se escrever a reação real  $g_s(p)$ , separada em duas parcelas:

$$g_s(p) = g_s^e(p) - g_s^p(p) \quad (5.73)$$

onde  $g_s^e(p)$  e  $g_s^p(p)$ , são respectivamente as componentes elástica e plástica da resposta do solo.

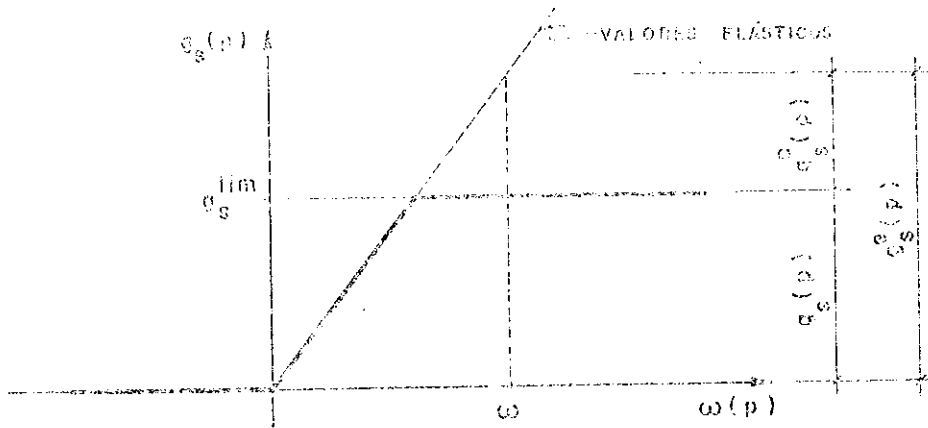


Fig. 5.6 - Relação reação-deslocamento adotada

Considerando-se a reação real do solo dada na expressão (5.73), as integrais (5.5) e (5.6) podem ser re-escritas da seguinte forma:

$$\int_{\Omega_{gs}} K w^*(q, p) w(p) d\Omega_{gs}(p) - \int_{\Omega_{gs}} w^*(q, p) g_s^p(p) d\Omega_{gs}(p) \quad (5.74)$$

$$\int_{\Omega_{gs}} K \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) w(p) d\Omega_{gs}(p) - \int_{\Omega_{gs}} \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) g_s^p(p) d\Omega_{gs}(p) \quad (5.75)$$

Analogamente ao caso das integrais de domínio já estudadas, estes termos podem ser tratados via discretização ou com a reciprocidade dual. Utilizando-se o processo da discretização do domínio em células, e escrevendo-se as integrais (5.74) e (5.75) para todos os pontos do contorno, resulta a seguinte expressão matricial:

$$\underline{S} \underline{Q} = \underline{K} \left[ \underline{S}^c \quad \underline{S}^i \right] \begin{Bmatrix} \underline{U} \\ \underline{U}^i \end{Bmatrix} - \underline{S} \underline{Q}^p \quad (5.76)$$

onde  $\underline{S}$  é a matriz formada por  $\underline{S}^c$  e  $\underline{S}^i$  já dadas anteriormente;  $\underline{Q}$  é o vetor para a reação real do solo e  $\underline{Q}^p$  é o vetor da componente plástica  $g_s^p(p)$ .



Levando-se (5.76) na equação matricial (5.41) e estendendo-se a representação matricial dos deslocamentos para pontos internos, conforme (5.42), chega-se a uma nova equação, análoga à (5.43), escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc} \underline{\underline{H}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{S}}^c & \left[ \underline{\underline{K}}\underline{\underline{S}}^i \right] \\ \left[ \underline{\underline{U}}' + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{S}}'^c \right] & \left[ \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{S}}'^i \right] \end{array} \right] & \begin{Bmatrix} \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{U}}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}} \\ \underline{\underline{G}}' \end{bmatrix} \underline{\underline{P}} + \begin{Bmatrix} \underline{\underline{T}} \\ \underline{\underline{T}}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}} \\ \underline{\underline{S}}' \end{bmatrix} \underline{\underline{Q}}^p \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

Analogamente ao que foi obtido com a equação (5.44), o sistema matricial (5.77) pode simplesmente ser escrito como:

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{S}} \underline{\underline{Q}}^p \quad (5.78)$$

Calculando-se os valores de domínio referentes a carga aplicada  $g_a(p)$  e impondo-se as condições de contorno, determinando-se assim os valores prescritos e incógnitos para deslocamentos e esforços, chega-se a uma nova equação para (5.78), definida por:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{S}} \underline{\underline{Q}}^p$$

onde  $\underline{\underline{X}}$  é o vetor das incógnitas e  $\underline{\underline{A}}$  é a matriz definida pelos coeficientes de influência dos deslocamentos e esforços.

Multiplicando-se (5.76) por  $\underline{\underline{A}}^{-1}$  obtém-se:

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{N}} + \underline{\underline{R}} \underline{\underline{Q}}^p \quad (5.80)$$

onde 
$$\underline{\underline{N}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{F}} \quad (5.81)$$

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{S}} \quad (5.82)$$

representam respectivamente o resultado elástico e a influência da não-linearidade para a resposta do solo.

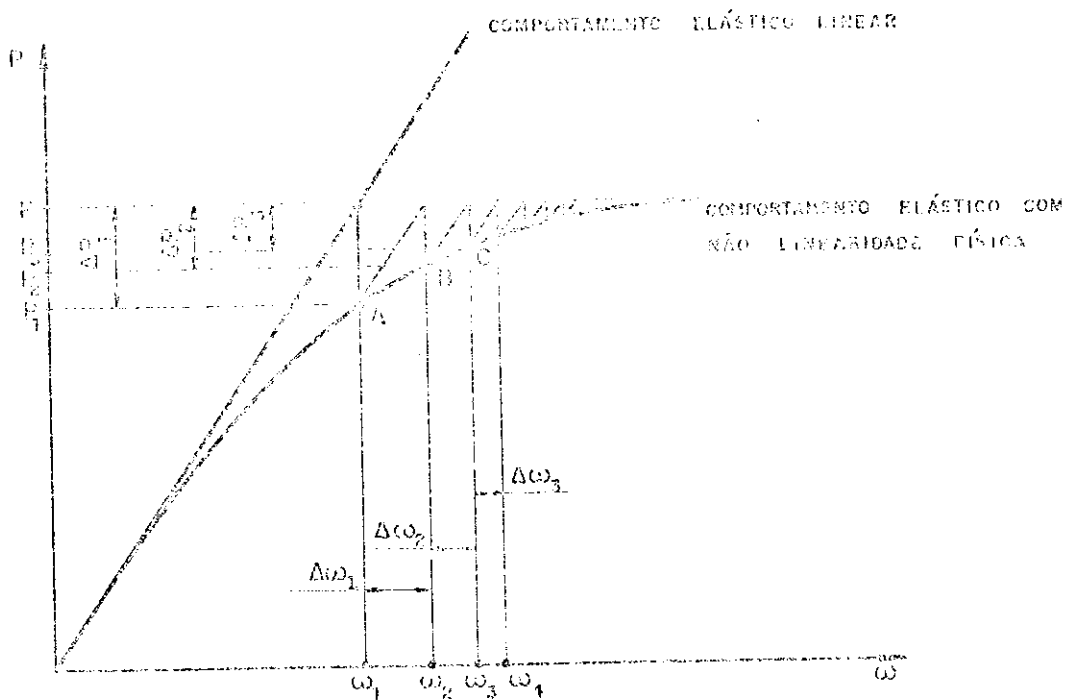


Fig. 5.7 - Representação de um processo iterativo para um problema não-linear com equilíbrio.

Para melhor entendimento do processo iterativo envolvido no comportamento não-linear para a resposta do solo, considere-se a figura 5.7, onde nas abcissas está apresentada o deslocamento  $w$  genérico para um ponto da placa e nas ordenadas a carga total  $P$  aplicada a placa. A linha curva representa o comportamento real da resposta do solo, considerando-se a não-linearidade física, e a linha reta o comportamento elástico linear.

Primeiramente aplica-se a carga  $P$  à placa e obtêm-se a resposta elástica correspondente aos deslocamentos genéricos  $w_1$ . Considerando-se estes deslocamentos obtidos elasticamente, determina-se a resposta real do solo através da relação reação-deslocamento adotada. Esta resposta corresponde na figura 5.7 ao ponto A, e a uma carga real  $P_1$ . A diferença  $\Delta P_1 = P - P_1$  corresponde ao vetor  $Q^P$  na formulação matricial anteriormente desenvolvida.

Aplicando-se esta diferença de carga à placa, a partir do ponto A, obtêm-se deslocamento elásticos  $\Delta w_1$ , ob-

tidos matricialmente pela equação (5.30). Somando-se  $\Delta w_1$  a  $w_1$ , obtêm-se os deslocamentos resis  $w_2$ , com os quais determinam-se a nova posição real para a resposta do solo, dada em B na figura 5.7, corresponde à carga  $P_2$ . A nova diferença de carga  $\Delta P_2 = P - P_2$ , será aplicada elasticamente a partir de B, originando-se analogamente  $\Delta w_2, w_3$ , a nova posição real C, a carga  $P_3$  é finalmente  $\Delta P_3 = P - P_3$ .

Este procedimento deve ser repetido até que a diferença  $\Delta P_n$ , correspondente a n-ésima iteração, seja menor que uma tolerância previamente adotada.

Dependendo do carregamento aplicado, o equilíbrio final pode não ser possível, isto é equivalente a se ter  $\Delta P_i = P - P_i$  maior que a tolerância adotada, e  $\Delta P_i - \Delta P_{i-1} \approx 0$ , para todos os pontos (ver figura 5.8). Neste caso, para e-

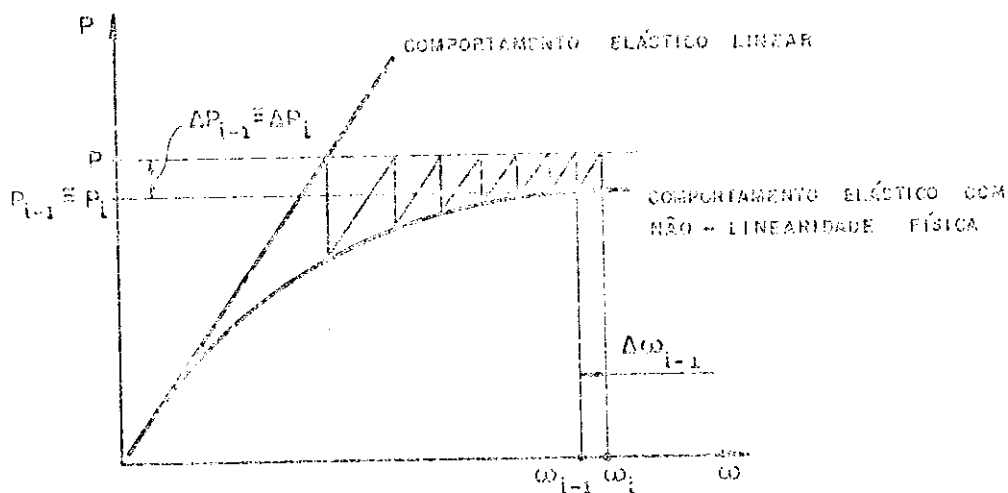


Fig. 5.8 - Representação de um processo iterativo para um problema não-linear sem equilíbrio.

Evitar que o processo iterativo se repita indefinidamente, paraliza-se a análise.

## 5.6 - Aplicações numéricas

São apresentadas a seguir algumas aplicações do método dos elementos de contorno na análise de placas apoiadas sobre fundações elásticas.

Para os primeiros exemplos foi admitido um perfeito contato entre a placa e o solo, mesmo para o caso de tensões de tração atuantes na interface.

Nos outros exemplos o critério de plastificação representado pela figura 5.6 foi considerado e são apresentadas placas com situações de convergência com ou sem equilíbrio, conforme esquematicamente mostrados nas figuras 5.7 e 5.8, respectivamente.

### 5.6.1 - Placa com carga centrada

Será analisada uma placa quadrada, submetida a uma carga vertical de 40 tf, que será distribuída numa pequena área central. A discretização do contorno, das células internas e a região carregada, estão mostradas na figura 5.9. Os resultados das reações do solo estão apresentadas na tabela 5.1, para diferentes valores de espessura  $h$ , e para duas relações  $\nu/\alpha$ . O exemplo também foi resolvido pelo processo da reciprocidade dual e os resultados estão mostrados também na tabela 5.1, que apresenta na última coluna os valores exatos, obtidos pelas condições de equilíbrio para o caso de rigidez infinita.

Uma nova discretização do contorno foi adotada no caso da reciprocidade dual, conforme mostrado na figura 5.10 e a precisão observada neste caso, apesar da dificuldade de se aproximar uma distribuição constante por uma combinação de superfícies cônicas, mostra a eficiência do método.

O exemplo foi resolvido para alguns valores da espessura da placa variando desde 10 cm até um valor suficientemente grande, de tal forma a eliminar os efeitos de

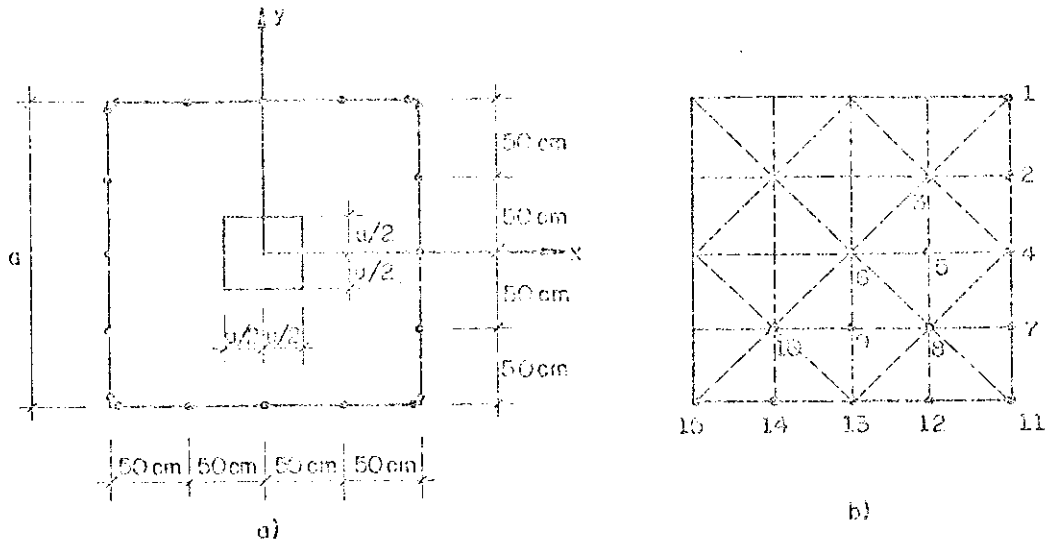


FIG. 5.9 - Definição da placa. a) Geometria, discretização do contorno e região carregada. b) Definição das células e pontos em análise.

PONTOS OU NÓS	RELAÇÃO u/a	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO (Prof. cm <sup>2</sup> )										
		USANDO CÉLULAS					RECURSIVIDADE DUAL					CASO RÍGIDO
		L=10	L=20	L=30	L=40	L=50	L=10	L=20	L=30	L=40	L=50	
1	0,1 0,2	-0,57 -0,53	-0,94 -0,91	-0,90 -0,88	-0,99 -0,99	-1,03 -1,02	-0,49 -0,50	-0,83 -0,83	-0,93 -0,93	-0,91 -0,96	-0,91 -0,96	-1,00
2	0,1 0,2	-0,80 -0,81	-0,97 -0,97	-0,99 -0,99	-1,00 -1,00	-1,00 -1,00	-0,69 -0,70	-0,91 -0,91	-0,94 -0,94	-0,96 -0,96	-0,96 -0,96	-1,00
3	0,1 0,2	-1,05 -1,05	-1,01 -1,01	-1,00 -1,00	-1,00 -1,00	-1,00 -1,00	-0,98 -0,98	-0,95 -0,95	-0,95 -0,95	-0,96 -0,96	-0,96 -0,96	-1,00
4	0,1 0,2	-1,91 -0,92	-0,99 -0,99	-1,00 -1,00	-1,00 -1,00	-1,00 -1,00	-0,82 -0,80	-0,92 -0,92	-0,94 -0,94	-0,96 -0,96	-0,96 -0,96	-1,00
5	0,1 0,2	-1,19 -1,19	-1,03 -1,03	-1,01 -1,01	-1,00 -1,00	-1,00 -1,00	-1,16 -1,16	-0,91 -0,91	-0,96 -0,96	-0,96 -0,96	-0,96 -0,96	-1,00
6	0,1 0,2	-1,42 -1,38	-1,06 -1,06	-1,02 -1,02	-1,01 -1,01	-1,01 -1,01	-1,37 -1,34	-1,00 -1,00	-0,97 -0,96	-0,97 -0,97	-0,97 -0,96	-1,00

TABELA 5.1 - Reações do solo para carga centrada.

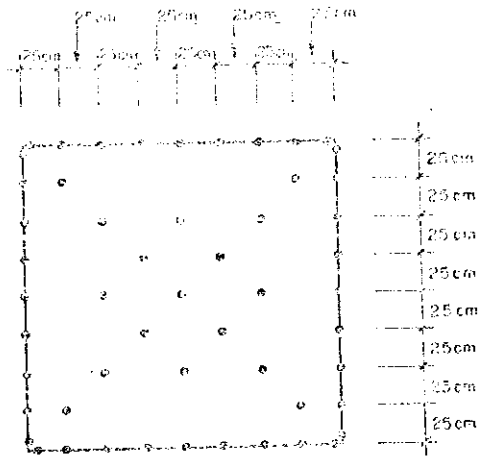


FIG. 5.10 - Nova discretização do contorno e pontos duais adotados.

flexão na iteração solo-placa. Segundo Gerrin [81] e Montoya [82], uma sapata é considerada rígida quando a espessura  $h$  for maior que  $[(a-u)/4+c]$ , sendo  $c=5\text{cm}$  para o primeiro e zero para o segundo. Nota-se na tabela 5.1 que já, a partir de  $h=30\text{cm}$ , a distribuição de tensões no solo é praticamente constante para as duas relações  $u/a$ , o que só ocorreria segundo o critério acima para alturas superiores a 40 cm e 45 cm, respectivamente para  $u/a=0,2$  e  $u/a=0,1$ .

Estão apresentados na tabela 5.2 os valores do momento fletor e força cortante, usando-se células, para duas relações  $u/a$  e para a espessura  $h$  variando de 10 a 50 cm. Na figura 5.11 estão mostrados os momentos fletores  $(M_x)_{y=0}$  e  $(M_x)_{x=0}$ , considerando-se a solução analítica para uma placa de rigidez infinita apoiada sobre uma fundação com coeficiente específico,  $K$ , pequeno [75]. Para efeito de comparação dos momentos fletores obtidos analiticamente, com os determinados com o MEC, foi adotada uma nova discretização da placa, como mostrada na figura 5.12. Os valores determinados com esta nova discretização estão indicados na figura 5.11. Foi adotado para este último exemplo, bem como para os demais, um valor de  $K=1,0\text{kgf/cm}^3$ , considerado pequeno quando comparado com o intervalo de variação de  $K$  em problemas práticos, que vai desde 0,5 a  $15\text{kgf/cm}^3$  [81]. Na tabela 5.3 estão mos-

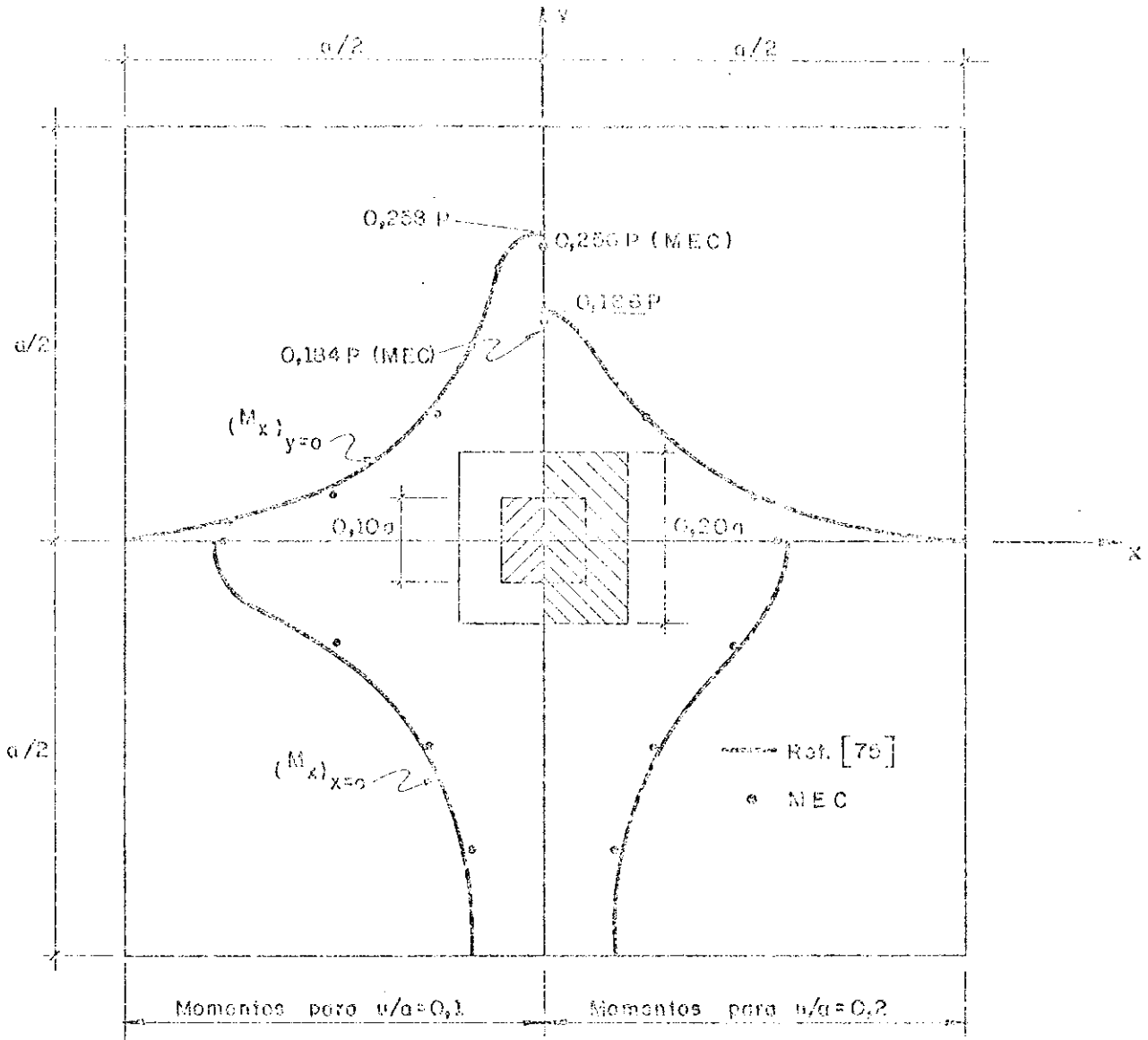


FIG. 5.11 - Momentos fletores para placa com carga centrada.

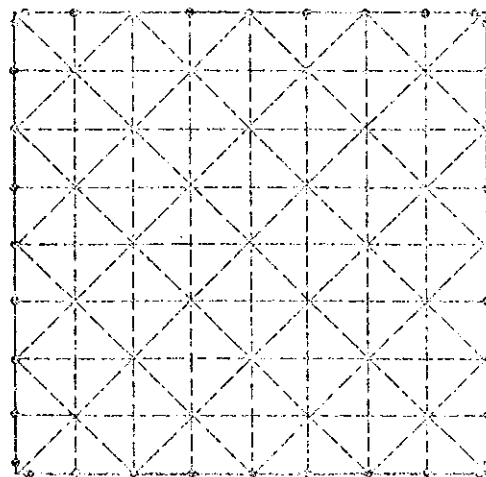


FIG.5.12 - Nova discretização com 32 elementos e 128 células para determinação dos momentos fletores.

NO	RELAÇÃO $u/a$	h	MOMENTO FLETOR (kgf/m)		FORÇA CORTANTE (kgf/m)	
			$M_x$	$M_y$	$Q_x$	$Q_y$
3	0,1	10	1128	1134	3722	3675
		20	1277	1297	4125	4155
		30	1302	1327	4210	4188
		40	1338	1340	4196	4180
		50	1365	1371	4224	4204
	0,2	10	1121	1125	3719	3731
		20	1269	1285	4135	4121
		30	1284	1314	4204	4207
		40	1324	1322	4199	4198
		50	1349	1354	4231	4213
5	0,1	10	1050	3221	9398	0
		20	1247	3528	9875	0
		30	1271	3583	9920	0
		40	1275	3630	9927	0
		50	1278	3707	9894	0
	0,2	10	1131	3112	9358	0
		20	1319	3406	9814	0
		30	1337	3462	9867	0
		40	1348	3506	9856	0
		50	1352	3583	9814	0
6	0,1	10	9773	9773	0	0
		20	10124	10129	0	0
		30	10178	10176	0	0
		40	10205	10204	0	0
		50	10236	10247	0	0
	0,2	10	6907	6905	0	0
		20	7241	7243	0	0
		30	7294	7290	0	0
		40	7319	7317	0	0
		50	7349	7360	0	0

TABELA 5.2 - Esforços solicitantes para carga centrada.

trados os momentos máximos para valores distintos de  $K$ , sempre para  $u/a = 0,2$ . A diminuição do momento fletor máximo para  $K = 15 \text{ kgf/cm}^3$  não foi significativa.

Os exemplos resolvidos com células, que apresentavam uma discretização mínima de 16 elementos de contorno e 32 células internas, foram primeiramente resolvidos para 8 elementos de contorno e 16 células internas, apresentando um resultado tão bom quanto o já apresentado para a situação



de carga centrada. Entretanto, para situações de cargas com excentricidades e considerando-se a não-linearidade para a resposta do solo, que ainda será mostrada neste trabalho, a discretização com 16 células apresentou resultados com convergência para situação sem equilíbrio, quando o mesmo era fisicamente possível. Para evitar este tipo de problema, típico de uma discretização interna pobre, foi adotada a discretização mínima de 32 células.

MOMENTO FLETOR MÁXIMO		
K = 1	K = 15	VALOR TEÓRICO P/ K PEQUENO
0,184 P	0,180 P	0,186 P

TABELA 5.3 - Momentos fletores máximos.

#### 5.6.2 - Placa com carga excêntrica

Serão analisadas placas com a mesma geometria e discretização dos exemplos anteriores, submetidas à mesma carga vertical, agora atuando com uma ou duas excentricidades.

Primeiramente a carga  $P = 40$  tf é aplicada com uma excentricidade  $e_x = 30$  cm, resultando apenas tensões de compressão para a reação do solo. Considerando-se um perfeito contato entre a placa e o solo, o mesmo exemplo é calculado para  $e_x = 50$  cm, resultando tanto tensões de compressão quanto de tração. A geometria do problema está apresentada na figura 5.13 e as discretizações internas em células, e pontos duais são as mesmas apresentadas respectivamente pelas figuras 5.9.b e 5.10.

Os resultados estão apresentados na tabela 5.4, para diferentes espessuras, usando-se células, e também o processo da reciprocidade dual. A última coluna apresenta os valores exatos obtidos de forma análoga ao item 5.6.1.

Nas figuras 5.14a e 5.14b estão apresentadas as distribuições de tensões no solo para as excentricidades de 30 cm e 50 cm respectivamente, para o caso rígido. Nota-

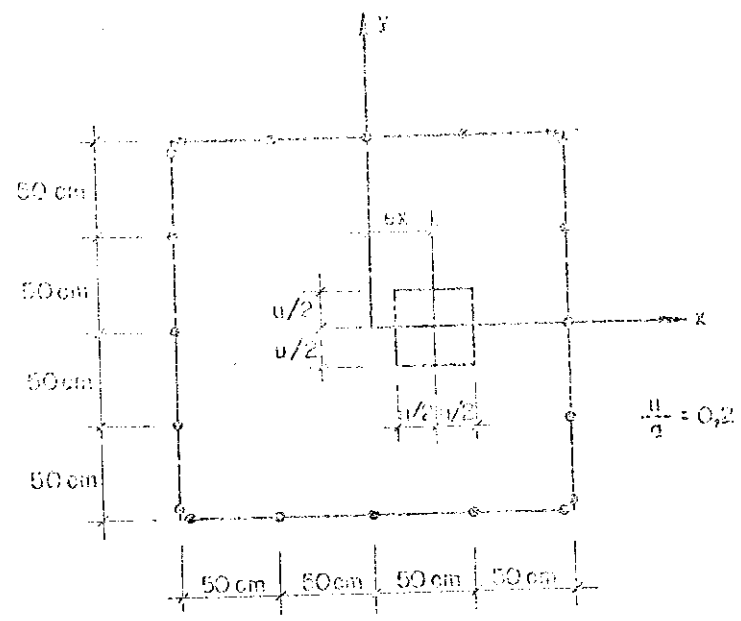


FIG. 5.13 - Geometria da placa para carga com uma excentricidade.

e <sub>x</sub>	PONTO	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO (kg/cm <sup>2</sup> )									
		USANDO CÉLULAS				RECÍPROCIDADE DUAL				VALORES CÁLCULADOS	
		n = 10	n = 20	n = 30	n = 40	n = 10	n = 20	n = 30	n = 40		
30 cm	1	-1,45	-1,84	-1,88	-1,89	-1,07	-1,40	-1,45	-1,36	-1,30	
	2	-1,72	-1,86	-1,90	-1,90	-1,37	-1,45	-1,46	-1,47	-1,49	
	3	-1,50	-1,46	-1,45	-1,45	-1,42	-1,24	-1,22	-1,22	-1,43	
	4	-1,97	-1,68	-1,90	-1,90	-1,51	-1,43	-1,47	-1,47	-1,90	
	5	-1,73	-1,49	-1,46	-1,46	-1,59	-1,26	-1,22	-1,22	-1,43	
	6	-1,30	-1,04	-1,01	-1,01	-1,25	-0,99	-0,96	-0,96	-1,00	
	9	-1,12	-1,02	-1,01	-1,01	-1,09	-0,96	-0,95	-0,96	-1,00	
	10	-0,57	-0,55	-0,55	-0,55	-0,57	-0,66	-0,68	-0,70	-0,55	
	12	-1,19	-1,41	-1,44	-1,43	-0,91	-1,15	-1,19	-1,21	-1,45	
	13	-0,84	-0,98	-0,99	-1,00	-0,74	-0,92	-0,94	-0,94	-1,00	
	14	-0,37	-0,53	-0,54	-0,55	-0,44	-0,65	-0,68	-0,70	-0,55	
	15	+0,15	+0,06	-0,09	-0,12	-0,04	-0,26	-0,41	-0,44	-0,10	
	50 cm	1	-2,06	-2,44	-2,48	-2,49	-1,40	-1,77	-1,80	-1,81	-2,50
		2	-2,54	-2,51	-2,50	-2,50	-1,92	-1,83	-1,82	-1,82	-2,50
		3	-1,51	-1,76	-1,75	-1,75	-1,63	-1,42	-1,39	-1,39	-1,75
4		-2,82	-2,53	-2,51	-2,50	-2,20	-1,87	-1,83	-1,82	-2,50	
5		-2,07	-1,79	-1,76	-1,75	-1,87	-1,45	-1,40	-1,40	-1,75	
6		-1,18	-1,02	-1,01	-1,00	-1,13	-0,97	-0,95	-0,96	-1,00	
9		-1,02	-1,00	-1,00	-1,00	-0,90	-0,94	-0,95	-0,96	-1,00	
10		-0,26	-0,25	-0,25	-0,25	-0,31	-0,47	-0,50	-0,53	-0,25	
12		-1,39	-1,70	-1,74	-1,74	-1,02	-1,33	-1,36	-1,38	-1,75	
13		-0,72	-0,96	-0,99	-1,00	-0,64	-0,90	-0,93	-0,95	-1,00	
14		-0,06	-0,22	-0,24	-0,25	-0,26	-0,47	-0,50	-0,52	-0,25	
15		+0,60	+0,52	+0,50	+0,50	+0,10	-0,06	-0,07	-0,10	+0,50	

TABELA 5.4 - Reações do solo para carga com uma excentricidade.

-se que tanto usando-se células ou reciprocidade dual a distribuição  $\bar{\sigma}$  é linear, sendo a primeira com resultados praticamente exatos e a segunda apresentando uma certa imprecisão. Isto se deve ao fato de se ter adotado para a pseudocarga  $f(m,p)$  (ver eq. 5.52) uma função linear. Esta imprecisão tende a diminuir adotando-se para  $f(m,p)$  uma função de ordem superior, por exemplo do segundo grau.

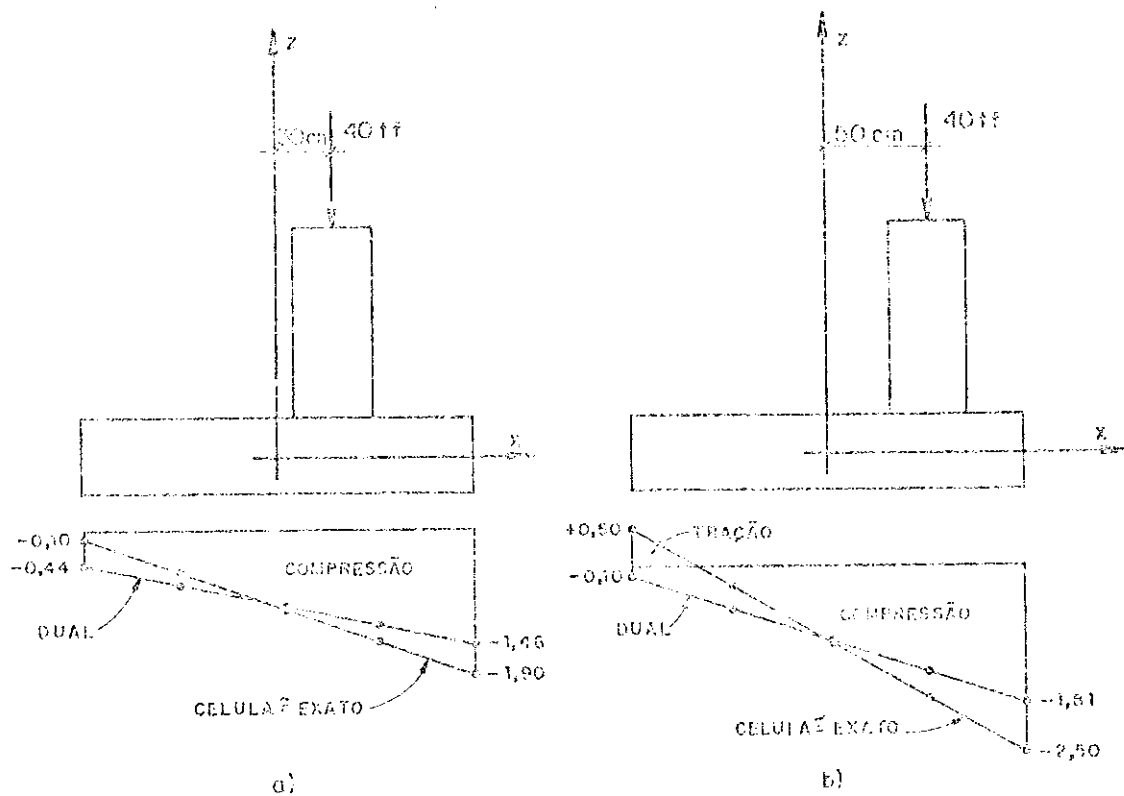


Fig. 5.14 - Distribuição de tensões no solo

a) excentricidade  $e_x = 30\text{cm}$

b) excentricidade  $e_x = 50\text{cm}$

Ainda considerando-se o perfeito contato entre o solo e a placa, a mesma é submetida a uma carga vertical de 40tf com duas excentricidades  $e_x = e_y = 50\text{cm}$ , conforme figura 5.15. As reações do solo para diferentes espessuras, considerando-se as células internas e a reciprocidade dual, e para o caso rígido, considerando-se os valores teóricos, estão apresentadas na tabela 5.5, onde as tensões de tração estão indicadas com sinal positivo. Os pontos em análise, são os mesmos da figura 5.9.b.

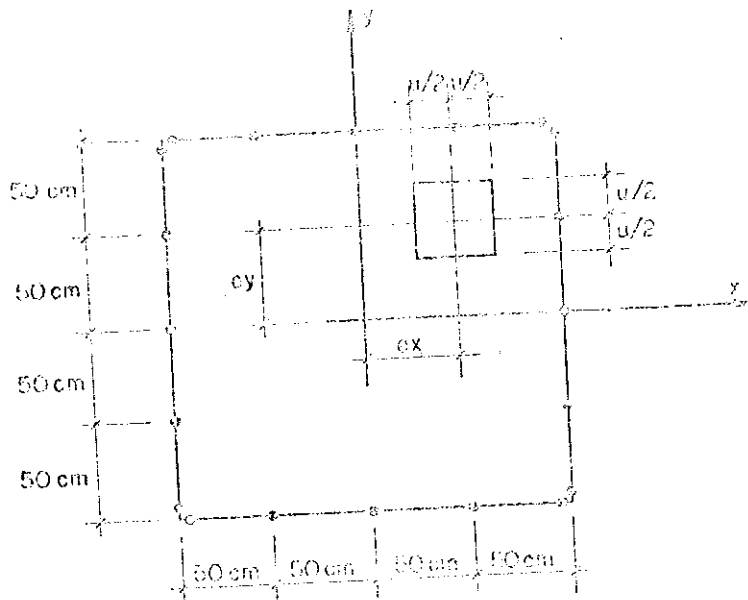


Fig. 5.15 - Geometria da placa para a carga com duas excentricidades.

POSTO	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO ( $\text{kgf/cm}^2$ )								
	USANDO CÉLULAS				RECÍPROCIDADE DUAL				VALORES TEÓRICOS
	$h = 10$	$h = 20$	$h = 30$	$h = 40$	$h = 10$	$h = 20$	$h = 30$	$h = 40$	CASEO RÍGIDO
1	-4,53	-4,67	-4,02	-4,00	-2,88	-2,73	-2,69	-2,67	-4,00
2	-3,56	-3,30	-3,26	-3,25	-2,54	-2,30	-2,26	-2,25	-3,25
3	-2,80	-2,54	-2,51	-2,50	-2,55	-1,90	-1,84	-1,81	-2,50
4	-2,45	-2,49	-2,59	-2,50	-1,84	-1,81	-1,82	-1,82	-2,50
5	-1,80	-1,76	-1,75	-1,75	-1,70	-1,41	-1,39	-1,39	-1,75
6	-1,03	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00	-0,95	-0,95	-0,96	-1,00
7	-1,33	-1,68	-1,73	-1,74	-0,96	-1,32	-1,35	-1,38	-1,75
8	-0,81	-0,97	-0,99	-1,00	-0,62	-0,91	-0,94	-0,96	-1,00
9	-0,25	-0,25	-0,25	-0,25	-0,68	-0,50	-0,51	-0,53	-0,25
10	+0,33	+0,47	+0,49	+0,49	+0,19	+0,03	+0,06	+0,09	+0,50
11	+0,27	+0,90	+0,97	+0,99	+0,65	+0,64	+0,92	+0,96	+1,00
12	+0,09	+0,19	+0,23	+0,25	+0,11	+0,44	+0,49	+0,52	+0,25
13	+0,49	+0,50	+0,50	+0,50	+0,04	+0,06	+0,08	+0,10	+0,50
14	+0,92	+1,19	+1,23	+1,24	+1,13	+0,32	+0,34	+0,32	+1,25
15	+1,42	+1,90	+1,97	+1,98	+1,86	+0,69	+0,75	+0,74	+2,00

TABELA 5.5 - Reações do solo para carga com duas excentricidades.

A figura 5.16 apresenta a distribuição das tensões no solo, considerando-se a diagonal 1-15. Nota-se aqui mais uma vez, uma imprecisão nos resultados obtidos com a reciprocidade dual, devido aos motivos anteriormente descritos.

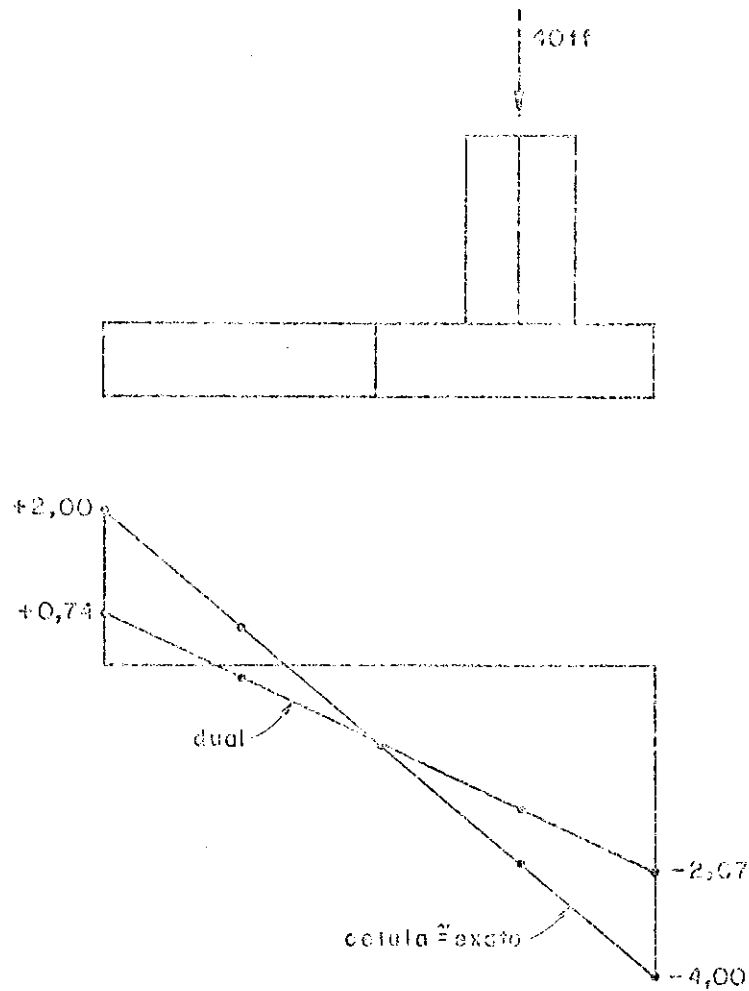


Fig. 5.16 - Distribuição de tensões no solo para  $e_x = e_y = 50\text{cm}$ .

### 5.6.3 - Efeito da não-linearidade para a resposta do solo

Os exemplos apresentados anteriormente não tinham nenhuma restrição quanto ao valor da tensão do solo, podendo até mesmo admitir tensões de tração. A seguir serão apresentados exemplos para os quais adotou-se o critério de plastificação uniaxial dado na figura 5.6.

Primeiramente é analisada a mesma placa quadrada submetida a uma carga de 40tf com uma excentricidade  $e_x = 50\text{cm}$ , sem limitação quanto a tensão máxima de compressão, mas não admitindo tensões de tração.

É usada apenas a integração sobre células internas, adotando-se  $u/a = 0,2$ , para a mesma geometria e pontos em análise definidos anteriormente (ver figuras 5.13 e 5.9.b). Os resultados estão apresentados na tabela 5.6 para quatro espessuras da placa, onde na primeira coluna aparecem os valores calculados elasticamente e na segunda os valores reais para a tensão do solo após as iterações necessárias. Na última coluna estão apresentados os valores teóricos para o caso rígido, obtido como no caso anterior a partir das condições de equilíbrio, para material não resistente a tração, conforme figura 5.17.

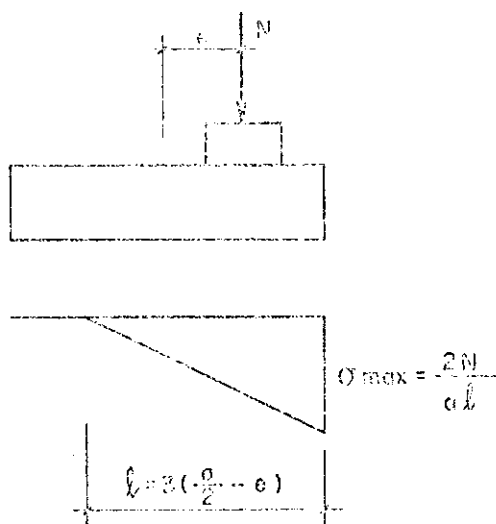


Fig. 5.17 - Distribuição de tensões para o caso rígido

Observando-se a tabela 5.6, nota-se que o cálculo elástico fornece para o ponto 15, e todos os outros com a mesma abcissa, tensões de tração para a resposta do solo. Como isto não é possível a tensão real para estes pontos será "zero". Embora com tensão zero, estes pontos têm deslocamentos positivos, significando um "descolamento" da placa.

PONTOS	VALORES DE REAÇÃO NO SOLO ( $\text{kgf/cm}^2$ )								VALORES TEÓRICOS
	h = 10cm		h = 20cm		h = 30cm		h = 40cm		
	VALORES ELÁSTICOS	VALORES REAIS	VALORES ELÁSTICOS	VALORES REAIS	VALORES ELÁSTICOS	VALORES REAIS	VALORES ELÁSTICOS	VALORES REAIS	
1	-2,03	-2,21	-2,44	-2,60	-2,48	-2,44	-2,45	-2,45	-2,67
2	-2,51	-2,48	-2,51	-2,67	-2,50	-2,66	-2,50	-2,66	-2,67
3	-1,81	-1,84	-1,76	-1,79	-1,75	-1,78	-1,75	-1,78	-1,78
4	-2,82	-2,97	-2,55	-2,70	-2,51	-2,67	-2,50	-2,66	-2,67
5	-2,07	-2,09	-1,79	-1,82	-1,76	-1,79	-1,75	-1,78	-1,78
6	-1,18	-1,08	-1,02	-0,92	-1,01	-0,90	-1,02	-0,90	-0,85
9	-1,02	-0,92	-1,00	-0,90	-1,00	-0,89	-1,00	-0,89	-0,85
10	-0,26	0	-0,25	-0,01	-0,25	-0,01	-0,25	-0,01	0
12	-1,39	-1,43	-1,70	-1,73	-1,74	-1,76	-1,74	-1,77	-1,78
13	-0,72	-0,63	-0,96	-0,86	-0,95	-0,88	-1,00	-0,89	-0,89
14	-0,06	0	-0,22	0	-0,22	0	-0,22	0	0
15	-0,60	0	+0,52	0	+0,50	0	+0,50	0	0

TABELA 5.6 - Reações do solo para carga com uma excentricidade sem limitação da tensão máxima de compressão.

Como os valores obtidos a partir do cálculo elástico estão em equilíbrio, a determinação da tensão real para todos os pontos conforme equação 5.73, diminuindo-se da componente elástica  $g_s^e(p)$  a parcela plástica  $g_s^p(p)$ , introduz no problema um desequilíbrio. Esta componente plástica multiplicada pelo coeficiente  $K$ , resulta para todos os pontos, no vetor  $Q^p$  da equação 5.78, que no cálculo elástico é zero. Aplicando-se à placa este vetor  $Q^p$ , no intuito de restabelecer novamente o equilíbrio, obtém-se elasticamente a partir da equação 5.80, os deslocamentos  $\Delta w_1$ , que somados aos deslocamentos  $w_1$  do cálculo elástico, resultam nos deslocamentos  $w_2$  (ver figura 5.7).

Com os deslocamentos  $w_2$  obtém-se novamente as tensões reais e as parcelas plásticas que serão aplicadas à placa fornecendo os deslocamentos elásticos  $\Delta w_2$ , que somados a  $w_2$  resultam nos deslocamentos  $w_3$ .

Este processo iterativo é repetido até que se tenha para todos os pontos uma parcela plástica menor ou igual a uma tolerância previamente fixada, no caso de conver

gência com equilíbrio, representado na figura 5.7. Este processo também é paralizado quando de uma iteração para outra não houver variação do vetor  $Q^p$  para todos os pontos. Esta situação, representada pela figura 5.8, corresponde a um processo iterativo para um problema sem equilíbrio.

Neste exemplo não foi feita nenhuma restrição quanto a tensão limite de compressão, mas para efeito de determinação da tolerância para a situação de equilíbrio, fixada em um por cento deste valor, adotou-se  $3\text{kgf/cm}^2$ .

Para a situação de convergência sem equilíbrio foi adotada uma tolerância independente da tensão limite e fixada em  $0,0005\text{kgf/cm}^2$ , embora fosse conveniente também a definição de um valor relativo.

Os valores reais apresentados na tabela 5.6 foram obtidos com o equilíbrio após 5 iterações, excetuando-se o caso de altura igual a  $10\text{cm}$ , em que o equilíbrio só foi possível após 6 iterações. A distribuição de tensões reais para  $h = 40\text{cm}$  coincide com a distribuição da figura 5.17.

Este mesmo problema, agora é resolvido fixando-se uma tensão limite de compressão, utilizando-se duas discretizações em células internas, a mesma anterior com 32 células e uma com 16 células conforme figura 5.18. Na tabela 5.7 estão apresentados os resultados para dois valores distintos de tensões limites. O diagrama de distribuição de ten

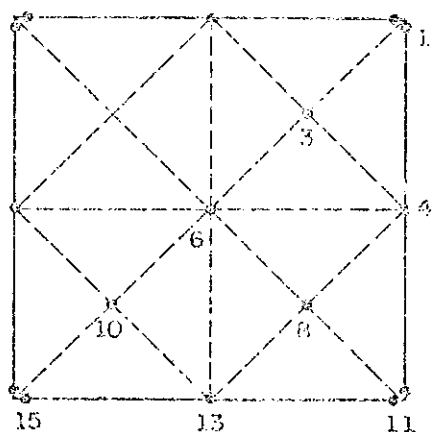


Fig. 5.18 - Discretização do contorno, células internas e pontos em análise.



PONTO	VALORES REAIS DA REAÇÃO DO SOLO							
	32 CÉLULAS				16 CÉLULAS			
	TENSÃO LIMITE = 2,5		TENSÃO LIMITE = 2,2		TENSÃO LIMITE = 2,5		TENSÃO LIMITE = 2,2	
	h = 10	h = 40	h = 10	h = 40	h = 10	h = 40	h = 10	h = 40
1	-2,40	-2,50	-2,20	-2,20	-2,50	-2,50	-2,20	-2,20
2	-2,50	-2,50	-2,20	-2,20	-	-	-	-
3	-1,94	-1,86	-2,19	-2,11	-2,16	-2,14	-2,20	-2,20
4	-2,50	-2,50	-2,20	-2,20	-2,50	-2,50	-2,20	-2,20
5	-2,20	-1,87	-2,20	-2,11	-	-	-	-
6	-1,08	-0,91	-1,01	-0,82	-0,91	-0,70	-0,81	-0,81
9	-0,92	-0,91	-0,85	-0,81	-	-	-	-
10	0	0	0	0	0	0	0	0
12	-1,51	-1,86	-1,75	-2,10	-	-	-	-
13	-0,62	-0,91	-0,54	-0,81	-0,46	-0,70	-0,57	-0,80
14	0	0	0	0	-	-	-	-
15	0	0	0	0	0	0	0	0

TABELA 5.7 - Reações reais do solo para carga com uma excentricidade com limitação da tensão máxima de compressão.

sões no solo está indicado na figura 5.19, para as duas discretizações internas, considerando-se  $h = 40\text{cm}$ . A linha pontilhada representa a distribuição linear teórica, para o caso rígido, sem nenhuma restrição quanto à máxima tensão de compressão.

Para o caso de 32 células e tensão limite igual a  $2,5\text{kgf/cm}^2$ , o equilíbrio foi possível após 9 iterações para  $h = 10\text{cm}$  e com 7 iterações para  $h = 40\text{cm}$ . Reduzindo-se o limite para  $2,2\text{kgf/cm}^2$  o equilíbrio foi possível para ambas as alturas após 20 iterações.

Usando-se 16 células o equilíbrio só foi possível para a tensão limite de  $2,5\text{kgf/cm}^2$ , após 20 iterações, chegando-se a uma situação de convergência sem equilíbrio após 15 e 16 iterações respectivamente para  $h = 10\text{cm}$  e  $40\text{cm}$ ,

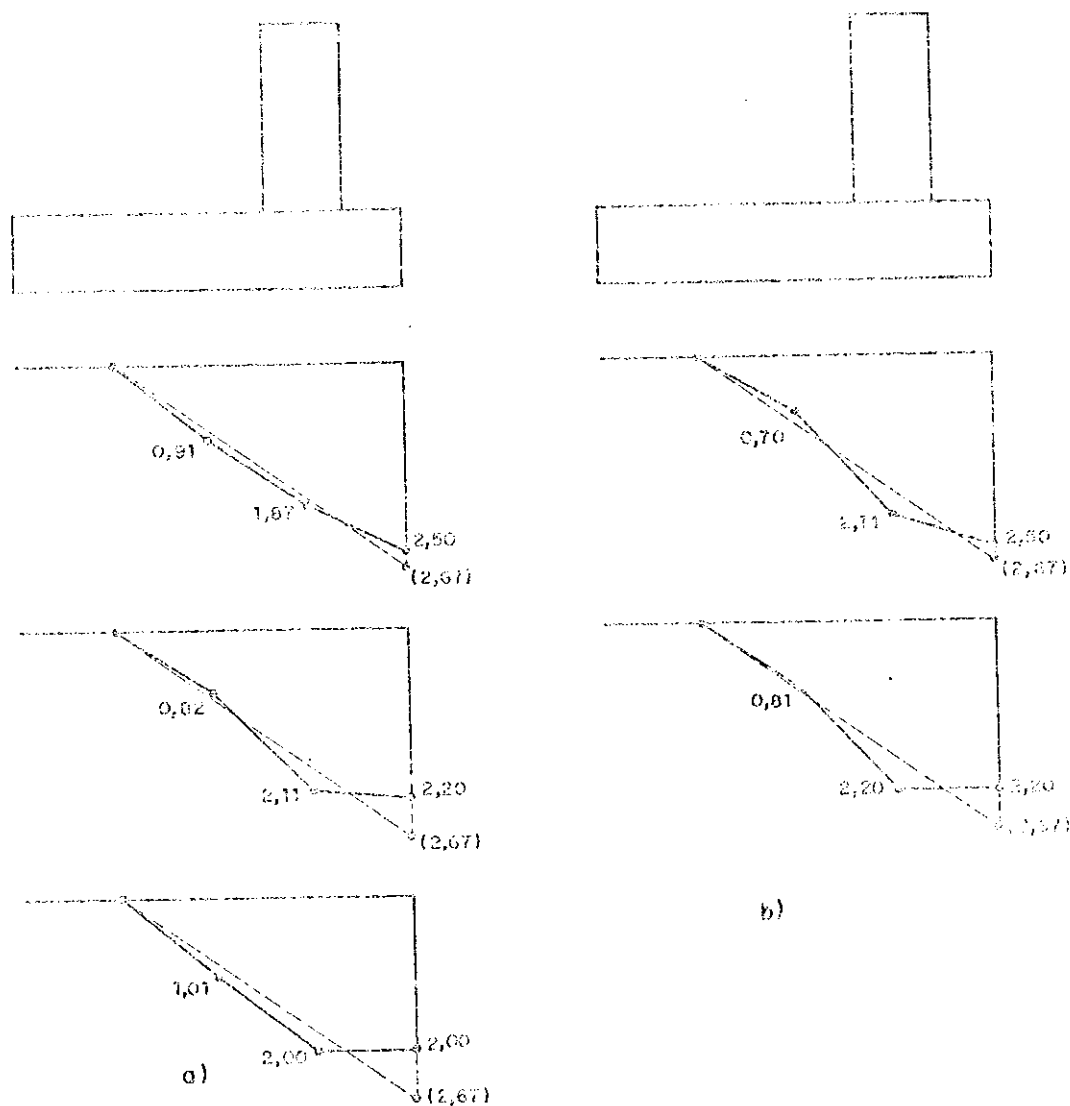


Fig. 5.19 - Distribuição de tensões no solo

a) 32 células internas

b) 16 células internas

no caso da tensão limite igual a  $2,20\text{kgf/cm}^2$ . Isto se deve à discretização fraca utilizada e mostrada na figura 5.18.

O número de iterações necessárias para um caso de convergência para situações com ou sem equilíbrio, é função das tolerâncias previamente fixadas. Alterando-se por exemplo, estes valores para cinco por cento da tensão limite no caso da convergência com equilíbrio, e adotando-se o valor  $0,005\text{kgf/cm}^2$  para a diferença limite entre as componentes plásticas de uma iteração para outra, como um indicador

de convergência sem equilíbrio, o número de iterações necessárias reduz sensivelmente. Desta forma para a tensão limite de compressão fixada em  $2,5\text{kgf/cm}^2$ , o número de iterações para a situação de equilíbrio se reduz para 4 com  $h = 10\text{cm}$ , e para 3 com  $h = 40\text{cm}$ , considerando-se 32 células internas. Já para a tensão limite de  $2,2\text{kgf/cm}^2$ , o número de iterações é 5 para  $h = 10\text{cm}$  e 4, para  $h = 40\text{cm}$ .

Considerando-se a discretização da figura 5.18, as novas tolerâncias reduzem o número de iterações no caso da tensão limite de  $2,5\text{kg/cm}^2$ , para 5 com  $h = 10\text{cm}$  e para 4 com  $h = 40\text{cm}$ . Para a tensão limite de  $2,2\text{kg/cm}^2$ , já a partir da iteração número 9, com  $h = 10\text{cm}$  e número 10 com  $h = 40$ , a variação entre as componentes plásticas de todos os pontos, em relação à iteração anterior fica menor que  $0,005\text{kg/cm}^2$ , e ainda os valores destas componentes plásticas são superiores a 5% da tensão limite. Fica portanto caracterizada uma situação de convergência em que a resposta real do solo não equilibra a carga externa aplicada.

O exemplo também foi analisado admitindo-se uma tensão limite igual a  $2,0\text{kgf/cm}^2$  e o equilíbrio foi possível com 20 iterações, fixando-se também a tolerância em 5% da tensão limite. O diagrama de distribuição de tensões para este caso está indicado na figura 5.19.a, para 32 células.

A mesma placa dos exemplos anteriores é agora analisada para uma carga de 40tf com duas excentricidades, levando-se em conta o efeito da não-linearidade para a resposta do solo. Inicialmente é considerada uma excentricidade  $e_x = 50\text{cm}$  e  $e_y = 10\text{cm}$ , conforme figura 5.15, restringindo-se apenas às tensões de compressão, sem fixar um limite máximo. Para efeito de comparação de resultados serão analisados apenas os quatro cantos da placa, utilizando-se o ábaco de comprovação de tensões no solo para sapatas retangulares rígidas com carga biexcentrica [82]. O exemplo também foi analisado com  $e_x = e_y = 50\text{cm}$ , e os resultados para os dois casos estão mostrados na tabela 5.8, considerando-se a placa com altura igual a 40cm. Na figura 5.20 estão mostrados esquematicamente a distribuição de tensões no solo. O ângulo  $\alpha$

segundo Montoya [82], vale  $12,5^\circ$  para o primeiro caso e  $45^\circ$  para o segundo.

PONTO	VALORES DA REACÃO DO SOLO			
	$e_x = 50\text{cm}$	$e_y = 10\text{cm}$	$e_x = 50\text{cm}$	$e_y = 50\text{cm}$
	MEC	MONTAYA [82]	MEC	MONTAYA [82]
1	-3,12	-3,13	-5,86	-5,88
2	-2,28	-2,30	-0,06	0
3	0	0	-0,06	0
4	0	0	0	0

TABELA 5.8 - Reações do solo para carga com duas excentricidades sem limitação da tensão máxima de compressão.

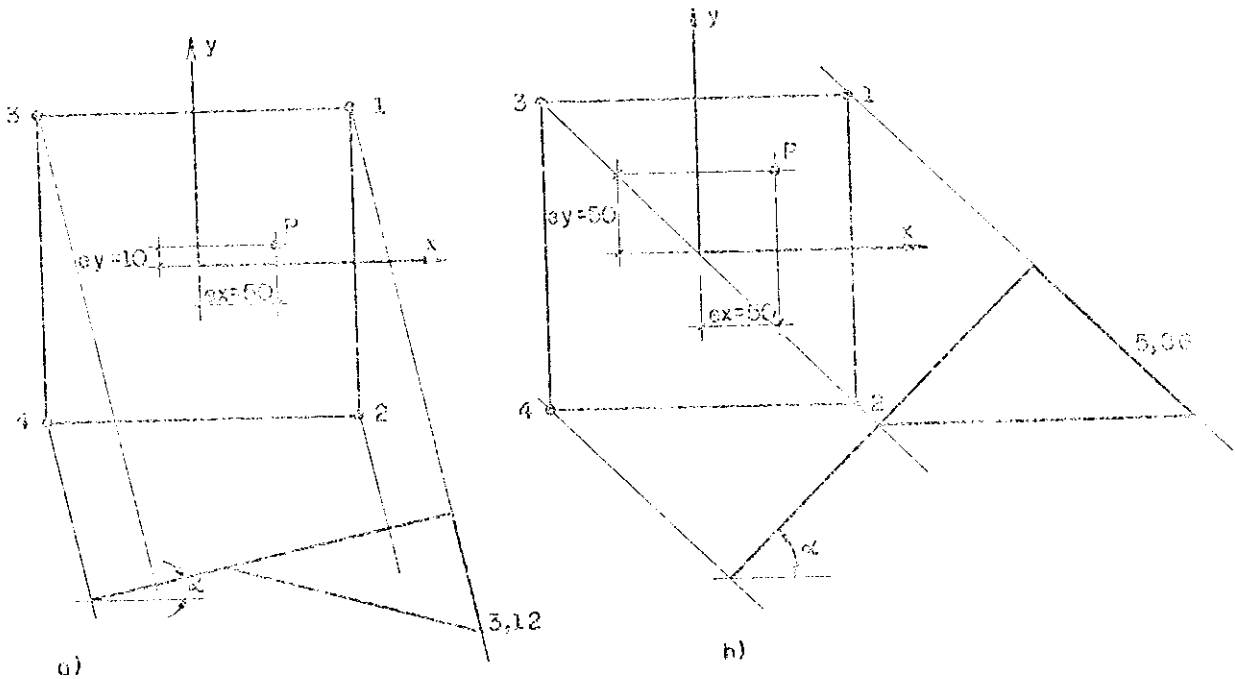


Fig. 5.20 - Distribuição de tensões no solo para carga com duas excentricidades, sem limite para tensão máxima de compressão.

Fixando-se um valor limite para a tensão de compressão, foi analisada a peça representada pela figura 5.20.a, e os resultados para uma espessura igual a 40cm estão mostrados na tabela 5.9. Os pontos em análise estão indicados na figura 5.21, onde a distribuição de tensões no solo está mostrada para as duas tensões limites da tabela 5.9.

PONTO	VALORES DA REAÇÃO DO SOLO	
	TENSÃO LIMITE = 2,5kgf/cm <sup>2</sup>	TENSÃO LIMITE = 2,2kgf/cm <sup>2</sup>
1	-2,50	-2,20
2	-2,50	-2,20
3	-2,37	-2,20
4	-2,12	-2,20
5	-1,63	-1,83
6	-1,35	-1,56
7	-0,87	-0,90
8	-0,38	-0,22
9	-0,11	0
10	0	0
11	0	0
12	0	0
13	0	0

TABELA 5.9 - Reações do solo para carga com duas excentricidades com limite máximo para tensão de compressão.

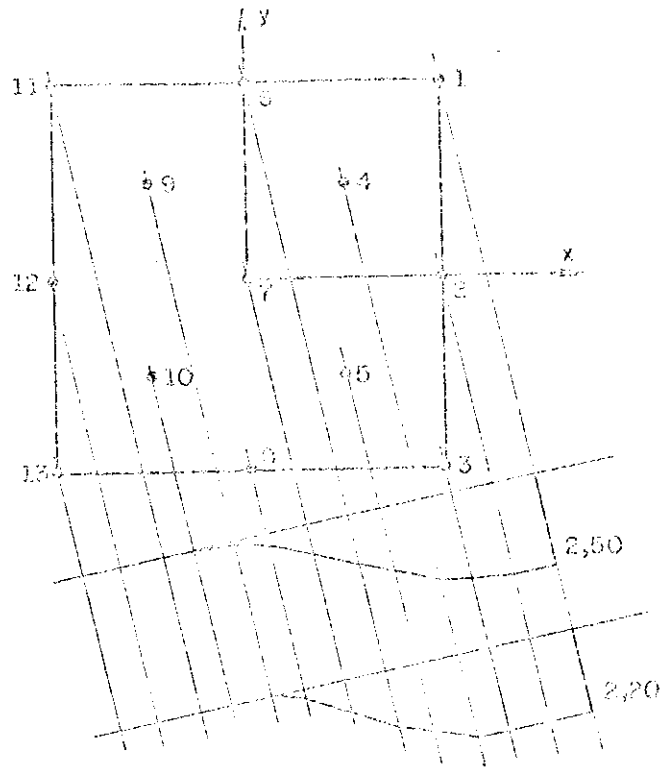


Fig. 5.21 - Distribuição de tensões no solo para carga com duas excentricidades limitando-se a tensão máxima de compressão.

## CAPÍTULO VI

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

A finalidade básica deste trabalho foi apresentar uma formulação utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno para o cálculo de placas sobre fundações elásticas. Com este objetivo, a partir das hipóteses simplificadoras de Kirchhoff para placas delgadas, foi desenvolvida uma formulação para análise de placas, com condições quaisquer de contorno. Os exemplos apresentados no capítulo 4, comparados aos apresentados na referência [74], mostraram a eficiência da formulação na análise de placas submetidas aos mais diversos tipos de carregamentos e condições de contorno.

Na formulação apresentada, os pontos do contorno foram levados para fora do domínio conseguindo-se desta forma, apenas integrações numéricas, mesmo sobre o elemento que continha o nó singular. Esta alternativa, que simplificou a determinação dos coeficientes de influência, mostrou-se muito eficiente, notando-se apenas uma pequena perturbação com relação aos valores das reações de canto.

Esta formulação foi estendida para o cálculo de placas apoiadas sobre fundações elásticas, adotando-se para o solo segundo WINKLER [45], uma reação elástica, proporcional ao aruudamento da placa.

Das duas alternativas desenvolvidas para este caso, o processo da reciprocidade dual apresentou, mesmo necessitando de uma discretização maior do contorno, um menor tempo de processamento. A dificuldade de se obter uma aproximação pela superposição de superfícies cônicas, além da imprecisão observada no caso da carga excêntrica, mostraram que esta técnica requer uma pseudo-carga  $f$ , não mais linear em  $f$ , como a adotada.

A discretização do domínio em células internas, mostrou-se mais eficiente que a reciprocidade dual na obtenção de tensões e esforços em placas sobre fundações elásticas, isto é comprovado pelos resultados obtidos nos primeiros exemplos do capítulo 5. O efeito da não-linearidade para a resposta do solo foi agora considerado, pela adoção de um critério de plastificação uniaxial, e os resultados dos últimos exemplos do capítulo anterior, comprovam a eficiência do processo iterativo utilizado, para situações de convergência, com e sem equilíbrio.

Em todos os exemplos analisados, as placas continuamente apoiadas no solo, tinham os seus lados sem nenhuma restrição de contorno em termos de deslocamentos, implicando consequentemente num vetor dos esforços nodais  $F$  nulo, evitando-se assim a determinação da matriz de influência  $G$ . O programa desenvolvido utilizou esta simplificação, ficando portanto restrito a soluções de placas com os lados em bordo livre. A inclusão de outras condições de contorno entretanto, não deverá representar grande esforço computacional.

Sugestões para a continuação da pesquisa são relativas à consideração de cargas distribuídas em linha; à associação da placa com elemento de viga, visando modelar fundação em radier; aproveitar a formulação que discretiza



o domínio em cálculo, para introduzir placa com espessura variável.

Deve-se notar que a adoção de um critério de plasticificação multiaxial para a resposta do solo, tornará a formulação mais abrangente, servindo para estudar problemas mais complexos como, cortinas atirantadas, paredes diafragma, escoramentos de valas de uma forma geral.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SOUTHWELL, R.V. Relaxation methods in theoretical physics. London, Oxford University Press, 1946. (The Oxford Engineering Science Series).
- [2] ARGYRES, J.H. & KELSET, S. Energy theorems and structural analysis. London, Butterworths, 1960.
- [3] TURNER, M.J. et alii. Stiffness and deflection analysis of complex structures. Journal Aero. Science, 23: 805-823, 1956.
- [4] CLOUCH, R.W. The finite element in plane stress analysis. In: ASCE CONF. ON ELECTRONIC COMP., 2nd, 1960 - Proc.
- [5] ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method in engineering science. London, McGraw-Hill, 1971.
- [6] PAULA, F.A. Obtenção de matriz de rigidez utilizando o método dos elementos de contorno. Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1986. (Dissertação de Mestrado).

- [7] ANDERSSON, R.S. et alii. The application and numerical solution of integral equations. Alphen aan den Rijn, The Netherlands, Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [8] ABEL, N.H. Oeuvres Complètes. Norvègien Christiania, 1981. v. 1, 621 p.
- [9] GIL ROGRÍQUEZ, J.C. Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais. Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1986. (Dissertação de Mestrado).
- [10] VOLTERRA, V. Opere mathematiche. Acad. Naz. Lincei, Rome, 2:216:275, 1956.
- [11] FREDHOLM, I. Sur une classe d'equations fonctionnelles. Acta Math., 27: 365-390, 1903.
- [12] HILBERT, D. Grundzüge einer allgemeinen theorie der linearen integralgleichungen. New York, Chelsea Publishing Company, 1953.
- [13] KELLOG, O.D. Foundations of potencial theory. Berlin, Springer-Verlag, 1967.
- [14] LOVE, A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4th ed. New York, Dover, 1944.
- [15] COSTA JR., J.A. The boundary element method applied to plate problems. Southampton, University of Southampton, 1985. (Ph. D. Thesis).
- [16] MUSKHELISHVILI, N.I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Groningen Holland, Noordhoff, 1953.
- [17] MIKHELIN, S.G. Integral equations. London, Pergamon Press, 1957. (International series of monographs in pure and applied mathematics).
- [18] KUPRADZE, V.D. Potencial methods in the theory of elasticity. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1965.

- [19] CRUZE, T.A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. Int. Journal of Solids and Structures, 5: 1259-1274, 1969.
- [20] BANERJEE, P.K. Integral equation methods for analysis of piece-wise non-homogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape. Int. Journal Mechanical Science, 18: 293-303, 1976.
- [21] JASWON, M.A. Integral equation methods in potential theory I. Proc. Royal Society, A 275:23-32, 1963.
- [22] SYMM, G.T. Integral equation methods in potential theory II. Proc. Royal Society, A 275: 33-46, 1963.
- [23] JASWON, M.A. & PONTER, A.R. An integral equation solution of the torsion problem. Proc. Royal Society, A 273: 237-246, 1963.
- [24] RIZZO, F.J. An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quarterly of Applied Mathematics, 25 (1): 83-92, 1967.
- [25] RICARDELLA, P.C. An implementation of the boundary and elasto-plasticity. Carnegie-Mellon University, 1973. (Ph.D.Thesis).
- [26] CRUZE, T.A. An improved boundary integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. Computers & Structures, 4: 741-754, 1974.
- [27] LACHAT, J.A. A further development of the boundary integral technique for elastostatics. Southampt, University of Southampton, 1975. (Ph.D. Thesis).
- [28] JASWON, M.A.; MAITI, M.; SYMM, G.T. Numerical biharmonic analysis and some applications. Int. Journal of Solids and Structures, 3: 309-332, 1967.
- [29] JASWON, M.A. & MAITI, M. An integral formulation of plate bending problems. J. Engng. Math., 2: 83-93, 1968.

- [30] ALTIERO, N.J. & SIKARSKIE, D.L. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. Computer & Structures, 9: 163-168, 1978.
- [31] WU, B.C. & ALTIERO, N.J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. Computer & Structures, 10: 703-707, 1979.
- [32] TOTEHAM, H. The boundary element method for plates and shells. In: BANERJEE, P.K. & BUTTERFIELD, R. eds. Developments in boundary element methods. London, Elsevier, 1979.
- [33] BEZINE, G. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. Mechanics Research Communications, 5 (4): 197-206, 1978.
- [34] BEZINE, G. & GANBI, D.A. A new integral equation formulation for plate bending problems. In: BREBBIA, C.A., ed. Recent advances in boundary element methods. London, Pentech Press, 1978.
- [35] STERN, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. Int. Journal of Solids and Structures, 15: 769-782, 1979.
- [36] STERN, M. Boundary integral equations for bending of thin plates. In: BREBBIA, C.A., ed. Progress in boundary element methods, vol. 2. London, Pentech Press, 1983.
- [37] BEZINE, G. A mixed boundary integral: finite element approach to plate vibration problems. Mechanics Research Communications, 7 (3): 141-150, 1980.
- [38] KAMIYA, N. et alii. An approximate finite deflection analysis of a heated elastic plate by the boundary element method. Appl. Math. Modelling, 6(1): 23-27, 1982.

- [ 39 ] KAMIYA, N. & SAWAKY, Y. An integral equation approach to finite deflection of elastic plates. Int. J. Non-Linear Mechanics, 17 (3): 187-194, 1982.
- [ 40 ] TANAKA, M. Large deflection analysis of thin elastic plates. In: BANERJEE, P.K. & MUKHERJEE, S., eds. Developments in boundary element methods - 3. London, Elsevier, 1984.
- [ 41 ] VANDERWEEËN, F. Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model. In: BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods in engineering: Proceedings of the Fourth International Seminar, Southampton, England, Sept. 1982.
- [ 42 ] REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. Journal of Applied Mechanics, 12: A69-A77, 1945.
- [ 43 ] KATSIKADELIS, J.T. & ARMENAKAS, A.E. Plates on elastic foundation by BIE method. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 110 (7): 1086-1104, 1984.
- [ 44 ] KATSIKADELIS, J.T. & ARMENAKAS, A.E. Analysis of clamped plates on elastic foundation by the boundary integral method. Journal of Applied Mechanics, 54: 544-580, 1984.
- [ 45 ] WINKLER, E. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Prague, Dominicus, 1867.
- [ 46 ] COSTA JR., J.A. & BREBBIA, C.A. The boundary element method applied to plates on elastic foundations. Engineering Analysis, 2 (4): 174-183, 1985.
- [ 47 ] COSTA JR., J.A. & BREBBIA, C.A. On the reduction of domain integrals to the boundary for the BEM formulation of plates on elastic foundations. Engineering Analysis, 3 (2): 123-126, 1986.
- [ 48 ] COSTA JR., J.A. & BREBBIA, C.A. Bending of plates on elastic foundations using the boundary element

- method. In: INTERNATIONAL CONFERENCE, 2nd, Southampton, 1985. - Proc. Berlin, Springer-Verlag, 1985.
- [49] MENDELSON, A. Boundary integral methods in elasticity and plasticity. NASA report TN D - 7418, 1973.
- [50] MUKHERJEE, S. Corrected boundary integral equation in planar thermo elastoplasticity. Int. Journal of Solids and Structures, 13: 331-335, 1977.
- [51] CHAUDONNERET, M. Méthode des équations intégrales appliquées a la résolution des problèmes de viscoplasticité. Journal Mécanique Appliquée, 1: 113-132, 1977.
- [52] MORJARIA, M. & MUKHERJEE, S. Inelastic analysis of transverse deflection of plates by boundary element method. Journal of Applied Mechanics, 47 (2): 291-296, 1980.
- [53] TELLES, J.C.F. & BREBBIA, C.A. New developments in elastoplastic analysis. In: BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods. Berlin, Springer-Verlag, 1981.
- [54] VENTURINI, W.S. & BREBBIA, C.A. The boundary element method for the solution of no-tension materials. In: BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods. Berlin, Springer-Verlag, 1981.
- [55] VENTURINI, W.S. Application of the boundary element method to solve geomechanical problems. Southampton, University of Southampton, 1982. (Ph.D.Thesis).
- [56] MAIER, G. & POLIZZOTTO, C. A boundary element approach to limit analysis. In: BREBBIA, C.A. et alii, eds. Boundary elements V. Berlin, Springer-Verlag, 1983.
- [57] TSUTA, T. & YAMAH, S. - Boundary element analysis of contact thermo-elastoplastic problems with creep

- and the numerical technique. In: BREBBIA, C.A. et alii, eds. Boundary elements V. Berlin, Springer-Verlag, 1983.
- [58] TAKAKUDA, K.; KOIZUMI, T.; SHIBUYA, T. On integral equation methods for crack problems. Bulletin of JSME, 28 (236): 217-224, 1985.
- [59] ZIENKIEWICZ, O.C.; KELLY, D.W.; BETESS, P. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11: 355-375, 1977.
- [60] ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method. London, McGraw-Hill, 1971.
- [61] BEER, G. Finite element, boundary element and coupled analysis of unbounded problems in elastostatics. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19: 567-590, 1983.
- [62] BREBBIA, C.A. The boundary element method for engineers. London, Pentech Press, 1978.
- [63] BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C. Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Berlin, Springer-Verlag, 1984.
- [64] BREBBIA, C.A. & WALKER, S. Boundary element techniques in engineering. London, Butterworths, 1980.
- [65] FELIPPA, C.A. Interfacing finite element and boundary element discretizations. In: BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods. Berlin, Springer-Verlag, 1981.
- [66] BEER, G. & MEEK, J.L. The coupling of boundary and finite element methods for infinite domain problems in elasto-plasticity. In: BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods. Berlin, Springer-Verlag, 1981.



- [ 67 ] DENDROU, B.A. & DENDROU, S.A. A finite-element boundary integral scheme to simulate rock effects on the linear of an underground intersection. In: BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods. Berlin, Springer-Verlag, 1981.
- [ 68 ] BRADY, B.H.G. & WASSYNG, A. A coupled finite element-boundary element method of stress analysis. International Journal of Rock Mechanics, Mining Science & Geomechanics Abstracts, 18:475-485, 1981.
- [ 69 ] KISHIMOTO, K. et alii. Elastic-plastic fracture mechanics analysis by combination of boundary and finite element methods. In: BREBBIA, C.A. et alii, eds. Boundary elements V. Berlin, Springer-Verlag, 1983.
- [ 70 ] HISATAKE, M.; ITO, T.; UEDA, H. Three dimensional symmetric coupling of boundary and finite element methods. In: BREBBIA, C.A. et alii, eds. Boundary element V. Berlin, Springer-Verlag, 1983.
- [ 71 ] ICHIKAWA, Y.; OBARA, Y.; KAWAMOTO, T. A coupling scheme for boundary and finite elements using a joint element. Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 9: 161-172, 1985.
- [ 72 ] BREBBIA, C.A. & NARDINI, D. Solution of parabolic and hiperbolic time dependent problems using boundary elements. Comp. & Maths. with Appls., 12B: 1061-1072, 1986.
- [ 73 ] KIRCHHOFF, G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung Einer Elastischen Scheibe. J. Math., Crelle, 40: 51-58, 1850.
- [ 74 ] PAIVA, J.B. Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1987. (Tese de Doutorado).

- [75] TIMOSHENKO, S. & VOINOVSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells. New York, McGraw-Hill, 1959.
- [76] DANSON, D.J. Analysis of plate bending problems by direct boundary element method. Southampton, University of Southampton, 1979. (M.Sc. Dissertation).
- [77] BETTI, E. Teoria dell elasticita. Il Nuovo Cimento, 7-10, 1872.
- [78] STROUD, A.H. & SECKEST, D. Gaussian quadrature formulas. New York, Prentice-Hall, 1966.
- [79] FUNG, Y.C. Foundations of solid mechanics. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1965.
- [80] FREITAS NETO, J.A. et alii. Introdução ao método dos elementos finitos. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1976. (Cadernos de Estruturas nº 5).
- [81] GUERRIN, A. Traité du béton armé. Paris, Dunod, 1960.
- [82] JIMENEZ MONTTOYA, P; GARCIA MESSEGUER, A.; MORÁN CABRÉ, B. Hormigón armado. 10. ed. Barcelona, Gustavo Gili, 1979.