

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

SOBRE O EMPREGO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS
NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL
DA DINAMICA DAS ESTRUTURAS

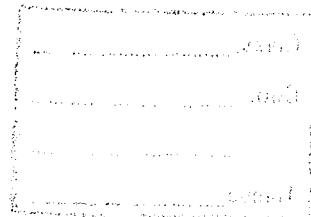
JULIO CESAR MORAN HASSAN

Dissertação de Mestrado apresentada a Escola de Engenharia de São Carlos - USP, para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: PROF. DR. JOSÉ ELIAS LAIER

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

SÃO CARLOS, 1987



À Mirna, Julio Cesar, Yvonne e Lubianca,
os verdadeiros responsáveis por este tra-
balho.

Aos meus pais, fonte permanente de ins-
piração e exemplo.

R E S U M O

Neste trabalho são apresentadas, de maneira ordenada, as técnicas analíticas de integração da equação de movimento assim como alguns dos mais eficientes métodos numéricos de integração do ponto de vista computacional. A atenção é totalmente, aqui, voltada para a equação de movimento de sistemas, com um grau de liberdade, por se constituir na equação básica de estudo de sistemas mais complexos pelo método da superposição modal.

São feitas comparações e os resultados numéricos apresentam excelente aproximação com as respostas exatas obtidas pelas soluções analíticas. Também são levados em consideração os problemas de estabilidade, tempos de processamento (C.P.U.) e armazenamento na análise dos métodos de integração numérica estudados.

A B S T R A C T

In this work, the analytical techniques for integration of the equation of motion as well as any numerical procedures for the efficient computer solution are presented. The basic equation to be studied is the equation of motion of single degree of freedom system, because it is the fundamental equation in the analysis of multi-degree of freedom systems through the normal mode superposition technique.

The maximum values of displacement numerically computed show excellent approach with the exact values given by analytical solution. The CPU times, stability and storage also are considered in the analysis of integration schemes.

S U M Á R I O

<u>I. VIBRAÇÃO LIVRE DE SISTEMAS LINEARES COM UM GRAU DE LIBERDADE</u>	
I.1 - Introdução	2
I.2 - Parâmetros dos componentes de um sistema discreto	5
I.3 - Equação diferencial de movimento de sistemas lineares	8
I.4 - Vibração livre de sistemas amortecidos	11
<u>II. VIBRAÇÃO FORÇADA</u>	
II.1 - Introdução	18
II.2 - Resposta à excitação harmônica simples	19
II.3 - Excitação degrau	24
II.4 - Excitação periódica	25
II.5 - Solicitação não periódica (Excitação de um impulso e convolução integral)	29
II.6 - Solicitação não periódica (Transformada de Fourier)	38
II.7 - Relação entre resposta complexa em frequência e resposta a um impulso unitário	46
<u>III. MÉTODOS NUMÉRICOS DE INTEGRAÇÃO NO TEMPO</u>	
III.1 - Introdução	49
III.2 - Método das diferenças centrais	50
III.3 - Método de Newmark	55
III.4 - Método de Wilson	63
III.5 - Integração numérica na convolução	69

IV. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

IV.1 - Introdução	76
IV.2 - Transformada numérica de Fourier	77
IV.3 - Transformada rápida de Fourier (F.F.T.) ...	82
IV.4 - Algoritmo da transformada rápida de Fourier	96
IV.5 - Transformada rápida modificada	100
IV.6 - Algoritmo da transformada rápida modificada	108
IV.7 - Transformada de Fourier de vetores reais e simétricos complexos	113
IV.8 - Transformada inversa	127
IV.9 - Rearranjo dos elementos dos vetores de solicitação e resposta	129
IV.10- Rearranjo para $N = 2^m \cdot 3$	134
IV.11- Propriedade do algoritmo	138
IV.12- Aplicação na equação de movimento	139
IV.13 - Diagrama de fluxo para computação	140

V. ANÁLISE COMPARATIVA DOS MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

V.1 - Introdução	145
V.2 - Exemplo de estudo	146
V.3 - Convergência dos métodos	148
V.4 - Erros de computação e tempos de processamento	152

APÊNDICE A - RESUMO DA TEORIA DAS SÉRIES DE FOURIER

APÊNDICE B - MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

APÊNDICE C - REGRA DO TRAPÉZIO

APÊNDICE D - PROGRAMAS FORTRAN PARA COMPUTAÇÃO

CAPÍTULO I

**VIBRAÇÃO LIVRE DE SISTEMAS LINEARES
COM UM GRAU DE LIBERDADE.**

I.1 - INTRODUÇÃO

O movimento vibratório, ou vibração, consiste na variação, com relação ao tempo, da configuração de um sistema em torno de uma posição de equilíbrio estável. Qualquer sistema que possui massa e elasticidade é capaz de vibrar, daí a grande importância que tem na análise moderna da engenharia o estudo do comportamento dinâmico de sistemas físicos.

Define-se um sistema como uma associação de componentes atuando em conjunto. Para descrever o comportamento de um sistema físico, torna-se necessário adotar um modelo matemático.

Os componentes de um sistema primeiramente são identificados e então atribuem-se-lhes características de acordo com suas propriedades físicas. Da aplicação das leis da mecânica, obtêm-se as expressões que definem o comportamento do modelo matemático, que, por sua vez, representa uma idealização do sistema físico real. Se o comportamento do modelo matemático aproxima-se com a precisão desejada do comportamento observado experimentalmente no sistema físico, o modelo pode ser considerado aceitável.

As propriedades físicas ou características de um sistema denominam-se parâmetros. Geralmente os sistemas reais são contínuos e seus parâmetros distribuídos continuamente; contudo, em muitos casos, é possível simplificar o estudo, substituindo-se as características distribuídas do sistema por parâmetros concentrados. Portanto, os modelos matemáticos podem ser classificados, de acordo com a maneira que descrevemos as propriedades físicas do sistema, em dois grandes grupos: (1) Sistema discretos e (2) Sistemas contínuos.

O tipo de modelo matemático considerado é de grande importância na análise, uma vez que sua escolha governa a formulação matemática empregada. Os deslocamentos (resposta) de sistemas de parâmetros discretos são obtidos me-

diante a solução de equações diferenciais ordinárias, enquanto que o comportamento dos sistemas contínuos é geralmente descrito em termos de equações diferenciais parciais, e algumas vezes por equações integrais.

Os sistemas vibratórios podem também, de forma geral, ser classificados considerando-se o seu comportamento. Desta forma são divididas em: (1) Sistema lineares e (2) Sistema não lineares. Nos sistemas lineares a causa e o efeito estão relacionados linearmente, isto é, se dobramos o valor da carga, a resposta é dobrada. Em um sistema não linear esta relação de causa e efeito deixa de ser proporcional. Observa-se este fenômeno na vibração de sistemas mecânicos com forças restauradoras não lineares. Por exemplo, o torque restaurador em um pêndulo torcional simples é proporcional a $\sin\theta$, onde θ indica a amplitude; para grandes amplitudes $\sin\theta$ é uma função não linear de θ , mas para pequenas amplitudes $\sin\theta$ pode ser aproximado a θ . Portanto o mesmo pêndulo torcional pode ser classificado como linear para pequenas amplitudes e como não linear para grandes amplitudes.

Para os sistemas lineares a relação entre excitação e resposta admite o princípio da superposição. Isto significa que o modelo matemático colocado para a sua análise, seja na forma de equações diferenciais ou equações integrais, é linear.

O estudo de sistemas não lineares é consideravelmente mais complicado que o anterior, e encontra-se bem menos desenvolvido devido às limitações existentes na teoria das equações diferenciais não lineares, cuja solução é necessária dentro do equacionamento dos modelos matemáticos correspondentes.

Embora a linearidade é uma hipótese na formulação matemática do problema, dentro da qual alguns sistemas respondem melhor que outros para uma determinada tolerância na aproximação exigida nos seus resultados, o estudo linear sempre constitui-se numa primeira aproximação, com validade satisfatória para um intervalo limitado de variação dos parâmetros que definem o problema.

Os sistemas físicos são geralmente complexos e sua análise requer expedientes complicados. A complexidade de um sistema dinâmico vincula-se também com o número de graus de liberdade do sistema. Este número define-se como o número de coordenadas independentes requerido para a descrição do movimento do sistema. Nessas condições um corpo rígido em movimento no plano XY requer três coordenadas para especificar sua posição completamente, isto é, os deslocamentos lineares nas direções X e Y e a rotação angular em torno do eixo Z, perpendicular ao plano XY. Consequentemente este corpo possui três graus de liberdade. O deslocamento de um corpo elástico (por exemplo, uma viga) deve ser especificado em cada ponto do corpo. Daí ser infinito o seu número de graus de liberdade.

Os graus de liberdade de um sistema físico real são infinitos, entretanto, através de modelagens ou hipóteses simplificativas aplicadas, torna-se possível em grande número de problemas de vibração, realizar o estudo sobre sistemas de um número finito de graus de liberdade, e em muitos casos, com exatidão suficiente, com sistemas de um só grau de liberdade.

Neste trabalho somente os sistemas lineares discretos, especificamente os que possuem um só grau de liberdade, são objeto de estudo. Este modelo matemático é o mais simples dentre os modelos discretos, e seu movimento é definido completamente por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, com coeficientes constantes. Tal modelo é frequentemente utilizado como analogia de modelos gerais mais complexos. Em problemas associados com a formulação matemática relativa a sistemas lineares de muitos graus de liberdade e sistema contínuos, nos quais é empregada para solução a técnica conhecida como superposição modal, que possibilita a redução a um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem independentes, cada uma igual à equação de um sistema linear de um grau de liberdade, justifica-se amplamente o seu estudo.

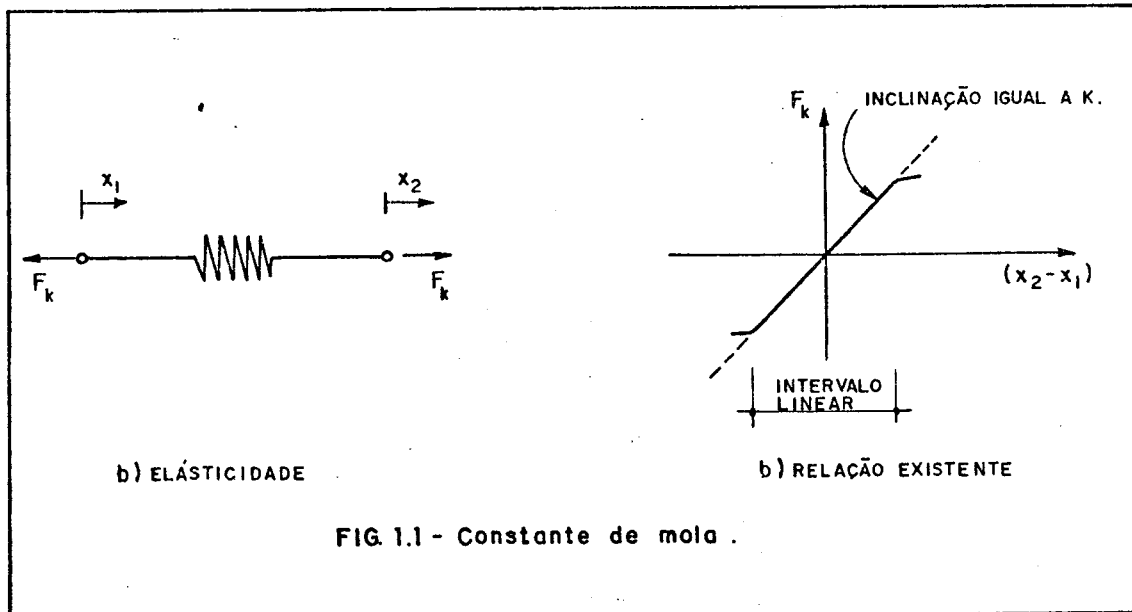
I.2 - PARÂMETROS DOS COMPONENTES DE UM SISTEMA DISCRETO

Os elementos de um sistema discreto são de três tipos (7):

- a) Um elemento recuperador elástico. Relacionando forças a deslocamentos.
- b) Um dispositivo de amortecimento. Relacionando forças a velocidades.
- c) Massa. Relacionando forças a acelerações.

I.2.1 - RECUPERADOR ELÁSTICO

Considere-se uma mola sem massa, sendo solicitada por duas forças de mesma magnitude, atuando nos dois extremos, como indicadas na figura 1.1a.



A deformação da mola é igual à diferença entre os deslocamentos, x_1 e x_2 , dos pontos extremos. A curva da força F_k em função da deformação da mola $(x_2 - x_1)$ encontra-se desenhada na figura 1.1b. O gráfico de F_k em função de $x_2 - x_1$ não corresponde a uma reta, uma vez que para um incremento

da deformação da mola, a força F_k aumenta com "taxa" menor.

Se a força F_k tende a aumentar com a mesma "velocidade" da deformação a mola é dita elástica. A relação força-deformação mostrada na figura 1.1b é obviamente não linear, todavia para pequenos valores de x_2-x_1 , a força pode ser considerada proporcional à deformação e a inclinação da reta é a constante de proporcionalidade K . Uma mola operando neste intervalo é denominada linear e a constante K é conhecida como constante da mola ou elasticidade da mola.

A força F_k é uma força elástica chamada força restauradora porque, numa mola deformada, ela tende a retornar a mola a sua posição indeformada ou estado de equilíbrio (repouso).

I.2.2 - AMORTECEDOR

O amortecedor típico consiste em um pistão contido dentro de um cilindro cheio de óleo ou água. O fluido viscoso pode escoar em torno do pistão.

Este tipo de amortecimento é chamado de amortecimento viscoso e está ilustrado na figura 1.2a.

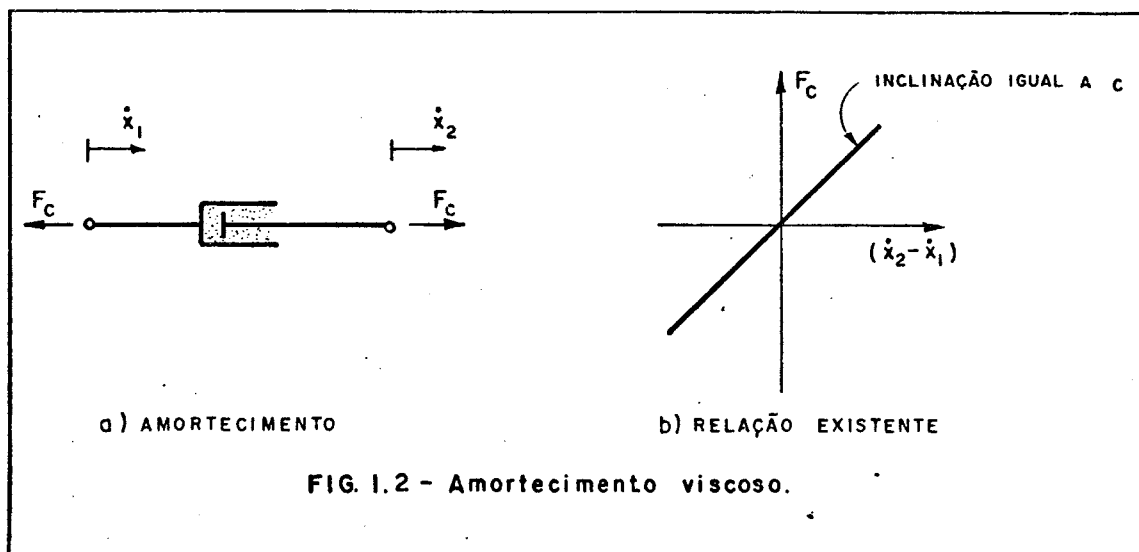


FIG. 1.2 - Amortecimento viscoso.

Supõe-se o amortecedor com massa desprezível. Se as forças F_c , agindo nas extremidades, não provocam apreciáveis distúrbios no escoamento do fluido, a curva $F_c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$, pode ser aproximada por uma reta, ver figura 1.2b. Note-se que os pontos superiores indicam derivação no tempo. A constante de proporcionalidade c é igual à inclinação da reta e chama-se coeficiente de amortecimento viscoso.

A força F_c , corresponde à força de amortecimento, porquanto ela tende a impedir um aumento na velocidade do sistema.

I.2.3 - MASSA

As forças e as acelerações são relacionadas pela massa discreta. Da segunda lei de Newton, tem-se que a força é proporcional à aceleração \ddot{x} , medida em relação a um sistema inercial de referência. A constante de proporcionalidade é a massa m . Ver figura 1.3.

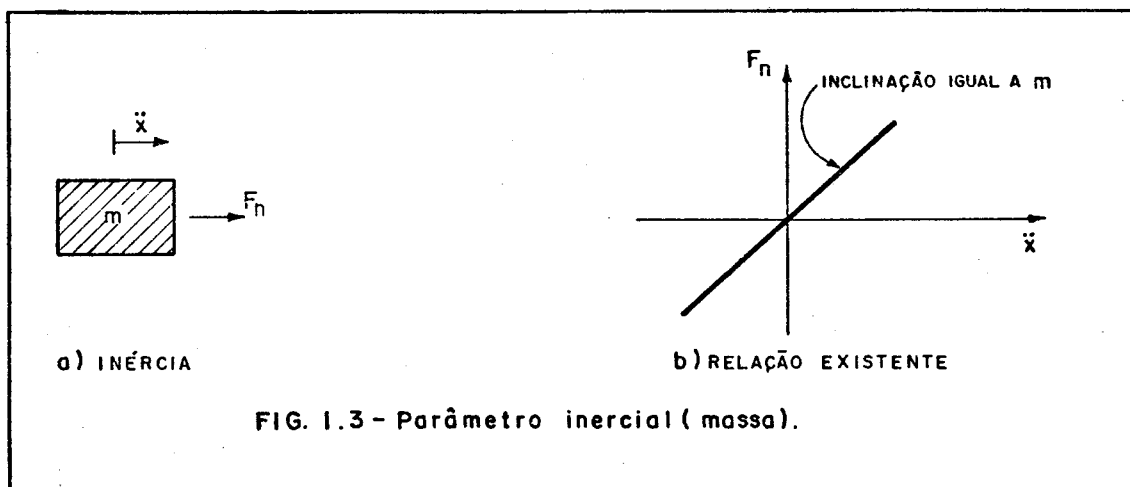


FIG. 1.3 - Parâmetro inercial (massa).

Cabe agora algum comentário à respeito das características dos elementos de um sistema. Note-se o fato de a mola e a massa possuírem característica de armazenamento e liberação de energia. No caso da mola a energia é potencial e no caso da massa a energia é cinética, tendo-se por

tanto que as forças envolvidas são conservativas. O amortecimento dissipa energia, desta forma as forças de amortecimento são não conservativas.

Observe-se também, que apesar da análise anterior ter focado essencialmente o movimento de translação, as propriedades do sistema podem ser utilizadas como analogia para outros tipos de movimentos, como vibração transversal ou de torção.

Na vibração torcional (pêndulo torcional) os deslocamentos angulares θ_1 e θ_2 em dois pontos do pêndulo e o torque restaurador N_k resultam numa curva idêntica à curva 1.1b. O momento amortecedor torcional e o coeficiente de amortecimento viscoso de torção, relacionam-se através de um gráfico similar àquele mostrado na figura 1.2b. Finalmente, se o sistema torsional contém um disco com momento de inércia da massa I e o disco sofre um deslocamento angular θ , a curva M_I em função de $\ddot{\theta}$ é análogo à figura 1.3b, nestas condições M_I é o momento torçor inercial, e é claro que I é igual à inclinação da reta.

I.3 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE MOVIMENTO DE SISTEMAS LINEARES

A análise da equação de movimento de sistemas com um grau de liberdade baseia-se, inicialmente na segunda lei de Newton e posteriormente no estudo do equilíbrio do diagrama da figura 1.4b.

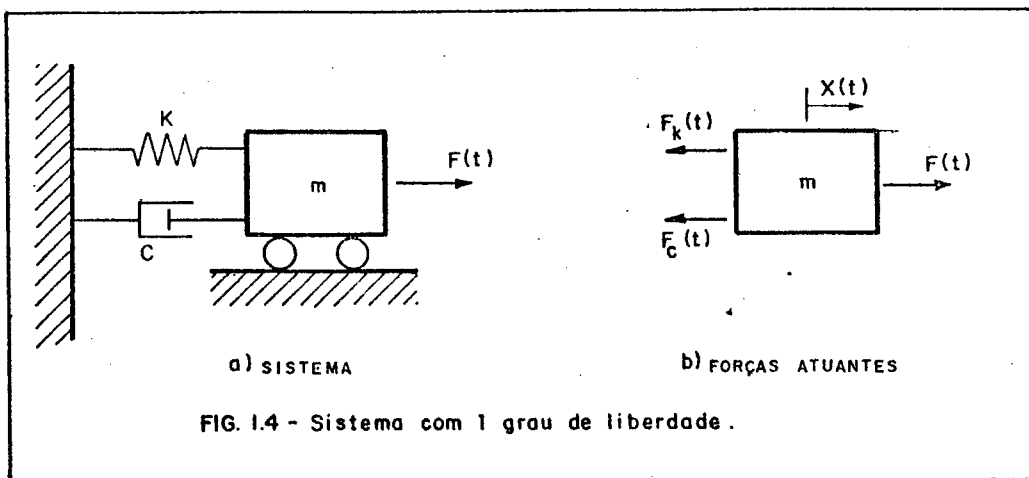


FIG. 1.4 - Sistema com 1 grau de liberdade.

As forças agindo sobre a massa são:

- Força de Inércia: $F_m(t)$
- Força recuperadora elástica: $F_k(t)$
- Força de amortecimento viscoso: $F_c(t)$
- Força externa aplicada: $F(t)$

Mediante a aplicação da segunda lei de Newton, obtem-se:

$$F(t) - F_k(t) - F_c(t) = m\ddot{x}(t) \quad (1.1)$$

As características das forças envolvidas, permitem escrever:

$$F_k(t) = Kx(t) \quad ; \quad F_c = c\dot{x}(t) ,$$

portanto, a equação 1.1 torna-se⁽⁷⁾:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (1.2)$$

A equação 1.2, é a equação diferencial linear ordinária (de segunda ordem) do movimento do sistema. Os coeficientes constantes m , c , K , correspondem aos parâmetros do sistema.

A escolha da posição de referência, neste caso, é óbvia, devido à coincidência entre a posição de equilíbrio e o estado indeformado da mola. Entretanto, esta coincidência não sempre acontece, e permanece a indagação acerca de qual é a mais conveniente posição de referência. Para responder esta pergunta considere-se o sistema da figura 1.5.

Os deslocamentos $y(t)$, são medidos da posição indeformada da mola; desta forma a equação diferencial do movimento fica expressa por:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + Ky(t) - mg = F(t) \quad (1.3)$$

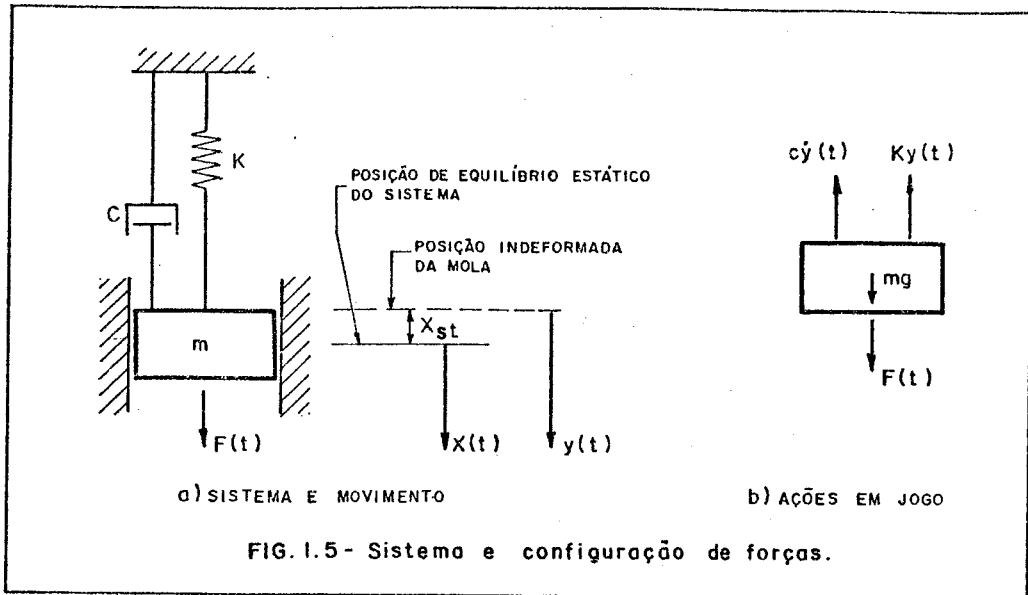


FIG.1.5- Sistema e configuração de forças.

Nesta equação, verifica-se o aparecimento de um termo adicional oriundo da força de gravidade.

A posição de equilíbrio estático difere da posição indeformada da mola de um valor $x_{st} = mg/k$. Se esta posição é utilizada como referência, os deslocamentos passam a ser indicados como,

$$y(t) = x(t) + x_{st} \quad (1.4)$$

Substituindo-se 1.4 e 1.3, chega-se a

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k(x(t) + x_{st}) - mg = F(t) \quad (1.5)$$

Sabe-se que durante todo o tempo $kx_{st} = mg$. Assim sendo, a equação do movimento para o sistema mostrado na figura 1.5, adquire finalmente a forma,

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (1.6)$$

É importante assinalar, que a equação 1.6 é totalmente análoga à equação 1.2, pode-se portanto, concluir

que, medindo-se deslocamentos da posição de equilíbrio estático, a influência da força da gravidade desaparece, uma vez que ela é anulada em todo o tempo pela força elástica kx_{st} da mola.

Evidentemente a escolha da posição de equilíbrio estático como referência para os deslocamentos, é mais conveniente que a posição indeformada da mola, para as hipóteses da formulação da equação do movimento.

I.4 - VIBRAÇÃO LIVRE DE SISTEMAS AMORTECIDOS

Do diagrama de corpo livre da figura 1.4 a equação diferencial do movimento é expressa da seguinte forma,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Pf(t) \quad (1.7)$$

A solução da equação diferencial acima têm duas partes. Se $f(t) = 0$, temos a equação diferencial homogênea, cuja solução corresponde fisicamente àquela de vibração livre com amortecimento. Com $f(t) \neq 0$, obtemos a solução particular devido à excitação sem restrição da solução homogênea.

A parcela da solução geral correspondente à solução homogênea, reveste-se de grande importância uma vez que ela revela aspectos importantes da influência do amortecimento.

No sentido de uma abordagem adimensional a equação 1.7, pode ser colocada na forma⁽¹⁰⁾

$$\ddot{\rho} + 2\gamma\omega_n\dot{\rho} + \omega_n^2\rho = \omega_n^2f(t) \quad (1.8)$$

onde o deslocamento adimensional é dado por

$$\rho = \frac{x}{x_e} \quad (1.9)$$

e,

$$\left. \begin{aligned} x_e &= \frac{P}{k} \\ \omega_n &= \sqrt{k/m} \\ \gamma &= \frac{c}{2m\omega_n} \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

x_e é o deslocamento estático, ω_n a frequência angular natural do sistema sem amortecimento e γ o coeficiente de amortecimento viscoso.

O exame da segunda das equações 1.10 torna evidente uma importante conclusão qualitativa, que pode ser estendida para sistemas mais complexos:

"A frequência natural do sistema é diretamente proporcional à rigidez elástica e inversamente proporcional a massa discreta".

A solução da equação 1.8 é obtida admitindo-se uma solução da forma⁽⁹⁾

$$\rho = Ae^{\alpha t} \quad (1.11)$$

que conduz à seguinte equação característica

$$\alpha^2 + 2\gamma\omega_n\alpha + \omega_n^2 = 0 \quad (1.12)$$

cujas raízes são:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\gamma\omega_n + \omega_n\sqrt{\gamma^2-1} \\ \alpha_2 &= -\gamma\omega_n - \omega_n\sqrt{\gamma^2-1} \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

De acordo com a natureza destas raízes teremos movimentos essencialmente diferentes.

As raízes podem ser

- a) Duas raízes reais negativas ($\gamma > 1$)
- b) Uma raiz real e negativa ($\gamma = 1$)
- c) Duas raízes imaginárias complexas conjugadas, simétrica com relação ao eixo real. ($\gamma < 1$)

Destas três possibilidades, somente a terceira tem, na nossa análise, interesse real, dado o forte amortecimento das duas primeiras, que faz com que desapareça completamente a vibração.

Ao valor limite $\gamma = 1$, chama-se de amortecimento crítico. Da expressão de γ (terceira das equações 1.10) tem-se que para $\gamma = 1$, o coeficiente de amortecimento crítico tem o valor

$$c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} \quad (1.14)$$

A figura 1.6 mostra as equações 1.13 desenhadas num plano complexo, com α ao longo do eixo horizontal. Ela é útil pois fornece uma visão clara da influência do parâmetro γ no comportamento natural do sistema, ou mais especificamente na resposta do sistema.

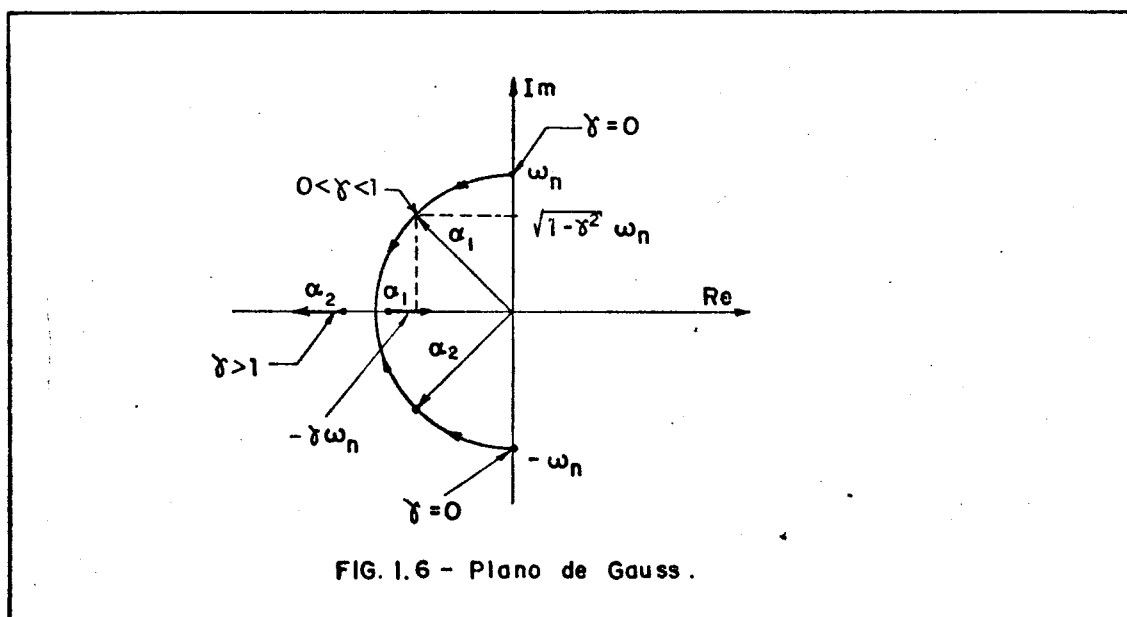


FIG. 1.6 - Plano de Gauss.

Note-se que para $\gamma = 0$, tem-se duas raízes imaginárias $\pm i\omega_n$, correspondendo ao caso de vibração livre não amortecida. Para $0 < \gamma < 1$ as raízes são complexas conjugadas sobre um arco circular convergindo no ponto $-\omega_n$. A medida que γ cresce acima da unidade as raízes permanecem no eixo real com $\alpha_1 \rightarrow 0$ e $\alpha_2 \rightarrow -\infty$.

Quando $\gamma < 1$ a solução da equação 1.8, considerando-se a 1.11, é

$$\rho(t) = \left[A_1 e^{i\sqrt{1-\gamma^2}\omega_n t} + A_2 e^{-i\sqrt{1-\gamma^2}\omega_n t} \right] e^{-\gamma\omega_n t} \quad (1.15)$$

ou

$$\rho(t) = (A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}) e^{-\gamma\omega_n t} \quad (1.16)$$

onde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\gamma^2}$, é chamada de frequência natural amortecida.

A curva definida pelo deslocamento $\rho(t)$, depende dos valores de A_1 e A_2 , que por sua vez podem ser determinados das condições iniciais $\rho(0) = \rho_0$, $\dot{\rho}(0) = \dot{\rho}_0$.

A equação 1.16 pode ser re-escrita, mediante artifícios trigonométricos na forma

$$\left. \begin{aligned} \rho(t) &= A e^{-\gamma\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \\ \phi &= \text{tg}^{-1} \frac{\dot{x}_0 + \gamma\omega_n x_0}{\omega_d x_0} \end{aligned} \right| A = \rho_0^2 + (\gamma\omega_n \rho_0 + \dot{\rho}_0)^2 / \omega_d^2$$

que pode ser interpretada como um movimento oscilatório com frequência constante ω_d e ângulo de fase ϕ . A amplitude $Ae^{-\gamma\omega_n t}$ decresce exponencialmente com o tempo tanto mais quanto maior é o amortecimento. A figura 1.7 mostra a natureza geral do movimento oscilatório.

O valor $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ estabelece uma periodicidade no sentido de que a sucessão de valores da amplitude, obtidas em instantes sucessivos separadas pelo tempo τ_d (período de amortecimento), formam uma progressão geométrica.

De fato, sejam ρ_{n+1} e ρ_n duas amplitudes diferenciadas de τ_d , se

$$\rho_n = Ae^{-\gamma\omega_n t_n} \cos(\omega_d t_n - \phi)$$

$$\rho_{n+1} = Ae^{-\gamma\omega_n t_{n+1}} \cos(\omega_d t_{n+1} + 2\pi - \phi) = A e^{-\gamma\omega_n (t_n + \tau_d)} \cos(\omega_d t_n - \phi)$$

tem-se:

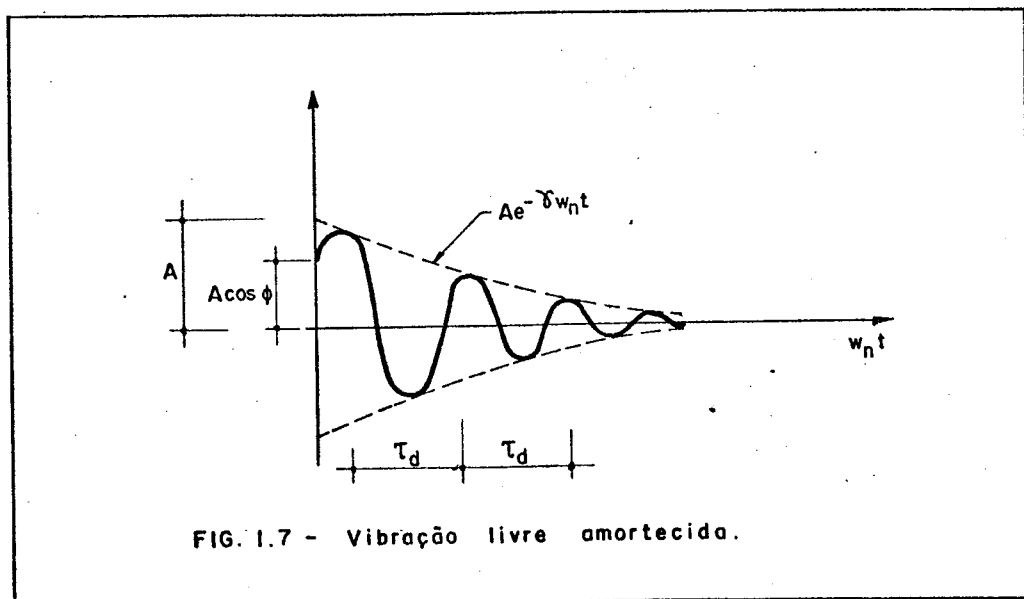
$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = e^{-\gamma\omega_n \tau_d} = e^{-2\pi\gamma / \sqrt{1-\gamma^2}} = \text{constante (1.18)}$$

. DECREMENTO LOGARÍTMICO

Os logarítmos das amplitudes anteriores estarão numa progressão aritmética, cuja razão, com sinal contrário, chama-se decremento logarítmico ⁽⁹⁾. O seu valor será:

$$\delta = \ell_n \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \quad (1.19)$$

Este valor δ é de grande interesse prático, uma vez que num registro experimental de δ , cujo valor é facilmente obtido, pode-se calcular o coeficiente de amortecimento.



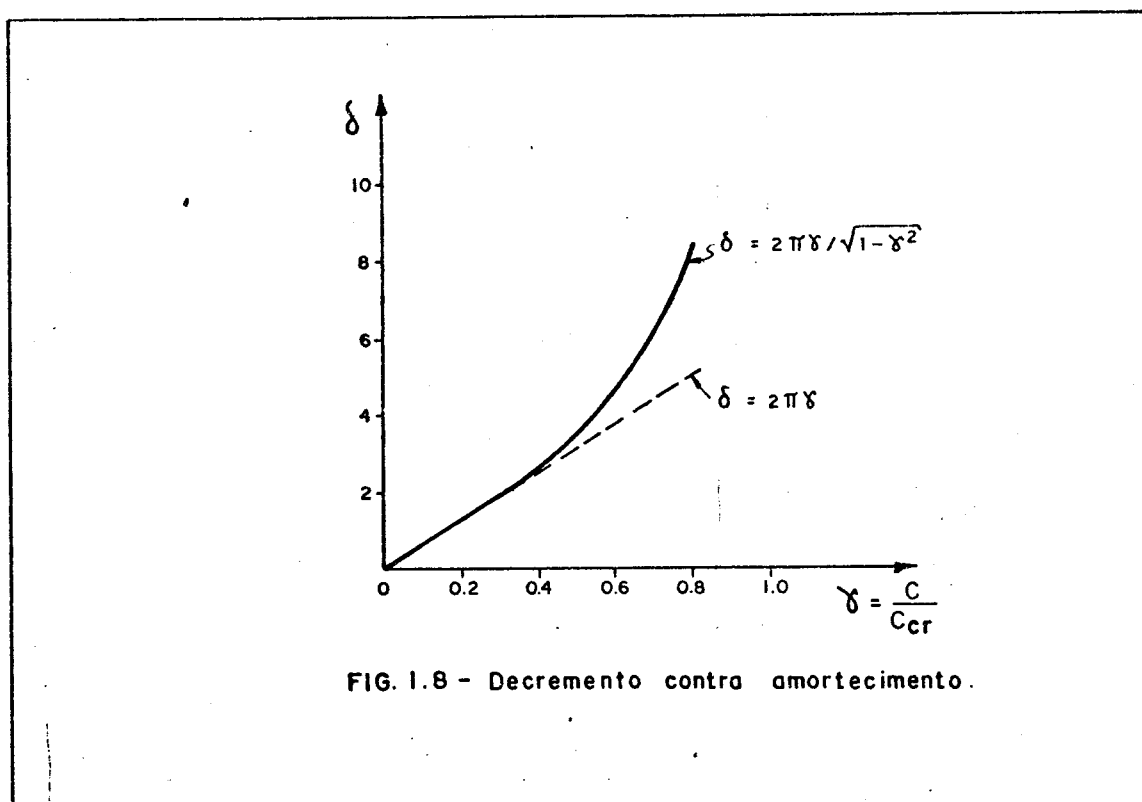
Os valores de γ encontrados na prática são pequenos ($\gamma < 0,2$), portanto $\omega_d \approx \omega_n$. Desta forma, para valores práticos do amortecimento a frequência de vibração livre amortecida é aproximadamente igual à frequência natural do sistema. Uma vez que

$$\sqrt{1-\gamma^2} \approx 1,$$

obtem-se uma equação aproximada para o decremento logarítmico:

$$\delta \approx 2\pi\gamma$$

A figura 1.8 mostra um gráfico dos valores, exatos e aproximados, de δ como função de γ .



CAPÍTULO II

VIBRAÇÃO FORÇADA

II.1 - INTRODUÇÃO

Interessa neste capítulo, a determinação analítica da resposta de sistemas sujeitos a forças externas aplicadas. Sob este aspecto, existem duas classes gerais de vibrações, a livre e a forçada.

As excitações podem se dar na forma de deslocamentos, acelerações iniciais ou ambas; nesta situação o sistema oscila sob a ação de forças que lhe são inerentes, na frequência natural determinada pela sua massa e rigidez. Tal movimento é o conhecido como vibração livre, e foi objeto de estudo no capítulo precedente.

Quando a vibração ocorre sob a ação de forças que atuam num determinado intervalo de tempo, ela é denominada de vibração forçada. Se a excitação é oscilatória, o sistema é obrigado a vibrar na frequência da excitação. Em casos onde a frequência de excitação coincide com a frequência natural do sistema, forma-se o estado de ressonância, daí podendo resultar amplas e perigosas oscilações.

Para sistemas lineares é válido o princípio da superposição, possibilitando-se, desta forma, o tratamento separada das vibrações livres e forçadas, cujas soluções são posteriormente combinadas de forma a se obter a resposta completa do sistema.

A determinação analítica da resposta de um sistema depende marcadamente do tipo de excitação. As diferentes solicitações a que uma estrutura pode estar submetida podem ser classificadas em dois grandes grupos: Determinísticas e Aleatórias.

As solicitações determinísticas são representáveis por uma função matemática de tempo e são divididas em Harmônicas, Periódicas e Não Periódicas. Para as solicitações aleatórias não é possível fazer prognósticos do seu valor instantâneo num sentido determinístico.

Dentro do estudo das respostas determinísticas i nicia-se a análise com a solicitação harmônica simples. O

caso de forças periódicas, mas não harmônicas, pode ser entendido como uma soma de termos harmônicos usando séries de Fourier, e a resposta total do sistema é obtida, mediante o princípio da superposição, pela soma das respostas individuais de cada termo harmônico. Na análise das forças não periódicas serão introduzidos os conceitos de resposta a um impulso e convolução integral. Para as solicitações aleatórias a resposta unicamente pode ser determinada estatisticamente.

Neste trabalho a atenção é devotada exclusivamente ao estudo das respostas determinísticas.

II.2 - RESPOSTA À EXCITAÇÃO HARMÔNICA SIMPLES

A solicitação harmônica é frequentemente encontrada na prática. Ela pode ser produzida pelo desbalanceamento em máquinas rotativas, pode também aparecer sob a forma de uma força ou deslocamento de um ponto de um sistema.

Considere-se que a força atuando na massa da figura 1.4 é harmônica, com valor

$$\begin{array}{l} \text{ou} \\ F(t) = P \cos \omega t \\ F(t) = P \sin \omega t, \end{array} \quad (2.1)$$

que substituída na equação do movimento (equação 1.8) fornece,

$$\ddot{\rho}(t) + 2\gamma\omega_n \dot{\rho}(t) + \omega_n^2 \rho(t) = \omega_n^2 \cos \omega t, \quad (2.2)$$

onde ω é a frequência angular de solicitação.

A escolha da solicitação cosenoidal e não a senoidal no estudo, não representa limitação nenhuma uma vez que, a solução analítica nos dois casos é semelhante e portanto, as conclusões também são válidas para ambas.

A solução geral de 2.2 é a soma da homogênea mais uma particular. A primeira destas, depois de um intervalo

de tempo, reduz-se a um valor desprezível, porquanto ela têm sua magnitude reduzida exponencialmente. Por este motivo denomina-se de resposta transiente ou transitória.

A solução particular, que predomina após este período é uma oscilação de estado permanente, da mesma frequência da excitação; na sua determinação, pode-se ensaiar uma solução particular do tipo⁽⁷⁾:

$$\rho_{part.} = \rho(t) = C \cos(\omega t - \psi), \quad (2.3)$$

onde C é a amplitude da oscilação e ψ é o ângulo de fase do deslocamento com relação à solicitação.

Levando-se a equação 2.3 na equação 2.2, chega-se a:

$$C \left[(\omega_n^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \psi) - 2\gamma\omega_n \sin(\omega t - \psi) \right] = \omega_n^2 \cos \omega t \quad (2.4)$$

Da trigonometria sabe-se que:

$$\begin{aligned} \cos(\omega t - \psi) &= \cos \omega t \cos \psi + \sin \omega t \sin \psi \\ \sin(\omega t - \psi) &= \sin \omega t \cos \psi - \cos \omega t \sin \psi \end{aligned} \quad (2.5)$$

Posto isto e igualando-se, nos dois membros da equação 2.4, os coeficientes de $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$, resultam os valores de C e ψ , na forma

$$C = \frac{1}{\left[\left(1 - (\omega/\omega_n)^2 \right)^2 + (2\gamma\omega/\omega_n)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.6)$$

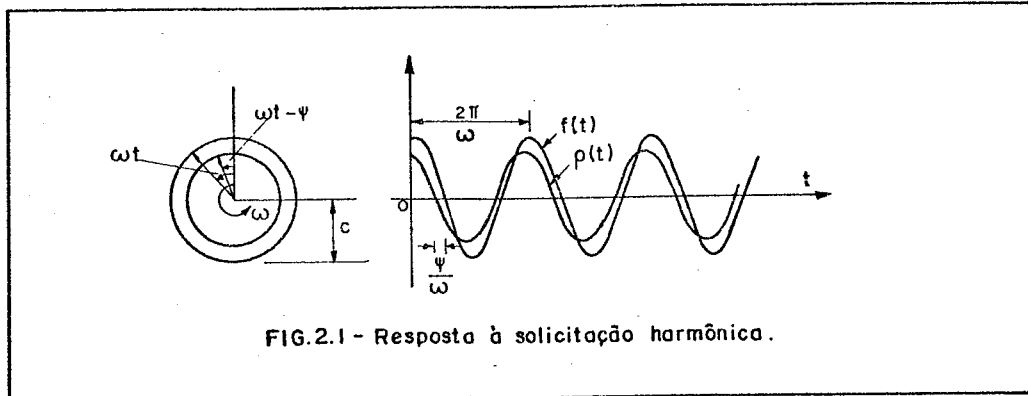
e

$$\psi = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2\gamma\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \quad (2.7)$$

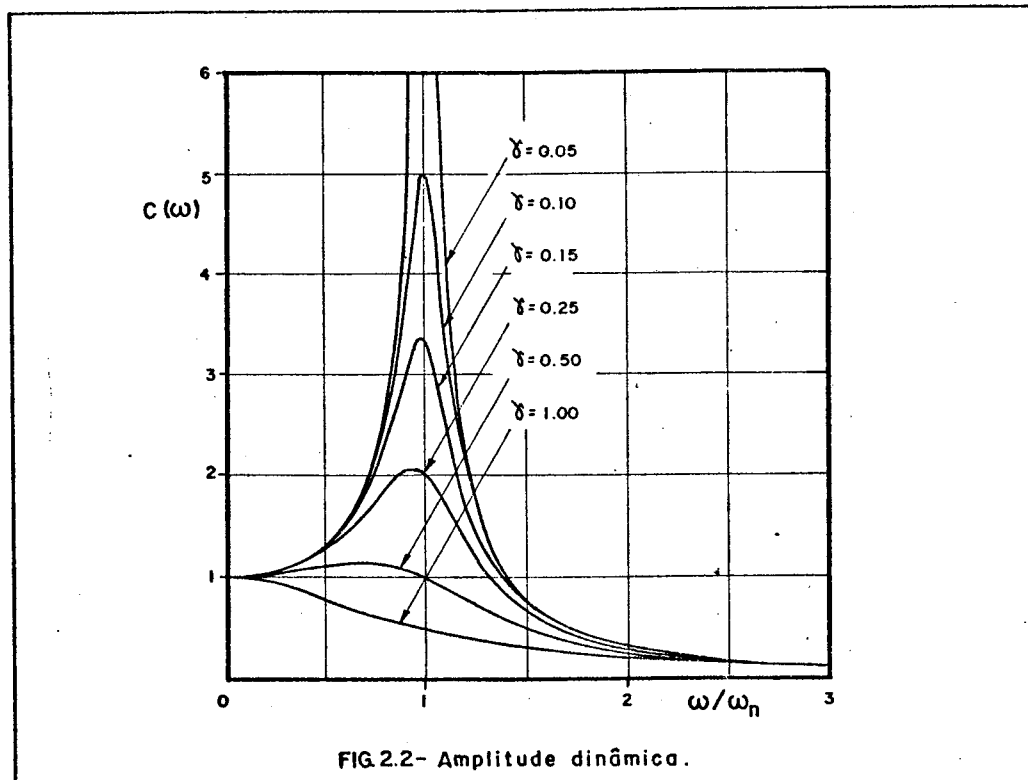
Estes valores substituídos na equação 2.3 fornecem a solução particular completa,

$$\rho(t) = \frac{\cos(\omega t - \psi)}{\left[1 - (\omega/\omega_n)^2 + (2\gamma\omega/\omega_n)^2\right]^{1/2}} \quad (2.8)$$

Na figura 2.1 mostra-se o gráfico típico excitação-resposta com estas características.



As equações 2.6 e 2.7 permitem claramente constatar que a amplitude C e ângulo de fase ψ , são funções somente da razão de frequência ω/ω_n e o fator de amortecimento γ , assim sendo, elas podem ser representadas graficamente, como o indicam as figuras 2.2 e 2.3.



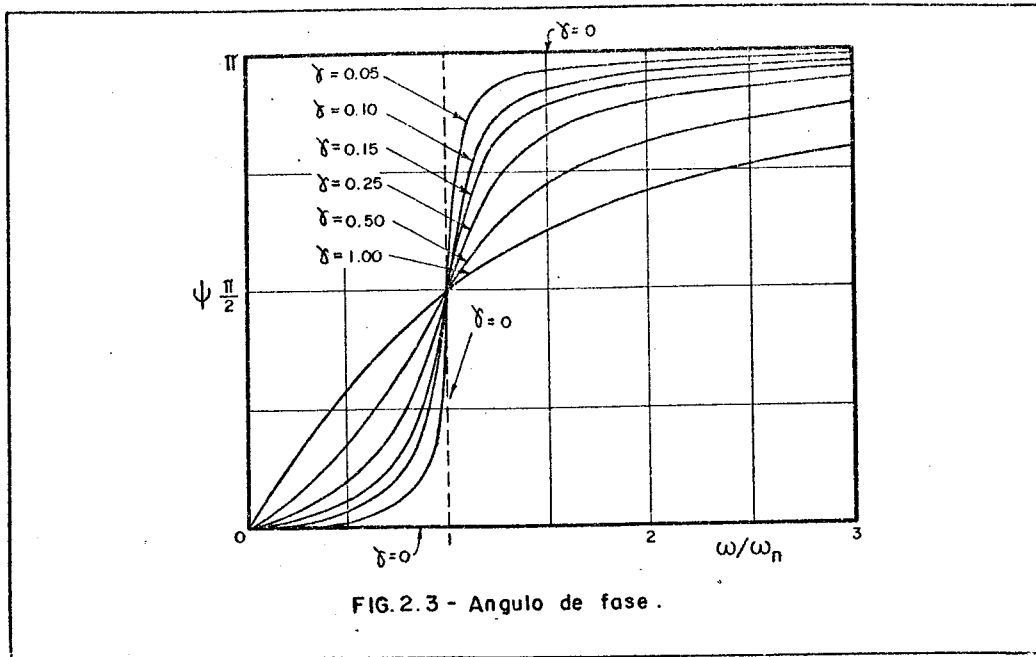


FIG.2.3 - Angulo de fase.

Estas figuras ilustram o fenômeno da ressonância, ou seja, para valores práticos do amortecimento, quando a frequência da solicitação aproxima-se da frequência natural do sistema, as amplitudes de vibração são grandes (violentas oscilações).

O valor da razão de frequências, ω/ω_n , correspondente à máxima amplitude, para um valor determinado de γ , é obtido fazendo-se

$$\frac{dC}{d\omega} = 0 ,$$

que conduz a:

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\gamma^2} \tag{2.9}$$

que mostra estar o ponto de máxima amplitude (pico de ressonância) ligeiramente à esquerda de $\omega/\omega_n = 1$.

Sabe-se que no movimento harmônico as fases da velocidade e da aceleração estão a 90° e 180° além do deslocamento, respectivamente ⁽⁹⁾. Daí verifica-se que para valores $\omega/\omega_n \ll 1$,

tanto as forças de inércia como as forças de amortecimento são pequenas. O valor da força aplicada aproxima-se então, à força da mola. Nesta região o movimento é dito regido pela rigidez, (regime de rigidez). Para $\omega/\omega_n \approx 1,0$ a amplitude pode ser determinada da equação 2.6, tendo-se, nestas condições, a seguinte expressão:

$$\rho_{\text{máx}} = \frac{1}{2\gamma} \quad (2.10)$$

é então evidente que o movimento é controlado pelo amortecimento (regime de amortecimento). No caso de valores de $\omega/\omega_n \gg 1$, tem-se:

$$\rho_{\text{máx}} \approx \frac{1}{(\omega/\omega_n)^2} \quad (2.11)$$

caracterizando-se um movimento no qual, a força aplicada é consumida pela grande força de inércia do sistema (regime de massa).

É importante observar o fato do ângulo de fase ψ , nas vizinhanças da condição de ressonância, ser muito sensível ao valor do coeficiente de amortecimento e que, para qualquer valor de γ , passa por $\pi/2$ exatamente para $\omega/\omega_n = 1$ (figura 2.3).

A solução completa da equação 2.2 é a soma da solução homogênea (equação 1.18) mais a solução particular (equação 2.8), obtendo-se, desta forma

$$\rho(t) = f_1(\omega/\omega_n, \gamma, \omega_n t) = Ae^{-\gamma\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) + \left[\frac{1}{[1 - (\omega/\omega_n)^2 + (2\gamma\omega/\omega_n)^2]^{1/2}} \right] \cos(\omega t - \psi) \quad (2.12)$$

No caso de solicitação do tipo senoidal, a correspondente de 2.12 é dada por

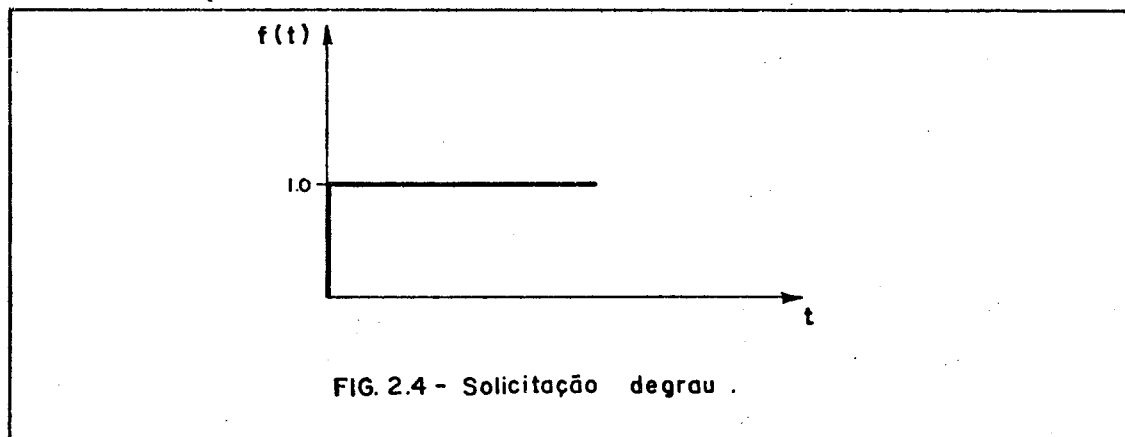
$$\rho(t) = f_2(\omega/\omega_n, \gamma, \omega_n t) = Ae^{-\gamma\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) + \left[\frac{1}{\left[\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2\gamma\omega/\omega_n)^2 \right]^{1/2}} \right] \text{sen}(\omega_t - \psi) \quad (2.13)$$

A introdução de f_1 e f_2 foi feita, tendo-se em vista o aproveitamento do estudo em questão na análise dos casos de solitação periódica.

II.3 - EXCITAÇÃO DEGRAU

A solitação degrau pertence ao grupo das excitações não periódicas, mas, devido a ela se constituir em etapa prévia na análise da resposta de sistemas a excitações periódicas, obtem-se vantagens na elaboração do seu estudo separadamente.

Considere-se a solitação degrau representada na figura 2.4



A função $f(t)$ pode ser definida matematicamente como:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 1 & , \quad t > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Para $t < 0$, o sistema é suposto em repouso e em $t > 0$ tem-se a seguinte equação diferencial de movimento (vide equação 1.8).

$$\ddot{\rho} + 2\gamma\omega_n \dot{\rho} + \omega_n^2 \rho = \omega_n^2 \quad (2.15)$$

cuja solução é a soma das soluções da equação homogênea e da solução particular.

Supondo-se condições iniciais nulas a solução da equação 2.15 resultará na expressão ⁽⁷⁾:

$$\rho(t) = f_3(\gamma\omega_n t) = 1 - e^{-\gamma\omega_n t} \left[\cos\omega_d t + \gamma / \sqrt{1-\gamma^2} \operatorname{sen}\omega_d t \right] \quad (2.16)$$

A figura 2.5 mostra um gráfico de ρ , versus $\omega_n t$ com γ como parâmetro. Note-se que a resposta máxima é menor que duas vezes a deflexão estática, devido ao amortecimento presente no sistema; observe-se também que para valores crescentes do tempo, tem-se valores de ρ oscilando muito próximos da unidade.

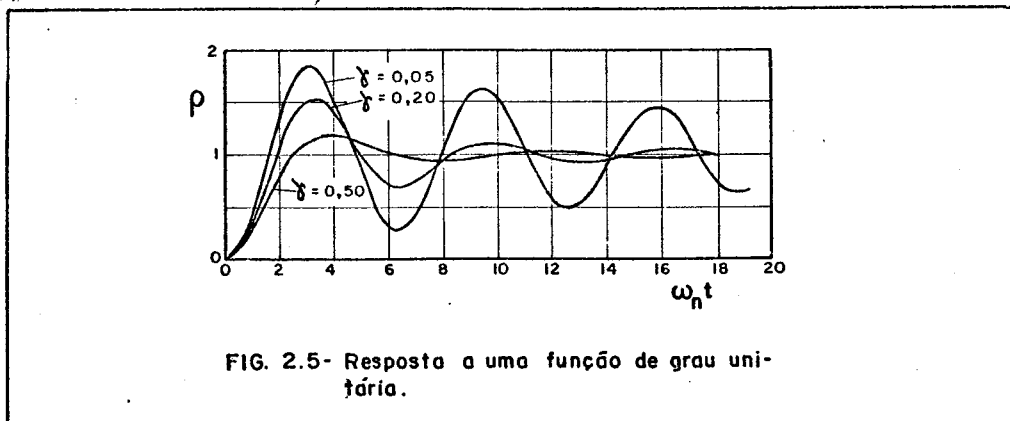
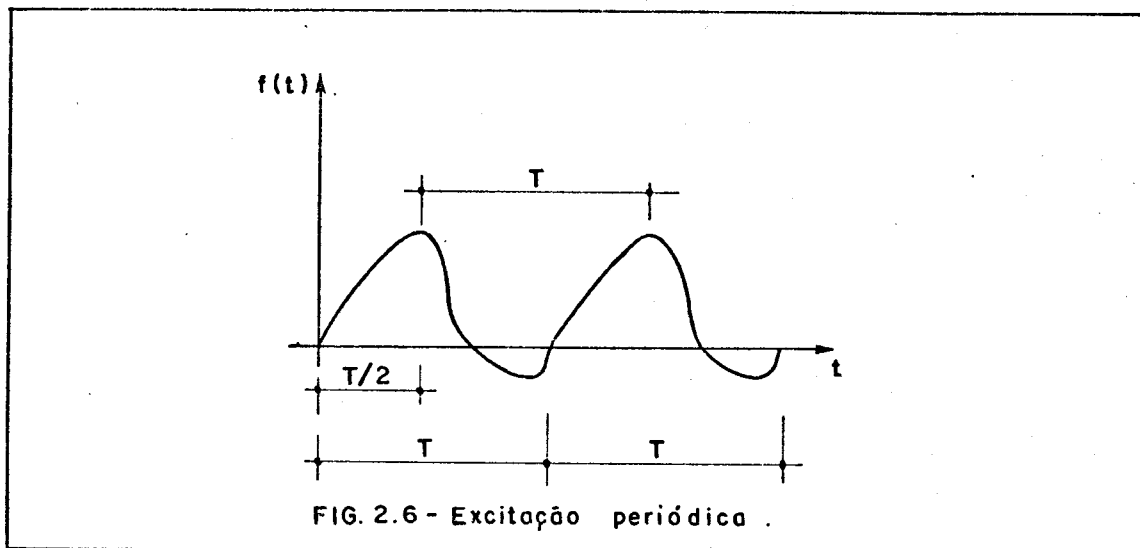


FIG. 2.5- Resposta a uma função de grau unitária.

II.4 - EXCITAÇÃO PERIÓDICA

Uma excitação harmônica de qualquer frequência arbitrária ω , é periódica, isto é, repete-se em intervalos iguais de tempo $T = 2\pi/\omega$, onde T é o período de excitação. Há contudo, nos problemas vibratórios, outros tipos de excitações periódicas que não necessariamente são harmônicas.

Equipamentos funcionando em regime estacionário são produtores típicos deste tipo de solicitação. Ilustra-se um exemplo na figura 2.6.



Uma função periódica qualquer, pode ser representada por uma série convergente de Fourier se obedece a certas condições (Condições de Dirichlet, ver apêndice A); estas condições são suficientes mas nem sempre necessárias.

O desenvolvimento de Fourier, é uma série de termos harmônicos (senos e cossenos), cujas frequências são múltiplos inteiros de uma certa frequência, conhecida como frequência fundamental ω_0 . Tais séries podem ser escritas na forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_j \cos j\omega_0 t + b_j \operatorname{sen} j\omega_0 t \right]$$

ou ,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[a_i \cos \left(j \frac{2\pi}{T} t \right) + b_i \operatorname{sen} \left(j \frac{2\pi}{T} t \right) \right] \quad (2.17)$$

onde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} ,$$

T é o período de f(t) e j = 1, 2, 3,

Os coeficientes da sêrie são expressos por:

$$\begin{aligned}
 a_j &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(j \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(j \frac{2\pi}{T} t\right) dt \\
 b_j &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}\left(j \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}\left(j \frac{2\pi}{T} t\right) dt \\
 a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

As equações 2.18 definem claramente o papel dos coeficientes de Fourier, eles são uma medida da contribuição dos componentes harmônicos ($\cos j\omega_0 t$ e $\operatorname{sen} j\omega_0 t$) na função $f(t)$. O termo constante a_0 é igual à média da função $f(t)$ sobre o período.

A substituição de $f(t)$, equação 2.17, na equação diferencial do movimento (vide equação 1.8), resulta em

$$\ddot{\rho} + 2\gamma\omega_n \dot{\rho} + \omega_n^2 \rho = \omega_n^2 \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j \cos\left(j \frac{2\pi}{T} t\right) + b_j \operatorname{sen}\left(j \frac{2\pi}{T} t\right) \right) \right]
 \tag{2.19}$$

Em se tratando de sistemas lineares (equação diferencial linear) a resposta pode ser determinada mediante a utilização do princípio da superposição. Em palavras, este princípio diz:

"Para um sistema linear, a resposta para um dado número de excitações diferentes, pode ser obtida combinando-se as respostas individuais, calculadas separadamente".

Desta forma a solução da equação do movimento 2.19, obtem-se superpondo-se as soluções correspondentes a cada um dos componentes harmônicas presentes no lado direito de 2.19. Tendo-se em vista as soluções já objeto de apresentação nos itens anteriores (equações 2.16, 2.12 e 2.13), ajustadas às condições iniciais nulas $\rho(0) = 0$ e $\dot{\rho}(0) = 0$, tem-se a resposta adimensional:

$$\rho(t) = f_3(\gamma, \omega_n t) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\bar{a}_j f_1(j\omega/\omega_n, \gamma, \omega_n t) + \bar{b}_j f_2(j\omega/\omega_n, \gamma, \omega_n t) \right] \quad (2.20)$$

onde:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{2kx(t)}{a_0} \\ \bar{a}_j &= \frac{2a_j}{a_0} \\ \bar{b}_j &= \frac{2b_j}{a_0} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Da equação 2.20 conclui-se que a resposta provocada por excitações periódicas é também periódica, com período igual ao da força de excitação. Cumpre, nesse ponto, chamar a atenção para o fato de que se o valor de um dos harmônicos $j\omega_0$ da excitação, aproxima-se da frequência natural do sistema ω_n , então este harmônico particular constitui uma apreciável contribuição na resposta, particularmente para pequenos amortecimentos.

A convergência das séries de Fourier não pode ser sempre garantida sem a consideração de grande número de componentes harmônicos e mesmo em se considerando poucos termos na série, os cálculos envolvidos na resolução da expressão 2.19, são muito numerosos.

Torna-se vantajoso no tratamento de sistemas excitados periodicamente, o estudo do comportamento do sistema referenciado no domínio da frequência. Isto é feito introduzindo-se, no equacionamento, a forma complexa das séries de Fourier. Esta mudança possibilita a obtenção de consideráveis informações referentes ao grau de participação dos vários harmônicos na excitação $f(t)$ e na resposta $f(t)$, através da construção de gráficos, conhecidos como espectros discretos de frequência, plotando-se as amplitu-

des das componentes harmônicas da função em estudo, versus a frequência.

II.5 - SOLICITAÇÃO NÃO PERIÓDICA

(Excitação de um Impulso e Convolução Integral)

Considere-se o sistema da figura 1.4 excitando subitamente por uma força arbitrária $P(t)$, tal como a representada na figura 2.7. Evidentemente, nesta situação, a resposta (oscilação do sistema) não é permanente e pode ser caracterizada como uma resposta transiente.

Se a força $P(t)$ é aplicada durante um pequeno intervalo de tempo e depois removida, o movimento subsequente será uma vibração livre, que decresce gradualmente devido ao amortecimento presente no sistema. A análise geralmente orienta-se no sentido de se calcular a máxima amplitude de oscilação da massa do sistema (associada com a máxima tensão na mola). A amplitude máxima pode ocorrer durante o tempo de aplicação da carga ou nos primeiros ciclos de vibração livre, após a remoção da força. Desta forma no estudo da sollicitação não periódica, unicamente são de interesse poucos períodos de vibração.

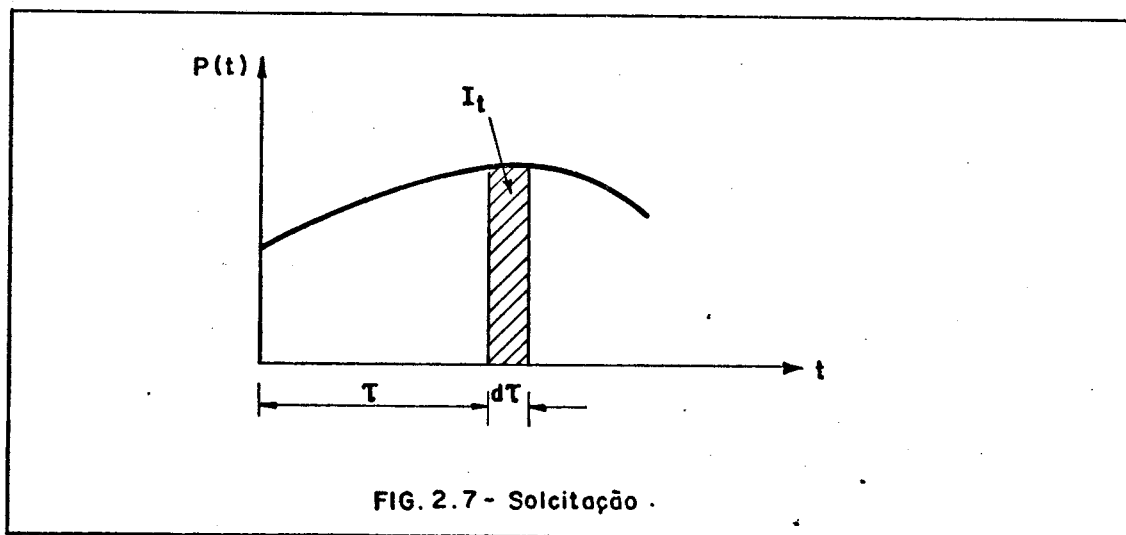
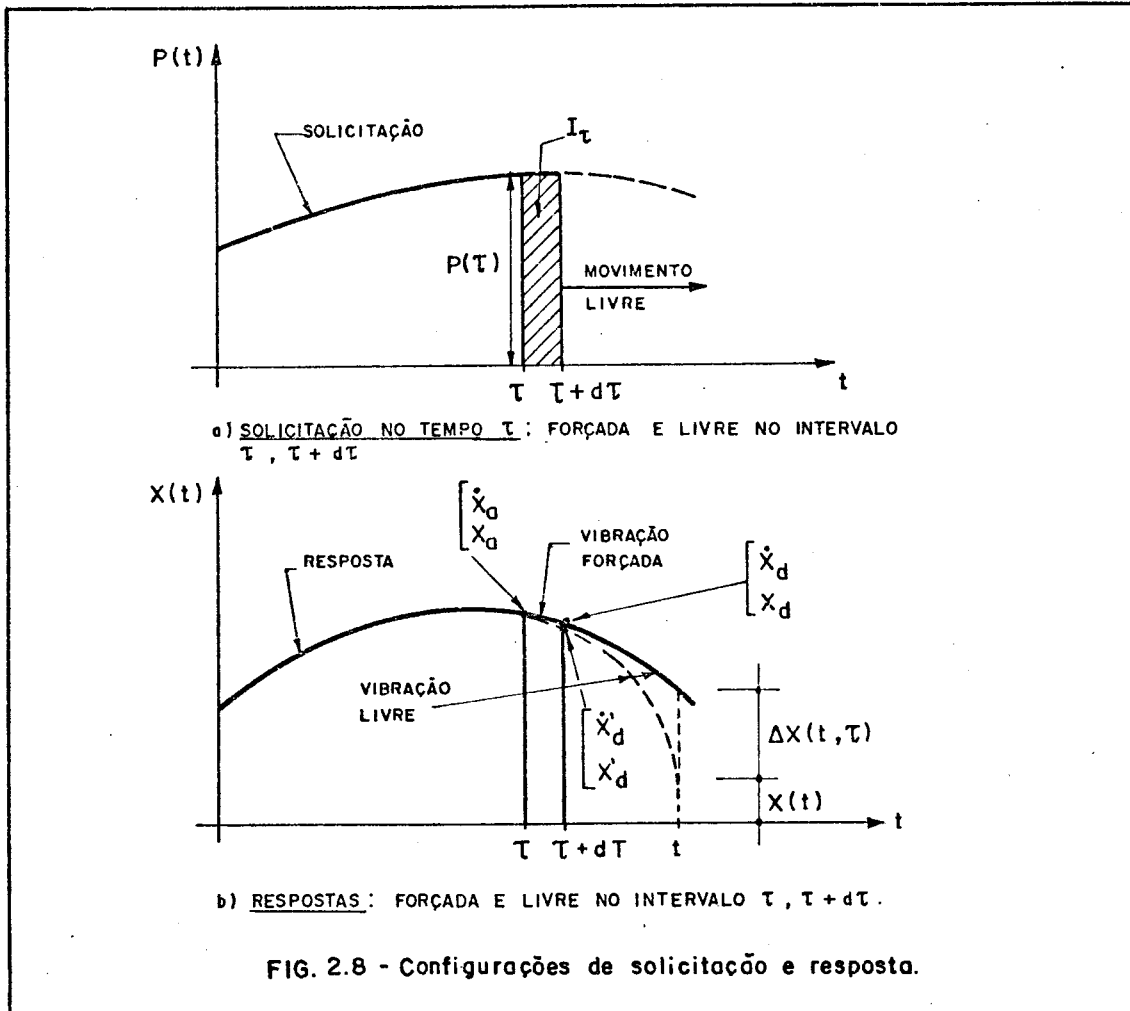


FIG. 2.7 - Sollicitação .

A solicitação genérica $P(t)$, da figura 2.7, pode ser considerada como uma série de impulsos. A área tracejada da $I_\tau = P(\tau)d\tau$ é um impulso que ocorre em $t = \tau$.

A indagação básica consiste no seguinte: Qual a contribuição, na resposta no tempo t ($t > \tau$, ver figura 2.8), do impulso aplicado em $t = \tau$.



Para $t > \tau$ (isto é, depois da aplicação do impulso) o sistema permanece em movimento livre, de sorte a se excluir a contribuição da solicitação presente nesse intervalo de tempo.

No tempo τ o deslocamento e a velocidade têm os valores x_a e \dot{x}_a respectivamente. Em $\tau+d\tau$, ou seja, transcorrido o tempo $d\tau$, tem-se duas possibilidades:

a) Impulso presente em $d\tau$.

Neste caso, o deslocamento e a velocidade em $t = \tau + d\tau$, assumem os valores x_d e \dot{x}_d e a equação de movimento é expressa por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(\tau) \quad (2.22)$$

As funções deslocamento e velocidade são contínuas, o que permite expressar a aceleração diretamente da equação 2.22, na forma

$$\ddot{x}_F = \frac{P(\tau)}{m} - \frac{1}{m} [c\dot{x}_a + kx_a] \quad (2.23)$$

onde o subscrito F denota movimento forçado.

Por outro lado do cálculo sabe-se que

$$\left. \begin{aligned} x_d &= x_a + \dot{x}_a d\tau \\ \dot{x}_d &= \dot{x}_a + \ddot{x}_F d\tau \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

onde são negligenciados os infinitésimos de ordem superior.

b) Movimento livre em $d\tau$.

Para $t = \tau + d\tau$, o deslocamento e a velocidade são x_d' e \dot{x}_d' respectivamente. O movimento é descrito pela equação

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad (2.25)$$

em consequência a aceleração adota a seguinte expressão:

$$\ddot{x}_L = - \frac{1}{m} [c\dot{x}_a + kx_a] \quad (2.26)$$

na qual L indica movimento livre.

Para se ter as expressões do deslocamento e a velocidade no intervalo apela-se novamente às propriedades do cálculo. Lembrando-se de desprezar os infinitésimos de ordem superior (termos em $d\tau^2$, $d\tau^3$, etc.), tem-se:

$$\begin{aligned} x'_d &= x_a + \dot{x}_a d\tau \\ \dot{x}'_d &= \dot{x}_a + \ddot{x}_L d\tau \end{aligned} \quad (2.27)$$

Combinando-se as equações 2.24 e 2.27, tendo-se em vista 2.23 e 2.26, obtem-se

$$\begin{aligned} \Delta x_d &= x_d - x'_d = 0 \\ \Delta \dot{x}_d &= \dot{x}_d - \dot{x}'_d = \frac{P(\tau)}{m} d\tau \end{aligned} \quad (2.28)$$

É pois evidente que, para $d\tau \rightarrow 0$, o impulso em τ não provoca um deslocamento instantâneo, $x(d\tau) = 0$, uma vez que o intervalo de tempo $d\tau$ sendo tão curto não permite o desenvolvimento de deslocamentos.

A interpretação física da segunda das 2.28 é que a força impulsiva $P(\tau)$ produz uma alteração instantânea da velocidade que ocorre rapidamente depois do intervalo $d\tau$.

Tomando-se agora a solução da equação diferencial do movimento livre (vide equação 1.17) e aplicando-a no movimento livre considerado para o intervalo de $\tau+d\tau$ até o tempo t , tem-se duas situações:

1) Considerando-se o impulso em $t = \tau$

Definindo-se a nova variável:

$$\bar{t} = t - (\tau d\tau), \quad (2.29)$$

tem-se as condições iniciais em $\bar{t} = 0$, na forma:

$$\left. \begin{aligned} x(\bar{t} = 0) &= x_d \\ \dot{x}(\bar{t} = 0) &= \dot{x}_d \end{aligned} \right| \quad (2.30)$$

A solução homogênea (equação 1.17) pode ser re-escrita da seguinte maneira:

$$x(t) = e^{-\gamma\omega_n t} \left[A \sin\omega_d t + B \cos\omega_d t \right] \quad (2.31)$$

Os valores das constantes A e B são determinados mediante a aplicação das condições iniciais na 2.31

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega_d} (\dot{x}_d + \gamma\omega_n x_d) \\ B &= x_d \end{aligned} \right| \quad (2.32)$$

Em consequência, o movimento é dado por

$$x(\bar{t}) = e^{-\gamma\omega_n \bar{t}} \left[\frac{(\dot{x}_d + \gamma\omega_n x_d)}{\omega_d} \sin\omega_d \bar{t} + x_d \cos\omega_d \bar{t} \right] \quad (2.33)$$

2) Sem consideração do impulso em $t = \tau$

Neste caso as condições iniciais são:

$$\left. \begin{aligned} x(\bar{t}=0) &= x'_d \\ \dot{x}(\bar{t}=0) &= \dot{x}'_d \end{aligned} \right| \quad (2.34)$$

que aplicadas na equação 2.31 fornecem

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega_d} (\dot{x}'_d + \gamma \omega_n x'_d) \\ B &= x'_d \end{aligned} \right| \quad (2.35)$$

Nestas condições, a solução da equação do movimento torna-se

$$x'(\bar{t}) = e^{-\gamma \omega_n \bar{t}} \left[\frac{(\dot{x}'_d + \gamma \omega_n x'_d)}{\omega_d} \text{sen} \omega_d \bar{t} + x'_d \text{cos} \omega_d \bar{t} \right] \quad (2.36)$$

O incremento do deslocamento (resposta) no tempo t , $\Delta x(t, \tau)$, provocado pelo impulso em $t = \tau$ é

$$\Delta x(t, \tau) = x(\bar{t}) - x'(\bar{t}) \quad (2.37)$$

Substituindo-se $x(\bar{t})$ e $x'(\bar{t})$ pelos seus valores, equações 2.33 e 2.36 respectivamente, chega-se a

$$\begin{aligned} \Delta x(t, \tau) = e^{-\gamma \omega_n \bar{t}} & \left[\frac{(\dot{x}_d - \dot{x}'_d) + \gamma \omega_n (x_d - x'_d)}{\omega_d} \text{sen} \omega_d \bar{t} + \right. \\ & \left. + (x_d - x'_d) \text{cos} \omega_d \bar{t} \right] \quad (2.38) \end{aligned}$$

Das equações 2.28 e desprezando-se o infinitésimo no exponencial e no seno, encontra-se

$$\Delta x(t, \tau) = \frac{P(\tau) d\tau}{m \omega_d} e^{-\gamma \omega_n (t-\tau)} \text{sen} \omega_d (t-\tau) \quad (2.39)$$

Neste ponto cabe ressaltar que o resultado expresso em 2.39 corresponde à resposta da indagação estabelecida no início do estudo.

Tendo a resposta para um impulso, é possível estabelecer a equação para a resposta do sistema excitado por uma força arbitrária, como a indicada na figura 2.7.

Sendo linear o sistema considerado, o princípio de superposição prevalece. Desta forma, o valor da resposta no tempo t , $x(t)$, é alcançado pela soma de todas as contribuições da solicitação presente no intervalo de zero a t , ou seja

$$x(t) \approx \Sigma \Delta x(t) = \Sigma \frac{P(\tau)}{m\omega_d} e^{-\gamma\omega_n(t-\tau)} \text{sen}\omega_d(t-\tau) d\tau \quad (2.40)$$

Fazendo-se $d\tau \rightarrow 0$, pode-se substituir o somatório por uma integral, obtendo-se

$$x(t) = \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega_d} e^{-\gamma\omega_n(t-\tau)} \text{sen}\omega_d(t-\tau) d\tau \quad (2.41)$$

Tomando-se

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\gamma\omega_n(t-\tau)} \text{sen}\omega_d(t-\tau), \quad (2.42)$$

obtem-se a expressão geral de $x(t)$, na forma

$$x(t) = \int_0^t P(\tau)h(t-\tau) d\tau, \quad (2.43)$$

que é conhecida como a convolução integral ou integral de Duhamel.

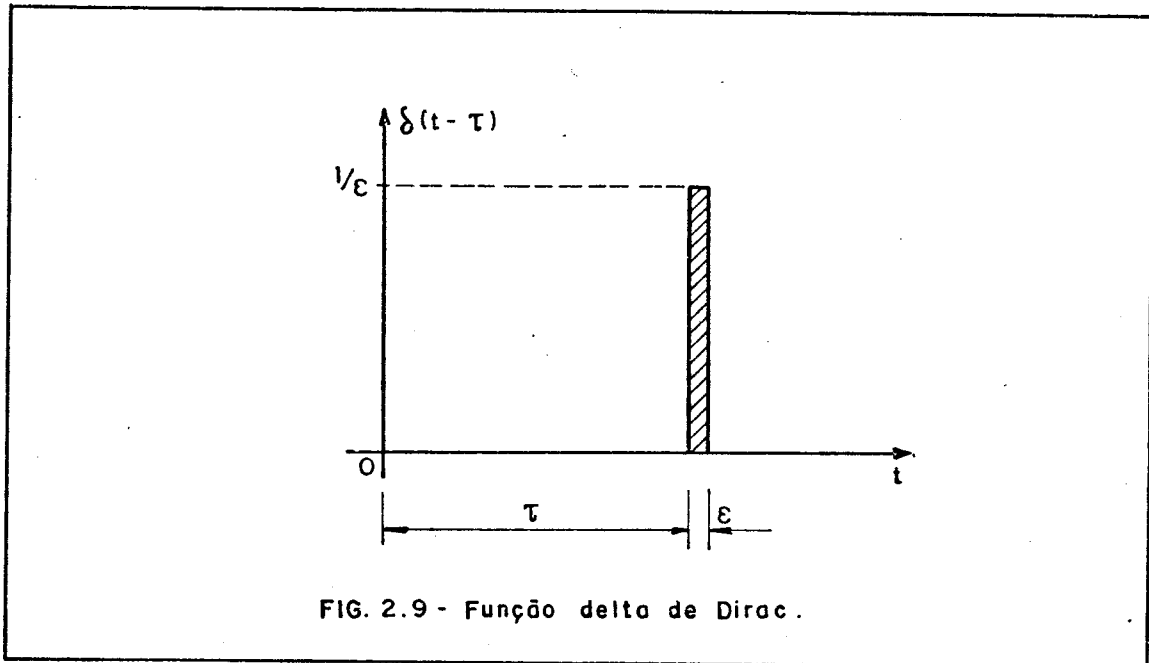
A equação 2.43 representa a resposta de um sistema de um grau de liberdade a uma excitação arbitrária. Note-se que para $t = 0$, assume-se valores nulos para o deslocamento e a velocidade. Para condições iniciais não nulas, deve ser adicionado o termo de vibração livre, $Ae^{-\gamma\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$, onde A e ϕ são determinados das condições iniciais.

Pode-se obter melhor compreensão das características da função $h(t-\tau)$ introduzindo-se primeiramente o conceito de unidade de impulso ou delta de Dirac.

A definição matemática da função delta de Dirac é

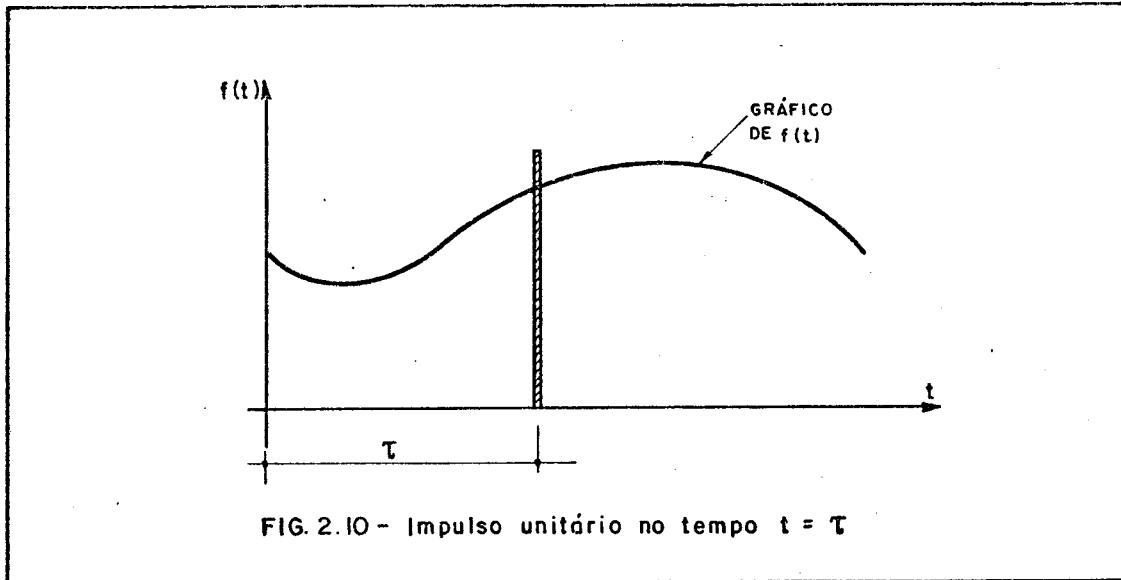
$$\begin{aligned} \delta(t-\tau) &= 0, & t \neq \tau \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) dt &= 1,0, & -\infty < \tau < \infty \end{aligned} \quad (2.44)$$

O intervalo ϵ , dentro do qual a função é diferente de zero é, por definição, infinitamente pequeno. Na figura 2.9, para $\epsilon \rightarrow 0$, a amplitude da função no intervalo tende para o infinito, a área sob a curva é bem definida e é igual a 1.



Se $\delta(t-\tau)$ é multiplicada por qualquer função de tempo $f(t)$, como indicado na figura 2.10, o produto será sempre nulo exceto quando $t = \tau$, e sua integral será

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-\tau) dt = f(\tau) \quad (2.45)$$



O impulso unitário aplicado em $t = \tau$ é definido por $\delta(t-\tau)$. Daí uma força impulsiva de magnitude \widehat{F} aplicada em $t = \tau$ pode ser escrita como

$$F(t) = \widehat{F}\delta(t-\tau) \quad (2.46)$$

Considere-se o sistema amortecido de um grau de liberdade, estudado em I.3, com condições iniciais nulas. Quer-se determinar a resposta do sistema a uma força impulsiva de magnitude unitária aplicada em $t = 0$.

De acordo com a equação 2.46, esta força é expressa como se segue

$$F(t) = 1.\delta(t) \quad (2.47)$$

Sabe-se, das equações 2.28, que o impulso atuando sobre a massa provocará uma súbita mudança na sua velocidade igual a $1/m$ sem apreciável mudança no seu deslocamento instantâneo. Em outras palavras, tudo se passa como se o sistema vibra livremente com velocidade inicial $v_0 = 1/m$.

Para sistemas amortecidos a equação de vibração livre pode ser indicada por

$$x(t) = Ae^{-\gamma\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t - \phi) \quad (2.48)$$

e substituindo as condições iniciais acima, chega-se à equação

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\gamma\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t) \quad (2.49)$$

É claro que o mesmo resultado teria sido obtido considerando-se o impulso aplicado em $t = \tau$, supondo-se valores nulos da sollicitação nos restantes valores de t . Definindo-se a nova variável $\bar{t} = t - \tau$, observar-se-ia:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\gamma\omega_n (t-\tau)} \text{sen}\omega_d (t-\tau) , \quad (2.50)$$

que é equivalente a efetuar uma translação de τ da origem da resposta obtida em 2.49.

A equação 2.50 é idêntica à 2.42 de onde conclui-se facilmente que a função $h(t-\tau)$ é exatamente a resposta do sistema a um impulso unitário aplicado em $t = \tau$ (7).

Das considerações anteriores, deduz-se a definição completa de $h(t-\tau)$

$$\left. \begin{aligned} h(t-\tau) &= 0 & , t < \tau \\ h(t-\tau) &= \frac{1}{m\omega_d} e^{-\gamma\omega_n (t-\tau)} \text{sen}\omega_d (t-\tau) & , t > \tau \end{aligned} \right\} (2.51)$$

que torna evidente uma propriedade particular das funções do tempo, ou seja, o movimento no tempo t é afetado somente por sollicitações que acontecem em tempos iguais ou inferiores a t (o presente não depende do futuro).

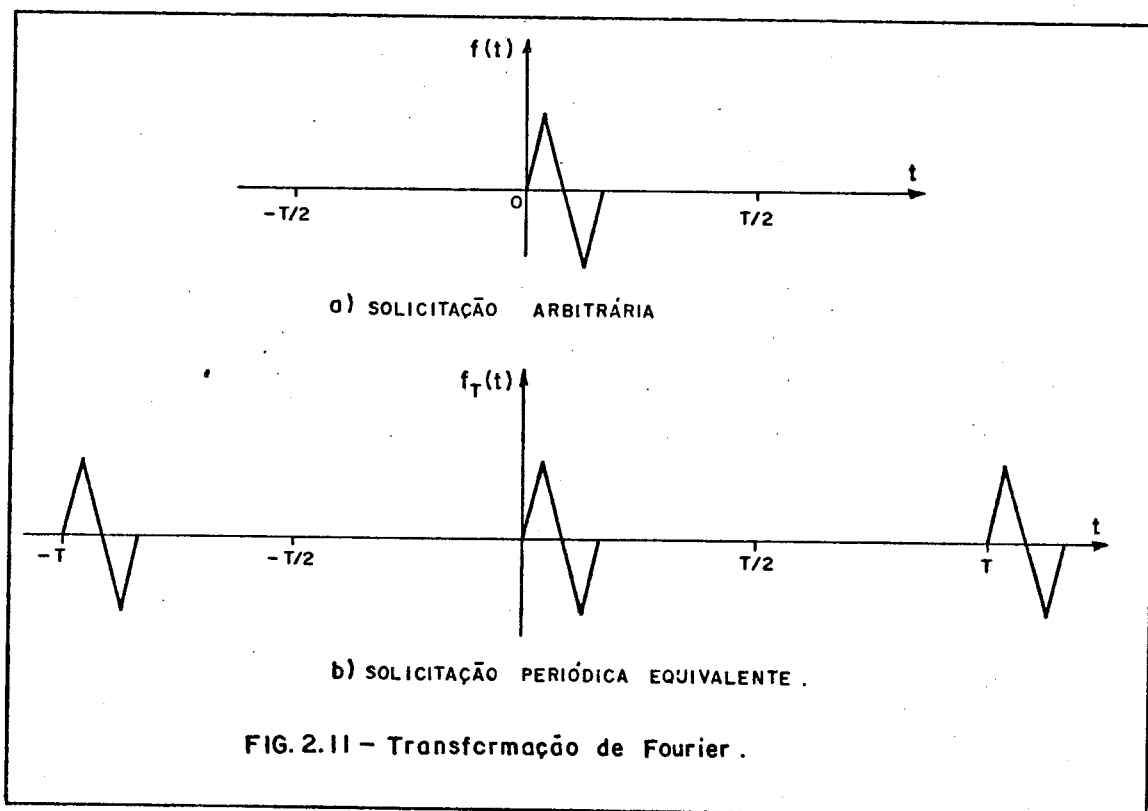
II.6 - RESPOSTA À SOLICITAÇÃO NÃO PERIÓDICA

(Transformada de Fourier)

Há várias alternativas para se determinar a resposta a uma excitação arbitrária, dependendo da forma que é

descrita a função solicitação. No item anterior considerou-se a excitação como uma superposição de impulsos de curta duração. Outro caminho é representar a excitação por uma integral de Fourier, que por sua vez, é obtida da Série de Fourier em situação limite, tomando-se o período tendendo para infinito.

Na figura 2.11a exibe-se uma função transiente $f(t)$ com valores num curto intervalo de tempo. A função real é substituída por uma função periódica $f_T(t)$ que possui comportamento idêntico a $f(t)$ no intervalo $-T/2 < t < T/2$ e têm período T , figura 2.11b.



Note-se que o período T deve ser muito maior que a duração de $f(t)$. A função periódica gerada, $f_T(t)$, pode ser representada por uma Série de Fourier na sua forma complexa (ver Apêndice A),

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i(n\omega_0 t)} \quad (2.52)$$

onde

$$\omega_0 = 2\pi/T \quad (2.53)$$

Os coeficientes C_n , são dados por

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-i(n\omega_0 t)} dt \quad (2.54)$$

O conjunto de coeficientes C_n , define a função $f_T(t)$ e pode ser considerado como uma função da variável n , escrita como $C(n)$. Na realidade esta função é definida em um conjunto discreto de valores da variável independente n (em lugar de um intervalo contínuo).

A figura 2.12 apresenta um diagrama genérico da função $C(n)$. Esta função, nas séries de Fourier, é chamada de espectro de Fourier.

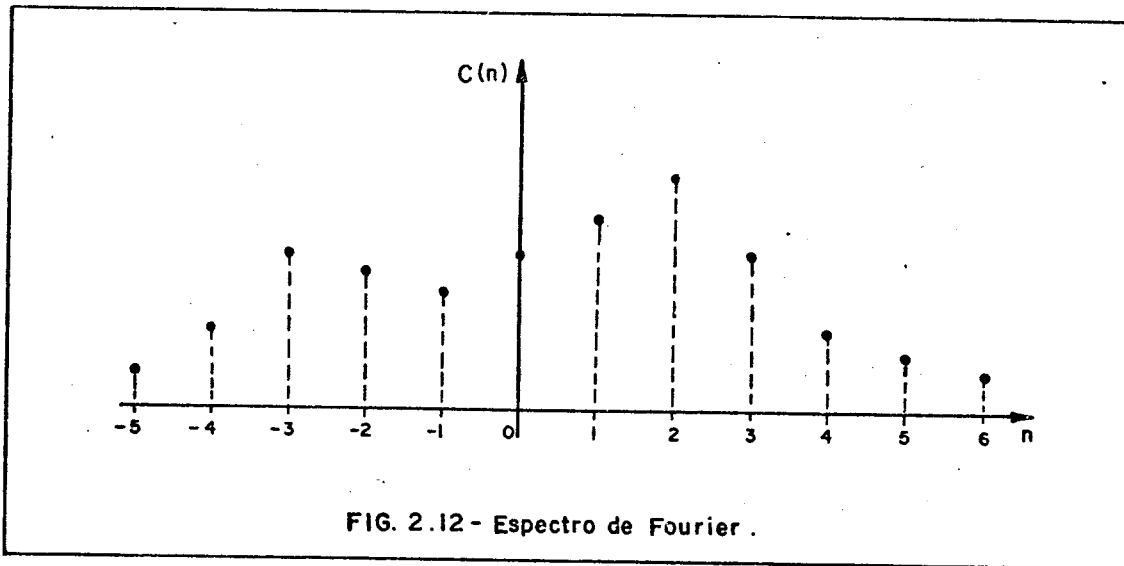


FIG. 2.12 - Espectro de Fourier .

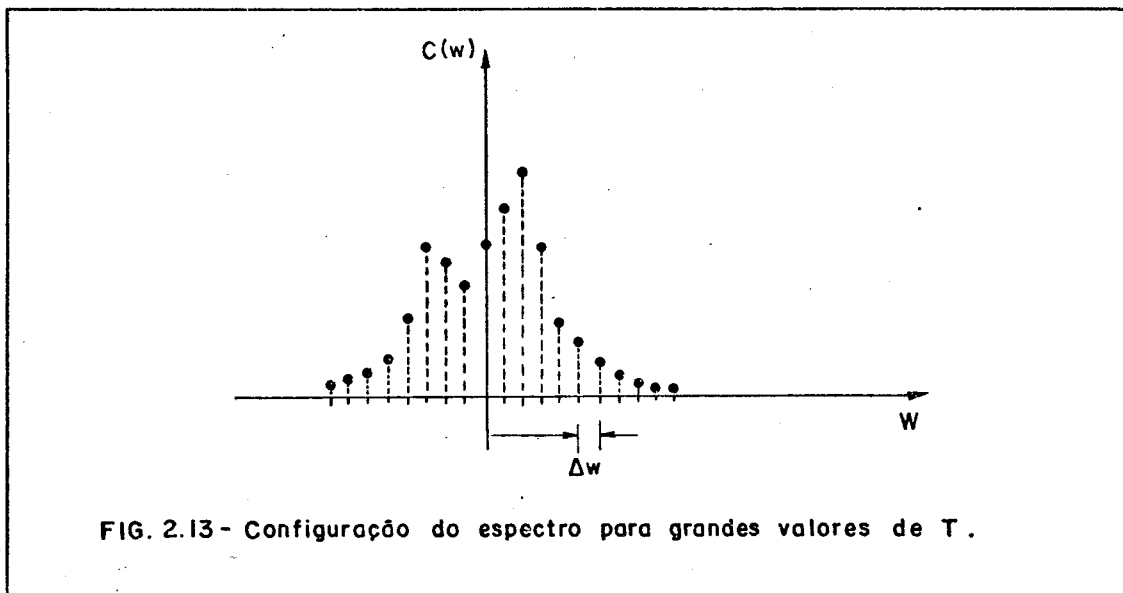
Em vez de indicar C como função do número de onda n pode-se marcar C como função da "frequência" ($C(\omega)$, definindo-se, com esta finalidade, a nova variável ω , na forma

$$\omega = n\omega_0 \quad (2.55)$$

Se o valor do período T é aumentado, as frequências ficarão muito próximas, uma vez que da 2.53 com a 2.55, tem-se:

$$\Delta\omega = \Delta n\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.56)$$

para pontos adjacentes do espectro de Fourier (figura 2.12). Nestas condições, $\Delta\omega$ será pequeno e o espectro pode adquirir o aspecto indicado na figura 2.13



Vale a pena, nesse ponto, enfatizar que deve-se esperar um espectro contínuo quando $T \rightarrow \infty$ e todas as frequências estão presentes.

Do exame da equação 2.54 verifica-se que a passagem para $T \rightarrow \infty$, aparentemente faz com que o valor dos coeficientes C_n tenda para zero. Para superar esta dificuldade, antes de efetuar a transição $T \rightarrow \infty$, introduz-se a notação $\Delta n = 1$ para valores adjacentes de ω , que corresponde pela equação 2.56 a,

$$\Delta\omega = \omega_0 \quad (2.57)$$

ou, substituindo-se na 2.57 a equação 2.53,

$$\frac{T}{2\pi} \Delta\omega = 1 \quad (2.58)$$

Lembrando-se que qualquer valor multiplicado pela unidade não se altera, pode-se então, impunemente, multiplicar cada termo da série de Fourier por $(T/2\pi)\Delta\omega$ e escrever:

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} TC_n e^{i\omega t} \Delta\omega, \quad (2.59)$$

com

$$TC_n = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.60)$$

onde se considera a variável ω definida na equação 2.55

Cabe, agora, verificar o que ocorre quando o período T tende para o infinito. Em primeiro lugar, decorre, de modo imediato, que a função aproximadora $f_T(t)$, torna-se uma excelente aproximação da função real $f(t)$. Assim sendo, resta, agora verificar o que ocorre com o somatório. A variável discreta ω torna-se contínua, conforme facilmente pode ser visto das equações 2.55 e 2.53. Posto isso, as expressões 2.59 e 2.60 têm, no caso limite, a seguinte escrita:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (TC_n) e^{i\omega t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.61)$$

e

$$C(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} (TC_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.62)$$

A equação 2.61 é a representação integral de Fourier de uma função arbitrária $f(t)$, tal como a mostrada na figura 2.11a, obtida da função $f_T(t)$ tomando-se o período $T \rightarrow \infty$. Ela indica que qualquer função arbitrária $f(t)$ pode ser descrita por uma integral representando contribuições de componentes harmônicos tomando-se um espectro de frequência contínuo. Assim, a quantidade $C(\omega)d\omega$ pode ser entendida como a contribuição para $f(t)$, do harmônico no intervalo de frequência de ω a $\omega+d\omega$.

A transição do expresso nas equações 2.61 e 2.62, para a definição da transformada de Fourier é imediata, ou seja, define-se⁽¹⁰⁾:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.63)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2.64)$$

A função $F(\omega)$ é conhecida como transformada de Fourier da função $f(t)$, $f(t)$ é chamada de transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$ (transformada par), de forma que as fórmulas de transformação e da inversão são obtidas simultaneamente.

Quanto à existência da integral na equação 2.63, é oportuno apontar que a sua existência é assegurada se $f(t)$ satisfaz as condições de Dirichlet (Ver Apêndice A), no intervalo $-\infty < t < \infty$ e se a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \quad (2.65)$$

é convergente. Se a integral na equação 2.65 não for convergente, então a transformada de Fourier $F(\omega)$ não existe.

Considere-se a seguir um sistema linear idêntico, aquele descrito na figura 1.5 solicitado por uma excitação, que por sua vez, pode ser representada na forma complexa,

$$f(t) = Ce^{i\omega t} \quad (2.66)$$

A resposta $x(t)$ é um valor complexo satisfazendo a seguinte equação:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Ce^{i\omega t} \quad (2.67)$$

centrando-se a atenção especificamente na resposta permanente, solução particular da 2.67, verifica-se facilmente que ela têm a forma:

$$x(t) = X e^{i\omega t} \quad (2.68)$$

assim, tem-se

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= i\omega x(t) \\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2 x(t) \end{aligned} \right| \quad (2.69)$$

As equações 2.68 e 2.69 substituídas na 2.67, fornecem

$$x(t) = \frac{C e^{i\omega t}}{k - m\omega^2 + ic\omega} \quad (2.70)$$

A expressão 2.70 revela uma importante característica da resposta $x(t)$, qual seja, a resposta é proporcional à força $f(t)$, sendo o fator de proporcionalidade igual a

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + ic\omega} \quad (2.71)$$

onde $H(\omega)$ é a resposta complexa em frequência. Desta feita, o deslocamento $x(t)$ têm sua expressão rearrumada para

$$x(t) = H(\omega) C e^{i\omega t} \quad (2.72)$$

Retome-se agora a solicitação expressa na equação 2.52. Na seção II.4 viu-se que a resposta do sistema pode ser escrita superpondo-se as respostas correspondentes a cada termo. Assim sendo e considerando-se a 2.72, a resposta procurada é dada por

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(\omega) C_n e^{i(n\omega_0 t)} \quad (2.73)$$

onde $H_n(\omega)$ é a resposta complexa em frequência associada com a frequência $n\omega_0$.

Raciocínio análogo àquele utilizado para $f(t)$, conduz à constatação de que a resposta de um sistema a uma excitação do tipo mostrado na figura 2.11a, pode também ser expressa em termos de transformadas pares de Fourier, como segue

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$
$$x(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
(2.74)

A transformada de Fourier da resposta é

$$X(\omega) = H(\omega) F(\omega) \quad (2.75)$$

que mostra ser a transformada do deslocamento igual ao produto da resposta complexa em frequência e a transformada de Fourier da excitação.

É muito importante apontar o fato de que a discussão foi limitada a problemas nos quais foi suposto condições iniciais nulas, em casos onde tais condições não são satisfeitas, torna-se necessário adicionar o termo correspondente à vibração livre.

Verifica-se nas equações colocadas nesta seção, a presença de integração definidas infinitamente, este fato torna-se uma considerável desvantagem para cálculos rápidos. Por outro lado nos problemas práticos da dinâmica das estruturas, a resposta é configurada em intervalos de tempo finitos e os espectros de frequências calculadas sobre

intervalos finitos de freqüência. Posteriormente, na análise e determinação da transformada numérica de Fourier, estes limites irão assumir valores finitos, definidos mais adequadamente.

II.7 - RELAÇÃO ENTRE RESPOSTA COMPLEXA EM FREQUÊNCIA E RESPOSTA A UM IMPULSO UNITÁRIO

Para sistemas lineares de um grau de liberdade, solicitadas por excitações não periódicas, estudou-se na seção II.5 a resposta expressa em termos da integral de Duhamel, na forma

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.76)$$

onde $h(t-\tau)$ é a resposta a um impulso unitário aplicado em $t = \tau$. A equação 2.76 pressupõe que a excitação começa a ser aplicada em $t = 0$, se a excitação é definida no intervalo $0 < t < \infty$, então o limite inferior da integral mudar-se-ia para $-\infty$.

Na seção II.6 foi estudada outra alternativa no tratamento das excitações do tipo transiente, obtendo-se que a resposta a uma força arbitrária $f(t)$ pode ser colocado na forma de uma transformação inversa de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2.77)$$

onde,

$$X(\omega) = H(\omega).F(\omega) \quad (2.78)$$

sendo $H(\omega)$, a resposta complexa em freqüência e $F(\omega)$ a transformada de Fourier de $f(t)$.

Admitindo-se uma função solicitação na forma de um impulso unitário aplicado em $t = 0$, da equação 2.24 sabe-se que $f(t)$ adota a seguinte escrita:

$$f(t) = 1.\delta(t) \quad (2.79)$$

A transformada de Fourier de $f(t)$, obtida pela substituição da 2.79 na equação 2.63, considerando-se as propriedades já apontadas da função $\delta(t)$ (equações 2.44 e 2.45), é:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1.\delta(t).e^{-i\omega t} dt = 1 \quad (2.80)$$

que levada na equação 2.78, conduz à relação

$$X(\omega) = H(\omega) \quad (2.81)$$

Visto que a resposta a um impulso unitário é por definição $h(t)$, pode-se dizer que

$$x(t) = h(t) \quad (2.82)$$

e das equações 2.77 e 2.80, escrever

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.83)$$

É pois evidente que a resposta complexa em frequência $H(\omega)$ é a transformada de Fourier da resposta a um impulso unitário⁽⁷⁾

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.84)$$

Para finalizar, cumpre chamar a atenção para o fato de que as características do sistema são claramente definidas no domínio da frequência por $H(\omega)$, ou no domínio do tempo por $h(t)$.

CAPÍTULO III

MÉTODOS NUMÉRICOS DE INTEGRAÇÃO NO TEMPO

III.1 - INTRODUÇÃO

O nosso breve contato com os diferentes tipos de solicitações mostra com clareza a complexidade vinculada com a solução analítica da equação do movimento, mesmo nos problemas muito simples. Por outro lado, há nas aplicações práticas, inúmeras solicitações que não podem ser assimiladas a funções explícitas de tempo, fato este que impossibilita sua análise exata. Tais problemas somente podem ser resolvidos de forma adequada mediante a utilização de métodos numéricos na solução da equação diferencial. Esses métodos são também capazes de resolver problemas não lineares, para os quais as técnicas analíticas são inexistentes ou excessivamente complicadas.

A integração numérica é processada iterativamente em intervalos progressivos de tempo. Na solução, o tempo de integração considerado T_I é subdividido em n intervalos de tempo iguais ou seja $t = T_I/n$. O objetivo é o de se obter valores da integral em pontos discretos ao longo do eixo do tempo.

Os métodos numéricos, objeto de estudo do presente capítulo, podem, de forma a simplificar a análise, ser caracterizados como diretos ou indiretos. Nos primeiros, a palavra direto significa que prévio à aplicação do método não se verificam transformações na equação do movimento. Ao contrário, os métodos indiretos trabalham na solução analítica da equação diferencial.

Os métodos de integração direta fundamentam-se, essencialmente, em duas idéias básicas. A primeira delas constata-se no abandono da exigência da equação diferencial 1.8, ser satisfeita em todo o tempo. Estes devem obedecer a equação 1.8 unicamente em intervalos discretos de tempo Δt , separadamente. Nesse ponto, é importante observar que dentro do intervalo da solução, nos pontos discretos de tempo, pretende-se satisfazer as condições de equilíbrio estático, as quais incluem o efeito da inércia e a força de

amortecimento. A segunda idéia consiste em se adotar a variação do deslocamento, velocidade e aceleração em cada intervalo de tempo Δt .

Embora existam numerosos métodos diretos de integração, são abordados neste capítulo apenas três, escolhidos pela sua representatividade; o método das diferenças finitas, método de Newmark e o método de Wilson.

No tratamento dos métodos indiretos, adota-se aqui a regra do trapézio, que resulta em operadores cujo erro é da ordem do quadrado do espaçamento. É estudada a integração numérica da convolução de Duhamel considerando-se detalhadamente a sua computação.

Para finalizar, convém lembrar que todas as considerações feitas neste capítulo, são orientadas no sentido de resolver a equação de movimento correspondente a sistemas lineares com um grau de liberdade, em termos de algoritmos apropriados no sentido computacional.

III.2 - MÉTODO DAS DIFERENÇAS CENTRAIS

Os operadores de diferenças, dados no apêndice B, definem as derivadas primeira e segunda de uma função genérica $\rho(t)$, como sendo:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_t &= \frac{\rho_{t-\Delta t} - 2\rho_t + \rho_{t+\Delta t}}{(\Delta t)^2} \\ \dot{\rho}_t &= \frac{\rho_{t+\Delta t} - \rho_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \end{aligned} \quad (3.1)$$

nas quais o erro de aproximação é da ordem de $(\Delta t)^2$. Estas equações recorrentes, juntamente com a equação diferencial do movimento (Equação 1.8) são suficientes para a solução numérica.

Impondo-se o equilíbrio dinâmica no tempo t e substituindo-se os operadores (equações 3.1) na equação adimensional do movimento 1.8, acha-se

$$\frac{\rho_{t+\Delta t} - 2\rho_t + \rho_{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} + 2\gamma\omega_n \left[\frac{\rho_{t+\Delta t} - \rho_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right] + \omega_n^2 \rho_t = \omega_n^2 f_t(t) \quad (3.2)$$

que conduz a:

$$\rho_{t+\Delta t} = \frac{1}{1+\gamma h} \left[(\gamma h - 1)\rho_{t-\Delta t} + (2-h^2)\rho_t + h^2 f_t(t) \right] \quad (3.3)$$

onde:

$$h = \omega_n \Delta t \quad (3.4)$$

Duas conclusões de significativa importância podem ser, agora, formuladas. Primeiramente verifica-se que na determinação do deslocamento $\rho_{t+\Delta t}$, no tempo $t+\Delta t$, considera-se o equilíbrio em t . Por este motivo o método das diferenças centrais denomina-se de integração explícita. Nos métodos de Newmark e Wilson, tratados nos próximos itens, é necessário satisfazer o equilíbrio em $t+\Delta t$, desta forma, são chamadas de métodos de integração implícita. Em segundo lugar, da equação 3.3, nota-se que o cálculo de $\rho_{t+\Delta t}$ se processa em termos das quantidades ρ_t e $\rho_{t-\Delta t}$, assim algum procedimento especial têm que ser utilizado no cálculo de $\rho_{\Delta t}$, correspondente ao primeiro intervalo de tempo.

A figura 3.1 mostra o essencial da configuração discreta de uma função genérica $\rho(t)$.

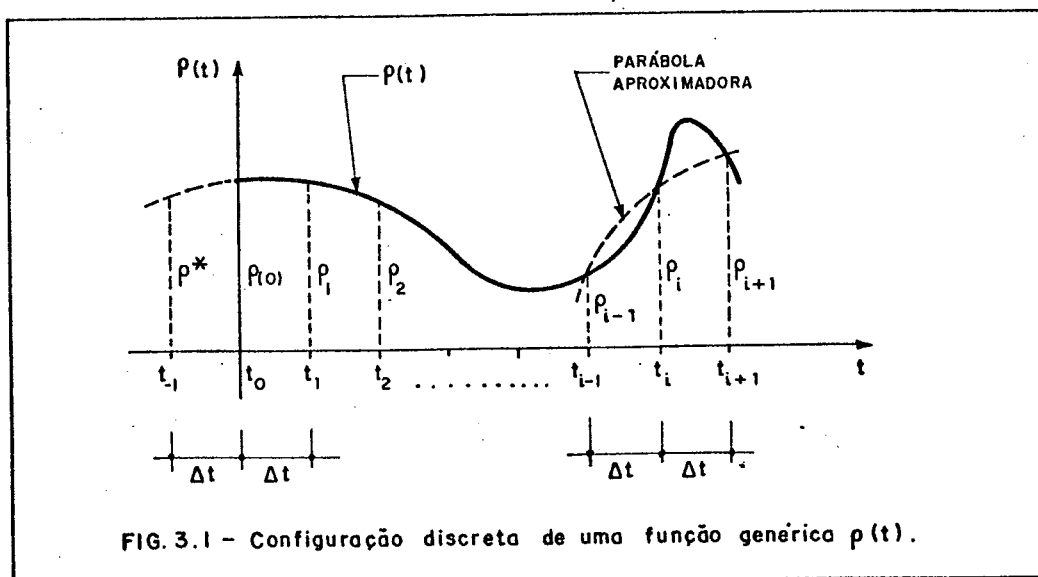


FIG. 3.1 - Configuração discreta de uma função genérica $\rho(t)$.

A determinação do valor ρ^* , necessário para o cálculo de ρ_1 , torna-se elementar uma vez que são conhecidas as condições iniciais. Por exemplo, no caso de se ter:

$$\left. \begin{aligned} \rho(0) &= \rho_0 \\ \dot{\rho}(0) &= \dot{\rho}_0 \end{aligned} \right| \quad (3.5)$$

em conformidade com a notação indicada na figura, as equações 3.1 podem ser utilizadas de forma a se obter:

$$\dot{\rho}(0) = \frac{\rho_1 - \rho^*}{2\Delta t} = \dot{\rho}_0 \quad (3.6)$$

de onde se conclui que:

$$\rho^* = \rho_1 - 2\dot{\rho}_0(\Delta t) \quad (3.7)$$

Em se tratando da determinação de ρ_1 , levando-se o resultado expresso em 3.7 na equação 3.3, obtem-se:

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \left[h^2 f_0 + 2(1-\gamma h)\dot{\rho}_0 \Delta t + (2-h^2)\rho_0 \right] \quad (3.8)$$

Expressando-se a 3.3 na notação adotada, tem-se

$$\rho_{i+1} = \frac{1}{1+\gamma h} \left[h^2 f_i + (\gamma h - 1)\rho_{i-1} + (2-h^2)\rho_i \right] \quad (3.9)$$

As equações 3.8 e 3.9 formam o algoritmo completo do método.

É conveniente ressaltar que o uso do método das diferenças finitas requer a escolha de um intervalo de tempo $\Delta t \leq \Delta t_{crit}$. No capítulo referente à análise da convergência e aproximação dos métodos numéricos (Capítulo V) mostra-se que para se obter uma solução válida,

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{crit}} = \frac{T_n}{\pi} \quad (3.10)$$

onde T_n é o período natural do sistema. Este fato pode representar um considerável inconveniente no trato de sistemas com vários graus de liberdade.

Os métodos de integração numérica, nos quais requer-se a adoção de um intervalo t menor que um intervalo crítico, são chamadas de condicionalmente estáveis, ou seja, os resultados obtidos com $\Delta t > \Delta t_{\text{crit}}$ podem conter erros de integração inaceitáveis.

DIAGRAMA DE FLUXO PARA O CÁLCULO DIGITAL

Com a finalidade de se trabalhar unicamente com valores adimensionais, na tentativa de se apresentar o estudo de maneira ordenada e de forma a poder ser utilizado nos restantes métodos numéricos do capítulo, são introduzidas duas variáveis adimensionais que contêm os dados do problema. Tais variáveis são definidas como:

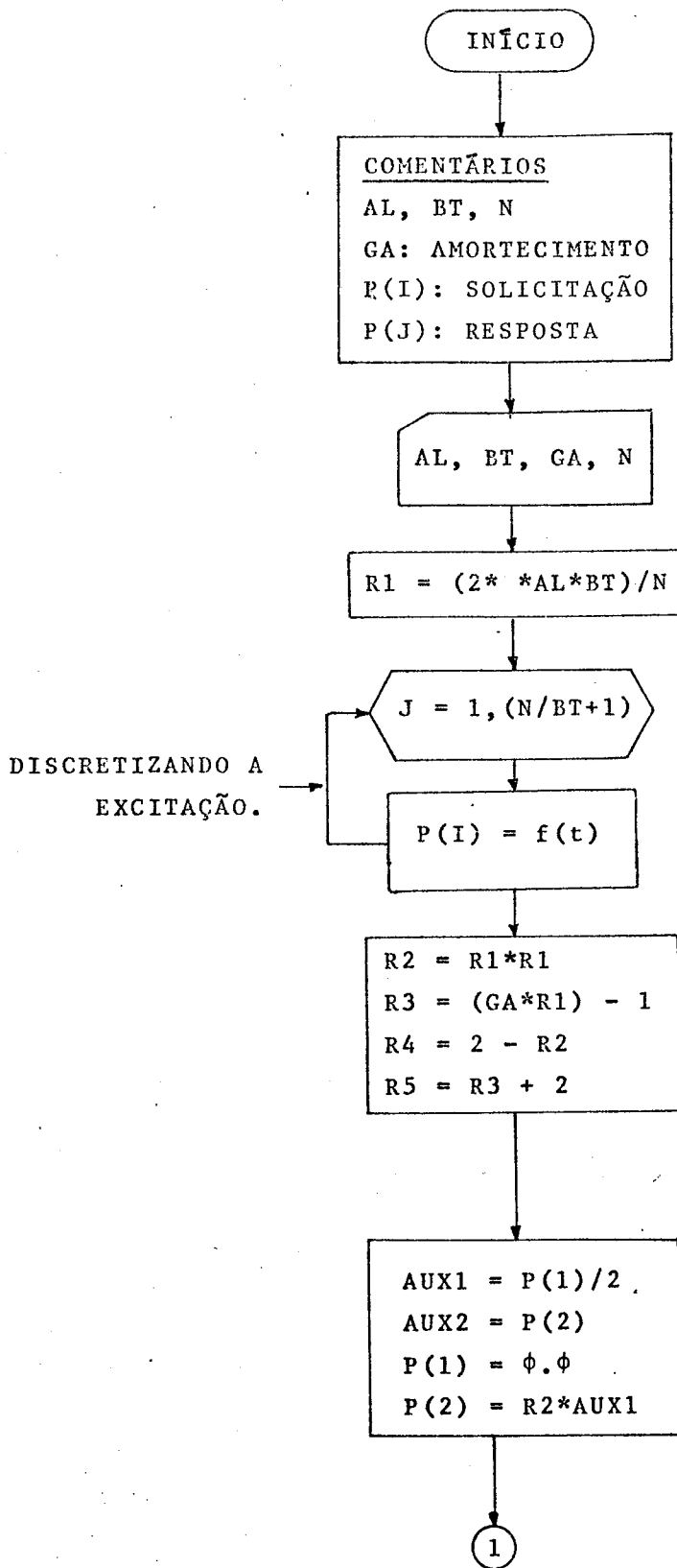
$$AL = \frac{T_p}{T_n} \quad (3.11)$$

e

$$BT = \frac{T_I}{T_p} \quad (3.11)$$

onde, T_p é o tempo durante o qual o sistema permanece excitado, T_n é o período natural do sistema e T_I é o tempo de integração considerado.

Na figura 3.2 indica-se um diagrama de fluxo para cálculo no computador.



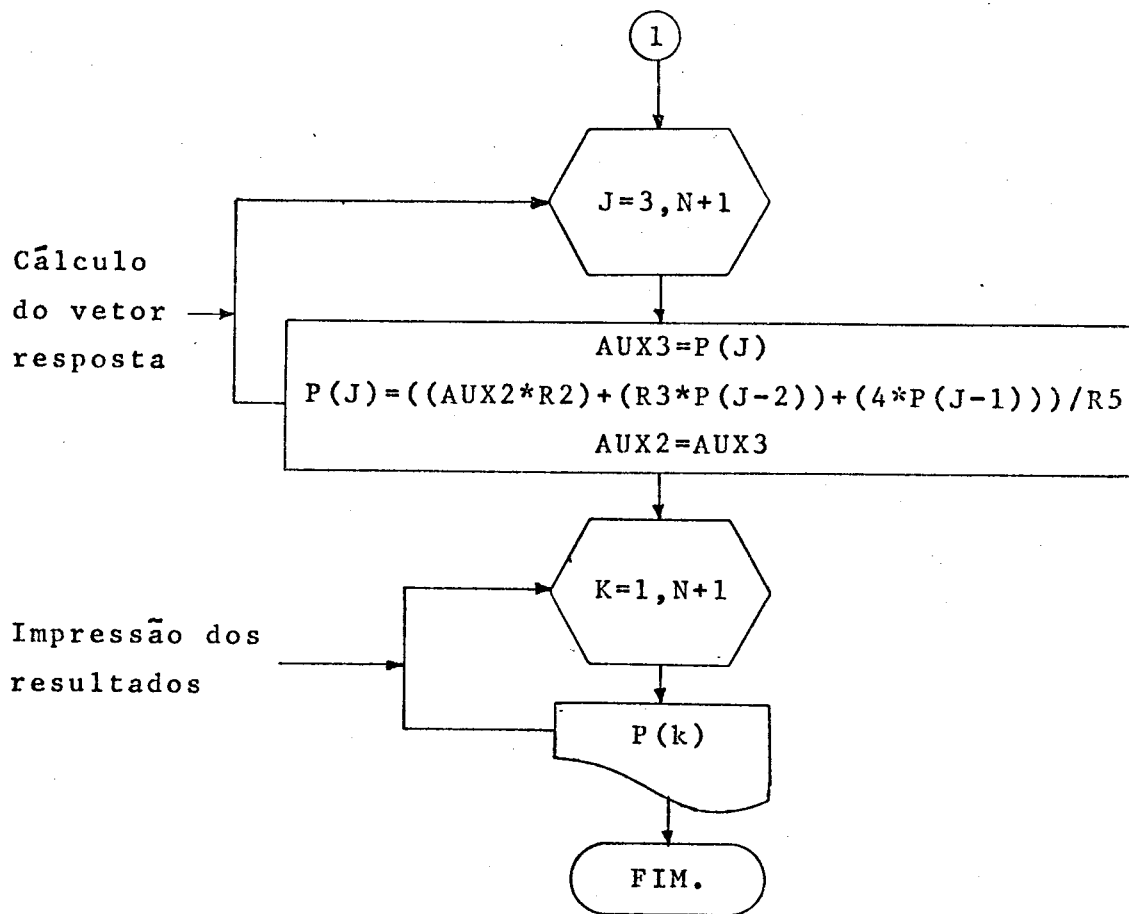


Figura 3.2 - Diagrama de fluxo para o método das diferenças finitas.

III.3 - MÉTODO DE NEWMARK

A base deste método, consiste em se assumir a variação da aceleração dentro de um intervalo de tempo Δt , como indicado na figura 3.3.

Conhecida a interpolação da aceleração no intervalo Δt , pode-se expressar o deslocamento e a velocidade no fim do intervalo em termos do deslocamento, velocidade, aceleração no começo do intervalo e da aceleração no fim do intervalo, pelas relações:

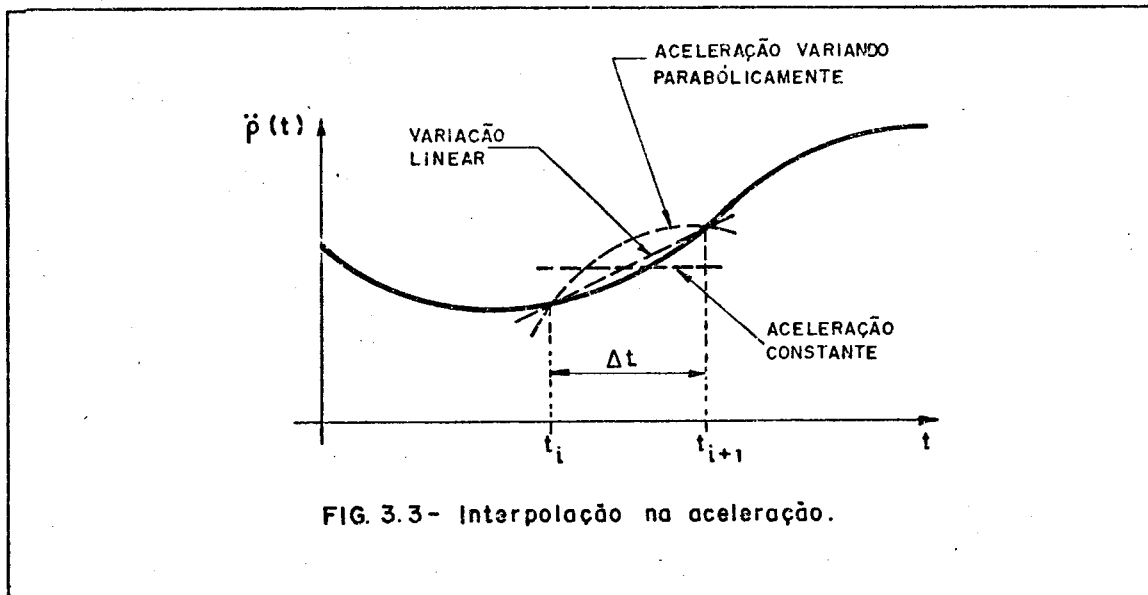


FIG. 3.3- Interpolação na aceleração.

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{i+1} &= \dot{\rho}_i + \left[(1-\delta)\ddot{\rho}_i + \delta\ddot{\rho}_{i+1} \right] \Delta t \\ \rho_{i+1} &= \rho_i + \dot{\rho}_i \Delta t + \left[(1/2-\beta)\ddot{\rho}_i + \beta\ddot{\rho}_{i+1} \right] (\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde os parâmetros δ e β definem o tipo de interpolação efetuada e podem ser determinados de forma a se obter estabilidade e convergência na aplicação do método.

Newmark originalmente propôs os valores $\delta = 1/2$ e $\beta = 1/4$ (aceleração constante no intervalo), para conseguir um algoritmo incondicionalmente estável. Contudo, é verdadeiramente difícil interpretar fisicamente quaisquer valores de β e δ , todavia o mesmo pode ser feito para alguns particulares valores. Como exemplo, considere-se a aceleração variando linearmente ao longo de t , com valores no começo e no fim do intervalo $\ddot{\rho}_i$ e $\ddot{\rho}_{i+1}$ respectivamente, da forma mostrada na figura 3.4.

Note-se na figura, a indicação da variável auxiliar \bar{t} com origem em t_i .

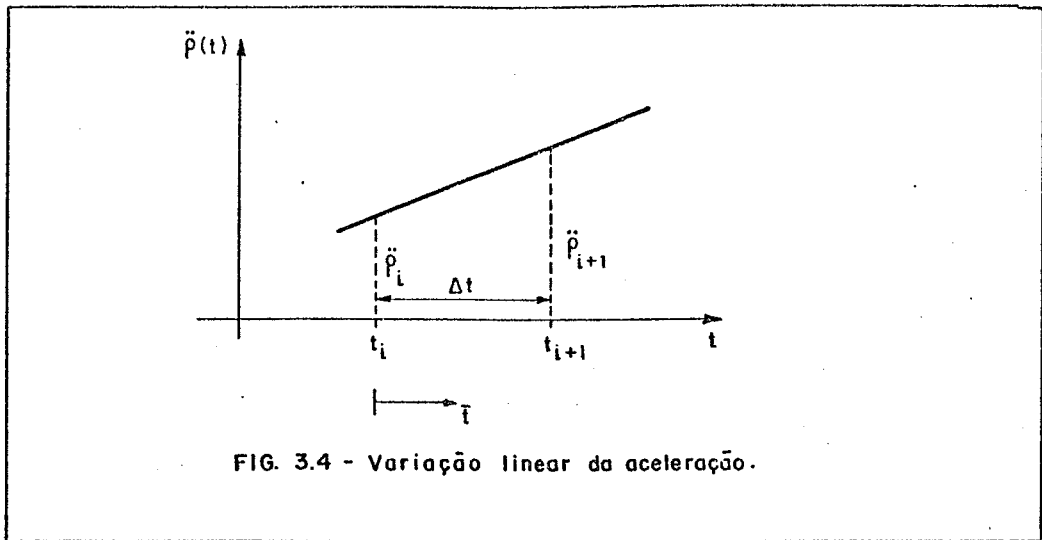


FIG. 3.4 - Variação linear da aceleração.

Para aceleração variando linearmente tem-se:

$$\ddot{p}(\bar{t}) = \ddot{p}_i + \left[\frac{\ddot{p}_{i+1} - \ddot{p}_i}{\Delta t} \bar{t} \right] \quad (3.13)$$

Integrando-se a equação 3.13, chega-se à velocidade e o deslocamento no intervalo

$$\dot{p}(\bar{t}) = \int \ddot{p}(\bar{t}) d\bar{t} = \dot{p}_i + \ddot{p}_i \bar{t} + \left[\frac{\ddot{p}_{i+1} - \ddot{p}_i}{\Delta t} \frac{\bar{t}^2}{2} \right] \quad (3.14)$$

e

$$\rho(\bar{t}) = \int \dot{p}(\bar{t}) d\bar{t} = \rho_i + \dot{p}_i \bar{t} + \ddot{p}_i \frac{\bar{t}^2}{2} + \left[\frac{\ddot{p}_{i+1} - \ddot{p}_i}{\Delta t} \right] \frac{\bar{t}^3}{6} \quad (3.15)$$

nas quais os valores ρ_i e \dot{p}_i representam as condições iniciais.

Para $\bar{t} = t_{i+1}$, a velocidade e o deslocamento são,

$$\begin{aligned} \dot{p}_{i+1} &= \dot{p}(\bar{t}=\Delta t) = \dot{p}_i + (\ddot{p}_{i+1} + \ddot{p}_i) \frac{\Delta t}{2} \\ \rho_{i+1} &= \rho(\bar{t}=\Delta t) = \rho_i + \dot{p}_i \Delta t + \left[(1/2 - 1/6) \ddot{p}_i + 1/6 \ddot{p}_{i+1} \right] (\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Do exame conjunto das equações 3.12 e 3.16 fica evidente que para a aceleração variando linearmente os valores correspondentes de β e δ são:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 1/6 \\ \delta &= 1/2 \end{aligned} \right| \quad (3.17)$$

Diversos trabalhos referentes a análises numérica (BATHE, 1982) indicam que os valores para β e δ serem selecionados adequadamente devem estar compreendidos nos intervalos

$$\left. \begin{aligned} \delta &\geq 1/2 \\ \beta &\geq 1/4 (1/2+\delta)^2 \end{aligned} \right| \quad (3.18)$$

Para se obter o algoritmo do método é necessário obedecer o equilíbrio (equação 1.8), nos tempos t_{i-1} , t_i e t_{i+1} .

$$\left. \begin{aligned} \ddot{p}_{i+1} + 2\gamma\omega_n \dot{p}_{i+1} + \omega_n^2 p_{i+1} &= \omega_n^2 f_{i+1} \\ \ddot{p}_i + 2\gamma\omega_n \dot{p}_i + \omega_n^2 p_i &= \omega_n^2 f_i \\ \ddot{p}_{i-1} + 2\gamma\omega_n \dot{p}_{i-1} + \omega_n^2 p_{i-1} &= \omega_n^2 f_{i-1} \end{aligned} \right| \quad (3.19)$$

Paralelamente as equações 3.12 com $\delta = 1/2$, permitem escrever:

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_i &= \dot{\rho}_{i-1} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\rho}_{i-1} + \ddot{\rho}_i) \\
 \dot{\rho}_{i+1} &= \dot{\rho}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\rho}_i + \ddot{\rho}_{i+1}) \\
 \rho_i &= \rho_{i-1} + \Delta t \dot{\rho}_{i-1} + (1/2 - \beta)(\Delta t)^2 \ddot{\rho}_{i-1} + \beta(\Delta t)^2 \ddot{\rho}_i \\
 \rho_{i+1} &= \rho_i + \Delta t \dot{\rho}_i + (1/2 - \beta)(\Delta t)^2 \ddot{\rho}_i + \beta(\Delta t)^2 \ddot{\rho}_{i+1}
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

Como próximo passo, multiplicando-se a primeira e a última das equações 3.19 por $(\Delta t)^2 \beta$, a segunda por $(\Delta t)^2 (1-2\beta)$ e posteriormente somando-as membro a membro, obtem-se:

$$\begin{aligned}
 (\Delta t)^2 \left\{ \left[\beta \ddot{\rho}_{i+1} + (1/2 - \beta) \ddot{\rho}_i \right] - \left[\beta \ddot{\rho}_i + (1/2 - \beta) \ddot{\rho}_{i-1} \right] + \right. \\
 + \left[1/2 \ddot{\rho}_i + 1/2 \ddot{\rho}_{i-1} \right] + 2\gamma \omega_n \left[\beta (\dot{\rho}_{i+1} - \dot{\rho}_i) + \right. \\
 + \left. (1/2 - \beta) (\dot{\rho}_i - \dot{\rho}_{i-1}) + 1/2 (\dot{\rho}_i + \dot{\rho}_{i-1}) \right] + \\
 \left. + \omega_n^2 \left[\beta \rho_{i+1} + (1-2\beta) \rho_i + \beta \rho_{i-1} \right] \right\} = \\
 = (\omega_n \Delta t)^2 \left[\beta f_{i+1} + (1-2\beta) f_i + \beta f_{i-1} \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

Finalmente substituindo-se as equações 3.20 na 3.21, cancelando-se os termos iguais e escrevendo-se os restantes ordenadamente, obtem-se:

$$\begin{aligned}
 (1 + \gamma h + \beta h^2) \rho_{i+1} &= h^2 \left[\beta f_{i+1} + (1-2\beta) f_i + \beta f_{i-1} \right] + \\
 + \left[2 - h^2 (1-2\beta) \right] \rho_i &- \left[1 - \gamma h + \beta h^2 \right] \rho_{i-1}
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

onde

$$h = \omega_n \Delta t \quad (3.23)$$

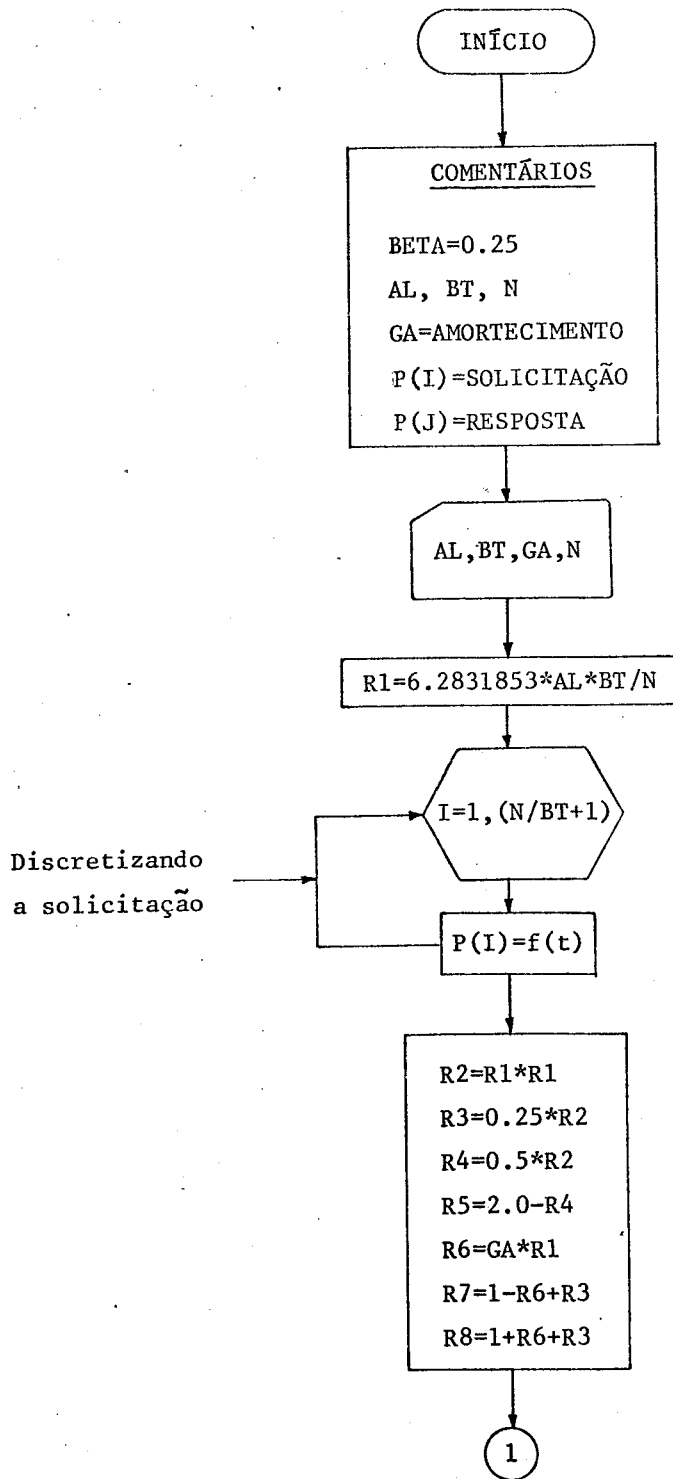
Hã ainda a considerar as condições iniciais, supondo-as nulas, acha-se que

$$(1 + \gamma h + \beta h^2) \rho_1 = \left\{ h^2 \left[\beta f_1 + \left[1/2 - \beta + \gamma h (1/2 - 2\beta) \right] f_0 \right] \right\} \quad (3.24)$$

As equações 3.22 e 3.24 constituem a definição completa do algoritmo.

O exame simultâneo dos algoritmos do método das diferenças finitas (equações 3.8 e 3.9) com o correspondente ao método de Newmark (equações 3.22 e 3.24), tornam evidente duas importantes conclusões. Primeiramente note-se que no método de Newmark o valor futuro da resposta depende também do valor futuro da solicitação, diferenciando-se destacadamente neste particular do método das diferenças centrais verifique-se também que para valores nulos de β o algoritmo de Newmark torna-se idêntico ao mesmo ou, em outras palavras o método das diferenças finitas pode ser entendido como um caso particular do método de Newmark.

DIAGRAMA DE FLUXO PARA O CÁLCULO DIGITAL



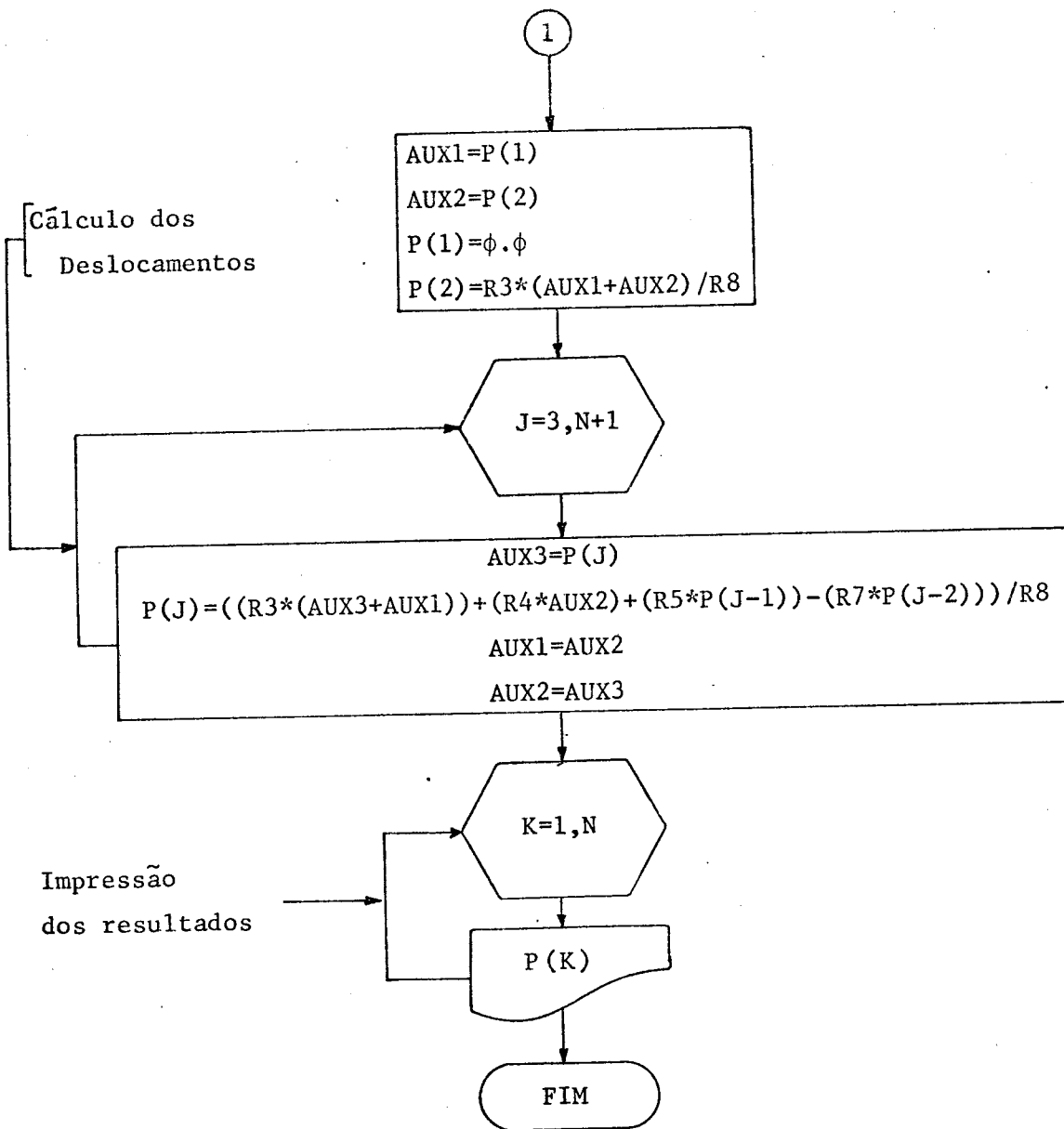


Figura 3.5 - Diagrama de fluxo para o método de Newmark.

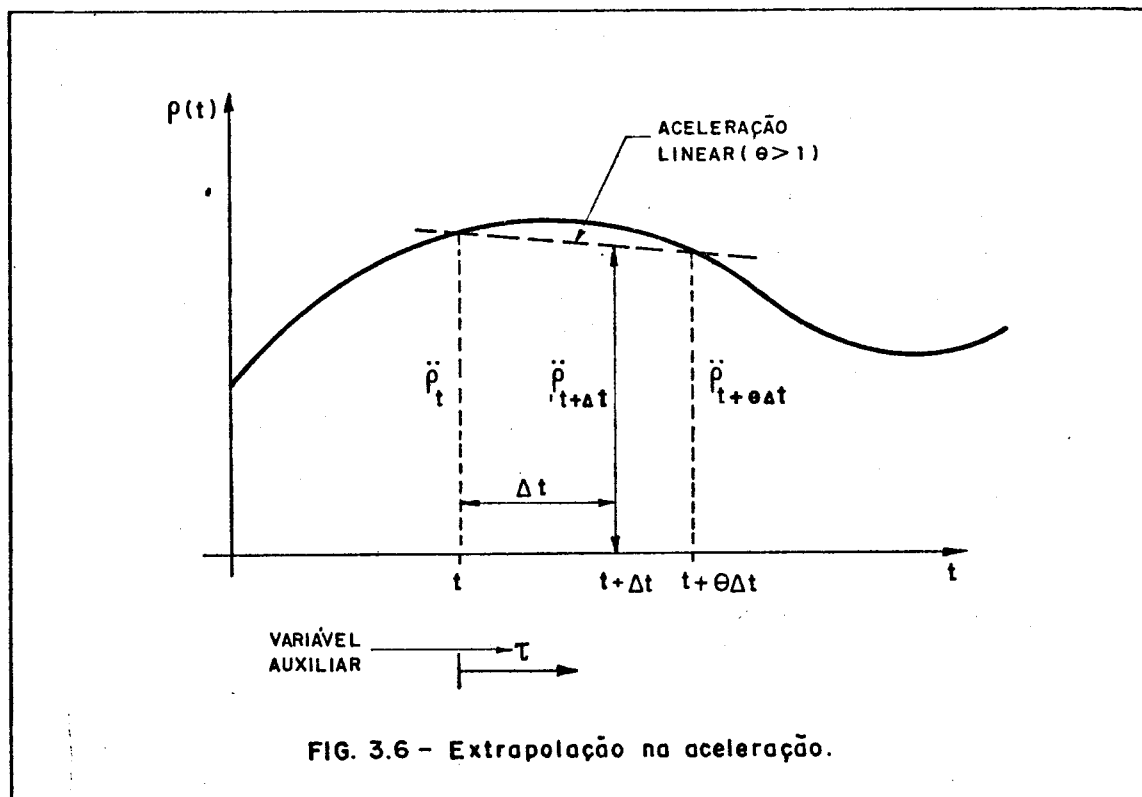
III.4 - MÉTODO DE WILSON

O método de Wilson (Método θ) é essencialmente semelhante ao método da aceleração linear, exceto que neste caso a variação da aceleração é adotada considerando-se um intervalo de tempo maior que Δt , ou seja, a aceleração é extrapolada. Constituindo-se portanto, numa extensão do mesmo.

Suponha-se que na figura 3.6 toma-se no tempo t , um valor para a aceleração igual a \ddot{p}_t , então para o intervalo de tempo de t até $t+\theta\Delta t$, com $\theta > 1$, tem-se:

$$\ddot{p}_{t+\tau} = \ddot{p}_t + (\ddot{p}_{t+\Delta t} - \ddot{p}_t) \frac{\tau}{\Delta t}, \tag{3.25}$$

onde já foi introduzida a variável auxiliar τ com origem no tempo t .



Quando $\theta = 1$, a equação 3.25 resulta no já estudado método da aceleração linear com $\beta = 1/6$ (vide equação

3.13). No capítulo V verifica-se que para se tornar o método incondicionalmente estável é necessário utilizar $\theta \gg 1.37$.

Se $\dot{\rho}_t$ e ρ_t são a velocidade e o deslocamento no tempo t respectivamente, a velocidade e o deslocamento no intervalo de t a $t+\theta\Delta t$ pode ser obtida integrando-se a equação 3.25, na forma:

$$\dot{\rho}_{t+\tau} = \dot{\rho}_t + \int_{t+\tau} \ddot{\rho}_{t+\tau} d\tau = \dot{\rho}_t + \rho_t \tau + (\ddot{\rho}_{t+\Delta t} - \ddot{\rho}_t) \frac{\tau^2}{2\Delta t} \quad (3.26)$$

e

$$\rho_{t+\tau} = \rho_t + \int \dot{\rho}_{t+\tau} d\tau = \rho_t + \dot{\rho}_t \tau + \frac{1}{2} \ddot{\rho}_t \tau^2 + (\ddot{\rho}_{t+\Delta t} - \ddot{\rho}_t) \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}$$

Para $\tau = \theta\Delta t$, as equações 3.25, 3.26 e 3.27 fornecem

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{t+\theta\Delta t} &= \ddot{\rho}_t + (\ddot{\rho}_{t+\Delta t} - \ddot{\rho}_t)\theta \\ \dot{\rho}_{t+\theta\Delta t} &= \dot{\rho}_t + \ddot{\rho}_t \theta\Delta t + (\ddot{\rho}_{t+\Delta t} - \ddot{\rho}_t) \frac{\theta^2 \Delta t^2}{2} \\ \rho_{t+\theta\Delta t} &= \rho_t + \dot{\rho}_t \theta\Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\rho}_t \theta^2 (\Delta t)^2 + (\ddot{\rho}_{t+\Delta t} - \ddot{\rho}_t) \frac{\theta^3 (\Delta t)^3}{6} \end{aligned} \quad (3.28)$$

A solução do deslocamento, velocidade e aceleração no tempo $t+\Delta t$, implica na necessidade de ser satisfeita a equação do movimento (equação 3.1) no tempo $t+\theta\Delta t$,

$$\ddot{\rho}_{t+\theta\Delta t} + 2\gamma\omega_n \dot{\rho}_{t+\theta\Delta t} + \omega_n^2 \rho_{t+\theta\Delta t} = \omega_n^2 \bar{F}_{t+\theta\Delta t} \quad (3.29)$$

Como pode ser observado, da equação (3.29), a função de tempo da solicitação requer também de um vetor linearmente projetado. Proceda-se então como segue

$$\bar{f}_{t+\theta\Delta t} = f_t + (f_{t+\Delta t} - f_t)\theta \quad (3.30)$$

Da substituição das equações 3.28 na 3.29, chega-se a

$$\begin{aligned} & \left[\theta + \gamma \omega_n \theta^2 \Delta t + \frac{\omega_n^2 \theta^3 (\Delta t)^2}{6} \right] \ddot{p}_{t+\Delta t} + \left[1 - \theta + 2\gamma \omega_n \theta \Delta t - \gamma \omega_n \theta^2 \Delta t + \right. \\ & \left. + \frac{\omega_n^2 \theta^2 (\Delta t)^2}{2} - \frac{\omega_n^2 \theta^3 (\Delta t)^2}{6} \right] \ddot{p}_t + \left[2\gamma \omega_n + \omega_n^2 \theta \Delta t \right] \dot{p}_t + \omega_n^2 p_t = \omega_n^2 \bar{f}_{t+\theta\Delta t} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Tomando-se

$$\beta = \frac{\theta}{(\omega_n \Delta t)^2} + \frac{\gamma \theta^2}{\omega_n \Delta t} + \frac{\theta^3}{6} \quad (3.32)$$

e

$$\lambda = \frac{\gamma \beta}{\omega_n \Delta t} \quad (3.33)$$

o valor de $\ddot{p}_{t+\Delta t}$ é obtido diretamente da equação 3.31,

$$\begin{aligned} \ddot{p}_{t+\Delta t} &= \left(1 - \frac{\beta \theta^2}{3} - \frac{1}{\theta} - \lambda \theta \right) \ddot{p}_t + \frac{(-\beta \theta - 2\lambda)}{\Delta t} \dot{p}_t + \frac{(-\beta)}{(\Delta t)^2} p_t + \\ &+ \frac{\beta}{(\Delta t)^2} \bar{f}_{t+\theta\Delta t} \end{aligned} \quad (3.34)$$

que substituído nas equações 3.26 e 3.27 para $\tau = \Delta t$, permite a obtenção do algoritmo completo do método:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{t+\Delta t} &= \Delta t \left(1 - \frac{\beta \theta^2}{6} - \frac{1}{2\theta} - \frac{\lambda \theta}{2} \right) \ddot{p}_t + \left(1 - \frac{\beta \theta}{2} - \lambda \right) \dot{p}_t + \\ &+ \frac{(-\beta)}{2\Delta t} p_t + \frac{\beta}{2\Delta t} \bar{f}_{t+\theta\Delta t} \end{aligned} \quad (3.35)$$

e

$$\rho_{t+\Delta t} = (\Delta t)^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\beta\theta^2}{18} - \frac{1}{6\theta} - \frac{\lambda\theta}{6} \right] \ddot{\rho}_{t+\Delta t} \left[1 - \frac{\beta\theta}{6} - \frac{\lambda}{3} \right] \dot{\rho}_t + (1 - \frac{\beta}{6})\rho_t + \frac{\rho}{6} \bar{F}_{t+\theta\Delta t} \quad (3.36)$$

Da dedução do algoritmo do método de Wilson é evidente que ele é um método de integração implícito. Note-se também que, contrastando do método das diferenças finitas, não é necessário nenhum procedimento especial no cálculo dos valores iniciais, uma vez que os deslocamentos, velocidade e aceleração no tempo $t+\Delta t$, são expressas em termos dos seus correspondentes valores no tempo t .

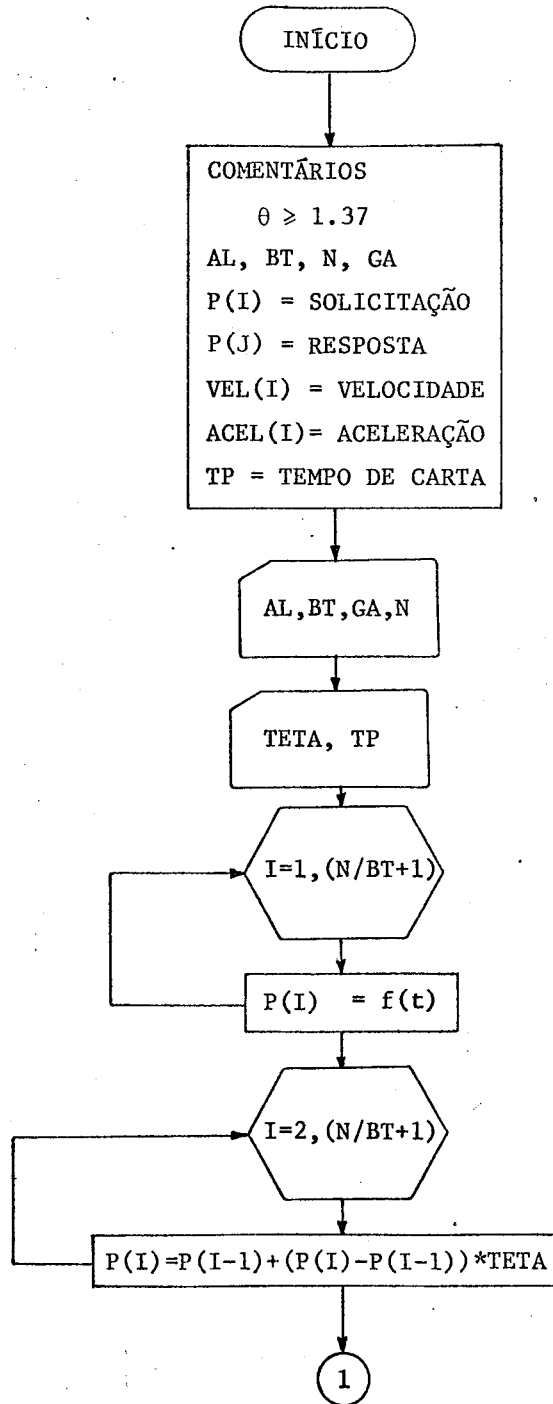
Resta, para finalizar, a consideração das condições iniciais. Supondo

$$\left. \begin{array}{l} \rho_o = 0 \\ \dot{\rho}_o = 0 \end{array} \right| \quad (3.37)$$

da equação de equilíbrio dinâmico acha-se:

$$\ddot{\rho}_o = \omega_n^2 f_o \quad (3.38)$$

DIAGRAMA DE FLUXO PARA CÁLCULO
NO COMPUTADOR



Efetuando-se
a extrapolação
na solicitação

1

$R1 = (6.2831853*AL*BT)/N$
 $R2 = TP*BT/N$
 $R3 = (6.2831853*AL)/TP$
 $R4 = R1*R1$
 $RS = TETA*TETA$
 $R6 = (TETA/R4)+(GA*R5/R1)+(R5*TETA/6)$
 $R7 = GA/(R1*R6)$
 $R8 = (R5/(3*R6))+(1/TETA)+(R7*TETA)$
 $R9 = (TETA/R6)+(2*R7)$
 $R1 = R2*R2$
 $R11 = R3*R3$
 $R12 = (0.5-(R8/6))*R10$
 $R13 = 6*R6$
 $R14 = 1-R8$
 $R15 = (1-(R8/2))*R2$
 $R16 = R9/R2$
 $R17 = R6*R10$
 $R18 = 1-(R9/2)$
 $R19 = 2*R6*R2$
 $R2\phi = (1-R9/6)*R2$
 $R21 = 1-(1/R13)$

$AUX1 = P(1)$
 $AUX = P(2)$
 $P(1) = 0.0$
 $P(2) = R12*R11*AUX1+(AUX2/R13)$
 $ACEL(2) = R14*R11*AUX1+(AUX2/R17)$
 $VEL(2) = (R15*R11*AUX1)+(AUX2/R19)$

2

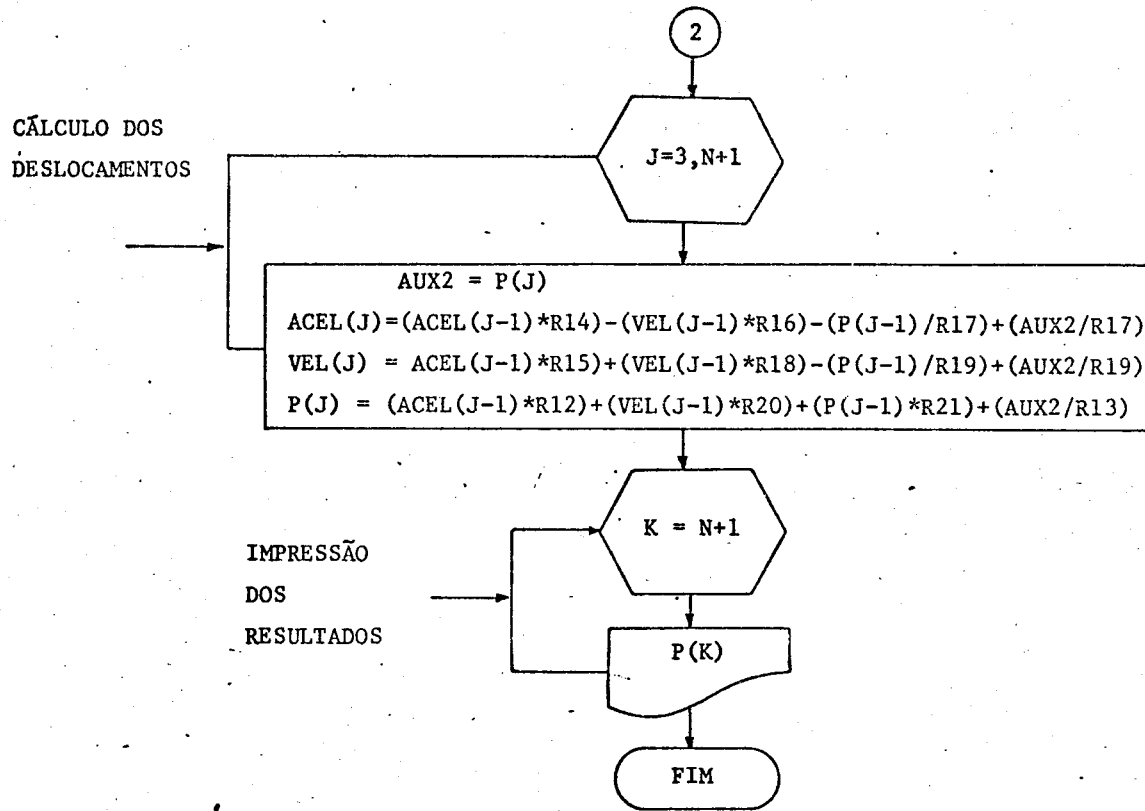


Figura 3.7 - Diagrama de fluxo para o método de Wilson.

III.5 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DA CONVOLUÇÃO

A convolução de Duhamel constitui-se numa solução analítica da equação do movimento, assim sendo sua análise numérica, além de ser muito interessante, não apresenta restrições com relação à instabilidade.

A equação 2.41 colocada na forma adimensional a dota a seguinte escrita:

$$\rho(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_0^t f(\tau) e^{-\gamma\omega_n(t-\tau)} \text{sen } \sqrt{1-\gamma^2} \omega_n(t-\tau) d\tau \quad (3.39)$$

onde consideram-se nulas as condições iniciais.

No intuito de manter uniformidade quanto aos erros de integração dos métodos numéricos empregados, utiliza-se aqui a regra do trapézio que, analogamente ao método das diferenças finitas, produz erros cuja ordem é do quadrado do espaçamento Δt .

De início transforma-se o integrando na equação 3.39 num produto de funções discretas do tempo, introduzindo-se duas novas variáveis:

$$\left. \begin{aligned} t &= i\Delta t \\ \tau &= j\Delta t \end{aligned} \right| \quad (3.40)$$

que permitem definir

$$F_{ij} = f_j e^{-\gamma\omega_n(i\Delta t-j\Delta t)} \text{sen } \sqrt{1-\gamma^2} \omega_n(i\Delta t-j\Delta t) \quad (3.41)$$

ou

$$F_{ij} = f_j e^{-\gamma h(i-j)} \text{sen } \sqrt{1-\gamma^2} h(i-j) \quad (3.42)$$

onde $h = \omega_n \Delta t$ e evidentemente $i > j$.

Os operadores da regra do trapézio (ver apêndice C), dentro da qual é efetuada uma interpolação linear ao longo de t , indicam que a integração numérica equivalente à expressa na equação 3.39 é dada por:

$$\rho_i = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\gamma^2}} \left[\left(\frac{F_{i0} + F_{ii}}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} F_{ij} \right) \Delta t \right] \quad (3.43)$$

Considerando-se que $F_{ii} = 0$, obtém-se a configuração definitiva do algoritmo na forma:

$$\rho_i = \frac{h}{\sqrt{1-\gamma^2}} \left[\left(\frac{F_{i0}}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} F_{ij} \right) \right], \quad (3.44)$$

onde as funções F_{i0} e F_{ij} são calculadas de acordo com a equação 3.42.

Examinando-se o algoritmo dado na equação 3.44, pode parecer, de forma imediata, que para cada novo valor de i , devem-se recalculados todos os valores de F_{ij} da equação 3.43. Isto não é verdadeiro, pois para cada i , é necessário calcular um único valor de F_{ij} , aquele correspondente a $(i-j) = i$, já que todos os valores de $(i-j)$ utilizados para $i-1$ são repetidos, em outras palavras, para n pontos discretos de tempo há a exigência de se calcular n valores diferentes da função F_{ij} , uma vez que para cada novo valor do deslocamento calculado, todos os valores de F_{ij} utilizados no cálculo do deslocamento anterior, podem ser reutilizados. Isto é ilustrado na tabela da figura 3.8, na qual as flechas indicam que cada valor é exatamente igual ao valor acima deste.

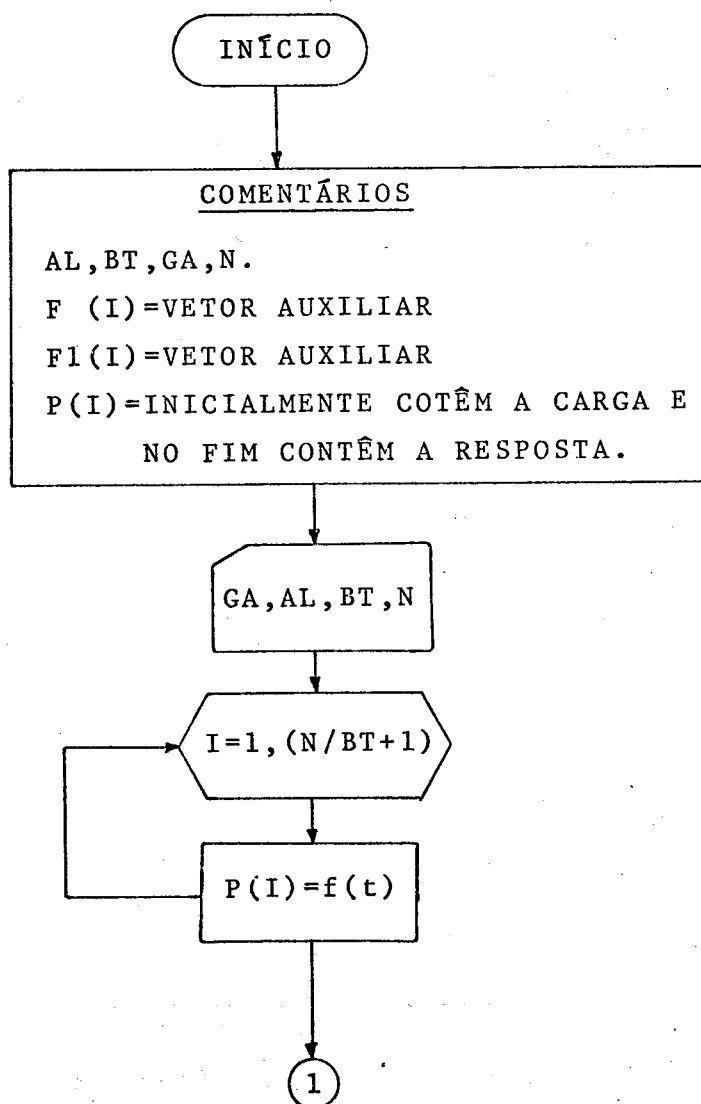
ρ_i	VALORES DE F_{ij} NECESSÁRIOS							
ρ_0								
ρ_1	F_{10}							
ρ_2	F_{20}	F_{21}						
ρ_3	F_{30}	F_{31}	F_{32}					
ρ_4	F_{40}	F_{41}	F_{42}	F_{43}				
\vdots								
ρ_{n-1}	$F_{n-1,0}$	$F_{n-1,1}$	$F_{n-1,2}$	$F_{n-1,3}$	$F_{n-1,4}$	$F_{n-1,n-2}$	
ρ_n	$F_{n,0}$	$F_{n,1}$	$F_{n,2}$	$F_{n,3}$	$F_{n,4}$	$F_{n,5}$	$F_{n,n-1}$

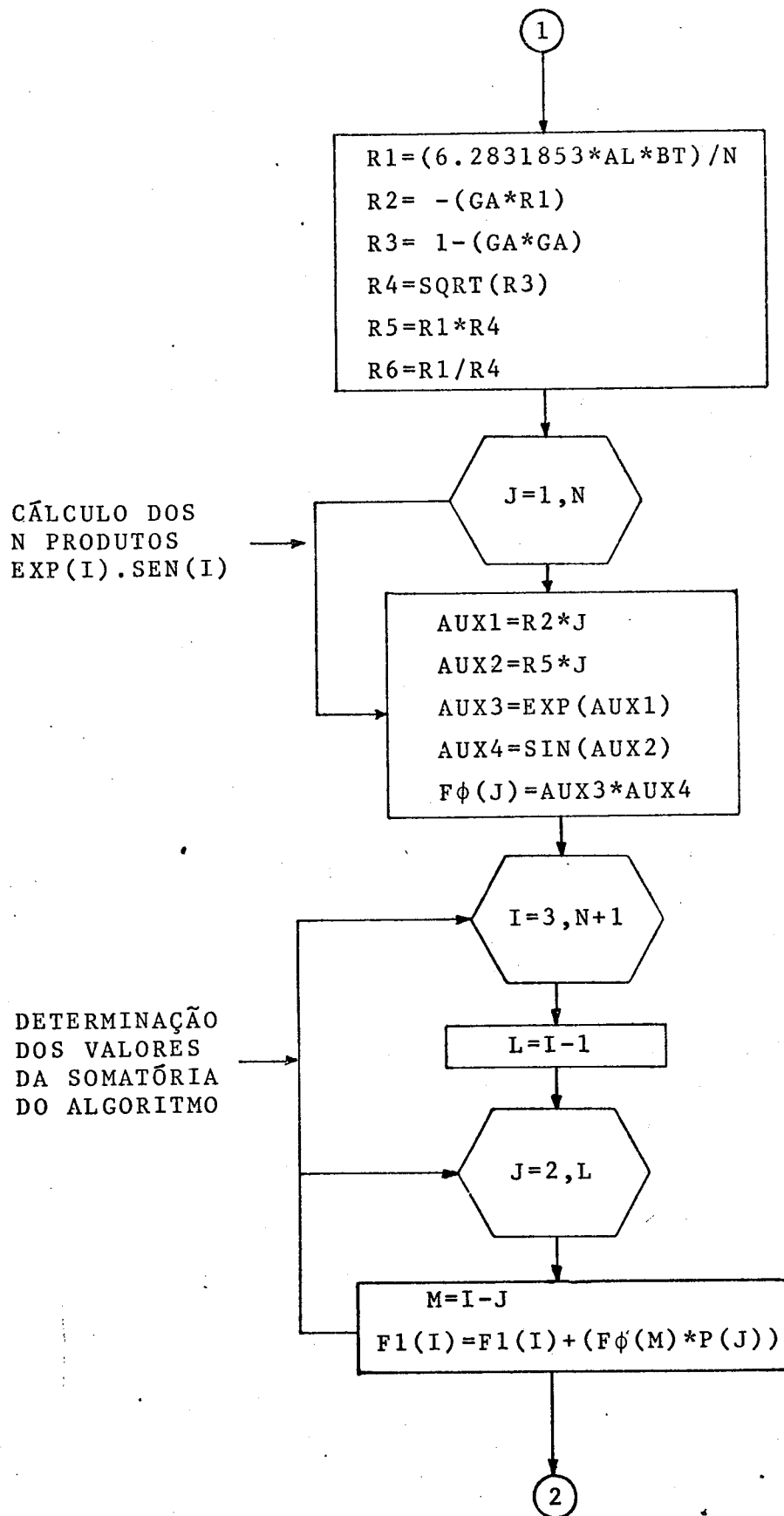
Fig. 3.8 - Reaproveitamento dos cálculos na determinação das funções F_{ij} .

Deve-se atentar para o fato do algoritmo resultante possuir uma expressão altamente simples, embora o número de operações envolvidas seja elevado.

Diversas outras técnicas numéricas de integração têm sido sugeridas no tratamento da convolução, como, por exemplo, a introduzida por DEMPSEY 1978 .

DIAGRAMA DE FLUXO PARA CÁLCULO NO COMPUTADOR





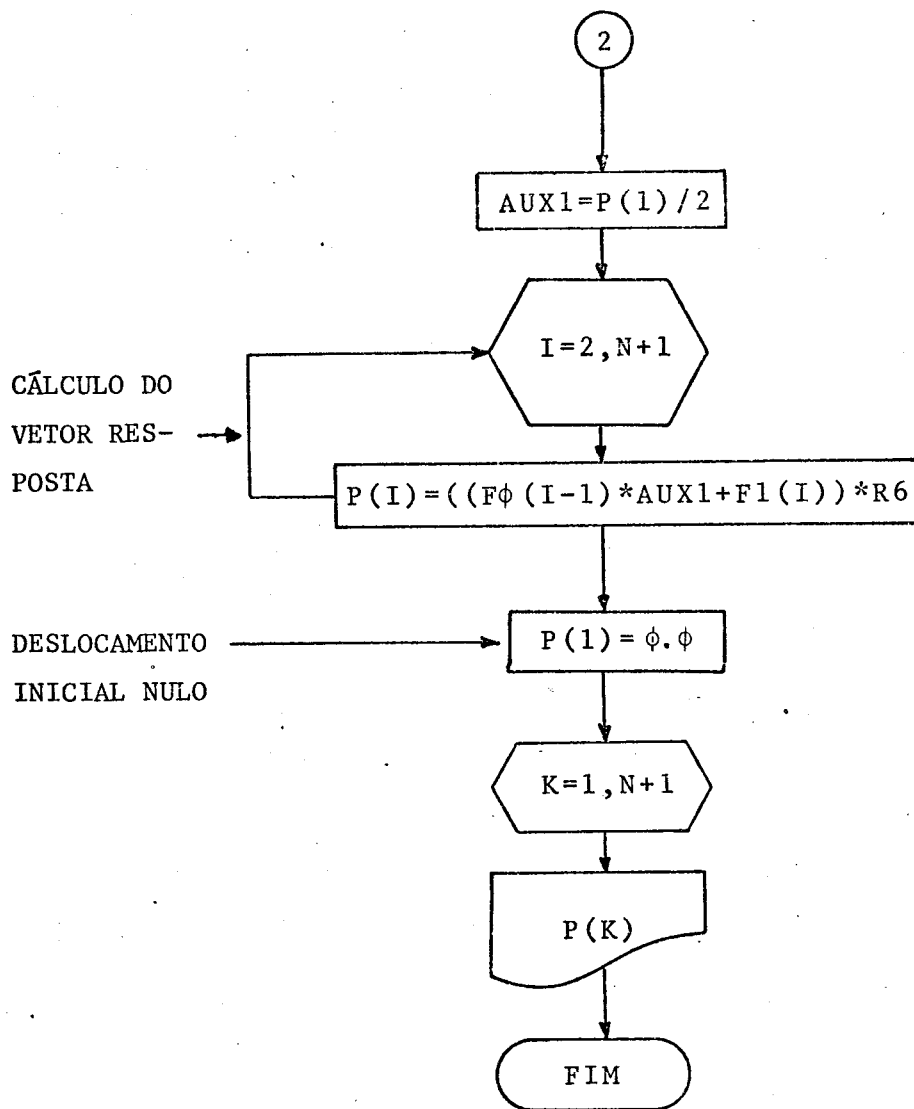


Fig. 3.9 - Diagrama de fluxo para o método de integração numérica da convolução.

CAPÍTULO IV

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.

IV.1 - INTRODUÇÃO

A atenção no presente capítulo é devotada exclusivamente à análise da versão numérica da transformada de Fourier, juntamente com o método da transformada rápida de Fourier, referido pela sigla F.F.T. (iniciais na língua Inglesa).

A transformada rápida de Fourier encontra grande aplicabilidade nos problemas de dinâmica das estruturas relacionados com a determinação da resposta de sistema lineares. As soluções no domínio da frequência fornecem valiosas informações sobre as componentes de frequência da solicitação, assim como, das características (da resposta em frequência). Nisto resultando muito vantajosas quando comparadas com soluções no tempo. Além disso, devido à introdução da transformada rápida de Fourier tornam-se competitivas com os métodos de integração direta no domínio do tempo.

O algoritmo da transformada rápida de Fourier, desde a sua versão original, elaborada por COOLEY e TUKEY em 1965, sofreu muitas modificações introduzidas para melhorar a sua eficiência computacional. Algumas dessas melhorias, aplicáveis à dinâmica das estruturas, conseguiram reduzir substancialmente o número de operações em relação à formulação clássica e valendo-se de simetrias existentes, quando trabalha-se com séries de valores reais, tornaram menos expressivo o problema de armazenagem dos vetores.

Este trabalho baseia-se nos resultados obtidos por HALL 1982, quem conseguiu elaborar um efficientíssimo algoritmo no qual as operações redundantes são eliminadas, a armazenagem dos resultados complexos intermediários não requer a utilização de memórias adicionais e os resultados finais são calculados pelo computador com tempos mínimos de processamento.

IV.2 - TRANSFORMADA NUMÉRICA DE FOURIER

Foi estudado no capítulo II, que a equação do movimento é também resolvida valendo-se da transformada de Fourier. A transformada direta de Fourier, calculada de $f(t)$ é definida por

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.1)$$

onde $i = \sqrt{-1}$.

O limite inferior na integral da equação 4.1, adota o valor de zero e não de $-\infty$, como na sua definição na equação 2.63. Esta modificação é justificada pelo fato de inexistir qualquer solicitação no tempo anterior ao tempo nulo.

A resposta $x(t)$, resulta da transformada inversa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.2)$$

A solução da equação do movimento através da transformada de Fourier, consiste na análise da resposta no domínio da freqüência.

O cálculo numérico das integrais das equações 4.1 e 4.2 requer, previamente, a substituição das funções contínuas por funções discretas e que as integrais infinitas, sejam feitas finitas.

Define-se, com base na regra do retângulo, a transformada numérica de Fourier de uma função $f(t)$ como:

$$F(k\Delta\omega) \cong \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f(j\Delta t) e^{-i2\pi jk/N}, \quad (4.3)$$

onde as variáveis discretas utilizadas, podem ser sintetizadas na seguinte tabela.

	TEMPO	FREQÜÊNCIA	PERÍODO
CASO CONTÍNUO	t	ω	$T \rightarrow \infty$
CASO DISCRETO	$j\Delta t$	$k\Delta\omega$	T: TEMPO DE INTEGRAÇÃO

Tabela 4.1 - Variáveis discretas na transformada numérica de Fourier.

O intervalo de tempo Δt , de integração e $\Delta\omega$, expressas em termos de T e N fornecem:

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad \left| \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N\Delta t} \right. \quad (4.4)$$

Note-se que o valor $e^{-i2\pi jk/N}$, constitui a expressão discreta de $e^{i\omega t}$. Isto pode ser demonstrado escrevendo-se $e^{-(ik\Delta\omega j\Delta t)}$ e aplicando-se as equações 4.4.

Tendo-se a transformada numérica $F(k\Delta\omega)$, a versão numérica da equação 4.2 é:

$$f(j\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} F(k\Delta\omega) e^{i2\pi jk/N} \Delta\omega \quad (4.5)$$

Desta última, é de fácil comprovação, que para um valor par de N, as frequências negativas podem ser expressas no intervalo $N/2 < k < N$. Com esta finalidade calcule-se a transformada numérica direta (equação 4.3) para $k = (N-k)\Delta\omega$ e $k = (-k\Delta\omega)$, na primeira situação tem-se:

$$\begin{aligned} F[(N-k)\Delta\omega] &= \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f(j\Delta t) e^{-2\pi i j(N-k)/N} \\ &= \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f(j\Delta t) e^{2\pi i jk/N} e^{-2\pi i jN/N} \end{aligned} \quad (4.6)$$

lembrando que

$$e^{-i2\pi j} = 1$$

chega-se a:

$$F[(N-k)\Delta\omega] = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f(j\Delta t) e^{2\pi i j k / N} \quad (4.7)$$

para $k = (-k\Delta\omega)$ a transformada é:

$$F(-k\Delta\omega) = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f(j\Delta t) e^{i2\pi j k / N} \quad (4.8)$$

Do exame conjunto das equações 4.7 e 4.8, conclui-se que:

$$F[(N-k)\Delta\omega] = F(-k\Delta\omega) \quad (4.9)$$

e portanto fica completamente demonstrada a propriedade anteriormente apontada. Na tabela 4.2 é esquematizada a correspondência entre k e $k\Delta\omega$, no cálculo da transformada numérica direta, para um N genérico com valor par. Observe-se que a máxima frequência presente ocorre em $k = N/2$, ou seja,

$$\omega_{\text{máx}} = \frac{N}{2} \Delta\omega = \frac{\pi N}{T} \quad (4.10)$$

K	FREQUÊNCIA DISCRETA CORRESPONDENTE
0	0
1	$\Delta\omega$
2	$2\Delta\omega$
3	$3\Delta\omega$
\vdots	\vdots
$N/2-1$	$(N/2-1)\Delta\omega$
$N/2$	$(N/2)\Delta\omega$
$N/2+1$	$-(N/2-1)\Delta\omega$
\vdots	\vdots
$N-2$	$-2\Delta\omega$
$N-1$	$-\Delta\omega$

Tabela 4.2 - Correspondência entre k e $k\Delta\omega$

Com base no resultado expresso em 4.9 a transformada numérica inversa ganha agora uma nova redação:

$$f(j\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} F(k\Delta\omega) e^{i2\pi jk/N} \Delta\omega \quad (4.11)$$

ou ainda, considerando-se as 4.4:

$$f(j\Delta t) = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} F(k\Delta\omega) e^{2\pi ijk/N} \quad (4.12)$$

Sabe-se, das propriedades das transformações, que para funções de valores reais, as transformadas de Fourier são complexas simétricas com relação a $\omega = 0$. Desta forma, se $f(j\Delta t)$ é real então, o vetor de $F(k\Delta\omega)$ (a sua transformada numérica correspondente) é complexa simétrica com relação a $k=N/2$. Os valores $F(0\Delta\omega)$ e $F(N/2\Delta\omega)$ são reais, como pode ser verificado da equação 4.3, enquanto que, o valor em $k = N-\ell$ é o conjugado complexo do valor complexo em $k = \ell$ ($\ell=1,2,\dots, N/2-1$).

À fim de comprovar, agora, se a equação 4.12 corresponde realmente à inversa da 4.3, faz-se a substituição da 4.3 na 4.12 obtendo-se:

$$\begin{aligned} f(j\Delta t) &= \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} F(k\Delta\omega) e^{2\pi ijk/N} = \\ &= \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\Delta t \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell\Delta t) e^{-2\pi i\ell k/N} \right] e^{2\pi ijk/N} \end{aligned} \quad (4.13)$$

como podem ser eliminados os Δt ; então

$$f(j\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell\Delta t) \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi ik(j-\ell)/N} \quad (4.14)$$

Da equação 4.14 verifica-se que para a 4.12 se constituir na inversa da 4.3 , a seguinte relação deve ser satisfeita

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k(j-\ell)/N} = \begin{cases} N & \text{para } j = \ell \\ 0 & \text{para } j \neq \ell \end{cases} \quad (4.15)$$

Na primeira situação o resultado é imediato pois trata-se da soma de N vetores unitários, uma vez que $e^0 = 1$. Por outro lado, na segunda situação ($j \neq \ell$), a verificação é também direta através do exame dos vetores complexos correspondentes aos termos do somatório. À primeira vista, isso talvez não seja muito fácil, mas usando-se a definição do vetor complexo

$$e^{2\pi i k \beta / N} = \cos k \frac{2\pi}{N} \beta + i \sin k \frac{2\pi}{N} \beta, \quad (4.16)$$

onde

$$\beta = (j - \ell) \quad (4.17)$$

e tomando

$$\alpha = \frac{2\pi \beta}{N}, \quad (4.18)$$

resulta que para cada valor de k, tem-se um vetor no plano de Gauss cujo ângulo é dado por $k\alpha$. Daí o somatório na equação 4.15 resulta para $\beta \neq 0$, num polígono vetorial fechado (soma de vetores auto-equilibrados), ou seja, de resultante nula.

Então, a transformada numérica de Fourier fica sendo dada por:

$$\begin{aligned} F(k\Delta\omega) &= \sum_{j=0}^{N-1} f(j\Delta t) e^{-2\pi i j k / N} \\ f(j\Delta t) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k\Delta\omega) e^{2\pi i j k / N} \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde o fator Δt foi eliminado (vide equação 4.14).

Para finalizar, deve-se salientar que a conveniência existente em se expressar a transformada numérica de Fourier, através de um somatório de 0 a N-1 e não sobre valores positivos e negativos, consiste na versatilidade obtida em termos de linguagens de computação, considerando-se que variáveis negativas são aceitáveis somente para algumas linguagens.

IV.3 - TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (FFT)

O método de cálculo rápido da transformada numérica de Fourier (J.W. COOLEY AND J.W. TUKEY, MATH. COMPUT., VOL. 19, APRIL 1965, pp. 207-301), representou uma revolução para muitas áreas da ciência, dentro das quais, o grande volume de cálculos foram um impedimento para a sua utilização.

Considere-se o cálculo da transformada numérica de Fourier de um vetor com $N = 8$. Da sua definição (equações 4.19), pode-se escrever as relações da transformada na forma de um produto matricial como,

$$\begin{Bmatrix} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(5\Delta\omega) \\ F(6\Delta\omega) \\ F(7\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} \\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} \\ 1 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} \\ 1 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} \\ 1 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} f(0\Delta t) \\ f(\Delta t) \\ f(2\Delta t) \\ f(3\Delta t) \\ f(4\Delta t) \\ f(5\Delta t) \\ f(6\Delta t) \\ f(7\Delta t) \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

onde,

$$W = e^{-i2\pi/8} = \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{8}\right) \quad (4.21)$$

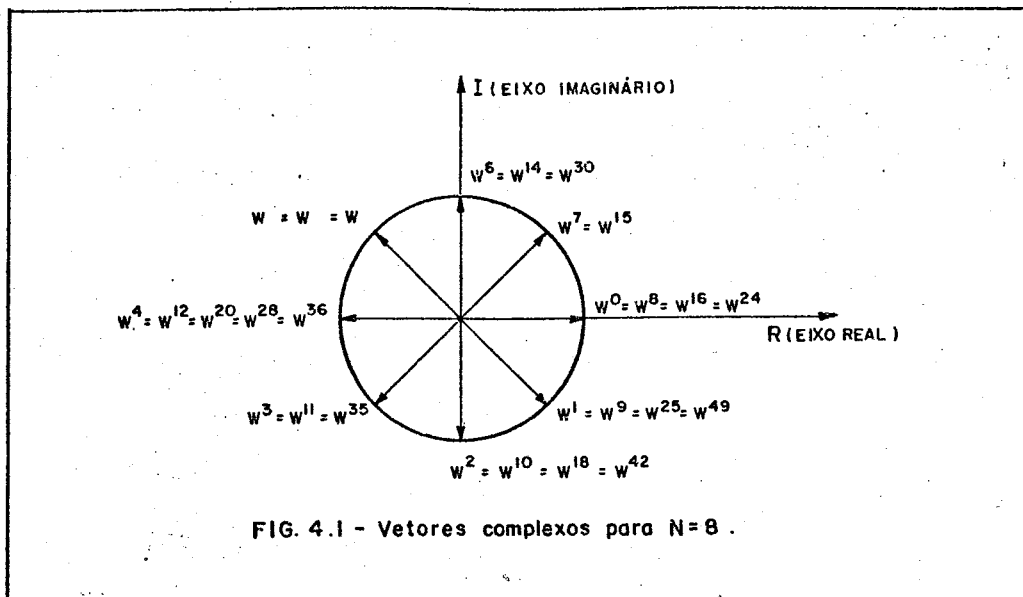
A quantidade W é a raiz oitava da unidade, já que $W^8 = 1$, é também um vetor complexo, cujo módulo é unitário e com fase igual a $-(1/N)$ rotações.

Da propriedade apontada na equação 4.9, é possível se escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(-3\Delta\omega) \\ F(-2\Delta\omega) \\ F(-\Delta\omega) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(5\Delta\omega) \\ F(6\Delta\omega) \\ F(7\Delta\omega) \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

Os vetores complexos que intervêm no cálculo da transformada numérica, encontram-se indicados na figura 4.1, na qual se verifica:

$$\begin{aligned} W^0 &= W^8 = W^{16} = W^{24} = 1 \\ W^1 &= W^9 = W^{25} = W^{49} = \cos(\pi/4) - i\text{sen}(\pi/4) \\ W^2 &= W^{10} = W^{18} = W^{42} = -i \\ W^3 &= W^{35} = \cos(3\pi/4) - i\text{sen}(3\pi/4) \\ W^4 &= W^{12} = W^{20} = W^{28} = W^{36} = -1 \\ W^5 &= W^{21} = \cos(5\pi/4) - i\text{sen}(5\pi/4) \\ W^6 &= W^{14} = i \\ W^7 &= W^{15} = \cos(7\pi/4) - i\text{sen}(7\pi/4) \end{aligned} \quad (4.23)$$



Substituindo-se as 4.23 na 4.20, obtem-se uma nova versão matricial para a transformação, na forma:

$$\begin{Bmatrix} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(5\Delta\omega) \\ F(6\Delta\omega) \\ F(7\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^9 & W^6 & W^{11} \\ 1 & W^6 & W^4 & W^{10} & 1 & W^6 & W^4 & W^{10} \\ 1 & W^7 & W^6 & W^{13} & W^4 & W^{11} & W^2 & W^9 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} f(0\Delta t) \\ f(\Delta t) \\ f(2\Delta t) \\ f(3\Delta t) \\ f(4\Delta t) \\ f(5\Delta t) \\ f(6 t) \\ f(7 t) \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

A matriz dos versores complexos da equação 4.24 evidencia as seguintes propriedades:

PROPRIEDADE 1

As colunas ímpares são simétricas; ou seja, os primeiros N/2 versores são iguais aos últimos e com a mesma ordenação.

PROPRIEDADE 2

Nas colunas pares os vetores complexos são exatamente iguais ao produto da coluna anterior vezes a seqüência natural, que é sempre dada pela primeira coluna par.

Efetuando-se a seguinte mudança no produto expresso em 4.24,

$$\begin{Bmatrix} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(5\Delta\omega) \\ F(6\Delta\omega) \\ F(7\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^9 & W^6 & W^{11} \\ 1 & W^6 & W^4 & W^{10} & 1 & W^6 & W^4 & W^{10} \\ 1 & W^7 & W^6 & W^{13} & W^4 & W^{11} & W^2 & W^9 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \left[\begin{Bmatrix} f(0\Delta t) \\ 0 \\ f(2\Delta t) \\ 0 \\ f(4\Delta t) \\ 0 \\ f(6\Delta t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f(\Delta t) \\ 0 \\ f(3\Delta t) \\ 0 \\ f(5\Delta t) \\ 0 \\ f(7\Delta t) \end{Bmatrix} \right] \quad (4.25)$$

e valendo-se das propriedades anteriores, tem-se no primeiro produto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F}(0\Delta\omega) \\ \bar{F}(\Delta\omega) \\ \bar{F}(2\Delta\omega) \\ \bar{F}(3\Delta\omega) \\ \bar{F}(0\Delta\omega) \\ \bar{F}(1\Delta\omega) \\ \bar{F}(2\Delta\omega) \\ \bar{F}(3\Delta\omega) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 & w^4 & w^7 & w^2 & w^5 \\ 1 & w^4 & 1 & w^4 & 1 & w^4 & 1 & w^4 \\ 1 & w^5 & w^2 & w^7 & w^4 & w^9 & w^6 & w^{11} \\ 1 & w^6 & w^4 & w^{10} & 1 & w^6 & w^4 & w^{10} \\ 1 & w^7 & w^6 & w^{13} & w^4 & w^{11} & w^2 & w^9 \end{array} \right] \times \left\{ \begin{array}{l} f(0\Delta t) \\ 0 \\ f(2\Delta t) \\ 0 \\ f(4\Delta t) \\ 0 \\ f(6\Delta t) \\ 0 \end{array} \right\} \quad (4.26)$$

no qual, constata-se que os elementos da segunda metade são idênticos aos da primeira.

No segundo produto obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} F'(0\Delta\omega) \\ F'(\Delta\omega)W \\ F'(2\Delta\omega)W^2 \\ F'(3\Delta\omega)W^3 \\ F'(0\Delta\omega)W^4 \\ F'(\Delta\omega)W^5 \\ F'(2\Delta\omega)W^6 \\ F'(3\Delta\omega)W^7 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 & w^4 & w^7 & w^2 & w^5 \\ 1 & w^4 & 1 & w^4 & 1 & w^4 & 1 & w^4 \\ 1 & w^5 & w^2 & w^7 & w^4 & w^9 & w^6 & w^{11} \\ 1 & w^6 & w^4 & w^{10} & 1 & w^6 & w^4 & w^{10} \\ 1 & w^7 & w^6 & w^{13} & w^4 & w^{11} & w^2 & w^9 \end{array} \right] \times \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ f(\Delta t) \\ 0 \\ f(3\Delta t) \\ 0 \\ f(5\Delta t) \\ 0 \\ f(7\Delta t) \end{array} \right\} \quad (4.27)$$

onde verifica-se a segunda das propriedades apontadas, o produto de uma transformada simétrica pela sucessão natural.

Desta forma a transformada numérica indicada no produto matricial 4.25, equivalente a 4.20, passa a ser indicada como,

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(-3\Delta\omega) \\ F(-2\Delta\omega) \\ F(-\Delta\omega) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{F}(0\Delta\omega) \\ \bar{F}(\Delta\omega) \\ \bar{F}(2\Delta\omega) \\ \bar{F}(3\Delta\omega) \\ \bar{F}(0\Delta\omega) \\ \bar{F}(1\Delta\omega) \\ \bar{F}(2\Delta\omega) \\ \bar{F}(3\Delta\omega) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} F'(0\Delta\omega) \\ F'(\Delta\omega)W \\ F'(2\Delta\omega)W^2 \\ F'(3\Delta\omega)W^3 \\ F'(0\Delta\omega)W^4 \\ F'(\Delta\omega)W^5 \\ F'(2\Delta\omega)W^6 \\ F'(3\Delta\omega)W^7 \end{array} \right\} \quad (4.28)$$

Tendo-se em vista as equações 4.26 e 4.27, conclui-se que:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}(0\Delta\omega) \\ \bar{F}(\Delta\omega) \\ \bar{F}(2\Delta\omega) \\ \bar{F}(3\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^4 & 1 & W^{12} \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} f(0\Delta t) \\ f(2\Delta t) \\ f(4\Delta t) \\ f(6\Delta t) \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

e

$$\begin{Bmatrix} F'(0\Delta\omega) \\ F'(\Delta\omega) \\ F'(2\Delta\omega) \\ F'(3\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} f(\Delta t) \\ f(3\Delta t) \\ f(5\Delta t) \\ f(7\Delta t) \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Da expressão 4.28, considerando-se as 4.29 e 4.30, resulta que a transformada numérica original de ordem 8, teve seu cálculo reduzido para duas transformações com $N=4$, na forma:

$$\begin{Bmatrix} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(-3\Delta\omega) \\ F(-2\Delta\omega) \\ F(-\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^7 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \bar{F}(0\Delta\omega) \\ \bar{F}(\Delta\omega) \\ \bar{F}(2\Delta\omega) \\ \bar{F}(3\Delta\omega) \\ F'(0\Delta\omega) \\ F'(\Delta\omega) \\ F'(2\Delta\omega) \\ F'(3\Delta\omega) \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(-3\Delta\omega) \\ F(-2\Delta\omega) \\ F(-\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^6 & W^4 & W^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} f(0\Delta t) \\ f(2\Delta t) \\ f(4\Delta t) \\ f(6\Delta t) \\ f(\Delta t) \\ f(3\Delta t) \\ f(5\Delta t) \\ f(7\Delta t) \end{Bmatrix}$$

(4.32)

A redução em duas transformadas com $N = 4$, como mostrado, constitui uma valiosa contribuição no tocante ao tempo de cálculo da transformada, uma vez que representa, potencialmente, uma diminuição de 50% do tempo de cálculo.

Considere-se, agora, os produtos matriciais expressos em 4.29 e 4.30, eles podem ser desmembrados como se gué:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}(0\Delta\omega) \\ \bar{F}(\Delta\omega) \\ \bar{F}(2\Delta\omega) \\ \bar{F}(3\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} f(0\Delta t) \\ 0 \\ f(4\Delta t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f(2\Delta t) \\ 0 \\ f(6\Delta t) \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

e

$$\begin{Bmatrix} F'(0\Delta\omega) \\ F'(\Delta\omega) \\ F'(2\Delta\omega) \\ F'(3\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} f(\Delta t) \\ 0 \\ f(5\Delta t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f(3\Delta t) \\ 0 \\ f(7\Delta t) \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

Levando-se as propriedades 1 e 2 nas equações 4.33

e 4.34, resulta:

$$\begin{Bmatrix} F^*(0\Delta\omega) \\ F^*(\Delta\omega) \\ F^*(0\Delta\omega) \\ F^*(\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} f(0\Delta t) \\ 0 \\ f(4\Delta t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\begin{Bmatrix} F^{**}(0\Delta\omega) \\ F^{**}(\Delta)W^2 \\ F^{**}(0\Delta\omega)W^4 \\ F^{**}(\Delta\omega)W^6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ f(2\Delta t) \\ 0 \\ f(6\Delta t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F''(0\Delta\omega) \\ F''(\Delta\omega) \\ F''(0\Delta\omega) \\ F''(\Delta\omega) \end{Bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} f(\Delta t) \\ 0 \\ f(5\Delta t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\begin{Bmatrix} F'''(0\Delta\omega) \\ F'''(\Delta\omega)W^2 \\ F'''(0\Delta\omega)W^4 \\ F'''(\Delta\omega)W^6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ f(3\Delta t) \\ 0 \\ f(7\Delta t) \end{Bmatrix}$$

Pode-se então, expressar cada um dos produtos matriciais 4.33 e 4.34, como sendo:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}(0\Delta\omega) \\ \bar{F}(\Delta\omega) \\ \bar{F}(2\Delta\omega) \\ \bar{F}(3\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^*(0\Delta\omega) \\ F^*(\Delta\omega) \\ F^*(0\Delta\omega) \\ F^*(\Delta\omega) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F^{**}(0\Delta\omega) \\ F^{**}(\Delta\omega)W^2 \\ F^{**}(0\Delta\omega)W^4 \\ F^{**}(\Delta\omega)W^6 \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

e

$$\begin{Bmatrix} F'(0\Delta\omega) \\ F'(2\Delta\omega) \\ F'(3\Delta\omega) \\ F'(4\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F''(0\Delta\omega) \\ F''(\Delta\omega) \\ F''(0\Delta\omega) \\ F''(\Delta\omega) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F'''(0\Delta\omega) \\ F'''(\Delta\omega)W^2 \\ F'''(0\Delta\omega)W^4 \\ F'''(\Delta\omega)W^6 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Por sua vez, das 4.35 e 4.36 obtém-se,

$$\begin{Bmatrix} F^*(0\Delta\omega) \\ F^*(\Delta\omega) \\ F^{**}(0\Delta\omega) \\ F^{**}(\Delta\omega) \\ F''(0\Delta\omega) \\ F''(\Delta\omega) \\ F'''(0\Delta\omega) \\ F'''(\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} f(0\Delta t) \\ f(4\Delta t) \\ f(2\Delta t) \\ f(6\Delta t) \\ f(\Delta t) \\ f(5\Delta t) \\ f(3\Delta t) \\ f(7\Delta t) \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

Simplificando as 4.37 e 4.38 chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}(0\Delta\omega) \\ \bar{F}(\Delta\omega) \\ \bar{F}(2\Delta\omega) \\ \bar{F}(3\Delta\omega) \\ F'(0\Delta\omega) \\ F'(\Delta\omega) \\ F'(2\Delta\omega) \\ F'(3\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^6 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} F^*(0\Delta\omega) \\ F^*(\Delta\omega) \\ F^{**}(0\Delta\omega) \\ F^{**}(\Delta\omega) \\ F''(0\Delta\omega) \\ F''(\Delta\omega) \\ F'''(0\Delta\omega) \\ F'''(\Delta\omega) \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

Substituindo-se a equação 4.40 na 4.31, obtem-se uma apreciável simplificação no cálculo da transformada, já que consegue-se reduzir a transformação com $N=8$ em quatro com $N=2$, na forma:

$$\begin{Bmatrix} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(-3\Delta\omega) \\ F(-2\Delta\omega) \\ F(-\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^6 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} F^*(0\Delta\omega) \\ F^*(\Delta\omega) \\ F^{**}(0\Delta\omega) \\ F^{**}(\Delta\omega) \\ F''(0\Delta\omega) \\ F''(\Delta\omega) \\ F'''(0\Delta\omega) \\ F'''(\Delta\omega) \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

Finalmente, aplicando-se a equação 4.39 na 4.41, obtem-se a expressão simplificada do cálculo da transformada numérica indicada na equação 4.20:

$$\begin{Bmatrix} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(-3\Delta\omega) \\ F(-2\Delta\omega) \\ F(-\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^7 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^6 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} f(0\Delta t) \\ f(4\Delta t) \\ f(2\Delta t) \\ f(6\Delta t) \\ f(\Delta t) \\ f(5\Delta t) \\ f(3\Delta t) \\ f(7\Delta t) \end{Bmatrix} \tag{4.42}$$

ou ainda,

$$\begin{Bmatrix} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(-3\Delta\omega) \\ F(-2\Delta\omega) \\ F(-\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^7 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^6 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 \end{bmatrix} \times$$

$$x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{Bmatrix} f(0\Delta t) \\ f(\Delta t) \\ f(2\Delta t) \\ f(3\Delta t) \\ f(4\Delta t) \\ f(5\Delta t) \\ f(6\Delta t) \\ f(7\Delta t) \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

onde a última matriz quadrada foi introduzida para permitir a utilização, no cálculo da transformada numérica, do vetor solicitação discreto na sua ordem original.

A decomposição da transformação com $N = 8$ em quatro com $N = 2$, conforme realizada, pode ser estendida para casos onde $N = 2^n$ em 2^{n-1} transformadas de 2 elementos, pois as propriedades 1 e 2 são válidas para qualquer N par.

A expressão 4.43 constitui-se no fundamento do algoritmo da Transformada rápida de Fourier (FFT). Deve-se salientar que dita decomposição, possibilita o aparecimento de somente dois elementos diferentes de zero em cada linha. Na equação 4.20, tem-se $N \times N$ operações de multiplicação, enquanto que do emprego da expressão simplificada 4.43, resultam $2N$ multiplicações por matriz e o número de matrizes resultantes da decomposição (M), provêm de $2^M = N$ (sem a consideração da última matriz, a qual representa unicamente um rearranjo). Daí o total de operações de multiplicação, no cálculo da transformada completa, é agora de $2N \log_2 N$. Fato que representa uma crescente vantagem da transformada rápida para grandes valores de N . É claro que não todas as 48 multiplicações da equação 4.43, são significativas. Tem-se 31 multiplicações pela unidade e 7 por W^4 , ou seja, -1 . Além disso, algumas simplificações podem ainda, ser obtidas, e então, a diminuição do tempo de execução dos cálculos requer uma cuidadosa atenção e detalhamento.

IV.4 - ALGORITMO DA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (COOLEY-TUKEY)

Na figura 4.1 constata-se que:

$$\left. \begin{aligned} W^4 &= -1 \\ W &= -W^5 \\ W^2 &= -W^6 \\ W^3 &= -W^7 \end{aligned} \right| \quad (4.44)$$

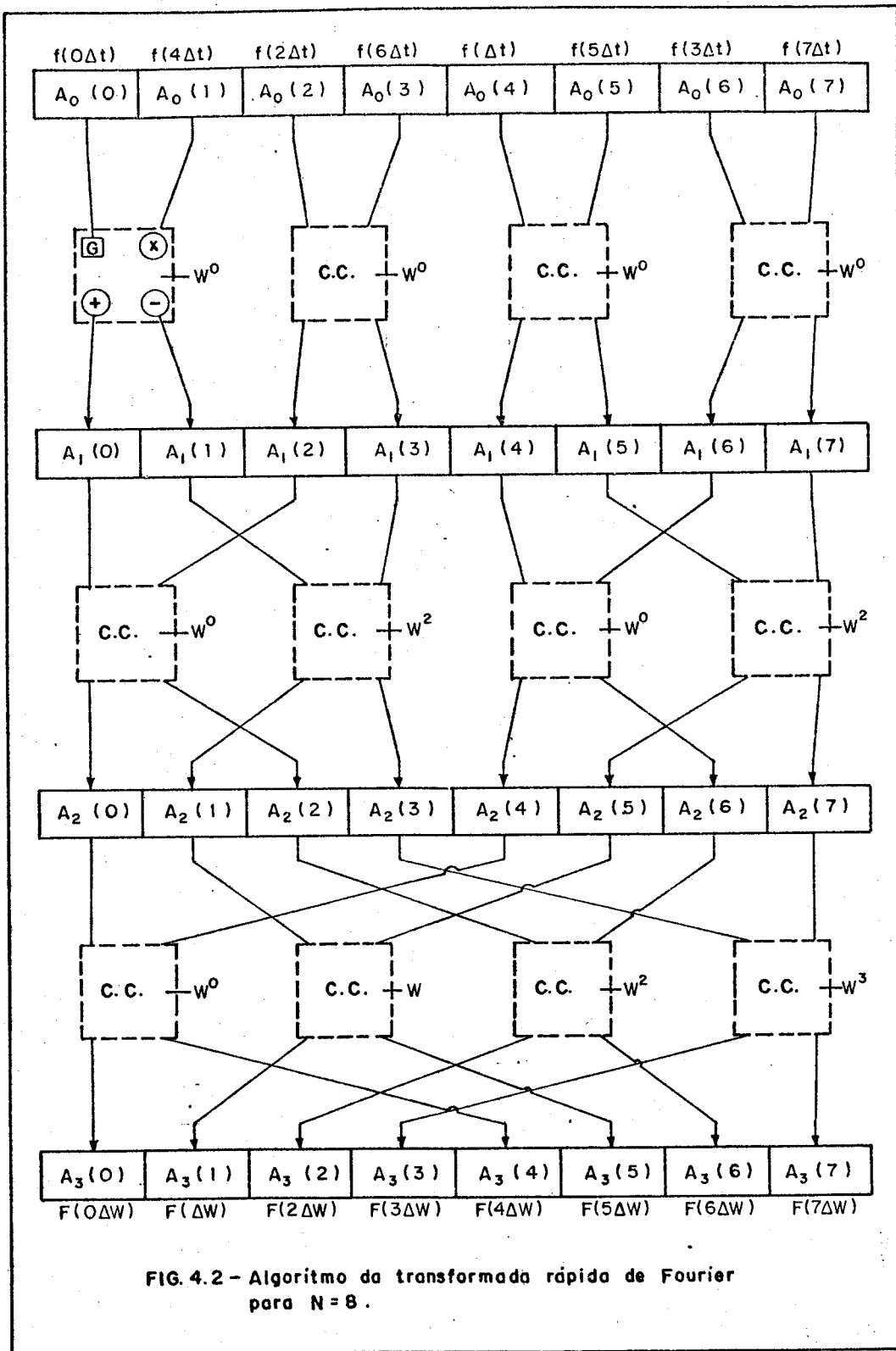
portanto, o algoritmo da transformada rápida (equação 4.43), passa a ter uma nova redação:

$$\begin{Bmatrix} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(-3\Delta\omega) \\ F(-2\Delta\omega) \\ F(-\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -W^3 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -W^2 \end{bmatrix} \times$$

Observe-se, na figura 4.2, que o G não indica operação aritmética. As operações da figura 4.2 podem ser resumidas da seguinte maneira. Primeiro reordena-se a sequência dada, uma operação correspondente, exatamente, à multiplicação pela última matriz quadrada da 4.45. Os oito novos números são calculados como combinações lineares dos vários pares de números reordenados, analogamente como é feito na terceira matriz quadrada de 4.45. Estes números formam a entrada para mais dois estágios similares, reproduzindo o total de operações efetuadas na equação 4.45.

O algoritmo apresentado, restringe-se aos problemas, nos quais $N = 2^m$, onde no cálculo da transformada rápida requer-se m iterações para efetuar o algoritmo completo. É oportuno ressaltar que, unicamente são necessária $N/2$ potências de W e também que no cálculo dos N valores complexos, que aparecem na transformação, são utilizadas $2N$ posições individuais de memória.



IV.5 - TRANSFORMADA RÁPIDA MODIFICADA

O algoritmo apresentado na seção anterior é aplicável somente aos problemas nos quais N é uma potência de 2. Esta limitação significa que o método proposto é utilizado para $N = 2, 4, 8, 16, \dots, 512, 1024, \dots$.

Suponha-se, por exemplo, que deseja-se determinar a solução da equação do movimento, empregando-se a técnica da transformada rápida de Fourier, num problema genérico no qual, o tempo de integração considerado é $T_I = 24$ seg e $\Delta t = 0.01$ seg. Portanto o valor de N necessário é $N = T_I/\Delta t = 2400$ seg. Uma vez que $2^{11} = 2048$, resulta num valor menor que o requerido, teria que ser adotado $N = 2^{12} = 4096$ e os termos adicionais seriam obtidos diminuindo-se Δt ou aumentando-se T_I . É evidente que a resolução do problema em questão através do método das potências de dois, implica em operações desnecessárias e conseqüentemente, em um aumento notável no tempo de execução dos cálculos.

Será estudada, a seguir, uma variante do algoritmo da transformada rápida, onde $N = 2^m \cdot 3$. Esta variante torna possível o aparecimento de valores intermediários entre os possíveis de N , isto é, $N = 2, 3, 4, 6, 8, 12, \dots, 1024, 1536, \dots$ e o trabalho computacional adicionado não é significativo. No exemplo acima, N poderia ser reduzido de 4096 a $N = 2^{10} \cdot 3 = 3072$, ganhando-se com isto, uma significativa diminuição no montante de operações e nas memórias individuais requeridas.

Considere-se o cálculo da transformada numérica para $N = 2^2 \cdot 3 = 12$. A expressão matricial equivalente à de finição (equações 4.19) é:

$$\begin{Bmatrix} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(5\Delta\omega) \\ F(6\Delta\omega) \\ F(-5\Delta\omega) \\ F(-4\Delta\omega) \\ F(-3\Delta\omega) \\ F(-2\Delta\omega) \\ F(-\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 & W^8 & W^9 & W^{10} & W^{11} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} & W^{16} & W^{18} & W^{20} & W^{22} \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} & W^{24} & W^{27} & W^{30} & W^{33} \\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} & W^{32} & W^{36} & W^{40} & W^{44} \\ 1 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} & W^{40} & W^{45} & W^{50} & W^{55} \\ 1 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} & W^{48} & W^{54} & W^{60} & W^{66} \\ 1 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} & W^{56} & W^{63} & W^{70} & W^{77} \\ 1 & W^8 & W^{16} & W^{24} & W^{32} & W^{40} & W^{48} & W^{56} & W^{64} & W^{72} & W^{80} & W^{88} \\ 1 & W^9 & W^{18} & W^{27} & W^{36} & W^{45} & W^{54} & W^{63} & W^{72} & W^{81} & W^{90} & W^{99} \\ 1 & W^{10} & W^{20} & W^{30} & W^{40} & W^{50} & W^{60} & W^{70} & W^{80} & W^{90} & W^{100} & W^{110} \\ 1 & W^{11} & W^{22} & W^{33} & W^{44} & W^{55} & W^{66} & W^{77} & W^{88} & W^{99} & W^{110} & W^{121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(0\Delta t) \\ f(\Delta t) \\ f(2\Delta t) \\ f(3\Delta t) \\ f(4\Delta t) \\ f(5\Delta t) \\ f(6\Delta t) \\ f(7\Delta t) \\ f(8\Delta t) \\ f(9\Delta t) \\ f(10\Delta t) \\ f(11\Delta t) \end{Bmatrix}$$

(4.46)

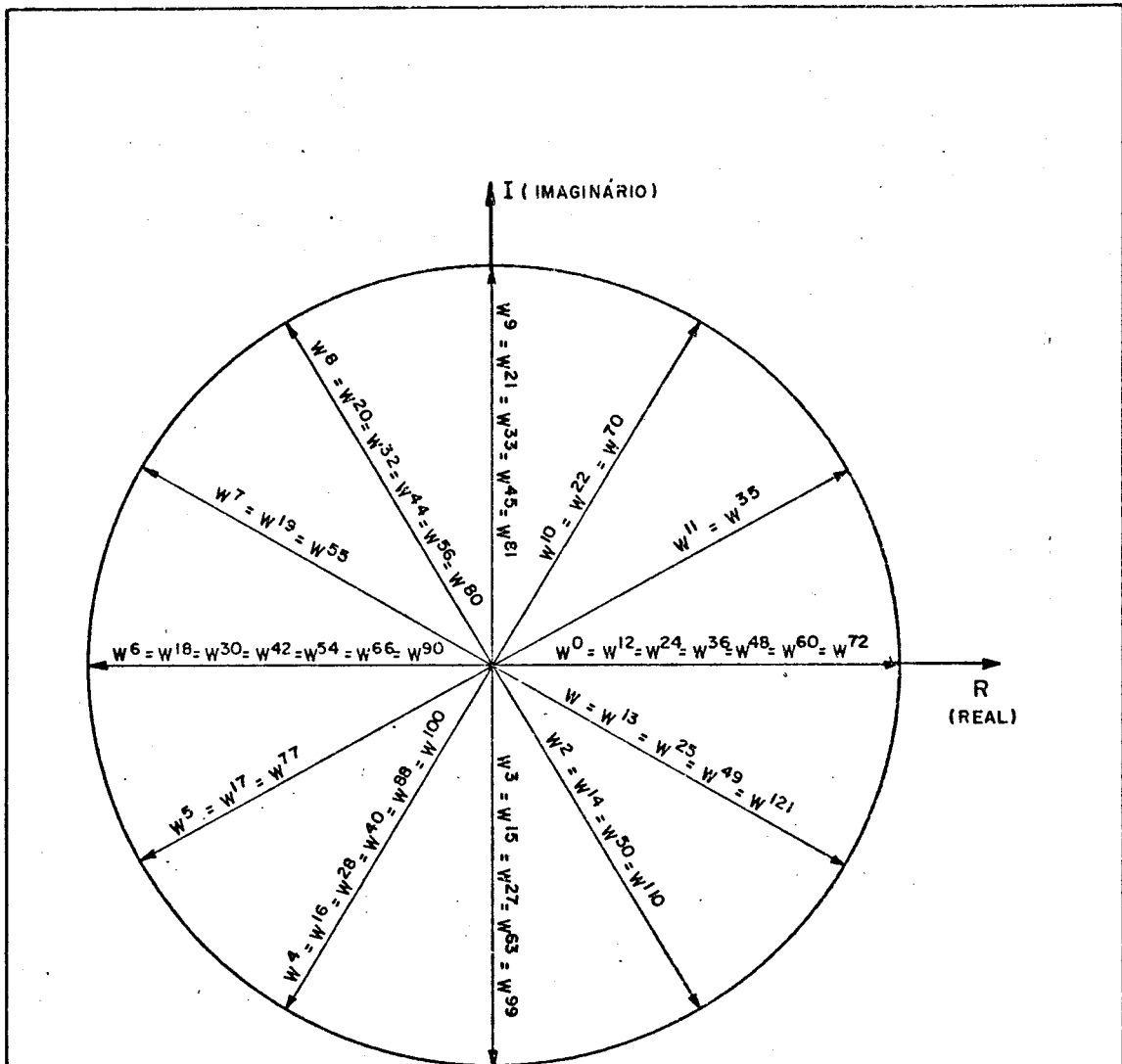


FIG. 4.3 - Configuração dos vetores complexos para N=12.
 ($W = e^{-i \pi/6 jk}$).

A matriz dos vetores complexos , $[M]$, da equação 4.46, pelas igualdades indicadas na figura 4.3, fica simplificada na forma:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 & W^8 & W^9 & W^{10} & W^{11} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & 1 & W^3 & W^6 & W^9 & 1 & W^3 & W^6 & W^9 \\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^4 & W^8 & 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^4 & W^8 \\ 1 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^8 & W^{13} & W^6 & W^{11} & W^4 & W^9 & W^2 & W^7 \\ 1 & W^6 & 1 & W^6 & 1 & W^6 & 1 & W^6 & 1 & W^6 & 1 & W^6 \\ 1 & W^7 & W^2 & W^9 & W^4 & W^{11} & W^6 & W^{13} & W^8 & W^{15} & W^{10} & W^{17} \\ 1 & W^8 & W^4 & W^{12} & W^8 & W^{16} & 1 & W^8 & W^4 & W^{12} & W^8 & W^{16} \\ 1 & W^9 & W^6 & W^{15} & 1 & W^9 & W^6 & W^{15} & 1 & W^9 & W^6 & W^{15} \\ 1 & W^{10} & W^8 & W^{18} & W^4 & W^{14} & 1 & W^{10} & W^8 & W^{18} & W^4 & W^{14} \\ 1 & W^{11} & W^{10} & W^{21} & W^8 & W^{19} & W^6 & W^{17} & W^4 & W^{15} & W^2 & W^{13} \end{bmatrix}$$

(4.47)

Na matriz 4.47 é de fácil constatação a validade das propriedades 1 e 2, anteriormente apontadas. Assim sendo a transformada numérica indicada no produto matricial 4.46, pode ser escrita como a soma de duas transformadas de 6 elementos, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(5\Delta\omega) \\ F(6\Delta\omega) \\ F(-5\Delta\omega) \\ F(-4\Delta\omega) \\ F(-3\Delta\omega) \\ F(-2\Delta\omega) \\ F(-\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(0\Delta\omega) \\ F_1(\Delta\omega) \\ F_1(2\Delta\omega) \\ F_1(3\Delta\omega) \\ F_1(4\Delta\omega) \\ F_1(5\Delta\omega) \\ F_1(0\Delta\omega) \\ F_1(\Delta\omega) \\ F_1(2\Delta\omega) \\ F_1(3\Delta\omega) \\ F_1(4\Delta\omega) \\ F_1(5\Delta\omega) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_2(0\Delta\omega) \\ F_2(\Delta\omega)W \\ F_2(2\Delta\omega)W^2 \\ F_2(3\Delta\omega)W^3 \\ F_2(4\Delta\omega)W^4 \\ F_2(5\Delta\omega)W^5 \\ F_2(0\Delta\omega)W^6 \\ F_2(\Delta\omega)W^7 \\ F_2(2\Delta\omega)W^8 \\ F_2(3\Delta\omega)W^9 \\ F_2(4\Delta\omega)W^{10} \\ F_2(5\Delta\omega)W^{11} \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} F_1(0\Delta\omega) \\ F_1(\Delta\omega) \\ F_1(2\Delta\omega) \\ F_1(3\Delta\omega) \\ F_1(4\Delta\omega) \\ F_1(5\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} \\ 1 & W^4 & W^8 & 1 & W^4 & W^8 \\ 1 & W^6 & 1 & W^6 & 1 & W^6 \\ 1 & W^8 & W^4 & 1 & W^8 & W^4 \\ 1 & W^{10} & W^8 & W^6 & W^4 & W^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} f(0\Delta t) \\ f(2\Delta t) \\ f(4\Delta t) \\ f(6\Delta t) \\ f(8\Delta t) \\ f(10\Delta t) \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

e

$$\begin{Bmatrix} F_2(0\Delta\omega) \\ F_2(\Delta\omega) \\ F_2(2\Delta\omega) \\ F_2(3\Delta\omega) \\ F_2(4\Delta\omega) \\ F_2(5\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} \\ 1 & W^4 & W^8 & 1 & W^4 & W^8 \\ 1 & W^6 & 1 & W^6 & 1 & W^6 \\ 1 & W^8 & W^4 & 1 & W^8 & W^4 \\ 1 & W^{10} & W^8 & W^6 & W^4 & W^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} f(\Delta t) \\ f(3\Delta t) \\ f(5\Delta t) \\ f(7\Delta t) \\ f(9\Delta t) \\ f(11\Delta t) \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

Desmembrando-se os produtos matriciais expressos em 4.49 e 4.50 e aplicando-se as propriedades 1 e 2, consegue-se reduzir as duas transformadas de 6 elementos ($F_1(k\Delta\omega)$ e $F_2(k\Delta\omega)$), em quatro transformações de 3 elementos ($F_{11}(k\Delta\omega)$, $F_{12}(k\Delta\omega)$, $F_{21}(k\Delta\omega)$, $F_{22}(k\Delta\omega)$), dadas por:

$$\begin{Bmatrix} F_{11}(0\Delta\omega) \\ F_{11}(\Delta\omega) \\ F_{11}(2\Delta\omega) \end{Bmatrix} = [\bar{M}] \times \begin{Bmatrix} f(0\Delta t) \\ f(4\Delta t) \\ f(8\Delta t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{12}(0\Delta\omega) \\ F_{12}(\Delta\omega) \\ F_{12}(2\Delta\omega) \end{Bmatrix} = [\bar{M}] \times \begin{Bmatrix} f(2\Delta t) \\ f(6\Delta t) \\ f(10\Delta t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{21}(0\Delta\omega) \\ F_{21}(\Delta\omega) \\ F_{21}(2\Delta\omega) \end{Bmatrix} = [\bar{M}] \times \begin{Bmatrix} f(\Delta t) \\ f(5\Delta t) \\ f(9\Delta t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{22}(0\Delta\omega) \\ F_{22}(\Delta\omega) \\ F_{22}(2\Delta\omega) \end{Bmatrix} = [\bar{M}] \times \begin{Bmatrix} f(3\Delta t) \\ f(7\Delta t) \\ f(11\Delta t) \end{Bmatrix}$$

(4.51)

onde

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^4 & W^8 \\ 1 & W^8 & W^4 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Portanto as transformações $F_1(k\Delta\omega)$ e $F_2(k\Delta\omega)$, são agora indicadas na forma:

$$\begin{Bmatrix} F_1(0\Delta\omega) \\ F_1(1\Delta\omega) \\ F_1(2\Delta\omega) \\ F_1(3\Delta\omega) \\ F_1(4\Delta\omega) \\ F_1(5\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{11}(0\Delta\omega) \\ F_{11}(\Delta\omega) \\ F_{11}(2\Delta\omega) \\ F_{11}(0\Delta\omega) \\ F_{11}(\Delta\omega) \\ F_{11}(2\Delta\omega) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{12}(0\Delta\omega) \\ F_{12}(\Delta\omega)W^2 \\ F_{12}(2\Delta\omega)W^4 \\ F_{12}(0\Delta\omega)W^6 \\ F_{12}(\Delta\omega)W^8 \\ F_{12}(2\Delta\omega)W^{10} \end{Bmatrix}$$

e

(4.53)

$$\begin{Bmatrix} F_2(0\Delta\omega) \\ F_2(1\Delta\omega) \\ F_2(2\Delta\omega) \\ F_2(3\Delta\omega) \\ F_2(4\Delta\omega) \\ F_2(5\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{21}(0\Delta\omega) \\ F_{21}(\Delta\omega) \\ F_{21}(2\Delta\omega) \\ F_{21}(0\Delta\omega) \\ F_{21}(\Delta\omega) \\ F_{21}(2\Delta\omega) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{22}(0\Delta\omega) \\ F_{22}(\Delta\omega)W^2 \\ F_{22}(2\Delta\omega)W^4 \\ F_{22}(0\Delta\omega)W^6 \\ F_{22}(\Delta\omega)W^8 \\ F_{22}(2\Delta\omega)W^{10} \end{Bmatrix}$$

Efetuada-se agora algumas manipulações algébricas sobre a equação 4.48 a fim de explicitá-la como produto de matrizes e substituindo-se as equações 4.51, 4.52 e 4.53. Isso fornecerá uma nova equação da forma

$$\begin{bmatrix} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(5\Delta\omega) \\ F(6\Delta\omega) \\ F(-5\Delta\omega) \\ F(-4\Delta\omega) \\ F(-3\Delta\omega) \\ F(-2\Delta\omega) \\ F(-\Delta\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^{11} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & W^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & W^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & W^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & W^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & W^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & W^8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & W^{10} \end{bmatrix} \times$$

pode-se então escrever a forma matricial do algoritmo como:

$$\begin{Bmatrix} F(0\Delta\omega) \\ F(\Delta\omega) \\ F(2\Delta\omega) \\ F(3\Delta\omega) \\ F(4\Delta\omega) \\ F(5\Delta\omega) \\ F(6\Delta\omega) \\ F(-5\Delta\omega) \\ F(-4\Delta\omega) \\ F(-3\Delta\omega) \\ F(-2\Delta\omega) \\ F(-\Delta\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W^5 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & W^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -W^4 \end{bmatrix} \times$$

- 5) O terceiro número de entrada é multiplicado pela potência de W indicada em D .
- 6) Subtrai do segundo número de entrada o produto de 5. Este valor é multiplicado pela potência de W indicada e depois subtraído do primeiro número de entrada. Este resultado fornece o terceiro valor complexo de saída.

Cabe observar que D e G são diferentes na figura 4.4. G não define nenhuma operação aritmética, enquanto que em D são efetuadas operações, como as realizadas nos passos 1, 3 e 5. Note-se também que o retângulo CC é idêntico ao já empregado no algoritmo da seção anterior.

Como já foi dito o algoritmo da figura 4.4, executa todas as operações indicadas na equação 4.56. Em analogia ao algoritmo para $N = 2^m$, esta variante requer $2N$ posições de memória e o cálculo de $(N/2-1)$ potências de W , na determinação da transformada completa. A diferença básica reside no fato de se utilizar na primeira iteração, o conjunto de cálculos complexos, modificados e também em que são necessárias $m+1$ iterações para executar completamente o algoritmo e não m iterações como no algoritmo anterior.

Para finalizar, é necessário comentar que as propriedades da decomposição realizada no cálculo da transformada com $N = 12$, podem ser estendida para qualquer $N = 2^m \cdot 3$.

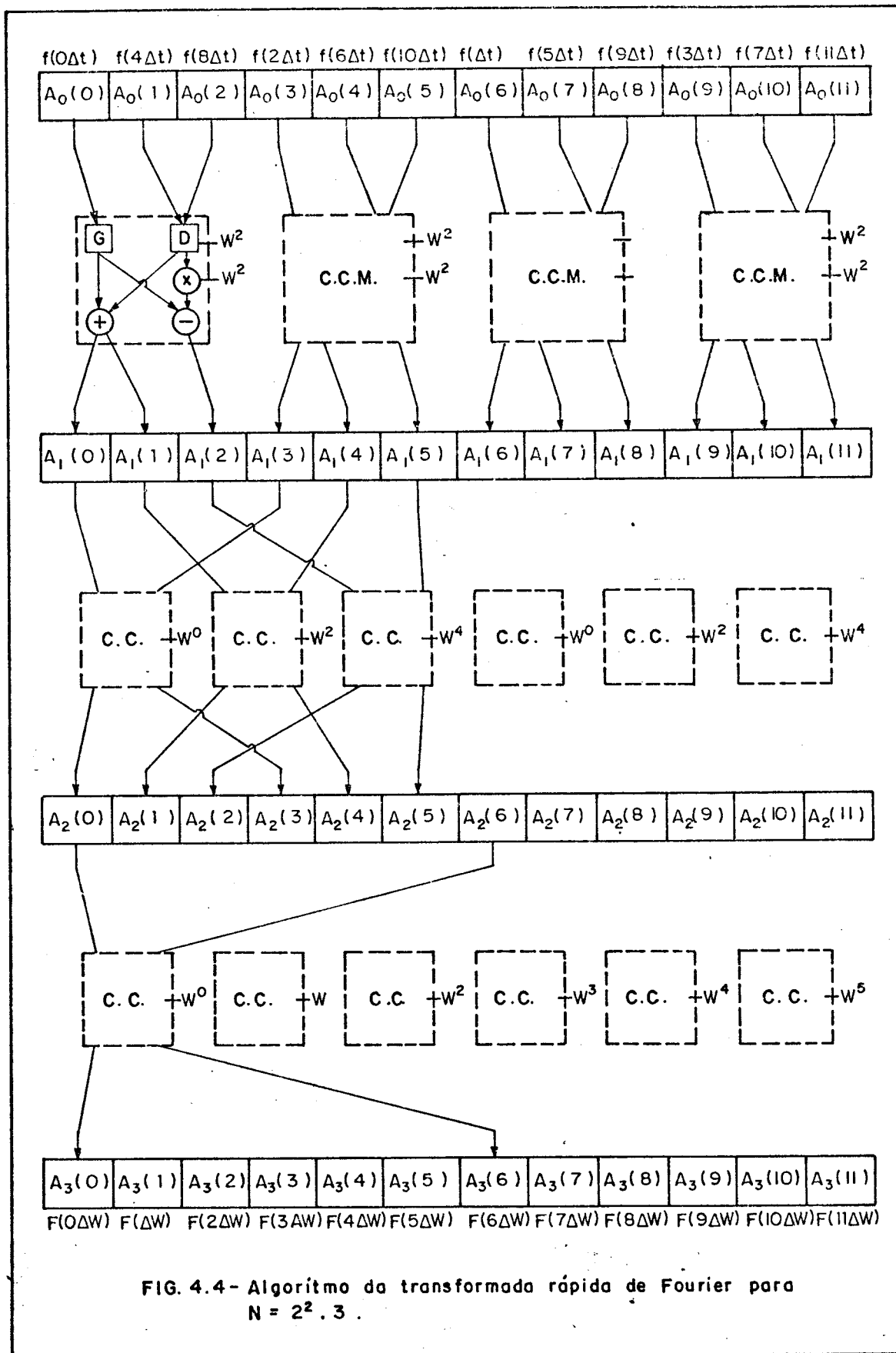


FIG. 4.4- Algoritmo da transformada rápida de Fourier para $N = 2^2 \cdot 3$.

IV.7 - TRANSFORMADAS DE FOURIER DE VETORES REAIS E SIMÉTRICOS COMPLEXOS

O algoritmo discutido no parágrafo precedente, transforma um vetor de N valores complexos, onde $N = 2^m \cdot L$, $L = 2$ ou 3 , contudo no estudo da resposta de sistemas lineares, a transformada é sempre calculada sobre um vetor real resultando em um vetor complexo simétrico e a transformada inversa é feita sobre um vetor complexo simétrico obtendo-se um vetor real.

Um algoritmo equivalente, o qual calcula e armazena somente a primeira metade de cada vetor complexo, simétrico, será apresentado. Algoritmos deste tipo utilizam a propriedade das transformações de vetores complexos simétricos, apresentada na tabela 4.2, a qual possibilita o uso de unicamente a metade das posições de memória individuais e aproximadamente a metade do tempo de processamento quando comparados com os algoritmos para o cálculo de transformadas de vetores complexos gerais.

Considere-se o cálculo da transformada de um vetor real com $N = 16$, cujo algoritmo encontra-se mostrado na figura 4.5, ele foi obtido aplicando-se as propriedades da transformada rápida, já estudadas e esquematizadas na figura 4.2. A figura 4.5 mostra somente as entradas para os primeiros conjuntos de operações complexas de cada iteração, cada modelo apresentado é aplicado seqüencialmente para todos os operandos em sua iteração; desta forma, por exemplo, na última iteração o conjunto de cálculos complexos aplicados às entradas $A_3(0)$ e $A_3(8)$ com W^0 é novamente aplicado a $A_3(1)$ e $A_3(9)$ com W , $A_3(2)$ e $A_3(10)$ com W^2 e assim sucessivamente.

Fazendo-se $f(j\Delta t) = f_j$, $F(k\Delta\omega) = F_k$, todas as operações efetuadas no algoritmo da figura 4.5, são indicadas na tabela 4.3.

$f(j\Delta t)$	$A_0(k)$	$A_1(k)$	$A_2(k)$	$A_3(k)$	$A_4(k)$	$F(k\Delta\omega)$
f_0	$A_0(0)$	(0+1)	(0+2)	(0+4)	(0+8)	F_0
f_8	$A_0(1)$	(0-1)	(1)+(3) W^4	(1)+(5) W^2	(1)+(9) W	F_1
f_4	$A_0(2)$	(2+3)	(0-2)	(2)+(6) W^4	(2)+(10) W^2	F_2
f_{12}	$A_0(3)$	(2-3)	(1)-(3) W^4	(3)+(7) W^6	(3)+(11) W^3	F_3
f_2	$A_0(4)$	(4+5)	(4+6)	(0-4)	(4)+(12) W^4	F_4
f_{10}	$A_0(5)$	(4-5)	(5)+(7) W^4	(1)-(5) W^2	(5)+(13) W^5	F_5
f_6	$A_0(6)$	(6+7)	(4-6)	(2)-(6) W^4	(6)+(14) W^6	F_6
f_{14}	$A_0(7)$	(6-7)	(5)-(7) W^4	(3)-(7) W^6	(7)+(15) W^7	F_7
f_1	$A_0(8)$	(8+9)	(8+10)	(8+12)	(0-8)	F_8
f_9	$A_0(9)$	(8-9)	(9)+(11) W^4	(9)+(13) W^2	(1)-(9) W	F_9
f_5	$A_0(10)$	(10+11)	(8-10)	(10)+(14) W^4	(2)-(10) W^2	F_{10}
f_{13}	$A_0(11)$	(10-11)	(9)-(11) W^4	(11)+(15) W^6	(3)-(11) W^3	F_{11}
f_3	$A_0(12)$	(12+13)	(12+14)	(8-12)	(4)-(12) W^4	F_{12}
f_{11}	$A_0(13)$	(12-13)	(13)+(15) W^4	(9)-(13) W^2	(5)-(13) W^5	F_{13}
f_7	$A_0(14)$	(14-15)	(12-14)	(10)-(14) W^4	(6)-(14) W^6	F_{14}
f_{15}	$A_0(15)$	(14-15)	(13)-(15) W^4	(11)-(15) W^6	(7)-(15) W^7	F_{15}

Tabela 4.3 - Transformada de um vetor real (N=16)

Na tabela 4.3:

$A_i(k)$ - k-ésimo valor complexo da coluna A

i - Número da iteração

$(j\pm k) = (j) \pm (k)$; (k) - k-ésimo valor complexo da coluna precedente

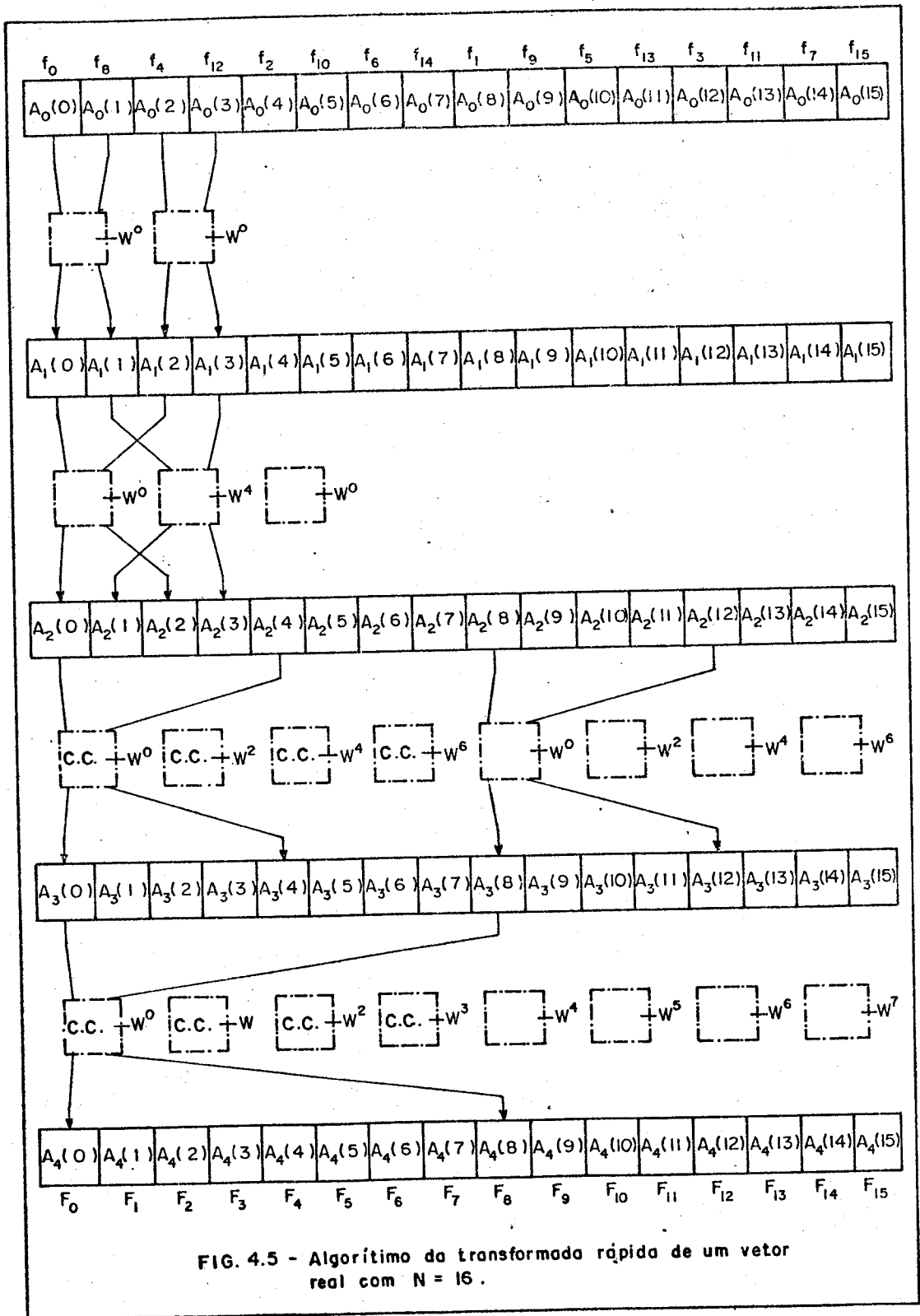
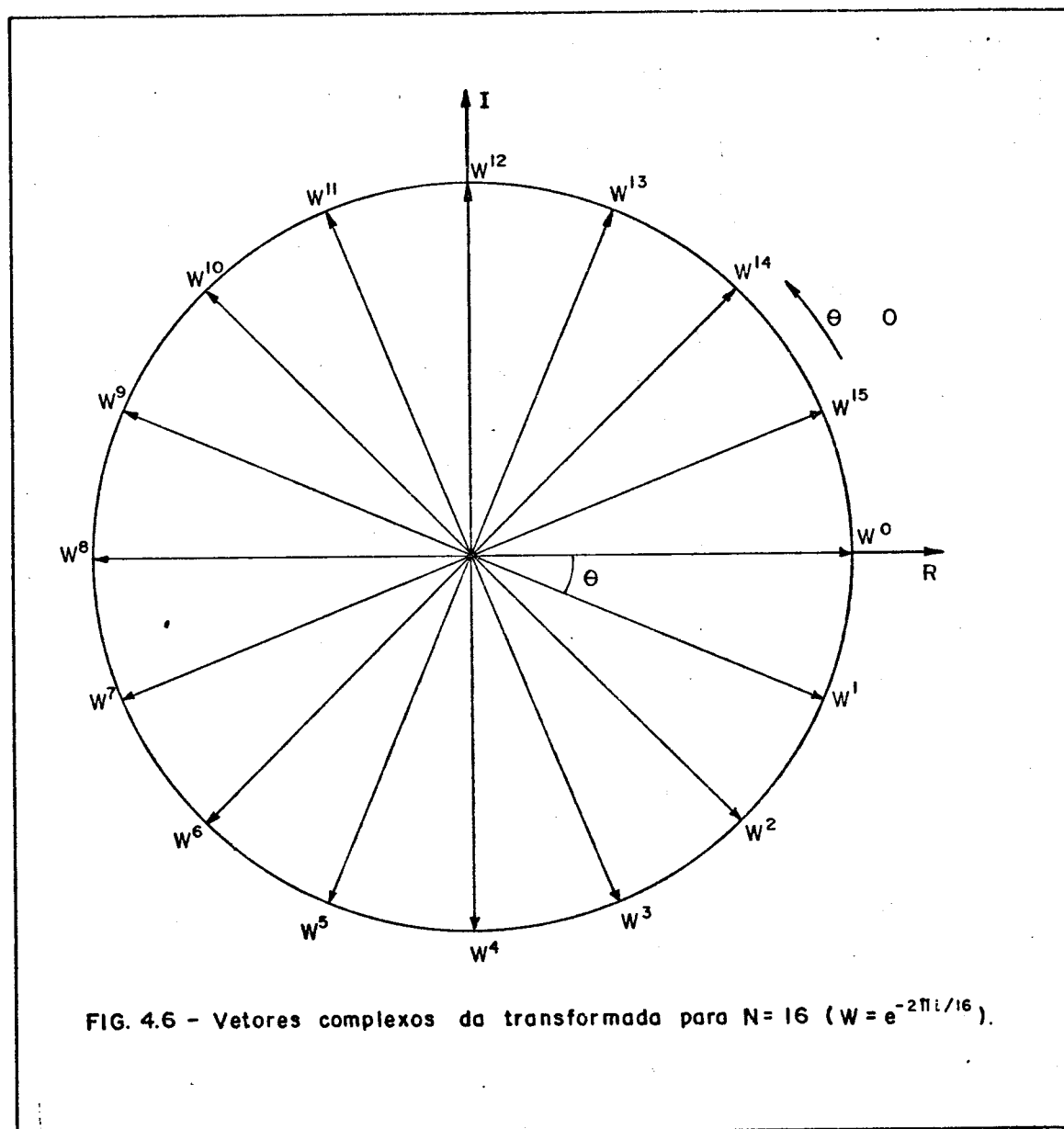


FIG. 4.5 - Algoritmo da transformada rápida de um vetor real com $N = 16$.

Se o nosso interesse consiste na simplificação do algoritmo, o estudo pode ser iniciado aplicando-se as propriedades trigonométricas nas potências de W que aparecem na transformação. Na figura 4.6 encontram-se indicados os vetores complexos da transformada.



Pode-se estabelecer, de acordo com a definição de W , os valores dos ângulos correspondentes a cada potência de W utilizada como mostrado na tabela 4.4.

	θ	θ Decomposto
W^0	0	0
W	$-\pi/8$	$-\pi/8$
W^2	$-\pi/4$	$-\pi/4$
W^3	$-3\pi/8$	$-(\pi/8+\pi/4)$
W^4	$-\pi/2$	$-\pi/2$
W^5	$-5\pi/8$	$-(\pi/8+\pi/2)$
W^6	$-3\pi/4$	$-(\pi/4+\pi/2)$
W^7	$-7\pi/8$	$-(\pi/8+\pi/4+\pi/2)$

Tabela 4.4 - Ângulos correspondentes aos versores determinados pelas potências de W no plano de Gauss.

Na terceira coluna da tabela 4.4, constata-se que não são necessários $N/2$ valores diferentes de ângulos para definir as $N/2$ potências de W requeridas na transformada rápida, e elas podem ser definidas como múltiplos de unicamente $N/4$ valores de ângulos linearmente independentes.

Lembrando que o vetor complexo $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, pode-se decompor as potências de W nas suas partes real e imaginária da forma efetuada na tabela 4.5, onde já foram aplicadas as propriedades trigonométricas nos senos e cossenos dos ângulos da tabela 4.4.

Da observação da tabela 4.5, verifica-se um fato interessante no cálculo da transformada rápida completa com $N = 16$, unicamente é necessária a determinação dos cossenos e senos de dois ângulos para se obter todas as potências de W requeridas.

	W_{real}	$W_{\text{imaginário}}$
W^0	1	0
W	$\cos\pi/8$	$-\text{sen}\pi/8$
W^2	$\cos\pi/4$	$-\text{sen}\pi/4 = -\cos\pi/4$
W^3	$\cos(\pi/8+\pi/4)$	$-\text{sen}(\pi/8+\pi/4)$
W^4	0	-1
W^5	$-\text{sen}\pi/8$	$-\cos\pi/8$
W^6	$-\text{sen}\pi/4 = -\cos\pi/4$	$-\cos\pi/4$
W^7	$-\text{sen}(\pi/8+\pi/4)$	$-\cos(\pi/8+\pi/4)$

Tabela 4.5 - Partes real e imaginária das potências de W para $N = 16$. ($W = [W]_{\text{real}} + [W]_{\text{imag}}$.)

É conveniente agora, o exame dos componentes do vetor $F(k\Delta\omega)$ (no domínio da frequência) obtido uma vez efetuadas todas as operações do algoritmo da figura 4.5, indicadas na tabela 4.3. A expressão correspondente a $F(\Delta\omega)$ obtida, é

$$F(\Delta\omega) = f_0 - f_8 + (f_4 - f_{12})W^4 + \{f_2 - f_{10} + (f_6 - f_{14})W^4\}W^2 + \{f_1 - f_9 + (f_5 - f_{13})W^4 + [f_3 - f_{11} + (f_7 - f_{15})W^4]W^2\}W$$

que decomposta nas suas partes real e imaginária fornece,

$$\begin{aligned}
 [F(\Delta\omega)]_{\text{real}} &= f_0 - f_8 + (f_2 - f_{10}) \cos \pi/4 + (f_6 - f_{14}) \cos 3\pi/4 + \\
 &+ (f_1 - f_9) \cos \pi/8 + (f_5 - f_{13}) \cos 5\pi/8 + \\
 &+ (f_3 - f_{11}) \cos 3\pi/8 + (f_7 - f_{15}) \cos 7\pi/8 \\
 [F(\Delta\omega)]_{\text{imag.}} &= - (f_4 - f_{12}) - (f_2 - f_{10}) \text{sen} \pi/4 - (f_6 - f_{14}) \text{sen} 3\pi/4 - \\
 &- (f_1 - f_9) \text{sen} \pi/8 - (f_5 - f_{13}) \text{sen} 5\pi/8 - \\
 &- (f_3 - f_{11}) \text{sen} 3\pi/8 - (f_7 - f_{15}) \text{sen} 7\pi/8
 \end{aligned}
 \tag{4.57}$$

das tabelas (4.4 e 4.5) tem-se:

$$\begin{aligned}
 [F(\Delta\omega)]_{\text{real}} &= f_0 - f_8 + (f_2 - f_{10}) \cos \pi/4 - (f_6 - f_{14}) \cos \pi/4 + \\
 &+ (f_1 - f_9) \cos \pi/8 - (f_5 - f_{13}) \text{sen} \pi/8 + \\
 &+ (f_3 - f_{11}) \cos (\pi/8 + \pi/4) - (f_7 - f_{15}) \text{sen} (\pi/8 + \pi/4) \\
 [F(\Delta\omega)]_{\text{imag.}} &= - (f_4 - f_{12}) - (f_2 - f_{10}) \cos \pi/4 - (f_6 - f_{14}) \cos \pi/4 - \\
 &- (f_1 - f_9) \text{sen} \pi/8 - (f_5 - f_{13}) \cos \pi/8 - \\
 &- (f_3 - f_{11}) \text{sen} (\pi/8 + \pi/4) - (f_7 - f_{15}) \cos (\pi/8 + \pi/4)
 \end{aligned}
 \tag{4.58}$$

sabe-se que

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \text{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta$$

portanto as componentes real e imaginária de $F(\Delta\omega)$ podem finalmente serem reordenadas na forma,

$$\begin{aligned}
 [F(\Delta\omega)]_{\text{real}} &= f_0 - f_8 + (f_2 - f_{10} - f_6 + f_{14}) \cos\pi/4 + \\
 &+ [f_1 - f_9 + (f_3 - f_{11} - f_7 + f_{15}) \cos\pi/4] \cos\pi/8 + \\
 &+ [-f_5 + f_{13} + (-f_3 + f_{11} - f_7 + f_{15}) \cos\pi/4] \sin\pi/8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [F(\Delta\omega)]_{\text{imag.}} &= -f_4 + f_{12} + (-f_2 + f_{10} - f_6 + f_{14}) \cos\pi/4 + [-f_5 + f_{13} + \\
 &+ (-f_7 + f_{15} - f_3 + f_{11}) \cos\pi/4] \cos\pi/8 - \\
 &- [f_1 - f_9 + (-f_7 + f_{15} + f_3 - f_{11}) \cos\pi/4] \sin\pi/8
 \end{aligned}$$

através de raciocínio análogo os restantes elementos componentes do vetor $F(k\Delta\omega)$ são facilmente desmembrados e reordenados, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 [F(0\Delta\omega)] &= f_0 + f_8 + f_4 + f_{12} + f_2 + f_{10} + f_6 + f_{14} + f_1 + f_9 + f_5 + f_{13} + f_3 + \\
 &+ f_{11} + f_7 + f_{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [F(8\Delta\omega)] &= f_0 + f_8 + f_4 + f_{12} + f_2 + f_{10} + f_6 + f_{14} - f_1 - f_9 - f_5 - f_{13} - f_3 - \\
 &- f_{11} - f_7 - f_{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [F(2\Delta\omega)]_{\text{real}} &= f_0 + f_8 - f_4 - f_{12} + \{f_1 + f_9 - f_5 - f_{13} - f_3 - f_{11} + f_7 + f_{15}\} \times \\
 &\cos\pi/4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [F(2\Delta\omega)]_{\text{imag.}} &= -f_2 - f_{10} + f_6 + f_{14} + \{-f_3 - f_{11} + f_7 + f_{15} - f_1 - f_9 + \\
 &+ f_5 + f_{13}\} \cos\pi/4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [F(3\Delta\omega)]_{\text{real}} = & f_0 - f_8 - [f_2 - f_{10} - f_6 + f_{14}] \cos \pi/4 + [f_1 - f_9 - \\
 & - (f_3 - f_{11} - f_7 + f_{15}) \cos \pi/4 \operatorname{sen} \pi/8 + \\
 & + [f_5 - f_{13} + (-f_7 + f_{15} - f_3 + f_{11}) \cos \pi/4] \cos \pi/8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [F(3\Delta\omega)]_{\text{imag.}} = & f_4 - f_{12} + [-f_6 + f_{14} - f_{12} + f_{10}] \cos \pi/4 + [f_5 - f_{13} + \\
 & + (-f_7 - f_3 + f_{11}) \cos \pi/4] \operatorname{sen} \pi/8 - [f_1 - f_9 - \\
 & - (f_3 - f_{11} - f_7 + f_{15}) \cos \pi/4] \cos \pi/8
 \end{aligned}$$

$$[F(4\Delta\omega)]_{\text{real}} = f_0 + f_8 + f_4 + f_{12} - f_2 - f_{10} - f_6 - f_{14}$$

$$[F(4\Delta\omega)]_{\text{imag.}} = -f_1 - f_9 - f_5 - f_{13} + f_3 + f_{11} + f_7 + f_{15}$$

$$\begin{aligned}
 [F(5\Delta\omega)]_{\text{real}} = & f_0 - f_8 - [f_2 - f_{10} - f_6 + f_{14}] \cos \pi/4 - [f_1 - f_9 - \\
 & - (f_4 - f_{11} - f_7 + f_{15}) \cos \pi/4] \operatorname{sen} \pi/8 - [f_5 - f_{13} + \\
 & + (-f_7 + f_{15} - f_3 + f_{11}) \cos \pi/4] \cos \pi/8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [F(5\Delta\omega)]_{\text{imag.}} = & -f_4 + f_{12} - [-f_6 + f_{14} - f_2 + f_{10}] \cos \pi/4 + [f_5 - f_{13} + \\
 & + (-f_7 + f_{15} - f_3 + f_{11}) \cos \pi/4] \operatorname{sen} \pi/8 - [f_1 - f_9 - \\
 & - (f_3 - f_{11} - f_7 + f_{15}) \cos \pi/4] \cos \pi/8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [F(6\Delta\omega)]_{\text{real}} = & f_0 + f_8 - f_4 - f_{12} - [f_1 + f_9 - f_5 - f_{13} - f_3 - f_{11} + \\
 & + f_7 + f_{15}] \cos \pi/4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [F(6\Delta\omega)]_{\text{imag.}} = & f_2 + f_{10} - f_6 - f_{14} + [-f_3 - f_{11} + f_7 + f_{15} - f_1 - f_9 + \\
 & + f_5 + f_{13}] \cos \pi/4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [F(7\Delta\omega)]_{\text{real}} &= f_0 - f_8 + [f_2 - f_{10} - f_6 + f_{14}] \cos\pi/4 - [f_1 - f_9 + \\
 &+ (f_3 - f_{11} - f_7 + f_{15}) \cos\pi/4] \cos\pi/8 - [-f_5 + f_{13} + \\
 &+ (-f_7 + f_{15} - f_3 + f_{11}) \cos\pi/4] \text{sen}\pi/8 \\
 [F(7\Delta\omega)]_{\text{imag.}} &= f_4 - f_{12} - (-f_6 + f_{14} - f_2 + f_{10}) \cos\pi/4 + [-f_5 + f_{13} + \\
 &+ (-f_7 + f_{15} - f_3 + f_{11}) \cos\pi/4] \cos\pi/8 - f_1 - f_9 + \\
 &+ [(-f_7 + f_{15} + f_3 - f_{11}) \cos\pi/4] \text{sen}\pi/8 \quad (4.59)
 \end{aligned}$$

Duas observações de extrema importância podem ser tiradas da análise dos elementos componentes do vetor $F(k\Delta\omega)$. A primeira diz respeito à grande simplicidade conseguida nos cálculos efetuados, dentro dos quais somente foi necessário determinar duas potências de W e a segunda reside no fato, de terem sido negligenciados os cálculos correspondentes aos últimos $N/2$ elementos de $F(k\Delta\omega)$, pois conforme a propriedade apontada na tabela 4.2, os seus cálculos são redundantes.

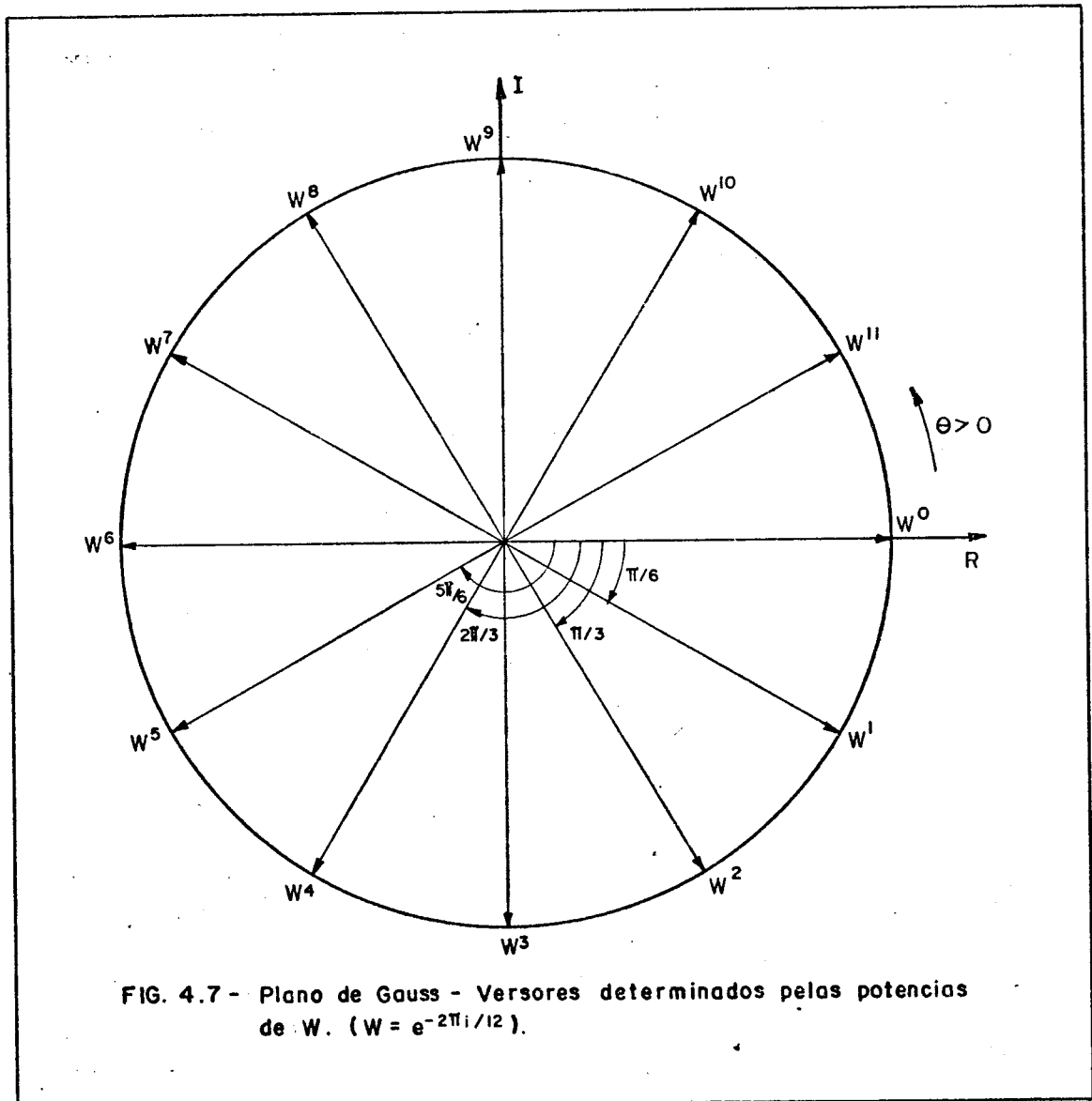
Na tabela 4.6 é mostrado o algoritmo para obtenção da transformada de um vetor real com $N=16$, Equações 4.59. Note-se que o mesmo conjunto de cálculos complexos não pode mais ser utilizado em todas as iterações, mas o modo apresentado é extremamente simples e conserva algumas das propriedades do algoritmo da tabela 4.3. Por exemplo na coluna 1, a cada dois valores as operações são repetidas, na 2 cada 4 e na 3 cada 8.

$f(j\Delta t)$	$A_0(k)$	$A_1(k)$	$A_2(k)$	$A_3(k)$	$A_4(k)$	$F(k\Delta\omega)$
f_0	$A_0(0)$	(0+1)	(0+2)	(0+4)	(0+8)	F_0
f_8	$A_0(1)$	(0-1)	(0-2)	(0-4)	(0-8)	F_8
f_4	$A_0(2)$	(2+3)	(1)	(2)+(6+7) $\cos \pi/4$	(2)+(10) $\cos \pi/8 + (11) \text{sen} \pi/8$	$[F_1]$
f_{12}	$A_0(3)$	(2-3)	-(3)	(3)+(7-6) $\cos \pi/4$	(3)+(11) $\cos \pi/8 - (10) \text{sen} \pi/8$	$[F_1]$ imag.
f_2	$A_0(4)$	(4+5)	(4+6)	(1)	(4)+(12+13) $\cos \pi/4$	$[F_2]$ real
f_{10}	$A_0(5)$	(4-5)	(4-6)	-(5)	(5)+(13-12) $\cos \pi/4$	$[F_2]$ imag.
f_6	$A_0(6)$	(6+7)	(5)	(2)-(6+7) $\cos \pi/4$	(6)+(14) $\text{sen} \pi/8 + (15) \cos \pi/8$	$[F_3]$ real
f_{14}	$A_0(7)$	(6-7)	-(7)	-(3)+(7-6) $\cos \pi/4$	(7)+(15) $\text{sen} \pi/8 - (14) \cos \pi/8$	$[F_3]$ imag.
f_1	$A_0(8)$	(8+9)	(8+10)	(8+12)	(1)	$[F_4]$ real
f_9	$A_0(9)$	(8-9)	(8-10)	(8-12)	-(9)	$[F_4]$ imag.
f_5	$A_0(10)$	(10+11)	(9)	(10)+(14+15) $\cos \pi/4$	(6)-(14) $\text{sen} \pi/8 - (15) \cos \pi/8$	$[F_5]$ real
f_{13}	$A_0(11)$	(10-11)	-(11)	(11)+(15-14) $\cos \pi/4$	-(7)+(15) $\text{sen} \pi/8 - (14) \cos \pi/8$	$[F_5]$ imag.
f_3	$A_0(12)$	(12+13)	(12+14)	(9)	(4)-(12+13) $\cos \pi/4$	$[F_6]$ real
f_{11}	$A_0(13)$	(12-13)	(12-14)	-(13)	-(5)+(13-12) $\cos \pi/4$	$[F_6]$ imag.
f_7	$A_0(14)$	(14+15)	(13)	(10)-(14+15) $\cos \pi/4$	(2)-(10) $\cos \pi/8 - (11) \text{sen} \pi/8$	$[F_7]$ real
f_{15}	$A_0(15)$	(14-15)	-(15)	-(11)+(15-14) $\cos \pi/4$	-(3)+(11) $\cos \pi/8 - (10) \text{sen} \pi/8$	$[F_7]$ imag.

Tabela 4.6 - Transformada numérica de um vetor real (N=16), $F(k\Delta\omega) = [F(k\Delta\omega)]_{\text{real}} + [F(k\Delta\omega)]_{\text{imag}}$.

Até agora considerou-se a construção do algoritmo para o caso particular $N = 16$, porém as propriedades da decomposição das potências de W , como mostrado na figura 4.6 e tabelas 4.4 e 4.5, são válidas para qualquer N par, desta forma o algoritmo pode ser estendido para qualquer N par. Como ilustração, mostra-se na tabela 4.7 o algoritmo para o cálculo da transformada de um vetor real com $N = 32$.

O algoritmo para os casos $N = 2^m \cdot 3$ é obtido similarmente. Por exemplo para $N = 12$, cuja transformada rápida é mostrada no algoritmo da figura 4.4, tem-se na tabela 4.8 a decomposição das potências de W envolvida de acordo com os ângulos observados na figura 4.7.



$f(j\Delta t)$	$A_0(k)$	$A_1(k)$	$A_2(k)$	$A_3(k)$	$A_4(k)$	$A_5(k)$	$F(k\omega)$
F_0	$A_0(0)$ (0+1)	(0+2)	(0+4)	(0+8)	(0+8)	(0+16)	F_0
f_{16}	$A_0(1)$ (0-1)	(0-2)	(0-4)	(0-8)	(0-8)	(0-16)	F_{16}
f_8	$A_0(2)$ (2+3)	(1)	(2)+(6+7)cos $\pi/4$	(2)+(6+7)cos $\pi/4$	(2)+(10)cos $\pi/8$ +(11)sen $\pi/8$	(2)+(18)cos $\pi/16$ +(19)sen $\pi/16$	$[F_1]$ real
f_{24}	$A_0(3)$ (2-3)	-(3)	(3)+(7-6)cos $\pi/4$	(3)+(7-6)cos $\pi/4$	(3)+(11)cos $\pi/8$ -(10)sen $\pi/8$	(3)+(19)cos $\pi/16$ -(18)sen $\pi/16$	$[F_1]$ imag.
f_4	$A_0(4)$ (4+5)	(4+6)	(1)	(1)	(4)+(12+13)cos $\pi/4$	(4)+(20)cos $\pi/16$ +(21)sen $\pi/16$	$[F_2]$ real
f_{20}	$A_0(5)$ (4-5)	(4-6)	-(5)	-(5)	(5)+(13-12)cos $\pi/4$	(5)+(21)cos $\pi/16$ -(20)sen $\pi/16$	$[F_2]$ imag.
f_{12}	$A_0(6)$ (6+7)	(5)	(2)-(6+7)cos $\pi/4$	(2)-(6+7)cos $\pi/4$	(6)+(14)sen $\pi/8$ +(15)cos $\pi/8$	(6)+(22)cos $\pi/16$ +(23)sen $\pi/16$	$[F_3]$ real
f_{28}	$A_0(7)$ (6-7)	-(7)	-(3)+(7-6)cos $\pi/4$	-(3)+(7-6)cos $\pi/4$	(7)+(15)sen $\pi/8$ -(14)cos $\pi/8$	(7)+(23)cos $\pi/16$ -(22)sen $\pi/16$	$[F_3]$ imag.
f_2	$A_0(8)$ (8+9)	(8+10)	(8+12)	(8+12)	(1)	(8)+(24+25)cos $\pi/4$	$[F_4]$ real
f_{18}	$A_0(9)$ (8-9)	(8-10)	(8-12)	(8-12)	-(9)	(9)+(23-24)cos $\pi/4$	$[F_4]$ imag.
f_{10}	$A_0(10)$ (10+11)	(9)	(10)+(14+15)cos $\pi/4$	(10)+(14+15)cos $\pi/4$	(6)-(14)sen $\pi/8$ -(15)cos $\pi/8$	(10)+(26)sen $\pi/16$ +(27)cos $\pi/16$	$[F_5]$ real
f_{26}	$A_0(11)$ (10-11)	-(11)	(11)+(15-14)cos $\pi/4$	(11)+(15-14)cos $\pi/4$	-(7)-(15)sen $\pi/8$ -(14)cos $\pi/8$	(11)+(27)sen $\pi/16$ -(26)cos $\pi/16$	$[F_5]$ imag.
f_6	$A_0(12)$ (12+13)	(12+14)	(9)	(9)	(4)-(12+13)cos $\pi/4$	(12)+(28)sen $\pi/16$ +(29)cos $\pi/16$	$[F_6]$ real
f_{22}	$A_0(13)$ (12-13)	(12-14)	-(13)	-(13)	-(5)+(13-12)cos $\pi/4$	(13)+(29)sen $\pi/16$ -(28)cos $\pi/16$	$[F_6]$ imag.
f_{14}	$A_0(14)$ (14+15)	(13)	(10)-(14+15)cos $\pi/4$	(10)-(14+15)cos $\pi/4$	(2)-(10)cos $\pi/8$ -(11)sen $\pi/8$	(14)+(30)sen $\pi/16$ +(31)cos $\pi/16$	$[F_7]$ real
f_{30}	$A_0(15)$ (14-15)	-(15)	-(11)+(15-14)cos $\pi/4$	-(11)+(15-14)cos $\pi/4$	-(3)+(11)cos $\pi/8$ -(10)sen $\pi/8$	(15)+(31)sen $\pi/16$ -(30)cos $\pi/16$	$[F_7]$ imag.
f_1	$A_0(16)$ (16+17)	(16+18)	(16+20)	(16+20)	(16+24)	(1)	$[F_8]$ real
f_{17}	$A_0(17)$ (16-17)	(16-18)	(16-20)	(16-20)	(16-24)	-(17)	$[F_8]$ imag.
f_9	$A_0(18)$ (18+19)	(17)	(18)+(22+23)cos $\pi/4$	(18)+(22+23)cos $\pi/4$	(18)+(26)cos $\pi/8$ +(27)sen $\pi/8$	(14)-(30)sen $\pi/16$ -(31)cos $\pi/16$	$[F_9]$ real
f_{25}	$A_0(19)$ (18-19)	-(19)	(19)+(23-22)cos $\pi/4$	(19)+(23-22)cos $\pi/4$	19+(27)cos $\pi/8$ -(26)sen $\pi/8$	-(15)+(31)sen $\pi/16$ -(30)cos $\pi/16$	$[F_9]$ imag.
f_5	$A_0(20)$ (20+21)	(20+22)	(17)	(17)	(21)+(29-28)cos $\pi/4$	(22)-(28)sen $\pi/16$ -(29)cos $\pi/16$	$[F_{10}]$ real
f_{21}	$A_0(21)$ (20-21)	(20-22)	-(21)	-(21)	(21)+(29-28)cos $\pi/4$	-(13)+(29)sen $\pi/16$ -(28)cos $\pi/16$	$[F_{10}]$ imag.
f_{13}	$A_0(22)$ (22+23)	(21)	(18)-(22+23)cos $\pi/4$	(18)-(22+23)cos $\pi/4$	(22)+(30)sen $\pi/8$ +(31)cos $\pi/8$	(10)-(26)sen $\pi/16$ -(27)cos $\pi/16$	$[F_{11}]$ real
f_{29}	$A_0(23)$ (22-23)	-(23)	-(19)+(23-22)cos $\pi/4$	-(19)+(23-22)cos $\pi/4$	(23)+(31)sen $\pi/8$ -(30)cos $\pi/8$	-(11)+(27)sen $\pi/16$ -(26)cos $\pi/16$	$[F_{11}]$ imag.
f_3	$A_0(24)$ (24+25)	(24+26)	(24+28)	(24+28)	(17)	(8)-(24+25)cos $\pi/4$	$[F_{12}]$ real
f_{19}	$A_0(25)$ (24-25)	(24-26)	(24-28)	(24-28)	-(25)	-(9)+(25-24)cos $\pi/4$	$[F_{12}]$ imag.
f_{11}	$A_0(26)$ (26+27)	(25)	(26)+(30+31)cos $\pi/4$	(26)+(30+31)cos $\pi/4$	(22)-(30)sen $\pi/8$ -(31)cos $\pi/8$	(6)-(22)cos $\pi/16$ -(23)sen $\pi/16$	$[F_{13}]$ real
f_{27}	$A_0(27)$ (26-27)	-(27)	(27)+(31-30)cos $\pi/4$	(27)+(31-30)cos $\pi/4$	-(23)+(31)sen $\pi/8$ -(30)cos $\pi/8$	-(7)+(23)cos $\pi/16$ -(22)sen $\pi/16$	$[F_{13}]$ imag.
f_7	$A_0(28)$ (28+29)	(28+30)	(25)	(25)	(20)-(28+29)cos $\pi/4$	(4)-(20)cos $\pi/16$ -(21)sen $\pi/16$	$[F_{14}]$ real
f_{23}	$A_0(29)$ (28-29)	(28-30)	-(29)	-(29)	-(21)+(29)-28)cos $\pi/4$	-(5)+(21)cos $\pi/16$ -(20)sen $\pi/16$	$[F_{14}]$ imag.
f_{15}	$A_0(30)$ (30+31)	(29)	(26)-(30+31)cos $\pi/4$	(26)-(30+31)cos $\pi/4$	(18)-(26)cos $\pi/8$ -(27)sen $\pi/8$	(2)-(18)cos $\pi/16$ -(19)sen $\pi/16$	$[F_{15}]$ real
f_{31}	$A_0(31)$ (30-31)	-(31)	-(27)+(31-30)cos $\pi/4$	-(27)+(31-30)cos $\pi/4$	-(19)+(27)cos $\pi/8$ -(26)sen $\pi/8$	-(3)+(19)cos $\pi/16$ -(18)sen $\pi/16$	$[F_{15}]$ imag.

Tabela 4.7 - Algoritmo da transformada numérica de Fourier de um vetor real (N=32)

Efetuando-se todas as operações indicadas no algoritmo da figura 4.4 e aplicando-se as propriedades da decomposição das partes real e imaginárias das potências de W , obtêm-se os elementos do vetor $F(k\Delta\omega)$ decompostos analogamente aos obtidos nas Equações 4.53. Desta forma chega-se finalmente ao algoritmo da transformada de Fourier, tabela 4.9, para o caso $N=12$.

	$[W]_{\text{real}}$	$[W]_{\text{imag.}}$
W^0	1	0
W	$\cos\pi/6 = \text{sen}\pi/3$	$-\text{sen}\pi/6$
W^2	$\cos\pi/3 = \text{sen}\pi/6$	$-\text{sen}\pi/3$
W^3	0	-1
W^4	$-\text{sen}\pi/6$	$-\cos\pi/6$
W^5	$-\text{sen}\pi/3$	$-\cos\pi/3$

Tabela 4.8 - Decomposição das potências de W para $N=12$

Uma particularidade interessante, do algoritmo da tabela 4.9, é que são efetuadas operações diferentes às do algoritmo anterior nas duas primeiras iterações. Isso acontece pela existência do conjunto de cálculos complexos modificados na primeira iteração do algoritmo indicado na figura 4.4. Note-se também, que o vetor discreto da solicitação ($f(j\Delta t)$), aparece com seus elementos com ordem diferente da que é apresentada na figura 4.4; isso é necessário para que as operações dos algoritmos com $N=2^m \cdot 2$, possam ser utilizadas. Como poderá ser visto na seção IV.10.

$f(j\Delta t)$	$A_0(k)$	$A_1(k)$	$A_2(k)$	$A_3(k)$	$F(k\Delta\omega)$
f_0	$A_0(0)$	(0+3)	(0+2+4)	(0+6)	F_0
f_4	$A_0(1)$	(0-3)	(1+3+5)	(0-6)	F_6
f_2	$A_0(2)$	(1+2)	$(1)-(3+5)\cos\pi/3$	$(2)+(8)\cos\pi/6+(9)\sin\pi/6$	$[F_1]_{\text{real}}$
f_6	$A_0(3)$	(1-2)	$(-2+4)\sin\pi/3$	$(3)+(9)\cos\pi/6-(8)\sin\pi/6$	$[F_1]_{\text{imag.}}$
f_8	$A_0(4)$	(4+5)	$(0)-(2+4)\cos\pi/3$	$(4)+(10)\sin\pi/6+(11)\cos\pi/6$	$[F_2]_{\text{real}}$
f_{10}	$A_0(5)$	(4-5)	$(3-5)\sin\pi/3$	$(5)+(11)\sin\pi/6-(10)\cos\pi/6$	$[F_2]_{\text{imag.}}$
f_1	$A_0(6)$	(6+9)	(6+8+10)	(1)	$[F_3]_{\text{real}}$
f_5	$A_0(7)$	(6-9)	$(7+9+11)\cos\pi/3$	-(7)	$[F_3]_{\text{imag.}}$
f_3	$A_0(8)$	(7+8)	$(7)-(9+11)\sin\pi/3$	$(4)-(10)\sin\pi/6-(11)\cos\pi/6$	$[F_4]_{\text{real}}$
f_7	$A_0(9)$	(7-8)	$(-8+10)\cos\pi/3$	$-(5)+(11)\sin\pi/6-(10)\cos\pi/6$	$[F_4]_{\text{imag.}}$
f_9	$A_0(10)$	(10+11)	$(6)-(8+10)\sin\pi/3$	$(2)-(8)\cos\pi/6-(9)\sin\pi/6$	$[F_5]_{\text{real}}$
f_{11}	$A_0(11)$	(10-11)	(9-11)	$(3)+(9)\cos\pi/6-(8)\sin\pi/6$	$[F_5]_{\text{imag.}}$

Tabela 4.9 - Algoritmo da transformada numérica de Fourier de um vetor real (N=12).

IV.8 - TRANSFORMADA INVERSA

O cálculo da transformada inversa pode ser realizado utilizando-se do mesmo algoritmo da transformada rápida de Fourier, descrito nas figuras 4.2, 4.4 e 4.5, tendo-se em vista tratar-se apenas de uma troca de sinal nos expoentes complexos (substituição de $-2\pi/N$ por $2\pi/N$), resultando no plano de Gauss, uma rotação dos vetores em sentido contrário.

Se se quer determinar a transformada inversa sobre um vetor complexo simétrico, os seus elementos são calculados em cada iteração conduzindo-se as operações da tabela 4.6 em ordem inversa. Como mostrado na tabela 4.10.

Comparando-se as tabelas 4.6 e 4.10, verifica-se que as iterações do algoritmo da tabela 4.10 não correspondem exatamente à ordem inversa dos cálculos efetuados na tabela 4.6. Este fato é amplamente justificado lembrando-se que para se otimizar o algoritmo, foram negligenciados os elementos de cálculo redundante do vetor $F(k\Delta\omega)$, portanto alterando-se a ordem de entrada para os cálculos da transformada inversa.

A generalização desta discussão a valores de $N = 2^m \cdot L$, $L = 2$ ou 3 , é bem fácil e segue o mesmo raciocínio empregado anteriormente. Recomenda-se consultar a listagem da subrotina F.F.T. no apêndice 5.

$F(k\Delta\omega)$	$A_0(k)$	$A_1(k)$	$A_2(k)$	$A_3(k)$	$A_4(k)$	$f(g\Delta t)$
F_0	$A_0(0)$	(0+1)	(0+1)	(0+1)	(0+1)	f_0
F_8	$A_0(1)$	(8+8)	(4+4)	(2+2)	(0-1)	f_8
F_1 real	$A_0(2)$	(2+14)	(2+6)	(0-1)	(2+3)	f_4
F_1 imag.	$A_0(3)$	(3-15)	(3-7)	-(3+3)	(2-3)	f_{12}
F_2 real	$A_0(4)$	(4+12)	(0-1)	(4+5)	(4+5)	f_2
F_2 imag.	$A_0(5)$	(5-13)	-(5+5)	(6+6)	(4-5)	f_{10}
F_3 real	$A_0(6)$	(6+10)	$(2-6-3-7)\cos\pi/4$	(4-5)	(6+7)	f_6
F_3 imag.	$A_0(7)$	(7-11)	$(2-6+3+7)\cos\pi/4$	-(7+7)	(6-7)	f_{14}
F_4 real	$A_0(8)$	(0-1)	(8+9)	(8+9)	(8+9)	f_1
F_4 imag.	$A_0(9)$	-(9+9)	(12+12)	(10+10)	(8-9)	f_9
F_5 real	$A_0(10)$	$(2-14)\cos\pi/8 - (3+15)\sin\pi/8$	(10+14)	(8-9)	(10+11)	f_5
F_5 imag.	$A_0(11)$	$(3+15)\cos\pi/8 + (2-14)\sin\pi/8$	(11-15)	-(11+11)	(10-11)	f_{13}
F_6 real	$A_0(12)$	$(4-12-5-13)\cos\pi/4$	(8-9)	(12+13)	(12+13)	f_3
F_6 imag.	$A_0(13)$	$(4-12+5+13)\cos\pi/4$	-(13+13)	(14+14)	(12-13)	f_{11}
F_7 real	$A_0(14)$	$(6-10)\sin\pi/8 - (7+11)\cos\pi/8$	$(10-14+11+15)\cos\pi/4$	(12-13)	(14+15)	f_7
F_7 imag.	$A_0(15)$	$(7+11)\sin\pi/8 + (6-10)\cos\pi/8$	$(10-14-11-15)\cos\pi/4$	-(15+15)	(14-15)	f_{15}

Tabela 4.10 - Algoritmo da transformada numérica inversa de um vetor complexo simétrico.

IV.9 - REARRANJO DOS ELEMENTOS DOS VETORES DE SOLICITAÇÃO E RESPOSTA

Nos algoritmos formulados, o processo de iteração têm início, no cálculo da transformada direta, pela alteração na ordem dos componentes do vetor discreto de solicitação. Idêntico rearranjo deve ser elaborado após executadas todas as operações, na determinação da transformada inversa, conforme pode ser observado na primeira coluna das tabelas 4.6, 4.7 e na última da tabela 4.10. Esta modificação corresponde ao reordenamento embutido na primeira matriz quadrada na equação 4.40, que por sua vez é resultante de todo o processo de simplificação efetuado na dedução do algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT).

Seja o cálculo da transformada rápida de um vetor discreto, $f(j\ t)$, com $j = 0, 1, 2, 3$, ou seja $N = 4$. Sabe-se, pelas propriedades da decomposição, estudadas na seção IV.3, que dita transformação pode ser desmembrada em duas transformadas de dois elementos. Desta forma, o vetor discreto:

$$f(j\Delta t) = \begin{Bmatrix} f(0\Delta t) \\ f(\Delta t) \\ f(2\Delta t) \\ f(3\Delta t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1 \\ 0 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

têm os seus elementos reordenados, na transformação, para:

$$\bar{F}(j\Delta t) = \begin{Bmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

Em se tratando de um vetor com 8 elementos, da decomposição, resultam quatro transformações de dois elementos. Assim, o vetor:

$$f_j = \left\{ \begin{array}{l} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} f_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_6 \\ 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ f_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_5 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_7 \end{array} \right\} \quad (4.62)$$

sofre um rearranjo, dos seus elementos, que pode ser esboçado como segue:

$$\bar{f}_j = \left\{ \begin{array}{l} f_0 \\ f_4 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_5 \\ f_3 \\ f_7 \end{array} \right\} \quad (4.63)$$

Repetindo-se o processo para valores maiores de N, chega-se à lei obedecida no rearranjo dos componentes de um vetor com N elementos, onde $N = 2^m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Na tabela 4.11 verifica-se facilmente, que para cada novo valor de N, na geração do rearranjo do vetor, as seguintes operações devem ser efetuadas:

- 1) Multiplique-se a segunda entrada da seqüência anterior por 2 e este produto será a segunda entrada da nova seqüência.
- 2) Soma-se ao produto obtido em 1, cada elemento da seqüência anterior. Estes totais fornecem cada uma das novas entradas da seqüência.

A construção da subrotina exige um conhecimento mais profundo do mecanismo de reordenamento dos vetores discutidos. Pode-se obter melhor compreensão da forma em que são geradas os elementos vetoriais no rearranjo, pela análise da tabela 4.11. De início, verifique-se que esta operação consiste essencialmente num intercâmbio de posições dos elementos. Por exemplo, se $N = 8$, os elementos f_4 e f_1 , f_6 e f_5 , trocam de posição.

Para $N < 32$, a tabela 4.11, onde encontram-se indicadas as seqüências obedecidas pelos valores reordenados de j , juntamente com as operações que permitem a montagem da tabela aliadas à observação anterior, resultam numa série de iterações que proporcionam o rearranjo procurado e que também, constituem-se na base do algoritmo.

Quando $N \geq 32$, constata-se que, considerando-se como valor inicial qualquer valor de j , $j \neq 0$, tem-se que a cada $N/8$ elementos, o valor de j do elemento nessa posição é igual à soma do valor inicial considerado mais o valor correspondente na transformada para $N = 8$. Isto é ilustrado na tabela 4.12, no caso de $N = 32$.

De imediato percebe-se, na tabela 4.12, o fato das iterações deixarem de ser efetuadas num valor j , que não sofre alteração na sua posição. Assim, a primeira iteração deixa de ser efetuada para $j \geq 17$, a segunda em $j \geq 10$ e a terceira para $j \geq 31$. Uma outra observação de grande importância, diz respeito à necessidade de se executar um total de $(N/8-1)$ iterações, considerando-se a propriedade anteriormente apontada, ou seja, o rearranjo corresponde a uma permuta de posições dos valores j , dos elementos

X	VALORES DE N				
	2	4	8	16	32
<u>j</u> (f _j)	0	0	0	0	0
					16
				8	8
					24
			4	4	4
					20
				12	12
					28
		2	2	2	2
					18
				10	10
					26
			6	6	6
					22
				14	14
					30
		1	1	1	1
					17
				9	9
					25
				5	5
					21
				13	13
					29
			3	3	3
					19
				11	11
					27
				7	7
					23
				15	15
					31

Tabela 4.11 - Rearranjo dos elementos vetoriais no cálculo da transformada rápida para $N \leq 32$.

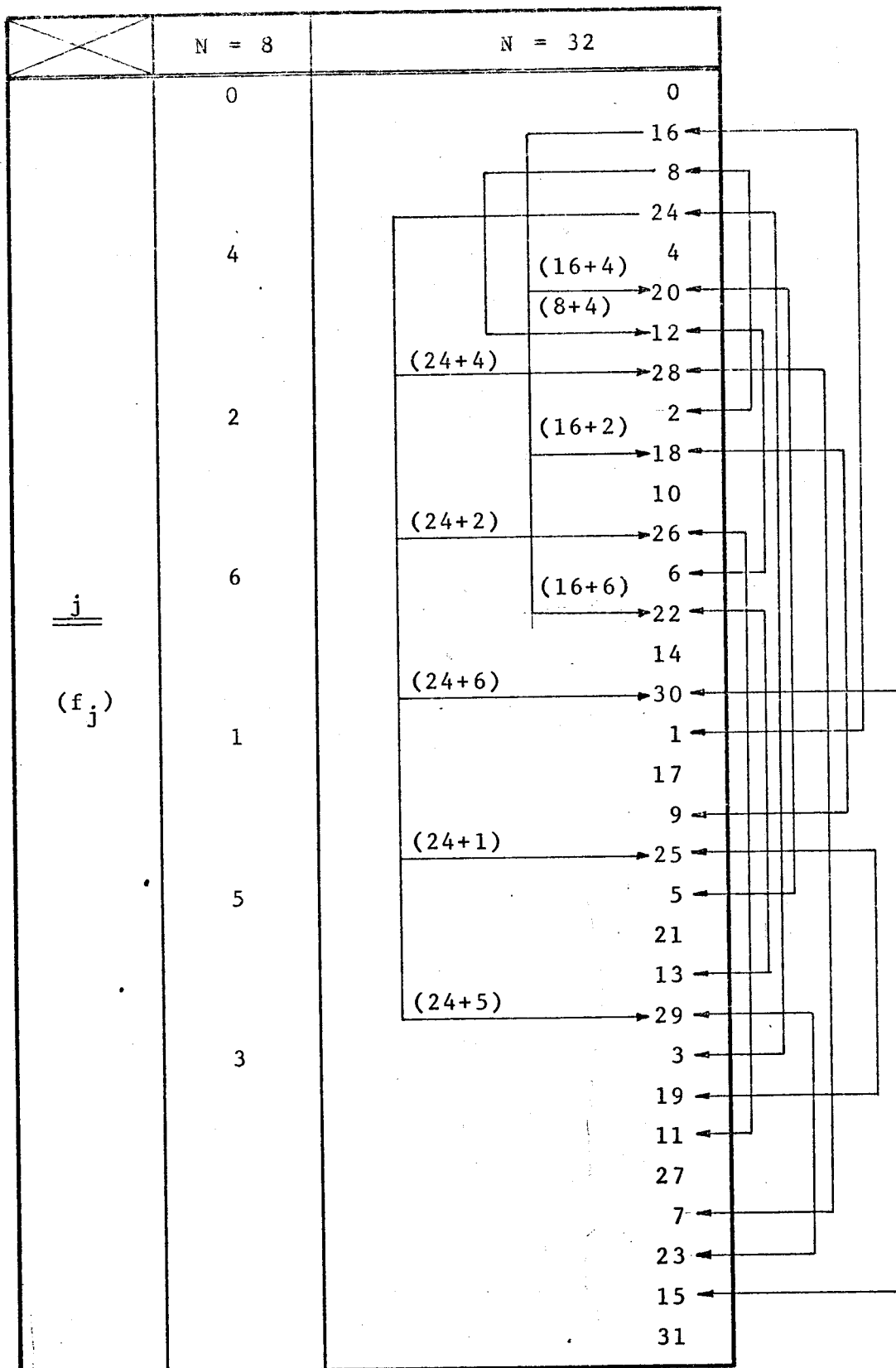


Tabela 4.12 - Algoritmo do rearranjo vetorial para vetores com $N=2^m \cdot 2$ elementos.

vetoriais, conforme indicado à direita da última coluna da tabela 4.12, na qual, resulta fácil verificação que as 3 iterações efetuadas, são suficientes para a determinação da configuração do vetor reordenado.

Os valores iniciais em cada iteração são gerados de forma análoga àquela feita no caso de $N < 32$. Desta forma, são obtidas todas as propriedades relacionadas com o rearranjo, em problemas com $N = 2^m \cdot 2$, necessárias para a definição do algoritmo.

IV.10 - REARRANJO PARA $N = 2^m \cdot 3$

Como deveria se esperar, o algoritmo para a determinação da transformada em casos onde $N = 2^m \cdot 3$, utiliza as mesmas iterações que se verificam nos problemas com $N = 2^m \cdot 2$, exceto nas duas primeiras, nas quais, pelo fato do vetor de entrada se submeter a um processo diferente de reordenamento, os cálculos são modificados (Tabela 4.9).

A imposição dos algoritmos com $N = 2^m \cdot 3$, se utilizarem de operações idênticas àquelas efetuadas para $N = 2^m \cdot 2$, é produto da necessidade de se otimizar e simplificar o programa para o computador. Naturalmente, esta imposição implica em se executar as operações em ordem diferente. Assim, em vez de utilizar-se o rearranjo original, tal como indicado na primeira linha da figura 4.4, algum procedimento especial têm que ser adotado para possibilitar a obtenção de reordenamentos equivalentes àqueles mostrados na tabela 4.13.

Tendo-se mostrado que o algoritmo ilustrado na tabela 4.9, é simplesmente uma forma particular do algoritmo da transformada rápida (figura 4.4), procura-se uma maneira fácil de escrever o rearranjo de modo que seja fácil usá-lo. O processo de reordenamento visto no item anterior é uma destas maneiras.

Um valor qualquer de $N = 2^m \cdot 3$, pode ser escrito como:

	REARRANJO VETORIAL PARA $N = 2^m \cdot 3$				
	N = 3	N = 6	N = 12	N = 24	N = 48
<u>j</u> (f _j)	0	0	0	0	0
				8	16
					8
			4	4	24
				12	32
					40
		2	2	16	4
				20	20
					12
			6	2	28
				10	36
		1	4	6	44
				14	2
					18
				18	10
				22	26
					34
			1	1	42
				9	6
				5	22
				13	24
		2	3	3	30
				7	38
				11	46
		5	9	1	
			15	17	
			19	9	
			21	25	
			21	33	
			3	41	
			11	5	
			7	21	
			15	13	
			19	29	
			21	37	
			11	45	
			7	3	
			15	19	
			19	11	
			21	27	
			11	35	
			19	43	
			21	7	
			11	23	
			19	15	
			21	31	
			11	39	
			19	47	

Tabela 4.13

$$N = 2^m \cdot 3 = (2^{m+1} + 2^m) \quad (4.64)$$

esta decomposição fornece uma maneira razoavelmente conveniente para se iniciar a análise.

No intuito de abreviar a apresentação, o rearranjo dos elementos vetoriais em transformações com $N = 2^m \cdot 3$, pode ser elaborado efetuando-se o seguinte (consultar tabela 4.14: na qual ilustra-se o rearranjo para um vetor com $N = 48$ elementos):

- 1) Efetua-se o reordenamento correspondente a seqüência dos primeiros $N_1 = 2^{m+1}$ valores.
- 2) A seqüência final com $N_2 = 2^m$ é rearranjada. Uma vez que as duas seqüências são do tipo $N = 2^m$, o seu rearranjo pode ser elaborado de acordo com o algoritmo anterior.
- 3) Coloca-se todos os elementos pares agrupados nas primeiras $N/2$ posições, ficando os ímpares nas posições restantes.
- 4) Finalmente, os $(2^m - 4)$ elementos da segunda seqüência, divididos nos primeiros $(2^{m-1} - 2)$ elementos pares nas $N/2$ posições iniciais e nos $(2^{m-1} - 2)$ elementos ímpares nas restantes, são postos aos pares cada quatro elementos da seqüência anterior.

Finalizando convém observar que o reordenamento de vetores com $N < 24$ dispensa a execução das operações indicadas no item 4 e que para valores de $N > 24$ ($N = 2^m \cdot 3$, $m = 3, 4, 5, \dots$) estas operações são feitas com um total de $(2^{m-2} - 1)$ iterações, por exemplo, um vetor com $N = 96$ elementos requer de 7 passos para efetuar todas as operações do item 4.

Com isso o algoritmo fica completamente definido.

X	1º PASSO	2º PASSO	3º PASSO	4º PASSO
\underline{j} (f_j)	0		0	0
	16		16	16
	8		8	8
	24		24	24
	4		4	32
	20		20	40
	12		12	4
	28		28	20
	2		2	12
	18		18	28
	10		10	36
	26		26	44
	6		6	2
	22		22	18
	14		14	10
	30		30	26
	1		32	34
	17		40	42
	9		36	6
	25		44	22
	5		34	14
	21		42	30
	13		38	38
	29		46	46
	3		1	1
	19		17	17
	11		9	9
	27		25	25
	7		5	33
	23		21	41
	15		13	5
31		29	21	
		3	13	
	32	19	29	
	40	11	37	
	36	27	45	
	44	7	3	
	34	23	19	
	42	15	11	
	38	31	27	
	46	33	35	
	33	41	43	
	41	37	7	
	37	45	23	
	45	35	15	
	35	43	31	
	43	39	39	
	39	47	47	
	47			

Tabela 4.14 - Exemplo do algoritmo do rearranjo vetorial para vetores com $N = 2^m \cdot 3$ elementos ($N = 2^4 \cdot 3$).

IV.11 - PROPRIEDADES DO ALGORITMO

Tomando-se como base as simplificações elaboradas nos itens anteriores, pode-se resumir as propriedades do algoritmo da transformada rápida de Fourier, para séries originais de valores reais ou simétricos complexos, como se segue:

- 1) Os cálculos redundantes são negligenciados, ou seja, unicamente efetuam-se as operações para determinação dos primeiros $(N/2+1)$ elementos do vetor complexo $F(k\Delta\omega)$.
- 2) Os resultados intermediários do algoritmo são calculados e armazenados de forma regular, verificando-se nas operações envolvidas um modelo extremamente simples.
- 3) As potências complexas ($W = e^{-i2\pi/N}$) desmembradas, senos e cossenos, aparecem na mesma ordem em cada iteração.
- 4) O número de potências complexas indispensáveis para a computação do algoritmo é de $(m-1)$ para $L = 2$ e (m) para $L = 3$, $N = 2^m \cdot L$. Naturalmente, considerando-se as decomposições das potências complexas efetuadas juntamente com as propriedades dos cossenos e senos, chega-se a enormes reduções na chamada das subrotinas correspondentes. (Maiores detalhes no Apêndice D).
- 5) As partes real e imaginária dos elementos complexos do vetor discreto de resposta na frequência, tem os seus cálculos armazenados em posições adjacentes de memória.
- 6) Na transformada direta (inversa) as duas primeiras (últimas) iterações podem ser efetuadas simultaneamente, resultando com isto a necessidade de elaborar unicamente m iterações completas para calcular a transformada completa com $N = 2^m \cdot L$, $L = 2$ ou 3 .
- 7) Utilizam-se somente N posições individuais de memória, estas registram os dados de entrada (solicitação) os resultados intermediários e os resultados finais.

IV.12 - APLICAÇÃO NA EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

Considerando-se, novamente a equação diferencial, de segunda ordem, do movimento do sistema:

$$\ddot{\rho} + 2\gamma\omega_n \dot{\rho} + \omega_n^2 \rho = \omega_n^2 f(t), \quad (4.65)$$

cuja solução no domínio da frequência, conforme verificado na equação 2.75, é dada por

$$\rho(\omega) = H(\omega) \cdot F(\omega) \quad (4.66)$$

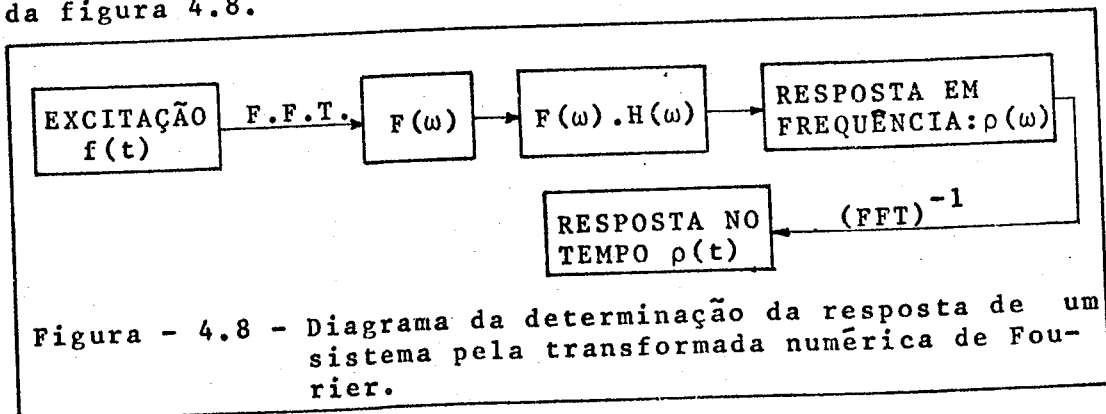
onde $H(\omega)$ é a resposta complexa em frequência e $F(\omega)$ a transformada de Fourier da excitação.

A expressão adimensional de $H(\omega)$ pode ser calculada diretamente da 2.71, obtendo-se:

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2i\gamma\omega_n \omega - \omega^2} = \frac{\omega_n^2 (\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2 \omega^2} - \frac{\omega_n^2 (2\gamma\omega_n \omega)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2 \omega^2} i \quad (4.67)$$

e a transformada da excitação é determinada mediante o algoritmo já apresentado.

A discretização da função $H(\omega)$, da equação 4.67, é imediata. Desta forma o produto de $F(k\Delta\omega)$ pelo vetor $h(k\Delta\omega)$ resulta na transformada de Fourier de $\rho(j\Delta t)$. Finalmente, efetuando-se a transformação inversa sobre $\rho(k\Delta\omega)$, como indica a segunda das 2.74, obtem-se o vetor resposta $\rho(j\Delta t)$. Esta sequência de operações é ilustrada no diagrama da figura 4.8.



IV.13 - DIAGRAMA DE FLUXO PARA COMPUTAÇÃO

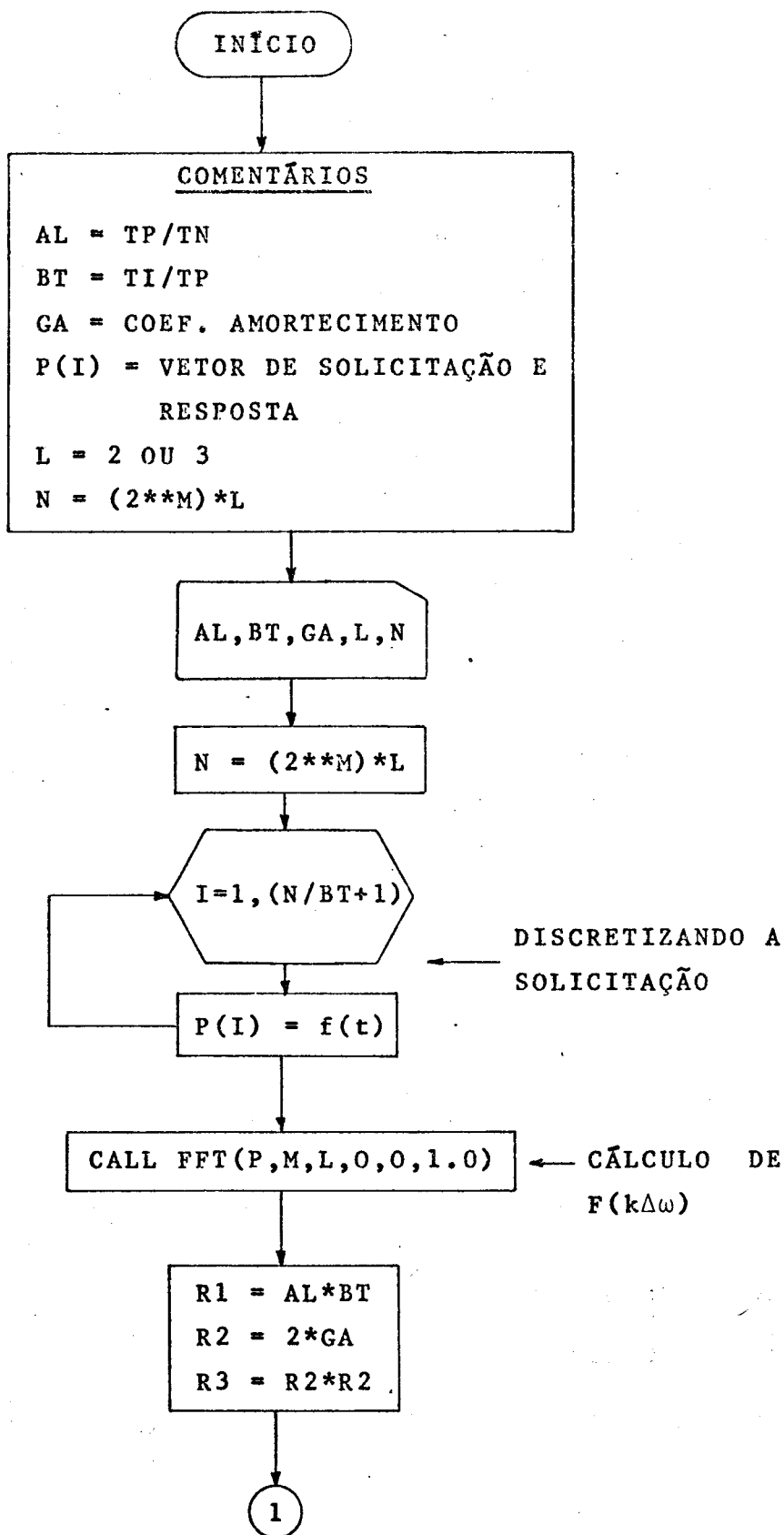
Retomando-se a expressão das variáveis adimensionais utilizadas nos algoritmos das figuras 3.2, 3.5, 3.7 e 3.9:

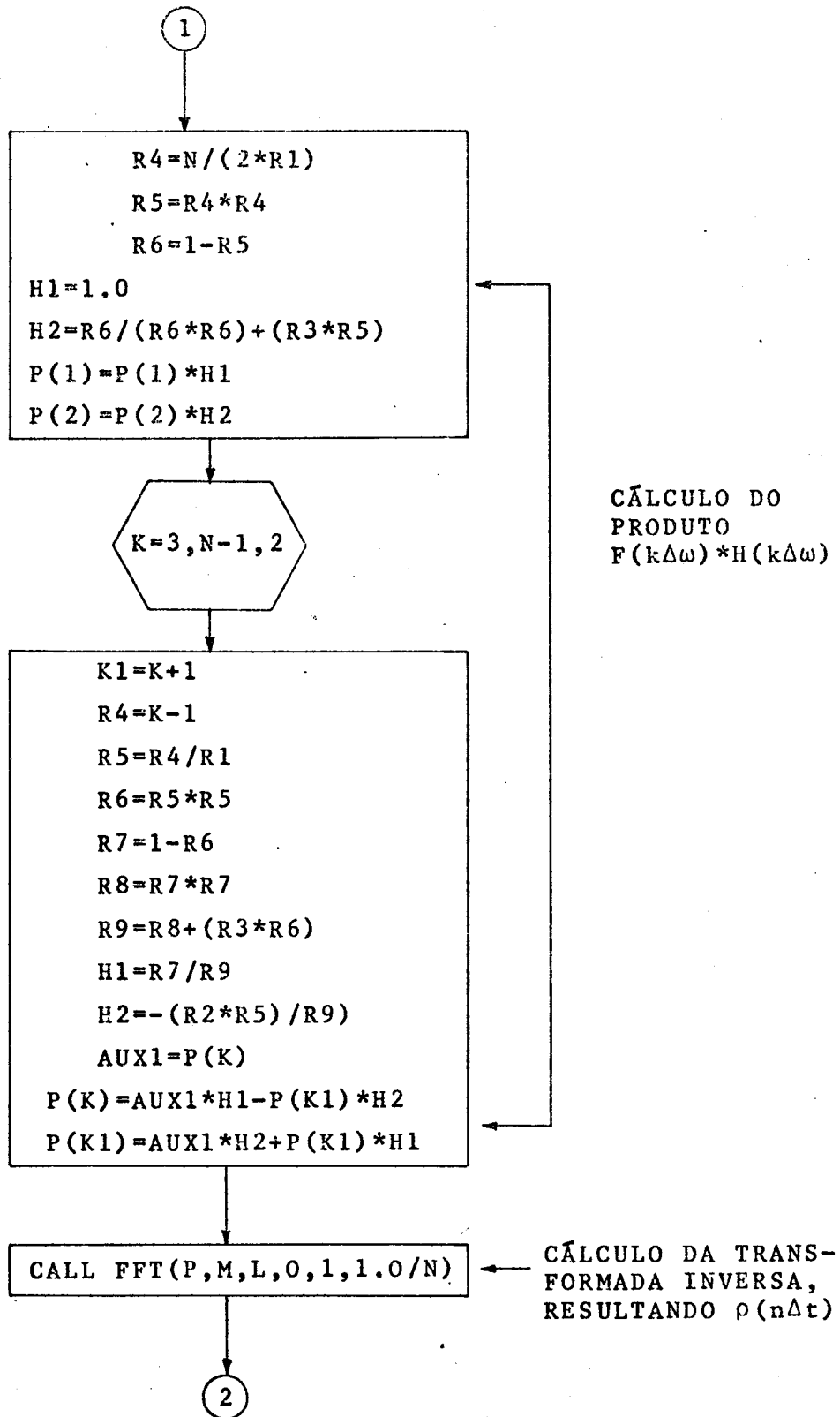
$$\begin{aligned} AL &= \frac{TP}{TN} = \frac{\text{DURAÇÃO DA SOLICITAÇÃO}}{\text{PERÍODO NATURAL}} \\ BT &= \frac{TI}{TP} = \frac{\text{TEMPO DE INTEGRAÇÃO}}{\text{DURAÇÃO DA CARGA}} \end{aligned} \quad (4.68)$$

a expressão discreta adimensional de $H(\omega)$ é:

$$\begin{aligned} H(k\Delta\omega) &= \frac{(1 - (\frac{k}{2 \cdot AL \cdot BT})^2)}{\left[1 - (\frac{k}{2 \cdot AL \cdot BT})^2\right]^2 + (\frac{2\gamma k}{2 \cdot AL \cdot BT})^2} - \\ &\quad - \frac{(\frac{2\gamma k}{2 \cdot AL \cdot BT})}{\left[1 - (\frac{k}{2 \cdot AL \cdot BT})^2\right]^2 + (\frac{2\gamma k}{2 \cdot AL \cdot BT})^2} i \end{aligned} \quad (4.69)$$

Definidas todos os elementos indispensáveis para computação do método, passa-se, agora, a elaborar o fluxograma, o qual encontra-se indicado na figura 4.9.





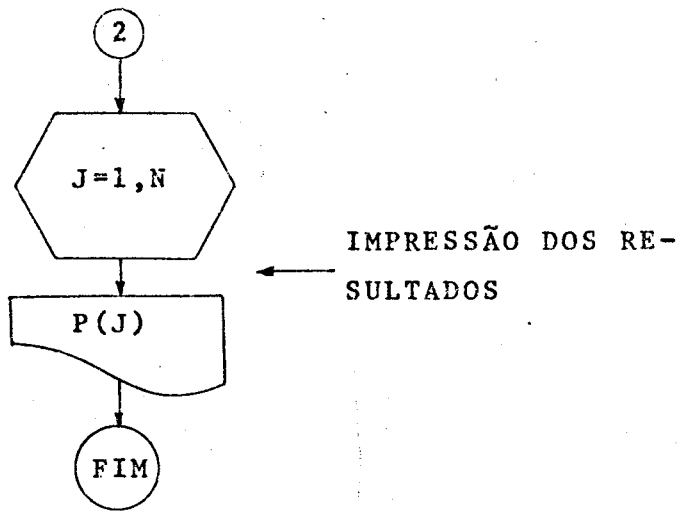


Figura 4.9 - Diagrama de fluxo para cálculo da transformada numérica de Fourier

CAPÍTULO V

ANÁLISE COMPARATIVA DOS MÉTODOS DE
INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.

V.1 - INTRODUÇÃO

Até agora foi apresentada a formulação de diversos métodos numéricos de integração da equação de movimento. O objetivo deste capítulo é discutir alguns aspectos do desempenho computacional relacionados com a implementação de tais métodos.

A integração numérica da equação de equilíbrio dinâmico, visa a obtenção de boas aproximações para as respostas reais das estruturas consideradas. Isto implica necessariamente, na integração com grande precisão da equação 1.8. Dentro da exigência de se obter uma solução efetiva para uma resposta gerada por uma excitação qualquer, é de grande importância a escolha de um processo apropriado de integração. Esta escolha depende das hipóteses de discretização sob as quais o método de integração é aplicado. Ainda, a idealização discreta por sua vez, condiciona-se ao problema físico em análise. Conclui-se então, que a seleção de uma coerente idealização discreta do problema e a escolha de um adequado processo de integração numérica, e contram-se em conexão direta e devem ser consideradas simultaneamente.

No estudo comparativo dos méritos associados aos diversos métodos numéricos, quando empregados para determinar as respostas de sistemas lineares com um grau de liberdade, dois aspectos adquirem grande importância, o primeiro diz respeito aos erros resultantes da aplicação do método e o segundo vincula-se com o tempo necessário para computação; cabe, nesse ponto, realçar a enorme importância que o tempo de processamento tem adquirido com o surgimento nas últimas duas décadas, da revolução computacional. A aproximação das respostas obtidas através da aplicação de um processo numérico de integração, sujeita-se, de forma geral, aos parâmetros físicos do sistema, à excitação e ao intervalo de tempo Δt utilizado nos cálculos. O tempo de execução dos cálculos depende do tipo e número de operações requeridas para a solução do problema.

É obvio que a eficiência de um algoritmo de integração também relaciona-se com outros fatores, por exemplo, a convergência, cujo estudo é relevante na análise das respostas numéricas obtidas para sistemas com muitos graus de liberdade. Todavia, no estudo em questão, o problema da convergência dos métodos é pouco expressivo, motivo pelo qual é discutido sem entrar em detalhes.

Inicia-se a análise, no presente capítulo, apresentando-se um ilustrativo exemplo de aplicação, com a finalidade de posteriormente evidenciar, pela confrontação dos indicadores computacionais acima descritos, o desempenho dos algoritmos dos métodos numéricos de integração (diretos e indiretos) deduzidos nos capítulos precedentes.

V.2 - EXEMPLO DE ESTUDO

Considere-se o problema da determinação da resposta de um sistema a um pulso retangular de altura unitária e duração T_p , conforme ilustra-se na figura 5.1. A definição matemática da excitação é:

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 & 0 < t \leq T_p \\ f(t) &= 0 & t > T_p \end{aligned} \quad (5.1)$$

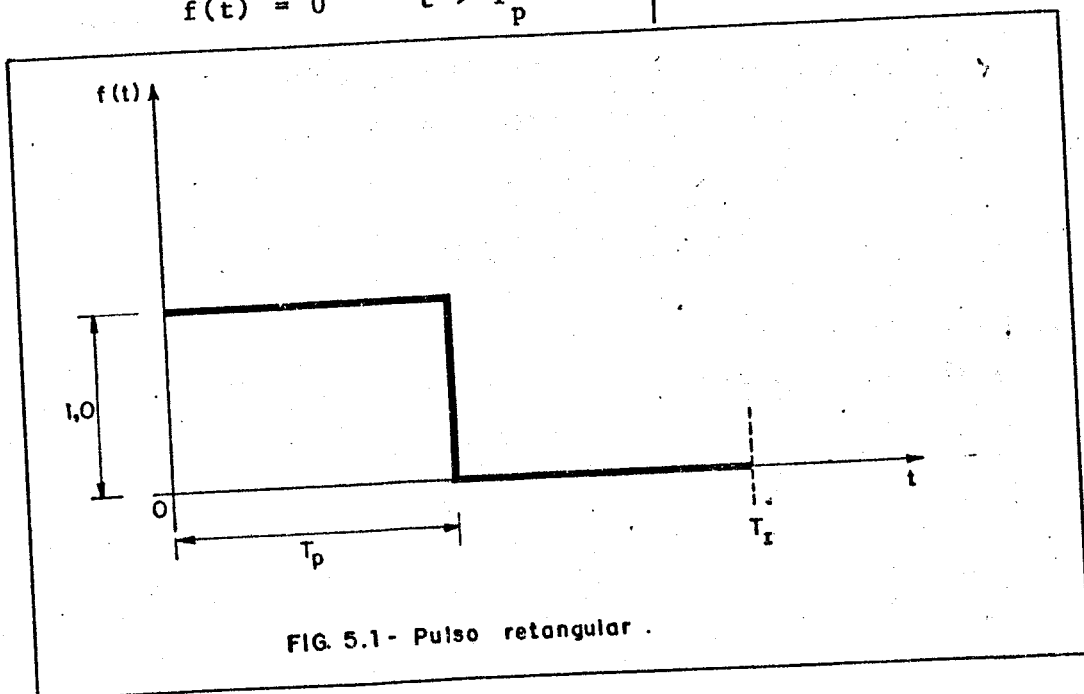


FIG. 5.1 - Pulso retangular .

Adotando-se o coeficiente de amortecimento $\gamma=0.05$, sendo T_n o período natural do sistema e admitindo-se também condições iniciais nulas ($\rho(0) = 0, \dot{\rho}(0) = 0$), obtem-se todos os elementos necessários para a solução do problema.

A análise comparativa dos vários métodos numéricos pode ser elaborada variando-se o tempo de integração T_I considerado, assim como o espaçamento Δt . A implementação dos algoritmos deduzidos nos capítulos III e IV, correspondentes a cada método, fornece valores sucessivos do vetor resposta nos tempos $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, 4\Delta t, \dots$.

Retomando-se, agora, as variáveis adimensionais

$$\left. \begin{aligned} \alpha = AL &= \frac{T_P}{T_N} \\ \beta = BT &= \frac{T_I}{T_P} \end{aligned} \right| \quad (5.2)$$

definidas para simplificar os algoritmos, pode-se expressar o espaçamento t na forma:

$$\Delta t = \frac{\alpha\beta T_N}{N}, \quad (5.3)$$

onde N é o número de intervalos discretos considerado na integração.

Desta feita as variáveis indispensáveis para a computação dos algoritmos encontram-se completamente definidas.

V.2.1 - Sumário computacional para o exemplo

Objetivo: Estudo comparativo relativo à estabilidade, erros de computação e tempo de processamento dos métodos numéricos abordados, quando aplicados a sistemas lineares com um grau de liberdade.

ETAPA	$\gamma=GA$	$\alpha=AL$	$\beta=BT$	N	$\Delta t/T_n$	OBS.
ANÁLISE DE ESTABILIDADE	0.05	2.0	47.75	100	0.955	COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS COM GRANDES ESPAÇAMENTOS Δt .
			31.85	100	0.637	
			20	100	0.400	
			15.90	100	0.318	
			7.95	100	0.159	
ANÁLISE DE APROXIMAÇÃO E TEMPO DE PROCESSAMENTO			3.95	100	0.079	
			1.0	64	0.03125	
			1.0	128	0.015625	
			16	1024	0.03125	
			16	1536	0.02083	
		16	2048	0.015625		

Tabela 5.1 - Valores assumidos pelas variáveis discretas nas diferentes etapas do estudo.

V.3 - ESTABILIDADE (CONVERGÊNCIA) DOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Na integração numérica da equação do movimento, boas aproximações podem ser conseguidas utilizando-se valores do espaçamento Δt correspondentes a pequenas frações do período natural do sistema. Uma estimativa para Δt , assim requerido, é se adotar um valor em torno de $T_n/10$. Diante da impossibilidade de se integrar adequadamente empregando-se valores do espaçamento maiores que o período natural, poderia surgir a seguinte indagação: Que respostas são determinadas quando verificam-se altos valores de $\Delta t/T_n$? A resposta desta pergunta vincula-se intimamente com o problema da estabilidade dos métodos de integração. Estabilidade significa, que qualquer erro na determinação da aceleração, velocidade e deslocamento num tempo genérico t , oriundo de

aproximações inerentes ao método, não são amplificados artificialmente durante o processo de integração.

É evidente que o problema de estabilidade inexistente na implementação dos métodos numéricos indiretos (Integração numérica da convolução e Transformada numérica de Fourier), uma vez que eles são aplicados na solução analítica do problema e não na equação de equilíbrio dinâmico, como ocorre com os métodos de integração direta.

Para se investigar a estabilidade de um processo de integração numérica, é útil examinar os operadores que dão origem ao método, ou seja, as relações entre acelerações, deslocamentos e velocidades. Tais relações podem ser encaradas como sendo transformações e expressas de forma clara e simples valendo-se de matrizes. A convergência de um método numérico é determinada através da verificação do comportamento da solução numérica para condições iniciais arbitrárias. Portanto, o estudo é feito considerando-se a equação do movimento em pontos discretos de tempo, com o vetor solicitação nulo. A aplicação das propriedades dos autovalores e autovetores na matriz de transformação (definida pelos operadores do método), resulta em critérios elegantes e apropriados de convergência. Os mecanismos para a obtenção dos vários critérios de convergência empregados são matematicamente complicados e se acham fora do interesse principal deste trabalho. Estes são discutidos detalhadamente em diversas publicações referentes à análise numérica.

Se a estabilidade dos métodos diretos de integração depende somente dos autovalores da matriz de transformação, conclui-se então, que ela é condicionada somente pelo coeficiente $\Delta t/T_n$, o coeficiente de amortecimento γ e os parâmetros utilizados na integração. Portanto, para determinados valores de $\Delta t/T_n$ e γ é possível, nos métodos de Wilson e Newmark, variar os parâmetros θ , β e δ respectivamente para se obter características de estabilidade e precisão.

Define-se um método numérico como incondicionalmente estável se a solução para quaisquer condições inici-

ais, não cresce ilimitadamente independentemente do espaçamento Δt considerado. O método é condicionalmente estável se a condição anterior se verifica para valores de $\Delta t/T_n$ menores que um certo valor crítico, usualmente denominado de limite de estabilidade.

Há inúmeros operadores (parâmetros) que podem ser adotados na aplicação dos métodos de integração direta, objetos do presente estudo. Utilizam-se aqui, os parâmetros indicados na tabela 5.2, os quais foram extraídos dos resultados obtidos por BATHE (1982).

MÉTODO	ESTABILIDADE INCONDICIONAL.	PARÂMETROS MELHORES CARACTERÍSTICAS DE PRECISÃO.	ADOTADO
WILSON	$\theta > 1.37$	$\theta > 1.40$	$\theta = 1.40$
NEWMARK	$\delta > 0.5$ $\beta > 0.25(\delta + 0.5)^2$	$\delta = 0.5$ $\beta = 0.25$	$\delta = 0.5$ $\beta = 0.25$

Tabela 5.2

O estudo estabilidade para o método das diferenças finitas, mostra que este método é integrante da família dos algoritmos condicionalmente estáveis com:

$$\left(\frac{\Delta t}{T_n}\right)_{\text{crit.}} = \frac{1}{\pi} \approx 0.318 \quad (5.4)$$

A tabela 5.3 exhibe os resultados encontrados com grandes espaçamentos Δt . Os dados de entrada para computação, encontram-se mostrados na tabela 5.1.

$\Delta t/T_n$	BT	MÉTODO	1º MÁXIMO	1º MÍNIMO	2º MÁXIMO
0.955	47.75	NEWMARK ($\beta=1/4$)	1.74760	0.637103	0.896763
		WILSON ($\theta=1.40$)	6.25571	-0.719677	0.512840
		DIFERENÇAS FINITAS	18.0027	-443.208	11611.2
		SOLUÇÃO EXATA	1.06522	0.997479	1.000
0.637	31.85	NEWMARK ($\beta=1/4$)	1.53885	0.155111	0.9827
		WILSON ($\theta=1.40$)	3.2488	-0.0591642	1.20811
		DIFERENÇAS FINITAS	8.00956	-80.2152	945.038
		SOLUÇÃO EXATA	1.56766	0.554293	1.43768
0.40	20	NEWMARK ($\beta=1/4$)	1.83529	0.46026	1.69338
		WILSON ($\theta=1.40$)	2.04039	0.402507	1.28370
		DIFERENÇAS FINITAS	3.15827	-6.49953	28.0818
		SOLUÇÃO EXATA	1.68578	0.749339	1.51132
0.318	15.90	NEWMARK ($\beta=1/4$)	1.90467	0.181572	1.74040
		WILSON ($\theta=1.40$)	2.03407	0.339462	1.38618
		DIFERENÇAS FINITAS	1.99611	0.014128	1.97052
		SOLUÇÃO EXATA	1.57154	0.302146	1.53234
0.159	7.95	NEWMARK ($\beta=1/4$)	1.81306	0.251554	1.65563
		WILSON ($\theta=1.40$)	1.79299	0.315666	1.51993
		DIFERENÇAS FINITAS	1.86057	0.259434	1.63727
		SOLUÇÃO EXATA	1.84502	0.302146	1.56210
0.079	3.95	NEWMARK ($\beta=1/4$)	1.83738	0.26128	1.62364
		WILSON ($\theta=1.40$)	1.83653	0.276231	1.61109
		DIFERENÇAS FINITAS	1.84848	0.287469	1.62383
		SOLUÇÃO EXATA	1.84247	0.279367	1.62385

Tabela 5.3 - Estabilidade dos métodos de integração direta

A observação dos valores das respostas indicadas na tabela 5.3 torna imediata a constatação do problema da instabilidade, já mencionada, do método das diferenças finitas, ou seja, para valores maiores que $\Delta t/T_n = 0.318$ a tabela evidencia a amplificação artificial dos erros de integração no método. Eles também confirmam a veracidade das afirmações referentes aos parâmetros que possibilitam a estabilidade dos métodos de Wilson e Newmark registrados na segunda coluna da tabela 5.2.

V.4 - ERROS DE COMPUTAÇÃO E TEMPO DE PROCESSAMENTO

O estudo da precisão das respostas calculadas mediante os operadores de integração numérica, assim como o tempo gasto durante o processamento, constituem-se nos principais indicadores de eficiência na análise da performance dos métodos numéricos objeto do presente estudo. É claro que a afirmativa anterior restringe-se aos deslocamentos de sistemas lineares com um grau de liberdade. A decisão referente à escolha do método a ser empregado na análise prática, é condicionada pelo custo da solução e a aproximação dos resultados obtidos. O custo da solução vincula-se ao número de espaçamentos Δt necessários para a integração efetiva, como também, ao número de operações envolvidas no processo de solução. Daí conclui-se, que o tempo gasto na execução dos cálculos pelo computador digital, representa uma boa medida do custo da solução.

Para valores do espaçamento Δt menores que $0.01T_n$, as curvas das respostas determinadas numericamente, são idênticas àquela correspondente à curva da resposta exata, calculada analiticamente (BATHE, 1982). Contudo, nos problemas usuais da engenharia, os valores das amplitudes máximas do deslocamento, revestem-se de maior relevância, para a análise, do que a forma exata da curva de resposta. A tendendo a este fato, os valores dos quatro primeiros picos de respostas, obtidos da aplicação dos operadores dos

métodos numéricos em estudo, no exemplo de aplicação, encontram-se indicados na tabela 5.4. Os tempos de computação verificados na resolução são mostrados na tabela 5.5. Deve-se lembrar que os valores das variáveis de entrada para a computação dos algoritmos, acham-se definidas no sumário computacional, para o exemplo de estudo, tabela 5.1.

Note-se, na tabela 5.4, que para os dois primeiros valores do espaçamento, não se considera o método da Transformada rápida de Fourier, visto que, nestes casos, o tempo de integração considerado é de apenas duas vezes o tempo de aplicação da solicitação e para o método da transformada rápida de Fourier fornecer resultados satisfatórios, e indispensável trabalhar com tempos de integração muito superior ao tempo de duração da excitação.

A observação dos resultados apresentados na tabela 5.4 mostra claramente que os picos de resposta são calculados com excelente aproximação pelos cinco métodos. A tabela 5.5 evidencia um melhor desempenho do método das diferenças finitas. A restrição quanto ao valor mínimo de Δt para se ter características de estabilidade no método das diferenças centrais não representa desvantagem no presente estudo.

Para completar, convém notar que, do ponto de vista computacional, outros expedientes poderiam ainda ser levantados, por exemplo, o problema da armazenagem dos vetores discretos requeridos para a computação completa dos vários algoritmos de integração numérica. Este problema adquire grande relevância, sobretudo, na utilização de microcomputadores. Na tabela 5.6 descrevem-se os vetores discretos necessários para a implementação dos métodos numéricos em estudo.

A propósito dos valores especificados na tabela 5.6, eles vêm confirmar o bom comportamento do método das diferenças finitas, uma vez que o vetor discreto de resposta, determinado pela aplicação deste método, simultaneamente fornece informações da velocidade e aceleração da massa (consultar apêndice B).

TI	2TP				2TP				16TP				16TP			
	0.0317				0.0157				0.0313				0.0156			
PICOS (nº)	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
DIF. FINITAS	1.855	0.269	1.624	0.466	1.854	0.27	1.624	0.467	1.855	0.27	1.624	0.466	1.855	0.27	1.624	0.467
NEWMARK	1.855	0.269	1.624	0.466	1.854	0.27	1.624	0.467	1.855	0.27	1.625	0.466	1.855	0.27	1.624	0.467
WILSON	1.855	0.269	1.625	0.467	1.855	0.27	1.625	0.466	1.856	0.269	1.625	0.467	1.855	0.27	1.625	0.466
DUHAMEL	1.850	0.269	1.620	0.465	1.853	0.27	1.623	0.467	1.850	0.269	1.620	0.465	1.853	0.27	1.623	0.467
F.F.T.	-	-	-	-	-	-	-	-	1.852	0.272	1.623	0.468	1.854	0.27	1.624	0.467
VALOR EXATO	1.854	0.27	1.624	0.467	1.854	0.27	1.624	0.467	1.854	0.27	1.624	0.467	1.854	0.27	1.624	0.467

Tabela 5.4 - Precisão dos métodos

TEMPO DE COMPUTAÇÃO OBSERVADO (C.P.U.)				
$\Delta t/TN$	0.0317	0.0157	0.0313	0.0156
TI	2TP	2TP	16TP	16TP
N	64	128	1024	2048
DIFERENÇAS FINITAS	1.84	1.99	2.02	2.46
NEWMARK	1.88	2.02	2.09	2.56
WILSON	2.00	2.13	2.59	3.35
DUHAMEL	2.22	2.94	32.40	120.08
F.F.T.	-	-	4.18	5.82

Tabela 5.5 - Tempos de processamento

MÉTODO	NÚMERO MÍNIMO DE VETORES DISCRETOS, NECESSÁRIOS PARA COMPUTAÇÃO.	POSIÇÕES DE MEMÓRIA EMPREGADAS NA ARMAZENAGEM DOS VETORES DISCRETOS.
DIFERENÇAS FINITAS	1	N
NEWMARK	1	N
WILSON	3	3N
DUHAMEL	3	3N
F.F.T.	1	N

Tabela 5.6 - Memórias requeridas para computação

Evidentemente os resultados de um exemplo numérico não são suficiente para formular conclusões definitivas. Além disso, deve ser ressaltado que a atual discussão limitou-se a problemas lineares. Diversas dificuldades surgirão na análise das virtudes dos métodos numéricos aplicados a sistemas não lineares. Todavia o estudo apresentado relativo à estabilidade aproximação das respostas e tempos de processamento, podem representar um valioso auxílio nestas investigações.

APÊNDICE A

RESUMO DA TEORIA DAS SÉRIES DE FOURIER

SERIES DE FOURIER

Séries Trigonômétricas

Uma série trigonométrica é uma série da forma,

$$1/2a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos x + b_n \sin x + \dots ,$$

onde os coeficientes a_n e b_n são constantes.

Cada termo na série trigonométrica tem a propriedade de que é repetido em intervalos de 2π .

É obvio que se a série converge para qualquer valor de x , então a sua soma $f(x)$ também deverá ter esta propriedade:

$$f(x+2\pi) = f(x) , \text{ ou seja } f(x) \text{ têm um período } 2\pi.$$

Em geral uma função $f(x)$ tal que $f(x+p) = f(x)$, $p \neq 0$ para todos os valores de x , é periódica com período p .

Este tipo de função periódica aparece em grande variedade de problemas físicos, e pode ser demonstrado que obedecendo certas condições muito gerais, qualquer função periódica pode ser representada na forma de uma série trigonométrica. Este teorema matemático é o reflexo de uma experiência típica ilustrada mais objetivamente no caso do som; por exemplo, de uma corda de violino. O termo $1/2a_0$ representa a posição neutra, os termos $a_1 \cos x + b_1 \sin x$ o tom fundamental; e os termos $a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$ a primeira sobre-tônica (oitava), os outros termos representam harmônicas de ordem superior; a variável x deve ser considerada, neste caso, como tempo, e a função $f(x)$ como o deslocamento de um instrumento, por exemplo, um ponto da corda.

Séries de Fourier

Suponhamos agora que uma função periódica $f(x)$ é a soma de uma série trigonométrica, ou seja,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{senn}x) \quad (1)$$

Qual a relação entre os coeficientes a_n , b_n e a função $f(x)$?

Multiplicando por $\operatorname{cos}mx$ e integrando de $-\pi$ a π , obtem-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{cos}mx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{cos}mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{cos}nx \operatorname{cos}mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{senn}x \operatorname{cos}mx \, dx \right\}$$

Para as integrais do lado direito da equação tem-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{cos}nx \operatorname{cos}mx \, dx = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq m \\ \pi & , \quad n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{senn}x \operatorname{cos}mx \, dx = 0$$

Assim para $m = 0$, todos os termos à direita da equação são iguais a zero, exceto o primeiro, e portanto tem-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \pi a_0 \quad (2)$$

Para qualquer inteiro positivo m , somente o termo em a_m for necessário resultado não nulo. Assim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{cos}mx \, dx = \pi a_m \quad (m=1, 2, \dots) \quad (3)$$

Procedendo de forma análoga e multiplicando a Equação (1) por $\text{sen}mx$, encontra-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}mx \, dx = \pi b_m \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

Esta é a regra fundamental para os coeficientes em uma Série de Fourier, sem preocuparmos com a validade dos passos que conduzem às Equações (2), (3) e (4), definimos uma Série de Fourier como uma série trigonométrica na qual os coeficientes a_n e b_n , são calculados de uma função $f(x)$ segundo as expressões anteriores. No tocante a $f(x)$, somente supomos que as integrais nas expressões existem, para isto é suficiente que $f(x)$ seja contínua exceto para um número finito de discontinuidades entre $-\pi$ e π .

Convergência das Séries de Fourier (Condições de Dirichlet)

A Série $f(x)$ de Fourier fica bem definida quando $f(x)$ é seccionalmente contínua (se tem num intervalo no máximo um número finito de descontinuidades finitas), mas seria muito esperarmos a convergência da Série a $f(x)$ em condições tão gerais. Porém, encontra-se que requer muito pouco a mais para garantir a convergência a $f(x)$.

Em particular, se f é periódica com período 2π e têm derivadas contínuas de primeira e segunda ordem para todos os valores x , então a Série de Fourier $f(x)$ converge uniformemente para todos os x . Pode-se ainda chegar mais longe e garantirmos a convergência uniforme da Série de Fourier para $f(x)$, a $f(x)$ quando $f(x)$ têm "picos" (quer dizer, pontos nos quais $f(x)$ têm uma descontinuidade de valor) enquanto f tenha derivadas primeira e segunda, contínuas entre os picos, isto é ilustrado na figura 1.

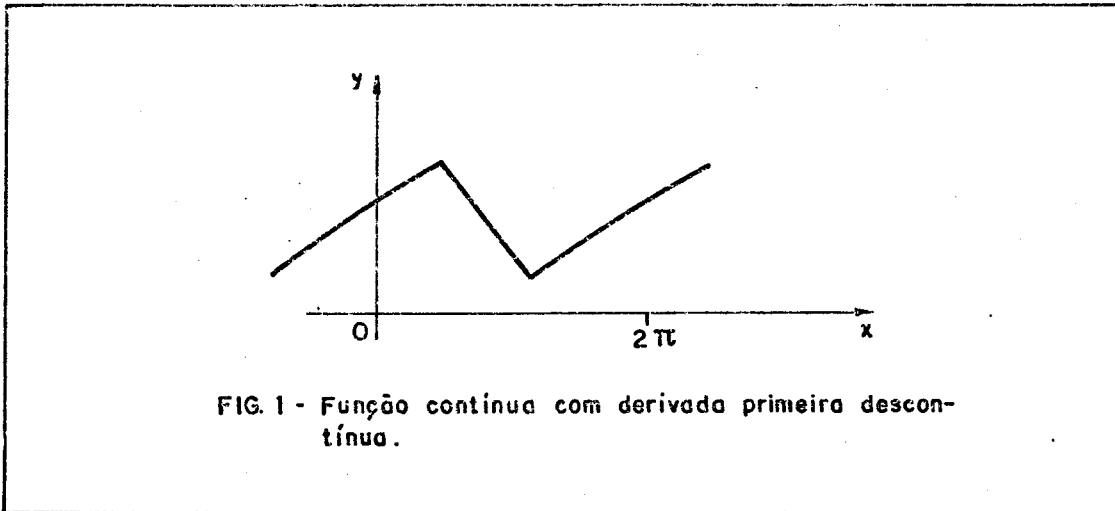


FIG. 1 - Função contínua com derivada primeira descontínua.

De fato pode-se estender o conceito de "pico" de tal forma a incluir descontinuidade de valor para $f(x)$, ver figura 2:

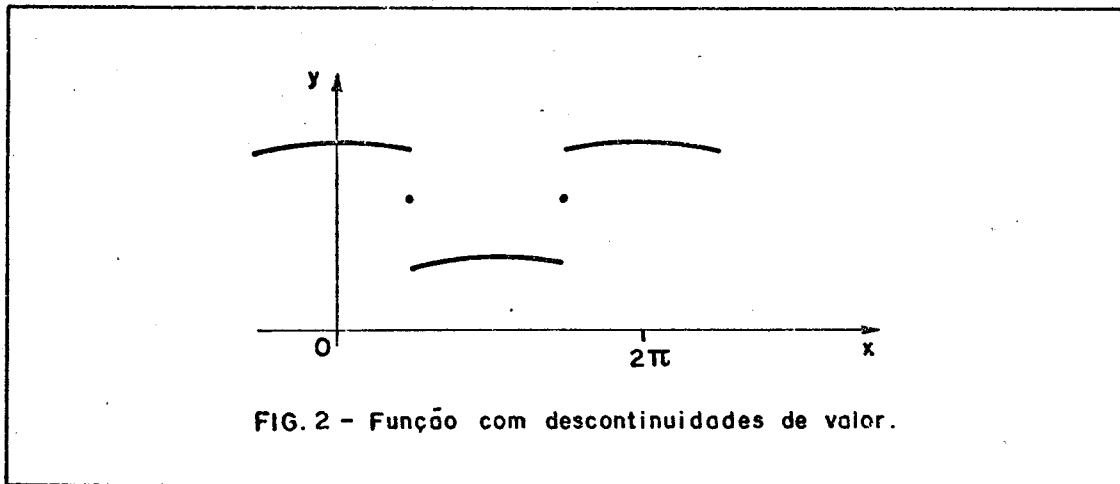


FIG. 2 - Função com descontinuidades de valor.

Difícilmente pode-se esperar convergência da Série a $f(x)$ nos pontos de descontinuidade, onde $f(x)$ pode, inclusive, estar duplamente definida; mas a Série de Fourier encarrega-se de decidir por nós, na forma mais razoável, converge para a média dos valores limites da direita e da esquerda, quer dizer, ao valor na descontinuidade x_1 :

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow x_1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) \right]$$

Não pode-se esperar que a Série seja convergente perto das descontinuidades, mas converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha a descontinuidade.

Embora até aqui considera-se somente funções periódicas $f(x)$ (com período 2π), deve ser observado que as fórmulas básicas de coeficientes utilizam só valores de $f(x)$ entre $-\pi$ e π ; assim se $f(x)$ é definida unicamente neste intervalo e é, por exemplo contínua, então a Série de Fourier correspondente pode ser formada e será a Série de Fourier de $f(x)$. Se a série converge a $f(x)$ entre $-\pi$ e π , então converge fora deste intervalo, a uma função $F(x)$, chamada de extensão periódica de $f(x)$, como é mostrado na figura 3. Deve-se ressaltar que este processo de extensão introduzirá descontinuidades de valor em $x = \pi$ e $x = -\pi$, excluindo os casos em que $f(\pi) = f(-\pi)$. Nestes pontos, a série converge para um valor que é a metade dos dois valores de $F(x)$.

As condições de Dirichlet são suficientes, mas não são necessárias, isto é, estando elas satisfeitas a convergência é garantida. As condições em questão são em geral satisfeitas nos problemas de engenharia.

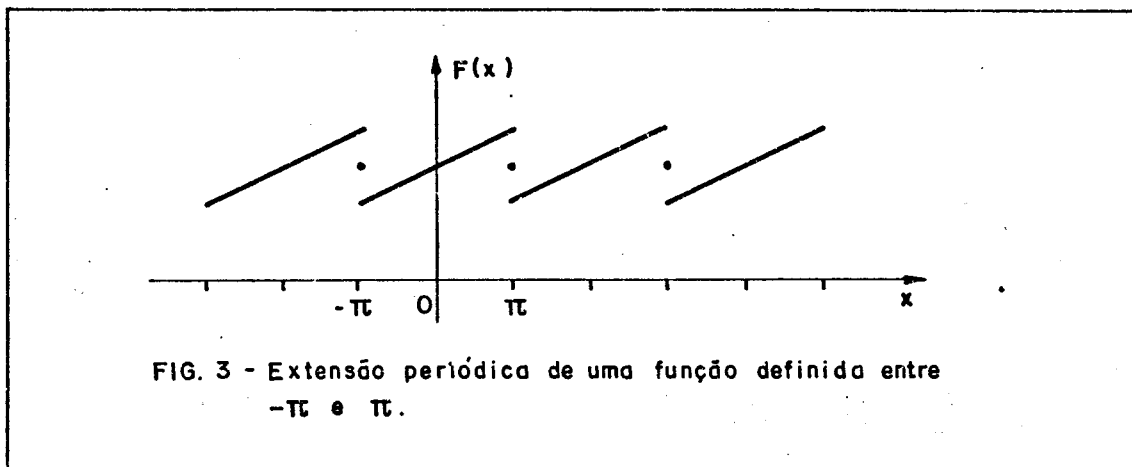


FIG. 3 - Extensão periódica de uma função definida entre $-\pi$ e π .

Geralização das Séries de Fourier

Até agora tem-se considerado as Séries de Fourier somente para funções com período 2π ou, em forma mais restringida, para funções definidas entre $-\pi$ e π . Passaremos agora a ampliar o campo de aplicação da teoria.

Se $f(x)$ é uma função de período 2π , pode-se usar como intervalo básico qualquer intervalo $c < x < c+2\pi$; quer dizer, qualquer intervalo de comprimento 2π . Para um intervalo assim, procedimento análogo ao anterior conduz a uma Série de Fourier,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{senn}x) ,$$

onde,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f(x) \cos nx \, dx ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f(x) \operatorname{senn}x \, dx .$$

Mudança de Período

Se $f(x)$ têm um período T : $f(x+T) = f(x)$, $T \neq 0$, então a substituição ,

$x = \frac{T}{2\pi} t$, transforma $f(x)$ numa função $g(t)$ com:

$g(t) = f\left(\frac{T}{2\pi} t\right)$, e $g(t)$ têm período 2π , já que:

$$g(t+2\pi) = f\left[\frac{T}{2\pi}(t+2\pi)\right] = f\left(\frac{Tt}{2\pi} + T\right) = f\left(\frac{Tt}{2\pi}\right) = g(t).$$

A mudança de x a t é simplesmente uma mudança de escala.

Como $g(t)$ têm um período 2π , tem-se uma Série de Fourier para $g(t)$,

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen}nt)$$

Substituindo agora t por $\left(\frac{2\pi}{T}\right)x$, encontra-se a Série de Fourier para $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(n \frac{2\pi}{T}x\right) \right] \quad (5)$$

Os coeficientes a_n e b_n , podem ser expressos diretamente em função de $f(x)$ através da substituição da variável t por x na integração,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{T}x\right) \frac{2\pi}{T} \, dx ,$$

onde já se considera $x = \frac{T}{2\pi} t$.

Portanto obtem-se:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \, dx . \quad (6)$$

Analogamente:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \, dx \quad (7)$$

Forma complexa das Sêries de Fourier

Das identidades de Euler ,

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x ,$$

sendo $i = \sqrt{-1}$, derivam-se as seguintes relações:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} .$$

Uma S\u00e9rie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{senn}x)$$

pode, portanto ser representada da seguinte forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{inx} + D_n e^{-inx}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}, \quad (8)$$

onde ,

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad D_n = C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2},$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

A somat\u00f3ria de $-\infty$ a ∞ entende-se como a adi\u00e7\u00e3o de duas s\u00e9ries:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{ink} = \sum_{n=\infty}^{\infty} C_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-inx}$$

A forma da Equa\u00e7\u00e3o (8) t\u00eam v\u00e1rias vantagens. Os coeficientes C_n podem ser definidas diretamente em fun\u00e7\u00e3o de $f(x)$:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

A integral pode ser escrita, utilizando as identidades de Euler, como:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \operatorname{sen}x) dx$$

Quando $n = 0$, a integral fornece $1/2a_0$; quando $n > 0$, a integral é igual a $1/2(a_n - ib_n)$ e quando $n < 0$ é igual a $1/2(a_{-n} + ib_{-n})$.

Tem-se então resumidamente a relação:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}, \quad C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

sempre que a Série converge a $f(x)$.

Da mesma forma se $f(x)$ têm um período T , o seu desenvolvimento em termos de Série de Fourier na forma complexa é:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i(2n\pi t)/T},$$

onde

$$C_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i(2n\pi t)/T} dx.$$

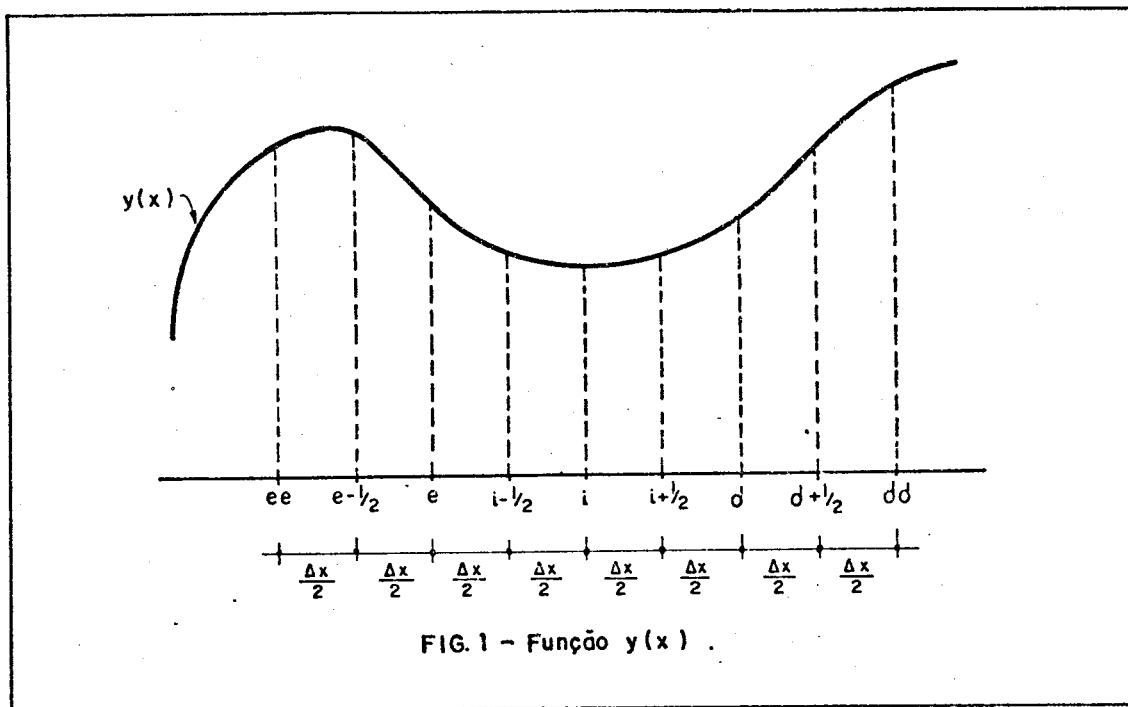
(9)

APÊNDICE B

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

DIFERENÇAS CENTRAIS

Seja a função $y(x)$ conhecida em pontos de subdivisão i igualmente espaçados, assim como nos pontos médios dos intervalos definidos pelos pontos i .



A diferença central primeira de $y(x)$ no ponto i é definida por:

$$\delta y_i \equiv y\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}\right) - y\left(x_i - \frac{\Delta x}{2}\right) = y_{i+1/2} - y_{i-1/2}$$

A diferença central segunda no ponto i é a diferença da diferença primeira:

$$\delta^2 y_i = \delta(\delta y_i) = \left[y_{(i+1/2)+1/2} - y_{(i-1/2)+1/2} \right] - \left[y_{(i+1/2)-1/2} - y_{(i-1/2)-1/2} \right]$$

$$\delta^2 y_i = \delta(\delta y_i) = y_d - 2y_i + y_e \tag{I}$$

A diferença central de ordem n é definida por ,

$$\delta^n y_i = \delta(\delta^{n-1} y_i) ,$$

que conduz a :

$$\delta^3 y_i = y_{d+1/2} - 3y_{i+1/2} + 3y_{i-1/2} - y_{e-1/2}$$

$$\delta^4 y_i = y_{dd} - 7y_d + 6y_i + 7y_e + y_{ee} .$$

Os coeficientes dos y na diferença central de ordem n são iguais aos coeficientes do desenvolvimento do binômio $(a-b)^n$.

A fim de eliminar os valores de y nos pontos intermediários , $e-1/2$, $i\pm 1/2$, $d+1/2$, , que aparecem nas expressões para diferenças centrais de ordem ímpar, novas diferenças intermediárias de ordem ímpar são definidas como a média das diferenças centrais, também de ordem ímpar, nos pontos $(i+1/2)$ e $(i-1/2)$.

Assim a diferença primeira intermediária no ponto i é dada por ,

$$1/2(\delta y_{i+1/2} + \delta y_{i-1/2}) = 1/2[(y_d - y_i) + (y_i - y_e)] = 1/2(y_d - y_e) \tag{II}$$

Este processo das médias equivale geometricamente a tomar como inclinação da tangente no ponto i a inclinação da corda $P_d P_e$, em lugar da inclinação das cordas $P_i P_e$ ou $P_d P_i$.

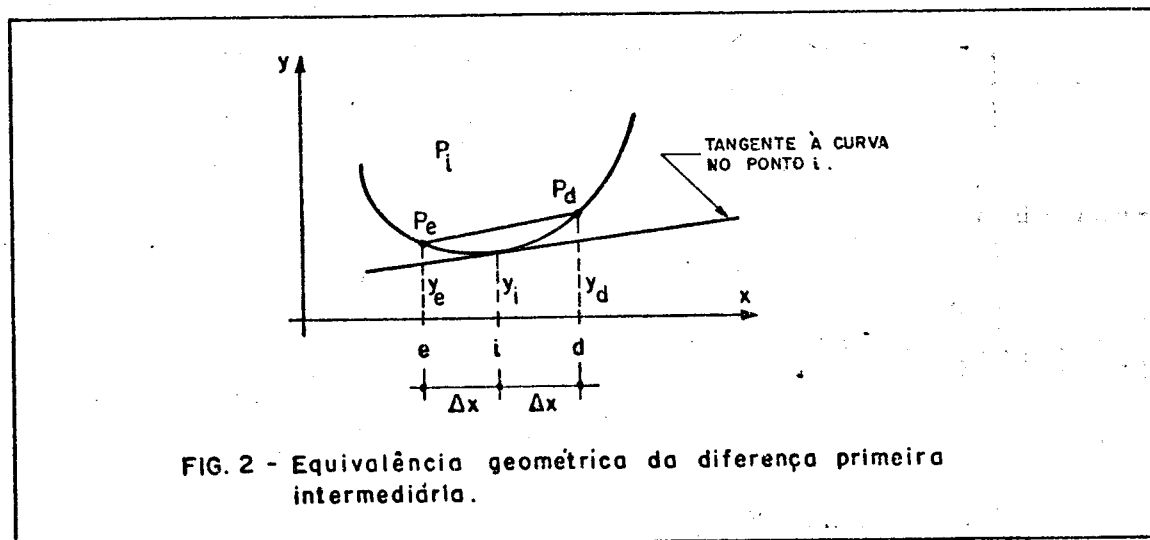


FIG. 2 - Equivalência geométrica da diferença primeira intermediária.

A operação usada para se obter a Equação (II) é usualmente simbolizada por um operador μ , denominado mediador e definido por,

$$\mu y_i = 1/2(y_{i+1/2} + y_{i-1/2}).$$

Por meio do mediador a diferença média é escrita como:

$$\mu \delta y_i = 1/2 [\delta y_{i+1/2} + \delta y_{i-1/2}] = 1/2(y_d - y_e) \quad (\text{III})$$

Os operadores μ e δ são conectados por uma relação simples. De fato, o quadrado do operador μ ,

$$\begin{aligned} \mu^2 y_i &= \mu \left[1/2(y_{i+1/2} + y_{i-1/2}) \right] = 1/2 \left[1/2(y_d + y_i) + 1/2(y_i + y_e) \right] = \\ &= 1/4(y_d + 2y_i + y_e), \end{aligned}$$

operando com $(1 + \delta^2/4)$ sobre y_i , vemos pela Equação (I), que,

$$(1 + \delta^2/4)y_i = y_i + 1/4[y_d - 2y_i + y_e] = 1/4(y_d + 2y_i + y_e) = \mu^2 y_i.$$

Logo, podemos escrever em forma simbólica:

$$\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4} \quad (\text{IV})$$

As Equações (I), (II), (III) e (IV) permitem o desenvolvimento das derivadas de y em termos de suas diferenças centrais e o desenvolvimento inverso das diferenças em termos das derivadas, pelos métodos simbólicos.

Considere-se com este propósito, o desenvolvimento de Taylor de $y(x + \Delta x)$, no entorno de x :

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \frac{\Delta x}{1!} y'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} y''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} y'''(x) + \dots,$$

que utilizando-se o operador simbólico D para indicar as derivadas de y, se transforma em,

$$y(x+\Delta x) = y(x) + \frac{\Delta x}{1!} Dy(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} D^2 y(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} D^3 y(x) + \dots$$

ou seja:

$$y(x+\Delta x) = \left[1 + \frac{\Delta x}{1!} D + \frac{\Delta x^2}{2!} D^2 + \frac{\Delta x^3}{3!} D^3 + \dots \right] y(x).$$

Por meio do desenvolvimento em série de e^x , $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, o operador diferencial do segundo membro da Equação anterior pode ser escrito simbolicamente como,

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{1!} D + \frac{(\Delta x)^2}{2!} D^2 + \frac{(\Delta x)^3}{3!} D^3 + \dots \right) = e^{(\Delta x)D},$$

e portanto $y(x+\Delta x)$ pode também simbolicamente ser escrito como, $y(x+\Delta x) = e^{(\Delta x)D} y(x)$,

$$y(x_i+\Delta x) = y_d \rightarrow y_d = e^{(\Delta x)D} y_i \quad (V)$$

$$y(x_i) = y_e \rightarrow y_e = e^{-(\Delta x)D} y_i \quad (VI)$$

Por meio das Equações (V) e (VI), a Equação (III) torna-se,

$$\begin{aligned} \mu \delta y_i &= 1/2(y_d - y_e) = 1/2 e^{(\Delta x)D} y_i - 1/2 e^{-(\Delta x)D} y_i = \\ &= \frac{e^{(\Delta x)D} - e^{-(\Delta x)D}}{2} y_i = \sinh(\Delta x D) y_i, \end{aligned}$$

ou inteiramente em forma simbólica:

$$\mu \delta = \sinh(\Delta x D) \quad (VII)$$

Lembrando o desenvolvimento em série de Taylor do seno hiperbólico,

$$\operatorname{senhx} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots ,$$

o desenvolvimento da primeira diferença central intermediária, em termos das derivadas torna-se:

$$\mu\delta = \left[\Delta x D + \frac{(\Delta x)^3 D^3}{6} + \frac{(\Delta x)^5 D^5}{120} + \dots \right] \quad (\text{VIII})$$

Analogamente a Equação (I), a diferença central segunda torna-se:

$$\begin{aligned} \delta^2 y_i &= e^{(\Delta x)D} y_i - 2y_i + e^{-(\Delta x)D} = 2 \left[\frac{e^{(\Delta x)D} - e^{-(\Delta x)D}}{2} - 1 \right] y_i = \\ &= 2(\cosh(\Delta x D) - 1) y_i, \end{aligned}$$

e lembrando-se do desenvolvimento em série de Taylor para o cosseno hiperbólico,

$$\operatorname{coshx} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots ,$$

a diferença central segunda pode ser escrita em forma simbólica como,

$$\delta^2 = \left[(\Delta x)^2 D^2 + \frac{(\Delta x)^4 D^4}{12} + \frac{(\Delta x)^6 D^6}{360} + \dots \right] \quad (\text{IX})$$

O produto das Equações (VIII) e (IX) dá o desenvolvimento da diferença terceira intermediária,

$$\mu\delta^3 = (\Delta x)^3 D^3 + \frac{(\Delta x)^5 D^5}{4} + \frac{(\Delta x)^7 D^7}{40} + \dots$$

e o quadrado da equação (IX), o desenvolvimento da diferença central quarta,

$$\delta^4 = \left[(\Delta x)^4 D^4 + \frac{(\Delta x)^6 D^6}{6} + \frac{(\Delta x)^8 D^8}{80} + \dots \right] \quad (\text{X})$$

Inversamente, para obter o desenvolvimento da derivada primeira em termos de diferenças centrais, resolve-se a Equação VII em $(\Delta x)_D$,

$$(\Delta x)_D = \arg \sinh(\mu\delta).$$

Lembrando-se do desenvolvimento de Taylor para o argumento seno hiperbólico,

$$\arg \sinh x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \dots,$$

obtem-se:

$$(\Delta x)_D = \mu\delta - \frac{\mu^3\delta^3}{6} + \frac{3\mu^5\delta^5}{40} - \dots,$$

e usando a equação (IV) para eliminar as potências pares de μ , o desenvolvimento para $(\Delta x)_D$ finalmente torna-se,

$$(\Delta x)_D = \mu \left[\delta - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - \dots \right].$$

Tomando as potências de $(\Delta x)_D$ e usando de novo a Equação (IV) para eliminar as potências pares de μ , obtemos analogamente:

$$(\Delta x)_{D^2}^2 = \delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \dots$$

$$(\Delta x)_{D^3}^3 = \mu \left[\delta^3 - \frac{\delta^5}{4} + \frac{7\delta^7}{120} - \dots \right]$$

$$(\Delta x)_{D^4}^4 = \delta^4 - \frac{\delta^6}{6} + \frac{7\delta^8}{240} - \dots$$

Usando o primeiro termo destes desenvolvimentos, as derivadas de y podem ser aproximadas pelos seguintes desenvolvimentos em diferenças centrais, cujos erros são dados em termos de diferenças:

$$\begin{aligned}
 2(\Delta x)Dy_i &= (y_d - y_e) + 2\Delta x \epsilon_1 ; \quad \rightarrow \\
 \rightarrow \epsilon_1 &= \frac{\mu}{\Delta x} \left(-\frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{30} - \dots \right) y_i \\
 (\Delta x)^2 D^2 y_i &= (y_d - 2y_i + y_e) + (\Delta x)^2 \epsilon_2 ; \quad \rightarrow \\
 \rightarrow \epsilon_2 &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left(-\frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \dots \right) y_i \\
 2(\Delta x)^3 D^3 y_i &= (y_{dd} - 2y_d + 2y_e - y_{ee}) + 2(\Delta x)^3 \epsilon_3 ; \quad \rightarrow \\
 \rightarrow \epsilon_3 &= \frac{\mu}{(\Delta x)^3} \left(-\frac{\delta^5}{4} + \frac{7\delta^7}{120} - \dots \right) y_i \\
 (\Delta x)^4 D^4 y_i &= (y_{ddd} - 4y_{dd} + 6y_i - 4y_e + y_{eee}) + (\Delta x)^4 \epsilon_y ; \\
 \epsilon_y &= \frac{1}{(\Delta x)^4} \left(-\frac{\delta^5}{6} + \frac{7\delta^8}{240} - \dots \right) y_i
 \end{aligned}$$

Uma comparação destas Equações com os desenvolvimentos já analisados (Equação (VIII) em diante, até Equação (X) prova que o erro nas derivadas correspondentes é da ordem de $(\Delta x)^2$. Pode ser provado analogamente que, tomando-se em consideração os dois primeiros termos dos desenvolvimentos (XI), o erro nas derivadas correspondentes é da ordem $(\Delta x)^4$, e que considerando m termos, os erros são da ordem de $(\Delta x)^{2m}$.

As "moléculas" da figura 3 dão as expressões mais usuais das derivadas em função das diferenças centrais, com erros da ordem de $(\Delta x)^2$ e $(\Delta x)^4$ nas derivadas.

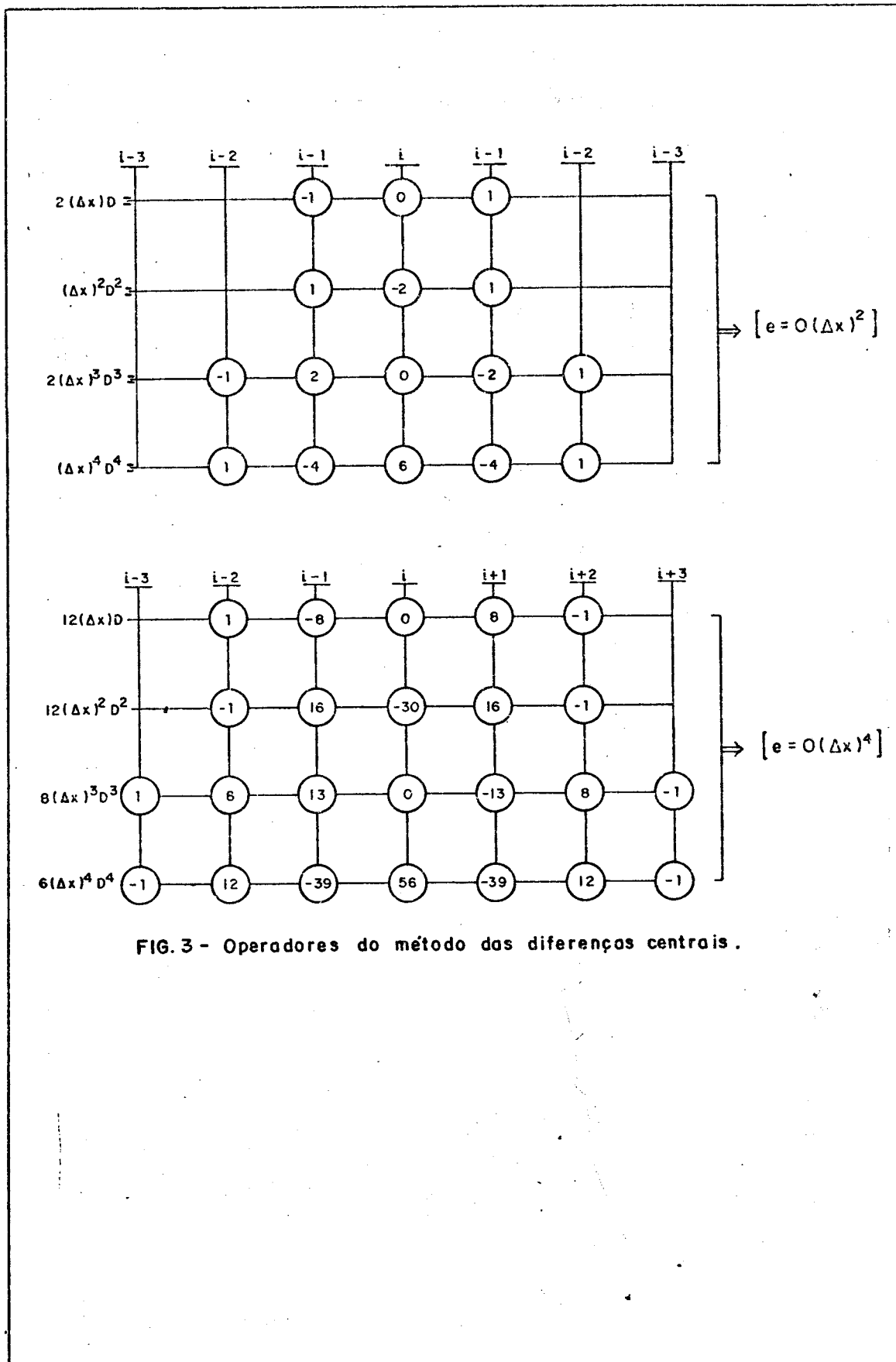


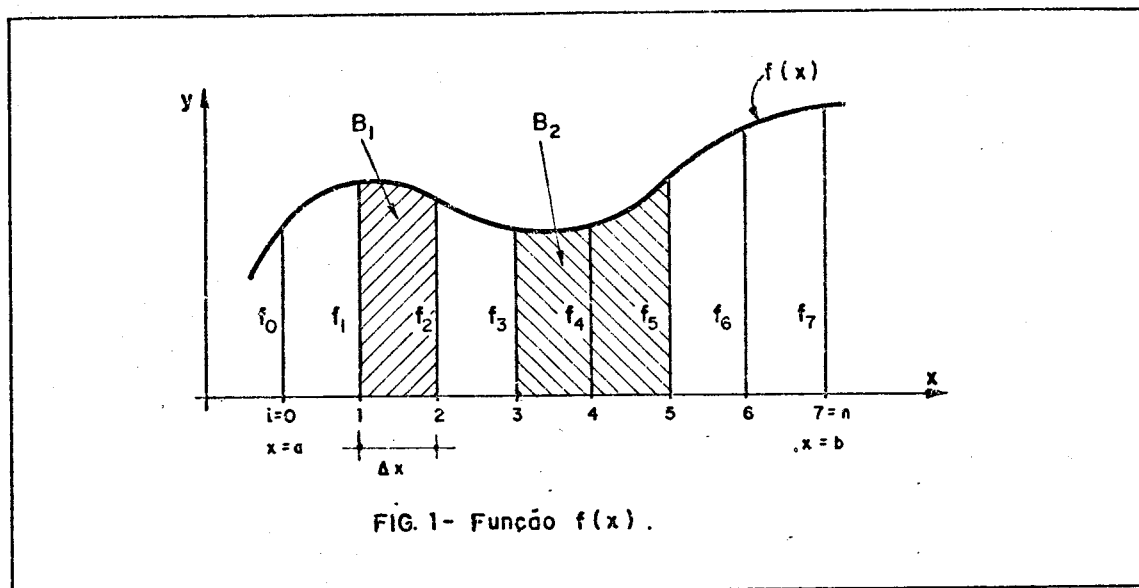
FIG. 3 - Operadores do método das diferenças centrais.

APÊNDICE C

REGRA DO TRAPÉZIO

Seja a integral:

$$A = \int_a^b f(x) dx,$$



em que a função $f(x)$ é conhecida em pontos de subdivisão do intervalo (a, b) igualmente espaçados $\Delta x = (b-a)/n$ (Figura 1).

A integral

$$B_1 = \int_x^{x+\Delta x} f(z) dz$$

representa a área de uma faixa de largura Δx , limitada pelas ordenadas da função nos pontos de subdivisão x e $x+\Delta x$. Chamando de $y(x)$ a integral com o limite superior variável

$$y(x) = \int_a^x f(z) dz,$$

a integral B_1 é dada em termos de y por:

$$B_1 = y(x+\Delta x) - y(x) \quad (I)$$

e as derivadas de y em relação a x são dadas em termos de f(x) e suas derivadas por:

$$y' = f'(x) ; y'' = f''(x) ; \dots ; y^{(n)} = f^{(n-1)'}(x) ; \dots$$

Logo, a série de Taylor para y no ponto x+Δx (entorno de x) torna-se:

$$y(x+\Delta x) = y(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

Substituindo neste desenvolvimento Δxf'(x) pelo seu valor aproximado em termos de diferenças ascendentes, Δxf'(x) = f(x+Δx) - f(x), obtemos:

$$y(x+\Delta x) = y(x) + \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x}{2} (f(x+\Delta x) - f(x)) + \frac{(\Delta x)^3}{6} f'''(x) - \frac{\Delta x^3}{4} f'''(x) + \dots$$

onde $\frac{\Delta x^3}{4} f'''(x)$ corresponde ao primeiro termo do erro do desenvolvimento para a derivada primeira em termos das diferenças ascendentes.

Portanto a integral B₁ (Equação (I)) pode ser escrita como,

$$B_1 = y(x+\Delta x) - y(x) = \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x}{2} (f(x+\Delta x) - f(x)) + \frac{\Delta x^3}{6} f'''(x) - \frac{\Delta x^3}{4} f'''(x) + \dots$$

desta forma

$$B_1 = \frac{\Delta x}{2} \left[f(x) + f(x+\Delta x) \right] - \frac{\Delta x^3}{12} f'''(x) + \dots \quad (II)$$

A integral A é a soma de n integrais B₁ correspondentes a cada faixa; é portanto igual a:

$$A = \int_a^b f(x) dx = \Delta x \left[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n \right] + e_t \quad (III)$$

onde $f_i = f(i\Delta x)$, e o erro e_t é:

$$e_t = - \frac{(\Delta x)^3}{12} (f''_0 + f''_1 + \dots + f''_{n-1}) + \dots$$

Se na Equação (II), desprezamos todos os termos após o terceiro, o erro e_t toma a forma:

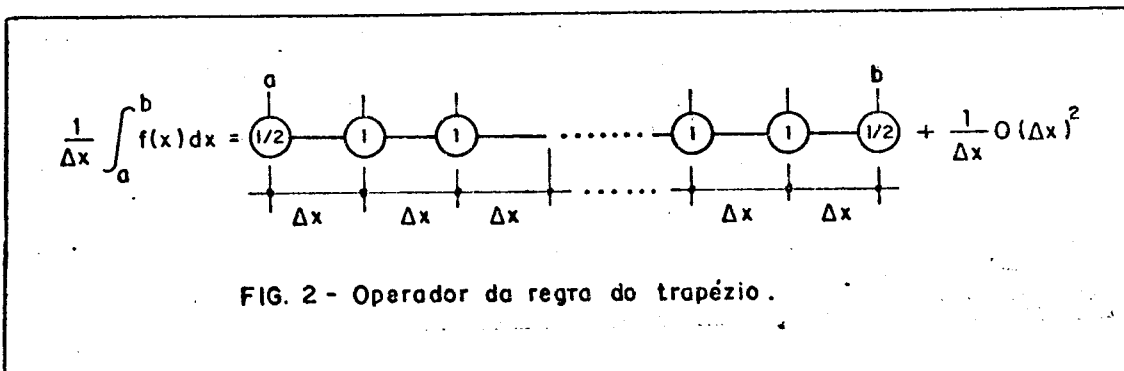
$$e_t \approx - \frac{(\Delta x)^3}{12} (f''_0 + f''_1 + \dots + f''_{n-1}) = - \frac{(\Delta x)^3}{12} n f''(\bar{x}_n)$$

onde, pelo teorema da média, \bar{x}_n é um valor de x entre a e b . Logo, com $n(\Delta x) = b-a$, o erro na regra do trapézio torna-se igual a:

$$e_t \approx - \frac{b-a}{12} f''(\bar{x}_n) \cdot (\Delta x)^2$$

Se $f''(\bar{x}_n)$ não varia substancialmente com n , como é o caso das funções de curvatura limitada, o erro torna-se praticamente da ordem de $(\Delta x)^2$.

A regra do trapézio, que naturalmente faz a aproximação à curva a ser integrada por segmentos de retas, é convenientemente representada pela molécula da figura 2.



APÊNDICE D

PROGRAMAS FORTRAN PARA COMPUTAÇÃO

Para os métodos numéricos de integração no tempo estudados, os programas apresentados neste Apêndice, são dados conforme os diagramas de fluxo, cuja dedução foi exposta anteriormente no capítulo III. Maiores detalhes são omitidos, porquanto os programas são implementação de algoritmos bem conhecidos. Os comentários inseridos nos programas contêm informações suficientes acerca da sequência de operações.

O algoritmo da Transformada rápida de Fourier (FFT) incorpora todas as simplificações discutidas no capítulo IV. Conseqüentemente o programa para computação possui tais características. A subrotina para cálculo da transformada é chamada pelo comando:

```
CALL FFT (F,M,L,K,IT,TW)
```

onde F é o vetor de dimensão real N a ser transformado, ou seja, substituído pela transformada do mesmo depois do comando RETURN. Na tabela 1 encontram-se indicados os elementos componentes do vetor F em cada etapa do programa.

Para a transformada direta tem-se que:

$$IT = 0$$

$$TW = 1.0$$

$$K = 0 ,$$

na transformada inversa os argumentos da subrotina assumem os seguintes valores:

$$IT = 1$$

$$TW = 1/N$$

e K é tal que para $J = 2^k$, a transformada inversa é determinada em tempos correspondentes a $0, J\Delta t, 2J\Delta t, \dots$

O argumento K pode ser utilizado como recurso para se obter melhores condições de desempenho no tocante ao

tempo de processamento, em problemas que intervalos alternados de tempo (0,2 t, 4 t, etc.) são suficientes para definir a resposta do sistema. Tal como ilustrado na figura 1, onde apresenta-se o histórico do deslocamento de um oscilador simples amortecido excitado por uma solicitação sísmica cujas acelerações da base do sistema são prescritas no tempo de duração do abalo.

A frequência natural do sistema ($\omega_n = 6.28$ rad/seg) e o coeficiente de amortecimento ($\gamma = 0.05$) do oscilador correspondem, aproximadamente, ao caso de um edifício de 10 andares; tomando-se no estudo apenas o período fundamental de vibração. Note-se que são necessários muitos mais pontos para definir o movimento do terremoto, dos requeridos para explicitar a resposta.

POSIÇÃO EM F	CORRESPONDE NO TEMPO	POSIÇÃO EM F	CORRESPONDE EM FREQUÊNCIA	POSIÇÃO EM F	CORRESPONDENTE NO TEMPO
1	0	1	0	1	0
2	Δt	2	$(N/2)\Delta\omega = \omega_{\max}$	2	$J\Delta t$
3	$2\Delta t$	3	$\Delta\omega$	3	$2J\Delta t$
4	$3\Delta t$	4		4	$3J\Delta t$
⋮	⋮	5	$2\Delta\omega$	⋮	⋮
		6			
		⋮	⋮	⋮	$(N/J)+1$
N	$(N-1)\Delta t$	N-1	$(N/2-1)\Delta\omega$	⋮	CÁLCULO
		N			
ENTRADA PARA O CÁLCULO DA TRANSFORMADA DIRETA		ENTRADA PARA O CÁLCULO DA TRANSFORMADA INVERSA OU RESULTADOS DA TRANSFORMADA DIRETA		RESULTADOS DA TRANSFORMADA INVERSA	

Tabela 1 - Elementos do vetor $F = R$ na subrotina FFT

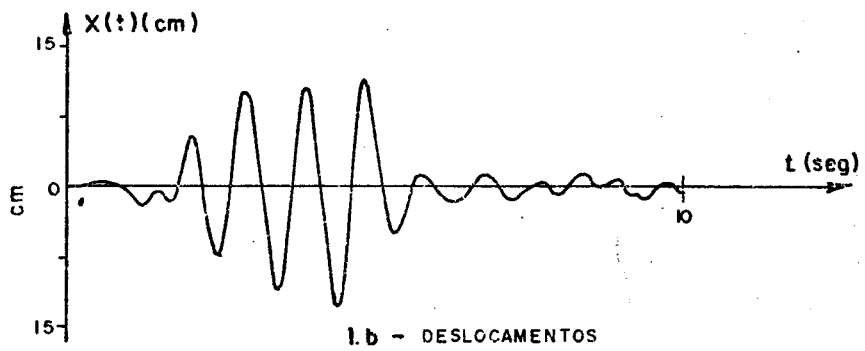
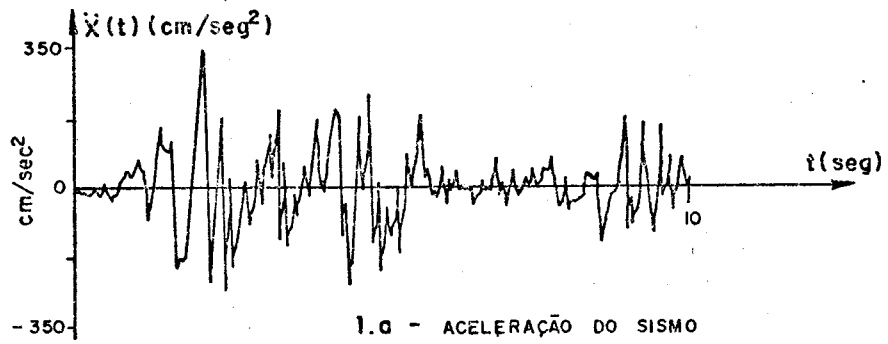


FIG. 1 - Resposta de um oscilador simples amortecido.

Programas para computação dos métodos numéricos:

- . Diferenças finitas
- . Newmark
- . Wilson
- . Integração numérica da convolução
- . Transformada rápida de Fourier,

em linguagem FORTRAN para o computador IBM 4341 do Centro de Processamento de Dados da Escola de Engenharia de São Carlos.

```

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION P(10000)
OPEN(UNIT=01,STATUS='OLD',FILE='DATOS',ACCESS='SEQUENTIAL',FORM='F',
*FORMATTED*)

```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

```

**
**
** *METODO DAS DIFERENCAS FINITAS*
**
**
**
** * VARIAVEIS EMPREGADAS *
**
**
** GA= COEFICIENTE DE AMORTECIMENTO
** AL= TP/TN , TP= TEMPO DE APLICACAO DA CARGA
** TN= PERIODO NATURAL
** BT= TI/TP , TI= TEMPO TOTAL DE INTEGRACAO
** N= TOTAL DE INTERVALOS DISCRETOS CONSIDERADOS
** P(I)= VETOR DISCRETO DE SOLICITACAO DINAMICA NO
** INICIO DO PROCESSAMENTO E VETOR DE RESPOSTA NO
** FIM DA COMPUTACAO.
**
**
**

```

```

READ(1,1) GA,AL,BT,N
1 FORMAT(3F5.2,I4)
R1=(6.2831853*AL*BT)/N

```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

```

**
**
** DISCRETIZACAO DO VETOR SOLICITACAO
**
**
**

```

```

K1=(N/BT)+1
DO 2 I=1,K1
2 P(I)=1

```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

```

**
**
** DETERMINANDO-SE O VETOR DESLOCAMENTO ADIM.
**
**
**

```

```

R2=R1*R1
R3=(GA*R1)-1
R4=2-R2
R5=2+R3

```

C

C
C
C
C
C
C
C
C
C

```

AUX1=P(1)/2
AUX2=P(2)
P(1)=0
P(2)=R2*AUX1
DO 3 J=3,N+1
AUX3=P(J)
P(J)=((AUX2*R2)+(R3*P(J-2))+(R4*P(J-1)))/R5
3 AUX2=AUX3

```

```

*****
**                                     **
**                               *IMPRESSAO DOS RESULTADOS*                **
**                                     **
*****

```

```

WRITE(3,10)
10 FORMAT(10X,'DESLOCAMENTOS ADIMENSIONAIS OBTIDOS COM A APLICACAO',/
*,20X,'DO METODO DAS DIFERENCAS FINITAS',///)
DO 4 I=1,K1,4
4 WRITE(3,5) P(I),P(I+1),P(I+2),P(I+3)
5 FORMAT(4(4X,E13.6),//)
STOP
END

```

PAPÉIS/ TELEINFORMÁTICA




```

IMPLICIT REAL*(A-H,O-Z)
DIMENSION P(10000)
OPEN(UNIT=01,STATUS='OLD',FILE='DATOS',ACCESS='SEQUENTIAL',FORM='F
*FORMATTED')

```

```

*****
**
**                       *METODO DE NEWMARK (METODO BETA)*
**
*****

```

```

*****
**
**   NESTE METODO UTILIZA-SE BETA=0.25, ACELERACAO CONST.
**   NO INTERVALO DE TEMPO, UMA VEZ QUE A INTEGRACAO TOR-
**   NA-SE INCONDICIONALMENTE ESTAVEL PARA ESTE VALOR.
**
*****

```

```

*****
**
**                       *VARIABLES EMPREGADAS*
**
*****

```

```

**   GA,AL,BT,N,P(I)
**
*****

```

```

READ(1,1) GA,AL,BT,N
1  FORMAT(3F5.2,I4)
R1=(6.2831853*AL*BT)/N

```

```

*****
**
**                       *ARMAZENANDO O VETOR SOLICITACAO*
**
*****

```

```

K1=N/BT+1
DO 2 I=1,K1
2 P(I)=1.0

```

```

*****
**
**                       *CALCULANDO-SE OS DESLOCAMENTOS*
**
*****

```

```

R2=R1*R1
R3=0.25*R2
R4=0.5*R2
R5=2.0-R4

```



R6=CA*R1
R7=1-R6+R3
R8=1+R6+R3

C
C

AUX1=P(1)
AUX2=P(2)
P(1)=0.0
P(2)=R3*(AUX1+AUX2)/R8
DO 3 J=3,N+1
AUX3=P(J)
P(J)=((R3*(AUX3+AUX1))+(R4*AUX2)+(R5*P(J-1))-(R7*P(J-2)))/R8
AUX1=AUX2
3 AUX2=AUX3

C
C
C
C
C
C
C
C
C

```
*****  
**                                     **  
**                               *IMPRESSAO DOS RESULTADOS*                **  
**                                     **  
*****
```

WRITE(3,10)
10 FORMAT(13X,'DESLOCAMENTOS RESULTANTES DO METODO DE NEWMARK'///)
DO 4 I=1,K1,4
4 WRITE(3,5) P(I),P(I+1),P(I+2),P(I+3)
5 FORMAT(4(4X,E13.6)///)
STOP
END



```

IMPLICIT REAL*8(A-F,C-Z)
DIMENSION P(10000),VEL(10000),ACEL(10000)
OPEN(UNIT=01,STATUS='OLD',FILE='DATOS',ACCESS='SEQUENTIAL',FORM='F
*FORMATTED')

```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

```

*****
**
**           METODO DE WILSON (METODO TETA)
**
*****
**
**           VARIAVEIS EMPREGADAS
**
**   AL,BT,GA,N,P(I)
**   ACEL(I)= VETOR ACCELERACAO DISCRETO
**   VEL(I)= VETOR VELOCIDADE
**
*****

```

```

READ(1,1) GA,AL,BT,N,TETA,TP
1 FORMAT(3F5.2,I4,F5.2,F7.2)
R1=(6.2831853*AL*BT)/N

```

C
C
C
C
C
C
C
C

```

*****
**
**           *DISCRETIZACAO DA SOLICITACAO*
**
*****

```

```

K1=N/BT+1
DO 2 I=1,K1
2 P(I)=1.0

```

C
C
C
C
C
C
C
C

```

*****
**
**           *CALCULO DE DESLOCAMENTOS*
**
*****

```

```

R2=TP*BT/N
R3=6.2831853*AL/TP
R4=R1*R1
R5=TETA*TETA
R6=(TETA/R4)+(GA*R5/R1)+(R5*TETA/6)
R7=GA/(R1*R6)
R8=(R5/(3*R6))+(1/TETA)+(R7*TETA)
R9=(TETA/R6)+(2*R7)
R10=R2+R2
R11=R3+R3

```

PAPÉIS/TELEINFORMÁTICA



```

R12=(0.5-(R3/6))*R10
R13=8*R6
R14=1-R8
R15=(1-(R8/2))*R2
R16=R9/R2
R17=R6*R10
R18=1-(R9/2)
R19=2*R6*R2
R20=(1-R9/6)*R2
R21=1-(1/R13)

```

C
C

```

AUX1=P(1)
AUX2=P(2)
P(1)=0.00
P(2)=(R12*R11*AUX1)+(AUX2/R13)
ACEL(2)=(R14*R11*AUX1)+(AUX2/R17)
VEL(2)=(R15*R11*AUX1)+(AUX2/R19)

```

C
C

```

DO 3 J=3,N+1
AUX2=P(J)

```

C

```

ACEL(J)=(ACEL(J-1)*R14)-(VEL(J-1)*R16)-(P(J-1)/R17)+(AUX2/R17)

```

C

```

VEL(J)=(ACEL(J-1)*R15)+(VEL(J-1)*R18)-(P(J-1)/R19)+(AUX2/R19)

```

C

```

P(J)=(ACEL(J-1)*R12)+(VEL(J-1)*R20)+(P(J-1)*R21)+(AUX2/R13)

```

3 CONTINUE

C

C

C

C

C

C

C

C

```

*****
**
**          *IMPRESSAO DOS RESULTADGS*
**
*****

```

```

WRITE(3,10)
10 FORMAT(7X,'DESLOCAMENTOS ADIMENSIONAIS RESULTANTES DO METODO DE
*WILSON',///)
DO 4 I=1,K1,4
4 WRITE(3,5) P(I),P(I+1),P(I+2),P(I+3)
5 FORMAT(4(4X,E13.6)//)
STOP
END

```



```

IMPLICIT REAL*8(A-F,D-Z)
DIMENSION P(10000),FD(10000),F1(10000)
OPEN(UNIT=01,STATUS='OLD',FILE='DATOS',ACCESS='SEQUENTIAL',FORM='F
*FORMATTED')

```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

```

**
**
**          *INTEGRACAO NUMERICA DA CONVELUCAO*
**
**
**          *VARIAVEIS EMPREGADAS*
**
**          GA,AL,BT,N,P(I)
**          FD(I)= VETOR AUXILIAR CONTENDO EXP(I)
**          F1(I)= VETOR AUXILIAR CONTENDO SIN(I)
**
**
**

```

```

READ(1,1)GA,AL,BT,N
1 FORMAT(3F5.2,I4)
R1=(6.2831853*AL*BT)/N

```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

```

**
**
**          *ARMAZENANDO O VETOR SOLICITACAO*
**
**

```

```

K1=N/BT+1
DO 2 I=1,K1
2 P(I)=1.0

```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

```

**
**
**          CALCULO DOS DESLOCAMENTOS
**
**

```

```

R2=-(GA*R1)
R3=1-(GA*GA)
R4=SQRT(R3)
R5=R1*R4
R6=R1/R4

```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

```

DO 3 J=1,N
AUX1=R2*J
AUX2=R5*J

```



```

AUXI3=EXP(AUX1)
AUXI4=SIN(AUX2)
3 F0(J)=AUXI3#AUXI4

```

C
C
C
C

```

DO 5 I=3,N+1
L=I-1
DO 5 J=2,L
M=I-J
5 F1(I)=F1(I)+(F0(M)*P(J))

```

C
C

```

AUX1=P(1)/2
DO 6 I=2,N+1
6 P(I)=((F0(I-1)*AUX1)+F1(I))*R6
P(1)=0.0

```

C
C
C
C
C
C
C
C

```

*****
**
**          *IMPRESSAO DOS RESULTADOS*
**
*****

```

```

WRITE(3,10)
10 FORMAT(8X,'DESLOCAMENTOS OBTIDOS PELA INTEGRACAO NUMERICA DE DUHAM
*EL',///)
DO 7 I=1,K1,4
7 WRITE(3,8) P(I),P(I+1),P(I+2),P(I+3)
8 FORMAT(4(4X,E13.6)///)
STOP
END

```

PAPÉIS P/ TELEINFORMÁTICA




```

C      ** DE DIMENSÃO N=(2**M)*L, L=2 OU 3, TW=1/N, K=0.
C      ** NESTAS CONDIÇÕES, UNICAMENTE SÃO CALCULADO E ARMAZE-
C      ** NADOS OS TERMOS CORRESPONDENTES AS FREQUÊNCIAS POSI-
C      ** TIVAS
C      ** R(1)= TERMO DE VALOR REAL, CORRESPONDENTE A FREQUEN-
C      ** CIA NULA.
C      ** R(2)= PARTE REAL DO TERMO COMPLEXO CORRESPONDENTE A
C      ** MÁXIMA FREQUÊNCIA.
C      ** R(3),R(5),R(7),.....,R(N-1)=PARTES REAIS DOS TERMOS
C      ** CORRESPONDENTES AS FREQUÊNCIAS INTERMEDIARIAS.
C      ** R(4),R(6),.....,R(N)= PARTES IMAGINARIAS.
C
C      **
C      ** QUANDO IT=1, É CALCULADA A TRANSFORMAÇÃO INVERSA DE
C      ** UM VETOR SIMÉTRICO COMPLEXO COM DIMENSÃO N, TW=1.
C      ** OS VALORES R(1),R(2),.....R(N/J) OBTIDOS SÃO OS
C      ** NK=(2**M-K)*L TERMOS DE VALOR REAL CORRESPONDEN-
C      ** TES AOS TEMPOS 0,J*TW,2*J*TW,.....,(N-J)*TW, ONDE
C      ** J=2**K E M MAIOR QUE K (SE K É MAIOR QUE ZERO OS
C      ** TERMOS R(N/J+1),.....,R(N), SÃO DESPREZADOS).
C
C      **
C      ** OS TERMOS EXPONENCIAIS SÃO DETERMINADOS ITERATIVAMEN-
C      ** TE, CADA JE TERMOS CALCULADOS UTILIZAM A CHAMADA DE
C      ** UNICAMENTE UM SENO E UM COSSENO.
C      ** O VALOR DE JE ADOPTADO É 16. NOTE-SE QUE VALORES MAIO-
C      ** RES REPRESENTARIAM CÁLCULOS DAS POTÊNCIAS DE W EM
C      ** GRUPO INTRODUZINDO ERROS DE APROXIMAÇÃO, QUE PODEM
C      ** SER INACEITÁVEIS. VALORES MENORES DE JE IMPLICAM EM
C      ** PERDA NO TOCANTE AO TEMPO DE PROCESSAMENTO.
C
C      **
C      ****

```

```

JE=16
JI=JE*2
NK=2**M-K)*L
IF(NK.LT.4) STOP
S2=.7071067811865475244
S3=1.7320508075688772935/(2-IT)
PI=3.14159265358979323846
IF(IT.EQ.1) GO TO 2
IF(L.EQ.2) CALL SORT2(R,NK,TW)
IF(L.EQ.3) CALL SORT3(R,M,0,TW)
CALL LPSTOR(L-1,R,0,NK,0,0,S3)
2 IF(M.EQ.1) GO TO 4
M1=M-1
DO 100 I=1,M1
IF(IT.EQ.0) JN1=(2**I)*L
IF(IT.EQ.1) JN1=(2**M-I)*L
I2=JN1-2
INCD=JN1*2
IF(K.GE.1) CALL LPSTOR(3,R,0,I2,INCD,JN1,0)
IF(K.GE.1) GO TO 100
PID=PI/INCD

```

PAPEIS P/ TELEINFORMATICA

```

C=CCS(2*PI*J)
S=SIN(2*PI*J)
CALL LPSTOR(4+IT,R,0,NK,INCD,JNI,0)
IF(JNI.EQ.4) GO TO 19
JF=JNI/2-1
DO 10 J=3,JF,JI
ANG=(J-3)*PI*CC
CC=CCS(ANG)
SS=SIN(ANG)
YF=MINO(J+JI-2,JF)
DO 10 Y=J,YF,2
Z3=-I2-Y
CT=CC
CC=CT*C-SS*S
SS=SS*C+S*CT
IF(IT.EQ.1) GO TO 13
DO 12 Z=Y,NK,INCD
Z2=Z+1
Z3=Z3+INCD
Z4=Z3+1
R1=R(Z+JNI)*CC+R(Z2+JNI)*SS
R2=R(Z2+JNI)*CC-R(Z+JNI)*SS
R3=R(Z3+JNI)*SS+R(Z4+JNI)*CC
R4=R(Z4+JNI)*SS-R(Z3+JNI)*CC
R(Z+JNI)=R(Z2)-R3
R(Z2+JNI)=-R(Z4)+R4
R(Z3+JNI)=R(Z)-R1
R(Z4+JNI)=-R(Z2)+R2
R(Z)=R(Z)+R1
R(Z2)=R(Z2)+R2
R(Z3)=R(Z3)+R3
12 R(Z4)=R(Z4)+R4
GO TO, 10
13 DO 14 Z=Y,NK,INCD
Z2=Z+1
Z3=Z3+INCD
Z4=Z3+1
R1=R(Z)-R(Z3+JNI)
R2=R(Z2)+R(Z4+JNI)
R3=R(Z3)-R(Z+JNI)
R4=R(Z4)+R(Z2+JNI)
R(Z)=R(Z)+R(Z3+JNI)
R(Z2)=R(Z2)-R(Z4+JNI)
R(Z3)=R(Z3)+R(Z+JNI)
R(Z4)=R(Z4)-R(Z2+JNI)
R(Z+JNI)=R1*CC-R2*SS
R(Z2+JNI)=R2*CC+R1*SS
R(Z3+JNI)=R3*SS-R4*CC
14 R(Z4+JNI)=R4*SS+R3*CC
10 CONTINUE
IF(JNI.EQ.6) GO TO 100
19 LS=JNI/2+1
CALL LPSTOR(IT+6,R,LS,NK,INCD,JNI,S2)
100 CONTINUE
4 IF(IT.EQ.0) RETURN

```

PAPÉIS/TELEINFORMÁTICA

```

CALL LPSTOR(L+6,R,0,NK,0,0,S3)
IF(L.EQ.2) CALL SORT2(R,NK,TW)
IF(L.EQ.3) CALL SORT3(R,M-K,1,TW)
RETURN
END

```

C
C
C
C

```

SUBROUTINE LPSTOR(NS,R,LS,LF,INCD,JNI,CC)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION R(5000)
GO TO (1,2,3,4,5,6,7,8,9),NS
1 DO 11 L=1,LF,4
  R1=R(L)+R(L+1)
  R2=R(L+2)+R(L+3)
  R(L+3)=-R(L+2)+R(L+3)
  R(L+2)=R(L)-R(L+1)
  R(L)=R1+R2
11 R(L+1)=R1-R2
  RETURN
2 DO 12 L=1,LF,6
  R1=R(L)+R(L+3)
  R2=R(L)-R(L+3)
  R3=R(L+1)+R(L+2)
  R4=R(L+1)-R(L+2)
  R5=R(L+4)+R(L+5)
  R6=R(L+4)-R(L+5)
  R(L)=R1+R3+R5
  R(L+1)=R2+R4+R6
  R(L+2)=R2-(R4+R6)*.5
  R(L+3)=(-R3+R5)*CC
  R(L+4)=R1-(R3+R5)*.5
12 R(L+5)=(R4-R6)*CC
  RETURN
3 R(1)=R(1)+R(2)
  R(2)=R(JNI+1)+R(JNI+1)
  DO 13 L=1,LF,2
  R(L+2)=R(L+2)+R(INCD-L)
13 R(L+3)=R(L+3)-R(INCD-L+1)
  RETURN
4 DO 14 L=1,LF,INCD
  L1=L+JNI
  R3=R(L1)
  R(L1)=R(L+1)
  R(L1+1)=-R(L1+1)
  R(L+1)=R(L)-R3
14 R(L)=R(L)+R3
  RETURN
5 DO 15 L=1,LF,INCD
  L1=L+JNI
  R3=R(L1)
  R(L1)=R(L)-R(L+1)
  R(L1+1)=-R(L1+1)-R(L1+1)
  R(L)=R(L)+R(L+1)

```

PAPEIS/ TELEINFORMATICA



```

15 R(L+1)=R3+R0
RETURN
6 DO 16 L=LS,LF,INCD
L2=L+1
R1=(R(L+JNI)+R(L2+JNI))*CC
R2=(R(L2+JNI)-R(L+JNI))*CC
R(L+JNI)=R(L)-R1
R(L2+JNI)=-R(L2)+R2
R(L)=R(L)+R1
16 R(L2)=R(L2)+R2
RETURN
7 DO 17 L=LS,LF,INCD
L2=L+1
R1=R(L)-R(L+JNI)
R2=R(L2)+R(L2+JNI)
R(L)=R(L)+R(L+JNI)
R(L2)=R(L2)-R(L2+JNI)
R(L+JNI)=(R1-R2)*CC
17 R(L2+JNI)=(R1+R2)*CC
RETURN
8 DO 18 L=1,LF,4
R1=R(L)+R(L+1)
R2=R(L)-R(L+1)
R3=R(L+2)+R(L+2)
R4=R(L+3)+R(L+3)
R(L)=R1+R3
R(L+1)=R1-R3
R(L+2)=R2-R4
18 R(L+3)=R2+R4
RETURN
9 DO 19 L=1,LF,6
R1=R(L)+R(L+1)
R2=R(L)-R(L+1)
R3=R(L+2)+R(L+4)
R4=R(L+2)-R(L+4)
R5=(R(L+3)+R(L+5))*CC
R6=(R(L+3)-R(L+5))*CC
R(L)=R1+R3+R5
R(L+1)=R1-R3-R6
R(L+4)=R1-R3+R6
R(L+2)=R2+R4-R5
R(L+3)=R2-R4-R4
19 R(L+5)=R2+R4+R5
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SORT2(R,NK,TW)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION R(5000),NVEC(8)
DATA NVEC/4,2,6,1,5,3,7,0/

```

PAPEIS/TELEINFORMÁTICA

C
C
C
C

C
C

C
C
C
C
C
C
C

```

*****
**
** A SUBROTINA SORT2 CORRESPONDE A MATRIZ DE REARRANJO
** JO DOS ELEMENTOS DE P(I), QUANDO L=2.
**
*****

```

```

NF=1
NK2=NK/2
NK8=NK/8
IF(NK.LT.32) NK8=NK-1
DO 10 I=1,NK8
IC=0
NT=NF
DO 12 J=I,NK,NK8
IF(NT.LE.J) GO TO 2
STOR=R(NT)
R(NT)=R(J)
R(J)=STOR
IC=IC+1
12 NT=NF+NVEC(IC)
2 NSUB=NK2
4 IF(NSUB.GE.NF) GO TO 10
NF=NF-NSUB
NSUB=NSUB/2
GO TO 4
10 NF=NF+NSUB
DO 20 I=1,NK
20 R(I)=R(I)*TW
RETURN
END

```

C
C
C
C

```

SUBROUTINE SORT3(R,MK,ISRT,TW)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION R(5000)

```

```

*****
**
** REARRANJO DOS ELEMENTOS DE P(I) NO CASO L=3
**
*****

```

C
C
C
C
C
C
C

```

NK=2**MK*3
NL=(2*NK)/3
NM=NK/3
IF(ISRT.EQ.0) CALL SORT2(R,NL,TW)
J1=NL+1
IF(ISRT.EQ.0) CALL SORT2(R(J1),NM,TW)
DO 10 I=1,MK

```

PAPEIS/TELEINFORMATICA



```
L=1
IF(ISRT.EQ.0) L=MK-I+1
IF(L.EQ.1) GO TO 10
I2=2*(L-1)
I21=I2-1
JS=2*I2+1
JI=(#I2
IF(ISRT.EQ.0) I2=I2*2
I3=JI/2-I2
DO 12 J=JS,NK,JI
KF=J+I21
DO 12 K=J,KF
RST=R(K)
R(K)=R(K+I2)
R(K+I2)=R(K+I3)
12 R(K+I3)=RST
10 CONTINUE
IF(ISRT.EQ.1) CALL SORT2(R,NL,TW)
IF(ISRT.EQ.1) CALL SORT2(R(J1),NM,TW)
RETURN
END
```



BIBLIOGRAFIA

- 1 - BATHE, Klaus-Jürgen. Finite element procedures in engineering analysis. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, c1982. 735 p. (Prentice-Hall Civil Engineering and Engineering Mechanics Series).
- 2 - ——— & WILSON, E.L. Stability and accuracy analysis of direct integration methods. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Chichester, 1: 283-291, 1973.
- 3 - BERGLAND, Glenn D. A fast Fourier transform algorithm for real-valued series. Communications of the ACM, New York, 11(10): 703-710, Oct. 1968.
- 4 - DEMPSEY, K.M. & IRVINE, H.M. Short communications: a note on the numerical evaluation of Dyhamel's integral. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Chichester, 6: 511-515, 1978.
- 5 - HALL, John F. An FFT algorithm for structural dynamics. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Chichester, 10: 797-811, 1982.
- 6 - HILBER, Hans & HUGHES, Thomas J.R. Collocation, dissipation and overshoot for time integraton schemes in structural dynamics; Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Chickester, 6: 99-117, 1978.
- 7 - MEIROVITCH, Leonard. Elementos of vibration analysis. New York, Mc Graw-Hill, c1975. 495 p.
- 8 - NEWMARK, Nathan M. & ROSENBLUETH, Emilio. Fundamentals of earthquake engineering. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, c1971. 640 p. (Civil Engineering and Engineering Mechanics Series).

- 9 - THOMSON, William T. Teoria da vibração com aplicações. Trad. de Cássio Sigaud. Rio de Janeiro, Interciência, 1978. 462 p.
- 10 - WABURTON, J.B. The dynamical behaviour of structures. 2. ed. Oxford, England, Pergamon Press Ltd, c1976. 345 p. (Structures and Solid Body Mechanics Series).