

TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA
NO PROJETO DE PÓRTICOS PLANOS RETANGULARES

AUTOR : ENG. NELSON KRAHENBUHL SALGADO

ORIENTADORA : PROFA. DRA. HELENA M.C. ANTUNES

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA
NO PROJETO DE PÓRTICOS PLANOS RETANGULARES

AUTOR: ENG. NELSON KRAHENBUHL SALGADO

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

SÃO CARLOS, DEZEMBRO DE 1987

AGRADECIMENTOS

- À Profa. Helena M.C. Carmo Antunes, minha orientadora;

- A Sylvia Helena e João Paulo pelos desenhos;

- A Silvana e Rui, pela datilografia;

- À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, sem cujo amparo - auxílio para pesquisa e bolsa - o trabalho não poderia ter sido realizado;

- À INTERTEC Serviços Ltda pelo uso de seu CPD na fase de execução de exemplos.

R E S U M O

O objetivo deste trabalho é apresentar um algoritmo que automatize o projeto de pórticos planos retangulares de edifícios altos, em regime elástico, minimizando o consumo de material estrutural e levando em conta restrições referentes à limitação dos deslocamentos horizontais das lajes e das tensões normais atuantes nas barras. A técnica utilizada, envolvendo conceitos de programação matemática não linear, consistiu na construção de problemas aproximados que representassem da melhor forma possível o caso real, sem apresentar contudo as mesmas dificuldades.

No capítulo 2 apresenta-se a definição de um problema de programação matemática. Com base nesta definição o projeto de uma estrutura exemplo é equacionado no capítulo 3; mostra-se que mesmo para uma estrutura bastante simples o problema da programação a resolver é complexo.

No capítulo 4 mostra-se como a estratégia tradicional de projeto de estruturas hiperestáticas pode ser aplicada para separar as fases da análise e dimensionamento, resultando um processo iterativo. A formulação do problema é então simplificada e generalizada.

Nos capítulos 5 e 6 apresenta-se uma revisão da bibliografia dirigida à solução do problema proposto. As estratégias baseadas em enfoques Primal e Dual são analisadas, sendo suas principais qualidades e deficiências explicitadas.

No capítulo 7 as técnicas descritas são comparadas visando a solução do problema proposto, sendo adotada uma estratégia dual por melhor se adaptar ao comportamento estrutural esperado.

No capítulo 8 apresenta-se a formulação utilizada. Esta foi em parte desenvolvida, visto não existir na bibliografia nenhuma que se adapte perfeitamente às necessidades constatadas.

O capítulo 9 é dedicado à apresentação do programa desenvolvido, exemplos de utilização são encontrados nos capítulos 10, 11 e 12.

Por fim, no Anexo A, uma pequena compilação de conceitos básicos de programação matemática indispensáveis ao completo entendimento deste trabalho.

A B S T R A C T

The main purpose of this work is to present an algorithm for automating rectangular plane frame design, usual in high building structural analysis, in the linear elastic range, by minimizing the consumption of structural material, and taking into account restrictions related to the limitation of the floor-slabs horizontal displacements and axial stress in the members of the structure. The used technique, involving concepts of non linear mathematical programming, consists of constructing approximate problems that represent, in the best possible way, the real ones, although without its inherent difficulties.

In the chapter 2, the definition of a mathematical programming is presented. Based on this definition, the formulation for the design of a structure-example is developed in the chapter 3; there it is shown that, even for a very simple structure, the programming problem to solve is actually quite complex.

In the chapter 4 it is shown how classical procedures for designing hyperstatic structures can be used for separating the several analysis phases, and the definition of geometric characteristics for the elements, giving origin to an interactive procedure. The problem formulation is then generalized.

In the chapter 5 and 6 is presented a bibliographic review of the proposed matter. The strategies based

on Primal and Dual procedures are then analysed, expliciting its main qualities and defects.

In the chapter 7 the several described techniques are compared, looking at the solution of the proposed problem, being then adopted a dual strategy, because it seems to be the best adapts to the expected structural behaviour.

In the chapter 8 is presented a generalized formulation. It was partially developed in this work, due to the inexistence of one that could be adapted to the peculiarities of the problem.

The chapter 9 is used for presenting the computer program, and the remaining chapters, 10, 11 and 12 show several examples of utilization.

At last, in the Annex A, it is made a small compilation of basic concepts in mathematical programming, essential for a complete understanding of this work.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO.....	1
2. O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA.....	2
3. EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA ASSOCIADO AO PROJETO DE UMA ESTRUTURA EXEMPLO....	4
4. GENERALIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO.....	19
5. ATAQUE INDIRETO BASEADO EM CRITÉRIOS DE OTIMALIDADE.	23
5.1 - Critério de Otimalidade Matemático.....	28
5.2 - O Problema Dual.....	34
6. ATAQUE DIRETO BASEADO EM PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA.....	36
6.1 - Aproximações a Chave para Construir Estratégias Primais Eficientes.....	39
7. COMPARAÇÃO ENTRE OS ENFOQUES.....	43
8. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA APROXIMADO, UTILIZANDO UMA ESTRATÉGIA DUAL.....	45
8.1 - Algoritmo de Otimização.....	50
8.2 - Algoritmo para Busca Linear.....	52
9. PROGRAMA OTPORT.....	57
9.1 - Entrada de Dados.....	58
9.2 - Pré-Processamento.....	59
9.3 - Preparação do Projeto Inicial.....	60
9.4 - Controle do Procedimento.....	60

9.5 - Construção do Problema Aproximado.....	60
9.6 - Resolução do Problema Aproximado.....	61
9.7 - Aspectos Computacionais.....	61
10. RESOLUÇÃO DA ESTRUTURA EXEMPLO.....	64
11. RESOLUÇÃO DE EXEMPLO DA BIBLIOGRAFIA.....	71
12. EXECUÇÃO DE 18 PROJETOS.....	77
12.1 - Resultados.....	79
12.2 - Análise dos Resultados.....	81
12.2.1 - Aspectos estruturais.....	81
12.2.2 - Aspectos computacionais.....	83
13. CONCLUSÃO.....	86
14. BIBLIOGRAFIA.....	88
APÊNDICE A	90

1. INTRODUÇÃO

O progressivo desenvolvimento dos computadores abriu nas últimas décadas um fértil campo de pesquisa para a engenharia de estruturas, viabilizando a solução de um grande número de problemas, levando a se dispor, como incorporados à prática corrente de engenharia, de sofisticados programas.

Atualmente, os programas disponíveis caracterizam-se como programas de análise de uma estrutura dada, com forma e dimensões previamente fixadas pelo calculista com base em processos empíricos. Esses programas não têm característica de projeto, apesar de serem ferramentas utilíssimas.

Como consequência desse empirismo inerente ao projeto tradicional, inúmeras pesquisas foram desenvolvidas nos últimos vinte anos, visando automatizar e otimizar o projeto estrutural. Uma excelente introdução a este novo, e também vasto campo de pesquisa, pode ser encontrada em [1].

O objetivo desse trabalho é automatizar o projeto de pórticos planos retangulares e contínuos, integrantes das estruturas de edifícios altos, sujeitos à ação do vento e a cargas gravitacionais, em regime elástico.

2. O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

A otimização de projetos estruturais envolve, invariavelmente, a resolução de um problema de programação matemática, cuja natureza é, na maioria das vezes, não linear.

"Um problema onde se procura pelo máximo ou mínimo de uma função de diversas variáveis, devendo estas satisfazer alguns requisitos impostos, é chamado problema de programação matemática ou otimização. A função recebe o nome de função objetivo, e os requisitos impostos o de restrições do problema" [2].

O problema de programação geral pode ser formulado da seguinte maneira: deseja-se determinar os valores das n variáveis X_1, \dots, X_n que satisfazem as m desigualdades ou equações (também chamadas restrições)

$$g_i(X_1, \dots, X_n) \begin{cases} \geq \\ = \\ \leq \end{cases} b_i \quad i = 1, \dots, m$$

e que maximizam ou minimizam a função (também chamada função objetivo)

$$Z = f(X_1, \dots, X_n)$$

Um ponto X que satisfaça as restrições e minimize ou maximize a função objetivo é chamado ponto ótimo.

Nas restrições, os $g_i (X_1, \dots, X_n)$ são funções e os b_i são constantes. Apenas uma das relações \leq , $=$, \geq vale para uma determinada restrição i , mas elas podem variar de restrição para restrição.

3. EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA ASSOCIADO AO PROJETO DE UMA ESTRUTURA EXEMPLO

Estudar-se-á a estrutura da Fig.(1), sujeita à carga horizontal (Q) indicada.

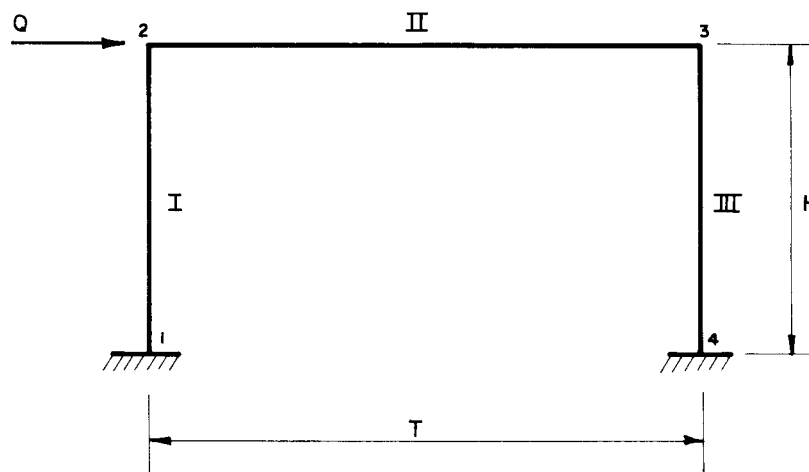


Figura 1

O material estrutural utilizado será o aço. Seja:

- E - módulo de elasticidade.
- I_i - momento de inércia da barra i .
- S_i - área da seção transversal.
- W_i - módulo de resistência.

O objetivo é escolher dimensões para as seções transversais dos elementos $(I, S, W)_i$, de tal modo que:

- a) O consumo de material seja o menor possível
- b) O deslocamento horizontal da viga não ultrapasse um determinado limite prescrito (\bar{u})
- c) As tensões normais dos elementos não ultrapassem valores considerados admissíveis ($\bar{\sigma}$).

Será utilizada uma formulação matricial do clássico processo dos deslocamentos [3]. Esse apresenta em relação ao processo dos esforços vantagens no que tange à facilidade de automatização [4].

Os deslocamentos globais de referência $\{u\}$ serão adotados nas direções e sentidos da Fig.(2).

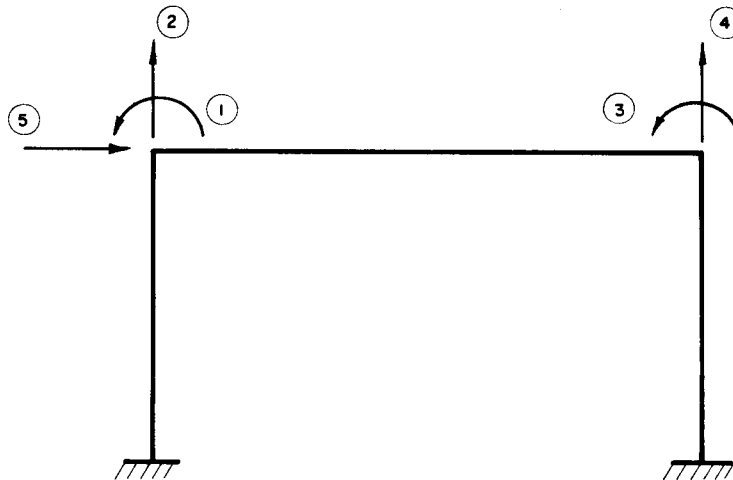


Figura 2

Os deslocamentos locais (ou graus de liberdade dos elementos) $\{\delta\}$ serão os mostrados na Fig.(3).

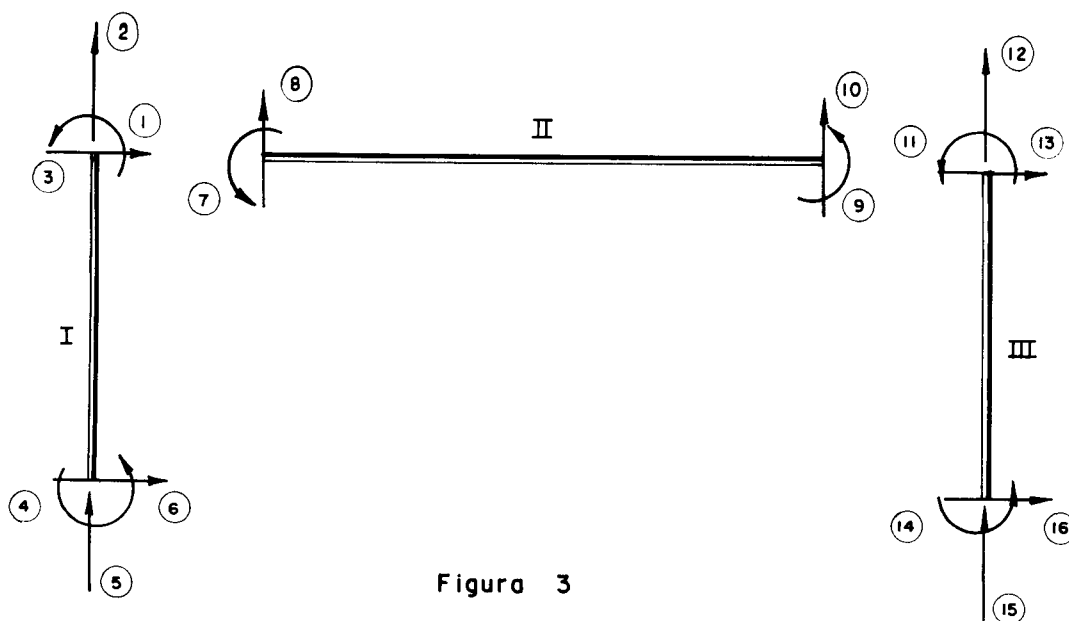


Figura 3

Considere-se a estrutura submetida a ações $\{ F \}$, ficando seus elementos sujeitos a esforços internos $\{ P \}$. Esses elementos sofrerão deslocamentos de extremidade $\{ \delta \}$ e a estrutura apresentará deslocamentos nodais $\{ u \}$.

Admite-se que o carregamento seja estático, não acarretando energia cinética apreciável (sistema conservativo), e que a estrutura trabalhe em regime linear elástico.

Seja:

- $[R]$ - Matriz de rigidez da estrutura integrada, associada aos deslocamentos globais de referência (sistema global).
- $[R]_i$ - Contribuição do elemento i à Matriz de rigidez da estrutura.
- $\{ r \}_i$ - Matriz de rigidez do elemento, associada aos deslocamentos locais de referência (sistema local).
- $\{ \beta \}_i$ - Matriz de compatibilidade cinemática do elemento.

A partir da matriz de rigidez dos elementos constrói-se a matriz de rigidez da estrutura por meio da expres

são:

$$[R] = \sum_{i=1}^n [\beta]_i^T [r]_i [\beta]_i$$

As condições de equilíbrio são expressas pela equação matricial:

$$[R] \{u\} = \{F\}$$

Os deslocamentos $\{\delta\}_i$ podem ser relacionados aos deslocamentos nodais, utilizando as matrizes de compatibilidade cinemática

$$\{\delta\}_i = [\beta]_i \{u\}$$

Os esforços internos podem então ser avaliados

$$\{P\}_i = [r]_i \{\delta\}_i$$

No caso do exemplo estudado temos:

a) Vetor de ações nodais

$$\{F\} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ Q\}$$

b) Matriz de rigidez dos elementos

$$[r]_1 = \begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{H} & 0 & \frac{6EI_1}{H^2} & \frac{2EI_1}{H} & 0 & \frac{-6EI_1}{H^2} \\ 0 & \frac{ES_1}{H} & 0 & 0 & \frac{-ES_1}{H} & 0 \\ \frac{6EI_1}{H^2} & 0 & \frac{12EI_1}{H^3} & \frac{6EI_1}{H^2} & 0 & \frac{-12EI_1}{H^3} \\ \frac{2EI_1}{H} & 0 & \frac{6EI_1}{H^2} & \frac{4EI_1}{H} & 0 & \frac{-6EI_1}{H^2} \\ 0 & \frac{-ES_1}{H} & 0 & 0 & \frac{ES_1}{H} & 0 \\ \frac{-6EI_1}{H^2} & 0 & \frac{-12EI_1}{H^3} & \frac{-6EI_1}{H^2} & 0 & \frac{12EI_1}{H^3} \end{bmatrix}$$

$$[r]_2 = \begin{bmatrix} \frac{4EI_2}{T} & \frac{6EI_2}{T^2} & \frac{2EI_2}{T} & \frac{-6EI_2}{T^2} \\ \frac{+6EI_2}{T^2} & \frac{12EI_2}{T^3} & \frac{6EI_2}{T^2} & \frac{-12EI_2}{T^3} \\ \frac{2EI_2}{T} & \frac{6EI_2}{T^2} & \frac{4EI_2}{T} & \frac{-6EI_2}{T^2} \\ \frac{-6EI_2}{T^2} & \frac{-12EI_2}{T^3} & \frac{-6EI_2}{T^2} & \frac{12EI_2}{T^3} \end{bmatrix}$$

$$[r]_3 = [r]_1$$

c) Matrizes de compatibilidade cinemática

$$[\beta]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\beta]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\beta]_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) Contribuição dos elementos à matriz de rigidez

$$[R]_i = [B]_i^T [r]_i [B]_i$$

$$[R]_1 = \begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{H} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_1}{H^2} \\ 0 & \frac{ES_1}{H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI_1}{H^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_1}{H^3} \end{bmatrix}$$

$$[R]_2 = \begin{bmatrix} \frac{4EI_2}{T} & \frac{6EI_2}{T^2} & \frac{2EI_2}{T} & \frac{-6EI_2}{T^2} & 0 \\ \frac{6EI_2}{T^2} & \frac{12EI_2}{T^3} & \frac{6EI_2}{T^2} & \frac{-12EI_2}{T^3} & 0 \\ \frac{2EI_2}{T} & \frac{6EI_2}{T^2} & \frac{4EI_2}{T} & \frac{-6EI_2}{T^2} & 0 \\ \frac{-6EI_2}{T^2} & \frac{-12EI_2}{T^3} & \frac{-6EI_2}{T^2} & \frac{12EI_2}{T^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[R]_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4EI_3}{H} & 0 & \frac{6EI_3}{H^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{ES_3}{H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_3}{H^2} & 0 & \frac{12EI_3}{H^3} \end{bmatrix}$$

d) Matriz de rigidez da estrutura

$$[R] = [R]_1 + [R]_2 + [R]_3$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \left[\frac{4EI_1}{H} + \frac{4EI_2}{T} \right] & \frac{6EI_2}{T^2} & \frac{2EI_2}{T} & \frac{-6EI_2}{T^2} & \frac{6EI_1}{H^2} \\ \frac{6EI_2}{T^2} & \left[\frac{ES_1}{H} + \frac{12EI_2}{T^3} \right] & \frac{6EI_2}{T^2} & \frac{-12EI_2}{T^3} & 0 \\ \frac{2EI_2}{T} & \frac{6EI_2}{T^2} & \left[\frac{4EI_2}{T} + \frac{4EI_3}{H} \right] & \frac{-6EI_2}{T^2} & \frac{6EI_3}{H^2} \\ \frac{-6EI_2}{T^2} & \frac{-12EI_2}{T^3} & \frac{-6EI_2}{T^2} & \left[\frac{12EI_2}{T^3} + \frac{ES_3}{H} \right] & 0 \\ \frac{6EI_1}{H^2} & 0 & \frac{6EI_3}{H^2} & 0 & \left[\frac{12EI_1}{H^3} + \frac{12EI_3}{H^3} \right] \end{bmatrix}$$

e) Condições de equilíbrio

$$\left[\frac{4EI_1}{H} + \frac{4EI_2}{T} \right] u_1 + \frac{6EI_2}{T^2} u_2 + \frac{2EI_2}{T} u_3 - \frac{6EI_2}{T^2} u_4 + \frac{6EI_1}{H^2} u_5 = 0$$

$$\frac{6EI_2}{T^2} u_1 + \left[\frac{ES_1}{H} + \frac{12EI_2}{T^3} \right] u_2 + \frac{6EI_2}{T^2} u_3 - \frac{12EI_2}{T^3} u_4 = 0$$

$$\frac{2EI_2}{T} u_1 + \frac{6EI_2}{T^2} u_2 + \left[\frac{4EI_2}{T} + \frac{4EI_3}{H} \right] u_3 - \frac{6EI_2}{T^2} u_4 + \frac{6EI_3}{H^2} u_5 = 0$$

$$-\frac{6EI_2}{T^2} u_1 - \frac{12EI_2}{T^3} u_2 - \frac{6EI_2}{T^2} u_3 + \left[\frac{12EI_2}{T^3} + \frac{ES_3}{H} \right] u_4 = 0$$

$$\frac{6EI_1}{H^2} u_1 + \frac{6EI_3}{H^2} u_3 + \left[\frac{12EI_1}{H^3} + \frac{12EI_3}{H^3} \right] u_5 = Q$$

f) Condições de compatibilidade cinemática

Para a barra I tem-se:

$$\delta_1 = u_1, \delta_2 = u_2, \delta_3 = u_5, \delta_4 = 0, \delta_5 = 0, \delta_6 = 0$$

Para a barra II:

$$\delta_7 = u_1, \delta_8 = u_2, \delta_9 = u_3, \delta_{10} = u_4$$

Para a barra III:

$$\delta_{11} = u_3, \delta_{12} = u_4, \delta_{13} = u_5, \delta_{14} = 0, \delta_{15} = 0, \delta_{16} = 0$$

g) Esforços internos

Para a barra I tem-se:

- Momento na extremidade inicial

$$\left[\frac{4}{H} u_1 + \frac{6}{H^2} u_5 \right] EI_1$$

- Normal na extremidade inicial

$$\left[\frac{ES_1}{H} \right] u_2$$

- Cortante na extremidade inicial

$$\left[\frac{6}{H^2} u_1 + \frac{12}{H^3} u_5 \right] EI_1$$

- Momento na extremidade final

$$\left[\frac{2}{H} u_1 + \frac{6}{h^2} u_5 \right] EI_1$$

- Normal na extremidade final

$$\left[\frac{-ES_1}{H} \right] u_2$$

- Cortante na extremidade final

$$\left[\frac{-6}{H^2} u_1 - \frac{12}{H^3} u_5 \right] EI_1$$

Para a barra II tem-se:

- Momento na extremidade inicial

$$\left[\frac{4}{T} u_1 + \frac{6}{T^2} u_2 + \frac{2}{T} u_3 - \frac{6}{T^2} u_4 \right] EI_2$$

- Momento na extremidade final

$$\left[\frac{2}{T} u_1 + \frac{6}{T^2} u_2 + \frac{4}{T} u_3 - \frac{6}{T^2} u_4 \right] EI_2$$

- Cortante na extremidade inicial

$$\left[\frac{6}{T^2} u_1 + \frac{12}{T^3} u_2 + \frac{6}{T^2} u_3 - \frac{12}{T^3} u_4 \right] EI_2$$

- Cortante na extremidade final

$$\left[\frac{-6}{T^2} u_1 - \frac{12}{T^3} u_2 - \frac{6}{T^2} u_3 + \frac{12}{T^3} u_4 \right] EI_2$$

O esforço normal na viga pode ser calculado por equilíbrio. No entanto, foi negligenciado neste exemplo.

Para a barra III tem-se:

- Momento na extremidade inicial

$$\left[\frac{4}{H} u_3 + \frac{6}{H^2} u_5 \right] EI_3$$

- Normal na extremidade inicial

$$\frac{ES_3}{H} u_4$$

- Cortante na extremidade inicial

$$\left[\frac{6}{H^2} u_3 + \frac{12}{H^3} u_5 \right] EI_3$$

- Momento na extremidade final

$$\left[\frac{2}{H} u_3 + \frac{6}{H^2} u_5 \right] EI_3$$

- Normal na extremidade final

$$- \frac{ES_3}{H} u_4$$

- Cortante na extremidade final

$$\left[\frac{-6}{H^2} u_3 - \frac{12}{H^3} u_5 \right] EI_3$$

A partir dos ingredientes levantados, pode-se formular o problema de projetar a estrutura exemplo como um problema de programação matemática.

O objetivo final do projetista é conceber uma estrutura que satisfaça todas as restrições que lhe são impostas, a um custo mínimo.

Dessa forma, a função-objetivo deve guardar estreita relação com o custo da estrutura. Dado o caráter genérico deste trabalho, o custo da estrutura será associado ao volume de material estrutural (aço) consumido.

Esta aproximação é comumente utilizada em estudos desse tipo.

$$V = \sum_{i=1}^n S_i L_i$$

n = Número de barras da estrutura

L_i = Comprimento da barra i

S_i = Área da seção transversal da barra i

As restrições assumirão a forma:

a) tensões normais nos elementos ($|\sigma|_i \leq \bar{\sigma}_i$)

$$\left| \frac{M}{w} + \frac{N}{S} \right|_i \leq \bar{\sigma}_i$$

b) deslocamento horizontal da viga

$$u_5 \leq \bar{u}$$

onde: M = Momento fletor atuante
 N = Esforço normal atuante
 w = Módulo de resistência da seção
 S = Área da seção
 u_5 = Deslocamento horizontal da viga
 $\bar{\sigma}$ = Tensão admissível
 \bar{u} = Deslocamento admissível

O problema resume-se então a:

minimizar: $V = H(S_1 + S_3) + T(S_2)$

Restrito a:

1) Equilíbrio:

$$\left[\frac{4EI_1}{H} + \frac{4EI_2}{T} \right] u_1 + \frac{6EI_2}{T^2} u_2 + \frac{2EI_2}{T} u_3 - \frac{6EI_2}{T^2} u_4 + \frac{6EI_1}{H^2} u_5 = 0$$

$$\frac{6EI_2}{T^2} u_1 + \left[\frac{ES_1}{H} + \frac{12EI_2}{T^3} \right] u_2 + \frac{6EI_2}{T^2} u_3 - \frac{12EI_2}{T^3} u_4 = 0$$

$$\frac{2EI_2}{T} u_1 + \frac{6EI_2}{T^2} u_2 + \left[\frac{4EI_2}{T} + \frac{4EI_3}{H} \right] u_3 - \frac{6EI_2}{T^2} u_4 + \frac{6EI_3}{T^2} u_5 = 0$$

$$\frac{-6EI_2}{T^2} u_1 - \frac{12EI_2}{T^3} u_2 - \frac{6EI_2}{T^2} u_3 + \left[\frac{12EI_2}{T^3} + \frac{ES_3}{H} \right] u_4 = 0$$

$$\frac{6EI_1}{H^2} u_1 + \frac{6EI_3}{H^2} u_3 + \left[\frac{12EI_1}{H^3} + \frac{12EI_3}{H^3} \right] u_5 = Q$$

2) Tensões normais

$$\left| \left[\frac{4}{H} u_1 + \frac{6}{H^2} u_5 \right] \frac{EI_1}{W_1} + \left[\frac{ES_1}{H} u_2 \right] \frac{1}{S_1} \right| \leq \bar{\sigma}_1$$

$$\left| \left[\frac{2}{H} u_1 + \frac{6}{H^2} u_5 \right] \frac{EI_1}{W_1} - \left[\frac{ES_1}{H} u_2 \right] \frac{1}{S_1} \right| \leq \bar{\sigma}_1$$

$$\left| \left[\frac{4}{T} u_1 + \frac{6}{T^2} u_2 + \frac{2}{T} u_3 - \frac{6}{T^2} u_4 \right] \frac{EI_2}{W_2} \right| \leq \bar{\sigma}_2$$

$$\left| \left[\frac{4}{H} u_3 + \frac{6}{H^2} u_5 \right] \frac{EI_3}{W_3} + \left[\frac{ES_3}{H} u_4 \right] \frac{1}{S_3} \right| \leq \bar{\sigma}_3$$

$$\left| \left[\frac{2}{H} u_3 + \frac{6}{H^2} u_5 \right] \frac{EI_3}{W_3} - \left[\frac{ES_3}{H} u_4 \right] \frac{1}{S_2} \right| \leq \bar{\sigma}_3$$

3) Deslocamento

$$u_5 \leq \bar{u}$$

Nota-se que as incôgnitas do problema são:

- a) Os deslocamentos "u"
- b) As propriedades das seções "I, S, W"

As propriedades das seções transversais não são independentes umas das outras. Assim, pode-se obter relações:

$$W = f(I)$$

$$S = W(I)$$

Que permitem representar numa só variável as dimensões da seção transversal.

Observa-se que, mesmo para uma estrutura simples, o problema torna-se complexo.

De fato, existe um grande número de restrições, cuja natureza é altamente não-linear.

4. GENERALIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO

O problema de projetar estruturas semelhantes à do exemplo do parágrafo anterior pode ser genericamente formulado como:

- minimizar o volume de material estrutural consumido

$$V = f(x)$$

- satisfazendo às restrições:

a) Equações de equilíbrio obtidas utilizando o processo dos deslocamentos

$$[R(x)] \{ u \} = \{ F \}$$

b) Tensões normais máximas nas barras

$$\left| \sigma_i(x, u) \right| \leq \bar{\sigma}_i \quad i = 1, \dots, n$$

c) Limites das variáveis

$$\underline{u}_j \leq u_j \leq \bar{u}_j \quad j = 1, \dots, m$$

$$0 < \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i = 1, \dots, n$$

onde:

- $\{x\}$ ou $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - variáveis de projeto
 $\{u\}$ ou $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ - variáveis de estado
 $\{F\}$ ou $F = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ - vetor do carregamento
 $[R]$ ou R - matriz de rigidez da estrutura
 σ_i - maior tensão normal na barra i
 $\bar{\sigma}_i$ - tensão normal admissível na barra i
 $\underline{u}_j, \bar{u}_j$ - limites da variável de estado j
 $\underline{x}_i, \bar{x}_i$ - limites da variável de projeto i

As variáveis de projeto representam as propriedades das seções transversais dos elementos. No caso deste trabalho, existirão apenas barras prismáticas sujeitas principalmente a momento fletor e força normal, sendo conveniente utilizar a grandeza momento de inércia como representativa das dimensões da seção transversal.

É necessário, então, definir as relações:

$$I_i = x_i$$
$$S_i = k_1 x_i^{k_2}$$
$$W_i = k_3 x_i^{k_4}$$

onde:

- I_i - momento de inércia da barra i
 S_i - área da seção transversal da barra i
 W_i - módulo de resistência da barra i
 k_1, k_2, k_3, k_4 - constantes obtidas por mínimos quadrados, dependentes da geometria da seção transversal

A conveniência de se utilizar tais relações advém, principalmente, do fato de se poder representar a dimensão da seção transversal ou variável de projeto por meio de uma única grandeza [5],[4].

Em contrapartida, é necessário fixar o tipo de seção transversal a se utilizar, já que as constantes K_1, K_2, K_3, K_4 são dependentes da geometria escolhida.

Adicionalmente, em relação a variável de projeto, foram introduzidos os limites \underline{x}_i e \bar{x}_i que têm por objetivo restringir as soluções obtidas a um campo compatível com a realidade da oferta de perfis metálicos (e de validade dos coeficientes K_1, K_2, K_3, K_4).

As variáveis de estado representam deslocamentos em direções prefixadas. Sua determinação permite avaliar a resposta da estrutura à ação de um dado carregamento.

A solução do problema apresentado, nas variáveis $\{x\}$ e $\{u\}$, conduziria diretamente ao projeto ótimo. Obter esta solução é, no entanto, uma tarefa muito difícil. Tem-se um número muito grande de variáveis e restrições, cuja natureza é altamente não linear. Em resumo, na forma como foi apresentado, o problema dificilmente pode ser tratado adequadamente por alguma técnica de programação matemática.

Uma nova estratégia deve ser desenvolvida, tomando por base o projeto convencional de estruturas hiperestáticas.

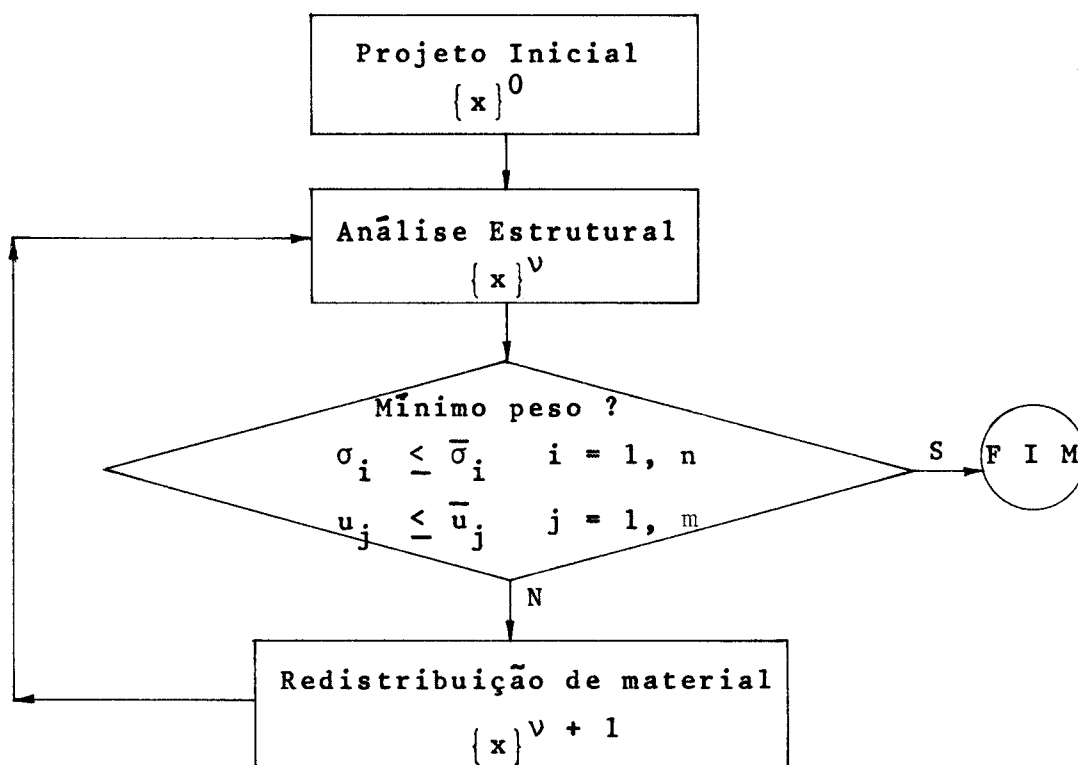


Figura 4

O projeto estrutural esquematizado na Fig.(4) é um procedimento de natureza iterativa.

Tradicionalmente utiliza-se um programa de computador na fase de análise, enquanto a redistribuição de material é baseada em regras empíricas decorrentes da intuição e experiência do projetista.

Da consideração deste processo surgiram duas correntes dentro do campo de otimização de projetos estruturais. Elas se caracterizavam pela tentativa de otimizar a redistribuição de material estrutural, uma automatizando os próprios critérios intuitivos baseados no conhecimento do comportamento estrutural e a outra fazendo uso diretamente de técnicas de programação matemática para, com base em informações colhidas durante a fase de análise, redimensionar a estrutura [12].

5. ATAQUE INDIRETO BASEADO EM CRITÉRIOS DE OTIMALIDADE

Talvez o primeiro e melhor exemplo de critério de otimalidade seja o bem conhecido conceito de projeto totalmente tensionado.

Considere-se um problema em que apenas restrições de tensão sejam impostas. De acordo com esse conceito, o projeto ótimo é aquele no qual a tensão máxima admissível é atingida em todas as barras em pelo menos um ponto em algum dos carregamentos. Assim, após cada análise, a estrutura é redimensionada de acordo com a fórmula da razão de tensão.

$$x^{v+1} = x^v \cdot \max \left(\frac{\sigma_i^v}{\sigma_i} \right)$$

onde v é o número da iteração

Este critério é claramente rigoroso para estruturas isostáticas, conduzindo a um projeto de peso mínimo em apenas uma iteração. No caso de estruturas hiperestáticas, onde a redistribuição de esforços não é constante, a aplicação recursiva da fórmula da razão de tensão conduz a um vértice do espaço de projeto próximo ao ponto ótimo num número de iterações independente do número de variáveis. Este fato, aliado à sua simplicidade, explica a grande popularidade do algoritmo.

Deve-se observar que a aplicação deste método não exige que se explicita a função-objetivo, a qual está consi

derada implicitamente no critério de otimalidade utilizado.

Outro exemplo de critério de otimalidade não matemático pode ser dado para o caso em que apenas um deslocamento nodal seja restrito. O critério atesta que: uma estrutura de peso mínimo para uma específica restrição de deslocamento é aquela em que, para o carregamento dado, a razão entre a energia de deformação e a massa seja a mesma em todos os elementos.

Introduzindo um carregamento virtual unitário na direção e no sentido do deslocamento restrito, pode-se defini-lo explicitamente como:

$$1. u = \sum_{i=1}^n \delta_i \hat{P}_i = \sum_{i=1}^n \delta_i R_i \hat{\delta}_i = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{x_i}$$

onde

- C_i - $(\delta_i R_i \hat{\delta}_i) x_i$
- \hat{P}_i - carregamento virtual na barra i
- $\hat{\delta}_i$ - deslocamentos virtuais na barra i
- δ_i - deslocamentos reais na barra i

Assim, a energia de deformação de um dado elemento é dada por:

$$e_i = \frac{C_i}{x_i}$$

A massa do elemento é dada por:

$$M_i = \rho_i L_i K_1 x_i^{K_2}$$

onde ρ_i é o peso específico do material.

Então, segundo o critério deve-se ter:

$$\epsilon = \frac{e_i}{M_i} = \text{constante}$$

$$\epsilon = \frac{C_i}{\rho_i L_i k_i x_i^{(k_2+1)}}$$

Pode-se, então, obter a fórmula de redimensionamento

$$x_i = \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{C_i}{\rho_i L_i k_i} \right]^{(\frac{1}{k_2+1})} \quad (1)$$

O valor de ϵ pode ser obtido por substituição

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{C_i}{x_i} \right) = \sum_{i=1}^n C_i \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{C_i}{\rho_i L_i k_i} \right]^{-\left(\frac{1}{k_2+1}\right)} \\ \bar{u} &= \epsilon^{\left(\frac{1}{k_2+1}\right)} \sum_{i=1}^n C_i^{\left(\frac{k_2}{k_2+1}\right)} \left[\frac{1}{\rho_i L_i k_i} \right]^{-\left(\frac{1}{k_2+1}\right)} \\ (\epsilon)^{\left(\frac{1}{k_2+1}\right)} &= \bar{u} \cdot \left[\sum_{i=1}^n (C_i)^{\left(\frac{k_2}{k_2+1}\right)} \left[\frac{1}{\rho_i L_i k_i} \right]^{-\left(\frac{1}{k_2+1}\right)} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

No caso de estruturas hiperestáticas, os coeficientes C_i não são constantes e as fórmulas devem ser aplicadas iterativamente. Deve-se notar que a energia de deforma-

ção de um elemento não é, necessariamente, uma quantidade positiva, o que leva à clássica subdivisão das variáveis em um grupo ativo e outro inativo, no sentido de que, para algumas variáveis ditas inativas, o limite inferior (\underline{x}_i) deverá ser adotado.

O processo descrito acima, combinado com o algoritmo da razão de tensão, dá origem a uma estratégia muito eficiente para estruturas com restrições de tensão, limites das variáveis, e uma restrição de deslocamento nodal. Basta utilizar as fórmulas (1) e (2) para as variáveis ativas. Para as variáveis passivas adotar o limite

$$x_i = \max \left\{ \underline{x}_i, x_i^* \right\}$$

onde: $(x_i^*)^{v+1} = (x_i^v)^v \cdot \left(\frac{\sigma_i}{\bar{\sigma}_i} \right)$

Considera-se inicialmente que todas as variáveis são ativas, construindo-se os conjuntos ativo e inativo durante o próprio processo iterativo.

Evidentemente, a aplicação dos critérios de otimalidade apresentados restringe-se a problemas bastante particulares. Além disso, a falta de uma base matemática em otimização) consistente impede que se saiba o quanto os projetos obtidos se distanciam do ponto ótimo. A solução para este problema foi a introdução de critérios de otimalidade baseados em conceitos de programação matemática.

Seja o problema onde existe apenas uma restrição de deslocamento nodal:

$$\text{minimizar } f(x) = \sum_{i=1}^n \rho_i L_i k_1 x_i^{k_2}$$

sujeito a

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{x_i}$$

$$0 < \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i$$

Pode-se construir a função lagrangeana para este problema

$$LG = f(\mathbf{x}) + \lambda(u(\mathbf{x}) - \bar{u})$$

$$LG = \sum_{i=1}^n \rho_i^{L_i k_1} x_i^{k_2} + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \frac{C_i}{x_i} - \bar{u} \right)$$

O ponto estacionário da lagrangeana satisfaz as condições de otimalidade de Kuhn-Tucker.

$$\frac{\partial LG}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$\rho_i^{L_i k_1} k_2 x_i^{(k_2-1)} - \lambda \frac{C_i}{x_i^2} = 0$$

$$\frac{\lambda C_i}{x_i^2} = \rho_i^{L_i k_1} k_2 x_i^{(k_2-1)}$$

Pode-se, então, encontrar a fórmula de redimensionamento

$$x_i = \left[\lambda \frac{C_i}{\rho_i^{L_i k_1} k_2} \right]^{\left(\frac{1}{k_2+1}\right)} \quad (3)$$

O valor do multiplicador λ pode ser encontrado por substituição:

$$\bar{u} = \lambda^{-\left(\frac{1}{k_2+1}\right)} \sum_{i=1}^n C_i^{\left(\frac{k_2}{k_2+1}\right)} \frac{1}{\rho_i^L k_2 k_1}^{-\left(\frac{1}{k_2+1}\right)}$$

$$\lambda^{-\left(\frac{1}{k_2+1}\right)} = \bar{u} \left[\sum_{i=1}^n C_i^{\left(\frac{k_2}{k_2+1}\right)} \left[\frac{1}{\rho_i^L k_2 k_1} \right]^{-\left(\frac{1}{k_2+1}\right)} \right]^{-1} \quad (4)$$

Como ilustração, pode-se comparar as fórmulas (1), (2), (3) e (4) e observar que são idênticas ($\lambda = \frac{1}{k_2 \epsilon}$).

Desta forma, a fim de viabilizar o tratamento de problemas mais gerais, deve-se utilizar as próprias condições de Kuhn-Tucker como critério de otimalidade.

5.1 - Critério de Otimalidade Matemático

Um fato muito importante, que deve ser ressaltado, é a maneira como o "PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS" foi utilizado para gerar expressões que exprimem explicitamente os deslocamentos nodais, em termos das variáveis de projeto.

Introduzindo um carregamento virtual na direção e no sentido do deslocamento restrito, pode-se defini-lo explicitamente como:

$$\tilde{u}_{j\ell}(x) = \sum_{i=1}^n \delta_{i\ell} \hat{P}_{ij} = \sum_{i=1}^n \delta_{i\ell} R_i \hat{\delta}_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{C_{ij\ell}}{x_i}$$

As aproximações (denotadas por $\tilde{u}_{j\ell}$) assim obtidas são exatas no ponto, ou seja:

$$\tilde{u}_{j\ell}(x^0) = u_{j\ell}(x^0)$$

Quanto à primeira derivada tem-se, (para o grau de liberdade j , carregamento ℓ):

$$u = u^T R \hat{u} = u^T \hat{F} = F^T \hat{u}$$

onde:

- u - deslocamento devido ao carregamento real
- \hat{u} - deslocamento devido ao carregamento virtual
- F - carregamento real
- \hat{F} - carregamento virtual
- R - matriz de rigidez da estrutura

Derivando:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{\partial u^T}{\partial x_i}\right) R \cdot u + u^T \left(\frac{\partial R}{\partial x_i}\right) \hat{u} + u^T \cdot R \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}\right)$$

Como $R\hat{u}$ e Ru são independentes das variáveis de projeto

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + u^T \left(\frac{\partial R}{\partial x_i}\right) \hat{u} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = -u^T \left(\frac{\partial R}{\partial x_i}\right) \hat{u}$$

usando a expressão de R em termos das matrizes de rigidez dos elementos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = -\delta_i^T \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_i}\right) \hat{\delta}_i$$

supondo que as matrizes R_i sejam lineares nas variáveis de projeto

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = -\frac{1}{x_i} (\delta_i^T R_i \hat{\delta}_i)$$

no ponto x^0

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = -\frac{C_i}{(x_i^0)^2} = \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right)$$

que coincide com a derivada aproximada.

No caso particular deste trabalho, o exposto é válido para as vigas, onde a Matriz de Rigidez é linear nas variáveis (x^0) (foi desprezada a deformação axial das vigas). Para os pilares, no entanto, as matrizes dependem também da área da seção transversal dos elementos.

$$s = k_1 x^{k_2}$$

A Matriz de Rigidez é dada genericamente por:

$$[R_i] = [R^1] x_i + [R^2] k_1 x_i^{k_2}$$

derivando

$$\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_i}\right) = R^1 + R^2 k_2 k_1 x_i^{(k_2-1)} \quad (5)$$

quando se assume que:

$$\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{x_i} R_i$$

tem-se:

$$\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{x_i} R_i = R^1 + R^2 k_1 x_i^{(k_2-1)} \quad (6)$$

Portanto, quando o elemento for um pilar, a primeira derivada não é exata no ponto. A diferença pode ser avaliada pela comparação das expressões (5) e (6) ou seja: quanto maior a importância da rigidez axial $[R^2]$ em relação à rigidez de flexão $[R^1]$ maior será o erro.

Lembrando que as tensões nas barras são combinações lineares dos deslocamentos de extremidade

$$\tilde{\sigma}_{k\ell}(x) = t_{k\ell} u_\ell$$

Pode-se utilizar o vetor $t_{k\ell}$ como carregamento virtual, obtendo-se de modo análogo aproximações também para as tensões

$$\tilde{\sigma}_{k\ell}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{d_{ik\ell}}{x_i}$$

Quando todas as restrições são substituídas por suas aproximações explícitas tem-se:

$$\text{minimizar } f(x) = \sum_i^n L_i k_1 x_i^{k_2}$$

sujeito a:

$$\sum_i^n \frac{c_{ijl}}{x_i} \leq \bar{u}_j$$

$$\sum_i^n \frac{d_{ikl}}{x_i} \leq \bar{\sigma}_k$$

$$0 < \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i$$

ou, simplificando a notação:

Problema (A)

$$\text{minimizar } f(x) = \sum_{i=1}^n L_i k_1 x_i^{k_2}$$

sujeito a

$$M_j = \sum_i \frac{E_{ij}}{x_i} - \bar{M}_j \leq 0 \quad (7)$$

$$0 < \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i$$

Onde M_j representa todas as flexibilidades restritas. Ou seja, os deslocamentos nodais e as restrições de tensão potencialmente críticas.

As condições de Kuhn-Tucker para o problema aproximado (A) são:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \sum_j \lambda_j \left(\frac{\partial M_j}{\partial x_i}\right) - t_i + w_i = 0$$

$$t_i(\underline{x}_i - x_i) = 0$$

e

$$w_i(x_i - \bar{x}_i) = 0$$

onde:

$\lambda_j > 0$ - multiplicadores de lagrange associados às restrições.

Utilizando as expressões explícitas para obter os gradientes das restrições e definindo três classes de variáveis:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \{ i : x_i = \underline{x}_i \} \\
c_2 &= \{ i : \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \} \\
c_3 &= \{ i : x_i = \bar{x}_i \}
\end{aligned}$$

correspondendo respectivamente às variáveis que atingiram seu limite inferior, àquelas que estão entre os limites e àquelas que atingiram o limite superior. Esta divisão é análoga à clássica distinção entre variáveis ativas e inativas. Com estas observações obtêm-se o critério de otimalidade:

$$\frac{1}{L_i k_2 k_1 x_i^{k_2+1}} \left[\sum_j \lambda_j E_{ji} \right] \begin{cases} \leq 1 & i \in c_1 \\ = 1 & i \in c_2 \\ \geq 1 & i \in c_3 \end{cases}$$

O critério acima e as restrições do problema (7) determinam um sistema de equações que deve ser resolvido para as variáveis $\{x\}$ e para os multiplicadores $\{\lambda\}$. Como as equações são não-lineares, os esquemas de solução são iterativos em sua natureza.

Qualquer que seja a técnica utilizada para resolver o sistema de equações não-lineares, as dificuldades básicas encontradas serão as mesmas. Estas dificuldades estão associadas à necessidade de identificar variáveis e restrições ativas, bem como adotar valores iniciais.

Como consequência, os processos são sujeitos a instabilidade, decorrente de variações bruscas nos conjuntos de restrições e variáveis ativas (normal em estruturas com alto grau de hiperestaticidade), bem como convergência lenta decorrente da adoção de valores iniciais equivocados [8].

No entanto, provido de esquemas auxiliares para identificação de restrições e variáveis ativas, além de valores iniciais convenientes, o enfoque indireto por critério de otimalidade generalizado conduz a um mínimo local próximo ao ponto ótimo com um número de iterações independente do número de variáveis de projeto. Neste caso, as propriedades de convergência estão ligadas, na verdade, ao número de restrições efetivamente ativas no ponto ótimo.

5.2 - O Problema Dual

Não é difícil perceber que as instabilidades a que o processo está sujeito estão intrinsecamente ligadas ao fato de se estar adotando uma estratégia de solução essencialmente dual a um problema formulado em sua forma primal.

Assim, o problema (A) é chamado problema primal por estar expresso em termos das variáveis primais $\{x\}_i$. Como os coeficientes E_{ij} não são sempre positivos o problema não é necessariamente convexo, não sendo possível utilizar-se a formulação dual.

Entretanto, se for efetuada a mudança de variáveis:

$$a_i = \frac{1}{x_i}$$

as restrições tornam-se lineares, o problema obtido é estritamente convexo. Nesse caso, sabe-se que um ótimo local é também um ótimo global. Além disso, os multiplicadores de lagrange associados às restrições assumem o significado de variáveis duais, onde um problema equivalente pode ser formulado. Sob algumas condições não restritivas, esse problema dual pode ser reduzido à maximização do funcional lagrangeano, com a simples restrição de não negatividade das variáveis duais [6].

6. ATAQUE DIRETO BASEADO EM PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Seja o problema formulado da seguinte maneira:

- Problema \textcircled{R} ou Real

$$\text{minimizar } f(x) = \sum_i^n L_i k_1 x_i^{k_2}$$

sujeito a:

$$u_{j\ell}(x) \leq \bar{u}_j \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, n_f \\ \ell = 1, \dots, n_c \end{array}$$

$$\sigma_{k\ell}(x) \leq \bar{\sigma}_k \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, n \\ \ell = 1, \dots, n_c \end{array}$$

$$0 < \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i = 1, \dots, n$$

onde:

- L_i - comprimento da barra i
- n - número de variáveis de projeto
- n_f - número de deslocamentos nodais restritos
- n_c - número de carregamentos

A função-objetivo é uma função não-linear explicita em termos das variáveis de projeto. As restrições, além de não-lineares, são funções implícitas das variáveis, o que significa que sua avaliação só pode ser feita numericamente, requerendo para isso uma análise estrutural completa.

Uma grande variedade de técnicas de programação matemática pode ser proposta para resolver o problema. As primeiras tentativas baseavam-se no ataque do problema (R) em sua forma original. Elas ficaram conhecidas como técnicas primais. São caracterizadas por um processo iterativo que produz uma sequência de pontos viáveis, correspondendo a valores decrescentes da função-objetivo. Pode-se, portanto, interromper o processo antes que o ponto ótimo seja atingido, obtendo ainda um projeto factível e melhor que o original.

A grande maioria das estratégias primais desenvolvidas necessita, em alguma etapa, do cálculo do gradiente da função-objetivo e das restrições:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad \frac{\partial \sigma_{k\ell}}{\partial x_i} \quad \frac{\partial u_\ell}{\partial x_i}$$

Lembrando que as tensões nas barras são combinações lineares de seus deslocamentos de extremidade, tem-se:

$$\sigma_{k\ell} = t_k u_\ell$$

onde:

t_k - é o vetor constante

$$\left(\frac{\partial \sigma_{k\ell}}{\partial x_i}\right) = t_k \left(\frac{\partial u_\ell}{\partial x_i}\right)_k$$

portanto, basta avaliar

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_k$$

Sejam as equações de equilíbrio

$$R \cdot u = F$$

diferenciando numa vizinhança de X_i^c , tem-se:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x_i}\right) u + R \frac{\partial u}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$$

como F é constante

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = -R^{-1} \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_i} \right\} u$$

Esta técnica é conhecida como "método dos pseudo-carregamentos".

Observa-se que a avaliação dos gradientes requer a aplicação de $n \times n_c$ pseudocarregamentos, em adição aos n_c carregamentos reais. Onde n é igual ao número de variáveis do problema.

Os métodos baseados em programação matemática apresentam a grande vantagem de serem gerais, com propriedades de convergência que podem ser previstas e frequentemente garantidas. Entretanto, o grau de dificuldade aumenta à medida que cresce o número de variáveis de projeto. Assim, não só o custo da análise estrutural aumenta, quando do tratamento de estruturas complexas, como também o número de análises necessárias.

6.1 - Aproximações a Solução para Construir Estratêgias Pri-
mais Eficientes. 7

A maioria dos processo que recorre a estratêgias de solução primais sofre de um ou mais dos seguintes excessos:

- a) muitas variáveis de projeto independentes adotadas;
- b) muitas restrições consideradas no processo de minimização; e
- c) muitas análises estruturais detalhadas desenvolvidas.

O termo "muitas" deve ser interpretado como mais do que o necessário para obter um projeto próximo; em termos práticos, ao projeto ótimo.

Normalmente não é desejável, nem necessário, que cada elemento (barra) tenha sua própria variável de projeto independente. Uma técnica interessante, que possibilita impor restrições de ordem prática, como simetria, é a ligação de vários elementos a uma única variável de projeto. Assim, pode-se reduzir a dimensão do espaço de solução e consequentemente a própria dimensão do problema.

A redução do número de restrições de comportamento efetivamente consideradas ou filtragem de restrições consiste em efetuar testes que permitam prever quais as restrições potencialmente críticas, retendo apenas estas no posterior processo de minimização.

A diminuição do número total de análises estruturais desenvolvidas pode ser feita de várias formas. A mais importante, e a única que será discutida aqui, baseia-se na construção de aproximações explícitas para as restrições que passaram pela filtragem. A idéia é que as aproximações explícitas sejam utilizadas durante uma certa fase do processo iterativo, no lugar das análises estruturais detalhadas.

Um modo de encontrar aproximações explícitas é utilizar séries de Taylor de primeira ordem, construídas no ponto atual de projeto x^0 , onde a estrutura tenha sido analisada.

$$\tilde{M}_j = M_j(x^0) + \sum_i \left(\frac{\partial M_j}{\partial x_i} \right)^0 (x_i - x_i^0)$$

Foi observado, no entanto, que devido à alta não linearidade das restrições de comportamento (σ , u) no espaço das variáveis de projeto, estas aproximações lineares não forneciam bons resultados. É mais interessante trabalhar num espaço onde as restrições sejam tão lineares quanto possível. Este espaço é, na maioria das vezes, o do inverso das variáveis de projeto.

$$a_i = \frac{1}{x_i}$$

A conveniência desta troca de variáveis pode ser melhor entendida, lembrando-se que com a utilização do princípio dos trabalhos virtuais, aproximações explícitas eram obtidas, na forma

$$\tilde{M}_j(x) = \sum_i \frac{E_{ij}}{x_i} \quad (8)$$

que, introduzindo a mudança de variáveis, torna-se linear

$$\tilde{M}_j(a) = \sum_i E_{ij} a_i \quad (9)$$

Seja a expansão por série de Taylor de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\tilde{M}_j(a) &= M_j(a^0) + \sum_i \left(\frac{\partial M_j}{\partial a_i}\right)^0 (a_i - a_i^0) \\ \tilde{M}_j(a) &= M_j(a^0) - \sum_i \left(\frac{\partial M_j}{\partial a_i}\right)^0 a_i^0 + \sum_i \left(\frac{\partial M_j}{\partial a_i}\right)^0 a_i\end{aligned}\quad (10)$$

Utilizando (8)

$$\left(\frac{\partial M_j}{\partial x_i}\right)^0 = -\frac{E_{ij}^0}{x_i^2}$$

ou no espaço inverso

$$\left(\frac{\partial M_j}{\partial a_i}\right)^0 = E_{ij}^0$$

substituindo em (10)

$$\tilde{M}_j(a) = M_j(a^0) - \sum_i E_{ij}^0 a_i^0 + \sum_i E_{ij}^0 a_i\quad (11)$$

A aproximação (9) é exata no ponto a^0

$$M_j(a^0) = \tilde{M}_j(a^0) = \sum_i E_{ij}^0 a_i^0$$

substituindo em (11) e lembrando que

$$E_{ij}^0 = \left(\frac{\partial M_j}{\partial a_i}\right)^0 = \left(\frac{\partial M_j}{\partial x_i}\right)^0 \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_i}\right)^0$$

$$E_{ij}^0 = \left(\frac{\partial M_j}{\partial x_i}\right)^0 \left[-\frac{1}{(a_i^0)^2} \right]$$

$$E_{ij}^0 = - \left(\frac{\partial M_j}{\partial x_i} \right)^0 \cdot (x_i^0)^2$$

Obtém-se no ponto x^0

$$\bar{M}_j(a) = \sum_i \left[- \left(\frac{\partial M_j}{\partial x_i} \right) \cdot x_i^2 \right] a_i$$

E as aproximações podem ser construídas a partir dos gradientes avaliados pelo método dos pseudocarregamentos.

Assim, com os conceitos introduzidos, o problema a resolver em cada iteração é:

Problema (L)

minimizar $f(x) = \sum_i \ell_i k_1 a_i^{-k_2}$

sujeito a

$$M_j(a) = \sum_i E_{ij} a_i \leq \bar{M}_j$$

$$0 < \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i$$

Os limites das variáveis são obtidos a partir dos próprio limites originais, mas podem também ser modificados para incluir limites móveis, os quais restringem a mudança das variáveis a uma região onde as restrições linearizadas são precisas o suficiente para guiar o processo de redimensionamento.

O problema explícito (L) é uma forma linearizada do problema original (R) construída em termos do inverso das variáveis de projeto independentes e considerando apenas as restrições M_j potencialmente ativas. A função-objetivo continua não-linear e explícita em termos das variáveis.

7. COMPARAÇÃO ENTRE OS ENFOQUES

Neste ponto, todos os ingredientes necessários à tomada de decisão relativa à estratégia que será adotada para resolver o problema proposto foram apresentados.

O enfoque direto baseia-se na aplicação de técnicas de programação não-linear inicialmente ao problema original e a seguir ao problema linearizado, graças à conveniente mudança de variáveis.

O problema linearizado a ser resolvido encontra-se em sua forma primal. O grau de dificuldade sendo proporcional ao número de variáveis do problema. Ou seja, o problema primal é resolvido num espaço de dimensão igual ao número de variáveis de projeto independentes.

As aproximações explícitas para as restrições, utilizadas para reduzir o número de análises da estrutura, são construídas a partir dos gradientes. A avaliação destes, por sua vez, requer a aplicação de um número adicional de pseudocarregamentos igual ao número de variáveis independentes multiplicado pelo número de carregamentos reais.

O enfoque indireto baseia-se, inicialmente, em critérios de otimalidade não-matemáticos, fundamentados no conhecimento do comportamento estrutural e aplicáveis a poucos problemas. Em seu processo evolutivo, deve-se destacar a utilização de critérios de otimalidade generalizados, baseados numa formulação lagrangeana e a mudança de variáveis para a adoção definitiva da formulação dual.

O problema dual é resolvido num espaço de dimensão igual ao das restrições ativas. Neste espaço, o grau de dificuldade esperado é proporcional ao número destas.

Os gradientes das restrições são obtidos diretamente das aproximações explícitas construídas com auxílio do princípio dos trabalhos virtuais; o número de carregamentos adicionais sendo igual ao número de restrições ativas multiplicado pelo número de carregamentos reais.

Não existe mais sentido em rotular os métodos como direto e indireto, dada a utilização generalizada de conceitos de programação matemática.

Assim, cabe agora decidir se será adotada uma estratégia primal ou dual para solução do problema proposto.

O projeto de pórticos planos constituintes de estruturas de edifícios altos sujeitos a cargas laterais e gravitacionais é tradicionalmente governado por requisitos de rigidez. Ou seja: as dimensões finais dos elementos são ditadas pela necessidade de evitar deslocamentos laterais excessivos. Assim é de se esperar que a maior parte dos elementos não atinja, em nenhum ponto, a tensão máxima admissível. Lembrando que para impor os requisitos de rigidez basta restringir o deslocamento horizontal da última laje, é natural que o número de restrições ativas no ponto ótimo seja significativamente menor que o número de variáveis de projeto independentes.

Assim sendo, torna-se evidente que a adoção da estratégia dual, neste caso, será vantajosa. A comprovação do acerto desta decisão dependerá dos resultados obtidos, na previsão do comportamento estrutural.

8. A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA APROXIMADO UTILIZANDO UMA ESTRATÉGIA DUAL

Quando as restrições definidas no problema original (R) são substituídas por suas aproximações explícitas obtém-se, de forma geral, para um dado carregamento, o seguinte problema aproximado, que deve ser resolvido a cada iteração ou análise da estrutura:

Problema (A)

$$\text{minimizar } f(x) = \sum_i^n L_i k_1 x_i^{k_2}$$

sujeito a

$$M_j(x) = \sum_i \frac{E_{ij}}{x_i} \leq \bar{M}_j$$

$$0 < \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i$$

A formulação apresentada a seguir, bem como o algoritmo para sua implantação em funções objetivo lineares nas variáveis de projeto, pode ser encontrada em [8]:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n k_i x_i$$

Esta formulação foi adaptada para englobar uma função-objetivo do tipo da do problema (A) .

$$f(x) = \sum_i^n L_i k_1 x_i^{k_2}$$

O problema primal (A) não é necessariamente convexo, pois não é possível garantir a não-negatividade dos coeficientes E_{ij} .

Entretanto, se for efetuada a mudança de variáveis

$$a_i = \frac{1}{x_i}$$

todas as restrições aproximadas tornam-se lineares e o problema obtido é convexo.

A mudança de variáveis não será introduzida explicitamente e a solução do problema será expressa em termos das variáveis duais que são multiplicadores de lagrange associados às restrições.

Assim, o problema dual é simplesmente:

maximizar $\gamma(\lambda)$

sujeito a

$$\lambda \geq 0$$

onde $\gamma(\lambda)$ é dado por

$$\gamma(\lambda) = \text{MIN}_{x_i} \left\{ \sum_i L_i k_1 x_i^{k_2} - \sum_j \lambda_j \left[\bar{M}_j - \sum_i \frac{E_{ij}}{x_i} \right] \right\} \quad (12)$$

para

$$0 < \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i$$

Ou, mais simplesmente,

$$\gamma(\lambda) = \sum_i L_i k_1 \left[x_i(\lambda) \right]^{k_2} - \sum_j \lambda_j \left[\bar{M}_j - M_j(x_i(\lambda)) \right] \quad (13)$$

Com a condição adicional, para minimizar o Lagrangeano em relação a X:

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \right) = 0$$

$$L_i k_1 k_2 \left[x_i(\lambda) \right]^{(k_2-1)} - \sum_j \lambda_j \frac{E_{ij}}{\left[x_i(\lambda) \right]^2} = 0$$

Pode-se então definir

$$\beta_i(\lambda) = \frac{1}{L_i k_1 k_2} \cdot \sum_j \lambda_j E_{ij} \quad (14)$$

A equação (14) permite exprimir as variáveis primais em termos das duais, usando as quantidades β .

$$x_i = \left[\beta_i \right]^{\left(\frac{1}{k_2+1} \right)} \quad \text{se}$$

$$\left[\underline{x}_i \right]^{(k_2+1)} \leq \beta_i \leq \left[\bar{x}_i \right]^{(k_2+1)}$$

$$x_i = \underline{x}_i \quad \text{se} \quad \beta_i < \left[\underline{x}_i \right]^{(k_2+1)} \quad (15)$$

$$x_i = \bar{x}_i \quad \text{se} \quad \beta_i > \left[\bar{x}_i \right]^{(k_2+1)}$$

É necessário ainda exprimir as restrições do problema primal em termos das variáveis duais.

$$M_j(x_i(\lambda)) = \sum_i \frac{E_{ij}}{x_i(\lambda)} \quad (16)$$

O gradiente da função lagrangeana

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \lambda_j} \right)$$

pode ser obtido como se segue:

$$\sum_i^n L_i k_1 k_2 [x_i(\lambda)]^{(k_2-1)} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j} \right) + \sum_k^m \lambda_k \left(\frac{\partial M_k}{\partial \lambda_j} \right) + M_j - \bar{M}_j \quad (17)$$

Usando (14) e (15)

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j} \right) = \frac{E_{ij}}{(k_2+1) \cdot L_i k_1 k_2 \lambda_i^{(k_2)}} \quad i = 1, \dots, n \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j} \right) = 0 \quad i = \bar{n} + 1, \dots, n \quad (19)$$

onde \bar{n} - número de variáveis ativas, então:

$$\sum_i^n L_i k_1 k_2 x_i(\lambda)^{(k_2-1)} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j} \right) = \sum_i^{\bar{n}} \frac{1}{(k_2+1)} \frac{E_{ij}}{x_i} \quad (20)$$

Usando (16)

$$\left(\frac{\partial M_k}{\partial \lambda_j} \right) = - \sum_i^n \frac{E_{ik}}{x_i^2} \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j} \right)$$

$$\left(\frac{\partial M_k}{\partial \lambda_j}\right) = - \frac{\bar{n}}{\sum_i} \frac{E_{ik}}{x_i^{(2)}} \frac{E_{ij}}{(k_2+1)L_{i k_1 k_2} x_i^{(k_2)}}$$

e usando (14)

$$\sum_k^m \lambda_k E_{ik} = x_i^{(k_2+1)} L_{i k_1 k_2}$$

$$\sum_k^m \lambda_k = \frac{\bar{n}}{\sum_i} \frac{x_i^{(k_2+1)} L_{i k_1 k_2}}{E_{ik}}$$

tem-se

$$\sum_k^m \lambda_k \left(\frac{\partial M_k}{\partial \lambda_j}\right) = \frac{\bar{n}}{\sum_i} \frac{x_i^{(k_2+1)} L_{i k_1 k_2}}{E_{ik}} \left(- \frac{E_{ik}}{x_i^2}\right) \frac{E_{ij}}{(k_2+1)L_{i k_1 k_2} x_i^{k_2}}$$

$$\sum_k^m \lambda_k \left(\frac{\partial M_k}{\partial \lambda_j}\right) = - \frac{\bar{n}}{\sum_i} \frac{1}{(k_2+1)} \frac{E_{ij}}{x_i} \quad (21)$$

Substituindo (20) e (21) em (17)

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \lambda_j}\right) = M_j - \bar{M}_j \quad (22)$$

Falta ainda calcular

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} (M_j - \bar{M}_j) = \left(\frac{\partial M_j}{\partial \lambda_k}\right)$$

$$\left(\frac{\partial M_j}{\partial \lambda_k}\right) = - \frac{1}{(k_2+1)} \frac{\bar{n}}{\sum_i} \frac{E_{ik} E_{ij}}{L_{i k_1 k_2} x_i^{(k_2+2)}}$$

Assim

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = - \sum_i^{\bar{n}} \frac{1}{(k_2+1)} \frac{E_{ik} E_{ij}}{L_i^{k_1 k_2} x_i^{k_2-2}} \quad (23)$$

todos os ingredientes necessários à solução do problema dual foram avaliados.

Observe-se que nada impede que cada variável independente tenha seu próprio conjunto de coeficientes:

$$\{K_1, K_2, K_3, K_4\}_i$$

8.1 - Algoritmo de Otimização

Vários métodos de maximização podem ser empregados na resolução do problema dual. Por exemplo: um algoritmo de primeira ordem baseado no método de Rosen do gradiente projetado, ou um algoritmo de segunda ordem baseado no método de Newton generalizado.

Foi escolhido um algoritmo de segunda ordem, devido à disponibilidade das derivadas necessárias (23).

1º Passo

Selecione um ponto inicial (ou valores dos multiplicadores de lagrange $\{\lambda\}$ associados às restrições) admissível. De tal modo que:

$$\bar{\lambda}_j^0 > 0 \quad j = 1, \dots, \bar{m} \quad - \text{restrições ativas}$$

$$\bar{\lambda}_j^0 = 0 \quad j = \bar{m}+1, \dots, m \quad - \text{restrições inativas}$$

2º Passo

Seja o ponto λ^v obtido na iteração v . Calcule:

$$x_i(\lambda) \text{ por (14) e (15)}$$

$M_j(\lambda)$ por (16)

Determine:

$$\bar{g}^v = M_j^v - \bar{M}_j \quad j = 1, \dots, \bar{m}$$

Se:

$$|\bar{g}^v| < \epsilon \quad \epsilon \rightarrow \text{tolerância}$$

vá para o 5º passo

de outra forma, calcule:

$$\bar{z}^v = (\bar{F}^v)^{-1} \bar{g}^v \quad (24)$$

onde os elementos de \bar{F}^v são obtidos através de (23).

3º Passo

Calcule o passo ótimo na direção \bar{z}^v pela busca linear no espaço dual de dimensão \bar{m} .

$$\gamma(\bar{\lambda}^v + \tau \bar{z}^v) = \max_{\tau \in S^v} \{ \gamma(\bar{\lambda}^v + \tau \bar{z}^v) \}$$

onde:

$$S^v = \{ \tau > 0 : (\bar{\lambda}^v + \tau \bar{z}^v) \geq 0 \}$$

4º Passo

Calcule:

$$\lambda^{v+1} = \lambda^v + \tau \bar{z}^v \quad \text{se} \quad \bar{\lambda}_j^{v+1} \leq 0$$

Retire esta restrição do conjunto de restrições ativas fazendo

$$\bar{\lambda}_j^{v+1} = 0$$

$$\bar{m}^{v+1} = \bar{m}^v - 1$$

Vã para o 2º passo

5º Passo

Calcule:

$$g_j^v = M_j^v - \bar{M}_j \quad j = \bar{m} + 1, \dots, m$$

Se

$$\max \{g_j^v\} < 0$$

Então, $\bar{\lambda}^v$ é o máximo global do problema dual.

De outra forma, vã para o 2º passo com:

$$\bar{m}^{v+1} = \bar{m}^v + 1$$

Incorpora-se em $\bar{\lambda}^{v+1}$ a variável dual que tenha o maior componente positivo em g_j^v .

Pode-se observar que a inclusão de mais carregamentos não torna o problema qualitativamente mais difícil, provocando apenas um acréscimo no número de variáveis.

8.2 - Algoritmo para Busca Uni-Dimensional

A dificuldade da busca uni-dimensional ao longo de uma determinada direção advém do fato de o espaço dual estar subdividido em várias regiões (domínios de definição) onde a função-objetivo toma formas diferentes.

Ao cruzar um plano de descontinuidade, o número de variáveis primais "livres" ($\underline{x}_i < x_i < \bar{x}_i$), \bar{n} se modifica, e a segunda derivada (23) salta para outros valores. Assim, deve-se evitar que o τ determinado provoque o cruza

mento de um plano de descontinuidade.

A busca uni-dimensional pode ser representada indiferentemente pela maximização do lagrangeano na direção escolhida.

$$\max_{\tau} \gamma(\tau) = \sum_i L_i k_1 [x_i(\tau)]^{k_2} + \sum_j \lambda_j(\tau) [M_j(\tau) - \bar{M}_j] \quad (25)$$

Ou pelo problema de encontrar o ponto que anula a primeira derivada na direção de \bar{z}^v .

$$\gamma'(\tau) = (\bar{z}^v)^T \cdot \nabla \gamma(\tau) = 0$$

$$\nabla \gamma(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma(\tau)}{\partial \lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \gamma(\tau)}{\partial \lambda_m} \end{pmatrix}$$

Comparando as expressões (25) e (13) deduz-se que dado (22)

$$\left(\frac{\partial \gamma(\tau)}{\partial \lambda_j} \right) = M_j - \bar{M}_j$$

Tem-se

$$\gamma'(\tau) = \sum_j^{\bar{m}} \bar{z}_j^v \cdot [M_j(\tau) - \bar{M}_j] = 0$$

Lembrando que:

$$M_j(\tau) = \left[\begin{array}{c} \bar{n} \\ \sum_i \frac{E_{ij}}{x_i(\tau)} \end{array} \right]$$

Encontra-se por substituição

$$\bar{m} \sum_j z_j^v \left[\frac{\bar{n}}{\sum_i \frac{E_{ij}}{x_i(\tau)}} - \bar{M}_j \right] = 0$$

$$\bar{m} \sum_j z_j^v \frac{\bar{n}}{\sum_i \frac{E_{ij}}{x_i(\tau)}} - \sum_j z_j^v \cdot \bar{M}_j = 0$$

Pode-se formular de maneira mais simples calculando as quantidades

$$X^v = \sum_j \bar{m} z_j \bar{M}_j$$

$$Y_i^v = \frac{1}{L_i k_1 k_2} \sum_j \bar{m} E_{ij} \lambda_j$$

$$Z_i^v = \frac{1}{L_i k_1 k_2} \sum_j \bar{m} E_{ij} z_j$$

O problema resume-se a encontrar o zero da função

$$\gamma'(\tau) = \sum_i^n \frac{Z_i^{L_i k_1 k_2}}{x_i(\tau)} - X = 0 \quad (26)$$

onde as variáveis de projeto são dadas por

$$x_i^{(k_2+1)} = Y_i + \tau Z_i \quad (27)$$

se $\underline{x}_i^{(k_2+1)} \leq Y_i + \tau Z_i \leq \bar{x}_i^{(k_2+1)}$

De outra forma

$$x_i = \underline{x}_i \quad \text{ou} \quad x_i = \bar{x}_i$$

Este problema pode ser resolvido pelo método de Newton-Raphson, lembrando que a solução deve encontrar-se dentro do intervalo:

$$\underline{\tau} \leq \tau \leq \bar{\tau}$$

Os limites sendo:

$$\underline{\tau} = \max \left\{ \left[\frac{x_i}{z_i} \right]^{(k_2 + 1)} - \frac{y_i}{z_i} \right\} \text{ e } \bar{\tau} = \min \left\{ \left[\frac{x_i}{z_i} \right]^{(k_2 + 1)} - \frac{y_i}{z_i} \right\}$$

$$i = 1, \dots, n$$

No método de Newton-Raphson, a relação de iteração é dada por:

$$\tau^{v+1} = \tau^v - [J]^{-1} G \quad (28)$$

Como τ é unidimensional, a direção de busca é dada por:

$$s = \frac{G}{J}$$

onde

$$G = \gamma'(\tau) \quad \text{e} \quad J = \gamma''(\tau)$$

As derivadas $\gamma''(\tau)$ sendo dadas por

$$\gamma''(\tau) = \frac{\partial \gamma'(\tau)}{\partial x_i} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \tau} \right)$$

$$\gamma''(\tau) = - \sum_i^n \left[\frac{1}{(k_2 + 1)} \right] \frac{z_i^{2L_i k_1 k_2}}{x_i^{(k_2 + 2)}}$$

Como no método de Newton o valor de τ próximo ao ponto ótimo é igual a 1, este valor deve sempre ser tomado como valor inicial, utilizando iterativamente as equações (27) e (28) até que a equação (26) seja satisfeita. O valor de τ deve ainda ser confrontado com os seus limites.

9. PROGRAMA OTPORT

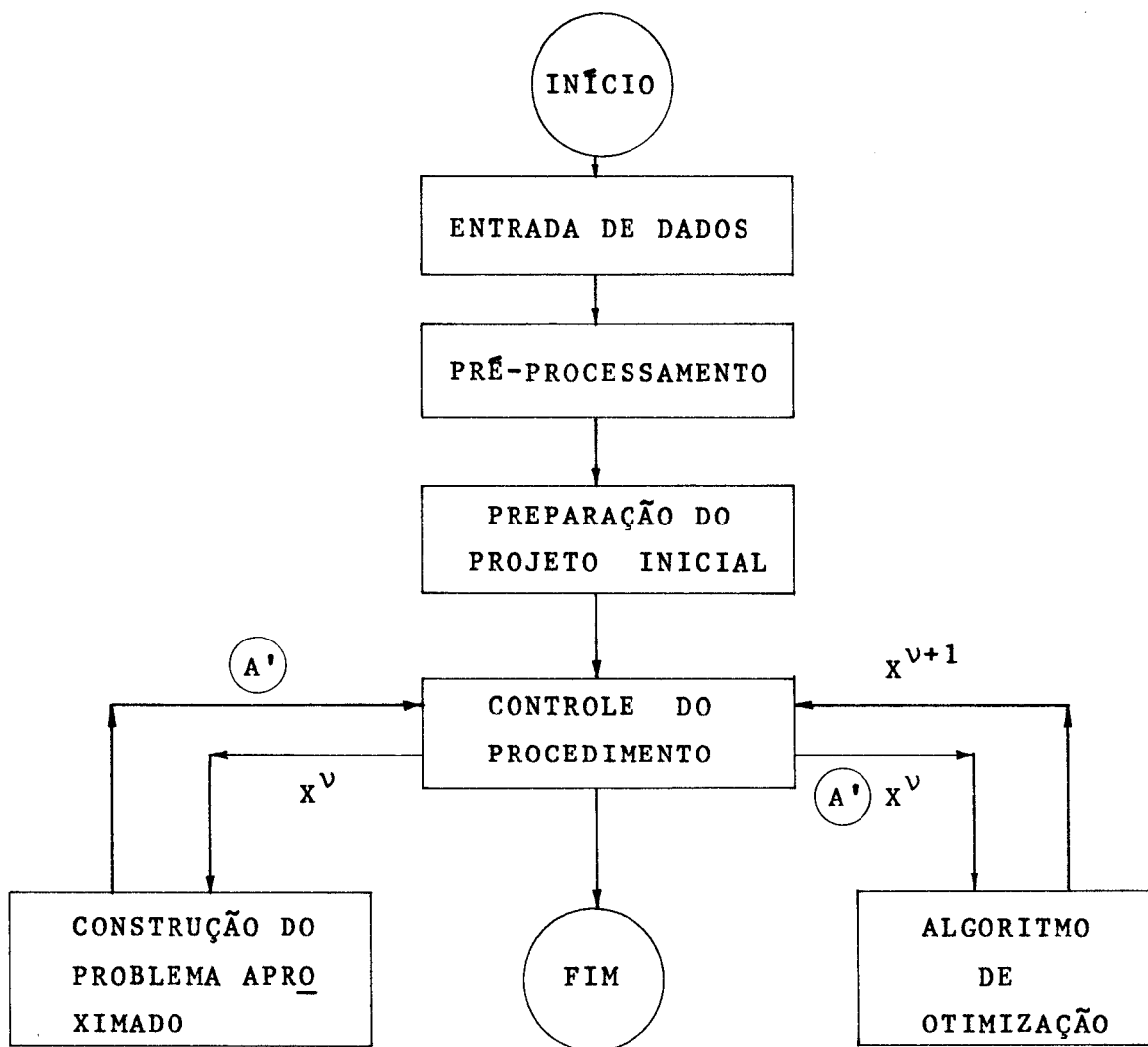


Figura 5

Como consequência das considerações feitas até aqui, foi elaborado um programa para computador, escrito em linguagem FORTRAN-77.

Uma representação esquemática da estrutura do programa OTPORT é mostrada na figura (5).

A arquitetura adotada é a mesma do programa ACCESS 1, apresentada em [7].

O programa OTPORT executa o projeto das estruturas de interesse deste trabalho. Suas principais características serão discutidas a seguir.

9.1 - Entrada de Dados

São os seguintes os dados necessários:

- a) Título do projeto;
- b) informações para controle da execução;
- c) propriedades do material estrutural
 - E - módulo de elasticidade e
 - γ - peso específico;
- d) deslocamento máximo admissível para a última laje;
- e) geometria
 - NA - número de andares;
 - NC - número de colunas;
 - T - comprimento dos tramos das vigas e
 - L - pé direito dos andares;
- f) configuração dos grupos associados e variáveis de projeto independentes.
Esta seção é necessária para impor requisitos práticos como, por exemplo, simetria;
- g) características das variáveis de projeto independentes

Para um dado grupo:

$\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ - coeficientes da seção transversal;

\bar{x}, \underline{x} - limites;

$\bar{\sigma}, \underline{\sigma}$ - tensões admissíveis à compressão e tração e

x_0 - valor inicial; e

h) Carregamentos

Para cada carregamento independente pode existir:

Carga horizontal aplicada ao nível dos andares;

Carga distribuída verticalmente nas vigas e Ambas.

9.2 - Pré-processamento

Basicamente o bloco pré-processador efetua cálculos que devam ser executados somente uma vez durante todo o procedimento, ou seja, cálculos que sejam independentes dos valores numéricos das variáveis de projeto.

a) computa e armazena as matrizes de rigidez dos elementos em relação a um valor unitário das variáveis de projeto;

b) computa e armazena os vetores de carga associados aos carregamentos reais;

c) computa e armazena apontadores e constantes para posterior utilização.

9.3 - Preparação do Projeto Inicial

Este bloco foi previsto como forma de neutralizar os efeitos decorrentes da possível adoção de valores iniciais muito distantes do ponto ótimo.

Funciona com a realização de algumas iterações com o algoritmo da razão de tensão. Assim, após estas iterações espera-se que todos os grupos tenham atingido a tensão admissível em pelo menos um ponto, e o deslocamento horizontal da última viga exceda o admissível. Um projeto com estas características constitui um ótimo ponto de partida para o algoritmo dual de minimização implementado [9].

9.4 - Controle do Procedimento

Este bloco constitui-se na interface entre o bloco que constrói o problema aproximado e o bloco que resolve esse problema. Suas principais funções são:

- a) Promove a análise do projeto atual;
- b) testa critérios de convergência, decidindo pela interrupção ou não do procedimento;
- c) ativa o bloco que constrói o problema aproximado (A), a partir do projeto atual x^v ;
- d) ativa o bloco que resolve o problema aproximado (A), obtendo o novo projeto x^{v+1} ; e
- e) imprime resultados relativos às várias iterações, bem como o projeto final obtido.

9.5 - Construção do Problema Aproximado

Este bloco, constrói o problema aproximado, utilizando o princípio dos trabalhos virtuais. Calcula, inicialmente, os carregamentos virtuais necessários. Para as res-

trições referentes a tensões normais, deve-se encontrar os coeficientes que exprimem a dependência linear destas, em relação aos graus de liberdade do problema:

$$\sigma_k = t_k u_l$$

O vetor t_k é utilizado como carregamento virtual.

A seguir, avalia-se o valor dos deslocamentos virtuais associados e finalmente o valor dos coeficientes E_{ij} .

9.6 - Resolução do Problema Aproximado

O problema aproximado é resolvido com a utilização do algoritmo apresentado.

Adota-se o seguinte esquema para prover valores iniciais para as variáveis duais:

a) Na primeira iteração supõe-se, inicialmente, que todas as variáveis são ativas. Adota-se como única restrição ativa o deslocamento horizontal. O valor da variável dual associada é estimado por uma fórmula semelhante a (4), sendo o conjunto de variáveis ativas atualizado;

b) Nas demais iterações adota-se o conjunto de restrições ativas igual ao existente no fim da iteração anterior, com o conjunto de variáveis ativas compatível;

c) Quando for necessário introduzir uma nova restrição no conjunto ativo, a variável dual será estimada como igual ao valor da menor variável presente, dividido pelo número de restrições ativas.

9.7 - Aspectos Computacionais

Alguns recursos foram utilizados para minimizar o tempo de processamento, bem como a possibilidade de diver

gência durante o processo:

a) Matrizes de rigidez dos elementos construídas em relação a um valor unitário da variável de projeto armazenado compactamente, facilitando a atualização a cada iteração.

b) Numeração das equações gerada internamente de forma a minimizar a banda da matriz de rigidez.

c) Sistema de equações resolvido utilizando a técnica de Cholesky, com a matriz de rigidez armazenada compactamente.

A matriz decomposta é armazenada para posterior aproveitamento na fase de avaliação dos deslocamentos virtuais.

d) Foi desprezada a deformação axial das vigas, obtendo-se considerável redução do número de graus de liberdade para a análise da estrutura.

e) Como consequência do item (d), os esforços normais nas vigas são calculados por equilíbrio, a partir dos resultados obtidos na análise.

f) É utilizada filtragem de restrições. Esse processo consiste em construir aproximações apenas para as restrições potencialmente críticas.

Seleciona-se, inicialmente, dentro de cada grupo associado a uma variável independente a restrição de tensão mais crítica. Esta é então testada. Se estiver suficientemente próxima do valor admissível será retida, caso contrário a restrição é desprezada.

A restrição referente ao deslocamento horizontal máximo é sempre retida.

g) Durante a fase de resolução do problema aproximado, utiliza-se o conceito de limites móveis para controle do processo de convergência.

Deve-se lembrar que durante cada iteração, os coeficientes E_{ij} permaneçam constantes. Isto equivale na prática

ca a desprezar a redistribuição dos esforços internos decorrente da alteração do valor das variáveis de projeto. Se esta redistribuição, que sempre ocorre em estruturas hiperestáticas, for muito drástica, o resultado obtido após a resolução do problema aproximado afasta-se bastante do real. Matematicamente, deve-se restringir a utilização das restrições aproximadas a um espaço onde a sua validade possa ser assegurada.

A utilização de limites móveis restringe a variação do valor das variáveis de projeto independentes entre dois ciclos adjacentes do processo.

$$\left(\frac{x_i}{\Delta_i}\right)^v \leq (x_i)^{v+1} < (x_i + \Delta_i)$$

O valor dos Δ_i é determinado na forma sugerida em [10].

A técnica consiste em, para cada variável independente, comparar o valor previsto para a respectiva restrição de tensão ao final da fase anterior.

$$\sigma_j = \sum_i E_{ij} x_i$$

Com o valor efetivamente constatado na análise posterior.

Quanto mais significativas as variações observadas, mais restritivos os limites adotados, ou seja mais próximo da unidade o valor de Δ_i .

10. RESOLUÇÃO DA ESTRUTURA EXEMPLO

O programa OTPORT será empregado agora no projeto da estrutura exemplo apresentada no paragrafo ③.

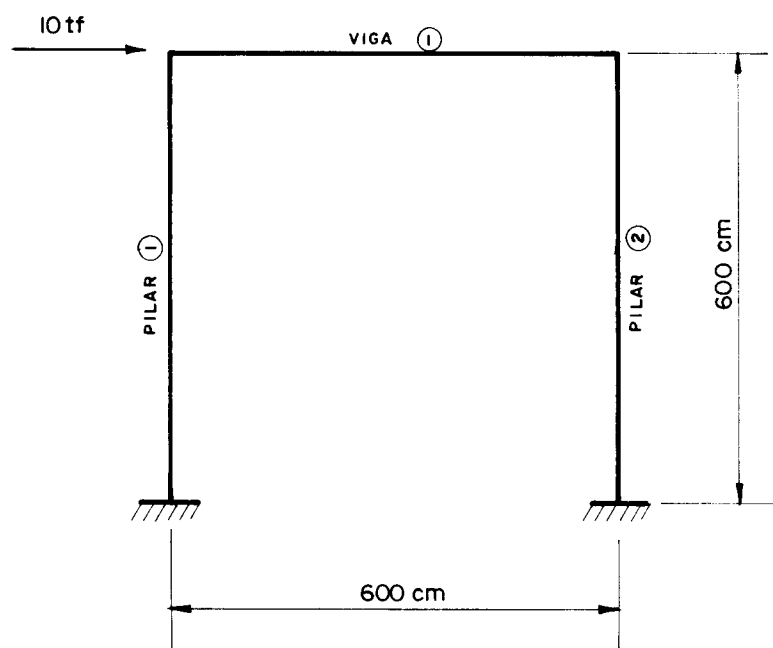


Figura 6

Foi imposta simetria à estrutura, ou seja o resultado obtido para o pilar (1) deve ser idêntico ao do pilar (2).

A seguir, apresenta-se a imagem da listagem obtida com o programa OTPORT:

=====

EXEMPLE INICIAL

=====

NUMERO DE ANDARES : 1
NUMERO DE COLUNAS : 2
DESLOCAMENTO HORIZONTAL MAXIMO : 2.03
MODULO DE ELASTICIDADE : 2110.00
PESO ESPECIFICO : 0.78E-05
NUMERO DE VARIAVEIS : 2

===== CONFIGURACAO DOS GRUPOS =====

===== GRUPOS DE PILARES =====

GRUPO(1)- L=1200.00 - PILARES - 1, 2,

===== GRUPOS DE VIGAS =====

GRUPO(1)- L= 600.00 - VIGAS - 1,

=====

===== CARACTERISTICAS DOS GRUPOS =====

=====

=====

GRUPOS DE PILARES =====

=====

SECAO TRANSVERSAL -----

* GRUPO *	* K1 *	* K2 *	* K3 *	* K4 *	* I-MIN *	* I-MAX *
* 1 *	* 1.4276 *	* 0.3956 *	* 1.0216 *	* 0.6979 *	* 0.17E+05 *	* 0.11E+07 *

TENSOES ADMISSIVEIS -----

* GRUPO *	* TENSÃO MINIMA *	* TENSÃO MAXIMA *
* 1 *	* 1.4000 *	* 1.4000 *

=====

GRUPOS DE VIGAS =====

=====

SECAO TRANSVERSAL -----

* GRUPO *	* K1 *	* K2 *	* K3 *	* K4 *	* I-MIN *	* I-MAX *
* 1 *	* 1.4276 *	* 0.3956 *	* 1.0216 *	* 0.6979 *	* 0.17E+05 *	* 0.11E+07 *

TENSOES ADMISSIVEIS -----

* GRUPO *	* TENSÃO MINIMA *	* TENSÃO MAXIMA *
* 1 *	* 1.4000 *	* 1.4000 *

=====
===== CARREGAMENTO 1 =====
=====

NUMERO DE LAJES CARREGADAS : 1
CARGA HORIZONTAL TOTAL : 10.00
NUMERO DE VIGAS CARREGADAS : 0
CARGA VERTICAL TOTAL : 0.00

=====
===== OTIMIZACAO DO PROJETO =====
=====

=====
METODO DUAL-NEWTON
=====

=====
RESULTADOS DA ITERACAO 7 =====
=====

RESTRICOES CONSIDERADAS -----

1-DESLOC HORIZ DA ULTIMA LAJE
1-TENSAO NO GRUPO DE PILARES 1

RESTRICOES ATIVAS -----

* DESCRIMINACAO	* VALOR FINAL	* VALOR LIMITE	*
* 1-DESLOC HORIZ DA ULTIMA LAJE	* 2.0243	* 2.0300	*

PROPRIEDADES DAS BARRAS -----

* GRUPOS DE PILARES *	* MOM INERCIA *	* AREA DA SECAO *	* MCD RESIST *
* 1 *	* 0.3380E+05 *	* 88.35 *	* 0.1479E+04 *

* GRUPOS DE VIGAS *	* MOM INERCIA *	* AREA DA SECAO *	* MCD RESIST *
* 1 *	* 0.2273E+05 *	* 75.53 *	* 0.1122E+04 *

TENSOES MAXIMAS -----

* GRUPOS DE PILARES *	* PILAR CRITICO *	* CARREG *	* TENSAC MAX *	* LOCALIZACAC *
* 1 *	* 2 *	* 1 *	* -1.26 *	* EX INFERIOR *

* GRUPOS DE VIGAS *	* VIGA CRITICA *	* CARREG *	* TENSAC MAX *	* LOCALIZACAC *
* 1 *	* 1 *	* 1 *	* -1.13 *	* EX ESQUERDA *

DESLOCAMENTOS DAS LAJES -----

* ANDAR *	* DESLOCAMENTO *	* CARREG *
* 1 *	* .202E+01 *	* 1 *

ESFORÇOS NAS BARRAS -----

PILARES -----

PILAR	CARREG	* EXT	* MOMENTO	* NORMAL	* CCRIANTE*
* 1 *	1	* S	* 0.12E+04*	0.40E+01*	0.50E+01*
* *		* I	* 0.18E+04*	-0.40E+01*	-0.50E+01*
* 2 *	1	* S	* 0.12E+04*	-0.40E+01*	0.50E+01*
* *		* I	* 0.18E+04*	0.40E+01*	-0.50E+01*

VIGAS -----

* VIGA*	CARREG	* EXT	* MOMENTO	* NORMAL	* CORTANTE*
* 1 *	1	* E	* -0.12E+04*	-0.50E+01*	-0.40E+01*
* *		* D	* -0.12E+04*	-0.50E+01*	0.40E+01*

CONSUMO DE MATERIAL ESTRUTURAL -----

PESO : 1.18651
VARIACAO : 0.01%

TEMPO DE CPU -----

TEMPO DE CPU TOTAL (SEG)	: 0.32
LEITURA E IMPRESSAO DE DADOS	: 0.11
PREPARACAO DO PROJETO INICIAL	: 0.00
ANALISES DA ESTRUTURA	: 0.09
CONTRUCAO DOS PROBLEMAS APROXIMADOS	: 0.02
RESOLUCAD DOS PROBLEMAS APROXIMADOS	: 0.02

Observações:

Os coeficiente k_1, \dots, k_4 utilizados referem-se a perfis soldados tipo VS fabricados pela Companhia Siderúrgica Nacional [11].

O projeto inicial adotado foi uniforme, igual ao valor limite máximo das variáveis. Não houve "preparação do projeto inicial".

O projeto final foi obtido em 7 iterações. A única restrição ativa é o deslocamento horizontal máximo.

Este mesmo resultado pode ser obtido em apenas 3 iterações, caso não sejam utilizados limites móveis para as variáveis. É evidente que estes na medida em que restringem a taxa de variação das variáveis de projeto restringem também a velocidade de convergência. O resultado foi apresentado com a utilização de limites móveis apenas por questão de coerência, já que a técnica mostrou-se importante para evitar divergência na solução de estruturas mais complexas.

11. RESOLUÇÃO DE EXEMPLO DA BIBLIOGRAFIA

Seja o pórtico da figura:

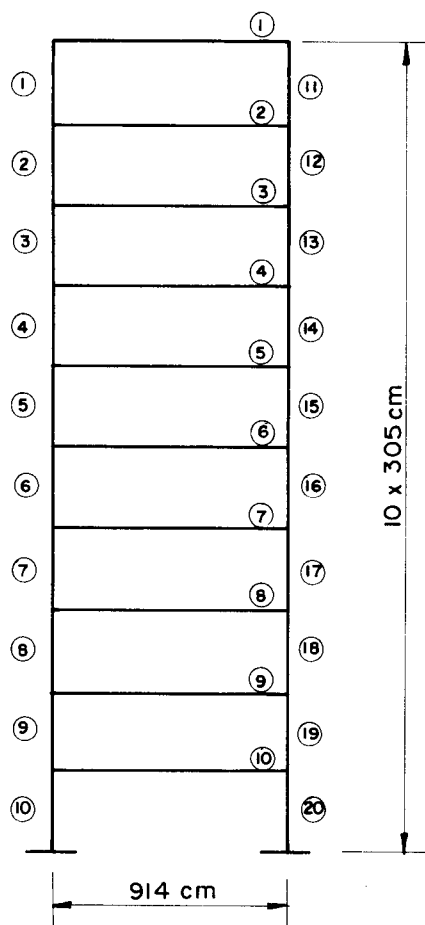


Figura 7

Este exemplo encontra-se resolvido em [9]

- Carregamento

O carregamento será único:

Carga horizontal:

Pavimento	Carga(tf)	Pavimento	Carga(tf)
1º	1,026	16º	1,909
2º	0,880	17º	1,947
3º	1,114	18º	1,947
4º	1,384	19º	1,947
5º	1,384	20º	2,022
6º	1,460	21º	2,097
7º	1,572	22º	2,097
8º	1,572	23º	2,097
9º	1,572	24º	2,097
10º	1,647	25º	2,097
11º	1,722	26º	2,097
12º	1,722	27º	2,097
13º	1,797	28º	2,097
14º	1,872	29º	2,097
15º	1,872	30º	1,048

Carga obtida utilizando recomendação da NB-599

Carga distribuída nas vigas

0tf/m ou 1tf/m ou 2tf/m

Foi imposta simetria à estrutura, ou seja os pilares 1-11, 2-12, ... etc. foram projetados com seções iguais. A tensão normal máxima admissível para os elementos foi adotada $1,406\text{tf/cm}^2$. O deslocamento horizontal máximo admissível foi adotado $5,08\text{cm}$.

$$\bar{x}_i = 0,17 \cdot 10^5 \text{cm}^4$$

$$\bar{\bar{x}}_i = 0,11 \cdot 10^7 \text{cm}^4$$

A estrutura está sujeita aos seguintes carregamentos:

CARREGAMENTO 1 - CARGA PERMANENTE

Carga distribuída nas vigas:

Pavimento 10 = $1.79 \text{ E} - 2\text{tf/cm}$

Demais pavimentos = $3.58 \text{ E} - 2\text{tf/cm}$

CARREGAMENTO 2 - VENTO + (0.75)* CARGA PERMANENTE

Carga Horizontal Aplicada nas Lajes (Vento):

ANDAR	CARGA
10	1.44tf
9	2.83tf
8	2.76tf
7	2.69tf
6	2.60tf
5	2.51tf
4	2.40tf
3	2.27tf
2	2.09tf
1	1.82tf

Resultados:

RESTRIÇÕES ATIVAS NO PONTO ÓTIMO
DISCRIMINAÇÃO

- 1-DESLOC.HORIZ.DA ÚLTIMA LAJE
- 2-TENSÃO NO GRUPO DE VIGAS 10
- 3-TENSÃO NO GRUPO DE PILARES 6
- 4-TENSÃO NO GRUPO DE PILARES 8
- 5-TENSÃO NO GRUPO DE PILARES 7
- 6-TENSÃO NO GRUPO DE PILARES 5
- 7-TENSÃO NO GRUPO DE PILARES 9
- 8-TENSÃO NO GRUPO DE PILARES 3
- 9-TENSÃO NO GRUPO DE PILARES 4
- 10-TENSÃO NO GRUPO DE PILARES 2
- 11-TENSÃO NO GRUPO DE VIGAS 2

TENSÕES MÁXIMAS

GRUPO DE PILARES	PILAR CRÍTICO	CARREG.	TENSÃO MAX.	LOCALIZAÇÃO
1	11	1	-1.321	EX.SUPERIOR
2	12	2	-1.395	EX.SUPERIOR
3	13	2	-1.413	EX.SUPERIOR
4	14	2	-1.410	EX.SUPERIOR
5	15	2	-1.414	EX.SUPERIOR
6	16	2	-1.412	EX.SUPERIOR
7	17	2	-1.409	EX.SUPERIOR
8	18	2	-1.406	EX.SUPERIOR
9	19	2	-1.413	EX.INFERIOR
10	20	2	-1.209	EX.INFERIOR

GRUPO DE VIGAS	VIGA CRÍTICA	CARREG.	TENSÃO MAX.	LOCALIZAÇÃO
1	1	1	1.200	EX.ESQUERDA
2	2	1	1.408	EX.DIREITA
3	3	2	1.200	EX.DIREITA
4	4	2	1.150	EX.DIREITA
5	5	2	1.148	EX.DIREITA
6	6	2	1.163	EX.DIREITA
7	7	2	1.177	EX.DIREITA
8	8	2	1.187	EX.DIREITA
9	9	2	1.254	EX.DIREITA
10	10	2	1.393	EX.DIREITA

DESLOCAMENTOS DAS LAJES

ANDAR	DESLOCAMENTOS	CARREGAMENTO
10	.508E+01	2
9	.473E+01	2
8	.424E+01	2
7	.367E+01	2
6	.308E+01	2
5	.248E+01	2
4	.187E+01	2
3	.126E+01	2
2	.671E+00	2
1	.190E+00	2

Observações:

A comparação dos resultados com os constantes da bibliografia ficou prejudicada pelo fato de não estar explícito nesta o tipo de perfil utilizado para as seções transversais.

A. C.S.N. oferece três séries de perfis soldados. São elas:

- VS - Viga Soldada;
- CVS - Coluna/Viga Soldada; e
- CS - Coluna Soldada

A diferença entre estas séries reside, basicamente, na espessura das chapas utilizadas. Naturalmente esta espessura aumenta no sentido VS-CVS-CS.

Os resultados apresentados foram obtidos com perfis tipo VS. Com o objetivo de verificar se estes são realmente os mais adequados, observe-se os resultados da tabela:

PERFIS UTILIZADOS		PESO FINAL	TEMPO CPU	RESTRIÇÕES ATIVAS
VIGAS	PILARES			
VS	VS	14,77t	13,99S	11
CVS	CVS	24,70t	4,33S	2
VS	CVS	17,39t	5,49S	7
CS	CS	27,81t	3,21S	2
VS	CS	18,27t	4,79S	3

É importante notar a grande variação no consumo de material devido à escolha de perfis equivocados.

Os resultados indicam adicionalmente que os elementos estruturais adequados têm a característica rigidez predominante sobre a característica resistência.

12. EXECUÇÃO DE 18 PROJETOS

A seguir será apresentado o resultado do projeto de 18 exemplos.

Os dados gerais utilizados são os seguintes:

- Material:

$$E = 2.110 \text{tf/cm}^2$$

$$\gamma = 0,78 \cdot 10^{-5} \text{tf/cm}^3$$

- Elementos:

$$\bar{\sigma} = 1,40 \text{tf/cm}^2$$

$$\underline{\sigma} = -1,40 \text{tf/cm}^2$$

utilizados perfis tipo VS para todos os elementos

- Geometria:

Pé direito

L = 400cm para o 1º pavimento

L = 300cm para os demais

Comprimento dos tramos de viga

$T_t = 1080\text{cm}$

2 x 540cm para 3 pilares

3 x 360cm para 4 pilares

"Foi imposta simetria à estrutura"

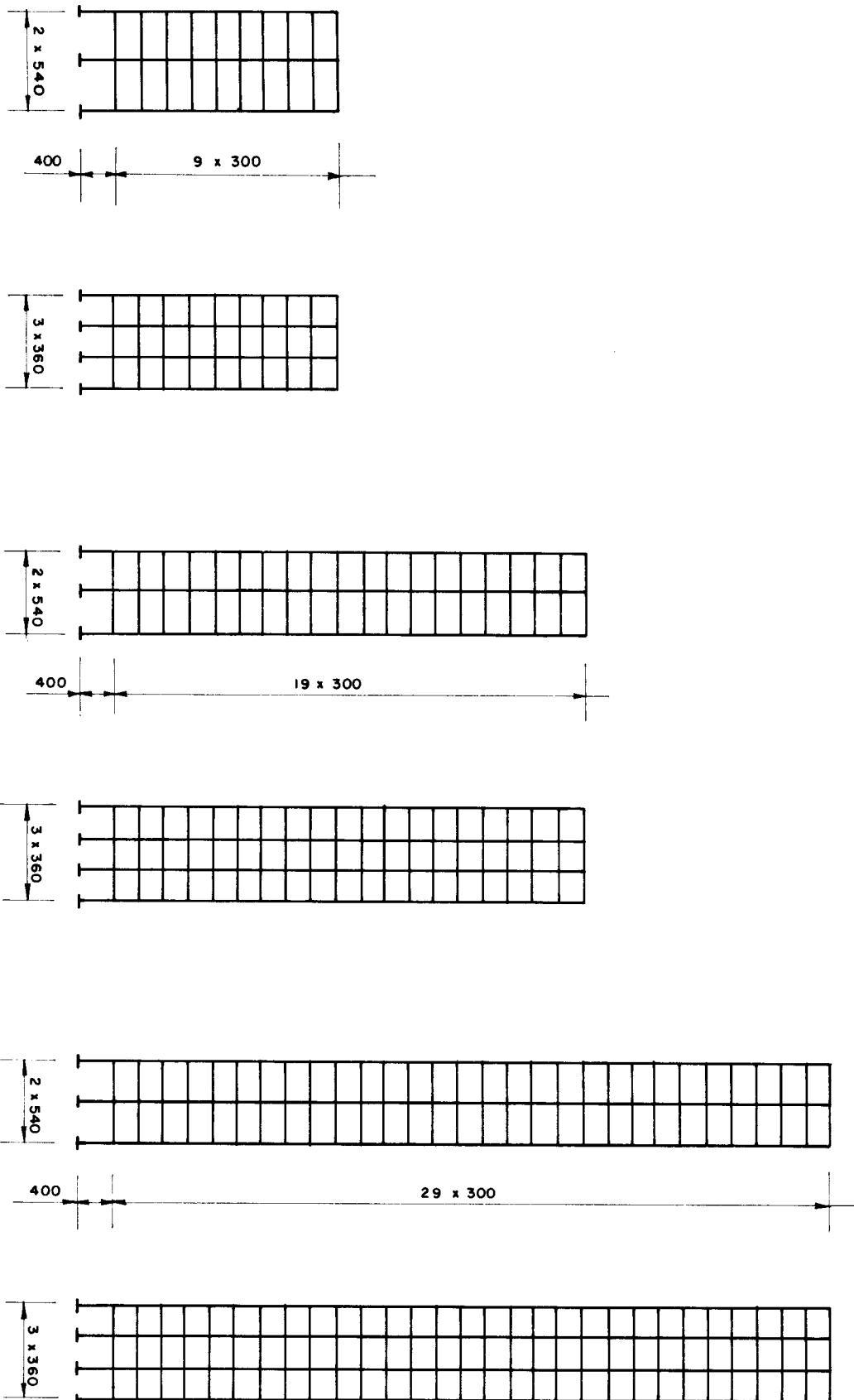


Figura 9

12.1 - Resultados

NA	NC	CV	NVAR	NRAT	NITER	CPU	PESO
10	3	0	30	1	15	4,29	11,0
10	4	0	40	2	44	18,35	8,0
10	3	1	30	1	16	6,78	11,0
10	4	1	40	14	30	45,75	8,9
10	3	2	30	17	17	30,94	11,0
10	4	2	40	22	29	121,82	9,8
20	3	0	60	1	13	9,79	39,6
20	4	0	80	1	12	16,77	36,4
20	3	1	60	1	15	12,51	38,9
20	4	1	80	1	11	19,83	36,4
20	3	2	60	7	12	24,55	38,9
20	4	2	80	9	10	30,41	36,2
30	3	0	90	1	10	16,19	99,9
30	4	0	120	1	12	32,30	93,8
30	3	1	90	1	12	32,05	98,8
30	4	1	120	1	12	37,17	92,9
30	3	2	90	1	17	39,22	97,6
30	4	2	120	2	12	47,18	93,7

Figura 10

onde:

NA - Número de andares

NC - Número de colunas

NVAR - Número de variáveis do problema primal

NRAT - Número de variáveis do problema dual

NITER - Número de iterações
CPU - Tempo total de CPU consumido (segundos)
PESO - Peso final observado (tf)

12.2 - Análise dos Resultados

Utilizando os resultados apresentados na figura (10), é possível obter pelo método dos mínimos quadrados as expressões:

$$P = a(Na)^b, \quad CV = 0,1 \text{ e } 2\text{tf/m}$$

que relacionam o número de andares ao peso final obtido. A observação dos coeficientes (a) e (b) (Figura (11)) obtidos induz à conclusão de que os resultados obtidos são coerentes entre si.

Adicionalmente, pode-se notar a variação quadrática do consumo de material em relação à altura do edifício.

12.2.1 - Aspectos estruturais

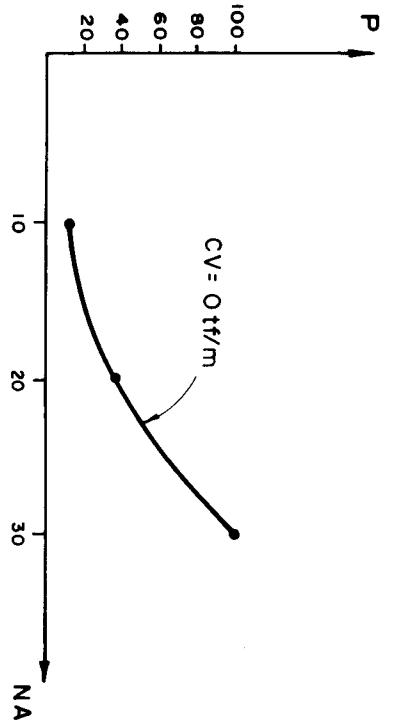
O comportamento estrutural previsto foi amplamente satisfeito. A restrição referente ao deslocamento horizontal foi sempre ativa, sendo na maioria dos casos a única. Os exemplos que mais se desviaram desta hipótese foram os correspondentes aos edifícios com [10] andares, que à luz da norma brasileira NB-599 não são exatamente edifícios altos (relação altura/largura 3).

Os projetos com 4 colunas mostraram-se sempre mais econômicos que aqueles realizados com 3 colunas.

O aumento da carga vertical não alterou significativamente os resultados para os projetos de 10 andares e quatro colunas, o consumo de material apresentou um acréscimo com o aumento da carga vertical de 0 para 1tf/m (11%) e de 1 para 2tf/m (10%). Nos demais exemplos, o peso final manteve-se praticamente constante. Para os edifícios mais altos houve uma pequena redução do peso final (no caso mais crítico 2,8%), a qual não deve ser levada em consideração, pois deve-se a problemas numéricos que serão analisados mais adiante.

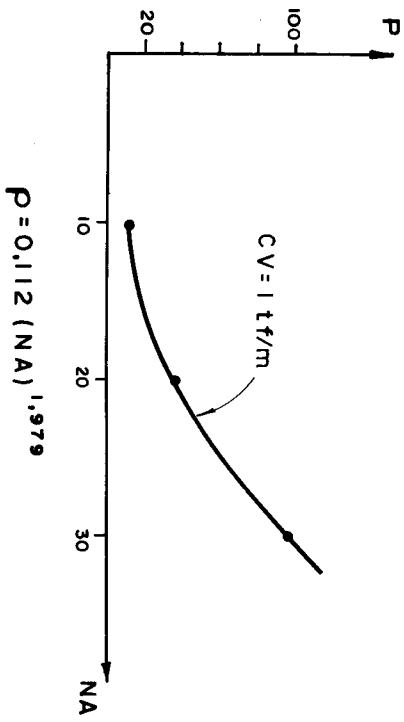
NA	P
10	11,0
20	39,6
30	99,9

3 COLUMNAS



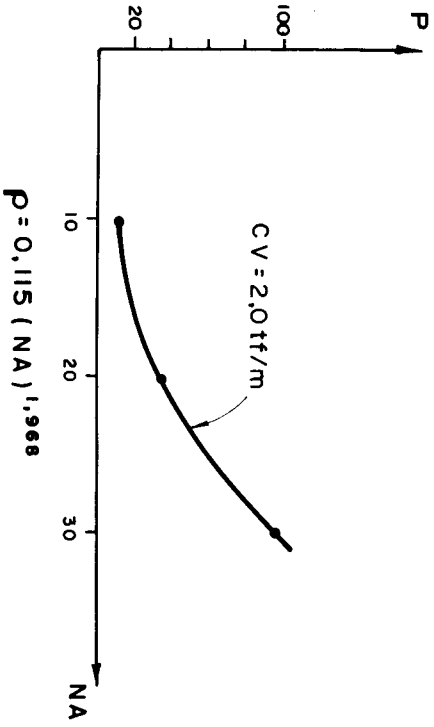
NA	P
10	11,0
20	38,9
30	98,8

3 COLUMNAS



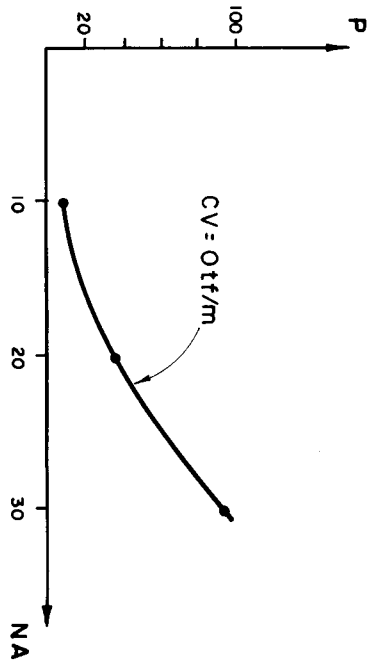
NA	P
10	11,0
20	39,5
30	97,6

3 COLUMNAS



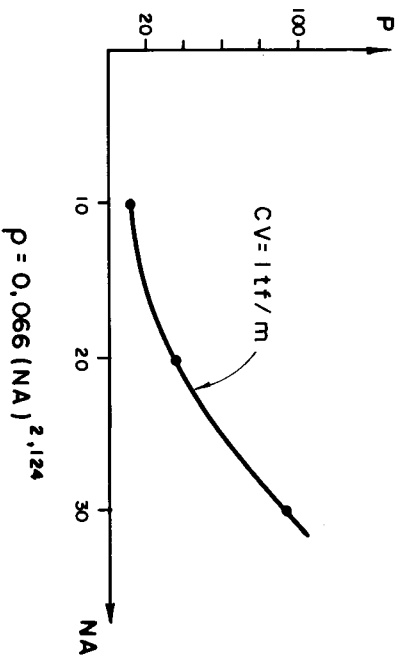
NA	P
10	8,0
20	36,4
30	93,8

4 COLUMNAS



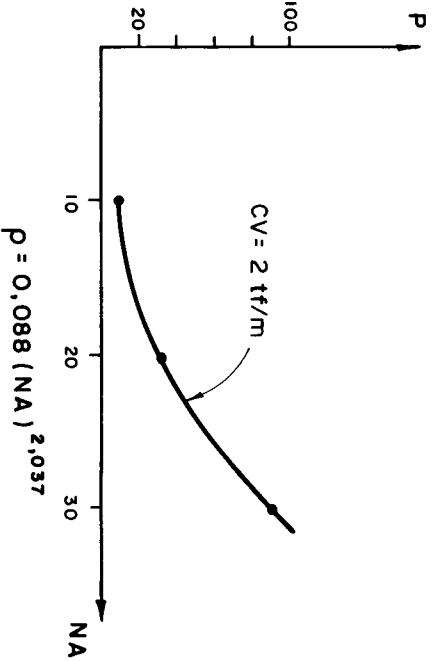
NA	P
10	8,9
20	36,4
30	92,9

4 COLUMNAS



NA	P
10	9,8
20	36,2
30	93,7

4 COLUMNAS



Figura

12.2.2 - Aspectos numéricos

Todos os exemplos foram resolvidos utilizando um computador IBM-4341, sendo os dados tratados com precisão simples.

De forma geral, sempre foi possível obter um projeto relativamente próximo ao projeto ótimo em poucas iterações.

Existem dois fatos a considerar, no tocante às propriedades de convergência.

O primeiro refere-se a convergência da sequência de soluções dos problemas aproximados à solução do problema real. Esta foi muito boa em quase todos os casos. A maior dificuldade ocorreu no exemplo com 10 andares, 4 colunas, carga vertical nula, quando foram necessárias 44 iterações. Observou-se, entretanto, que um projeto bastante próximo ao projeto final seria obtido caso o processo fosse interrompido na 20ª iteração. Curiosamente, este foi o único exemplo em que a aproximação ocorreu com uma sequência de projetos factíveis.

Devido ao caráter dual da técnica utilizada, os projetos obtidos ao longo do processo não são factíveis (a exceção do exemplo anteriormente citado). Isto é: se o processo for interrompido, alguma restrição estará violada, e o peso obtido será conseqüentemente inferior ao esperado para o projeto final factível. Esta característica, aliada a precisão utilizada, e ao fato de haver-se usado parâmetros de convergência diferentes, dependendo do grau de dificuldade numérica do problema a ser resolvido, faz com que os exemplos de maior dificuldade, onde as tolerâncias prescritas para violação das restrições são efetivamente utilizadas apresentam um peso final inferior, quando comparados com exemplos semelhantes, porém com menor dificuldade computacional. É o caso dos projetos de 20 e 30 andares idênticos à exceção, da carga vertical aplicada, cujo efeito é um aumento da dificuldade numérica dos problemas resolvidos. Isto era esperado, já que a existência de esforços axiais elevados nos pilares reduz a qualidade das apro

ximações explícitas obtidas para as restrições (pág. 31).

Ainda no primeiro item, deve-se ressaltar que os projetos iniciais foram adotados sem nenhum cuidado especial, estando sempre muito distantes do ponto ótimo. A "preparação do projeto inicial" mostrou-se vantajosa em alguns casos (edifícios de 20 e 30 andares com carga vertical de 2tf/m). Nos demais, o número de iterações necessárias para a obtenção do projeto final foi o mesmo, utilizando ou não a "preparação".

O segundo fato a ser considerado é a resolução do problema aproximado propriamente dito.

A técnica dual adotada mostrou ótimo desempenho. A maior parte dos exemplos resolvidos resultou em problemas com apenas uma restrição ativa, de solução quase imediata.

No projeto que resultou em problemas aproximados de maior complexidade (10 andares, 4 colunas, CV = 2tf/m), o número de restrições ativas ou variáveis duais (ou dimensão do espaço de solução) foi 22. Neste caso, o problema foi resolvido normalmente, mostrando que o algoritmo é eficaz mesmo para exemplos complexos. Vale ressaltar neste caso o ótimo desempenho da técnica adotada no tocante à construção gradual dos conjuntos de restrições e variáveis ativas.

A adoção de valores iniciais equivocados para as variáveis duais pode causar divergência no algoritmo de busca linear. Nenhum dos esquemas testados para adoção destes valores iniciais [10] mostrou-se imune a possibilidade de erro.

O algoritmo de busca linear é o ponto de maior dificuldade computacional. A função cujo "zero" se pretende determinar pode apresentar comportamento bastante instável dentro do intervalo de solução adotado ($\underline{\tau}$, $\overline{\tau}$). Foi necessário adotar paralelamente ao método de Newton-Raphson uma técnica de biseção, que consiste basicamente em restringir gradativamente o intervalo de validade adotado para a solução, até que esta seja determinada.

Adicionalmente observou-se que se por um lado a utilização de limites móveis é eficiente no sentido de reduzir a possibilidade de divergência global, por outro lado a adoção de limites muito restritivos para as variáveis primais implica que um grande número destas se torne inativa. Quando o número de variáveis primais ativas torna-se inferior ao número de restrições ativas, ocorre singularidade da matriz Jacobiana (23) [10]. Nos exemplos analisados este fato não chegou a ocorrer, entretanto o aumento do número de variáveis inativas implica dificuldade adicional no processo de busca linear, uma vez que o espaço de solução torna-se mais segmentado.

13. CONCLUSÃO

O problema de programação matemática associado à otimização de projetos estruturais é complexo em sua natureza. Assim deve-se utilizar estratégias de solução específicas, adequadas ao problema que se pretenda resolver.

Adotou-se uma técnica dual para solução dos problemas aproximados construídos (após cada análise estrutural) com auxílio do princípio dos trabalhos virtuais. Apenas as restrições potencialmente críticas foram retidas no processo de minimização. O módulo de análise foi desenvolvido especificamente para os pórticos planos em questão.

O programa desenvolvido foi vastamente utilizado na resolução de diversos exemplos, e os resultados obtidos foram consistentes.

Foi possível constatar que a adoção de perfis inadequados pode causar grande aumento no consumo de material estrutural (pág. 76). Adicionalmente, observou-se uma variação quadrática do consumo de material em relação ao aumento da altura dos edifícios.

O comportamento estrutural previsto foi comprovado, sendo que o número de restrições ativas foi sempre bastante inferior ao número de variáveis ativas. Isto pode ser melhor observado comparando-se os valores de "NRAT" e "NVAR" na figura 10.

A técnica adotada possibilitou assim, a execução dos projetos exemplo num espaço cuja dimensão é inferior à do problema original, resultando em menor dificuldade computacional e conseqüente redução no tempo de processamento requerido.

14. BIBLIOGRAFIA

- [1] - MORRIS, A.J. Foundations of structural optimization: A unified approach. John Wiley & Sons, 1982.
- [2] - FRITZSCHE, H. Programação não linear, análise e métodos. Editora Edgard Blucher Ltda., 1978
- [3] - MOREIRA, D.F. Análise matricial das estruturas. LTC/EDUSP, 1977.
- [4] - MAJID, K.I. Optimum design of structures. Butterworth, 1974.
- [5] - TEMPLEMAN, A.B. Structural design applications of geometric programming. Agard-CP-123, 1973.
- [6] - FLEURY C. & SCHMIT A. Primal and dual methods in structural optimization. Journal of the structural division, ASCE: May, 1985
- [7] - SCHMIT A. & MIURA H. Aproximation concepts for efficient structural synthesis. NASA Contractor Report, NASA - CR2552, 1976.
- [8] - FLEURY, C. & SANDER, G. Structural optimization by finite element. Final scientific report, Grant Afosr-77-3118, 1978.

- [9] - FRIND, O. & WRITE M. Gradient methods in optimum structural design. Journal of structural division, ASCE: April, 1975.
- [10]- LEVY, R. & PARZYNSKI, W. Optimality criteria solution strategies in multiple - constraint design optimization, AIAA Journal: May 1982.
- [11]- CATÁLOGO de perfis soldados. Fábrica de estruturas metálicas. Companhia Siderúrgica Nacional, Janeiro, 1983.
- [12]- FLEURY, C. A unified approach to structural weight minimization. Computer methods in applied mechanics and engineering 20 (1979) 17-38.
- [13]- FLEURY, O. Structural weight optimization by dual methods of convex programming. International Journal numerical methods of convex programming. Vol. 14, 1761-1783 (1979).
- [14]- KIUSALAAS, J. Minimum weight design of structures via optimality criteria. NASA TN D-7115. DEL 1972.
- [15]- KHOT, N.S.; BERKE, L.; VENKAYYA, V.B. Comparisons of optimality criteria algorithms for minimum weight design of structures. AIAA Journal. Vol. 17 Nº 2.
- [16]- DOBS, M.W.; NELSON, R.B. Application of optimality criteria to automated structural design. AIAA Journal. Vol. 14, Nº 10.
- [17]- SALGADO, N.K.; ANTUNES, H.M.C.C.; ARENALES, M.N.; ARENALES, S.H.V. Programação geométrica na otimização do projeto de pórticos planos no regime elástico. Anais do VII Congresso Nacional de matemática aplicada e computacional.

APÊNDICE A

PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR, CONCEITOS IMPORTANTES

Extraído do Livro - Programação não-linear, análise e métodos - Helmut Fritzsche

A.1 - Vetor do Gradiente

O gradiente de $f(x_1, \dots, x_n)$ é o vetor cujas componentes são os derivados parciais da função f em um ponto $x = (x_1, \dots, x_n)$ em relação a essas variáveis, ou seja:

$$\nabla f(x) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{array} \right\}$$

O vetor gradiente determina a direção de maior taxa de variação do valor da função f para mudança nos valores das variáveis.

A.2 - Condições Necessárias de Otimalidade para o Problema sem Restrições

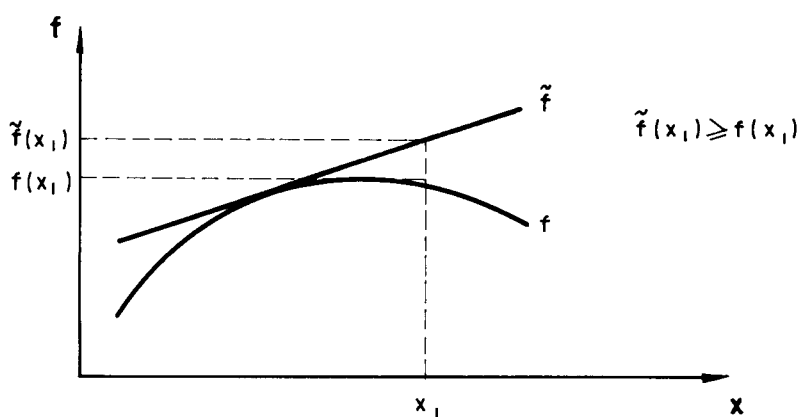
Seja f uma função diferenciável. Se x^* maximiza f em E^n , então

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Embora a condição $\nabla f(x^*) = 0$ seja necessária, se x^* for o máximo irrestrito, certamente não é suficiente. De fato, mesmo que $\nabla f(x^*) = 0$, x^* pode ser um máximo local, um mínimo global ou até um ponto de sela. Em um máximo local, x^* maximiza f em uma vizinhança de x^* , enquanto, em um máximo global, x^* maximiza f no espaço inteiro de E^n . O termo ponto de sela será definido futuramente, mas pode ser associado grosseiramente a ponto de inflexão.

A.3 - Concavidade de uma Função

Uma função numérica f chama-se côncava, se uma aproximação linear a f em qualquer x sobreestimar f .



Suponha-se que no problema irrestrito a função objetiva seja côncava, logo, a condição necessária de otimalidade.

$$\nabla f(x^*) = 0$$

é também suficiente.

A.4 - Região Viável ou Conjunto Viável

Num problema com restrições, estas delimitam um subespaço que contém todos os pontos factíveis, ou seja, todos os pontos que satisfazem as restrições. Este subespaço é chamado região viável ou conjunto viável.

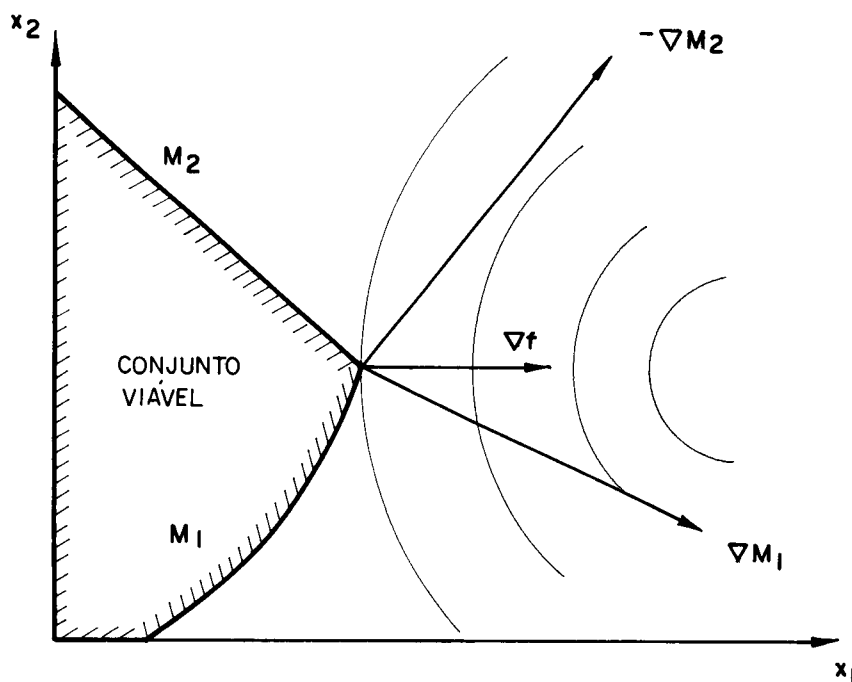
A.5 - Direções Viáveis

Seja x um ponto viável. Define-se uma direção viável em x como uma direção d com a propriedade de que $x + \tau d$ está dentro do conjunto viável F para um τ suficientemente pequeno.

A.6 - Condições Necessárias de Kuhn-Tucker

Os resultados mais importantes da programação não-linear são as condições de Kuhn e Tucker. Elas formam a base para o desenvolvimento de muitos algoritmos computacionais. Além disso, os critérios de parar muitos algoritmos, isto é, reconhecer quando um ponto ótimo local restrito é atingido, são diretamente obtidos dessas condições.

As condições de Kuhn-Tucker mostram essencialmente que, em um ponto ótimo restrito, nenhuma mudança permitível (pequena), nas variáveis do problema, pode melhorar a função objetiva. Geometricamente, no ponto ótimo x^* de um problema de minimização, o gradiente da função-objetivo deve localizar-se dentro do cone gerado pelos gradientes das restrições ativas. Uma restrição é ativa se ela vale como igualdade no ponto x^* .



O vetor ∇f aponta na direção da taxa máxima de de crêscimo de f , e um movimento pequeno em uma direção que tem um ângulo de menos de 90° com ∇f , diminuirá f . Consequentemente, no ponto ôtimo, nenhuma direção viável pode ter um ângulo de menos de 90° entre ela e ∇f .

Matematicamente, as condições de Kuhn-Tucker tomam a forma:

seja um problema de programação não linear:

minimizar $f(x)$

sujeito a $M_j(x) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m$

A condição necessária para que um ponto viável x^* seja ôtimo é:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla M_j(x^*) = 0$$

onde $\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, m$ tal que

$$\lambda_j M_j(x^*) = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

A.7 - Função Lagrangeana

Define-se a função lagrangeana ou simplesmente lagrangeana

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_j^m \lambda_j M_j(x)$$

onde os λ_j são conhecidos como multiplicadores de lagrange.

A.8 - Ponto de Sela

Um ponto (x^*, λ^*) chama-se um ponto de sela, se minimiza $L(x, \lambda)$ em x e maximiza $L(x, \lambda)$ em λ .

Se (x^*, λ^*) for um ponto de sela para $L(x, \lambda)$, então x^* resolve o problema:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s. a } M_j(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Um ponto de sela sempre existirá se a função $f(x)$ e as restrições $M_j(x)$ forem côncavas. Nesse caso, diz-se que o problema é convexo e as condições de Kuhn-Tucker são suficientes, além de necessárias.

A.9 - Teoria da Dualidade

Da função lagrangeana e da definição de ponto de sela pode-se derivar dois problemas:

O problema primal que determina um x^* , chamado ótimo, tal que

$$f(x^*) = \min f(x)$$

ou

$$f(x^*) = \min_x [\max_{\lambda} L(x, \lambda)]$$

E o problema dual, que calcula um λ^* ótimo, tal que

$$\gamma(\lambda^*) = \max_{\lambda} \gamma(\lambda)$$

ou

$$\gamma(\lambda^*) = \max_{\lambda} \left[\min_x L(x, \lambda) \right]$$

Se o problema primal for convexo o dual também o será. Portanto, um ótimo local será também um ótimo global. É importante lembrar que o problema primal é resolvido num espaço cuja dimensão equivale ao número de variáveis primais, enquanto o problema dual é resolvido num espaço de dimensão igual ao número de restrições do problema primal. Finalmente, a solução dos dois problemas equivale ao ponto de sela da função lagrangeana.

A.10 - Métodos de Minimização Irrestrita

Existe uma estrutura comum a todos os algoritmos de minimização. Partindo de um ponto inicial, determina-se, por meio de uma certa regra, uma direção de busca, move-se nessa direção a um máximo relativo da função objetivo nessa linha. No novo ponto, uma nova direção é determinada e o processo é repetido. A diferença entre os diversos algoritmos (método do gradiente, Newton, etc.) é a regra por meio da qual são escolhidas as direções de busca. Uma vez feita a seleção, todos os algoritmos fazem uma pesquisa unidimensional na direção escolhida.

A.10.1 - Método do gradiente

Um dos métodos mais antigos e melhor conhecido de maximização de uma função de várias variáveis é o método do

gradiente, que é definido pelo algoritmo iterativo:

$$x^{v+1} = x^v + \tau^v \cdot \nabla f \cdot (x^v)$$

onde: v é o número da iteração e τ é um escalar não-negativo que maximiza $f(x^v + \tau \nabla f(x^v))$ isto é, pesquisa-se a partir de um ponto x^v ao longo da direção do gradiente, até encontrar-se um ponto máximo nessa linha, esse máximo é x^{v+1} .

O método do gradiente apresenta taxa linear de convergência.

A.10.2 - Método de Newton

O método do gradiente baseia-se em aproximações lineares, ou de primeira ordem de Taylor a f .

$$\tilde{f}(x) = f(x^v) + \nabla f(x^v) \cdot (x - x^v)$$

O método de Newton estende a idéia do método do gradiente aproveitando aproximações quadráticas a f . As aproximações quadráticas não são somente melhores que as aproximações lineares, mas ganham importância à medida que se aproximam do ponto de solução x^* . Também no procedimento de Newton um ponto de solução é definido como um ponto x^* onde $\nabla f(x^*) = 0$. Perto de um ponto x^v pode-se aproximar f pela expansão truncada de Taylor.

$$\tilde{f}(x) = f(x^v) + \nabla f(x^v) \cdot (x - x^v) + \frac{1}{2} (x - x^v) \cdot H(x^v) \cdot (x - x^v) \quad (1)$$

onde $H(x^v)$ é a matriz Hessiana dos segundos derivados parciais no ponto x^v .

Derivando a expressão (1) dá:

$$\nabla f(x^v) + H(x^v) (x^{v+1} - x^v) = 0 \quad (2)$$

se $H(x^v)$ for não singular, $H(x^v)^{-1}$ existirá e (2) implicará

$$x^{v+1} = x^v - H(x^v)^{-1} \nabla f(x^v)$$

A introdução do parâmetro de pesquisa τ dá ao método sua forma clássica.

$$x^{v+1} = x^v - \tau H(x^v)^{-1} \nabla f(x^v) \quad (3)$$

Pode-se, alternativamente, evitar inverter a matriz $H(x^v)$ em todas as etapas, utilizando a mesma matriz $H(x^v)^{-1}$ como estimativa do inverso da Hessiana durante algumas iterações.

O método de Newton apresenta propriedades de convergência melhores que o método do gradiente, mas leva a desvantagem de ser necessário calcular o inverso da Hessiana.

A.10.3 - Métodos de direções conjugadas

Os métodos de direções conjugadas foram desenhados para melhorar as propriedades de convergência que o método de gradiente tem, e, ao mesmo tempo, diminuir o número de cálculos necessários e o armazenamento de matrizes, como no caso do método de Newton.

Nos métodos de direções conjugadas analisar-se-á invariavelmente o problema quadrático.

$$\text{minimizar } \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$$

onde Q é uma matriz definida negativa $n \times n$. Uma vez desenhadas técnicas para este processo, elas são aplicadas, por extensão, a problemas gerais. O raciocínio é que, perto do ponto de mínimo, a aproximação quadrática à função geral é normalmente boa e, conseqüentemente, as propriedades de convergência são parecidas ao do caso quadrático.

Os métodos de direções conjugadas são extremamente eficientes, sendo considerados como os melhores entre os métodos atualmente disponíveis.

A.11 - Métodos de Otimização Restrita

Numericamente, problemas não-lineares restritos são muito mais difíceis de resolver do que problemas não-restritos, que tem um número comparável de variáveis independentes, isto deve-se à exigência adicional de que a solução satisfaça às restrições, além de minimizar a função objetivo.

A.11.1 - Métodos de direções viáveis

Também chamados métodos primais. Essa noção deve-se ao fato de, nesses métodos, todos os pontos serem viáveis e a função objetivo diminuir a cada iteração.

A idéia dos métodos de direções viáveis é iterar por meio da região viável F , da seguinte maneira:

$$x^{v+1} = x^v + \tau^v d^v$$

onde d^v é um vetor de direções e τ^v é um escalar não negativo. O escalar τ é selecionado, tal que f seja mínima na direção d^v e, além disso, todo segmento de linha entre x^v e x^{v+1} esteja dentro de F .

Entre estes métodos deve-se destacar: o método de Zoutendijk, o método de Rosen da projeção do gradiente e o método generalizado do gradiente reduzido.

A.11.2 - Método de funções de penalidade

O método de funções de penalidade é um procedimento que visa substituir problemas de otimização com restrições, por problemas de otimização sem restrições. Essa aproximação é obtida, adicionando-se à função objetivo, uma parcela que estabelece uma grande penalidade pela violação das restrições. Existem dois pontos fundamentais a serem levados em conta. O primeiro é como o problema restrito se aproxima do problema irrestrito. O segundo é como resolver o problema irrestrito quando a função objetivo contém uma função de penalidade.