

ALGORITMOS PARA O ESTUDO DE PILARES ESBELTOS DE  
CONCRETO ARMADO SOLICITADOS A  
FLEXAO NORMAL COMPOSTA

AUTOR: ENG. JOEL ALVES DE PAULA

ORIENTADOR: PROF. DR. WILSON SERGIO VENTURINI

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ALGORITMOS PARA O ESTUDO DE PILARES ESBELTOS DE  
CONCRETO ARMADO SOLICITADOS A  
FLEXÃO NORMAL COMPOSTA

JOEL ALVES DE PAULA

ORIENTADOR: PROF. DR. WILSON SERGIO VENTURINI

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

SÃO CARLOS, JULHO DE 1988

Aos meus pais,  
aos meus sobrinhos Alexandre e Daniele,  
dedico este trabalho.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini, pelos ensinamentos, estímulos e orientação recebidos durante a elaboração deste trabalho, proporcionando meu desenvolvimento científico.

Aos colegas, professores e funcionários do Departamento de Estruturas, pela atenção a mim dispensada.

Ao Prof. Márcio R.S. Corrêa, pelo apoio e incentivo, e ao Prof. Norberto Costardi, pelo auxílio na utilização dos equipamentos computacionais.

Ao Sr. Rui Roberto Casale, pela presteza e eficiência no trabalho de datilografia.

Ao Sr. Francisco C.G. Brito, pela disposição e eficiência na composição dos trabalhos gráficos.

À Bibliotecária Maria Nadir Minatel, pela eficiência no atendimento.

À Lúcia, pela colaboração e incentivo.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

## R E S U M O

Este trabalho trata do estudo de estabilidade das configurações de equilíbrio de pilares esbeltos de concreto armado, submetidos à flexão normal composta. Além disso, faz-se um estudo comparativo de estabilidade, obtenção de carga crítica, dimensionamento e elaboração de diagramas de interação para dimensionamento de pilares esbeltos, no estado limite último de instabilidade, usando-se a teoria do método geral e o processo aproximado do pilar padrão. Apresentam-se algoritmos detalhados para programação dos processos acima citados, e em particular da aplicação do processo aproximado do pilar padrão na obtenção de diagramas, momento fletor-força normal-curvatura.

Finalmente, são dados programas para microcomputador do tipo IBM-PC, elaborados em linguagem PASCAL. Estes programas, correspondentes aos algoritmos citados, são facilmente adaptados para quaisquer outras aplicações correlatas.

Cabe registrar que os efeitos causados pela deformação lenta não foram incluídos neste trabalho.

## A B S T R A C T

In this work, the study of the stability of equilibrium configurations of the concrete slender columns, subjected to compound bending, is dealt. It is also made a comparative study of the stability analysis, critical load determination, design of slender columns for the ultimate limit state of instability and interaction diagrams for column dimensioning, using the exact method and the approximated model column method. Algorithms are presented for programming of the shown processes and also for the application of the model column process for the determination of bending moment-axial force-curvature diagrams.

Finally computer codes written in PASCAL language are given for microcomputer of IBM-PC type. These programs, corresponding to the algorithms presented, are easily to be changed for other related uses.

It's opportune to say that creep effects were not considered in this work.

## Í N D I C E

1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1 - Generalidades .....	1
1.2 - Objetivos .....	3
1.3 - Apresentação do trabalho .....	4
2. HIPÓTESES DE CÁLCULO .....	6
2.1 - Diagrama tensão-deformação ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) para o concreto .....	6
2.2 - Diagramas tensão-deformação ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) para os aços .....	9
2.2.1 - Diagrama de cálculo do aço classe A ..	11
2.2.2 - Diagrama de cálculo do aço classe B ..	12
2.3 - Hipóteses relativas ao estado de deformações ..	13
2.3.1 - Manutenção da seção plana .....	14
2.3.2 - Solidariedade dos materiais .....	14
2.3.3 - Encurtamentos máximos do concreto e <u>a</u> longamentos máximos das armaduras ....	14
3. NOÇÕES BÁSICAS SOBRE O COMPORTAMENTO DE BARRAS COM PRIMIDAS .....	18
3.1 - Relações básicas .....	18
3.2 - Considerações sobre o uso da expressão exata da curvatura .....	23
3.3 - Considerações sobre o uso da equação diferen cial simplificada da curvatura .....	25
3.4 - Estabilidade e instabilidade das configura ções fletidas de equilíbrio - regime elásti co linear .....	30
3.5 - Flexão composta de barras esbeltas no regime elástico não-linear .....	33
4. DIAGRAMA MOMENTO FLETOR - FORÇA NORMAL - CURVATURA (M-N-1/r) .....	38
4.1 - Estudo da relação eixo neutro-curvatura .....	38

4.2 - Compatibilidade de deformações .....	40
4.3 - Estudo do intervalo de variação do parâmetro $\beta_x$ .....	43
4.3.1 - Exemplo numérico .....	48
4.4 - Equações de equilíbrio - seção retangular ....	51
4.5 - Equações adimensionais de equilíbrio .....	54
4.5.1 - Obtenção da expressão do esforço normal resistente adimensional .....	55
4.5.2 - Obtenção da expressão do momento fletor resistente adimensional .....	57
4.6 - Definição dos valores limites adimensionais para integração do diagrama de tensões de compressão no concreto .....	59
4.7 - Algoritmo para o cálculo do diagrama momento fletor - força normal - curvatura ( $\mu-v-h/r$ ) ..	63
4.8 - Exemplo de diagrama $\mu-v-h/r$ .....	63
5. MÉTODOS PARA ANÁLISE DE PEÇAS COMPRIMIDAS DE CONCRETO ARMADO .....	67
5.1 - Método geral .....	67
5.1.1 - Estudo da estabilidade de colunas isoladas aplicando a teoria do método geral .....	69
5.1.2 - Cálculo da carga crítica, usando-se a teoria do método geral .....	75
5.1.3 - Dimensionamento de colunas usando a teoria do método geral .....	78
5.2 - Processo aproximado do pilar padrão .....	80
5.2.1 - Estudo da estabilidade de colunas usando o processo aproximado do pilar padrão .....	82
5.2.2 - Estudo da carga crítica usando o processo aproximado do pilar padrão .....	85
5.2.3 - Cálculo do momento crítico de 1ª ordem - elaboração de ábacos e seu uso .	87
5.2.4 - Dimensionamento de colunas usando-se o processo aproximado do pilar padrão .	95



6. ESTUDO COMPARATIVO .....	100
6.1 - Estudo comparativo de diagramas de interação ( $\mu_{1crít} \times v$ ), elaborados com o processo a- proximado do pilar padrão e com o método ge- ral .....	100
6.2 - Estudo comparativo da estabilidade usando- -se o processo aproximado do pilar padrão e a teoria do método geral .....	112
6.3 - Estudo comparativo de carga crítica .....	114
6.4 - Estudo comparativo de dimensionamento .....	118
6.5 - Estudo comparativo dos diagramas de intera- ção obtidos com o processo aproximado do pi- lar padrão .....	120
6.6 - Estudo comparativo dos diagramas de intera- ção correspondentes aos aços classe A e B ...	122
7. APLICAÇÕES .....	125
7.1 - Verificação da estabilidade de colunas pelo método geral .....	125
7.2 - Cálculo de carregamento crítico pelo método geral .....	128
7.3 - Dimensionamento segundo o método geral .....	132
8. CONCLUSÕES FINAIS .....	133
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	135
APÊNDICE .....	137
- Programa para dimensionamento de pilares usando a teoria do método geral .....	138
- Programa para calcular o carregamento crítico e/ou a excentricidade crítica de pilares usando a teoria do método geral .....	155
- Programa para verificação de estabilidade de pila- res usando a teoria do método geral .....	161

- Programa para dimensionar pilares usando o processo aproximado do pilar padrão ..... 165
- Programa para calcular o carregamento crítico usando o processo aproximado do pilar padrão ..... 177
- Programa para verificação de estabilidade de pilares usando o processo aproximado do pilar padrão ... 182
- Programa para calcular pontos do diagrama de interação ( $\mu_{icr\tilde{it}}$  x  $\nu$ ) usando o processo aproximado do pilar padrão ..... 184
- Programa para calcular pontos do diagrama  $\mu$ - $\nu$ - $h/r$  usando o processo aproximado do pilar padrão ..... 186

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 - Generalidades

Os estudos ligados à estabilidade de colunas isoladas são de fundamental importância para analisar e projetar estruturas de concreto armado. Dentre suas aplicações destaca-se a análise da estabilidade dos elementos estruturais planos apertados e indeslocáveis, onde as barras comprimidas são normalmente analisadas no plano da estrutura como pilares isolados.

A análise destes pilares de concreto armado torna-se um tanto complexa pois, além da consideração da não-linearidade geométrica, tem-se ainda a não linearidade física dos materiais. Por outro lado, sabe-se que os fenômenos de instabilidade se manifestam de forma repentina e violenta, mesmo quando as ações não sofrem acréscimos bruscos. Assim sendo, praticamente todas as estruturas não têm capacidade de aviso de ruína iminente para este tipo de estado limite último, fato este que deve ser levado em conta na segurança imposta no projeto (ZAGOTTIS, 1980).

As exigências feitas pela norma brasileira NBR-6118 e pelo código modelo do CEB/FIP (1978) quanto à obrigatoriedade, ou não, da consideração dos efeitos de 2ª ordem e quanto aos processos de cálculo recomendados para a verificação da segurança e dimensionamento de pilares esbeltos, estão resumidas nas tabelas 1.1.1 e 1.1.2 respectivamente.

EXIGÊNCIAS DA NBR-6118				
ÍNDICE DE ESBELTEZ ( $\lambda$ )	CONSIDERAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES	PROCESSOS DE CÁLCULO		
		EXATO (MET. GERAL)	SIMPLIFICADO (PILAR PADRÃO)	SIMPLIFICADO (ITEM 4.1.1.3 $\phi$ )
$\lambda < 40$	Dispensável			
$40 \leq \lambda < 80$	Obrigatória	Dispensável	Permitido	Permitido
$80 \leq \lambda < 140$	Obrigatória	Dispensável	Permitido	Não permitido
$140 \leq \lambda < 200$	Obrigatória	Obrigatória	Não permitido	Não permitido
Não se deve usar índice de esbeltez superior a 200				

Tab. 1.1.1 - Exigências da NBR-6118 para verificação de pilares

EXIGÊNCIAS DO CEB-1978			
ÍNDICE DE ESBELTEZ ( $\lambda$ )	CONSIDERAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES	PROCESSOS DE CÁLCULO	
		EXATO (MET. GERAL)	SIMPLIFICADO (PILAR PADRÃO)
$\lambda < 25$	Dispensável		
$25 \leq \lambda < 140$	Obrigatória	Dispensável	Permitido
$140 \leq \lambda < 200$	Obrigatória	Obrigatória	Não permitido
Não se deve usar índice de esbeltez superior a 200			

Tab. 1.1.2 - Exigências do CEB-FIP para verificação de pilares

Com relação aos estudos de instabilidade de barras de concreto armado, poucas publicações foram feitas no Brasil, podendo-se citar, por exemplo: FUSCO (1981), HOFFMANN (1978) e ZAGOTTIS (1980). Além destes, pode-se citar ainda alguns trabalhos de mestrado: AUFIERO (1977), BUCHAIN (1979), BURKE (1974) e MARCOTTI (1984).

Dentre as publicações estrangeiras que tratam do assunto, destaca-se o manual de flambagem e instabilidade do CEB/FIP (1978) (boletim nº 123).

Os efeitos da deformação lenta não foram incluídos nos estudos deste trabalho, pois a inclusão destes efeitos é relativamente simples, podendo ser considerado como um simples aumento das deformações (encurtamentos) no cálculo das curvaturas ou como um aumento da excentricidade inicial, conforme o caso em análise.

## 1.2 - Objetivos

Os principais objetivos deste trabalho são:

- expor, de forma simples, os conceitos de instabilidade;
- desenvolver programas de computador, nos quais os roteiros utilizados são bem definidos e de fácil adaptação para quaisquer outros usos correlatos;
- expor a teoria do método geral e a teoria do pilar padrão ao alcance de iniciantes no assunto;
- fazer o estudo comparativo entre as teorias citadas, no tocante à obtenção de ábacos para dimensionamento, estudo da carga crítica e estabilidade de pilares isolados esbeltos, e
- contribuir para a informatização dos cálculos de pilares isolados esbeltos, no estado limite último de instabilidade, através de programas para microcomputador do tipo IBM-PC.

### 1.3 - Apresentação do trabalho

Para deixar mais claras as hipóteses básicas adotadas neste trabalho, sem necessidade de grandes consultas à bibliografia usada para a confecção do mesmo, apresentam-se, no Capítulo 2, as hipóteses de cálculo onde se destaca o estudo dos diagramas tensão-deformação dos materiais, aço e concreto, com os respectivos diagramas de cálculo usados na elaboração deste.

No Capítulo 3, encontram-se as noções básicas sobre o comportamento de barras comprimidas, enfocando-se o estudo da curvatura e das possíveis configurações de equilíbrio de uma barra solicitada à compressão centrada e excêntrica, no regime elástico linear e não-linear.

Nos Capítulos 4 e 5, o leitor pode encontrar, respectivamente, o estudo dos diagramas momento-normal-curvatura e os métodos para analisar e projetar peças comprimidas, no estado limite último de instabilidade, com suas devidas aplicações. Em cada um dos referidos capítulos, dá-se uma pequena descrição de sua finalidade, quando necessário, estende-se a estudos teóricos e deduções matemáticas relevantes, apresentando sugestões, recomendações e algoritmos para soluções de problemas através do uso de computador.

No Capítulo 6, faz-se uma análise comparativa dos resultados obtidos com o método geral e com o processo do pilar padrão, no tocante aos âbacos de dimensionamento, estudo da estabilidade e carga crítica de pilares isolados, comentando-se, quando necessário, a confiabilidade dos resultados obtidos com o processo do pilar padrão.

No Capítulo 7, encontram-se alguns exemplos resolvidos com o uso dos programas apresentados no Apêndice onde, dentro do possível, procurou-se confrontar os resultados com os de outros autores.

No Capítulo 8, expõem-se as conclusões finais a que se chegou, durante o desenvolvimento deste trabalho.

No Apêndice, apresentam-se os programas desenvolvidos em linguagem PASCAL com uso de equipamentos tipo IBM-PC.

## 2. HIPÓTESES DE CÁLCULO

Inicialmente, serão feitos alguns estudos preliminares a respeito dos diagramas, tensão-deformação, dos materiais aço e concreto, pois é a partir deles que se torna possível estabelecer o equilíbrio, entre os esforços resistentes e atuantes, relacionando-os com a posição deformada da peça. Neste estudo, o leitor poderá encontrar os diagramas, tensão-deformação dos materiais acima citados, elaborados com base em ensaios de laboratório, com seus respectivos diagramas de cálculo, usados neste trabalho e considerados pela norma brasileira, NBR-6118. Além disso, serão vistas, aqui, as hipóteses básicas adotadas para o dimensionamento de peças de concreto armado, relativas ao estado de deformações de tais peças quando supostas no estado limite último.

### 2.1 - Diagrama tensão-deformação ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) para o concreto

Apesar do uso corrente do concreto como material estrutural, o conhecimento de suas propriedades físicas exatas e comportamento sob várias combinações de tensões é ainda um assunto de interesse de muitos centros de



pesquisa. Por outro lado, sabe-se que, durante o carregamento, o concreto sofre não só deformações elásticas, mas também inelásticas e, dependendo do tempo, deformações causadas por alterações microestruturais.

Através de ensaios constata-se que as curvas tensão-deformação para o concreto, submetido à compressão axial, têm um comportamento próximo ao do elástico linear, para tensões até 30% da máxima tensão de compressão (KOTSOVOS e NEWMAN, 1977). Para tensões acima desse valor, o concreto começa a plastificar, originando um diagrama curvo que se acentua ao aproximar-se da máxima tensão de compressão. Depois desse pico, a curva decresce até ocorrer a ruptura do material, quando é atingido um estado limite último de deformação (RASCH, 1958).

Observa-se ainda, na fígura 2.1.1, que todos os picos estão localizados nas imediações da deformação 2%. Vê-se também que os concretos de alta resistência têm um comportamento mais quebradiço, levando a tensão do ramo descendente da curva a decrescer mais rapidamente do que nos concretos de baixa resistência.

A forma curva do diagrama,  $\sigma$ - $\epsilon$  do concreto, está associada ao mecanismo do surgimento das microfissuras que são, por sua vez, influenciadas por um grande número de parâmetros, dos quais enumeram-se os principais (SANTOS, 1977):

- resistência do concreto;
- idade do concreto quando do carregamento;
- modo de colocação da carga;
- duração do carregamento;
- forma da seção transversal;
- posição da linha neutra (compressão centrada ou excêntrica).

RASCH propôs a obtenção do diagrama,  $\sigma$ - $\epsilon$  na flexão, a partir dos diagramas  $\sigma$ - $\epsilon$  obtidos experimentalmente na compressão axial.

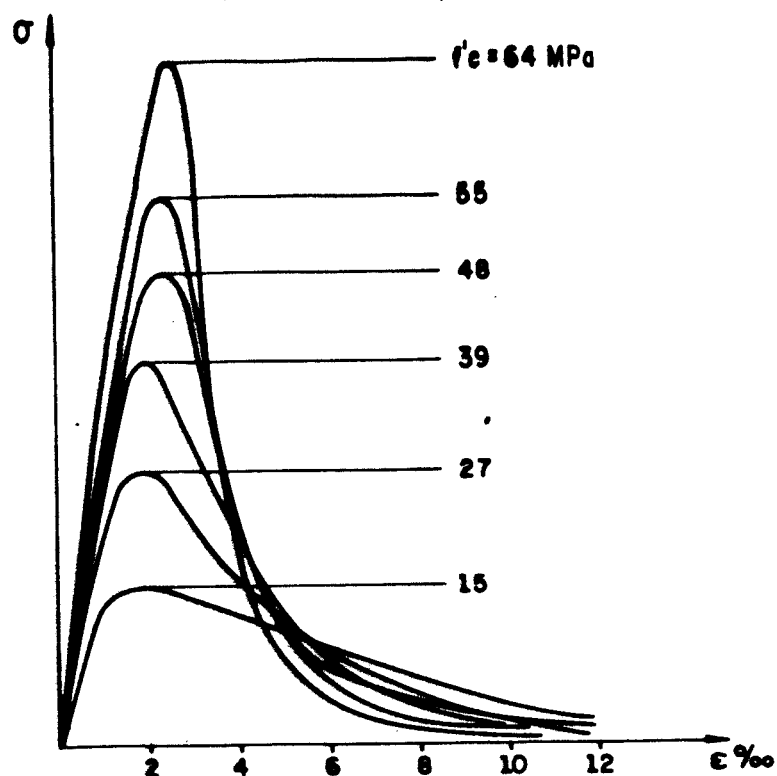


Fig. 2.1.1 - Curvas  $\sigma$ - $\epsilon$  para concretos de diferentes resistências, submetidos à compressão axial.

Embora se tenha apresentado apenas um resumo do comportamento do concreto, pode-se ver em textos mais completos sobre esse assunto que o concreto é um material que não obedece à lei de HOOKE, conforme mostra o diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$ , resultante de ensaios, figura 2.1.1 (CHEN and SALEEB, 1982). Entretanto, para efeito de dimensionamento prático, simplificam-se as distribuições curvas de tensões no concreto, que ocorrem na zona comprimida da peça, admitindo-se que, no estado limite último, a relação tensão/deformação de cálculo é dada por um diagrama parábola-retângulo, na região de compressão e, nulo na região de tração, uma vez que qualquer resistência do concreto à tração é desprezada, figura 2.1.2.

Algebricamente, a relação  $\sigma$ - $\epsilon$  de cálculo pode ser expressa por:

$$\sigma_c = -0,85f_{cd} \quad \text{para} \quad -0,002 \geq \epsilon_c \geq -0,0035 \quad (2.1.1)$$

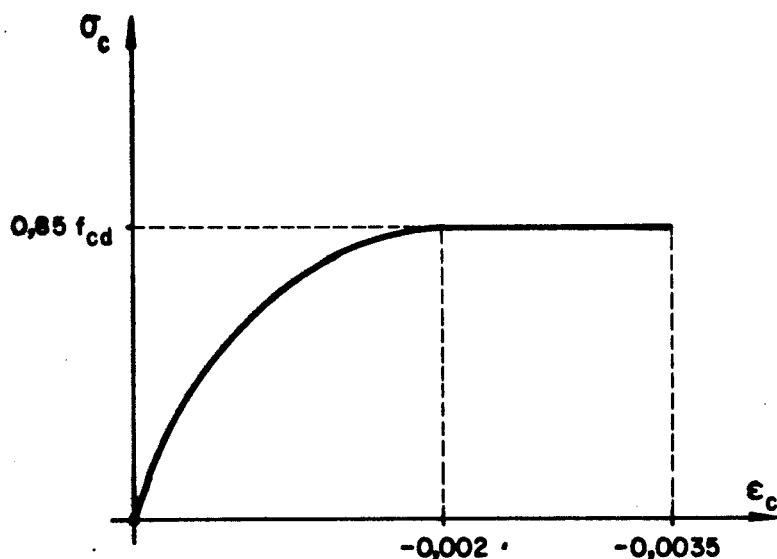


Fig. 2.1.2 - Diagrama tensão-deformação de cálculo para o concreto.

$$\sigma_c = 850f_{cd}(1+250\epsilon_c)\epsilon_c \quad \text{para} \quad 0 \geq \epsilon_c \geq -0,002 \quad (2.1.2)$$

$$\sigma_c = 0 \quad \text{para} \quad \epsilon_c \geq 0 \quad (2.1.3)$$

O coeficiente 0,85 recomendado por todas as normas mais recentes, como fator de redução da resistência característica do concreto, deve-se, sobretudo, a ensaios feitos por H. Rüşh (Boletim nº 36, CEB-1962). Tais ensaios permitiram concluir que a redução de resistência do concreto devida a cargas de longa duração pode, simplificada, ser tomada da ordem de 15% daquela correspondente a carregamentos de curta duração.

Os valores -0,002 e -0,0035 correspondem aos limites máximos de deformações permitidos para o concreto e serão tratados com mais detalhes em 2.3.3. Quanto ao sinal negativo, o mesmo é mantido para caracterizar encurtamentos e tensões de compressão, evitando-se análises particulares para atribuir o sinal dos esforços resultantes e, facilitando portanto os cálculos automatizados.

O uso do diagrama parábola-retângulo, figura 2.1.2, para representar a relação tensão/deformação no concreto, conduz a um cálculo prático sem grandes complicações, sendo inclusive válido para qualquer forma de seção transversal.

## 2.2 - Diagramas tensão-deformação ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) para os aços

De acordo com a configuração do diagrama tensão-deformação, obtida em ensaios de laboratório, os aços dividem-se em duas classes:

- Aço classe A, laminado a quente, com escoamento definido, caracterizado por patamar no diagrama tensão-deformação, figura 2.2.1.

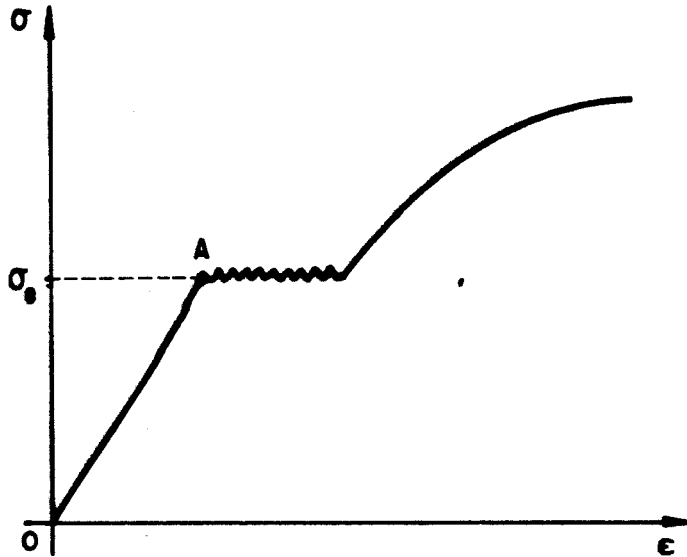


Fig. 2.2.1 - Diagrama tensão-deformação para o aço classe A.

- Aço classe B, encruado por deformação a frio, com tensão convencional de escoamento, definida por uma deformação permanente 2%, figura 2.2.2.

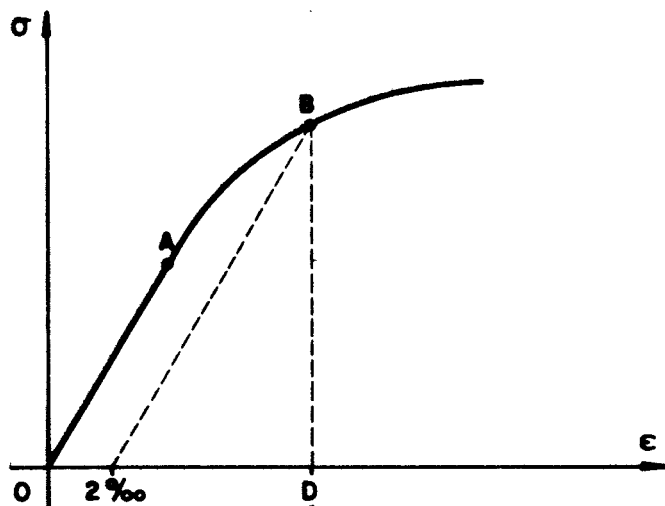


Fig. 2.2.2 - Diagrama tensão-deformação para o aço classe B.

Nos aços classe A, o limite de elasticidade, o limite de proporcionalidade e a tensão de escoamento do ponto A da fig. 2.2.1, são praticamente coincidentes.

Nos aços classe B, o ponto A define o limite de proporcionalidade e o ponto B corresponde à tensão de escoamento convencional.

Tanto para os aços classe A quanto para os de classe B, a NBR-6118 adota o módulo de deformação longitudinal,  $E_s$ , igual a 210000 MPa, e admite ainda um comportamento na compressão simétrico ao comportamento na tração.

### 2.2.1 - Diagrama de cálculo do aço classe A

A NBR-6118 permite simplificar o diagrama característico  $\sigma$ - $\epsilon$  do aço classe A, figura 2.2.1, adotando-se o diagrama típico de material elasto-plástico perfeito, figura 2.2.3, obtido dividindo-se as ordenadas da figura 2.2.1 por um coeficiente de minoração,  $\gamma_s$ .

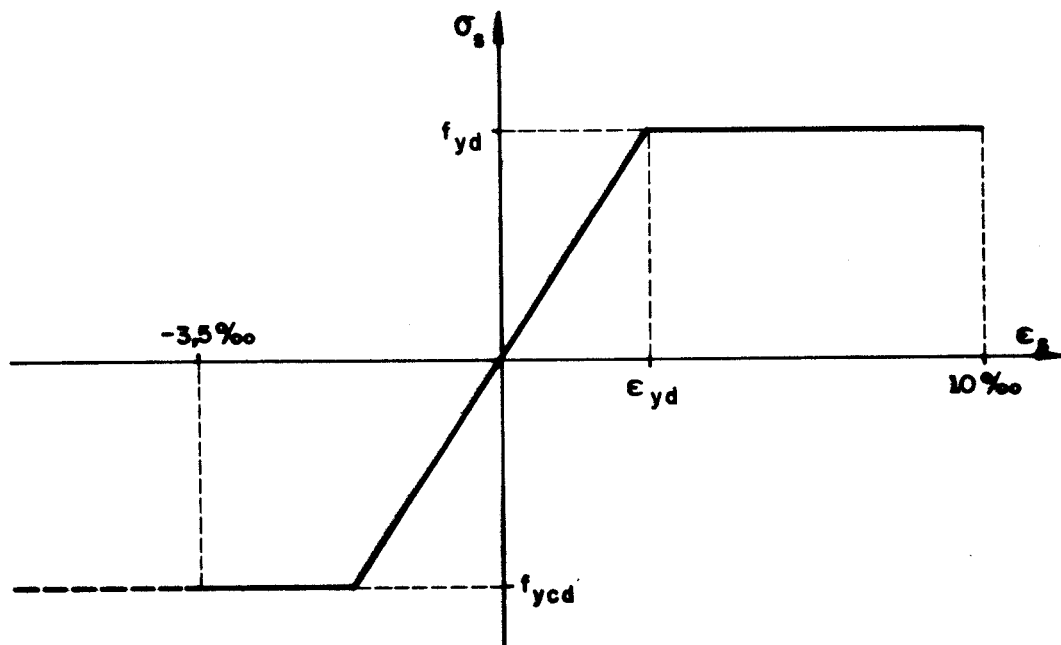


Fig. 2.2.3 - Diagrama tensão-deformação de cálculo para o aço classe A.

No diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  da figura 2.2.3, observa-se que a tensão varia linearmente até a deformação específica alcançar o limite de escoamento  $\epsilon_{yd}$ , mantendo-se constante deste ponto em diante. Com relação ao máximo alongamento e encurtamento específicos permitidos, limitou-se em 10% e -3,5%, respectivamente, valores estes prescritos na NBR-6118.

## 2.2.2 - Diagrama de cálculo do aço classe B

No caso do aço classe B, segundo a NBR-6118, o diagrama adotado para a relação  $\sigma$ - $\epsilon$  de cálculo é o apresentado na figura 2.2.4, no qual se destacam três trechos:

TRECHO 1 - Linear até um valor da tensão  $\sigma_s = 0,7f_{yd}$ ;

TRECHO 2 - Curvo, entre o ponto definido pela tensão  $\sigma_s = 0,7f_{yd}$  e o ponto correspondente à tensão de escoamento convencional, cuja expressão analítica é dada, segundo a NBR-6118, por uma parábola do 2º grau, isto é,

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + \frac{1}{45} \left( \frac{|\sigma_s|}{f_{yd}} - 0,7 \right)^2 \cdot \frac{\sigma_s}{|\sigma_s|} \quad (2.2.1)$$

ou em sua forma inversa

$$\sigma_s = \frac{\epsilon_s}{|\epsilon_s|} \cdot f_{yd} \left[ 0,7 - \frac{22,5f_{yd}}{E_s} + \sqrt{\left( \frac{22,5f_{yd}}{E_s} - 0,7 \right)^2 + 45|\epsilon_s| - 0,49} \right] \quad (2.2.2)$$

onde  $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s$  sendo  $f_{yk}$  a resistência característica do aço, e

TRECHO 3 - Patamar de escoamento válido a partir do ponto onde a tensão  $\sigma_s$  atinge o valor  $f_{yd}$ .

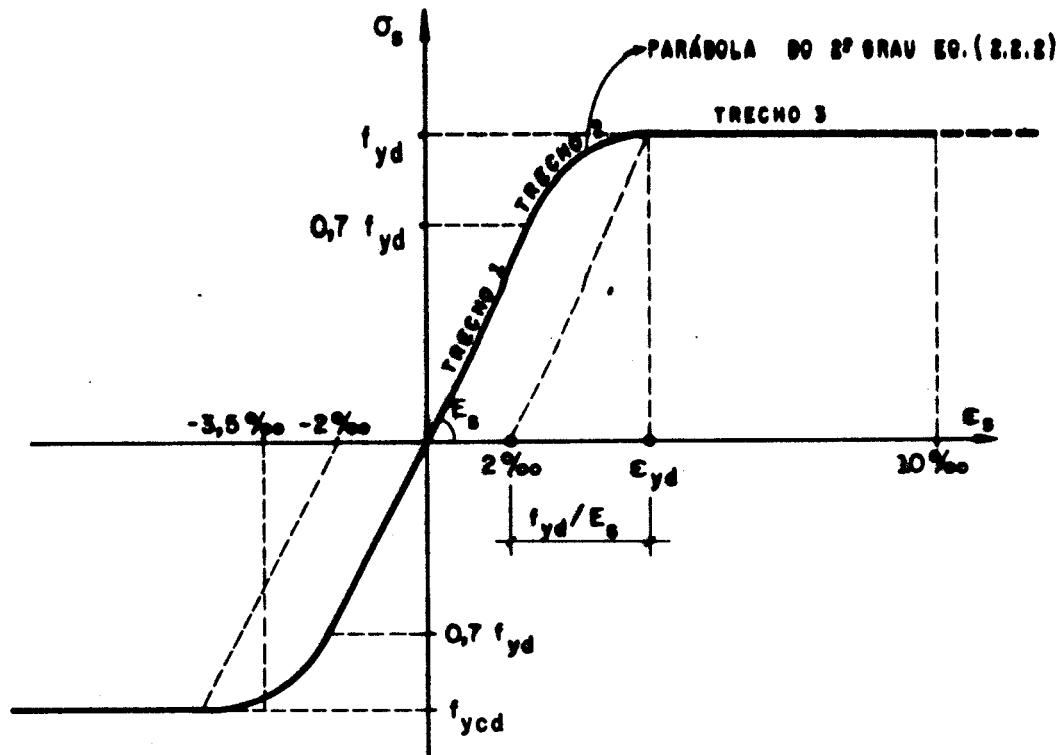


Fig. 2.2.4 - Diagrama tensão-deformação de cálculo para o aço classe B.

O início do patamar de escoamento convencional corresponde a uma deformação específica dada por

$$\epsilon_{yd} = 2\text{‰} + f_{yd}/E_s \quad (2.2.3)$$

Também para os aços os sinais, das tensões de compressão e encurtamentos serão negativos, e as tensões de tração e alongamentos positivos, pelos motivos anteriormente citados.

### 2.3 - Hipóteses relativas ao estado de deformações

As hipóteses básicas adotadas para o dimensionamento e verificação de seções transversais de peças de concreto armado, no estado limite último, relativo à ruptura

do concreto ou à deformação plástica excessiva do aço, podem ser resumidas nos seguintes itens:

### 2.3.1 - Manutenção da seção plana

As seções transversais planas, antes do carregamento, permanecem planas até à ruptura, implicando em uma distribuição linear das deformações na seção.

Com esta hipótese, as deformações normais específicas são, em cada ponto, proporcionais à sua distância à linha neutra da seção; inclusive quando a peça alcança o estado limite último, desde que se tenha, segundo FUSCO (1981), uma relação  $l_0/d > 2$ , sendo  $l_0$  a distância entre as seções de momento fletor nulo e  $d$  a altura útil da seção transversal.

### 2.3.2 - Solidariedade dos materiais

A deformação específica em cada barra da armadura é a mesma do concreto adjacente, pois admite-se a perfeita aderência entre o aço e o concreto.

### 2.3.3 - Encurtamentos máximos do concreto e alongamentos máximos das armaduras

Mostrou-se no item 2.1 que na compressão axial os concretos atingem picos máximos de tensões para deformações de 2%. Contudo, na flexão simples, sua máxima capacidade de absorver momentos fletores é próxima da deformação de 3,5%, variando na compressão excêntrica, conforme figura 2.3.1.

Para a armadura tracionada o limite de deformação máximo permitido foi arbitrado em 10%, valor este que está muito aquém da ruptura dos aços. Entretanto, tal valor leva o concreto a atingir sua capacidade máxima no que



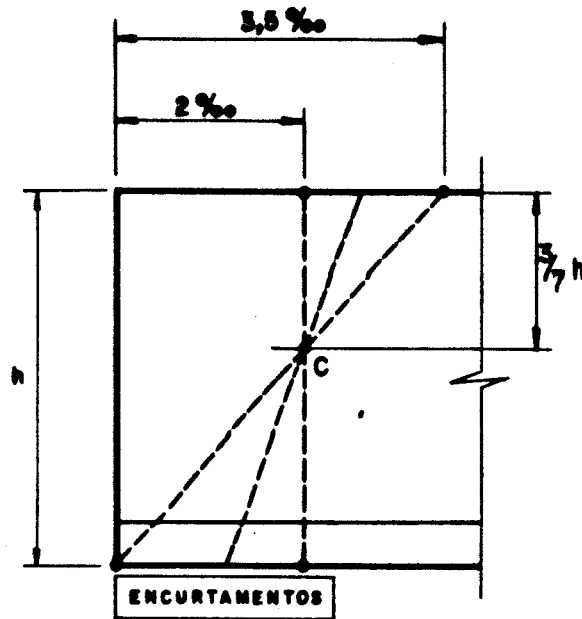


Fig. 2.3.1 - Deformação do concreto comprimido.

diz respeito a aberturas de fissuras, comprometendo a capacidade de resistência da peça.

Para melhor entender os limites descritos para as deformações em uma peça de concreto armado, sintetizam-se, na figura 2.3.2, todas as possíveis configurações últimas do diagrama de deformações específicas, ao longo de uma seção transversal.

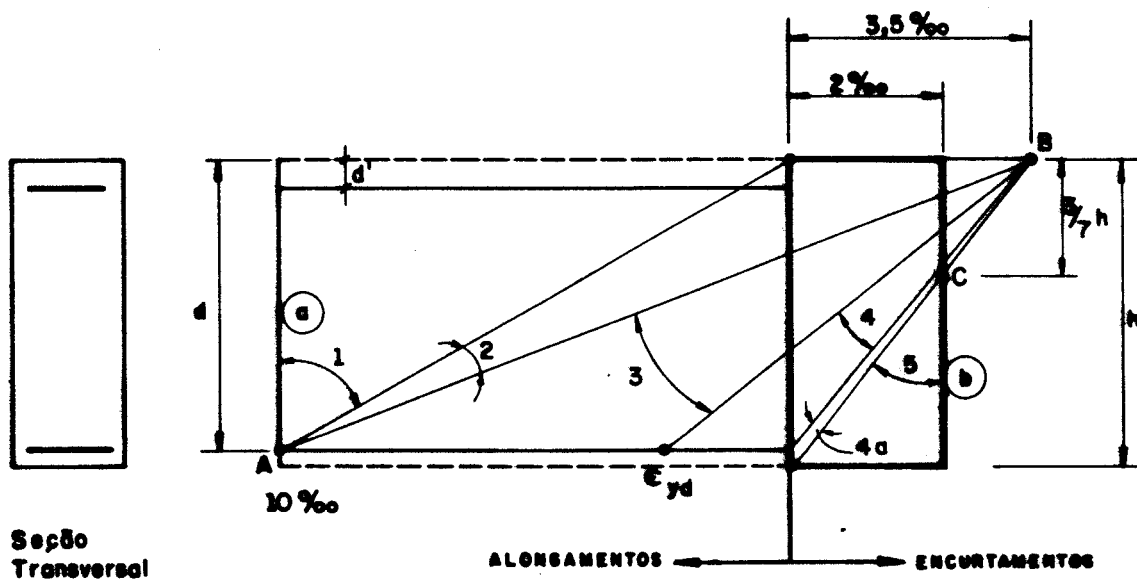


Fig. 2.3.2 - Domínios de deformações.

Na figura 2.3.2 estão definidos seis domínios de deformações. Os domínios 1 e 2 são fixados pelo ponto A, sendo caracterizados por:

DOMÍNIO 1 - Tração axial e tração com pequena excentricidade, sem tensões de compressão, e

DOMÍNIO 2 - Flexão simples ou composta sem ruptura do concreto comprimido e com o máximo alongamento permitido na armadura. .

Os domínios 3, 4 e 4a são fixados pelo ponto B, sendo caracterizados por:

DOMÍNIO 3 - Flexão simples com seção normalmente armada ou flexão composta, com a simultaneidade de escoamento do aço tracionado com tensão de ruptura no concreto,

DOMÍNIO 4 - Flexão simples com seção super-armada ou flexão composta, com o concreto atingindo a tensão de ruptura antes que o aço entre em escoamento, e

DOMÍNIO 4a- Flexão composta com as armaduras comprimidas.

O domínio 5 está fixado pelo ponto C, estando nele incluído o caso de compressão não-uniforme, sem tensões de tração.

Os diagramas de deformações referentes aos diferentes domínios variam desde a reta a, correspondente à tração uniforme, até a reta b, correspondente à compressão uniforme.

É oportuno mostrar que a partir dos valores limites 10% , 3,5% e 2% , dados na figura 2.3.2, podem-se enquadrar os 6 domínios estudados em apenas 3 regiões bem definidas, figura 2.3.3.

A região I é definida pelo limite de deformação de 10% na armadura mais tracionada, podendo a fibra de concreto menos tracionada variar entre deformações de 3,5% e

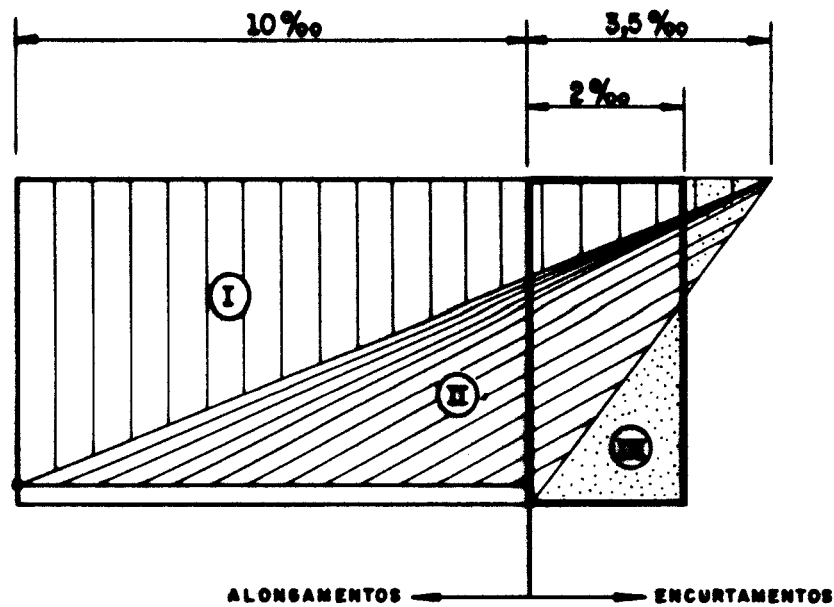


Fig. 2.3.3 - Regiões de deformações.

10‰, mostradas na figura 2.3.3, englobando assim os domínios 1 e 2, anteriormente definidos. A segunda região é caracterizada pela deformação máxima (encurtamento), 3,5‰ da fibra mais comprimida da peça, podendo as deformações na armadura mais tracionada variar entre 10‰ e zero, assim a região II engloba os domínios 3, 4 e 4a. A região III é caracterizada pelo encurtamento máximo de 2‰, para as fibras distantes  $3/7$  de  $h$  da borda mais comprimida da peça, coincidindo portanto com o domínio 5, sendo usada para peças totalmente comprimidas.

### 3. NOÇÕES BÁSICAS SOBRE O COMPORTAMENTO DE BARRAS COMPRIMIDAS

Encontra-se neste capítulo, um estudo de barras fletidas, com o emprego da expressão exata e simplificada da curvatura. Além disso, mostra-se aqui como a consideração da linearidade ou não-linearidade física dos materiais afeta o diagrama de momento interno-curvatura.

Faz também parte deste capítulo o estudo das possíveis configurações de equilíbrio de uma barra fletida, destacando-se a caracterização ou não do fenômeno da instabilidade em barras esbeltas, submetidas à compressão centrada e excêntrica.

Os estudos aqui desenvolvidos são de fundamental importância para entendimento dos capítulos subseqüentes, podendo ser encontrados em literaturas especializadas: FUSCO (1981); ZAGOTTIS (1980); CEB/FIP (1978), contudo, são apresentados neste texto, para evitar grandes consultas às referências citadas.

#### 3.1 - Relações básicas

Considerando-se a barra da figura 3.1.1, verifica-se que seu eixo, inicialmente reto, sob ação de carregamen-

tos crescentes, torna-se uma curva, denominada linha elástica, devido ao fato de as seções transversais da barra se deformarem. Daí, desprezando-se as deformações axiais e admitindo-se a validade da hipótese citada em 2.3.1, além da consideração de pequenos deslocamentos, é possível, com o auxílio da figura 3.1.2, colocar a curvatura de uma seção transversal qualquer, da barra fletida, em função da deformação de uma fibra genérica,  $\epsilon$ , assim:

$$1/r = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\epsilon}{y} \quad (3.1.1)$$

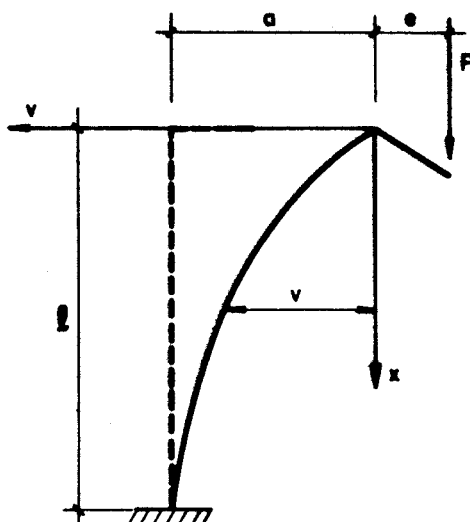


Fig. 3.1.1 - Deformada de uma barra submetida à flexão com carga pontual.

De outra forma, sabe-se, do cálculo diferencial, que a expressão exata da curvatura é dada por:

$$1/r = \frac{d^2 v/dx^2}{\left[1+(dv/dx)^2\right]^{3/2}} \quad (3.1.2)$$

Na expressão acima, para pequenos deslocamentos, casos usuais da prática, pode-se desprezar o termo  $(dv/dx)^2$ ,

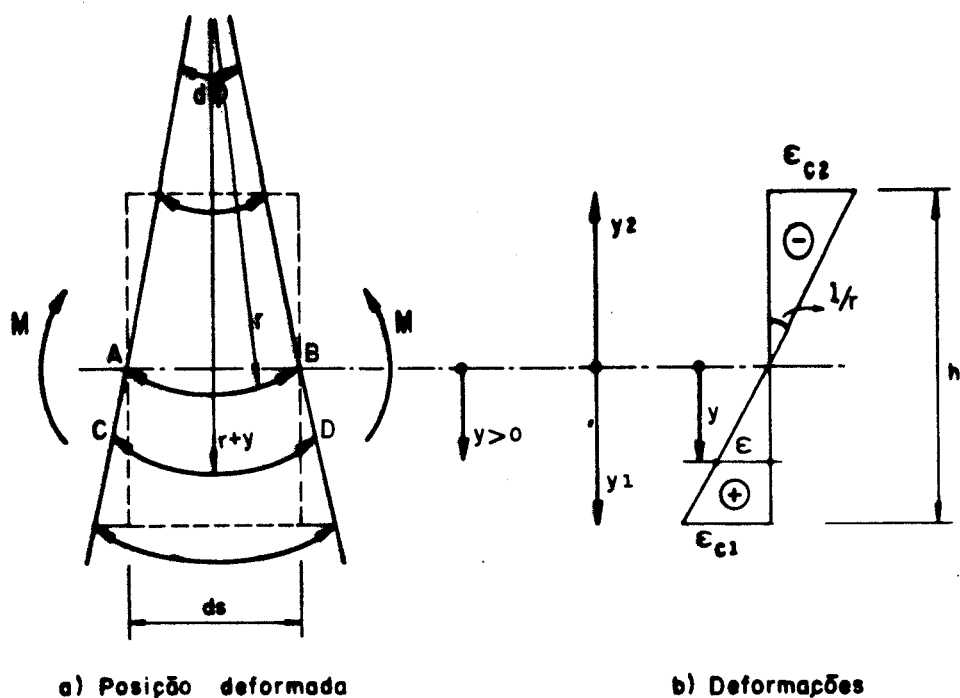


Fig. 3.1.2 - Curvatura na flexão.

em presença da unidade, resultando a equação diferencial simplificada da curvatura

$$1/r = d^2v/dx^2 \quad (3.1.3)$$

Igualando as expressões (3.1.1) e (3.1.3) e considerando a figura anterior, com as convenções de sinais nela indicadas, pode-se escrever a derivada segunda da elástica,  $d^2v/dx^2$ , em função das deformações das fibras extremas da seção transversal, assim:

$$1/r = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\epsilon_{c1} - \epsilon_{c2}}{h} \quad (3.1.4)$$

No caso de barras de concreto armado, com deformações extremas  $\epsilon_c$  no concreto comprimido e  $\epsilon_s$  na armadura de tração, resulta

$$1/r = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\epsilon_s - \epsilon_c}{d} \quad (3.1.5)$$

onde  $d$  representa a altura útil da seção transversal.

Admitindo-se comportamento elástico linear dos materiais, as tensões e deformações serão dadas pelas conhecidas expressões da Resistência dos Materiais (TIMOSHENKO, 1970), possibilitando escrever a equação diferencial simplificada da curvatura (3.1.3), como uma função linear do momento interno resistente,

$$1/r = \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_I}{EI} \quad (3.1.6)$$

sendo esta, a equação diferencial da linha elástica das barras fletidas, no regime elástico linear.

Por outro lado, para materiais que tenham um comportamento elástico não-linear, figura 3.1.3a, ou elasto-plástico, figura 3.1.3b, caso do concreto armado, as tensões não mais serão proporcionais às deformações. Com isto, as expressões da Resistência dos Materiais não mais serão válidas, e conseqüentemente, nem a expressão (3.1.6).

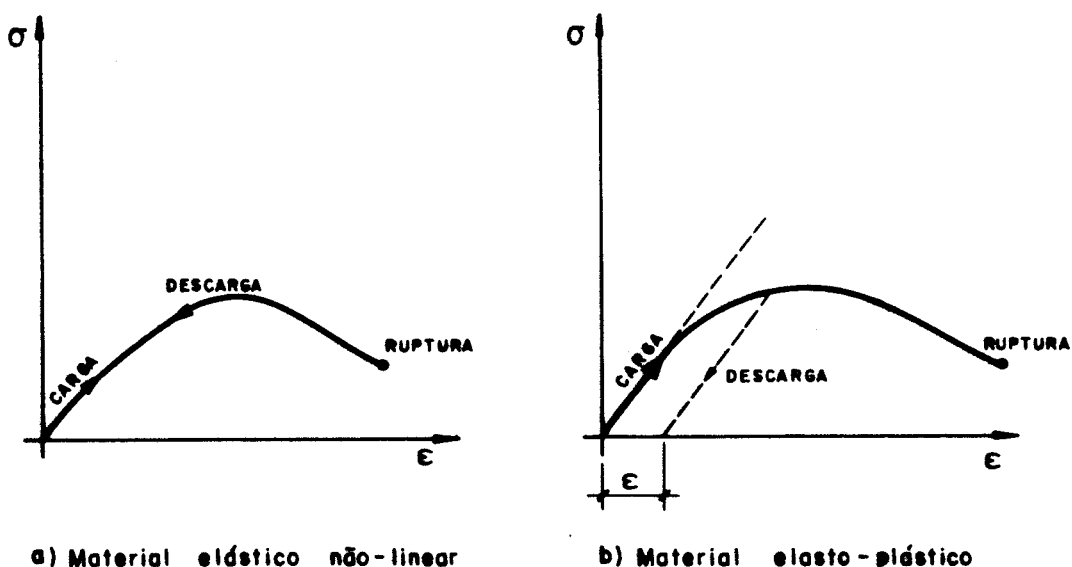


Fig. 3.1.3 - Diagramas tensão-deformação.

Embora o concreto tenha um comportamento elasto-plástico, com relação tensão-deformação dependente da história

ria do carregamento aplicado, o diagrama proposto pela NBR-6118 apenas considera uma relação biunívoca entre essas duas grandezas, para qualquer que seja o instante considerado, desprezando, portanto, possíveis efeitos residuais.

Considerando válida a distribuição de deformações, dada na figura 3.1.4, podem-se calcular as curvaturas das seções transversais de barras fletidas, usando-se a expressão (3.1.4) ou qualquer outra relação compatível com a citada figura. Por exemplo:

$$1/r = \frac{-\epsilon_{c2}}{\frac{h}{2} + y_0} \quad (3.1.7)$$

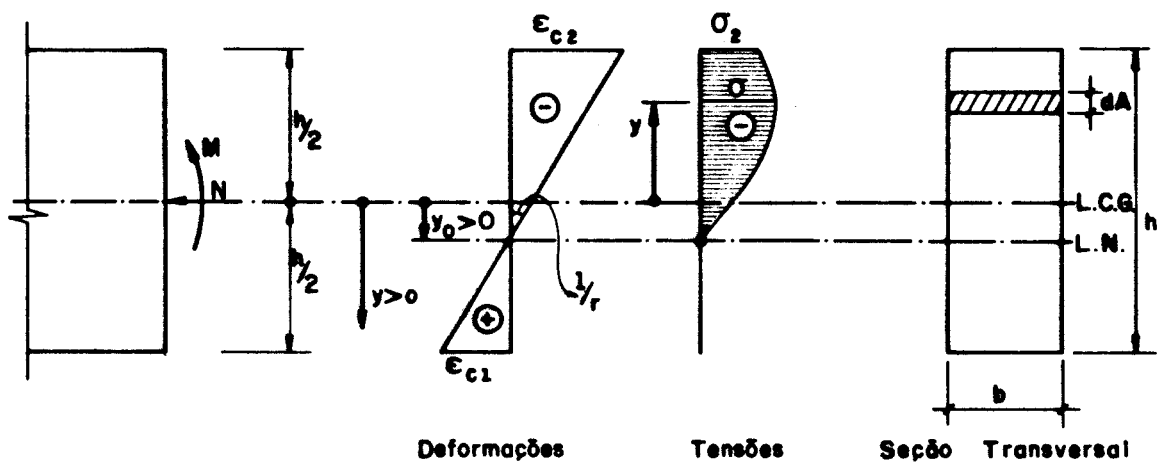


Fig. 3.1.4 - Distribuição de tensões e deformações numa seção homogênea de material elástico não-linear.

Conforme já citado, devido à resposta não-linear dos materiais, o momento interno resistente não mais será u ma função linear da curvatura, isto é ,

$$1/r \neq M_I/EI$$

passando a ser dado pelo cálculo direto da resultante de tensões correspondente a momentos

$$M_I = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z y \cdot dA \quad (3.1.8)$$



o que permite concluir que, devido à não-linearidade física dos materiais, figuras 3.1.3, o momento interno resistente passará a ser uma função não-linear da curvatura.

As figuras 3.1.5 a e b mostram os esboços dos diagramas, momento interno resistente - curvatura, para barra no regime elástico linear e elástico não-linear, respectivamente. O caso não linear terá um estudo completo no Capítulo 4, devido a sua importância no estudo de instabilidade de barras comprimidas.

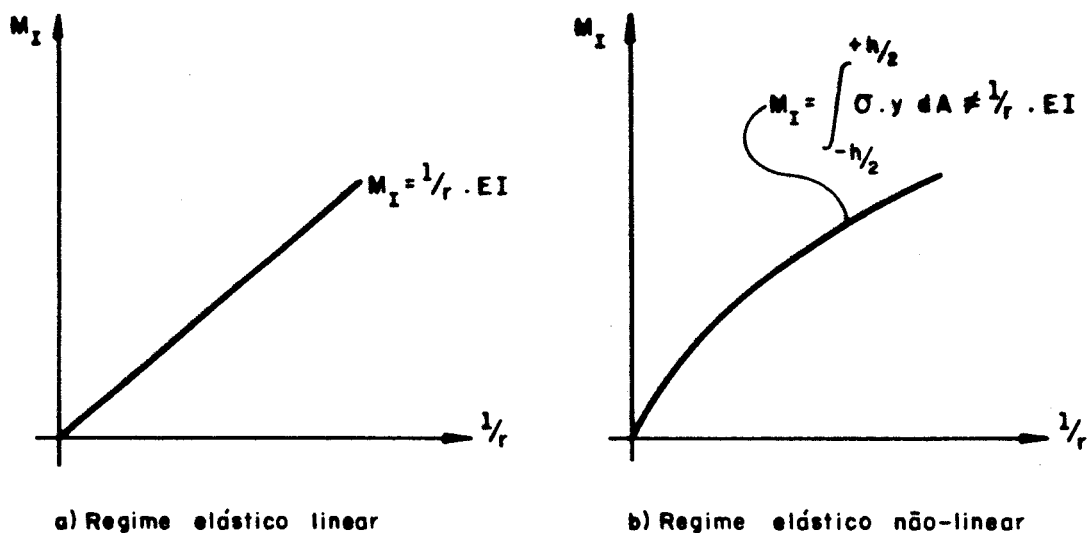


Fig. 3.1.5 - Diagramas de momento interno-curvatura.

### 3.2 - Considerações sobre o uso da expressão exata da curvatura

O uso da expressão exata da curvatura (3.1.2), para calcular os deslocamentos do eixo de uma barra fletida, afeta diretamente o momento externo quando se consideram os efeitos de 2.<sup>a</sup> ordem.

Para que o leitor possa perceber claramente o comportamento da função momento externo, na compressão excêntrica ou centrada usando a expressão acima citada, admitem-se as configurações fletidas de equilíbrio dadas nas figuras 3.2.1a e b.

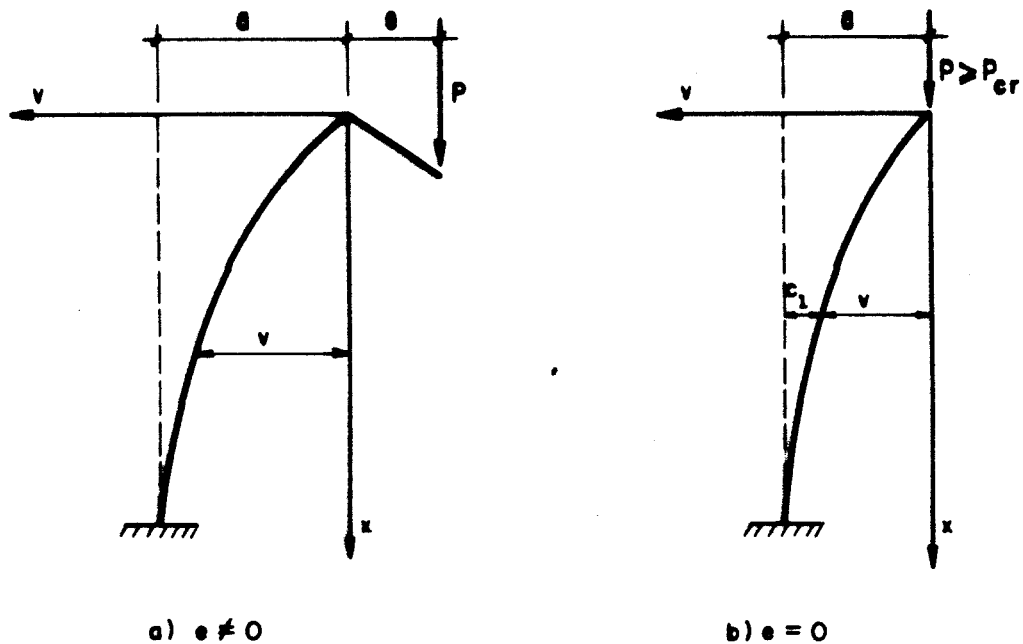


Fig. 3.2.1 - Configurações fletidas de equilíbrio.

Para a barra fletida da figura 3.2.1a o momento externo atuante é dado, em cada ponto, por

$$M_e = P(e+v) \tag{3.2.1}$$

cujo valor máximo vale

$$M_e = P(e+a) \tag{3.2.2}$$

Considerando a relação (3.2.1) e a expressão exata da curvatura (3.1.2), pode-se chegar à relação momento externo-curvatura, que necessariamente é uma relação não linear, cujo diagrama tem a forma indicada na figura 3.2.2a.

Particularizando o estudo anterior, para o caso de compressão centrada,  $e = 0$ , figura 3.2.1b, obtém-se um diagrama do tipo mostrado na figura 3.2.2b, ficando constatada, também aqui, a não-linearidade da função momento externo-curvatura.

Chama-se a atenção para o fato de que a consideração da expressão exata da curvatura em nada afeta o momen-

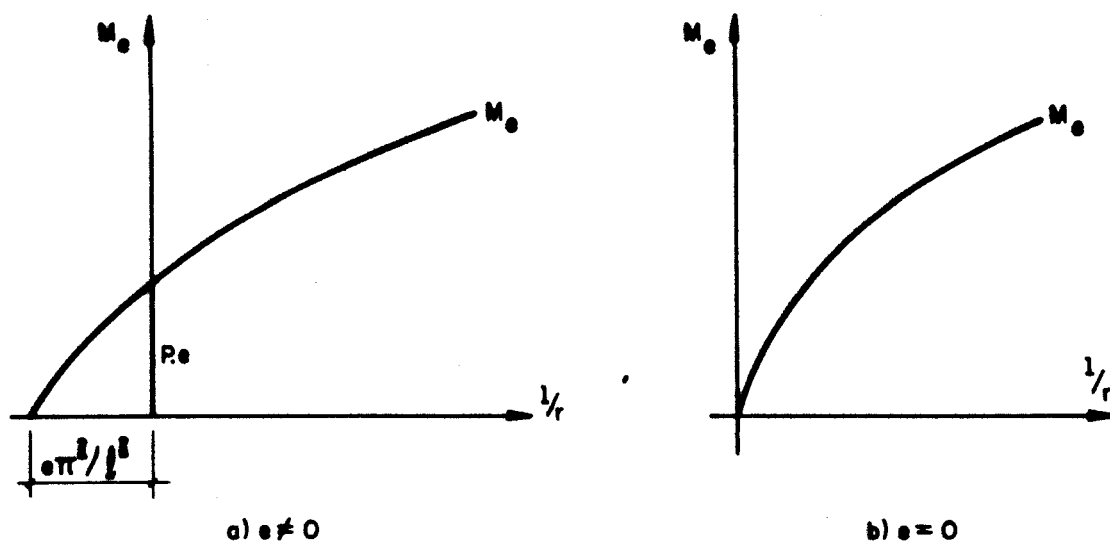


Fig. 3.2.2 - Diagramas momento externo-curvatura.

to interno resistente, pois, conforme estudo feito no item 3.1, o mesmo depende somente da consideração da linearidade ou não-linearidade física dos materiais da barra.

Apesar do uso da equação exata da curvatura (3.1.2) não ser o objetivo deste trabalho, serão ressaltadas as situações onde seu uso for necessário. Além disto, apresenta-se em 3.4 o estudo das possíveis configurações de equilíbrio considerando os diagramas de momento externo-curvatura, obtidos anteriormente com uso da citada equação.

### 3.3 - Considerações sobre o uso da equação diferencial simplificada da curvatura

Os estudos de barras fletidas, de concreto armado, levando-se em conta os efeitos de 2<sup>a</sup> ordem, com o uso da expressão simplificada da curvatura (3.1.3), satisfazem os objetivos deste trabalho e evitam as dificuldades dos problemas matemáticos decorrentes do emprego da equação exata (3.1.2).

Inicialmente, serão consideradas as aplicações da equação simplificada da curvatura, acima citada, nos estudos de barras esbeltas, no regime elástico linear, submeti-

das à flexão-composta. Em seguida, serão particularizados tais estudos para o caso de compressão centrada. Em ambos os estudos serão mostradas as particularidades decorrentes da utilização da equação simplificada (3.1.3), no lugar da equação exata (3.1.2).

Para se atingirem os objetivos propostos, considere-se inicialmente configuração fletida da barra da figura 3.2.1a e a expressão do momento externo (3.2.1). Com isto, e considerando a manutenção do equilíbrio dado pela condição

$$M_e = M_I \quad (3.3.1)$$

em cada seção da barra, pode-se escrever a equação diferencial simplificada da curvatura (3.1.6), no regime elástico linear

$$1/r = \frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{P(e+v)}{EI} \quad (3.3.2)$$

Desenvolvendo a expressão acima, e fazendo

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (3.3.3)$$

chega-se à equação

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v + k^2 e = 0, \quad (3.3.4)$$

cuja solução geral, segundo o cálculo diferencial, é

$$v(x) = C_1 \text{sen} kx + C_2 \text{cos} kx - e \quad (3.3.5)$$

Impondo-se às condições de contorno da barra da figura 3.2.1a, chega-se facilmente à expressão da flecha máxima

$$a = \frac{(1 - \cos k\ell), e}{\cos k\ell} \quad (3.3.6)$$

Vê-se que, o uso da equação diferencial simplificada da curvatura (3.1.3), na flexão composta, regime elástico linear, permite o cálculo das flechas da configuração fletida de equilíbrio, equação (3.3.5). Contudo, quando  $\cos k\ell \rightarrow 0$ , tal uso leva a uma indeterminação, conforme mostra a equação (3.3.6).

No caso de compressão centrada, admite-se inicialmente que, sob ação de um carregamento crescente, pode ser atingido um estado limite, a partir do qual, no regime elástico linear, a forma estável de equilíbrio passa a ser a configuração fletida, com  $C_1 \neq 0$ , figura 3.2.1b.

Particularizando o estudo anterior para o caso de compressão centrada, isto é, fazendo  $e = 0$  na equação (3.3.2), obtêm-se, para solução da equação diferencial simplificada da linha elástica, segundo o cálculo diferencial, a expressão

$$v(x) = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \operatorname{cos} kx \quad (3.3.7)$$

onde, impondo-se as condições de contorno da barra da figura acima citada, obtêm-se

$$\text{para } x = 0 \rightarrow v = 0, \text{ logo } C_2 = 0 \quad (3.3.8)$$

$$\text{para } x = \ell \rightarrow dv/dx = 0, \text{ logo } C_1 k \operatorname{cos} k\ell = 0 \quad (3.3.9)$$

Como  $C_1$  deve ser obrigatoriamente não-nulo, para que exista a configuração fletida de equilíbrio na compressão centrada, a equação (3.3.9) só se verifica para

$$\operatorname{cos} k\ell = 0 \quad (3.3.10)$$

onde o menor valor do arco que verifica a equação acima é

$$k\ell = \pi/2 \quad (3.3.11)$$

Substituindo a expressão (3.3.11) em (3.3.3), obtêm-se

$$P = \frac{\pi^2 EI}{(2\ell)^2} \quad (3.3.12)$$

que representa o menor valor da carga capaz de levar a barra da figura 3.2.1b a atingir um estado limite, a partir do qual a forma reta de equilíbrio é instável. A partir deste valor da carga, chamado de carga crítica de Euler,  $P_{cr}$ , ou carga de flambagem, surge a configuração fletida de equilíbrio estável, que só é determinada com o emprego da expressão exata da curvatura.

O denominador  $(2\ell)^2$  representa o quadrado do comprimento de flambagem, para o caso estudado. Para quaisquer outras vinculações, chega-se à mesma carga crítica, desde que esta seja escrita em termos do comprimento de flambagem  $\ell_e$  da barra

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_e^2} \quad (3.3.13)$$

Do estudo feito, chama-se a atenção para os resultados obtidos com a utilização da equação simplificada da curvatura (3.1.3), pois, para  $\cos k\ell \rightarrow 0$ , as flechas obtidas com uso da equação (3.3.6) tenderiam ao infinito, levando-se a acreditar que a carga crítica de Euler teria algum significado físico na flexão composta, figura 3.3.1.

Este fato contudo não é verdade, conforme se comprova, utilizando a equação exata da linha elástica

$$1/r = \frac{d^2 v/dx^2}{[1+(dv/dx)^2]^{3/2}} = -k^2 v - k^2 e_i \quad (3.3.14)$$

ou, a figura (3.3.2) obtida desta, onde se verifica que, na flexão composta de pilares, no regime elástico linear, não ocorrerá problema de instabilidade de equilíbrio, conforme será mostrado com mais detalhes em 3.4.

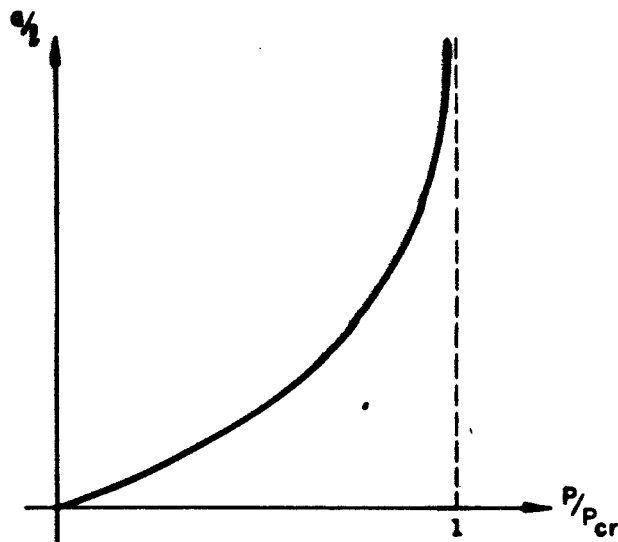


Fig. 3.3.1 - Flechas na flexão composta, utilizando a equação simplificada da curvatura.

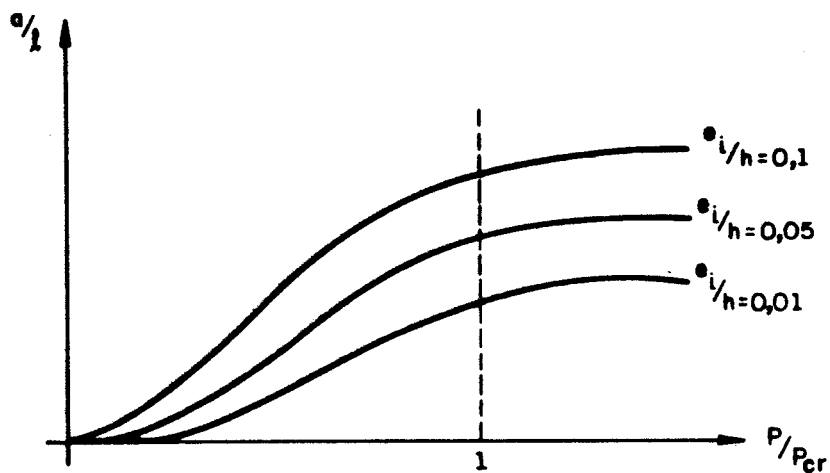


Fig. 3.3.2 - Flechas na flexão composta utilizando a equação completa da curvatura.

Com relação à compressão centrada, o uso da equação simplificada da curvatura (3.1.3), na expressão da linha elástica, permite, como se viu, o cálculo da carga crítica, mas tem o inconveniente de tornar as flechas da configuração fletida de equilíbrio indeterminadas, figura 3.3.3, cujo cálculo requer o uso da equação exata da curvatura (3.1.2).

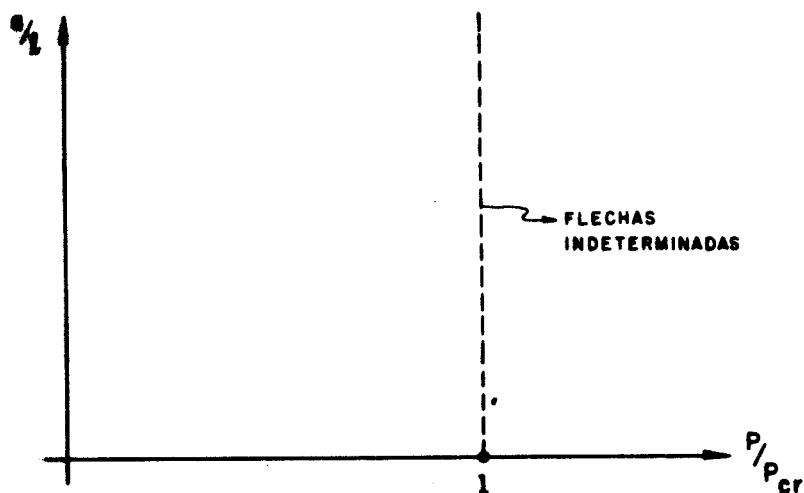


Fig. 3.3.3 - Emprego da expressão simplificada da curvatura na compressão centrada.

### 3.4 - Estabilidade e instabilidade das configurações fletidas de equilíbrio-regime elástico linear

Os estudos ligados à estabilidade e instabilidade das configurações fletidas de equilíbrio, para o caso de flexão composta, figura 3.2.1a, no regime elástico linear, com a consideração da expressão exata da curvatura, serão feitos comparando-se graficamente o diagrama de momento externo-curvatura da figura 3.2.2a com o diagrama de momento interno resistente-curvatura que, no regime elástico linear, é dado pela figura 3.1.5a.

Desta comparação, figura 3.4.1, constata-se que, para qualquer valor do carregamento, admitindo-se que não ocorra ruptura do material, existirá sempre uma configuração de equilíbrio caracterizado por

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r(o)} \quad \text{tal que} \quad M_e = M_I \quad (3.4.1)$$

ou melhor, haverá sempre o cruzamento dos diagramas de  $M_e$  e  $M_I$ .



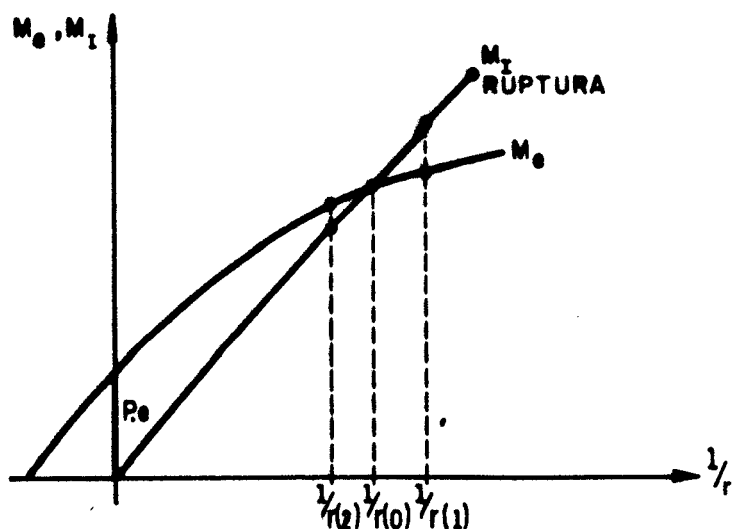


Fig. 3.4.1 - Estabilidade na flexão composta-regime elástico linear.

Para verificar se esta configuração fletida é de equilíbrio estável ou instável, basta dar pequenas perturbações de posição à configuração de equilíbrio  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r(0)}$ , mostrada na figura 3.4.1. Assim sendo, levando a barra da figura 3.2.1a a ocupar a posição tal que  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r(1)}$ , verifica-se na figura 3.4.1 que  $M_I > M_e$ , significando que a barra tende a voltar à configuração de equilíbrio  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r(0)}$ . Levando agora a barra a ocupar a posição tal que  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r(2)}$ , verifica-se também, na mesma figura, que  $M_I < M_e$ , significando que a barra tende a voltar à configuração de equilíbrio  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r(0)}$ . Deste estudo pode-se concluir que a configuração de equilíbrio caracterizada por  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r(0)}$ , figura 3.4.1, é estável, não existindo, pois, o fenômeno da instabilidade.

Particularizando o estudo anterior, para o caso de compressão centrada no regime elástico linear, figura 3.2.1b, têm-se as possíveis configurações de equilíbrio, mostradas na figura 3.4.2. Estas configurações foram obtidas comparando-se o diagrama de momento externo-curvatura, dado na figura 3.2.2b, com o diagrama de momento interno resistente-curvatura, anteriormente citado.

Analisando as possíveis configurações de equilíbrio, mostradas a seguir através de raciocínio análogo ao usado na flexão composta, constata-se que, para valores do car

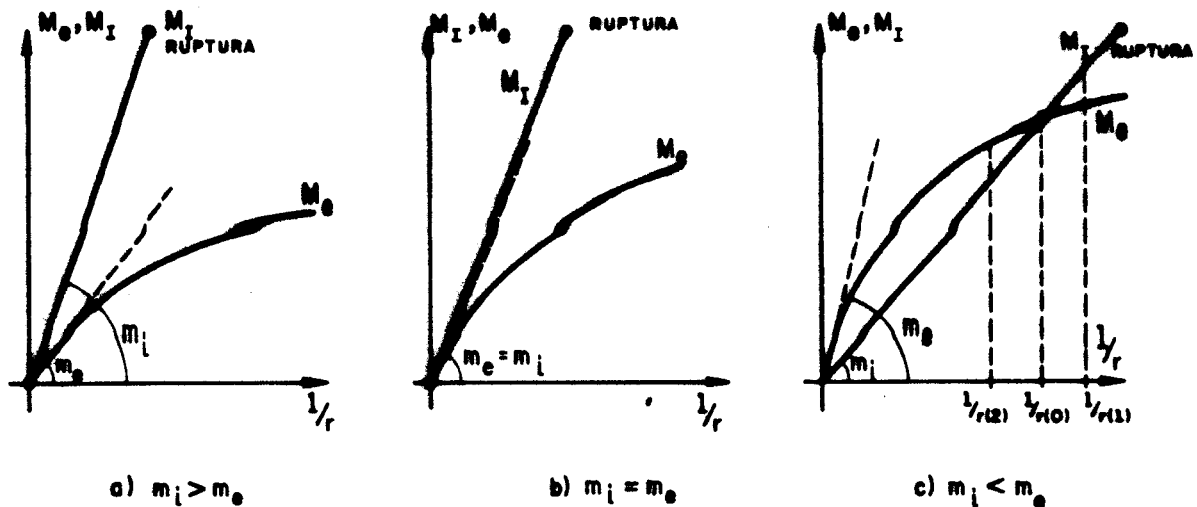


Fig. 3.4.2 - Configurações possíveis de equilíbrio na compressão centrada - regime elástico linear.

regamento, tais que  $m_i \geq m_e$ , figura 3.4.2a e b, existe uma única configuração possível de equilíbrio para a barra da figura 3.2.1b que é a forma reta, caracterizada por  $\frac{1}{r} = 0$ , a qual é de equilíbrio estável. Entretanto, quando o carregamento atingir valores, tais que  $m_i < m_e$ , tem-se, conforme mostra a figura 3.4.2c, duas configurações possíveis de equilíbrio, uma caracterizada por  $\frac{1}{r} = 0$  e outra por  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r(0)}$ .

Com relação à configuração reta, caracterizada por  $\frac{1}{r} = 0$ , figura 3.4.2c, verifica-se que,

$$\forall \frac{1}{r} \neq 0 \mid \frac{1}{r} < \frac{1}{r(0)} \rightarrow M_r < M_e, \quad (3.4.2)$$

ou seja, a barra tende a se afastar da configuração reta de equilíbrio estável, passando a uma configuração reta de equilíbrio instável. Diz-se, para esta situação, que a barra atingiu um estado limite de equilíbrio, sendo a carga correspondente a esse estado limite chamada de carga crítica ou carga de flambagem, cujo estudo foi feito em 3.3.

Com relação à configuração fletida, caracterizada por  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r(0)}$ , pode-se dizer que a mesma se deve ao fato de que, para suportar ações externas,  $P > P_{cr}$ , o eixo da

barra flete, figura 3.2.1b, sendo esta a única forma que a barra encontra para produzir esforços internos capaz de resistir aos esforços externos.

Com raciocínio análogo ao feito para a verificação da estabilidade da configuração fletida de equilíbrio na flexão composta, chega-se à conclusão de que, também na compressão centrada, regime elástico linear, a forma fletida de equilíbrio  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r(0)}$  é estável.

Resumindo o estudo da compressão centrada, pode-se dizer que, quando o carregamento ultrapassar a carga crítica, a configuração reta  $\frac{1}{r} = 0$  deixa de ser estável, passando a ser instável e, ao mesmo tempo, surgem novas configurações de equilíbrio possíveis. Tal fenômeno é denominado flambagem que é caracterizado pelo aparecimento de um ponto de bifurcação do equilíbrio, figura 3.4.3.

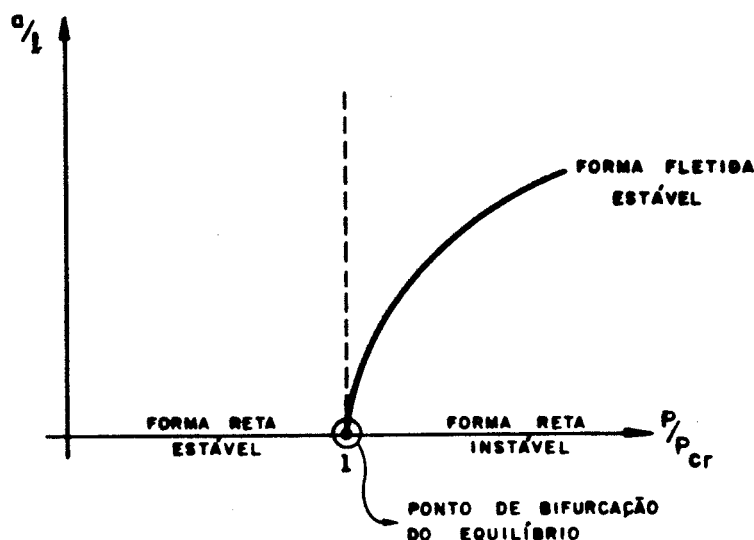


Fig. 3.4.3 - Flambagem na compressão axial, regime elástico linear.

### 3.5 - Flexão composta de barras esbeltas no regime elástico não-linear

Os estudos que aqui serão desenvolvidos merecem atenção especial, por serem o centro de interesse deste trabalho.

Inicialmente, segundo estudo feito no item 3.1, o fato de se considerar a não-linearidade física dos materiais da barra leva a uma relação não-linear do momento resistente-curvatura, conforme mostrado na figura 3.1.5b.

Por outro lado, admitindo-se que na flexão composta a linha elástica seja senoidal, figura 3.5.1, tem-se

$$v = a \operatorname{sen} \frac{\pi}{l_e} x \quad (3.5.1)$$

Esta função é nula na extremidade da barra e tem o máximo valor coincidente com a solução da equação diferencial aproximada da curvatura (3.3.7), constituindo uma aproximação satisfatória, em muitos casos práticos de engenharia.

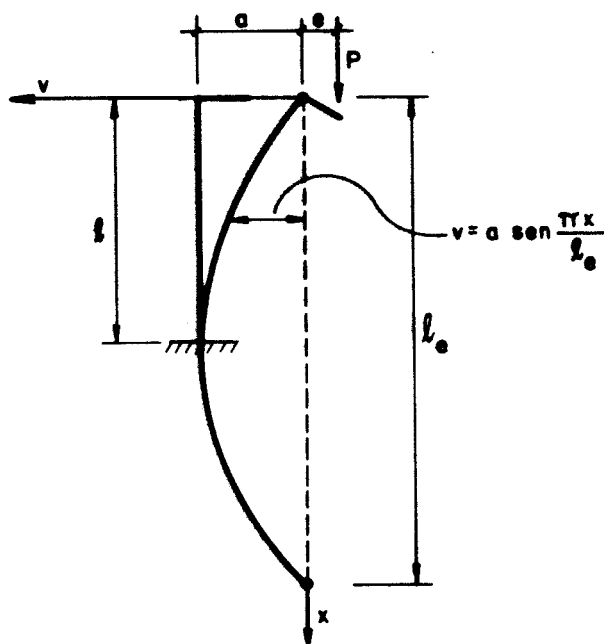


Fig. 3.5.1 - Flexão composta com linha elástica senoidal.

Com isto, a expressão simplificada da curvatura (3.1.3) pode ser dada pela segunda derivada de (3.5.1), isto é,

$$1/r \approx \frac{d^2 v}{dx^2} = - (\pi/l_e)^2 \cdot v \quad (3.5.2)$$

de onde resulta, em valor absoluto

$$v = (l_e/\pi)^2 \cdot 1/r \quad (3.5.3)$$

Sendo as rotações  $dv/dx$  desprezíveis em face da unidade, pode-se escrever a equação do momento externo (3.2.1) como uma função linear da curvatura,

$$M_e = P \cdot e + P \cdot (l_e/\pi)^2 \cdot 1/r \quad (3.5.4)$$

equação esta que leva ao diagrama de momento externo-curvatura da figura 3.5.2.

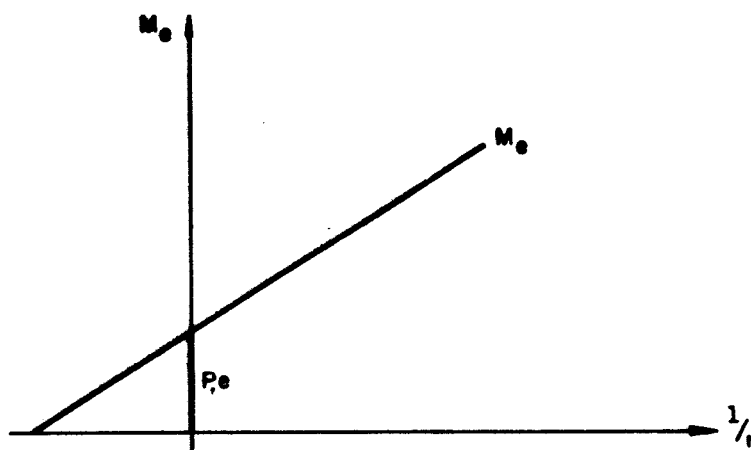


Fig. 3.5.2 - Diagrama de momento externo-curvatura na flexão composta com uso da equação simplificada da curvatura.

Na figura 3.5.3 estão representados os diagramas momento externo-curvatura e momento interno-curvatura, tomados respectivamente das figuras 3.5.2 e 3.1.5b.

Vê-se que, enquanto o carregamento for menor que a carga crítica, haverá sempre o cruzamento dos diagramas

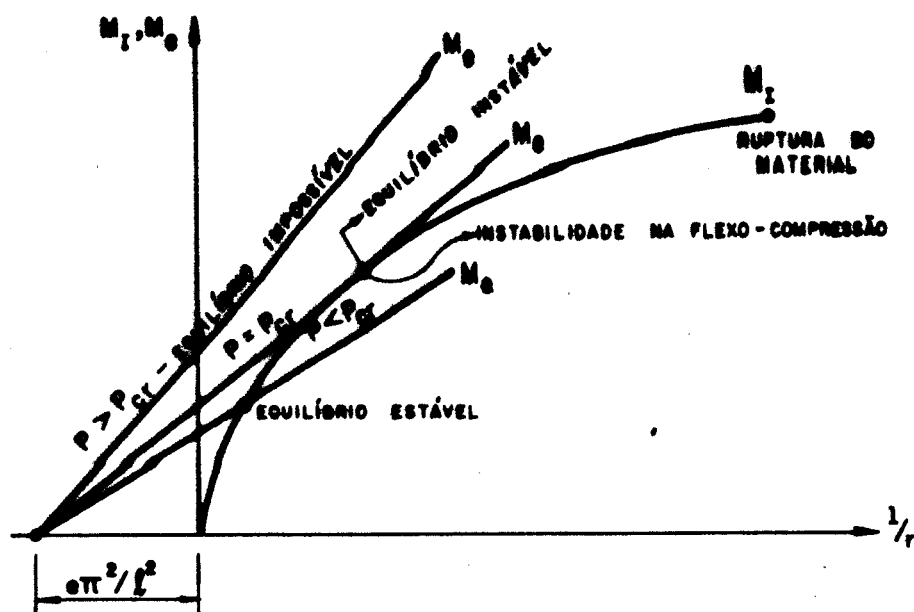


Fig. 3.5.3 - Instabilidade na flexo-compressão.

de  $M_e$  e  $M_I$ , caracterizando, conforme procedimento descrito em 3.4, uma configuração fletida de equilíbrio estável. Quando o carregamento atinge o valor crítico, a reta  $M_e$  tangencia a curva de  $M_I$ , resultando uma configuração de equilíbrio que, com o mesmo procedimento já descrito anteriormente, verifica-se tratar de uma configuração fletida de equilíbrio instável.

Ultrapassado o valor  $P_{cr}$ , verifica-se na figura 3.5.3 que o equilíbrio é impossível, uma vez que a reta  $M_e$  e a curva  $M_I$  têm andamentos divergentes.

Do estudo feito, pode-se dizer que a consideração da não-linearidade física dos materiais desencadeia, na flexão composta, o fenômeno da instabilidade que, no caso, é caracterizado pelo aparecimento de um ponto de tangência dos diagramas de  $M_e$  e  $M_I$ , a partir do qual o equilíbrio é impossível.

O comportamento de uma barra submetida à flexão composta, no regime elástico não-linear, pode ser visualizado na figura 3.5.4, onde o ponto B não corresponde a uma mudança da configuração de equilíbrio estável, mas, sim, a uma reversão do andamento das deformações (FUSCO, 1981).

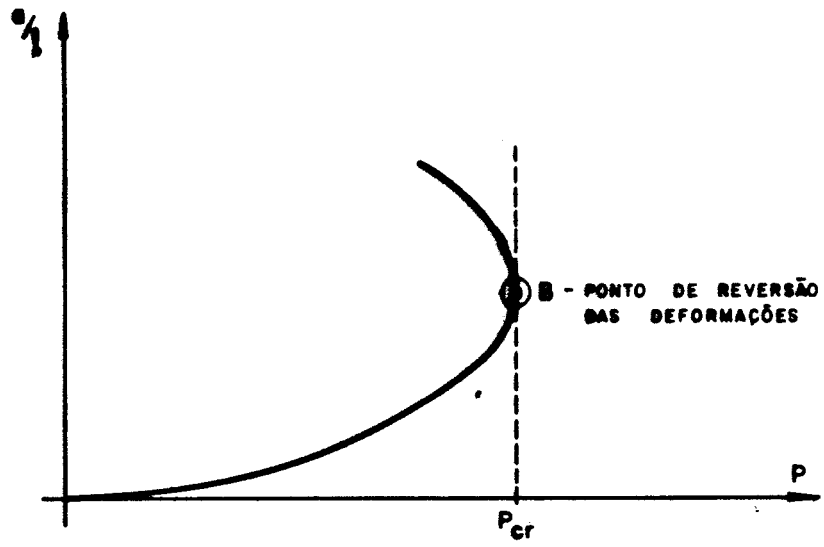


Fig. 3.5.4 - Deformações na flexão composta - regime elástico não-linear.

#### 4. DIAGRAMA MOMENTO FLETOR - FORÇA NORMAL - CURVATURA(M-N- $\frac{1}{r}$ )

A determinação exata da relação M-N- $1/r$  é de fundamental importância para dimensionamento e estudo da estabilidade das peças de concreto armado onde a não-linearidade física e geométrica não podem ser negligenciadas.

Encontram-se, neste capítulo, as expressões matemáticas e o estudo dos limites para variação dos parâmetros necessários para determinação da relação acima citada. Além disso, apresenta-se o algoritmo que foi usado para elaboração do programa dado no Apêndice. Esse programa calcula o momento fletor que uma dada seção de concreto armado absorve, em função da curvatura que a deformação da barra produz, na seção considerada, devido à cada força normal fixada.

##### 4.1 - Estudo da relação eixo neutro-curvatura

Admitindo-se a validade da hipótese dada em 2.3.1 e respeitando os limites últimos de deformações do concreto e do aço, pode-se escrever, considerando a posição deformada de uma seção transversal de concreto armado, figura 4.1.1, a expressão que leva a curvatura da seção ao valor máximo permitido,



$$\frac{1}{r} = \frac{3,5\% + 10\%}{d}, \quad (4.1.1)$$

que em sua forma adimensional fica:

$$\frac{h}{r} = \frac{0,0135}{(1-\delta)} \quad (4.1.2)$$

onde,

$$\delta = \frac{d'}{h} \quad (4.1.3)$$

sendo,  $d'$  a distância do centro de gravidade da armadura até a borda mais próxima da seção e  $h$  a altura da seção transversal.

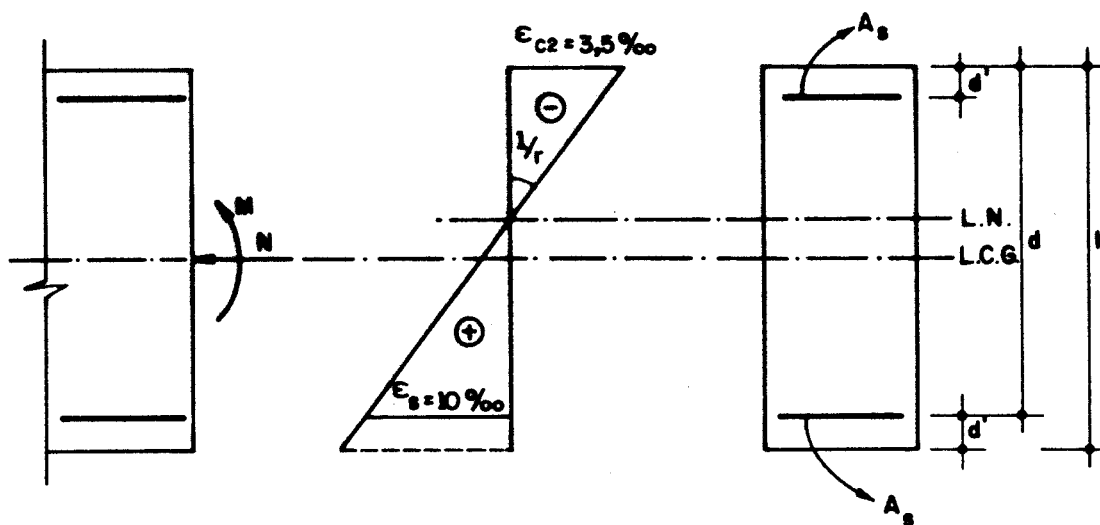


Fig. 4.1.1 - Deformações máximas permitidas numa seção de concreto armado.

Para caracterizar uma posição genérica do diagrama de deformação de uma seção, figura 4.1.2, é necessário, além de admitir a distribuição linear de deformações, adotar um valor para a curvatura da seção, tal que o valor máximo dado pela expressão (4.1.1) não seja ultrapassado. Além disso, é necessário adotar a profundidade da linha neutra através da atribuição de um valor para o coeficiente adimensional  $\beta_x$  definido por:

$$\beta_x = \frac{x}{h} \quad (4.1.4)$$

onde o valor de  $\beta_x$  é adotado dentro do intervalo  $]-\infty, +\infty[$  e  $x$  é a distância da fibra extrema mais comprimida da seção, até a linha neutra, orientada conforme figura 4.1.2.

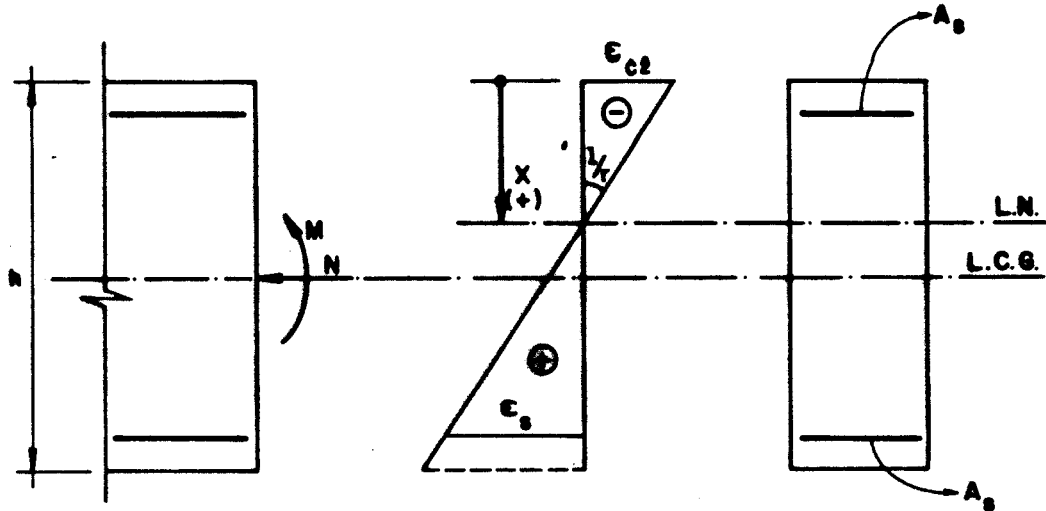


Fig. 4.1.2 - Posição genérica de uma seção de concreto armado, após a deformação.

Com isto, tem-se determinada uma posição genérica de uma seção após a deformação, conforme mostrado na figura 4.1.2.

#### 4.2 - Compatibilidade de deformações

A figura 4.2.1, mostra as deformações de uma seção de concreto armado, juntamente com o sistema de coordenadas considerado.

Por compatibilidade geométrica das deformações, figura 4.2.1, tem-se:

$$\frac{\epsilon_{c2}}{-x} = \frac{\epsilon}{y-y_0} = \frac{\epsilon_s}{h-d'-x} = \frac{\epsilon_{3/7}}{\frac{3}{7} \cdot h-x} \quad (4.2.1)$$

onde

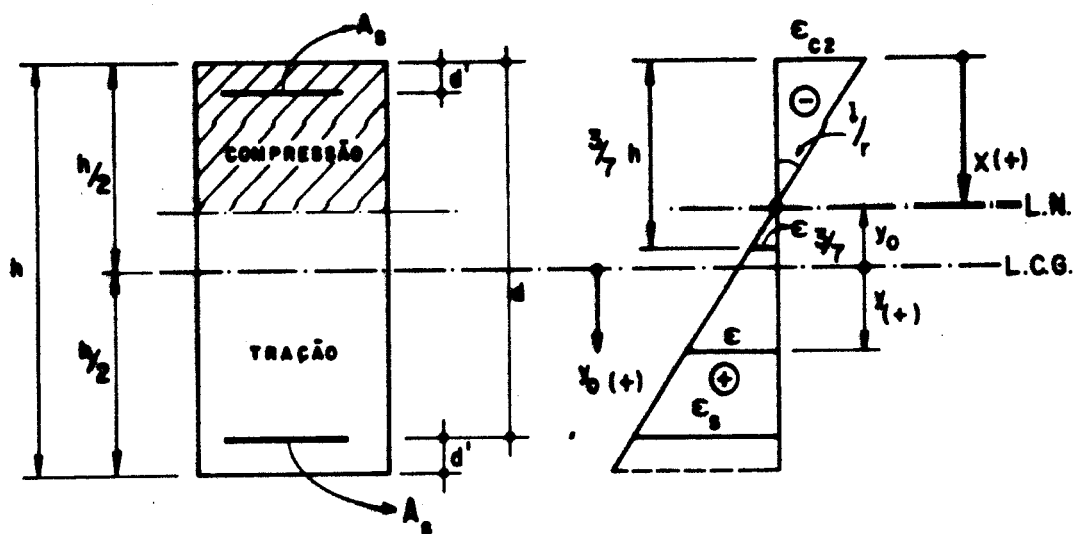


Fig. 4.2.1 - Diagrama genérico de deformações de uma seção de concreto armado.

$\epsilon_{c2}$  - representa a deformação específica na borda de concreto com maior deformação de encurtamento;

$\epsilon_s$  - representa a deformação específica na armadura tracionada;

$\epsilon_{3/7}$  - representa a deformação específica na fibra de concreto, distante  $\frac{3}{7} h$ , da borda mais comprimida da seção;

$\epsilon$  - representa a deformação em uma fibra genérica, distante  $y$  do centro geométrico da seção.

A igualdade (4.2.1) permite escrever a deformação da fibra genérica  $\epsilon$  em função da deformação do concreto

$$\epsilon = - \epsilon_{c2} \frac{(y-y_0)}{x}, \quad (4.2.2)$$

em função da deformação na armadura ,

$$\epsilon = \frac{\epsilon_s (y-y_0)}{h-d'-x}, \quad (4.2.3)$$

ou em função da deformação da fibra distante  $\frac{3}{7} h$  da borda mais comprimida,

$$\epsilon = \epsilon_{3/7} \frac{(y-y_0)}{\frac{3}{7} h-x} \quad (4.2.4)$$

Usando ainda a figura 4.2.1, podem-se escrever as deformações  $\epsilon_{c2}$ ,  $\epsilon_s$  e  $\epsilon_{3/7}$ , em função da curvatura  $1/r$  da seção,

$$\epsilon_{c2} = -\frac{1}{r} x \quad , \quad (4.2.5)$$

$$\epsilon_s = \frac{1}{r}(h-d'-x), \quad (4.2.6)$$

$$\epsilon_{3/7} = \frac{1}{r}\left(\frac{3}{7} h-x\right) \quad . \quad (4.2.7)$$

Substituindo qualquer uma das expressões (4.2.5), (4.2.6) ou (4.2.7), em (4.2.2), (4.2.3) ou (4.2.4), respectivamente, chega-se à expressão da deformação específica de uma fibra genérica  $\epsilon$ , em função da curvatura  $1/r$

$$\epsilon = \frac{1}{r}(y-y_0) \quad (4.2.8)$$

Considerando-se a figura 4.2.1, pode-se escrever

$$y_0 = x-h/2 \quad (4.2.9)$$

Substituindo (4.2.9) em (4.2.8) e usando-se, além de (4.1.4), a expressão que define, em termos adimensionais, a posição da fibra genérica da seção,

$$\beta_y = y/h \quad (4.2.10)$$

tem-se:

$$\epsilon = \frac{h}{r}\left(\beta_y + \frac{1}{2} - \beta_x\right) \quad (4.2.11)$$

Fazendo-se,

$$\beta_y + 1/2 = \beta_0, \quad (4.2.12)$$

e substituindo-a em (4.2.11), chega-se a

$$\varepsilon = \frac{h}{r} (\beta_0 - \beta_x) \quad (4.2.13)$$

Esta última expressão permite calcular a deformação em uma fibra genérica da seção transversal, para uma dada curvatura e posição da linha neutra.

#### 4.3 - Estudo do intervalo de variação do parâmetro $\beta_x$

Viu-se, no item 4.1, que o intervalo de variação do parâmetro  $\beta_x$  é de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Entretanto, para evitar que os limites últimos de deformações, dados em 2.3.3, sejam ultrapassados, deve-se estreitar o intervalo acima citado. Isto será feito através da definição de valores limites admissíveis para a profundidade da linha neutra  $\beta_x$  da maneira como segue:

Considerando a seção transversal dada na figura 4.3.1 juntamente com o eixo  $\beta_x$  que define, em termos adimensionais, a profundidade da linha neutra, têm-se definidos três intervalos:

$$a) \beta_x \leq 0 ; \quad b) 0 < \beta_x \leq 1 ; \quad c) \beta_x > 1.$$

A análise de cada um dos intervalos acima definidos, será desenvolvida a partir de uma dada curvatura da seção transversal  $1/r$ .

Para  $\beta_x \leq 0$ , o estado deformado da seção transversal da peça é caracterizado pela região I do diagrama dado na figura 2.3.3, ficando o limite inferior de  $\beta_x$ , isto é, a profundidade da linha neutra, determinada pela deformação última de tração no aço,  $\varepsilon_s = 10\%$ , uma vez que a seção transversal estará inteiramente tracionada, conforme ilustra a figura 4.3.2.

A posição da fibra que dá a condição limite de deformação para o caso em estudo, figura 4.3.2, pode ser determinada, em termos adimensionais, pela expressão

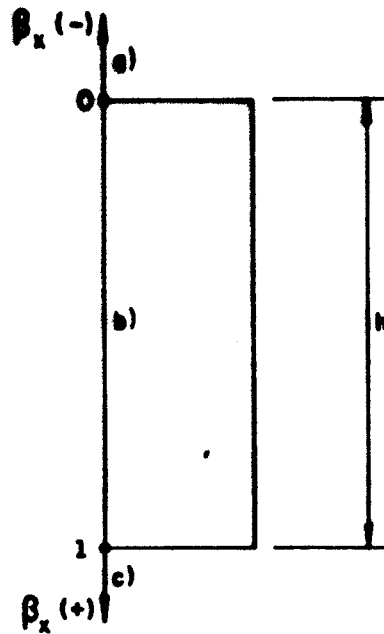


Fig. 4.3.1 - Intervalos de variação do parâmetro  $\beta_x$

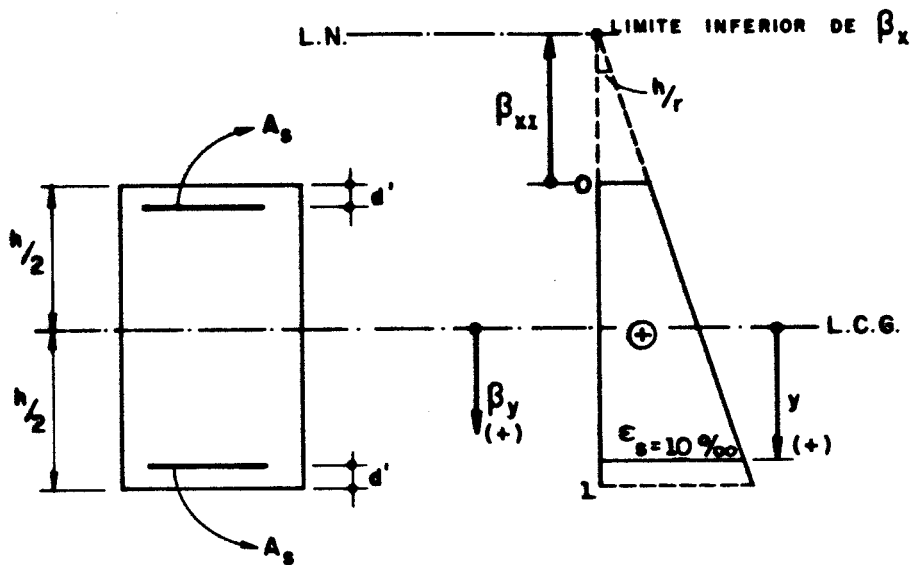


Fig. 4.3.2 - Deformações em uma seção inteiramente traçionada.

$$\beta_y = \frac{h/2 - d'}{h} = 1/2 - \frac{d'}{h} \quad (4.3.1)$$

que, substituída em (4.2.12), resulta

$$\beta_o = 1 - \delta \quad (4.3.2)$$

Para que o limite último de deformação de tração no aço não seja ultrapassado, a expressão (4.2.13), que dá a deformação de uma fibra genérica da seção, deve obedecer a seguinte inequação:

$$\epsilon = \frac{h}{r} (\beta_o - \beta_x) \leq 10\% \quad (4.3.3)$$

Substituindo-se (4.3.2) em (4.3.3), obtém-se a expressão que dá o limite inferior do intervalo para variação do parâmetro  $\beta_x$ , denotado aqui por  $\beta_{xi}$

$$\beta_{xi} \geq -\frac{10\%}{h/r} + 1 - \delta \quad (4.3.4)$$

Para  $0 < \beta_x \leq 1$ , o estado deformado da seção transversal da peça é caracterizado pela região II do diagrama dado na figura 2.3.3, ficando, pois, um limite superior de  $\beta_x$  determinado pela deformação última de compressão, na fibra de concreto da borda mais comprimida,  $\epsilon_c = -3,5\%$ , uma vez que a seção transversal estará parcialmente comprimida, conforme ilustra a figura 4.3.3.

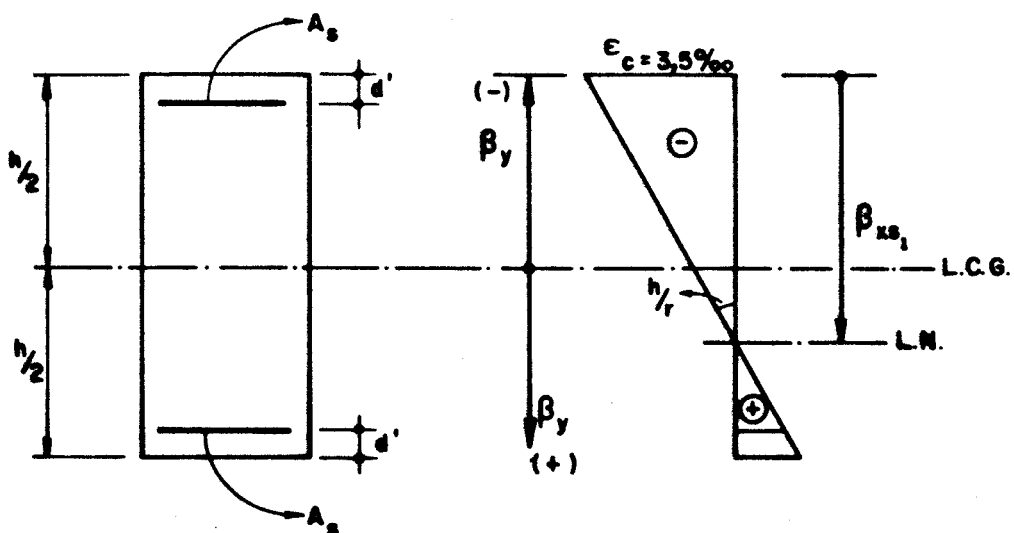


Fig. 4.3.3 - Deformações em uma seção parcialmente comprimida.

A posição da fibra, que dá a condição limite de deformação,  $\epsilon_c = -3,5\%$ , é dada, segundo a expressão (4.2.10) e figura 4.3.3, pelo valor adimensional

$$\beta_y = - 1/2 \quad (4.3.5)$$

que, substituído na expressão (4.2.12), resulta

$$\beta_o = 0 \quad (4.3.6)$$

Para evitar que o limite último de deformação de compressão na fibra de concreto da borda mais comprimida da seção,  $\epsilon_c = -3,5\%$ , seja ultrapassado, a expressão (4.2.13) deve obedecer à seguinte inequação:

$$\epsilon = \frac{h}{r} (\beta_o - \beta_x) \geq - 3,5\% \quad (4.3.7)$$

Substituindo-se (4.3.6) em (4.3.7), obtém-se a expressão que dá um limite superior do intervalo para variação do parâmetro  $\beta_x$ , denotado aqui por  $\beta_{xs_1}$

$$\beta_{xs_1} \leq \frac{3,5\%}{h/r} \quad (4.3.8)$$

Finalmente, para  $\beta_x > 1$ , o estado deformado da seção transversal da peça é caracterizado pela região III do diagrama dado na figura 2.3.3, sendo, nesse caso, um segundo limite superior de  $\beta_x$ , determinado pela deformação última de compressão na fibra de concreto, distante  $\frac{3}{7} h$  a partir da borda mais comprimida,  $\epsilon_{3/7} = -2\%$ , cuja posição na seção transversal é dada, segundo a expressão (4.2.10) e a figura 4.3.4, pelo valor

$$\beta_y = - 1/14 \quad (4.3.9)$$

que substituído em (4.2.12) dá



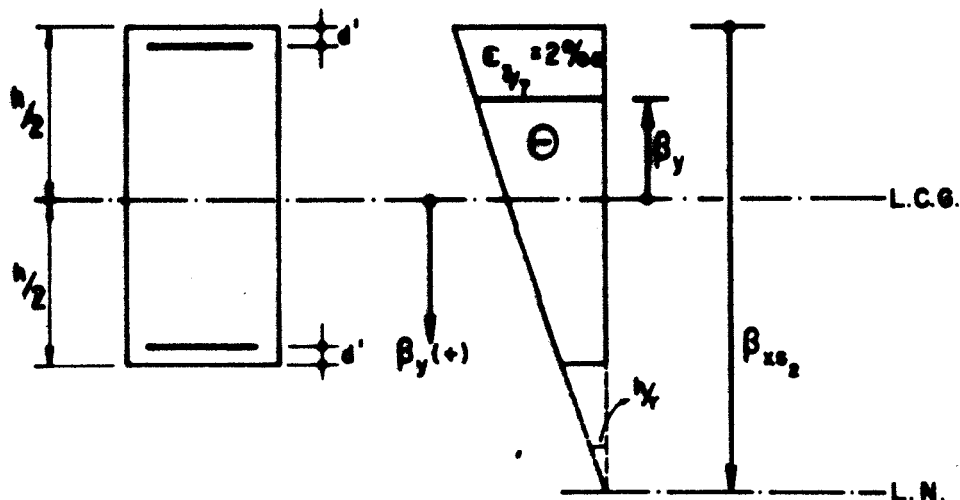


Fig. 4.3.4 - Deformações em uma seção inteiramente comprimida.

$$\beta_o = 3/7 \quad (4.3.10)$$

Para atender a condição de deformação citada anteriormente, a expressão (4.2.13) deve obedecer à seguinte inequação,

$$\epsilon = \frac{h}{r} (\beta_o - \beta_x) \geq - 2\text{‰} \quad (4.3.11)$$

Substituindo (4.3.10) em (4.3.11), obtêm-se um segundo limite superior para variação de  $\beta_x$ , denotado aqui por  $\beta_{xs_2}$  e dado pela expressão

$$\beta_{xs_2} \leq \frac{2\text{‰}}{h/r} + 3/7 \quad (4.3.12)$$

Do estudo feito, conclui-se que a escolha da expressão (4.3.8) ou (4.3.12), para determinar o limite superior do parâmetro  $\beta_x$ , que será denotado por  $\beta_{xs}$ , depende de qual dos limites de deformações de compressão, dados na figura 2.3.3, é atingido primeiro.

#### 4.3.1 - Exemplo numérico

Para melhor entender o exposto no item 4.3, apresenta-se um exemplo numérico, mostrando como se determina os valores que limitam o intervalo para variação do parâmetro  $\beta_x$ , que dá a profundidade da linha neutra, respeitando os limites últimos de deformações dados em 2.3.3.

Considera-se, para tal, o seguinte problema:

Determinar, para a seção transversal da figura 4.3.5, o intervalo de variação do parâmetro  $\beta_x$ , para os seguintes valores da curvatura  $1/r$ :

- a)  $1/r = 2,5 \times 10^{-5}$
- b)  $1/r = 8,75 \times 10^{-5}$
- c)  $1/r = 1,25 \times 10^{-4}$

Tais valores foram convenientemente escolhidos para possibilitar que os limites últimos de deformações no concreto, dados em 2.3.3, pudessem ser alcançados.

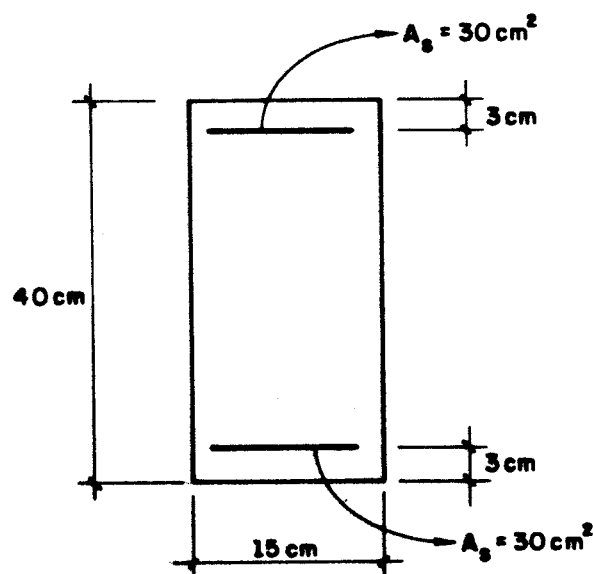


Fig. 4.3.5 - Seção transversal de uma barra de concreto armado.

Usando-se as expressões (4.3.4), (4.3.8) e (4.3.12), respectivamente, obtêm-se os resultados mostrados na tabela 4.3.1.

Tabela 4.3.1 - Valores limites de  $\beta_x$

CASO	h/r	LIMITE INFERIOR DE $\beta_x (\beta_{xi})$	LIMITE SUPERIOR DE $\beta_x (\beta_{xs})$	
		$\beta_{xi} \geq -\frac{0,010}{h/r} + 1 - \delta$	$\beta_{xs1} \leq \frac{0,0035}{h/r}$	$\beta_{xs2} \leq \frac{0,002}{h/r} + 3/7$
a	0,001	-9,075	3,5	2,43
b	0,0035	-1,93	1	1
c	0,005	-1,075	0,7	0,83

Interpretando-se graficamente os resultados obtidos anteriormente têm-se:

Para o caso a, o estado deformado da seção transversal correspondente a cada um dos limites de  $\beta_x$  está dado na figura 4.3.6. Nessa figura, observa-se que o limite inferior de  $\beta_x$  fica determinado pela relação  $h/r = 1\%$ , e pela deformação última na armadura,  $10\%$ . Quanto ao limite superior, vê-se que o mesmo fica determinado pela deformação úl

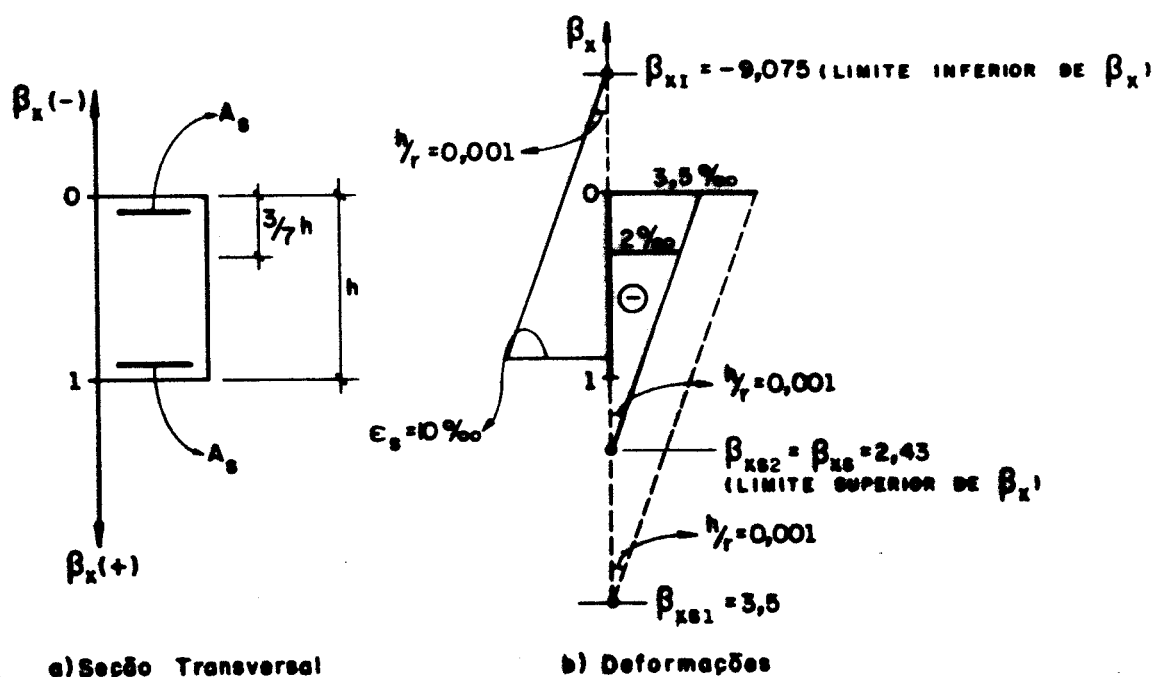


Fig. 4.3.6 - Extremos do intervalo do parâmetro  $\beta_x$  (caso a).

tima, 2%, da fibra de concreto distante  $3/7h$  da borda mais comprimida da seção, e pela relação citada.

Conclui-se, portanto, que o intervalo para variação do parâmetro  $\beta_x$ , respeitando os limites últimos de deformações, dados em 2.3.3, é, neste caso,

$$-9,075 \leq \beta_x \leq 2,43$$

Para o caso b, o estado deformado da seção transversal correspondente a cada um dos limites de  $\beta_x$  está dado na figura 4.3.7. Nessa figura, o limite inferior de  $\beta_x$  fica determinado com raciocínio análogo ao feito para o caso a. Com relação ao limite superior, vê-se que a relação aqui considerada,  $h/r = 3,5\%$ , leva as deformações últimas, na fibra mais comprimida da seção, 3,5%, e na fibra distante  $3/7h$  da borda mais comprimida da seção, 2%, a serem atingidas ao mesmo tempo, havendo, portanto, coincidência entre os dois limites calculados pelas expressões (4.3.8) e (4.3.12).

Conclui-se, portanto, que o intervalo para variação do parâmetro  $\beta_x$ , respeitando os limites últimos de deformações, dados em 2.3.3, é, neste caso,

$$-1,93 \leq \beta_x \leq 1$$

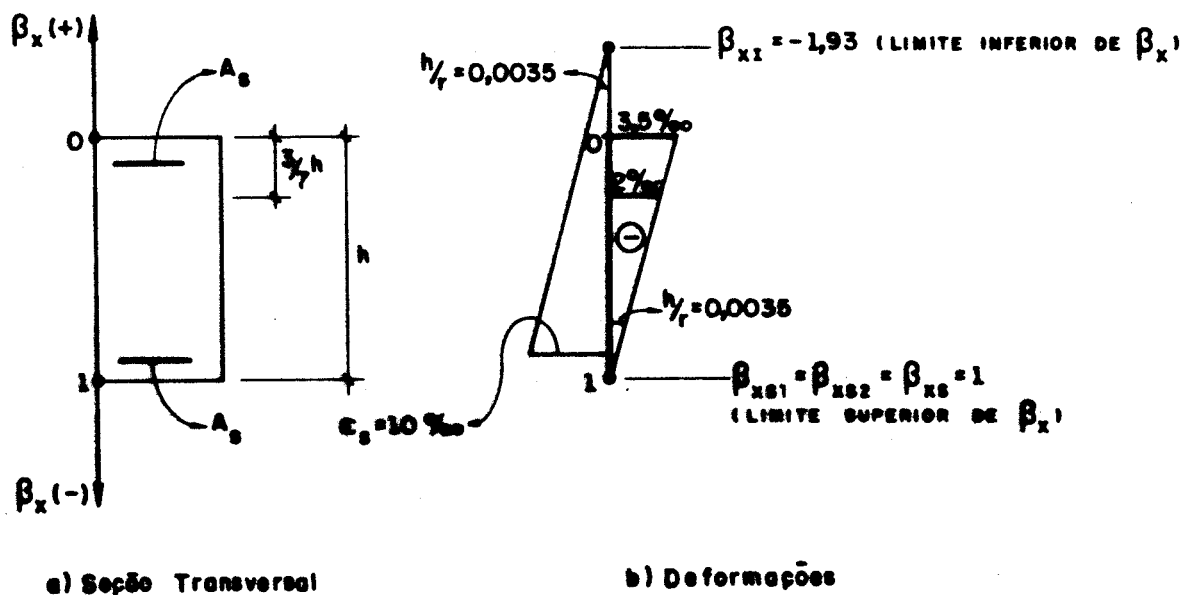


Fig. 4.3.7 - Extremos do intervalo do parâmetro  $\beta_x$  (caso b)

Para o caso c, o estado deformado da seção transversal, correspondente a cada um dos limites de  $\beta_x$ , está da do na figura 4.3.8, onde se observa que o limite superior de  $\beta_x$ , quando a seção é parcialmente comprimida, é dado pela relação,  $h/r = 5\%$ , e pela deformação última de compressão  $3,5\%$ , na fibra de concreto mais comprimida da seção. Com relação ao limite inferior para variação do parâmetro  $\beta_x$ , pode-se dizer que o mesmo fica determinado com raciocínio análogo ao feito para o caso a.

Conclui-se, portanto, que o intervalo para variação do parâmetro  $\beta_x$ , respeitando os limites últimos de deformações, dados em 2.3.3, é, nesse caso,

$$-1,075 \leq \beta_x \leq 0,7$$

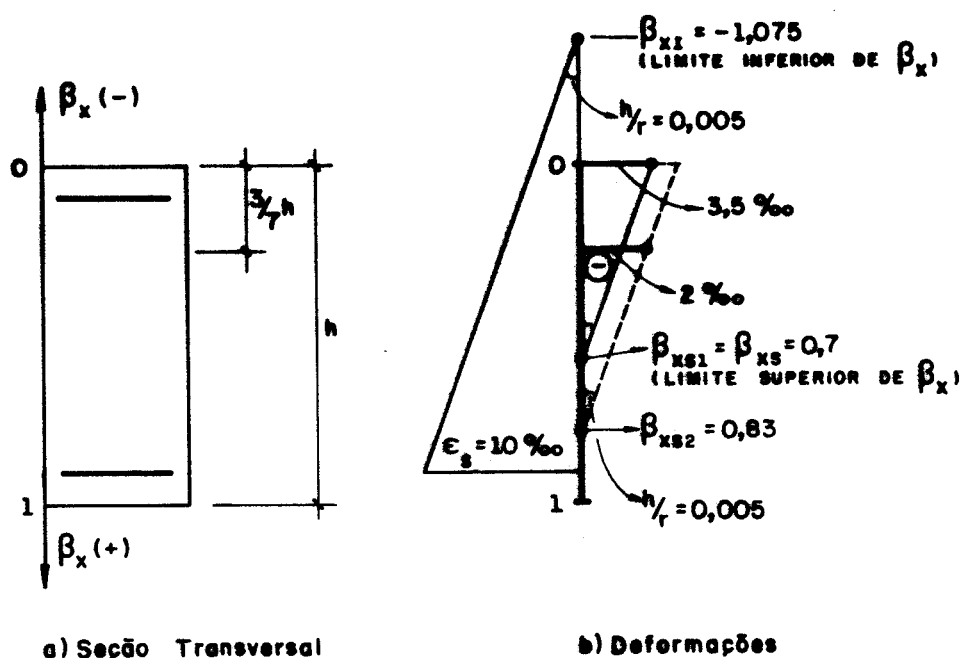


Fig. 4.3.8 - Extremos do intervalo do parâmetro  $\beta_x$  (caso c)

#### 4.4 - Equações de equilíbrio - seção retangular

Considerando válida a hipótese da conservação da seção plana, arbitrando-se um valor para a curvatura  $1/r$  e

adotando-se a profundidade da linha neutra da seção, ou melhor, adotando-se o parâmetro  $\beta_x$ , dentro dos limites discutidos em 4.3, a deformação em uma fibra genérica da seção transversal de uma peça de concreto armado pode ser calculada com o uso da expressão (4.2.13). Com isto, pode-se obter a distribuição das tensões resistentes, bastando que se utilizem as relações tensão/deformação, dadas no capítulo 2.

A partir dos valores das tensões, assim calculados, obtêm-se os esforços resistentes da seção a serem empregados nas relações de equilíbrio.

Para o caso particular de seção retangular e eixo neutro perpendicular ao plano de simetria da peça, para se ter flexão composta reta, os esforços resistentes,  $N_I$  (normal resistente) e  $M_I$  (momento resistente), podem ser dados, com auxílio da figura 4.4.1, pelas seguintes expressões:

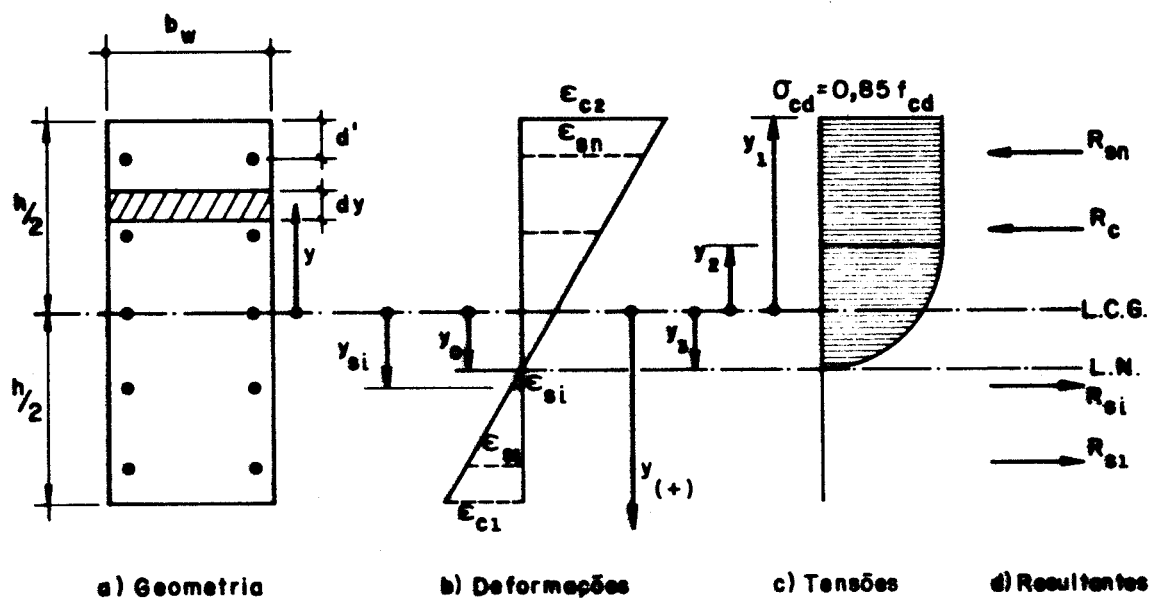


Fig. 4.4.1 - Deformações, tensões e resultantes ao longo de uma seção de concreto armado.

$$N_I = R_c + \sum_{i=1}^n R_{si} \quad (4.4.1)$$

$$M_I = M_c + \sum_{i=1}^n R_{si} y_{si} \quad (4.4.2)$$

onde,  $n$  é o número de barras da armadura e  $R_c$  e  $M_c$  são as resultantes de tensões da seção comprimida de concreto armado, relativas à força normal e ao momento fletor, isto é:

$$R_c = \int_{A_c} \sigma_c dA \quad (4.4.3)$$

$$M_c = \int_{A_c} y \cdot \sigma_c \cdot dA \quad (4.4.4)$$

Considerando-se as tensões  $\sigma_{si}$  e a área de cada barra da armadura  $A_{si}$ , podem-se escrever as resultantes de tensão na armadura utilizando-se as seguintes somatórias

$$\sum_{i=1}^n R_{si} = \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} \quad (4.4.5)$$

$$\sum_{i=1}^n R_{si} \cdot y_{si} = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sigma_{si} \cdot A_{si} \quad (4.4.6)$$

Substituindo-se (4.4.3) e (4.4.5) em (4.4.1) e (4.4.4) e (4.4.6) em (4.4.2), obtêm-se, respectivamente,

$$N_I = \int_{A_c} \sigma_c \cdot dA + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} \cdot A_{si} \quad (4.4.7)$$

$$M_I = \int_{A_c} y \cdot \sigma_c \cdot dA + \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sigma_{si} \cdot A_{si} \quad (4.4.8)$$

Como indicado na figura 4.4.1, podem-se colocar as integrais de área em função apenas da variável  $y$ , transformando as expressões (4.4.7) e (4.4.8) em

$$N_I = \int_{-h/2}^{y_0} b_w \cdot \sigma_c \cdot dy + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} \quad (4.4.9)$$

$$M_I = \int_{-h/2}^{y_0} b_w \cdot y \cdot \sigma_c dy + \sum_{i=1}^n y_i \sigma_{si} A_{si}, \quad (4.4.10)$$

Estas expressões permitem avaliar os esforços internos resistentes,  $N_I$  e  $M_I$ , em uma seção de concreto armado, com geometria e características dos materiais definidas.

#### 4.5 - Equações adimensionais de equilíbrio

Considerando-se a distribuição das tensões no concreto, de acordo com o diagrama parábola-retângulo, mostrado na figura 4.4.1 e visando simplificar o cálculo das integrais de tensão indicadas em (4.4.9) e (4.4.10), separam-se as referidas integrais em duas parcelas. Em cada uma das integrais, a primeira parcela refere-se ao trecho retangular do diagrama de tensões, que é obtida usando-se no lugar de  $\sigma_c$ , a expressão (2.1.1), e os limites de integração  $y_1$  e  $y_2$ , correspondentes ao trecho retangular. A segunda parcela corresponde ao trecho parabólico e é obtida usando-se, no lugar de  $\sigma_c$ , a expressão (2.1.2), e os limites de integração  $y_2$  e  $y_3$ , figura 4.4.1. Procedendo-se assim, obtêm-se para os esforços resistentes,  $N_I$  e  $M_I$ , as seguintes expressões:

$$N_I = \int_{y_1}^{y_2} -0,85f_{cd} b_w dy + 850f_{cd} b_w \int_{y_2}^{y_3} (1+250\epsilon_c) \epsilon_c dy + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} \quad (4.5.1)$$

$$M_I = \int_{y_1}^{y_2} -0,85f_{cd} b_w y dy + 850f_{cd} b_w \int_{y_2}^{y_3} (1+250\epsilon_c) \epsilon_c y dy + \sum_{i=1}^n y_i \sigma_{si} A_{si} \quad (4.5.2)$$



Para o estudo de seções de concreto armado é conveniente escrever as relações anteriores, independentes das dimensões da peça,  $h$  e  $b_w$ , e da tensão de cálculo  $f_{cd}$ . Para isso definem-se, além dos limites adimensionais de integração, obtidos com uso da expressão (4.2.10) e mostrados na figura 4.5.1, os valores adimensionais da força normal e do momento fletor interno-resistentes.

$$V_I = \frac{N_I}{b_w \cdot h \cdot f_{cd}} \quad (4.5.3)$$

$$\mu_I = \frac{M_I}{b_w \cdot h^2 \cdot f_{cd}} \quad (4.5.4)$$

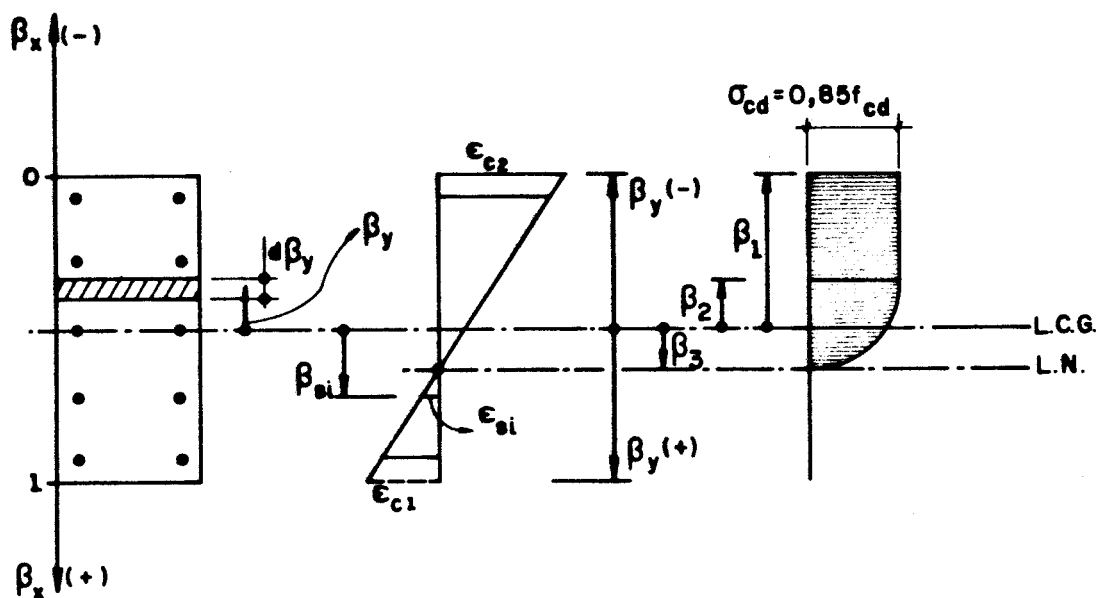


Fig. 4.5.1 - Limites de integração do diagrama de tensões.

4.5.1 - Obtenção da expressão do esforço normal resistente, adimensional

Dividindo-se a equação (4.5.1) por  $b_w \cdot h \cdot f_{cd}$ , e substituindo nessa os limites de integração  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$

pelos respectivos adimensionais  $\beta_1 = \frac{y_1}{h}$ ,  $\beta_2 = y_2/h$ ,  $\beta_3 = y_3/h$ , dados na figura 4.5.1, e ainda fazendo  $dy/h = d\beta_y$ , obtêm-se:

$$v_I = -0,85 \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\beta_y + 850 \int_{\beta_2}^{\beta_3} (1+250\epsilon_c) \epsilon_c \cdot d\beta_y + \frac{1}{b_w \cdot h \cdot f_{cd}} \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} \quad (4.5.5)$$

Substituindo-se em (4.5.5) a deformação  $\epsilon_c$  pela equação de compatibilidade (4.2.11), chega-se a

$$v_I = -0,85 \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\beta_y + 850 \int_{\beta_2}^{\beta_3} \left\{ 1 + 250 \left[ \frac{h}{r} (\beta_y + 1/2 - \beta_x) \right] \right\} \cdot \left[ \frac{h}{r} (\beta_y + 1/2 - \beta_x) \right] d\beta_y + \frac{1}{b_w \cdot h \cdot f_{cd}} \sum_{i=1}^n \sigma_{si} \cdot A_{si} \quad (4.5.6)$$

Efetuada-se as operações aritméticas, integrando, e passando-se aos limites, obtêm-se:

$$v_I = -0,85(\beta_2 - \beta_1) + 850 \cdot h/r \left\{ \frac{(\beta_3^2 - \beta_2^2)}{2} + k_1(\beta_3 - \beta_2) + 250 \cdot h/r \cdot \left[ \frac{(\beta_3^3 - \beta_2^3)}{3} + k_1 \cdot (\beta_3^2 - \beta_2^2) + k_1^2 \cdot (\beta_3 - \beta_2) \right] \right\} + \frac{\omega}{f_{yd}} \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_{si} \cdot \eta_{si} \quad (4.5.7)$$

onde  $\omega$  é definido como a taxa mecânica de armadura da seção

$$\omega = \frac{f_{yd} \cdot A_s}{f_{cd} \cdot A_c} \quad (4.5.8)$$

$\eta_{si}$  é definido como sendo a relação entre a área de uma barra e a área total das barras da armadura

$$\eta_{si} = A_{si} / A_s \quad (4.5.9)$$

e  $k_1 = 1/2 - \beta_x$  (4.5.10)

Fazendo ainda,

$$k_2 = (\beta_3^2 - \beta_2^2) \quad (4.5.11)$$

$$k_3 = (\beta_3 - \beta_2) \quad (4.5.12)$$

$$k_4 = (\beta_3^3 - \beta_2^3) \quad (4.5.13)$$

e substituindo-as em (4.5.7), chega-se à expressão,

$$v_I = -0,85(\beta_2 - \beta_1) + 850 \cdot h/r \cdot \left\{ k_2/2 + k_1 \cdot k_3 + 250 \cdot h/r \left[ k_4/3 + k_1 \cdot k_2 + k_1^2 \cdot k_3 \right] \right\} + \omega / f_{yd} \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_{si} \cdot \eta_{si} \quad (4.5.14)$$

A expressão (4.5.14) permite calcular a força normal resistente, em uma seção de concreto armado, em termos adimensionais, para uma dada curvatura  $1/r$  e profundidade da linha neutra  $\beta_x$ .

#### 4.5.2 - Obtenção da expressão do momento fletor resistente adimensional

A equação (4.5.2) pode ser transformada, dividindo-a por  $b_w \cdot h^2 \cdot f_{cd}$ , e substituindo nessa os limites de

integração  $y_1$ ,  $y_2$ , e  $y_3$  pelos respectivos adimensionais,  $\beta_1 = y_1/h$ ,  $\beta_2 = y_2/h$ ,  $\beta_3 = y_3/h$ , dados na figura 4.5.1, obtendo-se,

$$\mu_I = -0,25 \int_{\beta_1}^{\beta_2} \beta_y \cdot d\beta_y + 850 \int_{\beta_2}^{\beta_3} (1+250\varepsilon_c) \cdot \varepsilon_c \cdot \beta_y \cdot d\beta_y +$$

$$+ \frac{1}{b_w \cdot h^2 \cdot f_{cd}} \sum_{i=1}^n Y_{si} \cdot \sigma_{si} \cdot A_{si} \quad (4.5.15)$$

onde

$$d\beta_y = dy/h \quad (4.5.16)$$

Substituindo-se na equação (4.5.15), a variável  $\varepsilon_c$  pela equação de compatibilidade (4.2.11), e procedendo-se de maneira análoga ao feito no item 4.5.1, chega-se a

$$\mu_I = -0,425 \cdot k_6 + 850 \cdot h/r \left\{ k_4/3 + \frac{k_1 \cdot k_2}{2} + 250 \cdot h/r \cdot \left[ k_5/4 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2 \cdot k_1 \cdot k_4/3 + k_1^2 \cdot k_2/2 \right] \right\} + \omega/f_{yd} \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_{si} \cdot \beta_{si} \cdot \eta_{si} \quad (4.5.17)$$

onde, além das variáveis  $\omega$ ,  $\eta_{si}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , e  $k_4$ , já definidas no item 4.5.1, definem-se ainda:

$$k_5 = \beta_3^4 - \beta_2^4 \quad (4.5.18)$$

$$k_6 = \beta_2^2 - \beta_1^2, \quad (4.5.19)$$

$$e \quad \beta_{si} = y_{si}/h, \quad (4.5.20)$$

variável esta que dá as coordenadas adimensionais da posição das barras da armadura, na seção transversal.

A expressão (4.5.17) permite calcular o momento fletor resistente, em uma seção de concreto armado, em termos adimensionais, para uma dada curvatura  $1/r$  e profundidade da linha neutra  $\beta_x$ .

#### 4.6 - Definição dos valores limites adimensionais para integração do diagrama de tensões de compressão no concreto

Considerando-se os intervalos de variação do parâmetro  $\beta_x$  definidos no item 4.3, analisam-se agora os limites adimensionais de integração,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ , indicados na figura 4.5.1.

Para  $0 < \beta_x \leq 1$ , seção parcialmente comprimida, além do aço, considera-se a contribuição do concreto comprimido na obtenção da força normal resistente. Esta contribuição é resultante da distribuição das tensões de compressão no concreto, considerada de acordo com o diagrama parábola-retângulo.

Para que se possam conhecer os valores adimensionais das ordenadas, que dão os limites para integração do diagrama parábola-retângulo, define-se, para início do diagrama retangular de tensões de compressão no concreto, o valor adimensional, figura 4.6.1.

$$\beta_1 = -1/2 \quad (4.6.1)$$

Além disso, foi visto no item 2.1 que as tensões de compressão no concreto se distribuem uniformemente até que a fibra, distante  $3/7$  a partir da borda comprimida, em valor adimensional, alcance a deformação  $\epsilon_c = -2\%$ . Assim sendo, conclui-se que o máximo valor permitido para a ordenada adimensional  $\beta_2$ , ou melhor, para a ordenada que limita o fim da distribuição retangular de tensões de compressão no concreto, segundo a figura 4.6.1, é

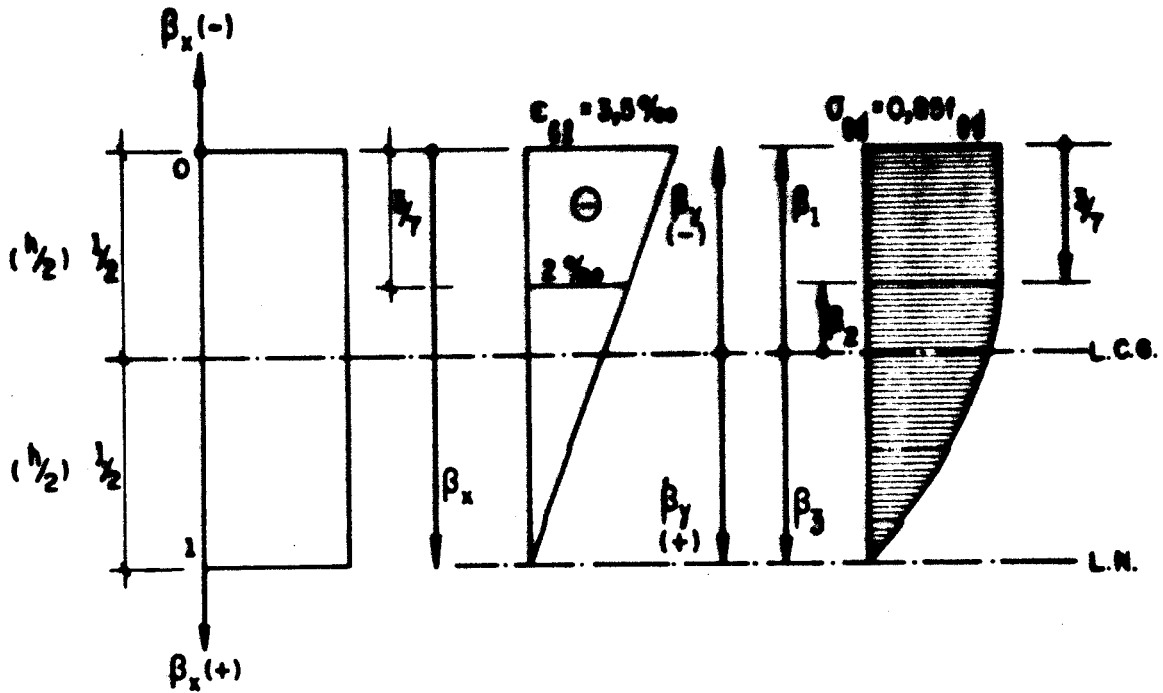


Fig. 4.6.1 - Limites adimensionais para integração do diagrama de tensões no concreto.

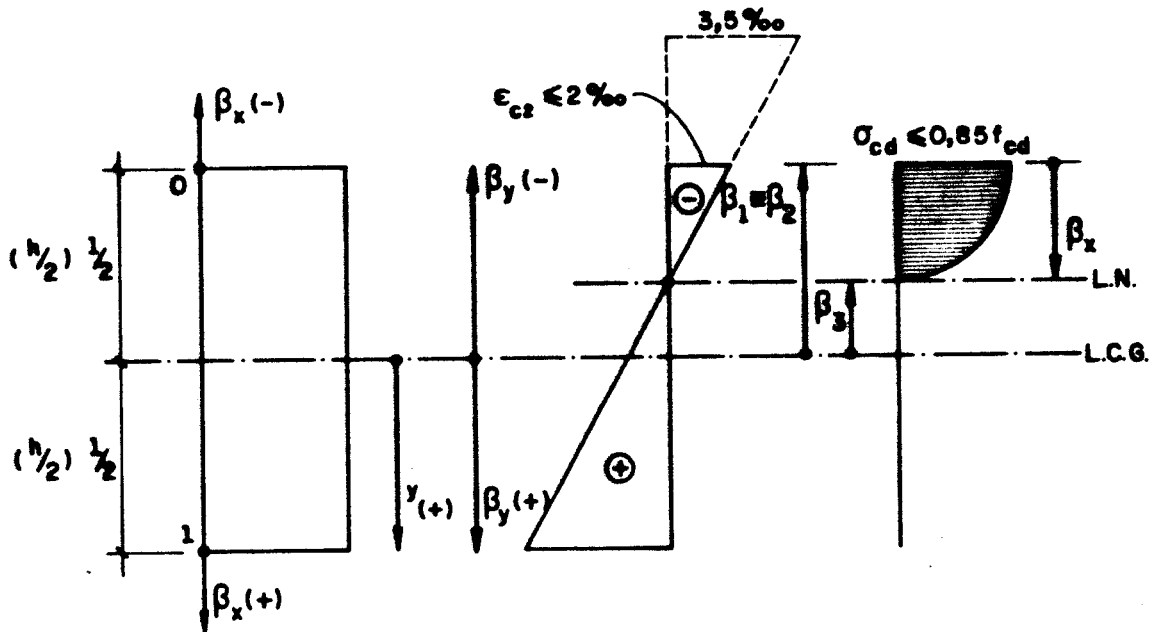


Fig. 4.6.2 - Limites adimensionais para integração do diagrama de tensões no concreto.

$$\beta_2 = \beta_1 + 3/7 \quad (4.6.2)$$

Substituindo-se (4.6.1) em (4.6.2) obtêm-se,

$$\beta_2 = - 1/14 \quad (4.6.3)$$

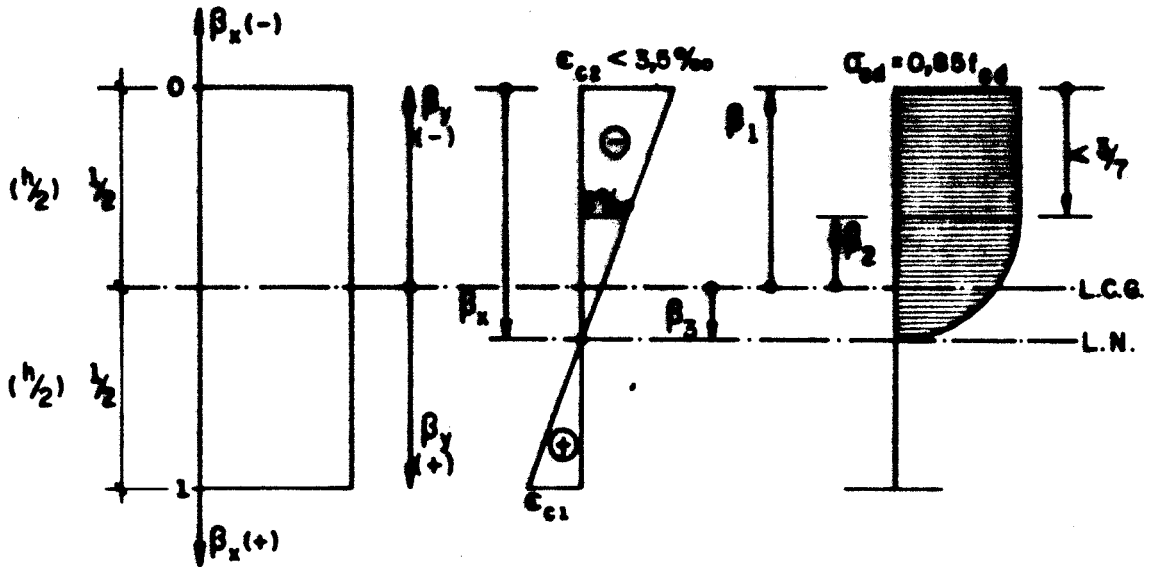


Fig. 4.6.3 - Limites adimensionais para integração do diagrama de tensões no concreto.

Considerando-se que só interessa a integral dentro da seção, pode-se dizer que o valor mínimo permitido para a ordenada adimensional  $\beta_2$ , conforme mostra a figura 4.6.2, é

$$\beta_2 = - 1/2 \quad (4.6.4)$$

Os valores de  $\beta_2$  variando no intervalo

$$- 1/2 \leq \beta_2 \leq - 1/14 \quad (4.6.5)$$

poderão ser calculados pela expressão:

$$\beta_2 = - \frac{0,002}{h/r} + \beta_x - 1/2, \quad (4.6.6)$$

que foi obtida, impondo-se a deformação  $\epsilon_c = -2\%$  na equação (4.2.11) e fazendo-se  $\beta_y = \beta_2$ .

É importante lembrar que os valores de  $\beta_2$ , calculados pela expressão geral (4.6.6), não poderão ultrapassar os limites dados em (4.6.5).

O terceiro limite de integração  $\beta_3$ , isto é, a ordenada adimensional que determina o final do diagrama parabólico, conforme mostram as figuras 4.6.1, 4.6.2 e 4.6.3, coincide com a posição da fibra com deformação nula. Portanto, para se obter a expressão geral, que define tal limite, basta impor, na equação de compatibilidade (4.2.11), deformação igual a zero, resultando para  $\beta_y = \beta_3$  a expressão

$$\beta_3 = \beta_x - 1/2 \quad (4.6.7)$$

onde o valor mínimo permitido é

$$\beta_3 = - 1/2 \quad (4.6.8)$$

Para  $\beta_x > 1$ , seção inteiramente comprimida, a expressão geral (4.6.7) e a figura 4.6.4 mostram que o valor do limite adimensional  $\beta_3$  ultrapassa o contorno da seção. Entretanto, como só interessa a integral dentro da seção, impõe-se que o máximo valor permitido para a variação do limite de integração em questão seja

$$\beta_3 = 1/2 \quad (4.6.9)$$

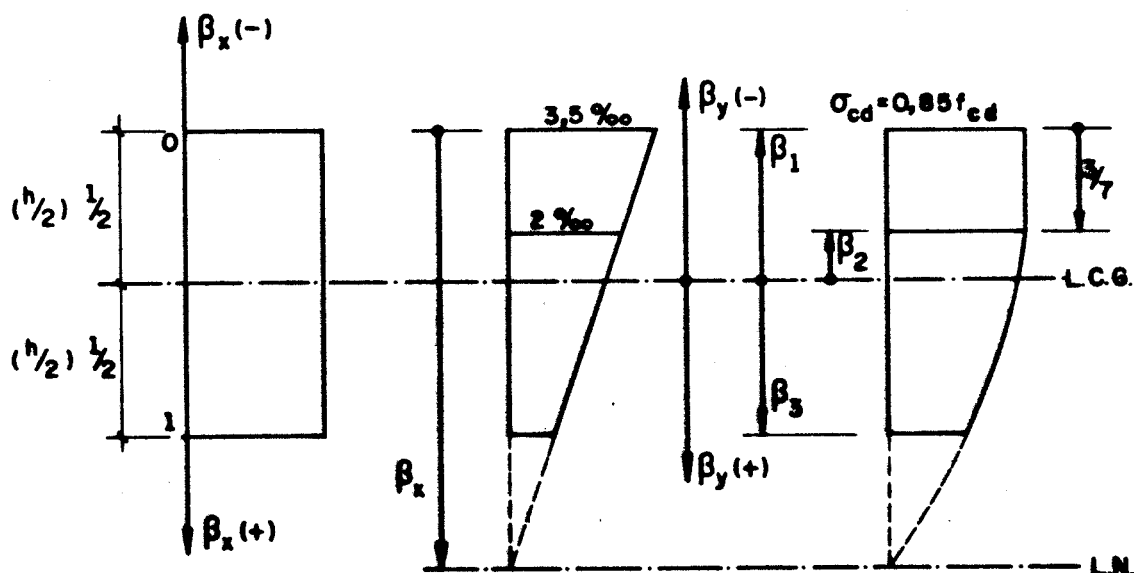


Fig. 4.6.4 - Limites dimensionais para integração do diagrama de tensões no concreto.



Para  $\beta_x \leq 0$ , seção inteiramente tracionada, os limites adimensionais de integração deverão anular a integral de tensão na seção de concreto, uma vez que a resistência à tração do concreto, como já foi dito, não está sendo considerada. Isto pode ser facilmente conseguido através da atribuição dos valores mínimos, dados em (4.6.1), (4.6.4) e (4.6.8) aos limites adimensionais de integração  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ , respectivamente. Com isto, a força normal resistente será fornecida somente pela armadura da seção transversal da peça.

#### 4.7 - Algoritmo para o cálculo do diagrama momento fletor-força normal-curvatura-( $\mu$ - $v$ - $h/r$ )

De maneira geral, o cálculo de pontos do diagrama momento fletor-força normal-curvatura de uma dada seção de concreto armado, submetida à uma força normal exige que, primeiramente, se descubra, para cada valor atribuído à curvatura  $1/r$  da seção, a profundidade da linha neutra, capaz de gerar na seção uma força normal interna adimensional  $v_I$  igual, ou aproximadamente igual, à força normal adimensional de cálculo previamente fixada  $v_{fix}$ , ou melhor, até que a equação de equilíbrio seja satisfeita:

$$v_{fix} = v_I \quad (4.7.1)$$

Uma das maneiras de se resolver o problema é usar o processo iterativo, para obtenção da ordenada adimensional  $\beta_x$ , que define a profundidade da linha neutra, até a convergência da equação de equilíbrio (4.7.1). Isto verificado, passa-se ao cálculo do momento fletor interno adimensional,  $\mu_I$  na seção.

Com o objetivo de melhor entender as operações e facilitar a programação, avaliam-se separadamente as influências do concreto e da armadura nos valores adimensionais da força normal  $v_I$  e do momento fletor  $\mu_I$  procedendo-se do seguinte modo:

$$v_I = v_s + v_c \quad (4.7.2)$$

$$\mu_I = \mu_s + \mu_c \quad (4.7.3)$$

onde os índices "s" e "c" indicam aço e concreto, respectivamente.

No caso de flexão simples, a equação de equilíbrio (4.7.1) se transforma em:

$$v_{fix} = v_I = 0 \quad (4.7.4)$$

sendo esta a condição para determinar a profundidade da linha neutra.

Encontra-se no Apêndice o programa que calcula pontos para construção do diagrama  $\mu-v-h/r$ , desenvolvido em linguagem PASCAL, com uso do equipamento tipo IBM-PC.

Considerando-se uma força normal adimensional de cálculo, previamente fixada,  $v_{fix}$ , apresentam-se a seguir os passos que permitem a elaboração do referido diagrama:

1 - Para a iteração "i" com incremento adimensional de curvatura  $\Delta_i$ , define-se a curvatura adimensional  $(h/r)_i$  da seção transversal, de acordo com a expressão:

$$(h/r)_i = (h/r)_{i-1} + \Delta_i \quad (4.7.5)$$

2 - Definem-se os valores extremos do intervalo, para variação da profundidade da linha neutra LN, valendo-se do estudo feito no item 4.3.

2.1 - Limite inferior de  $\beta_x$

Considera-se para limite inferior de  $\beta_x$  a expressão:

$$\beta_{xi} = - \frac{10\%}{h/r} + 1 - \delta \quad (4.7.6)$$

2.2 - Limite superior de  $\beta_x$

Considera-se para limite superior de  $\beta_x$  a expressão:

$$\beta_{xs} = 3,5\%/(h/r), \quad (4.7.7)$$

no caso desta ser menor ou igual a 1, ou, caso contrário, a expressão

$$\beta_{xs} = \frac{2\%}{h/r} + 3/7 \quad (4.7.8)$$

3 - Calculam-se as forças normais adimensionais resistentes,  $v_1$  e  $v_2$ , correspondentes aos limites, inferior e superior de  $\beta_x$ , respectivamente, usando-se a expressão (4.5.14).

4 - Verifica-se a normal  $v_{fix}$ , pertence ao intervalo definido no Passo 3.

4.1 - Se  $v_{fix} < v_2$  ou  $v_{fix} > v_1$ , o equilíbrio é impossível, uma vez que os limites de resistência são ultrapassados. Nesse caso, interrompe-se o procedimento.

4.2 - Se  $v_{fix}$  for igual ou aproximadamente igual, com uma certa tolerância, a  $v_1$  ou  $v_2$ , passa-se ao Passo 9. Caso contrário, vai-se para o Passo 5.

5 - Calcula-se um novo valor para  $\beta_x$ , interpolando-se linearmente os valores  $\beta_{xi}$  e  $\beta_{xs}$ ,

$$\beta_x = \frac{(v_{fix} - v_1)(\beta_{xs} - \beta_{xi})}{v_2 - v_1} + \beta_{xi} \quad (4.7.9)$$

6 - Com o valor de  $\beta_x$ , calculado em 5 e usando-se a expressão (4.5.14), obtém-se um novo valor para a força normal interna, adimensional,  $v_I$ .

7 - Verificar o equilíbrio

7.1 - Se  $v_I = v_{fix}$ , a menos de uma tolerância pré-fixada, vai-se para o Passo 9.

7.2 - Se o número de iterações extrapolar um valor fixado, deve-se interromper o procedimento.

8 - Substituindo-se convenientemente  $v_1$  ou  $v_2$  pelo valor de  $v_I$  calculado em 6, e  $\beta_{xi}$  ou  $\beta_{xs}$  pelo valor de  $\beta_x$ , calculado em 5, de forma que a força normal fixada se encontre dentro do novo intervalo, retorna-se ao Passo 5.

9 - Calcula-se o momento fletor adimensional resistente, empregando-se a expressão (4.5.17).

10- Retorna-se ao Passo 1 para novo valor de  $h/r$ .

#### 4.8 - Exemplo de diagrama $\mu-v-h/r$

A título de ilustração apresenta-se na figura 4.8.1 um diagrama de interação ( $\mu-v-h/r$ ), cujas coordenadas foram obtidas com uso do programa confeccionado de acordo com a aproximação do pilar padrão, dado no Apêndice.

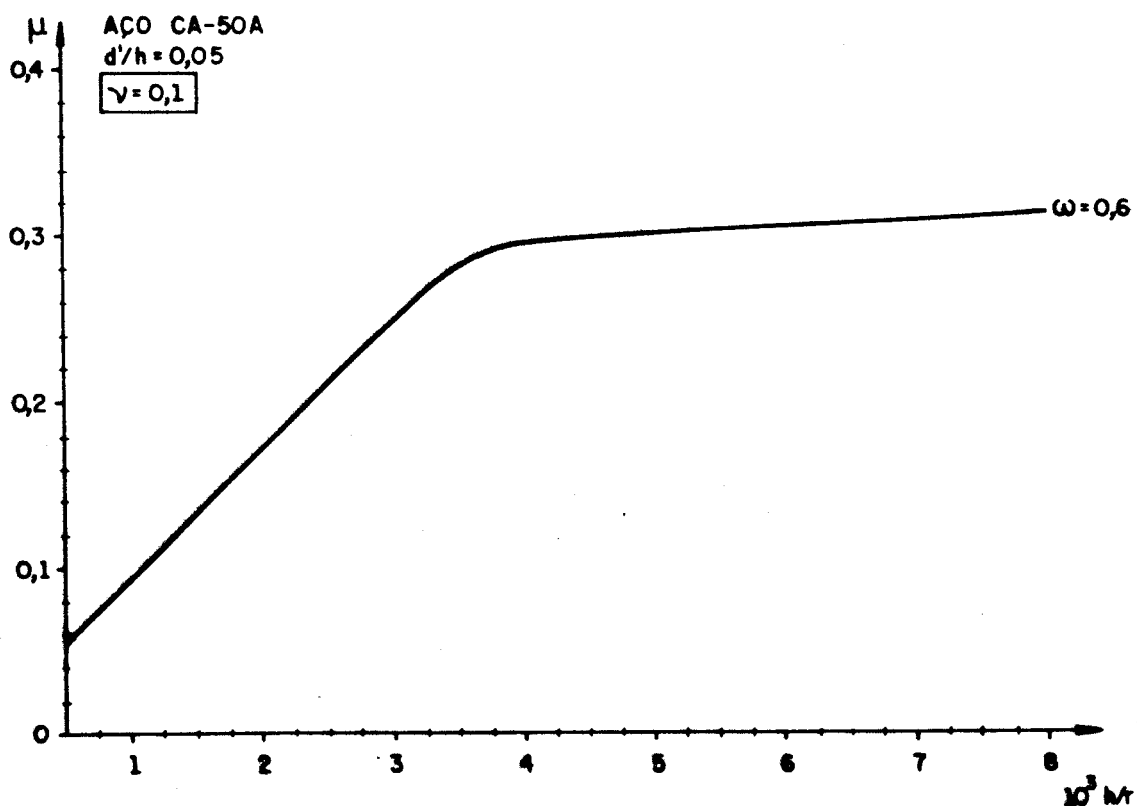


Fig. 4.8.1 - Diagrama  $\mu-v-h/r$

## 5. MÉTODOS PARA ANÁLISE DE PEÇAS COMPRIMIDAS DE CONCRETO ARMADO

Apresenta-se, neste capítulo, o estudo teórico do método geral e do processo aproximado do pilar padrão, com suas respectivas aplicações na análise e dimensionamento de peças comprimidas de concreto armado, juntamente com os algoritmos que foram seguidos na elaboração dos programas apresentados no Apêndice.

### 5.1 - Método geral

A análise das estruturas de concreto armado esbeltas, de acordo com a teoria do método geral, exige a consideração da não-linearidade geométrica, resultante dos deslocamentos transversais causados pelos momentos fletores, e da não-linearidade física dos materiais que, segundo estudo feito no item 3.1, leva a um diagrama curvo de momento resistente-curvatura. Além disso, o cálculo dos deslocamentos do eixo de uma barra fletida é feito integrando-se numericamente a equação diferencial da curvatura (3.1.3) ao longo da barra.

Devido ao fato de o momento fletor variar ao longo da barra, a curvatura  $1/r$  de cada seção também varia, sen

do necessário, para aplicação do método geral, dividir o pilar em segmentos, para poder, de posse da curvatura correspondente a cada ponto nodal, adotado na divisão do pilar, calcular os deslocamentos do eixo da barra, integrando-se a equação diferencial anteriormente citada.

A figura 5.1.1 mostra um pilar genérico, dividido em elementos, juntamente com os deslocamentos transversais, distribuição de momentos fletores e curvaturas. Usando-se a regra do trapézio, para integração numérica da equação diferencial da curvatura (3.1.3), obtém-se para o elemento  $j$ , indicado na citada figura, a expressão que dá a derivada de 1ª ordem do deslocamento correspondente ao extremo superior  $k$  do elemento genérico  $j$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_k = \sum_{j=1}^{k-1} \left[ \left( \frac{1}{r} \right)_1^j + \left( \frac{1}{r} \right)_2^j \right] \cdot h_j / 2 + C_1 \quad (5.1.1)$$

Integrando-se a equação (5.1.1), obtém-se

$$v \Big|_k = \sum_{j=1}^{k-1} \left[ \left( \frac{dv}{dx} \right)_1^j + \left( \frac{dv}{dx} \right)_2^j \right] \cdot h_j / 2 + C_1 x + C_2, \quad (5.1.2)$$

Essa expressão permite calcular o deslocamento do extremo superior  $k$  do elemento genérico  $j$ .

Para se calcular as constantes  $C_1$  e  $C_2$ , que aparecem nas expressões (5.1.1) e (5.1.2), basta impor as condições de contorno da estrutura, correspondentes a cada caso em análise.

Cabe salientar que os efeitos causados pela não-linearidade geométrica são incorporados às equações diferenciais que regem o comportamento das barras esbeltas comprimidas, e a dependência entre curvaturas e cargas são levadas em conta, através de soluções iterativas das equações diferenciais, até que o equilíbrio entre esforços externos e internos seja verificado para todas as seções da barra.

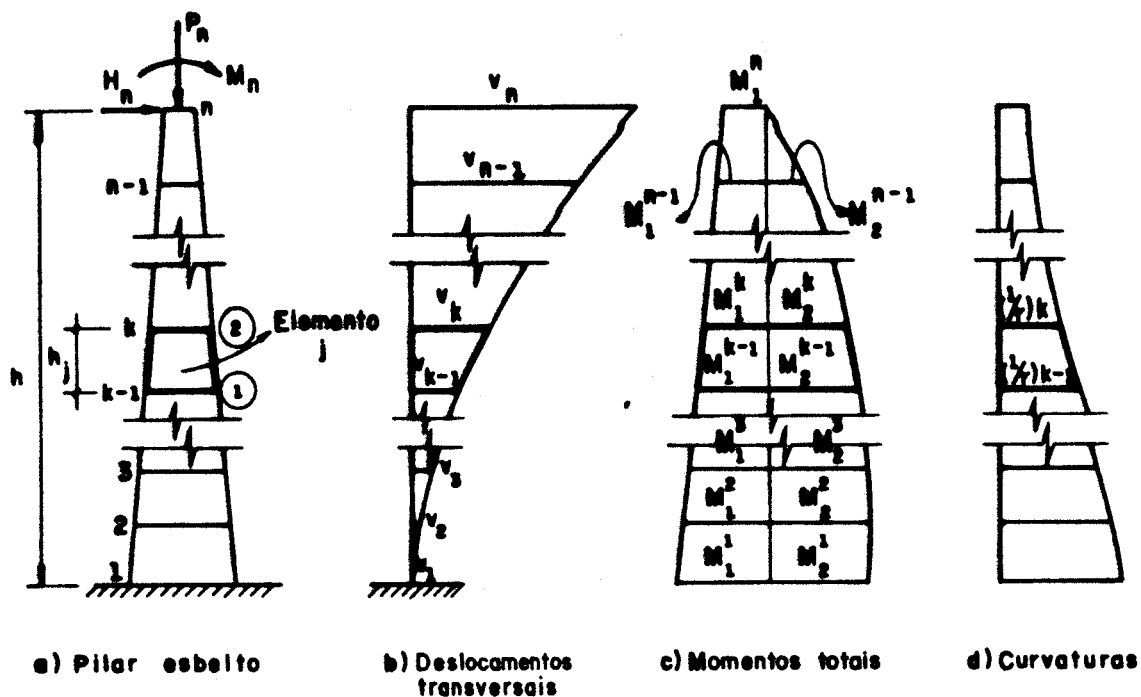


Fig. 5.1.1 - Deslocamentos transversais, momentos totais e curvaturas de um pilar genérico.

Pode-se dizer que a precisão dos resultados obtidos com o método aqui tratado, depende do número de intervalos para integração da curvatura, ao longo da barra, podendo-se, com o controle dessa variável, alcançar resultados tão precisos quanto se queira.

A grande quantidade de cálculos requeridos, quando se aplica o método geral, exige o auxílio de computador, mas tem a vantagem de ser aplicável a qualquer tipo de coluna sujeita a quaisquer carregamentos. Entretanto, neste trabalho, serão analisadas somente as colunas engastadas - livres ou equivalentes, ficando as barras com outros casos de vinculação condicionadas às mudanças das condições de contorno, que serão usadas para o cálculo dos deslocamentos transversais.

### 5.1.1 - Estudo da estabilidade de colunas isoladas aplicando-se a teoria do método geral

Para analisar a estabilidade de uma coluna, submetida à ação de um certo carregamento, é indispensável es

crever as equações de equilíbrio na estrutura deformada, para que se possam considerar os efeitos de segunda ordem. Como resultado desse procedimento, a superposição dos efeitos deixa de ser válida, uma vez que os efeitos não são mais proporcionais às ações.

Considerando a figura 5.1.2, para ilustrar o comportamento de uma barra, sujeita à flexão normal composta, verifica-se que um deslocamento transversal é inicialmente produzido pelas ações das cargas externas. Como resultado deste deslocamento o momento da carga axial  $N$  aumenta, causando um novo aumento no deslocamento transversal. Se as cargas externas são menores do que a capacidade de suporte da barra, este processo continua até que um estado de equilíbrio seja encontrado para todas as seções da barra. Para procedimento de proje-

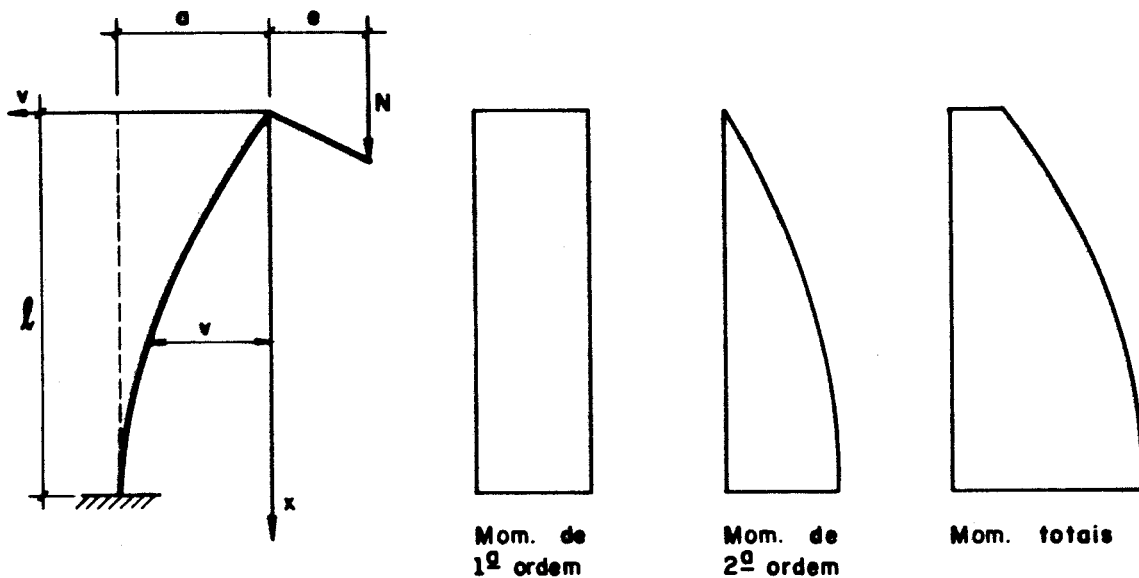


Fig. 5.1.2 - Distribuições de momentos ao longo de uma barra.

to, tendo em vista o estudo feito no item 3.5, é necessário, para o estudo da estabilidade, conhecer o diagrama momento fletor-força normal-curvatura, correspondente a cada seção da barra. Esta relação permite encontrar um momento interno resistente correspondente a cada curvatura da seção.



Aplicando-se a uma barra um momento externo de primeira ordem,  $M_e$ , por exemplo, oriundo de uma excentricidade da força normal, e analisando-se uma seção desta barra com auxílio da figura 5.1.3, observa-se que, dependendo da intensidade desse momento, pode ser possível encontrar, através de processos iterativos, um valor para a curvatura,  $1/r$ , que produza um momento interno resistente,  $M_I$ , capaz de equilibrá-lo, ou melhor, capaz de verificar a igualdade  $M_e = M_I$ , caracterizada na citada figura pelo ponto A. Com isto, o eixo da barra flete aumentando o momento atuante,

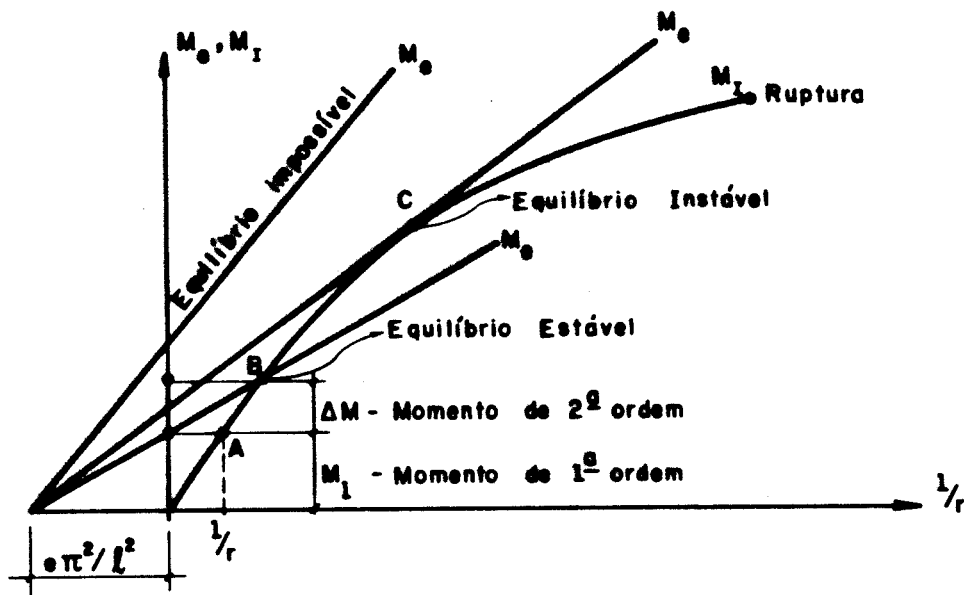


Fig. 5.1.3 - Instabilidade na flexo-compressão - regime elástico não-linear.

devido ao efeito de 2ª ordem, conforme dito anteriormente. Se, entretanto, for possível encontrar uma nova curvatura que resulte em um valor para o momento interno capaz de equilibrar o novo valor do momento externo, este processo continua, até que, caso não ocorra a ruptura dos materiais, seja atingido um ponto limite de equilíbrio estável, por exemplo, o ponto B do diagrama da figura 5.1.3, estando verificada a estabilidade da configuração fletida de equilíbrio, da seção em análise.

Procedendo-se assim, para todas as seções da barra, tem-se um perfeito conhecimento da posição fletida de equilíbrio da mesma.

Com relação ao cálculo dos deslocamentos do eixo de uma barra fletida, cabe lembrar que os mesmos são calculados, integrando-se a equação diferencial da curvatura (3.1.3) ao longo da barra, o que será feito usando-se as equações (5.1.1) e (5.1.2) e as condições de contorno, que neste trabalho serão sempre dadas por:

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=l} = 0 \quad (5.1.3)$$

$$v(l) = a, \quad (5.1.4)$$

uma vez que são consideradas somente as barras vinculadas, conforme figura 5.1.2.

Para efeito de programação, sugere-se, como orientação, para verificação da estabilidade de colunas isoladas usando-se a teoria exposta, o algoritmo definido pelos seguintes passos:

- 1 - Cálculo dos momentos fletores de 1ª ordem em todas as seções da barra, previamente definidas.

Considerando o carregamento atuante na barra, calcula-se estaticamente o momento fletor atuante em cada seção.

- 2 - Cálculo das curvaturas em todas as seções da barra, previamente definidas.

Procura-se a curvatura capaz de produzir o equilíbrio dos esforços atuantes, em cada seção em análise, determinados no Passo 1, procedendo-se do seguinte modo:

- 2.1 - Adota-se a curvatura mínima adimensional

$$(h/r)_1 = 0 \quad (5.1.5)$$

Usando-se o algoritmo dado em 4.7 obtém-se, caso o procedimento não seja interrompido nos Passos 4.1 ou 7.2

do algoritmo citado, além de um esforço normal resistente  $N_{I1}$ , que equilibra o esforço normal atuante, o momento fletor resistente  $M_{I1}$  da seção em análise.

2.2 - Se o momento fletor resistente,  $M_{I1}$ , calculado em 2.1, equilibrar o momento fletor atuante na seção em análise, vai-se para o Passo 2.10.

2.3 - Adota-se em seguida a curvatura máxima adimensional, para a seção em análise, admitindo-se que, a deformação última de tração no aço, 10%, e a deformação última de compressão no concreto, 3,5% sejam atingidas ao mesmo tempo, usando-se a expressão (4.1.2), isto é,

$$(h/r)_2 = 0,0135/(1-\delta) \quad (5.1.6)$$

Considerando-se o valor de  $(h/r)_2$ , e usando-se o algoritmo descrito no item 4.7, obtêm-se, caso o procedimento não seja interrompido no Passo 4.1 ou 7.2 do citado algoritmo, além de um esforço normal resistente  $N_{I2}$ , que equilibra o esforço normal atuante, o momento fletor  $M_{I2}$ , da seção, passando-se ao Passo 2.5 deste algoritmo. Caso não seja possível a determinação da força normal, como indicado no Passo 4.1, do algoritmo acima citado, passar ao Passo 2.4 deste.

2.4 - A partir dos valores  $(h/r)_1$  e  $(h/r)_2$  obtêm-se um novo valor de  $(h/r)_2$ , usando-se a expressão:

$$(h/r)_2 = (h/r)_1/2 + (h/r)_2/2 \quad (5.1.7)$$

A verificação do novo valor de  $(h/r)_2$  é feita como no Passo 2.3. Novos valores de  $(h/r)_2$ , calculados pela média dada acima, devem-se repetir até que o equilíbrio entre esforço normal atuante e resistente seja encontrado. Determina-se, em seguida, segundo o passo acima citado, o momento fletor resistente  $M_{I2}$ , da seção em análise.

- 2.5 - Se o momento fletor resistente  $M_{I2}$ , calculado no Passo 2.3 ou 2.4, equilibrar o momento fletor atuante na seção em análise, vai-se para o Passo 2.10.
- 2.6 - Cálculo da curvatura adimensional,  $(h/r)_2$ , capaz de produzir um momento resistente  $M_{r2}$ , que equilibre o momento fletor atuante na seção.

Interpolando-se linearmente os valores  $(h/r)_1$ ,  $M_{I1}$ ,  $(h/r)_2$  e  $M_{I2}$ , juntamente com o valor do momento fletor ( $M_1$ ), atuante na seção, chega-se à expressão

$$(h/r)_2 = (h/r)_2 - \left[ (h/r)_2 - (h/r)_1 \right] \cdot (M_{I2} - M_1) / (M_{I2} - M_{I1}) \quad (5.1.8)$$

que dá o novo valor de  $(h/r)_2$ .

- 2.7 - Se  $(h/r)_2 \approx (h/r)_1$ , parar o procedimento.
- 2.8 - Usando-se o algoritmo dado no item 4.7, para esse novo valor de  $(h/r)_2$ , obtém-se, além de um esforço normal resistente,  $N_{r2}$ , que equilibra o esforço normal atuante, um novo valor para o momento fletor resistente,  $M_{r2}$ , para a seção em análise.
- 2.9 - Se o momento fletor resistente  $M_{I2}$ , calculado no Passo 2.8, equilibrar o momento fletor atuante na seção, vai-se para o Passo 2.10. Caso contrário, retorna-se ao Passo 2.6.
- 2.10- Dividir o valor de  $(h/r)_2$ , que resultou no equilíbrio de momentos, pela altura da seção transversal em análise, para obter o valor dimensional da curvatura,  $1/r$ , da referida seção.
- 2.11- Voltar ao Passo 2 até que a última seção da barra seja analisada, passando-se então ao Passo 3.

- 3 - Cálculo dos deslocamentos de todas as seções da barra.

Integrando-se numericamente a equação diferencial da curvatura (3.1.3), de acordo com as equações,

(5.1.1) e (5.1.2), com os valores de  $1/r$ , calculados no Passo 2.10, e com as condições de contorno (5.1.3) e (5.1.4), obtêm-se os deslocamentos de todas as seções da barra.

- 4 - Correção dos momentos fletores em todas as seções da barra.

Acrescentar ao momento fletor de 1<sup>a</sup> ordem de cada seção, calculados no Passo 1, o momento fletor que cada força normal, atuante nas seções situadas acima da considerada, produz nesta, devido aos deslocamentos do eixo da barra, calculados no Passo 3.

- 5 - Retornar ao Passo 2 se a variação dos momentos fletores for maior que uma tolerância estabelecida. Caso contrário, tem-se verificada a estabilidade da coluna.

#### 5.1.2 - Cálculo da carga crítica, usando-se a teoria do método geral

Este cálculo exige uma análise especial no que tange aos efeitos de 2<sup>a</sup> ordem e verificação do estado limite de instabilidade de cada seção. Para tal análise e cálculo da solicitação limite último de instabilidade carga crítica, será usado aqui o processo do carregamento progressivo até se atingir o ponto limite de equilíbrio instável, estudado no item 3.5 e resumidamente mostrado na figura 5.1.3.

Considerando-se uma barra de seção transversal constante ou variável ao longo de seu comprimento, submetida a uma solicitação inicial, momento fletor e força normal, é possível, segundo o item 5.1.1, estudar a estabilidade da configuração fletida de equilíbrio da barra. Contudo, tendo em vista o estudo feito no item acima citado e o diagrama da figura 5.1.3, pode-se dizer que, caso a confi-

guração fletida de equilíbrio da barra analisada seja estável, ponto B do diagrama da figura citada, é possível, através de um processo incremental, aumentar as solicitações iniciais, até que a função momento externo alcance o ponto C do referido diagrama. Este ponto de tangência das funções, momento externo e momento interno, caracteriza um ponto de equilíbrio instável, cuja carga correspondente é a carga limite último de instabilidade, ou carga crítica.

Chama-se a atenção para o fato de que, em cada etapa de carregamento, a estrutura deve ser resolvida considerando-se a não-linearidade geométrica do sistema e a não-linearidade física dos materiais. Como se sabe, isto leva a resultados não proporcionais entre curvatura e momento interno resistente, sendo a solução necessariamente iterativa, podendo-se com o controle da variável, incremento de carga, alcançar resultados tão precisos quanto se queira.

Apresentam-se a seguir os passos do algoritmo para obtenção da carga crítica, usando-se o processo do carregamento progressivo, e a teoria do método geral:

1 - Definir um incremento de carga conveniente  $\Delta N_i$ .

2 - Definir o carregamento da barra em análise, no incremento (i) do seguinte modo (figura 5.1.4):

$$N_i = N_{i-1} + \Delta N_i \quad (5.1.9)$$

$$M_i = N_{i-1}(e+v_{i-1}) + \Delta N_i(e+v_{i-1}) \quad (5.1.10)$$

3 - Para a solicitação (i), calcula-se o deslocamento de cada seção da barra, previamente definida, usando-se o algoritmo descrito no item 5.1.1 com as seguintes alterações:

a) onde o processo for interrompido, deve-se passar ao Passo 4 deste, pois nesse caso não foi possível e-

quilibrar o carregamento em questão, isto é, o incremento foi muito grande e a carga crítica foi ultrapassada.

b) ao invés de encerrar o procedimento, quando se verifica a estabilidade da barra, para o carregamento em análise, deve-se passar ao Passo 2 deste, para no vo incremento de carga.

4 - Fixar novo valor para o incremento de carga

$$\Delta N_i = (N_i - N_{i-1}) / n \quad (5.1.11)$$

onde  $n$  é um número inteiro pré-fixado.

5 - Retornar ao Passo 2 se  $\Delta N_i$  for maior que a tolerância escolhida. Caso contrário, a carga crítica está determinada.

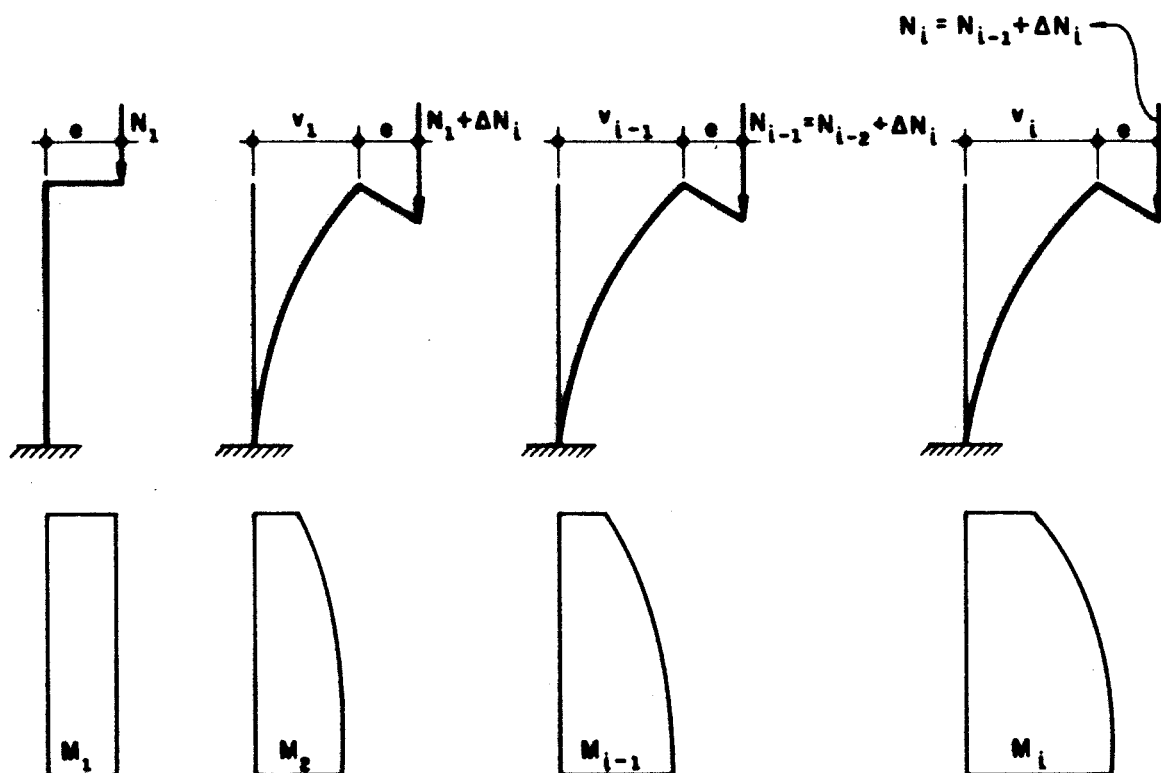


Fig. 5.1.4 - Carregamentos nas várias etapas de equilíbrio de um pilar esbelto.

### 5.1.3 - Dimensionamento de colunas usando-se a teoria do método geral

A solução dos problemas de dimensionamento, através do uso de computador, requer um tratamento iterativo para a determinação da mínima taxa mecânica de armadura, capaz de verificar a estabilidade de uma coluna.

Este item trata do dimensionamento de colunas engastadas-livres ou equivalentes de forma retangular, trapezoidal e escalonada, sujeitas a quaisquer carregamentos. No entanto, outros tipos de vinculações podem facilmente ser analisados, bastando alterar as condições de contorno, (5.1.3) e (5.1.4), para cada caso em análise.

Adotando-se como ponto de partida, além das recomendações feitas no item 5.1, um valor para a taxa mecânica de armadura  $\omega$ , da seção da base da coluna, e considerando a área de aço como constante ao longo da coluna, determinam-se as taxas mecânicas das seções "i", da barra, usando-se a expressão

$$\omega_i = \omega \cdot A_{cl} / A_{ci} \quad (5.1.12)$$

onde,  $A_{cl} / A_{ci}$  dá a relação entre a área da seção transversal da base e a área da seção i.

Passa-se, em seguida, ao estudo da estabilidade da coluna, assim dimensionada, usando-se o exposto no item 5.1.1. Supondo-se verificada a estabilidade da coluna, faz-se,

$$\omega_1 = \omega \quad (5.1.13)$$

e calcula-se um novo valor para a taxa mecânica da base  $\omega$ , usando a expressão:

$$\omega = \omega_1 / 2, \quad (5.1.14)$$



retornando-se ao estudo da estabilidade conforme já citado. Este processo deve ser repetido até se encontrar o primeiro valor da taxa mecânica  $\omega$ , incapaz de verificar a estabilidade da coluna, devendo-se daí fazer

$$\omega_2 = \omega \quad (5.1.15)$$

A partir daí, estuda-se a estabilidade da coluna, seguindo o raciocínio descrito anteriormente, com o valor de  $\omega$  dado pela expressão:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (5.1.16)$$

Este procedimento deve ser repetido até que a diferença  $\Delta\omega$  entre dois valores consecutivos da taxa mecânica de armadura  $\omega$  seja menor que uma tolerância escolhida. Neste caso, verificada a estabilidade, a coluna estará dimensionada.

Para melhor explicar e também para ajudar na programação do exposto, sugere-se o seguinte algoritmo para dimensionamento de colunas isoladas:

- 1) Adota-se um valor inicial para a taxa mecânica de armadura da seção da base da coluna  $\omega$ .
- 2) Para cada seção "i" da barra, previamente definida, calcula-se a correspondente taxa mecânica de armadura, usando-se a expressão (5.1.12).
- 3) Estuda-se a estabilidade da coluna, usando-se o algoritmo descrito em 5.1.1, sendo que, nos passos onde o citado algoritmo for interrompido, passa-se ao Passo 4 deste.
- 4) Se a estabilidade for verificada, faz-se:

$$\omega_1 = \omega \quad (5.1.17)$$

$$\omega_2 = 0 \quad (5.1.18)$$

e passa-se ao Passo 6. Caso contrário, deve-se fazer

$$\omega_2 = \omega \quad (5.1.19)$$

e passar ao Passo 5.

5) Se for o 1º valor adotado para a taxa mecânica  $\omega$ , interrompe-se o procedimento, pois o valor inicial não foi suficiente para estabilizar a coluna. Caso contrário, passa-se ao Passo 6.

6) Calcula-se um novo valor para a taxa mecânica  $\omega$ , usando-se a expressão

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (5.1.20)$$

7) Retorna-se ao Passo 2 se a diferença entre dois valores consecutivos de  $\omega$  for maior que uma tolerância estabelecida. Caso contrário, a coluna está dimensionada.

## 5.2 - Processo aproximado do pilar padrão

O processo aproximado do pilar padrão foi criado com o objetivo de diminuir o grande número de cálculos requeridos, quando se aplica o método geral. Na realidade não se trata de um novo método, mas de uma aproximação do método geral.

A característica principal do processo do pilar padrão é dada pela eliminação da integração das curvaturas ao longo da barra, pois ele é baseado na suposição de ser senoidal a elástica da barra e a correspondente curvatura, como feito no item 3.5. Deve-se observar que a aproximação senoidal, feita no item acima citado, resulta em elástica e curvaturas proporcionais, entretanto, quando o material não tem comportamento linear, essa propriedade deixa de existir. Apesar dessa particularidade, no processo do pilar padrão é admitido ainda a proporcionalidade citada, restringindo

apenas sua aplicação para o caso de pilares com seção constante.

A partir da aproximação senoidal (3.5.2) pode-se obter o máximo deslocamento transversal na extremidade superior do pilar, figura 5.2.1, usando-se a expressão:

$$a = \frac{l^2}{\pi^2} \cdot e \cdot (1/r)_{\text{base}} \quad (5.2.1)$$

ou aproximadamente,

$$a = \frac{l^2}{10} \cdot e \cdot (1/r)_{\text{base}} \quad (5.2.2)$$

Como serão admitidos os diagramas de curvaturas e deslocamentos, apenas os parâmetros relativos a um ponto do pilar, a base, são necessários no uso do processo. Assim, a verificação do equilíbrio, via uso do diagrama momento fletor-força normal-curvatura, fica sempre restrito à análise da base, admitindo-se que as demais seções estejam, em decorrência, verificadas.

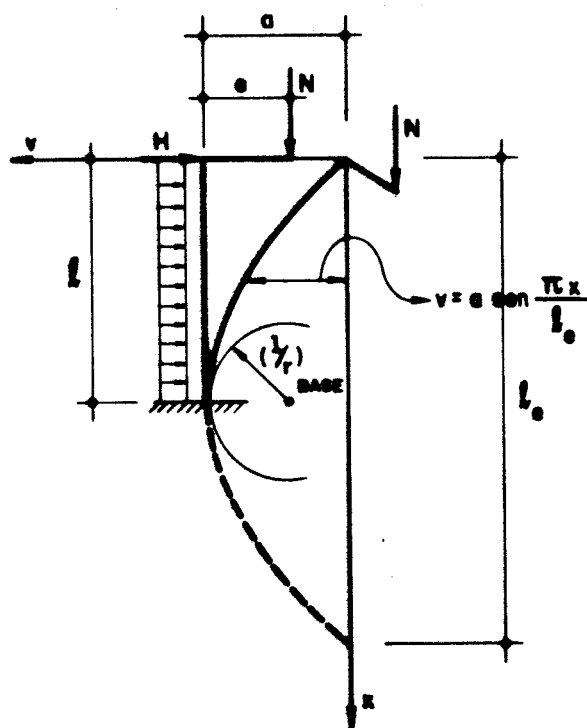


Fig. 5.2.1 - Pilar padrão - linha elástica senoidal.

Deve ser sempre lembrado que o processo do pilar padrão é definido para uma distribuição senoidal de momentos fletores. Qualquer outra distribuição existente prejudica ainda mais a confiabilidade dos resultados obtidos. No capítulo 6 é feita uma análise numérica, evidenciando essa característica.

A utilização da senóide, para representar a linha elástica, permite que o modelo, figura 5.2.1, seja aplicado a qualquer pilar, independentemente da vinculação. A influência das vinculações ficam consideradas pelo comprimento de flambagem,  $\ell_e$ , que é diferentemente fixado, para os casos clássicos de vinculações dados na mecânica das estruturas.

### 5.2.1 - Estudo da estabilidade de colunas usando o processo aproximado do pilar padrão

Considerando o estudo feito no item 5.1.1, pode-se dizer que a verificação da estabilidade de uma coluna, com o uso do processo aproximado do pilar padrão, torna-se bastante mais simples, pois tal verificação será feita somente na seção da base e as flechas no topo da coluna serão agora obtidas com uso da expressão (5.2.2), sem necessidade de efetuar-se a integração das curvaturas ao longo da barra. Isto posto, tem-se, considerando a figura 5.2.1, que a expressão geral do momento fletor, atuante na seção da base do pilar, para cada etapa de verificação da estabilidade, é:

$$M_b = M_1 + N \cdot a \quad (5.2.3)$$

sendo a flecha "a" dada pela expressão (5.2.2), o que transforma a expressão (5.2.3) em

$$M_b = M_1 + N \cdot \frac{\ell_e^2}{10} \cdot (1/r)_{base} \quad (5.2.4)$$

onde  $M_1$  é o momento de 1ª ordem atuante na seção da base da coluna,  $(1/r)_{base}$  é a curvatura da seção da base que possibilitou o equilíbrio dos esforços externos e internos, e  $N$  é a força normal atuante.

Observa-se que, para a 1ª etapa de verificação, a expressão (5.2.3) se transforma em:

$$M_b = M_1 \quad (5.2.5)$$

pois inicialmente a barra é considerada reta, não existindo o efeito de 2ª ordem.

Apresenta-se a seguir os passos do algoritmo para verificação da estabilidade de colunas, usando-se o processo aproximado do pilar padrão:

1 - Para a 1ª etapa de verificação da estabilidade, calcula-se estaticamente o momento fletor  $M_1$  atuante na seção da base.

2 - Adota-se a curvatura mínima adimensional

$$(h/r)_1 = 0 \quad (5.2.6)$$

3 - Usa-se o algoritmo dado no item 4.7, para obter, caso o procedimento não seja interrompido nos Passos 4.1 ou 7.2 do algoritmo acima citado, além de um esforço normal resistente  $N_{I1}$  que equilibra o esforço normal atuante, o momento fletor resistente  $M_{I1}$  da seção da base do pilar.

4 - Se o momento fletor  $M_{I1}$  calculado no Passo 3, equilibrar o momento fletor atuante na seção da base, faz-se

$$(h/r)_2 = (h/r)_1 \quad (5.2.7)$$

e passa-se ao Passo 13.

- 5 - Adota-se a curvatura máxima adimensional dada pela expressão (4.1.2), isto é,

$$(h/r)_2 = 0,0135/(1-\delta) \quad (5.2.8)$$

- 6 - Usa-se o algoritmo dado no item 4.7, para obter, caso o procedimento não seja interrompido nos Passos 4.1 ou 7.2 do citado algoritmo, além de um esforço normal resistente  $N_{I2}$ , que equilibra o esforço normal atuante, o momento fletor resistente  $M_{I2}$ , passando-se ao Passo 8. Entretanto, caso não seja possível a determinação da força normal resistente, como indicado no Passo 4.1, do citado algoritmo, passa-se ao Passo 7 deste.

- 7 - Usa-se os valores de  $(h/r)_1$  e  $(h/r)_2$ , para obter um novo valor de  $(h/r)_2$ , segundo a expressão:

$$(h/r)_2 = \left[ (h/r)_1 + (h/r)_2 \right] / 2 \quad (5.2.9)$$

A verificação do novo valor de  $(h/r)_2$  é feita como no Passo 6. Novos valores de  $(h/r)_2$ , calculados pela média dada acima, devem se repetir até que o equilíbrio entre esforço normal atuante e resistente seja encontrado, tendo-se daí determinado, segundo o passo acima citado, o momento fletor resistente  $M_{I2}$ , da seção em análise.

- 8 - Se o momento fletor resistente  $M_{I2}$ , equilibrar o momento fletor atuante na seção da base, passa-se ao Passo 13.
- 9 - Interpola-se linearmente os valores  $(h/r)_1$ ,  $M_{I1}$ ,  $(h/r)_2$  e  $M_{I2}$ , juntamente com o valor do momento fletor  $M_1$ , atuante na seção da base, obtendo-se o novo valor de  $(h/r)_2$ , assim:

$$(h/r)_2 = (h/r)_2 - \left[ (h/r)_2 - (h/r)_1 \right] \cdot (M_{I2} - M_1) / (M_{I2} - M_{I1}) \quad (5.2.10)$$

- 10- Se  $(h/r)_2 \approx (h/r)_1$ , parar o procedimento.

11 - Usa-se o algoritmo dado no item 4.7, para esse novo valor de  $(h/r)_2$ , obtendo-se, além de um esforço normal,  $N_{I2}$ , que equilibra o esforço normal atuante, um novo valor para o momento fletor resistente,  $M_{I2}$ , para a seção da base.

12 - Se o momento fletor resistente  $M_{I2}$ , calculado no Passo 11, equilibrar o momento fletor atuante na seção, passa-se ao Passo 13. Caso contrário, retorna-se ao Passo 9.

13 - Calcula-se a flecha da extremidade livre do pilar,

$$a = (\ell_e/h)^2 \cdot (h/r)_2 / 10 \quad (5.2.11)$$

14 - Faz-se:

$$(h/r)_1 = (h/r)_2 \quad (5.2.12)$$

$$M_{I1} = M_{I2} \quad (5.2.13)$$

15 - Acrescenta-se ao momento fletor, calculado no Passo 1, o momento fletor que a força normal atuante produz na seção da base devido à flecha calculada em 13, usando-se a expressão (5.2.3).

16 - Retorna-se ao Passo 5 se a variação dos momentos fletores for maior que uma tolerância estabelecida. Caso contrário, tem-se verificada a estabilidade do pilar.

#### 5.2.2 - Estudo da carga crítica usando-se o processo aproximado do pilar padrão

O estudo da carga crítica, de acordo com o processo aproximado do pilar padrão, tem a vantagem de restringir a análise da estabilidade de cada etapa de carregamento apenas à seção da base da coluna, diminuindo com isso o trabalho exaustivo requerido quando se aplica o método geral.

Para cada etapa de carregamento é possível, com uso do diagrama momento fletor-força normal-curvatura correspondente à seção da base do pilar, obter, através de um processo iterativo, a curvatura da seção da base necessária para restabelecer o equilíbrio entre os esforços atuantes da etapa em estudo e os esforços resistentes. Com isto, fazendo-se uso da expressão (5.2.2), calcula-se a flecha no topo da coluna. Flecha esta que irá aumentar o momento fletor atuante na seção da base da coluna, produzindo uma nova curvatura na referida seção, que irá provocar uma nova flecha. Este processo continua até que a convergência da série de momentos fletores possa ser constatada numericamente, estando verificada a estabilidade da coluna para o carregamento em análise. Isto comprovado, aumenta-se o carregamento e repete-se a análise acima descrita até que o valor do carregamento leve a barra a ultrapassar o estado limite último de instabilidade, caracterizado pelo ponto de tangência das funções momento externo  $M_e$  e momento interno resistente  $M_I$ , mostrado na figura 5.1.3. Daí, então, diminui-se o valor do incremento de carga e acrescenta-o ao valor do último carregamento que o pilar foi capaz de estabilizar, retornando-se ao estudo da estabilidade, conforme dito acima. Procedendo-se assim, é possível, com o controle da variável, incremento de carga, obter a carga crítica com a precisão desejada, embora não se saiba corretamente o erro que se estaria cometendo com o uso do processo aproximado do pilar padrão.

Para melhor explicar e facilitar a programação do exposto, apresentam-se, a seguir, os passos do algoritmo para calcular a carga crítica de uma coluna isolada, usando-se o processo do pilar padrão:

- 1 - Definir um incremento de carga conveniente  $\Delta N_i$ .
- 2 - Definir o carregamento da barra em análise, no incremento (i), do seguinte modo:



$$N_i = N_{i-1} + \Delta N_i \quad (5.2.14)$$

$$M_i = N_{i-1}(e+a_{i-1}) + \Delta N_i(e+a_{i-1}) \quad (5.2.15)$$

onde,  $a_{i-1} = v_{i-1}$ , sendo  $v_{i-1}$  definido na figura 5.1.4.

- 3 - Para a solicitação  $i$ , calcula-se a flecha na extremidade da coluna, usando-se o algoritmo descrito no item 5.2.1, com a seguinte alteração:

onde o processo for interrompido deve-se passar ao Passo 5 deste, pois não foi possível equilibrar o carregamento em questão, isto é, o incremento foi muito grande e a carga crítica foi ultrapassa.

- 4 - Verificada a estabilidade para o carregamento em análise, retornar ao Passo 2 para novo incremento de carga.
- 5 - Fixar novo valor para o incremento de carga, de acordo com a expressão:

$$\Delta N_i = (N_i - N_{i-1}) / n \quad (5.2.16)$$

onde  $n$  é um número inteiro pré-fixado.

- 6 - Retorna-se ao Passo 2 se  $\Delta N_i$  for maior que a tolerância escolhida. Caso contrário, a carga crítica está determinada.

### 5.2.3 - Cálculo do momento crítico de 1ª ordem - elaboração de ábacos e seu uso

Considerando-se a coluna submetida à flexão normal-composta, figura 5.2.2, com suas características geométricas e distribuição de armaduras bem definidas, existe um valor do momento fletor de 1ª ordem,  $M_{1m\acute{a}x}$ , que a leva ao estado limite último de instabilidade. Este momento máximo é comumente chamado de momento crítico de 1ª ordem.

Usando-se o processo aproximado do pilar padrão, para o cálculo do momento crítico de 1ª ordem, o mesmo fica restrito apenas à seção da base da coluna, entretanto tem a vantagem de não necessitar efetuar a integração das curvaturas.

Conhecendo-se, para cada posição de equilíbrio, figura 5.2.2, a relação, momento fletor-curvatura correspondente à seção transversal da base, para um determinado valor da força normal  $N$ , pode-se traçar a curva do momento interno resistente  $M_I$ , em função da curvatura  $(1/r)_{base}$ , da referida seção, figura 5.2.3, conforme estudo feito no item 4.7.

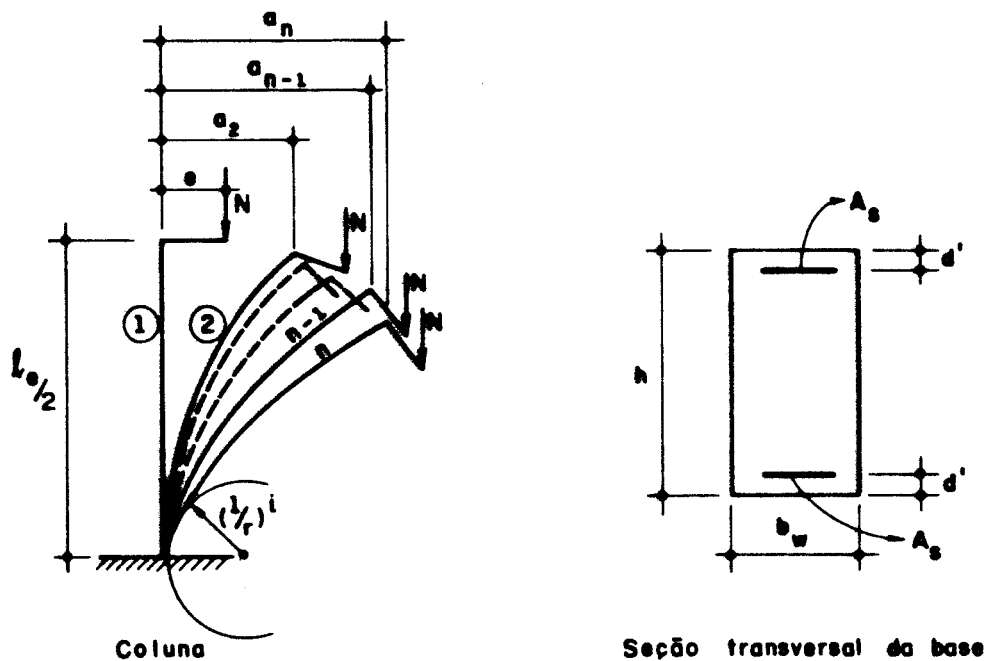


Fig. 5.2.2 - Posições fletidas de equilíbrio de uma coluna em balanço.

Por outro lado, para cada posição de equilíbrio, dada na figura 5.2.2, pode-se calcular, considerando fixo o comprimento de flambagem  $\lambda_e$  da coluna, o momento fletor de 2ª ordem  $M_{2b}$ , atuante na seção da base, usando-se a hipótese básica do pilar padrão, dada por (5.2.2), com:

$$M_{2b}^i = N \cdot \frac{l_e^2}{10} \cdot (1/r)_{base}^{i-1}, \quad (5.2.17)$$

para "i" variando no intervalo

$$2 \leq i \leq n \quad (5.2.18)$$

onde n indica a posição final de equilíbrio da coluna, figura 5.2.2.

Observa-se, na expressão (5.2.17), que a função, momento fletor de 2ª ordem  $M_{2b}$  varia linearmente com a curvatura da seção da base  $(1/r)_{base}$ , para cada posição de equilíbrio mostrada na figura 5.2.2.

Na figura 5.2.3, encontra-se também representada a função, momento fletor de 1ª ordem versus curvatura da seção da base,  $(1/r)_{base}$ .

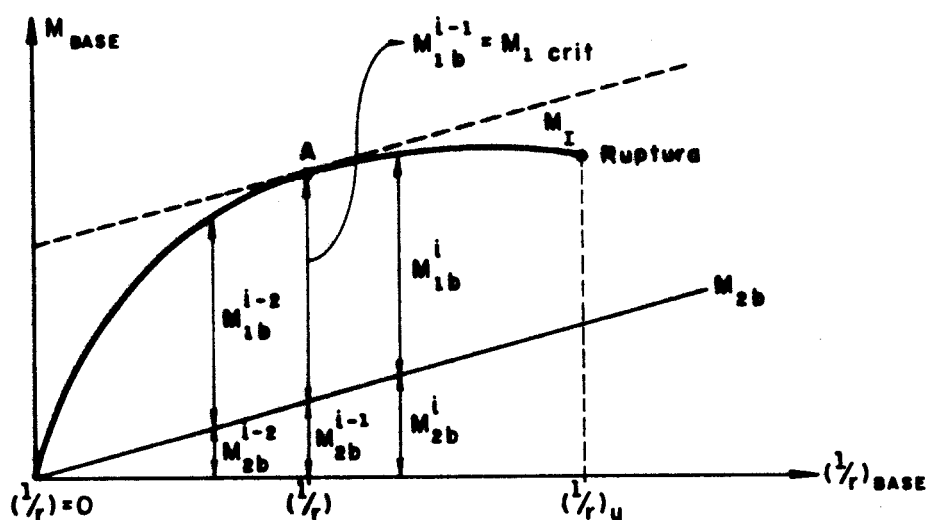


Fig. 5.2.3 - Diagramas de momentos de 1ª e 2ª ordem na seção da base.

Do exposto, e considerando-se a figura 5.2.3, obtêm-se uma série de momentos fletores de 1ª ordem,  $M_{1b}$ , atuantes na seção da base da coluna, para cada posição de equilíbrio mostrada na figura 5.2.2, usando-se a expressão,

$$M_{1b} = M_I - M_{2b}, \quad (5.2.19)$$

cujo valor máximo,  $M_{1crít}$ , vai ocorrer para uma determinada curvatura  $1/r$  da seção da base, figura 5.2.3.

Devido ao comportamento não-linear do diagrama de momento interno resistente  $M_I$ , a determinação do momento máximo de 1ª ordem, que a seção da base da coluna poderá suportar,  $M_{1crít}$ , requer um tratamento iterativo. O momento máximo  $M_{1crít}$  e a correspondente curvatura ( $1/r$ ) da seção da base correspondem, no estado limite último de instabilidade, ao ponto A da figura 5.2.3.

Um processo lógico de se procurar o  $M_{1crít}$  é definir o intervalo adimensional, delimitado pela curvatura mínima adimensional,  $(h/r) = 0$ , e curvatura máxima adimensional, dada pela expressão (4.1.2), e dividi-lo em  $n$  partes, para se obter valores intermediários de  $(h/r)$ . Para cada um desses valores, calcula-se, segundo o estudo feito em 5.2.1, o momento resistente  $M_I$  e o correspondente momento de 2ª ordem  $M_{2b}$ , até que a função momento fletor de 1ª ordem  $M_{1b}$ , dada por (5.2.19), alcance o 1º valor decrescente  $M_{1b}^i$  da série de momentos, significando, neste caso, que o ponto de máximo  $M_{1crít}$  foi ultrapassado, figura 5.2.3.

Definido o intervalo que contém o máximo momento de 1ª ordem  $M_{1crít}$ , pode-se repetir o processo, com a sua subdivisão, até que se encontre o máximo valor de  $M_{1b}^{i-1}$ , dentro da tolerância desejada:

$$\frac{M_{1b}^{i-2} - M_{1b}^i}{M_{1b}^{i-1}} \leq \text{tolerância} \quad (5.2.20)$$

A partir do exposto, é possível construir ábacos ou tabelas, relacionando momento crítico de 1ª ordem e força normal, para variadas taxas de armadura. Note-se também, que essas relações podem ser definidas para um comprimento de flambagem fixado  $\ell_e$ . Como é usual na literatura, FUSCO (1981), a maneira de se representar a relação entre momento crítico de 1ª ordem,  $M_{1crít}$ , e força normal, é defini-la para taxas fixas de armadura,  $\omega$ . Assim, para uma taxa  $\omega$  e

um comprimento de flambagem  $l_e$ , pode-se repetir o processo dado, para um número de valores da força normal  $N$ , suficiente para a definição contínua da relação proposta, figura 5.2.4. O intervalo para variação da força normal, figura 5.2.4, é definido pelo limite inferior zero e pelo limite superior  $v_{ref}$ , que em termos adimensionais é dado por:

$$v_{ref} = -0,85 + \sigma_{s(2\%)} \cdot \omega / f_{yd} \quad (5.2.21)$$

onde  $v_{ref}$  representa a força normal adimensional correspondente ao ponto de momento fletor nulo de uma seção inteiramente comprimida;  $\sigma_{s(2\%)}$  é a tensão na armadura correspondente à deformação  $-2\%$ ; e o valor  $-0,85$  é a força normal adimensional no concreto correspondente à deformação a cima citada.

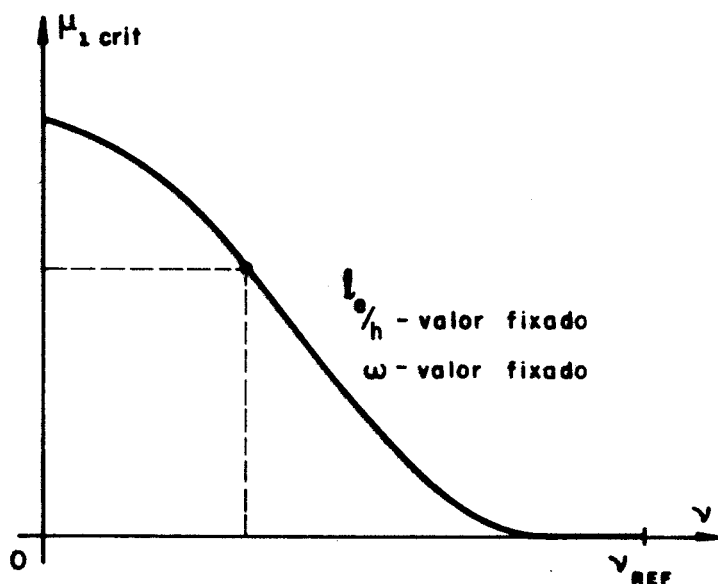


Fig. 5.2.4 - Relação  $\mu_{1crit}$  versus força normal,  $v$ .

Abacos adimensionais construídos conforme o exposto, figura 5.2.5, permitem o cálculo direto de armaduras em peças esbeltas e, portanto, sujeitas à instabilidade.

Para isso basta admitir que o momento fletor de cálculo seja igual ao momento de 1ª ordem crítico. Assim, com os valores dimensionais do momento fletor e força normal de cálculo, utiliza-se o ábaco compatível com a esbelteza da peça,  $l_e/h$ , e facilmente determina-se a taxa mecânica de armadura,  $\omega$ .

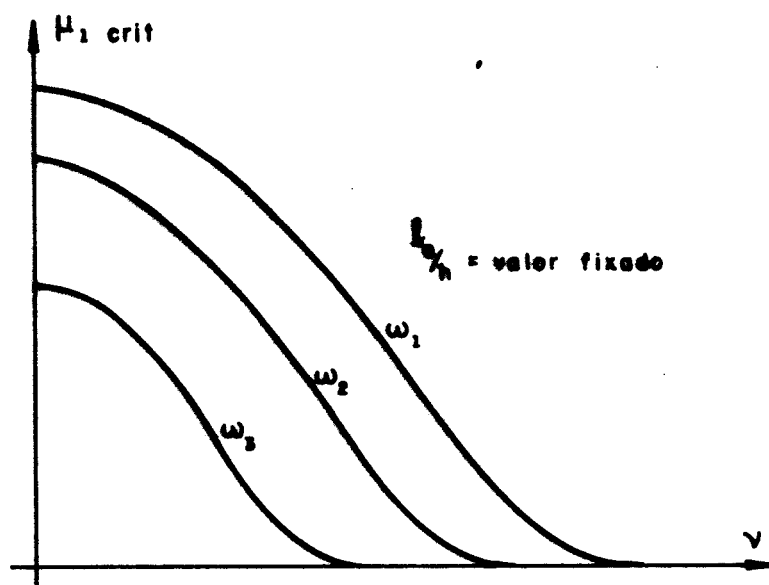


Fig. 5.2.5 - Diagramas de interação.

Encontra-se no Apêndice o programa que calcula pontos para construção dos ábacos dimensionais,  $\mu_{1\text{crit}} \times v$ , desenvolvido em linguagem PASCAL, com uso do equipamento tipo IBM-PC.

Por outro lado, para que o leitor possa desenvolver seu próprio programa, apresentam-se a seguir, como sugestão, os passos do algoritmo para confecção dos referidos ábacos, considerando fixos o tipo do aço, a relação  $l_e/h$ , e o valor adimensional  $\delta = d'/h$ .

- 1 - Definir o número de curvas,  $\mu_{1\text{crit}} \times v$ , que se pretende obter,  $k$ .
- 2 - Definir a taxa mecânica de armadura  $\omega$ , correspondente à curva  $k$ .

3 - Definir o número de pontos PT para obtenção da curva k.

4 - Calcular a força normal de referência adimensional  $v_{ref}$ , correspondente ao momento crítico de 1ª ordem nulo

$$v_{ref} = -0,85 + \sigma_{s(2\%)} \cdot \omega / f_{yd} \quad (5.2.22)$$

5 - Fazer

$$v = v_{ref} \quad (5.2.23)$$

6 - Definir o incremento de força normal adimensional

$$\Delta v = |(v_{ref})| / (PT-1) \quad (5.2.24)$$

7 - Definir o incremento de curvatura adimensional

$$\Delta(h/r) = [0,0135/(1-\delta)]/n \quad (5.2.25)$$

onde, n representa o número de partes em que será dividido o intervalo delimitado por  $h/r = 0$ , e por  $h/r$  máximo dado pela expressão (4.1.2).

8 - Adotar a curvatura mínima adimensional

$$(h/r) = 0 \quad (5.2.26)$$

9 - Calcular o momento fletor interno resistente, adimensional,  $\mu_I$ , correspondente à seção da base, usando-se o algoritmo descrito no item 4.7. Caso não seja possível equilibrar a força normal v, conforme mostrado no Passo 4.1, do citado algoritmo, deve-se fazer o momento resistente  $\mu_I$  igual a zero, e passar ao Passo 10 deste.

10- Calcular o momento fletor de 2ª ordem, adimensional  $\mu_2$  usando-se a expressão,

$$\mu_2 = v \cdot (\ell_e/h)^2 \cdot (h/r) / 10 \quad (5.2.27)$$

11- Calcular o momento de 1ª ordem  $\mu_1$ , subtraindo do momento resistente  $\mu_I$ , calculado no Passo 9, o momento fletor de 2ª ordem calculado em 10,

$$\mu_1 = \mu_I - \mu_2 \quad (5.2.28)$$

- 12 - Calcular novo valor para a curvatura adimensional

$$h/r = h/r + \Delta(h/r), \quad (5.2.29)$$

e retornar ao Passo 9, se o momento  $\mu_1$ , calculado em 11 for maior ou igual ao valor anterior de  $\mu_1$ , calculado no mesmo passo.

- 13 - Se for encontrado um valor do momento fletor de 1ª ordem  $\mu_1$ , tal que, comparado com seu antecedente e conseqüente, todos calculados no Passo 11, resulte em valores menores que a tolerância estabelecida, tem-se determinado o momento crítico de 1ª ordem, adimensional, correspondente ao 1º ponto da curva, passando-se ao Passo 16.

- 14 - Definir novo incremento  $\Delta(h/r)$ , dividindo-se, por exemplo, o intervalo definido pelo antepenúltimo e último valores de  $h/r$ , em um determinado número  $n$  de partes.

$$\Delta(h/r) = \left| (h/r)_{i-2} - (h/r)_i \right| / n \quad (5.2.30)$$

- 15 - Fazer  $h/r$  igual ao seu antepenúltimo valor. Calcular um novo valor de  $h/r$  usando-se a expressão (5.2.29) e retornar ao Passo 9.

- 16 - Adotar novo valor para a força normal adimensional  $v$ .

$$v = v - \Delta v, \quad (5.2.31)$$

e retornar ao Passo 8 até que o último ponto da curva seja calculado, ou melhor, até encontrar o 1º valor de  $v < 0$ .

- 17 - Se o número de curvas definido no Passo 1 não tiver sido esgotado, retorna-se ao Passo 2. Caso contrário, encerra-se o processo.



#### 5.2.4 - Dimensionamento de colunas, usando-se o processo a aproximado do pilar padrão

Os problemas de dimensionamento de colunas, no estado limite último de instabilidade, usando-se o processo aproximado do pilar padrão, podem ser resolvidos com os diagramas de interação  $\mu_{1crít} \times v$ , conforme descrito no item 5.2.3. Entretanto, para evitar o trabalho exaustivo de consultas a tais diagramas e interpolações manuais, para se obter a mínima taxa mecânica de armadura  $\omega$ , necessária para verificar o equilíbrio de uma coluna esbelta, dá-se, aqui, um tratamento computacional, para dimensionamento de colunas, de seção retangular, com armadura simétrica em relação ao plano de atuação do momento fletor solicitante, e carregamento aplicado na seção do topo do pilar.

Usando-se um processo iterativo, pode-se definir a mínima taxa mecânica de armadura  $\omega$  de uma coluna esbelta, através de tentativas orientadas. Para isso, define-se um limite inferior, a partir do qual se inicia o processo para definição de  $\omega$ . Esse limite inferior, definido por  $\omega_r$ , figura 5.2.6, é obtido da expressão (5.2.21), bastando substituir nesta a variável  $v_{ref}$  pela força normal adimensional solicitante  $v$  da coluna em análise,

$$\omega_r = (0,85+v) \cdot f_{yd} / \sigma_s (2\%) \quad (5.2.32)$$

O limite superior do intervalo para variação da taxa mecânica de armadura  $\omega$  foi fixado igual a 2, acreditando-se ser este valor suficiente para resolver os casos usuais da prática.

Para ilustrar o exposto, apresentam-se na figura 5.2.6 os valores das forças normais adimensionais de referência, calculados para o aço CA-50A, usando-se a expressão (5.2.32). Além disso, mostra-se também, na citada figura, um conjunto de curvas de interação  $\mu_{1crít} \times v$ , correspondentes a um conjunto de valores de  $\omega$  previamente definidos, por exemplo  $\{0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$ , com suas respectivas forças normais adimensionais de referência,  $v_{ref(i)}$ .

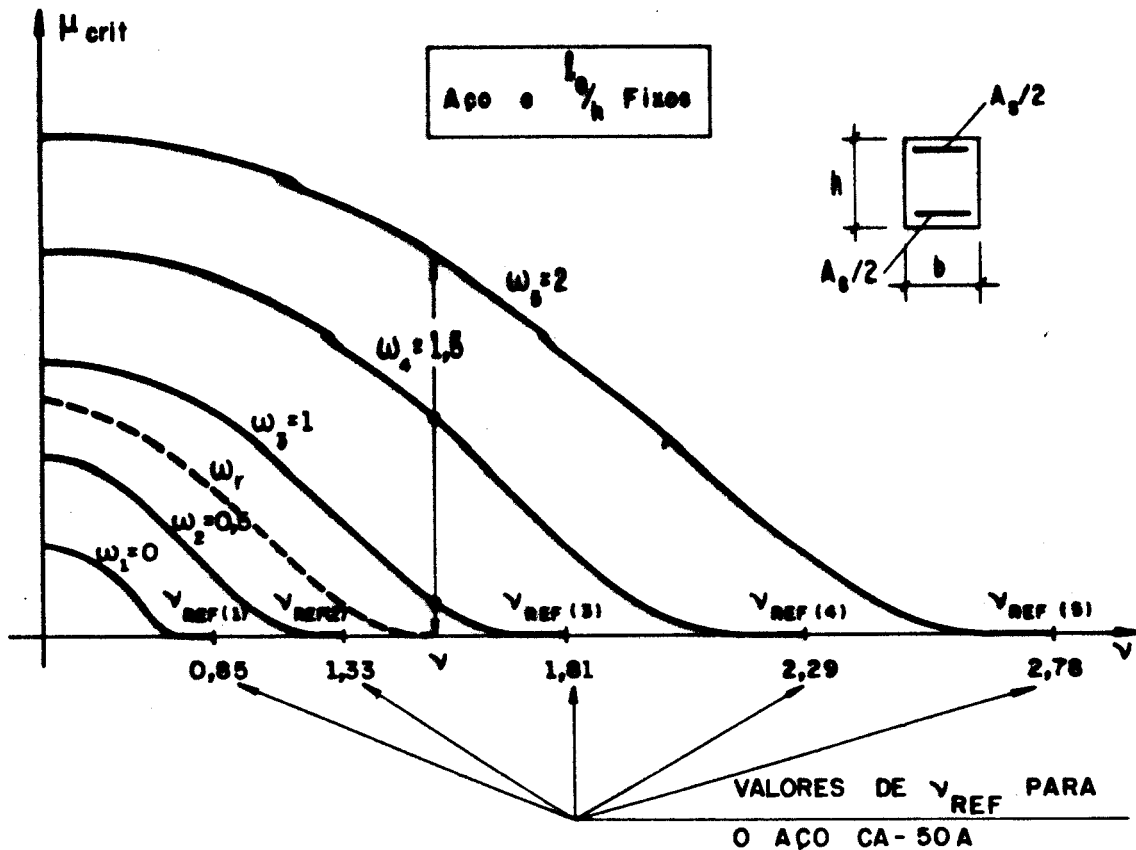


Fig. 5.2.6 - Diagramas de interação,  $\mu_{1crít} \times \nu$ .

Para dimensionar uma coluna em balanço ou equivalente, solicitada por uma força normal adimensional  $\nu$  e um momento fletor de 1ª ordem adimensional  $\mu_1$ , no estado limite último de instabilidade, define-se primeiramente, segundo estudo anterior, o intervalo para pesquisa da mínima taxa mecânica de armadura  $\omega$  capaz de verificar a estabilidade da coluna. Por exemplo, para

$$\nu_{ref(2)} < \nu \leq \nu_{ref(5)}, \quad (5.2.33)$$

tem-se definido o seguinte intervalo, figura 5.2.6,

$$[\omega_r, 2]$$

Definido o intervalo, atribuem-se de forma seqüencial seus valores à taxa mecânica de armadura  $\omega$ , calculando-se, segundo estudo feito no item 5.2.3, os momentos críticos de 1ª ordem correspondentes à força normal adimensio

nal solicitante  $v$ , até encontrar o primeiro valor do momento crítico maior que o momento de 1ª ordem  $\mu_1$  aplicado ao pilar. Com isto, tem-se um novo intervalo para variação da taxa mecânica de armadura, definido pelos limites de  $\omega$  correspondentes aos dois últimos valores do momento crítico de 1ª ordem. A partir daí, através de sucessivas interpolações lineares, objetivando o estreitamento do intervalo de variação da taxa mecânica, consegue-se encontrar um valor para a taxa mecânica capaz de verificar a condição

$$\frac{\mu_1 - \mu_1(\text{calculado})}{\mu_1} \leq \text{tolerância}, \quad (5.2.34)$$

estando, assim, dimensionada a coluna no estado limite último de instabilidade.

Apresentam-se a seguir, como sugestão, os passos do algoritmo para dimensionamento de colunas no estado limite último de instabilidade, usando-se o processo aproximado do pilar padrão, conhecendo-se, além dos esforços solicitantes de 1ª ordem adimensionais  $v$  e  $\mu_1$ , as características geométricas e de resistência da coluna.

- 1 - Calcular o valor da taxa mecânica  $\omega_r$  correspondente à força normal adimensional solicitante  $v$  e ao momento fletor crítico de 1ª ordem nulo, usando-se a expressão

$$\omega_r = (0,85+v) \cdot f_{yd} / \sigma_s \quad (2\%) \quad (5.2.35)$$

- 2 - Definir um incremento de taxa mecânica de armadura  $\Delta\omega_i$  e passar ao Passo 4.
- 3 - Calcular o valor de  $\omega$  no incremento  $i$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \Delta\omega_i \quad (5.2.36)$$

- 4 - Calcular o incremento de curvatura adimensional

$$\Delta(h/r) = [0,0135/(1-\delta)]/n \quad (5.2.37)$$

onde,  $n$  representa o número de partes em que será dividido o intervalo delimitado por  $h/r = 0$ , e por  $h/r$  máximo dado pela expressão (4.1.2).

- 5 - Adotar a curvatura mínima adimensional

$$h/r = 0 \quad (5.2.38)$$

- 6 - Calcular o momento fletor resistente, adimensional,  $\mu_I$ , correspondente à seção da base, usando-se o algoritmo descrito no item 4.7. Caso não seja possível equilibrar a força normal  $v$ , conforme mostrado no Passo 4.1 do citado algoritmo, fazer o momento resistente  $\mu_I$  igual a zero e passar ao Passo 7 deste.

- 7 - Calcular o momento fletor de 2ª ordem, adimensional,  $\mu_2$ , usando-se a expressão

$$\mu_2 = v(\ell_e/h)^2 \cdot (h/r)/10 \quad (5.2.39)$$

- 8 - Calcular o momento de 1ª ordem  $\mu_1$ , subtraindo do momento resistente  $\mu_I$  calculado no Passo 6, o momento de 2ª ordem calculado em 7,

$$\mu_1 = \mu_I - \mu_2 \quad (5.2.40)$$

- 9 - Calcular novo valor para a curvatura adimensional

$$h/r = h/r + \Delta(h/r) \quad (5.2.41)$$

e retornar ao Passo 6, se o momento  $\mu_1$ , calculado em 8, for maior ou igual ao valor anterior de  $\mu_1$ , calculado no mesmo passo.

- 10- Se for encontrado um valor do momento fletor de 1ª ordem  $\mu_1$ , tal que, comparado com seu antecedente e conseqüente, todos calculados no Passo 8, resulte em valores menores que a tolerância estabelecida, tem-se determinado o momento crítico de 1ª ordem  $\mu_{1crít}$ , correspondente à taxa mecânica considerada e à força normal adimensional fixada, passando-se ao Passo 14.

- 11- Definir novo incremento,  $\Delta(h/r)$ , dividindo-se, por exemplo, o intervalo definido pelo antepenúltimo,  $(h/r)_{i-2}$ , e último,  $(h/r)_i$ , em um determinado número  $n$  de partes

$$\Delta(h/r) = |(h/r)_{i-2} - (h/r)_i|/n \quad (5.2.42)$$

12 - Fazer

$$h/r = (h/r)_{i-2} \quad (5.2.43)$$

13 - Calcular novo valor para h/r, usando-se a expressão (5.2.41) e retornar ao Passo 6.

14 - Se

$$(\mu_1 - \mu_{1crít})/\mu_1 \leq \text{tolerância}$$

tem-se determinada a taxa mecânica de armadura  $\omega$ , estando, portanto, a coluna dimensionada, encerrando-se o procedimento.

15 - Retornar ao Passo 3 para novo valor da taxa mecânica de armadura até que a condição

$$\mu_{1solicitante} \leq \mu_{1crít}$$

16 - Calcular novo valor para a taxa mecânica de armadura  $\omega_i$ , interpolando-se linearmente os dois últimos valores do momento crítico de 1ª ordem,  $\mu_{1crít}^{i-1}$  e  $\mu_{1crít}^i$ , com as respectivas taxas de armaduras,  $\omega_{i-1}$  e  $\omega_i$ , que os originou, juntamente com o momento de 1ª ordem solicitante  $\mu_1$ , usando-se a expressão

$$\omega_{i-1} = \omega_i - (\omega_i - \omega_{i-1}) (\mu_{1crít}^i - \mu_1) / (\mu_{1crít}^i - \mu_{1crít}^{i-1})$$

17 - Definir novo incremento de taxa mecânica usando-se

$$\Delta\omega_i = \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{n}$$

onde n é um número inteiro pré-fixado

e retornar ao Passo 3.

## 6. ESTUDO COMPARATIVO

Apresenta-se neste capítulo o estudo comparativo do processo aproximado do pilar padrão com o método geral, visando mostrar a sua precisão no que tange à verificação de estabilidade, cálculo de carga crítica, elaboração de diagramas adimensionais de interação,  $\mu_{1crít} \times \nu$ , e dimensionamento de colunas esbeltas. Mostra-se, também, o comportamento do processo aproximado do pilar padrão para vários índices de esbeltez e taxas mecânicas de armadura, além de um estudo comparativo de diagramas adimensionais de interação,  $\mu_{1crít} \times \nu$ , obtidos para os aços classe A e B. Os resultados que serão analisados no decorrer deste capítulo foram obtidos com os programas elaborados em um equipamento tipo IBM-PC, e se encontram à disposição do leitor no Apêndice.

### 6.1 - Estudo comparativo de diagramas de interação

( $\mu_{1crít} \times \nu$ ), elaborados com o processo aproximado do pilar padrão e com o método geral

Esta análise consiste na comparação de diagramas adimensionais de interação,  $\mu_{1crít} \times \nu$ , obtidos com base na

teoria do método geral e na aproximação do pilar padrão. Para o método geral foram consideradas as distribuições de momentos fletores de 1ª ordem triangular e retangular, indicadas na figura 6.1.1. Tais distribuições foram tomadas de modo representarem os casos extremos de uma distribuição de momentos trapezoidal, usualmente aproximada por uma senoide, no caso de se adotar a teoria do pilar padrão.

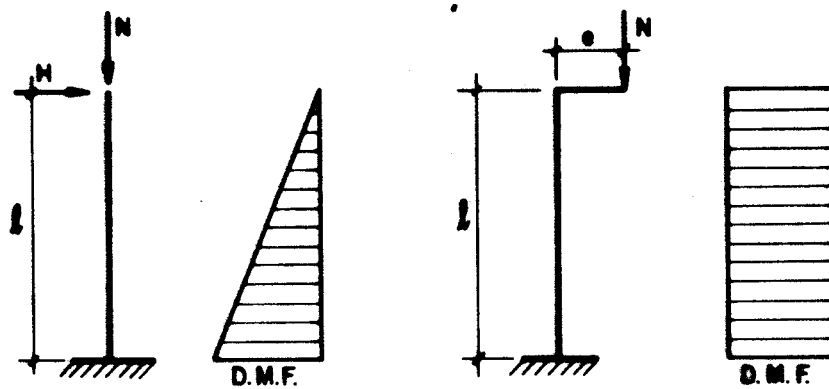


Fig. 6.1.1 - Distribuições de momentos fletores de 1ª ordem.

Observando-se os diagramas adimensionais de interação, representados nas figuras 6.1.2 a 6.1.10, e as respectivas tabelas 6.1.1 a 6.1.9, que fornecem as percentagens resultantes das comparações aqui citadas, pode-se dizer que os diagramas de interação obtidos com a teoria do pilar padrão, curvas de número 1, levam a resultados a favor da segurança, se comparados com os resultados fornecidos pelos diagramas construídos com a teoria do método geral, considerando uma distribuição de momentos fletores triangular, curvas de número 2. Nota-se que, para a mesma taxa de armadura e mesmo índice de esbeltez, os diagramas obtidos com a teoria do método geral admitem, para a seção da base do pilar, valores maiores para o momento crítico de 1ª ordem que os obtidos com os diagramas construídos com a aproximação do pilar padrão.

Considerando-se a distribuição de momentos fletores uniformemente distribuída, pode-se ver, pelos diagramas e tabelas citados, que, neste caso, os diagramas obtidos com a aproximação do pilar padrão, curvas de número 1, dão resultados contra a segurança, se comparados com os resultados fornecidos pelos diagramas obtidos com a teoria do método geral, curvas de número 3, uma vez que as curvas de número 1 fornecem valores maiores para os momentos críticos de 1ª ordem que as curvas de número 3.

Chama-se a atenção para as altas percentagens resultantes das duas comparações anteriormente descritas, uma vez que as mesmas acontecem para valores altos das forças normais e pequenos valores dos momentos críticos de 1ª ordem, não tendo, portanto, grande significado, já que os valores dos momentos estão próximos de zero.

Para traçar cada diagrama  $\mu_{1crít} \times v$ , correspondente ao método geral, curvas de número 2 e 3, utilizaram-se os valores da excentricidade crítica ou da força horizontal crítica. Assim sendo, apenas alguns pontos dos referidos diagramas foram obtidos, devido ao grande tempo de processamento requerido para definição numérica da solicitação crítica correspondente a cada um.

No caso da elaboração dos diagramas correspondentes ao processo aproximado pilar padrão, curvas de número 1, conseguiu-se obter um número maior de pontos, pois, neste caso, o processamento é rápido, o que possibilitou a definição completa de cada curva.

Concluindo este item, pode-se dizer que, apesar do erro cometido ser grande, para as duas situações analisadas, o processo aproximado do pilar padrão dá resultados intermediários a essas situações extremas, sendo tais erros menores para qualquer outro caso.



Tabela 6.1.1 - Diferença entre momentos críticos de 1ª ordem.

FORÇA NORMAL	DIFERENÇAS PERCENTUAIS ENTRE MOMENTOS CRÍTICOS DE 1ª ORDEM	
	$\frac{(CURVA\ 3 - CURVA\ 1)}{CURVA\ 3}$	$\frac{(CURVA\ 2 - CURVA\ 1)}{CURVA\ 2}$
0,8	-38,25	22,17
0,75	-14,44	26,42
0,65	-19,72	22,84
0,55	-12,59	22,29
0,45	-14,84	24,22
0,35	- 1,39	26,00
0,25	- 2,58	15,25
0,15	-16,88	9,68
0,05	- 8,07	5,57
0	0	0

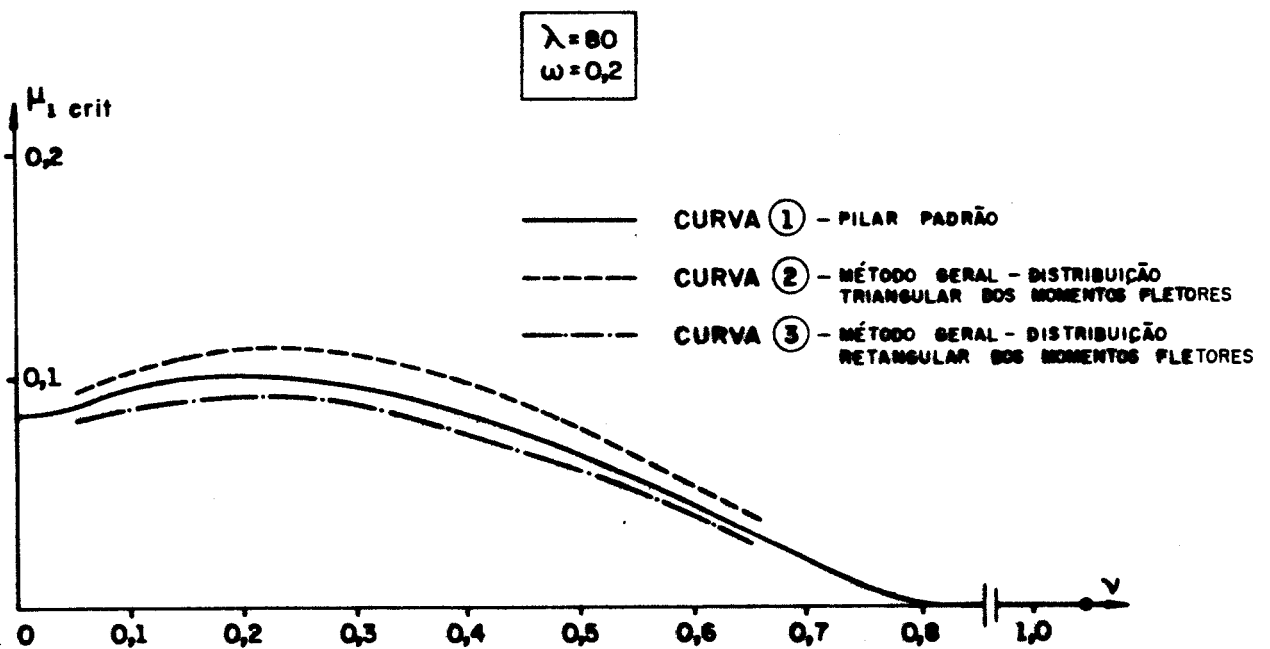


Fig. 6.1.2 - Diagramas de interação ( $\lambda = 80$ ,  $\omega = 0,2$ ).

Tabela 6.1.2 - Diferença entre momentos críticos de 1ª ordem.

FORÇA NORMAL $\nu$	DIFERENÇAS PERCENTUAIS ENTRE MOMENTOS CRÍTICOS DE 1ª ORDEM.	
	$\frac{(\text{CURVA 3}-\text{CURVA 1})}{\text{CURVA 3}}$	$\frac{(\text{CURVA 2}-\text{CURVA 1})}{\text{CURVA 2}}$
0,5	-16,73	20,93
0,4	-18,04	23,93
0,3	- 7,51	23,65
0,2	- 5,08	24,68
0,15	- 8,51	16,03
0,1	- 8,89	9,33

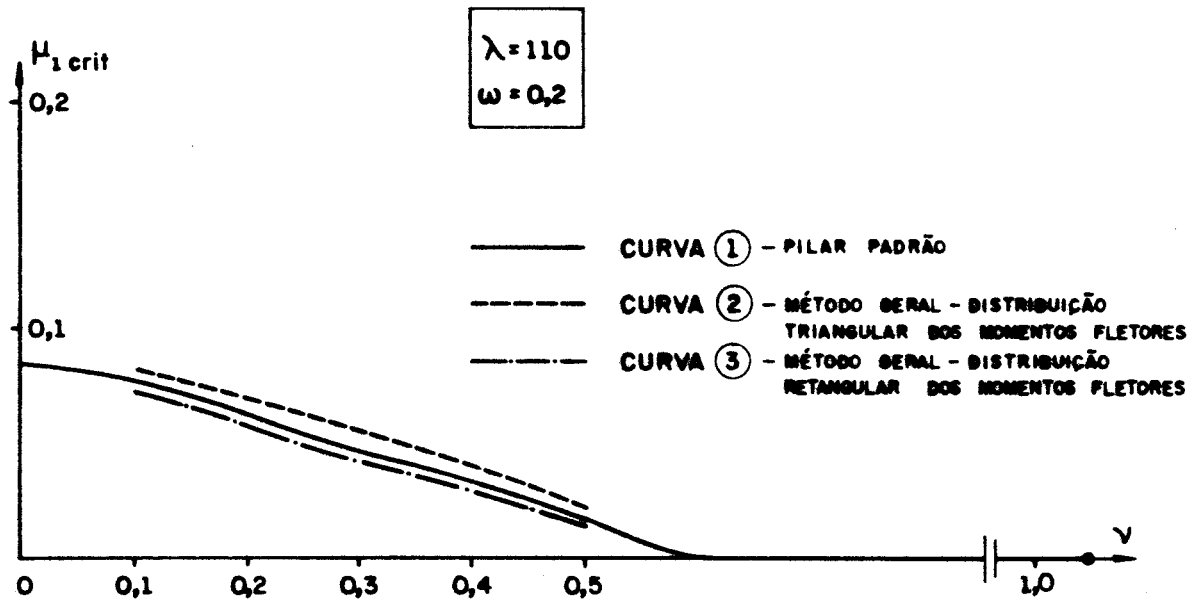


Fig. 6.1.3 - Diagramas de interação ( $\lambda = 110$ ,  $\omega = 0,2$ ).

Tabela 6.1.3 - Diferença entre momentos críticos de 1ª ordem.

FORÇA NORMAL $\nu$	DIFERENÇAS PERCENTUAIS ENTRE MOMENTOS CRÍTICOS DE 1ª ORDEM.	
	$\frac{(\text{CURVA 3}-\text{CURVA 1})}{\text{CURVA 3}}$	$\frac{(\text{CURVA 2}-\text{CURVA 1})}{\text{CURVA 2}}$
0,25	-26,62	24,75
0,2	- 8,58	25,92
0,15	- 2,27	29,05
0,1	- 9,13	16,21
0,05	- 8,73	7,14

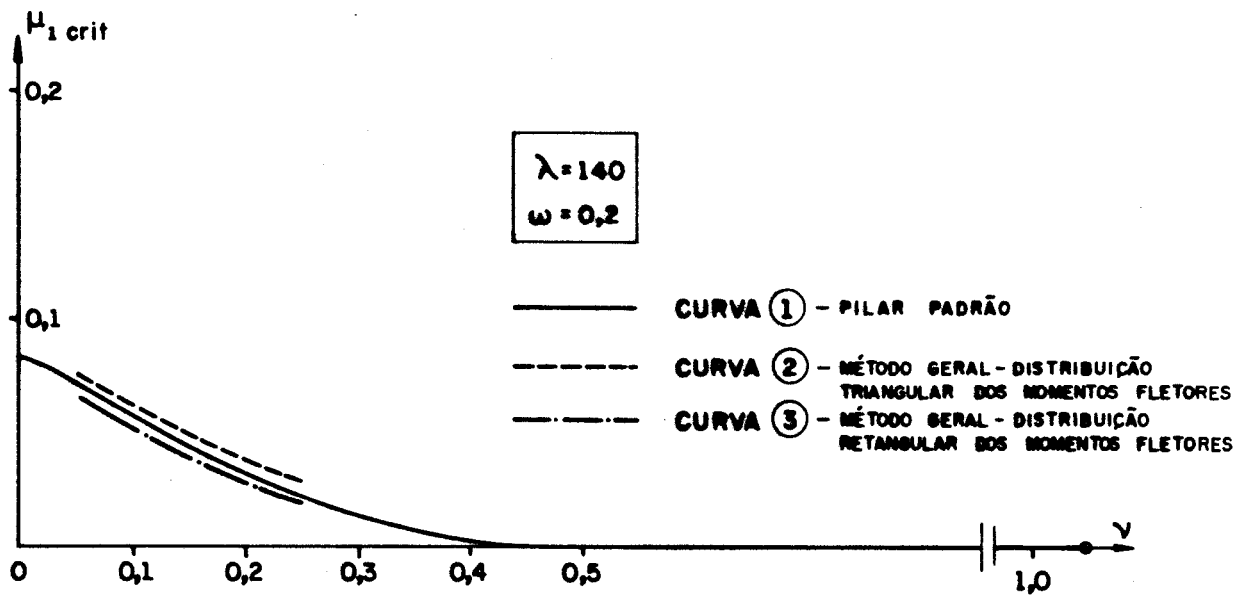


Fig. 6.1.4 - Diagramas de interação ( $\lambda = 140, \omega = 0,2$ ).

Tabela 6.1.4 - Diferenças entre momentos críticos de 1ª ordem.

FORÇA NORMAL	DIFERENÇAS PERCENTUAIS ENTRE MOMENTOS CRÍTICOS DE 1ª ORDEM.	
$\nu$	(CURVA 3-CURVA 1) CURVA 3	(CURVA 2-CURVA 1) CURVA 2
1,2	-28,96	17,01
1,04	-23,24	12,94
0,880	-11,71	14,13
0,72	-14,76	15,4
0,56	-12,91	15,5
0,4	-10,23	12,9
0,24	-11,31	7,44
0,08	-11,97	5,07

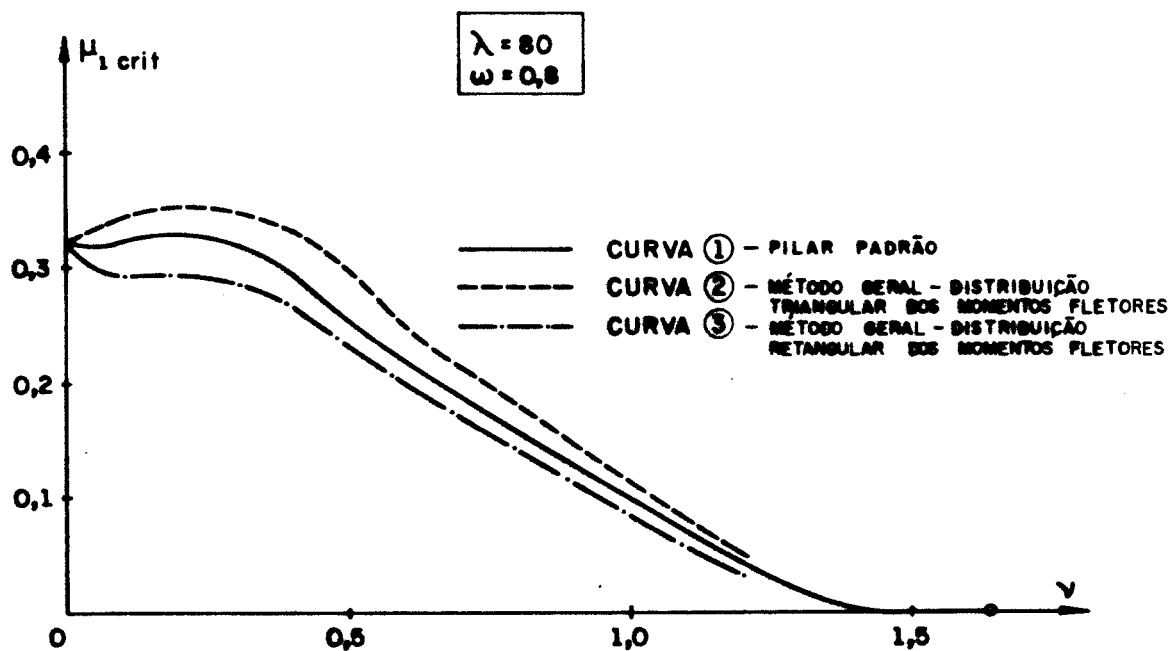


Fig. 6.1.5 - Diagramas de interação ( $\lambda = 80, \omega = 0,8$ ).

Tabela 6.1.6 - Diferenças entre momentos críticos de 1ª ordem.

FORÇA NORMAL	DIFERENÇAS PERCENTUAIS ENTRE MOMENTOS CRÍTICOS DE 1ª ORDEM.		
	$\nu$	$\frac{(\text{CURVA 3}-\text{CURVA 1})}{\text{CURVA 3}}$	$\frac{(\text{CURVA 2}-\text{CURVA 1})}{\text{CURVA 2}}$
0,88		-28,35	25,09
0,8		-16,11	25,58
0,64		- 7,22	26,57
0,48		- 9,36	20,63
0,32		-10,75	10,41
0,24		- 7,00	8,64
0,16		- 5,80	6,91
0,08		- 2,4	5,27

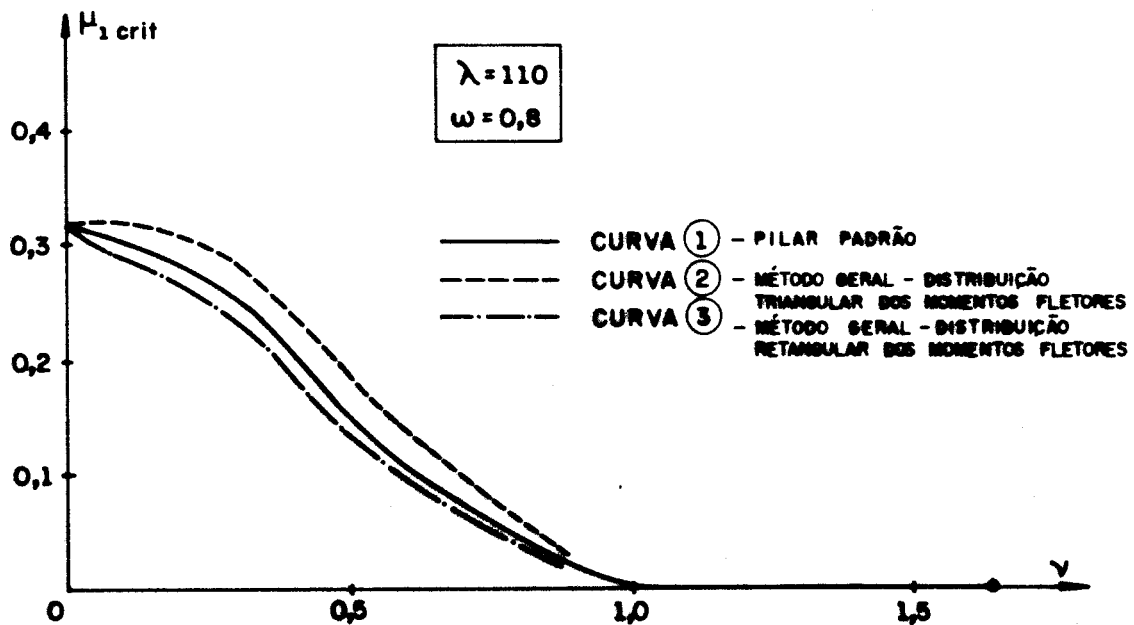


Fig. 6.1.6 - Diagramas de interação ( $\lambda = 110, \omega = 0,8$ ).

Tabela 6.1.5 - Diferenças entre momentos críticos de 1ª ordem.

FORÇA NORMAL	DIFERENÇAS PERCENTUAIS ENTRE MOMENTOS CRÍTICOS DE 1ª ORDEM.	
	$\nu$	$\frac{(\text{CURVA 3}-\text{CURVA 1})}{\text{CURVA 3}}$
0,56	-12,72	25,24
0,48	-16,84	28,77
0,4	- 1,19	31,28
0,32	-13,39	19,66
0,24	-10,39	12,56
0,16	- 7,81	8,46
0,08	- 3,94	6,00

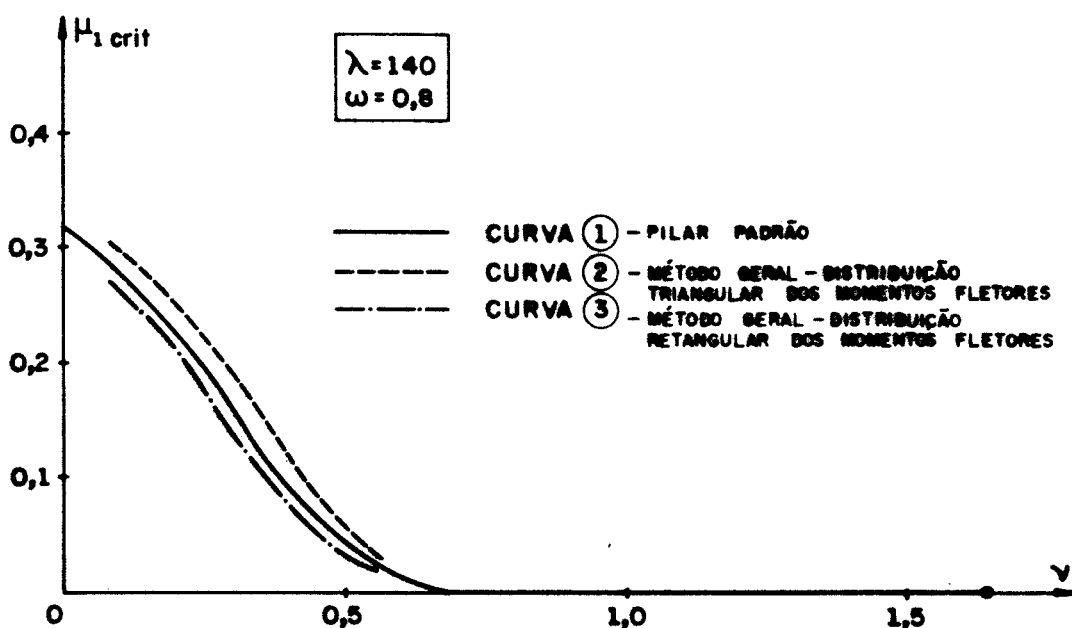


Fig. 6.1.7 - Diagramas de interação ( $\lambda = 140$ ,  $\omega = 0,8$ ).

Tabela 6.1.7 - Diferenças entre momentos críticos de 1ª ordem.

FORÇA NORMAL	DIFERENÇAS PERCENTUAIS ENTRE MOMENTOS CRÍTICOS DE 1ª ORDEM.	
	$\frac{(CURVA\ 3 - CURVA\ 1)}{CURVA\ 3}$	$\frac{(CURVA\ 2 - CURVA\ 1)}{CURVA\ 2}$
2,13	-27,70	31,88
2,03	-27,06	13,36
1,8	-25,45	12,59
1,58	-24,21	12,35
1,35	-15,65	10,35
1,13	- 9,45	12,72
0,9	-12,55	12,23
0,08	- 6,04	11,04
0,45	- 2,72	8,65
0,23	-12,29	4,68
0	0	0

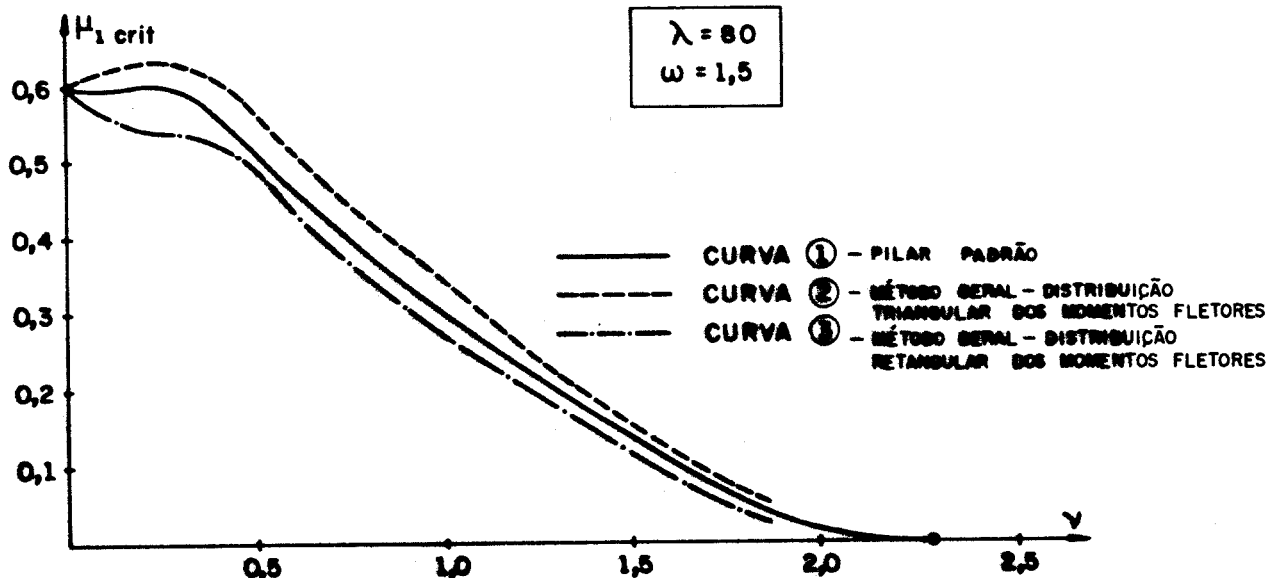


Fig. 6.1.8 - Diagramas de interação ( $\lambda = 80$ ,  $\omega = 1,5$ ).

Tabela 6.1.8 - Diferenças entre momentos críticos de 1ª ordem.

FORÇA NORMAL	DIFERENÇAS PERCENTUAIS ENTRE MOMENTOS CRÍTICOS DE 1ª ORDEM.	
$\nu$	$\frac{(\text{CURVA 3-CURVA 1})}{\text{CURVA 3}}$	$\frac{(\text{CURVA 2-CURVA 1})}{\text{CURVA 2}}$
1,35	-43,86	23,72
1,13	-16,69	20,64
0,9	-13,16	17,43
0,79	-11,035	16,70
0,56	- 7,81	13,92
0,45	- 4,82	12,08
0,34	- 3,92	7,78
0,23	- 5,22	5,85

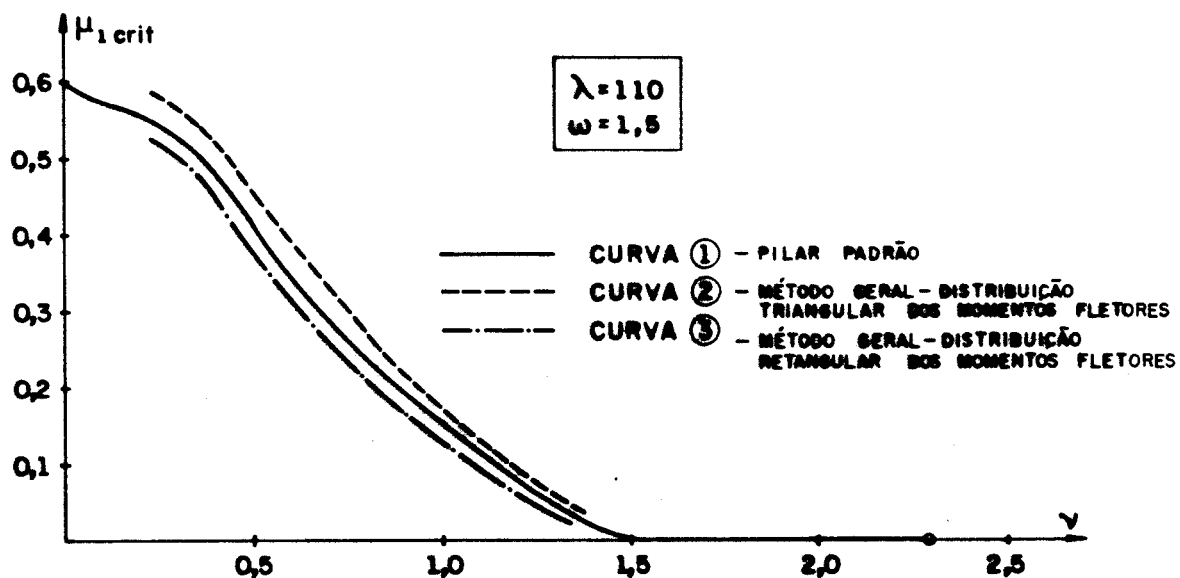


Fig. 6.1.9 - Diagramas de interação ( $\lambda = 110$ ,  $\omega = 1,5$ ).



Tabela 6.1.9 - Diferenças entre momentos críticos de 1ª ordem.

FORÇA NORMAL	DIFERENÇAS PERCENTUAIS ENTRE MOMENTOS CRÍTICOS de 1ª ORDEM.		
	$\nu$	$\frac{(CURVA\ 3 - CURVA\ 1)}{CURVA\ 3}$	$\frac{(CURVA\ 2 - CURVA\ 1)}{CURVA\ 2}$
0,9		-14,66	25,11
0,79		-12,19	29,78
0,56		-10,79	19,75
0,34		- 9,40	12,13
0,22		- 7,19	7,39
0,11		- 5,94	5,15

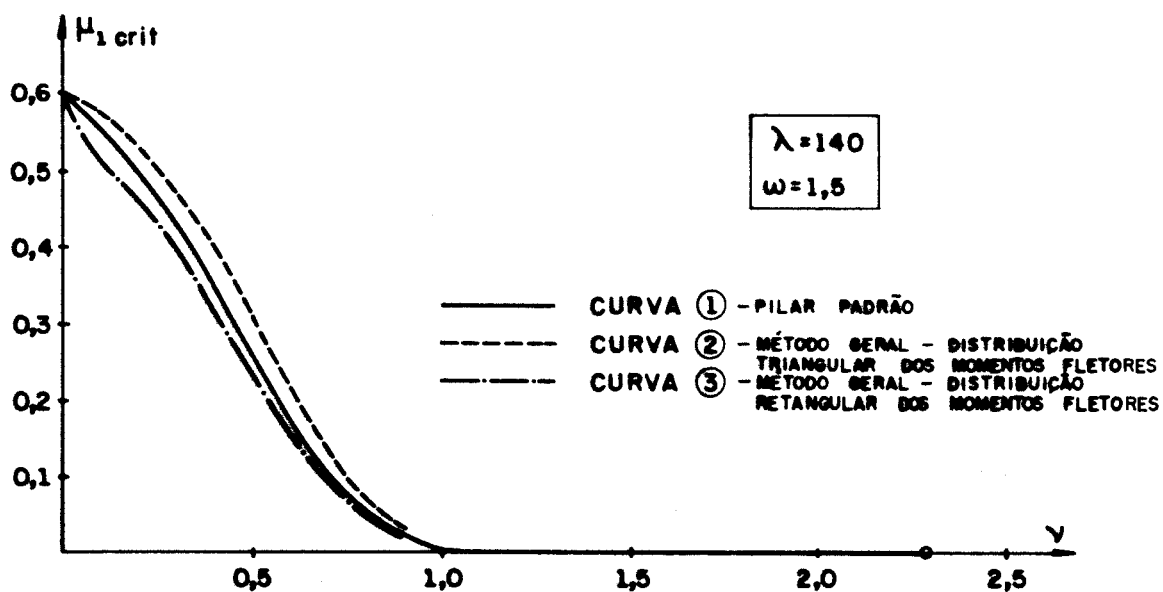


Fig. 6.1.10 - Diagramas de interação ( $\lambda = 140, \omega = 1,5$ ).

## 6.2 - Estudo comparativo da estabilidade, usando-se o processo aproximado do pilar padrão e a teoria do método geral

Neste item, analisa-se a estabilidade de uma barra esbelta, engastada-livre, submetida à flexão normal composta, usando-se o processo aproximado do pilar padrão e a teoria do método geral. Para tal, é necessário computar os efeitos dos deslocamentos na solícitação, para cada configuração de equilíbrio assumida pela barra, o que é feito com o processo iterativo descrito no item 5.1.1, até que seja verificada a estabilidade da coluna.

Embora os gráficos apresentados na figura 6.2.1, a e b, sejam correspondentes a exemplos particulares, pode-se afirmar que outros casos terão comportamento semelhante, isto é, para uma distribuição de momentos fletores de 1<sup>a</sup> ordem triangular ou predominantemente triangular, as flechas obtidas com o processo aproximado do pilar padrão estariam a favor da segurança, se comparadas com as flechas obtidas com a teoria do método geral. Entretanto, o mesmo não acontece quando se tem uma distribuição de momentos fletores de 1<sup>a</sup> ordem retangular, figura 6.1.1. Neste caso, as flechas obtidas com o processo aproximado do pilar padrão estariam contra a segurança, se comparadas com as obtidas com a teoria do método geral. As diferenças percentuais entre as flechas máximas  $a/l$ , obtidas com os dois métodos acima citados, para os exemplos mostrados na figura 6.2.1, a e b, estão dadas nas tabelas 6.2.1 e 6.2.2, respectivamente.

Os exemplos aqui analisados foram escolhidos de forma a se terem efeitos de 2<sup>a</sup> ordem consideráveis e carregamentos próximos dos valores críticos, possibilitando, com isso, um maior desenvolvimento das curvas mostradas nos referidos gráficos.

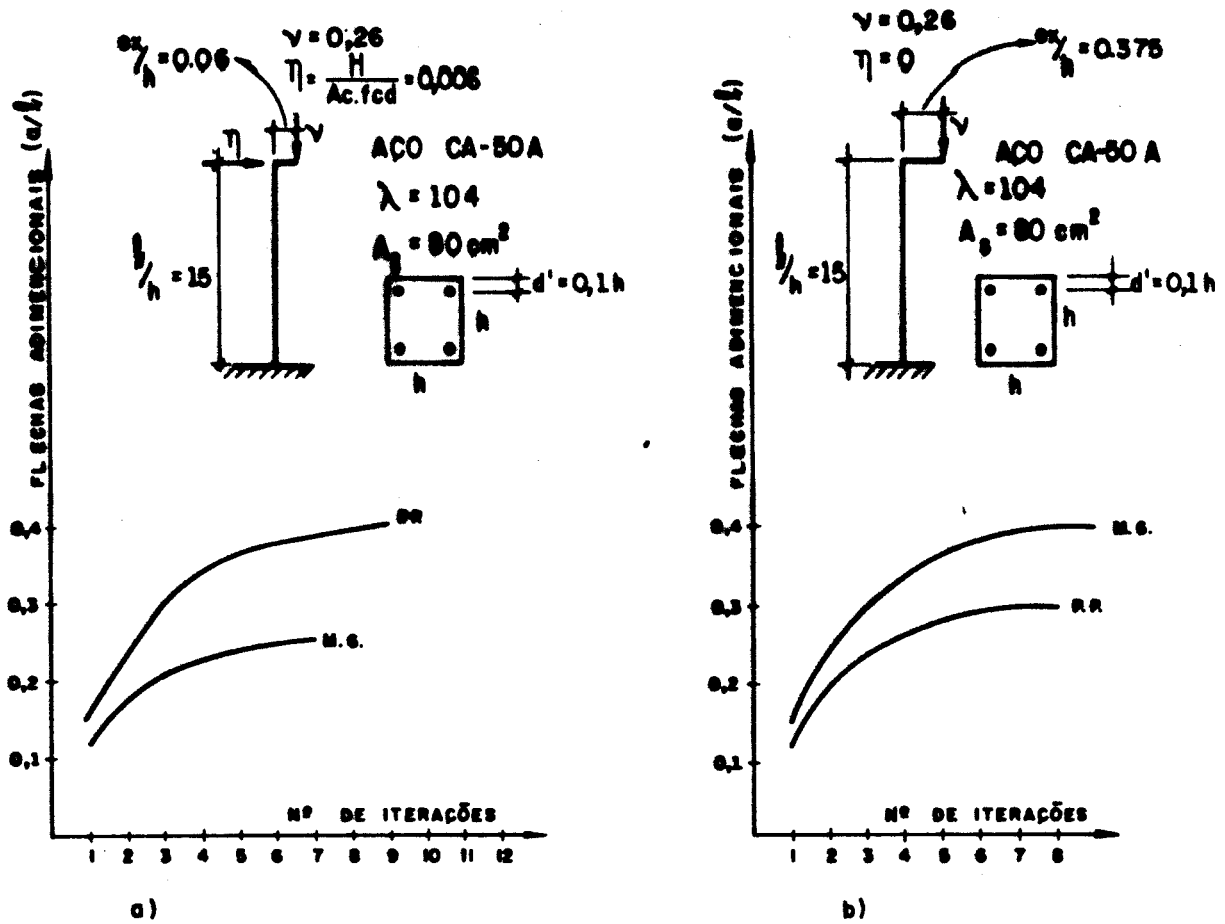


Fig. 6.2.1 - Flechas adimensionais  $v/h$ , obtidas com a aproximação do pilar padrão e com o método geral.

Tabela 6.2.1 - Diferenças percentuais máximas entre flechas e momentos para o exemplo dado na figura 6.2.1a.

	Método geral	Aproximação do pilar padrão	Diferença %
Flecha máxima	0,257	0,414	61%
Momento máximo	0,178	0,218	21,8%

Tabela 6.2.2 - Diferenças percentuais máximas entre flechas e momentos para o exemplo dado na figura 6.2.1b.

	Método geral	Aproximação do pilar padrão	Diferença %
Flecha máxima	0,414	0,305	26,36%
Momento máximo	0,207	0,177	14,36%

### 6.3 - Estudo comparativo de carga crítica

Aplicando-se a uma barra esbelta um determinado carregamento com uma excentricidade  $e_x$ , figura 6.3.1, verifica-se que seu eixo flete. Se for constatada para esta posição fletida o equilíbrio estável, é possível, através de um controle do incremento de carga  $\Delta N_i$ , aumentar esse carregamento, até que seja atingido o estado limite último de instabilidade, conforme estudo já feito em itens anteriores.

Para que se pudesse comparar vários valores da carga crítica, obtidos com o processo aproximado do pilar padrão e com o método geral, procurou-se variar convenientemente a excentricidade, para três diferentes índices de esbeltez e três diferentes taxas de armadura, com o objetivo de calcular a carga crítica correspondente a diversos valores do momento crítico de 1ª ordem. Para isso, fez-se uso dos programas que calculam a carga crítica correspondente a cada método acima citado, e que se encontram à disposição do leitor no Apêndice. Esses programas forneceram os resultados mostrados nas tabelas 6.3.1 a, b e c.

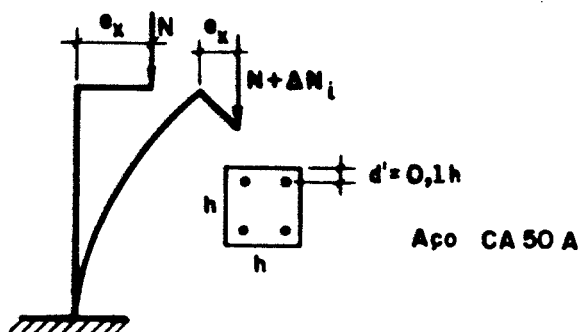
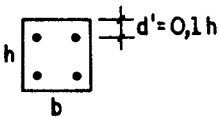
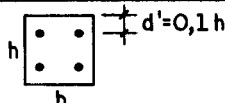


Fig. 6.3.1 - Pilar engastado-livre, submetido à flexão normal com carga progressiva.

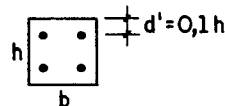
Tabela 6.3.1 - Valores adimensionais da carga crítica e das flechas máximas.

a)  $\omega = 0,8$  ,  $\lambda = 80$  ,  $\ell_e/h = 23,1$  

Excentricidade $e_x/h$	Carga crítica Método geral	Carga crítica Pilar padrão	Erro (%)	Flecha máxima Método geral	Flecha máxima Pilar padrão	Erro (%)
3,670	0,087	0,088	-1,26	0,304	0,258	15,22
1,251	0,253	0,263	-3,95	0,315	0,253	19,6
0,374	0,572	0,587	-2,62	0,256	0,209	18,24
0,136	0,877	0,910	-3,76	0,164	0,139	15,05
0,026	1,210	1,23	-1,65	0,100	0,085	15,08

b)  $\omega = 0,8$  ,  $\lambda = 110$  ,  $\ell_e/h = 31,75$  

Excentricidade $e_x/h$	Carga crítica Método geral	Carga crítica Pilar padrão	Erro (%)	Flecha máxima Método geral	Flecha máxima Pilar padrão	Erro (%)
3,779	0,079	0,081	-2,27	0,563	0,429	23,78
1,732	0,161	0,168	-4,34	0,542	0,457	15,71
1,068	0,240	0,253	-5,41	0,564	0,472	16,38
0,299	0,484	0,500	-3,30	0,482	0,420	12,92
0,047	0,805	0,824	-2,36	0,258	0,209	18,97

c)  $\omega = 0,8$  ,  $\lambda = 140$  ,  $\ell_e/h = 40,4$  

Excentricidade $e_x/h$	Carga crítica Método geral	Carga crítica Pilar padrão	Erro (%)	Flecha máxima Método geral	Flecha máxima Pilar padrão	Erro (%)
3,44	0,079	0,082	-3,39	0,850	0,671	20,97
1,435	0,159	0,168	-5,66	0,853	0,723	15,15
0,76	0,239	0,254	-6,27	0,871	0,783	10,10

Observando os resultados apresentados nas citadas tabelas, pode-se dizer que a carga crítica varia inversamente com o índice de esbeltez e diretamente com a taxa de armadura, em ambos os métodos, como esperado. Além disso, para uma distribuição uniforme de momentos fletores de 1ª ordem, a aproximação do pilar padrão fornece valores para a carga crítica contra a segurança, se comparado com os valores fornecidos pelo método geral. Com relação aos erros obtidos, vê-se que os mesmos têm um comportamento aleatório, por exemplo, aumentando-se o índice de esbeltez, não necessariamente se aumenta a percentagem de erro, podendo-se também dizer o mesmo com relação à taxa de armadura. Entretanto, pode-se afirmar que o erro está diretamente ligado à região de comparação dos diagramas de interação  $\mu_{1crít} \times \nu$ , podendo-se ter, dependendo dessa região, erros significativos ou não.

Outros casos de solicitações críticas com variação da força horizontal ou da força vertical, com pequena excentricidade, foram também calculados, estando os resultados na tabela 6.3.2. Analisando esses resultados, observa-se que, para uma distribuição de momentos fletores de 1ª ordem, predominantemente triangular, o processo do pilar padrão fornece valores para o carregamento crítico a favor da segurança, se comparado com os resultados obtidos com a teoria do método geral.

Com relação às grandes diferenças observadas, pode-se dizer que, como os momentos fletores de 1ª ordem, oriundos da força horizontal, estão próximos dos valores críticos, conforme mostram os diagramas de interação para  $\lambda = 110$  e  $\omega = 0,8$ , a comparação de diferenças de deslocamentos perde o sentido. Deslocamentos calculados, nas proximidades da carga crítica, por procedimentos diferentes podem ser completamente diferentes.

Tabela 6.3.2 - Valores adimensionais do carregamento crítico e das flechas máximas.

EXEMPLOS	CARREGAMENTO CRÍTICO - PILAR PADRÃO	CARREGAMENTO CRÍTICO - MÉTODO GERAL	ERRO (%)
<p>①</p> <p><math>v = 0,1</math>  <math>\eta_{cr}</math>  <math>e/h = 0,08</math>  <math>\lambda = 110</math>  <math>\omega = 0,8</math>  <math>d' = 0,1h</math></p> <p><math>v \rightarrow</math> fixo  <math>\eta_{cr} \rightarrow</math> incremental</p>	<p><math>v = 0,1</math>  <math>\eta_{cr} = 1,85E-2</math>  Flecha = 0,427</p>	<p><math>v = 0,1</math>  <math>\eta_{cr} = 1,97E-2</math>  Flecha = 0,436</p>	<p>0  6,1  1,98</p>
<p>②</p> <p><math>v_{cr}</math>  <math>\eta_{cr}</math>  <math>e/h = 0,08</math>  <math>\lambda = 110</math>  <math>\omega = 0,8</math>  <math>d' = 0,1h</math></p> <p><math>v \rightarrow</math> incremental  <math>\eta_{cr} \rightarrow</math> incremental</p>	<p><math>v_{cr} = 1,97E-2</math>  <math>\eta_{cr} = 1,97E-2</math>  Flecha = 0,573</p>	<p><math>v_{cr} = 2,04E-2</math>  <math>\eta_{cr} = 2,04E-2</math>  Flecha = 0,447</p>	<p>3,4  3,4  28</p>
<p>③</p> <p><math>v_{cr}</math>  <math>\eta = 0,0197</math>  <math>e/h = 0,08</math>  <math>\lambda = 110</math>  <math>\omega = 0,8</math>  <math>d' = 0,1h</math></p> <p><math>v \rightarrow</math> incremental  <math>\eta_{cr} \rightarrow</math> fixo</p>	<p><math>v_{cr} = 1,975E-2</math>  <math>\eta_{cr} = 1,97E-2</math>  Flecha = 0,576</p>	<p><math>v_{cr} = 1,019E-1</math>  <math>\eta_{cr} = 1,97E-2</math>  Flecha = 0,440</p>	<p>80,6  0  30,7</p>

#### 6.4 - Estudo comparativo de dimensionamento

Normalmente, o dimensionamento de colunas esbeltas no estado limite último de instabilidade tem sido feito através de consultas aos diagramas de interação  $\mu_{1crit} \times v$ , obtidos com o processo aproximado do pilar padrão, ou com uso de programas elaborados de acordo com essa mesma teoria. Entretanto, esse procedimento pode, em alguns casos, levar a resultados bastante imprecisos. Para mostrar isso, apresenta-se, aqui, um estudo comparativo de dimensionamento de colunas engastadas-livres ou equivalentes, usando o processo aproximado do pilar padrão e a teoria do método geral. Tal estudo visa dar algumas informações a respeito do emprego do processo aproximado do pilar padrão para dimensionamento.

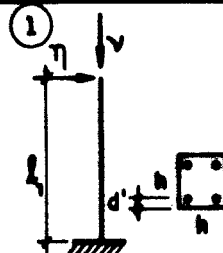
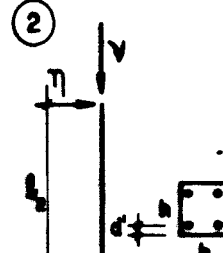
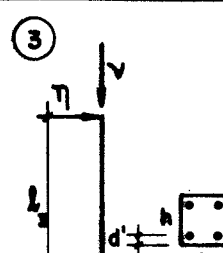
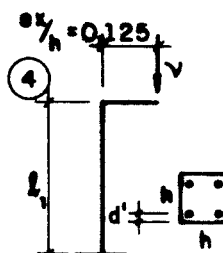
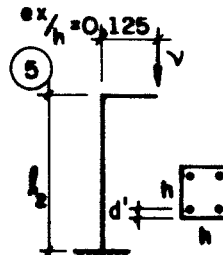
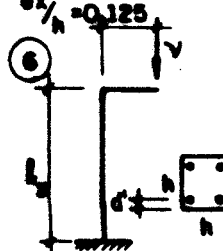
Usando-se os programas para dimensionamento de colunas, correspondentes ao processo do pilar padrão e ao método geral, obtiveram-se, para alguns exemplos selecionados de forma a possibilitar o estudo acima referido, os resultados apresentados na tabela 6.4.1.

Observa-se, na referida tabela, que a taxa mecânica de armadura varia diretamente com o índice de esbeltez, para um carregamento constante. Além disso, a aproximação do pilar padrão fornece resultados para a taxa mecânica  $\omega$ , a favor da segurança, se comparados com os resultados fornecidos pelo método geral, quando a solicitação de momentos fletores de 1ª ordem é triangular. O mesmo não ocorre quando a solicitação de momentos fletores de 1ª ordem é uniformemente distribuída. Neste caso, a aproximação do pilar padrão fornece resultados contra a segurança, quando comparados com os obtidos com o método geral. Em ambos os casos comparados, as diferenças são pequenas, sendo essa conclusão tirada como geral, uma vez que os exemplos analisados foram escolhidos nas regiões de maiores defasagens dos diagramas de interação dados no item 6.1.

Outro fato a ser notado, também, é que um aumento no índice de esbeltez não acarreta necessariamente um aumento na diferença das taxas calculadas para os dois processos.



Tabela 6.4.1 - Valores da taxa mecânica de armadura  $\omega$ , obtidos com o método geral e com a aproximação do pilar padrão.

EXEMPLOS	DIMENSIONAMENTO MÉTODO GERAL	DIMENSIONAMENTO PILAR PADRÃO	ERRO(%)
<p>①</p>  <p>ACO CA-50A  <math>l_{e/y_n} = 25</math>  <math>\lambda = 86.6</math>  <math>\nu = 0.375</math>  <math>\mu_1 = 0.39</math>  <math>d' = 0,1h</math></p>	0.96	1.07	11.2
<p>②</p>  <p>ACO CA-50A  <math>l_{e/y_n} = 31.75</math>  <math>\lambda = 110</math>  <math>\nu = 0.375</math>  <math>\mu_1 = 0.496</math>  <math>d' = 0,1h</math></p>	1.39	1.52	9.2
<p>③</p>  <p>ACO CA-50A  <math>l_{e/y_n} = 40.4</math>  <math>\lambda = 140</math>  <math>\nu = 0.375</math>  <math>\mu_1 = 0.631</math>  <math>d' = 0,1h</math></p>	2.00	2.16	8.1
<p>④</p>  <p><math>e x/h = 0,125</math>  ACO CA-50A  <math>l_{e/y_n} = 25</math>  <math>\lambda = 86.6</math>  <math>\nu = 0.375</math>  <math>\mu_1 = 0.047</math>  <math>d' = 0,1h</math></p>	0.09	0.08	12.2
<p>⑤</p>  <p><math>e x/h = 0,125</math>  ACO CA-50A  <math>l_{e/y_n} = 31.75</math>  <math>\lambda = 110</math>  <math>\nu = 0.375</math>  <math>\mu_1 = 0.047</math>  <math>d' = 0,1h</math></p>	0.29	0.28	4.6
<p>⑥</p>  <p><math>e x/h = 0,125</math>  ACO CA-50A  <math>l_{e/y_n} = 40.4</math>  <math>\lambda = 140</math>  <math>\nu = 0.375</math>  <math>\mu_1 = 0.047</math>  <math>d' = 0,1h</math></p>	0.61	0.60	1.8

### 6.5 - Estudo comparativo entre diagramas de interação obtidos com o processo aproximado do pilar padrão

Neste item, apresenta-se uma análise dos diagramas de interação, obtidos com base no processo aproximado do pilar padrão, representados pelas curvas de número 1, das nas figuras 6.1.2 a 6.1.10.

Inicialmente, observa-se nos citados diagramas que, para uma mesma taxa mecânica de armadura, a inclinação das curvas de interação  $\mu_{1crít} \times v$  varia diretamente com o índice de esbeltez da coluna, reduzindo o intervalo de variação da força normal, na flexão normal composta. Por outro lado, tal intervalo varia diretamente com a taxa mecânica de armadura, podendo-se dizer o mesmo com relação ao intervalo de variação do momento crítico de 1ª ordem.

Usando-se o programa, que calcula pontos para construção dos diagramas de interação, elaborado segundo a aproximação do pilar padrão, encontraram-se, entre outras, as coordenadas  $\mu_{1crít} \times v$ , que definem os extremos dos diagramas mostrados na figura 6.5.1.

Observa-se, na citada figura, que as coordenadas dos diagramas de interação, com mesma taxa mecânica de armadura e diferentes índices de esbeltez, para o caso de compressão centrada e flexão simples, são iguais, pois nestes casos não há efeitos de 2ª ordem.

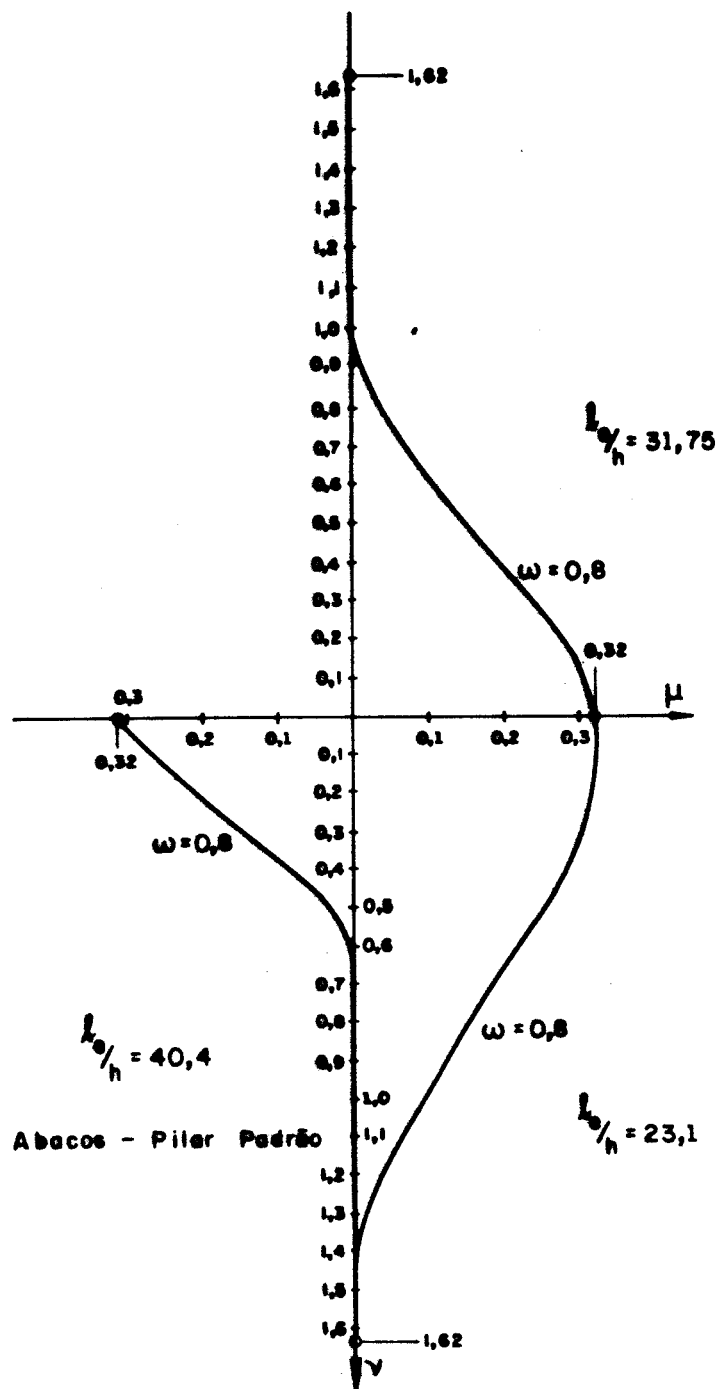


Fig. 6.5.1 - Diagramas de interação  $\mu_{cr\tilde{t}} \times \nu$ ,  
obtidos com a teoria do pilar padrão.

Embora, para o caso de compressão centrada, todos os diagramas de interação com mesma taxa mecânica de armadura, levem ao mesmo valor da força normal adimensional  $v$ , conforme dito anteriormente, isto não representa a realidade. A figura 6.5.1 mostra, por exemplo, que a partir de  $v = 0,6$ , o pilar com  $\lambda = 140$  não suporta excentricidade (momentos), evidenciando a existência de uma carga limite. Essa constatação evidencia que, a partir dos pontos de tangência dos diagramas de interação com o eixo que define as forças normais adimensionais  $v$ , não há mais significado físico. Vale lembrar que os limites de compressão simples, mostrados nos diagramas da citada figura, consideram apenas o caso de peça com eixo reto, sem considerar, portanto, o ponto correspondente à carga crítica.

#### 6.6 - Estudo comparativo dos diagramas de interação correspondentes aos aços classe A e B

Para possibilitar o estudo comparativo dos diagramas de interação correspondentes aos aços classe A e B, de mesma resistência característica, foram construídos, com a utilização do programa elaborado de acordo com o processo aproximado do pilar padrão, dado no Apêndice, os diagramas de interação correspondentes à taxa mecânica de armadura 0,8, índice de esbeltez 110. Esses diagramas estão mostrados na figura 6.6.1 e enfatizam os diferentes efeitos de segunda ordem para os dois tipos de aços referidos. Apesar de se considerar apenas um exemplo, figura 6.6.1, pode-se dizer que, como o aço tipo B tem início de escoamento para valores menores de tensão, sua tendência é proporcionar momentos críticos de 1ª ordem menores que os calculados com o aço classe A.

Analisando a máxima diferença entre as tensões correspondentes aos dois diagramas de cálculo correspondentes aos aços classe A e B, dados no item 2.2, observa-se que a tensão no aço B, correspondente ao início de escoamen

to do aço classe A, é aproximadamente 17,64% menor que a do aço classe A. Entretanto, para estudo de instabilidade de colunas, essa diferença máxima recomendada pela NBR-6118, não tem significado prático, pois, com diferenças de tensões, seguramente menores que 17,64%, os momentos críticos de 1ª ordem, na seção da base, podem apresentar, para os aços A e B, diferenças iguais ou superiores a essa, conforme ilustrado na tabela 6.6.1. Ressalva-se que o estudo aqui desenvolvido tem apenas caráter ilustrativo, necessitando de uma investigação mais ampla para se chegar a uma conclusão mais precisa.

Tabela 6.6.1 - Diferenças percentuais dos momentos críticos da figura 6.6.1.

	Aço A	Aço B	
$v$	$\mu_{1crít}$	$\mu_{1crít}$	Diferença (%)
0	0,322	0,322	0
0,1	0,303	0,282	6,85
0,2	0,284	0,241	15,14
0,3	0,255	0,208	18,35
0,4	0,199	0,166	16,61
0,5	0,147	0,122	16,68
0,6	0,104	0,091	12,56
0,7	0,069	0,065	6,32
0,8	0,043	0,039	7,85
0,9	0,017	0,014	15,85
1	~ 0	~ 0	

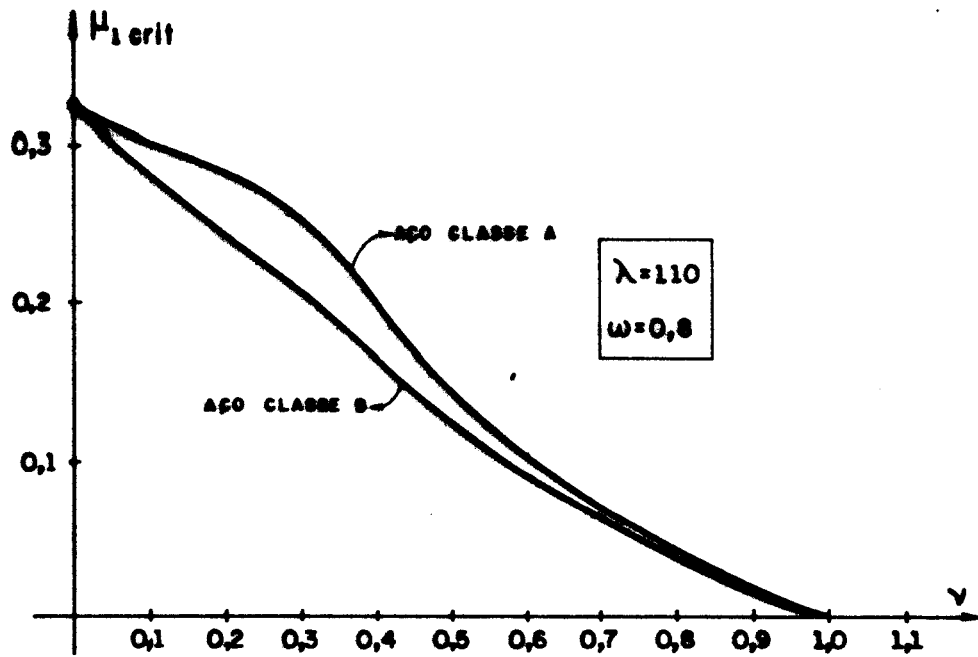


Fig. 6.6.1 - Diagramas de interação ( $\mu_{1\text{crit}}$  x  $\nu$ ) para os aços classe A e B de mesmo  $f_{yk}$ .

## 7. APLICAÇÕES

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos, resolvidos com base na teoria do método geral. A escolha dos exemplos foi feita visando demonstrar a aplicabilidade e versatilidade dos programas, elaborados com a teoria citada, dados no Apêndice.

Foram resolvidos também vários exemplos com o emprego da aproximação do pilar padrão, tendo os resultados sempre coincidido com os apresentados em FUSCO (1981) e HOFFMANN (1978). Assim, a apresentação dos mesmos neste texto foi suprimida.

### 7.1 - Verificação da estabilidade de colunas pelo método geral

#### Exemplo 1

Verificar a estabilidade da peça flexo-comprimida com armadura conhecida, esquematizada na figura 7.1.1, incluindo-se o efeito do peso próprio e usando-se a teoria do método geral.

Dados do problema:

- Aço: CA-50A
- Área de aço:  $A_s = 60\text{cm}^2$  ;  $\gamma_s = 1,15$

Concreto:  $f_{ck} = 21\text{MPa}$  ;  $\gamma_c = 1,4$  ; Peso específico =  $25\text{kN/m}^3$

$F_1 = F_2 = F_3 = 300\text{ kN}$  ;  $F_4 = 1300\text{ kN}$

$H = 20\text{ kN}$  ;  $M = 130\text{ kN.m}$  ;  $q_h = 1\text{ kN/m}$

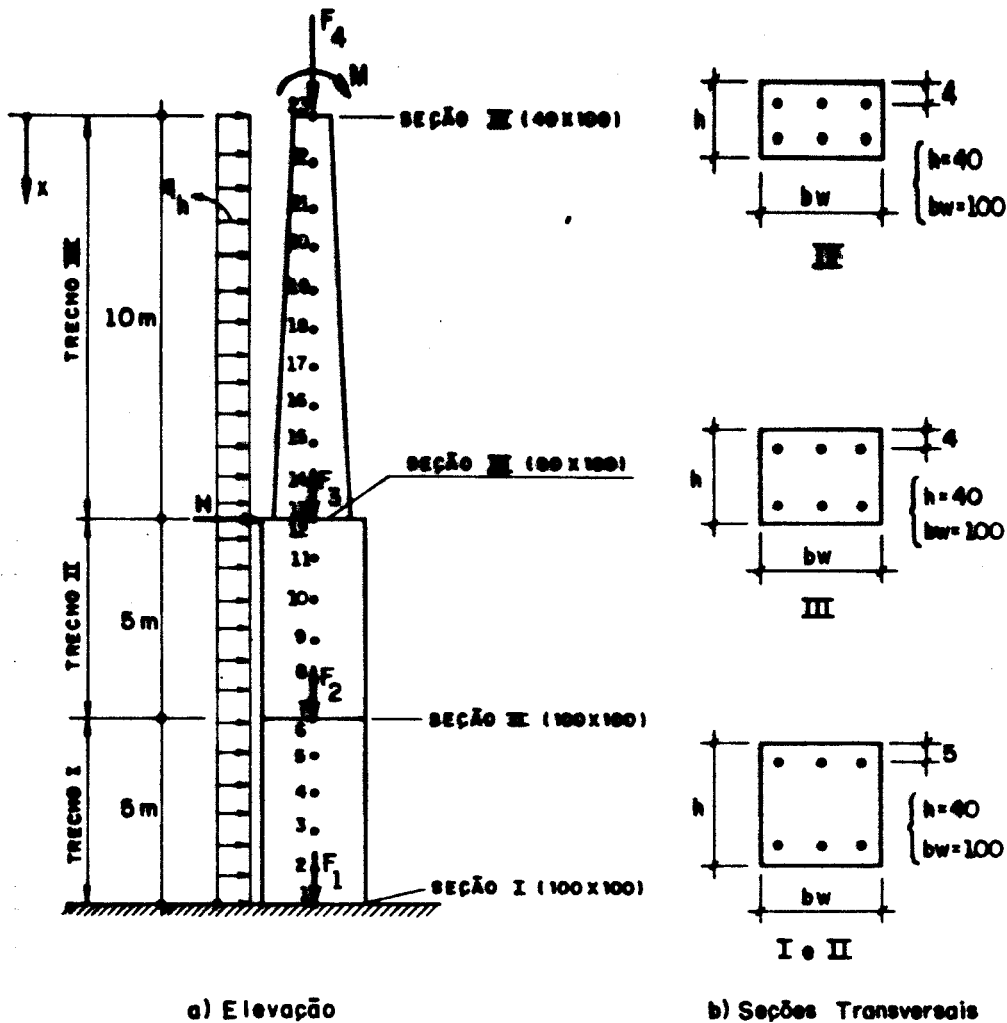


Fig. 7.1.1 - Pilar engastado-livre com seção variável.

Este problema foi resolvido com o uso do programa para verificar estabilidade, elaborado de acordo com a teoria do método geral. Dividindo-se os trechos I e II, em 5 subintervalos, e o trecho III em 10 subintervalos, para integração das curvaturas, constatou-se a estabilidade do pilar após 4 iterações, com tolerância para equilíbrio das forças normais e momentos fletores, em todas as seções, de 1% e 1%, respectivamente. Os resultados fornecidos pelo citado programa estão dados na tabela 7.1.1.



Tabela 7.1.1 - Valores das curvaturas, flechas e momentos finais

Seções	Curvaturas ( $m^{-1}$ )	Flechas (m)	Momentos finais (kN.m)
I	6.33 E-4	0	671
II	Ponto 6: 3.86 E-4 Ponto 7: 3.99 E-4	0.0067	469
III	Ponto 12: 2.19 E-4 Ponto 13: 4.23 E-4	0.023	276
IV	1.45 E-3	0.095	130

Exemplo 2

Verificar a estabilidade da coluna flexo-comprimida, com armadura conhecida, esquematizada na figura 7.1.2, desprezando-se o efeito do peso próprio e usando-se a teoria do Método Geral.

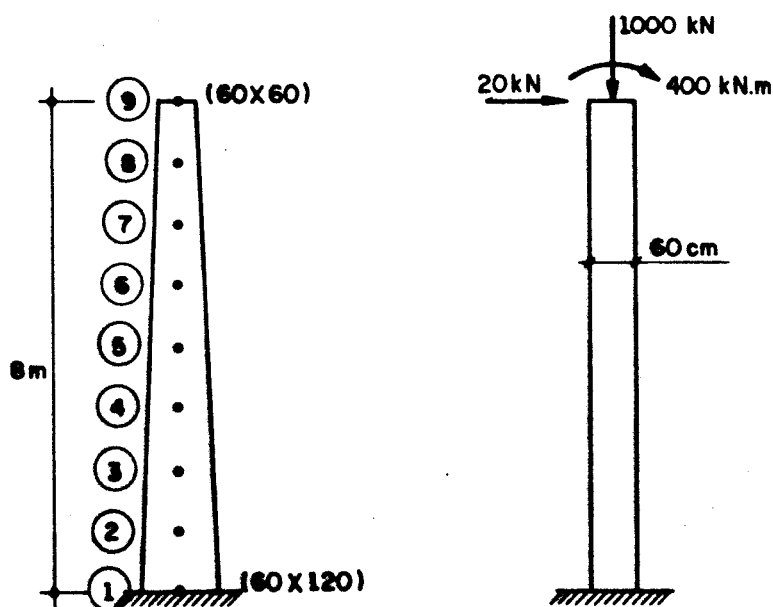


Fig. 7.1.2 - Pilar engastado-livre com seção transversal variável.

Dados do problema:

- Concreto:  $f_{ck} = 18$  MPa
- Aço: CA-50A
- $d'/h = 0,1$
- Taxa mecânica de armadura na seção da base:  $\omega = 0,40$

Dividindo o pilar em 8 subintervalos, para integração das curvaturas, e usando-se as tolerâncias do Exemplo 1, constatou-se a estabilidade do pilar com o emprego do programa que verifica estabilidade segundo a teoria do método geral, obtendo-se os valores dados na tabela 7.1.2, após 3 iterações.

Tabela 7.1.2 - Valores das curvaturas, flechas e momentos finais

Seções	Curvaturas ( $m^{-1}$ )	Flechas (m)	Momentos finais (kN.m)
1	3.78 E-3	0	670
9	2.46 E-3	0.11	400

Este exemplo encontra-se resolvido em HOFFMANN (1978), onde o mesmo usa o método de Engesser-Vianello, para determinação dos esforços de 2ª ordem. O valor máximo do momento fletor obtido, comparado com o aqui encontrado, apresenta uma diferença de aproximadamente 3%. Essa diferença se deve talvez a interpolações manuais dos diagramas, M-N-l/r, usadas pelo citado autor, no cálculo das curvaturas e às diferenças de tolerâncias fixadas para o equilíbrio da força normal e do momento fletor.

## 7.2 - Cálculo de carregamento crítico pelo método geral

### Exemplo 3

Calcular o carregamento crítico do pilar engastado-livre, com armadura conhecida, esquematizado na figura 7.2.1, incluindo-se o efeito do peso próprio e usando-se a teoria do Método Geral.

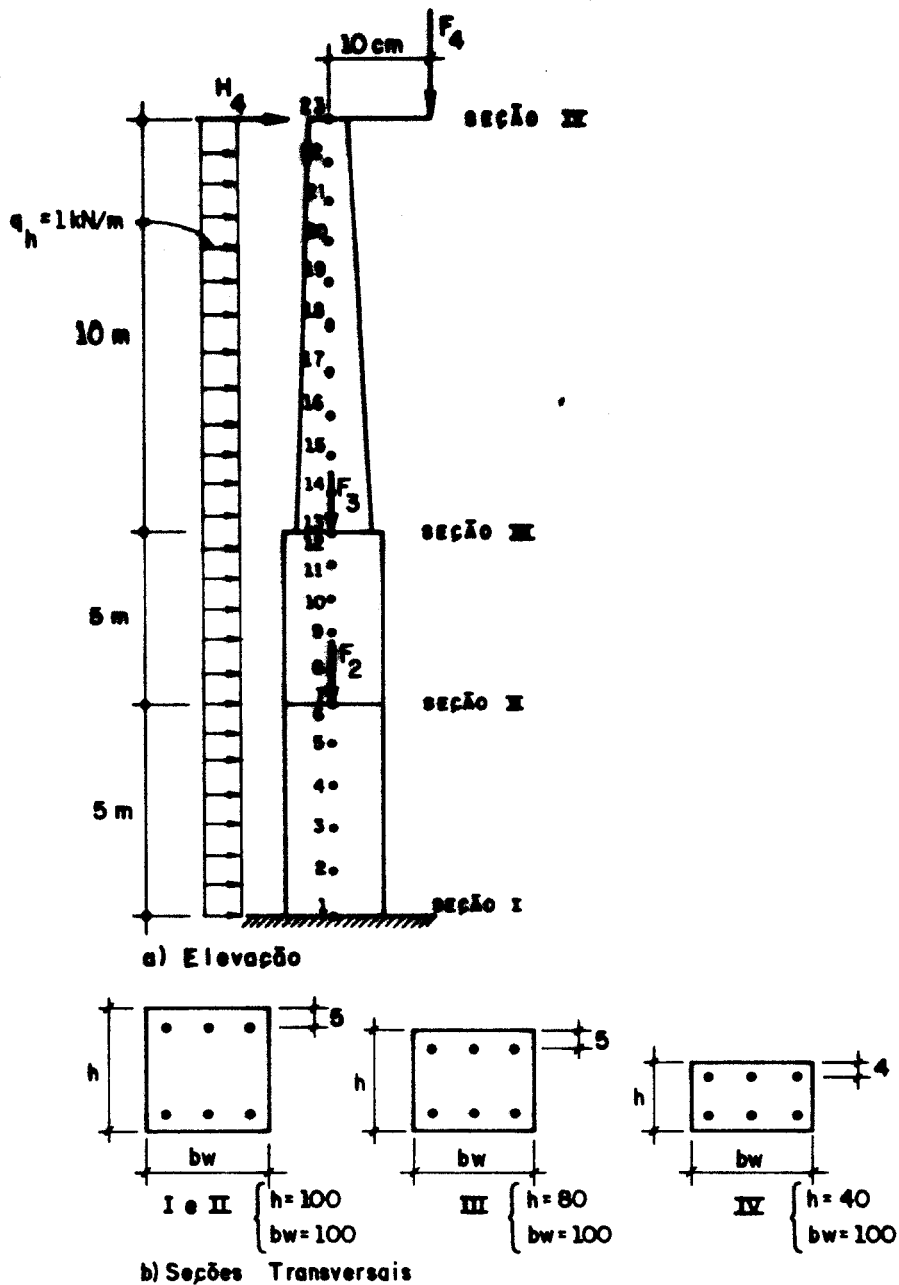


Fig. 7.2.1 - Pilar engastado-livre com seção variável.

Dados do problema:

- Aço: CA-50A
- Concreto:  $f_{ck} = 21 \text{ MPa}$  ;  $\gamma_c = 1,4$  ;  
Peso específico =  $25 \text{ kN/m}^3$
- Área de aço:  $A_s = 60 \text{ cm}^2$  ;  $\gamma_s = 1,15$
- A carga distribuída horizontal e a excentricidade de aplicação da carga  $F_4$  não serão incrementadas.

Este problema foi resolvido, usando-se o programa que calcula o carregamento crítico, elaborado de acordo com a teoria do método geral. Usando-se as mesmas subdivisões e tolerâncias do Exemplo 2, após 45 iterações, o programa forneceu os valores dados na tabela 7.2.1.

Tabela 7.2.1 - Valores das curvaturas, flechas, momentos finais e carregamento crítico.

Seções	Curvaturas ( $m^{-1}$ )	Flechas (m)	Momentos finais (kN.m)	Carregamento crítico
I	1.96 E-3	0	1710	$H_1 = 0$ kN $F_1 = 0$ kN $M_1 = 0$ kN.m
II	Ponto 6: 1.40E-3 Ponto 7: 1.66E-3	0,022	1389	$H_2 = 0$ kN $F_2 = 1721$ kN $M_2 = 0$ kN.m
III	Ponto 12: 9.55E-4 Ponto 13: 2.79E-3	0,082	997	$H_3 = 0$ kN $F_3 = 1721$ kN $M_3 = 0$ kN.m
IV	1.98 E-3	0,39	172,1	$H_4 = 22,1$ kN $F_4 = 1721$ kN $M_4 = 172,1$ kN.m

Exemplo 4

Calcular o carregamento crítico do pilar esquematizado na figura 7.1.2, desprezando-se o efeito do peso próprio e usando-se a teoria do Método Geral.

Adotando-se como ponto de partida o carregamento indicado na figura 7.1.2 e considerando-se o momento aplicado na extremidade livre do pilar como oriundo de uma excentricidade de 40cm na aplicação da força normal, além de usar os demais dados, subdivisões e tolerâncias do Exemplo 2, o

programa que calcula o carregamento crítico segundo o Método Geral, através de um processo incremental proporcional da força normal e da força horizontal, forneceu, após 41 iterações, os valores dados na tabela 7.2.2.

Tabela 7.2.2 - Valores das curvaturas, flechas, momentos finais e carregamento crítico.

Seções	Curvatura ( $m^{-1}$ )	Flechas (m)	Momento finais (kN.m)	Carregamento crítico
1	9.22 E-3	0	1158	$H_1 = 0$ kN $F_1 = 0$ kN $M_1 = 0$ kN
9	3.22 E-3	0,204	512,4	$H_9 = 48,1$ kN $F_9 = 1281$ kN $M_9 = 512,4$ kN

Exemplo 5

Calcular a máxima força horizontal H, que pode ser aplicada ao pilar da figura 7.2.2, usando-se a teoria do Método Geral.

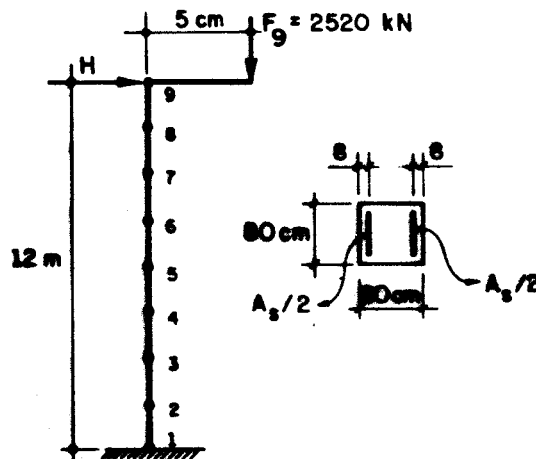


Fig. 7.2.2

Dados do problema:

- Aço: CA-50A
- Concreto:  $f_{ck} = 21 \text{ MPa}$
- Área de aço:  $A_s = 80 \text{ cm}^2$

Dividindo o pilar em 9 subintervalos para integração das curvaturas e usando-se as mesmas tolerâncias do Exemplo 1, dado no item 7.1, o programa que calcula o carregamento crítico forneceu, após 26 iterações, os seguintes valores:

Força horizontal máxima:  $H = 70,5 \text{ kN}$

Força normal máxima:  $F = 2520 \text{ kN}$

Flecha máxima na extremidade livre da coluna:  $a = 0,265 \text{ m}$

Momento final na seção 1 =  $1640 \text{ kN.m}$

Este exemplo encontra-se resolvido em FUSCO (1981), onde foi usado o processo aproximado do pilar padrão, obtendo-se uma máxima força horizontal de 60 kN. Este resultado, se comparado com o aqui obtido com o uso do método geral, apresenta um erro da ordem de 14,9%.

### 7.3 - Dimensionamento segundo o método geral

#### Exemplo 6

Dimensionar o pilar do Exemplo 2 do item 7.1, considerando os mesmos dados, subdivisões e tolerâncias, já fornecidos, além de se fixar a tolerância para obtenção da taxa mecânica de armadura em 1%.

Usando-se o programa que dimensiona uma coluna, segundo a teoria do método geral, obteve-se:

Taxa mecânica de armadura na seção da base:  $\omega = 0,24$

Flecha na ponta da coluna:  $0,19 \text{ m}$

Momento final na seção da base =  $750 \text{ kN.m}$

## 8. CONCLUSÕES FINAIS

Este trabalho fornece procedimentos detalhados para o estudo de colunas esbeltas, solicitadas à flexão normal composta (no tocante à obtenção da carga crítica), dimensionamento, estudo da estabilidade e elaboração de diagramas de interação  $\mu_{1crít} \times \nu$ , usando a teoria do método geral e o processo aproximado do pilar padrão. Os roteiros apresentados permitem que se façam os estudos acima citados com conhecidas margens de erro.

Cada um dos programas propostos é perfeitamente adaptado aos tipos usuais de processadores, o que permite seu uso prático com facilidade.

Os tipos de erro do processo do pilar padrão foram analisados em detalhe, procurando-se em cada caso mostrar a tolerância envolvida.

Com base neste trabalho, podem ser feitos estudos mais detalhados do comportamento de pilares, com condições de vinculações diferentes das que aqui foram analisadas. Pode-se também estudar os efeitos de fluência, estabilidade global de edifícios com a consideração de pórticos geométrica e fisicamente não-lineares, bem como estudar o comportamento (estabilidade) de peças rígidas dos edifícios.

Finalmente, pode-se concluir que o processo do pilar padrão se constitui em uma grande ferramenta de cálculo pela sua simplicidade e rapidez. Entretanto, caso se disponha de um equipamento mais veloz e se pretenda obter resultados exatos, sugere-se usar o método geral.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AUFIERO, L. (1977) - Estabilidade de Colunas Isostáticas de Concreto Armado, Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos - SP.
- BUCHAIN, R. (1979) - Efeitos de Segunda Ordem e Estado Limite Último de Instabilidade em Pilares de Concreto, Dissertação de Mestrado. Escola Politécnica da USP - SP.
- BURKE, J.V. Jr. (1974) - Flexão Normal Composta. Peças de Seção Retangular em Concreto Armado com Armadura Lateral. Tabelas para Dimensionamento, Departamento de Livros e Publicações do Grêmio Politécnico - São Paulo - SP.
- CEB/FIP (1978) - Manual of buckling and instability. Paris, V. 123 - Comité Euro-International du Béton.
- CHEN, W. and SALEEB, A.F. (1982) - Constitutive Equations for Engineering Materials - Elasticity and Modeling, Vol. 1, A Wiley - Interscience Publication John Wiley & Sons - New York, Chichester - Brisbane - Toronto - Singapore.
- CONTE, S.D. (1977) - Elementos de Análise Numérica, Editora Globo S.A., Porto Alegre. RS, 3<sup>a</sup> Edição.
- FUSCO, P.B. (1981) - Estruturas de Concreto. Solicitações Normais, Editora Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro - RJ.
- HOFFMANN, J. (1978) - Pilares Esbeltos de Concreto Armado - Método Exato, CT-18, UFRGS - Porto Alegre -RS.
- \_\_\_\_\_ - Pilares Esbeltos de Concreto Armado - Método Aproximado, CT-19, UFRGS - Porto Alegre - RS.
- KOTSOVOS, M.D., and NEWMAN, J.B. (1977), Behavior of Concrete Under Multiaxial Stress, Journal of the American Concrete Institute, Vol. 74, No. 9, pp. 443-446.
- MARCOTTI, P. (1984) - Instabilidade na Flexão Composta Oblíqua de Pilares de Concreto Armado, Dissertação de Mestrado - Escola Politécnica da USP - SP.

- NBR-6118 - Associação Brasileira de Normas Técnicas - Procedimento para Projeto e execução de obras de concreto armado, Brasil.
- RASCH, C. (1958) - Stress-Strain Diagrams of Concrete obtained by constant Rates of Strain - RILEM Symposium - Munich.
- SANTOS, L.M. (1974) - Estado Limite Último de Flambagem - Padronização de Cálculo Nº 3 - PROMON.
- \_\_\_\_\_ (1977) - Cálculo de Concreto Armado Segundo a NB-1/76 e o CEB/72, Vol. 1, Editora Edgar Blücher Ltda, São Paulo, SP.
- TIMOSHENKO, S.P. (1970) - Resistência dos Materiais, 2 v. Tradução. Ao Livro Técnico Ltda. Rio de Janeiro - RJ.
- ZAGOTTIS, D. (1980) - Introdução à Teoria das Estruturas. Capítulo 10: Estabilidade e Instabilidade do Equilíbrio das Estruturas, Edile Serviços Gráficos e Editora Ltda - São Paulo - SP.

A P P E N D I C E

```
program dimen;
(*****)
(programa para dimensionamentode pilares-METODO GERAL)
(*****)

(*programa principal*)
      type arr=array[0..100] of real;
      arri=array[0..100] of integer;
      arrm=array[0..20,0..100] of real;
      arrmi=array[0..20,0..100] of integer;

var pec,btax,fyd,fcd,epsyd,dl,s,ni1,delta,m1,tolhr,tol1,e,
hr,tol,gams,h,bw,nfix,gamc,mr,nr,w,lh,qn,qd,tolw:real;
mer,mer1,peso,eqb,ka,nsc,i,n's,cont,ar,araux,n1,nt,t,
fyk,n,nint,fck,ne,fora:integer;
bracg,normal,cg,cur,dv,btao,sigs,aco,ni1t,hs,cot,ba,lb,
lt,eb,et,daux,cob,ta,alt,nve,fh,moa,nota,
dv1,acaux,y,m1pa,m1p,m1aux,m1a,noa:arr;
      nf,ntb,aru,nv,nk:arri;
      ni,yaux,yg:arrm;
      nfc:arrmi;

      arq:text;
      arq1:text;

procedure gergeo(var gamc,gams,fcd,fyd:real;
      var fck,fyk,ne:integer;
      var aru,nv,nk:arri;
      var yaux,yg:arrm;
      var hs,cot,ba,lb,lt,eb,et,daux,cob,alt:arr);

      var i,a,s1,j,xj,k:integer;
      a1b:arr;

begin      (*inicio da gergeo*)
fcd:=fck/gamc;
fyd:=fyk/gams;
a:=1;
s1:=1;
writeln(lst,'GEOMETRIA DA COLUNA');
for j:=1 to ne do
begin
ar:=aru[j];
hs[j]:=cot[j]/nv[j];
s1:=s1+nv[j];
xj:=0;
for i:=a to s1 do
begin
ba[i]:=lb[j]-(lb[j]-lt[j])*hs[j]*xj/cot[j];
alt[i]:=eb[j]-(eb[j]-et[j])*hs[j]*xj/cot[j];
daux[i]:=cob[j]/alt[i];
xj:=xj+1;
writeln(lst,'base',i,'=',ba[i],'***','altura',i,'=
',alt[i],'**','taxa=',ta[i]);
(*gera alturas das camadas*);
```

```
if ar=0 then
begin
for k:=1 to nk[j] do
begin
yaux[i,k]:=yg[j,k]*alt[i]/alt[a];
end;
end;
end;
s1:=s1+1;
a:=s1;
mer:=a-nv[j]-1;
mer1:=s1;
end;
end; (*final da gergeox*)

procedure germn(var lh,qd,tol,tol1:real;
var ne:integer;
var cot,hs,nve,fh,moa,nota,m1p:arr;
var nv:arri);

label 5;
var norm1,norm2,norm3,base,altu,auxm,lh1,auxn,aux,
mota,mta:real;
normac,auxcg,mop,dsb,nod,momd,nor:arr;
mult,k,k1,ka1,i1,i2,jaux,s1,a,z,i,ka,ja,j,
j1,conta:integer;

begin (*inicio da germn*)
if peso=1 then
begin
nv[0]:=0;
mult:=1;
k:=mer;
k1:=mer1-1;
normal[k1]:=0;
normac[k1]:=0;
for ka:=1 to ne do
begin
ka1:=ne+1-ka;
for i1:=k to k1-1 do
begin
i2:=k1-mult;
base:=(ba[i2]-ba[i2+1]);
altu:=(alt[i2]-alt[i2+1]);
norm1:=ba[i2+1]*alt[i2+1]*hs[ka1]*pec;
norm2:=(altu*ba[i2+1]/hs[ka1]+
base*alt[i2+1]/hs[ka1])*
hs[ka1]*hs[ka1]*pec/2;
norm3:=altu*base*hs[ka1]*hs[ka1]*hs[ka1]*pec/
(3*hs[ka1]*hs[ka1]);
normal[i2]:=norm1+norm2+norm3;
normac[i2]:=normac[i2+1]+normal[i2];
auxcg[i2]:=norm1*hs[ka1]/2+norm2*hs[ka1]*2/3+
norm3*hs[ka1]*3/4;
cg[i2]:=auxcg[i2]/normal[i2];
```

```
        braccg[i2]:=(hs[ka1]-cg[i2])/hs[ka1];
        mult:=mult+1;
    end;
    k1:=k-1;
    normal[k1]:=normal[k];
    normac[k1]:=normac[k];
    k:=k1-nv[ka1-1];
    mult:=1;
end;
end;
cot[0]:=0;
dsb[0]:=0;
auxn:=0;
lh1:=lh;
s1:=1;
a:=1;
z:=1;
hs[0]:=0;
aux:=0;
nv[0]:=0;
auxm:=0;
moa[1]:=0;
nve[1]:=0;
for i:=1 to (ne+1) do
    begin
        dsb[i]:=dsb[i-1]+cot[i-1];
        auxn:=auxn+nve[i];
        auxm:=auxm+moa[i];
    end;
writeln(lst,'esforços solicitantes');
for ka:=1 to ne do
    begin
        aux:=aux+nv[ka-1]*hs[ka-1];
        ja:=1;
        s1:=s1+nv[ka];
        for j:=a to s1 do
            begin
                if peso=0 then nod[j]:=0
                else
                    nod[j]:=normac[j];
                    momd[j]:=qd*(lh1-(ja-1)*hs[ka])*
                        (lh1-(ja-1)*hs[ka])/2;
                    mota:=0;
                    for j1:=1 to (ne+1) do
                        begin
                            if dsb[j1]>=((ja-1)*hs[ka]+aux) then
                                begin
                                    mota:=mot+f[h[j1]]*
                                        (dsb[j1]-((ja-1)*hs[ka]+aux));
                                end;
                            end;
                        for j1:=z to (ne+1) do
                            begin
                                jaux:=ja-1;
                                if (dsb[j1]<=round(jaux*hs[ka]+aux))
```

```
        and (jaux=0) then
begin
    auxn:=auxn-nve[j1];
    nor[j]:=auxn;
    auxm:=auxm-moa[j1];
    mop[j]:=auxm;
    conta:=j1;
end
    else
        begin
            nor[j]:=auxn;
            mop[j]:=auxm;
            conta:=j1;
            goto 5;
        end;
    end;
5:      z:=conta;
        ja:=ja+1;
        nota[j]:=nor[j]+nod[j];
        m1p[j]:=mota+mop[j]+momd[j];
        if nota[j]=0 then nota[j]:=tol;
        if m1p[j]=0 then m1p[j]:=tol1;
writeln(lst,'esforco normal',j,'=',nota[j],'***',
        'momento fletor',j,'=',m1p[j]);
    end;
    s1:=s1+1;
    a:=s1;
    lh1:=lh1-nv[ka]*hs[ka];
end;
end; (*final da germn*)

(*subrotina que calcula a forza normal total no aco*)
procedure faco(var delta,fcd,epsyd,e,h,btax,bw,hr,naco,ni1,
    fyd,sigc,dl,s,w:real;
    var n1,t,n,ar,araux:integer;
    var btao,y,sigs,epss,ni1t:arr;
    var nf,nk:arri;
    var yaux:arrm;
    var nfc:arrmi);
    var btay:arr;
        ac:real;
        i1,j,naux:integer;
begin
    if araux<2 then
        begin
            ac:=bw*h;
            epsyd:=fyd/e;
            if t=1 then epsyd:=epsyd+0.002;
            for i1:=1 to n do
                begin
                    if ar=1 then
                        begin
                            y[i1]:=h/2-dl;
```

```
        btay[i1]:=y[i1]/h;
        btao[i1]:=btay[i1]+0.5;
        dl:=dl+s;
    end
    else
        begin
            btay[i1]:=y[i1]/h;
            btao[i1]:=btay[i1]+0.5;
        end;
    end;
end;

naco:=0;
for i1:=1 to n do
    begin
        epss[i1]:=hr*(btao[i1]-btax);
        sigs[i1]:=fyd;
        if abs(epss[i1])<epsyd then
            begin
                sigs[i1]:=abs(epss[i1])*e;
                if t=1 then
                    if abs(epss[i1])>0.7*fyd/e then
sigs[i1]:=fyd*(0.7-22.5*fyd/e+sqrt((22.5*fyd/e-0.7)*
(22.5*fyd/e-0.7)+45*abs(epss[i1])-0.49));
                    end;
                if epss[i1]=0 then sigs[i1]:=0
                else
sigs[i1]:=sigs[i1]*epss[i1]/abs(epss[i1]);
                if ar=1 then
                    begin
                        sigc:=n1*sigs[i1];
                        naco:=naco+w*sigc*ni1/fyd;
                    end
                else
                    begin
                        naux:=nf[i1];
                        for j:=1 to naux do
                            begin
                                naco:=naco+w*sigs[i1]*ni1/fyd;
                            end;
                    end;
                end;
            end;
        end;
    end; (*final da subrotina facox*)

(*subrotina que calcula o momento e normal resultantex*)
procedure mncur(var fyd,fcd,epsyd,dl,s,ni1,e,hr,tol,
                gams,h,bw,delta,nfix,gamc,mr,nr:real;
                var nt,t,naux,fyk,nint,fck,jp,ar,araux,
                n1,n:integer;
                var y,btao,sigs,ni1t:arr;
                var nf,nk:arri;
                var yaux:arrm;
                var nfc:arrmi);

    label 20,30,40;
```



```
var btaxs, btaxi, btax1, btax2, naco, nconc,
    bta1, bta2, bta3, k1, k2, k3, k4, k5, k6,
    tolc, nr2, nr1, auxr,
    auxr1, bta, maco, mconc, btax, sigc: real;
    inr, inr1, inr2, j, i, i1: integer;
    epss: arr;

(*calculo dos limites de btax*)
begin
  if hr=0 then hr:=0.0000000001;
  btaxs:=0.0035/hr;
  if btaxs>1 then btaxs:=0.002/hr+3/7;
  btaxi:=-0.010/hr+1-delta;
(*definicoes dos diagramas de tensoes*)
  for i:=1 to nint do
    begin
      jp:=0;
      nt:=i;
      if i>2 then goto 20;
      if i=1 then
        begin
          btax1:=btaxi;
          btax:=btax1;
        end
      else
        begin
          btax2:=btaxs;
          btax:=btax2;
        end;
    end;

(*chamada da subrotina que calcula a forza no aco*)
20:   faco(delta, fcd, epsyd, e, h, btax, bw, hr, naco, ni1, fyd,
        sigc, dl, s, w,
        n1, t, n, ar, araux,
        btao, y, sigs, epss, ni1t,
        nf, nk,
        yaux,
        nfc);

    araux:=2;
    if btax<=0 then nconc:=0
    else
      begin
        bta1:=-0.5;
        bta2:=-0.002/hr+btax-0.5;
        if bta2<-0.5 then bta2:=-0.5
        else
          if bta2>-1/14 then bta2:=-1/14;
          bta3:=0.5;
          if btax<1 then bta3:=btax-0.5;

          (*calculo da resultante do concreto*)
          k1:=0.5-btax;
          k4:=bta3*bta3*bta3-bta2*bta2*bta2;
```

```
      k3:=bta3-bta2;
      k2:=bta3*bta3-bta2*bta2;
nconc:=850*hr*(k2/2+k1*k3+250*hr*k1*(k4/(3*k1)+k2+k1*k3))-
      0.85*(bta2-bta1);
end;
(*calculo da normal resultantex)
nr:=naco+nconc;
if nfix =0 then tolc:=abs(nr)
else
begin
tolc:=abs(nfix-nr)/abs(nfix);
end;
if tolc<=tol then goto 30
else
begin
if i(>)1 then
begin
if i=2 then
begin
nr2:=nr;
if (nfix<nr2) or (nfix>nr1) then
begin
jp:=1;
goto 40;
end;
end
end
else
begin
inr:=trunc((nfix-nr)/(abs(nfix-nr))+
            0.001);
inr1:=trunc((nfix-nr1)/(abs(nfix-nr1))+
            0.001);
inr2:=trunc((nfix-nr2)/(abs(nfix-nr2))+
            0.001);
if inr1=inr then
begin
nr1:=nr;
btax1:=btax;
end
else
begin
if inr2=inr then
begin
nr2:=nr;
btax2:=btax;
end;
end;
end;
auxr:=(nr2-nr1)/(btax2-btax1);
auxr1:=nfix-nr1;
bta:=auxr1/auxr+btax1;
btax:=bta;
end
else
begin
```

```

        nr1:=nr;
        end;
        end;
end;
writeln(con,'tolerancia nao alcancada com',nt , 'iteracoes');
        halt;
        (*calculo do momento resultante*)

        (*calculo do momento do aco*)
30:maco:=0;
        for i1:=1 to n do
                begin
                        for j:=1 to naux do
                                begin
                                        if ar=1 then
                                                begin
                                                        ni[i1,j]:=ni1;
                                                        end;
                                                maco:=maco+w/fyd*sigs[i1]*y[i1]/h*ni[i1,j];
                                                end;
                                end;
                        end;
                (*calculo do momento do concreto*)
                if btax<=0 then mconc:=0
                else
                        begin
                                k5:=bta3*bta3*bta3*bta3-bta2*bta2*bta2*bta2;
                                k6:=bta2*bta2-bta1*bta1;
                                mconc:=850*hr*(k4/3+k1*k2/2+250*hr*k1*
                                        (k5/(4*k1)+2*k4/3+k1*k2/2))-0.425*k6;
                                end;
                        mr:=maco+mconc;
40:end; (*final da subrotina*)

procedure eqaux(var fyd,fcd,epsyd,dl,s,ni1,delta,m1,mr,tol1,
        tolhr,e,hr,tol,gams,h,bw,nfix,gamc,nr:real;
        var naux,ne,ar,araux,n1,n,cont:integer;
        var yaux,yg:arrm;
        var nv,nf,ntb,aru,nk:arri;
        var cob,y,btao,sigs,noa,m1a,aco,ni1t,ba,alt,
        ta,daux,cur:arr;
        var nfc:arrmi);
        label 50;

        var hr1,mr1,hr2,mr2,deltam,deltahr:real;
        ka,j,s1,a,g,po,jp,auxk:integer;
        eps:arr;

begin (*inicio eqaux*)
        s1:=1;
        a:=1;
        for ka:=1 to ne do
                begin
                        s1:=s1+nv[ka];
                        for j:=a to s1 do
```

```
begin
  nfix:=noa[j];
  m1:=m1a[j];
  ar:=aru[ka];
  ni1:=ni1t[ka];
  bw:=ba[j];
  h:=alt[j];
  w:=ta[j];
  delta:=daux[j];
  eps[ka]:=(alt[j]-2*cob[ka])/(nk[ka]-1);
  n:=nk[ka];
  araux:=ar;
  if ar=1 then
    begin
      n1:=nf[ka];
      s:=eps[ka];
      dl:=cob[ka];
      naux:=nf[ka];
    end
  else
    begin
      for g:=1 to nk[ka] do
        begin
          y[g]:=yaux[j,g];
          nf[g]:=nfc[j,g];
        end;
      end;
    if ar=1 then
      begin
        hr1:=0;
        mr1:=0;
      end
    else
      begin
        hr:=0;
        hr1:=hr;
        nfix:=-1*nfix;
        mncur(fyd,fcd,epsyd,dl,s,ni1,e,hr,tol,gams,
          h,bw,delta,nfix,gamc,
          mr,nr,nt,t,naux,fyk,nint,fck,jp,ar,
          araux,n1,n,
          y,btao,sigs,ni1t,
          nf,nk,
          yaux,
          nfc);
        nfix:=-1*nfix;
      end;
    hr2:=0.0135/(1-delta);
    auxk:=0;
    jp:=1;
  while (jp=1) and (auxk<51) do
    begin
      hr:=hr2;
      nfix:=-1*nfix;
```

```
mncur(fyd,fcd,epsyd,dl,s,ni1,e,hr,tol,gams,h,
      bw,delta,nfix,gamc,mr,nr,
      nt,t,naux,fyk,nint,fck,jp,ar,araux,n1,n,
      y,btao,sigs,ni1t,
      nf,nk,
      yaux,
      nfc);

nfix:=-1*nfix;
if jp=1 then
  begin
    hr2:=hr1/2+hr2/2;
    auxk:=auxk+1;
  end;
end;
if auxk=50 then
  begin
    fora:=1;
    goto 50;
  end;
mr2:=mr;
po:=0;
repeat
  po:=po+1;
  hr2:=hr2-(hr2-hr1)*(mr2-m1)/(mr2-mr1);
  deltahr:=abs(hr2-hr1)/abs(hr2);
  hr:=hr2;
  nfix:=-1*nfix;

  mncur(fyd,fcd,epsyd,dl,s,ni1,e,hr,tol,gams,h,
        bw,delta,nfix,gamc,mr,nr,
        nt,t,naux,fyk,nint,fck,jp,ar,araux,n1,n,
        y,btao,sigs,ni1t,
        nf,nk,
        yaux,
        nfc);

nfix:=-1*nfix;
if jp=1 then
  begin
    fora:=1;
    goto 50;
  end;
  mr2:=mr;
  deltam:=abs(m1-mr2)/abs(m1);
until (deltam<=tol1) or (deltahr<=tolhr);
if (deltahr<=tolhr) and (deltam>tol1) then
  begin
    fora:=1;
    goto 50;
  end
else
  begin
    fora:=0;
    cur[j]:=hr2/alt[j];
```

```
        end;
    end;
    s1:=s1+1;
    a:=s1;
end;
50:end;      (*final da equaux*)

procedure trap(var nv:arri;
               var ne:integer;
               var hs,dv,cur:arr);

    var i,s1,j,a,ka;integer;
        r1:arr;
        t1:real;

begin      (*inicio da trap*)
    for i:=1 to 2 do
        begin
            if i=1 then
                begin
                    s1:=1;
                    a:=1;
                    for ka:=1 to ne do
                        begin
                            s1:=s1+nv[ka];
                            for j:=a to s1 do
                                begin
                                    r1[j]:=cur[j];
                                end;
                                s1:=s1+1;
                                a:=s1;
                            end;
                        end
                    end
                else
                    begin
                        s1:=1;
                        a:=1;
                        for ka:=1 to ne do
                            begin
                                s1:=s1+nv[ka];
                                for j:=a to s1 do
                                    begin
                                        r1[j]:=dv[j];
                                    end;
                                    s1:=s1+1;
                                    a:=s1;
                                end;
                            end;
                        end;
                    end;
                end;
            dv[1]:=0;
            s1:=1;
            a:=1;
            for ka:=1 to ne do
                begin
                    s1:=s1+nv[ka];
                    for j:=a to (s1-1) do
```

```
begin
  t1:=(r1[j]+r1[j+1])*hs[ka]/2+dv[j];
  dv[j+1]:=t1;
end;
s1:=s1+1;
a:=s1;
dv[s1]:=dv[s1-1];
end;
end; (*final da trap*)

procedure trans(var fcd:real;
                var ne,eq:integer;
                var m1aux,m1p,m1a,noa,ba,alt,nota:arr;
                var nv:arri);

  var s1,a,ka,j:integer;

begin(*inicio da trans*)
  s1:=1;
  a:=1;
  for ka:=1 to ne do
    begin
      s1:=s1+nv[ka];
      for j:=a to s1 do
        begin
          if eq=1 then m1aux[j]:=m1p[j];
          m1a[j]:=m1aux[j]/(ba[j]*alt[j]*alt[j]*fcd);
          noa[j]:=nota[j]/(ba[j]*alt[j]*fcd);
        end;
        s1:=s1+1;
        a:=s1;
      end;
    end;
end;(*final da trans**)

procedure teste(var fyd,fcd,epsyd,dl,s,ni1,
                delta,m1,tolhr,tol1,e,hr,w:real;
                var ne,ar,araux,n1,nt,t,fyk,n,nint,
                fck,eqb:integer;
                var m1p,m1aux,m1pa,nota,btao,y,sigs,
                cur,dv,hs:arr;
                var nf,nk:arri);

  label 60;
  var neaux,kc,p,paux,naux,x,eq,s1,
      a,ka,j,k:integer;
      aux,deltam1:real;
      dvcg,m2ta:arr;

begin (*inicio da testex*)
  eq:=0;
  repeat
    eq:=eq+1;
    trans(fcd,
          ne,eq,
```

```
      m1aux,m1p,m1a,noa,ba,alt,nota,
      nv);

eqaux(fyd,fcd,epsyd,dl,s,ni1,delta,m1,mr,tol1,tolhr,e,
      hr,tol,gams,h,bw,nfix,gamc,nr,

      naux,ne,ar,aux,n1,n,cont,
      yaux,yg,
      nv,nf,ntb,aru,nk,
      cob,y,btao,sigs,noa,m1a,aco,ni1t,ba,alt,ta,
      daux,cur,
      nfc);

if fora=1 then
begin
  if w=2 then
  begin
    writeln(con,'impossivel equilibrar com w=2');
    writeln(con,'aumente o valor da variavel auxta');
    halt;
  end;
  eqb:=0;
  goto 60;
end;

  trap(nv,
        ne,
        hs,dv,cur);

s1:=1;
a:=1;
aux:=0;
for ka:=1 to ne do
begin
  s1:=s1+nv[ka];
  p:=s1;
  for j:=a to s1 do
  begin
    if eq=1 then m1pa[j]:=m1p[j]
    else m1pa[j]:=m1aux[j];
    writeln(lst,'DESLOCAMENTO SECAO',j,'=',dv[j]);
  end;
  s1:=s1+1;
  a:=s1;
end;
m1aux[p]:=m1p[p];
writeln(con,'*m1aux',p,'=',m1aux[p]);
paux:=p;
m2ta[paux]:=0;
for kc:=1 to p-1 do
begin
  if dv[paux]=dv[paux-1] then
  begin
    neaux:=neaux-1;
    m2ta[paux-1]:= m2ta[paux];
    m1aux[paux-1]:=m1p[paux-1]+m2ta[paux-1];
```



```
writeln(con, '**m1aux', paux-1, '=', m1aux[paux-1]);
end
else
begin
if peso=0 then dvcg[paux-1]:=0
else dvcg[paux-1]:=(dv[paux]-dv[paux-1])*bracg[paux-1];
m2ta[paux-1]:=m2ta[paux]+nota[paux]*(dv[paux]-dv[paux-1])+
normal[paux-1]*dvcg[paux-1];
m1aux[paux-1]:=m1p[paux-1]+m2ta[paux-1];
end;
paux:=paux-1;
end;
s1:=1;
a:=1;
for ka:=1 to ne do
begin
s1:=s1+nv[ka];
for j:=a to s1 do
begin
if m1aux[j]>aux then
begin
aux:=m1aux[j];
k:=j;
writeln(con, 'maior aux=', m1aux[j]);
end;
end;
end;
deltam1:=abs(m1aux[k]-m1pa[k])/abs(m1aux[k]);
until(deltam1<=tol1)or (eq=100);
if(deltam1>tol1) and (eq>=100) then
begin
writeln(con, 'flecha continua aumentando apos',
'100 repeticoes');
eqb:=0;
halt;
end
else
begin
writeln(lst, 'estabilidade verificada com', eq,
'iteracoes ');
eqb:=1;
s1:=1;
a:=1;
for ka:=1 to ne do
begin
s1:=s1+nv[ka];
for j:=a to s1 do
begin
writeln(lst, 'flecha finalno ponto', j, '=', dv[j]);
writeln(lst, 'curv final no pontp', j, '=', cur[j]);
writeln(lst, 'mom final no ponto', j, '=', m1aux[j]);
end;
s1:=s1+1;
a:=s1;
end;
end;
```

```
end;
60: end; (*final da teste*)

procedure detw(var eqb:integer);
      label 70;

      var auxta,cont1,auxw,aux1w,difw:real;
          se,s1,a,j,i:integer;
          area,auxta1,a1b:arr;

begin
  auxta:=2;
  cont1:=1;
  se:=0;
  repeat
70: se:=se+1;
    s1:=1;
    a:=1;
    for j:=1 to ne do
      begin
        s1:=s1+nv[j];
        for i:=a to s1 do
          begin
            auxta1[j]:=auxta;
            acaux[j]:=ba[a]*alt[a];
            aco[j]:=auxta1[j]*acaux[j]*fcd/fyd;
            ta[i]:=auxta1[j]*acaux[j]/(ba[i]*alt[i]);
            w:=ta[i];
            writeln(con,'w=',w);
          end;
          a1b[j]:=aco[j]/ntb[j];
          ni1t[j]:=a1b[j]/aco[j];
          s1:=s1+1;
          a:=s1;
        end;
      teste( fyd,fcd,epsyd,dl,s,ni1,delta,m1,
             tolhr,tol1,e,hr,w,
             ne,ar,araux,n1,nt,t,fyk,n,nint,fck,eqb,
             m1p,m1aux,m1pa,nota,btao,y,sigs,cur,dv,hs,
             nf,nk);

      if eqb=1 then
        begin
          if w<=tolw then
            begin
              writeln(con,'armadura minima em todos os',
                     'trechos acima do',j);
              halt;
            end
          else
            begin
              if cont1=1 then
                begin
                  auxw:=auxta;

```



```
reset(arq);
rewrite(arq1);
writeln('entre com a tolerancia para a forca normal');
readln(arq,tol);
writeln(con,'toleran',tol);
writeln('entre com o tipo do aco ');
writeln('aco tipo a teclar 0 ;aco tipo b teclar 1');
readln(arq,t);
writeln(con,'t=',t);
writeln('entre com a tolerancia para taxa de armadura');
readln(arq,tolw);
writeln('entre com a resistencia caracteristica do aco fyk');
readln(arq,fyk);
writeln(con,'fyk=',fyk);
writeln('entre com o coeficiente de minoracao do aco');
readln(arq,gams);
writeln(con,'gams=',gams);
writeln('entre com o momdulo de elasticidade do aco');
readln(arq,e);
writeln(con,'e=',e);
writeln('entre com o numero de iteracoes desejada');
readln(arq,nint);
writeln(con,'numero de iteracoes dado',nint);
writeln('entre com o fck do concreto');
readln(arq,fck);
writeln(con,'fck=',fck);
writeln('entre com o coeficiente de minoracao do concreto');
readln(arq,gamc);
writeln(con,'gamc=',gamc);
writeln('entre com a tolerancia para momento');
readln(arq,tol1);
writeln(con,'tol1=',tol1);
writeln('entre com a tolerancia para curvatura');
readln(arq,tolhr);
writeln(con,'tolhr=',tolhr);
writeln('entre com a carga distribuida horizontal',
'caso nao haja tecla 0');
readln(arq,qd);
writeln(con,'qd=',qd);
writeln('quer considerar o peso proprio TECLE 1',
'caso contrario TECLE 0');
readln(arq,peso);
writeln(con,'entre com o peso especifico do concreto');
readln(arq,pec);
writeln('entre com o numero de trechos em que sera',
'dividido o pilar');
writeln('entende-se por trechos:mudancas bruscas',
'de secoes,variacao armadura,pontos de',
'aplicacao de cargas concentradas');
readln(arq,ne);
writeln(con,'ne=',ne);
writeln('entre com o numero de secoes com cargas',
'concentradas aplicadas');
readln(arq,ns);
writeln(con,'ns=',ns);
```

```
writeln('entre com o comprimento total do pilar');
readln(arq,lh);
writeln(con,'lh=',lh);
for i:=1 to (ne+1) do
begin
nve[i]:=0;
fh[i]:=0;
moa[i]:=0;
end;
for i:=1 to ns do
begin
writeln('entre com o numero da secao',
'(de baixo para cima)com carga',
'concentrada aplicada');
writeln('as secoes que limitam trechos sao numeradas',
'de baixo para cima');
readln(arq,nsc);
writeln(con,'nsc=',nsc);
writeln('entre com a forza normal aplicada na secao',
nsc,'caso nao tenha tecla 0');
readln(arq,nve[nsc]);
writeln(con,'nve',nsc,'=',nve[nsc]);
writeln('entre com a forza horizontal aplicada',
'na secao',nsc,'caso nao tenha tecla 0');
readln(arq,fh[nsc]);
writeln(con,'fh',nsc,'=',fh[nsc]);
writeln('entre com o momento aplicado na secao',nsc,
'caso nao tenha tecla 0');
readln(arq,moa[nsc]);
writeln(con,'moa',nsc,'=',moa[nsc]);
if moa[nsc]=0 then moa[nsc]:=tol1;
end;
for ka:=1 to ne do
begin
writeln('entre com o comprimento do trecho ',ka);
readln(arq,cot[ka]);
writeln(con,'cot',ka,'=',cot[ka]);
writeln('entre com a largura da secao da base do trecho',ka);
readln(arq,lb[ka]);
writeln(con,'lb',ka,'=',lb[ka]);
writeln('entre com a largura da secao do topo do trecho',ka);
readln(arq,lt[ka]);
writeln(con,'lt',ka,'=',lt[ka]);
writeln('entre com a espessura da secao da base',
'do trecho',ka);
readln(arq,eb[ka]);
writeln(con,'eb',ka,'=',eb[ka]);
writeln('entre com a espessura da secao do topo do',
'trecho',ka);
readln(arq,et[ka]);
writeln(con,'et',ka,'=',et[ka]);
writeln('entre com o numero de camadas de ferro de',
'uma secao do trecho',ka);
readln(arq,nk[ka]);
writeln(con,'nk',ka,'=',nk[ka]);
```

```
writeln('entre com o cobrimento da armadura na secao',
        'da base do trecho',ka);
readln(arq,cob[ka]);
writeln(con,'cob',ka,'=',cob[ka]);
writeln('entre com o numero de intervalos para',
        'integracao do trecho',ka);
readln(arq,nv[ka]);
writeln(con,'nv',ka,'=',nv[ka]);
writeln('entre com o tipo de distribuicao de armadura',
        'tudo=tecle 1caso contrario 0');
readln(arq,aru[ka]);
writeln(con,'aru',ka,'=',aru[ka]);
writeln('as barras deverao ter bitolas iguais',
        'por trecho');
writeln('entre com o numero total de barras',
        'do trecho ',ka);
readln(arq,ntb[ka]);
writeln(con,'ntb',ka,'=',ntb[ka]);
if aru[ka]=1 then
  begin
    writeln('entre com o numero de ferros de uma',
            'camada do trecho',ka);
    readln(arq,nf[ka]);
    writeln(con,'nf',ka,'=',nf[ka]);
  end
else
  begin
    for i:=1 to nk[ka] do
      begin
        writeln('entre com o numero de ferros da',
                'camada',i,'do trecho',ka);
        readln(arq,nfc[ka,i]);
        writeln('entre com as alturas das camadas',
                'da secao da base do trecho',ka);
        writeln('camadas numeradas de baixo para cima');
        writeln('alturas abaixo do cg +, acima -');
        readln(arq,yg[ka,i]);
      end;
    end;
end;
end;

gergeo(gamc,gams,fcd,fyd,
        fck,fyk,ne,
        aru,nv,nk,
        yaux,yg,
        hs,cot,ba,lb,lt,eb,et,daux,cob,alt);

germn(lh,qd,tol,tol1,
        ne,
        cot,hs,nve,fh,moa,nota,m1p,
        nv);

detw(eqb);

close(arq);
close(arq1);
end. (*final do programa principal*)
```

```
program critico;

{*****}
{programa para calcular carregamento critico e/ou}
{excentricidade critica-METODO GERAL}
{*****}

(*programa principal*)
    type arr=array[0..100] of real;
        arri=array[0..100] of integer;
        arrm=array[0..20,0..100] of real;
        arrmi=array[0..20,0..100] of integer;

var pec,delta,incex,exaux,incv,inch,ex,incexa,incva,incha,
fyd,fcd,epsyd,dl,s,ni1,deltan,deltah,m1,tolhr,
tolinc,tole,tol1,e,hr,tol,gams,h,bw,nfix,gamc,mr,nr,w,
lh,qd:real;
mer,mer1,peso,pj,alfa2,alfa,alfa1,ka,nsc,i,ns,cont,
ar,araux,n1,nt,t,fyk,n,nint,fck,ne,eq:integer;
bracg,normal,cg,cur,dv,btao,sigs,aco,ni1t,hs,cot,ba,
lb,lt,eb,et,daux,cob,ta,alt,nve,fh,moa,nota,
dv1,y,m1pa,m1p,m1aux,m1a,noa:arr;
nf,ntb,aru,nv,nk:arri;
ni,yaux,yg:arrm;
nfc:arrmi;

        arq:text;
        arq1:text;
procedure crit(var lh,tol,tol1,fyd,fcd,epsyd,dl,s,ni1,
delta,m1,tolhr,e,hr:real;
var alfa,alfa1,ne,ar,araux,n1,nt,t,fyk,n,
nint,fck:integer;
var cot,hs,nve,fh,moa,nota,m1p,m1aux,m1pa,
btao,y,sigs,cur,dv:arr;
var nv,nf,nk:arri);
var fhaux,nfixaux:arr;
saida,es:integer;
delt,deltan,deltah:real;
begin
    es:=0;
    saida:=0;
    for ka:=1 to ne+1 do
    begin
        nfixaux[ka]:=0;
        fhaux[ka]:=0;
    end;
    repeat
        es:=es+1;
        pj:=0;

        germn(lh,qd,tol,tol1,
            ne,
            cot,hs,nve,fh,moa,nota,m1p,
            nv);
```

```
teste(fyd,fcd,epsyd,dl,s,ni1,m1,tolhr,tol1,e,hr,
      ne,ar,araux,n1,nt,t,fyk,n,nint,fck,eq,
      m1p,m1aux,m1pa,nota,btao,y,sigs,cur,dv,hs,
      nv,nf,nk);

      if (pj=1) and (alfa2=0) then
      begin
        incha:=inch/10;
        inch:=incha;
        incva:=incv/10;
        incv:=incva;
      end;
if alfa2=0 then
begin
  for ka:=1 to ne+1 do
  begin
    if (fh[ka]>0) and (alfa=1) then
    begin
      if pj=0 then
      begin
        fhaux[ka]:=fh[ka];
        fh[ka]:=fh[ka]+alfa*inch;
      end
      else
      begin
        if es=1 then
        begin
writelN(con,'carregamento inicial maior que o critico');
writelN(con,'entre com cargas menores');
          halt;
        end
        else
        begin
          fhaux[ka]:=fh[ka]-alfa*10*inch;
          fh[ka]:=fhaux[ka]+alfa*inch;
        end;
      end;
    end;
  end;
  if (nve[ka]>0) and (alfa1=1) then
  begin
    if pj=0 then
    begin
      nfixaux[ka]:=nve[ka];
      nve[ka]:=nve[ka]+alfa1*incv;
    end
    else
    begin
      if es=1 then
      begin
writelN(con,'carregamento inicial maior que o critico');
writelN(con,'entre com cargas menores');
        halt;
      end
      else

```



```
begin
  nfixaux[ka]:=nve[ka]-alfa1*10*incv;
  nve[ka]:=nfixaux[ka]+alfa1*incv;
end;
end;
end;
moa[ne+1]:=nve[ne+1]*ex;
end
else
begin
  if pj=0 then
  begin
    ex:=ex+alfa2*incex;
    moa[ne+1]:=nve[ne+1]*ex;
    if moa[ne+1]=0 then moa[ne+1]:=tol1;
    if saida=0 then delt:=ex;
  end
  else
  begin
    if es=1 then
    begin
writel(con,'excentricidade inicial maior que a critica');
      writel(con,'entre com um valor menor');
      halt;
    end
    else
    begin
      saida:=1;
      exaux:=ex-alfa2*incex;
      incexa:=incex/5;
      incex:=incexa;
      ex:=exaux+alfa2*incex;
      delt:=(ex-exaux)/ex;
      moa[ne+1]:=nve[ne+1]*ex;
      if moa[ne+1]=0 then moa[ne+1]:=tol1;
    end;
  end;
end;
if alfa2=0 then
begin
  if (alfa1=0) and (alfa=1) then deltan:=inch ;
  if alfa1=1 then deltan:=incv;
  delt:=(deltan)/nota[1];
end;
for ka:=1 to ne+1 do
begin
  writel(con,'resutados intermediarios');
  if pj=0 then
  else
  end;
until ((pj=0) and (delt<=tolinc)) or (es=100);
writel(lst,'CARREGAMENTO CRITICO');
if es=100 then
begin
```

```
writeln(con,'nao foi possivel com 100 repeticoes');
halt;
end
else
begin
if alfa2=1 then writeln(lst,'excentricidade critica=',ex,
                        '**exaux=',exaux)
else writeln(lst,'excentricidade=',ex);
writeln(lst,'carga distribuida horizontal=',qd);
for ka:=1 to ne+1 do
begin
if alfa2=1 then
begin
nfixaux[ka]:=nve[ka];
fhaux[ka]:=fh[ka];
end;
writeln(lst,'forca nomal aplicada na secao', ka ,'= ',
          'nfixaux[ka],***nve',ka,'=',nve[ka]);
writeln(lst,'forca horizontal aplicada na secao',
          ka ,'= ',fhaux[ka],***', fh[ka]);
end;
end;
end; (*final da crit*)

(*inicio do programa principal*)
begin
(*entrada de dados*)
assign(arq,'dados.dat');
assign(arq1,'result');
reset(arq);
rewrite(arq1);
writeln('entre com a tolerancia para a forca normal');
readln(arq,tol);
writeln(con,'toleran',tol);
writeln('entre com o tipo do aco ');
writeln('aco tipo a teclar 0 ;aco tipo b teclar 1');
readln(arq,t);
writeln(con,'t=',t);
writeln('entre com a resistencia caracteristica',
        'do aco fyk');
readln(arq,fyk);
writeln(con,'fyk=',fyk);
writeln('entre com o coeficiente de minoracao do aco');
readln(arq,gams);
writeln(con,'gams=',gams);
writeln('entre com o momdulo de elasticidade do aco');
readln(arq,e);
writeln(con,'e=',e);
writeln('entre com o numero de iteracoes desejada');
readln(arq,nint);
writeln(con,'numero de iteracoes dado',nint);
writeln('entre com o fck do concreto');
readln(arq,fck);
writeln(con,'fck=',fck);
writeln('entre com o coeficiente de minoracao do concreto');
```

```
readln(arq,gamc);
writeln(con,'gamc=',gamc);
writeln('entre com a tolerancia para momento');
readln(arq,tol1);
writeln(con,'tol1=',tol1);
writeln('entre com a tolerancia para curvatura');
readln(arq,tolhr);
writeln(con,'tolhr=',tolhr);
writeln('entre com a tolerancia para incremento de normal',
'e horizontal ou excentricidade');
readln(arq,tolinc);
writeln('entre com a carga distribuida horizontal',
'caso nao haja tecla 0');
readln(arq,qd);
writeln(con,'qd=',qd);
writeln('quer considerar o peso proprio TECLE 1 ',
'caso contrario TECLE 0');
readln(arq,peso);
writeln('entre com o peso especifico do concreto');
readln(arq,pec);
writeln('entre com o numero de trechos em que sera',
'dividido o pilar');
writeln('entende-se por trechos:mudancas bruscas de',
'secoas,variacao madura,pontos de aplicacao ',
'de cargas concentradas');
readln(arq,ne);
writeln(con,'ne=',ne);
writeln('entre com o numero de secoes com cargas',
'concentradas aplicadas');
readln(arq,ns);
writeln(con,'ns=',ns);
writeln('entre com o comprimento total do pilar');
readln(arq,lh);
writeln(con,'lh=',lh);
for i:=1 to (ne+1) do
begin
nve[i]:=0;
fh[i]:=0;
moa[i]:=0;
end;

for i:=1 to ns do
begin
writeln('entre com o numero da secao',
'(de baixo para cima)com carga',
'concentrada aplicada');
writeln('as secoes que limitam trechos sao',
'numeradas de baixo para cima');
readln(arq,nsc);
writeln(con,'nsc=',nsc);
writeln('entre com a forza normal aplicada na secao',
'nsc, caso nao tenha tecla 0');
readln(arq,nve[nsc]);
writeln(con,'nve',nsc,'=',nve[nsc]);
writeln('entre com a forza horizontal aplicada na',
```

```
        'secao',nsc,'caso nao tenha tecla 0');
readln(arq,fh[nsc]);
writeln(con,'fh',nsc,'=',fh[nsc]);
writeln('entre com o momento aplicado na secao',nsc,',
        'caso nao tenha tecla 0');
readln(arq,moa[nsc]);
writeln(con,'moa',nsc,'=',moa[nsc]);
if moa[nsc]=0 then moa[nsc]:=tol1;
end;
writeln('entre com o incremento inicial de forza normal');
readln(arq,incv);
writeln('entre com o incremento inicial de forza horizontal');
readln(arq,inch);
writeln('entre com o incremento inicial de excentricidade');
readln(arq,incex);
writeln('se quiser incrementar a forza normal',
        'tecla 1,caso contrario 0');
readln(arq,alfa1);
writeln('quer incrementar a forza horizontal tambem,',
        'tecla1, caso contrario 0');
readln(arq,alfa);
writeln('quer incrementar a excentricidade tecla 1',
        'caso contrario zero');
readln(arq,alfa2);
writeln('entre com a excentricidade inicial da forza normal');
readln(arq,ex);
for ka:=1 to ne do
begin
writeln('entre com o comprimento do trecho ',ka);
readln(arq,cot[ka]);
writeln(con,'cot',ka,'=',cot[ka]);
writeln('entre com a largura da secao da base',
        'do trecho',ka);
readln(arq,lb[ka]);
writeln(con,'lb',ka,'=',lb[ka]);
writeln('entre com a largura da secao do topo do',
        'trecho',ka);
readln(arq,lt[ka]);
writeln(con,'lt',ka,'=',lt[ka]);
writeln('entre com a espessura da secao da',
        'base do trecho',ka);
readln(arq,eb[ka]);
writeln(con,'eb',ka,'=',eb[ka]);
writeln('entre com a espessura da secao do topo',
        'do trecho',ka);
readln(arq,et[ka]);
writeln(con,'et',ka,'=',et[ka]);
writeln('entre com a area de aco do trecho',ka);
readln(arq,aco[ka]);
writeln(con,'aco',ka,'=',aco[ka]);
writeln('entre com o numero de camadas de ferro',
        'de uma secao do trecho',ka);
readln(arq,nk[ka]);
writeln(con,'nk',ka,'=',nk[ka]);
writeln('entre com o cobrimento da armadura na',
```

```
      ' secao da base do trecho',ka);
readln(arq,cob[ka]);
writeln(con,'cob',ka,'=',cob[ka]);
writeln('entre com o numero de intervalos para',
      ' integracao do trecho',ka);
readln(arq,nv[ka]);
writeln(con,'nv',ka,'=',nv[ka]);
writeln('entre com o tipo de distribuicao de',
      ' armadura tudo=tecle 1caso contrario 0');
readln(arq,aru[ka]);
writeln(con,'aru',ka,'=',aru[ka]);
writeln('as barras deverao ter bitolas iguais',
      ' por trecho');
writeln('entre com o numero total de barras do',
      ' trecho ',ka);
readln(arq,ntb[ka]);
writeln(con,'ntb',ka,'=',ntb[ka]);
if aru[ka]=1 then
  begin
    writeln('entre com o numero de ferros de',
      ' uma camada do trecho',ka);
    readln(arq,nf[ka]);
    writeln(con,'nf',ka,'=',nf[ka]);
  end
else
  begin
    for i:=1 to nk[ka] do
      begin
        writeln('entre com o numero de ferros',
          ' da camada',i,'do trecho',ka);
        readln(arq,nfc[ka,i]);
        writeln('entre com as alturas das',
          ' camadas da secao da base do trecho',ka);
        writeln('camadas numeradas de baixo para cima');
        writeln('alturas abaixo do cg +, acima -');
        readln(arq,yg[ka,i]);
      end;
    end;
  end;
end;

gergeo(gamc,gams,fcd,fyd,
      fck,fyk,ne,
      ntb,aru,nv,nk,
      yaux,yg,
      aco,ni1t,hs,cot,ba,lb,lt,eb,et,daux,cob,ta,alt);

crit(lh,tol,tol1,fyd,fcd,epsyd,dl,s,ni1,delta,m1,tolhr,e,
hr,alfa,alfa1,ne,ar,araux,n1,nt,t,fyk,n,nint,fck,
cot,hs,nve,fh,moa,nota,m1p,m1aux,m1pa,btao,y,sigs,cur,dv,
nv,nf,nk);

close(arq);
close(arq1);
end. (*final do programa principal*)
```

```
program estab;
```

```
{*****}  
{este programa verifica a estabilidade de colunas}  
{ METODO GERAL}  
{*****}
```

```
{*****}  
(*declaracao das variaveis no programa principal*)  
{*****}  
      type arr=array[0..100] of real;  
          arri=array[0..100] of integer;  
          arrm=array[0..20,0..100] of real;  
          arrmi=array[0..20,0..100] of integer;
```

```
var pec,fyd,fcd,epsyd,dl,s,ni1,delta,m1,tolhr,tol1,e,hr,  
    tol,gams,h,bw,nfix,gamc,mr,nr,w,lh,qd:real;  
    mer,mer1,peso,eq,ka,nsc,i,ns,cont,ar,araux,n1,nt,t,  
    fyk,n,nint,fck,ne:integer;  
    braccg,normal,cg,cur,dv,btao,sigs,aco,ni1t,hs,cot,ba,  
    lb,lt,eb,et,daux,cob,ta,alt,nve,fh,moa,nota,  
    y,m1pa,m1p,m1aux,m1a,noa:arr;  
    nf,ntb,aru,nv,nk:arri;  
    ni,yaux,yg:arrm;  
    nfc:arrmi;
```

```
      arq:text;  
      arq1:text;
```

```
(*inicio do programa principal*)
```

```
begin  
  (*entrada de dados*)  
  assign(arq,'dados.dat');  
  assign(arq1,'result');  
  reset(arq);  
  rewrite(arq1);  
  writeln('entre com a tolerancia para a forza normal');  
  readln(arq,tol);  
  writeln(con,'toleran',tol);  
  writeln('entre com o tipo do aco ');  
  writeln('aco tipo a teclar 0 ;aco tipo b teclar 1');  
  readln(arq,t);  
  writeln(con,'t=',t);  
  writeln('entre com a resistencia caracteristica do',  
    ' aco fyk');  
  readln(arq,fyk);  
  writeln(con,'fyk=',fyk);  
  writeln('entre com o coeficiente de minoracao do aco');  
  readln(arq,gams);  
  writeln(con,'gams=',gams);  
  writeln('entre com o momdulo de elasticidade do aco');  
  readln(arq,e);  
  writeln(con,'e=',e);  
  writeln('entre com o numero de iteracoes desejada');  
  readln(arq,nint);
```

```
writeln(con,'numero de iteracoes dado',nint);
writeln('entre com o fck do concreto');
readln(arq,fck);
writeln(con,'fck=',fck);
writeln('entre com o coeficiente de minoracao do concreto');
readln(arq,gamc);
writeln(con,'gamc=',gamc);
writeln('entre com a tolerancia para momento');
readln(arq,tol1);
writeln(con,'tol1=',tol1);
writeln('entre com a tolerancia para curvatura');
readln(arq,tolhr);
writeln(con,'tolhr=',tolhr);
writeln('entre com a carga distribuida horizontal,',
        ' caso nao haja tecla 0');
readln(arq,qd);
writeln(con,'qd=',qd);
writeln('quer considerar o peso proprio TECLE 1,',
        ' caso contrario TECLE 0');
readln(arq,peso);
writeln('entre com o peso especifico do concreto armado');
readln(arq,pec);
writeln('entre com o numero de trechos em que',
        ' sera dividido o pilar');
writeln('entende-se por trechos:mudancas bruscas de',
        ' secoes,variacao madura,pontos de',
        ' aplicacao de cargas concentradas');
readln(arq,ne);
writeln(con,'ne=',ne);
writeln('entre com o numero de secoes com cargas',
        ' concentradas aplicadas');
readln(arq,ns);
writeln(con,'ns=',ns);
writeln('entre com o comprimento total do pilar');
readln(arq,lh);
writeln(con,'lh=',lh);
for i:=1 to (ne+1) do
  begin
    nve[i]:=0;
    fh[i]:=0;
    moa[i]:=0;
  end;
for i:=1 to ns do
  begin
    writeln('entre com o numero da secao',
            '(de baixo para cima)com carga',
            ' concentrada aplicada');
    writeln('as secoes que limitam trechos sao',
            ' numeradas de baixo para cima');
    readln(arq,nsc);
    writeln(con,'nsc=',nsc);
    writeln('entre com a forza normal aplicada',
            ' na secao',nsc,'caso nao tenha tecla 0');
    readln(arq,nve[nsc]);
    writeln(con,'nve',nsc,'=',nve[nsc]);
```

```
writeln('entre com a forza horizontal aplicada',
        ' na secao',nsc,' caso nao tenha tecla 0');
readln(arq,fh[nsc]);
writeln(con,'fh',nsc,'=',fh[nsc]);
writeln('entre com o momento aplicado na secao',nsc,
        ' caso nao tenha tecla 0');
readln(arq,moa[nsc]);
writeln(con,'moa',nsc,'=',moa[nsc]);
if moa[nsc]=0 then moa[nsc]:=tol1;
end;
for ka:=1 to ne do
begin
  writeln('entre com o comprimento do trecho ',ka);
  readln(arq,cot[ka]);
  writeln(con,'cot',ka,'=',cot[ka]);
  writeln('entre com a largura da secao da base do',
          ' trecho',ka);
  readln(arq,lb[ka]);
  writeln(con,'lb',ka,'=',lb[ka]);
  writeln('entre com a largura da secao do topo do',
          ' trecho',ka);
  readln(arq,lt[ka]);
  writeln(con,'lt',ka,'=',lt[ka]);
  writeln('entre com a espessura da secao da base',
          ' do trecho',ka);
  readln(arq,eb[ka]);
  writeln(con,'eb',ka,'=',eb[ka]);
  writeln('entre com a espessura da secao do topo',
          ' do trecho',ka);
  readln(arq,et[ka]);
  writeln(con,'et',ka,'=',et[ka]);
  writeln('entre com a area de aco do trecho',ka);
  readln(arq,aco[ka]);
  writeln(con,'aco',ka,'=',aco[ka]);
  writeln('entre com o numero de camadas de ferro',
          ' de uma secao do trecho',ka);
  readln(arq,nk[ka]);
  writeln(con,'nk',ka,'=',nk[ka]);
  writeln('entre com o cobrimento da armadura',
          ' na secao da base do trecho',ka);
  readln(arq,cob[ka]);
  writeln(con,'cob',ka,'=',cob[ka]);
  writeln('entre com o numero de intervalos',
          ' para integracao do trecho',ka);
  readln(arq,nv[ka]);
  writeln(con,'nv',ka,'=',nv[ka]);
  writeln('entre com o tipo de distribuicao de',
          ' armadura tudo=tecla 1 caso contrario 0');
  readln(arq,aru[ka]);
  writeln(con,'aru',ka,'=',aru[ka]);
  writeln('as barras deverao ter bitolas',
          ' iguais por trecho');
  writeln('entre com o numero total de',
          ' barras do trecho ',ka);
  readln(arq,ntb[ka]);
```



```
writeln(con,'ntb',ka,'=',ntb[ka]);
if aru[ka]=1 then
begin
  writeln('entre com o numero de ferros de uma',
          ' camada do trecho',ka);
  readln(arq,nf[ka]);
  writeln(con,'nf',ka,'=',nf[ka]);
end
else
begin
  for i:=1 to nk[ka] do
  begin
    writeln('entre com o numero de ferros',
            ' da camada',i,'do trecho',ka);
    readln(arq,nfc[ka,i]);
    writeln('entre com as alturas das',
            ' camadas da secao da base',
            ' do trecho',ka);
    writeln('camadas numeradas de baixo',
            ' para cima');
    writeln('alturas abaixo do cg +, acima -');
    readln(arq,yg[ka,i]);
  end;
end;
end;

gergeo(gamc,gams,fcd,fyd,
       fck,fyk,ne,
       ntb,aru,nv,nk,
       yaux,yg,
       aco,ni1t,hs,cot,ba,lb,lt,eb,et,daux,cob,ta,alt);

germn(lh,qd,tol,tol1,
      ne,
      cot,hs,nve,fh,moa,nota,m1p,
      nv);

teste(fyd,fcd,epsyd,dl,s,ni1,delta,m1,tolhr,tol1,e,hr,
      ne,ar,aux,n1,nt,t,fyk,n,nint,fck,
      m1p,m1aux,m1pa,nota,btao,y,sigs,cur,dv,hs,
      nv,nf,nk);

close(arq);
close(arq1);
end. (*final do programa principal*)
```

```
PROGRAM DIMEN;
  (*****)
  (programa para dimensionar colunas)
  (processo aproximado do pilar padrao)
  (*****)
  (*programa principal*)
      type arr=array[1..120] of real;
          arri=array[1..120] of integer;
          arrm=array[1..50,1..50] of real;
          ary=array[1..2] of real;
          arx=array[1..4] of real;

var nre,at,m1d,epsyd,fyd,eps,sigms,le,tol1,mp,e,hr,tol,
    gams,h,bw,dl1,nfix,gamc,mr,nr,wal:real;
    q,kp,x,nt,t,fyk,n,nint,id,ap,fck,jj,ax:integer;
    waux,epss,cur,m1:arr;
    nref:arx;

        arq:text;

  (*subrotina que calcula a forza normal total no aco*)
  procedure faco( var w,e,gams,h,dl1,btax,bw,gamc,hr,naco,
                 au,ni1,fyd,sigc:real;
                 var t,fyk,fck,n,ar,araux,nfe,ninf,nsup,
                 nt1:integer;
                 var y,sigs,epss:arr);

    var btay,btao:arr;
        dl,ac,fcd,at,epsyd,d,s:real;
        v,i1,n1,j:integer;

  begin
    if araux<2 then
      begin
        ac:=bw*h;
        fyd:=fyk/gams;
        fcd:=fck/gamc;
        epsyd:=fyd/e;
        if t=1 then epsyd:=epsyd+0.002;
          v:=1;
          at:=0;
          dl:=dl1;
          for i1:=1 to n do
            begin
              if ar=1 then
                begin
                  if v=1 then
                    begin
                      write('entrar com o numero total ferros ');
                        readln(nt1);
                      write('entrar c/ espacamento entre camadas de ferro');
                        readln(s);
                        nfe:=(nt1-(2*(n-2)))div(2);
                        ni1:=1/(nt1);
                    end;
                  y[i1]:=h/2-dl;
                  btay[i1]:=y[i1]/h;
                end;
            end;
          end;
```

```
        btao[i1]:=btay[i1]+0.5;
        dl:=dl+s;
        v:=v+1;
    end
    else
        begin
            if v=1 then
                begin
                    write('numero total ferros ');
                    readln(nt1);
                    writeln('entre com o numero de ferroda camada inferior');
                    readln(ninf);
                    nsup:=nt1-(ninf+2*(n-2));
                    v:=v+1;
                end;
            write('entrar com altura das camadas a partir ',
                'do cg da secao');
            write('alturas acima do cg negativas abaixo positivas');
            write('entrar com altura da camada',i1);
            readln(y[i1]);
            btay[i1]:=y[i1]/h;
            btao[i1]:=btay[i1]+0.5;
        end;
    end;
end;

at:=w*ac*fcd/fyd;
d:=sqr(4*at/(nt1*pi));
naco:=0;
for i1:=1 to n do
    begin
        epss[i1]:=hr*(btao[i1]-btax);
        sigs[i1]:=fyd;
        if abs(epss[i1])<epsyd then
            begin
                sigs[i1]:=abs(epss[i1])*e;
                if t=1 then
                    if abs(epss[i1])>0.7*fyd/e then
                        sigs[i1]:=fyd*(0.7-22.5*fyd/e+
                            sqrt((22.5*fyd/e-0.7)*
                                (22.5*fyd/e-0.7)+
                                45*abs(epss[i1])-0.49));
            end;
        if epss[i1]=0 then sigs[i1]:=0
        else
            sigs[i1]:=sigs[i1]*epss[i1]/
                abs(epss[i1]);
        if ar=1 then
            begin
                if ((i1=1) or (i1=n)) then n1:=nfe
                else
                    n1:=2;
                sigc:=n1*sigs[i1];
                naco:=naco+w*sigc*ni1/fyd;
            end
        else
    end;
```

```
begin
  if i1=1 then n1:=ninf
  else
    begin
      if i1=n then n1:=nsup
      else
        n1:=2;
      end;
      sigc:=n1*sigs[i1];
      ni1:=1/nt1;
      naco:=naco+w*sigc*
        ni1/fyd;
    end;
  end;
end; (*final da subrotina faco*)

(*subrotina que calcula o momento e normal resultante*)
procedure mncur(var w,e,hr,tol,gams,h,bw,dl1,nfix,gamc,
  mr,nr:real;
  var nt,t,fyk,n,nint,fck,ax,jp:integer);
  label 20,30,40;

  var delta,btaxs,btaxi,btax1,btax2,naco,au,nconc,bta1,
    bta2,bta3,k1,k2,k3,k4,k5,k6,tolc,nr2,nr1,auxr,
    dl,auxr1,bta,maco,mconc,fyd,ni1,btax,sigc:real;
    x1,inr,inr1,inr2,j,i,i1,naux,ar,araux,nfe,
    ninf,nsup,nt1,kf:integer;
    y,sigs,epss:arr;

  (*calculo dos limites de btax*)
  begin
    nint:=500;
    dl:=dl1;
    delta:=dl/h;
    if hr=0 then hr:=0.0000001;
    btaxs:=0.0035/hr;
    if btaxs>1 then btaxs:=0.002/hr+3/7;
    btaxi:=-0.010/hr+1-delta;
    x1:=ax;
    if x1=1 then
      begin
        write('armadura uniforme teclar 1; caso contrario,0');
        readln(ar);
        araux:=ar;
      end;
    ax:=ax+1;
  (*definicoes dos diagramas de tensoes*)
  for i:=1 to nint do
    begin
      nt:=i;
      if i>2 then goto 20;
      if i=1 then
        begin
          btax1:=btaxi;

```

```
        btax:=btax1;
    end
else
    begin
        btax2:=btaxs;
        btax:=btax2;
    end;
(*chamada da subrotina que calcula a forca no aco*)
20:fac0(w,e,gams,h,dl1,btax,bw,gamc,hr,naco,au,ni1,fyd,
    sigc,t,fyk,fck,n,ar,araux,nfe,ninf,nsup,nt1,y,
    sigs,epss);
    araux:=2;
    if btax<=0 then nconc:=0
    else
        begin
            bta1:=-0.5;
            bta2:=-0.002/hr+btax-0.5;
            if bta2<-0.5 then bta2:=-0.5
            else
                if bta2>-1/14 then bta2:=-1/14;
                bta3:=0.5;
                if btax<1 then bta3:=btax-0.5;
                (*calculo da resultante do concreto*)
                k1:=0.5-btax;
                k4:=bta3*bta3*bta3-bta2*bta2*bta2;
                k3:=bta3-bta2;
                k2:=bta3*bta3-bta2*bta2;
                nconc:=850*hr*k1*(k2/(2*k1)+k3+250*hr*k1*
                    ((k4/(3*k1))/k1+k2/k1+k3))-
                    0.85*(bta2-bta1);
            end;
            (*calculo da normal resultante*)
            nr:=naco+nconc;
            if nfix =0 then tol:=abs(nr)
            else
                begin
                    tol:=abs(nfix-nr)/abs(nfix);
                end;
            if tol<=tol then goto 30
            else
                begin
                    if i<>1 then
                        begin
                            if i=2 then
                                begin
                                    nr2:=nr;
                                    if (nfix<nr2) or (nfix>nr1) then
                                        begin
                                            jp:=1;
                                            goto 40;
                                        end;
                                end;
                            end
                        end
                    else
                        begin
                            inr:=trunc((nfix-nr)/
```

```

                                (abs(nfix-nr))+0.001);
inr1:=trunc((nfix-nr1)/
                                (abs(nfix-nr1))+0.001);
inr2:=trunc((nfix-nr2)/
                                (abs(nfix-nr2))+0.001);
if inr1=inr then
begin
nr1:=nr;
btax1:=btax;
end
else
begin
if inr2=inr then
begin
nr2:=nr;
btax2:=btax;
end;
end;
end;
auxr:=(nr2-nr1)/(btax2-btax1);
auxr1:=nfix-nr1;
bta:=auxr1/auxr+btax1;
btax:=bta;
end
else
begin
nr1:=nr;
end;
end;
end;
writeln(con,'toler nao alcancada com',nt,
'iteracoes');
halt;
(*calculo do momento resultante*)
(*calculo do momento do aco*)
30:maco:=0;
for i1:=1 to n do
begin
if ar=1 then
begin
if ((i1=1) or (i1=n)) then kf:=nfe
else kf:=2;
end
else
begin
if i1=1 then kf:=ninf
else
begin
if i1=n then kf:=nsup
else
kf:=2;
end;
end;
end;
maco:=maco+w/fyd*sigs[i1]*y[i1]/h*ni1*kf;
end;
end;
```

```
(*calculo do momento do concreto*)
if btax<=0 then mconc:=0
else
  begin
    k5:=bta3*bta3*bta3*bta3-bta2*bta2*bta2*bta2;
    k6:=bta2*bta2-bta1*bta1;
    mconc:=850*hr*k1*(k4/(3*k1)+k2/2+
      250*hr*(k5/(4*k1)+2*k4/3+k1*k2/2))-
      0.425*k6;
  end;
  mr:=maco+mconc;
40:end; (*final da subrotina*)

(*inicio auxiliar*)
procedure auxiliar(var w,m,mp,le,e,hr,tol,gams,h,bw,dl1,
  nfix,gamc,mr,nr:real;
  var nt,t,fyk,n,nint,ap,fck,ax,k:integer;
  var cur,m1:arr);
  var jp,ia:integer;
  mi,m2:arr;
begin
  for ia:=k to k do
    begin
      cur[ia]:=hr+m;
      hr:=cur[ia];
      jp:=0;
      (*chamada da mncur*)
      nfix:=-1*nfix;
      mncur(w,e,hr,tol,gams,h,bw,dl1,nfix,gamc,mr,nr,nt,t,
        fyk,n,nint,fck,ax,jp);
      if jp=1 then mr:=0;
      nfix:=-1*nfix;
      mi[ia]:=mr;
      m2[ia]:=nfix*le*le*hr/10;
      m1[ia]:=mi[ia]-m2[ia];
      m:=mp;
    end;
end; (*final da auxiliar*)

(*inicio da abacoaux*)
procedure abacoaux(var nre,le,tol1,w,e,hr,tol,gams,h,bw,
  dl1,nfix,gamc,mr,nr:real;
  var fyk,nt,t,n,nint,ap,fck,j,ax,x:integer;
  var cur,m1:arr);
  var dltam1,dltam2,delta,m,mp:real;
  p,k:integer;
begin
  delta:=dl1/h;
  mp:=0.0135/(1-delta)/ap;
  hr:=0;
  p:=0;
  repeat
```

```
p:=p+1;
m:=0;
k:=1;
if x=1 then k:=2;
while k<=2 do
  begin
(*chamada da auxiliar*)
auxiliar(w,m,mp,le,e,hr,tol,gams,h,bw,dl1,nfix,gamc,mr,
          nr,nt,t,fyk,n,nint,ap,fck,ax,k,cur,m1);
    k:=k+1;
  end;
while((m1[k-1]>m1[k-2]) and (x>1)) do
  begin
    auxiliar(w,m,mp,le,e,hr,tol,gams,h,bw,dl1,nfix,gamc,
            mr,nr,nt,t,fyk,n,nint,ap,fck,ax,k,cur,m1);
    k:=k+1;
  end;
if x>1 then
  begin
    mp:=(cur[k-1]-cur[k-3])/10;
    dltam1:=abs(m1[k-2]-m1[k-1])/abs(m1[k-2]);
    dltam2:=abs(m1[k-2]-m1[k-3])/abs(m1[k-2]);
    hr:=cur[k-3];
  end;
ap:=10;
j:=k-2;
if((x=1) and (nfix=nre)) then
  begin
    dltam1:=0;
    dltam2:=0;
    m1[j]:=0;
  end;
if ((w=0.0000001) and (nfix<=nre)) then
  begin
    dltam1:=0;
    dltam2:=0;
    m1[j]:=0;
  end;
until((dltam1<tol1) and (dltam2<tol1)) or (p=100);
if p=100 then
  begin
    writeln(con,'saiu com p=100, nao com a toler p/ momem');
    m1[j]:=0;
  end;
if ((w<0.00001) and (nfix=0)) then m1[j]:=0;
end; (*final da abacoaux*)

(* inicio da subrotina omega*)
procedure omega(var nre,le,tol1,w,e,hr,tol,gams,h,bw,dl1,
               nfix,gamc,mr,nr,m1d:real;
               var fyk,nt,t,n,nint,id,ap,fck,j,ax,x:integer;
               var cur,m1,waux:arr);
  label 70;
  var mc,dtmc:arr;
      flag:integer;
```



mcaux:ary;

```
begin
  id:=0;
  repeat
    id:=id+1;
    w:=waux[id];
    (*chamada da abacoaux*)
    abacoaux(nre,le,tol1,w,e,hr,tol,gams,h,bw,dl1,nfix,
             gamc,mr,nr,fyk,nt,t,n,nint,ap,fck,jj,
             ax,x,cur,m1);
    x:=x+1;
    if m1d=0 then
      begin
        m1d:=0.000000001;
        m1[jj]:=0.000000001;
      end;
    mc[id]:=m1[jj];
    if id<=2 then mcaux[id]:=m1[jj];
    if ((w=0.0000001) and (m1d<=m1[jj])) then
      begin
        writeln(con,'armadura minima w=', w);
        writeln(con,'m1d=', m1d, 'm1',j,'=',m1[jj]);
        goto 70;
      end;
    dtmc[id]:=abs(m1d-mc[id])/abs(m1d);
    if dtmc[id]>tol1 then
      begin
        flag:=1;
        if id>=2 then
          begin
            if((m1d>mc[1]) and (m1d<mc[2])) then flag:=2
            else
              begin
                if id>=3 then
                  if((m1d>mc[2]) and (m1d<mc[3]))
                    then flag:=3
                  else
                    begin
                      if id>=4 then
                        if((m1d>mc[3]) and
                          (m1d<mc[4])) then flag:=4
                      else
                        begin
                          if id>=5 then
                            if((m1d>mc[4]) and
                              (m1d<mc[5]))
                              then flag:=5
                            else
                              begin
                                if((id)=5) and
                                  (m1d>mc[5]))
                                  then
                                    begin
                                      writeln(con,'nao foi possivelcom w=2 ');

```



```
write('aco tipo a teclar 0 ;aco tipo b teclar 1');
readln(t);
write('entre com a resistencia caract do aco fyk');
readln(fyk);
write('entre com o coeficiente de minoracao do aco');
readln(gams);
write('entre com o modulo de elasticidade do aco');
readln(e);
write('entre com a altura da secao');
readln(h);
write('entre com a base da secao');
readln(bw);
write('entre com o numero de camadas de ferro');
readln(n);
write('entre com o fck do concreto');
readln(fck);
write('entre com o coef de minoracao do concreto');
readln(gamc);
write('entre com a tolerancia para momento');
readln(tol1);
writeln(con,'tolerancia para maomento=', tol1);
write('quantos pilares voce quer dimencionar');
readln(q);
for kp:=1 to q do
begin
  writeln('entre com os dados do pilar ', kp);
  writeln('entre com a normal admencional');
  readln(nfix);
  writeln('entre com o momento aplicado');
  readln(m1d);
  writeln('entre com o cobrimento da armadura');
  readln(dl1);
writeln('entre com o comp de flambagem div pela altura');
  readln(le);
  writeln('quer dividir o intervalo (0...curmax)',
    'em quantos pontos');
  readln(ap);
  fyd:=fyk/gams;
  epsyd:=fyd/e;
  if t=1 then epsyd:=epsyd+0.002;
  eps:=-0.002;
  sigms:=fyd;
  if abs(eps)<epsyd then
  begin
    sigms:=abs(eps)*e;
    if t=1 then
      if abs(eps)>0.7*fyd/e then
        sigms:=fyd*(0.7-22.5*fyd/e+sqrt((22.5*fyd/e-0.7)*
          (22.5*fyd/e-0.7)+45*abs(eps)-0.49));
    writeln(con,'sigms=', sigms);
  end;
  sigms:=sigms*eps/abs(eps);
  wa1:=(0.85-nfix)*fyd/sigms;
  ax:=1;
  x:=1;
```

```
nref[1]:=abs(-0.85+sigms*0.5/fyd);
nref[2]:=abs(-0.85+sigms*1/fyd);
nref[3]:=abs(-0.85+sigms*1.5/fyd);
nref[4]:=abs(-0.85+sigms*2/fyd);
if nfix<=0.85 then
begin
nre:=0.85;
waux[1]:=0.0000001;
waux[2]:=0.5;
waux[3]:=1;
waux[4]:=1.5;
waux[5]:=2;
end
else
begin
if nfix<=nref[1] then
begin
nre:=abs((-0.85+sigms*wa1/fyd));
waux[1]:=wa1;
waux[2]:=0.5;
waux[3]:=1;
waux[4]:=1.5;
waux[5]:=2;
end
else
begin
if nfix<=nref[2] then
begin
nre:=abs((-0.85+sigms*wa1/fyd));
waux[1]:=wa1;
waux[2]:=1;
waux[3]:=1.5;
waux[4]:=2;
end
else
begin
if nfix<=nref[3] then
begin
nre:=abs((-0.85+sigms*wa1/fyd));
waux[1]:=wa1;
waux[2]:=1.5;
waux[3]:=2;
end
else
begin
if nfix <=nref[4] then
begin
nre:=abs((-0.85+sigms*wa1/fyd));
waux[1]:=wa1;
waux[2]:=2;
end
else
begin
writeln(con,'impossivel com w=2');
halt;
```

```

                                end;
                        end;
                end;
        end;
        end;
        (*chamada da omega*)
        omega( nre,le,tol1,wa1,e,hr,tol,gams,h,bw,dl1,nfix,
              gamc,mr,nr,m1d,fyk,nt,t,n,nint,id,ap,fck,
              jj,ax,x,cur,m1,waux);
        nr:=-1*nr;
        at:=waux[id]*bw*h*fck/gamc/fyd;
        writeln(con,'area total=', at);
        writeln(con,'m1crit=', m1[jj], ' nr=', nr );
        writeln(con,'w',id,'=',waux[id]);
        writeln(arq,'resultados');
        writeln(arq,'m1crit=', m1[jj] , 'nr=', nr , 'hr=', hr);
        end;
        close(arq)
        end. (*final do programa principal*)

```

```
program critico;
{*****}
{programa para calcular carregamento critico}
{processo aproximado do pilar padrao}
{*****}

(*programa principal*)
      type arr=array[0..120] of real;
      arri=array[1..20] of integer;
      arrm=array[1..20,1..20] of real;

var fh,nfixeq,deltap,ex,delta,hr1,m1,tolhr,mr1,le,tol1,
    inc,e,hr,tol,gams,h,bw,dl1,nfix,gamc,mr,nr,w:real;
    alfa1,alfa,es,pj,nt,t,fyk,n,nint,fck,ax:integer;
    fhaux,nfixaux,y,sigs:arr;
    nf:arri;
    a1,ni:arrm;

procedure equilibrio(var nfixeq,inc,delta,hr1,m1,mr,tol1,
                    tolhr,le,e,hr,tol,gams,h,bw,dl1,
                    nfix,gamc,nr,mr1:real;
                    var t,fyk,n,nint,fck,pj,ax:integer);

    label 45,50;

    var hr2,mr2,deltam,deltahr,deltam1:real;
        po,eq,jp,cont,auxk:integer;
        vf,m1aux:arr;

begin (*inicio equilibrio*)
    eq:=0;
    cont:=0;
    hr1:=0;
    mr1:=0;
    m1:=nfix*ex+fh*le/2;
    writeln(con,'m1=',m1);
    repeat
        eq:=eq+1;
        hr2:=0.0135/(1-delta);
        auxk:=0;
        jp:=1;

        while (jp=1) and (auxk<51) do
            begin
                hr:=hr2;
                nfix:=-1*nfix;
                mncur(e,hr,tol,gams,h,bw,dl1,nfix,gamc,mr,nr,nt,t,
                    fyk,n,nint,fck,ax,jp);
                nfix:=-1*nfix;
                if jp=1 then
                    begin
                        hr2:=hr1/2+hr2/2;
                        auxk:=auxk+1;
                    end;
            end;
end;
```

```
end;
if auxk=50 then
  begin
    writeln(con,'nao foi possivel encontrar a
              segunda curvatura com 50 repeticoes');
    halt;
  end;
mr2:=mr;
deltahr:=abs(hr2-hr1)/abs(hr2);
deltam:=abs(m1-mr2)/abs(m1);
if deltam<=tol1 then goto 45;
po:=0;
repeat
  po:=po+1;
  hr2:=hr2-(hr2-hr1)*(mr2-m1)/(mr2-mr1);
  deltahr:=abs(hr2-hr1)/abs(hr2);
  hr:=hr2;
  nfix:=-1*nfix;
  mncur(e,hr,tol,gams,h,bw,dl1,nfix,gamc,mr,nr,nt,
        t,fyk,n,nint,fck,ax,jp);
  nfix:=-1*nfix;
  if jp=1 then
    begin
      writeln(con,'normal fora equilibrio impossivel');
      pj:=1;
      nfixeq:=nfix-alfa1*inc;
      writeln(con,'nfixeq**=',nfixeq);
      goto 50;
    end;
  mr2:=mr;
  deltam:=abs(m1-mr2)/abs(m1);
until (deltam<=tol1) or (deltahr<=tolhr);

  if (deltahr<=tolhr) and (deltam>tol1) then
    begin
      writeln(con,hr1, 'e a ultima curvatura com normal dentro');
      writeln(con,'nao foi possivel equilibrar o m1 com a tol1');
      halt;
    end
  else
    begin
45:      vf[0]:=0;
          vf[eq]:=le*le*hr2/10;
          m1aux[eq]:=nfix*(ex+vf[eq])+fh*le/2;
          m1:=m1aux[eq];
          hr1:=hr2;
          mr1:=mr2;
          m1aux[0]:=0;
          deltam1:=abs(m1aux[eq]-m1aux[eq-1])/
                    abs(m1aux[eq]);
          end;
          cont:=cont+1;
until (deltam1<=tol1) or (cont=100);
  if (deltam1>tol1) and (cont=100) then
    begin
```

```
writeln(con,'a carga nao foi equilibrada',
        'com 100 repeticoes');
writeln(con,'a flecha continua aumentando',
        'consideravelmente apos 100 repeticoes');
halt;
end
else
begin
writeln(con,'a carga dada', nfix , 'esta equilibrada');
writeln(con,'foram executadas', cont-1 , 'repeticoes');
writeln(con,'flecha final=', vf[eq-1]);
writeln(con,'curvatura final=', hr2);
writeln(con,'momento final=', m1aux[eq-1]);
writeln(con,'m1final=', m1aux[eq]);
pj:=0;
end;
50: end; (*final da equilibrio*)
```

(\*inicio do programa principal\*)

```
begin
(*entrada de dados*)
writeln('entre com a tolerancia para a forca normal');
readln(tol);
writeln(con,'toleran',tol);
write('entre com o tipo do aco ');
write('aco tipo A teclar 0 ;aco tipo B teclar 1');
readln(t);
write('entre com a resistencia caract do aco fyk');
readln(fyk);
write('entre com o coeficiente de minoracao do aco');
readln(gams);
write('entre com o modulo de elasticidade do aco');
readln(e);
write('entre com a altura da secao');
readln(h);
write('entre com a base da secao');
readln(bw);
write('entre com o cobrimento da armadura');
readln(dl1);
write('entre com o numero de camadas de ferro');
readln(n);
write('entre com o numero de iteracoes desejada');
readln(nint);
writeln(con,'numero de iteracoes dado',nint);
write('entre com o fck do concreto');
readln(fck);
write('entre com o coef de minoracao do concreto');
readln(gamc);
write('entre com o comprimento de flambagem dividido',
      'pela altura');
readln(le);
write('entre com a tolerancia para momento');
readln(tol1);
write('entre com a taxa de armadura w');
```



```
readln(w);
write('entre com a tolerancia para curvatura');
readln(tolhr);
delta:=dl1/h;
  write('entre com a normal admencional incial ');
  readln(nfix);
  write('forca horizontal adimensional');
  readln(fh);
  if nfix=0 then
    begin
      nfix:=tol;
      writeln('entre com o momento aplicado ');
      readln(m1);
      ex:=m1/nfix;
    end
  else
    begin
      writeln('entre com o incremento',
              'da forca normal');
      readln(inc);
      writeln('entre com a excentricidade',
              'da forca normal');
      readln(ex);
      write('quer incrementar a forca normal',
            'tecle 1,caso contrario 0');
      readln(alfa1);
      write('quer incrementar a forca horizontal',
            'tecle 1,caso contrario 0');
      readln(alfa);
      m1:=nfix*ex+fh*le/2;
    end;
  ax:=1;
  es:=0;
repeat
  es:=es+1;
  pj:=0;
  equilibrio(nfixeq,inc,delta,hr1,m1,mr,tol1,
             tolhr,le,e,hr,tol,gams,h,bw,dl1,
             nfix,gamc,nr,mr1,
             t,fyk,n,nint,fck,pj,ax);
  if pj=0 then
    begin
      nfixaux[es-1]:=nfix;
      nfix:=nfix+alfa1*inc;
      nfixaux[es]:=nfix;
      fhaux[es-1]:=fh;
      fh:=fh+alfa*inc;
      fhaux[es]:=fh;
      if (alfa1=0) and (alfa>0) then
        deltap:=abs(fhaux[es]-fhaux[es-1])/abs(fhaux[es])
      else
        deltap:=abs(nfixaux[es]-nfixaux[es-1])/
          abs(nfixaux[es]);
    end
  else
```

```
begin
  if es=1 then
    begin
      writeln(con,'carga inicial maior que carga critica');
      writeln('entre com uma carga inicial menor');
      halt;
    end
  else
    begin
      fhaux[es-1]:=fh-alfa*inc;
      nfixaux[es-1]:=nfixeq;
      inc:=inc/10;
      nfix:=nfixaux[es-1]+alfa1*inc;
      nfixaux[es]:=nfix;
      fh:=fhaux[es-1]+alfa*inc;
      fhaux[es]:=fh;
      if (alfa1=0) and (alfa>0) then
        deltap:=abs(fhaux[es]-fhaux[es-1])/
          abs(fhaux[es])
      else
        deltap:=abs(nfixaux[es]-nfixaux[es-1])/
          abs(nfixaux[es]);
      end;
    end;
  until(deltap<=tol) or (es=100);
  if es=100 then
    begin
      writeln(con,'nao foi possivel encontrar a carga',
        ' critica com 100 reprticoes');
    end
  else
    begin
      writeln(con,'carregamento critico=');
      writeln(con,'forca normal=',nfixaux[es-1]);
      writeln(con,'forca horizontal=',fhaux[es-1]);
      writeln(con,'flecha=');
      writeln(con,'numero de repeticoes=', es);
    end;
  end. (*final do programa principal*)
```

```
program estabilidade;
{*****}
{programa para verificacao de estabilidade}
{processo aproximado do pilar padrao}
{*****}

(*programa principal*)
      type arr=array[0..120] of real;
         arri=array[1..20] of integer;
         arrm=array[1..20,1..20] of real;

var fh,ex,delta,hr1,m1,tolhr,mr1,le,tol1,inc,e,hr,tol,
    gams,h,bw,dl1,nfix,gamc,mr,nr,w:real;
    nt,t,fyk,n,nint,fck:integer;
    y,sigs:arr;
    nf:arri;
    a1,ni:arrm;

(*inicio do programa principal*)
begin
  (*entrada de dados*)

  writeln('entre com a tolerancia para a forza normal');
  readln(tol);
  write('entre com o tipo do aco ');
  write('aco tipo A teclar 0 ;aco tipo B teclar 1');
  readln(t);
  write('entre com a resistencia caract do aco fyk');
  readln(fyk);
  write('entre com o coeficiente de minoracao do aco');
  readln(gams);
  write('entre com o modulo de elasticidade do aco');
  readln(e);
  write('entre com a altura da secao');
  readln(h);
  write('entre com a base da secao');
  readln(bw);
  write('entre com o cobrimento da armadura');
  readln(dl1);
  write('entre com o numero de camadas de ferro');
  readln(n);
  write('entre com o fck do concreto');
  readln(fck);
  write('entre com o coef de minoracao do concreto');
  readln(gamc);
  write('entre com o comprimento de flambagem dividido',
        ' pela altura');
  readln(le);
  write('entre com a tolerancia para momento');
  readln(tol1);
  write('entre com a taxa de armadura w');
  readln(w);
  write('entre com a tolerancia para curvatura');
  readln(tolhr);
  delta:=dl1/h;
```

```
write('entre com a normal do problema');
readln(nfix);
write('entre com a forca horizontal adm');
readln(fh);
if nfix=0 then
begin
write('entre com o momento aplicado');
readln(m1);
nfix:=tol;
inc:=0;
ex:=m1/nfix;
end
else
begin
write('entre com excentricidade da normal');
readln(ex);
m1:=fh*le/2+nfix*ex;
end;

equilibrio(delta,hr1,m1,mr,tol1,tolhr,le,e,hr,
tol,gams,h,bw,dl1,nfix,gamc,nr,mr1,
t,fyk,n,nint,fck);

end. (*final do programa principal*)
```

```
PROGRAMA ABACO;
(*****)
(programa p/ calcular pontos do diagrama de iteracao m1xn)
(processo aproximado do pilar padrao)
(*****)
(*programa principal*)
      type arr=array[0..200] of real;
      arri=array[0..120] of integer;
      arrm=array[0..30,0..80] of real;

var epsyd,fyd,eps,sigms,nref,le,tol1,mp,inc,e,hr,tol,
    gams,h,bw,dl1,nfix,mr,nr,w:real;
    q,kp,pt,x,nt,t,fyk,n,nint,ap',jj,ax:integer;
    epss,cur,m1:arr;
    arq:text;

(*inicio do programa principal*)
begin
  assign(arq,'a:result');
  rewrite(arq);
  (*entrada de dados*)
  writeln('entre com a tolerancia para a forza normal');
  readln(tol);
  write('entre com o tipo do aco ');
  write('aco tipo a teclar 0 ;aco tipo b teclar 1');
  readln(t);
  write('entre com a resistencia caract do aco fyk');
  readln(fyk);
  write('entre com o coeficiente de minoracao do aco');
  readln(gams);
  write('entre com o modulo de elasticidade do aco');
  readln(e);
  write('entre com a altura da secao adim ou nao');
  readln(h);
  write('entre com a base da secao adim ou nao');
  readln(bw);
  write('entre com o numero de camadas de ferro');
  readln(n);
  write('forneca o num de iteracoes p/ equil a normal');
  readln(nint);
  write('entre com a tolerancia para momento');
  readln(tol1);
  write('quantos abacos quer tracar usando',
        ' os mesmos dados',
        'variando caso queira : w, le,dl1 ');
  readln(q);
  write('quantos pontos pretende obter em cada grafico');
  readln(pt);
  for kp:=1 to q do
  begin
    writeln('entre com os dados para tracar o abaco',kp);
    write('entre com a taxa de armadura w');
    readln(w);
    if w=0 then w:=0.0000001;
    writeln('entre com o cobrimento da armadura');
```

```
readln(dl1);
writeln('entre com o comp de flambagem div pela altura');
readln(le);
writeln('quer dividir o intervalo (0..curmax)',
        'em quantos pontos');
readln(ap);
fyd:=fyk/gams;
epsyd:=fyd/e;
if t=1 then epsyd:=epsyd+0.002;
eps:=-0.002;
sigms:=fyd;
if abs(eps)<epsyd then
begin
  sigms:=abs(eps)*e;
  if t=1 then
    if abs(eps)>0.7*fyd/e then
      sigms:=fyd*(0.7-22.5*fyd/e+sqrt((22.5*fyd/e-0.7)*
        (22.5*fyd/e-0.7)+45*abs(eps)-0.49));
    end;
  sigms:=sigms*eps/abs(eps);
ax:=1;
for x:=1 to (pt+2) do
begin
  if x=1 then nref:=-0.85+sigms*w/fyd;
  if x=2 then
begin
  nref:=trunc(nref*pt)/pt;
  inc:=abs(nref)/pt;
end;
  if x>2 then
    nref:=nref+inc;
    nfix:=abs(nref);
    if x=pt+2 then nfix:=0;
abacoaux(le,tol1,mp,inc,w,e,hr,tol,gams,h,bw,dl1,
          nfix,mr,nr,fyk,nt,t,n,nint,ap,jj,
          ax,x,cur);
nr:=-1*nr;
if nr<=tol1 then nr:=0;
writeln(con,'m1crit=', m1[jj], ' nr=', nr );
writeln(arq,m1[jj]:10:7, ' ',nr:10:7, ' ',hr:10:7);
end;
end;
close(arq);
end. (*final do programa principal*)
```

PROGRAMA DIAGRAMA;

```
{*****}
{este programa calcula pontos do diagrama m-n-h/r}
{processo aproximado do pilar padrao}
{*****}

(programa principal)
      type arr=array[1..10] of real;
      arri=array[1..10] of integer;
      arrm=array[1..10,1..10] of real;

var btax,naco,nconc,maco,mconc,inc,e,hr,tol,gams,h,bw,
    dl1,nfix,w,d,s,mr,nr:real;
    nti,cont,kp1,j,n1,ar,i1,g,kp,pt,x,nt,t,fyk,n,
    nint:integer;
    y,sigs:arr;nf:arri;a1,ni,di:arrm;
    arq:text;

{*****}
(*inicio do programa principal*)
{*****}
begin
  assign(arq,'a:result');
  rewrite(arq);
  (*entrada de dados*)
  writeln(lst,'programa para tracar abaco m*n*[1/r]');
  writeln(lst,'*****');
  write('forneca tolerancia p/ equilibrio de normal');
  readln(tol);
  write('entre com o tipo do aco ');
  write('aco tipo a teclar 0 ;aco tipo b teclar 1');
  readln(t);
  write('entre com a resistencia caract do aco fyk');
  readln(fyk);
  write('entre com o coeficiente de minoracao do aco');
  readln(gams);
  write('entre com o modulo de elasticidade do aco');
  readln(e);
  write('entre com a altura da secao adimen ou nao');
  readln(h);
  write('entre com a base da secao adimen ou nao');
  readln(bw);
  write('entre com o cobrimento da armadura');
  readln(dl1);
  write('entre com o numero de camadas de ferro');
  readln(n);
  write('entre com o numero de iteracoes desejada');
  readln(nint);
  write('quantos graficos quer tracar');
  readln(x);
  write('quantos pontos pretende obter em cada grafico');
  readln(pt);
  write('qual o incremento de curvatura desejado');
  readln(inc);
  for g:=1 to x do
```

```
begin
nti:=0;
write('armadura uniforme teclar 1, caso contrario 0');
readln(ar);
write('entre com a normal admencional inicial');
readln(nfix);
write('entre com a taxa de armadura w');
readln(w);
cont:=1;
for i1:=1 to n do
begin
if ar=1 then
begin
if cont=1 then
begin
writel('forneca o num. de ferros de',
' uma camada');
readln(n1);
writel('entre com o diametro de uma barra');
readln(d);
writel('espacamento entre camadas');
readln(s);
end;
cont:=cont+1;
end
else
begin
writel('entre com o numero de',
' ferros da camada',i1);
readln(nf[i1]);
writel('entre com as alturas das camadas',
' a partir do cg da secao');
write('alturas acima do cg -,abaixo +');
writel('entre com a altura da camada',i1);
readln(y[i1]);
for j:=1 to nf[i1] do
begin
writel('entre com o diametro do',
' ferro',j,'da camada',i1);
readln(di[i1,j]);
end;
end;
end;
writel(lst,'dados para tracar o grafico',g);
writel(lst,'*****');
writel(lst,'w=',w,'***','tipo aco=',t);
writel(lst,'fyk=',fyk,'***','cobrim da armadura=',dl1);
for kp1:=1 to pt do
begin
kp:=kp1;
(*chamadas das subrotinas*)
mncur(inc,btax,naco,nconc,maco,mconc,e,hr,tol,gams,h,
bw,dl1,nfix,w,d,s,mr,nr,nti,kp,n1,ar,nt,t,
fyk,n,nint,nf,y,di);
writel(lst,'*****');
```



```
writeln(lst,'resultados finais para o ponto-----',kp1);
writeln(lst,'*****');
writeln(lst,'profundidade da linha neutra=',btax);
writeln(lst,'mom resist=',mr, 'normal resist=',nr,
          'curvatura [1/r]=',hr);
writeln(lst,'numero de iteracoes=', nt);
writeln(lst,'*****');
writeln(arq,'resultados');
writeln(arq,'mr=', mr ,'nr=', nr ,'hr=', hr);
end;
writeln(lst,'num iteracoes executadas', nti);
end;
close(arq);
end. (*final do programa principal*)
```