

ANÁLISE ELÁSTICA E PLÁSTICA
DE LAJES RETANGULARES DE EDIFÍCIOS

AUTOR: LIBÂNIO MIRANDA PINHEIRO
ORIENTADORA: HELENA M.C. CARMO ANTUNES

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ANÁLISE ELÁSTICA E PLÁSTICA
DE LAJES RETANGULARES DE EDIFÍCIOS

LIBÂNIO MIRANDA PINHEIRO

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Doutor em Engenharia - Área: Engenharia de Estruturas"

Comissão Julgadora:

Prof^ª. Dra. Helena M.C. Carmo Antunes (Orientadora)

Prof. Dr. Roberto Luiz de Arruda Barbato

Prof. Dr. José Elias Laier

Prof. Dr. Luiz Eloy Vaz

Prof. Dr. Lauro Modesto dos Santos

07 DE MAIO DE 1988

À Tânia, Tatiana e Marita.

Também a meus pais,

Dinah e João da Silva Pinheiro (in memoriam)

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Profª Helena M.C.Carmo Antunes, por ter concordado com a orientação de um trabalho de meu particular interesse.

Aos professores João Vitor Moccellin, ex-chefe do Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, Walter Savassi, chefe do Departamento de Estruturas e novamente à Profª. Helena, pela confiança e pelo apoio.

Ao Prof. João Carlos Antunes de Oliveira e Souza, por ter aberto o espaço para a retomada do assunto aqui desenvolvido e muito me incentivado.

Aos professores João Batista de Paiva e Sergio Percival Baroncini Proença, pelas valiosas sugestões; ao Prof. Paiva, sou grato também pela colaboração na revisão dos manuscritos.

Aos alunos de graduação Marcílio Martins Dias, pelas diversas vezes que deixou de lado interesses particulares para elaborar o programa aqui apresentado, e Rita de Cassia Seiko Nakao, pela ajuda na determinação das funções aproximadas para cálculo dos momentos elásticos.

À colaboração dos alunos de pós-graduação: Saulo Faria Almeida Barretto e Marcos Eduardo Alleoni de Oliveira, na determinação dos índices de ortotropia econômicos, Julio Cesar Moran Hassan, na elaboração do exemplo, e Maria Angela Pereira Xavier, na comparação com o processo de Hillerborg.

Agradeço à dedicação, à eficiência e à presteza da datilógrafa Rosi Aparecida Jordão Rodrigues e do desenhista Francisco Carlos Guete de Brito, bem como aos serviços complementares dos datilógrafos Wilma Provinciali Vall e Rui Roberto Casale e dos desenhistas João Paulo Moretti e Sylvia Helena Morette Villani.

Ao Prof. Norberto Costardi, pelo carinho com que desenvolve seu trabalho junto ao Laboratório de Computação, ao Prof. Wilson Sergio Venturini e aos demais colegas do Departamento de Estruturas, que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Pela teoria das charneiras plásticas, apresenta-se uma análise das lajes retangulares com carga uniforme e bordas simplesmente apoiadas ou engastadas, desde os dados iniciais até o cálculo dos momentos de plastificação nos vãos e nos apoios, da configuração de ruína, das reações de canto e ao longo das bordas, das reações médias e, inclusive, do comprimento das barras de aço sobre os apoios.

Os índices de ortotropia das lajes, assim como as razões dos momentos nos apoios e nos vãos, são baseados no cálculo elástico; são obtidos através de funções aproximadoras, determinadas a partir das tabelas de Czerny, considerando, inclusive, razão dos lados maior que dois.

No exemplo de aplicação são comparados os resultados do cálculo elástico com os do cálculo plástico, no qual se pôde constatar a economia deste último em relação ao cálculo elástico.

Apresentam-se, também, os fundamentos da teoria das charneiras plásticas, comparações entre esta teoria e o processo das faixas de Hillerborg, critérios de economia e, ainda, considerações sobre a associação dos métodos elástico e plástico no cálculo de lajes usuais.

ABSTRACT

This work presents a process to analyse uniform loaded rectangular slabs in which the plate elastic theory is associated with the yield line theory.

In the proposed process, the orthotropic factor and the relation between negative and positive bending moments are analysed. The results obtained include bending moments, corner reactions, average distributed reaction along boundaries and reinforced bar lengths on the internal supports.

The example solved indicates a great reduction of reinforcement given by the proposed process in comparison with the usual elastic theory.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 - GENERALIDADES	1
1.2 - NOÇÕES SOBRE O CÁLCULO PLÁSTICO	3
1.2.1 - Teoremas fundamentais	4
1.2.2 - Sobre a teoria das charneiras plásticas	5
1.2.3 - Sobre a teoria do equilíbrio de Hillerborg	8
1.3 - NOÇÕES SOBRE O CÁLCULO ELÁSTICO	11
1.3.1 - Equação diferencial das placas	11
1.3.2 - Soluções empregando funções aproximadas	13
1.3.3 - Cálculo por diferenças finitas	14
1.3.4 - Processo dos elementos finitos e analogia de grelha	18
1.3.5 - Outros processos	21
1.3.6 - Reações de apoio	22
1.4 - OBJETIVOS DO TRABALHO	25
2. CÁLCULO APROXIMADO DE LAJES RETANGULARES	27
2.1 - GENERALIDADES	27
2.2 - TABELAS DE CZERNY	29
2.2.1 - Casos de vinculação	29
2.2.2 - Adaptação da notação	30
2.2.3 - Influência do coeficiente de Poisson	31
2.3 - FUNÇÕES APROXIMADAS PARA OS MOMENTOS	32
2.3.1 - Determinação das funções	33
2.3.2 - Eficiência das funções adotadas	34

2.4 - FUNÇÕES APROXIMADAS PARA AS FLECHAS	35
2.5 - REAÇÕES DE APOIO	35
3. A TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS	57
3.1 - GENERALIDADES	57
3.1.1 - Fases de comportamento	58
3.1.2 - Reserva de resistência	59
3.1.3 - Materiais frágeis e materiais dúcteis	62
3.1.4 - Materiais elastoplásticos e rigidoplásticos	63
3.2 - FUNDAMENTOS DA TEORIA	64
3.2.1 - Hipóteses de cálculo	65
3.2.2 - Configurações das charneiras	65
3.2.3 - Processos de cálculo	68
3.3 - PROCESSO DO EQUILÍBRIO	69
3.3.1 - Definição das forças nodais	69
3.3.2 - Resultante das forças em um nó	71
3.3.3 - Determinação das forças nodais	71
3.3.4 - Nó com charneiras de mesmo sinal	76
3.3.5 - Charneira concorrente com borda não engastada	76
3.3.6 - Aplicações do processo do equilíbrio	78
3.4 - PROCESSO DA ENERGIA	86
3.4.1 - Energia absorvida pelas charneiras	87
3.4.2 - Trabalho desenvolvido pelas cargas	87
3.4.3 - Determinação dos momentos de plastificação	88
3.4.4 - Determinação da carga	88
3.4.5 - Aplicações do processo da energia	89
3.5 - LAJES ORTÓTROPAS	93
3.5.1 - Isotropia, anisotropia e ortotropia	93
3.5.2 - Transformação de lajes ortótropas em isótropas	95

3.6 - CARGAS CONCENTRADAS	98
3.6.1 - Efeitos das cargas puntuais	99
3.6.2 - Carga atuando em um vértice	102
3.6.3 - Cargas puntuais em lajes ortótropas	104
3.6.4 - Ação simultânea de cargas puntuais e carga distribuída	104
3.6.5 - Aplicações	105
3.7 - SUPERPOSIÇÃO DOS EFEITOS	107
3.8 - FORMAÇÃO DE LEQUES	108
3.8.1 - Ocorrência	108
3.8.2 - Bifurcação das charneiras nos cantos	109
3.9 - DISTRIBUIÇÃO DA ARMADURA SUPERIOR	112
3.10- DISTRIBUIÇÃO DAS REAÇÕES	113
3.10.1 - Elemento triangular	114
3.10.2 - Elemento trapezoidal	116
3.10.3 - Elemento trapezoidal adjacente a borda livre	118
3.10.4 - Elemento com forma de triângulo retângulo com um lado livre	119
4. CÁLCULO DE LAJES RETANGULARES PELA TCP	123
4.1 - GENERALIDADES	123
4.2 - LAJES ARMADAS EM UMA SÓ DIREÇÃO	125
4.2.1 - Momento de plastificação e reações de apoio	125
4.2.2 - Ponto de interrupção da armadura negativa	127
4.3 - LAJES ARMADAS EM CRUZ	128
4.3.1 - Lajes isótropas	128
4.3.2 - Lajes ortótropas	134

4.4 - REAÇÕES DE APOIO	138
4.4.1 - Reações nos cantos	138
4.4.2 - Reações nas bordas	140
4.4.3 - Reações médias	142
4.5 - PONTO DE INTERRUPÇÃO DA ARMADURA NEGATIVA	142
4.5.1 - Quinhões de carga	143
4.5.2 - Pontos de momento nulo	145
4.6 - MARCHA DE CÁLCULO	145
4.6.1 - Dados	145
4.6.2 - Valores de ϕ_i e de κ	146
4.6.3 - Direção da charneira central	147
4.6.4 - Momentos de plastificação	147
4.6.5 - Configuração de ruína	147
4.6.6 - Reações de apoio	148
4.6.7 - Quinhões de carga	148
4.6.8 - Pontos de momento nulo	149
4.7 - EXEMPLOS EMPREGANDO AS FUNÇÕES APROXIMADAS	149
4.7.1 - Caso 2B com $\lambda = 1$	149
4.7.2 - Caso 4A com $\lambda = 1,25$	152
4.8 - PROGRAMA PARA MICROCOMPUTADOR	156
4.9 - RESULTADOS OBTIDOS	174
4.9.1 - Momentos e pontos de momento nulo	174
4.9.2 - Configurações de ruína e reações de apoio	175
4.10-ÍNDICE DE ORTOTROPIA ECONÔMICO	194
4.10.1 - Simplificações admitidas	194
4.10.2 - Determinação da situação econômica	195
4.10.3 - Valores dos índices de ortotropia econômicos	198

4.11- EXEMPLO DE CÁLCULO DE UM TABULEIRO DE EDIFÍCIO	204
4.11.1 - Cálculo elástico	204
4.11.2 - Cálculo pela TCP com $\phi_i = \phi_{i,el}$	207
4.11.3 - Cálculo pela TCP com $\phi_i = 0,62 \phi_{i,el}$	208
4.11.4 - Consumo de aço	209
5. PROCESSO DAS FAIXAS DE HILLERBORG	221
5.1 - GENERALIDADES	221
5.1.1 - Objetivo	221
5.1.2 - Equações de equilíbrio da placa	222
5.1.3 - Fundamentos do processo simplificado	225
5.2 - LAJE QUADRADA APOIADA NO CONTORNO	227
5.2.1 - Quinhões de carga iguais nas duas direções	228
5.2.2 - Repartição de carga por regiões retangulares	229
5.2.3 - Repartição de carga a 45°	230
5.2.4 - Solução geral com momento médio	233
5.2.5 - Reações de apoio	235
5.3 - CASOS DE VINCULAÇÃO E DE CARREGAMENTO DAS FAIXAS	236
5.3.1 - Faixa biapoiada	236
5.3.2 - Faixa apoiada-engastada	237
5.3.3 - Faixa biengastada	238
5.4 - LAJE RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA (CASO 1)	239
5.4.1 - Repartição de carga por regiões	239
5.4.2 - Repartição afim à configuração de ruína	242
5.4.3 - Comparação com a TCP	243

5.5 - CASO 2A: CONFIGURAÇÃO EVENTUAL	244
5.6 - CASO 2A: CONFIGURAÇÃO COMUM	248
5.7 - CASO 2B: UMA BORDA MAIOR ENGASTADA	251
5.8 - CASO 3: DUAS BORDAS ADJACENTES ENGASTADAS	253
5.9 - CASO 4A: CONFIGURAÇÃO EVENTUAL	256
5.10- CASO 4A: CONFIGURAÇÃO COMUM	258
5.11- CASO 4B: DUAS BORDAS MAIORES ENGASTADAS	261
5.12- CASO 5A: CONFIGURAÇÃO EVENTUAL	263
5.13- CASO 5A: CONFIGURAÇÃO COMUM	265
5.14- CASO 5B: UMA BORDA MENOR APOIADA	268
5.15- CASO 6: QUATRO BORDAS ENGASTADAS	270
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	273
6.1 - SOBRE O CÁLCULO ELÁSTICO	273
6.2 - COMPARAÇÃO ENTRE OS MOMENTOS DA TCP E OS ELÁSTICOS	274
6.3 - CONDIÇÕES DE ECONOMIA	279
6.4 - COMPRIMENTOS DAS BARRAS DA ARMADURA SUPERIOR	281
6.5 - REAÇÕES DE APOIO	282
6.6 - ANÁLISE DOS RESULTADOS DO EXEMPLO	284
6.7 - COMPARAÇÃO ENTRE A TCP E O PROCESSO DE HILLERBORG	285
6.8 - CONCLUSÕES	286
6.9 - OUTRAS PESQUISAS	289
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	291
8. BIBLIOGRAFIA	298

1. INTRODUÇÃO

1.1 - GENERALIDADES

O problema fundamental no projeto de estruturas consiste em afastar a possibilidade de ruína. Numa fase complementar, devem ser verificadas as condições de utilização, principalmente no que diz respeito aos deslocamentos, no caso do concreto armado, à fissuração.

Os métodos de cálculo baseados no comportamento elástico, indispensáveis na análise do comportamento da estrutura em serviço, com relação à ruína apresentam séria limitação, pois nessas condições o material apresenta comportamento plástico, contrariando portanto as hipóteses admitidas.

Os pioneiros do cálculo estrutural já tinham a noção correta de que o cálculo deveria ser feito na ruptura. Por exemplo GALILEI^[1], analisando ensaios de vigas, admitiu, ao estabelecer suas fórmulas, a mesma tração em todas as fibras, portanto uma hipótese plástica. Porém, ele tomou momentos em relação à fibra externa, o que não é correto. Como Galilei pensava somente em vigas de pedra ou madeira, não é difícil imaginar como ele chegou à sua hipótese. Nesses dois materiais, a viga rompe do lado traciona

do, de forma súbita e ao longo de toda a seção transversal, tendo-se a impressão de que havia tração em todos os seus pontos. Galilei não teria admitido essa hipótese se tivesse visto uma viga sendo ensaiada numa máquina moderna, com deformação controlada (ver JOHANSEN^[2] e, também TIMOSHENKO^[3]).

Após a publicação da lei de Hooke, em 1678, o cálculo elástico começou a ganhar terreno.

Em 1680, retomando o problema de Galilei, Mariotte observou que também existiam fibras comprimidas. Admitiu, porém, que a linha neutra passasse pelo centro da seção, com diagrama linear de tensões, supondo, portanto, comportamento elástico. Mariotte observou que seu cálculo, embora a favor da segurança, estava mais próximo da realidade do que o de Galilei, que era exagerado e contra a segurança.

Nos anos que se seguiram, o interesse dos pesquisadores esteve voltado para o comportamento das peças em serviço — determinação da linha elástica, estudo de vibrações em vigas e pilares, etc — situação em que o cálculo elástico é mais indicado. Aliado ao desenvolvimento decorrente desse interesse, o fato de, com relação à ruína, o cálculo elástico ser a favor da segurança fez com que o cálculo plástico fosse relegado, o que de certa forma ocorre até os nossos dias.

Embora com menor destaque, o cálculo plástico nunca foi abandonado. Neste século ele recupera terreno, caminhando para ocupar seu lugar no dimensionamento de estruturas pois, para verificação da segurança contra a ruína, é ele o mais indicado. Para análise da estrutura em serviço, porém, nunca se poderá prescindir do cálculo elástico; os dois se completam.

Neste trabalho serão tratadas as lajes de concreto armado, supostas delgadas, ou seja, com relação entre a espessura e o menor vão, h/l , não superior a $1/5$. Não serão consideradas as tensões de membrana, provenientes da

deformação do plano médio da placa, que se superpõem com as tensões de flexão.

Para o cálculo dos esforços há basicamente dois métodos: o elástico, também conhecido como método clássico, e o plástico. O método clássico, fundado na teoria da elasticidade, admite que o material é homogêneo, isótropo e tem comportamento linear, tal como em geral se admite no cálculo dos esforços nos demais tipos de estruturas. O método plástico, baseado na teoria da plasticidade, supõe, pelo contrário, que o material tenha comportamento de corpo rígido-plástico.

Com o método clássico se obtém, com boa aproximação, os esforços em serviço, a partir dos quais pode ser escolhida a distribuição das armaduras, da maneira mais adequada para o bom comportamento na fase de utilização.

O cálculo plástico não fornece, por outro lado, informações sobre a distribuição mais conveniente das armaduras, já que este é um dos dados de partida. Porém, permite a obtenção mais racional da carga última, na situação de ruína.

Os dois métodos são, portanto, de grande interesse, devendo escolher-se, em cada caso, o mais adequado ao objetivo que se persegue.

1.2 - NOÇÕES SOBRE O CÁLCULO PLÁSTICO

No método plástico o cálculo é feito na ruptura e, como tal, permite a obtenção adequada da carga última, situação em que o material se comporta plasticamente. Não fornece, para as lajes, informações sobre a melhor distribuição das armaduras; para isso, podem ser adotadas distribuições sugeridas pelo cálculo elástico ou obtidas através de um estudo econômico.

1.2.1 - Teoremas fundamentais

Para as lajes, o cálculo exato pela teoria da plasticidade em geral não é possível, pelo fato de o grau de indeterminação estática ser infinito. Em vez de um valor exato da capacidade de carga, obtêm-se dois valores: um limite superior, dado pelo teorema cinemático, e um limite inferior, correspondente ao teorema estático.

a) Teorema cinemático ou do limite superior

Denomina-se mecanismo a toda configuração de ruína cinematicamente admissível. O teorema cinemático prediz que toda carga correspondente a um mecanismo é igual ou superior à carga que provoca a ruína da peça. Permite, portanto, a obtenção de um limite superior para a carga efetiva de ruína. A carga obtida com a aplicação do teorema cinemático pode estar, então, contra a segurança, pois a carga de ruína pode estar sendo superestimada.

Uma aplicação do teorema cinemático às lajes é dada pela teoria das charneiras plásticas, que fornece, portanto, um valor da carga que corresponde à de ruína ou é uma carga que é contra a segurança. Os resultados experimentais demonstram, porém, que a carga efetiva de ruína é em geral superior à obtida pela teoria das charneiras plásticas, o que decorre, principalmente, dos efeitos de arqueamento e de membrana (ver item 3.1.2). Esta reserva de resistência pode não existir para todos os tipos de laje e, mesmo que ela existia, grandes deslocamentos podem ser requeridos para mobilizar os efeitos favoráveis; ruínas secundárias também podem ocorrer antes, provocando o colapso prematuro da estrutura.

Uma noção teórica da carga efetiva de ruína pode ser obtida com base no teorema estático.

b) Teorema estático ou do limite inferior

Toda distribuição de esforços internos que satisfça as condições de contorno e que em nenhum ponto ultrapasse a capacidade resistente da laje é denominada estaticamente admissível.

Pelo teorema estático, todo carregamento em equilíbrio com uma distribuição de esforços internos estaticamente admissível é igual ou inferior ao que provoca a ruína. Este teorema permite, então, a obtenção de um limite inferior para a carga de ruína. Com a aplicação do teorema estático tem-se, conseqüentemente, um cálculo a favor da segurança.

Uma aplicação do teorema estático às lajes é dada pelo processo das faixas de HILLERBORG^[4], que se baseia numa determinação simplificada da distribuição de momentos. Fornece, portanto, a carga de ruína ou um valor a favor da segurança.

Com a aplicação desses dois teoremas obtêm-se, então, importantes informações a respeito da segurança relacionada com o caso em questão.

1.2.2 - Sobre a teoria das charneiras plásticas

Para as placas, BACH^[5] (ver também BELLUZZI^[6]), MÖRSCH^[7] e SUENSON^[8] já apresentaram métodos de cálculo baseados no comportamento plástico, que no entanto só se aplicavam a alguns casos particulares. No trabalho publicado em dinamarquês em 1921 e em inglês dois anos após, INGERSLEV^[9] deu início à teoria das charneiras plásticas. Como as forças cortantes ao longo das linhas de plastificação não foram consideradas, a sua teoria não era aplicável a todos os casos. Seu compatriota Johansen deu tratamento mais geral à nascente teoria e imprimiu-lhe grande desenvolvimento, garantindo os méritos para que ela ficasse conhecida como a teoria de Johansen.

No trabalho também publicado em dinamarquês em 1931 e em alemão no ano seguinte, JOHANSEN^[10] levou em conta as forças cortantes, substituindo seus efeitos por forças nodais, localizadas nos cruzamentos das linhas de plastificação. Johansen deduziu fórmulas para cálculo do momento de plastificação em diversos tipos de laje. As hipóteses formuladas são aceitas até hoje e corroboradas por numerosos ensaios em diversos países.

Nos anos seguintes à publicação do trabalho inicial de Johansen, pouco desenvolvimento foi dado à teoria, salientando-se os trabalhos de GVOZDEV^[11], [12], [13], [14], [15], [16] na União Soviética, os do próprio JOHANSEN^[17], [18] e o de CHAMECKI^[19], no Brasil. Os de Johansen foram condensados, no Brasil, em um único volume (JOHANSEN^[2]), com tradução de Jayme Mason.

Somente depois de 1950 é que a teoria das charneiras plásticas tomou grande impulso no exterior e, depois de 1960, no Brasil. Foram relativamente abundantes os trabalhos a ela dedicados e, alguns, extremamente expressivos, entre os quais se destacam os de JONES & WOOD^[20], na Inglaterra, e os de LANGENDONCK^[21], [22], no Brasil.

Embora internacionalmente aceita e bastante difundida nos países desenvolvidos desde então, até os dias de hoje a teoria das charneiras plásticas ainda se encontra de certa forma relegada. Isto decorre basicamente de dois aspectos principais, que podem ser classificados em: aspectos teóricos e aspectos práticos.

Do ponto de vista teórico, sendo uma aplicação do teorema cinemático, ela é contra a segurança. Como os ensaios têm demonstrado que para os casos usuais essa insegurança teórica não se verifica na prática, este aspecto não impõe restrições à aplicação da teoria das charneiras plásticas às lajes comuns. Pode haver dúvidas com respeito às lajes com formas, carregamentos e condições de apoio não usuais, para as quais a segurança adicional pode não exis

tir, exigindo investigações suplementares. No capítulo 5 será apresentada uma verificação teórica possível, baseada no teorema estático, para as lajes retangulares com bordas apoiadas ou engastadas, não por haver dúvidas quando à segurança nesses casos, mas com a intenção de indicar um caminho que pode ser seguido no caso de lajes que exijam verificações suplementares. Notar-se-á que mesmo teoricamente os resultados do processo das charneiras plásticas se apresentam com bons resultados para as lajes em questão.

Nos aspectos práticos é que ainda se encontram pequenas barreiras para a completa aceitação da teoria das charneiras plásticas, para o cálculo das lajes comuns.

A primeira delas diz respeito ao índice de ortotropia a ser adotado, já que é um dado de partida no cálculo plástico e se apresenta como um dos produtos do cálculo elástico; o procedimento é então diferente do usual, em regime elástico. Isto pode ser facilmente contornado adotando-se um índice de ortotropia decorrente de um pré-dimensionamento em regime elástico. Neste caso, certamente resultará distribuição de armaduras adequada às condições de utilização.

Da adoção de índices de ortotropia baseada em critérios econômicos podem resultar valores que se afastam dos verificados com hipóteses elásticas e, até mesmo, das condições decorrentes da quantidade mínima de armadura adotada para a direção menos solicitada. Um índice de ortotropia adotado afoitamente com base em um critério econômico pode, então, ser inadequado do ponto de vista prático; no capítulo 4 apresenta-se um critério econômico para cálculo dos índices de ortotropia, que comprova as afirmações ora formuladas.

Pode acontecer, também, que grandes variações do índice de ortotropia tenham pouca influência no consumo total de armaduras, como cita MONTROYA^[23], por exemplo. Nessas condições a melhor solução é, sem dúvida, adotar índi-

ces de ortotropia próximos dos obtidos em regime elástico e que, ao mesmo tempo, sejam coerentes com a armadura adotada na direção dos menores esforços.

Outro aspecto prático diz respeito ao grau de engastamento $\phi = m'/m$ - momento no apoio sobre o momento no vão -, que também é um dado de partida; num caso geral, há necessidade de se investigar o valor a ser adotado. No caso de lajes de edifícios com carga uniforme e bordas engastadas, costumam ser indicados os intervalos de variação $1 \leq \phi \leq 2$ (por exemplo, LANGENDONCK^[24]) ou $1,5 \leq \phi \leq 2,5$ (HILLERBORG^[4]). Os extremos inferiores dos intervalos devem ser mais econômicos, pois possibilitam menores espessuras para as lajes e uma melhor repartição entre as armaduras superiores e inferiores; porém, podem apresentar problemas de fissuração inaceitável, na região dos momentos de apoio. Já os extremos superiores dos intervalos são mais próximos dos obtidos em regime elástico, sendo portanto mais adequados às condições de fissuração. Para não se fugir das condições habituais, recomenda-se adotar inicialmente valores próximos dos extremos superiores ou até mesmo os obtidos num pré-dimensionamento em regime elástico, analogamente ao que se fez com o índice de ortotropia. Em fases posteriores poderão ser analisados aspectos econômicos e funcionais decorrentes do emprego de valores menores de ϕ .

1.2.3 - Sobre a teoria do equilíbrio de Hillerborg

Até 1956, o único método prático para a análise limite de placas era a teoria das charneiras plásticas, teoricamente contra a segurança. Procurando um processo de cálculo baseado no teorema estático, que portanto não apresentasse o inconveniente da insegurança, HILLERBORG^[25], publicou em sueco, um pequeno artigo com os resultados de seus estudos, no qual foram dados os princípios gerais de sua teoria do equilíbrio e a expressão processo das faixas

(strip method) foi introduzida, para os casos em que o momento volvente podia ser considerado nulo. Nesse primeiro artigo, a questão de apoios puntuais não foi discutida.

Na sequência de seus trabalhos, HILLERBORG^[26] desenvolveu outro processo, também baseado na teoria do equilíbrio, para o cálculo de lajes sobre pilares, placas com forma de L, etc, no qual o problema dos apoios puntuais foi analisado. Este trabalho também foi, inicialmente, publicado em sueco.

Após a publicação em inglês dos princípios da teoria do equilíbrio e do processo das faixas (HILLERBORG^[27]), o assunto ganhou seguidores, entre os quais CRAWFORD^[28],^[29] e Blakey, que traduziu para o inglês, em 1964, o "Processo das faixas para lajes sobre pilares, placas com forma de L, etc" (HILLERBORG^[26]). Desde então, o processo das faixas tem sido referido e discutido por diversos autores, entre os quais ARMER^[30],^[31], WOOD & ARMER^[32], FERNANDO & KEMP^[33], entre outros.

a) Teoria do equilíbrio

Quando se aplicam os teoremas da teoria da plasticidade, usualmente se supõe que a capacidade resistente é conhecida em todos os pontos, como por exemplo, que a resistência à flexão é constante em toda a laje. Nestes casos, o teorema estático vem a ser inadequado para aplicações práticas, pois a resistência da laje só é aproveitada integralmente no ponto de momento máximo, resultando uma solução antieconômica.

De acordo com a teoria do equilíbrio, primeiramente é determinada uma distribuição de momentos que satisfaz às condições de equilíbrio e, posteriormente, a resistência da laje é calculada para esta distribuição de momentos. Este princípio permite satisfazer ao teorema estático e, ao mesmo tempo, obter um arranjo econômico da armadura.

O nome teoria do equilíbrio decorre do fato de que em cada ponto pode ser demonstrado um equilíbrio possível.

A teoria do equilíbrio é adequada para dimensionamento. Para verificação da capacidade de carga, quando as armaduras são conhecidas, a teoria das charneiras plásticas é mais adequada.

Na aplicação prática da teoria do equilíbrio, com os momentos variando em todas as direções, resultariam armaduras de difícil projeto e execução. As armaduras são geralmente constantes em determinadas regiões. Para qual momento a armadura deve ser calculada nesta região? Para o maior momento — satisfaz condições do teorema estático — há excesso de segurança e desperdício. Para o momento médio, apesar dos princípios fundamentais da teoria do equilíbrio não serem seguidos estritamente, pois não é em todos os pontos igual ou menor que a resistência da laje à flexão, obtém-se melhor resultado; desta maneira, ainda se obtém um cálculo a favor da segurança em comparação com outras teorias, como por exemplo a teoria das charneiras plásticas. Esta segurança não é excessiva, o que indica que os resultados da teoria das charneiras plásticas são adequados para aplicação prática, tendo em conta os efeitos favoráveis de arqueamento e de membrana, não considerados teoricamente.

b) Processo das faixas

O processo simplificado das faixas (simple strip method) foi introduzido em 1956, no qual não são considerados os momentos volventes ($m_{xy} = 0$). Em certos casos, esta simplificação não conduz a bons resultados, sendo mais adequado o processo avançado das faixas (advanced strip method), introduzido em 1959. É o que ocorre nas lajes-cogumelo, nas quais a consideração dos momentos volventes se faz necessária.

Sobre o processo simplificado das faixas serão vistos maiores detalhes no capítulo 5.

1.3 - NOÇÕES SOBRE O CÁLCULO ELÁSTICO

Não há dúvidas de que o método plástico é o mais adequado para o dimensionamento das lajes de concreto armado. Para análise das condições de serviço, porém, o cálculo elástico é indispensável; é útil também como pré-dimensionamento para o cálculo plástico, na escolha do índice de ortotropia a ser adotado e, também, na avaliação da relação entre os momentos negativos e positivos, que devem ser conhecidos de antemão no cálculo pela teoria das charneiras plásticas.

Uma análise minuciosa do cálculo elástico não faz parte dos objetivos deste trabalho. Apresentam-se, resumidamente, os fundamentos do método e noções sobre os principais processos de cálculo. Para um aprofundamento na análise elástica de placas há vasta bibliografia disponível, que tem em TIMOSHENKO^[34] sua obra clássica.

1.3.1 - Equação diferencial das placas

A deformada de uma placa delgada, submetida a cargas normais ao seu plano, pode ser definida pela função $w(x,y)$, que determina os deslocamentos verticais dos pontos (x,y) do plano médio da mesma. Admite-se, portanto, que os pontos do referido plano médio só sofrem deslocamentos verticais e que retas normais ao plano médio permanecem normais à superfície média deslocada.

Pode-se, portanto, expressar as tensões e os esforços que aparecem na placa em função dos deslocamentos verticais w . A seguir, apresentam-se os esforços por unidade de largura:

$$\begin{aligned}
m_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) , \\
m_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) , \\
m_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} , \\
v_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) , \\
v_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) ;
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

sendo:

m_x = momento fletor na direção x (em torno de y),

m_y = momento fletor na direção y (em torno de x),

m_{xy} = momento torçor,

v_x = esforço cortante na direção x,

v_y = esforço cortante na direção y.

Impondo-se as condições de equilíbrio em relação aos eixos x, y e z e utilizando-se as relações (1.3.1) resulta a conhecida equação das placas elásticas ou de Lagrange:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \tag{1.3.2}$$

Nas equações anteriores se empregam, além das já definidas, as notações:

$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ = rigidez à flexão da placa,

E = módulo de deformação longitudinal,

h = espessura,

ν = coeficiente de Poisson.

As condições de contorno da equação diferencial (1.3.2) dependem dos tipos de apoio. Assim, por exemplo, se se trata de uma borda reta paralela ao eixo y , ter-se-á, em função das condições desta borda, as seguintes condições de contorno:

- a) borda engastada - são nulos o deslocamento e a rotação -

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

- b) borda simplesmente apoiada - são nulos o deslocamento e o momento -

$$w = 0, \quad m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0;$$

- c) borda livre - são nulos o momento m_x e a reação na borda -

$$m_x = 0, \quad v_x - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0.$$

Obtida a função w , os esforços são calculados pelas equações (1.3.1).

1.3.2 - Soluções empregando funções aproximadas

Em geral não é fácil encontrar analiticamente uma função $w(x,y)$ que satisfaça a equação (1.3.2) e as condições de contorno, para uma dada laje submetida a um certo carregamento $p(x,y)$. Por isso, recorre-se a soluções aproximadas, obtendo-se w como uma soma de funções elementares que satisfaçam às condições de contorno. Assim, por exemplo, no caso de uma placa retangular simplesmente apoiada nos quatro lados e com carga uniforme p (figura 1.1), w pode ser obtida mediante uma série dupla de Fourier:

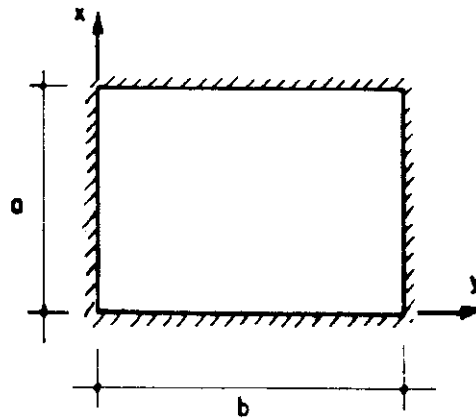


FIG. 11 - LAJE RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA

$$w(x,y) = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad (1.3.3)$$

cuja convergência é rápida. Para o cálculo das flechas, por exemplo, basta tomar um termo; para os momentos, convém tomar pelo menos seis, com o que se obtêm erros da ordem de 3% (MONTROYA^[23]).

Outros exemplos empregando funções aproximadas também podem ser encontrados em MONTANARI; MARTINELLI; SAVASSI^[35].

1.3.3 - Cálculo por diferenças finitas

O principal inconveniente do processo de integração da equação de Lagrange, mediante séries, é o de não ser aplicável mais do que a uns poucos casos de formas e condições de apoio. Uma das alternativas, empregada quando surgiram os computadores eletrônicos, foi a integração numérica pelo processo das diferenças finitas, de aplicação mais geral e que conduz à resolução de um sistema de equações lineares.

No cálculo por diferenças finitas a placa é dividida por uma malha que se adapte ao seu contorno (figura 1.2). Adotam-se como incógnitas os deslocamentos w nos vértices da malha. Em função destes, podem ser expressas suas derivadas e, conseqüentemente, os esforços e a equação de

equilíbrio da placa (figura 1.3). Para pontos próximos das bordas, é necessário usar os deslocamentos em pontos fictícios, situados fora da placa, que se obtêm empregando as condições de contorno, como se indica na figura 1.4.

Por exemplo, no caso de uma placa quadrada com carga uniforme e engastada no contorno (figura 1.5), se se utiliza uma malha com oito divisões em cada direção, resulta, aproveitando as simetrias, um sistema com dez equações e dez incógnitas.

Maiores detalhes sobre o processo das diferenças finitas podem ser encontrados, por exemplo, em LAIER & BARREIRO^[36].

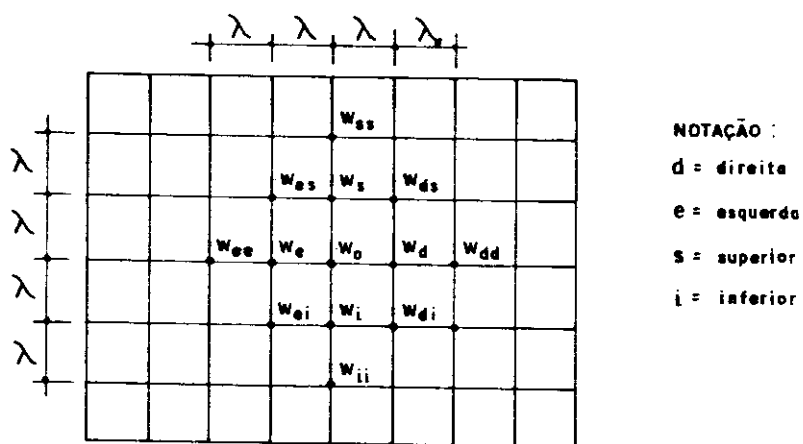
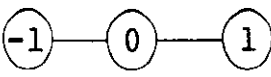
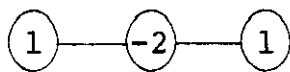
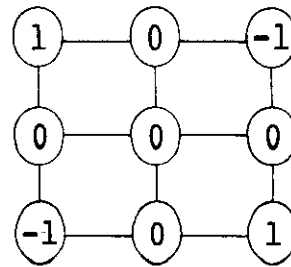


FIG. 1.2 - DIVISÃO DA PLACA POR UMA MALHA

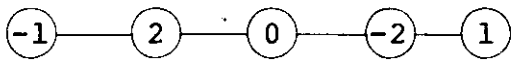


$$\frac{\partial w}{\partial x} \cong \frac{1}{2\lambda} (-w_e + w_d)$$

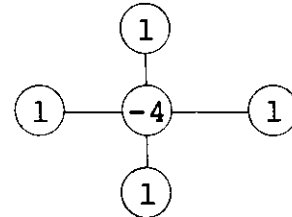


$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cong \frac{1}{4\lambda^2} (w_{es} - w_{ds} - w_{ei} + w_{di})$$

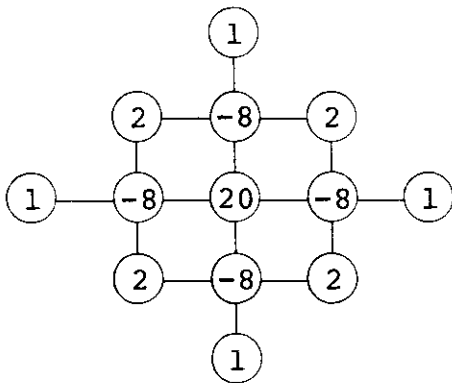
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda^2} (w_e - 2w_o + w_d)$$



$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cong \frac{1}{2\lambda^3} (-w_{ee} + 2w_e - 2w_d + w_{dd})$$



$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cong \frac{1}{\lambda^2} (w_s + w_e - 2w_o + w_d + w_i)$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \cong & \frac{1}{\lambda^4} (w_{ss} + 2w_{se} + \\ & -8w_s + 2w_{ds} + w_{ee} - 8w_e + 20w_o - 8w_d + \\ & + w_{dd} + 2w_{ei} - 8w_i + 2w_{di} + w_{ii}) \end{aligned}$$

Fig. 1.3 - Cálculo por diferenças finitas

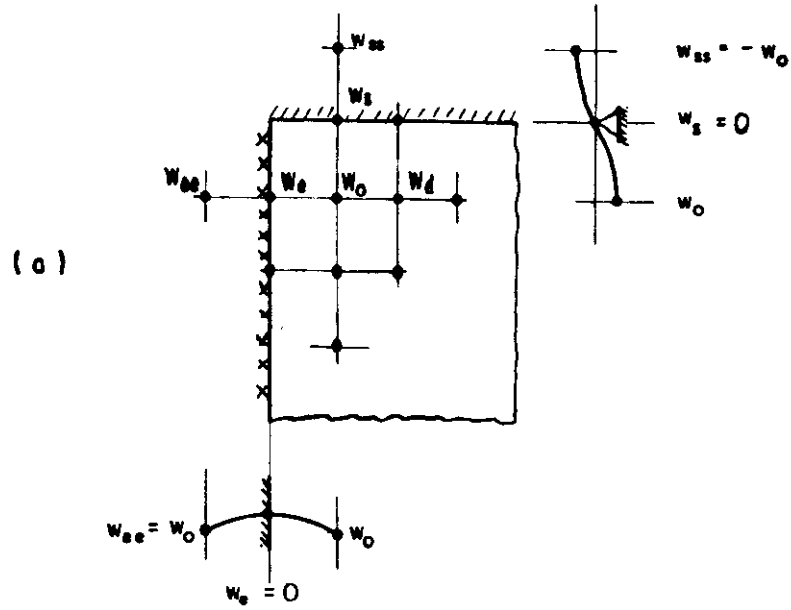


FIG. 1.4 - PONTOS PRÓXIMOS DAS BORDAS

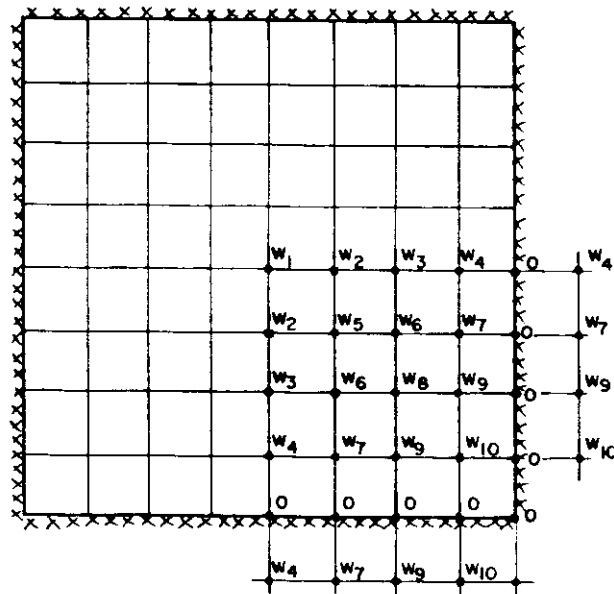


FIG. 1.5 - PLACA QUADRADA ENGASTADA NO CONTORNO

1.3.4 - Processo dos elementos finitos e analogia de grelha

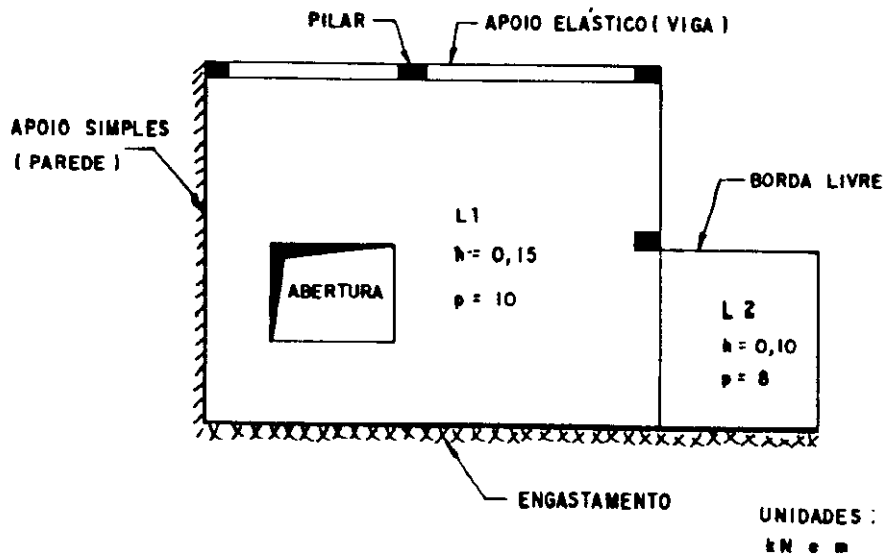
O cálculo por diferenças finitas, apresentado no item anterior, aplica-se preferencialmente à elaboração de tabelas (ver, por exemplo, BARES^[37]). Através dessas tabelas obtêm-se, facilmente, os esforços em placas com formas e carregamentos mais comuns, submetidas a carregamentos uniformes ou triangulares.

Nos casos de placas com forma mais complexa, com aberturas, com regiões de diferentes espessuras, com carregamentos de distribuição mais complexa ou com condições de apoio variadas, os processos anteriores em geral não são de aplicação prática. Entre eles, o único aplicável é o das diferenças finitas. Há, porém, outras alternativas, entre as quais o processo dos elementos finitos e a analogia de grelha (ver figura 1.6).

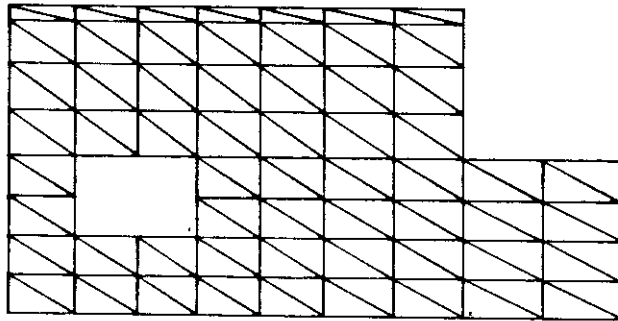
Em ambos os processos a estrutura é tratada de forma discretizada, substituindo-a por outra equivalente formada por pedaços elementares. A principal diferença com relação ao processo das diferenças finitas, é que neste último o que se discretiza é a função w . Portanto, no cálculo por diferenças finitas, o problema estrutural é tratado rigorosamente, dando lugar a um problema matemático complexo, que é resolvido de forma aproximada, enquanto que no cálculo por elementos finitos ou por analogia de grelha, o problema estrutural é tratado de forma aproximada, para que o problema matemático seja simples e possa ser resolvido exatamente (MONTROYA^[23]).

a) Elementos finitos

No processo dos elementos finitos, a placa é modelada por exemplo através de elementos de forma retangular ou triangular (figura 1.6.b), podendo variar as dimensões e as características elásticas de um elemento para outro. São consideradas incógnitas os deslocamentos w dos vérti



(b)



(c)

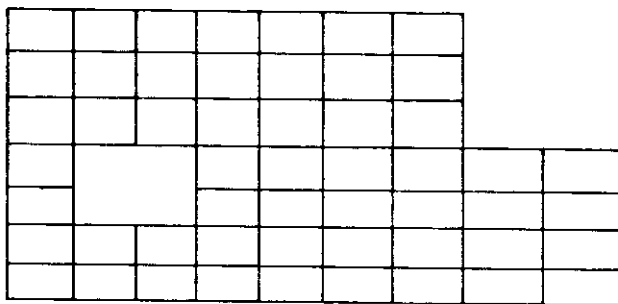


FIG. 16 - DISCRETIZAÇÃO DE UMA ESTRUTURA

ces, suas derivadas $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$ e, em certos elementos, também as curvaturas. No interior de cada elemento, supõe-se que os deslocamentos sejam definidos por uma função simples, como por exemplo um polinômio, cujos coeficientes numéricos fiquem definidos uma vez conhecidos os valores da função e de suas derivadas nos vértices do elemento. Desta forma, mesmo sendo distintas as funções w e suas derivadas de um elemento para outro, fica garantida a compatibilidade de deslocamentos entre elementos contíguos, por serem iguais seus valores nos vértices. A partir da minimização da energia potencial total, que é obtida a partir da energia de cada elemento finito, obtém-se um sistema de equações lineares, que uma vez resolvido permite o cálculo imediato dos esforços na placa.

Maiores detalhes sobre a aplicação do processo dos elementos finitos no cálculo de placas podem ser obtidos em ZIENKIEWICZ^[38] por exemplo.

b) Analogia de grelha

Para analisar uma placa através da analogia de grelha, a placa é substituída por um reticulado de vigas em duas direções (figura 1.6.c). A cada viga, é atribuída a rigidez à flexão da faixa de placa correspondente e uma rigidez à torção igual ao dobro de sua rigidez à flexão (conforme MONTROYA^[23], seguindo orientação de ROWE^[39]). As cargas repartem-se entre as vigas nas duas direções; se a malha é suficientemente fina, as cargas podem ser consideradas atuando nos nós.

c) Cálculo por computadores

Tanto o cálculo por elementos finitos como por analogia de grelha é feito por computadores. As firmas especializadas e os centros universitários dispõem de programas relativos a esses casos. Em geral, os referentes à ana

logia de grelha são mais acessíveis e econômicos que os de elementos finitos, já que estes em geral necessitam de computadores de maior capacidade.

Exemplos de aplicação da analogia de grelha são dados por TAKEYA^[40] e ANTUNES & MAGRI^[41].

1.3.5 - Outros procedimentos

Mesmo não querendo estender muito os aspectos panorâmicos ora tratados, há outros processos que precisam ser citados.

Entre estes, encontra-se o processo aproximado de MARCUS^[42], aplicável às lajes retangulares com carga uniforme e bordas apoiadas ou engastadas, pela sua importância histórica, sendo o mais indicado da fase anterior aos computadores eletrônicos. As tabelas de Marcus (encontradas em ROCHA^[43], por exemplo), hoje são substituídas com vantagens por outras como as de BARES^[37] ou CZERNY^[44]. As tabelas de Czerny são anteriores às de Bares, apesar de aqui citadas em edição mais recente. Ambas apresentam resultados muito bons (MANZOLI, PINHEIRO, PAIVA^[45]).

Há, também, o processo das faixas finitas, de aplicação não tão geral quanto o dos elementos finitos, mas que, no seu campo de aplicação permite redução do trabalho computacional com manutenção de versatilidade e de precisão dos resultados. Este processo se aplica principalmente às estruturas com apoios simples nos extremos, com a presença ou não de apoios elásticos intermediários; a ênfase da aplicação são os tabuleiros de pontes. Sobre o processo das faixas finitas, recomenda-se CORRÊA^[46].

Finalizando, não se poderia deixar de citar o processo dos elementos de contorno, em fase de desenvolvimento, que compete com o dos elementos finitos na resolução dos casos complexos. Os fundamentos deste processo po-

dem ser encontrados em BREBBIA^[47] e, em BEZINE^[48], sua aplicação às placas delgadas.

1.3.6 - Reações de apoio

Nas estruturas de concreto, as lajes são quase sempre ligadas monoliticamente às vigas que a suportam (figura 1.7.a). Entretanto, como se tratam de peças estruturais de duas categorias distintas - placas e barras - com métodos próprios de cálculo, do ponto de vista prático, em geral não se leva em consideração esse monolitismo. Em lugar disso, por meio de uma subdivisão virtual, separam-se as lajes das vigas (figura 1.7.b). Essa separação é válida para a consideração exclusiva das lajes, podendo retomarse a ligação existente na consideração das vigas.

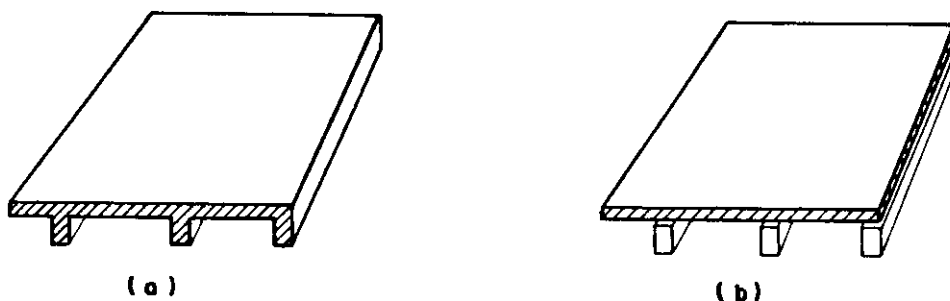


FIG. 17 - LIGAÇÃO ENTRE LAJES E VIGAS

Com essa separação, as lajes podem ser assimiladas a placas apoiadas sobre vigas. Na realidade, o apoio dado pelas vigas é flexível, porquanto sob a ação das cargas, as vigas também se deformam. A consideração dessa flexibilidade de apoio nos processos analíticos levaria a uma complexidade excessiva, não justificada para os casos de aplicação prática corrente.

Desse modo, ignorando a deformabilidade das vigas de apoio, consideram-se as lajes como suportadas por apoios indeslocáveis. Com isso, para as lajes, são admitidas as condições de contorno usuais da teoria das placas em regime elástico. As divergências deverão ser levadas em conta por meio de considerações de ordem prática (FUSCO^[49]).

Considere-se agora uma placa retangular simplesmente apoiada no contorno (figura 1.8.a). Admita-se que os apoios forneçam vínculos unilaterais, isto é, que os apoios somente mobilizem reações dirigidas de baixo para cima.

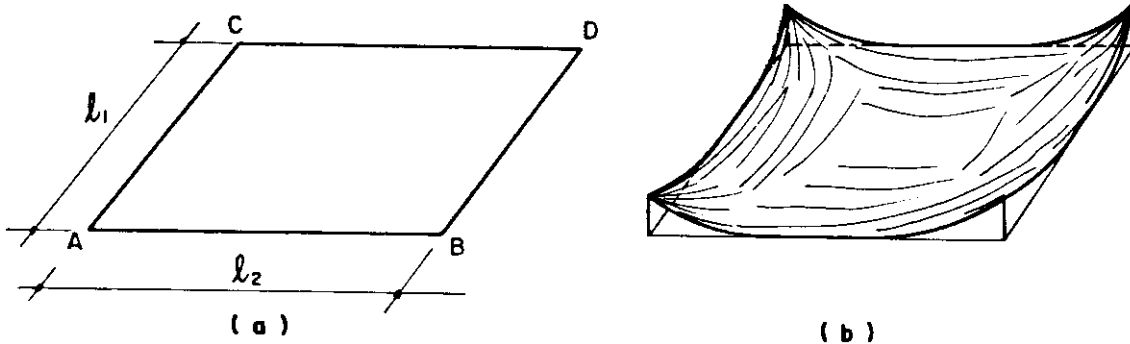


FIG. 1.8 - LAJE RETANGULAR APOIADA NO CONTORNO

Sob a ação de um carregamento qualquer, dirigido de cima para baixo, por exemplo uniformemente distribuído, verifica-se que os cantos da placa se deslocam dos apoios (figura 1.8.b). Isso indica que se os apoios fornecerem vínculos bilaterais, capazes de garantir a forma retilínea às bordas da placa, ao longo das mesmas haverá reações dirigidas nos dois sentidos.

Convencionando-se como positivas as reações dirigidas de baixo para cima, junto aos cantos da placa haverá trechos de reação negativa. Esse é o caso usual das lajes de concreto, pois em virtude do monolitismo, as bordas da placa permanecem retilíneas. Desse modo, para as reações

de apoio ao longo do lado AB da placa com carga uniforme (figura 1.8), tem-se distribuição conforme se ilustra na figura 1.9.a.

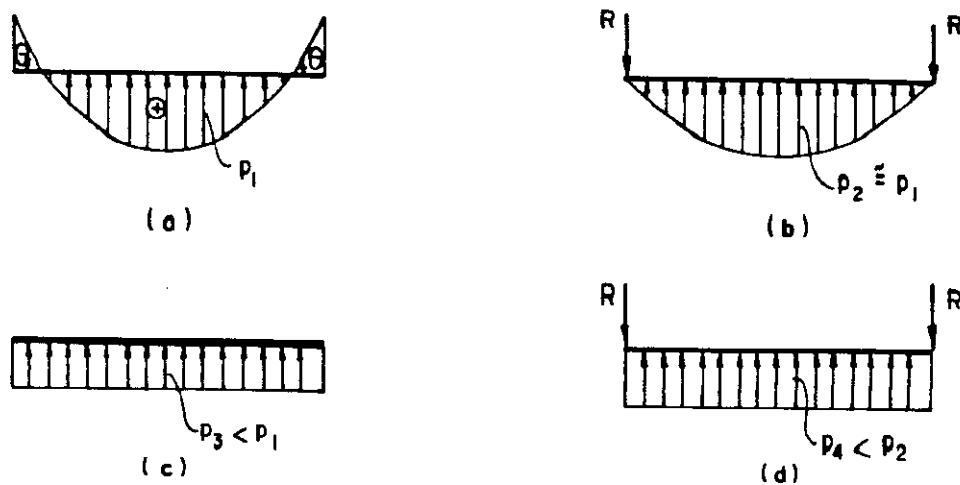


FIG. 1.9 - DISTRIBUIÇÃO DAS REAÇÕES DE APOIO

No entanto, aplicando-se a teoria das placas delgadas com sua formulação usual, em lugar de reações negativas distribuídas junto aos cantos (figura 1.9.a), obtém-se a distribuição aproximada indicada na figura 1.9.b, onde R representa a resultante das reações negativas junto aos cantos.

A dificuldade de cálculo das vigas de apoio, considerando distribuições como as das figuras 1.9.a e 1.9.b, faz com que se adotem, em geral, distribuições uniformes de mesma resultante, como a da figura 1.9.c, que é contra a segurança, pelo menos no caso de apoios indeslocáveis. Na figura 1.9.d apresenta-se uma alternativa bem melhor, que se aproxima mais da distribuição correta e praticamente não aumenta o trabalho de cálculo, seguindo o procedimento usual.

Se houver necessidade do conhecimento rigoroso da distribuição das reações de apoio, torna-se indispensável a consideração da flexibilidade do apoio dado pela viga de borda, o que pode ser feito com a aplicação de um dos processos numéricos já citados.

1.4 - OBJETIVOS DO TRABALHO

Tem-se como objetivo principal a sistematização do cálculo de lajes retangulares com carga uniforme e bordas apoiadas ou engastadas, pela teoria das charneiras plásticas, desde os dados iniciais para o cálculo plástico até o cálculo dos momentos de plastificação nos vãos e nos apoios, da configuração de ruína, das reações de canto e ao longo das bordas, das reações médias e, inclusive, a determinação dos pontos de momento fletor nulo, visando o cálculo do comprimento das barras sobre os apoios. Isto tudo é encontrado no capítulo 4, no qual se apresenta também um critério econômico para determinação do índice de ortotropia.

Apresenta-se no capítulo 2, como objetivo complementar, a determinação de funções aproximadas para cálculo elástico de momentos fletores e flechas, necessários para pré-dimensionamento do cálculo plástico e para verificação das condições de utilização. Estas funções, além de considerarem inclusive razões dos vãos superiores a dois, simplificam muito o cálculo através de computador.

Também como objetivos complementares, apresentam-se no capítulo 3 os fundamentos da teoria das charneiras plásticas e, no capítulo 5, uma comparação entre os resultados da teoria das charneiras plásticas com os obtidos através do processo simplificado das faixas de Hillerborg, que demonstra serem bons os resultados do cálculo plástico para as lajes retangulares em questão.

No capítulo 6, comparam-se os resultados do cálculo elástico com os obtidos em regime plástico e são analisados os resultados. Encontram-se, também, sugestões sobre novas pesquisas.

2. CÁLCULO APROXIMADO DE LAJES RETANGULARES

2.1 - GENERALIDADES

Apresenta-se neste capítulo um cálculo aproximado de lajes retangulares uniformemente carregadas, com bordas apoiadas ou engastadas, tendo por base o comportamento elástico.

Apesar de, para dimensionamento, o cálculo plástico ser mais adequado, já foi dito que para verificação das condições de utilização o cálculo elástico é imprescindível. Também é útil para pré-dimensionamento no cálculo plástico.

O objetivo principal que ora se persegue é melhorar o cálculo de lajes usuais de concreto armado, tanto no caso de cálculo manual, para fins didáticos ou resolução de pequenos problemas, como no cálculo sistematizado usando computador, também para fins didáticos ou para uso profissional. Para que se atinja tal meta, a precisão dos resultados não pode ser diminuída e, além disso, não pode haver aumento da carga de trabalho, em relação aos procedimentos empregados até então.

No cálculo rigoroso, por qualquer dos processos apresentados no item 1.3, o equacionamento é complexo e leva a um trabalho computacional excessivo se comparado com o pro

cedimento usual, em que em geral se empregam tabelas. O cálculo computadorizado, associado ao manuseio de tabelas, também é inconveniente.

Tem-se, então, como alternativa mais adequada, o cálculo de momentos fletores e de flechas através de funções aproximadas, determinadas a partir das tabelas usuais da literatura de placas, obtidas com hipóteses elásticas.

Tais tabelas, porém, são incompletas, pois em geral consideram a relação $\lambda = \text{vão maior/vão menor}$ não superior a dois, o que é insuficiente. As tabelas que consideram $\lambda > 2$, não apresentam todos os casos de vinculação. Se para $\lambda > 2$ se considerar laje armada numa só direção, como geralmente é feito, comete-se erros de até 47% no valor do momento fletor positivo na direção principal, como ocorre nas lajes com duas bordas menores engastadas.

A solução aproximada aqui proposta, que oferece boa precisão para λ entre 1 e 2, fornece resultados muito melhores para $\lambda > 2$, quando comparados com os valores relativos a laje armada em uma só direção.

Para as reações de apoio já existe o processo das áreas, obtidas pela posição aproximada das linhas de plastificação - processo permitido pela norma brasileira NBR 6118^[50] -, que atende aos requisitos para a sistematização do cálculo. A precisão dos resultados, porém, precisa ser analisada. No capítulo 6 far-se-á uma comparação deste processo da NBR 6118 com o cálculo baseado na posição correta das linhas de plastificação.

Por outro lado, o cálculo das reações de apoio com base no comportamento elástico parece ser uma solução melhor, por ser coerente com o comportamento das lajes durante a utilização da estrutura. Portanto, a determinação de funções simplificadas para reações de apoio em regime elástico está sendo cogitada para trabalhos futuros, juntamente com refinamento das funções relativas aos momentos e às

flechas, que já se encontra em elaboração.

2.2 - TABELAS DE CZERNY

Entre as tabelas usuais que consideram todos os casos de vinculação ora tratados, são atualmente mais empregadas as de CZERNY^[44] e as de BARES^[37], cujos valores correspondentes praticamente coincidem. Comparando-se estes valores com soluções exatas dadas por TIMOSHENKO^[51], notou-se que os resultados são muito bons.

Como as tabelas de Czerny são mais tradicionais e a notação mais adequada, elas foram escolhidas para servir de base para a determinação das funções aproximadoras dos momentos fletores e das flechas; sofrerão, portanto, adaptações.

2.2.1 - Casos de vinculação

As tabelas originais de CZERNY^[44] representam as bordas simplesmente apoiadas por linhas cheias, sendo, nas bordas engastadas, acrescentadas hachuras.

Para ser coerente com a notação empregada ao longo deste trabalho, a notação de Czerny precisa ser adaptada; as bordas apoiadas serão, então, indicadas por hachuras simples e, as bordas engastadas, por hachuras em duas direções.

Existem seis casos possíveis de vinculação, sendo que três deles ainda precisam ser subdivididos, resultando um total de nove casos, indicados na figura 2.1:

- Caso 1 → quatro bordas simplesmente apoiadas,
- Caso 2A → uma borda menor engastada,
- Caso 2B → uma borda maior engastada,
- Caso 3 → duas bordas adjacentes engastadas,
- Caso 4A → duas bordas menores engastadas,
- Caso 4B → duas bordas maiores engastadas,
- Caso 5A → uma borda maior apoiada,
- Caso 5B → uma borda menor apoiada,
- Caso 6 → quatro bordas engastadas.

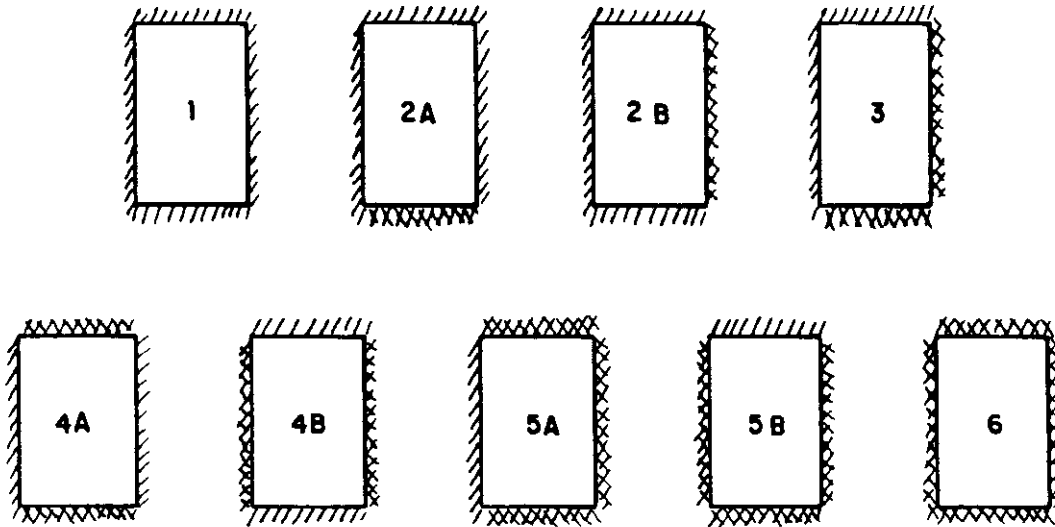


FIG. 2.1 - CASOS DE VINCULAÇÃO

2.2.2 - Adaptação da notação

A notação ora adotada, baseada na de PINHEIRO [52], permite que os momentos fletores, as flechas e as reações de apoio sejam colocados respectivamente nas formas:

$$m = \mu \frac{p l_x^2}{100} \quad , \quad (2.2.1)$$

$$a = \alpha \frac{p l_x^4}{100 E h^3} \quad , \quad (2.2.2)$$

$$r = \rho \frac{p l_x}{10} \quad . \quad (2.2.3)$$

Nestas expressões tem-se:

m = momento fletor por unidade de largura,

μ = coeficiente adimensional para cálculo do momento fletor,

p = carga uniformemente distribuída,

l_x = menor vão,

a = flecha,

α = coeficiente adimensional para cálculo da flecha,

E = módulo de deformação longitudinal,

h = espessura da laje,

r = reação de apoio por unidade de comprimento,

ρ = coeficiente adimensional para cálculo da reação de apoio.

Empregam-se ainda os índices x e y para indicar as direções dos planos de flexão e p indica(') nos momentos sobre os apoios, também denominados negativos, que serão aqui considerados com seus valores absolutos; utiliza-se p também para indicar as reações de apoio nas bordas engastadas. Por exemplo, no caso de vinculação 2A, na borda engastada, o momento fletor e a reação de apoio serão indicados respectivamente por:

$$m'_y = \mu'_y \frac{pl_x^2}{100} \quad \text{e} \quad r'_y = \rho'_y \frac{pl_x}{10} .$$

As tabelas de CZERNY^[44] consideram o coeficiente de Poisson igual a zero. Nessas tabelas, os coeficientes para cálculo dos momentos referem-se a $100/\mu$ e os das flechas valem $\alpha/100$.

Os coeficientes de Czerny, adaptados para a notação aqui adotada, encontram-se nas tabelas 2.1 e 2.5, para os momentos e para as flechas respectivamente, sendo consideradas as seguintes relações entre os lados:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = 1; 1,25; 1,5; 1,75 \text{ e } 2;$$

estes valores foram escolhidos pelo fato de representarem cinco pontos distribuídos no intervalo no qual serão adotadas funções aproximadas. No caso geral em que se adotaram funções do segundo grau, elas passam pelos pontos correspondentes a $\lambda = 1, 1,5$ e 2 e ainda sobram dois pontos para verificar a precisão da função adotada. Mais detalhes sobre a determinação das funções aproximadas serão vistos no item 2.3.

2.2.3 - Influência do coeficiente de Poisson

O coeficiente de Poisson ν depende do material, sendo igual a 0,20 para o concreto. Como os valores de CZERNY^[44] correspondem a $\nu=0$, eles precisam ser adapta -

dos para $\nu=0,20$.

A flecha é inversamente proporcional à rigidez à flexão. Quando se adota $\nu=0$, obtém-se uma flecha 4% maior do que a correspondente a $\nu=0,20$. Este erro é pequeno.

Já com relação aos momentos fletores, o erro é bem maior e contra a segurança, principalmente na direção menos solicitada, na qual os momentos podem ser até a metade dos correspondentes a $\nu=0,20$ (caso 5A, por exemplo).

A causa disto é que o coeficiente de Poisson tem influência na distribuição de tensões no sistema hiperestático. Ao aumentar o coeficiente de Poisson, a placa torna-se mais rígida, diminuindo as deformações e aumentando os momentos. As forças cortantes não dependem de ν e portanto não variam. O mesmo não ocorre com as reações de apoio, que dependendo também do momento volvente, sofrem variação com a alteração de ν .

Com relação aos momentos fletores e as flechas, conhecendo-se os valores correspondentes a $\nu=0$, os valores correspondentes a um valor ν_1 qualquer podem ser obtidos através das expressões (BARES^[37]):

$$m_{x1} = m_{x0} + \nu_1 m_{y0} \quad ,$$

$$m_{y1} = \nu_1 m_{x0} + m_{y0} \quad ,$$

$$a_1 = (1 - \nu_1^2) a_0 \quad .$$

Os momentos negativos não se alteram. As tabelas 2.2 e 2.6 apresentam respectivamente os momentos e as flechas de Czerny, adaptados para $\nu_1=0,20$.

2.3 - FUNÇÕES APROXIMADAS PARA OS MOMENTOS

Adotou-se, portanto, para a determinação das funções aproximadas para os momentos, os valores indicados na

tabela 2.2, que correspondem a coeficiente de Poisson igual a 0,20.

2.3.1 - Determinação das funções

Para a determinação das funções, os valores da tabela 2.2 foram colocados em gráficos, tendo $\lambda = l_y/l_x$ em abscissas e μ em ordenadas (ver figuras 2.2a até 2.2e). Cada momento foi analisado individualmente, adotando-se, em intervalos adequados, funções lineares ou do segundo grau, que estimassem com razoável precisão os momentos originais, levando-se em conta um erro máximo da ordem de 3%. As funções adotadas encontram-se indicadas nas tabelas 2.3.

Para os momentos μ_x , μ'_x e μ'_y , em geral foram adotadas parábolas passando pelos pontos correspondentes a $\lambda = 1; 1,5$ e 2 . Para μ_x , caso 4B, e μ'_y , caso 6, as parábolas passam por $\lambda = 1; 1,25$ e $1,5$. Para μ'_x , caso 4B, e μ_x , caso 5B, as parábolas passam por $\lambda = 1; 1,25$ e $1,75$. Estes pontos foram escolhidos pelo fato de as parábolas por eles definidas representarem com adequada precisão as curvas originais.

Têm-se, também, parábolas para μ_y , nos casos 2A, 4A e 5A, pelos pontos $\lambda = 1; 1,25$ e $1,5$ e para μ_x , caso 4A, passando por $\lambda = 2, 3$ e 4 .

Para valores de λ maiores que os dos intervalos já citados, há casos em que as mesmas parábolas são prolongadas, como ocorre para μ_x nos casos 1 e 2A (até $\lambda = 2,5$), ou são adotados segmentos de reta. Esses segmentos de reta podem ser tangentes à parábola pelo ponto $\lambda = 2$ (μ_x nos casos 3 e 5A, até $\lambda = 2,5$, e μ'_x no caso 5B, até $\lambda = 2,3$) ou unem a extremidade da parábola ou do segmento retilíneo anterior ao ponto a partir do qual o momento é suposto constante e igual ao de uma laje com $\lambda = \infty$; este ponto é adotado como sendo correspondente a $\lambda = 4$, em grande parte dos casos (ver tabelas 2.3). Este valor $\lambda = 4$ foi adotado como valor a partir do qual as lajes podem ser consideradas armadas em uma

só direção, tendo em conta a solução exata dada por TIMOSHENKO [51] para o caso 4A - o caso mais crítico - cujo valor de μ_x para $\lambda=4$ difere menos de 3% do valor correspondente a laje com $\lambda = \infty$. Outros casos terão erros menores ainda.

Nota-se, também nas tabelas 2.3, que há casos em que a laje é considerada armada numa só direção a partir de valores menores de λ . Observa-se, ainda, que para $\lambda > 2$ e mesmo a partir de valores menores de λ , μ_y é admitido constante. Resultados disponíveis mais precisos, como por exemplo os de Timoshenko já citados, mostram que os valores de μ_y continuam decrescentes para valores bem maiores de λ . Nesses casos, os valores ora adotados, embora a favor da segurança, apresentam erros bem superiores a 3%. Não se deu, no momento, maior importância a este fato, tendo em vista que, na prática, as armaduras mínimas em geral adotadas nessa direção correspondem a momentos maiores que os verificados teoricamente. Numa fase posterior, de refinamento das funções ora adotadas, deverão ser considerados os aspectos aqui citados.

2.3.2 - Eficiência das funções adotadas

Como os pontos adotados para a definição das funções aproximadas não são os mesmos em todos os casos, as relações μ_a/μ_c serão determinadas para $\lambda = 1; 1,25; 1,5; 1,75$ e 2 (ver tabela 2.4), sendo:

μ_a = valor de μ correspondente à função aproximada;

μ_c = valor obtido por Czerny, dado na tabela 2.2.

Esses valores de λ são suficientes para se ter uma idéia da eficiência das funções aproximadas no intervalo de λ entre 1 e 2. Para $\lambda > 2$, não se tem resultados para comparação na maioria dos casos; este aspecto deverá ser abordado em trabalhos posteriores, refinando-se a solução ora apre

sentada, que sem dúvida já é melhor que adotar laje armada em uma só direção sempre que λ superar dois.

Nota-se na tabela 2.4 que as funções aproximadas dão resultados muito bons para λ entre 1 e 2. O erro é superior a 3% somente para μ_y no caso 4A e $\lambda=2$, portanto um momento de importância secundária, e para μ_x no caso 4B e $\lambda \geq 1,75$. Neste último caso, a imprecisão não é ocasional; pelo contrário, é deliberada. Acontece que os valores de Czerny, para $\lambda \geq 1,75$, levam a valores de μ_x maiores que os correspondentes a lajes armadas em uma só direção, o que em princípio é imprevisível. Adotou-se, então, para μ_x no caso 4B e $\lambda \geq 1,75$ valor correspondente ao de laje armada em uma só direção, o que parece ser mais correto tendo em conta a situação ora apresentada. Em trabalhos posteriores, este problema deverá ser analisado com mais atenção.

2.4 - FUNÇÕES APROXIMADAS PARA AS FLECHAS

Para as flechas, foi dado tratamento semelhante aos relativos aos momentos, adotando-se parábolas passando pelos pontos $\lambda = 1; 1,5$ e 2 e segmentos de reta para $\lambda > 2$ (ver figuras 2.3a até 2.3e).

As funções adotadas encontram-se na tabela 2.7, sendo os valores aproximados α_a comparados com os de Czerny α_c na tabela 2.8, para λ entre 1 e 2. Para $\lambda > 2$, embora não haja valores teóricos para comparação em grande parte dos casos, a solução adotada também é melhor do que simplesmente adotar valores correspondentes a lajes armadas numa só direção, que poderia levar a erros de até 60%, como ocorre no caso de vinculação 4A.

2.5 - REAÇÕES DE APOIO

Para cálculo das reações de apoio, é usual o emprego do processo das áreas delimitadas pela posição apro-

ximada das linhas de plastificação, permitido pela Norma Brasileira NBR 6118^[50], cujo item 3.3.2.9 transcreve-se em seguida.

"Permite-se calcular as reações de apoio de lajes retangulares com cargas uniformemente distribuídas considerando-se para cada apoio carga correspondente aos triângulos ou trapézios obtidos traçando-se, a partir dos vértices, na planta da laje, retas inclinadas de:

45° entre dois apoios do mesmo tipo;

60° a partir do apoio engastado quando o outro for livremente apoiado;

90° a partir do apoio quando a borda vizinha for livre."

Na tabela 2.9 apresentam-se funções calculadas com estes critérios, para bordas apoiadas ou engastadas, que foram extraídas de PINHEIRO^[52].

Tabela 2.1 - Momentos de CZERNY (1976): coeficiente de Poisson = 0

VALORES DE μ ; COEFICIENTE DE POISSON = 0						
CASO	μ	$\lambda = \ell_y / \ell_x$				
		1	1,25	1,50	1,75	2
1	μ_x	3,677	5,618	7,299	8,696	9,615
	$\mu_y(*)$	3,677	3,345	2,882	2,639	2,481
2A	μ_x	2,427	4,274	6,024	7,576	8,772
	$\mu_y(*)$	3,401	3,425	3,096	2,809	2,577
	μ'_y	8,403	10,204	11,236	11,834	12,195
2B	μ_x	3,401	4,274	5,051	5,556	5,848
	μ'_x	8,403	10,101	11,111	11,765	12,048
	$\mu_y(*)$	2,427	1,988	1,799	1,718	1,689
3	μ_x	2,488	3,571	4,505	5,128	5,587
	$\mu'_x(*)$	6,993	9,009	10,417	11,364	11,905
	$\mu_y(*)$	2,488	2,193	1,887	1,754	1,661
	$\mu'_y(*)$	6,993	7,752	8,065	8,197	8,197
4A	$\mu_x(*)$	1,621	3,175	4,902	6,579	8,000
	μ_y	2,849	3,195	3,115	2,786	2,359
	μ'_y	6,993	9,009	10,526	11,364	11,905
4B	μ_x	2,849	3,509	3,876	4,082	4,149
	μ'_x	6,993	7,874	8,197	8,333	8,333
	$\mu_y(*)$	1,621	1,374	1,319	1,299	1,299
5A	$\mu_x(*)$	1,789	2,924	3,968	4,739	5,348
	μ'_x	5,465	7,874	9,434	10,526	11,364
	μ_y	2,268	2,183	1,818	1,333	0,990
	$\mu'_y(*)$	6,173	7,407	7,874	8,065	8,130
5B	μ_x	2,268	3,096	3,623	3,953	4,082
	$\mu'_x(*)$	6,173	7,407	8,000	8,265	8,333
	$\mu_y(*)$	1,789	1,477	1,330	1,182	1,031
	μ'_y	5,465	5,714	5,714	5,714	5,714
6	μ_x	1,761	2,703	3,378	3,788	4,000
	μ'_x	5,155	6,711	7,576	8,065	8,333
	μ_y	1,761	1,441	1,070	0,977	0,952
	μ'_y	5,155	5,650	5,714	5,714	5,714

(*) Valores máximos; não se encontram necessariamente no centro

$$m = \mu \frac{p \ell_x^2}{100} \quad p = \text{carga uniforme} \quad \ell_x = \text{menor vão}$$

Tabela 2.2 - Momentos de CZERNY (1976): coeficiente de Poisson = 0,20

VALORES DE μ ; COEFICIENTE DE POISSON = 0,20						
CASO	μ	$\lambda = \ell_y / \ell_x$				
		1	1,25	1,50	1,75	2
1	μ_x	4,412	6,287	7,876	9,223	10,112
	$\mu_y(*)$	4,412	4,468	4,342	4,378	4,404
2A	μ_x	3,107	4,958	6,643	8,138	9,287
	$\mu_y(*)$	3,887	4,279	4,301	4,324	4,332
	μ_y'	8,403	10,204	11,236	11,834	12,195
2B	μ_x	3,887	4,671	5,410	5,899	6,186
	μ_x'	8,403	10,101	11,111	11,765	12,048
	$\mu_y(*)$	3,107	2,843	2,809	2,829	2,859
3	μ_x	2,985	4,010	4,882	5,479	5,919
	$\mu_x'(*)$	6,993	9,009	10,417	11,364	11,905
	$\mu_y(*)$	2,985	2,906	2,788	2,780	2,778
	$\mu_y'(*)$	6,993	7,752	8,064	8,197	8,197
4A	$\mu_x(*)$	2,190	3,814	5,525	7,136	8,472
	μ_y	3,173	3,830	4,096	4,101	3,959
	μ_y'	6,993	9,009	10,526	11,364	11,905
4B	μ_x	3,173	3,784	4,140	4,341	4,409
	μ_x'	6,993	7,874	8,197	8,333	8,333
	$\mu_y(*)$	2,190	2,075	2,094	2,115	2,129
5A	$\mu_x(*)$	2,242	3,361	4,332	5,006	5,546
	μ_x'	5,464	7,874	9,434	10,526	11,364
	μ_y	2,625	2,768	2,612	2,281	2,060
	$\mu_y'(*)$	6,173	7,407	7,874	8,064	8,130
5B	μ_x	2,625	3,391	3,889	4,189	4,288
	$\mu_x'(*)$	6,173	7,407	8,000	8,264	8,333
	$\mu_y(*)$	2,242	2,096	2,054	1,973	1,847
	μ_y'	5,464	5,714	5,714	5,714	5,714
6	μ_x	2,113	2,991	3,592	3,983	4,190
	μ_x'	5,154	6,711	7,576	8,064	8,333
	μ_y	2,113	1,981	1,745	1,734	1,752
	μ_y'	5,154	5,650	5,714	5,714	5,714

(*) Valores máximos; não se encontram necessariamente no centro

$m = \mu \frac{p \ell_x^2}{100}$ $p = \text{carga uniforme}$ $\ell_x = \text{menor vão}$

Tabela 2.3a - Momentos de CZERNY: funções aproximadas

MOMENTOS EM LAJES COM CARGA UNIFORME			
CASO	μ	$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	$\mu = f(\lambda)$
1	μ_x	$1 \leq \lambda \leq 2,5$	$-2,46\lambda^2 + 13,07\lambda - 6,20$
		$2,5 < \lambda \leq 4$	$0,93\lambda + 8,78$
		$\lambda > 4$	12,50
	$\mu_y(*)$	$\lambda \geq 1$	4,40
2A	μ_x	$1 \leq \lambda \leq 2,5$	$-1,78\lambda^2 + 11,53\lambda - 6,64$
		$2,5 < \lambda \leq 4$	$0,96\lambda + 8,66$
		$\lambda > 4$	12,50
	$\mu_y(*)$	$1 \leq \lambda \leq 1,5$	$-2,73\lambda^2 + 7,71\lambda - 1,09$
		$\lambda > 1,5$	4,33
	μ'_y	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-3,75\lambda^2 + 15,04\lambda - 2,89$
		$2 < \lambda \leq 4$	$0,5\lambda + 11,90$
		$\lambda > 4$	12,50
	2B	μ_x	$1 \leq \lambda \leq 2$
$2 < \lambda \leq 4$			$0,42\lambda + 5,35$
$\lambda > 4$			7,03
μ'_x		$1 \leq \lambda \leq 2$	$-3,54\lambda^2 + 14,27\lambda - 2,33$
		$2 < \lambda \leq 4$	$0,22\lambda + 11,61$
		$\lambda > 4$	12,50
$\mu_y(*)$		$1 \leq \lambda \leq 1,25$	$-1,07\lambda + 4,18$
		$\lambda > 1,25$	2,84

Elaborada por L.M. PINHEIRO e R.C.S. NAKAO, com base em CZERNY(1976)

$m = \mu \frac{pl_x^2}{100}$ p = carga uniforme l_x = menor vão Coef.Poisson = 0,20

(*) Valores máximos; não se encontram necessariamente no centro

Tabela 2.3b - Momentos de CZERNY: funções aproximadas

MOMENTOS EM LAJES COM CARGA UNIFORME			
CASO	μ	$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$	$\mu = f(\lambda)$
3	μ_x	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-1,72\lambda^2 + 8,09\lambda - 3,38$
		$2 < \lambda \leq 2,5$	$1,21\lambda + 3,50$
		$2,5 < \lambda \leq 4$	$0,34\lambda + 5,67$
		$\lambda > 4$	7,03
	$\mu'_x(*)$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-3,87\lambda^2 + 16,53\lambda - 5,66$
		$2 < \lambda \leq 2,5$	$1,19\lambda + 9,53$
		$\lambda > 2,5$	12,50
	$\mu_y(*)$	$1 \leq \lambda \leq 1,5$	$-0,42\lambda + 3,41$
		$\lambda > 1,5$	2,78
	$\mu'_y(*)$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-1,88\lambda^2 + 6,83\lambda + 2,04$
		$\lambda > 2$	8,20
	4A	$\mu_x(*)$	$1 \leq \lambda \leq 2$
$2 < \lambda \leq 4$			$-1,02\lambda^2 + 8,02\lambda - 3,51$
$\lambda > 4$			12,50
μ_y		$1 \leq \lambda \leq 1,5$	$-3,13\lambda^2 + 9,67\lambda - 3,36$
		$\lambda > 1,5$	4,10
μ'_y		$1 \leq \lambda \leq 2$	$-4,31\lambda^2 + 17,84\lambda - 6,53$
		$2 < \lambda \leq 3$	$0,59\lambda + 10,73$
		$\lambda > 3$	12,50
4B		μ_x	$1 \leq \lambda \leq 1,5$
	$\lambda > 1,5$		4,17
	μ'_x	$1 \leq \lambda \leq 1,75$	$-3,47\lambda^2 + 11,34\lambda - 0,87$
		$\lambda > 1,75$	8,33
	$\mu_y(*)$	$1 \leq \lambda \leq 1,25$	$-0,36\lambda + 2,55$
		$\lambda > 1,25$	2,10

Elaborada por L.M. PINHEIRO e R.C.S. NAKAO, com base em CZERNY (1976)

$m = \mu \frac{p\ell_x^2}{100}$ p = carga uniforme ℓ_x = menor vão Coef. Poisson = 0,20

(*) Valores máximos; não se encontram necessariamente no centro

Tabela 2.3c - Momentos de CZERNY: funções aproximadas

MOMENTOS EM LAJES COM CARGA UNIFORME			
CASO	μ	$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$	$\mu = f(\lambda)$
5A	$\mu_x (*)$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-1,75\lambda^2 + 8,56\lambda - 4,57$
		$2 < \lambda \leq 2,5$	$1,55\lambda + 2,45$
		$2,5 < \lambda \leq 4$	$0,47\lambda + 5,15$
		$\lambda > 4$	7,03
	μ_x'	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-4,08\lambda^2 + 18,14\lambda - 8,60$
		$2 < \lambda \leq 2,3$	$1,82\lambda + 7,72$
		$2,3 < \lambda \leq 4$	$0,35\lambda + 11,10$
		$\lambda > 4$	12,50
	μ_y	$1 \leq \lambda \leq 1,5$	$-2,39\lambda^2 + 5,95\lambda - 0,94$
		$1,5 < \lambda \leq 2$	$-1,10\lambda + 4,26$
		$\lambda > 2$	2,06
	$\mu_y' (*)$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-2,89\lambda^2 + 10,63\lambda - 1,56$
$\lambda > 2$		8,13	
5B	μ_x	$1 \leq \lambda \leq 1,75$	$-2,02\lambda^2 + 7,60\lambda - 2,96$
		$\lambda > 1,75$	4,17
	$\mu_x' (*)$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-2,99\lambda^2 + 11,12\lambda - 1,96$
		$\lambda > 2$	8,33
	$\mu_y (*)$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-0,40\lambda + 2,64$
		$\lambda > 2$	1,85
	μ_y'	$1 \leq \lambda \leq 1,25$	$\lambda + 4,46$
		$\lambda > 1,25$	5,71
6	μ_x	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-1,81\lambda^2 + 7,48\lambda - 3,56$
		$\lambda > 2$	4,17
	μ_x'	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-3,33\lambda^2 + 13,17\lambda - 4,69$
		$\lambda > 2$	8,33
	μ_y	$1 \leq \lambda \leq 1,5$	$-0,73\lambda + 2,84$
		$\lambda > 1,5$	1,75
	μ_y'	$1 \leq \lambda \leq 1,5$	$-3,46\lambda^2 + 9,76\lambda - 1,15$
		$\lambda > 1,5$	5,71
Elaborada por L.M. PINHEIRO e R.C.S. NAKAO, com base em CZERNY(1976)			
$m = \mu \frac{p\ell_x^2}{100}$ p = carga uniforme ℓ_x = menor vão Coef. Poisson = 0,20			
(*) Valores máximos; não se encontram necessariamente no centro			

Tabela 2.4 - Eficiência das funções aproximadas dos momentos

VALORES DE $\left(\frac{\mu_a}{\mu_c} - 1\right)$ (%)						
CASO	μ	$\lambda = \ell_y / \ell_x$				
		1	1,25	1,50	1,75	2
1	μ_x	0	0,1	-0,1	-0,9	-0,1
	$\mu_y(*)$	-0,3	-1,5	1,3	0,5	-0,1
2A	μ_x	0,1	0,7	0,1	-0,6	0,1
	$\mu_y(*)$	0,1	0,1	0,7	0,1	0
	μ_y	0	-1,5	0	0,9	0
2B	μ_x	0,1	1,6	0,1	0	0,2
	μ_x	0	-1,2	0	0,3	0
	$\mu_y(*)$	0,1	0	1,1	0,4	-0,7
3	μ_x	-0,2	0,6	-0,1	0,4	-0,2
	$\mu_x(*)$	0,1	-0,6	0,1	0,5	0,1
	$\mu_y(*)$	0,2	-0,7	-0,3	0	0,1
	$\mu_y(*)$	0	-1,4	-0,1	0,5	-0,2
4A	$\mu_x(*)$	0	2,4	-0,1	-1,4	-0,1
	μ_y	0,2	0,2	0,2	0	3,6
	μ_y	0,1	0,3	0,1	1,1	0
4B	μ_x	0,2	0,3	1,0	-3,9	-5,4
	μ_x	0,1	0,1	1,7	0,2	0
	$\mu_y(*)$	0	1,2	0,3	-0,7	-1,4
5A	$\mu_x(*)$	-0,1	1,0	0	0,9	0,1
	μ_x	-0,1	-2,2	0	1,2	0
	μ_y	-0,2	-0,2	-0,2	2,4	0
	$\mu_y(*)$	0,1	-2,6	0,1	1,6	0,1
5B	μ_x	-0,2	-0,2	0,2	-0,8	-2,8
	μ_x	0	-1,9	-0,1	1,0	-0,2
	$\mu_y(*)$	-0,1	2,1	-0,7	-1,7	-0,4
	μ_y	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1
6	μ_x	-0,1	-1,0	-0,1	0,1	-0,7
	μ_x	-0,1	-2,1	0	1,2	0
	μ_y	-0,1	-2,7	0	0,9	-0,1
	μ_y	-0,1	-0,1	-0,2	-0,1	-0,1

(*) Valores máximos; não se encontram necessariamente no centro

$m = \mu \frac{p \ell_x^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $\ell_x =$ menor vão

Tabela 2.5 - Flechas de CZERNY (1976): coeficiente de Poisson = 0

VALORES DE α ; COEFICIENTE DE POISSON = 0					
CASO	$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$				
	1	1,25	1,5	1,75	2
1	4,87	7,28	9,27	10,93	12,15
2A	3,34	5,57	7,73	9,62	11,12
2B	3,34	4,38	5,10	5,56	5,85
3	2,52	3,69	4,59	5,19	5,62
4A	2,30	4,25	6,39	8,40	10,13
4B	2,30	2,75	2,97	3,08	3,13
5A	1,88	3,08	4,09	4,84	5,39
5B	1,88	2,45	2,80	3,01	3,09
6	1,52	2,19	2,64	2,91	3,04

Flechas no centro da laje

$$a = \alpha \frac{p \ell_x^4}{100 E h^3}$$

p = carga uniforme
 ℓ_x = menor vão
 E = módulo de deformação longitudinal
 h = espessura

Tabela 2.6 - Flechas de CZERNY (1976): coeficiente de Poisson = 0,20

VALORES DE α ; COEFICIENTE DE POISSON = 0,20					
CASO	$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$				
	1	1,25	1,5	1,75	2
1	4,68	6,99	8,90	10,49	11,66
2A	3,21	5,35	7,42	9,24	10,68
2B	3,21	4,21	4,90	5,34	5,62
3	2,42	3,54	4,41	4,98	5,40
4A	2,21	4,08	6,13	8,06	9,72
4B	2,21	2,64	2,85	2,96	3,00
5A	1,80	2,96	3,93	4,65	5,17
5B	1,80	2,35	2,69	2,89	2,97
6	1,46	2,10	2,53	2,79	2,92

Flechas no centro da laje

$$a = \alpha \frac{p\ell_x^4}{100Eh^3}$$

p = carga uniforme
 ℓ_x = menor vão
 E = módulo de deformação longitudinal
 h = espessura

Tabela 2.7 - Flechas de CZERNY: funções aproximadas

FLECHAS EM LAJES COM CARGA UNIFORME		
CASO	$\lambda = \ell_y/\ell_x$	$\alpha = f(\lambda)$
1	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-2,94\lambda^2 + 15,80\lambda - 8,18$
	$2 < \lambda \leq 2,5$	$4,04\lambda + 3,58$
	$2,5 < \lambda \leq 4$	$1,30\lambda + 10,43$
	$\lambda > 4$	15,63
2A	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-1,90\lambda^2 + 13,17\lambda - 8,06$
	$2 < \lambda \leq 2,5$	$5,57\lambda - 0,46$
	$2,5 < \lambda \leq 4$	$1,44\lambda + 9,86$
	$\lambda > 4$	15,63
2B	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-1,94\lambda^2 + 8,23\lambda - 3,08$
	$2 < \lambda \leq 4$	$0,44\lambda + 4,74$
	$\lambda > 4$	6,50
3	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-2,00\lambda^2 + 8,98\lambda - 4,56$
	$2 < \lambda \leq 4$	$0,55\lambda + 4,30$
	$\lambda > 4$	6,50
4A	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-0,66\lambda^2 + 9,49\lambda - 6,62$
	$2 < \lambda \leq 4$	$-1,28\lambda^2 + 10,14\lambda - 5,44$
	$\lambda > 4$	15,63
4B	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-0,98\lambda^2 + 3,73\lambda - 0,54$
	$2 < \lambda \leq 4$	$0,06\lambda + 2,88$
	$\lambda > 4$	3,13
5A	$1 \leq \lambda \leq 2,5$	$-1,78\lambda^2 + 8,71\lambda - 5,13$
	$2,5 < \lambda \leq 4$	$0,65\lambda + 3,89$
	$\lambda > 4$	6,50
5B	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-1,22\lambda^2 + 4,83\lambda - 1,81$
	$2 < \lambda \leq 4$	$0,08\lambda + 2,81$
	$\lambda > 4$	3,13
6	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-1,36\lambda^2 + 5,54\lambda - 2,72$
	$2 < \lambda \leq 4$	$0,10\lambda + 2,72$
	$\lambda > 4$	3,13

Elaborada por L.M. PINHEIRO e R.C.S. NAKAO, com base em CZERNY(1976)

Flechas no centro da laje p = carga uniforme

$a = \alpha \frac{p\ell_x^4}{100Eh^3}$ ℓ_x = menor vão

E = módulo de deformação longitudinal

h = espessura

Tabela 2.8 - Eficiência das funções aproximadas das flechas

VALORES DE $\left(\frac{\alpha_a}{\alpha_c} - 1\right)$ (%)					
CASO	$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$				
	1	1,25	1,5	1,75	2
1	0	-0,2	0,1	-0,2	0
2A	0	1,6	0	-0,8	0
2B	0	-0,8	0	0,8	0
3	0	0	0	1,0	0
4A	0	3,2	0	-1,2	0
4B	0	-1,8	0	0,9	0
5A	0	0,5	0	0,2	0
5B	0	-1,2	0	0,6	0
6	0	-1,0	0	0,7	0

Flechas no centro da laje

$$a = \alpha \frac{p \ell_x^4}{100Eh^3}$$

p = carga uniforme
 ℓ_x = menor vão
 E = módulo de deformação longitudinal
 h = espessura

Tabela 2.9 - Reações de apoio conforme a NBR 6118

REAÇÕES DE APOIO EM LAJES COM CARGA UNIFORME					
	λ	ρ_x	ρ'_x	ρ_y	ρ'_y
1	-	$5 - \frac{2,5}{\lambda}$	-	2,5	-
2A (*)	<1,37	$2,5\lambda(\sqrt{3}-1)$	-	$\frac{5\lambda(\sqrt{3}-1)-5\lambda^2(2-\sqrt{3})}{2,5\lambda\sqrt{3}-1,25\lambda^2(3-\sqrt{3})}$	$\frac{5\lambda(3-\sqrt{3})-5\lambda^2(2\sqrt{3}-3)}{2,5\lambda\sqrt{3}-1,25\lambda^2(3-\sqrt{3})}$
	>1,37	$5 - \frac{1,25}{\lambda}(\sqrt{3}+1)$	-	$\frac{2,5}{0,625(3+\sqrt{3})}$	$2,5\sqrt{3}$
2B (*)	-	$\frac{5(\sqrt{3}-1) + \frac{5}{\lambda}(\sqrt{3}-2)}{2,5\sqrt{3} - \frac{1,25}{\lambda}(3-\sqrt{3})}$	$5(3-\sqrt{3}) - \frac{5}{\lambda}(2\sqrt{3}-3)$	$2,5(\sqrt{3}-1)$	-
3 (*)	-	$\frac{-5(1-\sqrt{3}) + \frac{2,5}{\lambda}(1-\sqrt{3})}{2,5\sqrt{3} - \frac{1,25}{\lambda}\sqrt{3}}$	$5(3-\sqrt{3}) - \frac{2,5}{\lambda}(3-\sqrt{3})$	$\frac{2,5(\sqrt{3}-1)}{1,25\sqrt{3}}$	$2,5(3-\sqrt{3})$
	< $\sqrt{3}$	$\frac{5}{6}\lambda\sqrt{3}$	-	-	$5\lambda - \frac{5}{6}\lambda^2\sqrt{3}$
4A	> $\sqrt{3}$	$5 - \frac{2,5}{\lambda}\sqrt{3}$	-	-	$2,5\sqrt{3}$
4B	-	-	$5 - \frac{5}{6\lambda}\sqrt{3}$	$\frac{5}{6}\sqrt{3}$	-
5A (*)	<1,27	$\frac{5}{6}\lambda\sqrt{3}$ $0,625\lambda(\sqrt{3}+1)$	2,5 λ	-	$5\lambda - \frac{5}{12}\lambda^2(3+\sqrt{3})$
	>1,27	$\frac{5(\sqrt{3}-1) - \frac{5}{\lambda}(2\sqrt{3}-3)}{2,5\sqrt{3} - \frac{3,75}{\lambda}(\sqrt{3}-1)}$	$5(3-\sqrt{3}) - \frac{15}{\lambda}(2-\sqrt{3})$	-	$2,5(3-\sqrt{3})$
5B (*)	-	-	$5 - \frac{5}{12\lambda}(3+\sqrt{3})$	$\frac{5}{6}\sqrt{3}$ $1,25(\sqrt{3}+1)$	2,5
6	-	-	$5 - \frac{2,5}{\lambda}$	-	2,5

Elaborada por L.M. PINHEIRO e P.R. WOLFENBERGER: item 3.3.2.9 da NBR 6118

$$r = \rho \frac{p\ell_x}{10} \quad p = \text{carga uniforme} \quad \ell_x = \text{menor vão} \quad \lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$$

(*) Expressões inferiores: consideram metade do alívio

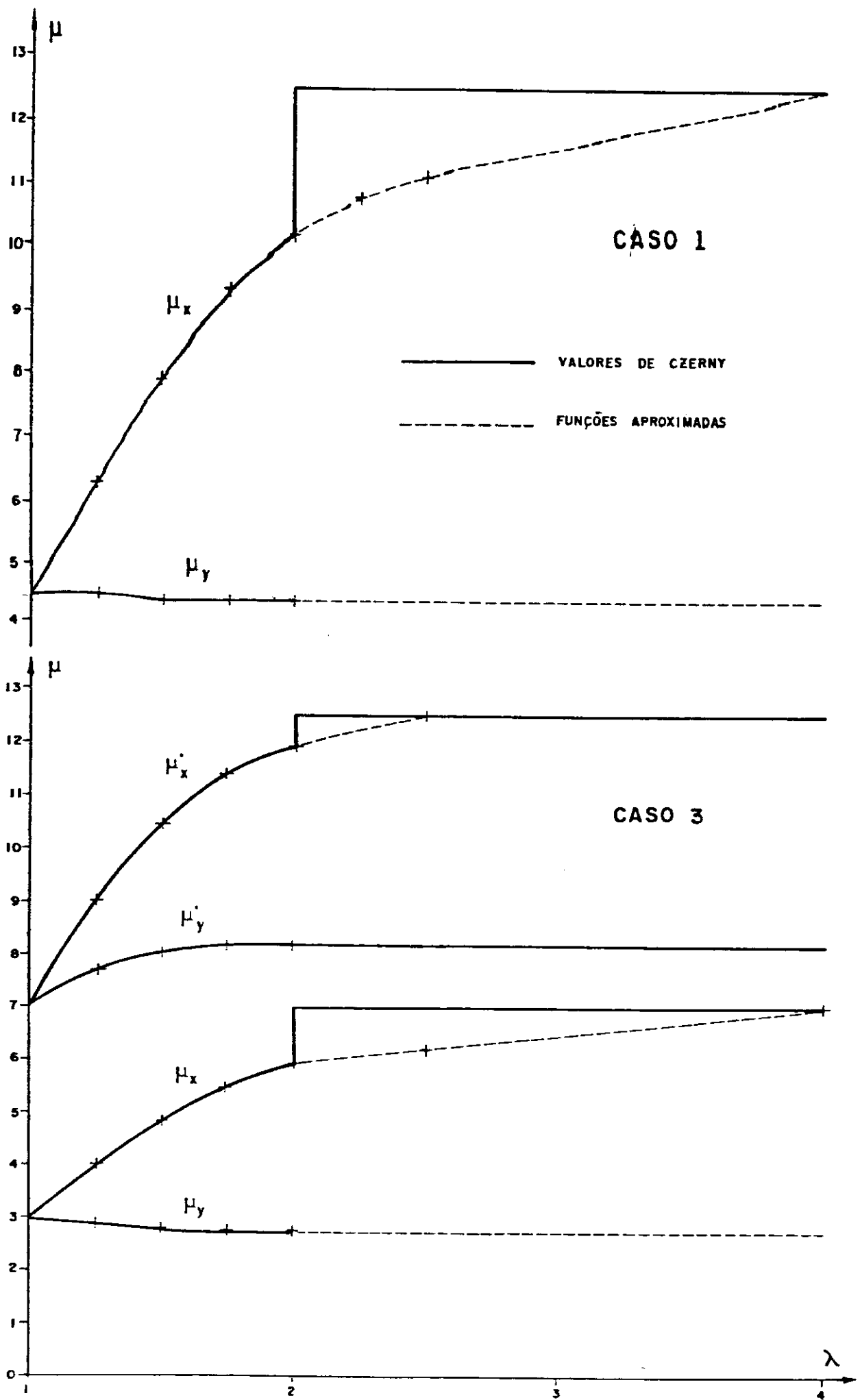


Figura 2.20 — Momentos

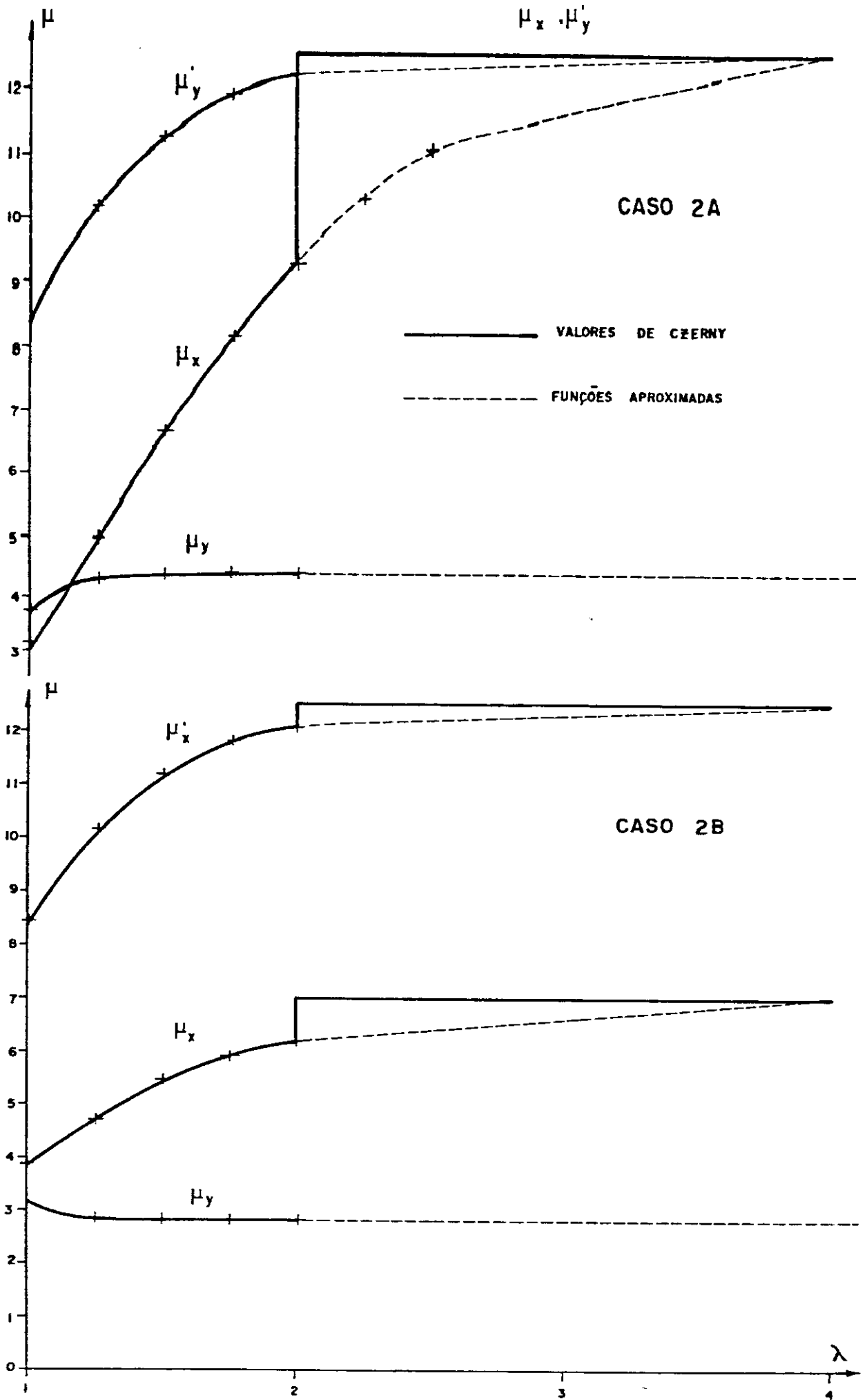
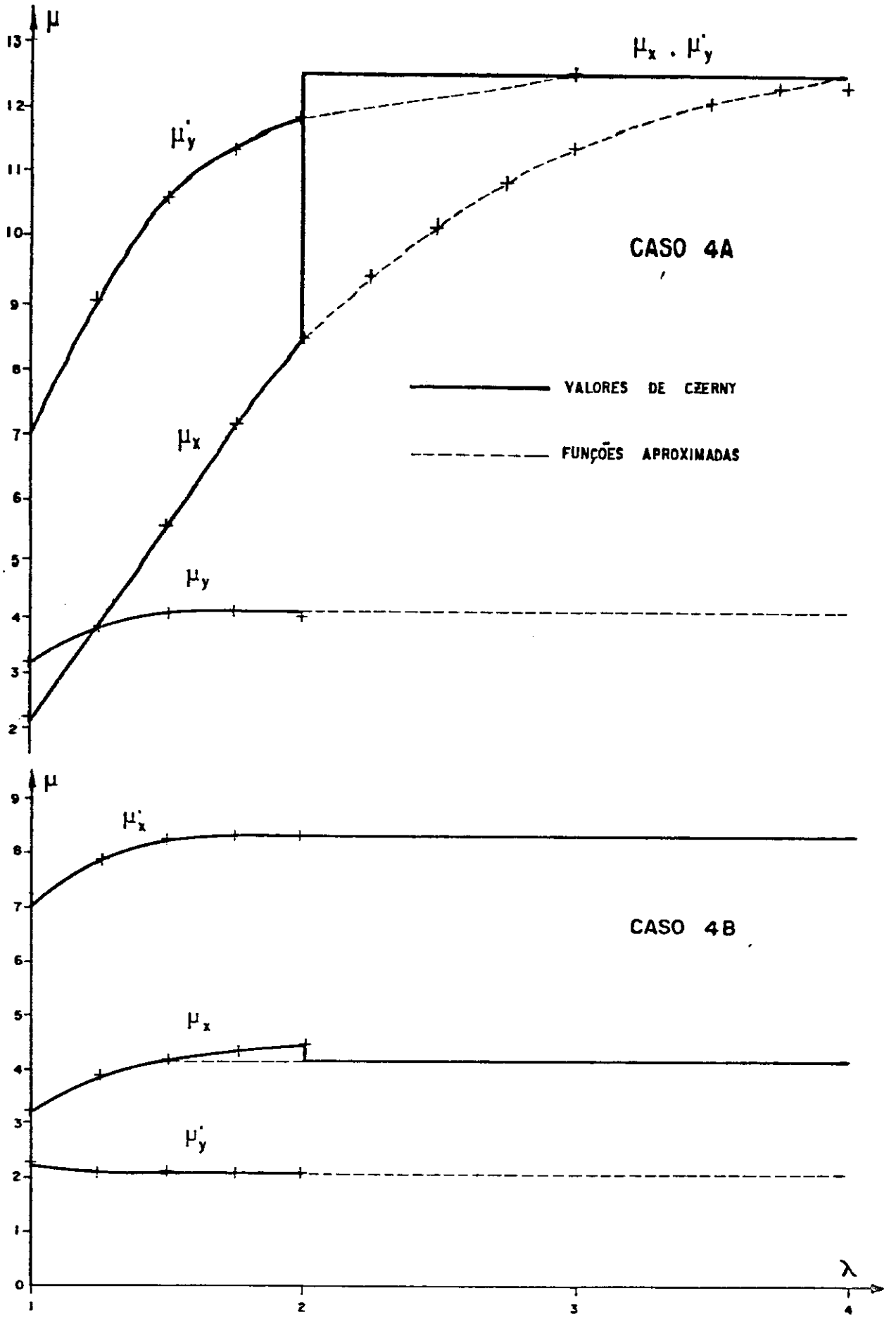


Figura 2.2b - Momentos



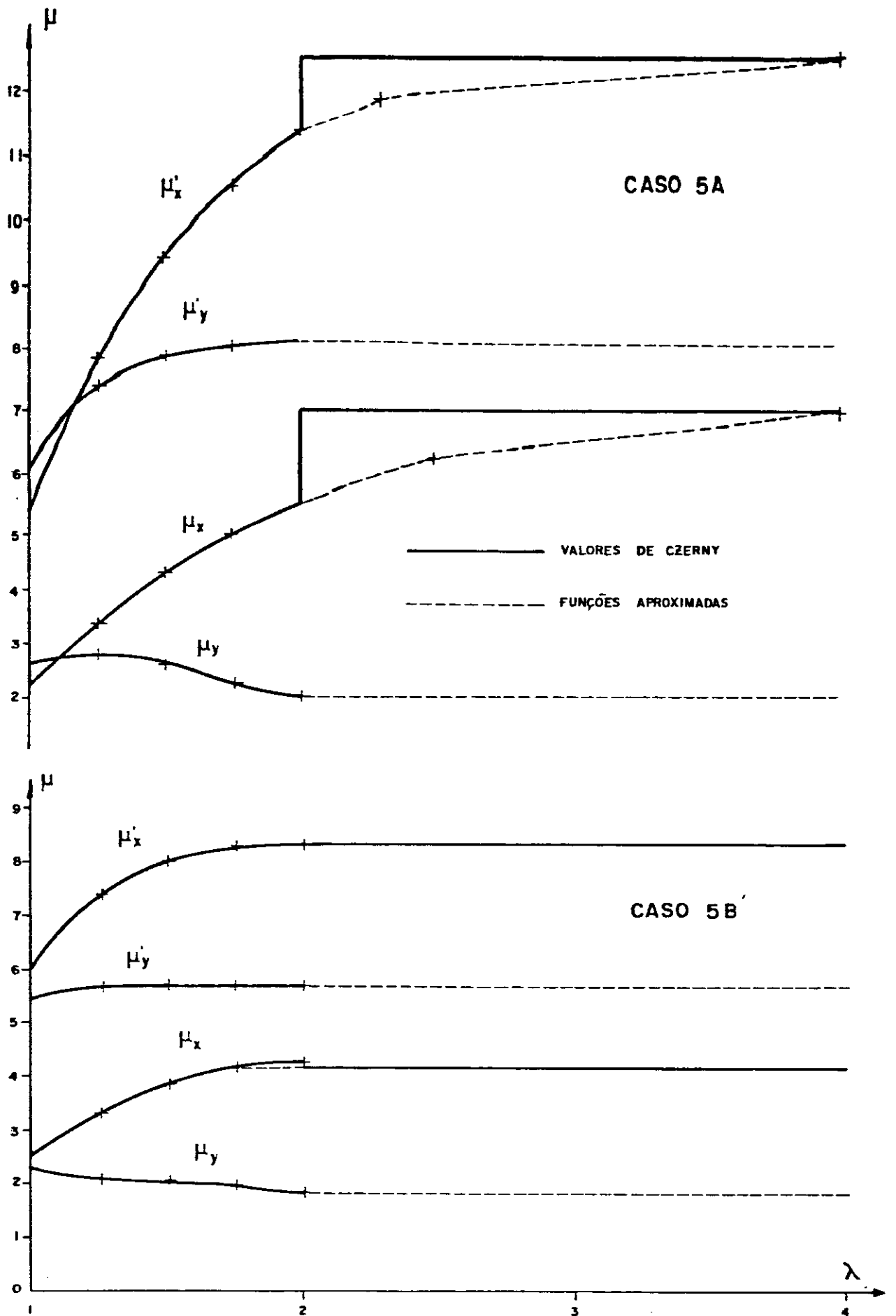


Figura 2.2 d — Momentos

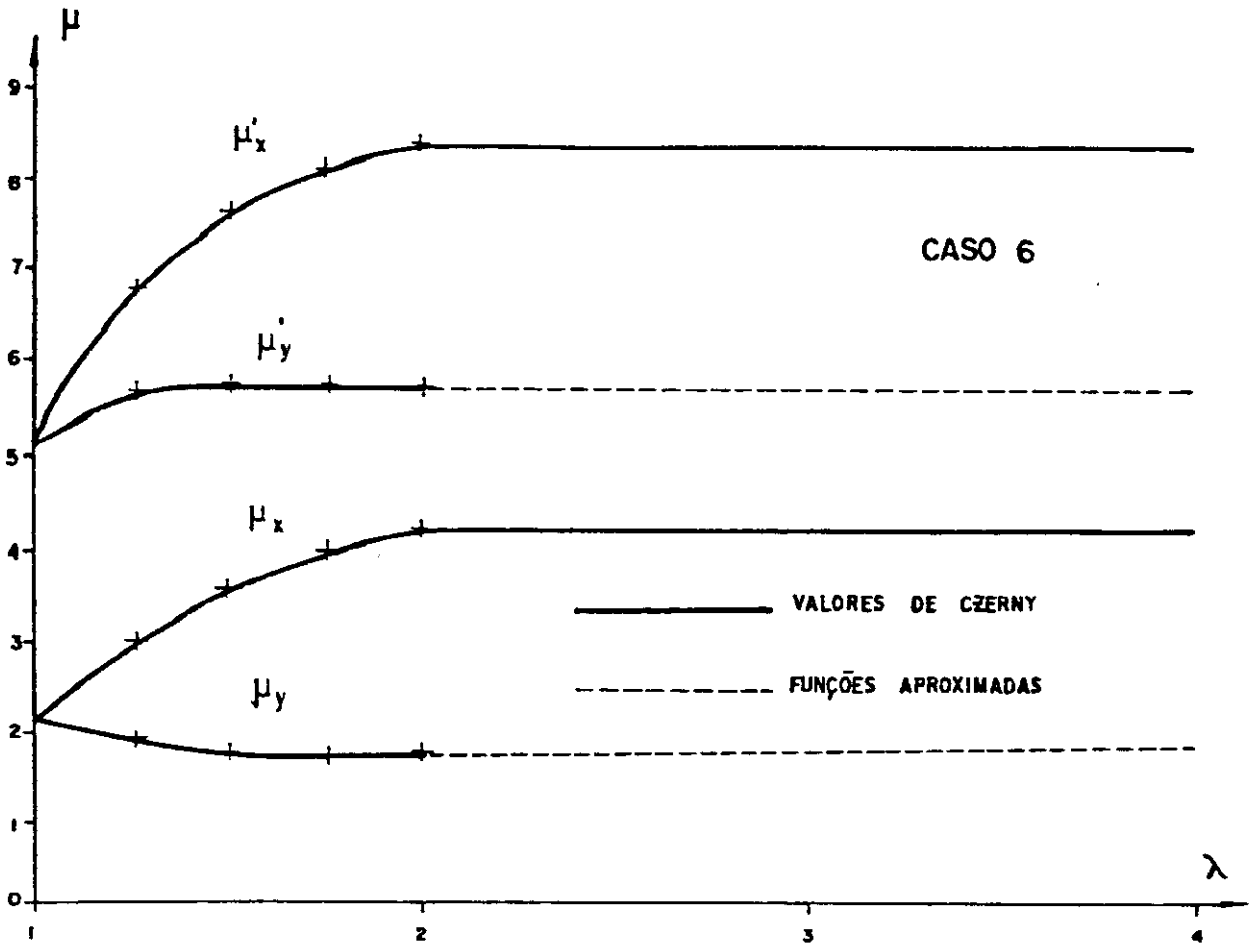


Figura 2.2e — Momentos

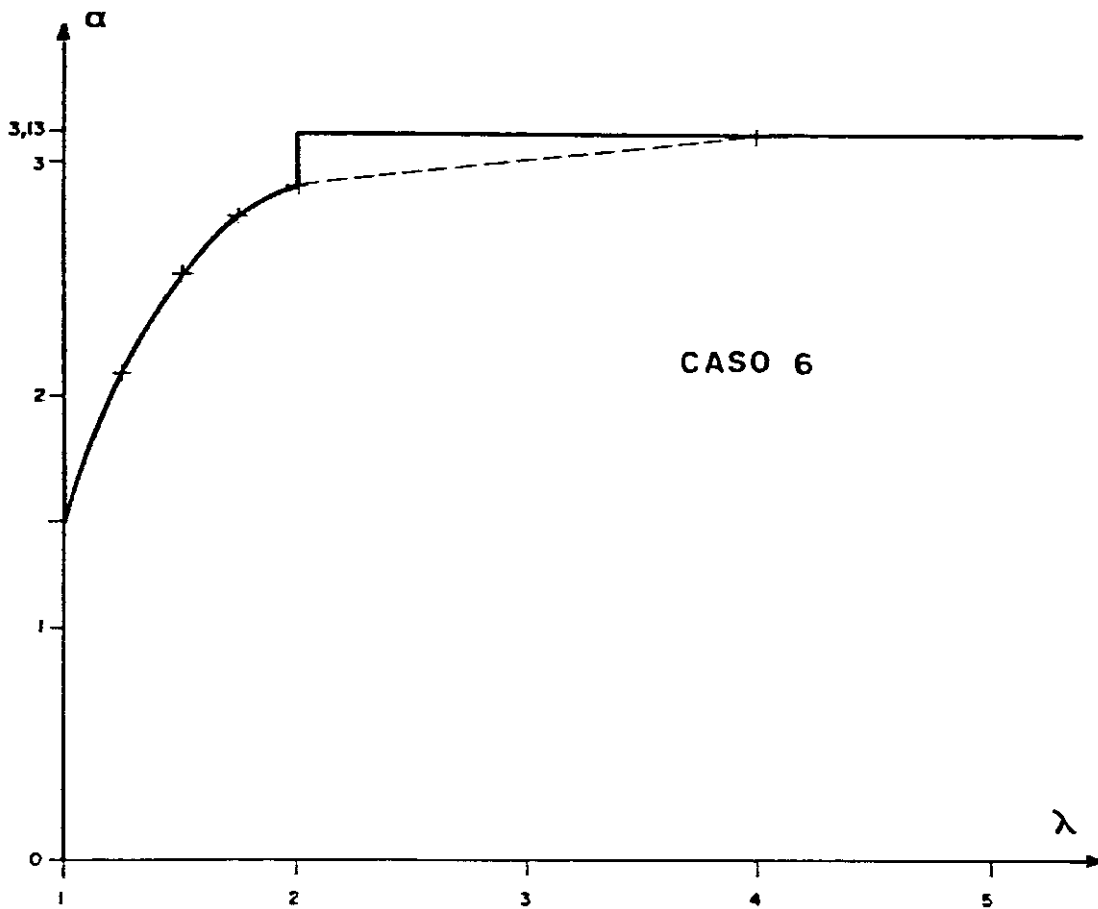


Figura 2.3a — Flechas

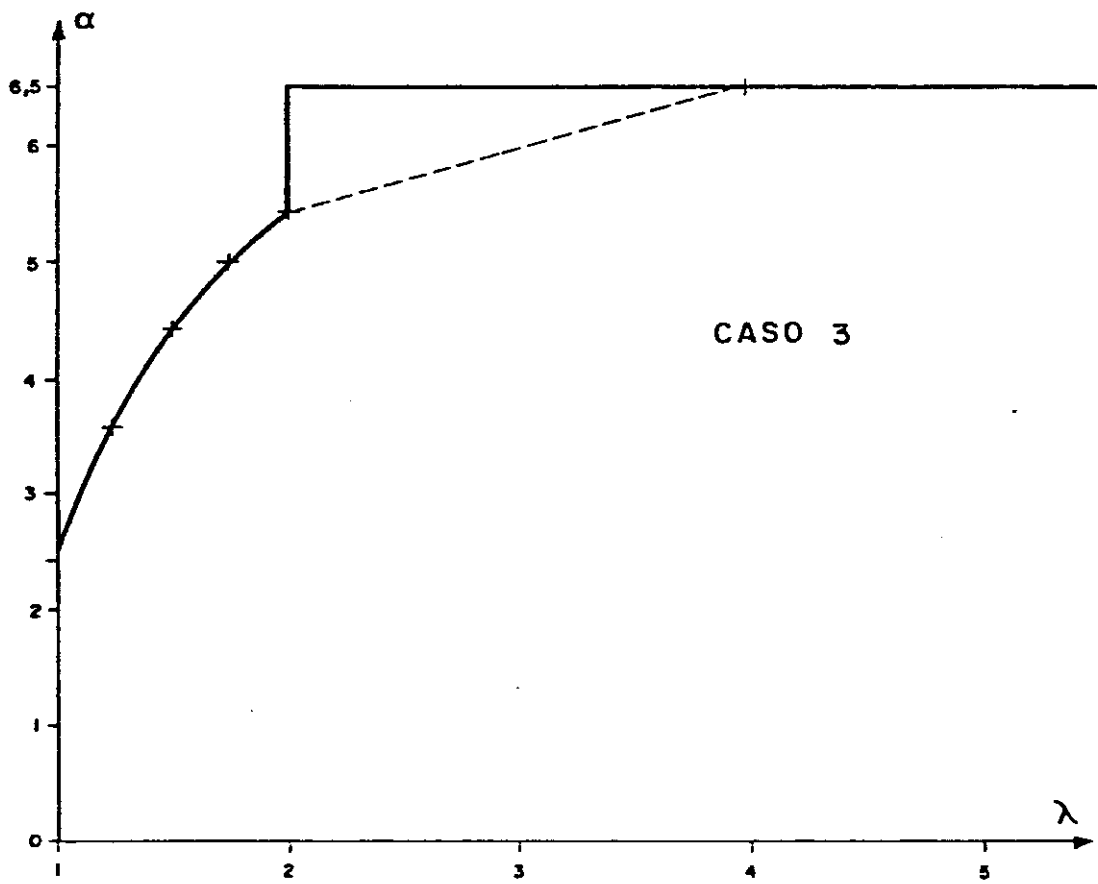
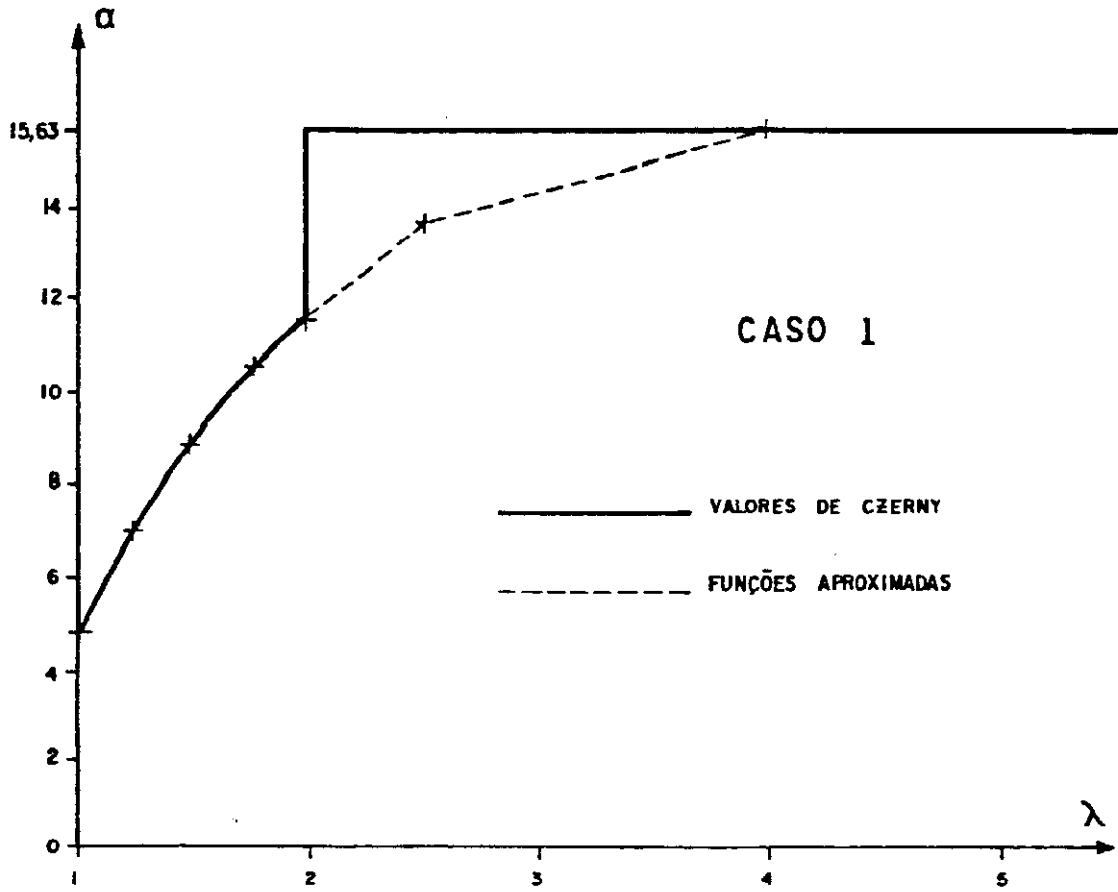


Figura 2.3b — Flechas

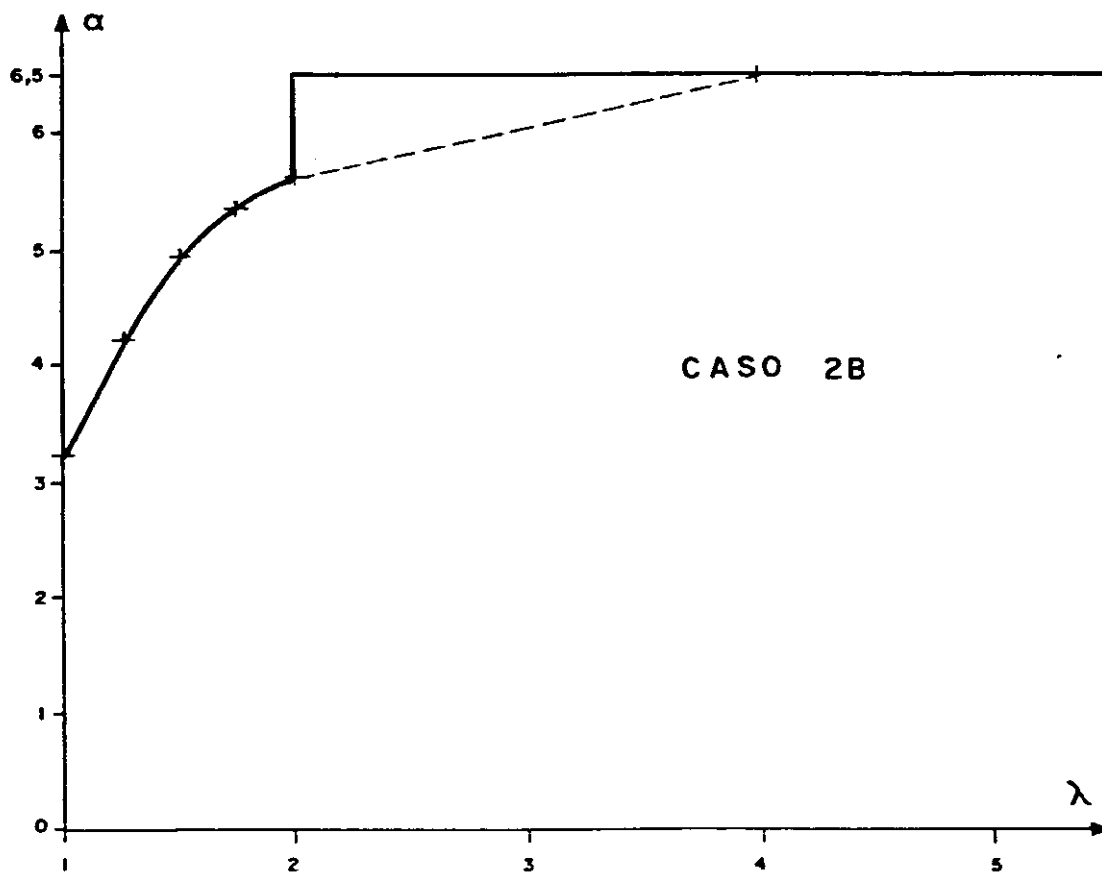
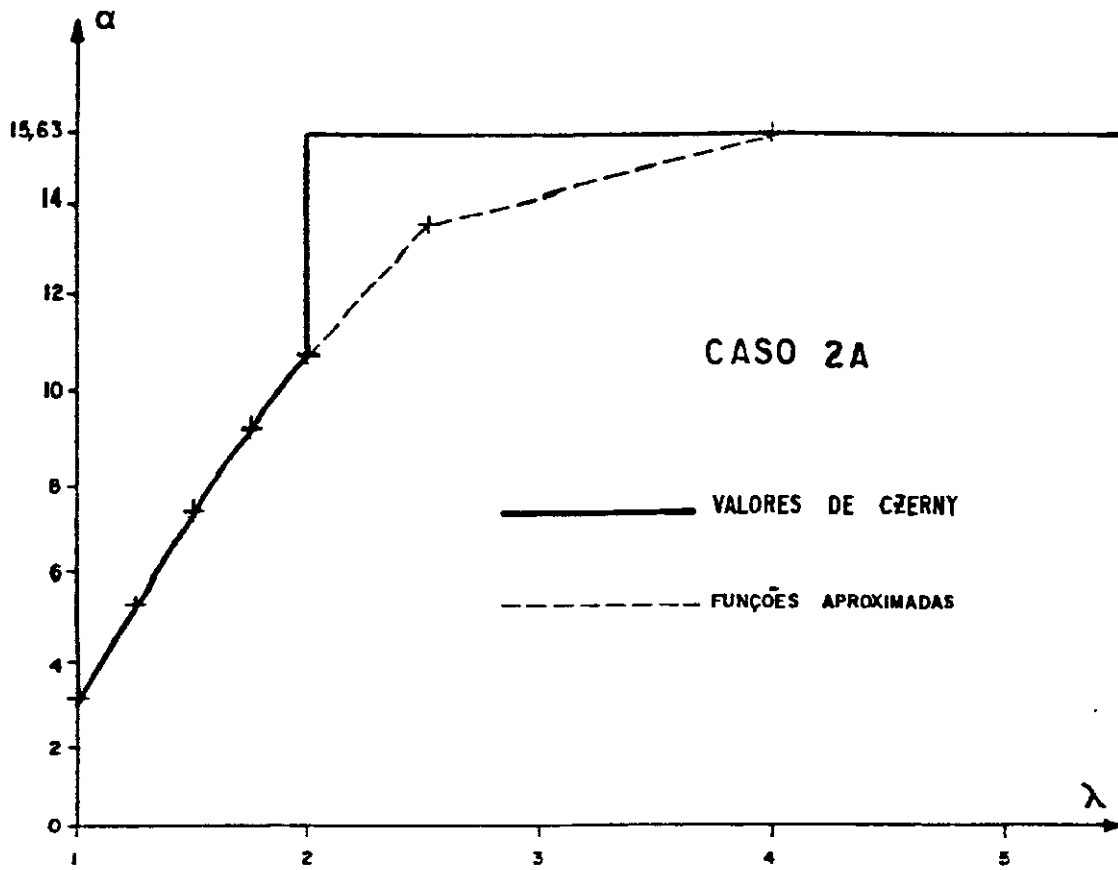


Figura 2.3c — Flechas

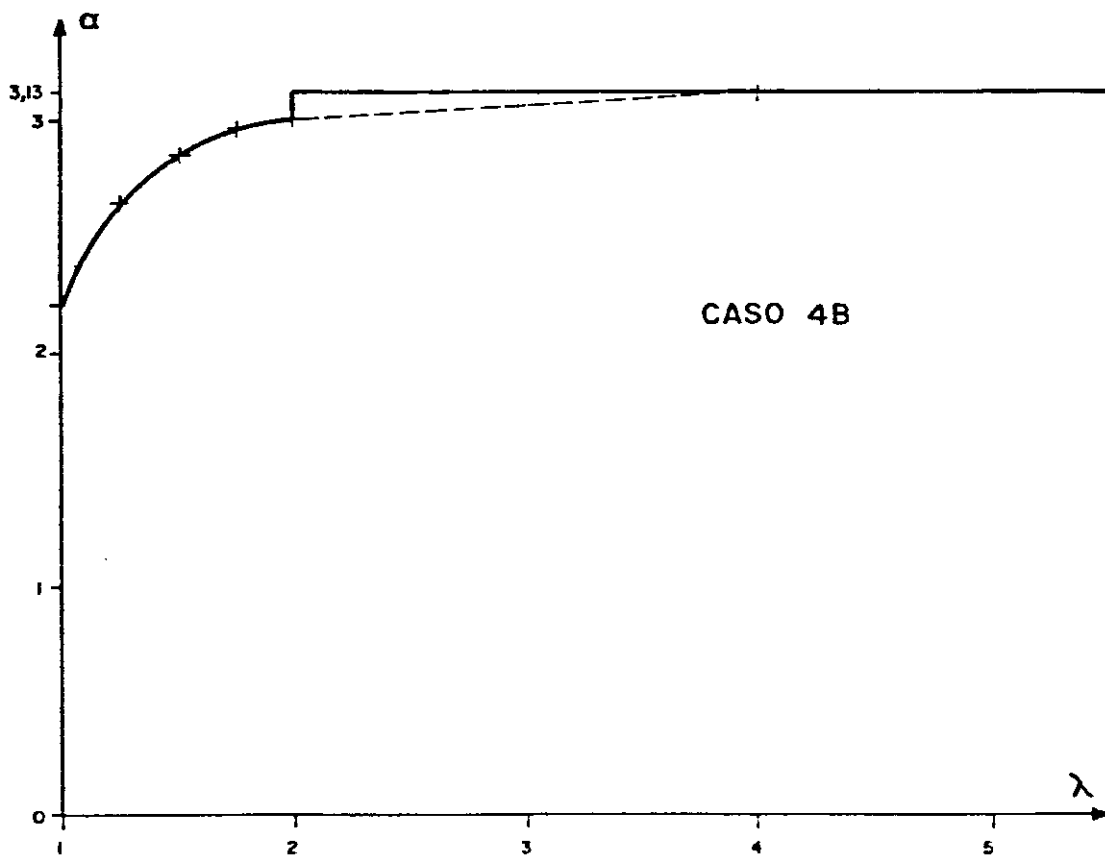
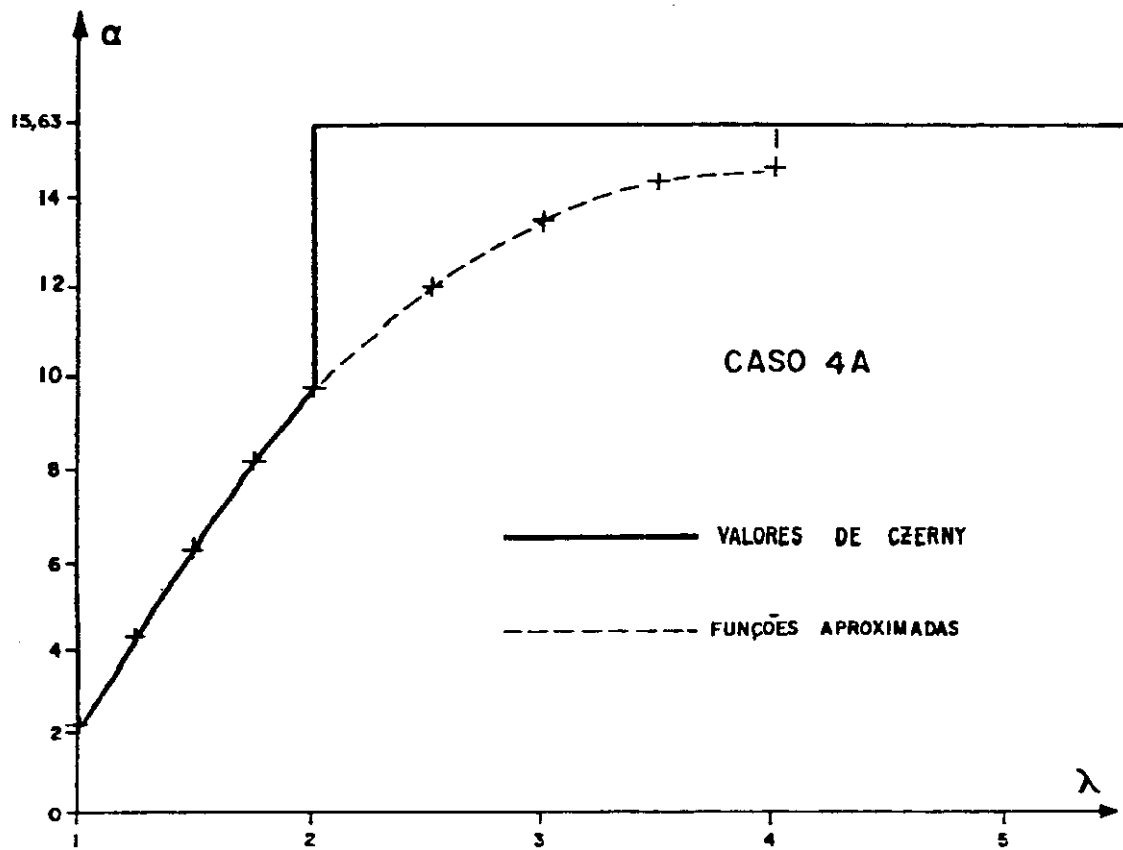


Figura 2.3d — Flechas

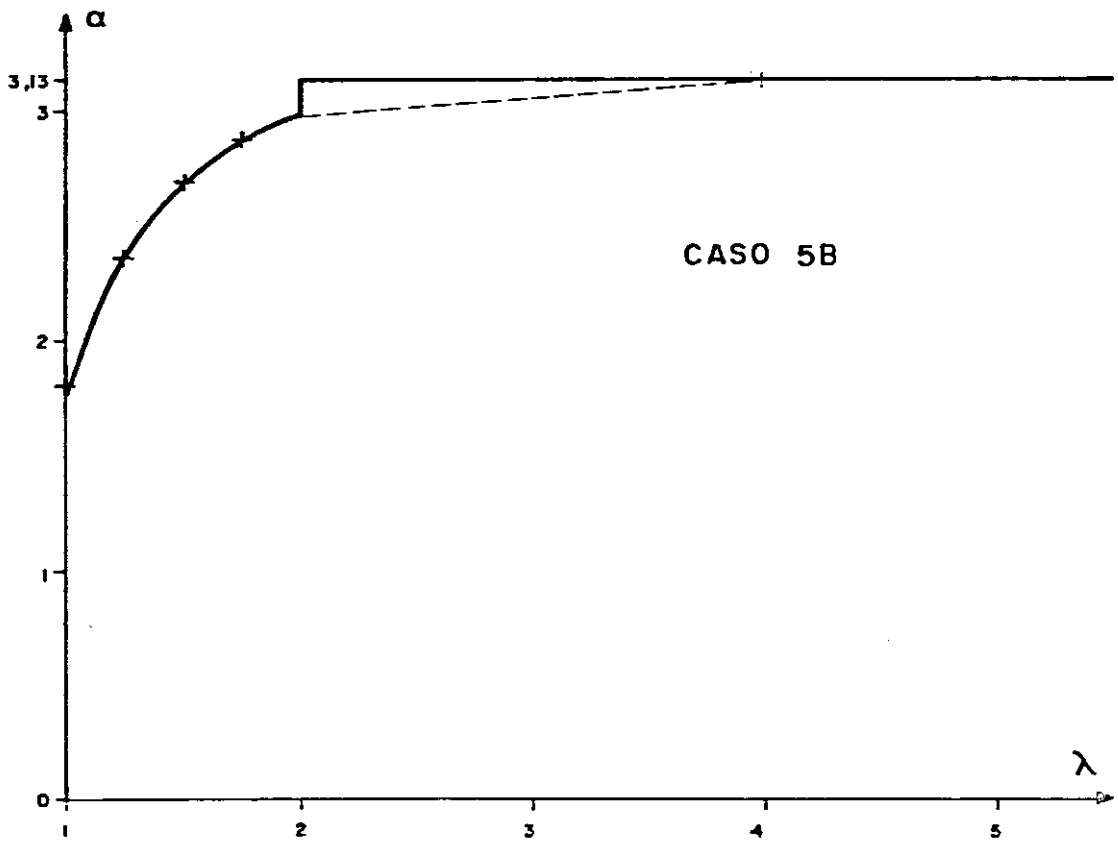
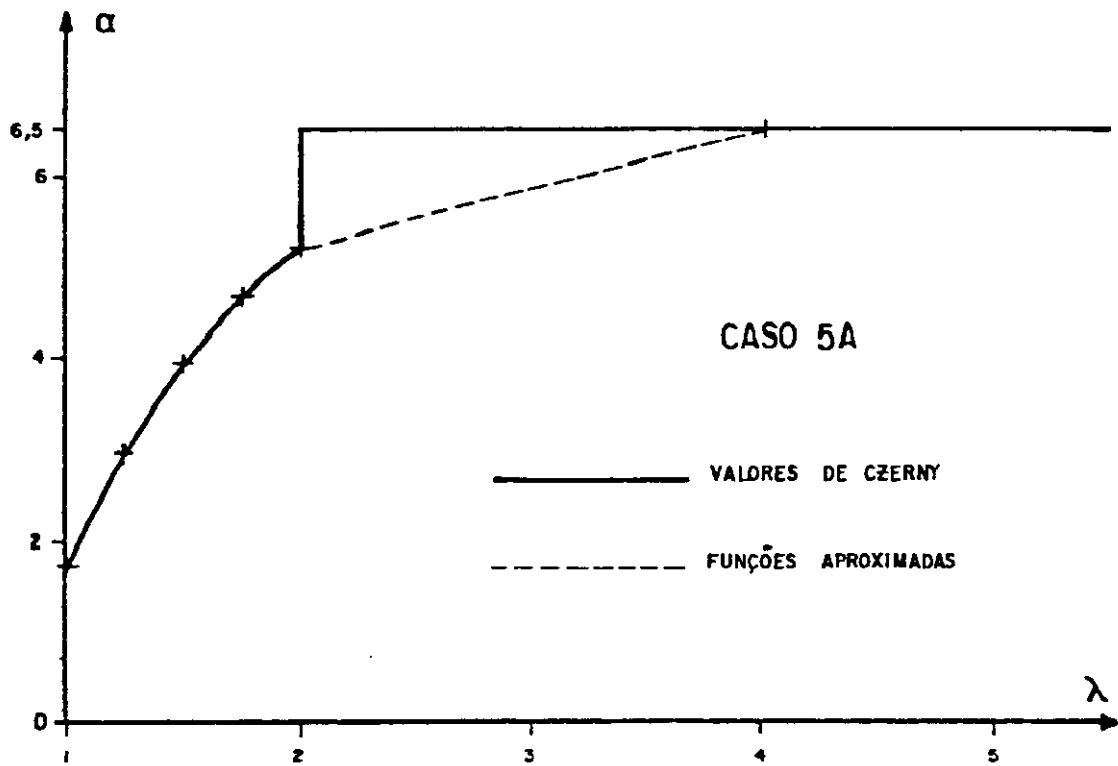


Figura 2.3e — Flechas

3. A TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS

3.1 - GENERALIDADES

A teoria das charneiras plásticas, aqui também referida através das iniciais TCP, consiste de uma aplicação às placas do teorema do limite superior do cálculo plástico, conforme já foi comentado no capítulo 1. Embora seja de aplicação mais geral, neste trabalho serão consideradas as lajes de concreto.

As lajes, assim como outras peças de concreto armado submetidas à flexão, podem atingir a ruína por ruptura do concreto à compressão, caso em que são denominadas superarmadas, ou por alongamento plástico excessivo da armadura de tração, sendo então conhecidas como subarmadas.

Nas peças superarmadas, a ruína ocorre de maneira súbita, sem que a estrutura apresente sintomas visíveis de sua iminência; elas são, então, perigosas. Em decorrência do mau aproveitamento do aço, as peças superarmadas são, também, antieconômicas. Elas devem, portanto, ser evitadas. Consequentemente, as lajes usuais são subarmadas, as quais não apresentam os inconvenientes citados.

3.1.1 - Fases de comportamento

Considere-se uma laje de concreto armado submetida a um carregamento proporcional, ou seja, um sistema de forças que pode ser colocado em função de um único parâmetro P . Com o crescimento de P , observam-se distintas fases de comportamento, que se apresentam no diagrama esquemático da figura 3.1

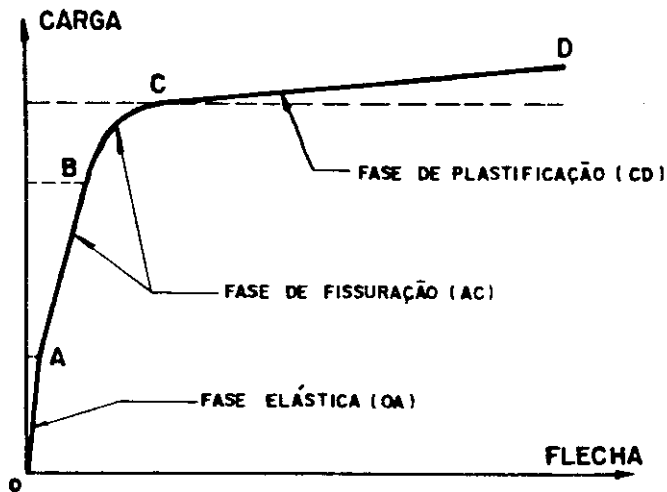


FIG. 3.1 - FASES DE COMPORTAMENTO DAS LAJES SUBARMADAS

No início, para pequenas forças, tem-se a fase elástica (OA na figura 3.1), onde o concreto resiste à tração e a laje comporta-se de acordo com a teoria das placas em regime elástico.

Com o aumento de P , a resistência do concreto à tração é ultrapassada nas seções de maiores momentos, iniciando-se a fase de fissuração (AC na figura 3.1). A formação das fissuras faz com que haja um crescimento mais rápido dos momentos fletores nas seções não fissuradas, provocando novas fissuras. Enquanto as armaduras permanecem em regime elástico linear (AB na figura 3.1), a laje ainda se comporta de acordo com a teoria das placas em regime elástico, devendo considerar-se a redução de rigidez nas seções fissuradas; nes-

ta fase, o crescimento dos deslocamentos é mais acentuado que na fase anterior. Quando as armaduras ultrapassam o regime elástico linear (BC na figura 3.1), o crescimento dos deslocamentos é mais acentuado ainda.

Com o crescimento dos momentos fletores nas seções mais solicitadas, as armaduras entram em escoamento, dando início à fase de plastificação (CD na figura 3.1). Nesta fase, caracterizada por grandes deformações, há redistribuição de esforços bem mais pronunciada que na fase anterior. As seções plastificadas definem as linhas de plastificação, nas quais os momentos fletores permanecem praticamente constantes, crescendo nas seções vizinhas até que estas se plastifiquem e assim sucessivamente; após o completo desenvolvimento das linhas de plastificação, a laje transforma-se em um mecanismo.

Obtido o mecanismo, torna-se impossível qualquer acréscimo de carga; os deslocamentos podem aumentar até mesmo com a diminuição da carga aplicada. Nas regiões mais solicitadas, o deslocamento da superfície neutra na direção da face comprimida e a decorrente diminuição das seções resistentes à compressão fazem com que ocorra a ruptura do concreto, acarretando o colapso da laje. Diz-se que a laje atingiu a ruína, sendo a máxima carga atuante denominada carga limite, carga de ruína ou, incorretamente, carga de ruptura.

Pelo fato de as linhas de plastificação funcionarem como eixos de rotação para as regiões não plastificadas, elas são denominadas charneiras plásticas. A configuração com que as charneiras se apresentam é chamada de configuração de ruína.

3.1.2 - Reserva de resistência

Verifica-se que, em geral, a carga efetiva de ruína é superior à carga prevista pela teoria das charneiras plásticas. Mesmo após completamente desenvolvida a configu-

ração de ruína, com deformações plásticas já excessivas, o colapso pode ser alcançado somente após ser esgotada uma reserva de resistência da laje.

Uma das explicações para esta reserva de resistência provém do fenômeno conhecido como endurecimento do aço da armadura. No cálculo, considera-se que, após o início de escoamento, a tensão na armadura permanece constante. Na realidade, mesmo para os aços de dureza natural e principalmente para os aços encruados, a tensão cresce com o aumento das deformações, dando uma segurança suplementar.

Outra justificativa para a reserva de resistência refere-se a lajes com restrições para os deslocamentos horizontais, restrições estas decorrentes da rigidez lateral das vigas de borda ou, principalmente, da continuidade em relação às lajes vizinhas. Com a mudança de forma do plano médio da laje e com o impedimento dos deslocamentos horizontais ao longo do contorno, surgem os efeitos de membrana, que aumentam a resistência da laje.

Por exemplo, seja uma laje contínua submetida a uma carga crescente. Durante a fase elástica, a superfície neutra permanece próxima da superfície média da laje. Iniciada a fase de fissuração, a superfície neutra desloca-se para as proximidades da face comprimida, caminhando para baixo na região dos apoios e para cima na região central da laje. Para pequenos deslocamentos transversais, a superfície neutra, na região dos apoios, permanece abaixo da mesma superfície, na região central da laje, dando origem a um comportamento de casca (ver figura 3.2). Este comportamento é conhecido como efeito compressivo de membrana ou arqueamento, sendo este último nome decorrente de que, ao longo de uma faixa de laje, o comportamento é de um arco.

Na fase de plastificação, os grandes deslocamentos transversais fazem com que o efeito de arqueamento diminua, até as forças longitudinais mudarem de compressão para tração. Nesta situação, a laje encontra-se bastante plastifi-

cada e tem o comportamento de uma estrutura pên^{til}, caracterizando o efeito de membrana tracionada (ver figura 3.3). Como nesta situação é somente a armadura que resiste, este efeito fica bem caracterizado nas lajes com elevadas taxas de armadura.

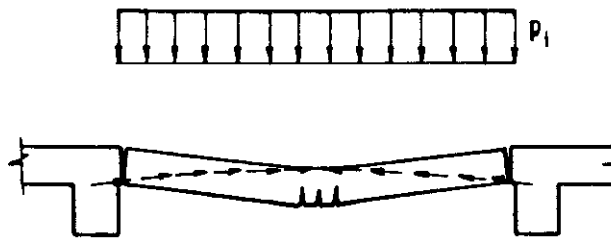


FIG. 3.2 - EFEITO DE ARQUEAMENTO

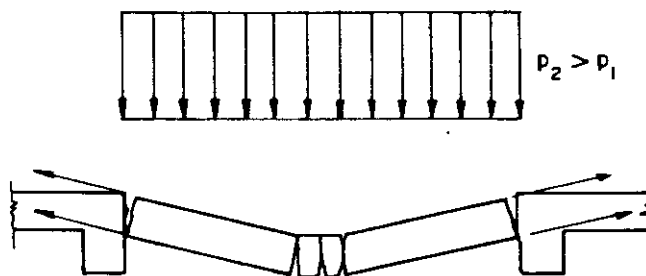


FIG. 3.3 - EFEITO DE MEMBRANA TRACIONADA

Aspectos qualitativos dos efeitos de arqueamento e de membrana tracionada também podem ser visualizados nos diagramas da figura 3.4. Uma análise mais rigorosa desses efeitos não será aqui apresentada. Para tal, podem ser consultados os trabalhos de OCKLESTON^{[53],[54]}, PARK^{[55],[56],[57],[58],[59],[60]}, BASTOS^[61] e PADILHA^[62], entre diversos outros.

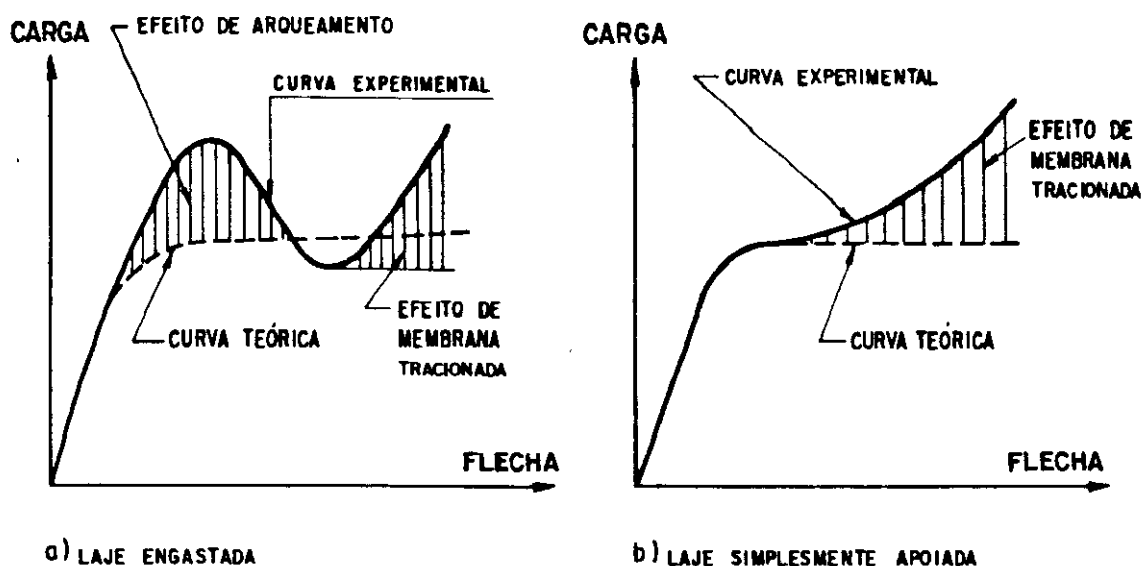


FIG. 3.4 - EFEITOS DE ARQUEAMENTO E DE MEMBRANA TRACIONADA

3.1.3 - Materiais frágeis e materiais dúcteis

Denominam-se frágeis os materiais que se rompem com pequenas deformações, não apresentando comportamento plástico e portanto não se aplicando a eles os métodos da teoria da plasticidade. Nesses casos encontram-se, por exemplo, o concreto simples e as lajes de concreto superarmadas (ver figura 3.5a).

Então, para aplicação da teoria da plasticidade, é indispensável que o material seja dúctil, isto é, que a ruptura ocorra após grandes deformações. Enquadram-se neste caso, por exemplo, o aço e as lajes de concreto subarmadas (ver figura 3.5b)

Conclui-se, portanto, que para lajes de concreto simples e para lajes superarmadas não é válida a teoria das charneiras plásticas.

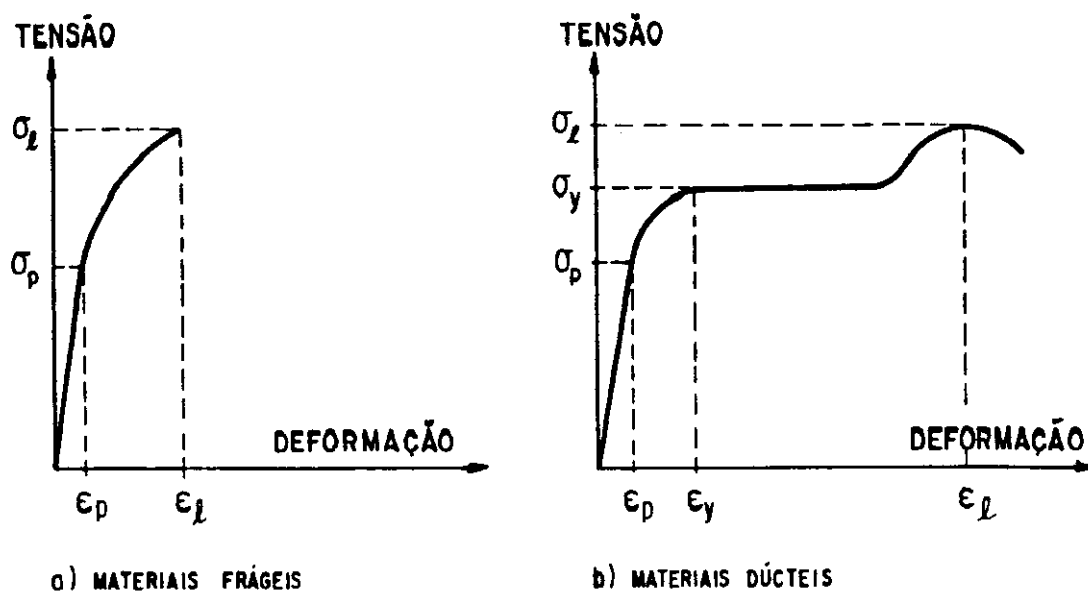


FIG. 3.5 - DIAGRAMAS TENSÕES - DEFORMAÇÕES DOS MATERIAIS FRÁGEIS E DÚCTEIS.

3.1.4 - Materiais elastoplásticos e rigidoplásticos

As considerações de materiais elastoplásticos e rigidoplásticos são simplificações teóricas.

Numa peça constituída de material elastoplástico, submetida a cargas proporcionais, o deslocamento de um de seus pontos é, a princípio, proporcional à carga (fase elástica); depois, o acréscimo da deformação é mais acentuado que o da carga (fase elastoplástica, AB na figura 3.6a); finalmente, após iniciada a plastificação, a deformação cresce sob carga constante (fase plástica).

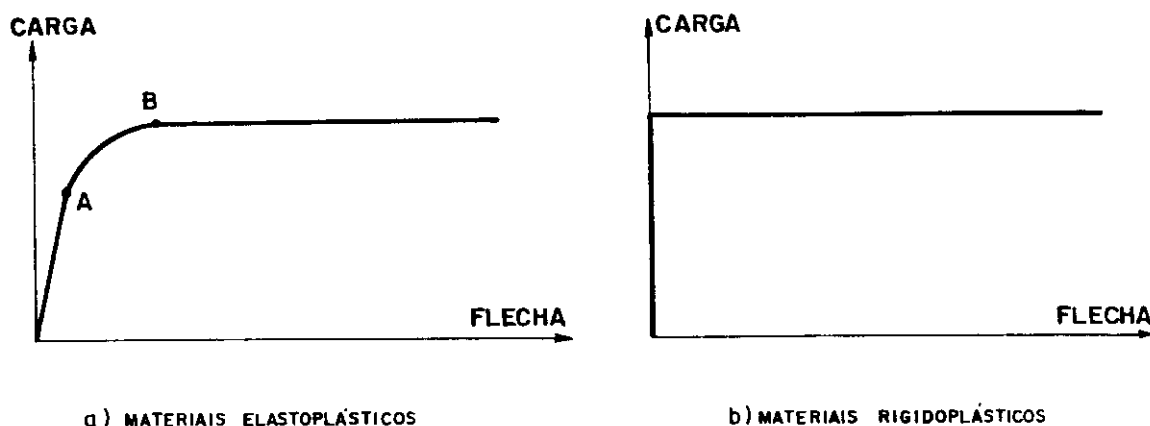


FIG. 3.6 - COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS ELASTOPLÁSTICOS E RIGIDOPLÁSTICOS

Numa peça constituída de material rigidoplástico, toda deformação é impedida até o início da plastificação, que aparece, então, bruscamente (figura 3.6b).

Entretanto, as cargas de ruína calculadas pelos teoremas fundamentais da teoria da plasticidade, são válidas tanto para peças elastoplásticas como para peças rigidoplásticas (ver, exemplo, MASSONET & SAVE^[63]).

Sendo iguais os resultados das cargas de ruína para os dois materiais, outras razões levam a concluir que a consideração elastoplástica não é melhor que a rigidoplástica. A primeira parte da hipótese de que as deformações até a fase elastoplástica permaneçam muito pequenas, a fim de estudar a peça na sua forma inicial conhecida. Se isto ocorre, no instante em que se inicia a fase plástica, a forma da peça resulta muito próxima da inicial e, portanto, comporta-se sensivelmente como se fosse rígida até este momento. Por outro lado, se as deformações reais antes da fase plástica não são desprezíveis, as duas considerações são igualmente deficientes: a primeira porque a hipótese referente às deformações não se verifica, e a segunda porque representa de maneira muito grosseira a peça real. Como o objetivo é a determinação da carga de ruína, a melhor alternativa consiste em considerar o material como sendo rigidoplástico.

3.2 - FUNDAMENTOS DA TEORIA

Com base nos conceitos apresentados nos itens anteriores, foi formulada a teoria das charneiras plásticas. As hipóteses de cálculo, as regras para determinação das configurações das charneiras e os processos de cálculo são apresentados a seguir.

3.2.1 - Hipóteses de cálculo

As hipóteses gerais da teoria das charneiras plásticas são as seguintes:

a) as lajes devem ser subarmadas, isto é, as taxas de armadura devem ser pequenas o suficiente para que não ocorra ruptura do concreto comprimido antes do escoamento das armaduras, permitindo o completo desenvolvimento das linhas de plastificação e, conseqüentemente, do mecanismo de colapso;

b) não deverá ocorrer ruína prematura por cisalhamento ou por punção;

c) o material é considerado rigidoplástico, ou seja, desprezam-se as deformações elásticas em face das deformações plásticas; daí decorre que a superfície média da laje plastificada é poliédrica, sendo as charneiras consideradas retas delimitando regiões planas; as charneiras curvas são constituídas de infinitos segmentos de reta; as únicas deformações consideradas são, portanto, rotações relativas das regiões adjacentes a uma charneira em torno dela;

d) ainda decorrente da consideração rigidoplástica, os momentos fletores m nos vãos e m' nos apoios, correspondentes à plastificação das charneiras e denominados momentos de plastificação, são admitidos constantes ao longo dessas charneiras;

e) desprezam-se as influências dos esforços de membrana, provenientes do impedimento dos deslocamentos no plano da laje.

3.2.2 - Configurações das charneiras

As configurações das charneiras, que dependem da natureza e da distribuição das cargas e, também, da disposição das armaduras, devem satisfazer às condições de apoio da

laje, de maneira a ser geometricamente possível a formação da superfície poliédrica da laje deformada.

Todas as configurações geometricamente possíveis são denominadas configurações possíveis. A cada posicionamento das charneiras, e conseqüentemente a cada uma das diversas configurações possíveis, corresponde uma determinada intensidade de carga que fornece a energia consumida na formação e no desenvolvimento das linhas de plastificação. Pelo teorema cinemático da teoria da plasticidade (ver, novamente, MASSONET & SAVE^[63]), a carga efetiva de ruína é a menor entre todas aquelas correspondentes às configurações possíveis. Esta carga é denominada carga de ruína e a correspondente distribuição das charneiras é chamada de configuração de ruína.

Nos problemas de dimensionamento, em que é a carga que se conhece, a situação é recíproca. Para cada configuração das charneiras encontra-se um determinado valor do momento de plastificação. A configuração de ruína é aquela associada ao maior valor do momento de plastificação. Para este valor é que deve ser dimensionada a laje.

Para se determinar, portanto, a configuração de ruína de uma laje há necessidade de se analisarem todas as configurações possíveis.

Cada região da laje, delimitada pelas charneiras plásticas, gira em torno de um eixo, denominado eixo de rotação.

Para determinar as diversas configurações possíveis das charneiras, existem as seguintes regras básicas:

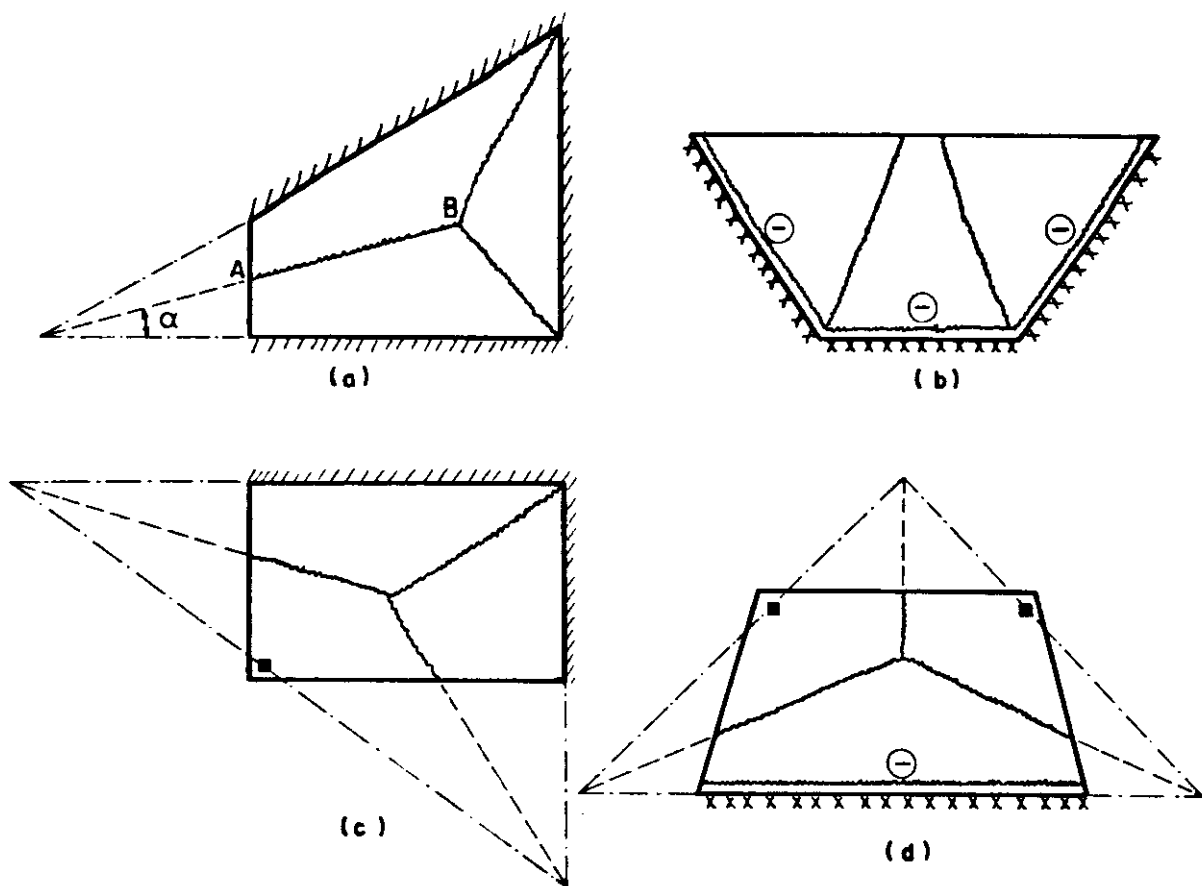
a) cargas distribuídas geralmente dão origem a charneiras retilíneas, embora nem sempre a configuração de ruína seja a mais desfavorável;

b) ao longo dos contornos engastados, formam-se charneiras superiores, também chamadas de charneiras negativas, pois são correspondentes aos momentos considerados




negativos (figuras 3.7b e 3.7d);

c) cada charneira passa pelo ponto de interseção dos eixos de rotação das regiões delimitadas por essas charneiras negativas;

d) os eixos de rotação das diversas regiões coincidem com lados simplesmente apoiados (figuras 3.7a e 3.7c), com lados engastados (figuras 3.7b e 3.7d) ou passam pelos pontos de apoio isolados (figuras 3.7c e 3.7d).



Convenções :

 CHARNEIRA
 BORDA SIMPLEMENTE APOIADA
 BORDA LIVRE

 BORDA ENGASTADA
 EIXO DE ROTAÇÃO
 APOIO PONTUAL

FIG. 3.7 - EXEMPLOS DE CONFIGURAÇÕES POSSÍVEIS

Pode-se notar que para cada caso da figura 3.7, existe um conjunto de configurações possíveis caracterizadas por certas incógnitas. No caso da figura 3.7a, por exemplo, as configurações possíveis dependem do ângulo α , que define a direção da charneira AB, e também do ponto B, onde ocorre a bifurcação da mesma.

Quando houver contorno curvilíneo, como na figura 3.8, o mesmo pode ser considerado como o limite para o qual tende um contorno poligonal, com lados cujos comprimentos tendem para zero. As charneiras, que deveriam convergir para os vértices do polígono, ficarão encostadas umas às outras formando uma superfície regrada, mas não plana, que se admite ser possível.

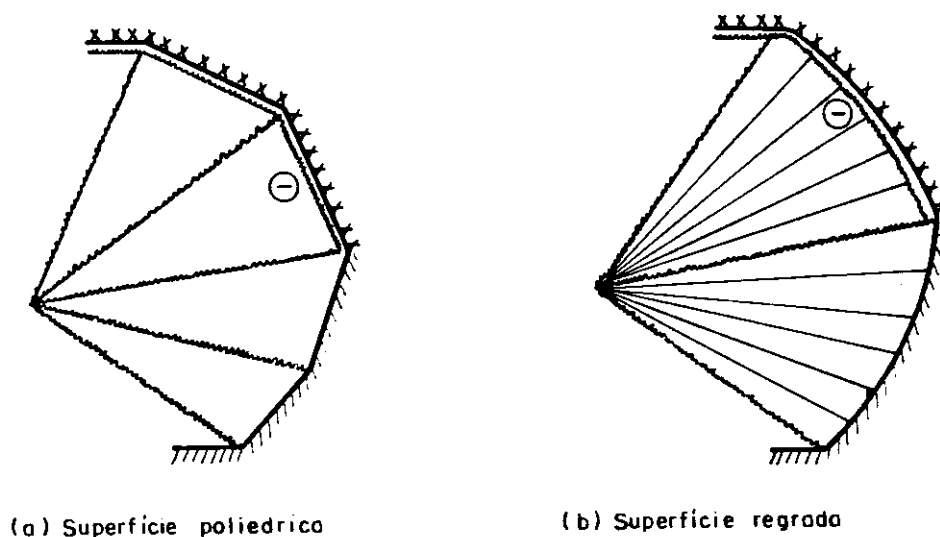


FIG. 3.8 - CONFIGURAÇÕES DE RUÍNA DE LAJES COM CONTORNO POLIGONAL E CURVILÍNEO

3.2.3 - Processos de cálculo

Existem dois processos de cálculo. O primeiro vem sendo empregado desde o trabalho original de JOHANSEN [10], denominado processo do equilíbrio ou processo das forças no dais, e tem suas particularidades apresentadas no item 3.3. Em alguns casos este processo é substituído com vantagens

por outro mais recente, denominado processo da energia, cujos fundamentos se encontram no item 3.4.

3.3 - PROCESSO DO EQUILÍBRIO

Nas lajes isótropas, o momento de plastificação, além de ser constante ao longo de cada charneira (item 3.2.1d), é também igual para qualquer direção, isto é, é constante ao longo de todas as linhas de plastificação da laje.

Ao longo de uma linha de plastificação de uma laje isótropa atua um momento m por unidade de comprimento, donde o momento total ao longo da linha de plastificação resulta igual ao produto de seu comprimento pelo valor de m .

3.3.1 - Definição das forças nodais

Seja uma parte de laje, como por exemplo a parte 1 da figura 3.9a, destacada do conjunto no instante que precede a ruína. Para que o equilíbrio em que se achava o conjunto não seja desrespeitado, deve-se aplicar, na parte isolada, a reação de apoio na borda AD e, nas linhas de plastificação AE, EF e FD, os respectivos momentos de plastificação $m \cdot \overline{AE}$, $m \cdot \overline{EF}$ e $m \cdot \overline{FD}$, as forças cortantes e os momentos torçores.

Não se conhecendo a distribuição de forças cortantes ao longo das charneiras, admitem-se, nas extremidades dessas charneiras, pares estaticamente equivalentes. Assim, na charneira EF da figura 3.9, substituem-se a força cortante total e o momento torçor pelos pares estaticamente equivalentes V_{EF} e V_{FE} . Na figura 3.9a, os pontos indicam forças para cima e o sinal x corresponde a forças para baixo. V_{EF} e $-V_{FE}$ constituem pares de forças de transmissão, formados por duas forças iguais e de sentidos contrários, nas margens opostas da linha de plastificação (ver figura 3.9b).

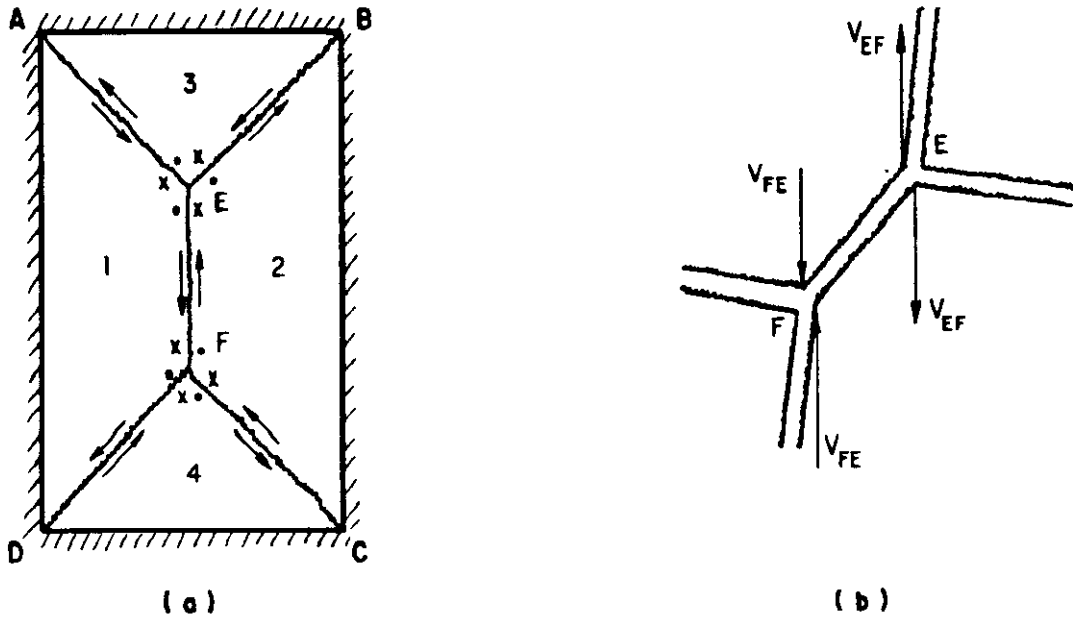


FIG. 3.9 - FORÇAS DE TRANSMISSÃO

Na figura 3.9a, os sentidos das forças de transmissão foram adotados com base no sentido da seta correspondente ao vetor momento. Nos pontos de onde partem as setas, as forças de transmissão são supostas positivas e voltadas para cima, sendo negativas e para baixo nos demais.

Para o nó E da figura 3.9 pode-se escrever, respectivamente para as partes 1, 2 e 3 da laje:

$$\begin{aligned} K_{E1} &= V_{EF} - V_{EA} , \\ K_{E2} &= V_{EB} - V_{EF} , \\ K_{E3} &= V_{EA} - V_{EB} . \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Para o nó F, analogamente para as partes 1, 2 e 4, resulta:

$$\begin{aligned} K_{F1} &= V_{FD} - V_{FE} , \\ K_{F2} &= V_{FE} - V_{FC} , \\ K_{F4} &= V_{FC} - V_{FD} . \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

As forças K_{E1} , K_{E2} , K_{E3} , K_{F1} , K_{F2} e K_{F4} são denominadas forças nodais, indicando o primeiro índice o nó a que pertencem e o segundo a correspondente parte da laje.

3.3.2 - Resultante das forças em um nó

Pode-se demonstrar facilmente que

A SOMA ALGÉBRICA DAS FORÇAS NODAIS, EM UM NÓ QUALQUER, É IGUAL A ZERO.

Para tal, basta calcular a somatória das forças nodais nos nós E e F, dadas pelas expressões (3.3.1) e (3.3.2). Obtêm-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} K_{E1} + K_{E2} + K_{E3} &= V_{EF} - V_{EA} + V_{EB} - V_{EF} + V_{EA} - V_{EB} = 0, \\ K_{F1} + K_{F2} + K_{F3} &= V_{FD} - V_{FE} + V_{FE} - V_{FC} + V_{FC} - V_{FD} = 0 \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Esta conclusão independe da convenção de sinais ora adotada e também independe do sentido adotado para as forças de transmissão.

3.3.3 - Determinação das forças nodais

As forças nodais podem ser determinadas partindo-se da hipótese de que nas proximidades das linhas de plastificação o momento fletor é o mesmo que existe ao longo dessas linhas.

Seja um caso geral de laje isótropa, com momento de plastificação positivo m e negativo m' , e um nó onde concorrem duas charneiras positivas e uma negativa, como na figura 3.10a.

Considere-se os triângulos OAO' e OCO' , sendo $\overline{OO'} = dx$ um comprimento infinitesimal (figura 3.10b). No triângulo OAO' (figura 3.10c), sobre a charneira OA atua o momento total $m \overline{OA}$ e o par estaticamente equivalente V_{OA} e V_{AO} ; sobre OO' , atuam o momento fletor total $m' dx$, a força cortante $dV = \tau dx$ e o momento torçor dM_t ; sobre o triângulo OAO' age a carga dP , que, considerada como uniformemente distribuída com intensidade p , vale:

$$dP = \frac{1}{2} p \overline{OA} dx \operatorname{sen} \alpha .$$

Com a hipótese de que na seção AO', vizinha de AO, o momento m tem o mesmo valor máximo, resulta que na seção AO' haverá um momento total $m \overline{AO}'$.

Considerando-se $\cos d\theta = 1$ por ser $d\theta$ um ângulo muito pequeno, a equação de equilíbrio de momentos em torno de AO' fornece

$$\begin{aligned} & -V_{OA} dx \operatorname{sen} \alpha - m \overline{OA} - m' dx \cos \alpha - dM_t \operatorname{sen} \alpha + \\ & + \tau dx \eta dx \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2} p \overline{OA} dx \operatorname{sen} \alpha \xi dx \operatorname{sen} \alpha + \\ & + m \overline{AO}' = 0. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Sendo

$$\overline{OA} = \overline{AO}' + dx \cos \alpha \quad (3.3.5)$$

e desprezando-se as contribuições dos momentos da força cortante e da carga externa, por serem infinitésimos de ordem superior, a equação (3.3.4) fica

$$\begin{aligned} & -V_{OA} dx \operatorname{sen} \alpha - m \overline{AO}' - m dx \cos \alpha - m' dx \cos \alpha + \\ & - dM_t \operatorname{sen} \alpha + m \overline{AO}' = 0. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Dividindo-se todos os termos de (3.3.6) por $dx \operatorname{sen} \alpha$, chega-se a:

$$V_{OA} = - \frac{dM_t}{dx} - (m + m') \operatorname{cotg} \alpha. \quad (3.3.7)$$

Analogamente, para o triângulo OCO' (figura 3.10b), a condição de equilíbrio de momentos em torno da seção vizinha O'C fornece, considerando-se, diretamente, o vetor resultante $m dx$ dos dois vetores $m \overline{CO}$ e $m \overline{O'C}$,

$$V_{OC} dx \operatorname{sen} \beta - m dx \cos \beta - m' dx \cos \beta + dM_t \operatorname{sen} \beta = 0, \quad (3.3.8)$$

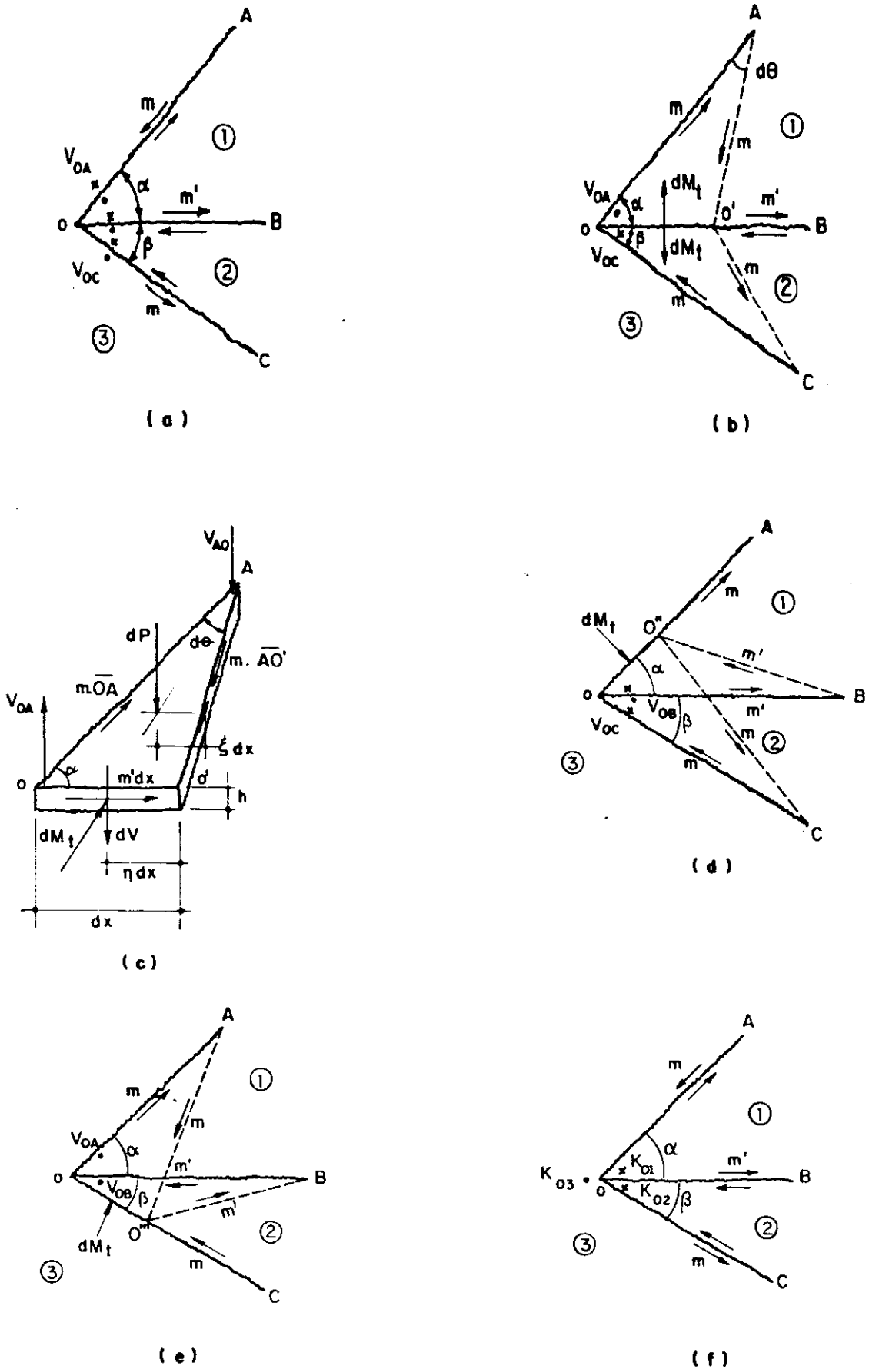


FIG. 3.10 - NÓ COM DUAS CHARNEIRAS POSITIVAS E UMA NEGATIVA

donde

$$V_{OC} = - \frac{dM_t}{dx} + (m+m') \cotg \beta . \quad (3.3.9)$$

Na figura 3.10a, nota-se que a força nodal K_{O3} vale:

$$K_{O3} = V_{OC} - V_{OA} . \quad (3.3.10)$$

Substituindo-se (3.3.7) e (3.3.9) em (3.3.10), resulta

$$K_{O3} = (m+m') (\cotg \alpha + \cotg \beta) . \quad (3.3.11)$$

Utilizando-se o mesmo artifício, isto é, escolhendo-se os triângulos de maneira que o momento torçor fique eliminado por soma algébrica, considerem-se os triângulos COO'' e BOO'' (figura 3.10d), onde $\overline{OO''} = dx$; as seções BO'' e CO'' , vizinhas das charneiras BO e CO , têm os mesmos momentos m' e m respectivamente.

Para o triângulo BOO'' , estabelecendo-se a equação de momentos em torno de BO'' , tem-se

$$V_{OB} dx \sen \alpha + m' dx \cos \alpha + m dx \cos \alpha + dM_t \sen \alpha = 0, \quad (3.3.12)$$

donde

$$V_{OB} = - \frac{dM_t}{dx} - (m+m') \cotg \alpha . \quad (3.3.13)$$

Para o triângulo COO'' , a equação de momentos em torno de CO'' fornece (figura 3.10d)

$$\begin{aligned} V_{OC} dx \sen(\alpha + \beta) + m dx \cos(\alpha + \beta) - m' dx \cos(\alpha + \beta) + \\ + dM_t \sen(\alpha + \beta) = 0, \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

resultando

$$V_{OC} = - \frac{dM_t}{dx} . \quad (3.3.15)$$

Da figura 3.10a tem-se que a força nodal K_{02} vale

$$K_{02} = V_{OB} - V_{OC} \quad (3.3.16)$$

Substituindo-se (3.3.13) e (3.3.15) em (3.3.16), resulta

$$K_{02} = -(m+m') \cotg \alpha . \quad (3.3.17)$$

Finalmente, escolhendo-se os triângulos AOO''' e BOO''' (figura 3.10e), com $\overline{OO'''} = dx$, e calculando-se os momentos em torno de AO''' e BO''' , tem-se, respectivamente

$$\begin{aligned} & -V_{OA} dx \sen(\alpha + \beta) + m dx \cos(\alpha + \beta) - m dx \cos(\alpha + \beta) - \\ & - dM_t \sen(\alpha + \beta) = 0 , \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

donde:

$$V_{OA} = - \frac{dM_t}{dx} ; \quad (3.3.19)$$

$$-V_{OB} dx \sen \beta + m' dx \cos \beta + m dx \cos \beta - dM_t \sen \beta = 0 \quad (3.3.20)$$

donde:

$$V_{OB} = - \frac{dM_t}{dx} + (m+m') \cotg \beta . \quad (3.3.21)$$

Da figura 3.10a, tem-se que a força nodal K_{01} vale

$$K_{01} = V_{OA} - V_{OB}, \quad (3.3.22)$$

donde

$$K_{01} = - (m+m') \cotg \beta . \quad (3.3.23)$$

Na figura 3.10f encontram-se indicadas as forças nodais K_{01} , K_{02} e K_{03} para o caso geral proposto, isto é, para o nó com duas charneiras positivas e uma negativa. De acorre

do com as equações (3.3.23), (3.3.17) e (3.3.11), seus valores são:

$$\begin{aligned} K_{O1} &= - (m+m') \cotg \alpha , \\ K_{O2} &= - (m+m') \cotg \beta , \\ K_{O3} &= (m+m')(\cotg \alpha + \cotg \beta). \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

Nota-se que neste caso, também, a soma algébrica das forças nodais é igual a zero.

3.3.4 - Nó com charneiras do mesmo sinal

Pode-se demonstrar que

EM UM NÓ PARA O QUAL CONVERGEM SOMENTE CHARNEIRAS DE MESMO SINAL, TODAS AS FORÇAS NODAIS SÃO NULAS.

Para isto, basta supor que para o nó O da figura 3.10a concorram três charneiras positivas, por exemplo . Neste caso, as forças nodais são dadas pelas expressões (3.3.24) substituindo-se m' por $-m$, obtendo-se:

$$K_{O1}=0, \quad K_{O2}=0, \quad K_{O3}=0. \quad (3.3.25)$$

O mesmo resultado seria obtido se as três charneiras fossem negativas, pois bastaria substituir m por $-m'$ nas (3.3.24).

3.3.5 - Charneira concorrente com borda não engastada

No caso em que uma charneira negativa atinge uma borda livre ou simplesmente apoiada, as forças nodais podem ser obtidas com as expressões (3.3.24) fazendo-se $m=0$ na borda e $\alpha + \beta = 180^\circ$, supondo-se $\alpha \leq \beta$; obtém-se, então (ver figura 3.11a):

$$K_{01} = -m' \cotg \beta = m' \cotg \alpha ,$$

$$K_{02} = -m' \cotg \alpha , \quad (3.3.26)$$

$$K_{03} = 0 .$$

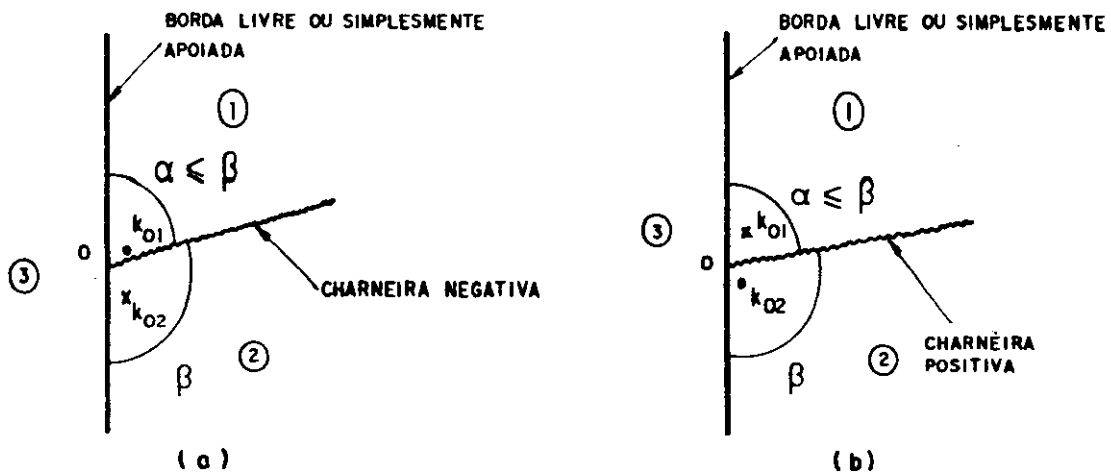


FIG. 3.11 - CHARNEIRA CONCORRENTE COM BORDA NÃO ENGASTADA

Se a charneira for positiva (figura 3.11b), substitui-se, ainda, m' por $-m$ nas equações (3.3.26), obtendo-se:

$$K_{01} = -m \cotg \alpha ,$$

$$K_{02} = m \cotg \alpha , \quad (3.3.27)$$

$$K_{03} = 0 .$$

Pode-se, portanto, enunciar:

EM UM NÓ FORMADO POR UMA BORDA LIVRE OU SIMPLESMEN
TE APOIADA E UMA CHARNEIRA PLÁSTICA, TÊM-SE DUAS
FORÇAS NODAIS IGUAIS E CONTRÁRIAS, COM VALOR IGUAL
AO PRODUTO DO MOMENTO DE PLASTIFICAÇÃO PELA COTAN-
GENTE DO ÂNGULO AGUDO, SENDO A DESTES DIRIGIDA PARA
BAIXO NO CASO DA CHARNEIRA SER POSITIVA E PARA CI-
MA NO CASO CONTRÁRIO.

Na realidade as charneiras, ao se aproximarem de uma borda livre ou simplesmente apoiada, encurvam-se para atingi-la em ângulo reto. A razão é que uma charneira é uma linha de momentos principais e perpendicularmente à borda os momentos de flexão e de torção são nulos. As forças dadas por (3.3.26) e (3.3.27) representam, portanto, pares estaticamente equivalentes corretivos da consideração da linha de plastificação reta até a borda (CHAMECKI [64]).

Ainda conforme as equações (3.3.26) e (3.3.27), nota-se que se a charneira é perpendicular à borda livre, $\cotg \alpha = 0$ e, também neste caso, as forças nodais se anulam.

3.3.6 - Aplicações do processo do equilíbrio

Cada região da laje, delimitada pelas charneiras, encontra-se em equilíbrio sob a ação das forças nodais, dos momentos de plastificação e das cargas externas.

Conhecida a configuração das charneiras determinam-se as forças nodais e, em seguida, a carga de ruína, se o momento de plastificação é conhecido, ou o momento de plastificação, no caso mais geral em que se conhece a carga.

No caso em que a configuração das charneiras é dada em função de um ou mais parâmetros, a indeterminação é levantada com a hipótese de que o momento de plastificação é o mesmo em todas as regiões da laje. Apresentam-se, a seguir, algumas aplicações do processo de equilíbrio no cálculo de lajes usuais, lembrando que geralmente as forças nodais são nulas.

- a) Laje quadrada isótropa simplesmente apoiada no contorno com carga total p uniformemente distribuída

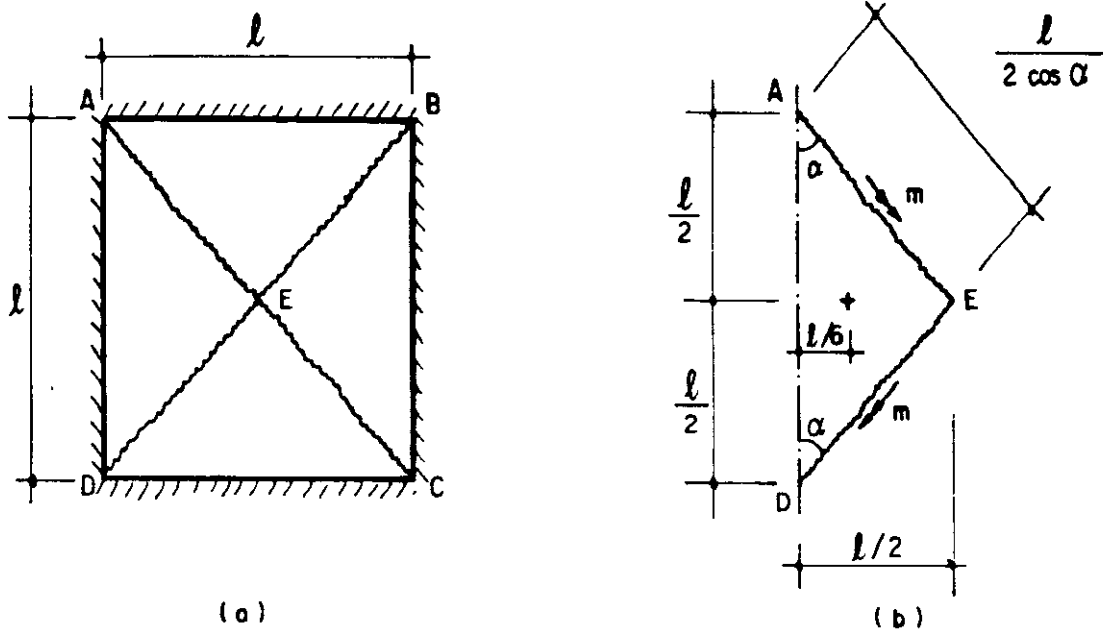


FIG. 3.12 - LAJE QUADRADA COM CARGA UNIFORME

Na configuração da figura 3.12a obtém-se, por exemplo, a região típica AED (figura 3.12b). Os momentos resultantes ao longo das charneiras AE e ED valem, cada um deles: $m l / (2 \cos \alpha)$. Calculando-se o equilíbrio de momentos, por exemplo em relação ao eixo de rotação que coincide com a borda AD, tem-se

$$\frac{m l}{2 \cos \alpha} \cdot \cos \alpha + \frac{m l}{2 \cos \alpha} \cdot \cos \alpha = \frac{p l^2}{4} \cdot \frac{l}{6} \quad (3.3.28)$$

$$\text{ou } m = p l^2 / 24 \quad (3.3.29)$$

Nota-se, nas equações (3.3.28) e (3.3.29), que não há necessidade de calcular o momento resultante da charneira e depois calcular sua projeção em relação ao eixo de rotação; o resultado é o mesmo obtido multiplicando o momento de plastificação pelo comprimento das projeções das charneiras sobre o eixo de rotação.

Se a laje fosse engastada no contorno, bastaria somar $m' l$ no primeiro membro da equação (3.3.29), resultando

$$m + m' = p l^2 / 24, \quad (3.3.30)$$

ou seja, bastava substituir, na (3.3.29), m por $m+m'$.

b) Laje poligonal com n lados, isótropa, uniformemente carregada com carga total p

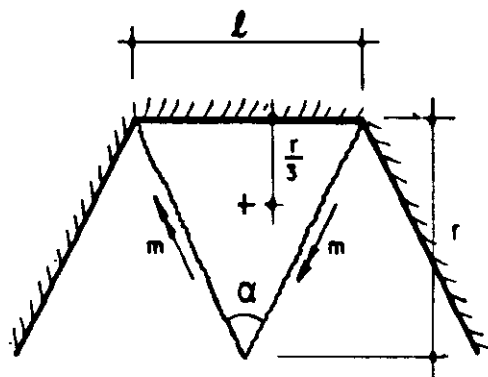


FIG. 3.13 - REGIÃO TÍPICA DE UMA LAJE POLIGONAL DE n LADOS

Na laje indicada na figura 3.13, sendo r o raio do círculo inscrito, tem-se

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} \quad (3.3.31)$$

e

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2r}, \quad (3.3.32)$$

donde

$$r = \frac{l}{2 \operatorname{tg} \pi/n}. \quad (3.3.33)$$

Com a equação de equilíbrio de momentos em relação à borda adjacente a um dos elementos triangulares da laje, tem-se:

$$m l = p \cdot \frac{l r}{2} \cdot \frac{r}{3}, \quad (3.3.34)$$

donde

$$m = \frac{p r^2}{6} \quad (3.3.35)$$

ou, considerando-se (3.3.33):

$$m = \frac{p l^2}{24} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \pi/n}. \quad (3.3.36)$$

Para $n=4$, ou seja, para laje quadrada, resulta $\text{tg}^2 \pi/4=1$ e $m = p\ell^2/24$, valor que coincide, evidentemente, com o dado pela equação (3.3.29).

Para $n=3$, ou seja, para laje triangular equilátera, resulta $\text{tg}^2 \pi/3=3$ e $m=p\ell^2/72$.

Para laje circular, o círculo inscrito coincide com a própria laje, sendo o momento de plastificação dado pela equação (3.3.35).

- c) Laje quadrada isótropa com apoios pontuais nos quatro cantos com carga total p uniformemente distribuída

Da configuração de ruína indicada na figura 3.14a, extrai-se, por exemplo, a região típica indicada na figura 3.14b.

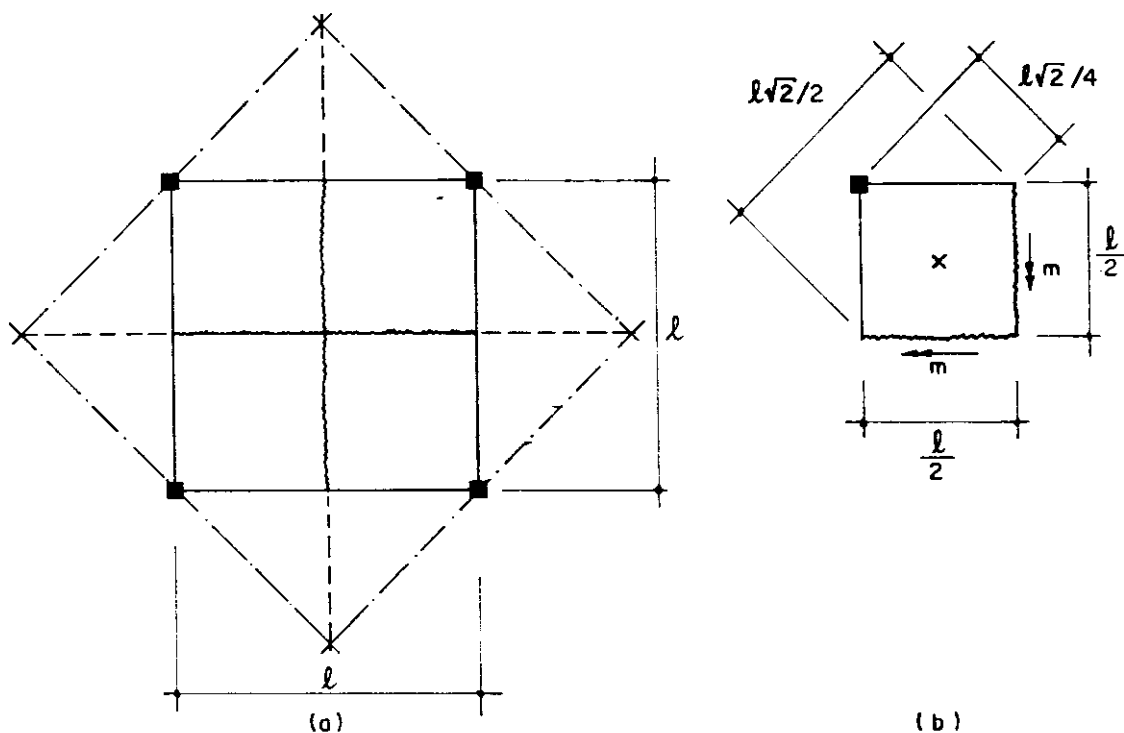


FIG. 3.14 - LAJE QUADRADA COM APOIOS PUNTUAIS

Ainda neste caso as forças nodais são nulas. A equação de equilíbrio de momentos em relação ao eixo de rotação resulta

$$m l \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{pl^2}{4} \cdot \frac{l\sqrt{2}}{4}, \quad (3.3.37)$$

da qual se obtém

$$m = pl^2/8. \quad (3.3.38)$$

Comparando-se esta expressão com a (3.3.29), observa-se que o momento de plastificação em uma laje quadrada apoiada nos quatro cantos é três vezes maior que o da mesma laje apoiada nas quatro bordas, sendo ambas uniformemente carregadas.

- d) Laje quadrada isótropa simplesmente apoiada em duas bordas opostas, sendo engastadas as outras duas, com carga uniforme total p

Neste caso, as bordas engastadas dão origem a cargas negativas, fazendo com que as positivas delas se afastem, não mais se encontrando no centro da laje. A configuração de ruína fica, então, função de um parâmetro x ou α , como se indica na figura 3.15.

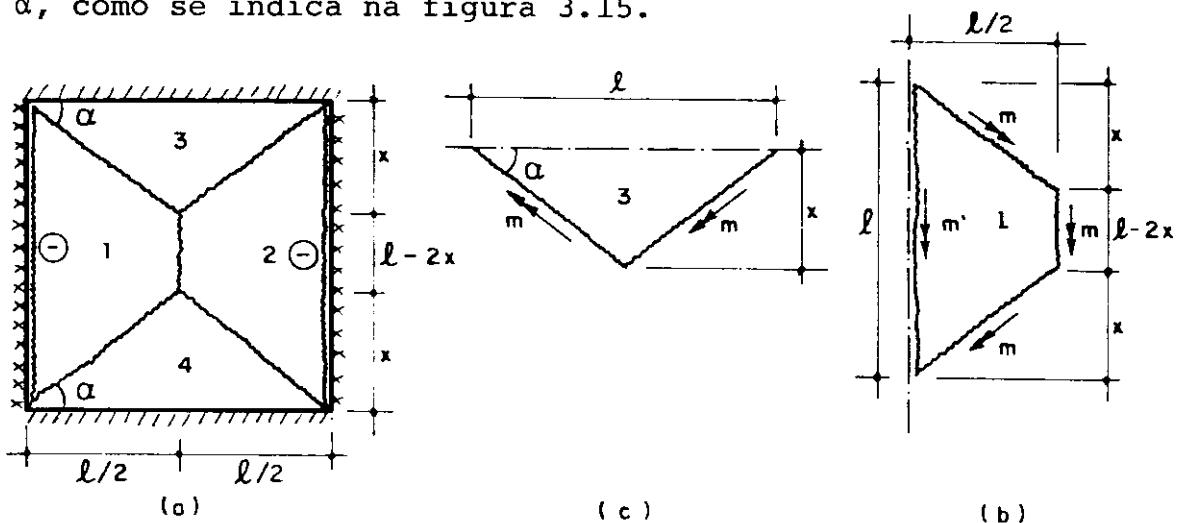


FIG. 3.15 - LAJE QUADRADA COM DUAS BORDAS OPOSTAS - ENGASTADAS

Supondo $\phi = m'/m$ conhecido, por exemplo $\phi = 2$ como recomendam alguns autores, restam duas incógnitas: x e m . As duas equações necessárias são obtidas impondo-se o equilíbrio de cada uma das regiões 1 e 3. Para a região 1 (figura 3.15b), tem-se:

$$(m + m') = p \left[\frac{\ell x}{4} \cdot \frac{\ell}{6} \cdot 2 + \frac{\ell}{2} (\ell - 2x) \frac{\ell}{4} \right], \quad (3.3.39)$$

na qual, substituindo-se $m' = 2m$ e resolvendo, obtém-se

$$m = p \left(\frac{\ell^2}{24} - \frac{\ell x}{18} \right) \quad (3.3.40)$$

Para a região 3 (figura 3.15c), tem-se:

$$m \ell = \frac{p \ell x}{2} \cdot \frac{x}{3}, \quad (3.3.41)$$

da qual resulta

$$m = \frac{p x^2}{6}. \quad (3.3.42)$$

Igualando-se (3.3.40) e (3.3.42), obtém-se x :

$$\frac{p x^2}{6} = p \left(\frac{\ell^2}{24} - \frac{\ell x}{18} \right), \quad (3.3.43)$$

$$x^2 + \frac{1}{3} \ell x - \frac{\ell^2}{4} = 0, \quad (3.3.44)$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{\ell^2}{9} + \ell^2} = \sqrt{\frac{10}{9} \ell^2} = \frac{\ell}{3} \sqrt{10}, \quad (3.3.45)$$

$$x = \frac{\ell}{6} (\sqrt{10} - 1) \approx 0,360 \ell. \quad (3.3.46)$$

O momento de plastificação m é obtido na equação (3.3.42) com o valor de x da (3.3.46), resultando

$$m \approx \frac{p \ell^2}{46,20} \approx \frac{2,165}{100} p \ell^2, \quad (3.3.47)$$

lembrando que $m' = 2m$.

O ângulo α resulta

$$\alpha = \arctg \frac{2x}{l} \cong 35,80 . \quad (3.3.48)$$

Esta laje, ora admitida isótropa, pode não ter com a isotropia sua melhor solução, por serem diferentes as condições de apoio nas duas direções. Este aspecto será analisado, detalhadamente, no capítulo 4.

- e) Laje retangular isótropa com uma borda maior engastada e a outra livre, as duas menores apoiadas, $\phi = m'/m = 2$ e carga uniforme total p .

As dimensões em metros, são dadas na figura 3.16a, onde também é indicada a configuração de ruína com uma indeterminação x . Se resultar $x > 0,5 l_y$, as charneiras se interceptam num ponto interno, devendo os cálculos ser refeitos para esta outra configuração.

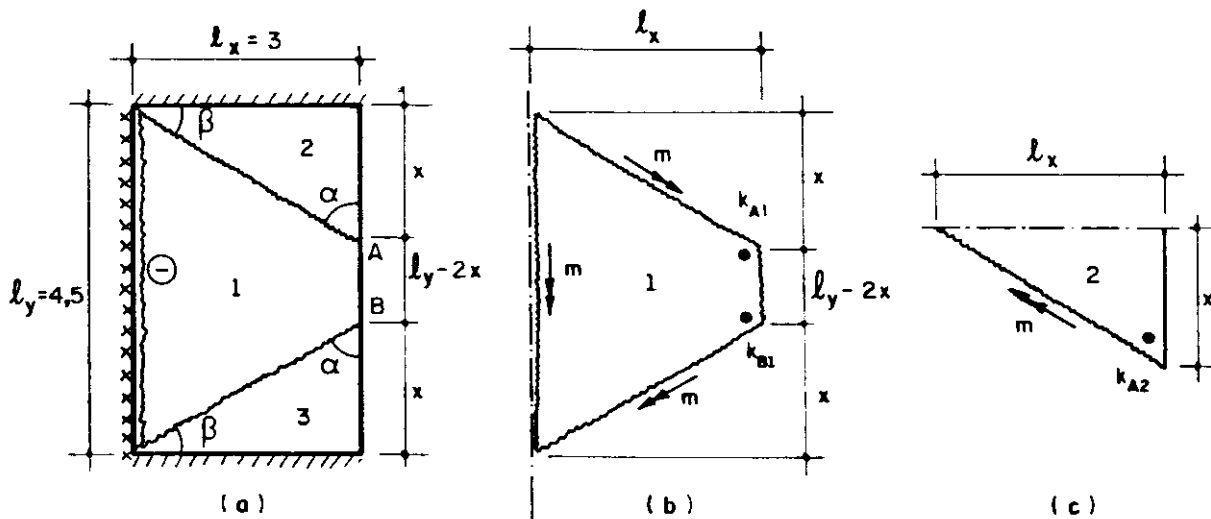


FIG. 3.16 - LAJE RETANGULAR COM UMA BORDA LIVRE

Como o ângulo entre as charneiras e a borda livre é diferente de 90° , as forças nodais não se anulam, devendo portanto ser calculadas com as expressões (3.3.27):

$$K_{A1} = K_{B1} = m \cotg \alpha = \frac{mx}{l_x}, \quad (3.3.49)$$

$$K_{A2} = -m \cotg \alpha = -\frac{mx}{l_x}. \quad (3.3.50)$$

Fazendo o equilíbrio da região 1 (figura 3.16b), ob
têm-se

$$m \cdot 2x + m' \cdot l_y + (K_{A1} + K_{B1}) l_x = p \left[x \cdot \frac{l_x}{2} \cdot \frac{l_x}{3} \cdot 2 + \right. \\ \left. + (l_y - 2x) l_x \cdot \frac{l_x}{2} \right].$$

Substituindo-se os valores de l_x , l_y , K_{A1} e K_{B1} e resolvendo, resulta

$$m = p \frac{20,25 - 6x}{9 + 4x}. \quad (3.3.51)$$

Fazendo o equilíbrio da região 2 (figura 3.16c), ob
têm-se:

$$m \cdot l_x + K_{A2} \cdot x = p l_x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3}.$$

Substituindo-se os valores de l_x e K_{A2} e resolven
do, resulta

$$m = p \frac{3x^2}{18 - 2x^2} \quad (3.3.52)$$

Igualando-se (3.3.51) a (3.3.52) e resolvendo - se a equação do segundo grau daí decorrente, resulta

$$x = 1,6576 \text{ metros.}$$

Substituindo-se este valor de x , na (3.3.51) ou na (3.3.52), obtêm-se, finalmente,

$$m = 0,659p,$$

onde p deve ser referente à unidade de área em metros quadrados.

3.4 - PROCESSO DA ENERGIA

O processo da energia, ou processo do trabalho, é mais uma das inúmeras aplicações do princípio dos trabalhos virtuais, o qual permite que as equações de equilíbrio sejam escritas de uma forma concisa, resultando num cálculo rápido e prático.

Sendo conhecida a configuração de ruína, pode-se girar as partes da laje, em torno de seus eixos de rotação, de um certo valor virtual. A soma dos trabalhos virtuais, produzidos pelos esforços internos e externos, estendida a toda a laje, deve ser nula, o que é equivalente a se igualar o trabalho desenvolvido pela carga, durante a deformação virtual da laje, à energia consumida pelas charneiras, nessa mesma deformação. Portanto, basta igualar o trabalho das forças internas (T_i) ao trabalho das forças externas (T_e). Nessas condições, as forças nodais não realizam trabalho, para a laje tomada como um todo.

Se a configuração de ruína depender de alguns parâmetros x, y etc, a equação que fornece o momento se apresenta sob a forma

$$m = F(x, y, \dots) \quad (3.4.1)$$

Como, pelo teorema cinemático da teoria da plasticidade, o momento de plastificação é o maior entre aqueles correspondentes às diversas configurações possíveis, os valores dos parâmetros x, y etc são determinados pelas condições de máximo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \dots \quad (3.4.2)$$

3.4.1 - Energia absorvida pelas charneiras

Supondo um determinado deslocamento de um ponto da laje na direção perpendicular ao seu plano médio — como esse deslocamento é arbitrário, é usual admiti-lo unitário — determinam-se os ângulos θ_i e θ'_i de rotação de todas as charneiras positivas e negativas respectivamente. Sendo m e m' os momentos de plastificação por unidade de comprimento e l e l' os comprimentos das charneiras positivas e negativas respectivamente, a energia absorvida pelas charneiras ao se deformarem será

$$T_i = m_i l_i \theta_i + m'_i l'_i \theta'_i. \quad (3.4.3)$$

Será visto no item 3.5.2 que é possível substituir a laje em estudo por outra de mesma resistência à flexão e que seja isótropa, através da alteração das dimensões ao longo de uma direção e da adequada modificação da carga aplicada, obtendo-se uma laje isótropa afim à anterior. Pode-se, então, considerar m_i constante e igual a m , o mesmo acontecendo com m'_i , que se considera igual a m' ; a equação (3.4.3) fica

$$T_i = m l_i \theta_i + m' l'_i \theta'_i \quad (3.4.4)$$

3.4.2 - Trabalho desenvolvido pelas cargas

Denominando-se f_j os deslocamentos das cargas concentradas e f os das distribuídas, sendo estes últimos dependentes da posição do elemento dA da área da laje, o trabalho desenvolvido pelas cargas será

$$T_e = P_j f_j + \int_A p f dA. \quad (3.4.5)$$

No caso da carga p ser uniformemente distribuída, o último termo desta equação pode ser substituído por pV , sendo V o volume desenvolvido pela superfície deformada. No caso de cargas lineares p_l , o deslocamento f_l se-

rá função do elemento ds sob a carga linear. A equação do trabalho externo resulta, então,

$$T_e = P_j f_j + pV + \int p_\ell f_\ell ds. \quad (3.4.6)$$

3.4.3 - Determinação dos momentos de plastificação

Na prática os problemas mais comuns são os de di mensionamento, nos quais são conhecidas as cargas P_j , p e p_ℓ de cálculo, portanto já multiplicadas pelos coeficientes de ponderação, e se tem como incógnitas os momentos de plas tificação. Esses momentos são obtidos igualando-se (3.4.4) a (3.4.6), havendo possibilidade de se escolher um dos momentos e calcular o outro ou, ainda, de se escolher a razão ϕ de m' e m , resultando respectivamente:

$$m' = (T_e - m \ell_i \theta_i) / (\ell_i' \theta_i'), \quad (3.4.7)$$

$$m = (T_e - m' \ell_i' \theta_i') / (\ell_i \theta_i), \quad (3.4.8)$$

$$m = T_e / (\ell_i \theta_i + \phi \ell_i' \theta_i'), \quad (3.4.9)$$

sendo $\phi = m'/m$.

Em geral a incógnita procurada é m . Nos casos mais frequentes é adotada a razão ϕ , podendo, eventualmente, ser adotado o valor de m' . Nestes casos, os momentos de plastificação m são dados respectivamente por (3.4.9) e por (3.4.8).

3.4.4 - Determinação da carga

São menos comuns na prática os problemas de veri ficação, nos quais são conhecidos os momentos de plas tificação m e m' e se tem as cargas como incógnitas. Nesses casos, são adotados valores de P_j , p e p_ℓ e se determina o fator K pelo qual se deve multiplicar estas cargas para que se tenha o carregamento correspondente à configuração das char

neiras em questão. O fator K é determinado igualando - se (3.4.4) a (3.4.6) e substituindo-se, nestas, P_j , p e p_ℓ respectivamente por $K P_j$, $K p$ e $K p_\ell$, resultando

$$K = T_i / (P_j f_j + pV + \int p_\ell f_\ell ds). \quad (3.4.10)$$

3.4.5 - Aplicações do processo da energia

- a) Laje quadrada apoiada no contorno, submetida a carga p uniformemente distribuída (figura 3.17)

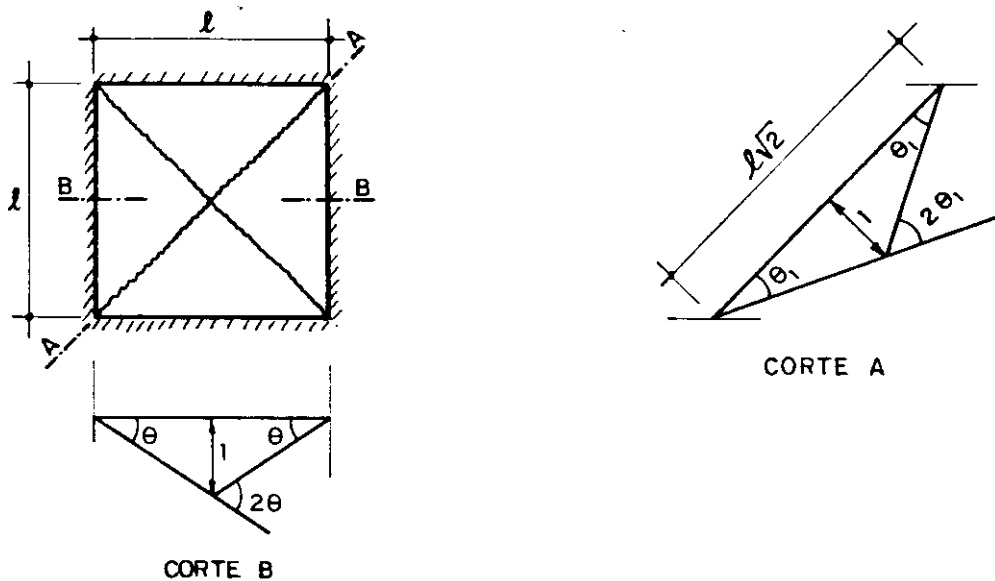


FIG. 3.17 - LAJE QUADRADA COM CARGA UNIFORME

De acordo com a configuração de ruína da figura (3.17) tem-se duas charneiras de comprimento $l\sqrt{2}$ sendo $2\theta_1$ o ângulo de rotação de cada uma delas, indicado no corte A. Como $m'=0$, por ser a laje simplesmente apoiada, e aplicando -se a equação (3.4.4) resulta

$$T_i = m(l\sqrt{2} \cdot 2\theta_1 + l\sqrt{2} \cdot 2\theta_1) = m \cdot 4\sqrt{2} l\theta_1, \quad (3.4.11)$$

onde

$$\theta_1 = \frac{1}{\ell\sqrt{2}/2} = \frac{2}{\ell\sqrt{2}} .$$

Substituindo-se este valor de θ_1 na (3.4.11) tem-se

$$T_i = 8m. \quad (3.4.12)$$

O ângulo de rotação total de cada charneira nem sempre é de fácil obtenção como ocorreu neste exemplo. Em geral se obtém solução mais simples considerando o trabalho das charneiras em relação a cada uma das partes que lhe são adjacentes; para obter este trabalho, basta multiplicar m pelo comprimento da projeção da charneira ao longo do eixo de rotação e pelo ângulo de rotação θ do elemento de laje em relação ao mesmo eixo de rotação (ver corte B da figura 3.17). Procedendo desta maneira, para as quatro partes da laje em questão resulta

$$T_i = 4 m \ell \theta = 4 m \ell \frac{1}{\ell/2} = 8m, \quad (3.4.13)$$

resultado que obviamente coincide com o da igualdade (3.4.12).

O trabalho externo pode ser obtido aplicando-se a equação (3.4.5) para cada uma das quatro partes da laje; basta multiplicar a resultante da carga de cada parte pela distância percorrida por esta resultante enquanto a laje se deforma. Resulta, então

$$T_e = 4 p \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = p \frac{\ell^2}{3} . \quad (3.4.14)$$

Igual resultado seria obtido multiplicando p pelo volume desenvolvido pela laje durante sua deformação

$$T_e = p \cdot \frac{1}{3} \cdot \ell^2 \cdot 1 = \frac{p\ell^2}{3} . \quad (3.4.15)$$

Igualando-se T_i a T_e resulta

$$m = p\ell^2 / 24, \quad (3.4.16)$$

resultado já obtido no item (3.3.4a), pelo processo do equilíbrio.

- b) Laje retangular isôtopa com uma borda maior engastada e a outra livre, as duas menores apoiadas, carga uniforme p e $\phi = m'/m = 2$ (figura 3.18)

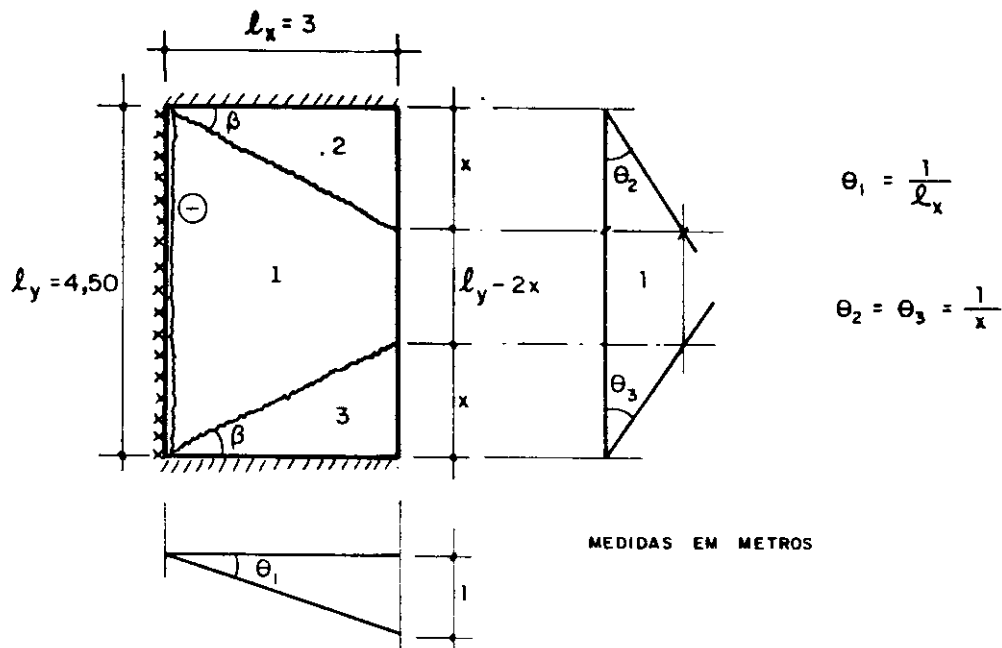


FIG. 3.18 - LAJE RETANGULAR COM UMA BORDA LIVRE

Sendo esta laje idêntica à do item 3.3.4e adota-se, evidentemente, a mesma configuração de ruína.

Para a região 1, tem-se:

$$T_i = m \cdot 2x \cdot \theta_1 + m' \cdot \ell_y \cdot \theta_1 = 2m (x + \ell_y) \frac{1}{\ell_x} = \frac{2}{3} m (x + 4,5), \quad (3.4.17)$$

$$T_e = p \left[x \cdot \frac{\ell_x}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + (\ell_y - 2x) \cdot \ell_x \cdot \frac{1}{2} \right] = p (6,75 - 2x). \quad (3.4.18)$$

Para as regiões iguais 2 e 3 tem-se:

$$T_i = m \cdot l_x \cdot \theta_2 = \frac{3m}{x} , \quad (2 \text{ vezes}) \quad (3.4.19)$$

$$T_e = p \cdot l_x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{px}{2} . \quad (2 \text{ vezes}) \quad (3.4.20)$$

Para a laje toda se obtém, respectivamente:

$$T_i = \frac{2}{3} m (x + 4,5) + \frac{6m}{x} = m \left(\frac{2}{3} x + 3 + \frac{6}{x} \right) , \quad (3.4.21)$$

$$T_e = p (6,75 - 2x + x) = p (6,75 - x) . \quad (3.4.22)$$

Igualando-se T_i a T_e resulta:

$$m = p \frac{6,75 - x}{\frac{2}{3} x + 3 + \frac{6}{x}} = 3p \frac{6,75 x - x^2}{2x^2 + 9x + 18} . \quad (3.4.23)$$

O momento de plastificação m corresponde ao maior valor dado pela (3.4.23). Derivando-a em relação a x e igualando a zero esta derivada, obtém-se x :

$$\frac{dm}{dx} = 3p \frac{(2x^2 + 9x + 18) (6,75 - 2x) - (6,75x - x^2)(4x + 9)}{(2x^2 + 9x + 18)^2} = 0 ,$$

$$(2x^2 + 9x + 18) (6,75 - 2x) - (6,75x - x^2) (4x + 9) = 0 ,$$

$$x^2 + 1,6x - 5,4 = 0 ,$$

$$x = 1,6576 . \quad (3.4.24)$$

Substituindo-se este valor na (3.4.23), resulta

$$m = 0,659 p , \quad (3.4.25)$$

onde p refere-se à unidade de área em m^2 .

Estes resultados coincidem, evidentemente, com os do item 3.3.4e, obtidos pelo processo do equilíbrio. Nota-se que pelo processo da energia não se fez necessário o cálculo das forças nodais.

Outra maneira de se resolver este problema consiste em calcular, em função de x , o momento de plastificação m_1 e m_2 , correspondentes a cada uma das regiões da laje (Nota-se que $m_3 = m_2$). Igualando-se T_i com T_e , para cada parte da laje, obtêm-se as expressões de m_1 e m_2 em função de x . Como o momento de plastificação m deve ser único, igualando-se m_1 a m_2 obtêm-se x e, em seguida, m . É importante salientar, porém, que neste caso as forças nodais precisam ser consideradas.

3.5 - LAJES ORTÓTROPAS

Até aqui só foram consideradas lajes isótropas, ou seja, que apresentam a mesma resistência à flexão em duas direções perpendiculares. Entretanto, o conceito de isotropia é mais amplo e será aqui apresentado, bem como os de anisotropia e de ortotropia. Para estes dois últimos casos, procedimentos alternativos devem ser utilizados na determinação dos momentos de plastificação.

3.5.1 - Isotropia, anisotropia e ortotropia

Com maior rigor, denominam-se isótropas as lajes que apresentam a mesma resistência à flexão, qualquer que seja a direção da seção transversal considerada.

As barras da armadura que, efetivamente, são responsáveis pela absorção do momento fletor, geralmente são colocadas perpendicularmente entre si. Quando isto ocorre, como se indica na figura 3.19, sendo m_1 e m_2 os momentos de plastificação nas direções 1 e 2 respectivamente, admite-se que em uma seção inclinada de α em relação à direção 1, o momento de plastificação seja

$$m_\alpha = m_1 \sin^2 \alpha + m_2 \cos^2 \alpha . \quad (3.5.1)$$

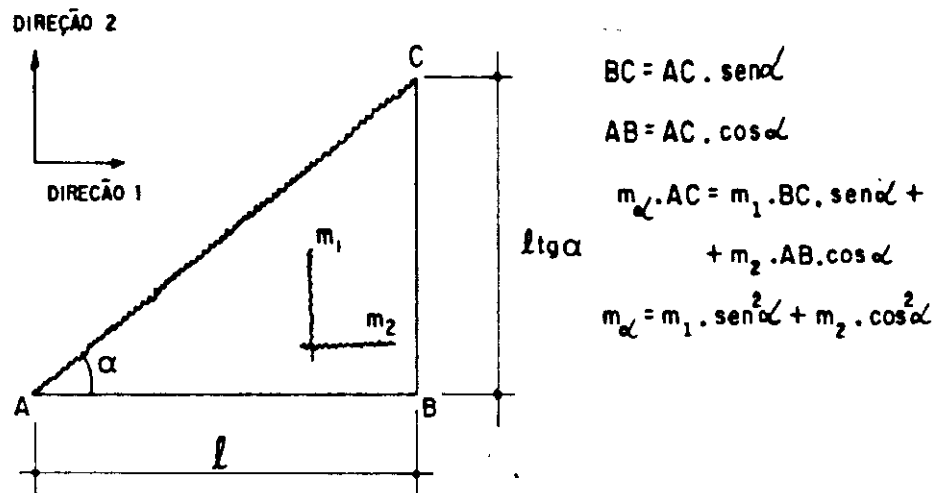


FIG. 3.19 - CHARNEIRA INCLINADA EM RELAÇÃO ÀS ARMADURAS

Esta conclusão é válida se forem desprezados os efeitos dos momentos volventes e dos momentos fletores atuantes na seção normal à seção considerada, o que pode ser feito, segundo LANGENDONCK^[21], conforme ensaios de diversos pesquisadores que mostram que quando o resultado dela se afasta, o faz no sentido de maior segurança, ou seja, o momento de plastificação observado na charneira inclinada nunca é menor do que aquele dado pela fórmula (3.5.1).

Se a laje for isótropa, m_1 é igual a m_2 , verificando-se, portanto, que o momento na seção inclinada de α terá idêntico valor, pois

$$m = m_1 (\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha) = m_1. \quad (3.5.2)$$

Então, para que uma laje com armaduras dispostas ortogonalmente seja isótropa, basta que sejam iguais os momentos de plastificação nestas duas direções, conclusão esta que é válida tanto para os momentos positivos quanto para os negativos.

Como as armaduras comumente não se encontram no mesmo nível, elas não poderão ser iguais, devendo ser, praticamente, inversamente proporcionais às alturas úteis em que estão localizadas.

Caso as lajes não apresentem a mesma resistência

à flexão em qualquer direção que seja considerada, elas são denominadas anisótropas. Neste caso, geralmente se admite que, mesmo sendo variáveis os momentos de plastificação conforme a direção considerada, numa mesma direção eles sejam sempre os mesmos.

Se uma laje anisótropa possuir armaduras dispostas em direções ortogonais que ofereçam momentos de plastificação positivos e negativos, e se os momentos positivos guardarem entre si uma relação idêntica à relação entre os momentos de plastificação negativos correspondentes, a laje será considerada ortótropa. Em outras palavras, uma laje com armaduras ortogonais, que ofereçam momentos de plastificação positivos m_1 e m_2 e negativos m'_1 e m'_2 , será considerada ortótropa se:

$$m_2 = \kappa m_1 \quad \text{e} \quad m'_2 = \kappa m'_1 \quad . \quad (3.5.3)$$

Uma laje anisótropa com armaduras ortogonais, que ofereçam somente momentos de plastificação positivos, sempre poderá ser considerada ortótropa. A relação κ é denominada índice de ortotropia.

As lajes ortótropas podem ser calculadas como se fossem isotrópicas, bastando para isso fazer uma modificação de suas dimensões, como será apresentado no item 3.5.2.

3.5.2 - Transformação de lajes ortótropas em isotrópicas

Considere-se na figura 3.20 um elemento arbitrário de laje ortótropa, com seções resistindo a m e m' na direção x e a κm e $\kappa m'$ na direção y .

A resultante dos momentos positivos é indicada pelo vetor a , cujas componentes segundo os eixos coordenados são

$$M_x = m a_x \quad \text{e} \quad M_y = \kappa m a_y, \quad (3.5.4)$$

sendo a_x e a_y as projeções de a segundo esses eixos.

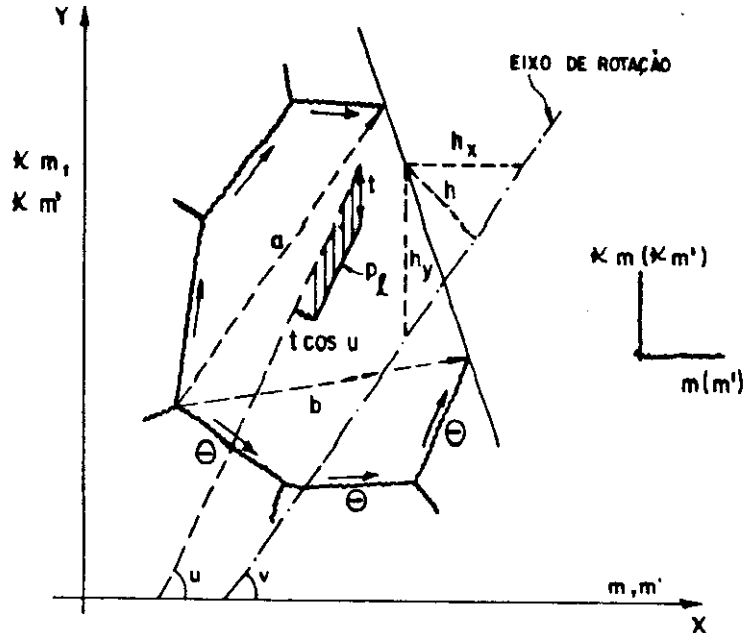


FIG. 3.20 - ELEMENTO DE LAJE ORTÓTropa

Analogamente, tem-se para a resultante b dos momentos negativos as componentes:

$$M'_x = m' b_x \quad \text{e} \quad M'_y = \kappa m' b_y. \quad (3.5.5)$$

Seja $\theta = \delta/h$ o giro em torno do eixo de rotação, sendo δ o abaixamento de um ponto arbitrário. As componentes de θ são:

$$\theta_x = \theta \cos v = \delta / h_y \quad \text{e} \quad \theta_y = \theta \sin v = \delta / h_x. \quad (3.5.6)$$

A contribuição do elemento de placa à equação dos trabalhos virtuais é dada por

$$(m a_x + m' b_x) \frac{\delta}{h_y} + (\kappa m a_y + \kappa m' b_y) \frac{\delta}{h_x} + \iint p z \, dx \, dy = 0. \quad (3.5.7)$$

Considere-se, em seguida, uma placa isótropa com momentos de plastificação m e m' e de forma tal que suas dimensões na direção x sejam obtidas multiplicando-se as dimen

sões da placa ortótropa, na mesma direção, por λ . As dimensões na direção y permanecem as mesmas. Assim, a configuração de ruína, a forma dos elementos e a deformada serão afins às primitivas grandezas e os pontos correspondentes das duas placas sofrerão iguais abaixamentos. Admitindo-se que a carga p por unidade de superfície seja a mesma nos dois casos, a equação análoga à (3.5.7) para a placa isotrópica será

$$(m\lambda a_x + m'\lambda b_x) \frac{\delta}{h_y} + (m a_y + m' b_y) \frac{\delta}{\lambda h_x} + \iint p z \lambda dx dy = 0. \quad (3.5.8)$$

Dividindo-se por λ , tem-se uma expressão análoga à (3.5.7) se

$$\kappa = \frac{1}{\lambda^2}, \text{ isto é, } \lambda = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}. \quad (3.5.9)$$

Conclui-se portanto que uma placa ortótropa com momentos de plastificação m, m' e $\kappa m, \kappa m'$, pode ser calculada como uma placa isotrópica, afim à ortótropa, multiplicando-se as dimensões nas direções de m e m' por $1/\sqrt{\kappa}$, permanecendo inalterada a carga p uniformemente distribuída. Equivale a dizer que as dimensões sejam divididas por $\sqrt{\kappa}$. Este procedimento foi proposto por JOHANSEN [10] e é ilustrado pela figura 3.21.

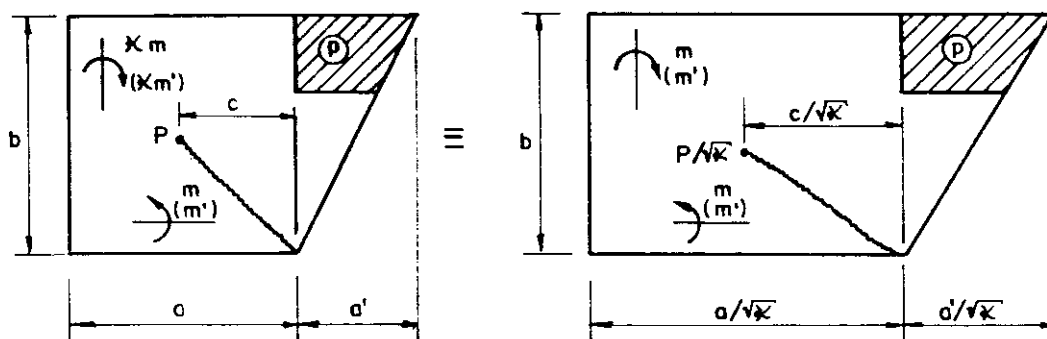


FIG. 3.21 - OBTENÇÃO DE LAJE ISÓTROPICA AFIM

Uma força concentrada P pode ser encarada como uma carga distribuída sobre uma área muito pequena A . Ao passarmos à laje isótropa, a área correspondente será $A\sqrt{\kappa}$ e a $P/\sqrt{\kappa}$.

Uma carga linear p_ℓ pode ser encarada como uma carga distribuída p , segundo uma dimensão t na direção Y (figura 3.20), de modo que

$$p_\ell = pt \cos u . \quad (3.5.10)$$

Na placa isótropa tem-se o mesmo p e o mesmo t , porém um outro ângulo u' tal que

$$\operatorname{tg} u' = \frac{\operatorname{sen} u}{\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \cos u} . \quad (3.5.11)$$

Introduzindo-se este valor em $p'_\ell = pt \cos u'$ obtêm-se

$$p'_\ell = \frac{P_\ell}{\sqrt{\kappa \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u}} , \quad (3.5.12)$$

onde u é o ângulo entre a carga linear e a seção que resiste ao momento m .

Nota-se, ainda, que se a laje real tiver um carregamento total P , a laje afim terá o carregamento $P\sqrt{\kappa}$.

NO caso de lajes com armaduras não ortogonais, JOHANSEN^[10] demonstra que elas podem ser transformadas em lajes ortótropas afins e, conseqüentemente em lajes isótropas equivalentes (ver, também, LANGENDONCK^[21]).

3.6 - CARGAS CONCENTRADAS

A rigor, cargas concentradas ou cargas pontuais não existem na prática; na realidade, elas distribuem-se em pequenas áreas. À medida que essas áreas diminuem, os re

sultados aproximam-se dos valores teóricos que serão aqui apresentados, que podem ser considerados como valores limites.

As cargas concentradas não atuam isoladamente; um carregamento uniformemente distribuído apresenta-se, pelo menos, na forma de peso próprio. Há casos, embora raros em que a carga concentrada é tão intensa que o efeito da carga distribuída pode ser desprezado.

Os problemas com cargas concentradas e distribuídas podem ser tratados globalmente. Como as configurações de ruína são em geral diferentes, para estes dois tipos de carregamento e a ação simultânea destas cargas pode acarretar uma configuração de ruína diferente das anteriores, o cálculo exato torna-se trabalhoso. Solução mais usual e mais simples é obtida tratando em separado cada tipo de carga e, em seguida, considerando a superposição dos efeitos (ver item 3.7), obtendo-se resultados próximos do correto e a favor da segurança.

Nos itens que se seguem, as cargas serão consideradas pontuais.

3.6.1 - Efeitos das cargas pontuais

Uma carga puntual pode fazer com que todas as charneiras positivas concorram para ela. Neste caso, forma-se quer um número limitado de elementos triangulares, como na figura 3.22a, quer um número infinito de elementos triangulares, que constituem leques de charneiras, limitados por charneiras circulares, no caso de lajes isótropas, como na figura 3.22b. No caso de lajes ortótropas, formam-se leques elípticos.

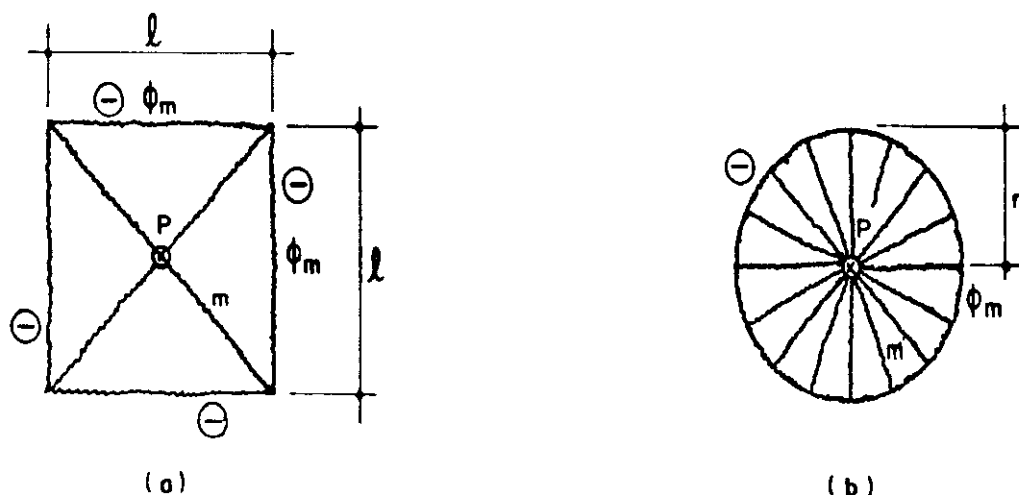


FIG. 3.22 - CONTORNO ENGASTADO OU APOIADO SEM ARMADURA SUPERIOR

O momento de plastificação, para o caso da figura 3.22a, pode ser obtido igualando-se o trabalho interno ao trabalho externo,

$$T_i = m l (1 + \phi) \frac{2}{l} \cdot 4 = 8m (1 + \phi), \quad (3.6.1)$$

$$T_e = P \cdot l = P, \quad (3.6.2)$$

resultando

$$m = \frac{P}{8(1 + \phi)}. \quad (3.6.3)$$

No caso da figura 3.22b, a expressão de T_e é idêntica à (3.6.2). Obtém-se, então:

$$T_i = m 2 \pi r (1 + \phi) \frac{1}{r} = 2 \pi m (1 + \phi), \quad (3.6.4)$$

$$m = \frac{P}{2 \pi (1 + \phi)}. \quad (3.6.5)$$

Nota-se que o momento de plastificação dado pela (3.6.5) é maior que o da (3.6.3), indicando que a configuração em leque é a que pode ocorrer.

Verifica-se, também, que os resultados independem de l e r . Isto decorre do fato de se considerar a carga P

como atuante em um ponto. Se, para a configuração em leque, se considerar P distribuída num pequeno círculo de raio r_0 , a equação do trabalho interno (3.6.4) não se altera e a do trabalho externo e a de m resultam:

$$T_e = P \left(1 - \frac{2r_0}{3r} \right), \quad (3.6.6)$$

$$m = \frac{P}{2\pi(1+\phi)} \left(1 - \frac{2r_0}{3r} \right). \quad (3.6.7)$$

Neste caso, o valor de m será tanto maior quanto maior for o valor de r . Assim sendo, o círculo tenderá a ser o maior possível e tangenciar o contorno, caso ele seja engastado. Se r_0 for pequeno, pode-se usar a fórmula (3.6.5) que se encontra a favor da segurança.

As considerações anteriores valem também no caso particular em que $\phi=0$, no caso de apoio simples, quando não há armadura superior. Se há armadura superior, o leque pode ser interrompido como o da figura 3.23.

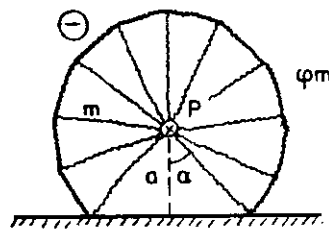


FIG. 3.23 - LAJE APOIADA COM ARMADURA SUPERIOR

Neste caso, sendo o trabalho externo dado pela (3.6.2), tem-se:

$$\begin{aligned} T_i &= m (2\pi - 2\alpha) r (1+\phi) \frac{1}{r} + m 2a \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{a} = \\ &= m \left[(2\pi - 2\alpha) (1+\phi) + 2\operatorname{tg} \alpha \right], \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

$$m = \frac{P}{(2\pi - 2\alpha) (1+\phi) + 2\operatorname{tg} \alpha}. \quad (3.6.9)$$

Pode-se verificar que o máximo valor de m ocorre para $\text{tg } \alpha = \sqrt{\phi}$, resultando então

$$m = \frac{P}{(2\pi - 2\text{arctg } \sqrt{\phi})(1 + \phi) + 2\sqrt{\phi}} \quad (3.6.10)$$

Para $m' = m$, tem-se $\phi = m'/m = 1$, $\text{tg } \alpha = 1$, $\alpha = \pi/4$ e $m = P/11,42$. Neste caso, para o círculo completo ter-se-ia $m = P/12,57$.

No caso de a carga se encontrar próxima de uma borda livre, o leque também pode ser interrompido como o da figura 3.23, valendo, portanto, as mesmas considerações relativas às bordas apoiadas.

3.6.2 - Carga atuando em um vértice

O caso de carga concentrada em um vértice, correspondente a duas bordas livres, encontra-se indicado na figura 3.24.

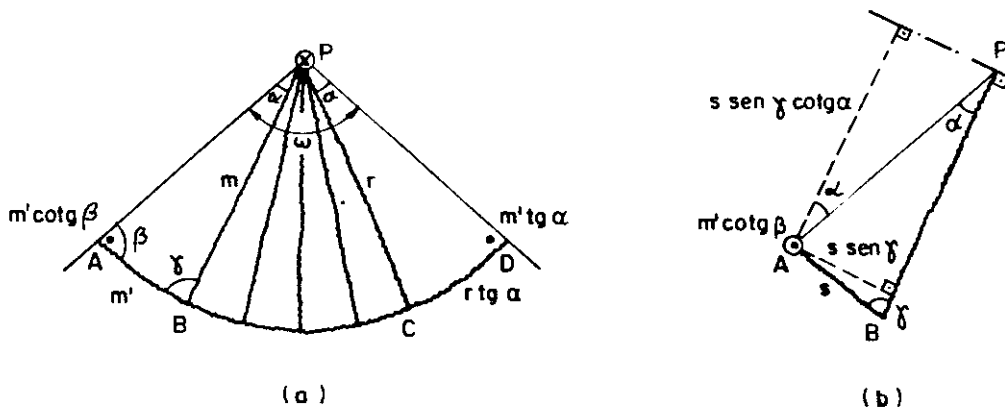


FIG. 3.24 - CARGA ATUANDO EM UM VÉRTICE

Para $m=0$ tem-se na figura 3.24a somente um arco de círculo, sem charneiras radiais. Neste caso, resulta:

$$T_i = m' \omega r \frac{1}{r} = m' \omega, \quad (3.6.11)$$

$$T_e = P \cdot l = P, \quad (3.6.12)$$

$$m' = P/\omega. \quad (3.6.13)$$

Se $m \neq 0$, surgem os triângulos de transição delimitados pelas charneiras radiais, pois o momento não mais pode ser nulo ao longo dos raios.

Para o triângulo PAB (figura 3.24b), o equilíbrio em relação ao eixo que passa por P, perpendicularmente à charneira PB, implica em

$$m's \operatorname{sen} \gamma = m' \cotg \beta s \operatorname{sen} \gamma \cotg \alpha,$$

isto é,

$$\operatorname{tg} \alpha = \cotg \beta \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{\pi}{2}. \quad (3.6.14)$$

Para o triângulo PCD (figura 3.24a), o equilíbrio em relação a PC fornece

$$m r = m' \operatorname{tg} \alpha r \operatorname{tg} \alpha,$$

ou seja,

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{m/m'} = \sqrt{1/\phi}. \quad (3.6.15)$$

Equacionando-se o momento resultante ao longo de AD resulta

$$(m + m')(\omega - 2\alpha) + 2m' \operatorname{tg} \alpha = P \quad (3.6.16)$$

ou, levando-se em conta (3.6.15),

$$m(1 + \phi)(\omega - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{1/\phi}) + 2m\sqrt{\phi} = P$$

ou

$$m = \frac{P}{(\omega - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{1/\phi})(1 + \phi) + 2\sqrt{\phi}}. \quad (3.6.17)$$

Como $\alpha \leq \omega/2$, $\text{tg}^2 \alpha \leq \text{tg}^2 \omega/2$ e, da (3.6.15), resulta

$$m \leq m' \text{tg}^2 \omega/2. \quad (3.6.18)$$

Para $\omega = \pi$, tem-se o caso de uma carga aplicada em uma borda livre.

Quando $\alpha = \omega/2$, tem-se somente uma charneira retilínea. Considerando-se, respectivamente a (3.6.16) e a (3.6.15), obtém-se, neste caso:

$$m' = \frac{P}{2} \cotg \omega/2, \quad (3.6.19)$$

$$m = m' \text{tg}^2 \omega/2 = \frac{P}{2} \text{tg} \omega/2. \quad (3.6.20)$$

A um vértice com charneira retilínea única ($\alpha = \omega/2$) e ângulo reto ($\omega = \pi/2$) corresponde

$$m = m' = P/2. \quad (3.6.21)$$

3.6.3 - Cargas pontuais em lajes ortótropas

Torna-se difícil tratar com precisão o caso de leques em lajes ortótropas. Quando a formação de leques é possível, como nos casos anteriores, recomenda-se transformar a laje numa isótropa afim.

Não se deve, porém, adotar altos índices de ortotropia na vizinhança de cargas pontuais intensas, pois isto acarreta uma diminuição da capacidade portante. Portanto, na vizinhança de cargas concentradas intensas, recomenda-se a adoção de armadura isótropa.

3.6.4 - Ação simultânea de cargas pontuais e carga distribuída

No caso de ação simultânea de cargas pontuais e carga distribuída, as cargas pontuais, mesmo que não muito

intensas, tendem a atrair as linhas de plastificação. A configuração correspondente à carga distribuída tende a deslocar, de maneira que as charneiras positivas se aproximem das cargas pontuais ou, até mesmo, passem pelos seus pontos de aplicação.

Pode ocorrer também, se a carga puntual for de grande intensidade, que a configuração decorrente da carga puntual isolada não seja modificada pela presença da carga distribuída.

Na solução exata, portanto, devem ser consideradas as diversas configurações possíveis. Uma solução aproximada pode ser obtida pelo processo da superposição dos efeitos, como será visto no item 3.7.

3.6.5- Aplicações

- a) Laje quadrada simplesmente apoiada, submetida a uma carga puntual P no meio da laje, desprezando-se o peso próprio.

A configuração de ruína encontra-se indicada na figura 3.25.

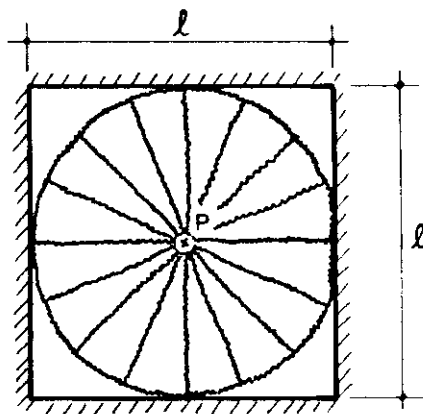


FIG. 3.25 - LAJE QUADRADA COM CARGA P NO CENTRO

Admitindo-se laje isótropa sem armadura superior ($\phi = 0$), aplicando-se a equação (3.6.5) resulta

$$m = \frac{P}{2\pi} . \quad (3.6.22)$$

Para a mesma laje, submetida a uma carga p uniformemente distribuída, obteve-se (item 3.3.4a)

$$m = p\ell^2/24, \quad (3.6.23)$$

sendo a correspondente configuração a da figura 3.12a.

Fazendo-se $P = p\ell^2$ na (3.6.22), ou seja, considerando a mesma carga total resulta

$$m = \frac{p\ell^2}{2\pi} . \quad (3.6.24)$$

Comparando-se (3.6.24) com (3.6.23), observa-se que o momento de uma carga concentrada equivalente à resultante da carga uniformemente distribuída resulta quase quatro vezes maior ($24 \div 2\pi \cong 3,82$).

b) Laje quadrada com carga P no centro e carga p uniformemente distribuída

Ambas as configurações das figuras 3.12 e 3.25 são possíveis.

Para a configuração da figura 3.12a, tem-se:

$$T_i = m \ell \frac{2}{\ell} \cdot 4 = 8m,$$

$$T_e = p \frac{\ell^2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 + P \cdot \ell = \frac{p\ell^2}{3} + P .$$

Igualando-se T_i e T_e resulta

$$m = \frac{p\ell^2}{24} + \frac{P}{8} . \quad (3.6.25)$$

Para a configuração da figura 3.25, analogamente, resulta:

$$T_i = m 2\pi \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{\ell} = 2\pi m,$$

$$T_e = p \pi \frac{l^2}{4} \cdot \frac{1}{3} + P \cdot l = \frac{\pi}{12} p l^2 + P,$$

$$m = \frac{p l^2}{24} + \frac{P}{2} \quad . \quad (3.6.26)$$

Comparando-se as expressões (3.6.25) e (3.6.26), nota-se que a configuração da figura 3.12 só pode verificar-se no caso em que $P = 0$. Se $P \neq 0$, qualquer que seja o seu valor, a configuração de ruína é a indicada na figura 3.25; portanto, o momento de plastificação é dado pela (3.6.26).

Nota-se que para $P = 0$, os resultados de (3.6.25) e (3.6.26) são idênticos. Isto implica que na prática, neste caso, pode-se esperar uma configuração de ruína que mistura traços das duas configurações aqui tratadas.

3.7 - SUPERPOSIÇÃO DOS EFEITOS

Não é raro acontecer que a solução exata pela teoria das charneiras plásticas seja difícil de ser obtida; torna-se necessário, então, encontrar métodos práticos de cálculo, cujos resultados sejam aceitáveis.

Sob este aspecto encontra-se o princípio da superposição dos efeitos, que neste caso toma a forma: a soma dos momentos de plastificação para uma série de carregamentos é maior ou igual ao momento de plastificação produzido quando todas as cargas atuam simultaneamente. A demonstração é apresentada a seguir.

Pressupõe-se, naturalmente, que todos os momentos sejam de mesmo sinal. O princípio da superposição, tão frequentemente usado na Estática e na Teoria da Elasticidade, não é, em geral, válido em regime plástico. O seu emprego, no entanto, está a favor da segurança. A demonstração pode ser feita usando o princípio de máximo.

Sejam os carregamentos: P_1 , relativo à configuração de ruína 1 e momento de plastificação $m_{0,1}$, P_2 referente à configuração 2 e momento $m_{0,2}$ e assim por diante. Para o carregamento total $P_1 + P_2 + \dots = \Sigma P$, têm-se a configuração S e o momento m_S .

Usando o processo da energia e a configuração S , determinam-se os momentos de plastificação m_1, m_2 etc. Como esta não é a configuração verdadeira, para cada caso individual tem-se:

$$\begin{aligned} m_1 &\leq m_{0,1} , \\ m_2 &\leq m_{0,2} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

A igualdade só se verifica se S for idêntica às configurações 1, 2, Como m_1, m_2, \dots estão sendo determinados pela mesma configuração S , pode-se aplicar aqui o princípio da superposição, isto é,

$$m_1 + m_2 + \dots = m_S ,$$

ou, em face das desigualdades (3.7.1),

$$m_{0,1} + m_{0,2} + \dots \geq m_S . \tag{3.7.2}$$

Se as configurações correspondentes aos carregamentos isolados não diferem muito entre si, o princípio usual de superposição pode ser aplicado com muito boa aproximação.

3.8 - FORMAÇÃO DE LEQUES

3.8.1 - Ocorrência

A consideração da possibilidade de ocorrerem leques pode ser importante nos seguintes casos:

- a) fortes cargas concentradas (figuras 3.22b e 3.23);
- b) deficiência de uma armadura superior adequada nos cantos das lajes (figura 3.24a);
- c) encontro de bordas formando um ângulo agudo (figura 3.26a);
- d) bordas engastadas (figura 3.26b);
- e) bordas livres, particularmente estando em frente de um canto (figura 3.26c).

É evidente que estes efeitos se superpõem.

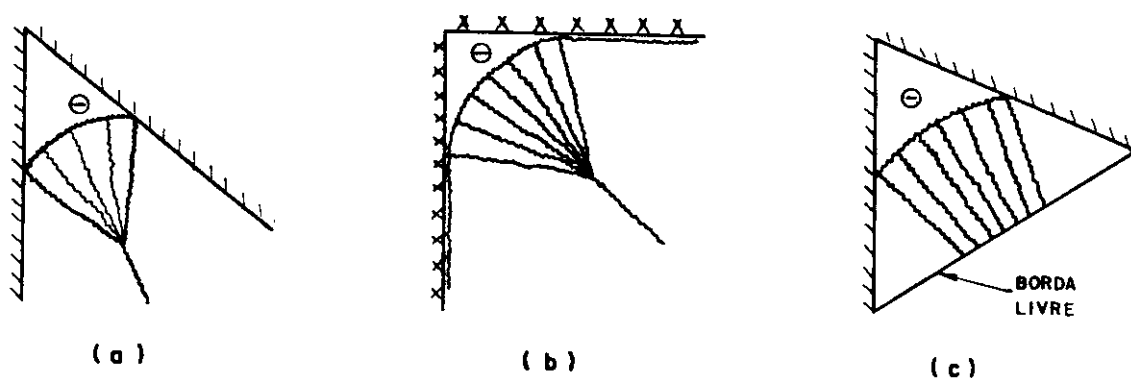


FIG. 3.26 - CASOS DE OCORRÊNCIA DE LEQUES

Os casos mais perigosos, no que diz respeito aos leques, são aqueles correspondentes a fortes cargas concentradas ou reações de apoio sobre pilares, que podem conduzir a leques com ângulo central de 360° (figura 3.22b).

3.8.2 - Bifurcação das charneiras nos cantos

As charneiras positivas que se dirigem para os vértices do contorno da laje podem bifurcar-se antes de atingi-lo, tomando a forma indicada na figura 3.27, formando-se duas ramificações positivas CD e CE e uma char

neira negativa curvilínea DE. O trecho CDE da laje toma a forma de um cone de vértice C e diretriz DE.

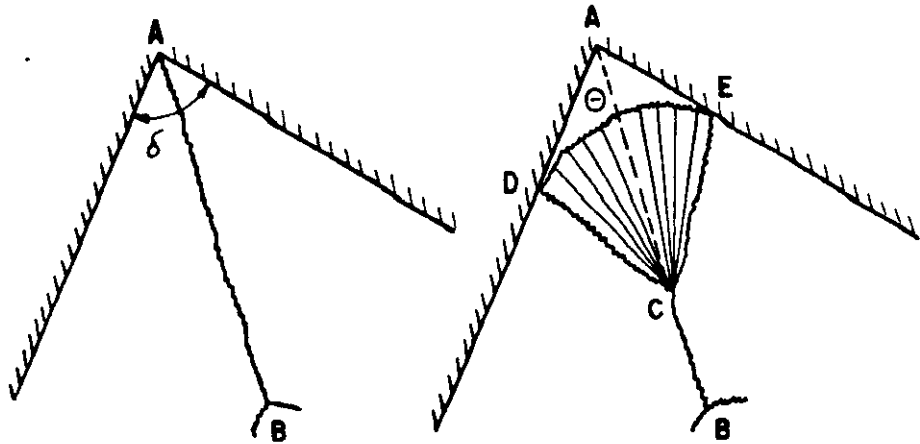


FIG. 3.27 - BIFURCAÇÃO DE CHARNEIRA NUM CANTO

Haverá bifurcação da charneira positiva, e a consequente formação da charneira negativa curvilínea, se a carga necessária para provocá-la for menor do que a que origina a charneira positiva única; o cálculo é feito considerando o volume do cone CDE e a energia consumida na sua formação.

O efeito das bifurcações no valor da carga p pode ser considerado como independente para cada bifurcação. A consideração desse efeito, segundo LANGENDONCK^{[65],[66]}, pode ser feita como se apresenta a seguir.

Se a charneira básica AB da figura 3.27 se situa sobre a bissetriz do ângulo do vértice A, seja δ o valor desse ângulo. Se a charneira AB não coincidir com a bissetriz, admite-se que o efeito estudado, para o lado que faz ângulo α com a charneira, seja o mesmo que se teria se esta fosse a bissetriz e o ângulo do vértice A fosse igual a $\delta = 2\alpha$. As fórmulas que se seguem só se aplicam se $\delta \geq \pi/6 = 30^\circ$.

O efeito da bifurcação de uma charneira corresponde a reduzir a carga de ruína, multiplicando-a por

$$u = 1 - k, \quad (3.8.1)$$

onde se adota para k o valor correspondente a uma charneira circular simétrica, que vale aproximadamente

$$k = 0,45 w^2, \quad (3.8.2)$$

onde a constante w depende do ângulo δ e da relação entre m e m' , tendo como valor:

$w = 1 - (\delta / \pi) \cdot (m + m')/m$ se o contorno for simplesmente apoiado, com deslocamento vertical impedido;

$w = 1 - \delta/\pi$ se o contorno for engastado.

Não haverá bifurcação se se obtiver $w \leq 0$, adotando-se portanto $k = 0$. A expressão (3.8.2) pode então ser substituída por:

$$k = \begin{cases} 0,45w^2 & \text{se } w > 0; \\ 0 & \text{se } w \leq 0. \end{cases} \quad (3.8.3)$$

Seja T a energia de deformação das charneiras para $(m+m')$ unitário. Quando a laje não tem a forma de um polígono regular, há necessidade de se separar os dois fatores t e v que levam ao coeficiente u e que se referem respectivamente à energia $T_i = (m+m')T$ consumida pelas charneiras e à energia pV desenvolvida pela carga. Designando-se por índices i as várias partes em que se decompõe a laje, separando-se as zonas com charneiras que não convergem para os cantos ($i = 0$) e as correspondentes aos vários cantos ($i \neq 0$), tem-se

$$p/(m+m') = \frac{T_0 + \sum_{i \neq 0} (1-t_i)T_i}{V_0 + \sum_{i \neq 0} (1-v_i)V_i} = \frac{T - \sum_{i \neq 0} t_i T_i}{V - \sum_{i \neq 0} v_i V_i}, \quad (3.8.4)$$

obtendo-se os T_i e os V_i como se não houvesse bifurcação, mas multiplicando-se os resultados assim obtidos pelos coeficientes $1-t$ e $1-v$, funções do ângulo δ . Os símbolos T e V referem-se a toda a laje, sem bifurcação de charneiras.

Quando a laje tem a forma de um polígono regular, T_0 e V_0 são nulos e os coeficientes t e v são todos iguais, chegando-se a

$$p/(m+m') = \left[(1-t)/(1-v) \right] \cdot T/V, \quad (3.8.5)$$

com $(1-t)/(1-v)$ igual ao u de (3.8.1). Para os demais casos, é preciso conhecer t e v separadamente, tendo-se, com boa a aproximação:

$$\begin{aligned} t &= 0,65 w^2 \\ v &= 0,25 w^2. \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

Para $\delta = \pi/2 = 90^\circ$ e contorno engastado, por exemplo, tem-se:

$$\begin{aligned} w &= 1 - \delta/\pi = 0,5, \\ u &= 1 - 0,45w^2 = 0,8875, \\ t &= 0,65 w^2 = 0,1625, \\ v &= 0,25 w^2 = 0,0625. \end{aligned} \quad (3.8.7)$$

3.9 - DISTRIBUIÇÃO DA ARMADURA SUPERIOR

Se as condições de apoio o permitirem, diversas são as vantagens de se substituir uma laje simplesmente apoiada por outra engastada. Entre outras, diminuem-se as flechas, mesmo com espessuras inferiores, e evitam-se fissuras nos cantos, sobre as vigas de apoio, etc.

Entretanto, a aplicação da teoria das charneiras plásticas às lajes engastadas seria anti-econômica, e portanto prejudicada, se houvesse necessidade de as armaduras negativas serem estendidas por toda a laje. Portanto, é mui

to importante o fato de boa parte da armadura negativa poder ser suprimida, sem diminuir a resistência da laje à flexão.

Teoricamente, a armadura negativa pode ser suprimida em qualquer região da laje desde que, considerando essa região isolada e simplesmente apoiada em seu contorno, seja ela capaz de resistir às cargas que nela atuam. Há necessidade, também, de que essa região não invada zona na qual, na laje primitiva, fossem previstas charneiras negativas.

3.10 - DISTRIBUIÇÃO DAS REAÇÕES

Fazendo-se uso dos métodos até agora apresentados, e seguindo o caminho indicado por JOHANSEN^[2], pode-se sempre determinar as reações em grandeza e posição. Mesmo que a placa se apoie sobre paredes de alvenaria ou concreto e, principalmente, nos casos em que se apoie sobre vigas, o conhecimento das reações é fundamental para se dimensionar esses elementos.

Na determinação dos momentos nas vigas, o procedimento deverá ser coerente com o método de ruptura empregado no dimensionamento da laje. Pode-se admitir, por exemplo, que também as vigas se encontrem na iminência de colapso, entrando a armadura em escoamento na seção de momento máximo; esta situação é interessante do ponto de vista econômico, embora de ocorrência eventual na prática. As deformações elásticas também são desprezadas em face das deformações plásticas.

Na figura 3.28, AB representa uma viga, sendo N um elemento de laje adjacente que lhe transmite uma reação R.

A seção de ruptura da viga é X e daí deve então partir uma linha de plastificação secundária, cuja direção é determinada pela condição de equilíbrio dos elementos N_1 e N_2 , nos quais fica dividido o elemento N. Assim, pode-se calcular também as reações R_1 e R_2 , correspondentes a AX e BX,

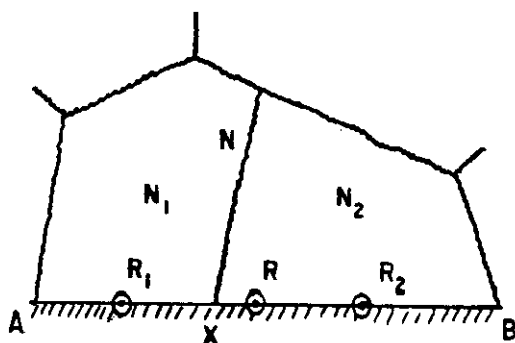


FIG. 3.28 - ELEMENTO DE LAJE ADJACENTE A UMA VIGA AB

tanto em grandeza como em posição. Admitindo-se a viga como simplesmente apoiada, as reações em A e B, bem como o momento em X, são perfeitamente determináveis. Naturalmente, pelo princípio de máximo, X deve ser escolhido de modo que o momento da viga seja o maior possível.

O dimensionamento mais detalhado da viga, inclusive dobramento de barras, exige o conhecimento de todo o diagrama de momentos. Pode-se, também, supor que a viga esteja perfeitamente dimensionada conforme o diagrama de momentos, de modo que o aço entre em escoamento em todos os pontos.

Neste caso, ter-se-ia na figura 3.28 uma linha de plastificação secundária em cada ponto de AB e o momento de plastificação poderia ser determinado para todos os pontos, bem como a reação em cada elemento dx e, assim, sua distribuição segundo AB.

A distribuição assim calculada deve, no entanto, ser considerada como puramente ideal, pois as condições para a sua existência nunca estão satisfeitas nos casos usuais.

Apresentam-se, a seguir, algumas distribuições de reações, para casos freqüentes na prática.

3.10.1 - Elemento triangular

Seja um elemento triangular de laje com carga uniformemente distribuída p e uma força concentrada P em C. A

resultante das forças nodais está localizada em C' (figura 3.29), a resultante da carga uniformemente distribuída acha-se no centro de gravidade D do triângulo e a parcela P_N da carga P , relativa ao elemento de laje em questão, encontra-se em C .

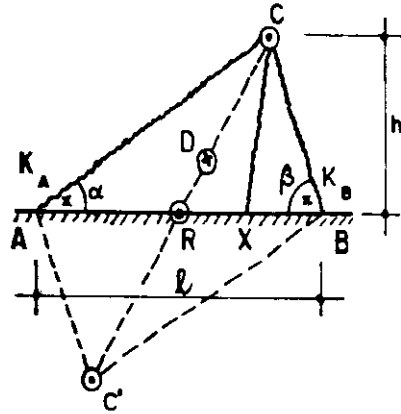


FIG. 3.29 - ELEMENTO TRIANGULAR

Todas as forças atuam na diagonal do paralelogramo e, assim, também sua resultante R , cujo valor é

$$R = P_N + \frac{1}{2} p l h + m (\cotg \alpha + \cotg \beta). \quad (3.10.1)$$

A linha de plastificação secundária que parte de um ponto X também deve passar por C . Por um raciocínio análogo ao que se acaba de fazer, conclui-se que as reações correspondentes a XA e XB atuam nos pontos médios destes. Como X é um ponto qualquer de AB , conclui-se que a reação é nuniformemente distribuída, com o valor

$$r = \frac{R}{l} = \frac{P_N}{l} + \frac{1}{2} p h + \frac{m}{h}. \quad (3.10.2)$$

Calculando-se o momento em relação a AB , obtém-se

$$m = \frac{P_N h}{l} + \frac{1}{6} p h^2. \quad (3.10.3)$$

Substituindo-se (3.10.3) em (3.10.2) resulta

$$r = \frac{2 P_N}{l} + \frac{2}{3} p h. \quad (3.10.4)$$

Para se evitar o cálculo de P_N , o seu valor pode ser obtido na (3.10.3) e, em seguida, substituído na (3.10.2), resultando respectivamente:

$$P_N = \frac{m\ell}{h} - \frac{1}{6} p \ell h, \quad (3.10.5)$$

$$r = \frac{2m}{h} + \frac{1}{3} p h. \quad (3.10.6)$$

Portanto, para um elemento triangular com carga u uniforme p e com carga concentrada P em C , a reação de apoio uniformemente distribuída é dada por (3.10.4) ou por (3.10.6). As reações concentradas K_A e K_B são dadas por:

$$\begin{aligned} K_A &= - m \cotg \alpha, \\ K_B &= - m \cotg \beta. \end{aligned} \quad (3.10.7)$$

Se o elemento de laje for engastado, basta substituir m por $m+m'$ nas equações (3.10.1) a (3.10.7).

3.10.2 - Elemento trapezoidal

Considere-se agora um elemento trapezoidal de laje com carga p uniformemente distribuída e uma carga linear \bar{p} ao longo de ℓ_0 (figura 3.30). Verifica-se, como no caso anterior, que R atua no meio de AB . Sendo \bar{p}_N a parcela de \bar{p} correspondente ao elemento em questão, R e r valem respectivamente:

$$R = \bar{p}_N \ell_0 + \frac{1}{2} p h (\ell + \ell_0) + m (\cotg \alpha + \cotg \beta), \quad (3.10.8)$$

$$r = \frac{R}{\ell} = \bar{p}_N \frac{\ell_0}{\ell} + \frac{1}{2} p h \left(1 + \frac{\ell_0}{\ell}\right) + \frac{m}{H}. \quad (3.10.9)$$

Sendo $l = H (\cotg \alpha + \cotg \beta)$ e $l_0 = (H - h) (\cotg \alpha + \cotg \beta)$, a equação de momentos em torno de AB fornece:

$$\begin{aligned} m l &= \bar{p}_N l_0 h + \frac{1}{2} p l_0 h^2 + \frac{1}{6} p h^3 (\cotg \alpha + \cotg \beta) , \\ m H &= \bar{p}_N h(H-h) + \frac{1}{2} p h^2 (H-h) + \frac{1}{6} p h^3 , \\ m &= \bar{p}_N h \left(1 - \frac{h}{H}\right) + \frac{1}{2} p h^2 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{H}\right) . \end{aligned} \quad (3.10.10)$$

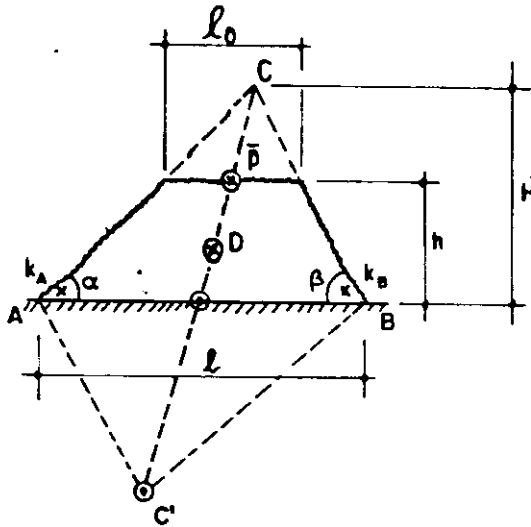


FIG. 3.30 - ELEMENTO TRAPEZOIDAL

Por semelhança de triângulos tem-se que

$$\frac{h}{H} = \frac{l - l_0}{l} = 1 - \frac{l_0}{l} . \quad (3.10.11)$$

Substituindo-se (3.10.11) em (3.10.10), resulta

$$m = \bar{p}_N h \frac{l_0}{l} + \frac{1}{6} p h^2 \left(1 + 2 \frac{l_0}{l}\right) . \quad (3.10.12)$$

Tendo em conta (3.10.12) e (3.10.11), a (3.10.9) fica

$$r = \bar{p}_N \frac{l_0}{l} + \frac{1}{2} p h \left(1 + \frac{l_0}{l}\right) + \bar{p}_N \frac{h}{H} \frac{l_0}{l} + \frac{1}{6} p \frac{h^2}{H} \left(1 + 2 \frac{l_0}{l}\right)$$

ou

$$r = \bar{p}_N \frac{l_0}{l} \left(2 - \frac{l_0}{l}\right) + \frac{1}{3} p h \left(2 + 2 \frac{l_0}{l} - \frac{l_0^2}{l^2}\right) , \quad (3.10.13)$$

que também vale para lajes engastadas.

Desejando-se evitar o cálculo de \bar{p}_N , o seu valor pode ser obtido na (3.10.12) e, em seguida, substituído na (3.10.13), obtendo-se respectivamente:

$$\bar{p}_N = \frac{m}{h} \frac{\ell}{\ell_0} - \frac{1}{6} p h \left(\frac{\ell}{\ell_0} + 2 \right) , \quad (3.10.14)$$

$$r = \frac{m}{h} \left(2 - \frac{\ell_0}{\ell} \right) + \frac{1}{6} p h \left(2 + \frac{\ell_0}{\ell} \right) . \quad (3.10.15)$$

Para borda engastada, basta substituir m por $m+m'$.

3.10.3 - Elemento trapezoidal adjacente a borda livre

Se ℓ_0 corresponder a uma borda livre (figura 3.31), $\bar{p}_N = \bar{p}$, aparecem as forças nodais $m \cotg \alpha$ e $m \cotg \beta$ nas extremidades da borda livre e a equação de momentos em torno de AB fica:

$$2 m h (\cotg \alpha + \cotg \beta) = \bar{p} \ell_0 h + \frac{1}{2} p \ell_0 h^2 + \frac{1}{6} p h^3 (\cotg \alpha + \cotg \beta) ,$$

$$2 m = \bar{p} (H - h) + \frac{1}{2} p h (H - h) + \frac{1}{6} p h^2 ,$$

$$2 m = \bar{p} (H - h) + \frac{1}{6} p h (3H - 2h) . \quad (3.10.16)$$

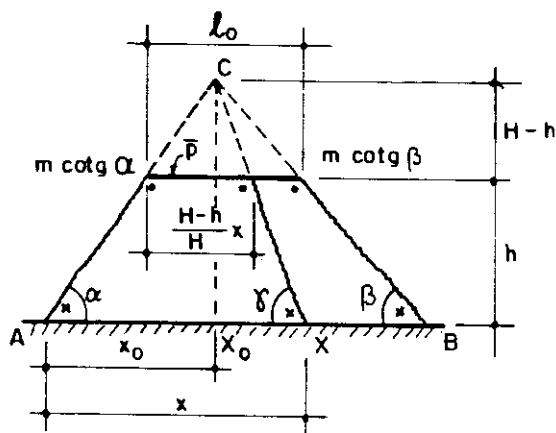


FIG. 3.31 - ELEMENTO TRAPEZOIDAL ADJACENTE A BORDA LIVRE

A linha de plastificação secundária também passa por C. Para o elemento secundário indicado, tem-se agora:

$$R_x = \int_0^x r dx = \bar{p} \frac{H-h}{H} x + \frac{1}{2} ph \left(x + \frac{H-h}{H} x \right), \quad (3.10.17)$$

$$r = \frac{dR_x}{dx} = \bar{p} \frac{H-h}{H} + \frac{1}{2} ph \left(1 + \frac{H-h}{H} \right) \quad (3.10.18)$$

ou

$$r = \bar{p} \frac{l_0}{l} + \frac{1}{2} ph \left(1 + \frac{l_0}{l} \right). \quad (3.10.19)$$

Nota-se que a reação de apoio r independe de x , donde se conclui que ela se distribui uniformemente.

No caso de borda engastada, o primeiro membro da equação de momento aumenta de $m'l$, passando a equação final a

$$m \left(2 + \frac{m'}{m} \frac{H}{h} \right) = \bar{p} (H-h) + \frac{1}{6} ph (3H-2h). \quad (3.10.20)$$

A linha secundária de plastificação ainda passa por C. Para o elemento secundário de laje, tem-se então:

$$R'_x = R_x + (m+m') (\cotg \alpha + \cotg \gamma) - m (\cotg \alpha + \cotg \gamma),$$

$$R'_x = R_x + m' (\cotg \alpha + \cotg \gamma). \quad (3.10.21)$$

Sendo $\cotg \alpha = x_0/H$, $\cotg \gamma = (x - x_0)/h$ e derivando-se (3.10.21) em relação a x , tem-se, levando em conta (3.10.11), a reação em borda engastada fornecida por

$$r' = r + \frac{m'}{H} = r + \frac{m'}{h} \left(1 - \frac{l_0}{l} \right). \quad (3.10.22)$$

3.10.4 - Elemento com forma de triângulo retângulo com um lado livre

Seja o elemento submetido a uma carga \bar{p} ao longo da borda livre e o restante do elemento à carga \bar{p} uniforme-

mente distribuída (figura 3.32).

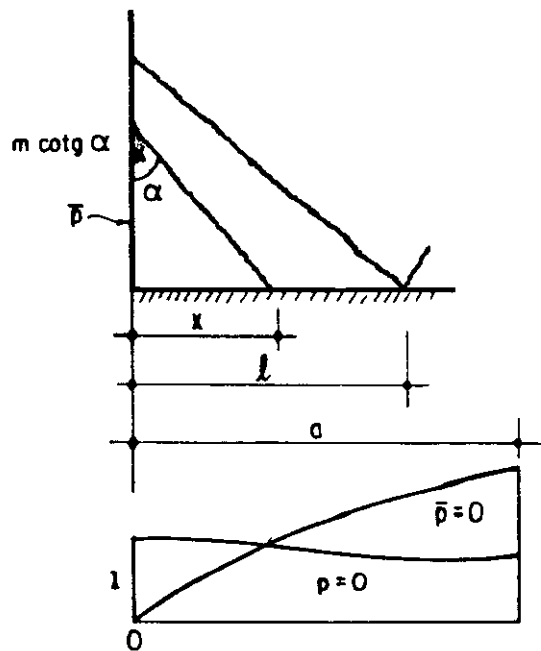


FIG. 3.32 - DISTRIBUIÇÃO DAS REAÇÕES NUM ELEMENTO TRIANGULAR COM LADO LIVRE

O ponto de passagem x da linha secundária é determinado tomando-se momentos em relação ao lado engastado (ou apoiado, fazendo-se, neste caso, $m'=0$ nas equações que se seguem). Logo

$$(m+m') x - m \cotg \alpha \cdot x \cotg \alpha = \frac{1}{6} p x^3 \cotg^2 \alpha + \frac{1}{2} \bar{p} x^2 \cotg^2 \alpha . \quad (3.10.23)$$

Dividindo-se (3.10.23) por $x \cotg^2 \alpha$, resulta

$$(m+m') \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{6} p x^2 + \frac{1}{2} \bar{p} x + m . \quad (3.10.24)$$

Para o elemento secundário de laje assim determinado, tem-se a reação

$$R_x = \frac{1}{2} p x^2 \cotg \alpha + \bar{p} x \cotg \alpha + m \cotg \alpha + (m+m') \operatorname{tg} \alpha . \quad (3.10.25)$$

Levando-se em conta (3.10.24), a (3.10.25) fica

$$R_x = \left(\frac{1}{2} p x^2 + \bar{p} x + m + \frac{1}{6} p x^2 + \frac{1}{2} \bar{p} x + m \right) \cotg \alpha$$

ou

$$R_x = 2 \left(\frac{1}{3} p x^2 + \frac{3}{4} \bar{p} x + m \right) \cotg \alpha . \quad (3.10.26)$$

Introduzindo-se as variáveis θ e a de maneira que

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{m+m'}{m}} \operatorname{tg} \alpha \quad \text{e} \quad m = \frac{1}{6} p a^2 ,$$

tendo em conta (3.10.24) e (3.10.26) obtém-se, respectivamente:

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{x^2}{a^2} + \frac{3\bar{p}}{pa} \cdot \frac{x}{a} + 1 , \quad (3.10.27)$$

$$R_x = 2 \sqrt{m(m+m')} \left(2 \frac{x^2}{a^2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{\bar{p}}{pa} \cdot \frac{x}{a} + 1 \right) \operatorname{cotg} \theta . \quad (3.10.28)$$

Daí conclui-se que, para $x=0$, $\operatorname{tg} \theta=1$ e $R_x=R_0 = 2 \sqrt{m(m+m')}$, isto é, no canto tem-se uma força concentrada como parte da reação, dada por

$$R_0 = 2 \sqrt{m(m+m')} . \quad (3.10.29)$$

Da (3.10.27) tem-se que

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = 1 / \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{3\bar{p}}{pa} \cdot \frac{x}{a} + 1} \right) = 1/\sqrt{u} \quad (3.10.30)$$

Com este valor de $\operatorname{cotg} \theta$, obtém-se r derivando (3.10.28) em relação a x , resultando

$$r = \frac{2}{a} \sqrt{m(m+m')} \left[2 \frac{x^3}{a^3} + 3 \frac{x}{a} + \frac{3\bar{p}}{pa} \left(3 \frac{x^2}{a^2} + \frac{9}{4} \frac{\bar{p}x}{pa^2} + 1 \right) \right] \operatorname{cotg}^3 \theta . \quad (3.10.31)$$

Para $\bar{p} = 0$, tem-se

$$r = \frac{2}{a} \sqrt{m(m+m')} \frac{\frac{x}{a} \left(2 \frac{x^2}{a^2} + 3 \right)}{\left(\frac{x^2}{a^2} + 1 \right)^{3/2}} . \quad (3.10.32)$$

Para $p = 0$, $a \rightarrow \infty$, porém $\frac{1}{6} p a^2 \rightarrow m = \frac{1}{2} \bar{p} a_0$ de modo que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \theta &= 1 + \frac{x}{a_0} \quad , \\ a_0 &= \frac{p a^2}{3 \bar{p}} \quad , \\ r &= \frac{2}{a_0} \sqrt{m(m+m')} \frac{1 + \frac{3}{4} \frac{x}{a_0}}{\left(1 + \frac{x}{a_0}\right)^{3/2}} \quad . \quad (3.10.33) \end{aligned}$$

Como x varia entre 0 e l , observando-se a (3.10.31) nota-se que todas as lajes com o mesmo \bar{p}/pa apresentam a mesma curva de distribuição da reação. De acordo com a relação entre l e $a = \sqrt{6m/p}$ (ou a_0 , quando $p=0$), dever-se-á utilizar maior ou menor porção de curva.

Na figura 3.32, apresentada por JOHANSEN^[2], acham-se as curvas de

$$\frac{r}{\frac{2}{a} \sqrt{m(m+m')}} = \frac{ra}{R_0} \quad \text{ou} \quad \frac{r a_0}{R_0}$$

até os limites $x=a$ ou a_0 , o que inclui todos os casos da prática.

Para $\bar{p}=0$ a distribuição aproxima-se da forma triangular e para $p=0$ do caso uniforme.

A expressão de R_0 vale para qualquer tipo de carregamento.

4. CÁLCULO DE LAJES RETANGULARES PELA TCP

4.1 - GENERALIDADES

Apresenta-se o cálculo de lajes retangulares com carga uniforme e bordas simplesmente apoiadas ou engastadas, com qualquer razão dos vãos.

O equacionamento segue, em linhas gerais, o iniciado por JOHANSEN^[10], pelo processo das forças nodais, sem a consideração de leques das charneiras nos cantos da laje. São tratadas as lajes armadas em uma só direção e, principalmente, as armadas em cruz, isotrópicas ou ortótropas.

Com relação aos índices de ortotropia κ e às razões ϕ_i dos momentos nos apoios e nos vãos, que como já foi visto no item 1.2.2 são dados de partida no cálculo plástico, em um procedimento geral eles são obtidos através das funções aproximadas fornecidas pelas tabelas 2.3, baseadas no cálculo elástico com coeficiente de Poisson igual a 0,20.

A fixação dos valores de κ e de ϕ_i , baseada em outros critérios, também é prevista, simplificando o cálculo ora considerado. Se forem adotados valores de ϕ_i menores que os obtidos em regime elástico, o que é usual no cálculo pela TCP, a laje deixa de se comportar como perfeitamente engastada, havendo, portanto, uma redistribuição de momentos nos

vãos. Mesmo assim, mantendo o valor de κ verificado em regime elástico, são obtidos bons resultados; a armadura total é pouco sensível a pequenas variações de κ e, tanto em serviço como na ruptura, os momentos se adaptam ao índice de ortotropia considerado. É conveniente nestes casos a verificação dos estados limites de utilização, de acordo com as normas em vigor.

No cálculo das lajes contínuas de um pavimento, os valores de κ e de ϕ_i podem ser adotados após a compatibilização dos momentos com os das lajes vizinhas. Este procedimento constitui-se, sem dúvida, em um refinamento do cálculo que supõe as lajes isoladas e independentes umas das outras.

A notação adotada determina que l_x seja sempre o menor vão, sendo l_y o maior e $\lambda = l_y / l_x$. Em decorrência disto, a configuração de ruína mais frequente ocorre com a charneira central paralela à dimensão l_y . Por outro lado, principalmente nos casos de vinculação 2A, 4A e 5A (ver item 2.2.1), pode acontecer que a charneira central seja paralela à dimensão l_x , para pequenos valores de λ . Estas duas possibilidades estão previstas no cálculo.

Nos resultados se incluem: todos os momentos de plastificação nos vãos e nos apoios; a configuração de ruína, com a posição dos vértices da charneira central e as inclinações das demais charneiras em relação às bordas menores; as reações de apoio, considerando reações de canto e reações ao longo das bordas ou simplesmente reações médias ao longo das bordas e, finalmente, os pontos de momento nulo, para determinação dos pontos de interrupção das armaduras superiores.

Apresenta-se, também, estudo para determinação simplificada do índice de ortotropia econômico.

4.2 - LAJES ARMADAS EM UMA SÓ DIREÇÃO

As lajes armadas em uma só direção são calculadas como vigas, considerando faixas de largura unitária. Como exemplo de lajes armadas em uma só direção têm-se as lajes retangulares com duas bordas laterais livres. Também podem ser calculados como em lajes armadas em uma só direção os momentos na direção mais solicitada em lajes com grandes valores de $\lambda = l_y / l_x$ ($\lambda > 4$, por exemplo), nas quais os momentos na direção do menor vão são muito próximos daquele obtidos considerando laje armada em uma só direção. Deve-se salientar, porém, que nestes casos os momentos na direção do maior vão não podem ser ignorados, principalmente os negativos, que podem atingir valores próximos dos verificados na outra direção ou até maiores, como ocorre por exemplo no caso de vinculação 2A (ver item 2.2.1).

4.2.1 - Momento de plastificação e reações de apoio

Em um painel de laje contínua com carga uniforme p e armado em uma só direção, as armaduras entrarão em escoamento sobre os apoios e em algum ponto do vão. Na seção em que ocorrer o máximo momento m a força cortante v será nula (ver figura 4.1).

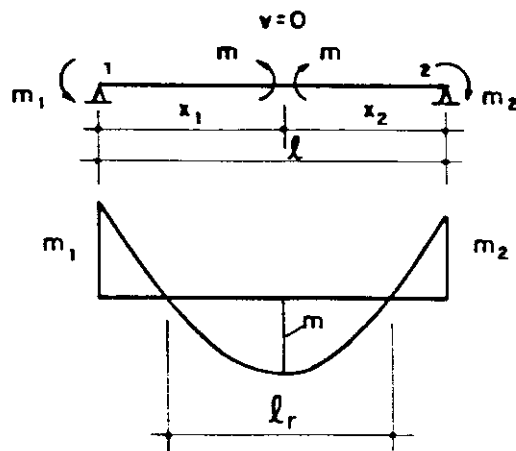


FIG. 4.1 - LAJE CONTÍNUA ARMADA EM UMA SÓ DIREÇÃO

Tomando-se os momentos em relação aos pontos 1 e 2, obtém-se:

$$m + m_1 = \frac{1}{2} p x_1^2 \quad \text{e} \quad m + m_2 = \frac{1}{2} p x_2^2 \quad (4.2.1)$$

Seja ℓ_r a distância entre os pontos de momento nulo, que será também o vão de uma faixa biapoiada, solicitada pelo mesmo momento m . Este momento pode então ser dado pela expressão:

$$m = \frac{1}{8} p \ell_r^2 \quad (4.2.2)$$

Os índices de engastamento

$$\phi_1 = m_1/m \quad \text{e} \quad \phi_2 = m_2/m \quad (4.2.3)$$

juntamente com a equação (4.2.2) substituídos nas (4.2.1), fornecem:

$$\ell_r^2 (1 + \phi_1) = 4x_1^2 \quad \text{e} \quad \ell_r^2 (1 + \phi_2) = 4x_2^2 \quad (4.2.4)$$

ou

$$x_1 = \frac{\ell_r}{2} \sqrt{1 + \phi_1} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{\ell_r}{2} \sqrt{1 + \phi_2} \quad (4.2.5)$$

Como $x_1 + x_2 = \ell$, o vão reduzido ℓ_r pode ser obtido com a expressão:

$$\ell_r = \frac{2 \ell}{\sqrt{1 + \phi_1} + \sqrt{1 + \phi_2}} \quad (4.2.6)$$

Conhecendo-se ℓ , ϕ_1 , ϕ_2 e p , determina-se ℓ_r com a (4.2.6) e, em seguida, m com a (4.2.2).

As reações de apoio para o painel em questão resultam:

$$r_1 = p x_1 \quad \text{e} \quad r_2 = p x_2 \quad (4.2.7)$$

ou

$$r_1 = \frac{Pl_r}{2} \sqrt{1 + \phi_1} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{Pl_r}{2} \sqrt{1 + \phi_2} \quad (4.2.8)$$

4.2.2 - Ponto de interrupção da armadura negativa

Se a armadura negativa for interrompida antes do ponto de momento nulo ou não for efetivamente ancorada além dele, haverá no ponto de interrupção uma ruptura do concreto à tração. Neste caso, o comportamento estrutural será diferente do que se está admitindo, devendo o cálculo dos esforços ser refeito adequadamente. Por exemplo, a hipótese de que o escoamento da armadura ocorrerá sobre os apoios não mais será válida.

Os pontos de momento nulo correspondem aos pontos de interseção da parábola com a linha de fechamento do diagrama de momentos, dadas respectivamente pelas equações (ver figura 4.2):

$$y = \frac{1}{2} px(l-x) \quad , \quad (4.2.9)$$

$$y = \frac{m_1}{l} (l-x) + \frac{m_2}{l} x \quad . \quad (4.2.10)$$

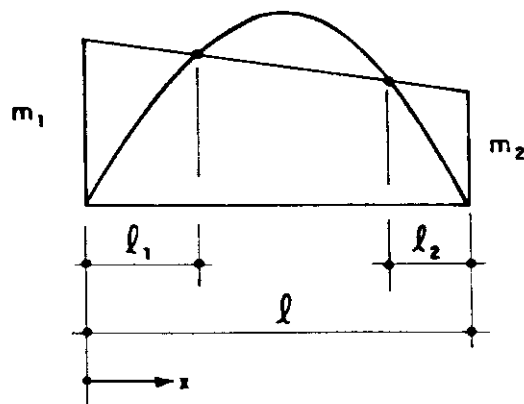


FIG.4.2 - PONTOS DE MOMENTO NULO

Igualando-se (4.2.9) a (4.2.10) obtém-se a equação do segundo grau

$$\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(1 + 2 \frac{m_1 - m_2}{pl^2}\right) \frac{x}{l} + 2 \frac{m_1}{pl^2} = 0, \quad (4.2.11)$$

que tem por raízes l_1 e $(l - l_2)$. Dessa maneira resulta:

$$\frac{l_1}{l} = \frac{1}{2} + \frac{m_1 - m_2}{pl^2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m_1 + m_2}{pl^2} + \left(\frac{m_1 - m_2}{pl^2}\right)^2}, \quad (4.2.12)$$

$$\frac{l_2}{l} = \frac{1}{2} - \frac{m_1 - m_2}{pl^2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m_1 + m_2}{pl^2} + \left(\frac{m_1 - m_2}{pl^2}\right)^2}.$$

4.3 - LAJES ARMADAS EM CRUZ

Serão calculadas pelo processo do equilíbrio as lajes retangulares com bordas apoiadas ou engastadas, com armaduras ortogonais paralelas às bordas. Pelo processo da energia, obviamente, chegar-se-iam às mesmas equações.

Como as lajes ortótropas podem ser transformadas em lajes isótropas afins, apresenta-se inicialmente o equacionamento para as isótropas, que em seguida será adaptado para as lajes ortótropas.

4.3.1 - Lajes isótropas

A notação adotada para as lajes isótropas encontra-se na figura 4.3, onde foram omitidas as hachuras bem como as charneiras negativas ao longo das bordas.

Nas lajes retangulares ora tratadas, a configuração de ruína mais freqüente se apresenta com a charneira central paralela à maior dimensão (figura 4.3a); esta configuração será chamada de configuração comum. Dependendo

das condições de apoio, pode acontecer que, para valores pe pequenos da relação vão maior/vão menor, a charneira central seja paralela ao menor vão (figura 4.3b); tal configuração será denominada configuração eventual.

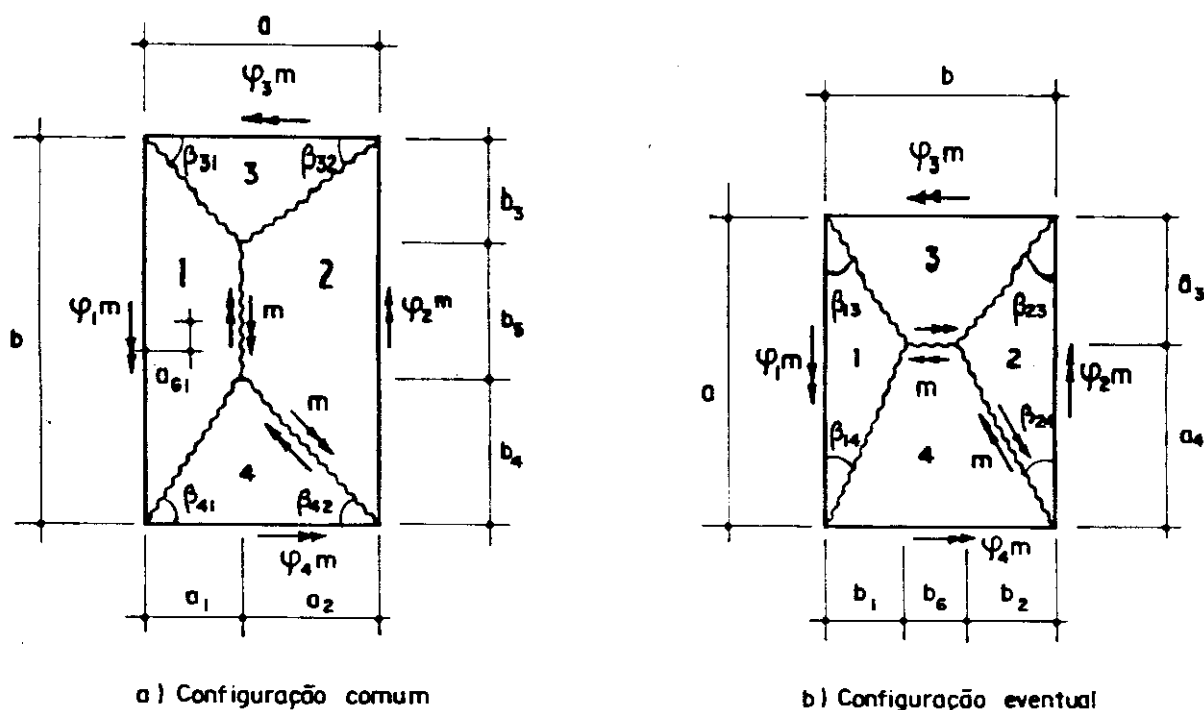


FIG. 4.3 — NOTAÇÃO PARA LAJES ISÓTROPAS

A dimensão a é sempre perpendicular à charneira central; supõe-se inicialmente que a seja igual ao menor vão, valendo portanto a notação da figura 4.3a. A verificação de que b_5 seja maior ou igual a zero ratifica a hipótese inicial; se esta condição não se verifica, os cálculos devem ser refeitos com a igual ao maior vão e de acordo com a notação da figura 4.3b.

a) Configuração comum

A numeração das regiões da laje é feita de maneira que as regiões 1 e 2 sejam sempre adjacentes aos maiores lados. Com a notação da figura 4.3a, equaciona-se inicialmente o equilíbrio de momentos da região 1 em relação à borda correspondente, obtendo-se

$$mb(1 + \phi_1) = p \frac{b + b_5}{2} a_1 a_{G1} , \quad (4.3.1)$$

onde:

$$b_5 = b - (b_3 + b_4) , \quad (4.3.2)$$

$$a_{G1} = \frac{1}{3} a_1 \frac{3b - 2(b_3 + b_4)}{b + b_5} . \quad (4.3.3)$$

Substituindo-se os valores de b_5 e a_{G1} na equação (4.3.1), resulta:

$$m(1 + \phi_1) = \frac{1}{6} p a_1^2 \left(3 - 2 \frac{b_3 + b_4}{b} \right) . \quad (4.3.4)$$

Com tratamento análogo para a região 2, obtém-se:

$$m(1 + \phi_2) = \frac{1}{6} p a_2^2 \left(3 - 2 \frac{b_3 + b_4}{b} \right) . \quad (4.3.5)$$

Para as regiões triangulares 3 e 4 as expressões se simplificam, resultando:

$$m(1 + \phi_3) = \frac{1}{6} p b_3^2 , \quad (4.3.6)$$

$$m(1 + \phi_4) = \frac{1}{6} p b_4^2 . \quad (4.3.7)$$

Analogamente ao que se fez no item 4.2.1 para lajes armadas em uma só direção, sejam a_r e b_r os vãos de uma laje apoiada nos quatro lados, que apresente o mesmo momento de plastificação m da laje original.

Por analogia com a expressão (4.2.6), define-se:

$$a_r = \frac{2a}{\sqrt{1 + \phi_1} + \sqrt{1 + \phi_2}} , \quad (4.3.8)$$

$$b_r = \frac{2b}{\sqrt{1 + \phi_3} + \sqrt{1 + \phi_4}} . \quad (4.3.9)$$

Das equações (4.3.4) e (4.3.5), sendo $a_1 + a_2 = a$, tem-se:

$$\frac{a_1}{\sqrt{1+\phi_1}} = \frac{a_2}{\sqrt{1+\phi_2}} = \frac{a}{\sqrt{1+\phi_1} + \sqrt{1+\phi_2}} = \frac{a_r}{2} . \quad (4.3.10)$$

Definindo-se

$$c = \frac{b_3 + b_4}{\sqrt{1+\phi_3} + \sqrt{1+\phi_4}} \quad (4.3.11)$$

obtém-se, através da (4.3.9):

$$b_3 + b_4 = \frac{2bc}{b_r} . \quad (4.3.12)$$

Das equações (4.3.6) e (4.3.7), tem-se:

$$\sqrt{\frac{6m}{p}} = \frac{b_3}{\sqrt{1+\phi_3}} = \frac{b_4}{\sqrt{1+\phi_4}} = \frac{b_3 + b_4}{\sqrt{1+\phi_3} + \sqrt{1+\phi_4}} = c . \quad (4.3.13)$$

Com base nas equações (4.3.4) e (4.3.5), deduz - se que

$$\frac{6m}{p} = \frac{a_1^2}{1+\phi_1} \cdot \left(3 - 2 \frac{b_3+b_4}{b}\right) = \frac{a_2^2}{1+\phi_2} \left(3 - 2 \frac{b_3+b_4}{b}\right) \quad (4.3.14)$$

e, considerando (4.3.12) e (4.3.13), obtém-se:

$$\frac{6m}{p} = c^2 = \frac{a_1^2}{1+\phi_1} \left(3 - \frac{4c}{b_r}\right) = \frac{a_2^2}{1+\phi_2} \left(3 - \frac{4c}{b_r}\right) . \quad (4.3.15)$$

Da equação (4.3.15) resulta, levando-se em conta a (4.3.10) :

$$\begin{aligned} c &= \frac{a_1}{\sqrt{1+\phi_1}} \sqrt{3 - \frac{4c}{b_r}} = \frac{a_2}{\sqrt{1+\phi_2}} \sqrt{3 - \frac{4c}{b_r}} = \\ &= \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{1+\phi_1} + \sqrt{1+\phi_2}} \sqrt{3 - \frac{4c}{b_r}} = \frac{a_r}{2} \sqrt{3 - \frac{4c}{b_r}} , \quad (4.3.16) \end{aligned}$$

$$c^2 = \frac{a_r^2}{4} \left(3 - \frac{4c}{b_r} \right) . \quad (4.3.17)$$

A equação do segundo grau (4.3.17) pode ser colocada na forma

$$c^2 + \frac{a_r^2}{b_r} c - \frac{3 a_r^2}{4} = 0 ; \quad (4.3.18)$$

como, pela definição, c é positivo, só a raiz positiva é solução. Então:

$$c = \frac{a_r}{2} \left[\sqrt{3 + \left(\frac{a_r}{b_r} \right)^2} - \frac{a_r}{b_r} \right] . \quad (4.3.19)$$

Finalmente, de (4.3.15) e (4.3.19), resulta:

$$m = \frac{pc^2}{6} = \frac{p a_r^2}{24} \left[\sqrt{3 + \left(\frac{a_r}{b_r} \right)^2} - \frac{a_r}{b_r} \right]^2 \quad (4.3.20)$$

Nos problemas usuais, em geral são conhecidos a , b , p e os índices de engastamento ϕ_i ($i = 1, 2, 3$ e 4). A solução é obtida calculando-se a_r , b_r , c e $(b_3 + b_4)$, respectivamente com as equações (4.3.8), (4.3.9), (4.3.19) e (4.3.12).

De posse do valor de $(b_3 + b_4)$, calcula-se

$$b_5 = b - (b_3 + b_4) ; \quad (4.3.21)$$

se resultar $b_5 \geq 0$, a hipótese de que a charneira central é paralela à maior dimensão é correta (configuração comum da figura 4.3).

A condição $b_5 \geq 0$ é equivalente a, tendo em conta a (4.3.12),

$$b \geq \frac{2 bc}{b_r} ,$$

ou seja, que

$$c \leq \frac{b_r}{2} . \quad (4.3.22)$$

Então, se resultar $c \leq b_r/2$, a hipótese de que a configuração das charneiras é a comum está satisfeita, estando portanto corretos os valores de a_r , b_r e c .

De maneira mais simples, para se certificar de que a configuração de ruína é a comum, basta que

$$a_r \leq b_r . \quad (4.3.23)$$

Como a_r e b_r são as dimensões de uma laje apoiada nos quatro lados, que apresenta o mesmo momento de plastificação m , e como a , e portanto a_r , é sempre perpendicular à charneira central, a_r não pode ser maior que b_r .

Se a_r resultar maior que b_r , deduz-se que a charneira central será paralela ao menor lado (configuração eventual da figura 4.3); o cálculo anterior deverá ser adaptado a esta nova condição.

b) Configuração eventual

Após a constatação de que a configuração de ruína é do tipo eventual, pode-se fazer equacionamento análogo ao anterior, só que com a notação da figura 4.3b. Os novos valores de a_r e de b_r são dados por:

$$a_r = \frac{2a}{\sqrt{1 + \phi_3} + \sqrt{1 + \phi_4}} , \quad (4.3.24)$$

$$b_r = \frac{2b}{\sqrt{1 + \phi_1} + \sqrt{1 + \phi_2}} . \quad (4.3.25)$$

As equações que fornecem c e m , respectivamente (4.3.19) e (4.3.20), permanecem inalteradas.

4.3.2 - Lajes ortótropas

As lajes usuais são, em geral, ortótropas. Num equacionamento geral, essa ortotropia precisa ser considerada. As lajes isótropas serão tratadas como um caso particular, em que o índice de ortotropia κ vale 1.

Nos problemas de dimensionamento, que são os mais comuns, são conhecidos os vãos, as cargas e as condições de apoio. Os índices de ortotropia e de engastamento são adotados ou estimados com base em um pré-dimensionamento em regime elástico ou um critério econômico.

As lajes ortótropas serão calculadas através de suas isótropas afins, de acordo com as notações das figuras 4.4 e 4.5, respectivamente para configuração comum e para configuração eventual, nas quais:

$$l_x = \text{menor vão,}$$

$$m_x = m .$$

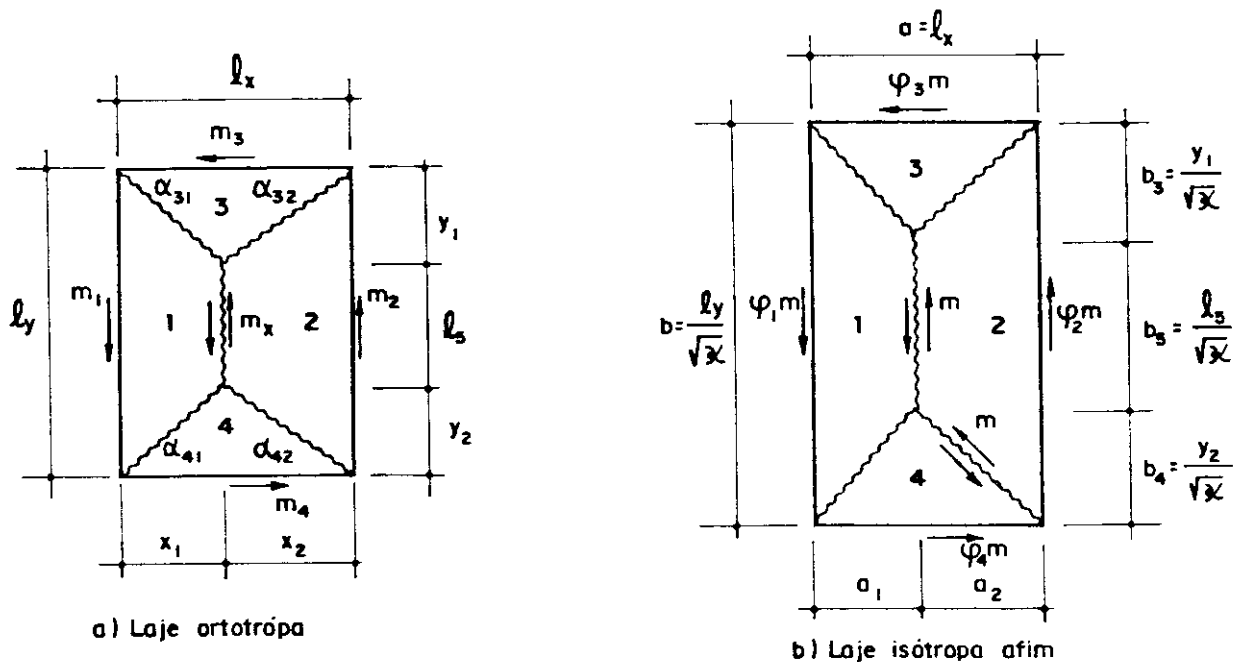


FIG. 4.4 — NOTAÇÃO PARA A CONFIGURAÇÃO COMUM

a) Configuração de ruína comum

Adota-se, inicialmente, $a = l_x$, sendo a notação complementar indicada na figura 4.4, onde foram omitidas as hachuras e as charneiras negativas ao longo das bordas.

De acordo com esta notação, tem-se, para a laje ortótropa:

$$\begin{aligned} m_x &= m, & m_y &= \kappa m, \\ m_1 &= \phi_1 m, & m_2 &= \phi_2 m, \\ m_3 &= \phi_3 \kappa m, & m_4 &= \phi_4 \kappa m, \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{31} &= \text{arc tg } y_1/x_1, & \alpha_{32} &= \text{arc tg } y_1/x_2, \\ \alpha_{41} &= \text{arc tg } y_2/x_1, & \alpha_{42} &= \text{arc tg } y_2/x_2, \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

onde

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1, & x_2 &= a_2, \\ y_1 &= \sqrt{\kappa} b_3, & y_2 &= \sqrt{\kappa} b_4. \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

Substituindo-se os valores das (4.3.28) nas equações (4.3.27), obtém-se:

$$\begin{aligned} \alpha_{31} &= \text{arc tg } \frac{\sqrt{\kappa} b_3}{a_1}, & \alpha_{32} &= \text{arc tg } \frac{\sqrt{\kappa} b_3}{a_2}, \\ \alpha_{41} &= \text{arc tg } \frac{\sqrt{\kappa} b_4}{a_1}, & \alpha_{42} &= \text{arc tg } \frac{\sqrt{\kappa} b_4}{a_2}. \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

Das equações (4.3.10) e (4.3.13) deduz-se que:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_r}{2} \sqrt{1 + \phi_1}, & a_2 &= \frac{a_r}{2} \sqrt{1 + \phi_2}, \\ b_3 &= c \sqrt{1 + \phi_3}, & b_4 &= c \sqrt{1 + \phi_4}. \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

Substituindo-se estes valores nas (4.3.29), as inclinações das charneiras, medidas em relação aos lados menores, resultam:

$$\begin{aligned} \alpha_{31} &= \text{arc tg } \frac{2c}{a_r} \sqrt{\kappa \frac{1+\phi_3}{1+\phi_1}} , & \alpha_{32} &= \text{arc tg } \frac{2c}{a_r} \sqrt{\kappa \frac{1+\phi_3}{1+\phi_2}} , \\ \alpha_{41} &= \text{arc tg } \frac{2c}{a_r} \sqrt{\kappa \frac{1+\phi_4}{1+\phi_1}} , & \alpha_{42} &= \text{arc tg } \frac{2c}{a_r} \sqrt{\kappa \frac{1+\phi_4}{1+\phi_2}} . \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

Na laje isótropa afim, a carga p permanece inalterada, sendo suas dimensões dadas por:

$$a = l_x , \quad b = l_y / \sqrt{\kappa} . \quad (4.3.32)$$

b) Configuração de ruína eventual

Neste caso, as dimensões da laje isótropa afim são dadas por

$$a = l_y / \sqrt{\kappa} , \quad b = l_x , \quad (4.3.33)$$

sendo o restante da notação indicado na figura 4.5; nesta, também se omitiram as hachuras e as charneiras negativas ao longo das bordas.

Para a laje ortótropa, permanecem válidas as relações (4.3.26), sendo as inclinações das charneiras em relação aos lados menores dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha_{31} &= \text{arc tg } y_1/x_1 , & \alpha_{32} &= \text{arc tg } y_1/x_2 , \\ \alpha_{41} &= \text{arc tg } y_2/x_1 , & \alpha_{42} &= \text{arc tg } y_2/x_2 , \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

onde

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 , & x_2 &= b_2 , \\ y_1 &= \sqrt{\kappa} a_3 , & y_2 &= \sqrt{\kappa} a_4 . \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

Substituindo-se (4.3.35) em (4.3.34), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \alpha_{31} &= \text{arc tg } \frac{\sqrt{\kappa} a_3}{b_1}, & \alpha_{32} &= \text{arc tg } \frac{\sqrt{\kappa} a_3}{b_2}, \\ \alpha_{41} &= \text{arc tg } \frac{\sqrt{\kappa} a_4}{b_1}, & \alpha_{42} &= \text{arc tg } \frac{\sqrt{\kappa} a_4}{b_2}. \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

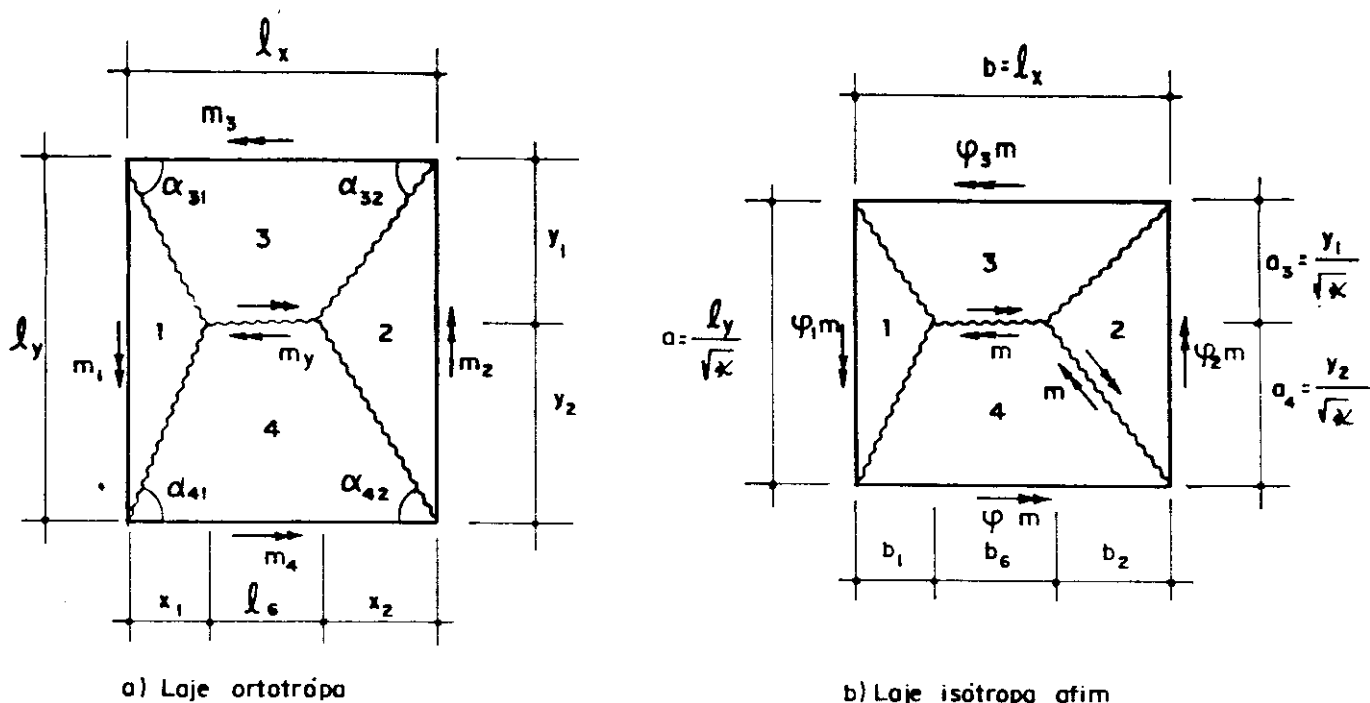


FIG. 4.5 — NOTAÇÃO PARA A CONFIGURAÇÃO EVENTUAL

No equacionamento para laje isotrópica com configuração eventual, análogo ao que se fez no item 4.3.1 para configuração comum, concluir-se-ia que:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_r}{2} \sqrt{1 + \phi_3}, & a_4 &= \frac{a_r}{2} \sqrt{1 + \phi_4}, \\ b_1 &= c \sqrt{1 + \phi_1}, & b_2 &= c \sqrt{1 + \phi_2}. \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

Substituindo-se estes valores nas (4.3.36), resultam:

$$\alpha_{31} = \text{arc tg} \frac{a_r}{2c} \sqrt{\kappa \frac{1 + \phi_3}{1 + \phi_1}} \quad , \quad \alpha_{32} = \text{arc tg} \frac{a_r}{2c} \sqrt{\kappa \frac{1 + \phi_3}{1 + \phi_2}} \quad ,$$

$$\alpha_{41} = \text{arc tg} \frac{a_r}{2c} \sqrt{\kappa \frac{1 + \phi_4}{1 + \phi_1}} \quad \alpha_{42} = \text{arc tg} \frac{a_r}{2c} \sqrt{\kappa \frac{1 + \phi_4}{1 + \phi_2}} \quad .$$

(4.3.38)

4.4 - REAÇÕES DE APOIO

Já foi visto no capítulo 3 que as reações de apoio podem ser consideradas em duas parcelas, uma uniformemente distribuída ao longo da borda e outra concentrada nos cantos.

4.4.1 - Reações nos cantos

As reações nos cantos podem ser calculadas empregando-se as expressões (3.3.24), adaptando-as para os casos em questão.

a) Configuração comum

Com a notação da figura 4.6, lembrando que na laje isótropa afim as resultantes das cargas aparecem divididas por $\sqrt{\kappa}$, as forças nodais junto aos cantos A, B, C e D, dirigidas para cima, são respectivamente:

$$\begin{aligned} K_{A1} &= \sqrt{\kappa} m(1 + \phi_1) \cotg \beta_{13} = m(1 + \phi_1) \text{tg} \alpha_{31}; \\ K_{A3} &= \sqrt{\kappa} m(1 + \phi_3) \cotg \beta_{31} = \kappa m(1 + \phi_3) / \text{tg} \alpha_{32}; \\ K_{B3} &= \sqrt{\kappa} m(1 + \phi_3) \cotg \beta_{32} = \kappa m(1 + \phi_3) / \text{tg} \alpha_{32}; \\ K_{B2} &= \sqrt{\kappa} m(1 + \phi_2) \cotg \beta_{23} = m(1 + \phi_2) \text{tg} \alpha_{32}; \\ K_{C2} &= \sqrt{\kappa} m(1 + \phi_2) \cotg \beta_{24} = m(1 + \phi_2) \text{tg} \alpha_{42}; \\ K_{C4} &= \sqrt{\kappa} m(1 + \phi_4) \cotg \beta_{42} = \kappa m(1 + \phi_4) / \text{tg} \alpha_{42}; \\ K_{D4} &= \sqrt{\kappa} m(1 + \phi_4) \cotg \beta_{41} = \kappa m(1 + \phi_4) / \text{tg} \alpha_{41}; \\ K_{D1} &= \sqrt{\kappa} m(1 + \phi_1) \cotg \beta_{14} = m(1 + \phi_1) \text{tg} \alpha_{41} . \end{aligned}$$

(4.4.1)

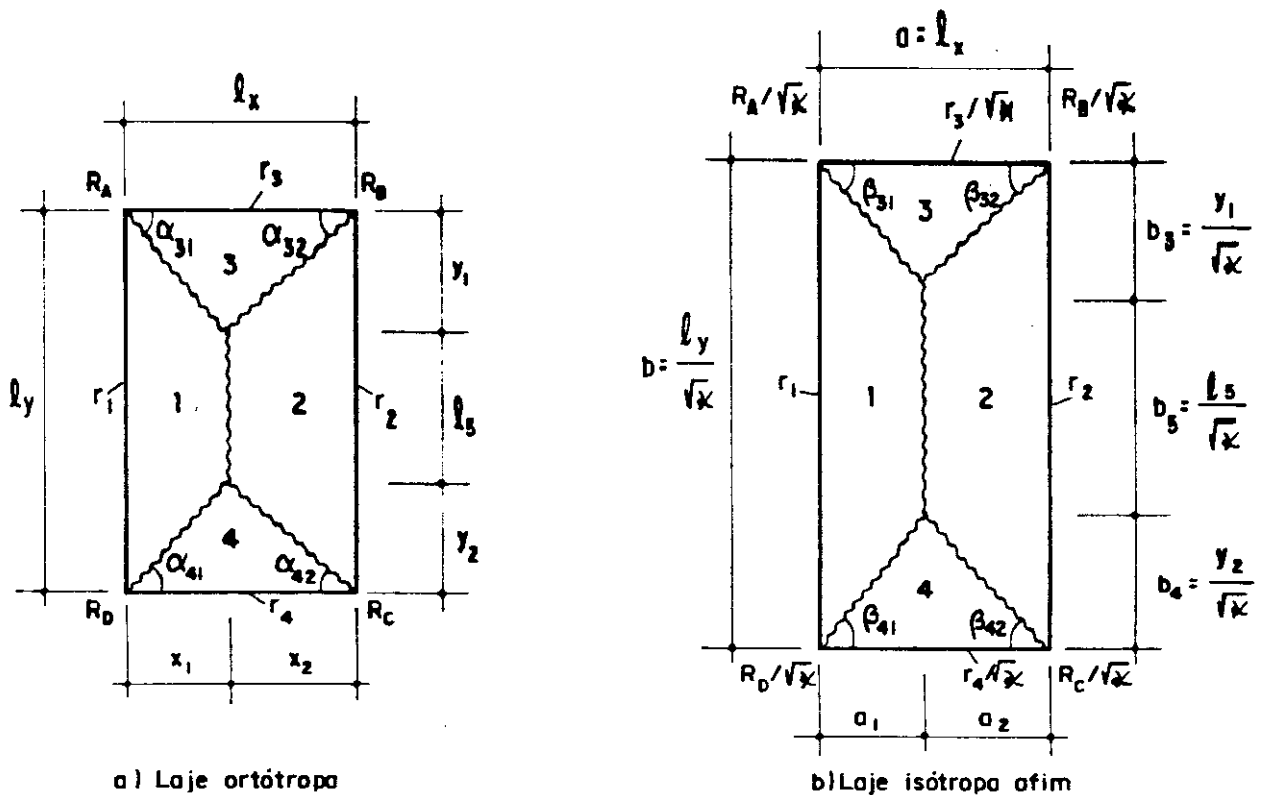


FIG. 4.6 — REAÇÕES DE APOIO PARA CONFIGURAÇÃO COMUM

Nota-se que na figura 4.6 não estão indicadas nem as hachuras nem as charneiras negativas ao longo dos apoios.

As reações de canto devem equilibrar as forças nodais calculadas com as expressões anteriores. Portanto, seus valores são dados por:

$$\begin{aligned}
 R_A &= - (K_{A1} + K_{A3}) \quad , & R_B &= - (K_{B3} + K_{B2}) \quad , \\
 R_C &= - (K_{C2} + K_{C4}) \quad , & R_D &= - (K_{D4} + K_{D1}) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.4.2}$$

b) Configuração eventual

Para configuração eventual, as expressões relativas às forças nodais junto aos cantos e também as das reações de canto são idênticas às (4.4.1) e (4.4.2) respectivamente. A notação, neste caso, é dada na figura 4.7.

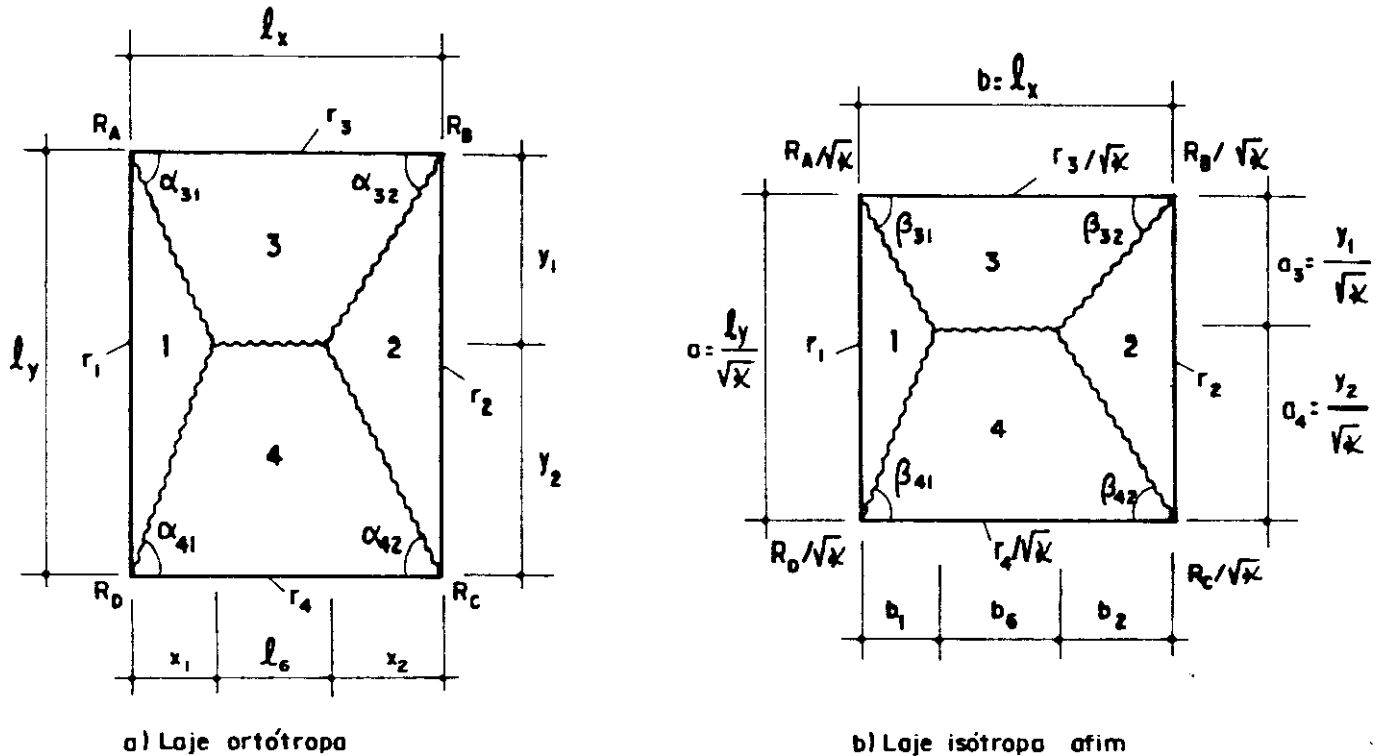


FIG.4.7 — REAÇÕES DE APOIO PARA CONFIGURAÇÃO EVENTUAL

4.4.2 - Reações nas bordas

Ao longo das bordas, as reações de apoio são dadas pelas expressões (3.10.4) e (3.10.13), respectivamente para as partes triangulares e trapezoidais, considerando somente carga uniforme e adaptando-as para a ocorrência simultânea de momentos positivos e negativos. Neste caso, é necessário considerar separadamente os dois tipos de configuração.

a) Configuração comum

Para a configuração da figura 4.6, as reações de apoio são dadas por:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \frac{1}{3} p a_1 \left(2 + 2 \frac{b_5}{b} - \frac{b_5^2}{b^2} \right), \\
 r_2 &= \frac{1}{3} p a_2 \left(2 + 2 \frac{b_5}{b} - \frac{b_5^2}{b^2} \right), \\
 r_3 &= \sqrt{k} \frac{2}{3} p b_3, \\
 r_4 &= \sqrt{k} \frac{2}{3} p b_4.
 \end{aligned}
 \tag{4.4.3}$$

Substituindo-se nestas equações os valores de a_1 , a_2 , b_3 e b_4 , dados pelas (4.3.30), e o de b_5 dado por

$$b_5 = b - (b_3 + b_4) = \frac{\ell y}{\sqrt{\kappa}} - c (\sqrt{1 + \phi_3} + \sqrt{1 + \phi_4}), \quad (4.4.4)$$

resultam

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{p a_r}{6} \sqrt{1 + \phi_1} \left(2 + 2\sqrt{\kappa} \frac{b_5}{\ell y} - \kappa \frac{b_5^2}{\ell y^2} \right), \\ r_2 &= \frac{p a_r}{6} \sqrt{1 + \phi_1} \left(2 + 2\sqrt{\kappa} \frac{b_5}{\ell y} - \kappa \frac{b_5^2}{\ell y^2} \right), \\ r_3 &= \frac{2}{3} p c \sqrt{\kappa(1 + \phi_3)}, \\ r_4 &= \frac{2}{3} p c \sqrt{\kappa(1 + \phi_4)}, \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

sendo c dado pela (4.3.19) e a_r pela (4.3.8).

b) Configuração eventual

No caso de configuração como a da figura 4.7, as reações de apoio são dadas por:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2}{3} p b_1, \\ r_2 &= \frac{2}{3} p b_2, \\ r_3 &= \sqrt{\kappa} \frac{1}{3} p a_3 \left(2 + 2 \frac{b_6}{b} - \frac{b_6^2}{b^2} \right), \\ r_4 &= \sqrt{\kappa} \frac{1}{3} p a_4 \left(2 + 2 \frac{b_6}{b} - \frac{b_6^2}{b^2} \right). \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Substituindo-se nestas equações os valores de b_1 , b_2 , a_3 e a_4 , dados pela (4.3.37) e o de b_6 dado por

$$b_6 = b - (b_1 + b_2) = \ell_x - c (\sqrt{1 + \phi_1} + \sqrt{1 + \phi_2}), \quad (4.4.7)$$

resultam

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \frac{2}{3} pc \sqrt{1 + \phi_1} \quad , \\
 r_2 &= \frac{2}{3} pc \sqrt{1 + \phi_2} \quad , \\
 r_3 &= \frac{p a_r}{6} \sqrt{\kappa(1 + \phi_3)} \left(2 + 2 \frac{b_6}{l_x} - \frac{b_6^2}{l_x^2} \right) \quad , \\
 r_4 &= \frac{p a_r}{6} \sqrt{\kappa(1 + \phi_4)} \left(2 + 2 \frac{b_6}{l_x} - \frac{b_6^2}{l_x^2} \right) \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{4.4.8}$$

sendo c dado pela (4.3.19) e a_r pela (4.3.24).

4.4.3 - Reações médias

No caso comum na prática em que as reações de canto são consideradas uniformemente distribuídas ao longo das bordas, as reações médias podem ser obtidas a partir das equações (4.4.1), (4.4.5) e (4.4.8), resultando:

$$\begin{aligned}
 r_{1m} &= r_1 - \frac{K_{A1} + K_{D1}}{l_y} \quad , \\
 r_{2m} &= r_2 - \frac{K_{B2} + K_{C2}}{l_y} \quad , \\
 r_{3m} &= r_3 - \frac{K_{A3} + K_{B3}}{l_x} \quad , \\
 r_{4m} &= r_4 - \frac{K_{C4} + K_{D4}}{l_x} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.4.9}$$

Para configuração usual, empregam-se os resultados das (4.4.5) e, para configuração eventual, os das (4.4.8). As expressões (4.4.1) valem para os dois tipos de configuração.

4.5 - PONTO DE INTERRUÇÃO DA ARMADURA NEGATIVA

Os pontos de interrupção da armadura negativa devem ser determinados a partir dos pontos de momento nulo, considerando em cada direção um diagrama triangular de momentos negativos, onde a base do triângulo é delimitada por

estes pontos de momento nulo.

A determinação aproximada dos pontos de momento nulo pode ser feita com base no que se apresentou no item 4.2.2 para as lajes armadas em uma só direção. Para isto, há necessidade de se determinarem os quinhões de carga p_x e p_y correspondentes a cada direção.

4.5.1 - Quinhões de carga

Determinam-se valores aproximados dos quinhões de carga empregando-se as expressões (4.2.8) e considerando-se as reações médias do item 4.4.3.

a) Configuração comum

Como o procedimento que ora se adota resulta em valores aproximados, empregando-se as expressões (4.2.8) respectivamente para as regiões 1 e 2 da laje, podem resultar valores um pouco diferentes para o mesmo quinhão de carga p_x . Estes valores serão denominados p_{x1} e p_{x2} , cujos resultados são:

$$p_{x1} = 2r_{1m} / (a_r \sqrt{1 + \phi_1}) \quad \text{e} \quad p_{x2} = 2r_{2m} / (a_r \sqrt{1 + \phi_2}). \quad (4.5.1)$$

Pode-se adotar p_x como sendo a média destes dois valores, resultando:

$$p_x = (p_{x1} + p_{x2}) / 2. \quad (4.5.2)$$

Com tratamento análogo para as regiões 3 e 4, obtém-se:

$$p_{y3} = 2r_{3m} / (b_r \sqrt{1 + \phi_3}), \quad p_{y4} = 2r_{4m} / (b_r \sqrt{1 + \phi_4}) \quad (4.5.3)$$

$$p_y = (p_{y3} + p_{y4}) / 2. \quad (4.5.4)$$

Como, por definição de quinhão de carga $p_x + p_y = p$, p_y pode ser calculado também pela expressão

$$p_y = p - p_x , \quad (4.5.5)$$

valor que pode diferir um pouco do obtido pela expressão (4.5.4), pelo fato de serem imprecisos os valores ora considerados. Espera-se que esta imprecisão não invalide a aplicação prática do processo, o que será verificado em exemplos de aplicação.

b) Configuração eventual

Para configuração eventual, o maior quinhão corresponde à direção y. Com tratamento semelhante ao do item anterior, resulta:

$$p_{y3} = 2r_{3m}/(a_r \sqrt{1 + \phi_3}) \quad , \quad p_{y4} = 2r_{4m}/(a_r \sqrt{1 + \phi_4}) \quad , \quad (4.5.6)$$

$$p_y = (p_{y3} + p_{y4}) / 2 \quad , \quad (4.5.7)$$

$$p_{x1} = 2r_{1m}/(b_r \sqrt{1 + \phi_1}) \quad , \quad p_{x2} = 2r_{2m}/(b_r \sqrt{1 + \phi_2}) \quad , \quad (4.5.8)$$

$$p_x = (p_{x1} + p_{x2})/2 \quad (4.5.9)$$

ou

$$p_x = p - p_y . \quad (4.5.10)$$

Os valores de a_r , b_r , r_{1m} , r_{2m} , r_{3m} e r_{4m} devem, logicamente, corresponder à configuração eventual. Sobre a imprecisão dos resultados valem as mesmas observações feitas para o caso de configuração comum.

4.5.2 - Pontos de momento nulo

Conhecidos os quinhões de carga p_x e p_y , obtêm-se os pontos de momento nulo com base nas equações (4.2.12), resultando:

$$\begin{aligned} \frac{l_1}{l_x} &= \frac{1}{2} + \frac{m_1 - m_2}{p_x l_x^2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m_1 + m_2}{p_x l_x^2} + \left(\frac{m_1 - m_2}{p_x l_x^2}\right)^2}, \\ \frac{l_2}{l_x} &= \frac{1}{2} - \frac{m_1 - m_2}{p_x l_x^2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m_1 + m_2}{p_x l_x^2} + \left(\frac{m_1 - m_2}{p_x l_x^2}\right)^2}, \\ \frac{l_3}{l_x} &= \lambda \left[\frac{1}{2} + \frac{m_3 - m_4}{p_y l_y^2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m_3 + m_4}{p_y l_y^2} + \left(\frac{m_3 - m_4}{p_y l_y^2}\right)^2} \right], \\ \frac{l_4}{l_x} &= \lambda \left[\frac{1}{2} - \frac{m_3 - m_4}{p_y l_y^2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m_3 + m_4}{p_y l_y^2} + \left(\frac{m_3 - m_4}{p_y l_y^2}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

Estas expressões valem tanto para configuração comum quanto para configuração eventual.

4.6 - MARCHA DE CÁLCULO

Apresenta-se a marcha de cálculo desde os dados iniciais da laje até o cálculo dos momentos, da configuração de ruína e das reações de apoio. Supõe-se conhecidas as cargas permanentes e as acidentais, consideradas uniformemente distribuídas. Com relação à espessura, pode ser fixado um critério para a sua determinação. Por enquanto, ela será suposta conhecida. Portanto, já se conhece também o peso próprio da laje.

4.6.1 - Dados

De início são conhecidos:

l_x = menor vão,

l_y = maior vão,

$\lambda = l_y / l_x$ = razão dos vãos,

p = carga total uniformemente distribuída, majorada, caso de vinculação (ver item 2.2.1).

4.6.2 - Valores de ϕ_i e de κ

Para bordas simplesmente apoiadas, adota-se $\phi_i = 0$. Para bordas engastadas, os valores de ϕ_i podem ser adotadas com base em um dos seguintes critérios:

- . pré-dimensionamento em regime elástico, por exemplo empregando as funções aproximadas fornecidas pelas tabelas 2.3;
- . valores arbitrados, por exemplo no intervalo entre 1 e 2,5, na direção do menor vão, e entre 1 e 4, na direção do maior vão;
- . valores adotados após compatibilização dos momentos com os das lajes adjacentes;
- . estudo econômico abrangendo armaduras superiores e inferiores; esta alternativa não será considerada neste trabalho.

Com relação aos valores de κ , há três alternativas principais:

- . pré-dimensionamento em regime elástico, conforme o mesmo critério adotado na determinação de ϕ_i ;
- . valores arbitrados, por exemplo após compatibilização dos momentos com os das lajes vizinhas;
- . critério econômico envolvendo somente as armaduras inferiores.

4.6.3 - Direção da charneira central

Supõe-se inicialmente que a configuração das charneiras seja a mais comum, ou seja, que a charneira central seja paralela à maior dimensão. Neste caso:

$$a = l_x, \quad b = l_y / \sqrt{\kappa}.$$

Os valores de a_r e b_r são calculados com as expressões (4.3.8) e (4.3.9) respectivamente.

Se resultar $a_r \leq b_r$, a hipótese inicial é correta e, de fato, ocorre a configuração comum.

Se esta condição não se verificar, ocorre a configuração eventual, em que a charneira central é paralela à menor dimensão. Neste caso, a e b assumem os novos valores:

$$a = l_y / \sqrt{\kappa}, \quad b = l_x.$$

Os valores de a_r e b_r passam então a ser calculados pelas expressões (4.3.24) e (4.3.25), obtendo-se os mesmos valores relativos à configuração comum, só que permutados.

4.6.4 - Momentos de plastificação

De posse dos valores corretos de a_r e b_r , calcula-se c com a (4.3.19) e m com a (4.3.20); os demais momentos são calculados com as (4.3.26).

4.6.5 - Configuração de ruína

A configuração de ruína ficará definida conhecendo-se os valores de x_1 , x_2 , y_1 e y_2 , dos quais l_5 ou l_6 são de correntes.

Para configuração comum eles são obtidos com as e-

quações (4.3.28) e (4.3.30), sendo as inclinações das charneiras dadas pelas (4.3.31) e l_5 por:

$$l_5 = l_y - (y_1 + y_2) \quad . \quad (4.6.1)$$

Para configuração eventual, empregam-se as (4.3.35), (4.3.37) e (4.3.28) respectivamente, sendo

$$l_6 = l_x - (x_1 + x_2) \quad . \quad (4.6.2)$$

4.6.6 - Reações de apoio

Para as reações de apoio, há duas alternativas, ou seja, considerar reações de canto ou simplesmente adotar reações médias, supostas uniformemente distribuídas ao longo de cada borda.

a) Com reações de canto

Conhecendo-se as forças nodais junto aos cantos, dadas pelas (4.4.1), as reações de canto são calculadas pelas (4.4.2).

Ao longo das bordas, as reações são obtidas com as (4.4.5) para configuração comum e com as (4.4.8) para configuração eventual, sendo b_5 e b_6 dados respectivamente por (4.4.4) e (4.4.7).

b) Reações médias

Com as forças nodais junto aos cantos e com as reações ao longo das bordas, todas elas calculadas no item anterior, obtém-se as reações médias empregando-se as (4.4.9).

4.6.7 - Quinhões de carga

Com base nas reações médias obtidas no item ante-

rior, os quinhões de carga podem ser dados pelas equações (4.5.1), (4.5.2) e (4.5.5), no caso de configuração comum, e pelas (4.5.6), (4.5.7) e (4.5.10), no caso de configuração eventual.

4.6.8 - Pontos de momento nulo

São dados pelas expressões (4.5.11), tanto para configuração comum quanto para configuração eventual.

4.7 - EXEMPLOS EMPREGANDO AS FUNÇÕES APROXIMADAS

4.7.1 - Caso 2B com $\lambda=1$

Ver notação da figura 4.8; unidades kN e m.

a) Dados

$$l_x = 1 \quad l_y = 1 \quad \lambda = l_y/l_x = 1 \quad p = 1 \text{ kN/m}^2$$

b) Valores de ϕ_i e de κ

Com a notação adotada, tem-se $\phi_1 = \phi_3 = \phi_4 = 0$.

Da tabela 2.3a, tem-se:

$$\mu_x = -1,49 \lambda^2 + 6,78 \lambda - 1,40 = 3,89;$$

$$\mu_x' = -3,54 \lambda^2 + 14,27 \lambda - 2,33 = 8,40;$$

$$\mu_y = -1,07 \lambda + 4,18 = 3,11 .$$

Resulta, então:

$$\phi_2 = \mu_x' / \mu_x = 2,159 ;$$

$$\kappa = \mu_y / \mu_x = 0,799 .$$

c) Direção da charneira central

Hipótese inicial:

$$a = l_x = 1;$$

$$b = l_y / \sqrt{\kappa} = 1,118;$$

$$a_r = 2a / (\sqrt{1 + \phi_1} + \sqrt{1 + \phi_2}) = 0,720;$$

$$b_r = 2b / (\sqrt{1 + \phi_3} + \sqrt{1 + \phi_4}) = 1,118.$$

Como $a_r < b_r$, confirma-se a hipótese inicial, ou seja, ocorre configuração comum.

d) Momentos de plastificação (kN.m/m)

$$c = \frac{a_r}{2} \left[\sqrt{3 + (a_r/b_r)^2} - a_r/b_r \right] = 0,4335 \text{ metros}$$

$$m_x = m = pc^2/6 = 0,0313$$

$$m_y = \kappa m = 0,0250$$

$$m_1 = m_3 = m_4 = 0$$

$$m_2 = \phi_2 m = 0,0676$$

Estes momentos são 19,5% menores que os obtidos em regime elástico.

e) Configuração de ruína

Na figura 4.8, tem-se:

$$x_1 = \frac{a_r}{2} \sqrt{1 + \phi_1} = 0,360;$$

$$x_2 = \frac{a_r}{2} \sqrt{1 + \phi_2} = 0,640;$$

$$y_1 = y_2 = \sqrt{\kappa} c \sqrt{1 + \phi_3} = 0,3876;$$

$$l_5 = l_y - (y_1 + y_2) = 0,2248;$$

$$\alpha_{31} = \alpha_{41} = \text{arc tg} \frac{2c}{a_r} \sqrt{\kappa} \frac{1 + \phi_3}{1 + \phi_1} = \text{arc tg} 1,07655 = 47,111^\circ;$$

$$\alpha_{32} = \alpha_{42} = \text{arc tg} \frac{2c}{a_r} \sqrt{\kappa} \frac{1 + \phi_3}{1 + \phi_2} = \text{arc tg} 0,60567 = 31,202^\circ;$$

Reações médias (kN/m):

$$r_{1m} = r_1 - (K_{A1} + K_{D1})/\ell_Y = 0,2205 ;$$

$$r_{2m} = r_2 - (K_{B2} + K_{C2})/\ell_Y = 0,3919 ;$$

$$r_{3m} = r_{4m} = r_3 - (K_{A3} + K_{B3})/\ell_X = 0,1938 .$$

g) Quinhões de carga (kN/m²)

$$p_{x1} = 2r_{1m}/(a_r \sqrt{1 + \phi_1}) = 0,612$$

$$p_{x2} = 2r_{2m}/(a_r \sqrt{1 + \phi_2}) = 0,612$$

$$p_x = (p_{x1} + p_{x2})/2 = 0,612$$

$$p_y = p - p_x = 0,388$$

Com as expressões (4.5.3) e (4.5.4), obter-se-ia:

$$p_{y3} = p_{y4} = p_y = 2r_{3m}/(b_r \sqrt{1 + \phi_3}) = 0,346 ,$$

que difere 10,6% do valor adotado.

h) Pontos de momento nulo

$$\frac{\ell_1}{\ell_x} = \frac{\ell_3}{\ell_y} = \frac{\ell_4}{\ell_y} = 0$$

$$\frac{\ell_2}{\ell_x} = \frac{1}{2} - \frac{m_1 - m_2}{p_x \ell_x^2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m_1 + m_2}{p_x \ell_x^2} + \left(\frac{m_1 - m_2}{p_x \ell_x^2}\right)^2} =$$

$$= 0,221$$

4.7.2 - Caso 4A com $\lambda = 1,25$

Ver figura 4.9; unidades kN e m.

a) Dados

$$\ell_x = 1 \quad \ell_y = 1,25 \quad \lambda = \ell_y/\ell_x = 1,25 \quad p = 1\text{kN/m}^2$$

b) Valores de ϕ_i e de κ

Com a notação da figura 4.9: $\phi_1 = \phi_2 = 0$.

Na tabela 2.3b, obtém-se:

$$\mu_X = -0,78\lambda^2 + 8,61\lambda - 5,64 = 3,904 ;$$

$$\mu_Y = -3,13\lambda^2 + 9,67\lambda - 3,36 = 3,837 ;$$

$$\mu'_Y = -4,31\lambda^2 + 17,84\lambda - 6,53 = 9,036 .$$

Resulta, então:

$$\phi_3 = \phi_4 = \mu'_Y / \mu_Y = 2,355 ;$$

$$\kappa = \mu_Y / \mu_X = 0,983 .$$

c) Direção da charneira central

Hipótese inicial:

$$a = l_X = 1 ;$$

$$b = l_Y \sqrt{\kappa} = 1,25 / \sqrt{0,983} = 1,261 ;$$

$$a_r = 2a / (\sqrt{1 + \phi_1} + \sqrt{1 + \phi_2}) = 1 ;$$

$$b_r = 2b / (\sqrt{1 + \phi_3} + \sqrt{1 + \phi_4}) = 0,688 .$$

Como $a_r > b_r$, não se confirma a hipótese inicial .
Então, ocorre configuração eventual e os valores corretos são:

$$a = l_Y / \sqrt{\kappa} = 1,25 / \sqrt{0,983} = 1,261 ;$$

$$b = l_X = 1 ;$$

$$a_r = 2a / (\sqrt{1 + \phi_3} + \sqrt{1 + \phi_4}) = 0,688 ;$$

$$b_r = 2b / (\sqrt{1 + \phi_1} + \sqrt{1 + \phi_2}) = 1 .$$

Observação: basta permutar os valores anteriores de a_r e b_r .

d) Momentos de plastificação (kN.m/m)

$$c = \frac{a_r}{2} \left[\sqrt{3 + (a_r/b_r)^2} - a_r/b_r \right] = 0,4046 \text{ metros}$$

$$m_x = m = pc^2/6 = 0,0273$$

$$m_y = \kappa m = 0,0268$$

$$m_1 = m_2 = 0$$

$$m_3 = m_4 = \phi_3 \kappa m = 0,0631 .$$

Estes momentos são 30,1% menores que os obtidos em regime elástico.

e) Configuração de ruína

Na figura 4.9, tem-se:

$$x_1 = x_2 = c \sqrt{1 + \phi_1} = 0,4046;$$

$$y_1 = y_2 = \frac{a_r}{2} \sqrt{\kappa(1 + \phi_3)} = 0,6250;$$

$$l_6 = l_x - (x_1 + x_2) = 0,1908;$$

$$\alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{42} = \alpha_{41} = \text{arc tg} \frac{a_r}{2c} \sqrt{\kappa \frac{1 + \phi_3}{1 + \phi_1}} = \text{arc tg} 1,54483 = 57,0840 .$$

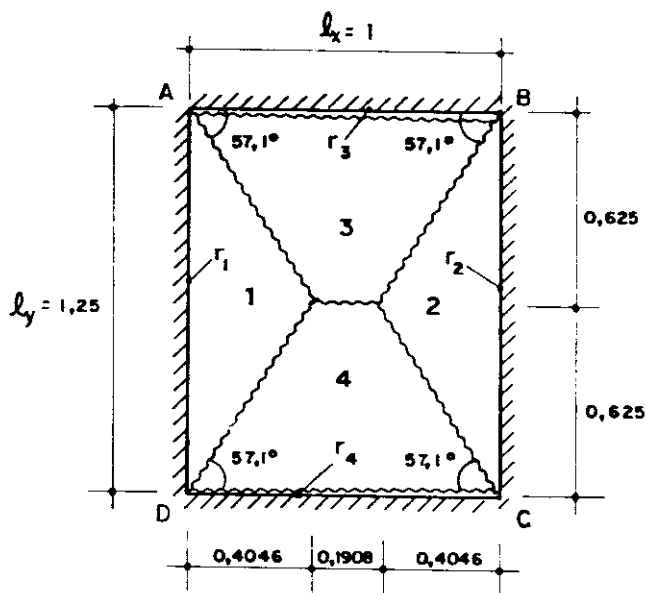


FIG. 4.9 — CONFIGURAÇÃO DE RUÍNA : CASO 4A, $\lambda = 1,25$

f) Reações de apoio

Forças nodais junto aos cantos (kN):

$$K_{A1} = K_{B2} = K_{C2} = K_{D1} = m(1 + \phi_1) \operatorname{tg} \alpha_{31} = 0,04214 ;$$

$$K_{A3} = K_{B3} = K_{C4} = K_{D4} = m(1 + \phi_3) / \operatorname{tg} \alpha_{31} = 0,05823 ;$$

Reações nos cantos (kN):

$$R_A = R_B = R_C = R_D = - (K_{A1} + K_{A3}) = - 0,10037.$$

Reações nas bordas (kN/m):

$$b_6 = l_x - c(\sqrt{1 + \phi_1} + \sqrt{1 + \phi_2}) = 0,1908 \text{ metros};$$

$$r_1 = r_2 = \frac{2}{3} p c \sqrt{1 + \phi_1} = 0,2697;$$

$$r_3 = r_4 = \frac{p}{6} a_r \sqrt{\kappa(1 + \phi_3)} \left(2 + 2 \frac{b_6}{l_x} - \frac{b_6^2}{l_x^2} \right) = 0,4886 .$$

Reações médias (kN/m):

$$r_{1m} = r_{2m} = r_1 - \frac{K_{A1} + K_{D1}}{l_y} = 0,2023 ;$$

$$r_{3m} = r_{4m} = r_3 - \frac{K_{A3} + K_{B3}}{l_x} = 0,3721 .$$

g) Quinhões de carga (kN/m²)

$$p_{y3} = p_{y4} = p_y = 2r_{3m} / (a_r \sqrt{1 + \phi_3}) = 0,590$$

$$p_x = p - p_y = 0,410$$

Com as expressões (4.5.8) e (4.5.9), obter-se-ia:

$$p_{x1} = p_{x2} = p_x = 2r_{1m} / (b_r \sqrt{1 + \phi_1}) = 0,405,$$

que difere apenas 1,3% do valor adotado.

h) Pontos de momento nulo

$$\frac{l_1}{l_x} = \frac{l_2}{l_x} = 0$$

$$\frac{l_3}{l_x} = \frac{l_4}{l_x} = \left[\frac{1}{2} + \frac{m_3 - m_4}{p_y l_y^2} - \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m_3 + m_4}{p_y l_y^2} + \left(\frac{m_3 - m_4}{p_y l_y^2} \right)^2} \right] = 0,205$$

4.8 - PROGRAMA PARA MICROCOMPUTADOR

Para as lajes retangulares com carga uniforme e bordas apoiadas ou engastadas, objetivo principal deste trabalho, elaborou-se programa em FORTRAN, para o cálculo pela TCP.

O programa foi baseado na marcha de cálculo indicada no item 4.6, apresentando, portanto, uma sequência semelhante àquela que se encontra nos exemplos do item 4.7. Permite tanto o pré-dimensionamento em regime elástico, com base nas funções dadas nas tabelas 2.3 (ver capítulo 2,) como a fixação dos valores do índice de ortotropia e das razões dos momentos negativos e positivos.

A listagem do referido programa é dada a seguir, após a qual se encontram também os resultados do cálculo de uma laje, que podem ser obtidos tanto via vídeo quanto através da impressora.

```

C
C
C *****

```

```

C
C          PROGRAMA PARA CALCULO DE LAJES RETANGULARES

```

```

C
C          PELA TEORIA DAS CHARNEIRAS PLASTICAS

```

```

C
C          SAO CARLOS, JAN./1988

```

```

C *****

```

```

C
C $DEBUG

```

```

C
C   DIMENSION FIZ(4)
C   CHARACTER*4 TIPO
C   CHARACTER*1 W13
C   CHARACTER*4 COMP
C   CHARACTER*1 FIX
C   REAL LAMBDA,LX,LY,MX,MY,M1,M2,M3,M4,MIXI,MIYI,MIXIL,MIYIL,L6,L5,L1
C   *,L2,L3,L4
C   OPEN (2,FILE='PRN')
C   OPEN (1,FILE='SAIDA.DAT',STATUS='NEW')

```

```

C *****

```

```

C          ENTRADA DE DADOS REFERENTE A LAJE

```

```

C *****

```

```

C
C   WRITE(0,10)
C 10  FORMAT(50('/),'  MENOR LADO DA LAJE ?')
C   READ(0,20)LX
C 20  FORMAT(F10.0)
C   WRITE(0,30)
C 30  FORMAT(/,'  MAIOR LADO DA LAJE ? ')
C   READ(0,40)LY
C 40  FORMAT(F10.0)
C   WRITE(0,50)
C 50  FORMAT(/,'  CARREGAMENTO TOTAL DA LAJE (G+Q) ?')
C   READ(0,60) P
C 60  FORMAT(F10.0)
C   WRITE(0,70)
C 70  FORMAT(/,'  TIPO DA LAJE ?')
C   READ(0,80)TIPO
C 80  FORMAT(A4)
C   LAMBDA=LY/LX
C   WRITE(*,90)
C 90  FORMAT(/,'  DESEJA FIXAR OS VALORES DE CAPA E FI ? (S,N) ',\ )
C 5040 FORMAT(A1)
C   IF (FIX.EQ.'N') GOTO 5000
C   XXXX=1

```


C
C

```

830 IF (TIPO.EQ.'4B ') GOTO 860
      GOTO 870
860 IF (LAMBDA.GT.1.5) GOTO 880
      MIXI=-1.82*(LAMBDA**2)+6.55*LAMBDA-1.55
      GOTO 890
880 MIXI=4.17
890 IF (LAMBDA.GT.1.75) GOTO 1230
      MIXIL=-3.47*(LAMBDA**2)+11.34*LAMBDA-0.87
      GOTO 1240
1230 MIXIL=8.33
1240 IF (LAMBDA.GT.1.25) GOTO 1250
      MIYI=-0.36*LAMBDA+2.55
      GOTO 1260
1250 MIYI=2.1
1260 CAPA=MIYI/MIXI
      FI1=MIXIL/MIXI
      FI2=FI1
      FI3=0.
      FI4=0.
      GOTO 690

```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

```

* * * * *
      FINAL DA FUNCAO APROXIMADORA DA LAJE TIPO 4B
* * * * *
* * * * *
      FUNCAO APROXIMADORA DA LAJE TIPO 5A
* * * * *

```

```

870 IF (TIPO.EQ.'5A ') GOTO 900
      GOTO 910
900 IF (LAMBDA.GT.2.0) GOTO 920
      MIXI=-1.75*(LAMBDA**2)+8.56*LAMBDA-4.57
      GOTO 930
920 IF (LAMBDA.GT.2.5) GOTO 1270
      MIXI=1.55*LAMBDA+2.45
      GOTO 930
1270 IF (LAMBDA.GT.4.0) GOTO 1280
      MIXI=0.47*LAMBDA+5.15
      GOTO 930
1280 MIXI=7.03
930 IF (LAMBDA.GT.2.0) GOTO 1290
      MIXIL=-4.08*(LAMBDA**2)+18.14*LAMBDA-8.60
      GOTO 1300
1290 IF (LAMBDA.GT.2.3) GOTO 1310
      MIXIL=1.82*LAMBDA+7.72

```



```

1420 MIYIL=5.71
1430 CAPA=MIYI/MIXI
      FI1=MIXIL/MIXI
      FI2=FI1
      FI3=0.
      FI4=MIYIL/MIYI
      GOTO 690

```

```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

```

```

* * * * *

```

```

      FINAL DA FUNCAO APROXIMADORA DA LAJE TIPO 5B

```

```

* * * * *

```

```

* * * * *

```

```

      FUNCAO APROXIMADORA DA LAJE TIPO 6

```

```

* * * * *

```

```

950 IF (TIPO.EQ.'6  ') GOTO 980
      GOTO 690
980 IF (LAMBDA.GT.2.0) GOTO 990
      MIXI=-1.81*(LAMBDA**2)+7.48*LAMBDA-3.56
      MIXIL=-3.33*(LAMBDA**2)+13.17*LAMBDA-4.69
      GOTO 1000
990 MIXI=4.17
      MIXIL=8.33
1000 IF (LAMBDA.GT.1.5) GOTO 1440
      MIYI=-0.73*LAMBDA+2.84
      MIYIL=-3.46*(LAMBDA**2)+9.76*LAMBDA-1.15
      GOTO 1450
1440 MIYI=1.75
      MIYIL=5.71
1450 CAPA=MIYI/MIXI
      FI1=MIXIL/MIXI
      FI2=FI1
      FI3=MIYIL/MIYI
      FI4=FI3

```

```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

```

```

* * * * *

```

```

      FINAL DA FUNCAO APROXIMADORA DA LAJE TIPO 6

```

```

* * * * *

```

```

690 WRITE(*,5050)
5050 FORMAT(25(/),10X,'OPCOES DE IMPRESSAO DOS RESULTADOS :',//,8X,'< 0
* > TODOS OS RESULTADOS SAO RELATADOS NO VIDEO',/,8X,'< 1 > TODOS O
*5 RESULTADOS SAO ARMAZENADOS EM UM ARQUIVO',/,8X,'< 2 > TODOS OS R

```

```
*RESULTADOS SAO RELATADOS PELA IMPRESSORA',//,10X,'DIGITE A OPCAO DE
*SEJADA ( 0;1;2 )',\)
```

```
READ(*,300)LET
```

```
300 FORMAT(I1)
```

```
WRITE(*,310)
```

```
310 FORMAT(50(/))
```

```
* * * * *
```

```
FINAL DA ENTRADA DOS DADOS REFERENTE A LAJE
```

```
* * * * *
```

```
* * * * *
```

```
HIPOTESE INICIAL => CHARNEIRA CENTRAL NA DIRECAO Y
```

```
* * * * *
```

```
A=LX
```

```
B=LY/(SQRT(CAPA))
```

```
AR=2*A/(SQRT(1.+FI1)+SQRT(1.+FI2))
```

```
BR=2*B/(SQRT(1.+FI3)+SQRT(1.+FI4))
```

```
C=(AR/2)*(SQRT(3.+(AR/BR)**2)-AR/BR)
```

```
IF (AR.GT.BR) GOTO 10000
```

```
WRITE(*,150)
```

```
150 FORMAT(25(/),25X,' CHARNEIRA CENTRAL NA DIRECAO Y',//)
```

```
W13='Y'
```

```
W=0.
```

```
* * * * *
```

```
CALCULO DOS MOMENTOS DE PLASTIFICACAO
```

```
* * * * *
```

```
MX=P*C*C/6
```

```
M1=FI1*MX
```

```
MY=CAPA*MX
```

```
M2=FI2*MX
```

```
M3=FI3*CAPA*MX
```

```
M4=FI4*CAPA*MX
```

```
* * * * *
```

```
FIM DO CALCULO DOS MOMENTOS DE PLASTIFICACAO
```

```
* * * * *
```



```

C      * * * * *
C
C      * * * * *
C
C      HIPOTESE EVENTUAL => CHARNEIRA CENTRAL NA DIRECAO X
C
C      * * * * *
C
10000 A=LY/(SQRT(CAPA))
      B=LX
      AR=2*A/(SQRT(1.+FI3)+SQRT(1.+FI4))
      BR=2*B/(SQRT(1.+FI1)+SQRT(1.+FI2))
      C=(AR/2)*(SQRT(3.+(AR/BR)**2)-AR/BR)
      IF (AR.GE.BR) GOTO 10010
      WRITE(0,160)
160  FORMAT(25(/),25X,' CHARNEIRA CENTRAL NA DIRECAO X')
      W13='X'
      GOTO 10020
10010 WRITE(0,170)
170  FORMAT(25(/),25X,' NAO SE VERIFICOU NENHUMA HIPOTESE')
      GOTO 99998
C
C
C      * * * * *
C
C      CALCULO DOS MOMENTOS DE PLASTIFICAO
C
C      * * * * *
C
10020 MX=(P*C*C)/6.
      MY=CAPA*MX
      M1=FI1*MX
      M2=FI2*MX
      M3=FI3*MX*CAPA
      M4=FI4*MX*CAPA
C
C
C      * * * * *
C
C      FINAL DO CALCULO DOS MOMENTOS DE PLASTIFICAO
C
C      * * * * *
C
C      * * * * *
C
C      CALCULO DA INCLINACAO DAS CHARNEIRAS
C
C      * * * * *
C
      W=1.

```

```

AL31M=ATAN(AR/2/C*(SQRT(CAPA*((1.+FI3)/(1.+FI1))))))
AL32M=ATAN(AR/2/C*(SQRT(CAPA*((1.+FI3)/(1.+FI2))))))
AL41M=ATAN(AR/2/C*(SQRT(CAPA*((1.+FI4)/(1.+FI1))))))
AL42M=ATAN(AR/2/C*(SQRT(CAPA*((1.+FI4)/(1.+FI2))))))
W2=360./(2.*3.141592654)
ALFA31=AL31M*W2
ALFA32=AL32M*W2
ALFA41=AL41M*W2
ALFA42=AL42M*W2

```

```

*****

```

FINAL DO CALCULO DA INCLINACAO DAS CHARNEIRAS

```

*****

```

```

*****

```

CALCULO DAS REACOES NAS BORDAS

```

*****

```

```

L6=LX-C*((SQRT(1.+FI1))+(SQRT(1.+FI2)))
R4=(P*AR*(SQRT(CAPA*(1.+FI4)))*(2+2*L6/LX-(L6**2)/(LX**2)))/6
R3=(P*AR*(SQRT(CAPA*(1.+FI3)))*(2+2*L6/LX-(L6**2)/(LX**2)))/6
R2=(2*P*C*(SQRT(1.+FI2)))/3
R1=(2*P*C*(SQRT(1.+FI1)))/3

```

```

*****

```

FINAL DO CALCULO DAS REACOES NAS BORDAS

```

*****

```

```

*****

```

FINAL DA HIPOTESE EVENTUAL

```

*****

```

99999 CONTINUE

```

*****

```

CALCULO DAS FORÇAS NODAIS JUNTO AOS CANTOS

* * * * *

VKA1=MX*(1+FI1)*TAN(AL31M)
 VKA3=CAPA*MX*(1+FI3)/TAN(AL31M)
 VKB3=CAPA*MX*(1+FI3)/TAN(AL32M)
 VKB2=MX*(1+FI2)*TAN(AL32M)
 VKC2=MX*(1+FI2)*TAN(AL42M)
 VKC4=CAPA*MX*(1+FI4)/TAN(AL42M)
 VKD4=CAPA*MX*(1+FI4)/TAN(AL41M)
 VKD1=MX*(1+FI1)*TAN(AL41M)

* * * * *

FINAL DO CALCULO DAS FORÇAS NODAIS JUNTO AOS CANTOS

* * * * *

* * * * *

CALCULO DAS REACOES DE CANTO

* * * * *

RA=-(VKA1+VKA3)
 RB=-(VKB3+VKB2)
 RC=-(VKC2+VKC4)
 RD=-(VKD4+VKD1)

* * * * *

FIM DO CALCULO DAS REACOS DE CANTO

* * * * *

* * * * *

CALCULO DAS REACOES MEDIAS

* * * * *

R1M=R1-(VKA1+VKD1)/LY
 R2M=R2-(VKB2+VKC2)/LY
 R3M=R3-(VKA3+VKB3)/LX
 R4M=R4-(VKC4+VKD4)/LX

* * * * *


```

C      * * * * *
C
C      IMPRESSAO DOS RESULTADOS
C
C      * * * * *
C
C
99998 WRITE(LET,490)TIPO
490 FORMAT(30X,' ----- ',/,32X,' LAJE TIPO = ',A4,
*/,30X,' ----- ')
WRITE(LET,330)LX,LY,P
330 FORMAT(/,34X,' DIMENSOES',/,28X,' LX =',F7.3,' LY =',F7.3,/,
*27X,' CARREGAMENTO TOTAL =',F7.3)
WRITE(LET,350)
350 FORMAT(/,30X,' ----- ',/,32X,' RESU
*LTADOS ',/,30X,' ----- ')
WRITE(LET,340)W13,CAPA,AR,BR,LAMBDA,MIXI,MIYI,MIXIL,MIYIL
340 FORMAT(/,29X,' CHARNEIRA NA DIRECAO ',A1,/,12X,'CAPA =',F7.3,4X,
*'AR =',F7.3,05X,'BR =',F7.3,2X,'LAMBDA =',F7.3,/,12X,'MI-X =',F7.3
*,2X,'MI-Y =',F7.3,2X,'MIL-X =',F7.3,3X,'MIL-Y =',F7.3)
READ(*,420)COMP
420 FORMAT(A4)
WRITE(LET,360)
360 FORMAT(/,30X,'MOMENTOS DE PLASTIFICACAO')
AMX=MX*100
AMY=MY*100
AM1=M1*100
AM2=M2*100
AM3=M3*100
AM4=M4*100
WRITE(LET,190) AMX,AMY,AM1,AM2,AM3,AM4
190 FORMAT(/,15X,'MX =',F14.8,' /100',10X,'MY =',F14.8,' /100',/,15X,'
*M1 =',F14.8,' /100',10X,'M2 =',F14.8,' /100',/,15X,'M3 =',F14.8,'
*/100',10X,'M4 =',F14.8,' /100')
IF (XXXX.EQ.1) GOTO 2600
XXXXX=MX/MIXI*100
WRITE(LET,2610)XXXXX
2610 FORMAT(/,23X,'RAZAO (M. PLAST.)/(M. ELAST.) =',F8.5)
2600 WRITE(LET,380)
380 FORMAT(/,35X,'QUINHÕES DE CARGA')
WRITE(LET,2500)PX,PY,L1,L2,L3,L4
2500 FORMAT(/,25X,' PX =',F9.6,07X,' PY =',F9.6,/,32X,'PONTOS DE MOM
*ENTO NULO',/,22X,'L1/LX =',F9.6,10X,'L2/LX =',F9.6,/,22X,'L3/LX =
*',F9.6,10X,'L4/LX =',F9.6,)
WRITE(LET,370)
370 FORMAT(/,30X,'INCLINACOES DAS CHARNEIRAS')
WRITE(LET,200)ALFA31,ALFA32,ALFA41,ALFA42
200 FORMAT(/,22X,'ALFA-31 =',F6.3,10X,'ALFA-32 =',F6.3,/,22X,'ALFA-41
* =',F6.3,10X,'ALFA-42 =',F6.3,/)
READ(*,420)COMP
WRITE(LET,2510)RA,RB,RC,RD
2510 FORMAT(/,34X,'REACOES NOS CANTOS',/,22X,'RA =',F10.6,10X,'RB =',F
*10.6,/,22X,'RC =',F10.6,10X,'RD =',F10.6)
WRITE(LET,2520)R1,R2,R3,R4
2520 FORMAT(/,34X,'REACOES NAS BORDAS',/,22X,'R1 =',F10.6,10X,'R2 =',F

```

```

*10.6,/,22X,'R3 =',F10.6,10X,'R4 =',F10.6)
R1M=R1M*10
R2M=R2M*10
R3M=R3M*10
R4M=R4M*10
WRITE(LET,2530)
2530 FORMAT(/,34X,'REACOES MEDIAS')
WRITE(LET,240)R1M,R2M,R3M,R4M
240 FORMAT(/,15X,'R1M =',F14.8,' /10',10X,'R2M =',F14.8,' /10',/,15X,'
*R3M =',F14.8,' /10',10X,'R4M =',F14.8,' /10')
READ(*,420)COMP
WRITE(LET,440)
440 FORMAT(/,30X,'POSICAO DA CHARNEIRA CENTRAL  ')
IF (W.EQ.1.0) GOTO 460
X=AR*SQRT(1+FI1)/2
Y=SQRT(CAPA)*C*SQRT(1+FI3)
Z=SQRT(CAPA)*C*SQRT(1+FI4)
WRITE(LET,450)X,Y,Z
450 FORMAT(/,15X,'X =',F9.4,10X,'Y =',F9.4,10X,'Z =',F9.4)
GOTO 480
460 X=C*SQRT(1+FI1)
Y=SQRT(CAPA)*AR*(SQRT(1+FI3))/2
W=C*SQRT(1+FI2)
WRITE(LET,470)X,W,Y
470 FORMAT(/,15X,'X =',F9.4,10X,'W =',F9.4,10X,'Y =',F9.4)
480 IF (XXXX.EQ.1) GOTO 2700
GOTO 2720
2700 WRITE(LET,2710)
2710 FORMAT(/)
2720 READ(*,420)COMP
WRITE(*,2730)
2730 FORMAT(50(/))
STOP
END

```

LAJE TIPO = 1

DIMENSÕES

LX = 1.000 LY = 1.000
CARREGAMENTO TOTAL = 1.000

RESULTADOS

CHARNEIRA NA DIRECÃO Y

CAPA = .998 AR = 1.000 BR = 1.001 LAMBDA = 1.000
MI-X = 4.410 MI-Y = 4.400 MIL-X = .000 MIL-Y = .000

MOMENTOS DE PLASTIFICACÃO

MX = 4.17139700 /100 MY = 4.16193800 /100
M1 = .00000000 /100 M2 = .00000000 /100
M3 = .00000000 /100 M4 = .00000000 /100

RAZÃO (M. PLAST.)/(M. ELAST.) = .94590

QUINHÕES DE CARGA

PX = .500284 PY = .499716

PONTOS DE MOMENTO NULO

L1/LX = .000000 L2/LX = .000000
L3/LX = .000000 L4/LX = .000000

INCLINAÇÕES DAS CHARNEIRAS

ALFA-31 = 44.984 ALFA-32 = 44.984
ALFA-41 = 44.984 ALFA-42 = 44.984

REAÇÕES NOS CANTOS

RA = -.083333 RB = -.083333
RC = -.083333 RD = -.083333

REAÇÕES NAS BORDAS

R1 = .333522 R2 = .333522
R3 = .333144 R4 = .333144

REAÇÕES MÉDIAS

R1M = 2.50141900 /10 R2M = 2.50141900 /10
R3M = 2.49858100 /10 R4M = 2.49858100 /10

POSICÃO DA CHARNEIRA CENTRAL

X = .5000 Y = .4997 Z = .4997

4.9 - RESULTADOS OBTIDOS

Empregando o programa apresentado no item anterior, foram calculadas lajes retangulares com carga uniforme e bordas simplesmente apoiadas ou engastadas, correspondentes a todos os possíveis casos de vinculação e aos seguintes valores de $\lambda = l_y / l_x$:

$$\lambda = 1; 1,25; 1,5; 1,75; 2; 2,5; 3; 4 \text{ e } 5.$$

Para a apresentação dos resultados, estes foram divididos em dois grupos, o primeiro deles englobando os momentos e os pontos de momento fletor nulo e, o segundo, as configurações de ruína e as reações de apoio.

4.9.1 - Momentos e pontos de momento nulo

Nas tabelas 4.1 até 4.9, para cada caso de vinculação e para cada valor de λ entre os já citados, apresenta-se: direção da charneira central, índice de ortotropia, vãos reduzidos a_r e b_r , momentos elásticos baseados nas tabelas 2.3, momentos de plastificação, comparação entre os momentos de plastificação m_p e os correspondentes momentos elásticos m_E e, finalmente, as distâncias entre os pontos de momento fletor nulo e as bordas adjacentes.

A notação empregada nessas tabelas, coerente com a que se emprega ao longo deste trabalho, é a seguinte:

- $\kappa = l_y / l_x$: índice de ortotropia;
- a_r, b_r : vãos da laje isótropa correspondente, com apoios nas quatro bordas e com mesmo momento de plastificação $m = m_x$ da laje em questão;
- m'_x, m'_y : momentos elásticos nos apoios, com planos de flexão nas direções x e y respectivamente;

m_x, m_y : momentos nos vãos, com planos de flexão nas direções x e y respectivamente;

m_i : momentos de plastificação nos apoios;

l_i : distâncias dos pontos de momento nulo;

o índice i pode assumir os valores 1, 2, 3 e 4.

4.9.2 - Configurações de ruína e reações de apoio

Analogamente ao que foi visto no item anterior, nas tabelas 4.10 até 4.18 encontram-se: direção da charneira central, distâncias entre os nós da charneira central e as bordas, inclinações das charneiras em relação às bordas menores, reações concentradas nos cantos e respectivas reações por unidade de comprimento ao longo das bordas e, finalmente, as reações médias nas bordas, tanto as de acordo com a TCP como as obtidas conforme a norma brasileira NBR 6118.

A notação é a seguinte:

R_A, R_B, R_C, R_D : reações nos cantos;

r_i : reações nas bordas, concomitantes com as reações de canto;

r_{im} : reações médias nas bordas, de acordo com a TCP;

r_{in} : reações médias nas bordas, conforme a NBR 6118; i pode assumir os valores 1, 2, 3 e 4.

Nas figuras de rodapés das tabelas 4.10 até 4.18, não estão indicadas nem as hachuras nem as charneiras negativas adjacentes às bordas.

Tabela 4.1 - CASO 1: momentos e pontos de momento nulo

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	y	y	y	y	y	y	y	y	y	
K	1	0,699	0,559	0,481	0,436	0,396	0,380	0,352	0,352	
a_r	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
b_r	1	1,495	2,006	2,522	3,030	3,971	4,865	6,742	8,427	
MOMENTOS ELÁSTICOS	μ_x	4,40	6,29	7,87	9,14	10,10	11,10	11,57	12,50	12,50
	μ'_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_y	4,40	4,40	4,40	4,40	4,40	4,40	4,40	4,40	4,40
	μ'_y	--	--	--	--	--	--	--	--	--
MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO	μ_x	4,17	5,88	7,08	7,94	8,56	9,36	9,86	10,53	10,90
	μ_y	4,17	4,11	3,96	3,82	3,73	3,71	3,75	3,71	3,84
	μ_1	--	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_2	--	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_3	--	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_4	--	--	--	--	--	--	--	--	--
$(1-m_p/m_F)(\%)$	5,4	6,6	10,0	13,1	15,3	15,7	14,7	15,7	12,8	
l_1/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
l_2/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
l_3/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
l_4/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
$m = \mu \frac{pl_x^2}{100} \quad p = \text{carga uniforme}$ <p>Momentos elásticos de acordo com as tabelas 2.3</p>										

Tabela 4.2 - CASO 2A: momentos e pontos de momento nulo

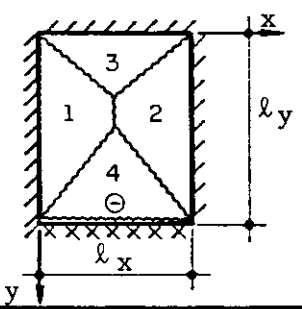
$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	x	x	y	y	y	y	y	y	y	
κ	1,251	0,858	0,652	0,535	0,466	0,392	0,375	0,346	0,346	
a_r	0,644	0,954	1	1	1	1	1	1	1	
b_r	1	1	1,284	1,628	1,985	2,701	3,306	4,574	5,718	
MOMENTOS ELÁSTICOS	μ_x	3,11	4,99	6,65	8,09	9,30	11,06	11,54	12,50	12,50
	μ'_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_y	3,89	4,28	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33
	μ'_y	8,40	10,05	11,23	11,95	12,19	12,28	12,35	12,50	12,50
MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO	μ_x	2,50	3,97	5,23	6,24	7,04	8,18	8,83	9,72	10,22
	μ_y	3,13	3,41	3,41	3,34	3,28	3,20	3,31	3,37	3,54
	μ_1	--	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_2	--	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_3	--	--	--	--	--	--	--	--	--
μ_4	6,76	8,00	8,83	9,21	9,23	9,08	9,45	9,72	10,22	
$(1-m_p/m_E)$ (%)	19,5	20,4	21,4	22,9	24,3	26,1	23,5	22,3	18,3	
l_1/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
l_2/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
l_3/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
l_4/l_x	0,197	0,270	0,270	0,280	0,282	0,280	0,286	0,291	0,298	
$m = \mu \frac{p l_x^2}{100} \quad p = \text{carga uniforme}$ <p>Momentos elásticos de acordo com as tabelas 2.3</p>										

Tabela 4.3 - CASO 2B: momentos e pontos de momento nulo

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	y	y	y	y	y	y	y	y	y	
κ	0,799	0,599	0,524	0,481	0,458	0,444	0,430	0,404	0,404	
a_T	0,720	0,724	0,728	0,732	0,736	0,740	0,743	0,750	0,750	
b_T	1,118	1,615	2,072	2,523	2,955	3,753	4,577	6,293	7,867	
MOMENTOS ELÁSTICOS	μ_x	3,89	4,75	5,42	5,90	6,20	6,40	6,61	7,03	7,03
	μ'_x	8,40	9,98	11,11	11,80	12,05	12,16	12,27	12,49	12,50
	μ_y	3,11	2,84	2,84	2,84	2,84	2,84	2,84	2,84	2,84
	μ'_y	--	--	--	--	--	--	--	--	--
MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO	μ_x	3,13	3,93	4,43	4,80	5,09	5,45	5,73	6,13	6,30
	μ_y	2,50	2,35	2,32	2,31	2,33	2,42	2,46	2,48	2,54
	μ_1	--	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_2	6,76	8,26	9,08	9,60	9,89	10,36	10,64	10,89	11,20
	μ_3	--	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_4	--	--	--	--	--	--	--	--	--
$(1-m_p/m_E)$ (%)	19,5	17,2	18,2	18,7	17,9	14,8	13,3	12,8	10,4	
l_1/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
l_2/l_x	0,221	0,236	0,242	0,244	0,243	0,244	0,244	0,241	0,243	
l_3/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
l_4/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
$m = \mu \frac{p l_x^2}{100}$ <p>$p =$ carga uniforme</p> <p>Momentos elásticos de acordo com as tabelas 2.3</p>										

Tabela 4.4 - CASO 3: Momentos e pontos de momento nulo

$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	y	y	y	y	y	y	y	y	y	
κ	1	0,715	0,570	0,505	0,470	0,426	0,416	0,395	0,395	
a_r	0,706	0,716	0,722	0,726	0,731	0,739	0,742	0,750	0,750	
b_r	0,706	1,016	1,336	1,646	1,953	2,564	3,116	4,258	5,323	
MOMENTOS ELÁSTICOS	μ_x	2,98	4,04	4,88	5,50	5,91	6,53	6,69	7,03	7,03
	μ'_x	6,99	8,96	10,43	11,42	11,92	12,51	12,50	12,50	12,50
	μ_y	2,98	2,89	2,78	2,78	2,78	2,78	2,78	2,78	2,78
	μ'_y	6,99	7,64	8,06	8,24	8,18	8,20	8,20	8,20	8,20
MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO	μ_x	2,08	2,90	3,52	3,98	4,35	4,90	5,24	5,74	5,98
	μ_y	2,08	2,07	2,01	2,01	2,05	2,09	2,18	2,27	2,36
	μ_1	--	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_2	4,88	6,43	7,53	8,27	8,77	9,39	9,79	10,20	10,63
	μ_3	--	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_4	4,88	5,49	5,82	5,96	6,02	6,15	6,42	6,69	6,97
$(1-m_p/m_E)$ (%)	30,2	28,2	27,8	27,6	26,4	24,9	21,7	18,4	15,0	
ℓ_1/ℓ_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
ℓ_2/ℓ_x	0,195	0,218	0,230	0,235	0,237	0,238	0,239	0,237	0,239	
ℓ_3/ℓ_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
ℓ_4/ℓ_x	0,195	0,214	0,225	0,230	0,230	0,233	0,239	0,243	0,249	
$m = \mu \frac{p \ell_x^2}{100} \quad p = \text{carga uniforme}$ <p>Momentos elásticos de acordo com as tabelas 2.3</p>										

Tabela 4.5 - CASO 4A: Momentos e pontos de momento nulo

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	x	x	x	y	y	y	y	y	y	
κ	1,452	0,983	0,743	0,582	0,485	0,403	0,361	0,335	0,328	
a_r	0,464	0,688	0,921	1	1	1	1	1	1	
b_r	1	1	1	1,176	1,454	1,974	2,483	3,436	4,339	
MOMENTOS ELÁSTICOS	μ_x	2,19	3,90	5,52	7,04	8,46	10,17	11,37	12,25	12,50
	μ'_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_y	3,18	3,84	4,10	4,10	4,10	4,10	4,10	4,10	4,10
	μ'_y	7,00	9,04	10,53	11,49	11,91	12,21	12,50	12,50	12,50
MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO	μ_x	1,58	2,73	3,83	4,85	5,76	7,02	7,88	8,95	9,59
	μ_y	2,30	2,68	2,85	2,83	2,79	2,83	2,84	2,99	3,14
	μ_1	--	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_2	--	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_3	5,06	6,31	7,31	7,92	8,11	8,43	8,67	9,13	9,59
	μ_4	5,06	6,31	7,31	7,92	8,11	8,43	8,67	9,13	9,59
m_p/m_E (%)	27,7	30,1	30,6	31,1	31,9	30,9	30,7	27,0	23,3	
l_1/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
l_2/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
l_3/l_x	0,141	0,205	0,263	0,227	0,226	0,225	0,226	0,227	0,230	
l_4/l_x	0,141	0,205	0,263	0,227	0,226	0,225	0,226	0,227	0,230	

$$m = \mu \frac{p l_x^2}{100} \quad p = \text{carga uniforme}$$

Momentos elásticos de acordo com as tabelas 2.3

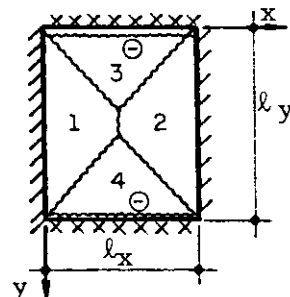


Tabela 4.6 - CASO 4B: Momentos e pontos de momento nulo

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	y	y	y	y	y	y	y	y	y
κ	0,689	0,554	0,502	0,504	0,504	0,504	0,504	0,504	0,504
a_r	0,559	0,570	0,578	0,577	0,578	0,578	0,578	0,578	0,578
b_r	1,205	1,680	2,116	2,466	2,818	3,523	4,227	5,637	7,046
MOMENTOS ELÁSTICOS	μ_x	3,18	3,79	4,18	4,17	4,17	4,17	4,17	4,17
	μ'_x	7,00	7,88	8,33	8,35	8,33	8,33	8,33	8,33
	μ_y	2,19	2,10	2,10	2,10	2,10	2,10	2,10	2,10
	μ'_y	--	--	--	--	--	--	--	--
MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO	μ_x	2,30	2,75	3,05	3,18	3,29	3,45	3,56	3,70
	μ_y	1,58	1,52	1,53	1,60	1,66	1,74	1,79	1,87
	μ_1	5,06	5,72	6,08	6,37	6,58	6,90	7,12	7,40
	μ_2	5,06	5,72	6,08	6,37	6,58	6,90	7,12	7,40
	μ_3	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_4	--	--	--	--	--	--	--	--
m_p/m_E (%)	27,7	27,5	27,0	23,7	21,0	17,2	14,6	11,2	9,0
l_1/l_x	0,178	0,185	0,188	0,191	0,194	0,197	0,200	0,203	0,204
l_2/l_x	0,178	0,185	0,188	0,191	0,194	0,197	0,200	0,203	0,204
l_3/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--
l_4/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--
$m = \mu \frac{p l_x^2}{100} \quad p = \text{carga uniforme}$ <p>Momentos elásticos de acordo com as tabelas 2.3</p>									

Tabela 4.7 - CASO 5A - Momentos e pontos de momento nulo

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	x	y	y	y	y	y	y	y	y	
κ	1,170	0,814	0,602	0,462	0,371	0,326	0,314	0,293	0,293	
a_{Γ}	0,505	0,712	0,719	0,724	0,728	0,740	0,744	0,750	0,750	
b_{Γ}	0,701	0,729	0,964	1,212	1,475	1,970	2,407	3,322	4,153	
MOMENTOS ELÁSTICOS	μ_x	2,24	3,40	4,33	5,05	5,55	6,33	6,56	7,03	7,03
	μ'_x	5,46	7,70	9,43	10,65	11,36	11,98	12,15	12,50	12,50
	μ_y	2,62	2,76	2,61	2,34	2,06	2,06	2,06	2,06	2,06
	μ'_y	6,18	7,21	7,88	8,19	8,14	8,13	8,13	8,13	8,13
MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO	μ_x	1,42	2,16	2,80	3,33	3,78	4,46	4,85	5,42	5,71
	μ_y	1,66	1,76	1,68	1,54	1,40	1,45	1,52	1,59	1,67
	μ_1	--	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_2	3,45	4,91	6,09	7,02	7,73	8,43	8,98	9,64	10,15
	μ_3	3,91	4,60	5,09	5,40	5,54	5,73	6,01	6,27	6,60
	μ_4	3,91	4,60	5,09	5,40	5,54	5,73	6,01	6,27	6,60
m_p/m_E (%)	36,8	36,3	35,4	34,1	31,9	29,6	26,1	22,9	18,8	
l_1/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--	
l_2/l_x	0,187	0,194	0,212	0,222	0,228	0,229	0,232	0,233	0,236	
l_3/l_x	0,145	0,173	0,182	0,187	0,190	0,189	0,191	0,192	0,195	
l_4/l_x	0,145	0,173	0,182	0,187	0,190	0,189	0,191	0,192	0,195	

$$m = \mu \frac{p l_x^2}{100} \quad p = \text{carga uniforme}$$

Momentos elásticos de acordo com as tabelas 2.3

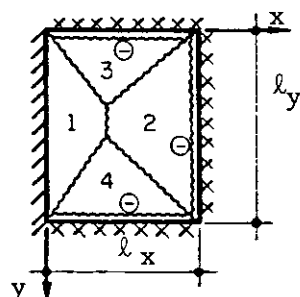


Tabela 4.8 - CASO 5B: Momentos e pontos de momento nulo

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	y	y	y	y	y	y	y	y	y
κ	0,855	0,632	0,524	0,467	0,441	0,444	0,444	0,444	0,444
a_r	0,546	0,564	0,572	0,577	0,578	0,578	0,578	0,578	0,578
b_r	0,758	1,078	1,406	1,715	1,990	2,484	2,981	3,975	4,969
MOMENTOS ELÁSTICOS	μ_x	2,62	3,38	3,90	4,15	4,17	4,17	4,17	4,17
	μ'_x	6,17	7,27	7,99	8,34	8,32	8,33	8,33	8,33
	μ_y	2,24	2,14	2,04	1,94	1,84	1,85	1,85	1,85
	μ'_y	5,46	5,71	5,71	5,71	5,71	5,71	5,71	5,71
MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO	μ_x	1,66	2,19	2,57	2,83	2,99	3,19	3,34	3,65
	μ_y	1,42	1,39	1,35	1,32	1,32	1,42	1,48	1,62
	μ_1	3,91	4,71	5,27	5,67	5,96	6,37	6,66	7,04
	μ_2	3,91	4,71	5,27	5,67	5,96	6,37	6,66	7,04
	μ_3	--	--	--	--	--	--	--	--
	μ_4	3,46	3,70	3,77	3,88	4,09	4,37	4,57	4,83
m_p/m_E (%)	36,7	35,3	34,0	32,0	28,3	23,5	20,0	15,4	12,6
l_1/l_x	0,159	0,171	0,178	0,183	0,186	0,191	0,195	0,199	0,201
l_2/l_x	0,159	0,171	0,178	0,183	0,186	0,191	0,195	0,199	0,201
l_3/l_x	--	--	--	--	--	--	--	--	--
l_4/l_x	0,166	0,176	0,180	0,185	0,192	0,198	0,203	0,209	0,212
$m = \mu \frac{p l_x^2}{100} \quad p = \text{carga uniforme}$ <p>Momentos elásticos de acordo com as tabelas 2.3</p>									

Tabela 4.9 - CASO 6: Momentos e pontos de momento nulo

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	y	y	y	y	y	y	y	y	y
κ	1	0,651	0,486	0,439	0,421	0,420	0,420	0,420	0,420
a_r	0,539	0,557	0,567	0,573	0,577	0,578	0,578	0,578	0,578
b_r	0,539	0,782	1,041	1,279	1,494	1,869	2,243	2,991	3,738
MOMENTOS ELÁSTICOS	μ_x	2,11	2,96	3,59	3,99	4,16	4,17	4,17	4,17
	μ'_x	5,15	6,57	7,57	8,16	8,33	8,33	8,33	8,33
	μ_y	2,11	1,93	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75
	μ'_y	5,15	5,64	5,71	5,71	5,71	5,71	5,71	5,71
MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO	μ_x	1,21	1,74	2,16	2,46	2,67	2,92	3,10	3,34
	μ_y	1,21	1,13	1,05	1,08	1,13	1,23	1,30	1,40
	μ_1	2,96	3,86	4,57	5,03	5,36	5,84	6,19	6,67
	μ_2	2,96	3,86	4,57	5,03	5,36	5,84	6,19	6,67
	μ_3	2,96	3,32	3,44	3,52	3,67	4,00	4,25	4,57
	μ_4	2,96	3,32	3,44	3,52	3,67	4,00	4,25	4,57
$(1-m_p/m_E)$ (%)	42,6	41,2	39,7	38,3	35,7	29,9	25,6	20,0	16,3
l_1/l_x	0,137	0,156	0,168	0,174	0,178	0,185	0,189	0,195	0,198
l_2/l_x	0,137	0,156	0,168	0,174	0,178	0,185	0,189	0,195	0,198
l_3/l_x	0,137	0,145	0,147	0,146	0,148	0,152	0,155	0,159	0,161
l_4/l_x	0,137	0,145	0,147	0,146	0,148	0,152	0,155	0,159	0,161
$m = \mu \frac{p l_x^2}{100}$ <p>p = carga uniforme</p> <p>Momentos elásticos de acordo com as tabelas 2.3</p>									

Tabela 4.10 - CASO 1 : Configurações de ruína e reações de apoio

$\lambda = \ell_y / \ell_x$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	y	y	y	y	y	y	y	y	y	
CONFIGURAÇÃO DE RUÍNA	x_1	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	
	x_2	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	
	y_1	0,50	0,497	0,488	0,479	0,473	0,472	0,474	0,472	0,480
	y_2	0,50	0,497	0,488	0,479	0,473	0,472	0,474	0,472	0,480
	α_{31}	45	44,8	44,3	43,8	43,4	43,3	43,5	43,3	43,8
	α_{32}	45	44,8	44,3	43,8	43,4	43,3	43,5	43,3	43,8
	α_{41}	45	44,8	44,3	43,8	43,4	43,3	43,5	43,3	43,8
	α_{42}	45	44,8	44,3	43,8	43,4	43,3	43,5	43,3	43,8
NOS CANTOS	K_A	8,33	9,98	10,97	11,59	12,04	12,76	13,31	13,87	14,46
	K_B	8,33	9,98	10,97	11,59	12,04	12,76	13,31	13,87	14,46
	k_C	8,33	9,98	10,97	11,59	12,04	12,76	13,31	13,87	14,46
	K_D	8,33	9,98	10,97	11,59	12,04	12,76	13,31	13,87	14,46
NAS BORDAS	ρ_1	3,33	3,95	4,30	4,50	4,63	4,76	4,83	4,91	4,94
	ρ_2	3,33	3,95	4,30	4,50	4,63	4,76	4,83	4,91	4,94
	ρ_3	3,33	3,31	3,25	3,19	3,15	3,14	3,16	3,14	3,20
	ρ_4	3,33	3,31	3,25	3,19	3,15	3,14	3,16	3,14	3,20
MÉDIAS	ρ_{1m}	2,50	3,01	3,38	3,63	3,82	4,06	4,21	4,41	4,52
	ρ_{2m}	2,50	3,01	3,38	3,63	3,82	4,06	4,21	4,41	4,52
	ρ_{3m}	2,50	2,48	2,44	2,39	2,36	2,36	2,37	2,36	2,40
	ρ_{4m}	2,50	2,48	2,44	2,39	2,36	2,36	2,37	2,36	2,40
NBR 6118	ρ_{1n}	2,50	3,00	3,33	3,57	3,75	4,00	4,17	4,38	4,50
	ρ_{2n}	2,50	3,00	3,33	3,57	3,75	4,00	4,17	4,38	4,50
	ρ_{3n}	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50
	ρ_{4n}	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50

$$R = K \frac{p \ell_x^2}{100} \quad r = \rho \frac{p \ell_x}{10}$$

p = carga uniforme

R = reações nos cantos

r = reações nas bordas

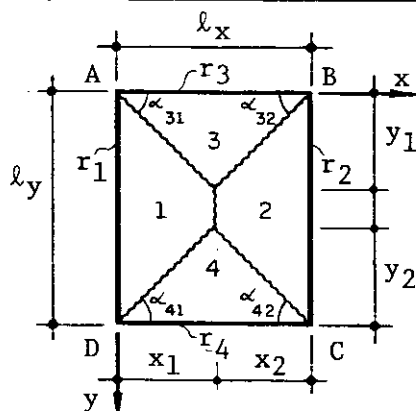


Tabela 4.11 - CASO 2A: Configurações de ruína e reações de apoio

$\lambda = l_y / l_x$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	x	x	y	y	y	y	y	y	y	
CONFIGURAÇÃO DE RUÍNA	x_1	0,388	0,488	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	
	x_2	0,388	0,488	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	
	y_1	0,360	0,442	0,452	0,448	0,444	0,438	0,446	0,449	0,461
	y_2	0,640	0,808	0,857	0,868	0,866	0,858	0,875	0,886	0,906
	α_{31}	42,9	42,1	42,1	41,8	41,6	41,2	41,7	42,0	42,7
	α_{32}	42,9	42,1	42,1	41,8	41,6	41,2	41,7	42,0	42,7
	α_{41}	58,8	58,9	59,7	60,1	60,0	59,8	60,3	60,6	61,2
	α_{42}	58,8	58,9	59,7	60,1	60,0	59,8	60,3	60,6	61,2
NOS CANTOS	K_A	5,70	7,36	8,49	9,31	9,94	10,82	11,59	12,48	13,26
	K_B	5,70	7,36	8,49	9,31	9,94	10,82	11,59	12,48	13,26
	K_C	10,13	13,46	16,10	18,06	19,42	21,19	22,75	24,60	26,14
	K_D	10,13	13,46	16,10	18,06	19,42	21,19	22,75	24,60	26,14
NAS BORDAS	ρ_1	2,58	3,25	3,73	4,06	4,29	4,55	4,68	4,81	4,87
	ρ_2	2,58	3,25	3,73	4,06	4,29	4,55	4,68	4,81	4,87
	ρ_3	2,88	3,01	3,01	2,98	2,96	2,92	2,97	3,00	3,07
	ρ_4	5,12	5,51	5,71	5,79	5,78	5,72	5,83	5,91	6,06
MÉDIAS	ρ_{1m}	1,94	2,44	2,82	3,12	3,36	3,70	3,90	4,17	4,32
	ρ_{2m}	1,94	2,44	2,82	3,12	3,36	3,70	3,90	4,17	4,32
	ρ_{3m}	2,20	2,26	2,26	2,24	2,22	2,19	2,23	2,25	2,30
	ρ_{4m}	3,92	4,14	4,28	4,34	4,33	4,29	4,38	4,43	4,54
NBR 6118	ρ_{1n}	1,83	2,29	2,72	3,05	3,29	3,63	3,86	4,15	4,32
	ρ_{2n}	1,83	2,29	2,72	3,05	3,29	3,63	3,86	4,15	4,32
	ρ_{3n}	2,32	2,48	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50
	ρ_{4n}	4,02	4,30	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33

$$R = K \frac{p l_x^2}{100} \quad r = \rho \frac{p l_x}{10}$$

p = carga uniforme

R = reações nos cantos

r = reações nas bordas

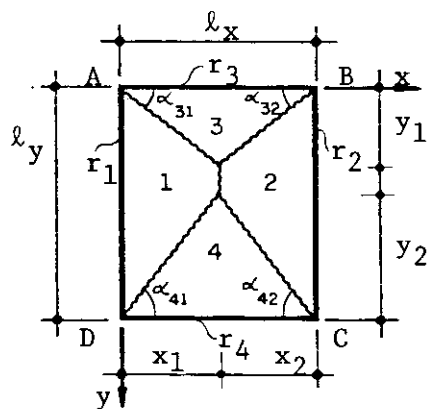


Tabela 4.12 - CASO 2B: Configurações de ruína e reações de apoio

$\lambda = l_y / l_x$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	y	y	y	y	y	y	y	y	y	
CONFIGURAÇÃO DE RUÍNA	x_1	0,360	0,362	0,364	0,366	0,368	0,370	0,372	0,375	0,375
	x_2	0,640	0,638	0,636	0,634	0,632	0,630	0,628	0,625	0,625
	y_1	0,388	0,376	0,373	0,372	0,374	0,381	0,384	0,385	0,391
	y_2	0,388	0,376	0,373	0,372	0,374	0,381	0,384	0,385	0,391
	α_{31}	47,1	46,1	45,7	45,5	45,4	45,8	46,0	45,8	46,2
	α_{32}	31,2	30,5	30,4	30,4	30,6	31,2	31,5	31,7	32,0
	α_{41}	47,1	46,1	45,7	45,5	45,4	45,8	46,0	45,8	46,2
	α_{42}	31,2	30,5	30,4	30,4	30,6	31,2	31,5	31,7	32,0
NOS CANTOS	K_A	5,70	6,35	6,81	7,15	7,46	7,97	8,30	8,71	9,00
	K_B	10,13	11,17	11,89	12,39	12,81	13,57	14,03	14,51	15,01
	K_C	10,13	11,17	11,89	12,39	12,81	13,57	14,03	14,51	15,01
	K_D	5,70	6,35	6,81	7,15	7,46	7,97	8,30	8,71	9,00
NAS BORDAS	ρ_1	2,88	3,19	3,34	3,44	3,51	3,59	3,64	3,70	3,72
	ρ_2	5,12	5,61	5,83	5,96	6,02	6,11	6,15	6,17	6,20
	ρ_3	2,58	2,51	2,49	2,48	2,49	2,54	2,56	2,57	2,60
	ρ_4	2,58	2,51	2,49	2,48	2,49	2,54	2,56	2,57	2,60
MÉDIAS	ρ_{1m}	2,20	2,53	2,73	2,88	2,99	3,14	3,24	3,39	3,46
	ρ_{2m}	3,92	4,46	4,78	4,99	5,14	5,34	5,48	5,65	5,76
	ρ_{3m}	1,94	1,88	1,87	1,86	1,87	1,91	1,92	1,93	1,95
	ρ_{4m}	1,94	1,88	1,87	1,86	1,87	1,91	1,92	1,93	1,95
NBR 6118	ρ_{1n}	2,32	2,59	2,77	2,89	2,99	3,12	3,21	3,33	3,39
	ρ_{2n}	4,02	4,48	4,79	5,01	5,18	5,41	5,57	5,76	5,88
	ρ_{3n}	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83
	ρ_{4n}	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83

$$R = K \frac{p l_x^2}{100} \quad r = \rho \frac{p l_x}{10}$$

p = carga uniforme
 R = reações nos cantos
 r = reações nas bordas

Tabela 4.13 - CASO 3: Configurações de ruína e reações de apoio

$\lambda = l_y/l_x$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	y	y	y	y	y	y	y	y	y	
CONFIGURAÇÕES DE RUÍNA	x_1	0,353	0,358	0,361	0,363	0,365	0,369	0,371	0,375	0,375
	x_2	0,647	0,642	0,639	0,637	0,635	0,631	0,629	0,625	0,625
	y_1	0,353	0,353	0,347	0,348	0,350	0,354	0,361	0,369	0,377
	y_2	0,647	0,674	0,685	0,692	0,696	0,703	0,718	0,733	0,748
	α_{31}	45,0	44,6	43,9	43,7	43,8	43,8	44,2	44,5	45,1
	α_{32}	28,7	28,8	28,5	28,6	28,9	29,3	29,9	30,6	31,1
	α_{41}	61,3	62,0	62,2	62,3	62,3	62,3	62,7	62,9	63,4
	α_{42}	45,0	46,4	47,0	47,4	47,6	48,1	48,8	49,6	50,1
NOS CANTOS	K_A	4,17	4,96	5,48	5,92	6,30	6,87	7,33	7,95	8,35
	K_B	7,62	8,90	9,70	10,37	10,95	11,73	12,42	13,26	13,93
	K_C	13,93	17,00	19,15	2,07	21,73	23,32	24,69	26,35	27,67
	K_D	7,62	9,47	10,81	11,77	12,51	13,65	14,58	15,81	16,60
NAS BORDAS	ρ_1	2,36	2,77	3,04	3,20	3,32	3,47	3,55	3,65	3,69
	ρ_2	4,31	4,98	5,38	5,62	5,77	5,93	6,02	6,09	6,14
	ρ_3	2,36	2,35	2,31	2,32	2,34	2,36	2,41	2,46	2,51
	ρ_4	4,31	4,49	4,57	4,61	4,64	4,69	4,79	4,89	4,99
MÉDIAS	ρ_{1m}	1,77	2,11	2,37	2,55	2,70	2,91	3,04	3,23	3,33
	ρ_{2m}	3,23	3,79	4,19	4,48	4,69	4,97	5,16	5,39	5,55
	ρ_{3m}	1,77	1,76	1,74	1,74	1,75	1,77	1,81	1,85	1,88
	ρ_{4m}	3,23	3,37	3,43	3,46	3,48	3,52	3,59	3,67	3,74
NBR 6118	ρ_{1n}	1,83	2,20	2,44	2,61	2,75	2,93	3,05	3,20	3,29
	ρ_{2n}	3,17	3,80	4,23	4,53	4,75	5,07	5,28	5,55	5,71
	ρ_{3n}	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83
	ρ_{4n}	3,17	3,17	3,17	3,17	3,17	3,17	3,17	3,17	3,17

$$R = K \frac{p l_x^2}{100} \quad r = \rho \frac{p l_x}{10}$$

p = carga uniforme
 R = reações nos cantos
 r = reações nas bordas

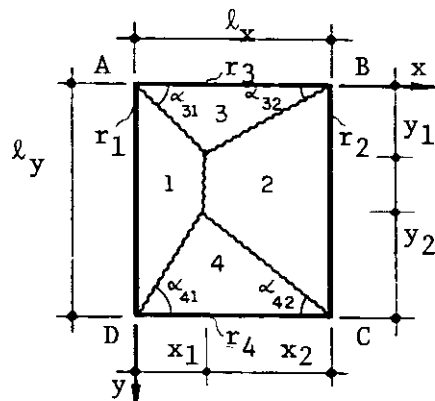


Tabela 4.14 - CASO 4A : Configurações de ruína e reações de apoio

$\lambda = \ell_y / \ell_x$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	x	x	x	y	y	y	y	y	y
CONFIGURAÇÕES DE RUÍNA	x_1	0,308	0,405	0,479	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
	x_2	0,308	0,405	0,479	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
	y_1	0,500	0,625	0,750	0,803	0,809	0,822	0,831	0,853
	y_2	0,500	0,625	0,750	0,803	0,809	0,822	0,831	0,853
	α_{31}	58,3	57,1	57,4	58,1	58,3	58,7	59,0	59,6
	α_{32}	58,3	57,1	57,4	58,1	58,3	58,7	59,0	59,6
	α_{41}	58,3	57,1	57,4	58,1	58,3	58,7	59,0	59,6
α_{42}	58,3	57,1	57,4	58,1	58,3	58,7	59,0	59,6	
NOS CANTOS	K_A	7,11	10,04	12,48	14,48	16,06	18,39	20,03	22,37
	K_B	7,11	10,04	12,48	14,48	16,06	18,39	20,03	22,37
	K_C	7,11	10,04	12,48	14,48	16,06	18,39	20,03	22,37
	K_D	7,11	10,04	12,48	14,48	16,06	18,39	20,03	22,37
NAS BORDAS	ρ_1	2,06	2,70	3,20	3,60	3,91	4,28	4,49	4,70
	ρ_2	2,06	2,70	3,20	3,60	3,91	4,28	4,49	4,70
	ρ_3	4,37	4,89	5,20	5,35	5,39	5,48	5,54	5,69
	ρ_4	4,37	4,89	5,20	5,35	5,39	5,48	5,54	5,69
MÉDIAS	ρ_{1m}	1,54	2,02	2,40	2,71	2,98	3,36	3,61	3,93
	ρ_{2m}	1,54	2,02	2,40	2,71	2,98	3,36	3,61	3,93
	ρ_{3m}	3,46	3,72	3,91	4,02	4,04	4,11	4,16	4,26
	ρ_{4m}	3,46	3,72	3,91	4,02	4,04	4,11	4,16	4,26
NBR 6118	ρ_{1n}	1,44	1,80	2,17	2,53	2,83	3,27	3,56	3,92
	ρ_{2n}	1,44	1,80	2,17	2,53	2,83	3,27	3,56	3,92
	ρ_{3n}	3,56	3,99	4,25	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33
	ρ_{4n}	3,56	3,99	4,25	4,33	4,33	4,33	4,33	4,33

$$R = K \frac{p \ell_x^2}{100} \quad r = \rho \frac{p \ell_x}{10}$$

p = carga uniforme
 R = reações nos cantos
 r = reações nas bordas

Tabela 4.15 - CASO 4B - Configurações de ruína e reações de apoio

$\lambda = l_y / l_x$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	y	y	y	y	y	y	y	y	y	
CONFIGURAÇÕES DE RUÍNA	x ₁	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	
	x ₂	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	
	y ₁	0,308	0,302	0,303	0,310	0,315	0,323	0,328	0,335	0,339
	y ₂	0,308	0,302	0,303	0,310	0,315	0,323	0,328	0,335	0,339
	α_{31}	31,7	31,2	31,2	31,8	32,2	32,9	33,3	33,8	34,1
	α_{32}	31,7	31,2	31,2	31,8	32,2	32,9	33,3	33,8	34,1
	α_{41}	31,7	31,2	31,2	31,8	32,2	32,9	33,3	33,8	34,1
	α_{42}	31,7	31,2	31,2	31,8	32,2	32,9	33,3	33,8	34,1
NOS CANTOS	K _A	7,11	7,64	8,06	8,50	8,86	9,37	9,74	10,22	10,52
	K _B	7,11	7,64	8,06	8,50	8,86	9,37	9,74	10,22	10,52
	K _C	7,11	7,64	8,06	8,50	8,86	9,37	9,74	10,22	10,52
	K _D	7,11	7,64	8,06	8,50	8,86	9,37	9,74	10,22	10,52
NAS BORDAS	ρ_1	4,37	4,61	4,73	4,79	4,83	4,89	4,92	4,95	4,97
	ρ_2	4,37	4,61	4,73	4,79	4,83	4,89	4,92	4,95	4,97
	ρ_3	2,06	2,02	2,02	2,07	2,10	2,15	2,19	2,23	2,26
	ρ_4	2,06	2,02	2,02	2,07	2,10	2,15	2,19	2,23	2,26
MÉDIAS	ρ_{1m}	3,46	3,79	3,99	4,11	4,21	4,35	4,45	4,58	4,66
	ρ_{2m}	3,46	3,79	3,99	4,11	4,21	4,35	4,45	4,58	4,66
	ρ_{3m}	1,54	1,51	1,52	1,55	1,58	1,61	1,64	1,67	1,69
	ρ_{4m}	1,54	1,51	1,52	1,55	1,58	1,61	1,64	1,67	1,69
NBR 6118	ρ_{1n}	3,56	3,85	4,04	4,18	4,28	4,42	4,52	4,64	4,71
	ρ_{2n}	3,56	3,85	4,04	4,18	4,28	4,42	4,52	4,64	4,71
	ρ_{3n}	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44
	ρ_{4n}	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44

$$R = K \frac{p l_x^2}{100} \quad r = \rho \frac{p l_x}{10}$$

p = carga uniforme

R = reações nos cantos

r = reações nas bordas

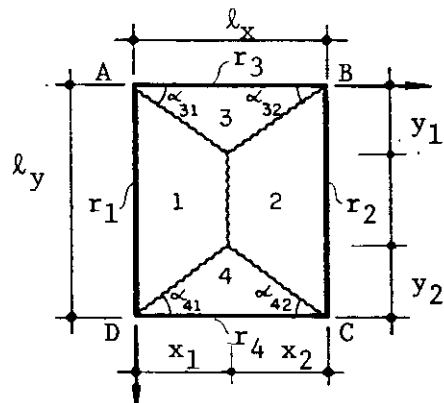


Tabela 4.16 - CASO 5A - Configurações de ruína e reações de apoio

$\lambda = l_y / l_x$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	x	y	y	y	y	y	y	y	y	
CONFIGURAÇÃO DE RUÍNA	x_1	0,292	0,356	0,359	0,362	0,364	0,370	0,372	0,375	0,375
	x_2	0,541	0,644	0,641	0,638	0,636	0,630	0,628	0,625	0,625
	y_1	0,500	0,618	0,638	0,645	0,646	0,656	0,672	0,687	0,705
	y_2	0,500	0,618	0,638	0,645	0,646	0,656	0,672	0,687	0,705
	α_{31}	59,8	60,0	60,6	60,7	60,6	60,6	61,0	61,4	62,0
	α_{32}	42,8	43,8	44,9	45,3	45,4	46,2	46,9	47,7	48,4
	α_{41}	59,8	60,0	60,6	60,7	60,6	60,6	61,0	61,4	62,0
	α_{42}	42,8	43,8	44,9	45,3	45,4	46,2	46,9	47,7	48,4
NOS CANTOS	K_A	5,68	7,42	8,78	9,83	10,62	11,95	12,93	14,22	15,13
	K_B	10,52	13,41	15,65	17,33	18,53	20,32	21,84	23,70	25,22
	K_C	10,52	13,41	15,65	17,33	18,53	20,32	21,84	23,70	25,22
	K_D	5,68	7,42	8,78	9,83	10,62	11,95	12,93	14,22	15,13
NAS BORDAS	ρ_1	1,94	2,40	2,73	2,96	3,14	3,36	3,47	3,60	3,65
	ρ_2	3,60	4,34	4,86	5,22	5,47	5,72	5,86	6,00	6,08
	ρ_3	3,85	4,12	4,25	4,30	4,30	4,37	4,48	4,58	4,70
	ρ_4	3,85	4,12	4,25	4,30	4,30	4,37	4,48	4,58	4,70
MÉDIAS	ρ_{1m}	1,46	1,80	2,07	2,28	2,47	2,73	2,89	3,11	3,22
	ρ_{2m}	2,70	3,26	3,68	4,03	4,31	4,64	4,87	5,18	5,37
	ρ_{3m}	2,92	3,09	3,19	3,23	3,23	3,28	3,36	3,43	3,52
	ρ_{4m}	2,92	3,09	3,19	3,23	3,23	3,28	3,36	3,43	3,52
NBR 6118	ρ_{1n}	1,44	1,80	2,11	2,33	2,49	2,73	2,89	3,08	3,20
	ρ_{2n}	2,50	3,13	3,66	4,04	4,33	4,73	5,00	5,33	5,54
	ρ_{3n}	3,03	3,17	3,17	3,17	3,17	3,17	3,17	3,17	3,17
	ρ_{4n}	3,03	3,17	3,17	3,17	3,17	3,17	3,17	3,17	3,17

$$R = K \frac{p l_x^2}{100} \quad r = \rho \frac{p l_x}{10}$$

p = carga uniforme
 R = reações nos cantos
 r = reações nas bordas

Tabela 4.17 - CASO 5B - Configurações de ruína e reações de apoio

$\lambda = l_y / l_x$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	y	y	y	y	y	y	y	y	y	
CONFIGURAÇÃO DE RUÍNA	x_1	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	
	x_2	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	
	y_1	0,292	0,288	0,284	0,281	0,281	0,291	0,298	0,306	0,312
	y_2	0,292	0,552	0,554	0,559	0,570	0,589	0,602	0,619	0,630
	α_{31}	30,3	30,0	29,6	29,4	29,4	30,2	30,8	31,5	31,9
	α_{32}	30,3	30,0	29,6	29,4	29,4	30,2	30,8	31,5	31,9
	α_{41}	47,2	47,8	47,9	48,2	48,7	49,7	50,3	51,1	51,6
	α_{42}	47,2	47,8	47,9	48,2	48,7	49,7	50,3	51,1	51,6
NOS CANTOS	K_A	5,68	6,38	6,83	7,13	7,38	8,00	8,44	9,03	9,41
	K_B	5,68	6,38	6,83	7,13	7,38	8,00	8,44	9,03	9,41
	K_C	10,52	12,22	13,31	14,15	14,95	16,18	17,07	18,26	19,02
	K_D	10,52	12,22	13,31	14,15	14,95	16,18	17,07	18,26	19,02
NAS BORDAS	ρ_1	3,85	4,25	4,48	4,62	4,70	4,79	4,85	4,91	4,94
	ρ_2	3,85	4,25	4,48	4,62	4,70	4,79	4,85	4,91	4,94
	ρ_3	1,94	1,92	1,89	1,88	1,88	1,94	1,99	2,04	2,08
	ρ_4	3,60	3,68	3,69	3,72	3,80	3,93	4,02	4,13	4,20
MÉDIAS	ρ_{1m}	2,92	3,32	3,60	3,80	3,94	4,12	4,25	4,42	4,53
	ρ_{2m}	2,92	3,32	3,60	3,80	3,94	4,12	4,25	4,42	4,53
	ρ_{3m}	1,46	1,44	1,42	1,41	1,41	1,46	1,49	1,53	1,56
	ρ_{4m}	2,70	2,76	2,77	2,79	2,85	2,95	3,01	3,10	3,15
NBR 6118	ρ_{1n}	3,03	3,42	3,69	3,87	4,01	4,21	4,34	4,51	4,61
	ρ_{2n}	3,03	3,42	3,69	3,87	4,01	4,21	4,34	4,51	4,61
	ρ_{3n}	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44
	ρ_{4n}	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50

$$R = K \frac{p l_x^2}{100} \quad r = \rho \frac{p l_x}{10}$$

p = carga uniforme

R = reações nos cantos

r = reações nas bordas

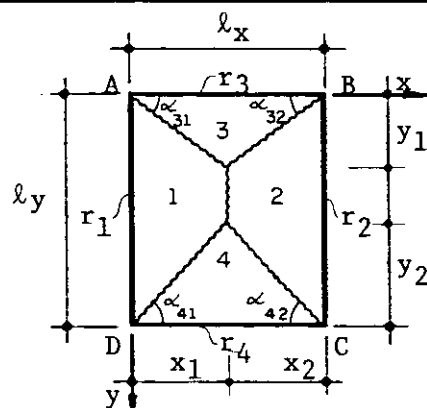


Tabela 4.18 - CASO 6: Configurações de ruína e reações de apoio

$\lambda = l_y/l_x$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5
DIREÇÃO DA CHAR. CENTRAL	y	y	y	y	y	y	y	y	y
CONFIGURAÇÃO DE RUÍNA	x_1	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
	x_2	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
	y_1	0,500	0,517	0,519	0,526	0,536	0,560	0,577	0,599
	y_2	0,500	0,517	0,519	0,526	0,536	0,560	0,577	0,599
	α_{31}	45,0	46,0	46,1	46,4	47,0	48,3	49,1	50,1
	α_{32}	45,0	46,0	46,1	46,4	47,0	48,3	49,1	50,1
	α_{41}	45,0	46,0	46,1	46,4	47,0	48,3	49,1	50,1
	α_{42}	45,0	46,0	46,1	46,4	47,0	48,3	49,1	50,1
NOS CANTOS	K_A	8,33	10,11	11,32	12,26	13,09	14,49	15,53	16,97
	K_B	8,33	10,11	11,32	12,26	13,09	14,49	15,53	16,97
	K_C	8,33	10,11	11,32	12,26	13,09	14,49	15,53	16,97
	K_D	8,33	10,11	11,32	12,26	13,09	14,49	15,53	16,97
NAS BORDAS	ρ_1	3,33	3,86	4,20	4,40	4,52	4,67	4,75	4,85
	ρ_2	3,33	3,86	4,20	4,40	4,52	4,67	4,75	4,85
	ρ_3	3,33	3,45	3,46	3,50	3,58	3,73	3,85	3,99
	ρ_4	3,33	3,45	3,46	3,50	3,58	3,73	3,85	3,99
MÉDIAS	ρ_{1m}	2,50	2,93	3,27	3,50	3,66	3,88	4,04	4,25
	ρ_{2m}	2,50	2,93	3,27	3,50	3,66	3,88	4,04	4,25
	ρ_{3m}	2,50	2,58	2,60	2,63	2,68	2,80	2,88	2,99
	ρ_{4m}	2,50	2,58	2,60	2,63	2,68	2,80	2,88	2,99
NBR 6118	ρ_{1n}	2,50	3,00	3,33	3,57	3,75	4,00	4,17	4,38
	ρ_{2n}	2,50	3,00	3,33	3,57	3,75	4,00	4,17	4,38
	ρ_{3n}	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50
	ρ_{4n}	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50

$$R = K \frac{p l_x^2}{100} \quad r = \rho \frac{p l_x}{10}$$

p = carga uniforme
 R = reações nos cantos
 r = reações nas bordas

4.10 - ÍNDICE DE ORTOTROPIA ECONÔMICO

Uma análise rigorosa das condições de economia de veria considerar: a espessura da laje (como por exemplo faz CHAMECKI^[64], tendo em conta a razão do custo do aço e do custo do concreto, ambos relativos à unidade de volume; a distribuição das armaduras positivas e negativas (como LANGENDONCK^[21]) e, finalmente, a variação do índice de ortotropia.

4.10.1 - Simplificações admitidas

Nas lajes comuns de edifícios, as espessuras são em geral fixadas por razões construtivas ou para atender às condições de deslocamento, resultando abundantes com relação à flexão. Pode-se, num primeiro estudo, prescindir da consideração da alteração da espessura, problema que poderá ser retomado em pesquisa posterior.

A consideração da distribuição das armaduras positivas e negativas, juntamente com a variação do índice de ortotropia, tornaria o problema de difícil solução em um caso geral, tendo em vista o grande número de variáveis envolvidas. Note-se, por exemplo, que a armadura negativa se distribui apenas em determinadas regiões, o que não ocorre com a armadura positiva, que se estende por toda a laje. A armadura positiva também pode variar de uma região para outra.

Para simplificar, porém sem trair os objetivos práticos que aqui se consideram, em uma primeira etapa o custo das armaduras negativas não será considerado. Deverá, porém, ser levado em conta em um critério econômico mais refinado. As armaduras positivas serão supostas constantes ao longo de toda a laje, o que está de acordo com o procedimento habitual.

O problema se resume, portanto, na consideração

do índice de ortotropia $\kappa = m_y/m_x$. A rigor, o mesmo valor κ não vale para a relação a_{sy}/a_{sx} entre as armaduras, que, por se apresentarem superpostas, possuem alturas úteis d_x e d_y diferentes (em geral, $d_x > d_y$). Como diversos resultados disponíveis demonstram que o índice de custo mínimo é pouco sensível a pequenas variações de κ (LANGENDONCK^[21]), é razoável adotar a aproximação $\kappa = a_{sy}/a_{sx}$. A curva do consumo de aço é achatada nas proximidades do seu mínimo.

Outros aspectos práticos dão respaldo à adoção de $\kappa = a_{sy}/a_{sx}$. Um deles ocorre quando se adota $d = (d_x + d_y)/2$ valendo para as duas direções, simplificando o cálculo e garantindo pequena segurança adicional com relação à armadura da direção x, em geral mais robusta que a da direção y, ficando esta última um pouco contra a segurança; este fato atenua a insegurança causada pela inversão acidental, durante a execução, da posição relativa das barras, o que é coerente com o nível de mão-de-obra atualmente disponível no Brasil, onde convivem grandes construtoras, com nível técnico excelente, e pequenos empreiteiros, despreparados e desassistidos por profissionais competentes. Outro aspecto que reforça a adoção de $\kappa = a_{sy}/a_{sx}$ é que a armadura a_{sy} , que possui altura útil menor, corresponde em geral ao momento menor e acarretando também em uma menor altura da região comprimida do concreto. Esta diminuição do valor da posição da linha neutra faz com que a resultante de compressão se aproxime da borda comprimida, compensando em parte a diminuição do braço de alavanca causada pelo menor valor de d_y .

Das simplificações admitidas decorre que a situação econômica corresponde ao mínimo da função $m_x + m_y$.

4.10.2 - Determinação da situação econômica

Na determinação da situação econômica, as duas direções da charneira central são possíveis, ou seja, a configuração comum e a configuração eventual já definidas.

Para que ocorra configuração comum, com a hipótese inicial de que ocorra este tipo de configuração, deve resultar $a_r \leq b_r$; no caso contrário, a configuração será do tipo eventual.

a) Configuração comum

Supondo inicialmente que a configuração seja comum, com a notação da figura 4.4b tem-se:

$$a = l_x ; \quad b = l_y / \sqrt{\kappa} . \quad (4.10.1)$$

Substituindo-se estes valores nas expressões (4.3.8) e (4.3.9), obtêm-se:

$$a_r = \frac{2l_x}{\sqrt{1+\phi_1} + \sqrt{1+\phi_2}} , \quad (4.10.2)$$

$$b_r = \frac{2l_y \sqrt{\kappa}}{\sqrt{1+\phi_3} + \sqrt{1+\phi_4}} . \quad (4.10.3)$$

Definindo-se

$$\delta_r = a_r / b_r , \quad (4.10.4)$$

resulta

$$\delta_r = \frac{l_x}{l_y} \cdot \frac{\sqrt{1+\phi_3} + \sqrt{1+\phi_4}}{\sqrt{1+\phi_1} + \sqrt{1+\phi_2}} \cdot \sqrt{\kappa} = \sqrt{\psi_1 \kappa} , \quad (4.10.5)$$

onde

$$\psi_1 = \left(\frac{l_x}{l_y} \cdot \frac{\sqrt{1+\phi_3} + \sqrt{1+\phi_4}}{\sqrt{1+\phi_1} + \sqrt{1+\phi_2}} \right)^2 . \quad (4.10.6)$$

As equações (4.3.20), (4.3.26) e (4.10.5) permitem que a soma $m_x + m_y$ seja expressa por

$$m_x + m_y = \frac{p a_r^2}{24} (1 + \kappa) \left(\sqrt{\psi_1 \kappa + 3} - \sqrt{\psi_1 \kappa} \right)^2 , \quad (4.10.7)$$

cujo valor mínimo ocorre quando for mínima a função

$$F_1 = (1 + \kappa) \left(\sqrt{\psi_1 \kappa + 3} - \sqrt{\psi_1 \kappa} \right)^2. \quad (4.10.8)$$

A determinação analítica do mínimo desta função é complicada. Há soluções mais simples, ou traçando-se a curva da função F_1 e determinando-se graficamente o seu valor mínimo ou recorrendo-se a processo numérico via computador.

A hipótese de que $a_r \leq b_r$ é idêntica a admitir $\delta_r \leq 1$. Considerando-se a equação (4.10.5), a hipótese de ocorrer configuração comum só se verifica se

$$\kappa \leq \frac{1}{\psi_1}. \quad (4.10.9)$$

Portanto, admitir configuração comum equivale a supor κ variando no intervalo entre zero e $1/\psi_1$. Se o valor mínimo de F_1 neste intervalo ocorrer para $\kappa = 1/\psi_1$, é necessário investigar a possibilidade de κ ser maior que $1/\psi_1$, ou seja, de que a situação econômica ocorra com configuração eventual das charneiras.

b) Configuração eventual

De acordo com o cálculo anterior, se houver possibilidade da situação econômica acontecer com $\kappa > 1/\psi_1$, o cálculo deve ser feito com a notação da figura 4.5b, onde se tem:

$$a = \ell_y / \sqrt{\kappa}; \quad b = \ell_x. \quad (4.10.10)$$

Analogamente ao que se fez no caso anterior, para configuração eventual obtêm-se:

$$a_r = \frac{2\ell_y / \sqrt{\kappa}}{\sqrt{1 + \phi_3} + \sqrt{1 + \phi_4}}, \quad (4.10.11)$$

$$b_r = \frac{2\ell_x}{\sqrt{1 + \phi_1} + \sqrt{1 + \phi_2}}. \quad (4.10.12)$$

O novo valor de $\delta_r = a_r/b_r$ resulta

$$\delta_r = \frac{l_y}{l_x} \cdot \frac{\sqrt{1+\phi_1} + \sqrt{1+\phi_2}}{\sqrt{1+\phi_3} + \sqrt{1+\phi_4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\kappa}} = \sqrt{\frac{\psi_2}{\kappa}}, \quad (4.10.13)$$

onde

$$\psi_2 = \left(\frac{l_y}{l_x} \cdot \frac{\sqrt{1+\phi_1} + \sqrt{1+\phi_2}}{\sqrt{1+\phi_3} + \sqrt{1+\phi_4}} \right)^2. \quad (4.10.14)$$

A soma $m_x + m_y$ fica expressa por

$$m_x + m_y = \frac{pa_r^2}{24} (1+\kappa) \left(\sqrt{\psi_2/\kappa + 3} - \sqrt{\psi_2/\kappa} \right)^2 \quad (4.10.15)$$

cujo mínimo ocorre quando for mínima a função

$$F_2 = (1+\kappa) \left(\sqrt{\psi_2/\kappa + 3} - \sqrt{\psi_2/\kappa} \right)^2. \quad (4.10.16)$$

A esta função pode ser dado tratamento análogo ao dado à função F_1 anterior, só que supondo $\kappa \geq 1/\psi_1$.

4.10.3 - Valores dos índices de ortotropia econômicos

Neste critério econômico, como já foi esclarecido, foram admitidos as simplificações:

$$\kappa = a_{sy}/a_{sx} \quad \text{em vez de} \quad \kappa = m_y/m_x,$$

armaduras positivas constantes ao longo da laje,

não consideração do custo das armaduras negativas.

Com base nestas hipóteses e no equacionamento anterior, foi elaborado programa para microcomputador que fornece, para todos os casos de vinculação, o índice de ortotropia econômico, em função das razões ϕ_i dos momentos negativos e positivos em cada direção e de $\lambda = l_y/l_x$. O programa considera $\phi_i = \phi_{i,el}$, obtidos com as funções aproxi-

mas dadas nas tabelas 2.3, e os valores arbitrados $\phi_i = 1, 1,5$ e 2 .

O programa indica a função $F_j - F_1$ ou F_2 , relativas à configuração comum e eventual respectivamente -, para a qual ocorre o valor econômico κ_{ec} com $\phi_i = \phi_{i,el}$. Como se está admitindo o custo das armaduras inferiores proporcional ao valor da função F_j , o programa calcula, também, a relação entre os custos F_{el}/F_j , onde o valor F_{el} corresponde ao κ_{ec} com $\phi_i = \phi_{i,el}$ e F_j representa os valores de F_1 ou F_2 , calculados com $\phi_i = 1, 1,5$ ou 2 e os respectivos valores econômicos de κ . A relação F_{el}/F_j permite, portanto, que se tenha uma idéia da variação do custo da armadura positiva, quando se alteram os valores de ϕ_i .

Os resultados encontram-se nas tabelas 4.19 a 4.27, para cada caso de vinculação e diversos valores de λ .

Tabela 4.19 - Caso 1: índices de ortotropia econômicos

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	κ_{ec}				FUNÇÃO F_j $j = 1, 2$	F_{el}/F_j		
	$\phi_{i,el}$	$\phi_i=1$	$\phi_i=1,5$	$\phi_i=2$		$\phi_i=1$	$\phi_i=1,5$	$\phi_i=2$
1	1,00	1,00	1,00	1,00	F_1	1,00	1,00	1,00
1,25	0,40	0,40	0,40	0,40	F_1	1,00	1,00	1,00
1,5	0,21	0,21	0,21	0,21	F_1	1,00	1,00	1,00
1,75	0,14	0,14	0,14	0,14	F_1	1,00	1,00	1,00
2	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,00	1,00	1,00
2,25	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,00	1,00	1,00
2,5	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,00	1,00	1,00
3	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,00	1,00	1,00
3,5	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,00	1,00	1,00
4	0,02	0,02	0,02	0,02	F_1	1,00	1,00	1,00

Tabela 4.20 - Caso 2A: índices de ortotropia econômicos

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	κ_{ec}				FUNÇÃO F_j $j=1,2$	F_{el}/F_j		
	$\phi_{i,el}$	$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$		$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$
1	1,00	1,00	1,00	1,00	F_2	1,12	1,06	1,01
1,25	1,00	0,82	1,00	1,00	F_2	1,09	1,09	1,03
1,5	0,82	0,40	0,50	0,62	F_1	0,88	0,92	0,95
1,75	0,44	0,23	0,30	0,34	F_1	0,91	0,93	0,96
2	0,30	0,20	0,20	0,23	F_1	0,93	0,95	0,97
2,25	0,20	0,12	0,14	0,20	F_1	0,95	0,96	0,97
2,5	0,20	0,10	0,11	0,12	F_1	0,96	0,97	0,98
3	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	0,97	0,98	0,99
3,5	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	0,97	0,98	0,99
4	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	0,97	0,98	0,99

Tabela 4.21 - Caso 2B: índices de ortotropia econômicos

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	κ_{ec}				FUNÇÃO F_j $j=1,2$	F_e / F_j		
	$\phi_{i,el}$	$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$		$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$
1	0,30	0,42	0,33	0,30	F_1	1,07	1,03	1,01
1,25	0,14	0,21	0,20	0,20	F_1	1,04	1,02	1,00
1,5	0,10	0,13	0,11	0,10	F_1	1,03	1,01	1,00
1,75	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,02	1,01	1,00
2	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,02	1,01	1,00
2,25	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,01	1,01	1,00
2,5	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,01	1,01	1,00
3	0,02	0,10	0,02	0,02	F_1	0,98	1,00	1,00
3,5	0,02	0,02	0,02	0,02	F_1	1,00	1,00	1,00
4	0,01	0,02	0,01	0,01	F_1	1,00	1,00	1,00

Tabela 4.22 - Caso 3: índices de ortotropia econômicos

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	κ_{ec}				FUNÇÃO F_j $j = 1, 2$	F_{el}/F_j		
	$\phi_{i,e}$	$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$		$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$
1	1,00	1,00	1,00	1,00	F_1	1,00	1,00	1,00
1,25	0,43	0,40	0,40	0,40	F_1	0,98	0,98	0,98
1,5	0,30	0,21	0,21	0,21	F_1	0,97	0,97	0,97
1,75	0,20	0,14	0,14	0,14	F_1	0,98	0,98	0,98
2	0,12	0,10	0,10	0,10	F_1	0,98	0,98	0,98
2,25	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	0,98	0,98	0,98
2,5	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	0,99	0,99	0,99
3	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	0,99	0,99	0,99
3,5	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	0,99	0,99	0,99
4	0,10	0,02	0,02	0,02	F_1	1,01	1,01	1,01

Tabela 4.23 - Caso 6: índices de ortotropia econômicos

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	κ_{ec}				FUNÇÃO F_j $j = 1, 2$	F_{el}/F_j		
	$\phi_{i,e}$	$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$		$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$
1	1,00	1,00	1,00	1,00	F_1	1,00	1,00	1,00
1,25	0,54	0,40	0,40	0,40	F_1	0,94	0,94	0,94
1,5	0,34	0,21	0,21	0,21	F_1	0,94	0,94	0,94
1,75	0,22	0,14	0,14	0,14	F_1	0,95	0,95	0,95
2	0,20	0,10	0,10	0,10	F_1	0,96	0,96	0,96
2,25	0,12	0,10	0,10	0,10	F_1	0,97	0,97	0,97
2,5	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	0,97	0,97	0,97
3	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	0,98	0,98	0,98
3,5	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	0,98	0,98	0,98
4	0,10	0,02	0,02	0,02	F_1	1,01	1,01	1,01

Tabela 4.24 - Caso 4A: índices de ortotropia econômicos

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	κ_{ec}				FUNÇÃO F_j $j=1,2$	F_{el}/F_j		
	$\phi_{i,el}$	$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$		$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$
1	1,00	1,00	1,00	1,00	F_2	1,17	1,08	1,02
1,25	1,00	1,00	1,00	1,00	F_2	1,24	1,12	1,04
1,5	1,00	0,73	1,00	1,00	F_2	1,17	1,17	1,08
1,75	1,00	0,40	0,60	0,94	F_2	0,95	1,02	1,10
2	0,93	0,30	0,40	0,50	F_1	0,81	0,85	0,90
2,25	0,54	0,20	0,25	0,33	F_1	0,85	0,89	0,92
2,5	0,40	0,14	0,20	0,24	F_1	0,88	0,91	0,94
3	0,21	0,10	0,11	0,14	F_1	0,92	0,94	0,96
3,5	0,14	0,10	0,10	0,10	F_1	0,94	0,95	0,97
4	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	0,95	0,96	0,97

Tabela 4.25 - Caso 4B: índices de ortotropia econômicos

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	κ_{ec}				FUNÇÃO F_j $j=1,2$	F_{el}/F_j		
	$\phi_{i,el}$	$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$		$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$
1	0,13	0,30	0,20	0,14	F_1	1,07	1,03	1,01
1,25	0,10	0,14	0,10	0,10	F_1	1,04	1,02	1,00
1,5	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,03	1,01	1,00
1,75	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,03	1,01	1,00
2	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,02	1,01	1,00
2,25	0,02	0,10	0,10	0,02	F_1	1,00	0,99	1,00
2,5	0,02	0,10	0,02	0,02	F_1	0,99	1,00	1,00
3	0,01	0,02	0,02	0,01	F_1	1,01	1,00	1,00
3,5	0,01	0,02	0,01	0,01	F_1	1,00	1,00	1,00
4	0,01	0,01	0,01	0,01	F_1	1,00	1,00	1,00

Tabela 4.26 - Caso 5A: índices de ortotropia econômicos

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	K_{ec}				FUNÇÃO F_j $j=1,2$	$F_{e\ell}/F_j$		
	$\phi_{i,e\ell}$	$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$		$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$
1	1,00	1,00	1,00	1,00	F_2	1,08	1,04	1,01
1,25	1,00	0,71	0,90	1,00	F_2	1,02	1,06	1,07
1,5	0,80	0,34	0,40	0,50	F_1	0,87	0,89	0,91
1,75	0,53	0,21	0,24	0,30	F_1	0,87	0,89	0,90
2	0,40	0,20	0,20	0,20	F_1	0,88	0,89	0,90
2,25	0,30	0,11	0,12	0,13	F_1	0,91	0,92	0,92
2,5	0,20	0,10	0,10	0,10	F_1	0,92	0,93	0,94
3	0,13	0,10	0,10	0,10	F_1	0,94	0,95	0,95
3,5	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	0,95	0,96	0,96
4	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	0,96	0,96	0,96

Tabela 4.27 - Caso 5B: índices de ortotropia econômicos

$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	K_{ec}				FUNÇÃO F_j $j=1,2$	$F_{e\ell}/F_j$		
	$\phi_{i,e\ell}$	$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$		$\phi_{i=1}$	$\phi_{i=1,5}$	$\phi_{i=2}$
1	0,34	0,50	0,40	0,30	F_1	1,05	1,03	1,01
1,25	0,20	0,23	0,20	0,20	F_1	1,01	1,00	0,99
1,5	0,13	0,14	0,12	0,11	F_1	1,00	0,99	0,99
1,75	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,00	0,99	0,99
2	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,00	0,99	0,98
2,25	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,00	0,99	0,99
2,5	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,00	0,99	0,99
3	0,10	0,10	0,10	0,10	F_1	1,00	0,99	0,99
3,5	0,02	0,02	0,02	0,02	F_1	1,00	1,00	1,00
4	0,02	0,02	0,01	0,01	F_1	1,00	1,00	1,00

4.11 - EXEMPLO DE CÁLCULO DE UM TABULEIRO DE EDIFÍCIO

Apresenta-se o cálculo das lajes de um tabuleiro de edifício, para ilustrar o cálculo sistematizado ora proposto. Serão comparados os resultados obtidos a partir de três considerações iniciais, a saber:

a) cálculo elástico com base nas funções dadas nas tabelas 2.3;

b) cálculo pela TCP com os valores iniciais de κ e $\phi_i = \phi_{i,el}$ relativos ao cálculo elástico anterior;

c) cálculo análogo ao anterior, partindo do mesmo valor de κ e com $\phi_i = 0,62 \phi_{i,el}$; a justificativa para a escolha desses valores de ϕ_i será dada no item 6.8.

As lajes a serem analisadas são destinadas a laboratórios, salas de aula, salas de professores e a atividades afins. A correspondente planta de fôrmas encontra-se indicada na figura 4.10.

No cálculo, os vãos teóricos foram considerados como sendo as distâncias entre os centros das vigas de apoio; o pré-dimensionamento, baseado na norma brasileira NBR 6118 e nas tabelas de PINHEIRO^[52], e o cálculo das cargas encontram-se indicados na tabela 4.28. No cálculo das cargas considerou-se, também, as especificações da norma brasileira NBR 6120^[67].

4.11.1 - Cálculo elástico

Os momentos elásticos foram calculados através do programa apresentado no item 4.8, que considera as funções aproximadas fornecidas pelas tabelas 2.3 e supõe engastamento perfeito para as bordas engastadas. Os momentos obtidos e os correspondentes valores de κ e ϕ_i estão indicados na tabela 4.29.

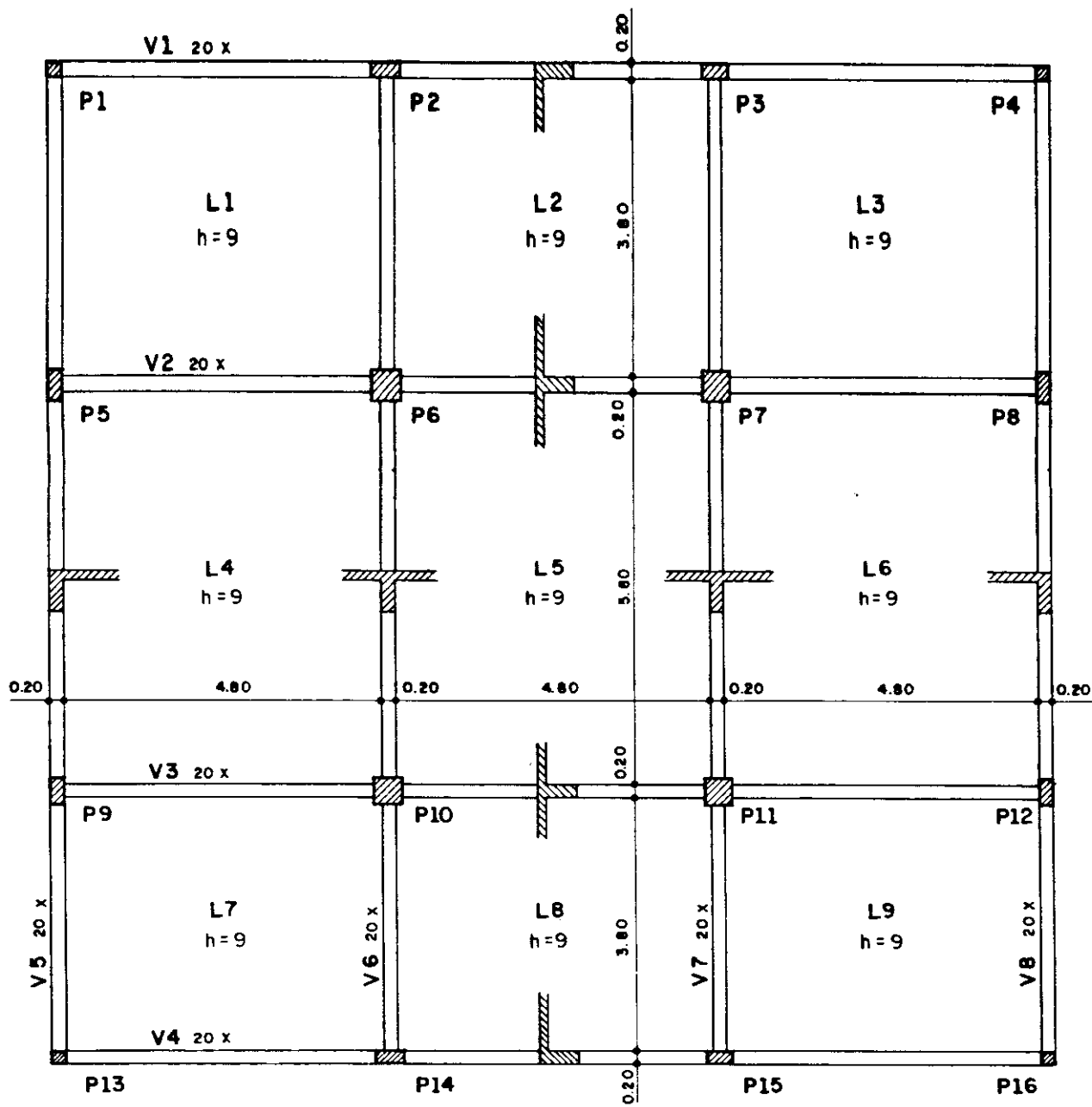


FIGURA 4.10 - PLANTA DE FÔRMAS

Após este cálculo inicial, foi procedida a compatibilização dos momentos negativos, em cada direção, com os respectivos momentos relativos à laje adjacente. Em cada vínculo, o momento negativo compatibilizado foi adotado como sendo o maior valor entre a média e 0,8 do maior entre os dois momentos obtidos com a hipótese de engastamento perfeito. Após a compatibilização dos momentos negativos, foram corrigidos também os momentos positivos relativos à mesma direção, aumentando-os ou diminuindo-os adequadamente, dependendo do fato de o respectivo momento negativo tiver sido diminuído ou aumentado em valor absoluto, após a compatibilização.

Na figura 4.11 estão indicados os valores dos momentos elásticos, antes e após a citada compatibilização. Os momentos compatibilizados encontram-se dentro de retângulos. Estes valores também são encontrados na tabela 4.29.

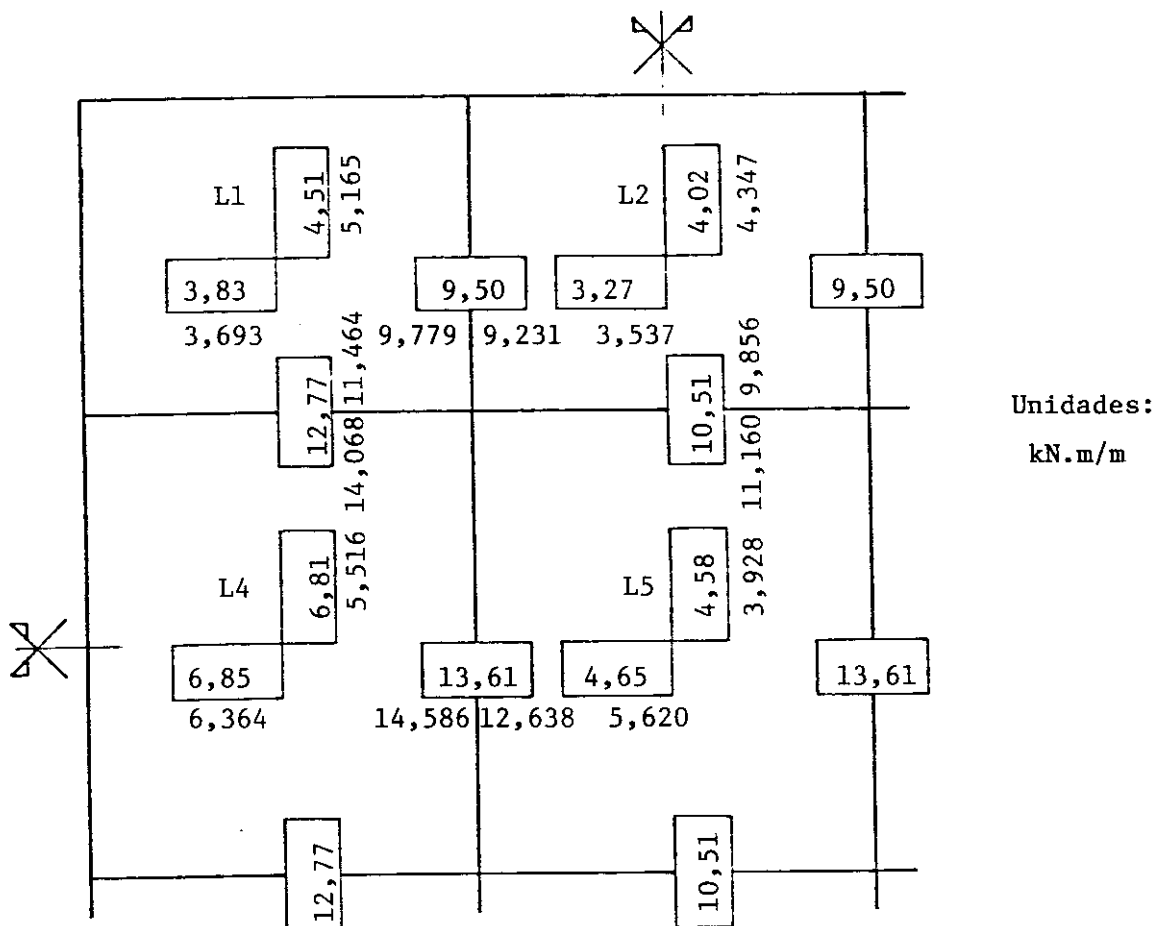


FIGURA 4.11 - COMPATIBILIZAÇÃO DOS MOMENTOS ELÁSTICOS

Na tabela 4.30 encontram-se as reações médias, calculadas conforme o item 3.3.2.9 da NBR 6118^[50], e os comprimentos parciais das barras superiores, relativos a cada laje e de acordo com a mesma norma NBR 6118. Estes valores são os habitualmente empregados na prática.

4.11.2 - Cálculo pela TCP com $\phi_i = \phi_{i,el}$

Junto com os momentos elásticos, obtidos conforme o item anterior antes da compatibilização, obtém-se também os momentos de plastificação relativos à teoria das charneiras plásticas e aos mesmos valores de κ e ϕ_i . Os resultados, que portanto supõem engastamento perfeito nas bordas engastadas, são indicados na tabela 4.31, onde se encontram também as respectivas reações médias e comprimentos das barras sobre os apoios.

Após a compatibilização dos momentos negativos e positivos, análoga à apresentada no item anterior, resultam valores de κ e ϕ_i que, introduzidos como dados no programa de cálculo, fornecem resultados um pouco diferentes para os momentos, que necessitam de nova compatibilização e que, por sua vez, acarretam novos valores de κ e ϕ_i . Após algumas iterações chega-se aos momentos compatibilizados finais.

Na figura 4.12 estão indicados os valores de momentos de plastificação, antes de iniciar a compatibilização e após a compatibilização final. Estes últimos encontram-se dentro de retângulos.

Os momentos compatibilizados finais também estão indicados na tabela 4.32, onde se encontram também os correspondentes valores de κ , ϕ_i , reações médias e comprimentos das barras superiores.

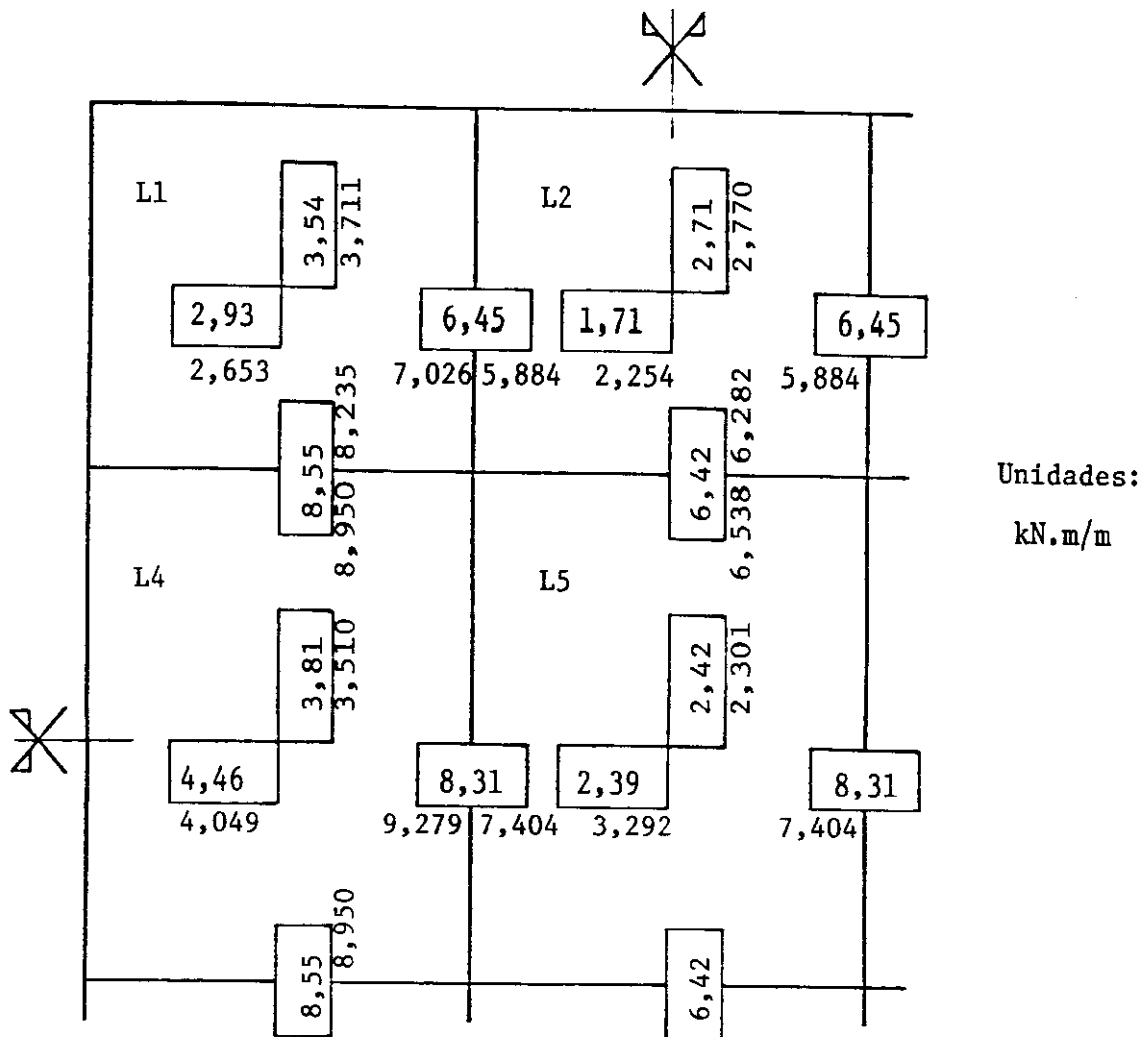


FIGURA 4.12- TCP COM $\phi_i = \phi_{i,el}$ E COMPATIBILIZAÇÃO POSTERIOR

4.11.3 - Cálculo pela TCP com $\phi_i = 0,62 \phi_{i,el}$

Na tabela 4.33 encontram-se os resultados obtidos pela TCP com $\kappa = \kappa_{el}$ e $\phi_i = 0,62 \phi_{i,el}$, antes da compatibilização.

Após cálculo iterativo análogo ao apresentado no item anterior, obtêm-se os resultados correspondentes aos momentos compatibilizados, os quais estão indicados na tabela 4.34.

Na figura 4.13 estão indicados os momentos correspondentes a $\phi_i = 0,62 \phi_{i,el}$, antes e depois da compatibilização.

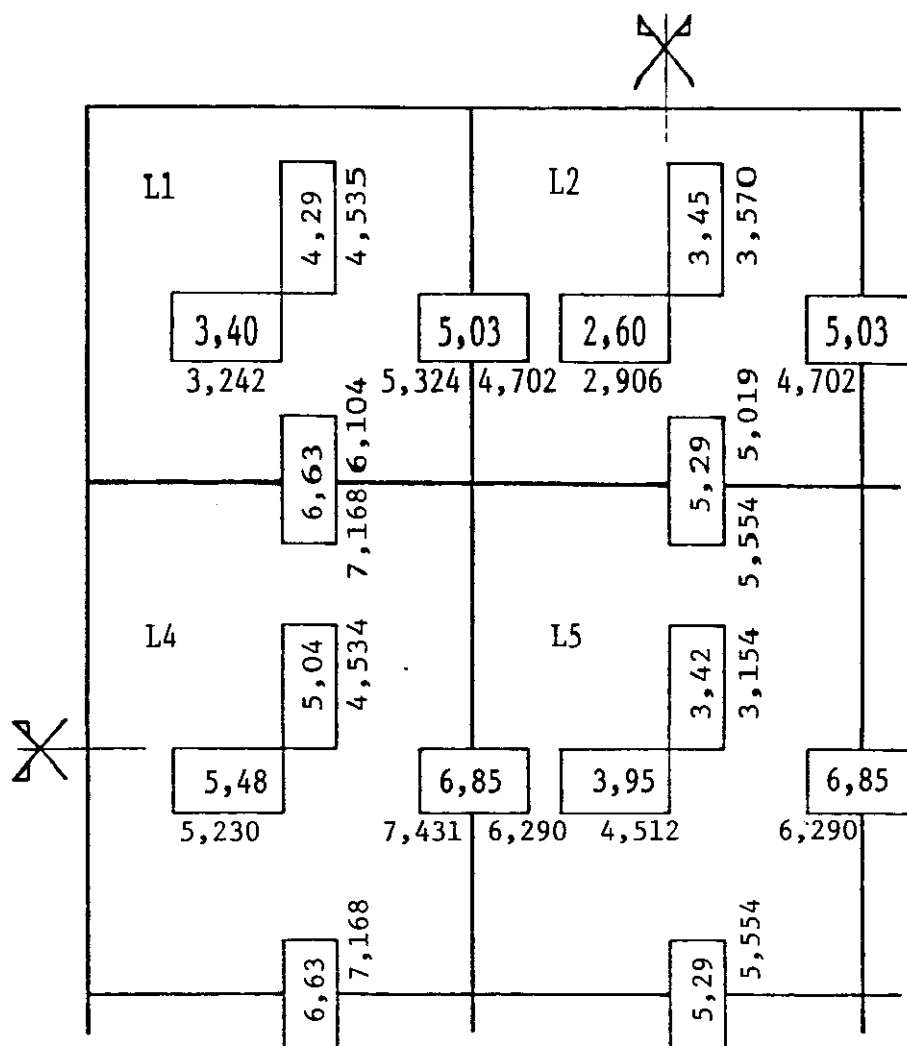


FIGURA 4.13 - TCP COM $\phi_i = 0,62 \phi_{i,el}$ E COMPATIBILIZAÇÃO POSTERIOR

4.11.4 - Consumo de aço

Finalizando o exemplo, apresenta-se o volume de aço consumido, relativo a cada um dos três casos anteriores, ou seja: cálculo elástico, cálculo pela TCP com $\phi_i = \phi_{i,el}$ e cálculo pela TCP com $\phi_i = 0,62 \phi_{i,el}$.

Para a organização dos cálculos, os momentos serão referidos conforme a notação indicada na figura 4.14; a numeração das barras superiores e inferiores encontra-se indicada na figura 15, onde se apresenta um detalhamento esquemático dessas armaduras.

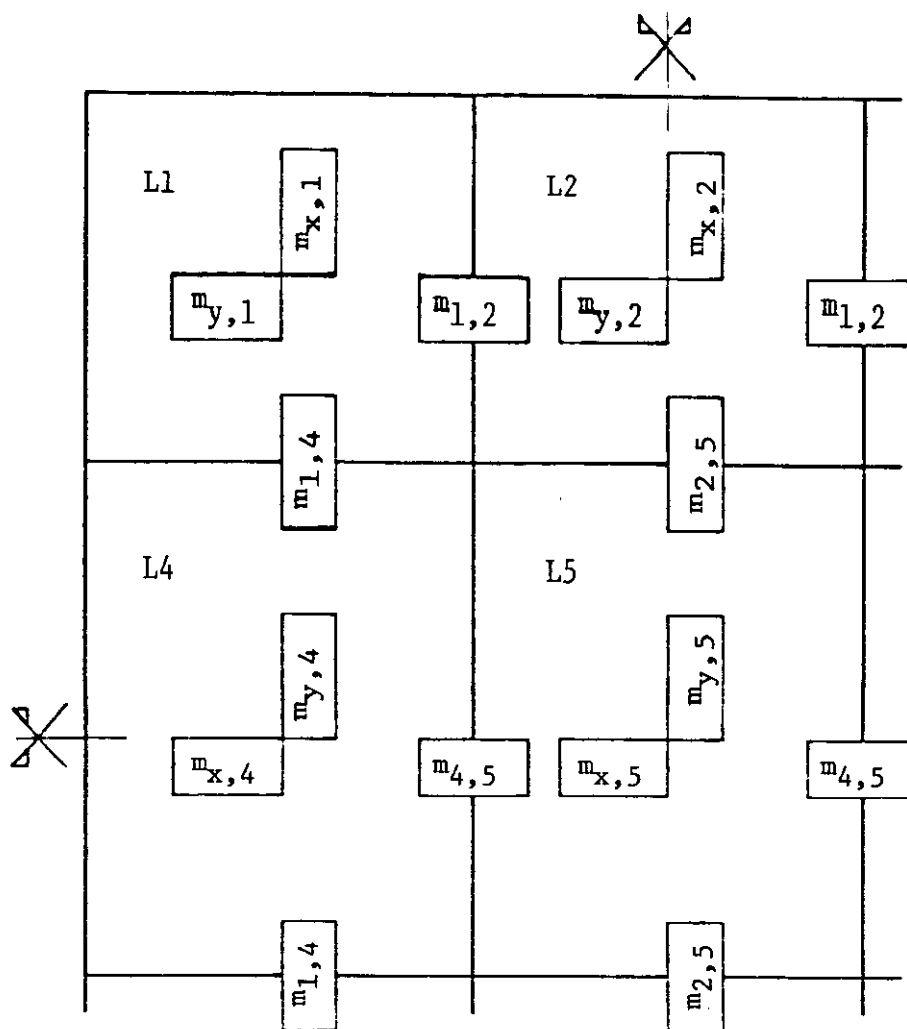


FIGURA 4.14 - NOTAÇÕES DOS MOMENTOS

Na tabela 4.35, apresentam-se os resultados do dimensionamento das armaduras, relativos a cada uma das hipóteses admitidas; apresenta-se também o volume de aço consumido. Nessa tabela foi adotada a notação:

- $m_{i,j}$ → momento no apoio entre as lajes i, j ;
- $m_{x,i}$ e $m_{y,i}$ → momento nos vãos da laje i ;
- n → número de repetições de cada tipo de barra;
- b → largura em que se distribui cada tipo de barra (em cm);
- m_k → valor característico do momento (em kN.cm/m);
- a_s → área da seção transversal da armadura (em cm^2/m);

- l → comprimento da barra (em cm);
 V → volume de aço das barras (em dm^3).

O dimensionamento das armaduras foi feito conforme as tabelas de PINHEIRO^[52], nas quais se empregam as expressões

$$k_c = \frac{b_w d^2}{m_d} \quad , \quad a_s = k_s \frac{m_d}{d} \quad ,$$

onde $b_w = 100\text{cm}$, $d = 8\text{cm}$ é a altura útil e $m_d = \gamma_f \cdot m_k$; adotou-se o coeficiente de ponderação $\gamma_f = 1,4$, concreto C-18 e aço CA-50; os coeficientes k_c e k_s encontram-se tabelados.

No cálculo do comprimento l das barras, não se levou em conta os comprimentos de ancoragem nem os comprimentos de eventuais ganchos e dobras. Como o que se pretende é fazer uma comparação entre as três considerações citadas, é razoável neste caso prescindir de um detalhamento mais refinado das armaduras, que certamente alteraria muito pouco os resultados comparativos ora obtidos.

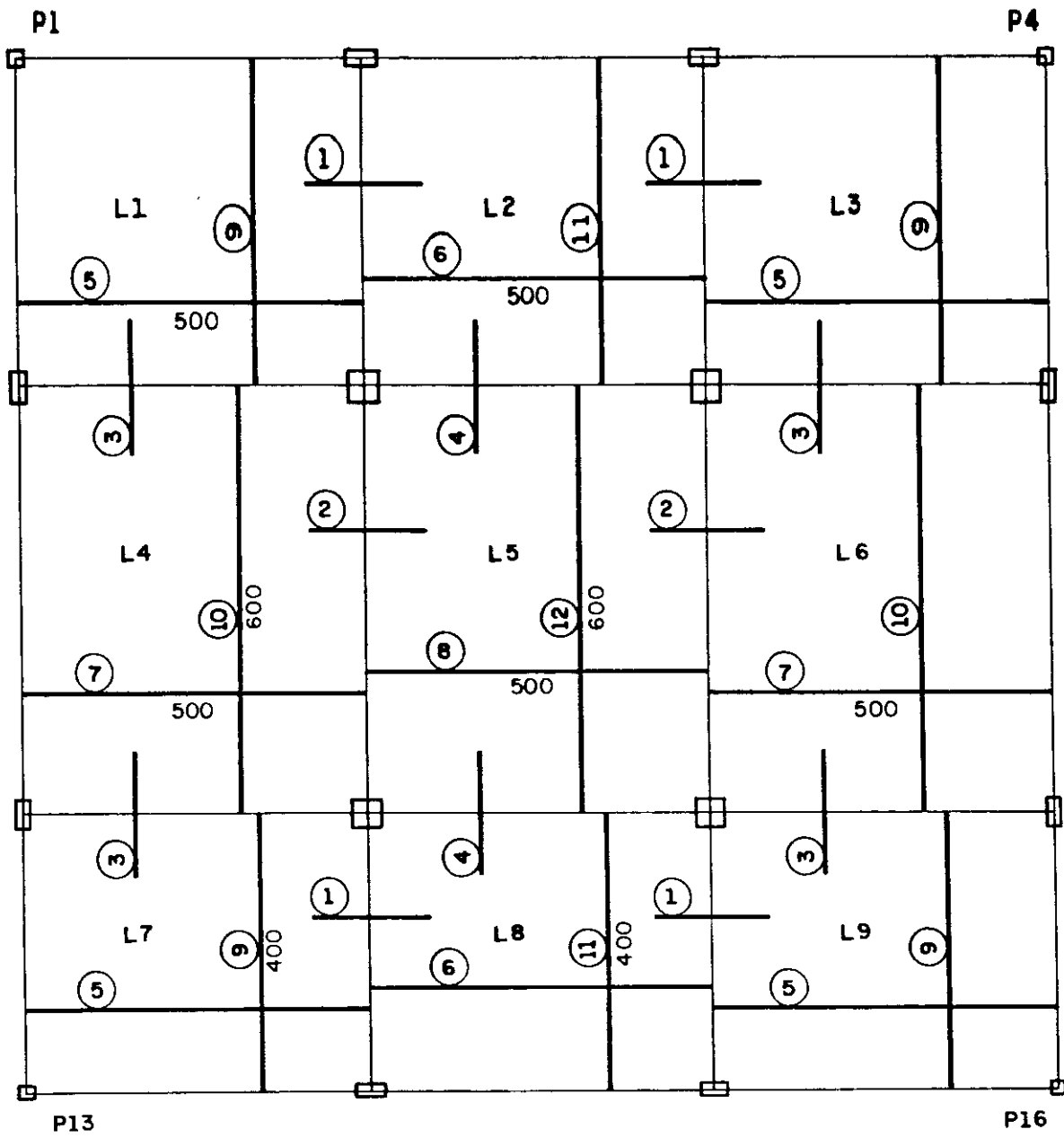


FIGURA 4.15 - DESENHO ESQUEMÁTICO DAS ARMADURAS

Tabela 4.28 - Pré-dimensionamento e cargas

LAJE		L ₁ =L ₃ L ₇ =L ₉	L ₂ =L ₈	L ₄ =L ₆	L ₅	Observações
CARACTERÍSTICAS	ℓ _x	4,00	4,00	5,00	5,00	menor vão
	ℓ _y	5,00	5,00	6,00	6,00	maior vão
	λ	1,25	1,25	1,20	1,20	$\lambda = \ell_y / \ell_x$
	CASO	3	5A	5A	6	ver item 2.2.1
PRÉ-DIMENSIONAMENTO	ψ ₂	1,70	1,85	1,88	2,10	Cálculo conforme a NBR 6118. $d_o = \frac{\ell_x}{\psi_2 \psi_3}$ d < d _o → verificar flecha
	ψ ₃	25	25	25	25	
	d _o (cm)	9,4	8,6	10,6	9,5	
	d (cm)	8	8	8	8	
	h (cm)	9	9	9	9	
CARGAS	pp	2,25	2,25	2,25	2,25	γ _{concr} = 25 kN/m ³
	piso + rev.	1,25	1,25	1,25	1,25	adotado
	paredes	1,50	1,50	1,50	1,50	divisórias
	g	5,00	5,00	5,00	5,00	permanente
	q	3,00	3,00	3,00	3,00	acidental
	p	8,00	8,00	8,00	8,00	total
<p>Unidades kN e m, salvo onde indicadas. Cálculo baseado na NBR 6118^[50], na NBR 6120^[67] e em PINHEIRO^[52].</p>						

Tabela 4.29 - Momentos elásticos

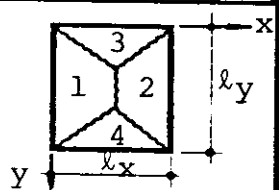
LAJE		L1=L3=L7=L9	L2=L8	L4=L6	L5
DADOS	l_x	4,00	4,00	5,00	5,00
	l_y	5,00	5,00	6,00	6,00
	P	8,00	8,00	8,00	8,00
	CASO	3	5A	5A	6
MOMENTOS ELÁSTICOS SUPONDO ENGASTAMENTO PERFEITOS NOS APOIOS	κ	0,715	0,814	0,867	0,699
	ϕ_1	--	--	--	2,249
	ϕ_2	2,220	2,267	2,292	2,249
	ϕ_3	--	2,610	2,550	2,841
	ϕ_4	2,648	2,610	2,550	2,841
	μ_x	4,035	3,396	3,182	2,810
	μ_y	2,885	2,763	2,758	1,964
	μ_1	--	--	--	6,319
	μ_2	8,956	7,700	7,293	6,319
	μ_3	--	7,212	7,034	5,580
	μ_4	7,640	7,212	7,034	5,580
	m_x	5,165	4,347	6,364	5,620
	m_y	3,693	3,537	5,516	3,928
	m_1	--	--	--	12,638
	m_2	11,464	9,856	14,586	12,638
	m_3	--	9,231	14,068	11,160
m_4	9,779	9,231	14,068	11,160	
MOMENTOS COMPATIBILIZADOS	m_x	4,51	4,02	6,85	4,65
	m_y	3,83	3,27	6,81	4,58
	m_1	--	--	--	13,61
	m_2	12,77	10,51	13,61	13,61
	m_3	--	9,50	12,77	10,51
	m_4	9,50	9,50	12,77	10,51
Unidades kN e m		$m = \mu \frac{P l_x^2}{100}$			

Tabela 4.30 - Cálculo de acordo com a NBR 6118

LAJE		L1=L3=L7=L9	L2=L8	L4=L6	L5
CARACTERÍSTICAS	l_x	4,00	4,00	5,00	5,00
	l_y	5,00	5,00	6,00	6,00
	λ	1,25	1,25	1,20	1,20
	p	8,00	8,00	8,00	8,00
	CASO	3	5A	5A	6
REAÇÕES MÉDIAS	ρ_1	2,20	1,80	1,73	2,92
	ρ_2	3,80	3,13	3,00	2,92
	ρ_3	1,83	3,17	3,16	2,50
	ρ_4	3,17	3,17	3,16	2,50
	r_1	7,04	5,76	6,92	11,68
	r_2	12,16	10,02	12,00	11,68
	r_3	5,86	10,14	12,64	10,00
	r_4	10,14	10,14	12,64	10,00
COMPRIMENTOS DAS BARRAS SUPERIORES (*)	l_1 / l_x	--	--	--	0,25
	l_2 / l_x	0,25	0,25	0,25	0,25
	l_3 / l_x	--	0,25	0,25	0,25
	l_4 / l_x	0,25	0,25	0,25	0,25
	l_1	--	--	--	1,25
	l_2	1,00	1,00	1,25	1,25
	l_3	--	1,00	1,25	1,25
	l_4	1,00	1,00	1,25	1,25

(*) Comprimentos parciais, relativos a cada laje; incluem o deslocamento a_l e não consideram ancoragem.

$a_l = 1,5d$, onde $d = 8\text{cm}$.

Unidades kN e m $r = \rho \frac{p l_x}{10}$

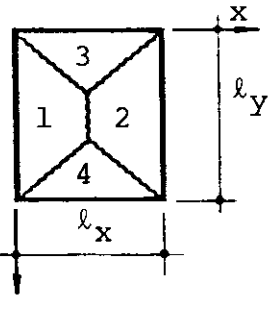


Tabela 4.31 - Cálculo pela TCP com $\phi_i = \phi_{iel}$

LAJE		L1=L3=L7=L9	L2=L8	L4=L8	L5
DADOS	l_x	4,00	4,00	5,00	5,00
	l_y	5,00	5,00	6,00	6,00
	p	8,00	8,00	8,00	8,00
	CASO	3	5A	5A	6
ÍNDICES	κ	0,715	0,814	0,867	0,699
	ϕ_1	--	--	--	2,249
	ϕ_2	2,219	2,268	2,292	2,249
	ϕ_3	--	2,610	2,550	2,841
	ϕ_4	2,648	2,610	2,550	2,841
MOMENTOS	m_x	3,711	2,770	4,049	3,292
	m_y	2,653	2,254	3,510	2,301
	m_1	--	--	--	7,404
	m_2	8,235	6,282	9,279	7,404
	m_3	--	5,884	8,950	6,538
	m_4	7,026	5,884	8,950	6,538
REAÇÕES MÉDIAS	r_1	6,751	5,766	6,970	11,418
	r_2	12,113	10,423	12,646	11,418
	r_3	5,642	9,882	12,230	10,299
	r_4	10,777	9,882	12,230	10,299
COMPRIMENTO DAS BARRAS SUPERIORES	l_1^*/l_x	--	--	--	0,153
	l_2^*/l_x	0,218	0,194	0,177	0,153
	l_3^*/l_x	--	0,173	0,186	0,144
	l_4^*/l_x	0,214	0,173	0,186	0,144
	l_1	--	--	--	0,89
	l_2	0,99	0,90	1,01	0,89
	l_3	--	0,81	1,05	0,84
	l_4	0,98	0,81	1,05	0,84
<p>$l_i \rightarrow$ comprimentos parciais, relativos a cada laje; não consideram ancoragem.</p> <p>$l_i = l_i^* + a_\ell$ onde $a_\ell = 1,5d$ ($d=0,08$)</p> <p>Unidades kN e m</p>					

Tabela 4.32 - TCP com $\phi_i = \phi_{i,e\ell}$ e compatibilização posterior

LAJE		L1=L3=L7=L9	L2=L8	L4=L6	L5
DADOS	l_x	4,00	4,00	5,00	5,00
	l_y	5,00	5,00	6,00	6,00
	p	8,00	8,00	8,00	8,00
	CASO	3	5A	5A	6
ÍNDICES	κ	0,828	0,631	0,854	1,013
	ϕ_1	--	--	--	3,477
	ϕ_2	2,415	2,369	1,863	3,477
	ϕ_3	--	3,772	2,244	2,653
	ϕ_4	2,201	3,772	2,244	2,653
MOMENTOS	m_x	3,54	2,71	4,46	2,39
	m_y	2,93	1,71	3,81	2,42
	m_1	--	--	--	8,31
	m_2	8,55	6,42	8,31	8,31
	m_3	--	6,45	8,55	6,42
	m_4	6,45	6,45	8,55	6,42
REAÇÕES MÉDIAS	r_1	6,590	5,702	7,317	11,417
	r_2	12,177	10,467	12,381	11,417
	r_3	5,931	9,894	12,181	10,300
	r_4	10,611	9,894	12,181	10,300
COMPRIMENTOS DAS BARRAS SUPERIORES	l_1^* / l_x	--	--	--	0,177
	l_2^* / l_x	0,228	0,198	0,157	0,177
	l_3^* / l_x	--	0,193	0,178	0,141
	l_4^* / l_x	0,195	0,193	0,178	0,141
	l_1	--	--	--	1,01
	l_2	1,03	0,91	0,91	1,01
	l_3	--	0,89	1,01	0,83
	l_4	0,90	0,89	1,01	0,83

$l_i \rightarrow$ comprimentos parciais, relativos a uma laje; não consideram ancoragem.
 $l_i = l_i^* + a_\ell$ onde $a_\ell = 1,5d$ ($d=0,08$)
 Unidades kN e m

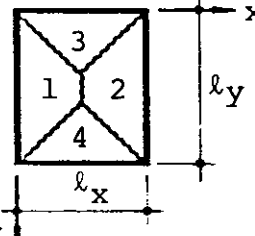


Tabela 4.33 - Cálculo pela TCP com $\phi_j = 0,62\phi_{i,e}$

LAJE		L1=L3=L7=L9	L2=L8	L4=L6	L5
DADOS	l_x	4,00	4,00	5,00	5,00
	l_y	5,00	5,00	6,00	6,00
	p	8,00	8,00	8,00	8,00
	CASO	3	5A	5A	6
ÍNDICES	κ	0,715	0,814	0,867	0,699
	ϕ_1	--	--	--	1,394
	ϕ_2	1,376	1,406	1,421	1,394
	ϕ_3	--	1,618	1,581	1,761
	ϕ_4	1,642	1,618	1,581	1,761
MOMENTOS	m_x	4,535	3,570	5,230	4,512
	m_y	3,242	2,906	4,534	3,154
	m_1	--	--	--	6,290
	m_2	6,104	5,019	7,431	6,290
	m_3	--	4,702	7,168	5,554
	m_4	5,324	4,702	7,168	5,554
REAÇÕES MÉDIAS	r_1	7,465	6,551	7,922	11,481
	r_2	11,434	10,162	12,327	11,481
	r_3	6,238	9,555	11,850	10,222
	r_4	10,139	9,555	11,850	10,222
COMPRIMENTO DAS BARRAS SUPERIORES	l_1^*/l_x	--	--	--	0,125
	l_2^*/l_x	0,161	0,150	0,147	0,125
	l_3^*/l_x	--	0,138	0,137	0,121
	l_4^*/l_x	0,163	0,138	0,137	0,121
	l_1	--	--	--	0,75
	l_2	0,76	0,72	0,86	0,75
	l_3	--	0,67	0,81	0,73
	l_4	0,77	0,67	0,81	0,73
$l_i \rightarrow$ comprimentos parciais, relativos a uma laje; não consideram ancoragem. $l_i = l_i^* + a_l$ onde $a_l = 1,5d$ ($d=0,08$)					
Unidades kN e m					

Tabela 4.34 - TCP com $\phi_i = 0,62\phi_{i,el}$ e compatibilização posterior

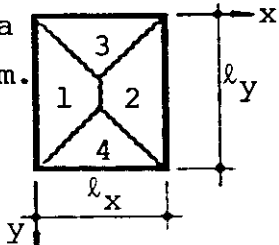
LAJE		L1=L3=L7=L9	L2=L8	L4=L6	L5
DADOS	l_x	4,00	4,00	5,00	5,00
	l_y	5,00	5,00	6,00	6,00
	p	8,00	8,00	8,00	8,00
	CASO	3	5A	5A	6
ÍNDICES	κ	0,793	0,754	0,920	0,865
	ϕ_1	--	--	--	1,734
	ϕ_2	1,545	1,533	1,250	1,734
	ϕ_3	--	1,935	1,315	1,547
	ϕ_4	1,479	1,935	1,315	1,547
MOMENTOS	m_x	4,29	3,45	5,48	3,95
	m_y	3,40	2,60	5,04	3,42
	m_1	--	--	--	6,85
	m_2	6,63	5,29	6,85	6,85
	m_3	--	5,03	6,63	5,29
	m_4	5,03	5,03	6,63	5,29
REAÇÕES MÉDIAS	r_1	7,259	6,439	8,110	11,482
	r_2	11,580	10,248	12,165	11,482
	r_3	6,390	9,571	11,835	10,221
	r_4	10,061	9,571	11,835	10,221
COMPRIMENTO DAS BARRAS SUPERIORES	l_1^*/l_x	--	--	--	0,139
	l_2^*/l_x	0,176	0,158	0,135	0,139
	l_3^*/l_x	--	0,149	0,125	0,114
	l_4^*/l_x	0,153	0,149	0,125	0,114
	l_1	--	--	--	0,82
	l_2	0,82	0,75	0,80	0,82
	l_3	--	0,72	0,75	0,69
	l_4	0,73	0,72	0,75	0,69
$l_i \rightarrow$ comprimentos parciais, relativos a uma laje; não consideram ancoragem. $l_i = l_i^* + a_\ell$ onde $a_\ell = 1,5d$ ($d=0,08$)					
Unidades kN e m					

Tabela 4.35 - Volume de aço consumido

Nº DA BARRA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m	$m_{1,2}$	$m_{4,5}$	$m_{1,4}$	$m_{2,5}$	$m_{y,1}$	$m_{y,2}$	$m_{x,4}$	$m_{x,5}$	$m_{x,1}$	$m_{y,4}$	$m_{x,2}$	$m_{y,5}$
n	4	2	4	2	4	2	2	1	4	2	2	1
b	400	600	500	500	400	400	600	600	500	500	500	500
1- Cálculo Elástico												
m_k	950	1361	1277	1051	383	327	685	465	451	681	402	458
a_s	4,32	6,43	6,03	4,78	1,61	1,37	3,00	1,95	1,89	2,98	1,69	1,92
ℓ	200	250	225	225	500	500	500	500	400	600	400	600
V	13,8	19,3	27,1	10,8	12,9	5,5	18,0	5,9	15,1	17,9	6,8	5,8
Total	$V_1 = 158,7 \text{ dm}^3$											
2- Cálculo Plástico com $\phi_i = \phi_{i,e\ell}$												
m_k	627	821	848	597	292	214	451	308	362	387	276	215
a_s	2,74	3,59	3,71	2,61	1,23	0,90	1,89	1,29	1,52	1,63	1,16	0,90
ℓ	179	192	204	174	500	500	500	500	400	600	400	600
V	7,8	8,3	15,1	4,5	9,8	3,6	11,3	3,9	12,2	9,8	4,6	2,7
Total	$V_2 = 93,7 \text{ dm}^3$											
3- Cálculo Plástico com $\phi_i = 0,62\phi_{i,e\ell}$												
m_k	503	685	663	529	340	260	548	395	429	504	345	342
a_s	2,11	3,00	2,90	2,22	1,43	1,09	2,30	1,66	1,80	2,12	1,45	1,44
ℓ	145	162	157	144	500	500	500	500	400	600	400	600
V	4,9	5,8	9,1	3,2	11,4	4,4	13,8	5,0	14,4	12,7	5,8	4,3
Total	$V_3 = 94,8 \text{ dm}^3$											
<p>Unidades kN e cm, exceto:</p> <p>m_k (kN.cm/m) , a_s (cm²/m) e V(dm³)</p>												

5 - PROCESSO DAS FAIXAS DE HILLERBORG

5.1 - GENERALIDADES

O processo das faixas é uma aplicação do teorema estático da teoria da plasticidade. Foi introduzido por HILLERBORG^[25], com o objetivo de determinar de modo simplificado a distribuição dos momentos. Sendo uma aplicação do teorema estático, fornece resultados corretos ou a favor da segurança.

Nos casos em que o momento volvente podia ser considerado nulo, o processo recebeu o nome de processo simplificado das faixas, tendo em conta a forma subsequente mais sofisticada, denominada processo avançado das faixas, aplicável aos casos em que a consideração do momento volvente era indispensável.

O processo avançado das faixas, introduzindo em 1959 e necessário por exemplo para a análise de lajes-cogumelo, não será aqui considerado. Seus fundamentos podem ser encontrados em HILLERBORG^[4].

5.1.1 - Objetivo

Neste trabalho será tratado o processo simplifica

do das faixas, principalmente para comparar os resultados obtidos com base no teorema estático - a favor da segurança - com os obtidos pela teoria das charneiras plásticas, teoricamente contra a segurança. O enfoque principal diz respeito, portanto, às lajes retangulares com carga uniforme e bordas apoiadas ou engastadas, com distribuição de momentos baseados nas configurações das charneiras dadas pela TCP. Outras aplicações também podem ser encontradas em HILLERBORG[4].

5.1.2 - Equações de equilíbrio da placa

De maneira análoga ao que se apresentou no item 1.3.1, e com a notação indicada na figura 5.1, as condições de equilíbrio na direção perpendicular ao plano da placa fornecem:

$$v_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} , \quad (5.1.1)$$

$$v_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} , \quad (5.1.2)$$

e

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = - p . \quad (5.1.3)$$

Substituindo-se as duas primeiras equações na última, obtém-se a equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = - p . \quad (5.1.4)$$

Adequadas condições de contorno devem ser satisfeitas. Como somente o equilíbrio está sendo estudado, as condições de contorno estáticas devem ser verificadas, mas não condições do tipo rotação nula numa extremidade engastada. As condições de contorno estáticas requerem que os esforços a-

tuantes no contorno devem ser transferidos para a estrutura adjacente.

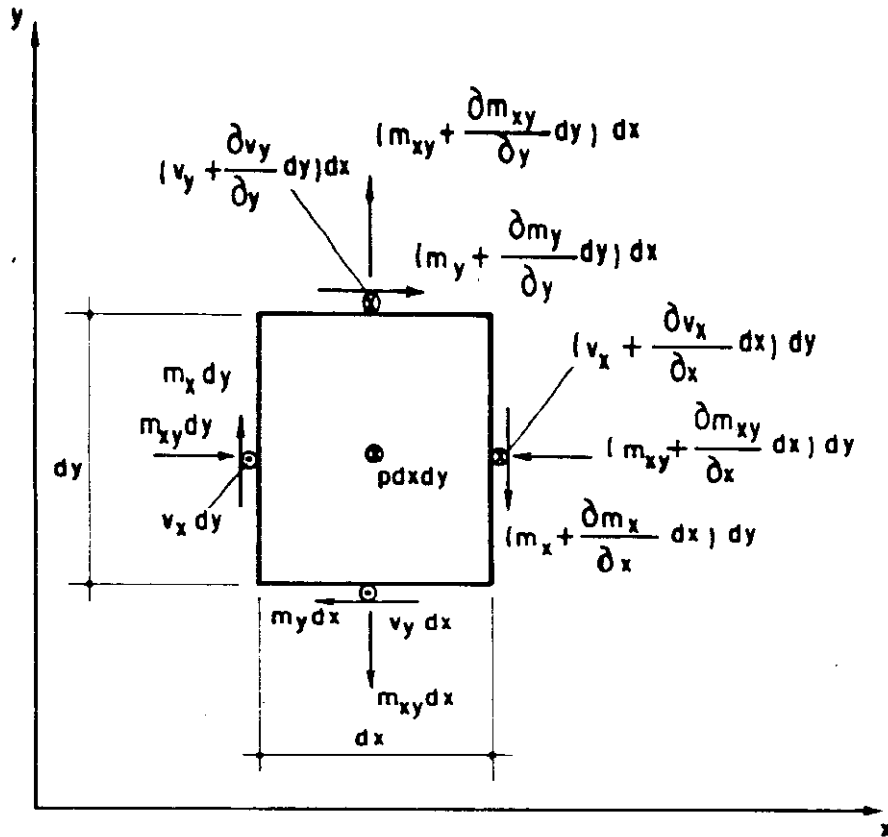


FIG. 5.1— ESFORÇOS NUM ELEMENTO INFINITESIMAL

No contorno onde a laje é perfeitamente engastada, não há condições de contorno especiais para as lajes, mas a estrutura adjacente deve ser calculada para resistir aos esforços que lhe são transferidos, isto é, tanto os momentos fletores quanto os momentos torçores e as forças cortantes.

No contorno onde a laje é livremente apoiada, a condição de contorno é que o momento fletor com vetor momento paralelo ao apoio seja zero. A estrutura adjacente deve ser capaz de resistir o momento torçor e a força cortante, ambos os quais compõem a força de reação.

A figura 5.2 mostra os esforços na região de uma borda na direção x , na qual a laje é livremente apoiada. A laje encontra-se, em relação à extremidade considerada, no lado do sentido positivo do eixo y . A região da borda, cuja

largura é indeterminada, mas pequena, tem um momento torçor igual a zero no lado externo e igual a m_{xy} no lado interno. A diferença entre esses dois momentos torçores é resistida por forças cortantes adicionais F na região de extremidade. Uma equação de equilíbrio de momentos em torno do centro do elemento fornece, desprezando-se infinitésimos de ordem superior:

$$F = - m_{xy} \quad . \quad (5.1.5)$$

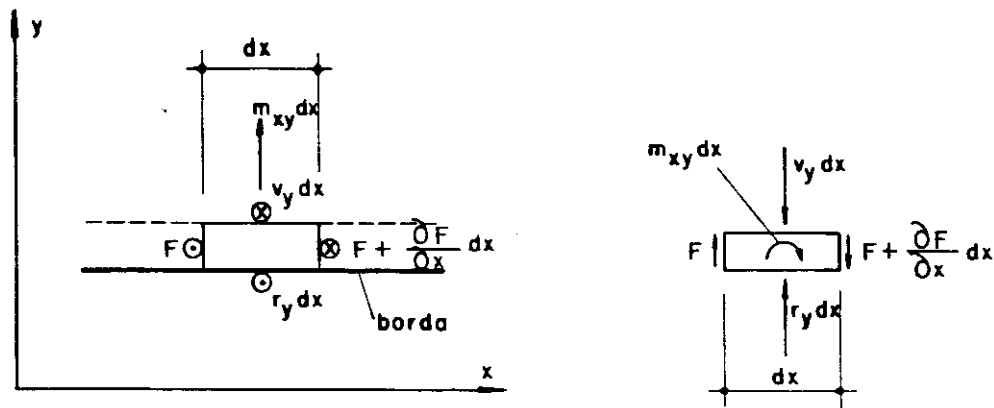


FIG. 5.2 - ESFORÇOS NA REGIÃO DE UMA BORDA LIVREMENTE APOIADA

A reação de apoio r_y é dada por

$$r_y = v_y + \frac{\partial F}{\partial x} = v_y - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad , \quad (5.1.6)$$

que, de acordo com a equação (5.1.2), resulta:

$$r_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} - 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad . \quad (5.1.7)$$

De maneira análoga, uma laje com borda apoiada ao longo do eixo y tem como reação

$$r_x = v_x - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial m_x}{\partial x} - 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad (5.1.8)$$

se a laje se encontra, em relação à extremidade considerada, no lado do sentido positivo do eixo x.

Se a laje se encontra no lado oposto ao correspondente ao sentido positivo do eixo em questão, deve ser usado o sinal oposto nas equações anteriores de r_y e r_x .

Onde duas bordas apoiadas se encontram, aparece uma reação concentrada de canto dada por

$$R_0 = 2m_{xy} , \quad (5.1.9)$$

atuando para cima da estrutura adjacente, se o canto corresponde a ambas as bordas do lado do sentido positivo dos eixos ou ambas do lado do sentido negativo, ou para baixo, no caso contrário.

A estrutura adjacente deve ser calculada para as forças de reação r_x, r_y e R_0 e as regiões de extremidade da laje devem ser calculadas para as forças cortantes F.

Em uma borda livre paralela ao eixo x, o momento fletor m_y e a reação r_y devem ser nulos, o que significa que as condições de contorno em uma borda livre são:

$$m_y = 0 , \quad (5.1.10)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} - 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = 0 . \quad (5.1.11)$$

As correspondentes expressões para uma borda livre paralela ao eixo y são:

$$m_x = 0 , \quad (5.1.12)$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} - 2 \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0 . \quad (5.1.13)$$

5.1.3 - Fundamentos do processo simplificado

Nas equações de equilíbrio de uma laje, como por exemplo a equação (5.1.4) válida para coordenadas ortogonais,

há três diferentes momentos: dois momentos fletores m_x e m_y e um momento torçor m_{xy} . É possível satisfazer a equação de equilíbrio escolhendo dois dos momentos em função das coordenadas da laje e determinando o terceiro com a equação de equilíbrio.

A base do processo simplificado das faixas, como já foi dito, é que o momento torçor, com relação às direções da armadura, é considerado nulo. Assim, se as armaduras são paralelas aos eixos coordenados, tem-se:

$$m_{xy} = 0 . \quad (5.1.14)$$

A equação de equilíbrio toma a forma

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = - p , \quad (5.1.15)$$

que é válida também para coordenadas oblíquas (HILLERBORG^[4]).

Esta equação pode ser desmembrada em duas partes,

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = - p_x , \quad (5.1.16)$$

e

$$\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = - p_y , \quad (5.1.17)$$

valendo a condição:

$$p_x + p_y = p . \quad (5.1.18)$$

Uma solução da equação de equilíbrio pode então ser obtida dividindo a carga p em duas partes p_x e p_y , após o que m_x e m_y são determinados através das equações (5.1.16) e (5.1.17).

Além das equações de equilíbrio, as condições de contorno mecânicas também devem ser satisfeitas. Para extremidades paralelas ao eixo y (compare com o item 5.1.2), as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- . borda apoiada $\rightarrow m_x = 0$;
- . borda livre $\rightarrow m_x = 0$ e $\frac{\partial m_x}{\partial x} = 0$.

Como se pode verificar, ambas as equações de equilíbrio e as condições de contorno para m_x são exatamente as mesmas de uma viga com carga p_x . É então possível tratar cada faixa da laje, paralela ao eixo x , como uma viga com o quinhão de carga p_x .

O cálculo completo dos momentos na laje pode então ser convertido no cálculo dos momentos em uma série de faixas com flexão em uma só direção, onde os bem conhecidos métodos para cálculo de momentos em vigas podem ser usados.

Em princípio, a carga p pode ser arbitrariamente repartida em p_x e p_y . Entretanto, diferentes maneiras de repartição de carga levam a diferentes distribuições das armaduras. É então evidente que nem todas essas soluções são convenientes. Uma escolha adequada é fundamental para a obtenção de bons resultados. Do ponto de vista prático, as principais exigências são que a estrutura seja economicamente adequada e que esta estrutura tenha bom funcionamento sob condições de serviço, com respeito à necessidade de se limitar deformação e fissuração.

5.2 - LAJE QUADRADA APOIADA NO CONTORNO

Considere-se, como exemplo inicial, uma laje quadrada com carga uniforme, simplesmente apoiada nas quatro bordas e com armadura somente junto à face inferior.

Supondo armadura uniformemente distribuída, a TCP fornece os resultados:

- . sem leque nos cantos $\rightarrow m = \frac{p\ell^2}{24} = 0,0417 p\ell^2$,
- . com leque nos cantos $\rightarrow m = 0,0460 p\ell^2$.

Estes valores, teoricamente contra a segurança, ser vem para comparar com os momentos obtidos pelo processo das faixas, que se encontram a favor da segurança.

Serão, agora, analisadas algumas repartições de car gas, com as correspondentes distribuições laterais de momen- tos. Os resultados obtidos serão comparados com os da teoria das charneiras plásticas.

5.2.1 - Quinhões de carga iguais nas duas direções

A mais simples repartição de carga é com $p_x=p_y=p/2$, como se mostra na figura 5.3, onde as setas indicam a direção em que a carga é resistida. Em cada direção, as faixas são calculadas como vigas biapoiadas com carga uniforme, obtendo -se os momentos máximos no meio das faixas:

$$m_x = m_y = \frac{p_x \ell^2}{8} = \frac{p_y \ell^2}{8} = \frac{p \ell^2}{16} = 0,0625 p \ell^2 .$$

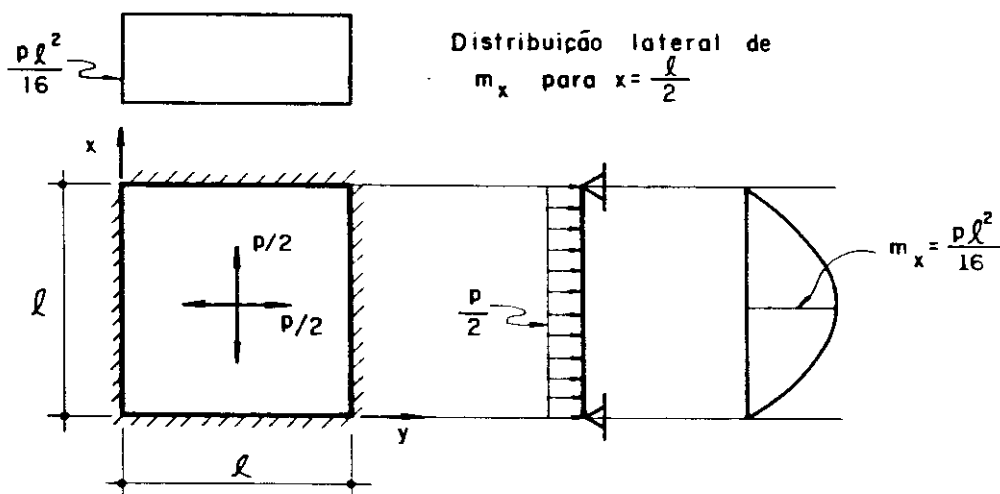


FIG. 5.3 - CARGA IGUAL NAS DUAS DIREÇÕES.

Nota-se que este valor é 50% maior que o obtido pela teoria das charneiras plásticas sem leque, e aproximadamente 36% com leque. Evidentemente, não é um bom resultado, podendo a repartição de carga ser melhorada.

5.2.2 - Repartição de carga por regiões retangulares

Outra repartição de carga é mostrada na figura 5.4, onde regiões com diferentes distribuições de carga são separadas por linhas finas tracejadas. Essa repartição foi feita de maneira que, em princípio, a carga que atua perto de um apoio é resistida por uma faixa perpendicular a esse apoio; cargas perto das diagonais são repartidas igualmente nas duas direções.

Os momentos máximos nas diferentes faixas são:

$$m_{xA} = \frac{p}{2} \cdot \frac{l}{4} \left(\frac{l}{4} - \frac{l}{8} \right) = \frac{pl^2}{64} \quad , \quad (5.2.1)$$

$$m_{xB} = \frac{p}{2} \cdot \frac{l^2}{8} + \frac{pl^2}{64} = 5 \frac{pl^2}{64} \quad . \quad (5.2.2)$$

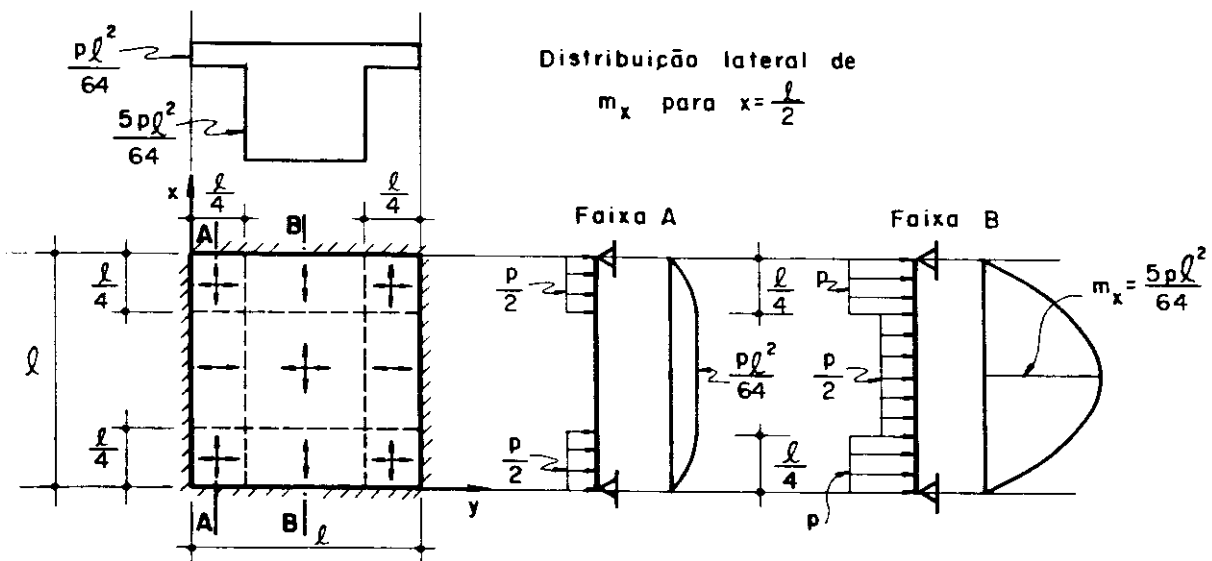


FIG. 5.4 - CARGA REPARTIDA POR REGIÕES RETANGULARES

A quantidade de armadura em cada faixa é aproximadamente proporcional ao respectivo momento. Então, a comparação com os resultados das charneiras plásticas pode ser feito através do momento médio; como cada tipo de faixa corresponde à metade da largura da laje, o momento médio é:

$$m = \frac{1}{2} \left(\frac{pl^2}{64} + \frac{5pl^2}{64} \right) = 3 \frac{pl^2}{64} = 0,0469 pl^2 \quad (5.2.3)$$

Este valor é 12,5% maior que o correspondente às charneiras sem leque e praticamente coincidente se for considerado o leque. Sem dúvida, é uma boa solução, pois os resultados das charneiras - contra segurança - praticamente encontram os do processo das faixas, que são a favor da segurança. A razão disso é que o processo das faixas considera uma distribuição diferente das armaduras, suposta uniforme na teoria das charneiras plásticas. Essa distribuição admitida pelo processo das faixas, além de ser prática, é também interessante com relação às condições de fissuração e de deformação.

5.2.3 - Repartição de carga a 45°

Uma repartição de carga mais refinada é indicada na figura 5.5, onde os contornos das regiões com diferentes direções de atuação do carregamento coincidem com as diagonais; as cargas caminham em direção ao apoio mais próximo.

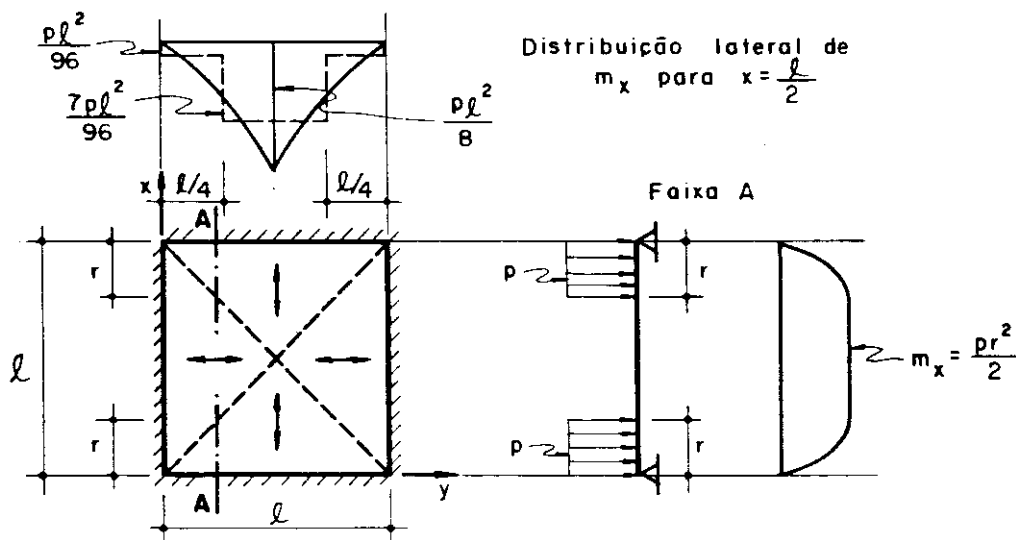


FIG. 5.5 - REPARTIÇÃO DE CARGA A 45°

Em uma faixa à distância x da borda mais próxima, o valor do momento é:

$$m_x = \frac{1}{2} px^2 .$$

A distribuição lateral de m_x também é mostrada na figura 5.5 . O momento médio resulta

$$m_{x,med} = \frac{1}{l/2} \int_0^{l/2} \frac{1}{2} px^2 dx = \frac{pl^2}{24} = 0,0417 pl^2, \quad (5.2.4)$$

isto é, o mesmo valor dado pela teoria das charneiras plásticas, sem leque, e um valor em torno da 10% menor que o da TCP, se for considerado o leque.

Há, portanto, uma economia de aproximadamente 10% de armadura em comparação com a solução ordinária da teoria das charneiras plásticas, com armadura uniforme e com leque nos cantos, apesar de a solução dada aqui ser, em princípio, a favor da segurança, enquanto que a solução das charneiras plásticas é contra a segurança.

Certamente, é também possível efetuar o cálculo pela teoria das charneiras plásticas com armadura distribuída de maneira não uniforme. Se a laje com uma distribuição de momentos conforme a figura 5.5 for verificada pela teoria das charneiras plásticas, a capacidade de carga encontrada será exatamente a mesma dada pelo processo das faixas. Então, como o limite superior e o limite inferior para a capacidade de carga são os mesmos, a solução indicada na figura 5.5 é exata à luz da teoria da plasticidade (HILLERBORG^[4]).

A distribuição de momentos dada na figura 5.5, entretanto, é inadequada do ponto de vista prático, pois pressupõe uma variação contínua da armadura. Sob este aspecto, a distribuição da figura 5.4 é mais adequada; porém, exige mais armadura (12,5%) que a solução da figura 5.5.

Uma maneira de se fazer uso prático da solução economicamente mais atrativa da figura 5.5 é armar usando momentos médios em determinadas larguras. Os princípios estritos da teoria do equilíbrio não são respeitados e não se tem a garantia da segurança. Se se considera o momento médio ao longo de toda a largura, o momento será $pl^2/24$, isto é, o mesmo resultado das charneiras plásticas sem leque, que teórica

mente é pelo menos 10% contra a segurança e provavelmente não mais de 18% (HILLERBORG^[4]).

Pode-se também considerar faixas com largura igual a $\ell/4$, resultando os momentos médios (indicados por linhas traço-ponto na figura 5.5):

$$m_1 = \frac{1}{\ell/4} \int_0^{\ell/4} \frac{px^2}{2} dx = p\ell^2/96 \quad , \quad (5.2.5)$$

$$m_2 = \frac{1}{\ell/4} \int_{\ell/4}^{\ell/2} \frac{px^2}{2} dx = 7p\ell^2/96 \quad . \quad (5.2.6)$$

Com esta distribuição, os momentos nos cantos, onde ocorrem os leques das charneiras plásticas, valem um quarto dos momentos dados pela distribuição uniforme. Como a diminuição da carga de ruína é decorrente do decréscimo da energia interna absorvida pela armadura junto ao canto, a redução deve ser proporcional à quantidade de armadura nessa região da laje. Assim, a insegurança causada por essa simplificação deve ser somente um quarto daquela dada pela teoria das charneiras plásticas, isto é, de 2,5% a 4,5%.

Como os leques em geral são desprezados, quando se emprega a teoria das charneiras plásticas, o processo das faixas com momentos médios por regiões também deve ser aceito, pois a insegurança decorrente é bem menor do que a aceita pela teoria das charneiras plásticas. Entretanto, é essencial lembrar que tal consideração de momentos médios constitui-se em um desvio da estrita teoria do equilíbrio, e que somente deve ser usada nos casos em que, comprovadamente, a insegurança decorrente não é importante. O emprego de momentos médios pode ser evitado, sem grandes problemas econômicos, adotando-se soluções do tipo da indicada na figura 5.4.

5.2.4 - Solução geral com momento médio

Ainda empregando a solução da figura 5.5 com momento médio por região, há basicamente dois casos de interesse prático. O primeiro deles é aquele onde se fixa a largura das regiões e se tem como incógnitas os respectivos momentos. No outro caso, a razão dos momentos médios é pré-fixada, tendo-se como incógnitas as correspondentes larguras das regiões. Ambos podem ser resolvidos com as equações apresentadas a seguir, baseadas na notação da figura 5.6.

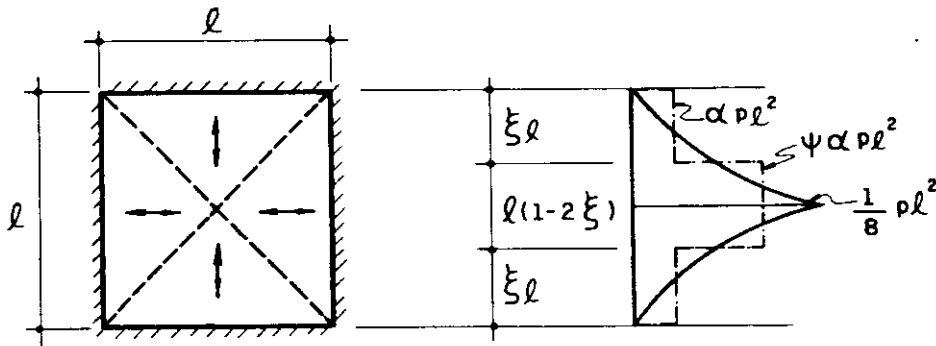


FIG. 5.6 - MOMENTOS MÉDIOS EM REGIÕES.

Uma equação pode ser obtida tendo em conta ser o momento médio na largura total igual a $pl^2/24$. Tem-se, então,

$$\alpha pl^2 \cdot 2\xi l + \psi \alpha pl^2 \cdot l(1-2\xi) = \frac{pl^2}{24} \cdot l \quad ,$$

que, simplificada, resulta:

$$\psi = \frac{1-48\alpha\xi}{24\alpha(1-2\xi)} \quad (5.2.7)$$

ou

$$48\alpha\xi(\psi-1) - 24\alpha\psi + 1 = 0. \quad (5.2.8)$$

Outra equação refere-se, por exemplo, ao momento médio nas faixas laterais,

$$\alpha p l^2 \cdot \xi l = \int_0^{\xi l} \frac{p x^2}{2} dx,$$

que resolvida fornece:

$$\alpha = \frac{1}{6} \xi^2 . \quad (5.2.9)$$

A seguir serão tratados cada um dos casos; o primeiro em que a largura da região lateral é adotada e o segundo em que a razão dos momentos é pré-fixada.

a) Largura adotada da região lateral

No caso em que a largura da região lateral é adotada (ξ), o fator α do momento na respectiva região é dado pela (5.2.9) e a razão ψ do momento na região central em relação ao momento nas regiões laterais é obtido com a (5.2.7). Seguem alguns exemplos.

Para $\xi=1/4$ resulta $\alpha=1/96$ e $\psi = 7$, correspondendo ao caso já resolvido no item anterior (figura 5.5).

Para $\xi=1/3$ resulta $\alpha=1/54$ e $\psi=4,75$, correspondendo aos momentos nas regiões laterais e central respectivamente:

$$m_1 = \frac{1}{54} p l^2 ,$$

$$m_2 = \frac{19}{4} \cdot \frac{1}{54} p l^2 = \frac{19}{216} p l^2 .$$

Para $\xi = 1/2$ resulta $\alpha = 1/24$ e ψ indeterminado . Nota-se, na figura 5.6, que na faixa correspondente a $\xi=1/2$ o momento vale $p l^2 / 8$, ou seja, quando ξ tende a $1/2$, ψ tende a 3.

b) Razão pré-fixada dos momentos

Se a razão ψ dos momentos médios é que é conhecida, o problema é resolvido substituindo-se a (5.2.9) na (5.2.8), resultando

$$48 \cdot \frac{1}{6} \xi^2 \cdot \xi (\psi - 1) - 24 \cdot \frac{1}{6} \xi^2 \cdot \psi + 1 = 0,$$

que, simplificada, fica:

$$\xi^3 - \frac{\psi}{2(\psi - 1)} \xi^2 + \frac{1}{8(\psi - 1)} = 0. \quad (5.2.10)$$

Adotando-se, por exemplo, $\psi = 5$ e substituindo-se este valor na (5.2.10) tem-se

$$\xi^3 - \frac{5}{8} \xi^2 + \frac{1}{32} = 0,$$

cujas soluções são $\xi = 0,32$.

5.2.5 - Reações de apoio

O método das faixas fornece diretamente as distribuições teóricas das reações de apoio, que são correspondentes às repartições de carga consideradas. Na figura 5.7, estas distribuições são mostradas para as várias repartições de carga, indicadas nas figuras 5.3, 5.4 e 5.5 respectivamente.

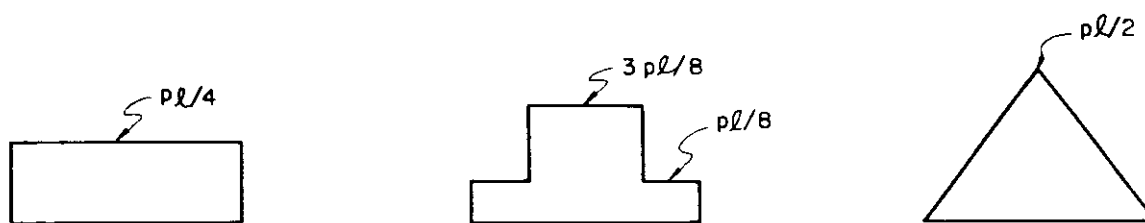


FIG. 5.7 - DISTRIBUIÇÃO DAS REAÇÕES DE APOIO

5.3 - CASOS DE VINCULAÇÃO E DE CARREGAMENTO DAS FAIXAS

Nos casos de lajes retangulares com bordas apoiadas ou engastadas, às quais se dá enfoque principal neste trabalho, na aplicação do processo de Hillerborg surgem faixas com os três casos possíveis de vinculação: faixa biapoiada, faixa biengastada e faixa apoiada-engastada. Já os tipos de carregamento são basicamente dois: carga uniformemente distribuída em toda a faixa e carga distribuída em trechos na região dos apoios, com a região central descarregada. Apresenta-se, a seguir, a distribuição de momentos para cada caso de vinculação e para cada tipo de carregamento.

5.3.1 - Faixa biapoiada

Podem ocorrer carga uniforme em toda a faixa e carga uniforme em trechos equidistantes dos extremos, com igual intensidade em cada trecho, como se indica na figura 5.8. Os momentos máximos nos vãos, para cada tipo de carregamento (figura 5.8a e 5.8b), são dados respectivamente por:

$$m = p\ell^2/8 \quad , \quad (5.3.1)$$

$$m = px^2/2 \quad . \quad (5.3.2)$$

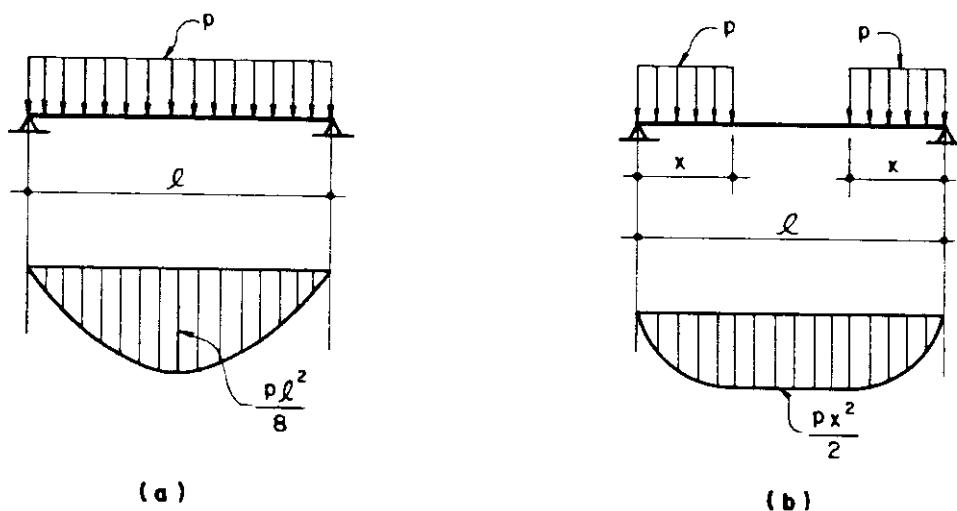


FIG. 5.8 - FAIXA BIAPOIADA

5.3.2 - Faixa apoiada-engastada

O caso geral de carregamento é o indicado na figura 5.9, na qual se supõe que o momento positivo seja constante na região intermediária sem carregamento.

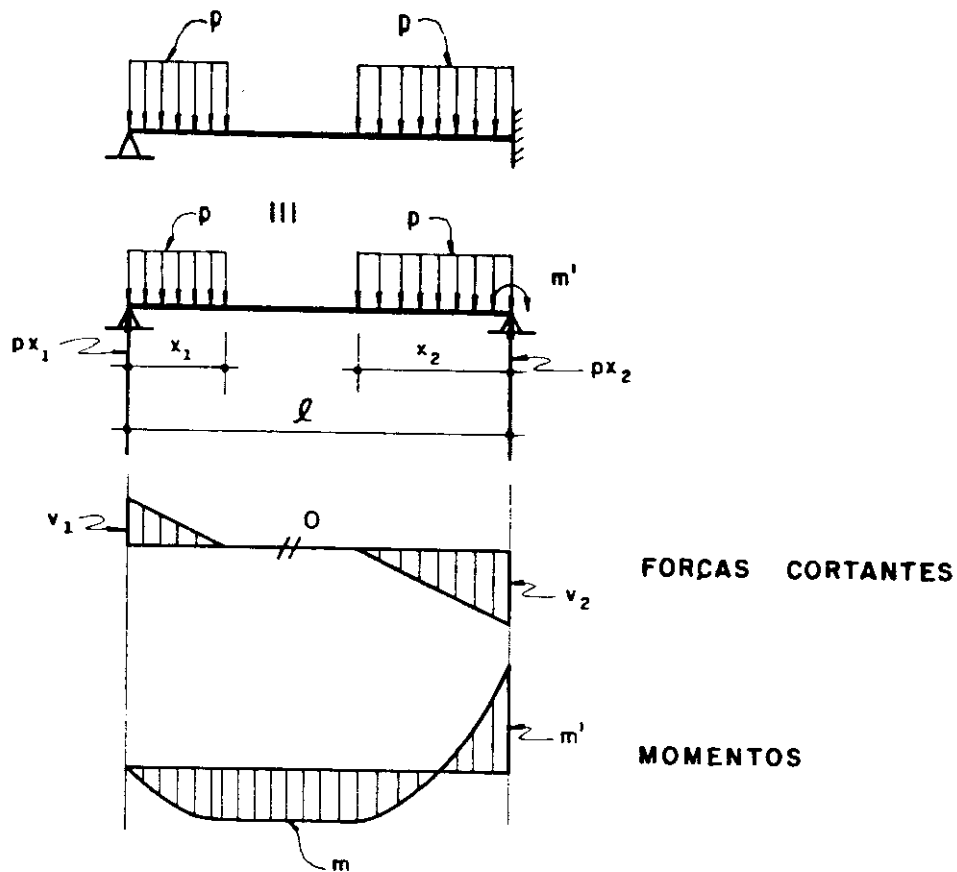


FIG. 5.9 - FAIXA APOIADA-ENGASTADA

Para que o momento seja constante na região intermediária do vão, as forças cortantes devem ser nulas neste trecho; conhecem-se, portanto, as reações de apoio indicadas na figura 5.9. O momento m pode, então, ser dado por uma das equações:

$$m = \frac{px_1^2}{2} \quad , \quad (5.3.3)$$

$$m = \frac{px_2^2}{2} - m' \quad . \quad (5.3.4)$$

Igualando-se os dois últimos membros das duas equações anteriores, tem-se:

$$m' = \frac{p}{2} (x_2^2 - x_1^2) = \left[\left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 - 1 \right] \frac{p x_1^2}{2}$$

Substituindo-se nesta equação o valor dado pela (5.3.3), resulta:

$$m' = \left[\left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 - 1 \right] m \quad (5.3.5)$$

5.3.3 - Faixa biengastada

De maneira análoga à do item anterior, o caso geral de carregamento é o indicado na figura 5.10, na qual também se supõe que o momento positivo seja constante na região intermediária sem carregamento.

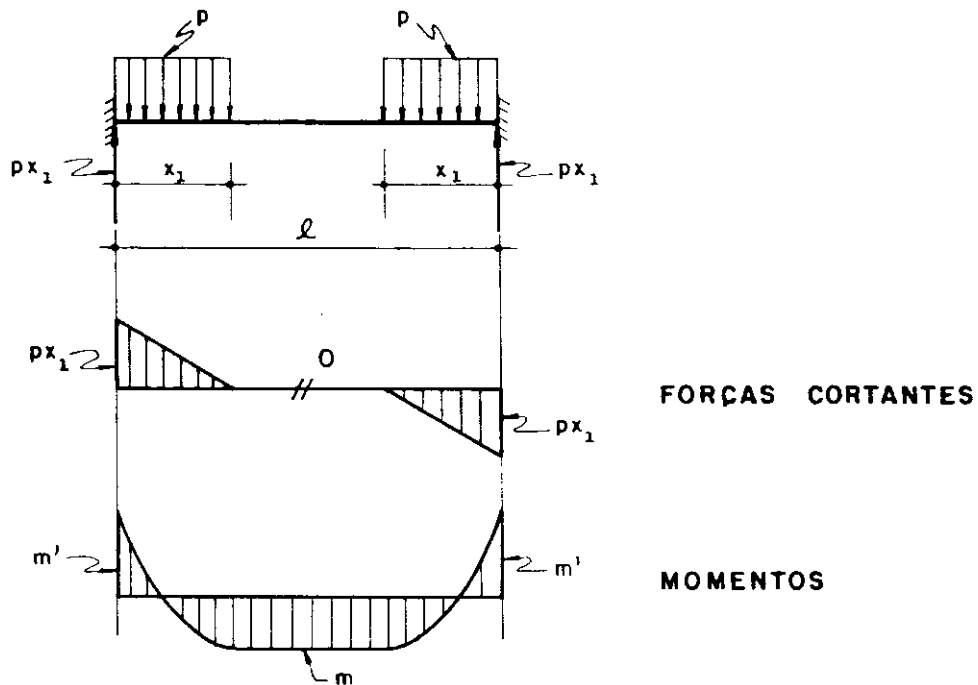


FIG. 5.10 - FAIXA BIENGASTADA

O momento m pode ser dado pela equação:

$$m = \frac{px^2}{2} - m' \quad . \quad (5.3.6)$$

Supondo-se conhecida a razão ϕ entre m' e m , pode-se substituir

$$m' = \phi m \quad (5.3.7)$$

na equação (5.3.6), resultando:

$$m = \frac{px^2}{2(1+\phi)} \quad . \quad (5.3.8)$$

Para carga uniforme basta fazer $x = \ell/2$ na equação (5.3.8), obtendo-se:

$$m = \frac{p \ell^2}{8(1+\phi)} \quad (5.3.9)$$

5.4 - LAJE RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA (CASO 1)

Para as lajes retangulares com carga uniforme valiam as mesmas hipóteses relativas às lajes quadradas, lembrando que uma faixa na direção da menor dimensão é em geral mais resistente, dada sua maior rigidez, em relação à outra dimensão.

Do mesmo modo que para a laje quadrada, uma repartição de carga do tipo indicado na figura 5.11 é preferível em relação à da figura 5.12, tendo em conta a distribuição da armadura. A da figura 5.12, porém, é mais econômica. Cada um desses casos de repartição de carga será analisado a seguir.

5.4.1 - Repartição de carga por regiões

Na figura 5.11 encontra-se uma repartição de carga por regiões, semelhante àquela que se fez para laje quadrada.

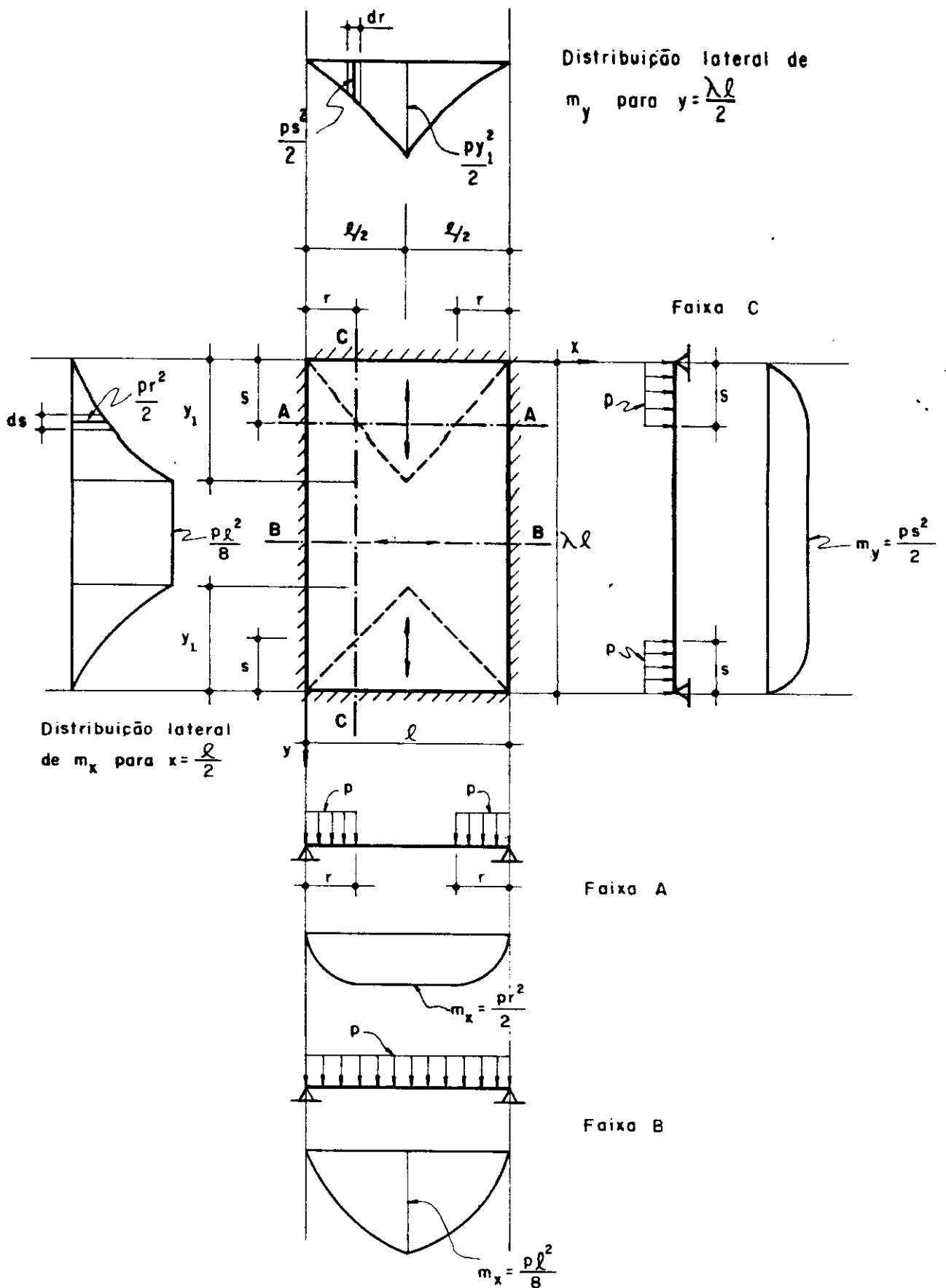


FIG. 5.12 - CASO 1: REPARTIÇÃO DE CARGA AFIM À CONFIGURAÇÃO DAS CHARNEIRAS.

Encontram-se, também, os momentos máximos correspondentes a cada faixa, calculados com base nas equações (5.3.1) e (5.3.2), e as distribuições laterais desses momentos.

Os valores médios dos máximos momentos em cada direção resultam:

$$m_x = \frac{1}{\lambda \ell} \left[\frac{p\ell^2}{64} \cdot \frac{2\ell}{4} + \frac{p\ell^2}{8} \cdot \left(\lambda\ell - \frac{2\ell}{4} \right) \right] = \frac{p\ell^2}{128\lambda} (16\lambda - 7), \quad (5.4.1)$$

$$m_y = \frac{1}{\ell} \left(\frac{p\ell^2}{64} \cdot 2 \frac{\ell}{4} + \frac{p\ell^2}{32} \cdot \frac{\ell}{2} \right) = \frac{3}{128} p\ell^2. \quad (5.4.2)$$

5.4.2 - Repartição afim à configuração de ruína

A figura 5.12 mostra uma repartição de carga que pode ser relacionada à configuração de ruína, obtida pela teoria das charneiras plásticas, do tipo da repartição a 45° vista para laje quadrada.

Procedendo-se como nos exemplos anteriores, obtêm-se os momentos médios:

$$m_x = \frac{1}{\lambda \ell} \left[2 \int_0^{y_1} \frac{pr^2}{2} ds + \frac{p\ell^2}{8} (\lambda\ell - 2y_1) \right], \quad (5.4.3)$$

$$m_y = \frac{1}{\ell} \cdot 2 \int_0^{\ell/2} \frac{ps^2}{2} dr. \quad (5.4.4)$$

Considerando-se na figura 5.12 as relações entre r e s ,

$$\frac{r}{s} = \frac{\ell/2}{y_1}, \quad r = \frac{\ell s}{2y_1}, \quad s = \frac{2r y_1}{\ell},$$

as integrais indicadas nas equações (5.4.3) e (5.4.4), resultam:

$$\int_0^{y_1} p r^2 ds = p \int_0^{y_1} \frac{\lambda^2 s^2}{4y_1^2} ds = \frac{p \lambda^2}{4y_1^2} \int_0^{y_1} s^2 ds = \frac{p \lambda^2 y_1}{12} ,$$

$$\int_0^{\ell/2} p s^2 dr = p \int_0^{\ell/2} \frac{4r^2 y_1^2}{\ell^2} dr = \frac{4p y_1^2}{\ell^2} \int_0^{\ell/2} r^2 dr = \frac{p \lambda y_1^2}{6} .$$

Substituindo-se estes resultados nas equações (5.4.3) e (5.4.4), os valores obtidos para os momentos médios são:

$$m_x = \frac{1}{\lambda \ell} \left[\frac{p \lambda^2 y_1}{12} + \frac{p \lambda^2}{8} (\lambda \ell - 2y_1) \right] = \frac{p \lambda^2}{24} \left(3 - \frac{4y_1}{\lambda \ell} \right) ,$$

(5.4.5)

$$m_y = \frac{p y_1^2}{6} .$$

(5.4.6)

5.4.3 - Comparação com a TCP

Os momentos médios obtidos nos dois casos anteriores, serão agora comparados com os dados pela teoria das charneiras plásticas (TCP), para os seguintes valores de λ : 1; 1,5 e 2. Os resultados encontram-se na tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Resultados da TCP e do processo das faixas

λ	TCP			Figura 5.11		Figura 5.12	
	Y	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y
1	0,500	4,17	4,17	7,03	2,34	4,17	4,17
1,5	0,488	7,08	3,96	8,85	2,34	7,08	3,97
2	0,473	8,56	3,73	9,77	2,34	8,56	3,73

Nota-se que a repartição de carga da figura 5.11 não é boa para pequenos valores de λ , caso em que são mais indicadas repartições do tipo da figura 5.4. Verifica-se, também, que uma repartição como a da figura 5.12 conduz à solução exata, à luz da teoria da plasticidade, pois os resultados obtidos pelo processo das faixas coincidem com os obtidos com a TCP.

5.5 - CASO 2A: CONFIGURAÇÃO EVENTUAL

Como o objetivo ora em pauta é comparar os resultados da TCP com os do processo das faixas de Hillerborg, como nos exemplos anteriores serão consideradas repartições de carga afins às configurações das charneiras. Para o caso de vinculação 2A - uma borda menor engastada -, e configuração eventual das charneiras, tem-se a repartição indicada na figura 5.13, onde também se apresenta a notação adotada.

Os momentos máximos nas faixas são calculados com base nas equações apresentadas no item 5.3.

Na faixa A da direção x, substituindo-se x por r na equação (5.3.2), resulta:

$$m_x = \frac{pr^2}{2} \quad . \quad (5.5.1)$$

Nas faixas B e C da direção y, os momentos máximos nos vãos são dados pela equação (5.3.3), substituindo-se x_1 respectivamente por s_1 e y_1 , resultando:

$$m_y = \frac{ps_1^2}{2} \quad (\text{Faixa B}), \quad (5.5.2)$$

$$m_y = \frac{py_1^2}{2} \quad (\text{Faixa C}) \quad . \quad (5.5.3)$$

Analogamente, os momentos junto aos apoios são dados pela equação (5.3.5), obtendo-se respectivamente:

$$m'_Y = \left[\left(\frac{s_2}{s_1} \right)^2 - 1 \right] m_Y \quad (\text{Faixa B}), \quad (5.5.4)$$

$$m'_Y = \left[\left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 - 1 \right] m_Y \quad (\text{Faixa C}). \quad (5.5.5)$$

a) Valores médios dos máximos momentos

As equações para cálculo dos momentos médios nos vãos são as seguintes:

$$m_x = \frac{1}{\lambda \ell} \left(\int_0^{Y_1} \frac{p r^2}{2} ds_1 + \int_0^{Y_2} \frac{p r^2}{2} ds_2 \right), \quad (5.5.6)$$

$$m_Y = \frac{1}{\ell} \left[2 \int_0^{x_1} \frac{p s_1^2}{2} dr + \frac{p y_1^2}{2} (\ell - 2x_1) \right]. \quad (5.5.7)$$

b) Relações entre as variáveis

Conforme a figura 5.13, valem as seguintes relações:

$$\frac{r}{s_1} = \frac{x_1}{y_1} \quad \leftrightarrow \quad r = \frac{x_1 s_1}{y_1} \quad \leftrightarrow \quad s_1 = \frac{y_1 r}{x_1}, \quad (5.5.8)$$

$$\frac{r}{s_2} = \frac{x_1}{y_2} \quad \leftrightarrow \quad r = \frac{x_1 s_2}{y_2} \quad \leftrightarrow \quad s_2 = \frac{y_2 r}{x_1}. \quad (5.5.9)$$

c) Cálculo das integrais

Com estas relações, as integrais indicadas nas equações (5.5.6) e (5.5.7) resultam:

$$\int_0^{Y_1} \frac{p r^2}{2} ds_1 = \int_0^{Y_1} \frac{p x_1^2 s_1^2}{2 y_1^2} ds_1 = \frac{p x_1^2 y_1}{6}, \quad (5.5.10)$$

$$\int_0^{Y_2} \frac{p r^2}{2} ds_2 = \int_0^{Y_2} \frac{p x_1^2 s_2^2}{2 y_2^2} ds_2 = \frac{p x_1^2 y_2}{6}, \quad (5.5.11)$$

$$\int_0^{x_1} p s_1^2 dr = \int_0^{x_2} p \frac{y_1^2 r^2}{x_1^2} dr = \frac{x_1 y_1^2}{3} . \quad (5.5.12)$$

d) Momentos médios

Substituindo-se estes resultados nas (5.5.6) e (5.5.7), obtêm-se os momentos médios:

$$m_{xm} = \frac{1}{\lambda \ell} \left(\frac{px_1^2 y_1}{6} + \frac{px_1^2 y_2}{6} \right) = \frac{px_1^2}{6} , \quad (5.5.13)$$

$$m_{ym} = \frac{1}{\ell} \left[\frac{px_1 y_1^2}{3} + \frac{py_1^2}{2} (\ell - 2x_1) \right] = \frac{py_1^2}{6} \left(3 - \frac{4x_1}{\ell} \right) . \quad (5.5.14)$$

Com base nas equações (5.5.4) e (5.5.5), o momento médio junto à borda engastada pode ser dado por

$$m'_{ym} = \left[\left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 - 1 \right] m_{ym} , \quad (5.5.15)$$

pois a razão s_2/s_1 é constante e igual a y_2/y_1 .

e) Resultados obtidos pela TCP

Os momentos serão dados através de seus coeficientes adimensionais μ , conforme o item 2.2.2. Fazendo-se por exemplo $p = 100$ e $\ell = 1$, os valores de m e μ se confundem. Adotar-se-á, também, a notação definida no item 4.3.2.

Tomando-se por exemplo $\lambda = 1,25$, para o qual ocorre configuração eventual das charneiras, os resultados obtidos no item 4.8 são:

$$\begin{aligned} \mu_x &= 3,97 , & \mu_y &= 3,41 , & \mu'_y &= 8,00 , \\ x_1 = x_2 &= 0,488 & y_1 &= 0,442 , & \mu_2 &= 0,808 . \end{aligned}$$

f) Resultados obtidos conforme Hillerborg

De maneira análoga, sendo os momentos médios, obtidos com as equações (5.5.13), (5.5.14) e (5.5.15), repre-

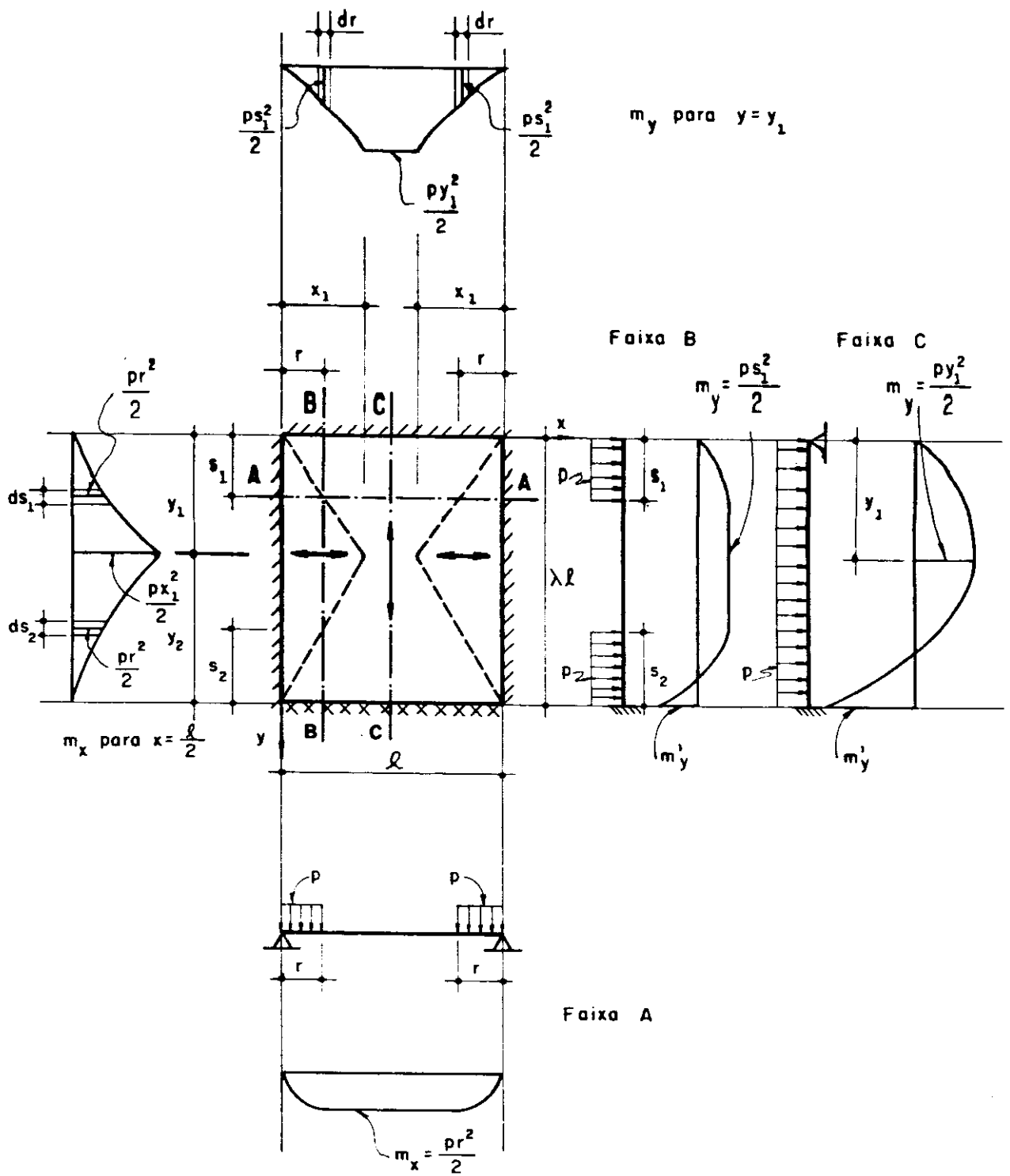


FIG. 5.13 - CASO 2A : CONFIGURAÇÃO EVENTUAL

sentados por coeficientes adimensionais, substituindo-se os valores de x_1 , y_1 e y_2 nestas equações obtêm-se respectivamente

$$\mu_{xm} = 3,97, \quad \mu_{ym} = 3,41, \quad \mu'_{ym} = 7,99,$$

resultados que, a menos de erros de aproximação, coincidem com os da TCP.

5.6 - CASO 2A: CONFIGURAÇÃO COMUM

Para o caso de vinculação 2A e configuração comum tem-se a repartição indicada na figura 5.14. A apresentação deste item seguirá sequência semelhante à do item anterior.

Para as faixas A e B têm-se, pelas equações (5.3.2) e (5.3.1), respectivamente:

$$m_x = \frac{pr^2}{2} \text{ (Faixa A) } , \quad (5.6.1)$$

$$m_x = \frac{pl^2}{8} \text{ (Faixa B) } . \quad (5.6.2)$$

Para a faixa C tem-se, pelas equações (5.3.3) e (5.3.5) respectivamente:

$$m_y = \frac{ps_1^2}{2} , \quad (5.6.3)$$

$$m_y = \left[\left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 - 1 \right] m_y . \quad (5.6.4)$$

a) Equações dos momentos médios

$$m_x = \frac{1}{\lambda l} \left[\int_0^{y_1} \frac{pr^2}{2} ds_1 + \int_0^{y_2} \frac{pr^2}{2} ds_2 + \frac{pl^2}{8} (\lambda l - y_1 - y_2) \right] (5.6.5)$$

$$m_y = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \frac{ps_1^2}{2} dr = \frac{1}{l} \int_0^{l/2} ps_1^2 dr \quad (5.6.6)$$

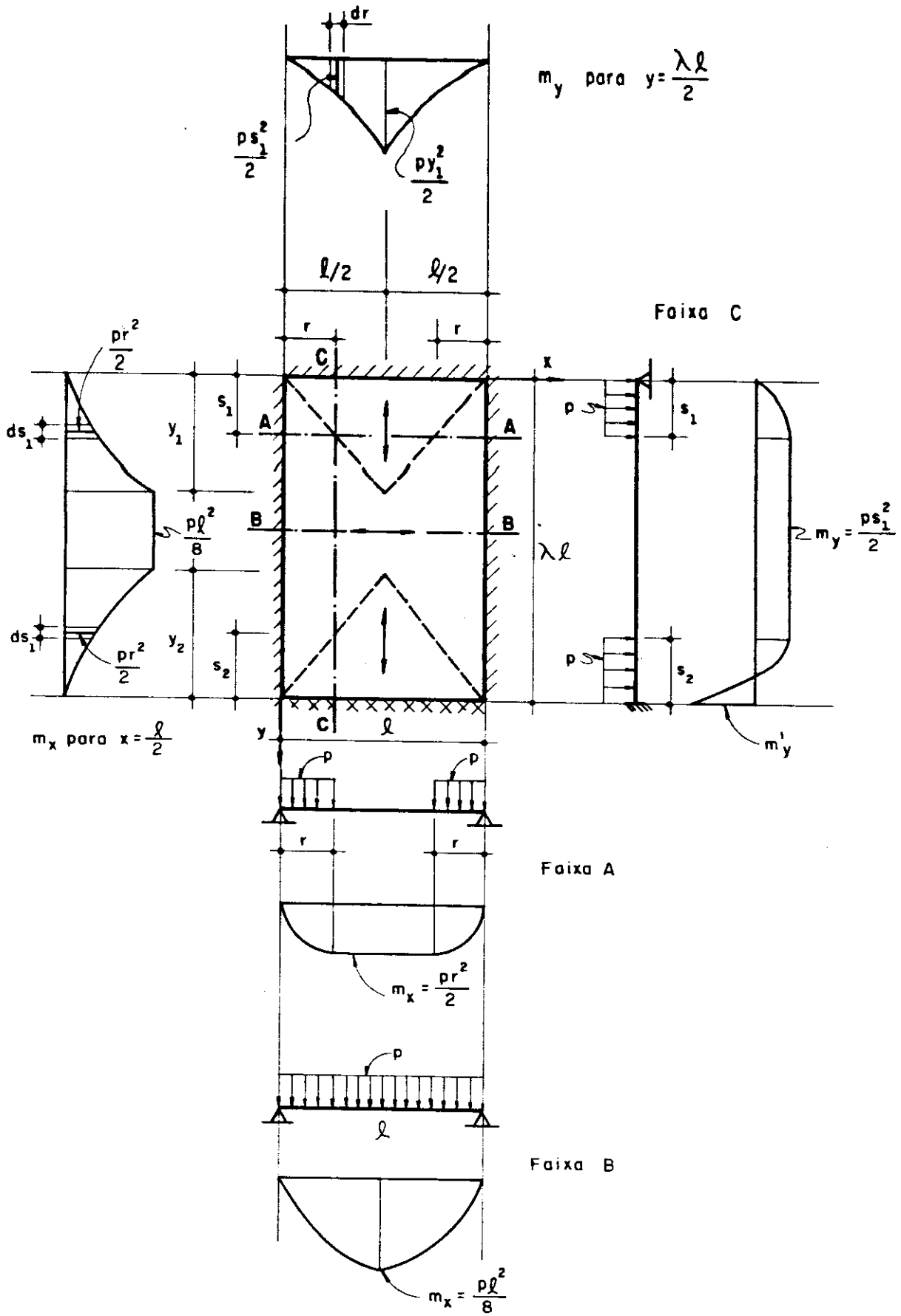


FIG. 5.14 - CASO 2A : CONFIGURAÇÃO COMUM

b) Relações entre as variáveis

$$\frac{r}{s_1} = \frac{\ell/2}{y_1} \quad \leftrightarrow \quad r = \frac{\ell s_1}{2y_1} \quad \leftrightarrow \quad s_1 = \frac{2y_1 r}{\ell} \quad (5.6.7)$$

$$\frac{r}{s_2} = \frac{\ell/2}{y_2} \quad \leftrightarrow \quad r = \frac{\ell s_2}{2y_2} \quad \leftrightarrow \quad s_2 = \frac{2y_2 r}{\ell} \quad (5.6.8)$$

c) Cálculo das integrais

$$\int_0^{y_1} \frac{p r^2}{2} ds_1 = \int_0^{y_1} \frac{p \ell^2 s_1^2}{8 y_1^2} ds_1 = \frac{p \ell^2 y_1}{24} \quad (5.6.9)$$

$$\int_0^{y_2} \frac{p r^2}{2} ds_2 = \int_0^{y_2} \frac{p \ell^2 s_2^2}{8 y_2^2} ds_2 = \frac{p \ell^2 y_2}{24} \quad (5.6.10)$$

$$\int_0^{\ell/2} p s_1^2 dr = \int_0^{\ell/2} \frac{4 p y_1^2 r^2}{\ell^2} dr = \frac{p \ell y_1^2}{6} \quad (5.6.11)$$

d) Momentos médios

$$\begin{aligned} m_{xm} &= \frac{1}{\lambda \ell} \left[\frac{p \ell^2 y_1}{24} + \frac{p \ell^2 y_2}{24} + \frac{p \ell^2}{8} (\lambda \ell - y_1 - y_2) \right] = \\ &= \frac{p \ell^2}{24} \left[3 - \frac{2}{\lambda \ell} (y_1 + y_2) \right] \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

$$m_{ym} = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{p \ell y_1^2}{6} = \frac{p y_1^2}{6} \quad (5.6.13)$$

$$m'_{ym} = \left[\left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 - 1 \right] m_{ym} \quad (5.6.14)$$

e) TCP: $\lambda = 1,5$

$$\mu_x = 5,23 \quad \mu_y = 3,41 \quad \mu'_y = 8,83$$

$$x_1 = x_2 = 0,500 \quad y_1 = 0,452 \quad y_2 = 0,857$$

g) Hillerborg

$$\mu_{xm} = 5,23$$

$$\mu_{ym} = 3,41$$

$$\mu'_{ym} = 8,84$$

5.7 - CASO 2B: UMA BORDA MAIOR ENGASTADA

Ver figura 5.15.

a) Equações dos momentos médios

$$m_x = \frac{1}{\lambda \ell} \left[2 \int_0^{y_1} \frac{p r_1^2}{2} ds + \frac{p x_1^2}{2} (\lambda \ell - 2y_1) \right] \quad (5.7.1)$$

$$m_y = \frac{1}{\ell} \left(\int_0^{x_1} \frac{p s^2}{2} dr_1 + \int_0^{x_2} \frac{p s^2}{2} dr_2 \right) \quad (5.7.2)$$

b) Relações entre as variáveis

$$\frac{r_1}{s} = \frac{x_1}{y_1} \quad \leftrightarrow \quad r_1 = \frac{x_1 s}{y_1} \quad \leftrightarrow \quad s = \frac{y_1 r_1}{x_1} \quad (5.7.3)$$

$$\frac{r_2}{s} = \frac{x_2}{y_2} \quad \leftrightarrow \quad r_2 = \frac{x_2 s}{y_2} \quad \leftrightarrow \quad s = \frac{y_2 r_2}{x_2} \quad (5.7.4)$$

c) Cálculo das integrais

$$\int_0^{y_1} p r_1^2 ds = \int_0^{y_1} \frac{p x_1^2 s^2}{y_1^2} ds = \frac{p x_1^2 y_1}{3} \quad (5.7.5)$$

$$\int_0^{x_1} \frac{p s^2}{2} dr_1 = \int_0^{x_1} \frac{p y_1^2 r_1^2}{2 x_1^2} dr_1 = \frac{p x_1 y_1^2}{6} \quad (5.7.6)$$

$$\int_0^{x_2} \frac{p s^2}{2} dr_2 = \int_0^{x_2} \frac{p y_2^2 r_2^2}{2 x_2^2} dr_2 = \frac{p x_2 y_2^2}{6} \quad (5.7.7)$$

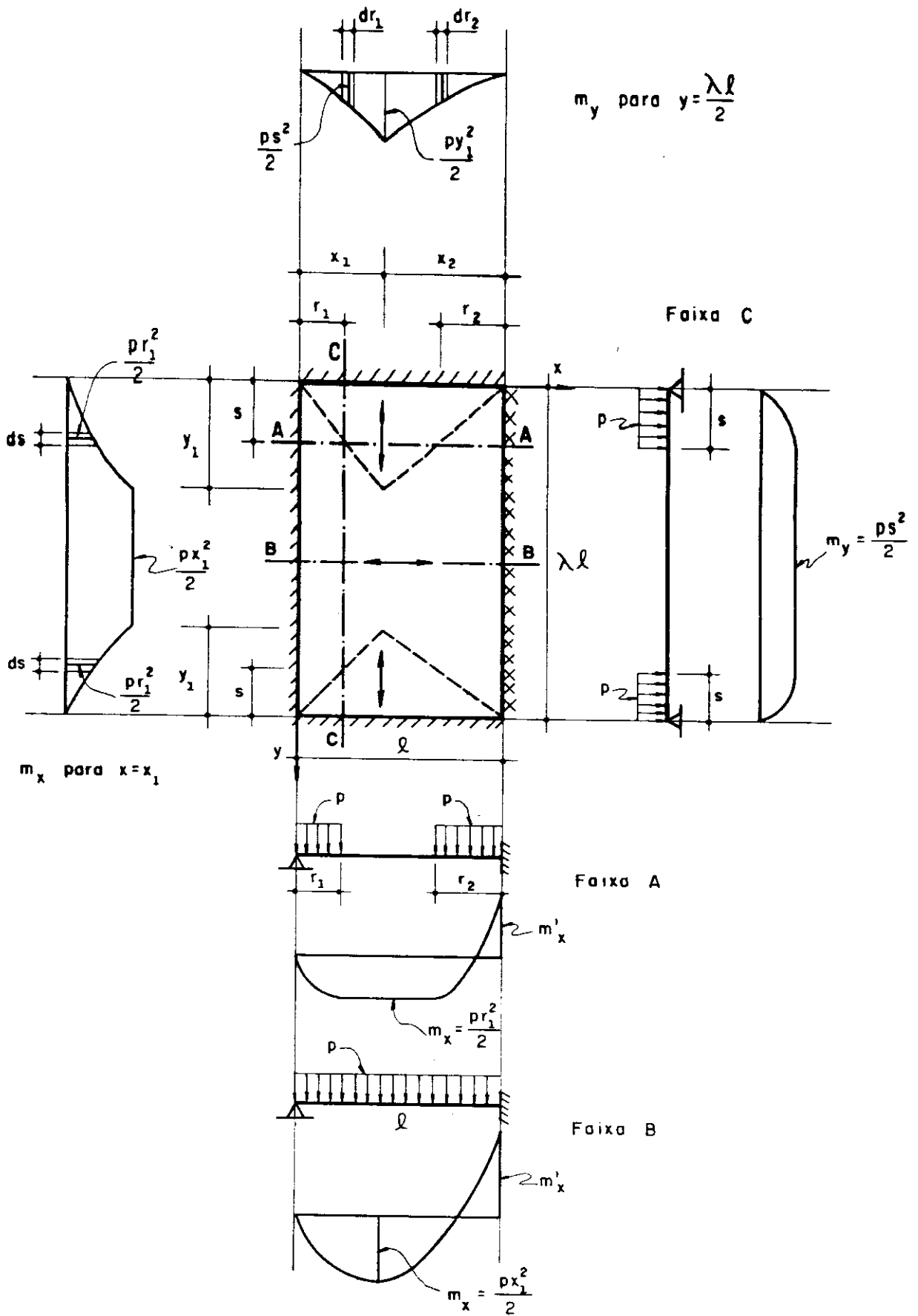


FIG. 5.15 - CASO 2B

d) Momentos médios

$$m_{xm} = \frac{1}{\lambda l} \left[\frac{p x_1^2 y_1}{3} + \frac{p x_1^2}{2} (\lambda l - 2y_1) \right] = \frac{p x_1^2}{6} \left(3 - \frac{4y_1}{\lambda l} \right) \quad (5.7.8)$$

$$m'_{xm} = \left[\left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 - 1 \right] m_{xm} \quad (5.7.9)$$

$$m_{ym} = \frac{1}{l} \left(\frac{p x_1 y_1^2}{6} + \frac{p x_2 y_1^2}{6} \right) = \frac{p y_1^2}{6} \quad (5.7.10)$$

e) TCP: $\lambda = 1,5$

$$\begin{array}{lll} \mu_x = 4,43 & \mu'_x = 9,08 & \mu_y = 2,32 \\ x_1 = 0,364 & x_2 = 0,636 & y_1 = y_2 = 0,373 \end{array}$$

f) Hillerborg

$$\mu_{xm} = 4,43 \quad \mu'_{xm} = 9,09 \quad \mu_{ym} = 2,32$$

5.8 - CASO 3: DUAS BORDAS ADJACENTES ENGASTADAS

Ver figura 5.16

a) Equações dos momentos médios

$$m_x = \frac{1}{\lambda l} \left[\int_0^{y_1} \frac{p r_1^2}{2} ds_1 + \int_0^{y_2} \frac{p r_1^2}{2} ds_2 + \frac{p x_1^2}{2} (\lambda l - y_1 - y_2) \right] \quad (5.8.1)$$

$$m_y = \frac{1}{l} \left(\int_0^{x_1} \frac{p s_1^2}{2} dr_1 + \int_0^{x_2} \frac{p s_1^2}{2} dr_2 \right) \quad (5.8.2)$$

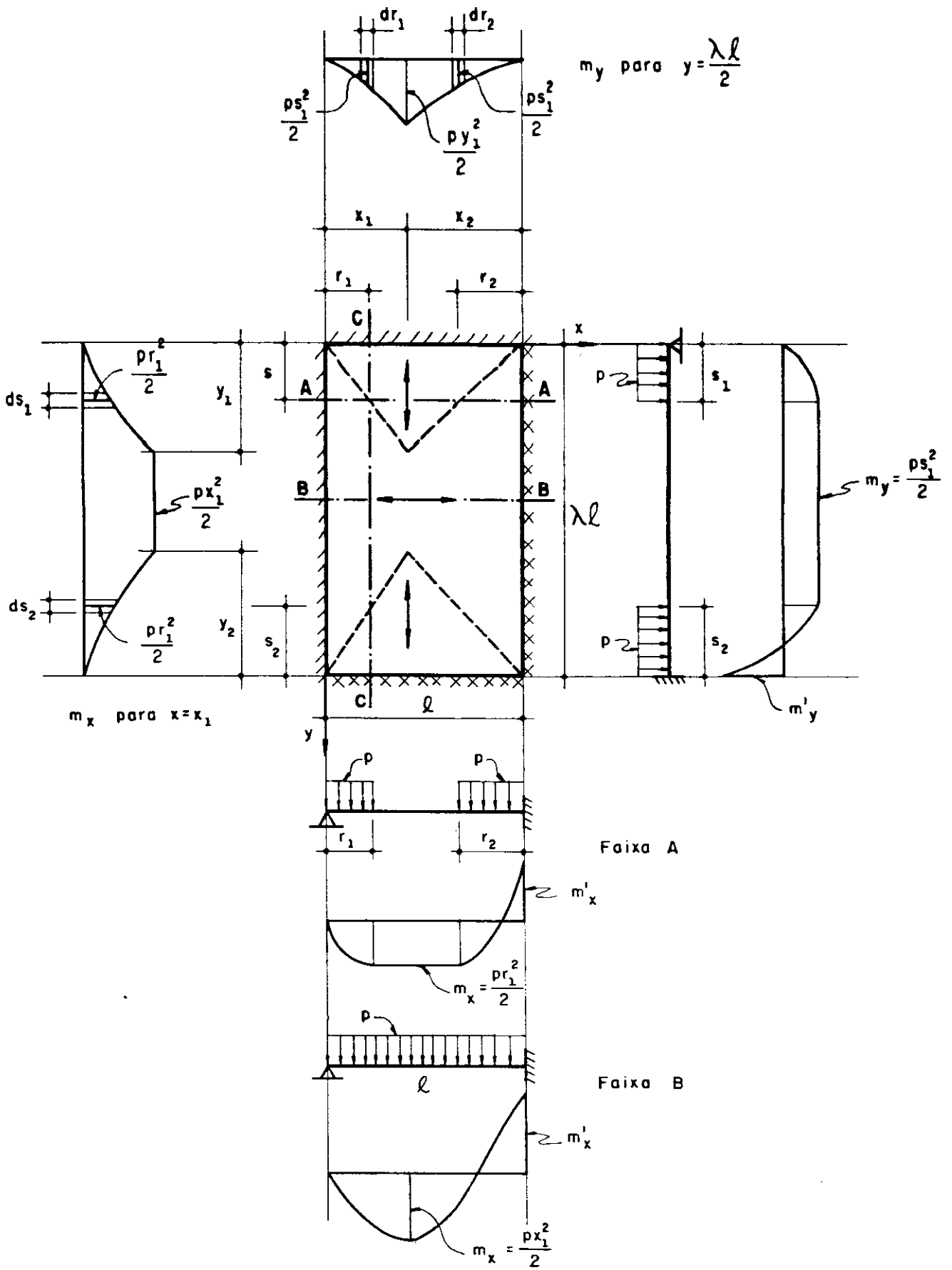


FIG. 5.16 - CASO 3

b) Relações entre as variáveis

$$\frac{r_1}{s_1} = \frac{x_1}{y_1} \quad \leftrightarrow \quad r_1 = \frac{x_1 s_1}{y_1} \quad \leftrightarrow \quad s_1 = \frac{y_1 r_1}{x_1} \quad (5.8.3)$$

$$\frac{r_2}{s_1} = \frac{x_2}{y_1} \quad \leftrightarrow \quad r_2 = \frac{x_2 s_1}{y_1} \quad \leftrightarrow \quad s_1 = \frac{y_1 r_2}{x_2} \quad (5.8.4)$$

$$\frac{r_1}{s_2} = \frac{x_1}{y_2} \quad \leftrightarrow \quad r_1 = \frac{x_1 s_2}{y_2} \quad \leftrightarrow \quad s_2 = \frac{y_2 r_1}{x_1} \quad (5.8.5)$$

c) Cálculo das integrais

$$\int_0^{y_1} \frac{p r_1^2}{2} ds_1 = \int_0^{y_1} \frac{p x_1^2 s_1^2}{2 y_1^2} ds_1 = \frac{p x_1^2 y_1}{6} \quad (5.8.6)$$

$$\int_0^{y_2} \frac{p r_1^2}{2} ds_2 = \int_0^{y_2} \frac{p x_1^2 s_2^2}{2 y_2^2} ds_2 = \frac{p x_1^2 y_2}{6} \quad (5.8.7)$$

$$\int_0^{x_1} \frac{p s_1^2}{2} dr_1 = \int_0^{x_1} \frac{p y_1^2 r_1^2}{2 x_1^2} dr_1 = \frac{p x_1 y_1^2}{6} \quad (5.8.8)$$

$$\int_0^{x_2} \frac{p s_1^2}{2} dr_2 = \int_0^{x_2} \frac{p y_1^2 r_2^2}{2 x_2^2} dr_2 = \frac{p x_2 y_1^2}{6} \quad (5.8.9)$$

d) Momentos médios

$$\begin{aligned} m_{xm} &= \frac{1}{\lambda \ell} \left[\frac{p x_1^2 y_1}{6} + \frac{p x_1^2 y_2}{6} + \frac{p x_1^2}{2} (\lambda \ell - y_1 - y_2) \right] = \\ &= \frac{p x_1^2}{6} \left[3 - \frac{2}{\lambda \ell} (y_1 + y_2) \right] \end{aligned} \quad (5.8.10)$$

$$m'_{xm} = \left[\left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 - 1 \right] m_{xm} \quad (5.8.11)$$

$$m_{ym} = \frac{1}{\ell} \left(\frac{p x_1 y_1^2}{6} + \frac{p x_2 y_1^2}{6} \right) = \frac{p y_1^2}{6} \quad (5.8.12)$$

$$m'_{ym} = \left[\left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 - 1 \right] m_{ym} \quad (5.8.13)$$

e) TCP: $\lambda = 1,5$

$$\mu_x = 3,52 \quad \mu'_x = 7,53 \quad \mu_y = 2,01 \quad \mu'_y = 5,82$$

$$x_1 = 0,361 \quad x_2 = 0,639 \quad y_1 = 0,347 \quad y_2 = 0,685$$

f) Hillerborg

$$\mu_{xm} = 3,53 \quad \mu'_{xm} = 7,52 \quad \mu_{ym} = 2,01 \quad \mu'_{ym} = 5,81$$

5.9 - CASO 4A: CONFIGURAÇÃO EVENTUAL

Para o caso da figura 5.17, os momentos máximos nas faixas A, B e C são dados respectivamente pelas equações (5.3.2), (5.3.8) e (5.3.9), resultando:

$$m_x = \frac{pr^2}{2} \quad (\text{Faixa A}) \quad , \quad (5.9.1)$$

$$m_y = \frac{ps^2}{2(1+\phi)} \quad (\text{Faixa B}), \quad (5.9.2)$$

$$m_y = \frac{p\lambda^2\ell^2}{8(1+\phi)} \quad (\text{Faixa C}). \quad (5.9.3)$$

O momento nos apoios em cada faixa na direção é dado por $m'_y = \phi m_y$.

a) Equação dos momentos médios

$$m_x = \frac{2}{\lambda\ell} \int_0^{\frac{\lambda\ell}{2}} \frac{pr^2}{2} ds = \frac{1}{\lambda\ell} \int_0^{\frac{\lambda\ell}{2}} pr^2 ds \quad (5.9.4)$$

$$m_y = \frac{1}{\ell} \left[2 \int_0^{x_1} \frac{ps^2}{2(1+\phi)} dr + \frac{p\lambda^2\ell^2}{8(1+\phi)} (\ell - 2x_1) \right] \quad (5.9.5)$$

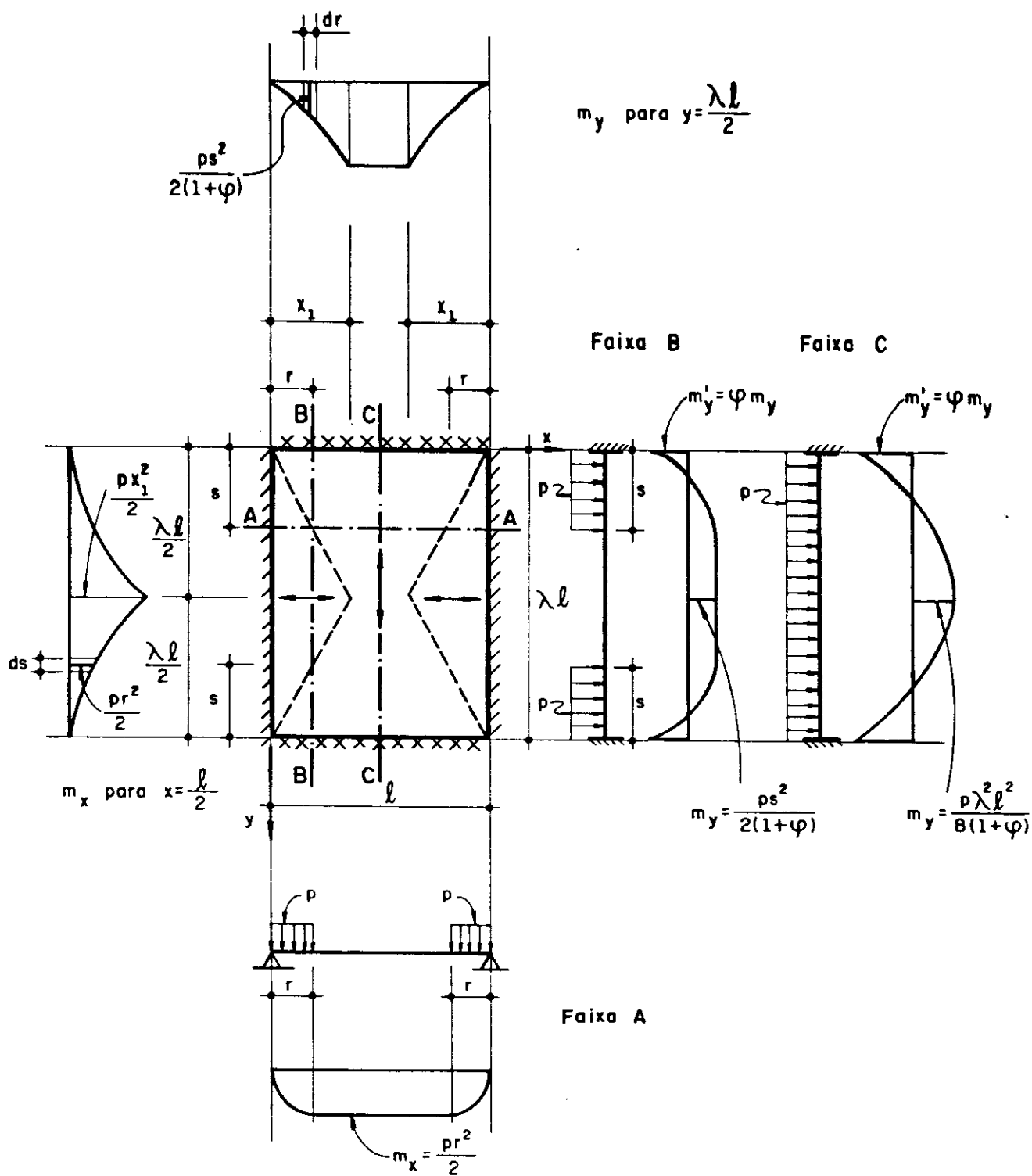


FIG. 5.17 - CASO 4A : CONFIGURAÇÃO EVENTUAL

b) Relações entre as variáveis

$$\frac{r_1}{s} = \frac{x_1}{\lambda \ell / 2} \quad \leftrightarrow \quad r = \frac{2x_1 s}{\lambda \ell} \quad \leftrightarrow \quad s = \frac{\lambda \ell r}{2x_1} \quad (5.9.6)$$

c) Cálculo das integrais

$$\int_0^{\lambda \ell} pr^2 ds = \int_0^{\lambda \ell} p \frac{4x_1^2 s^2}{\lambda^2 \ell^2} ds = \frac{px_1^2}{6} \lambda \ell \quad (5.9.7)$$

$$\int_0^{x_1} \frac{ps^2}{(1+\phi)} dr = \int_0^{x_1} \frac{p\lambda^2 \ell^2 r^2}{4x_1^2 (1+\phi)} dr = \frac{p\lambda^2 \ell^2 x_1}{12(1+\phi)} \quad (5.9.8)$$

d) Momentos médios

$$m_{xm} = \frac{1}{\lambda \ell} \cdot \frac{px_1^2}{6} \lambda \ell = \frac{px_1^2}{6} \quad (5.9.9)$$

$$m_{ym} = \frac{1}{\ell} \left[\frac{p\lambda^2 \ell^2 x_1}{12(1+\phi)} + \frac{p\lambda^2 \ell^2}{8(1+\phi)} (\ell - 2x_1) \right] = \frac{p\lambda^2 \ell^2}{24(1+\phi)} \left(3 - \frac{4x_1}{\ell} \right) \quad (5.9.10)$$

$$m'_{ym} = \phi m_{ym} \quad (5.9.11)$$

e) TCP: $\lambda = 1,5$

$$\mu_x = 3,83 \quad \mu_y = 2,85 \quad \mu'_y = 7,31$$

$$\phi_1 = 2,565 \quad x_1 = x_2 = 0,479 \quad y_1 = y_2 = 0,750$$

f) Hillerborg

$$\mu_{xm} = 3,82 \quad \mu_{ym} = 2,85 \quad \mu'_{ym} = 7,31$$

5.10 - CASO 4A: CONFIGURAÇÃO COMUM

Ver figura 5.18

a) Equações dos momentos médios

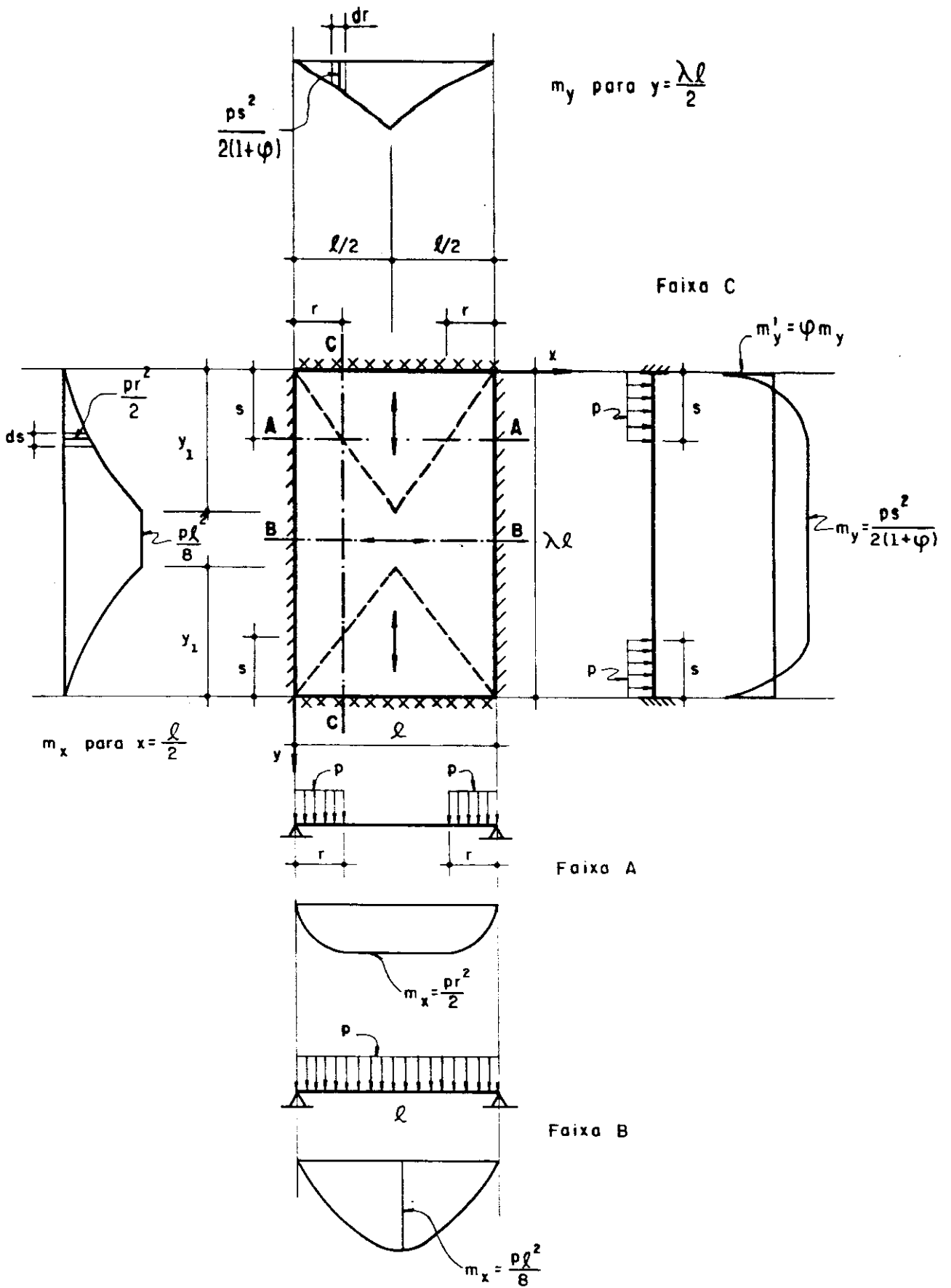


FIG. 5.18 - CASO 4A : CONFIGURAÇÃO COMUM

$$m_x = \frac{1}{\lambda l} \left[2 \int_0^{y_1} \frac{p r^2}{2} ds + \frac{p l^2}{8} (\lambda l - 2y_1) \right] \quad (5.10.1)$$

$$m_y = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \frac{p s^2}{2(1+\phi)} dr \quad (5.10.2)$$

b) Relações entre as variáveis

$$\frac{r}{s} = \frac{l/2}{y_1} \leftrightarrow r = \frac{l s}{2y_1} \leftrightarrow s = \frac{2y_1 r}{l} \quad (5.10.3)$$

c) Cálculo das integrais

$$\int_0^{y_1} p r^2 ds = \int_0^{y_1} \frac{p l^2 s^2}{4y_1^2} ds = \frac{p l^2 y_1}{12} \quad (5.10.4)$$

$$\int_0^{l/2} \frac{p s^2}{(1+\phi)} dr = \int_0^{l/2} \frac{4p y_1^2 r^2}{(1+\phi) l^2} dr = \frac{p l y_1^2}{6(1+\phi)} \quad (5.10.5)$$

d) Momentos médios

$$m_{xm} = \frac{1}{\lambda l} \left[\frac{p l^2 y_1}{12} + \frac{p l^2}{8} (\lambda l - 2y_1) \right] = \frac{p l^2}{24} \left(3 - \frac{4y_1}{\lambda l} \right) \quad (5.10.6)$$

$$m_{ym} = \frac{1}{l} \cdot \frac{p l y_1^2}{6(1+\phi)} = \frac{p y_1^2}{6(1+\phi)} \quad (5.10.7)$$

$$m'_{ym} = \phi m_{ym} \quad (5.10.8)$$

e) TCP: $\lambda = 2$

$$\mu_x = 5,76 \quad \mu_y = 2,79 \quad \mu'_y = 8,11$$

$$\phi = 2,91 \quad x_1 = x_2 = 0,500 \quad y_1 = y_2 = 0,809$$

f) Hillerborg

$$\mu_{xm} = 5,76 \quad \mu_{ym} = 2,79 \quad \mu'_{ym} = 8,12$$

5.11 - CASO 4B: DUAS BORDAS MAIORES ENGASTADAS

Ver figura 5.19.

a) Equações dos momentos médios

$$m_x = \frac{1}{\lambda \ell} \left[2 \int_0^{y_1} \frac{p r^2}{2(1+\phi)} ds + \frac{p \ell^2}{8(1+\phi)} (\lambda \ell - 2y_1) \right] \quad (5.11.1)$$

$$m_y = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell/2} \frac{p s^2}{2} dr = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell/2} p s^2 dr \quad (5.11.2)$$

b) Relações entre as variáveis

$$\frac{r}{s} = \frac{\ell/2}{y_1} \leftrightarrow r = \frac{\ell s}{2y_1} \leftrightarrow s = \frac{2y_1 r}{\ell} \quad (5.11.3)$$

c) Cálculo das integrais

$$\int_0^{y_1} \frac{p r^2}{1+\phi} ds = \int_0^{y_1} \frac{p \ell^2 s^2}{4(1+\phi) y_1^2} ds = \frac{p \ell^2 y_1}{12(1+\phi)} \quad (5.11.4)$$

$$\int_0^{\ell/2} p s^2 dr = \int_0^{\ell/2} \frac{4p y_1^2 r^2}{\ell^2} dr = \frac{p \ell y_1^2}{6} \quad (5.11.5)$$

d) Momentos médios

$$m_{xm} = \frac{1}{\lambda \ell} \left[\frac{p \ell^2 y_1}{12(1+\phi)} + \frac{p \ell^2}{8(1+\phi)} (\lambda \ell - 2y_1) \right] = \frac{p \ell^2}{24(1+\phi)} \left(3 - \frac{4y_1}{\lambda \ell} \right) \quad (5.11.6)$$

$$m'_{xm} = \phi m_{xm} \quad (5.11.7)$$

$$m_{ym} = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{p \ell y_1^2}{6} = \frac{p y_1^2}{6} \quad (5.11.8)$$

e) TCP: $\lambda = 1,5$

$$\mu_x = 3,05$$

$$\mu'_x = 6,08$$

$$\mu_y = 1,53$$

$$\phi = 1,99$$

$$x_1 = x_2 = 0,500$$

$$y_1 = y_2 = 0,303$$

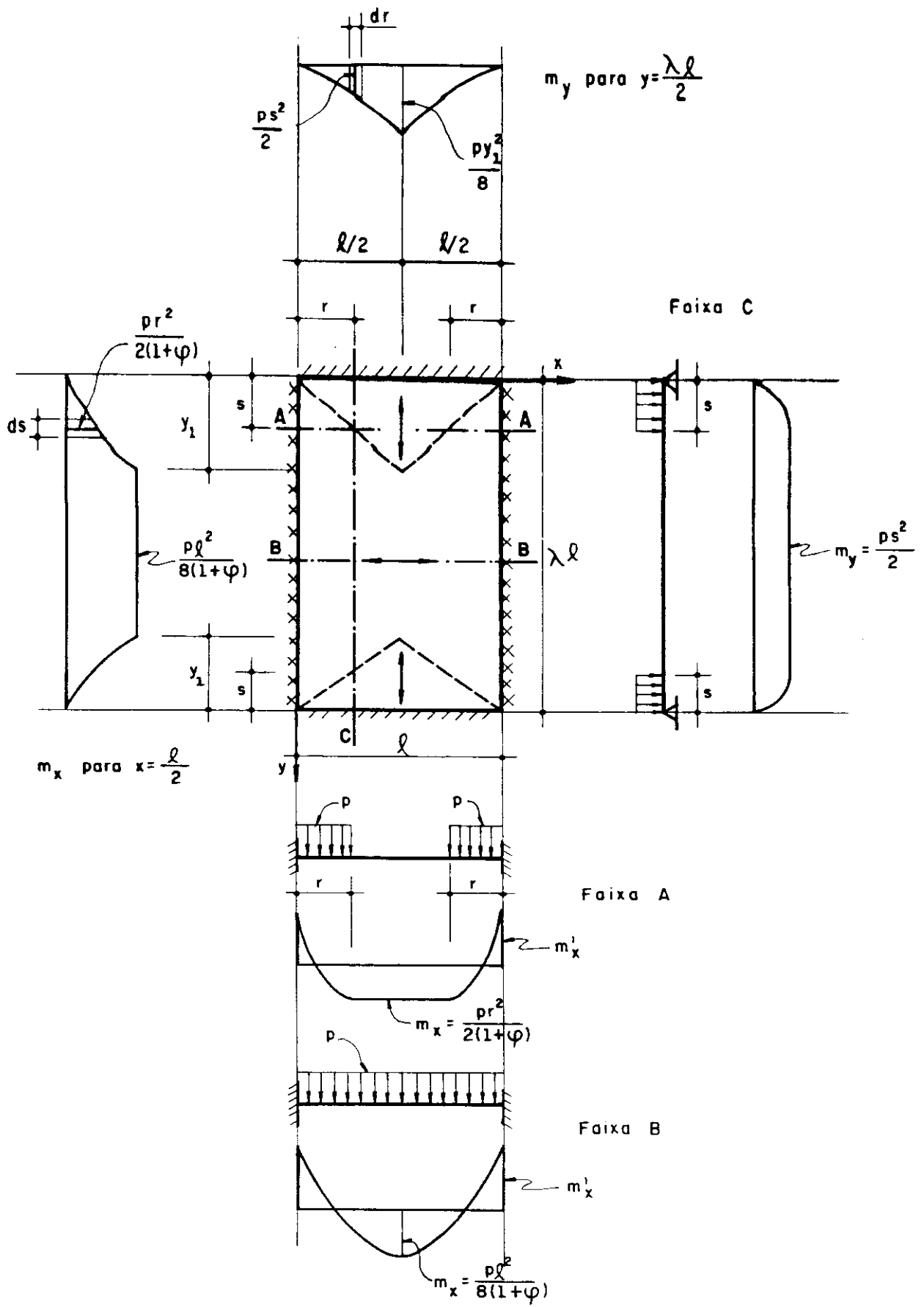


FIG. 5.19 - CASO 4B

f) Hillerborg

$$\mu_{xm} = 3,05 \quad \mu'_{xm} = 6,08 \quad \mu_{ym} = 1,53$$

5.12 - CASO 5A: CONFIGURAÇÃO EVENTUAL

Ver figura 5.20.

a) Equações dos momentos médios

$$m_x = \frac{2}{\lambda \ell} \int_0^{\lambda \ell / 2} \frac{p r_1^2}{2} ds = \frac{1}{\lambda \ell} \int_0^{\lambda \ell / 2} p r_1^2 ds \quad (5.12.1)$$

$$m_y = \frac{1}{\ell} \left[\int_0^{x_1} \frac{p s^2}{2(1+\phi)} dr_1 + \int_0^{x_2} \frac{p s^2}{2(1+\phi)} dr_2 + \frac{p \lambda^2 \ell^2}{8(1+\phi)} (\ell - x_1 - x_2) \right] \quad (5.12.2)$$

b) Relações entre as variáveis

$$\frac{r_1}{s} = \frac{x_1}{\lambda \ell / 2} \leftrightarrow r_1 = \frac{2x_1 s}{\lambda \ell} \leftrightarrow s = \frac{\lambda \ell r_1}{2x_1} \quad (5.12.3)$$

$$\frac{r_2}{s} = \frac{x_2}{\lambda \ell / 2} \leftrightarrow r_2 = \frac{2x_2 s}{\lambda \ell} \leftrightarrow s = \frac{\lambda \ell r_2}{2x_2} \quad (5.12.4)$$

c) Cálculo das integrais

$$\int_0^{\lambda \ell / 2} p r_1^2 ds = \int_0^{\lambda \ell / 2} \frac{4p x_1^2 s^2}{\lambda^2 \ell^2} ds = \frac{p \lambda \ell x_1^2}{6} \quad (5.12.5)$$

$$\int_0^{x_1} \frac{p s^2}{2(1+\phi)} dr_1 = \int_0^{x_1} \frac{p \lambda^2 \ell^2 r_1^2}{8(1+\phi) x_1^2} dr_1 = \frac{p \lambda^2 \ell^2 x_1}{24(1+\phi)} \quad (5.12.6)$$

$$\int_0^{x_2} \frac{p s^2}{2(1+\phi)} dr_2 = \int_0^{x_2} \frac{p \lambda^2 \ell^2 r_2^2}{8(1+\phi) x_2^2} dr_2 = \frac{p \lambda^2 \ell^2 x_2}{24(1+\phi)} \quad (5.12.7)$$

d) Momentos médios

$$m_{xm} = \frac{1}{\lambda \ell} \cdot \frac{p \lambda \ell x_1^2}{6} = \frac{p x_1^2}{6} \quad (5.12.8)$$

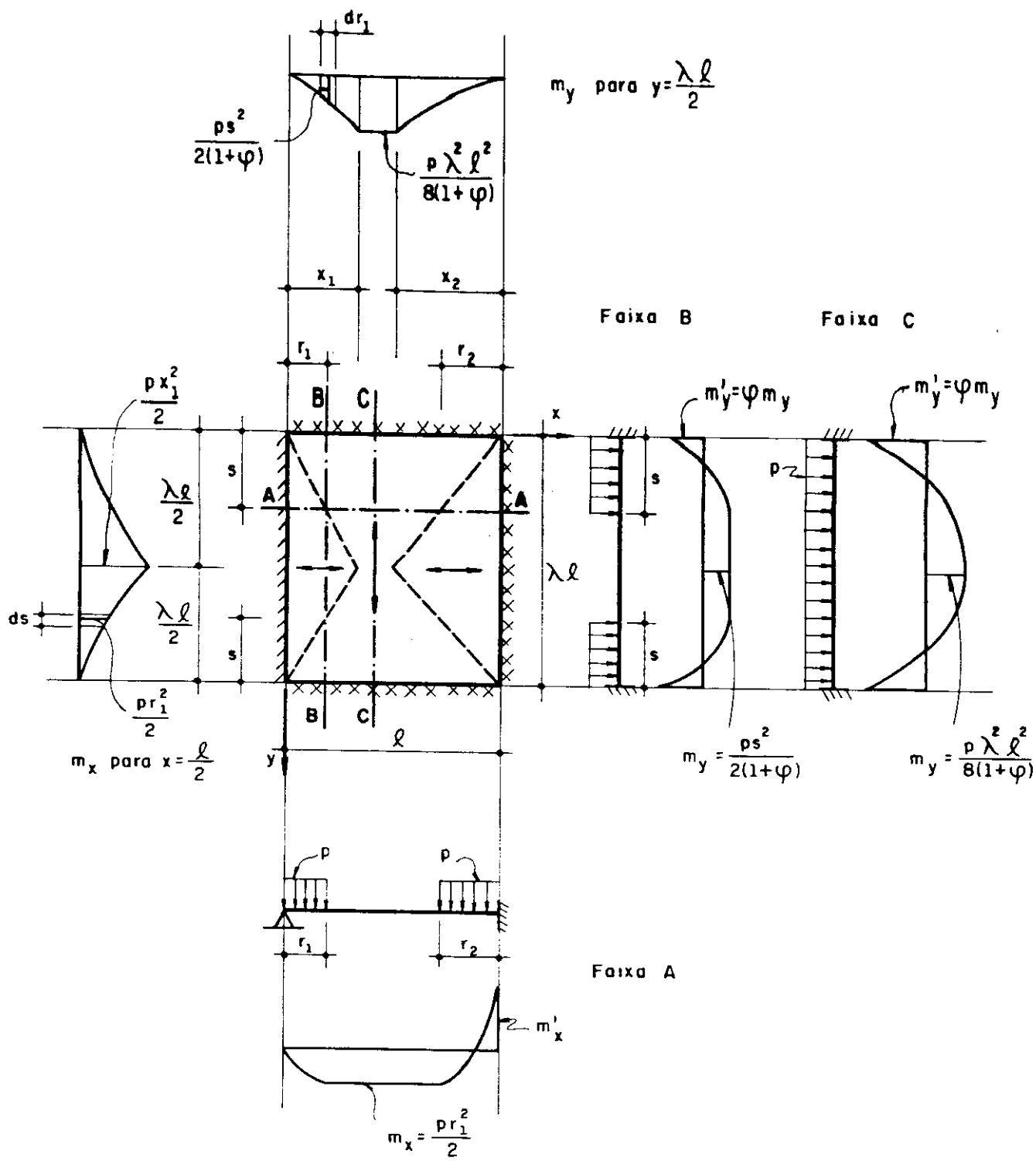


FIG. 5.20 - CASO 5A: CONFIGURAÇÃO EVENTUAL

$$m'_{xm} = \left[\left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 - 1 \right] m_{xm} \quad (5.12.9)$$

$$m'_{ym} = \frac{1}{\ell} \left[\frac{p\lambda^2 \ell^2 x_1}{24(1+\phi)} + \frac{p\lambda^2 \ell^2 x_2}{24(1+\phi)} + \frac{p\lambda^2 \ell^2}{8(1+\phi)} (\ell - x_1 - x_2) \right] =$$

$$= \frac{p\lambda^2 \ell^2}{24(1+\phi)} \left(3 - 2 \frac{x_1 + x_2}{\ell} \right) \quad (5.12.10)$$

$$m'_{ym} = \phi m_{ym} \quad (5.12.11)$$

e) TCP: $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} \mu_x &= 1,42 & \mu'_x &= 3,45 \\ \mu_y &= 1,66 & \mu'_y &= 3,91 & \phi_3 = \phi_4 &= 2,36 \\ x_1 &= 0,292 & x_2 &= 0,541 & y_1 = y_2 &= 0,500 \end{aligned}$$

f) Hillerborg

$$\begin{aligned} \mu_{xm} &= 1,42 & \mu'_{xm} &= 3,46 \\ \mu_{ym} &= 1,65 & \mu'_{ym} &= 3,90 \end{aligned}$$

5.13 - CASO 5A: CONFIGURAÇÃO COMUM

Ver figura 5.21.

a) Equações dos momentos médios

$$m_x = \frac{1}{\lambda \ell} \left[2 \int_0^{y_1} \frac{p r_1^2}{2} ds + \frac{p x_1^2}{2} (\lambda \ell - 2y_1) \right] \quad (5.13.1)$$

$$m_y = \frac{1}{\ell} \left[\int_0^{x_1} \frac{p s^2}{2(1+\phi)} dr_1 + \int_0^{x_2} \frac{p s^2}{2(1+\phi)} dr_2 \right] \quad (5.13.2)$$

b) Relações entre as variáveis

$$\frac{r_1}{s} = \frac{x_1}{y_1} \leftrightarrow r_1 = \frac{x_1 s}{y_1} \leftrightarrow s = \frac{y_1 r_1}{x_1} \quad (5.13.3)$$

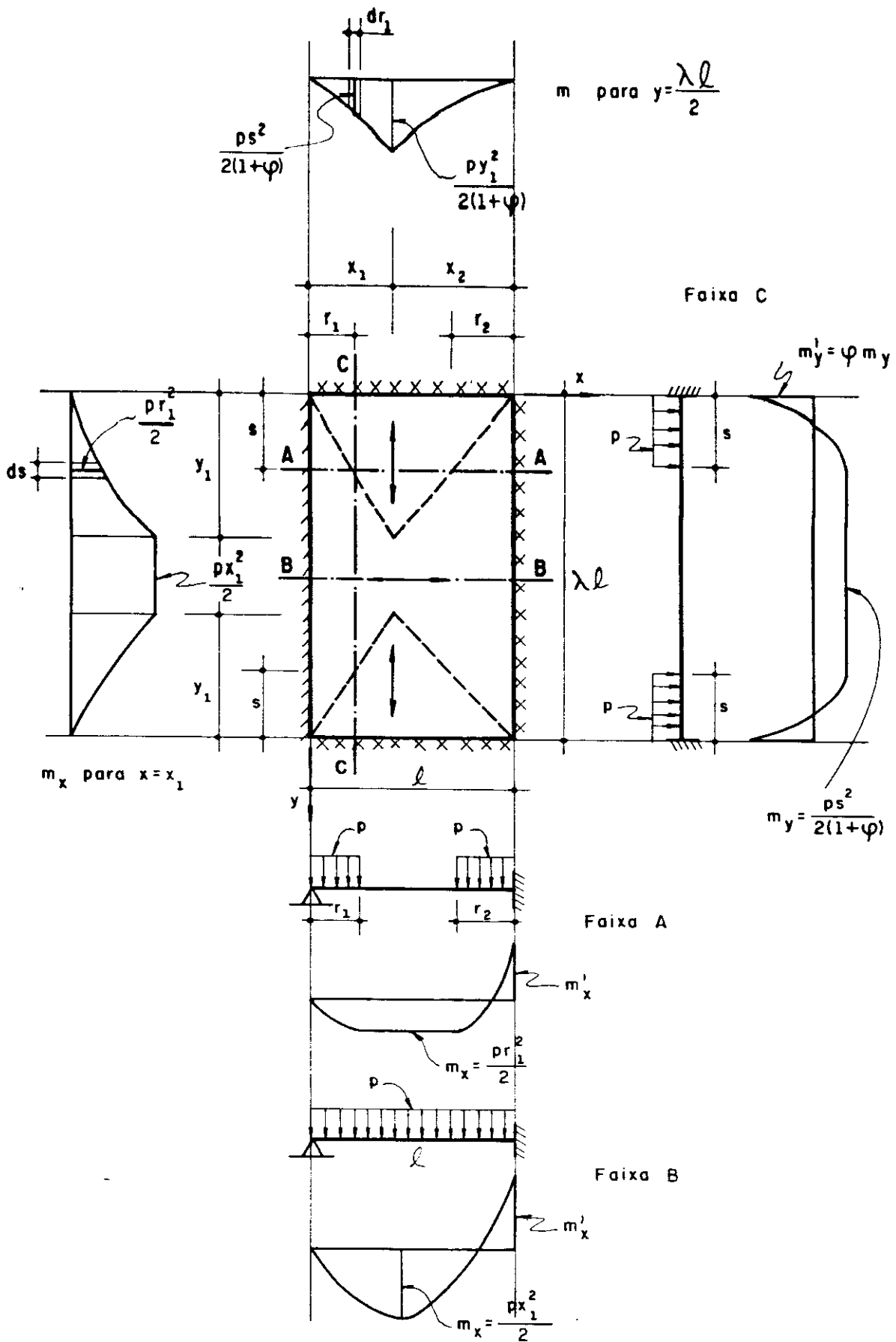


FIG. 5.21 - CASO 5A : CONFIGURAÇÃO COMUM

$$\frac{r_2}{s} = \frac{x_2}{Y_1} \quad \leftrightarrow \quad r_2 = \frac{x_2 s}{Y_1} \quad \leftrightarrow \quad s = \frac{Y_1 r_2}{x_2} \quad (5.13.4)$$

c) Cálculo das integrais

$$\int_0^{Y_1} \frac{Y_1^2}{p r_1^2} ds = \int_0^{Y_1} \frac{p x_1^2 s^2}{Y_1^2} ds = \frac{p x_1^2 Y_1}{3} \quad (5.13.5)$$

$$\int_0^{x_1} \frac{p s^2}{2(1+\phi)} dr_1 = \int_0^{x_1} \frac{p Y_1^2 r_1^2}{2(1+\phi) x_1^2} dr_1 = \frac{p x_1 Y_1^2}{6(1+\phi)} \quad (5.13.6)$$

$$\int_0^{x_2} \frac{p s^2}{2(1+\phi)} dr_2 = \int_0^{x_2} \frac{p Y_1^2 r_2^2}{2(1+\phi) x_2^2} dr_2 = \frac{p x_2 Y_1^2}{6(1+\phi)} \quad (5.13.7)$$

d) Momentos médios

$$m_{xm} = \frac{1}{\lambda \ell} \left[\frac{p x_1^2 Y_1}{3} + \frac{p x_1^2}{2} (\lambda \ell - 2 Y_1) \right] = \frac{p x_1^2}{6} \left(3 - \frac{4 Y_1}{\lambda \ell} \right) \quad (5.13.8)$$

$$m'_{xm} = \left[\left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 - 1 \right] m_{xm} \quad (5.13.9)$$

$$m_{ym} = \frac{1}{\ell} \left[\frac{p x_1 Y_1^2}{6(1+\phi)} + \frac{p x_2 Y_1^2}{6(1+\phi)} \right] = \frac{p Y_1^2}{6(1+\phi)} \quad (5.13.10)$$

$$m'_{ym} = \phi m_{ym} \quad (5.13.11)$$

e) TCP: $\lambda = 1,5$

$$\mu_x = 2,80$$

$$\mu'_x = 6,09$$

$$\mu_y = 1,68$$

$$\mu'_y = 5,09 \quad \phi_3 = \phi_4 = 3,03$$

$$x_1 = 0,359$$

$$x_2 = 0,641 \quad Y_1 = Y_2 = 0,638$$

f) Hillerborg

$$\mu_{xm} = 2,79 \quad \mu'_{xm} = 6,10$$

$$\mu_{ym} = 1,68 \quad \mu'_{ym} = 5,10$$

5.14 - CASO 5B: UMA BORDA MENOR APOIADA

Ver figura 5.22.

a) Equações dos momentos médios

$$m_x = \frac{1}{\lambda \ell} \left[\int_0^{y_1} \frac{pr^2}{2(1+\phi)} ds_1 + \int_0^{y_2} \frac{pr^2}{2(1+\phi)} ds_2 + \frac{p\ell^2}{8(1+\phi)} (\lambda \ell - y_1 - y_2) \right] \quad (5.14.1)$$

$$m_y = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell/2} \frac{ps_1^2}{2} dr = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell/2} ps_1^2 dr \quad (5.14.2)$$

b) Relações entre as variáveis

$$\frac{r}{s_1} = \frac{\ell/2}{y_1} \quad \leftrightarrow \quad r = \frac{\ell s_1}{2y_1} \quad \leftrightarrow \quad s_1 = \frac{2y_1 r}{\ell} \quad (5.14.3)$$

$$\frac{r}{s_2} = \frac{\ell/2}{y_2} \quad \leftrightarrow \quad r = \frac{\ell s_2}{2y_2} \quad \leftrightarrow \quad s_2 = \frac{2y_2 r}{\ell} \quad (5.14.4)$$

c) Cálculo das integrais

$$\int_0^{y_1} \frac{pr^2}{2(1+\phi)} ds_1 = \int_0^{y_1} \frac{p\ell^2 s_1^2}{8(1+\phi)y_1^2} ds_1 = \frac{p\ell^2 y_1}{24(1+\phi)} \quad (5.14.5)$$

$$\int_0^{y_2} \frac{pr^2}{2(1+\phi)} ds_2 = \int_0^{y_2} \frac{p\ell^2 s_2^2}{8(1+\phi)y_2^2} ds_2 = \frac{p\ell^2 y_2}{24(1+\phi)} \quad (5.14.6)$$

$$\int_0^{\ell/2} ps_1^2 dr = \int_0^{\ell/2} \frac{4py_1^2 r^2}{\ell^2} dr = \frac{p\ell y_1^2}{6} \quad (5.14.7)$$

d) Momentos médios

$$\begin{aligned} m_{xm} &= \frac{1}{\lambda \ell} \left[\frac{p\ell^2 y_1}{24(1+\phi)} + \frac{p\ell^2 y_2}{24(1+\phi)} + \frac{p\ell^2}{8(1+\phi)} (\lambda \ell - y_1 - y_2) \right] = \\ &= \frac{p\ell^2}{24(1+\phi)} \left(3 - 2 \frac{y_1 + y_2}{\lambda \ell} \right) \end{aligned} \quad (5.14.8)$$

$$m'_{xm} = \phi m_{xm} \quad (5.14.9)$$

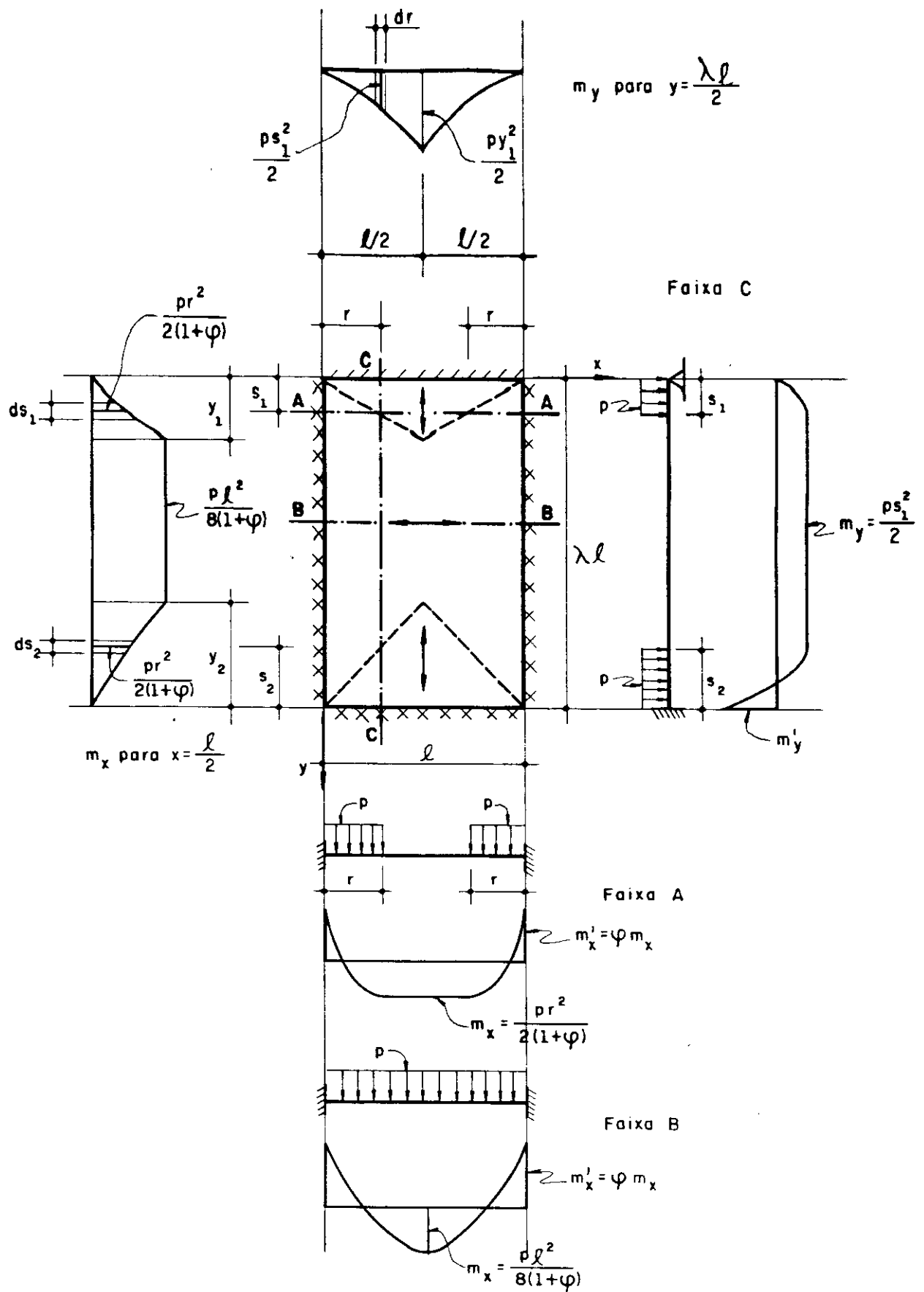


FIG. 5.22 - CASO 5B

$$m_{ym} = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{p \ell y_1^2}{6} = \frac{p y_1^2}{6} \quad (5.14.10)$$

$$m'_{ym} = \left[\left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 - 1 \right] m_{ym} \quad (5.14.11)$$

e) TCP: $\lambda = 1,5$

$$\mu_x = 2,57 \quad \mu'_x = 5,27 \quad \phi = 2,05$$

$$\mu_y = 1,35 \quad \mu'_y = 3,77$$

$$x_1 = x_2 = 0,500 \quad y_1 = 0,284 \quad y_2 = 0,554$$

f) Hillerborg

$$\mu_{xm} = 2,57 \quad \mu'_{xm} = 5,27$$

$$\mu_{ym} = 1,34 \quad \mu'_{ym} = 3,77$$

5.15 - CASO 6: QUATRO BORDAS ENGASTADAS

Ver figura 5.23.

a) Equações dos momentos médios

$$m_x = \frac{1}{\lambda \ell} \left[2 \int_0^{y_1} \frac{p r^2}{2(1+\phi_1)} ds + \frac{p \ell^2}{8(1+\phi_1)} (\lambda \ell - 2y_1) \right] \quad (5.15.1)$$

$$m_y = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell/2} \frac{p s^2}{2(1+\phi_3)} dr = \frac{1}{\ell} \int \frac{p s^2}{1+\phi_3} dr \quad (5.15.2)$$

b) Relações entre as variáveis

$$\frac{r}{s} = \frac{\ell/2}{y_1} \leftrightarrow r = \frac{\ell s}{2y_1} \leftrightarrow s = \frac{2y_1 r}{\ell} \quad (5.15.3)$$

c) Cálculo das integrais

$$\int_0^{y_1} \frac{p r^2}{1+\phi_1} ds = \int_0^{y_1} \frac{p \ell^2 s^2}{4(1+\phi_1)y_1^2} ds = \frac{p \ell^2 y_1}{12(1+\phi_1)} \quad (5.15.4)$$

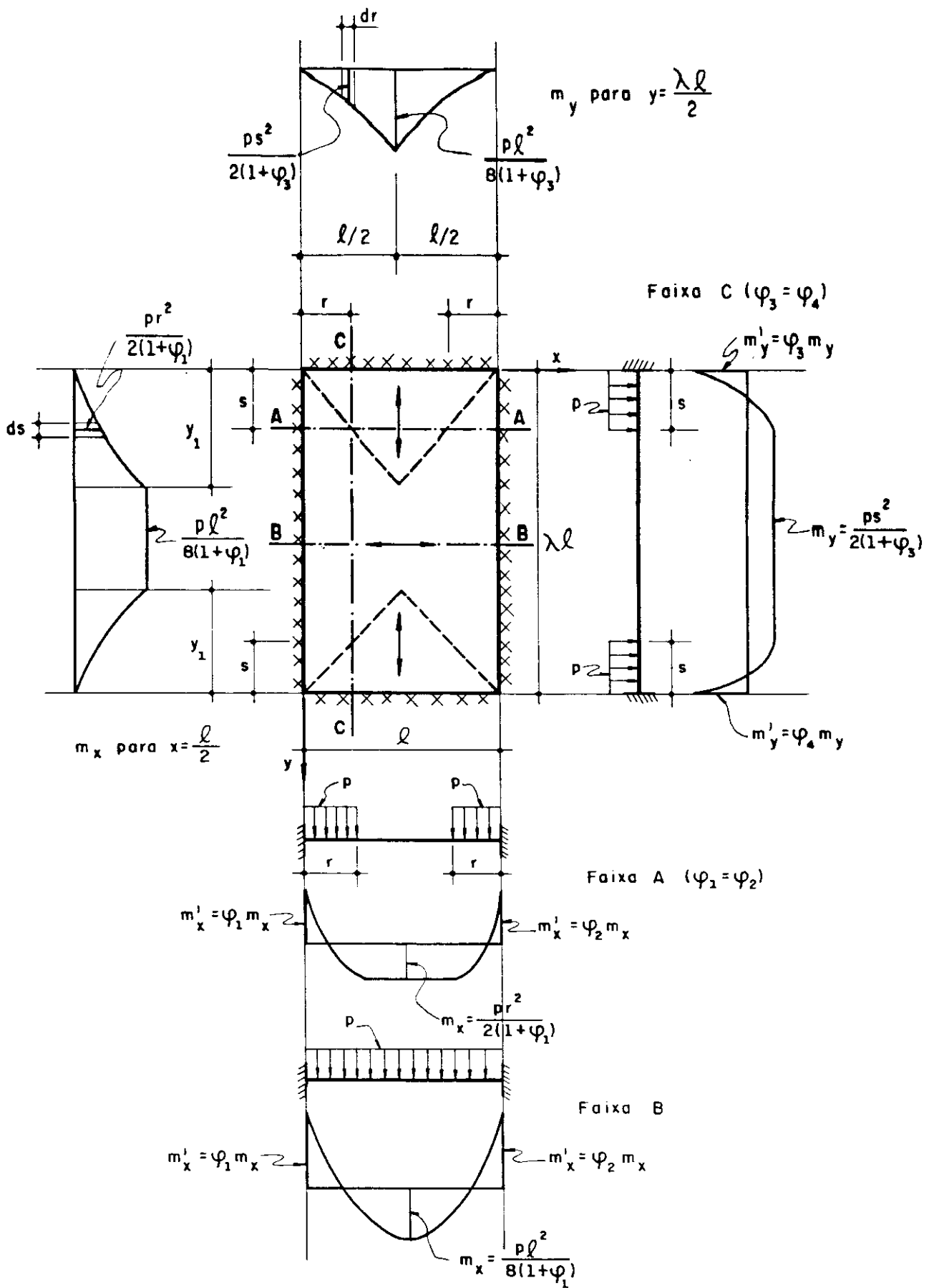


FIG. 5.23 - CASO 6

$$\int_0^{\ell/2} \frac{ps^2}{1+\phi_3} dr = \int_0^{\ell/2} \frac{4p y_1^2 r^2}{(1+\phi_3) \ell^2} dr = \frac{p \ell y_1^2}{6(1+\phi_3)} \quad (5.15.5)$$

d) Momentos médios

$$m_{xm} = \frac{1}{\lambda \ell} \left[\frac{p \ell^2 y_1}{12(1+\phi_1)} + \frac{p \ell^2}{8(1+\phi_1)} (\lambda \ell - 2y_1) \right] =$$

$$= \frac{p \ell^2}{24(1+\phi_1)} \left(3 - \frac{4y_1}{\lambda \ell} \right) \quad (5.15.6)$$

$$m'_{xm} = \phi_1 m_{xm} \quad (5.15.7)$$

$$m_{ym} = \frac{1}{\ell} \cdot \frac{p \ell y_1^2}{6(1+\phi_3)} = \frac{p y_1^2}{6(1+\phi_3)} \quad (5.15.8)$$

$$m'_{ym} = \phi_3 m_{ym} \quad (5.15.9)$$

e) TCP: $\lambda = 1,5$

$$\mu_x = 2,16 \quad \mu'_x = 4,57 \quad \phi_1 = \phi_2 = 2,12$$

$$\mu_y = 1,05 \quad \mu'_y = 3,44 \quad \phi_3 = \phi_4 = 3,28$$

$$x_1 = x_2 = 0,500 \quad y_1 = y_2 = 0,519$$

f) Hillerborg

$$\mu_{xm} = 2,16 \quad \mu'_{xm} = 4,58$$

$$\mu_{ym} = 1,05 \quad \mu'_{ym} = 3,44$$

6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 - SOBRE O CÁLCULO ELÁSTICO

Embora seja o cálculo plástico mais adequado para dimensionamento das lajes de concreto, para análise das condições de utilização o cálculo elástico é indispensável. O cálculo elástico é útil também na determinação dos dados iniciais do cálculo plástico, como por exemplo a razão ϕ_i dos momentos negativos e positivos em cada direção e, principalmente, na escolha do índice de ortotropia. O cálculo elástico é, então, imprescindível, devendo complementar o cálculo plástico nas situações em que este último é inadequado.

Apesar de já serem usualmente empregados há longo tempo, alguns aspectos práticos do cálculo elástico precisam ser modificados.

O primeiro deles diz respeito à consideração de laje armada em uma só direção sempre que a razão λ dos lados superar dois. A incorreção daí decorrente pode ser visualizada nas figuras 2.2a até 2.2e, baseadas em CZERNY^[44], para λ entre um e dois. A consideração de laje armada em uma só direção, para λ maior que dois, pode acarretar erro de até 47% no valor do momento fletor positivo na direção principal, como ocorre no caso de vinculação 4A, em que as duas bordas menores são engastadas. Propõe-se que as lajes

retangulares em questão sejam consideradas armadas em uma só direção somente para λ maior que quatro. Este valor de λ tem por base a solução exata dada por TIMOSHENKO^[51] para o caso de vinculação 4A - o mais crítico -, cujo momento na direção principal, para $\lambda = 4$, difere menos de 3% do valor correspondente a laje com $\lambda = \infty$. Outros casos de vinculação terão erros menores.

Ainda com relação às lajes armadas em uma só direção, outro aspecto que precisa ser realçado é que não se pode ignorar os momentos de apoio m_y' na direção do maior vão, que, mesmo para $\lambda > 4$, são da mesma ordem de grandeza de que os momentos positivos m_x da direção do menor vão (casos 2A e 4A) ou até maiores, como nos casos 3, 5A, 5B e 6 (ver, novamente, as figuras 2.2a até 2.2e).

O cálculo prático por computador, com funções aproximadas como as indicadas no capítulo 2, é muito mais adequado que o cálculo por séries ou por diferenças finitas e, principalmente, que o cálculo por analogia de grelha, elementos finitos ou elementos de contorno, que devem ser reservados para problemas especiais. Não se pode deixar de salientar, também, que o cálculo proposto por Marcus, tentador pela simplicidade de suas expressões, fornece resultados imprecisos (ROCHA^[43]). Na região dos apoios perpendiculares ao maior vão, por exemplo, os momentos são bem inferiores aos obtidos com cálculos elásticos mais sofisticados.

6.2 - COMPARAÇÃO ENTRE OS MOMENTOS DA TCP E OS ELÁSTICOS

Apresenta-se a seguir uma análise sucinta dos momentos indicados nas tabelas 4.1 até 4.9, nas quais os momentos elásticos são dados pelas funções aproximadas do capítulo 2 e os momentos de plastificação foram calculados com os mesmos índices de ortotropia κ_{el} e os de engastamento $\phi_{i,el}$ relativos ao cálculo elástico.

Como o custo de uma laje é, de forma aproximada,, proporcional aos momentos fletores, a comparação entre os dois métodos será feita em termos da economia dos momentos de plastificação m_P em relação aos momentos elásticos m_E , e economia esta dada em porcentagem pela relação:

$$\epsilon = \left(1 - \frac{m_P}{m_E} \right) \cdot 100\% \quad . \quad (6.2.1)$$

De forma semelhante, a comparação também poderia ser feita em termos do acréscimo de custo do cálculo elástico em relação ao cálculo plástico, dado também em porcentagem pela relação:

$$\alpha = \left(\frac{m_E}{m_P} - 1 \right) \cdot 100\% \quad . \quad (6.2.2)$$

Partindo-se dessas expressões, a relação entre α e ϵ é dada por:

$$\alpha = \left(\frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{100}} - 1 \right) \cdot 100\% \quad . \quad (6.2.3)$$

Analisando a economia ϵ , dada pela expressão 6.2.1 e indicada nas tabelas 4.1 a 4.9 e também na figura 6.1, tem-se, para cada caso de vinculação:

a) CASO 1 \rightarrow para λ entre 1 e 2, ϵ cresce de 5,4% até 15,3%, permanecendo aproximadamente constante até $\lambda = 4$ e decrescendo em seguida;

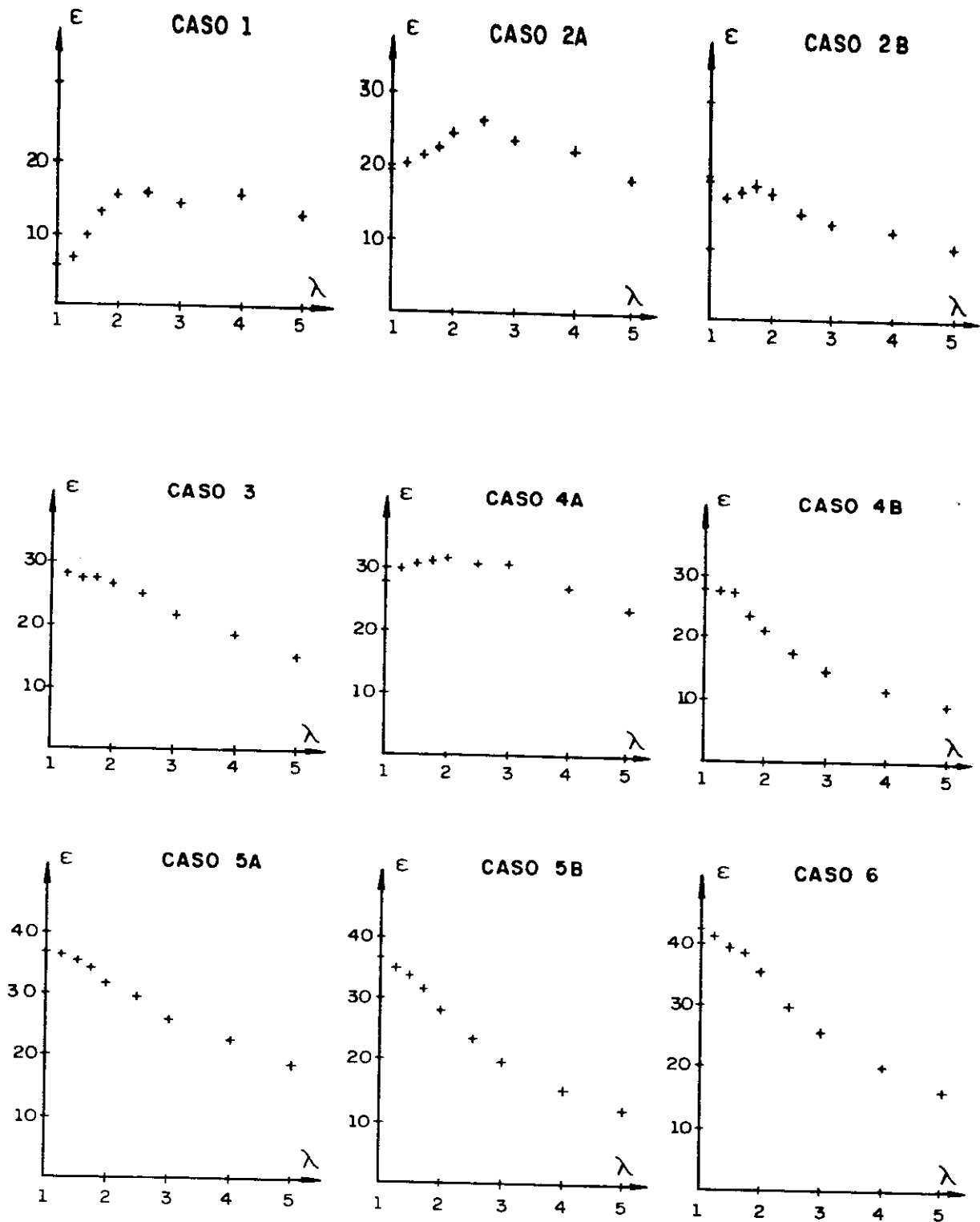


FIGURA 6.1 - ECONOMIA E DO CÁLCULO PELA TCP EM RELAÇÃO AO CÁLCULO ELÁSTICO (EM %)

b) CASO 2A → para λ entre 1 e 2,5, ϵ cresce de 19,5% até 26,1%, decrescendo para valores maiores de λ ;

c) CASO 2B → para λ entre 1 e 2, ϵ permanece praticamente constante em torno de 18,3%, decrescendo em seguida;

d) CASO 3 → para λ entre 1 e 5, há um comportamento praticamente linear de ϵ , variando de 30,2% até 15,0%;

e) CASO 4A → para $\lambda = 1$, $\epsilon = 27,7\%$; para λ no intervalo entre 1 e 3, ϵ permanece em torno de 30,9%, decrescendo para valores maiores de λ ;

f) CASO 4B → para λ entre 1 e 5, decresce de 27,7% até 9,0%; este decrescimento é suave para pequenos valores de λ , é mais acentuado em seguida e volta a ser brando no final do intervalo;

g) CASOS 5A, 5B e 6 → para λ entre 1 e 5, de forma intermediária entre a dos casos 3 e 4B, há um decrescimento quase linear no início e mais brando no final do intervalo, entre 36,8% e 18,8% no caso 5A, entre 36,7% e 12,6% no caso 5B e entre 42,6% e 16,3% no caso 6;

Sintetizando qualitativamente os aspectos ora analisados, os nove casos de vinculação podem ser colocados em três grupos, a saber:

1º) CASOS 1 e 2A → para λ em torno do intervalo entre 1 e 2, há um crescimento aproximadamente linear de ϵ , permanecendo constante ou decrescendo em seguida;

2º) CASOS 2B e 4A → para λ entre 1 e 2, ϵ é aproximadamente constante, decrescendo em seguida;

3º) CASOS 3, 4B, 5A, 5B e 6 → para λ entre 1 e 5, ϵ decresce de forma aproximadamente linear e mais suavemente no final do intervalo;

Nos tabuleiros de edifícios usuais, é em geral pequena a ocorrência de lajes com todas as bordas simplesmente apoiadas ou com apenas uma borda engastada, havendo pre-

dominância de lajes com duas ou mais bordas engastadas e para as quais a economia ϵ decresce com λ . Pode-se, então, generalizar que:

PARA AS LAJES DE EDIFÍCIOS, A ECONOMIA ϵ DO CÁLCULO PLÁSTICO EM RELAÇÃO AO ELÁSTICO DIMINUI À MEDIDA QUE CRESCE A RAZÃO λ DOS LADOS.

Coerente com todos os casos de vinculação, e portanto mais verídica que a anterior, tem-se a afirmação:

A ECONOMIA CRESCE COM O NÚMERO DE LADOS ENGASTADOS.

Uma síntese quantitativa é de mais difícil elaboração, em face da grande variabilidade dos aspectos envolvidos. Pode-se, mesmo assim, tentar chegar a alguns valores, se bem que imprecisos.

Os tabuleiros de edifícios usuais possuem em geral lajes com λ entre 1 e 2, sendo o valor médio mais próximo de 1 do que de 2. Considerar $\lambda = 1,5$ como valor médio representativo resulta em um valor subestimado para a economia, pelo fato de ϵ diminuir com o crescimento de λ .

Considerar o valor médio da economia relativo aos nove casos de vinculação, que corresponde a um número médio de bordas engastadas iguais a dois, também subestima a economia, tendo em conta que, nos edifícios, em geral o número médio de bordas engastadas supera dois e que a economia cresce com o número de lados engastados.

Para $\lambda = 1,5$, a média da economia relativa aos nove casos de vinculação resulta em torno de 27% que é, então, em geral inferior ao valor real.

Pode resultar um índice de economia inferior a 27%, se houver grande quantidade de bordas apoiadas. Predominando as bordas engastadas resultarão, certamente, valores de ϵ superiores a 27%.

Invertendo a referência, ou seja, calculando o acréscimo de custo do cálculo elástico em relação à TCP, conclui-se, através da expressão (6.2.3), que este valor em geral supera os 37%.

6.3 - CONDIÇÕES DE ECONOMIA

O critério econômico, apresentado no item 4.10, será aqui analisado. Em tal critério, foram admitidas as simplificações:

- a) $\kappa = a_{SY}/a_{SX}$ em vez de $\kappa = m_Y/m_X$,
- b) armaduras inferiores constantes ao longo da laje,
- c) não consideração do custo das armaduras superiores,
- d) não consideração da alteração da espessura da laje.

Com estas hipóteses principais, foram elaboradas as tabelas 4.19 a 4.27, nas quais se indicam os índices de ortotropia econômicos - κ_{ec} -, para os seguintes valores dos índices de engastamento: $\phi_{i,el}$, 1, 1,5 e 2.

Nota-se, nestas tabelas, que os valores de κ_{ec} diferem muito daqueles verificados em regime elástico e que estão indicados nas tabelas 4.1 a 4.9. Como durante sua vida útil a estrutura trabalha em regime elástico, o emprego de κ_{ec} pode prejudicar as condições de utilização da estrutura, pois isto acarreta em uma armadura muito pequena na direção do maior vão, podendo conseqüentemente resultar em condições inadequadas de fissuração.

Verifica-se, também nas tabelas 4.19 a 4.27, que a variação de κ_{ec} em função dos valores de ϕ_i só é signifi

cativa para poucos valores de λ e em alguns casos de vinculação, como por exemplo os casos 2A, 4A e 5A.

As tabelas 4.19 a 4.27 fornecem, ainda, a relação entre os custos $F_{e\ell}/F_j$, onde $F_{e\ell}$ corresponde ao κ_{ec} com $\phi_i = \phi_{i,e\ell}$ e F_j representa os custos calculados com $\phi_i = 1, 1,5$ e 2 e com os respectivos valores de κ_{ec} . Nota-se que, mesmo nos casos de grandes alterações dos valores de κ_{ec} , são pequenas as alterações no custo da armadura inferior.

Nota-se, também, que com a redução dos momentos sobre os apoios em geral não ocorre variação significativa do custo da armadura inferior ou ocorre um pequeno acréscimo, que pode ser compensado pela diminuição da armadura superior. Há casos ainda, que a diminuição dos momentos sobre os apoios acarreta em um menor custo da armadura inferior. Isto ocorre nos casos 2A, 2B, 4A, 4B, 5A, 5B para pequenos valores de λ , em geral inferiores a $\lambda = 1,25$.

Encerrando essas considerações sobre o custo das armaduras, mesmo tendo por base um critério econômico não muito preciso, já dá para se ter uma idéia de que adotar índice de ortotropia próximo do valor de $\kappa_{e\ell}$ não acarreta em acréscimo significativo de custo, além de serem atendidas as condições naturais da laje. Conclui-se, também, que, sob aspectos econômicos, a consideração de valores de ϕ_i menores que os relativos ao regime elástico pode ser vantajosa.

A ratificação destas conclusões pode ser obtida tendo por base um critério econômico mais correto, que leve em conta também o custo da armadura superior. Este custo depende do comprimento das barras, que pode ser determinado com base nas expressões deduzidas no item 4.5 e que fazem parte do programa apresentado no item 4.8. Um critério mais refinado poderia considerar, também, a alteração da espessura da laje.

6.4 - COMPRIMENTOS DAS BARRAS DA ARMADURA SUPERIOR

As distâncias entre os eixos dos apoios e os correspondentes pontos de momento nulo, calculadas conforme o item 4.5 já citado, encontram-se indicadas nas tabelas 4.1 até 4.9. A estas dimensões devem ser somados os valores a_ℓ , relativos ao deslocamento do diagrama de esforços na armadura, e os adequados comprimentos de ancoragem.

A Norma Brasileira NBR 6118^[50], em seu item 3.3.2.7, especifica o seguinte:

"Quando não se determinar o diagrama exato dos momentos negativos, em lajes retangulares de edifícios com carga distribuída e $q \leq q$, as barras da armadura principal sobre os apoios deverão estender-se de acordo com o diagrama triangular de momentos (considerado já deslocado) de base igual ao valor adiante indicado:

- a) em lajes atuando em duas direções ortogonais:
 - em uma borda engastada, sendo cada uma das outras três bordas livremente apoiada ou engastada, 0,25 do menor vão;
 - nos dois lados de um apoio de laje contínua, 0,25 do maior dos vãos menores das lajes contíguas;
- b) em lajes atuando numa só direção:
 - em uma borda engastada, 0,25 do vão."

A mesma norma especifica, para as lajes, o deslocamento do diagrama $a_\ell = 1,5d$, onde d é a altura útil da seção. Para as lajes comuns de edifício a relação a_ℓ/ℓ_x apresenta valores em torno do intervalo entre 0,03 e 0,04.

Nota-se que, se às razões ℓ_i/ℓ_x , indicadas nas tabelas 4.1 a 4.9, forem adicionados os valores de a_ℓ/ℓ_x ,

em muitos casos os comprimentos das barras superiores, baseados na NBR 6118, resultarão insuficientes se comparados com os respectivos valores dados pela TCP. Por exemplo citam-se os casos de vinculação 2A, 2B, 3, 4A e 5A.

Nos casos de lajes contínuas, esta deficiência dos comprimentos das barras poderá não ocorrer, pois a compartilhização dos momentos acaba reduzindo o valor do momento de apoio relativo à laje maior e portanto deslocando o seu ponto de momento nulo; com relação à laje menor, o comprimento da barra será calculado com o valor de l_x relativo à outra laje, resultando portanto um comprimento de barra maior que aquele relativo a uma laje considerada isolada.

Porém, com o cálculo sistematizado pela TCP aqui proposto, não há que se preocupar com os comprimentos das barras sobre os apoios, pois eles serão adequadamente calculados em todos os casos.

Convém salientar, por outro lado, que a consideração de diagrama triangular de momentos sobre os apoios refere-se a hipóteses elásticas. No cálculo pela TCP, o diagrama sobre os apoios deve ser considerado retangular, o que é coerente com as hipóteses plásticas admitidas.

6.5 - REAÇÕES DE APOIO

Nas tabelas 4.10 a 4.18 estão indicadas as posições das charneiras, relativas aos nove casos de vinculação. Estão indicadas também as correspondentes reações de apoio, considerando duas alternativas:

- a) com reações de canto, atuando juntas com reações uniformes ao longo das bordas;
- b) ocorrência somente de reações uniformes ao longo das bordas, ou seja, de reações médias.

Apresenta-se, ainda, as reações médias calculadas conforme o item 3.3.2.9 da NBR 6118^[50], que prevê charnei-

ras nos cantos formando 45° com as bordas, quando estas apresentam apoios de mesmo tipo, ou 30° a partir da borda apoiada, quando a outra for engastada.

Nota-se que, adotando $\kappa = \kappa_{e\lambda}$ e $\phi_i = \phi_{i,e\lambda}$, os ângulos variam em torno dos valores admitidos pela NBR 6118. Para $1 \leq \lambda \leq 2$, onde se situam a maioria dos casos na prática, os erros das reações médias da NBR 6118 em relação aos valores da TCP ficam no intervalo entre $-12,3\%$ — caso 5B, ρ_4 e $\lambda = 2$ — e $11,6\%$ — caso 2A, $\rho_3 = \rho_4$ e $\lambda = 2$. Os erros maiores em geral são referentes à menor borda da laje e a grandes valores de λ . Por exemplo, para $\lambda = 5$, no caso 5B, na borda menor engastada, o erro é de $-20,1\%$.

Porém, para a rotina do projeto estrutural, o cálculo das reações médias em regime plástico é menos importante, por dois motivos principais. O primeiro deles refere-se à existência das reações de canto, cuja consideração simultânea com reações uniformes ao longo das bordas representa muito melhor a situação que de fato ocorre. O segundo motivo, que talvez seja até mais importante, é que as cargas se transferem das lajes para as vigas com a estrutura trabalhando elasticamente, não valendo portanto as hipóteses admitidas no cálculo pela TCP, na qual se baseou a NBR 6118.

Trabalho iniciado por MANZOLI; PINHEIRO; PAIVA^[45] e continuado por MICALI; PINHEIRO; PAIVA^[68], mesmo ainda incompleto já dá uma idéia de que as reações em regime elástico são bem diferentes daquelas obtidas pela TCP, tanto considerando reações médias como levando em conta as reações de canto.

A consideração de reações de apoio, obtidas com hipóteses elásticas, é fundamental para a elaboração de um cálculo estrutural mais preciso. Um refinamento ainda maior é conseguido se for considerada a deformabilidade das vigas de apoio, empregando elementos finitos ou elementos de contorno, por exemplo.

6.6 - ANÁLISE DOS RESULTADOS DO EXEMPLO

Neste item serão feitas considerações a respeito do exemplo indicado no item 4.11, onde foram feitas três considerações iniciais:

- a) cálculo elástico;
- b) cálculo pela TCP com valores iniciais de κ e ϕ_i relativos ao cálculo elástico anterior;
- c) cálculo análogo ao anterior, com o mesmo valor inicial de κ e com redução dos valores de ϕ_i .

Nos três casos, os momentos obtidos com a consideração isolada de cada laje foram em seguida compatibilizados com os das lajes contíguas. Os momentos sobre os apoios foram adotados como sendo o maior valor entre a média e 0,8 do maior momento entre os dois obtidos na consideração isolada de cada laje. Em seguida, os momentos de vão foram, em cada direção, aumentados ou diminuídos adequadamente, dependendo do fato de os respectivos momentos de apoio tiverem sido diminuídos ou aumentados em valor absoluto.

No cálculo pela TCP, a compatibilização altera os valores de κ e ϕ_i inicialmente adotados, que certamente não corresponderão aos momentos compatibilizados. Com os novos valores de κ e ϕ_i , os cálculos são refeitos para cada laje isoladamente, em seguida é feita nova compatibilização e assim por diante. Os momentos compatibilizados finais são obtidos, então, através de um cálculo iterativo.

Existe maneira de evitar este cálculo iterativo, que realizado manualmente torna-se trabalhoso. Isto pode ser feito seguindo procedimento sugerido por AMARAL [69], no qual em cada laje são adotados os momentos nos apoios e o valor de κ . Os momentos de vão são, então, decorrentes.

Analisando os resultados do exemplo para as três hipóteses admitidas, nota-se na tabela 4.35, que o cálculo pe

la TCP com $\phi_i = \phi_{i,el}$ é 40,8% mais econômico que o cálculo elástico. De outra forma, o cálculo elástico consome 69,4% mais armadura que o cálculo pela TCP. Estes valores transcendem os valores estimados no item 6.2, pelo fato do valor médio de λ no exemplo ser inferior a $\lambda = 1,5$, lá admitido, e pela predominância de apoios engastados no exemplo em questão.

Nota-se, também na tabela 4.35, que o volume de aço consumido com a hipótese de redução dos momentos de apoio praticamente coincide com o volume referente a $\phi_i = \phi_{i,el}$. Este resultado é coerente com a previsão apresentada no item 6.3.

6.7 - COMPARAÇÃO ENTRE A TCP E O PROCESSO DE HILLERBORG

Sendo a teoria das charneiras plásticas uma aplicação do teorema cinemático da teoria da plasticidade, ela é teoricamente contra a segurança.

Os resultados experimentais demonstram, porém, que essa insegurança teórica em geral não se confirma. As lajes costumam apresentar uma reserva de resistência, decorrente do endurecimento do aço da armadura e, principalmente, dos efeitos de membrana — ver item 3.1.2 .

É possível, também, uma verificação teórica, baseada no processo das faixas de Hillerborg que, sendo uma aplicação do teorema estático da teoria da plasticidade, é a favor da segurança.

A comparação entre a TCP e o processo das faixas, para as lajes quadradas ou retangulares, foi apresentada no capítulo 5. Verificou-se que, considerando adequadas repartições de cargas, os resultados de Hillerborg são muito próximos dos da TCP. Verificou-se, também, que aplicando o processo das faixas a repartições de carga baseadas na TCP e considerando momentos médios, os resultados de Hillerborg coinci-

dem com os da teoria das charneiras plásticas, para todos os casos de vinculação.

Embora a consideração de momentos médios contrarie as hipóteses necessárias para a aplicação do teorema estático, pelo fato de a capacidade resistente da laje ser ultrapassada na região central, dá para se ter uma idéia de que são bons os resultados da TCP, à luz da teoria da plasticidade, para as lajes em questão.

6.8 - CONCLUSÕES

Para dimensionamento das lajes comuns de edifícios, não há dúvidas de que o cálculo pela teoria das charneiras plásticas é mais adequado do que o cálculo elástico. Porém, para se conseguir informações relativas à fase de utilização, o cálculo elástico é imprescindível.

Os valores do índice de ortotropia κ e dos índices de engastamento ϕ_i , que são dados iniciais para cálculo pela TCP, não precisam ser arbitrariamente adotados. Eles podem ser obtidos com um procedimento mais criterioso, baseado no cálculo elástico, resultando assim uma distribuição de armadura mais adequada às condições de utilização da laje.

Com o critério de economia apresentado no item 4.10 e analisado no 6.3, verificou-se que o κ_{el} não coincide com o κ_{ec} ; mas verificou-se, também, que diferença de consumo de aço relativa a estes dois valores é pequena. A adoção de valores próximos de κ_{el} é então mais adequada, tendo em conta as condições de fissuração da laje durante sua utilização.

Já para os índices de engastamento ϕ_i , a simples adoção dos valores obtidos em regime elástico não é interessante por dois motivos, comentados a seguir.

O primeiro deles, que sem dúvida é o principal, es

tá relacionado com a segurança: os momentos de vão resultam muito pequenos. Como em última instância são as armaduras inferiores as responsáveis pela segurança da laje, não é conveniente que essas armaduras apresentem pequena capacidade resistente, principalmente tendo em conta que processos construtivos inadequados e má qualidade da mão-de-obra podem fazer com que as barras superiores fiquem mal posicionadas e, em consequência, sobrecarreguem as barras inferiores.

O segundo motivo está relacionado com aspectos económicos. Com $\phi_{i,el}$ os momentos nos apoios resultam bem maiores que os momentos nos vãos, requerendo espessuras maiores que as que seriam necessárias se os momentos nos apoios e nos vãos tivessem valores mais próximos entre si.

Adotando-se valores de ϕ_i menores que $\phi_{i,el}$ melhoram os dois aspectos. As armaduras inferiores resultam mais resistentes, diminuindo a insegurança no caso de má execução da armadura superior. Os momentos nos apoios resultam mais próximos dos momentos nos vãos, permitindo menores espessuras ou, até, um menor consumo da armadura total.

Concluir com o raciocínio anterior que o valor mais adequado é $\phi_i = 1$ é uma precipitação, pois há outro aspecto a ser analisado. Para $\phi_i = 1$, em geral ocorre plastificação sobre os apoios para as cargas de serviço. Decorrente dessa plastificação, podem surgir fissuras com grandes aberturas e rotação das lajes adjacentes. As grandes aberturas das fissuras em geral não causam problemas, por se encontrarem protegidas pela camada de argamassa de nivelamento e pelo revestimento do piso. A verificação da abertura das fissuras talvez possa até ser dispensada. Já as rotações não podem ser ignoradas. Elas podem causar rachaduras no piso, se este for executado com material rígido. Essas rotações precisam, também, ser levadas em conta na verificação das flechas. Deve-se salientar, ainda, que é difícil avaliar com precisão o valor dessas rotações.

Pode-se, então, pensar em um critério que conside

re valores no intervalo entre 1 e $\phi_{i,el}$. Considerando-se os valores usuais

$$\gamma_f = 1,4 \quad \text{e} \quad \gamma_s = 1,15 \quad ,$$

sendo

γ_f = coeficiente de ponderação das ações

e

γ_s = coeficiente de minoração da resistência do aço,

pode-se adotar valores de ϕ_i em torno de

$$\phi_i = 0,62 \phi_{i,el} \quad ,$$

sendo este coeficiente de $\phi_{i,el}$ resultante da relação:

$$\frac{1}{\gamma_f \cdot \gamma_s} = \frac{1}{1,4 \cdot 1,15} = 0,62 \quad .$$

Valores de ϕ_i próximos de $0,62 \phi_{i,el}$ são coerentes com todos os aspectos aqui analisados. Resultados experimentais poderiam corroborar esta sugestão.

No exemplo, detalhado no item 4.11 e analisado no item 6.6, não houve economia entre o cálculo com $\phi_i = 0,62 \phi_{i,el}$ e aquele com $\phi_i = \phi_{i,el}$; o consumo de armaduras ficou praticamente constante. Houve, porém, uma melhor distribuição entre as armaduras superiores e inferiores. Outros exemplos, com outros casos e vinculação e outros valores de λ , poderiam ilustrar melhor estas conclusões.

O exemplo realizado permitiu, também, verificar a grande economia do cálculo plástico em relação ao cálculo elástico, de 40,8% neste caso.

Com relação aos comprimentos das barras sobre os apoios, eles podem ser também determinados através da TCP, que fornece valores mais corretos que os recomendados pela

NBR 6118.

Sobre as reações de apoio, no caso de consideração isolada das lajes em relação às vigas, parece que o procedimento mais adequado é o cálculo elástico, conforme se comentou no item 6.5.

Embora possa ainda ser melhorado, o procedimento aqui analisado constitui-se em uma evidente evolução para o cálculo de lajes usuais de edifícios. Maior aprimoramento será conseguido com os resultados das outras pesquisas, que se comentam a seguir.

6.9 - OUTRAS PESQUISAS

No desenvolvimento deste trabalho, verificou-se que alguns aspectos precisam ser melhor analisados.

O primeiro deles diz respeito ao cálculo elástico com λ no intervalo entre 1 e 4 pelo menos, para a determinação de flechas, de momentos e de reações de apoio, considerando reações de canto e reações médias. Este trabalho já se encontra em elaboração (MICALI; PINHEIRO; PAIVA^[68]). Com os resultados deste trabalho, poderão ser refinadas as funções indicadas no capítulo 2. Poderá ser melhorado, também, o cálculo das reações de apoio no projeto de edifícios, conforme foi comentado no item 6.5. Uma pesquisa que considerasse a deformabilidade dos apoios também seria de grande utilidade.

A respeito de condições econômicas, com base na análise apresentada no item 6.3, verificou-se que é de fácil elaboração uma análise econômica mais refinada, que considere tanto as armaduras inferiores quanto as superiores e, até mesmo, a alteração da espessura. Uma análise mais detalhada do custo com κ_{el} , em relação ao custo com κ_{ec} , também seria interessante.

Poderiam ser elaborados, também, mais exemplos re

lacionados com a escolha dos quinhões de carga, necessários para a determinação do comprimento das barras sobre os apoios, conforme se apresentou no item 4.5.1.

No exemplo apresentado no item 4.11 e comentado no 6.6, constatou-se que no cálculo elaborado pela TCP a compatibilização dos momentos resultou trabalhosa. Um programa de cálculo em computador para este fim se faz necessário, analisando, inclusive, a conveniência de se adotar procedimento já citado e sugerido por AMARAL^[69], no qual são adotados os momentos nos apoios e o valor de κ , sendo decorrentes os momentos nos vãos.

Para a elaboração de projetos, há necessidade também de se analisarem procedimentos para sistematização do cálculo das espessuras das lajes e para verificação das flechas. Os sugeridos pela NBR 6118^[50] podem ser melhorados. Para as flechas, existe trabalho iniciado por BOTTURA & PINHEIRO^[70], que deverá ser levado adiante.

Uma pesquisa experimental seria muito útil para complementar os resultados aqui verificados e outros a serem obtidos nas pesquisas sugeridas.

Na continuação destas pesquisas, um dos temas importantes refere-se às lajes retangulares com carga uniforme e uma borda livre, tanto pela sua ocorrência na prática como também por já existir equacionamento iniciado por CHAMECKI^[64], semelhante ao que aqui se empregou.

Outras formas como lajes esconsas, triangulares, em L, em T, trapezoidais, lajes de escada, lajes-cogumelo, também poderão ser consideradas. Sobre lajes-cogumelo, a pesquisa também já foi iniciada (BRANCO & PINHEIRO^[71]).

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] GALILEI, G. Discorsi e dimonstrazioni mathematiche: in torno à due nuoue scienze. Leida, Elsevirũ, 1638. (Tradução em inglês: Two new sciences, by Henry Crew and Alfonso de Savio. New York, The Macmillan Company, 1933).
- [2] JOHANSEN, K.W. Linhas de ruptura: teoria e prática. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1962. 380 p. (Traduzido e adaptado dos originais dinamarqueses: Brudlinieteorier e Pladeformler).
- [3] TIMOSHENKO, S.P. History of strength of materials. New York, McGraw-Hill, 1953. 452 p.
- [4] HILLERBORG, A. Strip method of design. London, William & Sons, 1975. 255 p. (A Wiewpoint publication).
- [5] BACH, C. Versuche über die Widerstand fähigkeit ebener Platten. Elasticität und Festigkeit, 1890.
- [6] BELLUZZI, O. Scienza delle costruzioni. Zanichelli, Bolonha, 1954. (Ver também edição espanhola, 1977).
- [7] MÖRSCH, E. Ensayos con losas de homigón armado de forma cuadrada apoyadas em todos los lados. Deutsche Bauzeitung, Mitteilungen über Zement, Beton und Eisen betonbau, 1916.

- [8] SUENSON, E. Krydsarmerede Saernbetonpladers Styrke. Ingeniøren, Copenhagen, 25 (76, 78, 95), 1916.
- [9] INGERSLEV, A. The strength of rectangular slabs. The Institution of Structural Engineer's Journal, Jan. 1923.
- [10] JOHANSEN, K.W. Bruchmoment der Kreuzweise bewehrten Platten. Mémoires, Association Internationale des Ponts et Charpents: 277-296, 1932.
- [11] GVOZDEV, A.A. Determinación del valor de la carga de rotura para los sistemas estáticamente indeterminados. Proyecto y Norma nº 8, 1934.
- [12] GVOZDEV, A.A. Determinación del valor de la carga de rotura para los sistemas estáticamente indeterminados que sufren deformaciones plásticas. Trabajos de las Conferencias sobre Deformaciones Plásticas, Academia de Ciencias de la URSS, Departamento de Ciências Tecnicas, Moscú, 1938.
- [13] GVOZDEV, A.A. Fundamentación del § 33 de las normas para el proyecto de las estructuras de hormigón armado. Industria de la Construcción, (3), 1939.
- [14] GVOZDEV, A.A. Acerca del equilibrio límite. In: MANUAL del Ingeniero. 1948. v.5.
- [15] GVOZDEV, A.A. Cálculo de la capacidad portante de las estructuras por el método del equilibrio límite. Moscú, Striizdat, 1949
- [16] GVOZDEV, A.A. Metodo del equilibrio límite y su aplicación al cálculo de estructuras de hormigón armado. In: MANUAL del Ingeniero. 2.ed. 1949 v.5.
- [17] JOHANSEN, K.W. Brudlinieteorier. Genoptrykt, Polyteknisk Forening, 1943. 189 p.
- [18] JOHANSEN, K.W. Pladeformler. 2.ed. Kobenkavn, Polyteknisk Forening, 1949. 172 p.

- [19] CHAMECKI, S. Cálculo, no regime de ruptura, das lajes de concreto armadas em cruz. Curitiba, Ed. Guaíra, 1948. 107 p.
- [20] JONES, L.L. & WOOD, R.H. Yield-line analysis of slabs. London, Thames and Hudson, 1967.
- [21] LANGENDONCK, T. Teoria elementar das charneiras plásticas. São Paulo, ABCP, 1970. v.1, 414 p.
- [22] LANGENDONCK, T. Teoria elementar das charneiras plásticas. São Paulo, ABCP, 1975. v.2, 556 p.
- [23] MONTOYA, P.J.; MESEGUER, A.G.; CABRE, F.M. Hormigón armado. 7.ed. Barcelona, Gustavo Gili, 1973. v.2.
- [24] LANGENDONCK, T. Lajes em forma de T ou L. São Paulo, ABCP, 1972. 89 p.
- [25] HILLERBORG, A. Jämviktsteori för armerade betongplattor (Teoria do equilíbrio para lajes de concreto armado). Betong, 41 (4): 171-182, 1956.
- [26] HILLERBORG, A. Strimlemetoden för plattor på pelare, vinkelplattor mm. Stockholm, Utgiven av Svenska Riksbyggen, 1959. (Tradução em inglês: Strip method for slabs on columns, L - shaped plates, etc. Melbourne, CSIRO, Division of Building Research, 1964).
- [27] HILLERBORG, A. A plastic theory for the design of reinforced concrete slabs. In: CONGRESS OF THE INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR BRIDGE AND STRUCTURAL ENGINEERING, 6th., Stockholm, 1960. p.177-186.
- [28] CRAWFORD, R.E. Limit design of reinforced concrete slabs. Urbana, University of Illinois, 1962. (Thesis).
- [29] CRAWFORD, R.E. Limit design of reinforced slabs. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, 90 (5): 321-342, Oct. 1964.

- [30] ARMER, G.S.T. The strip method: a new approach to the design of slabs. Concrete: 358-363, Sept. 1968.
- [31] ARMER, G.S.T. Ultimate load tests of slabs designed by the strip method. Institution of Civil Engineers, Proceedings, 41: 313-331, Oct. 1968.
- [32] WOOD, R.H. & ARMER, G.S.T. The theory of the strip method for design of slabs. Institution of Civil Engineers, Proceedings, 41: 285-311, Oct. 1968.
- [33] FERNANDO, J.S. & KEMP, K.O. The strip method of slab design: unique or lower-bound solutions? Magazine of Concrete Research, 27 (90): 23-29, March, 1975.
- [34] TIMOSHENKO, S.P. Theory of plates and shells. New York, McGraw-Hill, 1940. 492 p.
- [35] MONTANARI, I.; MARTINELLI, D.A.O.; SAVASSI, W. Placas elásticas. São Carlos, EESC-USP, 1986.
- [36] LAIER, J.E. & BARREIRO, J.C. Complementos de resistência dos materiais. São Carlos, EESC-USP, 1983. 208 p.
- [37] BARES, R. Tablas para el calculo de placas e vigas pared. Barcelona, Gustavo Gili, 1972.
- [38] ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method in engineering science. 2.ed. London, McGraw-Hill, 1971. 521 p.
- [39] ROWE, E. Concrete bridge design. New York, Wiley, 1962.
- [40] TAKEYA, T. et alii Recomendações para o projeto e a execução da estrutura em lajes-cogumelo pertencentes às unidades básicas de saúde do plano metropolitano de saúde. São Carlos, Departamento de Estruturas da EESC-USP, 1985. (Relatório Técnico).
- [41] ANTUNES, H.M.C.C. & MAGRI, J.A. Sistema para cálculo de placas e chapas utilizando microcomputadores. In: CONGRESO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA INGENIERÍA, VI, Santa Fé, Argentina, 1985. p.342-356.

- [42] MARCUS, H. Vereinfachte Berechnung biegsamer Platten. (Cálculo simplificado de placas fletidas). 2.ed. Berlin, Julius Springer, 1929.
- [43] ROCHA, A.M. Novo curso prático de concreto armado. 12.ed. Rio de Janeiro, Científica, 1971. v.1.
- [44] CZERNY, F. Tafeln für vierseitig und dreiseitig gelagerte Rechteckplatten (Tabelas para placas retangulares apoiadas em quatro e em três lados). Betonkalender. Berlin, 65 (1): 305-381, 1976.
- [45] MANZOLI, O.L.; PINHEIRO, L.M.; PAIVA, J.B. Elaboração de tabelas para o cálculo de placas elásticas retangulares pelo método dos elementos de contorno. São Carlos, EESC-USP, 1986. (Relatório de Pesquisa, CNPq).
- [46] CORRÊA; M.R.S. Aplicação do método das faixas finitas na análise de estruturas prismáticas. São Carlos, EESC-USP, 1983. (Dissertação de mestrado).
- [47] BREBBIA, C.A. The boundary element method for engineers. Plymouth, Great Britain, Pentech Press, 1978. 189 p.
- [48] BEZINE, G. Application de la méthode des équations intégrales à la résolution des problèmes statiques et dynamiques stationnaires ou transitoires de flexion de plaques minces. Poitiers, France, Université de Poitiers, 1982. 169 p. (Thèse).
- [49] FUSCO, P.B. Estruturas de concreto: fundamentos do projeto estrutural. São Paulo, McGraw-Hill/Universidade de São Paulo, 1976.
- [50] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto e execução de obras de concreto armado: NBR 6118. Rio de Janeiro, ABNT, 1978.
- [51] TIMOSKENKO, S. & WOINOWSKY-KRIEGER. Theory of plates and shells. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1959.

- [52] PINHEIRO, L.M. Concreto armado: tabelas e ábacos.
São Carlos, EESC-USP, 1986. 66 p.
- [53] OCKLESTON, A.J. Load tests on a three storey reinforced concrete building in Johannesburg. The Structural Engineer: 304, Oct. 1955.
- [54] OCKLESTON, A.J. Arching action in reinforced concrete slabs. The Structural Engineer, 26, (6): 197, 1958.
- [55] PARK, R. Tensile membrane behaviour of uniformly loaded rectangular reinforced concrete slabs with fully restrained edges. Magazine of Concrete Research, 16, (46): 39-44, 1964
- [56] PARK, R. The ultimate strength of uniformly loaded, laterally restrained, rectangular two-way concrete slabs. University of Bristol, 1964 (Thesis).
- [57] PARK, R. Ultimate strength of rectangular concrete slabs under short-term uniform loading with edges restrained against lateral movement. Institution of Civil Engineers, Proceedings, 28: 125-150, June, 1964 .
- [58] PARK, R. The ultimate strength and load-term behaviour of uniformly loaded two-way concrete slabs with partial lateral restraint at all edges. Magazine of Concrete Research, 16, (48): 139-152, Sept. 1964 .
- [59] PARK, R. The lateral stiffness and strength required to ensure membrane action at the ultimate load of reinforced concrete slab and beam floor. Magazine of Concrete Research, 17 (50): 29, March, 1965.
- [60] PARK, R. Membrane action at the ultimate load of laterally restrained concrete slabs. Comité Européen du Béton: Bulletin d'Information, (58): 135, Oct. 1966.

- [61] BASTOS, R.G. Ruína de lajes de concreto armado com e feito de membrana e redução gradativa da armadura. São Carlos, EESC-USP, 1977. 207 p. (Dissertação de Mestrado).
- [62] PADILHA, S.F. Contribuição ao estudo experimental do efeito de arqueamento em lajes de concreto armado. São Carlos, EESC-USP, 1979. (Dissertação de Mestrado).
- [63] MASSONNET, C. & SAVE, M. Cálculo plástico de las construcciones. Barcelona, Montaner y Simon, 1966.
- [64] CHAMECKI, S. Cálculo de lajes no regime de ruptura. Enciclopédia Técnica Universal Globo. v.6.
- [65] LANGENDONCK, T. Charneiras plásticas em lajes de edifícios. São Paulo, ABCP, 1966. 81 p.
- [66] LANGENDONCK, T. Lajes poligonais uniformemente carregadas. São Paulo, ABCP, 1968. 24 p.
- [67] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Cargas para o cálculo de estruturas de edificações: NBR 6120. Rio de Janeiro, ABNT, 1980.
- [68] MICALI, R.M.; PINHEIRO, L.M.; PAIVA, J.B.; Elaboração de tabelas para cálculo de placas elásticas retangulares pelo método dos elementos de contorno. São Carlos, EESC-USP, 1988. (Relatório de Pesquisa, CNPq).
- [69] AMARAL, O.C. Sobre as lajes contínuas. Revista da Escola de Engenharia, Belo Horizonte, 3 (6): 133-161, nov. 1964.
- [70] BOTTURA, H.M. & PINHEIRO, L.M. Previsão de flechas em lajes. São Carlos, EESC-USP, 1987. (Relatório interno).
- [71] BRANCO, A.F.V.C. & PINHEIRO, L.M. Exemplo de cálculo de edifício em laje-cogumelo. São Carlos, EESC - USP, 1987. (Relatório interno).

8. BIBLIOGRAFIA

- BACH, C. & BAUMANN, R. Elasticità e resistenza dei materiali. Milão, Itália, 1928. (Tradução do alemão).
- CALLARI, C.E. Méthode générale de calcul des dalles en flexion dans le domaine anélasthique. Annales de l'Institut du Bâtiment et des Travaux Publics, (201): 959-972, nov. 1964.
- CÁMPORA, G.F. Cálculo plástico: análisis y diseño límite de sistemas estructurales planos. Buenos Aires, s.ed., 1967. 428 p.
- COMITÉ EUROPÉEN DU BÉTON: Bulletin d'Information, (56), août, 1966.
- COMITÉ EUROPÉEN DU BÉTON: Bulletin d'Information, (57): 62-140, sept., 1966.
- COMITÉ EUROPÉEN DU BÉTON: Bulletin d'Information, (58), oct. 1966.
- COMITÉ EUROPÉEN DU BÉTON: Dalles et structures planes. In:_____. Annexes aux recommandations internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en Beton. Roma, Associazione Italiana Tecnno-Economica del Cemento (AITEC), 1972. Tome 3, 196 p.

- DUBINSKY, A.M. Cálculo de losas por el método de las líneas de rotura. Montevideo, Tecni-Ciência, 1964.
- GIONGO, J.S. Contribuição ao estudo da ruína de lajes retangulares de tabuleiro de pontes. São Carlos, EESC-USP, 1982. (Dissertação de mestrado).
- GVOZDEV, A.A. Sur le calcul des dalles en béton armé par la méthode de l'équilibre limite. Comité Européen du Béton: Bulletin d'Information, (64), dec. 1967.
- HOGNESTAD, E. Yield line theory for the ultimate flexural strength of reinforced concrete slabs. Journal of the ACI, 24, (7): 637-656, March, 1953.
- JORGE, A. & FIGUEIREDO, R.G. Estudo experimental de lajes em regime de ruptura. São Carlos, Laboratório de Estruturas, EESC-USP. (Trabalho de formatura).
- KALMANOK, A.S. Manual para calculo de placas. Montevideo, Inter Ciencia, 1961. 285 p. (Tradução da 1. ed. russa, de 1959).
- KEMP, K.O. A lower bound solution to the collapse of an orthotropically reinforced slab on simple supports. Magazine of Concrete Research, 14 (41): 79-84, July, 1962.
- KEMP, K.O. The evaluation of nodal and edges forces in the yield line theory. In: RECENT developments in yield line theory. London, Cement and Concrete Association, 1965. (M.C.R. Special Publication).
- KEMP, K.O. Yield of a square reinforced concrete slabs on simple supports, allowing for membrane forces. The Structural Engineer, 45 (7): 235-240, July, 1967.
- KEMP, K.O. Continuity conditions in the strip method of slab design. Institution of Civil Engineers, Proceedings, Supplement: 283, Feb. 1970. (Paper 7268s).

- LAMAS, A.R.G. Análise limite de lajes. São Paulo, Escola Politécnica, 1984. (Notas de aula do curso: Comportamento de Placas e Lajes em Regime Linear e Não Linear).
- LANGENDONCK, T. Charneiras plásticas em lajes retangulares de pontes. São Paulo, ABCP, 1971. 76 p.
- LEVI, F. Controle des conditions de fissuration et de deformation des dalles dimensionnées à l'état limite ultime. Comité Européen du Béton: Bulletin d'Information, (50): 201-226, juil. 1965.
- LOESER, B. Concreto armado: cálculo e métodos de dimensionamento. São Paulo, Gerth Todtmann, 1947. (Traduzido do alemão: Bemessungsverfahren. Berlin, Wilhelm Ernst & Sohn, 1938).
- MALLICK, S.K. The strip method for reinforced concrete slabs. Indian Concrete Journal: 72-81, Feb. 1971.
- MARCUS, H. Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten (A teoria elástica e sua aplicação ao cálculo de placas fletidas). Berlin, 1932.
- MONTANARI, I. Carga de ruptura em tabuleiro de pontes. São Carlos, EESC-USP, 1969. (Tese de Doutorado).
- MORETTO, O. Curso de Hormigon Armado. 2.ed. Buenos Aires, Libreria El Ateneo Ed., 1967. 1074 p.
- MORLEY, C.T. Equilibrium methods for exact upper bounds of rigid plastic plates. In: RECENT developments in yield line theory. London, Cement and Concrete Association, 1965. (M.C.R. Special Publication).
- MORLEY, C.T. The ultimate bending strenght of reinforced concrete slabs. Cambridge, Cambridge University, 1965. (Ph. D. Thesis).

- MORLEY, C.T. Yield-line theory for reinforced concrete slabs at moderately large deflections. Magazine of Concrete Research, 19 (61): 211-221, Dec.1967.
- MORSCH, E. Ensayos con losas de hormigón armado de forma cuadrada apoyadas em todos los lados. Deutsche Bauzeitung, Mitteilungen über Zement, Beton und Eisenbetonbau, 1916.
- MORSCH, E. Teoría y práctica del hormigón armado. Buenos Aires, Ediciones G. Gili, 1952. Tomo II.
- MOY, S.S.J. Plastic methods for steel and concrete structures. London, The MacMillan Press, 1981. 221 p.
- NIELSEN, M.P. Limit analysis and concrete plasticity. New Jersey, Prentice-Hall, 1984. 420 p.
- PINHEIRO, L.M. Charneiras plásticas em lajes com forma de T: estudo experimental. São Carlos, EESC-USP, 1980. (Dissertação de mestrado).
- POLILO, A. Sugestão para o cálculo, pelo método de ruptura, das lajes retangulares de pontes, apoiadas nos quatro lados. Rio de Janeiro, Escola Nacional de Engenharia, 1964.
- POWELL, D.S. The ultimate strength of concrete panels subjected to uniformly distributed loads. Cambridge, Cambridge University, 1956. (Thesis).
- RAMAKRISHNAN, V. & ARTHUR, P.D. Ultimate strenght design for structural concrete. London, Sir Isaac Pitman and Sons, 1969.
- SAVE, M.A. & MASSONNET, C.E. Plastic analysis and design of plates, shells and disks. Amsterdam, London, North-Holland Publ., 1972.
- SAWCZUK, A. & WINNICKI, L. Plastic behaviour of simply supported concrete plates at moderately large deflections. University of Illionois, 1963. p. 97-111. (Structural Research Series, n. 265).

- SIMMONDS, S.H. & GHALI, A. Yield-line design of slabs. Journal of the Structural Division, ASCE, 102 (1): 109-123, Jan. 1976.
- STEINMAN, G. Calculo de placas por la teoria de las lineas de rotura. Madrid, Instituto Tecnico de la Construction y del Cemento, 1951.
- SZILARD, R. Theory and analysis of plates. New Jersey, Prentice-Hall, 1974. p. 571-612.
- TAYLOR, R. A note on a possible basis for a new method of ultimate load design of reinforced concrete slabs. Magazine of Concrete Research, 17 (53): 183-186, Dec. 1965.
- TEPEDINO, J.M. Sistemas estruturais II: lajes retangulares. Belo Horizonte, Edições Cotec, 1983.
- THAKKAR, M.C. & SRIDHAR RAO, J.K. Design of two way reinforced concrete rectangular slabs by modified Hillerborg's strip method. Indian Concrete Journal: 158-166, Apr. 1970.
- WOOD, R.H. Plastic and elastic design of slabs and plates. London, Thames and Hudson, 1961.
- WOOD, R.H. New techniques in nodal force theory for slabs. In: RECENT developments in yield line theory. London, Cement and Concrete Association, 1965. (M.C.R. Special Publication).
- ZAGOTTIS, D.L. Charneiras plásticas: configurações de ruptura com superfícies cônicas. São Paulo, EPUSP, 1967.
- ZAGOTTIS, D.L. Charneiras plásticas: configurações de ruína com superfícies regradadas de característica retilínea. São Paulo, EPUSP, 1968.