

OPERADORES DE DIFERENÇAS FINITAS
DE ORDEM ELEVADA PARA MALHAS IRREGULARES:
APLICAÇÕES NA ELASTICIDADE PLANA

AUTOR: Eng. JAIME FLORENCIO MARTINS

ORIENTADOR: Prof. Dr. JOSÉ ELIAS LAIER

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

OPERADORES DE DIFERENÇAS FINITAS
DE ORDEM ELEVADA PARA MALHAS IRREGULARES:
APLICAÇÕES NA ELASTICIDADE PLANA

ENG. JAIME FLORENCIO MARTINS

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

ORIENTADOR:

PROF. DR. JOSÉ ELIAS LAIER

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. José Elias Laier

Prof. Dr. Walter Savassi

Profa. Dra. Neide Maria Bertoldi Franco

Suplentes:

Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini

Prof. Dr. Marcos Nereu Arenales

Aos meus pais:

Geraldo e Olinda

e irmãos

AGRADECIMENTOS

Ao professor José Elias Laier pelos trabalhos de orientação e pelas valiosas sugestões para o presente texto.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de estudos.

À Srta. Silvana Flores e ao Sr. João Paulo Moretti pelo capricho nos trabalhos de datilografia e desenho, respectivamente.

Aos meus pais e irmãos pelo incentivo e apoio.

Aos funcionários do Centro de Processamento de Dados (CPD-EESC-USP) sempre atenciosos e dispostos a ajudar.

A DEUS, Pai e Amigo, sempre presente.

RESUMO

O Método das Diferenças Finitas é, no presente trabalho, formulado pela via da interpolação lagrangeana; por essa razão os operadores decorrentes aplicam-se em redes de malhas irregulares. Toma-se um polinômio interpolador do quarto grau incompleto, envolvendo 13 parâmetros livres.

Aplica-se o procedimento desenvolvido na solução de problemas da Elasticidade Plana. Uma listagem do programa fonte em linguagem FORTRAN IV correspondente é apresentada, bem como quatro exemplos de aplicação, onde os resultados são confrontados com os do Método dos Elementos Finitos e também analíticos nos casos mais elementares.

ABSTRACT

In this work the Finite Difference Method is formulated by lagrangean procedure. The technique consists of taking an approximate incomplete fourth degree polynomial function involving 13 free parameters within a region and developing Finite Difference operators to arbitrary meshes in matrix form.

The developed procedure is applied to solve plane elasticity problems. A listing of the corresponding FORTRAN program is presented. Four numerical examples are also presented in which the results are compared with those obtained by Finite Element Method and analytical in elementary cases.

SUMÁRIO

NOTAÇÃO.....	i
CAPÍTULO I	
INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II - <u>ELASTICIDADE PLANA</u>	
2.1 - INTRODUÇÃO.....	4
2.2 - ESTADO PLANO DE TENSÃO.....	5
2.3 - ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO.....	6
2.4 - RELAÇÕES ENTRE DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÃO.....	7
2.5 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO.....	9
2.6 - CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	12
CAPÍTULO III - <u>MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS</u>	
3.1 - INTRODUÇÃO.....	15
3.2 - OPERADORES DE DERIVADAS PARCIAIS.....	16
3.3 - EQUAÇÕES SEGUNDO OPERADORES.....	21
3.3.1 - <u>Operadores Para Pontos Internos</u>	21
3.3.2 - <u>Operadores Para Pontos no Contorno</u>	22
3.3.2.1 - Pontos com Dois Deslocamentos Prescritos.....	23
3.3.2.2 - Pontos com Um Deslocamento Pres- crito.....	23
3.3.2.3 - Pontos com Tensão Prescrita.....	24
3.3.3 - <u>Operadores Para Deformações</u>	25
3.3.4 - <u>Operadores Para Tensões</u>	25

CAPÍTULO IV - AUTOMATIZAÇÃO DO MÉTODO

4.1 - INTRODUÇÃO.....	26
4.2 - DADOS GERAIS.....	27
4.3 - GERAÇÃO DAS EQUAÇÕES.....	27
4.4 - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	28
4.5 - CONSIDERAÇÕES SOBRE A REDE DE MALHAS.....	28
4.6 - CONDICIONAMENTO DA MATRIZ [C].....	29
4.7 - FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO.....	30
4.8 - VARIÁVEIS UTILIZADAS NO PROGRAMA.....	34
4.9 - LISTAGEM DO PROGRAMA EM LINGUAGEM FORTRAN.....	36

CAPÍTULO V - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

5.1 - INTRODUÇÃO.....	49
5.2 - EXEMPLO Nº 1.....	50
5.3 - EXEMPLO Nº 2.....	52
5.4 - EXEMPLO Nº 3.....	54
5.5 - EXEMPLO Nº 4.....	56

CAPÍTULO VI

OBSERVAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO.....	59
-------------------------------------	----

<u>BIBLIOGRAFIA</u>	61
---------------------------	----

NOTAÇÃO

- E - módulo de elasticidade longitudinal.
- K_1, K_2, K_3 - constantes em função do material.
- oxy - sistema de referência.
- P_x, P_y - intensidade da carga distribuída nas direções x e y .
- T - como expoente, transposta da matriz base.
- u, v - componentes de deslocamento nas direções x e y .
- ϵ_x, ϵ_y - deformações específicas nas direções x e y .
- σ_x, σ_y - componentes normais de tensão, paralelas aos eixos x e y .
- τ_{xy} - componente cisalhante de tensão.
- γ_{xy} - componente de deformação angular.
- ν - coeficiente de Poisson.
- ρ_x, ρ_y - componentes de força de massa por unidade de volume nas direções x e y .
- θ - ângulo.
- η, ξ - diferença de coordenadas em um ponto qualquer e o ponto central nas direções x e y .
- [] - matriz quadrada.
- { } - matriz linha ou coluna.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Vários problemas da engenharia podem ser colocados sob a forma de equações diferenciais. Geralmente, a solução destas equações não pode ser encontrada analiticamente, e um método de integração numérica deverá ser adotado. Dentre outros, o Método das Diferenças Finitas pode ser usado.

Este método tem sido usado, com sucesso, na integração numérica de equações diferenciais ordinárias, onde apenas uma variável independente é considerada, mediante o uso de rede de malhas regulares ou irregulares. No entanto, na integração de equações diferenciais parciais, em duas ou mais variáveis independentes, as aplicações deste método têm sido, em geral, limitadas ao uso de rede de malhas regulares, PERRONE [9]. Entre outros inconvenientes, as malhas regulares não possuem flexibilidade no sentido de permitir uma análise mais requintada sem um aumento considerável no mon-

tante de operações, e também não se adaptam satisfatoriamente em domínios de contorno irregular. Consequentemente, uma formulação do Método das Diferenças Finitas, para malhas irregulares, é de conveniência evidente.

Segundo TIMOSHENKO [11], a primeira aplicação das equações em diferenças finitas na elasticidade é devida a C. Runge, ao empregar este método para a resolução de problemas de torção. Runge reduziu o problema à solução de um sistema de equações algébricas lineares. Um progresso posterior foi conseguido por L.F. Richardson, ao usar para a solução dessas equações algébricas um certo processo iterativo, obtendo assim valores aproximados das tensões produzidas em barragens por ação de forças de gravidade e pressão da água. Outro processo iterativo, bem como a prova de sua convergência, foi apresentado por H. Libmann. A convergência deste processo iterativo, no caso de equações harmônicas e biarmônicas, foi depois estudada por F. Wolf e R. Courant. O Método das Diferenças Finitas foi aplicado, com êxito, na teoria de placas por H. Marcus.

Nos problemas da Elasticidade Plana os estados envolvidos (deslocamentos, deformações e tensões) são expressos em termos de duas variáveis, e as relações pertinentes expressam-se segundo equações diferenciais parciais em duas variáveis, naturalmente. Assim sendo, os operadores correspondentes decorrem de um polinômio interpolador em duas variáveis. Considera-se, nesse sentido, um polinômio do quarto grau incompleto, envolvendo treze parâmetros livres.

No Capítulo II, faz-se uma breve exposição das relações básicas da Elasticidade Plana. A Lei de Hooke é abordada no tocante ao material isótropo linear. As equações de equilíbrio e as condições de contorno são colocadas em termos dos deslocamentos, o mesmo acontecendo com outras relações de interesse (formulação pela via dos deslocamentos).

O Capítulo III é voltado para a dedução dos operadores de Diferenças Finitas para malhas irregulares decorrentes de um polinômio interpolador do quarto grau incompleto, bem como à formulação das equações da Elasticidade Plana segundo tais operadores.

No Capítulo IV trata-se inicialmente a questão da automatização do procedimento desenvolvido em termos computacionais. Além disso, aborda-se também o problema do condicionamento numérico das matrizes envolvidas. O fluxograma simplificado, uma listagem das variáveis empregadas, bem como a listagem do programa fonte em linguagem FORTRAN IV são apresentados.

O Capítulo V é dedicado a apresentação de quatro exemplos de aplicação, sendo dois de estado plano de tensão e dois de estado plano de deformação. Aproveita-se um dos exemplos de estado plano de tensão para mostrar o andamento da convergência, mediante refinamento progressivo de malhas. Nos exemplos em questão os resultados são confrontados com os obtidos segundo o Método dos Elementos Finitos, e também com os resultados analíticos nos casos mais elementares.

Para finalizar, as observações finais e as conclusões são o objeto do Capítulo VI.

CAPÍTULO II

ELASTICIDADE PLANA

2.1 - INTRODUÇÃO

No modelo matemático da elasticidade, de um modo geral, os dados são a geometria da estrutura (domínio de integração), o carregamento e os parâmetros de comportamento do material, sendo as incógnitas o estado de deslocamento, o estado de tensão e o estado de deformação, TIMOSHENKO [11]. A elasticidade plana, por sua vez, consiste numa simplificação do caso tridimensional, onde algumas das componentes dos estados incógnitos são, por considerações simplificadas e plausíveis, conhecidas. Na elasticidade plana, basicamente, dois casos podem ocorrer, ou seja, estado plano de tensão, onde das seis componentes do estado de tensão, apenas três são incógnitas; e estado de deformação, onde, das seis componentes do estado de deformação, apenas três assumem valores incógnitos. Todavia, ambos os casos podem ser

tratados com o mesmo procedimento analítico, tendo-se em vista apenas ocorrer diferença no conjunto de constantes elásticas envolvidas.

2.2 - ESTADO PLANO DE TENSÃO

O caso de uma peça estrutural, onde uma das dimensões é muito menor que as outras duas, ou seja, uma chapa plana, sob carregamento segundo o plano da peça constitui um problema prático de estado plano de tensão. Em verdade, a menor dimensão pode ser considerada, em termos práticos, como sendo um diferencial; e, nesse caso, eventuais variações do estado de tensão segundo essa dimensão podem ser negligenciadas.

Tomando-se um sistema cartesiano oxy contido no plano da peça, as componentes de tensão não nulas são σ_x , σ_y e τ_{xy} , as componentes de deslocamento u e v, respectivamente movimentos ox e oy, e as componentes do estado de deformação, no que interessa, são ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} .

Admitindo-se tratar de material homogêneo e isótropo, e que as tensões não ultrapassem o limite de proporcionalidade do material, as relações existentes entre as componentes de tensão e as de deformação, são dadas pela Lei de Hooke, ou seja:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y]$$

(2.1)

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (2.1)$$

conti.

ou ainda, na forma inversa:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= K_1 \epsilon_x + K_2 \epsilon_y \\ \sigma_y &= K_1 \epsilon_y + K_2 \epsilon_x \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\tau_{xy} = K_3 \gamma_{xy}$$

onde:

$$\begin{aligned} K_1 &= E/(1 - \nu^2) \\ K_2 &= \nu E/(1 - \nu^2) \\ K_3 &= E/2(1 + \nu) \end{aligned} \quad (2.3)$$

sendo E o m\u00f3dulo de elasticidade longitudinal e ν o coe-
ficiente de Poisson.

2.3 - ESTADO PLANO DE DEFORMA\u00c7\u00c3O

Uma simplifica\u00e7\u00e3o semelhante \u00e0 do estado plano de tens\u00e3o \u00e9 poss\u00edvel em outra situa\u00e7\u00e3o, quando os movimentos numa dada dire\u00e7\u00e3o s\u00e3o impedidos. \u00c9 o caso de t\u00fanis e barragens, onde o movimento longitudinal n\u00e3o ocorre para muitos casos de carregamento. Assim sendo, naquela dire\u00e7\u00e3o n\u00e3o ocorre varia\u00e7\u00e3o dos estados em jogo, resultando pois num problema de estado plano.

Admitindo-se v\u00e1lidas as hip\u00f3teses j\u00e1 mencionadas no par\u00e1grafo anterior, e, supondo-se o sistema de refer\u00eancia

cia σ_z no plano transversal da peça, a Lei de Hooke assim se expressa:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right] \\ \epsilon_z &= 0 = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy}\end{aligned}\tag{2.4}$$

ou na forma inversa:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= K_1 \epsilon_x + K_2 \epsilon_y \\ \sigma_y &= K_2 \epsilon_x + K_1 \epsilon_y \\ \tau_{xy} &= K_3 \gamma_{xy}\end{aligned}\tag{2.5}$$

onde as constantes envolvidas são agora dadas por:

$$\begin{aligned}K_1 &= (1 - \nu)E / (1 - 2\nu)(1 + \nu) \\ K_2 &= \nu E / (1 - 2\nu)(1 + \nu) \\ K_3 &= E / 2(1 + \nu)\end{aligned}\tag{2.6}$$

sendo oportuno assinalar o fato de se ter eliminada em (2.5) a componente σ_z , por força da terceira das (2.4).

2.4 - RELAÇÕES ENTRE DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÃO

A figura 2.1 exhibe três pontos vizinhos P, Q e R. Os pontos P', Q' e R' indicam, de maneira genérica, as no-

vas posições ocupadas pelos pontos P, Q e R na situação deformada. Admitindo-se tratar de deslocamentos e deformações pequenos, com base na geometria dos pequenos deslocamentos têm-se as seguintes relações:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$\epsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy) - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

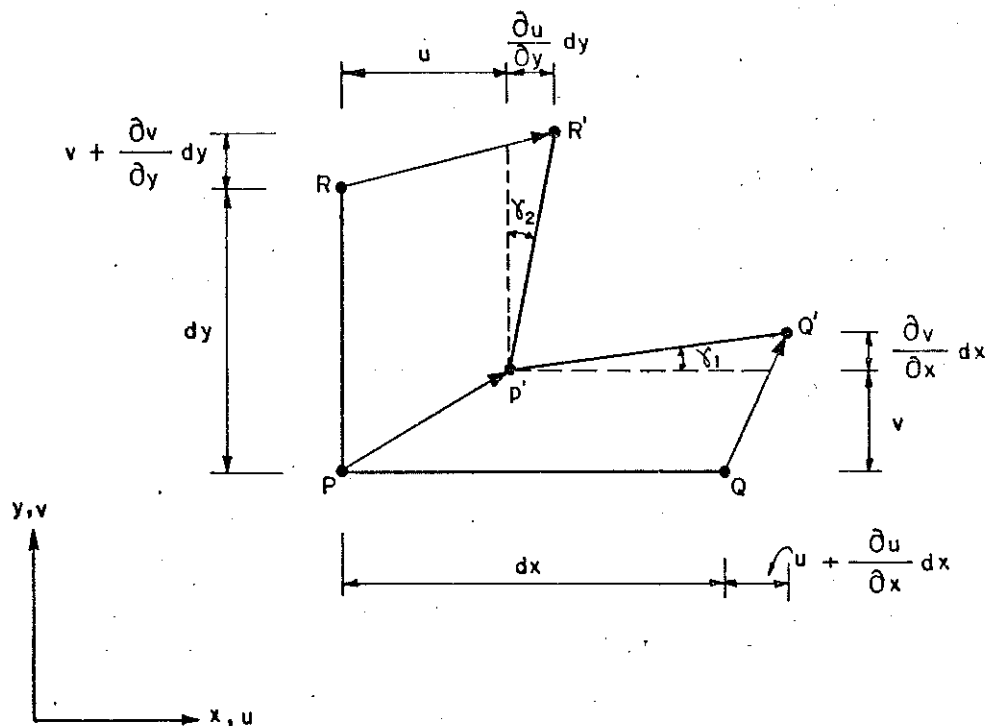


FIG. 2.1 - POSIÇÃO INICIAL E DEFORMADA DE TRÊS PONTOS PRÓXIMOS.

onde, vale frizar, deixa-se evidente em (2.7) o fato de se considerar movimentos pequenos. De fato, nas duas primeiras de (2.7) supõe-se que o comprimento final e o projetado se confundem; o que decorre do suposto na terceira, ou seja, que os ângulos γ_1 e γ_2 são pequenos ($\gamma_1 = \text{sen } \gamma_1 = \text{tg } \gamma_1$)

Assim sendo, as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.8)$$

estabelecem a dependência entre os dois estados envolvidos no fenômeno da mudança forma, dentro de considerações lineares.

2.5 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO

A figura 2.2 mostra um elemento infinitesimal, de lados dx e dy e espessura unitária. Os sentidos positivos das tensões são indicados na figura. Em uma das faces, perpendicular ao eixo x , atuam as tensões σ_x e τ_{xy} , na outra face, também perpendicular ao eixo x e distante dx da primeira, as componentes σ_x e τ_{xy} são incrementadas de seus diferenciais, segundo a variável x . Analogamente, em uma das faces, perpendicular ao eixo y , atuam as tensões σ_y e τ_{xy} , na outra, distante dy da primeira, as tensões recebem incrementos diferenciais segundo a variável y .

A força por unidade de volume apresenta componentes ρ_x e ρ_y , respectivamente, segundo os eixos ox e oy .

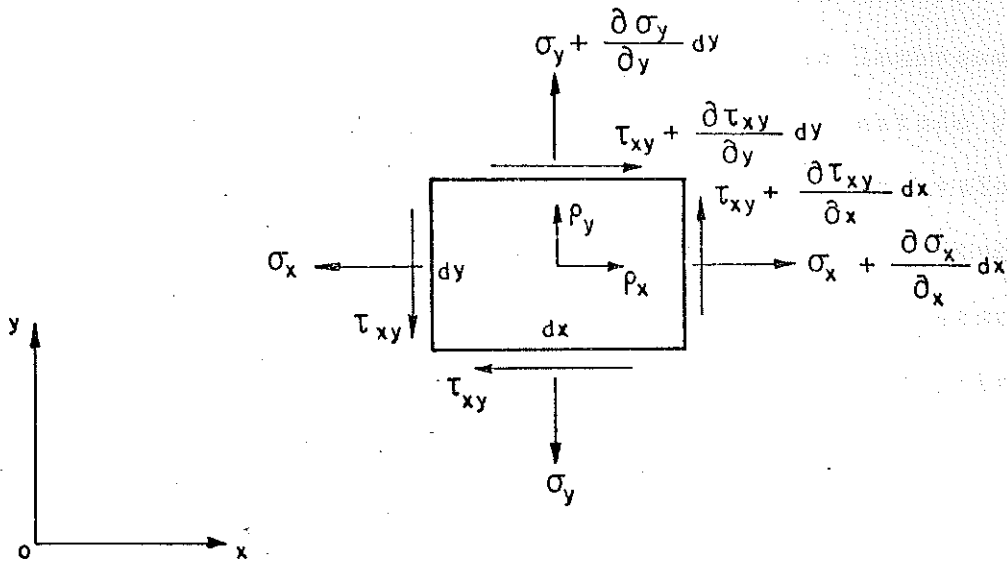


FIG. 2.2 - DIFERENCIAIS DE TENSÃO EM EQUILÍBRIO.

O equilíbrio das forças que atuam na direção ox , por exemplo, implica em:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right)dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right)dx \quad (2.9)$$

$$-\tau_{xy} dx + \rho_x dx dy = 0$$

e algo análogo vale para a direção oy . Pois bem, eliminando se o termo comum de área elementar $dx dy$ tem-se, finalmente:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho_x = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho_y = 0 \quad (2.10)$$

conti.

que são as equações diferenciais de equilíbrio

As equações (2.10) podem ser colocadas de outra forma com auxílio das equações (2.8) e (2.2) ou (2.5). Estas duas últimas equações são similares, apenas lembrando-se que, quando o problema estudado trata-se de estado plano de tensão, as constantes K_1 , K_2 e K_3 assumem os valores dados pelas expressões (2.3), e quando o problema estudado enquadra-se no estado plano de deformação, estas constantes assumem os valores dados pelas expressões (2.6). Em primeiro lugar, substituindo (2.2) ou (2.5) em (2.10) tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_1 \epsilon_x + K_2 \epsilon_y) + \frac{\partial}{\partial y} (K_3 \gamma_{xy}) = -\rho_x \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (K_1 \epsilon_y + K_2 \epsilon_x) + \frac{\partial}{\partial x} (K_3 \gamma_{xy}) = -\rho_y$$

por outro lado, levando-se (2.8) nas equações acima, decorre:

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_1 \frac{\partial u}{\partial x} + K_2 \frac{\partial v}{\partial y}) + K_3 \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) = -\rho_x \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (K_1 \frac{\partial v}{\partial y} + K_2 \frac{\partial u}{\partial x}) + K_3 \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) = -\rho_y$$

ou seja:

$$K_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (K_2 + K_3) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\rho_x \quad (2.13)$$

$$K_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + K_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (K_2 + K_3) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\rho_y$$

que são as equações de equilíbrio em função de deslocamentos e das constantes do material.

2.6 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno são, basicamente, de três tipos, ou seja, no caso de contorno com deslocamentos prescritos (figura 2.3a), tem-se,

$$u_i = 0 \quad (2.14)$$

$$v_i = 0$$

e no caso de contorno sob tensão prescrita, têm-se duas equações por considerações de equilíbrio (figura 2.3b),

$$\sigma_x \operatorname{sen} \theta - \tau_{xy} \operatorname{cos} \theta = P_x \quad (2.15)$$

$$-\sigma_y \operatorname{cos} \theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} \theta = P_y$$

onde P_x e P_y , com os sentidos positivo indicado na figura, são as componentes do carregamento externo segundo as direções ox e oy , respectivamente.

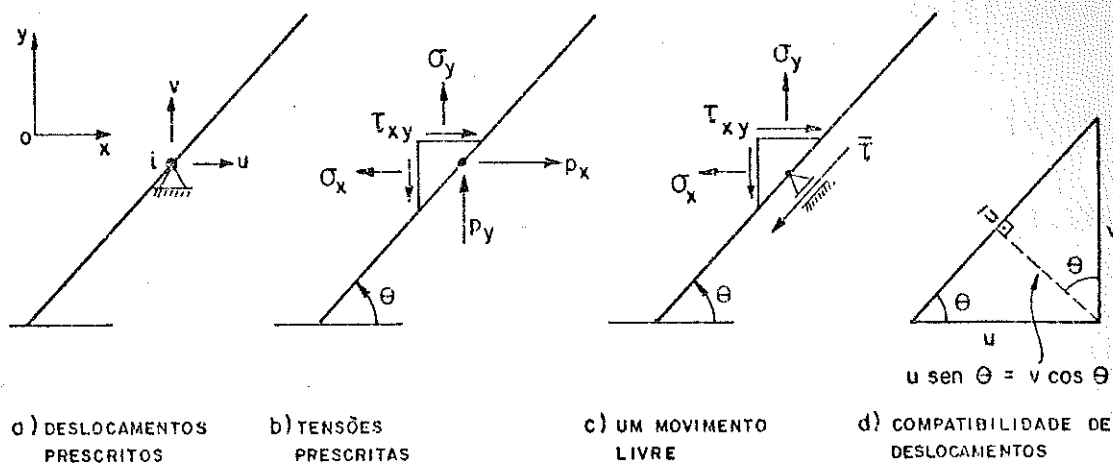


FIG. 2.3 - CONDIÇÕES DE CONTORNO.

De modo análogo ao tratamento que resultou em (2.13), a expressão em (2.15) pode ser posta na forma:

$$K_1 \operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial x} - K_3 \operatorname{cos} \theta \frac{\partial u}{\partial y} + K_2 \operatorname{sen} \theta \frac{\partial v}{\partial y} - K_3 \operatorname{cos} \theta \frac{\partial v}{\partial x} = P_x \quad (2.16)$$

$$-K_2 \operatorname{cos} \theta \frac{\partial u}{\partial x} + K_3 \operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial y} - K_1 \operatorname{cos} \theta \frac{\partial v}{\partial y} + K_3 \operatorname{sen} \theta \frac{\partial v}{\partial x} = P_y$$

e, finalmente, para o caso de contorno com um movimento livre (figura 2.3c), uma das equações decorre da condição de equilíbrio:

$$\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{cos} 2\theta = \bar{\tau} \quad (2.17)$$

ou ainda em termos de deslocamentos:

$$0,5 \left[(K_2 - K_1) \frac{\partial u}{\partial x} + (K_1 - K_2) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \operatorname{sen} 2\theta + K_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \operatorname{cos} 2\theta = \bar{\tau} \quad (2.18)$$

onde $\bar{\tau}$ é valor prescrito da solicitação tangente; a outra equação é devido a compatibilidade de deslocamento (figura 2.3d):

$$u \operatorname{sen} \theta - v \operatorname{cos} \theta = 0 \quad (2.19)$$

onde o ângulo θ , que aparece nas expressões (2.15) a (2.19), é definido a partir do eixo ox no sentido anti-horário.

Em resumo, do ponto de vista matemático, o problema da elasticidade plana coloca-se, em termos de deslocamentos, segundo (2.13), e cuja integração deve atender a condição de contorno do tipo expresso em (2.14) ou (2.16) ou (2.18) e (2.19).

CAPÍTULO III

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

3.1 - INTRODUÇÃO

O Método das Diferenças Finitas, dentre os métodos de integração numérica, é, sem dúvida, o de conceituação mais simples, e, curiosamente, um dos mais antigos. No entanto, vem sendo esquecido ao longo dos últimos anos em favor de métodos mais sofisticados.

A solução numérica de equações diferenciais através do Método das Diferenças Finitas, consiste em se obter valores numéricos da integral desconhecida em alguns pontos, contidos no domínio de integração, espaçados ao longo, por exemplo, do eixo ox , para equações diferenciais ordinárias na variável x e distribuídos no plano x, y para equações diferenciais parciais de duas dimensões. Para se encontrar tais valores, as derivadas são aproximadas pe

las correspondentes derivadas de um polinômio, imposto que este intercepte a função procurada em pontos no domínio de integração, SALVADORI [10].

Os operadores de diferença são, no presente trabalho, deduzidos tomando-se um polinômio aproximador incompleto do quarto grau, contendo 13 parâmetros independentes. Como decorrência da interpolação langrangeana emprega-têm-se operadores apropriados para o trato segundo malhas irregulares, sendo o caso de malhas regulares, naturalmente, um caso particular.

3.2 - OPERADORES DE DERIVADAS PARCIAIS

Considere-se o conjunto de treze pontos vizinhos mostrados na figura 3.1, supostamente contidos num domínio de integração, cuja função incôgnita $F(x, y)$ admite-se assumir naqueles pontos valores dados F_i , com i variando de 1 a 13.

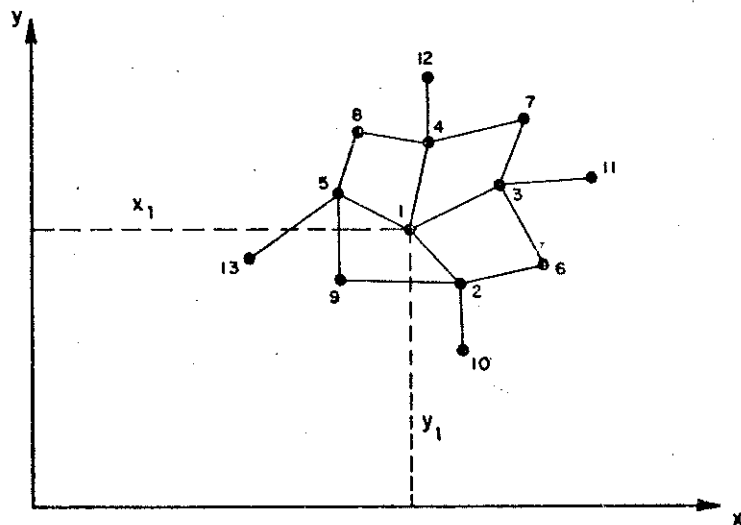


FIG. 3.1 - MALHA DE TREZE PONTOS .

Em conformidade com os procedimentos clássicos da interpolação lagrangeana, uma aproximação da função incôgnita $F(x, y)$, na região que contém os pontos em consideração, pode ser colocada na forma:

$$F(x, y) \approx F_a = A_1 + A_2\eta + A_3\xi + A_4\eta\xi + A_5\eta^2 + A_6\xi^2 + A_7\eta^2\xi + A_8\eta\xi^2 + A_9\eta^3 + A_{10}\xi^3 + A_{11}\eta^2\xi^2 + A_{12}\eta^4 + A_{13}\xi^4 \quad (3.1)$$

ou em notação matricial

$$F(x, y) \approx F_a = [\phi]^T \cdot [A] \quad (3.2)$$

Sendo

$$[\phi]^T = \{ 1 \ \eta \ \xi \ \eta\xi \ \eta^2 \ \xi^2 \ \eta^2\xi \ \eta\xi^2 \ \eta^3 \ \xi^3 \ \eta^2\xi^2 \ \eta^4 \ \xi^4 \} \quad (3.3)$$

$$[A]^T = \{ A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5 \ A_6 \ A_7 \ A_8 \ A_9 \ A_{10} \ A_{11} \ A_{12} \ A_{13} \}$$

onde as constantes A_i , com i variando de 1 a 13, são parâmetros a serem determinados; e as variáveis η e ξ são dadas por (vide figura 3.1)

$$\begin{aligned} \eta &= x - x_1 \\ \xi &= y - y_1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde:

x_1 e y_1 são as coordenadas do ponto 1.

A equação (3.1) pode ser colocada em termos de parâmetros homogêneos, conforme procedimento comum aos demais métodos numéricos, impondo-se que a função aproximada assuma, nos pontos em tela, os valores da função $F(x, y)$ neles prescritos, ou seja:

$$[F] = [C] \cdot [A] \quad (3.5)$$

onde

$$[F]^T = (F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6 \ F_7 \ F_8 \ F_9 \ F_{10} \ F_{11} \ F_{12} \ F_{13}) \quad (3.6)$$

e uma linha genérica da matriz $[C]$ tem a seguinte formação:

$$[1 \ \eta_i \ \xi_i \ \eta_i \xi_i \ \eta_i^2 \ \xi_i^2 \ \eta_i^2 \xi_i \ \eta_i \xi_i^2 \ \eta_i^3 \ \xi_i^3 \ \eta_i^2 \xi_i^2 \ \eta_i^4 \ \xi_i^4] \quad (3.7)$$

sendo F_i o valor prescrito da função $[F]$ no ponto i , e os coeficientes η_i e ξ_i dados por:

$$\eta_i = x_i - x_1 \quad (3.8)$$

$$\xi_i = y_i - y_1$$

onde x_i e y_i são os valores assumidos pelas variáveis x e y no ponto i .

Admitindo-se a não singularidade da matriz $[C]$, a equação matricial (3.5) permite escrever:

$$[A] = [C]^{-1} \cdot [F] \quad (3.9)$$

e assim, colocando-se o valor de $\{A\}$, dado pela expressão acima em (3.2), temos:

$$F(x, y) \approx F_a = \{\phi\}^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{F\} \quad (3.10)$$

tendo-se, pois, uma expressão aproximada de $F(x, y)$ colocada em termos dos valores prescritos de $F(x, y)$ em pontos vizinhos.

Em conformidade com as propriedades da aproximação por interpolação, o caráter aproximado da função aproximadora é transferido, em grau menor, ao nível das derivadas. Assim sendo, ao nível de derivadas, tem-se ainda:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{\partial F_a}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\{\phi\}^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{F\} \right] = \{\phi\}_x^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{F\} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \approx \frac{\partial F_a}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\{\phi\}^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{F\} \right] = \{\phi\}_y^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{F\}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \approx \frac{\partial^2 F_a}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\{\phi\}^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{F\} \right] = \{\phi\}_{xy}^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{F\}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2 F_a}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\{\phi\}^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{F\} \right] = \{\phi\}_{xx}^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{F\}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \approx \frac{\partial^2 F_a}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\{\phi\}^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{F\} \right] = \{\phi\}_{yy}^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{F\}$$

Sendo:

$$\{\phi\}_x^T = \left\{ 0 \ 1 \ 0 \ \xi \ 2\eta \ 0 \ 2\eta\xi \ \xi^2 \ 3\eta^2 \ 0 \ 2\eta\xi^2 \ 4\eta^3 \ 0 \right\}$$

$$\{\phi\}_y^T = \left\{ 0 \ 0 \ 1 \ \eta \ 0 \ 2\xi \ \eta^2 \ 2\xi\eta \ 0 \ 3\xi^2 \ 2\eta^2\xi \ 0 \ 4\xi^3 \right\}$$

$$\{\phi\}_{xy}^T = \left\{ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2\eta \ 2\xi \ 0 \ 0 \ 4\eta\xi \ 0 \ 0 \right\}$$

$$\{\phi\}_{xx}^T = \left\{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2\xi \ 0 \ 6\eta \ 0 \ 2\xi^2 \ 12\eta^2 \ 0 \right\}$$

$$\{\phi\}_{yy}^T = \left\{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2\eta \ 0 \ 6\xi \ 2\eta^2 \ 0 \ 12\xi^2 \right\}$$

(3.12)

que consistem em expressões aproximadas para as derivações até o segundo grau.

Um exame das expressões (3.12) permite identificar os seguintes operadores de diferença:

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx \{\phi\}_x^T \cdot [C]^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \approx \{\phi\}_y^T \cdot [C]^{-1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \approx \{\phi\}_{xy}^T \cdot [C]^{-1} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx \{\phi\}_{xx}^T \cdot [C]^{-1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \approx \{\phi\}_{yy}^T \cdot [C]^{-1}$$

que aplicados no vetor $\{F\}$ fornecem as derivadas da função $F(x, y)$ em grau aproximado na região dos pontos considerados.

3.3 - EQUAÇÕES SEGUNDO OPERADORES

De início, cumpre assinalar o fato dos operadores de diferença aproximarem valores de derivadas em pontos do domínio de integração. Assim sendo, no domínio de integração, incluindo o contorno, são tomados doze pontos para compor a vizinhança de cada ponto, procedimento dual ao empregado para um elemento no Método dos Elementos Finitos; e nesses pontos impostas as condições neles prescritas, ou seja, no domínio são aplicadas as condições (2.13), e no contorno, dependendo do caso, condições (2.14) ou (2.16) ou (2.18) e (2.19). Na variante dos deslocamentos as incógnitas são as duas componentes de deslocamento em cada ponto, e as relações bastante para determinação são também em número de duas por ponto, ou seja, (2.13), (2.14) ou (2.16) ou (2.18) e (2.19).

3.3.1 - Operadores Para Pontos Internos

Para melhor visualizar a colocação das equações (2.13) em termos de operadores, ilustra-se na Figura 3.2a uma situação genérica de vizinhos na rede de malhas. A condição (2.13) sendo aplicada no ponto 1 (vide Figura 3.2a) leva às seguintes expressões:

$$\left\{ (K_1 \{\phi\}_{xx}^T + K_3 \{\phi\}_{yy}^T) \cdot [C]^{-1} \right\} \{u\} + \left\{ (K_2 + K_3) \{\phi\}_{xy}^T \cdot [C]^{-1} \right\} \{v\} = -\rho_x$$

$$\left\{ (K_2 + K_3) \{\phi\}_{xy}^T \cdot [C]^{-1} \right\} \{u\} + \left\{ (K_1 \{\phi\}_{yy}^T + K_3 \{\phi\}_{xx}^T) \cdot [C]^{-1} \right\} \{v\} = -\rho_y$$

(3.14)

onde as derivadas de $\{\phi\}$ são, naturalmente, tomadas no ponto em consideração e dadas pelas expressões (3.12). Neste caso com $\eta = \xi = 0$, então as derivadas segundas são constantes, ou seja:

$$\begin{aligned} \{\phi\}_{xx}^T &= \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \\ \{\phi\}_{yy}^T &= \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \\ \{\phi\}_{xy}^T &= \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

e sendo ainda:

$$\begin{aligned} \{u\}^T &= \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8 \ u_9 \ u_{10} \ u_{11} \ u_{12} \ u_{13}\} \\ \{v\}^T &= \{v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6 \ v_7 \ v_8 \ v_9 \ v_{10} \ v_{11} \ v_{12} \ v_{13}\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde u_i e v_i são os movimentos do ponto i ($i = 1 : 13$) nas direções ox e oy respectivamente.

3.3.2 - Operadores Para Pontos no Contorno

É conveniente que os pontos no contorno tenham o sistema local de referência trasladado para um ponto interno e que este ponto seja o mais perto do "centro de gravidade" da vizinhança. Neste caso as variáveis η e ξ são dadas como segue:

$$\begin{aligned} \eta &= x_2 - x_1 \\ \xi &= y_2 - y_1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

e as derivadas de $\{\phi\}$ são dadas conforme expressão (3.12).

3.3.2.1 - Pontos com Dois Deslocamentos Prescritos

Em se tratando de pontos sujeitos a movimentos impedidos, têm-se de imediato (vide Figura 3.2b):

$$\begin{aligned} \{0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \cdot \{u\} &= 0 \\ \{0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \cdot \{v\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

sendo $\{u\}$ e $\{v\}$ organizados conforme (3.16).

3.3.2.2 - Pontos com Um Deslocamento Prescrito

No caso ilustrado na Figura 3c, o algoritmo correspondente decorre de (2.18) e (2.19), tendo-se em vista (3.13), ou seja:

$$\begin{aligned} \{0 \ \text{sen}\theta \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \{u\} + \\ -\{0 \ \text{cos}\theta \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \{v\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} [0,5 (K_2 - K_1) \{\phi\}_x^T \text{sen}2\theta + K_3 \{\phi\}_y^T \text{cos}2\theta] [C]^{-1} \{u\} + \\ + [0,5 (K_1 - K_2) \{\phi\}_y^T \text{sen}2\theta + K_3 \{\phi\}_x^T \text{cos}2\theta] [C]^{-1} \{v\} &= \bar{\tau} \end{aligned}$$

onde $\bar{\tau}$ é o cisalhamento prescrito. No caso de apoio móvel $\bar{\tau}$ simplesmente se anula.

3.3.2.3 - Pontos Com Tensão Prescrita

Finalmente, aplicando-se os operadores em pontos como o ilustrado na Figura 3.2d (contorno sob tensão), tem-se o seguinte algoritmo (vide expressão 2.15):

$$\begin{aligned} & \left\{ K_1 \operatorname{sen} \theta \left[\phi \right]_x^T - K_3 \operatorname{cos} \theta \left[\phi \right]_y^T \right\} \cdot [C]^{-1} \cdot \{u\} + \\ & + \left\{ K_2 \operatorname{sen} \theta \left[\phi \right]_y^T - K_3 \operatorname{cos} \theta \left[\phi \right]_x^T \right\} \cdot [C]^{-1} \cdot \{v\} = P_x \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ -K_2 \operatorname{cos} \theta \left[\phi \right]_x^T + K_3 \operatorname{sen} \theta \left[\phi \right]_y^T \right\} \cdot [C]^{-1} \cdot \{u\} + \\ & + \left\{ -K_1 \operatorname{cos} \theta \left[\phi \right]_y^T + K_3 \operatorname{sen} \theta \left[\phi \right]_x^T \right\} \cdot [C]^{-1} \cdot \{v\} = P_y \end{aligned}$$

completando-se assim o conjunto das equações da elasticidade de plana em termos de operadores de diferença. No que se segue são apresentados os operadores para obtenção dos resultados em deformação e tensão.

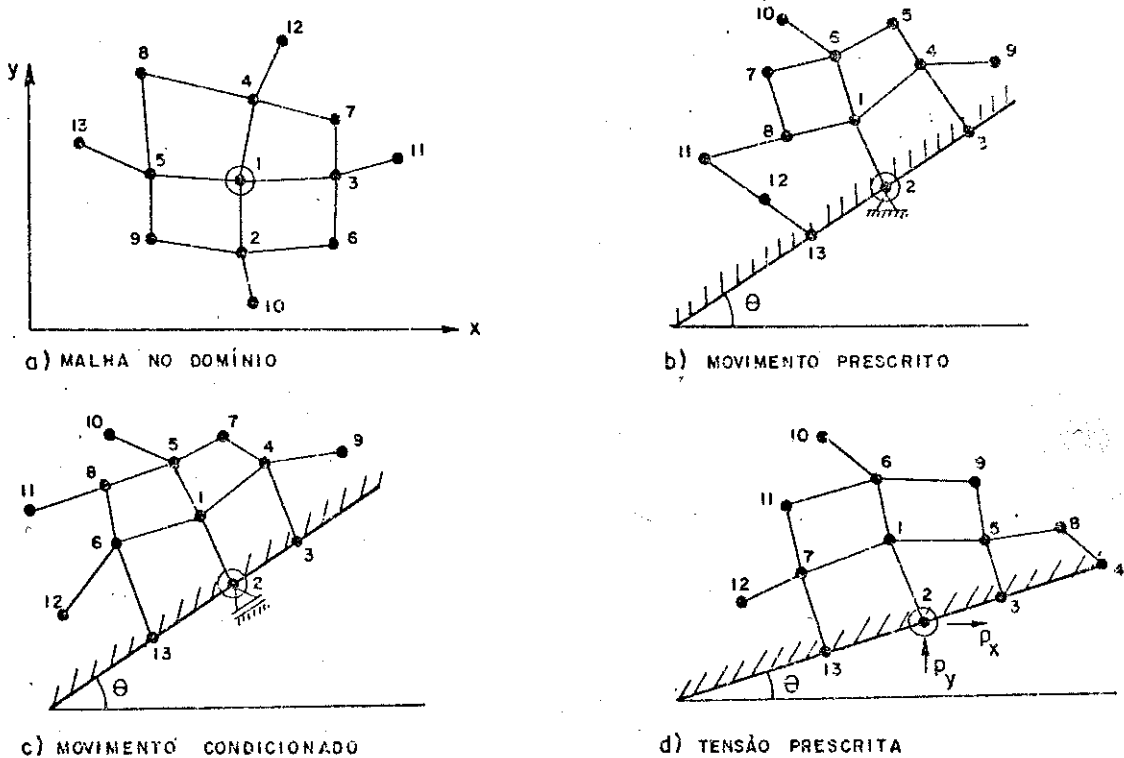


FIG. 3.2 - SITUAÇÃO DA MALHA .

3.3.3 - Operadores Para Deformações

De posse dos deslocamentos de cada ponto da rede, as deformações são obtidas por (vide (2.8) e (3.11)):

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \approx \{\phi\}_x^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{u\} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \approx \{\phi\}_y^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{v\}\end{aligned}\tag{3.21}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \approx \{\phi\}_y^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{u\} + \{\phi\}_x^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{v\}$$

onde, vale registrar, as deformações são dadas no ponto em consideração.

3.3.4 - Operadores Para Tensões

As tensões são calculadas a partir das deformações usando-se as relações dadas pelas expressões (2.2) ou (2.5), agora colocadas em forma de operadores.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= K_1 \{\phi\}_x^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{u\} + K_2 \{\phi\}_y^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{v\} \\ \sigma_y &= K_1 \{\phi\}_y^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{v\} + K_2 \{\phi\}_x^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{u\} \\ \tau_{xy} &= K_3 \left[\{\phi\}_y^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{u\} + \{\phi\}_x^T \cdot [C]^{-1} \cdot \{v\} \right]\end{aligned}\tag{3.22}$$

ou seja, calculadas ponto a ponto.

CAPÍTULO IV

AUTOMATIZAÇÃO DO MÉTODO

4.1 - INTRODUÇÃO

O programa de computador, que viabiliza o procedimento desenvolvido nos capítulos precedentes, é constituído de diferentes etapas. A primeira etapa consiste na leitura de dados que definem a estrutura e o carregamento. Na etapa seguinte, são geradas as equações dos pontos internos ao domínio de integração (expressões (3.14)) e as equações dos pontos no contorno que, dependendo do tipo de contorno, podem ser (3.18) ou (3.19) ou (3.20). A etapa seguinte corresponde à solução do sistema de equações nas incógnitas deslocamentos (u e v). Finalmente são calculadas as deformações e tensões e, naturalmente, a impressão dos resultados.

4.2 - DADOS GERAIS

Os primeiros dados referem-se à leitura do número de pontos relativos à discretização da estrutura, tipo de problema estudado (estado plano de tensão ou deformação) e o número de materiais que compõe a estrutura. Para cada material são dados o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson; e, de posse desses valores, é calculado o valor das constantes K_1 , K_2 e K_3 .

A geometria da estrutura fica definida pelas coordenadas x e y dos pontos da rede de malhas. Além disso, é necessário definir a vizinhança de cada ponto que, no caso presente, constitui-se de doze pontos, como indicado na figura 3.2. Nesta etapa também são fornecidos os valores do carregamento interno e externo, o tipo de vinculação e o tipo de material de cada ponto.

4.3 - GERAÇÃO DAS EQUAÇÕES

A elasticidade plana formulada via deslocamentos, tem como incógnitas, naturalmente, as componentes do estado de deslocamento, que são em número de dois deslocamentos por ponto da rede. As relações são também em número de duas por ponto, conforme o exposto no item 3.3. Assim sendo, o número de incógnitas e o número de relações são, portanto, compatíveis. No domínio de integração têm-se, para cada ponto da rede, as duas relações de equilíbrio dadas pelas expressões (2.13). Para o caso de ponto situado em contorno do primeiro tipo, isto é, ponto com movimentos impedidos, as

relações de contorno implicam em deslocamentos nulos ($u = 0$ e $v = 0$). Para o caso de ponto em contorno de segundo tipo, ou seja, ponto com um dos movimentos prescrito, as relações são dadas pelas expressões (2.18) e (2.19). Finalmente, para pontos situados em contorno de terceiro tipo (pontos sujeitos à tensões externas aplicadas) têm-se as relações dadas pelas expressões (2.16).

4.4 - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Tendo em vista o fato de que a matriz de rigidez não apresenta simetria, têm-se que lançar mão de sub-rotinas de resolução pouco comuns na análise estrutural. Emprega-se, no caso em apreço, uma rotina um tanto requintada decorrente do processo de eliminação de Gauss, onde um controle especial é dispensado na escolha do pivotamento.

4.5 - CONSIDERAÇÕES SOBRE A REDE DE MALHAS

Em primeiro lugar, uma regra importante diz respeito ao fato de que todo ponto deve ser considerado na vizinhança de outros pontos (todo ponto tem, naturalmente, vizinho, mas ele deve ser também vizinho). Tal procedimento provém do fato de que, por exemplo, se um dado ponto não participar da vizinhança de outros, as equações desse ponto desacoplam das demais; e isso, numa interpretação física, corresponde a um isolamento das condições impostas nesse ponto. Em outras palavras, o que ocorre em tal ponto não é transmi-

tido aos demais. Por outro lado, quanto mais um dado ponto participa da vizinhança de outros, mais o efeito nele produzido participa do acontecimento conjunto.

Um outro fato, também importante, diz respeito a densidade de vizinhança. As derivadas num dado ponto são mais precisas nas direções onde ocorre maior densidade de vizinhos. Assim para um ponto no domínio é conveniente uma distribuição dos pontos com densidade maior segundo as direções onde o comportamento da função incôgnita é mais irregular.

Por último, uma condição singular ocorre nos cantos angulosos, onde têm-se quatro condições de contorno prescritas, e não duas, como nos demais. No Método dos Elementos de Contorno, onde o contorno precisa ficar bem definido, esse problema é sanado criando-se dois pontos, um em cada face; e esse procedimento é também uma boa opção no presente caso.

4.6 - CONDICIONAMENTO DA MATRIZ [C]

Uma questão bastante delicada no procedimento de corrente da formulação do Método das Diferenças Finitas apresentado consiste na necessidade de inversão da matriz [C], que depende da malha adotada. É fácil verificar, por exemplo, varias disposições de vizinhança que promovem singularidade na matriz [C], ou seja, que levam a um extremo mal condicionamento.

A medida do condicionamento de uma matriz é, portanto, uma necessidade. Nesse sentido uma referência, é por

exemplo, a dada por CODDY [4], onde se define o parâmetro:

$$\text{Cond. } [C] = \|C\| \cdot \|C\|^{-1} \quad (4.1)$$

onde $\|C\|$ é uma norma da matriz $[C]$ e $\|C\|^{-1}$ uma norma da inversa. Dentre as várias normas, sugere-se por exemplo:

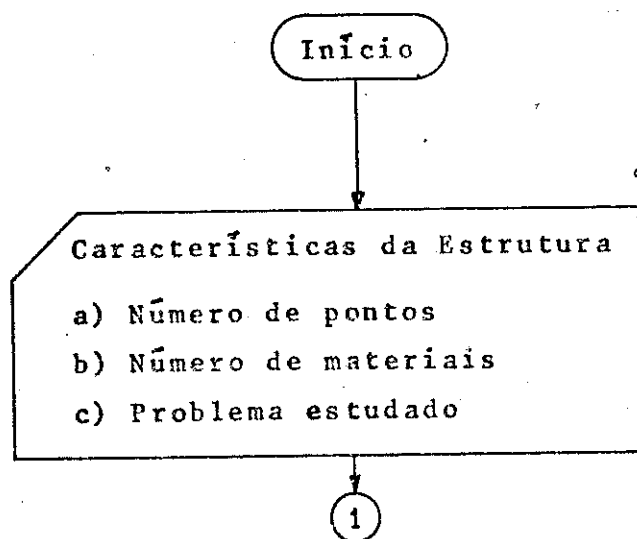
$$\|C\| = \text{med} \sum_{j=1}^n [C_{ij}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |C_{ij}| \right) \quad (4.2)$$

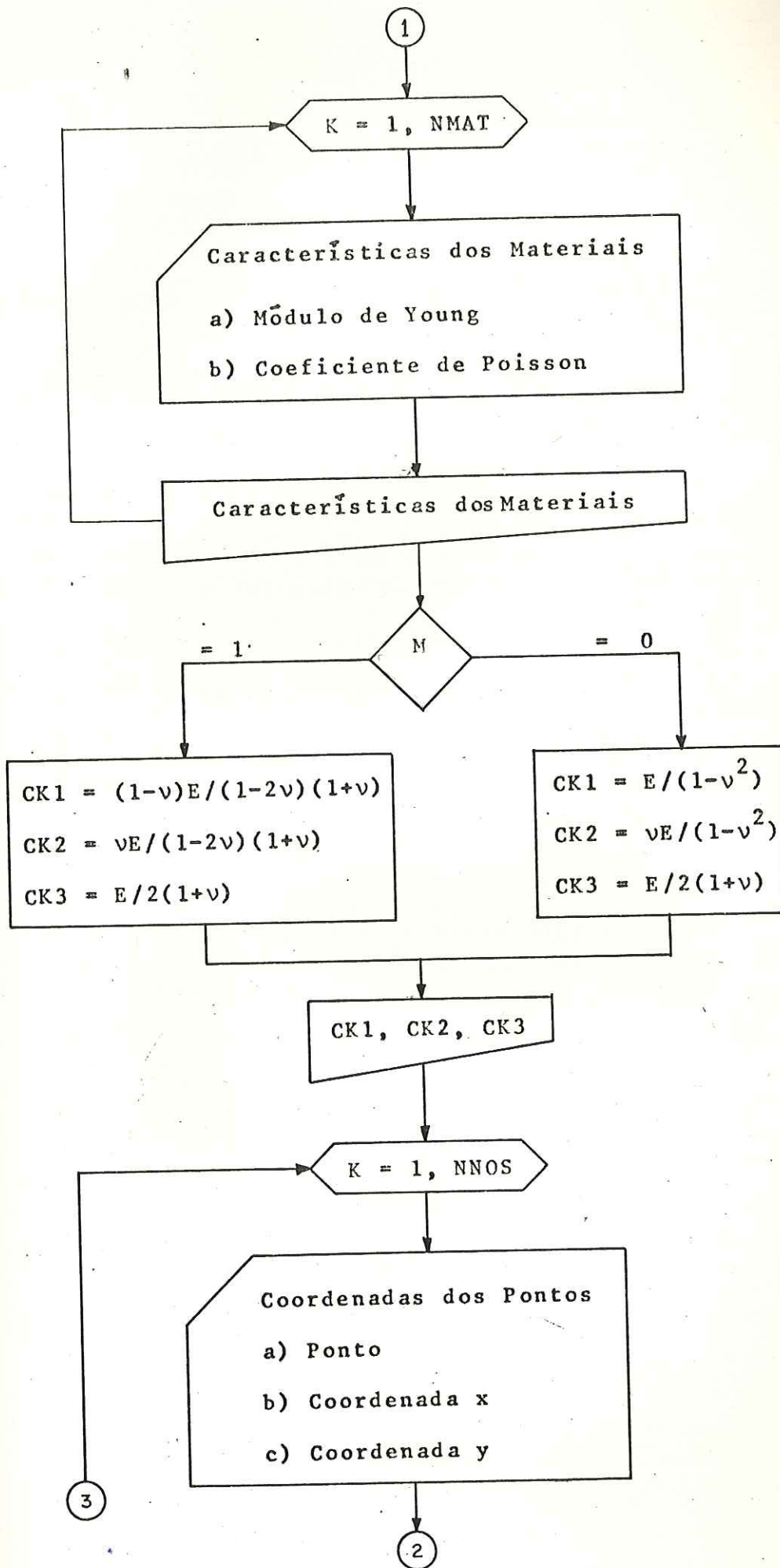
ou seja, o valor médio do somatório simples dos elementos de uma coluna. Valores elevados de $\text{cond.}[C]$ indicam mau condicionamento, sendo razoáveis valores, a grosso modo, até da ordem de 500 no presente caso.

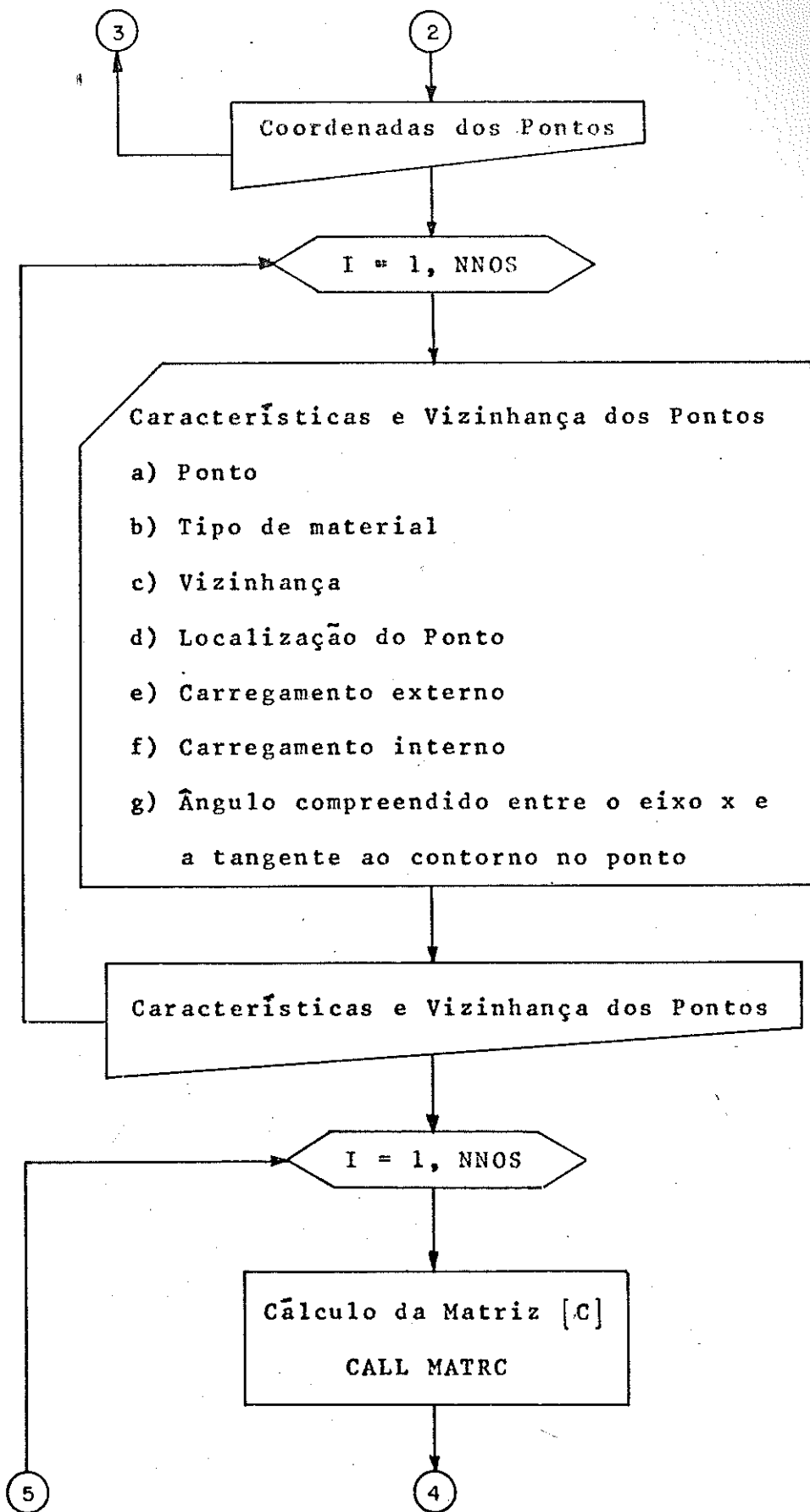
Um outro expediente que também se mostrou interessante, consiste em se limitar o valor absoluto do pivô, durante o processo de inversão, na altura de 0,1.

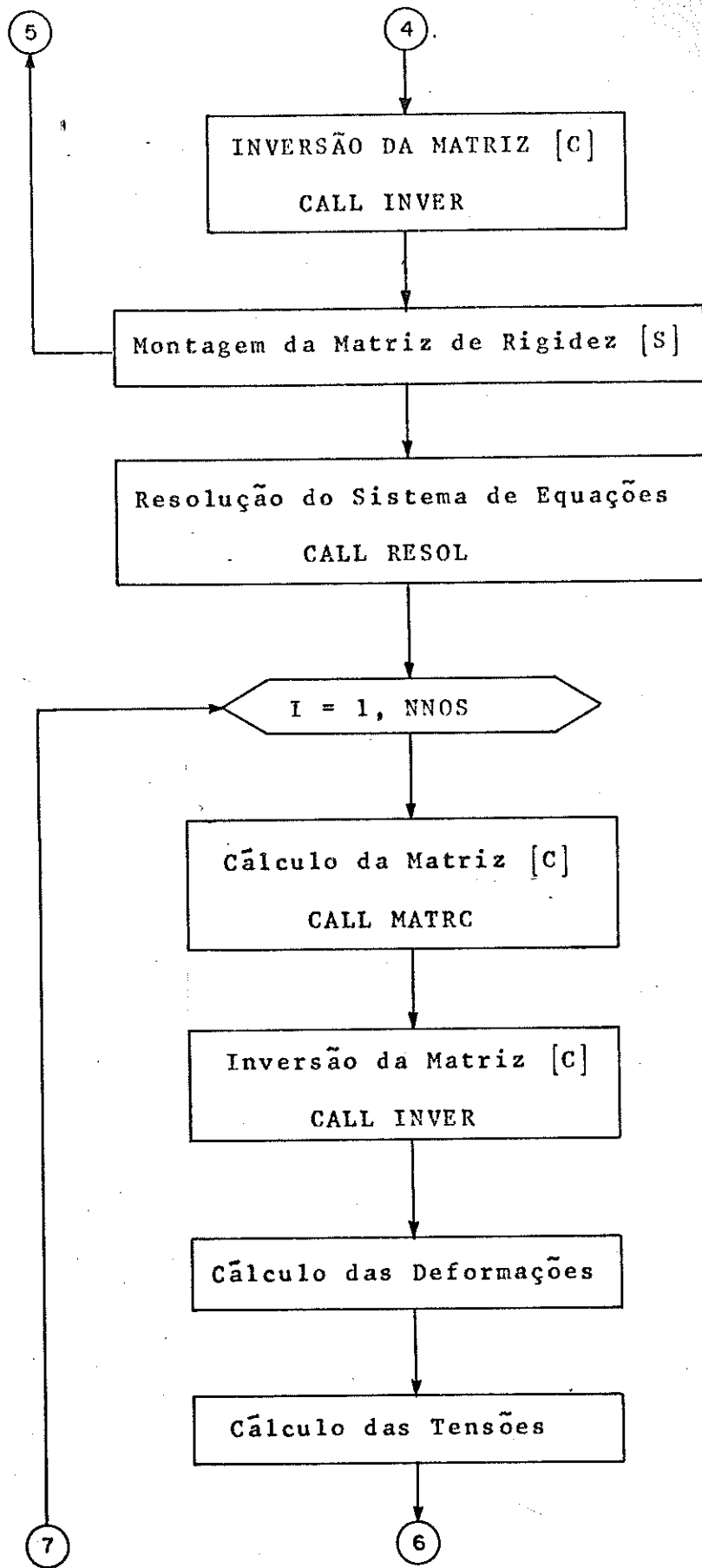
4.7 - FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO

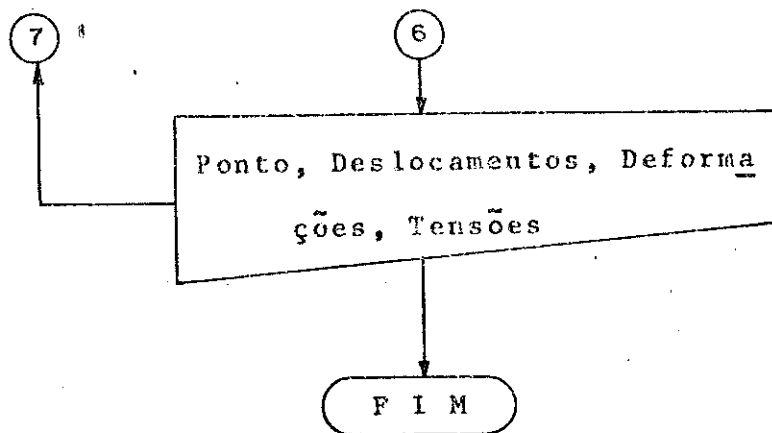
Apresenta-se, no que se segue, um fluxograma do procedimento desenvolvido; voltado, naturalmente, para a programação em computadores.











4.8 - VARIÁVEIS UTILIZADAS NO PROGRAMA

As variáveis utilizadas para os dados de entrada e outras que aparecem no programa, assim como sua identificação, estão apresentadas a seguir na tabela 4.1

TABELA 4.1

VARIÁVEIS	IDENTIFICAÇÃO
NNOS	Número de Pontos da rede de malhas
NMAT	Número de materiais diferentes
M	Indicador do tipo de problema estudado M = 0 - Estado plano de tensão M = 1 - Estado plano de deformação
YM(K)	Módulo de Young
CP(K)	Coefficiente de Poisson
X(I)	Coordenada x do ponto
Y(I)	Coordenada y do ponto
MAT(K)	Material do ponto

Tabela 4.1

(continuação)

VARIÁVEIS	IDENTIFICAÇÃO
IV1(K), IV2(K), ..., IV12(K)	Vizinhança de cada ponto
ITP(K)	Identificação da posição do ponto Se = 0 - Ponto interno = 1 - Ponto fixo = 2 - Ponto móvel = 3 - Ponto sob tensão prescrita
PX(K)	Carregamento externo na direção x
PY(K)	Carregamento externo na direção y
ROX(K)	Força volumétrica na direção x
ROY(K)	Força volumétrica na direção y
TET(K)	Ângulo compreendido entre o eixo x e a tangente ao contorno no ponto
CK1(I), CK2(I), CK3(I)	Constantes em Função do módulo de Young e o coeficiente de Poisson, para cada tipo de material
[C]	Matriz em função das coordenadas do ponto central e dos vizinhos
[S]	Matriz de rigidez da estrutura
[D]	No início: vetor de cargas nodais Depois de resolvido o sistema de equações: vetor de deslocamentos

Tabela 4.1

(continuação)

VARIÁVEIS	IDENTIFICAÇÃO
FIY(L)	Derivada do polinômio interpolador em relação a y vezes a inversa da matriz [c]
FIX(L)	Derivada do Polinômio interpolador em relação a x vezes a inversa da matriz [c]
EX	Alongamento unitário na direção x
EY	Alongamento unitário na direção y
EXY	Componente de deformação angular
TX	Tensão normal na direção x
TY	Tensão normal na direção y
TXY	Tensão cisalhante

4.9 - LISTAGEM DO PROGRAMA EM LINGUAGEM FORTRAN

No que se segue é apresentada uma listagem completa do programa fonte em linguagem FORTRAN IV.

C
C
C
C

```
*****
* P R O G R A M A   P R I N C I P A L *
*****
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION X(150),Y(150),IV1(150),IV2(150),IV3(150),IV4(150),IV5(15
*0),IV6(150),IV7(150),IV8(150),C(13,13),ITP(150),MAT(150),FIX(13)
*,YM(150),D(300),CK1(150),CK2(150),S(300,301),PX(150),PY(150),FIY(1
*3),RCX(150),ROY(150),TET(150),CK3(150),CP(150),IV9(150),IV10(150),
*IV11(150),IV12(150)
OPEN (UNIT=01, STATUS='OLD', FILE='JAIME', ACCESS='SEQUENTIAL', FORM=
*'FORMATTED')
LEC=1
IMP=3
```

C
C
C
C
C
C

```
DADOS GERAIS  NNOS = NUMERO DE PONTOS
               NMAT = NUMERO DE MATERIAIS
               M    = INDICADOR DO TIPO DE PROBLEMA ESTUDADO
                   M=0 ESTADO PLANO DE TENSÃO
                   M=1 ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO
```

```
WRITE(IMP,1)
1  FORMAT(/,10X,' APLICACAO DO METODO DAS DIFERENCAS FINITAS NA ELASTI
*CIDADE PLANA',/)
   READ(LEC,2)NNOS,NMAT,M
2  FORMAT(3I3)
   WRITE(IMP,4)NNOS,NMAT,M
4  FORMAT(/,10X,' D A D O S   G E R A I S',/,10X,' NNOS=',I3,3X,' NMAT=
*',I2,2X,' M=',I1)
```

C
C
C

PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

```
WRITE(IMP,6)
6  FORMAT(/,10X,' P R O P R I E D A D E S   D O S   M A T E R I A I S
*',/,10X,' MAT. NO',7X,' MODULO DE YOUNG',6X,' CCEF. DE POISSON')
   DO 8 K=1,NMAT
   READ(LEC,10)YM(K),CP(K)
10  FORMAT(F10.1,F5.3)
   WRITE(IMP,12)K,YM(K),CP(K)
12  FORMAT(12X,I2,13X,F10.1,14X,F5.3)
8  CONTINUE
   NN=2*NNOS
   NI=NN+1
   DO 14 L=1,NI
   DO 14 K=1,NN
14  S(K,L)=0.
   DO 16 J=1,NN
16  D(J)=0.
   IF(M)18,20,18
20  WRITE(IMP,22)
22  FORMAT(/,10X,' PROBLEMA ZERO - ESTADO PLANO DE TENSÃO')
   DO 24 I=1,NMAT
   CK1(I)=YM(I)/(1.-CP(I)*CP(I))
   CK2(I)=CP(I)*CK1(I)
   CK3(I)=YM(I)/(2.*(1.+CP(I)))
24  CONTINUE
```

```

1 GO TO 26
18 WRITE(IMP,29)
28 FORMAT(//,10X,'PROBLEMA UM - ESTADO PLANO DE DEFORMACAO')
DO 30 I=1,NMAT
  CK1(I)=YM(I)*(1.-CP(I))/((1.+CP(I))*(1.-2.*CP(I)))
  CK2(I)=CP(I)*CK1(I)/(1.-CP(I))
  CK3(I)=YM(I)/(2.*(1.+CP(I)))
30 CONTINUE
26 CONTINUE
  WRITE(IMP,32)
32 FORMAT(//,27X,'CONSTANTES DO PROBLEMA')
  WRITE(IMP,34)(I,I,CK1(I),I,CK2(I),I,CK3(I),I=1,NMAT)
34 FORMAT(10X,'MAT.(',I2,')',3X,'CK1(',I2,')=',E12.5,3X,'CK2(',I2,')=
*,E12.5,3X,'CK3(',I2,')=',E12.5)

```

C
C
C

LEITURA E IMPRESSAO DAS COORDENADAS DOS PONTOS

```

WRITE(IMP,36)
36 FORMAT(//,10X,'COORDENADAS DOS PONTOS',10X,'C
*O R D E N A D A S  D O S  P O N T O S',//,10X,'PONTO N.',9X,
*COORD. X',10X,'COORD. Y',10X,'PONTO N.',9X,'COORD. X',10X,
*COORD. Y')
DO 38 K=1,NNOS
  READ(LEC,40)I,X(I),Y(I)
40 FORMAT(I3,2F9.3)
38 CONTINUE
DO 39 J=1,NNOS,2
  IF(J-NNOS)41,43,39
43 WRITE(IMP,42)J,X(J),Y(J)
  GO TO 39
41 I=J+1
  WRITE(IMP,42)J,X(J),Y(J),I,X(I),Y(I)
42 FORMAT(12X,I3,10X,F9.3,9X,F9.3,13X,I3,10X,F9.3,9X,F9.3)
39 CONTINUE

```

C
C
C

VIZINHOS E PROPRIEDADES DOS PONTOS

```

WRITE(IMP,44)
44 FORMAT(//,41X,'CENTRAL DE INFORMACOES',//,2X,
*PCNTO',1X,'MAT',1X,'IV1',1X,'IV2',1X,'IV3',1X,'IV4',1X,'IV5',1X,'
*IV6',1X,'IV7',1X,'IV8',1X,'IV9',1X,'IV10',1X,'IV11',1X,'IV12',1X,
*IIP',7X,'PX',10X,'PY',8X,'RCX',8X,'ROY',9X,'TET')
DO 46 I=1,NNOS
46 READ(LEC,48)K,MAT(K),IV1(K),IV2(K),IV3(K),IV4(K),IV5(K),IV6(K),IV7
*(K),IV8(K),IV9(K),IV10(K),IV11(K),IV12(K),ITP(K)
48 FORMAT(15I3)
DO 47 I=1,NNOS
47 READ(LEC,49)K,PX(K),PY(K),ROX(K),ROY(K),TET(K)
49 FORMAT(I3,5F8.3)
DO 51 K=1,NNOS
51 WRITE(IMP,50)K,MAT(K),IV1(K),IV2(K),IV3(K),IV4(K),IV5(K),IV6(K),IV
*7(K),IV8(K),IV9(K),IV10(K),IV11(K),IV12(K),ITP(K),PX(K),PY(K),ROX(
*K),ROY(K),TET(K)
50 FORMAT(3X,I3,1X,I3,2X,I3,1X,I3,1X,I3,1X,I3,1X,I3,1X,I3,1X,I3,1X,I3,
*,1X,I3,1X,I3,2X,I3,2X,I3,1X,I3,3X,F8.3,4X,F8.3,3X,F8.3,3X,F8.3,5X,

```

```
*F8.3)
  DO 52 I=1,NMUS
  IF (ITP(I)-1) 70,52,70
70 CONTINUE
  IF (ITP(I)) 54,56,54
56 J1=IV1(I)
  I1=1
  GO TO 58
54 J1=I
  I1=IV1(I)
58 CALL MATRC(I1, J1, J2, J3, J4, J5, J6, J7, J8, C, X, Y, IV2, IV3, IV4, IV5, IV6, IV
  *7, IV8, J9, K1, K2, K3, IV9, IV10, IV11, IV12, I)
  CALL INVER(C, I3, IMP, I)
  I11=2*I1
  I12=I11-1
  J11=2*J1
  J12=J11-1
  J21=2*J2
  J22=J21-1
  J31=2*J3
  J32=J31-1
  J41=2*J4
  J42=J41-1
  J51=2*J5
  J52=J51-1
  J61=2*J6
  J62=J61-1
  J71=2*J7
  J72=J71-1
  J81=2*J8
  J82=J81-1
  J91=2*J9
  J92=J91-1
  K11=2*K1
  K12=K11-1
  K21=2*K2
  K22=K21-1
  K31=2*K3
  K32=K31-1
  IF (ITP(I)) 74,72,74
72 S(I12, I12)=2.*CK1(MAT(I))*C(5,1)+2.*CK3(MAT(I))*C(6,1)
  S(I12, J12)=2.*CK1(MAT(I))*C(5,2)+2.*CK3(MAT(I))*C(6,2)
  S(I12, J22)=2.*CK1(MAT(I))*C(5,3)+2.*CK3(MAT(I))*C(6,3)
  S(I12, J32)=2.*CK1(MAT(I))*C(5,4)+2.*CK3(MAT(I))*C(6,4)
  S(I12, J42)=2.*CK1(MAT(I))*C(5,5)+2.*CK3(MAT(I))*C(6,5)
  S(I12, J52)=2.*CK1(MAT(I))*C(5,6)+2.*CK3(MAT(I))*C(6,6)
  S(I12, J62)=2.*CK1(MAT(I))*C(5,7)+2.*CK3(MAT(I))*C(6,7)
  S(I12, J72)=2.*CK1(MAT(I))*C(5,8)+2.*CK3(MAT(I))*C(6,8)
  S(I12, J82)=2.*CK1(MAT(I))*C(5,9)+2.*CK3(MAT(I))*C(6,9)
  S(I12, J92)=2.*CK1(MAT(I))*C(5,10)+2.*CK3(MAT(I))*C(6,10)
  S(I12, K12)=2.*CK1(MAT(I))*C(5,11)+2.*CK3(MAT(I))*C(6,11)
  S(I12, K22)=2.*CK1(MAT(I))*C(5,12)+2.*CK3(MAT(I))*C(6,12)
  S(I12, K32)=2.*CK1(MAT(I))*C(5,13)+2.*CK3(MAT(I))*C(6,13)
  S(I12, I11)=(CK2(MAT(I))+CK3(MAT(I)))*C(4,1)
  S(I12, J11)=(CK2(MAT(I))+CK3(MAT(I)))*C(4,2)
```



```
S(I12,J21)=(CK2(MAT(I))+CK3(MAT(I))) *C(4,3)
S(I12,J31)=(CK2(MAT(I))+CK3(MAT(I))) *C(4,4)
S(I12,J41)=(CK2(MAT(I))+CK3(MAT(I))) *C(4,5)
S(I12,J51)=(CK2(MAT(I))+CK3(MAT(I))) *C(4,6)
S(I12,J61)=(CK2(MAT(I))+CK3(MAT(I))) *C(4,7)
S(I12,J71)=(CK2(MAT(I))+CK3(MAT(I))) *C(4,8)
S(I12,J81)=(CK2(MAT(I))+CK3(MAT(I))) *C(4,9)
S(I12,J91)=(CK2(MAT(I))+CK3(MAT(I))) *C(4,10)
S(I12,K11)=(CK2(MAT(I))+CK3(MAT(I))) *C(4,11)
S(I12,K21)=(CK2(MAT(I))+CK3(MAT(I))) *C(4,12)
S(I12,K31)=(CK2(MAT(I))+CK3(MAT(I))) *C(4,13)
S(I11,I12)=S(I12,I11)
S(I11,J12)=S(I12,J11)
S(I11,J22)=S(I12,J21)
S(I11,J32)=S(I12,J31)
S(I11,J42)=S(I12,J41)
S(I11,J52)=S(I12,J51)
S(I11,J62)=S(I12,J61)
S(I11,J72)=S(I12,J71)
S(I11,J82)=S(I12,J81)
S(I11,J92)=S(I12,J91)
S(I11,K12)=S(I12,K11)
S(I11,K22)=S(I12,K21)
S(I11,K32)=S(I12,K31)
S(I11,I11)=2.*CK1(MAT(I))*C(6,1)+2.*CK3(MAT(I))*C(5,1)
S(I11,J11)=2.*CK1(MAT(I))*C(6,2)+2.*CK3(MAT(I))*C(5,2)
S(I11,J21)=2.*CK1(MAT(I))*C(6,3)+2.*CK3(MAT(I))*C(5,3)
S(I11,J31)=2.*CK1(MAT(I))*C(6,4)+2.*CK3(MAT(I))*C(5,4)
S(I11,J41)=2.*CK1(MAT(I))*C(6,5)+2.*CK3(MAT(I))*C(5,5)
S(I11,J51)=2.*CK1(MAT(I))*C(6,6)+2.*CK3(MAT(I))*C(5,6)
S(I11,J61)=2.*CK1(MAT(I))*C(6,7)+2.*CK3(MAT(I))*C(5,7)
S(I11,J71)=2.*CK1(MAT(I))*C(6,8)+2.*CK3(MAT(I))*C(5,8)
S(I11,J81)=2.*CK1(MAT(I))*C(6,9)+2.*CK3(MAT(I))*C(5,9)
S(I11,J91)=2.*CK1(MAT(I))*C(6,10)+2.*CK3(MAT(I))*C(5,10)
S(I11,K11)=2.*CK1(MAT(I))*C(6,11)+2.*CK3(MAT(I))*C(5,11)
S(I11,K21)=2.*CK1(MAT(I))*C(6,12)+2.*CK3(MAT(I))*C(5,12)
S(I11,K31)=2.*CK1(MAT(I))*C(6,13)+2.*CK3(MAT(I))*C(5,13)
D(I12)=-ROX(I)
D(I11)=-ROY(I)
GO TO 52
74 IF (ITP(I)-2) 78,80,78
80 CONTINUE
ET=X(J1)-X(I1)
EP=Y(J1)-Y(I1)
EP1=EP*EP
ET1=ET*ET
ETP=ET*EP
T=TET(J1)/57.295779
C1=DCOS(T)
S1=DSIN(T)
T2=2.*T
C2=DCOS(T2)
S2=DSIN(T2)
S(J12,J12)=S1
S(J12,J11)=-C1
```

```

DO 85 L=1,13
FIY(L)=C(3,L)+ET*C(4,L)+2.*EP*C(6,L)+ET1*C(7,L)+2.*ETP*C(8,L)
*+3.*EP1*C(10,L)+2.*ET1*EP*C(11,L)+4.*EP*EP1*C(13,L)
FIX(L)=C(2,L)+EP*C(4,L)+2.*ET*C(5,L)+2.*ETP*C(7,L)+EP1*C(8,L)
*+3.*ET1*C(9,L)+2.*ET*EP1*C(11,L)+4.*ET*ET1*C(12,L)

```

85 CONTINUE

```

CK5=CK1(MAT(I))-CK2(MAT(I))
S(J11,I12)=-CK5*FIX(1)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIY(1)*C2
S(J11,J12)=-CK5*FIX(2)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIY(2)*C2
S(J11,J22)=-CK5*FIX(3)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIY(3)*C2
S(J11,J32)=-CK5*FIX(4)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIY(4)*C2
S(J11,J42)=-CK5*FIX(5)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIY(5)*C2
S(J11,J52)=-CK5*FIX(6)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIY(6)*C2
S(J11,J62)=-CK5*FIX(7)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIY(7)*C2
S(J11,J72)=-CK5*FIX(8)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIY(8)*C2
S(J11,J82)=-CK5*FIX(9)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIY(9)*C2
S(J11,J92)=-CK5*FIX(10)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIY(10)*C2
S(J11,K12)=-CK5*FIX(11)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIY(11)*C2
S(J11,K22)=-CK5*FIX(12)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIY(12)*C2
S(J11,K32)=-CK5*FIX(13)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIY(13)*C2
S(J11,I11)=CK5*FIY(1)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIX(1)*C2
S(J11,J11)=CK5*FIY(2)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIX(2)*C2
S(J11,J21)=CK5*FIY(3)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIX(3)*C2
S(J11,J31)=CK5*FIY(4)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIX(4)*C2
S(J11,J41)=CK5*FIY(5)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIX(5)*C2
S(J11,J51)=CK5*FIY(6)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIX(6)*C2
S(J11,J61)=CK5*FIY(7)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIX(7)*C2
S(J11,J71)=CK5*FIY(8)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIX(8)*C2
S(J11,J81)=CK5*FIY(9)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIX(9)*C2
S(J11,J91)=CK5*FIY(10)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIX(10)*C2
S(J11,K11)=CK5*FIY(11)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIX(11)*C2
S(J11,K21)=CK5*FIY(12)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIX(12)*C2
S(J11,K31)=CK5*FIY(13)*0.5*S2+CK3(MAT(I))*FIX(13)*C2
D(J11)=- (PX(I)*C1+PY(I)*S1)

```

GO TO 52

```

78 ET=X(J1)-X(I1)
EP=Y(J1)-Y(I1)
T=TET(J1)/57.295779
C1=DCOS(T)
S1=DSIN(T)
EP1=EP*EP
ET1=ET*ET
ETP=ET*EP

```

DO 86 L=1,13

```

FIY(L)=C(3,L)+ET*C(4,L)+2.*EP*C(6,L)+ET1*C(7,L)+2.*ETP*C(8,L)
*+3.*EP1*C(10,L)+2.*ET1*EP*C(11,L)+4.*EP*EP1*C(13,L)
FIX(L)=C(2,L)+EP*C(4,L)+2.*ET*C(5,L)+2.*ETP*C(7,L)+EP1*C(8,L)
*+3.*ET1*C(9,L)+2.*ET*EP1*C(11,L)+4.*ET*ET1*C(12,L)

```

86 CONTINUE

```

S(J12,I12)=CK1(MAT(I))*FIX(1)*S1-CK3(MAT(I))*FIY(1)*C1
S(J12,J12)=CK1(MAT(I))*FIX(2)*S1-CK3(MAT(I))*FIY(2)*C1
S(J12,J22)=CK1(MAT(I))*FIX(3)*S1-CK3(MAT(I))*FIY(3)*C1
S(J12,J32)=CK1(MAT(I))*FIX(4)*S1-CK3(MAT(I))*FIY(4)*C1
S(J12,J42)=CK1(MAT(I))*FIX(5)*S1-CK3(MAT(I))*FIY(5)*C1
S(J12,J52)=CK1(MAT(I))*FIX(6)*S1-CK3(MAT(I))*FIY(6)*C1

```

S(J12,J62)=CK1(MAT(I))*FIX(7)*S1-CK3(MAT(I))*FIY(7)*C1
 S(J12,J72)=CK1(MAT(I))*FIX(8)*S1-CK3(MAT(I))*FIY(8)*C1
 S(J12,J82)=CK1(MAT(I))*FIX(9)*S1-CK3(MAT(I))*FIY(9)*C1
 S(J12,J92)=CK1(MAT(I))*FIX(10)*S1-CK3(MAT(I))*FIY(10)*C1
 S(J12,K12)=CK1(MAT(I))*FIX(11)*S1-CK3(MAT(I))*FIY(11)*C1
 S(J12,K22)=CK1(MAT(I))*FIX(12)*S1-CK3(MAT(I))*FIY(12)*C1
 S(J12,K32)=CK1(MAT(I))*FIX(13)*S1-CK3(MAT(I))*FIY(13)*C1
 S(J12,I11)=CK2(MAT(I))*FIY(1)*S1-CK3(MAT(I))*FIX(1)*C1
 S(J12,J11)=CK2(MAT(I))*FIY(2)*S1-CK3(MAT(I))*FIX(2)*C1
 S(J12,J21)=CK2(MAT(I))*FIY(3)*S1-CK3(MAT(I))*FIX(3)*C1
 S(J12,J31)=CK2(MAT(I))*FIY(4)*S1-CK3(MAT(I))*FIX(4)*C1
 S(J12,J41)=CK2(MAT(I))*FIY(5)*S1-CK3(MAT(I))*FIX(5)*C1
 S(J12,J51)=CK2(MAT(I))*FIY(6)*S1-CK3(MAT(I))*FIX(6)*C1
 S(J12,J61)=CK2(MAT(I))*FIY(7)*S1-CK3(MAT(I))*FIX(7)*C1
 S(J12,J71)=CK2(MAT(I))*FIY(8)*S1-CK3(MAT(I))*FIX(8)*C1
 S(J12,J81)=CK2(MAT(I))*FIY(9)*S1-CK3(MAT(I))*FIX(9)*C1
 S(J12,J91)=CK2(MAT(I))*FIY(10)*S1-CK3(MAT(I))*FIX(10)*C1
 S(J12,K11)=CK2(MAT(I))*FIY(11)*S1-CK3(MAT(I))*FIX(11)*C1
 S(J12,K21)=CK2(MAT(I))*FIY(12)*S1-CK3(MAT(I))*FIX(12)*C1
 S(J12,K31)=CK2(MAT(I))*FIY(13)*S1-CK3(MAT(I))*FIX(13)*C1
 S(J11,I12)=-CK2(MAT(I))*FIX(1)*C1+CK3(MAT(I))*FIY(1)*S1
 S(J11,J12)=-CK2(MAT(I))*FIX(2)*C1+CK3(MAT(I))*FIY(2)*S1
 S(J11,J22)=-CK2(MAT(I))*FIX(3)*C1+CK3(MAT(I))*FIY(3)*S1
 S(J11,J32)=-CK2(MAT(I))*FIX(4)*C1+CK3(MAT(I))*FIY(4)*S1
 S(J11,J42)=-CK2(MAT(I))*FIX(5)*C1+CK3(MAT(I))*FIY(5)*S1
 S(J11,J52)=-CK2(MAT(I))*FIX(6)*C1+CK3(MAT(I))*FIY(6)*S1
 S(J11,J62)=-CK2(MAT(I))*FIX(7)*C1+CK3(MAT(I))*FIY(7)*S1
 S(J11,J72)=-CK2(MAT(I))*FIX(8)*C1+CK3(MAT(I))*FIY(8)*S1
 S(J11,J82)=-CK2(MAT(I))*FIX(9)*C1+CK3(MAT(I))*FIY(9)*S1
 S(J11,J92)=-CK2(MAT(I))*FIX(10)*C1+CK3(MAT(I))*FIY(10)*S1
 S(J11,K12)=-CK2(MAT(I))*FIX(11)*C1+CK3(MAT(I))*FIY(11)*S1
 S(J11,K22)=-CK2(MAT(I))*FIX(12)*C1+CK3(MAT(I))*FIY(12)*S1
 S(J11,K32)=-CK2(MAT(I))*FIX(13)*C1+CK3(MAT(I))*FIY(13)*S1
 S(J11,I11)=-CK1(MAT(I))*FIY(1)*C1+CK3(MAT(I))*FIX(1)*S1
 S(J11,J11)=-CK1(MAT(I))*FIY(2)*C1+CK3(MAT(I))*FIX(2)*S1
 S(J11,J21)=-CK1(MAT(I))*FIY(3)*C1+CK3(MAT(I))*FIX(3)*S1
 S(J11,J31)=-CK1(MAT(I))*FIY(4)*C1+CK3(MAT(I))*FIX(4)*S1
 S(J11,J41)=-CK1(MAT(I))*FIY(5)*C1+CK3(MAT(I))*FIX(5)*S1
 S(J11,J51)=-CK1(MAT(I))*FIY(6)*C1+CK3(MAT(I))*FIX(6)*S1
 S(J11,J61)=-CK1(MAT(I))*FIY(7)*C1+CK3(MAT(I))*FIX(7)*S1
 S(J11,J71)=-CK1(MAT(I))*FIY(8)*C1+CK3(MAT(I))*FIX(8)*S1
 S(J11,J81)=-CK1(MAT(I))*FIY(9)*C1+CK3(MAT(I))*FIX(9)*S1
 S(J11,J91)=-CK1(MAT(I))*FIY(10)*C1+CK3(MAT(I))*FIX(10)*S1
 S(J11,K11)=-CK1(MAT(I))*FIY(11)*C1+CK3(MAT(I))*FIX(11)*S1
 S(J11,K21)=-CK1(MAT(I))*FIY(12)*C1+CK3(MAT(I))*FIX(12)*S1
 S(J11,K31)=-CK1(MAT(I))*FIY(13)*C1+CK3(MAT(I))*FIX(13)*S1
 D(J12)=PX(I)
 D(J11)=PY(I)

52 CONTINUE

C
C
C

ZERADOR DA COLUNA DE APOIO FIXO

DO' 90 I=1,NVOS
IF(I*TP(I)-1)90,92,90

92 IK=2*I

```
IK1=IK-1
DO 94 J=1,NN
S(J,IK1)=0.
S(J,IK)=0.
94 CONTINUE
S(IK1,IK1)=1.
S(IK,IK)=1.
90 CONTINUE
CALL RESOL(S,D,NV,IMP)
WRITE(IMP,98)
98 FORMAT(///,3X,'ND',4X,'DESLOC. X',7X,'DESLOC. Y',7X,'EPSILON X',5X
*, 'EPSILON Y',6X,'GAMA XY',8X,'SIGMA X',8X,'SIGMA Y',8X,'TAU XY',/)
DO 100 I=1,NNDS
IF(ITP(I))102,104,102
104 J1=IV1(I)
I1=I
GO TO 106
102 J1=I
I1=IV1(I)
106 CALL MATRC(I1,J1,J2,J3,J4,J5,J6,J7,J8,C,X,Y,IV2,IV3,IV4,IV5,IV6,IV
*7,IV8,J9,K1,K2,K3,IV9,IV10,IV11,IV12,I)
CALL INVER(C,I2,IMP,I)
I11=2*I1
I12=I11-1
J11=2*J1
J12=J11-1
J21=2*J2
J22=J21-1
J31=2*J3
J32=J31-1
J41=2*J4
J42=J41-1
J51=2*J5
J52=J51-1
J61=2*J6
J62=J61-1
J71=2*J7
J72=J71-1
J81=2*J8
J82=J81-1
J91=2*J9
J92=J91-1
K11=2*K1
K12=K11-1
K21=2*K2
K22=K21-1
K31=2*K3
K32=K31-1
IF(ITP(I))108,110,108
110 EX=C(2,1)*D(I12)+C(2,2)*D(J12)+C(2,3)*D(J22)+C(2,4)*D(J32)+C(2,5)*
*D(J42)+C(2,6)*D(J52)+C(2,7)*D(J62)+C(2,8)*D(J72)+C(2,9)*D(J82)
*+C(2,10)*D(J92)+C(2,11)*D(K12)+C(2,12)*D(K22)+C(2,13)*D(K32)
EY=C(3,1)*D(I11)+C(3,2)*D(J11)+C(3,3)*D(J21)+C(3,4)*D(J31)+C(3,5)*
*D(J41)+C(3,6)*D(J51)+C(3,7)*D(J61)+C(3,8)*D(J71)+C(3,9)*D(J81)
*+C(3,10)*D(J91)+C(3,11)*D(K11)+C(3,12)*D(K21)+C(3,13)*D(K31)
```

```

DJ2=C(3,1)*D(I12)+C(3,2)*D(J12)+C(3,3)*D(J22)+C(3,4)*D(J32)+C(3,5)
**D(J42)+C(3,6)*D(J52)+C(3,7)*D(J62)+C(3,8)*D(J72)+C(3,9)*D(J92)
**C(3,10)*D(J92)+C(3,11)*D(K12)+C(3,12)*D(K22)+C(3,13)*D(K32)
DJ1=C(2,1)*D(I11)+C(2,2)*D(J11)+C(2,3)*D(J21)+C(2,4)*D(J31)+C(2,5)
**D(J41)+C(2,6)*D(J51)+C(2,7)*D(J61)+C(2,8)*D(J71)+C(2,9)*D(J81)
**C(2,10)*D(J71)+C(2,11)*D(K11)+C(2,12)*D(K21)+C(2,13)*D(K31)
EXY=DJ1+DJ2
TX=CK1(MAT(I)) *EX+CK2(MAT(I)) *EY
TY=CK2(MAT(I)) *EX+CK1(MAT(I)) *EY
TXY=CK3(MAT(I)) *EXY
WRITE(IMP,112) I,D(I12),D(I11),EX,EY,EXY,TX,TY,TXY
112 FORMAT(2X,13,8(1X,E14.7))
GO TO 100
108 ET=X(J1)-X(I1)
EP=Y(J1)-Y(I1)
EPI=EP*EP
ETI=ET*ET
ETP=ET*EP
DO 116 J=1,13
FIY(J)=C(3,J)+ET*C(4,J)+2.*EP*C(6,J)+ETI*C(7,J)+2.*ETP*C(8,J)
**3.*EPI*C(10,J)+2.*ETI*EP*C(11,J)+4.*EP*EPI*C(13,J)
FIX(J)=C(2,J)+EP*C(4,J)+2.*ET*C(5,J)+2.*ETP*C(7,J)+EPI*C(8,J)
**3.*ETI*C(9,J)+2.*ET*EPI*C(11,J)+4.*ET*ETI*C(12,J)
116 CONTINUE
EX=FIX(1)*D(I12)+FIX(2)*D(J12)+FIX(3)*D(J22)+FIX(4)*D(J32)+FIX(5)*
*D(J42)+FIX(6)*D(J52)+FIX(7)*D(J62)+FIX(8)*D(J72)+FIX(9)*D(J82)
**FIX(10)*D(J92)+FIX(11)*D(K12)+FIX(12)*D(K22)+FIX(13)*D(K32)
EY=FIY(1)*D(I11)+FIY(2)*D(J11)+FIY(3)*D(J21)+FIY(4)*D(J31)+FIY(5)*
*D(J41)+FIY(6)*D(J51)+FIY(7)*D(J61)+FIY(8)*D(J71)+FIY(9)*D(J81)
**FIY(10)*D(J91)+FIY(11)*D(K11)+FIY(12)*D(K21)+FIY(13)*D(K31)
EXY=FIX(1)*D(I12)+FIX(2)*D(J12)+FIX(3)*D(J22)+FIX(4)*D(J32)+FIX(5)
**D(J42)+FIX(6)*D(J52)+FIX(7)*D(J62)+FIX(8)*D(J72)+FIX(9)*D(J82)+FI
*Y(1)*D(I11)+FIY(2)*D(J11)+FIY(3)*D(J21)+FIY(4)*D(J31)+FIY(5)
**D(J41)+FIY(6)*D(J51)+FIY(7)*D(J61)+FIY(8)*D(J71)+FIY(9)*D(J81)+FI
*Y(10)*D(J91)+FIY(11)*D(K11)+FIY(12)*D(K21)+FIY(13)*D(K31)
TX=CK1(MAT(I)) *EX+CK2(MAT(I)) *EY
TY=CK2(MAT(I)) *EX+CK1(MAT(I)) *EY
TXY=CK3(MAT(I)) *EXY
WRITE(IMP,121) I,D(J12),D(J11),EX,EY,EXY,TX,TY,TXY
121 FORMAT(2X,13,8(1X,E14.7))
100 CONTINUE
CALL EXIT
END
C
C
C
SUB-ROTINA PARA MONTAGEM DA MATRIZ C
SUBROUTINE MATRC(I1,J1,J2,J3,J4,J5,J6,J7,J8,C,X,Y,IV2,IV3,IV4,IV5,
*IV6,IV7,IV8,J9,K1,K2,K3,IV9,IV10,IV11,IV12,I)
IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
DIMENSION C(13,13),X(150),Y(150),IV2(150),IV3(150),IV4(150)
*,IV5(150),IV6(150),IV7(150),IV8(150),IV9(150),IV10(150),IV11(150)
*,IV12(150)
DO 60 N=2,13
60 C(1,N)=0.

```

```
DO 62 K=1,13
62 C(K,1)=1.
  J2=IV2(I)
  J3=IV3(I)
  J4=IV4(I)
  J5=IV5(I)
  J6=IV6(I)
  J7=IV7(I)
  J8=IV8(I)
  J9=IV9(I)
  K1=IV10(I)
  K2=IV11(I)
  K3=IV12(I)
  C(2,2)=X(J1)-X(I1)
  C(3,2)=X(J2)-X(I1)
  C(4,2)=X(J3)-X(I1)
  C(5,2)=X(J4)-X(I1)
  C(6,2)=X(J5)-X(I1)
  C(7,2)=X(J6)-X(I1)
  C(8,2)=X(J7)-X(I1)
  C(9,2)=X(J8)-X(I1)
  C(10,2)=X(J9)-X(I1)
  C(11,2)=X(K1)-X(I1)
  C(12,2)=X(K2)-X(I1)
  C(13,2)=X(K3)-X(I1)
  C(2,3)=Y(J1)-Y(I1)
  C(3,3)=Y(J2)-Y(I1)
  C(4,3)=Y(J3)-Y(I1)
  C(5,3)=Y(J4)-Y(I1)
  C(6,3)=Y(J5)-Y(I1)
  C(7,3)=Y(J6)-Y(I1)
  C(8,3)=Y(J7)-Y(I1)
  C(9,3)=Y(J8)-Y(I1)
  C(10,3)=Y(J9)-Y(I1)
  C(11,3)=Y(K1)-Y(I1)
  C(12,3)=Y(K2)-Y(I1)
  C(13,3)=Y(K3)-Y(I1)
DO 64 J=2,13
  C(J,4)=C(J,2)*C(J,3)
  C(J,5)=C(J,2)*C(J,2)
  C(J,6)=C(J,3)*C(J,3)
  C(J,7)=C(J,3)*C(J,5)
  C(J,8)=C(J,2)*C(J,6)
  C(J,9)=C(J,2)*C(J,5)
  C(J,10)=C(J,3)*C(J,6)
  C(J,11)=C(J,5)*C(J,6)
  C(J,12)=C(J,5)*C(J,5)
  C(J,13)=C(J,6)*C(J,6)
64 CONTINUE
RETURN
END
```

C
C
C

SUB-ROTINA PARA RESOLUCAO DO SISTEMA
SUBROUTINE RESCL(S,D,N,IMP)

```

      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION S(300,301), D(300)
      NN=N+1
      DO 1 L=1,N
1  S(L,NN)=D(L)
      DO 2 L=1,N
      LP=L
      PIVO=0.
      DO 3 LL=L,N
      IF(DABS(S(LL,L))-DABS(PIVO))3,3,4
4  LP=LL
      PIVC=S(LL,L)
3  CONTINUE
      IF(DABS(PIVO))5,5,6
5  WRITE(IMP,7)
7  FORMAT(/,10X,'SISTEMA SINGULAR')
      RETURN
6  IF(LP-L)8,13,8
8  DO 9 K=L,NN
      AUX=S(L,K)
      S(L,K)=S(LP,K)
9  S(LP,K)=AUX
13 DO 10 K=L,NN
10 S(L,K)=S(LP,K)/PIVO
      DO 2 LL=1,N
      IF(LL-L)11,2,11
11 AUX=S(LL,L)
      DO 14 K=L,NN
14 S(LL,K)=S(LL,K)-AUX*S(L,K)
2  CONTINUE
      DO 12 L=1,N
12 D(L)=S(L,NN)
      RETURN
      END

```

C
C
C

SUB-ROTINA PARA INVERSAO DE MATRIZ

```

SUBROUTINE INVER(C,N,IMP,I)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION C(13,13),L(13),M(13)
DET=1.0
DO 190 K=1,N

```

C
C
C

PESQUISA DO MAIOR ELEMENTO DA MATRIZ

```

      L(K)=K
      M(K)=K
      PIVO=C(K,K)
      DO 20 II=K,N
      DO 20 J=K,N
      IF(DABS(PIVO)-DABS(C(II,J)))10,20,20
10 PIVO=C(II,J)
      L(K)=II
      M(K)=J
20 CONTINUE

```

C
C
C TROCA DE LINHAS

J=L(K)
IF(J-K)50,50,30
30 DO 40 II=1,N
HELP=-C(K,II)
C(K,II)=C(J,II)
C(J,II)=HELP
40 CONTINUE
50 CONTINUE

C
C
C TROCA DE COLUNAS

II=M(K)
IF(II-K)80,80,60
60 DO 70 J=1,N
HELP=-C(J,K)
C(J,K)=C(J,II)
70 C(J,II)=HELP
80 CONTINUE

C
C
C TESTE PARA VERIFICAR SE PIVO E* NULO

IF(DABS(PIVO)-0.1)90,90,100
90 CONTINUE

C
C
C DETERMINANTE=0 - MATRIZ SINGULAR - RETORNO AO PROGRAMA PRINCIPAL

DET=0.0
WRITE(IMP,102)I
102 FORMAT(/,10X,'*** SINGULARITY IN THE MAIN MATRIX ***',13)
STOP
100 CONTINUE

C
C
C DIVISAO DA COLUNA POR (-PIVO)

DO 120 II=1,N
IF(II-K)110,120,110
110 C(II,K)=C(II,K)/(-PIVO)
120 CONTINUE

C
C
C REDUCAO DA MATRIZ

DO 160 II=1,N
IF(II-K)130,160,130
130 DO 150 J=1,N
IF(J-K)140,150,140
140 C(II,J)=C(II,K)*C(K,J)+C(II,J)
150 CONTINUE
160 CONTINUE

C
C
C DIVISAO DA LINHA PELO ELEMENTO PIVO

DO 180 J=1,N


```
      IF(J-K)170,180,170
170 C(K,J)=C(K,J)/PIVO
180 CONTINUE
C
C   PRCDUTO DOS PIVOS (=DETERMINATE)
C
C   DET=DET*PIVO
C
C   SUBSTITUICAO NA MATRIZ DO PIVO PELO SEU INVERSO
C
C   C(K,K)=1.0/PIVO
190 CONTINUE
C
C   TRCCA FINAL DAS LINHAS E COLUNAS
C
      K=N
200 K=K-1
      IF(K)270,270,210
210 CONTINUE
      II=L(K)
      IF(II-K)240,240,220
220 DO 230 J=1,N
      HELP=C(J,K)
      C(J,K)=-C(J,II)
230 C(J,II)=HELP
240 CONTINUE
      J=M(K)
      IF(J-K)200,200,250
250 DO 260 II=1,N
      HELP=C(K,II)
      C(K,II)=-C(J,II)
260 C(J,II)=HELP
      GO TO 200
270 RETURN
      END
```

CAPÍTULO V

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

5.1 - INTRODUÇÃO

O presente capítulo tem por objetivo apresentar alguns exemplos que tornam evidente ser o Método das Diferenças Finitas uma ótima opção no trato de problemas da elasticidade plana.

Os resultados são comparados com os obtidos com o Método dos Elementos Finitos e também com resultados analíticos. Os dois primeiros exemplos são problemas do estado plano de tensão, sendo que em um deles o comportamento da convegência é apresentado. Os dois últimos exemplos são problemas do estado plano de deformação.

5.2 - EXEMPLO Nº 1

Como primeiro exemplo de aplicação considere-se o problema da viga em balanço mostrado na figura 5.1. A viga em apreço, de dimensões 12 x 48cm e espessura unitária, é submetida a um carregamento tangencial com variação parabólica e resultante igual a 40kN. Considera-se módulo de elasticidade $E = 20000\text{kN/cm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. Esse exemplo foi abordado por BREBBIA [2] através do Método dos Elementos Finitos, com diferentes tipos de elementos, cujos resultados são comparados com resultados analíticos e agora compara-se com o Método das Diferenças Finitas descrito.

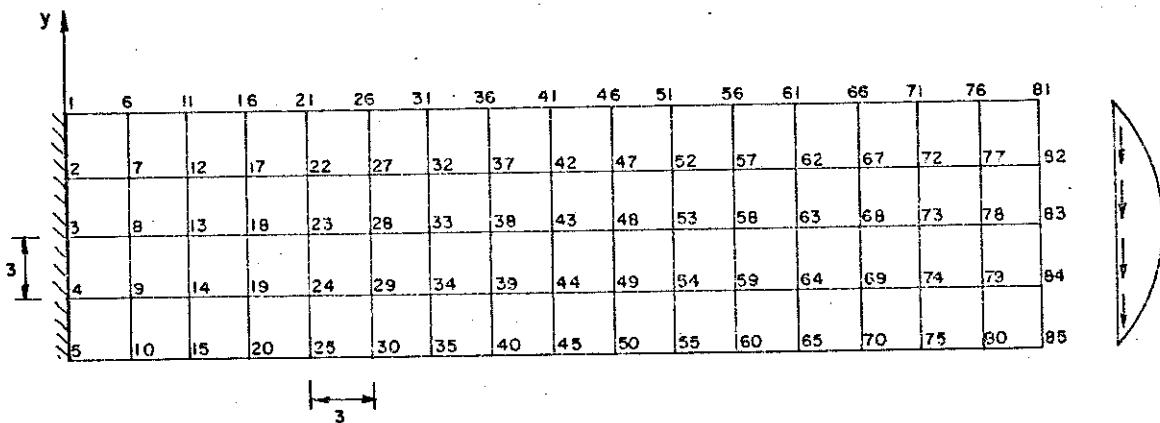


FIG. 5.1 - VIGA EM BALANÇO E MALHA.

Tabela 5.1 - Viga em balanço. Comparação entre o MDF e o MEF com a teoria de vigas.

	NÚMERO TOTAL DE INCÓGNITAS NODAIS	FLECHA NO PONTO 83 (cm)	TENSÕES σ_x (kN.cm ⁻²) EM $x = 12,$ $y = 12$
Triângulo de Deformação constante	160	-0,45834	51,225
	576	-0,51282	57,342
Triângulo de Deformação linear	160	-0,53259	59,145
	576	-0,53353	60,024
Triângulo de Deformação Quadrática	68	-0,53059	58,973
	214	-0,53259	59,843
Método das Diferenças Finitas	160 (Fig. 5.1)	-0,54302	59,873
TEORIA DE VIGAS		-0,53374	60,00

Um exame dos resultados encontrados nesse exemplo mostra que as Diferenças Finitas apresentam melhores resultados que o método requintado dos elementos finitos, e resultados tão bons quanto os obtidos com elementos mais aprimorados.

5.3 - EXEMPLO Nº 2

Como segundo exemplo de aplicação toma-se o problema de uma viga em balanço, submetida a um carregamento uniformemente distribuído de intensidade unitária. Considere-se módulo de elasticidade $E = 1$ e coeficiente de Poisson nulo $\nu = 0$. Este exemplo é abordado três vezes com, naturalmente, número de pontos diferentes, estudando-se o andamento da convergência. Na figura 5.2 exibe-se a estrutura com uma das discretizações consideradas. Os resultados encontrados, para as três discretizações, encontram-se anotados na tabela 5.2 em confronto com os fornecidos pela teoria técnica da flexão.

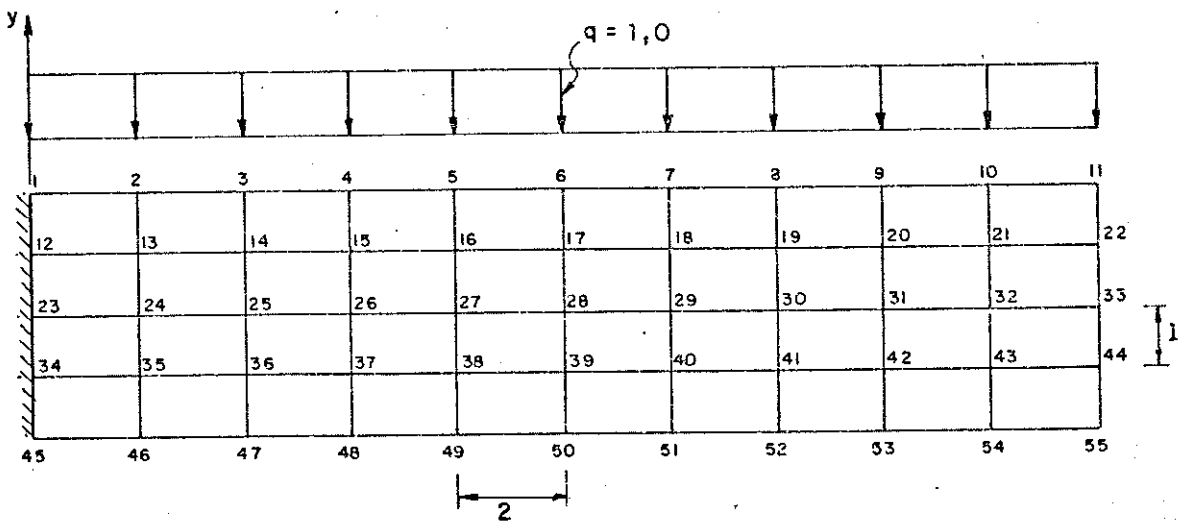


FIG. 5.2 - VIGA EM BALANÇO, CARREGAMENTO E MALHA.

Tabela 5.2 - Resultados do segundo exemplo comparados com a teoria técnica de flexão.

		NÚMERO TOTAL DE INCÓGNITAS NODAIS			
		100 (FIG. 5.2)	160	200	ANALÍTICA
TENSÃO σ_x	PONTO				
	6	17,97	18,38	18,92	18,75
	17	8,98	9,31	9,61	9,375
	28	$-0,4 \times 10^{-3}$	$-0,8 \times 10^{-4}$	$-0,9 \times 10^{-4}$	0,0
	39	-8,98	-9,31	-9,61	-9,375
	50	-17,96	-18,38	-18,92	-18,75
DESL. VERT.	33	-3.609,7	-3.902,2	-4.040,8	-3.750

Os resultados, também nesse exemplo, mostram - se satisfatórios, cabendo registrar o fato de que, no Método das Diferenças Finitas, a convergência é monotônica divergindo dos resultados exatos; o que é uma característica desse método já bastante conhecida.

5.4 - EXEMPLO Nº 3

Considere-se agora o caso do tubo de parede grossa sob pressão interna, BREBBIA [1]. Dada a simetria desse problema, somente um setor de 90° pode ser considerado. A geometria da estrutura em apreço, malha considerada e condições de contorno encontram-se ilustradas na figura 5.3.

O Módulo de Elasticidade Longitudinal é tomado unitário, o coeficiente de Poisson é suposto nulo, e unitária é também tomada a pressão interna. Os resultados obtidos são indicados na tabela 5.3.

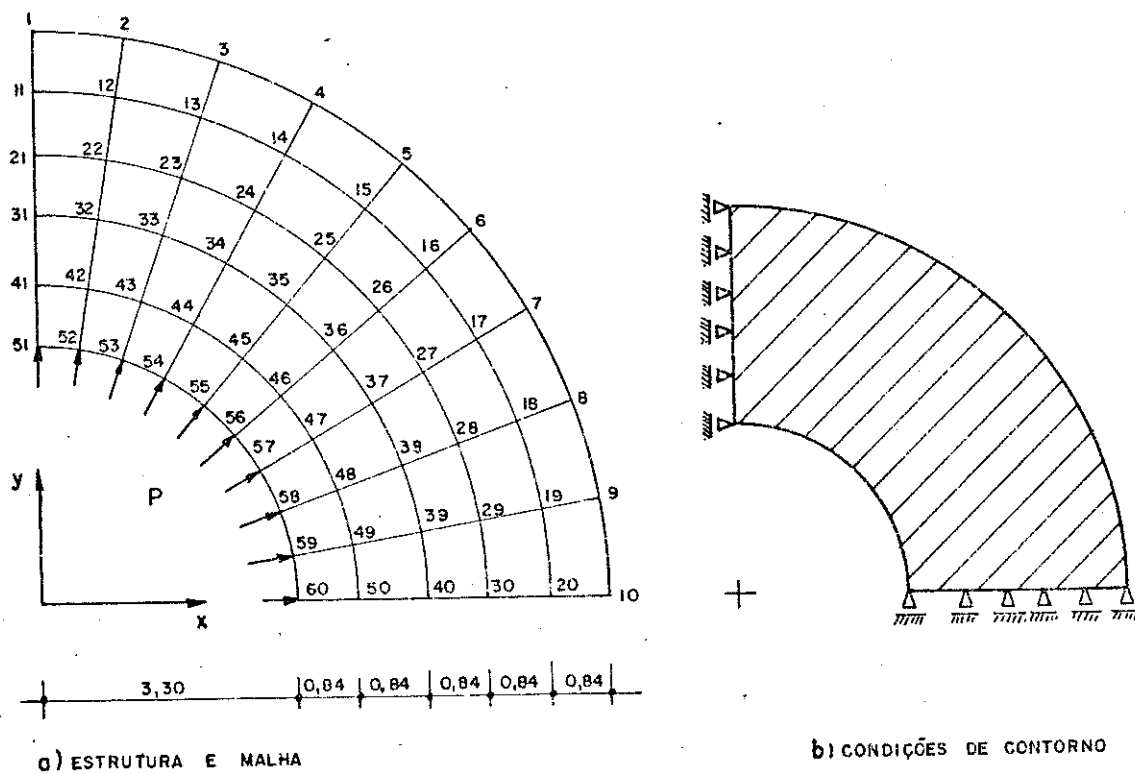


FIG. 5.3 - ESTRUTURA, MALHA E CONDIÇÕES DE CONTORNO.

Tabela 5.3 - Resultados do 3º exemplo

PONTO	σ_x	σ_x EXATO	σ_y	σ_y EXATO	τ_{xy}	τ_{xy} EXATO
5	0,358	0,281	0,252	0,198	-0,300	-0,236
15	0,380	0,293	0,285	0,187	-0,373	-0,299
25	0,400	0,301	0,254	0,171	-0,519	-0,393
35	0,323	0,335	0,110	0,146	-0,802	-0,536
45	0,459	0,377	0,224	0,103	-0,861	-0,776
55	0,493	0,455	0,014	0,025	-1,208	-1,221

Um exame dos resultados encontrados nesse exemplo mostra ocorrer razoável concordância com aqueles fornecidos pela solução analítica. Entende-se por resultados satisfatórios, na fase em que se encontra a pesquisa, não sendo ainda resultados plenamente confiáveis para outras indicações.

5.5 - EXEMPLO Nº 4

Considere-se finalmente o caso da barragem de concreto apoiada sobre base de rocha, conforme mostra a figura 5.4.

Esse exemplo foi abordado por FREITAS NETO [3] utilizando o Método dos Elementos Finitos, sendo empregado o elemento "C.S.T.G." (Constant Strain Triangle Global). O peso específico da água é de $1,0 \text{ tf/m}^3$ e o do concreto e da rocha são iguais, assumindo o valor de $2,5 \text{ tf/m}^3$. Os outros dados são os seguintes: Módulo de Elasticidade do concreto $E_c = 1,2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$, Módulo de Elasticidade de rocha $E_r = 0,5 E_c$, Coeficiente de Poisson do concreto $\nu_c = 0,2$, Coeficiente de Poisson da rocha $\nu_r = 0,25$.

A rede de malhas empregada está indicada na figura 5.4, diferente da discretização feita por FREITAS NETO [3].

No sentido de melhor confrontar os resultados o seguinte procedimento foi adotado: os resultados encontrados com o Método das Diferenças Finitas foram tomados considerando-se a média nos três pontos coincidentes com os nós do elemento, porquanto no Método dos Elementos Finitos os resultados em tensões e deformações são constantes ao nível do elemento. Os resultados assim considerados estão apontados na tabela 5.4.

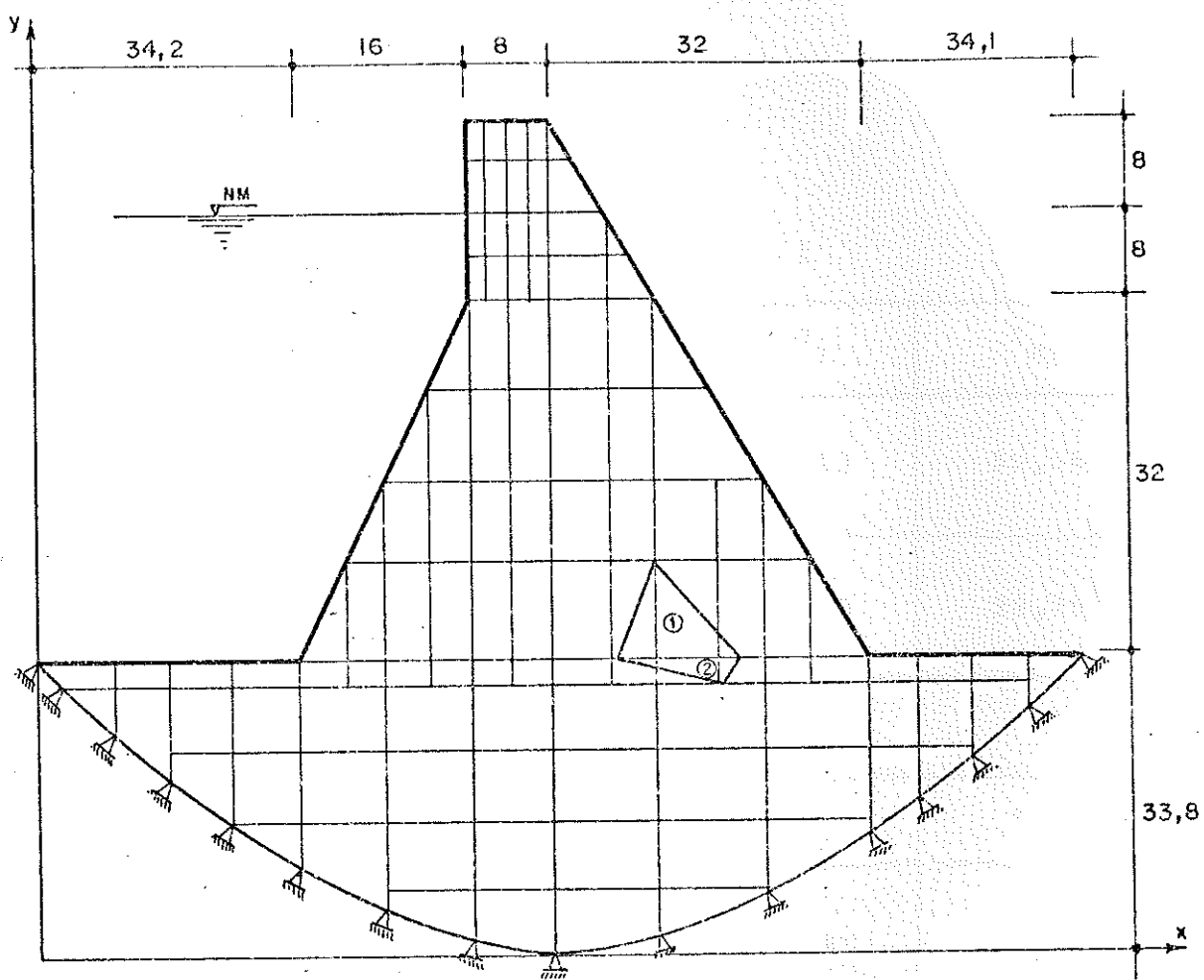


FIG. 5.4 - SEÇÃO DA BARRAGEM E MALHA. (unidade de comprimento: metro).

Tabela 5.4 - Resultados das tensões em dois elementos pelo MDF e MEF.

ELEMENTO 1

	σ_x	σ_y	τ_{xy}
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	-31,57	-60,13	30,56
MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	-23,57	-61,53	29,79

ELEMENTO 2

	σ_x	σ_y	τ_{xy}
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	-27,07	-55,81	19,65
MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	-28,54	-57,23	27,62

Os resultados, nesse exemplo de aplicação, são bastante compatíveis, excessão feita ao parâmetro σ_x no elemento 1 e τ_{xy} no elemento 2.

CAPÍTULO VI

OBSERVAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO

O Método das Diferenças Finitas na sua formulação clássica aborda apenas os casos de discretização de domínio, segundo rede de malhas regulares; assim o tratamento de problemas de contorno irregular apresenta enormes dificuldades. A formulação lagrangeana apresentada, contorna esse inconveniente pela possibilidade de consideração de malhas irregulares. Cumpre assinalar, entretanto, que, na formulação clássica, a ordem do erro apresenta forma explícita e na formulação lagrangeana em tela essa propriedade deixa de ocorrer.

É oportuno mencionar que as malhas regulares apresentam melhor precisão nas derivadas que no caso de malhas irregulares. Isto sugere que, para problemas envolvendo contorno irregular, lançar mão de malhas regulares no interior do domínio e malhas irregulares apenas ao longo do contorno constitui uma boa indicação.

Na abordagem de pontos situados no contorno, a vizinhança deve ser criteriosamente escolhida. Em primeiro lugar, tendo-se em vista que o primeiro vizinho passa a abrigar a origem do sistema local de referência, a escolha deve recair sobre um nó situado próximo do "centro de gravidade" dos nós envolvidos, procurando-se assim melhor condicionar a matriz $[C]$. Além disso a região de vizinhança deve contemplar um entorno mais ou menos equidistante.

Nos cantos angulosos do contorno a opção por nós auxiliares, um em cada uma das faces adjacentes, pode apresentar vantagens; embora implique num aumento do número de graus de liberdade.

Para finalizar, vale registrar que o Método das Diferenças Finitas mostra-se como uma boa opção para o tratamento de problemas da Elasticidade Plana. Os resultados alcançados são, por exemplo, comparáveis aos obtidos com o Método dos Elementos Finitos. Todavia, estudos mais requintados devem ainda serem dispensados no trato dos cantos angulosos e também no caso de descontinuidades bruscas de carregamento, geometria e vinculação, questões menos delicadas em outros métodos baseados em considerações médias (baseados no método dos resíduos ponderados).

BIBLIOGRAFIA

- 1 - BREBBIA, C.A. The boundary element method for engineers. London, Pentech Press, 1978. 189 p.
- 2 - BREBBIA, C.A. & CONNOR, J.J. Metodos de los elementos finitos en la ingenieria civil. Madrid, Edix, 1975. 235 p.
- 3 - FREITAS NETO, J.A. et alli Introdução ao Método dos elementos finitos. Sep. . Caderno de estruturas nº 5. 3.ed. Curitiba. Universidade Federal do Paraná. Departamento de Construção Civil, 1973. p. 109-117.
- 4 - GODOY, L.A. & BRUNA, R.A. Estrelas singulares en el metodo general de diferencias finitas para derivadas cuartas. Córdoba, Universidade Nacional de Córdoba Departamento de Estruturas, 1982. 22 p. (Informe técnico).

- 5 - KETTER, R.L. & PRAWEL Jr., S.P. Modern methods of engineering computation. New York, Mc Graw-Hill, 1969. 429 p.
- 6 - LAIER, J.E. Plane elasticity solution by finite difference arbitrary mesh operats. Report nº 2, Computational Mechanics Center, Southampton U.K., 1983.
- 7 - LAIER, J.E. & BARREIRO, J.C. Complementos de resistência dos materiais. São Carlos, EESC-USP, 1983. 208 p.
- 8 - LAIER, J.E. & CRUZIO, I.S.S. Emprego das diferenças finitas de malha irregular na elasticidade plana. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 5, Buenos Aires, 1982.
- 9 - PERRONE, N. & KAO, R. A general finite difference method for arbitrary meshes. Computer & Structures, 5 (1): 45-57, Apr. 1975.
- 10- SALVADORI, M.G. & BARON, M.L. Métodos numéricos in ingenieria. México, Compañia Editorial Continental, 1966. 260 p.
- 11- TIMOSHENKO, S.P., & GOODIER, J.N. Teoria da elasticidade. Rio de Janeiro, Guanabara dois, 1980. 545 p.