

ANÁLISE DE DESCONTINUIDADES PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO

AUTOR: FRANCISCO DOS SANTOS ROCHA

ORIENTADOR: WILSON SERGIO VENTURINI

ANÁLISE DE DESCONTINUIDADES PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

FRANCISCO DOS SANTOS ROCHA

Orientador: Wilson Sergio Venturini

Tese apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, da Universidade de São Pau
lo, como parte dos requisitos para obten-
ção do título de Doutor em Engenharia de
Estruturas.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. WILSON SERGIO VENTURINI (Orientador)

Prof. Dr. WALTER ABRAHÃO NIMIR

Prof. Dr. DANTE ANGELO OSVALDO MARTINELLI

Prof. Dr. EURIPEDES DO AMARAL VARGAS JR.

Prof. Dr. CARLOS EDUARDO MAFFEI

SUPLENTES:

Prof. Dr. WALTER SAVASSI

Prof. Dr. FRANCISCO FUSCO

Prof. Dr. JOSÉ HENRIQUE ALBIERO

Prof. Dr. JOÃO BAPTISTA NOGUEIRA

SÃO CARLOS
Estado de São Paulo - Brasil
Abril, 1988

Aos meus pais
João (in memoriam) e Luiza.

AGRADECIMENTOS

Aos Professores Doutores Wilson Sergio Venturini e Dante A.O. Martinelli pela grande contribuição que deram à minha formação profissional.

À Universidade do Amazonas pelo apoio financeiro que me forneceu.

RESUMO

A influência nos esforços e deslocamentos de um corpo, causada pela presença de descontinuidades, é aqui analisada, usando-se o Método dos Elementos de Contorno. As descontinuidades são simuladas por meio de forças fictícias, denominadas quadripolos e bipolos nos espaços bidimensional e tridimensional, respectivamente. Uma descontinuidade pode ser abertura ou não; neste caso o corpo é tratado em regime elasto-plástico ou em regime elasto-viscoplástico, enquanto naquele, em geral sem matéria entre as superfícies, o regime elástico é o considerado. Os corpos constituídos de partes homogêneas, com ou sem descontinuidades, são também analisados.

ABSTRACT

The influence on stresses and displacements of a body due to existence of discontinuities is analysed in this work, using the Boundary Element Method. The discontinuities are simulated by fictitious forces, denominated quadrupoles and dipoles for two- and three-dimensional problems, respectively. A discontinuity can show gap or not; in the last case the body is analysed considering elasto-plastic and elasto-viscoplastic behaviours while open discontinuity case lead to elastic problems. Bodies constituted of homogeneous parts with or without discontinuities are also analysed.

SUMÁRIO

	Página
I - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Generalidades	1
1.2 - Objetivos	3
1.3 - Conteúdo	4
II - SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS	7
2.1 - Introdução	7
2.2 - Definições fundamentais	8
2.2.1 - Notações	8
2.2.2 - Fundamentos da Teoria da Elasticidade	10
2.2.3 - Estados planos	13
2.3 - Força unitária	17
2.3.1 - Considerações preliminares	17
2.3.2 - Solução de Kelvin	18
2.3.3 - Tensão	22
2.3.4 - Força de superfície	23
2.4 - Quadripolos	25
2.4.1 - Conceituação física	25
2.4.2 - Quadripolos	27
2.4.3 - Distribuição linear de quadripolos	33
2.5 - Uma aplicação de quadripolos	37
III - FÓRMULAS INTEGRAIS BÁSICAS	42
3.1 - Introdução	42
3.2 - Conceituações básicas	43
3.2.1 - Equação integral	43
3.2.2 - Condições de Hölder e Liapunov	44
3.2.3 - Integral de Cauchy	47
3.2.4 - Método dos resíduos ponderados ...	52
3.3 - Uma aplicação de equação integral	54
3.4 - Fórmulas integrais básicas	55

3.4.1 - Relação entre resíduos e erros	55
3.4.2 - Fôrmula integral de deslocamento ...	57
3.4.3 - Fôrmula integral de tensão	61
3.5 - Apresentação do Método dos Elementos de Contorno	65
 IV - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	 70
4.1 - Introdução	70
4.2 - Equação de contorno	71
4.3 - Discretização da equação de contorno	74
4.4 - Coeficientes de influência	82
4.4.1 - Considerações preliminares	82
4.4.2 - Integrais não singulares	84
4.4.3 - Integrais singulares	86
4.4.4 - Função deslocamento	90
4.5 - Discretização das fôrmulas para pontos in- ternos	93
4.6 - Outros tipos de sollicitação	95
4.6.1 - Força de massa	95
4.6.2 - Tensão inicial	99
4.6.3 - Temperatura, retração e expansão ...	103
4.7 - Corpos com sub-regiões	103
4.8 - Aplicação do Método dos Elementos de Con- torno	106
 V - DESCONTINUIDADE	 111
5.1 - Introdução	111
5.2 - Descontinuidade em domínios	112
5.2.1 - Considerações gerais	112
5.2.2 - Condições de contorno	114
5.2.3 - Fôrmulas integrais	120
5.2.4 - Discretização das fôrmulas inte- grais	124
5.3 - Descontinuidade nas representações integrais	127
5.3.1 - Considerações preliminares	127
5.3.2 - Tensão no contorno de um domínio ...	128
5.3.3 - Tensão e deslocamento na desconti- nuidade	132

5.4 - Aplicação	139
5.5 - Modelação do problema físico	142
5.5.1 - Modelação elasto-plástica	142
5.5.2 - Exemplo	145
5.5.3 - Modelação elasto-viscoplástica	147
5.5.4 - Exemplo	151
VI - RECOMENDAÇÕES PARA PROGRAMAÇÃO	153
6.1 - Introdução	153
6.2 - Corpos homogêneos	154
6.3 - Corpos com sub-regiões	162
6.3.1 - Corpos com duas sub-regiões	162
6.3.2 - Corpos com várias sub-regiões	165
6.4 - Corpos com descontinuidade	168
6.4.1 - Corpos homogêneos	168
6.4.2 - Corpos com sub-regiões	169
6.5 - Determinação dos parâmetros incógnitos	172
6.5.1 - Corpos sem descontinuidade	172
6.5.2 - Corpos com descontinuidade	176
6.6 - Técnica de solução	177
VII - APLICAÇÕES PRÁTICAS	179
7.1 - Introdução	179
7.2 - Exemplo comparativo	180
7.3 - Análise da estabilidade de uma barragem	189
7.4 - Influência da descontinuidade numa escava- ção	196
VIII - ANÁLISE TRIDIMENSIONAL	200
8.1 - Introdução	200
8.2 - Considerações gerais	201
8.3 - Formulação do problema	204
8.3.1 - Fórmulas básicas	204
8.3.2 - Fórmulas integrais	206
8.4 - Recomendações para programação	210

IX - CONSIDERAÇÕES FINAIS 212

BIBLIOGRAFIA 217

I - INTRODUÇÃO

1.1 - Generalidades

Nos últimos anos, os processos de cálculo para resolução dos problemas de engenharia têm evoluído significativamente. As simplificações na modelação de um problema diminuíram fazendo com que os resultados obtidos se aproximassem mais dos reais. Falhas num meio, tais como descon^{tinu}idades e zonas de fraqueza, passaram a ser consideradas, assim como também as alterações no comportamento do material que constitui o corpo. As formas geométricas difíceis de serem definidas analiticamente passaram a serem melhor representadas com o uso de métodos numéricos.

Muitas obras de engenharia foram calculadas no passado e ainda o são, adotando-se simplificações consideradas grosseiras para os dias atuais, quer em função dos equipamentos disponíveis de trabalho, quer em função do desconhecimento de teorias mais modernas. A modelação usada para o comportamento do material era a elástica-linear e as pequenas falhas existentes num corpo eram desprezadas no cálculo da estrutura. Objetivava-se obter resultados sempre a favor da segurança, de modo que as alterações no corpo não comprometessem o cálculo da estrutura.

Os primeiros trabalhos publicados usando teorias mais avançadas tratavam de casos particulares. Essas teorias, quando aplicadas na resolução de um problema, demandavam uma quantidade de tempo, em geral, muito maior que as teorias usuais e, por isso, era inviável usá-las na prática. Com o surgimento do computador, tornou-se viável a aplicação dessas teorias, possibilitando-se a apresentação de outras mais completas. Foi possível, assim, o emprego de métodos numéricos que aproximassem o problema tanto geometricamente quanto fisicamente da realidade. Ainda nessa época, o emprego dessas teorias eram tidas pela maioria dos engenheiros como inviável, pois o custo do equipamento usado era elevado (só grandes firmas podiam fazer uso do computador e para cálculo de grandes obras).

Atualmente com o surgimento das máquinas de calcular e microcomputadores, como preço acessível à maioria dos profissionais, os novos procedimentos estão sendo bem aceitos. É possível avaliar, por exemplo, os efeitos de descontinuidades que porventura existam numa estrutura. Não mais causa admiração o tamanho das fórmulas e tão pouco o elevado número de equações envolvido na resolução de um problema. Foram desenvolvidos algoritmos próprios para resolução de grande sistemas de equações.

O comportamento do material pode ser agora melhor aproximado do real, usando-se, por exemplo, o modelo elasto-plástico. Isso é possível, nos problemas práticos, usando-se métodos numéricos para suas análises. Uma vez de finida as relações constitutivas básicas do material, pode-se seguir o diagrama tensão-deformação fazendo-se aplicação do carregamento incrementalmente.

A descontinuidade num corpo passou, com o advento do Método dos Elementos Finitos, a ser mais considerada nas análises de problemas de engenharia. São utilizados na modelação da descontinuidade elementos denominados elementos-juntas, onde se admite que as superfícies da descontinuidade são ligados por molas cujas rigidezes normal e tan

gencial sejam representativas das propriedades do material da junta (GOODMAN et al., 1968). No Método dos Elementos de Contorno, a análise da descontinuidade foi efetuada usando-se sub-regiões (VENTURINI, 1982) e descontinuidade de deslocamento (CROUCH & STARFIELD, 1983).

No presente trabalho, o Método dos Elementos de Contorno será novamente utilizada na determinação dos efeitos da descontinuidade. Ela será simulada usando-se uma distribuição de forças fictícias denominadas bipolos no espaço tridimensional e quadripolos no espaço bidimensional.

1.2 - Objetivos

Objetiva-se analisar neste trabalho basicamente os efeitos decorrentes da descontinuidade nos corpos, tais como os mostrados nas figuras seguintes. Na fig. 1.1a se mostra um muro de arrimo sujeito a ação d'água e do solo, com uma descontinuidade inclinada entre subdomínios (sub-regiões) de concreto e solo. Na fig. 1.1b um túnel com uma descontinuidade na rocha acima da sua superfície superior.

Conforme se vê nestas figuras, a característica principal de uma descontinuidade é que a distância entre dois pontos opostos das suas superfícies é muito menor do que seu comprimento. Poderão, assim, ser analisados os casos de descontinuidade sem e com abertura; nesse último caso não deve existir matéria na fenda, pois caso contrário os resultados obtidos serão em geral aproximados.

Os efeitos da descontinuidade são determinados essencialmente em estruturas bidimensionais. As estruturas lineares não serão tratadas neste trabalho. Quanto às tridimensionais serão fornecidas as fórmulas necessárias à sua análise e também a marcha de cálculo que deve ser usada. Serão ainda analisados corpos constituídos de sub-regiões, podendo cada sub-região ter diferentes características físicas diferentes das demais.

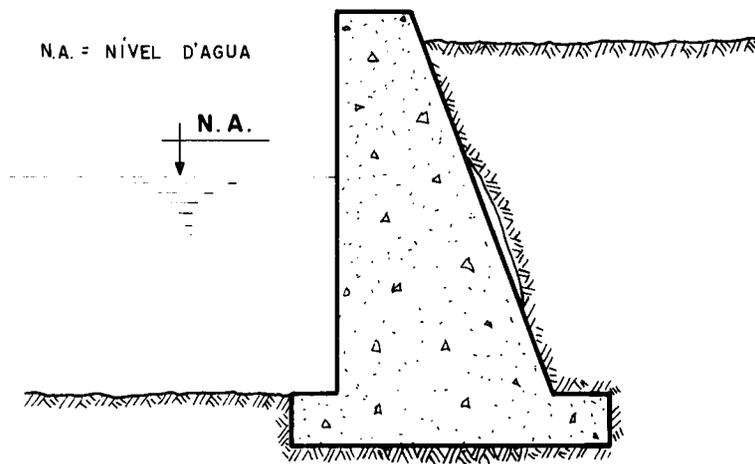


FIG. 1.1a

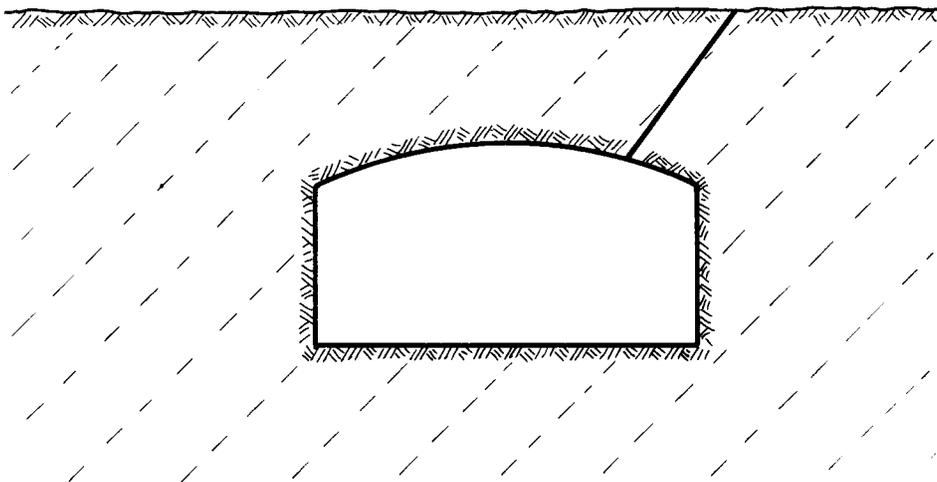


FIG. 1.1b

1.3 - Conteúdo

As principais notações, os fundamentos da Teoria da Elasticidade e os conceitos de estados planos são fornecidos no capítulo dois. Nesse capítulo são calculados também os efeitos de uma força unitária aplicada num meio infinito elástico-linear, através dos quais se determinam os

esforços e os deslocamentos provenientes de quadripolos. Uma aplicação de quadripolos será tratada, no final desse capítulo, por processo analítico.

No capítulo três se fornecerão as conceituações básicas para deduções das fórmulas a serem usadas na análise de um corpo com descontinuidade. Elas são relativas a: equação integral, condições de Hölder e Liapunov, integral de Cauchy e método dos resíduos ponderados. Deduzem-se, após essas conceituações, as fórmulas integrais de deslocamento e tensão, para um ponto interno do corpo. Será feita, no final desse capítulo, uma apresentação do Método dos Elementos de Contorno.

O capítulo quatro trata essencialmente do Método dos Elementos de Contorno em corpos sem descontinuidade. Será deduzida a equação de contorno, que é em seguida discretizada usando-se segmentos de reta para aproximar o contorno do corpo. Serão discretizadas também as fórmulas integrais de deslocamento e tensão para pontos internos do corpo. Além das solicitações usuais consideradas no cálculo de uma estrutura, serão analisados os efeitos devidos às seguintes solicitações: força de massa, tensão inicial, temperatura, retração e expansão. Será mostrado o uso das fórmulas integrais, já deduzidas, em corpos com sub-regiões e será resolvido um problema sem descontinuidade pelo Método dos Elementos de Contorno.

A descontinuidade, tanto física quanto matemática, será tratada basicamente no capítulo cinco. Serão deduzidas fórmulas que possibilitam a análise de corpos com descontinuidade no domínio e com descontinuidade coincidindo com o contorno que define o domínio. Os modelos elasto-plástico e elasto-viscoplástico, com respectivos exemplos, serão apresentados também nesse capítulo.

Nos capítulos seis e sete se tratará, respectivamente, de recomendações para programação e de aplicações práticas. Neste se fará uma análise comparativa entre os Métodos dos Elementos Finitos, dos Elementos de Contorno e

das Diferenças Finitas, e também uma análise de dois problemas reais, enquanto que naquele se dará a maneira de organizar as matrizes coeficientes dos parâmetros envolvidos na resolução do problema sem e com descontinuidades, e também os processos adotados para obtê-los.

O tratamento tridimensional dado às estruturas será apresentado no capítulo oito. Nesse capítulo se fornecerão as diretrizes básicas para análise de corpos sem e com descontinuidade, no espaço tridimensional.

No último capítulo deste trabalho serão feitos comentários a respeito de soluções analíticas e numéricas, de métodos numéricos e do Método dos Elementos de Contorno. Ainda nesse capítulo são dadas as conclusões obtidas do presente trabalho.

II - SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

2.1 - Introdução

As principais definições que dão sustentação à análise de um corpo com e sem descontinuidade serão apresentados nesta parte do trabalho. Inicialmente serão fornecidas notações que permitem deduções de fórmulas e que também facilitem o manuseio de determinadas expressões. Da Teoria da Elasticidade, apresentam-se definições básicas, necessárias a análise de um corpo no espaço tridimensional e no espaço bidimensional (estados planos).

As fórmulas para cálculo das componentes de tensão e deslocamento, e das componentes de força de superfície, devido a uma força unitária, aplicada num ponto de um meio infinito, elástico-linear, serão também fornecidas. Elas, conforme se verá, são as ferramentas básicas para resolução de problemas sem descontinuidade e para posterior correção de soluções devido à presença da descontinuidade.

Dar-se-ão, ainda, os conceitos de bipolo e de quadrípolo, e as fórmulas para cálculo de seus efeitos. No estudo de quadripolos serão vistos a sua utilidade na simulação da descontinuidade, e também os tipos de descontinuidades que serão tratados no decorrer deste trabalho. Finalmente uma aplicação de quadripolos será dada, sendo o problema resolvido analiticamente.

2.2 - Definições fundamentais

2.2.1 - Notações

As relações constitutivas apresentadas no presente trabalho serão tratadas, inicialmente, no espaço euclidiano tridimensional. A adaptação ao espaço bidimensional (plano) se fará de forma conveniente em cada caso.

No Método dos Elementos de Contorno é comum o aparecimento de expressões longas, dificultando o seu manuseio. Na medida do possível essas expressões serão compactadas se usando notação de tensor cartesiano, o que as tornam mais apresentáveis, tanto na forma, quanto na estética, além de facilitar o seu uso.

Os eixos utilizados para definir pontos são ortogonais (sistema de coordenadas retangulares) e, segundo definição clássica, refere-se a eles pelas letras X, Y e Z. Também, conforme a situação, chamam-se, respectivamente, X_1 , X_2 e X_3 . Essa última notação possibilita o uso de um único índice para caracterizar as direções dos eixos que compõem o sistema; por exemplo, as componentes de força F_i são: $F_1 \equiv F_x$, $F_2 \equiv F_y$ e $F_3 \equiv F_z$.

Com intuito de simplificar as formas de algumas expressões, o símbolo convencional de derivada parcial " ∂ " será substituído pela vírgula, conforme mostram os exemplos abaixo.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \phi_{,k} \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_k} = g_{j,k} \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} = \sigma_{ij,k} \quad (2.1c)$$

Um especial significado tem o símbolo δ_{ij} , quando definido como delta de Kronecker. O delta de Kronecker assume os seguintes valores:

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j \quad (2.2a)$$

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{se} \quad i = j \quad (2.2b)$$

Os índices i e j , e os demais a serem usados são inteiros. Vale ressaltar a sua função de operador de substituição, conforme mostram os exemplos abaixo:

$$\delta_{ij} a_j = a_i \quad (2.3a)$$

$$\delta_{ij} a_{ik} = a_{jk} \quad (2.3b)$$

Uma outra convenção que será usada é a convenção implícita de somatório. Repetição de um índice num termo, denota um somatório com respeito ao índice repetido, por exemplo, $p_{\ell k}^* u_k \equiv p_{\ell 1}^* u_1 + p_{\ell 2}^* u_2 + p_{\ell 3}^* u_3$.

As notações básicas referidas a um corpo, usadas no decorrer deste trabalho, são mostradas na fig. 2.1. São elas: Ω^* , domínio fundamental; Ω , domínio de validade do problema em análise; Γ , contorno de Ω ; s e q , pontos internos; S e Q , pontos de contorno.

Considerando-se a notação acima e uma função qualquer f , que depende da localização de cada ponto no corpo, define-se $\delta(q, s)$ por delta de Dirac, quando são válidas as seguintes propriedades:

$$\delta(q, s) = 0 \quad \text{se} \quad s \neq q \quad (2.4a)$$

$$\delta(q, s) = \infty \quad \text{se} \quad s = q \quad (2.4b)$$

$$\int_{\Omega^*} f(s) \delta(q, s) d\Omega^*(s) = f(q) \quad (2.4c)$$

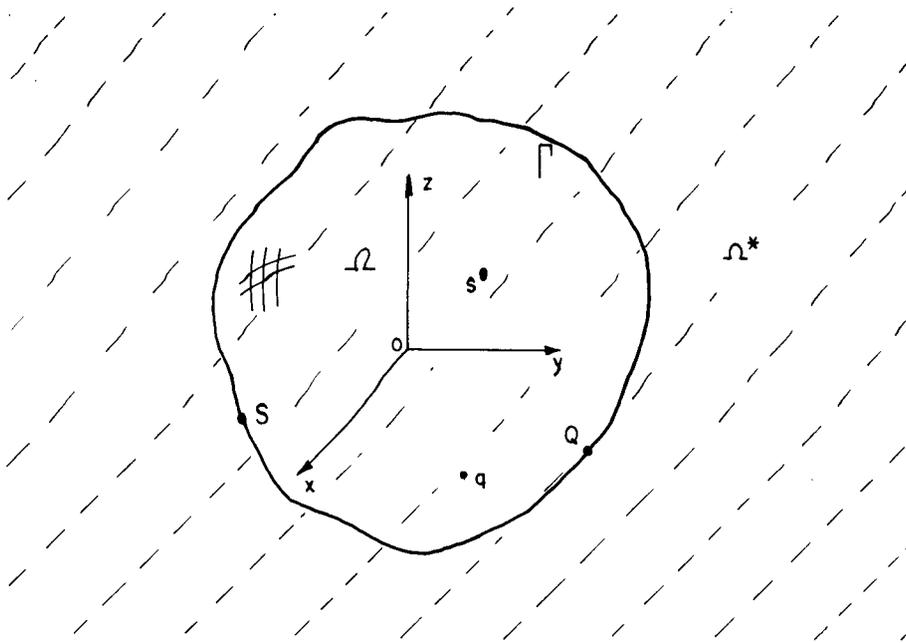


FIG. 2.1

2.2.2 - Fundamentos da Teoria da Elasticidade

Seja um pequeno elemento prismático (fig. 2.2), retirado de um corpo em equilíbrio estático, sob as ações de força de superfície e força de massa (força de volume). Os esforços nas faces do elemento representam a ação do resto do corpo no elemento. Esses esforços, distribuídos nas faces do elemento, recebem o nome de tensões, mais propriamente dito componentes de tensões. Na figura abaixo, fez-se a representação gráfica delas em somente três faces para melhor visualizá-las.

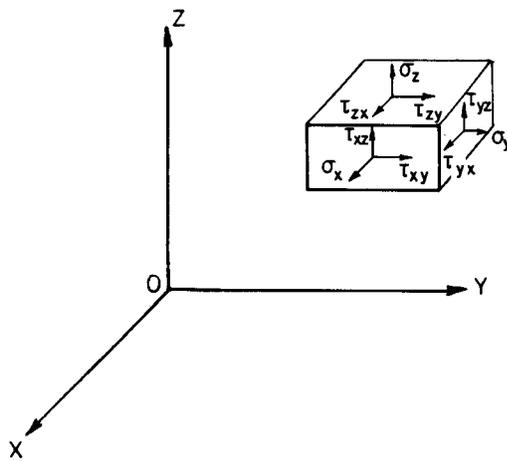


FIG. 2.2

Os sentidos dessas componentes de tensões são definidos como positivos. Nas outras faces do elemento, as condições de equilíbrio permitem concluir que as correspondentes componentes tem sentidos opostos.

Usando-se a notação indicial se representa uma componente qualquer por σ_{ij} , sendo que essa componente atua num plano perpendicular ao eixo X_i e tem a direção de X_j . As componentes com índices iguais, isto é, $\sigma_{11} \equiv \sigma_x$, $\sigma_{22} \equiv \sigma_y$ e $\sigma_{33} \equiv \sigma_z$, são chamadas tensões normais; fisicamente elas são positivas quando tracionam as fibras do corpo nas suas direções (tensões de tração) e são negativas quando comprimem essas fibras (tensões de compressão). As componentes contidas nos planos das faces do elemento são chamadas tensões cisalhantes.

As tensões num corpo contínuo representam uma maneira de especificar como as forças internas são transmitidas ao longo do sólido, variando em geral de ponto para ponto. Convém ressaltar que a força de massa atua num elemento de volume do corpo, enquanto que a tensão atua sobre a superfície de um elemento de volume.

Num corpo contínuo em equilíbrio estático, que, além de forças de superfície, possui força de massa com componentes b_i , as tensões satisfazem as seguintes condições:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.5a)$$

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.5b)$$

Para obtê-las deve-se isolar do corpo um elemento prismático infinitesimal, no qual se aplica as condições de equilíbrio. A igualdade 2.5a resulta da condição de que o momento resultante das forças é nulo; ela caracteriza a simetria do tensor tensão e é classicamente conhecida por condição de Cauchy. A equação 2.5b se deduz impondo a condição de que a resultante das forças é nula.

As tensões atuantes num corpo modificam a sua forma geométrica, o que significa dizer que as distâncias relativas iniciais, entre seus pontos, são alteradas. A esse fato se dá o nome de deformação.

A deformação, assim como a tensão, é mais cômoda que seja tratada por componentes. Num plano genérico, por exemplo, XY se definem as seguintes componentes de deformação: deformação normal também chamada de deformação específica, comumente denominada ϵ ; e deformação angular também chamada de distorção ou deformação por cisalhamento, comumente denominada γ .

Como já se definiu os sinais para as componentes σ_{ij} , os sinais de ϵ e γ estão implicitamente definidos. Fisicamente se diz que a deformação normal é positiva quando um elemento sofre alongamento em sua direção (fig. 2.3a). A deformação angular é positiva quando dois elementos de linha, localizados em semi-eixos positivos ou negativos, produzem um decréscimo no ângulo reto (fig. 2.3b).

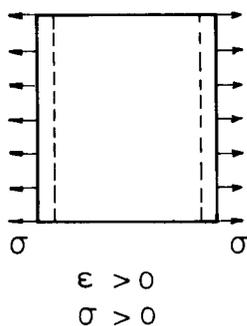


FIG. 2.3a

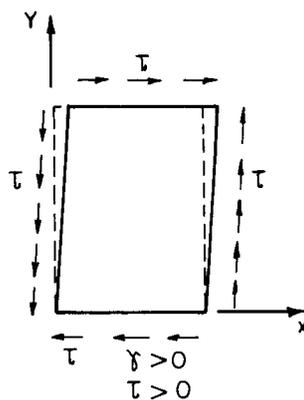


FIG. 2.3b

As deformações, do ponto de vista de aplicação prática, são classificadas em pequenas e grandes. Para o objetivo do presente trabalho, a teoria das pequenas deformações é suficiente.

O deslocamento sofrido por um ponto do corpo é definido aqui pelas componentes u , v e w , nas direções dos eixos X , Y e Z , respectivamente. A notação indicial também é

usada para representá-las, em virtude da facilidade oferecida para escrever; por exemplo, u_i representa as três componentes de deslocamento nos problemas tridimensionais.

As relações entre as componentes de deformação e de deslocamento são dadas pela fórmula 2.6 (veja-se, por exemplo, FUNG, 1965). Desta fórmula e de conceituações já fornecidas, conclui-se que u , v e w são positivas quando têm os mesmos sentidos dos eixos coordenados.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.6)$$

Admitindo-se material elástico-linear, as relações entre tensões e deformações num ponto genérico do corpo são dadas pela lei de Hooke generalizada, isto é,

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \frac{2\nu G}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} , \quad (2.7)$$

sendo

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} . \quad (2.8)$$

Nas relações acima, as constantes do material do corpo significam:

- a) E , módulo de elasticidade longitudinal ou simplesmente módulo de elasticidade;
- b) G , módulo de elasticidade transversal, também chamado de módulo de elasticidade ao cisalhamento;
- c) ν , coeficiente de Poisson.

2.2.3 - Estados planos

A análise de um corpo deve ser feita no espaço tridimensional, todavia em determinadas situações é conveniente fazê-la no espaço bidimensional. Nesse caso, adotam-se algumas modificações, a partir das quais se defi-

nem estados planos. Serão vistos aqui estados planos: de de formação, de tensão e completo de deformação.

Para se conceituar cada um dos estados planos, a-
dota-se um corpo de forma cilíndrica com geratriz paralela
ao eixo X_3 (fig. 2.4). Sendo assim, o plano que servirá de
base para análise do corpo é o plano definido pelos eixos
 X_1 e X_2 .

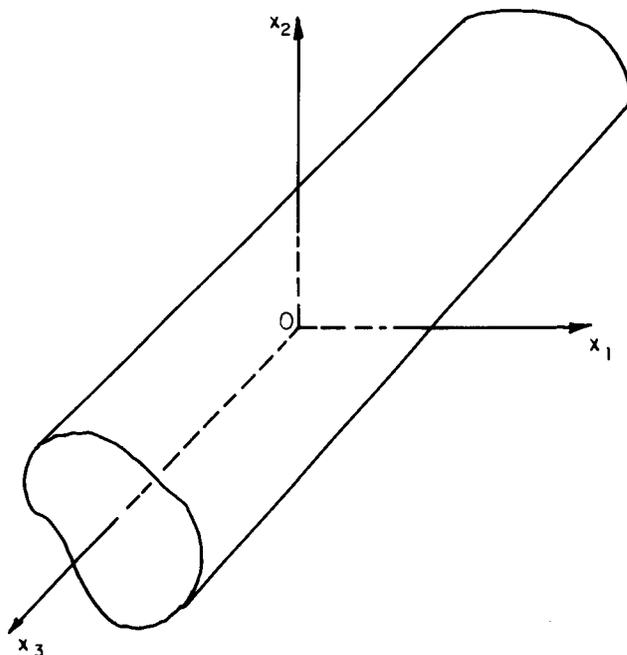


FIG. 2.4

Estado plano de deformação. As forças de superfí-
cie e de massa não têm componentes na direção do eixo X_3 , isto é, elas estão contidas em planos paralelos ao plano X_1X_2 e são independentes da coordenada x_3 ; a dimensão do corpo na direção do eixo X_3 deve ser muito maior que as dimensões nas direções dos eixos X_1 e X_2 . Com essas hipóteses é razoável supor que exista deslocamento somente em planos paralelos ao plano X_1X_2 e que independe da coordenada x_3 . É o caso, por exemplo, do muro de arrimo mostrado na fig. 2.5 sujeito à pressão do solo. Em resumo, o problema pode ser considerado como estado plano de deformação quando satisfaz as seguintes condições:

$$u_i = u_i(x_1, x_2) \quad \text{com } i = 1 \text{ e } 2 \quad (2.9a)$$

$$u_3 = 0 \quad (2.9b)$$

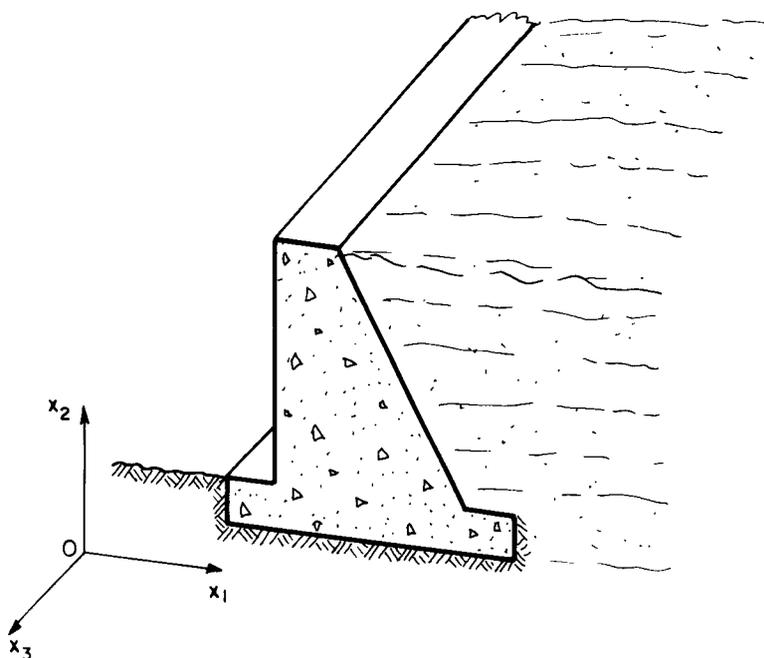


FIG. 2.5

Estado plano de tensão. Excetuando-se a hipótese da dimensão na direção do eixo X_3 ser muito maior que as dimensões representativas do corpo no plano, que agora deve ser muito menor, todas as outras são mantidas. Neste caso, as componentes σ_{31} , σ_{32} e σ_{33} são pequenas em comparação com as componentes no plano X_1X_2 (σ_{11} , σ_{12} e σ_{22}), e a variação dessas últimas em relação à coordenada x_3 é desprezível. É o caso, por exemplo, da chapa tracionada mostrada na fig. 2.6. Em resumo, o problema pode ser considerado como estado plano de tensão quando satisfaz as seguintes condições:

$$u_i = u_i(x_1, x_2) \quad \text{com } i = 1 \text{ e } 2 \quad (2.10a)$$

$$\sigma_{3j} = 0 \quad \text{com } j = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (2.10b)$$

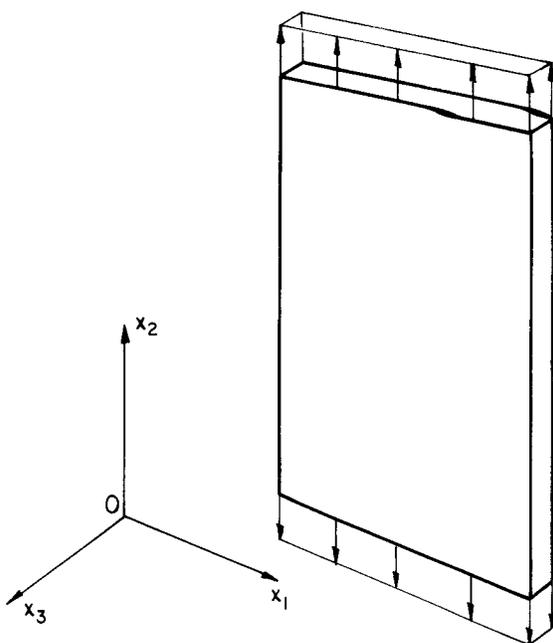


FIG. 2.6

Estado plano completo de deformação. A suposição do estado plano de deformação não pode ser admitida, por exemplo, no caso de um túnel com eixo de abertura não paralelo a uma das direções das tensões principais. Em casos como esse é perfeitamente aceitável substituir a condição de deslocamento nulo na direção do eixo X_3 , pela de deslocamento constante. Define-se, assim, um novo estado plano, chamado de estado plano completo de deformação. Neste estado, o corpo é tratado no espaço bidimensional, mas o deslocamento de um ponto tem representação tridimensional. As condições que definem o estado plano completo de deformação são:

$$u_i = u_i(x_1, x_2) \quad \text{com } i = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_3} = 0 \quad (2.11b)$$

É comum no trabalhos que consideram estados planos, as fórmulas serem deduzidas basicamente para o estado

plano de deformação. Essa tendência é quase que natural, por ser o estado que dá maior flexibilidade para uso de suas fórmulas nos outros estados planos. A adaptação das fórmulas para o estado plano de tensão se faz substituindo o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν por equivalentes \bar{E} e $\bar{\nu}$, respectivamente. Comparando fórmulas de deformação nos dois estados resultam as seguintes relações:

$$\bar{E} = E \frac{1+2\nu}{(1+\nu)^2} \quad (2.12a)$$

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu} \quad (2.12b)$$

2.3 - Força unitária

2.3.1 - Considerações preliminares

Seja um meio contínuo, elástico-linear, no qual se aplica uma força unitária no ponto q (fig.2.7), usualmente chamado de ponto de carga ou fonte. O ponto s , genérico, é o local para o cálculo dos efeitos da força unitária.

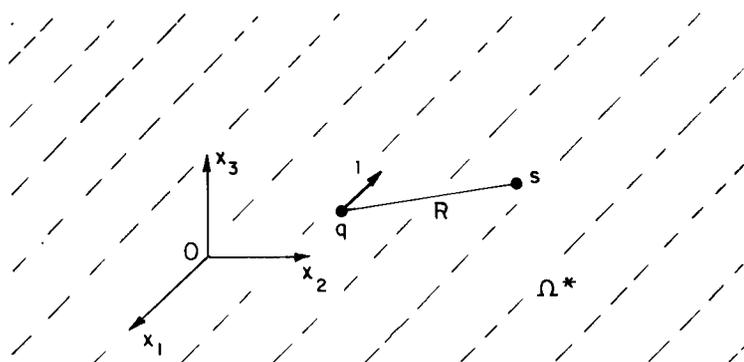


FIG. 2.7

Essa configuração pode parecer pouco física, mas ela é somente uma ferramenta matemática de base utilizada para a análise de problemas reais.

As soluções aqui definidas como fundamentais são o deslocamento e a tensão, no ponto s , provenientes da aplicação da força unitária no ponto q , numa das direções dos eixos coordenados.

2.3.2 - Solução de Kelvin

As componentes de deslocamento no ponto s , devido à força unitária em q , são determinadas por meio da equação 2.5b. Nela se deve substituir as componentes de tensão por expressões envolvendo componentes de deslocamento, bem como adaptar as componentes de força de massa ao problema em análise.

Introduzindo-se a relação 2.6 na relação 2.7, a lei de Hooke toma a seguinte forma:

$$\sigma_{ij}^* = G(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) + \frac{2\nu G}{1-2\nu} u_{k,k}^* \delta_{ij} \quad (2.13)$$

O domínio do problema em consideração é infinito (razão do uso do asterisco nas componentes de tensão e deslocamento) e nele atua somente uma força concentrada, de intensidade unitária. A consideração dessa força na formulação matemática é feita através do delta de Dirac. Isto é, as componentes b_i , de força de massa, devem ser substituídas pela expressão abaixo, onde $c_i(q)$ é co-seno do ângulo entre a força e o eixo X_i .

$$\delta(q,s)c_i(q) \quad (2.14)$$

Essa expressão satisfaz a condição de força concentrada, pois $\delta(q,s)$ é nulo para $s \neq q$ e é infinito quando $s = q$, sendo sua resultante unitária (veja-se condição 2.4c).

A equação 2.5b adaptada ao problema em questão é escrita assim:

$$\sigma_{ij,j}^* + \delta(q,s)c_i(q) = 0 \quad (2.15)$$

Derivando-se a relação 2.13 em relação à coordenada do eixo X_j e introduzindo-se em 2.15, resulta, após arranjo algébrico conveniente, a equação abaixo, conhecida como equação de Navier para o problema fundamental.

$$u_{i,jj}^* + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji}^* + \frac{1}{G} \delta(q,s)c_i(q) = 0 \quad (2.16)$$

Uma solução dessa equação diferencial no domínio Ω^* , para um ponto "s" diferente de "q", é dada pela fórmula 2.17. Esta solução representa as componentes de deslocamento no ponto s, relativamente ao sistema cartesiano adotado, devido a uma força unitária aplicada no ponto q, na direção e sentido do eixo X_i .

$$u_{ij}^*(q,s) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)GR} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + R_{,iR,j} \right] \quad (2.17)$$

Conforme se verificará no decorrer deste trabalho, os resultados obtidos de cada problema têm como ferramenta básica essa expressão. Ela é chamada de solução fundamental, porém, classicamente, recebe o nome de solução de Kelvin, por ter sido primeiramente proposta por ele (veja-se, por exemplo, LOVE, 1944).

Tomando-se, como exemplo, uma força unitária na direção e sentido de X_2 , pode-se representar as correspondentes componentes de deslocamento por u_{2j}^* , que representadas graficamente se apresentam como mostra a fig. 2.8. No caso de existirem forças nas três direções ortogonais, agindo simultaneamente, o deslocamento resultante, por exemplo, na direção de X_2 é:

$$u_{12}^*(q,s) + u_{22}^*(q,s) + u_{32}^*(q,s) \quad (2.18)$$

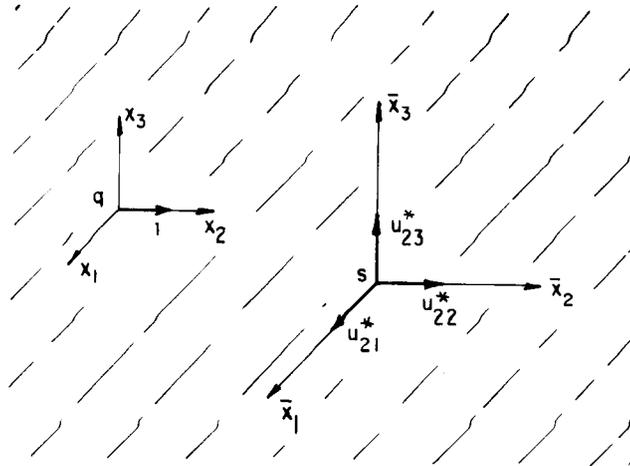


FIG. 2.8

A solução de Kelvin adaptada ao plano X_1X_2 (fig. 2.4), é matematicamente obtida eliminando-se em 2.17 a coordenada do eixo na direção da normal ao plano, no caso o eixo X_3 . Consegue-se isso por meio da seguinte integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{ij}^*(q, s) dx_3(q) \quad (2.19)$$

Para se calcular essa integral, as relações abaixo são necessárias. Os parâmetros R , r e α estão representados na fig. 2.9.

$$x_3 = r \operatorname{tg} \alpha \quad (2.20a)$$

$$R = r \operatorname{sec} \alpha \quad (2.20b)$$

$$R_{,k} = (x_k(s) - x_k(q)) / R \quad (2.20c)$$

No caso da componente de deslocamento ter a mesma direção da força aplicada, o resultado obtido é composto de uma parte finita e de uma infinita. Fisicamente se interpreta a parte infinita como um deslocamento de corpo rígido.

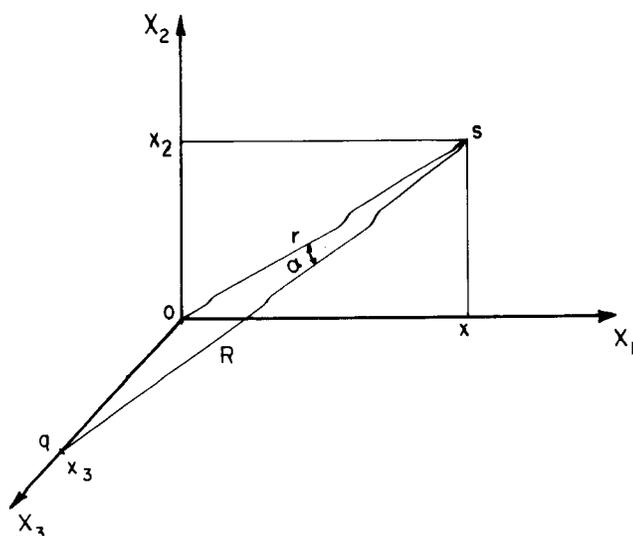


FIG. 2.9

No plano de definição da estrutura, a solução fundamental é dada pela fórmula 2.21, na qual os índices i e j assumem os valores 1 e 2.

$$u_{ij}^*(q,s) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[-(3-4\nu) \ln r \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (2.21)$$

A componente de deslocamento, na direção normal ao plano, é dada pela seguinte fórmula:

$$u_{33}^*(q,s) = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)G} \left[(1-\nu) \ln r + \frac{1}{4} \right] \quad (2.22)$$

Observando-se as fórmulas 2.21 e 2.22, conclui-se que não há influência da força com direção da normal ao plano nas componentes $u_{ij}^*(q,s)$ e nem da força planar na componente $u_{33}^*(q,s)$. Convém também observar que a força não é mais concentrada e sim uniformemente distribuída ao longo do eixo X_3 , com intensidade unitária por unidade de comprimento. A força concentrada no plano, na realidade, é a resultante numa unidade de comprimento (fig.2.10).

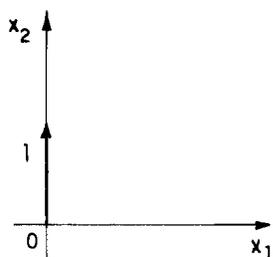


FIG. 2.10 a

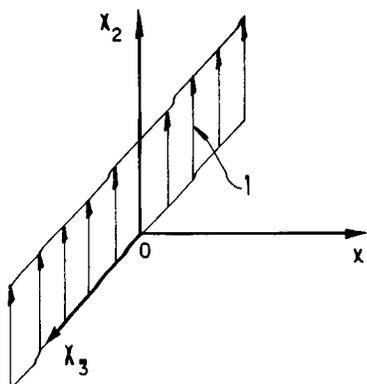


FIG. 2.10 b

2.3.3 - Tensão

As componentes de tensão no ponto s , devido à força unitária aplicada no ponto q não coincidente com s , são obtidas por meio de 2.13. Para uso dessa fórmula, precisa-se das derivadas das componentes de deslocamento em relação às coordenadas, no ponto s . Elas são obtidas facilmente derivando-se a solução fundamental, de uma força na direção ℓ , em relação à coordenada de um eixo. Tomando-se uma componente $u_{\ell i}^*(q, s)$ e um eixo X_j resulta:

$$u_{\ell i}^*(q, s) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)GR^2} \left[-(3-4\nu)\delta_{i\ell}^{R,j} - 3R_{,i}^{R,j} R_{, \ell} + \delta_{ij}^{R, \ell} + \delta_{\ell j}^{R, i} \right] \quad (2.23)$$

Introduzindo-se essa fórmula em 2.13, convenientemente adaptada, resulta, após arranjo algébrico adequado,

$$\sigma_{\ell ij}^*(q, s) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)R^2} \left[(1-2\nu)(\delta_{ij}^{R, \ell} - \delta_{i\ell}^{R, j} - \delta_{j\ell}^{R, i}) + - 3R_{,i}^{R,j} R_{, \ell} \right] \quad (2.24)$$

No espaço bidimensional as componentes de tensão são dadas pela fórmula 2.25. Para se obtê-la, deve-se proceder como na adaptação da solução de Kelvin, do espaço tridimensional para o bidimensional.

$$\sigma_{ij}^*(q, s) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{ij}^{r, \ell} - \delta_{i\ell}^{r, j} - \delta_{j\ell}^{r, i}) + \right. \\ \left. - 2r_{,i}^{r, j} r_{,j}^{r, \ell} \right] \quad (2.25)$$

As fórmulas 2.24 e 2.25 podem ser compactadas numa única (fórmula 2.26), sendo que:

- a) no espaço bidimensional $\alpha = 1$ e $\beta = 2$;
- b) no espaço tridimensional $\alpha = 2$ e $\beta = 3$.

$$\sigma_{ij}^*(q, s) = \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left[(1-2\nu)(\delta_{ij}^{r, \ell} - \delta_{i\ell}^{r, j} - \delta_{j\ell}^{r, i}) + \right. \\ \left. - \beta r_{,i}^{r, j} r_{,j}^{r, \ell} \right] \quad (2.26)$$

2.3.4 - Força de superfície

A uma distribuição de força ao longo de uma superfície se dá o nome de força de superfície. Suas componentes são positivas quando têm os mesmos sentidos dos eixos coordenados. No caso particular de ter a mesma direção da normal à superfície e estar orientada para dentro do corpo, recebe o nome de pressão.

As componentes de força de superfície, aqui denotadas de p_i , são definidas matematicamente em função das componentes de tensão de um ponto de superfície. Para isso se retira de um corpo um elemento piramidal (fig.2.11), podendo a face inclinada em relação aos eixos coordenados ser um elemento de superfície do corpo (contorno).

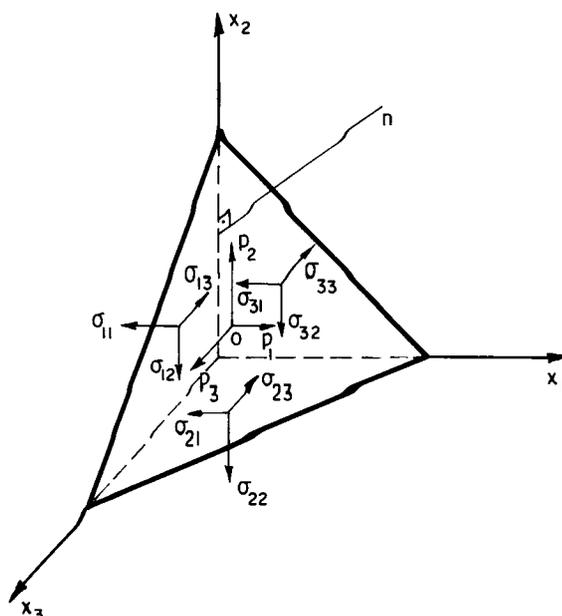


FIG. 2.11

Os somat6rios das for7as atuantes nesse elemento, nas dire76es dos eixos X_1 , X_2 e X_3 , fornecem a f6rmula abaixo, onde n_j 6 o co-seno do 6ngulo entre a normal 6 face inclinada e o eixo X_j .

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.27)$$

Introduzindo-se, nessa f6rmula, as componentes de tens6o devido 6 for7a concentrada unit6ria, numa dire76o ℓ , obt6m-se as componentes $p_{\ell i}^*(q, s)$, de for7a de superf6cie, dada pela f6rmula abaixo. Esta f6rmula 6 v6lida tamb6m para o caso do ponto s pertencer ao contorno, isto 6, quando $s \equiv S$.

$$p_{\ell i}^*(q, s) = - \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{i\ell} + \beta r_{,i} r_{,\ell} \right] r_{,n} + (1-2\nu)(r_{,\ell} n_i - r_{,i} n_\ell) \right\} \quad (2.28)$$

Os valores atribuidos a α e β s6o os j6 citados anteriormente. A derivada de r em rela76o 6 coordenada n da reta normal 6 superf6cie em considera76o, no ponto s ou S , equivale a $\frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial n}$ que pode ser escrita por $r_{,i} n_i$.

2.4 - Quadripolos

2.4.1 - Conceituação física

A descontinuidade geométrica tratada neste trabalho possui uma abertura cuja medida é muito menor do que aquela que caracteriza o seu comprimento (fig.2.12a), podendo também essa abertura ser nula (fig.2.12b).

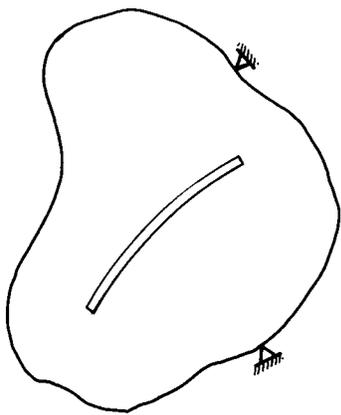


FIG. 2.12a

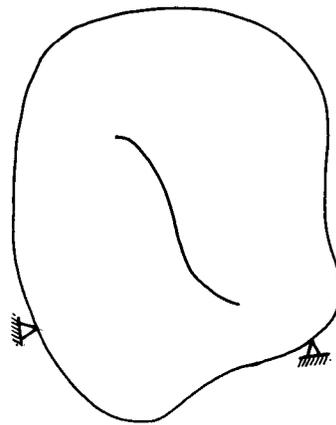


FIG. 2.12 b

A simulação da descontinuidade, conforme se verá posteriormente, é feita com o uso de equações integrais. Os quadripolos, a seguir apresentados, são os elementos básicos para avaliação dos efeitos devido à presença da descontinuidade no corpo.

Para se entender fisicamente como isso será feito, toma-se um corpo homogêneo e isótropo (fig.2.13), submetido a tensão de tração σ_y , constante ao longo do corpo.

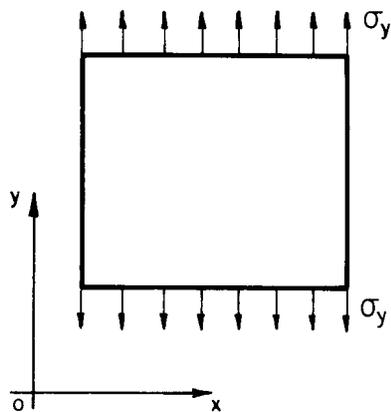


FIG. 2.13

Suponha-se que seja feito nesse corpo, por meio de um recurso qualquer, uma fenda horizontal (fig.2.14), sem alterar as condições de contorno. Agora, em face da presença da fenda (tensões nulas nas bordas superior e inferior), as tensões não são mais constante ao longo do corpo.

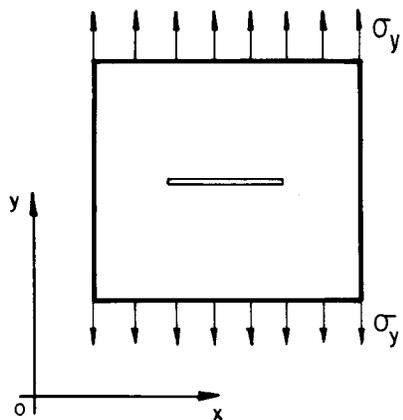


FIG. 2.14

Objetiva-se determinar a solução desse problema através da solução do problema proposto na fig. 2.13, em virtude dessa última ser de fácil obtenção. O caminho adotado para resolução do problema é supor, no corpo com a fenda, o mesmo estado de tensão do corpo sem descontinuidade e fazer correções usando-se efeitos de forças virtuais auto-equilibradas, aplicadas no contorno da fenda. As figuras abaixo, ampliadas, ajudam a esclarecer o assunto.

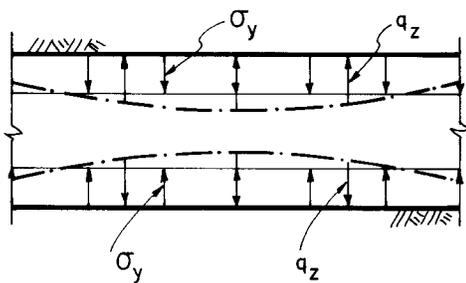


FIG. 2.15a

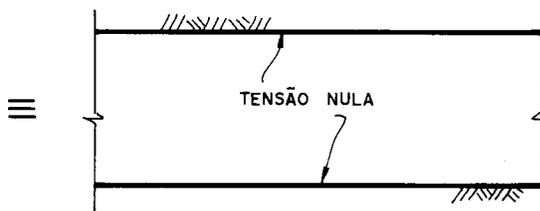


FIG. 2.15b

Acaba-se, assim, de mostrar um caminho para resolução de problemas com descontinuidade. É claro que no caso geral, além da tensão normal ao contorno da descontinuidade, existe a tensão tangencial, implicando na determinação de correspondente forças virtuais auto-equilibradas, no contorno da descontinuidade.

A idéia do processo de resolução é distribuir convenientemente forças virtuais ao longo do contorno da descontinuidade, de modo que as condições requeridas para o contorno da descontinuidade sejam satisfeitas. Essas forças, conforme se verá no subitem seguinte, dão origem a bipolos e a quadripolos.

2.4.2 - Quadripolos

Adota-se aqui o estado plano completo de deformação. Os eixos coordenados do sistema cartesiano, para cálculo de esforços e deslocamentos apresentam a disposição mostrada na fig. 2.16. O plano XZ será o plano de análise de uma estrutura.

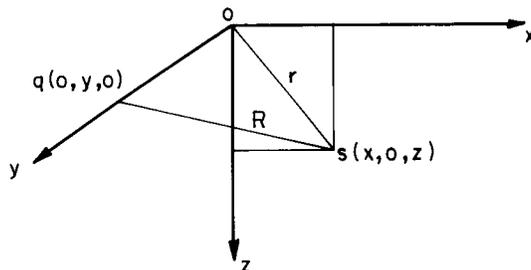


FIG. 2.16

Conforme a conceituação apresentada no subitem anterior, percebe-se que é necessário calcular os efeitos de duas forças com intensidades iguais e sentidos opostos, agindo em pontos próximos (abertura da fenda), cuja distância entre eles é assumida igual a $2a$. Primeiramente se analisa o caso de duas forças normais ao contorno da descontinuidade (fig. 2.17).

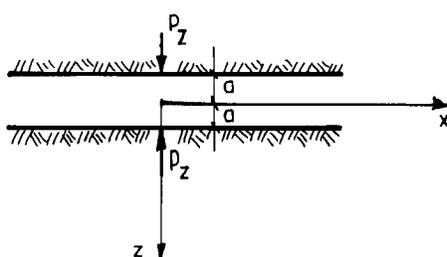


FIG. 2.17

As fórmulas que fornecem os efeitos da força unitária, localizada na origem do sistema cartesiano, devem ser adaptadas para força unitária fora da origem, porém localizada num dos eixos. A mudança de posição da força unitária leva a uma variação dos efeitos em termos de deslocamento e tensão (veja-se TIMOSHENKO, 1980). Por exemplo, a força P_z (fig.2.18), num meio elástico-linear, define no ponto no ponto s as seguintes componentes na direção do eixo Z:

$$p_z \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \cdot a \right) \quad (2.29a)$$

$$p_z \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot a \right) \quad (2.29b)$$

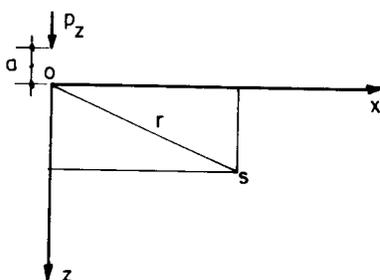


FIG. 2.18

Os parâmetros σ_z e w são obtidos através de 2.25 e 2.21, respectivamente. Quando a força é a simétrica da anterior em relação ao eixo X (fig.2.19), têm-se:

$$- p_z \left(\sigma_z - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \cdot a \right) \quad (2.30a)$$

$$- p_z \left(w - \frac{\partial w}{\partial z} \cdot a \right) \quad (2.30b)$$

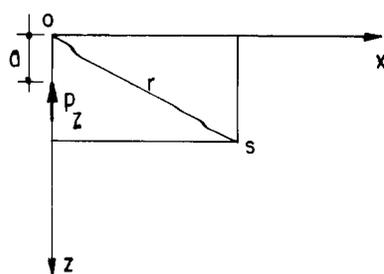


FIG. 2.19

Adicionando-se algebricamente as expressões 2.29a e 2.30a, e 2.29b e 2.30b resultam as expressões abaixo. Estas expressões representam, na ordem disposta, as componentes de tensão e deslocamento, na direção do eixo Z, devido às forças da fig. 2.17. As demais componentes planares são obtidas calculando-se a taxa de variação em relação à coordenada z das correspondentes componentes, dadas pelas fórmulas 2.21 e 2.25, e multiplicando-se pela quantidade $2ap_z$.

$$2ap_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad (2.31a)$$

$$2ap_z \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.31b)$$

A presença da quantidade $2ap_z$ faz lembrar uma outra existente em Eletrostática, mais especificamente no estudo do campo elétrico. Nesse estudo, duas cargas elétricas com intensidades iguais e sinais opostos, e separados por uma pequena distância, relativamente às dimensões do problema do campo elétrico, constitui um dipolo (dipolo elétrico). Por analogia, a quantidade $2ap_z$ constitui também um dipolo, o qual se define por q_z .

A aplicação do dipolo q_z produz "empuxo" no meio entre os pontos de aplicação das forças, causando perturbações indesejáveis na distribuição de tensão, devido ao coeficiente de Poisson. Para suprimir o empuxo devido a q_z , deve-se aplicar um dipolo \bar{q}_x (fig.2.20) tal que impeça a deformação na direção transversal. Essa colocação aplicada nas equações de estado plano de deformação ou nas do estado pla-

no completo de deformação dá origem a seguinte relação:

$$\bar{q}_X = \frac{\nu}{1-\nu} q_Z \quad (2.32)$$

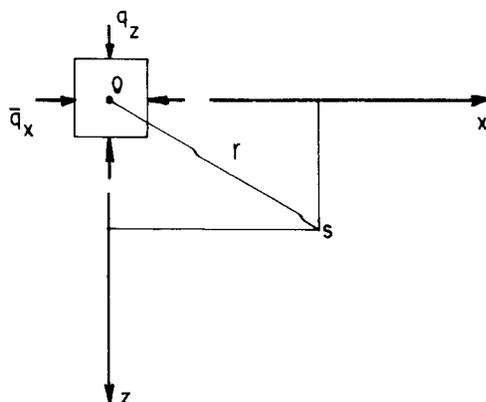


FIG. 2.20

As componentes de tensão e deslocamento, provenientes do dipolo \bar{q}_x , são deduzidas seguindo o mesmo caminho apresentado para o dipolo q_z . De tal procedimento resulta, por exemplo, para as componentes de tensão normal e deslocamento, na direção de Z,

$$\bar{q}_x \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} \quad e \quad (2.33a)$$

$$\bar{q}_x \frac{\partial w}{\partial x} \quad . \quad (2.33b)$$

Adicionando-se os resultados 2.31a e 2.33a, e 2.31b e 2.33b, obtêm-se as componentes de tensão normal e deslocamento, na direção do eixo Z, devido à ação simultânea de q_z e \bar{q}_x . Procedimento similar deve ser adotado para obtenção das demais componentes. Dá-se o nome de "quadripolo" à associação dos dipolos q_z e \bar{q}_x , também chamada de quadripolo normal ou, ainda, de quadripolo q_z .

Em adição ao quadripolo normal, requerido como gerador de tensão normal ao longo do contorno da descontinuidade, são necessários outros que permitam junto com esse

satisfazer as condições de contorno na descontinuidade. Os novos quadripolos são requeridos como gerador das tensões tangenciais τ_{zx} e τ_{zy} .

O quadripolo correspondente a τ_{zx} , chamado de q_x , é constituído pelos bipoles q_x e \bar{q}_z (fig.2.21). O efeito rotacional de um bipolo é eliminado pela presença do outro, o que se leva a concluir que suas intensidades são iguais. As componentes de tensão e deslocamento devido ao quadripolo q_x são obtidos seguindo o mesmo caminho adotado para o quadripolo q_z .

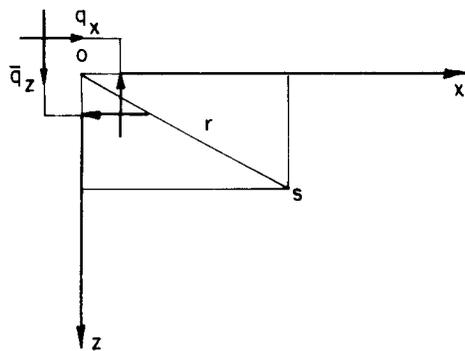


FIG. 2.21

Procedimento similar é usado para o quadripolo correspondente a τ_{zy} , chamado de quadripolo q_y . A ilustração abaixo mostra no plano YZ os bipoles que definem o quadripolo q_y .

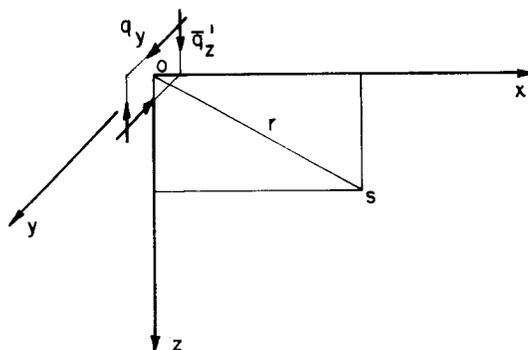


FIG. 2.22

Apresentam-se, a seguir, as fórmulas das componentes não nulas de tensão e deslocamento, no ponto s do plano XZ, induzidas por quadripolos.

Quadripolo q_z .

$$\sigma_x = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} q_z \cdot \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{8z^2}{r^2} + \frac{8z^4}{r^4}\right) \quad (2.34a)$$

$$\sigma_z = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} q_z \cdot \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{4z^2}{r^2} - \frac{8z^4}{r^4}\right) \quad (2.34b)$$

$$\sigma_y = - \frac{2\nu(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)^2} q_z \cdot \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2z^2}{r^2}\right) \quad (2.34c)$$

$$\tau_{zx} = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} q_z \cdot \frac{2xz}{r^4} \left(1 - \frac{4z^2}{r^2}\right) \quad (2.34d)$$

$$u = + \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)^2 G} q_z \frac{x}{r^2} \left(1-2\nu - \frac{2z^2}{r^2}\right) \quad (2.34e)$$

$$w = - \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)^2 G} q_z \frac{z}{r^2} \left(1-2\nu + \frac{2z^2}{r^2}\right) \quad (2.34f)$$

Quadripolo q_x .

$$\sigma_x = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} q_x \frac{2xz}{r^4} \left(-3 + \frac{4z^2}{r^2}\right) \quad (2.35a)$$

$$\sigma_z = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} q_x \frac{2xz}{r^4} \left(1 - \frac{4z^2}{r^2}\right) \quad (2.35b)$$

$$\sigma_y = + \frac{\nu}{2\pi(1-\nu)} q_x \frac{4xz}{r^4} \quad (2.35c)$$

$$\tau_{zx} = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} q_x \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{8z^2}{r^2} + \frac{8z^4}{r^4}\right) \quad (2.35d)$$

$$u = + \frac{1}{4\pi(1-\nu)G} q_x \frac{z}{r^2} (-3+2\nu + \frac{2z^2}{r^2}) \quad (2.35e)$$

$$w = - \frac{1}{4\pi(1-\nu)G} q_x \frac{x}{r^2} (1-2\nu + \frac{2z^2}{r^2}) \quad (2.35f)$$

Quadripolo q_y .

$$\tau_{xy} = + \frac{1}{2\pi} q_y \frac{2xz}{r^4} \quad (2.36a)$$

$$\tau_{zy} = + \frac{1}{2\pi} q_y \frac{1}{r^2} (-1 + \frac{2z^2}{r^2}) \quad (2.36b)$$

$$v = - \frac{1}{2\pi G} q_y \frac{z}{r^2} \quad (2.36c)$$

2.4.3 - Distribuição linear de quadripolos

Analisa-se aqui o caso de uma distribuição linear de quadripolos ao longo de um segmento de reta, de comprimento "2c" (fig.2.23). Para que essa distribuição seja determinada se supõe que sejam conhecidos seus valores nas coordenadas $-c_1$ e c_2 , respectivamente, q_1 e q_2 . Pode-se, assim, escrever que

$$q = m\bar{x} + b, \quad (2.37)$$

onde

$$m = \frac{q_2 - q_1}{c_1 + c_2}, \quad (2.38a)$$

$$b = \frac{q_1 c_2 + q_2 c_1}{c_1 + c_2} \quad e \quad (2.38b)$$

$$-c \leq \bar{x} \leq +c \quad . \quad (2.38c)$$

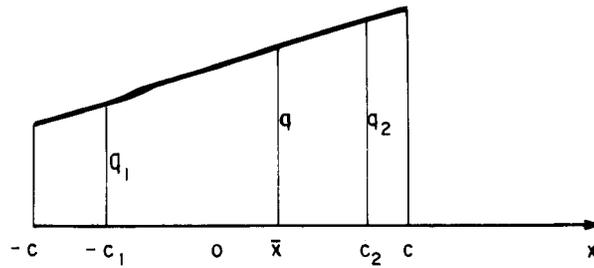


FIG. 2.23

Os efeitos dessa distribuição são calculados por meio de integrais, usando-se fórmulas já deduzidas. Por exemplo, se a distribuição acima representar quadripolos q_x , a tensão normal, na direção do eixo X, é dada pela seguinte integral:

$$\int_{-c}^{+c} \sigma_x dx \quad (2.39)$$

Procedendo-se de maneira similar para o cálculo das outras componentes e também para as componentes provenientes dos outros quadripolos, resultam as fórmulas abaixo apresentadas. Supõe-se, nestas fórmulas, que a coordenada z não seja nula, pois caso contrário outras considerações são em geral necessárias. Não serão relacionadas as componentes identicamente nulas.

Quadripolos q_z .

$$\sigma_x = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} (I_1 - 8z^2 I_2 + 8z^4 I_3) \quad (2.40a)$$

$$\sigma_z = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} (I_1 + 4z^2 I_2 - 8z^4 I_3) \quad (2.40b)$$

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) \quad (2.40c)$$

$$\tau_{zx} = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} (2z I_5 - 8z^3 I_6) \quad (2.40d)$$

$$u = + \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)^2 G} \left[(1-2\nu)I_4 - 2z^2 I_5 \right] \quad (2.40e)$$

$$w = + \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)^2 G} \left[(1-2\nu)zI_1 + 2z^3 I_2 \right] \quad (2.40f)$$

Quadripolos q_x .

$$\sigma_x = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} (-6zI_5 + 8z^3 I_6) \quad (2.41a)$$

$$\sigma_z = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} (2zI_5 - 8z^3 I_6) \quad (2.41b)$$

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) \quad (2.41c)$$

$$\tau_{zx} = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} (I_1 - 8z^2 I_2 + 8z^4 I_3) \quad (2.41d)$$

$$u = + \frac{1}{4\pi(1-\nu)G} \left[-(3-2\nu)zI_1 + 2z^3 I_2 \right] \quad (2.41e)$$

$$w = + \frac{1}{4\pi(1-\nu)G} \left[(1-2\nu)I_4 + 2z^2 I_5 \right] \quad (2.41f)$$

Quadripolos q_y .

$$\tau_{xy} = + \frac{1}{2\pi} 2zI_5 \quad (2.42a)$$

$$\tau_{zy} = + \frac{1}{2\pi} (-I_1 + 2z^2 I_2) \quad (2.42b)$$

$$v = - \frac{1}{2\pi G} zI_1 \quad (2.42c)$$

As constantes I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 e I_6 representam integrais entre os limites $-c$ e $+c$. São elas:

$$I_1 = \frac{m}{2} \ln \left[(x-\bar{x})^2 + z^2 \right] - \frac{mx+b}{z} \operatorname{arctg} \frac{x-\bar{x}}{z} \Bigg|_{\bar{x}=-c}^{\bar{x}=+c} \quad (2.43a)$$

$$I_2 = - \frac{m}{2 \left[(x-\bar{x})^2 + z^2 \right]} - (mx+b) \left(\frac{x-\bar{x}}{2z^2 \left[(x-\bar{x})^2 + z^2 \right]} + \frac{1}{2z^3} \operatorname{arctg} \frac{x-\bar{x}}{z} \right) \Bigg|_{\bar{x}=-c}^{\bar{x}=+c} \quad (2.43b)$$

$$I_3 = - \frac{m}{4 \left[(x-\bar{x})^2 + z^2 \right]^2} - (mx+b) \left(\frac{x-\bar{x}}{4z^2 \left[(x-\bar{x})^2 + z^2 \right]^2} + \frac{3(x-\bar{x})}{8z^4 \left[(x-\bar{x})^2 + z^2 \right]} + \frac{3}{8z^5} \operatorname{arctg} \frac{x-\bar{x}}{z} \right) \Bigg|_{\bar{x}=-c}^{\bar{x}=+c} \quad (2.43c)$$

$$I_4 = m \left[(x-\bar{x}) - z \operatorname{arctg} \frac{x-\bar{x}}{z} \right] - \frac{1}{2} (mx+b) \ln \left[(x-\bar{x})^2 + z^2 \right] \Bigg|_{\bar{x}=-c}^{\bar{x}=+c} \quad (2.43d)$$

$$I_5 = m \left(- \frac{x-\bar{x}}{2 \left[(x-\bar{x})^2 + z^2 \right]} + \frac{1}{2z} \operatorname{arctg} \frac{x-\bar{x}}{z} \right) + (mx+b) \cdot \frac{1}{2 \left[(x-\bar{x})^2 + z^2 \right]} \Bigg|_{\bar{x}=-c}^{\bar{x}=+c} \quad (2.43e)$$

$$\begin{aligned}
 I_6 = m \left(\frac{x-\bar{x}}{2z^2 \left[(x-\bar{x})^2 + z^2 \right]} + \frac{1}{2z^3} \operatorname{arctg} \frac{x-\bar{x}}{z} - \frac{x-\bar{x}}{4 \left[(x-\bar{x})^2 + z^2 \right]^2} + \right. \\
 \left. - \frac{3(x-\bar{x})}{8z^2 \left[(x-\bar{x})^2 + z^2 \right]} - \frac{3}{8z^3} \operatorname{arctg} \frac{x-\bar{x}}{z} \right) + \\
 + (mx+b) \cdot \frac{1}{4 \left[(x-\bar{x})^2 + z^2 \right]^2} \Bigg|_{\substack{\bar{x}=+c \\ \bar{x}=-c}}
 \end{aligned} \tag{2.43f}$$

2.5 - Uma aplicação de quadripolos

Seja um meio infinito, elástico-linear, submetido a tensão de compressão constante, de intensidade unitária, na direção do eixo Z. Suponha-se que uma fenda horizontal de comprimento 2c (fig.2.24) seja feita nesse meio, cuja presença será analisada considerando o estado plano de deformação.

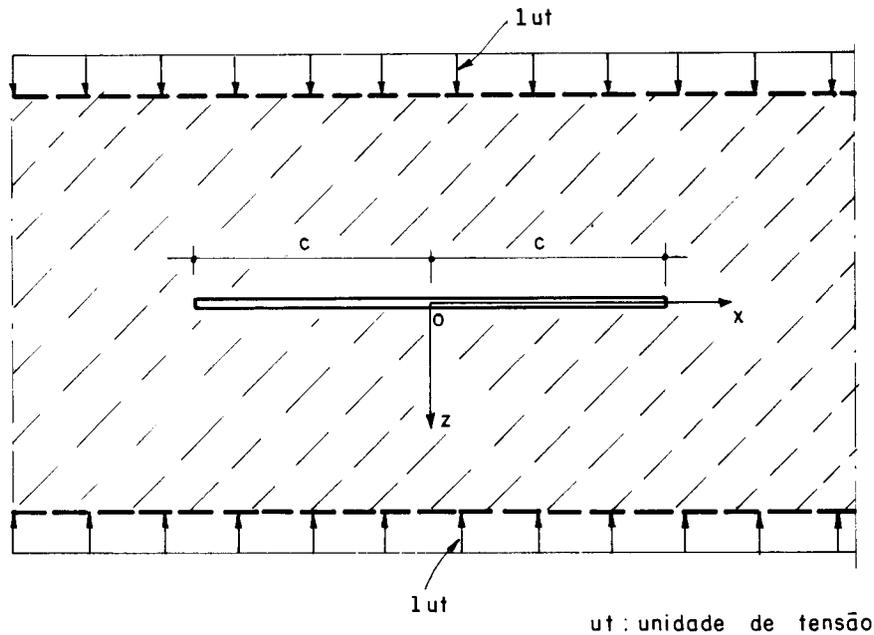


FIG. 2.24

As tensões nos pontos do meio infinito, sem a presença da fenda, têm intensidades unitárias. Com a descontinuidade, esse estado de tensão é alterado, mais acentuadamente nas vizinhanças da fenda. Para simular a presença da fenda deve-se procurar distribuições de quadripolos ao longo dela tal que satisfaçam suas condições de contorno ($\sigma_z = 0$, $\tau_{zx} = 0$ e $\tau_{zy} = 0$). Na realidade deve ser satisfeita apenas $\sigma_z = 0$, pois as outras provêm da própria natureza do problema.

É aceitável admitir que os pontos do contorno da fenda tenham coordenada z nula, pois sua abertura é muito pequena em relação a seu comprimento. A fórmula 2.34b, por exemplo, particularizada para pontos do plano de abertura é:

$$\sigma_z = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} \cdot q_z \cdot \frac{1}{x^2} \quad (2.44)$$

A distribuição de quadripolos q_z ao longo da descontinuidade (função $q_z(\bar{x})$) deve ser de tal forma que as tensões σ_z no contorno da fenda, provenientes dessa distribuição, sejam iguais, positivas e de intensidades unitárias. Matematicamente a função $q_z(\bar{x})$ deve satisfazer a equação 2.45, na qual os parâmetros x_i e \bar{x} representam o local para cálculo de σ_z (definido em $-c < x_i < +c$) e a variável de integração, respectivamente.

$$-1 - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} \int_{-c}^{+c} \frac{q_z(\bar{x})}{(x_i - \bar{x})^2} d\bar{x} = 0 \quad (2.45)$$

A resolução dessa equação analiticamente é feita aqui por tentativas. É claro que a função $q_z(\bar{x})$ é simétrica em relação ao eixo Z . Conclui-se, ainda, dessa equação, que os quadripolos devem ter uma distribuição tal que a expressão resultante, após se fazer a integração, não contenha x_i . Por tentativas se chega a função do tipo abaixo (veja-se BRADY and BRAY, 1978).

$$q_z(\bar{x}) = \frac{q_0}{c} (c^2 - \bar{x}^2)^{1/2} \quad (2.46)$$

Supõe-se, dessa maneira, que a intensidade de $q_z(\bar{x})$ varia elipticamente com respeito à coordenada intrínseca (fig.2.25).

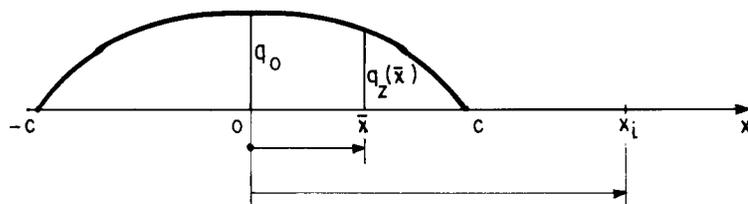


FIG. 2. 25

Introduzindo-se a função $q_z(\bar{x})$ na equação 2.45 resulta:

$$-1 - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} \frac{q_0}{c} \int_{-c}^{+c} \frac{\sqrt{c^2 - \bar{x}^2}}{(x_i - \bar{x})^2} d\bar{x} = 0 \quad (2.47)$$

O integrando da integral acima não é definido para \bar{x} igual a x_i . Por isso, usa-se o recurso abaixo, sendo ϵ uma quantidade positiva e pequena, relativamente ao domínio de integração.

$$\int_{-c}^{+c} \frac{\sqrt{c^2 - \bar{x}^2}}{(x_i - \bar{x})^2} d\bar{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-c}^{x_i - \epsilon} \frac{\sqrt{c^2 - \bar{x}^2}}{(x_i - \bar{x})^2} d\bar{x} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x_i + \epsilon}^{+c} \frac{\sqrt{c^2 - \bar{x}^2}}{(x_i - \bar{x})^2} d\bar{x} \quad (2.48)$$

Sem qualquer preocupação com o domínio de integração pode-se escrever que:

$$\int \frac{\sqrt{c^2 - \bar{x}^2}}{(x_i - \bar{x})^2} d\bar{x} = \frac{\sqrt{c^2 - \bar{x}^2}}{x_i - \bar{x}} - \arcsen\left(\frac{\bar{x}}{c}\right) +$$

$$+ \frac{x_i}{\sqrt{c^2 - x_i^2}} \ln \left| \frac{x_i \operatorname{tg}\left(\frac{\arcsen(\bar{x}/c)}{2}\right) - c - \sqrt{c^2 - x_i^2}}{x_i \operatorname{tg}\left(\frac{\arcsen(\bar{x}/c)}{2}\right) - c + \sqrt{c^2 - x_i^2}} \right| \quad (2.49)$$

Introduzindo-se essa integral no segundo membro de 2.48 resulta, após o cálculo dos limites,

$$\int_{-c}^{+c} \frac{\sqrt{c^2 - \bar{x}^2}}{(x_i - \bar{x})^2} d\bar{x} = -\pi, \quad (2.50)$$

o que conduz ao valor de q_o/c , na equação 2.47, isto é,

$$\frac{q_o}{c} = \frac{4(1-\nu)^2}{1-2\nu}. \quad (2.51)$$

Definida a função $q_z(\bar{x})$, as tensões σ_z nos pontos com coordenada z nula e $|x_i| > c$, devido à distribuição de quadripolos, são dadas pela seguinte fórmula:

$$\sigma_z = -\frac{1}{\pi} \int_{-c}^{+c} \frac{\sqrt{c^2 - \bar{x}^2}}{(x_i - \bar{x})^2} d\bar{x} \quad (2.52)$$

Como essa integral não apresenta singularidade se deduz facilmente que

$$\sigma_z = 1 - \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 - c^2}}. \quad (2.53)$$

Conclui-se dessa fórmula, como era de se esperar, que a presença da fenda altera substancialmente o estado de tensão dos pontos nas proximidades da descontinuidade, porém, só nas proximidades, conforme se mostra na fig. 2.26. As outras componentes de tensão e as componentes de deslocamento são obtidas seguindo caminho similar.

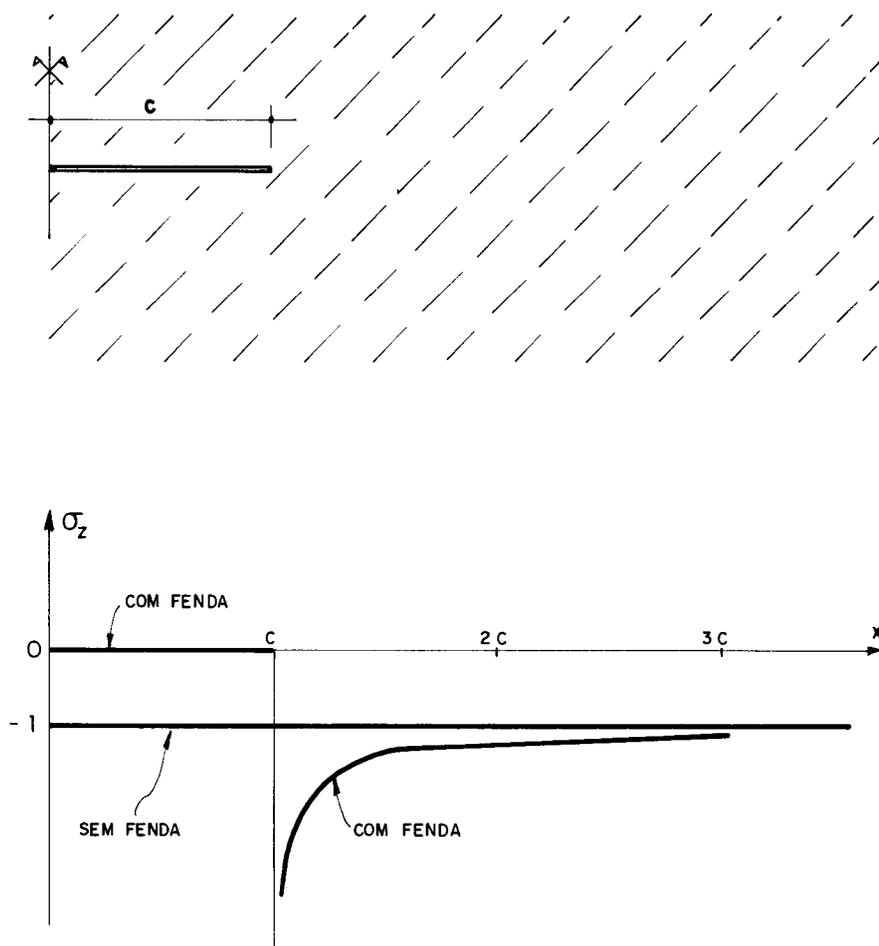


FIG. 2.26

Vê-se, assim, que a análise da influência da descontinuidade em corpos requer o emprego de processos numéricos. As funções representativas das distribuições de quadripolos, que satisfazem as condições de contorno na descontinuidade, são de difícil obtenção por meio analítico, mesmo em problemas simples. O uso de funções aproximadas é recomendado somente a alguns problemas, mas mesmo assim fica sujeito ao processo das tentativas.

III - FÓRMULAS INTEGRAIS BÁSICAS

3.1 - Introdução

Apresentam-se aqui as representações integrais de deslocamento e tensão para pontos internos de um corpo elástico-linear (fórmulas integrais básicas). Elas são as ferramentas básicas para resolução de problemas pelo método a ser apresentado na próxima parte deste trabalho. Essas fórmulas serão em geral deduzidas no espaço tridimensional, supondo que o corpo não apresente descontinuidade.

As deduções dessas representações requerem que sejam dadas conceituações, consideradas essenciais para validade e obtenção das mesmas. São elas: equação integral, condições de Hölder e Liapunov, integral de Cauchy e método dos resíduos ponderados. Procurar-se-ão apresentá-las dentro de um enfoque prático, sem maiores preocupações com a precisão das definições. Dá-se, após essas conceituações, uma aplicação prática de equação integral.

Do método dos resíduos ponderados se obterá uma relação entre erros de domínio e contorno, a partir da qual se chegará às fórmulas integrais básicas. O último item, desta parte do trabalho, tratará da apresentação do Método dos Elementos de Contorno.

3.2 - Conceituações básicas

3.2.1 - Equação integral

Equação integral é uma equação que envolve a integração de funções desconhecidas. Essa definição não é correta em sua plenitude (veja-se, por exemplo, ZABREYKO et al., 1968), mas ela é de grande importância na área de engenharia, tendo em vista o seu caráter prático.

Um dos tipos mais conhecidos de equação integral é a linear, principalmente a de segunda espécie. A mais simples formulação para tal equação é

$$\phi(x) - \int_{\lambda} K(x,t)\phi(t)dt = f(x). \quad (3.1)$$

A função ϕ é a função desconhecida (função incógnita) da equação integral, definida, assim como f , num conjunto real λ . A função $K(x,t)$, definida no produto de conjuntos $\lambda \times \lambda$, é chamada de núcleo de 3.1. No caso de não existir o primeiro termo do primeiro membro da equação 3.1, a equação integral linear resultante é de primeira espécie.

Convém lembrar que a equação é linear porque o operador integral satisfaz as propriedades de linearidade, isto é,

$$L(u+v) = L(u) + L(v) \quad e \quad (3.2a)$$

$$L(\alpha u) = \alpha L(u) \quad , \quad (3.2b)$$

onde L é um operador, no caso operador integral, u e v são, em geral, funções, e α é uma constante.

As equações integrais de primeira e segunda espécies podem ser classificadas com equações de Fredholm se, além da linearidade, o núcleo $K(x,t)$ e a função $f(x)$, que são funções reais e contínuas, satisfazem, respectivamente,

$$\iint_{\lambda\lambda} |K(x,t)|^2 dxdt < \infty \quad e \quad (3.3a)$$

$$\int_{\lambda} |f(x)|^2 dx < \infty . \quad (3.3b)$$

A equação

$$\phi(x) - \int_1^{\infty} e^{-xt} \phi(t) dt = 0 , \quad (3.4)$$

por exemplo, é do tipo Fredholm, pois

$$\iint_{11}^{\infty\infty} |K(x,t)|^2 dxdt = \iint_{11}^{\infty\infty} e^{-2xt} dxdt = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{e^{-2x}}{x} dx < \infty ; \quad (3.5)$$

a condição 3.3b é imediatamente satisfeita ($f(x) \equiv 0$).

Já se o limite inferior da integral na equação 3.4 for zero, a condição 3.3a não será satisfeita e a equação não será do tipo Fredholm.

3.2.2 - Condições de Hölder e Liapunov

Suponha-se uma curva (fig.3.1), na qual se define um segmento de curva pelos pontos t_1 e t_2 (arco $\widehat{t_1 t_2}$), de comprimento $s_2 - s_1$. Os parâmetros s_1 e s_2 são coordenadas curvilíneas.

Uma função $\phi(t)$, definida e contínua nos pontos dessa curva, satisfaz a condição de Hölder se

$$|\phi(t_2) - \phi(t_1)| \leq A |t_2 - t_1|^{\mu} , \quad (3.6)$$

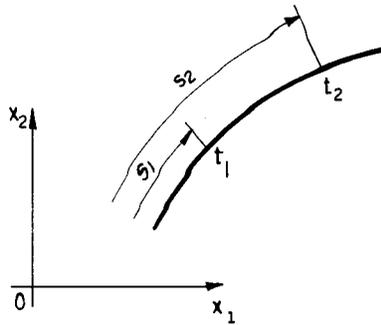


FIG. 3.1

onde A e μ são constantes positivas, denominadas constante de Hölder e índice de Hölder, respectivamente. Alguns autores também chamam essa desigualdade de condição de Lipschitz.

Da condição de Hölder se conclui que o valor absoluto da diferença entre os valores da função ϕ em dois pontos da curva é menor ou igual ao produto de A pela potência do valor absoluto da distância entre esses pontos elevado a μ . As constantes A e μ devem ser, para cada caso, convenientemente escolhidas. Convém ressaltar que a função ϕ , cuja variável dependente caracteriza a posição de um ponto genérico da curva, em geral, não é a representação analítica da curva.

O índice de Hölder, para problemas usuais, não é maior que um. Para provar tal afirmação, suponha-se que seja ($\mu > 1$).

Levando-se em conta que $|t_2 - t_1| < |s_2 - s_1|$ (fig.3.1), a desigualdade 3.6 pode ser escrita nesta forma:

$$|\phi(t_2) - \phi(t_1)| \leq A |s_2 - s_1|^\mu \quad (3.7)$$

Dividindo-se essa desigualdade por $|s_2 - s_1|$ e se fazendo, em ambos os membros, $|s_2 - s_1|$ tender para zero, isto é,

$$\lim_{|s_2 - s_1| \rightarrow 0} \frac{|\phi(t_2) - \phi(t_1)|}{|s_2 - s_1|} \leq A \lim_{|s_2 - s_1| \rightarrow 0} |s_2 - s_1|^{\mu-1}, \quad (3.8)$$

resulta:

$$\frac{d\phi(t)}{ds} = 0 \quad (3.9)$$

Desse resultado se conclui que $\phi(t)$ é uma função constante, o que não é de interesse. Por isso, sempre será suposto que

$$0 < \mu \leq 1 . \quad (3.10)$$

Para se definir a condição de Liapunov, seja a fig. 3.2, onde θ é o ângulo entre as retas normais à curva, nos pontos t_1 e t_2 .

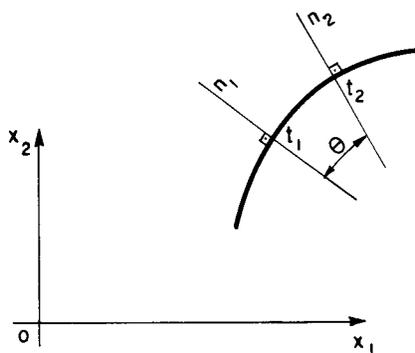


FIG. 3.2

Diz-se que essa curva satisfaz a condição de Liapunov se

$$\theta \leq B |t_2 - t_1|^\alpha , \quad (3.11)$$

onde B e α são constantes positivas, denominadas constante de Liapunov e Índice de Liapunov.

A constante α , para os problemas usuais, é definida no intervalo abaixo. Sua demonstração é similar a do campo de definição da constante μ .

$$0 < \alpha \leq 1 \quad (3.12)$$

3.2.3 - Integral de Cauchy

Estudam-se aqui integrais de funções de contorno (funções $\phi(t)$, sendo t ponto de um contorno Γ) não definidas num ponto t_0 . Essas integrais não têm significado do ponto de vista ordinário (integral definida pela soma de Riemann). Para defini-las, altera-se o domínio Γ para $\Gamma - \bar{\Gamma}$, sendo $\bar{\Gamma}$ um segmento da curva Γ determinado por uma circunferência de raio ϵ com centro em t_0 (fig.3.3). Com isso se diz que existe

$$\int_{\Gamma} \phi(t) d\Gamma, \quad (3.13)$$

quando existe

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \phi(t) d\Gamma, \quad (3.14)$$

o qual é chamado de "integral singular" da função $\phi(t)$, ao longo do contorno Γ .

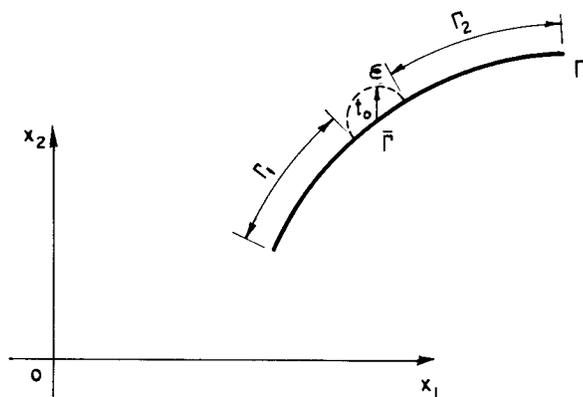


FIG. 3.3

Supondo-se que o ponto t_0 não pertença às extremidades do segmento da curva, o domínio $\Gamma - \bar{\Gamma}$ fica dividido em dois subdomínios (fig.3.3). Chamando-se esses subdomínios de Γ_1 e Γ_2 , resulta de 3.14

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1} \phi(t) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_2} \phi(t) d\Gamma . \quad (3.15)$$

Quando o limite de cada uma dessas integrais existe, diz-se que a integral 3.13 não apresenta "especial singularidade" e seu limite é calculado normalmente. Já se os limites isoladamente não existem, deve-se usar o seguinte recurso:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_1} \phi(t) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \phi(t) d\Gamma \right) \quad (3.16)$$

Se os termos integrais acima, que não tinham limites em 3.15, se cancelarem, antes de se fazer ε tender para zero, o limite 3.16 existe e, conseqüentemente, a integral 3.13. Aos limites 3.15 e 3.16, quando existem, Cauchy os chamou de valor principal da integral 3.13.

Com esses recursos, pode-se, então, dizer que

$$\int_{\Gamma} \phi(t) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \phi(t) d\Gamma . \quad (3.17)$$

No caso da integral 3.13 não apresentar especial singularidade, o ponto t_0 pode pertencer a uma das extremidades do segmento da curva. A existência desse tipo de integral, num domínio, não necessita de outra integral em domínio adjacente.

A existência do limite 3.16 está condicionada ao tipo de função $\phi(t)$ e ao tipo de curva Γ . Usa-se o plano complexo para demonstrar a existência desse tipo de integral, em virtude da facilidade que apresenta. Portanto, um ponto genérico do plano é escrito na forma $x+yi$, sendo "x" e "y" números reais e "i" a unidade imaginária. O contorno Γ (fig.3.4) deve satisfazer a condição de Liapunov. A função $\phi(t)$ é do tipo dado a seguir (veja-se, por exemplo,

MUSKHELISHVILI, 1953), onde t e t_0 são pontos de Γ ; a função $f(t)$, chamada de função densidade, deve satisfazer a condição de Hölder.

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(t)}{t-t_0} \quad (3.18)$$

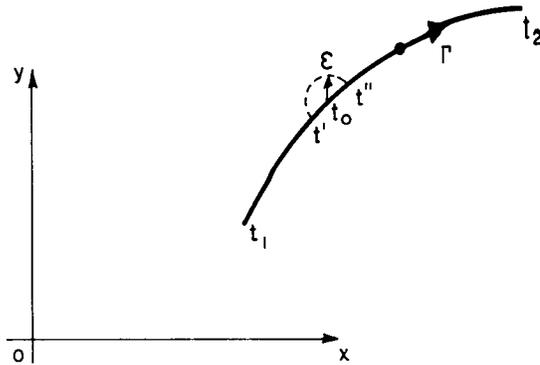


FIG. 3.4

A integral da função 3.18 recebe o nome de integral de Cauchy (expressão 3.19), particularizada para o caso de t_0 pertencer ao contorno Γ .

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-t_0} dt \quad (3.19)$$

Usando-se o recurso de que $f(t)$ é equivalente a $f(t)-f(t_0)+f(t_0)$ e mudando-se o domínio de Γ para $\Gamma-\bar{\Gamma}$, resulta, após o emprego de propriedades das integrais:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} dt + \frac{f(t_0)}{2\pi i} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \frac{dt}{t-t_0} \quad (3.20)$$

Segundo a condição de Hölder é possível escrever a seguinte desigualdade:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} dt \right| \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} A(t-t_0)^{\mu-1} dt \right| \quad (3.21)$$

Do segundo membro dessa desigualdade resulta

$$A \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{(t-t_0)^\mu}{\mu} \right|_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \quad (3.22)$$

que no limite toma a forma abaixo, pois a constante μ é positiva.

$$\frac{A}{\mu} \left| (t-t_0)^\mu \right|_{\Gamma} \quad (3.23)$$

Como existe o limite da integral do segundo membro de 3.21, existe também o limite da integral do primeiro membro, pois o valor desta é menor do que daquela. Veja-se que ambos os limites são positivos.

Levando-se em conta o conceito de valor principal de integral, escreve-se o primeiro termo de 3.20 assim:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} dt \quad (3.24)$$

Do outro termo da expressão 3.20 se tem, conforme a fig. 3.4, que

$$\frac{f(t_0)}{2\pi i} \ln(t-t_0) \Big|_{t_1}^{t'} + \frac{f(t_0)}{2\pi i} \ln(t-t_0) \Big|_{t''}^{t_2} \quad (3.25)$$

ou, ainda,

$$\frac{f(t_0)}{2\pi i} \ln\left(\frac{t_2-t_0}{t_1-t_0}\right) - \frac{f(t_0)}{2\pi i} \ln\left(\frac{t''-t_0}{t'-t_0}\right) \quad (3.26)$$

O primeiro termo dessa expressão não apresenta descontinuidade quando ε tende para zero. Quanto ao outro termo, deve-se escrever os números complexos em termos de

função exponencial (veja-se, por exemplo, CHURCHILL, 1975). Segundo a fig. 3.5, ampliada, tem-se:

$$\frac{f(t_0)}{2\pi i} \ln \left(\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} \right) - \frac{f(t_0)}{2\pi i} \ln \left(\frac{\varepsilon e^{i\theta_2}}{\varepsilon e^{i\theta_1}} \right) \quad (3.27)$$

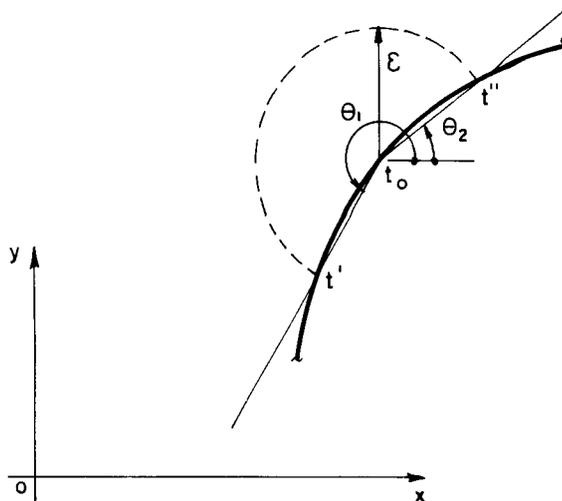


FIG. 3.5

No limite quando ε tende para zero, resulta

$$\frac{f(t_0)}{2\pi i} \ln \left(\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} \right) + \frac{f(t_0)}{2} . \quad (3.28)$$

Conclui-se, finalmente, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t - t_0} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} dt + \frac{f(t_0)}{2\pi i} \ln \left(\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} \right) + \\ &+ \frac{f(t_0)}{2} . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Com isso se prova a existência da integral de Cauchy (integral 3.19), particularizada para o contorno. O seu valor principal é usualmente chamado valor principal de Cauchy.

3.2.4 - Método dos resíduos ponderados

Os problemas propostos, a não ser alguns exemplos simples de aplicação, serão todos resolvidos numericamente. Por isso, é conveniente introduzir mecanismos que permitem escrever as relações básicas dos métodos numéricos. Um dos procedimentos usuais na formulação de métodos numéricos é o uso de resíduo ponderado. Portanto, é adequado agora mostrar esse procedimento.

A partir de resíduos que vão acontecer nas equações diferenciais, quando a variável principal for substituída por uma solução aproximada, é possível, ponderando-os dentro do domínio de definição do problema, fazer com que suas integrais sejam nulas. Matematicamente esse procedimento fica dado pela fórmula abaixo, onde os parâmetros ϵ , ψ_i e Γ significam, nessa ordem, resíduo, função ponderadora e domínio.

$$\int_{\Gamma} \epsilon \psi_i d\Gamma = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.30)$$

As soluções aproximadas das equações diferenciais são, em geral, combinação linear de funções elementares, convenientemente escolhidas, de modo a ficarem o mais próximo possível da exata. Com tal procedimento, as incógnitas do problema são as constantes resultantes da combinação linear de funções.

Como exemplo, toma-se a equação diferencial abaixo, definida em $0 \leq x \leq 1$ e com u nulo nos extremos desse intervalo.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0 \quad (3.31)$$

As funções elementares adotadas são do tipo:

$$\phi_j = x^j(1-x) , \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (3.32)$$

Chamando-se as incógnitas do problema (constantes) de α_j , a solução aproximada é dada pela expressão $\alpha_j \phi_j$, que introduzida em 3.31 fornece:

$$\epsilon = j(j-1)\alpha_j x^{j-2}(1-x) - 2j\alpha_j x^{j-1} + \alpha_j x^j(1-x) + x \quad (3.33)$$

Se se admitir $\psi_i = x^{i-1}$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$), resulta de 3.30 a seguinte equação:

$$\int_0^1 [j(j-1)\alpha_j x^{j-2}(1-x) - 2j\alpha_j x^{j-1} + \alpha_j x^j(1-x) + x] x^{i-1} dx = 0 \quad (3.34)$$

Uma solução aproximada da equação diferencial 3.31, obtida por meio de 3.34, é a dada abaixo. Esta solução é encontrada fazendo-se em 3.34 j assumir os valores 1 e 2 para $i = 1$ e $i = 2$.

$$u = \left(\frac{122}{649} + \frac{110}{649} x \right) (1-x)x \quad (3.35)$$

A solução exata $\left(\frac{\text{sen}x}{\text{sen}1} - x \right)$ indica que em $x = 0,5$, a solução aproximada possui um erro de 2,24%.

O método dos resíduos ponderados possibilita a definição de métodos individuais, como, por exemplo, o de Galerkin, possibilitando a comparação, constatação e elucidação das características desses métodos. O que leva a definir, em geral, um método individual é a função de ponderação. É nesse sentido que se define, por exemplo, o método dos momentos, onde $\psi_i = x^{i-1}$, sendo $i = 1, 2, 3, \dots, n+1$. No método numérico usado neste trabalho, a função de ponderação decorre da ação de uma carga ou força unitária.

3.3 - Uma aplicação de equação integral

Seja, por exemplo, uma viga em balanço, com material elástico-linear, da qual se supõe conhecer a linha elástica devido a uma força unitária aplicada num ponto q da viga. Essa elástica é representada por $w_0(q,s)$, cuja forma geométrica, ampliada, está representada abaixo.

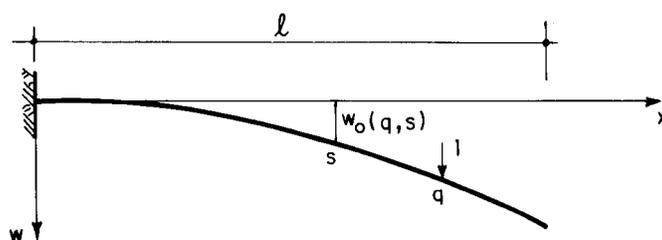


FIG. 3.6

Quando uma distribuição de força, com a função $f(q)$ representando a linha da distribuição (fig. 3.7), atua na viga, a linha elástica $w(s)$ é determinada somando-se os $dw(s)$ provenientes de quantidades $f(q)dx(q)$. Como se conhece $w_0(q,s)$, pode-se escrever que

$$dw(s) = w_0(q,s)f(q)dx(q). \quad (3.36)$$

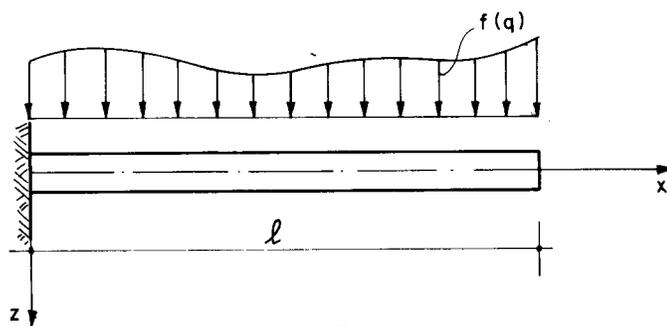


FIG. 3.7

Considerando-se válido o princípio da superposição (veja-se teoria das vigas), o deslocamento transversal no ponto s , devido à presença da distribuição, é, então,

$$w(s) = \int_0^l f(q)w_0(q,s)dx(q). \quad (3.37)$$

Uma vez conhecida a função $f(q)$, a integral na fórmula anterior é determinada, quer por processo analítico, quer por processo numérico, e com isso também $w(s)$.

Imagine-se agora que, em vez de $f(q)$, seja dado $w(s)$. A fórmula 3.37 constitui-se numa equação integral (equação integral de primeira espécie). Em alguns casos da função $w(s)$, os mais simples, é possível se obter a solução analítica (função $f(q)$), porém, na maioria dos casos o problema é resolvido com emprego de técnicas numéricas.

3.4 - Fórmulas integrais básicas

3.4.1 - Relação entre resíduos e erros

No exemplo tratado no subitem 3.2.4, os valores da função u nos extremos do intervalo (condições de contorno) foram dados e satisfeitos pela função incôgnita aproximada. No espaço unidimensional isso é quase que natural, ficando a solução aproximada para os pontos internos do intervalo, que no método a ser apresentado é usual se chamar domínio. Entretanto, para os problemas nos espaços bidimensional e tridimensional, a função incôgnita aproximada, em geral não satisfaz as condições de contorno. As soluções serão, assim, aproximadas nos pontos do contorno e do domínio (todos os pontos do corpo, exceto os do contorno).

Para problemas bidimensional e tridimensional, devido aos erros no domínio e no contorno, quando se usa solução aproximada, é necessário adaptar a condição 3.30 a nova situação. Para isso se toma o corpo na fig. 3.8, limitado pelos subcontornos Γ_1 e Γ_2 ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$), no qual uma função potencial u satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_2} = 0 \quad (3.38)$$

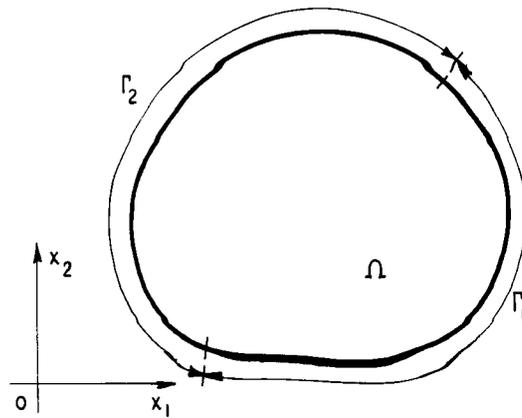


FIG. 3.8

As variáveis, para problemas dessa natureza, são o potencial u e a derivada de u em relação à coordenada n de uma reta normal à superfície, q , denominada fluxo. Suponha-se que no problema em análise sejam conhecidos potenciais \bar{u} em Γ_1 e fluxos \bar{q} em Γ_2 .

O fato de serem dados \bar{u} e \bar{q} permite, quando empregada uma solução aproximada u , que se conheçam, além dos resíduos (erros surgidos quando se introduz u na equação 3.38), os seguintes erros de contorno: $u - \bar{u}$ em Γ_1 e $q - \bar{q}$ em Γ_2 .

A integral dos resíduos ponderados (fórmula 3.30), agora, não é igual a zero, isto é,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_2} \right) \psi d\Omega \neq 0. \quad (3.39)$$

O uso de integração por partes se leva a concluir a relação abaixo, isto é, a integral dos resíduos ponderados, no domínio, é igual a soma algébrica das integrais dos erros ponderados, no contorno.

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_2} \right) \psi d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) \psi d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \quad (3.40)$$

Essa relação entre resíduos e erros de contorno, definida para o espaço bidimensional, pode ser estendida para o espaço tridimensional. Utilizando-se o operador ∇^2 (Laplaciano), a equação diferencial 3.38 e a similar no espaço tridimensional são representadas pela fórmula $\nabla^2 u = 0$ (equação de Laplace). Com essa notação se tem, na forma geral, a seguinte relação:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) \psi d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) \psi d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \quad (3.41)$$

É de praxe se tomar por base nesse estudo a equação de Laplace, pois, os primeiros problemas nos quais o Método dos Elementos de Contorno foi aplicado, foram os regulados pela equação de Laplace. Essa equação trata, por exemplo, de problemas de transmissão de calor.

3.4.2 - Fórmula integral de deslocamento

Seja um corpo em equilíbrio estático (fig. 3.9), no qual são fornecidas as seguintes condições de contorno: \bar{u}_k (componentes de deslocamento) em Γ_1 e \bar{p}_k (componentes de força de superfície) em Γ_2 .

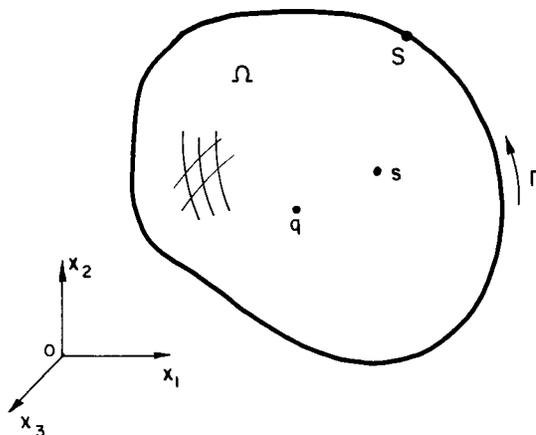


FIG. 3.9

Convém lembrar aqui as seguintes notações:

- a) σ_{jk} , componentes do tensor tensão;
- b) b_k , componentes da força de massa;
- c) u_k e u_k^* , componentes de deslocamento provenientes do carregamento e da força unitária aplicada em q , respectivamente;
- d) p_k e p_k^* , componentes de força de superfície provenientes do carregamento e da força unitária aplicada em q , respectivamente.

Com essas notações, as equações diferenciais de equilíbrio são representadas pela equação 3.42, as funções ponderadoras são u_k^* e p_k^* , e as incógnitas são as componentes de deslocamento e força de superfície.

$$\sigma_{jk,j} + b_k = 0 \quad (3.42)$$

Adotando-se uma solução aproximada u_k , as derivadas das componentes de tensão ($\sigma_{jk,j}$), obtidas em função dessa solução também é aproximada e a equação 3.42 não é válida. Os resíduos ($\sigma_{jk,j} + b_k$) e os erros de contorno ($u_k - \bar{u}_k$ e $p_k - \bar{p}_k$) permitem escrever, com base na relação 3.41, que

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u_k - \bar{u}_k) p_k^* d\Gamma \quad (3.43)$$

Elegem-se o ponto s , do domínio, para aplicação do primeiro membro dessa equação e o ponto S , do contorno, para aplicação do segundo membro. Os ponderadores u_k^* e p_k^* são provenientes de uma força unitária, na direção l , aplicada no ponto q . Com essas definições, é mais conveniente escrever 3.43 na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\sigma_{jk,j}(s) + b_k(s)) u_{\ell k}^*(q, s) d\Omega(s) = \\
 & = \int_{\Gamma_2} (p_k(S) - \bar{p}_k(S)) u_{\ell k}^*(q, S) d\Gamma(S) - \int_{\Gamma_1} (u_k(S) - \bar{u}_k(S)) p_{\ell k}^*(q, S) d\Gamma(S)
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Aplicando-se a fórmula de integração por partes na integral de $\sigma_{jk,j}(s) u_{\ell k}^*(q, s)$ e usando-se a relação $p_k(S) = \sigma_{jk}(S) n_j(S)$ (veja-se a fórmula 2.27), pode-se obter, do primeiro membro dessa relação,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} p_k(S) u_{\ell k}^*(q, S) d\Gamma(S) - \int_{\Omega} \sigma_{jk}(s) \frac{\partial u_{\ell k}^*(q, s)}{\partial x_j(s)} d\Omega(s) + \\
 & + \int_{\Omega} b_k(s) u_{\ell k}^*(q, s) d\Omega(s).
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Para prosseguir essa análise, deve-se considerar que (veja-se teorema de Betti)

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}(s) \frac{\partial u_{\ell k}^*(q, s)}{\partial x_j(s)} d\Omega(s) = \int_{\Omega} \sigma_{\ell jk}^*(q, s) \frac{\partial u_k(s)}{\partial x_j(s)} d\Omega(s). \tag{3.46}$$

Com essa igualdade, a expressão 3.45 fica:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} p_k(S) u_{\ell k}^*(q, S) d\Gamma(S) - \int_{\Omega} \sigma_{\ell jk}^*(q, s) \frac{\partial u_k(s)}{\partial x_j(s)} d\Omega(s) + \\
 & + \int_{\Omega} b_k(s) u_{\ell k}^*(q, s) d\Omega(s)
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Fazendo-se integração por partes da segunda integral dessa expressão e usando-se a relação $p_{\ell k}^*(q, S) = \sigma_{\ell j k}^*(q, S) n_j(S)$, pode-se, ainda, escrever a expressão 3.45 assim:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} p_k(S) u_{\ell k}^*(q, S) d\Gamma(S) - \int_{\Gamma} u_k(S) p_{\ell k}^*(q, S) d\Gamma(S) + \\ & + \int_{\Omega} u_k(s) \sigma_{\ell j k, j}^*(q, s) d\Omega(s) + \int_{\Omega} b_k(s) u_{\ell k}^*(q, s) d\Omega(s) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Introduzindo-se essa expressão em 3.44, resulta, após tratamento algébrico conveniente,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_k(s) \sigma_{\ell j k, j}^*(q, s) d\Omega(s) = + \int_{\Gamma_2} u_k(S) p_{\ell k}^*(q, S) d\Gamma(S) + \\ & + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k(S) p_{\ell k}^*(q, S) d\Gamma(S) - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k(S) u_{\ell k}^*(q, S) d\Gamma(S) + \\ & - \int_{\Gamma_1} p_k(S) u_{\ell k}^*(q, S) d\Gamma(S) - \int_{\Omega} b_k(s) u_{\ell k}^*(q, s) d\Omega(s). \end{aligned} \quad (3.49)$$

No segundo membro da igualdade acima, as duas primeiras integrais, assim como a terceira e a quarta, podem ser compactadas numa única integral no contorno Γ . Nesse caso se usa simplesmente as funções $u_k(S)$ e $p_k(S)$, as quais se confundem em Γ_1 com $\bar{u}_k(S)$ e em Γ_2 com $\bar{p}_k(S)$, respectivamente. A integral do primeiro membro, após se substituir $\sigma_{\ell j k, j}^*(q, s)$ por $-\delta(q, s) c_{\ell k}(q)$ (veja-se a equação 2.15), toma a seguinte forma:

$$- \int_{\Omega} u_k(s) \delta(q, s) c_{\ell k}(q) d\Omega(s) \quad (3.50)$$

A integral acima, conforme a propriedade 2.4c, equivale a $-u_k(q)c_{\ell k}(q)$ (componente de $u_k(q)$ na direção ℓ). O deslocamento total na direção ℓ será, então, $-u_{\ell}(q)$.

Essas considerações introduzidas em 3.49 dão origem à seguinte relação integral, envolvendo componentes de deslocamento e força de superfície:

$$u_{\ell}(q) = - \int_{\Gamma} p_{\ell k}^*(q, S) u_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} u_{\ell k}^*(q, S) p_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Omega} u_{\ell k}^*(q, s) b_k(s) d\Omega(s) \quad (3.51)$$

Essa fórmula pode também ser obtida usando-se o teorema de Betti (veja-se, por exemplo, RODRÍGUEZ, 1986). A teoria dessa relação é devido a C. Somigliana e, por isso, ela é também chamada de fórmula de Somigliana, para componentes de deslocamento em pontos internos do corpo.

3.4.3 - Fórmula integral de tensão

Segundo as fórmulas 2.6 e 2.7, uma vez conhecido o deslocamento $u_{\ell}(q)$ (equação 3.51), fica conhecida a tensão mediante o cálculo de derivadas das componentes de deslocamento em relação às coordenadas cartesianas. Essas derivadas podem ser obtidas analiticamente ou numericamente. Diante da possibilidade de se obter expressões para essas derivadas, o processo numérico relega-se ao segundo plano, em face da perda de precisão de resultados.

A função $u_\ell(q)$ é contínua para todos os pontos internos do corpo, o que possibilita derivar essa função num ponto genérico q . Sendo assim, para uma direção m , tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\ell(q)}{\partial x_m(q)} = & - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_m(q)} (p_{\ell k}^*(q, S)) u_k(S) d\Gamma(S) + \\ & + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_m(q)} (u_{\ell k}^*(q, S)) p_k(S) d\Gamma(S) + \\ & + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_m(q)} (u_{\ell k}^*(q, s)) b_k(s) d\Omega(s). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Para se efetuar as derivadas indicadas nessa relação, deve-se considerar, além das propriedades das derivadas, as seguintes relações:

$$r(q, S) = \left(\sum_{i=1}^{i=3} (x_i(S) - x_i(q))^2 \right)^{1/2} \quad (3.53a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i(q)} (r(q, S)) = - \frac{x_i(S) - x_i(q)}{r(q, S)} \quad (3.53b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i(q)} (r(q, S)) = - \frac{\partial}{\partial x_i(S)} (r(q, S)) \quad (3.53c)$$

$$\frac{\partial r(q, S)}{\partial n(S)} = r_{,i}(q, S) n_i(S) \quad (3.53d)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i(q)} (r_{,j}(q, S)) = \frac{1}{r} (\delta_{ij} - r_{,i}(q, S) r_{,j}(q, S)) \quad (3.53e)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j(q)} (r_{,n}(q,S)) = n_i(S) \frac{\partial}{\partial x_j(q)} (r_{,i}(q,S)) \quad (3.53f)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i(q)} \left(\frac{1}{r(q,S)} \right) = - \frac{1}{r^2(q,S)} \cdot r_{,i}(q,S) \quad (3.53g)$$

$$n_i(S) \delta_{ij} = n_j(S) \quad (3.53h)$$

$$\delta_{ii} = 3 \quad (3.53i)$$

No caso particular do espaço bidimensional δ_{ii} é igual a 2 e as derivadas das funções ponderadoras em relação à coordenada $x_m(q)$ são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_m(q)} (p_{\ell k}^*(q,S)) = & - \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{k\ell} + 2r_{,k}{}^r{}_{,\ell} \right] r_{,n}{}^r{}_{,m} + \right. \\ & + (1-2\nu)(r_{,k}{}^n{}_{,\ell}{}^{-r}{}_{,n}{}^k) r_{,m} + (1-2\nu)\delta_{k\ell}(-n_m{}^+r_{,m}{}^r{}_{,n}) + \\ & + 2r_{,\ell}{}^r{}_{,n}(-\delta_{km}{}^+r_{,k}{}^r{}_{,m}) + 2r_{,k}{}^r{}_{,n}(-\delta_{\ell m}{}^+r_{,\ell}{}^r{}_{,m}) + \\ & + 2r_{,k}{}^r{}_{,\ell}(-n_m{}^+r_{,m}{}^r{}_{,n}) + (1-2\nu) \left[n_{\ell}(-\delta_{km}{}^+r_{,k}{}^r{}_{,m}) + \right. \\ & \left. \left. - n_k(-\delta_{\ell m}{}^+r_{,\ell}{}^r{}_{,m}) \right] \right\} \quad (3.54a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_m(q)} (u_{\ell k}^*(q,S)) = & \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} (3\delta_{k\ell}{}^r{}_{,m}{}^{-4\nu}\delta_{k\ell}{}^r{}_{,m}{}^{-r}{}_{,\ell}\delta_{km} + \\ & + 2r_{,\ell}{}^r{}_{,m}{}^r{}_{,k}{}^{-r}{}_{,k}\delta_{\ell m}) \quad (3.54b) \end{aligned}$$

A derivada da função $u_{\ell k}^*(q,s)$ em relação a $x_m(q)$ é similar a da função $u_{\ell k}^*(q,S)$, atentando-se, apenas, para

o fato de que o ponto s está localizado no domínio do corpo. Dessa maneira, fica conhecida a derivada da função deslocamento $u_\ell(q)$ em relação à coordenada genérica $x_m(q)$.

Com essas derivadas e as fórmulas 2.6 e 2.7 se chega, após tratamento algébrico conveniente, à seguinte fórmula, para cálculo das componentes de tensão no espaço bidimensional:

$$\sigma_{ij}(q) = - \int_{\Gamma} S_{ijk}(q, S) u_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} D_{ijk}(q, S) p_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Omega} D_{ijk}(q, s) b_k(s) d\Omega(s), \quad (3.55)$$

onde

$$S_{ijk}(q, S) = \frac{2G}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2r_{,n} \left[(1-2\nu) \delta_{ijr,k} + \nu(\delta_{ikr,j} + \delta_{jkr,i}) + \right. \right. \\ \left. \left. - 4r_{,i^r,j^r,k} \right] + 2\nu(n_{i^r,j^r,k} + n_{j^r,i^r,k}) + \right. \\ \left. + (1-2\nu)(2n_{k^r,i^r,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad e \quad (3.56a)$$

$$D_{ijk}(q, S) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{ikr,j} + \delta_{jkr,i} - \delta_{ijr,k}) + \right. \\ \left. + 2r_{,i^r,j^r,k} \right]. \quad (3.56b)$$

A fórmula do tensor $D_{ijk}(q, s)$, na fórmula 3.55, é similar a do tensor 3.56b, exceto que o ponto s é interno. A fórmula das componentes de tensão (relação 3.55) é também chamada fórmula de C. Somigliana, para componentes de tensão em pontos internos do corpo.

3.5 - Apresentação do Método dos Elementos de Contorno

A equação de Laplace ($\nabla^2 u = 0$), definida no espaço bidimensional, é a eleita para apresentação do Método dos Elementos de Contorno. Permanecem válidas as definições e condições impostas para dedução da relação 3.41, abaixo repetida.

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) \psi \, d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) \psi \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial \psi}{\partial n} \, d\Gamma \quad (3.41) - \text{repetida}$$

Objetiva-se determinar, por meio dessa relação, o potencial u e o fluxo q num ponto do corpo (fig.3.8), sendo prescritas determinadas condições de contorno.

Supondo-se que a função ponderadora ψ seja contí-nua e que também suas derivadas parciais primeira e segun-da sejam contínuas, e aplicando-se a fórmula de integração por partes na integral do primeiro membro de 3.41, resulta:

$$\int_{\Gamma_1} q \psi \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q \psi \, d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \, d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) \psi \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial \psi}{\partial n} \, d\Gamma \quad (3.57)$$

Fazendo-se agora integração por partes da terceira integral do primeiro membro dessa igualdade se chega, a-pós algumas operações, à seguinte igualdade:

$$\int_{\Omega} u (\nabla^2 \psi) \, d\Omega = \int_{\Gamma} u \frac{\partial \psi}{\partial n} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} q \psi \, d\Gamma \quad (3.58)$$

Por semelhança às funções ponderadas usadas em problemas elásticos, usam-se aqui, como funções ponderado-ras, os efeitos de uma carga unitária (escalar) localizada

num ponto q diferente s , de um meio infinito. Devido à natureza do problema, tem-se a equação abaixo, onde $\delta(q,s)$ é o delta de Dirac.

$$\nabla^2 u^*(q,s) + \delta(q,s) = 0 \quad (3.59)$$

Uma solução dessa equação no espaço bidimensional é:

$$u^*(q,s) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(q,s) \quad (3.60)$$

Substituindo-se ψ por $u^*(q,s)$ em 3.58 e levando-se em conta que $\nabla^2 u^*(q,s) = -\delta(q,s)$, resulta:

$$-\int_{\Omega} u(s)\delta(q,s)d\Omega(s) = \int_{\Gamma} u(S) \frac{\partial u^*(q,S)}{\partial n} d\Gamma(S) - \int_{\Gamma} q(S)u^*(q,S)d\Gamma(S) \quad (3.61)$$

O primeiro membro dessa igualdade, conforme a propriedade 2.4c do delta de Dirac, vale $-u(q)$. Pode-se, assim, escrever 3.61 na seguinte forma:

$$u(q) = -\int_{\Gamma} u(S) \frac{\partial u^*(q,S)}{\partial n} d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} q(S)u^*(q,S)d\Gamma(S) \quad (3.62)$$

Essa fórmula permite calcular o valor numérico de $u(q)$, em pontos internos do corpo, quando conhecidas as funções $u(S)$ e $q(S)$. Para se determinar $u(S)$ e $q(S)$, deve-se aplicar 3.62 num ponto Q , do contorno do corpo, tornando possível a formulação de um sistema de equações determinado. Veja-se que usualmente são dados parâmetros de contorno.

Se num ponto Q do contorno, com tangente definida, acrescentar-se um setor circular, com centro em Q , de raio ϵ (fig.3.10), a fórmula 3.62 continua válida e é escrita da seguinte forma:

$$u(Q) = - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon} u(S) \frac{\partial u^*(Q, S)}{\partial n} d\Gamma(S) + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon} q(S) u^*(Q, S) d\Gamma(S) \quad (3.63)$$

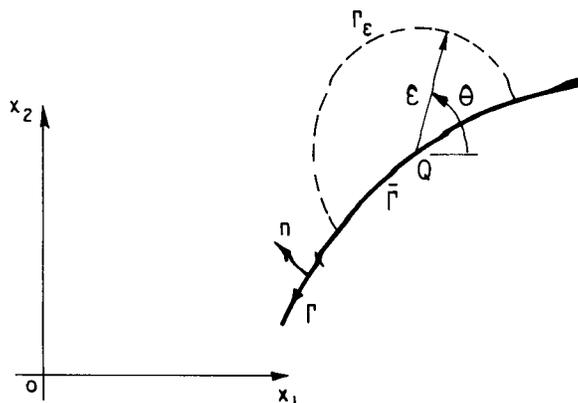


FIG. 3.10

Para se ter o problema como proposto deve-se fazer "ε" tender para zero, isto é,

$$u(Q) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon} u(S) \frac{\partial u^*(Q, S)}{\partial n} d\Gamma(S) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon} q(S) u^*(Q, S) d\Gamma(S). \quad (3.64)$$

Empregando-se as propriedades de integral e limite no primeiro termo do segundo membro de 3.64, resulta:

$$- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} u(S) \frac{\partial u^*(Q, S)}{\partial n} d\Gamma(S) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} u(S) \frac{\partial u^*(Q, S)}{\partial n} d\Gamma(S) \quad (3.65)$$

O primeiro termo dessa expressão, segundo o conceito de integral singular, pode ser escrito assim:

$$- \int_{\Gamma} u(S) \frac{\partial u^*(Q, S)}{\partial n} d\Gamma(S) \quad (3.66)$$

Já para o outro termo deve-se usar o recurso de que $u(S) = u(S) - u(Q) + u(Q)$, o que torna possível escrevê-lo desta forma:

$$- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} (u(S) - u(Q)) \frac{\partial u^*(Q, S)}{\partial n} d\Gamma(S) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} u(Q) \frac{\partial u^*(Q, S)}{\partial n} d\Gamma(S) \quad (3.67)$$

O primeiro termo dessa expressão é nulo, pois, devido à condição de Hölder, o limite da integral é zero. No outro termo de 3.67, a função $u(Q)$ pode ser retirada do integrando da integral e, assim, esse termo pode ser escrito na forma abaixo, após se substituírem $\frac{\partial u^*(Q, S)}{\partial n}$ e $d\Gamma(S)$ pelas expressões equivalentes.

$$+ u(Q) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{1}{2\pi\epsilon} \epsilon d\theta \quad (3.68)$$

A integração do termo acima se leva a concluir que essa expressão equivale a $u(Q)/2$ e conseqüentemente a expressão 3.67.

Procedendo-se de maneira análoga para o outro termo do segundo membro de 3.64 se conclui que não surge nenhum termo, além do já existente (a integral resultante deve ser interpretada no sentido de valor principal). Com esses resultados a equação 3.64 toma a forma abaixo e é denominada equação de contorno para problemas de potenciais.

$$\frac{1}{2} u(Q) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(Q, S)}{\partial n} u(S) d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} u^*(Q, S) q(S) d\Gamma(S) \quad (3.69)$$

A resolução dessa equação integral em geral é feita numericamente e como todos os seus termos envolvem funções de contorno, somente o contorno do corpo é discretizado. Para exemplificar, aproxima-se o contorno do corpo (fig. 3.11) por segmentos de reta, sobre os quais se supõe que $u(S)$ e $q(S)$ sejam constantes, isto é, u^j e q^j . Com isso, a equação 3.69 fica:

$$\frac{1}{2} u(Q) = - \sum_{j=1}^{j=N} u^j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*(Q, S)}{\partial n} d\Gamma(S) + \sum_{j=1}^{j=N} q^j \int_{\Gamma_j} u^*(Q, S) d\Gamma(S) \quad (3.70)$$

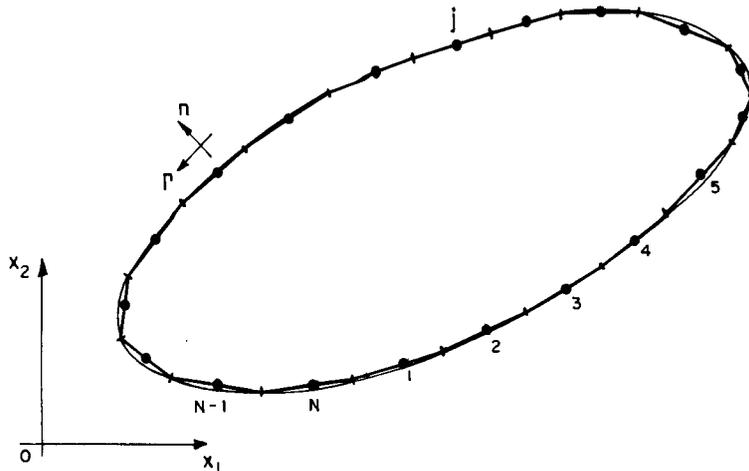


FIG. 3.11

Empregando-se a equação 3.70 nos N pontos médios dos N segmentos na figura acima, resulta um sistema de equações para o qual as condições do contorno devem torná-lo determinado. Isso significa que nos N segmentos devem ser dados N_1 valores de $u(S)$ e N_2 valores de $q(S)$, de modo que $N_1 + N_2 = N$, pois o número total de parâmetros é $2N$ (N parâmetros u e N parâmetros q).

Conclui-se, então, que a técnica de resolução de um problema físico, por meio da equação integral com parâmetros de contorno, consiste em aproximar o contorno por segmentos, sobre os quais as variáveis em estudo contidas na equação integral são aproximadas por funções polinomiais. A essa técnica de resolução de um problema se denomina Método dos Elementos de Contorno.

IV - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1 - Introdução

Apresentar-se-ã, neste capítulo, essencialmente o caminho para resolução de problemas elásticos-lineares por meio de fórmulas integrais. O tratamento dado a essas é o numérico em virtude do caráter prático que proporciona.

Inicialmente se deduzirá uma equação para o contorno de um corpo utilizando-se da fórmula das componentes de deslocamento em seus pontos internos. Essa equação será discretizada para ser usada em contornos aproximados por segmentos de reta, onde as funções deslocamentos e força de superfície são aproximadas por funções do primeiro grau. Ainda, com referência a equação integral discretizada, apresentar-se-ão os principais passos na determinação dos coeficientes de influência dos parâmetros nodais.

Serão fornecidas fórmulas integrais discretizadas para pontos internos de um corpo e feitos estudos referente aos seguintes tipos de solicitação: força de massa, tensão inicial, temperatura, retração e expansão.

O caso de corpos com sub-regiões também será tratado, onde, além de se definir condições suplementares para tornar o problema determinado, são fornecidos subsídios pa-

ra a organização dos elementos das matrizes e vetores na equação matricial global. Finalmente, dar-se-á uma aplicação da equação de contorno visando esclarecer o assunto e mostrar sua utilidade prática.

4.2 - Equação de contorno

Suponha-se que o domínio Ω do corpo (fig. 4.1) seja aumentado através de um setor circular Ω_ϵ com centro no ponto Q , de contorno. Com isso, o contorno do corpo, inicialmente definido por Γ , passa ser $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon$.

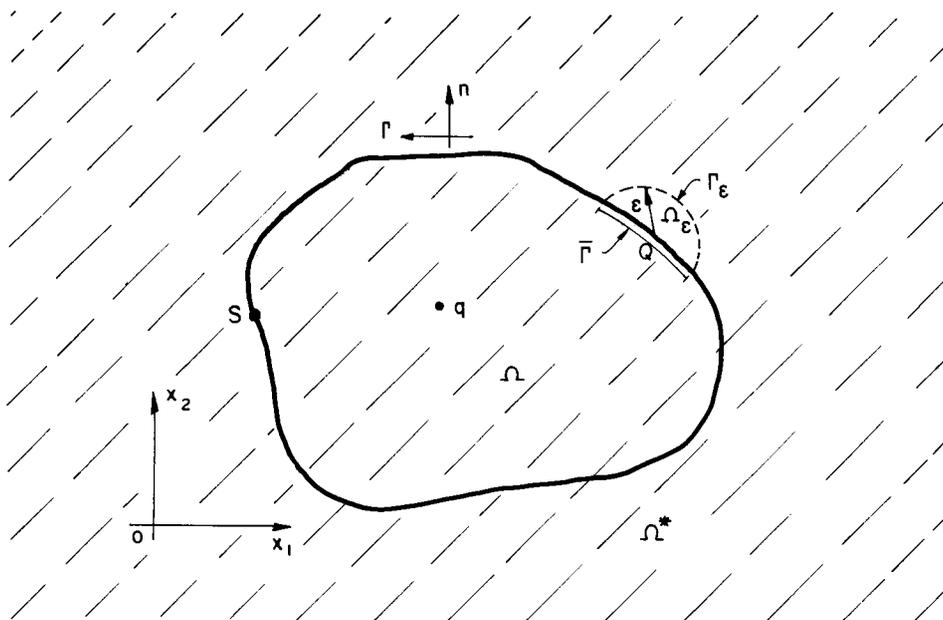


FIG. 4.1

A fórmula 3.51 pode ser agora empregada no ponto Q , porém, para se resolver o problema como originalmente proposto, deve-se fazer ϵ tender para zero, isto é,

$$\begin{aligned}
 u_{\ell}(Q) = & - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_{\epsilon}} p_{\ell k}^{*}(Q, S) u_k(S) d\Gamma(S) + \\
 & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_{\epsilon}} u_{\ell k}^{*}(Q, S) p_k(S) d\Gamma(S) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega + \Omega_{\epsilon}} u_{\ell k}^{*}(Q, s) b_k(s) d\Omega(s).
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Analisa-se a seguir cada um dos termos que compõe o segundo membro dessa equação.

Segundo as propriedades de integral e limite, o primeiro termo pode ser escrito na seguinte forma:

$$- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} p_{\ell k}^{*}(Q, S) u_k(S) d\Gamma(S) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} p_{\ell k}^{*}(Q, S) u_k(S) d\Gamma(S)
 \tag{4.2}$$

Levando-se em conta o conceito de valor principal de Cauchy (veja-se, por exemplo, subitem 3.2.3), o primeiro termo dessa expressão se escreve simplesmente

$$- \int_{\Gamma} p_{\ell k}^{*}(Q, S) u_k(S) d\Gamma(S).
 \tag{4.3}$$

O outro termo da expressão 4.2, cujo domínio de integração é o contorno do setor circular, é inadequado para análise, pois a função $u_k(S)$ depende do raio ϵ (fig. 4.1). Usando-se o recurso de se substituir $u_k(S)$ pela expressão $u_k(S) - u_k(Q) + u_k(Q)$, pode-se escrevê-lo assim:

$$\begin{aligned}
 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} p_{\ell k}^{*}(Q, S) (u_k(S) - u_k(Q)) d\Gamma(S) + \\
 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} p_{\ell k}^{*}(Q, S) u_k(Q) d\Gamma(S)
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Conforme a condição de Hölder, a expressão $u_k(S) - u_k(Q)$ tende para zero quando ε tende para zero, então, o limite da primeira integral é zero. Resulta, dessa maneira, somente o segundo termo da expressão 4.4 que pode ser escrito na forma abaixo, pelo fato de $u_k(Q)$ não depender de ε .

$$- u_k(Q) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{\ell k}^*(Q, S) d\Gamma(S) \quad (4.5)$$

Chamando-se o limite da integral acima de $\bar{c}_{\ell k}(Q)$ e com os resultados 4.3 e 4.5, a expressão 4.2 equivale a

$$\int_{\Gamma} p_{\ell k}^*(Q, S) u_k(S) d\Gamma(S) - u_k(Q) \bar{c}_{\ell k}(Q). \quad (4.6)$$

O segundo termo do segundo membro de 4.1, baseado no estudo feito para o primeiro termo, é colocado na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} u_{\ell k}^*(Q, S) p_k(S) d\Gamma(S) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{\ell k}^*(Q, S) (p_k(S) + \\ - p_k(Q)) d\Gamma(S) + p_k(Q) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{\ell k}^*(Q, S) d\Gamma(S) \quad (4.7) \end{aligned}$$

O fato das funções $p_{\ell k}^*(Q, S)$ e $u_{\ell k}^*(Q, S)$ serem dependentes de $1/r$ (fórmula 2.28) e $\ln r$ (fórmula 2.21), respectivamente, irá definir tipos diferentes de integral singular. A integral que contém em seu integrando $p_{\ell k}^*(Q, S)$ (expressão 4.3) é do tipo de Cauchy e deve ser interpretada no sentido de valor principal de Cauchy. Já a integral que contém $u_{\ell k}^*(Q, S)$ (primeiro termo de 4.7) não apresenta especial singularidade e seu limite é interpretado no sentido normal de integração.

Os demais termos da expressão 4.7 facilmente se provam que são nulos. Com isso e com o conceito usual de integral singular, a expressão 4.7 equivale a

$$\int_{\Gamma} u_{\ell k}^*(Q, S) p_k(S) d\Gamma(S). \quad (4.8)$$

O último termo do segundo membro de 4.1, segundo as propriedades de integral e limite, pode ser escrito assim:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\ell k}^*(Q, s) b_k(s) d\Omega(s) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\epsilon}} u_{\ell k}^*(Q, s) b_k(s) d\Omega(s) \quad (4.9)$$

O limite da primeira integral dessa expressão é a própria integral, pois $u_{\ell k}^*(Q, s)$ e $b_k(s)$ não dependem de ϵ . O outro termo facilmente se prova que é nulo. Desse modo, resulta da expressão 4.9 simplesmente

$$\int_{\Omega} u_{\ell k}^*(Q, s) b_k(s) d\Omega(s). \quad (4.10)$$

O delta de Kronecker, usado como operador de substituição, possibilita escrever que $u_{\ell}(Q) = \delta_{\ell k} u_k(Q)$. Essa relação e as expressões 4.6, 4.8 e 4.10, introduzidas em 4.1, permitem obter a equação abaixo, onde $c_{\ell k}(Q)$ substitui $\delta_{\ell k} + \bar{c}_{\ell k}(Q)$. Como seus parâmetros incógnitos são de contorno, esta equação recebe o nome de "equação de contorno".

$$c_{\ell k}(Q) u_k(Q) = - \int_{\Gamma} p_{\ell k}^*(Q, S) u_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} u_{\ell k}^*(Q, S) p_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Omega} u_{\ell k}^*(Q, s) b_k(s) d\Omega(s) \quad (4.11)$$

4.3 - Discretização da equação de contorno

Supõe-se, neste item, que as componentes de força de massa são nulas. Dessa maneira, a equação de contorno resultante contém somente integrais de contorno, ficando a análise do corpo restrita ao seu contorno.

Considerando-se que a equação 4.11 será resolvida numericamente, aproxima-se o contorno Γ por J segmentos. A equação de contorno correspondente é:

$$c_{\ell k}(Q)u_k(Q) = - \sum_{j=1}^J \int_{\Gamma_j} p_{\ell k}^*(Q,S)u_k(S)d\Gamma(S) + \sum_{j=1}^J \int_{\Gamma_j} u_{\ell k}^*(Q,S)p_k(S)d\Gamma(S) \quad (4.12)$$

Num ponto genérico S de Γ_j , a expressão $p_{\ell k}^*(Q,S)u_k(S)$ equivale às expressões $p_{11}^*(Q,S)u_1(S) + p_{12}^*(Q,S)u_2(S)$ e $p_{21}^*(Q,S)u_1(S) + p_{22}^*(Q,S)u_2(S)$, correspondentes às direções dos eixos X_1 e X_2 , respectivamente. Escrevendo-os na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} p_{11}^*(Q,S) & p_{12}^*(Q,S) \\ p_{21}^*(Q,S) & p_{22}^*(Q,S) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(S) \\ u_2(S) \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Chamando-se a matriz dos elementos $p_{\ell k}^*(Q,S)$ de $\underline{p}^*(Q,S)$ e o vetor dos elementos $u_k(S)$ de $\underline{u}(S)$, escreve-se simplesmente $\underline{p}^*(Q,S)\underline{u}(S)$. O mesmo pode ser feito para a expressão $u_{\ell k}^*(Q,S)p_k(S)$, resultando o produto $\underline{u}^*(Q,S)\underline{p}(S)$ ou, de forma explícita,

$$\begin{bmatrix} u_{11}^*(Q,S) & u_{12}^*(Q,S) \\ u_{21}^*(Q,S) & u_{22}^*(Q,S) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1(S) \\ p_2(S) \end{Bmatrix}. \quad (4.14)$$

De modo similar, o termo $c_{\ell k}(Q)u_k(Q)$ conduz a

$$\begin{bmatrix} c_{11}(Q) & c_{12}(Q) \\ c_{21}(Q) & c_{22}(Q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(Q) \\ u_2(Q) \end{Bmatrix}; \quad (4.15)$$

a matriz dos elementos $c_{\ell k}(Q)$ e o vetor dos elementos $u_k(Q)$ são chamados $\underline{c}(Q)$ e $\underline{u}(Q)$, respectivamente.

A equação 4.12 pode agora ser escrita na forma abaixo. Esta forma dada a equação de contorno discretizada é conveniente para determinação do sistema de equação, a partir do qual é possível encontrar os parâmetros incôgnitos.

$$\underline{c}(Q)\underline{u}(Q) = - \sum_{j=1}^{j=J} \int_{\Gamma_j} \underline{p}^*(Q,S)\underline{u}(S)d\Gamma(S) + \sum_{j=1}^{j=J} \int_{\Gamma_j} \underline{u}^*(Q,S)\underline{p}(S)d\Gamma(S) \quad (4.16)$$

Os segmentos usados para aproximar o contorno Γ podem ser retos ou curvos. Nesse último caso, a aproximação se dá, em geral, por meio de curvas do segundo grau.

A aproximação da curva representativa do contorno de um corpo é, neste trabalho, feita por segmentos de reta. Ela é, em geral, tanto melhor quanto maior o número de segmentos alocados na curva. Os segmentos retos são mais facilmente definidos, mas geralmente a custo de uma representação geométrica pobre da geometria do corpo. A figura abaixo mostra um exemplo de aproximação de uma curva fechada por segmentos de reta.

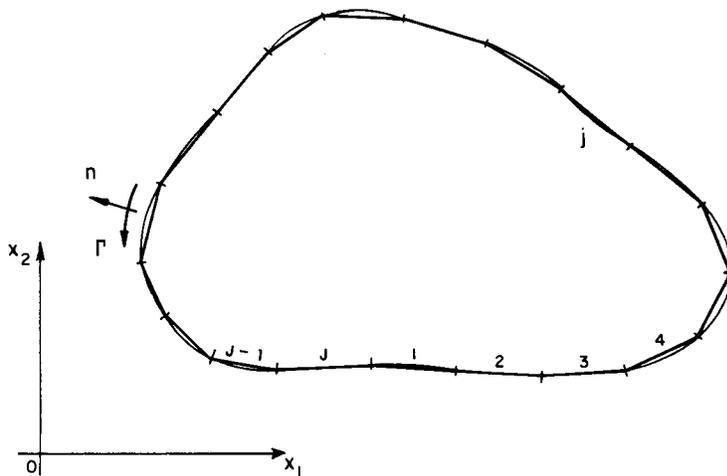


FIG. 4.2

Os pontos das extremidades do segmento Γ_j , pontos 1(PT1) e 2(PT2), são definidos por $(^1x_1, ^1x_2)$ e $(^2x_1, ^2x_2)$, respectivamente. As coordenadas x_1 e x_2 , de um ponto genérico em Γ_j , escritas em função da coordenada adimensional ξ (fig. 4.3), são da forma $a+b\xi$, sendo a e b constantes. Através dessa expressão facilmente se conclui que:

$$x_1 = \frac{1-\xi}{2} \ ^1x_1 + \frac{1+\xi}{2} \ ^2x_1 \quad (4.17a)$$

$$x_2 = \frac{1-\xi}{2} \ ^1x_2 + \frac{1+\xi}{2} \ ^2x_2 \quad (4.17b)$$

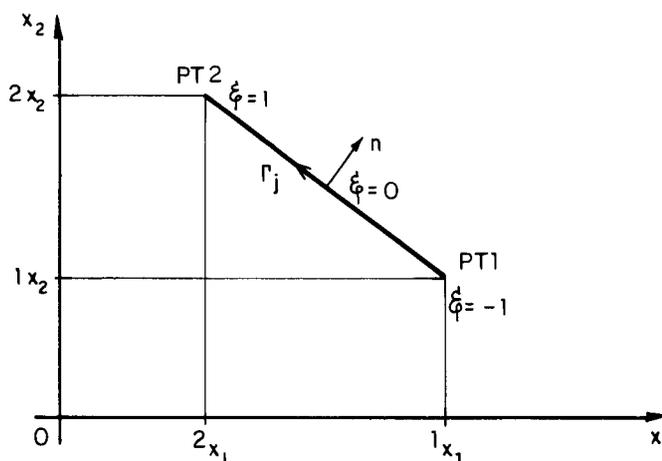


FIG. 4.3

Essas relações colocadas na forma matricial ficam:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ^1x_1 \\ ^2x_1 \\ ^1x_2 \\ ^2x_2 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

As curvas representativas das funções deslocamento e força de superfície são também aproximadas por segmentos de reta, mais precisamente por funções do primeiro grau. Por exemplo, a função aproximada da componente de deslocamento na direção X_1 , num segmento Γ , pode ter a represen-

tação gráfica abaixo. Os parâmetros 1u_1 e 2u_1 são supostos conhecidos.

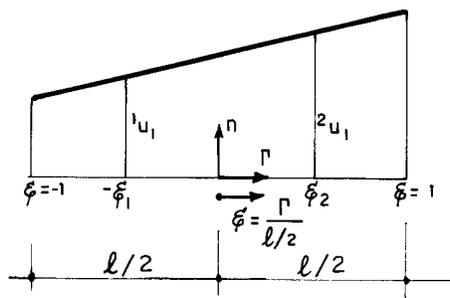


FIG. 4.4

Dessa figura se deduz que a componente u_1 num ponto genérico é dada pela fórmula:

$$u_1 = \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 + \xi_1} \ ^1u_1 + \frac{\xi_1 + \xi}{\xi_2 + \xi_1} \ ^2u_1 \quad (4.19)$$

Procedendo-se, assim, para as demais componentes de deslocamento e força de superfície, resultam fórmulas semelhantes a 4.19. Os coeficientes dos parâmetros 1u_1 e 2u_1 são funções (funções interpoladoras), comumente denominadas ϕ_1 e ϕ_2 , respectivamente. Representa-se graficamente como nas figuras abaixo.

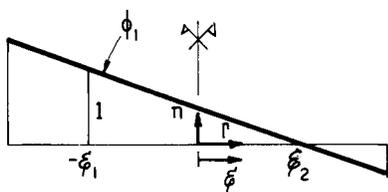


FIG. 4.5a

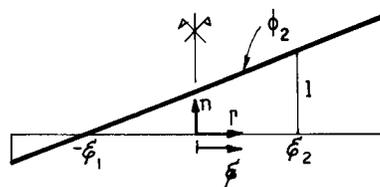


FIG. 4.5b

Em resumo, as componentes de deslocamento e força de superfície, num ponto S genérico do elemento, podem ser dadas por

$$\underline{u}(S) = \underline{\phi}^t \underline{u} \quad e \quad (4.20a)$$

$$\underline{p}(S) = \underline{\phi}^t \underline{p}^{(n)}, \quad (4.20b)$$

sendo

$$\underline{u}(S) = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.21a)$$

$$\underline{p}(S) = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}, \quad (4.21b)$$

$$\underline{u}^{(n)} = \begin{Bmatrix} 1_{u_1} \\ 2_{u_1} \\ 1_{u_2} \\ 2_{u_2} \end{Bmatrix}, \quad (4.21c)$$

$$\underline{p}^{(n)} = \begin{Bmatrix} 1_{p_1} \\ 2_{p_1} \\ 1_{p_2} \\ 2_{p_2} \end{Bmatrix} e \quad (4.21d)$$

$$\underline{\phi}^t = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \quad (4.21e)$$

Da fig. 4.4 se tem a relação $\Gamma = \frac{\ell}{2} \xi$, da qual se obtêm:

$$d\Gamma = \frac{\ell}{2} d\xi \quad (4.22)$$

Introduzindo-se 4.20a, 4.20b e 4.22 na equação 4.16, tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{c}(Q) \underline{u}(Q) = & - \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{p}^*(Q,S) \underline{\phi}^t d\xi(S) \right) \underline{u}^{(n)} + \\ & \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{u}^*(Q,S) \underline{\phi}^t d\xi(S) \right) \underline{p}^{(n)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Os pontos com coordenadas dimensionais $-\xi_1$ e ξ_2 são usualmente chamados de n \tilde{o} s, e os valores das componentes, nesses pontos, de valores nodais. Na resolução de um problema, o n \tilde{o} em geral pertence a uma das extremidades do segmento. No caso de haver descontinuidade na função deslocamento ou na função força de superfície ou em ambas, o n \tilde{o} pode, ainda, pertencer a uma das extremidades do segmento, porém, não ao segmento adjacente. O exemplo mostrado na fig. 4.6 permite esclarecer melhor o assunto.

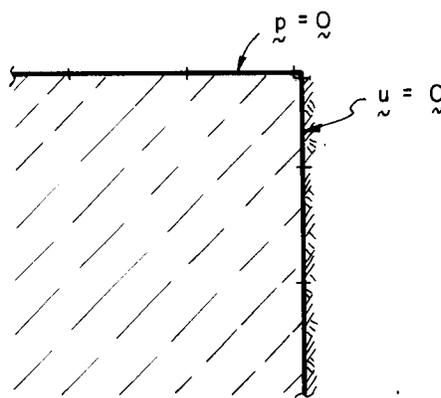


FIG. 4.6

É possível, assim, contornar o problema da descontinuidade das funções de contorno usando-se n \tilde{o} duplo (fig. 4.6). Os resultados obtidos com n \tilde{o} duplo são menos precisos do que os obtidos com n \tilde{o} s fora das extremidades dos segmentos (veja-se, por exemplo, RODRÍGUEZ, 1986). Os elementos

com os nós fora das extremidades (fig.4.5) são comumente chamados de elementos descontínuos. É usual, quando há descontinuidade só numa extremidade do segmento, o emprego de uma formulação mista, isto é, elementos com um nó na extremidade e o outro no interior do segmento. Com isso se têm as funções interpoladoras abaixo, além das representadas na fig. 4.5, para serem usadas convenientemente na resolução de um problema.

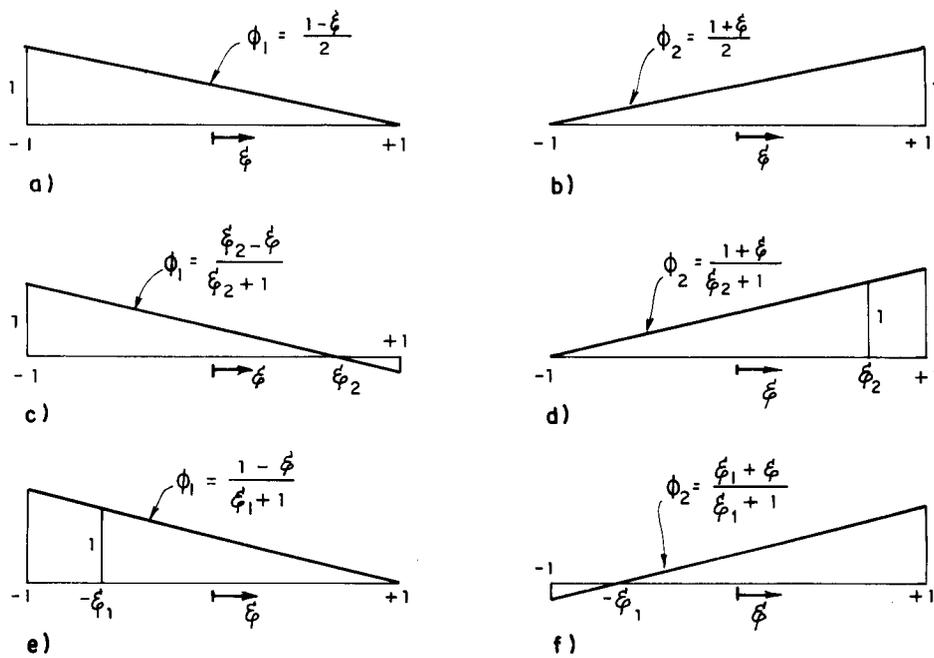


FIG. 4.7

A adoção de somente elementos descontínuos implica num aumento substancial do número de equações para resolução do problema, relativamente ao número de equações obtidos usando-se elementos com nós nas extremidades. É claro que o nó duplo não deve ser usado quando não há descontinuidade. Conclui-se, desse modo, que o número de pontos usados na discretização do contorno é menor ou igual ao número de nós.

Suponha-se que o contorno de um corpo seja discretizado em J segmentos, sobre os quais se consideram N nós. A equação 4.23 aplicada a cada um desses nós dá ori-

gem a um sistema de equações, que na forma compacta é dada pela equação 4.24. Os vetores $\underline{\underline{U}}$ e $\underline{\underline{P}}$ são vetores nodais e contêm as componentes de deslocamento e força de superfície, respectivamente. As matrizes $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{H}}$ e $\underline{\underline{G}}$ serão assuntos do próximo item.

$$\underline{\underline{C}} \underline{\underline{U}} = - \underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} \quad (4.24)$$

Incorporando a matriz $\underline{\underline{C}}$ em $\underline{\underline{H}}$ e chamando a nova matriz de $\underline{\underline{H}}$, resulta:

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} \quad (4.25)$$

Essa equação representa um sistema de equações lineares com $2N$ equações relacionando componentes de deslocamento e força de superfície. Num corpo em equilíbrio, é possível conhecerem-se N_1 componentes de deslocamento e N_2 componentes de força de superfície tal que $N_1 + N_2 = 2N$, o que torna o sistema de equações determinado. O sistema de equações fica, assim, com dois tipos de incógnitas, isto é, N_1 componentes de força de superfície (reações) e N_2 componentes de deslocamento. Devido as incógnitas serem de naturezas diferentes, essa técnica numérica é denominada mista.

4.4 - Coeficientes de influência

4.4.1 - Considerações preliminares

Por coeficientes de influência se entendem os elementos das matrizes $\underline{\underline{H}}$, $\underline{\underline{G}}$ e $\underline{\underline{C}}$. O mesmo nome também se aplica, é claro, aos elementos da matriz $\underline{\underline{H}}$.

Inicialmente serão tratados os elementos de $\underline{\underline{H}}$ e $\underline{\underline{G}}$. Segundo a equação 4.23, eles são obtidos através do cálculo das matrizes.

$$\frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} p_{11}^*(Q,S)\phi_1 & p_{11}^*(Q,S)\phi_2 & p_{12}^*(Q,S)\phi_1 & p_{12}^*(Q,S)\phi_2 \\ p_{21}^*(Q,S)\phi_1 & p_{21}^*(Q,S)\phi_2 & p_{22}^*(Q,S)\phi_1 & p_{22}^*(Q,S)\phi_2 \end{bmatrix} d\xi(S) \quad e$$

(4.26a)

$$\frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} u_{11}^*(Q,S)\phi_1 & u_{11}^*(Q,S)\phi_2 & u_{12}^*(Q,S)\phi_1 & u_{12}^*(Q,S)\phi_2 \\ u_{21}^*(Q,S)\phi_1 & u_{21}^*(Q,S)\phi_2 & u_{22}^*(Q,S)\phi_1 & u_{22}^*(Q,S)\phi_2 \end{bmatrix} d\xi(S) .$$

(4.26b)

Elas são definidas num elemento genérico de comprimento ℓ . Chamando-se as funções interpoladoras de ϕ_m ($m=1,2$) e os elementos em 4.26a e 4.26b de h_{ij}^* e g_{ij}^* , respectivamente, resultam as fórmulas 4.27a e 4.27b. O índice i assume os valores 1 e 2, e o índice j os valores 1, 2, 3 e 4.

$$h_{ij}^* = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} p_{\ell k}^*(Q,S)\phi_m d\xi(S) \quad (4.27a)$$

$$g_{ij}^* = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} u_{\ell k}^*(Q,S)\phi_m d\xi(S) \quad (4.27b)$$

Quando o ponto Q pertence ao elemento sobre o qual se realiza a integração, essas integrais são singulares. A técnica de integração numérica aqui usada não é adequada nesse caso e, por isso, elas serão resolvidas analiticamente. Primeiramente serão vistas as integrais não singulares e logo em seguida as singulares.

No caso da matriz \underline{C} , os seus elementos, $c_{\ell k}(Q) = \delta_{\ell k} + \bar{c}_{\ell k}(Q)$, são dados pela seguinte fórmula:

$$c_{\ell k}(Q) = \delta_{\ell k} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{\ell k}^*(Q,S) d\Gamma(S). \quad (4.28)$$

4.4.2 - Integrais não singulares

Em face da dificuldade e quase sempre da impossibilidade de se calcular as integrais não singulares por método exato, usa-se o cálculo aproximado. A integração numérica aqui é feita por meio da quadratura de Guass (veja-se, por exemplo, LAZARINI & FRANCO, 1984). Para quadratura gaussiana unidimensional, pode-se escrever que

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{i=I} w_i f(\xi_i) . \quad (4.29)$$

A função $f(\xi_i)$ é o valor da função na coordenada do i -ésimo ponto de integração e w_i é o fator de ponderação também do i -ésimo ponto.

O número I de pontos usados para obter resultados satisfatórios para as integrais 4.27a e 4.27b depende principalmente das distâncias do ponto Q aos pontos do elemento de contorno. Por isso, é usual estabelecer o número de pontos em função do comprimento do elemento e da distância do ponto Q ao ponto médio do elemento. Um critério que dá bons resultados é o estabelecido abaixo (veja-se RODRÍGUEZ, 1986), onde os parâmetros ℓ e d estão mostrados na fig. 4.8.

$$0 < d < \ell \quad \dots\dots\dots I = 10 \quad (4.30a)$$

$$\ell \leq d < 1,5\ell \quad \dots\dots\dots I = 6 \quad (4.30b)$$

$$1,5\ell \leq d < 10\ell \quad \dots\dots\dots I = 4 \quad (4.30c)$$

$$10\ell \leq d \quad \dots\dots\dots I = 2 \quad (4.30d)$$

Os valores de ξ_i e w_i correspondente a cada desigualdade são fornecidos na tabela seguinte. Como o intervalo de integração é simétrico em relação à origem ($\xi_i=0$), as coordenadas ξ_i também são; os valores de w_i em coordenadas simétricas são iguais. Nesta tabela aparece apenas os valores de w_i correspondentes às coordenadas ξ_i positivas.

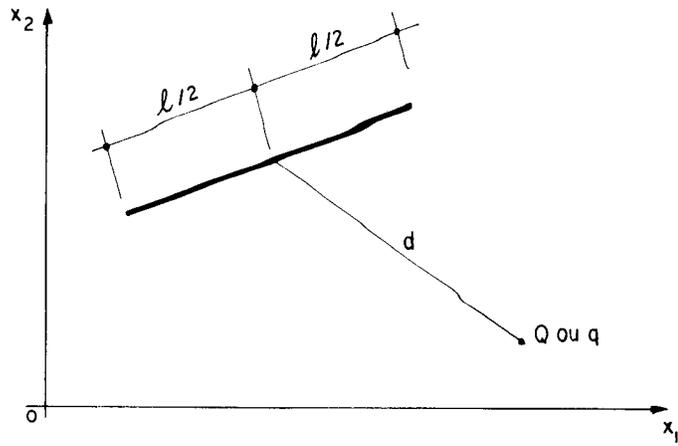


FIG. 4.8

TABELA I

I	ξ_i	w_i
2	0,57735026918962576450	1,00000000000000000000
4	0,86113631159405257522	0,34785484513745385737
	0,33998104358485626480	0,65214515486254614262
6	0,93246951420315202781	0,17132449237917034504
	0,66120938646626451366	0,36076157304813860756
	0,23861918608319690863	0,46791393457269104738
10	0,97390652851717172007	0,06667134430868813759
	0,86506336668898451073	0,14945134915058059314
	0,67940956829902440623	0,21908636251598204399
	0,43339539412924719079	0,26926671930999635509
	0,14887433898163121088	0,29552422471475287017

Os integrandos das expressões 4.27a e 4.27b devem ser preparados para o emprego da fórmula de quadratura de Gauss. Como as funções interpoladoras ϕ_1 e ϕ_2 são definidas em função de ξ , restam as funções $p_{lk}^*(Q,S)$ e $u_{lk}^*(Q,S)$. Com as fórmulas 4.17a e 4.17b, essas funções são facilmente escritas em função de ξ .

4.4.3 - Integrais singulares

É conveniente, para calcular as integrais 4.27a e 4.27b, quando singulares, escrever as funções $p_{\ell k}^*(Q,S)$, $u_{\ell k}^*(Q,S)$ e ϕ_m em função da distância de "Q" a "S" (aqui chamada de r). Para as duas primeiras funções isso é imediato. O mesmo não ocorre para ϕ_m , que na forma generalizada é escrita assim:

$$\phi_m = \frac{1}{\xi_2 + \xi_1} (\xi_2 - c - sn \frac{r}{0,5\ell}) \quad (4.31)$$

O parâmetro "c" é o valor da coordenada correspondente a $\phi_m = 1$, quando o ponto Q estiver em $-\xi_1$, ou a $\phi_m = 0$, no caso de Q em ξ_2 . Para se definir sn, é preciso que se defina ϕ_m^* como sendo a função no trecho do elemento (obtido pelo fato do ponto Q não se localizar numa de suas extremidades) em que r e Γ têm sentidos opostos. Com isso se diz que $sn = +1$ se a função ϕ_m for ϕ_1 ou ϕ_2^* e $sn = -1$ se por ϕ_2 ou ϕ_1^* .

Seja, por exemplo, a representação gráfica abaixo, a partir da qual se deseja conhecer as funções ϕ_2 e ϕ_2^* .

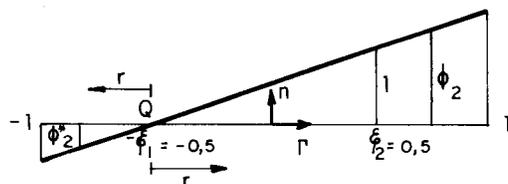


FIG. 4.9

O parâmetro c é igual a 0,5 e sn assume os valores -1 e +1 nas funções ϕ_2 e ϕ_2^* , respectivamente. Com esses valores e os de ξ_1 e ξ_2 resultam, usando-se 4.31, as seguintes funções:

$$\phi_2 = \frac{r}{0,5\ell} \quad (4.32a)$$

$$\phi_2^* = -\frac{r}{0,5\ell} \quad (4.32b)$$

Merece, ainda, especial atenção a função $p_{\ell k}^*(Q,S)$. Ela pode ser simplificada, pois $\frac{\partial r}{\partial n}$ é igual a zero (não há variação de r com a normal n) e também porque a expressão $r_{,\ell}^{n_k} - r_{,k}^{n_\ell}$ vale +1 ou -1. As figs. 4.10a e 4.10b, e os correspondentes resultados esclarecem esse fato.

$$r_{,1}^{n_2} - r_{,2}^{n_1} = \cos(\alpha + \pi) \operatorname{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \operatorname{sen}(\alpha + \pi) \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -1 \quad (4.33a)$$

$$r_{,2}^{n_1} - r_{,1}^{n_2} = +1 \quad (4.33b)$$

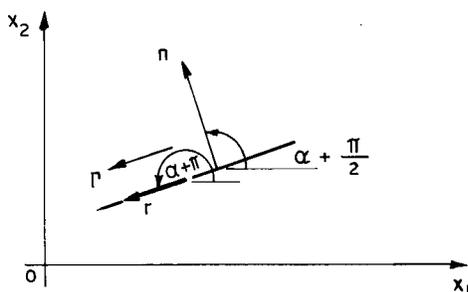


FIG. 4. 10a

$$r_{,1}^{n_2} - r_{,2}^{n_1} = \cos\alpha \operatorname{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \operatorname{sen}\alpha \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = +1 \quad (4.33c)$$

$$r_{,2}^{n_1} - r_{,1}^{n_2} = -1 \quad (4.33d)$$

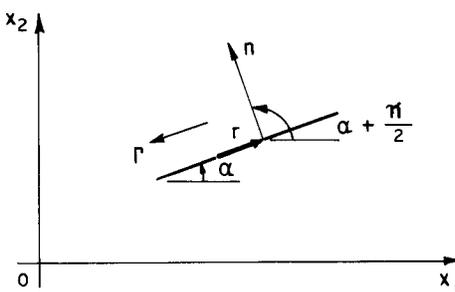


FIG. 4. 10b

Chamando-se a expressão $r_{,\ell}^{n_k} - r_{,k}^{n_\ell}$ de \bar{sn} , a função $p_{\ell k}^*(Q,S)$ simplificada fica:

$$p_{\ell k}^*(Q, S) = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \cdot \overline{\text{sn}} \cdot \frac{1}{r} \quad (4.34)$$

Com isso, a fórmula integral 4.27a toma a seguinte forma:

$$h_{ij}^* = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \cdot \overline{\text{sn}} \int_{\Gamma} \frac{\phi_m}{r} d\Gamma \quad (4.35)$$

Determinando-se essa integral, após se introduzir a função ϕ_m , resulta a fórmula 4.36, cujo uso será posteriormente mostrado.

$$h_{ij}^* = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \cdot \frac{\overline{\text{sn}}}{\xi_2 + \xi_1} \left[(\xi_2 - c) \ln r - \text{sn} \cdot \frac{r}{0,5\ell} \right] \quad (4.36)$$

A função $u_{\ell k}^*(Q, S)$ não permite nenhuma simplificação, então, de 4.27b ,

$$g_{ij}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \int_{\Gamma} \left[-(3-4\nu) \ln r \delta_{\ell k} + r_{,\ell} r_{,k} \right] \phi_m d\Gamma. \quad (4.37)$$

Introduzindo-se a função ϕ_m nessa fórmula, obtém-se, após a integração,

$$g_{ij}^* = \frac{r}{8\pi(1-\nu)G(\xi_2 + \xi_1)} \left\{ (3-4\nu) \delta_{\ell k} \left[(\ln r - 1) (-\xi_2 + c + \frac{\text{sn}}{\ell} r) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\text{sn}}{2\ell} r \right] + r_{,\ell} r_{,k} \left(\xi_2 - c - \frac{\text{sn}}{\ell} r \right) \right\}. \quad (4.38)$$

As fórmulas h_{ij}^* e g_{ij}^* são particularmente importantes para o cálculo de integrais singulares via computador (integrais exatas). Elas permitem obter resultados com o ponto Q localizado numa das extremidades do segmento e fora de suas extremidades. Nesse último caso, deve-se aplicá-las em cada parte do segmento e somar os resultados correspondentes.

Chamando-se um valor positivo, próximo de zero, de ε , os limites superior e inferior em 4.36 e 4.38, quando r e Γ tem sentidos opostos, são $-\alpha l$ e $-\varepsilon$, respectivamente. O parâmetro α pode assumir qualquer valor do intervalo $0 < \alpha \leq 1$. Mudando-se a variável de integração pode-se concluir que

$$\int_{-\alpha l}^{-\varepsilon} u_{lk}^*(Q, S) \phi_m d\Gamma = - \int_{\alpha l}^{\varepsilon} u_{lk}^*(Q, S) \phi_m dr = \int_{\varepsilon}^{\alpha l} u_{lk}^*(Q, S) \phi_m dr . \quad (4.39)$$

O mesmo pode ser feito quando o integrando é $p_{lk}^*(Q, S) \phi_m$, desde que se considere o sinal \bar{sn} oposto ao obtido quando os sentidos de r e Γ são iguais. No caso de r e Γ terem os mesmos sentidos, os limites inferior e superior são ε e αl , respectivamente.

Com essas considerações e os conceitos de integrais de Cauchy e singular, o valor numérico das expressões, no segundo membro de 4.36 e 4.38, é obtido fazendo-se simplesmente $r = \alpha l$.

Objetivando-se esclarecer o emprego das fórmulas 4.36 e 4.38, dão-se a seguir dois exemplos (figs. 4.11 e 4.12), para o caso de $l = 1$ e $k = 2$, com os correspondentes resultados. Em alguns dos resultados aparecerão $r_{,1}$ e $r_{,2}$, e $r'_{,1}$ e $r'_{,2}$ que correspondem, respectivamente, aos trechos da esquerda e da direita, do ponto Q .

Exemplo 1.

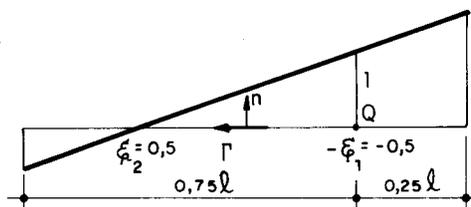


FIG. 4.11

$$h_{13}^* = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \left[- \left(\ln r - \frac{r}{0,5l} \right) \Bigg|_{\varepsilon}^{0,75l} + \left(\ln r + \frac{r}{0,5l} \right) \Bigg|_{\varepsilon}^{0,25l} \right] \quad (4.40a)$$

$$g_{13}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[r_{,1} r_{,2} \left(r - \frac{r^2}{\ell} \right) \Big|_{\epsilon}^{0,75\ell} + r'_{,1} r'_{,2} \left(r + \frac{r^2}{\ell} \right) \Big|_{\epsilon}^{0,25\ell} \right] \quad (4.40b)$$

Exemplo 2.

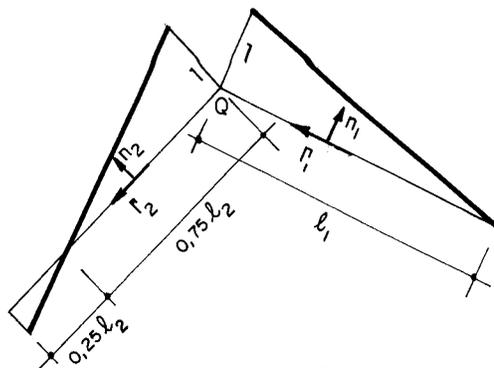


FIG. 4.12

$$h_{13}^* = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \left[-(\ln r - \frac{r}{0,75\ell_2}) \Big|_{\epsilon}^{\ell_2} + (\ln r - \frac{r}{\ell_1}) \Big|_{\epsilon}^{\ell_1} \right] \quad (4.41a)$$

$$g_{13}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[r_{,1} r_{,2} \left(r - \frac{r^2}{1,5\ell_2} \right) \Big|_{\epsilon}^{\ell_2} + r'_{,1} r'_{,2} \left(r - \frac{r^2}{2\ell_1} \right) \Big|_{\epsilon}^{\ell_1} \right] \quad (4.41b)$$

Em ambos os exemplos, os termos que contêm ϵ não figura no resultado final. Isso porque se tornam nulos quando ϵ tende para zero (conceito usual de integral singular), ou porque se cancelam (conceito de integral de Cauchy). Por isso, na prática, ignora-se o limite inferior da integral e toma-se apenas o limite superior.

4.4.4 - Função deslocamento

Os coeficientes tratados neste item se referem, essencialmente, a descontinuidade da função deslocamento quando de sua passagem de ponto interno para ponto de contorno.

A determinação dos elementos da matriz \underline{C} ou mais propriamente dos elementos da submatriz $\underline{c}(Q)$ se resume praticamente ao cálculo do limite da integral de $p_{lk}^*(Q,S)$ (veja-se a fórmula 4.28). Deve-se, dessa maneira, exprimir a função a ser integrada e o diferencial $d\Gamma$ em função da variável ε (raio de um setor circular). Para isso se toma um ponto Q comum a dois segmentos adjacentes (fig. 4.13), os quais definem um ângulo interno α com a bissetriz, orientada para fora do corpo, formando um ângulo γ com o eixo X_1 , medido no sentido anti-horário. No caso particular do ponto de carga não pertencer a nenhuma das extremidades do segmento de reta, por exemplo, elemento misto, o ângulo α mede 180° e γ é facilmente determinado.

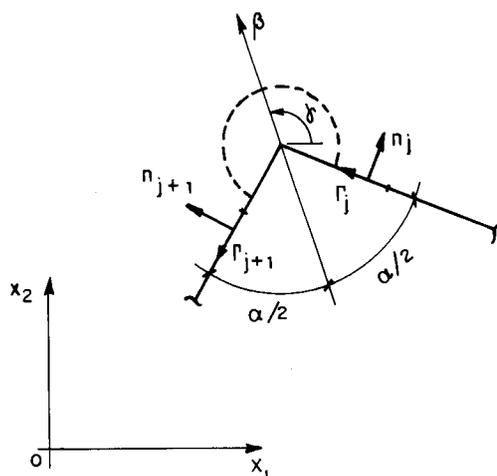


FIG. 4.13

Tomando-se por base a fig. 4.14, os limites inferior e superior da integral na expressão de $\underline{c}_{lk}(Q)$, abaixo repetida, são $-\pi + \gamma + \frac{\alpha}{2}$ e $\pi + \gamma - \frac{\alpha}{2}$, respectivamente. Ainda desta figura se conclui que: $r = \varepsilon$, $d\Gamma = \varepsilon d\theta$, $r_{,1} = \cos\theta$, $r_{,2} = \sin\theta$ e $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 1$.

$$\underline{c}_{lk}(Q) = \delta_{lk} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{lk}^*(Q,S) d\Gamma(S) \quad (4.28)$$

repetida

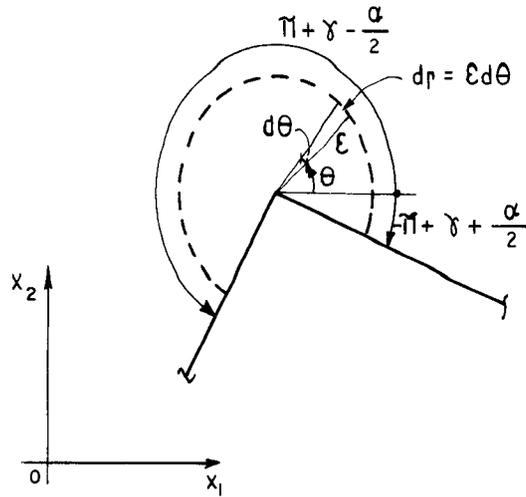


FIG. 4. 14

Com as relações obtidas dessa figura e 4.28 se chega a

$$c_{\ell k}(Q) = \delta_{\ell k} - \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_{-\pi+\gamma+\frac{\alpha}{2}}^{\pi+\gamma-\frac{\alpha}{2}} \left[(1-2\nu)\delta_{\ell k} + 2r_{,\ell} r_{,k} + (1-2\nu)(r_{,\ell} n_k - r_{,k} n_\ell) \right] d\theta . \quad (4.42)$$

Fazendo-se ℓ e k assumirem os valores 1 e 2, obtêm-se, por meio dessa expressão, os elementos de $\underline{c}(Q)$, isto é,

$$\underline{c}(Q) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\text{sen}\alpha \cos 2\gamma}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\text{sen}\alpha \text{sen} 2\gamma}{4\pi(1-\nu)} \\ \frac{\text{sen}\alpha \text{sen} 2\gamma}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{\text{sen}\alpha \cos 2\gamma}{4\pi(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Quando o ponto Q não pertence a vértices do contorno (ângulo α igual a 180°), os elementos de $\underline{c}(Q)$ são dados por meio da fórmula abaixo.

$$c_{\ell k}(Q) = \delta_{\ell k} / 2 . \quad (4.44)$$

4.5 - Discretização das fórmulas para pontos internos

Supõe-se também, neste item, que a força de massa seja nula. Com essa consideração, as fórmulas 3.51 e 3.55 aplicadas a um contorno aproximado por J segmentos ficam:

$$u_{\ell}(q) = - \sum_{j=1}^{j=J} \int_{\Gamma_j} p_{\ell k}^*(q, S) u_k(S) d\Gamma(S) + \sum_{j=1}^{j=J} \int_{\Gamma_j} u_{\ell k}^*(q, S) p_k(S) d\Gamma(S) \quad (4.45a)$$

$$\sigma_{ij}(q) = - \sum_{j=1}^{j=J} \int_{\Gamma_j} S_{ijk}(q, S) u_k(S) d\Gamma(S) + \sum_{j=1}^{j=J} \int_{\Gamma_j} D_{ijk}(q, S) p_k(S) d\Gamma(S) \quad (4.45b)$$

Na forma matricial essas fórmulas são escritas da seguinte forma:

$$\underline{u}(q) = - \sum_{j=1}^{j=J} \int_{\Gamma_j} \underline{p}^*(q, S) \underline{u}(S) d\Gamma(S) + \sum_{j=1}^{j=J} \int_{\Gamma_j} \underline{u}^*(q, S) \underline{p}(S) d\Gamma(S) \quad (4.46a)$$

$$\underline{\sigma}(q) = - \sum_{j=1}^{j=J} \int_{\Gamma_j} \underline{S}(q, S) \underline{u}(S) d\Gamma(S) + \sum_{j=1}^{j=J} \int_{\Gamma_j} \underline{D}(q, S) \underline{p}(S) d\Gamma(S) \quad (4.46b)$$

As matrizes $\underline{p}^*(q, S)$ e $\underline{u}^*(q, S)$ são similares àquelas em 4.13 e 4.14, apenas deve-se considerar que o ponto

de carga agora é interno do corpo. Quanto às matrizes $\underline{S}(q,S)$ e $\underline{D}(q,S)$, conclui-se, segundo 4.45b, que em cada uma de suas linhas só o índice k varia. É possível, assim, escrever que

$$\underline{S}(q,S) = \begin{bmatrix} S_{111}(q,S) & S_{112}(q,S) \\ S_{121}(q,S) & S_{122}(q,S) \\ S_{221}(q,S) & S_{222}(q,S) \end{bmatrix} \quad e \quad (4.47a)$$

$$\underline{D}(q,S) = \begin{bmatrix} D_{111}(q,S) & D_{112}(q,S) \\ D_{121}(q,S) & D_{122}(q,S) \\ D_{221}(q,S) & D_{222}(q,S) \end{bmatrix} . \quad (4.47b)$$

Com os $S_{ijk}(q,S)$ e $D_{ijk}(q,S)$ dispostos dessa maneira, tem-se:

$$\underline{\sigma}(q) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

Introduzindo-se 4.20a, 4.20b e 4.22 nas fórmulas 4.46a e 4.46b resultam:

$$\underline{u}(q) = - \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{p}^*(q,S) \underline{\phi}^t d\xi(S) \right) \underline{u}^{(n)} + \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{u}^*(q,S) \underline{\phi}^t d\xi(S) \right) \underline{p}^{(n)} \quad (4.49a)$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(q) = & - \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{S}(q, S) \underline{\phi}^t d\xi(S) \right) \underline{u}^{(n)} + \\ & + \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{D}(q, S) \underline{\phi}^t d\xi(S) \right) \underline{p}^{(n)} \end{aligned} \quad (4.49b)$$

Na forma compacta se escreve

$$\underline{u}(q) = - \underline{\bar{H}} \underline{U} + \underline{\bar{G}} \underline{P} \quad e \quad (4.50a)$$

$$\underline{\sigma}(q) = - \underline{H}' \underline{U} + \underline{G}' \underline{P} \quad , \quad (4.50b)$$

onde os elementos de $\underline{\bar{H}}$, $\underline{\bar{G}}$, \underline{H}' e \underline{G}' são obtidos através das integrais em 4.49a e 4.49b. Quando se utilizam essas fórmulas, os vetores \underline{U} e \underline{P} devem ser conhecidos.

4.6 - Outros tipos de solicitação

4.6.1 - Força de massa

Neste trabalho, considera-se somente a força de massa decorrente da ação da gravidade (peso próprio do corpo). Como ela é suposta constante, pode-se transformar as integrais de volume, que contêm as componentes de força de massa, em integrais de contorno. Isso simplifica o cálculo dos efeitos da força de massa por meio das fórmulas de deslocamento e tensão, pois não se discretiza o domínio e sim o contorno. O número de dados necessários à resolução do problema em que se considera a ação da gravidade é praticamente o mesmo se ela não for considerada.

Os termos integrais relativos às componentes de força de massa nas fórmulas 3.51, 3.55 e 4.11, abaixo escritos, são a seguir analisados. Como a primeira e a última integral, das enumeradas abaixo, diferem apenas pela localização do ponto de carga (q ou Q), analisa-se só uma; aqui se tomará a primeira.

$$\int_{\Omega} u_{\ell k}^*(q, s) b_k(s) d\Omega(s) \tag{4.51a}$$

$$\int_{\Omega} D_{ijk}(q, s) b_k(s) d\Omega(s) \tag{4.51b}$$

$$\int_{\Omega} u_{\ell k}^*(Q, s) b_k(s) d\Omega(s) \tag{4.51c}$$

O parâmetro $b_k(s)$, relativo ao peso próprio do corpo, é constante ao longo do domínio Ω , motivo pelo qual se dispensará a letra s que caracteriza sua localização. Com isso restam para análise, além do diferencial $d\Omega(s)$, os tensores $u_{\ell k}^*(q, s)$ e $D_{ijk}(q, s)$.

A mudança das integrais de domínio para integrais de contorno é feita por meio de coordenadas cilíndricas. Tomando-se por base a fig. 4.15, é possível se concluir as seguintes igualdades:

$$d\Omega = \bar{r} d\bar{r} d\theta \tag{4.52a}$$

$$d\Gamma \cos\alpha = r d\theta \tag{4.52b}$$

$$\cos\alpha = \frac{\partial r}{\partial n} \tag{4.52c}$$

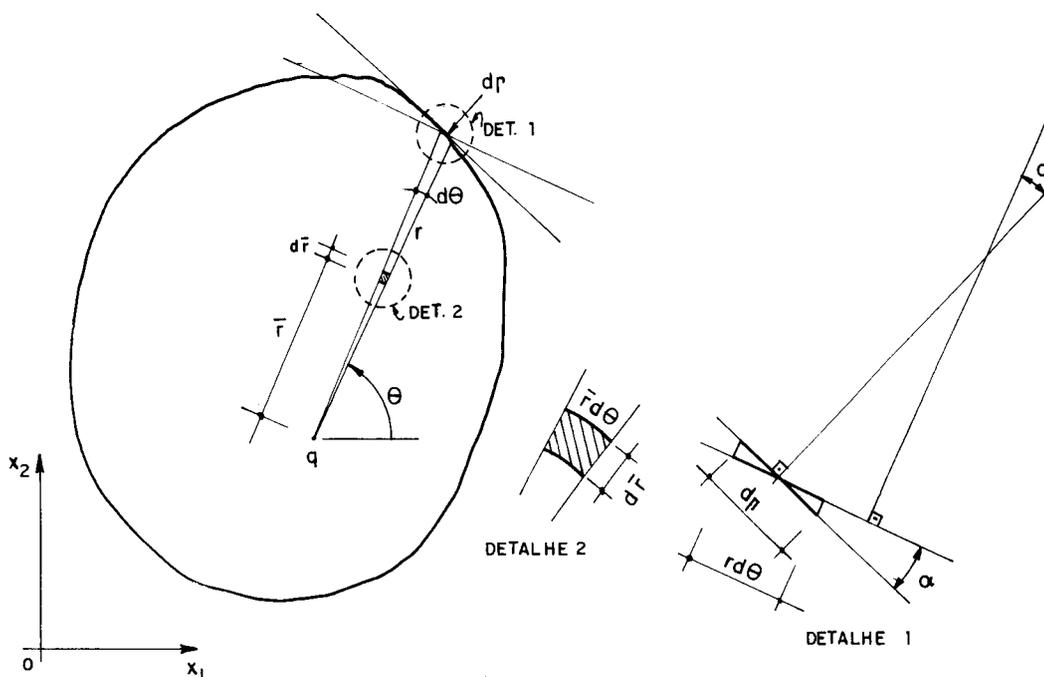


FIG. 4.15

Com 4.52a e as expressões que definem as funções $u_{\ell k}^*(q, s)$ e $D_{ijk}(q, s)$, as integrais 4.51a e 4.51b podem ser transformadas em integrais simples (fórmulas 4.53a e 4.53b), após integração das integrais em r .

$$\frac{b_k}{16\pi(1-\nu)G} \int_{\theta} \left[-(3-4\nu)(\ln r - 0,5)\delta_{\ell k} + r_{,\ell} r_{,k} \right] r^2 d\theta \quad (4.53a)$$

$$\frac{b_k}{4\pi(1-\nu)} \int_{\theta} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] r d\theta \quad (4.53b)$$

Utilizando-se 4.52b e 4.52c, as integrais acima passam ter como variável de integração o parâmetro Γ , similares às outras integrais nas fórmulas de deslocamento e tensão, e na equação de contorno. Resulta, dessa maneira,

$$b_k \int_{\Gamma} b_{\ell k}^*(q, S) d\Gamma(S) \quad e \quad (4.54a)$$

$$b_k \int_{\Gamma} t_{ijk}(q, S) d\Gamma(S) \quad , \quad (4.54b)$$

onde

$$b_{\ell k}^*(q, S) = \frac{r}{16\pi(1-\nu)G} \left[-(3-4\nu)(\ln r - 0,5)\delta_{\ell k} + r_{,\ell} r_{,k} \right] r_{,n} \quad e \quad (4.55a)$$

$$t_{ijk}(q, S) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] r_{,n} \quad . \quad (4.55b)$$

A equação de contorno e as fórmulas de deslocamento e tensão, num contorno aproximado por J segmentos de reta, com os termos integrais tendo como variável de integração o parâmetro adimensional ξ , são

$$\begin{aligned}
 \underline{c}(Q)\underline{u}(Q) = & - \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{p}^*(Q, S) \underline{\phi}^t d\xi(S) \right) \underline{u}^{(n)} + \\
 & + \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{u}^*(Q, S) \underline{\phi}^t d\xi(S) \right) \underline{p}^{(n)} + \\
 & + \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{b}^*(Q, S) d\xi(S) \right) \underline{b}, \quad (4.56a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{u}(q) = & - \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{p}^*(q, S) \underline{\phi}^t d\xi(S) \right) \underline{u}^{(n)} + \\
 & + \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{u}^*(q, S) \underline{\phi}^t d\xi(S) \right) \underline{p}^{(n)} + \\
 & + \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{b}^*(q, S) d\xi(S) \right) \underline{b} \quad e \quad (4.56b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{g}(q) = & - \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{s}(q, S) \underline{\phi}^t d\xi(S) \right) \underline{u}^{(n)} + \\
 & + \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{D}(q, S) \underline{\phi}^t d\xi(S) \right) \underline{p}^{(n)} + \\
 & + \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{t}(q, S) d\xi(S) \right) \underline{b}, \quad (4.56c)
 \end{aligned}$$

onde

$$\underline{b}^*(q, S) = \begin{bmatrix} b_{11}^*(q, S) & b_{12}^*(q, S) \\ b_{21}^*(q, S) & b_{22}^*(q, S) \end{bmatrix}, \quad (4.57a)$$

$$\underline{t}(q, S) = \begin{bmatrix} t_{111}(q, S) & t_{112}(q, S) \\ t_{121}(q, S) & t_{122}(q, S) \\ t_{221}(q, S) & t_{222}(q, S) \end{bmatrix} \quad e \quad (4.57b)$$

$$\underline{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} . \quad (4.57c)$$

Convém observar que o cálculo dos termos relativos à força de massa é feito aproximando-se só o contorno. Na forma compacta, as fórmulas 4.56a, 4.56b e 4.56c tomam as formas abaixo.

$$\underline{C} \underline{U} = - \underline{\hat{H}} \underline{U} + \underline{G} \underline{P} + \underline{B} \quad (4.58a)$$

$$\underline{u}(q) = - \underline{\bar{H}} \underline{U} + \underline{\bar{G}} \underline{P} + \underline{\bar{B}} \quad (4.58b)$$

$$\underline{\sigma}(q) = - \underline{H}' \underline{U} + \underline{G}' \underline{P} + \underline{T} \quad (4.58c)$$

Sabendo-se que, para pontos internos do corpo, vale a igualdade $c_{\ell k}(Q) = \delta_{\ell k}$, pode-se representar 4.58a e 4.58b numa única fórmula. Para isso se vai chamar $\underline{\hat{H}}$ e $\underline{\bar{H}}$ de \underline{H} , e incorporar $\underline{\bar{G}}$ em \underline{G} e $\underline{\bar{B}}$ em \underline{B} . Pode-se, desse modo, escrever em substituição a 4.58a e 4.58b, simplesmente,

$$\underline{C} \underline{U} = - \underline{H} \underline{U} + \underline{G} \underline{P} + \underline{B} . \quad (4.59)$$

4.6.2 - Tensão inicial

Em decorrência da formulação usada na resolução de problemas elásticos-lineares, as tensões iniciais em solos e rochas (chamadas de tensões residuais ou tectônicas)

recebem tratamento diferenciado das provenientes de temperatura, retração e expansão (chamadas, simplesmente, de tensões iniciais). As tensões tectônicas surgem pela ação direta de forças que já foram equilibradas, enquanto as tensões iniciais pelo impedimento às deformações. Na formulação de um problema, as tensões iniciais fazem parte direta da formulação; já as tensões tectônicas devem apenas ser adicionadas às calculadas pela fórmula integral de tensão. Analisa-se, a seguir, só a influência da tensão inicial no deslocamento e na tensão.

Chamando as componentes de tensão inicial, num ponto interno s , de $\sigma_{jk}^o(s)$ e as componentes de tensão elástica-linear de $\sigma_{jk}^e(s)$, a tensão resultante ($\sigma_{jk}(s)$) é dada pela fórmula abaixo. Para deduzí-la, deve-se tomar a condição $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^o$ e introduzir $\epsilon_{ij}^e = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^o$ na Lei de Hooke.

$$\sigma_{jk}(s) = \sigma_{jk}^e(s) + \sigma_{jk}^o(s) \quad (4.60)$$

Para incorporar a influência da tensão inicial na fórmula de deslocamento, introduz-se 4.60 no segundo termo da expressão 3.45. Isso se leva a concluir que

$$u_\lambda(q) = - \int_{\Gamma} p_{\lambda k}^*(q, S) u_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} u_{\lambda k}^*(q, S) p_k(S) d\Gamma(S) + \\ + \int_{\Gamma} u_{\lambda k}^*(q, s) b_k(s) d\Omega(s) + \int_{\Omega} \sigma_{jk}^o(s) \epsilon_{\lambda jk}^*(q, s) d\Omega(s) , \quad (4.61)$$

onde, no estado plano de deformação,

$$\epsilon_{\lambda jk}^*(q, s) = - \frac{1}{8\pi(1-\nu)Gr} \left[(1-2\nu) (r_{,k} \delta_{\lambda j} + r_{,j} \delta_{\lambda k}) + \right. \\ \left. - r_{, \lambda} \delta_{jk} + 2r_{,j} r_{,k} r_{, \lambda} \right] . \quad (4.62)$$

A equação de contorno 4.11 é escrita, agora, assim:

$$c_{\ell k}(Q)u_k(Q) = - \int_{\Gamma} p_{\ell k}^*(Q,S)u_k(S)d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} u_{\ell k}^*(Q,S)p_k(S)d\Gamma(S) + \int_{\Omega} u_{\ell k}^*(Q,s)b_k(s)d\Omega(s) + \int_{\Omega} \sigma_{jk}^o(s)\varepsilon_{\ell jk}^*(Q,s)d\Omega(s) \quad (4.63)$$

A dedução da fórmula integral de tensão, como pode ser visto no subitem 3.4.3, envolve derivadas das componentes de deslocamento num ponto interno. Com isso, todos os termos integrais em 4.61 devem ser derivados. Os três primeiros termos não possuem singularidade, já o último termo possui singularidade e, por isso, requer tratamento especial. Uma técnica usada, consiste executar as derivadas somente após se realizar a integração da integral singular, sendo que para isso valores constantes de $\sigma_{jk}^o(s)$ são supostos numa pequena região na vizinhança do ponto q (veja-se, por exemplo, RICARDELLA, 1973). Uma outra alternativa é executar as derivadas parciais do integrando, mas corrigindo-as com termos independentes devido à singularidade (veja-se, por exemplo, TELLES & BREBBIA, 1980).

Neste trabalho se considera que as tensões iniciais, num corpo, sejam constantes e, nesse caso, é possível transformar a última integral de 4.63 numa integral de contorno. A mudança dessa integral, de integral de domínio para integral de contorno, é o assunto a seguir tratado.

Introduzindo-se a fórmula 2.6 no integrando da integral correspondente à tensão inicial, resulta

$$\frac{1}{2} \sigma_{jk}^o(s) \int_{\Omega} (u_{\ell j,k}^*(q,s) + u_{\ell k,j}^*(q,s)) d\Omega(s) \quad , \quad (4.64)$$

ou ainda, após integração por partes,

$$\frac{1}{2} \sigma_{jk}^o(s) \int_{\Gamma} (u_{\ell j}^*(q, S) n_k(S) + u_{\ell k}^*(q, S) n_j(S)) d\Gamma(S) . \quad (4.65)$$

Introduzindo-se agora a solução fundamental, essa expressão fica

$$\sigma_{jk}^o(s) \int_{\Gamma} e_{\ell jk}^*(q, S) d\Gamma(S) , \quad (4.66)$$

onde, no estado plano de deformação,

$$e_{\ell jk}^*(q, S) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \left[-(3-4\nu) \ell nr(q, S) (\delta_{\ell j} n_k(S) + \delta_{\ell k} n_j(S)) + r_{,\ell} (r_{,k} n_j(S) + r_{,j} n_k(S)) \right] . \quad (4.67)$$

A expressão 4.66 também pode ser usada para pontos do contorno, onde a letra q dá lugar a Q .

O termo integral correspondente a tensão inicial que deve ser acrescido aos outros termos integrais na fórmula 4.56c é o dado pela expressão abaixo. Esta pode ser facilmente constatada introduzindo-se a fórmula de deslocamento com tensão inicial na lei de Hooke.

$$\begin{aligned} & \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left[\frac{\partial}{\partial x_{\ell}}(q) (\sigma_{mk}^o(s) \int_{\Gamma} e_{\ell mk}^*(q, S) d\Gamma(S)) \right] \delta_{ij} + \\ & + G \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(q) (\sigma_{mk}^o(s) \int_{\Gamma} e_{imk}^*(q, S) d\Gamma(S)) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x_i}(q) (\sigma_{mk}^o(s) \int_{\Gamma} e_{jmk}^*(q, S) d\Gamma(S)) \right] . \quad (4.68) \end{aligned}$$

Introduzindo-se as expressões correspondentes a $e_{\ell mk}^*(q, S)$, $e_{imk}^*(q, S)$ e $e_{jmk}^*(q, S)$, resulta, após se efetuarem as derivadas parciais,

$$\sigma_{mk}^0(s) \int_{\Gamma} f_{ijmk}(q, S) , \quad (4.69)$$

onde

$$\begin{aligned} f_{ijmk}(q, S) = & \frac{1}{8\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu) \left[r_{,i} (\delta_{jm}^n k + \delta_{jk}^n m) + \right. \right. \\ & \left. \left. + r_{,j} (\delta_{im}^n k + \delta_{ik}^n m) - \delta_{ij} (r_{,m}^n k + r_{,k}^n m) \right] + \right. \\ & \left. + 2r_{,i} r_{,j} (r_{,k}^n m + r_{,m}^n k) \right\} . \quad (4.70) \end{aligned}$$

4.6.3 - Temperatura, expansão e retração

As expressões 4.66 e 4.69 fornecem os efeitos da tensão inicial constante ao longo do corpo. Elas são usadas nos casos de temperatura, expansão e retração que originam tensões constantes ou aproximadamente constantes. É também usual o emprego dessas fórmulas nos casos de tensões não constantes, principalmente para se avaliar os efeitos destes parâmetros físicos.

Dos efeitos da temperatura, da expansão e da retração, normalmente se conhece a deformação, com a qual se deve calcular as tensões. Isso é necessário, pois as fórmulas deduzidas 4.66 e 4.69 assim o exigem.

Os termos integrais que envolvem tensões iniciais são calculados seguindo a mesma sequência de cálculo usada nas fórmulas dos itens anteriores. Ficam, dessa maneira, conhecidas as componentes de deslocamento e tensão devido à temperatura, a expansão e a retração, quando submetem o corpo a um estado de tensão inicial constante.

4.7 - Corpos com sub-regiões

Os corpos tomados anteriormente são homogêneos e isotrópicos nos seus respectivos domínios. Contudo, é usual

nos problemas de engenharia que o domínio seja constituído de partes homogêneas e isotrópicas. É o caso, por exemplo, da barragem na figura abaixo, onde, além da diferença de material do sistema barragem-solo, o solo é constituído de camadas de materiais diferentes.

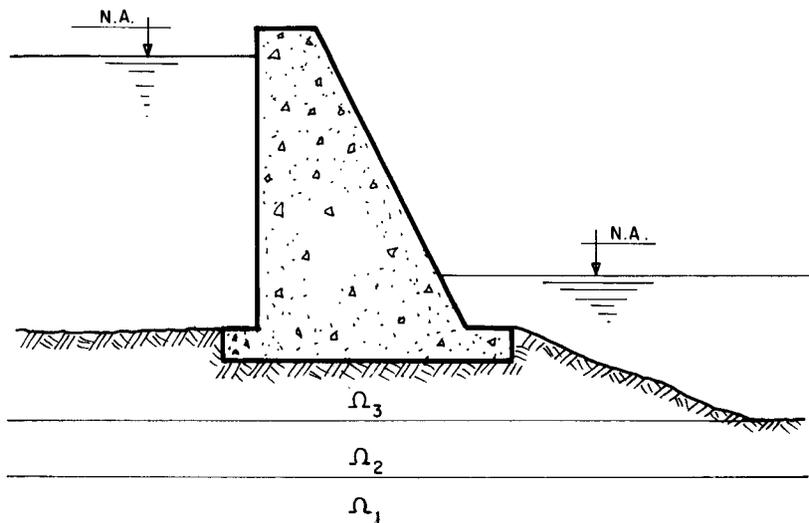


FIG. 4.16

A equação 4.56a aplicada a cada uma das sub-regiões que constitui o corpo, dá origem a um sistema de equações que para torná-lo determinado necessita de condições subsidiárias. São elas: condições de equilíbrio e de compatibilidade de deslocamento.

Seja, por exemplo, o caso mostrado na figura abaixo, onde os pontos 7 e 8 estão na interface das sub-regiões Ω_1 e Ω_2 (Γ_{12}).

Desse problema se conclui que:

- a) a sub-região Ω_1 dá origem a dezesseis equações com vinte incógnitas (doze deslocamentos desconhecidos: pontos 1, 2, 5, 6, 7 e 8; e oito esforços desconhecidos: pontos 3, 4, 7 e 8);
- b) a sub-região Ω_2 dá origem a catorze equações com dezesseis incógnitas (catorze deslocamentos desconhecidos: pon

tos 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13; e quatro esforços desconhecidos: pontos 7 e 8).

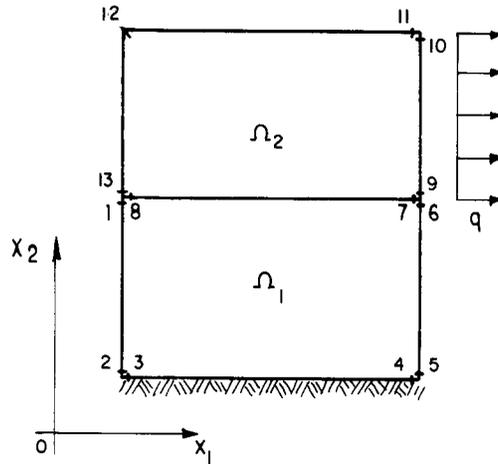


FIG. 4.17

Define-se, assim, um sistema de trinta equações com trinta e oito incógnitas. Isso indica que se necessita de mais oito equações para tornar o sistema determinado. Essas equações se obtêm das condições de compatibilidade de deslocamento (quatro equações) e das condições de equilíbrio (quatro equações), nos pontos 7 e 8 e nas direções dos eixos X_1 e X_2 .

Do exemplo que se acaba de analisar, conclui-se que os problemas com sub-regiões são resolvidos usando-se a equação 4.58a em cada sub-região e as equações resultantes das condições de equilíbrio e de compatibilidade de deslocamento nos pontos de interfaces. Tomando-se, por exemplo, o corpo sem tensão inicial mostrado na fig. 4.18, a equação 4.58a aplicada a sub-região Ω_i é dada abaixo, onde o índice "i" indica a sub-região em consideração.

$$\tilde{C}_i \cdot \tilde{U}_i = - \tilde{H}_i \cdot \tilde{U}_i + \tilde{G}_i \cdot \tilde{P}_i + \tilde{B}_i \quad (4.71)$$

As condições suplementares na interface Γ_{ij} (contorno comum às sub-regiões i e j) são matematicamente dadas por 4.72a (condição de compatibilidade de deslocamento) e 4.72b (condição de equilíbrio). Nestas equações o primeiro in

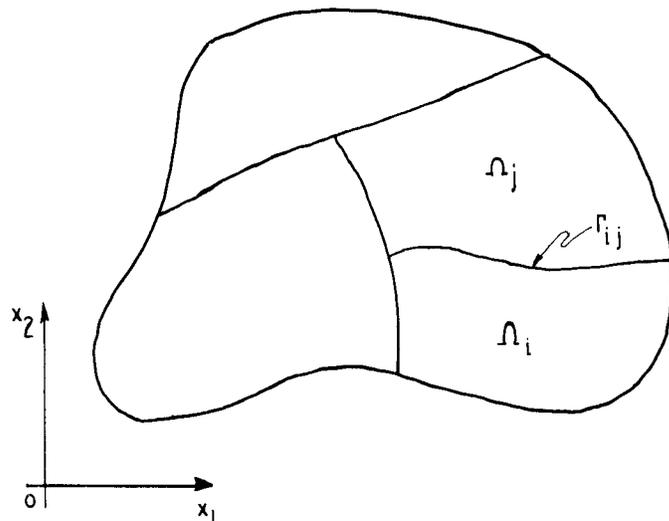


FIG. 4.18

dice indica a sub-região a que se refere os deslocamentos e forças de superfície, e o segundo a sub-região adjacente.

$$\tilde{U}_{ij} = \tilde{U}_{ji} \quad (4.72a)$$

$$\tilde{P}_{ij} = -\tilde{P}_{ji} \quad (4.72b)$$

Uma vez determinado os parâmetros incôgnitos, as componentes de deslocamento e tensão, em pontos das sub-regiões, são determinadas por meio das fórmulas 4.58b e 4.58c. Veja-se que a aplicação dessas fórmulas em cada sub-região fornecem os resultados pretendidos imediatamente, pois \tilde{U}_i e \tilde{P}_i já são conhecidos.

4.8 - Aplicação do Método dos Elementos de Contorno

Apresenta-se aqui um problema resolvido pelo Método dos Elementos de Contorno, através do qual se objetiva mostrar o uso de algumas fórmulas já deduzidas. Adotou-se na sua resolução o conceito de estado plano de deformação.

Seja um tubo longo, de paredes grossas, submetido a uma pressão radial interna de 1 N/cm (fig.4.19). Além das características geométricas mostradas na figura, adotam-se:

- a) módulo de elasticidade do material igual a 1 N/cm^2 ;
- b) coeficiente de Poisson do material igual a 0.

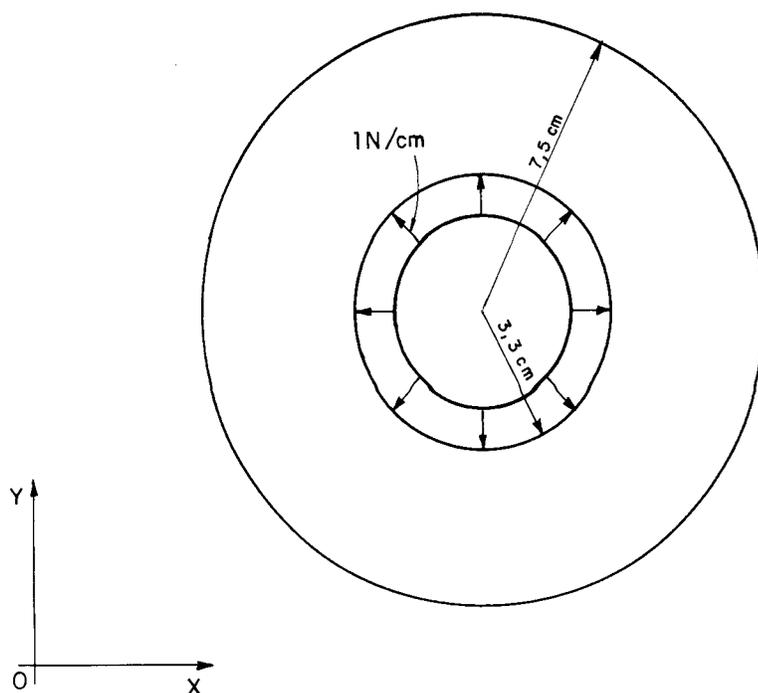


FIG. 4.19

Devido às simetrias da distribuição das forças e da estrutura em relação aos eixos horizontal e vertical, foi possível utilizar apenas um quarto do tubo, com a vinculação mostrada na fig. 4.20. Ainda nesta figura se apresenta a discretização do contorno utilizada na resolução do problema.

As condições de contorno utilizadas na resolução do problema são:

- a) pressão interna unitária, que deve ser decomposta nas direções horizontal e vertical;
- b) pressão externa nula;
- c) componentes horizontal e vertical, de reação, nulas, respectivamente, nos trechos horizontal e vertical, do contorno;
- d) componentes vertical e horizontal, de deslocamento, nulas, respectivamente, nos trechos horizontal e vertical, do contorno.

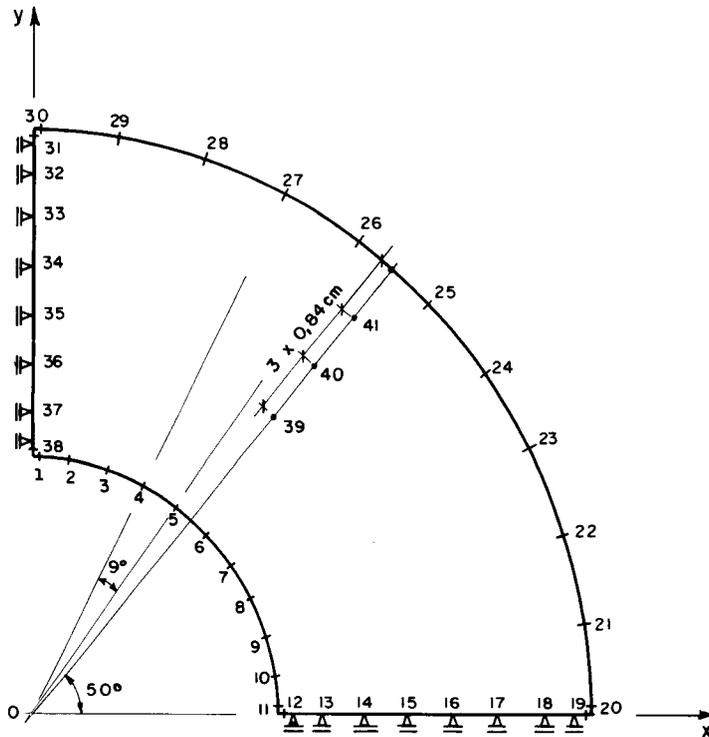


FIG. 4.20

Na resolução do problema, os n \tilde{o} s duplos representados na fig. 4.20 s \tilde{a} o levados para o interior dos correspondentes segmentos, a uma dist \hat{a} ncia da extremidade, na qual est \hat{a} localizado, de um quarto do comprimento do segmento (veja-se o conceito de elemento misto no item 4.3).

O sistema de equa \tilde{c} oes montado para determina \tilde{c} ao dos par \hat{a} metros inc \tilde{o} gnitos de contorno cont \hat{e} m setenta e seis equa \tilde{c} oes. Resolvendo-se esse sistema ficam conhecidos os esfor \tilde{c} os e os deslocamentos (Quadro I), nos n \tilde{o} s considerados na an \hat{a} lise da estrutura.

QUADRO I

N ^o	Dados		Resultados	
	Direção X	Direção Y	Direção X	Direção Y
1	0,03900N/cm	0,99700N/cm	0,20042cm	4,87945cm
2	0,15600N/cm	0,98800N/cm	0,76218cm	4,81656cm
3	0,30900N/cm	0,95100N/cm	1,50270cm	4,63370cm
4	0,45400N/cm	0,89100N/cm	2,21369cm	4,33820cm
5	0,58800N/cm	0,80900N/cm	2,86681cm	3,93788cm
6	0,70700N/cm	0,70700N/cm	3,44870cm	3,44884cm
7	0,80900N/cm	0,58800N/cm	3,93770cm	2,86694cm
8	0,89100N/cm	0,45400N/cm	4,33802cm	2,21380cm
9	0,95100N/cm	0,30900N/cm	4,63350cm	1,50279cm
10	0,98800N/cm	0,15600N/cm	4,81634cm	0,76225cm
11	0,99700N/cm	0,03900N/cm	4,87921cm	0,20046cm
12	0 N/cm	0 cm	4,73400cm	-1,36827N/cm
13	0 N/cm	0 cm	4,38889cm	-1,11757N/cm
14	0 N/cm	0 cm	4,07153cm	-0,90251N/cm
15	0 N/cm	0 cm	3,86355cm	-0,75521N/cm
16	0 N/cm	0 cm	3,73020cm	-0,65273N/cm
17	0 N/cm	0 cm	3,65017cm	-0,57785N/cm
18	0 N/cm	0 cm	3,60982cm	-0,52314N/cm
19	0 N/cm	0 cm	3,60126cm	-0,48043N/cm
20	0 N/cm	0 N/cm	3,59695cm	0,13805cm
21	0 N/cm	0 N/cm	3,55470cm	0,56573cm
22	0 N/cm	0 N/cm	3,42030cm	1,11368cm
23	0 N/cm	0 N/cm	3,20321cm	1,63332cm
24	0 N/cm	0 N/cm	2,90732cm	2,11365cm
25	0 N/cm	0 N/cm	2,54126cm	2,54128cm
26	0 N/cm	0 N/cm	2,11366cm	2,90740cm
27	0 N/cm	0 N/cm	1,63334cm	3,20330cm
28	0 N/cm	0 N/cm	1,11370cm	3,42043cm
29	0 N/cm	0 N/cm	0,56374cm	3,55487cm
30	0 N/cm	0 N/cm	0,13801cm	3,59711cm
31	0 cm	0 N/cm	-0,48042N/cm	3,60142cm
32	0 cm	0 N/cm	-0,52323N/cm	3,61000cm
33	0 cm	0 N/cm	-0,57783N/cm	3,65035cm
34	0 cm	0 N/cm	-0,65276N/cm	3,73038cm
35	0 cm	0 N/cm	-0,75517N/cm	3,86373cm
36	0 cm	0 N/cm	-0,90248N/cm	4,07172cm
37	0 cm	0 N/cm	-0,11756N/cm	4,38906cm
38	0 cm	0 N/cm	-1,36819N/cm	4,73419cm

As componentes de deslocamento nos pontos internos do tubo, obtidas a partir dos dados e resultados desse quadro, são dadas no quadro a seguir.

QUADRO II

Ponto	Deslocamentos (cm)	
	Direção X	Direção Y
39	2,50208	2,98257
40	2,38148	2,83820
41	2,32369	2,76915

Esses valores foram obtidos por meio da fórmula integral de deslocamento para pontos internos. Usando-se a fórmula integral de tensão resultam os valores dados no quadro abaixo.

QUADRO III

Ponto	Tensões (10^{-2} MPa)		
	σ_x	σ_y	τ_{xy}
39	0,334	0,146	-0,534
40	0,309	0,171	-0,391
41	0,292	0,187	-0,298

Os valores das componentes de deslocamento no ponto 40, obtidos por fórmulas da Teoria da Elasticidade, nas direções X e Y, são 2,39066cm e 2,84907cm, respectivamente. Com isso se conclui que os resultados obtidos pelo Método dos Elementos de Contorno, neste caso, são precisos em termos práticos.

V - DESCONTINUIDADE

5.1 - Introdução

Nesta parte do trabalho se trata essencialmente dos efeitos de descontinuidades em corpos, cuja modelação será feita por meio de quadripolos distribuídos ao longo de seu comprimento. As curvas representativas das descontinuidades serão aproximadas por segmentos de reta e os quadripolos distribuídos linearmente sobre cada um.

A resolução desses problemas se dará em duas etapas. Inicialmente se considera o corpo sem descontinuidade, determinando-se os esforços e deslocamentos, em pontos pré-fixados. Na outra etapa se corrigem esses parâmetros, calculando-se os efeitos da descontinuidade, por processo iterativo, com o uso de quadripolos.

Na seção 5.2 se analisará a descontinuidade com e sem abertura, usando-se para esse último caso o critério de Mohr-Coulomb. Serão deduzidas as fórmulas para determinação das componentes de deslocamento e tensão provenientes de uma distribuição de quadripolos, discretizando-as a seguir.

Serão apresentadas na seção 5.3 as fórmulas para determinação da tensão no contorno de um domínio sem descontinuidade, e da tensão e do deslocamento no contorno da descontinuidade devido a quadripolos.

Nas seções subsequentes se tratará de corpos com materiais em regimes elasto-plástico e elasto-viscoplástico. Serão apresentados conceitos e aplicações relativos a esses comportamentos.

5.2 - Descontinuidade em domínios

5.2.1 - Considerações gerais

As propriedades dos materiais nos problemas relativos a escavações em solo ou em rocha, aberturas de túnel, execuções de barragem e de muro de arrimo, em geral, não representam a realidade. Uma especial característica é que o meio não é escolhido, mas encontrado in situ, estando o material já em estado de tensão, antes mesmo de se iniciar a construção (esse estado de tensão depende da história geológica regional). O material que constitui o solo ou a rocha não apresenta em geral homogeneidade e isotropia, e quando apresenta, define sub-regiões com contornos um tanto irregulares, difíceis de serem determinados.

Em rocha estratificada, a consideração da isotropia pode afastar muito o problema de sua realidade e o problema deve ser tratado como não-isótropo. Modela-se, em alguns casos, o problema por meio de juntas paralelas, regularmente espaçadas. Essa simplificação não preserva todas as características do meio, mas serve para avaliar o efeito da anisotropia gerado pela estratificação da rocha. Ela fornece bons resultados quando as descontinuidades na rocha não é muito irregular.

Trata-se-á desses problemas, com domínios infinitos, usando-se dados que usualmente são considerados nos cálculos das obras de engenharia, procurando-se dentro do bom senso dar prioridade de análise a determinados parâmetros. Esse tratamento dado a uma estrutura fornece resultados aceitáveis do ponto de vista prático, dando clareza física ao problema.

Já os problemas com domínios finitos apresentam geometria, propriedades de material e condições de contorno quase sempre bem definidas. É o caso, por exemplo, das vigas paredes.

Uma estrutura pode ainda não apresentar continuidade no seu domínio, o que altera substancialmente a solução obtida sem essa anomalia. Em determinados casos, a presença da descontinuidade pode até ter papel decisivo na estabilidade da estrutura. É o caso, por exemplo, da descontinuidade no meio em que se assenta uma barragem, onde a presença de materiais diferentes dá origem a formação de juntas. Com objetivo de se avaliar a segurança de uma estrutura é, em geral, feita uma análise paramétrica variando o valor de um ou mais parâmetros de resistência, sem alterar as cargas atuantes, até se atingir o colapso.

Dentre os locais em que ocorre descontinuidade, merece ainda atenção aqueles do contorno de uma estrutura em contato com o solo, como, por exemplo, mostra a figura 5.1. No presente trabalho, analisa-se somente os casos bidimensionais de interação solo-estrutura.

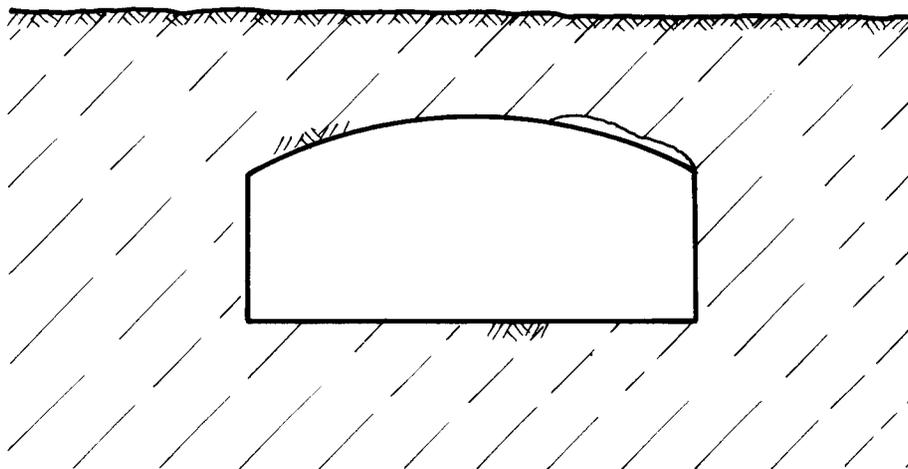


FIG. 5.1

Todos os problemas são inicialmente tratados admitindo-se materiais elásticos-lineares e domínios contínuos. Os resultados, assim obtidos, serão corrigidos usando-se as tensões ao longo da fenda para obtenção da solução pretendida.

Convém ratificar aqui que as descontinuidades são genericamente representadas por curvas, com as superfícies que as definem podendo estar em contato. A fórmulação matemática de seus efeitos é feita por meio de quadripolos, cuja curva representativa é também aproximada por funções do primeiro grau.

5.2.2 - Condições de contorno

Nas descontinuidades com abertura não nula e não contendo material entre suas superfícies, as condições impostas são de tensões normal e tangente à descontinuidade nulas. Porém, pode acontecer que em função do carregamento e da abertura da fenda essas condições sejam alteradas no decorrer da resolução do problema, devido ao contato entre superfícies.

Numa escavação de mina (fig.5.2), as aberturas para extração de minérios apresentam vãos de escavações (distância entre pilares) muito maiores que suas aberturas, e essas por sua vez de dimensões muito menores do que as do corpo em consideração. Os deslocamentos induzidos (deslocamentos devido à presença da escavação) e tensões, nas vizinhanças das aberturas são de fundamental importância na verificação da estabilidade da escavação e contribui decisivamente para um projeto de escavação econômico.

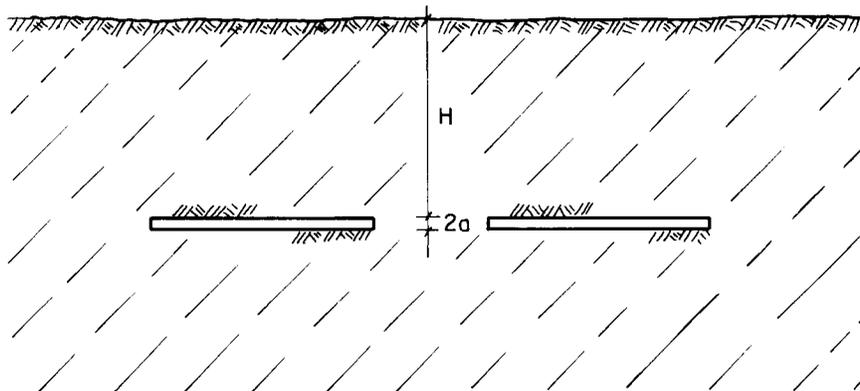


FIG 5.2

Nas descontinuidades com superfícies em contato, as condições de contorno são estabelecidas por um critério de resistência, com o qual se possa verificar se as tensões de cálculo obedecem ao critério pré-estabelecido. O critério de resistência aqui é usado com objetivo pouco diferente daquele da resistência dos materiais, onde se visa interpretar estado duplo e estado triplo de tensão quanto à eventual ruptura, partindo-se de um número restrito de parâmetros do material (por exemplo, parâmetro de ensaio à tração de um elemento do material). Dentre os critérios de resistência existentes, o que sempre é adotado em problemas práticos de descontinuidade é o critério de Mohr-Coulomb.

O engenheiro alemão Otto Mohr, no ano de 1900, sugeriu que é possível prever os efeitos de um estado plano de tensão quando podem ser obtidos resultados de ensaio de vários tipos desse material. Por exemplo, se o estado de tensão último de compressão de um ponto, de um corpo, for o mostrado abaixo, pode-se dizer que qualquer estado de tensão representado por um círculo contido no desta figura é um estado de tensão seguro.

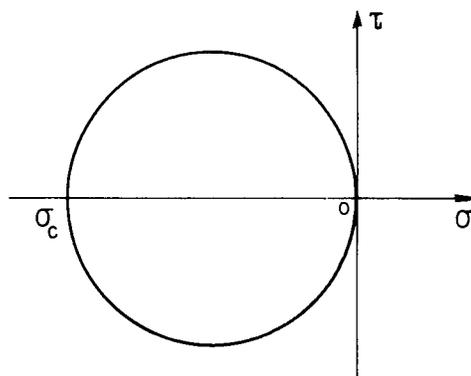


FIG. 5.3

O mesmo pode ser feito para a tração ou para estados de tensões com tração e compressão, como mostra, por exemplo, a figura seguinte.

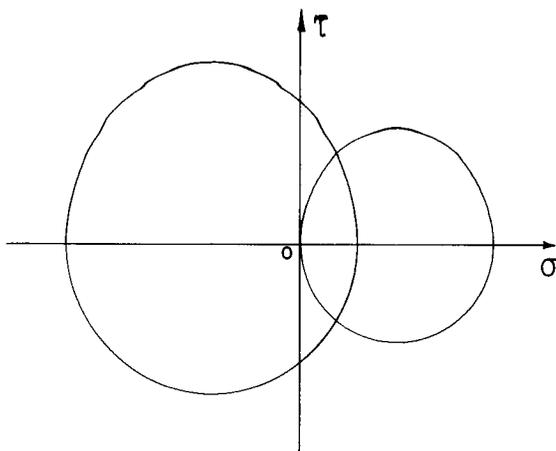


FIG. 5.4

A construção de infinitos círculos define uma envoltória, que classicamente é representada por retas do tipo abaixo, onde c representa a coesão do material e ϕ o ângulo de atrito interno do material. Esta é uma representação aproximada da verdadeira envoltória.

$$|\tau| = -\sigma \operatorname{tg} \phi + c \quad (5.1)$$

Essa representação foi primeiramente usada no ano de 1773, pelo físico francês Charles Augustin de Coulomb. Por isso, a envoltória representada por 5.1 e graficamente na fig. 5.5 é denominada de envoltória de Mohr-Coulomb.

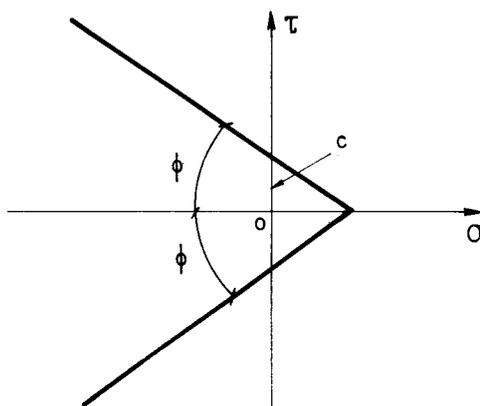


FIG. 5.5

Conclui-se, pela forma desse gráfico, que o critério deve ser empregado principalmente em materiais com maior resistência a compressão do que a tração, como, por exemplo, o solo.

Com base nesse critério, classifica-se a situação de um ponto da descontinuidade em três (fig.5.6), que se passa estudar a seguir.

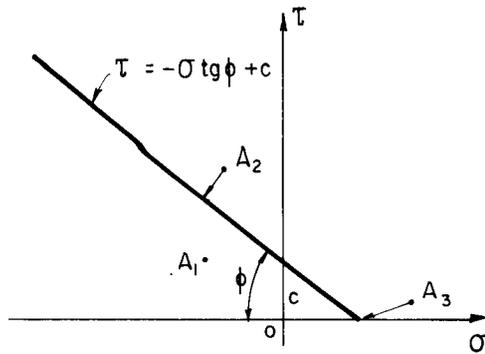


FIG. 5.6

Os pontos da descontinuidade submetidos a um estado de tensão como o do ponto A_1 (fig.5.5) apresentam continuidade de transmissão de esforços, não havendo, desse modo, nem separação e nem escorregamento entre as superfícies de contato. As condições que as componentes de tensão normal (σ_o) e tangente (τ_o) à curva representativa da descontinuidade devem satisfazer para que haja continuidade de esforços são:

$$\sigma_o < c \operatorname{ctg} \phi \quad (5.2a)$$

$$|\tau_o| < -\sigma_o \operatorname{tg} \phi + c \quad (5.2b)$$

Quando a última dessas condições não é satisfeita, tem-se escorregamento relativo entre as superfícies. Essa tensão por ser maior, em valor absoluto, que a tensão fixada pelo critério, deve ser corrigida. A correção se fará levando o ponto, representante do estado de tensão, pa-

ra a reta de Coulomb. Na fig.5.6, o ponto A_2 é levado para o pé da perpendicular à reta de Coulomb, passando pelo ponto A_2 . Outro caminho é levar o ponto A_2 para a reta de Coulomb na vertical, porém não usado neste trabalho. No caso de todos os pontos da descontinuidade estarem nessa situação, não será possível tal correção e a estrutura será considerada instável.

Para esclarecer o procedimento usado para pontos fora da região considerada segura no diagrama de Mohr-Coulomb, dá-se o seguinte exemplo: suponha-se que num determinado estágio de um processo iterativo, um ponto da descontinuidade esteja submetido ao estado de tensão indicado pelo ponto B_0 na fig. 5.7a. A fig. 5.7b, em escala diferente da fig. 5.7a, mostra a deformação angular em função de τ .

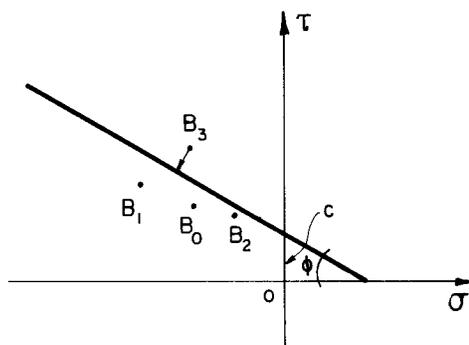


FIG. 5.7a

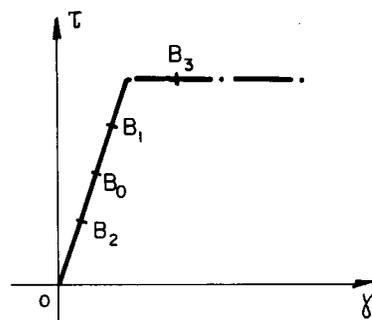


FIG. 5.7 b

No próximo passo da iteração, a tensão de cisalhamento, em geral, varia. Na fase elástica, representa-se pelo ponto B_1 , em caso de ocorrer aumento, e pelo ponto B_2 , em caso contrário. Se a tensão de cisalhamento ultrapassar a tensão última, como a representada pelo ponto B_3 , ela será corrigida conforme se mostra na fig. 5.7a. O ponto B_3 tomará, após o passo correspondente a essa iteração, uma nova posição que, normalmente, não é o ponto definido pelo pé da perpendicular que passa por B_3 à reta de Coulomb.

As iterações prosseguirão até que todos os pontos da descontinuidade tenham estado de tensão compatíveis com as fixadas pela envoltória de Mohr-Coulomb.

No caso do estado de tensão representado pelo ponto B_3 , o pé da perpendicular à reta de Coulomb, segundo a fig. 5.8, é definido por

$$\sigma = \frac{\sigma_0 + (c - \tau_0) \operatorname{tg} \phi}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} \quad e \quad (5.3a)$$

$$\tau = -\operatorname{tg} \phi \sigma + c \quad (5.3b)$$

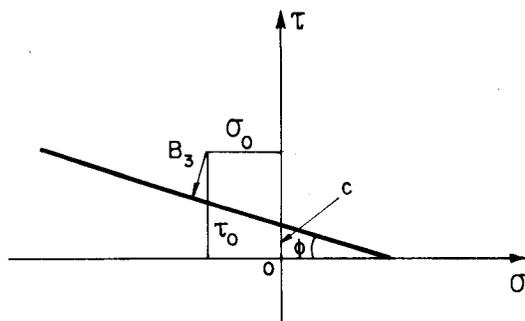


FIG. 5.8

Os excedentes das componentes de tensão a serem corrigidos são:

$$\Delta \sigma = \sigma_0 - \sigma \quad (5.4a)$$

$$\Delta \tau = \tau_0 - \tau \quad (5.4b)$$

Nos pontos da descontinuidade que estão submetidos a tensões como as representadas pelo ponto A_3 (fig.5.6), a correção será feita levando-se o ponto A_3 para o ponto de interseção da reta de Coulomb com o eixo das tensões σ (eixo das abcissas). Nesse caso, considerando que A_3 tenha abscissa σ_0 e ordenada τ_0 , resultam os seguintes excedentes de tensões:

$$\Delta\sigma = \sigma_o - c \operatorname{ctg}\phi \quad (5.5a)$$

$$\Delta\tau = \tau_o \quad (5.5b)$$

Em resumo, pode-se definir três sub-regiões no semi-plano definido pelo eixo σ e pelo semi-eixo τ (fig.5.9). A subregião I caracteriza estados de tensão, de pontos na descontinuidade, que dão continuidade mecânica ao material. Na subregião II predomina essencialmente o escorregamento entre as duas superfícies da descontinuidade, enquanto na subregião III predomina essencialmente a separação entre as superfícies.

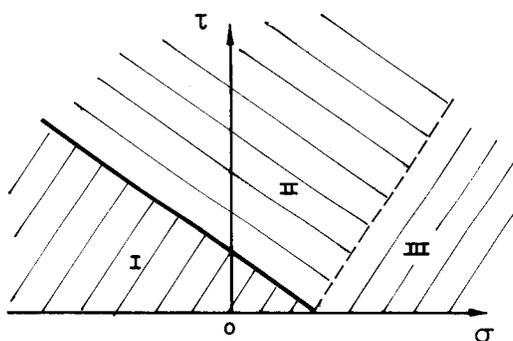


FIG. 5.9

Problemas com esse tipo de descontinuidade são essencialmente não lineares, portanto a superposição não é válida e o procedimento incremental do carregamento é necessário, seguindo um curso pré-estabelecido que depende de cada problema.

5.2.3 - Fórmulas integrais

Para se obter os efeitos da descontinuidade, modelando-a por meio de uma distribuição de quadripolos ao longo de seu comprimento, toma-se a fórmula das componentes de deslocamento para pontos internos, isto é,

$$u_{\ell}(q) = - \int_{\Gamma} p_{\ell k}^*(q, S) u_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} u_{\ell k}^*(q, S) p_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Omega} u_{\ell k}^*(q, s) b_k(s) d\Omega(s), \quad (3.51) - \text{repetida}$$

Suponha-se que essa fórmula seja aplicada a um corpo infinito com contorno Γ , conforme se mostra abaixo.

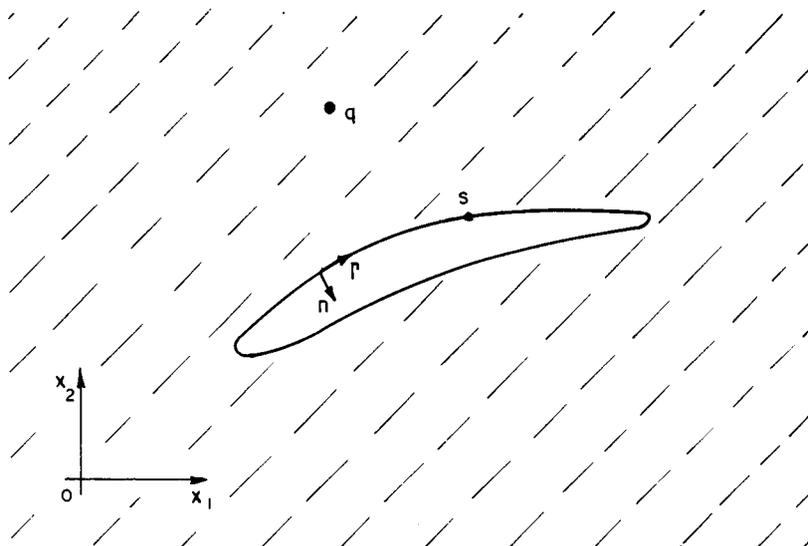


FIG. 5.10

Como no contorno de uma descontinuidade se aplica sō forças (quadripolos) e se estã interessado em determinar seus efeitos, a fórmula dos componentes de deslocamento 3.51 é simplificada para

$$u_{\ell}(q) = \int_{\Gamma} u_{\ell k}^*(q, S) p_k(S) d\Gamma(S). \quad (5.6)$$

A função $u_{\ell k}^*(q, S)$ é uma função ponderadora decorrente de uma força unitária em q . Adotando-se agora uma função $\bar{u}_{\ell k}^*(q, S)$ proveniente de uma força unitária aplicada em S , resulta:

$$u_{\ell}(q) = \int_{\Gamma} \bar{u}_{\ell k}^*(q, S) p_k(S) d\Gamma(S) \quad (5.7)$$

Interpretando-se a função $\bar{u}_{\ell k}^*(q, S)$ como as componentes de deslocamento devido a $p_k(S)$ igual a um, numa unidade de comprimento, essa fórmula fornece deslocamentos provocados por uma força $p_k(S)$ distribuída ao longo de uma linha, no caso o contorno Γ .

Quando a abertura no meio infinito (fig.5.10) for tal que as superfícies do contorno estejam próximas, como, por exemplo, mostra a fig. 5.11, a abertura deve ser tratada como descontinuidade. Sendo assim, faz-se necessário o conceito de dipolo e conseqüentemente o de quadripolo. Na descontinuidade a normal n perde a sua função, em face do tratamento que lhe é dado; usa-se apenas $\bar{\Gamma}$ na descontinuidade.

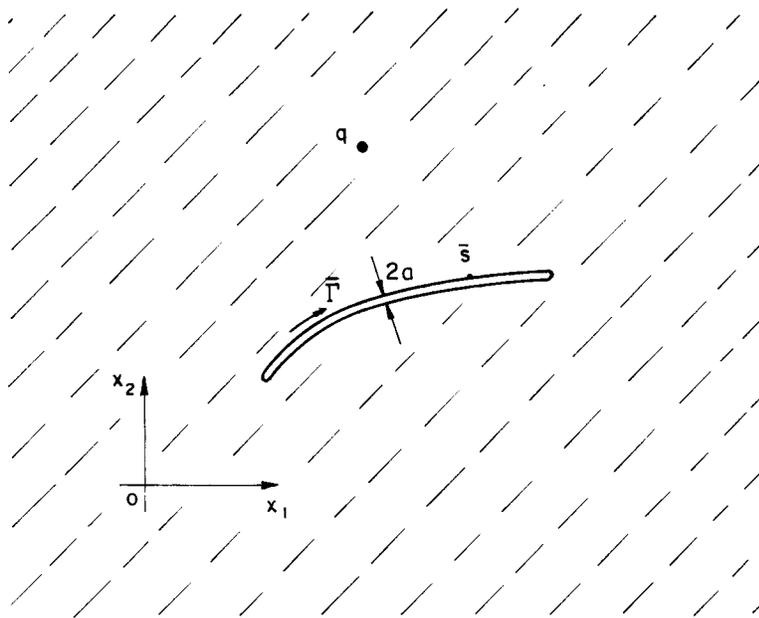


FIG. 5.11

Por analogia à fórmula 2.31b, as componentes de deslocamento no ponto q proveniente de uma distribuição de dipolos ao longo da descontinuidade são dadas por 5.8. Nesta expressão o índice k representa as direções dos eixos tangente e normal à descontinuidade.

$$\int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_{\ell k}^*(q, \bar{S})) 2ap_k(\bar{S}) d\Gamma(\bar{S}). \quad (5.8)$$

Acrescentando-se a esse resultado os efeitos corretivos de uma distribuição de dipolos normais às direções dos dipolos já considerados, resulta a expressão 5.9. Ela dá as componentes de deslocamento proveniente de uma distribuição de quadripolos, onde $u_{\ell k}^{**}(q, \bar{S})$ são as componentes de deslocamento no ponto q devido ao quadripolo unitário em \bar{S} e $q_k(\bar{S})$ equivale a $2ap_k(\bar{S})$.

$$\int_{\bar{\Gamma}} u_{\ell k}^{**}(q, \bar{S}) q_k(\bar{S}) d\Gamma(\bar{S}) \quad (5.9)$$

A partir dessa expressão facilmente se conclui que as componentes de tensão no ponto q são dadas pela expressão abaixo, onde $\sigma_{ij k}^{**}(q, \bar{S})$ são as componentes de tensão no ponto q devido ao quadripolo unitário em \bar{S} .

$$\int_{\bar{\Gamma}} \sigma_{ij k}^{**}(q, \bar{S}) q_k(\bar{S}) d\Gamma(\bar{S}) \quad (5.10)$$

Assim, em corpos com descontinuidade e sem tensão inicial, a fórmula de deslocamento, em pontos internos, é

$$u_{\ell}(q) = - \int_{\Gamma} p_{\ell k}^*(q, S) u_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} u_{\ell k}^*(q, S) p_k(S) d\Gamma(S) + \\ + \int_{\Omega} u_{\ell k}^*(q, s) b_k(s) d\Omega(s) + \int_{\bar{\Gamma}} u_{\ell k}^{**}(q, \bar{S}) q_k(\bar{S}) d\Gamma(\bar{S}) \quad (5.11)$$

e a fórmula das componentes de tensão, em pontos internos, é

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(q) = & - \int_{\Gamma} S_{ijk}(q, S) u_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} D_{ijk}(q, S) p_k(S) d\Gamma(S) + \\ & + \int_{\Omega} D_{ijk}(q, s) b_k(s) d\Omega(s) + \int_{\bar{\Gamma}} \sigma_{ijk}^{**}(q, \bar{S}) q_k(\bar{S}) d\Gamma(\bar{S}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Os casos da descontinuidade coincidir com a linha ou a superfície que limita um domínio e do ponto q se localizar na descontinuidade serão tratados posteriormente.

5.2.4 - Discretização das fórmulas integrais

Seja, por exemplo, a linha mostrada na figura abaixo, representativa de uma descontinuidade, a qual foi a aproximada por \bar{N} segmentos de reta.

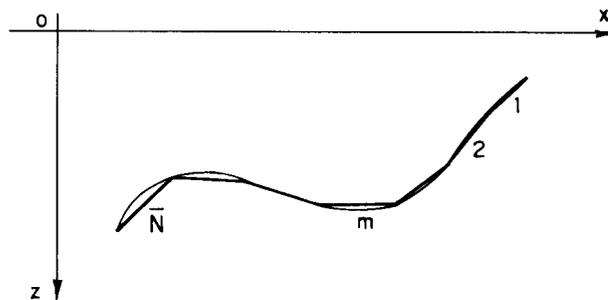


FIG. 5.12

As componentes de deslocamento e tensão devido a uma distribuição de quadripolos ao longo da curva aproximada, segundo 5.9 e 5.10, são dadas pelas seguintes expressões:

$$\sum_{m=1}^{m=\bar{N}} \int_{\bar{\Gamma}_m} u_{ijk}^{**}(q, \bar{S}) q_k(\bar{S}) d\Gamma(\bar{S}) \quad (5.13a)$$

$$\sum_{m=1}^{m=\bar{N}} \int_{\bar{\Gamma}_m} \sigma_{ijk}^{***} (q, \bar{S}) q_k (\bar{S}) d\Gamma(\bar{S}) \quad (5.13b)$$

É possível, seguindo procedimento similar ao usado nos itens 4.3 e 4.5, escrever as componentes dadas pelas integrais acima, num elemento genérico m , nas seguintes fórmulas matriciais:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{k_{11}} & 1_{k_{12}} & 2_{k_{11}} & 2_{k_{12}} \\ 1_{k_{21}} & 1_{k_{22}} & 2_{k_{21}} & 2_{k_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{q_x} \\ 1_{q_z} \\ 2_{q_x} \\ 2_{q_z} \end{bmatrix} \quad (5.14a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1'_{k'_{11}} & 1'_{k'_{12}} & 2'_{k'_{11}} & 2'_{k'_{12}} \\ 1'_{k'_{21}} & 1'_{k'_{22}} & 2'_{k'_{21}} & 2'_{k'_{22}} \\ 1'_{k'_{31}} & 1'_{k'_{32}} & 2'_{k'_{31}} & 2'_{k'_{32}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{q_x} \\ 1_{q_z} \\ 2_{q_x} \\ 2_{q_z} \end{bmatrix} \quad (5.14b)$$

Os parâmetros 1_{q_x} , 1_{q_z} , 2_{q_x} e 2_{q_z} são os valores de distribuições dos quadripolos nos nós 1 e 2 (fig.5.13), o que significa que os coeficientes desses parâmetros são componentes de deslocamento (fórmula 5.14a) e componentes de tensão (fórmula 5.14b) para valores unitários de quadripolos. Identifica-se um elemento genérico ${}^{\ell}k_{ij}$ da seguinte forma: i representa a direção do deslocamento, j representa a componente do quadripolo (q_x se for 1 e q_z se for 2) e ℓ representa o nó em que se considera unitária a intensi

dade do quadripolo (no outro não o seu valor é nulo). No caso de ${}^k k'_{ij}$, o único significado diferente é do índice i , que representa as componentes σ_x , τ_{xz} e σ_z , nessa ordem, conforme i assumia os valores 1, 2 e 3.

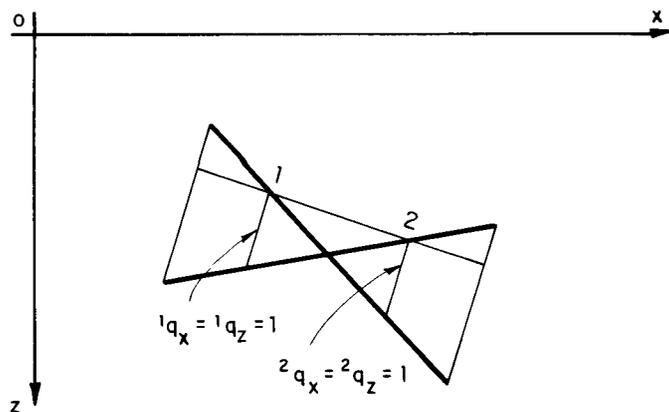


FIG. 5.13

As expressões 5.13a e 5.13b, quando empregados na resolução numérica de um problema com descontinuidade, dão origem, nessa ordem, aos seguintes produtos matriciais:

$$\tilde{K} \tilde{Q} \quad (5.15a)$$

$$\tilde{K}' \tilde{Q} \quad (5.15b)$$

No caso do cálculo de deslocamento em pontos internos surge o produto abaixo, cuja matriz \bar{K} é normalmente incorporada à matriz \tilde{K} .

$$\bar{K} \tilde{Q} \quad (5.16)$$

Com esses produtos matriciais, as fórmulas de deslocamento e tensão são:

$$\tilde{C} \tilde{U} = - \tilde{H} \tilde{U} + \tilde{G} \tilde{P} + \tilde{B} + \tilde{K} \tilde{Q} \quad (5.17a)$$

$$\tilde{\sigma} = - \tilde{H}' \tilde{U} + \tilde{G}' \tilde{P} + \tilde{T} + \tilde{K}' \tilde{Q} \quad (5.17b)$$

5.3 - Descontinuidade nas representações integrais

5.3.1 - Considerações preliminares

São determinados, neste item, os parâmetros de contorno, cujas expressões que os definem apresentam, em geral, descontinuidade. Para isso são necessários os conceitos de integral de Cauchy e de integral singular, já apresentados. O uso do conceito de parte finita de integral também se faz necessário na determinação de certos parâmetros de contorno; denota-se aqui a parte finita de uma integral por \oint .

Define-se informalmente parte finita de uma integral, conforme KUTT, 1975, pelas seguintes propriedades:

- a) \oint é uma extensão consistente do conceito de integral regular;
- b) \oint é aditiva com respeito a união de intervalos de integração;
- c) \oint é um operador linear e contínuo sobre a função integrando;

d)
$$\oint_0^1 x^{-1} dx = 0 \quad e \quad (5.18a)$$

$$\oint_0^{\infty} x^{-\lambda} dx = 0 \quad \text{se } \lambda > 1. \quad (5.18b)$$

Os deslocamentos nos pontos do contorno de um domínio não são tratados aqui, pois se supõe que os resultados obtidos pela equação de contorno são suficientes.

5.3.2 - Tensão no contorno de um domínio

É usual, na resolução numérica de problemas, calcular a tensão num ponto usando-se a lei de Hooke e os parâmetros que tornam o problema determinado, principalmente em pontos em que a função tensão apresenta descontinuidade. No método numérico em consideração, a tensão num ponto interno é calculada empregando-se a fórmula de tensão 3.55, enquanto que a tensão num ponto de contorno, em face da singularidade existente e da rapidez de cálculo, é obtida em geral pelo Método das Diferenças Finitas. Neste trabalho não se fará uso dessa técnica.

Nos pontos de carga Q com tangente definida, a equação de contorno para corpos homogêneos e isotrópicos, com descontinuidade, segundo 4.44, toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_k(Q) = & - \int_{\Gamma} p_{\ell k}^*(Q, S) u_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} u_{\ell k}^*(Q, S) p_k(S) d\Gamma(S) + \\ & + \int_{\Omega} u_{\ell k}^*(Q, s) b_k(s) d\Omega(s) + \int_{\bar{\Gamma}} u_{\ell k}^{**}(Q, \bar{S}) q_k(\bar{S}) d\Gamma(\bar{S}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Com essa fórmula e os conceitos que a tornam válida, é possível se deduzir informalmente a fórmula de tensão para pontos de contorno com tangente definida. Introduzindo-se 5.19 na lei de Hooke e procedendo-se como na dedução da fórmula de tensão para pontos internos, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_{ij}(Q) = & - \int_{\Gamma} S_{ijk}(Q, S) u_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} D_{ijk}(Q, S) p_k(S) d\Gamma(S) + \\ & + \int_{\Omega} D_{ijk}(Q, s) b_k(s) d\Omega(s) + \int_{\bar{\Gamma}} \sigma_{ijk}^{**}(Q, \bar{S}) q_k(\bar{S}) d\Gamma(\bar{S}) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Como os tensores $S_{ijk}(Q,S)$ e $D_{ijk}(Q,S)$, no espaço bidimensional, contêm singularidades da ordem de $1/r^2$ e $1/r$, respectivamente, a primeira integral deve ser realizada tomando-se apenas a sua parte finita, enquanto a segunda deve ser realizada no sentido do valor principal de Cauchy. Uma dedução rigorosa de 5.20 pode ser encontrada, por exemplo, em CRUSE, 1977.

Para fins computacionais, a fórmula de tensão para pontos internos é usada tanto para o cálculo da tensão em pontos internos como em pontos de contorno em uma única tangente, bastando que nesse último caso o resultado seja multiplicado por dois.

Os termos que dão os efeitos da descontinuidade serão analisados no próximo subitem e, por isso, a partir de agora não é considerado, na fórmula 5.20, o termo referente à descontinuidade. Por afinidade à fórmula 4.56c se escreve:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}(Q) = & - \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{\underline{s}}(Q,S) \underline{\underline{\phi}}^t d\xi(S) \right) \underline{\underline{u}}^{(n)} + \\ & + \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{\underline{D}}(Q,S) \underline{\underline{\phi}}^t d\xi(S) \right) \underline{\underline{p}}^{(n)} + \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\ell}{2} \left(\int_{-1}^{+1} \underline{\underline{t}}(Q,S) d\xi(S) \right) \underline{\underline{b}} \end{aligned} \quad (5.21)$$

As integrais cujo domínio de integração não contém o ponto Q são calculadas numericamente. Quanto às integrais com domínio de integração contendo o ponto Q são calculados analiticamente. Vê-se aqui apenas o último caso, pois o primeiro já é conhecido.

As funções de interpolação ϕ_1 e ϕ_2 deverão, em face da localização do ponto Q, serem escritas em função do parâmetro r (figs. 5.14a e 5.14b). Para cada uma dessas funções se define duas outras, cujas notações se encontram nas suas respectivas representações geométricas.

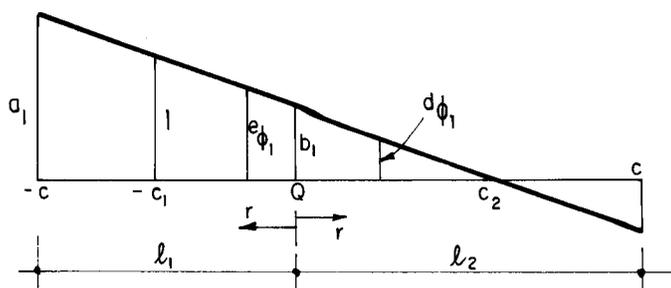


FIG. 5.14 a

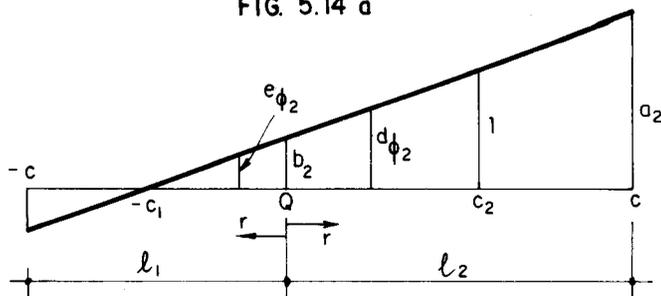


FIG. 5.14 b

As funções ϕ_1 (fig.5.14a) e ϕ_2 (fig.5.14b) podem ser escritas na forma generalizada abaixo, onde k assume os valores 1 e 2. Os sinais mais e menos são empregados nas funções a direita e a esquerda do ponto Q , respectivamente.

$$\phi_k = b_k \pm (-1)^k \frac{a_k - b_k}{l_k} r \quad (5.22)$$

Chamando-se, nos segmentos das figs. 5.14a e 5.14b, as distâncias da extremidade esquerda ao ponto de abscissa c_2 e da extremidade direita ao ponto de abscissa $-c_1$ de d_1 e d_2 , respectivamente, pode-se escrever que

$$a_k = \frac{d_k}{c_1 + c_2} \quad e \quad (5.23a)$$

$$b_k = \frac{d_k - l_k}{c_1 + c_2} \quad (5.23b)$$

No segmento de reta que contém o ponto Q , os tensores $S_{ijk}(Q,S)$ e $D_{ijk}(Q,S)$ variam essencialmente com o parâmetro r , por isso, é melhor escrevê-los assim:

$$S_{ijk}(Q,S) = \frac{\bar{S}_{ijk}}{r^2} \quad (5.24a)$$

$$D_{ijk}(Q,S) = \frac{\bar{D}_{ijk}}{r} \quad (5.24b)$$

As constantes acima significam:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ijk} = \frac{2G}{4\pi(1-\nu)} \{ & 2r_{,n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij^r,k} + \nu(\delta_{ik^r,j} + \delta_{jk^r,i}) + \right. \\ & \left. - 4r_{,i^r,j^r,k} \right] + 2\nu(n_{i^r,j^r,k} + n_{j^r,i^r,k}) + \\ & \left. + (1-2\nu)(2n_{k^r,i^r,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (5.25a)$$

$$\bar{D}_{ijk} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik^r,j} + \delta_{jk^r,i} - \delta_{ij^r,k}) + 2r_{,i^r,j^r,k} \right] \quad (5.25b)$$

Pode-se, agora, facilmente calcular as duas primeiras integrais do segundo membro de 5.21. As expressões nos segundos membros das igualdades abaixo permitem calcular essas integrais ao longo do elemento que contém o ponto Q. Deve-se usar o recurso usado no cálculo de integrais singulares, via computador, no subitem 4.4.3.

$$\int S_{ij\ell}(Q,S)\phi_k d\Gamma(S) = \bar{S}_{ij\ell} \left[-\frac{b_k}{r} \pm (-1)^k \frac{a_k - b_k}{\ell_k} \ell nr \right] \quad (5.26a)$$

$$\int D_{ij\ell}(Q,S)\phi_k d\Gamma(S) = \bar{D}_{ij\ell} \left[b_k \ell nr \pm (-1)^k \frac{a_k - b_k}{\ell_k} r \right] \quad (5.26b)$$

A integral que envolve força de massa, quando o domínio de integração contém o ponto Q, é nula, pois não há variação de "r" com "n" ($r_{,n}=0$), o que tornam as componentes de $\underline{t}(Q,S)$ nulas.

5.3.3 - Tensão e deslocamento na descontinuidade

Em virtude do caminho usado na resolução de problemas com descontinuidade, vai-se determinar apenas a tensão e o deslocamento provenientes da ação de quadripolos. No item 2.4 foram determinados a tensão e o deslocamento num ponto com coordenada local z não nula, enquanto que aqui se vê o caso de z nula. Na realidade z é igual a semi-abertura da descontinuidade (nula em caso particular), porém, desprezível em comparação com seu comprimento.

Nas fórmulas envolvendo quadripolos, já deduzidas, devem-se calcular os limites de z tendendo para zero, cujos resultados fornecem a tensão e o deslocamento na descontinuidade. Como a coordenada z pode ser positiva ou negativa (fig.5.15), existem para cada fórmula dois limites, que conforme se verá posteriormente são iguais em módulo.

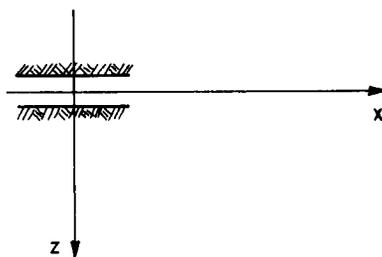


FIG. 5.15

Seguindo procedimento usual, obtêm-se primeiro as fórmulas fazendo-se a coordenada z igual a zero e só após isso se calculam as quantidades devido à descontinuidade das funções. Não serão consideradas todas as componentes de tensão e deslocamento, pois particularmente interessa apenas as componentes σ_z , τ_{xz} , u e w . Note-se que as condições de contorno na descontinuidade são relativas às componentes σ_z e τ_{xz} ; as componentes u e w servem para se determinar os deslocamentos relativos entre as superfícies superior e inferior (fig.5.15).

As condições de contorno num segmento de reta, dos segmentos usados para aproximar a curva representativa da descontinuidade, são tomadas relativamente aos pontos de

coordenadas $-c_1$ e c_2 (fig.5.16). Por isso, são calculadas as tensões e os deslocamentos sô nesses pontos, identificando-os pelos números 1 e 2; por exemplo, tensão σ_z no ponto c_2 se representa por ${}^2\sigma_z$.

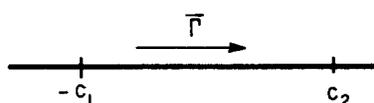


FIG. 5.16

Como não se conhece a distribuição de quadripolos e o processo de determinação da influência da descontinuidade no corpo é iterativo, convém usar as distribuições mostradas a seguir.

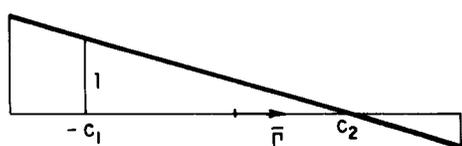


FIG. 5.17 a

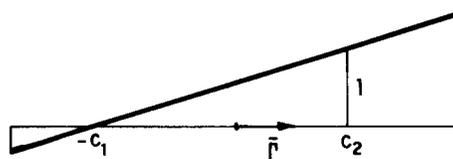


FIG. 5.17 b

Para z igual a zero, têm-se, devido aos quadripolos localizados na origem do sistema cartesiano (fig.5.15), os seguintes resultados (veja-se, por exemplo, item 2.4):

$$\sigma_z^{**} = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} q_z \cdot \frac{1}{r^2} \quad (5.27a)$$

$$\tau_{xz}^{**} = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} q_x \cdot \frac{1}{r^2} \quad (5.27b)$$

$$u^{**} = + \frac{(1-2\nu)^2}{8\pi(1-\nu)^2 G} q_z \cdot \frac{x}{r^2} \quad (5.27c)$$

$$w^{**} = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)G} q_x \cdot \frac{x}{r^2} \quad (5.27d)$$

Os parâmetros σ_z^{**} , τ_{xz}^{**} , u^{**} e w^{**} , além da notação relativa aos pontos $-c_1$ e c_2 , recebem uma barra quando a distribuição de quadripolos for a da fig. 5.17b.

Como exemplo, calcula-se a componente ${}^1\sigma_z$ (componente σ_z no ponto $-c_1$ devido à distribuição de quadripolos na fig. 5.17a). Repete-se abaixo, com esquemas elucidativos, a fig. 5.17a.

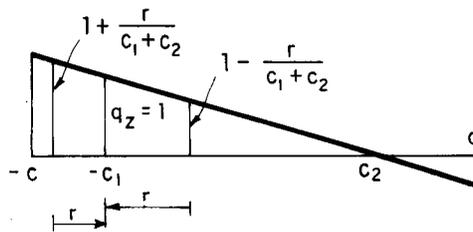


FIG. 5.17a - repetida

Com a fórmula 5.27a e a figura acima facilmente se conclui que

$${}^1\sigma_z^{**} = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} \left[\int_{c-c_1}^0 \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{r}{c_1+c_2}\right) (-dr) + \int_0^{c+c_1} \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r}{c_1+c_2}\right) (+dr) \right], \quad (5.28)$$

na qual se usando o conceito de parte finita de integral resulta:

$${}^1\sigma_z^{**} = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} \left(- \frac{2c}{c^2-c_1^2} + \frac{1}{c_1+c_2} \ln \frac{c-c_1}{c+c_1} \right). \quad (5.29)$$

Deve-se proceder assim para se obter as demais componentes e o mesmo deve ser feito quando a distribuição de quadripolos for a da fig. 5.17b. A seguir, apresenta-se as fórmulas das componentes de tensão e deslocamento provenientes das distribuições mostradas nas figs. 5.17a e 5.17b.

Quadripolos q_z .

$${}^1_{\sigma_z^{**}} = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} \cdot \left(- \frac{2c}{c^2-c_1^2} + \frac{1}{c_1+c_2} \ln \frac{c-c_1}{c+c_1} \right) \quad (5.30a)$$

$${}^1_{\bar{\sigma}_z^{**}} = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} \cdot \frac{1}{c_1+c_2} \ln \frac{c+c_1}{c-c_1} \quad (5.30b)$$

$${}^2_{\sigma_z^{**}} = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} \cdot \frac{1}{c_1+c_2} \ln \frac{c+c_2}{c-c_2} \quad (5.30c)$$

$${}^2_{\bar{\sigma}_z^{**}} = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} \cdot \left(- \frac{2c}{c^2-c_2^2} + \frac{1}{c_1+c_2} \ln \frac{c-c_2}{c+c_2} \right) \quad (5.30d)$$

$${}^1_{u^{**}} = \frac{(1-2\nu)^2}{8\pi(1-\nu)^2 G} \cdot \left(\frac{2c}{c_1+c_2} + \ln \frac{c-c_1}{c+c_1} \right) \quad (5.30e)$$

$${}^1_{\bar{u}^{**}} = \frac{(1-2\nu)^2}{8\pi(1-\nu)^2 G} \cdot \frac{-2c}{c_1+c_2} \quad (5.30f)$$

$${}^2_{u^{**}} = \frac{(1-2\nu)^2}{8\pi(1-\nu)^2 G} \cdot \frac{2c}{c_1+c_2} \quad (3.30g)$$

$${}^2_{\bar{u}^{**}} = \frac{(1-2\nu)^2}{8\pi(1-\nu)^2 G} \cdot \left(- \frac{2c}{c_1+c_2} - \ln \frac{c-c_2}{c+c_2} \right) \quad (5.30h)$$

Quadripolos q_x .

$${}^1_{\tau_{zx}^{**}} = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \cdot \left(\frac{-2c}{c^2-c_1^2} + \frac{1}{c_1+c_2} \ln \frac{c-c_1}{c+c_1} \right) \quad (5.31a)$$

$${}^1_{\bar{\tau}_{zx}^{**}} = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{1}{c_1+c_2} \ln \frac{c+c_1}{c-c_1} \quad (5.31b)$$

$${}^2_{\tau_{zx}^{***}} = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{1}{c_1+c_2} \ln \frac{c+c_2}{c+c_2} \quad (5.31c)$$

$${}^2_{\tau_{zy}^{***}} = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \cdot \left(- \frac{2c}{c^2-c_2^2} + \frac{1}{c_1+c_2} \ln \frac{c-c_2}{c+c_2} \right) \quad (5.31d)$$

$${}^1_{w^{**}} = \frac{-(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)G} \cdot \left(\frac{2c}{c_1+c_2} + \ln \frac{c-c_1}{c+c_1} \right) \quad (5.31e)$$

$${}^1_{w^{**}} = \frac{-(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)G} \cdot \frac{-2c}{c_1+c_2} \quad (5.31f)$$

$${}^2_{w^{**}} = \frac{-(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)G} \cdot \frac{2c}{c_1+c_2} \quad (5.31g)$$

$${}^2_{w^{**}} = \frac{-(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)G} \cdot \left(- \frac{2c}{c_1+c_2} - \ln \frac{c-c_2}{c+c_2} \right) \quad (5.31h)$$

Quadripolos q_y .

$${}^1_{\tau_{zy}^{**}} = - \frac{1}{2\pi} \cdot \left(- \frac{2c}{c^2-c_1^2} + \frac{1}{c_1+c_2} \ln \frac{c-c_1}{c+c_1} \right) \quad (5.32a)$$

$${}^1_{\tau_{zy}^{**}} = - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{c_1+c_2} \ln \frac{c+c_1}{c-c_1} \quad (5.32b)$$

$${}^2_{\tau_{zy}^{**}} = - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{c_1+c_2} \ln \frac{c+c_2}{c-c_2} \quad (5.32c)$$

$${}^2_{\tau_{zy}^{**}} = - \frac{1}{2\pi} \cdot \left(- \frac{2c}{c^2-c_1^2} + \frac{1}{c_1+c_2} \ln \frac{c-c_1}{c+c_1} \right) \quad (5.32d)$$

As componentes de tensão e deslocamento em pontos do eixo X, fora do elemento em que se localiza a origem do sistema cartesiano ($|x|>c$), são determinadas atra-

vés das fórmulas no subitem 2.4.3 ou através das fórmulas 5.27a, 5.27b, 5.27c e 5.27d. Em ambos os casos é conveniente usar uma representação generalizada para a distribuição de quadripolos, pois, assim, é possível escrever as fórmulas das componentes com um mesmo índice em apenas uma. Deve-se, então, usar a equação $q = m\bar{x}+b$ referente à superposição das figuras abaixo (veja-se subitem 2.4.3). A partir dessa equação se deduzem, sem maiores dificuldades, as fórmulas dadas após estas figuras.

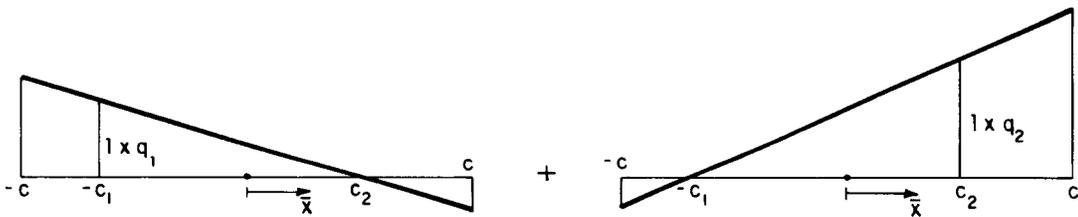


FIG. 5.18a

FIG. 5.18b

Quadripolos q_z .

$$\sigma_z = - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)^2} \left[m \left(\frac{2cx}{x^2-c^2} + \ln \frac{x-c}{x+c} \right) + b \frac{2c}{x^2-c^2} \right] \quad (5.33a)$$

$$u = \frac{(1-2\nu)^2}{8\pi(1-\nu)^2 G} \left[m(-2c+x \ln \frac{x+c}{x-c}) + b \ln \frac{x+c}{x-c} \right] \quad (5.33b)$$

Quadripolos q_x .

$$\tau_{zx} = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \left[m \left(\frac{2cx}{x^2-c^2} + \ln \frac{x-c}{x+c} \right) + b \frac{2c}{x^2-c^2} \right] \quad (5.34a)$$

$$w = \frac{-(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)G} \left[m(-2c+x \ln \frac{x+c}{x-c}) + b \ln \frac{x+c}{x-c} \right] \quad (5.34b)$$

Quadripolos q_y .

$$\tau_{yz} = \frac{1}{2\pi} \left[m \left(\frac{2cx}{x^2-c^2} + \ln \frac{x-c}{x+c} \right) + b \frac{2c}{x^2-c^2} \right] \quad (5.35)$$

Para se calcular os termos devido à descontinuidade que determinadas funções apresentam quando a coordenada z tende para zero, toma-se um ponto genérico próximo do eixo X (fig.5.19). Sendo \bar{x} a variável independente da distribuição de quadripolos (fig. 5.18), recomenda-se usar, para o cálculo de limites, a relação $x_p - \bar{x} = z_p \operatorname{tg}\alpha$, onde o parâmetro α é o menor ângulo entre o raio r e a vertical. Dessa relação se conclui que $d\bar{x} = -\sec^2\alpha z_p d\alpha$.

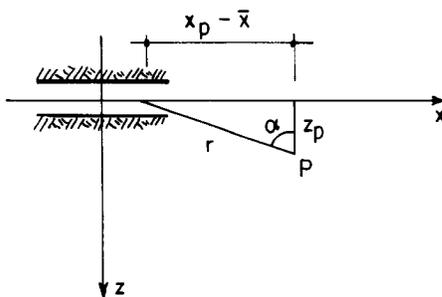


FIG. 5.19

Os únicos termos integrais, provenientes das fórmulas de tensão e deslocamento, cujos limites não são nulos, são os citados abaixo. A verificação da nulidade dos demais termos pode ser feita usando-se o mesmo procedimento que será empregado para estes dois termos.

$$\int_{-c}^{+c} \frac{q}{r^2} z_p d\bar{x} \quad (5.36a)$$

$$\int_{-c}^{+c} \frac{q}{r^4} z_p^3 d\bar{x} \quad (5.36b)$$

Introduzindo-se nessas integrais a função q e mudando-se a variável de integração para α , têm-se:

$$- \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [m(x_p - z_p \operatorname{tg}\alpha) + b] d\alpha \quad (5.37a)$$

$$-\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[m \cos^2 \alpha (x_p - z_p \operatorname{tg} \alpha) + b \cos^2 \alpha \right] d\alpha \quad (5.37b)$$

No limite, quando z_p tende para zero, α_1 e α_2 valem $+\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$, respectivamente. Com isso, calculando-se os limites das integrais acima, deduz-se que:

$$\lim_{z_p \rightarrow 0} \int_{-c}^{+c} \frac{q}{r^2} z_p dx = (mx_p + b) \pi \quad (5.38a)$$

$$\lim_{z_p \rightarrow 0} \int_{-c}^{+c} \frac{q}{r^4} z_p^3 dx = (mx_p + b) \frac{\pi}{2} \quad (5.38b)$$

Com esses resultados se conclui que os termos de vido à descontinuidade são:

$$a) w = \frac{-(1-2\nu)}{4(1-\nu)G} (mx_p + b), \text{ para os quadripolos } q_z; \quad (5.39a)$$

$$b) u = -\frac{1}{2G} (mx_p + b), \text{ para os quadripolos } q_x; \quad (5.39b)$$

$$c) v = -\frac{1}{2G} (mx_p + b), \text{ para os quadripolos } q_y. \quad (5.39c)$$

Foi admitido, para obtenção dos resultados acima, que a coordenada z_p é positiva. No caso da coordenada z_p ser negativa, conforme as expressões 5.36a e 5.36b, as fórmulas resultantes diferem das já deduzidas apenas em sinal.

5.4 - Aplicação

Volta-se a tratar aqui do caso de uma fenda num meio infinito, elástico-linear, submetido a uma tensão de compressão constante na direção do eixo Z (veja-se a figu-

ra abaixo). Esse problema, na seção 2.5, foi resolvido analiticamente, usando-se uma distribuição elíptica de quadripolos ao longo da descontinuidade.

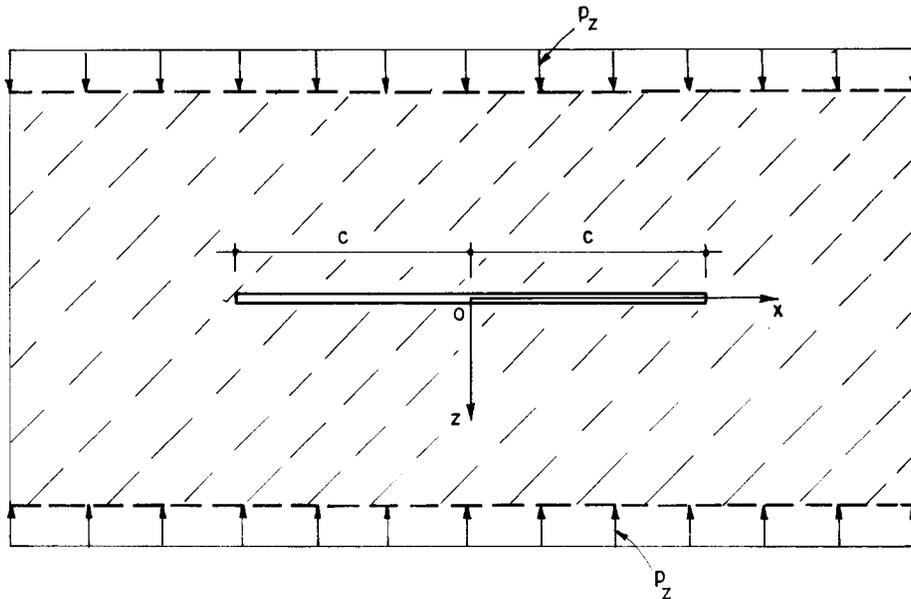


FIG. 5.20

Para resolução do problema via computador, adotam-se c igual a 10cm, p_z igual a 10N/cm e um contorno fictício tal que o comprimento da fenda seja pequeno relativamente às dimensões do corpo definidas por esse contorno. Na fig. 5.21 mostra-se o contorno usado para resolução do problema, assim como a sua discretização e os vínculos usados na aproximação do problema físico. A descontinuidade, cujo ponto médio é equidistante dos lados verticais e horizontais, está ampliada (fig.5.21) e em escala diferente da usado no contorno. O módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson, do material, usados valem 250.000,00N/cm² e 0,25, respectivamente.

Segundo o caminho adotado na resolução de problemas com descontinuidade, inicialmente são determinados os esforços e deslocamentos no corpo sem a fenda. No corpo sem fenda, interessa, devido às características do problema, só as tensões e elas valem -10N/cm² (tensões constante). Com a

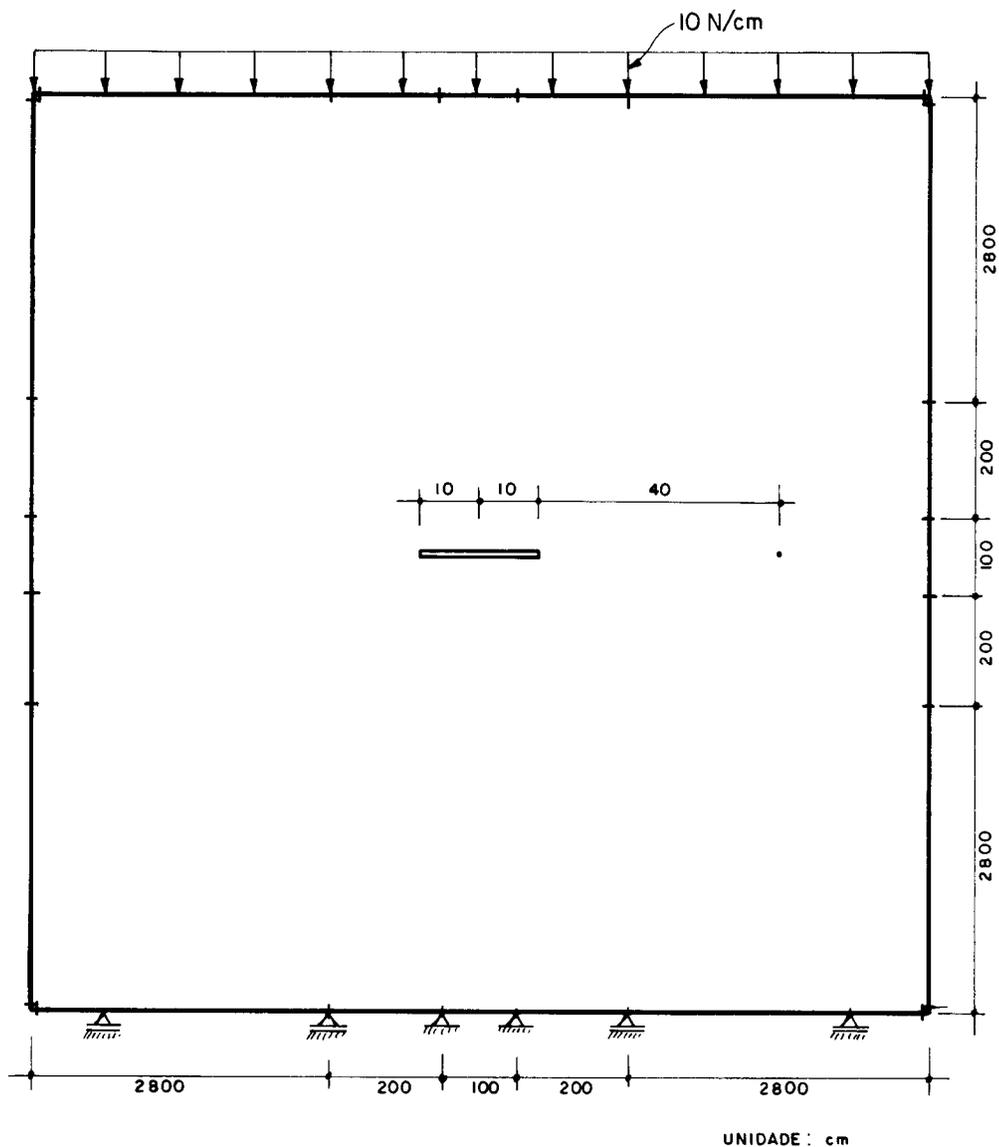


FIG. 5.21

presença da descontinuidade interessa também obter os deslocamentos sofridos pelos pontos do contorno da fenda (deslocamentos induzidos).

A descontinuidade foi discretizada em dois segmentos e o carregamento foi aplicado por meio de incrementos constante, com valor de um décimo do total. Esse último recurso usado não é necessário, pois o problema é elástico-linear. As condições de contorno usadas na descontinuidade são: tensões normal e cisalhante à fenda nulas. Os pontos de cada elemento da descontinuidade, onde são referidas as condições de contorno, distam da extremidade mais próxima do segmento de um quarto do seu comprimento.

A tensão normal σ_z resultante, após a resolução do problema, no ponto distante 50cm do ponto médio da descontinuidade, na horizontal, é $10,271\text{N/cm}^2$ e o valor exato é $10,206\text{N/cm}^2$.

Os deslocamentos induzidos na superfície da fenda são os mostrados na figura ampliada abaixo. Os valores exatos destes deslocamentos são $0,73 \times 10^{-3}\text{cm}$ e $0,50 \times 10^{-3}\text{cm}$, respectivamente, nos pontos com coordenadas x iguais a 2,5cm e 7,5cm (veja-se, por exemplo, MUSKHELISHVILI, 1953).

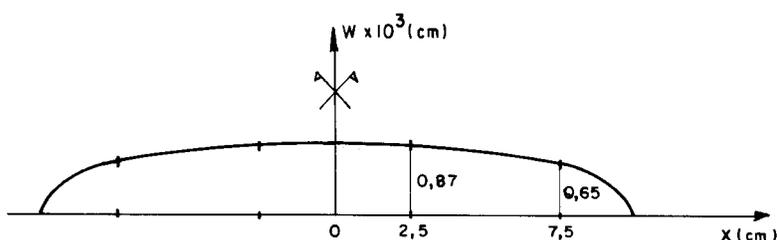


FIG. 5.22

5.5 - Modelação do problema físico

5.5.1 - Modelação elasto-plástica

Os corpos usados em aplicações de engenharia e que apresentam descontinuidade, em geral, não são perfeitamente elásticos-lineares e mais afastados dessa condição estão, por exemplo, os meios em que se assentam barragem e se constroem túneis. A relação linear entre tensão e deformação foi muito empregada no cálculo de estruturas como barragens e túneis, tendo como principal razão a considerável facilidade de se obter a solução desses problemas. Nos tempos atuais essa razão não justifica o emprego da relação linear, pois o advento de técnicas numéricas avançadas e o surgimento de computadores mais rápidos tornam aqueles resultados imprecisos. Os cálculos são agora efetuados adotando-se um comportamento mais realista e também é possível fazê-los adotando-se carregamento gradual.

A relação não linear entre tensão e deformação é a que deve ser considerada para o solo e a rocha. Além do mais, a relação tensão-deformação depende da história do carregamento e a análise deve ser feita segundo a teoria incremental. A primeira vista, para aqueles acostumados com o emprego das teorias usuais de análise estrutural, que envolvem o modelo elástico-linear, o desenvolvimento de modelos não lineares parece ser fruto de puro exercício teórico. Entretanto, as estruturas atuais, do ponto de vista prático, vem exigindo, por diversas razões, um projeto mais racional, implicando no emprego de técnicas de análise mais requintadas, que permitam prever seu comportamento nas fases de utilização e mesmo em regime de ruptura.

O modelo elasto-plástico representado na figura abaixo é o modelo normalmente usado na resolução de um problema físico. A plasticidade apresenta como característica principal o aparecimento de deformações residuais, não reversíveis, numa etapa de descarga. Outra característica relativa ao modelo abaixo é que as deformações plásticas aparecem a partir de um determinado valor de tensão (tensão de escoamento).

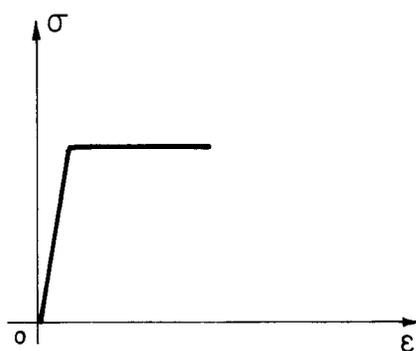


FIG. 5.23

Nessa figura está ilustrado o comportamento plástico perfeito, onde a tensão de escoamento coincide com a tensão de colapso. No caso do material com encruamento, o comportamento plástico é o mostrado a seguir. O encruamento está ligado ao fato de que o material aceita acréscimos de tensão com acréscimos de deformação plástica.

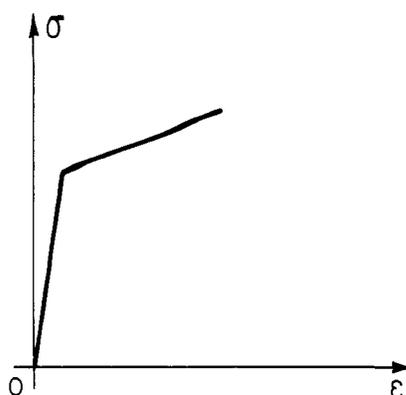


FIG. 5.24

O comportamento plástico perfeito é o admitido nas descontinuidades com aberturas nulas. Para muitos materiais as relações tensão-deformação são não lineares na região elástica, mas nesses casos se recorre ao tratamento numérico incremental, pois apesar de que em alguns casos se possa determinar com razoável aproximação, não é o procedimento mais produtivo. Na abordagem incremental a relação tensão-deformação é linear, não havendo motivos para se acreditar que uma relação entre incrementos seja não linear. É esse fato que possibilita a extensão da aplicação de métodos numéricos, na forma como foi formulado (problemas elásticos-lineares), para a resolução de problemas não lineares.

A resolução de um problema onde parte da estrutura permanece elástica e outra parte sofre escoamento requer, assim, um critério de escoamento, indicando o nível de tensão para o qual ocorre plastificação do material. A filosofia comum de todas as teorias de resistência é prever que o comportamento do material para tensões complexas se baseia em evidências experimentais, frequentemente obtidas na consideração do estado uniaxial de tensão. A mais simples idealização do comportamento elasto-plástico é a dada na fig. 5.23 (diagrama simétrico ao eixo ϵ é suposto para compressão). O nível de tensão σ para um material elasto-plástico perfeito deve obedecer a desigualdade abaixo, onde σ_y é a tensão de escoamento.

$$|\sigma| - |\sigma_y| \leq 0 \quad (5.40)$$

No caso geral se deve introduzir um parâmetro, por exemplo, k que leve em consideração a possibilidade de endurecimento ou amolecimento do material. O lado esquerdo de 5.40 pode ser interpretado como uma função $F(\sigma, k)$ tal que:

$$F(\sigma, k) \leq 0 \quad (5.41)$$

Para materiais como o solo e a rocha, o critério de Mohr-Coulomb, já apresentado na seção 5.2.1, é uma das representações para separar as tensões puramente elásticas das tensões plásticas e é o critério usado na resolução dos problemas com comportamento elasto-plástico neste trabalho.

5.5.2 - Exemplo

Seja o corpo mostrado na figura abaixo, no qual se supõe uma descontinuidade que vai de um contorno vertical a outro, dividindo o corpo em duas partes iguais. O módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson, do corpo, são $1,0 \times 10^7 \text{ KN/m}^2$ e $0,3$, respectivamente. A coesão do material do corpo é $200,0 \text{ KN/m}^2$ e o coeficiente de atrito entre as superfícies da descontinuidade é suposto nulo.

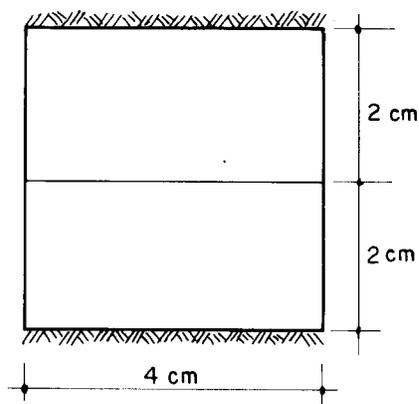


FIG. 5.25

Objetiva-se analisar o corpo quando se dá um deslocamento relativo entre as superfícies horizontais de $6,0 \times 10^{-4}$ cm. Esse problema foi resolvido por VENTURINI, 1982, usando duas sub-regiões; na interface das sub-regiões foram empregadas condições adequadas de compatibilidade e o critério de Mohr-Coulomb.

A discretização aqui usada para o contorno do corpo (fig.5.26) é a mesma usada na resolução do problema por sub-regiões. A presença de dois pontos caracterizando um único ponto não significa o uso do conceito de nó duplo, pois durante a resolução do problema são usados pontos internos dos segmentos. A linha representativa da descontinuidade é dividida em quatro segmentos iguais.

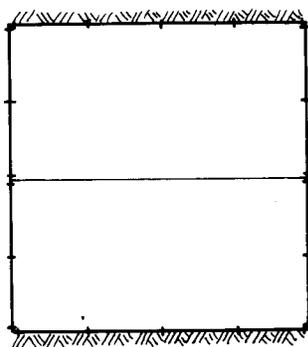


FIG. 5.26

Calcularam-se, inicialmente, sem a presença da descontinuidade, os esforços e deslocamentos em pontos do corpo onde são aplicadas as condições da descontinuidade. Esses resultados foram divididos em dez partes iguais e aplicados incrementalmente. Na aplicação de cada incremento, as correções necessárias foram feitas iterativamente. Os resultados finais obtidos são os mostrados na fig.5.27a (deslocamento horizontal do corpo ao longo de uma reta vertical) e na fig. 5.27b (tensão de cisalhamento ao longo da descontinuidade). Estes resultados coincidem com os obtidos por Venturini, 1982.

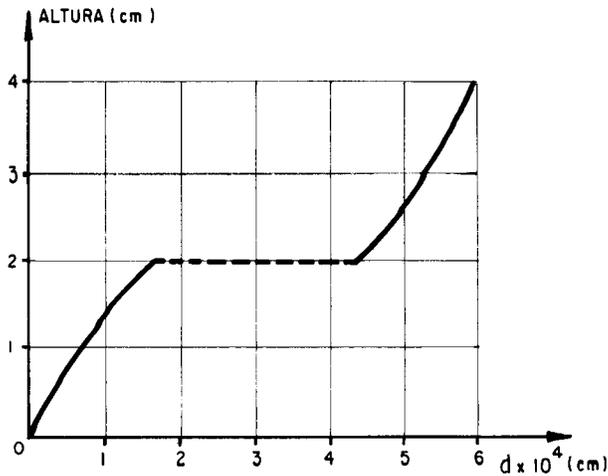


FIG. 5.27a

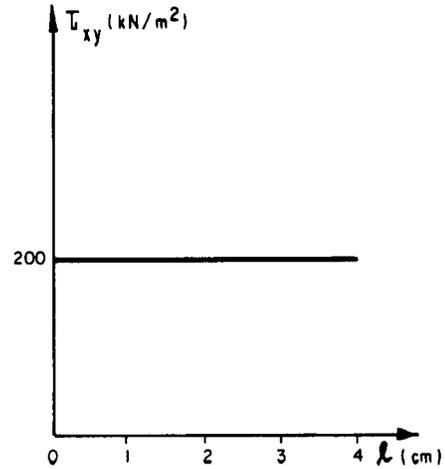


FIG. 5.27 b

5.5.3 - Modelação elasto-viscoplástica

Os problemas em que partes do corpo sofrem deformações permanentes podem ainda ser resolvidos usando-se o conceito de viscoplasticidade, também denominado relaxação, para o comportamento do material (variação de tensão ao longo do tempo). Faz-se isso aplicando-se os esforços obtidos no corpo sem descontinuidade de uma única vez e em seguida usando-se decrementos de tensões ao longo do tempo, nos pontos da descontinuidade, corrigem-se os esforços e deslocamentos. Esse procedimento termina quando as condições estabelecidas pela descontinuidade são satisfeitas. Um diagrama típico de relaxação é dado a seguir, para o caso de deformação constante.

No presente trabalho só nos pontos da descontinuidade com estados de tensão fora da região considerada segura pelo critério de Mohr-Coulomb serão aplicados o conceito de relaxação. Cada uma das componentes de tensão na descontinuidade tende, ao longo do tempo, para um valor a ser fixado pelo critério usado. Como não ocorre deformação viscoplástica abaixo do valor da tensão fixado pela reta de Coulomb (tensão de escoamento), conclui-se que a taxa $\frac{d\varepsilon_{ij}^{VP}}{dt}$, a-

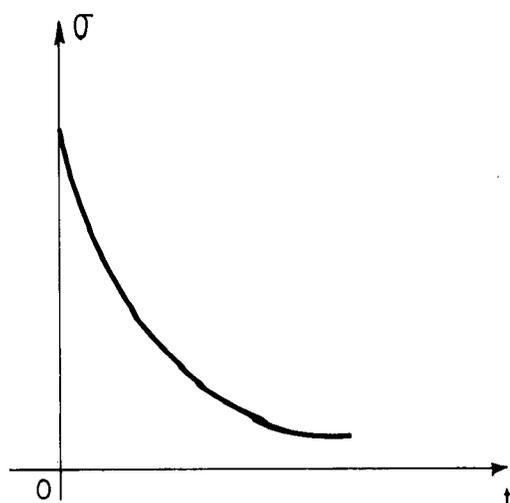


FIG. 5.28

qui convencionada de $\dot{\epsilon}_{ij}^{VP}$, é nula se for satisfeita a condição 5.41, isto é, se $F(\sigma, k) \leq 0$.

Usando-se o conceito de potencial da teoria da plasticidade (veja-se, por exemplo, OWEN & HINTON, 1980), a taxa de deformação viscoplástica é escrita na seguinte forma:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{VP} = \gamma_f \langle \phi(F/F_o) \rangle \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.42)$$

O parâmetro γ_f é chamado parâmetro de fluidez (inverso do coeficiente de viscosidade), o parâmetro q é uma função dada em termos das componentes de tensão e F_o denota um valor de referência conveniente para F , conforme se mostrará posteriormente. Quanto à notação $\langle \rangle$ implica em:

$$\langle \phi(F/F_o) \rangle = \phi(F/F_o) \quad \text{se } F > 0 \quad (5.43a)$$

$$\langle \phi(F/F_o) \rangle = 0 \quad \text{se } F \leq 0 \quad (5.43b)$$

De resultados obtidos experimentalmente, a função $\phi(F/F_o)$ pode ser representada na forma abaixo, conforme sugere PERZYNA, 1966.

$$\phi(F/F_o) = \frac{F}{F_o} \quad (5.44)$$

Os parâmetros F e F_0 representam geometricamente aqui as medidas indicadas na figura a seguir.

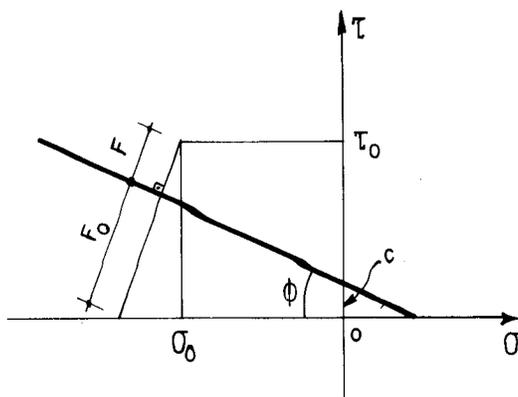


FIG. 5.29

Dessa figura resultam as fórmulas abaixo, sendo $F_1 = F_0 + F$.

$$F_1 = \tau_0 \sec \phi \quad (5.45a)$$

$$F_0 = -\sigma_0 \operatorname{sen} \phi + (c - \tau_0) \operatorname{tg} \phi \operatorname{sen} \phi + c \sec \phi \quad (5.45b)$$

A função q é interpretada aqui como sendo F_1 (veja-se fig. 5.29). Resultam, assim,

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma_0} = 0 \quad e \quad (5.46a)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \tau_0} = \sec \phi \quad . \quad (5.46b)$$

Desses resultados se conclui que só existe a taxa de deformação viscoplástica relativa à tensão cisalhante. Determinando-se $\phi(F/F_0)$ e introduzindo-se essa função e 5.46b em 5.42 resulta:

$$\dot{\gamma}^{vp} = \gamma_f \left(\frac{\tau_0 \sec^2 \phi}{-\sigma_0 \operatorname{sen} \phi + (c - \tau_0) \operatorname{tg} \phi \operatorname{sen} \phi + c \sec \phi} - \sec \phi \right) \quad (5.47)$$

Sabendo-se que $\tau^{vp} = G \dot{\gamma}^{vp}$, resulta

$$\tau^{VP} = \gamma_f G \left(\frac{\tau_o \sec^2 \phi}{-\sigma_o \operatorname{sen} \phi + (c - \tau_o) \operatorname{tg} \phi \operatorname{sen} \phi + c \operatorname{sec} \phi} - \operatorname{sec} \phi \right), \quad (5.48)$$

ou, ainda,

$$\Delta \tau^{VP} = \gamma_f G \Delta t \left(\frac{\tau_o \sec^2 \phi}{-\sigma_o \operatorname{sen} \phi + (c - \tau_o) \operatorname{tg} \phi \operatorname{sen} \phi + c \operatorname{sec} \phi} - \operatorname{sec} \phi \right). \quad (5.49)$$

A cada $\Delta \tau^{VP}$ corresponde um $\Delta \sigma^{VP}$ dado, segundo a fig. 5.30, por

$$\Delta \sigma^{VP} = \Delta \tau^{VP} \operatorname{tg} \phi. \quad (5.50)$$

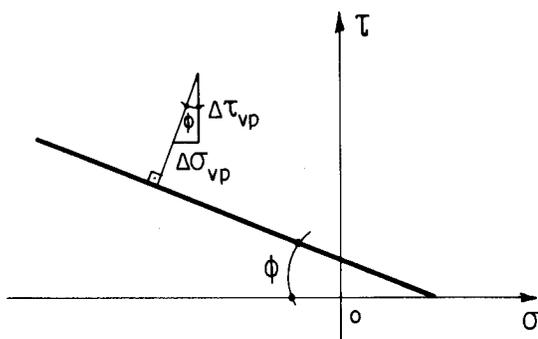


FIG. 5.30

O intervalo de tempo em 5.49 deve satisfazer 5.51, estabelecida por Cormeau, onde τ_e é a tensão de escoamento.

$$\Delta t \leq \frac{\tau_e}{\gamma_f G} \quad (5.51)$$

Alternativamente o intervalo de tempo pode ser limitado considerando-se que o correspondente decremento da deformação viscoplástica é menor ou igual à deformação total multiplicada por um fator K. Para os problemas aqui levados em consideração se diz que

$$\Delta t \leq K \frac{\gamma}{\dot{\gamma}_{vp}}. \quad (5.52)$$

Desde que os pontos da descontinuidade, em geral, têm diferentes níveis de tensão, o segundo membro de 5.52 dá origem a diferentes valores. Recomenda-se que seja tomado o que dê menor valor.

A teoria elasto-viscoplástica apresentada neste subitem permite obter a solução de problemas com descontinuidade, com abertura nula. Essa solução é igual a obtida pela teoria elasto-plástica, a menos de erro de aproximação.

5.5.4 - Exemplo

Analisa-se aqui o problema do subitem 5.5.2 empregando-se o modelo elasto-viscoplástico. A constante K adotada para a resolução do problema é 0,1 e a tensão de escoamento foi fixada pelo critério de Mohr-Coulomb.

Inicialmente o problema foi resolvido sem descontinuidade, como se fez na subseção 5.5.2, e em seguida os esforços foram aplicados de uma única vez no corpo com descontinuidade. Fazendo-se uso das fórmulas apresentadas no subitem anterior, os resultados finais obtidos, após noventa e três iterações, são praticamente iguais. Vale ressaltar que a margem especificada como admissível para o erro das tensões nos pontos da descontinuidade (tensões de cálculo) relativamente às fixadas pela descontinuidade é a mesma nos dois casos, isto é, 0,001. No quadro seguinte dão-se os valores das tensões cisalhantes horizontais, nos pontos dos elementos da descontinuidade tomados na resolução do problema (fig.5.31), obtidas segundo as teorias elasto-plástica e elasto-viscoplástica.

QUADRO I

Ponto	Tensões cisalhantes (10^2KN/m^2)	
	Elasto-plástica	Elasto-viscoplástica
1	2.00037	2.01837
2	2.00091	2.00999
3	2.00052	2.01882
4	2.00097	2.00821
5	2.00097	2.00821
6	2.00052	2.01882
7	2.00091	2.00999
8	2.00037	2.01837

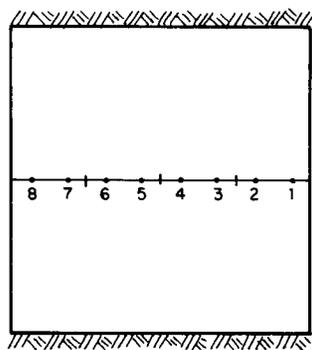


FIG. 5.31

VI - RECOMENDAÇÕES PARA PROGRAMAÇÃO

6.1 - Introdução

As recomendações que serão fornecidas nos itens seguintes são para resolução de problemas bidimensionais, nos quais atua, além das forças de superfícies, a força devido à ação da gravidade. Não serão consideradas as letras q , Q , s e S , de caráter explicativo, nas componentes de deslocamento e tensão.

Os corpos a serem considerados podem ter uma única região homogênea ou várias sub-regiões homogêneas. No caso da presença da descontinuidade, ela pode, num corpo com várias sub-regiões, pertencer a uma única sub-região ou a várias. Podem, também, existir no corpo várias descontinuidades.

Nos problemas com domínio homogêneo será dada ênfase à determinação e localização dos elementos nas matrizes coeficientes dos vetores deslocamento e força de superfície. Quanto aos corpos com várias sub-regiões, o tratamento será essencialmente matricial.

Para a determinação dos parâmetros incógnitos se apresentará dois caminhos. Num deles se utilizará o processo usual, que consiste na inversão da matriz. No outro se utilizará quase que somente submatrizes não nulas e não se inverterá a matriz, sendo sua resolução por blocos.

Serão fornecidos, ainda, os principais passos na resolução de problemas não elásticos.

6.2 - Corpos homogêneos

Os principais passos para a resolução de problemas com um único domínio homogêneo são, neste item, fornecidos. Esses problemas, além de sua importância prática, servem de base para o estudo de corpos com várias sub-regiões. As definições já apresentadas serão consideradas conhecidas e, por isso, serão usadas sem qualquer explicação.

Considera-se que atua no corpo, além das forças de superfície, a força de massa proveniente da ação da gravidade. O problema assim formulado é resolvido por meio da equação 4.11, que adaptada ao método numérico em uso toma a forma de 4.56a.

Os parâmetros nodais, com respeito a fig. 6.1, terão a seguinte disposição nos vetores nodais:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ u_1 \\ 1 \\ u_2 \\ 2 \\ u_1 \\ 2 \\ u_2 \end{array} \right\} \quad (6.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ p_1 \\ 1 \\ p_2 \\ 2 \\ p_1 \\ 2 \\ p_2 \end{array} \right\} \quad (6.1b)$$

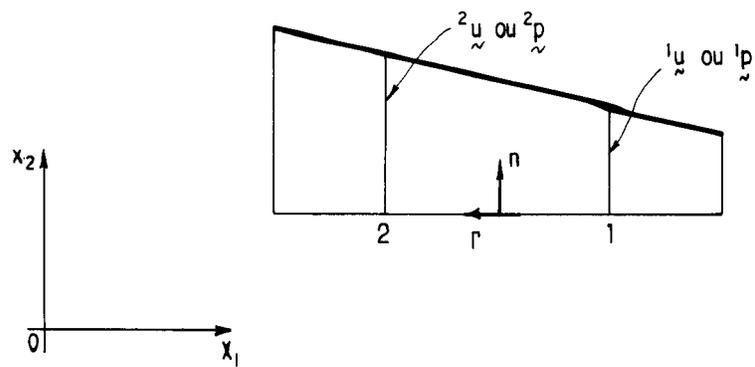


FIG. 6.1

Essa disposição das componentes é conveniente para fornecimento de dados e interpretação de resultados. As matrizes $\underline{p}^* \underline{\phi}^t$ e $\underline{u}^* \underline{\phi}^t$ escritas em conformidade com esses vetores são:

$$\begin{bmatrix} p_{11}^* \phi_1 & p_{12}^* \phi_1 & p_{11}^* \phi_2 & p_{12}^* \phi_2 \\ p_{21}^* \phi_1 & p_{22}^* \phi_1 & p_{21}^* \phi_2 & p_{22}^* \phi_2 \end{bmatrix} \quad (6.2a)$$

$$\begin{bmatrix} u_{11}^* \phi_1 & u_{12}^* \phi_1 & u_{11}^* \phi_2 & u_{12}^* \phi_2 \\ u_{21}^* \phi_1 & u_{22}^* \phi_1 & u_{21}^* \phi_2 & u_{22}^* \phi_2 \end{bmatrix} \quad (6.2b)$$

Seguindo a disposição dos elementos em 6.1a e 6.1b, os vetores globais ficam:

$$\underline{U} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ u_1 \\ 1 \\ u_2 \\ 2 \\ u_1 \\ 2 \\ u_2 \\ \vdots \\ N \\ u_1 \\ N \\ u_2 \end{array} \right\} \quad (6.3a)$$

$$\tilde{P} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ N \\ N \end{array} \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_1 \\ p_2 \end{array} \right\} \quad (6.3b)$$

Fica agora esclarecida a equação 4.58a, lembrando, porém, que a disposição dos elementos em \hat{H} e \tilde{G} não é a mesma usada nesta parte do trabalho. Com isso, é conveniente escrever novamente que

$$\tilde{C} \tilde{U} = - \hat{H} \tilde{U} + \tilde{G} \tilde{P} + \tilde{B} , \quad (6.4)$$

sendo que

$$\tilde{B} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ N \\ N \end{array} \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_1 \\ b_2 \end{array} \right\} . \quad (6.5)$$

A numeração dos nós pode ser arbitrária, pois a localização dos elementos nas matrizes \hat{H} e \tilde{G} é feita através da identificação do nó em cada segmento. Para esclarecer o assunto, toma-se o segmento de número três na figura 6.2. Os coeficientes de influência, correspondentes aos

nós 1 e 7, irão se localizar nas colunas 1 e 2, e 13 e 14, respectivamente, de \hat{H} e \underline{G} (as linhas desses elementos são definidas pelo número do ponto de carga).

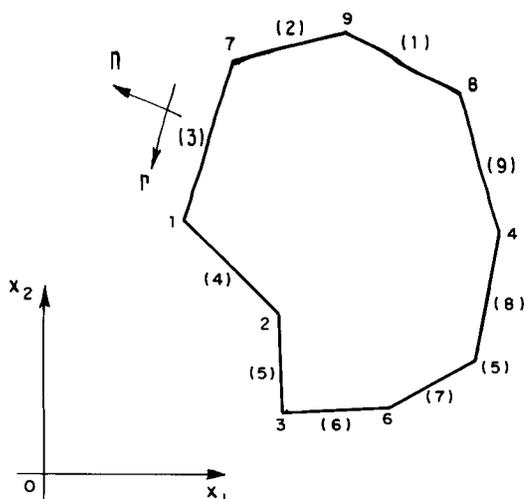


FIG. 6.2

Quando um n \tilde{o} não pertence às extremidades do segmento, os coeficientes de influência relativos a esse n \tilde{o} , obtidos por meio de 6.2a e 6.2b, são os próprios elementos das matrizes \hat{H} e \underline{G} . Já no caso de um n \tilde{o} comum a dois elementos (fig.6.3), os coeficientes de influência correspondente a uma mesma componente, em elementos adjacentes, são adicionados algebricamente. Supondo-se que a_{ij} e b_{ij} representem os elementos das matrizes dos segmentos k e $k+1$, respectivamente, então a matriz global relativa a esses segmentos \tilde{e} :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b_{11} & a_{14}+b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+b_{21} & a_{24}+b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

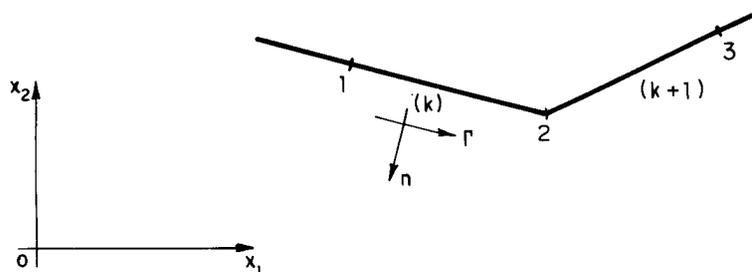


FIG. 6.3

Os elementos da matriz \tilde{C} devem ser adicionados aos coeficientes de influência dos correspondentes de deslocamento. Chamando os elementos das matrizes \tilde{H} e \tilde{G} de \hat{h}_{ij} e g_{ij} , respectivamente, é conveniente agora escrever, na forma explícita a equação matricial 6.4, isto é,

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccccccc}
 \hat{h}_{11+c_{11}} & \hat{h}_{12+c_{12}} & \hat{h}_{13} & \hat{h}_{14} & \dots & \hat{h}_{1(2N-1)} & & \hat{h}_{1(2N)} \\
 \hat{h}_{21+c_{21}} & \hat{h}_{22+c_{22}} & \hat{h}_{23} & \hat{h}_{24} & \dots & \hat{h}_{2(2N-1)} & & \hat{h}_{2(2N)} \\
 \hat{h}_{31} & \hat{h}_{32} & \hat{h}_{33+c_{33}} & \hat{h}_{34+c_{34}} & \dots & \hat{h}_{3(2N-1)} & & \hat{h}_{3(2N)} \\
 \hat{h}_{41} & \hat{h}_{42} & \hat{h}_{43+c_{43}} & \hat{h}_{44+c_{44}} & \dots & \hat{h}_{4(2N-1)} & & \hat{h}_{4(2N)} \\
 \dots & \dots \\
 \hat{h}_{(2N-1)1} & \hat{h}_{(2N-1)2} & \hat{h}_{(2N-1)3} & \hat{h}_{(2N-1)4} & \dots & \hat{h}_{(2N-1)(2N-1)+c_{(2N-1)(2N-1)}} & \hat{h}_{(2N-1)(2N)+c_{(2N-1)(2N)}} & \hat{h}_{(2N-1)(2N)} \\
 \hat{h}_{(2N)1} & \hat{h}_{(2N)2} & \hat{h}_{(2N)3} & \hat{h}_{(2N)4} & \dots & \hat{h}_{(2N)(2N-1)+c_{(2N)(2N-1)}} & \hat{h}_{(2N)(2N)+c_{(2N)(2N)}} & \hat{h}_{(2N)(2N)}
 \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{2N-1} \\ u_{2N} \end{array} \right\} = \\
 & \left[\begin{array}{cccccccc}
 g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & \dots & g_{1(2N-1)} & & g_{1(2N)} \\
 g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & \dots & g_{2(2N-1)} & & g_{2(2N)} \\
 g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & \dots & g_{3(2N-1)} & & g_{3(2N)} \\
 g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & \dots & g_{4(2N-1)} & & g_{4(2N)} \\
 \dots & \dots \\
 g_{(2N-1)1} & g_{(2N-1)2} & g_{(2N-1)3} & g_{(2N-1)4} & \dots & g_{(2N-1)(2N-1)} & & g_{(2N-1)(2N)} \\
 g_{(2N)1} & g_{(2N)2} & g_{(2N)3} & g_{(2N)4} & \dots & g_{(2N)(2N-1)} & & g_{(2N)(2N)}
 \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ \vdots \\ p_{2N-1} \\ p_{2N} \end{array} \right\} + \\
 & \left\{ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{2N-1} \\ b_{2N} \end{array} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

Segundo essa equação, as componentes de um nó de número "i" possuem índices $2i-1$ e $2i$; o primeiro aqui é usado para caracterizar a direção de X_1 e o outro para a direção de X_2 . Os elementos da matriz no primeiro membro de 6.7 são, de agora em diante, chamados de h_{ij} .

Como são fornecidos $2N$ parâmetros envolvendo simultaneamente componentes de deslocamento e força de superfície (método misto de resolução do problema), precisa-se reorganizar os elementos em 6.7 tal que as incógnitas fiquem num único vetor. Para se mostrar como se faz isso, toma-se como exemplo a equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ 3 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ x_2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10 \\ -12 \\ 3 \end{Bmatrix}. \quad (6.8)$$

Se se deseja transferir o elemento x_2 para o lugar de 3 e vice-versa, deve-se permutar entre si, com sinal trocado, as colunas de número dois. A equação 6.8 fica, então:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10 \\ -12 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

Nessa forma, a equação matricial é facilmente resolvida. Convém observar que a troca de sinal nos elementos das segundas colunas é devido os termos da equação estarem em membros diferentes. Deve-se observar, também, que os termos envolvidos têm o mesmo sinal.

Supondo-se que as incógnitas fiquem no vetor do primeiro membro da equação 6.7, o qual será chamado de \tilde{X} , pode-se colocar a equação resultante na forma 6.10. A ma-

triz \underline{A} contém coeficientes das componentes de deslocamento e de força de superfície; o vetor \underline{F} é obtido pela adição do vetor devido à força de massa ao vetor obtido pelo produto da matriz dos coeficientes de parâmetros conhecidos pelo seu respectivo vetor.

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{F} \quad (6.10)$$

As componentes de deslocamento em pontos internos são calculadas após se resolver a equação 6.10, porém, recomenda-se que os elementos das matrizes $\underline{\bar{H}}$ e $\underline{\bar{G}}$ (equação 4.58b) sejam calculados previamente, junto com \underline{H} e \underline{G} . Esquemáticamente pode-se representar as matrizes dos coeficientes de \underline{U} e \underline{P} pela figura abaixo.

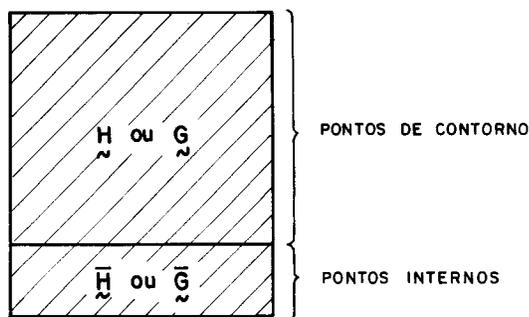


FIG. 6.4

As trocas de colunas entre matrizes, com sinal trocado, devem ser estendidas aos elementos de $\underline{\bar{H}}$ e $\underline{\bar{G}}$, pois apesar das matrizes estarem num só membro, os sinais de seus termos não são iguais. Esse procedimento permite que se use \underline{X} no cálculo das componentes de deslocamento em pontos internos (não se mistura num único vetor valores prescritos e incógnitas). A fórmula de deslocamento para pontos internos, por afinidade à forma 6.10, é

$$\underline{u} = - \underline{A}_1 \underline{X} + \underline{F}_1 \quad (6.11)$$

As componentes de tensão em pontos internos do corpo são dadas por

$$\underline{\underline{\sigma}} = - \underline{\underline{H}}' \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{G}}' \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{T}} . \quad (6.12)$$

Os produtos $\underline{\underline{S}}\underline{\underline{\phi}}^t$ e $\underline{\underline{D}}\underline{\underline{\phi}}^t$, através dos quais se determinam, respectivamente, os elementos das matrizes $\underline{\underline{H}}'$ e $\underline{\underline{G}}'$, em conformidade com 6.3a e 6.3b, são:

$$\begin{bmatrix} S_{111}\phi_1 & S_{112}\phi_1 & S_{111}\phi_2 & S_{112}\phi_2 \\ S_{121}\phi_1 & S_{122}\phi_1 & S_{121}\phi_2 & S_{122}\phi_2 \\ S_{221}\phi_1 & S_{222}\phi_1 & S_{221}\phi_2 & S_{222}\phi_2 \end{bmatrix} \quad (6.13a)$$

$$\begin{bmatrix} D_{111}\phi_1 & D_{112}\phi_1 & D_{111}\phi_2 & D_{112}\phi_2 \\ D_{121}\phi_1 & D_{122}\phi_1 & D_{121}\phi_2 & D_{122}\phi_2 \\ D_{221}\phi_1 & D_{222}\phi_1 & D_{221}\phi_2 & D_{222}\phi_2 \end{bmatrix} \quad (6.13b)$$

O vetor força de massa, determinado pelo último termo do segundo membro de 6.12, possui, é claro, três componentes. Convém, no cálculo das componentes de tensão, agrupar no primeiro vetor do segundo membro os parâmetros desconhecidos com trocas de colunas entre as matrizes coeficientes de $\underline{\underline{U}}$ e $\underline{\underline{P}}$, feitas de forma idêntica às anteriores. Pode-se, dessa maneira, obter:

$$\underline{\underline{\sigma}} = - \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{F}}_2 \quad (6.14)$$

No caso do cálculo de tensão em pontos de contorno, o procedimento é similar, apenas deve-se multiplicar o resultado obtido através de 6.12 por dois, conforme exige a teoria (veja-se, por exemplo, item 5.3).

6.3 - Corpos com sub-regiões

6.3.1 - Corpos com duas sub-regiões

A equação 4.71 aplicada a cada uma das sub-regiões, mostradas na fig. 6.5, dá origem às seguintes equações matriciais:

$$\tilde{H}_1 U_1 = \tilde{G}_1 P_1 + \tilde{B}_1 \quad (6.15a)$$

$$\tilde{H}_2 U_2 = \tilde{G}_2 P_2 + \tilde{B}_2 \quad (6.15b)$$

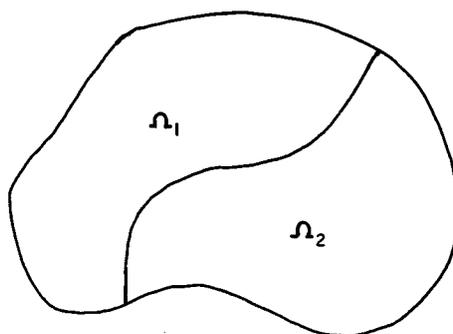


FIG. 6.5

É conveniente, em função da forma de agrupamento dos parâmetros e da técnica de resolução do sistema de equação a ser utilizado, colocar as equações 6.15a e 6.15b na forma abaixo. O primeiro índice indica a sub-região em que se define a equação; o segundo índice, a sub-região adjacente se for diferente do primeiro e o contorno externo se for igual ao primeiro.

$$\tilde{H}_{11} U_{11} + \tilde{H}_{12} U_{12} = \tilde{G}_{11} P_{11} + \tilde{G}_{12} P_{12} + \tilde{B}_1 \quad (6.16a)$$

$$\tilde{H}_{21} U_{21} + \tilde{H}_{22} U_{22} = \tilde{G}_{21} P_{21} + \tilde{G}_{22} P_{22} + \tilde{B}_2 \quad (6.16b)$$

As condições suplementares que tornam o problema determinado são:

$$U_{\sim 12} = U_{\sim 21} \quad (6.17a)$$

$$P_{\sim 12} = -P_{\sim 21} \quad (6.17b)$$

As equações 6.16a, 6.16b, 6.17a e 6.17b podem ser compactadas numa única equação, isto é,

$$\begin{bmatrix} H_{\sim 11} & H_{\sim 12} & -G_{\sim 12} & 0 \\ 0 & H_{\sim 21} & G_{\sim 21} & H_{\sim 22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{\sim 11} \\ U_{\sim 12} \\ P_{\sim 12} \\ U_{\sim 22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\sim 11} & G_{\sim 12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{\sim 21} & G_{\sim 22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{\sim 11} \\ P_{\sim 12} \\ P_{\sim 21} \\ P_{\sim 22} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{\sim 1} \\ B_{\sim 2} \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

Cuidado especial deve-se ter com respeito a localização das componentes de deslocamento e força de superfície nos vetores da interface. As equações 6.17a e 6.17b exigem que as componentes de um ponto tenham as mesmas localizações nos vetores das sub-regiões adjacentes. Para melhor esclarecer o assunto se toma o exemplo da fig. 6.6.

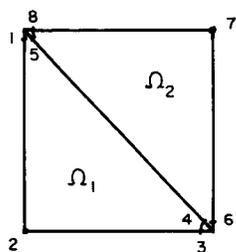


FIG. 6.6

Os vetores das componentes de deslocamento, da interface, para uso na equação 6.18 são:

$$\tilde{U}_{12} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{matrix} \quad (6.19a)$$

$$\tilde{U}_{21} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{matrix} \quad (6.19b)$$

Com isso, os elementos da matriz \tilde{H}_{21} devem ser dispostos em conformidade com 6.19b. O mesmo deve ser considerado ao vetor \tilde{P}_{21} e a matriz \tilde{G}_{21} .

Quanto aos elementos dos vetores \tilde{B}_1 e \tilde{B}_2 , na equação 6.18, eles não mudam de posição. São os termos independentes do sistema de equações e como os elementos nas matrizes coeficientes não mudam de linha, esses vetores permanecem inalterados.

As formas representativas das matrizes coeficientes quando, além dos pontos de contorno, se considera pontos internos são as mostradas nas figuras 6.7a e 6.7b. Convém observar nestas figuras que as linhas referentes aos pontos internos são as últimas.

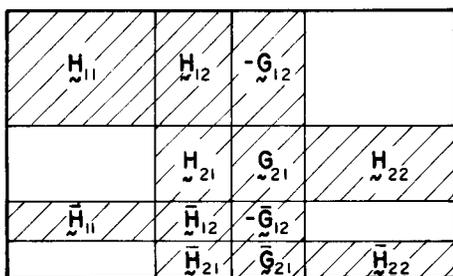


FIG. 6.7a

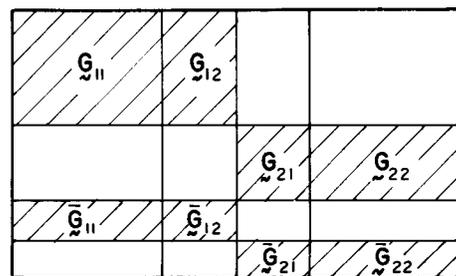


FIG. 6.7b

No caso do cálculo das componentes de tensão, as formas representativas das matrizes coeficientes são as indicadas nas figuras 6.8a e 6.8b.

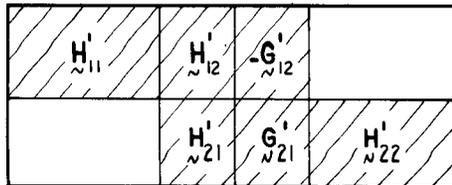


FIG. 6.8a

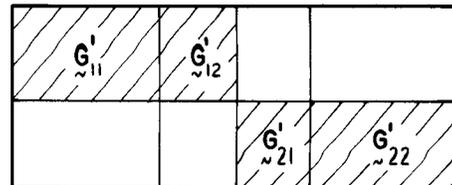


FIG. 6.8b

6.3.2 - Corpos com várias sub-regiões

Quando um corpo possui mais de duas sub-regiões, como o mostrado na fig. 6.9, recomenda-se inicialmente montar, através da equação de contorno, a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix}
 \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} & \tilde{H}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} & \tilde{H}_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_{31} & \tilde{H}_{32} & \tilde{H}_{33}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \tilde{U}_{11} \\
 \tilde{U}_{12} \\
 \tilde{U}_{13} \\
 \tilde{U}_{21} \\
 \tilde{U}_{22} \\
 \tilde{U}_{23} \\
 \tilde{U}_{31} \\
 \tilde{U}_{32} \\
 \tilde{U}_{33}
 \end{Bmatrix}
 =$$

$$\begin{bmatrix}
 \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} & \underline{G}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} & \underline{G}_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{G}_{31} & \underline{G}_{32} & \underline{G}_{33}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \underline{P}_{11} \\
 \underline{P}_{12} \\
 \underline{P}_{13} \\
 \underline{P}_{21} \\
 \underline{P}_{22} \\
 \underline{P}_{23} \\
 \underline{P}_{31} \\
 \underline{P}_{32} \\
 \underline{P}_{33}
 \end{Bmatrix}
 +
 \begin{Bmatrix}
 \underline{B}_1 \\
 \underline{B}_2 \\
 \underline{B}_3
 \end{Bmatrix}
 \quad (6.20)$$

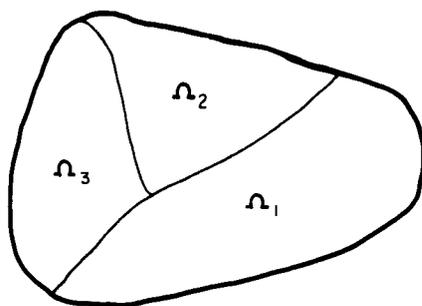


FIG. 6.9

Introduzindo-se as condições de equilíbrio e de compatibilidade, aplicadas nas interfaces entre domínios adjacentes, resulta:

$$\begin{bmatrix}
 \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} & \underline{H}_{13} & -\underline{G}_{12} & 0 & 0 & -\underline{G}_{13} & 0 & 0 \\
 0 & \underline{H}_{21} & 0 & \underline{G}_{21} & \underline{H}_{22} & \underline{H}_{23} & 0 & -\underline{G}_{23} & 0 \\
 0 & 0 & \underline{H}_{31} & 0 & 0 & \underline{H}_{32} & \underline{G}_{31} & \underline{G}_{32} & \underline{H}_{33}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \underline{U}_{11} \\
 \underline{U}_{12} \\
 \underline{U}_{13} \\
 \underline{P}_{12} \\
 \underline{U}_{22} \\
 \underline{U}_{23} \\
 \underline{P}_{31} \\
 \underline{P}_{32} \\
 \underline{U}_{33}
 \end{Bmatrix}
 =$$

$$\begin{bmatrix}
 \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} & \tilde{G}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} & \tilde{G}_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_{31} & \tilde{G}_{32} & \tilde{G}_{33}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 P_{\tilde{11}} \\
 P_{\tilde{12}} \\
 P_{\tilde{13}} \\
 P_{\tilde{21}} \\
 P_{\tilde{22}} \\
 P_{\tilde{23}} \\
 P_{\tilde{31}} \\
 P_{\tilde{32}} \\
 P_{\tilde{33}}
 \end{Bmatrix}
 +
 \begin{Bmatrix}
 B_{\tilde{1}} \\
 B_{\tilde{2}} \\
 B_{\tilde{3}}
 \end{Bmatrix}
 \quad (6.21)$$

No caso do corpo mostrado na fig. 6.10, a matriz coeficiente do primeiro membro da equação matricial é:

$$\begin{bmatrix}
 \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} & \tilde{H}_{14} & -\tilde{G}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{G}_{14} & 0 & 0 \\
 0 & \tilde{H}_{21} & 0 & \tilde{G}_{21} & \tilde{H}_{22} & \tilde{H}_{23} & -\tilde{G}_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_{32} & \tilde{G}_{32} & \tilde{H}_{33} & \tilde{H}_{34} & 0 & -\tilde{G}_{34} & 0 \\
 0 & 0 & \tilde{H}_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_{43} & \tilde{G}_{41} & \tilde{G}_{43} & \tilde{H}_{44}
 \end{bmatrix}
 \quad (6.22)$$

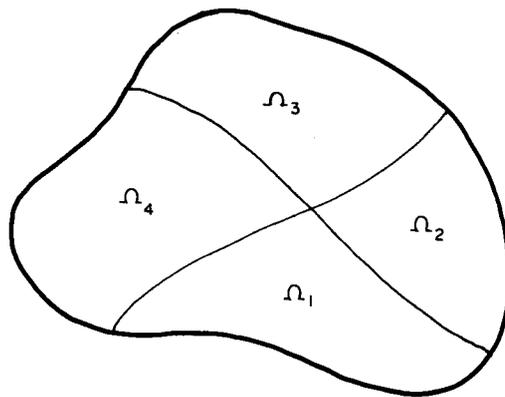


FIG. 6.10

As matrizes globais das equações de deslocamento e tensão, para corpos com pontos internos nas sub-regiões, são obtidos seguindo procedimento similar ao adotado para corpos com duas sub-regiões.

6.4 - Corpos com descontinuidade

6.4.1 - Corpos homogêneos

Serão analisados neste e no próximo subitem somente os termos de 5.17a e 5.17b que envolvem quadripolos, isto é,

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{Q}} \quad \text{e} \quad (6.23a)$$

$$\underline{\underline{K}}' \underline{\underline{Q}} \quad . \quad (6.23b)$$

A determinação dos elementos de $\underline{\underline{K}}$ e $\underline{\underline{K}}'$ é feita seguindo procedimento numérico similar ao usado nas matrizes $\underline{\underline{H}}$, $\underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{H}}'$ e $\underline{\underline{G}}'$. Cada um dos pontos fixados no corpo define duas linhas em $\underline{\underline{K}}$ e três linhas em $\underline{\underline{K}}'$. O número de colunas de $\underline{\underline{K}}$ e $\underline{\underline{K}}'$ é quatro vezes o número de elementos que aproxima a curva representativa da descontinuidade; cada elemento, com duas distribuição de quadripolos (q_x e q_z), possui dois nós. Chamando-se os elementos de $\underline{\underline{K}}$ e $\underline{\underline{K}}'$ de k_{ij} e k'_{ij} , respectivamente, pode-se escrever baseado na fig. 6.11 as igualdades abaixo:

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & \dots & k_{1(2\bar{N}-1)} & k_{1(2\bar{N})} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & \dots & k_{2(2\bar{N}-1)} & k_{2(2\bar{N})} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & \dots & k_{3(2\bar{N}-1)} & k_{3(2\bar{N})} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & \dots & k_{4(2\bar{N}-1)} & k_{4(2\bar{N})} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{(2\bar{N}-1)1} & k_{(2\bar{N}-1)2} & k_{(2\bar{N}-1)3} & k_{(2\bar{N}-1)4} & \dots & k_{(2\bar{N}-1)(2\bar{N}-1)} & k_{(2\bar{N}-1)(2\bar{N})} \\ k_{(2\bar{N})1} & k_{(2\bar{N})2} & k_{(2\bar{N})3} & k_{(2\bar{N})4} & \dots & k_{(2\bar{N})(2\bar{N}-1)} & k_{(2\bar{N})(2\bar{N})} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 q_x \\ 1 q_z \\ 2 q_x \\ 2 q_z \\ \vdots \\ \bar{N} q_x \\ \bar{N} q_z \end{Bmatrix}$$

(6.24a)

$$\underline{\underline{K}}' \underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix}
 k'_{11} & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} & \dots & k'_{1(2\bar{N}-1)} & k'_{1(2\bar{N})} \\
 k'_{21} & k'_{22} & k'_{23} & k'_{24} & \dots & k'_{2(2\bar{N}-1)} & k'_{2(2\bar{N})} \\
 k'_{31} & k'_{32} & k'_{33} & k'_{34} & \dots & k'_{3(2\bar{N}-1)} & k'_{3(2\bar{N})} \\
 k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & k'_{44} & \dots & k'_{4(2\bar{N}-1)} & k'_{4(2\bar{N})} \\
 k'_{51} & k'_{52} & k'_{53} & k'_{54} & \dots & k'_{5(2\bar{N}-1)} & k'_{5(2\bar{N})} \\
 k'_{61} & k'_{62} & k'_{63} & k'_{64} & \dots & k'_{6(2\bar{N}-1)} & k'_{6(2\bar{N})} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 k'_{(3\bar{N}-2)1} & k'_{(3\bar{N}-2)2} & k'_{(3\bar{N}-2)3} & k'_{(3\bar{N}-2)4} & \dots & k'_{(3\bar{N}-2)(2\bar{N}-1)} & k'_{(3\bar{N}-2)(2\bar{N})} \\
 k'_{(3\bar{N}-1)1} & k'_{(3\bar{N}-1)2} & k'_{(3\bar{N}-1)3} & k'_{(3\bar{N}-1)4} & \dots & k'_{(3\bar{N}-1)(2\bar{N}-1)} & k'_{(3\bar{N}-1)(2\bar{N})} \\
 k'_{(3\bar{N})1} & k'_{(3\bar{N})2} & k'_{(3\bar{N})3} & k'_{(3\bar{N})4} & \dots & k'_{(3\bar{N})(2\bar{N}-1)} & k'_{(3\bar{N})(2\bar{N})}
 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix}
 1 \\
 q_x \\
 1 \\
 q_z \\
 2 \\
 q_x \\
 2 \\
 q_z \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \bar{N} \\
 q_x \\
 \bar{N} \\
 q_z
 \end{Bmatrix}$$

(6.24b)

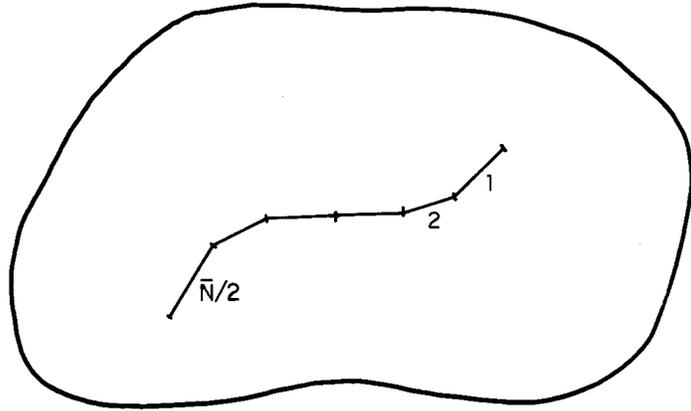


FIG. 6. II

No caso de se calcular deslocamentos em pontos internos, convém armazenar os elementos relativos a esses pontos na matriz $\underline{\underline{K}}$, após as linhas relativas aos pontos de contorno do corpo. Recomenda-se no cálculo das tensões que sejam tomados primeiramente os pontos localizados na descontinuidade. Quando o ponto é de contorno do corpo, os elementos da matriz $\underline{\underline{K}}'$ relativos a esse ponto deve ser multiplicado por dois.

6.4.2 - Corpos com sub-regiões

Numa sub-região genérica Ω_i de um corpo têm-se, da fórmula de deslocamento, as matrizes $\underline{\underline{K}}_i$ e $\underline{\underline{K}}'_i$ relativas a

pontos do contorno e internos, respectivamente. Agrupando-as numa única matriz \tilde{K} , recomenda-se primeiramente armazenar as matrizes relativas aos pontos do contorno de todas as sub-regiões. A ordem do conjunto de linhas de cada sub-região dentro da matriz \tilde{K} obedece a numeração da sub-região no corpo.

Da fórmula de tensão resultam \tilde{K}'_i e $\overline{\tilde{K}}'_i$ referentes a pontos na descontinuidade e fora da descontinuidade, respectivamente. Recomenda-se que as primeiras linhas da matriz \tilde{K}' sejam as linhas de \tilde{K}'_i , ficando as de $\overline{\tilde{K}}'_i$ por último.

Suponha-se, por exemplo, um corpo com duas sub-regiões e com uma descontinuidade (fig.6.12). Admitindo-se que, além dos pontos na descontinuidade, sejam tomados outros pontos internos, resulta:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_2 \\ \overline{\tilde{K}}_1 & 0 \\ 0 & \overline{\tilde{K}}_2 \end{bmatrix} \quad (6.25a)$$

$$\tilde{K}' = \begin{bmatrix} \tilde{K}'_1 & 0 \\ 0 & \tilde{K}'_2 \\ \overline{\tilde{K}}'_1 & 0 \\ 0 & \overline{\tilde{K}}'_2 \end{bmatrix} \quad (6.25b)$$

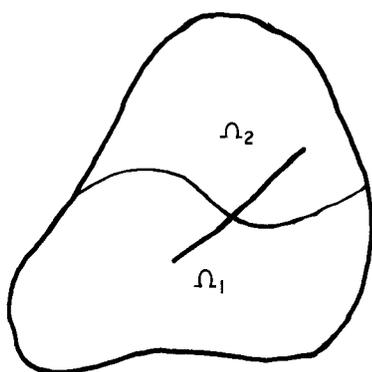


FIG. 6.12

Quando a descontinuidade não pertence a uma das sub-regiões i , as matrizes \tilde{K}_i e \tilde{K}'_i são nulas e são desconsideradas. Tomando-se, para esclarecer o assunto, o corpo na fig. 6.13, no qual se supõe que não sejam considerados pontos internos em Ω_1 e Ω_2 , resulta:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_3 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_4 \\ \bar{\tilde{K}}_3 & 0 \\ 0 & \bar{\tilde{K}}_4 \end{bmatrix} \quad (6.26a)$$

$$\tilde{K}' = \begin{bmatrix} \tilde{K}'_3 & 0 \\ 0 & \tilde{K}'_4 \\ \bar{\tilde{K}}'_3 & 0 \\ 0 & \bar{\tilde{K}}'_4 \end{bmatrix} \quad (6.26b)$$

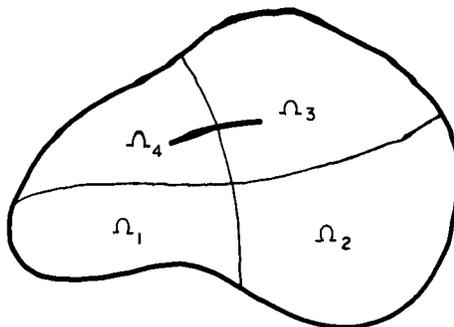


FIG. 6.13

6.5 - Determinação dos parâmetros incôgnitos

6.5.1 - Corpos sem descontinuidade

Na resolução de um problema sem descontinuidade, deve-se observar se o corpo é constituído de uma única região homogênea ou de várias, pois é conveniente usar processos diferentes para a resolução de cada um dos sistemas de equações. No primeiro caso se usou os processos de Gauss e Gauss-Jordan e no outro se usou o proposto por CROTTY, 1982. Esses processos são exatos, isto é, forneceriam a solução exata, se não fossem os erros de arredondamento, causado por um número finito de operações.

A matriz A (equação 6.10), proveniente de corpos homogêneos, é cheia (elementos não nulos, só eventualmente alguns o são) e é diagonalmente dominante ($|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|$, onde a_{ij} é um elemento de A). Pelo processo de Gauss, a matriz do sistema é transformada numa matriz triangular superior e mediante uma substituição regressiva se obtém a solução do sistema. Enquanto pelo processo Gauss-Jordan, a matriz do sistema é transformada numa matriz identidade e a solução do sistema se apresenta espontaneamente. Em ambos os processos deve ser feita uma redistribuição de linhas; no processo de Gauss o elemento pivô na i -ésima eliminação é o de maior valor absoluto da coluna do pivô entre as $n-i+1$ linhas seguintes às desse elemento, in-

clusiva a que contém o pivô. Esse procedimento tem três finalidades: minimizar o erro de arredondamento, evitar a divisão por zero e testar a singularidade do sistema.

Neste trabalho se usou, para corpos homogêneos, basicamente o processo de Gauss-Jordan. A matriz \tilde{A} é invertida e o vetor \tilde{X} de termos desconhecidos, conforme a equação 6.10, vale:

$$\tilde{X} = \tilde{A}^{-1} \tilde{F} \quad (6.27)$$

Conhecido o vetor \tilde{X} , as componentes de deslocamento em pontos internos do corpo e as componentes de tensão são obtidas facilmente pelas fórmulas 6.11 e 6.14.

Nos corpos constituídos de partes homogêneas, a matriz cujos elementos são coeficientes de parâmetros desconhecidos, contém submatrizes nulas. A disposição e o número dessas submatrizes na matriz global é de tal forma que é possível trabalhar quase que só com submatrizes não nulas. O processo desenvolvido por Crotty, é um dos processos que trata matrizes com submatrizes nulas. As vantagens desse processo sobre os de eliminação ou de iteração são ignorar muitos dos grupos de zeros que ocorrem na resolução de problemas de corpos com partes homogêneas e restringir o crescimento de elementos não nulos. A memória requerida e o tempo de computação são, portanto, reduzidos para problemas dessa natureza.

O processo de eliminação de Gauss é o princípio básico do processo desenvolvido por Crotty. A organização dos elementos na matriz coeficiente do vetor \tilde{X} usada na seção 6.3 é a recomendada por LACHAT, 1975 (essa regra na prática contribui para estabilidade da matriz). Os coeficientes de influência das forças de superfície são inversamente proporcional ao módulo de elasticidade longitudinal e os dos deslocamentos não o são, por isso, deve-se multiplicar os primeiros por uma constante para que

todos tenham uma mesma ordem de grandeza. Evita-se, com isso, um mal condicionamento da matriz. A constante normalmente adotada é $\bar{E}/d_{\text{máx}}$, onde \bar{E} é o módulo de elasticidade médio calculado entre os módulos de elasticidade das sub-regiões que compõe o corpo e $d_{\text{máx}}$ é o maior comprimento do segmento de reta entre os segmentos usados na aproximação dos contornos das sub-regiões. Os coeficientes de influência das forças de superfícies, relativo a cada elemento de contorno, são diretamente proporcional a seu comprimento, daí a razão de se dividir \bar{E} por $d_{\text{máx}}$.

Esse processo de resolução é designado para problemas em que a matriz global e mesmo blocos individuais não cabem na memória do computador, ou ocupam grande parte da memória, não deixando espaço para outras matrizes e vetores. Três arquivos em disco, dois de acesso randômico e um de acesso sequencial, são usados para armazenar dados fora da memória do computador.

Seja, por exemplo, a matriz \tilde{A} e o vetor \tilde{F} , dados a seguir.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_5 & a_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_6 & a_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{10} & a_{14} & a_{18} & a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{15} & a_{19} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & a_{12} & a_{16} & a_{20} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{17} & a_{21} & a_{25} \end{bmatrix} \quad (6.28a)$$

$$\tilde{F} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{Bmatrix} \quad (6.28b)$$

Uma possível divisão da matriz \tilde{A} em submatrizes (blocos) é a dada abaixo. Cada um destes blocos pode ser dividido em sub-blocos, porém, isso não será feito no presente trabalho. A divisão do vetor \tilde{F} mostrada abaixo, foi feita em conformidade com a da matriz \tilde{A} .

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_5 & a_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_6 & a_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a_{10} & a_{14} & a_{18} & a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{15} & a_{19} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & a_{12} & a_{16} & a_{20} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{17} & a_{21} & a_{25} \end{bmatrix} \quad (6.29a)$$

$$\tilde{F} = \left\{ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \hline f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{array} \right\} \quad (6.29b)$$

Os blocos de elementos não nulos, incluindo os do vetor \tilde{F} , são numerados em ordem crescente, na horizontal, pelo próprio programa (veja-se a figura 6.14). Os números correspondem a endereços num determinado disco e são armazenados na forma unidimensional (vetores), seguindo a ordem dos índices em 6.29a e 6.29b.

1	0	0	2
0	3	4	5

FIG. 6.14

6.5.2 - Corpos com descontinuidade

A fórmula 5.17a, para corpos homogêneos com descontinuidade, e a equação 6.10 permitem que se escreva

$$\tilde{A} \tilde{X} = \tilde{F} + \tilde{K} \tilde{Q}, \quad (6.30)$$

de onde se obtém:

$$\tilde{X} = \tilde{A}^{-1} \tilde{F} + \tilde{A}^{-1} \tilde{K} \tilde{Q} \quad (6.31)$$

Usando-se as fórmulas 5.17b e 6.14 se deduz que as componentes de tensão são dadas por

$$\underline{\sigma} = -A_2 \underline{X} + \underline{F}_2 + \underline{K}' \underline{Q} , \quad (6.32)$$

ou, ainda,

$$\underline{\sigma} = (-A_2 A^{-1} \underline{F} + \underline{F}_2) + (-A_2 A^{-1} \underline{K} + \underline{K}') \underline{Q} . \quad (6.33)$$

As fórmulas 6.31 e 6.33 indicam aparentemente a necessidade de inverter a matriz \underline{A} , principalmente, para determinar os efeitos de quadripolos. Usando-se, porém, o recurso de calcular vetores soluções do sistema de equações com vetores de termos independentes constituídos pelas colunas da matriz \underline{K} , obtém-se o produto $\underline{A}^{-1} \underline{K}$. A ordem dos vetores soluções na matriz resultante é a mesma das colunas da matriz \underline{K} . Note-se que a determinação dos vetores correspondentes ao primeiro termo de 6.31 e ao primeiro termo entre parênteses de 6.33, nos segundos membros, é imediata.

O uso do processo desenvolvido por Crotty, para corpos com descontinuidade, é quase que natural, mesmo em corpos homogêneos. O tempo de computação usado aqui se constituiu num parâmetro de grande importância.

6.6 - Técnica de solução

Neste trabalho, os problemas envolvendo corpos sem e com descontinuidades são resolvidos segundo o algoritmo abaixo. Inicialmente são resolvidos considerando os corpos com comportamento elástico-linear.

Passo 1. Calculam-se todos os coeficientes dos parâmetros deslocamentos e forças de superfície (coeficientes de influência), e o vetor correspondente à força de massa, quando essa é considerada, envolvidos na equação de contorno e na fórmula de deslocamento para pontos internos.

Passo 2. Organizam-se os elementos das matrizes globais segundo a forma recomendada neste capítulo.

Passo 3. Introduzem-se as condições de contorno e resolve-se o sistema de equação, ficando, assim, determinado o vetor \tilde{X} . Se o problema não exige que se calculem outros parâmetros em pontos internos do corpo se vai para o passo 11.

Passo 4. Calculam-se os coeficientes de influência e o vetor correspondente à força de massa envolvidos na fórmula de tensão, e organizam-se os elementos das matrizes globais segundo a forma recomendada neste capítulo.

Passo 5. Introduzem-se novamente as condições de contorno e calculam-se as componentes de tensão. Se o corpo não contém descontinuidade se vai para o passo 11.

Passo 6. Calculam-se as matrizes de influência dos quadripolos (matrizes \tilde{K} e \tilde{K}') e a seguir calculam-se os coeficientes do vetor \tilde{Q} em 6.31 e 6.33.

Passo 7. Se o corpo é elástico-linear e se a descontinuidade tem uma abertura tal que não seja nula durante o processo de carregamento, aplica-se o carregamento de única vez. Quando a modelação do problema é a elasto-plástica, aplica-se o carregamento de maneira incremental. No caso da modelação elasto-viscoplástica, aplica-se também o carregamento de uma só vez.

Passo 8. Comparam-se as tensões de cálculo na descontinuidade com as fixadas pelo problema ou com as fixadas pelo critério citado. Se estas são iguais àquelas, nos correspondentes pontos, dentro de uma certa tolerância, vai-se para o passo 11 ou outro incremento.

Passo 9. Calculam-se as componentes dos quadripolos (vetor \tilde{Q}) mediante uma das condições ditadas pelo passo 7.

Passo 10. Calculam-se os esforços e deslocamentos provenientes dos quadripolos, adicionando-os algebricamente, em seguida, aos calculados anteriormente e vai-se para o passo 8.

Passo 11. Imprimem-se os resultados.

VII - APLICAÇÕES PRÁTICAS

7.1 - Introdução

Nesta parte do trabalho são feitas aplicações de problemas geomecânicos, procurando-se mostrar a utilidade e a capacidade da formulação apresentada anteriormente.

Inicialmente se tratará uma barragem sem descontinuidade, já calculada pelos Métodos dos Elementos Finitos e das Diferenças Finitas. Adotar-se-á primeiramente uma forma geométrica para o sistema barragem-fundação igual a usada pelos outros métodos, possibilitando, dessa maneira, uma melhor comparação entre os três métodos. No final do item, que tratará desse exemplo, adotar-se-á, para resolver o problema, a forma geométrica real, o que permitirá fazer uma avaliação entre os diversos resultados obtidos para o mesmo problema.

No item 7.3 se analisará a estabilidade do vertedouro da barragem de Água Vermelha, construída em São Paulo. O meio no qual está assentada, apresenta, em face da disposição dos materiais que o compõe, uma descontinuidade, em torno da qual se dará a análise do problema. O critério empregado na verificação das tensões ao longo da descontinuidade é o de Mohr-Coulomb.

A última aplicação tratada aqui se refere a uma escavação num meio que apresenta uma descontinuidade horizontal, localizada acima da superfície superior da escavação.

7.2 - Exemplo comparativo

As comparações quantitativas entre o Método dos Elementos de Contorno e outros métodos são, em geral, obtidas para cada problema específico, e mesmo assim fixando diretrizes na resolução do problema. Todavia, esses resultados, quando colhidos de vários problemas, permitem tirar conclusões sobre as vantagens e desvantagens entre métodos numéricos para resolução de problemas práticos.

Com a finalidade de se mostrar claramente as principais diferenças entre esses métodos numéricos, analisa-se a barragem de concreto, apoiada sobre rocha, mostrada na figura 7.1. Adotam-se, como dados relativos às propriedades dos materiais, os seguintes valores:

- a) módulo de elasticidade do concreto e da rocha 12GPa e 6GPa, respectivamente;
- b) coeficiente de Poisson do concreto e da rocha 0,20 e 0,25, respectivamente;
- c) peso específico do concreto, da rocha e da água 25kN/m³, 25kN/m³ e 10kN/m³, respectivamente.

Adota-se, para cálculo dessa estrutura, o conceito de estado plano de deformação. As cargas consideradas são: ação d'água e os pesos próprios do concreto e da rocha.

O problema será resolvido considerando o meio no qual está assentada a barragem limitado por um contorno fictício, aproximando o semi-infinito para um sólido finito. Esse procedimento não dá resultados aceitáveis em pontos

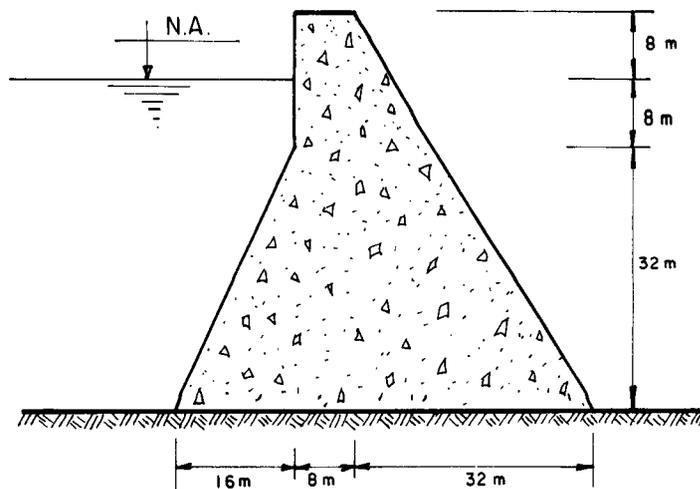


FIG. 7.1

próximos do contorno fictício, porém a forma geométrica admitida na resolução do problema permite a comparação com outros métodos numéricos.

Os esforços e deslocamentos são aqui determinados admitindo-se os contornos da barragem e do meio no qual se assenta discretizados como se mostra na figura 7.2. Nessa figura, os pontos com as mesmas coordenadas não devem ser interpretados como nós, pois o programa desenvolvido para a resolução do problema, usa, nessa situação, elementos descontínuos ou mistos (veja-se, por exemplo, a seção 4.3). Os valores nodais devido à ação d'água e de deslocamentos no contorno são nesses elementos calculados via computador, e em função dos valores dados nos pontos da fig. 7.2. Para a solução do sistema de equação, obtido pelo emprego do Método dos Elementos de Contorno, foi usado o processo desenvolvido por Crotty.

A seleção dos pontos internos mostrados na fig. 7.2 foi feita com base na resolução desse problema efetuada pelo Método dos Elementos Finitos. Objetiva-se com essa disposição de pontos numa mesma vertical, avaliar a variação da tensão e poder comparar com os valores obtidos pelos outros métodos.

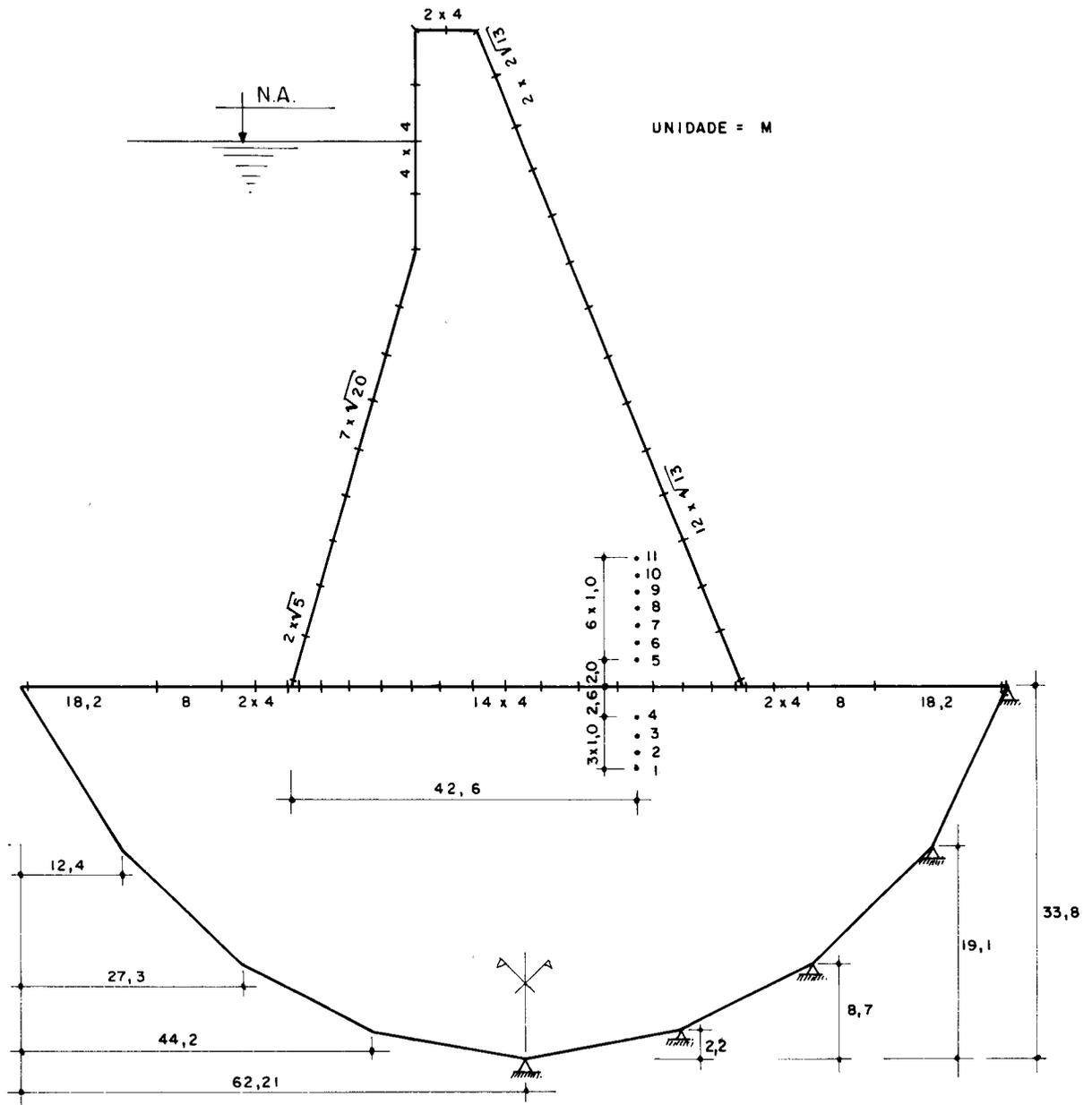


FIG. 7.2

As tensões nos i pontos ($i=1,11$), obtidas com essa discretização, após se determinar os parâmetros incógnitos, são dadas no quadro abaixo.

QUADRO I

Ponto	Tensões (MPa)		
	σ_x	σ_z	τ_{xz}
1	-0,327	-0,733	+0,208
2	-0,324	-0,712	+0,213
3	-0,320	-0,692	+0,218
4	-0,314	-0,673	+0,223
5	-0,318	-0,599	+0,236
6	-0,317	-0,585	+0,266
7	-0,314	-0,573	+0,273
8	-0,309	-0,561	+0,279
9	-0,302	-0,550	+0,282
10	-0,295	-0,537	+0,284
11	-0,286	-0,525	+0,285

Esse problema foi resolvido pelo Método dos Elementos Finitos (veja-se FREITAS NETO et al., 1973) com o uso de elemento CSTG (Constant Strain Triangle Global), segundo a discretização mostrada na fig. 7.3a. Foi empregado, na sua resolução, o sistema de linguagem orientada denominado STRUDL (Structural Design Language) que se acha integrado num sistema mais amplo de Engenharia Civil, chamado projeto ICES (Integrated Civil Engineering System).

As cargas atuantes foram as mesmas usadas anteriormente, isto é, os pesos próprios da rocha e do concreto, concentrando-os em todos os nós dos elementos triangulares, e a ação da água nos nós de contorno, conforme mostra a figura 7.3b. Foi considerado na resolução desse problema também o conceito de estado plano de deformação.

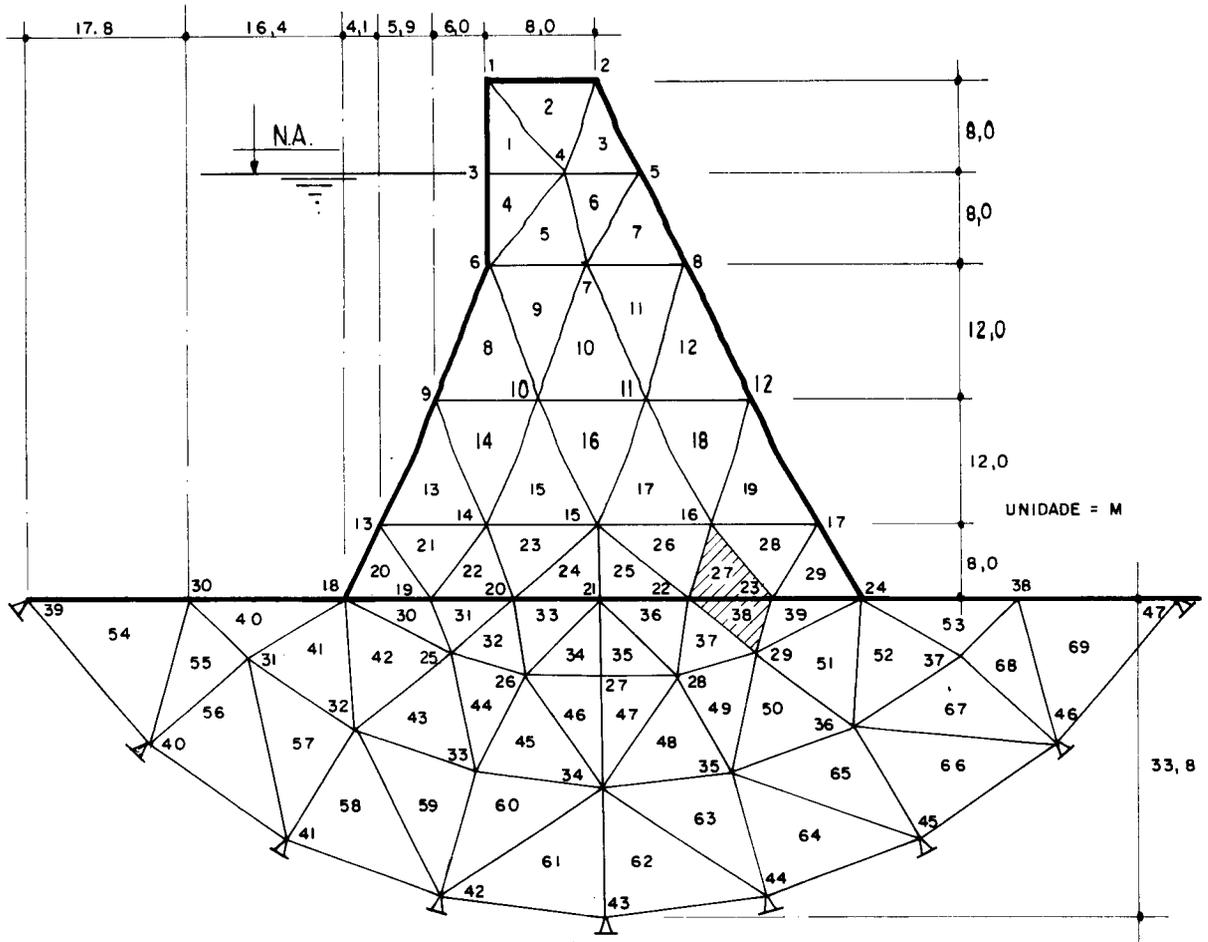


FIG. 7.3a

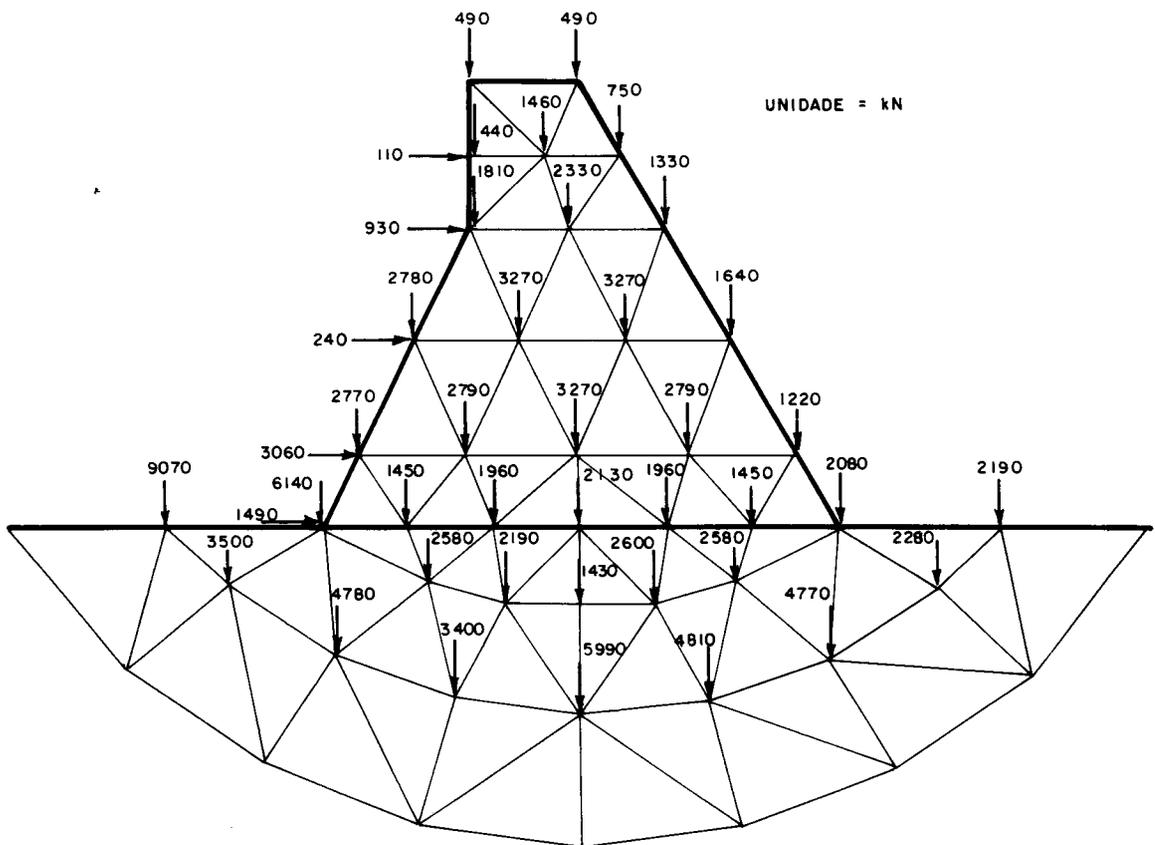


FIG. 7.3b

As tensões obtidas pelo Método dos Elementos Finitos nos elementos 27 e 28 são dadas no quadro abaixo.

QUADRO II

Elemento	Tensões (MPa)		
	σ_x	σ_z	τ_{xz}
27	-0,316	-0,601	+0,306
28	-0,271	-0,558	+0,196

Recentemente MARTINS, 1986, analisou também esta barragem de concreto, assentada em rocha, pelo Método das Diferenças Finitas. Foram usadas malhas irregulares e polinômios aproximadores incompletos do quarto grau. As cargas consideradas foram as mesmas usadas na resolução do problema pelos métodos anteriores, o estado plano também é o mesmo e a rede de malhas empregada está indicada na figura 7.4.

Resolvido o problema pelo Método das Diferenças Finitas, foi tomada a média aritmética dos valores de uma mesma componente de tensão nos vértices de cada um dos elementos 1 e 2 (fig.7.4). Dão-se, no quadro abaixo, os valores constantes das componentes de tensão nos citados elementos.

QUADRO III

Elemento	Tensões (MPa)		
	σ_x	σ_z	τ_{xz}
1	-0,236	-0,615	+0,298
2	-0,285	-0,572	+0,276

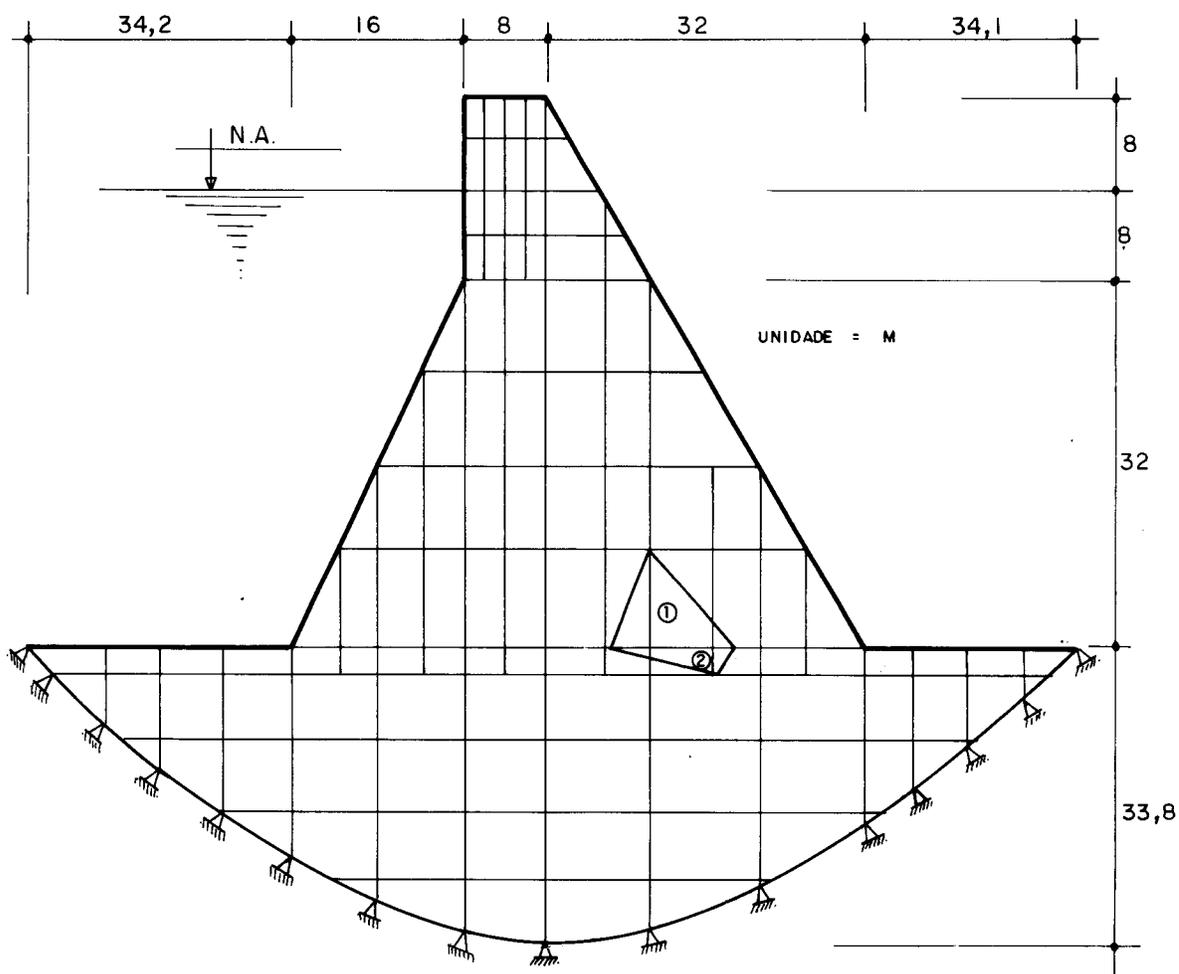


FIG. 7.4

O fato de se discretizar somente o contorno do corpo, no Método dos Elementos de Contorno, facilita a elaboração dos dados geométricos, pois é muito mais cômodo determinar pontos no contorno do que no domínio. A geometria do corpo, nesse método e no Método dos Elementos Finitos, é em geral aproximada no contorno (no caso da barragem de concreto, a geometria usada representa a forma original do corpo), porém, nesse último método a discretização se dá também no domínio. O peso próprio do corpo nos Métodos dos Elementos Finitos e das Diferenças Finitas é, em geral, aproximado no domínio do corpo, já no método em uso neste trabalho a aproximação decorre quase que somente da técnica de integração.

Os resultados obtidos (deslocamentos e esforços) na resolução do problema da barragem, pelo dois últimos métodos são meramente ilustrativos não têm nenhuma finalidade prática. O número de elementos em que foi discretizado o corpo não é suficiente para se obter bons resultados e nem o número de malhas usado na fig. 7.4. O que não ocorre com a resolução do problema, por meio da discretização mostrada na fig. 7.2; os resultados são de utilidade prática, pois o método determina valores de tensão que depende da localização de cada ponto no corpo. Poder-se-ia melhorar os resultados obtidos pelos Métodos dos Elementos Finitos e das Diferenças Finitas, por exemplo, aumentando, respectivamente, o número de elementos triangulares e o número de malhas no corpo.

Do ponto de vista computacional, o Método dos Elementos de Contorno, nesse exemplo, sobrepuja os demais. O número de dados de entrada e o número de incógnitas são menores, e com isso menor é o tempo de computação na resolução do problema.

Na fig. 7.3a, os triângulos 27 (9mx8m) e 38 (9mx5m60cm) têm dimensões não adequadas para determinação das tensões pelo Método dos Elementos Finitos (tensões constantes). No caso da Fig. 7.4, a rede de malha também não é adequada para obtenção de tensões pelo Método das Diferenças Finitas (vejam-se os valores médios no Quadro III). Os valores das componentes de tensão, calculados pelo Método dos Elementos de Contorno, nos 1 pontos da fig. 7.2, dão uma idéia da variação de tensão ao longo de uma vertical.

Admitem-se agora, para cálculo das tensões, uma forma geométrica e uma situação de carregamento que mais se aproximem do problema físico proposto. Como o meio no qual se assenta a barragem é semi-infinito, uma boa norma é considerar em sua superfície segmentos com comprimento cada vez maiores a medida que se afastam da barragem, como se mostra na fig. 7.5. Quanto ao carregamento, as tensões devido ao peso próprio da rocha são superpos-

tas às provenientes do peso próprio do concreto e da ação d'água. Veja-se que estas decorrem da construção da barragem enquanto aquelas já existiam (tensões tectônicas). A discretização do contorno da barragem é igual a usada na fig. 7.2 e os pontos internos, tomados aqui, também são os mesmos usados anteriormente.

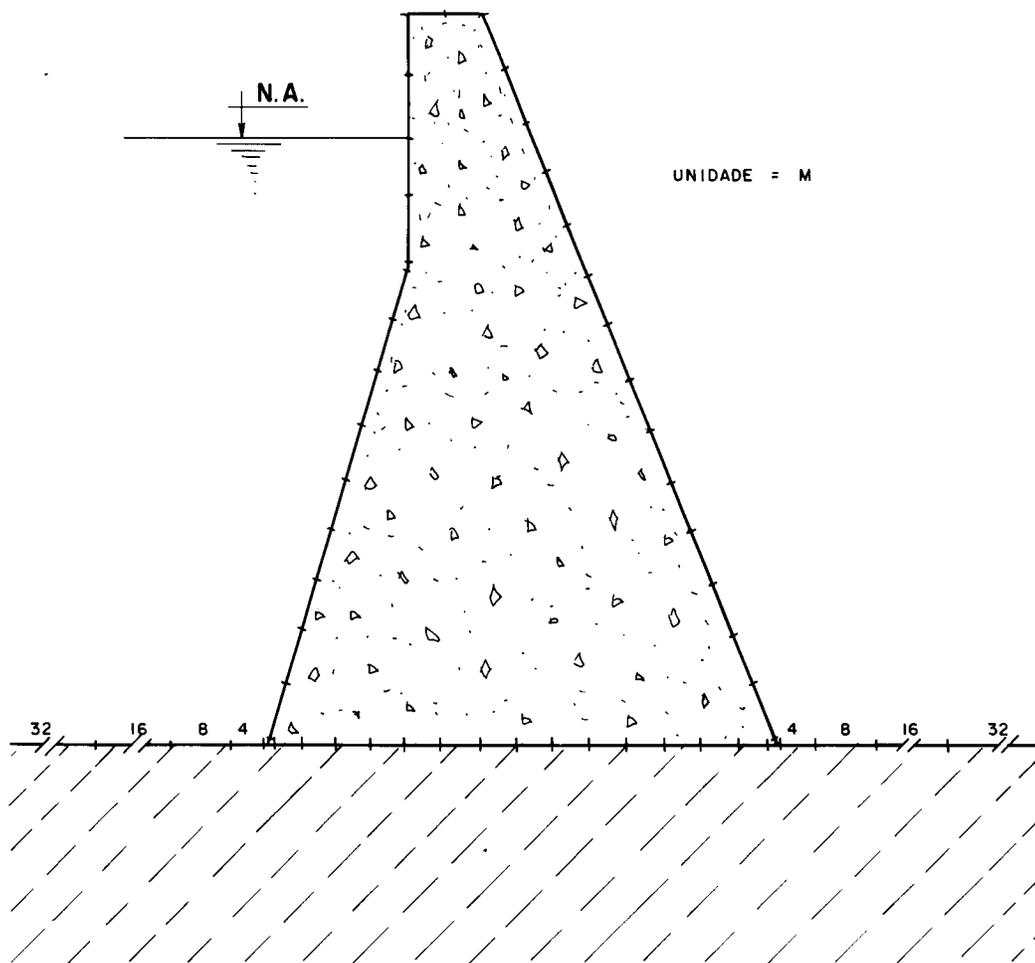


FIG. 7.5

Considerando-se, na resolução do problema, essa discretização, resultam as tensões no quadro IV. O cálculo foi realizado adotando-se também o estado plano de deformação.

QUADRO IV

Ponto	Tensões (MPa)		
	σ_x	σ_z	τ_{xz}
1	-0,488	-0,793	0,218
2	-0,475	-0,772	0,229
3	-0,458	-0,753	0,240
4	-0,438	-0,734	0,252
5	-0,426	-0,587	0,297
6	-0,423	-0,578	0,312
7	-0,416	-0,371	0,324
8	-0,406	-0,564	0,332
9	-0,394	-0,557	0,338
10	-0,381	-0,550	0,341
11	-0,367	-0,542	0,342

7.3 - Análise da estabilidade de uma barragem

Faz-se aqui um estudo da estabilidade de um vertedouro (fig. 7.6), quanto ao deslizamento. Essa seção transversal é a seção de um trecho da barragem de Água Vermelha, localizada no rio Grande, Estado de São Paulo.

O meio no qual se assenta essa seção da barragem tem formação estruturalmente complexa com pobres características geológicas e mecânicas, mas que permite dividi-lo em três sub-regiões. Conforme a identificação dada às sub-regiões na fig. 7.6, pode-se dizer que predomina essencialmente: complexo basáltico na sub-região III, basalto vesicular e brecha basáltica na sub-região II, e rocha na sub-região I. Ao longo da horizontal de cota 305m há freqüentemente areia e silte, que devido à sua baixa resistência ao cisalhamento define uma região em que poderá ocorrer deslizamento.

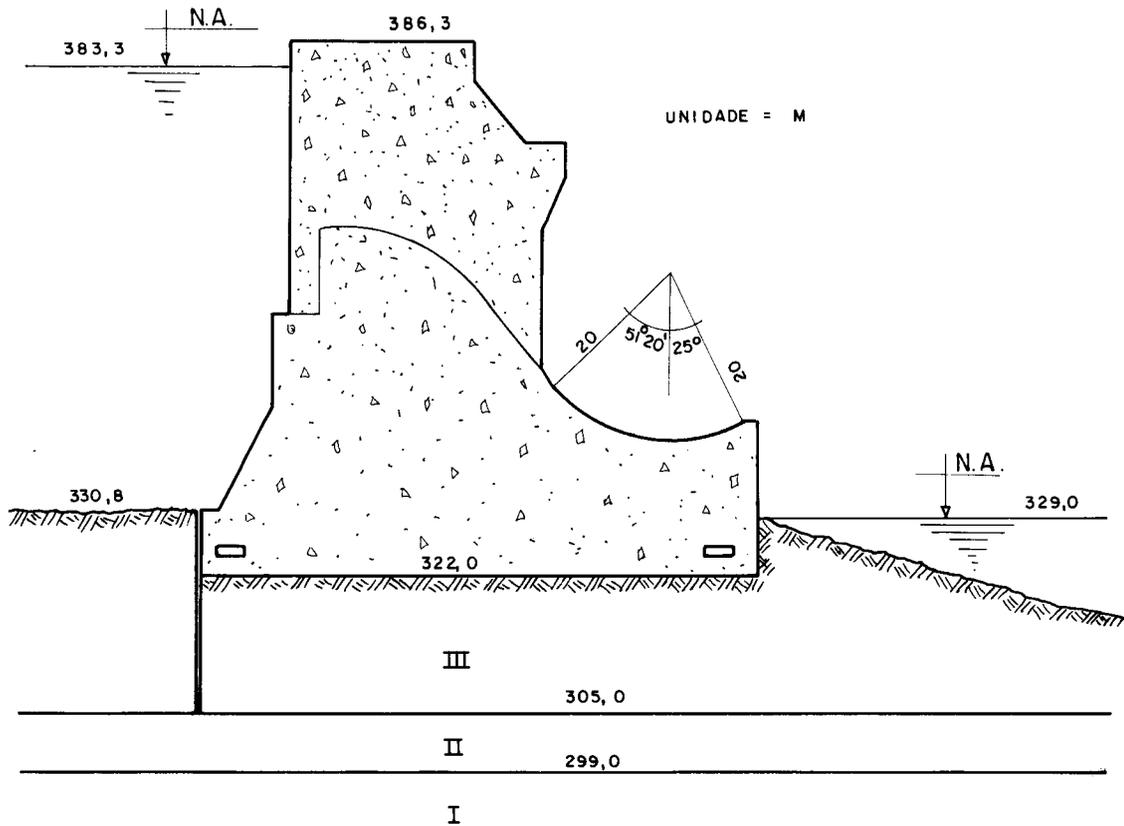


FIG. 7.6

A presença de areia e de silte entre as sub-regiões II e III define uma descontinuidade, a qual devido às suas características de formação é tratada com abertura nula. Usa-se o critério de Mohr-Coulomb para verificar se as tensões de cálculo nos pontos da descontinuidade não são maiores em módulo que as fixadas por esse critério. No caso de serem, as correções serão feitas segundo as recomendações dadas na seção 5.3.

No modelo matemático usado para a resolução do problema, cada um dos três meios são idealizados como elásticos e isótopos, enquanto que para a descontinuidade um comportamento elasto-plástico é suposto.

Os carregamentos levados em consideração são: peso próprio da estrutura de concreto; a pressão hidrostática na face vertical esquerda, do vertedouro; subpressão d'á

gua na estrutura de concreto segundo as recomendações da Bureau of Reclamations. Aos efeitos desses carregamentos sobre o meio no qual está assentado o vertedouro foram superpostas as tensões devido ao peso próprio desse meio (tensões tectônicas).

A subpressão é determinada considerando-se a presença de dois drenos (fig.7.6). Com isso, a linha piezométrica de subpressão é considerada estendendo-se linearmente, desde o nível d'água de montante, na respectiva extremidade, até o correspondente dreno, onde o nível piezométrico é adotado igual ao nível d'água de jusante acrescido de um terço da diferença entre os níveis d'água de montante e de jusante. Daí varia linearmente até o dreno de jusante, onde o nível piezométrico é adotado igual ao nível d'água da respectiva extremidade, cujo valor permanece constante até essa extremidade.

Os valores médios dos módulos de elasticidade, adotados para resolução do problema, são: 10GPa para o complexo basáltico, 7GPa para o basalto vesicular e a brecha basáltica, e 15GPa para a rocha. Na descontinuidade, o valor médio do ângulo de atrito é 28° e o valor da coesão é nulo, pois o valor médio desse parâmetro é muito pequeno (menor que 0,1MPa).

Adotou-se para o meio no qual se assenta o vertedouro um único coeficiente de Poisson, igual a 0,3; o coeficiente Poisson para o concreto adotado é o usual, isto é, 0,2. Os pesos específicos são:

- a) $10,0\text{KN/m}^3$, para a água;
- b) $12,0\text{KN/m}^3$, para o basalto da sub-região III;
- c) $22,0\text{KN/m}^3$, para o concreto.

Como se objetiva analisar a estabilidade do vertedouro quanto ao deslizamento, ao longo do plano definido pela cota 305m, é aceitável admitir que a sub-região I se-

ja constituída do mesmo material da subregião II (veja-se que as tensões devido ao peso próprio do meio são consideradas como tectônicas). Não será, assim, considerada a presença da rocha e com isso se diminui o número de sub-regiões consideradas na resolução do problema.

A figura a seguir mostra a discretização usada na resolução do problema (veja-se que a sub-região I foi limitada por um contorno fictício). Ainda, nesta figura, são representados os carregamentos proveniente da ação d'água, isto é, subpressão e pressão d'água na face esquerda do vertedouro.

Os diagramas na fig. 7.8 representam as distribuições das tensões normais e cisalhantes ao longo da descontinuidade, obtidas para a situação mostrada na figura anterior. As notações usadas para as tensões são: σ , tensão normal; τ , tensão cisalhante; τ_u , tensão cisalhante última.

A condição $\tau > \tau_u$ é satisfeita na maior parte da descontinuidade. O trecho \overline{AB} (fig. 7.8) sofre plastificação devido às tensões normais nessa região serem de baixa intensidade. A margem de segurança pode ser estimada comparando as curvas τ_u e τ ; por exemplo, a relação τ_u/τ varia de 1,0; na zona plastificada, a 4,3, no ponto distante 20m, aproximadamente, da extremidade esquerda da descontinuidade.

Considerando-se agora a sub-região I (fig. 7.6) e também um contorno fictício, conforme se mostra na fig. 7.9, serão determinados novamente os esforços e deslocamentos no vertedouro da barragem. O carregamento a ser considerado atuando na estrutura é o mesmo usado na resolução do problema anterior, a menos de aproximação. A discretização usada nos contornos dos quatro domínios está mostrada na figura 7.9.

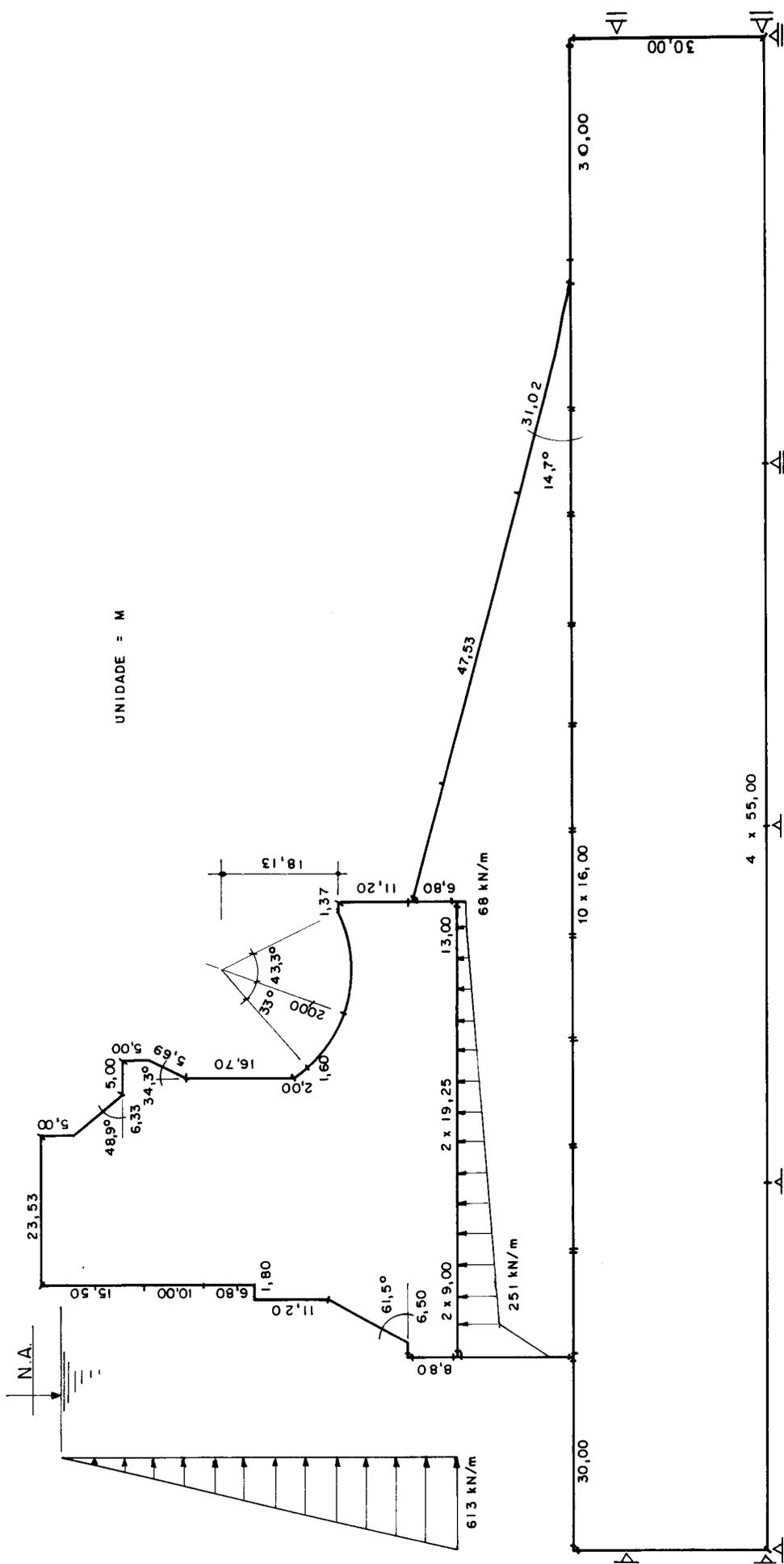


FIG. 7.7

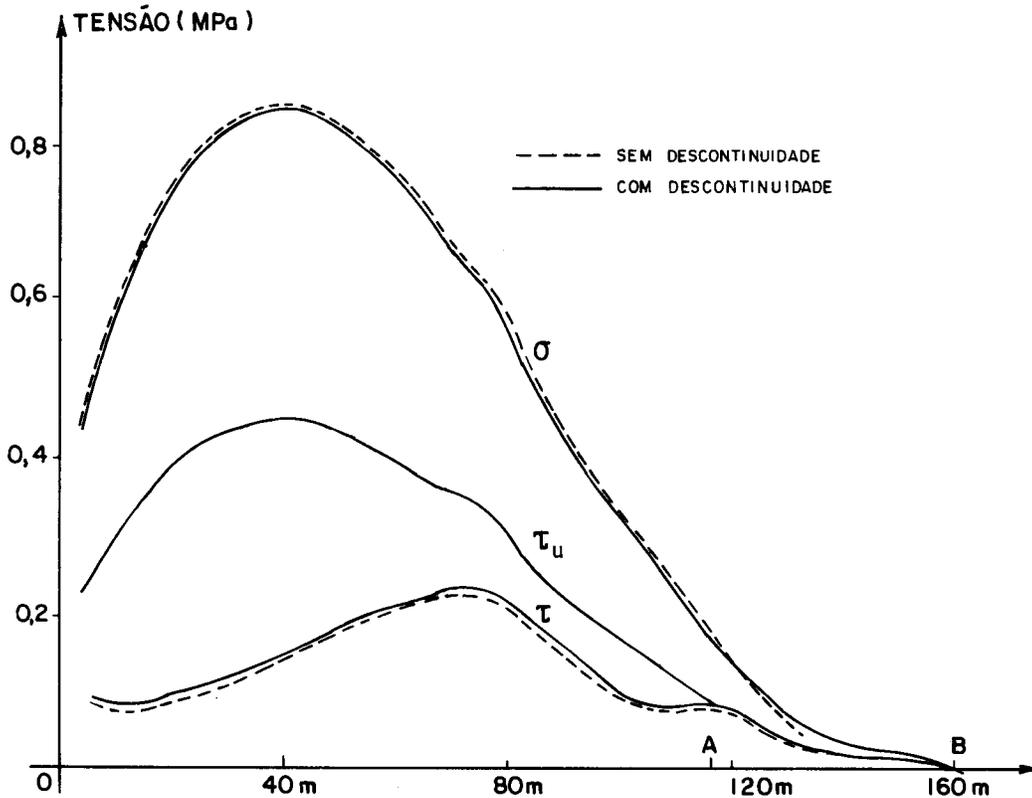


FIG. 7.8

Os resultados obtidos, baseado nesta figura, foram praticamente iguais aos obtidos com base na fig. 7.7. Conclui-se, assim, mais uma vez que não há necessidade de se discretizar o contorno do corpo num número elevado de segmentos.

Com o ângulo de atrito igual a 28° , a região plastificada ao longo da descontinuidade é de aproximadamente 44m, a contar de sua extremidade direita. Com ângulo de atrito de 20° e 15° , a região plastificada passa para aproximadamente 100m e 124m, respectivamente. Adotando-se um ângulo de atrito de 12° , não é mais possível o vertedouro ficar em equilíbrio.

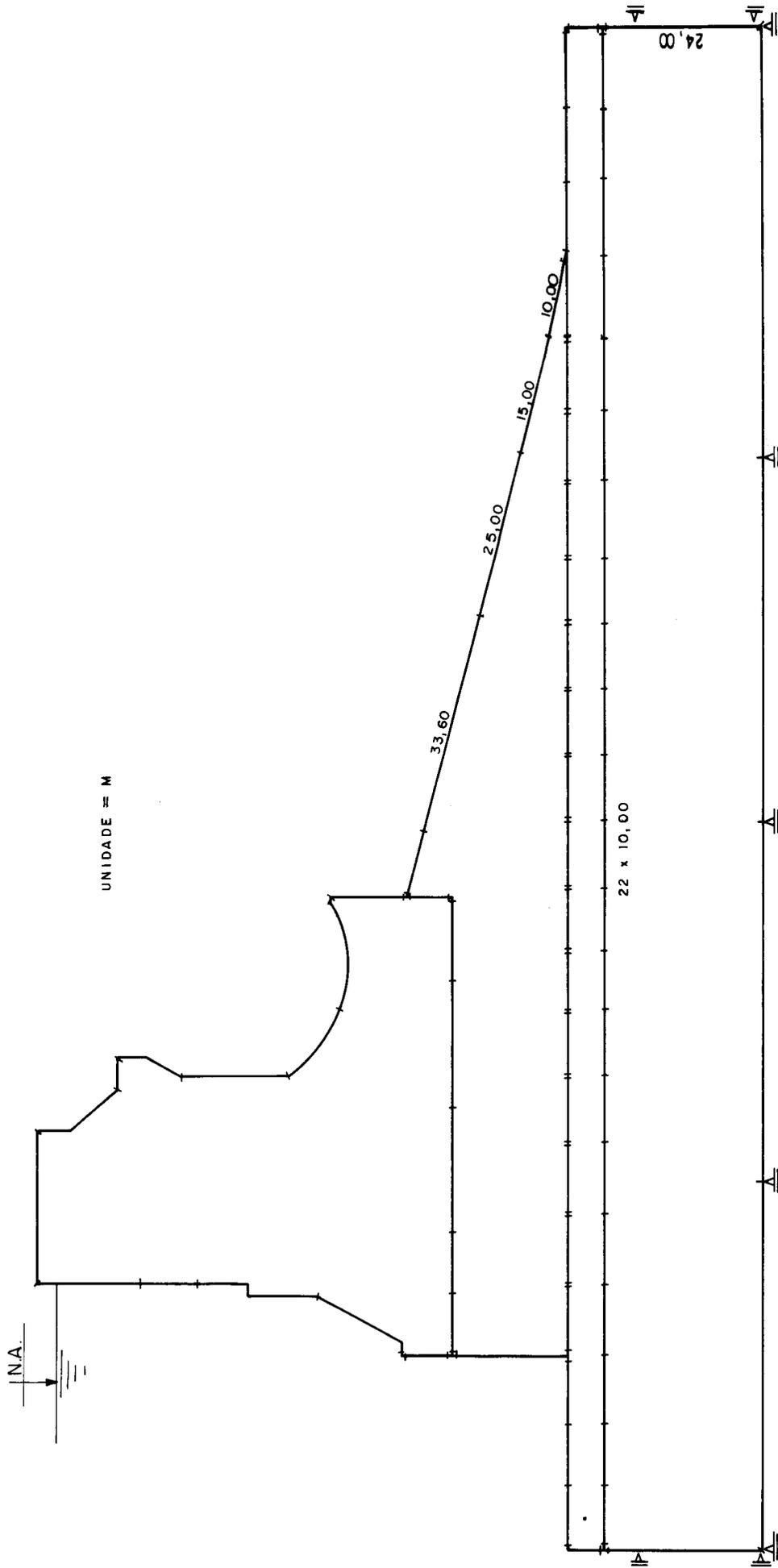


FIG. 7.9

7.4 - Influência da descontinuidade numa escavação

Num meio submetido a tensões constante, $\sigma_x = -2,5\text{MPa}$, $\sigma_y = -5,0\text{MPa}$ e $\tau_{xy} = 0,0$, se faz uma escavação de $10\text{m} \times 5\text{m}$, próxima da qual se supõe uma descontinuidade (fig. 7.10).

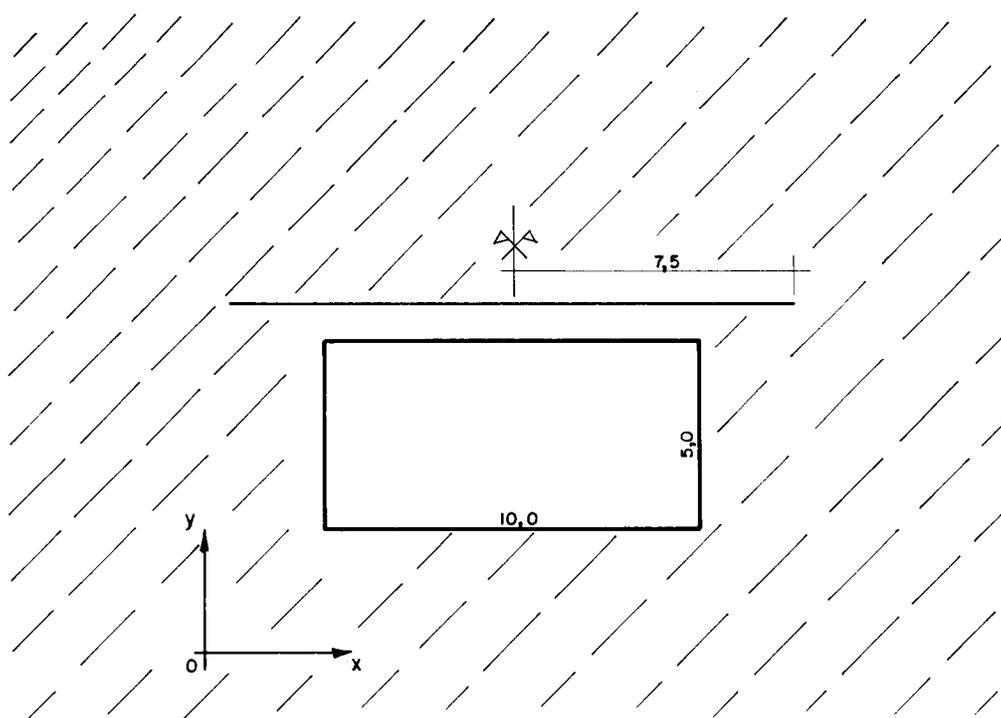


FIG. 7. 10

Neste problema se modela a execução da escavação pelo relaxamento incremental das forças de superfície no seu contorno. Supõe-se que o módulo de elasticidade do material é $10,0\text{GPa}$ e que o coeficiente de Poisson é $0,2$. Os parâmetros que definem a reta de Coulomb na descontinuidade são: 30° (ângulo de atrito) e 100KN/m^2 (coesão).

Foram tomados segmentos de $0,5\text{m}$ no contorno da escavação e de $2,5\text{m}$ na descontinuidade, conforme mostra a fig. 7.11. O processo de escavação foi simulado pelo relaxamento das forças de superfícies do seu valor inicial para zero, em dez decrementos. O estado plano de deformação foi o considerado na resolução do problema.

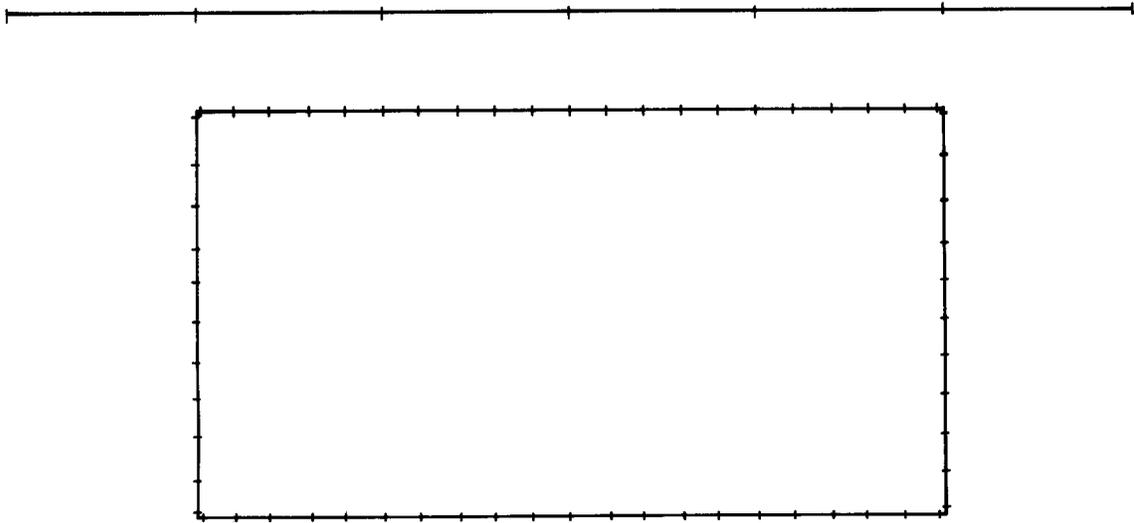


FIG. 7.11

O comportamento do estado de tensão de um ponto da descontinuidade no quinto elemento, contado da esquerda para a direita, de um incremento para o próximo é mostrado na fig. 7.12. Antes da escavação e sem a descontinuidade as tensões τ_{xy} e σ_y valem 0,0 e -5,0MPa, respectivamente. Durante o primeiro incremento (primeiro passo), a tensão σ_y em módulo é reduzida e a tensão τ_{xy} é aumentada. Essa tendência continua até ao passo oito, quando a condição de escoamento é atingida e ocorre escorregamento. A partir desse passo o material encontra-se na fase plástica.

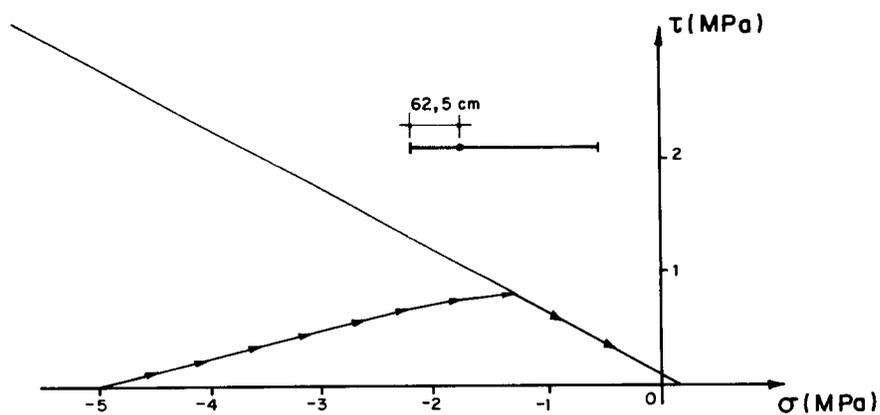


FIG. 7.12

Na figura abaixo, mostram-se os valores de σ_x ao longo da superfície superior da escavação, com e sem a presença da descontinuidade. Como a função representativa de σ_x é simétrica em relação ao eixo de simetria vertical da escavação, fez-se o gráfico apenas em uma metade, no caso, o lado direito, com origem no ponto de simetria.

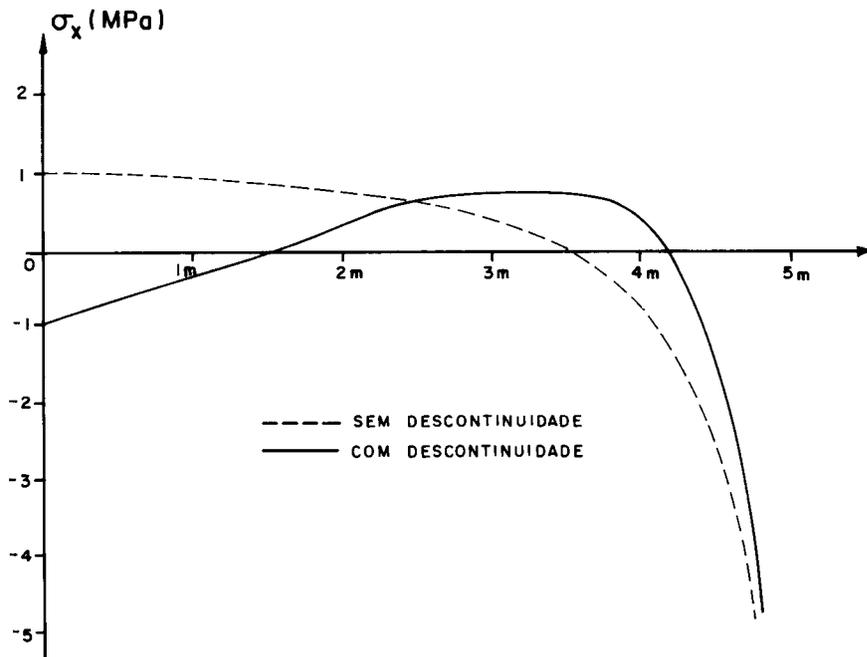


FIG. 7.13

Esses resultados, conforme já se mencionou, foram obtidos pelo relaxamento das forças de superfície, no contorno da escavação, em dez passos. Durante os sete primeiros passos, todas as tensões na descontinuidade ficaram na região segura definida pelo critério de Mohr-Coulomb. Dos três últimos passos, apenas no último surgiu tensões de tração σ_y , na descontinuidade. Os resultados finais indicaram que os pontos dos seus dois elementos intermediários (fig.7.12) estão submetidos a tensões de tração σ_y e, por isso, as superfícies da descontinuidade tendem, nesses locais a se afastarem. No caso da coesão na descontinuidade

ser nula, ocorre separação entre essas superfícies.

Conforme a fig. 7.13, a presença da descontinuidade altera bastante os σ_x obtidos sem sua presença. A influência da descontinuidade deve, nesse caso, ser considerada no cálculo da estrutura, principalmente porque o material tem baixa resistência à tração. É claro que em alguns casos essa influência, por ser pequena, é desprezada.

VIII - ANÁLISE TRIDIMENSIONAL

8.1 - Introdução

Apresentar-se-ão, nesta parte do trabalho, as diretrizes para o tratamento de problemas tridimensionais com e sem descontinuidades. Em geral, não serão deduzidas as fórmulas a serem apresentadas, pois se supõe que as correspondentes já deduzidas no espaço bidimensional são suficientes para o entendimento.

Fãr-se-ão, inicialmente, considerações a respeito de descontinuidades em corpos, tratados na sua real dimensão. Apõs essas considerações, serão apresentadas as fórmulas empregadas na resolução de um problema tridimensional, classificando-as em básicas, aqueles que são as ferramentas básicas para a formulação do problema, e em integrais, aquelas que possibilitam a análise do corpo.

A modelação da descontinuidade no espaço tridimensional é conveniente que seja feita por meio de uma distribuição de dipolos ao longo da superfície representativa da descontinuidade. Os elementos usados na aproximação da distribuição de dipolos, assim como os usados na aproximação da descontinuidade, são bidimensionais.

No final deste capítulo se darão recomendações para programação, que são praticamente uma complementação das apresentadas no capítulo seis para os problemas bidimensionais.

8.2 - Considerações gerais

O tratamento de um corpo no espaço bidimensional, conforme os conceitos de estados planos (estado plano de tensão, estado plano de deformação e estado plano completo de deformação), só é possível em determinados tipos de estruturas. Esses conceitos não fornecem bons resultados quando aplicados em estruturas curvas, por exemplo, barragem com eixo curvo, e em estruturas com seções transversais não constante. Esses tipos de estruturas devem ser analisados no verdadeiro espaço em que elas se situam.

Elementos triangulares e retangulares são, normalmente, os usados para aproximar os contornos dos corpos. Empregando-se, por exemplo, elementos triangulares, o contorno do corpo mostrado na fig. 8.1 pode ser representado por doze elementos, dois em cada face.

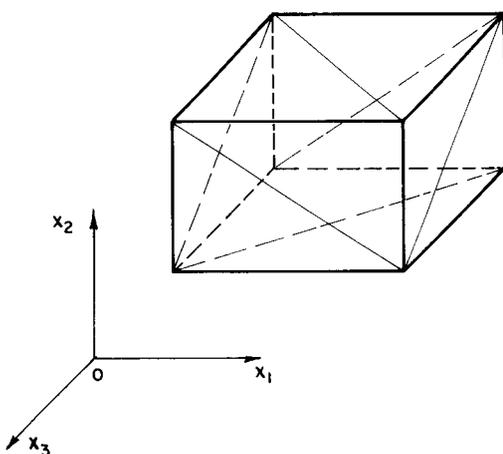


FIG 8.1

As funções deslocamento e força de superfície são, em geral, aproximadas por função constante ou por função do primeiro grau (função linear). No caso do elemento usado ser o triangular, toma-se o centro de gravidade do triângulo (fig.8.2a) para nó se a função for constante e tomam-se os vértices do triângulo (fig.8.2b) para nós se a função for linear.

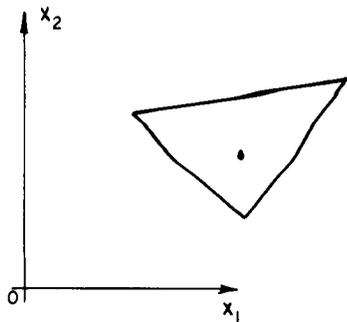


FIG. 8.2a

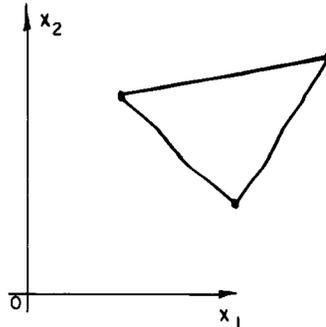


FIG. 8.2b

A descontinuidade \bar{e} é representada por uma superfície e, por isso, os elementos usados na discretização são bidimensionais, em geral, triangulares e quadrangulares. A aproximação da força fictícia, distribuição de bipolos, é recomendada que seja feita por função constante ou linear.

Na fig. 8.3 se mostra um muro de arrimo com a face inclinada não totalmente em contato com o solo. Pode-se, assim, observar que além das dificuldades decorrentes do tratamento da estrutura no espaço, existe ainda a ser definida a descontinuidade. Onde começa e termina a descontinuidade, se a abertura não se afasta muito da abertura média, são perguntas não muito fáceis de se responder em obras que requerem tratamento tridimensional.

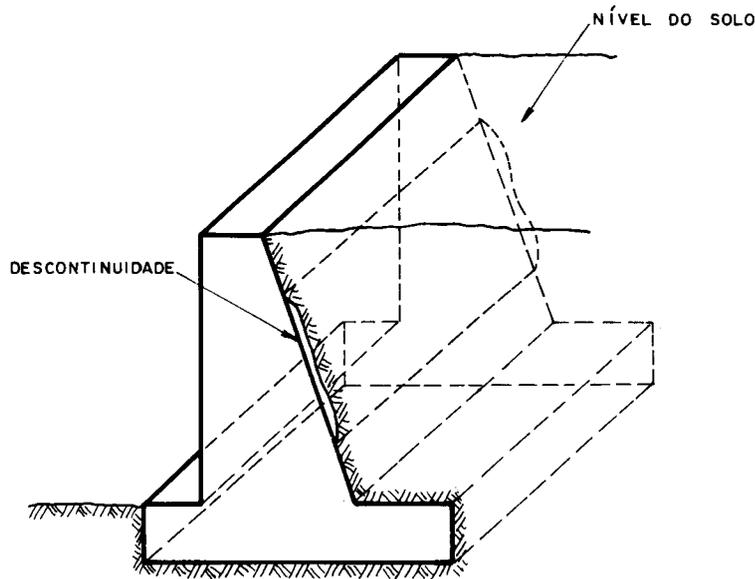


FIG. 8.3

A análise da presença da descontinuidade é usualmente realizada quando a superfície que a caracteriza é plana. É o caso da estrutura mostrada na fig. 8.4, onde nenhuma das dimensões é muito menor do que as demais. Análise tridimensional deveria ser comum em barragens, pois geralmente a seção transversal não é constante. Nesse caso, são, em geral, feitas várias análises, considerando-se os diversos trechos de seções constantes.

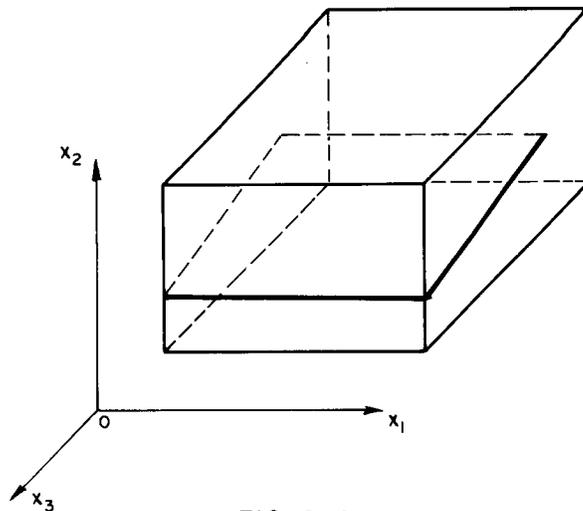


FIG. 8.4

Seguindo o procedimento usado na análise bidimensional, inicialmente são determinados os esforços e deslocamentos no corpo sem descontinuidade. A seguir, corrigem-se os resultados obtidos modelando-se a descontinuidade por meio de uma distribuição de forças fictícias. Vale ressaltar que os esforços e deslocamentos no corpo sem descontinuidade são obtidos considerando-se o comportamento elástico-linear para o material do corpo.

As condições impostas pela descontinuidade são tensões normais e tangentes à sua superfície nulas, no caso de abertura não nula, ou que satisfaçam determinado critério de resistência, no caso de abertura nula. Recomenda-se, para esse último caso, os critérios de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager (veja-se, por exemplo, OWEN & HINTON, 1980).

8.3 - Formulação do problema

8.3.1 - Fórmulas básicas

As fórmulas de deslocamento e tensão, no espaço tridimensional, devido à aplicação da força unitária num meio infinito, homogêneo e isotrópico, já deduzidas no capítulo dois, são abaixo reescritas. O parâmetro r será o usado aqui em substituição a R , adotado nesse capítulo deste trabalho.

$$u_{ij}^*(q, s) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \left[(3-4\nu) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (2.17) - \text{repetida}$$

$$\sigma_{ij}^*(q, s) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[(1-2\nu) (\delta_{ij} r_{,l} - \delta_{il} r_{,j} - \delta_{jl} r_{,i}) + 3r_{,i} r_{,j} r_{,l} \right] \quad (2.26) - \text{repetida}$$

$$p_{li}^*(q, s) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \left[(1-2\nu) \delta_{il} + 3r_{,i} r_{,l} \right] r_{,n}^{-(1-2\nu)} \cdot (r_{,l} n_i - r_{,i} n_l) \right\} \quad (2.28) - \text{repetida}$$

Os efeitos da descontinuidade, conforme conceituação apresentada na seção 2.4, são determinados por meio de uma distribuição de forças fictícias ao longo da descontinuidade, de modo que as condições na descontinuidade sejam satisfeitas. A fig. 8.5 mostra duas forças de intensidades iguais e sentidos opostos (bipolo), atuando em pontos opostos das superfícies da descontinuidade. Conhecendo-se os seus efeitos é possível obter uma distribuição de bipolos para se corrigirem os esforços e deslocamentos, calculados sem a presença da descontinuidade.

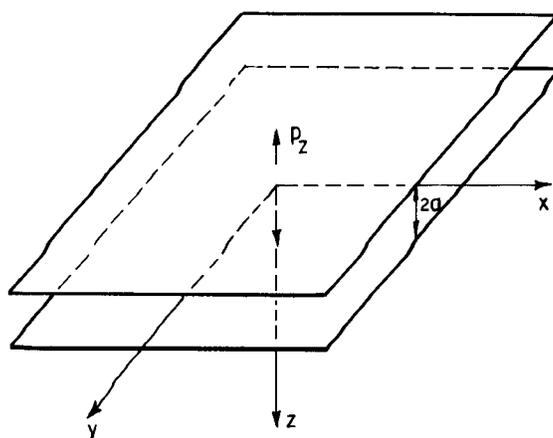


FIG. 8.5

Conforme as expressões 2.31a e 2.31b, é necessário calcular as derivadas de $u_{ij}^*(q,s)$ e $\sigma_{ij}^*(q,s)$ em relação a uma coordenada genérica $x_m(q)$ para se obter os efeitos do bipolo. Derivando-se 2.17 e 2.26 resultam:

$$\frac{\partial}{\partial x_m(q)} (u_{ij}^*(q,s)) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr^2} \left[-(3-4\nu)r_{,m} \delta_{lk} - 3r_{,m}^r r_{,l}^r r_{,k} + \right. \\ \left. + r_{,l} \delta_{mk} + r_{,k} \delta_{ml} \right] \quad (8.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_m(q)} (\sigma_{ij}^*(q,s)) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^3} \left[-2(1-2\nu)r_{,m} (\delta_{ij} r_{,l} + \right. \\ - \delta_{il} r_{,j} - \delta_{jl} r_{,i}) + (1-2\nu) (\delta_{ij} \delta_{ml} - \delta_{ij} r_{,m}^r r_{,l} + \\ - \delta_{il} \delta_{mj} + \delta_{il} r_{,m}^r r_{,j} - \delta_{jl} \delta_{mi} + \delta_{jl} r_{,m}^r r_{,i}) - 3r_{,j}^r r_{,l} \delta_{mi} + \\ \left. - 3r_{,i}^r r_{,l} \delta_{mj} - 3r_{,i}^r r_{,j} \delta_{ml} + 15r_{,i}^r r_{,j}^r r_{,l}^r r_{,m} \right] \quad (8.1b)$$

Chamando-se o bipolo, referente à fig. 8.5, de q_z , pode-se escrever que

$$\bar{\sigma}_{ij}(q,s) = q_z \frac{\partial}{\partial x_3(q)} (\sigma_{3ij}^*(q,s)) \quad e \quad (8.2a)$$

$$\bar{u}_i(q,s) = q_z \frac{\partial}{\partial x_3(q)} (u_{3i}^*(q,s)). \quad (8.2b)$$

O bipolo q_z é o principal responsável para que a condição relativa a componente σ_z seja satisfeita. Similarmente pode-se definir bipoles relativos às componentes τ_{zx} e τ_{zy} . É possível, assim, efetuarem-se as correções nos esforços e deslocamentos obtidos num corpo sem descontinuidade.

No espaço tridimensional, o conceito de quadripolo empregado na modelação da descontinuidade não tem muito significado. Conforme se viu no subitem 2.4.2, o bipolo normal à direção do bipolo q_z é devido à deformação que surge na direção da normal ao eixo Z. Aqui, como ocorre deformação nas direções dos eixos X e Y, proveniente do bipolo q_z , são necessários, além de q_z , outros dois bipoles e, por isso, não se justifica o emprego do quadripolo. Por outro lado, cada uma das componentes τ_{zx} e τ_{zy} exigem, apenas, dois bipoles. O uso de bipoles em problemas tridimensionais, diante dessa situação, representa uma boa solução.

8.3.2 - Fórmulas integrais

Utilizando-se os parâmetros Γ e Ω para representarem superfície e volume, respectivamente, as fórmulas que fornecem as componentes de deslocamento e tensão deduzidas no capítulo três continuam válidas. São elas:

$$u_\ell(q) = - \int_{\Gamma} p_{\ell k}^*(q,S) u_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} u_{\ell k}^*(q,S) p_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Omega} u_{\ell k}^*(q,s) b_k(s) d\Omega(s) \quad (8.3a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(q) = & - \int_{\Gamma} S_{ijk}(q,S) u_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} D_{ijk}(q,S) p_k(S) d\Gamma(S) + \\ & + \int_{\Omega} D_{ijk}(q,s) b_k(s) d\Omega(s) \end{aligned} \quad (8.3b)$$

Os tensores $S_{ijk}(q,S)$ e $D_{ijk}(q,S)$ são agora dados pelas fórmulas abaixo, cujas deduções devem ser feitas seguindo o mesmo caminho usado no espaço bidimensional. A expressão que define $D_{ijk}(q,S)$ deve ser empregada para $D_{ijk}(q,s)$, devendo-se apenas considerar que o ponto s é interno do corpo. Quanto a $u_{\ell k}^*(q,S)$ e $p_{\ell k}^*(q,S)$ são as soluções fundamentais tridimensionais dadas em 2.17 e 2.28.

$$\begin{aligned} S_{ijk}(q,S) = & \frac{2G}{8\pi(1-\nu)r^3} \left\{ 3r_{,n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij}^{r,k} + \nu(\delta_{ik}^{r,j} + \delta_{jk}^{r,i}) \right. \right. \\ & \left. \left. - 5r_{,i}^{r,j}{}^{r,k} \right] + 3\nu(n_i^{r,j}{}^{r,k} + n_j^{r,i}{}^{r,k}) + \right. \\ & \left. + (1-2\nu)(3n_k^{r,i}{}^{r,j} + n_j^{r,i} \delta_{ik} + n_i^{r,j} \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (8.4a)$$

$$\begin{aligned} D_{ijk}(q,S) = & \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik}^{r,j} + \delta_{kj}^{r,i} - \delta_{ij}^{r,k}) + \right. \\ & \left. + 3r_{,i}^{r,j}{}^{r,k} \right] \end{aligned} \quad (8.4b)$$

A equação de contorno deduzida na seção 4.2, para o espaço bidimensional, escrita a seguir, também pode ser empregada no espaço tridimensional (fórmula 8.5). Os parâmetros envolvidos nesta equação devem pertencer agora ao novo espaço, isto é, Γ é a superfície do sólido e Ω é o seu volume.

$$c_{\ell k}(Q)u_k(Q) = - \int_{\Gamma} p_{\ell k}^*(Q, S)u_k(S)d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} u_{\ell k}^*(Q, S)p_k(S)d\Gamma(S) + \int_{\Omega} u_{\ell k}^*(Q, s)b_k(s)d\Omega(s) \quad (8.5)$$

Discretizando-se essa equação e escrevendo-a na forma matricial resulta

$$\underline{c}(Q)\underline{u}(Q) = - \sum_{j=1}^{j=J} \int_{\Gamma_j} \underline{p}^*(Q, S)\underline{u}(S)d\Gamma(S) + \sum_{j=1}^{j=J} \int_{\Gamma_j} \underline{u}^*(Q, S)\underline{p}(S)d\Gamma(S) + \sum_{j=1}^{j=J} \int_{\Gamma_j} \underline{b}^*(Q, S)\underline{b}d\Gamma(S), \quad (8.6)$$

onde

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad (8.7a)$$

$$\underline{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}, \quad (8.7b)$$

$$\underline{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} e \quad (8.7c)$$

$$\underline{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix}. \quad (8.7d)$$

$$\tilde{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \quad (8.7e)$$

$$\tilde{b}^* = \begin{bmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* & b_{13}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* & b_{23}^* \\ b_{31}^* & b_{32}^* & b_{33}^* \end{bmatrix} \quad (8.7f)$$

Os elementos de $\tilde{c}(Q)$ apresentam, em geral, dificuldades para determiná-los explicitamente. No espaço tridimensional, isso ocorre porque os ângulos sólidos em cujos pontos comuns se localizam os Q praticamente inviabilizam o cálculo da integral na fórmula 4.28 (veja-se que agora Γ é uma superfície). Para contornar esse problema, usa-se o conceito de deslocamento de corpo rígido, que aplicado na equação $\tilde{H}\tilde{U} = \tilde{G}\tilde{P}$ dá origem à fórmula 8.8. Dessa forma é possível se determinar os elementos de $\tilde{c}(Q)$, pois desta fórmula se conclui: o somatório dos elementos de qualquer linha da matriz \tilde{H} é nula, em corpos finitos. Em corpos infinitos esse somatório vale um.

$$\tilde{H}\tilde{U} = \tilde{0} \quad (8.8)$$

Nos corpos com descontinuidade, as componentes de deslocamento e de tensão num ponto genérico q , por afinidade às fórmulas 5.11 e 5.12, são dadas por

$$u_{\ell}(q) = - \int_{\Gamma} p_{\ell k}^*(q, S) u_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} u_{\ell k}^*(q, S) p_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Omega} u_{\ell k}^*(q, s) b_k(s) d\Omega(s) + \int_{\bar{\Gamma}} u_{\ell k}^{**}(q, \bar{S}) q_k(\bar{S}) d\Gamma(\bar{S}) \quad e \quad (8.9a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(q) = & - \int_{\Gamma} S_{ijk}(q, S) u_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} D_{ijk}(q, S) p_k(S) d\Gamma(S) + \\ & + \int_{\Omega} D_{ijk}(q, s) b_k(s) d\Omega(s) + \int_{\bar{\Gamma}} \sigma_{ijk}^{**}(q, \bar{S}) q_k(\bar{S}) d\Gamma(\bar{S}) . \end{aligned} \quad (8.9b)$$

As funções $u_k^{**}(q, \bar{S})$ e $\sigma_{ijk}^{**}(q, \bar{S})$ são os efeitos provenientes de um bipolo de intensidade unitária. Para o emprego de 8.9a e 8.9b em pontos de contorno, deve-se efetuar um estudo semelhante ao da seção 5.3.

8.4 - Recomendações para programação

As sugestões apresentadas no capítulo seis são aqui aproveitadas em quase sua totalidade. Deve-se considerar agora que foi acrescido uma dimensão no espaço de trabalho e, com isso, aumenta uma componente de deslocamento e três componentes de tensão, em cada ponto. Ficam, então, as matrizes \underline{H} e \underline{G} com um número de linhas igual a três vezes a soma do número de nós e do número de pontos internos. No caso das matrizes $\bar{\underline{H}}$ e $\bar{\underline{G}}$, o número de linhas é igual a seis vezes o número de pontos em que se pretende calcular as tensões. O número de colunas em ambos os casos é três vezes o número de nós.

O procedimento para montagem das matrizes coeficientes deve ser o mesmo usado no capítulo seis, assim como o recurso usado na determinação do vetor \underline{X} . Os corpos com sub-regiões deverão ser analisados conforme sugestões apresentadas na seção 6.3.

Os termos integrais que levam em consideração a descontinuidade, dão origem a um vetor \underline{Q} (veja-se item 6.4) com um número de elementos três vezes o número de nós tomados na descontinuidade. As matrizes coeficientes desse vetor (vejam-se as expressões 6.23a e 6.23b) têm, é claro, número de colunas igual ao número de elementos do vetor \underline{Q} .

Os números de linhas são iguais, por exemplo, aos números das matrizes \tilde{H} e \tilde{H}' .

Em corpos homogêneos, a determinação dos parâmetros incógnitos de contorno, a partir do sistema de equação, deve ser feita por um dos seguintes processos: Gauss, Gauss-Jordan e Cholesky. Quanto aos corpos com sub-regiões, recomenda-se o processo desenvolvido por Crotty, 1982.

IX - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Do estudo feito neste trabalho se conclui que uma grande quantidade de problemas práticos podem ser resolvidos modelando-os de tal forma a pertencer à classe de problemas conhecido como problemas de contorno. A equação diferencial parcial que governa o problema, para ser resolvida, deve estar sujeita a certas condições que descreve o que acontece no contorno do corpo. Matematicamente se um corpo é tratado no espaço tridimensional, o contorno é uma superfície e uma linha se o corpo é considerado no espaço bidimensional. Com isso, os elementos usados na discretização do contorno são bidimensionais (problemas tridimensionais) e unidimensionais (problemas bidimensionais). O domínio do corpo só é discretizado quando um dos termos integrais correspondente à tensão inicial e a força de massa, ou ambos, não puder ser transformado numa integral de contorno.

No Método dos Elementos de Contorno, os parâmetros incógnitos são relativos ao contorno do corpo. O emprego das fórmulas de deslocamento e tensão, após se determinar as incógnitas são específicas para cada ponto do corpo, isto é, não se obtêm deslocamentos e nem tensões em pontos onde não interessa. As incógnitas envolvidas na resolução de um problema são os deslocamentos e as forças de superfície, e, por isso, a técnica de cálculo denomina-se mista. Nesse método a aproximação é feita tanto na geometria do

corpo (contorno) como nos parâmetros de contorno, sendo a linear a empregada neste trabalho.

As soluções numéricas são atualmente as mais empregadas e são, basicamente, obtidas pelo uso de pontos do domínio (Método das Diferenças Finitas), pela discretização do domínio (Método dos Elementos Finitos) e pela aproximação do contorno (Método dos Elementos de Contorno).

Quanto às soluções analíticas só é possível obtê-las em alguns tipos de problemas. O corpo, para isso, deve possuir geometria simples e condições de contorno fáceis de aplicá-las, além de ser homogêneo. Na prática, porém, as soluções analíticas são difíceis de serem encontradas, mesmo quando a equação diferencial parcial que governa o problema é linear. Em geral, o corpo não é homogêneo, a geometria é irregular e as condições impostas são difíceis de se descrever matematicamente.

No Método das Diferenças Finitas, as equações que governam um problema, por exemplo, $\nabla^2 u = 0$ (equação de Laplace), são usadas nas suas formas originais. Definem-se, nesse método, as derivadas parciais por meio de pontos do domínio no problema em análise, sendo que em alguns casos usam-se pontos fora do domínio. A forma geométrica de um contorno é difícil de se representar, assim como é difícil de se aplicar as condições impostas, pois exigem malhas densas. A matriz global resultante é do tipo diagonal.

Empregando-se o conceito de resíduos ponderados, pode-se definir e estabelecer comparações entre os três métodos numéricos usuais. O uso da relação entre resíduos e erros de contorno sem integração por partes, utilizando-se pontos de domínio, caracteriza o Método das Diferenças Finitas. No Método dos Elementos Finitos se faz uma integração por partes e, com isso, não se trabalha com a equação integral na forma original. Nesse método não há, em geral, dificuldades para representação de contornos irregulares e nem para aplicação das condições de contorno. A sua matriz global é do tipo banda. Já no Método dos Elementos

de Contorno a matriz global é cheia e para defini-lo faz-se uma segunda integração por partes na equação básica dos resíduos ponderados.

O Método dos Elementos de Contorno se desenvolveu em duas formulações diferentes, uma mais matemática e a outra mais física. Nessa última formulação, obtêm-se, primeiro, parâmetros que satisfazem as condições de contorno especificadas e, então, calculam-se os parâmetros restantes em termos dessas soluções. Por exigir normalmente um passo intermediário na resolução do problema, esse procedimento é chamado Método dos Elementos de Contorno Indireto ou, simplesmente, Método Indireto. Na primeira formulação, certos teoremas integrais são usados para eliminar o passo intermediário, criando, desse modo, um sistema de equações relacionando diretamente as variáveis de contorno. Por isso, esse procedimento é chamado de Método dos Elementos de Contorno Direto ou, simplesmente, Método Direto.

A qualidade dos resultados obtidos depende de uma adequada aproximação do contorno. Conforme se constatou no presente trabalho, a quantidade de elementos usados na aproximação não é grande relativamente a que se usaria no Método dos Elementos Finitos. Convém lembrar a importância dos elementos descontínuos e mistos, empregados em locais onde é necessária a adoção de medidas especiais para contornar problemas decorrentes de descontinuidades, nas funções de deslocamento e força de superfície.

A solução de Kelvin, empregada como ponderador, serve basicamente para toda classe de problemas que envolve a equação de equilíbrio. As análises de corpos com comportamento elasto-plástico ou elasto-viscoplástico são feitas admitindo-se essa solução. No caso de problemas governados por equações que contenha o laplaciano, a solução fundamental obtida por meio da equação de Laplace é a usada. Essas soluções são também denominadas soluções singulares porque, matematicamente falando, elas são bem comportadas em toda parte do corpo, exceto no ponto de aplicação da perturbação, onde há uma anomalia matemática ou singularidade.

Através do Método dos Elementos de Contorno também se analisou os problemas com domínios constituídos de partes homogêneas. A aplicação prática desse tipo de problema se dá principalmente em estruturas em contatos com o solo ou com a rocha, ou com ambos. É caso, por exemplo, de túneis. O solo, além de ser um meio semi-infinito, é constituído por várias camadas, dificultando bastante a aplicação dos outros métodos numéricos. No método usado neste trabalho os meios infinitos e semi-infinitos são modelados usando segmentos cada vez maiores, a medida que esses se afastam da estrutura em análise. Quanto aos subdomínios são usados somente elementos de contorno. Recomenda-se resolver o sistema de equação proveniente de problemas dessa natureza pelo processo desenvolvido por Crotty. O uso de sub-regiões, no Método dos Elementos de Contorno, só é recomendado para domínios constituídos de subdomínios com materiais diferentes. Nos domínios homogêneos e isotrópicos, o uso de sub-regiões dá origem a submatrizes que ocupa menos memória de computador, mas, por outro lado, isso diminui a precisão dos resultados, além de acarretar outros inconvenientes como, por exemplo, a quantidade de dados fornecida ao computador.

As possibilidades de escorregamento e separação entre as superfícies de uma descontinuidade, assim como a de continuidade, foram consideradas. O critério empregado para definir essas três possibilidades foi o de Mohr-Coulomb. As duas primeiras ocorrem quando as tensões normais e tangentes à descontinuidade definem pontos fora da região considerada segura pelo critério. No caso dos pontos ficarem na sub-região II, mostrada na fig. 5.9, ocorre deslizamento entre as superfícies da descontinuidade, e conforme já foi dito, o problema é essencialmente não linear. O comportamento elasto-plástico para o material da fenda deve ser usado, podendo, também, empregar-se o comportamento elasto-viscoplástico, que possibilita o emprego das ações totais na estrutura e posterior correção dos esforços e dos deslocamentos em função do tempo. Na sub-região III (fig.5.9) se localizam os pontos que definem estados de tensão capazes de

produzir afastamento entre as superfícies. Aos pontos da semi-reta e próximos que separa as sub-regiões II e III, esses conceitos não devem ser aplicados. Quanto aos pontos da descontinuidade que definem pontos na região segura (critério de Mohr-Coulomb), apenas se deve tomar cuidado com aqueles que se situam próximos à reta de Coulomb, pois dependendo da descontinuidade em relação à estrutura, pode-se ter uma estrutura instável.

Na resolução dos sistemas de equações, obtidos durante as análises de corpos efetuada no presente trabalho, foram usados os processos de Gauss-Jordan e o desenvolvido por Crotty. Este último torna-se quase que imprescindível para a resolução de grandes sistemas de equações provenientes de estruturas formadas por várias sub-regiões. A sua eficiência começa pela drástica redução no tempo de processamento e inclui também uma considerável economia de memória de computador.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - ANDERSON, T. et alii. The boundary element method applied to two-dimensional contact problems. In: RECENT ADVANCES IN BOUNDARY ELEMENT METHODS, ed. C.A. Brebbia, Pentech Press, 1978.
- 2 - ANG, W.T. & CLEMENTS, D.L. A Boundary Element Method for determining the effect of holes on the stress distribution around a crack. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 23: 1727-1737, 1986.
- 3 - BEER, G. & MEEK, J.L. Applications in mining. Topics in Boundary Element Research, ed. C.A. Brebbia, 1: 170-200, 1984.
- 4 - BRADY, B.H.G. & BRAY, J.W. The Boundary Element Method for elastic analysis of tabular orebody extraction, assuming complete plane strain. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., 15: 29-37, 1978.
- 5 - BRADY, B.H.G. & BRAY, J.W. The Boundary Element Method for determining stresses and displacements

around long openings in a triaxial stress field.
Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., 15:
21-28, 1978.

- 6 - BREBBIA, C.A. The Boundary Element Method for engineers. 2. rev. ed. London, Pentech Press, 1980. 189 p.
- 7 - BREBBIA, C.A. & CONNOR, J.J. Fundamental of Finite Element techniques for structural engineers. London, Butterworths, 1973. 269 p.
- 8 - CHURCHILL, R.V. Variáveis complexas e suas aplicações. Trad. Tadao Yoshioka. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1975. 276 p.
- 9 - CROTTY, J.M. A block equation solver for large unsymmetric matrices arising in the boundary integral equation method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 18: 997-1017, 1982.
- 10- CROUCH, S.L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10: 301-343, 1976.
- 11- CROUCH, S.L. & STARFIELD, A.M. Boundary Element Methods in Solid Mechanics. London, George Allen & Unwin, 1983. 322 p.
- 12- CRUSE, T.A. Mathematical foundations of the boundary-integral equation method in solid mechanics. Report No. AFOSR-IR-77-1002, Pratt and Whitney Aircraft Group, 1977.

- 13 - CRUSE, T.A. Two dimensional bie fracture mechanics analysis. In: RECENT ADVANCES IN BOUNDARY ELEMENT METHODS, ed. C.A. Brebbia, Pentech Press, 1978.
- 14 - DUNBAR, W.S. Technical note: the equivalence between the displacement discontinuity and quadrupole Boundary Integral Methods. Int. J. Rock Mech. Min. Sci & Geomech. Abstr., 22 (6): 475-476, 1985.
- 15 - FENNER, R.T. The boundary integral equation (boundary element) method in engineering stress analysis. Journal of Strain Analysis, 18 (4): 199-205, 1983.
- 16 - FINLAYSON, Bruce A. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles: with application in fluid mechanics, heat and mass transfer. New York, Academic Press, 1972. (Mathematics in science and engineering, 87).
- 17 - FREITAS NETO, J.A. et alii. Introdução ao Método dos Elementos Finitos (Caderno de estruturas nº 5). Curitiba, Univ. do Paraná, Dep. de Construção, 1973.
- 18 - FUNG, Y.G. Foundations of solid mechanics. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1965. 525 p.
- 19 - GOODMAN, R.E. et alii. A model for the mechanics of jointed rock. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Proceedings ASCE, 94 (3): 637-659, May, 1968.
- 20 - GOODMAN, R.E. Introduction to rock mechanics. New York, John Wiley & Sons, 1980. 478 p.
- 21 - GREEN, A.E. & ZERNA, W. Theoretical Elasticity. 2. ed. Oxford, Clarendon Press, 1968. 457 p.

- 22 - HARTMANN, F. The Somigliana identity on piecewise smooth surfaces. Journal of Elasticity, 11 (4): 403-423, October, 1981.
- 23 - HOCKING, G. Stress analysis of underground, excavations incorporating slip and separation along discontinuities. In: RECENT ADVANCES IN BOUNDARY ELEMENT METHODS, ed. C.A. Brebbia, Pentech Press, 1978.
- 24 - IOAKIMIDIS, N.I. & THEOCARIS, P.S. On the numerical evaluation of Cauchy principal value integrals. Rev. Roum. Sci. Techn. - Méc. Appl., 22 (6): 803-818, 1977.
- 25 - KOVÁRI, K. Rock mass behaviour and its mathematical modelling. Numerical Methods in Geomechanics, London, ed. J.B. Martins, 92: 145-163, 1982.
- 26 - KUTT, H.R. Quadrature formulae for finite-part integrals. Pretória, 1975. 156 p. CSIR Special Report Wisk 178.
- 27 - LACHAT, J.C. A further development of the boundary integral technique for elastostatics. Ph.D.Thesis, University of Southampton, 1975.
- 28 - LAZARINI, C. & FRANCO, N.M.B. Tópicos de cálculo numérico. São Carlos, Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, 1984. 2 v.
- 29 - LOVE, A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4. ed. New York, Dover Publications, 1944. 643 p.

- 30 - MARTINS, J.F. Operadores de Diferenças Finitas de ordem elevada para malhas irregulares: aplicações na elasticidade plana. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Estruturas, 1986. 62 p.
- 31 - MINDLIN, R.D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. J. Physics, 7: 195-202, 1936.
- 32 - MORETTI FILHO, J. Redação de dissertações e teses. Piracicaba, Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz da USP, 1982.
- 33 - MÜHLHAUS, H.B. Lower bound solutions for circular tunnels in two and three dimensions. Rock Mechanics and Rock Engineering, 18: 37-52, 1985.
- 34 - MUSKHELISHVILI, N.I. Singular Integral Equations. Groningen, Holland, P. Noordhoff N.V., 1953. 447p. Translation from the Russian edited by J.R.M. Radok.
- 35 - MUSKHELISHVILI, N.I. Some basic problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Groningen, Holland, P. Noordhoff Ltd, 1953. 704 p. Translated from the Russian by J.R.M. Radok.
- 36 - NAGAR, A.K. et alii. On quadruple integral equations related to a certain crack problem. Journal of Elasticity, 16: 163-177, 1986.
- 37 - OWEN, D.R.J. & HINTON, E. Finite elements in plasticity: theory and practice. Swansea, U.K., Pineridge Press Limited, 1980. 594 p.
- 38 - OWEN, D.R.J. & FAWKES, A.J. Engineering fracture mechanics: numerical methods and applications. Swansea, U.K., Pineridge Press Ltd., 1983. 305 p.

- 39 - PARTRIDGE, P. et alii. O desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno. Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia Civil, 1984. 42 p.
- 40 - PATTERSON, C. & SHEIKH, M.A. Interelement continuity in the boundary. Boundary Element Methods, ed. C.A. Brebbia, 3: 123-141, 1981.
- 41 - PECK, R.B. et alii. O estado de arte de execução de túneis em solo (State of the art of soft ground tunnelling). In: 1ST NORTH AMERICAN RAPID EXCAVATION AND TUNNELING CONFERENCE. Trad. Paulo R. Rogério et al. Chicago, 1: 259-286, 1972.
- 42 - PERZYNA, P. Fundamental problems in viscoplasticity. In: RECENT ADVANCES IN APPLIED MECHANICS. New York, Academic Press, 1966. p. 243-377.
- 43 - PICONE, M. & GIORGI, E. Lições sobre uma teoria das equações integrais lineares e suas aplicações, segundo a orientação de Jordan-Hilbert. Trad. Dante A.O. Martinelli. São Paulo, s. ed., 1954. 259p. Original italiano.
- 44 - PROENÇA, S.P.B. Noções básicas de reologia. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos da USP, Departamento de Estruturas, 1986. 27 p.
- 45 - PUTOT, C. Une nouvelle méthode d'équations intégrales pour certains problèmes de fissuras planes. Thèse de Docteur-Ingénieur, Soutenne, Paris, 1980.
- 46 - RICARDELLA, P.C. An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity. Pittsburg, Report No.

SM-73-10, Dept. Mech. Engng, Carnegie Mellon University, 1973.

- 47 - RIZZO, F.J. & SHIPPY, D.J. A method for stress determination in plane anisotropic elastic bodies. J. Composite Materials, 4: 36-61, 1970.
- 48 - RODRÍGUEZ, J.C.G. Sobre o emprego do Método dos Elementos de Contorno em problemas elásticos bidimensionais. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Estruturas, 1986. 131 p.
- 49 - SHI, G.-H. & GOODMAN, R.E. Two dimensional discontinuous deformation, analysis. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 9: 541-556, 1985.
- 50 - SNEDDON, I.N. & LOWENGRUB, M. Crack problems in the classical theory of Elasticity. New York, John Wiley & Sons, 1969. 221 p. (The SIAM series in Applied Mathematics).
- 51 - SOUZA LIMA, V.M. et alii. Rock foundations with marked discontinuities criteria and assumptions for stability analyses. In: CONGRÈS DES GRANDS BARRAGES, 14. Rio de Janeiro, 1982. p. 1155-1182.
- 52 - STEWART, G.W. Introduction to matrix computations. New York, Academic Press, 1973. 441 p.
- 53 - TELLES, J.C.F. & BREBBIA, C.A. Elastoplastic boundary element analysis. Appl. Math. Modelling, 3: 466-470, 1980.

- 54 - TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. Teoria da Elasticidade. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1980. 545 p. Original inglês.
- 55 - VALLIAPAN, S. Non-linear stress analysis of two dimensional problems with special reference to rock and soil mechanics. Ph.D. Thesis, University of Southampton, 1968.
- 56 - VENTURINI, W.S. Application of the Boundary Element formulation to solve geomechanical problems. Ph.D. Thesis, University of Southampton, 1982. 272 p.
- 57 - VENTURINI, W.S. & BREBBIA, C.A. Boundary element formulation for nonlinear applications in geomechanics. Appl. Math. Modelling, 8: 251-260, 1984.
- 58 - WILSON, R.B. & CRUSE, T.A. Efficient implementation of anisotropic three dimensional boundary-integral equation stress analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 12: 1383-1397, 1978.
- 59 - ZABREYKO, P.P. et alii. Integral Equations - a reference text. Translated by T.O. Shaposhnikova et alii. Leyden, Noordhoff International Publishing, 1975. 443 p. Original russo.