

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ANÁLISE DE EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM  
EM ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS ALTOS  
PELA TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO

ENG<sup>a</sup> MARIA ANGELA PEREIRA XAVIER

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

ORIENTADOR:

PROF. DR. EDDIE MANCINI

BANCA EXAMINADORA:

PROF. DR. EDDIE MANCINI

PROF. DR. WALTER ABRAHÃO NIMIR

PROF. DR. MÁRIO FRANCO

SUPLENTE:

PROF. DR. JOSÉ ELIAS LAIER

PROF. DR. CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI

A Francisco, Coeli e Ernesto

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Eddie Mancini que, através de uma orientação dedicada e constante, forneceu todas as condições necessárias ao desenvolvimento deste trabalho.

À Universidade Federal da Paraíba que me proporcionou condições de estudo e pesquisa em nível de pós-graduação.

Aos funcionários do Departamento de Estruturas Rui Roberto Casale e Sylvia Helena Morette, pela presteza com que executaram os serviços de datilografia e desenho, respectivamente.

Ao Centro de Processamento de Dados da Escola de Engenharia de São Carlos, pela utilização de seus equipamentos.

Aos amigos e incentivadores.

## R E S U M O

Apresenta-se, neste trabalho, uma análise de efeitos de segunda ordem em estruturas de edifícios altos. Inicialmente consideram-se as associações planas de painéis, seguindo-se os núcleos estruturais contraventados ou não por lintéis e associação tridimensional de paredes e pórticos. Admite-se para o material o comportamento elástico linear.

Em todos os casos, o carregamento constitui-se de cargas laterais e verticais, uniformemente distribuídas ao longo da vertical. Consideram-se as cargas verticais uniformemente distribuídas ao longo dos eixos que passam pelos centros de gravidade das seções transversais dos elementos que compõem as estruturas analisadas.

Utiliza-se, para o desenvolvimento teórico, a "técnica do meio contínuo", que consiste basicamente em considerarem-se os elementos de conexões horizontais, lajes e lintéis, distribuídos ao longo da altura. Na análise dos núcleos de seção aberta utiliza-se, também, a teoria de flexo-torção, admitindo-se que estes elementos comportam-se de maneira análoga às barras de seção delgada.

As condições de equilíbrio de cada modelo estrutural são analisadas dentro dos conceitos de cálculo da teoria de segunda ordem, uma vez que leva-se em conta a configuração deformada destes elementos.

O comportamento dos modelos estruturais ficam expressos através de uma equação diferencial (estruturas planas), ou de um sistema de três equações diferenciais (estruturas tridimensionais), todas não homogêneas, de terceira ordem, com coeficientes variáveis. As soluções são obtidas através dos métodos numéricos: diferenças finitas e Stodola-Vianello (em sua variante), com uso de computador.

No final de cada capítulo resolvem-se exemplos numéricos das estruturas analisadas.

## A B S T R A C T

This work presents an analysis of the second-order effects for tall buildings structures. At first in-plane associations of panels are considered, followed by the analysis of structural cores constrained or not by horizontal beams and then a three-dimensional association of shear walls and frames. It is considered the elastic linear material behaviour.

In all cases the external loading consists of lateral and vertical loads uniformly distributed along the height. The vertical loads are assumed to be uniformly distributed along the vertical axes passing through the centroids of the structure's elements.

For the theoretical development, the continuous medium technique is utilized which consists of considering the horizontal connection elements, beams and slabs, distributed along the height of the building. In the analysis of structural cores of open section, the Vlassov's theory is also used, taking into account that these elements behave like thin-walled beams.

The equilibrium conditions of each structural model are analyzed according to the second order theory since the deflected configuration of the elements is considered.

The behavior of the structural models is expressed by a non-homogeneous system of differential equations (a single equation for plane structures) of third order with variable coefficients. The solutions are found by the numerical methods: finite differences and Stodola-Vianello (in its variant).

At the end of each chapter numerical examples are solved for the studied structures.

## S U M Á R I O

INTRODUÇÃO .....	1
I. EFEITO DE SEGUNDA ORDEM EM PAINÉIS PLANOS .....	4
1.1 - Introdução .....	1
1.2 - Hipóteses e considerações .....	5
1.3 - Painel parede .....	6
1.4 - Painel pórtico .....	9
1.5 - Painel geral .....	12
1.5.1 - Associação de parede e pórtico por <u>bar</u> ras biarticuladas .....	12
1.5.2 - Associação de parede e pórtico por <u>lin</u> téis .....	16
1.5.3 - Associação de paredes por lintéis ....	19
1.6 - Métodos de análise numérica .....	26
1.6.1 - Método das diferenças finitas .....	27
1.6.2 - Método de Stodola-Vianello .....	35
1.7 - Programas em linguagem Fortran .....	40
1.7.1 - Programa para a resolução, pelo método das diferenças finitas, da equação di- ferencial resultante da associação <u>pla</u> na de painéis .....	41
1.7.2 - Programa para a resolução, pela varian- te do método de Stodola-Vianello, da equação diferencial da associação <u>pla</u> na de painéis .....	48
1.8 - Exemplos numéricos .....	56
1.8.1 - Exemplo 1 .....	56

1.8.2 - Exemplo 2 .....	62
1.8.3 - Exemplo 3 .....	71
1.9 - Gráficos para projeto .....	78
1.9.1 - Exemplo 4 .....	83
II. EFEITO DE SEGUNDA ORDEM EM ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS .....	86
2.1 - Introdução .....	86
2.2 - Hipóteses e considerações .....	86
2.3 - Edifícios com um núcleo de seção aberta ....	88
2.3.1 - Núcleo de seção aberta sem <u>contraventamento</u> .....	88
2.3.2 - Núcleo de seção aberta <u>contraventado</u> por lintéis .....	100
2.4 - Associação tridimensional de paredes e <u>pórticos</u> .....	109
2.5 - Edifícios com dois núcleos de seção aberta .	127
2.5.1 - Núcleos sem <u>contraventamento</u> .....	127
2.5.2 - Núcleos <u>contraventados</u> por lintéis .	139
2.6 - Resumo das equações .....	161
2.7 - Métodos de análise numérica .....	163
2.7.1 - Método das diferenças finitas .....	164
2.7.2 - Método de Stodola-Vianello .....	168
2.8 - Programas em linguagem Fortran .....	185
2.8.1 - Programa em linguagem Fortran que <u>resolve</u> pelo método das diferenças finitas o sistema de equações diferenciais, que expressa o comportamento das estruturas tridimensionais analisadas nos itens (2.3) a (2.5).....	185

2.8.2 - Programa em linguagem Fortran que resolve pelo método de Stodola-Vianello, em sua variante, o sistema de equações diferenciais, que expressa o comportamento das estruturas tridimensionais analisadas nos itens (2.3) a (2.5) .....	193
2.9 - Exemplos numéricos .....	202
2.9.1 - Exemplo 1 .....	202
2.9.1.1 - Núcleo de seção aberta sem contraventamento ....	207
2.9.1.2 - Núcleo de seção aberta contraventado por lintéis ao nível dos andares ....	221
2.9.2 - Exemplo 2 .....	236
2.9.3 - Exemplo 3 .....	250
2.9.3.1 - Núcleos sem contraventamento .....	258
2.9.3.2 - Núcleos com contraventamento .....	269
III. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	281
APÊNDICE A - Determinação dos coeficientes $s_f$ , $s$ , $K_1$ e $K_2$ .....	284
APÊNDICE B - Resumo da teoria de flexo-torção .....	295
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	314
BIBLIOGRAFIA .....	316



## INTRODUÇÃO

Atualmente, nos grandes e médios centros urbanos, o grande aumento populacional e a carência de espaço físico exigem, dos arquitetos e engenheiros, projetos de edifícios cada vez mais altos como uma das soluções para resolver estes problemas. Surge, então, a preocupação do engenheiro estrutural com a segurança de tais construções e muita atenção é dada ao problema de instabilidade das estruturas destes edifícios.

Diversas contribuições têm sido fornecidas, por parte dos pesquisadores, para melhor se compreender o comportamento das estruturas de edifícios altos sob a ação do vento. Dentre os vários trabalhos existentes sobre o assunto, citam-se, por exemplo, Cardan [2], Stamato [14] e Mancini [9].

Para a análise de instabilidade de edifícios altos, muitos pesquisadores colaboraram, citando-se, por exemplo, dentre eles o trabalho de Gluck e Gellert [6], [7].

As análises das estruturas de edifícios altos podem ser feitas através da "Técnica do meio contínuo", que é um processo que conduz a uma equação diferencial ou a um sistema de equações diferenciais cuja resolução permite a obtenção dos esforços e deslocamentos em toda a estrutura.

Usualmente, os edifícios altos possuem elementos resistentes verticais, denominados de painéis de contraventamento, conectados ao nível dos andares por lajes supostas equivalentes a diafragmas horizontais rígidos em seu plano, porém completamente flexíveis transversalmente. Devido à grande capacidade de absorver esforços, é cada vez mais frequente o uso em edifícios altos de núcleos de seção aberta que servem geralmente para abrigar escadas, caixas de elevadores e outras áreas comunitárias. Estes elementos estruturais podem ter a abertura de sua seção transversal parcialmente fechada por vigas (lintéis) aos níveis das lajes, resultando os chamados núcleos estruturais contraventados por lintéis.

O processo da técnica do meio contínuo consiste, basicamente, em se substituir o sistema discreto de conexões horizontais, constituídos por lajes e vigas (lintéis), por um meio contínuo de rigidez equivalente, distribuído ao longo da altura da estrutura. Os esforços transmitidos por estes elementos ficam, assim, continuamente distribuídos na vertical. Este processo tem sua aplicação recomendada em edifícios de características elasto-geométricas regulares em planta e em elevação, o que pode ser encontrado com frequência nos edifícios altos.

Através da técnica do meio contínuo e tomando por base o trabalho de Gluck e Gellert [6], Carvalho [3] estudou a instabilidade de algumas estruturas de edifícios altos, dirigindo a sua análise para a determinação da carga crítica vertical destas estruturas. Complementando esta análise, Carvalho [4] determinou a carga crítica vertical de associações planas e tridimensionais de painéis.

A análise de efeitos de segunda ordem apresentada neste trabalho é baseada nos trabalhos desenvolvidos por Carvalho [3] e Carvalho [4]. Para o seu desenvolvimento é utilizada a técnica do meio contínuo ficando o comportamento de cada modelo estrutural expresso através de uma equação ou um sistema de equações, não homogêneas, de terceira ordem, com coeficientes variáveis.

Considera-se que as estruturas de edifícios altos, analisados aqui, estejam submetidas a carregamentos laterais e verticais, uniformemente distribuídos na direção vertical. As condições de equilíbrio de cada modelo estrutural são estabelecidas levando em consideração a configuração deformada dos elementos verticais, que compõem a estrutura, de acordo com os conceitos de cálculo da teoria de segunda ordem. Desta maneira, surgem esforços adicionais provenientes da carga vertical, devidos a deformação daqueles elementos, sendo este efeito conhecido como efeito de segunda ordem.

Neste trabalho, a solução da equação diferencial ou do sistema de equações diferenciais, gerados pelo tratamen-

to contínuo, foi obtida através da aplicação do método das diferenças finitas, com procedimento análogo ao apresentado nos trabalhos de Mancini [9] e Barbosa [1], e do método de Stodóla-Vianello, em sua variante, cuja eficiência foi constatada no trabalho de Seixas [13], justificando a sua utilização.

Ao capítulo I, deste trabalho, reserva-se a análise dos efeitos de segunda ordem em associações planas de painéis, através da técnica do meio contínuo. O comportamento de cada modelo estrutural expressa-se através de uma equação diferencial cuja resolução através dos métodos das diferenças finitas e Stodola-Vianello, exige a utilização de computador. Para isso desenvolveram-se dois programas em linguagem Fortran, cujas listagens são apresentadas no final do capítulo.

No capítulo II, também utilizando a técnica do meio contínuo, analisam-se cinco modelos estruturais, sendo eles: um núcleo estrutural de seção aberta sem e com contraventamento, uma associação tridimensional de paredes e pórticos e uma associação de dois núcleos de seção aberta sem e com contraventamento. O comportamento de cada um destes modelos se expressa através de um sistema de três equações diferenciais. A solução dos mesmos é obtida pelos dois métodos numéricos citados anteriormente e dois programas em linguagem Fortran foram elaborados, um para cada método, cujas listagens são apresentadas no final deste capítulo.

No final de cada capítulo resolvem-se exemplos numéricos referentes a cada modelo estrutural apresentado.

No apêndice A são determinados alguns parâmetros relativos às paredes e aos pórticos, cujas deduções são feitas segundo Mancini [9]. No apêndice B encontra-se um resumo da teoria de flexo-torção.

Finalmente, no capítulo III, expõem-se algumas considerações sobre o trabalho.

## I. EFEITO DE SEGUNDA ORDEM EM PAINÉIS PLANOS

### 1.1 - Introdução

Neste capítulo analisa-se o comportamento de painéis planos submetidos a cargas lateral e vertical uniformemente distribuídas. Inicialmente, consideram-se os painéis deformáveis predominantemente à ação do momento fletor que são as paredes e os painéis deformáveis predominantemente à ação da força cortante que são os pórticos. Em seguida, consideram-se as associações entre esses painéis, que resultam em estruturas denominadas painéis gerais, deformáveis tanto à ação do momento fletor quanto à ação da força cortante.

Desenvolve-se a análise dentro dos conceitos de cálculo da teoria de segunda ordem, onde as condições de equilíbrio de cada modelo estrutural são estabelecidas levando-se em conta a sua posição deformada. Isto conduz ao aparecimento de esforços adicionais resultantes desta deformação, devido à presença da carga vertical, sendo este efeito conhecido como efeito de segunda ordem.

O comportamento de cada modelo estrutural se expressa através de uma equação diferencial de terceira ordem, não homogênea, com coeficientes variáveis. A solução dessa equação fornece os deslocamentos horizontais da estrutura e é obtida, neste trabalho, mediante a utilização de dois processos numéricos: Diferenças Finitas e Stodola-Vianello, em sua variante.

Tomando-se por base as expressões obtidas com a aplicação dos processos numéricos, desenvolveram-se dois programas, um para cada processo, em linguagem Fortran, para o computador IBM-370/148. As listagens e respectivas explicações para o uso desses programas são fornecidas ainda neste capítulo.

No final do capítulo apresentam-se exemplos numéricos para cada tipo de associação de painéis analisada, além de um conjunto de gráficos que mostra a variação dos

deslocamentos horizontais no topo das estruturas submetidas a carregamentos uniformes, lateral e vertical. Para o traço dos gráficos foram definidos três parâmetros adimensionais de maneira que, para um certo valor da rigidez relativa  $\lambda$  de um painel geral, seja possível se determinar um deslocamento  $U$  no topo do painel, em função da carga horizontal, para cada valor da carga vertical  $P$  adotada. Os gráficos comprovam que as estruturas submetidas a carregamentos uniformes lateral e vertical, analisadas em teoria de segunda ordem, correspondem a problemas de 2<sup>a</sup> espécie onde o carregamento crítico é definido como o valor da carga que provoca variações excessivamente grandes das funções deslocamentos, para uma variação pequena do carregamento.

## 1.2 - Hipóteses e Considerações

Nas análises aqui desenvolvidas utiliza-se o tratamento contínuo, ou técnica do meio contínuo, que consiste em substituir os elementos de conexões horizontais, como lintéis e barras biarticuladas, por um meio contínuo de rigidez equivalente, uniformemente distribuída ao longo da altura. Os esforços transmitidos por estes elementos ficam, assim, continuamente distribuídos na vertical.

Em todos os casos analisados, as características elásticas e geométricas são mantidas constantes ao longo da altura, o que viabiliza o emprego da técnica do meio contínuo, devido ao número reduzido de parâmetros envolvidos.

Por lintéis entende-se vigas engastadas nas duas extremidades e indeformáveis axialmente.

Em cada modelo estrutural é definido um sistema de eixos  $oxz$ , contido no plano do painel, com  $ox$  horizontal de sentido positivo da esquerda para a direita e  $oz$  vertical com sentido positivo da base para o topo.

1.3 - Painel Parede

Dã-se o nome de parede ao painel plano, de eixo vertical, seção constante ao longo da altura  $H$ , com rigidez transversal nula e deformãvel predominantemente à ação do momento fletor.

Usa-se o índice  $w$  (do inglês wall) para identificar os esforços e deslocamentos relativos ao painel pare

O carregamento externo constitui-se de uma carga horizontal  $q_w$ , uniformemente distribuída ao longo da altura  $H$  do painel, e uma carga vertical  $p_w$ , uniformemente distribuída ao longo do eixo vertical que passa pelo centro de gravidade de sua seção transversal. Indicam-se na figura (1.1), a notação e os sentidos positivos para os esforços e deslocamentos.

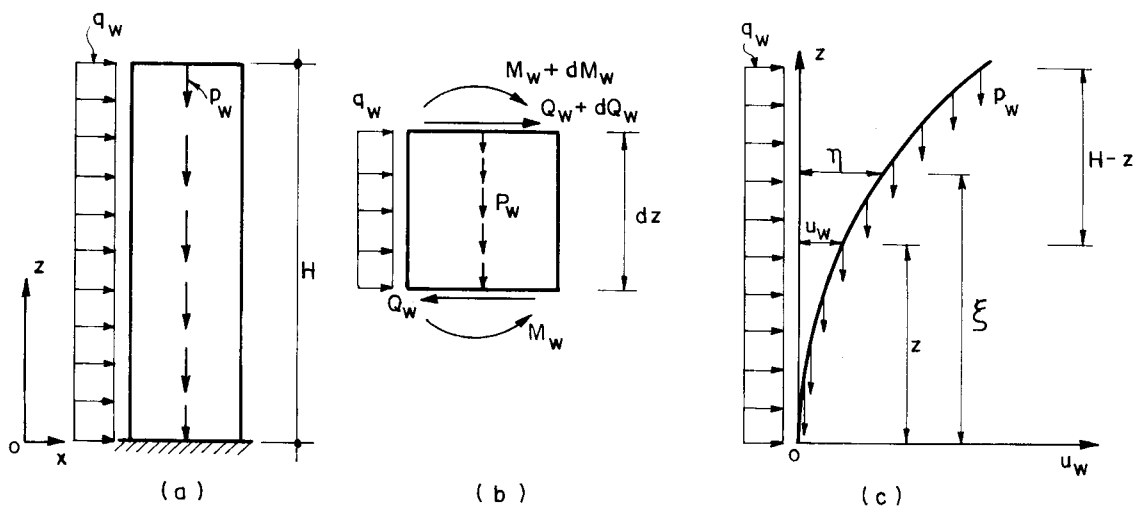


Figura 1.1 - Painel Parede

O equilíbrio do elemento infinitesimal de altura  $dz$  (figura 1.1-b) fornece:

$$\frac{dM_w}{dz} = -Q_w \tag{1.1}$$

Desprezando-se a deformação por força cortante na parede, a equação da linha elástica expressa-se por:

$$u_w'' = \frac{M_w}{EJ_w} \quad (1.2)$$

onde;

$u_w$  é o deslocamento da parede na direção  $ox$

$E$  é o módulo de elasticidade longitudinal da parede

$J_w$  é o momento de inércia da parede em relação a um eixo perpendicular ao plano da figura e que passa pelo centro de gravidade da seção transversal.

Combinando-se a equação (1.1) com a equação (1.2), derivada uma vez em relação a  $z$ , obtém-se para a força cortante interna no painel a expressão:

$$Q_{w,int} = -j_w u_w''' \quad (1.3)$$

onde

$j_w$  representa o produto de rigidez à flexão  $EJ_w$

O momento fletor, em uma seção genérica distante  $z$  da base do painel, é calculado levando-se em conta a ação simultânea das cargas  $q_w$  e  $p_w$ . Considerando-se a parede em sua posição deformada (figura 1.1-c) e obedecendo-se à convenção para os esforços (figura 1.1-b), o momento fletor na referida seção é:

$$M_{w,ext} = \int_z^H p_w(\eta - u_w) d\xi + q_w \frac{(H-z)^2}{2} \quad (1.4)$$

A derivada primeira da equação (1.4) em relação a  $z$  fornece:

$$\frac{dM_w}{dz} = - p_w \eta(z) - p_w (H-z) u_w' + p_w u_w - q_w (H-z) \quad (1.5)$$

A equação (1.5) expressa, de acordo com a equação (1.1), a força cortante externa no painel considerando que, conforme a figura (1.1-c), na cota  $z$ ,  $\eta(z) = u_w$  e utilizando este valor na equação (1.5), obtêm-se:

$$Q_{w,ext} = p_w (H-z) u_w' + q_w (H-z) \quad (1.6)$$

O equilíbrio da estrutura é mantido quando os esforços internos igualam-se aos esforços externos. Desta maneira, a igualdade entre as equações (1.3) e (1.6) conduz a:

$$-j_w u_w'' = p_w (H-z) u_w' + q_w (H-z) \quad (1.7)$$

ou,

$$j_w u_w'' + p_w (H-z) u_w' = - q_w (H-z) \quad (1.8)$$

As três condições de contorno necessárias à resolução da equação (1.7) são:

a) Supondo engastamento na base da parede

$$u_w(0) = 0 \quad (1.9-a)$$

$$u_w'(0) = 0 \quad (1.9-b)$$



b) Supondo a ausência de momento fletor aplicado no topo

$$u_w''(H) = 0 \quad (1.9-c)$$

#### 1.4 - Painel Pórtico

Dã-se o nome de pórtico ao painel plano, vertical, sem rigidez transversal, extremamente rígido a ação do momento fletor e deformável pela ação da força cortante.

Usa-se o índice  $f$  (do inglês frame) para caracterizar os esforços e deslocamentos relativos ao painel pórtico.

Considera-se um carregamento externo constituído de uma carga horizontal  $q_f$ , uniformemente distribuída ao longo da altura  $H$  do painel, e de uma carga vertical  $\alpha_f p_f$ , uniformemente distribuída, aplicada aos pilares do pórtico (ao longo dos eixos verticais dos mesmos) e repartida entre eles de acordo com o coeficiente de distribuição  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ , onde  $n$  é o número total de pilares).

Os sentidos positivos para os esforços e deslocamentos coincidem com aqueles definidos anteriormente para o painel parede (figura 1.1-b).

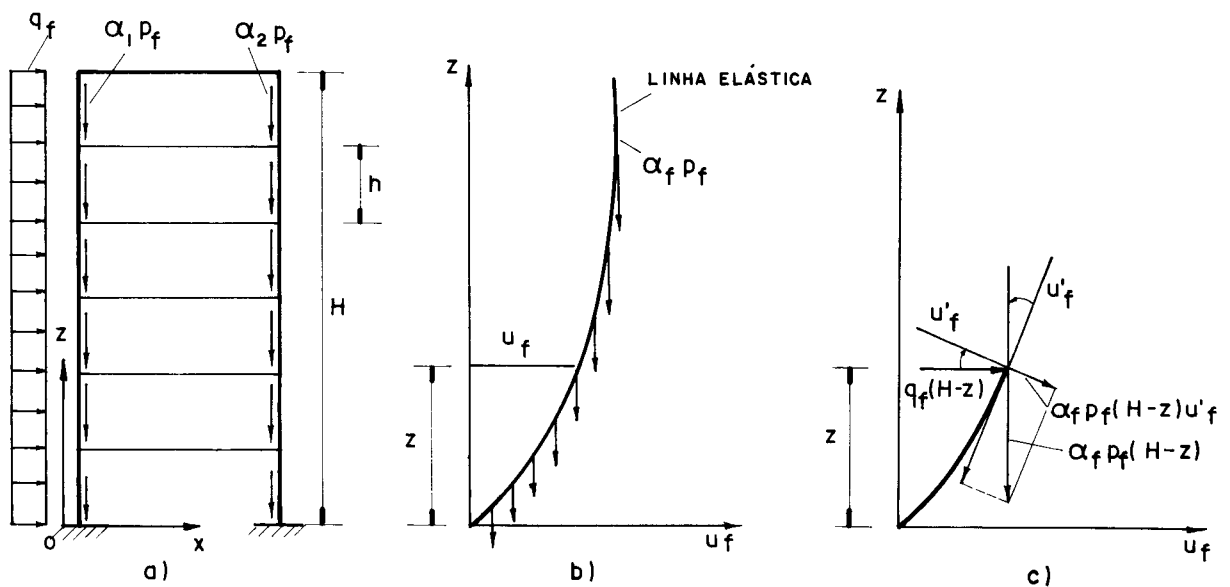


Figura 1.2 - Painel Pórtico

A equação da linha elástica, figura(1.2-b), expressa-se, conforme Stamato [14], por:

$$Q_{f,int} = s_f u_f' \quad (1.10)$$

onde,

$u_f$  é o deslocamento na direção do eixo Ox

$s_f$  é a rigidez do pórtico à força cortante estimada em diversos trabalhos tais como Mancini[9]. e Stamato[14].

Para os pórticos aqui analisados, com vigas e pilares de seções uniformes ao longo da altura, considera-se constante a rigidez  $s_f$ . Desprezam-se as variações locais que ocorrem na base (pela presença do engastamento) e no topo (pela ausência dos tramos superiores dos pilares), que conduzem a pequenos erros nos resultados obtidos nas proximidades desses pontos. No cálculo de  $s_f$  utiliza-se a expressão (1.11), cuja dedução encontra-se no apêndice A.

$$s_f = \frac{12E}{h} \sum_{n.a} \left[ \begin{array}{c} \Sigma K_v \\ K_{p.n} \frac{v.n}{\Sigma K_b} \end{array} \right] \quad (1.11)$$

onde:

E é o módulo de elasticidade longitudinal

h é o pé-direito do andar

K é a relação  $J/l$  do tramo da viga ou pilar considerado

$n.a$  é a somatória estendida a todos os nós do andar considerado

$K_{p.n}$  é a relação  $J/l$  do pilar acima do nó considerado

$v.n$  é a somatória estendida aos tramos de vigas que concorrem no nó

$b.n$  é a somatória estendida a todas as barras (2, 3 ou 4 barras) que concorrem no nó

A força cortante em uma seção, distante  $z$  da base do painel (devido às cargas  $q_f$  e  $p_f$ ), conforme indica-se na figura (1.2-c), é dada por:

$$Q_{f,ext} = \alpha_f p_f (H-z) u_f' + q_f (H-z) \quad (1.12)$$

onde,

$$\alpha_f = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{com } \alpha_i \text{ sendo a parcela de carga absorvida pelo pilar } i.$$

A condição de equilíbrio do pórtico à força cortante exige que os esforços internos igualem-se aos esforços externos. Em vista disso e das equações (1.10) e (1.12), pode-se escrever:

$$[s_f - \alpha_f p_f (H-z)] u_f' = q_f (H-z) \quad (1.13)$$

Neste trabalho analisa-se o efeito de segunda ordem em pórticos, apenas quando estão associados com paredes, conforme se mostra no item a seguir.

### 1.5 - Painel Geral

Denomina-se painel geral ao painel de comportamento estrutural misto, ou seja, que apresenta deformabilidade por momento fletor e força cortante.

Nos itens 1.3 e 1.4 analisaram-se os painéis parede e pórtico isoladamente. A associação entre estes painéis resulta em uma estrutura de comportamento característico de um painel geral, contribuindo favoravelmente para a rigidez lateral do conjunto e reduzindo a disparidade entre os esforços e deslocamentos da base ao topo.

Nos trabalhos de Mancini [9] e Stamato [14] encontram-se, com detalhes, diversos casos de associações de painéis parede e pórtico, com carregamento externo constituído apenas por cargas laterais. Neste item analisam-se três casos de associação de painéis:

- a) Associação de parede e pórtico por barras biarticuladas
- b) Associação de parede e pórtico por lintéis
- c) Associação de paredes por lintéis

Nos três casos citados acima, considera-se um carregamento aplicado constituído por cargas laterais e verticais uniformemente distribuídas.

#### 1.5.1 - Associação de parede e pórtico por barras biarticuladas

Indica-se, na figura (1.3), o painel formado por parede e pórtico unidos por barras biarticuladas. Supõem-se que estes elementos de ligação possuam rigidez axial infinita e estejam distribuídos uniformemente ao longo da altura H do painel, de acordo com o tratamento contínuo.

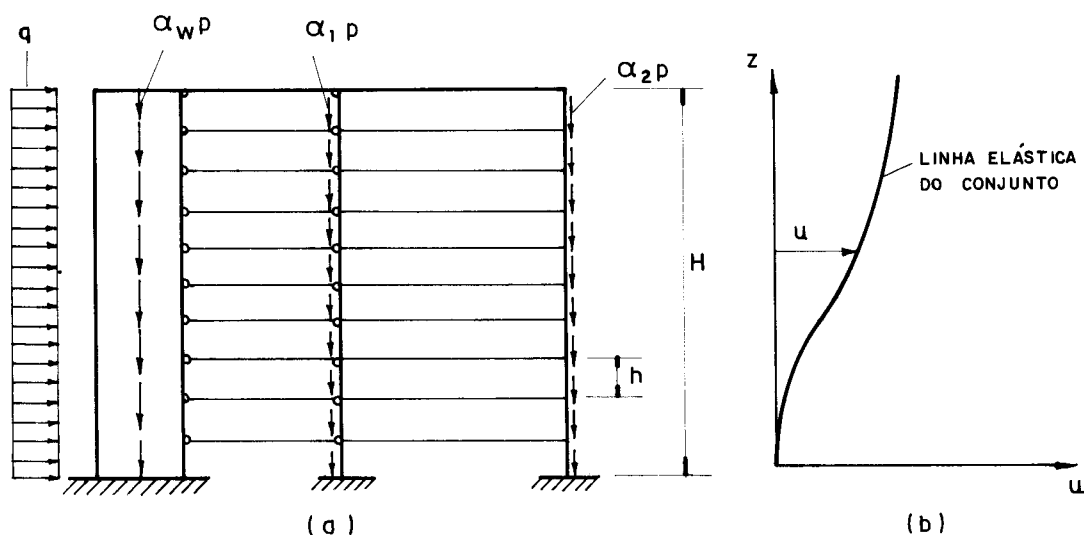


Figura 1.3 - Associação de painéis por barras biarticuladas

O carregamento externo (figura 1.3-a) consta de  $u$  uma carga horizontal  $q$ , uniformemente distribuída ao longo da altura  $H$  do painel, e de uma carga vertical  $\alpha p$ , uniformemente distribuída ao longo dos eixos verticais que passam pelos centros de gravidade das seções transversais da parede e dos pilares do pórtico, sendo  $\alpha_w p$  e  $\alpha_f p$  as cargas na parede e no pórtico, respectivamente, e  $\alpha_f = \sum_i \alpha_i$ , onde  $i$  corresponde ao número de pilares do pórtico.

A rigidez infinita das barras de ligação garante a igualdade dos deslocamentos horizontais da parede e do pórtico ( $u_w$  e  $u_f$ ), podendo-se, portanto, considerar uma única linha elástica para o conjunto (figura 1.3-b), denominando-se os deslocamentos horizontais simplesmente por  $u$ .

A força cortante interna na estrutura é obtida pela soma das forças cortantes  $Q_{w,int}$  na parede e  $Q_{f,int}$  no pórtico, ou seja:

$$Q_{int} = Q_{w,int} + Q_{f,int} \quad (1.14)$$

ou, conforme as equações (1.3) e (1.10),

$$Q_{int} = -j_w u'' + s_f u' \quad (1.15)$$

Em uma cota  $z$ , da altura do painel, a força cortante externa total devido ao carregamento, considerando-se a estrutura em sua posição deformada, será obtida pela soma das forças cortantes na parede e no pórtico provenientes dos quinhões de cargas externas absorvidas por estes elementos, ou seja:

$$Q_{ext} = Q_{w,ext} + Q_{f,ext} \quad (1.16)$$

onde:

$$Q_{w,ext} = \alpha_w p(H-z)u' + Q_{w,q}$$

e

$$Q_{f,ext} = \alpha_f p(H-z)u' + Q_{f,q} \quad (1.17)$$

com

$Q_{w,q}$  sendo a força cortante recebida pela parede, devido ao carregamento lateral.

$Q_{f,q}$  sendo a força cortante recebida pelo pórtico, devido ao carregamento lateral.

Substituindo-se as equações (1.17) na equação (1.16), resulta:

$$Q_{ext} = \alpha p(H-z)u' + q(H-z) \quad (1.18)$$

onde

$$\alpha = \alpha_w + \alpha_f \quad (1.19)$$

Como a força cortante proveniente das cargas externas (equação 1.18) é, em qualquer cota  $z$ , equilibrada pelas forças cortantes internas (equação 1.15), é válida a seguinte equação:

$$j_w u'''' - \left[ s_f - \alpha p(H-z) \right] u' = - q(H-z) \quad (1.20)$$

Obtêm-se os deslocamentos incôgnitos  $u$  resolvendo a equação diferencial (1.20) e utilizando as condições de contorno:

$$u(0) = 0 \quad (1.21-a)$$

$$u'(0) = 0 \quad (1.21-b)$$

no caso de engastamento na base da parede e,

$$u''(H) = 0 \quad (1.21-c)$$

por não haver momento fletor aplicado no topo da mesma.

Observa-se através da equação (1.20) que a associação entre uma parede e um pòrtico, através de barras biarticuladas, resulta em um painel que deforma-se por momento fletor e força cortante. Expressa-se, portanto, o painel geral através da equação:

$$j_g u'''' - \left[ s_g - \alpha p(H-z) \right] u' = - q(H-z) \quad (1.22)$$

onde:

$j_g$  corresponde ao parâmetro  $j_w$  que indica o produto de rigidez à flexão da parede.

$s_g$  corresponde ao parâmetro  $s_f$  que indica a rigidez à força cortante do pórtico.

### 1.5.2 - Associação de parede e pórtico por lintéis

Apresenta-se na figura (1.4) outro tipo de associação entre pórtico e parede, citado neste trabalho. Adota-se o mesmo carregamento externo considerado no item 1.5.1 e indicado na figura (1.4-a). Na figura (1.4-b) mostra-se um elemento de parede de altura  $dz$  e a convenção positiva para os esforços.

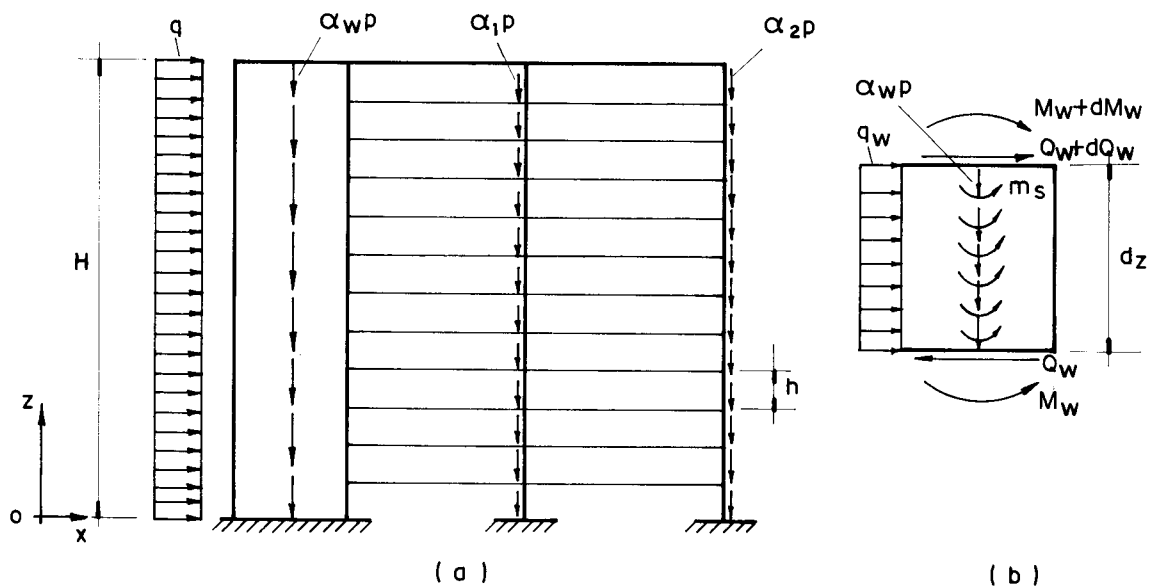


Figura 1.4 - Associação de paredes e pórticos por lintéis

Admite-se que os lintéis são rígidos axialmente, garantindo a igualdade dos deslocamentos horizontais da parede e do pórtico ( $u_w = u_f$ ), aqui designados por  $u$ .

A reação do pórtico sobre a parede através dos lintéis consiste de momento distribuído  $m_s$ , aplicado ao longo do eixo vertical da parede e força distribuída vertical,



também aplicada ao longo deste eixo. O efeito desta última é o de uma força normal na parede e será desprezado devido à suposição de indeformabilidade axial da mesma.

O equilíbrio do elemento infinitesimal de parede de altura  $dz$ , de acordo com a convenção positiva para os esforços (figura 1.4-b) e com a equação (1.3), fornece:

$$Q_{w,int} = -j_w u'' + m_s \quad (1.23)$$

Definindo-se  $\phi_B$  e  $\phi_s$  como os ângulos de giro das seções da parede, devidos, respectivamente, ao momento flexor e à força cortante, pode-se exprimir  $m_s$  em função destes ângulos por:

$$m_s = K_1 \phi_B + K_2 \phi_s \quad (1.24)$$

onde os coeficientes  $K_1$  e  $K_2$  são parâmetros de rigidez calculados no apêndice A.

Chamando-se de  $\phi$ , que é igual a  $u'$ , o ângulo total de giro, tem-se:

$$\phi = \phi_B + \phi_s \quad (1.25)$$

e adotando-se a expressão aproximada

$$\phi_s = \frac{3Q_{w,int}}{AE} \quad (1.26)$$

onde:

$A$  é a área da seção transversal da parede.

$E$  é o módulo de elasticidade longitudinal

obtêm-se:

$$m_s = K_1 u' + (K_2 - K_1) \frac{3Q_{w,int}}{AE} \quad (1.27)$$

Substituindo-se a equação (1.27) na equação (1.23) obtêm-se para a força cortante interna na parede, a expressão:

$$Q_{w,int} = - \frac{j_w}{\gamma} u''' + \frac{K_1}{\gamma} u' \quad (1.28)$$

onde:

$$\gamma = 1 - \frac{3}{AE} (K_2 - K_1) \quad (1.29)$$

A força cortante interna no pórtico, obedecendo a convenção positiva para os esforços da figura (1.4-b), vale:

$$Q_{f,int} = s \cdot u' \quad (1.30)$$

onde  $s$  é a rigidez à força cortante, estimada no apêndice A, conforme Mancini [9].

A soma das equações (1.28) e (1.30) conduz à equação da força cortante interna total, expressa por:

$$Q_{int} = j_g u''' + s_g u' \quad (1.31)$$

onde:

onde:

$$j_g = \frac{j_w}{\gamma} \quad (1.32)$$

e

$$s_g = \frac{K_1}{\gamma} + s \quad (1.33)$$

A força cortante externa total, calculada da mesma forma mostrada no item (1.5.1) (equação 1.18), vale:

$$Q_{ext} = \alpha p(H-z)u' + q(H-z) \quad (1.34)$$

As condições para o equilíbrio de todas as forças internas e externas, agindo na estrutura, conduz à equação:

$$j_g u'''' - [s_g - \alpha p(H-z)]u' = - q(H-z) \quad (1.35)$$

onde observa-se a equivalência com a equação (1.22), resultante da associação de uma parede com um pórtico, ligados por barras biarticuladas.

As condições de contorno, utilizadas na obtenção dos deslocamentos horizontais incógnitas  $u$ , são as mesmas expressas pelas equações (1.21).

### 1.5.3 - Associação de paredes por lintéis

Em muitos edifícios altos utilizam-se as paredes como elementos verticais resistentes à ação das cargas laterais. Se a ligação destes elementos se faz através das barras biarticuladas é fácil concluir que o conjunto funciona como uma única parede de rigidez igual a soma da rigidez de

cada parede. Consegue-se aumentar a rigidez do conjunto de paredes, quando se unem esses elementos através de lintéis.

Na figura (1.5) mostra-se a associação de duas paredes através de lintéis iguais, e espaçados entre si de  $h$ . O carregamento indicado consta de carga horizontal  $q_w$ , uniformemente distribuída ao longo da altura  $H$  do painel, e de carga vertical  $\alpha_w p$ , uniformemente distribuída ao longo dos eixos verticais que passam pelos centros de gravidade de cada parede. Consideram-se positivos os sentidos dos esforços indicados nesta figura.

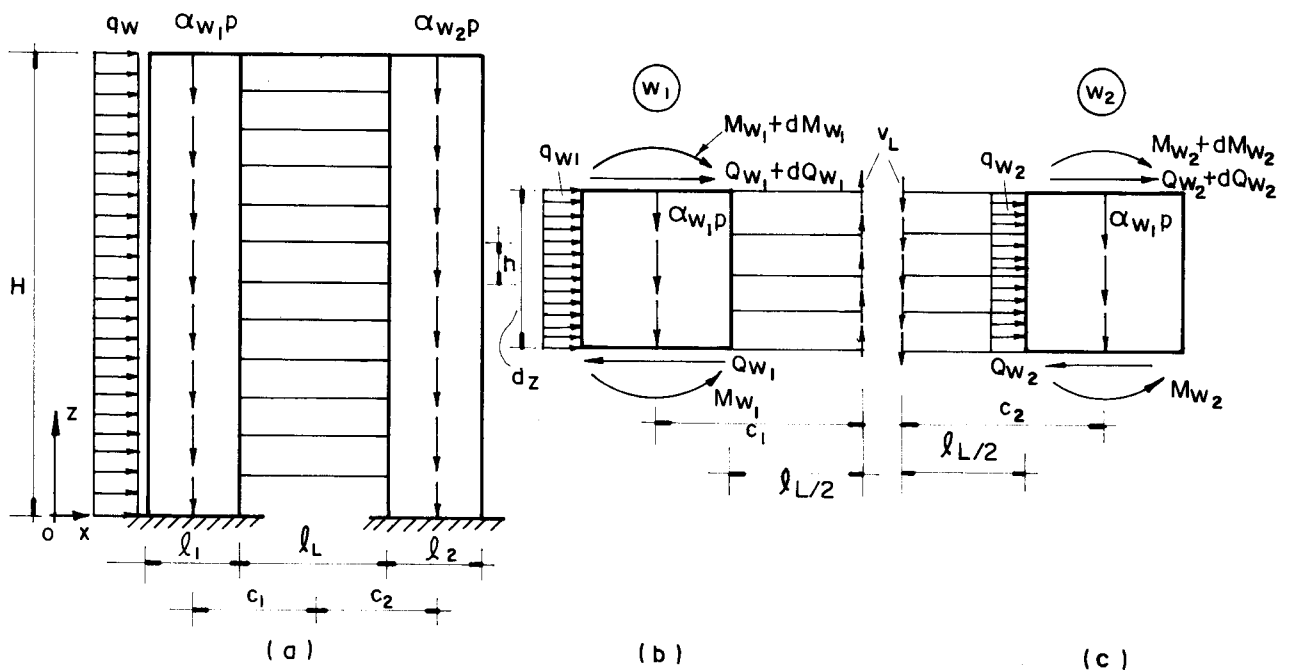


Figura 1.5 - Associação de paredes por lintéis

Os lintéis são perfeitamente engastados nas paredes e supõe-se que os centros de seus vãos são pontos de momento nulo. Nestes pontos aparecem forças cortantes incógnitas  $v_L$ , distribuídas uniformemente ao longo do espaçamento  $h$ , conforme a técnica do meio contínuo.

Denominam-se  $j_{w_1}$ ,  $j_{w_2}$ ,  $j_L$  os produtos de rigidez  $EJ_{w_1}$  da parede 1,  $EJ_{w_2}$  da parede 2 e  $EJ_L$  dos lintéis, respectivamente.

O equilíbrio do elemento genérico de altura  $dz$  da parede 1, indicado na figura (1.5-b), conduz a:

$$Q_{w_1} = - \frac{dM_{w_1}}{dz} + v_L c_1 \quad (1.36)$$

ou, tendo em vista a equação (1.3),

$$Q_{w_1} = - j_{w_1} u''' + v_L c_1 \quad (1.37)$$

Da mesma maneira, o equilíbrio do elemento genérico de altura  $dz$  da parede 2, indicado na figura (1.5-c), juntamente com a equação (1.3), fornece:

$$Q_{w_2} = - j_{w_2} u''' + v_L c_2 \quad (1.38)$$

Obtêm-se a força cortante interna da estrutura somando-se as forças cortantes que atuam em cada elemento isoladamente. Desta soma, de acordo com as equações (1.37) e (1.38), resulta:

$$Q_{w,int} = - j_g u''' + (c_1 + c_2) v_L \quad (1.39)$$

onde:

$$j_g = j_{w_1} + j_{w_2} \quad (1.40)$$

Para se determinar a força cortante incôgnita  $v_L$ , considera-se um lintel seccionado no ponto de momento nulo (centro de seu vão), de acordo com o indicado na figura (1.6). Este ponto desloca-se diferentemente, conforme pertença a uma ou a outra parede, devido: à deformação do lintel por flexão e força cortante (figura 1.6-a), à deforma-

ção da parede por flexão (figura 1.6-b) e a deformação da parede por força normal. Despreza-se esta última deformação, por supor-se as paredes indeformáveis axialmente. Consideram-se positivos os deslocamentos de sentido da base para o topo.

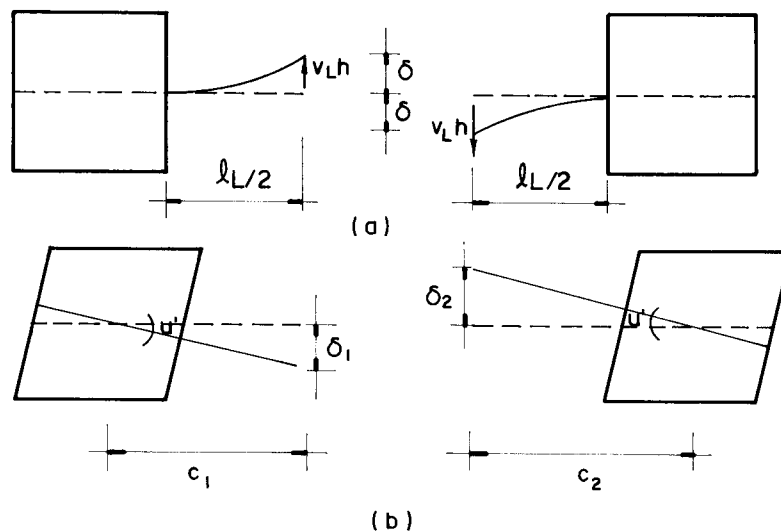


Figura 1.6 - Deslocamentos dos centros dos vãos dos lintéis

A equação de compatibilidade para tais deslocamentos será:

$$-\delta_1 + \delta = \delta_2 - \delta \quad (1.41)$$

onde:

$\delta_1$  e  $\delta_2$  são os deslocamentos devidos às deformações por flexão, relativos às paredes 1 e 2, respectivamente, e dados por:

$$\delta_1 = c_1 u'$$

$$\delta_2 = c_2 u' \quad (1.42)$$

e

$\delta$  é o deslocamento devido à deformação dos linteis por flexão e força cortante expresso por:

$$\delta = \frac{v_L h (\ell_L / 2)^3}{3j_L} + \frac{v_L h (\ell_L / 2)}{GA_L} \quad (1.43)$$

onde:

$G$  é o módulo de elasticidade transversal

$A_L$  é a área da seção transversal do lintel

$\ell_L$  é o comprimento do vão do lintel.

Substituindo-se as equações (1.42) e (1.43) na equação (1.41), resulta:

$$-c_1 u' + \left( \frac{v_L h \ell_L^3}{24j_L} + \frac{v_L h \ell_L}{2GA_L} \right) = c_2 u' - \left( \frac{v_L h \ell_L^3}{24j_L} + \frac{v_L h \ell_L}{2GA_L} \right) \quad (1.44)$$

Resolvendo-se a equação (1.44) para  $v_L$ , chega-se a:

$$v_L = \frac{s_g}{(c_1 + c_2)} u' \quad (1.45)$$

onde:

$$s_g = \frac{(c_1 + c_2)^2}{h \left( \frac{\ell_L^3}{12j_L} + \frac{\ell_L}{GA_L} \right)} \quad (1.46)$$

Substituindo-se a equação (1.45) na equação (1.39), obtêm-se a expressão para a força cortante interna no painel dada por:

$$Q_{w,int} = -j_g u''' + s_g u' \quad (1.47)$$

A força cortante externa total, devido ao carregamento, será obtida pela soma das forças cortantes em cada parede, provenientes dos quinhões de cargas externas absorvidas por estes elementos, que de acordo com a equação (1.6) valem:

$$Q_{w_1,ext} = \alpha_{w_1} p(H-z)u' + Q_{w_1,q} \quad (1.48-a)$$

$$Q_{w_2,ext} = \alpha_{w_2} p(H-z)u' + Q_{w_2,q} \quad (1.48-b)$$

onde:

$Q_{w_1,q}$  é a força cortante recebida pela parede 1 devido ao carregamento lateral.

$Q_{w_2,q}$  é a força cortante recebida pela parede 2 devido ao carregamento lateral.

A soma das forças cortantes  $Q_{w_1,ext}$  e  $Q_{w_2,ext}$  (equações 1.48) conduz a:

$$Q_{ext} = \alpha_w p(H-z)u' + q_w(H-z) \quad (1.49)$$

onde:



$Q_{ext}$  é a força cortante externa total em uma cota  $z$  da altura do painel.

e

$$\alpha_w = \alpha_{w_1} + \alpha_{w_2}$$

Em qualquer cota  $z$ , a força cortante externa é equilibrada pela força cortante interna. Portanto, igualando-se a equação (1.47) à equação (1.49), obtém-se a equação geral de equilíbrio,

$$j_g u'''' - \left[ s_g - \alpha_w p(H-z) \right] u' = - q_w(H-z) \quad (1.50)$$

Nota-se novamente a equivalência entre a equação (1.50) e a equação (1.22) obtida para a associação de um pórtico com uma parede ligados por barras biarticuladas. Isto indica que o painel analisado acima comporta-se como um painel geral e que apesar das paredes deformarem-se apenas à ação do momento fletor, a estrutura aporticada resultante da associação destes elementos verticais por lintéis torna o conjunto sujeito à deformabilidade também por força cortante.

As condições de contorno utilizadas na resolução da equação (1.50) são as mesmas expressas pelas equações (1.21).

A estrutura da figura (1.5) pode ser generalizada para o caso de  $n$  paredes unidas por lintéis, conforme indica-se na figura (1.7).

A força cortante total no painel, constituído de  $n$  paredes e  $m$  conjunto de lintéis, é calculada em qualquer cota  $z$ , a partir da equação (1.50), cujos parâmetros são fornecidos pelo seguinte conjunto de equações:

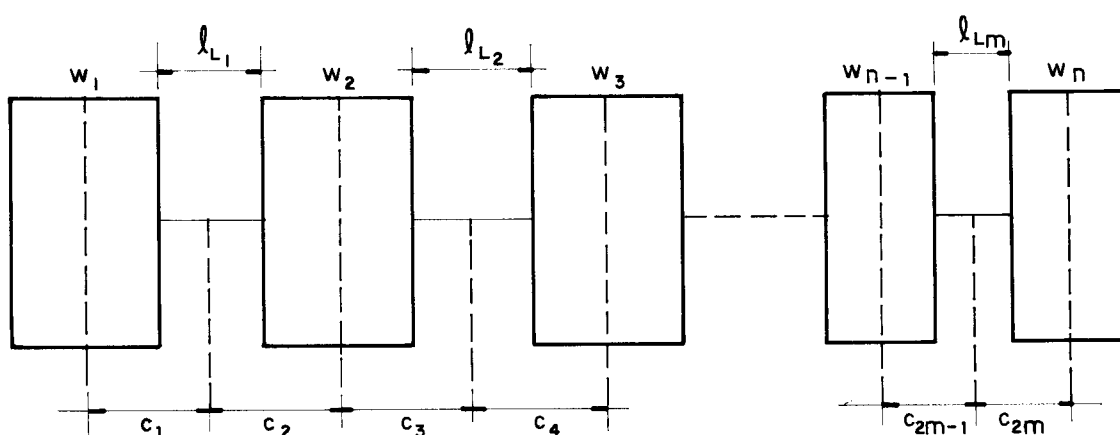


Figura 1.7 - n paredes unidas por lintéis

$$j_g = \sum_{i=1}^n j_{w_i} \quad (1.51-a)$$

$$s_g = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^m \frac{(c_{2i-1} + c_{2i})^2}{\frac{l_{L_i}^3}{12j_{L_i}} + \frac{l_{L_i}}{GA_{L_i}}} \quad (1.52-b)$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_{w_i} \quad (1.51-c)$$

### 1.6 - Métodos de Análise Numérica

Em 1.5 estudaram-se três casos de associação entre painéis, que resultavam em estruturas de comportamento característico de um painel geral. Em 1.5.2 e 1.5.3 observou-se que o comportamento de cada painel resultante, sob idênticas condições de carregamento, ficava expresso através da formulação de equações diferenciais, nos deslocamentos horizontais da associação, equivalentes à equação obtida para a associação de uma parede e um pórtico por barras biarticuladas, analisada em 1.5.1. Concluiu-se, então, que

os casos de associações entre painéis, citados acima, podem ser representados pela equação diferencial,

$$j_g u'''' - \left[ s_g - \alpha p(H-z) \right] u' = - q(H-z) \quad (1.52)$$

onde  $j_g$  e  $s_g$  são parâmetros característicos de um painel geral, calculados de acordo com os tipos de painéis associados (parede ou pórtico) e com o meio contínuo de ligação (barras biarticuladas ou lintéis).

A solução exata da equação (1.52) é inexequível, tornando-se, portanto, necessário, utilizar métodos de análise numérica que conduzem a uma solução aproximada para os deslocamentos horizontais em qualquer cota  $z$ .

Com a finalidade de se confrontarem os resultados, utiliza-se neste trabalho o método das diferenças finitas e uma variante do método de Stodola-Vianello. Ambos os processos envolvem uma considerável quantidade de trabalho numérico, tornando-se necessário o uso do computador. Por este motivo desenvolveram-se dois programas em linguagem Fortran, para o computador IBM-370/148, um para cada método.

#### 1.6.1 - Método das diferenças finitas

A aplicação do método das diferenças finitas à solução de equações diferenciais, geradas pelo tratamento contínuo em edifícios altos sob carga lateral, pode ser encontrada em diversos trabalhos como em Barbosa [1] e Mancini [9]. Com base nestes trabalhos, desenvolvem-se aqui as expressões algébricas necessárias à utilização desta técnica na solução da equação diferencial (1.52), procurando-se, de maneira sucinta, explicar o desenvolvimento de tal processo.

O método das diferenças finitas é uma técnica numérica para se obterem soluções aproximadas de equações diferenciais. Neste método, as derivadas da função desconhecida  $f(z)$  são aproximadas às derivadas de uma parábola de

grau  $r$  ( $r \geq \tilde{a}$  ordem da equação diferencial) que intercepta a função em  $r+1$  pontos igualmente espaçados de  $h$ , sobre o eixo dos  $z$ .

Com o propósito de se obterem operadores com número simétrico de pontos, optou-se pela parábola de interpolação do quarto grau

$$p(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E \quad (1.53)$$

cujos valores nos pontos de interpolação ( $i-2h, i-h, i, i+h, i+2h$ ) devem coincidir com os valores da função desconhecida  $f(z)$ , que de acordo com a figura (1.8) valem:

$$\begin{aligned} f(i-2h) &= F_{ee} \\ f(i-h) &= F_e \\ f(i) &= F_i \\ f(i+h) &= F_d \\ f(i+2h) &= F_{dd} \end{aligned} \quad (1.54)$$

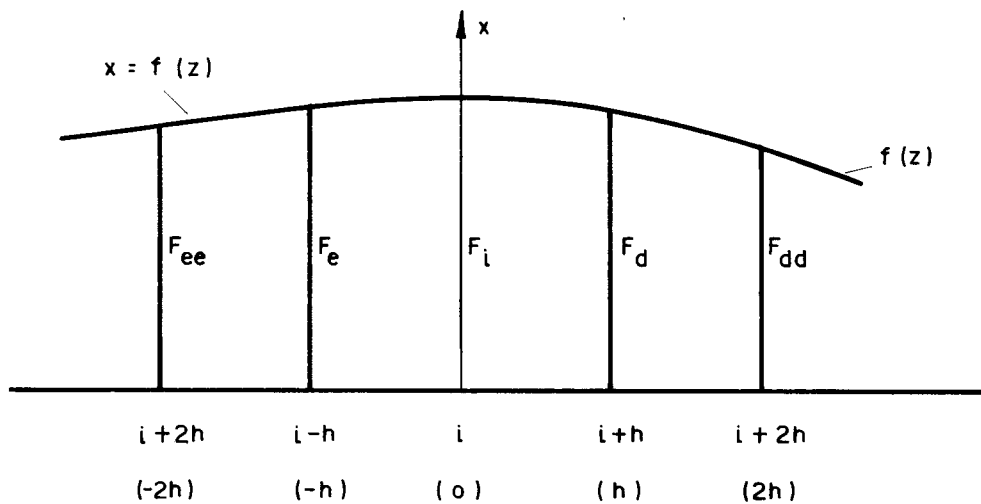


Figura 1.8 - Valores da função

Passando-se a parábola  $p(z)$  pelos cinco pontos de interpolação e tomando-se a abscissa do ponto  $i$  como origem, resulta o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} (2h)^4 & -(2h)^3 & (2h)^2 & -2h & 1 \\ h^4 & -h^3 & h^2 & -h & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ h^4 & h^3 & h^2 & h & 1 \\ (2h)^4 & (2h)^3 & (2h)^2 & 2h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ee} \\ F_e \\ F_i \\ F_d \\ F_{dd} \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

cuja solução fornece os valores dos coeficientes do polinômio, expressos por:

$$A = \frac{1}{24h^4} [F_{ee} - 4F_e + 6F_i - 4F_d + F_{dd}]$$

$$B = \frac{1}{12h^3} [-F_{ee} + 2F_e - 2F_d + F_{dd}]$$

$$C = \frac{1}{24h^2} [-F_{ee} + 16F_e - 30F_i + 16F_d - F_{dd}]$$

$$D = \frac{1}{12h} [F_{ee} - 8F_e + 8F_d + F_{dd}]$$

$$E = F_i \quad (1.56)$$

Como a função  $f(z)$  é aproximada pelo polinômio  $p(z)$  no intervalo  $(-2h, 2h)$ , podem-se obter todas as derivadas de  $f(z)$  neste intervalo. Para o ponto  $i$  as expressões

das derivadas são denominadas de diferenças finitas centrais e para os demais pontos do intervalo recebem o nome de diferenças finitas assimétricas à esquerda ou à direita, conforme o ponto esteja à esquerda ou à direita do ponto central  $i$ . Desta maneira, as expressões para as terceiras, segundas e primeiras derivadas de  $f(z)$  nos pontos em que  $z$  é igual a ze ro,  $-h$  e  $h$  são:

$$F_i''' = p'''(o) = 6B$$

$$F_i'' = p''(o) = 2C$$

$$F_i' = p'(o) = D \quad (1.57-a)$$

$$F_e''' = p'''(-h) = -24Ah + 6B$$

$$F_e'' = p''(-h) = 12Ah^2 - 6Bh + 2C$$

$$F_e' = p'(-h) = -4Ah^3 + 3Bh^2 - 2Ch + D \quad (1.57-b)$$

$$F_d''' = p'''(h) = 24Ah + 6B$$

$$F_d'' = p''(h) = 12Ah^2 + 6Bh + 2C$$

$$F_d' = p'(h) = 4Ah^3 + 3Bh^2 + 2Ch + D \quad (1.57-c)$$

ou, tendo em vista as expressões (1.56), obtêm-se:

a) Diferenças finitas centrais

$$F_i''' = \frac{1}{2h^3} \left[ -F_{ee} + 2F_e - 2F_d + F_{dd} \right]$$

$$F_i'' = \frac{1}{12h^2} \left[ -F_{ee} + 16F_e - 30F_i + 16F_d - F_{dd} \right]$$

$$F_i' = \frac{1}{12h} \left[ F_{ee} - 8F_e + 8F_d - F_{dd} \right] \quad (1.58-a)$$

b) Diferenças finitas assimétricas à esquerda

$$F_e''' = \frac{1}{2h^3} \left[ -3F_{ee} + 10F_e - 12F_i + 6F_d - F_{dd} \right]$$

$$F_e'' = \frac{1}{12h^2} \left[ 11F_{ee} - 20F_e + 6F_i + 4F_d - F_{dd} \right]$$

$$F_e' = \frac{1}{12h} \left[ -3F_{ee} - 10F_e + 18F_i - 6F_d + F_{dd} \right] \quad (1.58-b)$$

c) Diferenças finitas assimétricas à direita

$$F_d''' = \frac{1}{2h^3} \left[ F_{ee} - 6F_e + 12F_i - 10F_d + 3F_{dd} \right]$$

$$F_d'' = \frac{1}{12h^2} \left[ -F_{ee} + 4F_e + 6F_i - 20F_d + 11F_{dd} \right]$$

$$F_d' = \frac{1}{12h} \left[ -F_{ee} + 6F_e - 18F_i + 10F_d + 3F_{dd} \right] \quad (1.58-c)$$

Definindo-se como parâmetros adimensionais os seguintes valores,

$$\lambda = \frac{s}{j_g} H^2 \quad (1.59)$$

$$P = \frac{\alpha_p H^3}{j_g} \quad (1.60)$$

$$\eta = \frac{z}{H} \quad (1.61)$$

onde:

- a)  $\lambda$  é o parâmetro de rigidez relativa de um painel plano constituído de parede e pórtico ou sô de paredes.
- b)  $P$  é um parâmetro que expressa a carga vertical  $p$
- c)  $\eta$  expressa a ordenada de qualquer ponto da altura  $H$  do painel,

a equação (1.52) pode ser reescrita na forma

$$u'''' - [\lambda - P(1-\eta)] u' = - \frac{qH^4}{j_g} (1-\eta) \quad (1.62)$$

onde agora  $u = u(\eta)$  e tendo em conta que

$$\frac{d^i u(\eta)}{d\eta^i} = H^i \frac{d^i u(z)}{dz^i}$$

As condições de contorno, expressas pelas equações (1.21), passam a ser escritas como:

- a)  $u(0) = 0$
- b)  $u'(0) = 0$
- c)  $u''(1) = 0$  (1.63)

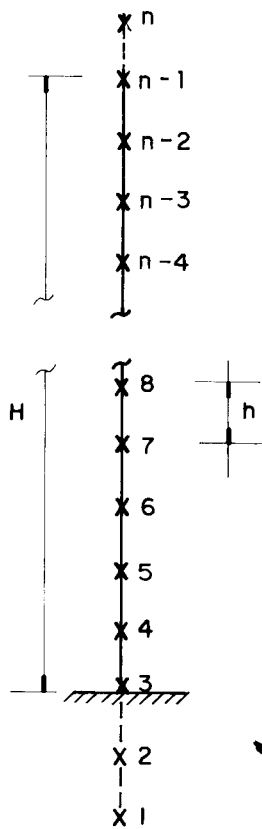


onde,  $\eta = 0$  para  $z = 0$  e  $\eta = 1$  para  $z = H$ .

Para a aplicação do método das diferenças finitas à solução da equação (1.62), considera-se uma malha constituída de  $n$  pontos, igualmente espaçados de  $h$  sobre o eixo dos  $z$ , com  $n-3$  pontos pertencentes a estrutura e três pontos exteriores denominados pontos fictícios, por não pertencerem ao sistema físico, conforme indica-se na figura (1.9).

A aplicação da equação (1.62) aos pontos 3 a  $n-1$  e a imposição das três condições de contorno, expressas pelas equações (1.63), conduzem a um sistema de  $n$  equações nas  $n$  incógnitas, correspondentes ao valor da função desconhecida  $u(\eta)$  em cada um dos  $n$  pontos de subdivisão.

Indica-se por  $N_s$  o número de subdivisões que terá a estrutura de altura total  $H$ , após a aplicação da rede de pontos, sendo o seu valor obtido através da expressão.



$$N_s = \frac{1}{h} \quad (1.64)$$

Figura 1.9 - Rede de pontos

Chama-se  $F(M)$  o deslocamento horizontal  $u$  do painel em um ponto genérico  $M$  da malha de pontos. Utilizando-se a equação (1.64) e os operadores de diferenças centrais  $F_i'''$  e  $F_i'$ , que envolvem dois pontos à direita e dois pontos à esquerda do ponto de aplicação  $i$  e são dados pelas equação (1.58-a), escreve-se a equação (1.62) em diferenças finitas, como:

$$\begin{aligned}
 & - \left\{ 6 + \frac{1}{N_s^2} \left[ \lambda - P(1 - \eta(M)) \right] \right\} F(M-2) + \left\{ 12 + \frac{8}{N_s^2} \left[ \lambda - P(1 - \eta(M)) \right] \right\} F(M-1) + \\
 & - \left\{ 12 + \frac{8}{N_s^2} \left[ \lambda - P(1 - \eta(M)) \right] \right\} F(M+1) + \left\{ 6 + \frac{1}{N_s^2} \left[ \lambda - P(1 - \eta(M)) \right] \right\} F(M+2) = \\
 & = - \frac{12}{N_s^3} \cdot \frac{qH^4}{j_g} (1 - \eta(M)) \quad (1.65)
 \end{aligned}$$

onde  $\eta(M)$  exprime o valor da coordenada adimensional do ponto  $M$ .

No ponto  $M = N-1$ , no topo do edifício, observa-se que não se pode aplicar a equação (1.65), obtida com a utilização dos operadores centrais. Utilizam-se, então, os operadores assimétricos à direita  $F_d''$  e  $F_d'$ , deduzidas nas equações (1.58-c), que aproximam às derivadas da função, no ponto a direita do ponto central  $i$ , às derivadas do polinômio de interpolação, envolvendo três pontos à esquerda e um ponto à direita do seu ponto de aplicação  $d = N-1$ .

Então, para o topo do edifício, a equação (1.62) escreve-se em diferenças finitas como:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ 6 + \frac{1}{N_s^2} \left[ \lambda - P(1 - \eta(N-1)) \right] \right\} F(N-4) - \left\{ 36 + \frac{6}{N_s^2} \left[ \lambda - P(1 - \eta(N-1)) \right] \right\} \\
 & \cdot F(N-3) + \left\{ 72 + \frac{18}{N_s^2} \left[ \lambda - P(1 - \eta(N-1)) \right] \right\} F(N-2) - \left\{ 60 + \frac{10}{N_s^2} \left[ \lambda + \right. \right. \\
 & \left. \left. - P(1 - \eta(N-1)) \right] \right\} F(N-1) + \left\{ 18 - \frac{3}{N_s^2} \left[ \lambda - P(1 - \eta(N-1)) \right] \right\} F(N) = \\
 & = - \frac{12}{N_s^3} \cdot \frac{qH^4}{j_g} \left[ 1 - \lambda(N-1) \right] \quad (1.66)
 \end{aligned}$$

As condições de contorno  $u(o) = 0$  e  $u'(o) = 0$ , tendo em vista as equações (1.58-a), são expressas, respectivamente, por:

$$F(3) = 0$$

$$F(1) - 8F(2) + 8F(4) - F(5) = 0 \quad (1.67)$$

A condição de contorno  $u''(1) = 0$ , no topo do edifício, será escrita em diferenças finitas utilizando-se o operador assimétrico à direita  $F_d''$ , que calcula a segunda derivada da função no ponto  $d = N-1$ , localizado à direita do ponto central  $i$ , conforme indicado nas equações (1.58-c). Este operador envolve um ponto à direita (ponto N) e três pontos à esquerda (pontos N-4, N-3 e N-2) do ponto de aplicação N-1.

Assim, a terceira das equações (1.63) escreve-se como:

$$-F(N-4) + 4F(N-3) + 6F(N-2) - 20F(N-1) + 11F(N) = 0 \quad (1.68)$$

As equações (1.65), (1.66), (1.67) e (1.68) formam um sistema de N equações que, após ser resolvido, fornece os valores de  $F(1)$  a  $F(N)$  correspondentes aos deslocamentos horizontais  $u$  da estrutura nos pontos 1 a N.

#### 1.6.2 - Método de Stodola-Vianello

O método de Stodola-Vianello é um processo de integração numérica de equações diferenciais resultando em expressões aproximadas para funções desconhecidas. Na sua formulação clássica, segundo Hildebrand [8] e Rogers [11], tal método é um processo iterativo bastante flexível, que permite variantes com considerações de interpolação.

A eficiência de tal processo foi constatada por Seixas [13], que utilizou tanto o processo clássico, na análise de associações planas de pórtico e paredes, quanto a variante do método com considerações de interpolação, nas análises de associações planas e tridimensionais de pórticos e paredes. Em seu trabalho, Seixas [13] concluiu que a variante do método convergia mais rapidamente que o processo clássico, sendo por isso mais eficiente que este último.

Tomando por base as conclusões obtidas por Seixas [13], optou-se, neste trabalho, pela utilização da variante do método com considerações de interpolação.

No caso de associações planas com carregamento lateral e vertical, a equação diferencial que rege o seu comportamento é dada pela equação (1.62). Transpondo o termo envolvendo  $u'$  para o lado direito daquela equação e integrando três vezes em relação a  $z$ , obtém-se, na forma integral, a equação de recorrência do método, expressa por:

$$\bar{u} = \iiint \left\{ \frac{1}{H^2} \left[ \lambda - P \frac{(H-z)}{H} \right] u' - \frac{q}{j_g} (H-z) \right\} dz + C_1 + C_2 z + C_3 \frac{z^2}{2} \quad (1.69)$$

onde,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são as constantes de integração determinadas pelas condições de contorno:

$$\bar{u}(0) = 0$$

$$\bar{u}'(0) = 0$$

$$\bar{u}''(H) = 0 \quad (1.70)$$

Observa-se que  $C_1$  e  $C_2$  resultam nulas com a imposição, respectivamente, das duas primeiras condições de contorno dadas pelas equações (1.70) e  $C_3$  será determinada com a aplicação da terceira condição,  $\bar{u}''(H) = 0$ , desde que se adote para  $\underline{u}$  a aproximação definida adiante em (1.71).

O processo consiste em se tomar como solução aproximada para o deslocamento  $u$ , do lado direito da equação (1.69), um polinômio de grau finito em  $z$ , dado por:

$$u(z) = A_1 z^2 + A_2 z^3 + A_3 z^4 + \dots + A_{n-1} z^n \quad (1.71)$$

que deverá satisfazer as condições de contorno:

$$u(0) = 0$$

$$u'(0) = 0$$

$$u''(H) = 0 \quad (1.72)$$

Os coeficientes  $A_{i-1}$  ( $i=2, n$ ) constituem o conjunto de incógnitas, que será determinado ao longo do desenvolvimento do método.

Substituindo-se a equação (1.71) na equação (1.69), após as integrações indicadas, obtêm-se para  $\bar{u}$  a expressão:

$$\bar{u} = \sum_{i=2}^n \left[ \frac{\lambda \eta^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - P \left( \frac{\eta^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \frac{i \eta^{i+3}}{(i+1)(i+2)(i+3)} \right) \right] \cdot A_{i-1} H^i + \frac{qH^4}{24j_g} \eta^2 (\eta^2 - 4\eta) + C_3 \frac{\eta^2 H^2}{2} \quad (1.73)$$

Impondo-se a condição  $\bar{u}''(z) = 0$ , para  $z = H$  ou  $\eta = 1$ , à solução  $\bar{u}$ , obtêm-se:

$$C_3 = \sum_{i=2}^n \frac{1}{H^2} \left[ -\lambda + P \left( 1 - \frac{i}{i+1} \right) \right] A_{i-1} H^i + \frac{qH^2}{2j_g} \quad (1.74)$$

Levando-se a equação (1.74) na equação (1.73) resulta:

$$\bar{u} = \sum_{i=2}^n \left[ \lambda \left( \frac{\eta^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \frac{\eta^2}{2} \right) + P \left( \frac{\eta^2}{2(i+1)} - \frac{\eta^{i+2} [i(1-\eta)+3]}{(i+1)(i+2)(i+3)} \right) \right] \cdot A_{i-1} H^i + \frac{qH^4}{24j_g} \eta^2 (6-4\eta+\eta^2) \quad (1.75)$$

Os valores dos deslocamentos em qualquer cota, fornecidos pela expressão de  $\bar{u}$  (equação 1.75), deverão ser tão próximos quanto possíveis dos valores fornecidos pelo polinômio  $u(z)$ , o qual se expressa em função da cota  $\eta$ , conforme as equações (1.61) e (1.71), como:

$$u(\eta) = A_1 H^2 \eta^2 + A_2 H^3 \eta^3 + \dots + A_{n-1} H^n \eta^n \quad (1.76)$$

Caso a precisão alcançada entre os valores de  $\bar{u}(\eta)$  e  $u(\eta)$  não seja satisfatória, toma-se um novo grau para o polinômio  $u(z)$  e o processo é repetido.

Para a determinação dos  $n-1$  coeficientes  $A_{i-1}$  ( $i=2, n$ ) dos polinômios torna-se necessário formar o sistema das  $n-1$  equações lineares cuja solução fornecerá os valores destas incôgnitas.

Observa-se que as duas primeiras condições de contorno, fornecidas pelas equações (1.72), são obedecidas pela equação (1.76), para  $\eta = 0$ . Impondo-se a terceira condição, para  $\eta = 1$ , obtêm-se a primeira equação do sistema, dada por:

$$2A_1 H^2 + 3A_2 H^3 + 12A_3 H^4 + \dots + n(n-1)A_{n-1} H^n = 0 \quad (1.77)$$

ou, em forma de somatório

$$\sum_{i=2}^n i(i-1)A_{i-1}H^i = 0 \quad (1.78)$$

De acordo com o que foi dito anteriormente, o método de Stodola-Vianello, em sua variante, consiste em aproximar os polinômios  $u(\eta)$  e  $\bar{u}(\eta)$ . Sucessivas estimativas, a cada grau adotado para  $u(\eta)$ , requerem que as funções  $u(\eta)$  e  $\bar{u}(\eta)$  concordem, tanto quanto possível, em todas as cotas  $\eta$  ao longo da altura  $H$  da estrutura. Um simples processo dessas estimativas consiste em impor a condição de que a integral sobre o intervalo ( $\eta=0, \eta=1$ ) da diferença entre estas funções seja nula, isto é:

$$\int_0^1 (\bar{u}(\eta) - u(\eta))d\eta = 0 \quad (1.79)$$

ou,

$$\int_0^1 \bar{u}(\eta)d\eta = \int_0^1 u(\eta)d\eta \quad (1.80)$$

Aplicando-se esta condição obtêm-se a segunda equação do sistema, dada por:

$$\sum_{i=2}^n \left[ \frac{1}{i+1} + \lambda \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{(i+1)(i+2)(i+3)} \right) + \right. \\ \left. + P \left( \frac{4}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)} - \frac{1}{6(i+1)} \right) \right] \cdot A_{i-1}H^i = \frac{qH^4}{20j_g} \quad (1.81)$$

Das  $n-1$  equações necessárias, duas equações (1.78) e (1.81) já foram determinadas, resta agora determinar as outras  $n-3$  equações.

A função  $\bar{u}(\eta)$  impõe-se a condição que concorde com  $u(\eta)$  em certos pontos distintos ao longo da altura da estrutura. Esses pontos definidos como pontos de interpolação, são tomados dentro do intervalo ( $\eta=0, \eta=1$ ) e em número suficiente, de modo que a igualdade entre  $\bar{u}(\eta)$  e  $u(\eta)$ , nestes pontos, gere as  $n-3$  equações restantes.

Considerando-se o conjunto de pontos de interpolação  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-3}\}$  com  $\xi_j = \frac{z_j}{H}$ , ( $j=1, n-3$ ), tem-se, para um ponto genérico

$$\bar{u}(\xi_k) = u(\xi_k) \quad (1.82)$$

Substituindo-se as equações (1.75) e (1.76) na equação (1.82) para  $\eta = \xi_k$ , obtêm-se:

$$\sum_{i=2}^n \left[ \xi_k^i + \lambda \left( \frac{\xi_k^2}{2} - \frac{\xi_k^{i+2}}{(i+1)(i+2)} \right) + P \left( \frac{\xi_k^{i+2} [i(1-\xi_k)+3]}{(i+1)(i+2)(i+3)} + \frac{\xi_k^2}{2(i+1)} \right) \right] A_{i-1} H^i = \frac{qH^4}{24j_g} \cdot \xi_k^2 (6-4\xi_k + \xi_k^2) \quad (1.83)$$

Resolvendo-se o sistema formado pelas equações (1.78), (1.81) e (1.83) para  $k = 1, \dots, n-3$ , obtêm-se os valores das incógnitas  $A_{i-1}$  ( $i=2, n$ ) que, substituídos nas equações (1.75) e (1.76), possibilitam o cálculo dos deslocamentos horizontais em todas as cotas ao longo da altura  $H$  da associação, com a utilização de uma ou outra equação, indistintamente.

### 1.7 - Programas em linguagem Fortran

Com base nas equações resultantes da aplicação dos dois métodos numéricos, diferenças finitas (item 1.6.1)



e Stodola-Vianello em sua variante (item 1.6.2), à solução da equação diferencial (1.52), foram escritos dois programas em linguagem Fortran para o computador IBM-370/148, um para cada método.

Apresenta-se a seguir uma descrição dos dados de entrada, principais variáveis e impressão dos resultados de cada programa, acompanhada das respectivas listagens.

1.7.1 - Programa para a resolução, pelo método das diferenças finitas, da equação diferencial resultante da associação plana de painéis.

a) Dados de entrada

Grupo 1:

PI - valor inicial da carga vertical uniformemente distribuída p.

formato de entrada - F10.0

ACREP - quantidade fixada para o incremento da carga vertical p.

formato de entrada - F10.0

PCRIT - carga crítica de flambagem da associação.

formato de entrada - F10.0

NS - número de subdivisão obtido com o lançamento da rede de pontos.

formato de entrada - I2

IND - é um inteiro que especifica que grupo de dados será escolhido para o prosseguimento da leitura, ou seja:

se IND=1, a leitura segue para o grupo 2

se IND≠1, a leitura segue para o grupo 3

formato de entrada - I2

Grupo 2:

LAMB - parâmetro adimensional, que indica a relação entre as rigidezes  $s_g$  e  $j_g$  de um painel geral e definido por:  $LAMB = (SG * H ** 2) / JG$   
formato de entrada - F10.0

FQ - fator de carga horizontal tomado igual a um (1.0) (observação:  $FQ = Q * H ** 4 / JG$ )  
formato de entrada - F10.0

FP - fator de carga vertical tomado igual a um (1.0) (observação  $FP = ALFA * H ** 3 / JG$ )  
formato de entrada - F10.0

Grupo 3:

SG - parâmetro de rigidez de um painel geral  $\underline{s}_g$   
formato de entrada - F10.0

JG - parâmetro de rigidez de um painel geral  $\underline{j}_g$   
formato de entrada - F10.0

ALFA - somatória dos coeficientes de distribuição da carga vertical p.  
formato de entrada - F10.0

H - altura total do painel  
formato de entrada - F10.0

Q - carga horizontal uniformemente distribuída por unidade de comprimento.  
formato de entrada - F10.0

b) Principais variáveis

NP - número de pontos da malha

ETA - vetor contendo os valores das cotas  $\eta_i = \frac{z_i}{H}$  dos pontos pertencentes ao domínio da altura do painel.

GBAR - vetor de ordem NP contendo os termos independentes do sistema de equações.

MC - matriz de ordem NP x NP constituída dos coeficientes das diferenças finitas.

PP - carga vertical uniformemente distribuída, inicializada com o valor PI e acrescida do valor ACREP até que seja atingido o valor da carga crítica de flambagem, especificado por PCRIT.

F - vetor de ordem NP cujos elementos, após a resolução do sistema de equações, expressarão os deslocamentos horizontais  $u$  do painel, nos diversos pontos da rede.

As demais variáveis que constam do programa têm a função de auxiliar no desenvolvimento do mesmo.

### c) Subrotinas

#### c.1) Subrotina DECOM

Inicia o processo de eliminação de Gauss, com pivotamento parcial, decompondo a matriz do sistema em um produto de duas matrizes triangulares, conforme Forsythe[5].

#### c.2) Subrotina SOLVE

Utiliza a matriz decomposta em DECOM para encontrar a solução do sistema de equações, conforme Forsythe[5].

#### c.3) Subrotina IMPRUV

Refina o resultado de SOLVE de acordo com o especificado por Forsythe[5].

c.4) Subrotina SING

Imprime algumas chamadas de controle, conforme Forsythe[5].

d) Impressão dos resultados

Os valores dos deslocamentos em todos os pontos da rede são impressos, para cada valor da carga vertical  $p$ , na forma  $u/(qH^4/j_g)$ , se  $IND=1$ , ou na forma  $u$ , se  $IND \neq 1$ .

e) Listagem do programa

(Ver páginas seguintes)

```
C=====
C==== PROGRAMA PRINCIPAL
C=====
C==== APLICACAO DO METODO DAS DIFERENCAS FINITAS - CASO PLANO
C=====
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,I-Z)
      REAL*8 JG,MC(64,64),MCI(64,64),LAMB
      DIMENSION ETA(64),GBAR(64),S(64),F(64)
      DIMENSION BI(64,64),IPS(64)
      OPEN(UNIT=1,STATUS='OLD',FILE='D4',ACCESS='SEQUENTIAL',FORM='FORMA
      *TTED')
      LEI=1
      *IMP=3
      IVA=0
C=====
C==== LEITURA DE DADOS
C=====
      READ(LEI,8)PI,ACREP,PCRI
      8 FORMAT(3F10.0)
      READ(LEI,10)NS
      10 FORMAT(I2)
      READ(LEI,12)IND
      12 FORMAT(I2)
      IF(IND-1)5,7,5
      7 READ(LEI,18)LAMB,FQ,FP
      18 FORMAT(3F10.0)
      SG TC 6
      5 READ(LEI,11)SG,JG,ALFA,H,Q
      11 FORMAT(5F10.0)
C=====
      LAMB=H**2*SG/JG
      FP=ALFA*H**3/JG
      FQ=Q*H**4/JG
      6 NP=NS+4
      L1=NP-1
      L2=NP-2
      L3=NP-3
      L4=NP-4
C=====
C==== CALCULO DAS COTAS E DO VETOR INDEPENDENTE
C=====
      DO 13 K1=1,NP
      ETA(K1)=0.
      GBAR(K1)=0.
      13 G(K1)=0.
      DO 14 K2=3,L1
      ETA(K2)=DFLOAT(K2-3)/DFLOAT(NS)
      JL=K2+1
      GBAR(JL)=-12.*FQ*(1.-ETA(K2))/NS**3
      14 CONTINUE
C=====
C==== GERACAO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
C=====
      DO 15 J=1,NP
      DO 15 JM=1,NP
      15 MC(J,JM)=0.
      MC(1,3)=1.
      MC(2,1)=1.
      MC(2,2)=-8.
      MC(2,4)=8.
      MC(2,5)=-1.
      MC(3,L4)=-1.
      MC(3,L3)=4.
      MC(3,L2)=6.
      MC(3,L1)=-20.
      MC(3,NP)=11.
      PP=PI
      23 P=PP*FP
      DO 16 M=3,L2
      J1=M+1
      J2=M-2
      J3=M-1
      J4=M+2
      G(M)=(LAMB-P*(1-ETA(M)))/NS**2
      MC(J1,J2)=-6.-G(M)
      MC(J1,J3)=12.+8.*G(M)
      MC(J1,J1)=-MC(J1,J3)
      MC(J1,J4)=-MC(J1,J2)
      16 CONTINUE
      G(L1)=(LAMB-P*(1-ETA(L1)))/NS**2
      MC(NP,L4)=6.+G(L1)
      MC(NP,L3)=-5.*MC(NP,L4)
      MC(NP,L2)=72.+18.*G(L1)
      MC(NP,L1)=-10.*MC(NP,L4)
      MC(NP,NP)=18.-3.*G(L1)
      DO 61 MD=1,NP
      DO 61 MQ=1,NP
      61 MCI(MD,MQ)=0.
      DO 60 IL=1,NP
      DO 60 II=1,NP
      MCI(IL,II)=MC(IL,II)
      60 CONTINUE
C=====
C==== RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES
C=====
      CALL DECOM(NP,MCI,BI,IPS)
      CALL SOLVE(NP,BI,GBAR,F,IPS)
      CALL IMPRUV(NP,MCI,BI,GBAR,F,IPS)
```

```
C=====
C==== IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS PARA CADA VALOR DA CARGA VERTICAL P
C=====
      WRITE(IMP,22)PP
      22 FORMAT(/,5X,'P=',G15.7,/)
      WRITE(IMP,33)
      33 FORMAT(/,5X,'DESLOCAMENTOS DA ESTRUTURA',/)
      WRITE(IMP,26)(I,F(I),I=3,L1)
      26 FORMAT(/,(5X,4('J(',I2,')=',G15.7,1X))
      PP=PP+ACREP
      IF(PP-PCRIT)23,23,141
      141 IVA=IVA+1
      IF(IVA-1)131,131,27
      131 PP=PCRIT
      GO TO 23
      27 WRITE(IMP,51)PCRIT
      51 FORMAT(/,5X,'PCRIT=',G15.7,/)
      CALL EXIT
      END
```

```
C=====
C==== SUBROTINA PARA PIVOTAMENTO E ESCALONAMENTO PARCIAL DA MATRIZ BI
C==== DOS COEFICIENTES DO SISTEMA DE EQUACOES
C=====
      SUBROUTINE DECOM(NK,BI,UL,IPS)
      IMPLICIT REAL*8(A-F,C-Z)
      DIMENSION BI(64,64),UL(64,64),SCALES(64),IPS(64)
      N=NK
      DO 5 I=1,N
      IPS(I)=1
      ROWNRM=0.
      DO 2 J=1,N
      UL(I,J)=BI(I,J)
      IF(ROWNRM-DABS(UL(I,J)))1,2,2
      1 ROWNRM=DABS(UL(I,J))
      2 CONTINUE
      IF(ROWNRM)3,4,3
      3 SCALES(I)=1.0/ROWNRM
      GO TO 5
      4 CALL SING(1)
      SCALES(I)=0.
      5 CONTINUE
```

```
C=====
C==== ELIMINACAO DE GAUSS COM PIVOTAMENTO PARCIAL
C=====
      NM1=N-1
      DO 17 K=1,NM1
      BIG=0.
      DO 11 I=K,N
      IP=IPS(I)
      SIZE=DABS(UL(IP,K))*SCALES(IP)
      IF(SIZE-BIG)11,11,10
      10 BIG=SIZE
      IDXPIV=I
      11 CONTINUE
      IF(BIG)13,12,13
      12 CALL SING(2)
      GO TO 17
      13 IF(IDXPIV-K)14,15,14
      14 J=IPS(K)
      IPS(K)=IPS(IDXPIV)
      IPS(IDXPIV)=J
      15 KP=IPS(K)
      PIVOT=UL(KP,K)
      KP1=K+1
      DO 16 I=KP1,N
      IP=IPS(I)
      EM=-UL(IP,K)/PIVOT
      UL(IP,K)=-EM
      DO 16 J=KP1,N
      UL(IP,J)=UL(IP,J)+EM*UL(KP,J)
      16 CONTINUE
      17 CONTINUE
      KP=IPS(N)
      IF(UL(KP,N))19,18,19
      18 CALL SING(2)
      19 RETURN
      END
```

```
C=====
C==== SUBROTINA PARA SOLUCAO DO SISTEMA A PARTIR DA MATRIZ
C==== TRIANGULARIZADA UL
C=====
```

```

SUBROUTINE SOLVE(NK,UL,B,X,IPS)
IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
DIMENSION UL(64,64),B(64),X(64),IPS(64)
N=NK
NP1=N+1
IP=IPS(1)
X(1)=B(IP)
DO 2 I=2,N
IP=IPS(I)
IM1=I-1
SUM=0.
DO 1 J=1,IM1
1 SUM=SUM+UL(IP,J)*X(J)
2 X(I)=B(IP)-SUM
IP=IPS(N)
X(N)=X(N)/UL(IP,N)
DO 4 IBACK=2,N
I=NP1-IBACK
IP=IPS(I)
IP1=I+1
SUM=0.
DO 3 J=IP1,N
3 SUM=SUM+UL(IP,J)*X(J)
4 X(I)=(X(I)-SUM)/UL(IP,I)
RETURN
END
```

```
C=====
C==== SUBROTINA PARA REFINAMENTO DA SOLUCAO DO SISTEMA
C=====
```

```

SUBROUTINE IMPROV(NK,BI,UL,B,X,IPS)
IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
DIMENSION BI(64,64),UL(64,64),B(64),X(64),R(64),DX(64)
DIMENSION IPS(64)
N=NK
EPS=1.00-16
ITMAX=16
XNORM=0.0
DO 1 I=1,N
1 XNORM=DMAX1(XNORM,DABS(X(I)))
IF(XNORM)3,2,3
2 DIGITS=-DLG10(EPS)
GO TO 10
3 DO 9 ITER=1,ITMAX
DO 5 I=1,N
SUM=0.
DO 4 J=1,N
4 SUM=SUM+BI(I,J)*X(J)
SUM=B(I)-SUM
5 R(I)=SUM
CALL SOLVE(N,UL,R,DX,IPS)
DXNCR=0.
DO 6 I=1,N
T=X(I)
X(I)=X(I)+DX(I)
DXNORM=DMAX1(DXNORM,DABS(X(I)-T))
6 CONTINUE
IF(ITER-1)8,7,8
7 DIGITS=-DLG10(DMAX1(DXNORM/XNORM,EPS))
8 IF(DXNCR-EPS*XNORM)10,10,9
9 CONTINUE
CALL SING(3)
10 RETURN
END
```

```
C=====
C==== SUBROTINA PARA IMPRESSAO DE MENSAGENS NA SOLUCAO
C=====
```

```

SUBROUTINE SING(IWHY)
IMP=3
11 FORMAT(5X,'MATRIZ COM LINHA NULA')
12 FORMAT(5X,'MATRIZ SINGULAR, DIVISAO POR ZERO EM SOLVE')
13 FORMAT(5X,'NAO HA CONVERGENCIA EM IMPROV E QUASE SING')
GO TO (1,2,3),IWHY
1 WRITE(IMP,11)
GO TO 10
2 WRITE(IMP,12)
GO TO 10
3 WRITE(IMP,13)
10 RETURN
END
```

1.7.2 - Programa para a resolução, pela variante do método de Stodola-Vianello, da equação diferencial resultante da associação plana de painéis.

a) Dados de entrada

Grupo 1:

PI - valor inicial da carga vertical uniformemente distribuída p.

formato de entrada - F10.0

PCRIT - carga crítica de flambagem da associação

formato de entrada - F10.0

NA - número de andares da estrutura

formato de entrada - I2

IGRAU - grau inicial para o polinômio aproximador  $u(z)$

formato de entrada - I2

IGMAX - grau máximo que pode atingir o polinômio  $u(z)$

formato de entrada - I2

IND - é um inteiro que especifica que grupo de dados será escolhido para o prosseguimento da leitura, ou seja:

se  $IND=1$ , a leitura segue para o grupo 2.

se  $IND \neq 1$ , a leitura segue para o grupo 3.

formato de entrada - I2

GRUPO 2:

LAMB - parâmetro adimensional, que indica a relação entre as rigidezes  $s_g$  e  $j_g$  de um painel geral e definido

por:  $LAMB = (SG * H ** 2) / JG$ .

formato de entrada - F10.0

FQ - fator de carga horizontal tomado igual a um (1.0) (observação:  $FQ = Q * H ** 4 / JG$ ).

formato de entrada - F10.0



FP - fator de carga vertical considerado igual a um (1.0)  
(observação:  $FP = ALFA * H^{**3} / JG$ ).  
formato de entrada - F10.0

Grupo 3:

SG - parâmetro de rigidez de um painel geral  $s_g$   
formato de entrada - F10.0

JG - parâmetro de rigidez de um painel geral  $j_g$   
formato de entrada - F10.0

ALFA - somatória dos coeficientes de distribuição da carga  
vertical p.  
formato de entrada - F10.0

H - altura total da estrutura  
formato de entrada - F10.0

Q - carga horizontal uniformemente distribuída por unidade  
de comprimento.  
formato de entrada - F10.0

b) Principais variáveis

NC - número de cotas onde serão calculados os deslocamen-  
tos horizontais da estrutura.

ETA1 - vetor de ordem NC contendo os valores das cotas  
$$\eta_i = \frac{z_i}{H}$$

MK - ordem da matriz dos coeficientes do sistema de equa-  
ções.

QSII - vetor de ordem (MK-2), contendo os pontos de inter-  
polação  $\xi_i = \frac{z_i}{H}$ .

CA - vetor de ordem MK contendo os termos independentes do  
sistema de equações.

- PP - carga vertical uniformemente distribuída, inicializada com o valor PI e acrescida do valor ACREP até que seja atingido o valor da carga crítica de flambagem, especificado por PCRIT.
- MC - matriz de ordem MK x MK formada pelos coeficientes do sistema de equações.
- A - vetor de ordem MK contendo as incógnitas do sistema de equações.
- U - vetor de ordem NC, contendo os deslocamentos do painel nas diversas cotas  $\eta_i$ , obtidos através do polinômio aproximador  $u(z)$ .
- UBAR - vetor de ordem NC, contendo os deslocamentos do painel nas diversas cotas  $\eta_i$ , obtidos através do polinômio  $\bar{u}(z)$ , resultante das integrações sucessivas da equação diferencial (1.62).

As outras variáveis que aparecem no programa têm caráter meramente auxiliar, sendo seu emprego facilmente compreendido através de uma análise da listagem do programa.

### c) Subrotinas

O programa principal utiliza quatro subrotinas, para a resolução do sistema de equações através da eliminação de Gauss com refinamento da solução de acordo com Forsythe [5], denominadas por:

#### c.1) DECOM

Inicia o processo de eliminação de Gauss, com pivotamento parcial, decompondo a matriz do sistema em um produto de duas matrizes triangulares.

c.2) SOLVE

Utiliza a matriz decomposta em DECOM para encontrar a solução do sistema de equações.

c.3) IMPRUV

Refina o resultado obtido através da subrotina SOLVE.

c.4) SING

Imprime algumas chamadas de controle.

d) Impressão dos resultados

Os valores dos deslocamentos nas diversas cotas, ao longo da altura da estrutura, são impressos para cada valor da carga vertical  $p$  na forma  $\bar{u}/(qH^4/j_g)$  e  $u/(qH^4/j_g)$ , se  $IND=1$ , ou na forma  $u$  e  $\bar{u}$ , se  $IND \neq 1$ .

e) Listagem do programa

(Ver páginas seguintes)

```
C=====
C==== PROGRAMA PRINCIPAL
C=====
C==== APLICACAO DO METODO DE STODOLA-VIANELLO - CASO PLANO
C=====
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8 LAMB,JG,MC(20,20)
      DIMENSION A(20),CA(20),RA(20),RB(20),UBAR(31),U(31),ETA1(31),QSII(
      *20),TITUL(10)
      DIMENSION BI(20,20),IPS(20)
      OPEN(UNIT=1,STATUS='OLD',FILE='D4',ACCESS='SEQUENTIAL',FORM='FORMA
      *TTED')
      LEI=1
      IMP=3
C=====
C==== LEITURA DE DADOS
C=====
      READ(LEI,301)(TITUL(I),I=1,10)
      301 FORMAT(10A8)
      READ(LEI,16)PI,ACREP,PCRIT
      16 FORMAT(3F10.0)
      READ(LEI,7)NA,IGRAU,IGMAX
      7 FORMAT(3I2)
      READ(LEI,35)IND
      35 FORMAT(I2)
      IF(IND-1)5,45,5
      45 READ(LEI,50)LAMB,FQ,FP
      50 FORMAT(3F10.0)
      GO TO 6
      5 READ(LEI,10)SG,JG,ALFA,H,Q
      10 FORMAT(5F10.0)
C=====
      LAMB=H**2*SG/JG
      FQ=C*H**4/JG
      FP=ALFA*H**3/JG
C=====
C==== CALCULO DAS COFIAS
C=====
      6 NC=NA+1
      WRITE(IMP,302)(TITUL(I),I=1,10)
      302 FORMAT(/,4X,10A8,/)
      DO 131 J=1,NC
      131 ETA1(J)=(J-1.)/NA
      30 MK=IGRAU-1
      WRITE(IMP,23)IGRAU
      23 FORMAT(/,5X,'PCLINOMIO DE GRAU',2X,12)
      IVA=0
C=====
C==== CALCULO DOS PONTOS DE INTERPOLACAO
C=====
      DO 28 LL=1,MK
      28 QSII(LL)=0.
      DO 26 J1=3,MK
      26 QSII(J1)=DFLOAT(J1-2)/DFLOAT(IGRAU-2)
      CONTINUE
C=====
C==== CALCULO DO VETOR INDEPENDENTE
C=====
      DO 21 N=1,MK
      21 CONTINUE
      CA(N)=0.
      DO 22 J=3,MK
      22 CA(J)=FQ*QSII**2*(6.-4.*QSII+QSII**2)/24.
      CONTINUE
C=====
C==== CALCULO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
C=====
      PP=PI
      15 WRITE(IMP,201)PP
      201 FORMAT(/,5X,'P= ',G15.7)
      P=PP*FP
      DO 20 N=1,MK
      20 MC(N,J)=0.
      DO 24 I=2,IGRAU
      24 MC(I,I-1)=1*(I-1.)
      CONTINUE
      DO 25 I=2,IGRAU
      25 AUX1=1+1.
      AUX2=AUX1*(I+2.)
      AUX3=AUX2*(I+3.)
      AUX4=AUX3*(I+4.)
      MC(2,I-1)=1./AUX1+LAMB*(1./6.-1./AUX3)+P*(4./AUX4-1./(6.*AUX1))
      DO 25 J=3,MK
      25 QSII=QSII(J)
      MC(J,I-1)=QSII**I+QSII**2*(LAMB*(1./2.-QSII**I/AUX2)+P*(QSII**I*(I*(1.
      *-QSII)+3.)/AUX3-1./(2.*AUX1)))
      25 CONTINUE
C=====
C==== RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES
C=====
      CALL DECOM(MK,MC,BI,IPS)
      CALL SOLVE(MK,BI,CA,A,IPS)
      CALL IMPRUV(MK,MC,BI,CA,A,IPS)
```

```

C=====
C==== CALCULO DOS DESLOCAMENTOS
C=====
      DO 120 L=1,NC
      UBAR(L)=0.
      U(L)=0.
120  CONTINUE
      DO 130 MN=1,NC
      DO 125 LL=1,IGRAU
      RA(LL)=0.
      RB(LL)=0.
125  CONTINUE
      ETA=ETA1(MN)
      RA(1)=FQ*(6.-4.*ETA+ETA**2)*ETA**2/24.
      DO 135 II=2,IGRAU
      AUX1=II+1.
      AUX2=AUX1*(II+2.)
      AUX3=AUX2*(II+3.)
      RA(II)=ETA**2*(LAMB*(ETA**II/AUX2-1./2.)+P*(1./(2.*AUX1)-ETA**II*(
      *II*(1.-ETA)+3.)/AUX3))*A(II-1)
      RB(II)=ETA**II*A(II-1)
135  CONTINUE
      DO 132 L=1,IGRAU
      UBAR(MN)=UBAR(MN)+RA(L)
      U(MN)=U(MN)+RB(L)
132  CONTINUE
130  CONTINUE
C=====
C==== IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS PARA CADA VALOR DA CARGA VERTICAL P
C=====
      WRITE(IMP,140)
140  FORMAT(/,5X,'VETOR U BARRA')
      WRITE(IMP,145)(I,UBAR(I),I=1,NC)
145  FORMAT(/,(5X,5('UBAR(',I2,')=',G15.7,1X)))
      WRITE(IMP,150)
150  FORMAT(/,5X,'VETOR U')
      WRITE(IMP,155)(I,U(I),I=1,NC)
155  FORMAT(/,(5X,5('U(',I2,')=',G15.7,1X)))
      PP=PP+ACREP
      IF(PP-PCRIT)80,80,141
141  IVA=IVA+1
      IF(IVA-1)133,133,85
133  PP=PCRIT
      GO TO 15
15  IGRAU=IGRAU+1
      IF(IGRAU-IGMAX)30,30,84
14  WRITE(IMP,95)PCRIT
15  FORMAT(/,5X,'PCRIT =',G15.7,/)
      CALL EXIT
      END

```

```

C=====
C==== SUBROTINA PARA PIVOTAMENTO E ESCALONAMENTO PARCIAL DA MATRIZ BI
C==== DOS COEFICIENTES DO SISTEMA DE EQUACOES
C=====
      SUBROUTINE DECOM(NK,BI,UL,IPS)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION BI(20,20),UL(20,20),SCALES(20),IPS(20)
      N=NK
      DO 5 I=1,N
      IPS(I)=1
      ROWNRM=0.
      DO 2 J=1,N
      UL(I,J)=BI(I,J)
      IF(ROWNRM-DABS(UL(I,J)))1,2,2
1  ROWNRM=DABS(UL(I,J))
2  CONTINUE
      IF(ROWNRM)3,4,3
3  SCALES(I)=1.0/ROWNRM
      GO TO 5
4  CALL SING(1)
      SCALES(I)=0.
5  CONTINUE
C=====
C==== ELIMINACAO DE GAUSS COM PIVOTAMENTO PARCIAL
C=====
      NM1=N-1
      DO 17 K=1,NM1
      BIG=0.
      DO 11 I=K,N
      IP=IPS(I)
      SIZE=DABS(UL(IP,K))*SCALES(IP)
      IF(SIZE-BIG)11,11,10
10  BIG=SIZE
      IDXPIV=I
11  CONTINUE
      IF(BIG)13,12,13
12  CALL SING(2)

```

```

GO TO 17
13 IF (IDXP-IV-K)14,15,14
14 J=IPS(K)
   IPS(K)=IPS(IDXP-IV)
   IPS(IDXP-IV)=J
15 KP=IPS(K)
   PIVOT=UL(KP,K)
   KP1=K+1
   DO 16 I=KP1,N
     IP=IPS(I)
     EM=-UL(IP,K)/PIVOT
     UL(IP,K)=-EM
     DO 16 J=KP1,N
       UL(IP,J)=UL(IP,J)+EM*UL(KP,J)
16 CONTINUE
17 CONTINUE
   KP=IPS(N)
   IF (UL(KP,N))19,18,19
18 CALL SING(2)
19 RETURN
END

```

```

C=====
C==== SUBROTINA PARA SOLUCAC DO SISTEMA A PARTIR DA MATRIZ
C==== TRIANGULARIZADA UL
C=====

```

```

SUBROUTINE SOLVE(NK,UL,B,X,IPS)
IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
DIMENSION UL(20,20),B(20),X(20),IPS(20)
N=NK
NP1=N+1
IP=IPS(1)
X(1)=B(IP)
DO 2 I=2,N
  IP=IPS(I)
  IM1=I-1
  SJM=0.
  DO 1 J=1,IM1
1  SUM=SUM+UL(IP,J)*X(J)
2  X(I)=B(IP)-SUM
  IP=IPS(N)
  X(N)=X(N)/UL(IP,N)
  DO 4 IBACK=2,N
    I=NP1-IBACK
    IP=IPS(I)
    IP1=I+1
    SJM=0.
    DO 3 J=IP1,N
3  SUM=SUM+UL(IP,J)*X(J)
4  X(I)=(X(I)-SUM)/UL(IP,I)
RETURN
END

```

```

C=====
C==== SUBROTINA PARA REFINAMENTO DA SOLUCAC DO SISTEMA
C=====

```

```

SUBROUTINE IMPROV(NK,BI,UL,B,X,IPS)
IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
DIMENSION BI(20,20),UL(20,20),B(20),X(20),R(20),DX(20)
DIMENSION IPS(20)
N=NK
EPS=1.0D-08
ITMAX=16
XNORM=0.0
DO 1 I=1,N
1  XNORM=DMAX1(XNORM,DABS(X(I)))
  IF (XNORM)3,2,3
2  DIGITS=-DLOG10(EPS)
  GO TO 10
3  DO 9 ITER=1,ITMAX
    DO 5 I=1,N
      SUM=0.
      DO 4 J=1,N
4  SUM=SUM+BI(I,J)*X(J)
      SJM=B(I)-SUM
5  R(I)=SUM
      CALL SOLVE(N,UL,R,DX,IPS)
      DXNOR=0.
      DO 6 I=1,N
        T=X(I)
        X(I)=X(I)+DX(I)
        DXNORM=DMAX1(DXNORM,DABS(X(I)-T))
6  CONTINUE
      IF (ITER-1)8,7,8
7  DIGITS=-DLOG10(DMAX1(DXNORM/XNORM,EPS))
8  IF (DXNOR-EPS*XNORM)10,9
9  CONTINUE
  CALL SING(3)
10 RETURN
END

```

```
C=====
C==== SUBRTINA PARA IMPRESSAO DE MENSAGENS NA SOLUCAO
C=====
      SUBROUTINE SING(IWHY)
      IMP=3
      11 FORMAT(5X,'MATRIZ COM LINHA NULA')
      12 FORMAT(5X,'MATRIZ SINGULAR, DIVISAO POR ZERO EM SOLVE')
      13 FORMAT(5X,'NAO HA CONVERGENCIA EM IMPROV E QUASE SING')
      GO TO (1,2,3),IWHY
      1 WRITE(IMP,11)
      GO TO 10
      2 WRITE(IMP,12)
      GO TO 10
      3 WRITE(IMP,13)
      10 RETURN
      END
```

### 1.8 - Exemplos numéricos

Apresenta-se a seguir a análise dos efeitos de segunda ordem em três exemplos de associação entre painéis planos. Em 1.8.1 resolve-se uma associação de parede e pórtico por barras biarticuladas e em 1.8.2 considera-se a mesma associação, porém substitui-se as barras biarticuladas por lintéis. Carvalho [4] analisou a instabilidade destas estruturas e obteve a carga crítica de flambagem de cada um delas. Em 1.8.3 considera-se uma associação de três paredes por lintéis, utilizada em Carvalho [3], como exemplo da análise de instabilidade em painéis planos desenvolvida naquele trabalho.

#### 1.8.1 - Exemplo 1 - Associação de uma parede e um pórtico por barras biarticuladas

Representa-se na figura (1.10) uma associação plana de uma parede e um pórtico através de barras biarticuladas. A estrutura tem 20 andares com pé-direito de 300 cm. O comprimento das barras biarticuladas é de 200cm.

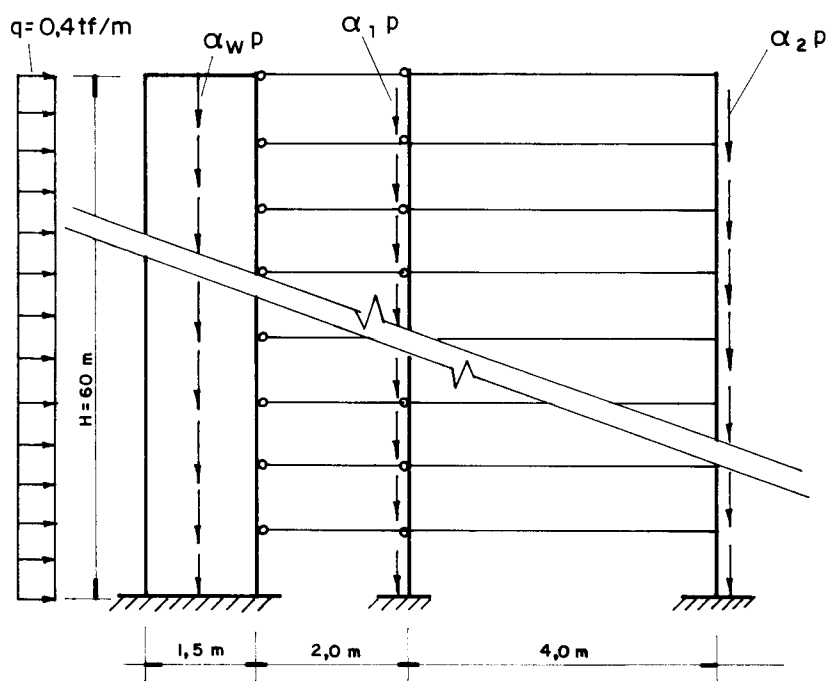


Figura 1.10 - Associação de parede e pórtico por barras biarticuladas.



A parede e todos os pilares e vigas do p $\ddot{o}$ r $\tilde{t}$ ico t $\hat{e}$ m se $\tilde{c}$ o $\tilde{a}$  transversal constante, em toda a altura da estrutura, medindo 150x20cm, 40x40cm e 20x40cm, respectivamente. O comprimento das vigas do p $\ddot{o}$ r $\tilde{t}$ ico  $\tilde{e}$  400cm e para o m $\ddot{o}$ du $\tilde{d}$ o de elasticidade toma-se o valor  $E = 2,0 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ .

O carregamento aplicado  $\tilde{a}$  estrutura consta de carga lateral uniformemente distribu $\tilde{i}$ da, de valor  $q = 0,4 \text{ tf/m}$ , e de carga vertical uniformemente distribu $\tilde{i}$ da  $p$ . Para  $\alpha$  adota-se o valor 1.

Conforme Carvalho [4], o valor para a carga cr $\tilde{i}$ tica de flambagem da associa $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$   $\tilde{e}$   $p = 58,19 \text{ tf/m}$ . Pretende-se obter os deslocamentos horizontais no topo da estrutura, para valores de  $p$  tomados dentro do intervalo ( $p = 0, \quad p = p_{\text{crit}}$ ).

a) Determina $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$  de  $j_w$

$$J_w = \frac{0,20 \times 1,5^3}{12} = 5,625 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$j_w = EJ_w = 1,125 \times 10^5 \text{ tf.m}^2$$

b) Determina $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$  de  $s_f$

$$J_v = \frac{0,20 \times 0,40^3}{12} = 1,067 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$K_v = \frac{1,067 \times 10^{-3}}{4,0} = 2,67 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$J_p = \frac{0,40 \times 0,40^3}{12} = 2,13 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$K_p = \frac{2,13 \times 10^{-3}}{3,0} = 7,11 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

De acordo com a equação (1.11), obtêm-se:

$$s_f = \frac{12 \times 2,0 \times 10^6}{3,0} \left[ 7,11 \times 10^{-4} \times \frac{2,67 \times 10^{-4}}{2,67 \times 10^{-4} + 2 \times 7,11 \times 10^{-4}} \right] \times 2$$

$$s_f = 1798 \text{tf}$$

c) Equação diferencial

De acordo com a equação (1.52) e considerando-se que:

$$j_g = j_w = 1,125 \times 10^5 \text{tf.m}^2$$

$$s_g = s_f = 1798 \text{tf}$$

resulta:

$$112500 u''' - [1798 - p(60-z)] u' = -0,4(60-z)$$

d) Na tabela (1.1) apresentam-se os valores dos deslocamentos horizontais no topo da estrutura, para cada valor considerado da carga vertical p. A equação diferencial acima foi resolvida pela variante do método de Stodola-Vianello e pelo método das diferenças finitas para redes de 24 pontos e de 44 pontos.

Tabela 1.1

Deslocamento horizontal no topo (m)				
p(t/m)	Stodola-Vianello		Diferenças Finitas	
	$\bar{u}$	u	u(p/NS=20)	u(p/NS=40)
0	0,309	0,309	0,307	0,308
2,5	0,321	0,321	0,320	0,321
5,0	0,335	0,335	0,333	0,335
7,5	0,350	0,350	0,348	0,350
10,0	0,367	0,367	0,365	0,366
12,5	0,385	0,385	0,383	0,385
15,0	0,405	0,405	0,404	0,405
17,5	0,428	0,428	0,427	0,428
20,0	0,454	0,454	0,452	0,454
22,5	0,483	0,483	0,482	0,483
25,0	0,517	0,517	0,515	0,517
27,5	0,556	0,556	0,554	0,555
30,0	0,601	0,601	0,600	0,601
32,5	0,656	0,656	0,655	0,656
35,0	0,722	0,722	0,721	0,722
37,5	0,803	0,803	0,804	0,803
40,0	0,907	0,907	0,909	0,908
42,5	1,043	1,043	1,047	1,045
45,0	1,231	1,231	1,239	1,233
47,5	1,506	1,506	1,522	1,510
50,0	1,947	1,947	1,983	1,956
52,5	2,774	2,774	2,868	2,797
55,0	4,893	4,893	5,269	4,982
57,5	22,283	22,285	36,865	24,712
58,19	4759,273	4759,597	-54,051	-170,521

e) Na figura (1.11) representa-se, através de gráfico, a variação dos deslocamentos horizontais no topo da estrutura com a carga vertical  $p$ .

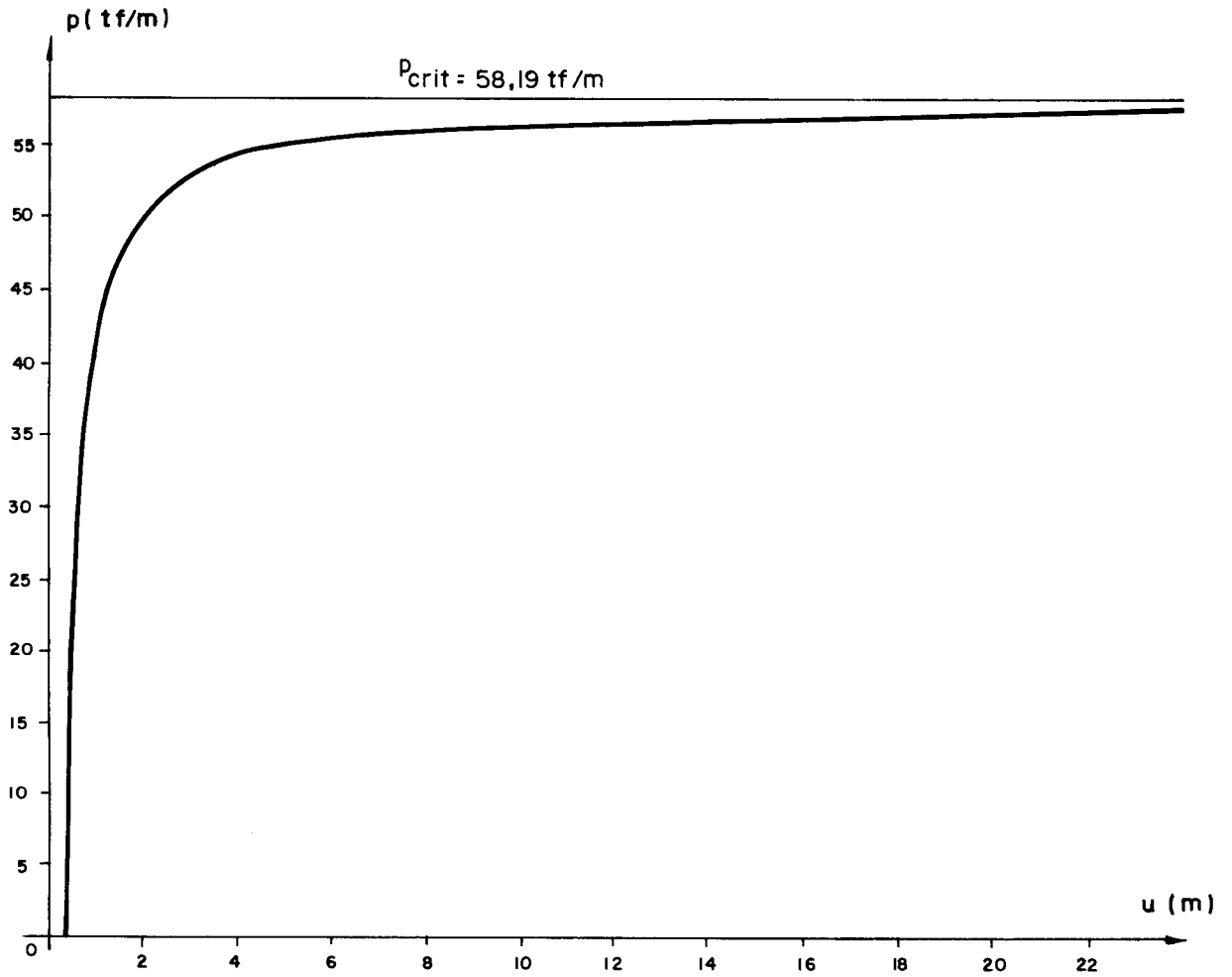


Figura 1.11 - Gráfico  $p_x(u)$  para o exemplo 1

f) Na figura (1.12) representam-se em gráfico os deslocamentos horizontais da estrutura para  $p = 0$  e  $p = 10$ tf/m

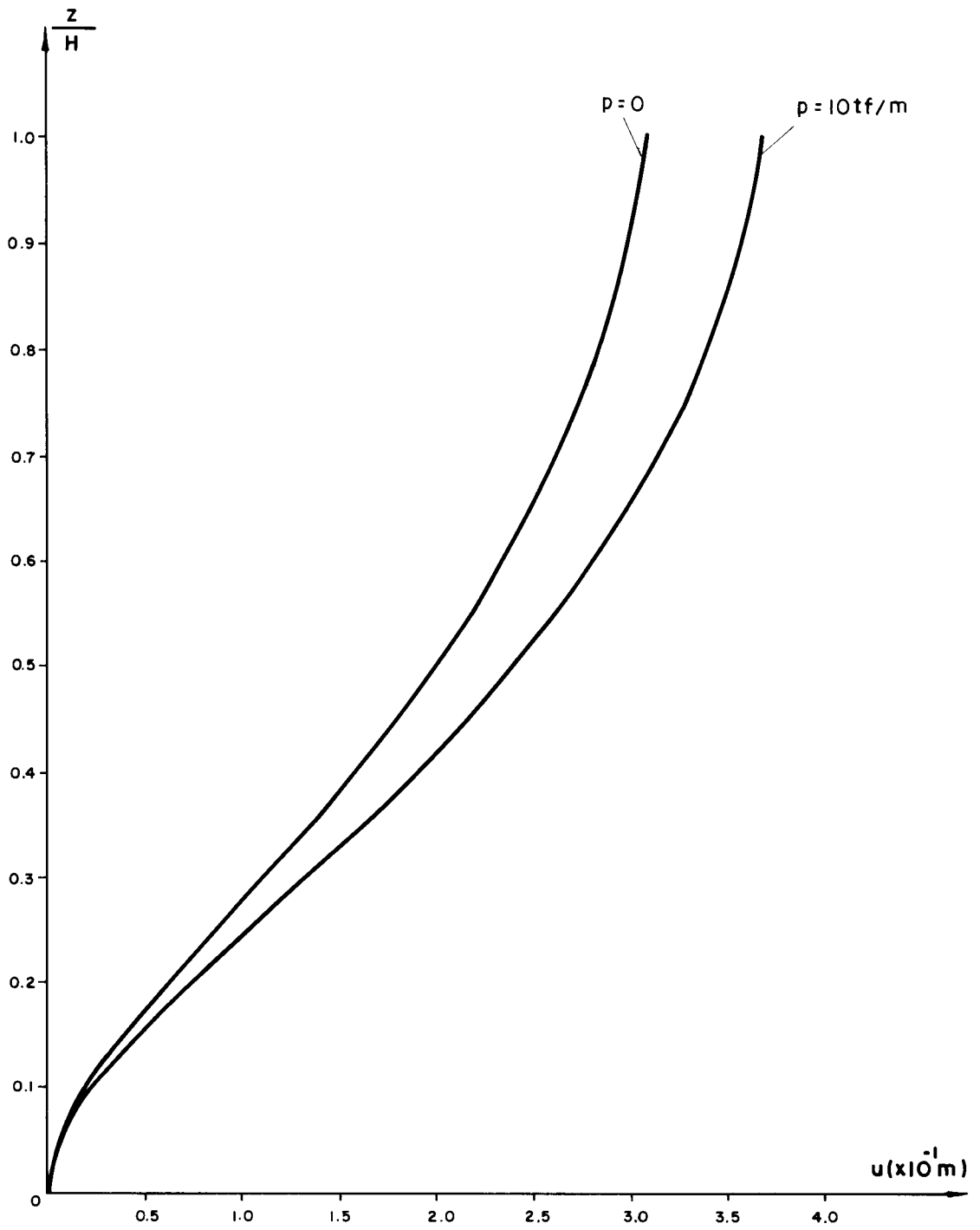


Figura (1.12) - Deslocamentos horizontais (m)

1.8.2 - Exemplo 2 - Associação de parede e p $\tilde{o}$ rtico por lint $\tilde{e}$ is

Neste exemplo pretende-se determinar os deslocamentos horizontais no topo de uma associa $\tilde{c}$ o de parede e p $\tilde{o}$ rtico por lint $\tilde{e}$ is, representada na figura (1.13).

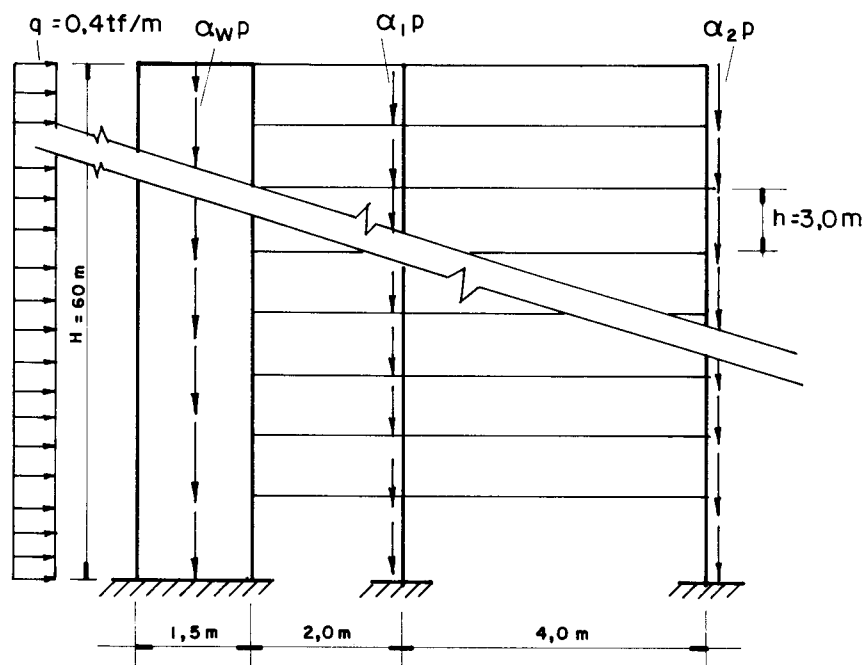


Figura 1.13 - Associa $\tilde{c}$ o de parede e p $\tilde{o}$ rtico por lint $\tilde{e}$ is

A estrutura tem as caracter $\tilde{e}$ sticas elasto-geom $\tilde{e}$ tricas id $\tilde{e}$ nticas  $\tilde{a}$ s do exemplo 1 e os elementos de liga $\tilde{c}$ o, agora constitu $\tilde{i}$ dos por lint $\tilde{e}$ is, t $\tilde{e}$ m tamb $\tilde{e}$ m o comprimento de 200cm com se $\tilde{c}$ o transversal de 20x40cm.

Aplica-se  $\tilde{a}$  associa $\tilde{c}$ o um carregamento lateral e vertical uniformemente distribu $\tilde{i}$ dos de maneira id $\tilde{e}$ ntica ao do exemplo anterior. O valor da carga lateral q permanece o mesmo, ou seja q = 0,4tf/m, e  $\tilde{a}$  carga vertical p imp $\tilde{o}$ e-se um incremento de 10tf/m, a partir de zero.

De acordo com Carvalho [4], a carga cr $\tilde{i}$ tica do conjunto tem valor p = 192,57tf/m, considerando-se para  $\alpha$  o valor 1.

a) Determinação do coeficiente de rigidez  $s$  do pórtico e do coeficiente  $K_1$ .

De acordo com a figura (A.2) do apêndice A, pode-se escrever:

$$a_1 = 2,0\text{m}$$

$$b_1 = 1,5\text{m}$$

$$J_{P_1} = J_{P_2} = 2,13 \times 10^{-3} \text{m}^4 \quad K_{P_1} = K_{P_2} = 7,11 \times 10^{-4} \text{m}^3$$

$$J_{V_1} = 1,067 \times 10^{-3} \text{m}^4 \quad K_{V_1} = 2,67 \times 10^{-4} \text{m}^3$$

$$J_{V_2} = 1,067 \times 10^{-3} \text{m}^4 \quad K_{V_2} = 5,34 \times 10^{-4} \text{m}^3$$

Calculam-se os valores  $\theta$  e  $\varphi$  utilizando-se as equações (A.15) do apêndice A, o que corresponde a:

$$\theta = \frac{4 \times 2,67 \times 10^{-4} + 12 \times 7,11 \times 10^{-4} + 4 \times 5,34 \times 10^{-4}}{2 \times 2,67 \times 10^{-4}} = 21,978$$

e

$$\varphi = \frac{12 \times 7,11 \times 10^{-4} + 4 \times 2,67 \times 10^{-4}}{2 \times 2,67 \times 10^{-4}} = 17,978$$

Substituindo os valores de  $\theta$  e  $\varphi$  nas equações (A.16) obtêm-se para  $\omega$  e  $\beta$  os valores:

$$\omega = \frac{\left[ 12(7,11 \times 10^{-4} - 7,11 \times 10^{-4} \times 21,978) - 2 \times 5,34 \times 10^{-4} \left( 1 + \frac{3 \times 1,5}{2 \times 2} \right) \right]}{2 \times 2,67 \times 10^{-4} - 21,978(12 \times 7,11 \times 10^{-4} + 4 \times 2,67 \times 10^{-4})}$$

$$\omega = 8,612 \times 10^{-1}$$

$$\beta = \frac{12 \times 7,11 \times 10^{-4} - 17,978 \left[ 12 \times 7,11 \times 10^{-4} - 2 \times 5,34 \times 10^{-4} \left( 1 + \frac{3 \times 1,5}{2 \times 2} \right) \right]}{2 \times 2,67 \times 10^{-4} - 17,978 (12 \times 7,11 \times 10^{-4} + 4 \times 2,67 \times 10^{-4} + 4 \times 5,34 \times 10^{-4})}$$

$$\beta = 4,944 \times 10^{-1}$$

De acordo com as equações (A.19) os parâmetros de rigidez dos pilares à força cortante correspondem a:

$$s_A = \frac{12 \times 2 \times 10^6 \times 7,11 \times 10^{-4}}{3,0} (1 - 8,612 \times 10^{-1})$$

$$s_A = 789,49 \text{ tf}$$

e

$$s_B = \frac{12 \times 2,0 \times 10^6 \times 7,11 \times 10^{-4}}{3,0} (1 - 4,944 \times 10^{-1})$$

$$s_B = 2875,85 \text{ tf}$$

Logo, de acordo com a equação (A.20), a rigidez  $s$  do pórtico vale:

$$s = 789,49 + 2875,85$$

$$s = 3665,34 \text{ tf}$$

A equação (A.22-b), do apêndice A, fornece para o coeficiente  $K_1$  o valor:



$$K_1 = \frac{2 \times 10^6 \times 5,34 \times 10^{-4}}{3,0} \left[ 4 + 2 \times 4,944 \times 10^{-1} + \frac{3 \times 1,5}{2} \left( 2 + 4,944 \times 10^{-1} + \frac{1,5}{2} \right) \right]$$

$$K_1 = 4374,77 \text{ tf}$$

b) Determinação do coeficiente  $K_2$

Conforme o apêndice A e a equação (A.25-b), o valor para  $\beta$  passa a ser:

$$\beta = \frac{12 \times 7,11 \times 10^{-4} - 17,978(12 \times 7,11 \times 10^{-4} - 2 \times 5,34 \times 10^{-4})}{2 \times 2,67 \times 10^{-4} - (12 \times 7,11 \times 10^{-4} + 4 \times 5,34 \times 10^{-4} + 4 \times 2,67 \times 10^{-4}) \times 17,978}$$

$$\beta = 5,97 \times 10^{-1}$$

Através da equação (A.30) e com o novo valor para  $\beta$ , calcula-se  $K_2$ , ou seja:

$$K_2 = \frac{2 \times 10^6 \times 5,34 \times 10^{-4}}{3} \left[ 4 + 2 \times 5,97 \times 10^{-1} \left( 1 + \frac{3 \times 1,5}{2 \times 2} \right) + \frac{3 \times 1,5}{2} \right]$$

$$K_2 = 3128,26 \text{ tf}$$

c) Determinação dos parâmetros de rigidez  $j_g$  e  $s_g$  do painel.

De acordo com a equação (1.29), tem-se:

$$\gamma = 1 - \frac{3}{1,5 \times 0,2 \times 2 \times 10^6} (3128,26 - 4374,77)$$

$$\gamma = 1,0062$$

Substituindo-se o valor de  $\gamma$  nas equações (1.32) e (1.33) resulta:

$$s_g \cong 111807 t f m^2$$

$$s_g \cong 8013 t f$$

d) Montagem da equação diferencial do painel

Substituindo-se os resultados encontrados acima na equação (1.52) e lembrando-se que o valor para  $\alpha$  foi tomado igual a unidade, resulta:

$$111807 u''' - [8013 - p(60-z)] u' = -0,4(60-z)$$

e) Tabela de resultados

A solução da equação diferencial, indicada acima, através dos processos numéricos Stodola-Vianello, em sua variante, e o método das diferenças finitas conduziram aos resultados apresentados na tabela(1.2)

Tabela 1.2

Deslocamentos horizontais no topo (m)				
p(t/m)	Stodola-Vianello		Diferenças Finitas	
	$\bar{u}$	u	u(p/NS=20)	u(p/NS=40)
0	0,079	0,079	0,078	0,079
10	0,083	0,083	0,082	0,083
20	0,087	0,087	0,086	0,086
30	0,091	0,091	0,090	0,091
40	0,096	0,096	0,095	0,096
50	0,101	0,101	0,100	0,101
60	0,107	0,107	0,106	0,107
70	0,114	0,114	0,113	0,114
80	0,123	0,123	0,121	0,122
90	0,132	0,132	0,131	0,132
100	0,144	0,144	0,142	0,143
110	0,157	0,157	0,156	0,157
120	0,175	0,175	0,173	0,174
130	0,197	0,197	0,195	0,196
140	0,226	0,226	0,225	0,226
150	0,267	0,267	0,267	0,267
160	0,329	0,329	0,331	0,330
170	0,436	0,436	0,443	0,438
180	0,665	0,665	0,691	0,671
190	1,527	1,527	1,771	1,580
192,57	2,354	2,355	3,090	2,500

f) Gráfico  $p \times u(H)$

Na figura (1.14) representa-se através de gráfico a variação dos deslocamentos horizontais no topo da estrutura com a carga vertical  $p$ .

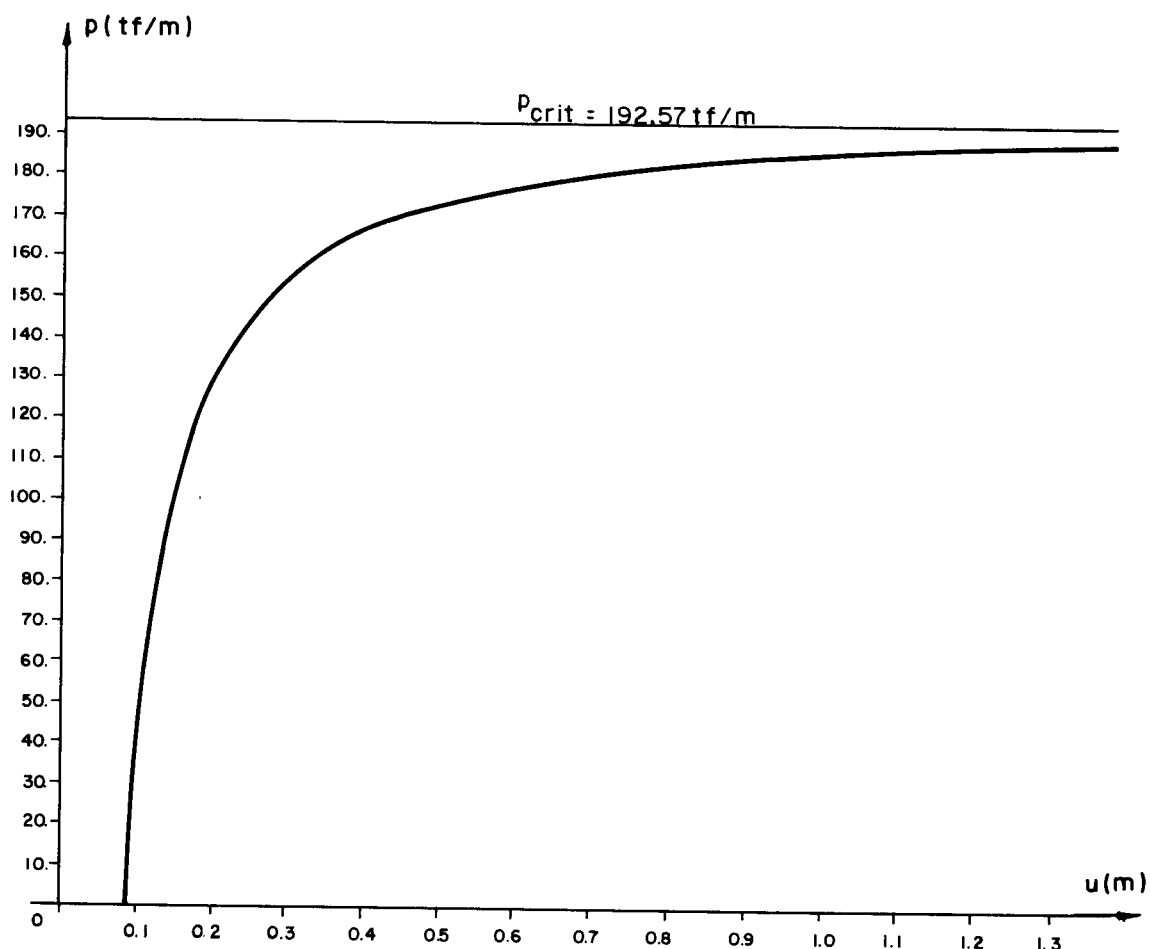


Figura 1.14 - Gráfico  $p \times u(H)$  para o exemplo 2

g) Gráficos  $\eta \times u$

Na figura (1.15) representa-se em gráfico os deslocamentos horizontais ao longo da altura da estrutura para  $p = 0$  e  $p = 33 \text{ tf/m}$ .

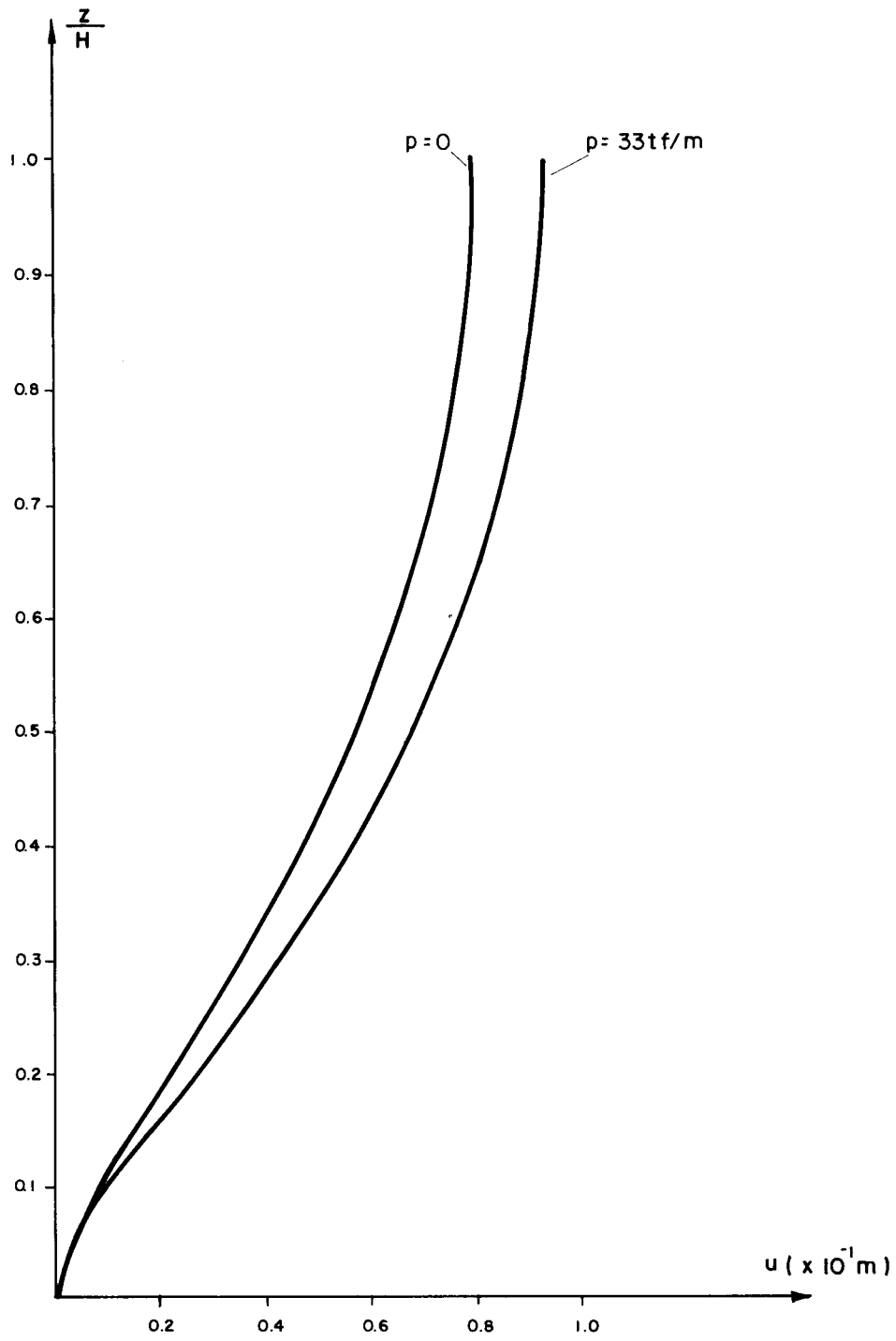


Figura 1.15 - Deslocamentos horizontais (m)

h) Gráficos  $\eta x u$  para as estruturas dos exemplos 1 e 2

Na figura (1.16), representam-se em gráficos os deslocamentos horizontais  $u$ , ao longo da altura, para os valores  $p = 0$  e  $p = 10\text{tf/m}$ . As curvas tracejadas representam os deslocamentos da associação de parede e pórtico por barras biarticuladas e as curvas contínuas representam os deslocamentos da associação, destes elementos verticais, por lintéis.

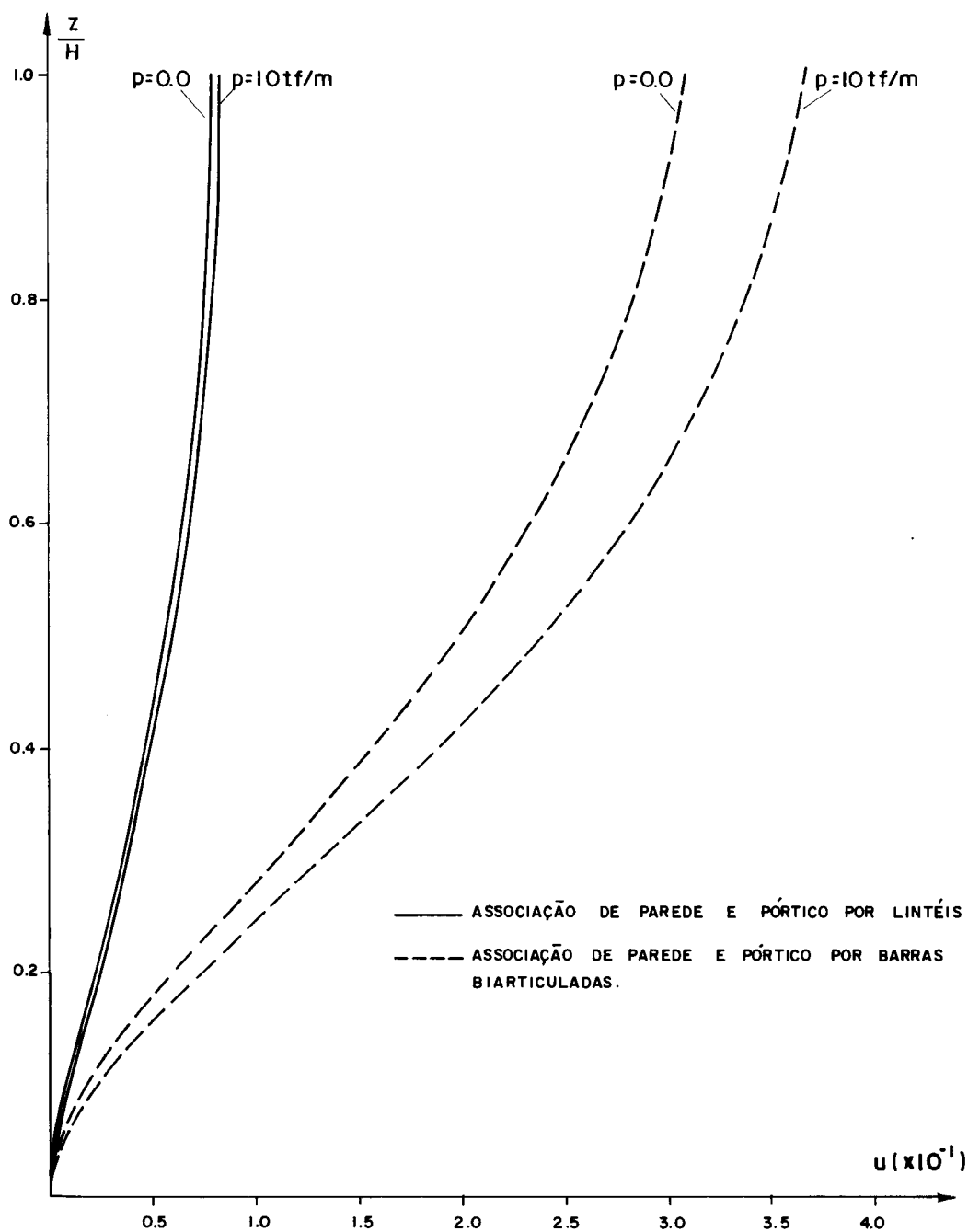


Figura 1.16 - Deslocamentos horizontais  $u$  (m)

1.8.3 - Exemplo 3 - Associação de paredes por lintéis

Representa-se na figura (1.17) uma estrutura de 30 andares, com pé-direito medindo 3,0m, formada por três paredes ligadas por lintéis.

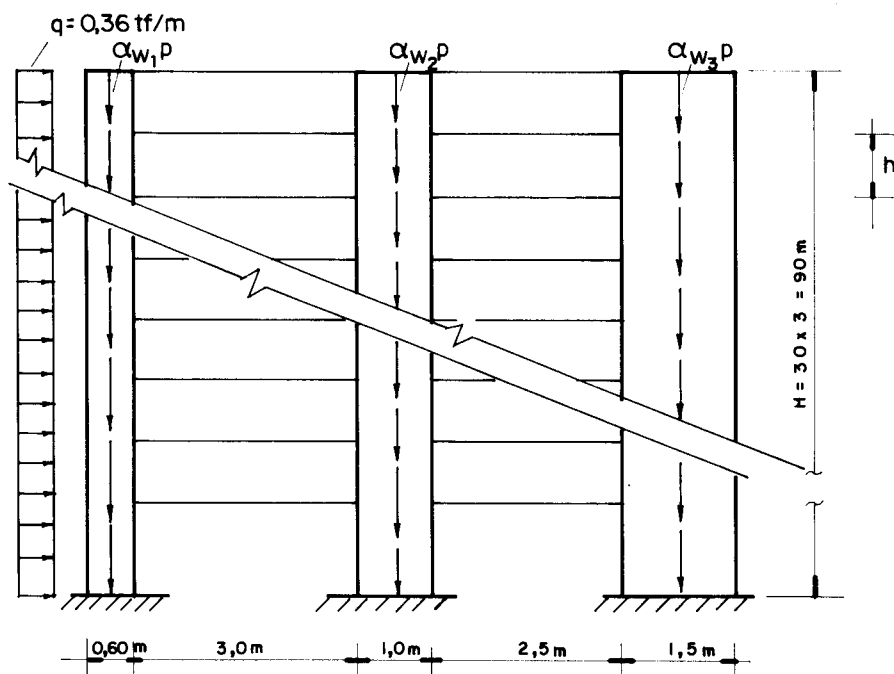


Figura 1.17 - Associação de paredes por lintéis

As seções transversais das paredes e dos dois conjuntos de lintéis são constantes ao longo da altura e medem respectivamente 20x60cm, 20x100cm, 20x150cm para as paredes 1, 2 e 3 e 20x30cm para os lintéis. Os vãos do primeiro e do segundo conjunto de lintéis medem 300cm e 250cm, respectivamente.

Para os módulos de elasticidade longitudinal e transversal adotam-se, respectivamente, os valores

$$E = 2,0 \times 10^6 \text{ tf/m}^2 \quad \text{e} \quad G = 8,0 \times 10^5 \text{ tf/m}^2$$

Considera-se um carregamento lateral uniformemente distribuído de valor  $q = 0,36 \text{ tf/m}$ . A carga vertical  $\alpha_p$ , uniformemente distribuída no plano do painel, é repartida entre as paredes ( $w_1$ ), ( $w_2$ ) e ( $w_3$ ) segundo os quinhões  $\alpha_{w_1} = 0,643$ ,  $\alpha_{w_2} = 1,983$  e  $\alpha_{w_3} = 0,54$ , respectivamente.

Carvalho [3] encontrou, para a carga crítica de flambagem da associação, o valor  $p = 25,23 \text{ tf/m}$ . Pretende-se obter o deslocamento horizontal no topo da associação para cada valor de  $p$  variando de zero até o valor da carga crítica.

a) Determinação dos momentos de inércia das paredes

$$J_{w_1} = \frac{0,20 \times 0,60^3}{12} = 3,6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

ou

$$j_{w_1} = 2 \times 10^6 \times 3,6 \times 10^{-3} = 7,2 \times 10^3 \text{ tfm}^2$$

$$J_{w_2} = \frac{0,20 \times 1,0^3}{12} = 1,667 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

ou

$$j_{w_2} = 2 \times 10^6 \times 1,667 \times 10^{-2} = 33,34 \times 10^3 \text{ tfm}^2$$

$$J_{w_3} = \frac{0,20 \times 1,5^3}{12} = 5,625 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

ou



$$j_{w_3} = 2 \times 10^6 \times 5,625 \times 10^{-2} = 112,5 \times 10^3 \text{ tfm}^2$$

b) Determinação dos momentos de inércia dos lintéis

$$J_{L_1} = J_{L_2} = \frac{0,20 \times 0,30^3}{12} = 4,5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

ou

$$j_{L_1} = j_{L_2} = 2,0 \times 10^6 \times 4,5 \times 10^{-4} = 9,0 \times 10^2 \text{ tfm}^2$$

O painel é constituído por 3 paredes e 2 conjuntos de lintéis. Então, de acordo com as equações (1.51-a) e (1.51-b), tem-se:

c) Parâmetro de rigidez  $j_g$

$$j_g = \sum_{i=1}^3 j_{w_i} = j_{w_1} + j_{w_2} + j_{w_3}$$

$$j_g = (7,2 + 33,34 + 112,5) \times 10^3 = 153,04 \times 10^3 \text{ tfm}^2$$

d) Parâmetro de rigidez  $s_g$

De acordo com a figura (1.7), pode-se escrever:

$$c_1 = 1,8 \text{ m}$$

$$c_2 = 2,0 \text{ m}$$

$$c_3 = 1,75\text{m}$$

$$c_4 = 2,0\text{m}$$

$$l_{L_1} = 3,0\text{m}$$

$$l_{L_2} = 2,5\text{m}$$

Substituindo-se os valores acima na equação (1.51-b) para  $m = 2$  (número de conjuntos de lintéis), resulta:

$$s_g = \frac{1}{3,0} \cdot \left[ \frac{(1,8+2,0)^2}{\left( \frac{3,0^3}{12 \times 9,0 \times 10^2} + \frac{3}{8,0 \times 10^5 \times 0,2 \times 0,3} \right)} + \frac{(1,75+2,0)^2}{\left( \frac{2,5^3}{12 \times 9,0 \times 10^2} + \frac{2,5}{8,0 \times 10^5 \times 0,2 \times 0,3} \right)} \right]$$

$$s_g = 5005,793\text{tf}$$

d) Coeficiente  $\alpha$

$$\alpha = \sum_{i=1}^3 \alpha_{w_i} = 0,643 + 1,983 + 0,54$$

$$\alpha = 3,166$$

e) Montagem da equação diferencial

Substituindo-se os valores encontrados acima na equação (1.50), obtêm-se:

$$153040 u''' - [5005,793 - 3,166 p (90-z)]u' = - 0,36(90-z)$$

f) Tabela de resultados

Na tabela (1.3) apresentam-se o valor do deslocamento horizontal no topo da estrutura para cada valor da carga vertical p. A equação diferencial indicada acima foi resolvida pela variante do método de Stodola-Vianello e pelo método das diferenças finitas.

Tabela 1.3

Deslocamentos horizontais no topo (m)				
p(t/m)	Stodola-Vianello		Diferenças Finitas	
	$\bar{u}$	u	u(p/NS=30)	u(p/NS=60)
0	0,258	0,258	0,256	0,258
1	0,266	0,266	0,265	0,266
2	0,275	0,276	0,274	0,275
3	0,286	0,286	0,284	0,285
4	0,296	0,296	0,295	0,296
5	0,308	0,308	0,307	0,308
6	0,321	0,321	0,320	0,321
7	0,335	0,335	0,334	0,335
8	0,351	0,351	0,350	0,351
9	0,368	0,368	0,367	0,368
10	0,388	0,388	0,386	0,388

continua...

Tabela 1.3 - Continuação...

Deslocamentos horizontais no topo (m)				
p(t/m)	Stodola-Vianello		Diferenças Finitas	
	$\bar{u}$	u	u(p/NS=30)	u(p/NS=60)
11	0,409	0,410	0,408	0,409
12	0,434	0,434	0,433	0,434
13	0,462	0,463	0,461	0,462
14	0,495	0,495	0,494	0,495
15	0,534	0,534	0,532	0,533
16	0,579	0,580	0,578	0,579
17	0,635	0,635	0,633	0,635
18	0,704	0,704	0,703	0,704
19	0,792	0,792	0,791	0,792
20	0,909	0,909	0,909	0,909
21	1,072	1,073	1,075	1,073
22	1,318	1,319	1,325	1,320
23	1,734	1,734	1,753	1,738
24	2,593	2,594	2,655	2,609
25	5,482	5,483	5,890	5,578
25,23	7,483	7,485	8,335	7,678

g) Gráfico p x u

Na figura (1.18) representa-se em gráfico a variação dos deslocamentos horizontais no topo da estrutura com a carga vertical p.

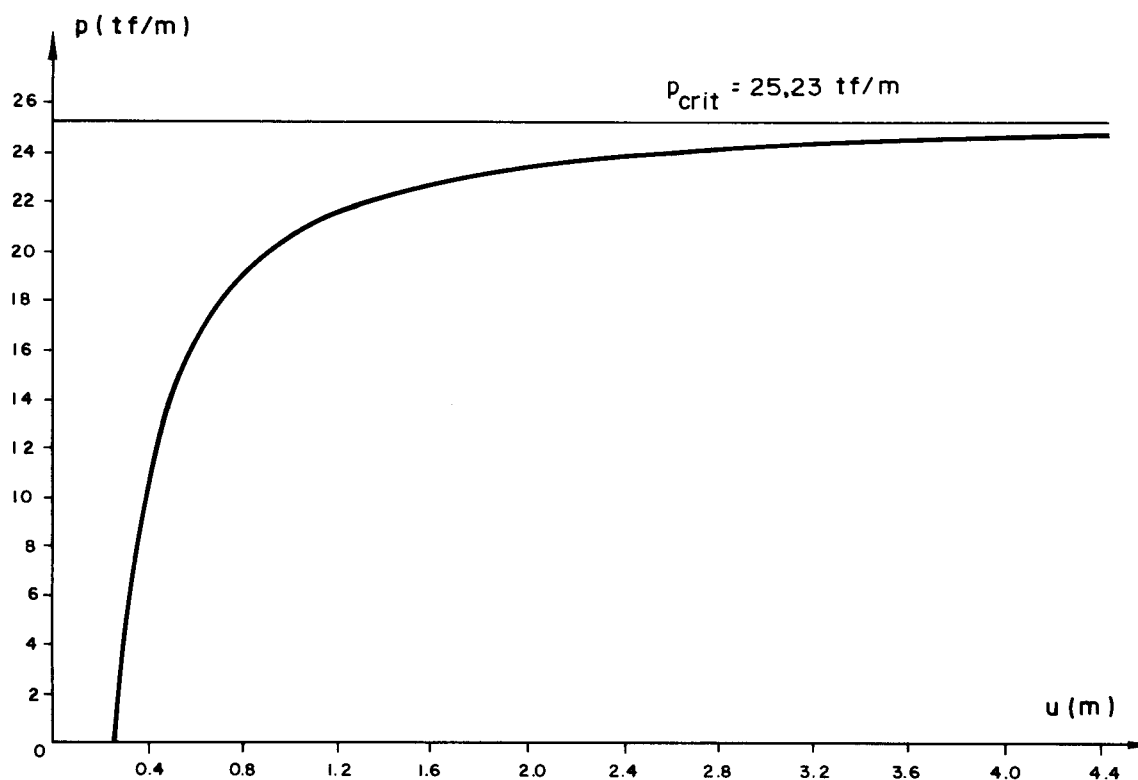


Figura 1.18 - Gráfico  $p \times u(H)$  para o exemplo 3

h) Gráficos  $\eta \times u$

Na figura (1.19) representam-se em gráfico os deslocamentos horizontais ao longo da altura da estrutura para  $p = 0$  e  $p = 5 \text{ tf/m}$ .

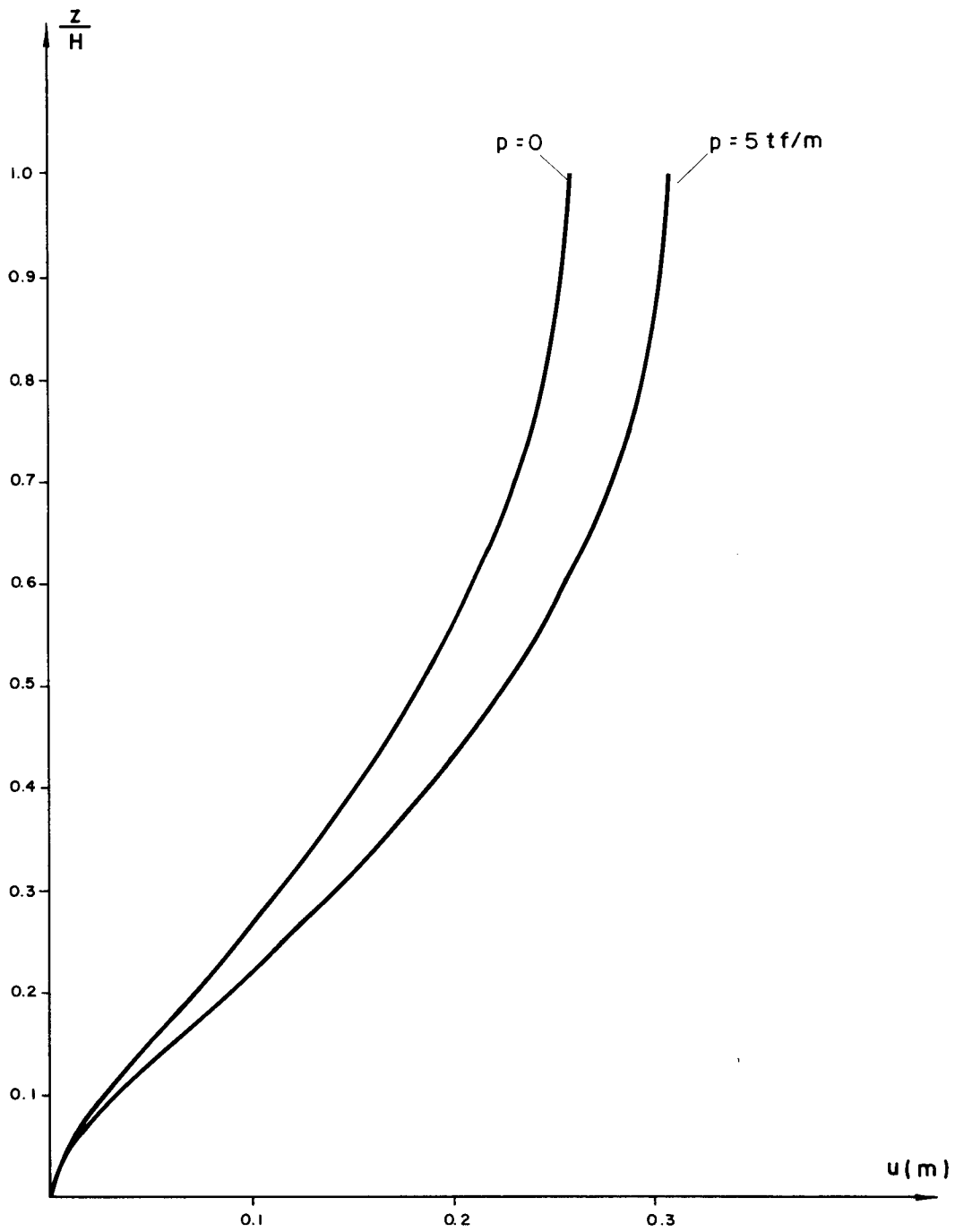


Figura 1.19 - Deslocamentos horizontais (m)

### 1.9 - Gráficos para projeto

A análise dos efeitos de segunda ordem em painéis de comportamento característico de um painel geral, conduziu

à equação diferencial (1.52) cuja solução foi obtida através dos seguintes processos: Diferenças finitas e Stodola-Vianello, em sua variante.

Os resultados fornecidos pelo sistema formado pelas equações (1.65 a 1.68) ou pelas expressões (1.75) ou (1.76) para os deslocamentos horizontais de qualquer painel geral, submetido a carregamentos uniformes lateral e vertical, são facilmente representáveis em gráficos.

Nos gráficos das figuras (1.20) a (1.22) apresentam-se curvas  $P \times U$ , que fornecem os deslocamentos horizontais no topo de algumas estruturas planas correspondentes a cada valor de carga vertical  $p$ , para um mesmo valor da carga lateral  $q$ , aplicada à estrutura.

Os parâmetros indicados nos gráficos são definidos por:

- a) O parâmetro  $\lambda$  indica, conforme define-se na equação (1.59), a rigidez relativa entre o pórtico e a parede e é equivalente ao parâmetro  $K$  definido em Stamato [14]. A relação entre estes dois parâmetros é expressa por:

$$\lambda = K^2 = \frac{s_g}{j_g} H^2 \quad (1.84)$$

- b) O parâmetro  $P$  é, de acordo com a equação (1.60), expresso em função da carga vertical e uniforme  $\alpha p$  aplicada em um painel de altura  $H$  e produto de rigidez à flexão  $j_g$ , ou  $P = \frac{\alpha p H^3}{j_g}$ .

- c) O parâmetro  $U$  corresponde aos deslocamentos horizontais divididos pelo fator  $qH^4/j_g$ , ou seja:

$$U = \frac{u}{(qH^4/j_g)} \quad (1.85)$$

onde  $q$ ,  $H$  e  $j_g$  já foram definidos anteriormente.

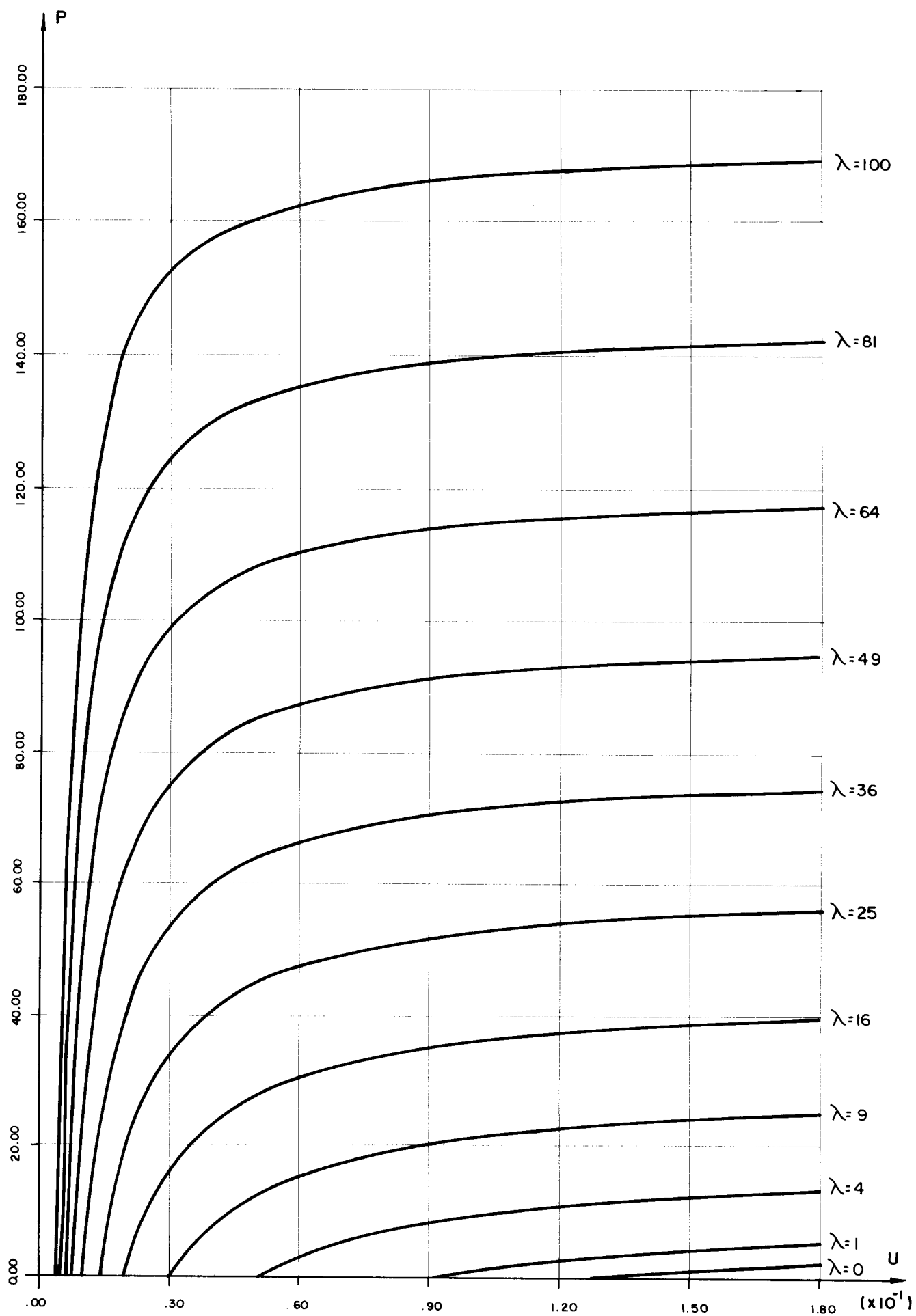


Figura 1.20 - Gráficos  $P \times U$  para valores de  $\lambda$  dentro do intervalo de 0 a 100.



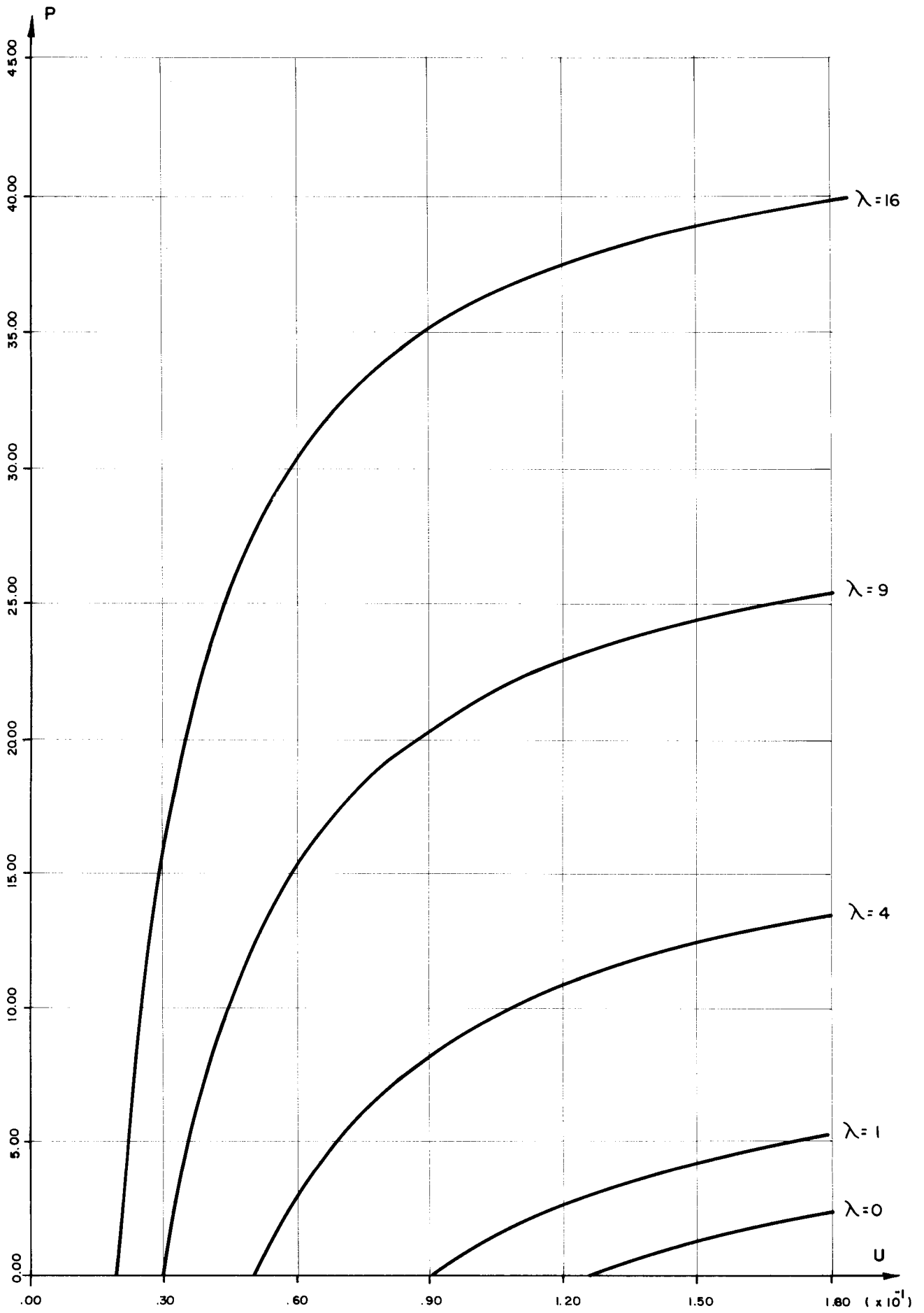


Figura 1.21 - Gráficos PxU para valores de  $\lambda$  dentro do intervalo de 0 a 16.

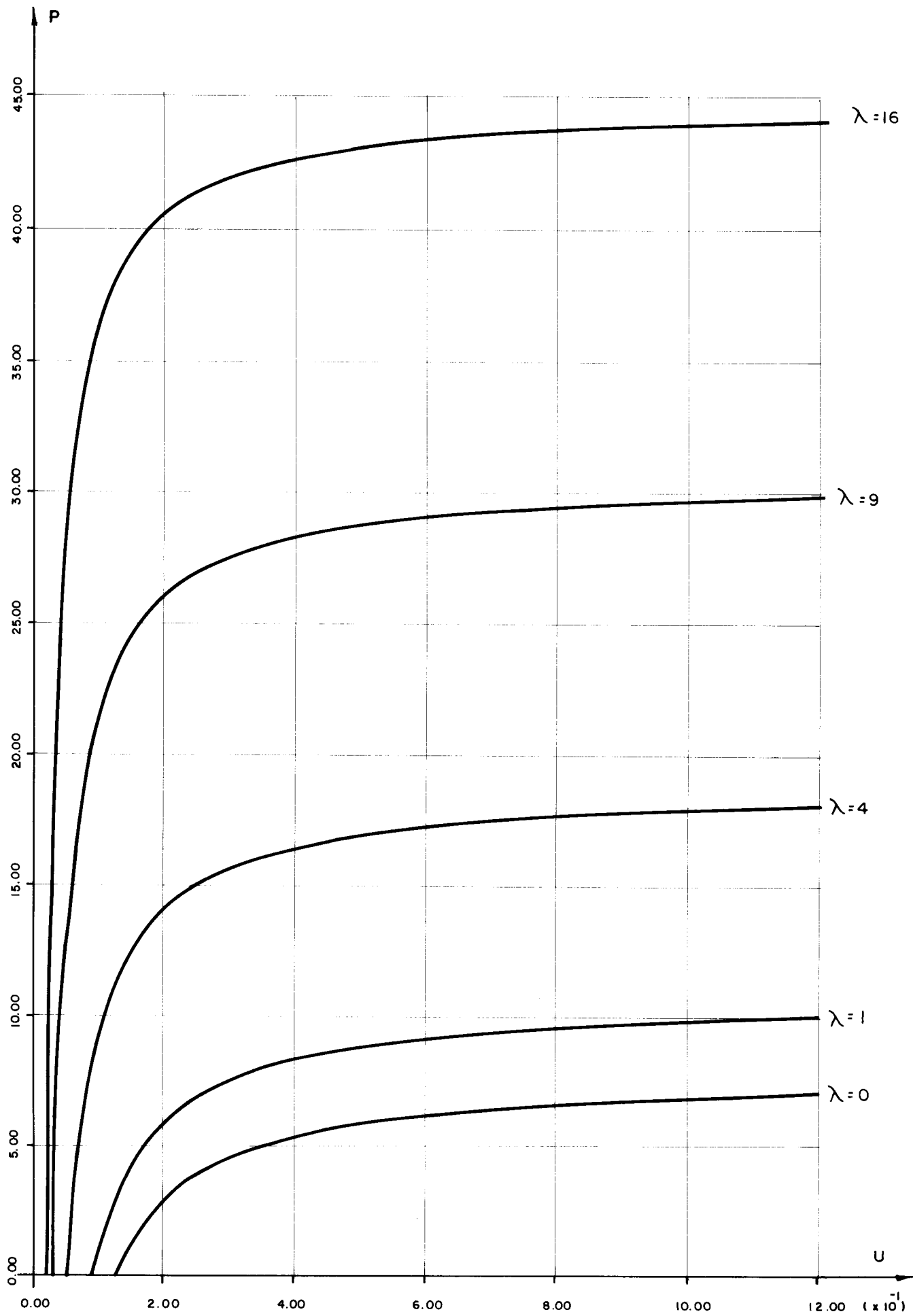


Figura 1.22 - Gráficos PxU para valores de  $\lambda$  dentro do intervalo de 0 a 16.

Consideram-se estruturas planas com parâmetros de rigidez relativa  $\lambda$  dentro do intervalo de 0 a 100 (ou considerando o parâmetro K, dentro do intervalo de 0 a 10), conforme indica-se na figura (1.20). Nas figuras (1.21) e (1.22) consideram-se os valores de  $\lambda$  dentro do intervalo de 0 a 16 (ou K dentro do intervalo de 0 a 4) para se ter uma idéia melhor do comportamento destas estruturas. A diferença entre estes dois conjuntos de gráficos consiste apenas no intervalo de variação do parâmetro U.

Os gráficos foram traçados utilizando-se os valores obtidos através do programa em linguagem Fortran, elaborado para resolver as equações resultantes do método de Stodola-Vianello, em sua variante. Optou-se por este método por convergir mais rapidamente que o método das diferenças finitas.

Observa-se que, através dos gráficos, é imediata a determinação do deslocamento horizontal no topo de qualquer estrutura plana, de rigidez relativa  $\lambda$  dentro do intervalo de valores citados anteriormente. Estas estruturas devem estar submetidas a carregamento uniformemente distribuído constituído de carga lateral e carga vertical.

A seguir apresenta-se um exemplo numérico que esclarece a utilização dos gráficos.

#### 1.9.1 - Exemplo 4

Como exemplo de aplicação dos gráficos representados nas figuras (1.20) a (1.22), considera-se a estrutura indicada na figura (1.10) do exemplo 1. Deseja-se determinar o deslocamento horizontal no topo da estrutura submetida a um carregamento lateral  $q = 0,4t/m$  e vertical  $p = 25t/m$ .

##### a) Cálculo do parâmetro $\lambda$

De acordo com o exemplo 1

$$s_g = 1798 \text{tf}$$

$$j_g = 1,125 \times 10^5 \text{tf.m}^2$$

$$H = 60 \text{m}$$

logo, conforme a equação (1.84)

$$\lambda = \frac{1798}{1,125 \times 10^5} \times 60^2 = 57,536$$

b) Cálculo do parâmetro P

De acordo com a equação (1.60)

$$P = \frac{1,0 \times 25 \times 60^3}{1,125 \times 10^5} = 48$$

c) Cálculo do parâmetro U

Pelos gráficos da figura (1.20) observa-se que:

c.1) Para  $\lambda = 64$  e  $P = 48$ ,  $U = 0,0975 \times 10^{-1}$

c.2) Para  $\lambda = 49$  e  $P = 48$ ,  $U = 0,1425 \times 10^{-1}$

então, fazendo-se a interpolação linear

c.3) Para  $\lambda = 57,536$  e  $P = 48$ ,  $U = 0,1169 \times 10^{-1}$

d) Cálculo do deslocamento horizontal

De acordo com a equação (1.85)

$$u = \frac{0,1169 \times 10^{-1} \times 0,4 \times 60^4}{1,125 \times 10^5} = 0,539\text{m}$$

Comparando-se este resultado com o valor indicado na tabela (1.1) do exemplo 1 , correspondente ao deslocamento horizontal  $u = 0,517\text{m}$  para uma carga vertical de  $25\text{t/m}$ , observa-se que o erro é pequeno e que os gráficos podem ser usados para fins práticos.

## II. EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM EM ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS

### 2.1 - Introdução

Apresenta-se a seguir uma análise dos efeitos de segunda ordem em estruturas tridimensionais de edifícios altos. Analisam-se cinco modelos estruturais, sendo eles: um núcleo estrutural de seção aberta sem e com contraventamento, associação tridimensional de paredes e pórticos e associação de dois núcleos de seção aberta sem e com contraventamento.

O comportamento de cada modelo estrutural se expressa através de um sistema de três equações diferenciais, não homogêneas, de terceira ordem, com coeficientes variáveis. A solução deste sistema de equações fornece os deslocamentos horizontais  $u$  e  $v$  e o giro  $\theta$  dos diafragmas, em relação a um sistema de eixos global OXYZ, definido em cada estrutura considerada.

De maneira análoga ao procedido no capítulo anterior, escreveram-se dois programas em linguagem Fortran para o computador IBM-370/148, tomando-se por base as expressões resultantes da aplicação dos métodos numéricos das diferenças finitas e Stodola-Vianello, em sua variante, à solução do sistema de equações diferenciais citado anteriormente. Após o desenvolvimento de cada método numérico, apresenta-se a listagem do programa e respectivas explicações para o uso.

No final do capítulo apresenta-se um exemplo numérico de cada modelo estrutural analisado.

### 2.2 - Hipóteses e considerações

Os modelos estruturais, considerados neste capítulo, são analisados através da técnica do meio contínuo, que consiste em substituir o número discreto de lajes e

lintéis por um meio contínuo, de rigidez equivalente uniformemente distribuída ao longo da altura das estruturas.

Consideram-se as lajes como equivalentes a diafragmas horizontais, de rigidez infinita no seu plano, mas sem nenhuma rigidez transversal.

Consideram-se os lintéis como vigas engastadas nas extremidades e supõe-se que os pontos médios de seus vãos sejam pontos de momento nulo.

Os núcleos estruturais, ou simplesmente paredes de seção aberta, quando sujeitos à flexão simples, comportam-se de maneira análoga às paredes planas (item 1.3). Considera-se que os mesmos são deformáveis à ação do momento fletor e extremamente rígidos à força cortante. Nas análises desenvolvidas leva-se em conta a hipótese básica da flexão simples, segundo a qual as seções planas permanecem planas depois de fletidas.

Devido à pequena espessura dos núcleos, admite-se que os mesmos comportam-se à torção de maneira análoga às barras de seção aberta de paredes finas, podendo-se, então, estudá-los através da teoria de flexo-torção, utilizando as mesmas formulações e convenções desenvolvidas no apêndice B. Devido ao engastamento na base das estruturas, os núcleos terão ainda os seus empenamentos impedidos introduzindo, assim, o efeito do bimomento.

A hipótese básica da teoria da flexo-torção, segundo a qual as seções transversais são indeformáveis em seus planos, é garantida pelo comportamento das lajes como diafragmas.

Considera-se que as características elasto-geométricas dos elementos que compõem a estrutura permanecem constantes ao longo da altura.

### 2.3 - Edifícios com um núcleo de seção aberta

#### 2.3.1 - Núcleo de seção aberta sem contraventamento

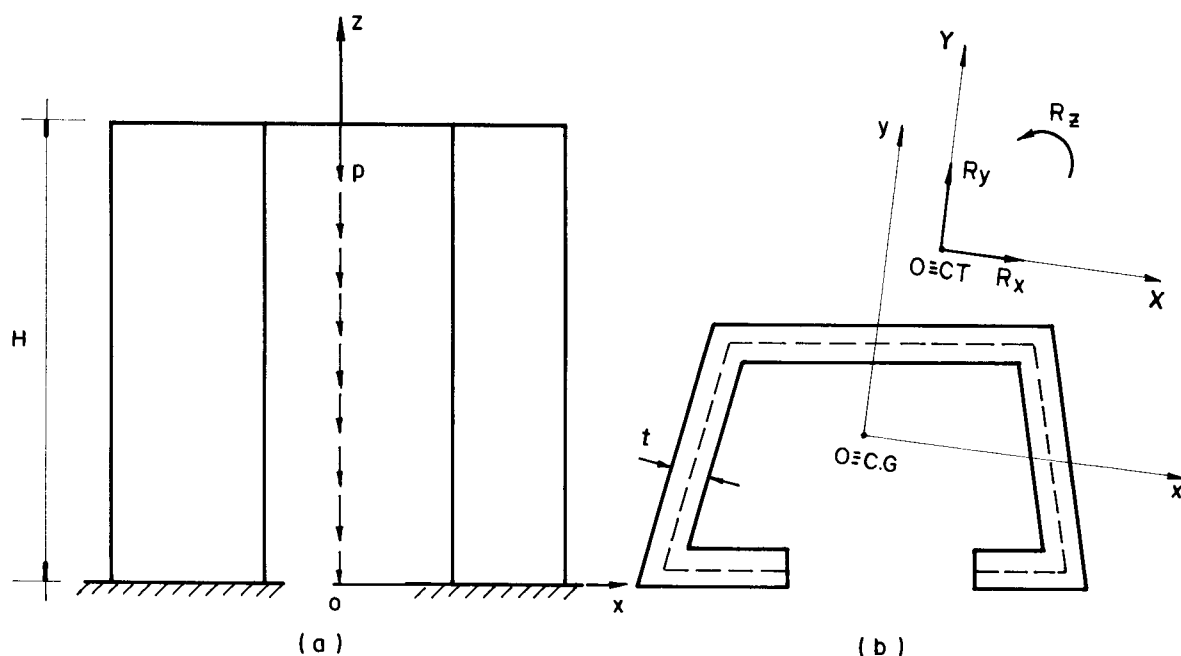


Figura 2.1 - Núcleo de seção aberta sem contraventamento

Denomina-se núcleo (ou parede) de seção aberta à combinação de paredes planas ligadas entre si, de modo a formar uma estrutura contínua de seção transversal aberta, de espessuras muito menores que as outras dimensões. Na figura (2.1) mostra-se uma estrutura de altura total  $H$ , constituída de um único núcleo de seção aberta, que será referido aos seguintes sistemas de eixos:

- a) Sistema local  $oxyz$ , com a origem  $o$  na base do edifício e coincidente com o centro de gravidade da seção transversal; os eixos  $ox$  e  $oy$  são os eixos principais de inércia e o eixo longitudinal  $oz$  é orientado da base para o topo do edifício.



- b) Sistema global OXYZ, com origem O na base do edifício e coincidente com o centro de torção da seção transversal; os eixos OX e OY estão na direção dos eixos principais de inércia da seção e o eixo longitudinal OZ é orientado da base para o topo do edifício.

Considera-se um carregamento constituído de:

- a) Carga  $p$  vertical e uniformemente distribuído ao longo do eixo  $oz$ , conforme indica-se na figura (2.1-a).
- b) Cargas laterais  $q_x$  e  $q_y$  uniformemente distribuídas ao longo da altura do núcleo e na direção dos eixos globais OX e OY, respectivamente. Na figura (2.1-b) indicam-se as resultantes  $R_x$  e  $R_y$  destas cargas, em uma cota  $Z$  da altura da estrutura.
- c) Momento torçor  $m$ , também uniformemente distribuído ao longo do eixo OZ e positivo se de sentido horário para um observador olhando na direção positiva do referido eixo, conforme indica-se na figura (2.1-b) através da sua resultante  $R_z$ , em uma cota genérica  $Z$  da altura da estrutura.

A hipótese básica da teoria das barras de seção delgada, segundo a qual a seção transversal do núcleo não se deforma em seu plano, é garantida pelo comportamento das lajes como diafragmas. Devido a isto os movimentos de qualquer ponto dessa seção transversal ficam caracterizados pelas seguintes funções de  $Z$ :

- a)  $u$  - deslocamento do centro de torção na direção do eixo global OX.
- b)  $v$  - deslocamento do centro de torção na direção do eixo global OY.

c)  $\theta$  - giro de toda seção em torno do centro de torção.

Devido à geometria de sua seção transversal, os núcleos apresentam rigidez à flexão nas duas direções principais, além da rigidez à torção. Considerando-se que estes elementos comportam-se à flexão simples como uma parede plana, as equações que expressam as forças cortantes internas, de acordo com a equação (1.3), escrevem-se como:

$$\begin{aligned} Q_X &= - EJ_y u''' \\ Q_Y &= - EJ_x v''' \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde:

- a)  $Q_X$  e  $Q_Y$  são as forças cortantes nas direções OX e OY, respectivamente, aplicadas no centro de torção do núcleo.
- b)  $J_x$  e  $J_y$  são os momentos de inércia da seção transversal em relação aos eixos principais de inércia Ox e Oy, respectivamente.
- c) E é o módulo de elasticidade longitudinal da estrutura.

De acordo com a teoria da flexo-torção, uma barra de seção aberta, submetida à torção, tem seu comportamento expresso através da seguinte equação:

$$M_t = M_\ell + M_{ft} \quad (2.2)$$

onde  $M_t$  é o momento torçor solicitante,  $M_\ell$  é o momento de torção livre e  $M_{ft}$  é o momento de flexo-torção, dados pela teoria de flexo-torção por:

$$M_t = GJ_t \theta' \quad (2.3)$$

$$M_{ft} = -EJ_\omega \theta'' \quad (2.4)$$

onde,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $J_t$  é o momento de inércia à torção da seção transversal,  $J_\omega$  é momento setorial de inércia da seção transversal e  $\theta$  é o giro da seção transversal em torno do centro de torção.

A convenção positiva para o momento torçor sollicitante e para o giro está indicada no apêndice B e para um melhor entendimento das equações é repetida na figura (2.2).

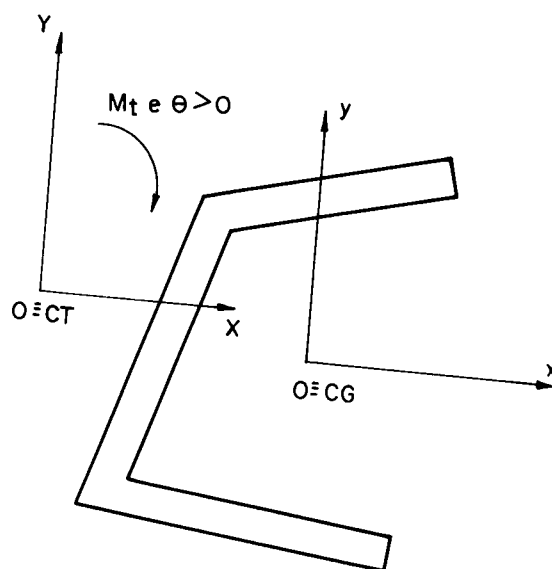


Figura 2.2 - Convenção de  $M_t$  e  $\theta$  positivos

Substituindo-se as equações (2.3) e (2.4) na equação (2.2), resulta:

$$M_t = -EJ_\omega \theta'' + GJ_t \theta' \quad (2.5)$$

As equações (2.1) e (2.5) correspondem, respectivamente, às forças cortantes internas nas direções  $OX$  e  $OY$

e ao momento torçor interno,  $M_t$ , o qual passa a ser indicado por  $Q_{int,\theta}$ , com a finalidade de homogeneizar-se a notação adotada para os esforços. Em forma matricial, este conjunto de equações será escrito como:

$$\{Q_{int}\} = - [J] \{U'''\} + [K_T] \{U'\} \quad (2.6)$$

onde:

$$\{Q_{int}\} = \begin{Bmatrix} Q_{int,X} \\ Q_{int,Y} \\ Q_{int,\theta} \end{Bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} EJ_y & 0 & 0 \\ 0 & EJ_x & 0 \\ 0 & 0 & EJ_\omega \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$[K_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_t \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\{U'''\} = \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\{U'\} = \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Em uma determinada cota genérica Z da altura da estrutura as forças cortantes externas nas direções OX e OY e o momento torçor externo, que se devem somente às cargas laterais, são dados por:

$$Q_{X,q} = R_X$$

$$Q_{Y,q} = R_Y$$

$$Q_{Z,q} = -R_Z$$

ou,

$$Q_{X,q} = q_X(H-Z)$$

$$Q_{Y,q} = q_Y(H-Z)$$

$$Q_{Z,q} = -m(H-Z) \quad (2.11)$$

Devido à ação do carregamento, um elemento de área dA da seção transversal da parede se deslocará, em relação aos eixos globais, das funções  $u_A$  e  $v_A$ , nas direções OX e OY, respectivamente. Supondo positivos os sentidos indicados na figura (2.3), podem-se relacionar estes deslocamentos com os deslocamentos u e v, do centro de torção nas direções OX e OY, respectivamente, e o giro  $\theta$ , da seção em torno do seu centro de torção, expressando essa relação através das seguintes equações:

$$u_A = u - (y_D - y)\theta$$

$$v_A = v + (x_D - x)\theta \quad (2.12)$$

onde  $x_D$  e  $y_D$  são as coordenadas do centro de torção em relação aos eixos  $oxyz$  e  $x$  e  $y$  são as coordenadas do elemento  $dA$  em relação a este mesmo sistema de eixos.

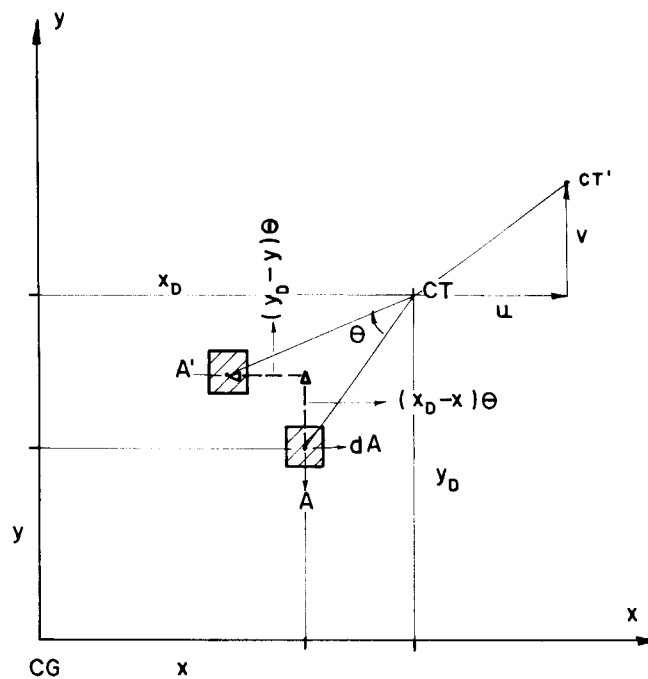


Figura 2.3 - Deslocamentos do centro de torção e do elemento de área  $dA$ .

Em uma cota genérica  $z$  a força normal que atua na seção transversal do núcleo, proveniente de uma carga vertical e uniformemente distribuída, é dada por:

$$F_N = p(H-z) \quad (2.13)$$

A seção transversal ficará submetida a tensões normais e um elemento de área  $dA$ , desta seção, terá uma força normal elementar  $dF_N$ , expressa por:

$$dF_N = \sigma dA \quad (2.14)$$

onde  $\sigma$  é a tensão normal constante na área A da seção transversal.

Observa-se, pela equação (1.6), que, numa parede deslocada em relação a sua posição inicial devido à ação de cargas uniformes lateral e vertical, a força cortante proveniente da ação da carga vertical, em uma seção de cota z, é obtida pelo produto da força normal que solicita a referida seção pela derivada primeira do deslocamento na direção considerada. Conclui-se, então, que em um elemento de área dA de uma seção transversal genérica do núcleo, que desloca-se de  $u_A$  na direção de OX e  $v_A$  na direção de OY, as forças cortantes elementares devidas à ação da carga vertical são escritas como:

$$\begin{aligned} dQ_{X,p} &= dF_N u'_A \\ dQ_{Y,p} &= dF_N v'_A \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde,  $dQ_{X,p}$  e  $dQ_{Y,p}$  são as forças cortantes no elemento genérico, devidas à carga vertical, nas direções OX e OY, respectivamente.

Substituindo-se a equação (2.14) na equação (2.15), resulta:

$$dQ_{X,p} = \sigma dA u'_A \quad (2.16)$$

$$dQ_{Y,p} = \sigma dA v'_A \quad (2.17)$$

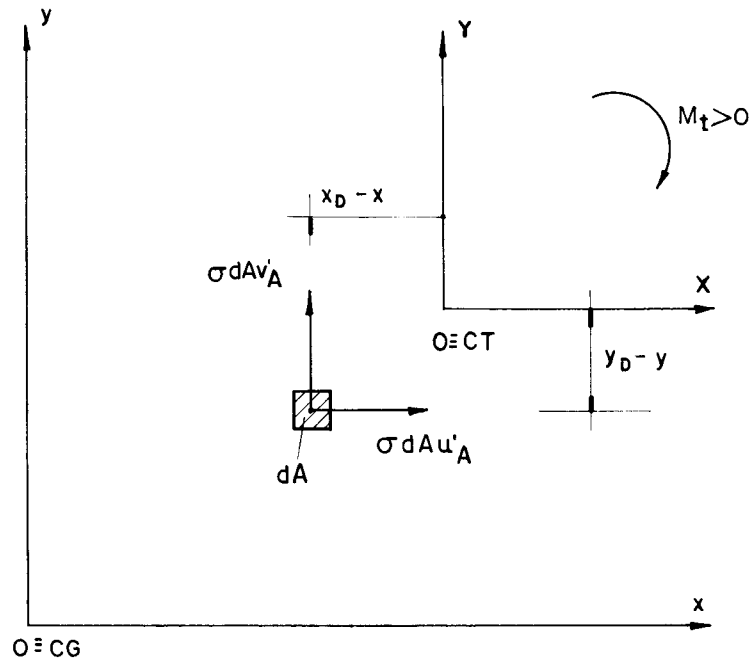


Figura 2.4 - Forças cortantes no elemento de área  $dA$

Na figura (2.4) indicam-se os sentidos positivos de  $dQ_{X,p}$  e  $dQ_{Y,p}$ . Obedecendo-se a esta convenção obtém-se, para o momento torçor externo, a seguinte equação:

$$dQ_{Z,p} = - \sigma dAu'_A (y_D - y) + \sigma dAv'_A (x_D - x) \quad (2.18)$$

Substituindo-se as equações (2.12) derivadas uma vez em relação a  $Z$ , nas equações (2.16) a (2.18) e integrando-se as equações resultantes, na área  $A$  da seção transversal, resulta:

$$Q_{X,p} = \int_A \sigma \left[ u' - (y_D - y) \theta' \right] dA \quad (2.19)$$

$$Q_{Y,p} = \int_A \sigma \left[ v' + (x_D - x) \theta' \right] dA \quad (2.20)$$

$$Q_{Z,p} = \int_A \sigma \left\{ - \left[ u' - (y_D - y) \theta' \right] (y_D - y) + \left[ v' + (x_D - x) \theta' \right] (x_D - x) \right\} dA \quad (2.21)$$



Como os eixos  $ox$  e  $oy$  são eixos principais de inércia, valem as equações:

$$\begin{aligned} \int_A x^2 dA &= J_y & \int_A y^2 dA &= J_x \\ \int_A y dA &= 0 & \int_A x dA &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

A tensão  $\sigma$ , constante na área  $A$  da seção transversal, de acordo com as equações (2.13) e (2.14), vale:

$$\sigma = \frac{p(H-z)}{A} \quad (2.23)$$

Efetuando-se as operações e integrações indicadas nas equações (2.19) a (2.21) e tendo em vista as equações (2.22) e (2.23), obtêm-se:

$$\begin{aligned} Q_{X,p} &= p(H-z)(u' - y_D \theta') \\ Q_{Y,p} &= p(H-z)(v' + x_D \theta') \\ Q_{Z,p} &= p(H-z)(u' y_D + v' x_D + i_D^2 \theta') \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde:

- a)  $Q_{X,p}$ ,  $Q_{Y,p}$  - são as forças cortantes externas segundo  $OX$  e  $OY$ , devidas à carga  $p$
- b)  $Q_{Z,p}$  - é o momento torçor externo devido à carga  $p$

c)  $i_D$  - é uma característica geométrica da seção, definida como raio de giração polar em relação a um eixo passando pelo centro de torção e calculada através da equação:

$$i_D^2 = x_D^2 + y_D^2 + \frac{J_x + J_y}{A} \quad (2.25)$$

As equações (2.11) e (2.24) correspondem, respectivamente, às forças cortantes externas e momento torçor externo, proveniente da ação da carga lateral e da carga vertical, respectivamente. A soma desses esforços nas direções X, Y e Z conduz às equações das forças cortantes externas e momento torçor externo totais, em uma seção genérica de cota z do núcleo, que são as seguintes:

$$\begin{aligned} Q_{\text{ext},X} &= p(H-z)(u' - y_D \theta') + q_X(H-z) \\ Q_{\text{ext},Y} &= p(H-z)(v' + x_D \theta') + q_Y(H-z) \\ Q_{\text{ext},Z} &= p(H-z)(-u' y_D + v' x_D + i_D^2 \theta') - m(H-z) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Exprimindo as equações (2.26) em forma matricial, resulta:

$$\{Q_{\text{ext}}\} = p(H-z) [L_T] \{U'\} + (H-z) \{Q_q\} \quad (2.27)$$

onde:

$$\{Q_{\text{ext}}\} = \begin{Bmatrix} Q_{\text{ext},X} \\ Q_{\text{ext},Y} \\ Q_{\text{ext},Z} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

$$[L_T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_D \\ 0 & 1 & x_D \\ -y_D & x_D & i_D^2 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\{Q_q\} = \begin{Bmatrix} q_X \\ q_Y \\ -m \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\{U'\} = \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Para que o equilíbrio da estrutura seja mantido, os esforços internos devem ser iguais aos esforços externos, ou seja:

$$\{Q_{int}\} = \{Q_{ext}\} \quad (2.32)$$

Substituindo-se as equações (2.6) e (2.7) na equação (2.32), obtém-se:

$$-[J] \{U'''\} + [K_T] \{U'\} = p(H-z) [L_T] \{U'\} + (H-z) \{Q_q\} \quad (2.33)$$

A equação (2.33) expressa o comportamento de uma parede de seção aberta sem contraventamento quando submetida a um carregamento composto de cargas laterais, momen-

to torçor e carga vertical. Esta equação, após um rearranjo, pode ser escrita na forma:

$$[J] \{U'''\} + (p(H-z) [L_T] - [K_T]) \{U'\} = -(H-z) \{Q_q\} \quad (2.34)$$

A solução do sistema de equações diferenciais (2.34) que fornece os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e o giro  $\theta$  do núcleo em relação ao sistema global OXYZ, será obtida mediante a utilização de dois métodos numéricos: Diferenças Finitas e Stodola-Vianello, em sua variante, da mesma forma descrita no capítulo anterior. As condições de contorno necessárias às equações diferenciais são:

a) Supondo engastamento na base da parede, vem

$$\begin{aligned} \{U(0)\} &= \{0\} \\ \{U'(0)\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (2.35)$$

b) Supondo que no topo do edifício não se tem nem momento fletor nem bimomento aplicados, segue:

$$\{U''(H)\} = \{0\} \quad (2.36)$$

### 2.3.2 - Núcleo de seção aberta contraventamento por lintéis

Na figura (2.5) mostra-se uma estrutura formada por um núcleo de seção aberta com um contraventamento consistindo de lintéis, introduzidos ao nível dos andares.

Os sistemas de eixos de referência, indicados na figura (2.5), são os mesmos considerados no item anterior, ou seja, eixos locais  $oxyz$  e eixos globais OXYZ.

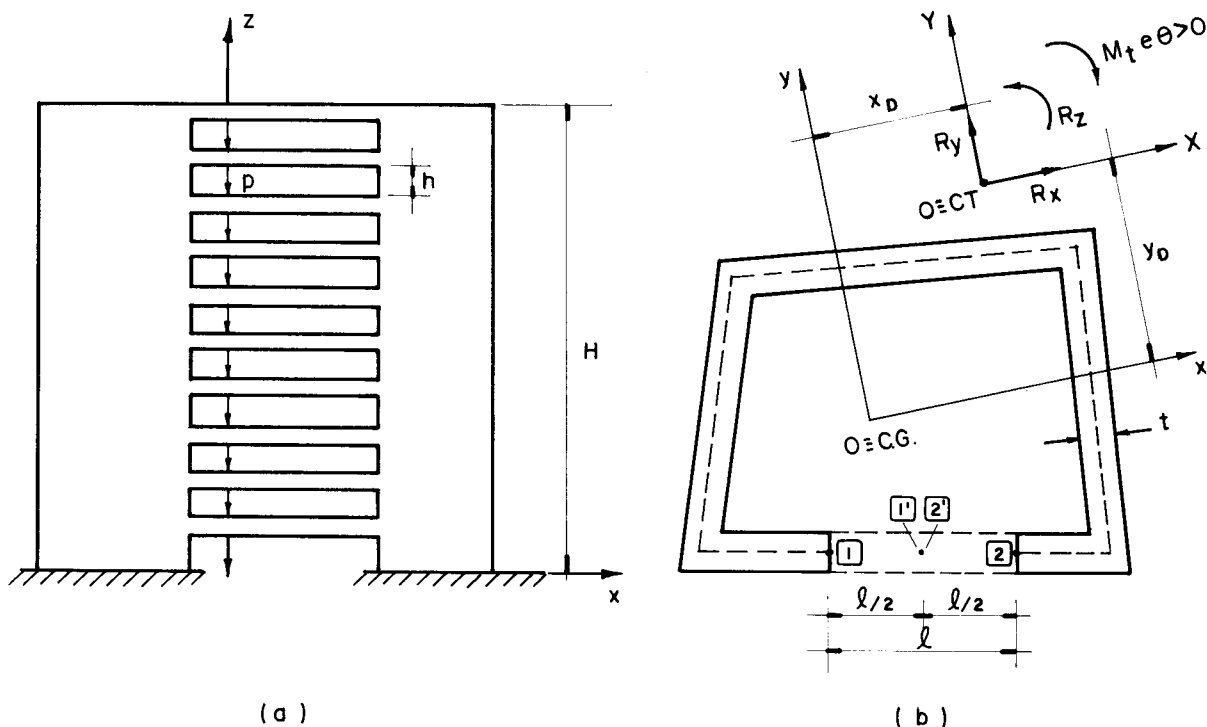


Figura 2.5 - Núcleo de seção aberta contraventamento por lintéis.

O carregamento atuante na estrutura constitui-se de carga vertical, cargas laterais e momento torçor, conforme descreve-se no item (2.3.1).

Admite-se que os lintéis são engastados na parede e que os pontos médios de seus vãos são pontos de momento nulo. Admite-se também, que a presença destes elementos não altera as características geométricas da seção transversal, como posição dos centros de gravidade e de torção.

Conforme a técnica contínua, os lintéis e os esforços que transmitem são suposto continuamente distribuídos ao longo da altura H.

Seccionando-se um lintel no ponto de momento nulo, observa-se a presença de forças cortantes concentradas, correspondentes ao vínculo rompido. Estas forças são de mesmo valor, em módulo, porém de sentidos opostos não produzindo nem momento fletor nem força cortante nas pare-

des, mas produzindo bimomento, cujo efeito é o de reduzir o empenamento da seção transversal, aumentando assim a rigidez à torção dos núcleos de seção aberta.

Como as cortantes nos lintéis não contribuem para os momentos fletores do núcleo, as equações que exprimem as forças cortantes internas, deduzidas no item (2.3.1), permanecem válidas, ou seja:

$$\begin{aligned} Q_{int,X} &= - EJ_y u'' \\ Q_{int,Y} &= - EJ_x v'' \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde:

- a)  $Q_{int,X}$  e  $Q_{int,Y}$  são as forças cortantes internas nas direções OX e OY, respectivamente;
- b)  $J_x$  e  $J_y$  são os momentos de inércia em relação aos eixos principais ox e oy, respectivamente;
- c) E é o módulo de elasticidade transversal do núcleo;
- d) u e v são os deslocamentos do centro de torção nas direções OX e OY, respectivamente.

A equação do momento torçor interno altera-se em relação a equação obtida no item (2.3.1) (equação 2.5), pelo aparecimento de um momento de flexo-torção, proveniente da ação dos lintéis e denominado de  $M_{ft,L}$ . Desta maneira, acrescentando-se à equação (2.5) o efeito introduzido pelo lintel, obtém-se:

$$M_t = - EJ_\omega \theta'' + GJ_t \theta' + M_{ft,L} \quad (2.38)$$

Para a determinação do momento de flexo-torção,  $M_{ft,L}$ , considera-se um elemento longitudinal  $dz$  do núcleo seccionado nos pontos médios dos vãos dos lintéis, conforme indica-se na figura (2.6).

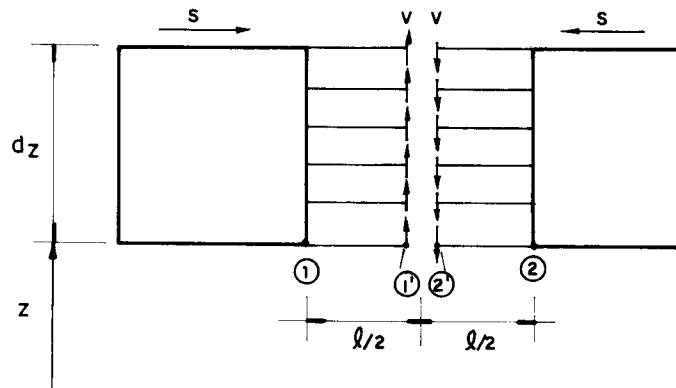


Figura 2.6 - Forças cortantes nos lintéis nos pontos de seccionamento.

As forças cortantes, que aparecem nos pontos 1' e 2' dos lintéis, de sentidos positivos indicados na figura (2.6) e consideradas distribuídas de acordo com a técnica contínua, valem:

$$v = \frac{V}{h} \quad (2.39)$$

onde:

$V$  é a força cortante concentrada em um lintel

$h$  é o espaçamento entre os lintéis

De acordo com a teoria de flexo-torção, estas forças distribuídas  $v$  produzem um acréscimo de bimomento  $dB$  no elemento longitudinal  $dz$  dado por:

$$dB = vdz\omega_1 + vdz\omega_2 \quad (2.40)$$

onde,  $\omega_1$ , e  $\omega_2$ , são as áreas setoriais dos pontos 1' e 2', respectivamente.

Pela teoria de flexo-torção, sabe-se que o momento de flexo-torção é igual a derivada do bimomento em relação a z, com sinal trocado, isto é:

$$M_{ft,L} = - \frac{dB}{dz} \quad (2.41)$$

Substituindo-se a equação (2.40) na equação (2.41) e tendo-se em vista a equação (2.39), resulta:

$$M_{ft,L} = - \frac{V}{h} (\omega_1, -\omega_2) \quad (2.42)$$

Devido ao carregamento externo aplicado, a parede ficará submetida à flexão nas duas direções principais, além da torção. Observa-se que a flexão da parede nas direções X e Y não produz deslocamentos verticais relativos nos pontos de seccionamento dos lintéis. Isto se deve ao fato de que na flexão simples as seções planas permanecem planas depois de fletidas e a ação dos momentos fletores produz deslocamentos verticais nos pontos 1' e 2' na mesma direção e sentido. Portanto, o deslocamento vertical relativo no ponto de seccionamento do lintel deve-se apenas à ação de torção no núcleo e da flexão nos lintéis. Como na estrutura real os pontos são coincidentes, será válida a seguinte equação de compatibilização nestes deslocamentos verticais.

$$W_{1'} + \delta_{1'} = W_{2'} + \delta_{2'} \quad (2.43)$$

onde:



- a)  $w_{1'}$  e  $w_{2'}$  são os deslocamentos verticais dos pontos 1' e 2' devidos à torção no núcleo. Na teoria da flexo-torção estes deslocamentos são denominados de empenamentos e calculados através das expressões.

$$w_{1'} = \omega_{1'} \theta$$

$$w_{2'} = \omega_{2'} \theta \quad (2.44)$$

com  $\omega_{1'}$  e  $\omega_{2'}$  sendo as áreas setoriais dos pontos 1' e 2', respectivamente, e  $\theta$  o giro da seção transversal. Na figura (2.7) indica-se a ocorrência destes deslocamentos devido à presença de um momento torçor positivo.

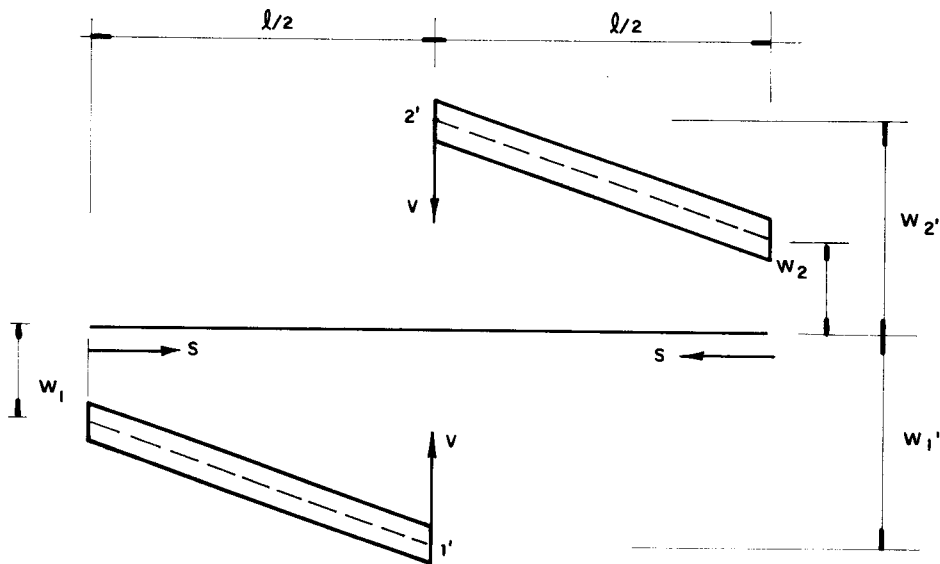


Figura 2.7 - Deslocamento de um lintel

- b)  $\delta_{1'}$  e  $\delta_{2'}$  são os deslocamentos dos pontos 1' e 2', respectivamente, devidos a deformação do lintel por momento flexor e força cortante. Considerando-se positivos os deslocamentos no sentido positivo do eixo  $oz$ , de acordo com a Resistência dos Materiais,  $\delta_{1'}$  e  $\delta_{2'}$  valem:

$$\delta_{1'} = \frac{V}{2} \left[ \frac{\ell^3}{12EJ_L} + \frac{\ell}{GA_L} \right]$$

$$\delta_{2'} = -\frac{V}{2} \left[ \frac{\ell^3}{12EJ_L} + \frac{\ell}{GA_L} \right] \quad (2.45)$$

onde:

$\ell$  é o comprimento do vão do lintel

$E$  é o módulo de elasticidade longitudinal

$J_L$  é o momento de inércia do lintel

$A_L$  é a área da seção transversal do lintel

$G$  é o módulo de elasticidade transversal

Substituindo-se as equações (2.44) e (2.45) na equação (2.43) e resolvendo-se, para a força cortante concentrada  $V$  do lintel, resulta:

$$V = - \frac{(\omega_{1'} - \omega_{2'})}{\left[ \frac{\ell^3}{12EJ_L} \right] + \left[ \frac{\ell}{GA_L} \right]} \cdot \theta' \quad (2.46)$$

Substituindo-se a equação (2.46) na equação (2.42) obtém-se, para o momento de flexo-torção, a expressão:

$$M_{ft,L} = \frac{(\omega_{1'} - \omega_{2'})^2}{h \cdot \left[ \frac{\ell^3}{12EJ_L} + \frac{\ell}{GA_L} \right]} \theta' \quad (2.47)$$

Sabe-se que para o tipo de seção aqui estudada a diferença entre as áreas setoriais  $\omega_1'$  e  $\omega_2'$ , é igual ao dobro da área interna ao esqueleto  $A_i$ , ou seja:

$$\omega_1' - \omega_2' = 2A_i \quad (2.48-a)$$

e definindo-se

$$K_L = \frac{4A_i^2}{h \left[ \frac{\ell^3}{12EJ_L} + \frac{\ell}{GA_L} \right]} \quad (2.48-b)$$

pode-se escrever a equação (2.47) como:

$$M_{ft,L} = K_L \theta' \quad (2.49)$$

A substituição da equação (2.49) na equação (2.38), conduz à seguinte expressão para o momento torçor interno:

$$M_t = -EJ_\omega \theta''' + (GJ_t + K_L) \theta' \quad (2.50)$$

As equações (2.37) e (2.50), que expressam as forças cortantes internas na estrutura, são escritas na forma matricial como:

$$\{Q_{int}\} = -[J] \{U'''\} + ([K_T] + [K_L]) \{U'\} \quad (2.51)$$

onde:

$$\{ Q_{int} \} = \begin{Bmatrix} Q_{int,X} \\ Q_{int,Y} \\ Q_{int,\theta} \end{Bmatrix}$$

$$[ J ] = \begin{bmatrix} EJ_y & 0 & 0 \\ 0 & EJ_x & 0 \\ 0 & 0 & EJ_\omega \end{bmatrix} \quad (2.52-a)$$

$$[ K_T ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_t \end{bmatrix} \quad (2.52-b)$$

$$[ K_L ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_L \end{bmatrix} \quad (2.52-c)$$

$$\{ U \} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (2.52-d)$$

Como o carregamento aplicado à estrutura é igual ao considerado no item anterior (item 2.3.1), as forças cortantes externas serão calculadas, a partir da equação (2.27), como:

$$\{Q_{ext}\} = p(H-z)[L_T]\{U'\} + (H-z)\{Q_q\} \quad (2.53)$$

onde,  $[L_T]$  e  $\{Q_q\}$  são dadas pelas equações (2.29) e (2.30), respectivamente.

Para o equilíbrio da estrutura é necessário que os esforços internos sejam iguais aos esforços externos. Combinando-se as equações (2.51) e (2.53), pode-se escrever:

$$[J]\{U'''\} + \{p(H-z)[L_T] - ([K_T] + [K_L])\}\{U'\} = -(H-z)\{Q_q\} \quad (2.51)$$

Nota-se que o sistema de equações diferenciais que expressa o comportamento do núcleo de seção aberta com contraventamento é análogo ao do núcleo de seção aberta sem contraventamento. Desta maneira utilizam-se para a sua solução os mesmos processos numéricos, ou seja, diferenças finitas e a variante do método de Stodola-Vianello, permanecendo válidas as condições de contorno fornecidas pelas equações (2.35) e (2.36).

#### 2.4 - Associação Tridimensional de Paredes e Pórticos

Na figura (2.8) representa-se em planta uma estrutura tridimensional constituída de paredes, pórticos e molas ligados através das lajes. Estes elementos de ligação, de acordo com as hipóteses da técnica do contínuo, são distribuídos ao longo da altura H da estrutura, apresentando rigidez infinita no seu plano e sem qualquer rigidez transversal.

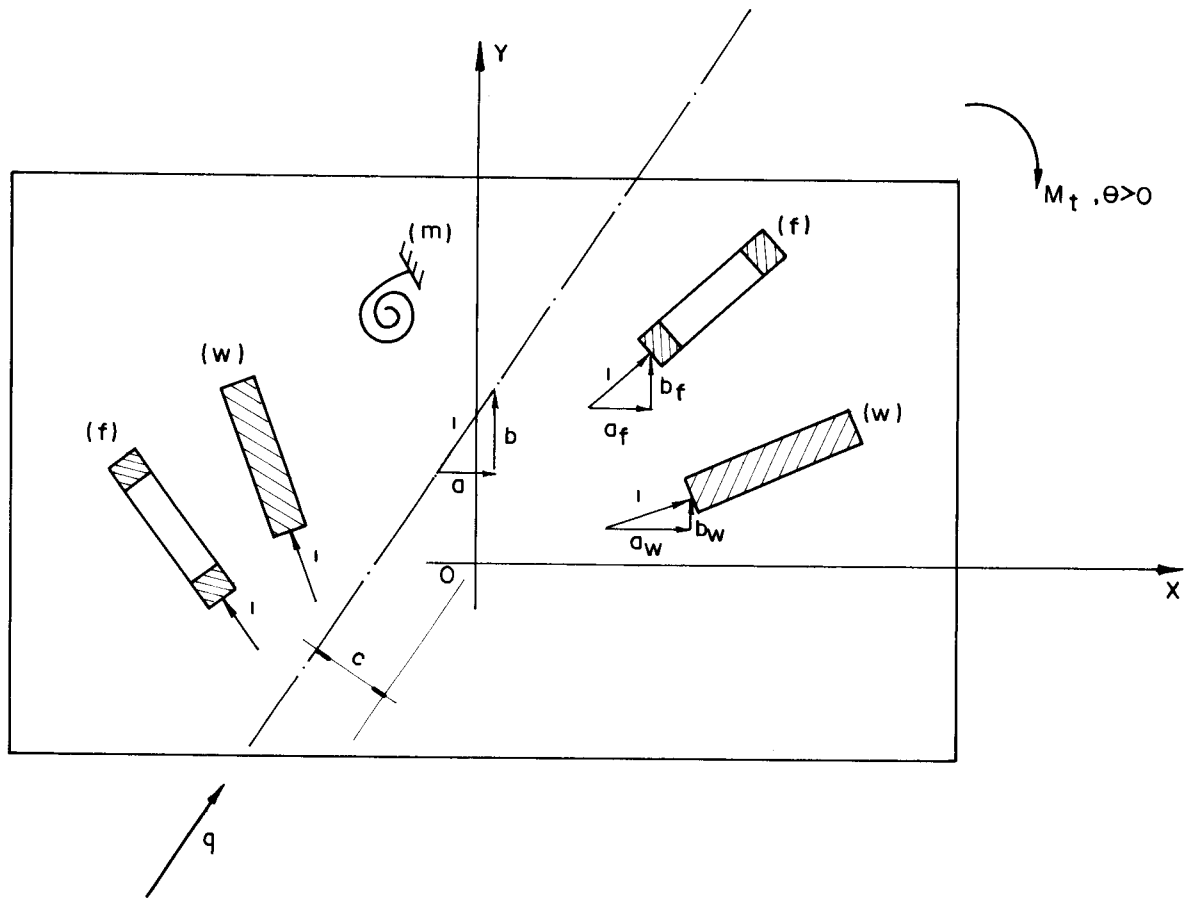


Figura 2.8 - Associação tridimensional em planta

A estrutura será referida a um sistema global de eixos tri-ortogonais OXYZ com origem 0 na base do edifício e OZ como o eixo vertical.

Em cada pórtico ou parede plana define-se um sistema local de referência,  $o_i x_i z_i$ , sendo  $o_i z_i$  vertical e contido no plano do painel com origem  $o_i$  na base da estrutura. No plano de cada parede ou pórtico convencionam-se um vetor unitário que define a posição destes elementos através de suas componentes  $a_i$ ,  $b_i$  (segundo os eixos OX e OY respectivamente) e  $c_i$ , que é o momento deste versor em relação ao eixo OZ, positivo no sentido horário. A letra  $i$  corresponde aos índices w ou f conforme se trate de parede ou pórtico, respectivamente.

No caso de existirem paredes de seção aberta, substituem-se estas por duas paredes planas equivalentes e independentes, e uma mola (m) que s<sup>o</sup> recebe torção. As paredes planas, orientadas segundo os eixos principais de inércia da seção e passando pelo centro de torção, possuem coeficientes de rigidez à flexão  $EJ_x$  e  $EJ_y$  em relação aos eixos principais de inércia  $ox$  e  $oy$ , respectivamente. A mola de torção possui coeficientes de rigidez  $GJ_t$  e  $EJ_\omega$ , de acordo com Saint-Venant e a teoria de flexo-torção, conforme indica-se na figura (2.9)

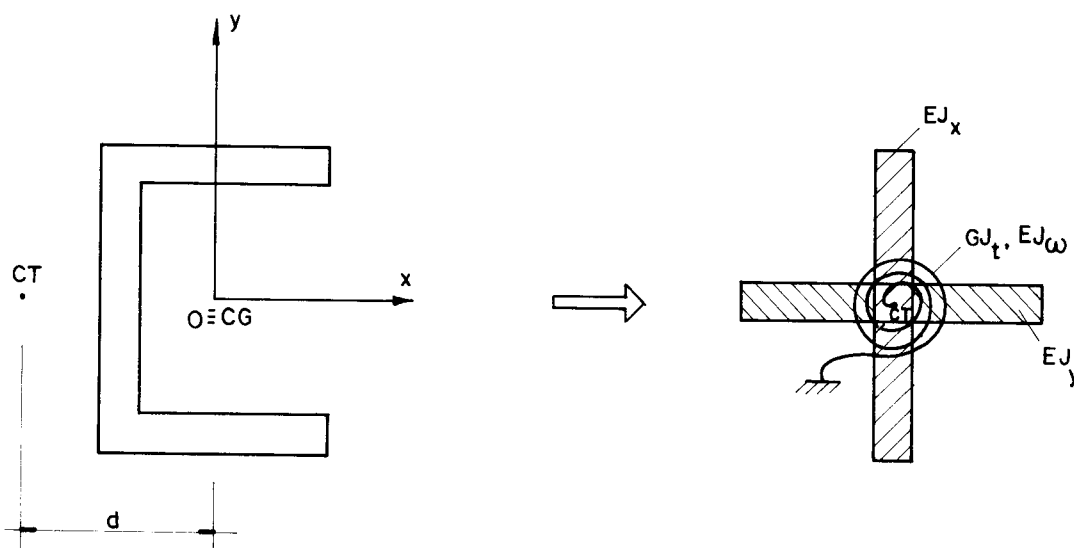


Figura 2.9 - Parede de seção aberta

As cargas aplicadas à estrutura constituem-se de:

- a) Carga  $q$  horizontal e uniformemente distribuída ao longo da altura  $H$  da estrutura, atuando em um plano  $\pi$  vertical. A posição desta carga é dada pelas componentes  $a$ ,  $b$  do seu vetor unitário, segundo os eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente, e pela componente  $c$  que é o momento deste versor em relação ao eixo  $OZ$ , positivo no sentido horário;
- b) Carga  $\alpha_i p$  vertical e uniformemente distribuída ao longo do eixo vertical, que passa pelo centro de gravidade da

seção transversal de cada parede e de cada um dos pilares do pórtico. A letra  $i$  corresponde aos índices  $w$  ou  $f$  conforme se trate de parede ou pórtico, respectivamente.

Em relação ao sistema global de referência, definem-se, para os deslocamentos do diafragma genérico, as seguintes funções de  $Z$ :

$u$  - deslocamento do ponto  $\bar{O}_Z$  no sentido de  $OX$

$v$  - deslocamento do ponto  $\bar{O}_Z$  no sentido de  $OY$

$\theta$  - rotação do diafragma em torno do eixo  $OZ$ , positiva se for no sentido horário.

com  $\bar{O}_Z$  sendo o ponto de intersecção do eixo  $OZ$  com o diafragma genérico.

As forças cortantes internas nas direções dos eixos globais  $OX$  e  $OY$  e o momento em torno do eixo  $OZ$  (positivo no sentido horário) são obtidas, de acordo com Stamatou [14], através das equações:

$$Q_{int,X} = - \sum_w j_w u_w''' a_w + \sum_f s_f u_f' a_f$$

$$Q_{int,Y} = - \sum_w j_w u_w''' b_w + \sum_f s_f u_f' b_f$$

$$Q_{int,\theta} = - \sum_w j_w u_w''' c_w + \sum_f s_f u_f' c_f + \sum_m M_t \quad (2.52)$$

onde:



- a)  $j_w$  é o produto de rigidez à flexão  $EJ_w$  de cada parede;
- b)  $s_f$  é a rigidez à força cortante de cada pórtico, estimada no apêndice A;
- c)  $u_w, u_f$  são os deslocamentos na direção dos eixos locais  $o_w x_w$  da parede e  $o_f x_f$  do pórtico, respectivamente;
- d)  $M_t$  é o momento torçor resistido pela mola, expresso pela equação:

$$M_t = -EJ_w \theta_m''' + GJ_t \theta_m' \quad (2.53)$$

com  $\theta_m$  sendo o giro na mola de torção.

Os índices  $w, f$  e  $m$  indicam que as somatórias devem ser estendidas a todas as paredes, pórticos e molas de torção do conjunto.

Os deslocamentos  $u_w, u_f$  e  $\theta_m$  dos painéis e das molas são expressos em função dos deslocamentos  $u, v$  e  $\theta$  do diafragma genérico, através das equações:

$$u_w = a_w u + b_w v + c_w \theta$$

$$u_f = a_f u + b_f v + c_f \theta$$

$$\theta_m = \theta \quad (2.54)$$

Substituindo-se as equações (2.54) e (2.53) nas equações (2.52), resulta:

$$\begin{aligned}
 Q_{int,X} &= -\sum_w j_w (a_w u''' + b_w v''' + c_w \theta''') a_w + \sum_f s_f (a_f u' + b_f v' + c_f \theta') a_f \\
 Q_{int,Y} &= -\sum_w j_w (a_w u''' + b_w v''' + c_w \theta''') b_w + \sum_f s_f (a_f u' + b_f v' + c_f \theta') b_f \\
 Q_{int,\theta} &= -\sum_w j_w (a_w u''' + b_w v''' + c_w \theta''') c_w + \sum_f s_f (a_f u' + b_f v' + c_f \theta') c_f + \\
 &+ \sum_m (-j_\omega \theta''' + j_t \theta') \tag{2.55}
 \end{aligned}$$

onde:

$j_\omega$  é o produto de rigidez à torção  $EJ_\omega$  ( $E$  sendo o módulo de elasticidade longitudinal e  $J_\omega$  o momento setorial de inércia).

$j_t$  é o produto de rigidez  $GJ_t$  ( $G$  sendo o módulo de elasticidade transversal e  $J_t$  o momento de inércia à torção).

As equações (2.55) podem ser escritas em forma matricial, como:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} Q_{int,X} \\ Q_{int,Y} \\ Q_{int,\theta} \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ba} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ca} & J_{cb} & J_{cc} + \sum_m j_\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_m j_t \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} \\ S_{ba} & S_{bb} & S_{bc} \\ S_{ca} & S_{bc} & S_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} \tag{2.56}
 \end{aligned}$$

onde:

$$J_{gh} = \sum_w j_w g_w h_w$$

$$J_{gh} = \sum_f s_f g_f h_f \quad (2.57)$$

com g e h representando qualquer uma das coordenadas a, b e c.

O sistema de equações diferenciais (2.56) pode ainda ser escrito na forma:

$$\{Q_{int}\} = - [J] \{U'''\} + ([K_T] + [S]) \{U'\} \quad (2.58)$$

onde:

$\{Q_{int}\}$  é o vetor das forças cortantes internas

$\{U\}$  é o vetor dos deslocamentos do diafragma genérico

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ba} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ca} & J_{cb} & J_{cc} + \sum_m j_{\omega} \end{bmatrix}$$

$$[K_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_m j_t \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} \\ S_{ba} & S_{bb} & S_{bc} \\ S_{ca} & S_{cb} & S_{cc} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

As forças cortantes externas na direção dos eixos OX e OY e o momento em torno do eixo OZ, de sentidos positivos indicados na figura (2.10), serão calculados considerando-se primeiramente a ação das cargas verticais atuantes na estrutura e somando-se, em seguida a estes esforços, aqueles obtidos devido à ação da carga lateral.

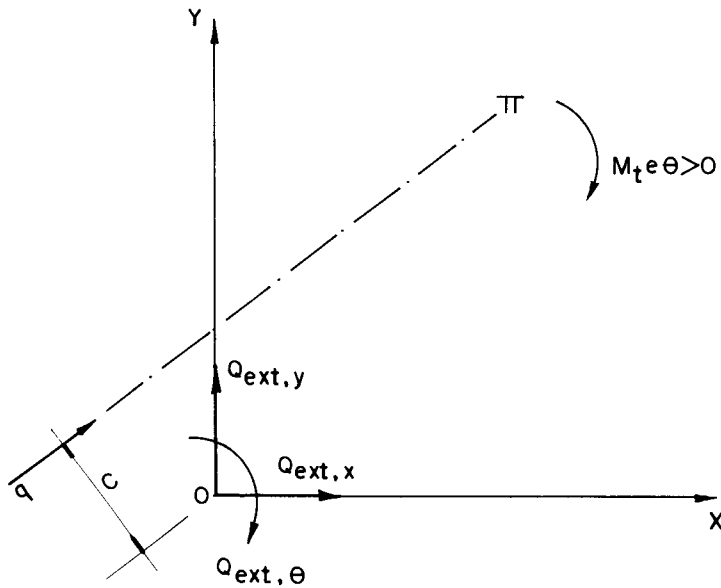


Figura 2.10 - Convenção para os esforços externos positivos

A contribuição para as forças cortantes externas totais, devido à ação da carga vertical, será calculada considerando-se separadamente as contribuições das paredes e pórticos. A determinação destes esforços pode também ser encontrada em Carvalho [4].

Na figura (2.11-a) indica-se um elemento de parede, de área  $dA$ , cuja posição em relação aos eixos globais  $OX$  e  $OY$  é dada pelas coordenadas  $(X_w$  e  $Y_w)$ .

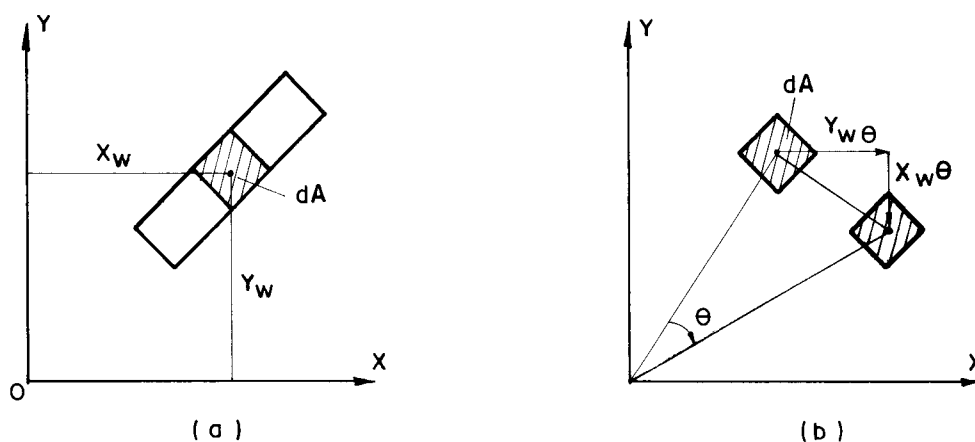


Figura 2.11 - Elemento de parede

Devido aos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e a rotação  $\theta$  (figura 2.11-b), o elemento de parede se deslocará em relação ao sistema global  $OXYZ$ , ficando estes deslocamentos expressos em função dos deslocamentos globais, através das seguintes equações:

$$\begin{aligned} u_A &= u + Y_w \theta \\ v_A &= v - X_w \theta \end{aligned} \tag{2.60}$$

onde:

$u_A$  é o deslocamento do elemento de parede na direção  $OX$

$v_A$  é o deslocamento do elemento de parede na direção  $OY$

As forças cortantes elementares externas nas direções OX e OY, figura (2.12), de um elemento de parede de área  $dA$ , obedecendo ao mesmo raciocínio do item (2.3) e com base nas equações (2.16) e (2.17), ficam expressos por:

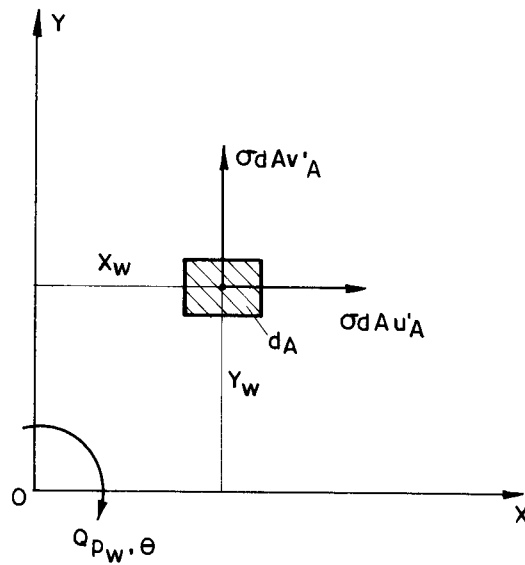


Figura 2.12 - Forças cortantes no elemento de parede

$$dQ_{p_w, X} = \sigma dA u'_A$$

$$dQ_{p_w, Y} = \sigma dA v'_A \quad (2.61)$$

O momento de torção elementar, de acordo com o sentido positivo indicado na figura (2.12), é dado por:

$$dQ_{p_w, \theta} = \sigma dA u'_A Y_w - \sigma dA v'_A X_w \quad (2.62)$$

Substituindo-se as equações (2.60), derivadas uma vez em relação a Z, nas equações (2.61) e (2.62) e integrando-se, na área da seção transversal da parede, as equações resultantes, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 Q_{P_w, X} &= \alpha_w p(H-z) (u' + Y_{CG} \theta') \\
 Q_{P_w, Y} &= \alpha_w p(H-z) (v' - X_{CG} \theta') \\
 Q_{P_w, \theta} &= \alpha_w p(H-z) (Y_{CG} u' - X_{CG} v' + \frac{I_o}{A} \theta') \quad (2.63)
 \end{aligned}$$

onde,

$I_o$  é o momento polar de inércia da parede em relação a origem dos eixos globais, 0.

A é a área da seção transversal da parede.

$X_{CG}$ ,  $Y_{CG}$  são as coordenadas do centro de gravidade da seção transversal da parede em relação aos eixos 0X e 0Y.

Exprimindo as equações (2.63) em forma matricial, resulta:

$$\begin{Bmatrix} Q_{P_w, X} \\ Q_{P_w, Y} \\ Q_{P_w, \theta} \end{Bmatrix} = \alpha_w p(H-z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_{CG} \\ 0 & 1 & -X_{CG} \\ Y_{CG} & -X_{CG} & I_o/A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

ou ainda,

$$\{ Q_{P_w} \} = \alpha_w p(H-z) [ L_w ] \{ U' \} \quad (2.65)$$

onde:

$\{Q_{P_w}\}$  é o vetor das forças cortantes externas devido a carga vertical atuante na parede w.

$$[L_w] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_{CG} \\ 0 & 1 & -X_{CG} \\ Y_{CG} & -X_{CG} & I_o/A \end{bmatrix} \quad (2.66-a)$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (2.66-b)$$

Para as paredes de seção aberta permanece válida a equação (2.65), pois no desenvolvimento do equacionamento para as paredes planas não foi feita nenhuma restrição com relação à forma da seção transversal. Portanto, se existem n paredes pode-se escrever:

$$\{Q_{TP_w}\} = p(H-Z) [L_{T_w}] U' \quad (2.67)$$

onde:

$\{Q_{TP_w}\}$  é o vetor das forças cortantes externas devido as cargas verticais aplicadas no conjunto de paredes.

$$[L_{T_w}] = \sum_{w=1}^n \alpha_w [L_w] \quad (2.68)$$



De modo análogo ao feito para a parede obtêm-se as forças cortantes que aparecem nas três direções globais, devidas ao carregamento vertical no pórtico plano.

A carga vertical  $\alpha_f p$  do pórtico plano distribui-se entre os seus pilares segundo os coeficientes  $\alpha_j$ , conforme já explicado no item (1.4). Representa-se, na figura (2.13), um pórtico plano genérico, com  $X_j$  e  $Y_j$  sendo as coordenadas do pilar  $j$  em relação ao sistema global de eixos.

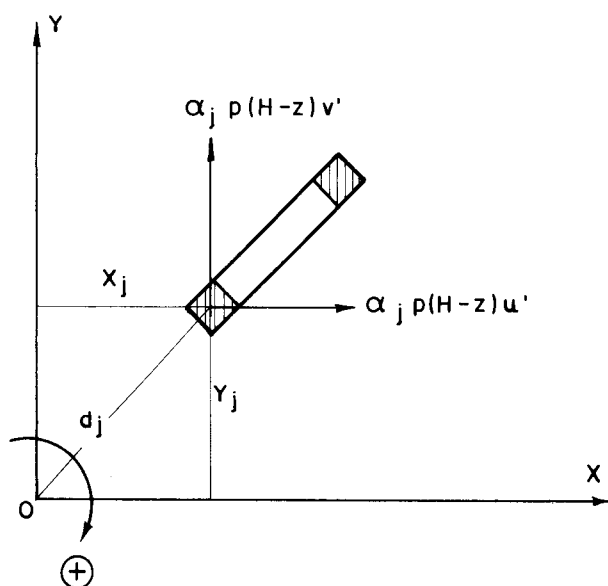


Figura 2.13 - Forças cortantes em um pilar de pórtico genérico.

Devido às translações  $u$  e  $v$  do diafragma nas direções  $OX$  e  $OY$ , respectivamente, aparecem no pilar  $j$ , em uma cota  $Z$ , forças cortantes nas três direções dos eixos globais. Obedecendo-se aos sentidos positivos indicados na figura (2.13), estes esforços são expressos através das equações:

$$\bar{Q}_{p_j, X} = \alpha_j p(H-Z)u'$$

$$\bar{Q}_{p_j, Y} = \alpha_j p (H-Z) v'$$

$$\bar{Q}_{p_j, \theta} = \alpha_j p (H-z) (Y_j u' - X_j v') \quad (2.69)$$

Impondo-se aos diafragmas uma rotação positiva  $\theta$ , observa-se (figura 2.14) que o pilar  $j$  desloca-se nas direções  $OX$  e  $OY$  de:

a)  $Y_j \theta$  na direção do eixo  $OX$

b)  $-X_j \theta$  na direção do eixo  $OY$

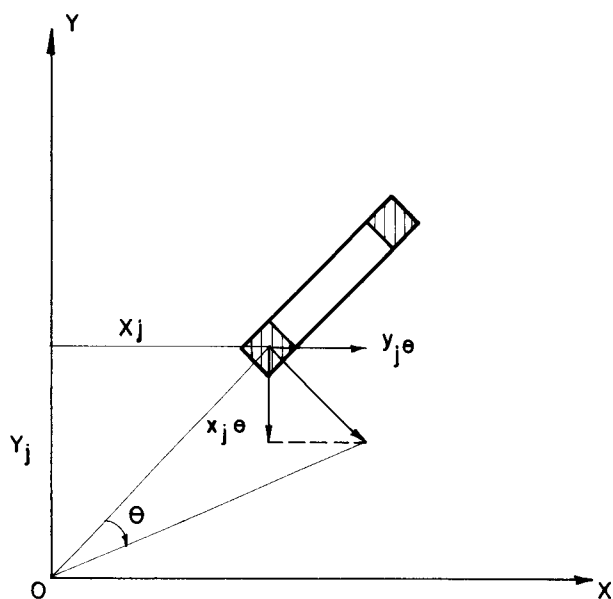


Figura 2.14 - Deslocamentos devidos ao giro  $\theta$

Isto conduz ao aparecimento de forças cortantes na direção desses deslocamentos (figura 2.15), calculadas a partir das equações:

$$\bar{Q}_{p_j, X} = \alpha_j p (H-Z) Y_j \theta'$$

$$\bar{Q}_{p_j, Y} = - \alpha_j p (H-Z) X_j \theta' \quad (2.70-a)$$

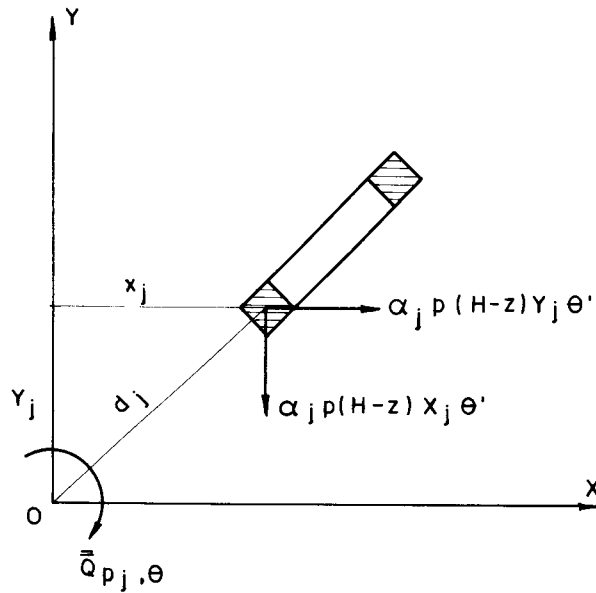


Figura 2.15 - Forças cortantes em um pilar de pórtico genérico.

O momento de torção, proveniente das forças cortantes  $\bar{Q}_{p_j, X}$  e  $\bar{Q}_{p_j, Y}$ , de acordo com o sentido positivo indicado na figura (2.15), é dado por:

$$\bar{Q}_{p_j, \theta} = \alpha_j p (H-Z) (X_j^2 + Y_j^2) \theta' \quad (2.70-b)$$

Somando-se os efeitos de segunda ordem para os três deslocamentos (equações (2.69) e (2.70)) e lembrando que a análise foi desenvolvida para um pilar de pórtico, têm-se as seguintes expressões, para as forças cortantes devidas ao carregamento vertical do conjunto de pórticos.

$$Q_{p_f, X} = \sum_j \alpha_j p (H-Z) (u' + Y_j \theta')$$

$$Q_{P_f, Y} = \sum_j \alpha_j p(H-Z) (v' - X_j \theta')$$

$$Q_{P_f, \theta} = \sum_j \alpha_j p(H-Z) (Y_j u' - X_j v' + d_j^2 \theta') \quad (2.71)$$

onde o índice  $j$  indica que a somat6ria estende-se para todas as colunas de p6rticos e

$$d_j^2 = X_j^2 + Y_j^2 \quad (2.72)$$

As equa76es (2.71) em forma matricial expressam-se por:

$$\begin{Bmatrix} Q_{P_f, X} \\ Q_{P_f, Y} \\ Q_{P_f, \theta} \end{Bmatrix} = \sum_j \alpha_j p(H-Z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_j \\ 0 & 1 & -X_j \\ Y_j & -X_j & d_j^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad (2.73)$$

ou

$$\{ Q_{P_f} \} = p(H-Z) [ L_f ] \{ U' \} \quad (2.74)$$

onde:

$\{ Q_{P_f} \}$  6 o vetor das for7as cortantes devido a carga vertical do conjunto de p6rticos.

$$[ L_f ] = \sum_j \alpha_j [ L_{P_j} ] \quad (2.75)$$

com,

$$\left[ L_{P_j} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_j \\ 0 & 1 & -X_j \\ Y_j & -X_j & d_j^2 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

A força cortante externa, proveniente das cargas verticais nos pórticos e paredes, é obtida somando-se as contribuições de cada painel. Desta forma, a soma das equações (2.67) e (2.74) conduz a:

$$\left\{ Q_{p,ext} \right\} = p(H-Z) \left[ L_{T_w} \right] \left\{ U' \right\} + p(H-Z) \left[ L_f \right] \left\{ U' \right\} \quad (2.77)$$

ou

$$\left\{ Q_{p,ext} \right\} = p(H-Z) \left[ L_{ST} \right] \left\{ U' \right\} \quad (2.78)$$

onde

$\left\{ Q_{p,ext} \right\}$  é o vetor das forças cortantes externas devidas à carga vertical.

$$\left[ L_{ST} \right] = \left[ L_{T_w} \right] + \left[ L_f \right] \quad (2.79)$$

A força cortante externa em uma cota Z devida somente à carga lateral q, é dada por:

$$Q_{q,ext,X} = q(H-Z) a$$

$$Q_{q,ext,Y} = q(H-Z) b$$

$$Q_{q,ext,\theta} = q(H-Z) c \quad (2.80)$$

ou, em forma matricial

$$\{Q_{q,ext}\} = (H-Z) \{Q_q\} \quad (2.81)$$

onde

$\{Q_{q,ext}\}$  é o vetor das forças cortantes devidas à carga lateral

$$\{Q_q\} = \begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{Bmatrix} \quad (2.82)$$

Somando-se as equações (2.78) e (2.81), obtêm-se a força cortante externa total na estrutura:

$$\{Q_{ext}\} = p(H-Z) [L_{ST}] \{U'\} + (H-Z) \{Q_q\} \quad (2.83)$$

onde

$$\{Q_{ext}\} = \begin{Bmatrix} Q_{ext,X} \\ Q_{ext,Y} \\ Q_{ext,\theta} \end{Bmatrix}$$

A condição de equilíbrio exige que os esforços internos igualem-se aos esforços externos. Deste modo a igualdade entre as equações (2.58) e (2.83) conduz a:

$$-\left[ J \right] \left\{ U'''' \right\} + \left( \left[ K_T \right] + \left[ S \right] \right) \left\{ U' \right\} = p(H-Z) \left[ L_{ST} \right] \left\{ U' \right\} + (H-Z) \left\{ Q_q \right\}$$

ou, em uma forma mais conveniente,

$$\left[ J \right] \left\{ U'''' \right\} + \left( p(H-Z) \left[ L_{ST} \right] - \left( \left[ K_T \right] + \left[ S \right] \right) \right) \left\{ U' \right\} = -(H-Z) \left\{ Q_q \right\} \quad (2.84)$$

A solução da equação (2.84) é obtida através de dois processos numéricos: Diferenças Finitas e Stodola-Vianello em sua variante. As condições de contorno utilizadas são:

a) Supondo engastamento na base da estrutura, vem

$$\left\{ U(0) \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

$$\left\{ U'(0) \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (2.85-a)$$

b) Supondo que não existem momentos aplicados no topo da estrutura.

$$\left\{ U''(H) \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (2.85-b)$$

## 2.5 - Edifícios com Dois Núcleos de Seção Aberta

### 2.5.1 - Núcleos sem contraventamento

Na figura (2.16) representam-se em planta dois núcleos de seção aberta, ligados entre si através das lajes. A análise desta estrutura é análoga à desenvolvida no item 2.3.1, quando se considerou apenas um núcleo de seção aberta.

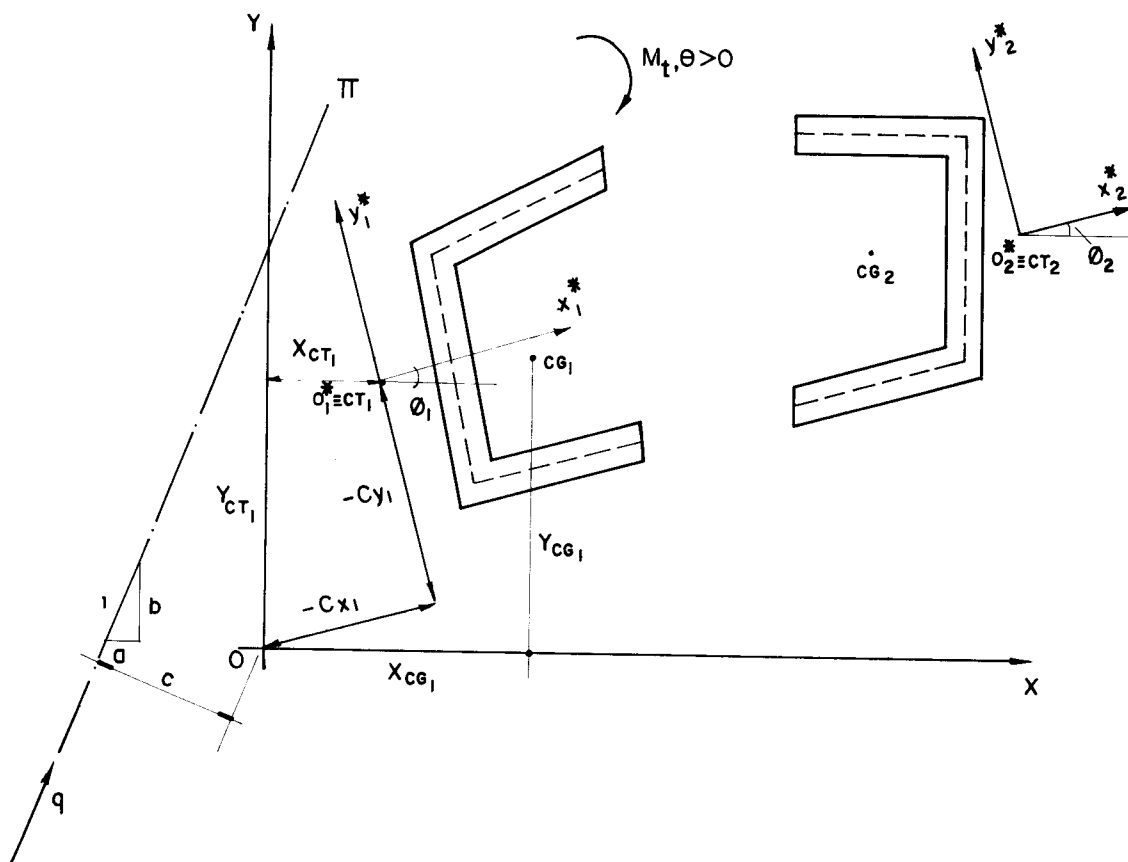


Figura 2.16 - Núcleos de seção aberta sem contraventamento

A estrutura tem altura total  $H$  e é definida geometricamente através dos seguintes sistemas de eixos:

- a) Sistema global de eixos  $OXYZ$  com origem na base do edifício. Os eixos  $OX$  e  $OY$  são eixos horizontais e  $OZ$  é o eixo vertical, orientado da base para o topo.
- b) Sistema local de eixos  $o_i^* x_i^* y_i^* z_i^*$  em cada núcleo, sendo  $o_i^* x_i^*$  e  $o_i^* y_i^*$  os eixos horizontais paralelos aos eixos principais de inércia e  $o_i^* z_i^*$  o eixo orientado da base para o topo da estrutura. A origem  $o_i^*$  do sistema é coincidente com o centro de torção do núcleo.

A localização do centro de torção e do centro de gravidade de cada núcleo, em relação aos eixos globais, é



definida através das coordenadas  $(X_{CT_i}, Y_{CT_i})$  e  $(X_{CG_i}, Y_{CG_i})$ , respectivamente. Definem-se ainda  $c_{x_i}$  e  $c_{y_i}$  como as coordenadas da origem global  $O$  em relação ao sistema de eixos  $o_i^* x_i^* y_i^* z_i^*$ . Supõe-se também que o eixo local  $o_i^* x_i^*$  forma um ângulo  $\phi_i$  com o eixo global  $OX$ . O índice  $i$  refere-se aos parâmetros associados às paredes 1 ou 2.

O carregamento constitui-se de carga lateral  $q$ , uniformemente distribuída ao longo da altura da estrutura, atuando em um plano  $\pi$  vertical. A posição desta carga é definida pelas componentes  $a$ ,  $b$  do seu vetor unitário, segundo os eixos  $OX$  e  $OY$ , e pela componente  $c$  que é o momento deste vetor em relação ao eixo  $OZ$ , positivo no sentido horário. Além desta carga lateral, atuam na estrutura cargas verticais  $\alpha_i p$  uniformemente distribuídas ao longo dos eixos verticais que passam pelos centros de gravidade dos núcleos.

Em relação ao sistema global, os deslocamentos dos diafragmas ficam caracterizados pelas seguintes funções de  $Z$ :

$u$  - deslocamento na direção do eixo  $OX$

$v$  - deslocamento na direção do eixo  $OY$

$\theta$  - rotação em torno do eixo  $OZ$ , positiva se concordante com o sentido indicado na figura (2.16).

No item (2.3.1) observou-se que um núcleo de seção aberta apresenta rigidez à flexão nas duas direções principais, além de rigidez à torção. Pode-se, então, escrever, para a estrutura em análise, que as forças cortantes internas no núcleo  $i$  (figura 2.17), expressam-se, de acordo com as equações (2.1) e (2.5), por:

$$Q_{x_i} = - EJ_{y_i} u_i'''$$

$$\begin{aligned} Q_{y_i} &= - EJ_{x_i} v_i''' \\ Q_{\theta_i} &= - EJ_{\omega_i} \theta_i''' + GJ_{t_i} \theta_i' \end{aligned} \quad (2.86)$$

onde:

$Q_{x_i}$ ,  $Q_{y_i}$  são as forças cortantes internas aplicadas ao centro de torção nas direções dos eixos  $o_i^* x_i^*$  e  $o_i^* y_i^*$ , respectivamente;

$Q_{\theta_i}$  é o momento de torção em relação ao eixo  $o_i^* z_i^*$ ;

$J_{x_i}$ ,  $J_{y_i}$  são os momentos de inércia em relação aos eixos principais;

$J_{\omega_i}$  é o momento setorial de inércia da seção transversal da parede  $i$ ;

$J_{t_i}$  é o momento de inércia à torção;

$E, G$  são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, respectivamente;

$u_i$ ,  $v_i$  são os deslocamentos do centro de torção nas direções  $o_i^* x_i^*$  e  $o_i^* y_i^*$ , respectivamente;

$\theta_i$  é a rotação de toda seção transversal da parede  $i$  em relação ao seu próprio centro de torção.

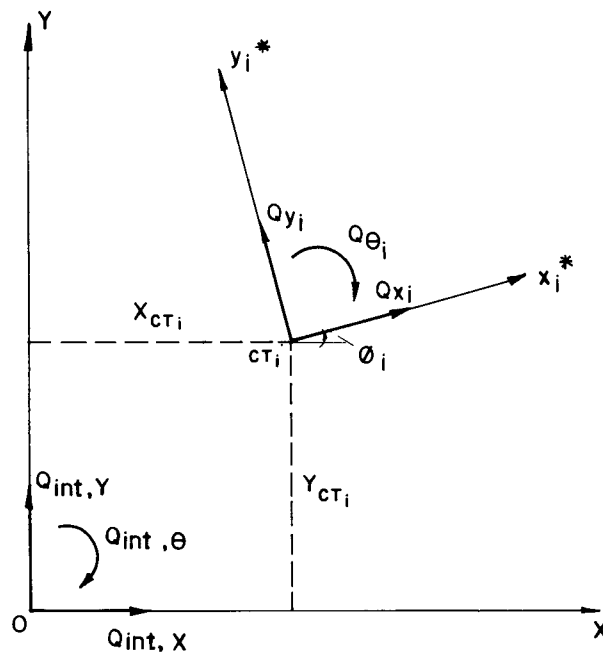


Figura 2.17 - Convenção para as forças cortantes internas positivas.

Exprimindo-se as equações (2.86) na forma matricial, resulta:

$$\begin{Bmatrix} Q_{x_i} \\ Q_{y_i} \\ Q_{\theta_i} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} EJ_{y_i} & 0 & 0 \\ 0 & EJ_{x_i} & 0 \\ 0 & 0 & EJ_{\omega_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i'''' \\ v_i'''' \\ \theta_i'''' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_{t_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \\ \theta_i' \end{Bmatrix}$$

ou,

$$\{Q_i\} = -[J_i] \{U_i''''\} + [K_{T_i}] \{U_i'\} \quad (2.87)$$

onde:

$\{Q_i\}$  é o vetor das forças cortantes internas da parede  $i$  nas direções de seus eixos principais;

$$[J_i] = \begin{bmatrix} EJ_{y_i} & 0 & 0 \\ 0 & EJ_{x_i} & 0 \\ 0 & 0 & EJ_{\omega_i} \end{bmatrix}$$

$$[K_{T_i}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_{t_i} \end{bmatrix}$$

$$\{U_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

(2.88)

Os deslocamentos dos núcleos nas direções dos seus respectivos sistemas de eixos, são escritos, em função dos deslocamentos das lajes nas direções dos eixos globais OXYZ, como:

$$u_i = u \cos \phi_i + v \sin \phi_i - c_{y_i} \theta$$

$$v_i = -u \sin \phi_i + v \cos \phi_i + c_{x_i} \theta$$

$$\theta_i = \theta$$

ou, em forma matricial

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_i & \text{sen}\phi_i & -c_{y_i} \\ -\text{sen}\phi_i & \cos\phi_i & c_{x_i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix}$$

ou ainda:

$$\{U_i\} = [L_{E_i}] \{U\} \quad (2.89)$$

onde:

$\{U\}$  é o vetor dos deslocamentos das lajes nas direções OXYZ

e

$$[L_{E_i}] = \begin{bmatrix} \cos\phi_i & \text{sen}\phi_i & -c_{y_i} \\ -\text{sen}\phi_i & \cos\phi_i & c_{x_i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

com as coordenadas  $c_{x_i}$  e  $c_{y_i}$  da origem global  $\underline{O}$  em relação aos eixos  $o_i^* x_i^*$  e  $o_i^* y_i^*$  calculadas, como observa-se na figura (2.16), pelas equações:

$$\begin{aligned} -c_{x_i} &= X_{CT_i} \cos\phi_i + Y_{CT_i} \text{sen}\phi_i \\ -c_{y_i} &= -X_{CT_i} \text{sen}\phi_i + Y_{CT_i} \cos\phi_i \end{aligned} \quad (2.91)$$

Produzindo-se uma rotação  $\phi_i$  no sistema de eixos  $o_i x_i y_i z_i$ , de modo a torná-lo paralelo ao sistema global de eixos OXYZ, obtêm-se, para as forças cortantes internas aplicadas no centro de torção do núcleo  $i$ , as seguintes expressões:

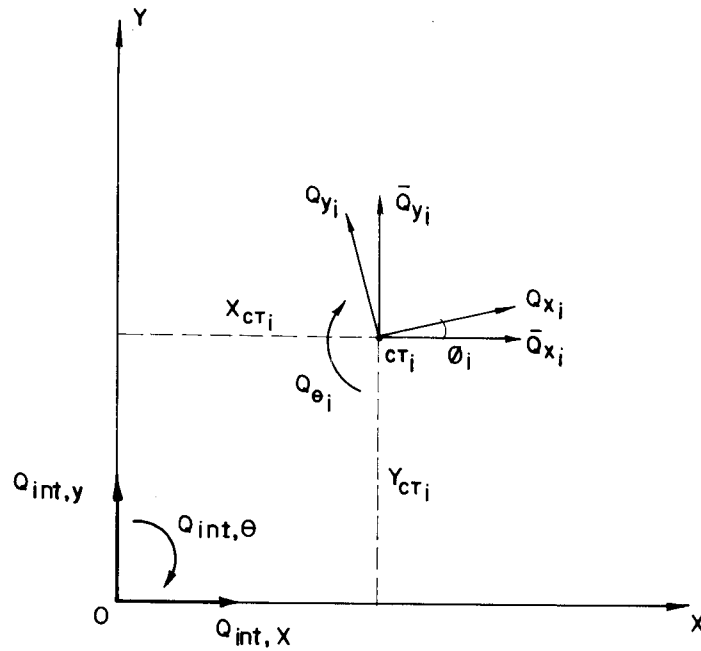


Figura 2.18 - Rotação do vetor  $\{Q_i\}$

$$\bar{Q}_{x_i} = Q_{x_i} \cos \phi_i - Q_{y_i} \operatorname{sen} \phi_i$$

$$\bar{Q}_{y_i} = Q_{x_i} \operatorname{sen} \phi_i + Q_{y_i} \cos \phi_i$$

$$\bar{Q}_{\theta_i} = Q_{\theta_i} \quad (2.92)$$

onde:

$\bar{Q}_{x_i}$ ,  $\bar{Q}_{y_i}$ ,  $\bar{Q}_{\theta_i}$  são os esforços internos no centro de torção do núcleo  $i$ , nas direções paralelas aos eixos globais OXYZ.

As forças cortantes internas  $Q_{int,X}$  e  $Q_{int,Y}$  e o momento torçor total  $Q_{int,\theta}$  são obtidos, respectivamente, somando-se as forças cortantes nas direções OX e OY e os momentos em torno do eixo OZ, provenientes de cada núcleo. Obedecendo-se aos sentidos positivos dos esforços indicados na figura (2.18) e considerando-se uma estrutura constituída de  $n$  núcleos, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 Q_{int,X} &= \sum_{i=1}^n \bar{Q}_{x_i} \\
 Q_{int,Y} &= \sum_{i=1}^n \bar{Q}_{y_i} \\
 Q_{int,\theta} &= \sum_{i=1}^n (\bar{Q}_{x_i} y_{CT_i} - \bar{Q}_{y_i} x_{CT_i} + \bar{Q}_{\theta_i}) \quad (2.93)
 \end{aligned}$$

Substituindo-se as equações (2.92) nas equações (2.93) e tendo em vista as equações (2.91), resulta:

$$\begin{aligned}
 Q_{int,X} &= \sum_{i=1}^n (Q_{x_i} \cos\phi_i - Q_{y_i} \text{sen}\phi_i) \\
 Q_{int,Y} &= \sum_{i=1}^n (Q_{x_i} \text{sen}\phi_i + Q_{y_i} \cos\phi_i) \\
 Q_{int,\theta} &= \sum_{i=1}^n (-Q_{x_i} c_{y_i} + Q_{y_i} c_{x_i} + Q_{\theta_i}) \quad (2.94)
 \end{aligned}$$

ou, em forma matricial

$$\begin{Bmatrix} Q_{int,X} \\ Q_{int,Y} \\ Q_{int,\theta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \cos\phi_i & -\text{sen}\phi_i & 0 \\ \text{sen}\phi_i & \cos\phi_i & 0 \\ -c_{y_i} & c_{x_i} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{x_i} \\ Q_{y_i} \\ Q_{\theta_i} \end{Bmatrix}$$

ou,

$$\{Q_{int}\} = \sum_{i=1}^n [L_{E_i}]^T \{Q_i\} \quad (2.95)$$

onde

$\{Q_{int}\}$  é o vetor das forças cortantes internas da estrutura nas direções globais.

Substituindo-se a equação (2.87) e (2.89) na equação (2.95) obtêm-se:

$$\{Q_{int}\} = \sum_{i=1}^n (-[L_{E_i}]^T [J_i] [L_{E_i}] \{U'''\} + [L_{E_i}]^T [K_{T_i}] [L_{E_i}] \{U'\})$$

ou, definindo-se

$$[J] = \sum_{i=1}^n [L_{E_i}]^T [J_i] [L_{E_i}]$$

e

$$[K_T] = \sum_{i=1}^n [L_{E_i}]^T [K_{T_i}] [L_{E_i}] \quad (2.96)$$

resulta:

$$\{Q_{int}\} = -[J] \{U'''\} + [K_T] \{U'\} \quad (2.97)$$

Em relação a um sistema global de eixos OXYZ, as forças cortantes externas atuantes na estrutura, provenientes das cargas verticais e da carga lateral, são obtidas seguindo raciocínio análogo ao utilizado no item (2.4).



Devido às cargas verticais atuantes em cada núcleo, as forças cortantes externas, numa cota Z e nas direções globais, são obtidas utilizando-se a equação (2.67), ou seja:

$$\{Q_{Tp}\} = p(H-Z) [L_w] \{U'\} \quad (2.98)$$

onde:

$\{Q_{Tp}\}$  é o vetor das forças cortantes externas devidas às cargas verticais nas paredes.

$$[L_w] = \sum_{i=1}^n \alpha_i [L_i] \quad (2.99)$$

com

$$[L_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_{CG_i} \\ 0 & 1 & -X_{CG_i} \\ Y_{CG_i} & -X_{CG_i} & I_{o,i}/A_i \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

$I_{o,i}$  sendo o momento polar de inércia da parede  $i$  em relação a origem global  $O$  e  $A_i$  sendo a área da seção transversal da parede  $i$ .

Devido à carga lateral  $q$ , as forças cortantes nas direções globais, em uma cota Z, são expressas pela equação (2.81), isto é:

$$\{Q_{q,ext}\} = (H-Z) \{Q_q\} \quad (2.101)$$

onde:

$\{Q_{q,ext}\}$  é o vetor das forças cortantes devidas à carga lateral

$$\{Q_q\} = \begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{Bmatrix} \quad (2.102)$$

Conclui-se, então, que as forças cortantes externas totais, atuantes na estrutura nas direções OXYZ são obtidas somando-se as equações (2.98) e (2.101), ou seja:

$$\{Q_{ext}\} = p(H-Z) [L_w] \{U'\} + (H-Z) \{Q_q\} \quad (2.103)$$

onde

$$\{Q_{ext}\} = \begin{Bmatrix} Q_{ext,X} \\ Q_{ext,Y} \\ Q_{ext,\theta} \end{Bmatrix} \quad (2.104)$$

Para que haja o equilíbrio na estrutura é necessário que os esforços internos (equação 2.97) igualem-se aos esforços externos (equação 2.101), logo:

$$-[J] \{U'''\} + [K_T] \{U'\} = p(H-Z) [L_w] \{U'\} + (H-Z) \{Q_q\}$$

ou,

$$[J] \{U'''\} + (p(H-Z) [L_w] - [K_T]) \{U'\} = - (H-Z) \{Q_q\} \quad (2.105)$$

A solução do sistema de equações diferenciais (2.105) é obtida através de dois processos numéricos: diferenças finitas e Stodola-Vianello, em sua variante, utilizando-se as seguintes condições de contorno:

a) Supondo engastamento na base da estrutura vem,

$$\{U(0)\} = \{0\}$$

$$\{U'(0)\} = \{0\} \quad (2.106-a)$$

b) Supondo que não existem bimomentos nem momentos fletores aplicados no topo das paredes,

$$\{U''(H)\} = \{0\} \quad (2.106-b)$$

### 2.5.2 - Núcleos contraventados por lintéis

A figura (2.19) representa em planta um edifício de altura total H formado por dois núcleos contraventados por lintéis, ao nível dos andares, e submetido ao mesmo carregamento descrito no item (2.5.1), isto é, carga horizontal q uniformemente distribuída atuando em um plano  $\pi$  e carga  $\alpha_i p$  uniformemente distribuídas aplicadas ao longo dos eixos verticais que passam pelos centros de gravidade de cada núcleo.

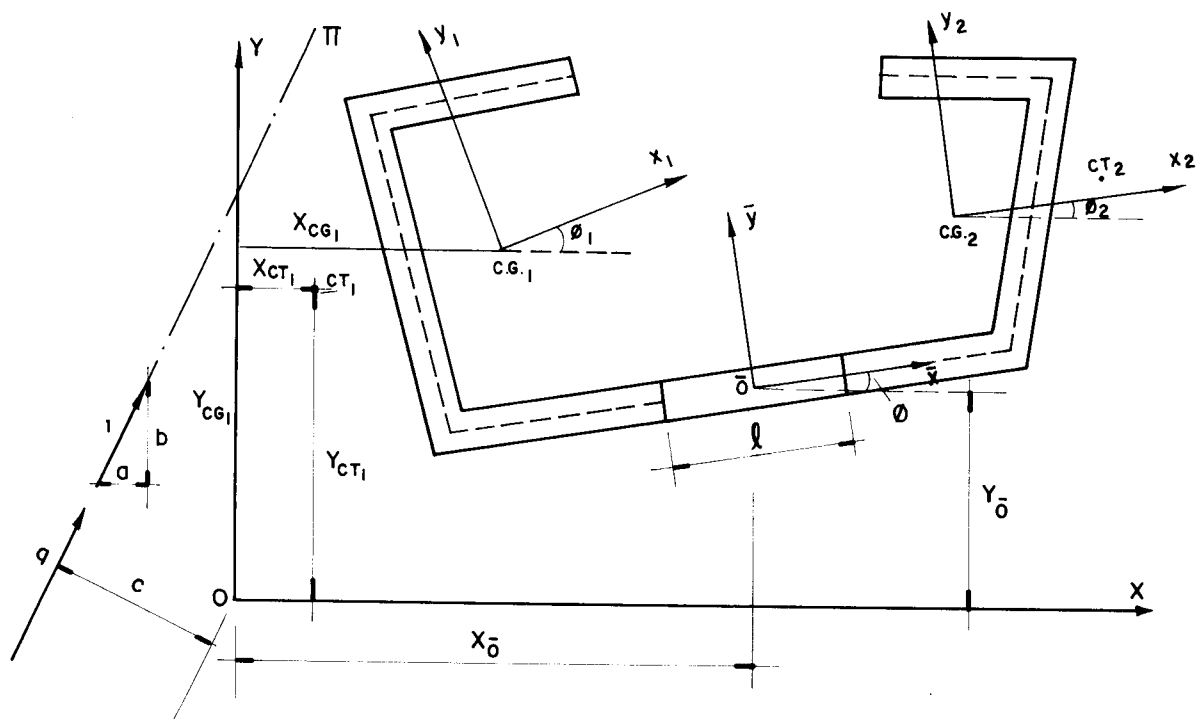


Figura 2.19 - Núcleos contraventados por lintéis

A estrutura será referenciada aos seguintes sistemas de eixos:

- a) Sistema global de eixos  $OXYZ$  sendo  $OX$  e  $OY$  eixos horizontais na base da estrutura e  $OZ$  o eixo vertical.
- b) Sistema de eixos locais  $o_i x_i y_i z_i$  em cada núcleo, sendo  $o_i x_i$  e  $o_i y_i$  os eixos principais de inércia e o eixo  $o_i z_i$  vertical. Posiciona-se a origem  $o_i$  na base da estrutura, coincidindo com o centro de gravidade da seção transversal do núcleo  $i$ .
- c) Sistema local  $\bar{o}x\bar{y}\bar{z}$  com  $\bar{o}x$  sendo o eixo na direção longitudinal dos lintéis,  $\bar{o}z$  sendo o eixo vertical passando através dos pontos médios dos lintéis e  $\bar{o}y$  o eixo no plano horizontal perpendicular ao eixo  $\bar{o}x$ , conforme figura (2.19). O ponto  $\bar{o}$  é o ponto médio do lintel da base.

As posições do centro de gravidade e do centro de torção do núcleo  $i$ , em relação ao sistema global  $OXYZ$ , ficam definidas através das coordenadas  $(X_{CG_i}, Y_{CG_i})$  e  $(X_{CT_i}, Y_{CT_i})$ , respectivamente, e a posição da origem  $\bar{o}$ , em relação a este mesmo sistema de eixos, fica definida através das coordenadas  $(X_{\bar{o}}, Y_{\bar{o}})$ . Supõe-se que os eixos  $o_i x_i$  e  $\bar{o} \bar{x}$  formam, com o eixo global  $OX$ , os ângulos  $\phi_i$  e  $\bar{\phi}$ , respectivamente, o que equivale a supor, conforme indica-se na figura (2.20), que os eixos  $o_i x_i$  formam com o eixo  $\bar{o} \bar{x}$ , um ângulo  $\beta_i$ , que vale:

$$\beta_i = \phi_i - \bar{\phi} \quad (2.107)$$

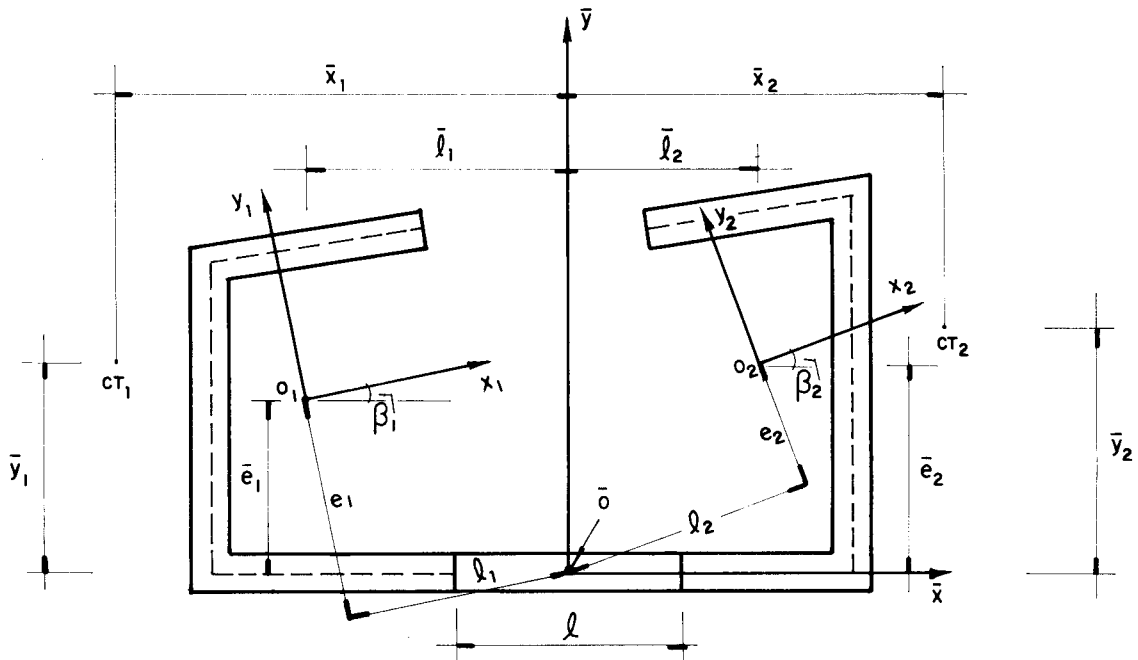


Figura 2.20 - Coordenadas dos pontos  $CT_i$  e  $CG_i$  em relação ao sistema de eixos  $\bar{o} \bar{x} \bar{y} \bar{z}$ .

De acordo com a figura (2.20), definem-se:

$\bar{l}_i, \bar{e}_i$  - distâncias do centro de gravidade do núcleo  $i$  aos eixos  $\bar{o} \bar{y}$  e  $\bar{o} \bar{x}$ , respectivamente.

$l_i, e_i$  - distâncias da origem  $\bar{o}$  aos eixos  $o_i y_i$  e  $o_i x_i$ , respectivamente.

$\bar{x}_i, \bar{y}_i$  - distâncias do centro de torção do núcleo  $i$  aos eixos  $\bar{o}y$  e  $\bar{o}x$ , respectivamente.

$l$  - comprimento do vão do lintel.

Admite-se que os lintéis são engastados nas paredes e que os pontos médios de seus vãos são pontos de momento nulo.

Considerando-se um corte ao longo dos pontos médios dos lintéis, observa-se o aparecimento de forças cortantes incôgnitas de mesmo valor e sentidos opostos, produzindo momentos fletores e bimomentos nas paredes 1 e 2. Por se utilizar a técnica do meio contínuo consideram-se estas forças como continuamente distribuídas ao longo da altura  $H$  da estrutura, conforme indica-se na figura (2.21)

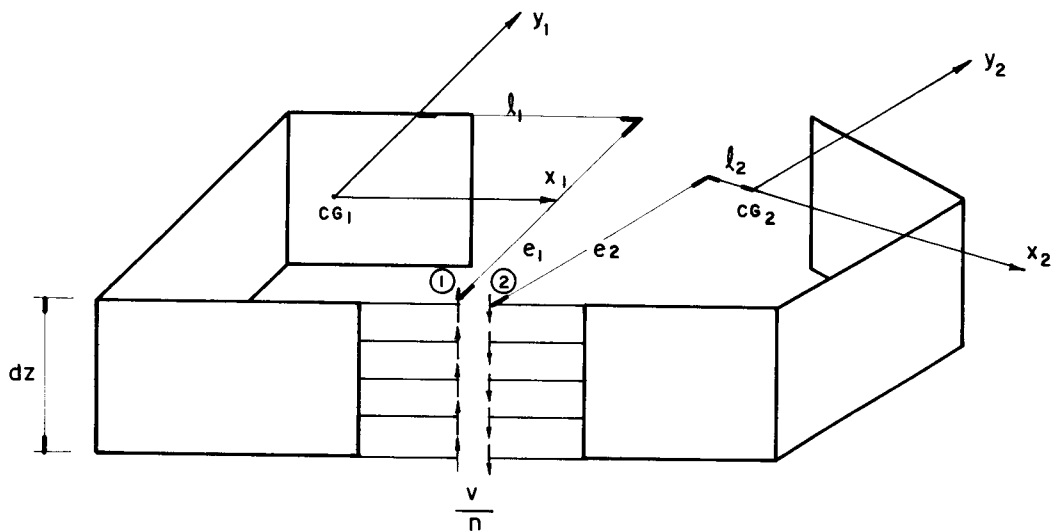


Figura 2.21 - Seccionamento de um elemento  $dz$  da estrutura ao longo dos pontos médios dos lintéis.

Definem-se, ainda, os seguintes deslocamentos da estrutura, em uma cota genérica Z:

- a) Deslocamentos dos diafragmas nas direções globais OX, OY denominados de  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$ , respectivamente, e rotação  $\underline{\theta}$  destes elementos em torno do eixo OZ;
- b) Deslocamentos do centro de torção do núcleo i ( $i=1,2$ ) nas direções dos eixos principais  $o_i x_i$  e  $o_i y_i$  denominados de  $\underline{u}_i$  e  $\underline{v}_i$ , respectivamente, e giro  $\underline{\theta}_i$  de toda seção transversal do núcleo  $i$  em torno do seu centro de torção;
- c) Deslocamentos das lajes nas direções  $\bar{o}x$  e  $\bar{o}y$ , denominados de  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ , respectivamente, e giro  $\bar{\theta}$  destes elementos em relação ao eixo  $\bar{o}z$ .

As forças cortantes internas que atuam em cada núcleo isoladamente, são obtidas fazendo-se o equilíbrio de momento, dos seus respectivos elementos genéricos de altura  $dz$ , em torno dos eixos  $o_i x_i$  e  $o_i y_i$ . Obedecendo-se aos sentidos positivos indicados na figura (2.22), resulta:

- a) Forças cortantes internas aplicadas no centro de torção do núcleo 1 e nas direções  $o_1 x_1$  e  $o_1 y_1$ , de acordo com as figuras (2.22-a) e (2.22-b).

$$Q_{x_1} = - EJ_{y_1} u_1''' + \frac{V}{h} l_1$$

$$Q_{y_1} = - EJ_{x_1} v_1''' - \frac{V}{h} e_1 \quad (2.108)$$

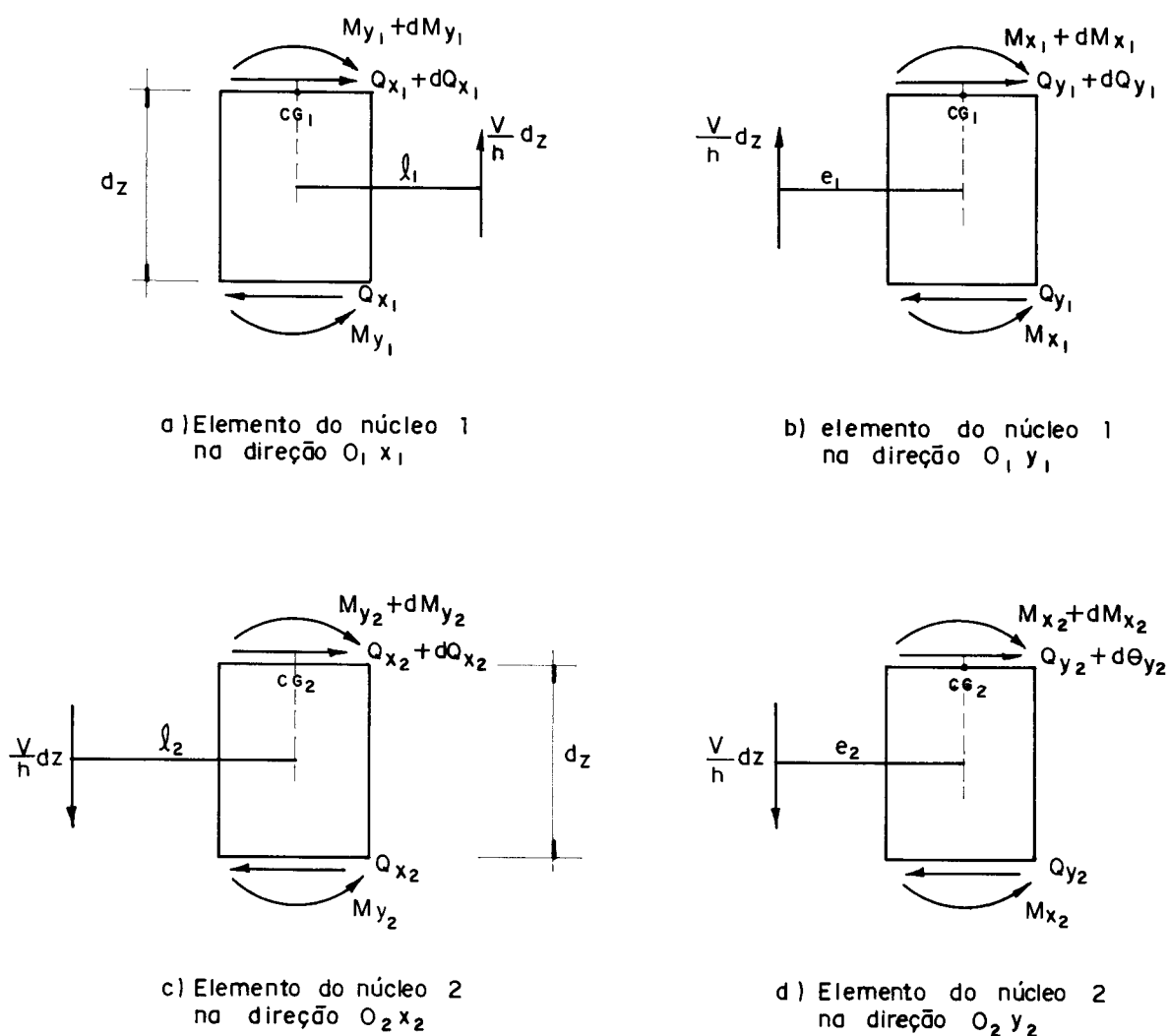


Figura 2.22 - Elementos genéricos dos núcleos

b) Forças cortantes internas aplicadas no centro de torção do núcleo 2 e nas direções  $o_2x_2$  e  $o_2y_2$ , de acordo com as figuras (2.22-c) e (2.22-d)

$$Q_{x_2} = - EJ_{y_2} u_2'''' + \frac{V}{h} l_2$$

$$Q_{y_2} = - EJ_{x_2} v_2'''' + \frac{V}{h} e_2 \quad (2.109)$$

onde:



$V$  é a força cortante incôgnita que aparece nos pontos médios dos vãos dos lintéis seccionados;

$h$  é a altura dos andares.

As forças cortantes distribuídas  $V/h$  que agem ao longo dos pontos médios dos lintéis, produzem também bimoto-mentos nos núcleos 1 e 2. Observando-se o elemento longitu-dinal  $dz$  da estrutura, representado na figura (2.21) e con-siderando-se que, na convenção adotada para a teoria da flexo-torção, os bimoto-mentos produzidos por forças de tra-ção são positivos e por forças de compressão são negativos, conclui-se que os acréscimos de bimomento  $dB_1$  em cada ele-mento longitudinal  $dz$  de núcleo, produzidos pelas ações dos lintéis, são dados por:

$$\begin{aligned} dB_1 &= \frac{V}{h} dz \omega_1 \\ dB_2 &= -\frac{V}{h} dz \omega_2 \end{aligned} \quad (2.110)$$

onde,  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são respectivamente as áreas setoriais nos pontos 1 e 2, pontos de aplicação das forças  $V/h$ , indicados na figura (2.21).

De acordo com a convenção adotada para a teoria de flexo-torção, o momento de flexo-torção é igual à deri-vada do bimomento em relação a  $z$ , com o sinal trocado. Em vista disto e das equações (2.109), as expressões para os momentos torçores internos totais nos núcleos 1 e 2 são dados por:

$$\begin{aligned} M_{t_1} &= -EJ_{\omega_1} \theta_1''' + GJ_{t_1} \theta_1' - \frac{V}{h} \omega_1 \\ M_{t_2} &= -EJ_{\omega_2} \theta_2''' + GJ_{t_2} \theta_2' + \frac{V}{h} \omega_2 \end{aligned} \quad (2.111)$$

Comparando-se as equações (2.108), (2.109) e (2.111) com as equações (2.86), conclui-se que os lintéis introduzem nos núcleos 1 e 2 forças cortantes na direção dos eixos  $o_i x_i$  e  $o_i y_i$  e momento de torção em relação ao centro de torção de cada núcleo, conforme indica-se na figura (2.23). Os valores destes esforços são dados pelas equações:

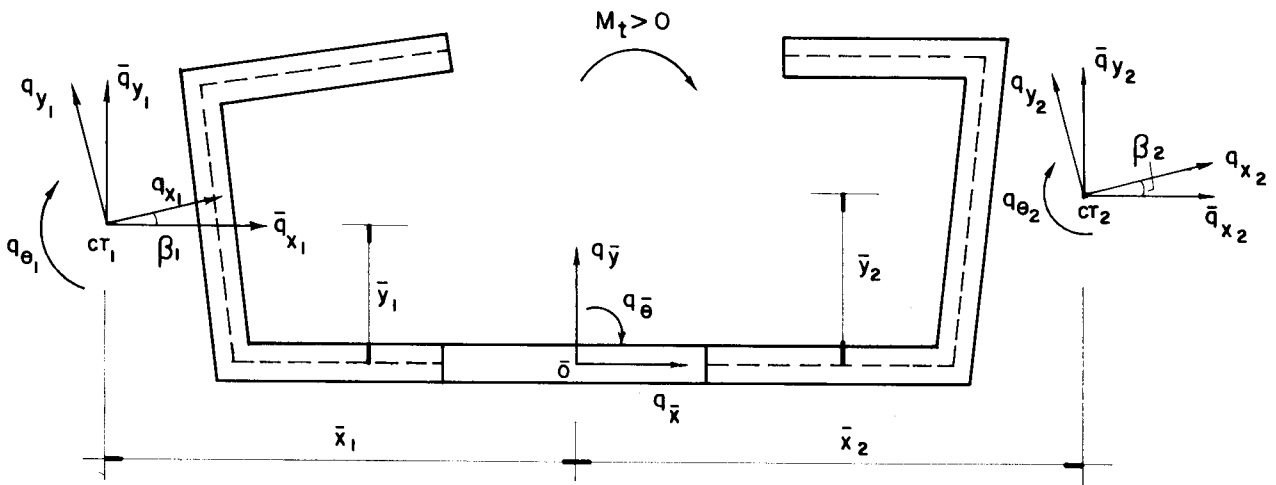


Figura 2.23 - Momentos de torção e forças cortantes devidos à força cortante distribuída  $V/h$ .

a) Para o núcleo 1

$$q_{x_1} = \frac{V}{h} \ell_1$$

$$q_{y_1} = - \frac{V}{h} e_1$$

$$q_{\theta_1} = - \frac{V}{h} \omega_1 \quad (2.112-a)$$

b) Para o núcleo 2

$$q_{x_2} = \frac{v}{h} \ell_2$$

$$q_{y_2} = \frac{v}{h} e_2$$

$$q_{\theta_2} = \frac{v}{h} \omega_2 \quad (2.112-b)$$

Na direção paralela ao sistema de eixos  $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , mas ainda no centro de torção de cada núcleo, conforme figura (2.23) as equações (2.112) são escritas da seguinte forma:

a) Para o núcleo 1

$$\bar{q}_{x_1} = q_{x_1} \cos\beta_1 - q_{y_1} \text{sen}\beta_1$$

$$\bar{q}_{y_1} = q_{x_1} \text{sen}\beta_1 + q_{y_1} \cos\beta_1$$

$$\bar{q}_{\theta_1} = q_{\theta_1} \quad (2.113-a)$$

b) Para o núcleo 2

$$\bar{q}_{x_2} = q_{x_2} \cos\beta_2 - q_{y_2} \text{sen}\beta_2$$

$$\bar{q}_{y_2} = q_{x_2} \text{sen}\beta_2 + q_{y_2} \cos\beta_2$$

$$\bar{q}_{\theta_2} = q_{\theta_2} \quad (2.113-b)$$

onde,  $\bar{q}_{x_i}$ ,  $\bar{q}_{y_i}$  são as forças cortantes em cada núcleo nas direções  $\bar{o}\bar{x}$  e  $\bar{o}\bar{y}$ , respectivamente, conforme indica-se na figura (2.23) e  $\bar{q}_{\theta_i}$ , é o momento de torção aplicado ao seu centro de torção,  $CT_i$ .

Obtêm-se as forças cortantes resultantes e o momento de torção resultante, devidos aos esforços, introduzidos pelos lintéis, em relação aos eixos  $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , somando-se as contribuições dos núcleos 1 e 2. Obedecendo-se os sentidos positivos indicados na figura (2.23), resulta:

$$q_{\bar{x}} = \bar{q}_{x_1} + \bar{q}_{x_2}$$

$$q_{\bar{y}} = \bar{q}_{y_1} + \bar{q}_{y_2}$$

$$q_{\bar{\theta}} = \bar{q}_{x_1}\bar{y}_1 + \bar{q}_{y_1}\bar{x}_1 + \bar{q}_{\theta_1} + \bar{q}_{x_2}\bar{y}_2 - \bar{q}_{y_2}\bar{x}_2 + \bar{q}_{\theta_2} \quad (2.114)$$

onde  $q_{\bar{x}}$ ,  $q_{\bar{y}}$ ,  $q_{\bar{\theta}}$  são as forças cortantes internas introduzidas na estrutura pelos lintéis.

Substituindo-se as equações (2.113) nas equações (2.114) e levando-se em conta os valores  $(\bar{l}_i, \bar{e}_i)$  expressos em função dos valores  $(l_i, e_i)$ , dados pelas equações:

$$\bar{l}_1 = l_1 \cos \beta_1 + e_1 \operatorname{sen} \beta_1$$

$$\bar{e}_1 = e_1 \cos \beta_1 - l_1 \operatorname{sen} \beta_1 \quad (2.115-a)$$

$$\bar{l}_2 = l_2 \cos \beta_2 - e_2 \operatorname{sen} \beta_2$$

$$\bar{e}_2 = l_2 \operatorname{sen} \beta_2 + e_2 \cos \beta_2 \quad (2.115-b)$$

resulta:

$$q_{\bar{x}} = \frac{V}{h} (\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2)$$

$$q_{\bar{y}} = \frac{V}{h} (\bar{e}_2 - \bar{e}_1)$$

$$q_{\bar{\theta}} = \frac{V}{h} (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \quad (2.116)$$

onde:

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\ell}_1 \bar{y}_1 - \bar{e}_1 \bar{x}_1 - \omega_1$$

$$\bar{\omega}_2 = -\bar{\ell}_2 \bar{y}_2 + \bar{e}_2 \bar{x}_2 - \omega_2 \quad (2.117)$$

Determina-se o valor da força cortante incôgnita  $V$ , compatibilizando os deslocamentos dos pontos médios dos vãos dos lintéis.

Considerando-se o seccionamento ao longo dos pontos médios dos lintéis, figura (2.21), se cada núcleo de formar-se independentemente existirá um deslocamento vertical à esquerda e à direita do corte imaginário. Os deslocamentos verticais devidos à flexão do núcleo  $i$  nas direções  $o_i x_i$  e  $o_i y_i$  são obtidos como o produto da inclinação na seção considerada pela distância do ponto  $\bar{o}$  aos respectivos eixos principais. Os deslocamentos verticais devidos à torção do núcleo  $i$  são iguais ao produto do empenamento da seção considerada pela área setorial  $\omega$  no ponto  $\bar{o}$ . Além disso, surgem deslocamentos verticais no ponto  $\bar{o}$  devidos à deformação dos lintéis por momento fletor e força cortante.

Na figura (2.24) representam-se graficamente os deslocamentos verticais à esquerda do corte imaginário devidos à flexão e torção nos núcleos e às deformações dos lintéis por momento fletor e força cortante.

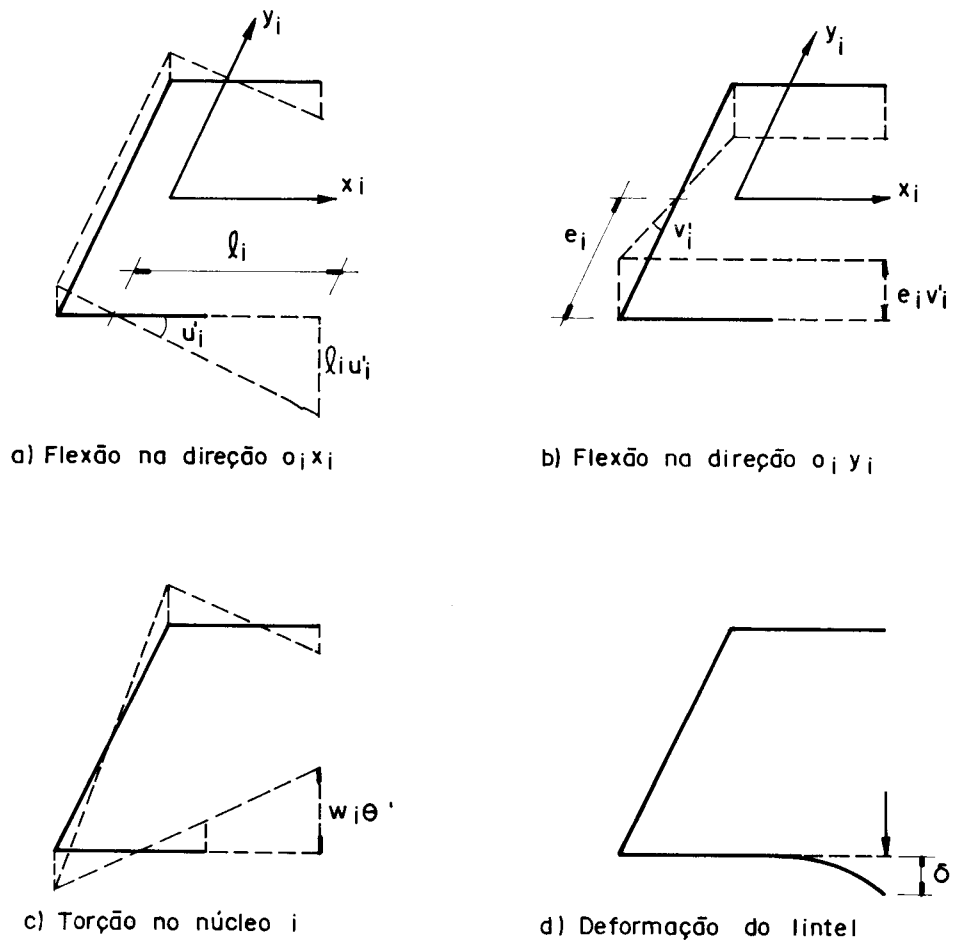


Figura 2.24 - Deslocamentos dos pontos de seccionamento dos lintéis.

Obedecendo-se à convenção de sinais que considera os deslocamentos na direção do eixo  $\bar{o}\bar{z}$  positivos, obtêm-se, para os deslocamentos dos pontos 1 e 2, as seguintes equações:

$$\Delta_1 = -u_1' l_1 + v_1' e_1 + \omega_1 \theta_1'$$

$$\Delta_2 = u_2' l_2 + v_2' e_2 + \omega_2 \theta_2' \quad (2.118)$$

A deformação  $\delta$  dos lintéis, provocada pelas forças cortantes  $V$ , de acordo com a Resistência dos Materiais, é expressa por:

$$\delta = \frac{V\ell^3}{24EJ_L} + \frac{V\ell}{2A_L G} \quad (2.119)$$

onde:

$J_L$  é o momento de inércia do lintel;

$E$ ,  $G$  são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, respectivamente;

$A_L$  é a área da seção transversal do lintel.

Para satisfazer as condições de compatibilidade de deslocamento nos pontos 1 e 2 do corte imaginário, e necessário que:

$$\Delta_1 + \delta = \Delta_2 - \delta \quad (2.120)$$

Substituindo-se as equações (2.118) e (2.119) na equação (2.120), resulta:

$$- u_1' \ell_1 + v_1' e_1 + \omega_1 \theta_1' + \delta = u_2' \ell_2 + v_2' e_2 + \omega_2 \theta_2' - \delta \quad (2.121)$$

Produzindo-se uma rotação  $\beta_i$  no vetor dos deslocamentos do centro de torção do núcleo  $i$ , de componentes  $u_i$ ,  $v_i$  e  $\theta_i$ , resultam as expressões:

$$u_i = \bar{u}_i \cos \beta_i + \bar{v}_i \sin \beta_i$$

$$v_i = - \bar{u}_i \sin \beta_i + \bar{v}_i \cos \beta_i$$

$$\theta_i = \bar{\theta}_i \quad (2.122)$$

onde:

$\bar{u}_i$  e  $\bar{v}_i$  são os deslocamentos do centro de torção do núcleo  $i$  nas direções  $\bar{o}\bar{x}$  e  $\bar{o}\bar{y}$ , respectivamente.

$\bar{\theta}_i$  é o giro de toda a seção do núcleo  $i$  em relação ao seu centro de torção.

Derivando-se uma vez as equações (2.122), com relação a  $z_i$ , e substituindo-se as equações resultantes na equação (2.121), considerando-se que o índice  $i$  assume o valor 1 para os deslocamentos do núcleo 1 e o valor 2 para os deslocamentos do núcleo 2, resulta:

$$\begin{aligned} & -\bar{u}'_1 (\ell_1 \cos \beta_1 + e_1 \sin \beta_1) + \bar{v}'_1 (e_1 \cos \beta_1 - \ell_1 \sin \beta_1) + \omega_1 \bar{\theta}'_1 + \delta = \\ & = \bar{u}'_2 (\ell_2 \cos \beta_2 - e_2 \sin \beta_2) + \bar{v}'_2 (\ell_2 \sin \beta_2 + e_2 \cos \beta_2) + \omega_2 \bar{\theta}'_2 - \delta \end{aligned} \quad (2.123)$$

ou, tendo-se em vista as equações (2.115),

$$-\bar{u}'_1 \bar{\ell}_1 + \bar{v}'_1 \bar{e}_1 + \omega_1 \bar{\theta}'_1 + \delta = \bar{u}'_2 \bar{\ell}_2 + \bar{v}'_2 \bar{e}_2 + \omega_2 \bar{\theta}'_2 - \delta \quad (2.124)$$

Os deslocamentos dos núcleos 1 e 2 nas direções paralelas aos eixos  $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  são escritos em função dos deslocamentos dos diafragmas referenciados ao sistema  $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  como:

a) Para o núcleo 1:

$$\bar{u}_1 = \bar{u} + \bar{y}_1 \bar{\theta}$$

$$\bar{v}_1 = \bar{v} + \bar{x}_1 \bar{\theta}$$

$$\bar{\theta}_1 = \bar{\theta} \quad (2.125-a)$$



b) Para o núcleo 2

$$\bar{u}_2 = \bar{u} + \bar{y}_2 \bar{\theta}$$

$$\bar{v}_2 = \bar{v} - \bar{x}_2 \bar{\theta}$$

$$\bar{\theta}_2 = \bar{\theta} \quad (2.125-b)$$

Substituindo-se as equações (2.125) e a equação (2.119) na equação (2.124) resulta:

$$- (\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2) \bar{u}' - (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) \bar{v}' - (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \bar{\theta}' = V \left( \frac{\ell^3}{12EJ_L} + \frac{\ell}{A_L G} \right) \quad (2.126)$$

onde  $\bar{\omega}_1$  e  $\bar{\omega}_2$  são dados pelas equações (2.117)

O valor da força cortante V, aplicada no ponto  $\bar{m}_e$  do lintel seccionado, de acordo com a equação (2.126), é:

$$V = \frac{1}{f} \left[ (\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2) \bar{u}' + (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) \bar{v}' + (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \bar{\theta}' \right] \quad (2.127)$$

onde:

$$f = \frac{\ell^3}{12EJ_L} + \frac{\ell}{A_L G} \quad (2.128)$$

Levando-se o valor de V, fornecido pela expressão (2.127), nas equações (2.116), obtêm-se:

$$q_{\bar{x}} = \frac{(\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2)}{h \cdot f} \left[ (\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2) \bar{u}' + (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) \bar{v}' + (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \bar{\theta}' \right]$$

$$\begin{aligned}
 q_{\bar{y}} &= \frac{(\bar{e}_2 - \bar{e}_1)}{h \cdot f} \left[ (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) \bar{u}' + (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) \bar{v}' + (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \bar{\theta}' \right] \\
 q_{\bar{\theta}} &= \frac{(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2)}{h \cdot f} \left[ (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) \bar{u}' + (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) \bar{v}' + (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \bar{\theta}' \right]
 \end{aligned} \tag{2.129}$$

Em forma matricial as equações (2.129) são representadas como:

$$\begin{Bmatrix} q_{\bar{x}} \\ q_{\bar{y}} \\ q_{\bar{\theta}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h \cdot f} \begin{bmatrix} (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \\ (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \\ (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix}$$

ou,

$$\{ \bar{q} \} = [K_L^*] \{ \bar{U}' \} \tag{2.130}$$

onde:

$$[K_L^*] = \frac{1}{h \cdot f} \begin{bmatrix} (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \\ (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \\ (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) (\bar{e}_2 - \bar{e}_1) (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \end{bmatrix}$$

$$\{ \bar{q} \} = \begin{Bmatrix} q_{\bar{x}} \\ q_{\bar{y}} \\ q_{\bar{\theta}} \end{Bmatrix}$$

e

$$\{\bar{U}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} \quad (2.131)$$

Indicam-se na figura (2.25) as coordenadas da origem global  $\bar{0}$  em relação aos eixos  $o_i^* x_i^* y_i^* z_i^*$  e  $\bar{o} \bar{x} \bar{y} \bar{z}$  (o sistema local de eixos,  $o_i^* x_i^* y_i^* z_i^*$ , é paralelo ao sistema de eixos  $o_i x_i y_i z_i$ , com origem  $o_i^*$  posicionada na base da estrutura e coincidente com o centro de torção do núcleo  $i$ ). De acordo com as equações (2.91) estas coordenadas podem ser escritas em função das coordenadas do  $CT_i (X_{CT_i}, Y_{CT_i})$  e das coordenadas da origem  $\bar{o} (X_{\bar{o}}, Y_{\bar{o}})$  em relação aos eixos globais, como:

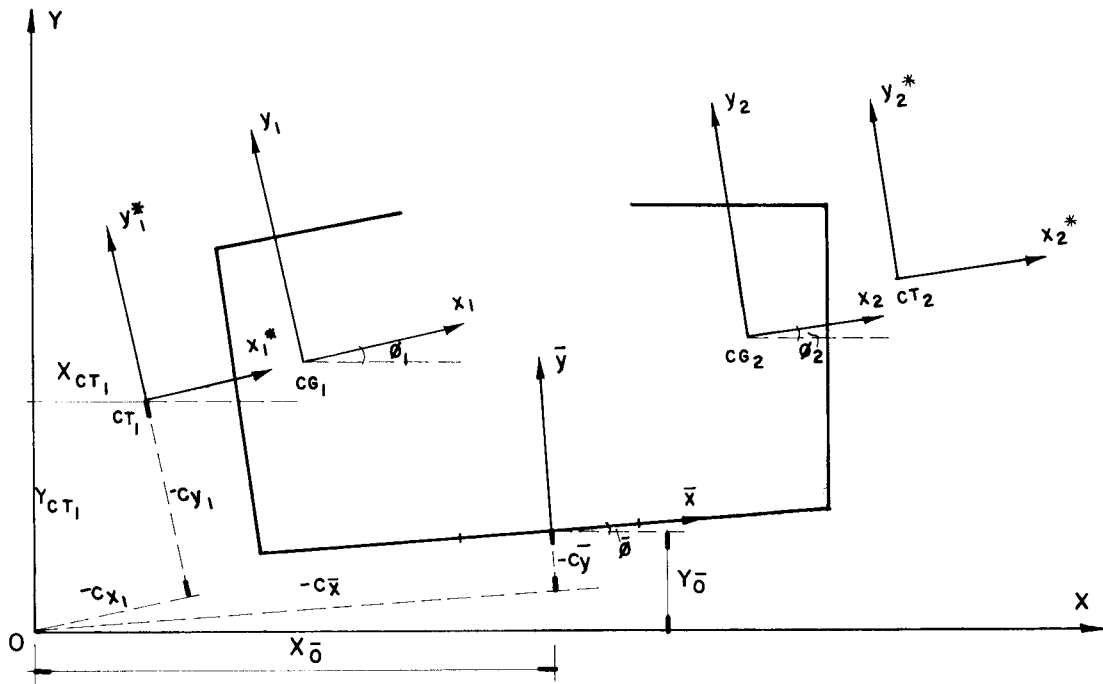


Figura 2.25 - Coordenadas da origem global  $\bar{0}$  em relação aos eixos  $o_i^* x_i^* y_i^* z_i^*$  e  $\bar{o} \bar{x} \bar{y} \bar{z}$ .

$$\begin{aligned} - c_{x_i} &= X_{CT_i} \cos\phi_i + Y_{CT_i} \text{sen}\phi_i \\ - c_{y_i} &= -X_{CT_i} \text{sen}\phi_i + Y_{CT_i} \cos\phi_i \end{aligned} \quad (2.132-a)$$

e

$$\begin{aligned} - c_{\bar{x}} &= X_{\bar{o}} \cos\bar{\phi} + Y_{\bar{o}} \text{sen}\bar{\phi} \\ - c_{\bar{y}} &= -X_{\bar{o}} \text{sen}\bar{\phi} + Y_{\bar{o}} \cos\bar{\phi} \end{aligned} \quad (2.132-b)$$

Os deslocamentos dos diafragmas, relativos aos eixos  $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , são referenciados aos eixos globais OXYZ através da seguinte equação:

$$\{\bar{U}\} = [L_{\bar{E}}] \{U\} \quad (2.133)$$

onde:

$\{\bar{U}\}$  é o vetor dos deslocamentos dos diafragmas em relação aos eixos  $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ .

$\{U\}$  é o vetor dos deslocamentos dos diafragmas em relação ao sistema global de eixos OXYZ.

$$[L_{\bar{E}}] = \begin{bmatrix} \cos\bar{\phi} & \text{sen}\bar{\phi} & -c_{\bar{y}} \\ -\text{sen}\bar{\phi} & \cos\bar{\phi} & c_{\bar{x}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.134)$$

com  $c_{\bar{x}}$  e  $c_{\bar{y}}$  calculados através das equações (2.132-b).

A equação matricial das forças cortantes internas, referenciada ao sistema global OXYZ, sem levar em conta o efeito dos lintéis, é dada, conforme a equação (2.97), por:

$$\{Q_{int}\} = -[J]\{U'''\} + [K_T]\{U'\} \quad (2.135)$$

onde:

$$[J] = [L_{E_1}]^T [J_1] [L_{E_1}] + [L_{E_2}]^T [J_2] [L_{E_2}]$$

$$[K_T] = [K_{T_1}] + [K_{T_2}] \quad (2.136)$$

com:

$$[L_{E_1}] = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 & \text{sen}\phi_1 & -c_{y_1} \\ -\text{sen}\phi_1 & \cos\phi_1 & c_{x_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.137-a)$$

$$[L_{E_2}] = \begin{bmatrix} \cos\phi_2 & \text{sen}\phi_2 & -c_{y_2} \\ -\text{sen}\phi_2 & \cos\phi_2 & c_{x_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.137-b)$$

$$[J_1] = \begin{bmatrix} EJ_{y_1} & 0 & 0 \\ 0 & EJ_{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & EJ_{\omega_1} \end{bmatrix} \quad (2.137-c)$$

$$[J_2] = \begin{bmatrix} EJ_{y_2} & 0 & 0 \\ 0 & EJ_{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & EJ_{\omega_2} \end{bmatrix} \quad (2.137-d)$$

$$[K_{T_1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_{t_1} \end{bmatrix} \quad (2.137-e)$$

$$[K_{T_2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_{t_2} \end{bmatrix} \quad (2.137-f)$$

As coordenadas  $(c_{x_1}, c_{y_1})$  e  $(c_{x_2}, c_{y_2})$  da origem global  $\underline{0}$  em relação aos eixos  $o_1^*x_1^*y_1^*z_1^*$  e  $o_2^*x_2^*y_2^*z_2^*$ , respectivamente, são calculadas através das equações (2.132-a).

O vetor  $\{q_L\}$ , relativo aos lintéis, referenciado ao sistema global OXYZ é expresso por:

$$\{q_L\} = [K_L] \{U'\} \quad (2.138)$$

onde

$$\{q_L\} = \begin{Bmatrix} q_{L,X} \\ q_{L,Y} \\ q_{L,\theta} \end{Bmatrix}$$

$$[K_L] = [L_{\bar{E}}]^T [K_L^*] [L_{\bar{E}}] \quad (2.139)$$

Conclui-se, então, que as forças cortantes internas na estrutura nas direções globais são obtidas somando-se as equações (2.135) e (2.138), ou seja:

$$\{Q_{T_{int}}\} = \{Q_{int}\} + \{q_L\} \quad (2.140)$$

Em relação ao sistema de eixos globais OXYZ, as forças cortantes externas atuantes na estrutura, em uma cota Z, provenientes das cargas verticais e da carga lateral são obtidas da mesma maneira que no item (2.5.1). De acordo com as equações (2.98) e (2.101), resulta:

$$\{Q_{ext}\} = p(H-Z)[L_w]\{U'\} + (H-Z)\{Q_q\} \quad (2.141)$$

onde:

$\{Q_{ext}\}$  é o vetor das forças cortantes externas nas direções globais.

$$[L_w] = \alpha_1 [L_1] + \alpha_2 [L_2] \quad (2.142)$$

com:

$$[L_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_{CG_1} \\ 0 & 1 & -X_{CG_1} \\ Y_{CG_1} & -X_{CG_1} & I_{0,1}/A_1 \end{bmatrix} \quad (2.142-a)$$

$$[L_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_{CG_2} \\ 0 & 1 & -X_{CG_2} \\ Y_{CG_2} & -X_{CG_2} & I_{0,2}/A_2 \end{bmatrix} \quad (2.142-b)$$

$$\{Q_q\} = \begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{Bmatrix} \quad (2.142-c)$$

O equilíbrio da estrutura é mantido igualando-se os esforços internos (equação 2.140) aos esforços externos (equação 2.141), resultando em:

$$[J] \{U'''\} + [p(H-Z) [L_w] - ([K_T] + [K_L])] \{U'\} = - (H-Z) \{Q_q\} \quad (2.143)$$

A resolução da equação (2.143) é obtida através de dois processos numéricos: Diferenças Finitas e Stodola-Vianello, em sua variante, utilizando-se as seguintes condições de contorno:

- a) Supondo engastamento dos núcleos na base do edifício vem,

$$\{U(0)\} = \{0\}$$

$$\{U'(0)\} = \{0\} \quad (2.144-a)$$



- b) Supondo não existir bimomentos e momentos fletores aplicados no topo dos núcleos

$$\{U''(H)\} = \{0\} \quad (2.144-b)$$

## 2.6 - Resumo das Equações

Para os modelos estruturais analisados nos itens anteriores deste capítulo, chegou-se aos seguintes sistemas de equações diferenciais:

- 1º) Núcleo sem contraventamento:

$$[J] \{U'''\} + (p(H-Z) [L_T] - [K_T]) \{U'\} = - (H-Z) \{Q_q\}$$

- 2º) Núcleo de seção aberta contraventado por lintéis

$$[J] \{U'''\} + [p(H-Z) [L_T] - ([K_T] + [K_L])] \{U'\} = - (H-Z) \{Q_q\}$$

- 3º) Associação tridimensional de paredes e pórticos

$$[J] \{U'''\} + [p(H-Z) [L_{ST}] - ([K_T] + [S])] \{U'\} = - (H-Z) \{Q_q\}$$

- 4º) Núcleos de seção aberta sem contraventamento

$$[J] \{U'''\} + (p(H-Z) [L_w] - [K_T]) \{U'\} = - (H-Z) \{Q_q\}$$

- 5º) Núcleos de seção aberta contraventados por lintéis

$$[J] \{U'''\} + [p(H-Z) [L_w] - ([K_T] + [K_L])] \{U'\} = - (H-Z) \{Q_q\}$$

As condições de contorno utilizadas para a resolução das equações diferenciais citadas acima são:

a) Supondo engastamento na base do edifício vem:

$$\{U(0)\} = \{0\}$$

$$\{U'(0)\} = \{0\} \quad (2.145-a)$$

b) Supondo não existir bimomentos e momentos fletores aplicados no topo da estrutura segue:

$$\{U''(H)\} = \{0\} \quad (2.145-b)$$

Observa-se que as equações diferenciais são de um mesmo tipo, podendo-se, então, exprimi-las de uma forma geral como:

$$[J]\{U'''\} + [G]\{U'\} = - (H-Z) \{Q_q\} \quad (2.146)$$

onde:

$$[G] = p(H-Z)[L_G] - ([K_T] + [K_G]) \quad (2.146-a)$$

com:

$$[L_G] = \begin{cases} [L_T] & \text{para o (1º) e (2º) modelos estruturais} \\ [L_{ST}] & \text{para o (3º) modelo estrutural} \\ [L_W] & \text{para o (4º) e (5º) modelos estruturais} \end{cases}$$

$$[K_G] = \begin{cases} [0] & \text{para o (19) e (49) modelos estrutu-} \\ & \text{rais} \\ [K_L] & \text{para o (29) e (59) modelos estrutu-} \\ & \text{rais} \\ [S] & \text{para o (39) modelo estrutural} \end{cases}$$

e

$\{Q_q\}$  é o vetor constituído das componentes da carga lateral nas três direções do sistema global.

## 2.7 - Métodos de Análise Numérica

O sistema de equações diferenciais (2.146) descreve o comportamento das estruturas tridimensionais submetidas a carregamentos laterais e verticais, analisadas neste capítulo através das hipóteses da técnica do meio contínuo. A solução deste sistema fornece os deslocamentos  $u$  e  $v$  e as rotações  $\theta$  dos diafragmas, ao longo da altura da estrutura, em relação a um sistema global de eixos. Da mesma maneira que no capítulo anterior, obtém-se esta solução através de dois métodos da análise numérica, possibilitando confrontar os resultados obtidos com cada método isoladamente.

Serão utilizados os métodos das diferenças finitas e de Stodola-Vianello, em sua variante, com considerações de interpolação, cujas formulações e hipóteses já foram explicadas no item (1.6).

2.7.1 - Método das diferenças finitas

Para a aplicação do método das diferenças finitas à solução da equação matricial (2.146) considera-se uma malha constituída de  $n$  pontos igualmente espaçados de  $h$ , conforme indica-se na figura (1.9), onde são definidos os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$ . Os pontos 1, 2 e  $n$  são considerados pontos fictícios por não pertencerem ao sistema físico.

O sistema de equações diferenciais (2.146) pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} J(1,1) & J(1,2) & J(1,3) \\ J(2,1) & J(2,2) & J(2,3) \\ J(3,1) & J(3,2) & J(3,3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G(1,1) & G(1,2) & G(1,3) \\ G(2,1) & G(2,2) & G(2,3) \\ G(3,1) & G(3,2) & G(3,3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} =$$

$$= (H-Z) \begin{Bmatrix} Q(1) \\ Q(2) \\ Q(3) \end{Bmatrix} \quad (2.147)$$

Efetuando-se as operações matriciais indicadas em (2.147), resulta:

$$\begin{aligned} J(1,1)u''' + G(1,1)u' + J(1,2)v''' + G(1,2)v' + J(1,3)\theta''' + \\ + G(1,3)\theta' &= - (H-Z)Q(1) \\ J(2,1)u''' + G(2,1)u' + J(2,2)v''' + G(2,2)v' + J(2,3)\theta''' + \\ + G(2,3)\theta' &= - (H-Z)Q(2) \\ J(3,1)u''' + G(3,1)u' + J(3,2)v''' + G(3,2)v' + J(3,3)\theta''' + \\ + G(3,3)\theta' &= - (H-Z)Q(3) \end{aligned} \quad (2.148)$$

Note-se que as equações (2.148) podem ser escritas em uma notação simplificada, como:

$$\begin{aligned}
 -J(I,1)u''' + G(I,1)u' + J(I,2)v''' + G(I,2)v' + J(I,3)\theta''' + \\
 + G(I,3)\theta' = - (H-Z)Q(I)
 \end{aligned} \tag{2.149}$$

onde I assume os valores 1, 2 e 3 referentes à primeira, à segunda e à terceira linha do sistema de equações (2.147).

Considerando-se  $N$  como o número total de pontos da malha, definem-se  $F(M)$ ,  $F(M+N)$  e  $F(M+2N)$  como os valores dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$ , respectivamente, em um ponto genérico  $M$  da malha.

De acordo com o item (1.6), deve-se aplicar a equação (2.149) aos pontos  $M = 3, 4, 5, \dots, N-2$ , utilizando-se os operadores de diferenças finitas centrais expressos pelas equações (1.58-a). Desta maneira obtém-se, para cada valor da variável  $I$  ( $I=1, 2$  e  $3$ ), um conjunto de três equações dadas por:

$$\begin{aligned}
 & \left[ -6J(I,1) + G(I,1)h^2 \right] F(M-2) + \left[ 12J(I,1) - 8G(I,1)h^2 \right] F(M-1) + \\
 & + \left[ -12J(I,1) + 8G(I,1)h^2 \right] F(M+1) + \left[ 6J(I,1) - G(I,1)h^2 \right] F(M+2) + \\
 & + \left[ -6J(I,2) + G(I,2)h^2 \right] F(M+N-2) + \left[ 12J(I,2) + \right. \\
 & \left. -8G(I,2)h^2 \right] F(M+N-1) + \left[ -12J(I,2) + 8G(I,2)h^2 \right] F(M+N+1) + \\
 & + \left[ 6J(I,2) - G(I,2)h^2 \right] F(M+N+2) + \left[ -6J(I,3) + \right. \\
 & \left. +G(I,3)h^2 \right] F(M+N-2) + \left[ 12J(I,1) - 8G(I,1)h^2 \right] F(M+2N-1) + \\
 & + \left[ -12J(I,1) + 8G(I,1)h^2 \right] F(M+2N+1) + \left[ 6J(I,1) + \right. \\
 & \left. -G(I,1)h^2 \right] F(M+2N+2) = - 12h^3 \left[ H-Z(M) \right] Q(I)
 \end{aligned} \tag{2.150}$$

A equação (2.150) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} & \sum_{K=1}^3 \left\{ \left[ -6J(I,K) + G(I,K)h^2 \right] F(M+(K-1)N-2) + \right. \\ & + \left[ 12J(I,1) - 8G(I,1)h^2 \right] F(M+(K-1)N-1) + \left[ -12J(I,1) + \right. \\ & + \left. 8G(I,1)h^2 \right] F(M+(K-1)N+1) + \left[ 6J(I,1) + \right. \\ & \left. - G(I,1)h^2 \right] F(M+(K-1)N+2) \left. \right\} = -12h^3 \left[ H-Z(M) \right] Q(I) \quad (2.151) \end{aligned}$$

No ponto  $M = N-1$ , no topo da estrutura, observa-se que não é possível aplicar a equação (2.151), obtida com a utilização dos operadores centrais. É necessário, então, usar os operadores que envolvem apenas um ponto à direita do ponto de aplicação, expressos pelas equações (1.58-c). Dessa forma, a equação (2.149) para o topo do edifício escreve-se, em diferenças finitas, como:

$$\begin{aligned} & \sum_{K=1}^3 \left\{ \left[ 6J(I,K) - G(I,K)h^2 \right] F(K.N-4) + \left[ -36J(I,K) + 6G(I,K)h^2 \right] x \right. \\ & \times F(K.N-3) + \left[ 72J(I,K) - 18G(I,K)h^2 \right] F(K.N-2) + \left[ -60J(I,K) + \right. \\ & + \left. 10G(I,K)h^2 \right] F(K.N-1) + \left[ 18J(I,K) + 3G(I,K)h^2 \right] F(K.N) \left. \right\} = \\ & = -12h^3 \left[ H-Z(N-1) \right] Q(I) \quad (2.152) \end{aligned}$$

onde  $I$  assume os valores 1, 2 e 3 referentes à primeira, à segunda e à terceira linha do sistema de equações (2.147).

As condições de contorno (2.145-a),  $\{U(0)\} = \{0\}$  e  $\{U'(0)\} = \{0\}$ , são impostas pelas equações:

a) Para  $\{U(0)\} = \{0\}$ :

$$F(3) = 0$$

$$F(N+3) = 0$$

$$F(2N+3) = 0 \quad (2.153-a)$$

b) Para  $\{U'(0)\} = \{0\}$ :

$$F(1) - 8F(2) + 8F(4) - F(5) = 0$$

$$F(N+1) - 8F(N+2) + 8F(N+4) - F(N+5) = 0$$

$$F(2N+1) - 8F(2N+2) + 8F(2N+4) - F(2N+5) = 0 \quad (2.153-b)$$

A condição de contorno (2.145-b),  $\{U''(H)\} = \{0\}$ , no topo do edifício será escrita em diferenças finitas utilizando-se o operador assimétrico que de acordo com as equações (1.58-c), envolve um ponto à direita e três pontos à esquerda do ponto de aplicação  $N-1$ . Dessa maneira resulta:

$$- F(N-4) + 4F(N-3) + 6F(N-2) - 20F(N-1) + 11F(N) = 0$$

$$- F(2N-4) + 4F(2N-3) + 6F(2N-2) - 20F(2N-1) + 11F(2N) = 0$$

$$- F(3N-4) + 4F(3N-3) + 6F(3N-2) - 20F(3N-1) + 11F(3N) = 0$$

(2.153-c)

As equações (2.151), (2.152) e (2.153) formam um sistema de  $3N$  equações lineares, cuja solução fornece os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$  dos diafragmas nos  $N$  pontos da malha.

### 2.7.2 - Método de Stodola-Vianello

A equação de recorrência do método na forma integral expressa-se, de acordo com a equação matricial (2.146), de maneira análoga à equação (1.69) do item (1.6), ou seja:

$$\{\bar{U}\} = \iiint [J]^{-1} - [G] \{U'\} - (H-Z) \{Q\} \, dZ + \{\bar{E}\} + \{\bar{E}\} Z + \{E\} \frac{Z^2}{2} \quad (2.154)$$

onde  $\{\bar{E}\}$ ,  $\{\bar{E}\}$  e  $\{E\}$  são os vetores constituídos por constantes de integração determinadas pelas condições de contorno descritas abaixo:

$$\begin{aligned} \text{a) } \{\bar{U}(0)\} &= \{0\} \\ \text{b) } \{\bar{U}(0)\} &= \{0\} \\ \text{c) } \{\bar{U}''(H)\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (2.155)$$

Observa-se que os vetores  $\{\bar{E}\}$  e  $\{\bar{E}\}$  resultam nulos com a imposição, respectivamente, das duas condições de contorno dadas pelas equações (2.155) e o vetor  $\{E\}$  será determinado com a aplicação da terceira condição  $\{U''(H)\} = \{0\}$ , quando se adotam as aproximações da equação (2.160) adiante.

Substituindo-se o valor da matriz  $[G]$ , dado pela equação (2.146-a), na equação (2.154) e lembrando que os vetores  $\{\bar{E}\}$  e  $\{\bar{E}\}$  são nulos, obtêm-se:

$$\{\bar{U}\} = \iiint [J]^{-1} \left[ (-p(H-Z) [LG] + [K_T] + [KG]) \{U'\} - (H-Z) \{Q\} \right] dZ + \{E\} \frac{Z^2}{2} \quad (2.156)$$



Definindo-se

$$[\bar{P}] = [J]^{-1}([K_T] + [K_G] - p_H [L_G])$$

$$[\bar{\bar{P}}] = p [J]^{-1} [L_G]$$

$$[D] = [J]^{-1} [Q^*]$$

com

$$[Q^*] = \begin{bmatrix} qaH & -qa \\ qbH & -qb \\ qcH & -qc \end{bmatrix} \quad (2.157)$$

pode-se escrever a equação (2.156) na seguinte forma matricial:

$$\{\bar{U}\} = \iiint ([\bar{P}] + [\bar{\bar{P}}]Z) \{U'\} dZ - [D] \iiint \{\tilde{Z}\} dZ + \{E\} \frac{Z^2}{2} \quad (2.158)$$

onde:

$$\{\tilde{Z}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ Z \end{Bmatrix} \quad (2.159)$$

De acordo com o desenvolvimento do método, descrito no item (1.6) do capítulo anterior, toma-se, para solução aproximada dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$ , componentes do vetor  $\{U\}$ , polinômios de grau finito em  $Z$  expressos por:

$$u = A_1 Z^2 + A_2 Z^3 + A_3 Z^4 + \dots + A_{N-1} Z^N$$

$$v = B_1 Z^2 + B_2 Z^3 + B_3 Z^4 + \dots + B_{N-1} Z^N$$

$$\theta = C_1 Z^2 + C_2 Z^3 + C_3 Z^4 + \dots + C_{N-1} Z^N$$

ou, em forma matricial,

$$\{U\} = [\psi(Z)] \{C\} \tag{2.160}$$

onde:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$$[\psi(Z)] = \begin{bmatrix} Z^2/H^2 & 0 & 0 & Z^3/H^3 & 0 & 0 & \dots & Z^N/H^N & 0 & 0 \\ 0 & Z^2/H^2 & 0 & 0 & Z^3/H^3 & 0 & \dots & 0 & Z^N/H^N & 0 \\ 0 & 0 & Z^2/H^2 & 0 & 0 & Z^3/H^3 & \dots & 0 & 0 & Z^N/H^N \end{bmatrix}$$

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} A_1 H^2 \\ B_1 H^2 \\ C_1 H^2 \\ A_2 H^3 \\ B_2 H^3 \\ C_2 H^3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{N-1} H^N \\ B_{N-1} H^N \\ C_{N-1} H^N \end{Bmatrix} \quad (2.161)$$

com:

N sendo o grau adotado para os polinômios  $u(Z)$ ,  $v(Z)$  e  $\theta(Z)$ .

$A_i, B_i, C_i$  sendo os coeficientes dos polinômios, que serão determinados ao longo do desenvolvimento do método.

A equação matricial (2.160) deverá satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \{U(0)\} &= \{0\} \\ \{U'(0)\} &= \{0\} \\ \{U''(H)\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (2.162)$$

Substituindo-se a equação (2.160) na equação (2.158) e efetuando as integrações indicadas resulta:

$$[\bar{U}] = ([\bar{P}] [\psi_1(Z)] + [\bar{P}'] [\psi_2(Z)]) \{C\} - [D] \{\bar{N}(Z)\} + \{E\} \frac{Z^2}{2} \quad (2.163)$$

onde:

$$\psi_1(Z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{H^2} \frac{Z^4}{3 \cdot 4} & 0 & 0 & \frac{1}{H^3} \frac{Z^5}{4 \cdot 5} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{H^N} \frac{Z^{N+2}}{(N+1)(N+2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{H^2} \frac{Z^4}{3 \cdot 4} & 0 & 0 & \frac{1}{H^3} \frac{Z^5}{4 \cdot 5} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{H^N} \frac{Z^{N+2}}{(N+1)(N+2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{H^2} \frac{Z^4}{3 \cdot 4} & 0 & 0 & \frac{1}{H^3} \frac{Z^5}{4 \cdot 5} & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{H^N} \frac{Z^{N+2}}{(N+1)(N+2)} \end{bmatrix}$$

$$\psi_2(Z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{H^2} \frac{2Z^5}{3 \cdot 4 \cdot 5} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{H^N} \frac{NZ^{N+3}}{(N+1)(N+2)(N+3)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{H^2} \frac{2Z^5}{3 \cdot 4 \cdot 5} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{H^N} \frac{NZ^{N+3}}{(N+1)(N+2)(N+3)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{H^2} \frac{2Z^5}{3 \cdot 4 \cdot 5} & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{H^N} \frac{NZ^{N+3}}{(N+1)(N+2)(N+3)} \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{N}(Z)\} = \begin{Bmatrix} \frac{Z^3}{2 \cdot 3} \\ \frac{Z^4}{23 \cdot 4} \end{Bmatrix} \quad (2.164)$$

Como foi dito anteriormente, determina-se o vetor das constantes de integração  $\{E\}$  impondo-se à equação (2.164) a terceira das equações (2.155), ou seja:

$$\{\bar{U}''(H)\} = (\{\bar{P}\}[\psi_1] + \{\bar{\bar{P}}\}.H.[\psi_2])\{C\} - [D]\{N_1\} + \{E\} = \{0\} \quad (2.165)$$

onde:

$$[\psi_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\psi_2] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \dots & \frac{N}{N+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \dots & 0 & \frac{N}{N+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \dots & 0 & 0 & \frac{N}{N+1} \end{bmatrix}$$

$$\{N_1\} = \begin{Bmatrix} H \\ H^2/2 \end{Bmatrix} \quad (2.166)$$

O valor do vetor  $\{E\}$ , de acordo com a equação (2.165), é expresso por:

$$\{E\} = - (\{\bar{P}\}[\psi_1] + \{\bar{\bar{P}}\}.H.[\psi_2])\{C\} + [D]\{N_1\} \quad (2.167)$$

Substituindo-se a equação (2.167) na equação (2.163), resulta:

$$\begin{aligned} \{\bar{U}\} = & \left[ [\bar{P}] (\{\psi_1(z)\} - \{\psi_1\} \cdot \frac{z^2}{2}) + [\bar{P}] (\{\psi_2(z)\} - \frac{Hz^2}{2} \{\psi_2\}) \right] \{C\} + \\ & + [D] (\{N_1\} \frac{z^2}{2} - N(z)) \end{aligned} \quad (2.168)$$

Definindo-se;

$$\eta = \frac{z}{H} \quad (2.169)$$

e expressando-se a equação (2.168) em função da cota  $\eta$  obtêm-se, para o vetor deslocamento  $\{\bar{U}\}$ , a seguinte expressão:

$$\{\bar{U}\} = (\{\bar{S}\} + \{\bar{R}\}) \{C\} + [D] \{\bar{N}_\eta\} \quad (2.170)$$

onde:

$$\{\bar{S}\} = [\bar{P}] \{\bar{S}_1\} \quad (2.171-a)$$

$$\{\bar{R}\} = [\bar{P}] \{\bar{R}_1\} \quad (2.171-b)$$

com

$$\{\bar{S}_1\} = \{\psi_1(\eta H)\} - \{\psi_1\} \cdot \frac{(\eta H)^2}{2} \quad (2.171-c)$$

ou,

$$\begin{bmatrix}
 (\frac{n^4}{3.4} - \frac{n^2}{2}) & 0 & 0 & (\frac{n^5}{4.5} - \frac{n^2}{2}) & 0 & \dots & (\frac{n^{(N+2)}}{(N+1)(N+2)} - \frac{n^2}{2}) & 0 & 0 \\
 0 & (\frac{n^4}{3.4} - \frac{n^2}{2}) & 0 & 0 & (\frac{n^5}{4.5} - \frac{n^2}{2}) & 0 & \dots & (\frac{n^{(N+2)}}{(N+1)(N+2)} - \frac{n^2}{2}) & 0 \\
 0 & 0 & (\frac{n^4}{3.4} - \frac{n^2}{2}) & 0 & 0 & (\frac{n^5}{4.5} - \frac{n^2}{2}) & \dots & 0 & (\frac{n^{(N+2)}}{(N+1)(N+2)} - \frac{n^2}{2})
 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \bar{R}_1 \right] = \left[ \psi_2(\eta H) \right] - H \cdot \frac{(\eta H)^2}{2} \cdot \left[ \psi_2 \right] \tag{2.171-d}$$

ou,

$$\begin{bmatrix}
 (\frac{2n^5}{3.4.5} - \frac{2n^2}{2.3}) & 0 & 0 & (\frac{3n^6}{4.5.6} - \frac{3n^2}{2.4}) & 0 & \dots & (\frac{n^{N+3}}{(N+1)(N+2)(N+3)} - \frac{Nn^2}{2(N+1)}) & 0 & 0 \\
 0 & (\frac{2n^5}{3.4.5} - \frac{2n^2}{2.3}) & 0 & 0 & (\frac{3n^6}{4.5.6} - \frac{3n^2}{2.4}) & 0 & \dots & (\frac{n^{N+3}}{(N+1)(N+2)(N+3)} - \frac{Nn^2}{2(N+1)}) & 0 \\
 0 & 0 & (\frac{2n^5}{3.4.5} - \frac{2n^2}{2.3}) & 0 & 0 & (\frac{3n^6}{4.5.6} - \frac{3n^2}{2.4}) & \dots & 0 & (\frac{n^{N+3}}{(N+1)(N+2)(N+3)} - \frac{Nn^2}{2(N+1)})
 \end{bmatrix}$$

e

$$\{\bar{N}_\eta\} = \{N_1\} \frac{(\eta H)^2}{2} - \{\bar{N}(\eta H)\} \quad (2.171-e)$$

ou,

$$\{\bar{N}_\eta\} = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3}{2 \cdot 3} \right) \cdot H^3 \\ \left( \frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) \cdot H^2 \end{array} \right\}$$

A equação matricial (2.160), que fornece o valor do vetor dos deslocamentos  $\{U\}$ , pode ser escrita em função da cota  $\eta$  (equação 1.69) da seguinte maneira:

$$\{U\} = [\psi(\eta)] \{C\} \quad (2.172)$$

onde

$$[\psi(\eta)] = \begin{bmatrix} \eta^2 & 0 & 0 & \eta^3 & 0 & 0 & \dots & \eta^N & 0 & 0 \\ 0 & \eta^2 & 0 & 0 & \eta^3 & 0 & \dots & 0 & \eta^N & 0 \\ 0 & 0 & \eta^2 & 0 & 0 & \eta^3 & \dots & 0 & 0 & \eta^N \end{bmatrix} \quad (2.173)$$

Os valores dos deslocamentos, em qualquer cota, fornecidos pela equação matricial (2.170), devem ser tão próximos quanto possível dos valores fornecidos pela equação (2.172). Se a precisão alcançada entre os valores  $\bar{U}(\eta)$  e  $U(\eta)$  não for satisfatória, toma-se um novo grau para os polinômios e o processo se repete.

A montagem do sistema de equações cuja solução fornece o valor do vetor  $\{C\}$  obedece ao mesmo procedimento uti



lizado no item (1.6) do capítulo anterior. Observa-se que o vetor incôgnito  $\{C\}$  é constituído pelos coeficientes  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$  dos polinômios adotados para os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$ , respectivamente, o que corresponde a um número de  $3(N-1)$  coeficientes.

As três primeiras das  $3(N-1)$  equações do sistema de equações são obtidas quando se impõem as condições de contorno (2.162) à equação (2.172). Observa-se que as duas condições  $\{U(0)\} = \{0\}$  e  $\{U'(0)\} = \{0\}$  para  $\eta = 0$  (ou  $Z=0$ ) são satisfeitas na equação (2.172). Impondo-se a terceira condição  $\{U''(H)\} = \{0\}$  ou  $\{U''(1)\} = \{0\}$ , considerando-se que  $\eta = 1$  para  $z = H$ , resulta:

$$[M_1]\{C\} = \{0\} \quad (2.174)$$

onde:

$$[M_1] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots & N(N+1) & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 & 0 & \dots & 0 & N(N+1) & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6 & \dots & 0 & 0 & N(N+1) \end{bmatrix} \quad (2.175)$$

A condição de que os valores dos deslocamentos  $\{\bar{U}\}$  e  $\{U\}$  concordem, tanto quanto possível, ao longo da altura  $H$  da estrutura é expressa, conforme equação (1.80), por:

$$\int_0^1 \{\bar{U}(\eta)\} d\eta = \int_0^1 \{U(\eta)\} d\eta \quad (2.176)$$

esta condição conduz a outras três equações do sistema, escritas como:

$$[M_2]\{C\} = [D]\{\bar{N}_1\} \quad (2.177)$$

onde:

$$\left\{ \bar{N}_1 \right\} = \begin{cases} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) \cdot H^3 \\ \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \right) \cdot H^4 \end{cases} \quad (2.178)$$

$$[M_2] = [\psi_3] + [\bar{S}] + [\bar{R}]$$

$$[\bar{S}] = [\bar{P}] [\bar{S}_1]$$

$$[\bar{R}] = [\bar{P}] [\bar{R}_1] \quad (2.179)$$

com:

$$[\psi_3] = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & \dots & 1/(N+1) & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & \dots & 0 & 1/(N+1) & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/4 \dots & 0 & & & 1/(N+1) \end{bmatrix}$$

(2.179-a)

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccccccc}
 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}\right) & 0 & 0 & \dots & \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right) & 0 & 0 \\
 0 & \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}\right) & 0 & \dots & 0 & \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right) & 0 \\
 0 & 0 & \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}\right) \dots & & 0 & 0 & \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right)
 \end{array} \right] \\
 & \left[ \bar{S}_1 \right] = H^2. \tag{2.179-b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccccccc}
 \left(\frac{2}{3 \cdot 6} - \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\right) & 0 & 0 & \dots & \left(\frac{N}{6(N+1)} - \frac{N}{(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)}\right) & 0 & 0 \\
 0 & \left(\frac{2}{3 \cdot 6} - \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\right) & 0 & \dots & 0 & \left(\frac{N}{6(N+1)} - \frac{N}{(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)}\right) & 0 \\
 0 & 0 & \left(\frac{2}{3 \cdot 6} - \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\right) \dots & & 0 & 0 & \left(\frac{N}{6(N+1)} - \frac{N}{(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)}\right)
 \end{array} \right] \\
 & \left[ \bar{R}_1 \right] = H^3. \tag{2.179-c}
 \end{aligned}$$

As  $3(n-3)$  equações restantes são obtidas impondo-se a condição de que os vetores das funções deslocamentos  $\{\bar{U}(\eta)\}$  e  $\{U(\eta)\}$  concordem em certos pontos distintos ao longo da altura da estrutura. Estes pontos de interpolação, de finidos por

$$\xi_i = \frac{Z_i}{H}, \text{ com } i = 1, 2, 3, \dots, K, \dots, n-3 \quad (2.180)$$

devem ser tomados dentro do domínio da estrutura ( $\eta = 0$  e  $\eta = 1$ ) e em número suficiente para que a igualdade entre  $\{\bar{U}(\eta)\}$  e  $\{U(\eta)\}$ , nestes pontos, forneça as equações necessárias.

De acordo com a equação (1.82), do item 1.6, para um ponto genérico  $\eta = \xi_k$ , escreve-se:

$$\{\bar{U}(\xi_k)\} = \{U(\xi_k)\} \quad (2.181)$$

Nota-se que para cada ponto do conjunto de pontos  $\xi_i$  obtêm-se um grupo de três equações. Por exemplo: para o ponto genérico  $\xi_k$ , tem-se:

$$[M_{\xi_k}] \{C\} = [D] \{\bar{N}_{\xi_k}\} \quad (2.182)$$

onde:

$$[M_{\xi_k}] = [\psi(\xi_k)] - [\bar{S}_{\xi_k}] - [\bar{R}_{\xi_k}] \quad (2.183)$$

$$\left\{ \bar{N}_{\xi_k} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\xi_k^2}{2} - \frac{\xi_k^3}{2.3} \right) \cdot H^3 \\ \left( \frac{\xi_k^2}{4} - \frac{\xi_k^4}{2.3.4} \right) \cdot H^2 \end{array} \right\} \quad (2.183-b)$$

As matrizes  $[\psi(\xi_k)]$ ,  $[\bar{S}_{\xi_k}]$  e  $[\bar{R}_{\xi_k}]$  são obtidas fazendo-se nas equações (2.171) e (2.173)  $\eta = \xi_k$ . Desse modo obtêm-se:

$$[\psi(\xi_k)] = \begin{bmatrix} \xi_k^2 & 0 & 0 & \xi_k^3 & 0 & 0 & \dots & \xi_k^N & 0 & 0 \\ 0 & \xi_k^2 & 0 & 0 & \xi_k^3 & 0 & \dots & 0 & \xi_k^N & 0 \\ 0 & 0 & \xi_k^2 & 0 & 0 & \xi_k^3 & \dots & 0 & 0 & \xi_k^N \end{bmatrix} \quad (2.184-a)$$

$$[\bar{S}_{\xi_k}] = [\bar{P}] [\bar{S}_{1\xi_k}] \quad (2.184-b)$$

$$[\bar{R}_{\xi_k}] = [\bar{P}] [\bar{R}_{1\xi_k}] \quad (2.184-c)$$

com:

$$\begin{bmatrix} \xi_k \\ \xi_k \\ \vdots \\ \xi_k \end{bmatrix} = H^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\xi_k^4}{(3.4)} - \frac{\xi_k^2}{2} & 0 & 0 & \dots & \frac{\xi_k^{(N+2)}}{(N+1)(N+2)} - \frac{\xi_k^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi_k^4}{(3.4)} - \frac{\xi_k^2}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\xi_k^{(N+2)}}{(N+1)(N+2)} - \frac{\xi_k^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\xi_k^4}{(3.4)} - \frac{\xi_k^2}{2} & \dots & 0 & 0 & \frac{\xi_k^{(N+2)}}{(N+1)(N+2)} - \frac{\xi_k^2}{2} \end{bmatrix} \quad (2.184-d)$$

$$\begin{bmatrix} \xi_k \\ \xi_k \\ \vdots \\ \xi_k \end{bmatrix} = H^3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{2\xi_k^5}{(3.4.5)} - \frac{2\xi_k^2}{2.3} & 0 & 0 & \dots & \frac{N\xi_k^{(N+3)}}{(N+1)(N+2)(N+3)} - \frac{N\xi_k^2}{2(N+1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\xi_k^5}{(3.4.5)} - \frac{2\xi_k^2}{2.3} & 0 & \dots & 0 & \frac{N\xi_k^{(N+3)}}{(N+1)(N+2)(N+3)} - \frac{N\xi_k^2}{2(N+1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\xi_k^5}{(3.4.5)} - \frac{2\xi_k^2}{2.3} & \dots & 0 & 0 & \frac{N\xi_k^{(N+3)}}{(N+1)(N+2)(N+3)} - \frac{N\xi_k^2}{2(N+1)} \end{bmatrix} \quad (2.184-e)$$

As equações matriciais (2.174), (2.177) e as (N-3) equações (2.182) formam um sistema de 3(N-1) equações a 3(N-1) incógnitas expresso por:

$$[M]\{C\} = \{DN\} \quad (2.185)$$

onde:

[M] é a matriz do sistema de equações de ordem 3(N-1) x 3(N-1), constituída das matrizes [M<sub>1</sub>], [M<sub>2</sub>], [M<sub>ξ<sub>1</sub>], ..., [M<sub>ξ<sub>k</sub>], ..., [M<sub>ξ<sub>N-3</sub>], todas de ordem 3x3(N-3), na forma:</sub></sub></sub>

$$[MC] = \begin{array}{|c|c|} \hline [M_1] & \text{linha 3} \\ \hline [M_2] & \text{linha 6} \\ \hline [M_{\xi_1}] & \text{linha 9} \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline [M_{\xi_k}] & \text{linha } 3(k+2) \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline [M_{\xi_{N-3}}] & \text{linha } 3(N-1) \\ \hline \end{array} \quad (2.186)$$

$\{C\}$  é o vetor de ordem  $3(N-1) \times 1$  constituído das incógnitas, que são os coeficientes dos polinômios  $(u(Z), v(Z)$  e  $\theta(Z)$ , conforme indica-se na equação (2.161).

$\{DN\}$  é o vetor de ordem  $3(N-1) \times 1$  constituído pelo vetor nulo.

$\{0\}$  e os produtos matriciais  $[D]\{\bar{N}_1\}, [D]\{\bar{N}_{\xi_1}\}, \dots, [D]\{\bar{N}_{\xi_{N-3}}\}$ , todos de ordem  $3 \times 1$ , na forma:

$$\{DN\} = \left( \begin{array}{c|c} \{0\} & \text{linha 3} \\ \hline [D]\{\bar{N}_1\} & \text{linha 6} \\ \hline [D]\{\bar{N}_{\xi_1}\} & \text{linha 9} \\ \hline \vdots & \\ \hline [D]\{\bar{N}_{\xi_k}\} & \text{linha } 3(k+2) \\ \hline \vdots & \\ \hline [D]\{\bar{N}_{\xi_{N-3}}\} & \text{linha } 3(N-1) \end{array} \right)$$

A solução do sistema de equações (2.185) fornece o valor do vetor  $\{C\}$  que, substituído nas equações (2.170)



ou (2.172), possibilita o cálculo dos deslocamentos dos diafragmas em qualquer cota da altura H da estrutura analisada.

## 2.8 - Programas em linguagem Fortran

No item (2.7) utilizaram-se dois métodos de análise numérica para obter-se a solução da equação matricial (2.146), que fornece os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$  dos diafragmas ao longo da altura das estruturas analisadas. O desenvolvimento de cada método deu origem a uma série de expressões e com base nelas escreveram-se dois programas, um para cada método, em linguagem Fortran para o computador IBM 370/148.

Apresenta-se a seguir uma descrição dos dados de entrada, principais variáveis e impressão dos resultados de cada programa, acompanhada das respectivas listagens.

### 2.8.1 - Programa em linguagem Fortran que resolve pelo método das diferenças finitas o sistema de equações diferenciais, que expressa o comportamento das estruturas tridimensionais analisadas nos itens (2.3) a (2.5).

#### a) Dados de entrada:

PI - valor inicial da carga vertical uniformemente distribuída  $p$ .

formato de entrada - F10.0

ACREP - valor do incremento da carga vertical uniformemente distribuída  $p$ .

formato de entrada - F10.0

PCRIT - carga crítica de flambagem da estrutura

formato de entrada - F10.0

HT - altura total da estrutura

formato de entrada - F10.0

NS - número de subdivisões obtido com o lançamento da rede de pontos.

formato de entrada - I2

{Q} - vetor de ordem 3x1, constituído das componentes da carga externa lateral q nas três direções dos eixos globais.

formato de entrada - 3F10.0 (leitura dos três elementos em uma linha).

[JJ] - matriz de rigidez das paredes, de ordem 3x3

formato de entrada - 3F10.0 (leitura para cada linha da matriz).

[KT] - matriz de rigidez à torção livre, de ordem 3x3

formato de entrada - 3F10.0 (leitura para cada linha da matriz).

[LG] - matriz dos esforços externos devidos a carga vertical p. Esta matriz de ordem 3x3 será definida como:

1) [L<sub>T</sub>] - para o caso de estruturas constituídas por um núcleo contraventado ou não por lintéis.

2) [L<sub>ST</sub>] - para o caso de uma associação tridimensional de paredes e pórticos.

3) [L<sub>w</sub>] - para o caso de estruturas constituídas por dois núcleos contraventados ou não por lintéis.

formato de entrada - 3F10.0 (leitura para cada linha da matriz).

[KG] - matriz de rigidez, de ordem 3x3, que de acordo com o tipo da estrutura será definida como:

1) [S] - matriz de rigidez do conjunto de pórticos

2) [K<sub>L</sub>] - matriz de rigidez imposta pelos lintéis

formato de entrada - 3F10.0 (leitura para cada linha da matriz).

b) Principais variáveis

H - espaçamento entre os pontos da malha

NP - número de pontos da malha

MK - ordem da matriz dos coeficientes das diferenças finitas.

{CH} - vetor de ordem MK contendo os termos independentes do sistema de equações das diferenças finitas.

[MC] - matriz de ordem MKxMK constituída dos coeficientes das diferenças finitas.

P - carga vertical, uniformemente distribuída, inicializada com o valor PI e acrescida do valor ACREP até que seja atingido o valor da carga crítica de flambagem, especificado por PCRIT.

[G] - matriz de ordem 3x3 calculada para cada valor da carga vertical p, de acordo com a equação (2.146-a) do item (2.6).

{F} - vetor de ordem MK cujos elementos, após a resolução do sistema de equações das diferenças finitas, expressam os deslocamentos u, v e  $\theta$  dos diafragmas nos pontos 1 a NP da malha.

As demais variáveis que constam do programa têm a função de auxiliar no desenvolvimento do mesmo.

c) Subrotinas:

O programa principal utiliza as seguintes subrotinas:

c.1) DECOM - inicia o processo de eliminação de Gauss, com pivotamento parcial, decompondo a matriz do sistema em um produto de duas matrizes triangulares, conforme Forsythe [5].

- c.2) SOLVE - utiliza a matriz decomposta em DECOM para encontrar a solução do sistema de equações, conforme Forsythe [5].
- c.3) IMPRUV - refina o resultado da SOLVE, conforme Forsythe [5].
- c.4) SING - imprime algumas chamadas de controle, conforme Forsythe [5].

d) Impressão dos resultados

Os valores dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$  dos diafragmas para os pontos 1 a NP da malha, são impressos para cada valor, considerado, da carga vertical  $p$ .

e) Listagem do programa

(Ver páginas seguintes)

```
C=====
C==== PROGRAMA PRINCIPAL
C=====
C==== APLICACAO DO METODO DIFERENCAS FINITAS - CASO TRIDIMENSIONAL
C=====
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8 MC(102,102),MCI(102,102),JJ(3,3),KG(3,3),KT(3,3),LG(3,3)
      DIMENSION Q(3),AUX(3,3),G(3,3)
      DIMENSION Z(34),CH(102),F(102)
      DIMENSION BI(102,102),IPS(102),TITUL(10)
      OPEN(UNIT=1,STATUS='OLD',FILE='D5',ACCESS='SEQUENTIAL',FORM='FORMA
      *TTED')
      LEI=1
      IMP=3
      IVA=0
      READ(LEI,887)(TITUL(I),I=1,10)
887  FORMAT(10A8)
      WRITE(IMP,776)(TITUL(I),I=1,10)
776  FORMAT(/,4X,10A8,/)
C=====
C==== LEITURA DE DADOS
C=====
      READ(LEI,16)PI
16   FORMAT(F10.0)
      READ(LEI,17)ACREP
17   FORMAT(F10.0)
      READ(LEI,5)PCRIT
5    FORMAT(F10.0)
      READ(LEI,8)HT,NS
8    FORMAT(F10.0,I2)
      READ(LEI,9)(Q(I),I=1,3)
9    FORMAT(3F10.0)
      DO 10 I=1,3
10   READ(LEI,11)(JJ(I,J),J=1,3)
11   FORMAT(3F10.0)
      DO 12 I=1,3
12   READ(LEI,13)(KT(I,J),J=1,3)
13   FORMAT(3F10.0)
      DO 14 I=1,3
14   READ(LEI,15)(LG(I,J),J=1,3)
15   FORMAT(3F10.0)
      DO 6 I=1,3
6    READ(LEI,7)(KG(I,J),J=1,3)
7    FORMAT(3F10.0)
C=====
      DO 4 L=1,3
      DO 4 K=1,3
4    AUX(L,K)=KT(L,K)+KG(L,K)
      H=HT/NS
      NP=NS+4
      MK=3*NP
      L1=NP-1
      L2=NP-2
C=====
C==== CALCULO DO VETOR INDEPENDENTE
C=====
      DO 24 I=1,NP
24   Z(I)=0.
      DO 25 J=1,MK
25   CH(J)=0.
      C=0.
      DO 26 K=3,L1
      Z(K)=HT-C*H
      C=C+1.
      DO 26 L=1,3
      KL=3*K+L
      CH(KL)=-12.*H**3*Z(K)*Q(L)
26   CONTINUE
      DO 31 I=1,MK
      DO 31 J=1,MK
      MC(I,J)=0.
      MCI(I,J)=0.
31   CONTINUE
C=====
C==== CALCULO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
C=====
      DO 32 N=1,3
      M=(N-1)*NP+3
      MC(N,M)=1.
32   CONTINUE
      DO 33 I=1,3
      I1=I+3
      J1=(I-1)*NP+1
      J2=J1+1
      J3=J2+2
      J4=J3+1
      MC(I1,J1)=1.
      MC(I1,J2)=-8.
      MC(I1,J3)=8.
      MC(I1,J4)=-1.
33   CONTINUE
      DO 34 K=1,3
      K1=K+6
      K2=K*NP-4
      K3=K*NP-3
```

```
K4=K*NP-2
K5=K*NP-1
K6=K*NP
MC(K1,K2)=-1.
MC(K1,K3)=4.
MC(K1,K4)=6.
MC(K1,K5)=-20.
MC(K1,K6)=11.
34 CONTINUE
P=PI
35 DO 36 J=3,L2
DO 37 I=1,3
MN=3*J+1
DO 37 L=1,3
G(I,L)=0.
G(I,L)=P*Z(J)*LG(I,L)-AUX(I,L)
I1=J-2+(L-1)*NP
I2=J-1+(L-1)*NP
I3=J+1+(L-1)*NP
I4=J+2+(L-1)*NP
MC(MN,I1)=-6.*JJ(I,L)+G(I,L)*H**2
MC(MN,I2)=12.*JJ(I,L)-8.*G(I,L)*H**2
MC(MN,I3)=-MC(MN,I2)
MC(MN,I4)=-MC(MN,I1)
37 CONTINUE
36 CONTINUE
DO 40 I=1,3
NM=3*L1+1
DO 40 L=1,3
G(I,L)=0.
G(I,L)=P*Z(I1)*LG(I,L)-AUX(I,L)
I1=NP*L-4
I2=NP*L-3
I3=NP*L-2
I4=NP*L-1
I5=NP*L
MC(NM,I1)=6.*JJ(I,L)-G(I,L)*H**2
MC(NM,I2)=-6.*MC(NM,I1)
MC(NM,I3)=72.*JJ(I,L)-18.*G(I,L)*H**2
MC(NM,I4)=-10.*MC(NM,I1)
MC(NM,I5)=18.*JJ(I,L)+3.*G(I,L)*H**2
40 CONTINUE
DO 45 IA=1,MK
DO 45 IB=1,MK
45 MCI(IA,IB)=MC(IA,IB)
C=====
C==== RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES
C=====
CALL DECOM(MK,MCI,BI,IPS)
CALL SOLVE(MK,BI,CH,F,IPS)
CALL IMPRUV(MK,MCI,BI,CH,F,IPS)
C=====
C==== IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS U , V E W
C=====
WRITE(IMP,51)P
51 FORMAT(/,5X,'P =',G15.7)
WRITE(IMP,52)
52 FORMAT(/,5X,'DESLOCAMENTOS DA ESTRUTURA')
DO 65 J=1,3
MA=J*NP-1
IF(J-2)61,62,63
61 WRITE(IMP,83)(I,F(I),I=3,MA)
83 FORMAT(/,(5X,5('U(',I2,')=',G15.7,1X)))
GO TO 65
62 MB=NP+3
WRITE(IMP,66)(L-NP,F(L),L=MB,MA)
66 FORMAT(/,(5X,5('V(',I2,')=',G15.7,1X)))
GO TO 65
63 MD=2*NP+3
NPP=2*NP
WRITE(IMP,64)(K-NPP,F(K),K=MD,MA)
64 FORMAT(/,(5X,5('W(',I2,')=',G15.7,1X)))
65 CONTINUE
P=P+ACREP
IF(P-PCRT)35,35,49
49 IYA=IYA+1
IF(IYA-1)50,50,85
50 P=PCRT
GO TO 35
85 WRITE(IMP,56)PCRT
56 FORMAT(/,5X,'PCRT =',G15.7)
CALL EXIT
END
```

```

C=====
C==== SUBROTINA PARA PIVOTAMENTO E ESCALONAMENTO PARCIAL DA MATRIZ BI
C==== DOS COEFICIENTES DO SISTEMA DE EQUACOES
C=====
      SUBROUTINE DECOM(NK,BI,UL,IPS)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION BI(102,102),UL(102,102),SCALES(102),IPS(102)
      N=NK
      DO 5 I=1,N
      IPS(I)=I
      ROWNRM=0.
      DO 2 J=1,N
      UL(I,J)=BI(I,J)
      IF(ROWNRM-DABS(UL(I,J)))1,2,2
1      ROWNRM=DABS(UL(I,J))
2      CONTINUE
      IF(ROWNRM)3,4,3
3      SCALES(I)=1.0/ROWNRM
      GO TO 5
4      CALL SING(1)
      SCALES(I)=0.
5      CONTINUE
C=====
C==== ELIMINACAO DE GAUSS COM PIVOTAMENTO PARCIAL
C=====
      NMI=N-1
      DO 17 K=1,NMI
      BIG=0.
      DO 11 I=K,N
      IP=IPS(I)
      SIZE=DABS(UL(IP,K))*SCALES(IP)
10      IF(SIZE-BIG)11,11,10
      BIG=SIZE
      IDXPIV=I
11      CONTINUE
      IF(BIG)13,12,13
12      CALL SING(2)
      GO TO 17
13      IF(IDXPIV-K)14,15,14
14      J=IPS(K)
      IPS(K)=IPS(IDXPIV)
      IPS(IDXPIV)=J
15      KP=IPS(K)
      PIVOT=UL(KP,K)
      KP1=K+1
      DO 16 I=KP1,N
      IP=IPS(I)
      EM=-UL(IP,K)/PIVOT
      UL(IP,K)=-EM
      DO 16 J=KP1,N
      UL(IP,J)=UL(IP,J)+EM*UL(KP,J)
16      CONTINUE
17      CONTINUE
      KP=IPS(N)
      IF(UL(KP,N))19,18,19
18      CALL SING(2)
19      RETURN
      END

```

```

C=====
C==== SUBROTINA PARA SOLUCAO DO SISTEMA A PARTIR DA MATRIZ
C==== TRIANGULARIZADA UL
C=====
      SUBROUTINE SOLVE(NK,UL,B,X,IPS)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION UL(102,102),B(102),X(102),IPS(102)
      N=NK
      NP1=N+1
      IP=IPS(1)
      X(1)=B(IP)
      DO 2 I=2,N
      IP=IPS(I)
      IM1=I-1
      SUM=0.
      DO 1 J=1,IM1
1      SUM=SUM+UL(IP,J)*X(J)
2      X(I)=B(IP)-SUM
      IP=IPS(N)
      X(N)=X(N)/UL(IP,N)
      DO 4 IBACK=2,N
      I=NP1-IBACK
      IP=IPS(I)
      IP1=I+1
      SUM=0.
      DO 3 J=IP1,N
3      SUM=SUM+UL(IP,J)*X(J)
4      X(I)=(X(I)-SUM)/UL(IP,I)
      RETURN
      END

```

```
C=====
C==== SUBROTINA PARA REFINAMENTO DA SOLUCAO DO SISTEMA
C=====
SUBROUTINE IMPRUV(NK,BI,UL,B,X,IPS)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
  DIMENSION BI(102,102),UL(102,102),B(102),X(102),R(102),DX(102)
  DIMENSION IPS(102)
  N=NK
  EPS=1.0D-16
  ITMAX=30
  XNORM=0.0
  DO 1 I=1,N
1  XNORM=DMAX1(XNORM,DABS(X(I)))
  IF(XNORM)3,2,3
2  DIGITS=-DLOG10(EPS)
  GO TO 10
3  DO 9 ITER=1,ITMAX
  DO 5 I=1,N
  SUM=0.
  DO 4 J=1,N
4  SUM=SUM+BI(I,J)*X(J)
  SUM=B(I)-SUM
5  R(I)=SUM
  CALL SOLVE(N,UL,R,DX,IPS)
  DXNOR=0.
  DO 6 I=1,N
  T=X(I)
  X(I)=X(I)+DX(I)
  DXNORM=DMAX1(DXNORM,DABS(X(I)-T))
6  CONTINUE
  IF(ITER-1)8,7,8
7  DIGITS=-DLOG10(DMAX1(DXNORM/XNORM,EPS))
8  IF(DXNOR-EPS*XNORM)10,10,9
9  CONTINUE
  CALL SING(3)
10 RETURN
  END
```

```
C=====
C==== SUBROTINA PARA IMPRESSAO DE MENSAGENS NA SOLUCAO
C=====
SUBROUTINE SING(IWHY)
  IMP=3
11 FORMAT(5X,'MATRIZ COM LINHA NULA')
12 FORMAT(5X,'MATRIZ SINGULAR, DIVISAO POR ZERO EM SOLVE')
13 FORMAT(5X,'NAO HA CONVERGENCIA EM IMPRUV E QUASE SING')
  GO TO (1,2,3),IWHY
1  WRITE(IMP,11)
  GO TO 10
2  WRITE(IMP,12)
  GO TO 10
3  WRITE(IMP,13)
10 RETURN
  END
```



2.8.2 - Programa em linguagem Fortran que resolve pelo método de Stodola-Vianello, em sua variante, o sistema de equações diferenciais, que expressa o comportamento das estruturas tridimensionais analisadas nos itens (2.3) a (2.5).

a) Dados de entrada

PI - valor inicial da carga vertical uniformemente distribuída p.

formato de entrada - F10.0

ACREP - valor do incremento da carga vertical uniformemente distribuída p.

formato de entrada - F10.0

PCRIT - carga crítica de flambagem da estrutura

formato de entrada - F10.0

H - altura total da estrutura

formato de entrada - F10.0

HA - altura do andar

formato de entrada - F10.0

NA - número de andares da estrutura

formato de entrada - I2

IGRAU - grau inicial para os polinômios aproximadores adotados para as funções deslocamentos  $u(Z)$ ,  $v(Z)$  e  $\theta(Z)$ .

formato de entrada - I2

IGMAX - grau máximo que pode atingir os polinômios  $u(Z)$ ,  $v(Z)$  e  $\theta(Z)$ .

formato de entrada - I2

{Q}- vetor de ordem 3x1 constituído das componentes da carga externa lateral q, nas três direções globais.

formato de entrada - 3F10.0 (leitura dos três elementos em uma linha).

- [JJ] - matriz de rigidez das paredes, de ordem 3x3  
formato de entrada - 3F10.0 (leitura para cada linha da matriz).
- [KT] - matriz de rigidez à torção livre, de ordem 3x3  
formato de entrada - 3F10.0 (leitura para cada linha da matriz).
- [LG] - matriz dos esforços externos devidos a carga vertical p. Esta matriz de ordem 3x3 será definida como:
- 1) [L<sub>T</sub>] - para o caso de estruturas constituídas por um núcleo contraventado ou não por lintéis.
  - 2) [L<sub>ST</sub>] - para o caso de uma associação tridimensional de paredes e pórticos.
  - 3) [L<sub>w</sub>] - para o caso de estruturas constituídas por dois núcleos contraventados ou não por lintéis.
- formato de entrada - 3F10.0 (leitura para cada linha da matriz).
- [KG] - matriz de rigidez, de ordem 3x3, que de acordo com o tipo de estrutura será definida como:
- 1) [S] - matriz de rigidez do conjunto de pórticos
  - 2) [K<sub>L</sub>] - matriz de rigidez imposta pelos lintéis  
formato de entrada - 3F10.0 (leitura para cada linha da matriz).

b) Descrição das principais variáveis

[QA] - matriz de ordem 3x2 contendo os esforços externos provenientes da carga lateral q (corresponde a matriz [Q\*] definida pela equação (2.157) do item (2.7)).

NC - número de cotas onde são calculados os deslocamentos.

{ETA1} - vetor de ordem NC contendo os valores das cotas

$$\eta_i = \frac{Z_i}{H}$$

- {QSII} - vetor de ordem (IGRAU-3) contendo os valores dos pontos de interpolação,  $\xi_i = \frac{z_i}{H}$ .
- MKK - ordem da matriz dos coeficientes do sistema de equações do método de Stodola-Vianello.
- {CA} - vetor de ordem MKK contendo os termos independentes do sistema de equações do método de Stodola-Vianello (corresponde ao vetor {DN} definido pela equação (2.187) do item (2.7)).
- P - carga vertical e uniformemente distribuída, inicializada com o valor PI e acrescida do valor ACREP até que seja atingido o valor da carga crítica de flambagem, especificado por PCRIT.
- [MC] - matriz de ordem MKK x MKK formada pelos coeficientes do sistema de equação do método de Stodola-Vianello.
- {C} - vetor de ordem MKK, contendo as incógnitas do sistema de equações do método de Stodola-Vianello.
- {U}, {V}, {W} - vetores de ordem NC, cujos componentes expressam os deslocamentos dos diafragmas, nas direções globais (u,v,θ), nas cotas  $\eta_i$  da altura da estrutura.
- {UBAR}, {VBAR}, {WBAR} - vetores de ordem NC contendo os deslocamentos dos diafragmas, nas direções globais ( $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\theta}$ ), nas cotas  $\eta_i$  da altura da estrutura.

As demais variáveis que aparecem no programa tem caráter meramente auxiliar sendo seu emprego facilmente compreendido através de uma análise da listagem.

### c) Subrotinas

O programa principal utiliza as seguintes subrotinas.

- c.1) GJRIS - executa a inversão de uma matriz pelo método de Gauss-Jordan.
- c.2) DECOM - inicia o processo de eliminação de Gauss, com pivotamento parcial, decompondo a matriz do sistema em um produto de duas matrizes triangulares, conforme Forsythe [5].
- c.3) SOLVE - utiliza a matriz decomposta em DECOM para encontrar a solução do sistema de equações, conforme Forsythe [5].
- c.4) IMPRUV- refina o resultado da SOLVE, conforme Forsythe [5].
- c.5) SING - imprime algumas chamadas de controle, conforme Forsythe [5].

d) Impressão dos resultados

Os valores dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$  dos diafragmas, nas diversas cotas ao longo da altura da estrutura, são impressos para cada valor considerado da carga vertical  $p$ .

e) Listagem do programa

(Ver páginas seguintes)

```

C=====
C==== PROGRAMA PRINCIPAL
C=====
C==== APLICACAO DO METODO DE SUCCELA-VIANELLO - CASO TRIDIMENSIONAL
C=====
C
  IMPLICIT REAL*8(A-F,C-Z)
  REAL*8 MC(60,60),JJ(3,3),LG(3,3),KT(3,3),KG(3,3)
  DIMENSION C(3),CA(3,2),ETA1(21),JSII(20),AX1(3,3),AX2(3,3),AX3(3,3)
  *,D(3,2),CA(60),PB(3,3),P28(3,3),C(60),UBAR(31),VBAR(31),WBAR(31),
  *U(31),V(31),W(31),RA(31),FB(31)
  DIMENSION BI(60,60),IPS(60)
  DIMENSION TITUL(10)
  *OPEN(UNIT=1,STATUS='OLD',FILE='D5',ACCESS='SEQUENTIAL',FORM='FORMA
  *TIED')
  LEI=1
  IMP=3
C=====
C==== LEITURA DE DADOS
C=====
C
  READ(LEI,775)(TITUL(I),I=1,10)
  775 FORMAT(10A8)
  READ(LEI,17)PI
  17 FORMAT(F10.0)
  READ(LEI,18)ACREP
  18 FORMAT(F10.0)
  READ(LEI,4)PCRIT
  4 FORMAT(F10.0)
  READ(LEI,5)H,HA,NA,IGRAU,IGMAX
  5 FORMAT(2F10.0,3I2)
  READ(LEI,6)(J(I),I=1,3)
  6 FORMAT(3F10.0)
  DO 10 I=1,3
  10 READ(LEI,11)(JJ(I,J),J=1,3)
  11 FORMAT(3F10.0)
  DO 12 I=1,3
  12 READ(LEI,13)(KT(I,J),J=1,3)
  13 FORMAT(3F10.0)
  DO 14 I=1,3
  14 READ(LEI,15)(LG(I,J),J=1,3)
  15 FORMAT(3F10.0)
  DO 7 I=1,3
  7 READ(LEI,8)(KG(I,J),J=1,3)
  8 FORMAT(3F10.0)
  WRITE(IMP,776)(TITUL(I),I=1,10)
  776 FORMAT(/,4X,10A8)
C=====
C==== CALCULO DOS ESFORCOS EXTERNOS PROVENIENTES DA CARGA HORIZONTAL Q
C=====
C
  DO 16 I=1,3
  DO 16 J=1,2
  16 QA(I,J)=(-H)**(3-J)/H*C(I)
C=====
C==== CALCULO DAS COTAS
C=====
C
  NC=NA+1
  DO 19 J=1,NC
  19 ETA1(J)=(J-1)*HA/H
C=====
C
  IN=3
  CALL GGRIS(IN,JJ)
  DO 27 I=1,3
  DO 27 J=1,3
  AX1(I,J)=0.
  AX2(I,J)=0.
  AX3(I,J)=0.
  DO 27 K=1,3
  AX1(I,J)=AX1(I,J)+JJ(I,K)*KT(K,J)
  AX2(I,J)=AX2(I,J)+JJ(I,K)*LG(K,J)
  27 AX3(I,J)=AX3(I,J)+JJ(I,K)*KG(K,J)
  DO 34 I=1,3
  DO 34 J=1,2
  D(I,J)=0.
  DO 34 K=1,3
  34 D(I,J)=C(I,J)+JJ(I,K)*CA(K,J)
  94 MK=IGRAU-1
  IVA=0
  WRITE(IMP,95)IGRAU
  95 FORMAT(/,5X,'PCLINCMIC DE GRAU',2X,12,/)
C=====
C==== CALCULO DOS PONTOS DE INTERPOLACAO
C=====
C
  DO 21 I=1,MK
  21 QSII(I)=0.
  DO 22 I=3,MK
  22 QSII(I)=(I-2.)/(IGRAU-2.)
C=====
C==== CALCULO DO VETOR INDEPENDENTE
C=====
C
  MKK=3*MK
  DO 38 I=1,MKK
  38 CA(I)=0.
  DO 39 K=1,3
  L=K+3
  39 CA(L)=C(K,1)*H**3/8.+3.*D(K,2)*H**4/40.
  DO 40 J=3,MK

```

```

QSI=QSI1(J)
DO 40 I=1,3
M=3*(J-1)+I
CA(M)=D(I,1)*H**3*(QSI**2/2.-QSI**3/6.)+D(I,2)*H**4*(QSI**2/4.-QSI
**4/24.)
40 CONTINUE
P=PI
999 DO 43 L=1,3
DO 43 K=1,3
PB(L,K)=AX1(L,K)+AX3(L,K)-P*H*AX2(L,K)
P2B(L,K)=P*AX2(L,K)
43 CONTINUE
C=====
C==== CALCULO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES DO SISTEMA DE EQUACOES
C=====
DO 44 I=1,MKK
DO 44 J=1,MKK
44 MC(I,J)=0.
DO 45 I=1,3
DO 45 J=2,IGRAU
MA=3*(J-2)+I
45 MC(I,MA)=J*(J-1)
DO 46 I=1,3
L=I+2
DO 47 K=2,IGRAU
MM=3*(K-2)+I
AUX1=K+1.
AUX2=(K+1.)*(K+2.)*(K+3.)
AUX3=AUX2*(K+4.)
DO 48 J=1,3
M=3*(K-2)+J
MC(L,M)=PB(I,J)*H**2*(1./6.-1./AUX2)+P2B(I,J)*H**3*K*(1./(6.*AUX1)
*-1./AUX3)
48 CONTINUE
MC(L,MM)=MC(L,MM)+1./AUX1
47 CONTINUE
46 CONTINUE
DO 49 K=3,MK
QSI=QSI1(K)
DO 50 I=1,3
IK=3*(K-1)+I
DO 51 L=2,IGRAU
IL=3*(L-2)+I
AUX1=L+1.
AUX2=AUX1*(L+2.)
AUX3=AUX2*(L+3.)
DO 52 J=1,3
JL=3*(L-2)+J
MC(IK,JL)=PB(I,J)*H**2*(QSI**2/2.-QSI***(L+2)/AUX2)+P2B(I,J)*H**3*L
***(QSI**2/(2.*AUX1)-QSI***(L+3)/AUX3)
52 CONTINUE
MC(IK,IL)=MC(IK,IL)+QSI**L
51 CONTINUE
50 CONTINUE
49 CONTINUE
C=====
C==== RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES
C=====
CALL DECOM(MKK,MC,BI,IPS)
CALL SOLVE(MKK,BI,CA,C,IPS)
CALL IMPROV(MKK,MC,EI,CA,C,IPS)
C=====
C==== CALCULO DOS DESLOCAMENTOS
C=====
DO 63 L=1,NC
UBAR(L)=0.
U(L)=0.
VBAR(L)=0.
V(L)=0.
WBAR(L)=0.
W(L)=0.
63 CONTINUE
DO 64 I1=1,3
DO 64 J=1,NC
ETA=ETA1(J)
DO 65 J1=1,IGRAU
RA(J1)=0.
RB(J1)=0.
65 CONTINUE
RA(I1)=D(I1,1)*H**3*(ETA**2/2.-ETA**3/6.)+D(I1,2)*H**4*(ETA**2/4.-E
*TA**4/24.)
DO 67 L=2,IGRAU
AUX1=L+1.
AUX2=AUX1*(L+2.)
AUX3=AUX2*(L+3.)
DO 68 M=1,3
K=3*(L-2)+M
RA(L)=RA(L)+(PB(I1,M)*H**2*(ETA***(L+2)/AUX2-ETA**2/2.)+P2B(I1,M)*
*H**3*L*(ETA***(L+3)/AUX3-EI*ETA**2/(2.*AUX1)))*C(K)
68 CONTINUE
K1=3*(L-2)+I1
RB(L)=ETA**L*C(K1)
67 CONTINUE
DO 69 ML=1,IGRAU
IF(I1-2)70,71,72

```

```

70 UBAR(J)=UBAR(J)+RA(ML)
   U(J)=U(J)+RB(ML)
   GO TO 69
71 VBAR(J)=VBAR(J)+RA(ML)
   V(J)=V(J)+RB(ML)
   GO TO 69
72 WBAR(J)=WBAR(J)+RA(ML)
   W(J)=W(J)+RB(ML)
69 CONTINUE
66 CONTINUE
64 CONTINUE
C=====
C==== IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS PARA CADA VALOR DA CARGA VERTICAL P
C=====
73 WRITE(IMP,73)P
   FORMAT(/,5X,'P=',G15.7)
74 WRITE(IMP,75)(K,UBAR(K),K=1,NC)
75 FORMAT(/,(5X,5('UBAR(',I2,')=',G15.7,1X)))
76 WRITE(IMP,77)(I,J(I),I=1,NC)
77 FORMAT(/,(5X,5('J(',I2,')=',G15.7,1X)))
78 WRITE(IMP,79)(L,VBAR(L),L=1,NC)
79 FORMAT(/,(5X,5('VBAR(',I2,')=',G15.7,1X)))
80 WRITE(IMP,81)(I,V(I),I=1,NC)
81 FORMAT(/,(5X,5('V(',I2,')=',G15.7,1X)))
82 WRITE(IMP,83)(K,WBAR(K),K=1,NC)
83 FORMAT(/,(5X,5('WBAR(',I2,')=',G15.7,1X)))
84 WRITE(IMP,85)(M,W(M),M=1,NC)
85 FORMAT(/,(5X,5('W(',I2,')=',G15.7,1X)))
   P=P+ACREP
   IF(P-PCRIT)74,74,76
74 GO TO 999
76 IVA=IVA+1
   IF(IVA-1)78,78,86
78 P=PCRIT
   GO TO 999
86 IGRAU=IGRAU+1
   IF(IGRAU-IGMAX)94,94,90
90 WRITE(IMP,95)PCRIT
95 FORMAT(/,5X,'PCRIT=',G15.7)
   CALL EXIT
   END

C=====
C==== SUBROTINA PARA PIVOTAMENTO E ESCALONAMENTO PARCIAL DA MATRIZ BI
C==== DOS COEFICIENTES DO SISTEMA DE EQUACoes
C=====
SUBROUTINE DECOM(NK,BI,UL,IPS)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
  DIMENSION BI(60,60),UL(60,60),SCALES(60),IPS(60)
  N=NK
  DO 5 I=1,N
    IPS(I)=I
    ROWNRM=0.
    DO 2 J=1,N
      UL(I,J)=BI(I,J)
      IF(ROWNRM-DABS(UL(I,J)))1,2,2
1    ROWNRM=DABS(UL(I,J))
2    CONTINUE
3    IF(ROWNRM)3,4,3
4    SCALES(I)=1.0/ROWNRM
5    GO TO 5
6    CALL SING(1)
7    SCALES(I)=0.
8    CONTINUE

C=====
C==== ELIMINACAO DE GAUSS COM PIVOTAMENTO PARCIAL
C=====
  NMI=N-1
  DO 17 K=1,NMI
    BIG=0.
    DO 11 I=K,N
      IP=IPS(I)
      SIZE=DABS(UL(IP,K))*SCALES(IP)
      IF(SIZE-BIG)11,11,10
10    BIG=SIZE
      IDXPIV=I
11    CONTINUE
12    IF(BIG)13,12,13
13    CALL SING(2)
14    GO TO 17
15    IF(IDXPIV-K)14,15,14
16    J=IPS(K)
17    IPS(K)=IPS(IDXPIV)
18    IPS(IDXPIV)=J
19    KP=IPS(K)
20    PIVOT=UL(KP,K)
21    KP1=K+1
22    DO 16 I=KP1,N
23    IP=IPS(I)
24    EM=-UL(IP,K)/PIVOT
25    UL(IP,K)=-EM
26    DO 16 J=KP1,N
27    UL(IP,J)=UL(IP,J)+EM*UL(KP,J)
16    CONTINUE
17    CONTINUE
18    KP=IPS(N)
19    IF(UL(KP,N))19,18,19
20    CALL SING(2)
21    RETURN
22    END

```

```
C=====
C==== SUBROTINA PARA SOLUCAO DO SISTEMA A PARTIR DA MATRIZ
C==== TRIANGULARIZADA UL
C=====
SUBROUTINE SOLVE(NK,UL,B,X,IPS)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION UL(60,60),B(60),X(60),IPS(60)
N=NK
NP1=N+1
IP=IPS(1)
X(1)=B(IP)
DO 2 I=2,N
  IP=IPS(I)
  IM1=I-1
  SUM=C
  DO 1 J=1,IM1
1 SUM=SUM+UL(IP,J)*X(J)
2 X(I)=B(IP)-SUM
  IP=IPS(N)
  X(N)=X(N)/UL(IP,N)
  DO 4 IBACK=2,N
  I=NP1-IBACK
  IP=IPS(I)
  IP1=I+1
  SUM=0.
  DO 3 J=IP1,N
3 SUM=SUM+UL(IP,J)*X(J)
4 X(I)=(X(I)-SUM)/UL(IP,I)
RETURN
END
```

```
C=====
C==== SUBROTINA PARA REFINAMENTO DA SOLUCAO DO SISTEMA
C=====
SUBROUTINE IMPROV(NK,BI,UL,B,X,IPS)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION BI(60,60),UL(60,60),B(60),X(60),R(60),DX(60)
N=NK
EPS=1.0E-10
ITMAX=30
XNORM=0.0
DO 1 I=1,N
1 XNORM=DMAX1(XNORM,DABS(X(I)))
  IF(XNORM)3,2,3
2 DIGITS=-DLOG10(EPS)
  GO TO 10
3 DO 9 ITER=1,ITMAX
  DO 5 I=1,N
  SUM=0.
  DO 4 J=1,N
4 SUM=SUM+BI(I,J)*X(J)
  SUM=B(I)-SUM
5 R(I)=SUM
  CALL SOLVE(N,UL,R,DX,IPS)
  DXNORM=0.
  DO 6 I=1,N
  T=X(I)
  X(I)=X(I)+DX(I)
  DXNORM=DMAX1(DXNORM,DABS(X(I)-T))
6 CONTINUE
  IF(ITER-1)8,7,8
7 DIGITS=-DLOG10(DMAX1(DXNORM/XNORM,EPS))
8 IF(DXNORM-EPS*XNORM)10,10,9
9 CONTINUE
  CALL SING(3)
10 RETURN
END
```

```
C=====
C==== SUBROTINA PARA IMPRESSAO DE MENSAGENS NA SOLUCAO
C=====
SUBROUTINE SING(IWHY)
IMP=3
11 FORMAT(5X,'MATRIZ COM LINHA NULA')
12 FORMAT(5X,'MATRIZ SINGULAR, DIVISAO POR ZERO EM SOLVE')
13 FORMAT(5X,'NAO HA CONVERGENCIA EM IMPROV E QUASE SING')
GO TO (1,2,3),IWHY
1 WRITE(IMP,11)
GO TO 10
2 WRITE(IMP,12)
GO TO 10
3 WRITE(IMP,13)
10 RETURN
END
```



```
C=====
C===== SUBROTINA DE INVERSAC DE MATRIZES
C=====
SUBROTINE GJRS(N,A)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION A(3,3),B(3),C(3),IP(3),IQ(3)
LEI=1
IMP=3
DO 1 K=1,N
T=0.
DO 6 I=K,N
S=0.
DO 3 J=K,N
3 S=S+DABS(A(I,J))
IF(S)4,5,4
4 DO 2 J=K,N
IF(DABS(A(I,J))-S*T)2,2,7
7 IP(K)=I
IQ(K)=J
PIVO=A(I,J)
T=DABS(PIVO/S)
2 CONTINUE
6 CONTINUE
IF(T)101,5,101
101 IF(IP(K)-K)8,98,8
8 DO 9 J=1,N
IPK=IP(K)
Z=A(IPK,J)
A(IPK,J)=A(K,J)
9 A(K,J)=Z
98 IF(IQ(K)-K)10,20,10
10 IQK=IQ(K)
DO 11 I=1,N
Z=A(I,IQK)
A(I,IQK)=A(I,K)
11 A(I,K)=Z
20 DO 12 J=1,N
IF(IJ-K)13,14,13
14 B(J)=1./PIVO
C(J)=1.
GO TO 15
13 B(J)=-A(K,J)/PIVO
C(J)=A(J,K)
15 A(K,J)=0.
12 A(J,K)=0.
DO 1 I=1,N
DO 1 J=1,N
A(I,J)=A(I,J)+C(I)*B(J)
1 CONTINUE
DO 16 KAUX=1,N
K=N-KAUX+1
IF(IP(K)-K)17,18,17
17 DO 102 I=1,N
IPK=IP(K)
Z=A(I,IPK)
A(I,IPK)=A(I,K)
A(I,K)=Z
102 CONTINUE
18 IF(IQ(K)-K)104,16,104
104 DO 103 J=1,N
IQK=IQ(K)
Z=A(IQK,J)
A(IQK,J)=A(K,J)
A(K,J)=Z
103 CONTINUE
16 CONTINUE
GO TO 118
5 WRITE(IMP,100)
100 FORMAT(///,5X,'PROGRAMA NAO EXECUTADO - MATRIZ SINGULAR',/)
118 RETURN
END
```

## 2.9 - Exemplos numéricos

Apresentam-se, a seguir, exemplos numéricos de aplicação dos métodos diferenças finitas e Stodola-Vianello, em sua variante, através dos programas em linguagem FORTRAN desenvolvidos no item (2.8). Obtêm-se as soluções dos sistemas de equações diferenciais que expressam o comportamento das estruturas tridimensionais analisadas anteriormente, através da técnica do meio contínuo.

### 2.9.1 - Exemplo 1

Na figura (2.26) representa-se em planta uma estrutura de 30 andares, formada por um único núcleo de seção aberta, de características elasto-geométricas constantes com a altura.

Considera-se que a altura do pé-direito é 3,0m e que os módulos de elasticidade longitudinal e transversal tem valores  $E = 2,0 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$  e  $G = 8,0 \times 10^5 \text{ tf/m}^2$ , respectivamente. As dimensões do núcleo estão indicadas na figura (2.26).

O carregamento constitui-se de carga vertical uniformemente distribuída, ao longo do eixo vertical que passa pelo centro de gravidade da seção transversal do núcleo, e carga lateral, também uniforme. Em relação a esta última carga foram analisados três casos:

Caso A - carga na direção do eixo OY de valor  $q = 0,96 \text{ tf/m}$

Caso B - carga na direção do eixo OX de valor  $q = 0,96 \text{ tf/m}$

Caso C - carga atuando em um plano que passa pelo ponto o', (centro geométrico da seção), fazendo um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo OX, de valor  $q = 1,36 \text{ tf/m}$ .

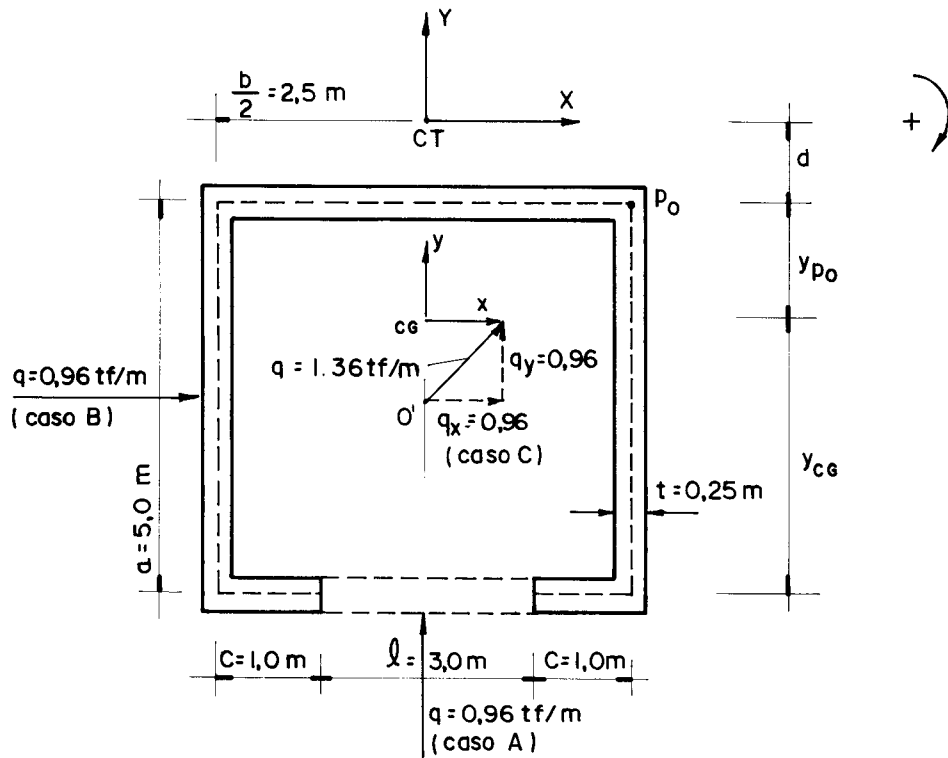


Figura 2.26 - Exemplo de um edifício com um núcleo de seção aberta.

Considera-se para esta análise duas estruturas, sendo a primeira constituída de um núcleo sem contraventamento e a segunda um núcleo contraventado ao nível dos andares por lintéis, com 3,0m de vão e seção transversal de dimensões 25x30cm.

Em ambas as estruturas pretende-se determinar os deslocamentos horizontais  $u$  e  $v$  e a rotação  $\theta$  no topo, para cada valor da carga vertical  $p$  assumido.

a) Características geométricas da seção transversal

a.1) Centro de gravidade

Como  $ox$  é eixo de simetria da seção transversal,

$$x_{CG} = 0$$

$$y_{CG} = \frac{5,0 \times 0,25 \times 5,0 + 2(5,0 \times 0,25 \times 2,5)}{5,0 \times 0,25 + 2,0 \times 5,0 \times 0,25 + 2,0 \times 1,0 \times 0,25} = 2,94 \text{ m}$$

a.2) Momentos de inércia

$$J_x = 2 \left[ \frac{0,25 \times 5,0^3}{12} + 0,25 \times 5,0 (2,94 - 2,5)^2 + \frac{1,0 \times 0,25^3}{12} + 0,25 \times 1,0 (2,94)^2 \right] + \frac{5,0 \times 0,25^3}{12} + 0,25 \times 5,0 \times (5,0 - 2,94)^2$$

$$J_x = 15,32 \text{ m}^4$$

$$J_y = 2 \left[ \frac{5,0 \times 0,25^3}{12} + 0,25 \times 5,0 \times 2,5^2 + \frac{0,25 \times 1,0^3}{12} + 0,25 \times 1,0 \times 2,0^2 \right] + \frac{0,25 \times 5,0^3}{12}$$

$$J_y = 20,28 \text{ m}^4$$

a.3) Centro de torção

Sendo o eixo OY, eixo de simetria da seção transversal,

$$x_D = 0$$

e, de acordo com a equação (B.18) do apêndice B,

$$y_D = y_{p_o} - \frac{1}{J_y} \int_S \omega_{p_o} x dS$$

ou

$$y_D - y_{p_o} = d$$

onde,

$$d = - \frac{1}{J_y} \int_S \omega_{p_o} x dS = \frac{1}{J_y} \cdot \frac{ta}{12} [3b^2a + 2b^3 - l^2(3b-l)]$$

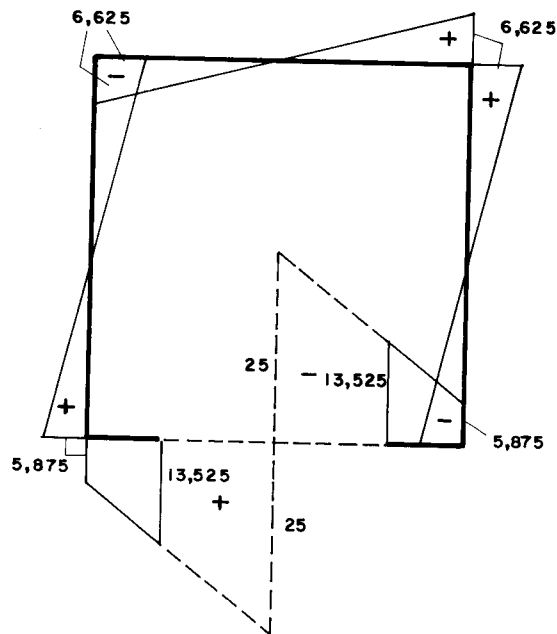
$$d = \frac{1}{20,28} \times \frac{0,25 \times 5,0}{12} [3 \times 5,0^2 \times 5,0 + 2,0 \times 5,0^3 - 3,0^2(3 \times 5,0 - 3,0)]$$

$$d = 2,65m$$

logo,

$$y_D = 2,65 + 2,06 = 4,71m$$

a.4) Diagrama de área setorial



a.5) Momento setorial de inércia,  $J_{\omega}$

$$J = 2,0 \times 0,25 \left\{ \frac{1}{3} \times 6,625 \times 6,625 \times 2,5 + \frac{1}{6} \left[ (2 \times 6,625 - 5,875) 6,625 + \right. \right. \\ \left. \left. + (6,625 + 2,0 \times 1,0 (-5,875)) \times -5,875 \right] \times 5,0 + \frac{1}{6} (2 \times 13,525 + \right. \\ \left. + 5,875) \times 13,525 + (13,525 + 2 \times 5,875) \times 5,875 \right\} \times 1,0 \}$$

$$J = 100,67 \text{m}^6$$

a.6) Momento de inércia à torção,  $J_t$

$$J_t = \frac{1}{3} \times 0,25^3 (3 \times 5,0 + 2 \times 1,0) = 8,85 \times 10^{-2} \text{m}^4$$

a.7) Área da seção transversal

$$A = 0,25 \times (3 \times 5,0 + 2 \times 1,0) = 4,25 \text{m}^2$$

a.8) Raio de giração polar

De acordo com a equação (2.25),

$$i_D^2 = 0 + (4,71)^2 + \frac{15,32 + 20,28}{4,25}$$

$$i_D^2 = 30,55 \text{m}^2$$

b) Em relação ao sistema de eixos global OXYZ, as componentes da carga lateral são:

Caso A -  $q_X = 0$  ;  $q_Y = 0,96\text{tf/m}$  ;  $m = 0$

Caso B -  $q_X = 0,96\text{tf/m}$  ;  $q_Y = 0$  ;  $m = 4,944\text{tfm/m}$

Caso C -  $q_X = 0,96\text{tf/m}$  ;  $q_Y = 0,96\text{tf/m}$  ;  $m = 4,944\text{tfm/m}$

2.9.1.1 - Núcleo de seção aberta sem contraentamento

a) Cálculo das matrizes

Utilizando as equações (2.7), (2.8) e (2.29), obtêm-se para as matrizes: de rigidez à flexo-torção, matriz  $[J]$ ; de rigidez à torção livre, matriz  $[K_T]$  ; e dos esforços externos provenientes da carga vertical, matriz  $[P]$ , os seguintes valores:

$$[J] = \begin{bmatrix} 40,56 & 0 & 0 \\ 0 & 30,64 & 0 \\ 0 & 0 & 201,34 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$[K_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70,8 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$[L_T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4,71 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4,71 & 0 & 30,55 \end{bmatrix}$$

b) Sistema de equações diferenciais

Pela equação (2.34), resulta:

$$\begin{bmatrix} 40,56 & 0 & 0 \\ 0 & 30,64 & 0 \\ 0 & 0 & 201,34 \end{bmatrix} \times 10^6 \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} + \left( p(90-Z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4,71 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4,71 & 0 & 30,55 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70,8 \end{bmatrix} \times 10^3 \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} = - (90-Z) \begin{Bmatrix} q_X \\ q_Y \\ -m \end{Bmatrix} \right.$$

Observa-se que a equação de equilíbrio à força cortante, na direção OY, é independente da equação de equilíbrio à força cortante, na direção OX, e da equação de equilíbrio ao momento torçor. Na procura da carga crítica, considerando o problema de 1ª espécie (sistema homogêneo), Carvalho [3] executou dois cálculos, sendo o primeiro de instabilidade por flambagem tipo Euler ou flexão pura no plano YZ, expresso pela segunda das equações do sistema, e o segundo, de instabilidade lateral, isto é, flambagem por torção e flexão, expresso pelas duas equações restantes. A carga crítica é então o menor dos dois valores obtidos.

A segunda equação diferencial forneceu o valor,

$$p_{crit} = 329,40 \text{tf/m}$$

A solução simultânea das outras duas equações, do sistema homogêneo, forneceu o valor,

$$p_{crit} = 114,27 \text{tf/m}$$



Admitiu-se, então, que a carga crítica seria o menor dos dois valores, ou seja:

$$P_{crit} = 114,27 \text{tf/m}$$

c) Caso A de carga lateral

c.1) Tabela de resultados

Na tabela (2.1) apresentam-se os resultados fornecidos pelos programas Fortran dos métodos: diferenças finitas e Stodola-Vianello, em sua variante. Observa-se que apenas ocorrem deslocamentos na direção OY. Isto se explica devido ao fato de que, sendo a origem dos eixos globais coincidente com o centro de torção do núcleo, a carga lateral só apresenta, em relação a esse sistema de eixos, apenas a componente  $q_Y$  (na direção de OY) ocorrendo no núcleo apenas flexão, no plano YZ, ficando, conseqüentemente, os deslocamentos restritos a esse plano.

Tabela 2.1

Núcleo sem contraventamento - Caso A de carga lateral ( $q_X = 0$ ; $q_Y = 0,96 \text{tf/m}$ ; $m = 0$ )									
Deslocamentos horizontais: u e v (m) e rotação (rad) no topo									
p(tf/m)	Stodola-Vianello						Diferenças Finitas		
	$\bar{u}$	u	$\bar{v}$	v	$\bar{\theta}$	$\theta$	u	v	$\theta$
0	-	-	0,257	0,257	-	-	-	0,257	-
5	-	-	0,261	0,261	-	-	-	0,261	-
10	-	-	0,265	0,265	-	-	-	0,265	-
15	-	-	0,269	0,269	-	-	-	0,269	-

(continua)

Tabela (2.1) (continuação)

Núcleo sem contraventamento - Caso A de carga lateral ( $q_x = 0$ ; $q_y = 0,96\text{tf/m}$ ; $m = 0$ )									
Deslocamentos horizontais: u e v (m) e rotação (rad) no topo									
p (tf/m)	Stodola-Vianello						Diferenças Finitas		
	$\bar{u}$	u	$\bar{v}$	v	$\bar{\theta}$	$\theta$	u	v	$\theta$
20	-	-	0,274	0,274	-	-	-	0,274	-
25	-	-	0,278	0,278	-	-	-	0,278	-
30	-	-	0,283	0,283	-	-	-	0,283	-
35	-	-	0,288	0,288	-	-	-	0,288	-
40	-	-	0,293	0,293	-	-	-	0,293	-
45	-	-	0,298	0,298	-	-	-	0,298	-
50	-	-	0,303	0,303	-	-	-	0,303	-
55	-	-	0,309	0,309	-	-	-	0,309	-
60	-	-	0,315	0,315	-	-	-	0,315	-
65	-	-	0,321	0,321	-	-	-	0,321	-
70	-	-	0,327	0,327	-	-	-	0,327	-
75	-	-	0,333	0,333	-	-	-	0,333	-
80	-	-	0,340	0,340	-	-	-	0,340	-
85	-	-	0,347	0,347	-	-	-	0,347	-
90	-	-	0,354	0,354	-	-	-	0,355	-
95	-	-	0,362	0,362	-	-	-	0,362	-
100	-	-	0,370	0,370	-	-	-	0,370	-
105	-	-	0,378	0,378	-	-	-	0,378	-
110	-	-	0,387	0,387	-	-	-	0,387	-
114,27	-	-	0,395	0,395	-	-	-	0,395	-
120	-	-	0,405	0,405	-	-	-	0,406	-
130	-	-	0,426	0,426	-	-	-	0,426	-
140	-	-	0,448	0,448	-	-	-	0,448	-
150	-	-	0,474	0,474	-	-	-	0,474	-
160	-	-	0,502	0,502	-	-	-	0,503	-
170	-	-	0,533	0,533	-	-	-	0,535	-

Tabela (2.1) (continuação)

Núcleo sem contraventamento - Caso A de carga lateral ( $q_x = 0$ ; $q_y = 0,96\text{tf/m}$ ; $m = 0$ )									
Deslocamentos horizontais: u e v (m) e rotação (rad) no topo									
p (tf/m)	Stodola-Vianello						Diferenças Finitas		
	$\bar{u}$	u	$\bar{v}$	v	$\bar{\theta}$	$\theta$	u	v	$\theta$
180	-	-	0,569	0,569	-	-	-	0,571	-
190	-	-	0,610	0,610	-	-	-	0,612	-
200	-	-	0,657	0,657	-	-	-	0,660	-
210	-	-	0,713	0,713	-	-	-	0,716	-
220	-	-	0,778	0,778	-	-	-	0,782	-
230	-	-	0,857	0,857	-	-	-	0,861	-
240	-	-	0,953	0,953	-	-	-	0,959	-
250	-	-	1,073	1,073	-	-	-	1,081	-
260	-	-	1,228	1,228	-	-	-	1,239	-
270	-	-	1,435	1,435	-	-	-	1,451	-
280	-	-	1,726	1,726	-	-	-	1,750	-
290	-	-	2,165	2,165	-	-	-	2,204	-
300	-	-	2,902	2,902	-	-	-	2,975	-
310	-	-	4,400	4,400	-	-	-	4,575	-
320	-	-	9,081	9,081	-	-	-	9,889	-
329,40	-	-	15727,25	15727,16	-	-	-	108,537	-

c.2) Gráficos

Apresenta-se na figura (2.27) a variação dos deslocamentos horizontais  $v(H)$ , no topo da estrutura, com a carga vertical  $p$ . Observa-se que, neste caso, os deslocamentos começam a crescer acentuadamente quando o valor da carga  $p$  aproxima-se do valor da carga crítica de flambagem de Euler, citado anteriormente, ou seja, quando  $p$  aproxima-se do valor  $P_{crit} = 329,40\text{tf/m}$ .

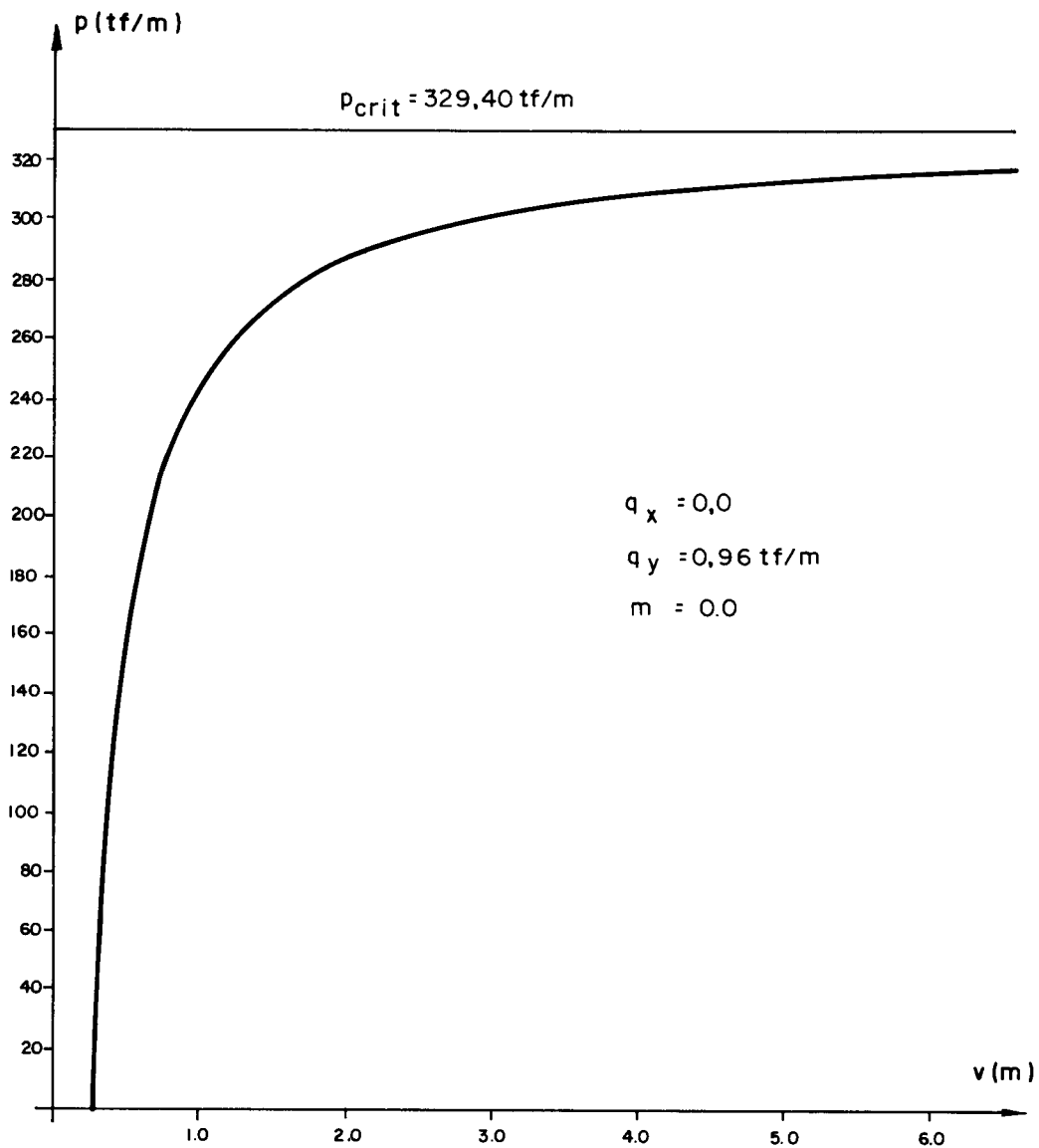


Figura 2.27 - Gráfico  $p \times v(H)$  para o núcleo sem contraventamento - Caso A de carga lateral.

d) Caso B de carga lateral

d.1) Tabela de resultados

Neste caso, a carga lateral tem componentes  $q_x$ , na direção do eixo OX, e  $m$ , momento em torno do eixo vertical OZ, produzindo na estrutura torção e flexão no plano XZ.

Os resultados fornecidos pelos programas Fortran indicam a ocorrência apenas de deslocamentos horizontais  $u$  e do giro  $\theta$ , sendo nulos os deslocamentos horizontais  $v$ , conforme apresenta-se na tabela (2.2). Observa-se que agora a instabilidade da estrutura ocorre quando a carga  $p$  vertical aproxima-se do valor da carga crítica de flexo-torção, ou seja  $p_{crit} = 114,27 \text{tf/m}$ .

Tabela (2.2)

Núcleo sem contraventamento - Caso B de carga lateral ( $q_x = 0,96 \text{tf/m}$ ; $q_y = 0,0$ ; $m = 4,944 \text{tfm/m}$ )									
Deslocamentos $u$ e $v$ (m) e rotação $\theta$ (rad) no topo									
$p(\text{tf/m})$	Stodola-Vianello					Diferenças Finitas			
	$\bar{u}$	$u$	$\bar{v}$	$v$	$\bar{\theta}$	$\theta$	$u$	$v$	$\theta$
0	0,194	0,194	-	-	-0,097	-0,097	0,194	-	-0,097
5	0,202	0,202	-	-	-0,102	-0,102	0,202	-	-0,102
10	0,211	0,211	-	-	-0,107	-0,107	0,211	-	-0,107
15	0,221	0,221	-	-	-0,113	-0,113	0,221	-	-0,113
20	0,231	0,231	-	-	-0,119	-0,119	0,231	-	-0,119
25	0,243	0,243	-	-	-0,126	-0,126	0,243	-	-0,126
30	0,257	0,257	-	-	-0,133	-0,133	0,257	-	-0,133
35	0,272	0,272	-	-	-0,142	-0,142	0,272	-	-0,142
40	0,289	0,289	-	-	-0,152	-0,152	0,289	-	-0,152
45	0,309	0,309	-	-	-0,163	-0,163	0,309	-	-0,163
50	0,331	0,331	-	-	-0,176	-0,176	0,332	-	-0,177
55	0,358	0,358	-	-	-0,192	-0,192	0,358	-	-0,192
60	0,389	0,389	-	-	-0,210	-0,210	0,390	-	-0,210
65	0,426	0,426	-	-	-0,232	-0,232	0,427	-	-0,232
70	0,473	0,473	-	-	-0,258	-0,258	0,474	-	-0,259
75	0,530	0,530	-	-	-0,292	-0,292	0,532	-	-0,293
80	0,605	0,605	-	-	-0,335	-0,335	0,608	-	-0,336
85	0,706	0,706	-	-	-0,393	-0,393	0,710	-	-0,395
90	0,847	0,847	-	-	-0,475	-0,475	0,853	-	-0,478
95	1,062	1,062	-	-	-0,599	-0,599	1,073	-	-0,605
100	1,428	1,428	-	-	-0,811	-0,811	1,449	-	-0,823
105	2,189	2,189	-	-	-1,251	-1,251	2,240	-	-1,281
110	4,730	4,730	-	-	-2,722	-2,722	4,992	-	-2,873
114,27	9014,638	9014,582	-	-	-5217,438	-5217,382	-86,358	-	49,981

d.2) Gráficos: carga vertical x deslocamento

Nas figuras (2.28) e (2.29) representa-se em gráfico a variação dos deslocamentos e rotações, no topo da estrutura, com a carga vertical  $p$ .

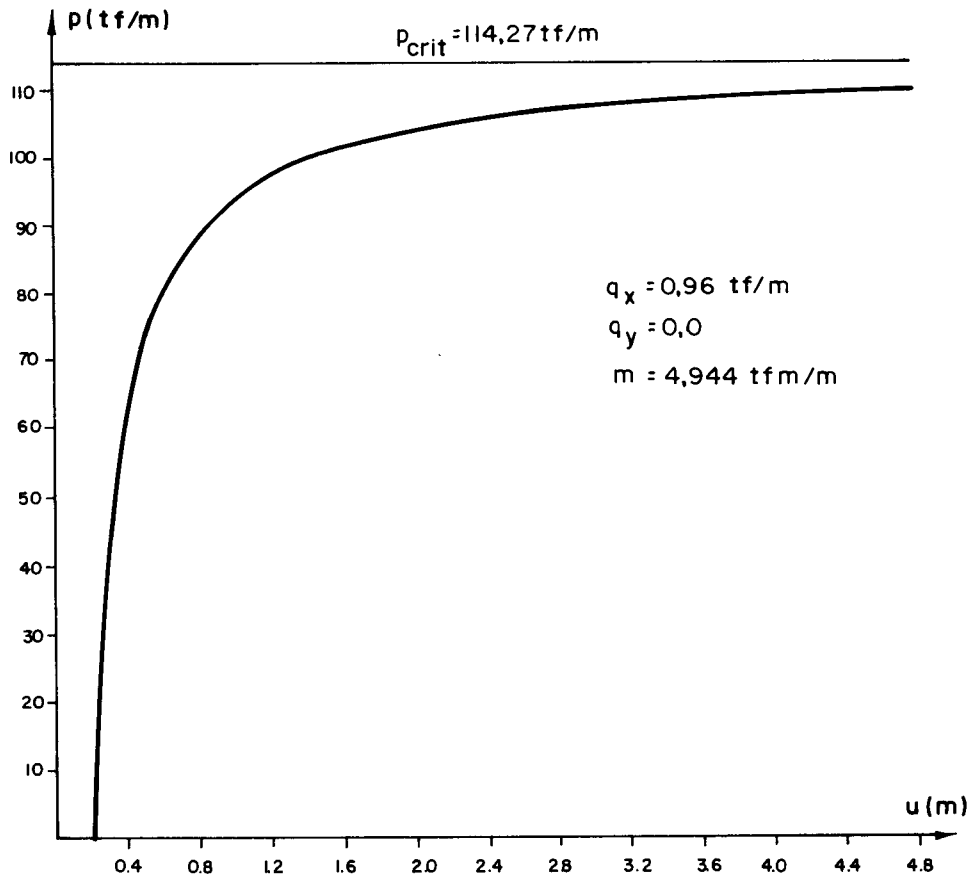


Figura 2.28 - Gráfico  $p_x(u)$  para o núcleo sem contraventamento - Caso B de carga lateral.

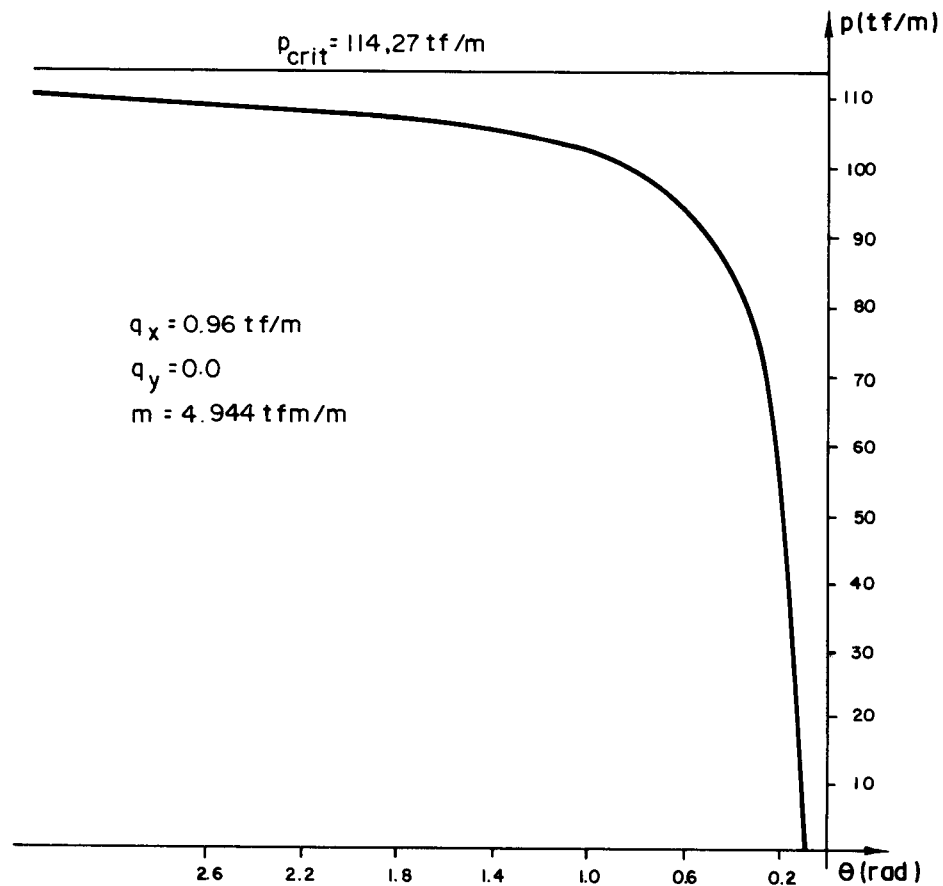


Figura 2.29 - Gráfico  $p \times \theta(H)$  para o núcleo sem contraventamento - Caso B de carga lateral.

e) Caso C de carga lateral

e.1) Tabela de resultados

Na tabela (2.3) apresentam-se os deslocamentos horizontais  $u$  e  $v$  e a rotação  $\theta$ , no topo da estrutura, obtidos através dos métodos: diferenças finitas e Stodola-Vianello, em sua variante. Os programas em linguagem Fortran forneceram para cada valor da carga vertical  $p$ , assumido a partir de zero até o valor da carga crítica de flexo-torção ( $p_{crit} = 114,27 \text{ tf/m}$ ), os seguintes valores:

Tabela (2.3)

Núcleo sem contraventamento - Caso C de carga lateral ( $q_x = 0,96\text{tf/m}$ ; $q_y = 0,96\text{tf/m}$ ; $m = 4,944\text{tfm/m}$ )									
Deslocamentos: $u$ e $v$ (m) e rotação $\theta$ (rad) no topo									
$p(\text{tf/m})$	Stodola-Vianello					Diferenças Finitas			
	$\bar{u}$	$u$	$\bar{v}$	$v$	$\bar{\theta}$	$\theta$	$u$	$v$	$\theta$
0	0,194	0,194	0,257	0,257	-0,097	-0,097	0,194	0,257	-0,097
5	0,202	0,202	0,261	0,261	-0,102	-0,102	0,202	0,261	-0,102
10	0,211	0,211	0,265	0,265	-0,107	-0,107	0,211	0,265	-0,107
15	0,221	0,221	0,269	0,269	-0,113	-0,113	0,221	0,269	-0,113
20	0,231	0,231	0,274	0,274	-0,119	-0,119	0,231	0,274	-0,119
25	0,243	0,243	0,278	0,278	-0,126	-0,126	0,243	0,278	-0,126
30	0,257	0,257	0,283	0,283	-0,133	-0,133	0,257	0,283	-0,133
35	0,272	0,272	0,288	0,288	-0,142	-0,142	0,272	0,288	-0,142
40	0,289	0,289	0,293	0,293	-0,152	-0,152	0,289	0,293	-0,152
45	0,309	0,309	0,298	0,298	-0,163	-0,163	0,309	0,298	-0,163
50	0,331	0,331	0,303	0,303	-0,176	-0,176	0,332	0,303	-0,177
55	0,358	0,358	0,309	0,309	-0,192	-0,192	0,358	0,309	-0,192
60	0,389	0,389	0,315	0,315	-0,210	-0,210	0,390	0,315	-0,210
65	0,426	0,426	0,321	0,321	-0,232	-0,232	0,427	0,321	-0,232
70	0,473	0,473	0,327	0,327	-0,258	-0,258	0,474	0,327	-0,259
75	0,530	0,530	0,333	0,333	-0,292	-0,292	0,532	0,333	-0,293
80	0,605	0,605	0,340	0,340	-0,335	-0,335	0,608	0,340	-0,336
85	0,706	0,706	0,347	0,347	-0,393	-0,393	0,710	0,347	-0,395
90	0,847	0,847	0,354	0,354	-0,475	-0,475	0,853	0,354	-0,478
95	1,062	1,062	0,362	0,362	-0,599	-0,599	1,073	0,362	-0,605
100	1,428	1,428	0,370	0,370	-0,811	-0,811	1,449	0,370	-0,823
105	2,189	2,189	0,378	0,378	-1,251	-1,251	2,240	0,378	-1,281
110	4,730	4,730	0,387	0,387	-2,722	-2,722	4,992	0,387	-2,873
114,27	9014,638	9014,582	0,395	0,395	-5217,438	-5217,382	-86,358	0,395	49,980

e.2) Gráficos: carga vertical x deslocamento

Através de uma análise nas tabelas (2.1) a (2.3), observa-se que os valores dos deslocamentos  $v$  nas tabelas (2.1) e (2.3) e os deslocamentos  $u$  e  $\theta$  nas tabelas (2.2) e (2.3) são iguais. Isto justifica-se pelo fato de que o caso C de cargas lateral corresponder a uma aplicação simultânea à estrutura do caso A e do caso B de carga lateral, sendo a equação de equilíbrio a força cortante, na direção OY, independente das outras duas equações de equilíbrio. Em vista disso, os gráficos  $p \times u$  e  $p \times \theta$  das figuras (2.28) e (2.29), respectivamente, expressam também a variação dos deslocamentos para este caso de cargas, analisado. Na figura (2.30) representa-se a curva dos deslocamentos  $v$  até o valor da car-



ga crítica de flambagem por flexo-torção, o que corresponde ao trecho inicial do gráfico da figura (2.27).

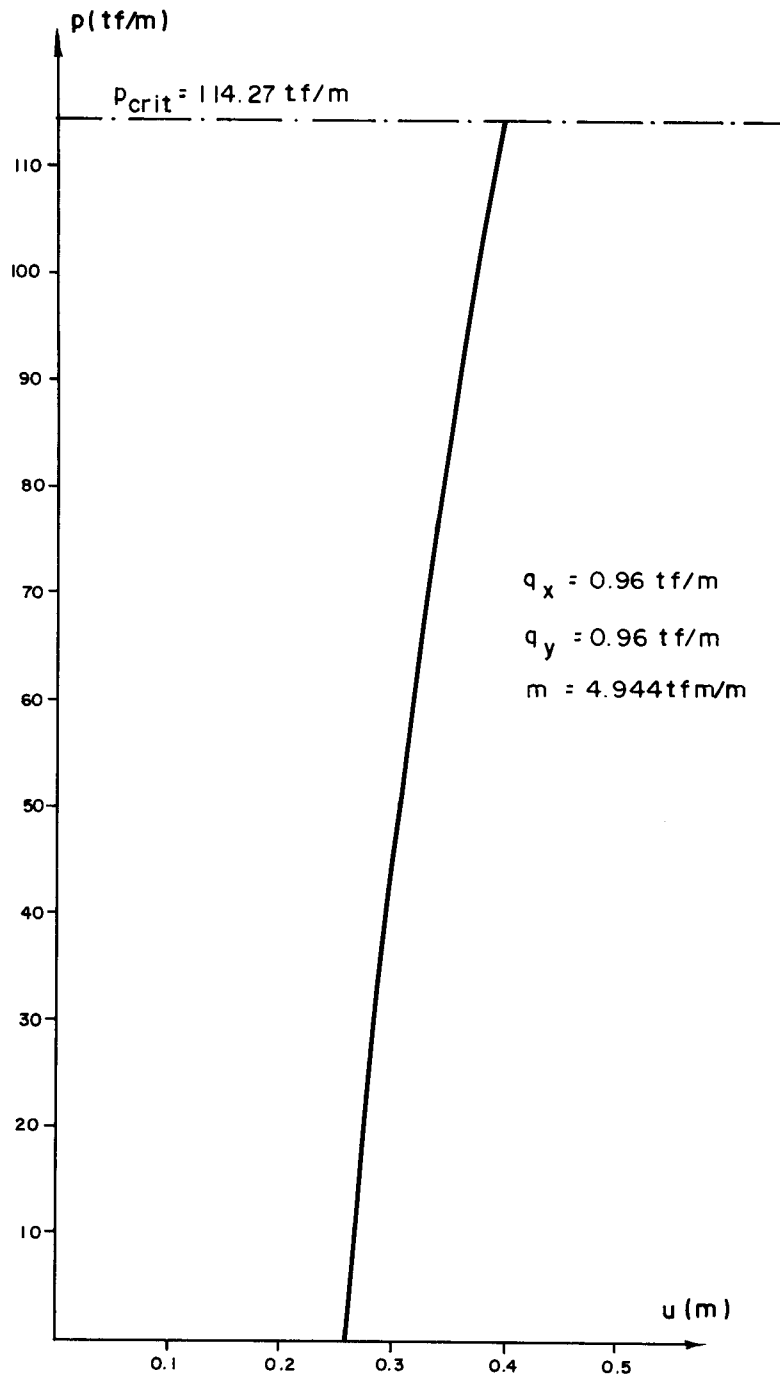


Figura 2.30 - Gráfico  $p \times v(H)$  para o núcleo sem contraventamento - Caso C de carga lateral.

e.3) Gráficos dos deslocamentos ao longo da altura do núcleo sem contraventamento

Nas figuras (2.31) a (2.35), representam-se em gráfico os deslocamentos da estrutura ao longo da altura do núcleo, para os valores  $p = 0$  e  $p = 15\text{tf/m}$ .

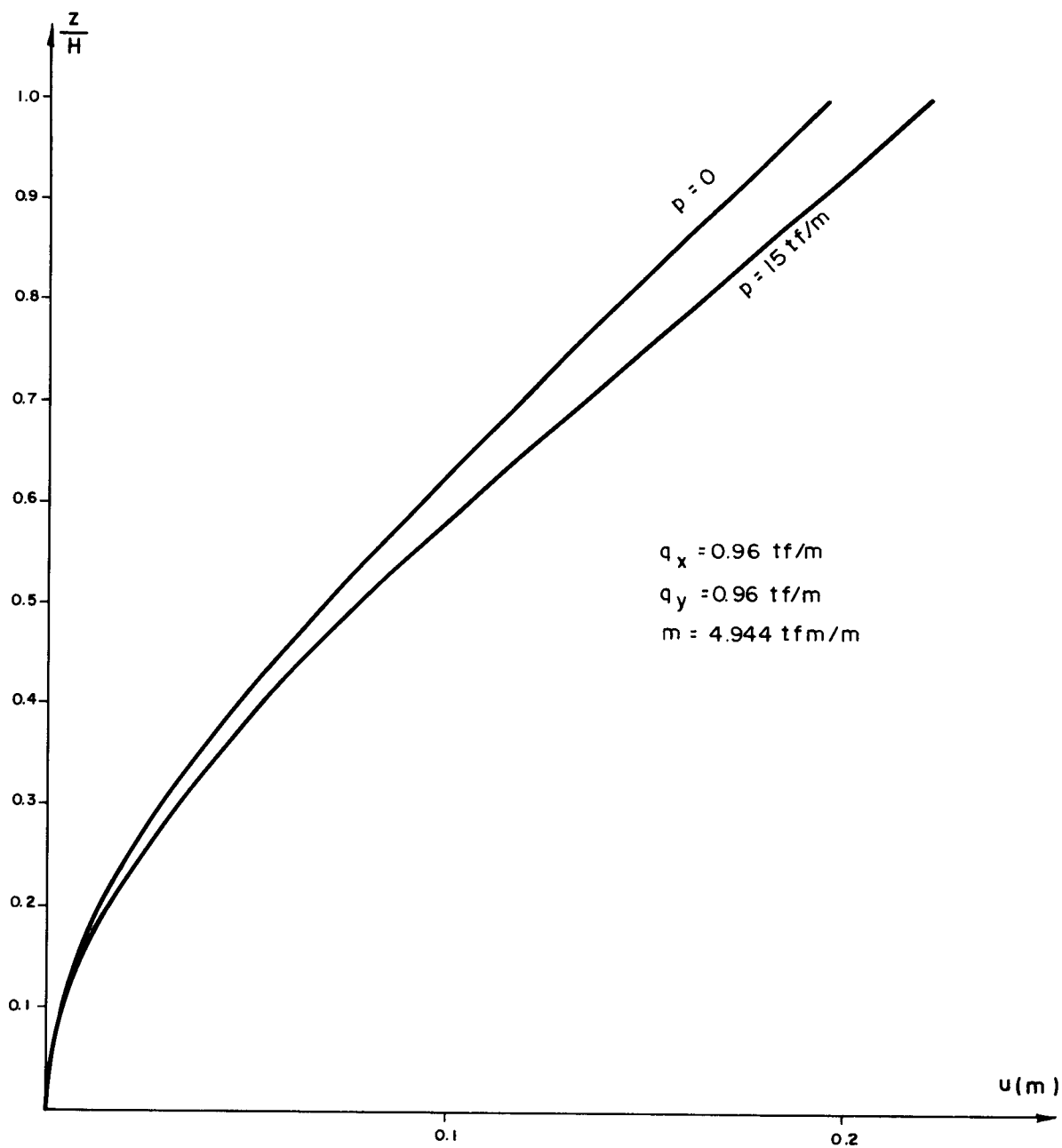


Figura 2.31 - Deslocamento horizontal u

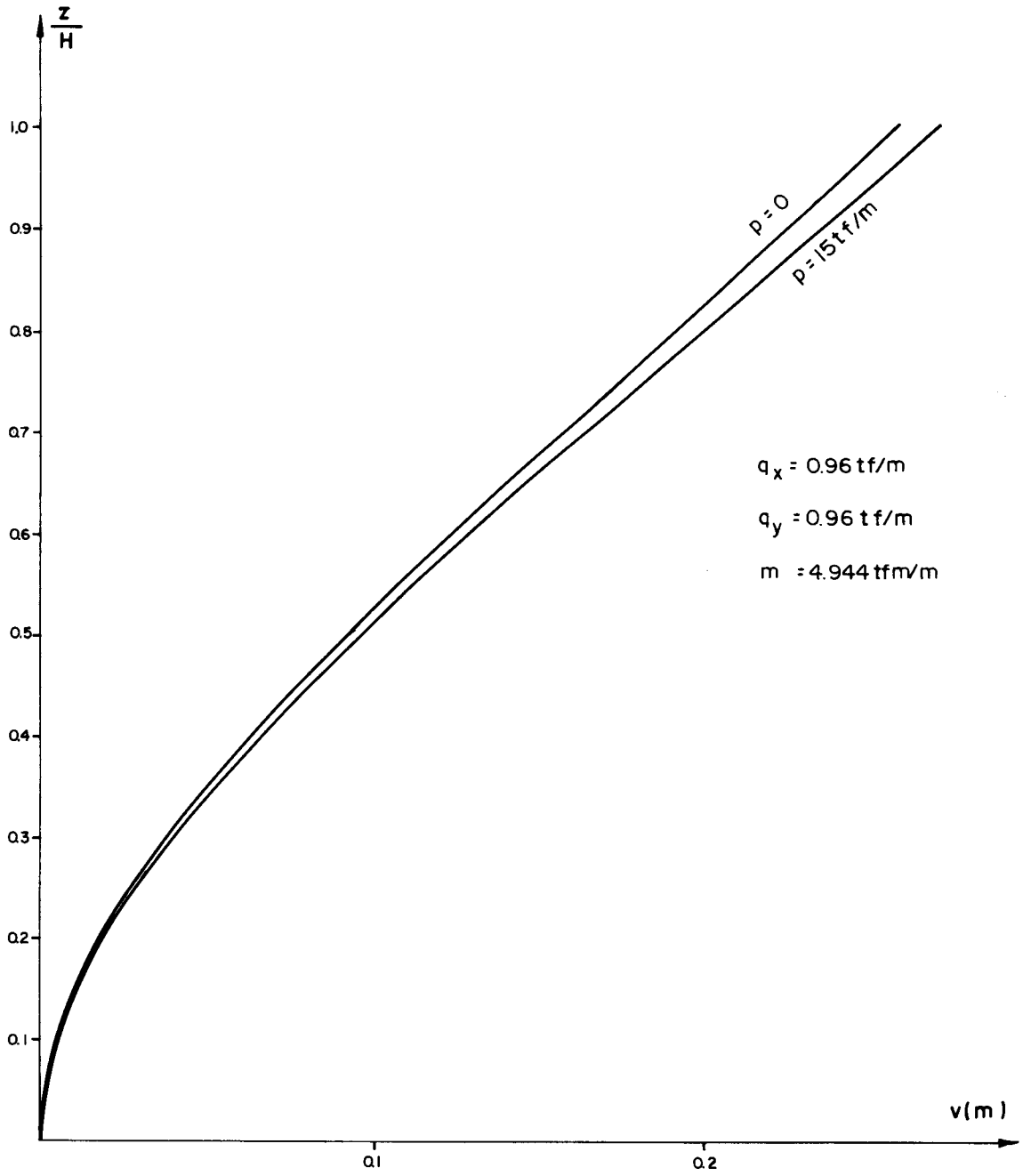


Figura 2.32 - Deslocamento horizontal  $v$

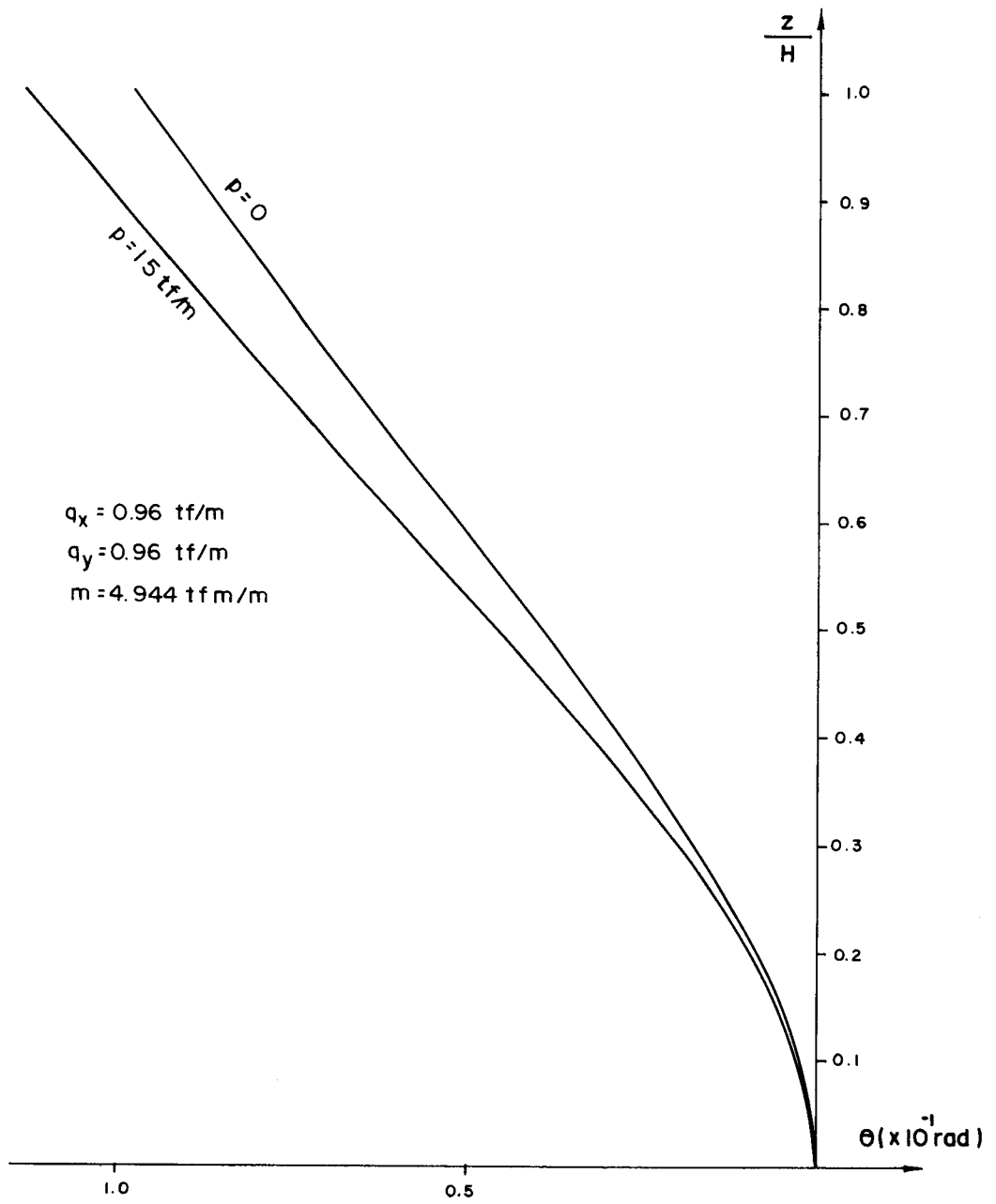


Figura 2.33 - Rotação  $\theta$

2.9.1.2 - Núcleo de seção aberta contraventado por lintéis  
ao nível dos andares

a) Parâmetros geométricos dos lintéis:

a.1) Área da seção transversal

$$A_L = 0,25 \times 0,30 = 7,5 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

a.2) Momento de inércia

$$J_L = \frac{0,25 \times 0,3^3}{12} = 5,625 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

a.3) Parâmetro  $K_L$

De acordo com a equação (2.48-a)  $A_i$ , área interna ao esqueleto, vale:

$$A_i = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{25+25}{2} = 25,00 \text{ m}^2$$

Substituindo-se os valores de  $A_L$ ,  $J_L$  e  $A_i$  na equação (2.48-b), resulta:

$$K_L = \frac{4 \times 25,00^2}{3,0 \times \left[ \frac{3,0^3}{12 \times 2,0 \times 10^6 \times 5,625 \times 10^{-4}} + \frac{3,0}{8,0 \times 10^5 \times 7,5 \times 10^{-2}} \right]} =$$
$$= 406,504 \times 10^3 \text{ tfm}^2$$

Da equação (2.52-c), tem-se:

$$[K_L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 406,504 \end{bmatrix} \times 10^3$$

O sistema de equações (2.51) é escrito, então, como:

$$\begin{bmatrix} 40,56 & 0 & 0 \\ 0 & 30,64 & 0 \\ 0 & 0 & 201,34 \end{bmatrix} \times 10^6 \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} + \left\{ p(90-Z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4,71 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4,71 & 0 & 30,55 \end{bmatrix} \right\} +$$

$$- \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70,8 \end{bmatrix} \times 10^3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 406,504 \end{bmatrix} \times 10^3 \right) \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} =$$

$$= - (90-Z) \begin{Bmatrix} q_X \\ q_Y \\ -m \end{Bmatrix}$$

b) Resultados

De acordo com Carvalho [3], quando analisou o problema de 1ª espécie, para os núcleos com um plano de simetria e carga axial no centro de gravidade, existem duas possibilidades de flambagem:

- 1) por flexão na direção do plano de simetria, que corresponde no caso a:

$$p_{crit} = 329,40 \text{tf/m}$$

- 2) por flexão e torção, que corresponde, devido à contribuição favorável do lintel à estrutura, a:

$$p_{crit} = 247,81 \text{tf/m}$$

O menor dos dois valores, ou seja, a carga referente à flambagem por flexo-torção, é tomado como carga crítica da estrutura.

A solução do sistema de equações, indicado acima, foi obtida pelos métodos: diferenças finitas e Stodola-Vianello, em sua variante.

#### b.1) Caso A de carga lateral

Observa-se que, para este caso, o vetor de carga lateral só tem componente na direção OY, aplicada no centro de torção, indicando a ocorrência de flexão somente no plano YZ. Processaram-se, então, os programas Fortran com a carga vertical assumindo valores a partir de zero até as proximidades da carga crítica de flambagem por flexão, ou seja,  $p_{crit} = 329,40 \text{tf/m}$ . Os resultados correspondentes para os deslocamentos horizontais v, no topo da estrutura, são apresentados na tabela (2.4). Os deslocamentos horizontais u e a rotação  $\theta$ , neste caso, são nulos.

##### b.1.1) Tabela de resultados

Tabela 2.4

Núcleo com contraventamento - Caso A de carga lateral ( $q_x = 0,0$ ; $q_y = 0,96\text{tf/m}$ ; $m = 0,0$ )									
Deslocamentos: u e v (m) e rotação $\theta$ (rad) no topo									
p(tf/m)	Stodola-Vianello						Diferenças Finitas		
	$\bar{u}$	u	$\bar{v}$	v	$\bar{\theta}$	$\theta$	u	v	$\theta$
0	-	-	0,257	0,257	-	-	-	0,257	-
5	-	-	0,261	0,261	-	-	-	0,261	-
10	-	-	0,265	0,265	-	-	-	0,265	-
15	-	-	0,269	0,269	-	-	-	0,269	-
20	-	-	0,274	0,274	-	-	-	0,274	-
25	-	-	0,278	0,278	-	-	-	0,278	-
30	-	-	0,283	0,283	-	-	-	0,283	-
35	-	-	0,288	0,288	-	-	-	0,288	-
40	-	-	0,293	0,293	-	-	-	0,293	-
45	-	-	0,298	0,298	-	-	-	0,298	-
50	-	-	0,303	0,303	-	-	-	0,303	-
55	-	-	0,309	0,309	-	-	-	0,309	-
60	-	-	0,315	0,315	-	-	-	0,315	-
65	-	-	0,321	0,321	-	-	-	0,321	-
70	-	-	0,327	0,327	-	-	-	0,327	-
75	-	-	0,333	0,333	-	-	-	0,333	-
80	-	-	0,340	0,340	-	-	-	0,340	-
85	-	-	0,347	0,347	-	-	-	0,347	-
90	-	-	0,354	0,354	-	-	-	0,355	-
95	-	-	0,362	0,362	-	-	-	0,362	-
100	-	-	0,370	0,370	-	-	-	0,370	-
105	-	-	0,378	0,378	-	-	-	0,378	-
110	-	-	0,387	0,387	-	-	-	0,387	-
120	-	-	0,405	0,405	-	-	-	0,406	-
130	-	-	0,426	0,426	-	-	-	0,426	-
140	-	-	0,448	0,448	-	-	-	0,449	-
150	-	-	0,474	0,474	-	-	-	0,474	-

(continua)



Tabela 2.4 (continuação)

Núcleo com contraventamento - Caso A de carga lateral ( $q_x = 0,0$ ; $q_y = 0,96\text{tf/m}$ ; $m = 0,0$ )									
Deslocamentos: u e v (m) e rotação $\theta$ (rad) no topo									
p(tf/m)	Stodola-Vianello						Diferenças Finitas		
	$\bar{u}$	u	$\bar{v}$	v	$\bar{\theta}$	$\theta$	u	v	$\theta$
160	-	-	0,502	0,502	-	-	-	0,503	-
170	-	-	0,533	0,533	-	-	-	0,535	-
180	-	-	0,569	0,569	-	-	-	0,571	-
190	-	-	0,610	0,610	-	-	-	0,612	-
200	-	-	0,657	0,657	-	-	-	0,660	-
210	-	-	0,713	0,713	-	-	-	0,716	-
220	-	-	0,778	0,778	-	-	-	0,782	-
230	-	-	0,857	0,857	-	-	-	0,861	-
240	-	-	0,953	0,953	-	-	-	0,959	-
247,81	-	-	1,044	1,044	-	-	-	1,052	-
250	-	-	1,073	1,073	-	-	-	1,081	-
260	-	-	1,228	1,228	-	-	-	1,239	-
270	-	-	1,435	1,435	-	-	-	1,451	-
280	-	-	1,726	1,726	-	-	-	1,750	-
290	-	-	2,165	2,165	-	-	-	2,204	-
300	-	-	2,902	2,902	-	-	-	2,975	-
310	-	-	4,400	4,400	-	-	-	4,575	-
320	-	-	9,081	9,081	-	-	-	9,889	-
329,4	-	-	1527,25	1527,16	-	-	-	-108,537	-

Comparando-se as tabelas (2.1) e (2.4), observa-se que os valores dos deslocamentos horizontais, indicados nestas tabelas, são iguais para cada valor da carga vertical p considerado. Isto comprova que os lintéis não contribuem para a rigidez à flexão deste núcleo, sendo iguais as equações de equilíbrio à força cortante na direção OY, para os núcleos com e sem contraventamento.

b.2) Caso B de carga lateral

b.2.1) Tabelas de resultados

Na tabela (2.5) apresentam-se os resultados obtidos, dos deslocamentos horizontais  $u$  e da rotação  $\theta$  no topo da estrutura, para cada valor da carga  $p$  assumido. Os deslocamentos horizontais  $v$ , da mesma maneira que na análise feita para o núcleo sem contraventamento, são nulos para este caso de carga lateral. Observa-se que a presença dos lin-téis na estrutura produz um acréscimo na carga crítica, referente a flambagem por flexo-torção, em relação ao valor obtido para o núcleo sem contraventamento.

Tabela 2.5

Núcleo com contraventamento - Caso B de carga lateral ( $q_x = 0,96\text{tf/m}$ ; $q_y = 0,0$ ; $m = 4,944\text{tfm/m}$ )									
Deslocamentos: $u$ e $v$ (m) e rotação $\theta$ (rad) no topo									
p	Stodola-Vianello						Diferenças Finitas		
	$\bar{u}$	$u$	$\bar{v}$	$v$	$\bar{\theta}$	$\theta$	$u$	$v$	$\theta$
(tf/m)	(m)	(m)	-	-	( $\times 10^{-1}$ rad)	( $\times 10^{-1}$ rad)	(m)	-	( $\times 10^{-1}$ rad)
0	0,194	0,194	-	-	-0,271	-0,271	0,194	-	-0,270
5	0,198	0,198	-	-	-0,276	-0,276	0,198	-	-0,276
10	0,202	0,202	-	-	-0,282	-0,282	0,202	-	-0,282
15	0,206	0,206	-	-	-0,288	-0,288	0,206	-	-0,288
20	0,211	0,211	-	-	-0,295	-0,295	0,211	-	-0,295
25	0,216	0,216	-	-	-0,302	-0,302	0,216	-	-0,302
30	0,221	0,221	-	-	-0,309	-0,309	0,221	-	-0,308
35	0,226	0,226	-	-	-0,316	-0,316	0,226	-	-0,316
40	0,231	0,231	-	-	-0,324	-0,324	0,231	-	-0,324
45	0,237	0,237	-	-	-0,332	-0,332	0,237	-	-0,332
50	0,243	0,243	-	-	-0,340	-0,340	0,243	-	-0,340
55	0,249	0,249	-	-	-0,349	-0,349	0,249	-	-0,349
60	0,256	0,256	-	-	-0,359	-0,359	0,256	-	-0,349
65	0,262	0,262	-	-	-0,369	-0,369	0,263	-	-0,369
70	0,270	0,270	-	-	-0,379	-0,379	0,270	-	-0,379
75	0,278	0,278	-	-	-0,390	-0,390	0,278	-	-0,390
80	0,286	0,286	-	-	-0,402	-0,402	0,286	-	-0,402
85	0,295	0,295	-	-	-0,415	-0,415	0,295	-	-0,415
90	0,304	0,304	-	-	-0,428	-0,428	0,304	-	-0,428
95	0,314	0,314	-	-	-0,442	-0,442	0,314	-	-0,442
100	0,324	0,324	-	-	-0,457	-0,457	0,325	-	-0,458
105	0,336	0,336	-	-	-0,474	-0,474	0,336	-	-0,474
110	0,348	0,348	-	-	-0,491	-0,491	0,348	-	-0,491
120	0,375	0,375	-	-	-0,530	-0,530	0,375	-	-0,530
130	0,407	0,407	-	-	-0,575	-0,575	0,407	-	-0,575
140	0,444	0,444	-	-	-0,629	-0,629	0,445	-	-0,630
150	0,490	0,490	-	-	-0,694	-0,694	0,491	-	-0,695
160	0,546	0,546	-	-	-0,774	-0,774	0,547	-	-0,775
170	0,616	0,616	-	-	-0,874	-0,874	0,618	-	-0,877
180	0,707	0,707	-	-	-1,000	-1,000	0,710	-	-1,010
190	0,829	0,829	-	-	-1,180	-1,180	0,834	-	-1,180
200	1,003	1,003	-	-	-1,430	-1,430	1,010	-	-1,430
210	1,269	1,269	-	-	-1,800	-1,800	1,281	-	-1,820
220	1,726	1,726	-	-	-2,460	-2,460	1,750	-	-2,490
230	2,696	2,696	-	-	-3,840	-3,840	2,761	-	-3,930
240	6,156	6,156	-	-	-8,770	-8,770	6,527	-	-9,290
247,81	-4802,025	-4801,994	-	-	6838,620	6838,420	-101,844	-	144,960

Quando analisou-se o núcleo sem contraventamento, considerando-se o caso B de carga lateral (com componentes em relação aos eixos globais de valores  $q_x = 0,96\text{tf/m}$ ;  $q_y = 0,0$ ;  $m = 4,944\text{tfm/m}$ ), foram obtidos os resultados indicados na tabela (2.2). Comparando-se estes valores com aqueles apresentados na tabela (2.5), obtidos para o núcleo com contraventamento, observa-se uma alteração nos deslocamentos  $u$  em relação a tabela (2.2). Sabe-se que os lintéis não alteram a rigidez à flexão da estrutura, e sim a rigidez à torção, pela introdução de momentos de flexo-torção no núcleo. Isto justifica a diferença entre os valores das rotações entre os núcleos sem e com contraventamento.

A diferença entre os deslocamentos horizontais  $u$  das tabelas (2.2) e (2.5) ocorre devido ao efeito de segunda ordem. De acordo com a equação (2.24), a força cortante externa, proveniente da carga vertical, na direção X é também função da rotação  $\theta$ , que tem seu valor modificado pela introdução dos lintéis.

Para tornar clara a contribuição do efeito de segunda ordem, apresenta-se na tabela (2.6) os valores dos deslocamentos  $u$  e da rotação  $\theta$  ao longo da altura do núcleo para os casos de carga vertical  $p = 0$  e  $p = 15\text{tf/m}$ . Chama-se a atenção para a igualdade dos deslocamentos  $u$  do núcleo sem e com contraventamento quando  $p = 0$ , isto é, quando atua na estrutura só a carga lateral  $q$ .

Tabela 2.6

Deslocamento u (m) e rotação θ (rad) no topo - Caso B de Carga lateral ( $q_x = 0,96\text{tf/m}$ ; $q_y = 0,0$ ; $m = 4,944\text{tfm/m}$ ) - resultados obtidos através do método S.Vianello								
Cota	Núcleo sem contraventamento				Núcleo com contraventamento			
	P = 0,0		P = 15,0tf/m		P = 0,0		P = 15,0tf/m	
Z(m)	u	θ	u	θ	u	θ	u	θ
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3,0	$0,422 \times 10^{-3}$	$-0,284 \times 10^{-3}$	$0,469 \times 10^{-3}$	$-0,316 \times 10^{-3}$	$0,422 \times 10^{-3}$	$-0,149 \times 10^{-3}$	$0,445 \times 10^{-3}$	$-0,156 \times 10^{-3}$
6,0	$0,165 \times 10^{-2}$	$-0,110 \times 10^{-2}$	$0,184 \times 10^{-2}$	$-0,123 \times 10^{-2}$	$0,165 \times 10^{-2}$	$-0,561 \times 10^{-3}$	$0,174 \times 10^{-2}$	$-0,586 \times 10^{-3}$
9,0	$0,363 \times 10^{-2}$	$-0,238 \times 10^{-2}$	$0,405 \times 10^{-2}$	$-0,268 \times 10^{-2}$	$0,363 \times 10^{-2}$	$-0,119 \times 10^{-2}$	$0,383 \times 10^{-2}$	$-0,124 \times 10^{-2}$
12,0	$0,631 \times 10^{-2}$	$-0,410 \times 10^{-2}$	$0,705 \times 10^{-2}$	$-0,461 \times 10^{-2}$	$0,631 \times 10^{-2}$	$-0,198 \times 10^{-2}$	$0,667 \times 10^{-2}$	$-0,208 \times 10^{-2}$
15,0	$0,964 \times 10^{-2}$	$-0,619 \times 10^{-2}$	$0,108 \times 10^{-1}$	$-0,698 \times 10^{-2}$	$0,964 \times 10^{-2}$	$-0,292 \times 10^{-2}$	$0,102 \times 10^{-1}$	$-0,307 \times 10^{-2}$
18,0	$0,136 \times 10^{-1}$	$-0,861 \times 10^{-2}$	$0,152 \times 10^{-1}$	$-0,974 \times 10^{-2}$	$0,136 \times 10^{-1}$	$-0,397 \times 10^{-2}$	$0,143 \times 10^{-1}$	$-0,418 \times 10^{-2}$
21,0	$0,180 \times 10^{-1}$	$-0,113 \times 10^{-1}$	$0,203 \times 10^{-1}$	$-0,128 \times 10^{-1}$	$0,180 \times 10^{-1}$	$-0,509 \times 10^{-2}$	$0,191 \times 10^{-1}$	$-0,537 \times 10^{-2}$
24,0	$0,230 \times 10^{-1}$	$-0,143 \times 10^{-1}$	$0,259 \times 10^{-1}$	$-0,162 \times 10^{-1}$	$0,230 \times 10^{-1}$	$-0,627 \times 10^{-2}$	$0,244 \times 10^{-1}$	$-0,662 \times 10^{-2}$
27,0	$0,285 \times 10^{-1}$	$-0,175 \times 10^{-1}$	$0,321 \times 10^{-1}$	$-0,199 \times 10^{-1}$	$0,285 \times 10^{-1}$	$-0,749 \times 10^{-2}$	$0,302 \times 10^{-1}$	$-0,792 \times 10^{-2}$
30,0	$0,344 \times 10^{-1}$	$-0,209 \times 10^{-1}$	$0,387 \times 10^{-1}$	$-0,238 \times 10^{-1}$	$0,344 \times 10^{-1}$	$-0,873 \times 10^{-2}$	$0,364 \times 10^{-1}$	$-0,924 \times 10^{-2}$
33,0	$0,406 \times 10^{-1}$	$-0,244 \times 10^{-1}$	$0,458 \times 10^{-1}$	$-0,278 \times 10^{-1}$	$0,406 \times 10^{-1}$	$-0,998 \times 10^{-2}$	$0,431 \times 10^{-1}$	$-0,106 \times 10^{-1}$
36,0	$0,472 \times 10^{-1}$	$-0,280 \times 10^{-1}$	$0,533 \times 10^{-1}$	$-0,321 \times 10^{-1}$	$0,472 \times 10^{-1}$	$-0,112 \times 10^{-1}$	$0,501 \times 10^{-1}$	$-0,119 \times 10^{-1}$
39,0	$0,541 \times 10^{-1}$	$-0,318 \times 10^{-1}$	$0,611 \times 10^{-1}$	$-0,364 \times 10^{-1}$	$0,541 \times 10^{-1}$	$-0,124 \times 10^{-1}$	$0,574 \times 10^{-1}$	$-0,132 \times 10^{-1}$
42,0	$0,613 \times 10^{-1}$	$-0,356 \times 10^{-1}$	$0,693 \times 10^{-1}$	$-0,408 \times 10^{-1}$	$0,613 \times 10^{-1}$	$-0,136 \times 10^{-1}$	$0,651 \times 10^{-1}$	$-0,145 \times 10^{-1}$
45,0	$0,687 \times 10^{-1}$	$-0,395 \times 10^{-1}$	$0,778 \times 10^{-1}$	$-0,454 \times 10^{-1}$	$0,687 \times 10^{-1}$	$-0,148 \times 10^{-1}$	$0,730 \times 10^{-1}$	$-0,157 \times 10^{-1}$
48,0	$0,764 \times 10^{-1}$	$-0,435 \times 10^{-1}$	$0,865 \times 10^{-1}$	$-0,499 \times 10^{-1}$	$0,764 \times 10^{-1}$	$-0,159 \times 10^{-1}$	$0,812 \times 10^{-1}$	$-0,169 \times 10^{-1}$
51,0	$0,842 \times 10^{-1}$	$-0,474 \times 10^{-1}$	$0,954 \times 10^{-1}$	$-0,546 \times 10^{-1}$	$0,842 \times 10^{-1}$	$-0,170 \times 10^{-1}$	$0,895 \times 10^{-1}$	$-0,181 \times 10^{-1}$
54,0	$0,922 \times 10^{-1}$	$-0,514 \times 10^{-1}$	0,104	$-0,592 \times 10^{-1}$	$0,922 \times 10^{-1}$	$-0,181 \times 10^{-1}$	$0,980 \times 10^{-1}$	$-0,192 \times 10^{-1}$
57,0	0,100	$-0,554 \times 10^{-1}$	0,114	$-0,638 \times 10^{-1}$	0,100	$-0,190 \times 10^{-1}$	0,107	$-0,203 \times 10^{-1}$
60,0	0,109	$-0,594 \times 10^{-1}$	0,123	$-0,684 \times 10^{-1}$	0,109	$-0,200 \times 10^{-1}$	0,115	$-0,213 \times 10^{-1}$
63,0	0,117	$-0,633 \times 10^{-1}$	0,133	$-0,730 \times 10^{-1}$	0,117	$-0,209 \times 10^{-1}$	0,124	$-0,223 \times 10^{-1}$
66,0	0,125	$-0,672 \times 10^{-1}$	0,142	$-0,776 \times 10^{-1}$	0,125	$-0,218 \times 10^{-1}$	0,133	$-0,232 \times 10^{-1}$
69,0	0,134	$-0,711 \times 10^{-1}$	0,152	$-0,821 \times 10^{-1}$	0,134	$-0,226 \times 10^{-1}$	0,142	$-0,240 \times 10^{-1}$
72,0	0,142	$-0,749 \times 10^{-1}$	0,162	$-0,866 \times 10^{-1}$	0,142	$-0,233 \times 10^{-1}$	0,151	$-0,248 \times 10^{-1}$
75,0	0,151	$-0,787 \times 10^{-1}$	0,172	$-0,910 \times 10^{-1}$	0,151	$-0,240 \times 10^{-1}$	0,161	$-0,256 \times 10^{-1}$
78,0	0,160	$-0,825 \times 10^{-1}$	0,181	$-0,954 \times 10^{-1}$	0,160	$-0,247 \times 10^{-1}$	0,170	$-0,263 \times 10^{-1}$
81,0	0,168	$-0,863 \times 10^{-1}$	0,191	$-0,998 \times 10^{-1}$	0,168	$-0,253 \times 10^{-1}$	0,179	$-0,270 \times 10^{-1}$
84,0	0,177	$0,900 \times 10^{-1}$	0,201	-0,104	0,177	$-0,259 \times 10^{-1}$	0,188	$-0,276 \times 10^{-1}$
87,0	0,185	$-0,937 \times 10^{-1}$	0,211	-0,108	0,185	$-0,265 \times 10^{-1}$	0,197	$-0,282 \times 10^{-1}$
90,0	0,194	$-0,974 \times 10^{-1}$	0,221	-0,113	0,194	$-0,271 \times 10^{-1}$	0,206	$-0,288 \times 10^{-1}$

b.2.2) Gráficos

Nas figuras (2.34) e (2.35) representam-se as curvas  $p_x u(H)$  e  $p_x \theta(H)$ , respectivamente, onde consideram-se os valores da carga vertical p desde zero até a carga crítica de flambagem por flexo-torção, ou seja,  $p = 247,81\text{tf/m}$  e  $u(H)$  e  $\theta(H)$  indicam o deslocamento horizontal e a rotação, respectivamente, no topo do núcleo.

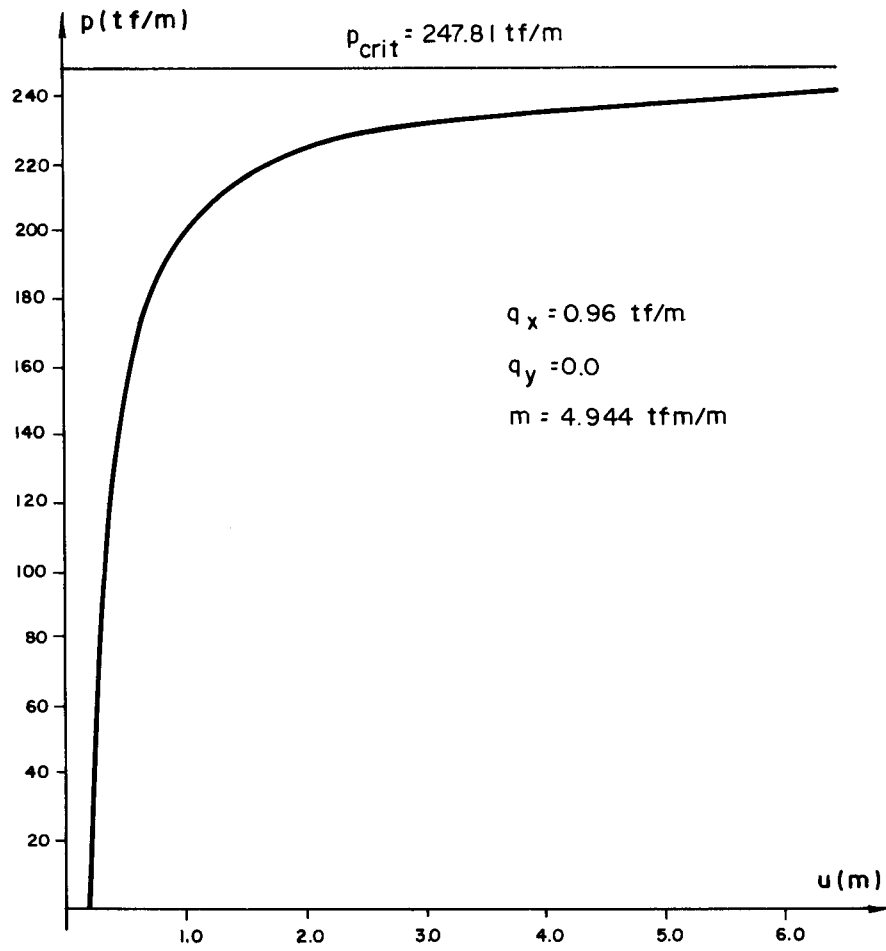


Figura 2.34 - Gráfico  $p_x u(H)$  para o Núcleo com contraventamento - Caso B de carga lateral

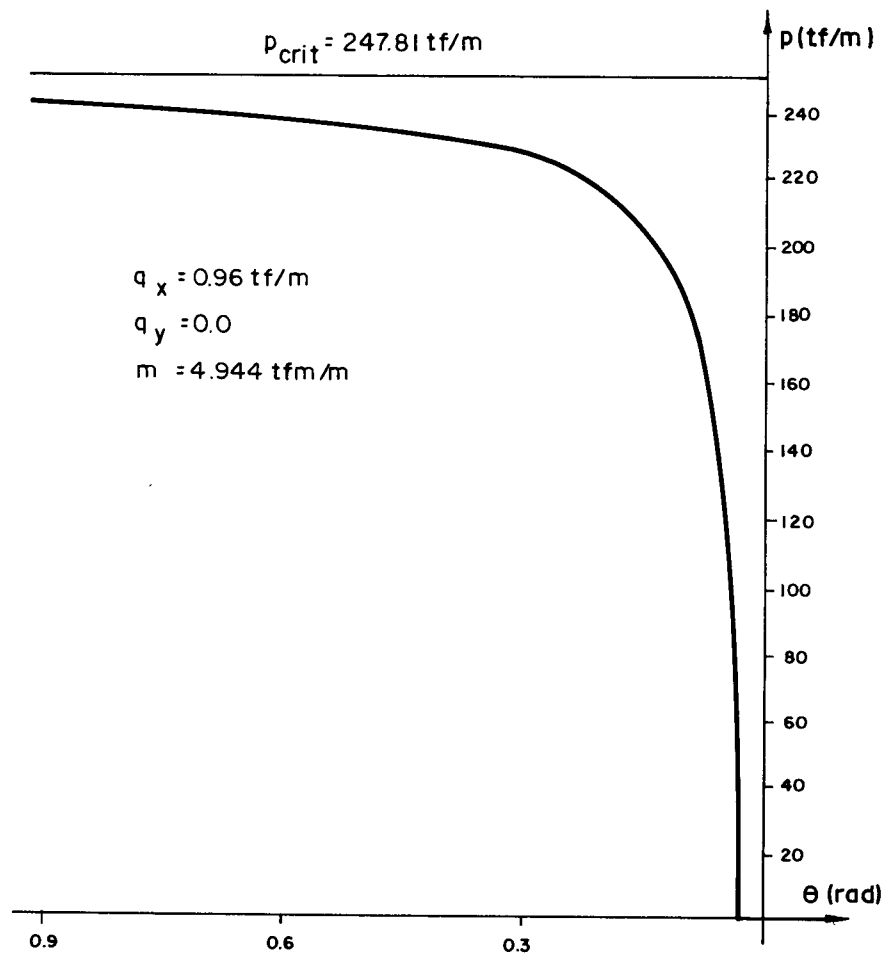


Figura 2.35 - Gráfico  $p \times \theta(H)$  para o Núcleo com contravento - Caso B de carga lateral.

b.3) Caso C de carga lateral

b.3.1) Tabelas de resultados

Na tabela (2.7) apresentam-se os deslocamentos horizontais  $u$  e  $v$  e o giro  $\theta$ , no topo do núcleo, obtidos através dos métodos diferenças finitas e Stodola-Vianello, em sua variante. Os programas em linguagem Fortran forneceram, para cada valor da carga vertical  $p$ , assumido a partir de zero até o valor da carga crítica de flexo-torção ( $p_{crit} = 247,81 \text{ tf/m}$ ), os seguintes valores.

Tabela 2.7

Núcleo com contraventamento - Caso C de carga lateral ( $q_x = 0,96 \text{tf/m}$ ; $q_y = 0,96 \text{tf/m}$ ; $m = 4,944 \text{tfm/m}$ )									
p(tf/m)	Deslocamentos: u e v (m) e rotação $\theta$ (rad) no topo								
	Stodola-Vianello					Diferenças Finitas			
	$\bar{u}$	u	$\bar{v}$	v	$\bar{\theta}$	$\theta$	u	v	$\theta$
0	0,194	0,194	0,257	0,257	-0,271x10 <sup>-1</sup>	-0,271x10 <sup>-1</sup>	0,194	0,257	-0,270x10 <sup>-1</sup>
5	0,198	0,198	0,261	0,261	-0,276x10 <sup>-1</sup>	-0,276x10 <sup>-1</sup>	0,198	0,261	-0,276x10 <sup>-1</sup>
10	0,202	0,202	0,265	0,265	-0,282x10 <sup>-1</sup>	-0,282x10 <sup>-1</sup>	0,202	0,265	-0,282x10 <sup>-1</sup>
15	0,206	0,206	0,269	0,269	-0,288x10 <sup>-1</sup>	-0,288x10 <sup>-1</sup>	0,206	0,269	-0,288x10 <sup>-1</sup>
20	0,211	0,211	0,274	0,274	-0,295x10 <sup>-1</sup>	-0,295x10 <sup>-1</sup>	0,211	0,274	-0,295x10 <sup>-1</sup>
25	0,216	0,216	0,278	0,278	-0,302x10 <sup>-1</sup>	-0,302x10 <sup>-1</sup>	0,216	0,278	-0,301x10 <sup>-1</sup>
30	0,221	0,221	0,283	0,283	-0,309x10 <sup>-1</sup>	-0,309x10 <sup>-1</sup>	0,221	0,283	-0,308x10 <sup>-1</sup>
35	0,226	0,226	0,288	0,288	-0,316x10 <sup>-1</sup>	-0,316x10 <sup>-1</sup>	0,226	0,288	-0,316x10 <sup>-1</sup>
40	0,231	0,231	0,293	0,293	-0,324x10 <sup>-1</sup>	-0,324x10 <sup>-1</sup>	0,231	0,293	-0,324x10 <sup>-1</sup>
45	0,237	0,237	0,298	0,298	-0,332x10 <sup>-1</sup>	-0,332x10 <sup>-1</sup>	0,237	0,298	-0,332x10 <sup>-1</sup>
50	0,243	0,243	0,303	0,303	-0,340x10 <sup>-1</sup>	-0,340x10 <sup>-1</sup>	0,243	0,303	-0,340x10 <sup>-1</sup>
55	0,249	0,249	0,309	0,309	-0,349x10 <sup>-1</sup>	-0,349x10 <sup>-1</sup>	0,249	0,309	-0,349x10 <sup>-1</sup>
60	0,255	0,255	0,315	0,315	-0,359x10 <sup>-1</sup>	-0,359x10 <sup>-1</sup>	0,256	0,315	-0,359x10 <sup>-1</sup>
65	0,262	0,262	0,321	0,321	-0,369x10 <sup>-1</sup>	-0,369x10 <sup>-1</sup>	0,263	0,321	-0,369x10 <sup>-1</sup>
70	0,270	0,270	0,327	0,327	-0,379x10 <sup>-1</sup>	-0,379x10 <sup>-1</sup>	0,270	0,327	-0,379x10 <sup>-1</sup>
75	0,278	0,278	0,333	0,333	-0,390x10 <sup>-1</sup>	-0,390x10 <sup>-1</sup>	0,278	0,333	-0,390x10 <sup>-1</sup>
80	0,286	0,286	0,340	0,340	-0,402x10 <sup>-1</sup>	-0,402x10 <sup>-1</sup>	0,286	0,340	-0,402x10 <sup>-1</sup>
85	0,295	0,295	0,347	0,347	-0,415x10 <sup>-1</sup>	-0,415x10 <sup>-1</sup>	0,295	0,347	-0,415x10 <sup>-1</sup>
90	0,304	0,304	0,354	0,354	-0,428x10 <sup>-1</sup>	-0,428x10 <sup>-1</sup>	0,304	0,355	-0,428x10 <sup>-1</sup>
95	0,314	0,314	0,362	0,362	-0,442x10 <sup>-1</sup>	-0,442x10 <sup>-1</sup>	0,314	0,362	-0,442x10 <sup>-1</sup>
100	0,324	0,324	0,370	0,370	-0,457x10 <sup>-1</sup>	-0,457x10 <sup>-1</sup>	0,325	0,370	-0,458x10 <sup>-1</sup>
105	0,336	0,336	0,378	0,378	-0,474x10 <sup>-1</sup>	-0,474x10 <sup>-1</sup>	0,336	0,378	-0,474x10 <sup>-1</sup>
110	0,348	0,348	0,387	0,387	-0,491x10 <sup>-1</sup>	-0,491x10 <sup>-1</sup>	0,348	0,387	-0,491x10 <sup>-1</sup>
120	0,375	0,375	0,405	0,405	-0,530x10 <sup>-1</sup>	-0,530x10 <sup>-1</sup>	0,375	0,406	-0,530x10 <sup>-1</sup>
130	0,407	0,407	0,426	0,426	-0,575x10 <sup>-1</sup>	-0,575x10 <sup>-1</sup>	0,407	0,426	-0,575x10 <sup>-1</sup>
140	0,444	0,444	0,448	0,448	-0,629x10 <sup>-1</sup>	-0,629x10 <sup>-1</sup>	0,445	0,449	-0,630x10 <sup>-1</sup>
150	0,490	0,490	0,474	0,474	-0,694x10 <sup>-1</sup>	-0,694x10 <sup>-1</sup>	0,491	0,474	-0,695x10 <sup>-1</sup>
160	0,546	0,546	0,502	0,502	-0,774x10 <sup>-1</sup>	-0,774x10 <sup>-1</sup>	0,547	0,503	-0,775x10 <sup>-1</sup>
170	0,616	0,616	0,533	0,533	-0,874x10 <sup>-1</sup>	-0,874x10 <sup>-1</sup>	0,618	0,535	-0,877x10 <sup>-1</sup>
180	0,707	0,707	0,569	0,569	-0,100	-0,100	0,710	0,571	-0,101x10 <sup>-1</sup>
190	0,829	0,829	0,610	0,610	-0,118	-0,118	0,834	0,612	-0,118
200	1,003	1,003	0,657	0,657	-0,143	-0,143	1,010	0,660	-0,143
210	1,269	1,269	0,713	0,713	-0,180	-0,180	1,281	0,716	-0,182
220	1,726	1,726	0,778	0,778	-0,246	-0,246	1,750	0,782	-0,249
230	2,696	2,696	0,857	0,857	-0,384	-0,384	2,761	0,861	-0,393
240	6,156	6,156	0,953	0,953	-0,877	-0,877	6,527	0,959	-0,929
247,81	-4802,025	-4801,994	1,044	1,044	683,862	683,842	-101,844	1,052	14,496

b.3.2) Gráficos

Na figura (2.36) representa-se o gráfico  $p \times v$  para os valores de  $p$  e  $v$  fornecidos pela tabela (2.7). Os gráficos  $p \times u(H)$  e  $p \times \theta(H)$ , para este caso de carga lateral, são idênticos aos gráficos do caso B de carga lateral, representados nas figuras (2.34) e (2.35), conforme pode-se constatar comparando-se os valores de  $u$  e  $\theta$  nas tabelas (2.5) e (2.7).

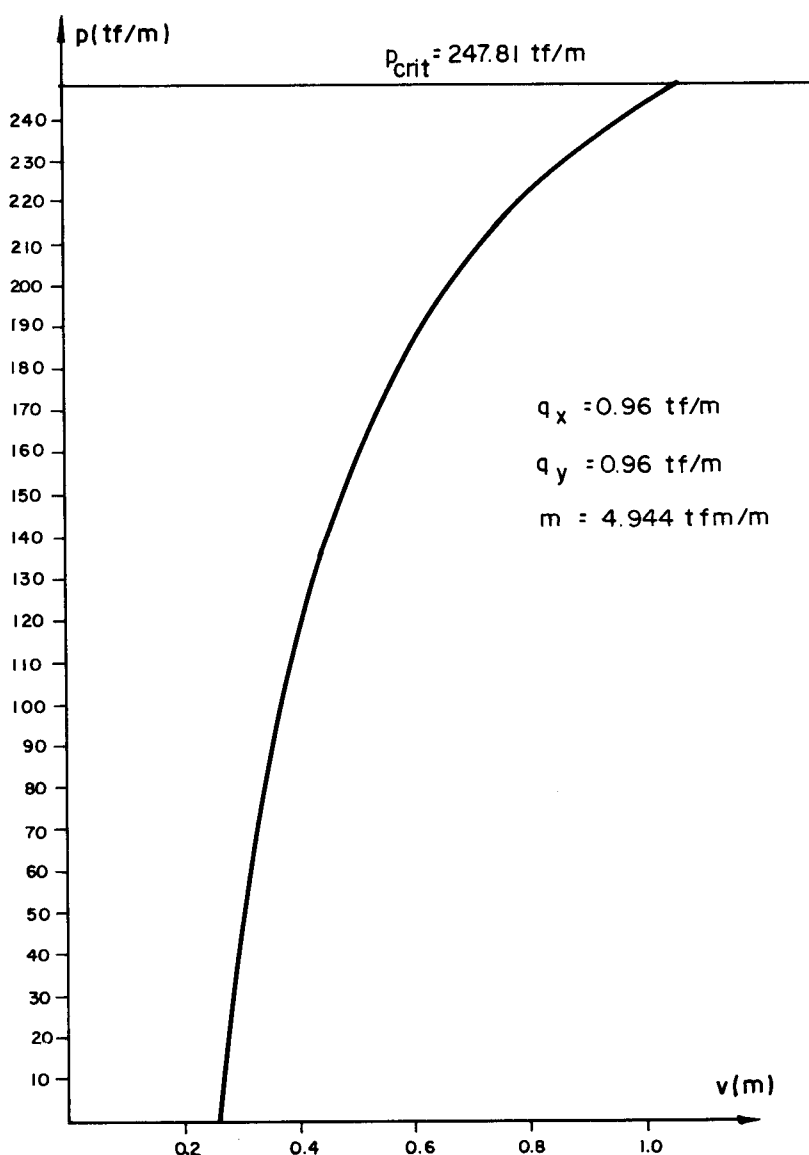


Figura 2.36 - Gráfico  $p \times v(H)$  para o Núcleo com contraventamento - Caso C de carga lateral.



### b.3.3 - Gráficos dos deslocamentos ao longo da altura

Nas figuras (2.37) e (2.38), representam-se em gráfico os deslocamentos  $\underline{u}$  e a rotação  $\underline{\theta}$ , respectivamente, ao longo da altura da estrutura, para os valores  $p = 0$  e  $p = 15\text{tf/m}$ . As curvas contínuas representam os deslocamentos do núcleo contraventado e as curvas tracejadas representam os deslocamentos do núcleo não contraventado.

Como foi observado anteriormente, os deslocamentos horizontais  $\underline{v}$  são iguais para o caso do núcleo com contraventamento e sem contraventamento. Desta maneira a curva destes deslocamentos para  $p = 0$  e  $p = 15\text{tf/m}$ , das duas estruturas, corresponde exatamente a curva da figura (2.24).

Na figura (2.37) a curva contínua para  $p = 0$  representa, de acordo com a tabela (2.6), os deslocamentos horizontais  $\underline{u}$  dos núcleos com e sem contraventamento, analisados.

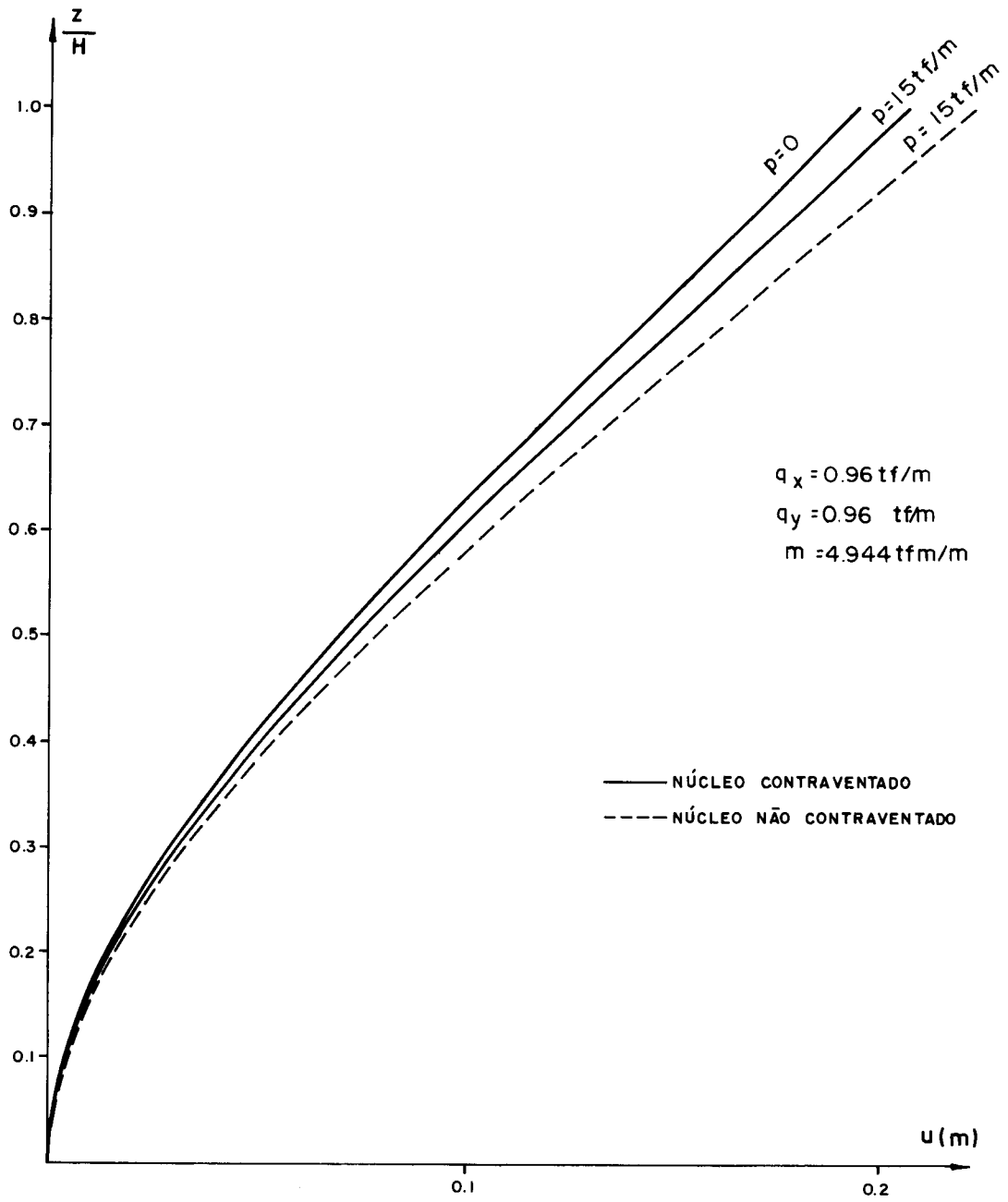


Figura 2.37 - Deslocamento horizontal  $u$  (m)

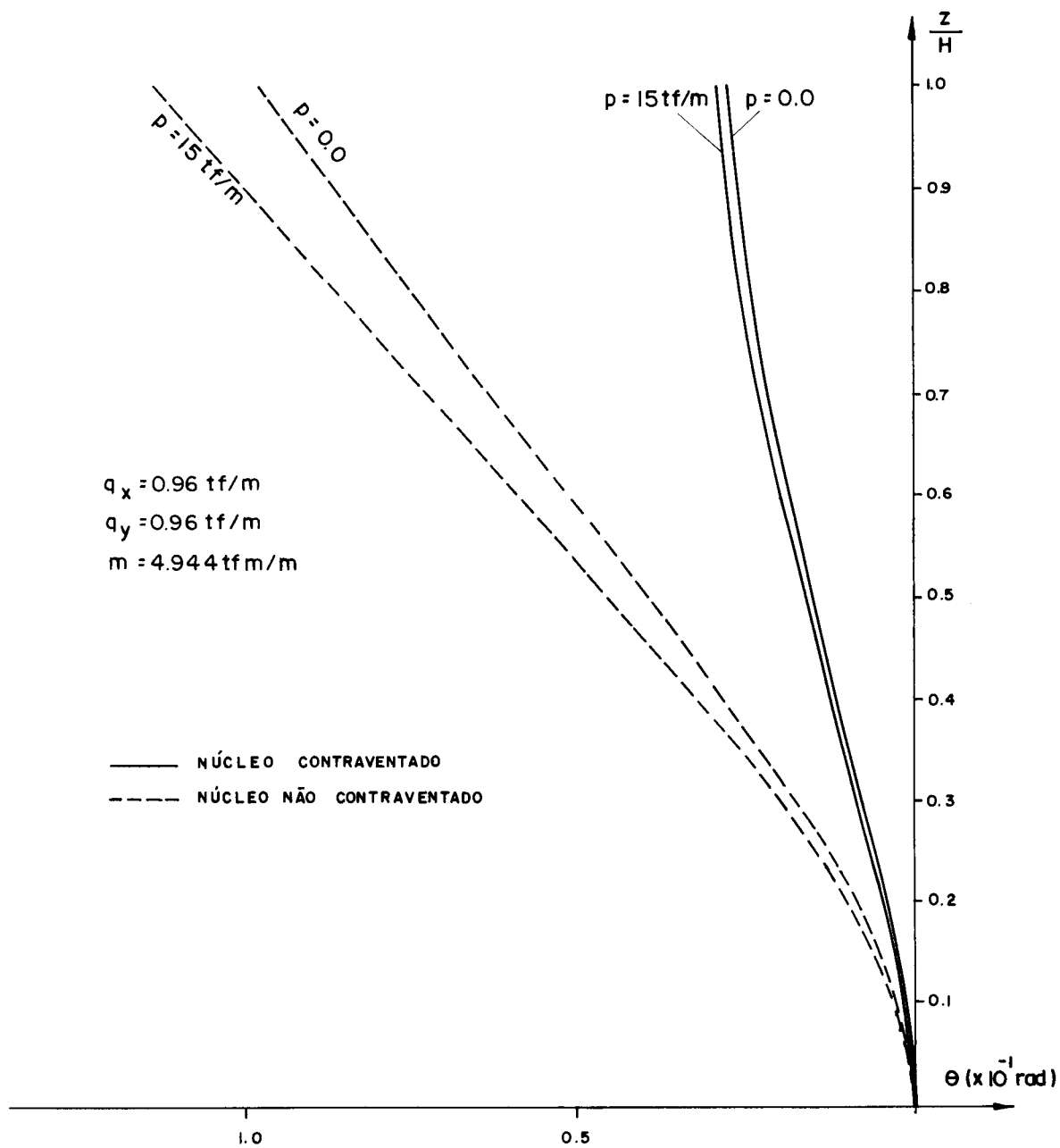


Figura 2.38 - Rotação  $\theta$  (rad)

2.9.2 - Exemplo 2

Na figura (2.39), representa-se em planta a estrutura de um edifício constituído de paredes e pórticos, com 10 andares de pé-direito  $h = 3,0m$ . Os números inscritos em círculos identificam os painéis e os inscritos em quadrados identificam os pilares dos pórticos.

As características elasto-geométricas dos elementos que compõem a estrutura, mantêm-se constante ao longo da altura e para o módulo de elasticidade admite-se o valor  $E = 2,0 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ .

As paredes 5 e 6 têm seção transversal de dimensões  $25 \times 200 \text{ cm}$  e a parede 7 tem seção  $25 \times 250 \text{ cm}$ . Os pilares dos pórticos têm seção transversal medindo  $40 \times 40 \text{ cm}$  e as vigas são iguais, com seções transversais de  $20 \times 50 \text{ cm}$ .

O carregamento constitui-se de carga horizontal e uniformemente distribuída  $q = 1,3 \text{ tf/m}$  e carga vertical total  $\alpha_p$ , aplicada a cada um dos painéis que compõem a estrutura de acordo com o item (2.4). Considera-se que os valores de  $\alpha_i$ , para os pilares dos pórticos e para as paredes, correspondem a:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 0,125 & \alpha_5 = 0,292 \\ \alpha_2 = 0,094 & \alpha_6 = 0,1875 \\ \alpha_3 = 0,042 & \alpha_7 = 0,1875 \\ \alpha_4 = 0,072 & \end{array}$$

De acordo com o programa elaborado por Carvalho [3], o valor da carga crítica de flambagem é  $p = 205,04 \text{ tf/m}$ . Pretende-se determinar os deslocamentos horizontais,  $u$  e  $v$ , e a rotação  $\theta$  no topo da estrutura para cada valor da carga vertical  $p$  assumido.

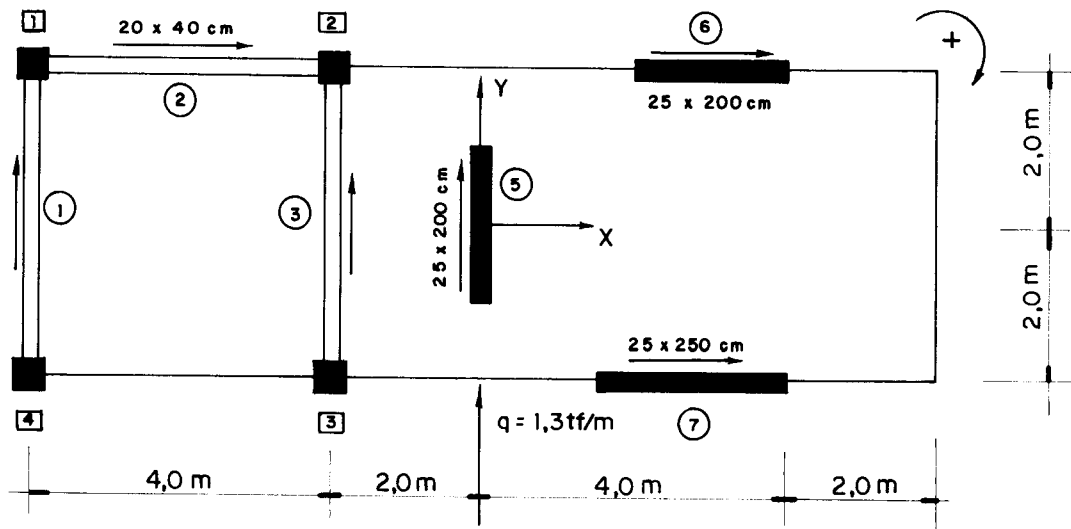


Figura 2.39 - Associação Tridimensional de Paredes e Pórticos.

a) Cálculo dos momentos de inércia das paredes

a.1) Paredes 5 e 6

$$J_5 = J_6 = \frac{0,25 \times 2,0^3}{12} = 0,167 \text{ m}^4$$

ou,

$$j_5 = j_6 = 3,34 \times 10^5 \text{ tfm}^2$$

a.2) Parede 7

$$J_7 = \frac{0,25 \times 2,5^3}{12} = 0,326 \text{ m}^4$$

ou,

$$j_7 = 6,52 \times 10^5 \text{ tfm}^2$$

b) Cálculo dos parâmetros de rigidez dos pórticos

b.1) Momentos de inércia dos pilares

$$J_p = \frac{0,40 \times 0,40^3}{12} = 2,134 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$K_p = \frac{J_p}{h} = \frac{2,134 \times 10^{-3}}{3,0} = 7,10 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

b.2) Momento de inércia das vigas

$$J_v = \frac{0,20 \times 0,5^3}{12} = 2,083 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$K_v = \frac{J_v}{l} = \frac{2,083 \times 10^{-3}}{4,0} = 5,20 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

De acordo com a equação (A.6) do apêndice A

$$s_f = \frac{12 \times 2,0 \times 10^6}{3,0} \left[ 7,10 \times 10^{-4} \frac{5,20 \times 10^{-4}}{2 \times 7,10 \times 10^{-4} + 5,20 \times 10^{-4}} \right] \times 2 = 3040 \text{ tf}$$

d) Características dos painéis

Obedecendo os sentidos positivos dos vetores unitários de cada painel, indicados pelas setas na figura (2.39), obtem-se, em relação ao sistema de eixos OXYZ, os seguintes dados da estrutura:

d.1) Características das paredes

Painel	$a_w$	$b_w$	$c_w$	$j_w$
5	0	1	0	$3,34 \times 10^5$
6	1	0	2,0	$3,34 \times 10^5$
7	1	0	-2,0	$6,52 \times 10^5$

d.2) Características dos pórticos

Painel	$a_f$	$b_f$	$c_f$	$s_f$
1	0	1	6,0	3040
2	1	0	2,0	3040
3	0	1	2,0	3040

d.3) Componentes do vetor unitário da carga lateral

$$a = 0,0 \quad b = 1,0 \quad c = 0,0$$

e) Cálculo das matrizes

Utilizando as equações (2.57) obtém-se para as matrizes de rigidez à flexão, matriz  $[J]$ , e de rigidez à força cortante, matriz  $[S]$ , os seguintes valores:

$$[J] = \begin{bmatrix} 986 & 0 & -636 \\ 0 & 334 & 0 \\ -636 & 0 & 3944 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 3040 & 0 & 6080 \\ 0 & 6080 & 24320 \\ 6080 & 24320 & 133760 \end{bmatrix}$$

d) Cálculo das matrizes de localização dos pilares em relação ao sistema de eixos OXYZ

Pela equação (2.76),

$$[L_{P_1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 40 \end{bmatrix} \quad [L_{P_2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$[L_{P_3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad [L_{P_4}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ -2 & 6 & 40 \end{bmatrix}$$

e de acordo com a equação (2.75), resulta:



$$[L_f] = 0,125[L_{P_1}] + 0,094[L_{P_2}] + 0,042[L_{P_3}] + 0,072[L_{P_4}]$$

ou,

$$[L_f] = \begin{bmatrix} 0,333 & 0 & 0,21 \\ 0 & 0,333 & 1,454 \\ 0,21 & 1,454 & 8,968 \end{bmatrix}$$

e) Cálculo das matrizes de localização das paredes em relação aos eixos OXYZ

Pela equação (2.66-a), obtem-se

$$[L_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,334 \end{bmatrix} \quad [L_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2,0 \\ 0 & 1 & -3,0 \\ 2,0 & -3,0 & 13,34 \end{bmatrix}$$

$$[L_7] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2,0 \\ 0 & 1 & -2,75 \\ -2,0 & -2,75 & 12,10 \end{bmatrix}$$

e de acordo com a equação (2.68), resulta:

$$[L_{T_w}] = 0,292[L_5] + 0,1875[L_6] + 0,1875[L_7]$$

ou,

$$[L_{T_w}] = \begin{bmatrix} 0,667 & 0 & 0 \\ 0 & 0,667 & -1,078 \\ 0 & -1,078 & 4,868 \end{bmatrix}$$

f) Montagem do sistema de equações diferenciais

Pela equação (2.79)

$$[L_{ST}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,21 \\ 0 & 1 & 0,376 \\ 0,21 & 0,376 & 13,836 \end{bmatrix}$$

e conforme a equação (2.84), o sistema de equações é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 986 & 0 & -636 \\ 0 & 334 & 0 \\ -636 & 0 & 3944 \end{bmatrix} \times 10^3 \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} + \left( p(30-Z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,21 \\ 0 & 1 & 0,376 \\ 0,21 & 0,376 & 13,836 \end{bmatrix} \right) +$$

$$- \begin{bmatrix} 3040 & 0 & 6080 \\ 0 & 6080 & 24320 \\ 6080 & 24320 & 133760 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} = - (30-Z) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1,3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

g) Tabela de resultados

Na tabela (2.8) apresentam-se os resultados, fornecidos pelos programas Fortran dos métodos: diferenças finitas e Stodola-Vianello, para os deslocamentos u, v e  $\theta$  no topo da estrutura.

Tabela 2.8

Associação Tridimensional de Paredes e Pórticos									
Componentes do vetor de carga lateral: (0,0; 1,3; 0,0)									
P	Deslocamentos: u e v (m) e rotação $\theta$ (rad) no topo								
	Stodola-Vianello						Diferenças Finitas		
	$\bar{u}$	u	$\bar{v}$	v	$\bar{\theta}$	$\theta$	u	v	$\theta$
(tf/m)	( $\times 10^{-1}$ m)	( $\times 10^{-1}$ m)	(m)	(m)	( $\times 10^{-1}$ rad)	( $\times 10^{-1}$ rad)	( $\times 10^{-1}$ m)	(m)	( $\times 10^{-1}$ rad)
0,0	0,155	0,155	0,135	0,135	- 0,224	- 0,224	0,155	0,135	- 0,223
10,0	0,166	0,166	0,142	0,142	- 0,237	- 0,237	0,166	0,141	- 0,237
20,0	0,178	0,178	0,149	0,149	- 0,251	- 0,251	0,179	0,149	- 0,252
30,0	0,191	0,191	0,157	0,157	- 0,268	- 0,268	0,193	0,157	- 0,266
40,0	0,207	0,207	0,166	0,166	- 0,286	- 0,286	0,209	0,166	- 0,287
50,0	0,224	0,224	0,177	0,177	- 0,307	- 0,307	0,227	0,177	- 0,306
60,0	0,244	0,244	0,188	0,188	- 0,330	- 0,330	0,247	0,188	- 0,332
70,0	0,268	0,268	0,201	0,201	- 0,358	- 0,358	0,272	0,202	- 0,361
80,0	0,295	0,295	0,217	0,217	- 0,389	- 0,389	0,300	0,218	- 0,393
90,0	0,327	0,327	0,235	0,235	- 0,427	- 0,427	0,334	0,237	- 0,432
100,0	0,366	0,366	0,256	0,256	- 0,471	- 0,471	0,375	0,259	- 0,478
110,0	0,413	0,413	0,282	0,282	- 0,525	- 0,525	0,425	0,287	- 0,535
120,0	0,472	0,472	0,314	0,314	- 0,592	- 0,592	0,488	0,321	- 0,606
130,0	0,547	0,547	0,355	0,355	- 0,676	- 0,676	0,570	0,364	- 0,697
140,0	0,646	0,646	0,408	0,408	- 0,787	- 0,787	0,678	0,422	- 0,817
150,0	0,782	0,782	0,481	0,481	- 0,938	- 0,938	0,830	0,502	- 0,985
160,0	0,980	0,980	0,585	0,585	- 1,157	- 1,157	1,057	0,621	- 1,234
170,0	1,291	1,291	0,749	0,749	- 1,501	- 1,501	1,430	0,816	- 1,642
180,0	1,855	1,855	1,044	1,044	- 2,121	- 2,121	2,155	1,192	- 2,433
190,0	3,173	3,173	1,733	1,733	- 3,567	- 3,567	4,163	2,232	- 4,618
200,0	9,776	9,776	5,172	5,172	-10,797	-10,797	35,710	18,536	-38,896
205,04	-1401,235	-1401,235	-729,368	-729,368	1533,533	1533,533	-13,412	-6,846	14,471

h) Gráficos

h.1) Gráficos p x deslocamentos no topo

Apresenta-se nas figuras (2.40) a (2.42) a variação dos deslocamentos e rotação, no topo da estrutura, com a carga vertical p, de acordo com os valores fornecidos na tabela (2.8).

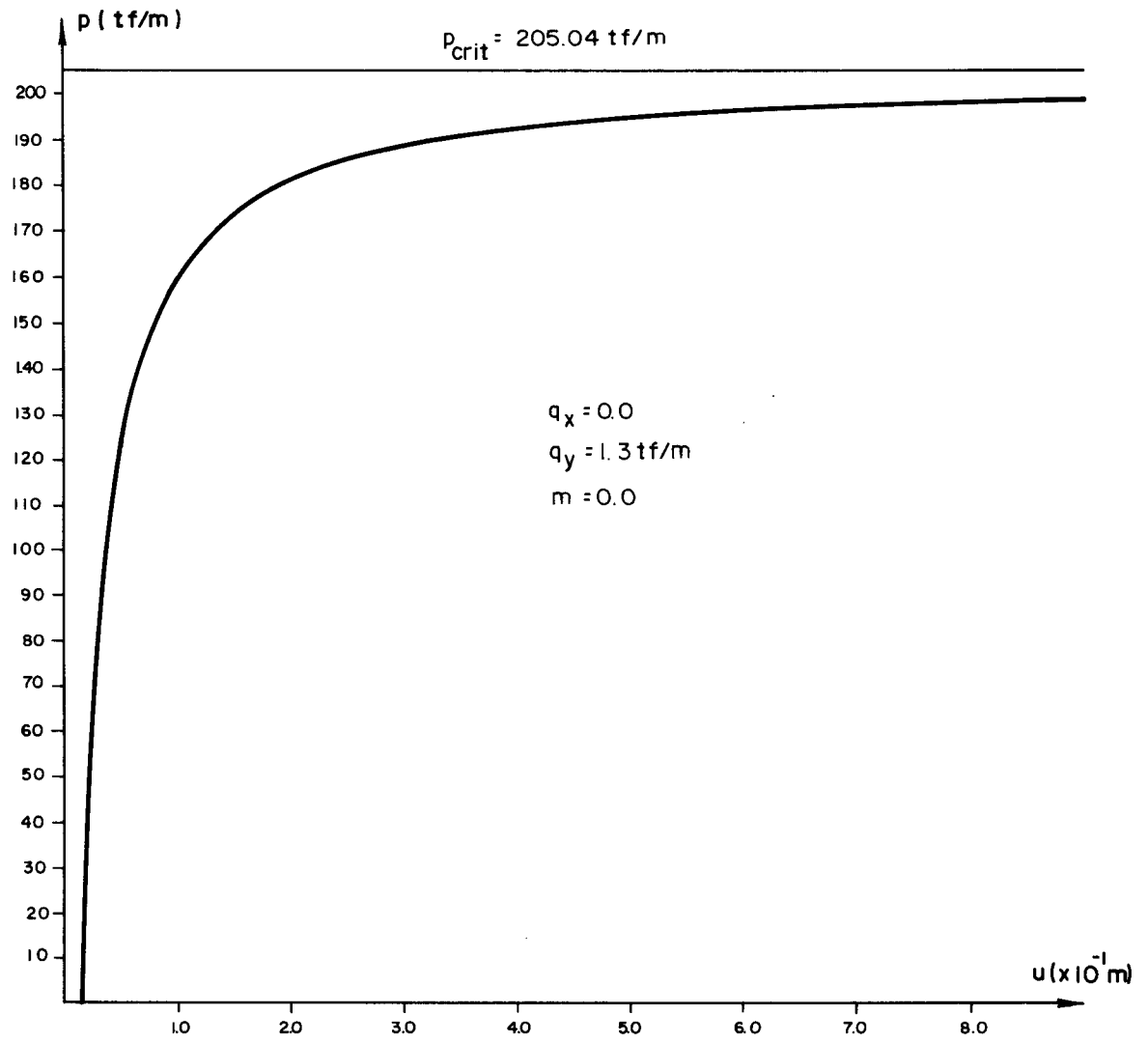


Figura 2.40 - Gráfico  $p \times u(H)$

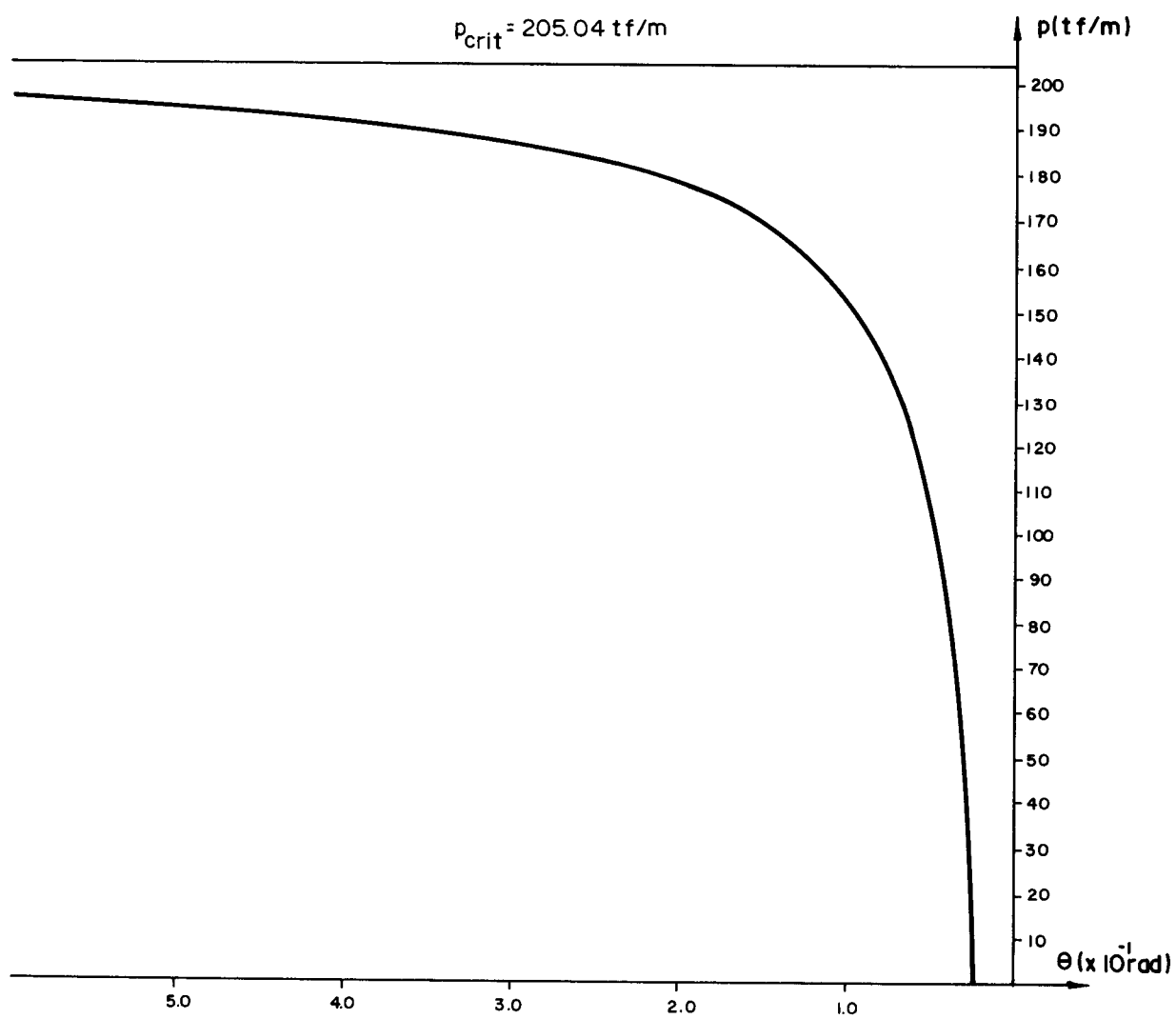


Figura 2.41 - Gráfico  $p$  x  $\theta(H)$

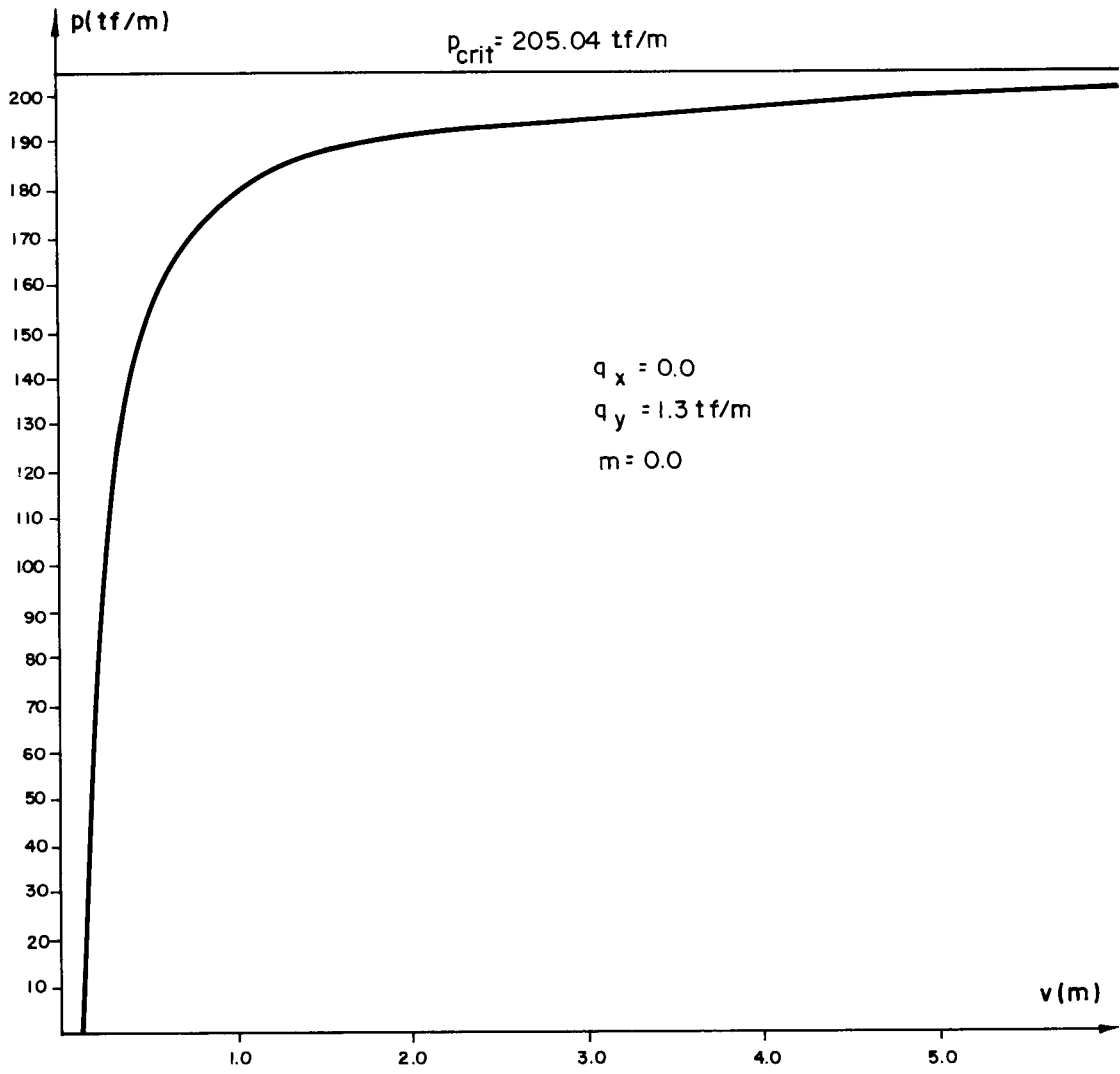


Figura 2.42 - Gráfico  $p \times v(H)$

h.2) Gráficos dos deslocamentos ao longo da altura da estrutura

Nas figuras (2.43) a (2.45), representa-se em gráfico os deslocamentos da estrutura ao longo da altura da estrutura, para os valores  $p = 0$  e  $p = 20\text{tf/m}$ .

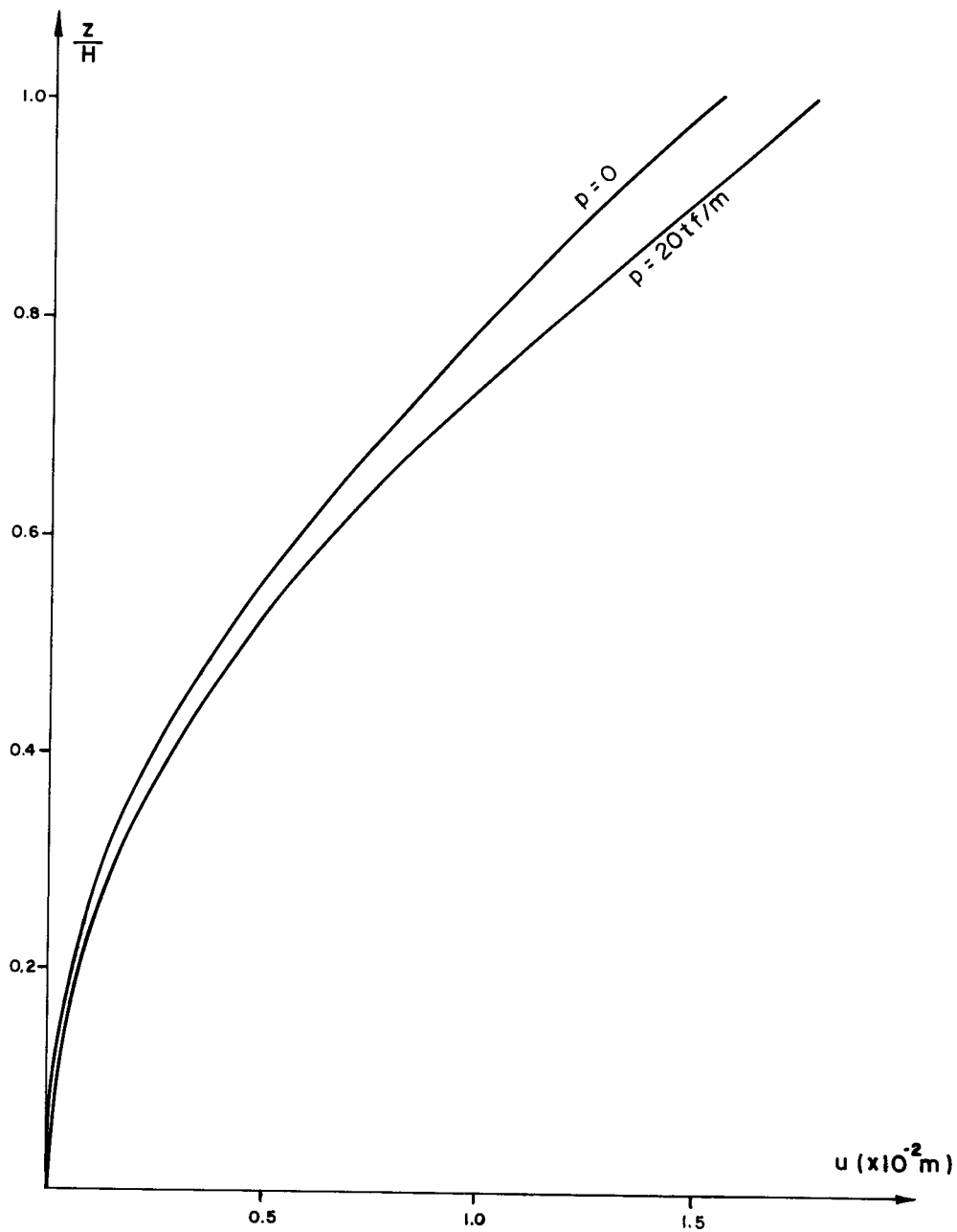


Figura 2.43 - Deslocamento horizontal  $u$ (m)

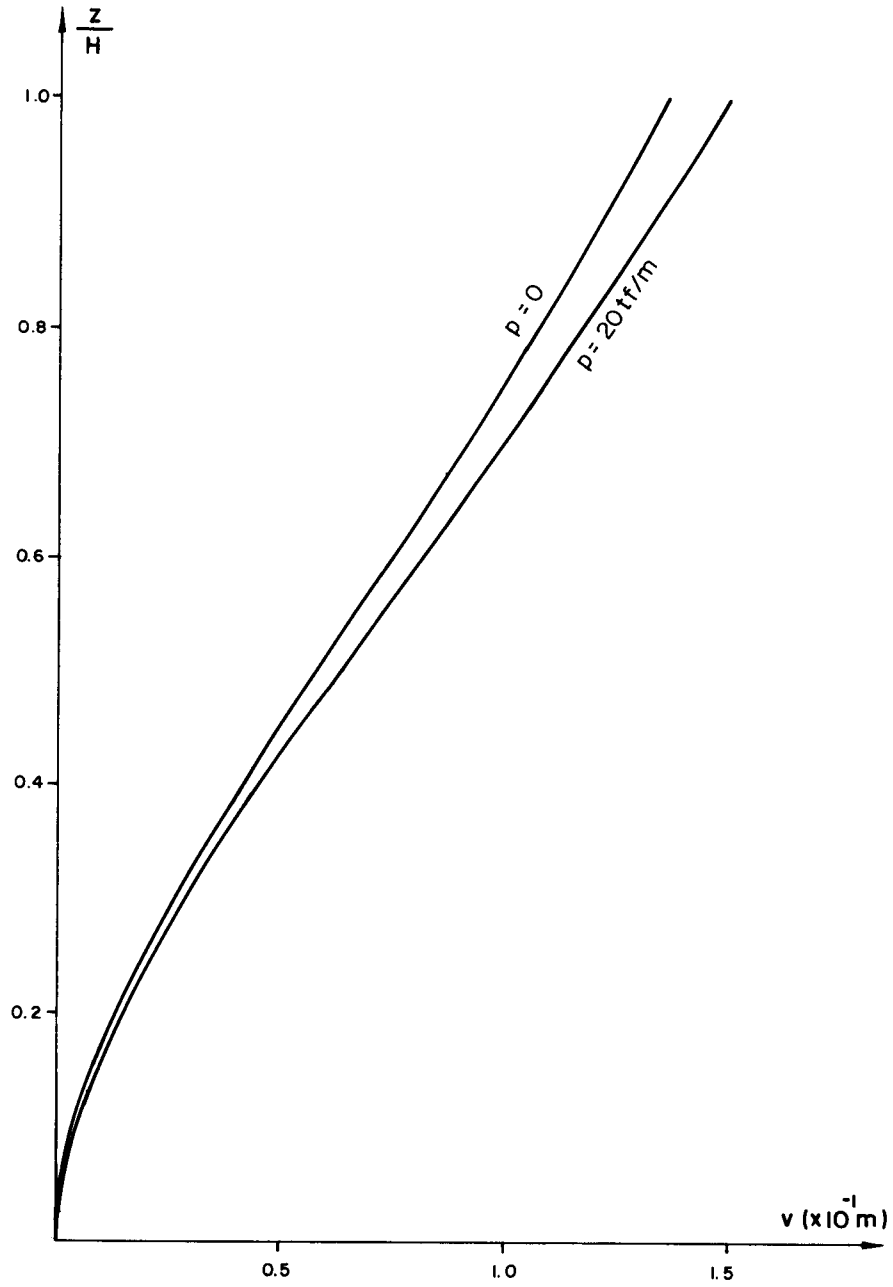


Figura 2.44 - Deslocamento horizontal  $v$  (m)



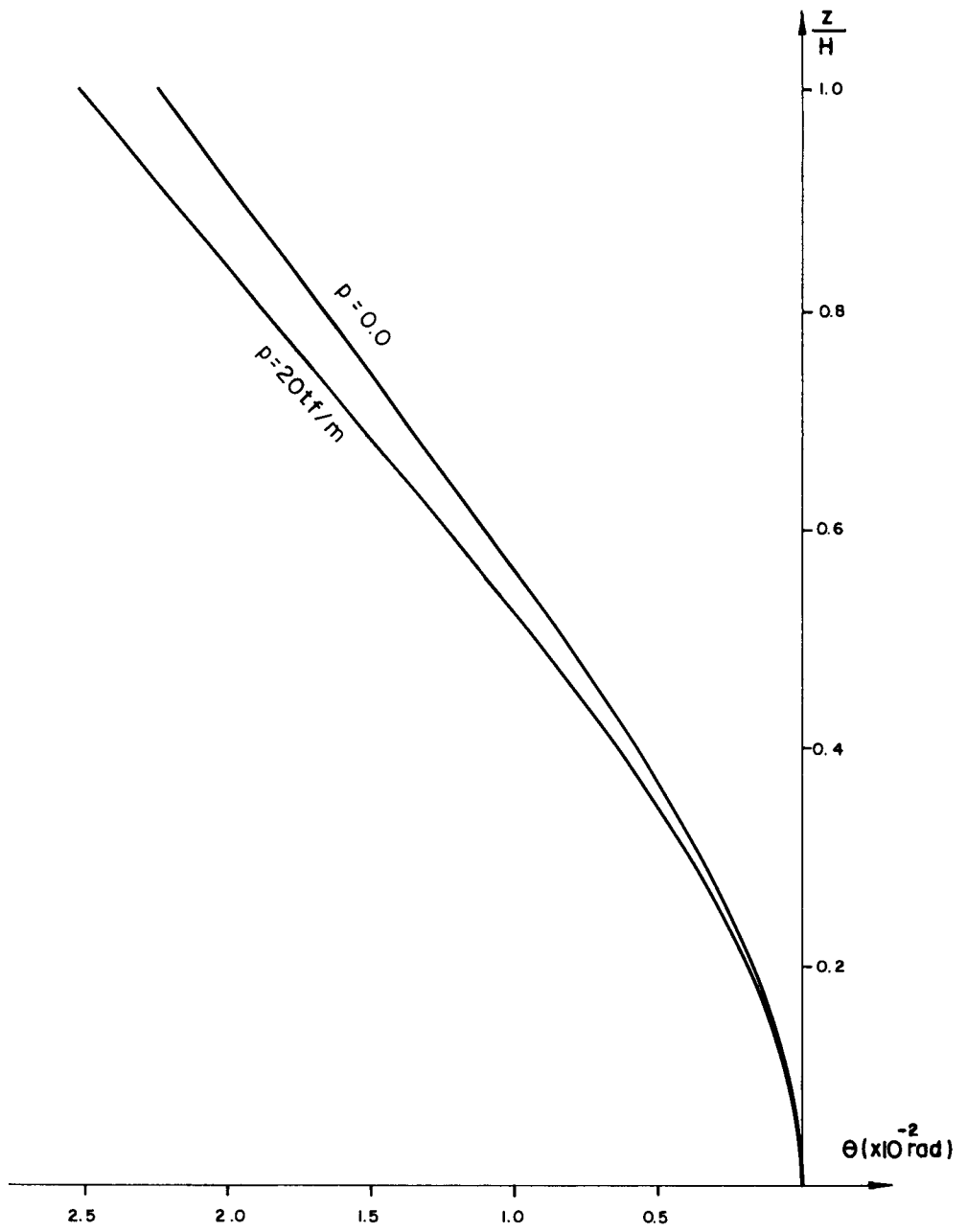


Figura 2.45 - Rotação  $\theta$  (rad)

2.9.3 - Exemplo 3

Na figura (2.46) representa-se em planta uma estrutura de 15 andares constituída de dois núcleos de seção aberta de características elasto-geométricas constantes com a altura.

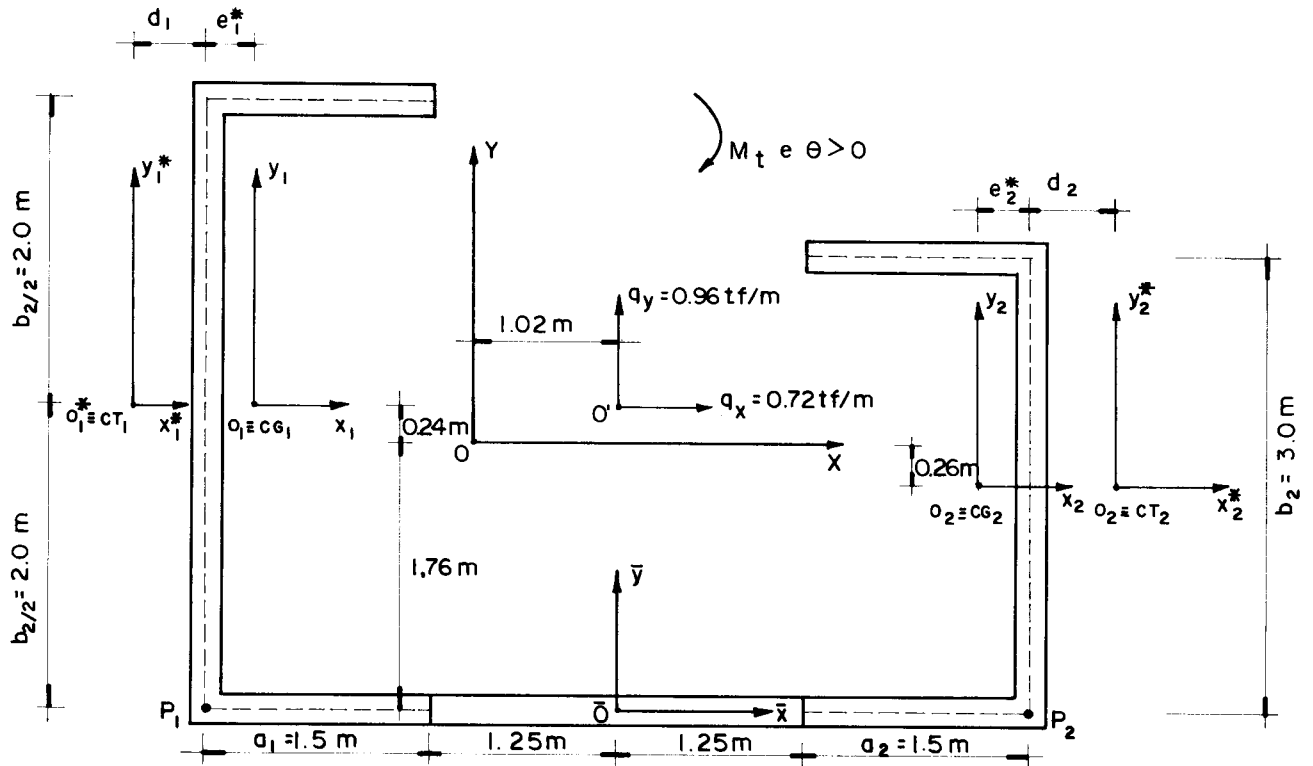


Figura 2.46 - Edifício com dois núcleos de seção aberta

A altura do pé-direito é 3,0m e os módulos de elasticidade longitudinal e transversal têm valores  $E = 2,0 \times 10^6$  tf/m<sup>2</sup> e  $G = 8,0 \times 10^5$  tf/m<sup>2</sup>. As dimensões dos núcleos estão indicados na figura (2.46).

O carregamento externo constitui-se de cargas verticais, uniformemente distribuídas ao longo dos eixos verticais que passam pelos centros de gravidade dos núcleos, de valores 2,5p para o núcleo 1 e 1,0p para o núcleo 2. Admite-se também um carregamento lateral atuando em um plano que passa pelo ponto O', cujas componentes nas direções OX e OY têm valor  $q_x = 0,72$ tf/m e  $q_y = 0,96$ tf/m, conforme indica-se na figura (2.46).

Consideram-se para esta análise duas estruturas, sendo a primeira constituída de dois núcleos de seção aberta sem contraventamento e a segunda, constituída de dois núcleos com um contraventamento, ao nível dos andares, por lintéis com vãos de 2,5m e seção transversal medindo 0,20x0,30m.

Em ambas as estruturas determinam-se os deslocamentos no topo, através dos métodos diferenças finitas e Stodola-Vianello, em sua variante, para cada valor da carga vertical  $p$  assumido.

Observa-se que o sistema global de eixos OXYZ é locado com a origem  $O$  coincidindo com o centro elástico do conjunto dos dois núcleos, sem o contraventamento.

a) Características geométricas da seção transversal do núcleo 1

a.1) Centro de gravidade

$$e_1^* = \frac{2(1,5 \times 0,20 \times 0,75)}{2 \times 1,5 \times 0,20 + 4,0 \times 0,20} = 0,321\text{m}$$

a.2) Momento de inércia em relação ao eixo  $O_1x_1$

$$J_{x_1} = \frac{0,20 \times 4,0^3}{12} + 2 \left[ \frac{1,5 \times 0,20^3}{12} + 0,20 \times 1,5 \times 2,0^2 \right] = 3,468\text{m}^4$$

a.3) Momento de inércia em relação ao eixo  $O_1y_1$

$$J_{y_1} = \frac{4,0 \times 0,2^3}{12} + 4,0 \times 0,20 \times (0,32)^2 \left[ \frac{0,20 \times 1,5^3}{12} + 0,20 \times 1,5 \times 0,429^2 \right] = 0,307\text{m}^4$$

a.4) Centro de torção

Sendo o eixo  $O_1x_1$  eixo de simetria da seção transversal do núcleo 1,

$$y_{D_1} = 0$$

e, para este tipo de seção, tem-se:

$$x_{D_1} = x_{p_{O_1}} + d_1$$

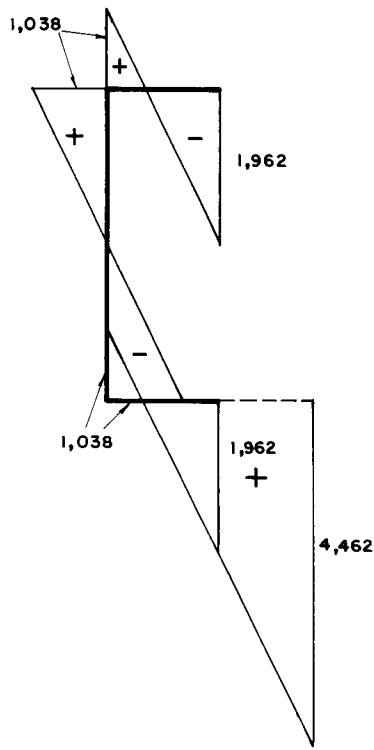
com

$$d_1 = -\frac{t}{J_{x_1}} \cdot \frac{a_1^2 b_1^2}{4} = -\frac{0,20}{3,468} \times \frac{1,5^2 \times 4^2}{4} = -0,519\text{m}$$

logo,

$$x_{D_1} = -(0,519 + 0,32) = -0,839\text{m}$$

a.5) Diagrama de área setorial ( $m^2$ )



a.6) Momento setorial de inércia  $J_{\omega_1}$

Conforme o diagrama de área setorial, tem-se:

$$J_{\omega_1} = 2 \times 0,2 \times \left\{ \left( \frac{1}{3} \times 1,038 \times 1,038 \times 2,0 \right) + \frac{1}{6} \left[ (-2 \times 1,962 + 1,038) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times -1,962 + (-1,962 + 2 \times 1,038) \times 1,038 \right] \times 1,5 \right\} = 0,865 m^6$$

a.7) Momento de inércia à torção,  $J_{t_1}$

$$J_{t_1} = \frac{1}{3} \sum t^3 s = \frac{1}{3} \times 0,20^3 (2 \times 1,5 + 4,0) = 1,86 \times 10^{-2} m^4$$

a.8) Área da seção transversal

$$A_1 = 0,20(4,0+2 \times 1,5) = 1,4\text{m}^2$$

a.9) Coordenadas do centro de gravidade em relação aos eixos globais OXYZ

$$X_{CG_1} = -1,409\text{m}$$

$$Y_{CG_1} = 0,24\text{m}$$

a.10) Momento polar de inércia em relação a origem global O

$$I_{O,1} = (X_{CG_1}^2 + Y_{CG_1}^2)A_1 + J_{x_1} + J_{y_1}$$

$$I_{O,1} = (1,049^2 + 0,24^2) \times 1,4 + 3,468 + 0,307 = 6,635\text{m}^4$$

a.11) Coordenadas do centro de torção em relação aos eixos globais OXYZ

$$X_{CT_1} = -2,249\text{m}$$

$$Y_{CT_1} = 0,24\text{m}$$

a.12) Ângulo  $\phi_1$ , entre os eixos  $o_1^*x_1^*$  e OX

$$\phi_1 = 0^\circ$$

a.13) Coordenadas da origem global  $O$  em relação aos eixos  $0_1^{**}x_1$  e  $0_1^{**}y_1$

De acordo com a equação (2.91)

$$c_{x_1} = 2,249\text{m}$$

$$c_{y_1} = -0,24\text{m}$$

b) Características geométricas da seção transversal do núcleo 2

b.1) Centro de gravidade

$$e_2^* = \frac{2(0,2 \times 1,5 \times 0,75)}{2 \times 0,2 \times 1,5 + 3,0 \times 0,2} = 0,375\text{m}$$

b.2) Momento de inércia em relação ao eixo  $0_2x_2$

$$J_{x_2} = \frac{0,20 \times 3,0^3}{12} + 2\left(\frac{1,5 \times 0,2^3}{12} + 0,2 \times 1,5 \times 1,5^2\right) = 1,802\text{m}^4$$

b.3) Momento de inércia em relação ao eixo  $0_2y_2$

$$J_{y_2} = \frac{3,0 \times 0,2^3}{12} + 3,0 \times 0,2 \times (0,375)^2 + 2\left(\frac{0,20 \times 1,5^3}{12} + 0,20 \times 1,5 \times 0,375^2\right)$$

$$J_{y_2} = 0,283\text{m}^4$$

b.4) Centro de torção

Sendo  $O_2x_2$  eixo de simetria da seção transversal do núcleo 2,

$$y_{D_2} = 0$$

e, para este tipo de seção, tem-se:

$$x_{D_2} = x_{p_{o_2}} + d_2$$

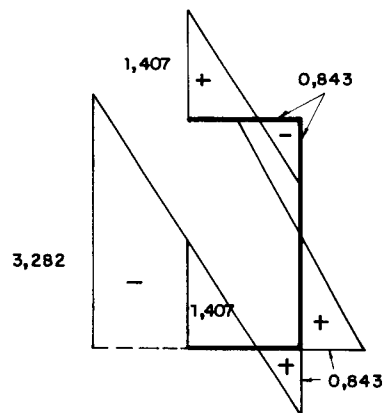
com

$$d_2 = \frac{t}{J_{x_2}} \cdot \frac{a_2^2 \cdot b_2^2}{4} = \frac{0,20}{1,802} \cdot \frac{1,5^2 \cdot 3,0^2}{4} = 0,562\text{m}$$

logo,

$$x_{D_2} = 0,375 + 0,562 = 0,937\text{m}$$

b.5) Diagrama de área setorial ( $\text{m}^2$ )





b.6) Momento setorial de inércia,  $J_{\omega_2}$

$$J_{\omega_2} = 2 \times 0,2 \left\{ \frac{1}{3} \times 0,843 \times 0,843 \times 1,5 + \frac{1}{6} \left[ (2 \times 1,407 - 0,843) \times 1,407 + (1,407 - 2 \times 0,843) \times 0,843 \right] \times 1,5 \right\} = 0,443 \text{m}^6$$

b.7) Momento de inércia à torção,  $J_{t_2}$

$$J_{t_2} = \frac{1}{3} \times 0,20^3 (2 \times 1,5 + 3,0) = 0,016 \text{m}^4$$

b.8) Área da seção transversal

$$A_2 = 0,2(2 \times 1,5 + 3,0) = 1,2 \text{m}^2$$

b.9) Coordenadas do centro de gravidade em relação aos eixos globais OXYZ

$$X_{CG_2} = 3,395 \text{m}$$

$$Y_{CG_2} = -0,26 \text{m}$$

b.10) Momento polar de inércia em relação a origem global O

$$I_{0,2} = (3,395^2 + 0,26^2) \times 1,2 + 1,802 + 0,283 = 15,997 \text{m}^4$$

b.11) Coordenadas do centro de torção em relação aos eixos globais

$$X_{CT_2} = 4,332 \text{m}$$

$$Y_{CT_2} = -0,26m$$

b.12) Ângulo  $\phi_2$  entre os eixos  $O_2^{**}x_2^{**}$  e  $Ox$

$$\phi_2 = 0^\circ$$

b.13) Coordenadas da origem global  $O$  em relação aos eixos  $O_2^{**}x_2^{**}$  e  $O_2^{**}y_2^{**}$

$$c_{x_2} = -4,332m$$

$$c_{y_2} = 0,26m$$

### 2.9.3.1 - Núcleos sem contraventamento

a) Matrizes referentes ao núcleo 1

a.1) Matrizes  $[L_{E_1}]$  e  $[L_1]$

De acordo com as equações (2.90) e (2.100)

$$[L_{E_1}] = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0,24 \\ 0 & 1,0 & 2,249 \\ 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix} \quad [L_1] = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0,24 \\ 0 & 1,0 & 1,409 \\ 0,24 & 1,409 & 4,739 \end{bmatrix}$$

a.2) Matrizes  $[J_1]$  e  $[K_{T_1}]$

De acordo com as equações (2.88), tem-se:

$$[J_1] = \begin{bmatrix} 0,614 & 0 & 0 \\ 0 & 6,936 & 0 \\ 0 & 0 & 1,73 \end{bmatrix} \times 10^6 \quad [K_{T_1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14,88 \end{bmatrix} \times 10^3$$

b) Matrizes referentes ao núcleo 2

b.1) Matrizes  $[L_{E_2}]$  e  $[L_2]$

$$[L_{E_2}] = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & -0,26 \\ 0 & 1,0 & -4,332 \\ 0 & 0 & 1,0 \end{bmatrix} \quad [L_2] = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & -0,26 \\ 0 & 1,0 & -3,395 \\ -0,26 & -3,395 & 13,331 \end{bmatrix}$$

b.2) Matrizes  $[J_2]$  e  $[K_{T_2}]$

$$[J_2] = \begin{bmatrix} 0,566 & 0 & 0 \\ 0 & 3,604 & 0 \\ 0 & 0 & 0,886 \end{bmatrix} \times 10^6 \quad [K_{T_2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12,8 \end{bmatrix} \times 10^3$$

c) Montagem do sistema de equações diferenciais

c.1) Matrizes do sistema

De acordo com as equações (2.96) e (2.99)

$$[J] = [L_{E_1}]^T [J_1] [L_{E_1}] + [L_{E_2}]^T [J_2] [L_{E_2}]$$

ou

$$[J] = \begin{bmatrix} 1,18 & 0 & 0 \\ 0 & 10,54 & 0 \\ 0 & 0 & 105,40 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$[K_T] = [L_{E_1}]^T [K_{T_1}] + [L_{E_1}] + [L_{E_2}]^T [K_{T_2}] [L_{E_2}]$$

ou

$$[K_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27,68 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$[L_w] = \alpha_1 [L_1] + \alpha_2 [L_2]$$

como  $\alpha_1 = 2,5$  e  $\alpha_2 = 1,0$ , resulta:

$$[L_w] = \begin{bmatrix} 3,5 & 0 & 0,34 \\ 0 & 3,5 & 0,1275 \\ 0,34 & 0,1275 & 25,1785 \end{bmatrix}$$

c.2) Componentes do vetor de carga lateral

$$q_a = 0,72 \text{tf/m} \quad q_b = 0,96 \text{tf/m} \quad q_c = -0,8064 \text{tfm/m}$$

c.3) Sistema de equações diferenciais

De acordo com a equação (2.105), obtem-se

$$\begin{bmatrix} 1,180 & 0 & 0 \\ 0 & 10,54 & 0 \\ 0 & 0 & 105,40 \end{bmatrix} \times 10^6 \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} +$$

$$\left( p(45-Z) \begin{bmatrix} 3,5 & 0 & 0,34 \\ 0 & 3,5 & 0,1275 \\ 0,34 & 0,1275 & 25,1785 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27,68 \end{bmatrix} \times 10^3 \right) \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} =$$

$$= - (45-Z) \begin{Bmatrix} 0,72 \\ 0,96 \\ -0,8064 \end{Bmatrix}$$

d) Resultados

Obtem-se a solução do sistema acima, que corresponde aos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$  dos diafragmas, através dos programas desenvolvidos para o método das diferenças finitas e do método de Stodola-Vianello, em sua variante. Na tabela (2.9) apresentam-se os deslocamentos no topo da estrutura, para cada valor considerado da carga vertical  $p$ .

De acordo com o programa elaborado por Carvalho [3], o valor da carga crítica de flambagem é  $p = 28,99 \text{ tf/m}$ .

Tabela 2.9

Núcleos sem contraventamento									
Componentes da carga lateral: $q_x = 0,72\text{tf/m}$ ; $q_y = 0,96\text{tf/m}$ ; $m = 0,8064\text{tfm/m}$									
Deslocamentos: u e v (m) e rotação $\theta$ (rad)									
p	Stodola-Vianello					Diferenças Finitas			
	$\bar{u}$	u	$\bar{v}$	v	$\bar{\theta}$	$\theta$	u	v	$\theta$
(tf/m)	(m)	(m)	( $\times 10^{-1}$ m)	( $\times 10^{-1}$ m)	( $\times 10^{-2}$ rad)	( $\times 10^{-2}$ rad)	(m)	( $\times 10^{-1}$ m)	( $\times 10^{-2}$ rad)
0	0,313	0,313	0,467	0,467	-0,3254	-0,3254	0,313	0,467	-0,3252
1	0,324	0,324	0,469	0,469	-0,3251	-0,3251	0,324	0,469	-0,3249
2	0,336	0,336	0,470	0,470	-0,3247	-0,3247	0,336	0,470	-0,3245
3	0,349	0,349	0,472	0,472	-0,3242	-0,3242	0,349	0,472	-0,3240
4	0,363	0,363	0,474	0,474	-0,3236	-0,3236	0,364	0,474	-0,3234
5	0,378	0,378	0,476	0,476	-0,3230	-0,3230	0,379	0,476	-0,3228
6	0,395	0,395	0,478	0,478	-0,3221	-0,3221	0,396	0,478	-0,3219
7	0,413	0,413	0,480	0,480	-0,3212	-0,3212	0,414	0,480	-0,3210
8	0,433	0,433	0,482	0,482	-0,3201	-0,3201	0,434	0,482	-0,3198
9	0,454	0,454	0,484	0,484	-0,3188	-0,3188	0,456	0,484	-0,3185
10	0,479	0,479	0,486	0,486	-0,3173	-0,3173	0,481	0,486	-0,3170
11	0,505	0,505	0,488	0,488	-0,3155	-0,3155	0,508	0,488	-0,3151
12	0,535	0,535	0,490	0,490	-0,3134	-0,3134	0,539	0,490	-0,3130
13	0,569	0,567	0,492	0,492	-0,3110	-0,3110	0,573	0,492	-0,3105
14	0,607	0,607	0,494	0,494	-0,3082	-0,3082	0,612	0,494	-0,3076
15	0,650	0,650	0,496	0,496	-0,3048	-0,3048	0,657	0,496	-0,3041
16	0,701	0,701	0,498	0,498	-0,3008	-0,3008	0,709	0,498	-0,2999
17	0,759	0,759	0,500	0,500	-0,2959	-0,2959	0,770	0,500	-0,2949
18	0,829	0,829	0,502	0,502	-0,2901	-0,2901	0,842	0,502	-0,2888
19	0,912	0,912	0,504	0,504	-0,2829	-0,2829	0,929	0,504	-0,2813
20	1,013	1,013	0,506	0,506	-0,2739	-0,2739	1,035	0,506	-0,2718
21	1,141	1,141	0,508	0,508	-0,2625	-0,2625	1,170	0,509	-0,2597
22	1,304	1,304	0,510	0,510	-0,2476	-0,2476	1,344	0,511	-0,2437
23	1,522	1,522	0,513	0,513	-0,2274	-0,2274	1,580	0,513	-0,2219
24	1,828	1,828	0,515	0,515	-0,1988	-0,1988	1,916	0,515	-0,1904
25	2,286	2,286	0,517	0,517	-0,1555	-0,1555	2,432	0,518	-0,1416
26	3,051	3,051	0,519	0,519	-0,0827	-0,0827	3,327	0,520	-0,0561
27	4,582	4,582	0,523	0,523	+0,0641	-0,0641	5,266	0,522	+0,1298
28	9,196	9,196	0,524	0,524	+0,5079	-0,5079	12,609	0,525	+0,8363
28,99	2410,890	2410,876	0,6333	0,6333	2,3200	2,3200	-33,240	0,526	-3,582

e) Gráficos

e.1) Gráficos p x deslocamentos

Apresenta-se nas figuras (2.47) a (2.49) a variação dos deslocamentos e rotação, no topo da estrutura, com a carga vertical p, de acordo com os valores fornecidos na tabela (2.9).

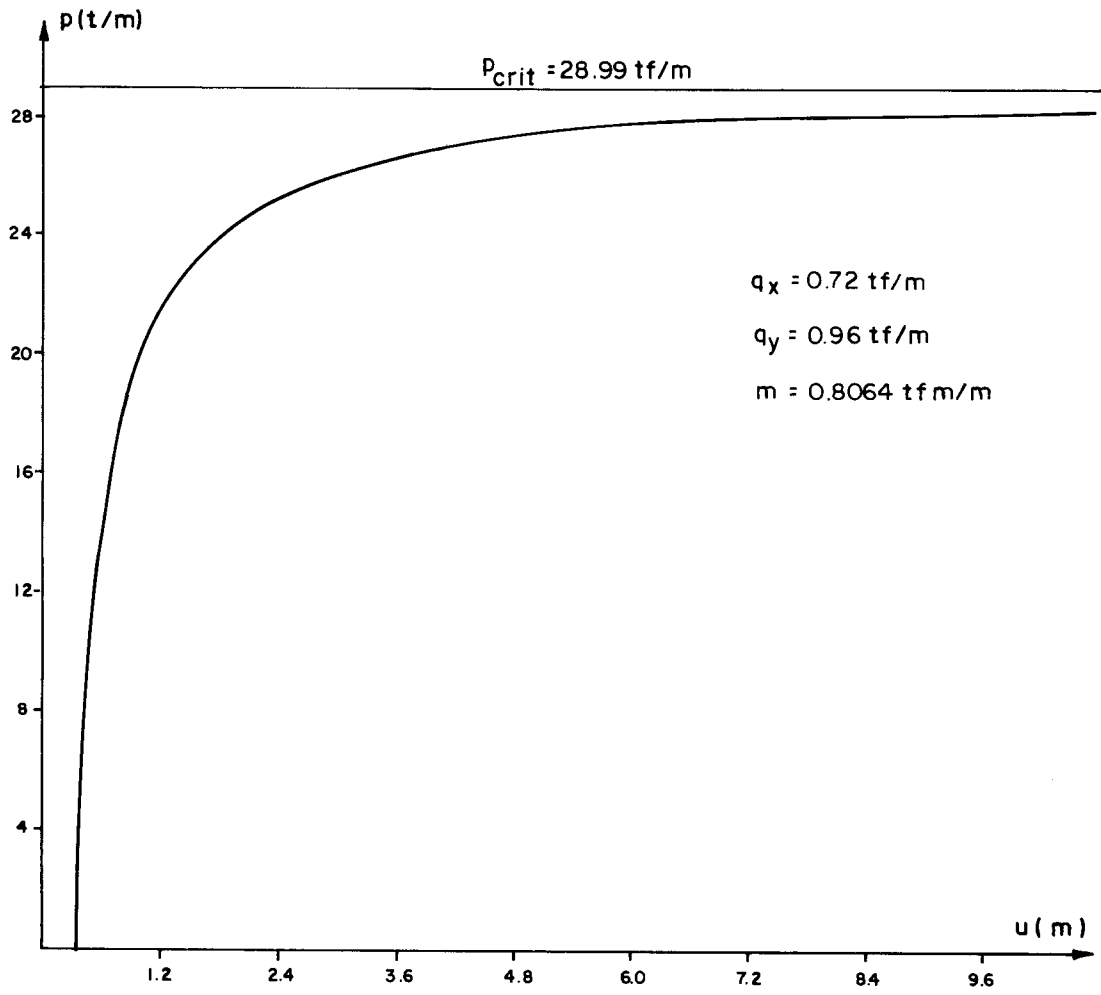


Figura 2.47 - Gráfico  $p$  x  $u(H)$

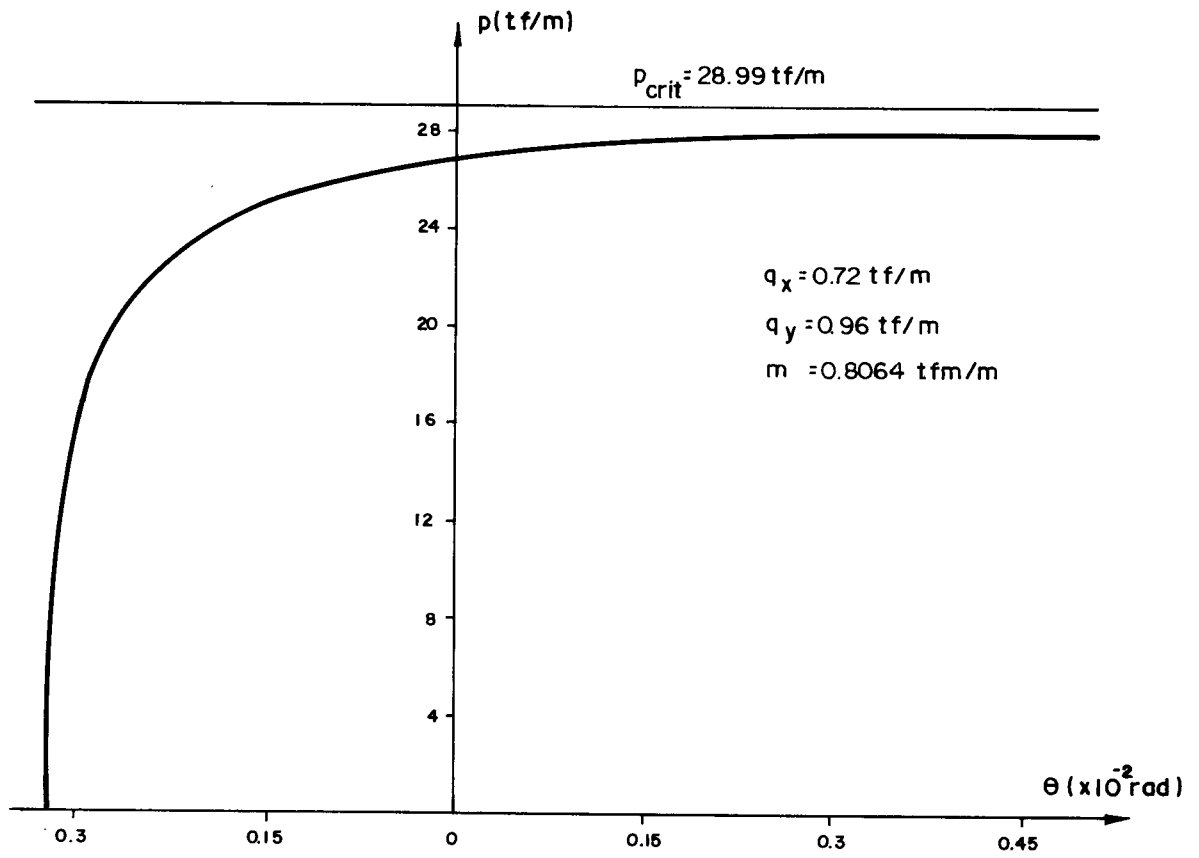


Figura 2.48 - Gráfico  $p$  x  $\theta(H)$



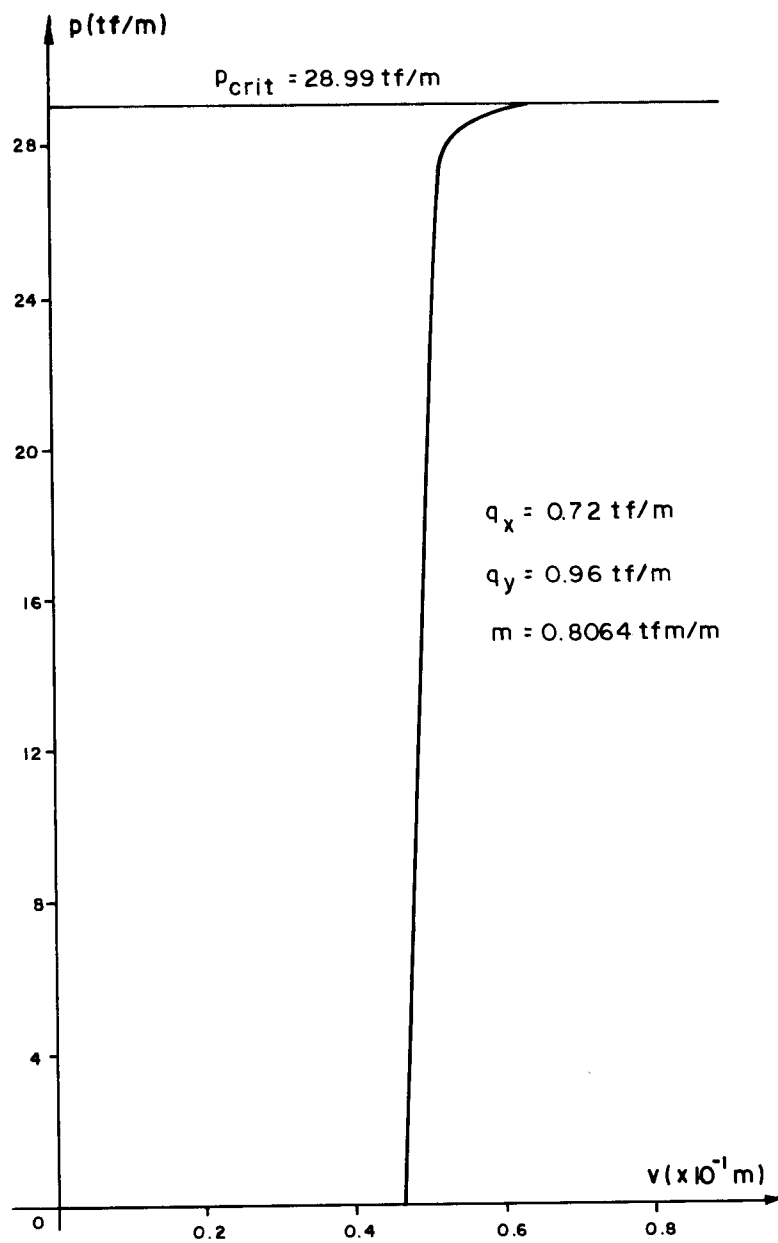


Figura 2.49 - Gráfico  $p \times v(H)$

e.2) Gráficos dos deslocamentos ao longo da altura da estrutura

Nas figuras (2.50) a (2.52), representam-se em gráfico os deslocamentos da estrutura ao longo de sua altura, para os valores  $p = 0$  e  $p = 10\text{tf/m}$

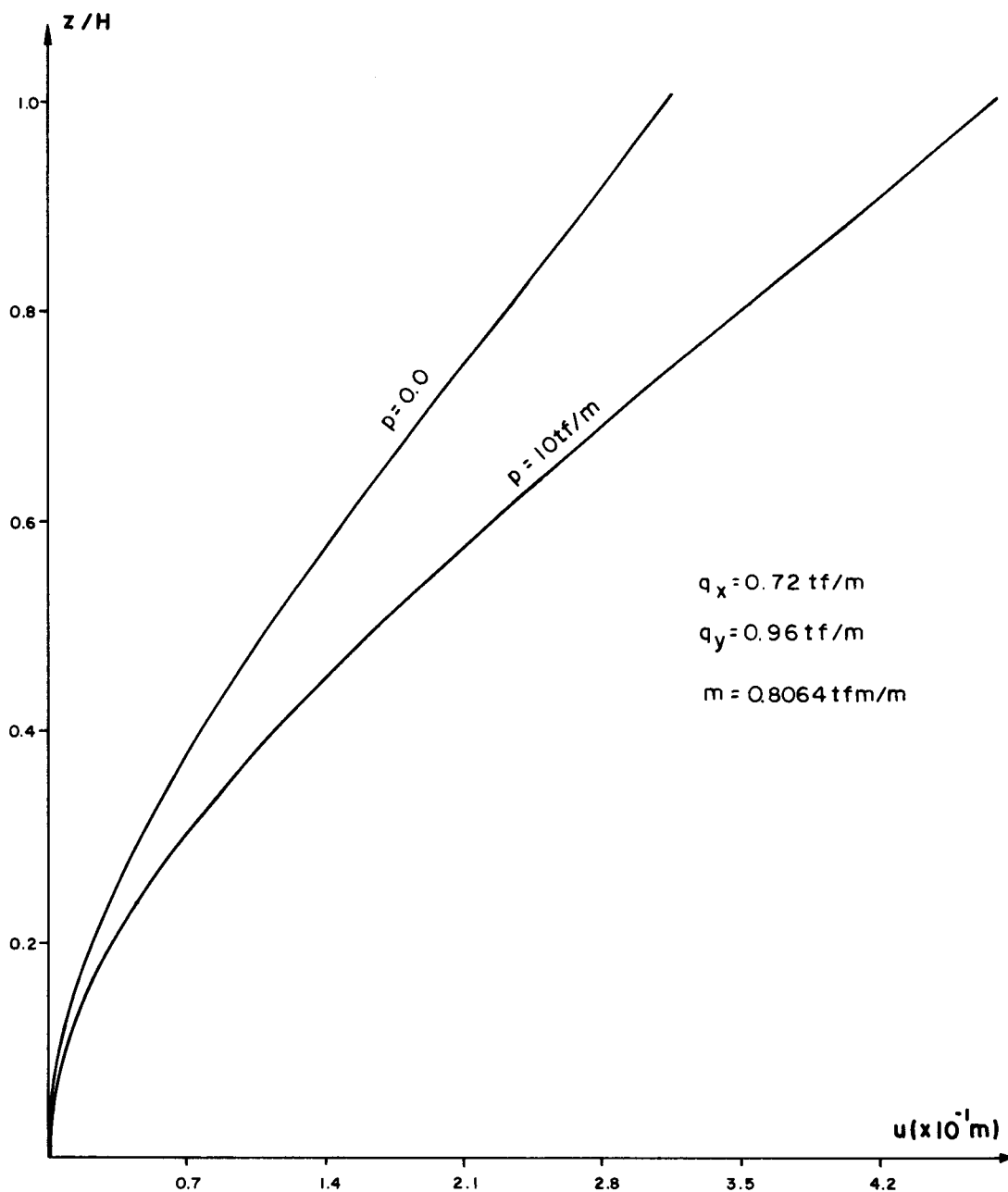


Figura 2.50 - Deslocamento horizontal  $u$  (m)

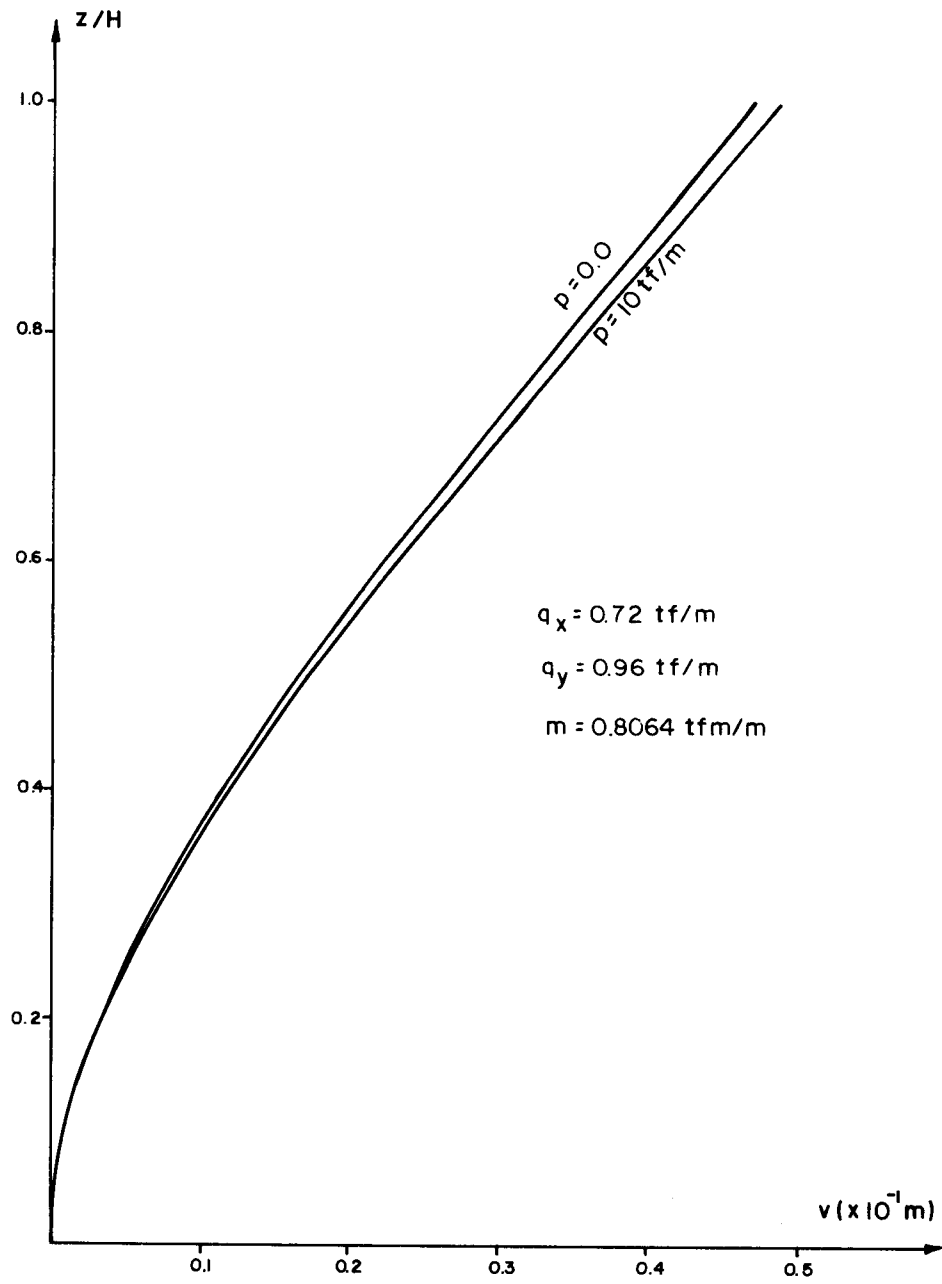


Figura 2.51 - Deslocamento horizontal  $v$  (m)

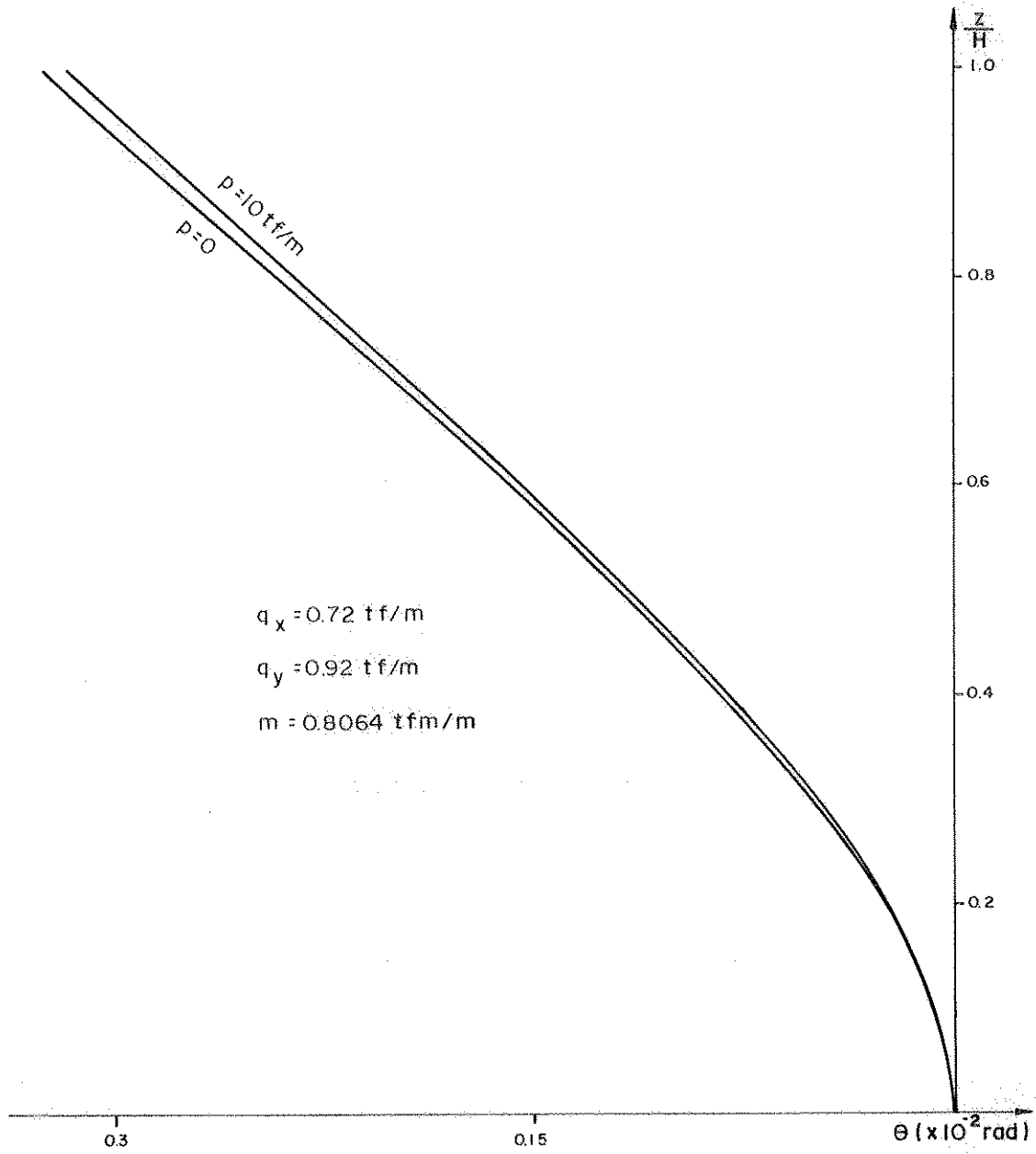


Figura 2.52 - Rotação  $\theta$  (rad)

2.9.3.2 - Núcleos com contraventamento

a) Parâmetros geométricos dos lintéis:

a.1) Área da seção transversal

$$A_L = 0,20 \times 0,30 = 0,06 \text{ m}^2$$

a.2) Momento de inércia,  $J_L$

$$J_L = \frac{0,20 \times 0,30^3}{12} = 4,5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

a.3) Ângulo entre o eixo  $\bar{o}\bar{x}$  e  $OX$

$$\bar{\phi} = 0^\circ$$

a.4) Ângulos entre os eixos  $o_1x_1$  e  $o_2x_2$  com o eixo  $\bar{o}\bar{x}$

$$\beta_1 = 0^\circ$$

$$\beta_2 = 0^\circ$$

a.5) Parâmetro  $f$

De acordo com a equação (2.128)

$$f = \frac{(2,5)^3}{12 \times 2,0 \times 10^6 \times 4,5 \times 10^{-4}} + \frac{2,5}{0,06 \times 8 \times 10^5} = 1,498 \times 10^{-3} \text{ m/tf}$$

a.6) Distâncias do centro de gravidade do núcleo 1 aos eixos  $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

$$\bar{l}_1 = 2,43\text{m}$$

$$\bar{e}_1 = 2,0\text{m}$$

a.7) Distâncias do centro de gravidade do núcleo 2 em relação aos eixos  $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

$$\bar{l}_2 = 2,375\text{m}$$

$$\bar{e}_2 = 1,5\text{m}$$

a.8) Distâncias do centro de torção do núcleo 1 em relação aos eixos  $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

$$\bar{X}_1 = 3,269\text{m}$$

$$\bar{Y}_1 = 2,000\text{m}$$

a.9) Distâncias do centro de torção do núcleo 2 em relação aos eixos  $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

$$\bar{X}_2 = 3,312\text{m}$$

$$\bar{Y}_2 = 1,5\text{m}$$

b) Cálculo dos parâmetros  $\bar{\omega}_1$  e  $\bar{\omega}_2$

De acordo com as equações (2.117), tem-se

$$\bar{\omega}_1 = 2,43 \times 2,0 - 2,0 \times 3,269 - 4,462 = -6,14 \text{m}^2$$

$$\bar{\omega}_2 = -2,375 \times 1,5 + 1,5 \times 3,312 + 3,282 = 4,6875 \text{m}^2$$

c) Cálculo da matriz  $[K_L^*]$

De acordo com as equações (2.131), tem-se:

$$[K_L^*] = \begin{bmatrix} 5137,522 & -534,601 & -11576,265 \\ -534,601 & 55,629 & 1204,606 \\ -11576,265 & 1204,606 & 26084,541 \end{bmatrix}$$

d) Coordenadas da origem  $\bar{o}$  em relação aos eixos globais

$$X_{\bar{o}} = 1,02 \text{m}$$

$$Y_{\bar{o}} = -1,76 \text{m}$$

e) Coordenadas da origem global  $\underline{0}$  em relação aos eixos  $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

De acordo com as equações (2.132-b)

$$c_{\bar{x}} = -1,02 \text{m}$$

$$c_{\bar{y}} = 1,76 \text{m}$$

f) Cálculo da matriz  $[L_E]$

De acordo com a equação (1.34)

$$[L_E] = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & -1,76 \\ 0,0 & 1,0 & -1,02 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix}$$

g) Cálculo da matriz  $[K_L]$

De acordo com a equação (2.139)

$$[K_L] = [L_{\bar{E}}]^T [K_L^*] [L_{\bar{E}}]$$

ou,

$$[K_L] = \begin{bmatrix} 5137,522 & -534,601 & -20073,011 \\ -534,601 & 55,629 & 2088,7622 \\ -20073,011 & 2088,7622 & 78428,031 \end{bmatrix}$$

h) Sistema de equações diferenciais

De acordo com a equação (2.143), obtem-se:

$$\begin{bmatrix} 1,180 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 10,54 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 105,40 \end{bmatrix} \times 10^6 \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} +$$



$$+ \left\{ p(45-Z) \begin{bmatrix} 3,5 & 0,0 & 0,34 \\ 0,0 & 3,5 & 0,1275 \\ 0,34 & 0,1275 & 25,1785 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 27,68 \end{bmatrix} \times 10^3 + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} 5137,522 & -534,601 & -20073,011 \\ -534,601 & 55,629 & 2088,7622 \\ -20073,011 & 2088,7622 & 78428,031 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} = -(45-Z) \begin{Bmatrix} 0,72 \\ 0,96 \\ -0,8064 \end{Bmatrix}$$

i) Resultados

Obtem-se a solução do sistema acima, que corresponde aos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$  dos diafragmas, através dos programas desenvolvidos para os métodos das diferenças finitas e do método de Stodola-Vianello, em sua variante. Na tabela (2.10) apresentam-se os deslocamentos no topo da estrutura, para diversos valores da carga vertical  $p$ .

De acordo com o programa elaborado por Carvalho[3], o valor da carga crítica de flambagem é  $p_{crit} = 83,02 \text{tf/m}$ .

Tabela 2.10

Núcleos com contraventamento									
Componentes da carga lateral: $q_x = 0,72\text{tf/m}$ ; $q_y = 0,96\text{tf/m}$ ; $m = 0,8064\text{tfm/m}$									
p	Deslocamentos: u e v e rotação $\theta$ no topo								
	Stodola-Vianello						Diferenças Finitas		
	$\bar{u}$	u	$\bar{v}$	v	$\bar{\theta}$	$\theta$	u	v	$\theta$
(tf/m)	( $\times 10^{-1}\text{m}$ )	( $\times 10^{-1}\text{m}$ )	( $\times 10^{-1}\text{m}$ )	( $\times 10^{-1}\text{m}$ )	( $\times 10^{-2}\text{rad}$ )	( $\times 10^{-2}\text{rad}$ )	( $\times 10^{-1}\text{m}$ )	( $\times 10^{-1}\text{m}$ )	( $\times 10^{-2}\text{rad}$ )
0	0,938	0,938	0,492	0,492	0,465	0,465	0,936	0,492	0,465
1	0,950	0,950	0,495	0,495	0,475	0,475	0,948	0,495	0,475
2	0,962	0,962	0,497	0,497	0,485	0,485	0,959	0,497	0,486
3	0,974	0,974	0,499	0,499	0,495	0,495	0,972	0,499	0,496
4	0,986	0,986	0,501	0,501	0,506	0,506	0,984	0,501	0,507
5	0,999	0,999	0,504	0,504	0,517	0,517	0,997	0,504	0,518
6	1,012	1,012	0,506	0,506	0,528	0,528	1,010	0,506	0,529
7	1,025	1,025	0,508	0,508	0,540	0,540	1,023	0,508	0,541
8	1,039	1,039	0,511	0,511	0,552	0,552	1,037	0,511	0,553
9	1,053	1,053	0,513	0,513	0,564	0,564	1,051	0,513	0,565
10	1,067	1,067	0,515	0,515	0,577	0,577	1,066	0,516	0,578
11	1,082	1,082	0,518	0,518	0,590	0,590	1,081	0,518	0,591
12	1,097	1,097	0,520	0,520	0,603	0,603	1,096	0,521	0,605
13	1,113	1,113	0,523	0,523	0,617	0,617	1,112	0,523	0,619
14	1,129	1,129	0,526	0,526	0,631	0,631	1,128	0,526	0,633
15	1,146	1,146	0,528	0,528	0,646	0,646	1,145	0,528	0,648
16	1,163	1,163	0,531	0,531	0,661	0,661	1,162	0,531	0,663
17	1,181	1,181	0,533	0,533	0,677	0,677	1,180	0,534	0,679
18	1,199	1,199	0,536	0,536	0,693	0,693	1,198	0,537	0,695
19	1,218	1,218	0,539	0,539	0,710	0,710	1,217	0,539	0,712
20	1,237	1,237	0,542	0,542	0,727	0,727	1,237	0,542	0,730
21	1,257	1,257	0,545	0,545	0,745	0,745	1,257	0,545	0,748
22	1,278	1,278	0,547	0,547	0,763	0,763	1,278	0,548	0,766
23	1,299	1,299	0,550	0,550	0,782	0,782	1,300	0,551	0,786
24	1,321	1,321	0,553	0,553	0,802	0,802	1,322	0,554	0,805
25	1,344	1,344	0,556	0,556	0,822	0,822	1,345	0,557	0,826
26	1,368	1,368	0,559	0,559	0,844	0,844	1,369	0,560	0,848
27	1,392	1,392	0,562	0,562	0,866	0,866	1,394	0,563	0,870
28	1,418	1,418	0,566	0,566	0,888	0,888	1,419	0,566	0,893
29	1,444	1,444	0,569	0,569	0,912	0,912	1,446	0,570	0,917
30	1,471	1,471	0,572	0,572	0,937	0,937	1,474	0,573	0,942
34	1,592	1,592	0,586	0,586	1,046	1,046	1,596	0,587	1,053
38	1,734	1,734	0,600	0,600	1,175	1,175	1,741	0,602	1,184
42	1,904	1,904	0,616	0,616	1,330	1,330	1,914	0,618	1,342
46	2,111	2,111	0,634	0,634	1,519	1,519	2,125	0,636	1,536
50	2,368	2,368	0,654	0,654	1,756	1,756	2,389	0,657	1,779
54	2,696	2,696	0,677	0,677	2,058	2,058	2,727	0,680	2,092
58	3,129	3,129	0,705	0,705	2,459	2,459	3,176	0,708	2,509
62	3,727	3,727	0,738	0,738	3,015	3,015	3,802	0,743	3,091
66	4,606	4,606	0,783	0,783	3,835	3,835	4,733	0,790	3,961
70	6,026	6,026	0,847	0,847	5,160	5,160	6,267	0,859	5,395
74	8,706	8,706	0,958	0,958	7,667	7,667	9,265	0,981	8,203
78	15,655	15,655	1,224	1,224	14,180	14,180	17,733	1,303	1,614
82	76,961	76,960	3,460	3,460	71,631	71,631	201,908	8,008	18,900
83,02	27519,16	27518,76	997,795	997,792	25793,34	25793,25	-122,752	-3,780	-11,572

j) Gráficos

j.1) Gráficos p x deslocamentos

Apresenta-se nas figuras (2.53) a (2.55) a variação dos deslocamentos e rotação, no topo da estrutura, com a carga vertical p, de acordo com os valores fornecidos na tabela (2.10).

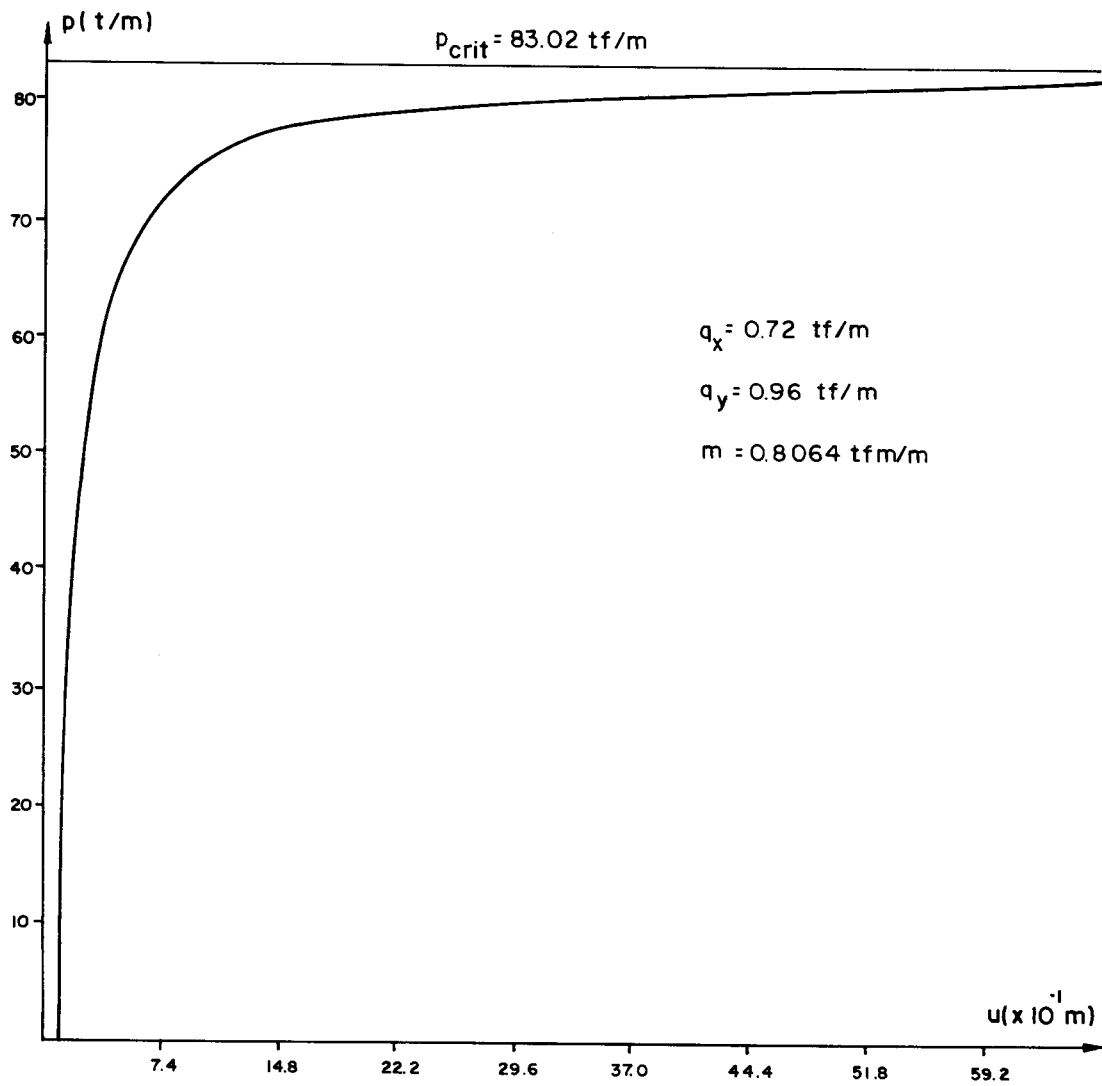


Figura 2.53 - Gráfico p x u(H) para os núcleos com contraventamento.

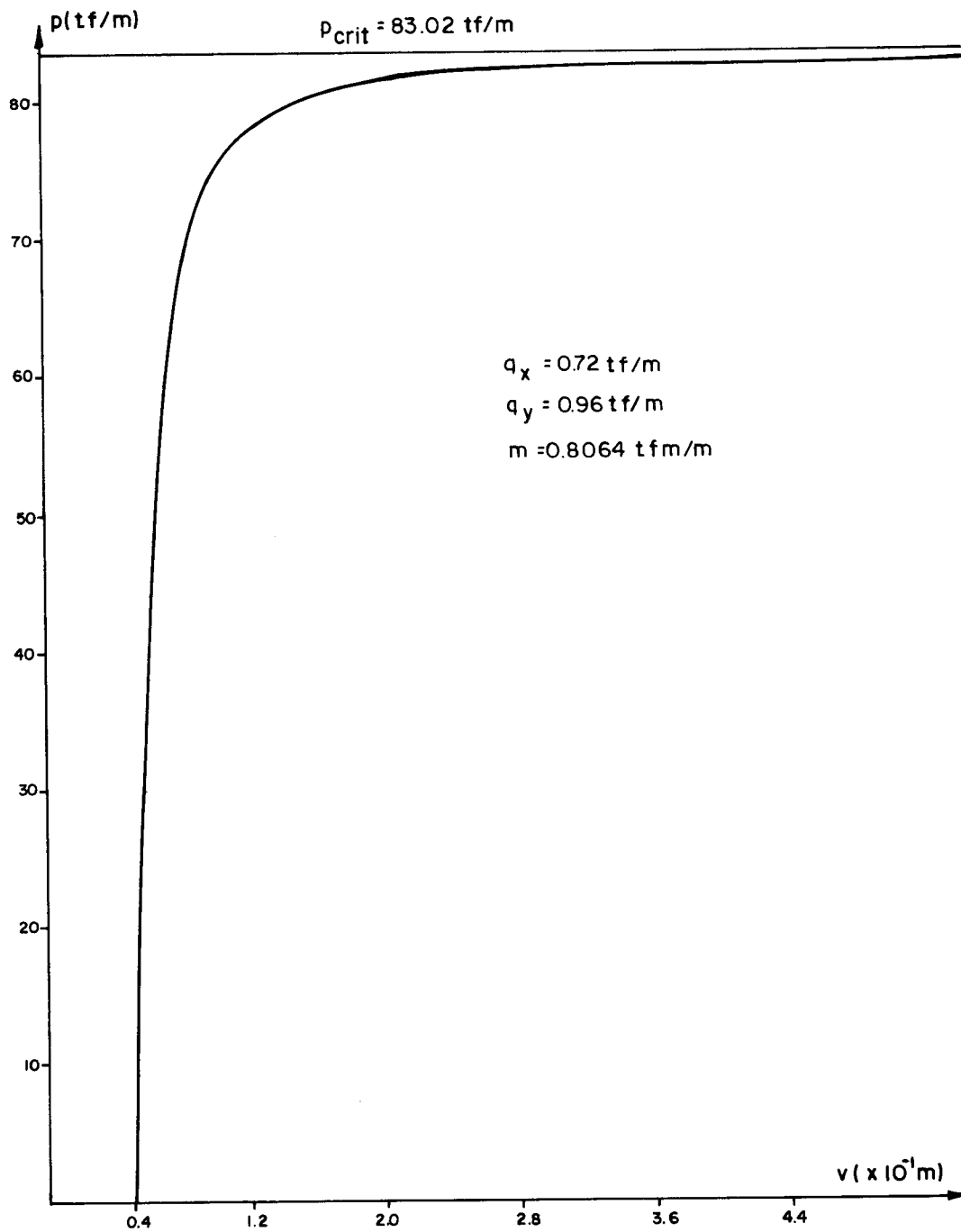


Figura 2.54 - Gráfico  $p \times v(H)$  para os núcleos com contra-ventamento.

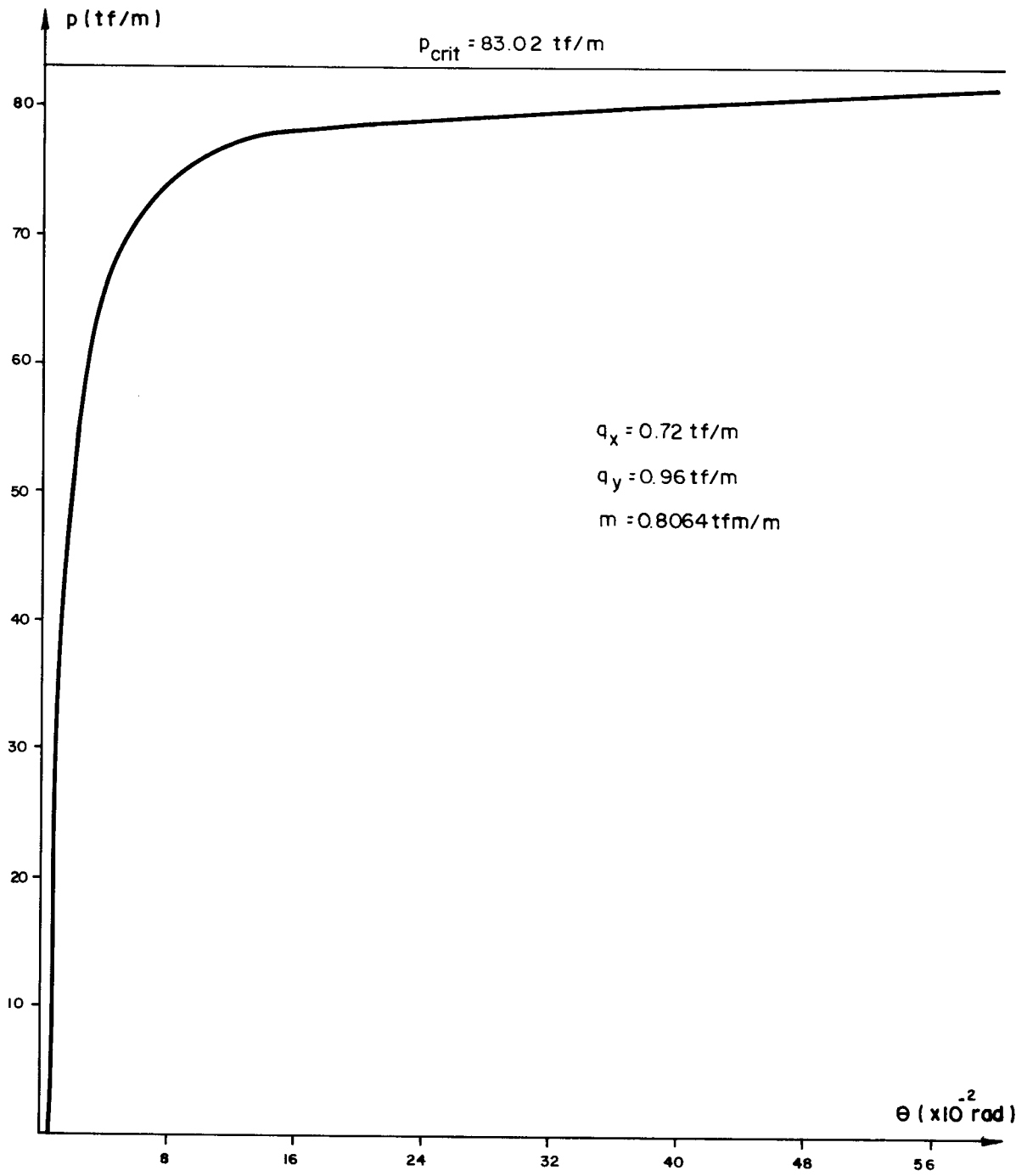


Figura 2.55 - Gráfico  $p \times \theta(H)$  para os núcleos com contraven-tamento.

j.2) Gráficos dos deslocamentos ao longo da altura da estrutura

Nas figuras (2.56) a (2.58), representam-se em gráfico os deslocamentos ao longo da altura da estrutura, para os valores  $p = 0$  e  $p = 10\text{tf/m}$ . As curvas contínuas representam os deslocamentos do núcleos contraventados e as curvas tracejadas representam os deslocamentos dos núcleos não contraventados.

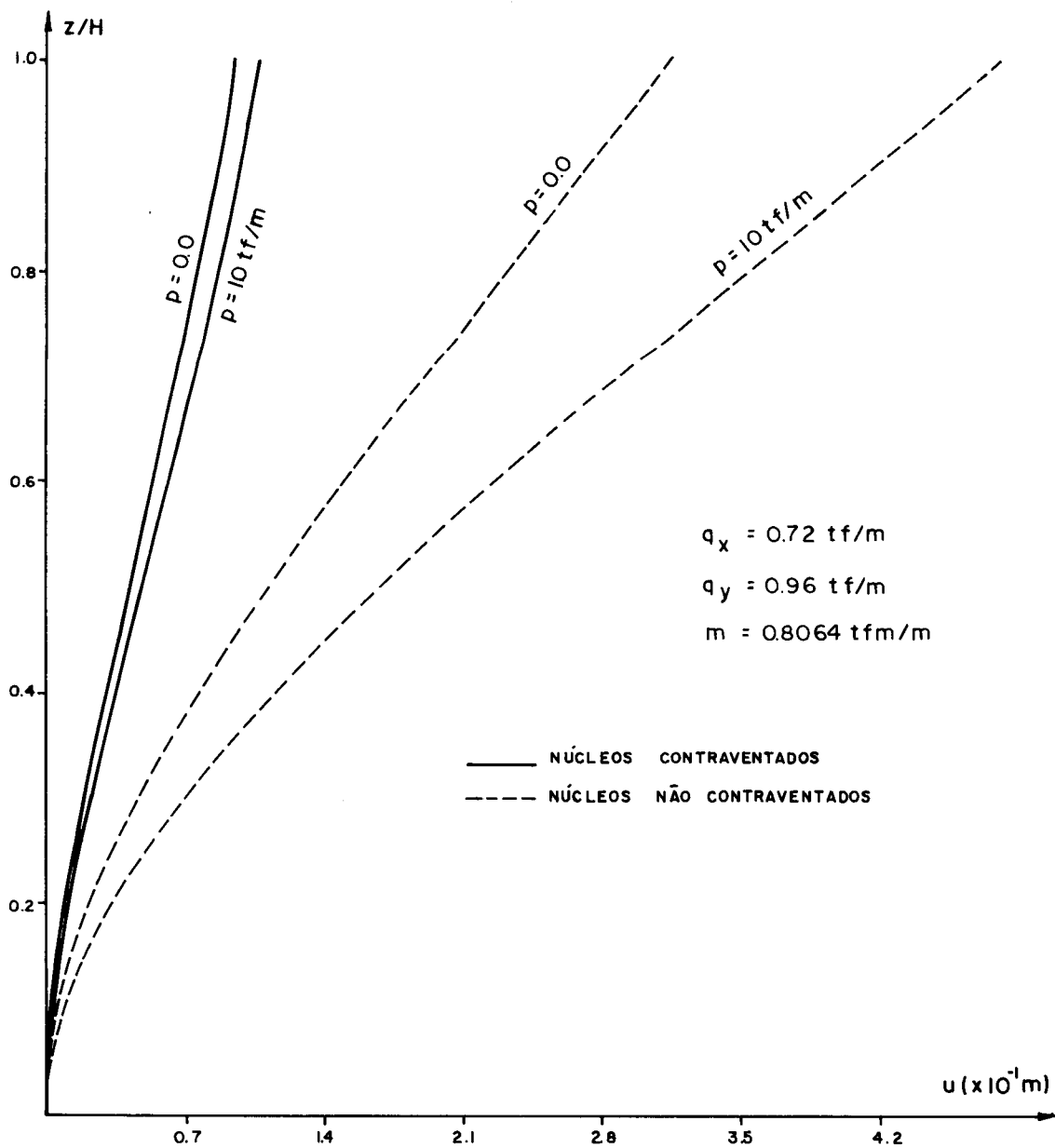


Figura 2.56 - Deslocamento horizontal u

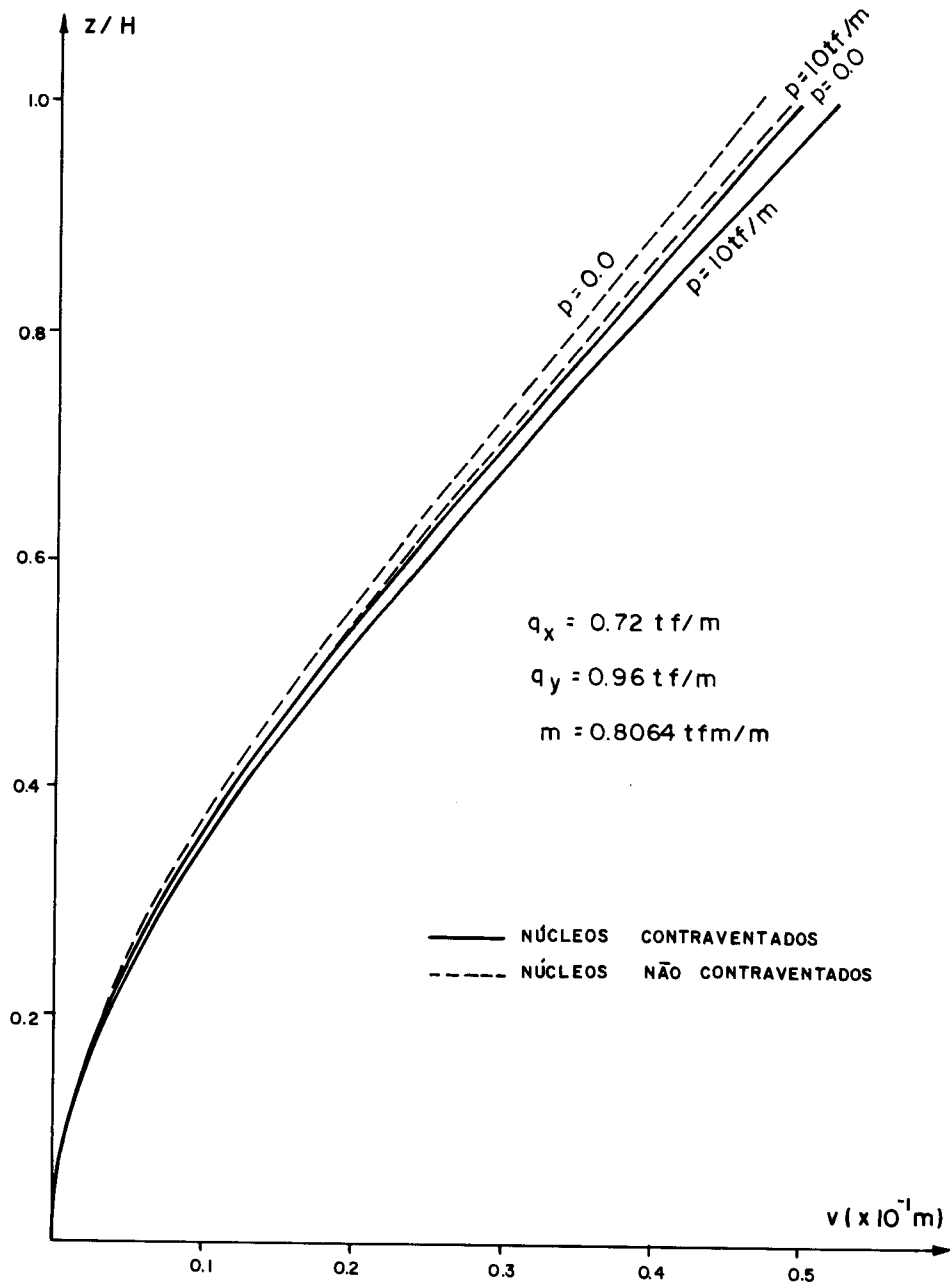


Figura 2.57 - Deslocamento horizontal v

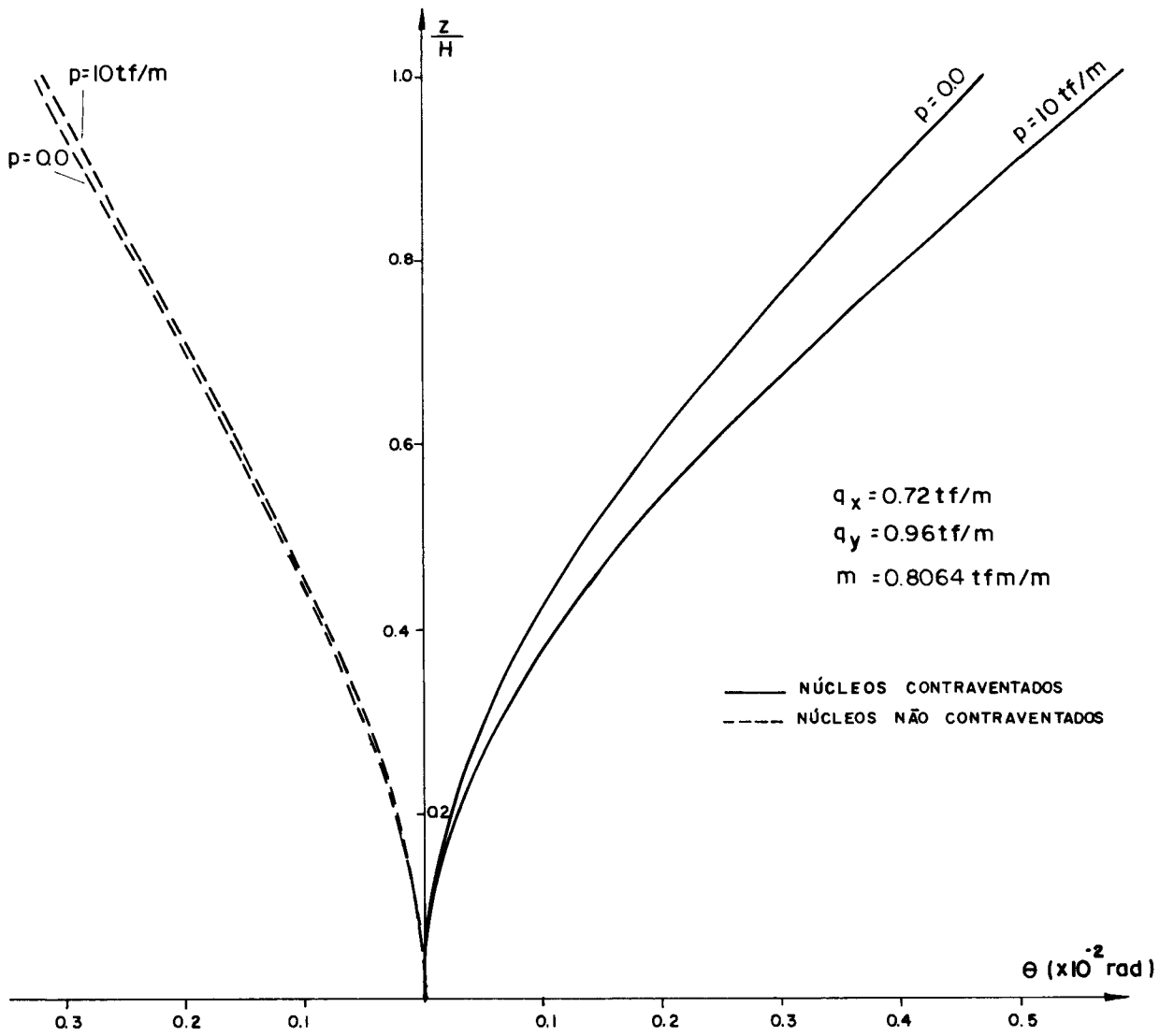


Figura 2.58 - Rotação  $\theta$



### III. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise dos efeitos de segunda ordem em estruturas de edifícios altos, conduz a uma equação ou a um sistema de equações diferenciais, não homogêneas, de terceira ordem com coeficientes variáveis. A solução aproximada, obtida através dos métodos diferenças finitas e Stodola-Vianello, em sua variante, leva a resultados considerados de boa precisão.

Através dos exemplos numéricos observa-se que a variante do método de Stodola-Vianello apresenta, neste trabalho, vantagens sobre o método das diferenças finitas, pois além de propiciar uma sequência de cálculo facilmente programável em computadores, apresenta uma convergência rápida dos resultados. Nos exemplos numéricos do primeiro capítulo chega-se a bons resultados com o método de Stodola-Vianello, em sua variante, utilizando-se um polinômio aproximador do 12º grau. No segundo capítulo obtiveram-se bons resultados com esse método utilizando-se, em todos os exemplos, um polinômio aproximador do 8º grau.

No primeiro capítulo foi possível transformar os coeficientes da equação diferencial, que rege o comportamento de um painel geral, em parâmetros adimensionais e com isso traçar gráficos para projeto, em função destes parâmetros. Os gráficos comprovam que as estruturas submetidas a carregamentos uniformes lateral e vertical, analisadas em teoria de segunda ordem, segundo as hipóteses da técnica do meio contínuo, correspondem a problemas de 2ª espécie, onde o carregamento crítico é definido como o valor da carga que provoca variações excessivamente grandes das funções deslocamentos, para uma variação pequena do carregamento vertical. Em todos os exemplos numéricos pode-se observar que o resultado obtido, com a aplicação do processo de séries de potências, para o valor da carga crítica de flambagem, através do programa elaborado por Carvalho [3], corresponde, neste trabalho, ao valor da carga que provoca variações excessivas das funções deslocamentos. Isto comprova também a boa

precisão alcançada com a utilização do método das diferenças finitas e em especial com o método de Stodola-Vianello, em sua variante.

Pelo estudo dos exemplos numéricos apresentados nos capítulos I e II, observa-se que analisa-se neste trabalho a influência da carga vertical, que atua juntamente com cargas laterais, nos deslocamentos dos modelos estruturais considerados.

Nos gráficos da figura (1.16) nota-se que o painel constituído por parede e pórtico associados por barras biarticuladas apresenta deslocamentos horizontais maiores do que o painel composto por parede e pórtico ligados por lintéis. Isto ocorre porque aumenta-se a rigidez do painel quando introduz-se, ao nível dos andares um contraventamento por lintéis. Este enrijecimento deve-se à ação de flexão destes elementos. Chama-se a atenção, também, que estimando-se um valor de  $10\text{tf/m}$  para a carga vertical  $p$ , nota-se, através de análise da figura (1.16), que o efeito dessa carga é mais pronunciado no painel menos rígido, isto é, na associação de parede e pórtico por barras biarticuladas.

Nos exemplos numéricos que consideram os núcleos estruturais, pode-se verificar também a contribuição favorável do contraventamento introduzido pelos lintéis. No caso da estrutura constituída por apenas um núcleo observa-se que a rigidez à flexão não se altera com a introdução dos lintéis, e sim a rigidez à torção, havendo uma diferença dos valores dos deslocamentos horizontais, na direção do eixo global  $OX$ , entre o núcleo contraventamento e o núcleo não contraventado quando há a consideração do efeito de segunda ordem, conforme se esclarece no referido exemplo. Pode-se também claramente observar este efeito através dos gráficos traçados na figura (2.37). Deve-se observar, ainda neste exemplo, a redução da rotação máxima do núcleo contraventado a 27,8% do valor máximo obtido para o núcleo sem contraventamento, quando são atuam nas estruturas cargas laterais ( $p=0$ ). E imaginando-se que atua no nú-

cleo uma carga vertical de valor igual a 15t/m, que poderia corresponder a soma do peso próprio da estrutura e sobre cargas, nota-se uma redução da rotação máxima do núcleo contraventado a 25,5% do valor máximo obtido para o núcleo sem contraventamento, com o mesmo carregamento. Neste exemplo o efeito do contraventamento é mais efetivo quando atuam conjuntamente as cargas lateral e vertical. Isto também é claramente observado nos gráficos da figura (2.38).

No capítulo II analisa-se também, através do segundo exemplo numérico, uma associação tridimensional de paredes e pórticos. Supondo-se que atua nessa estrutura além de uma carga lateral, uma carga vertical de valor estimado correspondente a 10% do valor da carga crítica de flambagem da estrutura, observa-se que em decorrência da consideração desta carga os valores máximos dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$  são acrescidos de 14,8%; 10,4% e 12,0%, respectivamente, em relação aos correspondentes valores máximos destes deslocamentos, quando só atua a carga lateral ( $p=0$ ) na estrutura. Este fato pode ser verificado através dos gráficos das figuras (2.43) a (2.45).

Finalmente, no último exemplo, examina-se uma estrutura constituída por dois núcleos contraventados e não contraventados por lintéis. Pelos gráficos das figuras(2.56) a (2.58) observa-se, também, o aumento da rigidez da estrutura com a introdução dos lintéis conduzindo a uma sensível alteração dos deslocamentos na estrutura. Nota-se que o efeito da carga vertical é mais pronunciado na rotação da estrutura sem contraventamento. Neste caso, a presença desta carga tende a diminuir o valor da rotação.

APÊNDICE A

Determinação dos coeficientes:  $s_f$ ,  $s$ ,  $K_1$  e  $K_2$

1. Rigidez de um pórtico à força cortante - coeficiente  $s_f$

Nos pórticos regulares sujeitos a cargas lateral e vertical, supõem-se próximas as rotações de todos os nós da viga do andar e também as rotações de nós consecutivos de uma mesma prumada de pilar. Isto equivale a afirmar que os centros dos vãos das barras são pontos de momentos nulos.

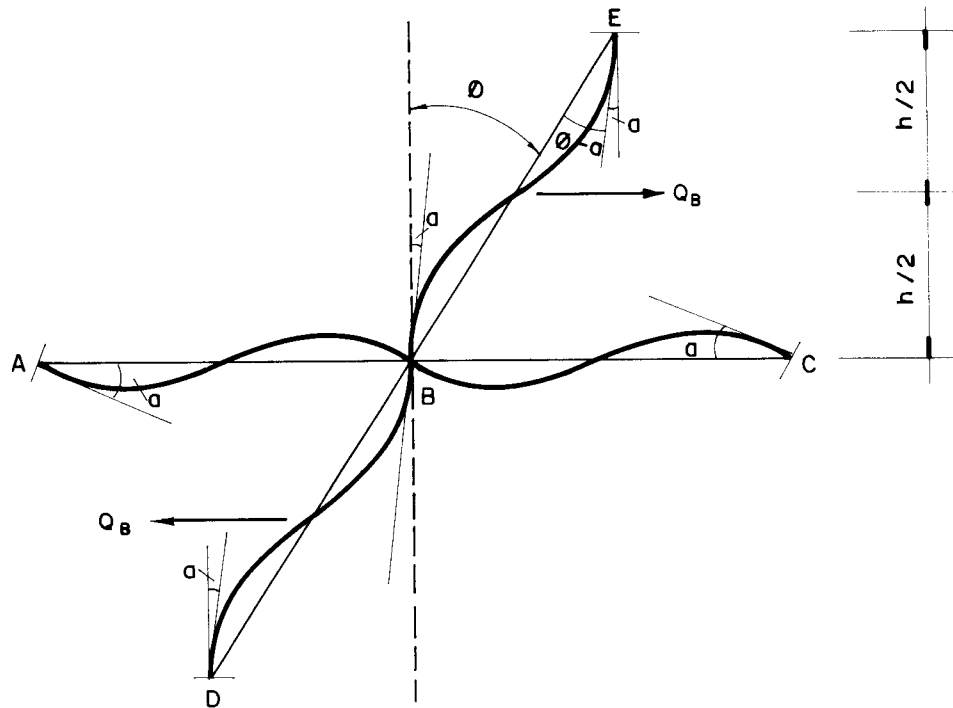


Figura A.1 - Rigidez de pórticos

A figura (A.1) mostra três nós consecutivos A, B e C da viga e D, B e E do pilar. Indicam-se por  $\phi$  e  $a$  a distorção do andar e a rotação do nó B, respectivamente. Exprim

mando os parâmetros de rigidez das barras pela relação  $K_i = J_i / l_i$  e considerando os momentos que as barras aplicam ao nó B positivos no sentido horário, resulta:

$$\begin{aligned} M_{BE} &= 6EK_E(\phi - a) \\ M_{BD} &= 6EK_D(\phi - a) \\ M_{BA} &= -6EK_A a \\ M_{BC} &= -6EK_C a \end{aligned} \tag{A.1}$$

Pelo equilíbrio do nó B segue:

$$a = \frac{K_E + K_D}{K_A + K_C + K_E + K_D} \phi \tag{A.2}$$

Como a força cortante no pilar B é dada por:

$$Q_B = \frac{2M_{BE}}{h} \tag{A.3}$$

segue pelas equações A.1 e A.2 que:

$$Q_B = \frac{12E}{h} K_E \frac{\sum_v K}{\sum_b K} \phi \tag{A.4}$$

onde os índices v e b nos somatórios indicam serem estes estendidos sô as vigas ou ã totalidade das barras que concorrem no nó B, respectivamente.

Designando por  $s_B$  o parâmetro de rigidez do pilar B à força cortante e tendo em vista a equação A.4, conclui-se que:

$$s_B = \frac{12}{h} E K_E \frac{\sum K}{\sum \frac{v}{b}} \quad (A.5)$$

Somando-se as contribuições dos pilares ao nível do andar considerado, calculadas através da equação (A.5), obtém-se o coeficiente de rigidez do pórtico à força cortante expresso por:

$$s_f = \frac{12E}{h} \sum_{n.a} \left[ K_{p.n} \frac{\sum \frac{v.n}{b.n}}{\sum K} \right] \quad (A.6)$$

onde:

$E$  é o módulo de elasticidade longitudinal

$h$  é o pé-direito do andar

$K$  é a relação  $J/l$  do tramo de viga ou pilar considerado

$n.a$  é a somatória estendida a todos os nós do andar considerado

$K_{p.n}$  é a relação  $J/l$  do pilar acima do nó considerado

$v.n$  é a somatória estendida aos tramos de vigas que concorrem no nó.

b.n é a somatória estendida a todas as barras  
(2, 3 ou 4 barras) que concorrem no nó.

2. Pórticos e paredes ligados por lintéis - coeficientes:  
s,  $K_1$  e  $K_2$

2.1 - Coeficientes s e  $K_1$

Na figura (A.2) representa-se a deformação de um andar genérico do painel, correspondente ao giro  $\phi_B$  da parede, devido à flexão.

A reação do pórtico sobre a parede constitui-se de uma força vertical distribuída  $q_v$  (positiva se produz compressão na parede) e de um momento distribuído  $m$  aplicado ao longo do eixo vertical da parede, considerado positivo no sentido anti-horário. Expressa-se este último como uma função de  $\phi_B$  através da equação:

$$m = K_1 \phi_B \quad (A.7)$$

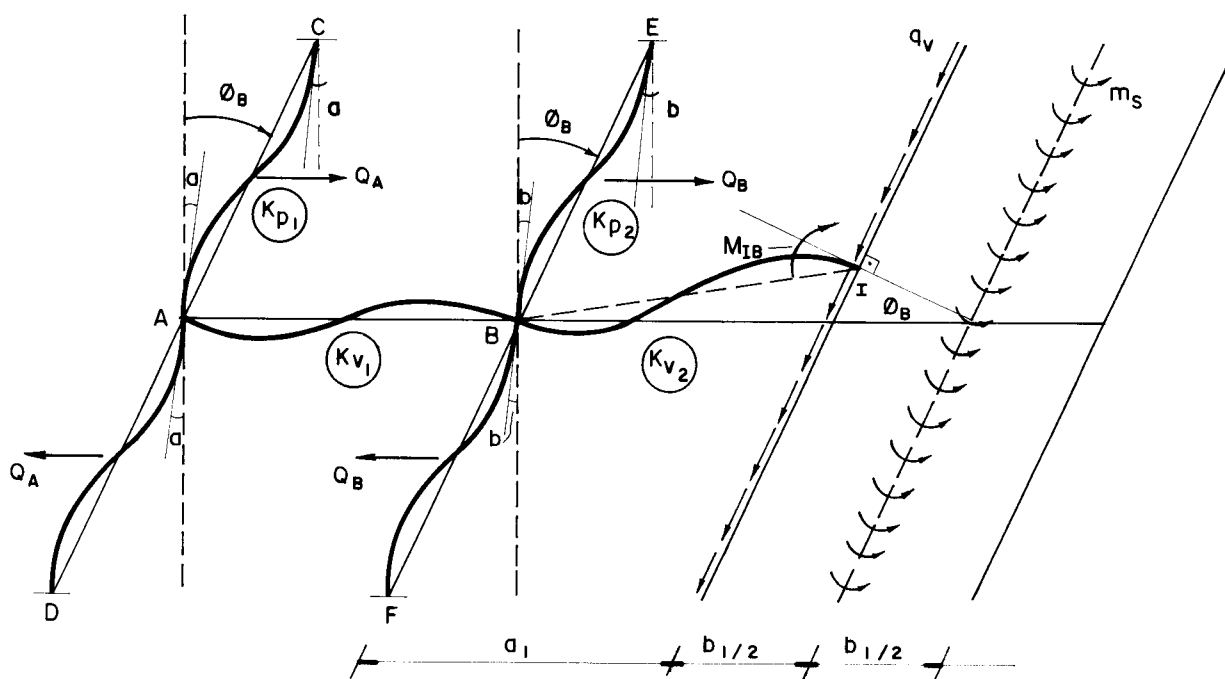


Figura A.2 - Deformação do painel devido a  $\phi_B$

Designam-se por  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  as rotações dos nós A e B, respectivamente, e por  $K_{p_i}$  e  $K_{v_i}$  as relações  $J_{p_i}/\ell_i$  e  $J_{v_i}/\ell_i$  dos pilares e vigas, respectivamente. Para os pilares que possuem diferentes relações  $J_{p_i}/\ell_i$ , abaixo e acima do andar considerado, toma-se para  $K_{p_i}$  a média destas relações.

Através de uma análise na figura (A.2) conclui-se facilmente que:

$$q_v = \frac{M_{BI} + M_{IB}}{a_1 h} \quad (\text{A.8})$$

e

$$m = \frac{M_{IB}}{h} + q_v \frac{b_1}{2} \quad (\text{A.9})$$

Os momentos que as barras aplicam ao nó A, admitindo-se positivo o sentido horário e iguais rotações dos três nós consecutivos do pilar A, são:

$$\begin{aligned} M_{AC} &= 6EK_{p_1} (\phi_B - a) \\ M_{AD} &= 6EK_{p_1} (\phi_B - a) \\ M_{AB} &= -4EK_{v_1} a - 2EK_{v_1} b \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

e pelo equilíbrio do nó segue:

$$(12K_{p_1} + 4K_{v_1}) a + 2K_{v_1} b = 12K_{p_1} \phi_B \quad (\text{A.11})$$



Da mesma maneira, supondo-se iguais as rotações dos nós B, E e F do pilar B e positivos os momentos de sentido horário aplicados ao nó B, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 M_{BI} &= - 4EK_{v_2} b - 2EK_{v_2} \phi_B - 6EK_{v_2} \left( \phi_B \cdot \frac{b_1}{2a_1} \right) \\
 M_{BA} &= - 4EK_{v_1} b - 2EK_{v_1} a \\
 M_{BE} &= 6EK_{p_2} (\phi_B - b) \\
 M_{BF} &= 6EK_{p_2} (\phi_B - b)
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

e pelo equilíbrio do nó resulta:

$$2K_{v_1} a + (4K_{v_1} + 12K_{p_2} + 4K_{v_2}) b = \left[ 12K_{p_2} - 2K_{v_2} \left( 1 + \frac{3b_1}{2a_1} \right) \right] \phi_B \tag{A.13}$$

A solução do sistema formado pelas equações A.11 e A.13 fornece:

$$\begin{aligned}
 a &= \omega \phi_B \\
 b &= \beta \phi_B
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

com

$$\theta = \frac{4K_{v_1} + 12K_{p_2} + 4K_{v_2}}{2K_{v_1}} \tag{A.15-a}$$

e

$$\varphi = \frac{12K_{P_1} + 4K_{V_1}}{2K_{V_1}} \quad (\text{A.15-b})$$

vem

$$\omega = \left[ 12(K_{P_2} - K_{P_1} \theta) - 2K_{V_2} \left(1 + \frac{3b_1}{2a_1}\right) \right] / \left[ 2K_{V_1} - \theta(12K_{P_1} + 4K_{V_1}) \right] \quad (\text{A.16-a})$$

e

$$\beta = \left\{ 12K_{P_1} - \varphi \left[ 12K_{P_2} - 2K_{V_2} \left(1 + \frac{3b_1}{2a_1}\right) \right] \right\} / \left[ 2K_{V_1} - \varphi(12K_{P_2} + 4K_{V_1} + 4K_{V_2}) \right] \quad (\text{A.16-b})$$

As forças cortantes nos pilares A e B são dadas respectivamente, por:

$$Q_A = \frac{2M_{AC}}{h} \quad (\text{A.17-a})$$

e

$$Q_B = \frac{2M_{BE}}{h} \quad (\text{A.17-b})$$

ou, tendo em vista as equações A.10, A.12 e A.14,

$$Q_A = \frac{12EK_{P_1}}{h} (1-\omega)\phi_B \quad (\text{A.18-a})$$

e

$$Q_B = \frac{12EK_{P2}}{h} (1-\beta)\phi_B \quad (\text{A.18-b})$$

Desprezando-se o efeito do giro  $\phi_s$  da parede devido à força cortante, que é considerado pequeno quando comparado com  $\phi_B$ , tem-se o giro total  $\phi = \phi_B$  e, de acordo com as equações (A.18), obtêm-se, para os parâmetros de rigidez dos pilares à força cortante, as seguintes expressões:

$$s_A = \frac{12EK_{P1}}{h} (1-\omega) \quad (\text{A.19-a})$$

$$s_B = \frac{12EK_{P2}}{h} (1-\beta) \quad (\text{A.19-b})$$

A rigidez total do pórtico à força cortante resulta da soma

$$s = s_A + s_B = \frac{12E}{h} \left[ K_{P1} (1-\omega) + K_{P2} (1-\beta) \right] \quad (\text{A.20})$$

Considerando-se a expressão

$$M_{IB} = 4EK_{v2} \phi_B + 2EK_{v2} b + 6EK_{v2} \phi_B \frac{b_1}{2a_1} \quad (\text{A.21})$$

e as equações (A.9), (A.12) e (A.14), obtêm-se:

$$m = \frac{EK_{v2}}{h} \left[ 4 + 2\beta + \frac{3b_1}{a_1} \left( 2 + \beta + \frac{b_1}{a_1} \right) \right] \phi_B \quad (\text{A.22-a})$$

Comparando-se as equações (A.7) e (A.22) conclui-se que:

$$K_1 = \frac{EK_v}{h} \left[ 4 + 2\beta + \frac{3b_1}{a_1} \left( 2 + \beta + \frac{b_1}{a_1} \right) \right] \quad (\text{A.22-b})$$

## 2.2 - Coefficiente $K_2$

Considerando-se somente a deformação por força cortante, a parede terá uma rotação  $\phi_s$  conforme indica-se na figura (A.3).

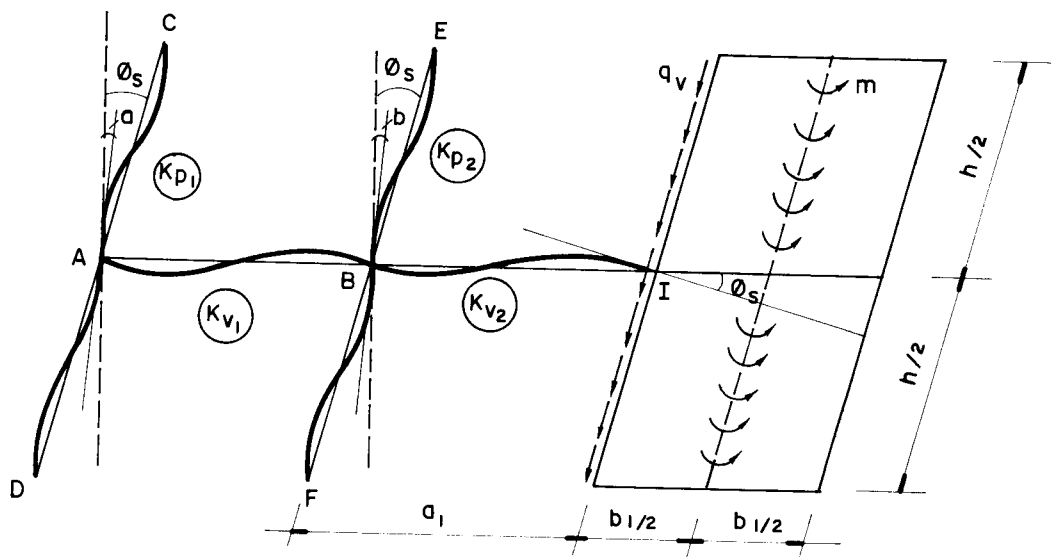


Figura A.3 - Deformação do painel devido a  $\phi_s$

O momento  $m$  distribuído ao longo do eixo da parede é dado por:

$$m = K_2 \phi_s \quad (\text{A.23})$$

Admitindo-se iguais rotações em três nós consecutivos de um mesmo pilar encontram-se, através do equilíbrio dos nós A e B, os seguintes valores para as rotações  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  dos respectivos nós:

$$\begin{aligned} a &= \omega\theta \\ b &= \beta\theta \end{aligned} \tag{A.24}$$

com

$$\omega = \frac{12(K_{p2} - K_{p1}) - 2K_{v2}}{2K_{v1} - (12K_{p1} + 4K_{v1})\theta} \tag{A.25-a}$$

e

$$\beta = \frac{12K_{p1} - \varphi(12K_{p2} - 2K_{v2})}{2K_{v1} - (12K_{p2} + 4K_{v2} + 4K_{v1})\varphi} \tag{A.25-b}$$

e  $\theta$  e  $\varphi$  dados pelas equações (A.15).

Tendo-se em vistas as expressões

$$M_{IB} = 4EK_{v2} \phi_s + 2EK_{v2} b \tag{A.26}$$

$$m = \frac{M_{IB}}{h} + q \cdot \frac{b_1}{2} \tag{A.27}$$

e

$$q = \frac{M_{IB} + M_{BI}}{a_1 h} \tag{A.28}$$

e as equações (A.25), resulta:

$$m = \frac{EK_4}{h} \left[ 4 + 2\beta \left( 1 + \frac{3b_1}{2a_1} \right) + \frac{3b_1}{a_1} \right] \phi_s \quad (\text{A.29})$$

Comparando-se as equações (A.23) e (A.29) obtêm-se para  $K_2$  a expressão:

$$K_2 = \frac{EK_v}{h} \left[ 4 + 2\beta \left( 1 + \frac{3b_1}{2a_1} \right) + \frac{3b_1}{a_1} \right] \quad (\text{A.30})$$

APÊNDICE B

Resumo da teoria de flexo-torção

B.1 - Introdução

Apresenta-se neste apêndice um resumo da teoria de flexo-torção, ou teoria das barras de seção delgadas, tomando-se por base os trabalhos desenvolvidos por Rachid [10] e Schiel [12]. Esta teoria é utilizada na solução de estruturas de edifícios altos contendo paredes de seção aberta.

Na figura (B.1) indica-se uma barra de seção aberta de paredes finas e define-se um sistema local de eixos  $oxyz$  com origem no centro de gravidade da seção transversal, sendo  $oz$  longitudinal e  $ox$  e  $oy$  eixos principais de inércia. Define-se ainda uma coordenada  $s$  na linha do esqueleto (linha que divide a espessura  $t$  ao meio) da seção transversal, de origem  $O_s$  convenientemente escolhida.

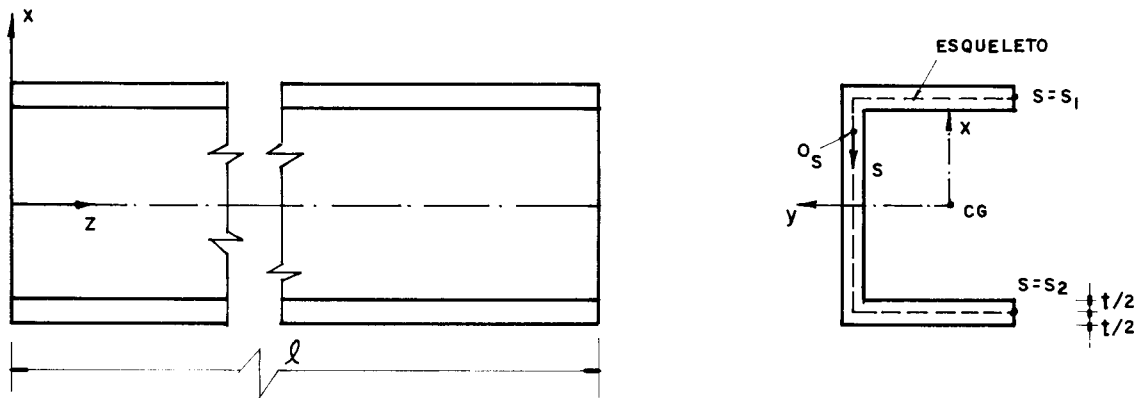


Figura B.1 - Sistemas de eixos em uma barra de seção aberta de paredes finas.

A espessura  $t$  pode variar com  $s$  e o elemento de área é dado por:

$$dS = t ds \quad (B.1)$$

São feitas as seguintes suposições:

- a) A barra é de paredes finas, ou seja, a espessura  $t$  é bem menor que as outras dimensões características do esqueleto e essas bem menores que o comprimento  $l$  da barra.
- b) As dimensões da seção transversal não variam ao longo do eixo  $oz$ .
- c) A seção transversal é indeformável no seu plano ( $xy$ )

## B.2 - Centro de torção ou de cisalhamento

Define-se como centro de torção o ponto do plano da seção transversal pelo qual deve passar o plano de aplicação das cargas transversais de modo que não ocorra torção, e sim, apenas flexão.

Da Resistência dos Materiais sabe-se que as tensões de cisalhamento provocadas por uma força cortante  $Q$  são dadas por:

$$\tau = \frac{QM_s}{tJ} \quad (B.2)$$

onde o momento estático  $M_s$  e o momento de inércia  $J$  são tomados em relação ao eixo apropriado.

Para um carregamento paralelo ao plano  $xz$ , deve-se fazer em (B.2)

$$Q = Q_x$$



$$J = J_y$$

$$M_s = \int_{s_1}^s x \, dS \quad (B.3)$$

A condição que fornece um dos lugares geométricos do centro de torção  $D$ , é que a resultante dos momentos das tensões  $\tau_{Q_x}$ , supostas uniformemente distribuídas na espessura  $t$  (figura B.2-a), em relação ao centro de torção seja nula. Tem-se então:

$$\int_S (\tau_{Q_x} \, dS) n = 0 \quad (B.4)$$

onde  $\underline{n}$  é a distância do centro de torção  $D$ , à tangente ao esqueleto, conforme indica-se na figura (B.2).

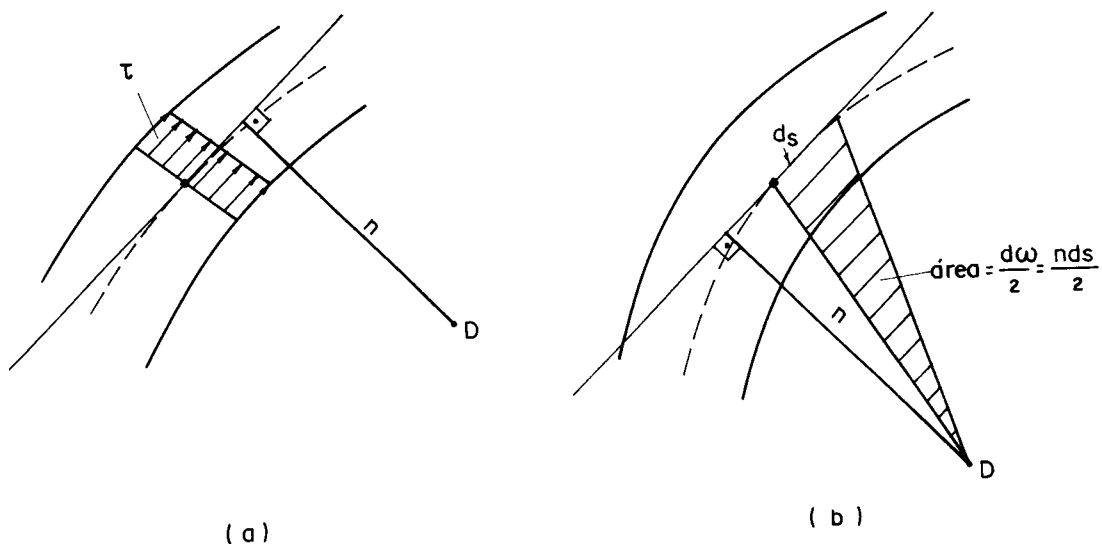


Figura B.2 - Centro de torção e área setorial

Substituindo-se as equações (B.2) e (B.3) na equação (B.4) obtêm-se:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[ \int_{s_1}^s x \, dS \right] n \, ds = 0 \quad (\text{B.5})$$

Efetua-se a integração por partes e considerando-se que o momento estático é nulo nos pontos extremos da seção, resulta:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[ \int_{s_1}^s n \, ds \right] x \, dS = 0 \quad (\text{B.6})$$

Um segundo estudo, análogo a este, para cargas paralelas ao plano (yz) fornece a seguinte condição:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[ \int_{s_1}^s n \, ds \right] y \, dS = 0 \quad (\text{B.7})$$

Define-se como área setorial,  $\omega$ , a seguinte característica geométrica:

$$\omega = \int_{s_1}^s n \, ds \quad (\text{B.8})$$

Observa-se que o elemento de área setorial  $d\omega$  representa, conforme a figura B.2-b, o dobro da área do setor determinado pelo comprimento  $ds$  do elemento e o polo D.

Substituindo-se a equação (B.8) nas equações (B.6) e (B.7) resultam as duas condições que definem a posição do centro de torção, ou seja:

$$\int_S \omega x \, dS = 0$$
$$\int_S \omega y \, dS = 0 \quad (\text{B.9})$$

A posição da origem da coordenada  $s$  não influe nas condições (B.9) pois deslocando-se a origem aparecerá um acréscimo constante na função  $\omega$  cuja contribuição às integrais (B.9) será nula, por ser nulo o momento estático quando se considera a seção inteira.

Para simplificações futuras, determina-se a posição da origem  $O_s$  de maneira a satisfazer a condição:

$$\int_S \omega \, dS = 0 \quad (\text{B.10})$$

Caso se tenha a área setorial  $\bar{\omega}$  com origem arbitrária e se queira a área setorial  $\omega$ , satisfazendo (B.10), basta fazer:

$$\omega = \bar{\omega} - C \quad (\text{B.11})$$

que substituída em (B.10) fornece:

$$C = \frac{1}{S} \int_S \bar{\omega} \, dS \quad (\text{B.12})$$

### B.3 - Fórmulas para as coordenadas do centro de torção

As equações (B.9), que definem a posição do centro de cisalhamento  $D$ , apresentam-se em uma forma que impede aplicações diretas na determinação das coordenadas de  $D$ . Uma interpretação geométrica da área setorial  $\omega$  fornecerá expressões, nestas coordenadas, de fácil utilização.

A figura (B.3) mostra um trecho do esqueleto com origem  $O_s(x_o, y_o)$  e um ponto genérico  $Q(x,y)$ . Pelos pontos  $D(x_D, y_D)$  (centro de cisalhamento),  $O_s$  e  $Q$ , são traçadas retas paralelas aos eixos principais de inércia  $O_x$  e  $O_y$ . Sendo  $\Delta$  a área do triângulo  $DNO_s$  (ou  $DMO_s$ ), por geometria conclui-se que:

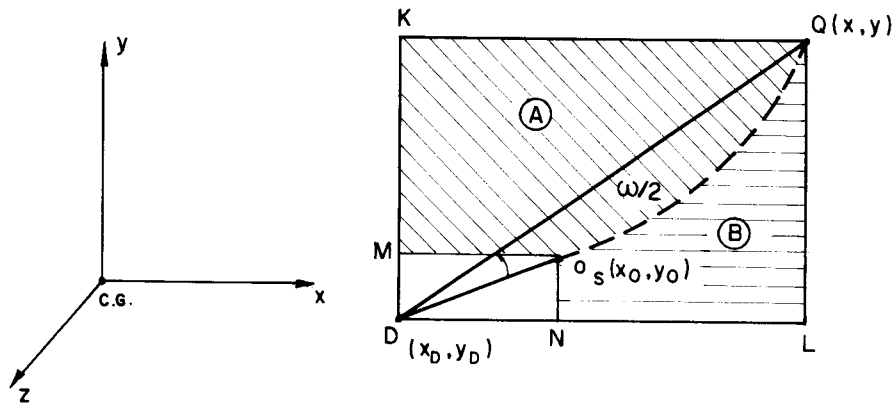


Figura B.3 - Propriedades da área setorial

$$2\Delta + A + B = \left(\frac{\omega}{2} + B + \Delta\right) \cdot 2 \quad (B.13)$$

onde A e B são as áreas hachuradas da figura (B.3) e  $\omega$  é a área setorial com polo D.

Da equação (B.13) resulta:

$$\omega = A - B \quad (B.14)$$

O sinal da função  $\omega$  é positivo quando o raio vetor traçado de D gira, a partir de  $O_s$  para um ponto Q, no sentido horário, para um observador olhando no sentido positivo do eixo oz.

Para obterem-se finalmente as fórmulas procuradas escolhe-se arbitrariamente um polo provisório  $p(x_p, y_p)$  e

indica-se por  $\omega_p$  a área setorial com este polo, conforme observa-se na figura (B.4). Aplicando-se a propriedade (B.14) da área setorial à disposição indicada na figura (B.4), pode-se escrever:

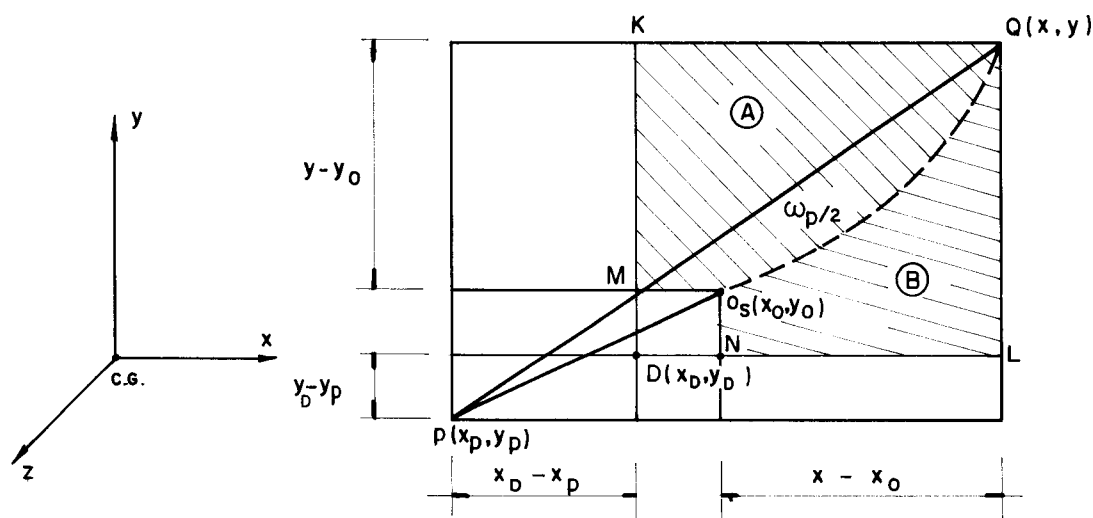


Figura B.4 - Área setorial com polo arbitrário

$$\omega_p = [A + (y - y_o)(x_D - x_p)] - [B + (x - x_o)(y_D - y_p)] \quad (B.15)$$

Rearranjando-se a equação (B.15) e utilizando-se (B.14), chega-se a:

$$\omega = \omega_p + (x - x_o)(y_D - y_p) - (y - y_o)(x_D - x_p) \quad (B.16)$$

Como os eixos  $ox$  e  $oy$  são eixos principais de inércia, valem as equações:

$$\int_S x^2 dS = J_y$$

$$\int_S y^2 dS = J_x$$
$$\int_S x dS = \int_S y dS = \int_S xy dS = 0 \quad (B.17)$$

Substituindo-se a equação (B.16) nas equações (B.9) e utilizando-se (B.17), obtêm-se as fórmulas para as coordenadas do centro de torção em relação a um sistema de eixos no centro de gravidade da seção com x e y eixos principais de inércia:

$$x_D = x_p + \frac{1}{J_x} \int_S \omega_p y dS$$
$$y_D = y_p - \frac{1}{J_y} \int_S \omega_p x dS \quad (B.18)$$

#### B.4 - Torção uniforme ou torção livre ou torção de Saint-Venant

##### B.4.1 - Condições para a torção livre

As condições para que uma barra fique solicitada a torção livre são:

- a) A seção transversal da barra é constante com z.
- b) A barra não possui vínculos que impeçam deslocamentos longitudinais.
- c) O momento torçor solicitante  $M_t$  deve ser constante com z.

No caso de não serem satisfeitas estas condições tem-se solicitação à flexo-torção.

Da Resistência dos Materiais sabe-se que o ângulo de giro, na torção livre é dado por:

$$\phi' = \frac{M_t}{GJ_t} \quad (\text{B.19})$$

onde

$G$  é o módulo de elasticidade transversal

$J_t$  é o momento de inércia à torção expresso por:

$$J_t = \frac{1}{3} \int_s t^3 ds \quad (\text{B.20})$$

com  $t$  sendo a espessura da parede da seção da barra.

Convencionou-se, neste estudo, que o momento torçor  $M_t$  é positivo quando solicita um parafuso direito no sentido de apertá-lo e a rotação  $\phi$  será positiva quando para um observador sobre o eixo  $z$  e olhando no seu sentido positivo for no sentido anti-horário, conforme indica-se na figura (B.5).

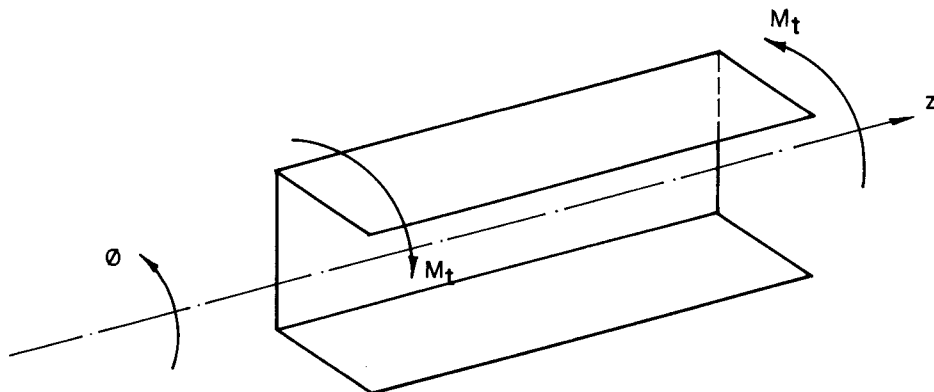


Figura B.5 - Convenção para  $M_t$  e  $\phi$  positivos

B.4.2 - Deslocamento longitudinal

Consideram-se agora os seguintes deslocamentos:

w - deslocamento na direção de z

v - deslocamento na direção da ordenada s

Quando a seção sofre um giro em torno do centro de torção, um ponto genérico Q do esqueleto executa um deslocamento  $\overline{QQ'}$ , conforme indica-se na figura (B.6).

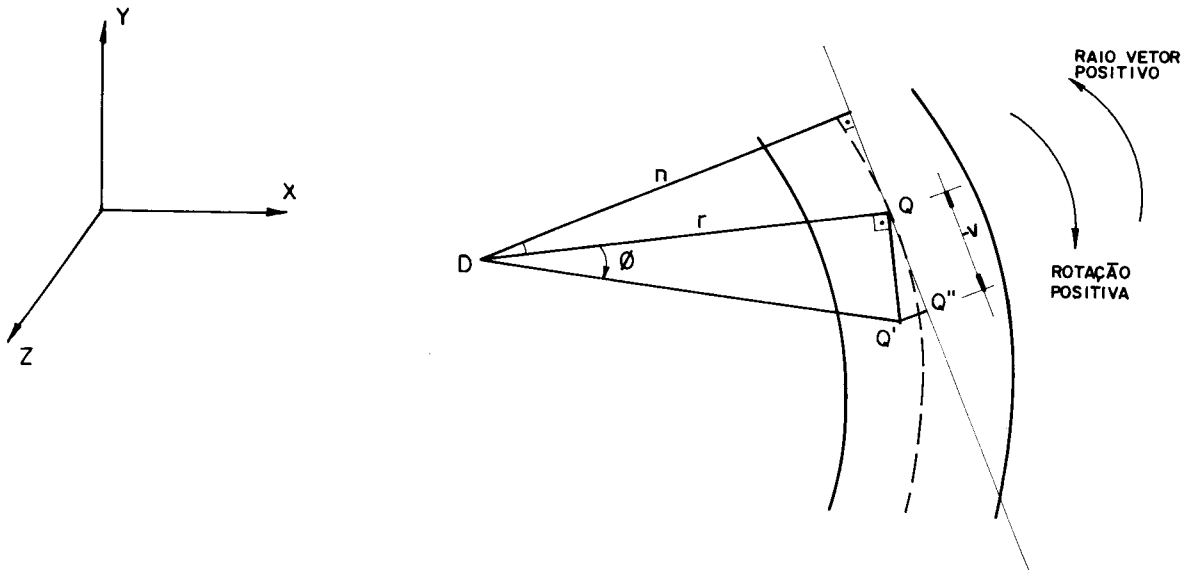


Figura B.6 - Deslocamento de um ponto do esqueleto

Para pequenas rotações pode-se escrever:

$$\overline{QQ'} = \phi r \quad (B.21)$$

onde r é o comprimento do raio vetor traçado do centro de torção ao ponto genérico Q do esqueleto.



A projeção de  $\overline{QQ'}$  sobre a tangente ao esqueleto fornece o deslocamento  $v$ , ou seja:

$$-v = n\phi \quad (B.22)$$

onde  $n$  é a distância da tangente à linha do esqueleto em  $Q$  ao centro de torção  $D$ .

A razão do sinal negativo na equação (B.22) é devido as convenções de sinais para  $\phi$  (positivo no sentido anti-horário para um observador olhando no sentido positivo do eixo  $z$ ) e para a coordenada  $s$  (positiva se o raio vetor girar no sentido horário para um observador posicionado em  $z$  e olhando no seu sentido positivo).

Pela Teoria da Elasticidade um elemento  $ds \cdot dz$  do esqueleto sofre uma deformação transversal (distorção)  $\gamma$  dada por:

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} \quad (B.23)$$

Na linha esqueleto a tensão tangencial  $\tau$ , é nula e por Hooke conclui-se que a distorção também o será. Desta maneira, substituindo-se a equação (B.22), derivada uma vez em relação a  $z$ , na equação (B.23), para  $\gamma = 0$ , obtém-se:

$$-n\phi' + \frac{\partial w}{\partial s} = 0$$

ou,

$$\frac{\partial w}{\partial s} = n\phi' \quad (B.24)$$

Na torção livre o deslocamento longitudinal  $w$  não é função de  $z$  e, integrando-se a equação (B.24) em  $s$ , desde a origem  $O_s$  até o ponto genérico  $Q$ , obtêm-se:

$$w = \phi' \int_{s_1}^s n \, ds \quad (\text{B.25})$$

Usando-se a definição de área setorial dada pela equação (B.8), resulta:

$$w = \omega \phi' \quad (\text{B.26})$$

Os deslocamentos longitudinais  $w$ , denominados empenamentos, são contados a partir da origem  $O_s$  e considerados positivos quando concordantes com o sentido positivo do eixo  $Oz$ .

## B.5 - Torção não uniforme ou flexo-torção

### B.5.1 - Hipóteses de cálculo

Como estão sendo consideradas somente barras de seção constante, a ocorrência de flexo-torção ficará restrita aos casos em que o momento torçor não é constante ou aquelas em que há vínculos que impeçam os deslocamentos longitudinais.

A suposição básica para a resolução do problema de flexo-torção é que a equação (B.26) continua válida, agora com a particularidade de que a derivada do ângulo de giro  $\phi$ , não é mais constante com  $z$ , como no caso da torção livre.

### B.5.2 - Tensão normal de flexo-torção

Serão desprezadas as tensões normais, com exceção daquelas em cortes transversais. Indicam-se  $\sigma_z$  e  $\epsilon_z$  como a tensão normal e a deformação longitudinal, respectivamente. Pela lei de Hooke e pela Teoria da Elasticidade escreve-se:

$$\sigma_z = E\epsilon_z$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (B.27)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal.

Combinando-se as equações (B.26) e (B.27) chega-se a:

$$\sigma_z = E \omega \phi'' \quad (B.28)$$

A proporcionalidade entre  $\sigma_z$  e  $\omega$  chama atenção para o fato que a tensão  $\sigma_z$  não tem resultante, nem força normal e nem momento fletor, como se verifica pelas equações (B.10) e (B.9). O efeito das tensões  $\sigma_z$  será de um novo esforço solicitante, chamado bimomento, definido adiante.

Consideram-se positivas as tensões longitudinais  $\sigma_z$  de tração.

### B.5.3 - Tensão tangencial de flexo-torção

Na figura (B.7-a) indica-se um elemento de comprimento dz limitado pelas coordenadas  $s_1$  e s do esqueleto. Observa-se que devido a variação das tensões normais  $\sigma_z$ , o e-

quilíbrio neste elemento só será mantido com a presença de tensões de cisalhamento. Estas tensões são denominadas de tensões tangenciais de flexo-torção e indicadas por  $\tau_{ft}$ .

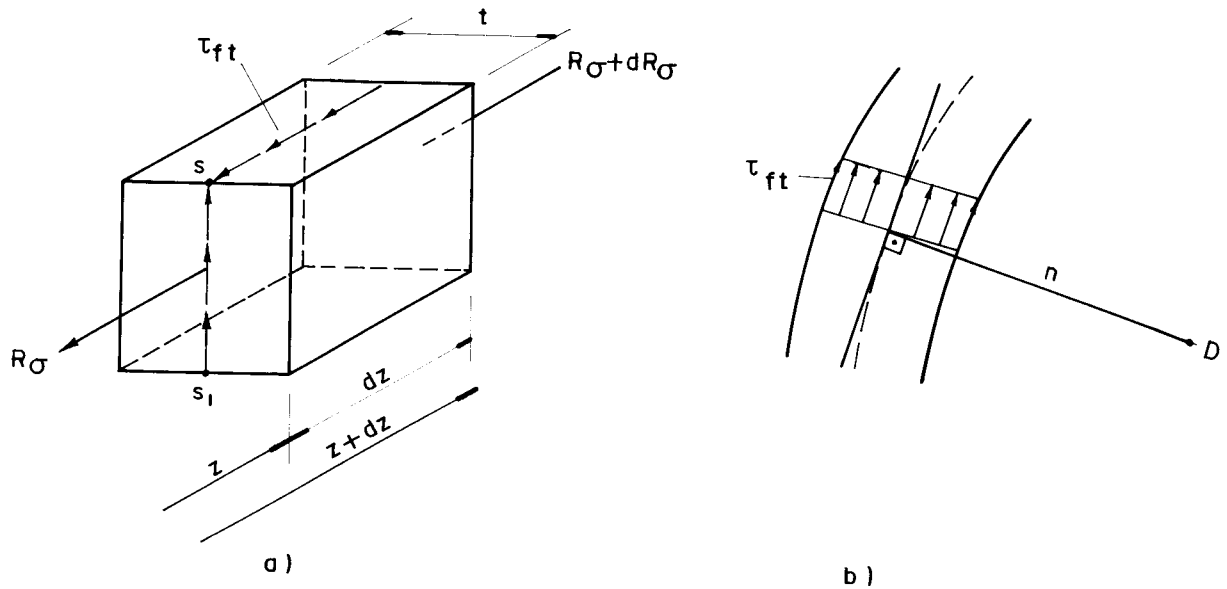


Figura B.7 - Tensões tangenciais de flexo-torção

Sendo  $R_\sigma$  a resultante das tensões  $\sigma_z$  na face da coordenada  $z$ , obtêm-se:

$$R_\sigma = \int_{s_1}^s \sigma_z dS$$

ou, tendo-se em vista a equação (B.28)

$$R_\sigma = E\phi'' \int_{s_1}^s \omega dS \quad (B.29)$$

Pelo equilíbrio do elemento considerado na direção  $z$  e usando a equação (B.29), chega-se a:

$$\tau_{ft} = \frac{E\phi'''}{t} \int_{s_1}^s \omega \, dS \quad (B.30)$$

#### B.5.4 - Momento de flexo-torção

As tensões  $\tau_{ft}$  são suficientemente pequenas para não ameaçarem as bases de cálculo, ou seja nulidade da distorção no esqueleto. Porém, sua contribuição para o momento torçor é considerável. Denomina-se  $M_{ft}$ , momento de flexo-torção, a contribuição destas tensões.

Conforme indica-se na figura (B.7-b), onde  $\underline{n}$  representa o braço das tensões tangenciais  $\tau_{ft}$  em relação ao centro de torção D, o momento  $M_{ft}$  resulta em:

$$M_{ft} = \int_{s_1}^{s_2} \tau_{ft} \, dS \cdot n \quad (B.31)$$

Substituindo-se a equação (B.30) na equação (B.31) e usando-se a equação (B.1), obtêm-se:

$$M_{ft} = E\phi''' \int_{s_1}^{s_2} \left[ \int_{s_1}^s \omega \, dS \right] n \, ds \quad (B.32)$$

Integrando-se a equação (B.32) por partes, e usando-se as equações (B.8) e (B.10), chega-se a:

$$M_{ft} = - E\phi''' \int_S \omega^2 \, dS \quad (B.33)$$

Definindo-se:

a) Momento setorial de inércia,  $J_\omega$

$$J_\omega = \int_S \omega^2 dS \quad (\text{B.34})$$

b) Momento estático setorial,  $S_\omega$

$$S_\omega = \int_{s_1}^s \omega dS \quad (\text{B.35})$$

a equação (B.33) pode ser escrita como:

$$M_{ft} = - EJ_\omega \phi''' \quad (\text{B.36})$$

Substituindo-se as equações (B.36) e (B.35) na equação (B.30), obtêm-se:

$$\tau_{ft} = - \frac{M_{ft} S_\omega}{t J_\omega} \quad (\text{B.37})$$

#### B.5.5 - Equação diferencial da flexo-torção

O momento torçor total  $M_t$  será obtido com a contribuição das tensões de cisalhamento da flexo-torção,  $\tau_{ft}$ , e das tensões de cisalhamento da torção livre,  $\tau_\ell$ . Desta maneira, pode-se escrever:

$$M_t = M_\ell + M_{ft} \quad (\text{B.38})$$

onde,  $M_{ft}$  é o momento torçor da flexo-torção e  $M_\ell$  é o momento torçor da torção livre que, de acordo com a equação (B.19) é expresso por:

$$M_{\rho} = GJ_t \phi' \quad (\text{B.39})$$

Substituindo-se as equações (B.39) e (B.36) na equação (B.38), resulta:

$$M_t = - EJ_{\omega} \phi''' + GJ_t \phi' \quad (\text{B.40})$$

A equação acima quando solucionada fornece a expressão para o ângulo de giro  $\phi$  possibilitando-se encontrar, a partir desta solução, todas as grandezas envolvidas no problema da flexo-torção.

Pode-se representar a equação (B.40) em função do momento torçor distribuído  $m$ , ou seja:

$$m = M_t' = - EJ_{\omega} \phi''' + GJ_t \phi'' \quad (\text{B.41})$$

Indica-se na figura (B.8) a convenção positiva para  $m$  e  $M_t$ .

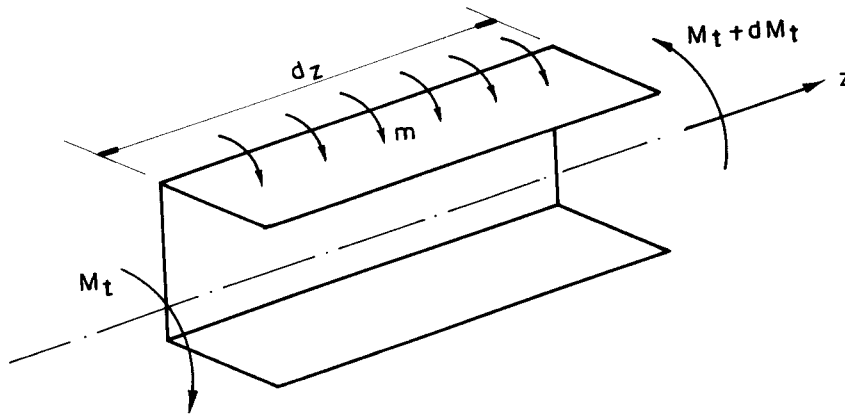


Figura B-8 - Convenção para os momentos torçores positivos

B.5.6 - Introdução do Bimomento

Vlassov [15] introduziu uma nova grandeza chamada de bimomento e definida por:

$$B = \int_S \sigma_z \omega \, dS \quad (B.42)$$

Substituindo-se as equações (B.28) e (B.34) na equação acima, obtêm-se:

$$B = EJ_\omega \phi'' \quad (B.43)$$

Combinando-se as equações (B.28) e (B.43), obtêm-se uma expressão para  $\sigma_z$  análoga a da flexão simples e dada por:

$$\sigma_z = \frac{B}{J_\omega} \cdot \omega \quad (B.44)$$

Derivando-se uma vez a equação (B.43) e comparando-se com (B.36), resulta:

$$M_{ft} = - B' \quad (B.45)$$

Comparando-se a equação (B.45) com a equação (B.37), obtêm-se:

$$\tau_{ft} = \frac{B' S_\omega}{t J_\omega} \quad (B.46)$$



No caso das cargas axiais  $P_i$ , positivas de tração, aplicadas na extremidade de uma viga em pontos de áreas setoriais  $\omega_i$ , o bimomento  $\bar{e}$  é calculado por:

$$B = \sum P_i \omega_i \quad (B.47)$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - BARBOSA, J.A. Edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis, sob carga lateral. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1978. 330 p. (Dissertação de mestrado).
- 2 - CARDAN, B. Concrete shear walls combined with rigid frames in multistory buildings subjected to lateral loads. A.C.I. Journal: 299-315, Sept. 1961.
- 3 - CARVALHO, F. Anastácio C. Instabilidade de edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1980. 142 p. (Dissertação de mestrado).
- 4 - CARVALHO, Flávio A.C. Efeitos de cargas verticais em estruturas de edifícios altos. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1982. 145 p. (Dissertação de mestrado).
- 5 - FORSYTHE, G.E. & MOLER, C.B. Computer solution of linear algebraic systems. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1967. p. 68-74.
- 6 - GLUCK, J. & GELLERT, M. Buckling of lateral restrained thin-walled cantilevers of open cross section. Journal of Structural Division, ASCE, 98(9): 2031-2042, Sept. 1972.
- 7 - ——— & ———. Non-linear analysis of an elastic supported and lateral restrained cantilever. Proceedings Institution of Civil Engineers, 51 (3): 561-566, Mar. 1972.
- 8 - HILDEBRAND, F.B. Advanced calculus for engineers. New York, Prentice-Hall, 1949. p. 218-223, 234-235.

- 9 - MANCINI, E. Análise contínua de estruturas de edifícios elevados sujeitas à ação do vento. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1973. 140 p. (Tese de doutoramento).
- 10 - RACHID, M. Instabilidade de barras de seção delgada. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1975. 119 p. (Tese de doutoramento).
- 11 - ROGERS, G.L. An introduction to the dynamics of framed structures. New York, John Wiley & Sons, 1959. p. 189-198.
- 12 - SCHIEL, F. Barras de seção delgada. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1965. 119p.
- 13 - SEIXAS, R.S. Integração das equações da técnica do meio contínuo pelo método Stodola-Vianello. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1981. 140 p. (Dissertação de mestrado).
- 14 - STAMATO, M.C. Associação contínua de painéis de contraventamento. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1971. 72 p.
- 15 - VLASSOV, B.Z. Pièces longues en voiles minces. Eyrolles, 1962. 655 p.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - BARBOSA, J.A. Edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis, sob carga lateral. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1978. 330 p. (Dissertação de mestrado).
- 2 - CARDAN, B. Concrete shear walls combined with rigid frames in multistory buildings subjected to lateral loads. A.C.I. Journal: 299-315, Sept. 1961.
- 3 - CARVALHO, F. Anastácio C. Instabilidade de edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1980. 142 p. (Dissertação de mestrado).
- 4 - CARVALHO, Flávio A.C. Efeitos de cargas verticais em estruturas de edifícios altos. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1982. 145 p. (Dissertação de mestrado).
- 5 - FORSYTHE, G.E. & MOLER, C.B. Computer solution of linear algebraic systems. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1967. p. 68-74.
- 6 - GALAMBOS, T.V. Structural members and frames. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1968. 373 p.
- 7 - GLUCK, J. & GELLERT, M. Buckling of lateral restrained thin-walled cantilevers of open cross section. Journal of Structural Division, ASCE, 98(9): 2031-2042, Sept. 1972.
- 8 - ——— & ———. Non-linear analysis of an elastic supported and lateral restrained cantilever. Proceedings Institution of Civil Engineers, 51(3): 561-566, Mar. 1972.

- 9 - HEHL, M.E. Sistema de programação FORTRAN IV G-H.  
São Paulo. McGraw-Hill do Brasil, 1972. 232 p.
- 10 - HILDEBRAND, F.B. Advanced calculus for engineers.  
New York, Prentice-Hall, 1949. p. 218-223, 234-235.
- 11 - MANCINI, E. Análise contínua de estruturas de edifícios elevados sujeitas à ação do vento. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1973. 140 p. (Tese de doutoramento).
- 12 - RACHID, M. Instabilidade de barras de seção delgada. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1975. 119 p. (Tese de doutoramento).
- 13 - ROGERS, G.L. An introduction to the dynamics of framed structures. New York, John Wiley & Sons, 1959. p. 189-198.
- 14 - SALVADORI, M.G. & BARON, M.L. Métodos numéricos em engenharia. México, Ed. Continental, 1961. 260 p.
- 15 - SCHIEL, F. Barras de seção delgada. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1965. 119p.
- 16 - SEIXAS, R.S. Integração das equações da técnica do meio contínuo pelo método Stodola-Vianello. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1981. 140 p. (Dissertação de mestrado).
- 17 - STAMATO, M.C. Associação contínua de painéis de contraventamento. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1971. 72 p.
- 18 - TIMOSHENKO, S.P. & GERE, J.M. Theory of elastic stability. New York, McGraw-Hill, 1961. 541 p.
- 19 - VLASSOV, B.Z. Pièces longues en voiles minces. Eyrolles, 1962. 655 p.