

SOBRE MODELOS MATEMÁTICOS DO COMPORTAMENTO
NÃO-LINEAR DO CONCRETO :
ANÁLISE CRÍTICA E CONTRIBUIÇÕES

AUTOR :SERGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA

ORIENTADOR : WALTER SAVASSI

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

SOBRE MODELOS MATEMÁTICOS DO
COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DO CONCRETO:
ANÁLISE CRÍTICA E CONTRIBUIÇÕES

SERGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título "Doutor em Engenharia de Estruturas".

Orientador: WALTER SAVASSI

Suplentes

Prof. Dr. Péricles B. Fusco
Prof. Dr. Nestor Z. Pereira
Prof. Dr. João C.A.O. Souza
Prof. Dr. Mounir K.E. Debs

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Walter Savassi
Prof. Dr. Paulo M. Pimenta
Prof. Dr. Raul A. Feijóo
Prof. Dr. Wilson S. Venturini
Prof. Dr. José E. Laier

SÃO CARLOS, AGOSTO DE 1988

À querida

Rosa Mariana

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Dr. Walter Savassi, pela orientação, pelos ensinamentos e, sobretudo, pela confiança depositada na realização deste trabalho.

- Ao Prof. Dr. Raúl A. Feijão, co-orientador, o agradecimento é particularmente especial, por vários motivos. Entre eles, é importante registrar aquele relacionado à sua participação absolutamente fundamental na definição e, principalmente, no desenvolvimento de vários dos assuntos abordados.

- Ao Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta, pelas valiasas sugestões.

- Ao Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini, também pelas sugestões e pelo apoio.

- Ao Prof. Dr. Dante A.O. Martinelli, por ter plantado a semente deste trabalho.

- Aos colegas Norberto Costardi, João Batista de Paiva, Libânio Miranda Pinheiro e Francisco dos Santos Rocha, pela amizade e pelo incentivo extremamente sinceros.

- Aos demais colegas professores e colegas de pós-graduação, pelo incentivo.

- A Rui Roberto Casale pela competência, e paciência, nos trabalhos de datilografia; e a Francisco Carlos G. de Brito e Sylvia Helena Morette Villani pelos trabalhos de desenho.

- À FAPESP, pelo apoio financeiro que possibilitou a realização deste trabalho.

- ... A Deus, caríssimo companheiro.

R E S U M O

Apresenta-se um estudo sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear físico do concreto.

Em primeiro lugar, abordam-se modelos cuja aplicação é feita seguindo procedimentos incrementais - iterativos do tipo Newton-Raphson. Esses modelos são divididos em recentes e usuais, de acordo com a consideração ou não do regime de amolecimento, respectivamente.

Com relação aos modelos usuais, são evidenciados aspectos teóricos, ligados à aplicação da teoria da plasticidade, e de implementação do procedimento de solução numérica. Sua eficiência é verificada em vigas de concreto armado e de argamassa armada.

No que diz respeito aos recentes desenvolvimentos, apresentam-se, separadamente, modelos do comportamento do concreto em tração e em compressão.

Em seguida, a Análise Convexa, através de uma formulação variacional, é aplicada no desenvolvimento de um modelo de fraturamento do concreto. A formulação empregada, conduz a um conjunto de inequações cuja solução pode ser obtida mediante métodos de programação matemática.

O modelo de fraturamento é testado por meio de exemplos simples, sendo sugerido também, teoricamente, o acoplamento da plasticidade ao modelo.

Finalmente, são discutidos alguns temas para a continuidade deste trabalho.

A B S T R A C T

This work introduces a study about mathematical models of physical non-linear behaviour of concrete.

First of all, models which application is based on incremental techniques of Newton-Raphson are presented. They are classified in recent and usual models according to the assumption or not of softening behaviours, respectively.

With respect to usual models, theoretical details related to application of plasticity theory and to implementation of numerical solutions are discussed. The usual model efficiency is analysed by examples of reinforced concrete and ferrocement beams.

About recent developments, models of concrete behavior in tension and in compression are introduced.

After that, Convex Analysis, by the use of a variational formulation, is applied to the development of a concrete progressive fracture model. This formulation gives a set of inequalities which can be resolved by mathematical programming methods.

The progressive fracture model is verified by simple examples and the theoretical coupling of plasticity in the model is suggested.

Finally, future research subjects are discussed for the continuity of this work.

Í N D I C E

SEÇÃO I

APRESENTAÇÃO DO TRABALHO. CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS DO CONCRETO.

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1.1
CAPÍTULO II - CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE AS PROPRIEDADES MECÂNICAS DO CONCRETO	1.7
II.1 - INTRODUÇÃO	1.7
II.2 - PROPRIEDADES MECÂNICAS DO CONCRETO: OBSERVAÇÕES EXPERIMENTAIS	1.8
II.2.1 - Comportamento do concreto	1.8
a) Ensaio de compressão uniaxial ...	1.8
b) Ensaio de tração uniaxial	1.11
c) Comportamento do concreto em estados biaxiais	1.12
d) Comportamento do concreto em estados triaxiais	1.14
II.2.2 - Características da superfície de ruptura do concreto	1.15
II.3 - OS FENÔMENOS INERENTES À ASSOCIAÇÃO DE CONCRETO E ARMADURA	1.18
II.3.1 - Resistência à tração	1.18
II.3.2 - Resistência ao esforço cortante	1.21

SEÇÃO II

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

CAPÍTULO I - FUNDAMENTOS DA TEORIA DA PLASTICIDADE	2.1
I.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS E INTRODUÇÃO	2.1

I.2 - MODELOS REOLÓGICOS EM PLASTICIDADE	2.5
I.3 - POSTULADOS DE DRUCKER	2.8
I.4 - GENERALIZAÇÃO PARA O CONTÍNUO	2.11
I.4.1 - Convexidade e regra da normalidade ..	2.15
I.4.2 - Relação constitutiva incremental	2.18
I.4.3 - Relação constitutiva incremental pa ra materiais idealmente plásticos ...	2.26
I.4.4 - Caso de superfícies de plastifica- ção convexas descontínuas	2.27
I.5 - FUNÇÕES DE PLASTIFICAÇÃO	2.29
I.5.1 - Superfície de Tresca	2.30
I.5.2 - Superfície de von Mises	2.33
I.5.3 - Superfície de Mohr-Coulomb	2.35
I.5.4 - Superfície de Drucker-Prager	2.41
I.6 - ENDURECIMENTO POR DEFORMAÇÃO	2.44
I.6.1 - Endurecimento isótropo	2.47
I.6.2 - Endurecimento cinemático	2.49
I.6.3 - Uma alternativa para a determinação de G	2.50
a) Tensão equivalente (σ_e)	2.51
b) Deformação plástica equivalente (E_p)	2.51
c) Observações complementares	2.52
d) Determinação de G	2.53
I.7 - FORMULAÇÃO NO ESPAÇO DAS DEFORMAÇÕES	2.54
CAPÍTULO II - FORMULAÇÃO VARIACIONAL DAS RELAÇÕES	
CONSTITUTIVAS ELASTOPLÁSTICAS	2.61
II.1 - INTRODUÇÃO	2.61
II.2 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL CINEMÁTICA DAS RELA ÇÕES CONSTITUTIVAS	2.62
II.3 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL CINEMÁTICA, EM TA- XAS, DO PROBLEMA DA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA .	2.66

II.4 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL CINEMÁTICA, INCREMENTAL, DO PROBLEMA DA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA	2.67
--	------

SEÇÃO III

MODELOS CONSTITUTIVOS

CAPÍTULO I - MODELOS USUAIS PARA O CONCRETO

I.1 - INTRODUÇÃO	
I.2 - HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS. A APLICAÇÃO DA TEORIA DA PLASTICIDADE	3.2
I.3 - PLASTIFICAÇÃO E RUPTURA DO MATERIAL	3.3
I.4 - SUPERFÍCIES DE RUPTURA DO CONCRETO	3.4
a) Superfície de ruptura de Mohr-Coulomb modificada	3.5
b) Superfície de ruptura de Chen-Chen	3.9
c) Superfície de Willam-Warnke	3.12
d) Outras superfícies	3.16
I.5 - MODELOS DE ENDURECIMENTO	3.17
a) Modelo misto de Figueiras-Owen	3.17
b) Modelo misto de Chen	3.22
I.6 - COMPORTAMENTO PÓS-RUPTURA	3.31

CAPÍTULO II - EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

II.1 - INTRODUÇÃO	3.37
II.2 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E OS PROCEDIMENTOS ITERATIVOS	3.38
II.3 - IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS ELASTOPLÁSTICOS: VERIFICAÇÃO DA RELAÇÃO CONSTITUTIVA	3.44
II.4 - EXEMPLIFICAÇÃO DO PROCEDIMENTO PARA UM CASO UNIDIMENSIONAL	3.52

II.5 - SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO PÓS-RUPTURA	3.55
II.6 - APLICAÇÃO NA INVESTIGAÇÃO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO E DE ARGAMASSA ARMADA	3.59
II.6.1 - Exemplo I - Aplicação ao concreto armado	3.59
II.6.2 - Exemplo II - Aplicação à argamassa armada	3.64
CAPÍTULO III - MODELOS RECENTES DO COMPORTAMENTO PÓS- -FRATURA DO CONCRETO	3.70
III.1 - INTRODUÇÃO. O COMPORTAMENTO PÓS-FRATURA ...	3.70
III.2 - APLICAÇÃO DA MECÂNICA DA FRATURA AO CONCRETO SIMPLES SUJEITO A SOLICITAÇÕES DE TRAÇÃO	3.74
III.2.1 - Mecânica da fratura elástica li- near. Conceitos básicos	3.74
III.2.2 - Aplicação ao concreto simples. A energia de fratura G_c	3.78
III.2.3 - A energia de fratura G_c como uma propriedade do material. Verifi- cação através da mecânica do da- no	3.84
III.2.4 - Um modelo constitutivo para o con- creto fissurado	3.89
III.2.4.1 - Parâmetros da matriz constitutiva	3.96
III.3 - COMPORTAMENTO PÓS-FRATURA DO CONCRETO SIM- PLES SUJEITO A SOLICITAÇÃO DE COMPRESSÃO ..	3.101
III.3.1 - Modelo incluindo acoplamento en- tre plasticidade e fraturamento..	3.101
III.3.1.1 - Modelo de fraturamen- to progressivo	3.101
III.3.1.2 - Modelo incluindo o acoplamento da plas- ticidade com o fratu- ramento	3.105

III.3.2 - Modelo geral para materiais granulares	3.114
III.4 - MODELO DE FRATURAMENTO PROGRESSIVO NO REGIME DE TRAÇÃO	3.122
CAPÍTULO IV - UM MODELO PARA A RESPOSTA PÓS-FRATURA DO CONCRETO, BASEADO NA FORMULAÇÃO VARIACIONAL DA RELAÇÃO CONSTITUTIVA	3.130
IV.1 - INTRODUÇÃO	3.130
IV.2 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL CINEMÁTICA, EM TAXAS, DA EQUAÇÃO CONSTITUTIVA DE UM MATERIAL QUE APRESENTA FRATURAMENTO PROGRESSIVO	3.132
IV.3 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL CINEMÁTICA, INCREMENTAL, DA RELAÇÃO CONSTITUTIVA DE UM MATERIAL COM FRATURAMENTO PROGRESSIVO	3.135
IV.4 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO NUMÉRICA	3.136
IV.5 - UMA ALTERNATIVA PARA MELHORAR O MODELO	3.142
IV.6 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO NUMÉRICA	3.145
IV.7 - ASPECTOS COMPLEMENTARES: UMA PROPOSTA DE GENERALIZAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO INCLUINDO EFEITOS DE PLASTIFICAÇÃO E FRATURA. 3.155	
IV.7.1 - Aspectos relativos à resolução numérica	3.159

SEÇÃO IV

CONCLUSÕES

CAPÍTULO I - CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	4.1
BIBLIOGRAFIA	B.1
APÊNDICE I - ALGUMAS REGRAS E DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS DE INTERESSE	I.1
APÊNDICE II- COMENTÁRIOS SOBRE OS RECURSOS DO PROGRAMA DE COMPUTADOR ADAPTADO E EMPREGADO NOS ESTUDOS	II.1

SEÇÃO I

APRESENTAÇÃO DO TRABALHO.

CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS DO CONCRETO.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A análise não-linear de estruturas em concreto, particularmente aquelas em concreto armado, vem se desenvolvendo ao longo dos últimos vinte anos num ritmo bastante intenso.

Como resultado desse trabalho, contribuições importantes tem sido dadas com vistas a uma melhor compreensão do comportamento global não-linear das estruturas. Por outro lado, a necessidade de aprimorar os modelos matemáticos tem exigido uma atividade de pesquisa multidisciplinar, propiciando, do ponto de vista acadêmico, um interessante relacionamento entre diferentes áreas do conhecimento.

O presente trabalho tem a pretensão de, com base na bibliografia que foi possível reunir, apresentar e comentar alguns dos principais modelos de não-linearidade física atualmente em estudo e, além disso, oferecer uma pequena contribuição a essa área de pesquisas.

Por outro lado, é também intenção do autor que este texto venha a servir como bibliografia básica àqueles que porventura passem a se dedicar ao estudo do comportamento não-linear físico de estruturas em concreto.

Contudo, para que o arranjo, e a distribuição, dos assuntos possa ser melhor compreendido, é interessante que se faça uma breve revisão sobre a evolução das pesquisas, destacando alguns dos seus principais itens bibliográficos.

Ao final da década de sessenta, quando o método dos elementos finitos já havia se consagrado como instrumento de resolução dos problemas da elasticidade (para comentar apenas as suas aplicações na mecânica dos sólidos), NGO e SCORDELIS (1967) e NILSON (1968) apresentaram os trabalhos pioneiros sobre a aplicação deste método no estudo das estruturas em concreto armado.

A modelagem proposta era puramente computacional, no sentido de que se procurava reproduzir o comportamento da estrutura sem a utilização de um modelo constitutivo mais elaborado. Na verdade, a técnica proposta se resumia em discretizar as armaduras por intermédio de elementos finitos de barra e reproduzir o panorama da fissuração através de alterações na malha de elementos finitos.

Na mesma época, RASHID (1968) propôs que a não-linearidade proveniente da fissuração fosse considerada não por meio de redefinições na malha, mas através de alterações na matriz constitutiva, com isto, a malha inicial pôde permanecer invariável. Também como consequência dessa mesma proposta, a fissura deixou de ser tratada de maneira discreta, passando a ser representada através de uma distribuição numa região associada ao tamanho do elemento finito.

CERVENKA (1970), tendo em vista a não-linearidade do concreto em compressão, propôs a aplicação da teoria da plasticidade, utilizando critérios análogos aos já usuais para estruturas metálicas.

Tendo por diretriz esses passos iniciais, seguiram-se aplicações em estruturas mais complexas, como atestam os trabalhos de JOFRIET e McNEICE (1971), LIU (1972), HAND (1973), SUIDAN e SCHNOBRICH (1973) e SCHNOBRICH (1977).

As bases numéricas para o procedimento computacional estavam então estabelecidas, isto é, os processos de solução fundamentavam-se em técnicas incrementais - iterativas do tipo Newton-Raphson.

A necessidade de estender os limites de aplicação da teoria da plasticidade e, por outro lado, de contornar instabilidades numéricas decorrentes da simulação limitada do comportamento do concreto em tração, fizeram com que os modelos até então utilizados passassem por uma análise teórica mais rigorosa, de modo a deixar mais claro o conjunto de fenômenos mecânicos envolvidos.

Surgiram então grupos que dirigiram suas pesquisas para o campo das relações constitutivas do concreto destacando-se, entre outros, os trabalhos de CHEN e CHEN (1975), BAŽANT e BHAT (1976), CEDOLIN e DEI POLI (1977), ARGYRIS (1976), BAŽANT e KIM (1979) e BAŽANT e CEDOLIN (1980). Outros pesquisadores contribuíram não só através dos modelos constitutivos, mas também pelo desenvolvimento de apuradas técnicas numéricas visando melhorar a eficiência do método dos elementos finitos, OWEN (1980).

No início da década de oitenta o panorama das pesquisas estava bastante definido, como se podia constatar pelo conteúdo de livros como ASCE (1982) e CHEN (1982), ainda hoje referências indispensáveis sobre o assunto.

Pois bem, os estudos prosseguiram ao longo da década de oitenta aprimorando os modelos matemáticos, com destaque para os seguintes temas: o emprego da plasticidade não associada no estudo do concreto em compressão (BUYUKOZ TURK e SHAREEF (1985); VERMEER e BORST (1984); HAN e CHEN (1986); (1987)), a fundamentação teórica na mecânica da fratura para o concreto em tração (BAŽANT e CEDOLIN (1983); BORST e NAUTA (1984); ROTS e NAUTA (1985)), a aplicação da mecânica do dano, também para o concreto em tração, (WILLAM (1984); BICÁNIC (1984)) e a análise do comportamento sob solicitações combinadas (ROTS e BORST (1987)).

Paralelamente a todos estes estudos, os quais, como já se afirmou anteriormente, estavam relacionados a procedimentos iterativos do tipo Newton-Raphson, desenvolveram-se os trabalhos de grupos que visavam a otimização estrutural, fazendo uso de técnicas de programação matemática, linear e não linear. Desses grupos, destacam-se os trabalhos de COHN (1968), DE DONATO e MAIER (1972), MUNRO (1972), KRISHNAMOORTHY (1973), CORRADI, DE DONATO e MAIER (1974), GRIERSON (1977), KANEKO (1977), MUNRO (1978), MAIER e MUNRO (1982), este último apresentando uma análise sobre o desenvolvimento alcançado até aquela época.

As duas grandes linhas de estudo e formulação de modelos matemáticos para estruturas em concreto prosseguiram com pouca interação, em razão da aparente individualidade de objetivos gerada pelo enfoque de cada uma delas. Um exemplo de troca de informações entre as duas linhas é o emprego de procedimentos do tipo Quasi-Newton em lugar dos tipo Newton-Raphson, BATHE (1982).

Entretanto, não é apenas através de um procedimento numérico que a interface pode ser estabelecida; na verdade, como se pode concluir pelo conteúdo deste trabalho, é possível construir um elo de ligação através da formulação variacional que precede a utilização das técnicas de programação matemática. Essa formulação coloca a análise estrutural dentro de um enfoque da Análise Convexa, permitindo, como consequência, estudar existência e unicidade de solução, FEIJÓO, ZOUAIN e TAROCO (1986), ZOUAIN e FEIJÓO (1986) e FEIJÓO (1987).

Em outras palavras, é aparentemente possível associar a experiência computacional da análise de estruturas em concreto, que está baseada em técnicas do tipo Newton-Raphson, com modelos constitutivos, formulados com aplicação de princípios variacionais, que apresentam consistência tanto do ponto de vista mecânico quanto matemático.

Tendo-se em vista o resumido estado da arte apresentado, e as últimas considerações, é possível justificar e comentar de modo mais objetivo o conteúdo do trabalho.

A tese, na sua maior parte, apresenta uma análise sobre alguns dos principais modelos destinados ao estudo do comportamento do concreto e de estruturas em concreto. Com o objetivo de destacar as peculiaridades de cada procedimento, os modelos foram reunidos em dois grandes grupos, aqui denominados de usuais e recentes.

Além disso, relacionado aos modelos recentes, o trabalho propõe uma relação constitutiva para um material com fraturamento progressivo, formulada com base em conceitos da Análise Convexa. Com essa formulação a relação fica expressa, localmente, através de um conjunto de inequações e condições de complementaridade, solúvel mediante técnicas de programação matemática.

Nas conclusões, apresenta-se uma proposta para investigações futuras, prevendo atividades nos campos da utilização de modelos usuais e do desenvolvimento de relações constitutivas.

Com relação a disposição de assuntos, objetivou-se tornar o texto, na medida do possível, acessível àqueles que pretendem estudar também as bases da análise não linear física. Dessa forma, os títulos foram agrupados em seções cuja dependência se limita a alguns conceitos fundamentais.

Assim, na seção II estão reunidos os fundamentos mecânicos e matemáticos empregados na formulação dos diferentes modelos comentados ao longo do texto. Na seção III expõe-se, em primeiro lugar, os principais resultados alcançados com procedimentos do tipo Newton - Raphson. Em seguida, descreve-se um modelo para resposta pós-fratura do concreto, baseado na formulação variacional das relações constitutivas. A seção IV apresenta as conclusões e considerações finais do trabalho.

Complementam o trabalho, dois apêndices. No primeiro deles podem ser encontradas algumas regras básicas da álgebra tensorial, bem como fundamentos matemáticos relativos à teoria da plasticidade. Esses conceitos, com sua

nomenclatura característica, são frequentemente empregados ao longo do texto. O apêndice II reúne informações a respeito do programa de computador utilizado para a resolução dos exemplos da seção III.

É conveniente ressaltar que não foram objeto de estudos detalhados os modelos viscoelásticos e viscoplásticos, bem como os que tratam da não linearidade geométrica, razão pela qual não são abordados neste trabalho.

Finalmente, deve-se observar que as referências bibliográficas indicadas neste capítulo foram aquelas consideradas como as mais significativas para compor um estado da arte. Ao final deste trabalho estão arroladas todas as referências que foram diretamente consultadas ou mesmo que foram reunidas por conterem informações necessárias ao desenvolvimento do tema da tese.

CAPÍTULO II

CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE AS PROPRIEDADES
MECÂNICAS DO CONCRETO

II.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo estão colocadas em destaque algumas das propriedades mecânicas do concreto, evidenciadas experimentalmente, que tem sido consideradas na formulação matemática dos modelos constitutivos e na implementação numérica dos mesmos.

As informações aqui reproduzidas foram reunidas a partir do conteúdo de um pequeno mas suficientemente completo conjunto de referências bibliográficas: van LANGENDONCK (1959), JOHNSTON (1971), RÜSCH (1975), MONTOYA (1976), CARVALHO (1977), CHEN (1982) e FIGUEIRAS (1983). Assim sendo, a maior parte das figuras são também originárias das publicações.

Cumpre ressaltar também que já neste capítulo se faz uso de uma nomenclatura característica da teoria da plasticidade, sendo indicada, para aqueles que não tenham afinidade com ela, uma consulta ao apêndice I deste trabalho.

II.2 - PROPRIEDADES MECÂNICAS DO CONCRETO: OBSERVAÇÕES EXPERIMENTAIS

II.2.1 - Comportamento do concreto

É preciso observar que mesmo antes da aplicação de qualquer carga o concreto já apresenta um processo de microfissuração resultante do fenômeno de retração, mais liberação de calor, que se desenvolve na fase inicial de cura.

A microfissuração inicial, e sua propagação durante o processo de carregamento, é responsável pelo comportamento não linear do concreto mesmo em baixos níveis de tensão. Esse mesmo estado de fissuração, associado à característica granular do material, provoca uma expansão volumétrica em estágios próximos da ruptura (havendo também a responsabilidade dos vazios existentes no concreto sobre este fenômeno).

Deve-se ressaltar que, basicamente, a propagação das fissuras passa a se desenvolver na fase de carregamento devido às diferentes características de resistência entre os agregados graúdos e a argamassa. Essas diferenças se manifestam principalmente na interface entre aqueles elementos e são, também, responsáveis pela baixa resistência à tração do concreto.

Evidentemente fatores como textura e tamanho dos agregados, índice de vazios, relação água-cimento, etc., influenciam no comportamento mecânico global do concreto.

a) Ensaio de compressão uniaxial

A curva tensão-deformação obtida por um ensaio de compressão uniaxial apresenta as seguintes características (v.fig.II.1).

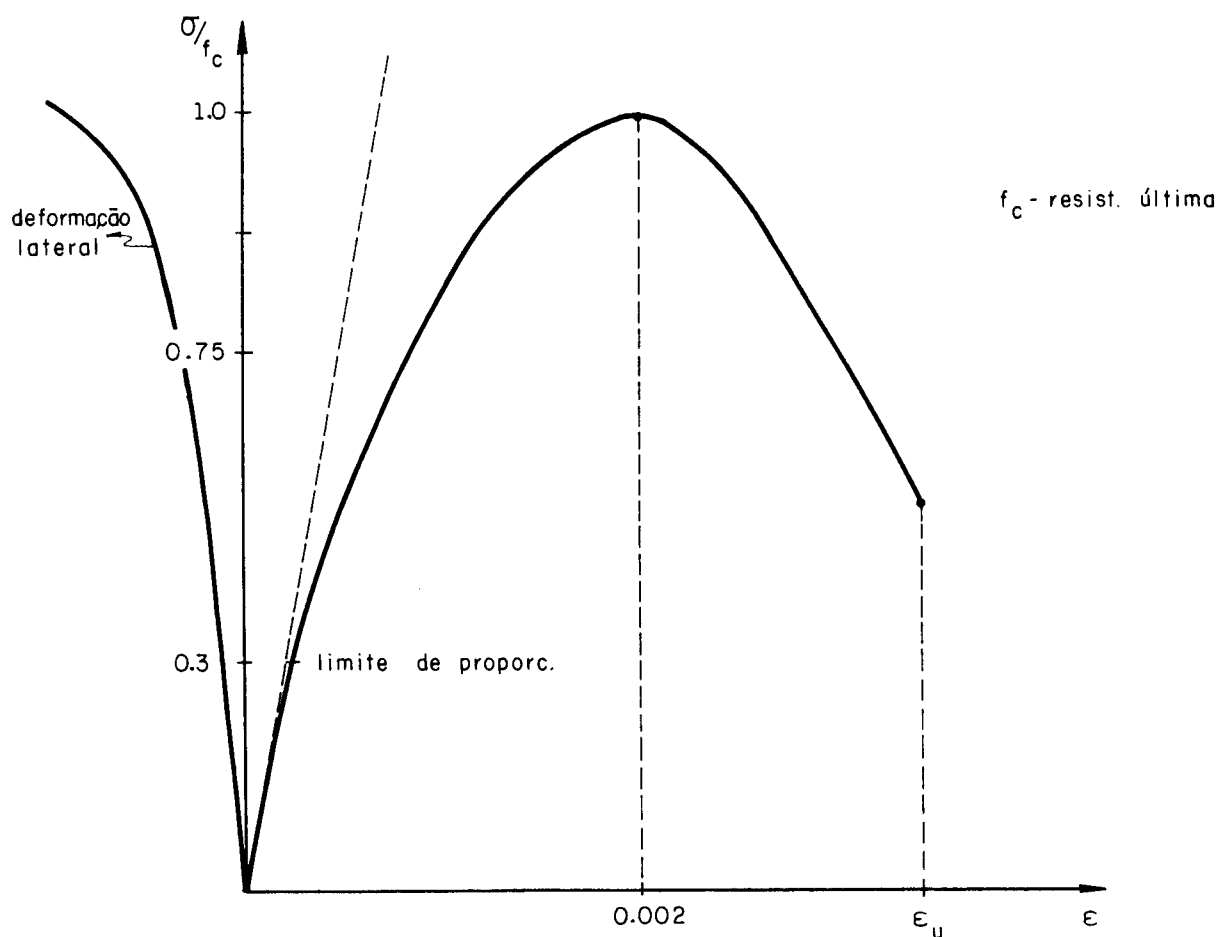


Fig. II.1 - Diagrama tensão-deformação

- a) no intervalo 0-30% de f_c está caracterizada a fase dita elástica, assim denominada porque a configuração de microfissuras existente previamente não sofre alterações significativas com o carregamento. A pequena não-linearidade observada nesta fase é proveniente também do início de escorregamentos no contato da pedra com a argamassa.
- b) entre 30 e 75% de f_c desenvolve-se a chamada fase intermediária ou principal, na qual passam a haver escorregamentos na pasta de cimento responsáveis pela maior parcela de "plastificação". Entretanto a propagação das fissuras é dita estável, no sentido de que o comprimento de cada uma delas fica praticamente inalterado se o nível de tensão é mantido constante.

- c) acima de 75% de f_c há uma interação entre as microfissuras, resultando nas fissuras propriamente ditas.
- d) além da última fase, a curva apresenta uma parte descendente que se desenvolve até que seja atingida uma deformação última ϵ_u , para a qual se dá a ruptura por esmagamento.

É interessante observar também um gráfico que representa a deformação volumétrica contra o nível de tensão.

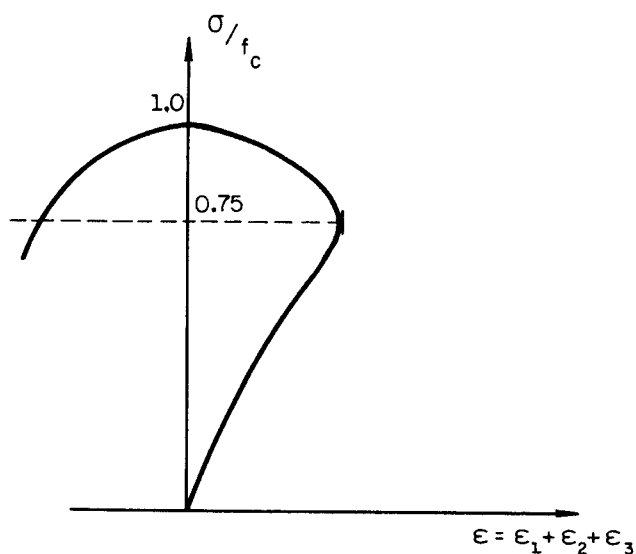


Fig. II.2 - Deformação volumétrica.

Neste gráfico fica evidenciado que até 75% de f_c ocorre uma variação (diminuição) de volume aproximadamente proporcional ao acréscimo de tensão. Daquele ponto em diante inverte-se o sentido da variação volumétrica (expansão).

Vale ressaltar ainda, como características evidenciadas no ensaio uniaxial, que o módulo de elasticidade inicial do concreto depende da resistência à compressão. Além disso um valor representativo para o coef. de Poisson é 0.2, como mostra a figura II.3.

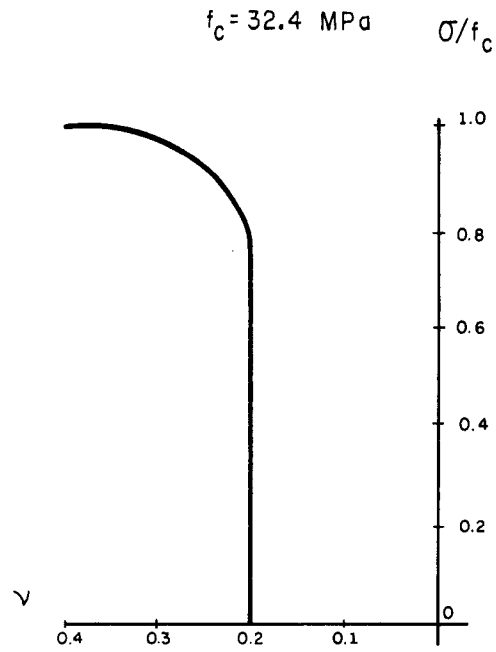


Fig. II.3 - Coeficiente de Poisson

b) Ensaio de tração uniaxial

Na tração, a microfissuração assume uma característica ainda mais importante que na compressão.

A curva típica é aquela apresentada pela figura II.4.

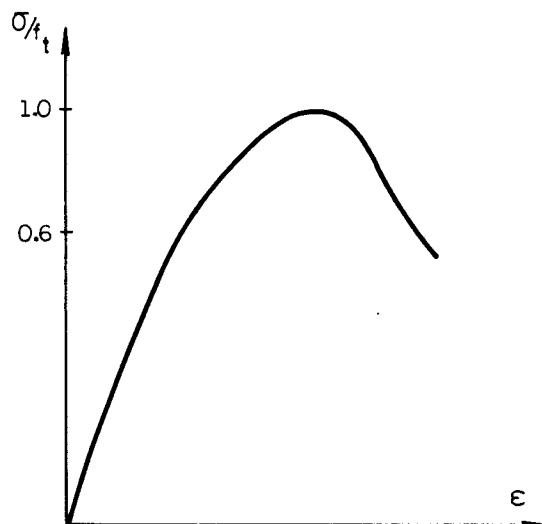


Fig. II.4 - Tração uniaxial

Observa-se que para estados de tensão inferiores a 60% de f_t , a evolução de novas microfissuras é desprezível. Quanto à direção de propagação da fissura, observa-se que é transversal à direção da tensão.

A ruptura é causada pela união de um pequeno número de fissuras, ao contrário da compressão em que a ruptura se dá como consequência da ligação de um grande número delas.

A parte descendente da curva é difícil de ser acompanhada em virtude da rápida propagação das fissuras na quela fase.

A razão entre as resistências à tração e compressão uniaxiais varia entre 0.05 e 0.1. O módulo de elasticidade à tração é maior, e o coeficiente de Poisson menor, do que na compressão uniaxial.

c) Comportamento do concreto em estados biaxiais

As características principais de comportamento do concreto em estados biaxiais podem ser resumidas por:

c.1) Relações tensão deformação: a tensão de compressão limite aumenta num estado de compressão biaxial, atingindo, quando $\sigma_2/\sigma_1 = 0.5$, um crescimento máximo de aproximadamente 25% em relação à compressão uniaxial. Para $\sigma_2/\sigma_1 = 1.0$ esse crescimento é de 16%.

Sob compressão e tração a resistência à compressão decresce quase que linearmente com o acréscimo da tensão de tração; na tração biaxial a resistência é praticamente a mesma que a uniaxial.

c.2) A característica de ductilidade apresenta variações de acordo com a combinação das solicitações. Por exemplo, como se vê na fig.II.5, em compressão biaxial a ductilidade aumenta, ocorrendo o contrário quando são envolvidas tensões de tração.

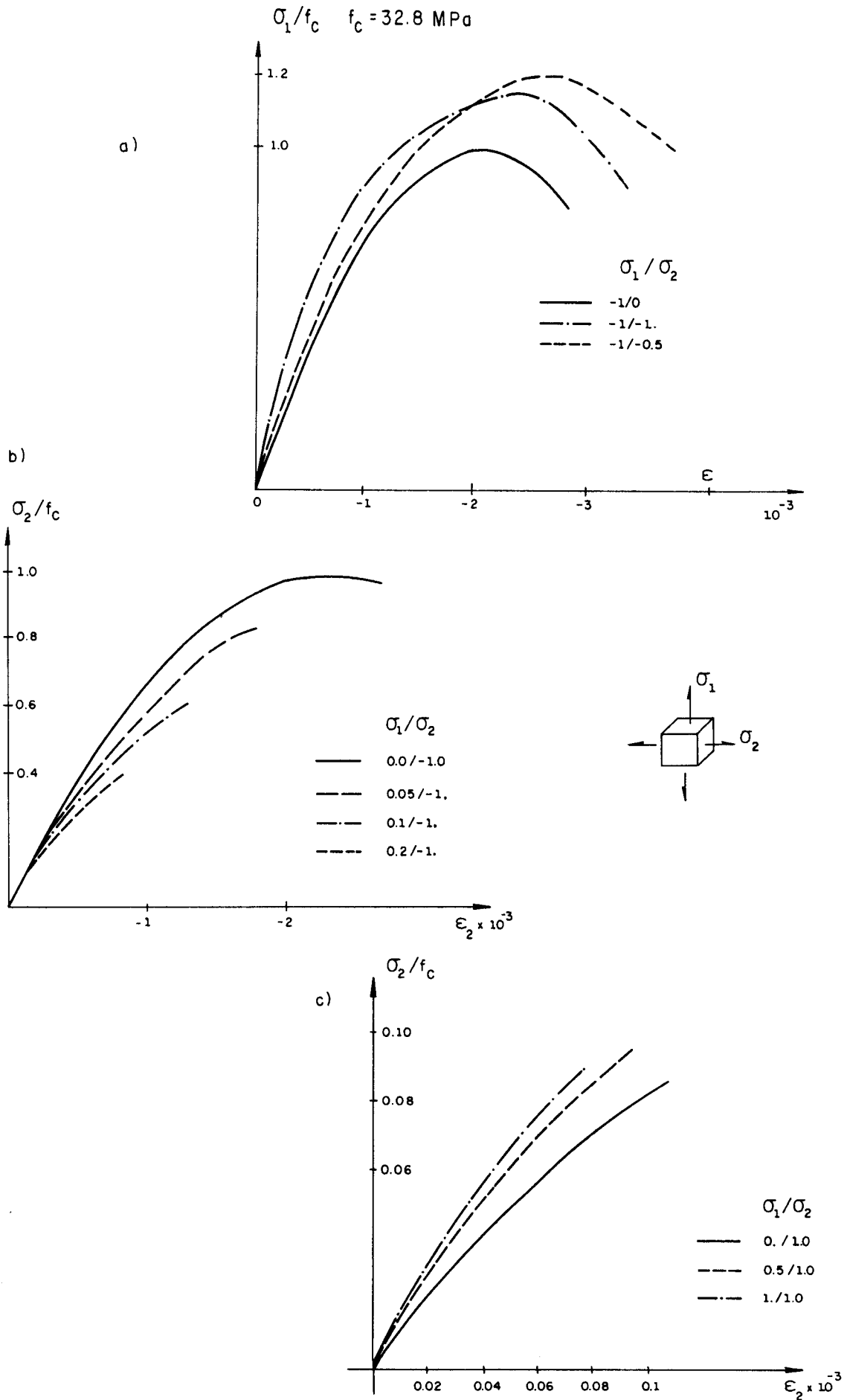


Fig. II.5 - Estados biaxiais

- c.3) Nas proximidades do ponto de resistência limite ocorre um acréscimo de volume com o acréscimo das tensões de compressão (estado de compressão biaxial); este fenômeno é denominado de dilatância.
- c.4) A ruptura do concreto ocorre por separação ortogonal à direção de tração máxima ou de deformação (alongamento) máxima. As deformações por tração são de fundamental importância no estabelecimento de critérios de ruptura e de mecanismos de ruptura do concreto.
- d) Comportamento do concreto em estados triaxiais

Algumas curvas típicas que relacionam tensão e deformação foram obtidas com ensaios de confinamento (compressão) do concreto.

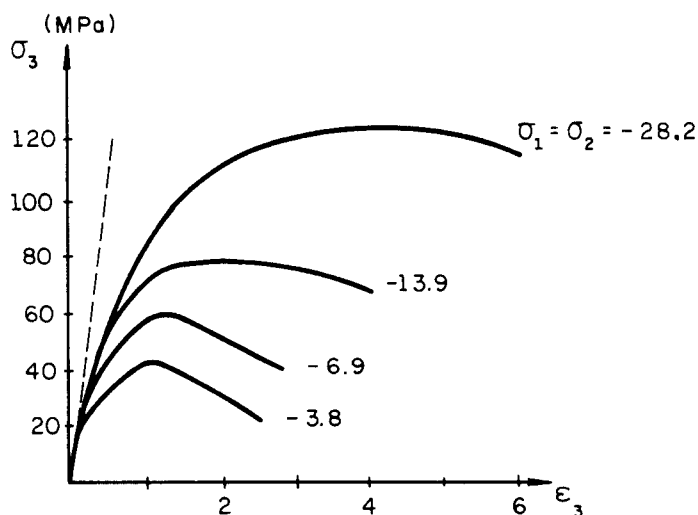


Fig. II.6 - Estados triaxiais

Dependendo da tensão de confinamento o concreto pode apresentar características de fragilidade, plasticidade com amolecimento ou plasticidade com endurecimento. De um modo geral, como se observa pela figura II.6, a resistência axial cresce com a pressão de confinamento. Já na figura II.7 está mostrado, através de uma situação de compressão hidrostática, que a descarga se dá segundo uma tangente muito próxima da tangente inicial em carga, excetuando-se uma região de baixos valores do carregamento ao final desse processo.

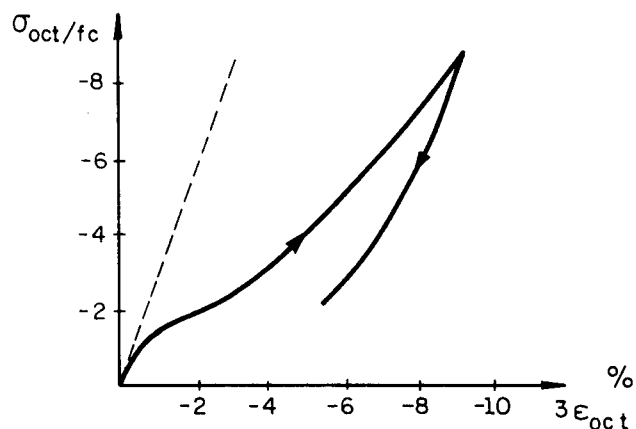


Fig. II.7 - Comportamento na descarga.

Observa-se, finalmente, que em compressão triaxial a ruptura se dá por esmagamento.

II.2.2 - Características da superfície de ruptura do concreto

As experimentações sugerem uma representação possível da superfície de ruptura para o concreto sujeito a estados triaxiais de tensão (fig.II.8).

As situações correspondentes aos limites elástico e ruptura podem ser representadas por superfícies no espaço tridimensional das tensões principais.

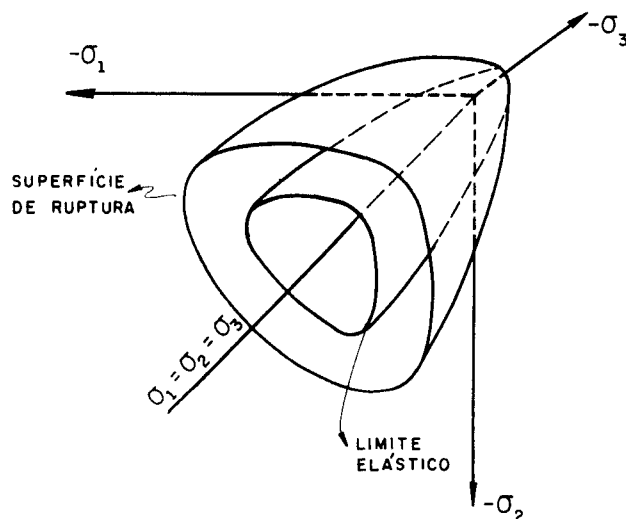


Fig. II.8 - Superfícies de plastificação e ruptura.

A forma geral da superfície de ruptura no espaço tridimensional das tensões pode ser descrita pelas formas de sua seção transversal, nos planos deviatóricos, e pelas formas de seus meridianos, nos planos meridianos (o plano deviatórico é ortogonal ao eixo hidrostático e o plano meridional contém o eixo hidrostático).

Para compressões hidrostáticas crescentes a seção no plano deviatórico tende a uma forma circular. Para baixos valores de compressão hidrostática as seções são convexas e não circulares.

No caso de um material isótropo a seção transversal deve ter três ramos de simetria, como mostra a figura II.9. Portanto, no caso de determinação experimental da superfície é necessário explorar somente o setor $\theta = 0^\circ$ a 60° .

A experimentação indica as seguintes características da superfície de ruptura no plano deviatórico (fig. II.9).

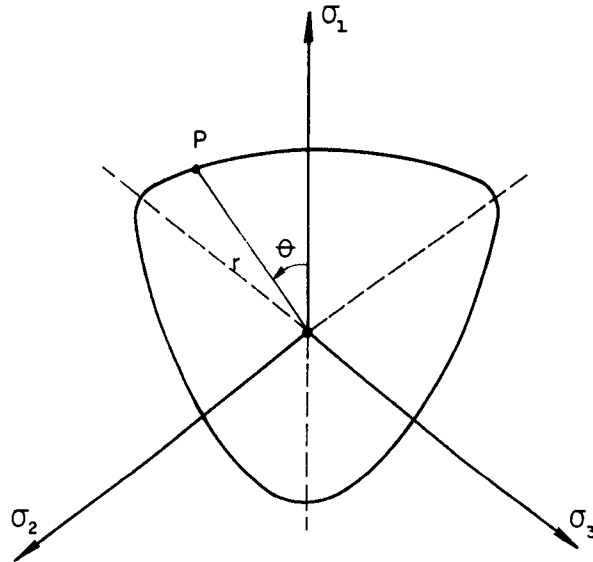


Fig. II.9 - Superfície de ruptura no plano deviatório.

- i) é regular
- ii) é convexa, pelo menos para tensões de compressão
- iii) é aproximadamente triangular para pequenas tensões de compressão ou de tração, tornando-se mais circular para altas tensões de compressão.

No plano meridional, a superfície de ruptura apresenta as seguintes características evidenciadas experimentalmente (fig.II.10):

- i) depende da componente hidrostática de tensão I_1
- ii) é curva, regular e convexa
- iii) carregamento hidrostático puro não causa ruptura.

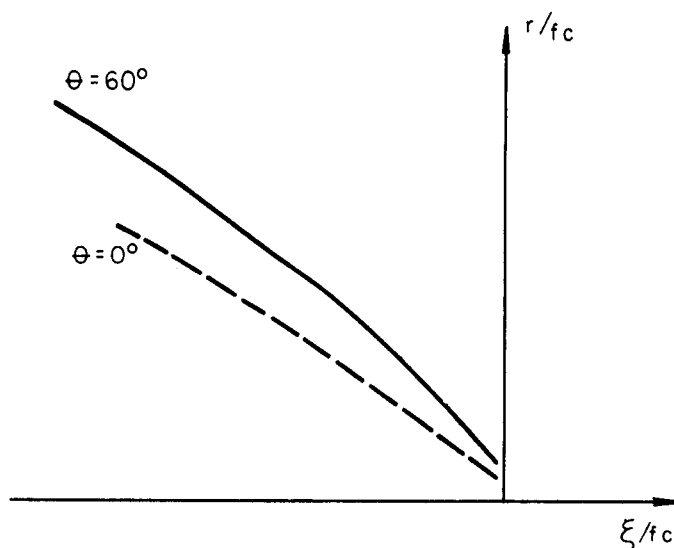


Fig. II.10 - Plano meridiano da superfície de ruptura.

II.3 - OS FENÔMENOS INERENTES À ASSOCIAÇÃO DE CONCRETO E ARMADURA

II.3.1 - Resistência à tração

Como já foi comentado em item anterior, a formação de fissuras no concreto é um processo do tipo frágil, anulando-se repentinamente a resistência do material na direção da solicitação de tração, depois de formada a fissura.

Por outro lado, o mecanismo de resistência à tração se torna muito mais complexo na presença de armadura. Por exemplo, devido ao fenômeno de aderência, o concreto entre fissuras permanece, ainda, com uma significativa capacidade de absorver aquele tipo de solicitação; por assim dizer, o concreto, na presença de armadura, torna-se enrijecido quanto à sua contribuição na resistência à tração ("tension stiffening").

O enrijecimento à tração pode ser melhor ilustrado a partir da análise dos resultados experimentais de barras de armadura envolvidas numa massa de concreto, fig.II.11 e de peças de concreto armado tracionadas, onde se representam as distribuições de tensões no concreto entre fissuras, v.fig.II.12.

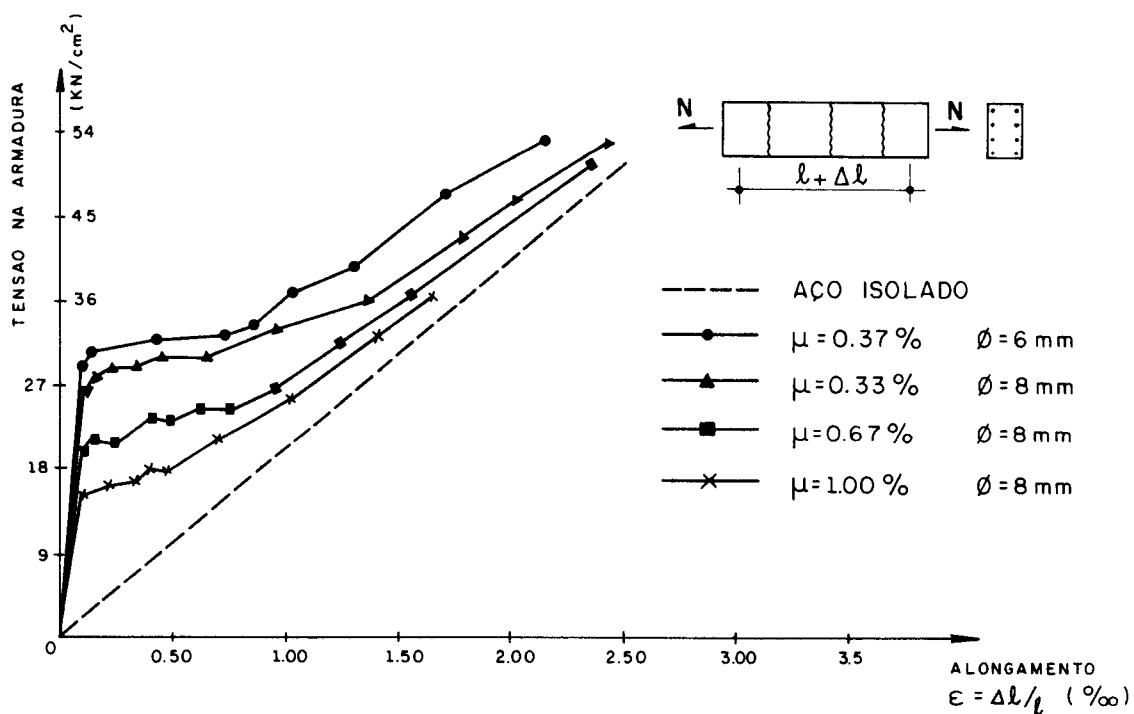


Fig. II.11 - Comportamento experimental de barras em tração no concreto.

(*) nesta figura μ representa taxa de armadura e ϕ diâmetro das barras.

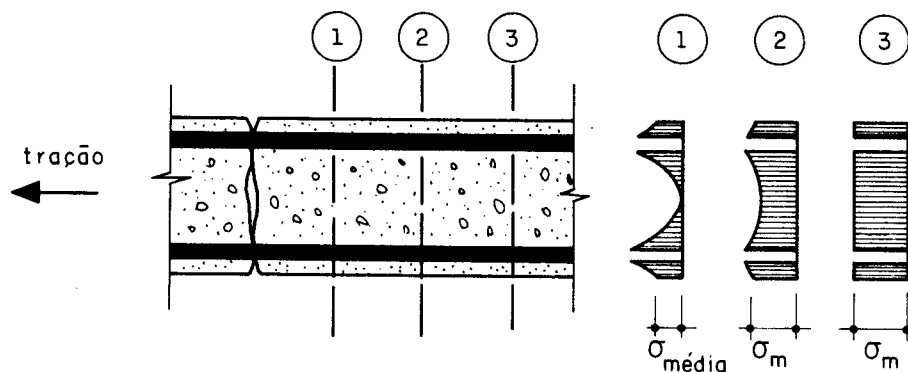


Fig. II.12 - Distribuições de tensões na massa de concreto fissurado.

Observa-se na figura II.11, uma região inicial caracterizada pela proporcionalidade entre a tensão e a deformação na armadura, segundo um coeficiente angular muito superior àquele obtido no caso da armadura isolada. Entretanto, a situação se inverte com o aparecimento da fissuração no concreto. Nota-se no aço um aumento rápido das deformações para pequenos acréscimos de tensão (isto acontece pela transferência de resistência do concreto para a armadura). Finalmente, com a progressão do processo de fissuração, a tendência da armadura é a de adquirir um comportamento de armadura isolada, mostrando com isso a diminuição da colaboração do concreto na resistência à tração.

Na figura II.12 a variação da distribuição de tensões na massa de concreto fissurado está mostrada pela comparação entre os valores das tensões médias em seções posicionadas em relação à fissura.

Evidentemente que a simulação precisa do enrijecimento à tração do concreto somente é possível na medida em que se possa conhecer corretamente a distribuição das tensões de aderência na armadura. A nível de simulação teórica do fenômeno, para fins de aplicação numérica, o que se faz é idealizar uma distribuição de tensões no aço e no concreto sob tração do modo indicado, por exemplo, na figura II.13.

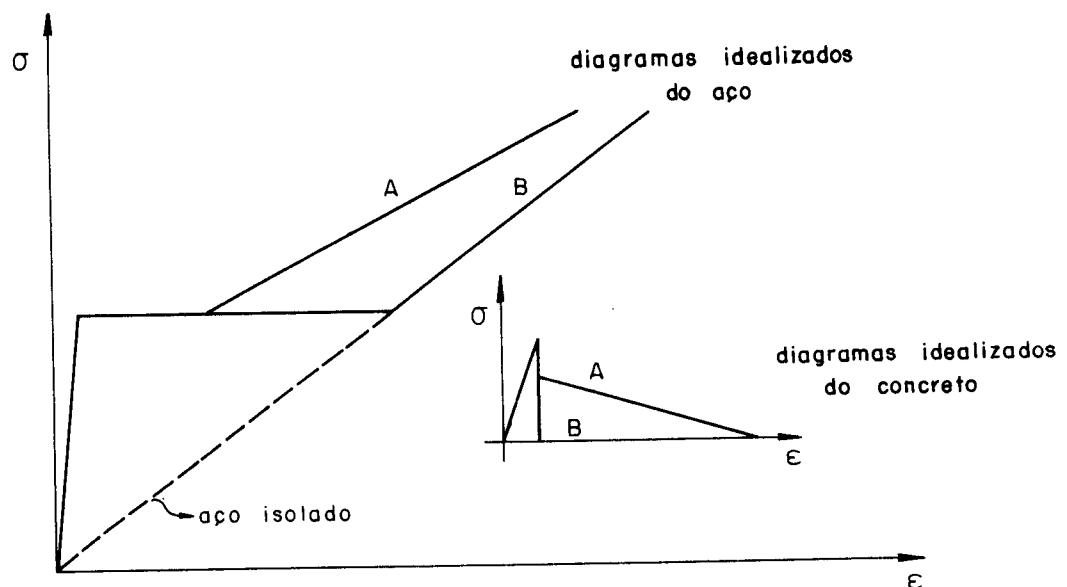


Fig. II.13 - Comportamentos idealizados do concreto e do aço.

É interessante ressaltar, desde já, que essa idealização é de grande importância na simulação numérica via elementos finitos, uma vez que, na hipótese de se desprezar o enrijecimento à tração, associa-se a um determinado elemento um estado de fissuração distribuída que pode conduzir a uma subestimação da capacidade resistente da estrutura.

II.3.2 - Resistência ao esforço cortante

O esforço cortante é transmitido no concreto armado fissurado através dos efeitos de engrenamento, ou encaixe, dos agregados graúdos na massa de concreto, e de pino, entre armadura e concreto de cobrimento.

a) efeito de pino: este efeito tem origem nas barras de armadura que atravessam uma fissura sujeita a deslocamentos relativos oriundos da força cortante. Nessa situação, apesar de as barras terem sido destinadas para resistir tensões de tração devidas à flexão, elas poderão colaborar de modo significativo, em função do seu diâmetro e arranjo, na resistência à força cortante. No caso das vigas essa ação resistente pode ter seu efeito diminuído nas peças que tenham quantidade deficiente de armadura transversal, devido aos diferentes modos de ruptura associados à flexão localizada da armadura. Um desses modos de ruptura é gerado pela pressão das barras longitudinais sobre o concreto de cobrimento, provocando uma fissuração horizontal adjacente às mesmas. Associado a esse modo de ruptura está um outro decorrente do escoamento da barra por tração e flexão locais exageradas; no caso de armadura transversal em quantidade insuficiente, a ruptura pode ocorrer também por escoamento do estribo.

b) encaixe dos agregados: a irregularidade das superfícies da fissura é responsável pela transferência do esforço cortante através do encaixe ou engrenamento dos agregados; isso ocorre quando há um deslocamento relativo entre suas faces, v.fig.II.14.

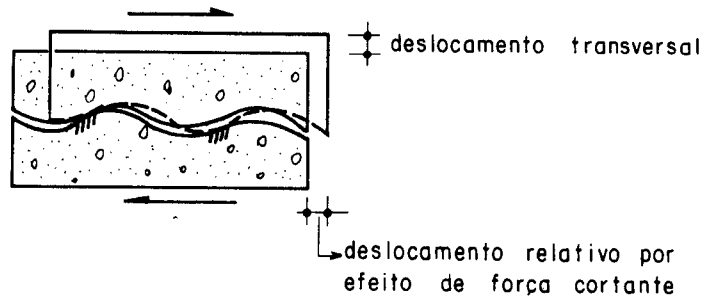


Fig. II.14 - Encaixe dos agregados

É interessante ressaltar que o deslocamento tangencial relativo só é possível por um aumento na abertura inicial da fissura (dilatância). Entretanto, a transmissão da força cortante só será efetiva na medida em que haja impedimento à separação das superfícies da fissura. Esse impedimento poderá ser exercido pela massa de concreto que envolve a fissura ou por intermédio de barras de armadura que a atravessam.

Assim sendo, o tamanho dos agregados, a abertura inicial da fissura e a taxa de armadura que a atravessa são alguns dos componentes na resistência ao cisalhamento.

SEÇÃO II
FUNDAMENTOS TEÓRICOS

CAPÍTULO I

FUNDAMENTOS DA TEORIA DA PLASTICIDADE

I.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS E INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentam-se os fundamentos da teoria da plasticidade necessários para a elaboração da relação constitutiva de um material de comportamento elasto-plástico.

Na maior parte do capítulo a abordagem é feita no espaço das tensões sendo que no último item, apresenta-se a formulação da relação constitutiva no espaço das deformações.

A exposição da teoria pode parecer longa mas, propositadamente, optou-se por esta forma com a intenção de facilitar a compreensão de sua aplicação na formulação dos modelos para o concreto.

O conteúdo do capítulo foi elaborado principalmente com base em FEIJÃO e TAROCO (1980). Entretanto, também foram consultados: MENDELSON (1968), CARNEIRO (1968), KACHANOV (1971), SAVE e MASSONET (1972), MARTIN (1975), ZIENKIEWICZ (1977), ZAGOTTIS (1981), LAMAS (1982), CHEN (1982), PIMENTA (1987) e HAN (1987).

É necessário ressaltar, de início, que a teoria da plasticidade foi originalmente destinada à análise de materiais metálicos, razão pela qual a eles se faz frequente menção nesta parte do texto.

O regime de comportamento plástico de um material fica evidenciado pelo aparecimento de deformações irreversíveis, ou permanentes, quando se anula a solicitação a que o corpo esteja sujeito.

Por outro lado, as deformações plásticas aparecem simultaneamente com as tensões que excedem um determinado limite, denominado limite de escoamento.

Essas características do comportamento plástico podem ser observadas a partir de uma análise puramente fenomenológica num ensaio de tração simples.

Na figura I.1 estão ilustrados os aspectos principais do comportamento plástico, real e idealizado, em um material metálico.

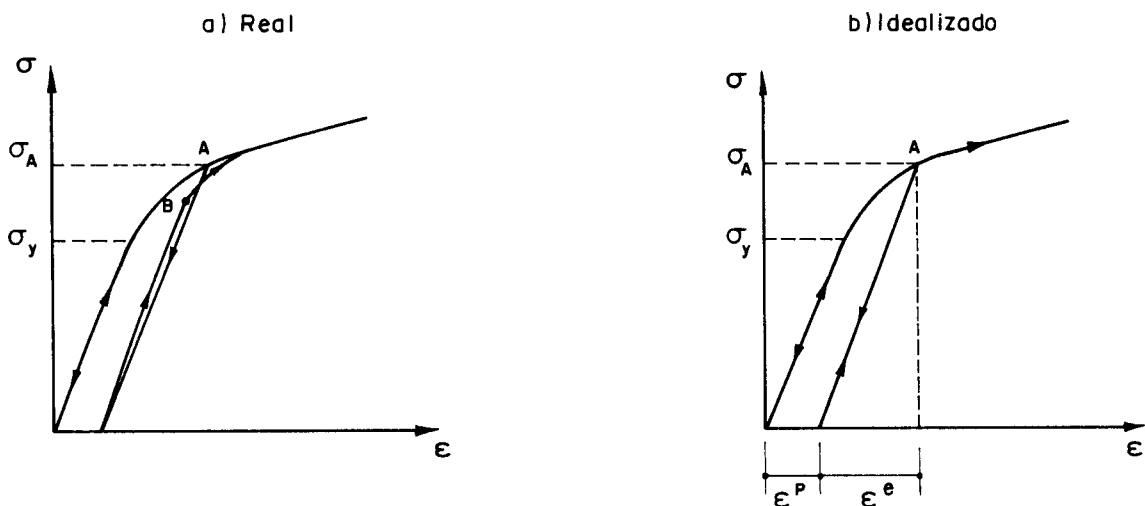


Fig. I.1 - Comportamento plástico

Duas regiões ficam nitidamente destacadas para uma situação de carga-descarga-carga.

A primeira delas, limitada superiormente por uma tensão σ_y , caracteriza, no caso, o regime elástico linear.

Nele, para sucessivas situações de carga e descarga, cumprindo ciclos completos de tensão, o caminho percorrido é o mesmo sem o aparecimento de deformações residuais.

A segunda região caracteriza o regime plástico. Nesse regime, na figura I.1a) evidenciado quando o corpo está solicitado por um nível de tensão $\sigma_A > \sigma_y$, a descarga não se dá mais pelo mesmo caminho percorrido na carga, mas por um trajeto aproximadamente paralelo ao do regime elástico. Resulta em consequência, no nível nulo de tensão, uma deformação residual denominada de deformação plástica. Desse modo, pode-se concluir que a deformação total, correspondente ao nível de tensão σ_A , é composta de uma parcela elástica, recuperável, e outra plástica, irrecuperável.

Prosseguindo com uma nova etapa de carga o caminho percorrido é novamente linear, estendendo-se até um ponto B ao qual corresponde uma tensão maior que σ_y . A partir daí a tendência da curva é a de atingir a mesma região que seria definida se o carregamento tivesse sido contínuo, sem a primeira descarga. Nessa nova etapa de carga, a tensão de escoamento σ_y está com um novo valor definido em função do aparecimento da deformação plástica anterior. Esse fenômeno é denominado de encruamento.

O comportamento real é, por motivos de simplificação da análise teórica, os quais serão esclarecidos mais adiante, idealizado pela forma mostrada na figura I.1b) Despreza-se o ciclo de histerese apresentado a partir da sucessão de carga-descarga-carga no regime plástico e, admite-se que na nova situação de carga o regime elástico linear se estenda até o nível de tensão σ_A .

Outro fenômeno evidenciado nos metais e característico do comportamento no regime plástico é o efeito Bauschinger (v. fig. I.2), resumidamente comentado no que segue.

Seja um metal com tensões limites de escoamento σ_y , iguais na tração e na compressão. Solicitando-se o corpo com uma carga de tração por exemplo, saindo de um estado inicial isento de deformações permanentes para um nível

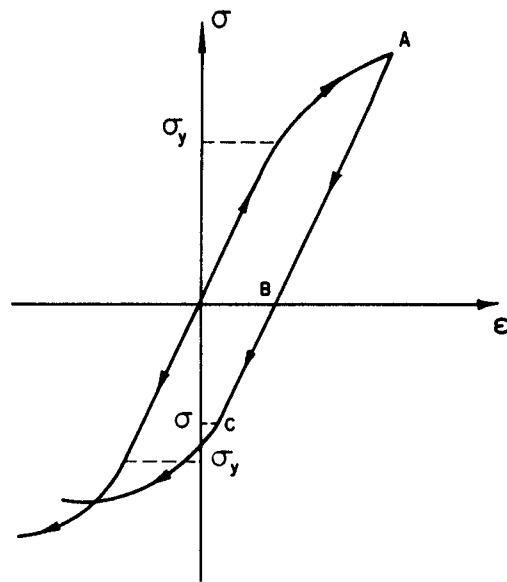


Fig. I.2 - Efeito Bauschinger

de tensão superior a σ_y (ponto A), e efetuando-se então a descarga (trecho A-B) seguida de uma carga em sentido oposto (trecho B-C), isto é, uma compressão, observa-se que a tensão limite é atingida com um valor inferior a σ_y . A presença de deformações permanentes, portanto, modifica as características físicas do material (introduz anisotropia).

Quanto ao comportamento em regime plástico, observa-se no aço doce uma pequena região de endurecimento seguida de um patamar em que as deformações crescem sem um aumento significativo das tensões (v.fig.I.3a)); por outro lado, de um modo geral pode-se afirmar que as ligas não apresentam um patamar de escoamento definido. Já os outros materiais experimentam, a partir de um determinado nível de tensão, o amolecimento, ou seja, acréscimos de deformação correspondentes a níveis cada vez menores de tensões (v.fig. I.3b)). O caso indicado na figura I.3c), que poderia ser imaginado, não tem correspondência física experimental.

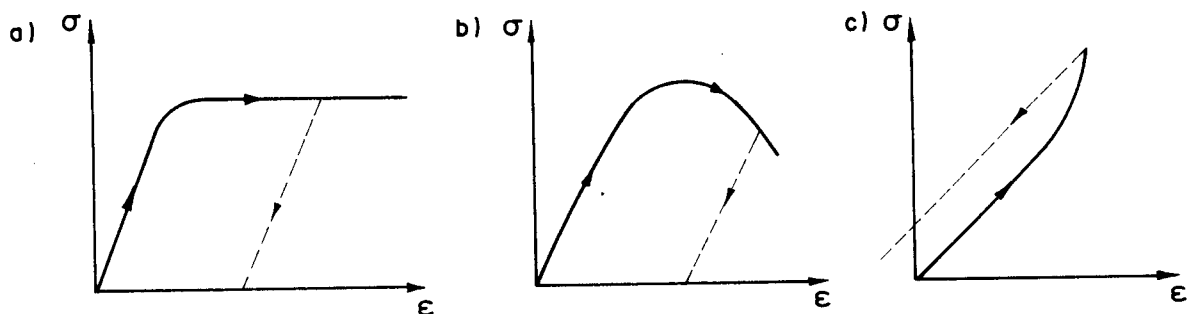


Fig. I.3 - Comportamento plásticos gerais

No que segue, a teoria da plasticidade é apresentada, em primeiro lugar, através de sua formulação no espaço das tensões. Nesse caso a abordagem é válida para materiais elastoplásticos com endurecimento. Posteriormente, apresenta-se uma formulação no espaço das deformações, a qual inclui materiais de comportamento elastoplástico com amolecimento.

I.2 - MODELOS REOLÓGICOS EM PLASTICIDADE

Pode-se exemplificar a aplicação dos modelos fundamentais da reologia para simular o comportamento plástico dos materiais. Recordar-se apenas que o comportamento elástico linear é representado por uma mola de rigidez igual ao módulo de elasticidade do material. Já o modelo rígido perfeitamente plástico é simulado por um sólido que escorrega sobre uma superfície sob a ação de uma força (nesse caso a força de atrito corresponde à tensão de escoamento).

O modelo elástico perfeitamente plástico é representado pelo arranjo em série da mola com o sólido (v. fig. I.4).

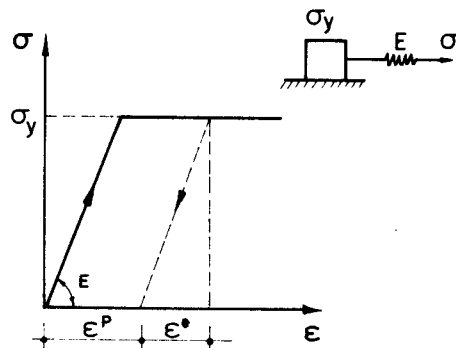


Fig. I.4 - Elastoplástico perfeito

O arranjo em sêrie se caracteriza pela igualdade das tensões nos dois elementos, ao passo que a deformação total é obtida pela soma das parcelas de cada elemento. No caso, enquanto $\sigma < \sigma_y$ a deformação total é composta apenas da parcela da mola.

O caso ideal do comportamento rígrado com endurecimento linear pode ser simulado por um arranjo em paralelo do sólido com a mola (v.fig.I.5).

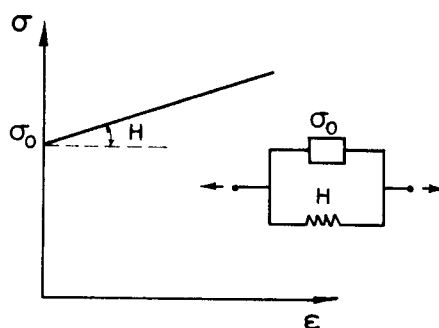


Fig. I.5 - Rígrado com endurecimento linear

Nesse arranjo a deformação é a mesma nos dois elementos; já a tensão é composta da soma das parcelas de cada um dos elementos. A deformação é, para este comportamento, sempre igual à deformação plástica, para $\sigma > \sigma_0$. Define-se o parâmetro de endurecimento H , pela razão entre a parcela de tensão que excede a σ_0 e a deformação plástica.

$$H = \frac{(\sigma - \sigma_0)}{\epsilon^P} \quad (I.1)$$

Um comportamento bilinear, por exemplo, pode ser representado por um arranjo misto, como indicado na figura I.6.

Nesse caso, pelas características da ligação, para $\sigma > \sigma_0$ valem as seguintes expressões:

$$\epsilon = \epsilon^M + \epsilon^P$$

$$\sigma = \sigma_0 + H \cdot \epsilon^P \quad (I.2)$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon^M$$

onde ϵ^P é a parcela de deformação do conjunto em paralelo.

Combinando as relações (I.2) resulta:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{(\sigma - \sigma_0)}{H} \quad (I.3)$$

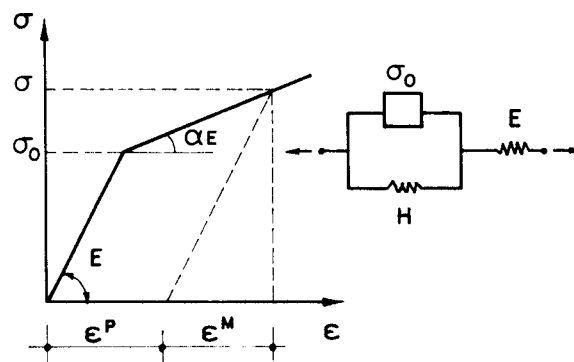


Fig. I.6 - Comportamento bilinear.

Observa-se que a definição do parâmetro de endurecimento é a mesma dada pela (I.1). Neste modelo H deve ser interpretado como a inclinação da parte que representa o regime de endurecimento na curva tensão-deformação, depois de retirada a parcela elástica da deformação (v. fig. I.7).

A relação entre H e os parâmetros que definem as inclinações dos trechos lineares da curva pode ser obtida pelo seguinte desenvolvimento

$$H = \frac{(\sigma - \sigma_0)}{\epsilon^p} = \frac{(\sigma - \sigma_0)}{\epsilon - \epsilon^e} \quad (I.4)$$

$$H = \frac{\frac{(\sigma - \sigma_0)}{\alpha E} - \frac{(\sigma - \sigma_0)}{E}}{\frac{(\sigma - \sigma_0)}{\alpha E} - \frac{(\sigma - \sigma_0)}{E}} = \frac{\alpha E}{(1 - \frac{\alpha E}{E})} \quad (I.5)$$

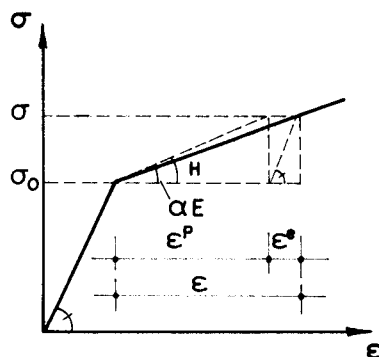


Fig. I.7 - Interpretação de H.

Por outro lado, para muitos materiais as relações tensão-deformação são não lineares seja na região plástica, ou mesmo, na região elástica. Nesses casos é necessário adotar, nos modelos reológicos, molas com coeficientes de rigidez não lineares. Apesar de que em alguns casos se pode determinar expressões com razoável aproximação, não é este procedimento o mais produtivo (porque nem sempre são possíveis ciclos completos que caracterizam o comportamento plástico). Recorre-se então ao tratamento numérico incremental, prática aliás que permitiu estender os conceitos básicos da plasticidade aos meios contínuos (mesmo porque o tratamento incremental permite considerar também uma eventual descarga).

I.3 - POSTULADOS DE DRUCKER

Por razões de unicidade de solução para o tratamento matemático da teoria da plasticidade formulada no es

paço das tensões, apenas dois casos de comportamento dos materiais poderão ser considerados: o elastoplástico perfeito e o elastoplástico com endurecimento.

A limitação a esses dois tipos de comportamento é feita através dos postulados de Drucker, apresentados aqui com referência aos resultados de um ensaio uniaxial.

Para um melhor entendimento dos postulados é interessante analisar os dois comportamentos típicos, sob o ponto de vista da energia envolvida no processo (v.fig.I.8).

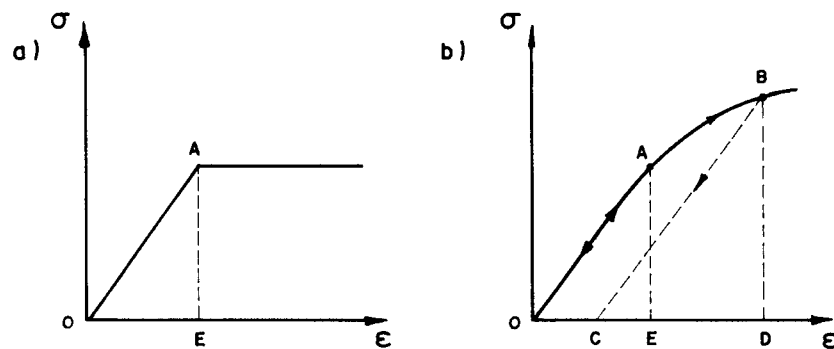


Fig. I.8 - Análise da energia

Seja, por exemplo, o comportamento ilustrado na figura I.8b).

Quando se efetua um carregamento dentro dos limites do regime elástico, trecho O-A, o trabalho envolvido, por unidade de volume, é dado pela área OAE por exemplo. Na descarga todo esse trabalho é restituído, não aparecendo dissipação de energia.

Por outro lado, quando o carregamento atinge um nível de tensão para além do regime elástico, por exemplo o ponto B, o trabalho envolvido por unidade de volume é dado pela área OABD. Entretanto na descarga apenas a parcela referente à área BCD é recuperada pela estrutura, dissipando-se a energia referente à área OABC. Ora, a área BCD está em correspondência com a parcela elástica, ou recuperável, da deformação; e a área OABC tem, por sua vez, correspondência com a parcela plástica irre recuperável da deforma-

ção. Conclui-se, portanto, que ao aparecimento de deformações plásticas está associada uma dissipação de energia.

O primeiro postulado de Drucker trata da variação simultânea e de mesmo sentido entre tensões e deformações. Matematicamente essa condição é expressa da seguinte forma:

$$d\sigma \cdot d\varepsilon \geq 0 \quad (\text{I.6})$$

O segundo postulado faz referência à energia envolvida num ciclo de tensões, através da expressão matemática do trabalho complementar.

$$\oint \varepsilon d\sigma < 0 \quad (\text{I.7})$$

Pela análise da expressão (I.6) se observa que não é possível considerar um material com comportamento como o indicado na figura I.3b); entretanto não se exclui a possibilidade mostrada na figura (I.3c). Já com o segundo postulado, essa possibilidade fica eliminada pela análise do trabalho complementar, (v.fig.I.9).

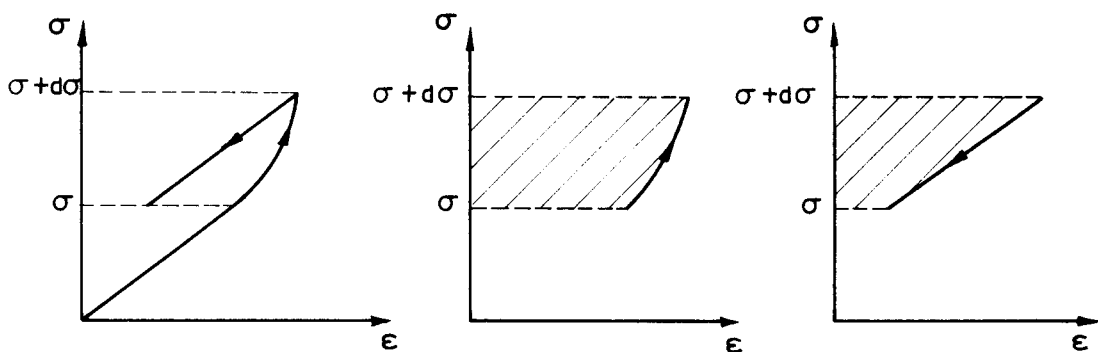


Fig. I.9 - Análise do trabalho complementar.

O segundo postulado elimina também casos como o da figura I.10 em que, seguindo a uma descarga elástica, a nova carga, fechando o ciclo de tensão, não passa pelo mesmo caminho. Como já foi comentado, num ciclo elástico de tensões não há energia dissipada.

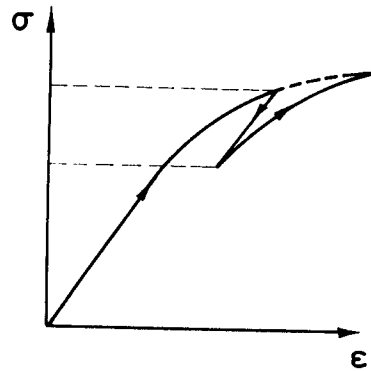


Fig. I.10 - Ciclo de descarga-carga.

É interessante ressaltar que os postulados de Drucker, embora abordados sob forma simplificada numa análise unidimensional, evidenciam algumas propriedades importantes, e de caráter geral, para o estabelecimento coerente da teoria. A lei da normalidade e a convexidade da superfície de escoamento, quando se trata da plasticidade em meios contínuos com estados de tensão multiaxiais, são exemplos dessas propriedades.

I.4 - GENERALIZAÇÃO PARA O CONTÍNUO

No meio contínuo as relações descritas anteriormente entre σ e ϵ passam a ser estabelecidas entre duas grandezas tensoriais T e E , (em componentes T_{ij} e E_{ij} , $i, j = 1, 3$), respectivamente, o tensor representativo do estado de tensão no ponto e o tensor representativo do estado de deformação.

Já foi observado no ensaio de tração simples de um material com endurecimento, que no regime plástico tudo se passa como se a tensão de escoamento fosse uma função da deformação plástica definindo, com relação a processos sucessivos de descarga e carga, novos limites para a região elástica. Assim, os limites da zona elástica estão relacionados com os valores da deformação plástica acumulada, a qual só varia quando há um processo de carga que conduza a valores de tensão para fora da região elástica.

Em estados de tensão multiaxiais o limite da região elástica inicial fica representada no espaço das tensões por uma superfície, a qual separa os estados de tensão elásticos daqueles que geram deformações permanentes (v.fig.I.11).

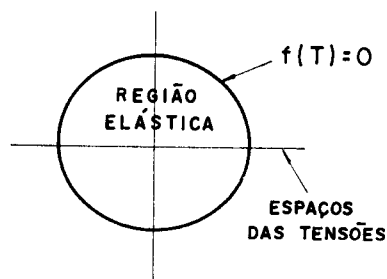


Fig. I.11 - Superfície inicial de escoamento.

Deve-se observar que o estado de tensão num ponto do corpo é representado por um ponto no espaço das tensões. Na consideração de um material homogêneo e inicialmente isótropo os eixos coordenados no espaço podem ser relacionados às tensões principais, resultando daí uma representação tridimensional possível da superfície.

A superfície inicial de plastificação tem sua representação matemática genérica dada pela seguinte expressão

$$f(T) = 0 \quad (I.9)$$

Essa representação é feita de tal modo que, por convenção, acréscimos de tensão que conduzam a valores negativos da expressão (I.9) indicam um regime elástico no ponto (situação de descarga). Acréscimos que verifiquem aquela expressão indicam uma situação limite (situação de carregamento neutro). Já acréscimos de tensão que conduzam a valores positivos de $f(T)$ são ditos inacessíveis pois indicam geração de deformações permanentes (processo de carga).

A nomenclatura "estados inacessíveis" vem da observação do que ocorre na análise unidimensional com a região elástica. Isto é, há, por assim dizer, uma variação da

tensão inicial de escoamento com o aparecimento da deformação plástica, fazendo com que a superfície inicial de escoamento sofra uma evolução no espaço das tensões, de tal modo que o ponto representativo do novo estado de tensão, $(T + dT)$, resulte ainda sobre ela (v.fig.I.12).

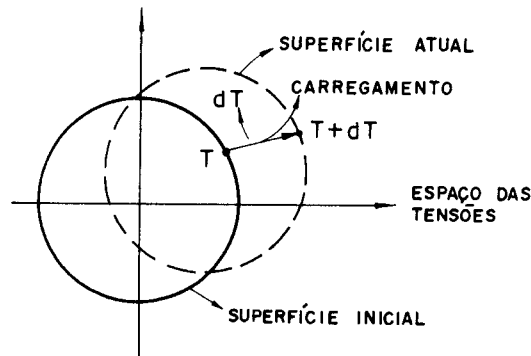


Fig. I.12 - Movimentação da superfície inicial.

Um incremento do estado de tensão no ponto, que gere deformação plástica, denomina-se carregamento. Um outro que conduza a um ponto no interior da superfície é denominado descarregamento.

Portanto, a superfície atual só tem sua "posição" no espaço das tensões alterada quando há um processo de carregamento.

Tendo em vista as idéias anteriores, para estabelecer uma forma de representação matemática genérica da superfície de escoamento, de modo a incluir também sua evolução num processo de carga, é necessário introduzir uma outra variável, por sua vez função da variação da deformação plástica. A ela normalmente se refere a literatura como sendo uma variável relacionada à história do material, aparecendo o termo história como indicativo da deformação plástica acumulada, ou efetiva, no processo. Na realidade essa nova variável nada mais é do que uma maneira de representar o endurecimento do material.

Assim sendo, a dependência da superfície de plastificação com a história pode ser traduzida na expressão

$$f(T, H_{\alpha}) = 0 \quad (\text{I.10})$$

onde H_{α} representa o conjunto de parâmetros que definem a história ($\alpha = 1, 2, \dots, n$), ou o endurecimento do material. (*)

Evidentemente, sob o ponto de vista de representação, o espaço tem sua dimensão ampliada, acrescentado de um número de vetores base necessários para representar H_{α} . Nessas condições, para um valor fixo de H_{α} o espaço das tensões passa a ser um subespaço. Assim sendo a superfície inicial de escoamento corresponde, por definição, a $H_{\alpha} = 0$ (uma situação com deformação plástica nula).

Por outro lado, como há uma evolução da superfície, o ponto representativo do novo estado de tensões que resultou de um processo de carga, deve estar sobre a superfície alterada (v.fig.I.12). Matematicamente isso se traduz por:

$$f(T + dT, H_{\alpha} + dH_{\alpha}) = 0 \quad (\text{I.11})$$

ou, tendo-se em vista a (I.10)

$$df = 0 \quad (\text{I.12})$$

É interessante comentar neste ponto do texto que a evolução da superfície de escoamento pode se dar de dois modos fundamentalmente.

O primeiro é denominado modelo de endurecimento isotrópico e admite que a superfície evolua mantendo sua forma inicial sem sofrer translação, v.fig.I.13a). Isso corresponde a uma manutenção das características iniciais de isotropia do material. Esse modelo se presta bem para a simu-

(*) Os parâmetros de H representam o movimento e a deformação da superfície dada por (I.9).

lação teórica do comportamento de materiais com carregamento sempre crescente, pois não é possível por meio dele representar, por exemplo, o efeito Bauschinger.

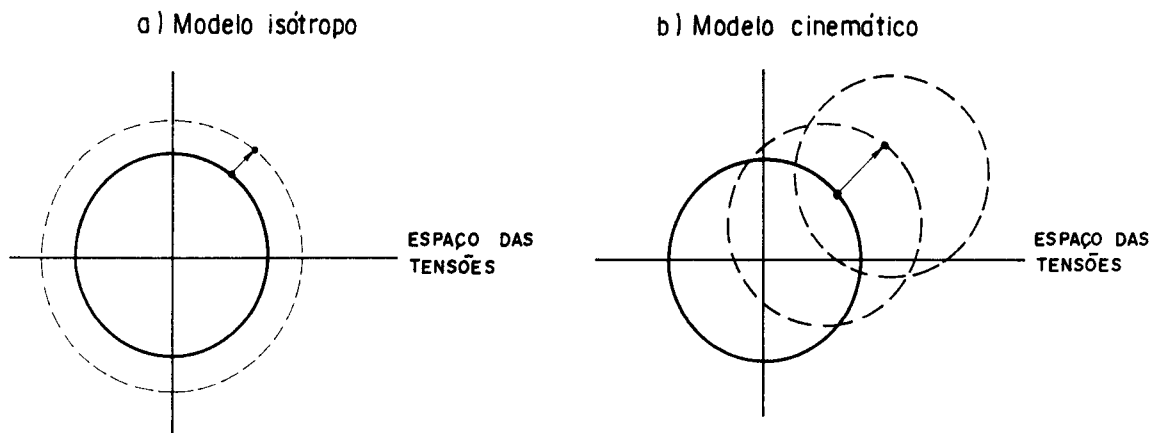


Fig. I.13 - Modelos fundamentais de encruamento

O segundo modelo é denominado cinemático e admite que a superfície sofra uma translação sem alteração da forma inicial. Esse modelo permite a simulação do efeito Bauschinger (v.fig.I.13b)).

Modelos mistos podem ser idealizados, porém tornam mais laborioso o tratamento matemático.

I.4.1 - Convexidade e regra da normalidade

A extensão dos postulados de Drucker para o contínuo leva a duas importantes conclusões: uma no que diz respeito à convexidade da superfície de escoamento e outra, relacionada ao vetor das deformações plásticas, a denominada regra da normalidade.

De fato, admita-se, para um determinado valor de H_α , uma superfície de escoamento definida no espaço das tensões. Seja, nesta situação, E^{Pa} o vetor das deformações plásticas e T^a um ponto interior à superfície e representativo do estado atual de tensões. Admita-se ainda que a partir desse ponto se efetue um ciclo completo de tensões, de modo a gerar um acréscimo no vetor das deformações plásticas, (v.fig.I.14).

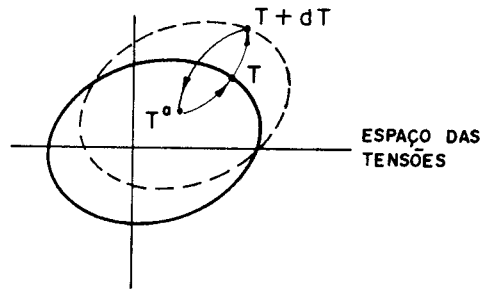


Fig. I.14 - Ciclo de tensões

O novo estado de tensão, obtido a partir da situação de carregamento $T + dT$, deverá estar sobre a nova posição da superfície de escoamento. A ele corresponde o acréscimo de deformação plástica dE^P .

De acordo com o segundo postulando de Drucker o trabalho complementar efetuado no ciclo de tensões deve ser negativo ou nulo, condição esta expressa por:

$$\oint E \cdot dT = \int_{T^a}^T E \cdot dT + \int_T^{T+dT} E \cdot dT + \int_{T+dT}^{T^a} E \cdot dT \leq 0 \quad (I.13)$$

Lembrando que a deformação total é composta, genericamente, de uma parcela elástica e outra plástica, a expressão (I.13) pode ser desenvolvida para a forma:

$$\begin{aligned} \oint E \cdot dT &= \int_{T^a}^T E^e \cdot dT + \int_{T^a}^T E^{Pa} \cdot dT + \int_T^{T+dT} E^e \cdot dT + \\ &\int_T^{T+dT} E^P \cdot dT + \int_{T+dT}^{T^a} E^e \cdot dT + \int_{T+dT}^{T^a} E^{Pa} \cdot dT + \\ &\int_{T+dT}^{T^a} dE^P \cdot dT \end{aligned} \quad (I.14)$$

A última expressão pode ser arranjada para a forma:

$$\oint E \cdot dT = \oint E^e \cdot dT + \oint E^{pa} \cdot dT + \int_T^{T+dT} (E^P - E^{pa}) \cdot dT + \int_{T+dT}^{T^a} dE^P \cdot dT \quad (*) \quad (I.15)$$

Analisando a (I.15), conclui-se que a primeira parcela do segundo membro é nula por se tratar do trabalho elástico num ciclo fechado. A segunda parcela é igualmente nula, pois E^{pa} é constante e o ciclo é de tensão. A terceira parcela é um infinitésimo de ordem superior comparada às outras. A última parcela pode ser integrada, com dE^P constante, resultando, após as simplificações,

$$\oint E \cdot dT = (T^a - T) \cdot dE^P \leq 0 \quad (I.16)$$

A (I.16) pode ser colocada na forma

$$(T - T^a) \cdot dE^P \geq 0 \quad (I.17)$$

Interpretando $(T - T^a)$ como um vetor no espaço das tensões e dE^P como um outro vetor que pode ser representado no mesmo espaço (o espaço das tensões e das deformações tem as mesmas direções principais no caso do material isotrópico), conclui-se que as condições necessárias para que o produto interno indicado em (I.17) seja sempre verificado são a normalidade de dE^P à superfície, no ponto, e a convexidade da superfície; a figura I.15 ilustra essas conclusões.

(*) Nesta expressão, utilizou-se a condição $E^P = E^{pa} + (E^P - E^{pa})$

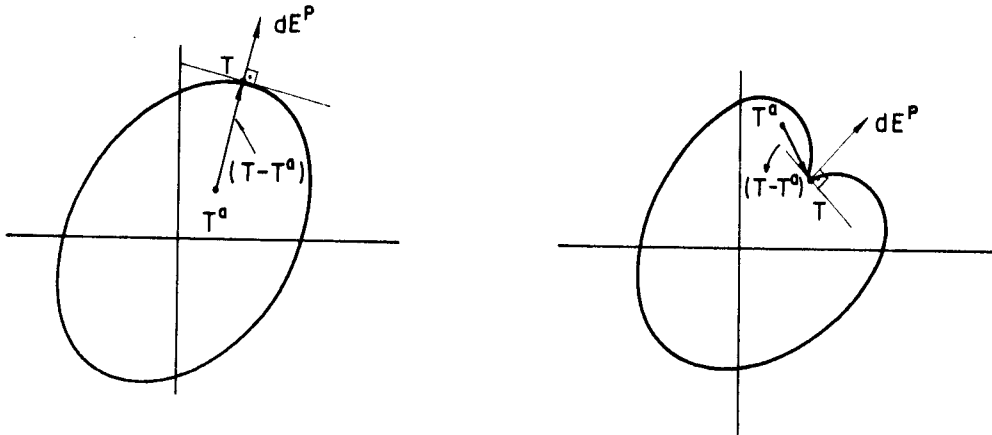


Fig. I.15 - Normalidade e convexidade

Também para fins de verificação da expressão (I.17) dE^P deve apontar para fora da superfície de escoamento.

Como dE^P é normal à superfície representada no espaço das tensões, ele pode ser colocado matematicamente na forma

$$dE^P = \lambda f_T, \quad \lambda > 0 \quad (\text{I.18})$$

onde λ é um escalar positivo para assegurar que dE^P esteja orientado segundo a normal exterior, uma vez que f_T é um vetor que aponta, por definição, no sentido exterior à superfície f .

I.4.2 - Relação constitutiva incremental

O procedimento para a obtenção da relação constitutiva incremental para um material com endurecimento é aqui apresentado, nos seus passos iniciais, como um conjunto de condições que permitam simular algumas das conclusões obtidas nos itens anteriores. Não se fará uso imediato das postulações de Drucker.

Essa estrutura geral será, posteriormente, comparada com os resultados fornecidos pelos postulados, obtendo-se, então, a formulação definitiva da relação constitutiva.

Assim sendo, vale ressaltar algumas das conclusões anteriores que servem aos objetivos da generalização:

- a) A todo ponto material, sujeito a um certo estado de tensões, corresponde um domínio elástico no espaço das tensões (no qual está contido, em seu interior ou fronteira, aquele estado de tensões).
- b) O domínio elástico está limitado pela superfície de plastificação (hipersuperfície).
- c) Se um novo estado de tensões ainda permanece no interior da região elástica, ou sobre ela, a região elástica e, por consequência, a superfície de plastificação, não sofrem qualquer modificação.
- d) Todo acréscimo no estado de tensões que conduza a um ponto para além dos limites da superfície de plastificação atual produz, necessariamente, deformações plásticas; conseqüentemente, alteram-se a região elástica e a própria superfície.

Considere-se então a expressão (I.10); nela está apresentada a dependência da função de plastificação f das variáveis estado de tensão no ponto e história da deformação plástica acumulada. Pois bem, para parâmetros dessa história, adotam-se o tensor de deformação plástica E^P e um escalar h , que estará associado aos distintos modelos de endurecimento por deformação (isótropo, cinemático e misto).

Desse modo, a superfície de plastificação pode ser sempre representada para uma certa história do ponto material, ou seja, E_p e h constantes, o que, em outras palavras, é o resultado da projeção de f sobre o espaço das tensões.

Isto pôsto, as regiões elástica e inacessível passam a ser caracterizadas por:

$$f(T, E^P, h) \Big|_{E^P, h = \text{ctes}} \leq 0 \quad \text{região elástica}$$

$$f(T, E^P, h) \Big|_{E^P, h = \text{ctes}} > 0 \quad \text{região inacessível}$$

Na hipótese de f ser continuamente diferenciável, resulta

$$df \Big|_{E^P, h = \text{ctes}} = f_T \cdot dT \quad (\text{I.19})$$

expressão bastante útil para caracterizar os processos de carga, descarga e neutro oriundos da variação do estado de tensões num ponto que já estava situado sobre a superfície de plastificação.

Portanto,

. Processo de descarga

$$f = f(T, E^P, h) = 0 \quad \text{e} \quad df \Big|_{E^P, h = \text{ctes}} < 0 \quad \text{ou} \quad f_T \cdot dT < 0$$

. Processo neutro

$$f = f(T, E^P, h) = 0 \quad \text{e} \quad df \Big|_{E^P, h = \text{ctes}} = 0 \quad \text{ou} \quad f_T \cdot dT = 0$$

. Processo de carga

$f = f(T, E^P, h) = 0$; $f_T \cdot dT > 0$ e ainda, como $df = 0$ e neste processo variam necessariamente E^P e h ,

$$f_{E^P} \cdot dE^P + f_h \cdot dh = -f_T \cdot dT < 0$$

Observa-se que as condições acima estão definidas em função da componente de dT direcionada com a normal à superfície de plastificação (f_T), fato que é imposto por $f_T \cdot dT$.

Conhecido o estado (T, E^P, h) e o incremento do estado de tensões dT , incrementos de deformação plástica dE^P só ocorrerão nos processos de carga modificando, em sequência, a história registrada. Assim sendo, com suficiente generalidade, pode-se afirmar que dE^P é uma função de valor tensorial nos argumentos T, E^P, h e dT .

Tendo em vista, por outro lado, que incrementos de deformação plástica são simultâneos a incrementos do estado de tensão (num processo de carga), e que, portanto, são desprezados efeitos viscosos, é necessário admitir a homogeneidade da função dE^P com relação a dT , isto é

$$dE^P = E^P(T, E^P, h, \alpha dT) = \alpha E^P(T, E^P, h, dT) \quad (I.20)$$

Assim sendo, passa-se a independer de uma escala para o tempo, sendo imediata, então, a possibilidade de trabalhar com velocidades de deformação plástica e de tensão. De fato:

$$\dot{E}^P = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} E^P(T, E^P, h, dT) = E^P(T, E^P, h, \dot{T}) \quad (I.21)$$

De acordo com essas condições, a existência ou não de uma velocidade (ou taxa) de deformação plástica passa a ser caracterizada por:

$$\dot{E}^P = 0 \begin{cases} \text{se } f(T, E^P, h) < 0 & \text{(processo elástico)} \\ \text{se } f(T, E^P, h) = 0 \text{ e } f_T \cdot \dot{T} \leq 0 & \text{(processo neutro ou de descarga)} \end{cases}$$

$$\dot{E}^P = E^P(T, E^P, h, \dot{T}) \text{ se } f(T, E^P, h) = 0 \text{ e } f_T \cdot \dot{T} > 0 \\ \text{(processo de carga)}$$

É interessante observar que a condição $\dot{E}^P = 0$ se $f = 0$ e $f_T \cdot dT = 0$, garante a existência de uma transição suave entre uma situação de descarga e outra de carga, isto é, sem que haja descontinuidade na relação constitutiva. Essa condição é denominada condição de consistência.

Uma expressão simples para a relação entre velocidades de deformação plástica e velocidades de tensão, satisfazendo as restrições estabelecidas, é, por exemplo:

$$\dot{E}^P = \mathbb{K}^P \dot{T} \quad (\text{I.22})$$

onde \mathbb{K}^P é um tensor de quarta ordem que depende somente do estado atual de tensões e da história,

$$\mathbb{K}^P = \mathbb{K}^P (T, E^P, h) \quad (\text{I.23})$$

Para que a condição de consistência (relativa ao carregamento neutro) seja satisfeita, a função tensorial pode ter a forma:

$$\mathbb{K}^P (T, E^P, h) = \frac{1}{G} (g_T \otimes f_T) \quad (\text{I.24})$$

pois ao se efetuar sua substituição na (I.22), obtém-se

$$\dot{E}^P = \frac{1}{G} (g_T \otimes f_T) \dot{T} = \frac{1}{G} (f_T \cdot \dot{T}) g_T \quad (\text{I.25})$$

A expressão acima garante, portanto, a verificação da condição de carregamento neutro.

Na (I.24) foram definidas duas outras grandezas: $G = G(T, E^P, h)$ de natureza escalar, associada, como se verá, ao endurecimento por deformação, e outra g_T , de natureza tensorial, que é o gradiente da denominada função potencial plástico $g = g(T, E^P, h)$ com relação a T .

O que se deve notar, de imediato, na análise da expressão (I.25) é a associação de E^P com a "direção" dada por g_T .

Em particular se pode adotar g como sendo a própria f , de modo que \dot{E}^P resulta "associada à normal" à superfície de plastificação, ou seja,

$$\dot{E}^P = \frac{1}{G} (f_T \otimes f_T) \dot{T} = \frac{1}{G} (f_T \cdot \dot{T}) f_T \quad (I.26)$$

Nessa situação, a definição de \dot{E}^P é feita através da chamada lei associativa, sendo que no caso geral, $g \neq f$, a lei é não associativa.

O escalar G , por sua vez, pode ser obtido por uma relação entre a função de plastificação f e o potencial plástico g .

Essa relação resulta de considerações do tipo: ao aparecimento de \dot{E}^P deve resultar, de imediato, um \dot{h} , e portanto a \dot{E}^P nulo, corresponde \dot{h} nulo. Logo, é possível admitir também entre \dot{E}^P e \dot{h} a hipótese de homogeneidade, de modo que a maneira mais simples de satisfazer as condições anteriores é:

$$\dot{h} = J(T, E^P, h) \cdot \dot{E}^P \quad (I.27)$$

onde $J(T, E^P, h)$ é uma função, de valor tensorial, do estado atual em que se encontra o ponto material (dado por T , E^P e h).

Assim, considerando que num processo de carga $\dot{E}^P \neq 0$ e que $\dot{f} = 0$, vem

$$\dot{f} = f_T \cdot \dot{T} + f_{E^P} \cdot \dot{E}^P + f_h \dot{h} = 0 \quad (I.28)$$

Substituindo na expressão anterior \dot{h} expresso pela (I.27), resulta

$$\dot{f} = f_T \cdot \dot{T} + f_{E^P} \cdot \dot{E}^P + f_h J \cdot \dot{E}^P = 0 \quad (I.29)$$

ou ainda, agrupando termos,

$$(f_{E^P} + f_h J) \cdot \dot{E}^P = -f_T \cdot \dot{T} \quad (I.30)$$

Considerando o resultado anterior na relação constitutiva dada pela (I.25), obtêm-se:

$$G = -(f_{E^P} + f_h J) \cdot g_T \quad (I.31)$$

ou então, no caso de validade da lei associativa

$$G = -(f_{E^P} + f_h J) \cdot f_T \quad (I.32)$$

Em resumo, a estrutura geral das relações constitutivas para materiais com endurecimento é a seguinte:

$$\dot{E}^P = 0 \begin{cases} \text{se} & f < 0 \\ \text{ou se} & f = 0 \text{ e } f_T \cdot \dot{T} < 0 \end{cases} \quad (I.33)$$

$$\dot{E}^P = \frac{1}{G} (f_T \cdot \dot{T}) g_T \quad \text{se } f = 0 \quad f_T \cdot \dot{T} \geq 0$$

Observa-se que agora estão combinados numa única expressão os processos neutro e de carga.

A estrutura geral expressa pelas (I.33) é interessante agregar algumas conclusões fornecidas pelos postulados de Drucker (para uma superfície de plastificação regular).

Em primeiro lugar, com relação a um ponto que está sobre a superfície de plastificação e submetido a um processo de carga, concluiu-se que \dot{E}^P deve estar orientado segundo a normal exterior à superfície no ponto T, ou seja,

$$\dot{E}^P = \lambda f_T, \quad \lambda \geq 0 \quad (I.34)$$

Por outro lado, pela relação constitutiva geral

$$\dot{E}^P = \frac{1}{G} (f_T \cdot \dot{T}) g_T$$

e, como se trata do mesmo fenômeno,

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{G} (f_T \cdot \dot{T}) \geq 0 \quad \text{e} \quad g_T = f_T \quad (\text{I.35})$$

Portanto, os postulados de Drucker impõem a lei associativa.

Além disso, pela mesma expressão (I.35), como $\dot{\lambda} > 0$ para $f_T \cdot \dot{T} > 0$ resulta que $G > 0$ (estritamente positivo), e da (I.32).

$$(f_{E^P} + f_h J) \cdot f_T < 0 \quad \text{se} \quad f = 0 \quad (\text{I.36})$$

Finalmente, a estrutura geral das relações constitutivas elastoplásticas fica dada pelas seguintes expressões:

$$\dot{E} = \dot{E}^e + \dot{E}^P \quad (\text{I.37})$$

$$\dot{T} = \mathbb{D} \dot{E}^e, \quad \dot{E}^e = \mathbb{D}^{-1} \dot{T} \quad (\text{I.38})$$

onde \mathbb{D} é o tensor de elasticidade simétrico positivo definido, dado, para materiais isotrópicos, por:

$$\mathbb{D} = 2 \mu \text{II} + \bar{\lambda} (\text{I} \otimes \text{I}) \quad (\text{I.39})$$

onde μ e $\bar{\lambda}$ são constantes de Lamé e II e I são tensores identidade de 4^a e 2^a ordens respectivamente. Complementam a relação constitutiva,

$$\dot{E}^P = 0 \quad \text{se} \quad f(T, E^P, h) < 0$$

$$\text{ou se} \quad f(T, E^P, h) = 0 \quad \text{e} \quad f_T \cdot \dot{T} < 0 \quad (\text{I.40})$$

$$\dot{E}^P = \dot{\lambda} f_T = \frac{1}{G} (f_T \otimes f_T) \dot{T} \quad \text{se } f(T, E^P, h) \quad \text{e } f_T \cdot \dot{T} \geq 0$$

$$\text{com } G > 0 \quad \text{e } \dot{\lambda} = f_T \cdot \dot{T} / G \geq 0$$

I.4.3 - Relação constitutiva incremental para materiais idealmente plásticos

O comportamento elástico perfeitamente plástico para um material sujeito a um estado uniaxial de tensões está mostrado na figura I.4.

O que se pode concluir desse comportamento, para fins de generalização a estados múltiplos de tensão, é que a superfície de plastificação permanece fixa no espaço das tensões independentemente portanto da história do carregamento, passando a ser expressa por $f = f(T)$.

Assim sendo, a região $f(T) > 0$ não pode ser atingida por nenhum processo (nem por geração de deformação plástica ou modificação da história).

As relações constitutivas para materiais idealmente plásticos podem ser consideradas como um caso limite do comportamento de um material com endurecimento por deformação.

Desse modo, a função de plastificação pode ser expressa por

$$f = f(T, cE^P, ch) \quad \text{com } c \rightarrow 0 \quad \text{e positivo (I.41)}$$

Portanto

$$\dot{f} = f_T \cdot \dot{T} + cf_{cE^P} \cdot \dot{E}^P + cf_{ch} J \cdot \dot{E}^P = 0 \quad (\text{I.42})$$

de onde se obtém

$$c(f_{cE^P} + f_{ch} J) \cdot \dot{E}^P = -f_T \cdot \dot{T} \quad (\text{I.43})$$

Conclui-se, nesse caso, que $f_T \cdot \dot{T} \rightarrow 0$ quando $c \rightarrow 0$

Por outro lado G passa a ser dado por

$$G = -c(f_{cEP} + f_{chJ}) \cdot f_T \quad (I.44)$$

ou seja $G \rightarrow 0$ quando $c \rightarrow 0$

Assim sendo, $\dot{\lambda}$ dado por (I.35) fica indeterminado; o que se pode ainda afirmar é que $\dot{\lambda} \geq 0$.

Em resumo, os materiais idealmente plásticos pas-
sam a ter a seguinte estrutura para as relações constitutivas.

$$\dot{E}^P = 0 \begin{cases} \text{se } f(T) < 0 \\ \text{ou se } f(T) = 0 \text{ e } f_T \cdot \dot{T} < 0 \end{cases} \quad (I.45)$$

$$\dot{E}^P = \dot{\lambda} f_T \quad \text{se } f(T) = 0 \text{ e } f_T \cdot \dot{T} = 0 \text{ com } \dot{\lambda} \text{ in-} \\ \text{determinado} \quad (*)$$

I.4.4 - Caso de superfícies de plastificação convexas des- contínuas

Neste caso, a normal pode não estar definida univocamente num ponto sobre a superfície, de modo que a direção do incremento de deformação plástica fica indeterminada.

O tratamento deste tipo de problema é feito mediante uma hipótese sobre o tipo de singularidade de f , hipótese esta devida a KOITER (1960).

Admite-se que a superfície singular é definida por um conjunto de n funções de plastificação independentes

(*) Observe-se que agora a desigualdade $f_T \cdot \dot{T} > 0$ já não é mais possível.

tes $f^\alpha(T, E^P, h)$, ($\alpha = 1, 2, \dots, n$), convexas e diferenciáveis em todos os pontos plasticamente admissíveis.

Desse modo $f = 0$ se caracteriza por ser a envolvente interior de todas as superfícies $f^\alpha = 0$, de maneira que as descontinuidades são definidas pelas interseções entre as superfícies (v.fig.I.16).

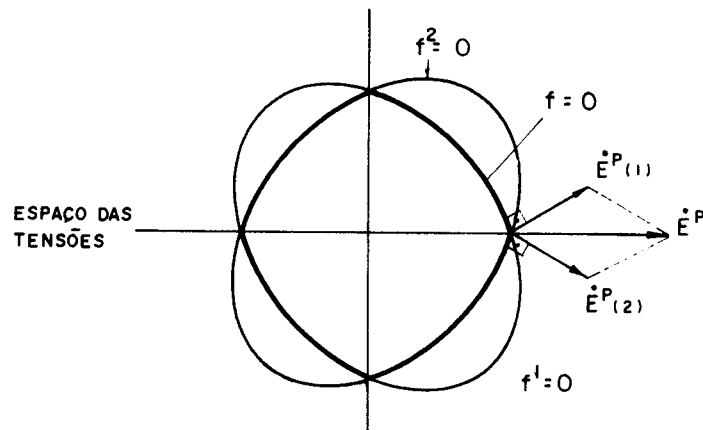


Fig. I.16 - Superfície com singularidades.

Como se observa, a direção do incremento de deformação plástica está contida no cone gerado pelas normais às funções que compõem a singularidade no ponto.

De modo analítico \dot{E}^P , para materiais com endurecimento por deformação, fica expresso por:

$$\dot{E}^P = \sum_{\alpha=1}^n \dot{E}^P(\alpha) \quad (\text{I.46})$$

onde,

$$\begin{aligned} \dot{E}^P(\alpha) &= 0 \quad \text{se} \quad f^{(\alpha)}(T, E^P, h) < 0 \\ &\text{ou se} \quad f^{(\alpha)}(T, E^P, h) = 0 \quad \text{e} \quad f_T^{(\alpha)} \cdot \dot{T} < 0 \end{aligned}$$

$$\dot{E}^P(\alpha) = \frac{1}{G(\alpha)} (f_T^\alpha \otimes f_T^\alpha) \quad \dot{T} \quad \text{se} \quad f^{(\alpha)} = 0 \quad \text{e}$$

$$f_T^{(\alpha)} \cdot \dot{T} \geq 0 \quad (\text{I.47})$$

com $G(\alpha) > 0$

Para materiais de comportamento elástico perfeitamente plástico, vale ainda a (I.46) onde:

$$\begin{aligned} \dot{E}^P(\alpha) = 0 \quad \text{se} \quad f^\alpha(T) < 0 \\ \text{ou se} \quad f^\alpha(T) = 0 \quad \text{e} \quad f_T^{(\alpha)} \cdot \dot{T} < 0 \end{aligned} \quad (\text{I.48})$$

$$\dot{E}^P(\alpha) = \dot{\lambda}(\alpha) f_T^{(\alpha)} \quad \text{se} \quad f^\alpha(T) = 0 \quad \text{e} \quad f_T^{(\alpha)} \cdot \dot{T} = 0$$

onde $\dot{\lambda}(\alpha) \geq 0$

I.5 - FUNÇÕES DE PLASTIFICAÇÃO

Estabelecidas as expressões gerais para as relações constitutivas de um material de comportamento elasto-plástico, resta agora desenvolver formas explícitas para a função de plastificação f e para o escalar G .

A superfície de plastificação inicial, correspondente ao material no seu estado virgem sem deformações plásticas, pode ser expressa somente em função do estado de tensões, isto é, por:

$$f(T) = 0 \quad (\text{I.49})$$

Admitindo, por outro lado, que o material é isotropo, a função f pode ser representada no espaço tridimensional das tensões principais, possibilitando, com isso, uma interpretação geométrica para sua expressão.

Além disso, como o valor fornecido por f deve ser o mesmo independentemente do sistema adotado para exprimir as componentes do estado de tensão, é interessante escolher como variáveis da função os invariantes I_1 , I_2 e I_3 do tensor das tensões. Desse modo, f passa a ser dada por:

$$f = f(I_1, I_2, I_3) \quad (\text{I.50})$$

De outro modo, como I_2 e I_3 podem ser colocados em função de I_1 , J_2 e J_3 , estes dois últimos invariantes do tensor anti-esférico S , a função de plastificação pode ser reescrita na forma:

$$f = f(I_1, J_2, J_3) \quad (\text{I.51})$$

a qual apresenta vantagens na sua interpretação geométrica,

No caso de aplicações em metais, a função de plastificação independe do invariante I_1 ou de estados hidrostáticos de tensão. Justifica-se este fato pela constatação de que variações na pressão hidrostática não produzem mudanças na deformação plástica (*). Assim sendo, nos metais vale escrever:

$$f = f(J_2, J_3) \quad (\text{I.52})$$

Justamente devido à ausência do primeiro invariante, pode-se mostrar que a representação de f no espaço tridimensional das tensões principais não poderá cruzar o eixo hidrostático, sendo, portanto, uma superfície cilíndrica de geratriz paralela ao eixo hidrostático (reta igualmente inclinada com respeito aos eixos coordenados).

I.5.1 - Superfície de Tresca

Tresca (1864) admitiu que a plastificação ocorreria uma vez que a tensão máxima de cisalhamento num ponto fosse alcançada. De um modo geral, este critério pode ser colocado na seguinte forma matemática:

(*) Vale dizer que nos metais as deformações plásticas ocorrem sem alteração de volume, produzindo apenas distorção ou mudança de forma. Na verdade, essas conclusões pressupõem a validade da lei da normalidade, não sendo válidas próximo da ruptura.

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max \left[\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2), \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3), \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \right] = k \quad (\text{I.53})$$

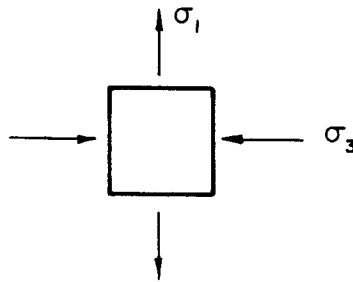
onde k , representando o valor de tensão de cisalhamento máxima, pode ser interpretado fisicamente a partir das seguintes situações:

- a) Cisalhamento puro: nestas condições as tensões principais valem $\sigma_1 = -\sigma_3$; $\sigma_2 = 0$, e, portanto

$$|\tau_{12}| = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} \quad (\text{I.54})$$

logo, o critério de Tresca se reduz a

$$|\tau_{12}| = k \quad (\text{I.55a})$$



- b) Tração simples: neste caso $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ e o critério de Tresca fornece

$$\sigma = 2k \quad (\text{I.55b})$$

isto é, a plastificação inicia com uma tensão σ de valor duas vezes superior à tensão de plastificação do estado de cisalhamento puro.

Expressando a função de Tresca em termos dos invariantes J_2 e θ , (*), resulta:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \theta - \cos\left(\theta + \frac{2}{3} \pi\right) = k \quad (\text{I.56})$$

ou

$$f(J_2, \theta) = \sqrt{J_2} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{1}{3} \pi\right) - k = 0 \quad (\text{I.57})$$

Lembrando ainda que $r = \sqrt{2J_2}$, f passa a ser escrita na forma:

$$f(r, \theta) = r \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{2} k = 0 \quad (\text{I.58})$$

a qual possui uma interpretação geométrica bastante simples no plano anti-esférico (v.fig.I.17).

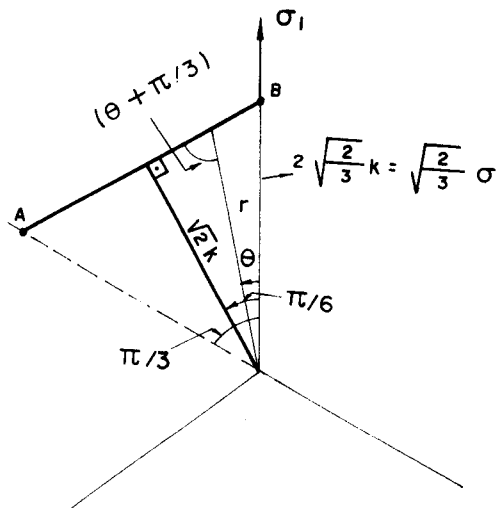


Fig. I.17 - Plano anti-esférico

Como se observa pela análise da figura, r varia segundo uma reta que passa pelos pontos A e B. Nesses pon-

(*) as expressões de correspondência encontram-se no apêndice I.

tos, correspondentes aos meridianos $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 60^\circ$, respectivamente, r assume o valor $2\sqrt{\frac{2}{3}}k$, enquanto que, em $\theta = 30^\circ$, r passa a valer $\sqrt{2}k$. De outro modo, a expressão (I.58) afirma que a variação de r com θ é regida por uma lei tal que sua projeção sobre $r|_{\theta = 30^\circ}$ vale sempre $\sqrt{2}.k$. Portanto a variação de r só pode ser linear.

Segundo essa interpretação é possível concluir que a superfície de plastificação de Tresca é representada em projeção no plano deviatórico, ou anti-esférico, por um hexágono regular. No espaço tridimensional das tensões principais ela corresponde a um prisma de base hexagonal.

I.5.2 - Superfície de von Mises

von Mises (1913) admitiu que a plastificação ocorreria uma vez que a tensão octaédrica de cisalhamento no ponto fôsse alcançada. Assim sendo, a expressão da superfície inicial seria dada por

$$f(\tau_{\text{oct}}) = \tau_{\text{oct}} = \bar{k} \quad (\text{I.59})$$

Tendo em vista a relação entre a tensão octaédrica e o segundo invariante do tensor deviatórico, (*)

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{2J_2}{3}} \quad (\text{I.60})$$

a superfície de plastificação passa a ter a seguinte expressão simplificada:

$$f(J_2) = \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (\text{I.61})$$

onde k , analogamente ao que foi feito para Tresca, pode ser interpretado fisicamente a partir das situações que seguem.

(*) essa relação está apresentada no apêndice I.

$$a) \text{ Cisalhamento puro: } \sigma_1 = -\sigma_3 \quad ; \quad \sigma_2 = 0$$

Nestas condições $\sqrt{J_2} = \tau_{12}$ e, portanto,

$$\tau_{12} = k \quad (\text{I.62})$$

$$b) \text{ Tração simples: neste caso } \sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

e o critério de von Mises se reduz a

$$\sigma = \sqrt{3} \quad k \quad (\text{I.63})$$

É interessante comparar os resultados obtidos para os estados de cisalhamento puro e tração simples, entre os critérios de Tresca e von Mises.

Em primeiro lugar o estado de cisalhamento puro apresenta resultados idênticos para as duas superfícies. Já o estado de tração simples tem a plastificação, segundo Tresca, a partir de um valor 15% maior do que aquele apresentado por von Mises.

Transformando a expressão (I.61) para uma função do parâmetro r do plano deviatórico, obtêm-se:

$$f(r) = r - \sqrt{2} \quad k = 0 \quad (\text{I.64})$$

ou ainda,

$$r = \bar{k} \quad (\text{I.65})$$

Fica evidenciado claramente, a partir da análise da última expressão, que a superfície de von Mises representa um cilindro de projeção circular no plano anti-esférico.

Por outro lado, tomando-se para \bar{k} o valor da tensão limite fornecida pelo estado de cisalhamento puro, o cilindro circular de Mises fica circunscrito ao hexágono de Tresca. De outro modo, se para a tensão de referência \bar{k} é adotado o valor limite fornecido pelo estado de tração

simples, o cilindro de Mises passa a circunscrever o hexágono de Tresca (*).

Deve-se observar que, qualquer que seja o valor adotado para \bar{k} , em função dos dois estados analisados, a diferença máxima entre os dois critérios é de 15%. Em termos práticos, a superfície de von Mises apresenta-se vantajosa por ser lisa e não ter as descontinuidades em primeira derivada ("arestas") mostradas pela de Tresca. Há, por outro lado, outra forte argumentação em favor da utilização de Mises, qual seja, a maior concordância com os resultados experimentais.

I.5.3 - Superfície de Mohr-Coulomb

Algumas funções procuram levar em consideração o efeito do primeiro invariante, a pressão hidrostática, na condição de plastificação do material. Tais funções aplicam-se a materiais granulares coesivos, como os solos argilosos e o concreto. Entre os critérios propostos com essa característica está o de Mohr-Coulomb, que tem como particularidade a dependência linear da função com o invariante I_1 .

Mohr (1900) imaginou que a plastificação num ponto ocorreria uma vez atingido um certo valor limite de tensão de cisalhamento, a qual por sua vez, seria dependente da tensão normal, atuante no mesmo plano.

O critério fica então governado pela seguinte relação matemática

$$|\tau| = \tau(\sigma) \quad (\text{I.66})$$

(*) Evidentemente, essas comparações a nível geométrico entre as superfícies são relativas à representação no espaço tridimensional das tensões principais.

onde $\tau(\sigma)$ é uma função determinada experimentalmente e se constitui na envoltória de vários círculos de Mohr traçados para diferentes estados de tensão (*).

Teoricamente, a expressão mais simples para $\tau(\sigma)$ é a função linear, ilustrada na figura (I.18) e representada por

$$|\tau| = c - \sigma \operatorname{tg} \phi \quad (\text{I.67})$$

onde c é a coesão e ϕ o ângulo de atrito interno do material.

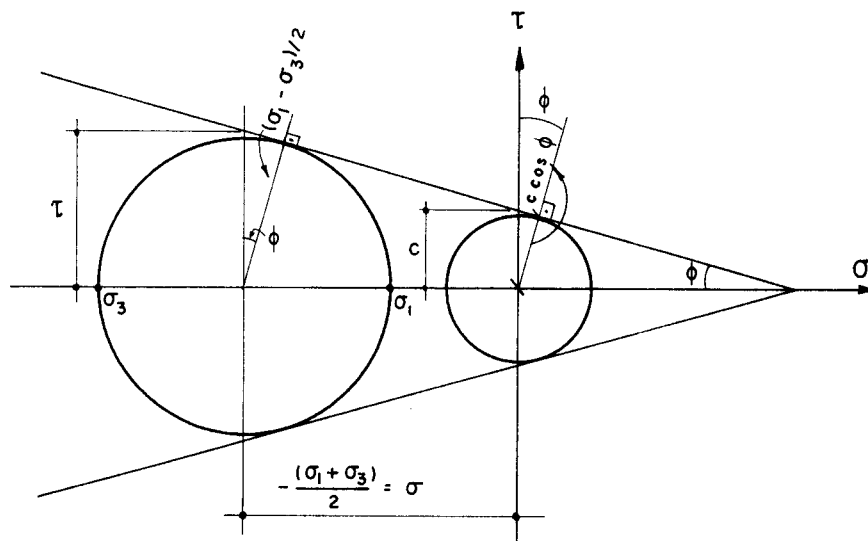


Fig. I.18 - Mohr-Coulomb

Da figura se observam as seguintes relações:

$$\sigma = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} \quad (\text{I.68})$$

(*) Como consequência da própria construção de $\tau(\sigma)$ a partir dos círculos de Mohr, não se considera a influência na plastificação da tensão principal intermediária σ_2 .

$$\tau \cos \phi = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \quad (\text{I.69})$$

Portanto, a expressão (I.67) pode ser escrita na forma:

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} + \text{sen} \phi \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} = c \cos \phi \quad (\text{I.70})$$

ou ainda, rearranjando os termos,

$$\frac{\sigma_1(1 + \text{sen} \phi)}{2 c \cos \phi} - \frac{\sigma_3(1 - \text{sen} \phi)}{2 c \cos \phi} = 1 \quad \text{para } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (\text{I.71})$$

Denominando os termos dependentes das características físicas c e ϕ de f'_c e f'_t , a superfície de plastificação admite também a seguinte expressão:

$$\frac{\sigma_1}{f'_t} - \frac{\sigma_3}{f'_c} = 1 \quad (\text{I.72})$$

onde

$$f'_c = \frac{2c \cos \phi}{1 - \text{sen} \phi} \quad (\text{I.73})$$

$$f'_t = \frac{2c \cos \phi}{1 + \text{sen} \phi} \quad (\text{I.74})$$

Tendo em vista, por outro lado, as expressões dos invariantes I_1 , J_2 e θ em termos das tensões principais (expressões apresentadas no apêndice I), a superfície de Mohr-Coulomb passa a ser dada por

$$f(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3} I_1 \text{sen} \phi + \sqrt{J_2} \text{sen}(\theta + \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) \text{sen} \phi - c \cos \phi = 0 \quad (\text{I.75})$$

ou, identicamente em função de r , ξ e θ por

$$f(\xi, r, \theta) = \sqrt{2} \xi \operatorname{sen}\phi + \sqrt{3} r \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \\ + r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\phi - \sqrt{6} c \cos\phi = 0 \quad (\text{I.76})$$

com $0 \leq \theta \leq \pi/3$

Com base na (I.76), é interessante analisar a forma geométrica da superfície de plastificação no espaço das tensões principais.

Para uma melhor "visualização" da função estudam-se seus aspectos nos planos meridiano e de Nadai.

Em primeiro lugar, observa-se que num meridiano genérico, θ fixo, a variação de r com ξ é linear. As retas definidas pelos planos meridianos cruzam-se no eixo hidrostático ξ , onde $r = 0$, num ponto de coordenadas $\xi = 3 c \cotg\phi$.

Por outro lado, os coeficientes angulares das retas variam com o ângulo θ . Entre os diferentes valores para os coeficientes angulares, aqueles correspondentes aos meridianos definidos por $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 60^\circ$, são os de maior interesse e valem, respectivamente,

$$\operatorname{tg}\phi_t = \frac{2\sqrt{2} \operatorname{sen}\phi}{3 + \operatorname{sen}\phi} \quad (\text{I.77})$$

$$\operatorname{tg}\phi_c = \frac{2\sqrt{2} \operatorname{sen}\phi}{3 - \operatorname{sen}\phi} \quad (\text{I.78})$$

onde os índices t e c sob ϕ referem-se às nomenclaturas dos meridianos, ditos meridiano de tração ($\theta = 0^\circ$) e meridiano de compressão ($\theta = 60^\circ$), relativas ao estudo do material concreto.

A figura I.19 ilustra a superfície de plastificação no plano $r - \xi$.

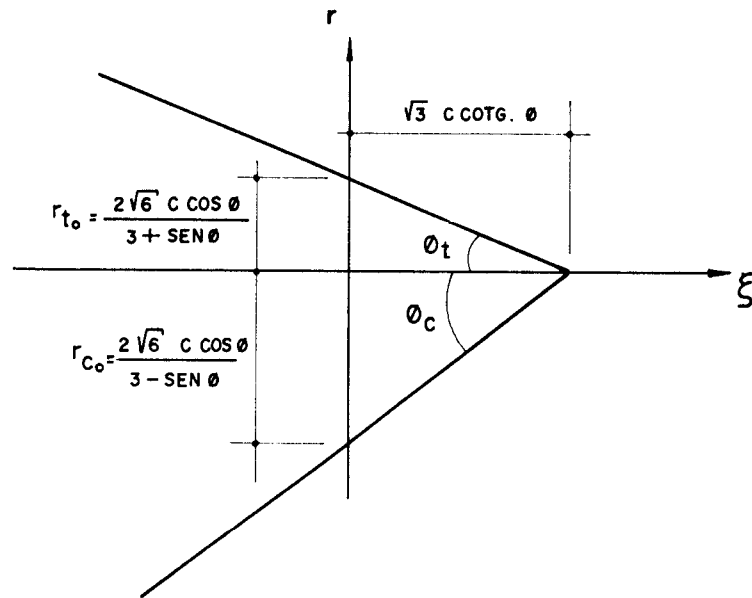


Fig. I.19 - Representação no plano $r-\xi$.

No plano de Nadai ($\xi = 0$), interessam, de início, os valores de r para $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 60^\circ$

$$r \Big|_{\theta=0^\circ} = r_{t_0} = \frac{2\sqrt{6} c \cos\phi}{(3 + \text{sen}\phi)} \quad (\text{I.79})$$

$$r \Big|_{\theta=60^\circ} = r_{c_0} = \frac{2\sqrt{6} c \cos\phi}{(3 - \text{sen}\phi)} \quad (*) \quad (\text{I.80})$$

Por outro lado, pode-se mostrar que os sucessivos valores de r obtidos para diferentes valores de θ , definem uma reta que passa pelos pontos definidos por r_{t_0} e r_{c_0} .

Como consequência da diferença entre os valores de r_{c_0} e r_{t_0} , a projeção da superfície no plano anti-esférico se apresenta na forma de um hexágono irregular (fig. I.20).

Observa-se, finalmente, que a irregularidade apresentada pelo hexágono é função do ângulo ϕ . É fácil ve-

(*) o subíndice (0) é relativo ao plano de Nadai onde $\xi = 0$

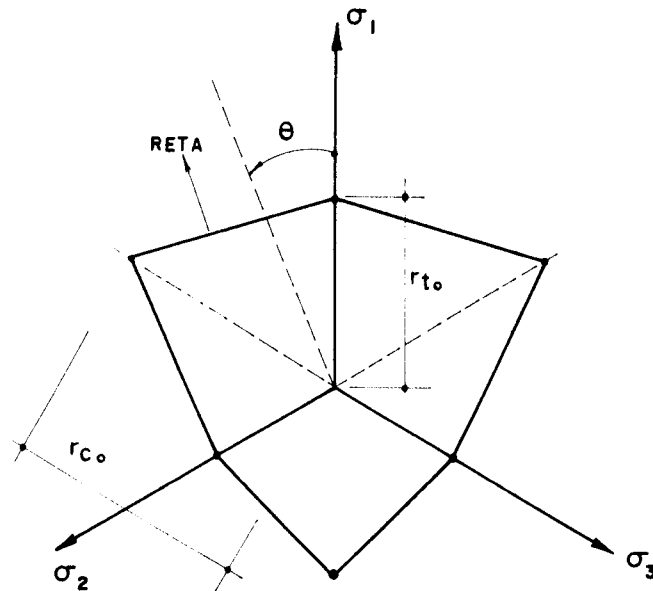


Fig.I.20 - Projeção no plano de Nadai.

rificar, a partir das expressões (I.79) e (I.80), que os valores de r_{t0} e r_{c0} tendem à igualdade na medida em que ϕ tende para zero. Em particular, no caso extremo de $\phi = 0^\circ$ o hexágono torna-se regular e a superfície de Mohr-Coulomb passa a coincidir com a de Tresca.

Uma última representação, de grande interesse prático, é no plano $\sigma_1 - \sigma_2$ (mostrada na figura I.21 para $\phi = 45^\circ$).

Ressalta-se que os valores que aparecem na figura estão adimensionalizados por meio de f'_c .

Para a obtenção dessa representação, o mais prático é fazer uso da expressão (I.72) alterada para a forma:

$$m \frac{\sigma_1}{f'_c} - \frac{\sigma_3}{f'_c} = 1 \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (\text{I.81})$$

onde,

$$m = \frac{f'_c}{f'_t} = \frac{1 + \text{sen}\phi}{1 - \text{sen}\phi} \quad (\text{I.82})$$

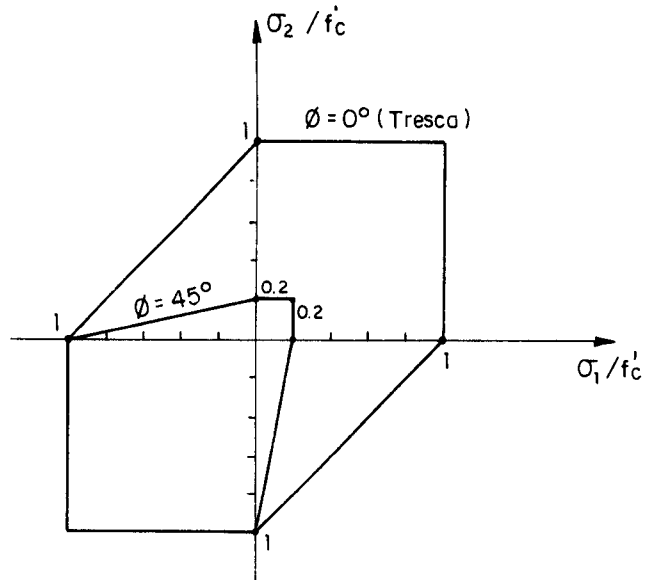


Fig. I.21 - Representação no plano $\sigma_1 - \sigma_2$.

I.5.4 - Superfície de Drucker-Prager

A superfície de Mohr-Coulomb apresenta os mesmos inconvenientes que a superfície de Tresca, no que diz respeito às descontinuidades nas derivadas ("arestas") em alguns pontos. Uma regularização dessa superfície foi proposta por Drucker e Prager, e se constitui em um cone que pode ser ajustado de modo a estar inscrito ou circunscrito à pirâmide irregular de Mohr.

Sua expressão matemática apresenta-se na forma de uma modificação da expressão de von Mises, I.61, acrescentando uma parcela relativa ao primeiro invariante:

$$f(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (\text{I.83})$$

onde α e k são constantes essencialmente positivas, relacionadas a c e ϕ , e com valores particulares para cada caso de aproximação desejado.

Considerando, por outro lado, as relações $r = \sqrt{2J_2}$ e $\xi = I_1 / \sqrt{3}$, a expressão da superfície de plastificação passa a ser escrita na forma:

$$f(\xi, r) = \sqrt{6} \alpha \xi + r - \sqrt{2} k = 0 \quad (I.84)$$

Claramente a última expressão representa um cone que tem os valores característicos indicados na figura I.22

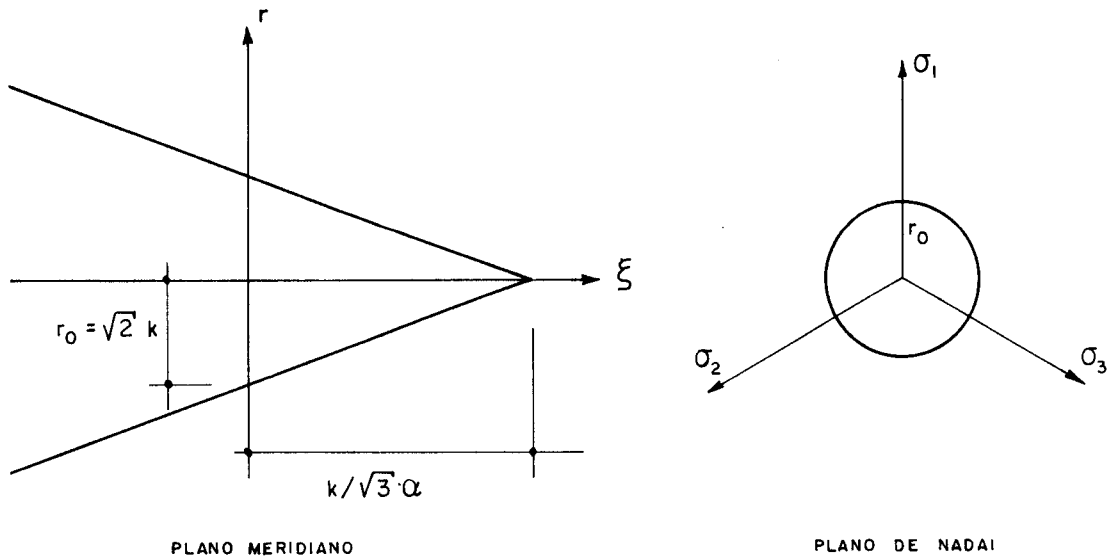


Fig. I.22 - Representação da superfície de Drucker-Prager

Para a obtenção dos valores de α e k seja, por exemplo, a hipótese em que o cone circunscreve a pirâmide de Mohr-Coulomb. Nesta situação, o parâmetro r_0 do cone deve igualar-se com $r|_{\theta=60^\circ} = r_{c_0}$ da pirâmide. Por outro lado os pontos onde as superfícies cruzam o eixo hidrostático devem coincidir. Dessas condições resultam:

$$2 k = \frac{2 \sqrt{6} c \cos \phi}{(3 - \sin \phi)} \rightarrow k = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (I.85)$$

$$\frac{k}{\sqrt{3} \alpha} = \sqrt{3} c \cot \phi \rightarrow \alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (I.86)$$

Por outro lado, o cone inscrito à pirâmide é obtido fazendo-se coincidir r_0 do cone com r_{t_0} da pirâmide, além, evidentemente, do ponto onde as superfícies cruzam o eixo hidrostático. Nessas condições:

$$\sqrt{2} k = \frac{2\sqrt{6} c \cos\phi}{(3+\sin\phi)} \rightarrow k = \frac{6 c \cos\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)} \quad (\text{I.87})$$

$$\frac{k}{\sqrt{3} \alpha} = \sqrt{3} c \cot\phi \rightarrow \alpha = \frac{2 \sin\phi}{\sqrt{3} (3+\sin\phi)} \quad (\text{I.88})$$

Com o objetivo de comparar o grau de aproximação obtido pelo cone de Drucker-Prager com relação à pirâmide de Mohr Coulomb é interessante analisar o plano $\sigma_1 - \sigma_2$.

Elevando ao quadrado a expressão (I.83) e escrevendo os invariantes I_1 e J_2 em função das tensões principais, obtêm-se:

$$\alpha^2 (\sigma_1 + \sigma_2)^2 + \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) + 2\alpha (\sigma_1 + \sigma_2) \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2)} = k^2 \quad (\text{I.89})$$

Para $\sigma_1 = \sigma_1, \sigma_2 = 0$ resulta,

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} + \alpha\sigma_1\right)^2 = k^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_1}{k} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \alpha\right)} \quad (\text{I.90})$$

para $\sigma_1 = -\sigma_1, \sigma_2 = 0$

$$\frac{\sigma_1}{k} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \alpha\right)} \quad (\text{I.91})$$

para $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

$$\frac{\sigma_1}{k} = \frac{1}{(1+2\alpha)} \quad (\text{I.92})$$

para $\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma$

$$\frac{\sigma_1}{k} = \frac{1}{(2\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}})} \quad (\text{I.93})$$

Adotando as situações $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 45^\circ$, considerando o caso do cone circunscrito à pirâmide irregular, os parâmetros α e k valem, respectivamente

$$\phi = 0^\circ \quad \alpha = 0 \quad k = \frac{2}{\sqrt{3}} c \quad (\text{I.94})$$

$$\phi = 45^\circ \quad \alpha = 0,3561 \quad k = 1,0683 c \quad (\text{I.95})$$

A figura I.23 ilustra a comparação no plano $\sigma_1 - \sigma_2$ entre os cones inscrito e circunscrito à pirâmide correspondente a $\phi = 45^\circ$. Os diagramas estão adimensionalizados em função de f'_c (*).

No caso do cone inscrito à pirâmide, as constantes k e α valem, para $\phi = 45^\circ$, respectivamente,

$$k = 0.6607 c \quad (\text{I.96})$$

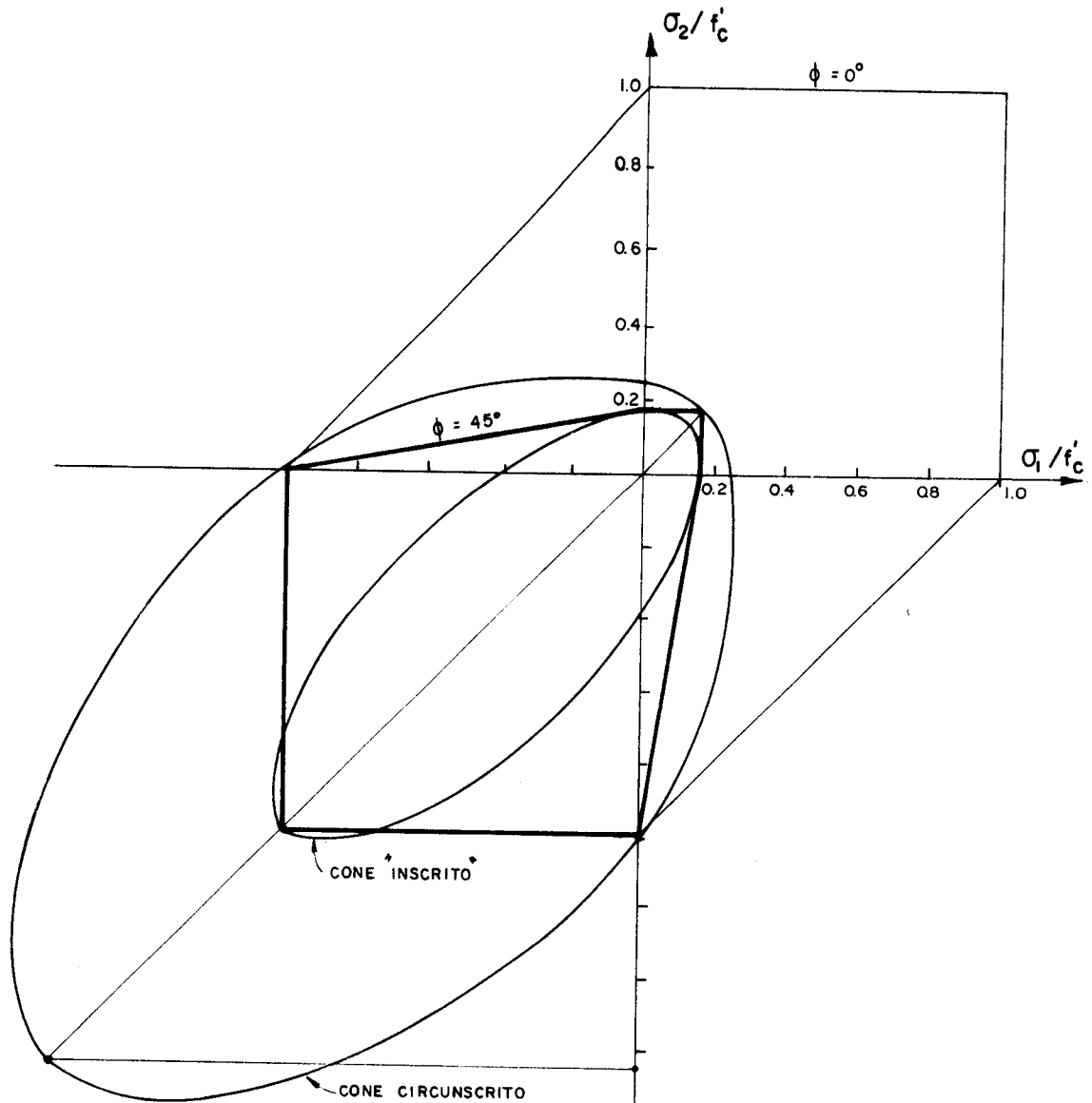
$$\alpha = 0.2202 \quad (\text{I.97})$$

Ressalta-se, finalmente, a pouca concordância entre o critério de Drucker-Prager e os resultados experimentais sendo, portanto, a regularização proposta apenas vantajosa sob o ponto de vista numérico.

I.6 - ENDURECIMENTO POR DEFORMAÇÃO

Apresentadas as funções que podem ser adotadas como superfícies iniciais de plastificação, resta saber como

(*) para $\phi = 45^\circ$ $f'_c = 4.8284c$

Fig. I.23 - Plano $\sigma_1 - \sigma_2$

elas evoluem à medida em que se desenvolvem as deformações plásticas.

Uma vez definido o critério que orienta o "movimento" da superfície, o parâmetro G pode ser determinado e, em consequência, resulta também determinada, toda a relação constitutiva que exprime o comportamento do material elastoplástico.

Como foi comentado no item I.4 existem diferentes propostas para simular o efeito do endurecimento por

deformação. As duas mais difundidas são o modelo isótropo e o modelo cinemático.

Para que se possa entender mais claramente o processo de evolução da superfície de plastificação, é interessante alterar a forma geral $f = f(T, E^P, h)$ para a seguinte expressão:

$$f(T, E^P, h) = F(T, E^P) - \chi(h) = 0 \quad (*) \quad (I.98)$$

Com essa expressão fica estabelecido que existe, para um certo E^P , uma função de plastificação à qual está associada a condição de deformações plásticas adicionais poderem ocorrer somente quando o valor de F for superior ao de χ . Por sua vez, χ é função do escalar h cujo valor é por definição, uma medida do trabalho dissipado durante a deformação plástica (o que é também, uma medida do endurecimento). De acordo com a (I.27),

$$h = \int_0^t S \cdot \dot{E}^P dt \quad (I.99)$$

onde S é a parte anti-esférica do tensor das tensões, associada às deformações plásticas, e correspondente a $J(T, E^P, h)$ que aparece em (I.27). (**)

De modo alternativo, \dot{h} pode ser escrito como alguma combinação entre taxas de deformações plásticas apenas. Uma combinação simples é: (aquela que exprime a norma da taxa de deformação plástica)

$$\dot{h} = C(\dot{E}^P \cdot \dot{E}^P)^{1/2} \quad (I.100)$$

(*) a superfície de plastificação escrita nesta forma é referenciada na literatura como "loading function", sendo que $\chi(h)$ representa, por analogia com o caso unidimensional, os patamares sucessivos atingidos pela tensão de escoamento por efeito do endurecimento por deformação.

(**) a consideração de S é mais indicada para metais, onde se pode considerar a validade da normalidade. Entretanto, de um modo geral pode-se colocar a definição (I.99) com T em lugar de S .

onde C deve ter um valor tal que a expressão possa valer também para o caso unidimensional. Por outro lado, a determinação de C é facilitada nos materiais que obedecem a condição de incompressibilidade durante a deformação plástica, isto é,

$$\dot{E}_1^P + \dot{E}_2^P + \dot{E}_3^P = 0 \quad (\text{I.101})$$

onde \dot{E}_i^P são deformações segundo direções principais.

Em particular, para um material que obedeça a condição de incompressibilidade e que tenha coeficiente de Poisson 0,5, resulta $\nu = \sqrt{2/3}$.

Com base na (I.100), diz-se que o endurecimento está associado a uma medida da deformação plástica efetiva.

Pois bem, tendo em vista a forma apresentada na expressão (I.98) e a definição de h dada pela (I.99), a determinação de G correspondente aos modelos isotrópico e cinemático pode ser feita da maneira que segue.

I.6.1 - Endurecimento isotrópico

Neste critério, a superfície de plastificação aumenta de tamanho, por assim dizer, sem qualquer translação ou rotação no espaço das tensões.

Assim, é como se a função inicial passe a ter sua variação de tamanho governada pelo valor de χ , ou seja, dependente do trabalho realizado na deformação plástica. Nessas condições, a (I.98) pode ser escrita na seguinte forma particular:

$$F(T) - \chi(h) = 0 \quad (*) \quad (\text{I.102})$$

(*) nos modelos isotrópicos $f(T, E^P, h) = f(T, h)$

onde $F(T)$ representa a superfície inicial de plastificação.

Supondo, por exemplo, que χ é uma função linear em h onde, para $h = 0$, $\chi(0) = k$ (valor de referência inicial para a plastificação), define-se

$$\chi(h) = k + bh \quad (\text{I.103})$$

sendo b uma constante do material.

Portanto,

$$f(T, h) = F(T) - (k + bh) \quad (\text{I.104})$$

Assim, recordando a definição do escalar G ,

$$G = -(f_{E^P} + f_h J) \cdot f_T \quad (\text{I.105})$$

resulta,

$$G = (bS) \cdot f_T \quad (\text{I.106})$$

pois $f_{E^P} = 0$ e $J = S$ pela (I.98) (*)

Portanto, \dot{E}^P pode ser totalmente determinado uma vez que G passou a ser conhecido.

Por exemplo, neste caso de variação linear entre χ e h ,

$$\dot{E}^P = \frac{f_T \cdot \dot{T}}{G} = \left(\frac{f_T \cdot \dot{T}}{bS \cdot f_T} \right) f_T \quad (\text{I.107})$$

(*) De um modo geral, no endurecimento isótropo

$$G = -f_h J \cdot f_T$$

I.6.2 - Endurecimento cinemático

No modelo cinemático admite-se que durante a deformação plástica a superfície de plastificação se transla da no espaço das tensões, sem rotação ou qualquer mudança da forma e tamanho iniciais.

Assim, na (I.98), $\chi(h)$ fica com um valor constante e igual ao valor χ_0 correspondente à superfície inicial de plastificação. Por sua vez $F(T, E^P)$ pode ser colocado na forma $F(T-A)$ onde A representa a translação de um ponto da superfície, coincidente com a origem do sistema de referência $(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)$.

Admite-se, por hipótese, que a translação da origem se dá segundo a direção do incremento de deformação plástica que ocorre num ponto sobre a superfície, e de valor proporcional à deformação plástica. Matematicamente essa condição é expressa por:

$$A = bE^P \quad \text{ou} \quad \dot{A} = b\dot{E}^P \quad (\text{I.108})$$

Nessas condições a (I.98) passa a ser escrita na forma, $f(T, E^P) = F(T, E^P) - \chi_0$ (*)

ou mais especificamente,

$$F(T - bE^P) - \chi_0 = 0 \quad (\text{I.109})$$

Portanto, G, neste modelo, tem sua expressão genérica dada por:

$$G = -f_{E^P} \cdot f_T \quad (\text{I.110})$$

(*) nos modelos cinemáticos $f(T, E^P, h) = f(T, E^P)$

Considerando a (I.109), a última expressão assume a forma

$$G = b(f_{T-bE^P} \cdot f_T) \quad (I.111)$$

I.6.3 - Uma alternativa para a determinação de G

Apresenta-se neste item um procedimento alternativo para a determinação de G tendo por objetivo facilitar o tratamento numérico do problema.

Fundamentalmente, a idéia é reproduzir o endurecimento do caso multiaxial com base no endurecimento evidenciado no mesmo material num ensaio uniaxial.

O endurecimento linear do caso uniaxial, discutido no item I.2, pode ser representado através de um parâmetro H definido pela razão entre a parcela de tensão que excede a tensão inicial de escoamento σ_0 e a deformação plástica. Numa situação unidimensional mais geral, com endurecimento não-linear, o parâmetro H passa a ser definido na forma:

$$H(\epsilon^P) = \frac{d\sigma}{d\epsilon^P} \quad (I.112)$$

Assumindo que E_T representa o módulo de rigidez tangente à curva $\sigma - \epsilon$, H fica dado pela seguinte expressão:

$$H = \frac{d\sigma}{d\epsilon^P} = \frac{d\sigma}{d\epsilon - d\epsilon^e} = \frac{1}{\frac{d\epsilon}{d\sigma} - \frac{d\epsilon^e}{d\sigma}} = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \quad (I.113)$$

A maneira de associar o caso multiaxial com o uniaxial é justamente impor $G = H$. Isto é feito admitindo que se possa reduzir o caso multiaxial a um unidimensional através de uma tensão equivalente, σ_e e de uma deformação

equivalente, sendo H' a tangente ao suposto diagrama (σ_e, E_p) .

Assim,

$$H' = \frac{d\sigma_e}{dE_p} \quad (\text{I.114})$$

a) Tensão equivalente (σ_e)

A definição de tensão equivalente está baseada na relação estabelecida entre o conceito de $F(T)$ do caso multiaxial e σ_y do caso uniaxial. Precisamente, $F(T)$ generaliza para o caso multiaxial a mesma condição de existência de deformação plástica indicada por σ_y no caso uniaxial.

Assim sendo, σ_e , supostamente uma tensão equivalente uniaxial, tem seu valor expresso por uma relação do tipo:

$$\sigma_e = (F)^{1/n} \quad (\text{I.115})$$

onde F é, por hipótese, uma função homogênea de grau n .

Como exemplos, nos casos particulares das funções de von Mises e de Drucker-Prager, ambas homogêneas de grau 1, a tensão equivalente é dada respectivamente, por:

$$\sigma_e = \sqrt{J_2} \quad (\text{I.116})$$

$$\sigma_e = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} \quad (\text{I.117})$$

b) Deformação plástica equivalente (E_p)

Para a definição de deformação plástica equivalente podem ser adotados dois conceitos.

O primeiro deles consiste em associar o incremento de deformação plástica dE_p com o trabalho plástico por unidade de volume, através da seguinte relação:

$$dW^P = \sigma_e dE_p \quad (I.118)$$

Tendo-se em vista, por outro lado, a definição do incremento de trabalho plástico,

$$dW^P = T \cdot dE^P \quad (I.119)$$

a deformação plástica equivalente pode ser obtida a partir de

$$dE_p = \frac{T \cdot dE^P}{\sigma_e} \quad (I.120)$$

A segunda definição apresenta dE_p como uma combinação dos incrementos de deformação plástica, através da relação

$$dE_p = C(dE^P \cdot dE^P)^{1/2} \quad (I.121)$$

onde C pode ter o valor unitário, numa forma geral.

c) Observações complementares

A relação entre a tensão equivalente e a deformação plástica equivalente é expressa pela seguinte forma geral:

$$\sigma_e = \sigma_e(E_p) \quad (I.122)$$

Por sua vez, a relação incremental é dada por:

$$d\sigma_e = H' dE_p \quad (I.123)$$

Pois bem, a função homogênea F que aparece na (I.115) e a constante C da (I.121) podem ser expressas de tal forma que σ_e e E_p reproduzam a tensão σ e a deformação plástica ϵ^P quando o material estiver sujeito a uma solicitação uniaxial. Nessa situação, σ_e e E_p passam a ser deno-

minadas tensão efetiva, e deformação plástica efetiva e , além disso, H' coincide com a tangente ao diagrama σ - ϵ^P .

Por exemplo, nos casos particulares das funções de von Mises e de Drucker-Prager a tensão efetiva fica expressa, respectivamente, por (*).

$$\sigma_e = \sqrt{3J_2} \quad (\text{I.124})$$

$$\sigma_e = \left(\frac{\sqrt{3}}{1 \pm \sqrt{3}} \right) (\alpha I_1 + \sqrt{J_2}) \quad (\text{I.125})$$

Já a deformação plástica efetiva, no caso particular de materiais que obedecem a condição de incompressibilidade, é dada por:

$$dE_p = \left[\frac{2}{3} (dE^P \cdot dE^P) \right]^{1/2} \quad (\text{I.126})$$

d) Determinação de G

É interessante, de início, reproduzir a expressão geral para a função de valor escalar G.

$$G = \frac{F_T \cdot dT}{d\lambda} = \frac{dF}{d\lambda} \quad (\text{I.127})$$

Através da definição da deformação plástica equivalente, em função do incremento de trabalho plástico, pode-se obter uma relação para $d\lambda$ no modo que segue:

$$dW^P = \sigma_e dE_p = d\lambda F_T \cdot T = d\lambda nF \quad (**) \quad (\text{I.128})$$

(*) as deduções correspondentes estão no apêndice I.

(**) o teorema de Euler das funções homogêneas estabelece que se $f(x)$ é homogênea de grau n então $\frac{\partial f}{\partial x} x = nf$.

ou ainda, considerando-se a expressão geral de σ_e ,

$$d\lambda = \frac{\sigma_e}{nF} dE_p = \frac{\sigma_e^{(1-n)}}{n} dE_p \quad (\text{I.129})$$

Substituindo-se o último resultado na relação que exprime G, resulta:

$$G = \frac{dF}{d\lambda} = n^2 \sigma_e^{2(n-1)} \frac{d\sigma_e}{dE_p} = n^2 \sigma_e^{2(n-1)} \cdot H' \quad (\text{I.130})$$

Deve-se observar que, frequentemente, as funções de plastificação adotadas são homogêneas de grau unitário. Nesses casos, as relações (I.129) e (I.130) fornecem:

$$d\lambda = dE_p \quad (\text{I.131})$$

$$G = \frac{d\sigma_e}{dE_p} = H' \quad (\text{I.132})$$

Além disso sendo σ_e e E_p tensão efetiva e deformação plástica efetiva, respectivamente, vale escrever a última expressão na forma:

$$G = \frac{d\sigma_e}{dE_p} = \frac{d\sigma}{d\epsilon^p} \quad (\text{I.133})$$

I.7 - A FORMULAÇÃO NO ESPAÇO DAS DEFORMAÇÕES

O regime de amolecimento não pode ser abordado mediante a formulação clássica da teoria da plasticidade no espaço das tensões, por ser um regime que contraria o primeiro postulando de Drucker.

De modo claro, evitando abordar novamente neste ponto do texto os postulados, a dificuldade encontrada pela formulação clássica pode ser convenientemente mostrada através do esquema ilustrado pela figura I.24.

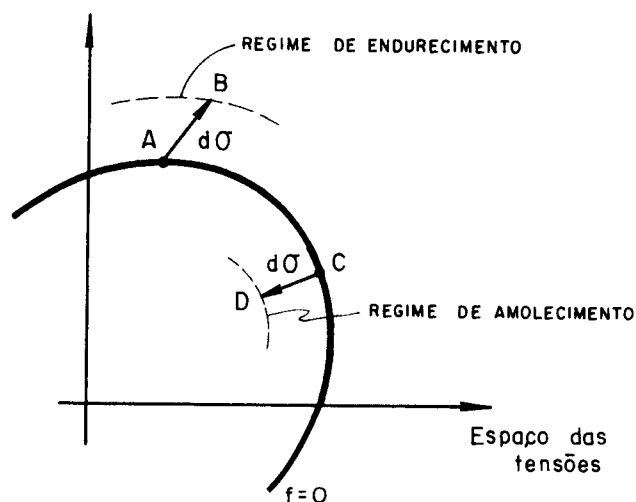


Fig. I.24 - Formulação no espaço das tensões.

Na figura, os pontos A e C representam estados de tensão sobre a superfície de plastificação, porém correspondentes a duas situações diferentes com relação ao comportamento do material.

Admita-se, por exemplo, que no estado representado pelo ponto A o material esteja em regime de endurecimento. Nessa situação é possível aplicar um incremento positivo ao estado de tensões gerando acréscimos de deformações e lásticas e plásticas; altera-se por conseguinte, a posição da função de plastificação.

Por outro lado, admita-se que no estado representado pelo ponto C, o material esteja em regime de amolecimento. Portanto, acréscimos nas deformações plásticas são possíveis com variações negativas no estado de tensão, contraindo a superfície de plastificação. Nessa mesma situação, porém, um acréscimo negativo no estado de tensões pode significar simplesmente uma descarga elástica.

Assim, no espaço das tensões, a formulação não permite distinguir, dentre os incrementos negativos do estado de tensão, aqueles que produzem deformações plásticas adicionais dos que representam apenas descargas elásticas.

A formulação no espaço das deformações não apresenta esse aspecto ambíguo, uma vez que tanto no regime de

endurecimento quanto no de amolecimento o aparecimento de deformações plásticas resulta exclusivamente de um incremento de deformação positivo; o incremento sendo negativo sempre significa uma descarga elástica. A figura I.25 ilustra essa situação.

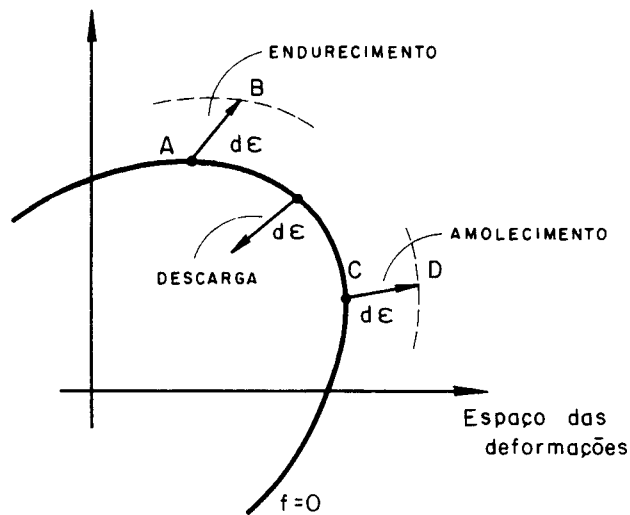


Fig. I.25 - Formulação no espaço das deformações.

Tendo em vista essas considerações, apresenta-se em seguida a formulação no espaço das deformações da relação constitutiva de um material de comportamento elastoplástico com amolecimento.

A formulação está fundamentada no postulado de Ilyushin que, em outras palavras, estabelece que em materiais de comportamento elastoplástico com endurecimento, amolecimento ou plástico perfeito, o trabalho realizado pelas forças externas num ciclo de deformação é não negativo, sendo positivo sempre que apareçam deformações plásticas e nulo se ocorrerem somente deformações elásticas.

Na figura I.26 estão ilustrados os ciclos unidimensionais de deformação para os estados de endurecimento e de amolecimento, justificando a relação fundamental do postulado de Ilyushin:

$$dW = \frac{1}{2} dT^P \cdot dE \geq 0 \quad (\text{I.134})$$

onde dT^P é o tensor do incremento de tensão plástica e dE é o tensor do incremento de deformação total.

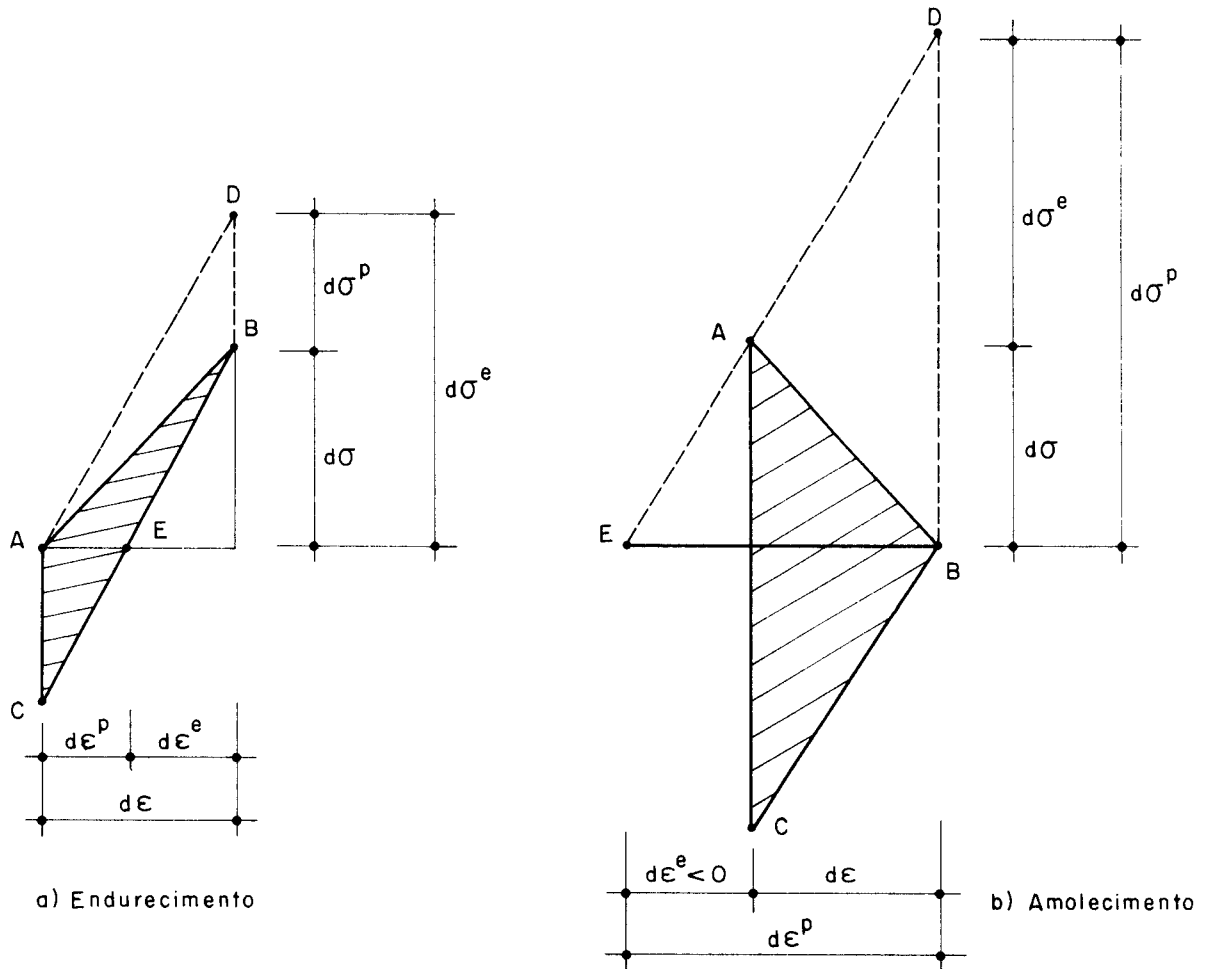


Fig. I.26 - Ciclos incrementais de deformação.

A função de plastificação pode ser expressa, no espaço das deformações, através de uma forma geral do tipo:

$$f = f(E, E^P, h) = 0 \quad (\text{I.135})$$

lembrando que a condição $f \leq 0$ deve ser sempre satisfeita neste espaço.

De outro modo, adotando-se a definição de h através do incremento de trabalho plástico W^P , dissipado na geração de deformações plásticas, a última relação passa a

$$f = f(E, E^P, W^P) = 0 \quad (\text{I.136})$$

Para que a condição expressa pelo postulado de Ilyushin seja sempre satisfeita, dT^P , ou \dot{T}^P (adotando a nomenclatura em taxas), deve ser dado por

$$\dot{T}^P = \dot{\lambda} f_E \quad (\text{I.137})$$

A expressão anterior estabelece a regra da normalidade segundo uma lei associativa. De um modo mais geral, sendo g o potencial plástico, colocado em função das mesmas variáveis fundamentais de f , pode-se exprimir a regra da normalidade através de uma lei não associativa,

$$\dot{T}^P = \dot{\lambda} g_E \quad (\text{I.138})$$

Sejam então as seguintes relações válidas para um material com endurecimento e amolecimento

$$\dot{T}^P = D\dot{E}^P \quad (\text{I.139})$$

$$\dot{T}^e = D\dot{E} \quad (\text{I.140})$$

$$\dot{T} = \dot{T}^e - \dot{T}^P \quad (\text{I.141})$$

Da combinação das duas últimas resulta:

$$\dot{T} = D\dot{E} - \dot{T}^P \quad (\text{I.142})$$

Para obter a expressão completa da relação constitutiva, é necessário escrever \dot{T}^P como função de \dot{E} . Para esse fim, pode-se partir da relação (I.138).

O escalar $\dot{\lambda}$ que lá aparece, pode ser determinado através da condição de consistência ($\dot{f}=0$), que fornece:

$$\dot{f} = f_E \cdot \dot{E} + f_{E^P} \cdot \dot{E}^P + f_{W^P} \dot{W}^P = 0 \quad (\text{I.143})$$

Nessa expressão, substituem-se os seguintes termos:

$$\dot{E}^P = \mathcal{C} \dot{T}^P = \dot{\lambda} (\mathcal{C} g_E) \quad (\text{I.144})$$

$$\dot{W}^P = E^e \cdot \dot{T}^P = \dot{\lambda} (E^e \cdot g_E) \quad (\text{I.145})$$

Deve-se observar que a relação (I.145) que representa o trabalho plástico pode ser verificada, com os dados fornecidos na figura I.27.

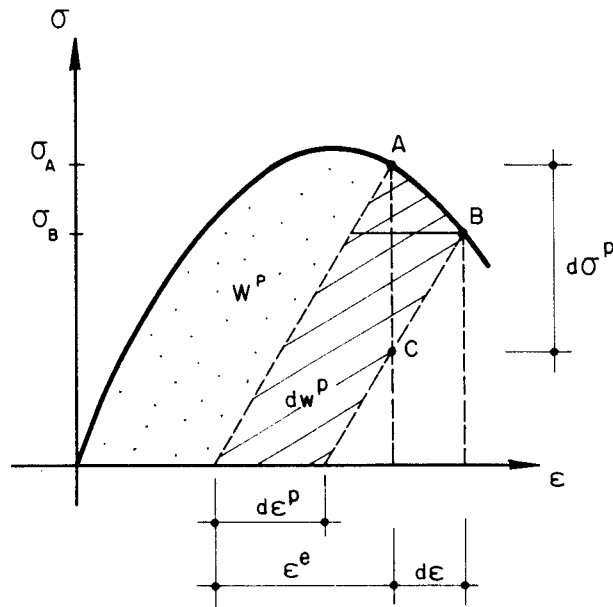


Fig. I.27 - Trabalho plástico

Efetuando-se as substituições, e isolando $\dot{\lambda}$, resulta:

$$\dot{\lambda} = \frac{f_E \cdot \dot{E}}{G'} \quad (\text{I.146})$$

onde ,

$$G' = - \left[f_{EP} \cdot C g_E + f_{WP} (E^e \cdot g_E) \right] \quad (I.147)$$

Assim sendo, com a expressão de $\dot{\lambda}$ conhecida, ob-
têm-se a relação desejada entre \dot{T}^P e \dot{E} :

$$\dot{T}^P = \frac{1}{G'} (g_E \otimes f_E) \dot{E} \quad (I.148)$$

Finalmente, a relação constitutiva pode ser es-
crita na forma:

$$\dot{T} = \left[C - \frac{1}{G'} (g_E \otimes f_E) \right] \dot{E} \quad (I.149)$$

Neste tipo de formulação surge a necessidade de se definir as funções potencial plástico e de plastificação, com vistas às aplicações práticas.

Entretanto, não há ainda suficiente quantidade de informações experimentais, principalmente com relação ao concreto, que permitam evidenciar o aspecto de tais superfícies no espaço tridimensional das deformações principais. As expressões que tem sido definidas são o resultado ou de especulações teóricas ou de dualização das superfícies empregadas para a análise no espaço das tensões. Em capítulo posterior haverá a oportunidade de se apresentar uma dessas funções.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO VARIACIONAL DAS RELAÇÕES
CONSTITUTIVAS ELASTOPLÁSTICAS

II.1 - INTRODUÇÃO

A formulação apresentada neste capítulo exprime a relação constitutiva de um material de comportamento elastoplástico através de um conjunto de inequações variacionais.

Ao contrário do capítulo anterior, onde a relação constitutiva era dada por uma relação entre taxas de tensão e de deformação, válida ponto a ponto, aqui as relações são satisfeitas globalmente em todo o corpo.

A principal característica dessa formulação é o seu enfoque baseado na Análise Convexa (CEA (1971); KOLMOGOROV e FOMIN (1972); KREYSZIG (1978); LUENBERGER (1980); KUBRUSLY (1986)), da qual alguns conceitos básicos estão arrolados no apêndice I. Além disso, a solução do conjunto de inequações resultante propicia a utilização de técnicas de programação matemática (BAZAARA (1979); LUENBERGER (1982)).

O estudo apresentado tem por bibliografia básica: FEIJÓO, ZOUAIN e TAROCO (1986) e ZOUAIN e FEIJÓO (1986).

II.2 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL CINEMÁTICA DAS RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

A relação constitutiva local de um material elasto-plástico com endurecimento, seguindo um modelo não associativo, pode ser expressa a partir das seguintes expressões válidas em todo ponto do corpo $(x \in \mathcal{B})$:

$$f(T, \lambda) < 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\dot{E} = \dot{E}^e + \dot{E}^p \quad (\text{II.2})$$

$$\dot{E}^e = D^{-1} \dot{T} \quad (\text{II.3})$$

$$\dot{E}^p = g_T \dot{\lambda} \quad (\text{II.4})$$

$$\dot{\lambda} > 0, f < 0, \dot{\lambda} \cdot f = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$\text{se } f_j = 0 \rightarrow \dot{f}_j < 0 \quad \dot{\lambda}_j \dot{f}_j = 0 \quad (\text{II.6})$$

onde $g = g(T, \lambda)$ é a função potencial plástico e as condições (II.5) e (II.6) são denominadas de condições de complementaridade, pois exprimem o fato de que uma taxa de deformação plástica pode ocorrer somente se o estado de tensão se encontra sobre a superfície atual.

Nessa formulação, deve-se observar, f e λ são vetores com componentes f_j e λ_j . Essa interpretação resulta de se considerar a função de plastificação definida por várias funções regulares e convexas, como mostra a figura II.1.

Definindo, por outro lado, o conjunto

$$\Lambda_f = \{ \dot{\lambda} : \dot{\lambda} \geq 0 / \dot{\lambda} \cdot f = 0 \quad \forall x \in \mathcal{B} \}$$

as relações (II.5) e (II.6) podem ser satisfeitas em todo ponto x do corpo, através da seguinte inequação variacional:

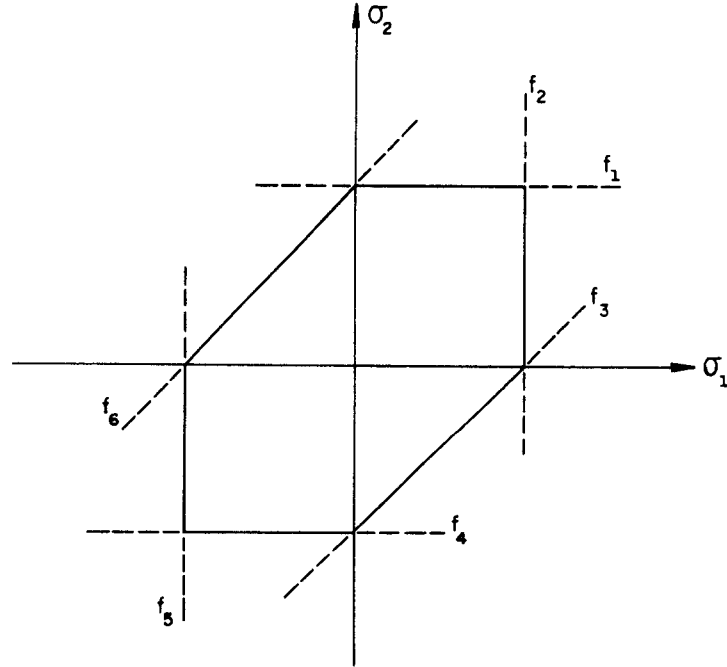


Fig. II.1 - Superfície linearizada

$$\int_{\mathcal{B}} \dot{f} \cdot (\dot{\lambda}^* - \dot{\lambda}) d\mathcal{B} < 0 \quad \text{para } \dot{\lambda} \in \Lambda_f \text{ e } \forall \dot{\lambda}^* \in \Lambda_f \quad (*) \quad (\text{II.7})$$

onde \mathcal{B} representa a região ocupada pelo corpo no espaço pontual euclidiano.

Considerando que

$$\dot{f} = f_T^T \dot{T} + f_\lambda \dot{\lambda} \quad (\text{II.8})$$

e também que

$$\dot{T} = \mathbb{D} (\dot{E} - \dot{E}^P) = \mathbb{D} (\dot{E} - g_T \dot{\lambda}) \quad (\text{II.9})$$

(*) de fato, se $\dot{\lambda}^* = 2\dot{\lambda}$ e $\dot{\lambda}^* = 0$, conclui-se da (II.7), que $\dot{f} \cdot \dot{\lambda} = 0$; como consequência $\dot{f} < 0$. Assim, localmente $\dot{f}_j < 0$ e $\dot{f}_j \dot{\lambda}_j = 0$.

a expressão (II.7) passa a ser escrita em função de \dot{E} e $\dot{\lambda}$, constituindo a denominada forma variacional cinemática da relação constitutiva elastoplástica.

Assim sendo, resulta:

$$\int_{\Theta} \left[f_T^T D (\dot{E} - g_T \dot{\lambda}) + f_{\lambda} \dot{\lambda} \right] \cdot (\dot{\lambda}^* - \dot{\lambda}) d\Theta \leq 0 \quad \forall \begin{array}{l} \dot{\lambda}^* \in \Lambda_f \\ \dot{\lambda} \in \Lambda_f \end{array} \quad (\text{II.10})$$

É preciso observar que o operador representativo do endurecimento, f_{λ} , é considerado simétrico negativo semidefinido.

No caso particular de lei associativa, em que $f = g$ e, portanto, $g_T = f_T$, a última expressão é condição de otimalidade do seguinte problema de minimização:

Dado $\dot{E} \in W$, determinar $\dot{\lambda} \in \Lambda_f$ solução de:

$$\inf \left\{ \int_{\Theta} \left[\frac{1}{2} (f_T^T D f_T - f_{\lambda}) \dot{\lambda} \cdot \dot{\lambda} - f_T^T D \dot{E} \cdot \dot{\lambda} \right] d\Theta \mid \dot{\lambda} \in \Lambda_f \right\} \quad (\text{II.11})$$

sendo W o espaço vetorial das taxas de deformações.

Pois bem, a forma variacional expressa através da (II.10) pode ser reformulada considerando um conjunto mais amplo para $\dot{\lambda}$, isto é, um conjunto definido por:

$$\Lambda = \left\{ \dot{\lambda} : \dot{\lambda} \geq 0 \quad \forall x \in \Theta \right\}$$

A restrição $\dot{\lambda} \cdot f = 0$ que aparecia em Λ_f será agora induzida através de uma técnica de penalização.

Essa técnica consiste, basicamente, na utilização de uma função, denominada indicatriz, com as seguintes características:

$$I_{\Lambda_f} = \begin{cases} 0 & \text{se } \dot{\lambda} \in \Lambda_f \\ \infty & \text{se } \dot{\lambda} \in \Lambda - \Lambda_f \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Uma vez definida a indicatriz, a solução de (II.10) é também solução do seguinte problema:

P1 . Dado $\dot{E} \in W$, determinar $\dot{\lambda} \in \Lambda$ solução de:

$$\int_{\Theta} \left[f_T^T D(E - g_T \dot{\lambda}) + f_{\lambda} \dot{\lambda} + I_{\dot{\lambda}} \right] \cdot (\dot{\lambda}^* - \dot{\lambda}) d\Theta \leq 0 \quad \begin{array}{l} \dot{\lambda} \in \Lambda \text{ e} \\ \forall \dot{\lambda}^* \in \Lambda \end{array}$$

onde $I_{\dot{\lambda}}$ indica o gradiente da indicatriz com $\dot{\lambda}$. (II.13)

Entretanto, a função indicatriz com as características apresentadas em (II.12) é descontínua. É interessante regularizá-la através de uma aproximação por uma função diferenciável.

Seja, então, a função diferenciável $\psi(\dot{\lambda})$ definida por

$$\psi(\dot{\lambda}) = - \int_{\Theta} f \cdot \dot{\lambda} d\Theta \quad (\text{II.14})$$

tal que:

- a) $\psi(\dot{\lambda}) = 0$ se $\dot{\lambda} \in \Lambda_f$
- b) $\psi(\dot{\lambda}) > 0$ se $\dot{\lambda} \in (\Lambda - \Lambda_f)$

Adotando um parâmetro $\epsilon > 0$, a função $\frac{\psi(\dot{\lambda})}{\epsilon}$ aproxima a indicatriz de modo mais preciso quando $\epsilon \rightarrow 0^+$.

Nessas condições, o problema P1 passa a ser assim proposto:

P2. Dado $\dot{E} \in W$, determinar $\dot{\lambda}_{\epsilon} \in \Lambda$ solução de:

$$\int_{\Theta} \left[\left(-\frac{1}{\epsilon} f - f_T^T D\dot{E} \right) + \left(f_T^T Dg_T - f_{\lambda} \right) \dot{\lambda}_{\epsilon} \right] \cdot (\dot{\lambda}^* - \dot{\lambda}_{\epsilon}) d\Theta \geq 0 \quad (\text{II.15})$$

para $\forall \dot{\lambda}^* \in \Lambda$

ou ainda, no caso particular de lei associativa:

$$\inf \left\{ \int_{\mathcal{B}} \left[\frac{1}{2} (f_T^T Df_T - f_\lambda) \dot{\lambda} \cdot \dot{\lambda} - f_T^T D\dot{E} \cdot \dot{\lambda} - \frac{1}{\varepsilon} f \cdot \dot{\lambda} \right] d\mathcal{B} \mid \dot{\lambda} \in \Lambda \right\} \quad (\text{II.16})$$

II.3 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL CINEMÁTICA, EM TAXAS, DO PROBLEMA DA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA

A formulação cinemática do problema da elastoplasticidade admite que a compatibilidade está satisfeita identicamente e pretende encontrar, para cada taxa de carga, velocidades v e velocidades de multiplicadores plásticos $\dot{\lambda}$ tais que:

- v é um campo cinematicamente admissível, isto é, satisfaz condições cinemáticas de contorno.
- a velocidade de deformação $\dot{E} = D = \mathcal{D} v$ e $\dot{\lambda}$ estão relacionadas através da relação constitutiva plástica.
- a velocidade de tensão \dot{T} , relacionada a v e $\dot{\lambda}$ através da equação constitutiva elastoplástica, deve estar em equilíbrio com a velocidade de carga.

Esse problema, em sua forma matemática variacional, é expresso por:

P3. Para $\varepsilon \rightarrow 0^+$, encontrar o limite de v_ε e $\dot{\lambda}_\varepsilon$ satisfazendo:

a) $v_\varepsilon \in V_\varepsilon = \left\{ v : v = 0 \text{ em } \partial \mathcal{B}_v \right\}$, é o campo cinematicamente admissível com restrições de contorno bilaterais homogêneas na parte ∂_v do contorno do corpo.

b) $\dot{\lambda}_\varepsilon \in \Lambda$

$$\int_{\mathcal{B}} \left[\left(-\frac{1}{\varepsilon} f - f_T^T D\mathcal{D}v \right) + \left(f_T^T Dg_T - f_\lambda \right) \dot{\lambda}_\varepsilon \right] \cdot (\dot{\lambda}^* - \dot{\lambda}_\varepsilon) d\mathcal{B} > 0 \quad \forall \dot{\lambda}^* \in \Lambda$$

$$c) \int_{\mathcal{B}} D(\mathcal{D} v - g_T \dot{\lambda}_\epsilon) \cdot \mathcal{D} v^* d\mathcal{B} = L(v^*) \quad \forall v^* \in V_\epsilon$$

Essas expressões, no caso particular de lei associativa, são condições necessárias de otimalidade para o seguinte princípio de mínimo:

Para $\epsilon \rightarrow 0^+$ encontrar v_ϵ e $\dot{\lambda}_\epsilon$ soluções de

$$\inf_{v, \dot{\lambda}} \left\{ \int_{\mathcal{B}} \left[\frac{1}{2} D \mathcal{D} v \cdot \mathcal{D} v + \frac{1}{2} (f_T^T D f_T - f_\lambda) \dot{\lambda} \cdot \dot{\lambda} - f_T^T D \mathcal{D} v \cdot \dot{\lambda} - \frac{1}{\epsilon} f \cdot \dot{\lambda} \right] d\mathcal{B} - L(v) \right\} \quad \text{com } v \in V \text{ e } \dot{\lambda} \in \Lambda \quad (\text{II.17})$$

II.4 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL CINEMÁTICA, INCREMENTAL, DO PROBLEMA DA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA

Neste item, o problema da elastoplasticidade é colocado em termos de incrementos finitos de deslocamentos, de multiplicadores plásticos e de tensões.

Os campos de incrementos incógnitos são expressos por:

$$v \Delta t = \Delta u \quad ; \quad \dot{\lambda} \Delta t = \Delta \lambda \quad ; \quad \dot{T} \Delta t = \Delta T$$

Nessas condições, a forma variacional incremental cinemática do problema da análise elastoplástica passa a ser expressa por:

P4. Para $\epsilon \rightarrow 0^+$ encontrar os valores limites de Δu_ϵ e $\Delta \lambda_\epsilon$ soluções de:

$$\int_{\mathcal{B}} D(\mathcal{D} \Delta u_\epsilon - g_T \Delta \lambda_\epsilon) \cdot \mathcal{D} \Delta u^* d\mathcal{B} = \Delta L(\Delta u^*) \quad \forall \Delta u^* \in V \quad (\text{II.18a})$$

$$\int_{\mathcal{B}} \left[\frac{\Delta t}{\epsilon} f + f_T^T D(\mathcal{D} \Delta u_\epsilon - g_T \Delta \lambda_\epsilon) + f_\lambda \Delta \lambda_\epsilon \right] \cdot (\Delta \lambda^* - \Delta \lambda_\epsilon) d\mathcal{B} \leq 0$$

$$\forall \Delta \lambda^* \in \Lambda \quad (\text{II.18b})$$

É interessante ressaltar a forma na qual o mesmo problema é expresso para o caso de lei associativa.

Para $\varepsilon \rightarrow 0^+$ encontrar os valores limites de Δu_ε e $\Delta \lambda_\varepsilon$ soluções de:

$$\inf \left\{ \int_{\mathcal{B}} \left[\frac{1}{2} \mathbb{D} \mathcal{P} \Delta u \cdot \mathcal{P} \Delta u + \frac{1}{2} (f_T^T \mathbb{D} f_T - f_\lambda) \Delta \lambda \cdot \Delta \lambda - f_T^T \mathbb{D} \mathcal{P} \Delta u \cdot \Delta \lambda - \frac{\Delta t}{\varepsilon} f \cdot \Delta \lambda \right] d\mathcal{B} - \Delta L(\Delta u) / \Delta u \in V \text{ e } \Delta \lambda \in \Lambda \right\} \quad (\text{II.19})$$

Com relação à resposta a ser obtida através desta formulação, deve-se observar, em primeiro lugar, que o equilíbrio é reproduzido em sua forma exata desde que g_T seja uma constante, isto é, quando a relação

$$\Delta T = \mathbb{D}(\mathcal{P} \Delta u - g_T \Delta \lambda)$$

for estritamente aplicável.

Por outro lado, a (II.18b) corresponde localmente a:

$$\frac{\Delta t}{\varepsilon} f + f_T^T \Delta T_\varepsilon + f_\lambda \Delta \lambda_\varepsilon \leq 0 \quad (\text{II.20a})$$

$$\Delta \lambda_\varepsilon \geq 0 \quad (\text{II.20b})$$

$$\left(\frac{\Delta t}{\varepsilon} f + f_T^T \Delta T_\varepsilon + f_\lambda \Delta \lambda_\varepsilon \right) \cdot \Delta \lambda_\varepsilon = 0 \quad (\text{II.20c})$$

Tomando-se $\varepsilon = \Delta t$, f e g lineares por partes, situações que fornecem f_T , f_λ e g_T constantes, a expressão (II.20a) corresponde ao valor exato de f no instante $t + \Delta t$. Respeitadas essas condições, pode-se concluir que o estado de tensões ao final do incremento é plasticamente admissível.

Além disso, é bom lembrar que independente do valor de ε e da linearidade ou não de f e g , a compatibilidade é sempre garantida na formulação cinemática.

Portanto, essa formulação produz incrementos exatos para Δu e $\Delta \lambda$ sempre que f e g sejam lineares por partes e que durante o passo Δt não ocorra, num mesmo ponto do corpo, uma deformação plástica seguida de uma descarga elástica.

SEÇÃO III
MODELOS CONSTITUTIVOS

CAPÍTULO I

MODELOS USUAIS PARA O CONCRETO

I.1 - INTRODUÇÃO

A não linearidade, decorrente da fissuração, torna bastante complexa a execução de uma simulação numérica que permita reproduzir o comportamento do concreto ao longo de um processo de carregamento (isto, mesmo desprezando-se qualquer variação ao longo do tempo).

Além disso, é bom lembrar que, quando fôr o caso, a associação de concreto com armadura exige a consideração dos fenômenos característicos desta associação entre os dois materiais.

De um modo geral, o concreto tem sido modelado matematicamente através da aplicação da teoria da plasticidade considerando, entretanto, um comportamento simplificado do material. Além disso, tendo-se em vista as diferentes características da fissuração exibida pelo concreto em tração e em compressão, a aplicação da teoria da plasticidade é complementada com procedimentos computacionais que dispensam uma análise teórica prévia a respeito de sua consistência matemática, e por isto mesmo são bastante discutíveis.

Os modelos que apresentam as características mencionadas acima são aqui denominados de usuais, e constituem objeto de análise neste capítulo.

Primeiramente são abordadas as hipóteses simplificadoras nas quais se baseia a aplicação da teoria da plasticidade para modelar o comportamento do material. Em seguida, também com vistas à aplicação da teoria da plasticidade, apresentam-se os conceitos de plastificação e de ruptura do concreto. Com base nesses elementos são então tratados os seguintes assuntos: superfícies de plastificação e ruptura, leis de endurecimento e comportamento pós-ruptura.

Destacam-se, da bibliografia consultada para a elaboração deste capítulo, as seguintes referências: CARNEIRO (1968), KUPFER (1969), CHEN e CHEN (1975), CARVALHO (1977), ZIENKIEWICZ (1977), SCHNOBRICH (1977), PACHECO (1979), OWEN (1980), NASCIMENTO (1980), MEHLHOR (1980), ASCE (1982), CHEN (1982), FIGUEIRAS (1983), OWEN (1983) e MARTINS (1985).

I.2 - HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS. A APLICAÇÃO DA TEORIA DA PLASTICIDADE

O conjunto de hipóteses simplificadoras tem como objetivo reproduzir os fenômenos isolados do concreto através de procedimentos menos laboriosos, sem a necessidade de definição de novos parâmetros experimentais e de modo a proporcionar resultados numéricos satisfatórios.

Tanto na compressão quanto na tração, a hipótese básica consiste em desprezar o regime de amolecimento. O concreto em compressão é imaginado como um material de comportamento elastoplástico com endurecimento e ductilidade limitada. Em tração, admite-se que o material apresenta fragilidade ao final de um regime elástico linear ou elastoplástico com endurecimento. Por outro lado, a regra da normalidade é aplicada com base numa lei associativa, o que representa uma simplificação, uma vez que a normalidade se-

gundo à superfície de plastificação não é uma suposição correta no caso de materiais granulares como o concreto.

Para se ter uma idéia mais clara sobre as hipóteses em questão é interessante analisar a figura I.1, que ilustra o comportamento uniaxial idealizado do concreto.

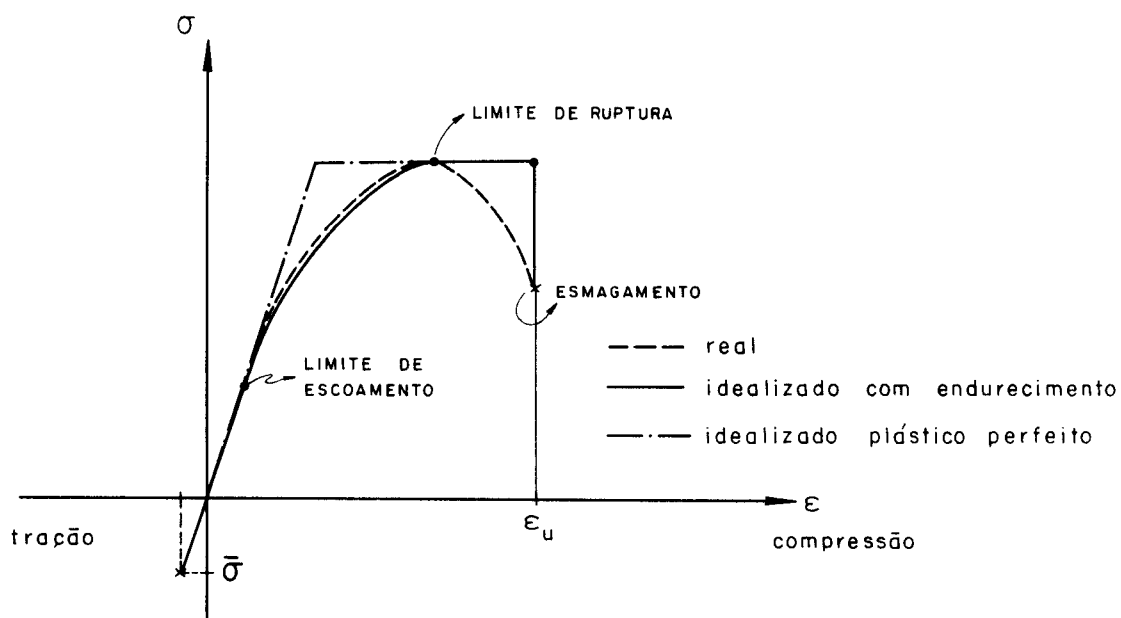


Fig. I.1 - Comportamento uniaxial idealizado

Observa-se que na tração o regime elástico é limitado por uma tensão máxima. Já na compressão, a principal característica é a ductilidade limitada por uma deformação máxima.

I.3 - PLASTIFICAÇÃO E RUPTURA DO MATERIAL

A plastificação observada no concreto em compressão, por exemplo no caso uniaxial para tensões entre 30 e 75% de f_c , é, na verdade, o resultado de um processo de microfissuração (superação de coesão interna por efeito da tensão de cisalhamento).

Esse fenômeno pode ser modelado de modo suficientemente preciso através da aplicação da teoria da plasticidade. Através dela fica associada à existência de plastifi-

cação, num ponto do material, a verificação de um critério representado por uma superfície de plastificação.

Por outro lado, a ruptura é também conceituada nos mesmos moldes, isto é, dispensando-se um apelo direto ao fenômeno físico. Portanto, configura-se a ruptura num ponto do material quando o estado de tensão, ou de deformação, verifica uma condição representada pela superfície de ruptura.

É interessante exemplificar a aplicação desses conceitos.

Na tração, adotado o critério da máxima tensão, a ruptura se dá por separação segundo uma superfície cuja normal tem direção coincidente com a direção da maior tensão principal de tração. Nessa situação, caracteriza-se uma perda na capacidade de carga do material através da redução total da tensão normal associada ao plano de ruptura.

Na compressão, por outro lado, a ruptura ocorre com base no critério da máxima deformação por compressão e recebe a denominação de esmagamento. O concreto nesta situação perde todas as suas características de resistência no ponto em consideração.

Deve-se observar que nos casos unidimensionais, a ruptura aqui conceituada pode representar de modo bastante aproximado o fenômeno físico real.

I.4 - SUPERFÍCIES DE RUPTURA DO CONCRETO

Com base no que foi estabelecido, as superfícies adotadas para definir a ruptura do concreto, sob um estado geral de tensões, devem levar em conta aspectos de fragilidade do material, para estados de tração e tração associada com baixas compressões, e de utilidade para estados de compressão mais alta.

No caso da compressão, em particular, às superfícies descritas no espaço das tensões deverá ser associado um critério de deformação máxima para configurar efetivamen

te a ruptura. Esse critério é representado pela chamada superfície de esmagamento, descrita no espaço das deformações.

Deve-se observar que para materiais com endurecimento devem ser definidas superfícies de plastificação iniciais, que limitam o regime elástico, e que evoluem para as superfícies de ruptura. No caso de materiais com comportamento elastoplástico perfeito ambas as superfícies coincidem. Novamente a figura I.1 serve para esclarecer essas idéias.

Uma hipótese adicional, frequentemente utilizada para simplificar a definição das superfícies, é a de admitir que o endurecimento do concreto seja do tipo isótropo. Nessas condições, a superfície inicial de plastificação terá a mesma forma da superfície de ruptura, porém de menor tamanho.

Pois bem, a análise experimental apresentada na seção I evidencia uma forma geral para a superfície de ruptura do concreto, mostrando que no espaço das tensões ela deve ser função dos três invariantes: I_1 , J_2 e J_3 .

As superfícies que são descritas em seguida procuram reproduzir as evidências experimentais, sendo que todas elas admitem que o concreto é um material que possui isotropia (ou é isótropo).

Todas são apresentadas como superfícies de ruptura, sendo que as de plastificação serão comentadas por ocasião do item modelos de endurecimento.

a) Superfície de ruptura de Mohr-Coulomb modificada

As características de ruptura frágil do concreto na tração e de ductilidade em altas compressões podem ser consideradas através da definição de uma superfície de ruptura resultante da combinação dos critérios da tensão de tração máxima (Rankine) e de Mohr-Coulomb.

Com esse duplo critério se procura dar uma interpretação satisfatória para a ruptura do concreto sob a ação de tensões combinadas.

É interessante lembrar que o critério da máxima tensão de tração estabelece que a ruptura frágil do concreto acontece quando a maior tensão principal num ponto atinge a resistência à tração f_t , correspondente a um ensaio de tração uniaxial. As expressões matemáticas que descrevem essa superfície no espaço das tensões principais são as seguintes:

$$\sigma_1 = f_t \quad ; \quad \sigma_2 = f_t \quad ; \quad \sigma_3 = f_t \quad (I.1)$$

A figura I.2 ilustra o aspecto da superfície de Rankine

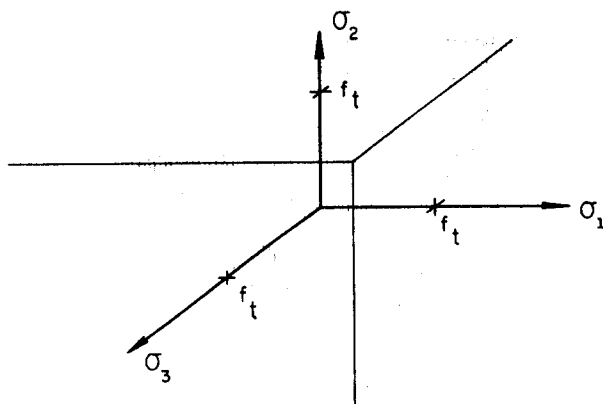


Fig. I.2 - Superfície de Rankine

A combinação do critério de Mohr-Coulomb com o de Rankine, constituindo a superfície de Mohr-Coulomb modificada, pode ser melhor compreendida partindo-se de sua representação no sistema σ - τ .

Nesse espaço, v.fig.I.3, do lado dos σ positivos o critério pode ser representado por um arco de círculo que corta o eixo dos σ num ponto de ordenada f_t , (pto A da figura), e o eixo dos τ em pontos cujas ordenadas, em módulo, representam a coesão do material (pontos B da figura). Do lado dos σ negativos, o arco do círculo é prolongado, a partir do eixo dos τ , por duas retas representativas do critério de Coulomb. Evidentemente, a inclinação das retas com relação ao eixo das tensões normais representa o ângulo de atrito interno do material.

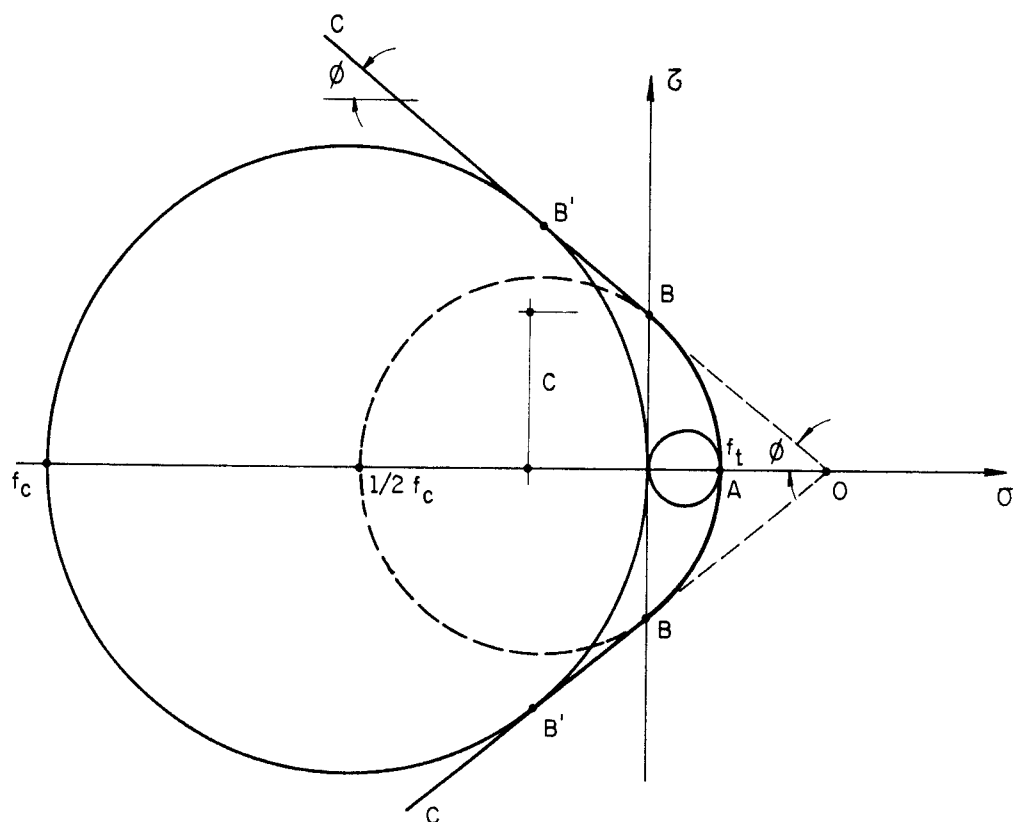


Fig. I.3 - Mohr-Coulomb modificado no sistema σ - τ .

A representação matemática do critério no sistema σ - τ é:

$$a) \max \sigma = f_t \quad \text{para } \sigma \geq 0 \quad (\text{I.2})$$

$$b) \max |\tau| + \sigma \operatorname{tg} \phi = c \quad \text{para } \sigma < 0$$

A representação é tal que círculos de Mohr correspondentes a estados principais de tensão dados por uma tensão de tração e uma tensão de compressão de valor absoluto máximo entre 3 a 5 vezes o daquela tensão, estão englobados na condição a), isto é, tangenciam o critério no ponto em que este corta o eixo dos σ . Em casos de compressão, ou quando a tensão principal de compressão tem valor absoluto superior a alguma coisa entre 3 e 5 vezes a tensão de tração, o contato com o critério pode se dar em qualquer outro ponto; nessas condições, os estados de tensão críticos estão englobados pela condição b).

É preciso ressaltar que na figura I.3 o arco de círculo AB representa a transição entre as condições de ruptura a) e b).

Colocando as (I.2) em função das tensões principais extremas σ_1 e σ_3 , e adotando-se o critério $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, aquelas expressões passam a ser dadas por:

$$a) \sigma_1 = f_t \quad \text{para} \quad -\sigma_3 \leq \frac{f_c}{2} = k^2 f_t \quad (I.3)$$

$$b) \sigma_3 = -f_c + k^2 \sigma_1 \quad \text{para} \quad \sigma_1 \leq f_t$$

onde $k^2 = \frac{1}{2} \frac{f_c}{f_t}$ e f_c é a resistência limite à compressão uniaxial.

Na figura I.4 estão representadas as condições (I.3) no sistema σ_1 - σ_3 .

Note-se a correspondência entre os pontos A, B, B' e C dos diagramas mostrados nas figuras I.4 e I.3. Deve-se observar que o arco de círculo AB da I.3 corresponde ao vértice A/B da I.4.

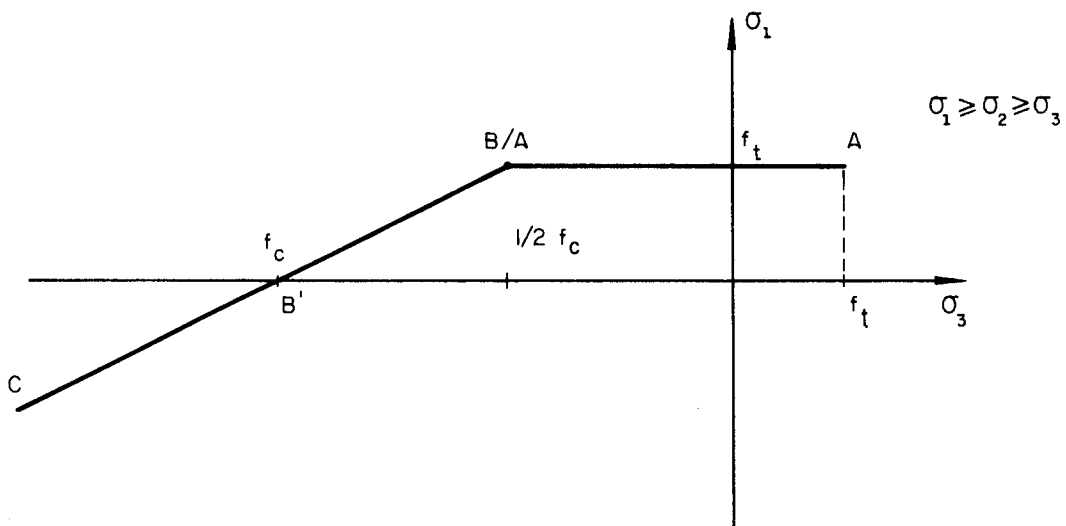


Fig. I.4 - Mohr-Coulomb modificado - sistema σ_1 - σ_3

Observa-se que uma representação mais geral, no sentido de não considerar a condição $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, é possível no espaço $(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)$, combinando-se a pirâmide irregular de base hexagonal de Coulomb com a superfície de Rankine.

Com relação às aproximações obtidas com este critério, é interessante ressaltar que os resultados serão bons sempre que uma das tensões principais, pelo menos, for de tração, ou então num caso de compressão, quando a tensão principal de maior valor absoluto não ultrapassar 2 a 2,5 vezes a resistência à compressão simples.

Isto porque, neste critério, os meridianos são representados por retas, enquanto que as evidências experimentais demonstram que, na realidade, eles devem ser curvas assintóticas ao eixo hidrostático.

Um exemplo do erro cometido com a utilização deste critério, consiste na análise de um caso plano de tensão com compressão biaxial. A aplicação do critério nesse caso, devido à desconsideração da tensão intermediária, induz à conclusão de que a resistência máxima à compressão biaxial é igual à de compressão uniaxial f_c ; como se mostrou pela análise dos ensaios experimentais isto não é verdadeiro.

b) Superfície de ruptura de Chen-Chen

Um critério de ruptura mais preciso com relação aos resultados experimentais, proposto por ANDRIE C.T. CHEN e WAI-FAH CHEN (1975), é escrito como uma função dos invariantes I_1 e J_2 (tendo, portanto, forma circular no plano deviatórico).

No espaço das tensões principais são identificadas duas regiões, denominadas zona de compressão e zona de tração-compressão. A primeira delas abrange os estados de tensão formados somente por tensões de compressão; a segunda, é composta pelos estados de tensão que possuem, entre suas componentes, pelo menos uma tensão de tração.

Duas funções diferentes simulam a superfície de ruptura em cada uma das regiões.

Para a zona de compressão vale a seguinte expressão:

$$J_2 + \frac{1}{3} I_1 A = k^2 \quad (I.4)$$

e para a zona de tração-compressão,

$$J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{1}{3} I_1 A = k^2 \quad (I.5)$$

As constantes A e k são determinadas pela imposição de que os estados últimos de compressão uni e biaxial e os estados de tração e compressão uniaxial verifiquem, respectivamente, as expressões (I.4) e (I.5). Como se pode observar, a compatibilidade entre as duas expressões se dá através da tensão de compressão uniaxial.

Observando ainda as (I.4) e (I.5), conclui-se que na zona de compressão, o aspecto da superfície num plano meridiano é o de uma reta, enquanto que na zona de tração-compressão o aspecto é de uma parábola do segundo grau. A figura I.5 dá uma idéia desse comportamento.

Representando por f_c , f_t e f_{bc} as resistências últimas do concreto sobre compressão uniaxial, tração uniaxial e compressão biaxial, respectivamente, as condições para a determinação das constantes A e k são expressas por:

. na zona de compressão

$$\begin{aligned} \sigma_3 = -f_c \rightarrow J_2 = \frac{f_c^2}{3} \text{ e } I_1 = -f_c \\ \sigma_2 = \sigma_3 = -f_{bc} \rightarrow J_2 = \frac{f_{bc}^2}{3} \text{ e } I_1 = -2f_{bc} \end{aligned} \quad (I.6)$$

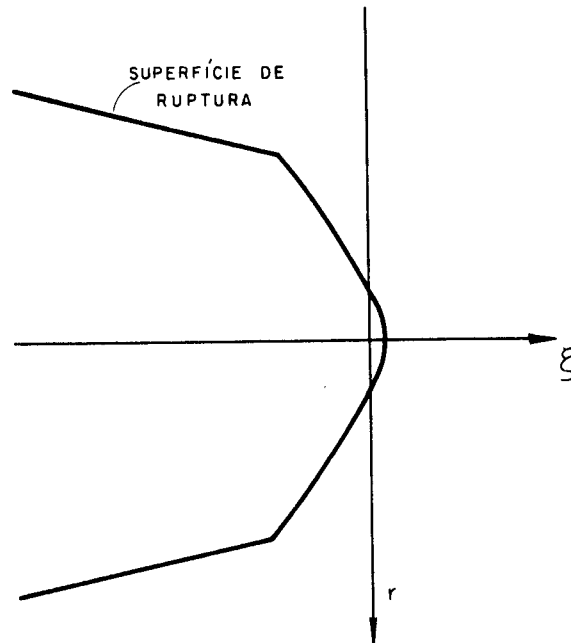


Fig. I.5 - Aspecto da superfície de ruptura num plano meridiano.

. na zona de tração-compressão:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = f_t \rightarrow J_2 = \frac{1}{3} f_t^2 \quad \text{e} \quad I_1 = f_t \\ \sigma_3 = -f_c \rightarrow J_2 = \frac{f_c^2}{3} \quad \text{e} \quad I_1 = -f_c \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

A partir dessas condições, resultam as seguintes relações para as constantes:

. na zona de compressão:

$$\begin{aligned} \frac{A}{\bar{f}_c} &= \frac{(\bar{f}_{bc}^2 - 1)}{(2\bar{f}_{bc} - 1)} \\ \left(\frac{k}{\bar{f}_c}\right)^2 &= \frac{1}{3} \frac{(2\bar{f}_{bc} - \bar{f}_{bc}^2)}{(2\bar{f}_{bc} - 1)} \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

. na zona de tração-compressão:

$$\frac{A}{\bar{f}_c} = \frac{1 - \bar{f}_t}{2} \quad (\text{I.9})$$

$$\left(\frac{k}{\bar{f}_c}\right)^2 = \frac{\bar{f}_t}{6}$$

onde \bar{f}_t e \bar{f}_{bc} são valores adimensionais dados pelas razões:

$$\bar{f}_t = \frac{f_t}{f_c} \quad \text{e} \quad \bar{f}_{bc} = \frac{f_{bc}}{f_c} \quad (\text{I.10})$$

Na figura I.6 está ilustrado o aspecto da superfície de Chen no espaço biaxial das tensões principais.

c) Superfície de Willam-Warnke

Willam e Warnke sugerem uma superfície de ruptura descrita em função dos invariantes σ_m , τ_m e θ através da seguinte relação:

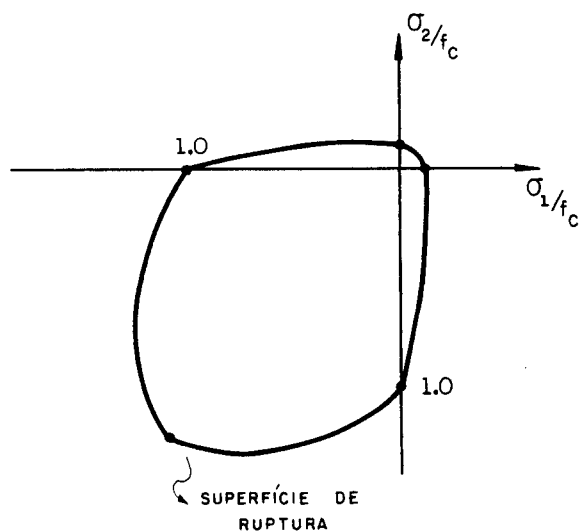


Fig. I.6 - Representação no sistema $\sigma_1 - \sigma_2$

$$f(\sigma_m, \tau_m, \theta) = \frac{1}{\rho} \frac{\sigma_m}{f_c} + \frac{1}{r(\theta)} \frac{\tau_m}{f_c} - 1 = 0 \quad (\text{I.11})$$

onde σ_m e τ_m são as componentes médias de tensão expressas em função dos invariantes I_1 e J_2 , respectivamente, por:

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \xi \quad (\text{I.12})$$

$$\tau_m^2 = \frac{2}{5} J_2 = \frac{1}{5} r^2 \quad (\text{I.13})$$

A superfície é caracterizada por ter uma forma linear no plano meridiano e não circular no plano anti-esférico (expressa pela função $r(\theta)$).

De modo a satisfazer as condições de simetria segundo setores de 60° no plano anti-esférico, como mostra a figura I.7, é proposta, para cada setor, a forma elíptica (regular e convexa) expressa por:

$$r(\theta) = \frac{2r_c(r_c^2 - r_t^2)\cos\theta + r_c(2r_t - r_c) \left[4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + 5r_t^2 - 4r_t r_c \right]^{1/2}}{4(r_c^2 - r_t^2)\cos^2\theta + (r_c - 2r_t)^2} \quad (\text{I.14})$$

Com o ângulo de similaridade dado por:

$$\cos\theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2 \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2}}} \quad (\text{I.15})$$

A relação (I.11) fica totalmente definida uma vez determinados os parâmetros r_c , r_t e ρ .

Para a sua determinação, impõe-se que a equação (I.11) seja válida nos casos de tração uniaxial, compressão uniaxial e compressão biaxial. Para cada caso, obtêm-se:

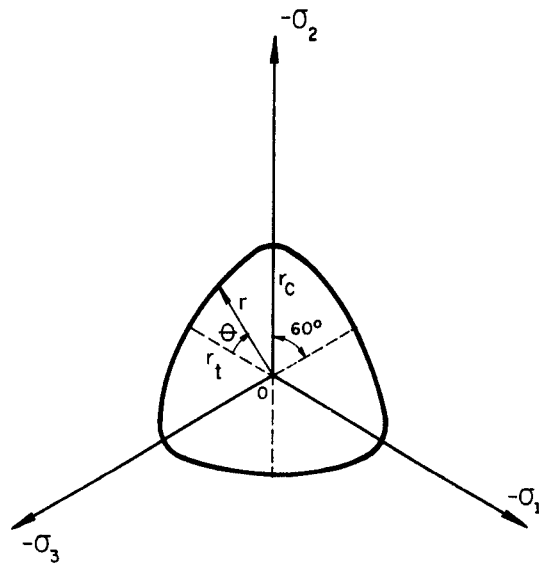


Fig. I.7 - Representação no plano anti-esférico.

$$\cdot \sigma_1 = f_t \quad \rightarrow \sigma_m = \frac{f_t}{3} ; \tau_m = \sqrt{\frac{2}{15}} f_t ; \theta = 0^\circ ; r(\theta) = r_t$$

$$\cdot \sigma_3 = -f_c \quad \rightarrow \sigma_m = -\frac{f_c}{3} ; \tau_m = \sqrt{\frac{2}{15}} f_c ; \theta = 60^\circ ; r(\theta) = r_c$$

$$\cdot \sigma_2 = \sigma_3 = -f_{bc} \quad \rightarrow \sigma_m = -\frac{2}{3} f_{bc} ; \tau_m = \sqrt{\frac{2}{15}} f_{bc} ; \theta = 0^\circ ; r(\theta) = r_t$$

Substituindo-se essas condições na (I.11) resultam:

$$\rho = \frac{\bar{f}_{bc} \bar{f}_t}{\bar{f}_{bc} - \bar{f}_t}$$

$$r_t = \left(\frac{6}{5}\right)^{1/2} \frac{\bar{f}_{bc} \bar{f}_t}{2\bar{f}_{bc} - \bar{f}_t} \quad (I.17)$$

$$r_c = \left(\frac{6}{5}\right)^{1/2} \frac{\bar{f}_{bc} \bar{f}_t}{3\bar{f}_{bc} \bar{f}_t + \bar{f}_{bc} - \bar{f}_t}$$

O vértice do cone formado pela superfície encontra-se sobre o eixo hidrostático à distância ρ da origem,

$$\frac{\sigma_m}{f_c} = \rho \quad (*) \quad (I.18)$$

É interessante ressaltar, finalmente, que para garantir a convexidade da superfície, r deve satisfazer às seguintes condições:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{r_t}{r_c} \leq 1 \quad (I.19)$$

Na figura I.8 estão ilustradas, no plano deviatório, as situações em que a superfície deixa de ser convexa, por serem violadas as condições (I.19). É preciso lembrar que a superfície deve ser normal aos eixos σ_1 e $-\sigma_2$.

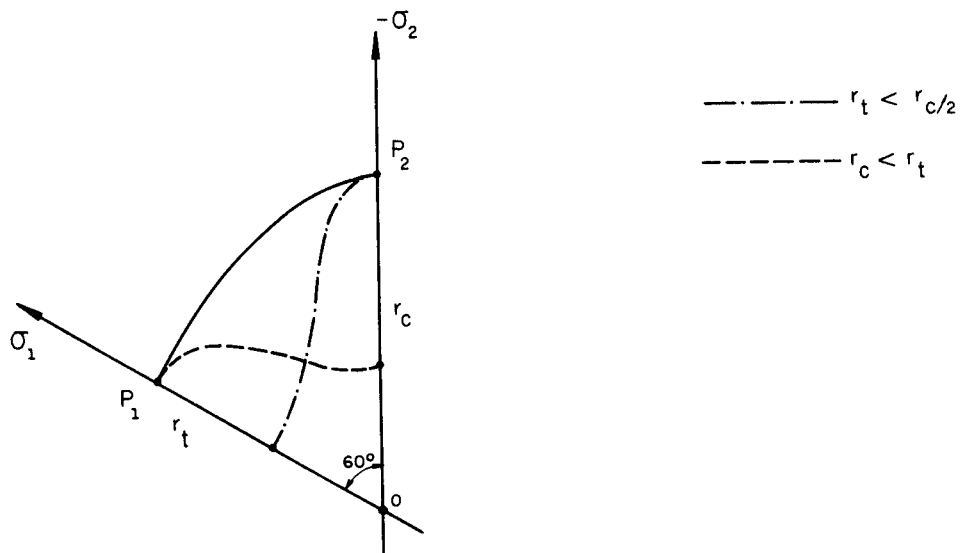


Fig. I.8 - Violação das condições de convexidade da superfície.

(*) esta equação é obtida da (I.11) para $\tau_m = 0$ (sobre o eixo hidrostático).

d) Outras superfícies

Alguns tipos de superfícies foram propostos com a finalidade de atender a situações específicas, como é o caso dos estados de tensão biaxiais.

Entre as diferentes sugestões merecem destaque a superfície de KUPFER e GERSTLE (1973), extrapolada diretamente dos resultados experimentais, a de TASUJI (1978), composta no sistema $\sigma_1 - \sigma_2$ por expressões lineares correspondentes a quatro regiões criteriosamente definidas e a de FIGUEIRAS e OWEN (1983) da qual se fazem, em seguida, algumas considerações.

A superfície é apresentada em termos dos invariantes I_1 e J_2 através da seguinte expressão:

$$f(I_1, J_2) = [\beta(3J_2) + \alpha I_1]^{1/2} = f_c \quad (I.20)$$

onde α e β são parâmetros do material.

Entretanto, essa expressão não é válida em todo o espaço das tensões. Nas regiões de tração-compressão e tração-tração a superfície passa a ser definida pelo critério da máxima tensão principal de tração.

Geometricamente, no espaço das tensões principais, a combinação dos dois critérios reproduz uma superfície limitada por outra superfície ("cut-off").

A figura I.9 ilustra o aspecto dessa superfície no plano $\sigma_1 - \sigma_2$ (adimensionalizado em função de f_c).

Por outro lado, os parâmetros α e β podem ser determinados a partir da imposição da (I.20) para os casos de compressão uni e biaxial. Em particular, Owen sugere que sejam utilizados os resultados experimentais de Kupfer, adotando para a resistência à compressão biaxial o valor $f_{bc} = 1.16 f_c$.

Nessas condições resultam:

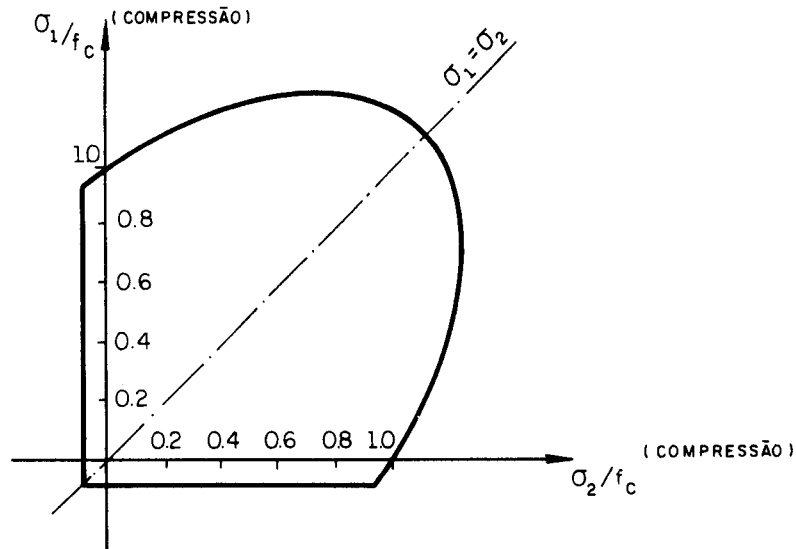


Fig. I.9 - Superfície de OWEN

$$\alpha = 0.355 f_c$$

(I.21)

$$\beta = 1.355$$

I.5 - MODELOS DE ENDURECIMENTO

Para as aplicações no concreto, modelos de endurecimento do tipo misto, que combinam ampliação da superfície com translação, reproduzem com melhor aproximação o comportamento do material.

Neste item são apresentados dois modelos de endurecimento, através da definição de superfícies de plastificação ("loading function"). Essa nomenclatura se refere, agora, a uma superfície numa situação genérica entre a superfície inicial de plastificação e a de ruptura.

a) Modelo misto de Figueiras-Owen

Neste modelo, o endurecimento do material é re-

produzido através da seguinte expressão para a função de plastificação:

$$\left[\beta(3J_2) + \alpha I_1 \right]^{1/2} = \sigma_e \quad (\text{I.22})$$

onde α e β são parâmetros do material e σ_e é a tensão efetiva (que reproduz a tensão σ de compressão uniaxial). (*)

Os parâmetros α e β podem ser determinados em função de casos limites de compressão uniaxial e compressão biaxial (com $f_{bc} = 1.16f_c$). Nessas condições resultam:

$$\alpha = 0.355 \sigma_e \quad (\text{I.23})$$

$$\beta = 1.355$$

É preciso esclarecer que a imposição desses dois estados de tensão para a determinação de α e β é motivada pelas aplicações do critério para o estudo das estruturas de superfície. Entretanto, devido à falta de dados experimentais, considera-se válida a aplicação da superfície, com os mesmos valores de α e β , para o estudo de estados tridimensionais.

Considerando os valores dos parâmetros α e β , a (I.22) passa a ser dada por:

$$\left[4.065 J_2 + 0.355 \sigma_e I_1 \right]^{1/2} = \sigma_e \quad (\text{I.24})$$

O endurecimento representado pelo modelo é do tipo misto, no sentido de que existe um movimento da superfície com mudança de sua inclinação em relação ao eixo hidrostático.

(*) a função de plastificação adotada é homogênea de grau unitário e reproduz, no caso unidimensional, a tensão normal. A demonstração do grau de homogeneidade está no apêndice I.

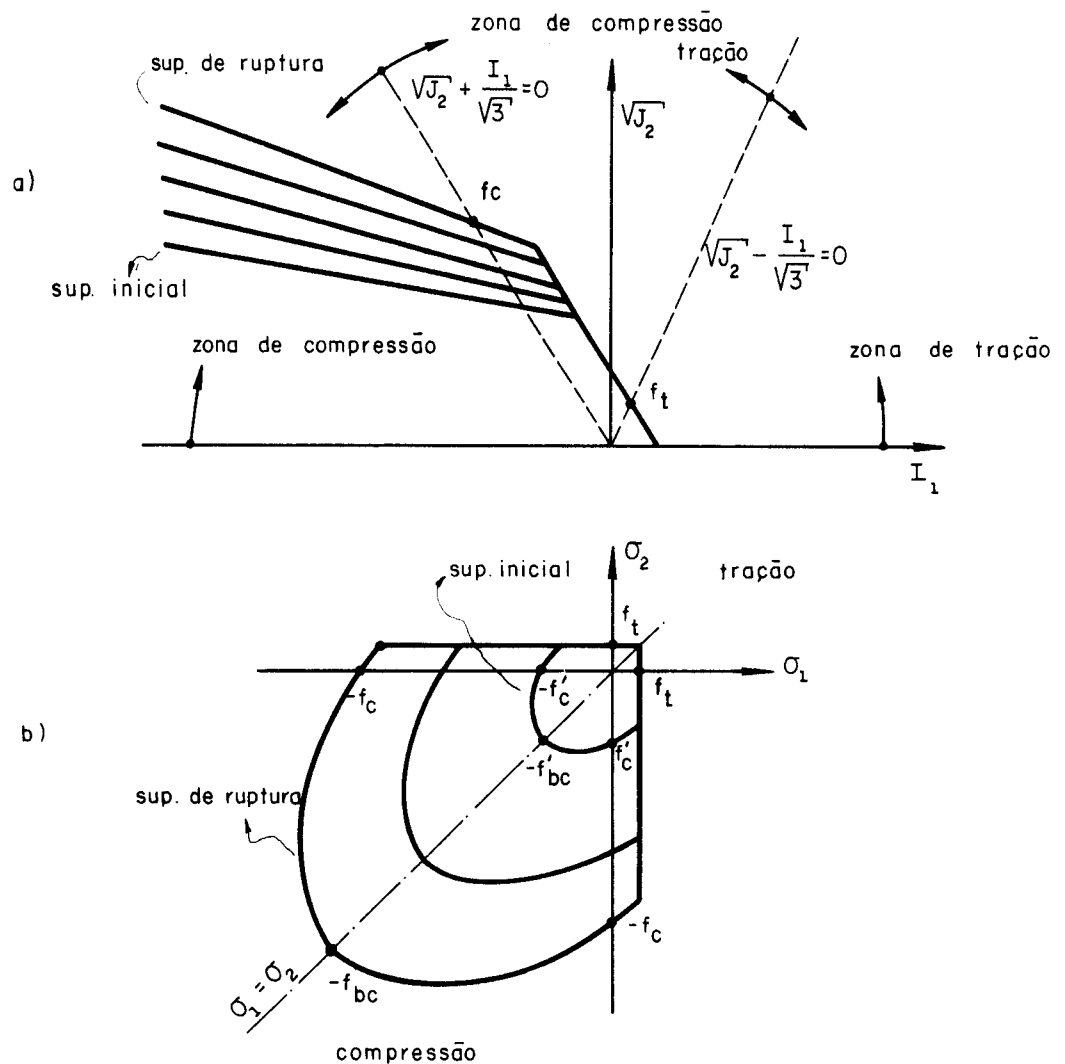


Fig. I.10 - Modelo misto de FIGUEIRAS-OWEN

Na figura I.10 estão mostrados os aspectos da função de plastificação nos espaços σ_1 - σ_2 (para aplicações aos casos planos) e $\sqrt{J_2}$ - I_1 (com vistas a análise tridimensional). Nesta última representação estão indicadas ainda as diferentes zonas de sollicitação delimitadas por retas que passam pelos estados de compressão uniaxial e tração uniaxial. (*)

(*) esta divisão em zonas facilitará também a comparação com a superfície de CHEN, mostrada em seguida.

As sucessivas posições da superfície de plastificação são definidas pelos valores específicos de σ_e , tensão efetiva associada ao caso de sollicitação uniaxial. Assim, para $\sigma_e = 0.3f_c$ obtêm-se a superfície inicial de plastificação e, para $\sigma_e = f_c$ a superfície de ruptura (ou limite).

Os valores de σ_e podem ser definidos, a partir dos resultados experimentais de um ensaio de compressão uniaxial, em função das deformações plásticas efetivas.

Owen sugere que a função $\sigma_e - E_p$ seja definida a partir da seguinte relação unidimensional, conhecida como "Parábola de Madrid".

$$\sigma = E_o \epsilon - \frac{E_o}{2\epsilon_o} \epsilon^2 \quad (I.25)$$

onde ϵ é a deformação total, ϵ_o é a deformação total correspondente a $\sigma = f_c$ e E_o é o módulo de elasticidade inicial.

Considerando na última equação a substituição das relações:

$$\epsilon = \epsilon^p + \epsilon^e \quad (I.26)$$

$$\epsilon^e = \frac{\sigma}{E_o} \quad (I.27)$$

obtêm-se:

$$\sigma = -E_o \epsilon^p + \sqrt{2E_o^2 \epsilon_o \epsilon^p} \quad (I.28)$$

Essa expressão é sugerida como a relação entre σ_e e ϵ_p , bastando usar ϵ_p em lugar de ϵ^p (sendo válida no intervalo de tensão efetiva $0.3f_c \leq \sigma_e \leq f_c$).

De interesse também é a função que permite calcular ϵ^p em função de σ_e :

$$\varepsilon^P = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{c}{2} - \sqrt{1-c} \right) \quad (*) \quad (I.29)$$

onde $c (= \frac{\sigma}{f_c})$ toma valores no intervalo $0.3 \leq c \leq 1.0$.

Com base na última expressão, pode-se construir o diagrama σ - ε , apresentado na figura I.11 no sistema de eixos σ_e/f_c , $\varepsilon_p/\varepsilon_0$.

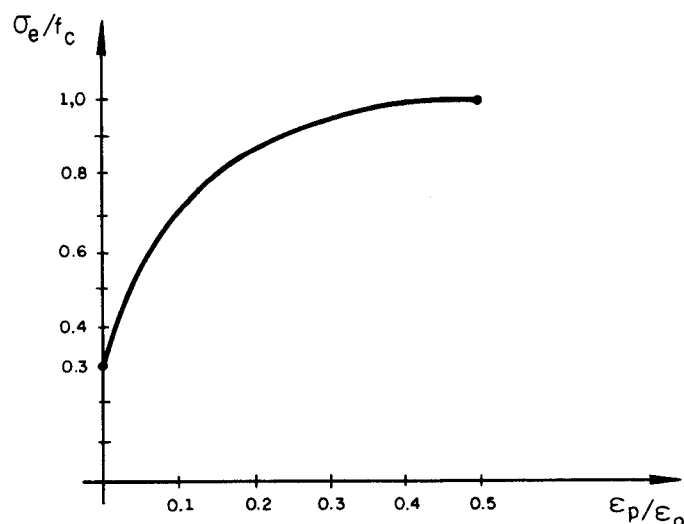


Fig. I.11 - Diagrama tensão-deformação efetiva.

Definida a relação σ_e - ε_p , pode-se determinar o valor do parâmetro G (**),

$$G = H' = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_p} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^P} = -E_0 + \frac{E_0 \varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon_0 \varepsilon^P}} \quad (I.30)$$

De modo alternativo, empregando a (62/I.113), H' pode ser expressa por:

$$H' = \frac{E_T}{1 - E_T/E_0} \quad (I.31)$$

(*) essa equação resulta a partir da (I.28), considerando ainda as seguintes relações: $c = \frac{\sigma}{f_c}$ e $\varepsilon \cdot E_0 = 2f_c$.

(**) neste caso $G = H'$.

onde E_T é, neste caso, definido por:

$$E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_0 - \frac{E_0 \varepsilon}{\varepsilon_0} = E_0 \sqrt{1-c} \quad (\text{I.32})$$

Considerando, então, a forma obtida para E_T , H' resulta da seguinte expressão:

$$H' = \frac{E_0 \sqrt{1-c}}{1-\sqrt{1-c}} \quad (\text{I.33})$$

b) Modelo misto de CHEN

O modelo proposto por CHEN apresenta as seguintes expressões para a função de plastificação:

$$\frac{J_2 + (\beta/3)I_1}{1 - (\alpha/3)I_1} = \tau^2 \quad (\text{I.34})$$

válida na região de compressão

$$\frac{J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + (\beta/3)I_1}{1 - (\alpha/3)I_1} = \tau^2 \quad (\text{I.35})$$

válida para a região de tração ou compressão-tração (*)

Essas expressões devem, em particular, reproduzir as formas das superfícies inicial de plastificação e de ruptura, dadas por:

$$J_2 + \frac{1}{3} I_1 A_0 = \tau_0^2 \quad (\text{I.36})$$

(superfície inicial na região de compressão)

$$J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{1}{3} I_1 A_0 = \tau_0^2 \quad (\text{I.37})$$

(*) as definições das regiões de validade serão apresentadas mais adiante.

(superfície inicial na região de tração-compressão)

$$J_2 + \frac{1}{3} I_1 A_u = \tau_u^2 \quad (\text{I.38})$$

(superfície de ruptura na região de compressão)

$$J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{1}{3} I_1 A_u = \tau_u^2 \quad (\text{I.39})$$

(superfície de ruptura na região de compressão-tração)

Com vistas a essa particularização, as constantes α e β devem valer:

$$\alpha = \frac{A_u - A_o}{\tau_u^2 - \tau_o^2} \quad ; \quad \beta = \frac{A_o \tau_u^2 - A_u \tau_o^2}{\tau_u^2 - \tau_o^2} \quad (\text{I.40})$$

Os parâmetros A_o , τ_o e A_u , τ_u são determinados em função dos estados de ruptura e iniciais de plastificação correspondentes às solicitações de compressão uniaxial (f_c , f'_c), tração uniaxial (f_t , f'_t) e compressão biaxial (f_{bc} , f'_{bc}).

As expressões resultantes são:

. região de compressão

$$\frac{A_o}{f_c} = \frac{\bar{f}'_{bc}{}^2 - \bar{f}'_c{}^2}{2\bar{f}'_{bc} - \bar{f}'_c} \quad \left(\frac{\tau_o}{f_c}\right)^2 = \frac{\bar{f}'_c \bar{f}'_{bc} (2\bar{f}'_c - \bar{f}'_{bc})}{3(2\bar{f}'_{bc} - \bar{f}'_c)} \quad (\text{I.41})$$

$$\frac{A_u}{f_c} = \frac{\bar{f}'_{bc}{}^2 - 1}{2\bar{f}'_{bc} - 1} \quad \left(\frac{\tau_u}{f_c}\right)^2 = \frac{\bar{f}'_{bc} (2 - \bar{f}'_{bc})}{3(2\bar{f}'_{bc} - 1)} \quad (\text{I.42})$$

. região de tração

$$\frac{A_o}{f_c} = \frac{\bar{f}'_c - \bar{f}'_t}{2} \quad \left(\frac{\tau_o}{f_c}\right)^2 = \frac{\bar{f}'_c \bar{f}'_t}{6} \quad (\text{I.43})$$

$$\frac{A_u}{f_c} = \frac{1 - \bar{f}_t}{2} \quad \left(\frac{\tau_u}{f_c}\right)^2 = \frac{\bar{f}_t}{6} \quad (\text{I.44})$$

onde \bar{f}'_c , \bar{f}_{bc} , \bar{f}_t , \bar{f}'_{bc} , \bar{f}'_t são valores adimensionalizados em função de f_c .

Valores particulares para os parâmetros A_o , τ_o , A_u e τ_u podem ser obtidos considerando como válidas as seguintes relações:

$$\bar{f}_{bc} = 1.16 ; \bar{f}'_c = 0.3 ; \bar{f}'_{bc} = 0.3 \times 1.16 ; \bar{f}_t = 0.09 ;$$

$$\bar{f}'_t = 0.06 \quad (*)$$

Nessas condições resultam:

. região de compressão:

$$\frac{A_u}{f_c} = 0.2618 ; \left(\frac{\tau_u}{f_c}\right)^2 = 0.246 \quad (\text{I.45})$$

$$\frac{A_o}{f_c} = 0.0783 ; \left(\frac{\tau_o}{f_c}\right)^2 = 0.02214$$

em consequência, as (I.36) e (I.38) passam a ser escritas por:

$$J_2 + \frac{0.0783}{3} f_c I_1 = 0.02214 f_c^2 \quad (\text{I.46})$$

$$J_2 + \frac{0.2618}{3} f_c I_1 = 0.246 f_c^2 \quad (\text{I.47})$$

. região de tração:

(*) esses valores vem dos ensaios experimentais realizados por Kupfer, e são relativos a estados uni e biaxiais de compressão.

$$\frac{A_u}{f_c} = 0.455 \quad ; \quad \left(\frac{\tau_u}{f_c}\right)^2 = 0,015 \quad (\text{I.48})$$

$$\frac{A_o}{f_c} = 0.12 \quad ; \quad \left(\frac{\tau_o}{f_c}\right)^2 = 0,0030 \quad (\text{I.49})$$

em consequência, as (I.37) e (I.39) assumem as formas:

$$J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{1}{3} I_1 0.12f_c = 0.003f_c^2 \quad (\text{I.50})$$

$$J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{1}{3} I_1 0.455f_c = 0.015f_c^2 \quad (\text{I.51})$$

Entretanto, CHEN (1975) observa que não há uma definição clara sobre o início da plastificação. Ressalta ainda que os diversos autores posicionam a superfície inicial com base na tensão uniaxial de plastificação, especificada num intervalo que varia entre 0.3 a 0.75 da tensão de ruptura. Esclarece também que a escolha da "posição" da superfície inicial tem influência direta na verificação da hipótese da normalidade. Tendo em vista, então, a verificação dessa última hipótese, sugere que sejam adotados os seguintes valores para a definição da superfície inicial de plastificação:

$$\bar{f}'_c = 0.6 \quad ; \quad \bar{f}'_{bc} = 0.6 \times 1.16 \quad ; \quad \bar{f}'_t = 0.06 \quad (\text{I.52})$$

Além disso, sugere também que a superfície de ruptura seja definida, na região de tração, pelo parâmetro $f'_t = 0.1f'_c$.

Considerando os valores sugeridos por Chen, as (I.46), (I.47), (I.50) e (I.51) passam a ser dadas, respectivamente, por:

$$J_2 + \frac{0.157}{3} f'_c I_1 = 0.09f_c^2 \quad (\text{I.53})$$

$$J_2 + \frac{0.2618}{3} f_c I_1 = 0.246 f_c^2 \quad (\text{I.54})$$

$$J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{1}{3} I_1 \cdot 0.27 f_c = 0.006 f_c^2 \quad (\text{I.55})$$

$$J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{1}{3} I_1 \cdot 0.45 f_c = 0.0167 f_c^2 \quad (\text{I.56})$$

Pois bem, definida a superfície de plastificação, deve-se observar que o seu "movimento" no espaço das tensões simula um endurecimento do tipo misto evidenciado pela translação, com mudança de inclinação, com relação ao eixo hidrostático, como ilustrado na figura I.12.

As diferentes zonas de sollicitação, que aparecem indicadas na figura I.12a), são delimitadas por retas que passam pelos estados de compressão uniaxial e tração uniaxial.

Neste caso um estado de tensão pertencerá à região de compressão se verificar a seguinte condição:

$$I_1 < 0 \quad \text{e} \quad \sqrt{J_2} + \frac{I_1}{\sqrt{3}} < 0 \quad (\text{I.57})$$

Por outro lado, o estado pertencerá à região de tração se

$$I_1 > 0 \quad \text{e} \quad \sqrt{J_2} - \frac{I_1}{\sqrt{3}} < 0 \quad (\text{I.58})$$

A região de sollicitação combinada é, por sua vez, separada em outras duas definidas pelas seguintes condições:

$$I_1 < 0 \quad \text{e} \quad \sqrt{J_2} + \frac{I_1}{\sqrt{3}} > 0 \quad (\text{I.59})$$

denominada de região de compressão-tração, e,

$$I_1 > 0 \quad \text{e} \quad \sqrt{J_2} - \frac{I_1}{\sqrt{3}} < 0 \quad (\text{I.60})$$

denominada de região de tração-compressão

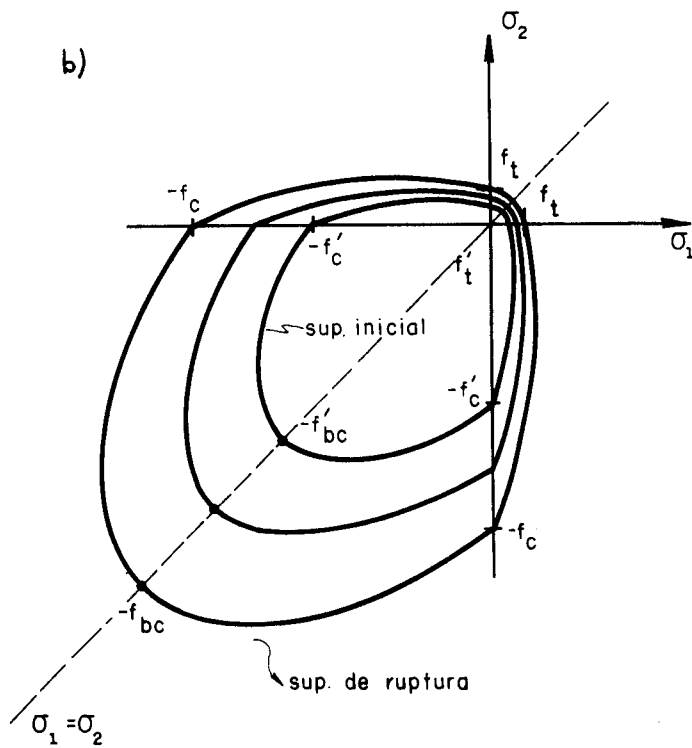
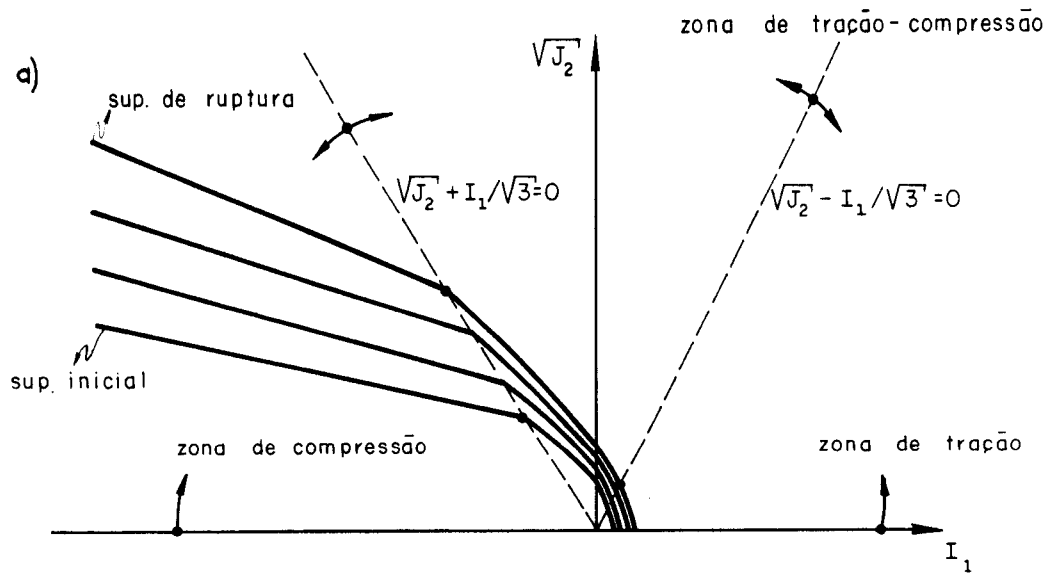


Fig. I.12 - Superfície de plastificação de CHEN

Outro aspecto relacionado à superfície de Chen, que deve ser ressaltado, é aquele relacionado à definição do parâmetro G .

Como se sabe, para as funções homogêneas de grau unitário, G pode ser obtido através do parâmetro H' tangente ao diagrama tensão-deformação equivalente.

Entretanto, neste caso, Chen define tensão equivalente através de uma função homogênea do segundo grau ($n=2$). Por outro lado, define também uma deformação plástica equivalente na forma apresentada na página 2.52. A consequência deste procedimento é que essas definições, quando aplicadas ao caso de solicitação unidimensional, não reproduzem as tensões e deformações uniaxiais e, portanto, a tangente ao diagrama $\sigma_e - \epsilon_p$ não coincide com a tangente ao diagrama $\sigma - \epsilon$.

Nessas condições, deve-se construir, com base nas definições adotadas, o diagrama $\sigma_e - \epsilon_p$ e a partir daí estimar H' para cada valor de ϵ_p ; finalmente, determina-se G pela (I.130) da Seção II.

De modo específico, a tensão equivalente é definida por:

$$\sigma_e = \sqrt{F} = \sqrt{\tau} \quad (\text{I.61})$$

onde F , ou τ , devem ser calculados nas regiões de compressão e de tração, ou tração-compressão, pelas (I.34) e (I.35), respectivamente. (*)

É interessante ilustrar alguns valores característicos para σ_e que podem ser facilmente obtidos. São, por exemplo, aqueles correspondentes à τ_o e a τ_u ou seja, os relativos às superfícies inicial de plastificação e de ruptura.

(*) o grau de homogeneidade de F está demonstrado no apêndice I.

Admitindo que nessas situações as (I.34) e (I.35) assumam as formas dadas pelas (I.53) a (I.56), resultam:

. região de compressão

$$\sigma_{e_o} / f_c = 0.3 \quad \sigma_{e_u} / f_c = 0.5 \quad (I.62)$$

. região de tração (ou tração-compressão)

$$\sigma_{e_o} / f_c = 0.077 \quad \sigma_{e_u} / f_c = 0.13 \quad (I.63)$$

A figura I.13 apresenta os diagramas $\sigma_e / f_c - \epsilon_p$ obtidos por CHEN (1975).

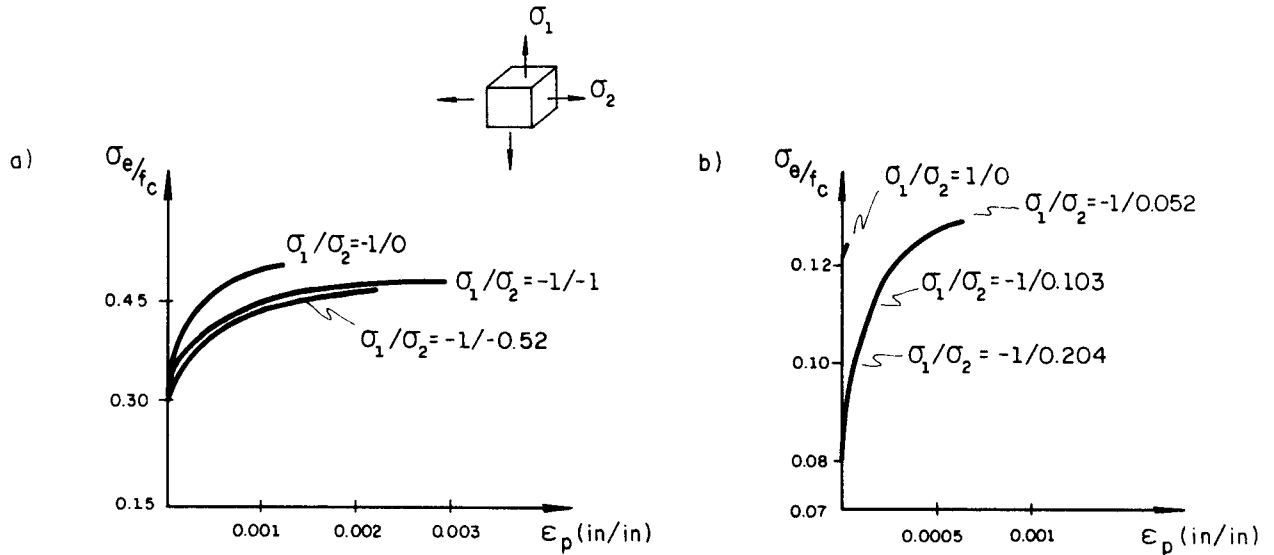


Fig. I.13 - Diagramas $\sigma_e - \epsilon_p$: a) compressão
b) tração

Com o intuito de simplificar o tratamento numérico do problema, propõe-se, tendo em vista a proximidade entre as curvas na região de compressão e a coincidência entre aquelas da região de tração-compressão (com exceção da tração simples), a definição de uma única função de endurecimento, em cada uma das regiões, de modo a representar o comportamento do concreto sob qualquer combinação de sollicitações.

Na figura I.14, apresenta-se o aspecto do diagrama idealizado.

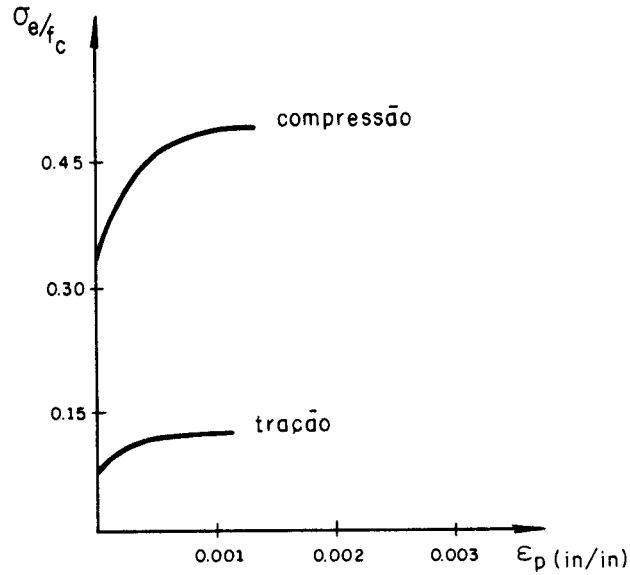


Fig. I.14 - Diagrama $\sigma_e - \epsilon_p$ idealizado.

É interessante observar, finalmente, que devido ao grau da F adotada, G deve ser calculado por:

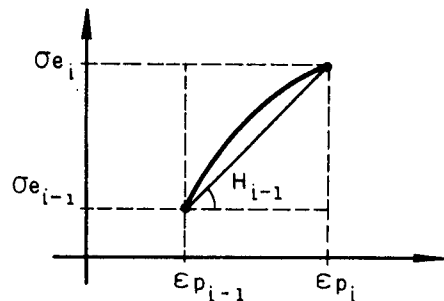
$$G = 4 \cdot \sigma_e^2 H' \tag{I.64}$$

onde H' é a tangente ao diagrama idealizado $\sigma_e - \epsilon_p$ (*)

(*) evidentemente que na falta de uma expressão algébrica explícita que permita calcular σ_e em função de ϵ_p , H' pode ser determinado por via numérica em função de valores de σ_e e ϵ_p em pontos discretos do diagrama.

Por exemplo:

$$\frac{d\sigma_e}{d\epsilon_p} \approx \frac{\sigma_{e_i} - \sigma_{e_{i-1}}}{\epsilon_{p_i} - \epsilon_{p_{i-1}}} = H_{i-1}$$



I.6 - COMPORTAMENTO PÓS-RUPTURA

As considerações que seguem estão baseadas na conceituação de ruptura apresentada no item I.3. Portanto a ruptura tem um aspecto local e, nesta situação, pode não significar uma limitação na capacidade portante de toda a estrutura.

Assim sendo, é lícito falar num comportamento pós-ruptura, sendo que no caso do concreto simples e do concreto armado algumas características deste comportamento devem ser observadas, pois tem considerável influência sobre a eficiência da simulação numérica.

De um modo geral, ocorrida a ruptura por esmagamento, o material perde completamente, no ponto, a capacidade de resistência a qualquer tipo de deformação adicional. Isso significa que todos os esforços que solicitavam o ponto imediatamente antes da ruptura devem ser redistribuídos para o restante do corpo. Assim, a ruptura local por esmagamento implica numa redistribuição de esforços, fato que deve ser previsto na implementação numérica.

Com relação ao comportamento pós-ruptura por separação, é interessante dividir a análise entre o concreto simples e o concreto na presença de armadura.

Na figura I.15 estão ilustradas várias possibilidades a respeito da formação de fissuras, com um destaque em **negrito** para as fissuras abertas.

No que diz respeito ao concreto simples, pode-se admitir, de modo simplificado, que após a ruptura não mais existe a possibilidade de transmissão de esforços normais e tangenciais associados ao plano da fissura.

Nessas condições, a relação constitutiva incremental do material fissurado, válida para os casos planos de tensão, fica expressa em forma matricial por:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_n \\ d\sigma_t \\ d\sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_n \\ d\varepsilon_t \\ d\varepsilon_{nt} \end{Bmatrix} \quad (I.65)$$

onde os índices n e t referem-se a eixos locais de referência posicionados perpendicularmente e na direção do plano da fissura, respectivamente, e $d\sigma$ e $d\varepsilon$ são incrementos de tensões e de deformações associados àquelas direções.

Consequentemente a formação, por hipótese, de uma segunda fissura, estando a primeira aberta, ocorrerá segundo uma direção perpendicular à primeira.

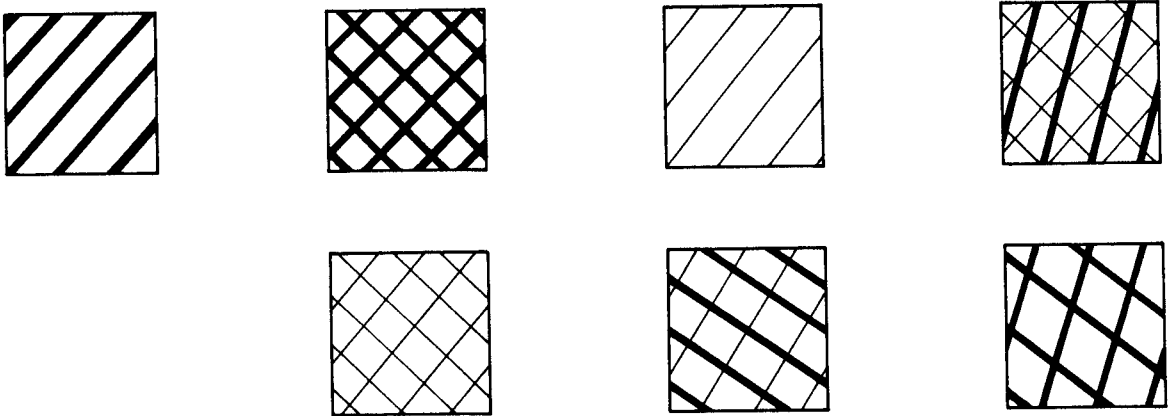


Fig. I.15 - Possibilidades para abertura e fechamento de fissuras.

Por outro lado, pode-se tratar o fenômeno do engrenamento dos agregados através de um modelo de ruptura parcial, no qual se considera a possibilidade de transmissão de tensões de cisalhamento no plano da fissura. Na relação constitutiva isso é simulado por uma redução do módulo de elasticidade transversal através de sua multiplicação por um fator contido no intervalo $0 < \beta < 1$. (*)

(*) valores reais para β são de difícil obtenção experimental. É comum, entre diferentes autores, adotar-se um valor constante (usualmente 0,8) ou então exprimir β como uma função da deformação perpendicular ao plano da fissura (quanto maior a deformação, menor β).

Assim, nesse caso a relação constitutiva passa a ser:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_n \\ d\sigma_t \\ d\sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_n \\ d\varepsilon_t \\ d\varepsilon_{nt} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.66})$$

Deve-se observar que através desse modelo uma segunda fissura não mais se formará segundo uma direção perpendicular à primeira.

Entretanto, persistindo com um modelo de retenção da tensão de cisalhamento no plano da fissura, e ao mesmo tempo anulando a capacidade de resistência ao esforço normal a ela, o aparecimento de uma segunda fissura só pode ser tratado de modo consistente escrevendo a relação constitutiva com referência a direções ortogonais bissetrizes do ângulo entre as duas fissuras. (*)

Para evitar a mudança no referencial da relação constitutiva, mas ao mesmo tempo permitir ainda a formação de uma segunda fissura com retenção de cisalhamento, um procedimento alternativo consiste em admitir que a segunda fissura se forma, estando a primeira aberta, quando a resistência à tração for atingida na direção ortogonal à primeira. Nessas condições, a relação constitutiva incremental passa a ter a seguinte forma:

(*) Nessas condições, garante-se que nas direções ortogonais às fissuras as tensões normais são nulas e, por outro lado, nos planos das mesmas as tensões de cisalhamento são iguais. Com isso com uma mesma relação constitutiva é possível levar em conta a retenção do cisalhamento nas duas direções simultaneamente.

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_n \\ d\sigma_t \\ d\sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_n \\ d\varepsilon_t \\ d\varepsilon_{nt} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.67})$$

Obviamente, mesmo com a retenção da tensão de cisalhamento, esse procedimento conduz a fissuras ortogonais entre si.

Entretanto, com o objetivo de simplificar um pouco a análise, é usual se admitir que o material perde, no ponto, toda a capacidade de resistência a acréscimos no estado de tensão sempre que houver mais de um grupo de fissuras abertas simultaneamente.

Por outro lado, num concreto anteriormente fissurado aonde se fecha todo o conjunto de fissuras devido a um determinado incremento de carga, considera-se que parte das características originais do material são recuperadas.

Essa situação de fechamento das fissuras, apesar de frequente nos casos de carregamentos cíclicos, não tratados neste texto, podem ocorrer eventualmente durante o processo numérico de redistribuição das tensões. Assim sendo, é necessário prever um critério para o fechamento das fissuras.

No concreto simples, considerando-se que o material possui comportamento elástico linear-frágil, a abertura da fissura é diretamente proporcional à deformação total do material na direção normal à ela. Assim sendo, a fissura se fecha quando sua deformação total se anula ou passa a ser negativa. A figura I.16 ilustra este caso.

No caso do concreto na presença de armadura, devido ao enrijecimento à tração proporcionado pela aderência, a redução da tensão normal ao plano da fissura não se dá de forma total mas de modo progressivo com o aumento das deformações.

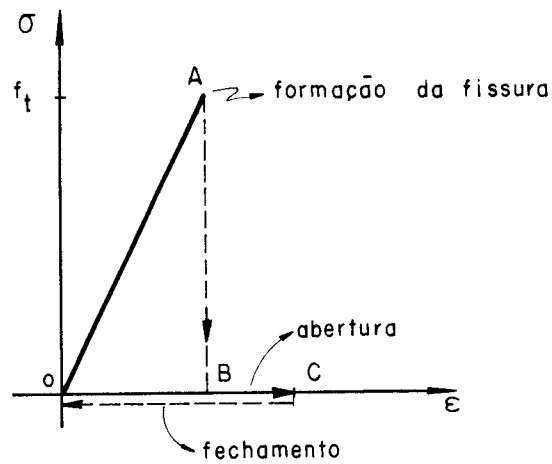


Fig. I.16 - Critério para fechamento da fissura no concreto simples.

A forma adotada para a curva de perda de tensão $\tilde{\sigma}$, em geral, a linear como mostra a figura I.17.

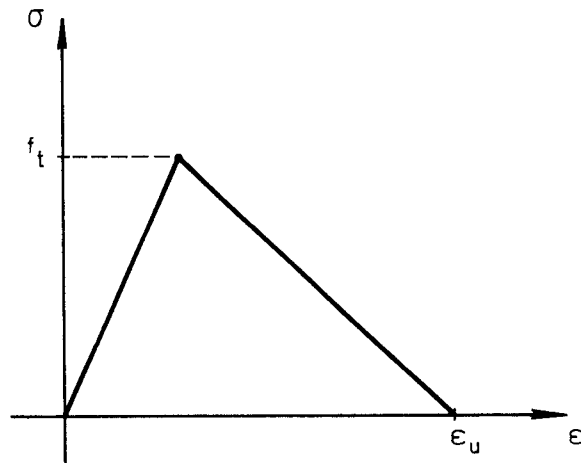


Fig. I.17 - Modelo de enrijecimento à tração.

Analogamente ao caso do concreto simples, adota-se o mesmo critério para o fechamento das fissuras, que consiste em anular a deformação total. Além disso há a necessidade de um critério de carga e descarga, em função da possibilidade de ocorrerem pequenas descargas durante o processo de redistribuição de tensões. (*)

(*) esse critério é necessário para o tratamento com elementos finitos com fissuração difusa.

Os critérios mais simples admitem que a descarga acontece elasticamente sem a geração de deformação residual. Obviamente, para que isso seja possível o módulo de deformação deve variar em função do nível de tensão e de deformação no instante da descarga. A figura I.18 ilustra o critério de carga-descarga.

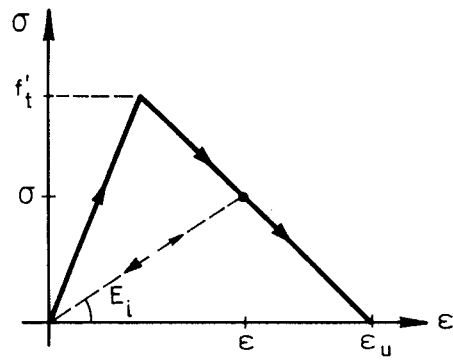


Fig. I.18 - Critério de carga-descarga do concreto em presença de armadura.

CAPÍTULO II

EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA ATRAVÉS DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

II.1 - INTRODUÇÃO

O conteúdo deste capítulo pode ser dividido em duas partes.

Na primeira, descrevem-se, de modo sucinto, os passos gerais para o emprego do método dos elementos finitos na solução de problemas não-lineares. Em particular, no que interessa aos objetivos do texto, apresenta-se a formulação indicada para a aplicação da teoria da plasticidade considerando um material com endurecimento por deformação. Num item próprio é colocado em destaque o procedimento associado ao comportamento pós-ruptura.

Na segunda parte do capítulo são apresentados os resultados da experimentação numérica de vigas de concreto armado e de argamassa armada, obtidos através de um programa que executa os procedimentos descritos na primeira parte.

Da bibliografia básica consultada, destacam-se: DESAI (1972), OWEN (1980), ASCE (1981), CHEN (1982) e FIGUEIRAS (1983).

II.2 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E OS PROCEDIMENTOS ITERATIVOS

Fundamentalmente, através do MEF o contínuo é dotado de uma série de pontos nodais, bases para a interpolação de funções que aproximam os deslocamentos do corpo. A figura II.1 ilustra a idéia da discretização para um caso plano.

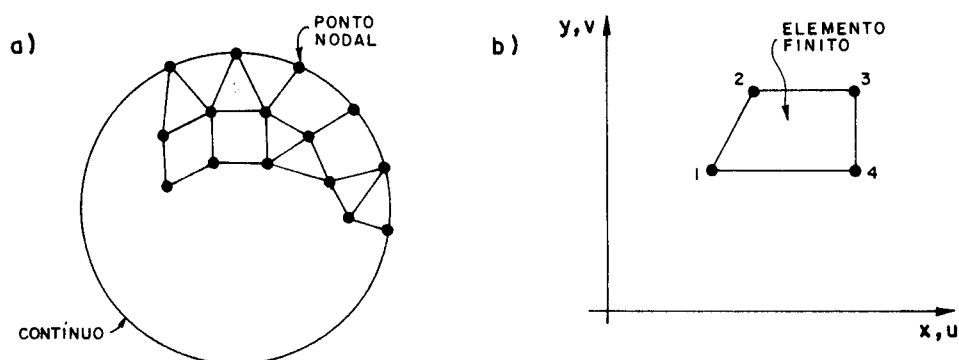


Fig. II.1 - Elementos finitos

Como consequência dessa discretização os deslocamentos u e deformações E de um ponto no interior do elemento podem ser determinados em função dos deslocamentos nodais p através de relações do tipo:

$$u = Np \quad (II.1)$$

$$E = Bp \quad (II.2)$$

onde N representa o conjunto de funções de interpolação e B é composta pelas derivadas das mesmas funções.

A forma de cada uma das funções depende do tipo de modelo teórico empregado para o estudo do comportamento da estrutura.

A condição de equilíbrio da estrutura discretizada pode ser reproduzida através da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais; a equação resultante pode ser escrita na forma:

$$\int_V B^T T dV - R = 0 \quad (\text{II.3})$$

onde

. $\int_V B^T T dV$ é o vetor de forças nodais obtido da contribuição dos esforços internos.

. R é o vetor que reúne os carregamentos externos equivalentes, aplicados aos nós.

No caso das aplicações em elasticidade linear (onde, $T = DE = DBp$), a (II.3) passa a ser:

$$\left[\int_V B^T DB dV \right]_P = R \quad (\text{II.4})$$

ou ainda,

$$K_P = R \quad (\text{II.5})$$

Na última expressão K é denominada matriz de rigidez global da estrutura, obtida a partir da contribuição das matrizes de rigidez de cada elemento.

Entretanto, para o material de comportamento elastoplástico, a relação constitutiva é linear apenas em nível diferencial ($dT = D^{ep} dE$) e, nessas condições, não é possível explicitar uma matriz de rigidez. Consequentemente, o sistema (II.3) resulta não linear.

Num procedimento exato, a estrutura geral do MEF, constituída pelas expressões (II.1) a (II.3), deve ser redefinida para a forma:

$$du = N dp \quad (\text{II.6})$$

$$dE = B dp \quad (\text{II.7})$$

$$\int_v B^T dT dV - dR = 0 \quad (\text{II.8})$$

ou ainda, considerando-se a relação incremental entre tensão e deformação,

$$dR = \left[\int_v B^T D^{ep} B dV \right] dp = K^{ep} dp \quad (\text{II.9})$$

Na última expressão K^{ep} é a matriz de rigidez global elastoplástica, obtida a partir das contribuições de cada elemento.

Uma vez determinados os incrementos de deslocamentos nodais dp , os incrementos de tensão em cada elemento podem ser calculados a partir de:

$$dT = D^{ep} B dp \quad (\text{II.10})$$

No que se refere à utilização prática dessa formulação para análise elastoplástica, deve-se observar que na simulação em computador só é possível aplicar o carregamento externo através de incrementos finitos, e não em incrementos infinitesimais. Nessas condições, a matriz de rigidez da estrutura, que deve variar continuamente com o incremento de carga, pode ser substituída pela matriz de rigidez tangente K_t de valor constante no incremento; em consequência, um erro de aproximação é cometido. Assim, num certo incremento finito de carga ΔR , a (II.9) passa a ser dada por

$$\Delta R = K_t \Delta p \quad (\text{II.11})$$

Em função dos deslocamentos Δp surgem, num certo elemento, deformações ΔE , obtidas a partir de condições de compatibilidade; ao conjunto de tensões elásticas ΔT decorrente, deve-se impor a verificação da relação constitutiva do material elastoplástico, introduzindo-se assim uma correção no seu valor, correspondente ao mesmo nível de deformação. A partir dessa correção resulta uma distribuição de tensões totais que não mais estará em equilíbrio com as cargas aplicadas. Haverá portanto, uma diferença com relação ao carregamento aplicado denominada força residual Ψ , a qual pode ser estimada por

$$\Psi = \int_V B^T T dV - R \quad (\text{II.12})$$

onde R é o nível atual de carga externa aplicada e T o nível atual de tensões (corrigido). Esse vetor residual pode ser interpretado como um conjunto de forças nodais a ser aplicado de modo a restaurar o equilíbrio com o incremento de carga inicial (*). Obviamente, a aplicação desse conjunto de cargas originará uma nova variação nos deslocamentos, calculada a partir de uma matriz de rigidez K_t atualizada ou não, (**) e como consequência, ao final desse

(*) esta interpretação pode ser justificada pelo fato de que teoricamente o vetor residual Ψ não existe, uma vez que ele é gerado pela aproximação da matriz elastoplástica pela matriz tangente. Portanto esse resíduo deve estar distribuído em toda a estrutura ao final de cada etapa de carga. A maneira mais óbvia de efetuar a distribuição do resíduo, de modo a restaurar a situação real do comportamento estrutural, é aplicá-lo como carga sobre a estrutura, deixando que a condição de equilíbrio trate da sua distribuição.

(**) a atualização da matriz de rigidez pode contribuir para a maior rapidez na convergência do processo.

passo um outro vetor de forças residuais será gerado. O novo conjunto de forças residuais poderá uma outra vez ser aplicado como carga sobre a estrutura. Portanto, para cada incremento de carga deve-se realizar um processo iterativo para restabelecer o equilíbrio. O equilíbrio é considerado alcançado quando o valor da força residual resultante é suficientemente pequeno.

O procedimento iterativo deflagrado em cada incremento de carga segue, via de regra, um algoritmo do tipo Newton-Raphson, surgindo daí a possibilidade de manter a matriz K_t constante ou variável a cada iteração e a cada incremento de carga.

Para que se possa compreender melhor a sequência de iterações, apresenta-se em seguida a estratégia de solução para um caso de solicitação mais simples.

Sejam, então, os diagramas carga-deslocamento (*) e momento-curvatura (adotada uma lei qualquer) representados na figura II.2, e relativos, por exemplo, ao problema de flexão de vigas.

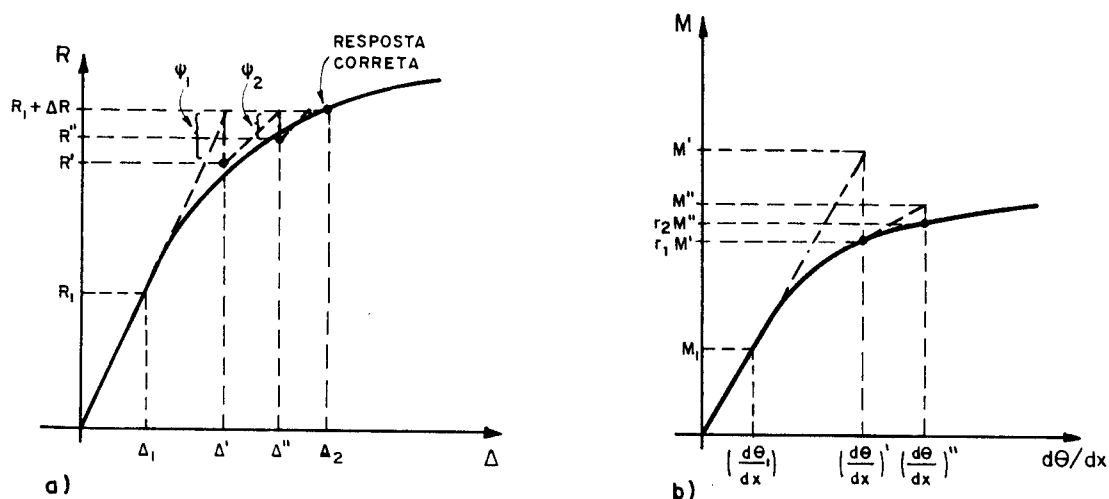


Fig. II.2 - Estratégia de solução para um problema unidimensional.

(*) seja o deslocamento Δ relativo à seção de maior interesse.

Na fase elástica o sistema de equações é linear e o procedimento usual de solução fornece por exemplo, para uma carga R_1 , um deslocamento Δ_1 , uma deformação $d\theta_1/dx$ e uma tensão M_1 .

Admita-se que a partir de R_1 se aplique um incremento de carga ΔR suficiente, por hipótese, para passar do regime elástico para o plástico.

Adotando para matriz de rigidez aquela correspondente ao regime elástico, obtém-se uma solução Δ' elástica para o problema.

À essa solução corresponde, por compatibilidade, uma certa curvatura $(\frac{d\theta}{dx})'$ e um certo momento M' calculado com base na relação linear momento-curvatura.

Entretanto, o momento M' deve ser corrigido para um valor $r_1 M'$ compatível com a lei elastoplástica. A distribuição de momentos totais obtidos em função da correção não mais estará em equilíbrio com a carga aplicada $R_1 + \Delta R$, mas àquela distribuição corresponderá um certo valor R' calculado por $\int_V B^T T dV$. Gera-se portanto um resíduo Ψ_1 que deve ser minimizado através de sua aplicação como carga sobre a estrutura.

Para a aplicação do resíduo sobre a estrutura, duas opções se apresentam. A primeira delas emprega como matriz de rigidez do sistema a matriz elastoplástica tangente em Δ' (calculada pela contribuição da rigidez dos elementos correspondente a uma deformação $(\frac{d\theta}{dx})'$); a segunda opção emprega a matriz de rigidez elástica inicial.

Com a aplicação do resíduo Ψ_1 , empregando-se qualquer uma das opções, calcula-se Δ'' e a partir dele deformações $(\frac{d\theta}{dx})''$ e tensões M'' . Novamente corrige-se M'' de acordo com a relação constitutiva elastoplástica. A nova distribuição de momentos $r_2 M''$ estará em equilíbrio com uma carga R'' , gerando-se um novo resíduo Ψ_2 , o qual, por sua vez, dará origem a uma nova iteração ao ser aplicado como carga sobre a estrutura.

Desse panorama geral sobre a implementação em computador da análise elastoplástica de estruturas, resta discutir, em detalhes, como proceder à correção no estado de tensões devida à imposição da lei constitutiva elastoplástica.

II.3 - IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS ELASTOPLÁSTICOS: VERIFICAÇÃO DA RELAÇÃO CONSTITUTIVA

Admite-se, no que segue, que está sendo aplicado um incremento genérico de carga, tendo sido determinados a partir do incremento anterior o vetor de deslocamentos totais p_n , as componentes do tensor de tensões T_n , a matriz de rigidez atualizada da estrutura K_{tn} e a deformação plástica efetiva total E_{pn} (que pode ser nula se o incremento de carga anterior estiver dentro de um regime elástico).

Em função do incremento de carga ΔR_{n+1} , calcula-se o novo acréscimo no vetor dos deslocamentos, através de

$$\Delta p_{n+1} = K_{tn}^{-1} \Delta R_{n+1} \quad (\text{II.13})$$

A partir daí, obtêm-se, a nível de elemento, o incremento de deformações ΔE_{n+1} . O acréscimo de tensões ΔT_{n+1} correspondente a ΔE_{n+1} , e que deve verificar a relação constitutiva, é o objetivo final. Com essa finalidade, desenvolve-se o procedimento que segue.

Calcula-se, num primeiro passo, o incremento de tensão elástica utilizando a matriz de rigidez elástica do elemento.

$$T^e = T_n + D^e \Delta E_{n+1} = T_n + \Delta T^e \quad (\text{II.14})$$

Pois bem, este novo estado de tensão deve ser testado com relação à superfície de plastificação, que será admitida como a superfície inicial, para que se possa

tratar do caso mais geral. (*)

No caso de não ser violada a condição inicial de plastificação, a superfície deverá permanecer inalterada ($E_{pn} = 0$) e o novo estado de tensão passa a ser:

$$T_{n+1} = T^e \quad (\text{II.15})$$

Deve-se ressaltar que nesse cálculo a matriz de rigidez elástica foi admitida constante, o que é verdade para o caso de comportamento elástico linear. No caso elástico não-linear, uma saída para diminuir o erro resultante da utilização da (II.14) consiste em dividir o incremento de deformação num número de partes iguais, e aplicar, sucessivamente para cada parte, uma condição análoga à (II.14), atualizando em cada iteração a matriz de rigidez elástica.

No caso de T^e violar a condição de plastificação, há uma clara indicação de que durante o incremento de carga houve uma transição para o regime elastoplástico ocorrendo, em consequência, deformação plástica. Assim sendo, o estado de tensão T^e obtido a partir de um cálculo elástico, não corresponde mais ao estado real e, portanto, seu valor deve ser corrigido de modo a verificar a relação constitutiva elastoplástica para o mesmo incremento de deformação ΔE_{n+1} .

Para esta situação em análise, o incremento real do estado de tensão fica dividido em duas partes distintas: elástica e elastoplástica. A parcela elástica representa o incremento necessário ao estado de tensão anterior para que passe a ser verificada a condição de plastificação inicial. A segunda parcela fica definida pela relação elastoplástica com o incremento de deformação.

A parcela elástica é calculada a partir da seguinte equação:

(*) naturalmente com essa hipótese, admite-se também que o incremento de carga anterior estava contido no regime elástico.

$$T_e = T_n + (1-r) \Delta T^e \quad (\text{II.16})$$

onde r é um fator que pode ser obtido pela condição

$$f \left[T_n + (1-r) \Delta T^e \right] = 0 \quad (\text{II.17})$$

Entretanto, uma relação em forma explícita para r pode resultar da (II.17) somente para poucos tipos de funções de plastificação. Assim, uma outra idéia é admitir uma interpolação linear entre os valores de f correspondentes aos estados T^e e T_n , f_1 e f_0 respectivamente (v. fig. II.3). Evidentemente nessas condições $f_1 > 0$ e $f_0 < 0$.

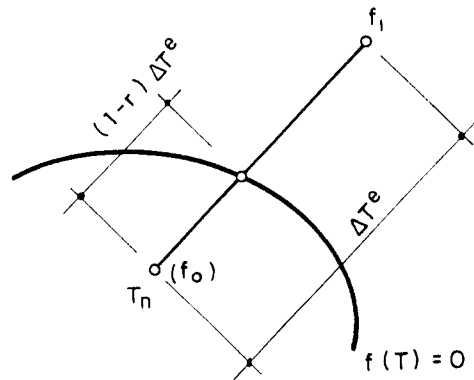


Fig. II.3 - Acréscimo de tensão violando a condição de plastificação.

A interpolação fornece a seguinte expressão para r :

$$r = \frac{f_1}{f_1 - f_0} \quad (\text{II.18})$$

Essa mesma expressão pode ser colocada em termos da tensão efetiva. Assim, sendo σ_e^e e σ_{en} as tensões efetivas correspondentes aos estados T^e e T_n resultam,

$$f_1 = \sigma_e^e - \sigma_y \quad (\text{II.19})$$

$$f_o = \sigma_{en} - \sigma_y \quad (\text{II.20})$$

e, em consequência, a (II.18) passa a ser

$$r = \frac{\sigma_e^e - \sigma_y}{\sigma_e^e - \sigma_{en}} \quad (\text{II.21})$$

Porém, deve-se observar que a interpolação linear admitida para a obtenção de r só conduz a um resultado exato no caso do endurecimento linear. De um modo geral, portanto,

$$f(T_e) = f_2 \neq 0$$

Uma melhor aproximação para r pode ser obtida através do procedimento que segue.

Para um E_p constante,

$$df = f_T \cdot dT \quad (\text{II.22})$$

Fazendo $dT = \Delta r \Delta T^e$ e $df = -f_2$, obtém-se

$$f_2 = -f_T \cdot \Delta T^e \Delta r$$

e portanto

$$r_1 = r + \Delta r = r - \frac{f_2}{f_T \cdot \Delta T^e} \quad (\text{II.23})$$

Como consequência da linearidade suposta para a interpolação em ΔT , resulta que a parcela elastoplástica do acréscimo de deformação fica dada por

$$\Delta E_{n+1}^{ep} = r \Delta E_{n+1} \quad (\text{II.24})$$

Assim sendo, a parte plástica do incremento de tensão pode ser determinada por

$$\Delta T^P = \frac{\Delta E}{\sqrt{(1-r)\Delta E}} D^P dE \quad (\text{II.25})$$

onde D^P é a parcela não linear da matriz elastoplástica.

ΔT^P pode ser entendido como o acréscimo necessário para reduzir o incremento elástico ΔT^e ao valor compatível com a relação constitutiva elastoplástica.

É interessante observar que uma maneira de proceder à integração indicada na (II.25) consiste em dividir o intervalo $r\Delta E$ em m partes e manter em cada uma delas D^P atualizada constante. Desse modo, para cada parte i vale a relação

$$\Delta T_i^P = \frac{r D^P \Delta E}{m} \quad (\text{II.26})$$

Paralelamente ao cálculo de ΔT^P , procede-se a determinação da parcela de deformação plástica e, por conseguinte, da deformação plástica efetiva. Desse modo, a posição da superfície de plastificação vai sendo também atualizada sucessivamente, através da própria atualização do parâmetro H' .

Obtido ΔT^P pode-se calcular o valor atual do estado de tensões (que deve verificar a relação constitutiva elastoplástica).

$$T_{n+1} = T_n + \Delta T^e - \Delta T^P \quad (\text{II.27})$$

Entretanto, em virtude das aproximações feitas para o cálculo de ΔT^P , o valor de tensão total fornecido pela (II.27) não verifica exatamente a função atual de plastificação, havendo um pequeno erro que pode ainda ser minorado.

Uma maneira de se efetuar a correção é admitir que ela se dá por um vetor dirigido segundo a direção da normal à superfície, na forma

$$\delta T = a f_T \quad (\text{II.28})$$

onde a é um escalar e δT é a correção.

Sendo f_3 o valor de f correspondente a T_{n+1} , a (II.22) fornece

$$-f_3 = f_T \cdot (a f_T) \quad (\text{II.29})$$

de onde resulta

$$a = \frac{-f_3}{f_T \cdot f_T} \quad (\text{II.30})$$

Substituindo o último resultado na (II.28), obtém-se

$$\delta T = - \frac{f_3 f_T}{f_T \cdot f_T} \quad (\text{II.31})$$

Finalmente resulta o valor correto de T_{n+1} ,

$$T_{n+1} = T_{n+1} + \delta T \quad (*) \quad (\text{II.32})$$

Esse novo estado de tensões não mais verifica o equilíbrio com as cargas externas. Portanto o próximo passo é definir o vetor de forças residuais através da (II.12) e reiniciar uma nova etapa do procedimento iterativo.

(*) uma outra maneira de se fazer esta correção, sugerida por Owen (1980), é multiplicar T_{n+1} por um fator obtido pela razão entre a tensão de plastificação e a tensão efetiva correspondente a T_{n+1} , ou seja

$$T_{n+1} = T_{n+1} \cdot \frac{\sigma_y^a}{(\sigma_e)_{n+1}} \quad \text{com } \sigma_y^a \text{ a tensão atual de plastificação}$$

Cumpra observar, finalmente, que para o cálculo do número m de partes em que deve ser dividido o intervalo $r\Delta E$, Owen sugere

$$m = \left(\frac{\sigma_e^n - \sigma_y^a}{\sigma_y} \right) 8 + 1 \quad (\text{II.33})$$

É interessante resumir a sequência de passos a serem seguidos na programação para a implantação do procedimento iterativo.

Seja então a n -ésima iteração na qual está sendo aplicada sobre a estrutura, como carga, o vetor de forças residuais Ψ_{n-1} (determinado ao final da iteração $n-1$).

1. Calculam-se Δp_n , pela (II.13), e ΔE_n por compatibilidade.
2. Calcula-se o incremento elástico de tensão ΔT^e (através de $\Delta T^e = D^e \Delta E_n$) e atualiza-se o estado de tensão ($T^e = T_{n-1} + \Delta T^e$).
3. Determinam-se os invariantes correspondentes a T^e e encontra-se $f_n = f(T^e)$ (ou então o valor da tensão efetiva σ_e^e correspondente a T^e).
4. Se $f(T^e)$ é negativo (ou $\sigma_e^e < \sigma_e^{n-1}$), está ocorrendo um processo de descarga elástico, faz-se $T^n = T^e$ e omitem-se os passos seguintes.
5. Se $f_n > 0$ e $f_{n-1} < 0$ (ou $\sigma_e^e > \sigma_y^o$ e $\sigma_e^{n-1} < \sigma_y^o$) omite-se o passo 6.
6. Se $f_n > 0$ e $f_{n-1} = 0$ (ou $\sigma_e^e > \sigma_e^{n-1} > \sigma_y^o$) faça $r = 1$ e vá para o passo 8.

7. Calcula-se r por (II.18) ou (II.21) e corrige-se este valor pela (II.23).
8. Determina-se a tensão total que satisfaz o critério de escoamento $T_i = T_{n-1} + (1-r)\Delta T^e$. Calcula-se pela (II.33) o número de partes em que deve ser dividido o incremento restante de deformação, $\Delta E_i = \frac{r}{m} \Delta E_n$, e portanto, $\Delta T_i^e = \frac{r}{m} \Delta T_n^e$. Os passos 9 a 15 devem ser repetidos m vezes.
9. Calculam-se os invariantes para $(T)_i$.
10. Usando $E_{p\ n-1}$ encontra-se $H' = \frac{d\sigma_e}{dE_p}$ pela relação tensão deformação uniaxial.
11. Calculam-se $(f_T)_i$ e $(D^e f_T)_i$.
12. Encontram-se $d\lambda$ e D^P (se $d\lambda < 0$ faz-se $d\lambda = 0$).
13. Determina-se $(dT)_i = (dT^e)_i - (D^P dE)_i$ e atualizam-se as tensões $(T)_{i+1} = (T)_i + (dT)_i$.
14. Calcula-se o incremento de deformação plástica e atualiza-se a deformação plástica efetiva.
15. Determina-se δT , pela (II.31), e corrige-se $(T)_{i+1}$.
16. Calcula-se $\Delta T^P = \Delta T - \Delta T^e$.
17. Calculam-se as forças nodais equivalentes de acordo com $\int_{elem} B^T T d\Omega$

II.4 - EXEMPLIFICAÇÃO DO PROCEDIMENTO PARA UM CASO UNIDIMENSIONAL

A situação descrita neste item, corresponde a uma aplicação de carga residual que gera uma transição do regime elástico para o plástico.

Os comentários que seguem referem-se à situação indicada na figura II.4.

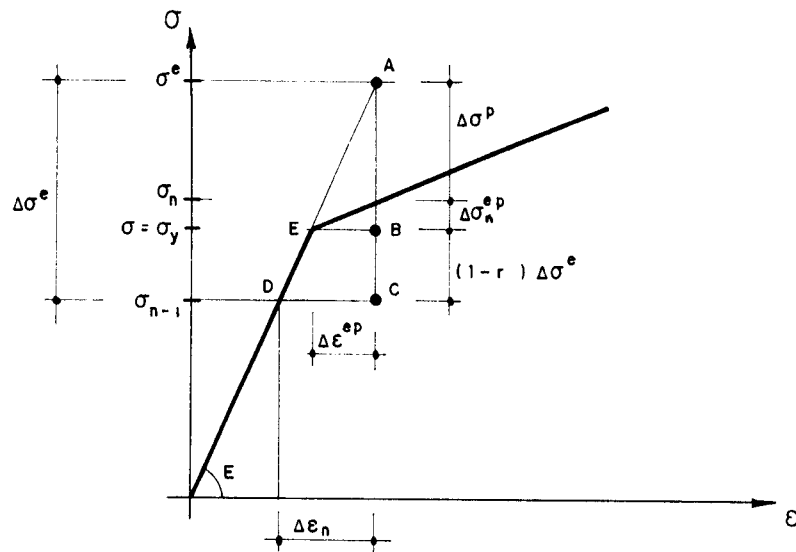


Fig. II.4 - Caso unidimensional

Aplicadas as cargas residuais relativas à iteração (n-1), obtém-se, num certo elemento, $\Delta\epsilon_n$ e o incremento elástico de tensão $\Delta\sigma^e$.

Admitindo que o novo estado de tensão, $\sigma_{n-1} + \Delta\sigma^e$, tenha valor maior do que σ_y (tensão inicial de plastificação), deve-se proceder à sua correção para um valor compatível com a lei de comportamento elastoplástico.

Para isso, determina-se, em primeiro lugar, o fator r que define a parcela de $\Delta\sigma^e$, que acrescida de σ_{n-1} iguala σ_y .

Neste caso de relação σ - ϵ bilinear, o valor exato de r pode ser obtido por:

$$r = \frac{AB}{AC} = \frac{\sigma^e - \sigma}{\sigma^e - \sigma_{n-1}} \quad (\text{II.34})$$

A partir daí a tensão total que satisfaz o critério inicial de escoamento passa a ser dada por:

$$\sigma = \sigma_{n-1} + (1-r)\Delta\sigma^e \quad (\text{II.35})$$

Em função de r pode-se determinar também a parcela elastoplástica do incremento de deformação $\Delta\epsilon_n$. Pela semelhança dos triângulos ADC e AEB, pode-se deduzir que:

$$\Delta\epsilon^{ep} = r \Delta\epsilon_n \quad (\text{II.36})$$

Observa-se, neste caso, que devido a bilinearidade da relação $\sigma - \epsilon$ não há necessidade de dividir o intervalo $\Delta\epsilon^{ep}$ em m partes. Portanto, a parcela elastoplástica do incremento de tensão pode ser calculada diretamente por:

$$\Delta\sigma_n^{ep} = D^{ep} \Delta\epsilon^{ep} = D^{ep} r \Delta\epsilon_n \quad (\text{II.37})$$

Neste caso, pode-se mostrar que

$$D^{ep} = E \left(1 - \frac{E}{E+H} \right) \quad (\text{II.38})$$

de onde se obtém

$$\Delta\sigma_n^{ep} = E \left(1 - \frac{E}{E+H} \right) r \Delta\epsilon_n \quad (\text{II.39})$$

Portanto, o estado atual de tensão é dado por:

$$\sigma_n = \sigma + \Delta\sigma_n^{ep} \quad (\text{II.40})$$

O incremento de deformação plástica, necessário também para o cálculo da deformação efetiva, pode ser determinado, neste caso, pelo seguinte desenvolvimento:

$$\Delta \varepsilon^{ep} = \Delta \varepsilon^e + \Delta \varepsilon^P \quad (\text{II.41})$$

ou ainda, tendo em vista a (II.36),

$$\Delta \varepsilon^P = r \Delta \varepsilon_n - \Delta \varepsilon^e = r \Delta \varepsilon_n - \frac{\Delta \sigma_n^{ep}}{E} \quad (\text{II.42})$$

Por outro lado, considerando a definição do parâmetro de endurecimento H particularizada para este caso ($H = \Delta \sigma_n^{ep} / \Delta \varepsilon^P$) vem:

$$\Delta \varepsilon^P = r \Delta \varepsilon_n - \frac{H}{E} \Delta \varepsilon^P$$

ou

$$\Delta \varepsilon^P = \frac{r \Delta \varepsilon_n}{\left(1 - \frac{H}{E}\right)} \quad (\text{II.43})$$

Portanto, a deformação plástica total no passo n é:

$$\varepsilon_p^n = \varepsilon_p^{n-1} + \Delta \varepsilon^P \quad (\text{II.44})$$

Deve-se observar, neste ponto, que para obter o valor correto de tensão σ_n foi determinada a parcela elasto-plástica do incremento de tensão através da matriz elasto-plástica, como indicado na (II.37). Entretanto, o mesmo incremento de tensão poderia ser obtido através do cálculo da parcela plástica $\Delta \sigma^P$ definida de acordo com a (II.25) por:

$$\Delta \sigma^P = \int_{\sqrt{(1-r)\Delta \varepsilon}}^{\Delta \varepsilon} D^P d\varepsilon \quad (\text{II.45})$$

onde, neste caso,

$$D^P = \frac{E^2}{E+H} \quad (\text{II.46})$$

pois

$$D^{ep} = D^e - D^P \quad (\text{II.47})$$

Nessas condições $\Delta\sigma^{ep}$ passa a ser dada por

$$\Delta\sigma_n^{ep} = \Delta\sigma_n^e - \Delta\sigma_n^P \quad (\text{II.48})$$

A figura II.4 dá uma interpretação geométrica para $\Delta\sigma^{ep}$ e $\Delta\sigma^P$.

Pois bem, no caso analisado o endurecimento é linear, tendo como consequência o valor de H constante. Nessa situação a integração indicada na (II.45) se reduz a

$$\Delta\sigma^P = r D^P \Delta\varepsilon \quad (\text{II.49})$$

Entretanto, num caso geral a lei de endurecimento é não linear dificultando, portanto, o cálculo de $\Delta\sigma^P$. A integral indicada deve então ser calculada numericamente, e uma das idéias para proceder ao cálculo é dividir o intervalo de integração num número m de partes, tomando-se D^P constante em cada intervalo (atualizado de acordo com o valor de H).

II.5 - SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO PÓS-RUPTURA

Neste item são colocados em destaque os procedimentos elaborados para simular, via MEF, o comportamento pós-ruptura por separação, isto é, para levar em conta a fissuração do material. Em particular, destaca-se o algoritmo para a correção no estado de tensão devido à fissura.

Basicamente, a simulação numérica tem se desenvolvido através de modelos de fissura discreta e de fissura distribuída (ou difusa).

O modelo de fissura discreta, por exemplo, permite reproduzir, de modo bastante aproximado fissuras em pontos localizados da estrutura. Entretanto, exige-se o conhecimento prévio da região aproximada aonde as mesmas deverão ocorrer. Sob o ponto de vista da aplicação do MEF, o modelo pré-estabelece os bordos dos elementos como linhas de possíveis descontinuidades que caracterizarão as fissuras e a sua propagação. Assim sendo, a fissura pode ser representada através da eliminação das ligações dos elementos adjacentes a um certo nó, o que se faz através de uma redefinição da malha de elementos finitos em torno da região de dano.

A figura II.5 ilustra a formação de uma fissura mediante o uso do modelo.

A localização e orientação desconhecida das fissuras e a necessidade de alterações na malha de elementos finitos são desvantagens deste procedimento. Porém, para problemas que envolvem um quadro bem definido da fissuração, ou mesmo para uma análise localizada, este tipo de representação conduz a bons resultados. Além disso, os efeitos de engrenamento do agregado e de aderência entre concreto e armadura podem ser melhor representados por meio de elementos de ligação nas interfaces.

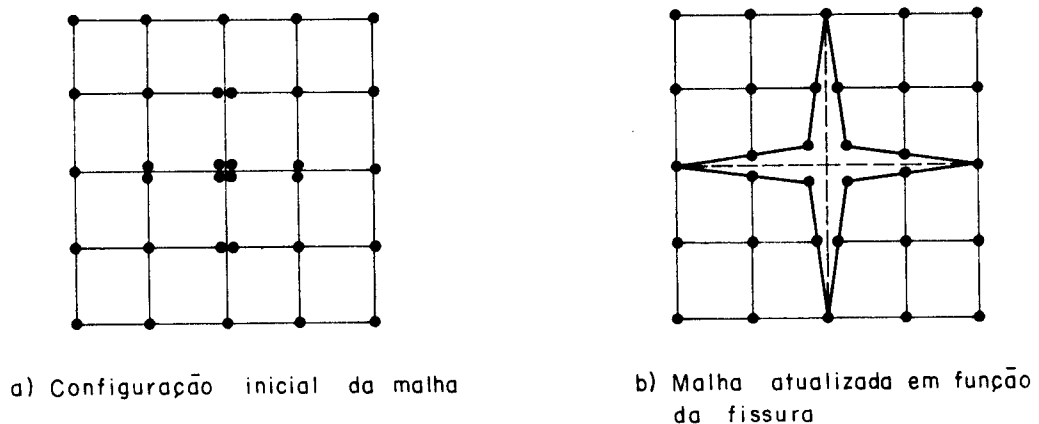


Fig. II.5 - Modelo de fissura discreta

O modelo de fissura difusa, por outro lado, supõe que as fissuras são distribuídas em todo o elemento, (para aqueles que possuem deformação constante), ou numa região de influência de um ponto de integração numérica.

O meio fissurado é ainda admitido como contínuo, porém com comportamento ortótropo ou "transversalmente isotropo". (*)

A principal vantagem apresentada por este modelo é a possibilidade de manter a malha de elementos finitos inalterada na medida em que se propaga a fissura. Entretanto, a informação prestada pelo procedimento se limita à definição de uma região fissurada, apresentando valores médios dos ângulos de inclinação das fissuras e de suas deformações.

Todavia, como o objetivo maior da análise é o de poder levar em consideração a influência das zonas fissuradas no comportamento estrutural global, o modelo difuso constitui a opção mais conveniente no emprego do método dos elementos finitos.

Assim sendo, todos os comentários que seguem tem sempre em vista a aplicação do modelo de fissuração distribuída.

A figura II.6 ilustra o modelo, destacando o ângulo α entre a direção da fissura e o eixo x global.

A implementação em computador da análise pós-ruptura é feita com base em procedimentos que prevêem, em sua maioria, a possibilidade de ocorrerem no máximo duas direções de fissuração num mesmo ponto, admitindo-se que a partir daí o material perde toda a capacidade de resistência à acréscimos de tensão.

Fundamentalmente, o procedimento geral é análogo ao da análise elastoplástica, uma vez que deve-se proceder

(*) a "isotropia transversal" é admitida no elemento fissurado numa única direção e consiste em admitir que o material mantém as mesmas propriedades iniciais paralelamente às fissuras.

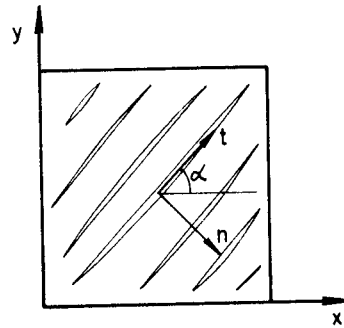


Fig. II.6 - Modelo de fissura distribuída.

a uma correção no estado de tensões, devida ao aparecimento da fissura, e executar um processo iterativo para restabelecer o equilíbrio.

Pois bem, admitindo-se que em determinado ponto tenha sido verificada a condição de ruptura numa certa direção α com um eixo global, a correção no estado de tensões a partir das deformações calculadas é feita, por exemplo, através dos seguintes passos:

1. Efetua-se uma mudança de coordenadas locais mediante uma rotação de valor α , de modo que o eixo x' do novo sistema seja ortogonal à direção da fissura (v.fig.II.6).

2. Calculam-se as tensões e deformações relativas ao novo sistema de coordenadas.

3. Procede-se à correção das tensões associadas ao plano da fissura de acordo com critérios adotados no modelo constitutivo (enrijecimento à tração, engrenamento dos agregados, critério de descarga).

4. Desfaz-se a mudança de coordenadas, obtendo-se as novas tensões relativas aos eixos globais.

No caso de não ser adotado o critério de verificação de formação de fissuras em direções mutuamente per-

pendiculares, entre os passos 3 e 4 deve-se proceder novamente à determinação das tensões principais para comprovar a existência de uma nova direção de fissuração.

Por outro lado, no que se refere à ruptura por esmagamento, o procedimento de correção consiste, simplesmente, em anular a contribuição do ponto (no caso de integração numérica) na formação da matriz de rigidez do elemento.

II.6 - APLICAÇÃO NA INVESTIGAÇÃO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO E DE ARGAMASSA ARMADA

Os exemplos colocados em destaque neste item foram tratados numericamente através de um programa publicado por FIGUEIRAS (1984) e que foi adaptado, e em parte alterado, por este autor.

O programa, que na versão adaptada recebeu a denominação FICON, segue o espírito dos modelos clássicos reunidos nos itens 1 a 5 deste capítulo; seus recursos principais estão comentados no apêndice II deste trabalho.

Entretanto, é necessário ressaltar as hipóteses gerais, quanto ao comportamento dos materiais, adotadas para a realização dos exemplos numéricos. O concreto em compressão foi tratado como um material elastoplástico perfeito; já em regime de tração admitiu-se um comportamento elástico linear, limitado pela resistência à tração f_t , seguido de um regime de "amolecimento" proporcionado pelo fenômeno de enrijecimento à tração. Por sua vez, o aço de armadura é também tratado através de um modelo elastoplástico perfeito com características idênticas na tração e na compressão.

II.6.1 - Exemplo I - Aplicação ao concreto armado

O objetivo é analisar a eficiência do modelo teórico no estudo do comportamento de uma viga de concreto ar

mado simplesmente apoiada, com carregamento externo constituído por duas cargas concentradas, de iguais valores, posicionadas nos terços do vão.

A figura II.6 ilustra os principais detalhes da viga em exame e a tabela II.1 apresenta as características físicas do concreto e aço empregados na mesma.

Vale observar que as características físicas E_{co} , f_c e f_t (respectivamente, módulo de deformação, resistência à compressão e resistência à tração) foram obtidas por ocasião dos ensaios do modelo físico da viga, realizados no LE-EESC, os quais estão documentados em MARTINELLI e TAKEYA (1974). As outras propriedades arroladas na Tabela II.1 foram adotadas em função de diferentes critérios. Por exemplo, os valores da deformação última de compressão ϵ_u e da deformação última de tração na presença de armadura, ϵ_m , foram adotados considerando que a taxa de armadura é elevada e que, portanto, os limites normais de deformação do concreto simples apresentam-se alterados. Assim sendo, o valor escolhido para ϵ_u é superior ao valor padrão sugerido por Norma; por sua vez, ϵ_m , que para peças normalmente armadas gira em torno de dez vezes o valor da deformação limite elástica (vide o capítulo II da seção I), no caso das superarmadas, pela fissuração mais sistemática, tem seu valor diminuído, uma vez que a colaboração do concreto na resistência à tração tende a ser mais limitada.

Um outro parâmetro de valor adotado é α ; ele reflete a perda instantânea de resistência do concreto quando atingido o limite elástico na tração. No caso, o valor escolhido foi 0.6, média de um intervalo de variação, entre 0.5 e 0.7, sugerido por OWEN (1983) por razões não totalmente esclarecidas.

Para fins de aplicação do Método dos Elementos Finitos, a discretização adotada fez uso da simetria do problema, tanto transversal quanto longitudinal, adotando-se um arranjo espacial de dois elementos isoparamétricos de oito nós. Cada elemento foi, por sua vez, dividido ao longo da altura da viga em seis estratos de concreto, aos quais foram sobrepostos dois outros representativos da armadura.

Medidas em milímetros

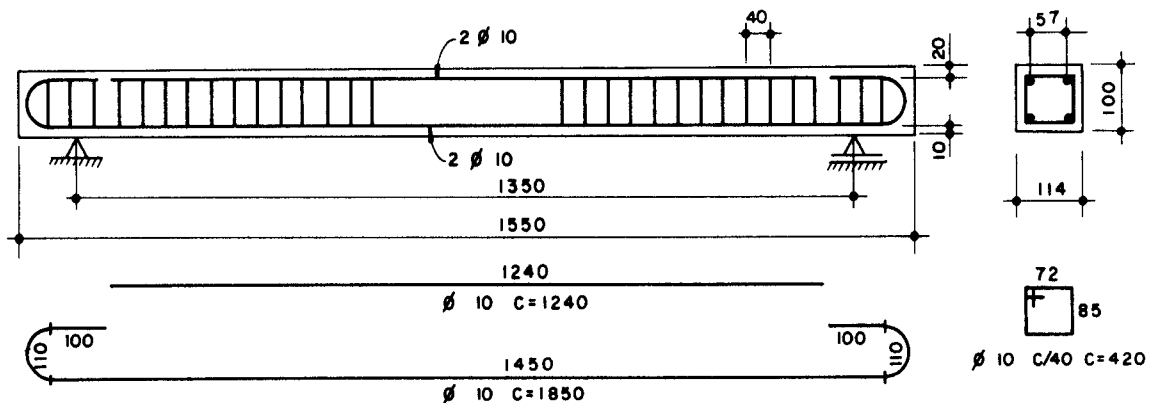


Fig. II.7 - Viga de concreto armado

Concreto	Aço
<ul style="list-style-type: none"> . Módulo de deformação: $E_{co} = 4000.0 \text{ kN/cm}^2$. Coeficiente de Poisson: $\nu = 0.2$. Resistência à compressão: $f_c = 3.92 \text{ kN/cm}^2$. Resistência à tração: $f_t = 0.3 \text{ kN/cm}^2$. Deformação última de compressão: $\epsilon_u = 0.005$. Deformação de "tension stiffening": $\epsilon_m = 0.0005$ $\alpha = 0.6$ 	<ul style="list-style-type: none"> . Módulo de Young: $E_s = 19600.0 \text{ kN/cm}^2$. Tensão de escoamento: $f_y = 51.1 \text{ kN/cm}^2$

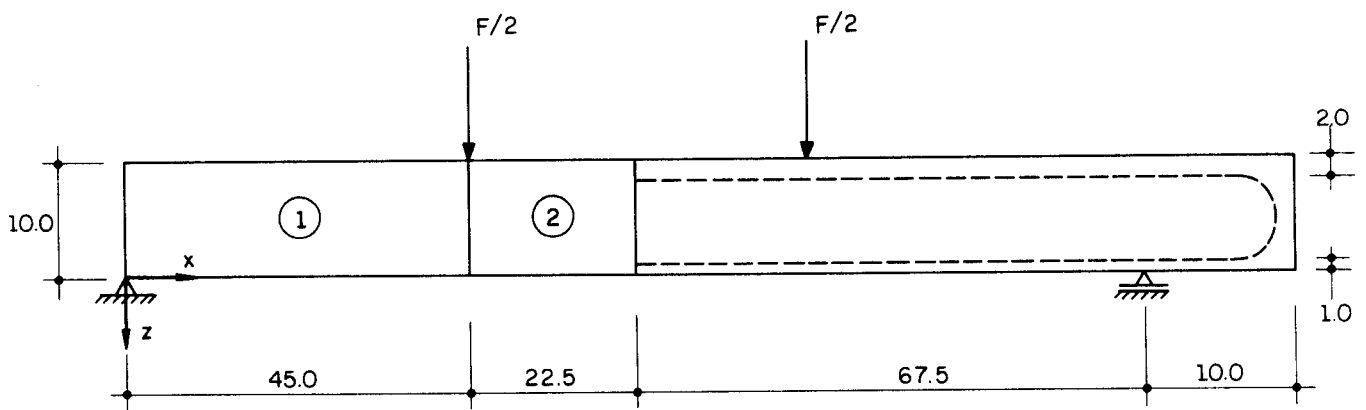
Tabela II.1 - Propriedades mecânicas: concreto e aço

É bom lembrar que, no modelo, a representação das armaduras não se dá por uma discretização individual, mas sim através da distribuição da soma das áreas das barras de aço, que ocupam uma mesma altura, ao longo da espessura da

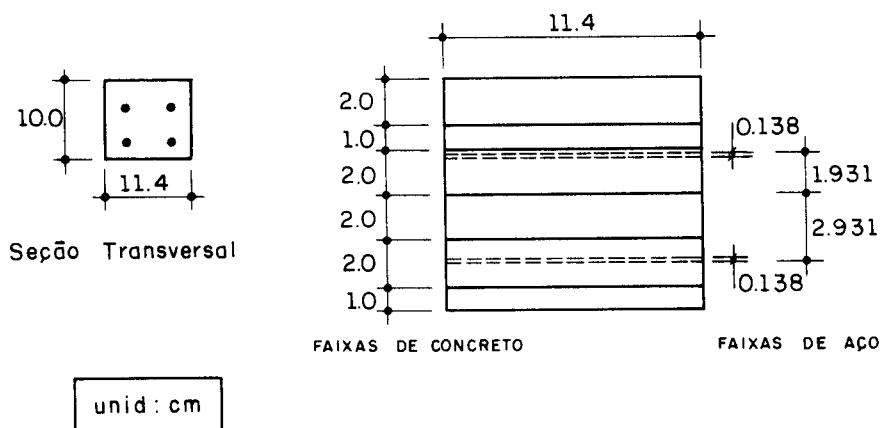
peça, constituindo, portanto, uma faixa retangular de igual área. Assim sendo, haverá tantas faixas de armadura quantas forem as camadas de barras de aço (as armaduras transversais não são discretizadas).

As características da discretização adotada estão reproduzidas na figura II.8.

a) Divisão em elementos finitos



b) Discretização ao longo da espessura



c) elemento finito

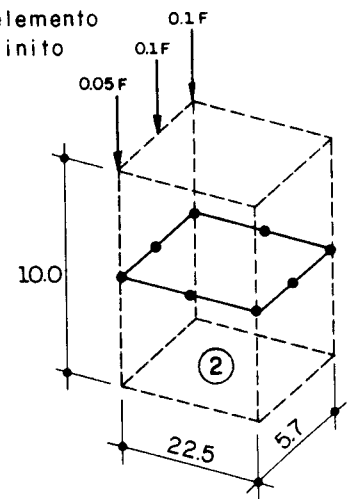


Fig. II.8 - Discretização da viga (dupla simetria)

Em II.8a), apresenta-se a divisão em elementos finitos; em II.8b) destaca-se a divisão em estratos de concreto e de aço. Finalmente, em II.8c) está ilustrado o elemento finito adotado. Deve-se ressaltar que este é um ele-

mento originalmente formulado com vistas às aplicações em placas e cascas, pois as estruturas compostas pelo arranjo desses elementos estruturais são o objetivo principal do programa FICON. Observa-se que a figura II.8c) também apresenta a distribuição adotada da carga externa F em função do número de nós do elemento.

A comparação entre os deslocamentos no meio do vão da viga, obtidos nas experimentações numérica e do modelo físico, está reproduzida na figura II.9.

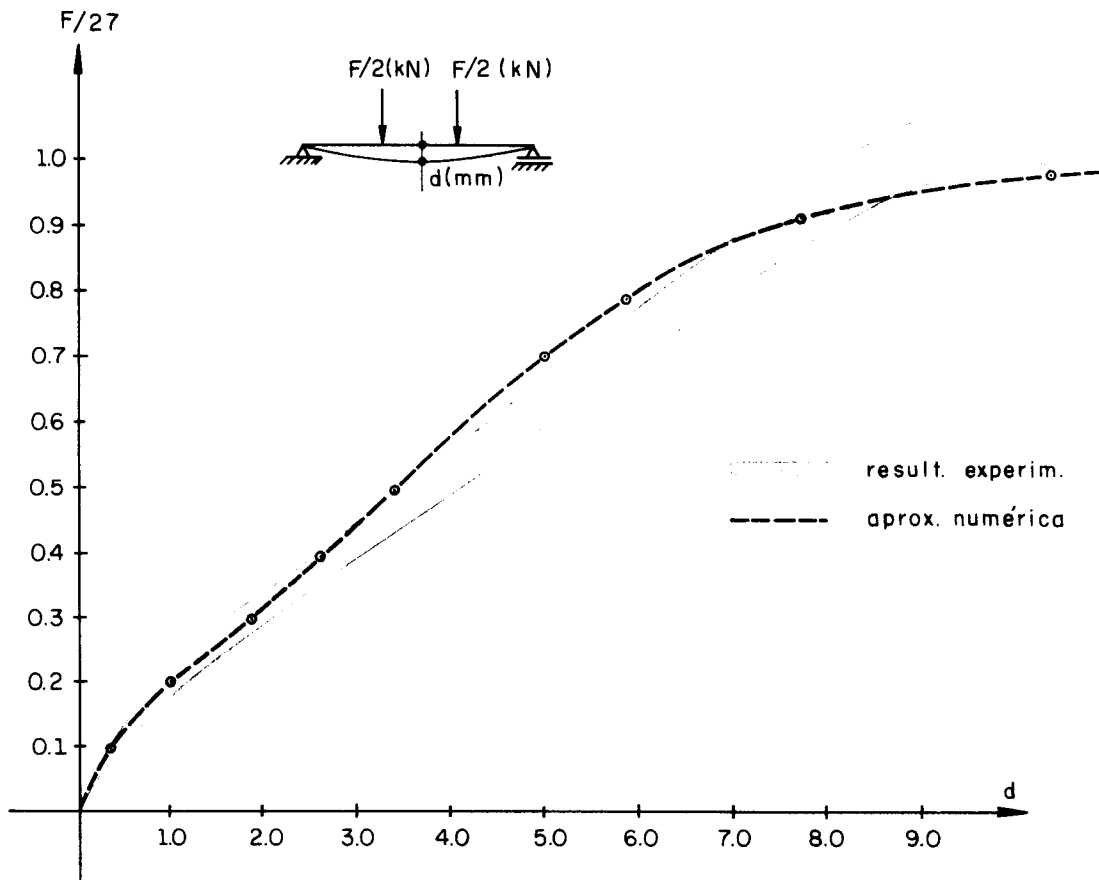


Fig. II.9 - Deslocamentos da viga de concreto armado

É preciso ressaltar que a experimentação numérica, apesar de realizada várias vezes, não foi exaustiva ao ponto de esclarecer totalmente as razões das eventuais divergências entre os resultados, de modo que as conclusões

que passam a ser expostas são mais de natureza especulativa do que afirmações contundentes.

Em primeiro lugar, como consequência da elevada taxa de armadura, a não linearidade inicial do problema é devida ao aparecimento da fissuração; este fato está refletido na figura II.8, no trecho em que o parâmetro de carga varia entre 0.0 e 0.4. Além desse limite, e até 0.7, a resposta numérica passa a ser mais rígida, com menores deslocamentos, do que a experimental. Aparentemente essa diferença é devida ao modelo elastoplástico perfeito adotado para o concreto. A partir do parâmetro de carga 0.7 os deslocamentos passam a ter um crescimento bastante rápido, em função também da não linearidade resultante da "plastificação" do concreto. Neste exemplo a carga de ruptura prevista pelo modelo numérico se situou entre os valores 1.0 e 1.1 do parâmetro de carga ($F/27$).

Os resultados obtidos sugerem, principalmente, a adoção de um modelo plástico com endurecimento para o comportamento de concreto, como forma de melhorar a resposta do processo. Por outro lado, sob o ponto de vista numérico, a discretização da viga pode ser incrementada sendo que, talvez, um maior número de estratos de concreto ao longo da altura do elemento seja interessante para melhorar a resposta do modelo próximo à carga de ruptura.

II.6.2 - Exemplo II - Aplicação à argamassa armada

Este exemplo teve como objetivo básico verificar a resposta apresentada pelo modelo quando aplicado ao estudo de uma estrutura em argamassa armada. A experiência é válida uma vez que, aparentemente, as hipóteses feitas originalmente na formulação do modelo clássico para o concreto armado são válidas também para a argamassa armada.

A estrutura escolhida é de um tipo idêntico àquela do exemplo anterior, isto é, uma viga simplesmente apoiada com carregamento externo constituído por cargas concentradas aplicadas nos terços do vão.

Na figura II.10, apresentam-se as dimensões e de mais características da viga em estudo; já a tabela II.2 reproduz as propriedades mecânicas da argamassa e do aço empregadas nos cálculos.

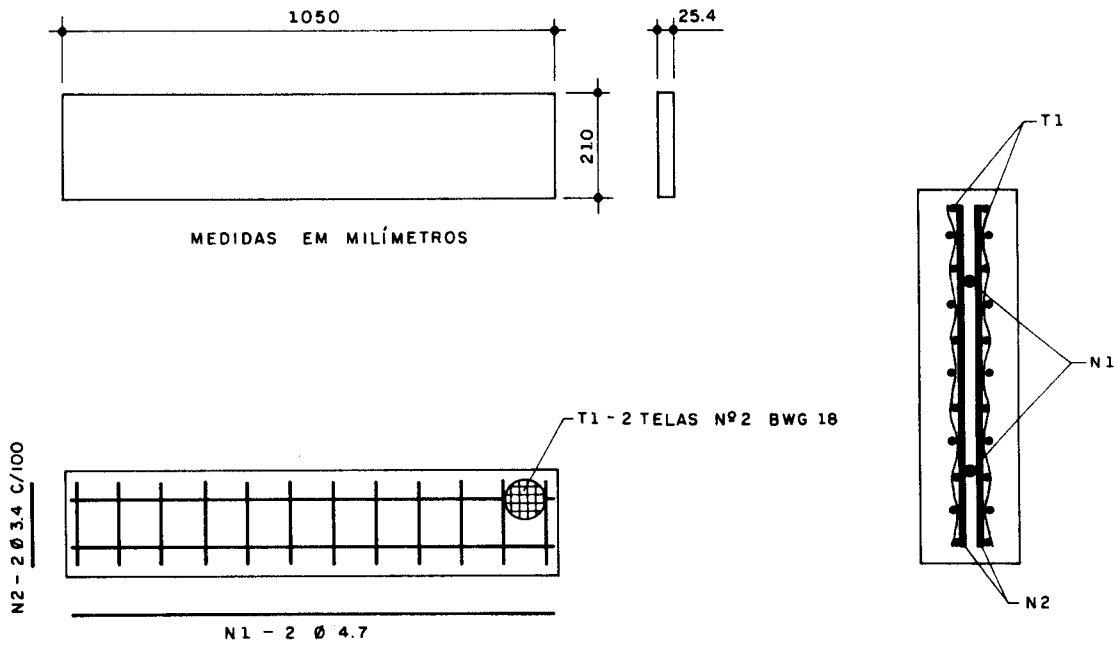


Fig. II.10 - Viga de argamassa armada

Argamassa	Aço de armadura
<ul style="list-style-type: none"> . Módulo de deformação: $E_{co} = 3810.0 \text{ kN/cm}^2$. Coeficiente de Poisson: $\nu = 0.2$. Resistência à compressão: $f_c = 4.36 \text{ kN/cm}^2$. Resistência à tração: $f_t = 0.328 \text{ kN/cm}^2$. Deformação última de compressão: $\epsilon_u = 0.005$. Parâmetros de "tension stiffening" $\epsilon_m = 0.001$ $\alpha = 0.6$ 	<ul style="list-style-type: none"> . Módulo de Young: $E_s = 17200.0 \text{ kN/cm}^2$. Tensão de escoamento: $f_y = 58.5 \text{ kN/cm}^2$
	Aço das telas
	<ul style="list-style-type: none"> . Módulo de Young: $E_s = 21200.0 \text{ kN/cm}^2$. Tensão de escoamento: $f_y = 47,9 \text{ kN/cm}^2$

Tabela II.2 - Propriedades mecânicas: argamassa e aço

Um estudo bastante detalhado da argamassa armada, e suas aplicações estruturais, pode ser encontrado em HANAI (1981) e HANAI (1987). Entretanto, é bom ressaltar, entre outras características, que as estruturas constituídas por esse material são bastante delgadas. Por outro lado, a combinação do aço com argamassa não é feita apenas a través de barras discretas, mas também por meio de telas posicionadas convenientemente na espessura da peça. Exatamente essa característica de distribuição de armaduras confere ao material uma ductilidade bastante significativa, apresentando ainda uma configuração de fissuração predominantemente sistemática.

Do ponto de vista teórico, os aspectos do material colocados em destaque no parágrafo anterior indicam, em primeiro lugar, para um estudo de comportamento limite, a necessidade eventual de se admitir que os deslocamentos deixam de ser muito pequenos com relação à dimensão da espessura da peça estrutural. Por outro lado, ao se definirem os parâmetros associados ao fenômeno de enrijecimento à tração é bom lembrar que a taxa de armadura é elevada.

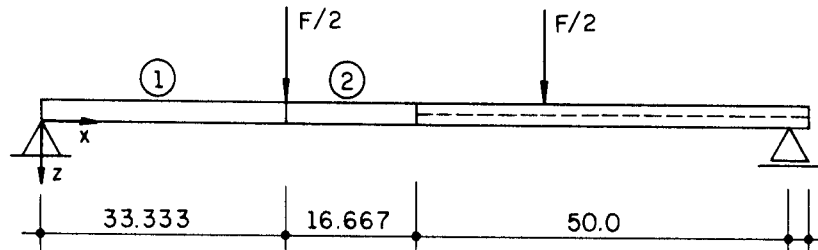
No caso deste exemplo, o modelo físico foi executado e ensaiado no LE-EESC, sendo que os resultados, e detalhes do ensaio, estão comentados em EL DEBS (1984). Os parâmetros E_{co} , f_c e f_t são valores médios sugeridos naquele trabalho; já ϵ_u , ϵ_m e α foram adotados por razões semelhantes às discutidas no exemplo anterior.

Na simulação numérica, a viga foi discretizada por dois elementos finitos, aproveitando-se, também, as simetrias transversal e longitudinal do problema. Ao longo da altura da viga, cada elemento foi subdividido em seis estratos de concreto, sobrepostos a três outros de aço.

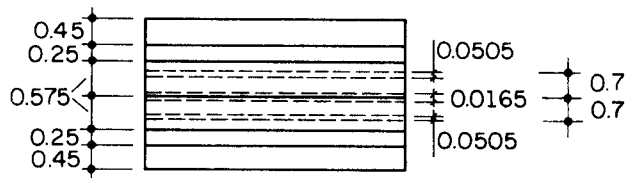
As características da discretização adotada estão ilustradas na figura II.11.

Em II.11a), destacam-se a divisão em elementos finitos e o vão teórico de cálculo, em II.11b) estão representados os estratos de concreto e aço. Na figura II.11c)

a) Divisão em elementos finitos



b) Discretização ao longo da espessura



(unid.: cm)

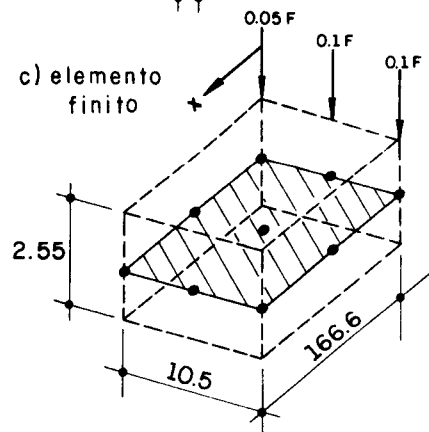


Fig. II.11 - Discretização da viga (dupla simetria).

está ilustrado o elemento finito, isoparamétrico lagrangeano de 9 nós, que foi uma das alternativas testadas na resolução do problema.

Nas figuras II.12 e II.13 estão reproduzidos os resultados obtidos para os deslocamentos no meio do vão, considerando, respectivamente, a aplicação dos elementos finitos de 8 (com integração numérica através de 4 pontos de Gauss) e de 9 nós (com 9 pontos de Gauss).

A figura II.12 evidencia também a necessidade de se considerar que os deslocamentos são grandes. Para esse fim, o programa FICON possui uma rotina baseada nas hipóteses de von Kármán, válidas para deslocamentos até da ordem da espessura, e que mostrou-se eficiente para o problema em questão.

Com relação ao elemento de oito nós, com integração numérica reduzida por meio de quatro pontos de GAUSS, ele foi eficiente até um valor de carga ideal 0.7. A partir daí os resultados passaram a apresentar um desvio inesperado, aparentemente decorrente de uma imprecisão resultante da necessidade de se levar em conta parcelas de segunda ordem, em razão dos grandes deslocamentos, numa integração feita apenas por intermédio de quatros pontos.

Por outro lado, como mostra a figura II.13, quando se passou a utilizar o elemento de nove nós com integração numérica realizada por meio de nove pontos de GAUSS, os resultados ficaram estáveis ao longo de todas as etapas de carregamento consideradas.

Essa variação de resposta, ora mais precisa ora menos precisa, decorrente não do modelo teórico mas principalmente do processo de integração numérica adotado, indica a necessidade de se pesquisar previamente, em função das características de cada problema, o tipo de elemento finito, e o número de pontos de integração, mais adequado.

Obviamente, ainda com relação aos resultados obtidos, restaria uma dúvida a respeito da suficiência da discretização adotada quanto ao número de elementos finitos. A esse respeito cumpre ressaltar que foram feitos alguns testes com uma malha formada por quatro elementos, sendo que os resultados alcançados não diferiram significativamente dos que estão aqui reproduzidos.

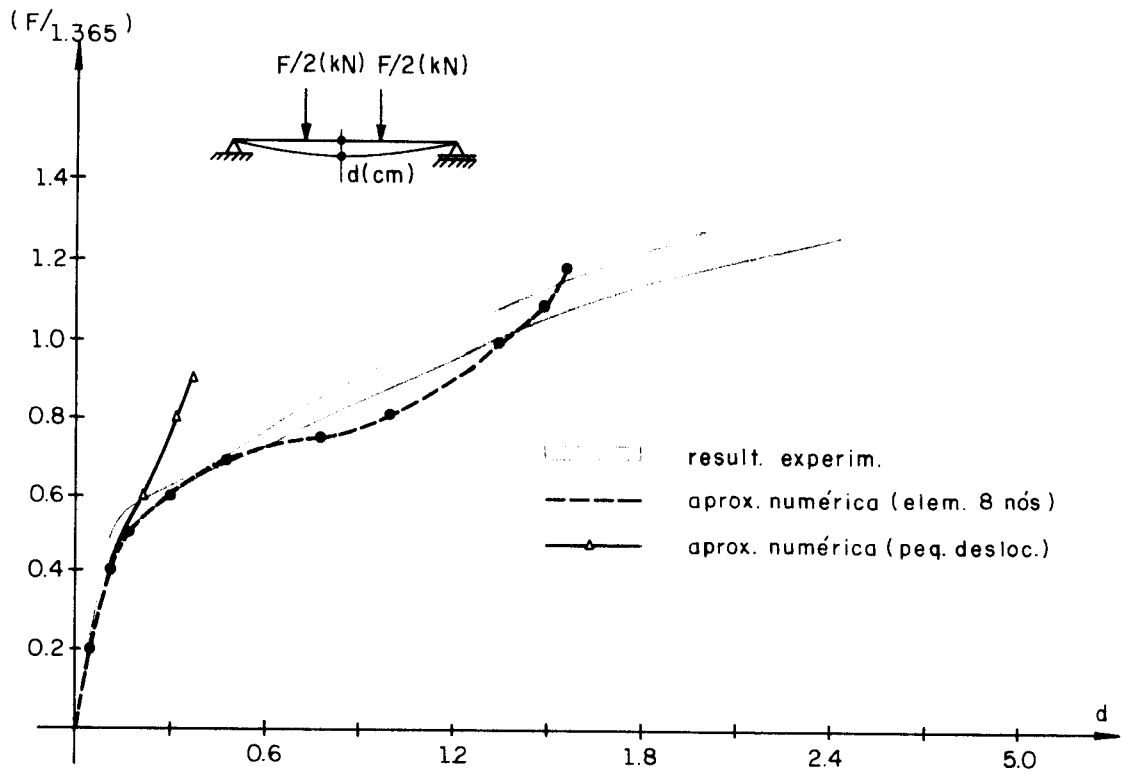


Fig. II.12 - Deslocamentos da viga de argamassa armada

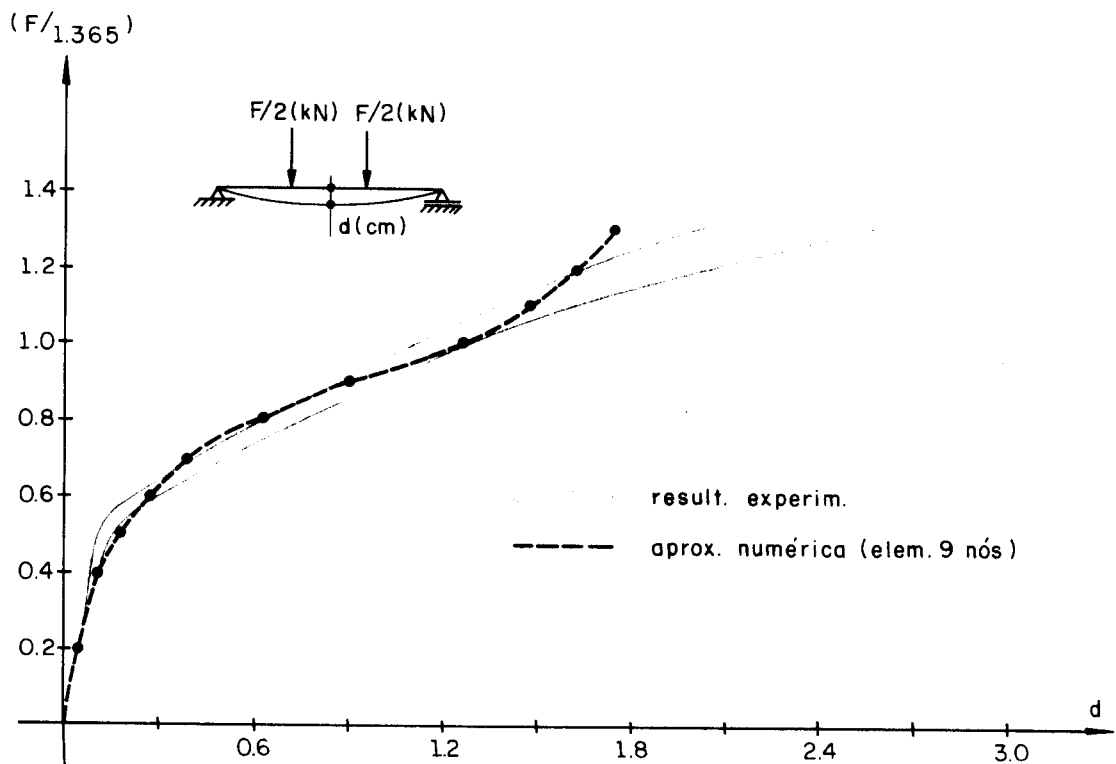


Fig. II.13 - Deslocamentos da viga de argamassa armada

CAPÍTULO III

MODELOS RECENTES DO
COMPORTAMENTO PÓS-FRATURA DO CONCRETO

III.1 - INTRODUÇÃO. O COMPORTAMENTO PÓS-FRATURA

Os modelos aqui denominados recentes, são dedicados ao estudo mais preciso do comportamento do concreto simples em compressão e em tração exclusivamente.

Entre as diferenças para os modelos usuais, destaca-se, principalmente, a consideração do regime de amolecimento, porém, o emprego de conceitos oriundos da mecânica da fratura, a consideração da plastificação via uma lei não associativa e o acoplamento da plasticidade no comportamento elástico, também aparecem como novidades.

A caracterização do início do regime de amolecimento está baseada no conceito de fratura, que permite, por outro lado, associar a nomenclatura comportamento pós-fratura a uma manifestação daquele regime. É conveniente esclarecer, desde já, que uma vez definida a fratura, a ruptura passa a ser um estado correspondente ao final do regime de amolecimento.

Pois bem, admite-se que a fratura ocorre num certo ponto do material quando o estado de tensão, ou de deformação, verifica uma determinada condição expressa através de uma função (ou superfície) de fratura.

No caso da aplicação desse conceito ao concreto, deve-se levar em conta, ao definir a superfície de fratura, as características particulares do comportamento do material quando sujeito a solicitações predominantes de tração ou de compressão.

Basicamente, são dois os tipos de superfícies frequentemente adotadas: a de Rankine, ou da máxima tensão principal de tração, e a de Mohr-Coulomb (ambas já comentadas no capítulo I desta seção nas formas de superfícies de ruptura).

A primeira delas se aplica aos casos de solicitação predominante de tração, podendo reproduzir a fratura física por separação. A segunda é válida para os casos de compressão, e pode coincidir, em particular, com a fratura física por escorregamento, localizada numa estreita faixa inclinada de um ângulo aproximado de $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$ com o eixo da maior tensão principal de compressão (onde ϕ representa o ângulo de atrito interno).

Apresentado o conceito de fratura, o amolecimento passa a ser caracterizado como um regime que ocorre entre o início do fraturamento e a ruptura.

Por outro lado, é interessante observar que na tração, o regime de amolecimento modelado simula a evolução do processo físico de microfissuração localizada, com perda de tensão, que precede a fissura macroscópica da ruptura. No caso da compressão, o regime de amolecimento procura reproduzir a microfissuração motivada pela perda de coesão entre as partículas.

Deve-se observar neste ponto que apesar da caracterização do regime de amolecimento ter sido feita através do conceito de fratura, por sua vez estabelecido por um procedimento típico da teoria da plasticidade, a formulação re

cente dos modelos daquele regime tem seguido as regras da plasticidade apenas no que se refere ao comportamento em compressão. De fato, na tração, em razão de problemas numéricos apresentados pelas formas usuais em situações específicas (que serão comentados mais adiante), tem havido um avanço significativo de uma formulação fundamentada na mecânica do dano.

Por essa razão, são tratados separadamente, neste capítulo, os modelos dedicados aos regimes de tração e os modelos para compressão. Cumpre ressaltar que as situações de solicitações mistas, em que não há predominância de um ou outro esforço, ainda estão sendo objeto de estudos preliminares em face da dificuldade de combinar os modelos de dano com os de plasticidade.

Quanto ao comportamento em compressão, vale lembrar que os regimes de amolecimento e endurecimento tem sido reproduzidos através de um critério para a evolução das superfícies, de plastificação e potencial, no espaço das tensões ou das deformações. Usualmente essa evolução é reproduzida com base numa relação tensão efetiva-deformação plástica efetiva, definida a partir do comportamento uniaxial do material. Todavia, existem propostas de procedimentos alternativos que propõem relacionar a evolução da superfície com a alteração de parâmetros físicos do material. Um exemplo é a proposta de grupos ligados à área de solos, que trabalham especificamente com a superfície de Mohr-Coulomb, consistindo em associar o endurecimento e o amolecimento com a variação do atrito interno ϕ e da coesão c , respectivamente.

Além do amolecimento, uma outra característica do comportamento pós-fratura, observada nos materiais granulares, é a dilatância. Ela é típica dos estados de compressão triaxial e intermediária, sendo causada pelo escorregamento entre os grãos do material. Os modelos recentes empregam leis não associativas de plastificação na simulação desse fenômeno, isto é, leis que impõem a normalidade segundo uma superfície potencial.

Ainda no que se refere aos regimes de compressão, alguns modelos procuram reproduzir a variação nas propriedades elásticas do material, proveniente do aparecimento de deformações plásticas, observadas no concreto sujeito a solicitações alternadas do tipo carga-descarga. Esses modelos são, fundamentalmente, uma combinação dos conceitos da teoria da plasticidade com os da teoria do módulo secante de Dougill (1976).

Tendo-se em vista a exposição geral anterior, é interessante comentar o conteúdo deste capítulo.

Os modelos do comportamento pós-fratura são agrupados entre aqueles que empregam diretamente a teoria da plasticidade, dedicados aos regimes de compressão, e os que se preocupam em reproduzir o fenômeno de fissuração na tração, e sua influência no comportamento do material, através de uma formulação que segue os moldes da mecânica do dano.

Com relação a esse último grupo, apresentam-se, de início, alguns elementos básicos da mecânica da fratura que tem sido usados como parâmetros na recente formulação dos modelos de fissuração distribuída no concreto. Em seguida, analisa-se a validade da parametrização proposta, a través de um estudo com a mecânica do dano. Finalmente, considera-se um modelo recente de fissuração distribuída, que aplica os conceitos anteriores.

No que diz respeito aos regimes de compressão, a apresentam-se os modelos de plasticidade acoplada e, em i-tem próprio, um modelo para materiais granulares baseado no critério de Mohr-Coulomb.

A bibliografia na qual está fundamentado o conteúdo deste capítulo é a seguinte: GLUCKLICH (1963), POPOVICS (1969), BAŽANT (1976), PETERSSON (1980), BAŽANT e OH (1983), OWEN e FAWKES (1983), REINHARDT (1984), BORST e NAUTA (1984), WILLAM (1984), BIČANIČ (1984), VERNEER e BORST (1984), ROTS (1985), HAN e CHEN (1986), HAN e CHEN (1987) e ROTS e BORST (1987).

III.2 - APLICAÇÃO DA MECÂNICA DA FRATURA AO CONCRETO SIMPLES SUJEITO A SOLICITAÇÕES DE TRAÇÃO

É interessante, de início, esclarecer os motivos que levam à utilização da mecânica da fratura como forma de melhorar a resposta dos modelos do concreto simples em tração.

Fundamentalmente os motivos estão associados aos problemas que surgem na simulação numérica, ao empregar modelos de fissura distribuída, considerando a existência de um regime de amolecimento, para estudar algumas situações de fraturamento discreto ou localizado.

Pois bem, observa-se que a adoção de uma lei de amolecimento única, como uma propriedade do material, cria uma dependência dos resultados numéricos com relação ao tamanho do elemento finito que compõe a discretização da zona fraturada (é o chamado efeito de escala ou "size-effect", BAŽANT (1976)).

Esse problema tem sido contornado pela consideração alternativa da energia de fratura G_c como uma propriedade do material, o que provoca, como será mostrado, um ajuste da lei de amolecimento de acordo com a tamanho do elemento finito.

A energia de fratura G_c é um conceito fundamental da mecânica da fratura.

III.2.1 - Mecânica da fratura elástica linear. Conceitos básicos

Uma formulação mais consistente da mecânica da fratura teve origem nas idéias de Griffith, a respeito da propagação instável de uma fissura discreta num material supostamente homogêneo e perfeitamente elástico-frágil.

Griffith, baseou-se no conceito de energia para a definição de um critério para a propagação instável de

uma fissura. O problema estudado é o de um caso plano (de tensão ou de deformação) em que o material está sujeito a um estado de tração uniforme unidirecional, v. fig. III.1.

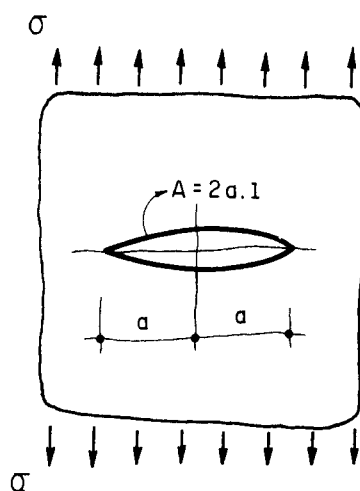


Fig. III.1 - Modelo de Griffith

A idéia básica consiste em supor que durante a geração da fissura há um balanço entre duas formas de energia: a energia de deformação elástica e uma energia de superfície, associada exclusivamente à superfície da fratura. A justificativa para essa idéia tem por base a suposição de que um alongamento da fenda significa um aumento da energia superficial, que deve ser suprido por uma redução na energia de deformação.

Assim sendo, a energia total Π envolvida durante o processo é expressa na forma:

$$\Pi = -U + W = -U + A\gamma \quad (\text{III.1})$$

onde γ é a energia específica de superfície, uma característica do material, A é a superfície de fratura e $-U$ é a parcela disponível da energia de deformação.

Seja, então, um caso plano de tensão, em que se pretende obter uma condição para a propagação instável de uma fissura de comprimento a , e superfície $A = 2.a.l$, v.fig.III.1.

Pois bem, a parcela de energia de deformação envolvida na formação da fissura é expressa por, (TIMOSHENKO (1980)):

$$U = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \pi a^2 \quad (\text{III.2})$$

Nessas condições, é interessante analisar num gráfico, o comportamento das funções $-U$, W e π (v.fig.III.2).

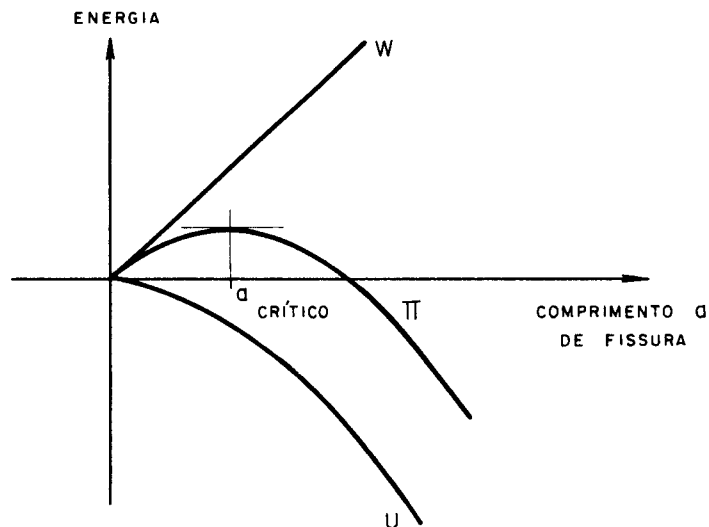


Fig. III.2 - Composição da energia total

Pela análise do gráfico, observa-se que enquanto a variação da energia total (a tangente à curva) for positiva, o processo de propagação da fissura é estável, tendo-se em vista que a variação na energia de deformação (a tangente à curva U) é menor do que a variação na energia de superfície (tangente a W). Em outras palavras, a energia de deformação cedida é sempre absorvida por uma variação possível na energia de superfície. Ao contrário, quando a variação da energia total passar a ser negativa, o processo de propagação da fissura se torna instável; já a variação na energia de superfície gerada, que é uma constante, jamais poderá ser equilibrada por uma quantidade de energia de deformação cedida. O gráfico da figura III.3 ilustra as mesmas conclusões.

Conclui-se, portanto, que $\delta\pi = 0$ estabelece a condição limite a partir da qual, para um certo σ , a propagação da fissura se torna instável.

De (III.1) e (III.2), resulta

$$\frac{\sigma^2 \pi a}{E} da = 2\gamma da \quad (\text{III.3})$$

ou ainda,

$$a_c = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2} \quad (\text{III.4})$$

Na última expressão, a_c representa o comprimento máximo estável da fissura para um certo σ .

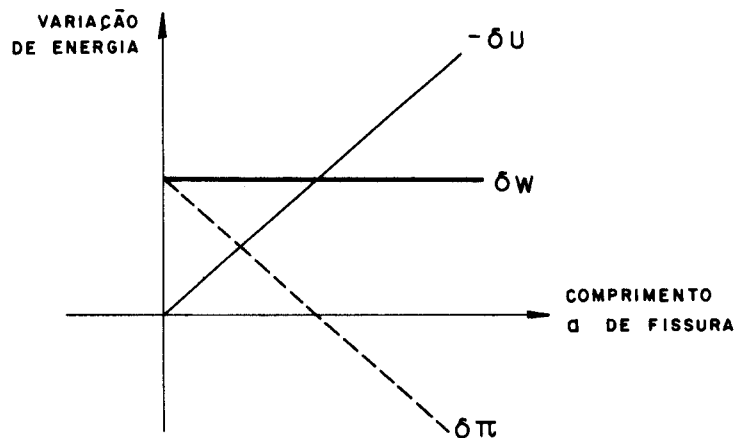


Fig. III.3 - Variação de energia

É usual ainda se introduzir a simbologia $G_f = 2\gamma$, de maneira que a (III.4) passa a ser escrita na seguinte forma geral:

$$G_f = \frac{\sigma^2 \pi a}{E} \quad (\text{III.5})$$

A partir de sua relação com γ , G_f pode ser interpretado como sendo a quantidade de energia necessária para

gerar uma fratura de superfície unitária. Em função dessa interpretação o parâmetro tem sido denominado por energia de fratura.

Obviamente, para o caso ideal analisado, G_f é uma propriedade do material.

III.2.2 - Aplicação ao concreto simples. A energia de fratura G_c

Uma primeira aplicação dessas idéias ao concreto simples pode ser feita a partir da hipótese de que o material é também homogêneo e elástico linear perfeitamente frágil.

Uma pequena alteração que deve ser feita com relação ao modelo anterior, consiste em considerar a fissura discreta como resultante de uma microfissuração desenvolvida numa região adjacente. Portanto, a energia de deformação envolvida na geração de uma fissura de comprimento a (e superfície $A_c = 2a.l$), é definida em função do volume da aquela região microfissurada (v. figura III.4).

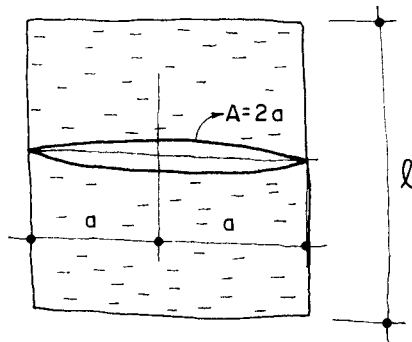


Fig. III.4 - Fratura no concreto

$$U_\ell = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} A_c \cdot \ell \quad (\text{III.6})$$

onde ℓ é a largura da zona fraturada.

Aplicando então a condição de variação nula da energia total, tendo em vista o caso indicado na figura III.4, resultam sucessivamente

$$U = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} 2a\ell = \frac{a\sigma^2}{E} \ell \quad (\text{III.7})$$

$$W = \gamma 2a \quad (\text{III.8})$$

$$\frac{dUda}{da} = \frac{\sigma^2}{2E} \ell da \quad (\text{III.9})$$

$$\frac{dWda}{da} = 2\gamma da = 2G'_c \quad (\text{III.10})$$

onde G'_c é a energia de fratura associada ao concreto.

Finalmente decorre, a partir da igualdade das (III.9) e (III.10), a expressão que permite determinar a resistência em função do tamanho da zona fraturada:

$$\sigma = \sigma_t = \sqrt{\frac{2G'_c E}{\ell}} \quad (\text{III.11})$$

ou, ainda, de modo inverso,

$$\ell = \frac{2G'_c E}{\sigma_t^2} \quad (\text{III.12})$$

que é a largura da zona fissurada a partir da qual o fraturamento é instável para uma certa resistência.

As relações anteriores ficam totalmente determinadas uma vez que se conheça o valor da energia de fratura.

Entretanto, a caracterização de G'_c como um parâmetro constante, resultante do emprego das relações da mecânica da fratura elástica linear, é pouco precisa no caso do concreto.

Na verdade, para o concreto, um modelo mais aprimorado deveria ser desenvolvido a partir da mecânica da

fratura não-linear, o que é justificado pelos seguintes fatos:

- a) a fratura não se limita a uma única fissura, mas é desenvolvida numa zona formada por microfissuras.
- b) a zona microfissurada cresce com o aumento da carga.
- c) a energia de superfície, conseqüentemente, deixa de ser uma função linear do comprimento da fissura.
- c) o material é heterogêneo e a energia necessária para propagar a fissura pode crescer subitamente, em função das diferenças de resistência entre a ligação agregado-argamassa, da argamassa e do agregado graúdo (a resistência é crescente na ordem mencionada).

Tendo-se em vista esses fatos, é necessário admitir uma forma não-linear ascendente da curva representativa da energia de superfície, GLUCKLICH (1963), conforme ilustra a figura III.5a). Nessas condições, G'_c deixa de ser um valor constante.

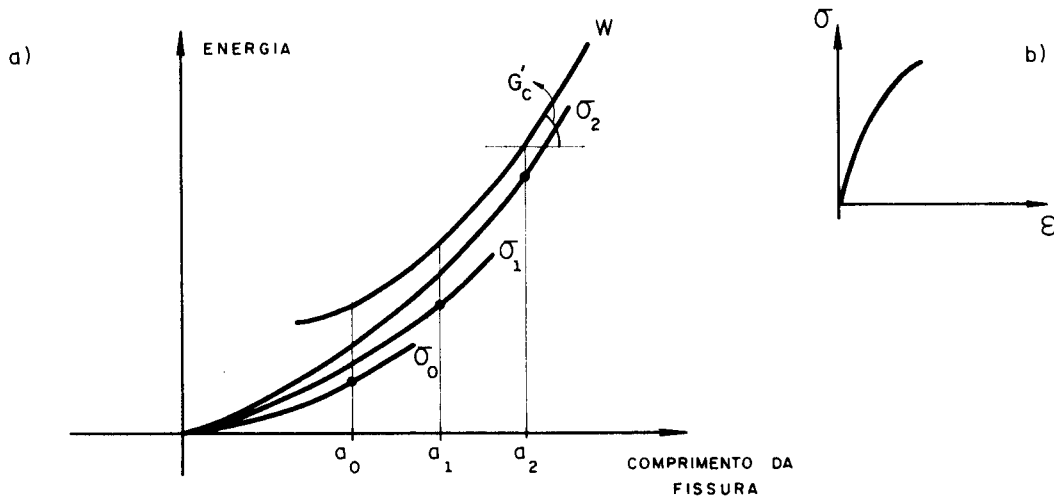


Fig. III.5 - Variação da energia de fratura no concreto.

Entretanto, G'_c , tomado como a tangente a curva de W , tem um máximo na situação que corresponde à propagação instável da fissura; este deve ser o valor adotado como característico do material, calculado por observações num ensaio de tração simples. Porém, o próprio modelo de ruptura não linear frágil, v. fig. III.5b), pode induzir à determinação de G'_c a partir de um ensaio de carga controlada, o que fornece resultados ainda insatisfatórios.

A possibilidade de execução de ensaios com deformação controlada permite uma determinação precisa de G'_c , baseando-se na interpretação do que ocorre na zona microfissurada.

Por exemplo, um ensaio de deformação controlada realizado num corpo como o indicado na figura III.6, que possui uma fissura macroscópica prévia, indica que uma vez alcançada a resistência à tração num ponto (o ponto A da figura), forma-se uma zona de microfissuração adjacente que cresce com o carregamento. Atendida uma largura limite w_0 da zona fraturada, prolonga-se a fissura inicial pela ligação das microfissuras. Todavia, observa-se, num ponto pertencente à zona microfraturada, que a capacidade de transferência de tensões decresce progressivamente com o aumento da largura da zona, não caindo repentinamente a um valor nulo como se poderia imaginar a princípio. Caracteriza-se, portanto, um regime de amolecimento.

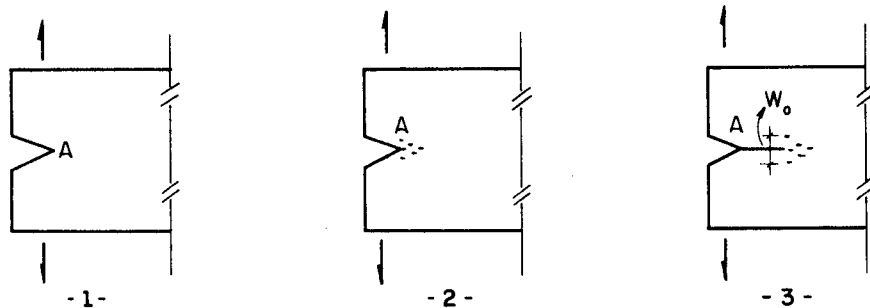


Fig. III.6 - Evolução da zona de microfissuras

É interessante notar que simultaneamente ao amolecimento na zona de fratura, fora dela o material sofre também uma descarga, sendo que as eventuais microfissuras aí existentes param de crescer, ou tendem a se fechar total ou parcialmente.

Na figura III.7, ilustra-se a evolução das tensões numa linha longitudinal a partir do ponto A. As situações a) e b) correspondem diretamente àquelas indicadas por 1 e 2 na figura III.6; já a situação c) corresponde ao início da propagação da macrofissura.

O gráfico d) apresenta a perda de capacidade de transmissão de esforço na zona fraturada.

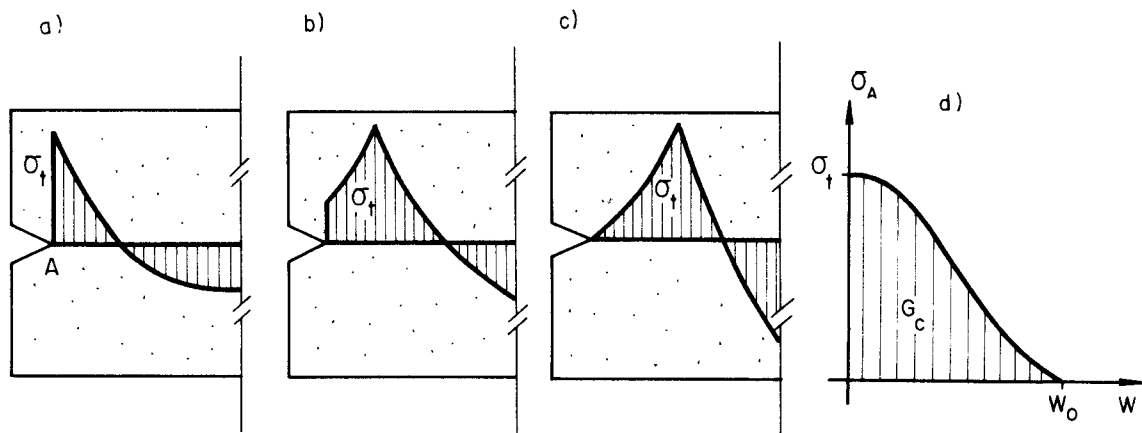


Fig. III.7 - Evolução das tensões na zona de microfissuras

Justamente a curva σ - w define o trabalho necessário para criar uma fissura de uma unidade de superfície, de modo que a área sob a curva fornece uma medida para G_c (*). A mesma curva evidencia uma relação direta entre G_c e o regime de amolecimento.

Entretanto, a determinação de G_c com base na área do diagrama σ - w pode ainda fornecer valores imprecisos, em função da grande dificuldade em se determinar experimentalmente a curva.

Um outro método, dito direto, propõe que se determine G_c a partir da curva σ - u obtida de um ensaio de tra-

(*) a rigor G_c determinado deste modo corresponde à energia de superfície γ , ou $G_c'/2$, da mecânica da fratura elástica linear.

ção simples, onde u é a variação da dimensão longitudinal (v. figura III.8a)).

A justificativa, neste caso, está fundamentada na observação de que uma vez atingida a máxima carga, a zona de fratura passa a se formar concentrando toda a deformação adicional do corpo. É claro que a área total sob a curva σ - u , fornece um valor acima do real para G_c uma vez

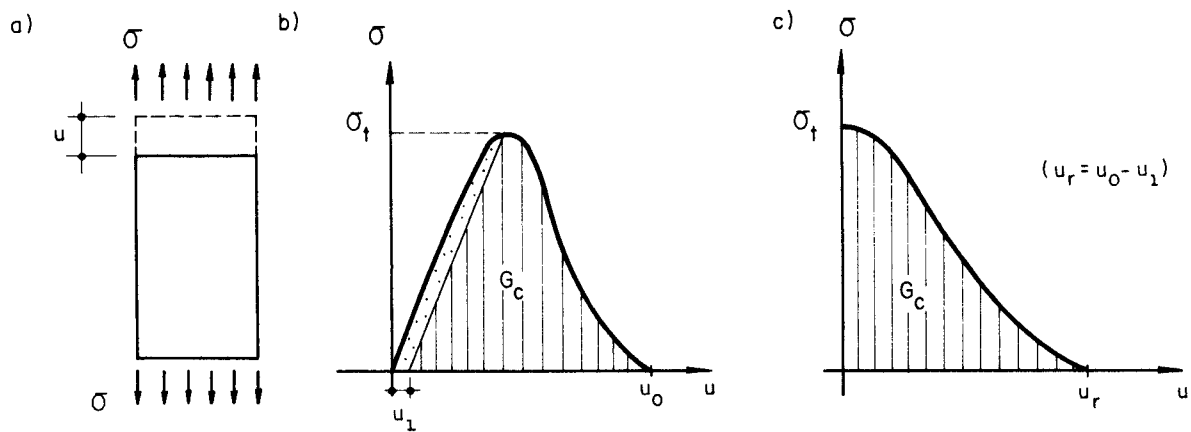


Fig. III.8 - Método direto para a determinação de G_c

que, até que σ_t seja atingido, deformações permanentes se desenvolvem em todo o corpo e, portanto, não se localizam na zona de fratura. Assim, é necessário compensar a existência dessas deformações iniciais, descontando, no cálculo de G_c , também a área indicada por pontos no diagrama σ - u da figura III.8b).

Tendo em vista essas considerações, a expressão para a determinação analítica de G_c é dada, finalmente, por: (v. fig. III.8c)).

$$G_c = \int_0^{u_r} \sigma du \quad (\text{III.13})$$

Como já foi observado anteriormente, os modelos recentes definem G_c como uma propriedade do material, em

lugar da lei de amolecimento. Surgem, de imediato, duas questões: a primeira delas diz respeito à validade dessa parametrização, e a segunda está associada à dúvida de como reproduzir o regime de amolecimento.

Essas questões são abordadas no próximo item através da mecânica do dano.

III.2.3 - A energia de fratura G_c como uma propriedade do material. Verificação através da mecânica do dano

O objetivo deste item é discutir a validade da consideração da energia de fratura como uma propriedade do material e, além disso, mostrar como definir a lei de amolecimento em função de G_c .

Uma análise objetiva a esse respeito é realizada através da mecânica do dano, que consiste, essencialmente, em estabelecer que a perda de resistência, ou amolecimento do material, resulta da evolução de um campo contínuo de defeitos, também denominado zona de dano.

A aplicação da mecânica do dano para o estudo do regime de amolecimento do concreto, parte da formulação do chamado modelo de dano composto, por sua vez baseado num modelo reológico que associa em série os comportamentos elástico linear e amolecimento.

Assim sendo, admita-se, inicialmente, que um volume V de concreto, em regime de amolecimento, seja formado de uma parte V_e de comportamento puramente elástico, e de uma outra parte V_h de comportamento regido pela lei de amolecimento da fratura.

Isto posto, e também com base nas dimensões indicadas na figura III.9a), valem as seguintes relações:

$$V = V_e + V_h \quad (\text{III.14})$$

$$V = abt \quad (\text{III.15})$$

$$V_h = h \cdot c \cdot t \quad (\text{III.16})$$

onde t é a espessura do corpo e c é determinado, de modo a aproximado, através da equação:

$$c = \sqrt{ab} \quad (\text{III.17})$$

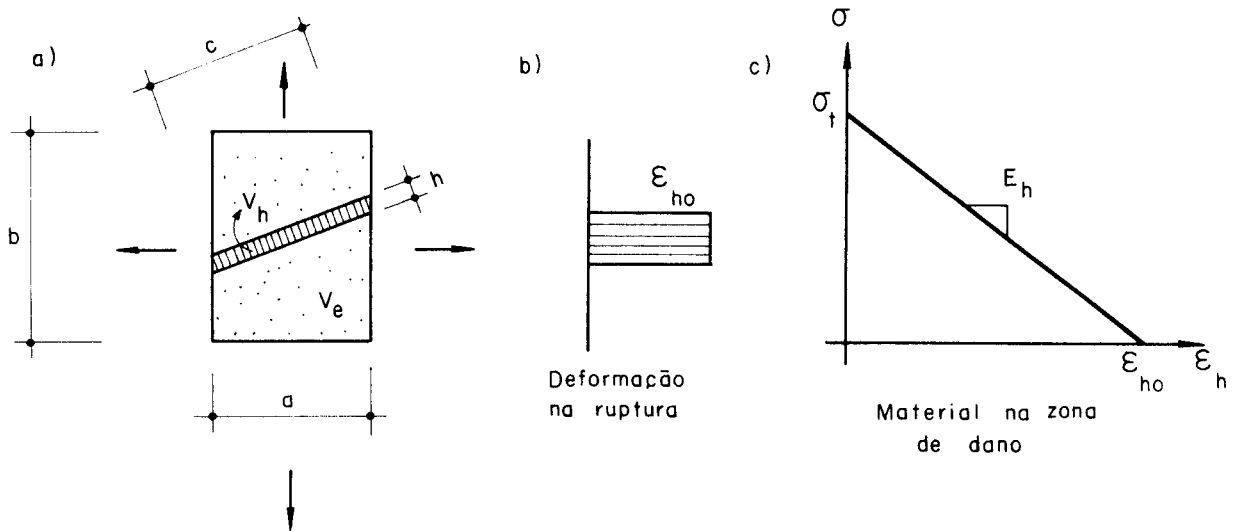


Fig. III.9 - Modelo de dano composto

O comportamento da região de fratura está ilustrado na figura III.9c); para a situação de ruptura correspondente à deformação última ϵ_{ho} , a energia dissipada no volume composto V é dada por:

$$U_c = \frac{1}{2} \frac{\sigma_t^2}{E_h} \cdot V_h \quad (\text{III.18})$$

Por outro lado, é possível imaginar um material equivalente contínuo e homogêneo, de mesmo volume V , que tem um comportamento elástico linear com amolecimento linear, indicado na figura III.10.

Na situação de ruptura, correspondente à deformação ϵ_u , a energia dissipada é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \sigma_t^2 \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E_s} \right) V \quad (\text{III.19})$$

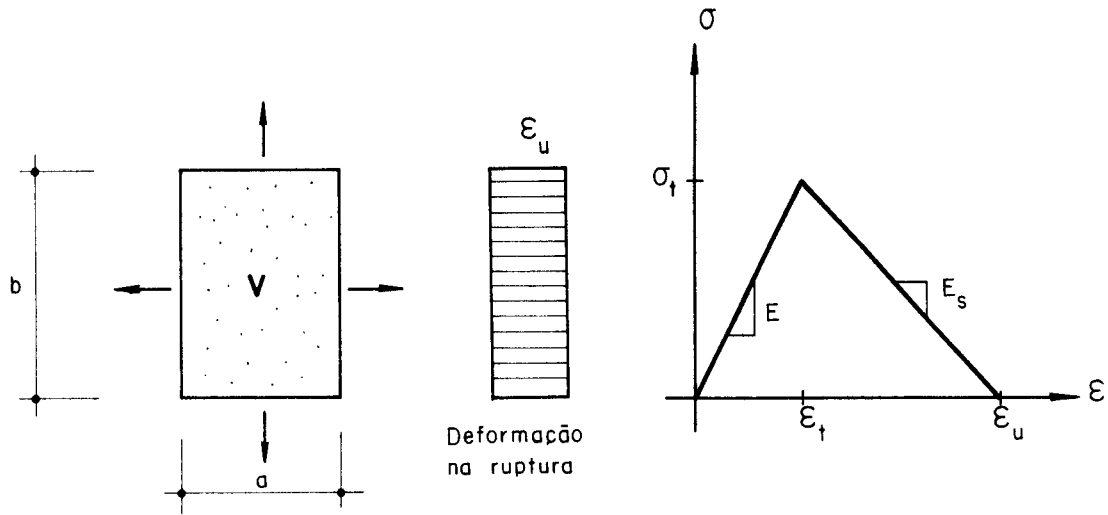


Fig. III.10 - Modelo contínuo

A condição de equivalência de comportamento dos dois materiais, o composto e o homogêneo, é expressa a partir da igualdade entre as energias dissipadas. Assim sendo, impondo que $U = U_c$ resulta:

$$E_s = \frac{E}{\frac{V_h \cdot E}{V \cdot E_h} - 1} \quad (\text{III.20})$$

expressão que fornece o módulo de amolecimento do contínuo equivalente, no qual a zona de dano está distribuída homogeneamente.

Sabendo-se que

$$\frac{V_h}{V} = \frac{h}{c} \quad (\text{III.21})$$

e ainda definindo os parâmetros η e λ respectivamente por:

$$\eta = \frac{E_h}{E} \quad (\text{III.22})$$

$$\lambda = \frac{h}{\eta} \quad (\text{III.23})$$

a expressão (III.20) passa a ser escrita na forma:

$$E_s = \frac{E}{\frac{\lambda}{c} - 1} \quad (\text{III.24})$$

que no caso de λ constante identifica E_s como uma função do tamanho do elemento.

Um valor constante para λ assume um significado mais claro através de sua relação com a energia de fratura G_c . Essa relação pode ser expressa a partir da figura III.9c) por:

$$G_c = h \cdot \frac{1}{2} \frac{\sigma_t^2}{E_h} \quad (\text{III.25})$$

lembrando que G_c é uma energia por unidade de área.

Considerando as (III.22) e (III.23) e substituindo-as na anterior resulta:

$$G_c = \frac{1}{2} \frac{\sigma_t^2}{E} \lambda \quad (\text{III.26})$$

A última expressão indica que λ constante significa que também a energia de fratura permanece invariável, independente do volume considerado.

Portanto, pela (III.24), conclui-se que para manter G_c constante o módulo de amolecimento E_s deve variar de acordo com o tamanho do elemento.

A aproximação usual para modelar o efeito da microfissuração é feita através de um módulo de amolecimento característico, constante, do material.

Essa aproximação é recuperada pela formulação anterior considerando η como uma constante e h da ordem de c . Assim procedendo, da (III.21) segue que o volume que contém a zona de dano é todo o volume do elemento e a (III.24) passa a fornecer um valor constante para o módulo de amolecimento, independente do tamanho do elemento. Ob-

serva-se ainda que a densidade de energia de fratura G_c/λ resulta constante, como demonstra a equação (III.26).

Por outro lado, se a dimensão h da zona de dano e a relação η entre os módulos de amolecimento e de deformação são mantidos constantes, resulta, da (III.23), que λ passa também a ser uma constante. Nessas condições a energia de fratura se mantém invariável, independente das dimensões do elemento. Já, neste caso, o módulo de amolecimento do elemento contínuo equivalente, dado pela (III.24), passa a variar de acordo com as dimensões do elemento.

Essa última situação reflete exatamente a formulação proposta nos modelos recentes, como se poderá verificar no próximo item.

Alguns ensaios numéricos, empregando as relações fornecidas pela mecânica do dano, foram realizados com o objetivo de determinar a validade ou não de se adotar a energia de fratura como uma propriedade do material, WILLAM (1984).

Verificou-se que nos casos de fratura do modo I(*), ou seja, tração simples, a adoção da energia de fratura como um parâmetro de valor constante, recupera a objetividade dos resultados, isto é, o regime de amolecimento é reproduzido de modo bastante preciso independente da discretização adotada. Nessa situação o módulo de amolecimento é ajustado, de acordo com a equação (III.24), para cada tipo de malha.

Ao contrário, um módulo de amolecimento constante induz a uma sensibilidade dos resultados relativamente às dimensões da malha adotada.

Por outro lado, é interessante esclarecer que existem estudos na tentativa de estender essas conclusões para as situações de compressão, em particular para analisar o caso da fratura por escorregamento, WILLAM (1984). Entretanto, as respostas dos exemplos numéricos conduzem a u

(*) separação entre as faces, sem escorregamento relativo.

ma conclusão oposta àquela da fratura por separação.

Na compressão, aparentemente a imposição de uma energia de fratura constante conduz a uma sensibilidade dos resultados quanto à malha adotada. Assim sendo, conclui-se que o módulo de amolecimento deve ser uma característica do comportamento do material.

Esse estudo realizado através da mecânica do dano, coloca em evidência características francamente opostas quanto à resposta do material em situações próximas da ruptura.

III.2.4 - Um modelo constitutivo para o concreto fissurado

Tendo sido discutidos os aspectos básicos relacionados à modelagem do regime de amolecimento, apresenta-se neste item um modelo de fissuração distribuída formulado através de um procedimento típico da mecânica do dano e que adota a energia de fratura G_c como uma propriedade do material.

Nesse modelo, a descontinuidade local associada a uma fissura é distribuída sobre uma certa região de comprimento h , como mostra a figura III.11, de maneira que os deslocamentos relativos das superfícies da fissura passam a ser representados por deformações. Justamente através dessa deformação, é possível estabelecer uma relação constitutiva válida para o concreto fissurado.

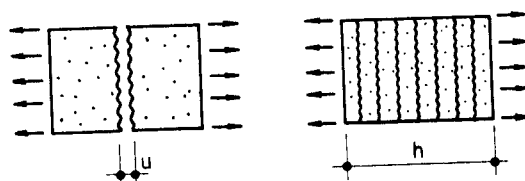


Fig. III.11 - Modelo de fissura distribuída.

Admita-se, então, que as microfissuras se distribuem uniformemente numa extensão h , e que seja válida a seguinte expressão:

$$\varepsilon_{fi} = \frac{u}{h} \quad (\text{III.27})$$

onde o símbolo ε_{fi} indica a deformação associada à fissura. (*)

Isso posto, o comportamento mecânico da fratura, descrito normalmente pelo seu movimento de abertura, passa a ser representado pela deformação de um meio equivalente cujo modelo constitutivo (relação σ - ε) é dado por um regime de amolecimento, como se indica na figura III.12c).

Assim sendo, a relação constitutiva do concreto fissurado pode ser obtida, neste modelo, considerando que a deformação total, medida num ponto do material contido na zona fraturada, é composta de duas parcelas: uma relativa ao concreto ε_{co} (recuperável se for admitido um comportamento elástico) e outra relativa às microfissuras, ε_{fi} . Obviamente à medida em que a abertura das microfissuras aumenta, diminui a parcela de deformação recuperável representada pelo concreto.

A figura III.12 ilustra a colocação feita no parágrafo anterior.

A energia de fratura G_c , considerada como um parâmetro do material, surge neste modelo através da área g_c sob a curva σ - ε_{fi} , expressa na forma:

$$g_c = \int_0^{\varepsilon_{fi}} \sigma d\varepsilon_{fi} \quad (\text{III.28})$$

(*) h é a região onde se espalham as microfissuras. Na implementação via elementos finitos, a largura h é definida em função do tamanho do elemento contido ou que contém a zona de fratura.

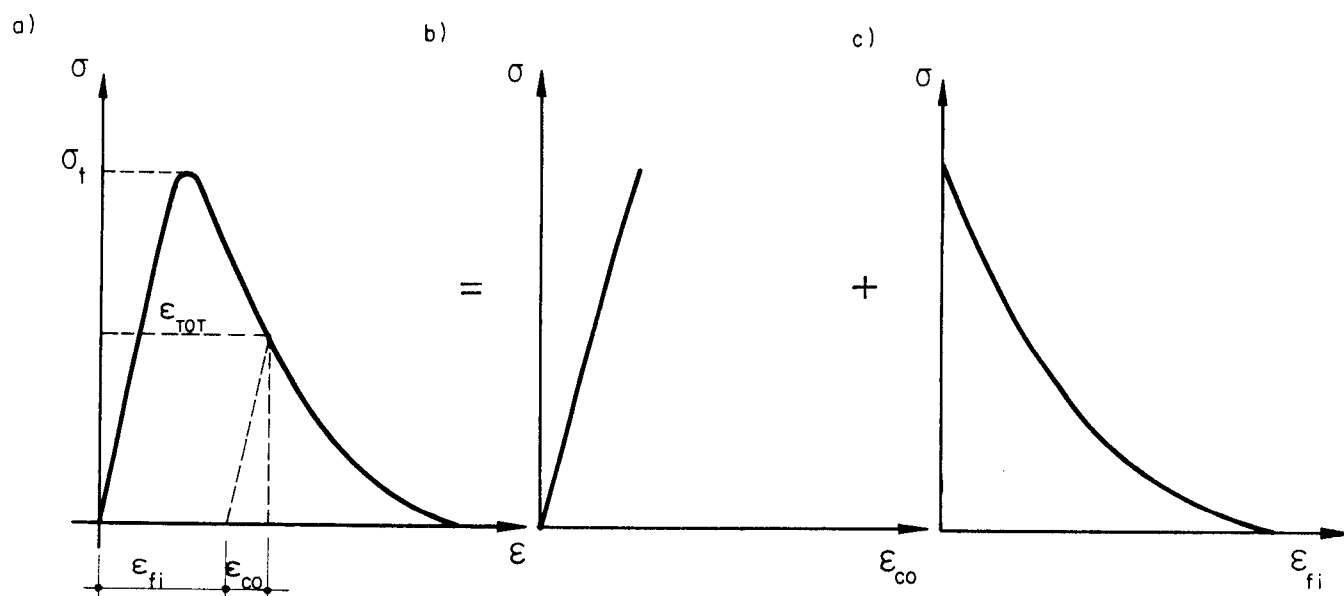


Fig. III.12 - Contribuição na deformação total

Considerando-se as relações (III.13) e (III.27), pode-se exprimir G_c por

$$G_c = \int_0^{\epsilon_{fi}} \sigma h d\epsilon_{fi} \quad (\text{III.29})$$

de onde resulta

$$G_c = h g_c \quad (\text{III.30})$$

Tendo-se em vista, então, a decomposição da deformação total, vale escrever:

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon_{co} + \Delta \epsilon_{fi} \quad (\text{III.31})$$

Admitindo que na tração o comportamento do concreto seja modelado com suficiente precisão através do comportamento elástico linear (*), a relação constitutiva deste ma

(*) este modelo permite representar também o comportamento não linear do concreto, tomando-se, por exemplo, a matriz elastoplástica em lugar de D .

terial pode ser dada por

$$\Delta\sigma = D\Delta\varepsilon_{co} \quad (\text{III.32})$$

onde D é o tensor de elasticidade de quarta ordem.

Na relação (III.31), $\Delta\varepsilon_{fi}$ representa o tensor das deformações associado aos deslocamentos relativos das faces da fissura, referenciado às coordenadas globais. As deformações locais são transformadas para o sistema global mediante a seguinte regra:

$$\Delta\varepsilon_{fi} = N\Delta e_{fi} \quad (\text{III.33})$$

onde,

$$\Delta\varepsilon_{fi} = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{fi}^x \\ \Delta\varepsilon_{fi}^y \\ \Delta\varepsilon_{fi}^{xy} \end{Bmatrix}; \Delta e_{fi} = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{fi}^{nn} \\ \Delta\varepsilon_{fi}^{nt} \end{Bmatrix}; N = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta \\ \text{sen}^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta \\ 2\text{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

Os índices x e y se referem aos eixos globais, enquanto que n e t dizem respeito aos eixos locais. Por sua vez, θ representa o ângulo entre o eixo x global e a normal ao plano da fissura.

É preciso salientar que nesta formulação estão previstos dois movimentos relativos das faces da fissura: o movimento de abertura por separação e o de escorregamento no mesmo plano da abertura (*). A figura III.13 ilustra esses dois movimentos relativos, bem como os esforços de interface a eles associados.

(*) os movimentos de abertura por separação e o de escorregamento são típicos para os casos planos de tensão. Entretanto, de um modo geral três movimentos independentes entre as faces da fissura são previstos:

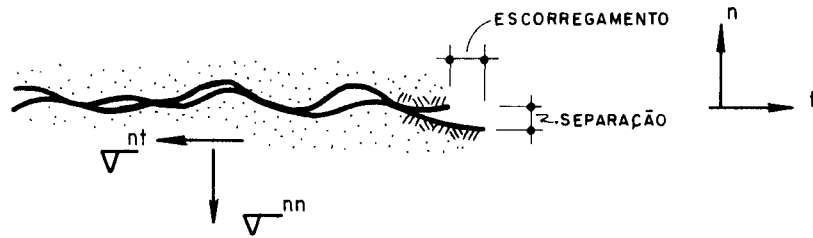


Fig. III.13 - Movimentos da fissura

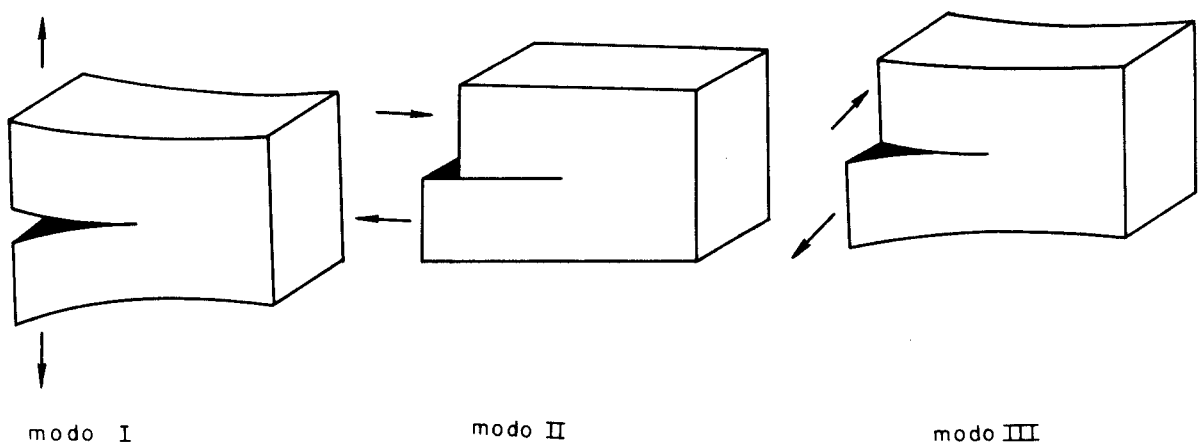
Esse modelo também permite que sejam consideradas mais de uma fissura num mesmo ponto. Nessas condições, o tensor de deformações locais e a matriz de transformação de coordenadas passam a ser dados, respectivamente, por:

$$e_{fi} = \left\{ \begin{matrix} \epsilon_{f1}^{nn} & \epsilon_{f1}^{nt} & \dots & \epsilon_{fn}^{nn} & \epsilon_{fn}^{nt} \end{matrix} \right\}^T$$

$$N = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 & -\text{sen} \theta_1 \cos \theta_1 & \dots & \cos^2 \theta_n & -\text{sen} \theta_n \cos \theta_n \\ \text{sen}^2 \theta_1 & \text{sen} \theta_1 \cos \theta_1 & \dots & \text{sen}^2 \theta_n & \text{sen} \theta_n \cos \theta_n \\ 2\text{sen} \theta_1 \cos \theta_1 & \cos^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_1 & \dots & 2\text{sen} \theta_n \cos \theta_n & \cos^2 \theta_n - \text{sen}^2 \theta_n \end{bmatrix}$$

(III.35)

Cont.



modo I

modo II

modo III

Também a nível local, para cada fissura se define um tensor de tensões s_{fi} com componentes σ^{nn} e σ^{nt} (v.fig. III.13), as quais se relacionam com as componentes do tensor de tensões referido às coordenadas globais, mediante a seguinte regra de transformação:

$$s_{fi} = N^T \sigma \quad (\text{III.36})$$

onde

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{fi}^x \\ \sigma_{fi}^y \\ \sigma_{fi}^{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

No caso de múltiplas fissuras num mesmo ponto, N fica dado na forma descrita nas (III.35) e s_{fi} passa a ser composto por:

$$s_{fi} = \left\{ \sigma_{f1}^n \quad \sigma_{f1}^{nt} \quad \dots \quad \sigma_{fn}^n \quad \sigma_{fn}^{nt} \right\}^T \quad (\text{III.38})$$

A nível local ainda é possível exprimir uma relação constitutiva incremental entre tensões e deformações na fissura:

$$\Delta s_{fi} = D^{fi} \Delta e_{fi} \quad (\text{III.39})$$

A matriz D^{fi} pode relacionar efeitos como amolecimento na tração, engrenamento dos agregados e dilatação. No presente modelo ela é representada por:

$$D^{fi} = \begin{bmatrix} D^f & 0 \\ 0 & G^{fi} \end{bmatrix} \quad (\text{III.40})$$

onde D^f está associado ao amolecimento e G^{fi} ao engrenamento.

No caso de n fissuras num ponto, a matriz constitutiva passa a ser dada por:

$$D^{fi} = \begin{bmatrix} D^{f1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D^{f2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D^{fn} \end{bmatrix} \quad (\text{III.41})$$

A ausência de termos fora da diagonal principal indica que não está sendo levada em consideração a interação entre os movimentos de separação e escorregamento da fissura, que ocorre, por exemplo, na dilatação.

A determinação dos parâmetros componentes da matriz D^{fi} será comentada mais adiante.

Tendo-se em vista, portanto, as relações (III.31) e (III.32) resulta a expressão

$$D\Delta\varepsilon = \Delta\sigma + D\Delta\varepsilon_{fi} \quad (\text{III.42})$$

Substituindo agora a (III.33) na relação anterior, obtêm-se

$$\Delta\sigma = D \left[\Delta\varepsilon - N\Delta\varepsilon_{fi} \right] \quad (\text{III.43})$$

A forma final da relação constitutiva pode ser obtida uma vez que se tenha escrito $\Delta\varepsilon_{fi}$ como função de $\Delta\varepsilon$.

Com esse objetivo, combinando a forma incremental da (III.36) com a (III.39), resulta:

$$N^T\Delta\sigma = D^{fi}\Delta\varepsilon_{fi} \quad (\text{III.44})$$

Por outro lado, a (III.43) pode ainda ser escrita na forma

$$N^T\Delta\sigma = N^T D \left[\Delta\varepsilon - N\Delta\varepsilon_{fi} \right] \quad (\text{III.45})$$

que combinada com a (III.44) fornece a seguinte expressão, relacionando Δe_{fi} com $\Delta \epsilon$:

$$\Delta e_{fi} = \left[D^{fi} + N^T D N \right]^{-1} N^T D \Delta \epsilon \quad (\text{III.46})$$

Substituindo-se, finalmente, a (III.46) na (III.42) resulta:

$$\Delta \sigma = \left[D - D N (D^{fi} + N^T D N)^{-1} N^T D \right] \Delta \epsilon \quad (\text{III.47})$$

Segundo um procedimento análogo se poderia obter a relação constitutiva inversa, que exprime $\Delta \epsilon$ em função de $\Delta \sigma$.

$$\Delta \epsilon = \left[D^{-1} + N D_{fi}^{-1} N^T \right] \Delta \sigma \quad (\text{III.48})$$

III.2.4.1 - Parâmetros da matriz constitutiva

A componente D^f , que aparece na (III.40), está relacionada, basicamente, à perda de capacidade de transmissão de carga com a abertura da fissura, ou seja, o amolecimento.

Entretanto, essa perda de capacidade de transmissão de carga ocorre no caso de haver uma tendência em aumentar a abertura da fissura. Há, todavia, a possibilidade da fissura tender fechar, total ou parcialmente, e posteriormente reabrir, durante o processo de carregamento. Essa situação pode ser retratada através de D^f dando a ele o valor do módulo de amolecimento D^{f0} (negativo) para aquelas fissuras que estão em processo de abertura, e o valor do módulo secante D^{fs} para aquelas que estão em processo de fechamento.

A figura III.14 esclarece a definição dos dois módulos.

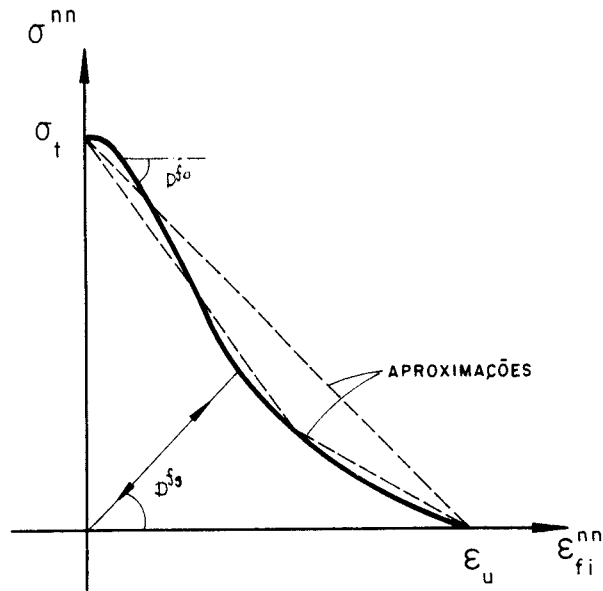


Fig. III.14 - Aproximações para o amolecimento.

É usual adotar uma aproximação linear, ou bilinear, para a lei de amolecimento, com o objetivo de facilitar o tratamento numérico do problema.

Por sua vez, a lei de amolecimento é definida em função da resistência à tração σ_t e da deformação última ϵ_u .

Nos modelos que adotam a energia de fratura G_c como um parâmetro característico do material, a lei de amolecimento deve ser ajustada de acordo com a largura h da zona fraturada. Assim sendo, no caso da aproximação linear resulta $\epsilon_u = \frac{2G_c}{\sigma_t h}$, valor calculado impondo a igualdade da área sob a curva de amolecimento com o parâmetro g_c .

Para uma lei bilinear, a deformação última pode ser calculada por exemplo por $\epsilon_u = \frac{18}{5} \frac{G_c}{h\sigma_t}$.

A figura III.15 apresenta os valores básicos para a determinação de ϵ_u relativos aos modelos linear e bilinear.

Com base nos diagramas aproximados, as componentes D^{fo} passam a ser dadas por:

$$D^{fo} = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_t^2 h}{G_c} \quad (\text{III.49})$$

Para a aproximação linear e,

$$D^{fo} = -\frac{5}{6} \frac{\sigma_t^2 h}{G_c} \quad \text{se} \quad 0 < \epsilon_{fi}^{nn} < \frac{2}{9} \epsilon_u \quad (\text{III.50})$$

$$D^{fo} = -\frac{5}{42} \frac{\sigma_t^2 h}{G_c} \quad \text{se} \quad \frac{2}{9} \epsilon_u < \epsilon_{fi}^{nn} < \epsilon_u \quad (\text{III.51})$$

para o modelo bilinear.

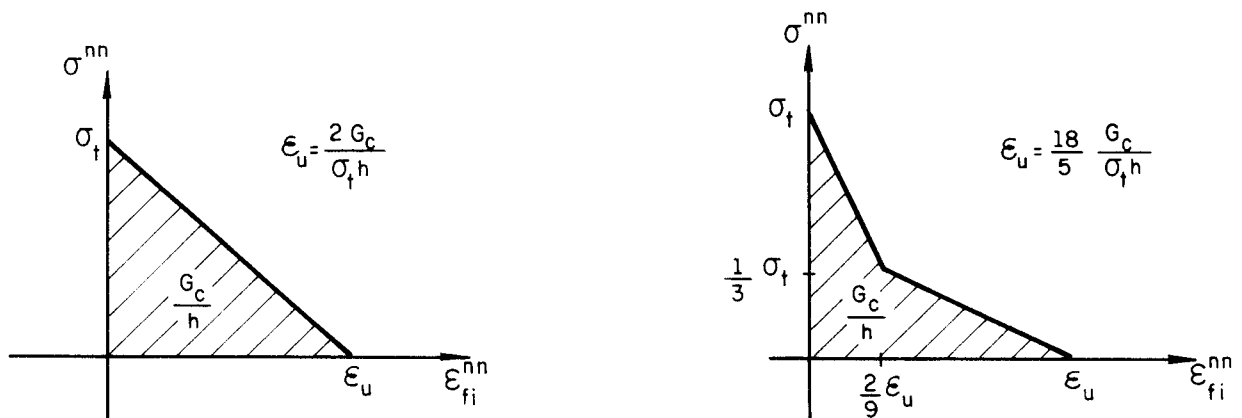


Fig. III.15 - Aproximações linear e bilinear

Por outro lado, a componente G^{fi} pode ser tomada como a tangente ao diagrama $\sigma_{fi}^{nt} - \epsilon_{fi}^{nt}$, o qual tem o aspecto indicado na figura (III.16). (*)

(*) a curva exprime uma relação válida somente após formada a fissura; o diagrama passa pela origem, uma vez que no instante de formação da fissura a sua direção é principal de tensão, e portanto não existe tensão de cisalhamento a ela associada.

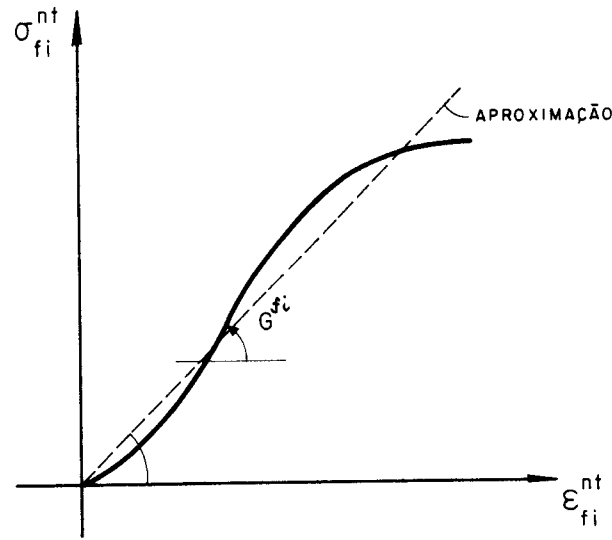


Fig. III.16 - Aproximação para o escorregamento.

Mediante o uso de uma aproximação linear G^{fi} passa a ser uma constante. Entretanto, essa aproximação pode não ser a mais conveniente pois introduz uma resistência exagerada ao cisalhamento no plano da fissura. Contudo, a formulação permite contornar esse problema, incrementando, por exemplo, um modelo de cisalhamento com amolecimento linear, como o indicado na figura III.17.

Analogamente ao caso anterior, a lei de amolecimento para o cisalhamento pode ser definida em função da resistência última σ_u^{nt} e da deformação última ϵ_u^{nt} . Ainda se poderia adotar uma energia de fratura por escorregamento G_c^s como um parâmetro característico do material (*). Nessas condições, no modelo de fissuração distribuída, adotado por ocasião da implementação numérica, a lei de amolecimento pode ser ajustada de acordo com a largura h da zona fraturada, através da seguinte relação:

$$\epsilon_u^{nt} = \frac{2G_c^s}{\sigma_u^{nt} h} \quad (\text{III.52})$$

(*) essa hipótese ainda não está verificada.

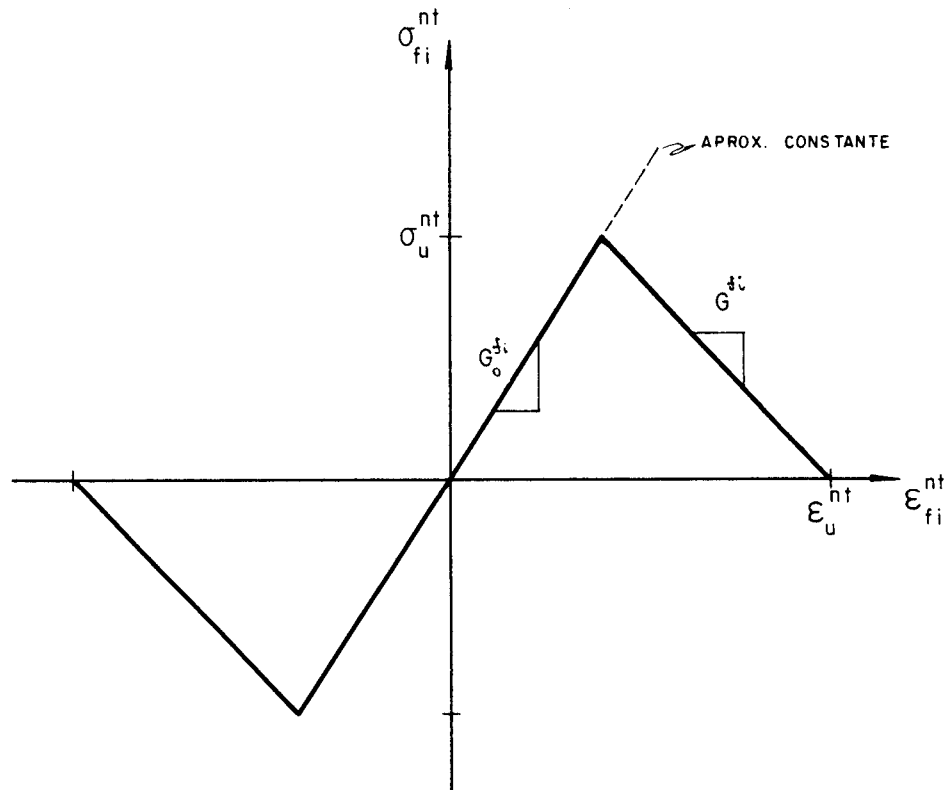


Fig. III.17 - Modelo com amolecimento linear

Deve-se ressaltar, entretanto, que esse modelo de amolecimento pode apresentar algumas dificuldades de implementação em virtude, basicamente, de ser tratado de forma desacoplada em relação ao modelo de amolecimento por separação. O problema maior deve surgir na definição dos critérios de descarregamento e de fechamento e abertura de fissuras, pois uma fissura fechada segundo o critério de nulidade da tensão e deformação normal não significa que o mesmo tenha ocorrido em relação à tensão e deformação por cisalhamento.

III.3 - COMPORTAMENTO PÓS-FRATURA DO CONCRETO SIMPLES SUJEITO A SOLICITAÇÃO DE COMPRESSÃO

III.3.1 - Modelo incluindo acoplamento entre plasticidade e fraturamento

Neste item, apresenta-se um modelo que assume o concreto em compressão como um material com características de fraturamento e plastificação (com endurecimento e amolecimento). O fraturamento é responsável pela variação das propriedades elásticas.

Justamente para colocar em evidência a variação nas propriedades elásticas é abordado, primeiramente, o caso de fraturamento progressivo, sem plastificação. Em seguida, é tratado o modelo geral.

Ressalta-se que o desenvolvimento da formulação é feito no espaço das deformações.

III.3.1.1 - Modelo de fraturamento progressivo

Fundamentalmente, representa-se um material ideal de comportamento elástico, não apresentando, portanto, deformações permanentes num processo de descarga total, e que tem suas propriedades elásticas variando de acordo com a evolução do fraturamento.

O critério de fratura é constituído por uma superfície, expressa por uma relação matemática de valor sempre negativo ou nulo. Essa superfície evolui no espaço das deformações à medida em que se desenvolve o processo de fraturamento; conseqüentemente, o novo estado de deformação é sempre representado por um ponto sobre a superfície.

Isso posto, a relação constitutiva integral é escrita, em qualquer instante, através da Lei de Hooke generalizada:

$$\dot{T} = \mathbb{D}^* \dot{E} \quad (\text{III.53})$$

onde \mathbb{D}^* é o tensor variável de elasticidade.

Assim sendo, a mesma relação em termos de taxas fica dada por:

$$\dot{T} = \mathbb{D}^* \dot{E} + \dot{\mathbb{D}}^* E = \dot{T}^e + \dot{\mathbb{D}}^* E \quad (\text{III.54})$$

A figura III.18 ilustra o comportamento unidimensional do material.

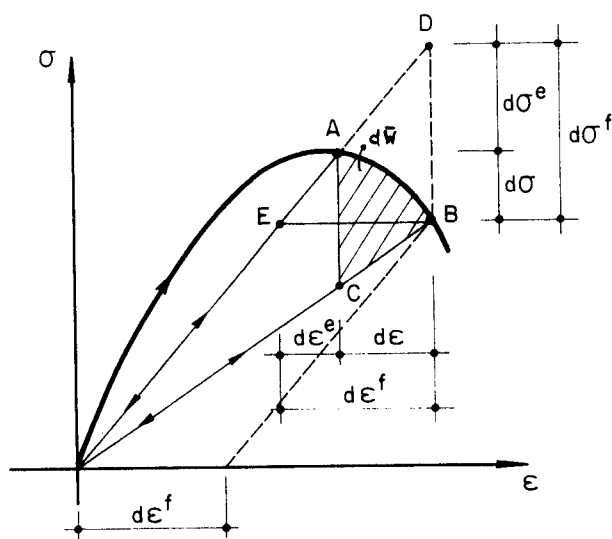


Fig. III.18 - Comportamento do material ideal.

Tendo-se em vista a mesma figura, e já extrapolando para o caso multiaxial, pode-se escrever que:

$$\dot{T} = \dot{T}^e - \dot{T}^f \quad (\text{III.55})$$

onde \dot{T}^f é a parcela de relaxação do estado de tensão proveniente do fraturamento.

Da igualdade entre as (III.54) e (III.55) resulta:

$$\dot{T}^f = -\dot{\mathbb{D}}^* E$$

e, por conseguinte, a relação constitutiva passa a ser escrita na forma:

$$\dot{T} = D^* \dot{E} - \dot{T}^f \quad (\text{III.56})$$

Entretanto, para caracterizar totalmente a relação constitutiva, é necessário estabelecer uma relação entre \dot{T}^f e \dot{E} .

Com esse objetivo, considere-se, de início, a relação matemática genérica que caracteriza a superfície de fratura:

$$f = f(E, W^f) \leq 0 \quad (\text{III.57})$$

onde W^f é a energia dissipada no processo de fraturamento (indicada na figura III.19 para o caso unidimensional).

Além disso, é válido postular, também neste estudo, que num ciclo de deformações o trabalho realizado pelas forças externas nunca é negativo. Nessas condições, fazendo uso das informações dadas na figura III.18, resulta

$$\dot{W} = \frac{1}{2} \dot{T}^f \cdot \dot{E} \geq 0 \quad (\text{III.58})$$

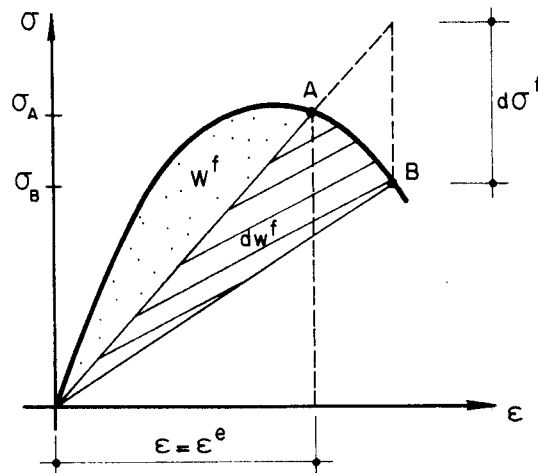


Fig. III.19 - Trabalho de fraturamento.

Pela imposição de validade das (III.57) e (III.58), resulta uma regra da normalidade para o material com fraturamento

$$\dot{T}^f = \dot{\lambda} f_E \quad (\text{III.59})$$

$\dot{\lambda}$, por sua vez, pode ser determinado através da aplicação da condição de consistência

$$\dot{f} = f_E \cdot \dot{E} + f_{W^f} \dot{W}^f = 0 \quad (\text{III.60})$$

Já \dot{W}^f é expressa, a partir dos dados da figura III.18, por:

$$\dot{W}^f = \frac{1}{2} E \cdot \dot{T}^f \quad (\text{III.61})$$

onde E representa a deformação atual, correspondente a $f = 0$. (*)

Essa mesma relação, combinada com a (III.59) e substituída na condição de consistência, fornece:

$$\dot{f} = f_E \cdot \dot{E} + \frac{1}{2} \dot{\lambda} f_{W^f} (E \cdot f_E) = 0 \quad (\text{III.62})$$

de onde resulta:

$$\dot{\lambda} = - \frac{2 (f_E \cdot \dot{E})}{f_{W^f} (f_E \cdot E)} = \frac{f_E \cdot \dot{E}}{G'} \quad (\text{III.63})$$

Finalmente, voltando com $\dot{\lambda}$ na (III.59), obtêm-se a forma que relaciona \dot{T}^f com \dot{E} :

(*) A condição $f = 0$ está colocada de modo a prevenir um eventual regime de descarga-carga. Uma alternativa é exprimir E a partir de uma função $H(W^f)$, que representa a posição atual da superfície de fratura.

$$\dot{T}^f = - \frac{2(f_E \cdot E)}{f_W^f + (f_E \cdot E)} f_E = \left(\frac{f_E \otimes f_E}{G'} \right) \dot{E} \quad (\text{III.64})$$

Considerando-se essa última expressão, a relação constitutiva passa a ser escrita na forma:

$$\dot{T} = \left[D^* - \left(\frac{f_E \otimes f_E}{G'} \right) \right] \dot{E} \quad (\text{III.65})$$

Para completar esse estudo, é necessário obter uma fórmula para atualização de D^* , ou seja, uma relação entre \dot{D}^* e \dot{E} .

Assim, assumindo como válida a proposição que exprime D^* como uma função da energia de fratura, resultam:

$$D^* = D^*(W^f) \quad (\text{III.66})$$

$$\dot{D}^* = D^{*'} \dot{W}^f = \frac{1}{2} D^{*'} (E \cdot \dot{T}^f) \quad (\text{III.67})$$

Levando-se em consideração a (III.64), obtém-se:

$$\dot{D}^* = - \frac{1}{f_W^f} D^{*'} (f_W \cdot \dot{E}) \quad (\text{III.68})$$

Valores precisos para as componentes de $D^{*'}$ devem ser obtidos com base em informações experimentais.

III.3.1.2 - Modelo incluindo o acoplamento da plasticidade com o fraturamento

As relações constitutivas têm sido obtidas, até agora, partindo-se da composição entre os incrementos de tensão. Com esse mesmo espírito, e a partir do que ilustra a figura III.20, considere-se a seguinte relação:

$$\dot{T} = \dot{T}^e - (\dot{T}^p + \dot{T}^f) = \dot{T}^e - \dot{T}^{pf} \quad (\text{III.69})$$

onde \dot{T}^{pf} reúne as parcelas de relaxação de tensão devidas à plastificação e ao fraturamento.

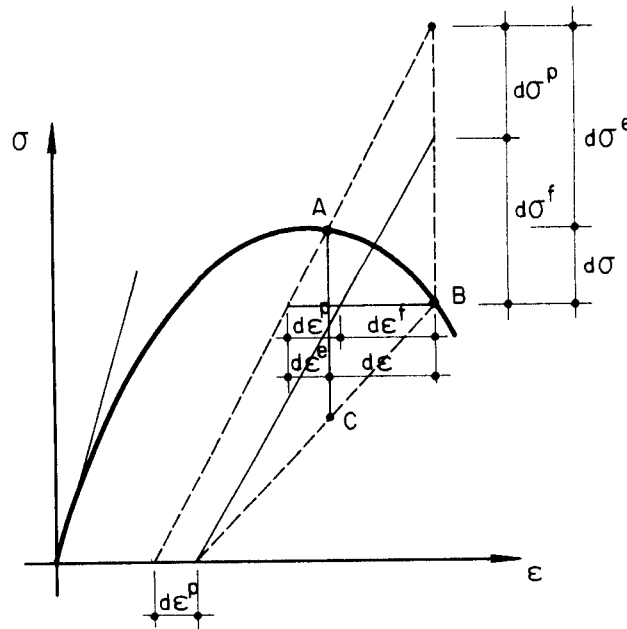


Fig. III.20 - Material com plastificação e fraturamento.

Como $\dot{T}^e = D^* \dot{E}$, resulta

$$\dot{T} = D^* \dot{E} - \dot{T}^{pf} \quad (\text{III.70})$$

Para que se possa estabelecer a forma final da relação constitutiva é necessário obter uma expressão que relacione \dot{T}^{pf} com \dot{E} .

É interessante ressaltar que \dot{T}^p é a parcela de relaxação de tensão devida ao incremento de deformação plástica \dot{E}^p , e que $d\dot{T}^f$ é a parcela de relaxação de tensão devida ao incremento de deformação por fraturamento. Valem, portanto, as seguintes expressões:

$$\dot{T}^p = D^* \dot{E}^p \quad (\text{III.71})$$

$$\dot{T}^f = \mathbb{D}^{*} \dot{E}^f \quad (*) \quad (\text{III.72})$$

Tendo em vista essas relações, a (III.70) fornece

$$\dot{E} = \dot{E}^e + \dot{E}^p + \dot{E}^f \quad (\text{III.73})$$

Define-se, no espaço das deformações, uma superfície de plastificação e fratura envolvendo uma região cujo exterior só é alcançado mediante a geração de novos incrementos de deformação plástica e de deformação por fraturamento. Sua forma matemática geral é dada por:

$$f = f(E, E^p, W^{pf}) \leq 0 \quad (\text{III.74})$$

onde W^{pf} é a energia dissipada na forma de plastificação e fraturamento (v.fig.III.21).

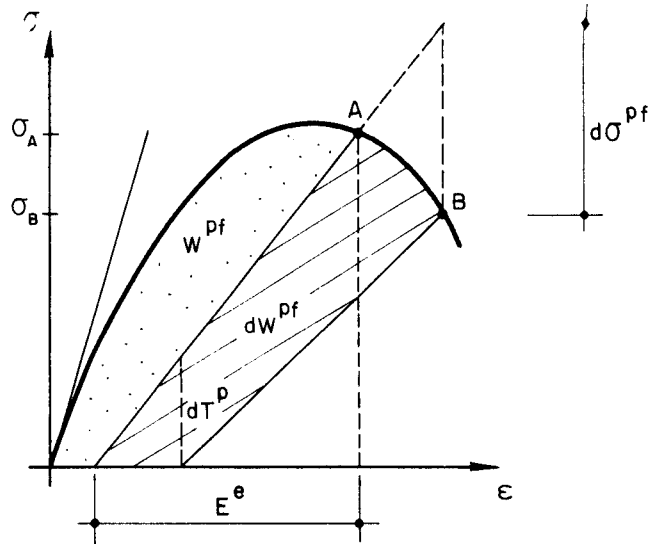


Fig. III.21 - Material com plastificação e fraturamento.

Empregando novamente o postulado de Ilyushin, agora escrito na forma:

(*) Vale ainda escrever que $\dot{T}^f = (\mathbb{D}^{*} - \dot{\mathbb{D}}^{*}) \dot{E}^e - \mathbb{D}^{*} \dot{E}^e = - \dot{\mathbb{D}}^{*} \dot{E}^e$.

$$\dot{\tilde{W}} = \frac{1}{2} \dot{T}^{pf} \cdot \dot{E} \geq 0 \quad (\text{III.75})$$

resulta a seguinte representação para a regra da normalidade

$$\dot{T}^{pf} = \dot{\lambda} f_E \quad (\text{III.76})$$

Na eventualidade de se optar por uma lei não associativa, obtêm-se:

$$\dot{T}^{pf} = \dot{\lambda} g_E \quad (\text{III.77})$$

O escalar $\dot{\lambda}$ é determinado a partir da condição de consistência

$$f_E \cdot \dot{E} + f_{E^p} \cdot \dot{E}^p + f_{W^{pf}} \dot{W}^{pf} = 0 \quad (\text{III.78})$$

O incremento de energia dissipada \dot{W}^{pf} que aparece na (III.78), e está representado na figura (III.21) para o caso unidimensional, tem seu valor calculado por

$$\dot{W}^{pf} = E^e \cdot \left(\dot{T}^p + \frac{1}{2} \dot{T}^f \right) \quad (*) \quad (\text{III.79})$$

Entretanto para que seja utilizada a regra da normalidade, seguindo os mesmos procedimentos dos modelos anteriores, é necessário obter \dot{W}^{pf} como função de \dot{T}^{pf} . Para que isso seja possível tanto \dot{T}^p quanto \dot{T}^f devem ser relacionados a \dot{T}^{pf} .

Como já se dispõe da equação

$$\dot{T}^p + \dot{T}^f = \dot{T}^{pf} \quad (\text{III.80})$$

(*) observa-se que E^e vale numa situação em que $f = 0$.

há a necessidade de se obter uma outra relação, entre os mesmos incrementos, de modo a montar um sistema de duas equações.

A segunda equação resulta do estudo da variação das propriedades elásticas, admitindo que as mesmas são diretamente associadas à energia de plastificação e fraturamento W^{pf} .

Assim sendo, seja

$$\mathbb{D}^* = \mathbb{D}^*(W^{pf}) \quad (\text{III.81})$$

A partir daí vale escrever que

$$\dot{\mathbb{D}}^* = \mathbb{D}^{*'} \dot{W}^{pf} \quad (\text{III.82})$$

Substituindo-se a (III.79) na anterior, resulta

$$\dot{\mathbb{D}}^* = \mathbb{D}^{*'} E^e \cdot (\dot{T}^p + \frac{1}{2} \dot{T}^f) \quad (\text{III.83})$$

Como $\dot{T}^f = -\dot{\mathbb{D}}^* E^e$, combinando com a (III.83), obtêm-se a segunda expressão procurada

$$\dot{T}^f = -\mathbb{D}^{*'} (E^e \otimes E^e) (\dot{T}^p + \frac{1}{2} \dot{T}^f) \quad (\text{III.84})$$

Isolando \dot{T}^p da (III.80) e substituindo na última expressão resulta, após um rearranjo dos termos,

$$\text{II} - \frac{1}{2} \mathbb{D}^{*'} (E^e \otimes E^e) \dot{T}^f = -\mathbb{D}^{*'} (E^e \otimes E^e) \dot{T}^{pf} \quad (\text{III.85})$$

Essa mesma relação pode ser reescrita na seguinte forma condensada:

$$M\dot{T}^f = N\dot{T}^{pf} \quad (\text{III.86})$$

de onde resulta,

$$\dot{T}^f = M^{-1} N \dot{T}^{Pf} = R^f \dot{T}^{Pf} \quad (\text{III.87})$$

Com essa relação na (III.80), pode-se deduzir que

$$\dot{T}^P = (II-R^f) \dot{T}^{Pf} = R^P \dot{T}^{Pf} \quad (\text{III.88})$$

Finalmente, é possível colocar a (III.79) como uma função de \dot{T}^{Pf} , na seguinte forma

$$\dot{W}^{Pf} = E^e \cdot (R^P + \frac{1}{2} R^f) \dot{T}^{Pf} \quad (\text{III.89})$$

Substituindo-se essa equação na condição de consistência, e fazendo uso da regra da normalidade, resulta

$$d\lambda = \frac{f_T \cdot \dot{E}}{G'} \quad (\text{III.90})$$

onde

$$G' = - \left[f_{EP} \cdot \mathbb{C} R^P g_E + f_{WPf} E^e \cdot (R^P + \frac{1}{2} R^f) g_E \right] \quad (\text{III.91})$$

A relação constitutiva do material assume, então, a seguinte forma final:

$$\dot{T} = \left[\mathbb{D}^* - \frac{1}{G'} (g_E \otimes f_E) \right] \dot{E} \quad (\text{III.92})$$

Obviamente, a relação somente se completa com a definição de uma expressão que permita calcular a variação de \mathbb{D}^* .

Em linhas gerais, essa expressão resulta do procedimento que segue.

Da (III.82), vem que

$$\dot{\mathbb{D}}^* = \mathbb{D}^{*'} E^e \cdot (\dot{T}^P + \frac{1}{2} \dot{T}^f) \quad (\text{III.93})$$

ou ainda,

$$\dot{D}^* = D^{*' } E^e \cdot (R^p + \frac{1}{2} R^f) \dot{T}^{pf} \quad (\text{III.94})$$

Empregando, então, a regra da normalidade, obtém-se

$$\dot{D}^* = D^{*' } \frac{(f_E \cdot \dot{E})}{G'} E^e \cdot (R^p + \frac{1}{2} R^f) g_E \quad (\text{III.95})$$

É interessante observar que adotando para a evolução da superfície de plastificação e fratura um modelo *i* sôtroto do tipo

$$f = f(E) - H(W^{pf}) = 0 \quad (\text{III.96})$$

a (III.95) passa a ser escrita na forma

$$\dot{D}^* = D^{*' } (f_E \cdot \dot{E}) \dot{W}_H^{pf} \quad (\text{III.97})$$

Uma vantagem de se adotar o modelo isôtroto está justamente no fato de que as características de isotropia não se alteram e isto simplifica a determinação de $D^{*'}$, obtida então pela derivação de D^* com relação aos parâmetros elásticos E e ν . (*)

(*) em forma matricial

$$D^* = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_2 & & & \\ & D_1 & D_2 & & & \\ & & D_1 & & & \\ & & & D_3 & & \\ \text{sim.} & & & & D_3 & \\ & & & & & D_3 \end{bmatrix} ; \quad D^{*' } = \begin{bmatrix} D_1' & D_2' & D_2' & & & \\ & D_1' & D_2' & & & \\ & & D_1' & & & \\ & & & D_3' & & \\ \text{sim.} & & & & D_3' & \\ & & & & & D_3' \end{bmatrix}$$

Obviamente, para fins de aplicações numéricas, e xiste a dificuldade do desconhecimento das leis que regem a variação dos módulos de Young e Poisson; estas leis devem ser definidas a partir de informações experimentais.

De um modo geral, com vistas à aplicação prática do modelo, a forma adotada para a superfície de plastificação e fratura deve ser uma forte condicionante dos erros de aproximação. Não se trata de afirmação especulativa; na verdade ela está baseada nos resultados obtidos por CHEN (1987), que adotou uma função simplificada constituída por um plano perpendicular ao eixo hidrostático; o modelo de evolução da superfície foi o isótropo.

Por sua vez, a superfície de potencial plástico é importante no sentido de reproduzir convenientemente o comportamento plástico nos regimes de endurecimento e de amolecimento.

Do ponto de vista das informações experimentais, o ensaio de compressão uniaxial com deformação controlada, por exemplo, pode fornecer dados como a energia dissipada no processo de deformação. Essa informação pode conduzir a uma expressão matemática representativa da evolução da su-

Cont.

onde, por exemplo,

$$D_1 = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E}{(1+\nu)}$$

$$D_1' = \frac{E'(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E2\nu(2-\nu)}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}$$

perfície no espaço das deformações (*). Para ilustrar esse comentário, a figura III.22 apresenta diagramas genéricos $(\sigma-\epsilon)$ e $(W^{Pf}-\epsilon)$.

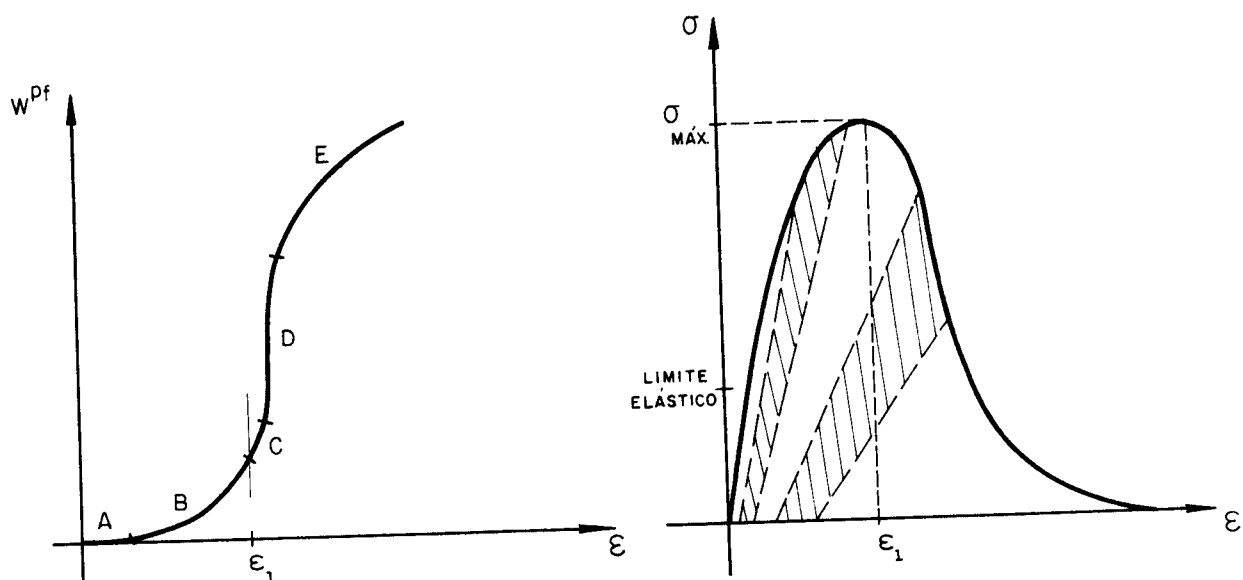
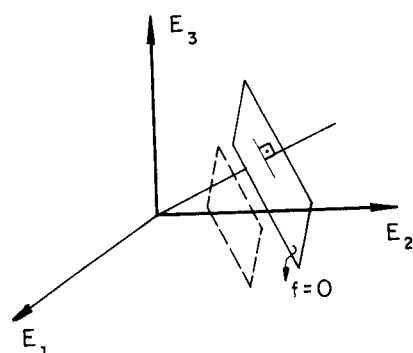


Fig. III.22 - Evolução da energia de plastificação e fratura.

(*) CHEN (1987) adota para a superfície de plastificação e fratura a seguinte expressão:

$$f = E_v - k(W^{Pf}) = 0 = E_v - k(W^{Pf}) = 0$$

que representa um plano perpendicular ao eixo hidrostático. Nessa mesma expressão aparece k como função de W^{Pf} , representada pela deformação volumétrica E_v .



Assim, com f definido, pode-se calcular $f_{W^{Pf}} = \frac{dk}{dW^{Pf}}$ que aparece na expressão de G' , a qual, por sua vez, simula a evolução da superfície.

Ora, $f_{W^{Pf}}$ nada mais é, neste modelo, do que a variação da energia dissipada com a deformação volumétrica que pode ter sua representação extrapolada do que se observa no diagrama $W^{Pf}-\epsilon$.

A curva $W^{fp}-\epsilon$ está dividida em cinco regiões, com as seguintes características evidenciadas pela correspondência com a curva $(\sigma-\epsilon)$:

- . Região A - corresponde ao regime elástico no diagrama (σ, ϵ) e, portanto, não apresenta dissipação de energia.
- . Região B - corresponde ao regime de endurecimento; nota-se que próximo da tensão máxima no diagrama $\sigma-\epsilon$ há um aumento de curvatura que se reflete num rápido aumento da energia dissipada.
- . Região C - corresponde ao início do amolecimento (próximo à tensão máxima).
- . Região D - corresponde ao regime pronunciado de amolecimento, havendo, portanto, grandes acréscimos de energia dissipada contra pequenos acréscimos de deformação.
- . Região E - corresponde à parte final do regime de amolecimento (para além do ponto de inflexão do regime no diagrama $\sigma-\epsilon$).

III.3.2 - Modelo geral para materiais granulares

Neste item é apresentado um modelo geral para materiais granulares que, por considerar o fenômeno da dilatação, é formulado com base numa lei de plastificação não associativa.

Outra característica importante do modelo é associar a evolução das superfícies de plastificação e potencial (escritas numa forma idêntica à superfície de Mohr-Coulomb) com a variação de parâmetros do material como o ângulo de atrito e a coesão. O resultado é bastante interessante uma vez que a variação do ângulo de atrito reproduz o endurecimento e a da coesão reproduz o regime de amolecimento.

É interessante, de início, recordar algumas relações fundamentais da teoria da plasticidade com endurecimento isótropo e lei de plastificação não associativa.

Valem, portanto, as seguintes expressões:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p \quad (\text{III.98})$$

$$\dot{\mathbf{E}}^e = \mathbf{D}^{-1} \dot{\mathbf{T}} \quad (\text{III.99})$$

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{g}_T \quad (\text{III.100})$$

$$f = f(T, h) \quad (\text{III.101})$$

onde as duas últimas relações expressam a regra e o critério de plastificação, respectivamente.

Deve-se observar que o escalar h , denominado parâmetro de endurecimento, registra a evolução do processo de plastificação e será aqui relacionado à deformação plástica efetiva. Assim, no que segue valem:

$$dh = dE_p = \sqrt{\frac{2}{3}(dE^p \cdot dE^p)} = d\lambda \sqrt{\frac{2}{3}(\mathbf{g}_T \cdot \mathbf{g}_T)} \quad (\text{III.102})$$

O parâmetro $d\lambda$, que aparece na (III.100) é determinado pela seguinte equação obtida a partir da aplicação da condição de consistência $df = 0$:

$$d\lambda = \frac{1}{G} (f_T \cdot dT) \quad (\text{III.103})$$

onde

$$G^* = -\sqrt{\frac{2}{3}(\mathbf{g}_T \cdot \mathbf{g}_T)} f_{E_p} \quad (\text{III.104})$$

G^* pode também ser denominado módulo de endurecimento, uma vez que ele registra efetivamente a variação da superfície de plastificação com a evolução das deformações plásticas.

Pois bem, admita-se então que tanto f quanto g sejam expressas por relações típicas do critério de Mohr-Coulomb. Por exemplo:

$$f = \tau^* - \sigma^* \operatorname{sen} \phi^* - c^* \quad (\text{III.105})$$

para a superfície de escoamento e,

$$g = \tau^* - \sigma^* \operatorname{sen} \psi^* + \text{constante} \quad (\text{III.106})$$

para a superfície de potencial plástico.

Nessas relações aparecem σ^* e τ^* que podem ser determinadas em função das tensões principais por:

$$\sigma^* = - \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} \quad (\text{III.107})$$

$$\tau^* = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \quad (\text{III.108})$$

Os parâmetros ϕ^* , c^* e ψ^* são o ângulo de atrito interno, a coesão e o ângulo de dilatância, os quais, de um modo geral, podem ser colocados em função da deformação plástica efetiva mediante relações empíricas, que serão apresentadas mais adiante.

Cabe observar ainda, que a constante que aparece na expressão (III.106) não necessita ser definida claramente, uma vez que ela não depende do estado de tensões (*). Por outro lado, a lei associativa é recuperada impondo-se, naquela mesma fórmula, a igualdade entre ψ^* e ϕ^* .

Tendo em vista as (III.105) e (III.106), o módulo de endurecimento G^* passa a ser escrito na forma:

(*) é preciso observar que para as relações (III.98) a (III.104) há necessidade de se conhecer apenas g_T .

$$G^* = - \sqrt{\frac{1}{3} (1 + \sin^2 \psi^*)} f_{E_p} \quad (*) \quad (\text{III.109})$$

Considerando-se que o maior valor obtido experimentalmente para o ângulo de dilatância do concreto é da ordem de 20° , a relação anterior pode ser escrita de modo aproximado por:

$$G^* \sqrt{3} = -f_{E_p} = \frac{\partial \sin \phi^*}{\partial E_p} + \frac{\partial c^*}{\partial E_p} \quad (\text{III.110})$$

que mostra claramente a dependência da evolução da superfície de plastificação com as relações entre $\sin \phi^*$ e c^* com E_p .

Em materiais com características fortemente granulares com o concreto, a microfissuração é originada por uma perda de coesão entre as partículas. Como também a microfissuração é responsável pelo comportamento plástico do material, há, em última análise, uma diminuição da coesão interna com o aumento da deformação plástica efetiva.

Assim, a função de coesão, que fornece c^* , pode ser escrita matematicamente por uma relação do tipo

$$c^* = c^*(c, E_p) \quad (\text{III.111})$$

onde c é o máximo valor de coesão do material. (**)

A forma exata dessa expressão ainda não está definida, entretanto, uma relação que reproduz com boa aproximação os resultados experimentais é a exponencial, dada por:

(*) essa expressão foi obtida a partir de:

$$g_{\sigma_1} = \frac{1}{2} (1 + \sin \psi^*) ; g_{\sigma_2} = 0 ; g_{\sigma_3} = -\frac{1}{2} (1 - \sin \psi^*)$$

$$g_T \cdot g_T = \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \psi^*)$$

(**) valores de coesão máxima no concreto variando entre 100-300 kg/cm² (10-30 MPa) são referenciados na literatura.

$$c^* = c \cdot e^{-\left(2 \frac{E_p}{E_p^u}\right)^2} \quad (\text{III.112})$$

onde E_p^u é um valor último para a deformação plástica efetiva.

Por outro lado, à medida em que a coesão entre os grãos decresce, aumenta o atrito interno no material e assim a função ϕ^* se apresenta numa forma crescente com a deformação plástica.

Uma forma proposta para areias adensadas é

$$\text{sen} \phi^* = \frac{2 \sqrt{E_p E_p^f}}{E_p + E_p^f} \text{sen} \phi, \text{ para } E_p < E_p^f \quad (\text{III.113})$$

$$\text{sen} \phi^* = \text{sen} \phi \text{ para } E_p > E_p^f$$

onde ϕ é o máximo valor do ângulo de atrito (*) e E_p^f é um valor de referência a partir do qual este ângulo não sofre variações.

A figura III.23 ilustra, em diagramas, as funções adotadas para o ângulo de atrito e a coesão.

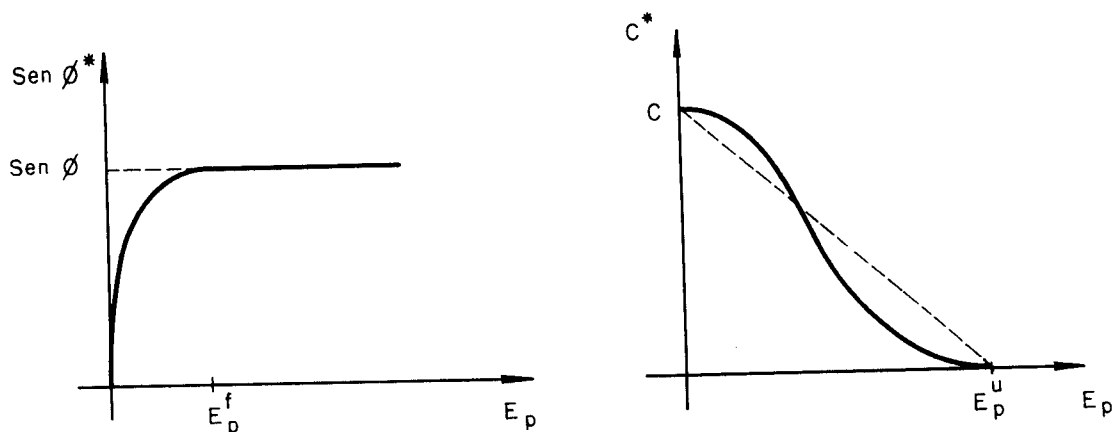


Fig. III.23 - Variações do ângulo de atrito e da coesão.

(*) no concreto este valor está próximo de 35° , de acordo com as referências.

Como se observa, o modelo expressa um amolecimento com relação à coesão e um endurecimento com relação ao ângulo de atrito.

A respeito do ângulo de dilatância, algumas considerações devem ser feitas.

Em primeiro lugar, algo deve ser dito sobre a sua definição.

Observa-se pelos resultados em ensaios triaxiais de materiais granulares, executados em corpos de prova cilíndricos, que próximo do final do regime de endurecimento (v. fig. III.24), e pela forte tendência a um patamar, praticamente todos os incrementos de deformação são de natureza plástica. Há, por conseguinte, uma relação quase linear entre as mudanças de volume e de deformação axial, o que significa dizer que a taxa de dilatância é constante. Uma maneira de expressar esse fato é através da definição de um parâmetro característico do material, e portanto constante, denominado ângulo de dilatância Ψ .

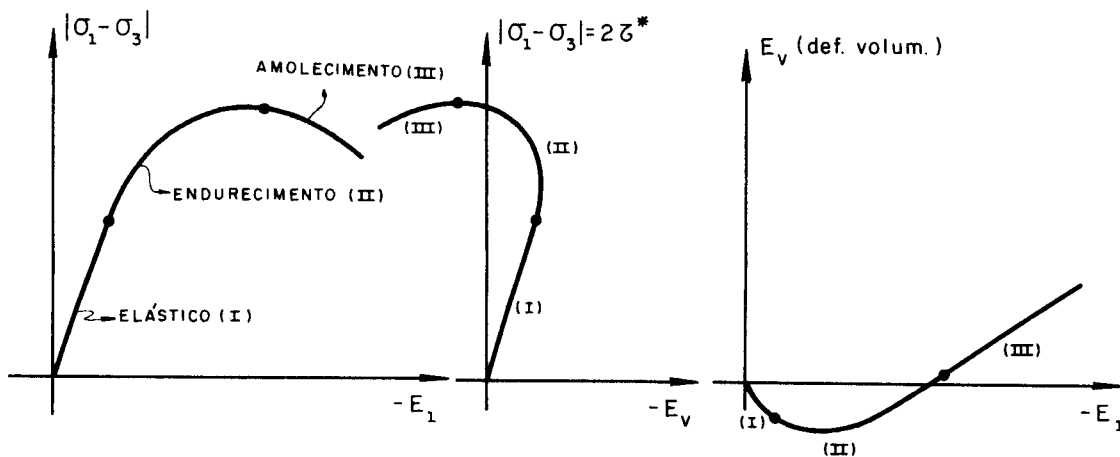


Fig. III.24 - Resultado de ensaio triaxial

A expressão matemática correspondente é: (*)

(*) essa expressão é obtida a partir da lei de plastificação (III.100), tomando-se a relação (III.106) para a superfície de potencial plástico com $\Psi^* = \Psi$. Assim:

$$dE_1^P = \lambda \frac{1}{2} (1 + \text{sen}\Psi) \quad , \quad dE_2^P = 0 \quad ; \quad dE_3^P = -\frac{\lambda}{2} (1 - \text{sen}\Psi)$$

$$\operatorname{sen}\Psi = \frac{dE_v^P}{d\gamma^P} \quad (\text{III.114})$$

onde
$$dE_v^P = dE_1^P + dE_2^P + dE_3^P \quad (\text{III.115})$$

e ,
$$d\gamma^P = dE_1^P - dE_3^P \quad (\text{III.116})$$

Portanto, o ângulo de dilatância é obtido a partir de uma relação entre a variação de volume e a variação de distorção referentes à parcela plástica de deformação. Isso está de acordo com o próprio fenômeno uma vez que a alteração volumétrica, observada em materiais granulares, deve-se ao escorregamento entre grupos de partículas ou fissuras do material.

Deve-se esclarecer que esta definição, proposta com base em observações sobre o que acontece no regime de endurecimento, é estendida também ao regime de amolecimento. Entretanto, é bom prevenir-se para o fato de que o material não pode apresentar dilatância indefinidamente; aliás é bastante intuitivo que numa situação de elevadas pressões de confinamento a dilatância do concreto se anula. Por outro lado, é também perceptível, no caso de fissuras, que após intenso escorregamento acréscimos de cisalhamento não provocam novas alterações de volume.

Cont.

A partir daí, somando-se as expressões, resulta:

$$\operatorname{sen}\Psi = \frac{dE_1^P + dE_3^P}{2\lambda} = \frac{dE_v^P}{2\lambda}$$

e subtraindo-se as mesmas relações:

$$2\lambda = dE_1^P - dE_3^P = d\gamma^P$$

Portanto,
$$\operatorname{sen}\Psi = \frac{dE_v^P}{d\gamma^P}$$

Cumpra ainda observar que valores característicos de Ψ para rochas variam, de acordo com referências bibliográficas, entre 12° e 20° , em particular para o concreto o ângulo de dilatação é da ordem de 13° (e portanto bem inferior ao ângulo de atrito $\phi \approx 35^\circ$).

Com relação à variação do ângulo de dilatação com a deformação plástica, necessária para especificar a relação que define a função potencial plástico, é interessante observar que ela é gradualmente crescente tendendo a um valor limite Ψ dado pela (III.114). Assim sendo, uma relação análoga àquela pode ser obtida para Ψ^* , a partir da regra de plastificação e da definição para a superfície potencial.

$$\operatorname{sen}\Psi^* = \frac{dE_v^P}{-2dE_1^P + dE_v^P} \quad (*) \quad (\text{III.117})$$

Entretanto essa expressão não é capaz de fornecer a variação de Ψ^* , uma vez que não se conhece a variação de dE_v^P com a deformação plástica efetiva.

A mecânica dos solos propõe para areias pouco adensadas a seguinte relação para a determinação da variação volumétrica:

$$1 - \frac{dE_v^P}{dE_1^P} = \left[\frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \phi^*/2)}{\operatorname{tg}(45^\circ + \phi_c/2)} \right]^2 \quad (\text{III.118})$$

lembrando que ϕ^* é uma função de E_p .

Reunindo as (III.117) e (III.118) resulta a equação:

$$\operatorname{sen}\Psi^* = \frac{\operatorname{sen}\phi^* - \operatorname{sen}\phi_c}{1 - \operatorname{sen}\phi^* \operatorname{sen}\phi_c} \quad \text{p/ } \phi^* > \phi_c \quad (\text{III.119})$$

(*) na forma em que está escrita, a relação vale tanto para casos triaxiais gerais com $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ ($dE_2^P \neq 0$) ou para aqueles em que $\sigma_2 = \sigma_3 \neq \sigma_1$.

onde ϕ_c é uma constante que corresponde ao valor de ϕ para o qual não há dilatação por deformação plástica.

Nota-se que essa última expressão pode assumir valores negativos desde que $\phi^* < \phi_c$; isto implica numa diminuição de volume com deformação plástica. Assumindo que esse fato não seja possível no concreto, a validade da (III.119) se restringe a valores de ϕ^* maiores que ϕ_c ; em caso contrário se adota $\Psi^* = 0$.

Um valor numérico para ϕ_c pode ser calculado substituindo-se na (III.119) os valores limites de Ψ e ϕ . Por exemplo, para $\Psi = 13^\circ$ e $\phi = 35^\circ$ resulta $\phi_c \cong 23^\circ, 6$.

Com vistas a se obter uma implementação numérica mais simples do modelo proposto, a evolução das superfícies de plastificação e potencial seguem um modelo isotrópico.

Não obstante esse fato, cabe lembrar que o emprego de uma lei não associativa conduz a uma matriz, representativa da lei constitutiva do material, não simétrica.

III.4 - MODELO DE FRATURAMENTO PROGRESSIVO NO REGIME DE TRAÇÃO

Apesar da distribuição de assuntos deste capítulo ter colocado em evidência, separadamente, os modelos dedicados aos regimes de tração e os dedicados aos regimes de compressão, não é verdadeira a conclusão de que haja uma exclusividade no emprego de uma ou outra formulação para cada um dos regimes respectivos. Em outras palavras, não existe, em princípio, um motivo suficientemente forte para impedir, por exemplo, o emprego da formulação apresentada nos modelos para compressão, item III.4.1, ao estudo do comportamento do material em regime de tração.

Tendo-se em vista as considerações anteriores, é apresentada, em seguida, a aplicação do modelo de fraturamento progressivo para reproduzir a resposta do material num regime de tração simples.

Um único detalhe a ser observado é que o modelo não permite identificar o panorama da fissuração, mas, através do regime de amolecimento, considera o seu efeito no comportamento do material.

Deve-se esclarecer, por outro lado, que optou-se pela aplicação do modelo de fraturamento progressivo, em lugar do modelo geral, pela vantagem que oferece quanto à obtenção mais rápida de resultados numéricos.

O exemplo consiste de uma barra, sujeita a tração centrada, constituída por um material que possui uma lei constitutiva bilinear, como ilustra a figura III.25.

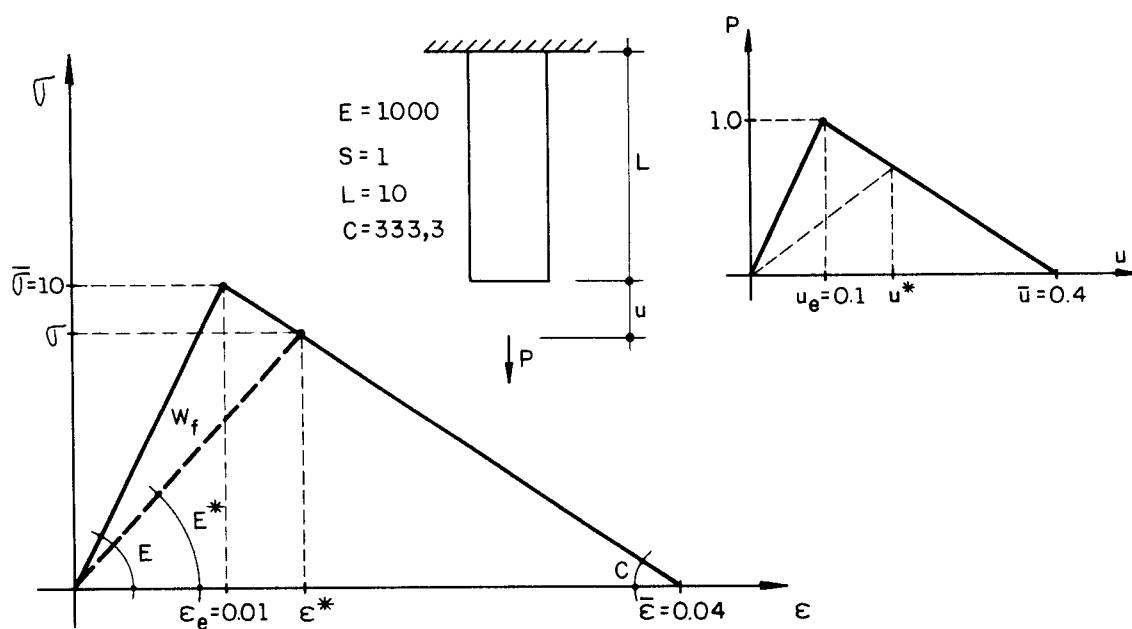


Fig. III.25 - Exemplo de tração centrada

Estendendo a este caso as equações fundamentais, válidas para o material em regime de compressão com fraturamento, e já considerando os valores numéricos apresentados na figura III.25, obtêm-se:

$$f = u - \left(\frac{3}{2} W_f + 0.1\right) = u - H(W_f) \quad (\text{III.120})$$

$$dP = \left(\frac{E^*}{L} - \frac{40}{3u^*} \right) du \quad (p/ u > u^*) \quad (\text{III.121})$$

$$d\lambda = \frac{40}{3u^*} du \quad (p/ u > u^*) \quad (\text{III.122})$$

$$dW_f = \frac{1}{2} (0.15W_f + 0.01) d\lambda \quad (\text{III.123})$$

$$u^* = \frac{3}{2} W_f + 0.1 \quad (\text{III.124})$$

Neste caso, é possível escrever uma fórmula explícita para o cálculo de E^*

$$E^* = \left(1 - \frac{2W_f}{u^*} \right) E \quad (\text{III.125})$$

Admita-se, então, que numa situação inicial a barra apresente os seguintes valores característicos.

$$u = 0.08 ; P = 8 ; W_f = 0 ; E^* = 1000 ; u^* = 0.1 ; f = -0.02$$

Essa situação está representada pelo ponto A na figura III.26.

Seja, num primeiro passo, imposto à barra um acréscimo de deslocamento $\Delta u = 0.02$, ($u = 0.1$).

Os resultados que refletem a resposta do material são:

$$\Delta P = \frac{E^* \Delta u}{L} = 2 ; \Delta \lambda = 0 ; \Delta W_f = 0 ; E^* = 1000 .$$

No gráfico da figura III.26, essa situação corresponde ao ponto 1.

Em seguida, acrescenta-se à barra $\Delta u = 0.03$, e os resultados obtidos são:

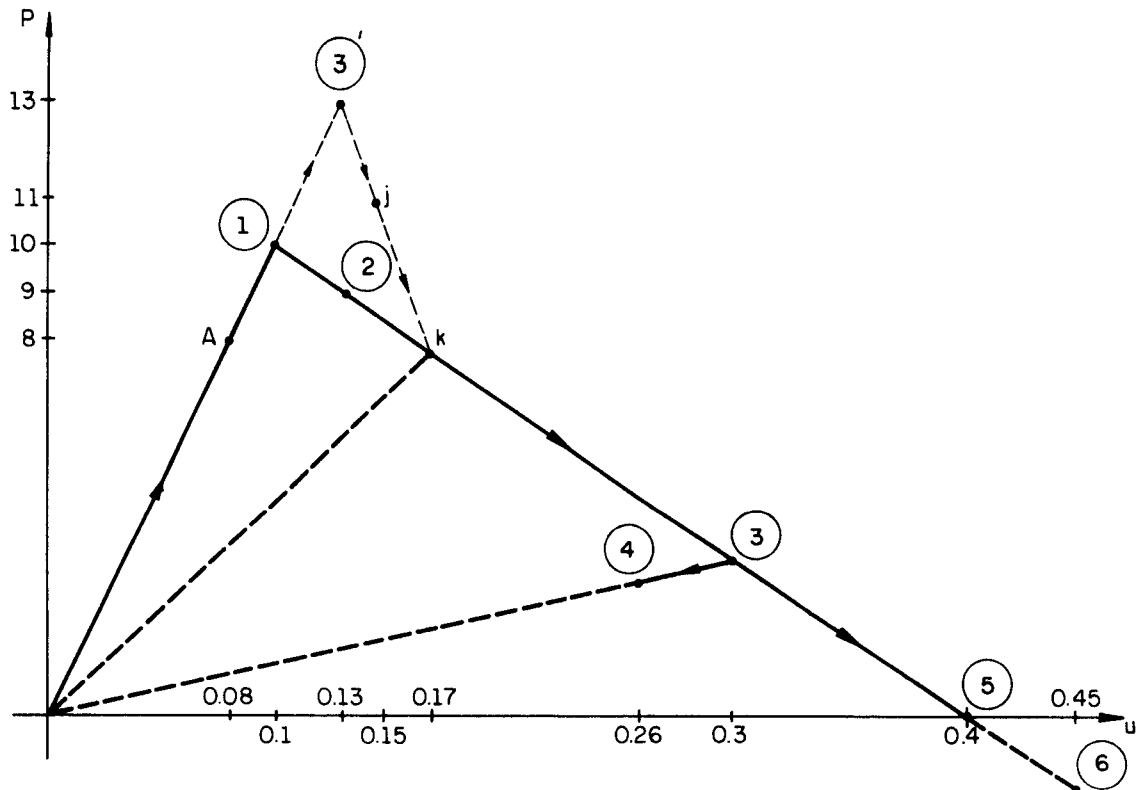


Fig. III.26 - Resposta obtida

$$\Delta P = \left(\frac{1000}{10} - \frac{40}{3 \times 0.1} \right) 0.03 = -1 ; \Delta \lambda = 4 ; \Delta W_f = 0.02 ;$$

$$W_f = 0.02 ; u^* = 0.13 ; E^* = 692.3.$$

O ponto 2 da figura III.26, representa essa nova situação.

Admita-se, por outro lado, que se tivesse inicialmente imposto à barra um acréscimo de deslocamentos $u = 0.05$. Nessas condições, os resultados obtidos seriam:

$$\Delta P = 5 ; \Delta \lambda = 0 ; \Delta W_f = 0 ; E^* = 1000 ; u^* = 0.1 ; f = 0.03.$$

e a situação correspondente estaria representada pelo ponto 3'. Entretanto, como $f > 0$, há uma clara indicação de que o material entrou em regime de fraturamento.

Como o ponto 3' representa uma situação não compatível com a relação constitutiva, uma vez que está "fora" da superfície de fratura, há a necessidade de se recuperar a consistência da resposta mediante um procedimento de volta à superfície.

Entre os diferentes algoritmos que podem ser empregados para executar essa volta, adota-se o método dos deslocamentos controlados. (*)

O método dos deslocamentos controlados está baseado nas seguintes relações, ilustradas na figura III.27:

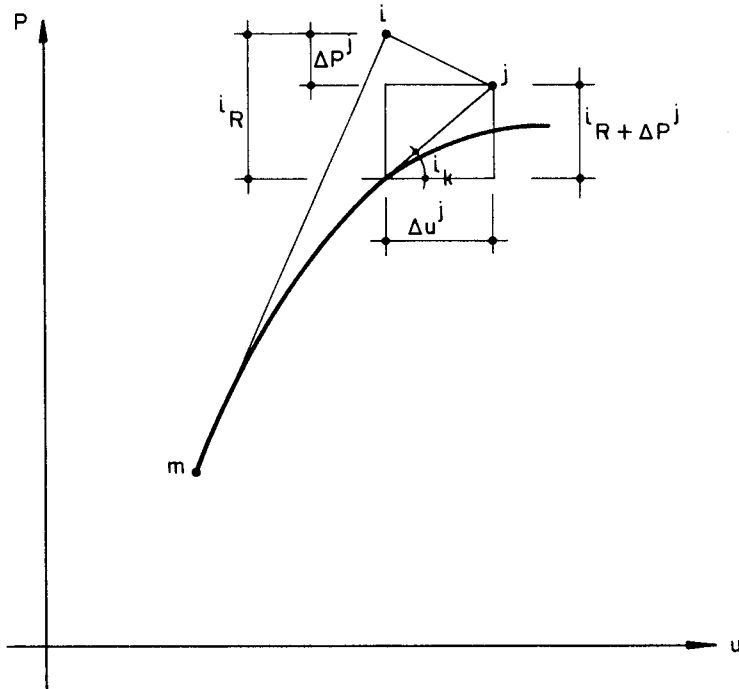


Fig. III.27 - Método dos deslocamentos controlados.

$${}^i K_{\Delta u}^j = {}^i R + \Delta P^j \quad (\text{III.26})$$

onde ${}^i R$ é a diferença entre a carga obtida no passo i e a carga compatível com a relação constitutiva, ${}^i K$ é a matriz de rigidez tangente correspondente ao passo i ; ΔP^j é um quinhão da carga de valor incógnito.

(*) esse método foi adotado, apesar do exemplo simples, para que se pudesse comentar um dos procedimentos empregados em casos mais complexos.

Pois bem, o procedimento iterativo consiste em adotar um valor fixo para $\Delta u^j = \hat{u}$, em função do qual é determinado ΔP^j . Com ΔP^j um novo resíduo pode ser determinado; assim, impondo-se novamente \hat{u} , o procedimento é repetido até que o resíduo seja menor ou igual a uma certa tolerância.

No caso do exemplo em desenvolvimento, adota-se $P = 10$ e $\Delta u^j = \hat{u} = 0.02$. Nessas condições, a relação (III.126) passa a ser dada por:

$$\frac{E^* \cdot \hat{u}}{L} = R + \Delta P \quad (\text{III.127})$$

Voltando ao exemplo, com relação ao ponto 3, $R = 13 - 9 = 4$ (onde o valor 9 é obtido pela equação constitutiva para $u=0.13$); aplicando a (III.127), obtém-se:

$$\Delta P^j = -2.0$$

O ponto j na figura III.26 representa o passo executado.

O novo resíduo é $R = 11 - 8.33 = 2.667$. Aplicando-se novamente a (III.127), tomando-se o cuidado de substituir E^* por $-C$ resulta:

$$\Delta P^* = -3.33$$

O ponto K na figura III.26 representa o estado atual.

Como o novo resíduo é nulo, recuperou-se a consistência com a relação constitutiva.

Por outro lado, para poder prosseguir com a análise, é necessário atualizar os valores de $\Delta \lambda$, W_f , u^* e E^* .

Das (III.122) a (III.125), resultam:

$$\Delta \lambda = 9.333 ; \Delta W_f = 0.0467 ; u^* = 0.17 ; E^* = 451.$$

Impondo-se, agora, $u = 0.13$, obtêm-se:

$$\Delta P = -4.33 ; \Delta \lambda = 10.2 ; \Delta W_f = 0.087 ; u^* = 0.3 ; E^* = 110.9.$$

O ponto 3 representa, na figura III.26, a situação atual.

Uma descarga eventual, imposta em função de uma variação de deslocamentos $u = -0.04$, fornece os seguintes resultados:

$$\Delta P = -0.44 ; \Delta \lambda = 0 ; \Delta W_f = 0 ; u^* = 0.3 ; E^* = 110.9 ;$$

$$f = -0.04.$$

A situação atual está representada através do ponto 4, na figura III.26.

Por outro lado, se a partir do ponto 3 fôr imposto $u = 0.1$, resultam:

$$\Delta P = -3.33 ; \Delta \lambda = 4.44 ; \Delta W_f = 0.0667 ; u^* = 0.4 ; E^* = 0$$

O ponto 5 ilustra este estado no diagrama da figura III.26.

Se, porventura, em lugar de $u = 0.1$, fôsse imposto, a partir do ponto 3, $u = 0.15$, os resultados obtidos seriam:

$$\Delta P = -5 ; \Delta \lambda = 6.667 ; \Delta W_f = 0.1 ; u^* = 0.45 ; E^* = -39.2.$$

Essa situação está representada na figura III.26 através do ponto 6.

Algumas considerações devem ser feitas, a respeito dos resultados obtidos.

Em primeiro lugar, é preciso ressaltar o fato de que o estudo via deformações controladas, efetivamente permite analisar a resposta do material num regime de amolecimento.

Por outro lado, ao passar do regime elástico para o de fraturamento, é possível que a condição de fratura seja violada, havendo, então, a necessidade de se lançar mão de um algoritmo numérico para recuperar a consistência na resposta. O mesmo pode ocorrer quando se efetua uma nova carga após uma descarga.

Outra limitação do modelo está evidenciada próximo da situação de ruptura. Nessa situação, na hipótese de uma deformação acumulada que ultrapasse o valor limite, o modelo, por si só, não consegue reconhecer a limitação do comportamento do material.

Em outras palavras, nas aplicações, esta formulação exige a necessidade constante de uma interferência externa (através de comparações, utilização de algoritmos, etc.) para que efetivamente possa fornecer uma resposta suficientemente aproximada.

Portanto, em virtude da necessidade de tais procedimentos externos, sob o ponto de vista operacional o modelo perde consistência.

Entretanto, é bom lembrar que a inconsistência operacional é gerada pela necessidade de se trabalhar com incrementos finitos de deslocamentos, os quais não foram previstos na formulação.

No próximo capítulo, será abordado este mesmo modelo constitutivo, porém gerado através de uma formulação variacional que se mostrará consistente mesmo a nível de incrementos finitos nos deslocamentos. Além disso, a própria formulação induzirá a um algoritmo de solução coerente com o modelo, dispensando procedimentos externos.

CAPÍTULO IV

UM MODELO PARA A RESPOSTA PÓS-FRATURA DO CONCRETO,
BASEADO NA FORMULAÇÃO VARIACIONAL DA
RELAÇÃO CONSTITUTIVA

IV.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo é proposto um modelo que reproduz a resposta pós-fratura do concreto. Admite-se o concreto como um material ideal de comportamento elástico linear e com evolução do fraturamento representada por um amolecimento linear.

Apesar do modelo ser testado com solicitações de tração, sua aplicação pode ser estendida também aos regimes de compressão; aliás, ele tem por base o modelo pós-fratura para o concreto simples em compressão, descrito no item III.3 do capítulo anterior.

Por razões associadas à verificação da viabilidade da formulação proposta, o modelo inicial não leva em conta a existência de deformações residuais, entretanto, no item IV.7 é apresentada a relação constitutiva incluindo os efeitos de plastificação e fratura.

Por outro lado, é necessário destacar a notação e algumas definições que serão utilizadas posteriormente.

O corpo considerado ocupa uma região \mathcal{B} do espaço pontual euclidiano; x representa um ponto qualquer do corpo.

A região Γ de contorno do corpo é composta pelas partes Γ_u e Γ_s , nas quais se prescrevem deslocamentos e cargas, respectivamente.

O campo de deslocamentos generalizado é referenciado por u , enquanto que E indica o campo de deformações. Já \dot{E} , ou simplesmente D , representa a taxa de deformação.

Os campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis com as restrições de apoio homogêneas e bilaterais constituem o espaço vetorial V . Vale observar que, para cada valor do parâmetro t que define o processo evolutivo, os campos \dot{u} , ou simplesmente v , cinematicamente admissíveis, também pertencem a V .

O conjunto dos campos de deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis e homogêneos nas restrições ($u=0$ em u), constitui o espaço vetorial $\text{var } V$ (neste caso $\text{var } V = V$),

O carregamento fica definido por funcionais lineares e contínuos L , pertencentes ao espaço dual de V , caracterizados por forças de corpo b , definidas em \mathcal{B} e por forças de superfície s , definidas em Γ_s . O trabalho do sistema L no deslocamento u , num instante t , é dado por:

$$L(u) = \int_{\mathcal{B}} b \cdot u \, d\mathcal{B} + \int_{\Gamma_s} s \cdot u \, d\Gamma$$

De modo análogo se define a potência da taxa de carga \dot{L} .

Os campos de deformações generalizadas são elementos do espaço W e a distribuição de tensões generalizadas T elementos do espaço dual de W .

A taxa de tensão \dot{T} equilibra a taxa de carga \dot{L} , no instante t , se o princípio das potências virtuais é satisfeito, ou seja:

$$\int_{\mathcal{B}} \dot{T} \cdot \mathcal{D} v \, d\mathcal{B} = \dot{L}(v) \quad v \in \text{var } V$$

onde \mathcal{D} é o operador que associa o campo de taxas de deslocamentos com o de taxas de deformação.

O desenvolvimento matemático segue os moldes da formulação variacional cinemática apresentada no Capítulo II da seção II.

Destacam-se, finalmente, a consistência matemática da formulação e a aplicação de algoritmos de otimização a partir da sua implementação numérica através do método dos elementos finitos.

IV.2 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL CINEMÁTICA, EM TAXAS, DA EQUAÇÃO CONSTITUTIVA DE UM MATERIAL QUE APRESENTA FRATURAMENTO PROGRESSIVO

O modelo teórico adotado para a consideração da influência do fraturamento na resposta de um material solicitado à tração, admite que seu efeito não se dá através do aparecimento de deformações permanentes mas sim pela degeneração das propriedades elásticas.

Por sua vez, a evolução do processo de fraturamento é condicionada por uma superfície de fratura f , definida no espaço das deformações e que tem sua "posição" atual fixada em função do trabalho de fratura W_f .

Assim sendo, em cada instante de tempo o estado de um corpo constituído por um material que apresenta fraturamento é conhecido através do conjunto de variáveis u , E , T , W_f e $f(E, W_f)$, lembrando que u é o campo vetorial dos deslocamentos cinematicamente admissíveis.

A relação constitutiva local do material, pode ser expressa pelas seguintes expressões válidas em todo ponto $x \in \mathcal{B}$:

$$f(E, W_f) \leq 0 \quad (\text{IV.1})$$

$$W_f - \bar{W}_f \leq 0 \quad (\text{IV.2})$$

$$W_f \geq 0, \quad \dot{W}_f = \frac{1}{2} H(W_f) \cdot f_E \dot{\lambda} \quad (\text{IV.3})$$

$$\dot{T} = D(W_f)D - f_E \dot{\lambda} \quad (\text{IV.4})$$

$$\text{onde } D(\bar{W}_f) = 0$$

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad f \cdot \dot{\lambda} = 0 \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{se } f_j = 0 \rightarrow \dot{f}_j \leq 0 \quad \dot{f}_j \dot{\lambda}_j = 0 \quad (\text{IV.6})$$

onde a relação (IV.2) exprime, através de \bar{W}_f , uma limitação na energia de fratura, a partir da qual o material não oferece qualquer resistência; já a relação (IV.3) define a taxa de energia de fratura segundo uma fórmula análoga àquela deduzida para o caso unidimensional.

Aliás, a limitação na energia de fratura pode ser colocada numa forma variacional na maneira que segue.

Como se conhece o estado atual do corpo, associado a W_f existe um $\alpha \geq 0$, que define a capacidade de fraturamento remanescente, dado por:

$$\alpha \in \Lambda_\alpha = \left\{ \alpha^*; \alpha^*(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{B} \right\}$$

$$\max_{\alpha^* \in \Lambda_\alpha} \int_{\mathcal{B}} \left[-\frac{1}{2} \alpha^{*2} - (W_f - \bar{W}_f) \alpha^* \right] d\mathcal{B} \quad (\text{IV.7})$$

A condição de otimalidade desse problema é:

$$\int_{\mathcal{B}} \left[-\alpha - (W_f - \bar{W}_f) \right] (\alpha^* - \alpha) \leq 0 \quad \forall \alpha^* \in \Lambda_\alpha \quad (\text{IV.8})$$

Essa mesma condição corresponde localmente a:

$$-\alpha - (W_f - \bar{W}_f) \leq 0 \quad (\text{IV.9})$$

$$\left[-\alpha - (W_f - \bar{W}_f) \right] \alpha = 0 \quad (\text{IV.10})$$

$$\alpha \geq 0 \quad (\text{IV.11})$$

ou equivalentemente

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } W_f > \bar{W}_f \rightarrow \alpha = 0 \\ \text{se } W_f \leq \bar{W}_f \rightarrow \alpha = \bar{W}_f - W_f \geq 0 \end{array} \right.$$

Considerando a variável α , a resposta do material pode ser reescrita como:

$$\dot{T} = D(W_f)D - f_E(\alpha\dot{\Psi}) \quad (\text{IV.12})$$

onde se fez $\dot{\lambda} = \alpha\dot{\Psi}$ tal que

$$\dot{\Psi} \geq 0 \quad (\text{IV.13})$$

$$f.\alpha\dot{\Psi} = 0 \quad (\text{IV.14})$$

Isto posto, a formulação variacional da relação constitutiva do material com fraturamento resulta:

Dado D , determinar $\dot{\lambda} = \alpha\dot{\Psi}$ tal que

$$\int_{\mathcal{B}} \dot{f}(\alpha\dot{\Psi}^* - \alpha\dot{\Psi}) d\mathcal{B} \leq 0 \quad \forall \dot{\Psi}^* \in \Lambda_f \quad (\text{IV.15})$$

onde

$$\Lambda_f = \left\{ \dot{\Psi} : \dot{\Psi} \geq 0 / f.\alpha\dot{\Psi} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{B} \right\} \quad (\text{IV.16})$$

Substituindo \dot{f} pela sua expressão, a forma anterior passa a ser escrita por:

$$\int_{\mathcal{B}} \left[f_E D + f_{W_f} \frac{1}{2} H(W_f) f_E \alpha \dot{\Psi} \right] (\alpha \dot{\Psi}^* - \alpha \dot{\Psi}) \leq 0 \quad \forall \dot{\Psi}^* \in \Lambda_f \quad (\text{IV.17})$$

Localmente, a forma variacional equivale a:

$$\dot{f}\dot{\lambda} = 0 \quad (\text{IV.18})$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad (\text{IV.19})$$

$$\dot{f} \leq 0 \quad (\text{IV.20})$$

Fazendo uso da função indicatriz, com o objetivo de relaxar a condição de $\dot{\Psi}$ pertencer a Λ_f , a relação constitutiva pode ainda ser escrita como segue.

Para $K \rightarrow 0^+$, dado D encontrar $\dot{\Psi}$ tal que:

$$\int_{\mathcal{B}} \left[\frac{f}{K} + f_E D + f_{W_f} \frac{1}{2} H(W_f), f_E \alpha \dot{\Psi} \right] (\alpha \dot{\Psi}^* - \alpha \dot{\Psi}) d\mathcal{B} \leq 0 \quad \dot{\Psi}^* \in \Lambda \quad (\text{IV.21})$$

onde, agora,

$$\Lambda = \{ \dot{\Psi} : \dot{\Psi} \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{B} \} \quad (\text{IV.22})$$

IV.3 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL CINEMÁTICA, INCREMENTAL, DA RELAÇÃO CONSTITUTIVA DE UM MATERIAL COM FRATURAMENTO PROGRESSIVO

Na formulação incremental, os campos de incrementos incógnitos são expressos por:

$$\Delta E = D\Delta t ; \Delta \lambda = \dot{\lambda}\Delta t ; \Delta \Psi = \dot{\Psi}\Delta t \quad (*) \quad (\text{IV.23})$$

Com relação a esses campos, a forma variacional cinemática incremental da relação constitutiva passa a ser:

Para $K \rightarrow 0^+$, dado ΔE encontrar $\Delta \Psi$ tal que

$$\int_{\mathcal{B}} \left[\Delta t \frac{f}{K} + f_E \Delta E + f_{W_f} \frac{1}{2} H(W_f), f_E \alpha \Delta \Psi \right] (\alpha \Delta \Psi^* - \alpha \Delta \Psi) < 0 \quad \forall \Delta \Psi^* \in \Lambda \quad (\text{IV.24})$$

(*) Aproximações ascendentes para as derivadas temporais.

Tomando-se, em particular, $K = \Delta t$, essa mesma expressão resulta:

$$\int_{\mathcal{G}} \left[f + f_E \Delta E + f_{W_f} \frac{1}{2} H(W_f) \cdot f_E \alpha \Delta \Psi \right] \cdot (\alpha \Delta \Psi^* - \alpha \Delta \Psi) \leq 0 \quad \forall \Delta \Psi^* \in \Lambda \quad (\text{IV.25})$$

Localmente, a(IV.25) corresponde a:

$$f + f_E \Delta E + f_{W_f} \frac{1}{2} H(W_f) \cdot f_E \alpha \Delta \Psi \leq 0 \quad (\text{IV.26})$$

$$\alpha \Delta \Psi > 0 \quad (\text{IV.27})$$

$$\left[f + f_E \Delta E + f_{W_f} \frac{1}{2} H(W_f) \cdot f_E \alpha \Delta \Psi \right] \cdot \alpha \Delta \Psi = 0 \quad (\text{IV.28})$$

Pode-se concluir que se f for linear por partes o incremento de deformações será sempre admissível sob o ponto de vista da condição de fraturamento, uma vez que a (IV.26) fornecerá o valor exato de f no instante $t + \Delta t$.

Em outras palavras, o modelo apresenta as mesmas características dos modelos elastoplásticos discutidos no capítulo II da seção II, no sentido de que a relação constitutiva é representada de modo exato para todo incremento de tempo que não implique em fratura seguida de descarga, ou seja, o algoritmo é exato.

IV.4 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO NUMÉRICA

É interessante analisar a eficiência da formulação proposta, bem como destacar suas limitações, mediante um exemplo numérico simples.

Trata-se de uma barra prismática isolada submetida à tração centrada. Pretende-se estudar a resposta do corpo a acréscimos de deslocamentos, admitindo-se que o material tem seu comportamento regido por uma lei bilinear como a indicada na figura IV.1.

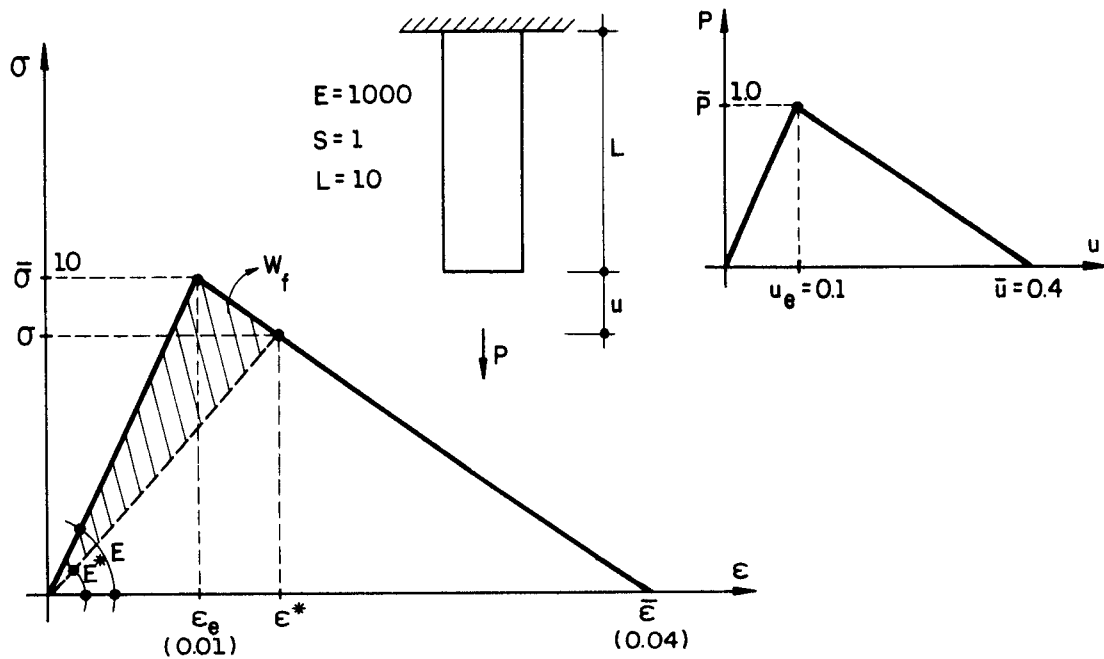


Fig. IV.1 - Lei bilinear do comportamento físico

Os valores numéricos que aparecem na figura IV.1 são fictícios e foram escolhidos de modo a facilitar o desenvolvimento dos cálculos. Ainda na mesma figura, E representa o módulo de elasticidade inicial do material, E^* o módulo atualizado e, em detalhe menor, apresenta-se a resposta, em termos de carga-deslocamento, de uma barra de comprimento L e área de seção transversal S adotados.

As relações gerais do modelo, passam a ser escritas, para este caso, na seguinte forma:

$$-\alpha - (W_f - \bar{W}_f) \leq 0 \quad (\text{IV.29})$$

$$\left[-\alpha - (W_f - \bar{W}_f) \right] \alpha = 0 \quad (\text{IV.30})$$

$$\alpha \geq 0 \quad (\text{IV.31})$$

$$W_f = \frac{\bar{\sigma} \bar{\epsilon} (\epsilon^* - \epsilon_e)}{2(\bar{\epsilon} - \epsilon_e)} \quad (\text{IV.32})$$

$$f = \epsilon - \epsilon^* = \epsilon - \left[\frac{2W_f (\epsilon - \epsilon_e)}{\bar{\sigma} \bar{\epsilon}} \right] + \epsilon_e = \epsilon - H(W_f) \quad (\text{IV.33})$$

$$f_{\varepsilon} = 1 \quad ; \quad f_{W_f} = - \frac{2(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_e)}{\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}} \quad (\text{IV.34})$$

$$f + \Delta\varepsilon - \frac{(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_e)}{\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}} \left[\frac{2W_f(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_e)}{\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}} + \varepsilon_e \right] \alpha \Delta\Psi \leq 0 \quad (\text{IV.35})$$

$$\left\{ f + \Delta\varepsilon - \frac{(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_e)}{\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}} \left[\frac{2W_f(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_e)}{\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}} + \varepsilon_e \right] \alpha \Delta\Psi \right\} \Delta\Psi = 0 \quad (\text{IV.36})$$

$$\Delta\Psi \geq 0 \quad (\text{IV.37})$$

$$\Delta P = E^* \Delta\varepsilon - \alpha \Delta\Psi \quad (\text{IV.38})$$

$$\Delta W_f = \frac{1}{2} \left[\frac{2W_f(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_e)}{\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}} + \varepsilon_e \right] \alpha \Delta\Psi \quad (\text{IV.39})$$

Neste exemplo, em particular, é possível escrever de modo explícito uma expressão para a determinação de E^* .

$$E^* = \left(1 - \frac{2W_f}{E\varepsilon_e} \right) E = \beta E \quad (\text{IV.40})$$

Com o objetivo de estudar a resposta do sistema em termos de cargas e de deslocamentos, e já considerando os valores numéricos fornecidos através da figura IV.1, destacam-se as seguintes expressões fundamentais para a solução:

$$\left[-\alpha - (W_f - 0.2) \right] \leq 0 \quad ; \quad \alpha \geq 0 \quad (\text{IV.41})$$

$$\underbrace{(u - u^*)}_f + \Delta u - 0.075L(0.15W_f + 0.01) (\alpha \Delta\Psi) \leq 0 \quad \Delta\Psi \geq 0 \quad (\text{IV.42})$$

$$\Delta P = \frac{E^* \Delta u}{L} - \alpha \Delta\Psi \quad (\text{IV.43})$$

$$\Delta W_f = \frac{1}{2} (0.15W_f + 0.01) (\alpha \Delta\Psi) \quad (\text{IV.44})$$

$$u^* = (0.15W_f + 0.01)L \quad (\text{IV.45})$$

$$E^* = 1000 \left(1 - \frac{2W_f}{u^*}\right) \quad (\text{IV.46})$$

A situação inicial, correspondente ao ponto A da curva de resposta mostrada na figura IV.2, apresenta os seguintes valores característicos:

$$u = 0.08 ; P = 8 ; W_f = 0 ; E^* = 1000 ; u^* = 0.1 ; f = -0.02$$

Seja, então, imposto à barra um acréscimo de deslocamento $\Delta u = 0.05$.

Aplicando-se sucessivamente as (IV.41) a (IV.46), obtêm-se os seguintes resultados parciais:

$$\alpha = 0.2 ; \Delta \Psi = 20 ; \Delta P = 1 ; \Delta W_f = 0.02 ; W_f = 0.02 ; u^* = 0.13 ; E^* = 692.3 ; f = 0.$$

O estado atual está representado pelo ponto 1 na figura IV.2.

Num passo seguinte, impõe-se $\Delta u = 0.09$ e os resultados parciais obtidos são:

$$\alpha = 0.18 ; \Delta \Psi = 51.3 ; \Delta P = -3 ; \Delta W_f = 0.06 ; W_f = 0.08 ; u^* = 0.22 ; E^* = 272.7 ; f = 0.$$

Este novo estado está representado pelo ponto 2 na figura IV.2.

O próximo passo impõe uma descarga ao material, através de $\Delta u = -0.03$. Os resultados parciais são os seguintes:

$$\alpha = 0.12 ; \Delta \Psi = 0 ; \Delta P = -0.82 ; \Delta W_f = 0 ; W_f = 0.08 ; u^* = 0.22 ; E^* = 272.7 ; f = -0.03$$

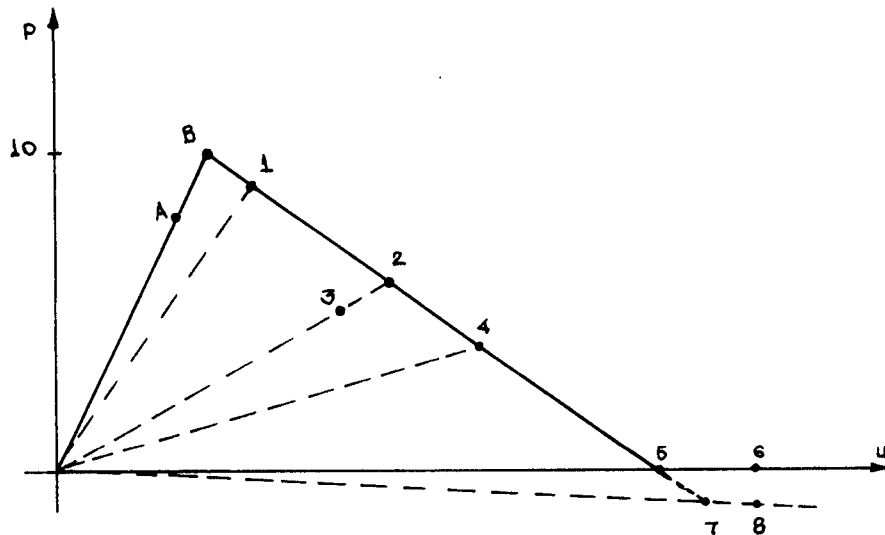


Fig. IV.2 - Sequência de resultados obtidos

O ponto 3 da figura IV.2 representa a situação atual.

Seja, agora, imposto um novo acréscimo positivo aos deslocamentos, $u = 0.09$. Os resultados parciais são:

$$\alpha = 0.12 ; \Delta\Psi = 30.3 ; \Delta P = -1.18 ; \Delta W_f = 0.04 ; W_f = 0.12 ;$$

$$u^* = 0.28 ; E^* = 142.8 ; f = 0$$

O ponto 4 da figura IV.2 representa a situação atual.

A partir deste estado, duas possibilidades sobre o acréscimo de deslocamentos são colocadas em destaque.

Na primeira delas, o acréscimo é tal que o deslocamento final resulta igual a \bar{u} .

Assim, considere-se $\Delta u = 0.12$. A partir daí, resultam:

$$\alpha = 0.08 ; \Delta\Psi = 71,4 ; \Delta P = -4 ; \Delta W_f = 0.08 ; W_f = 0.2 ;$$

$$u^* = 0.4 ; E^* = 0 ; f = 0.$$

O ponto 5, na figura IV.2, representa o estado a tual.

Admita-se, ainda, que se deseje dar um novo a-
crêscimo aos deslocamentos, por exemplo $\Delta u = 0.06$. Nessas
condições, obtêm-se:

$$\alpha = 0 ; \Delta \Psi = 0 ; \Delta P = 0 ; \Delta W_f = 0 ; W_f = 0.2 ; u^* = 0.4 ; \\ E^* = 0.$$

O ponto 6 indica, na figura IV.2, este estado.

Portanto, para a primeira possibilidade o modelo
não apresenta erros de aproximação.

Entretanto, numa segunda possibilidade para o a-
crêscimo de deslocamento a partir do ponto 4, supõe-se que
o deslocamento total ultrapasse \bar{u} .

Com esse objetivo, considere-se $\Delta u = 0.15$. Nes-
sas condições resultam:

$$\alpha = 0.08 ; \Delta \Psi = 89.3 ; \Delta P = -5 ; \Delta W_f = 0.1 ; W_f = 0.22 ; \\ u^* = 0.43 ; E^* = -23.2.$$

Este estado está representado pelo ponto 7 na fi-
gura IV.2.

Impondo-se, ainda, um novo acréscimo aos desloca-
mentos, $u = 0.03$, obtêm-se:

$$\alpha = 0 ; \Delta \Psi = 0 ; \Delta P = -0.7 ; \Delta W_f = 0 ; W_f = 0.22 ; u^* = \\ 0.43 ; F^* = -23.2.$$

O ponto 8 da figura IV.2, representa a solução
encontrada.

Com base neste exemplo, algumas conclusões po-
dem ser obtidas a respeito da formulação proposta.

Em primeiro lugar, a formulação pode fornecer resultados bastante precisos quanto à resposta do material, sempre que o incremento de deslocamentos não proporcione um deslocamento total superior ao valor limite prescrito. Ao contrário, um erro residual quanto à capacidade de carga (crescente com Δu), é obtido toda a vez que o deslocamento total for superior ao limite.

Em resumo, o modelo proposto não reproduz, de modo exato, a perda total na capacidade de resistência do material que deve ocorrer quando se atinge a máxima deformação, porém está assegurado que este erro diminui com o incremento tendendo a zero.

Por outro lado, enquanto aquela deformação limite não for atingida, o modelo proporciona resultados precisos através de um algoritmo de resolução que dispensa os processos iterativos tradicionais para o tratamento de materiais em regime de amolecimento. Portanto, trata-se de um procedimento não linear exato.

IV.5 - UMA ALTERNATIVA PARA MELHORAR O MODELO

Uma alternativa para melhorar a precisão do modelo unidimensional utilizado no exemplo anterior, consiste em introduzir uma nova variável auxiliar para a determinação de E^* . Com esse objetivo, considere-se, novamente, a expressão IV.40:

$$E^* = 1 - \left[\frac{2W_f}{E \epsilon_e \epsilon^*} \right] E = \beta E$$

Como se conhece o estado do corpo, então dado W_f , existe um $\beta \geq 0$, que define a propriedade elástica, dado por:

$$\beta \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{B} \quad \text{t.q.} \quad \beta \in \Lambda$$

$$\min_{\beta^* \in \Lambda} \int_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{2} \beta^{*2} - \left(1 - \frac{2W_f}{E \epsilon_e \epsilon^*} \right) \beta^* \right] d\mathcal{D} \quad (\text{IV.44})$$

A condição de otimalidade desse problema é:

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\beta - \left(1 - \frac{2W_f}{E \epsilon_e \epsilon^*} \right) \right] (\beta^* - \beta) \geq 0 \quad \forall \beta^* \in \Lambda \quad (\text{IV.45})$$

Localmente, essa mesma condição corresponde a:

$$\beta - \left(1 - \frac{2W_f}{E \epsilon_e \epsilon^*} \right) \geq 0 \quad (\text{IV.46})$$

$$\left[\beta - \left(1 - \frac{2W_f}{E \epsilon_e \epsilon^*} \right) \right] \beta = 0 \quad (\text{IV.47})$$

$$\beta \geq 0 \quad (\text{IV.48})$$

ou, equivalentemente

$$\text{se } 1 - \frac{2W_f}{E \epsilon_e \epsilon^*} < 0 \rightarrow \beta = 0$$

$$\text{se } 1 - \frac{2W_f}{E \epsilon_e \epsilon^*} \geq 0 \rightarrow \beta = 1 - \frac{2W_f}{E \epsilon_e \epsilon^*}$$

Considerando a variável β , a propriedade elástica do material passa a ser atualizada, ao final de cada passo, por:

$$\mathbf{D}^* = \beta \mathbf{D} \quad (\text{IV.49})$$

Retomando, então, a resolução do exemplo anterior no ponto 4 da fig. IV.2, para o qual $W_f = 0.12$, E^* passa a ser calculado em função de β , que vale:

$$\beta = \left(1 - \frac{2 \times 0.12 \times 100}{1000 \times 0.1 \times 0.28}\right) \rightarrow \beta = 0.1428$$

e portanto:

$$E^* = 142.8$$

Seguindo a primeira alternativa sobre o acréscimo de deslocamento, que leva ao ponto 5 da figura IV.2, resulta para a atualização de E^*

$$\beta = 0$$

e, por conseguinte,

$$E^* = 0$$

Prosseguindo com o acréscimo de deslocamentos, obtêm-se o mesmo ponto 6 da figura IV.2.

Por outro lado, partindo do ponto 4, a segunda possibilidade, com $u = 0.15$, conduz ao ponto 7. Neste ponto, atualizando E^* , obtêm-se $\beta = 0$ pela condição de complementaridade.

Portanto,

$$E^* = 0$$

Aplicando, agora, $u = 0.03$, obtêm-se:

$$\alpha = 0 ; \Delta\Psi = 0 ; \Delta P = 0 ; \Delta W_f = 0 ; W_f = 0.22.$$

Com base nestes resultados, obtêm-se

$$\beta = 0$$

$$E^* = 0$$

Este estado está representado pelo ponto 7 na figura IV.3.

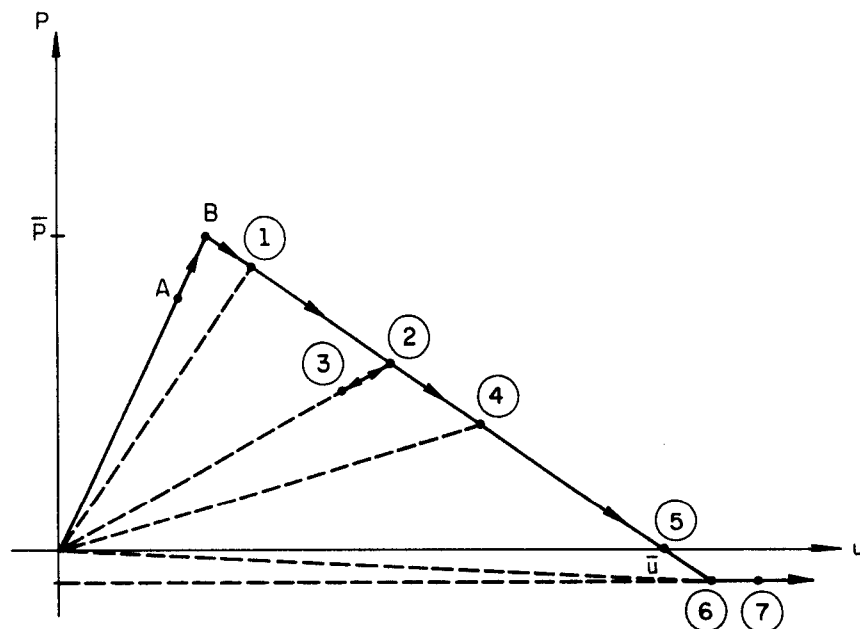


Fig. IV.3 - Resultados obtidos com o novo modelo

A vantagem deste novo modelo é que se pode diminuir a margem de erro, mantendo-a constante, mesmo que se queira avançar com os deslocamentos para além de \bar{u} .

Complementando este item, deve-se observar que, na verdade, α e β representam o mesmo conceito, isto é, o estado de dano acumulado e, portanto, ambos se anulam a partir do estado final (na verdade, o dano acumulado pode ser representado por um único parâmetro).

IV.6 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO NUMÉRICA

O modelo mais elaborado do material com fraturamento em tração é aplicado, neste item, para a análise da resposta de um arranjo de barras, conforme ilustra a figura IV.4a).

Na figura IV.4b) está representada a lei constitutiva válida para uma barra genérica do mesmo material.

As relações gerais de solução do problema, passam a ser escritas, para este caso, na seguinte forma:

$$-\alpha - (W_f - \bar{W}_f) < 0 \quad (\text{IV.50})$$

$$\left[-\alpha - (W_f - \bar{W}_f) \right] \alpha = 0 \quad (\text{IV.51})$$

$$\alpha \geq 0 \quad (\text{IV.52})$$

$$W_f = \frac{\bar{\sigma}}{2} \bar{\epsilon} \frac{(\epsilon^* - \epsilon_e)}{(\bar{\epsilon} - \epsilon_e)} \quad (\text{IV.53})$$

$$f = \epsilon - \epsilon^* = \epsilon - \left[\frac{2W_f (\bar{\epsilon} - \epsilon_e)}{\bar{\sigma} \bar{\epsilon}} + \epsilon_e \right] = \epsilon - H(W_f) \quad (\text{IV.54})$$

$$f_{\epsilon} = 1 \quad ; \quad f_{W_f} = - \frac{2(\bar{\epsilon} - \epsilon_e)}{\bar{\sigma} \bar{\epsilon}} \quad (\text{IV.55})$$

$$f + \Delta\epsilon - \frac{(\bar{\epsilon} - \epsilon_e)}{\bar{\sigma} \bar{\epsilon}} \left[\frac{2W_f (\bar{\epsilon} - \epsilon_e)}{\bar{\sigma} \bar{\epsilon}} + \epsilon_e \right] \alpha \Delta\Psi < 0 \quad (\text{IV.56})$$

$$\left\{ f + \Delta\epsilon - \frac{(\bar{\epsilon} - \epsilon_e)}{\bar{\sigma} \bar{\epsilon}} \left[\frac{2W_f (\bar{\epsilon} - \epsilon_e)}{\bar{\sigma} \bar{\epsilon}} + \epsilon_e \right] \alpha \Delta\Psi \right\} \Delta\Psi = 0 \quad (\text{IV.57})$$

$$\Delta\Psi \geq 0 \quad (\text{IV.58})$$

$$\Delta P = E^* \Delta\epsilon - \alpha \Delta\Psi \quad ; \quad \Delta W_f = \frac{1}{2} \left[\frac{2W_f (\bar{\epsilon} - \epsilon_e)}{\bar{\sigma} \bar{\epsilon}} + \epsilon_e \right] \alpha \Delta\Psi \quad (\text{IV.59})$$

$$E^* = \left(1 - \frac{2W_f}{E \epsilon_e \epsilon^*} \right) E = \beta E \quad (\text{IV.60})$$

$$\beta - \left(1 - \frac{2W_f}{E \epsilon_e \epsilon^*} \right) \geq 0 \quad (\text{IV.61})$$

$$\left[\beta - \left(1 - \frac{2W_f}{E \epsilon_e \epsilon^*} \right) \right] \beta = 0 \quad (\text{IV.62})$$

$$\beta \geq 0 \quad (\text{IV.63})$$

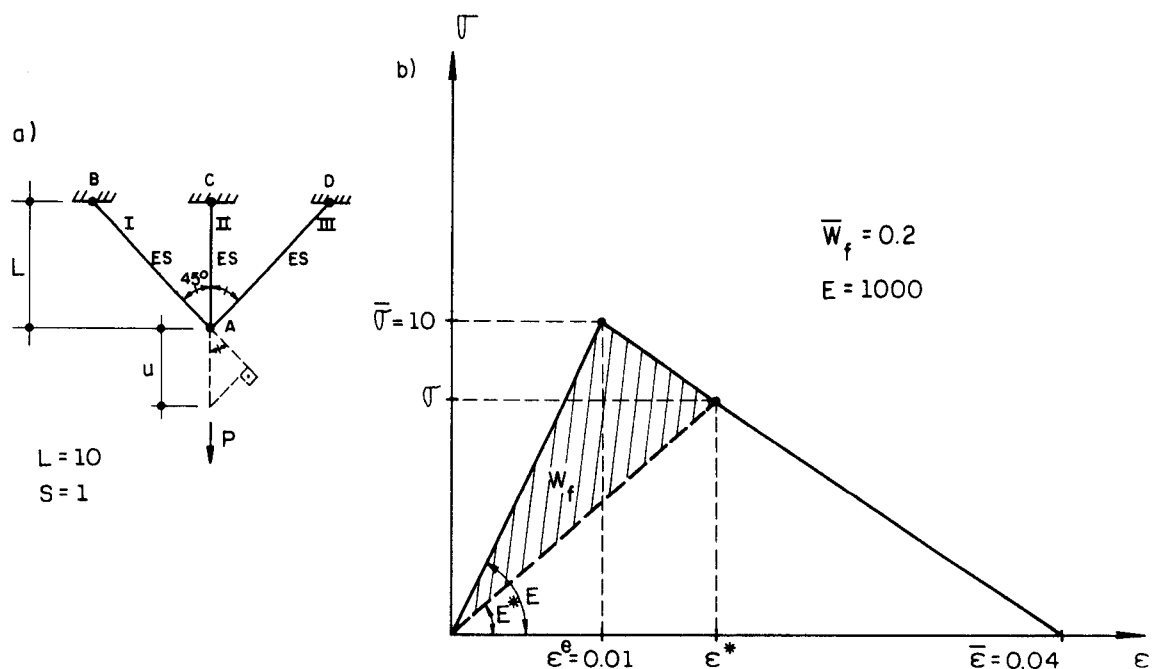


Fig. IV.4 - Arranjo de barras e lei constitutiva

Com o objetivo de estudar a resposta do sistema em termos de cargas e de deslocamento, e já considerando os valores numéricos fornecidos através da figura IV.4, destacam-se as seguintes expressões fundamentais para a solução:

$$-\alpha_i - (W_{f_i} - 0.2) \leq 0 \quad ; \quad \alpha_i \geq 0 \quad (\text{IV.64})$$

$$\underbrace{(u_i - u_i^*)}_f + \Delta u_i - 0.075 L_i (0.15 W_{f_i} + 0.01) (\alpha \Delta \Psi)_i \leq 0 \quad ; \quad \Delta \Psi_i \geq 0 \quad (\text{IV.65})$$

$$\Delta P_i = \frac{E_i^* \Delta u_i}{L_i} - (\alpha \Delta \Psi)_i \quad (\text{IV.66})$$

$$\Delta W_{f_i} = \frac{1}{2} (0.15 W_{f_i} + 0.01) (\alpha \Delta \Psi)_i \quad (\text{IV.67})$$

$$u_i^* = (0.15 W_{f_i} + 0.01) L_i \quad (\text{IV.68})$$

$$\beta_i = \left(1 - \frac{W_{f_i} L_i}{5 u_i^*}\right) \quad ; \quad \beta_i \geq 0 \quad (\text{IV.69})$$

Deve-se observar que, neste caso, os índices repetidos não significam somatória, mas apenas indicam que os valores devem ser particularizados para cada barra.

As figuras (IV.5) e (IV.6) ilustram as respostas obtidas pela aplicação do modelo.

A situação inicial, para o desenvolvimento do exemplo, corresponde ao sistema em repouso (com carga nula).

Numa etapa inicial, impõe-se ao ponto A um acréscimo de deslocamento de um décimo ($\Delta u = 0.1$). Por compatibilidade, os deslocamentos das barras I e III são $\Delta u = 2/2$.

Os principais resultados que indicam a resposta de cada uma das barras são:

$$\cdot \text{ Barra I: } \Delta u = \sqrt{2}/20 ; u = \sqrt{2}/20 ; \alpha = 0.2 ; \Delta \Psi = 0 ;$$

$$\Delta P = 5 ; P = 5 ; \Delta W_f = 0 ; W_f = 0.0 ; u_e^* = \frac{\sqrt{2}}{10} ;$$

$$\beta = 1 ; E^* = 1000 ; f = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\cdot \text{ Barra II: } u = 0.1 ; \alpha = 0.2 ; \Delta \Psi = 0 ; P = 10.$$

$$\Delta W_f = 0 ; W_f = 0.0 ; u_e^* = 0.1 ; \beta = 1 ;$$

$$E^* = 1000 ; f = 0$$

A carga total aplicada ao sistema é obtida pela condição de equilíbrio:

$$P = P_{II} + 2P_I \cos \alpha = 17.07$$

A situação atual está representada pelos pontos 1 nas figuras (IV.5) e (IV.6).

Numa segunda etapa, acrescenta-se $u = 1/10$. Nessas condições, os novos resultados para as barras são:

$$\cdot \text{ Barra I: } \Delta u = \sqrt{2}/20 ; u = \sqrt{2}/10 ; \alpha = 0.2 ; \Delta \Psi = 0 ;$$

$$\Delta P = 5 ; P = 10 ; \Delta W_f = 0 ; W_f = 0.0 ;$$

$$u_e^* = \sqrt{2}/10 ; \beta = 1 ; E^* = 1000 ; f = 0$$

. Barra II: $u = 0.2 ; \alpha = 0.2 ; \Delta\Psi = 66.667 ; \Delta P = -3.333 ;$

$$P = 6.667 ; \Delta W_f = 0.0667 ; W_f = 0.0667 ;$$

$$u_e^* = 0.2 ; \beta = 0,333 ; E^* = 333,33 ; f = 0$$

Por equilíbrio a carga total aplicada ao sistema resulta:

$$P = 20.81$$

Os pontos 2 nas figuras (IV.5) e (IV.6) representam o estado atual.

Impondo-se, agora, um acréscimo de deslocamento, ao ponto A, de $u = 1/5$, obtêm-se os seguintes resultados para cada uma das barras:

. Barra I: $\Delta u = \sqrt{2}/10 ; u = \sqrt{2}/5 ; \alpha = 0.2 ; \Delta\Psi = 66.667 ;$

$$\Delta P = -3.333 ; P = 6.667 ; \Delta W_f = 0.0667 ;$$

$$W_f = 0.0667 ; u_e^* = \sqrt{2}/5 ; \beta = 0.333 ;$$

$$E^* = 333.33 ; f = 0.$$

. Barra II: $u = 0.4 ; \alpha = 0.133 ; \Delta\Psi = 100 ; \Delta P = -6.667 ;$

$$P = 0 ; \Delta W_f = 0.1333 ; W_f = 0.2 ; u_e^* = 0.4 ;$$

$$\beta = 0 ; E^* = 0 ; f = 0.$$

A carga total aplicada é de

$$P = 9.43$$

Os pontos 3 nas figuras (IV.5) e (IV.6) representam essa situação.

Impondo-se, finalmente, $\Delta u = 2/5$, resultam os seguintes valores:

. Barra I : $\Delta u = \sqrt{2}/5$; $u = 2 \sqrt{2}/5$; $\alpha = 0.1333$; $\Delta \Psi = 100$;

$\Delta P = -6.667$; $P = 0$; $\Delta W_f = 0.133$; $W_f = 0.2$;

$u_e^* = 2 \sqrt{2}/5$; $\beta = 0$; $E^* = 0$; $f = 0$.

. Barra II: $u = 0.8$; $\alpha = 0$; $\Delta \Psi = 0$; $\Delta P = 0$; $\Delta W_f = 0$;

$\beta = 0$; $E^* = 0$.

A carga total correspondente é $P = 0$, representada na figura IV.5 pelo ponto 4.

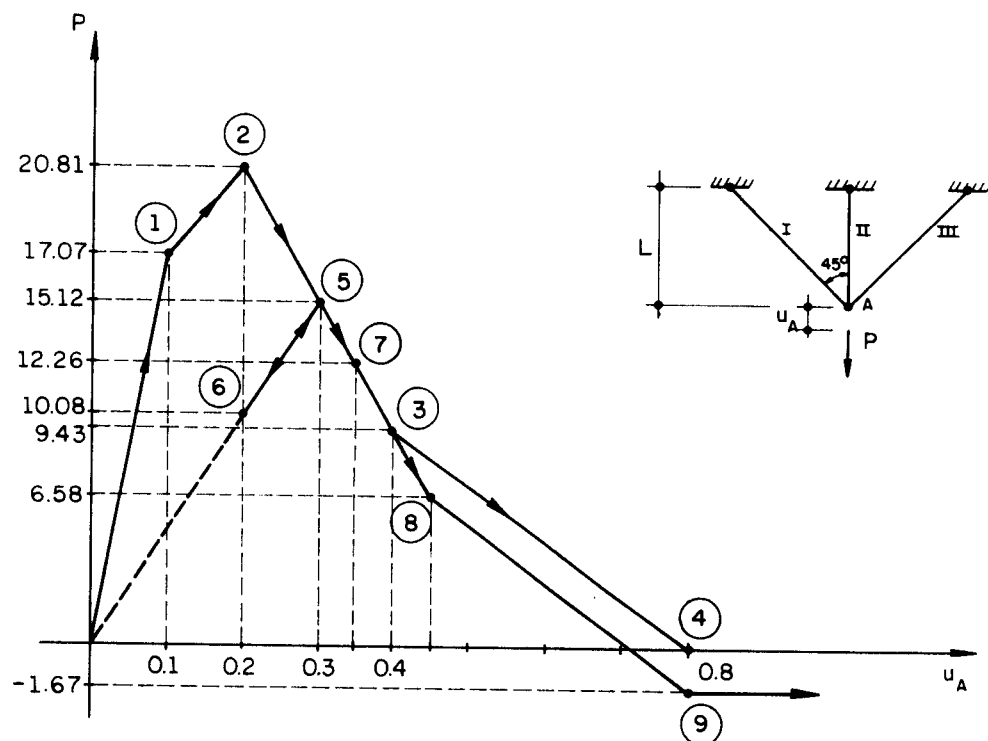


Fig. IV.5 - Diagrama carga-deslocamento do arranjo de barras.

É interessante analisar também a resposta a uma descarga.

Seja, então, ao ponto A imposto um deslocamento vertical de $\Delta u = -0.1$, a partir de um valor acumulado $u = 0.3$, (ou seja, ponto 5 da figura IV.5). Correspondente a $u = 0.3$ a situação de cada uma das barras do sistema é:

$$\cdot \text{ Barra I : } u = 3\sqrt{2}/20 ; \alpha = 0.2 ; \Delta\Psi = 33.33 ;$$

$$\Delta P = -1.667 ; P = 8.33 ; \Delta W_f = 0.033 ;$$

$$W_f = 0.033 ; u_e^* = 3\sqrt{2}/20 ; \beta = 0.555 ;$$

$$E^* = 555.5 ; f = 0.$$

$$\cdot \text{ Barra II: } u = 0.3 ; \alpha = 0.133 ; \Delta\Psi = 50 ; \Delta P = -3.33 ;$$

$$P = 3.33 ; \Delta W_f = 0.0667 ; W_f = 0.1333 ;$$

$$u_e^* = 0.3 ; \beta = 0.111 ; E^* = 111.1 ; f = 0.$$

Os pontos 5 na figura (IV.6) representam o estado atual das barras.

Por equilíbrio, a carga total no ponto A vale:

$$P = 15.12$$

Considerando-se agora $u = -0.1$, resultam:

$$\cdot \text{ Barras I : } \Delta u = -\sqrt{2}/20 ; u = \sqrt{2}/10 ; \alpha = 0.1667 ;$$

$$\Delta\Psi = 0 ; \Delta P = -2.778 ; P = 5.55 ; \Delta W_f = 0 ;$$

$$W_f = 0.0333 ; u_e^* = \frac{3\sqrt{2}}{20} ; \beta = 0.555 ;$$

$$E^* = 555.5 ; f = -\frac{\sqrt{2}}{20}$$

- . Barra II: $u = 0.2$; $\alpha = 0.0667$; $\Delta\Psi = 0$; $\Delta P = -1.111$;
 $P = 2.22$; $\Delta W_f = 0$; $W_f = 0.1333$; $u_e^* = 0.3$;
 $\beta = 0.111$; $E^* = 111.1$; $f = -0.1$.

A carga total correspondente vale: $P = 10.08$.
 Esta situação é representada nas figuras pelo ponto 6 .

Aplique-se agora, ao ponto A, $\Delta u = 0.15$.

- . Barra I : $\Delta u = 3\sqrt{2}/40$; $u = 7\sqrt{2}/40$; $\alpha = 0.1667$;
 $\Delta\Psi = 13.333$; $\Delta P = 1.944$; $P = 7.494$;
 $\Delta W_f = 0.01667$; $W_f = 0.05$; $u_e^* = \frac{7\sqrt{2}}{40}$;
 $\beta = 0.429$; $E^* = 428.6$; $f = 0$

- . Barra II: $u = 0.35$; $\alpha = 0.0667$; $\Delta\Psi = 33.333$;
 $\Delta P = -0.555$; $P = 1.667$; $\Delta W_f = 0.0333$;
 $W_f = 0.1666$; $u_e^* = 0.35$; $\beta = 0.04762$;
 $E^* = 47.62$; $f = 0$.

A carga total correspondente vale: 12.264.

A situação atual está representada pelos pontos 7 nas figuras (IV.5) e (IV.6).

Com o objetivo de provocar o aparecimento de um erro de aproximação na formulação, considere-se o acréscimo, no deslocamento vertical, $\Delta u = 0.1$.

Em consequência, os seguintes resultados são obtidos:

- . Barra I : $\Delta u = \frac{\sqrt{2}}{20}$; $u = \frac{9\sqrt{2}}{40}$; $\alpha = 0.15$; $\Delta\Psi = 25.393$;
 $\Delta P = -1.667$; $P = 5.828$; $\Delta W_f = 0.0333$;

$$W_f = 0.0833 ; u_e^* = \frac{9\sqrt{2}}{40} ; \beta = 0.2596 ;$$

$$E^* = 259.6 ; f = 0$$

. Barra II: $u = 0.45 ; \alpha = 0.0333 ; \Delta\Psi = 114.286 ;$

$$\Delta P = -3.333 ; P = -1.667 ; \Delta W_f = 0.0666 ;$$

$$W_f = 0.2333 ; \beta = 0.0 ; E^* = 0.0 ; u_e^* = 0.45 ;$$

$$f = 0.$$

A carga total, neste caso, vale: $P = 6.575.$

O novo estado do sistema está indicado nas figuras (IV.5) e (IV.6) pelos pontos 8 .

Finalmente, aplicando $\Delta u = 0.35$ ao ponto A, resultam:

. Barra I : $\Delta u = \frac{7\sqrt{2}}{40} ; u = \frac{2\sqrt{2}}{5} ; \alpha = 0.1167 ; \Delta\Psi = 88,89;$

$$\Delta P = -5.83 ; P = 0.0 ; \Delta W_f = 0.1167 ; W_f = 0.2;$$

$$u_e^* = \frac{2\sqrt{2}}{5} ; \beta = 0 ; E^* = 0 ; f = 0.$$

. Barra II: $u = 0.8 ; \alpha = 0 ; \Delta\Psi = 0 ; \Delta P = 0 ; P = -1.667;$

$$\Delta W_f = 0 ; W_f = 0.233 ; \beta = 0 ; E^* = 0.$$

A carga total correspondente vale: $P = -1.667.$

Nas figuras IV.5 e IV.6 os pontos 9 representam o estado final do sistema.

Como se observa pela análise da figura IV.6, a resposta da barra II é responsável pelo erro apresentado no sistema.

Novamente vale ressaltar que o erro residual tende a zero com a diminuição do passo de deslocamento.

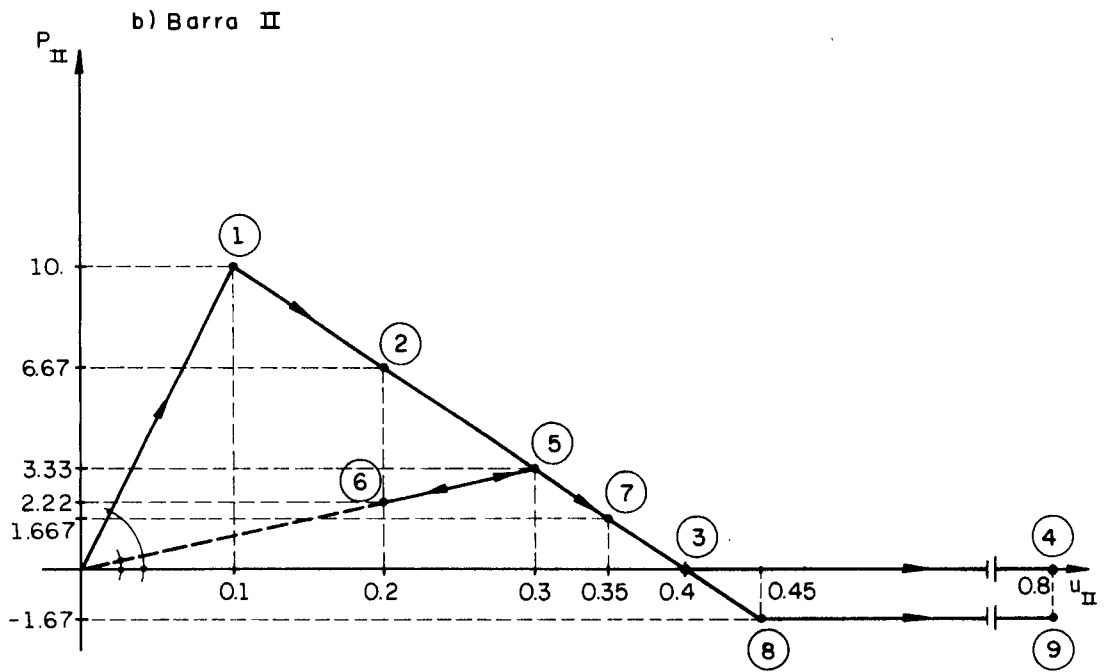
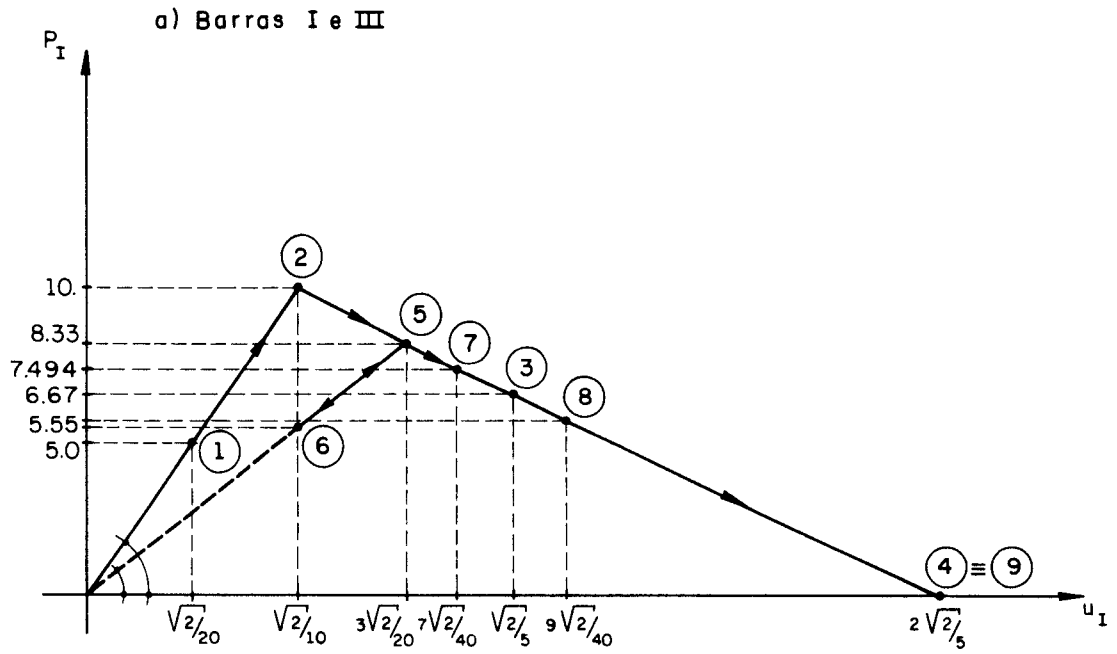


Fig. IV.6 - Respostas de cada uma das barras

IV.7 - ASPECTOS COMPLEMENTARES: UMA PROPOSTA DE GENERALIZAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO INCLUINDO EFEITOS DE PLASTIFICAÇÃO E FRATURA

Generaliza-se neste ítem a formulação anterior, incluindo, agora, os efeitos de plastificação do material.

Vale ressaltar que o modelo constitutivo é fundamentalmente aquele descrito no ítem III.3.1 do capítulo anterior, razão pela qual não se repetem aqui algumas definições e figuras que lá aparecem.

Uma vez conhecido o estado atual do corpo, através do conjunto de variáveis u , E , T , W^{pf} e f , o modelo constitutivo do material com plastificação e fratura pode ser expresso, localmente, isto é, em todo ponto $x \in B$, através das seguintes relações:

$$f = f(E, E^p, W^{pf}) \leq 0 \quad (\text{IV.70})$$

$$\dot{T} = \dot{T}^e - \dot{T}^{pf} \quad (\text{IV.71})$$

$$\dot{T}^e = \mathbb{D}(W^{pf})_D \quad (\text{IV.72})$$

$$\dot{T}^{pf} = f_E \dot{\lambda} \quad (\text{IV.73})$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad f \leq 0 \quad f \cdot \dot{\lambda} = 0 \quad (\text{IV.74})$$

$$\text{se } f_j = 0 \rightarrow \dot{f}_j \leq 0 \quad \dot{f}_j \dot{\lambda}_j = 0 \quad (\text{IV.75})$$

É conveniente lembrar que f é a função de plastificação e fratura e \dot{T}^{pf} é a parcela de relaxação de tensão proveniente da plastificação e do fraturamento.

$$\dot{T}^{pf} = \dot{T}^p + \dot{T}^f \quad (\text{IV.76})$$

Definindo o conjunto Λ_f através de:

$$\Lambda_f = \{ \dot{\lambda} ; \dot{\lambda} \geq 0 \quad \dot{\lambda} \cdot f = 0 \quad \forall x \in \mathcal{B} \} \quad (\text{IV.77})$$

as relações (IV.74) e (IV.75) podem ser colocadas na seguinte forma variacional:

$$\int_{\mathcal{B}} \dot{f} \cdot (\dot{\lambda}^* - \dot{\lambda}) d\mathcal{B} \leq 0 \quad \forall \dot{\lambda}^* \in \Lambda_f \quad (\text{IV.78})$$

Isto pôsto, considere-se a seguinte expressão para f :

$$\dot{f} = f_{E^D} + f_{E^P} D^P + f_{W^{Pf}} \dot{W}^{Pf} \quad (\text{IV.79})$$

É interessante colocar, para fins de caracterização total da relação constitutiva, \dot{f} como uma função de D e $\dot{\lambda}$. Com esse objetivo, seja a expressão de \dot{W}^{Pf} :

$$\dot{W}_{Pf} = E^e \cdot (\dot{T}^P + \frac{1}{2} \dot{T}^f) \quad (\text{IV.80})$$

onde E^e é a deformação elástica total atual (numa situação em que $f = 0$) (*).

Essa última expressão pode ser escrita em função de \dot{T}^{Pf} , fazendo-se uso de:

$$\dot{T}^f = M^{-1} N \dot{T}^{Pf} \quad (\text{IV.81})$$

$$\dot{T}^P = (II - M^{-1} N) \dot{T}^{Pf} \quad (\text{IV.82})$$

onde

(*) a exigência de $f = 0$ tem como objetivo prevenir eventuais situações de descarga-carga nas quais E^e pode ser alterado. Por outro lado, pode-se pensar em exprimir E^e através de uma função $H(W^{Pf})$ isto é, da posição atual da superfície de plastificação e fratura.

$$M = II - \frac{1}{2} \mathbb{D}_{W^{Pf}} (E^e \otimes E^e) \quad (IV.83)$$

$$N = -\mathbb{D}_{W^{Pf}} (E^e \otimes E^e) \quad (IV.84)$$

Assim sendo, resulta:

$$\dot{W}^{Pf} = E^e \cdot (II - \frac{1}{2} M^{-1} N) \dot{T}^{Pf} \quad (IV.85)$$

Por outro lado, conhecida a relação entre \dot{T}^P e \dot{T}^{Pf} , pode-se deduzir que

$$D^P = \mathbb{D}(W^{Pf})^{-1} (II - M^{-1} N) \dot{T}^{Pf} \quad (IV.86)$$

Substituindo-se, agora, as (IV.85) e (IV.86) na expressão geral de \dot{f} , obtém-se:

$$\dot{f} = f_{E^D} + f_{E^P} \mathbb{D}^{*-1} (II - M^{-1} N) \dot{T}^{Pf} + f_{W^{Pf}} E^e \cdot (II - \frac{1}{2} M^{-1} N) \dot{T}^{Pf} \quad (IV.87)$$

onde se empregou a notação \mathbb{D}^* em lugar de $\mathbb{D}(W^{Pf})$.

Finalmente, fazendo uso da (IV.73) a relação anterior passa a ser escrita na seguinte forma:

$$\dot{f} = f_{E^D} + f_{E^P} \mathbb{D}^{*-1} (II - M^{-1} N) f_E \dot{\lambda} + f_{W^{Pf}} \left[E^e \cdot (II - \frac{1}{2} M^{-1} N) f_E \dot{\lambda} \right] \quad (IV.88)$$

Uma vez definida a expressão de f em função de D e $\dot{\lambda}$, é possível escrever a forma variacional cinemática, em taxas, da relação constitutiva.

Assim, a relação constitutiva passa a ser caracterizada pelo seguinte problema:

. Dado D encontrar $\dot{\lambda}$ tal que:

$$\int_{\mathcal{B}} \left\{ f_{E^D} + \left[f_{E^P} \mathbb{D}^{*-1} (II - M^{-1} N) f_E + (f_{W^{Pf}} \otimes E^e) (II - \frac{1}{2} M^{-1} N) f_E \right] \dot{\lambda} \cdot (\dot{\lambda}^* - \dot{\lambda}) \right\} d\mathcal{B} \leq 0 \quad \forall \dot{\lambda}^* \in \Lambda_f \quad (IV.89)$$

$$\text{com} \quad \dot{T} = \mathbb{D}^* D - f_E \dot{\lambda} \quad (IV.90)$$

Por outro lado, para fins de simplificação na representação, o termo entre colchetes na (IV.89) passará a ser representado por \mathbb{H} .

Fazendo uso da relaxação na condição de $\dot{\lambda}$ pertencer a Λ_f , a relação constitutiva pode ainda ser escrita na forma:

. Dado D , para $K \rightarrow 0^+$, encontrar $\dot{\lambda}$ tal que:

$$\int_B \left[\frac{f}{K} + f_E \cdot D + \mathbb{H}\dot{\lambda} \right] \cdot (\dot{\lambda}^* - \dot{\lambda}) \, dB < 0 \quad \forall \dot{\lambda}^* \in \Lambda \quad (\text{IV.91})$$

onde $\Lambda = \{ \dot{\lambda} : \dot{\lambda} \geq 0 \quad \forall x \in B \}$

com $\dot{T} = D^* D - f_E \dot{\lambda}$ (IV.92)

Por outro lado, a formulação variacional cinemática incremental pode ser obtida a partir da definição dos seguintes campos de incrementos:

$$\Delta E = D \Delta t ; \quad \Delta \lambda = \dot{\lambda} \Delta t ; \quad \Delta T = \dot{T} \Delta t \quad (\text{IV.93})$$

lembrando que estas expressões descrevem aproximações ascendentes para as derivadas temporais.

Considerando, então, as definições anteriores, a relação constitutiva passa a ser expressa através do seguinte problema:

. Dado ΔE , para $K \rightarrow 0^+$ encontrar $\Delta \lambda$ tal que:

$$\int_B \left[\frac{\Delta t f}{E} + f_E \Delta E + \mathbb{H} \Delta \lambda \right] \cdot (\Delta \lambda^* - \Delta \lambda) \, dB < 0 \quad \forall \Delta \lambda^* \in \Lambda$$

com $\Delta T = D^* \Delta E - \Delta \lambda f_E$ (IV.94)

Tomando-se, em particular, $K = \Delta t$, a expressão (IV.94) passa a ser escrita na forma:

$$\int_{\mathcal{B}} \left[f + f_E \Delta E + H \Delta \lambda \right] (\Delta \lambda^* - \Delta \lambda) d\mathcal{B} \leq 0 \quad \forall \Delta \lambda^* \in \Lambda \quad (\text{IV.96})$$

É preciso esclarecer que no caso de se considerar uma limitação na energia de plastificação e fratura, a partir da qual o material não ofereça qualquer resistência, a equação constitutiva local passa a ser expressa por mais duas expressões.

$$w^{pf} - \bar{w}^{pf} < 0 \quad (\text{IV.97})$$

$$w^{pf} \geq 0, \quad \dot{w}^{pf} = E^e \cdot \left(II - \frac{M^{-1}N}{2} \right) f_E \dot{\lambda} \quad (\text{IV.98})$$

Na última relação, considerou-se a (IV.80) alterada pela substituição das (IV.81) e (IV.82).

IV.7.1 - Aspectos relativos à resolução numérica

É interessante, de início, equacionar o problema de valor de contorno que consiste, fundamentalmente, em determinar para cada intervalo $(t, t+\Delta t)$, os incrementos Δu , ΔE , $\Delta \lambda$ e ΔT , que nele ocorrem, tais que:

. $\Delta u \in V$, ou seja, pertença ao conjunto dos campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis com as restrições de apoio.

. ΔE seja cinematicamente admissível com Δu .

. ΔE , $\Delta \lambda$ e ΔT estejam associados através da relação constitutiva.

. ΔT esteja em equilíbrio com o incremento de carga ΔP .

Pois bem, admitindo que a compatibilidade é satisfeita identicamente em todo ponto $x \in \mathcal{B}$, o problema da análise plástica com fraturamento pode ser escrito na seguinte forma variacional:

P1. Para cada instante t , determinar Δu , ΔT , $\Delta \lambda$, Δf e ΔW^{pf} tais que:

$$\int_{\mathcal{B}} \Delta T \cdot \mathcal{D} \Delta v \, d\mathcal{B} = \Delta L(\Delta v) \quad \forall \Delta v \in \text{var } V \quad (\text{IV.99})$$

ou

$$\int_{\mathcal{B}} (\mathcal{D}^* \Delta u - f_E \Delta \lambda) \cdot \mathcal{D} \Delta v \, d\mathcal{B} = \Delta L(\Delta v) \quad \forall \Delta v \in \text{var } V \quad (\text{IV.100})$$

onde $\Delta \lambda$ é tal que satisfaz a relação constitutiva expressa pela (IV.96).

É oportuno ressaltar que a formulação proposta está toda desenvolvida num espaço de dimensão infinita.

Para fins de resolução numérica do problema de valor de contorno proposto, o método dos elementos finitos pode ser empregado como um instrumento de geração de soluções aproximadas num espaço de dimensão finita.

Aliás é exatamente este o fundamento do MEF, pois ao se definir uma malha com um conjunto de nós, automaticamente está sendo reduzida a dimensão do espaço. Além disso, ao se adotar um certo tipo de elemento, implicitamente está sendo definida uma aproximação para a solução do problema.

Assim sendo, a discretização no espaço pode ser feita através da utilização de funções de interpolação para Δu e $\Delta \lambda$, no caso.

De um modo geral, as funções aproximadoras a nível do elemento, podem ser escritas na seguinte forma:

$$u(x) = y_u(x)u \quad (\text{IV.101})$$

$$\lambda(x) = y_\lambda(x)\lambda \quad (\text{IV.102})$$

pode y_u e y_λ são as matrizes de interpolação contendo as funções relativas a cada grau de liberdade do elemento, correspondentes aos campos $u(x)$ e $\lambda(x)$ respectivamente, e u e λ são os vetores contendo os graus de liberdade nodais respectivos.

Deve-se ressaltar que, neste caso, a aproximação por E.F. é tal que:

- . o campo u é aproximado por campos contínuos com derivadas primeiras contínuas por partes (a derivada primeira é descontínua entre elementos).
- . o campo λ é aproximado por campos contínuos no elemento e descontínuos entre elementos.

Isso posto, valem as seguintes relações:

$$\Delta u(x) = y_u(x) \Delta u \quad (\text{IV.103})$$

$$\Delta \lambda(x) = y_\lambda(x) \Delta \lambda \quad (\text{IV.104})$$

$$\mathcal{D} \Delta u(x) = \mathcal{D} (y_u(x) \Delta u) = B(x) \Delta u \quad (\text{IV.105})$$

Nessas condições, a expressão de equilíbrio (IV.100) pode ser escrita na seguinte forma geral:

$$K \Delta u - \Delta F = \Delta P \quad (\text{IV.106})$$

onde K é a matriz clássica de rigidez global elástica da estrutura, obtida a partir da contribuição das matrizes de rigidez de cada elemento, e ΔP é o vetor de cargas nodais equivalentes.

As matrizes que aparecem na (IV.106) são dadas por:

$$K = \sum_e \int_{\mathcal{B}^e} B^T D^* B \, d\mathcal{B} \quad (\text{IV.107})$$

$$\Delta F = \sum_e \Delta F^e \quad (\text{IV.108})$$

$$\Delta F^e = \left[\int_{\mathcal{B}^e} B^T f_E y_\lambda \, d\mathcal{B} \right] \Delta \lambda^e \quad (\text{IV.109})$$

com $\Delta \lambda^e$ solução de:

$$\left[\int_{\mathcal{B}^e} f \, d\mathcal{B} + \int_{\mathcal{B}^e} y_\lambda^T f_E B \, d\mathcal{B} \Delta u^e + \int_{\mathcal{B}^e} (y_\lambda^T H y_\lambda) \, d\mathcal{B} \Delta \lambda^e \right] \cdot (\Delta \lambda^{*e} - \Delta \lambda^e) \leq 0 \quad \forall \Delta \lambda^* \geq 0 \quad (\text{IV.110})$$

Cabe observar que o superescrito "e" indica uma individualização da expressão para um elemento finito.

A expressão (IV.110) pode, ainda, ser reescrita na forma

$$(\bar{F} + K_{\lambda u} \Delta u^e + K_{\lambda \lambda} \Delta \lambda^e) \cdot (\Delta \lambda^{*e} - \Delta \lambda^e) \leq 0 \quad \forall \Delta \lambda^* \geq 0 \quad (\text{IV.111})$$

onde se empregou a notação

$$\bar{F} = \int_{\mathcal{B}^e} f \, d\mathcal{B} \quad (\text{IV.112})$$

$$K_{\lambda u} = \int_{\mathcal{B}^e} y_\lambda^T f_E B \, d\mathcal{B} \quad (\text{IV.113})$$

$$K_{\lambda \lambda} = \int_{\mathcal{B}^e} (y_\lambda^T H y_\lambda) \, d\mathcal{B} \quad (\text{IV.114})$$

Com relação à solução da (IV.111) é interessante ressaltar que ela é equivalente ao seguinte conjunto de relações:

$$\bar{F} + K_{\lambda u} \Delta u^e + K_{\lambda\lambda} \Delta \lambda^e \leq 0 \quad (\text{IV.115})$$

$$(\bar{F} + K_{\lambda u} \Delta u^e + K_{\lambda\lambda} \Delta \lambda^e) \cdot \Delta \lambda^e = 0 \quad (\text{IV.116})$$

$$\Delta \lambda^e \geq 0 \quad (\text{IV.117})$$

Concluindo, o sistema não linear de equações, a ser resolvido, está dado pelas (IV.106) e (IV.115-IV.117) a nível de cada elemento "e". Este sistema poderá ser resolvido empregando técnicas do tipo Quasi-Newton, para a solução da (IV.106) e um algoritmo como o de Lemke para as (IV.115-IV.117). Vale ressaltar que o algoritmo de Lemke, BAZAARA (1979), é indicado em Programação matemática para a resolução de problemas de Complementaridade Linear, e produz uma sequência de respostas que converge para a solução exata num número finito de passos.

Finalmente, é preciso destacar o fato de que o modelo constitutivo proposto apresenta as mesmas características dos modelos elastoplásticos, descritos no Capítulo II da Seção II, ou seja, a relação constitutiva é representada, no processo incremental, de modo exato para todo incremento que não implique em fraturamento e plastificação seguido de descarga. Além disso, o erro residual, associado à limitação na energia de plastificação e fratura, tende a zero com a diminuição do passo Δt .

SEÇÃO IV
CONCLUSÕES

CAPÍTULO I

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho, essencialmente, desenvolveu um estudo sobre os principais modelos matemáticos do comportamento não linear físico do concreto.

Inicialmente foram abordados os modelos cuja aplicação está baseada em procedimentos incrementais - iterativos do tipo Newton-Raphson. Esses modelos foram agrupados, de acordo com suas características de formulação, em usuais e recentes.

Posteriormente, apresentou-se a aplicação da formulação variacional dos modelos elastoplásticos no estudo do comportamento do concreto, simulado como um material com fraturamento progressivo. Mostrou-se que a formulação variacional conduz a um conjunto de inequações cuja solução pode ser obtida mediante técnicas de programação matemática.

Com relação aos modelos usuais, foram colocados em evidência tanto os seus aspectos de formulação quanto os numérico-computacionais.

Quanto à formulação, destacou-se a aplicação da teoria da plasticidade, através da qual o concreto em com-

pressão é representado por um material de comportamento elastoplástico com endurecimento e ductilidade limitada; em regime de tração o concreto é considerado como um material elástico linear-frágil.

Os aspectos numérico-computacionais dizem respeito a uma série de procedimentos previstos na automatização do modelo constitutivo, e que são necessários por simularem situações não incluídas nas relações matemáticas do mesmo. Essas situações não são consistentes com a teoria da plasticidade pois representam, em geral, descontinuidades na relação constitutiva. Como exemplos, podem ser citadas as rupturas na tração e na compressão, reproduzidas através de variações bruscas nos estados de tensão. Além disso, existem fenômenos particulares do concreto, como o engrenamento dos agregados, e de sua interação com armadura, como o enrijecimento à tração e o efeito de pino, que são simulados por meio de uma interferência direta na matriz constitutiva.

Não obstante esses aspectos, aparentemente negativos, na maior parte das aplicações os modelos usuais permitem obter resultados bastante satisfatórios. Isto pôde ser verificado através de dois exemplos numéricos, uma viga de concreto armado e outra de argamassa armada, nos quais foram comparados os resultados obtidos pela simulação em computador com os dos modelos físicos ensaiados, no caso, no Laboratório de Estruturas (LE-EESC).

Pois bem, os resultados das aplicações dos modelos usuais, sugerem o desenvolvimento de uma atividade de investigação no campo da experimentação numérica, com o objetivo de verificar a eficiência daqueles modelos no estudo do comportamento de estruturas em concreto, concreto armado e argamassa armada. Um aspecto importante dessa linha de atividades, e que deve ser observado, é a oportunidade de realização de um trabalho em conjunto com grupos que trabalham com experimentação de estruturas em laboratório. Em particular, no âmbito local, essa possibilidade atende

aos interesses tanto dos grupos de análise numérica quanto de análise experimental, uma vez que os modelos teóricos poderão ser comprovados com resultados de laboratório e, por outro lado, os ensaios físicos programados de modo a atender objetivos mais específicos.

Apesar dos bons resultados, os modelos usuais não permitem reproduzir convenientemente situações particulares, como as rupturas localizadas, para as quais a consideração do regime de amolecimento ganha maior importância.

Tendo-se em vista essas situações e também, de um modo geral, o objetivo de desenvolver modelos que proporcionem respostas mais aproximadas, apresentaram-se estudos mais recentes que, fundamentalmente, consideram o regime de amolecimento tanto na tração quanto na compressão.

No que se refere ao comportamento em tração, os modelos mais recentes propõem associar a definição da lei de amolecimento com o tamanho do elemento finito empregado na resolução numérica, através da energia de fratura, considerada como um parâmetro do material. Essa proposta permite resolver um problema de imprecisão numérica que surge na aplicação do MEF, com elementos de fissura distribuída, para o estudo de situações particulares como a já mencionada ruptura localizada.

Por outro lado, em regimes de compressão, mesmo em casos de ruptura localizada, a lei de amolecimento invariável conduz a melhores respostas e assim sendo, não se observa uma dependência entre a representação do fenômeno e a discretização numérica (malha) adotada. Observa-se que nessas situações, o emprego correto da plasticidade para a consideração dos regimes de amolecimento exige uma formulação no espaço das deformações.

Também através dessa formulação, e ainda com relação ao concreto em compressão, apresentou-se um modelo que considera, além da plastificação do material, o fraturamento, responsável pela variação nas propriedades elásticas do material.

Com relação às aplicações da formulação variacional, o trabalho deu ênfase ao desenvolvimento de um modelo de fraturamento do concreto, dentro de um contexto variacional similar ao apresentado para um material elastoplástico. Nesse caso, procurou-se reproduzir a ruptura do material mediante uma limitação na energia de fratura.

A partir dos resultados obtidos com o modelo de fraturamento, sugeriu-se um passo adiante no sentido de acrescentar os efeitos de plastificação. Verificou-se que a formulação pode conduzir a problemas de programação matemática com características tais que podem ser resolvidos com algoritmos que convergem para a solução exata num número finito de passos. Isto, naturalmente, deve representar um avanço em relação aos modelos usuais que desenvolvem a solução de modo iterativo, sem convergência num número finito de passos.

De um modo geral, a grande característica da formulação variacional, e que se procurou colocar em destaque no texto, é a inclusão da resposta do material no passo seguinte como uma incógnita do processo. Em outras palavras, o critério de plastificação, ou fratura, não é violado ao longo do processo incremental. Vale observar que no estudo usual, feito através da análise elastoplástica, supõe-se que o material trabalha, no passo seguinte, de acordo com D^{ep} atual.

Os estudos iniciados neste trabalho com a formulação variacional, deverão ter continuidade futuramente. Um tema imediato é procurar estabelecer uma limitação mais precisa para a energia de fratura, ou de plastificação e fratura, por meio da definição de uma lei de variação para ela, seguindo os moldes da teoria de dano. Por outro lado, há a necessidade de testar a eficiência dos modelos em aplicações mais complexas.

Um comentário final a ser feito, é que apesar de terem sido abordadas, fundamentalmente, duas grandes linhas de desenvolvimento de modelos constitutivos para o concreto, o trabalho não teve a intenção de propor qualquer pro-

cedimento alternativo de ligação entre elas. Na verdade, espera-se que essa ligação venha a ocorrer em decorrência de atividades futuras relacionadas à investigação de estruturas em concreto, quer seja pela aplicação dos modelos usuais, quer seja pela formulação de modelos dentro do espírito da Análise Convexa.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - AHMAD , S., IRONS, B.M., ZIENKIEWICZ, O.C. (1970), Analysis of thick an thin shell structures by curved fini-
te elements. Int. J. Num. Meth. in Engng., Vol. 2.
- 2 - Anais do I Curso de Mecânica Teórica e Aplicada, Vol.
1 e 2. LNCC, Rio de Janeiro, 1982, 1983.
- 3 - ARGYRIS, J.H., FAUST, G., WILLAM, K.J. (1976), Limit
load analysis of thick-walled concrete structures. A fi
nite element approach to fracture. Computer Methods in
Applied Mechanics and Engineering 8.
- 4 - ASCE (1982), State of the art report on finite element
analysis of reinforced concrete. American Society of
Civil Engineers, N.Y.
- 5 - BACKLUND, J., WENNERSTRÖM (1974), Finite element analy
sis of elastoplastic shells. Int. J. Num. Meth in Engng.,
Vol. 8.
- 6 - BASHUR, F.K., DARWIN, D. (1978), Nonlinear Model for
Reinforced Concrete Slabs. Journal of Structural Div.,
jan.
- 7 - BATHE, K.J. (1982), Finite element procedures in engi-
neering analysis. Prentice-Hall, Inc.
- 8 - BATHE, K.J., BOLOURCHI, S. (1980), A geometric and ma-
terial nonlinear plate and shell element. Computers &
Structures, Vol. 11.
- 9 - BAZAARA, M. SHETTY, C. (1979), Nonlinear programming,
Theory and applications, John Wiley.
- 10 - BAŽANT, Z.P. (1976), Instability, ductility and size
effect in strain-softening concrete. Journal of Engi-
neering Mechanics Division, Vol. 102, april.
- 11 - BAZĀNT, Z.P., BELYTSCHKO, T.B., CHANG, T.P. (1984),
Continuum Theory for Strain-Softening. J. of Engineer-
ing Mechanics, Vol. 110, nº 12.

- 12 - BAŽANT, Z.P., BHAT, P.D. (1976), Endochronic Theory of inelasticity and failure of concrete. J. of the Engng. Mech. Div., Vol. 102, n^o EM6 , August.
- 13 - BAŽANT, Z.P., CEDOLIN, L. (1980), Fracture mechanics of reinforced concrete. Journal of Engineering Mech. Division, Vol. 106, n^o EM6, Dec.
- 14 - BAŽANT, Z.P., GAMBAROVA, P. (1980), Rough cracks in reinforced concrete. Journal of the structural div., ASCE, Vol. 106, n^o ST4, April.
- 15 - BAŽANT, Z.P., KIM, S.S. (1979), Plastic-fracturing theory for concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 105, n^o EM3, June.
- 16 - BAŽANT, Z.P., OH, B.H. (1983), Crack band theory for fracture of concrete. Materials and Structures, RILEM, Vol. 16, n^o 94.
- 17 - BIČANIČ, N. et alii (1984), On the prediction of the peak and post-peak behavior of concrete structures. Paper at Int. Conf. Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures Split.
- 18 - BLAND, D.R. (1957), The associated flow rule of plasticity. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 6.
- 19 - BORST DE, R. (1984), Application of advanced solution techniques to concrete cracking and non-associated plasticity. Numerical Methods for Non-Linear Problems, Vol. 2, Pineridge Press.
- 20 - BORST, DE R., NAUTA, P. (1984), Smearred crack analysis of reinforced concrete beams and slabs failing in shear. Paper at Int. Conf. Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures Split.
- 21 - BROMS, B.B. (1965), Technique for investigation of internal cracks in reinforced concrete members. J. American Concrete Institute, Jan., n^o 1, Vol. 62.

- 22 - BUYUKOZTURK, O., SHAREEF, S.S. (1985), Constitutive modeling of concrete in finite element analysis. Computers & Structures, Vol. 21, n^o 3, Sept.
- 23 - CARNEIRO, F.L.L.B. (1968), Aplicações da teoria da plasticidade ao concreto. COPPE, n^o 1.68, Rio de Janeiro.
- 24 - CARVALHO, L.A.M. (1977), Análise de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos. Dissertação de mestrado, Depto de Eng. Civil, PUC, Rio de Janeiro.
- 25 - CÉA, J. (1971), Optimization, théorie et algorithmes. Dunod, Paris.
- 26 - CEDOLIN, L., DEIPOLI, S. (1977), Finite element studies of shear-critical R/C beams, ASCE, J. Engng. Mech. Div., Vol. 103, n^o EM3, June.
- 27 - CERVENKA, V. (1970), Inelastic finite element analysis of reinforced concrete panels under in plane loads. Ph.D thesis, University of Colorado.
- 28 - CHEN, A.C.T., CHEN, W.F. (1975), Constitutive relations for concrete. Journal of the Engineering Mechanics Div., Vol. 101, Aug.
- 29 - CHEN, A.C.T., CHEN, W.F. (1975), Constitutive equations and punch-indentation of concrete. J. of the Eng. Mech. Div., Vol. 101, Dec.
- 30 - CHEN, W.F. (1982), Plasticity in reinforced concrete. McGraw-Hill Book Company.
- 31 - COHN, M.Z., MAIER, G. (1979), Engineering plasticity by mathematical programming. Pergamon Press, New York.
- 32 - CORRADI, L., DE DONATO, O., MAIER, G. (1974), Inelastic analysis of reinforced concrete frames. J. of the Structural Div., Proceedings of the American Society of Civil Eng. 100.

- 33 - CRISFIELD, M.A. (1980), Finite element analysis for combined material and geometric nonlinearities. Proceedings of the Europe - U.S. Workshop. Ruhr Universität, July.
- 34 - CRISFIELD, M.A. (1982), Solution Procedures for nonlinear structural problems. Recent Advances in Non-Linear Computational Mechanics. Pineridge Press.
- 35 - CRISFIELD, M.A. (1984), Difficulties with current numerical models for reinforced concrete and some tentative solutions. Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures. Pineridge Press, U.K.
- 36 - CRISFIELD, M.A. (1986), Snap-through and snap-back response in concrete structures and the dangers of under-integration. Int. Journal for Num. Meth. in Engng., Vol. 22.
- 37 - DE DONATO, O., MAIER, G. (1972), Mathematical programming methods for the inelastic analysis of reinforced concrete frames allowing for limited rotation capacity. Int. J. for Num. Meth. in Engng., Vol. 4.
- 38 - DESAI, C.S., ABEL, J.F. (1972), Introduction to the finite element method. Van Nostrand Reinhold.
- 39 - DOUGILL, J. (1976), On stable progressively fracturing solids. J. Applied Math. Physics (ZAMP), 27.
- 40 - DUVANT, G., LIONS, J.L. (1972), Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris.
- 41 - EIDSHEIM, O.M., LARSEN, P.K. (1980), A study of some generalized constitutive models for elasto-plastic shells. Proceedings of the Europe - U.S. Workshop. Ruhr Universität, July.
- 42 - EL DEBS, M.K. (1984), Contribuição ao projeto de galeiras enterradas: alternativas em argamassa armada. Tese de doutoramento. EESC-USP.

- 43 - FEIJÓO, R. (1978), Introdução a mecânica del continuo. I Escola de Matemática Aplicada, CBPF, Rio de Janeiro.
- 44 - FEIJÓO, R.A. (1987), Formulation y resolucion via programacion matematica del problema de contacto elasto-plastico con friccion. COBEM, IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, dezembro.
- 45 - FEIJÓO, R., TAROCO, E. (1980), Métodos variacionais em mecânica dos sólidos. II Escola de Matemática Aplicada, Vol. 2., L.N.C.C., Rio de Janeiro.
- 46 - FEIJÓO, R.A., ZOUAIN, N., TAROCO, E. (1986), Analisis elastoplastico y colapso de estructuras. Formulacion Variacional y metodos numericos. "La Ingenieria Estructural Sudamericana en la Decada de 80 "Homenaje al Ing. Julio Ricaldoni. Montevideo, diciembre.
- 47 - FENWICK, R.C., et alii (1968), Mechanisms of shear resistance of concrete beams. J. Struct. Div. - Proceedings of the ASCE, october.
- 48 - FIGUEIRAS, J.A. (1983), Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells. PhD Thesis, Depart. of Civil Eng., Univ. College of Swansea.
- 49 - FIGUEIRAS, J.A., OWEN, D.R.J. (1984), Analysis of elastoplastic and geometrically nonlinear anisotropic plates and shells. Chapter 4 at Int. Conf. Computer - Aided Analysis and Design of Concrete Struct. Split.
- 50 - GILBERT, R.I., WARNER, R.F. (1978), Tension stiffening in reinforced concrete slabs. J. Struct. Div., dec.
- 51 - GLOWINSKI, R., LIONS, J.L., TREMOLIÈRES, R. (1976), Analyse numerique des inéquations variationnelles. Dunod, Paris.
- 52 - GLUCKLICH, J. (1963), Fracture of plain concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 89, dec.

- 53 - GRIERSON, D.E., ABDEL-BASET, S.B. (1977), Plastic analysis under combined stresses. Journal of the engineering mechanics division, october, vol. 103, EM5.
- 54 - GURTIN, M.E. (1981), An Introduction to continuum mechanics. Academic Press.
- 55 - HAN, D.J., CHEN, W.F. (1986), Strain-space plasticity formulation for hardening-softening materials with elastoplastic coupling. International Journal of Solids Structures, vol. 22, nº 8.
- 56 - HAN, D.J., CHEN, W.F. (1987), Constitutive modeling in analysis of concrete structures. Journal of Engineering Mechanics, vol. 113, nº 4, april.
- 57 - HAND, F.R., PECKNOLD, D.A., SCHNOBRICH, W.C. (1973), Nonlinear layered analysis of RC plates and shells. J. Struct. Div. ASCE II (ST7).
- 58 - HANAI, J.B. de. (1981), Construções de argamassa armada: situação, perspectivas e pesquisas. Tese de doutoramento. EESC-USP.
- 59 - HANAI, J.B. de (1987), Argamassa armada: fundamentos tecnológicos para projeto e execução. Tese de Livre-Docência. São Carlos.
- 60 - HILL, R. (1950), The mathematical theory of plasticity. Clarendon Press.
- 61 - HODGE, P.G. (1959), Plastic analysis of structures. McGraw-Hill.
- 62 - HOFBECK, J.A., IBRAHIM, I.O., MATTOCK, A.H. (1969), Shear transfer in reinforced concrete. ACI Journal, Feb.
- 63 - JOFRIET, J.C., McNEICE, (1971), Finite element analysis of reinforced concrete slabs. Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 97, nº ST3, march.
- 64 - JOHNSTON, D.W., ZIA, P. (1971), Analysis of dowel action. Journal of the Structural Div., ASCE, vol. 97, nº ST5, may.

- 65 - KACHANOV, L.M. (1971), Foundations of the theory of plasticity. North-Holland.
- 66 - KANEKO, I. (1977), A mathematical programming method for the inelastic analysis of reinforced concrete frames. Int. J. Num. Meth. in Engng., 11.
- 67 - KOITER, W.T. (1960), General theorems for elastic-plastic solids, Progress in Solids Mechanics, North-Holland, Amsterdam.
- 68 - KOLMOGOROV, A.N., FOMIN, S.V. (1972), Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. MIR, Moscú.
- 69 - KREYSZIG, E. (1978), Introductory functional analysis with applications. John Wiley.
- 70 - KRISHNAMOORTHY, C.S., MUNRO, J. (1973), Linear Program for optimal design of reinforced concrete frames.
- 71 - KUBRUSLY, R.S. (1986), Mais uma introdução à análise convexa. LNCC/CNPq.
- 72 - KUPFER, H.B., GERSTLE, K.H. (1973), Behavior of concrete under biaxial stresses. ASCE, Journal of the Eng. Mech. Div., vol. 99, nº EM4, aug.
- 73 - KUPFER, H., HILSDORF, H.K., HÜSH, H. (1969), Behavior of concrete under biaxial stresses, J. ACI, aug., vol. 66.
- 74 - LAMAS, A.R.G. (1982), Noções da teoria da plasticidade. Relatório DT 14, CEMEST, Universidade Técnica de Lisboa.
- 75 - LEONHARDT, F. (1981), Construções de concreto, vol.4. Interciência.
- 76 - LIN, C.S., SCORDELIS, A.C. (1975), Nonlinear analysis of r.c. shells of general form. J. Struct. Div., ASCE, vol. 101, ST3, march.
- 77 - LIU, T.C.Y., Nilson, A.H., SLATE, F.O. (1972), Biaxial

- stress-strain relations for concrete. J. Struct. Div. ASCE, 98 (ST5).
- 78 - LUENBERGER, D.G. (1982), Linear and non-linear programming. Addison Wiley. Pub.
- 79 - MAIER, G. (1968), Quadratic programming and theory of elastic perfectly plastic structures. Meccanica, n^o 4.
- 80 - MAIER, G. (1970). A matrix structural theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes. Meccanica 5.
- 81 - MAIER, G., MUNRO, J. (1982). Mathematical programming applications to engineering plastic analysis. Applied Mechanics Reviews, vol. 35, n^o 12.
- 82 - MARCAL, P.V. (1970), Large deflection analysis of elastic-plastic shells of revolution. AIAA Journal, vol. 8, n^o 9, sept.
- 83 - MARQUES, J.M.M.C., OWEN, D.R.J. (1984), Some reflections on elastoplastic stress calculation in finite element analysis. Computers & Structures, vol. 18, n^o 6.
- 84 - MARTIN, J.B. (1975), Plasticity. Mit Press.
- 85 - MARTINELLI, D.A.O., TAKEYA, T. (1974), Ruína das ligações laje-pilar nas bordas de lajes-cogumelo. São Carlos, Relatório parcial apresentado à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.
- 86 - MARTINELLI, D.A.O. (1974), Sobre a ruína das ligações laje-pilar no cantos de lajes-cogumelo. Tese de Livre-Docência. EESC-USP.
- 87 - MARTINS, J.B.D.F. (1985), Modelos constitutivos elastoplásticos para o concreto. Dissertação de Mestrado, EPUSP.
- 88 - MATTHIES, H., STRANG, G. (1979), The solution of non-linear finite element equations, Int. J. Num. Meth. in Engng., vol. 11.

- 89 - MEHLHOR, G., KLEIN, D. (1980), Finite element analysis of reinforced concrete slabs and panels. Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Springer-Verlag.
- 90 - MENDELSON, A. (1968), Plasticity: Theory and application, Robert E. Krieger Publ. Co.
- 91 - MONTOYA, P.J.; MESEGUER, A.G.; CABRÉ, F.M. (1976), Hormigón Armado. Editorial Gustavo Gili, S.A., 8a. ed.
- 92 - MUNRO, J., DA FONSECA, A.M.A. (1978), Yield line method by finite elements and linear programming. Structural Engineer 56.
- 93 - MUNRO, J., KRISHNANOORTHY, C.S., YU, C.W. (1972), Optimal design of reinforced concrete frames. The Structural Engineer, July, nº 7, Vol. 50.
- 94 - NASCIMENTO, P.C. (1980), Análise tridimensional de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos. Dissertação de mestrado, Depto de Eng. Civil, PUC, Rio de Janeiro.
- 95 - NAYAK, G.C. (1971), Plasticity and large deformation problems by the finite element method. PhD Thesis, University of Wales, Swansea, dec.
- 96 - NGO, D., SCORDELIS, A.C. (1967), Finite element analysis of reinforced concrete beams. ACI Journal, 64.
- 97 - NILSON, A. (1968), Nonlinear analysis of reinforced concrete by finite element method. Journal of A.C.I., vol. 65, nº 9.
- 98 - OLIVER, J., ROURE, J.R.F., Analisis no lineal de estructuras bidimensionales de hormigon por el metodo de los elementos finitos. Departamento de Estructuras, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
- 99 - OLIVER, J., et alii (1985), Análisis no lineal de tanques criogénicos bajo cargas térmicas. Hormigón y Acero, nº 155.

- 100 - OWEN, D.R.J. FAWKES, A.J. (1983), Engineering fracture mechanics: numerical methods and application.
- 101 - OWEN, D.R.J., FIGUEIRAS, J.A., DAMJANIC, F. (1983), Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 41.
- 102 - OWEN, D.R.J., FIGUEIRAS, J.A. (1983), Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells. Int. J. for Num. Meth. in Engng., Vol. 19.
- 103 - OWEN, D.R.J., GOMES, C.M.B. (1984), Some recent developments in solution techniques for nonlinear finite element problems. Department of Civil Engineering, Univ. College of Swansea.
- 104 - OWEN, D.R.J., HINTON, E. (1980), Finite elements in plasticity: theory and practice. Pineridge Press Limited, Swansea, U.K.
- 105 - PACHECO, R.G. (1979), Aplicação da teoria da plasticidade a análise de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos. Dissertação de mestrado, PUC., Rio de Janeiro.
- 106 - PANAGIOTOPOULOS, P.D. (1975), Inequality problems in mechanics and applications. Birkhauser.
- 107 - PEREIRA, N.Z., FEIJÓO, R.A. (1986), On kinematical minimum principles for rates and increments in plasticity. Meccanica, 21.
- 108 - PETERSSON, P.E. (1980), Fracture energy of concrete: method of determination. Cement and Concrete Research, vol. 10.
- 109 - PIETRUSZCZAK, ST., MRÓZ, Z. (1981), Finite element analysis of deformation of strain-softening materials. Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 17.

- 110 - PIMENTA, P.M. (1987), Análise de sólidos elastoplásticos. Tese de Livre-Docência, EPUSP.
- 111 - POPOVICS, S. (1969), Fracture mechanism in concrete: how much do we know? Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 95, nº EM3, June.
- 112 - PRAGER, W. (1956), A new method at analysing stresses and strains in work-hardening plastic solids. J. of Applied Mechanics, dec.
- 113 - RASHID, V.R. (1968), Analysis of prestressed concrete pressure vessels, Nucl. Engng. Design, 7.
- 114 - REINHARDT, H.W. (1984), Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete. HERON, vol. 29, nº 2.
- 115 - ROMSTAD, K.M., TAYLOR, M.A., HERRMANN, L.R. (1974), Numerical biaxial characterization for concrete. J. of the Engng. Mech. Div., october, vol. 100, EM5.
- 116 - ROTS, J.G. et alii (1985), Smearred crack approach and fracture localization in concrete. HERON, vol.30, nº1.
- 117 - ROTS, J.G., BORST, DE R. (1987), Analysis of mixed - mode fracture in concrete. Journal of Engineering Mechanics, vol. 113, nº 11, november.
- 118 - RÜSCH, H. (1975), Hormigon armado y hormigon pretensado. Compañía Editorial Continental, S.A.
- 119 - SAVE, M.A., MASSONET, C.E. (1972), Plastic analysis and design of plates, shells and disks. North-Holland.
- 120 - SCHNOBRICH, W.C. (1977), Behavior of reinforced concrete structures predicted by the finite element method. Computers & Structures, Vol. 7.
- 121 - SUIDAN, M., SCHNOBRICH, W.C. (1973), Finite element analysis of reinforced concrete. J. Struct. Div., ASCE, 99, oct.

- 122 - TASUJI, M.E., SLATE, F.O., NILSON, A.H. (1978), Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading. ACI Journal, vol. 75, nº 7, july.
- 123 - TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N. (1980), Teoria da elasticidade. Guanabara Dois.
- 124 - VAN LANGENDONCK, T. (1959), Cálculo de concreto armado. Editora Científica, Vol. I.
- 125 - VERNEER, P.A., BORST, DE R. (1984), Non-associated plasticity for soils, concrete and rock. HERON, Vol. 29.
- 126 - WASHIZU, K. (1968), Variational methods in elasticity and plasticity. Pergamon Press.
- 127 - WILLAM, K.J. (1984), Experimental and computational aspects of concrete fracture. Paper at Int. Conf. Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures Split.
- 128 - ZAGOTTIS, DE D.L. (1981), Fundamentos da mecânica das estruturas - trabalhos correlatos. EPUSP.
- 129 - ZIENKIEWICZ, O.C. (1977), The Finite element method. McGraw-Hill, N.Y., 3rd ed.
- 130 - ZIENKIEWICZ, O.C., VALLIAPPAN, S., KING, I.P. (1969), Elasto-plastic solutions of engineering problems: initial stress, finite-element approach. Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 1, Nº 1.
- 131 - ZOUAIN, N. (1982), Análise limite de cascas via otimização. Tese de Doutorado, Programa de Eng. Mecânica, COPPE-UFRJ.
- 132 - ZOUAIN, N., FEIJÓO, R.A. (1986), Variational formulation for rates and increments in plasticity. Computational Plasticity. Eds. D.R.J. Owen, H. Hinton e E. Onate. Barcelona, part. 1.
- 133 - ZUBELEWICZ, A., BAŽANT, Z.P. (1987), Interface element modeling of fracture in aggregate composites. J. of Engineering Mechanics, vol. 113, nº 11, november.

APÊNDICE A1

ALGUMAS REGRAS E DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS DE INTERESSE

1.1 - INTRODUÇÃO

Neste apêndice são apresentados alguns dos principais conceitos matemáticos utilizados ao longo do texto.

Destacam-se, entre os fundamentos empregados na exposição da teoria da plasticidade, a álgebra dos tensores, os invariantes de tensão e de deformação e as demonstrações do grau de homogeneidade de funções de plastificação.

Por outro lado, apresentam-se, também, algumas definições básicas da Análise Convexa.

1.2 - ALGUNS ASPECTOS DE INTERESSE DA ÁLGEBRA DE VETORES

Considere-se no espaço tridimensional um sistema de referência dextrorso constituído por três eixos mutuamente ortogonais x_1 , x_2 e x_3 .

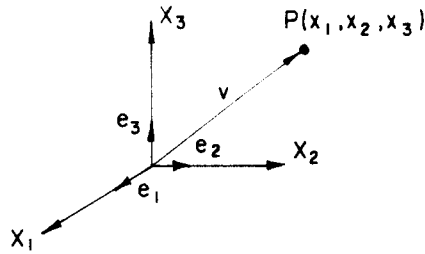


Fig. A1.1

Associados aos eixos de referência x_1 , x_2 e x_3 estão versores e_1 , e_2 e e_3 , respectivamente. Um ponto P no espaço, com coordenadas (x_1, x_2, x_3) , pode ser individualizado pelo vetor v que tem componentes v_1 , v_2 e v_3 segundo os eixos coordenados. Assim,

$$v = v_1 + v_2 + v_3 \quad \text{ou, em termos dos versores,}$$

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad (1)$$

Essa representação pode ser simplificada através do uso de uma notação indicial, como a seguinte

$$v = x_i e_i \quad (2)$$

onde a repetição do índice no segundo membro indica uma soma de parcelas (três, no caso, considerando a dimensão do espaço).

OBS.: a notação indicial fica ainda mais evidente no caso de um sistema de equações lineares:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \right\} a_{ij}x_j = b_i$$

Os índices repetidos, que indicam soma, são denominados índices mudos; os índices não repetidos são ditos livres e, por uma questão de consistência, devem aparecer em ambos os membros da equação.

Fazendo uso da notação indicial, define-se a soma de dois vetores u e v , referidos a um mesmo sistema, por

$$w = u+v = (u_i+v_i)e_i = (u_1+v_1)e_1 + (u_2+v_2)e_2 + (u_3+v_3)e_3$$

Por outro lado, como $w = w_i e_i$, então $w_i = u_i+v_i$, neste caso a somatória não está subentendida, porque o índice mudo não se repete num mesmo monômio.

O produto escalar de dois vetores u e v é definido de maneira usual por $u \cdot v = |u| |v| \cos \theta$, onde θ é o ângulo plano entre os vetores quando arranjados de modo a terem uma origem comum.

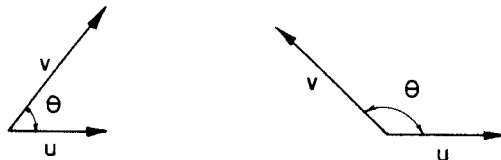


Fig. A1.2

Alguns casos particulares tem interesse:

a) $u = v$

$$u \cdot u = |u| |u| \cos 0^\circ = u^2$$

b) $u = e_1$; $v = e_2$

$$u \cdot v = 1 \cdot 1 \cos 90^\circ = 0$$

c) $u = e_1$; $v = e_1$

$$u \cdot u = 1 \cdot 1 \cos 0^\circ = 1$$

$$d) v = e_1$$

$$u.v = |u| \cdot 1 \cdot \cos\theta$$

Estes casos conduzem às seguintes conclusões:

- a) O produto interno de dois vetores perpendiculares é nulo, ou o produto interno nulo de dois vetores significa que são perpendiculares entre si.
- b) O quadrado do módulo de um vetor pode ser obtido pelo produto interno dele por ele mesmo.
- c) A projeção de um vetor sobre uma certa direção pode ser obtida pelo produto interno do vetor por um versor naquela direção.

Tendo em vista a representação do vetor, dada por (1) ou (2), e as propriedades anteriores, o produto interno de dois vetores pode ser expresso por:

$$u.v = (u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3) \cdot (v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3) =$$

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = u_i e_i \cdot v_j e_j = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i$$

na notação indicial, representou-se o produto interno dos vetores que formam a base do sistema por $\delta_{ij} = e_i \cdot e_j$, ou delta de Kronecker, que vale 1 se $i = j$ e zero se $i \neq j$.

Matricialmente o delta de Kronecker tem a seguinte representação

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3 - GRADIENTE DE UM CAMPO ESCALAR

Seja, por exemplo, uma superfície no espaço tridimensional representada por uma função ϕ que associa a um conjunto de pontos deste espaço (individualizados por coordenadas x_1 , x_2 e x_3) um valor escalar constante c . Portanto,

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = c \quad (3)$$

Uma função com essas características, isto é, que associa a pontos do espaço um valor escalar é denominada campo escalar.

É possível tomar derivadas de ϕ com relação às três coordenadas x_1 , x_2 e x_3 , $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$, e pensar nestas derivadas como sendo componentes de um vetor denominado gradiente de ϕ e denotado por $\nabla \phi$ (onde ∇ , por sua vez, representa um operador vetorial com componentes $\partial/\partial x_1$, $\partial/\partial x_2$, $\partial/\partial x_3$).

$\nabla \phi$ pode ser então representado em relação ao sistema de referência por:

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} e_3 \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x_i} e_i \end{aligned} \quad (4)$$

É possível mostrar que o vetor $\nabla \phi$ é normal à superfície no ponto considerado.

Para tanto, seja r o vetor posição de um ponto P qualquer sobre a superfície. Tendo em vista a relação (1) vale escrever

$$r = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x_i e_i$$

Então vale também escrever

$$dr = dx_1 e_1 + dx_2 e_2 + dx_3 e_3 = dx_j e_j$$

dr é um vetor que está no plano tangente a $\phi(x_1, x_2, x_3)$ no ponto P.

Mas, porque ϕ é constante, $d\phi = 0$, o que é expresso por:

$$d\phi = 0 = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx_i$$

É imediato observar pela definição de produto interno, que a última expressão representa o produto interno entre os vetores $\nabla\phi$ e dr ,

$$d\phi = 0 = \nabla\phi \cdot dr = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx_i$$

e, portanto, o vetor $\nabla\phi$ é normal a dr e, em consequência, à própria superfície ϕ no ponto P.

Define-se ainda que o "comprimento" ou módulo (ou norma) de $\nabla\phi$ pode ser obtido pelo produto interno dele por ele mesmo.

$$\nabla\phi = (\nabla\phi \cdot \nabla\phi)^{1/2} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \right)^{1/2}$$

1.4 - TENSORES DE SEGUNDA ORDEM

1.4.1 - Transformações de coordenadas entre vetores

Frequentemente é necessário reorientar os eixos de referência alterando-se, em consequência, as coordenadas do vetor posição do ponto P. Como o vetor posição permanece o mesmo, suas componentes no novo sistema devem estar relacionadas com as do antigo através dos cossenos entre os novos eixos x_i' e os antigos x_i .

Assim, por exemplo, num sistema plano, sejam os sistemas de eixos x_i e x_i' indicados na figura:

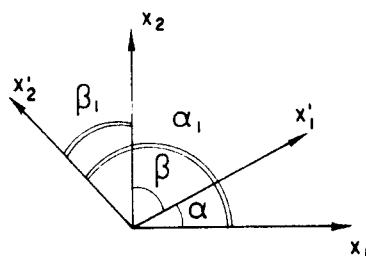


Fig. A1.3

Sejam ainda α e β os ângulos entre x'_1 e os eixos x_1 e x_2 respectivamente, e α_1 e β_1 os ângulos entre x'_2 e os eixos x_1 e x_2 respectivamente (conforme ilustra a figura A1.3).

Definindo ainda por l_{ij} a representação do cosseno entre os versores e_i e e_j , pode-se escrever

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 l_{11} + x_2 l_{12} \\ x'_2 &= x_1 l_{21} + x_2 l_{22} \end{aligned} \right\} \text{ou } x'_i = l_{ij} x_j \quad (5)$$

e, analogamente,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x'_1 l_{11} + x'_2 l_{21} \\ x_2 &= x'_1 l_{12} + x'_2 l_{22} \end{aligned} \right\} \text{ou } x_i = l_{ji} x'_j \quad (6)$$

deve-se ressaltar que l_{ij} não é simétrica, isto é, $l_{ij} \neq l_{ji}$; de fato, $\cos(x'_1, x_2) \neq \cos(x'_2, x_1)$.

No caso do espaço tridimensional, as expressões (5) e (6) são as expressões gerais para a transformação de coordenadas, com os índices agora variando de 1 a 3.

1.4.2 - Tensores

Das relações (5) e (6) pode-se concluir que

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad (7)$$

No caso do vetor gradiente, denominado $G_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$, as componentes G'_i passam a ser obtidas por:

$$G'_i = \frac{\partial \phi}{\partial x'_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \lambda_{ik} G_k \quad (8)$$

O que se observa sempre nas relações (5), (6) e (8) é que as componentes do vetor no novo sistema são obtidas a partir de uma combinação linear das componentes no sistema antigo. As grandezas que seguem essas leis de transformação (dadas pelas (5) e (6)) são denominadas tensores de primeira ordem ou, simplesmente, vetores.

Uma entidade mais complexa é o tensor de segunda ordem, que pode ser construído a partir da combinação de dois vetores pelo chamado produto tensorial de vetores.

Assim, sejam a e b dois vetores com componentes a_i e b_i com relação a um sistema de coordenadas. O produto tensorial dos dois vetores, indicado por $a \otimes b$ fornece um tensor c de segunda ordem com nove componentes c_{ij} calculadas por

$$c_{ij} = a_i b_j \quad (\text{por ex. } c_{12} = a_1 b_2) \quad (9)$$

isto porque $a \otimes b = a_i e_i \otimes b_j e_j = a_i b_j e_i \otimes e_j = c_{ij} e_i \otimes e_j$

OBS.: O número de componentes do tensor é calculado, com base na dimensão do espaço e na ordem do tensor, através da expressão:

$$n^\circ \text{ comp.} = d \begin{matrix} \text{---} & \text{ordem do tensor} \\ \text{---} & \text{dimensão do espaço} \end{matrix}$$

No caso do espaço tridimensional ($d=3$) e para um tensor de segunda ordem ($n=2$), resulta, $n^\circ \text{ comp.} = 3^2 = 9$.

Admitindo-se, agora, uma transformação no sistema de coordenadas por uma rotação do mesmo, obtêm-se, sucessivamente, através do emprego da (5):

$$a'_i = \ell_{is} a_s$$

$$b'_j = \ell_{jk} b_k$$

e, portanto,

$$c'_{ij} = a'_i b'_j = \ell_{is} a_s \ell_{jk} b_k = \ell_{is} \ell_{jk} c_{sk} \quad (10)$$

que é a regra de transformação que caracteriza um tensor de segunda ordem.

OBS.: Nem todos os tensores de segunda ordem podem ser obtidos a partir de um produto tensorial, como é o caso de tensor identidade, entretanto todos eles devem obedecer a regra de transformação de coordenadas expressa pela (10).

Os tensores de segunda ordem podem ter seus componentes arranjados em forma de matriz, devendo-se esclarecer que, evidentemente, nem toda matriz é um tensor de segunda ordem.

Tensores de ordem superior seguem regras análogas de transformação de coordenadas; por exemplo, um tensor de terceira ordem com componentes (vinte e sete ao todo) a_{ijk} tem seus valores a'_{ijk} , em outro sistema, dados por:

$$a'_{ijk} = \ell_{ir} \ell_{js} \ell_{km} a_{rsm} \quad (11)$$

OBS.: Em geral, o produto tensorial leva a um novo tensor cuja ordem é a soma das ordens dos tensores originais.

Vale lembrar neste ponto, a definição de espaço vetorial real V :

. Um espaço vetorial V é uma coleção de elementos, denominados vetores, e operações de adição e multiplicação por números reais, que satisfaz os axiomas da adição e da multiplicação por escalar.

Em particular, o espaço vetorial dos tensores de segunda ordem é aqui representado por $\text{Lin}(V)$.

1.4.3 - Regras básicas da álgebra dos tensores

a) O produto tensorial de dois vetores v e w , do espaço vetorial euclidiano (isto é, com produto interno) V , representado por $v \otimes w$, é um tensor de segunda ordem definido pela relação:

$$(v \otimes w)u = (w \cdot u)v \quad u \in V \quad (12)$$

ou seja, um tensor que a cada u associa um vetor paralelo a v .

b) O tensor identidade, representado por I , é tal que:

$$Iu = u \quad u \in V \quad (13)$$

c) Produto ou composição de dois tensores de segunda ordem T e S , indicado por TS ou $T \circ S$, é o tensor definido por:

$$(TS)x = T(Sx) \quad x \in V \quad (14)$$

d) Como consequência das definições de composição de tensores e de produto tensorial de vetores, resultam as seguintes proposições:

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (b \cdot c)(a \otimes d) \quad a, b, c, d \in V \quad (15)$$

$$\cdot L(a \otimes b) = (La \otimes b) \quad L \in \text{Lin}(V) ; a \text{ e } b \in V \quad (16)$$

onde $\text{Lin}(V)$ é o espaço vetorial dos tensores de 2ª ordem.

e) Transposto de um tensor T , representado por T^T , é o único tensor com a propriedade:

$$Tx \cdot y = x \cdot T^T y \quad x, y \in V \quad (17)$$

f) Da definição de transposto decorrem

$$\cdot (S+T)^T = S^T + T^T \quad , \quad S, T \in \text{Lin}(V) \quad (18)$$

$$\cdot (\alpha S)^T = \alpha S^T \quad \text{c/ } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } S \in \text{Lin}(V) \quad (19)$$

$$\cdot (ST)^T = T^T S^T \quad (20)$$

$$\cdot (S^T)^T = S \quad (21)$$

$$\cdot (u \otimes v)^T = (v \otimes u) \quad (22)$$

$$g) \text{ Um tensor } S \text{ é dito simétrico se } S^T = S \quad (23)$$

$$h) \text{ Um tensor } S \text{ é dito antissimétrico se } S^T = -S^T \quad (24)$$

i) Todo tensor pode ser decomposto de maneira única numa parte simétrica e em outra antissimétrica, determinadas por:

$$\text{sim } S = \frac{1}{2}(S+S^T) \quad \text{parte simétrica} \quad (25)$$

$$\text{antsim } S = \frac{1}{2}(S-S^T) \quad \text{parte antissimétrica} \quad (26)$$

j) Traço de um tensor $T \in \text{Lin}(V)$, representado por $\text{tr}T$, é uma aplicação que a cada T associa um escalar satisfazendo:

$$\text{tr}(u \otimes v) = u \cdot v \quad \text{p/ } u \otimes v \in \text{Lin}(V) \quad (27)$$

ℓ) Produto interno de dois tensores S e T , representado por $(S.T)$, é o escalar definido por:

$$S.T = \text{tr}(S^T T) \quad (28)$$

m) Norma de um tensor S é dada por:

$$\|S\| = S.S = \text{tr}(S^T S) \quad (29)$$

n) Se S é um tensor simétrico resulta

$$S.T = S.\text{sim } T \quad (30)$$

o) Se W é um tensor antissimétrico

$$W.T = W.\text{antsim } T \quad (31)$$

p) Determinante de um tensor S , representado por $\det S$, é o determinante da matriz associada a S quando uma base é adotada.

$$\det S = \det [S] \quad (32)$$

1.4.4 - Invariantes de um tensor de segunda ordem

O invariante associa a um tensor um mesmo valor real, qualquer que seja sua representação segundo referências no espaço.

Assim, dado um tensor T , definem-se os seguintes invariantes:

$$I_1 = \text{tr } T \quad (33)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{tr } T)^2 - \text{tr}(T^2) \right] \quad (34)$$

$$I_3 = \det T \quad (35)$$

1.5 - ANÁLISE DAS TENSÕES

1.5.1 - Tensor de tensão

Considere-se um ponto P no interior de um corpo sollicitado por ações externas e um elemento de área plana, passando pelo ponto, individualizado por um versor $n^{(i)}$.

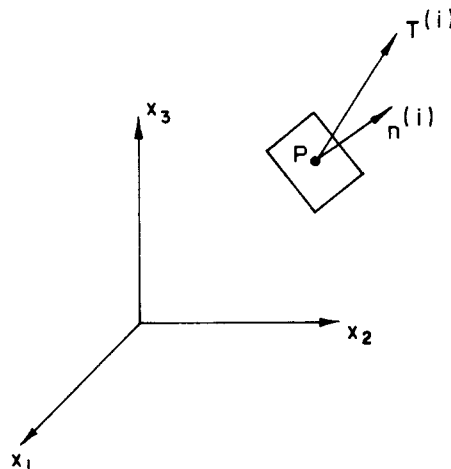


Fig. A1.4

A razão entre o vetor força, que atua no elemento de área, e o próprio elemento de área quando este tende a zero tem um limite chamado vetor de tensão $T^{(i)}$ (força por unidade de área) (v.fig.A1.4).

Tendo-se em vista esse conceito, o chamado estado de tensão no ponto P fica definido uma vez que se conheçam todos os valores $T^{(i)}$ correspondentes aos infinitos elementos de área passando pelo ponto. Entretanto, pelo conceito de equilíbrio, o valor de um certo $T^{(i)}$ pode ser calculado em função de três vetores de tensão conhecidos, correspondentes a elementos de área perpendiculares entre si e individualizados por normais $n^{(j)}$ que tem as direções dos eixos coordenados. Ou seja,

$$T^{(i)} = T^{(1)} n_1 + T^{(2)} n_2 + T^{(3)} n_3 \quad (36)$$

é uma combinação linear dos vetores de tensão, segundo planos coordenados no ponto, através das componentes da normal $n^{(i)}$.

Portanto, $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ e $T^{(3)}$ definem completamente o estado de tensão no ponto, e juntas constituem o tensor de tensão em P.

Por sua vez, cada vetor de tensão associado a um plano coordenado tem, segundo os eixos coordenados, três componentes,

$$\begin{array}{ll} \sigma_{11}, \sigma_{12} \text{ e } \sigma_{13} & \text{para } T^{(1)}, \\ \sigma_{21}, \sigma_{22} \text{ e } \sigma_{23} & \text{para } T^{(2)} \text{ e} \\ \sigma_{31}, \sigma_{32} \text{ e } \sigma_{33} & \text{para } T^{(3)} \end{array}$$

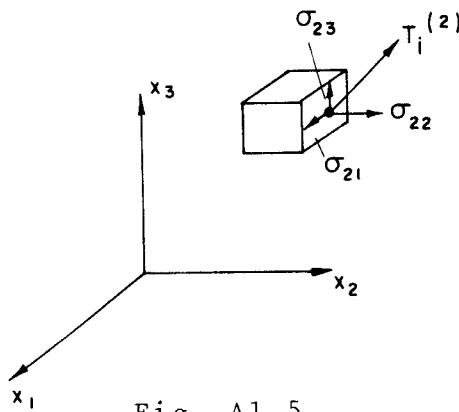


Fig. A1.5

As nove quantidades anteriores são as componentes do tensor de tensão σ_{ij} , ou T , no ponto P.

$$T = \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} T^{(1)} \\ T^{(2)} \\ T^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

onde σ_{ii} são componentes de tensão normal e σ_{ij} são as componentes de tensão de cisalhamento. $i \neq j$

Tendo em vista as considerações anteriores a expressão (36) pode ser entendida como a aplicação de um tensor sobre um vetor resultando num outro vetor, ou seja,

$$T^{(i)} = T n^{(i)} \quad (38)$$

Em termos de componentes,

$$T^{(i)} = T_i e_i = \sigma_{ij} (e_i \otimes e_j) n_k e_k = \sigma_{ij} n_k \delta_{jk} e_i = \sigma_{ij} n_j e_i \quad (39)$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (40)$$

onde foram empregadas as definições do delta de Kronecker δ_{ij} e $(e_i \otimes e_j) e_k = (e_j \cdot e_k) e_i$.

A partir da consideração do equilíbrio dos momentos no elemento em torno de P, demonstra-se que o tensor σ_{ij} é simétrico ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$).

Pela característica tensorial de σ_{ij} , ele deve seguir a seguinte lei de transformação de coordenadas

$$\sigma'_{ij} = l_{ik} l_{js} \sigma_{ks} \quad e \quad \sigma_{ij} = l_{ki} l_{sj} \sigma'_{ks} \quad (41)$$

Além disso $\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ tem valor constante com relação a todos os sistemas de coordenadas.

O vetor de tensão $T^{(i)}$, associado ao elemento de área com normal $n^{(i)}$ em P, pode ser decomposto em uma componente normal σ_n , na direção de $n^{(i)}$, e uma componente de cisalhamento $s^{(i)}$ num plano perpendicular à normal.

A magnitude da componente normal é determinada a partir do produto interno de $T^{(i)}$ por $n^{(i)}$.

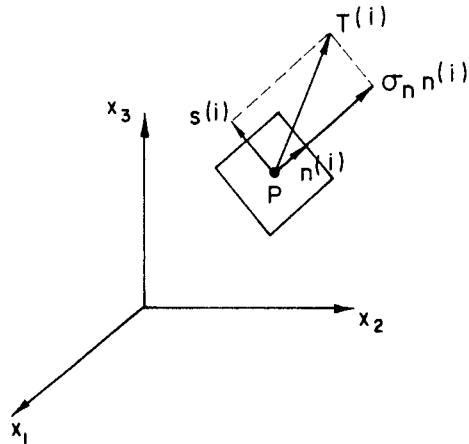


Fig. A1.6

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \underline{T}^{(i)} \cdot \underline{n}^{(i)} = T_i e_i \cdot n_k e_k = (\sigma_{ij} n_j) e_i \cdot n_k e_k = \\ &= \sigma_{ij} n_j n_k \delta_{ik} = \sigma_{ij} n_j n_i \end{aligned} \quad (42)$$

O vetor de tensão normal é dado então por: $\underline{\sigma}^{(n)} = \sigma_n \underline{n}^{(i)}$.

O vetor $\underline{s}^{(i)}$ pode ser obtido pela diferença de vetores

$$\underline{s}^{(i)} = \underline{T}^{(i)} - \sigma_n \underline{n}^{(i)} \quad (43)$$

E sua magnitude por

$$s^{(i)2} = T_i T_i - \sigma_n^2 \quad (44)$$

1.5.2 - Invariantes do tensor de tensões

A pergunta que surge é se haveria uma certa orientação para o elemento de área em \$P\$, tal que \$\underline{T}^{(i)}\$ seja perpendicular a ela, isto é, \$\underline{T}^{(i)} = \sigma_n \underline{n}^{(i)}\$.

Se tal condição puder existir, então vale escrever, empregando a (40), em termos de componentes

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma_n n_i = \sigma \delta_{ij} n_j$$

ou ainda,

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (45)$$

A equação acima representa um sistema de equações lineares, homogêneo, nas variáveis n_j . Para que exista solução diferente da trivial é necessário que o determinante dos coeficientes se anule,

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0$$

o que conduz à seguinte equação característica

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (46)$$

onde: I_1 é a soma dos termos da diagonal principal de σ_{ij} quando usada uma representação matricial,

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (47)$$

I_2 é a soma dos determinantes menores de σ_{ij} , isto é

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} = \\ &= (\sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{33} \sigma_{11}) - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 \end{aligned} \quad (48)$$

e pode ser relacionado ao primeiro invariante através de

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1^2 - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \quad (49)$$

I_3 é o determinante de σ_{ij} , e expresso em função do primeiro invariante por

$$I_3 = \frac{1}{6} (2 \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} - 3 I_1 \sigma_{ij} \sigma_{ji} + I_1^3) \quad (50)$$

I_1 , I_2 e I_3 são os invariantes do tensor de tensões e, portanto, seus valores não são alterados por uma rotação do sistema de coordenadas.

No caso em que o sistema de referência tenha orientação coincidente com a dos eixos principais de tensão, as expressões dos invariantes são simplificadas,

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (51)$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 \quad (52)$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (53)$$

onde σ_1 , σ_2 e σ_3 são os valores das tensões principais

O tensor de tensões pode ser decomposto em duas parcelas: a hidrostática (ou volumétrica) e a deviatória.

$$\sigma_{ij} = \underbrace{\sigma_m \delta_{ij}}_{\text{hidrostática}} + \underbrace{S_{ij}}_{\text{deviatória}} \quad (54)$$

$$\text{onde } \sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_{ii}) = \frac{1}{3} I_1 \quad (55)$$

A parcela deviatória é um tensor que tem a seguinte estrutura em termos de componentes

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma_{11} - \sigma_m) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma_m) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma_m) \end{bmatrix} \quad (56)$$

sendo que $S_{ii} = 0$ (seu primeiro invariante).

O fato de que $S_{ii} = 0$ demonstra que ao tensor S_{ij} não está associada uma variação de volume (em regime elástico linear) e por conseguinte o tensor deviatórico corresponde a um estado de cisalhamento puro.

É interessante observar que as direções principais do tensor deviatórico coincidem com as direções principais do tensor original, bastando verificar, por exemplo no círculo de Mohr, que a adição de um estado de tensão uniforme σ_m meramente translada o círculo ao longo do eixo σ de uma quantidade σ_m .

Os valores principais do tensor deviatórico podem ser calculados de modo análogo ao procedimento feito para σ_{ij} , isto é,

$$\left| S_{ij} - \delta_{ij} S \right| = 0 \quad \text{ou} \quad S^3 - J_1 S^2 - J_2 S - J_3 = 0 \quad (57)$$

onde,

$$J_1 = S_{ii} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0 \quad (58)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ji} = \frac{1}{2} S^t S = \frac{1}{6} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 \quad (59)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} \quad (60)$$

Na hipótese dos eixos de referência estarem coincidentes com as direções principais, obtêm-se:

$$J_1 = 0 \quad (61)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \quad (62)$$

$$J_3 = S_1 S_2 S_3 \quad (63)$$

J_1 , J_2 e J_3 são os invariantes do tensor deviatório de tensão.

Entre todos os invariantes apresentados, os de especial interesse são I_1 , J_2 e J_3 , respectivamente de primeiro, segundo e terceiro graus nas tensões.

I_1 representa um estado de tensão puramente hidrostático, enquanto que J_2 e J_3 são invariantes de um estado puro de cisalhamento.

OBS.: A determinação dos valores principais do tensor deviatório, ou mesmo do tensor original σ_{ij} , pode ser feita por uma análise com a identidade trigonométrica:

$$\cos^3 \theta - \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta = 0 \quad (64)$$

Esta expressão surge a partir do estudo dos números complexos, como uma forma de escrever $\cos n \theta$ como função de potências do $\cos \theta$.

Fazendo $S = \rho \cos \theta$, a expressão $S^3 - J_1 S^2 - J_2 S - J_3 = 0$ passa a ser escrita na forma

$$\rho^3 \cos^3 \theta - J_1 \rho^2 \cos^2 \theta - J_2 \rho \cos \theta - J_3 = 0 \quad \text{ou}$$

$$\cos^3 \theta - J_2 \frac{\cos \theta}{\rho^2} - \frac{J_3}{\rho^3} = 0 \quad (65)$$

comparando com a identidade trigonométrica, conclui-se que

$$\frac{J_2}{\rho^2} = \frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \quad (66)$$

$$\frac{1}{4} \cos 3\theta = \frac{J_3}{\rho^3} \quad \cos 3\theta = \frac{4J_3}{\rho^3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (67)$$

O ângulo 3θ na expressão acima deverá estar entre 0 e π , ou seja, $0 \leq 3\theta \leq \pi$, portanto, a primeira raiz θ_0 deverá estar entre 0 e $\pi/3$, ($0 < \theta_0 < \pi/3$).

Tendo-se em vista a natureza cíclica do $\cos 3\theta$ expressa por $\cos 3\theta = \cos(3\theta \pm 2n\pi)$, os três únicos valores possíveis para $\cos\theta$, e relacionados às tensões principais, são:

$$\cos\theta_0, \cos\left(\theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) \text{ e } \cos\left(\theta_0 + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (68)$$

e, por conseguinte, como $S = \rho \cos\theta$, as tensões principais são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{J_2} \begin{Bmatrix} \cos\theta_0 \\ \cos\left(\theta_0 - \frac{2}{3}\pi\right) \\ \cos\left(\theta_0 + \frac{2}{3}\pi\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{Bmatrix} \quad (69)$$

com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Estão envolvidos nessa última expressão, os invariantes:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} I_1, \quad \rho \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta_0 \leq \pi/3$$

que podem ser alternativas convenientes para os invariantes I_1 , J_2 e J_3 .

1.5.3 - Interpretação física dos invariantes de tensão

a) Tensões octaédricas

Plano octaédrico é um plano cuja normal forma ângulos iguais com cada um dos eixos principais de tensão.

Supondo que os eixos principais são denotados por x_1 , x_2 e x_3 , o versor da normal $n^{(i)}$ ao plano octaédrico fica expresso por:

$$n^{(i)} = n_i e_i = \frac{1}{\sqrt{3}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} e_3 \quad (70)$$

onde e_i são os versores associados aos eixos principais.

A tensão normal ao plano octaédrico é calculada como indicado pela expressão (42), ou seja,

$$\sigma_n = \sigma_{\text{oct}} = \sigma_{ij} n_i n_j = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (71)$$

(lembrando que o estado de tensão σ_{ij} é um estado de tensão principal). Na última expressão, por outro lado, indicou-se a tensão normal por σ_{oct} ou tensão octaédrica.

Considerando ainda os valores das componentes n_i , a última expressão passa a ser

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m = \frac{I_1}{3} \quad (72)$$

A tensão de cisalhamento no plano octaédrico τ_{oct} é calculada a partir da expressão (44), por

$$\begin{aligned} \tau_{\text{oct}}^2 &= (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 - \sigma_{\text{oct}}^2 = \\ &= \frac{1}{9} (2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1) = \\ &= \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \quad (73)$$

Considerando-se ainda a definição de J_2 , em termos das tensões principais, resulta

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \quad (74)$$

$$\text{Por outro lado, como } \cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$$

vale, com base na (74),

$$\cos 3\theta = \frac{\sqrt{2}J_3}{\tau_{\text{oct}}^3} \quad (75)$$

(a interpretação geométrica de θ será vista mais adiante). Portanto, uma alternativa para os invariantes I_1 , J_2 e J_3 é σ_{oct} , τ_{oct} e $\cos 3\theta$.

b) Energia elástica de deformação

A energia específica de deformação, pode ser separada em duas parcelas, uma associada a variação de volume (w_1) e outra associada à variação de forma (w_2)

$$w = w_1 + w_2 \quad (76)$$

A energia de distorção, por exemplo, dada por

$$w_2 = \frac{(1+\mu)}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (77)$$

passa a ser escrita, quando se considera a definição de J_2 , por

$$w_2 = \frac{(1+\mu)}{E} J_2 \quad (78)$$

Por sua vez, pode-se mostrar que a energia de dilatação é dada por

$$w_1 = \frac{(1-2\mu)}{E} I_1^2 \quad (79)$$

1.5.4 - Interpretação geométrica dos invariantes de tensão

O estado de tensão em um ponto P, expresso através das tensões principais, $P(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$ pode ser represen

tado no espaço tridimensional das tensões principais, como mostra a figura (A1.7)

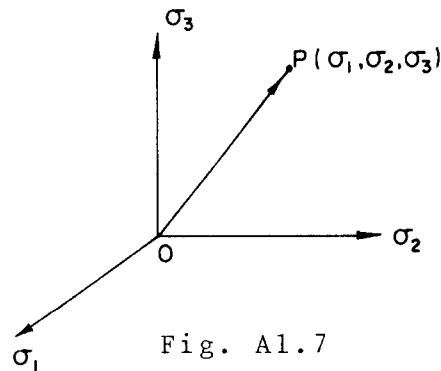


Fig. A1.7

O estado de tensão no ponto fica individualizado, na representação, pelo vetor OP .

Admitindo isotropia do material, neste espaço podem ser plotados conjuntos de pontos que constituem, por exemplo, a representação de uma superfície (ou critério) de plastificação ou de ruptura do material.

Define-se nesse espaço uma reta d equidistante dos eixos coordenados, formando ângulos iguais com relação a cada um deles, denominada eixo hidrostático.

O versor correspondente a essa diagonal é escrito por:

$$d = d_i e_i = \frac{1}{\sqrt{3}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} e_3 \quad (80)$$

onde e_1 , e_2 e e_3 são os versores correspondentes aos eixos principais.

Os pontos sobre d representam estados hidrostáticos de tensão, pois $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Planos perpendiculares a d são chamados planos deviatóricos, sendo que o plano deviatórico particular que passa pela origem do sistema é denominado plano π (ou de N_{dai}).

O plano π tem por equação

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (81)$$

e um ponto sobre ele, representa um estado de cisalhamento puro (com componente hidrostática nula).

O vetor OP , representativo do estado de tensão no ponto P , pode ser decomposto em duas componentes, uma, ON , na direção do eixo hidrostático e outra, NP , num plano perpendicular ao hidrostático (v.fig.A1.8).

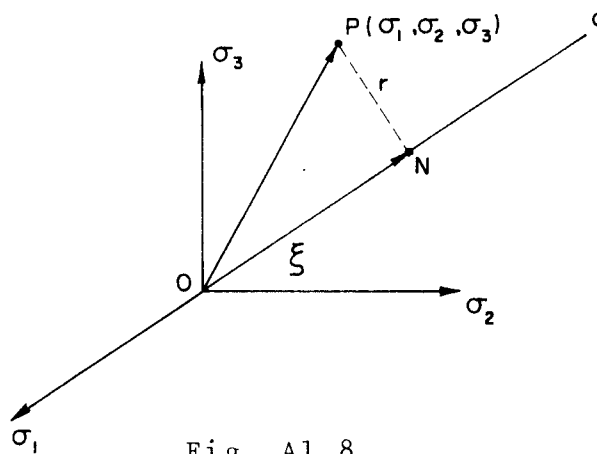


Fig. A1.8

A magnitude da componente ON pode ser obtida por:

$$\begin{aligned} \xi &= ON = OP \cdot d = \sigma_i e_i \cdot d_j e_j \\ &= \sigma_i d_i = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} I_1 \end{aligned} \quad (82)$$

$$\text{Considerando a relação (72), } \xi = \sqrt{3} \sigma_{\text{oct}} \quad (83)$$

O vetor ON pode então ser escrito por

$$\begin{aligned}
 \text{ON} = \xi d = (\xi d_i) e_i &= \frac{I_1}{3} e_1 + \frac{I_1}{3} e_2 + \frac{I_1}{3} e_3 \\
 &= \sigma_m e_1 + \sigma_m e_2 + \sigma_m e_3 \quad (84)
 \end{aligned}$$

Portanto, ON define a parte hidrostática do vetor de tensão OP.

Por sua vez, a componente NP é determinada através de

$$\text{NP} = \text{OP} - \text{ON} = (\sigma_i - \sigma_m) e_i = S_i e_i \quad (85)$$

e seu módulo é obtido por

$$r^2 = |\text{NP}|^2 = \text{NP} \cdot \text{NP} = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 2J_2 \quad (86)$$

$$\text{ainda, } r^2 = 2J_2 = 3\tau_{\text{oct}}^2 \quad (87)$$

Portanto NP corresponde à parte deviatória do vetor tensão OP.

É interessante observar que quaisquer dois estados de tensões que difiram entre si somente por uma pressão hidrostática, estarão alinhados numa reta, a qual é paralela ao eixo hidrostático.

Para obter uma interpretação geométrica do ângulo θ , ou de um invariante contendo J_3 , deve-se considerar o sistema projetado no plano π (v. fig. A1.9).

Assim, seja o plano do papel, o plano π , com o sistema de eixos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ projetado sobre ele.

Os eixos de referência projetados formam ângulos de 120° entre si. Na figura aparece ainda a projeção da componente PN fixada através de um ângulo θ marcado a partir do eixo σ_1 (por seu lado positivo).

A projeção de OP, no plano π , sobre o eixo σ_1 vale $r \cos \theta$ e pode ser obtida por:

$$\text{NP} \cdot i = r \cos \theta$$

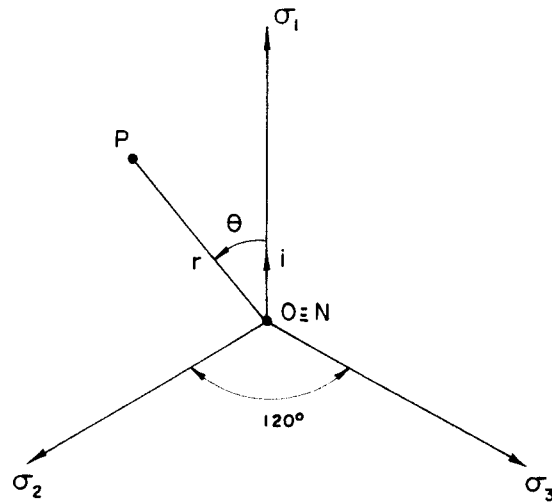


Fig. A1.9

onde i é o versor associado à direção σ_1 .

O versor i escrito com relação ao sistema $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ é

$$i = \frac{1}{\sqrt{6}} (2e_1 - e_2 - e_3)$$

enquanto que NP é: $NP = S_1 e_1 + S_2 e_2 + S_3 e_3$

Efetuada o produto interno indicado na última expressão

$$NP \cdot i = r \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{6}} (2S_1 - S_2 - S_3)$$

Empregando a (86),

$$\cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{J_2}} (2S_1 - S_2 - S_3) \quad (88)$$

Sabendo-se que o primeiro invariante do tensor deviatorico é nulo, vem

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0 \quad \text{e} \quad S_1 = -S_2 - S_3$$

e portanto, a (88) passa a ser dada por:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{S_1}{\sqrt{J_2}} = \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)}{2\sqrt{3}\sqrt{J_2}} \quad (89)$$

pode-se mostrar que no caso de $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ o ângulo θ estará entre 0° e 60° , ou

$$0 \leq \theta \leq 60^\circ, \quad (\text{verificar para:}$$

$$\sigma_1 = \sigma \quad ; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_e \quad \sigma_3 = 0 \quad \text{e}$$

$$\sigma_1 = -\sigma_3 \quad ; \quad \sigma_2 = 0)$$

Empregando a identidade trigonométrica

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

obtêm-se, após algumas passagens,

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} = \frac{\sqrt{2} J_3}{\tau_{\text{oct}}^2} \quad (90)$$

confirmando a interpretação para θ .

OBS.: Para o cálculo das coordenadas do versor i pode-se em pregar o seguinte procedimento (v.fig.A1.10).

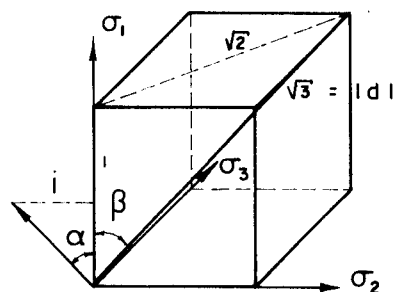


Fig. A1.10

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{sen} \beta = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \text{componente segundo } \sigma_1$$

Além disso d.i = 0 = $\frac{i_1}{\sqrt{3}} + \frac{i_2}{\sqrt{3}} + \frac{i_3}{\sqrt{3}} = 0$ é, portanto,

$$i_2 + i_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}$$

Por outro lado, i tem componente iguais segundo σ_2 e σ_3 portanto $i_2 = i_3$ e,

$$i_2 = i_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

De onde se deduz que

$$i = \frac{2}{\sqrt{6}} e_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} e_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} e_3$$

1.6 - ANÁLISE DAS DEFORMAÇÕES

1.6.1 - Invariantes de deformação

No caso das tensões, a tensão num ponto P , com relação a uma certa seção feita no corpo e passando pelo ponto, foi definida a partir do limite da relação força-área para área tendendo a zero.

As deformações num ponto P do corpo são definidas, por sua vez, através de relações limites que exprimem variações de comprimentos de linhas que passam pelo ponto e variações angulares entre linhas que se cruzam, perpendicularmente entre si, no mesmo ponto.

Associando no espaço tridimensional um sistema de eixos coordenados perpendiculares x_1 , x_2 e x_3 as variações específicas de comprimentos nas direções dos eixos coordenados são denotadas por E_{11} , E_{22} e E_{33} , respectivamente.

te. As variações angulares (decrêscimos) entre duas direções paralelas aos eixos coordenados são denotadas por $E_{12} = E_{21}$, $E_{23} = E_{32}$ e $E_{13} = E_{31}$. Assim, o estado de deformação num ponto fica caracterizado por nove componentes, três de formações lineares e três angulares.

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12}/2 & E_{13}/2 \\ E_{21}/2 & E_{22} & E_{23}/2 \\ E_{31}/2 & E_{32}/2 & E_{33} \end{bmatrix} \quad (91)$$

Essas nove componentes são componentes de um tensor de segunda ordem E , simétrico, sendo que aquelas que são mistas (E_{ij}) aparecem com o fator $\frac{1}{2}$, necessário para caracterizar a grandeza tensorial.

Tendo em vista esse mesmo caráter tensorial, a transformação de coordenadas segue a lei

$$E'_{ij} = \ell_{im} \ell_{jn} E_{mn} \quad \text{ou} \quad E_{ij} = \ell_{mi} \ell_{nj} E'_{mn} \quad (92)$$

As componentes E_{ii} são referenciadas como deformações normais e as mistas como distorções angulares.

Analogamente ao que foi feito para as tensões, existem direções principais de deformações segundo as quais as componentes mistas do estado de deformação são nulas.

A determinação das deformações principais é feita a partir do sistema.

$$(E_{ij} - E\delta_{ij})n_j = 0 \quad (93)$$

o qual, impondo-se a nulidade do determinante de seus coeficientes, fornece a seguinte equação característica

$$E^3 - I_1'E^2 + I_2'E - I_3' = 0 \quad (94)$$

Na equação anterior aparecem os invariantes de deformação I'_1 , I'_2 e I'_3 definidos por:

$$I'_1 = E_{ii} = E_{11} + E_{22} + E_{33} \quad (95)$$

$$I'_2 = (E_{11}E_{22} + E_{11}E_{33} + E_{22}E_{33}) - E_{12}^2 - E_{13}^2 - E_{23}^2 = \frac{1}{2} I_1'^2 - \frac{1}{2} \underbrace{E_{ij}E_{ji}}_{E^T E} \quad (96)$$

$$I'_3 = \frac{1}{3} E_{ij}E_{jk}E_{ki} - \frac{1}{2} I_1' E_{ij}E_{ji} + \frac{1}{6} I_1'^3 \quad (97)$$

Em termos de deformações principais

$$I'_1 = E_1 + E_2 + E_3 \quad (98)$$

$$I'_2 = E_1E_2 + E_2E_3 + E_1E_3 \quad (99)$$

$$I'_3 = E_1E_2E_3 \quad (100)$$

O tensor de deformações pode também ser decomposto em duas parcelas, uma delas chamada esférica, e associada a variação de volume, e outra deviatórica, associada à mudança de forma (distorção).

$$E_{ij} = \underbrace{e_{ij}}_{\text{deviatórica}} + \frac{1}{3} E_v \delta_{ij} \quad \text{--- esférica} \quad (101)$$

onde $E_v = E_{11} + E_{22} + E_{33} \quad (102)$

Os invariantes do tensor deviatórico são obtidos a partir da condição

$$|e_{ij} - e\delta_{ij}| = 0 \quad ; \quad \text{ou}$$

$$e^3 - J'_1 e^2 - J'_2 e - J'_3 = 0 \quad (103)$$

onde $J'_1 = e_{ii} = 0 \quad (104)$

$$J'_2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} = \frac{1}{6} \left[(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{22} - e_{33})^2 + (e_{33} - e_{11})^2 \right] + E_{12}^2 + E_{23}^2 + E_{13}^2 \quad (105)$$

$$J'_3 = \frac{1}{3} e_{ij} e_{jk} e_{ki} \quad (106)$$

Em termos das deformações principais

$$J'_1 = 0 \quad (107)$$

$$J'_2 = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = \frac{1}{6} \left[(E_1 - E_2)^2 + (E_2 - E_3)^2 + (E_3 - E_1)^2 \right] \quad (108)$$

$$J'_3 = e_1 e_2 e_3 \quad (109)$$

Uma fibra octaédrica é uma fibra de material que está igualmente inclinada com relação aos eixos principais de deformação, antes da deformação.

A deformação normal octaédrica é dada por:

$$E_{\text{oct}} = \frac{1}{3} (E_1 + E_2 + E_3) = \frac{1}{3} I'_1 \quad (110)$$

A distorção octaédrica é dada, por sua vez, por:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{oct}} &= \frac{2}{3} \left[(E_1 - E_2)^2 + (E_2 - E_3)^2 + (E_3 - E_1)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \sqrt{\frac{8}{3} J'_2} \quad (111) \end{aligned}$$

1.7 - GRAU DE HOMOGENEIDADE

O Teorema de Euler das funções homogêneas estabelece que se $f(x)$ é homogênea de grau n então $\frac{\partial f}{\partial x} x = nf$.

No caso genérico das funções de argumento tensorial, o teorema passa a ser escrito na forma $F_T \cdot T = nF$.

Pode-se demonstrar que os campos escalares que definem as superfícies iniciais de plastificação de von Mises e de Drucker Prager, são funções homogêneas de grau unitário.

$$a) \text{ von Mises : } F = J_2^{1/2}$$

$$F_T = \frac{1}{2} J_2^{-1/2} S$$

$$F_T \cdot T = \frac{1}{2} J_2^{-1/2} S \cdot S = J_2^{1/2} \quad n = 1$$

Nessa demonstração, utilizou-se da (86) ($J_2 = \frac{1}{2} S \cdot S$) e, em consequência $J_2 = S$; além disso, empregou-se também a (31).

$$b) \text{ Drucker-Prager } \quad F = \alpha I_1 + J_2^{1/2}$$

$$F_T = \alpha I + \frac{1}{2} J_2^{-1/2} S$$

$$F_T \cdot T = \alpha I \cdot T + J_2^{1/2} = \alpha I_1 + J_2^{1/2} \rightarrow n = 1$$

Nessa demonstração foi usada a definição (28) com relação ao primeiro invariante, conduzindo a $I_1 = I \cdot T$; em consequência, $I_{1_T} = I$.

c) Superfície de FIGUEIRAS-OWEN:

$$F = \left[3\beta J_2 + \alpha_1 \sigma_e I_1 \right]^{1/2} = \sigma_e$$

Observa-se que $\alpha_1 = 0.355$

$$F_T = \frac{1}{2} \left[3\beta J_2 + \alpha_1 \sigma_e I_1 \right]^{-1/2} \left[3\beta S + \alpha_1 \sigma_e I + \alpha \sigma_{e_T} I_1 \right]$$

$$F_{T \cdot T} = \frac{1}{2} \left[3\beta J_2 + \alpha_1 \sigma_e I_1 \right]^{-1/2} \left[3\beta S \cdot S + \alpha_1 \sigma_e I \cdot T + \alpha_1 I_1 \sigma_{e_T} \cdot T \right]$$

$$F_{T \cdot T} = \frac{1}{2} \left[3\beta J_2 + \alpha_1 \sigma_e I_1 \right]^{-1/2} \left[3\beta 2J_2 + 2\alpha_1 \sigma_e I_1 \right]$$

$$F_{T \cdot T} = \left[3\beta J_2 + \alpha_1 \sigma_e I_1 \right]^{1/2} = F \rightarrow n = 1$$

No desenvolvimento da dedução foram utilizadas as seguintes relações:

$$J_2 = \frac{S \cdot S}{2} \quad ; \quad \sigma_{e_T} \cdot T = \sigma_e n \quad ; \quad T \cdot I = I_1$$

d) Superfície de Chen-Chen

$$d.1) F = J_2 + \frac{1}{3} A I_1 \quad , \quad \text{onde } A = A(T)$$

$$F_T = S + \frac{1}{3} A I + \frac{1}{3} A_T I_1$$

$$F_{T \cdot T} = S \cdot S + \frac{1}{3} A(I \cdot T) + \frac{1}{3} I_1 (A_T \cdot T)$$

$$F_{T \cdot T} = 2 \left(J_2 + \frac{1}{3} A I_1 \right) = 2F \rightarrow n = 2$$

$$d.2) F = J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{1}{3} A I_1$$

$$F_T = S - \frac{2}{6} I_1 I + \frac{1}{3} A I + \frac{1}{3} I_1 A_T$$

$$F_{T \cdot T} = S \cdot S - \frac{2}{6} I_1 (I \cdot T) + \frac{1}{3} A(I \cdot T) + \frac{1}{3} I_1 (A_T \cdot T)$$

$$F_{T \cdot T} = 2 \left(J_2 - \frac{I_1^2}{6} + \frac{1}{3} A I_1 \right) = 2F \rightarrow n = 2$$

Nestas demonstrações, foi empregada a seguinte definição:

$$A_T \cdot T = A$$

1.8 - TENSÃO EFETIVA σ_e

Uma forma geral conveniente para a determinação da tensão efetiva é a seguinte:

$$\sigma_e = (Df)^k \quad (112)$$

onde D e k são constantes determinadas a partir da condição de σ_e se reduzir a σ_y no caso uniaxial.

a) Seja f a função de von Mises, então:

$$\sigma_e = (DJ_2)^k = \left\{ \frac{1}{6} D \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \right\}^k$$

Considerando um caso uniaxial em que $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ e $\sigma_1 = \sigma_y$, resultam

$$D = 3 \quad ; \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\text{Consequente: } \sigma_e = \sqrt{3J_2}$$

b) Seja f a função de Drucker-Prager, então:

$$\sigma_e = \left[D(\alpha I_1 + \sqrt{J_2}) \right]^k$$

Da particularização para o caso uniaxial resultam:

$$D = \frac{\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3}\alpha)} \quad ; \quad k = 1$$

e, portanto,

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3} \alpha I_1 + \sqrt{3} J_2}{1 + \sqrt{3} \alpha}$$

1.9 - ALGUNS CONCEITOS RELATIVOS À ANÁLISE CONVEXA

a) Intervalo aberto e intervalo fechado

Sendo a e b dois números reais, o intervalo fechado, representado por $[a, b]$, é o conjunto de todos os números reais satisfazendo $a \leq x \leq b$. Por outro lado, o intervalo aberto, representado por (a, b) é constituído pelos pontos x que satisfazem $a < x < b$.

b) Ínfimo e Supremo

Sendo S um conjunto de números reais, o ínfimo deste conjunto é o maior escalar α satisfazendo $\alpha \leq x$ para todo $x \in S$. O ínfimo é representado por:

$$\alpha = \inf \{x : x \in S\} \quad (113)$$

O supremo de S é o menor escalar α satisfazendo $\alpha \geq x$ para todo $x \in S$. O supremo é, por sua vez, representado por:

$$\alpha = \sup \{x : x \in S\} \quad (114)$$

c) Conjunto convexo

Um conjunto S do espaço vetorial euclidiano V é dito convexo se para cada $x_1, x_2 \in V$, o segmento de reta

$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, com $\lambda \in [0,1]$, pertence a S.

d) Funções convexas

Seja S um conjunto convexo em V, a função $f : S \rightarrow V$ (associa elementos de S com elementos de V) é dita convexa se:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad (115)$$

para cada $x_1, x_2 \in S$ e $\lambda \in [0,1]$

e) Diferencial de uma função

Seja f uma função tal que $f : V \rightarrow V_1$. Diz-se que f é diferenciável num ponto $x \in S$, um subconjunto de V, se:

$$f(x+u) - f(x) = Df(x)(u) + D(u) \quad \text{c/ } u \in V \quad (116)$$

$e \quad u \rightarrow 0$

$Df(x)$ é denominada derivada de f em x.

$D(u)$ converge rapidamente a zero para $u \rightarrow 0$.

f) Direção factível de um conjunto

Seja x um elemento do conjunto S. Nessas condições, d é uma direção factível em x, se existe um $\bar{\alpha} > 0$ tal que $x + \alpha d \in S$ para todo $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$.

Ω é o conjunto das direções factíveis em x.

g) Mínimo local

Um ponto $x^* \in S$ é dito um ponto de mínimo local de f (definido em S) se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in S$ dentro de uma distância ε de x^* (isto é, $x \in S$ e $|x-x^*| < \varepsilon$).

h) Condição necessária de primeira ordem para existência de mínimo local

Seja S um subconjunto do espaço vetorial V e f uma função diferenciável em V . Se x^* é um mínimo local de f sobre S , então para qualquer direção factível, $d \in \Omega$, em x^* a seguinte condição é satisfeita:

$$Df(x^*)d \geq 0 \quad (116)$$

APÊNDICE II

COMENTÁRIOS SOBRE OS RECURSOS DO PROGRAMA DE
COMPUTADOR ADAPTADO E
EMPREGADO NOS ESTUDOS

2.1 - CARACTERÍSTICAS DA DISCRETIZAÇÃO

O programa foi originalmente desenvolvido com vistas às aplicações em placas e cascas, razão pela qual os elementos finitos disponíveis são elementos tridimensionais para cascas delgadas (serendípicos de 8 nós, lagrangeano e heterosis de 9 nós).

Além disso, uma discretização ao longo da espesura é possível, dividindo o elemento em camadas. Dessa forma, pode-se melhorar a aproximação especificando em cada camada as características do concreto. As armaduras são, por sua vez, representadas por estratos de espessura equivalente superpostos aos estratos de concreto.

Cada fatia de concreto fica individualizada não só pelas propriedades do material (módulo de deformação, resistências à compressão e tração, coeficiente de Poisson, deformação de compressão última e parâmetros do enrijeci-

mento à tração) mas também pela sua espessura. As fatias de aço ficam individualizadas pelas características do material (módulo de Young e tensão de escoamento em tração), espessura e posição ao longo da altura.

2.2 - MODELO CONSTITUTIVO

2.2.1 - Comportamento do concreto em compressão

O programa prevê a aplicação da teoria da plasticidade considerando um comportamento plástico perfeito ou plástico com endurecimento.

O modelo constitutivo em compressão está caracterizado, basicamente, por um critério de plastificação, pela regra da normalidade, pela regra de endurecimento e por uma condição de esmagamento.

a) Critério de plastificação

O critério está representado através de uma superfície de plastificação escrita em função dos invariantes de tensão I_1 e J_2 na forma:

$$f(I_1, J_2) = \left[\beta (3J_2) + \alpha I_1 \right]^{1/2} = \sigma_e \quad (2.1)$$

onde $\alpha = 0.355\sigma_e$, $\beta = 1355$ e σ_e é a tensão efetiva tomada como a tensão de compressão de um ensaio uniaxial.

No caso do modelo elastoplástico perfeito σ_e é igual a f_c , e uma vez atingido este limite o desenvolvimento de deformações plásticas prossegue até que a superfície de ruptura (esmagamento) seja atingida.

Por outro lado, no caso do comportamento elastoplástico com endurecimento a superfície inicial de plastificação é atingida quando $\sigma_e = 0.3f_c$. A partir daí, a superfície de plastificação tem seu movimento regido pela re

gra de endurecimento. Quando a tensão efetiva atinge $\sigma_e = f_c$, o regime plástico perfeito se estabelece, limitado pela condição de esmagamento.

b) Regra da normalidade

No regime plástico, o vetor taxa de deformação plástica é considerado normal à superfície de plastificação (lei associativa).

c) Regra de endurecimento

O endurecimento é governado pela relação entre tensão efetiva e deformação plástica efetiva, por sua vez extrapolada da relação uniaxial:

$$\sigma = E_o \varepsilon - \frac{E_o}{2\varepsilon_o} \varepsilon^2 \quad \text{onde} \quad \varepsilon_o = \frac{2f_c}{E_o} \quad (2.2)$$

d) Condição de esmagamento

Em razão da falta de resultados experimentais, a condição de esmagamento tem sido estabelecida por uma superfície escrita em função dos invariantes de deformação, cuja expressão é semelhante àquela da superfície de plastificação

$$\beta(3J_2') + \alpha I_1' = \varepsilon_u^2 \quad (2.3)$$

onde I_1' e J_2' são invariantes de deformação e ε_u é a deformação de compressão última obtida de ensaios uniaxiais.

Uma vez atingida ε_u , o material perde todas as características de resistência no ponto.

2.3 - COMPORTAMENTO DO CONCRETO EM TRAÇÃO

Em solicitações predominantes de tração, admite-se o regime elástico linear até que a superfície de ruptura seja alcançada. A superfície de ruptura é reproduzida pelo critério da máxima tensão principal de tração.

Podem ocorrer no máximo duas fissuras num ponto, formadas unicamente em planos perpendiculares entre si. A ortogonalidade entre fissuras num ponto é mantida, mesmo considerando-se que, em função do engrenamento dos agregados, a capacidade de transmissão do cisalhamento não é anulada no plano da primeira fissura. Aliás essa capacidade é controlada através do valor do módulo de elasticidade transversal que varia, por sua vez, de acordo com a abertura da fissura.

Por outro lado, o enrijecimento à tração é levado em conta por uma perda gradual da tensão normal ao plano da fissura, seguindo uma lei linear. Os parâmetros que definem essa lei são α ($0.5 < \alpha < 0.7$) e ϵ_m , deformação máxima à tração (em geral, em torno de 0.002).

É considerado também um critério de carga e descarga do concreto fissurado. Admite-se que a fissura se fecha quando a componente de deformação normal ao plano da fissura passa a ser negativa. Na descarga, ou na recarga, o comportamento linear do material tem um módulo de deformação calculado por:

$$E_i = \alpha f_t (1 - \epsilon_i / \epsilon_m) / \epsilon_i \quad \text{com} \quad \epsilon_t < \epsilon_i < \epsilon_m \quad (2.4)$$

onde ϵ_i é o maior valor de deformação por tração atingido no ponto e ϵ_t é a máxima deformação elástica inicial.

2.4 - COMPORTAMENTO DO AÇO EM TRAÇÃO E EM COMPRESSÃO

As barras de aço situadas numa mesma altura são reproduzidas por camadas de espessura equivalente.

O comportamento elastoplástico do aço é representado por uma lei bilinear (elastoplástico perfeito) ou trilinear (elastoplástico com endurecimento).

2.5 - NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

O programa considera a não linearidade geométrica através de uma aproximação lagrangeana. As relações de formação-deslocamento são escritas em função da aplicação das hipóteses de von Kármán (as derivadas dos giros são pequenas).

Como consequência, a matriz de rigidez tangente (K_t) fica composta por duas parcelas, uma (\bar{K}) que possui a forma usual, porém já atualizada em função da mudança das coordenadas nodais, e outra (K_σ), dita geométrica, determinada em função do tensor de tensão de Piola-Kirchhoff.

$$K = \bar{K} + K_\sigma \quad (2.5)$$

onde
$$\bar{K} = \int_{\mathcal{O}} B^T D^{ep} B \, d\mathcal{O} \quad (2.6)$$

$$K_\sigma = \int_{\mathcal{O}} B'^T \sigma B' \, d\mathcal{O} \quad (2.7)$$

2.6 - ALGORITMO DE SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

O processo de solução do problema não linear está baseado no procedimento incremental-iterativo de Newton-Raphson. O programa oferece quatro opções relacionadas a esse procedimento.

A primeira delas mantém invariável a matriz de rigidez inicial do sistema. A segunda opção procede à atualização da matriz de rigidez tangente em cada iteração. Uma terceira possibilidade, justamente a que foi empregada nos exemplos testados, atualiza a matriz de rigidez tangente somente na segunda iteração de cada incremento de carga.

Na última opção, recalcula-se a matriz, dentro de um incremento de carga, sempre que a alteração nas características do material implicar num acréscimo local da rigidez.

Por outro lado, ao algoritmo de solução do sistema deve estar associado um critério de convergência. No caso, está previsto um critério constituído pela análise, em separado, da convergência dos deslocamentos e dos giros.