

**ANÁLISE NUMÉRICA DE
PLACAS ESCONSAS CONTÍNUAS**

Engº ISAÍAS VIZOTTO

Orientador: Prof. Dr. WALTER SAVASSI

**DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**



**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
ÁREA DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**ANÁLISE NUMÉRICA DE
PLACAS ESCONSAS CONTÍNUAS**

**DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**



ENGº ISAÍAS VIZOTTO

SÃO CARLOS, SETEMBRO DE 1987

ANÁLISE NUMÉRICA DE PLACAS ESCONSAS CONTÍNUAS

ENGº ISAIÁS VIZOTTO

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas"

Comissão Examinadora

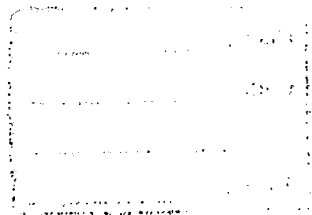
Prof. Dr. Walter Savassi

Prof. Dr. Mitsuo Tsutsumi

Prof. Dr. Antonio Marozzi Righetto

ORIENTADOR

PROF. DR. WALTER SAVASSI



Aos
meus pais,
e à Lirys.

AGRADECIMENTOS

As etapas deste trabalho foram se concretizando pelo apoio e incentivo de muitos. Em primeiro lugar agradeço a Deus pela oportunidade de ter alcançado mais este degrau na escalada do conhecimento. Aos meus familiares, que demonstraram um espírito de solidariedade neste empreendimento. Ao Professor Doutor Walter Savassi, pela orientação dinâmica e segura durante o desenvolvimento deste trabalho. Aos colegas de profissão, atuantes nos mais diversos segmentos da sociedade, pelas contribuições e sugestões apresentadas cordialmente durante as pesquisas.

À secretária Elisabete Miranda Gonçalves, pela eficiência e dedicação nos trabalhos de datilografia. À desenhista Dalva Maria Michel Ferrari, pela precisão e qualidade com que foram executados os desenhos.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), que possibilitou o desenvolvimento inicial do meu plano de mestrado através da concessão de Bolsa de Aperfeiçoamento.

Ao Centro de Processamento de Dados da Escola de Engenharia de São Carlos - USP, pela colaboração e atendimento recebidos na fase inicial das pesquisas.

Ao Centro de Computação da UNICAMP, pela utilização de seus equipamentos e serviços prestados na fase final deste trabalho.

RESUMO

O objetivo do presente trabalho é a análise de placas esconsas contínuas através da utilização do Método dos Elementos Finitos. É adotado o elemento finito T18, que pode ser empregado na resolução de quaisquer problemas de placas delgadas, elásticas e isotrópicas, mediante o processo dos deslocamentos.

É acrescentada à formulação desenvolvida por Bell [07], uma parte considerando novas opções de carregamentos e de condições de contorno. As redes de elementos finitos para as placas esconsas contínuas são geradas automaticamente.

É feita uma descrição dos programas principais e subrotinas, e também dos programas de geração automática das redes de elementos finitos.

São apresentados os pontos de solicitações mais importantes para as placas esconsas contínuas de dois e de três vãos. São mostrados os efeitos de vários carregamentos, e confrontados com os resultados obtidos por outros pesquisadores.

Finalmente, as listagens dos programas principais e subrotinas, e dos programas de geração automática das redes de elementos finitos são encontradas em apêndice. As versões dos programas apresentados foram desenvolvidas para um computador VAX-11, modelo 785.

ABSTRACT

The purpose of this work is to present the analysis of continuous skew plates with the use of the Finite Element Technique. The element T18 is adopted and it can be used in the solution of the problems involving thin elastic and isotropic plates with the displacement process.

It is added to the formulation introduced by Bell [07], a part taking into account new options of loadings and boundary conditions. The finite element meshes for the continuous skew plates are generated automatically.

It is shown a description of the main code and subroutines, and also of the programs of automatic generation of the finite element meshes.

The points of most important actions are shown for the continuous skew plates of two and three spans. The effects of various loadings are shown and compared to the results obtained by other authors.

Finally, the computer printouts of the main code, of subroutines and of the programs for the automatic generation of the finite element meshes are added to the appendix. The program shown were run into a VAX-11, model 785 computer.

LISTA DE NOTAÇÕES

As variáveis utilizadas no texto são definidas quando da exposição dos assuntos; e além disso, geralmente é empregada uma notação para certas grandezas que são comuns em textos clássicos conhecidos nesta área do conhecimento.

Portanto, a seguir são definidos alguns símbolos que são utilizados neste trabalho:

- $\left[\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right]$ - matriz quadrada ou retangular;
- $\left[\begin{array}{c} | \\ - - - | - - - \\ | \end{array} \right]$ - partição da matriz;
- t - como expoente indica transposta da matriz base;
- \underline{v} - letras com o símbolo "til" na base são utilizadas para indicar matrizes;
- -1 - como expoente indica matriz inversa;
- w - representa a deflexão perpendicular ao plano médio da placa;
- $w_{,x}$ - representa a derivada parcial de w em relação a \underline{x} ;
- $w_{,y}$ - representa a derivada parcial de w em relação a \underline{y} ;
- $w_{,xx}$ - representa a segunda derivada parcial de w em relação a \underline{x} ;
- $w_{,xy}$ - representa a derivada parcial de w em relação a \underline{x} e \underline{y} ;
- $w_{,yy}$ - representa a segunda derivada parcial de w em relação a \underline{y} ;

- $\underline{\sigma}$ - matriz das componentes de tensão;
- $\underline{\epsilon}$ - matriz das componentes de deformação;
- [B] - indica a referência bibliográfica B;
- \int_S - integral de área;
- \int_V - integral de volume.

Obs.: As derivadas parciais também aparecem no texto em relação aos parâmetros t e n. Não são apresentadas aqui, pois são idênticas às definições para as derivadas em relação a x e y.

SUMÁRIO

I - INTRODUÇÃO.....	1
II - O METODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO AS PLACAS ESCONSAS CONTÍNUAS	6
II.1 - Placas Esconsas Contínuas	6
II.2 - Princípio da Mínima Energia Potencial Total - Aplicação à Teoria das Placas Delgadas, Elástico-Isótropas	9
II.2.1 - O princípio da mínima energia potencial total	9
II.2.2 - Princípios básicos da teoria das placas delgadas, elástico-isótropas submetidas à flexão	12
II.3 - O Elemento Finito Triangular T18 Para Flexão de Placas Delgadas	15
II.3.1 - A variação da funcional π_p	15
II.3.2 - O elemento finito triangular T21 para flexão de placas delgadas	19
II.3.2.1 - Matriz de rigidez generalizada \underline{K}_q e matriz de rigidez \underline{K}	22
II.3.2.2 - Cargas nodais equivalentes	23
II.3.2.3 - Integração das funções utilizadas	25
II.3.2.3.1 - Integração de funções monomiais utilizando coordenadas homogêneas em domínios triangulares planos	26
II.3.2.3.2 - Integração de funções monomiais utilizando coordenadas locais em domínios poligonais planos	30
II.3.2.4 - Determinação da matriz de rigidez generalizada \underline{K}_q	31

II.3.2.5 - Determinação dos vetores de cargas nodais equivalentes $S(21)$	36
II.3.2.5.1 - Carregamento distribuído com variação linear aplicado sobre todo o domínio do elemento finito	37
II.3.2.5.2 - Carregamento uniformemente distribuído aplicado sobre parte do domínio do elemento finito	39
II.3.2.5.3 - Carga concentrada aplicada no domínio do elemento finito	42
II.3.2.6 - Considerações sobre os sinais das derivadas normais aos lados do elemento finito	43
II.3.3 - Transformação do elemento finito triangular T21 para o elemento finito triangular T18	49
II.3.4 - Condições de contorno	57
II.3.4.1 - Condições de contorno para apoios simples	57
II.3.4.1.1 - Bordas simplesmente apoiadas	57
II.3.4.1.2 - Apoios simples intermediários	58
II.3.4.2 - Condições de contorno para bordas engastadas	58
II.3.4.3 - Condições de contorno para bordas livres	59
II.3.4.4 - Rotação de eixos para imposição de condições de contorno	62
II.3.4.5 - Condições de contorno para pontos nodais pertencentes, simultaneamente, à borda livre e a um apoio intermediário inclinado	64
II.3.5 - Determinação dos momentos fletores e volvente	65
II.3.6 - Determinação das reações de apoio	67

III - PROGRAMAS PARA GERAÇÃO AUTOMÁTICA DAS REDES DE ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS ESCONSAS CONTÍNUAS	69
III.1 - Tipos de Estruturas Geradas	69
III.1.1 - Nomenclatura utilizada	71
III.2 - Programas Prê-processadores para Geração Automática de Dados	71
III.2.1 - Geração automática de redes regulares de elementos finitos	72
III.2.2 - Descrição dos programas	79
IV - ESTRUTURAÇÃO DOS PROGRAMAS PRINCIPAIS E DESCRIÇÃO SUMÁRIA DAS SUBROTINAS	86
IV.1 - Programas Principais e Subrotinas	86
IV.2 - Arquivos de Dados	97
IV.2.1 - Arquivo de dados "DADOS1."	97
IV.2.2 - Arquivo de dados "DADOS2."	102
IV.2.3 - Arquivo de dados "DADOS3."	103
V - RESULTADOS OBTIDOS	105
V.1 - Placas Esconsas Contínuas Analisadas	106
V.2 - Placas Esconsas Contínuas Sob a Ação de Carga Uniformemente Distribuída	107
V.3 - Placas Esconsas Contínuas Sob a Ação de Carga Móvel.	117
V.3.1 - Carga móvel em ponte rodoviária	117
V.3.2 - Envoltórias de esforços solicitantes devidos à carga móvel	119
VI - CONSIDERAÇÕES FINAIS	163
APÊNDICE 1 - INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES MONOMIAIS EM DOMÍNIOS POLIGONAIS PLANOS	167
APÊNDICE 2 - LISTAGENS DOS PROGRAMAS	177

2.1 - Programas Processadores Principais Para Resolução de Placas Delgadas, Elástico-Isótropas Submetidas à Flexão (Método dos Elementos Finitos)	178
2.2 - Programa Prê-processador Para Geração Automática das Redes de Elementos Finitos Com Maior Discretização na Borda (GERB)	224
2.3 - Programa Prê-processador Para Geração Automática das Redes de Elementos Finitos Com Maior Discretização no Centro (GERC)	236

BIBLIOGRAFIA	249
---------------------------	-----

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

No início deste século, as pontes e viadutos esconsos eram desconhecidos quase que completamente. Pontes e viadutos esconsos são aqueles em que a transposição de obstáculos (naturais ou artificiais) à continuidade do leito normal de uma via é feita em ângulo diferente de 90° . Pontes e viadutos esconsos contínuos são pontes e viadutos esconsos com mais de um vão. Em casos excepcionais, quando as pontes esconsas eram a melhor solução para algum projeto, elas eram analisadas através de métodos utilizados para se projetar pontes retangulares. As primeiras pontes esconsas que foram projetadas com o emprego de métodos mais apropriados foram construídas na década de 1930.

Depois da segunda grande guerra, com a reconstrução das pontes destruídas, e com a construção de novas pontes para atender o aumento da demanda de tráfego rodoviário, os projetos de pontes esconsas têm sido cada vez mais executados por razões econômicas e arquitetônicas. São possível dominar economicamente estas novas tarefas adotando-se novos métodos de projeto. Além das investigações experimentais, esse processo foi substancialmente incrementado pelo emprego de computadores eletrônicos.

No caso de placas esconsas contínuas, o grau de dificuldade para se analisar e projetar estruturas deste tipo é considerável, pois é grande o número de parâmetros variáveis envolvidos no problema. Contudo, existem atualmente métodos numéricos que tornam possível o estudo mais profundo e minucioso das estruturas em geral. Um dos métodos mais difundidos é o Método dos Elementos Finitos, que é empregado neste trabalho para o estudo de placas esconsas contínuas de dois e de três vãos.

Na obra de Schleicher e Wegener [13] é feito um levantamento bibliográfico de trabalhos e obras publicadas sobre placas esconsas. Nesse levantamento são relacionados os pesquisadores e os respectivos trabalhos, indicando os métodos de pesquisas, modelos utilizados e resultados obtidos. As informações apresentadas por Schleicher e Wegener são ricas em detalhes, e merecem atenção especial e cuidadosa por parte dos pesquisadores que pro

curam conhecer o comportamento de placas esconsas, contínuas ou não; além disto, a bibliografia apresentada é abrangente e muito importante para ser utilizada como subsídio no estudo desta área do conhecimento.

Os objetivos iniciais deste trabalho foram alterados em função da ocorrência de vários problemas que impediram o andamento esperado das pesquisas. Inicialmente o plano de pesquisa tinha como principal objetivo a composição de tabelas que, a exemplo do trabalho de Rüsck [11], fornecessem dados para o cálculo de esforços solicitantes para os principais pontos de solicitação de placas esconsas contínuas de dois e de três vãos para uso em pontes e viadutos rodoviários; e para tanto seriam consideradas as cargas devidas ao trem-tipo rodoviário completo e ao peso próprio das estruturas.

Um dos problemas foi a mudança de computadores durante o trabalho. Inicialmente foi utilizado um computador IBM-370, com 1 Mbyte de memória central. Enquanto era utilizado este computador foi mudado o sistema operacional, e foi necessário se fazer as adaptações necessárias para os programas serem processados no novo sistema. Depois foi utilizado um computador PDP-10 da Digital, também com 1 Mbyte de memória central. E finalmente, o computador foi mais uma vez substituído por um VAX-11, modelo 785, com 4 Mbytes de memória central. Para todas estas mudanças foram necessárias várias adaptações dos programas elaborados em linguagem de programação FORTRAN. As mudanças de um computador para outro demandavam um período de tempo razoável, pois além das adaptações dos programas, muitas vezes ocorriam problemas na fase de utilização inicial dos equipamentos que ainda estavam sendo testados pelos centros de processamento.

Um outro problema era a geração dos arquivos de dados para cada processamento. Como no início a formulação até então desenvolvida para o elemento finito utilizado neste trabalho só permitia se considerar cargas distribuídas com variação linear sobre todo o domínio do elemento, e cargas concentradas aplicadas diretamente sobre os pontos nodais da rede de elementos finitos da estrutura, para todo o carregamento que não satisfazia estas condições era necessário se gerar outra rede. Como um dos objetivos do trabalho era se estudar os efeitos do trem-tipo rodoviário sobre o comportamento de placas esconsas contínuas, para cada po-

sição do trem-tipo era necessário gerar nova rede de elementos finitos, uma vez que as distâncias entre os eixos e entre as rodas do veículo são padronizadas, impossibilitando o posicionamento devido das cargas distribuídas sobre todo o domínio de cada um dos elementos carregados, e das cargas concentradas sobre os pontos nodais da rede. Este problema foi resolvido com a implementação da possibilidade de se considerar elementos com carga uniformemente distribuída sobre parte dos seus domínios, e também a aplicação de cargas concentradas em quaisquer pontos dos domínios dos elementos finitos. Assim foi possível se gerar automaticamente redes de formas regulares através de programas pré-processadores, fazendo com que o tempo de formação dos arquivos de dados se reduzisse consideravelmente.

Outro problema era o tempo de processamento necessário para cada caso. No IBM-370 e no PDP-10, o processamento de um exemplo de carregamento ocorria em torno de uma hora e meia, e o mesmo exemplo no VAX-11 levava em média dez minutos de processamento (este equipamento foi utilizado na fase final do trabalho). Os exemplos processados sempre apresentavam de 390 a 800 elementos finitos e, conseqüentemente, para cada exemplo os arquivos de dados continham um volume expressivo de informação.

No Capítulo II, são inicialmente apresentadas várias considerações sobre o comportamento estrutural de placas esconsas contínuas em geral.

É abordado também o princípio da mínima energia potencial total aplicado à teoria das placas delgadas, elástico-isótropas submetidas à flexão; esta teoria é apresentada de maneira concisa para a resolução de problemas através do Método dos Elementos Finitos. Placas delgadas são elementos estruturais, simétricos em relação a um plano médio, que apresentam a relação máxima entre a espessura e o vão compreendida entre os valores da ordem de 1/100 a 1/5. A formulação empregada utiliza o processo dos deslocamentos para a análise de problemas relativos à solução de placas submetidas à flexão; neste processo impõe-se diretamente certas condições reduzidas de compatibilidade, para, conseqüentemente, serem estabelecidas as condições de equilíbrio.

É utilizado o elemento finito T18 para flexão de placas delgadas. O elemento finito T18 é um elemento triangular com 18 graus de liberdade, sendo 6 graus de liberdade por ponto nodal

situado em cada v \acute{e} rtice. \acute{E} um elemento obtido a partir do elemento triangular T21, com 21 graus de liberdade. Para o elemento T21, \acute{e} adotada uma fun \tilde{c} o interpoladora que expressa a deflexo $w(x, y)$ por um polin \acute{o} mio completo do 5 $^{\circ}$ grau em x e y relacionado com par \acute{a} metros generalizados. Estes par \acute{a} metros generalizados s \tilde{a} o substitu \acute{i} dos por par \acute{a} metros denominados inc \acute{o} gnitas nodais referentes aos 6 pontos nodais do elemento T21, sendo 3 pontos nodais nos v \acute{e} r tices e 3 nos pontos m \acute{e} dios dos lados do tri \acute{a} ngulo. Ao se fazer uma condensao geom \acute{e} trica \acute{e} obtido o elemento T18. Os dom \acute{i} nios repre sentados pelas placas podem ser divididos em subdom \acute{i} nios denomina dos elementos finitos, aos quais \acute{e} associada uma fun \tilde{c} o (que no ca so \acute{e} uma fun \tilde{c} o deslocamento) que representa a aproximao adota da para as varia \tilde{c} oes dos deslocamentos procurados.

Com a minimizao do funcional correpondente \tilde{a} e nergia de deformao total da estrutura, que \acute{e} expresso em termos dos deslocamentos procurados, \acute{e} determinado o estado de desloca mentos que soluciona o problema de maneira aproximada.

No Cap \acute{i} tulo III s \tilde{a} o abordados os dois tipos de redes de elementos finitos geradas automaticamente para as placas esconsas cont \acute{i} nuas de dois e tr \acute{e} s v \tilde{a} os. S \tilde{a} o descritas as vari \tilde{a} veis que fa zem parte dos programas geradores, chamados de programas pr \acute{e} -processadores.

No Cap \acute{i} tulo IV \acute{e} apresentada a estruturaao dos pro gramas principais e a descriao sum \acute{a} ria das subrotinas que comp \acute{o} em o Programa Geral para resoluo de placas delgadas, el \acute{a} stico-is \acute{o} tropas pelo M \acute{e} todo dos Elementos Finitos. S \tilde{a} o apresentados um organogra ma do Programa Geral e fluxogramas simplificados para os programas principais. S \tilde{a} o feitas refer \acute{e} ncias tamb \acute{e} m aos arquivos de dados a cessados pelo Programa Geral, com especificaoes quanto \tilde{a} quanti dade, o formato e o conte \tilde{u} do de cada tipo de registro.

No Cap \acute{i} tulo V s \tilde{a} o apresentados e analisados os re sultados obtidos para as placas esconsas cont \acute{i} nuas de dois e de tr \acute{e} s v \tilde{a} os, com a fixao de alguns par \acute{a} metros, como a relao en tre a largura da placa e o comprimento do primeiro v \tilde{a} o, a relao entre os v \tilde{a} os e o \acute{a} ngulo de esconsidade. \acute{E} apresentado um estudo so bre uma placa esconsa cont \acute{i} nua de dois v \tilde{a} os, com um \acute{a} ngulo de es considade de 45 $^{\circ}$, sob a ao de carga uniformemente distribu \acute{i} da. Tamb \acute{e} m s \tilde{a} o analisados os resultados para placas esconsas cont \acute{i} nuas de dois e de tr \acute{e} s v \tilde{a} os, sob a ao das cargas concentradas do trem -tipo rodovi \acute{a} rio (classe 45). S \tilde{a} o indicados os principais pontos

das placas esconsas contínuas (pontos mais solicitados) a serem considerados para o dimensionamento. É feita uma descrição do procedimento para obtenção das envoltórias de esforços solicitantes, devidos à carga móvel (cargas concentradas do veículo-tipo) nas regiões mais solicitadas das placas. Os valores dos esforços solicitantes para os pontos mais solicitados das placas são comparados com os valores obtidos por outros pesquisadores.

Neste trabalho não é considerado o efeito dinâmico das cargas sobre as estruturas, e nem o efeito da carga distribuída do trem-tipo; somente é considerado o efeito das cargas concentradas do trem-tipo rodoviário. Para se considerar o efeito dinâmico das cargas no dimensionamento de pontes e viadutos, a norma referente ao assunto determina que as cargas móveis que agem sobre as estruturas devem ser multiplicadas por um fator denominado coeficiente de impacto. A origem do coeficiente de impacto provém de várias causas, todas elas associadas à natureza dinâmica das solicitações impostas pelas cargas móveis.

No Capítulo VI são feitas considerações finais sobre o trabalho desenvolvido, e apresentadas algumas sugestões para aqueles que têm interesse no assunto.

No Apêndice 1 encontra-se a dedução da fórmula para cálculo de integrais de funções monomiais em domínios poligonais planos, e que é utilizada neste trabalho.

No Apêndice 2 são apresentadas as listagens dos programas processadores principais e subrotinas que compõem o Programa Geral que utiliza o Método dos Elementos Finitos, com o emprego do elemento finito T18, para a resolução de placas delgadas, elástico-isótropas submetidas à flexão. São apresentadas também as listagens dos programas pré-processadores para a geração automática de redes das placas esconsas contínuas de dois e de três vãos consideradas neste trabalho. As versões apresentadas foram desenvolvidas em linguagem de programação FORTRAN 77 para o computador VAX-11, modelo 785, com 4 Mbytes de memória central e 2,7 Gbytes de memória auxiliar.

CAPÍTULO II

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO À PLACAS ESCONSAS CONTÍNUAS

II.1 - Placas Esconsas Contínuas

Algumas observações, consideradas importantes, são feitas em função de resultados obtidos de estudos e experimentações referentes ao comportamento estrutural de placas esconsas contínuas (maiores detalhes sobre o assunto podem ser encontrados no trabalho de Schleicher e Wegener [13], onde é feito um levantamento histórico e bibliográfico da pesquisa de placas esconsas).

As placas esconsas contínuas consideradas são compostas por dois ou três vãos, sendo que apresentam bordas livres no sentido longitudinal, e apoios simples contínuos bilaterais no sentido transversal (vide figura II.1)

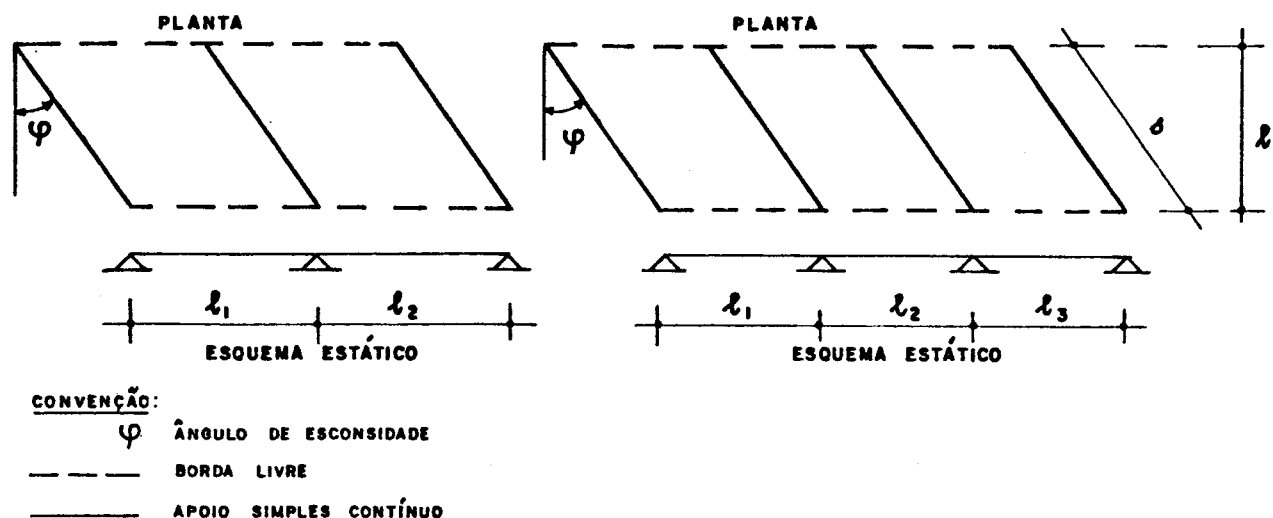


FIG. II.1- PLACAS ESCONSAS CONTÍNUAS

É verificado para uma placa esconsa, contínua de três vãos, que os efeitos de um carregamento que atua no terceiro vão são pequenos e têm pouca influência sobre o comportamento estrutural do primeiro vão. Sendo assim, as placas esconsas contínuas com mais de três vãos podem ser analisadas como uma placa de três vãos, com diferenças desprezíveis nos resultados. Portanto,

em função desta constatação, somente as placas esconsas contínuas de dois e três vãos são objetos de estudo, extrapolando-se as observações obtidas nestes casos para placas com mais de três vãos.

Em placas esconsas contínuas os momentos diminuem com o aumento da esconsidade. Para placas pouco esconsas ($\phi \approx 20^\circ$), ocorre um incremento substancial dos momentos nas regiões dos cantos de ângulo agudo, que podem superar cerca de 30% do valor dos momentos obtidos para placas contínuas retangulares. Aumentando-se a esconsidade, quando $\phi \approx 40^\circ$, são atingidos novamente os valores dos momentos para placas contínuas retangulares e, a partir deste ponto os momentos começam a diminuir.

Considerando-se as seções longitudinais das placas esconsas contínuas, observa-se que os diagramas de momentos ao longo destas seções tem um comportamento diferente dos diagramas típicos de momentos de vigas contínuas, particularmente ao longo das bordas livres. Com o aumento da esconsidade, os momentos máximos do vão tendem para as regiões dos cantos de ângulo obtuso. Nas regiões dos cantos de ângulo agudo, os momentos negativos se estendem para a parte central da placa; nestas regiões, praticamente são ocorrem momentos negativos. Observa-se também, que quanto maior é a esconsidade, menor é o efeito da continuidade no comportamento estrutural das placas.

Para placas de pequena esconsidade, a magnitude dos momentos depende principalmente das relações entre os vãos; para placas de grande esconsidade ($\phi \approx 60^\circ \dots 70^\circ$), a relação entre a largura e os vãos é predominante na caracterização do andamento dos momentos.

A distribuição dos momentos negativos sobre a linha de suporte, ao longo do apoio contínuo intermediário das placas esconsas contínuas, é complicada. Nas placas contínuas retangulares, os valores dos momentos máximos negativos ocorrem na parte central do apoio contínuo intermediário. Em placas esconsas contínuas, os valores dos momentos máximos negativos ocorrem nas partes externas do apoio contínuo intermediário, e se tornarão mais pronunciados com o aumento da esconsidade. Uma região de contra-curvatura aparece nos diagramas de momentos negativos na parte central do apoio intermediário de placas esconsas contínuas, e esta contra-curvatura se tornará mais marcante à medida em que as placas se tornam mais largas. O valor do momento máximo negativo

que ocorre no extremo do apoio contínuo intermediário, e que ao mesmo tempo é um ponto pertencente à borda livre da placa, é o momento máximo absoluto de toda a placa e, portanto, decisivo para o projeto e o dimensionamento da mesma.

Placas esconsas contínuas estreitas apresentam maiores valores para os momentos que as placas largas devido ao maior vão efetivo, que é o comprimento do vão na projeção da direção de transmissão da carga. As direções principais dos momentos fletores (direção das trajetórias) na parte central dos vãos das placas esconsas contínuas dependem muito da relação entre a largura e o vão; para as regiões das bordas livres, a relação entre a largura e o vão é de pouca importância.

Os momentos máximos positivos que ocorrem no vão das placas esconsas contínuas seguem linhas onduladas em forma de "S", com as partes convexas das curvas voltadas para as regiões dos cantos de ângulo agudo. Com o aumento da relação entre a largura e o vão, as seções transversais a essa linha de momentos máximos positivos aumentam de inclinação nos extremos dos vãos; no meio do vão, essas seções transversais se mantêm praticamente com a mesma inclinação.

É insignificante a influência de diferentes valores adotados para o coeficiente de Poisson (ν) no comportamento estrutural de placas esconsas contínuas. Valores máximos de momentos obtidos com $\nu = 0,3$ são aproximadamente 5% maiores que os valores máximos obtidos com $\nu = 0,1$; com um desvio de $2^\circ \dots 3^\circ$ nas direções dos momentos principais. Conforme é indicado por Schleicher e Wegener [13], o coeficiente de Poisson adotado para este trabalho é $\nu = 0,2$ como sendo o mais recomendado para pontes de concreto armado e protendido.

Para as placas esconsas contínuas sob a ação de cargas acidentais, a relação entre os momentos dos apoios e os momentos dos vãos é mais favorável que sob a ação somente do peso próprio. Dependendo da posição da carga acidental, as direções das tensões principais devidas à ação das cargas permanente e acidentais diferem um pouco das direções obtidas somente com a ação da carga permanente. Como as cargas acidentais agem de maneira intermitente, a armadura poderá ser projetada de acordo com a direção principal de transmissão de carga devido à carga permanente [13].

II.2 - Princípio da Mínima Energia Potencial Total - Aplicação à Teoria das Placas Delgadas, Elástico-Isótropas

II.2.1 - O princípio da mínima energia potencial total

A energia potencial total de um corpo pode ser descrita por:

$$\pi_p = U + \Omega \quad \dots\dots(II.1)$$

sendo que U representa a energia de deformação, e Ω o potencial das cargas externas e das forças de massa atuantes sobre esse corpo. Pode-se expressar a energia de deformação por:

$$U = \int_V W \, dV \quad \dots\dots(II.2)$$

onde W é a energia de deformação específica (vide figura II.2).

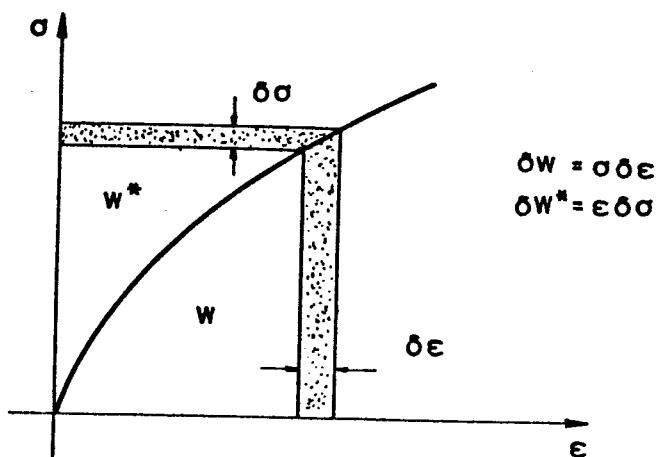


FIG. II.2 - ENERGIAS DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA E DE DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA COMPLEMENTAR

Considerando um material elástico linear, a energia de deformação específica é representada por:

$$W = \frac{1}{2} \sigma \epsilon \quad \dots\dots(II.3)$$

sendo que:

$$\underline{\sigma}^t = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx}] \quad \dots\dots(II.4)$$

e

$$\underline{\epsilon}^t = [\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ \epsilon_{xy} \ \epsilon_{yz} \ \epsilon_{zx}] \quad \dots\dots(II.5)$$

e, ao se substituir (II.3) em (II.2), tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma}^t \underline{\epsilon} \, dV \quad \dots\dots(II.6)$$

O potencial das cargas externas, e das forças de massa atuantes sobre o corpo \bar{e} expresso por:

$$\Omega = - \int_{S_\sigma} \underline{\phi}^t \underline{u} \, dS - \int_V \underline{\chi}^t \underline{u} \, dV \quad \dots\dots(II.7)$$

onde:

$$\underline{\phi}^t = [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z] \quad \dots\dots(II.8)$$

representa o vetor das componentes das cargas externas;

$$\underline{\chi}^t = [\chi_x \ \chi_y \ \chi_z] \quad \dots\dots(II.9)$$

o vetor das componentes das forças volumétricas, e

$$\underline{u}^t = [u \ v \ w] \quad \dots\dots(II.10)$$

o vetor das componentes dos deslocamentos. Estas componentes são referidas a um sistema de eixos cartesianos tri-ortogonais (X, Y, Z).

Pelo princípio da mínima energia potencial, sabe-se que o funcional correspondente à energia potencial de deforma

ção total da estrutura (π_p) passa por um extremo no equilíbrio e que, dentre todas as funções deslocamentos admissíveis, a correta é a que torna nula a variação do funcional. Portanto, dentre todos os deslocamentos admissíveis, o correto é aquele que minimiza o funcional π_p . Matematicamente, este princípio é expresso por:

$$\delta\pi_p = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma}^t \delta\underline{\varepsilon} dV - \int_{S_\sigma} \underline{\phi}^t \delta\underline{u} dS - \int_V \underline{\chi}^t \delta\underline{u} dV \dots\dots(II.11)$$

A solução do problema é procurada aplicando-se o cálculo variacional, após a introdução das relações entre $\underline{\sigma}$, $\underline{\varepsilon}$ e \underline{u} . Como a solução exata muitas vezes não é facilmente encontrada, recorre-se à solução numérica aproximada utilizando, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos. É possível demonstrar que para uma única força concentrada o deslocamento obtido com o método aproximado é menor que o correspondente à resposta exata do problema.

Se as forças que atuam sobre a superfície do corpo são independentes do deslocamento, e o material é elástico linear ($\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\varepsilon}$), a segunda variação do funcional π_p se reduz a:

$$\delta^2\pi_p = \delta^2U = \int_V \delta\underline{\sigma}^t \delta\underline{\varepsilon} dV \dots\dots(II.12)$$

ou

$$\delta^2\pi_p = \int_V \delta\underline{\varepsilon}^t \underline{E} \delta\underline{\varepsilon} dV \dots\dots(II.13)$$

Como para um material estável a matriz \underline{E} é positiva definida, tem-se que:

$$\delta^2\pi_p > 0 \dots\dots(II.14)$$

o que corresponde a uma situação de mínimo relativo para o valor de π_p .

Portanto, a energia potencial correpondente a um campo de deslocamentos aproximados, e que satisfazem as condições de contorno do problema, é maior que a energia potencial correpondente à função dos deslocamentos exatós. Conclui-se então, que a solução aproximada constitui um limite inferior para o deslocamento procurado, pois é menor que o deslocamento real.

II.2.2 - Princípios básicos da teoria das placas delgadas elástico-isótropas submetidas à flexão

Considerando-se as placas delgadas elástico-isótropas, é necessário expressar de forma adequada o funcional π_p , correspondente a essas estruturas, para se obter a solução aproximada mediante a minimização do referido funcional. Assim, para a obtenção da expressão da energia de deformação, será considerada uma placa de espessura constante h ; todas as considerações feitas e os parâmetros variáveis são referentes ao plano médio da mesma (vide figura II.3).

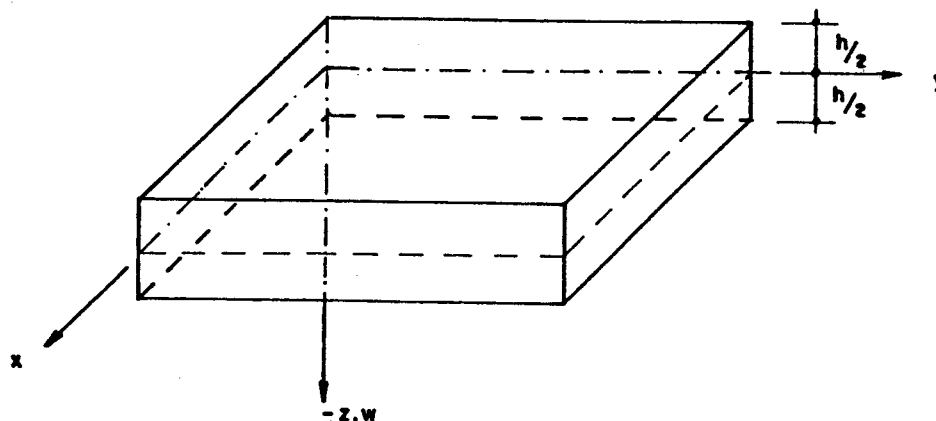


FIG. II. 3 - PLANO MÉDIO DE REFERÊNCIA DA PLACA

Para as placas, a expressão (II.6) pode ser escrita como:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \left[\int_{-h/2}^{+h/2} \underline{\sigma}^t \underline{\varepsilon} dz \right] dS \quad \dots\dots(II.15)$$

mas:

$$\underline{\sigma}^t = \left[\frac{-Ez}{(1-\nu^2)} (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \quad \frac{-Ez}{(1-\nu^2)} (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \quad \frac{-Ez}{(1+\nu)} w_{,xy} \right] \dots\dots (II.16)$$

e

$$\underline{\varepsilon}^t = [-zw_{,xx} \quad -zw_{,yy} \quad -2zw_{,xy}] \dots\dots (II.17)$$

Portanto, substituindo-se (II.16) e (II.17) em (II.15), e integrando-se em relação a z, obtêm-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \left[\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2\nu w_{,xx} w_{,yy}) + \frac{2E(1-\nu)h^3}{12(1-\nu^2)} w_{,xy}^2 \right] dS \dots\dots (II.18)$$

mas:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \dots\dots (II.19)$$

e, ao se substituir em (II.18) os termos correspondentes a (II.19), e com rearranjos dos termos, tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \left\{ \left[D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) w_{,xx} \right] + \left[D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) w_{,yy} \right] + \left[(1-\nu) D w_{,xy}^2 \right] \right\} dS \dots\dots (II.20)$$

mas

$$M_x = - D(w_{,xx} + \nu w_{,yy})$$

$$M_y = - D(w_{,yy} + \nu w_{,xx})$$

$$M_{xy} = - (1 - \nu) D w_{,xy} \quad \dots\dots(II.21)$$

e, ao se introduzir (II.21) em (II.20), tem-se:

$$U = \frac{-1}{2} \int_S \left[(M_x w_{,xx}) + (M_y w_{,yy}) + (M_{xy} 2w_{,xy}) \right] dS \quad \dots(II.22)$$

ou, em forma matricial:

$$U = \frac{-1}{2} \int_S \underline{m}^t \underline{c} \, dS \quad \dots\dots(II.23)$$

onde:

$$\underline{m}^t = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}] \quad \dots\dots(II.24)$$

representa o vetor momento e

$$\underline{c}^t = [w_{,xx} \quad w_{,yy} \quad 2w_{,xy}] \quad \dots\dots(II.25)$$

representa o vetor das curvaturas.

Supondo a placa solicitada por um carregamento distribuído $p(x, y)$, o potencial das cargas externas \bar{e} expresso por:

$$- \int_{S_\sigma} \underline{\phi}^t \underline{u} \, dS = - \int_{S_\sigma} p(x, y) w(x, y) \, dS \quad \dots(II.26)$$

O peso próprio da estrutura, que seria neste trabalho a única força volumétrica suposta atuante, será considerado também como carregamento externo agindo sobre a superfície da placa. Consequentemente, o trabalho das forças volumétricas será nulo. Portanto, o potencial das cargas externas e das forças de massa será:

$$\Omega = - \int_{S_\sigma} \underline{\phi}^t \underline{u} \, dS = - \int_{S_\sigma} p(x, y) w(x, y) \, dS \quad \dots(II.27)$$

Introduzindo (II.23) e (II.27) em (II.1), obtêm-se o funcional que expressa a energia potencial da placa:

$$\pi_p = \frac{-1}{2} \int_S \underline{m}^t \underline{c} \, dS - \int_{S_\sigma} p(x, y) w(x, y) \, dS \dots\dots(II.28)$$

Para se obter a solução aproximada para o problema, devem ser introduzidas funções aproximadoras $\bar{w}(x, y)$, e ser imposto que a variação desse funcional seja nula (por comodidade, mesmo ao se fazer referência à função aproximadora, será utilizada a letra w sem o traço superior; o mesmo se aplica ao funcional $\bar{\pi}_p$, que será indicado por π_p).

II.3 - O Elemento Finito Triangular T18 Para Flexão de Placas Delgadas

A formulação do elemento finito T18 é obtida a partir da formulação desenvolvida para o elemento finito T21. Portanto, inicialmente será considerada a teoria desenvolvida em função do elemento finito T21, que posteriormente será adaptada ao elemento finito T18.

II.3.1 - A variação do funcional π_p

É adotada, para o elemento finito T21, uma função interpoladora que expressa a deflexão $w(x, y)$, que é representada por um polinômio completo do 5º grau em x e y :

$$w(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad \dots \quad x^2y^3 \quad xy^4 \quad y^5] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{21} \end{bmatrix}$$

.....(II.29)

ou

$$w(x, y) = \underline{w}^t \underline{q} \quad \dots\dots(\text{II.30})$$

onde os q_i ($i = 1, 2, \dots, 21$) são constantes denominadas parâmetros generalizados.

Ao se derivar a função deslocamento adequadamente, é obtido o vetor das curvaturas:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 2y^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6x^2y & 12xy^2 & 20y^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 12xy^2 & 8y^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{21} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(\text{II.31})$$

sendo representado por:

$$\underline{c} = \underline{J} \underline{q} \quad \dots\dots(\text{II.32})$$

O vetor momento \underline{e} é expresso em função do vetor curvatura por:

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = - \underline{D} \underline{c} \quad \dots\dots(\text{II.33})$$

e, ao se introduzir (II.32) em (II.33), tem-se:

$$\underline{m} = - \underline{D} \underline{J} \underline{q} \quad \dots\dots(\text{II.34})$$

sendo que para um material homogêneo e isotrópico, a matriz de rigidez \underline{D} é definida por:

$$\underline{D} = D(x, y) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(\text{II.35})$$

ou,

$$\underline{D} = D(x, y) \underline{D}' \quad \dots\dots(\text{II.36})$$

onde $D(x, y)$ é a rigidez à flexão da placa no ponto de coordenadas (x, y) , e que é expressa por:

$$D(x, y) = \frac{E h^3(x, y)}{12(1 - \nu^2)} \quad \dots\dots(\text{II.37})$$

sendo:

E = módulo de elasticidade do material

ν = coeficiente de Poisson do material

$h(x, y)$ = espessura da placa no ponto de coordenadas (x, y)

Na figura II.4 são mostrados os sentidos convencionados como positivos para os momentos fletores e volventes, forças cortantes, carregamento externo e deflexão transversal relativos ao plano médio da placa.

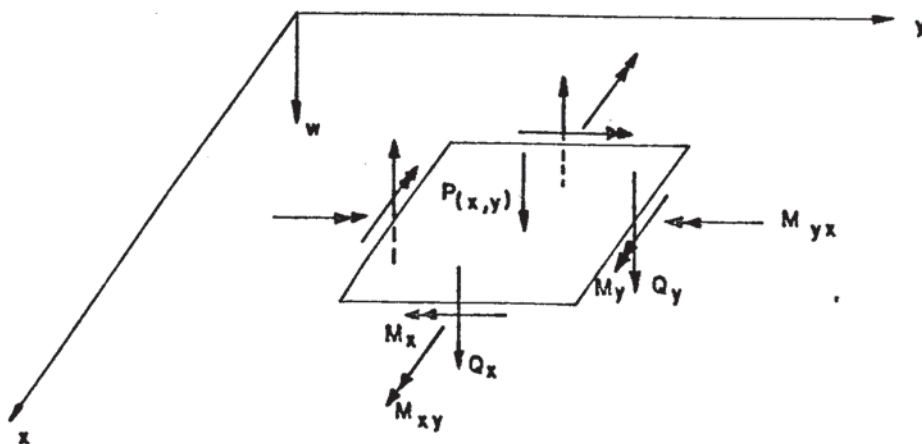


FIG. II. 4 - CONVENÇÕES PARA MOMENTOS, FORÇAS E DESLOCAMENTOS

Pelo princípio da mínima energia potencial, tem-se que:

$$\delta \pi_p = - \int_S \underline{m}^t \delta \underline{c} \, dS - \int_{S_\sigma} p(x, y) \delta w(x, y) \, dS = 0 \quad \dots(\text{II.38})$$

e de (II.34):

$$\underline{m}^t = - \underline{q}^t \underline{J}^t \underline{D}^t \quad \dots(\text{II.39})$$

mas, como a matriz \underline{D} é simétrica

$$\underline{D}^t = \underline{D} \quad \dots(\text{II.40})$$

portanto

$$\underline{m}^t = - \underline{q}^t \underline{J}^t \underline{D} \quad \dots(\text{II.41})$$

e, da equação (II.30) tem-se:

$$w(x, y) = \underline{q}^t \underline{w} \quad \dots(\text{II.42})$$

Calculando-se as variações $\delta \underline{c}$ e $\delta w(x, y)$, a partir de (II.32) e (II.42), tem-se:

$$\delta \underline{c} = \underline{J} \delta \underline{q} \quad \dots(\text{II.43})$$

e,

$$\delta w(x, y) = \delta \underline{q}^t \underline{w} \quad \dots(\text{II.44})$$

Introduzindo as equações (II.39), (II.43) e (II.44) em (II.38), chega-se à variação do funcional:

$$\delta \pi_p = \int_S \underline{q}^t \underline{J}^t \underline{D} \underline{J} \delta \underline{q} \, dS - \int_{S_\sigma} p(x, y) \delta \underline{q}^t \underline{w} \, dS = 0 \quad \dots(\text{II.45})$$

ou,

$$\delta\pi_p = \int_S \delta q^t \underline{J}^t \underline{D} \underline{J} q \, dS - \int_{S_\sigma} p(x, y) \delta q^t \underline{w} \, dS = 0 \quad \dots(\text{II.46})$$

e, colocando-se δq^t em evidência:

$$\delta\pi_p = \delta q^t \left[\int_S \underline{J}^t \underline{D} \underline{J} q \, dS - \int_{S_\sigma} p(x, y) \underline{w} \, dS \right] = 0 \quad \dots(\text{II.47})$$

Logo, sendo δq^t arbitrário e não necessariamente nulo, deve-se ter:

$$\int_S \underline{J}^t \underline{D} \underline{J} q \, dS - \int_{S_\sigma} p(x, y) \underline{w} \, dS = 0 \quad \dots(\text{II.48})$$

A solução aproximada para o problema pode ser obtida, pois o funcional $\bar{\pi}$ é expresso em termos dos deslocamentos procurados. Para se obter resposta convergente em relação à solução exata do problema, e extremos para a energia potencial de deformação total, é necessário se ter compatibilidade de deslocamentos e inclinações (primeiras derivadas da função deslocamento) no interior e nas interfaces dos elementos, no caso das placas estas condições são satisfeitas ao se verificar as propriedades inerentes ao elemento finito T21 adotado.

II.3.2 - O elemento finito triangular T21 para flexão de placas delgadas

Ao se considerar o elemento finito triangular T21, para a deflexão e a inclinação serem contínuas ao longo de um lado do elemento, é necessário que ambas sejam univocamente determinadas por parâmetros nodais relativos a esse lado. Se esse lado do elemento finito, por exemplo, coincide com o eixo cartesiano x (vide figura II.5), a função polinomial que representará a função deslocamento é do 5º grau em x, definida por seis parâmetros: $w_1, w_2, w_{,x1}, w_{,x2}, w_{,xx1}, w_{,xx2}$. Assim a deflexão está univocamente determinada. Três parâmetros em cada extremidade definem a defle-

xão do lado do elemento em estudo. A primeira derivada normal ao lado do elemento considerado varia segundo uma curva do 4º grau, que é definida por cinco parâmetros: $w,y,1$, $w,y,2$, $w,xy,1$, $w,xy,2$, $w,n,4$. Portanto, fica assegurada a continuidade da inclinação normal ao lado considerado.

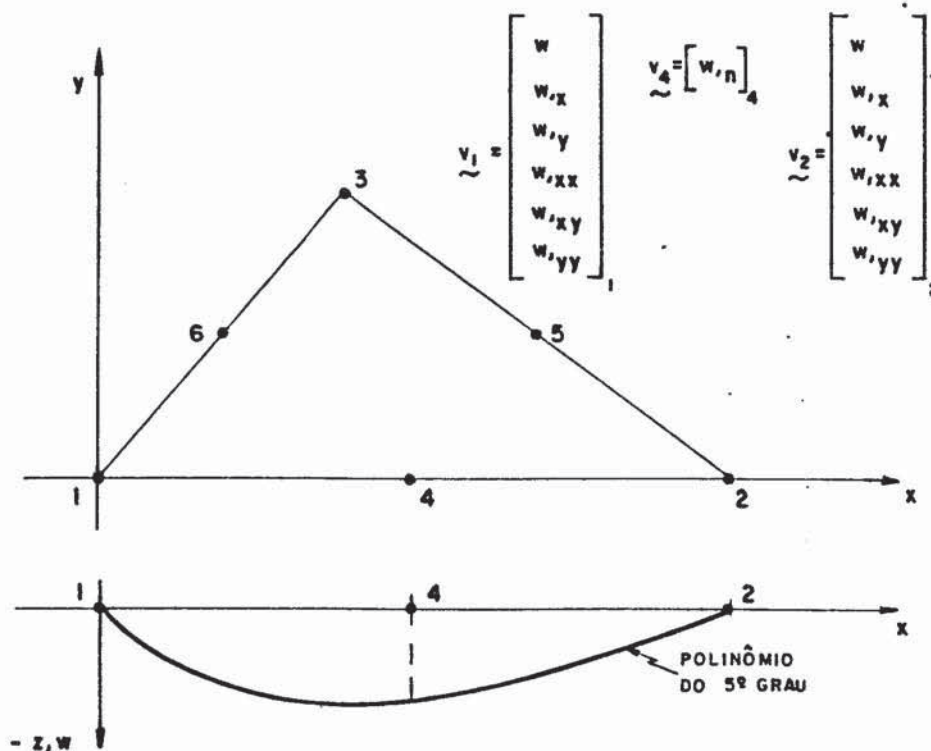


FIG. II. 5 - O ELEMENTO FINITO TRIANGULAR T21

O elemento finito T21 possui 21 graus de liberdade, sendo 6 graus de liberdade por vértice e 1 grau de liberdade no ponto médio de cada lado. Conforme é visto em (II.29) a função interpoladora para o elemento finito T21 é representada por um polinômio completo do 5º grau, relacionado com os parâmetros generalizados q_i ($i = 1, 2, \dots, 21$).

Contudo, em substituição aos parâmetros generalizados, serão utilizadas as submatrizes v_i ($i = 1, 2, 3$) e v_j ($j = 4, 5, 6$), cujos parâmetros são denominados incógnitas nodais (vide figura II.6). O objetivo da discretização em elementos finitos da estrutura a ser analisada é a obtenção dos valores dessas incógnitas nodais.

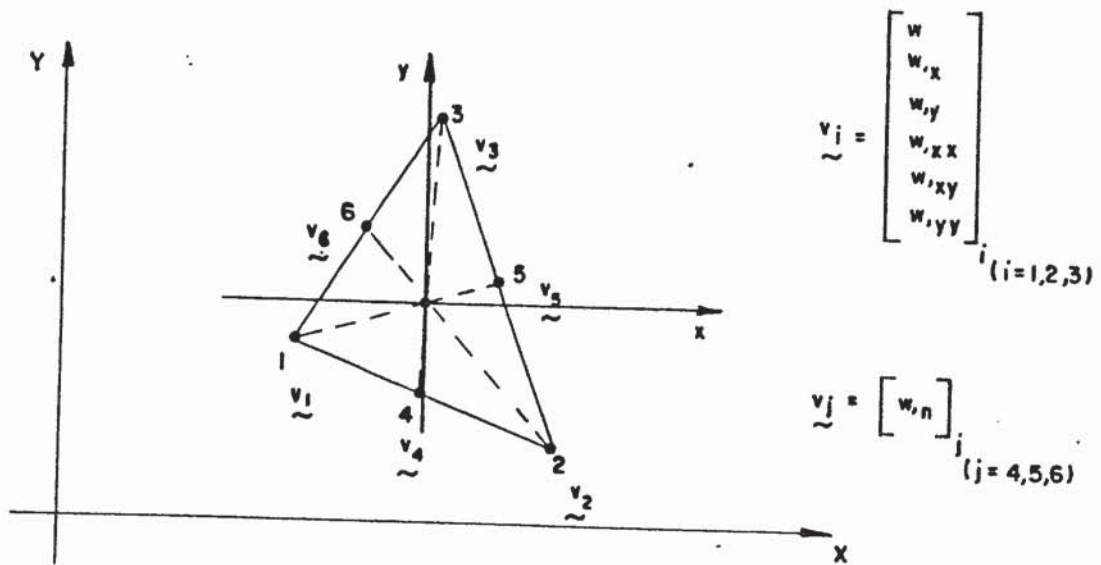


FIG. II.6 - ELEMENTO FINITO TRIANGULAR T2I E INCÓGNITAS NODAIS

Os parâmetros nodais \underline{v} estão relacionados com os parâmetros generalizados \underline{q} por:

$$\underline{v} = \underline{G}^t \underline{q} \quad \dots\dots(II.49)$$

de onde

$$\underline{q} = (\underline{G}^t)^{-1} \underline{v} \quad \dots\dots(II.50)$$

Definindo

$$\underline{B}^t = (\underline{G}^t)^{-1} \quad \dots\dots(II.51)$$

e, substituindo (II.51) em (II.50), tem-se:

$$\underline{q} = \underline{B}^t \underline{v} \quad \dots\dots(II.52)$$

ou,

$$\underline{q}^t = \underline{v}^t \underline{B} \quad \dots\dots(II.53)$$

de onde:

$$\delta \underline{q}^t = \delta \underline{v}^t \underline{B} \quad \dots\dots(\text{II.54})$$

Os parâmetros nodais são representados matricialmente por:

$$\underline{v}^t = [\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \underline{v}_3 \quad \underline{v}_4 \quad \underline{v}_5 \quad \underline{v}_6] \quad \dots\dots(\text{II.55})$$

Substituindo-se as equações (II.52) e (II.54) em (II.47), tem-se:

$$\delta \pi_p = \delta \underline{v}^t \underline{B} \left[\int_S \underline{J}^t \underline{D} \underline{J} \underline{B}^t \underline{v} \, dS - \int_{S_\sigma} p(x, y) \underline{w} \, dS \right] = 0 \quad \dots\dots(\text{II.56})$$

mas, como $\delta \underline{v}^t$ é arbitrário e não necessariamente nulo,

$$\underline{B} \int_S \underline{J}^t \underline{D} \underline{J} \, dS \underline{B}^t \underline{v} - \underline{B} \int_{S_\sigma} p(x, y) \underline{w} \, dS = 0 \quad \dots\dots(\text{II.57})$$

ou ainda,

$$\underline{B} \int_S \underline{J}^t \underline{D} \underline{J} \, dS \underline{B}^t \underline{v} = \underline{B} \int_{S_\sigma} p(x, y) \underline{w} \, dS \quad \dots\dots(\text{II.58})$$

II.3.2.1 - Matriz de rigidez generalizada \underline{K}_q e matriz de rigidez \underline{K}

A expressão obtida do primeiro membro de (II.58)

$$\underline{K}_q = \int_S \underline{J}^t \underline{D} \underline{J} \, dS \quad \dots\dots(\text{II.59})$$

é definida como a Matriz de Rigidez Generalizada do elemento finito triangular T21. Efetuando-se a pré-multiplicação de \underline{K}_q por \underline{B} ,

e a pós-multiplicação por \underline{B}^t , obtêm-se a Matriz de Rigidez deste elemento, que é expressa por:

$$\underline{K} = \underline{B} \underline{K}_q \underline{B}^t \quad \dots\dots(II.60)$$

ou

$$\underline{K} = \underline{B} \left[\int_S \underline{J}^t \underline{D} \underline{J} dS \right] \underline{B}^t \quad \dots\dots(II.61)$$

II.3.2.2 - Cargas nodais equivalentes

Considerando-se uma placa delgada elástico-isotrópica discretizada em elementos finitos, e solicitada por um carregamento $p(x, y)$ variavelmente distribuído (vide figura II.7); pode-se substituir este carregamento real por um conjunto de cargas concentradas aplicadas diretamente aos pontos nodais dos elementos da estrutura. Estas cargas concentradas, que substituem aproximadamente o carregamento real, são denominadas Cargas Nodais Equivalentes; e são calculadas de maneira que os trabalhos virtuais da carga real e das Cargas Nodais Equivalentes sejam iguais. Aqui emprega-se o termo carga no sentido generalizado.

Para um determinado elemento finito, o carregamento distribuído $p(x, y)$, aplicado sobre o domínio deste elemento, é considerado como sendo estaticamente equivalente ao vetor carregamento \underline{S} (associado ao elemento). Da expressão (II.30), uma deflexão virtual será definida por:

$$w^* = \underline{w}^t \underline{q}^* \quad \dots\dots(II.62)$$

mas, de (II.52):

$$\underline{q}^* = \underline{B}^t \underline{v}^* \quad \dots\dots(II.63)$$

e substituindo-se (II.63) em (II.62), resulta:

$$\underline{w}^* = \underline{w}^t \underline{B}^t \underline{v}^* \quad \dots\dots(\text{II.64})$$

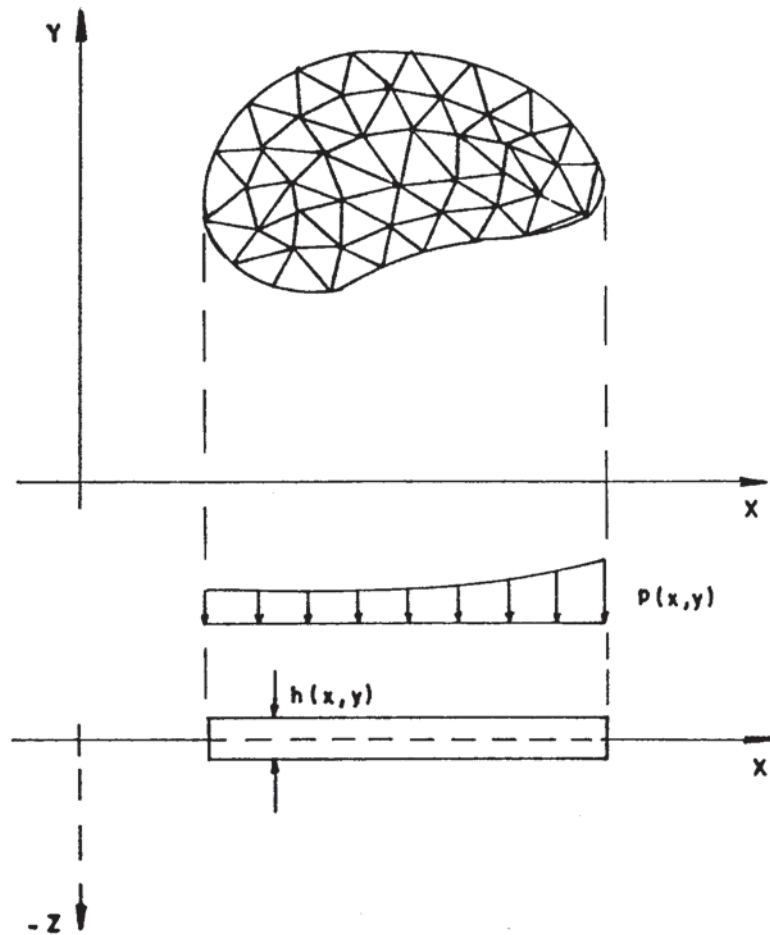


FIG. II.7 - CARREGAMENTO VARIAVELMENTE DISTRIBUÍDO $p(x,y)$ SOBRE UMA PLACA

Ao se igualar o trabalho virtual realizado pelas Cargas Nodais Equivalentes \underline{S} com o trabalho realizado pelo carregamento distribuído $p(x, y)$, durante o deslocamento virtual, tem-se:

$$\underline{S}^t \underline{v}^* = \int_{S_\sigma} p(x, y) w^* dS \quad \dots\dots(\text{II.65})$$

Substituindo (II.64) em (II.65):

$$\underline{S}^t \underline{v}^* = \int_{S_\sigma} p(x, y) \underline{w}^t dS \underline{B}^t \underline{v}^* \quad \dots\dots(\text{II.66})$$

e, calculando variações:

$$\underline{S}^t \delta \underline{v}^* = \int_{S_\sigma} p(x, y) \underline{w}^t dS \underline{B}^t \delta \underline{v}^* \quad \dots\dots(\text{II.67})$$

mas $\delta \underline{v}^*$ é arbitrário, portanto:

$$\underline{S} = \underline{B} \int_{S_\sigma} p(x, y) \underline{w} dS \quad \dots\dots(\text{II.68})$$

A expressão (II.68), que é o segundo membro da equação (II.58), é utilizada ao nível do elemento para determinação das Cargas Nodais Equivalentes.

Portanto, das equações (II.58), (II.61) e (II.68) tem-se a equação de equilíbrio para o elemento finito triangular T21:

$$\underline{K} \underline{v} = \underline{S} \quad \dots\dots(\text{II.69})$$

O sistema geral de equações lineares, formado a partir da montagem sistemática de equações (II.69), possibilita a análise da estrutura através do processo dos deslocamentos. Os deslocamentos procurados são possíveis de serem determinados desde que a estrutura seja adequadamente vinculada, isto é, sejam fixados deslocamentos nodais em número capaz de não permitir deslocamentos de corpo rígido.

II.3.2.3 - Integração das funções utilizadas

Para a determinação da Matriz de Rigidez Generalizada e dos Vetores de Cargas Nodais Equivalentes, é necessário calcular integrais de funções monomiais do tipo:

$$\int_S x^r y^s dS \quad \dots\dots(\text{II.70})$$

o que pode ser feito considerando-se os monômios expressos de duas formas: através de coordenadas homogêneas e de coordenadas carte-

sianas locais.

II.3.2.3.1 - Integração de funções monomiais utilizando coordenadas homogêneas em domínios triangulares planos

Como sistemas de referência, são utilizados três sistemas coplanares de coordenadas. O sistema de coordenadas cartesianas global (OXY) define a posição de um elemento triangular genérico pertencente à estrutura. O sistema de coordenadas cartesianas local tem origem no centróide (C) do elemento triangular considerado; e os eixos x e y são paralelos, respectivamente, aos eixos X e Y do sistema de coordenadas cartesianas global (vide figura II.8).

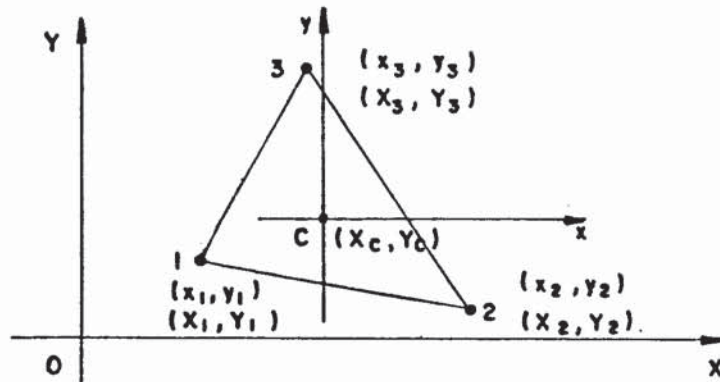


FIG. II.8 - SISTEMAS DE COORDENADAS GLOBAIS E LOCAIS

A posição de um elemento triangular genérico (1 - 2 - 3) é definida através do sistema global (OXY). A origem do sistema local será definida com a determinação das coordenadas globais do centróide $C(X_c, Y_c)$. Portanto:

$$X_c = \frac{1}{3} (X_1 + X_2 + X_3)$$

$$Y_c = \frac{1}{3} (Y_1 + Y_2 + Y_3) \quad \dots\dots(II.71)$$

e, conseqüentemente, as coordenadas locais dos vértices do elemen

to triangular ficam definidas por:

$$x_i = X_i - X_c$$

$$y_i = Y_i - Y_c \quad (i = 1, 2, 3) \quad \dots\dots(\text{II.72})$$

sendo que:

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^3 y_i = 0 \quad \dots\dots(\text{II.73})$$

O sistema de coordenadas homogêneas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) é utilizado para se definir posições dos pontos internos do elemento. Os ξ_i ($i = 1, 2, 3$) são definidos por:

$$\xi_i = \frac{S_i}{S} \quad (i = 1, 2, 3) \quad \dots\dots(\text{II.74})$$

sendo $P(x, y)$ um ponto genérico pertencente ao interior ou às bordas do elemento triangular (1-2-3), então S_i ($i=1, 2, 3$) são respectivamente as áreas dos triângulos (3-P-2), (1-P-3) e (2-P-1); e S é a área do triângulo (1-2-3). (Vide figura II.9).

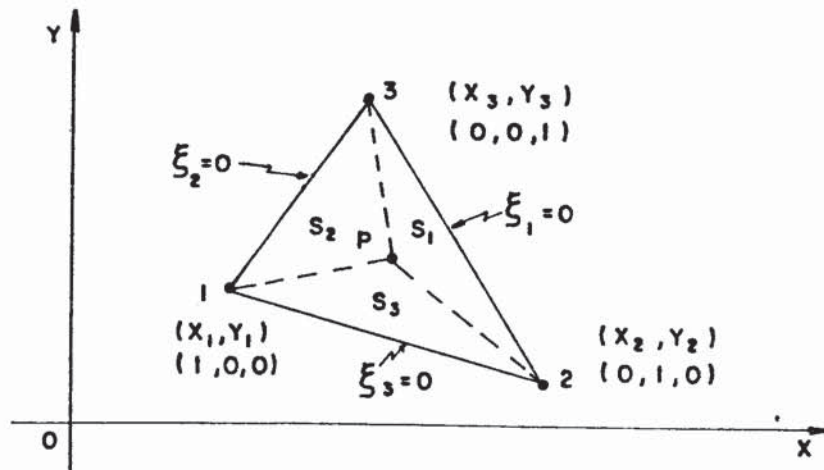


FIG.II.9- SISTEMAS DE COORDENADAS GLOBAIS E HOMOGÊNEAS

O sistema de coordenadas locais e o sistema de coordenadas homogêneas estão relacionados linearmente entre si por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(\text{II.75})$$

ou, na forma inversa:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} \Delta_1^0 & \eta_1 & \omega_1 \\ \Delta_2^0 & \eta_2 & \omega_2 \\ \Delta_3^0 & \eta_3 & \omega_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad \dots\dots(\text{II.76})$$

sendo:

$$S = \text{área do triângulo (1 - 2 - 3)}$$

$$\Delta_i^0 = x_j y_k - x_k y_j$$

$$\eta_i = y_j - y_k$$

$$\omega_i = x_j - x_k$$

$$i = 1, 2, 3 \quad j = 2, 3, 1 \quad k = 3, 1, 2$$

Utilizando-se (II.75) em (II.70), tem-se que:

$$\int_S x^r y^s dS = \int_S [(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3)^r (y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3)^s] dS \quad \dots\dots(\text{II.77})$$

A expressão (II.77) terá, a menos de constantes,

parcelas do tipo genérico:

$$\int_S [(x_1^a x_2^b x_3^c y_1^d y_2^e y_3^f) \xi_1^m \xi_2^n \xi_3^p] dS \quad \dots\dots(II.78)$$

onde

$$m = a + d$$

$$n = b + e \quad \dots\dots(II.79)$$

$$p = c + f$$

sendo que é possível que alguns destes expoentes sejam nulos. Também é verificada a seguinte igualdade:

$$a + b + c + d + e + f = r + s \quad \dots\dots(II.80)$$

ou

$$m + n + p = r + s \quad \dots\dots(II.81)$$

Sendo r e s conhecidos, o valor entre parenteses do integrando de (II.78) é uma constante que depende apenas das coordenadas locais dos vértices do triângulo considerado. Portanto, em última análise, ocorrerão integrais do tipo genérico:

$$\int_S \xi_1^m \xi_2^n \xi_3^p dS \quad \dots\dots(II.82)$$

que podem ser avaliadas, segundo Savassi [12], por:

$$\int_S \xi_1^m \xi_2^n \xi_3^p dS = \frac{m!n!p!}{(m + n + p + 2)!} 2S \quad \dots\dots(II.83)$$

sendo:

$$m! = m(m-1)(m-2) \dots 2 \cdot 1$$

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1$$

$$p! = p(p-1)(p-2) \dots 2 \cdot 1$$

$$(m+n+p+2)! = (m+n+p+2)(m+n+p+1)(m+n+p) \dots (m+n) \dots m \dots 2 \cdot 1$$

S = área do triângulo considerado para a integração

II.3.2.3.2 - Integração de funções monomiais utilizando coordenadas locais em domínios poligonais planos

A integral (II.70) pode ser calculada utilizando-se as coordenadas cartesianas locais (x, y) . A expressão empregada para esta avaliação é deduzida no Apêndice 1, e é apresentada a seguir:

$$\int_S x^r y^s dS = \left[(ad - bc) \frac{r!s!}{(r+s+2)!} \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^s C_{r-i+j}^j C_{s-j+i}^i (a^i b^{s-j} c^{r-i} d^j) \right]$$

.....(II.84)

onde:

$$r! = r(r-1)(r-2) \dots 2 \cdot 1$$

$$s! = s(s-1)(s-2) \dots 2 \cdot 1$$

$$(r+s+2)! = (r+s+2)(r+s+1)(r+s) \dots r \dots 2 \cdot 1$$

(a, b) = coordenadas locais do primeiro vértice da região poligonal, no domínio do elemento, sobre a qual atua o carregamento distribuído e que é considerada para a integração.

(c, d) = coordenadas locais do segundo vértice da região poligonal, no domínio do elemento, sobre a qual atua o carregamento distribuído e que é considerada para a integração.

$$C_{\alpha}^{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!}$$

A avaliação da integral (II.70) com a utilização da fórmula expressa em (II.84) é sempre efetuada sobre uma região triangular em que um dos vértices é a origem do sistema de coordenadas locais (x, y), e os outros dois vértices são os pares de coordenadas locais (a, b) e (c, d). Neste caso, a origem do sistema de coordenadas locais está no centro de gravidade do elemento finito, que é calculado conforme (II.71). Portanto, para um polígono com N vértices, o valor final da integral (II.70) é obtido a través da somatória de N parcelas oriundas de integrais efetuadas em N áreas triangulares; sendo que para cada triângulo considerado, um dos vértices é a origem do sistema de coordenadas locais, e os outros são dois dos N vértices do polígono considerado. Os N vértices do polígono devem ser percorridos no sentido anti-horário, conforme a dedução realizada no Apêndice 1.

II.3.2.4 - Determinação da matriz de rigidez generalizada \underline{K}_q

Para a determinação dos elementos da Matriz de Rigidez Generalizada \underline{K}_q é necessário se avaliar a integral (II.59), considerando-se que $\underline{D} = D(x, y) \underline{D}'$, conforme (II.36). Com isso, são obtidas para cada termo da matriz, a menos de constantes, expressões do tipo genérico:

$$P_{d\gamma\delta} = \int_S D(x, y) x^{\gamma} y^{\delta} dS \quad \dots\dots(II.85)$$

Para a integração $P_{d\gamma\delta}$ realizada no domínio do ele

mento finito triangular, é possível que a rigidez à flexão da placa $D(x, y)$ tenha uma variação qualquer de ponto para ponto no interior e nas interfaces do elemento. Com isso, podem também ser analisados problemas da teoria das placas delgadas que apresentam variação de espessura. Adotando-se variação linear para $D(x, y)$ é possível a resolução da maioria dos problemas práticos, inclusive daqueles que apresentarem variação de espessura não linear, desde que seja feita uma conveniente subdivisão da placa em elementos finitos. Na região onde se tem variação brusca de espessura (variação contínua e não linear) deve-se fazer um refinamento maior da rede, de tal forma que os elementos finitos situados nesta região apresentem espessura linear ou quase linear. Com a utilização de coordenadas homogêneas, a rigidez à flexão $D(x, y)$ é expressa por:

$$D(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = D_1 \xi_1 + D_2 \xi_2 + D_3 \xi_3 \dots\dots(II.86)$$

sendo

$$D_i = \frac{E h_i^3}{12(1-\nu^2)} \quad (i = 1, 2, 3) \quad \dots\dots(II.87)$$

e, D_i representa a rigidez à flexão da placa no vértice i do elemento finito triangular (1 - 2 - 3).

Colocando-se também os valores de x e y em função de coordenadas homogêneas, e substituindo-se juntamente com (II.86) em (II.85), tem-se:

$$P_{d\gamma\delta} = \int_S [(D_1\xi_1 + D_2\xi_2 + D_3\xi_3)(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3)^Y (y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3)^\delta] dS \dots(II.88)$$

Efetuada-se as operações do integrando de (II.88), a menos de constantes, tem-se parcelas genéricas do tipo:

$$P_{d\gamma\delta} = \int_S [(D_1\xi_1 + D_2\xi_2 + D_3\xi_3)(x_1^a x_2^b x_3^c y_1^d y_2^e y_3^f) \xi_1^m \xi_2^n \xi_3^p] dS \dots\dots(II.89)$$

ou,

$$P_{d\gamma\delta} = \int_S \left[\sum_{i=1}^3 D_i(x_1^a x_2^b x_3^c y_1^d y_2^e y_3^f) \epsilon_1^{m_i} \epsilon_2^{n_i} \epsilon_3^{p_i} \right] dS \quad \dots\dots(II.90)$$

sendo que os valores de a, b e c podem variar de zero até $\bar{\gamma}$; e os valores de d, e e f de zero até $\bar{\delta}$. Os diversos valores de m_i , n_i e p_i são apresentados a seguir (Tabela II.1).

i	m_i	n_i	p_i	
1	$m + 1$	n	p	$m = a + d$
2	m	$n + 1$	p	$n = b + e$
3	m	n	$p + 1$	$p = c + f$

TABELA II.1

Assim, sendo que γ e δ são conhecidos, as parcelas do integrando de (II.90) referentes a $D_i(x_1^a x_2^b x_3^c y_1^d y_2^e y_3^f)$ são constantes, que dependem somente das coordenadas locais e das espessuras dos vértices do elemento finito triangular considerado. Portanto, ao se aplicar a expressão (II.83) para o cálculo de (II.90), são obtidos os termos da Matriz de Rigidez Generalizada \underline{K}_q (simétrica) relacionada ao elemento finito triangular T21, que são formalmente apresentados a seguir. Estão relacionados os 153 termos (i, j) , não nulos, correspondentes às posições diagonais ($i = j$), ou superiores à mesma ($i < j$); considerando-se que a espessura do elemento finito seja constante.

Nas expressões para os termos da Matriz de Rigidez Generalizada tem-se:

$$(\underline{K}_q)_{ij} = (i, j)$$

ν = coeficiente de Poisson

$$\mu = \frac{1 - \nu}{2}$$

$$\begin{aligned}(4, 4) &= 4P_{00} \\(4, 11) &= 24P_{20} \\(4, 13) &= 4P_{02} + 4vP_{20} \\(4, 15) &= 24vP_{02} \\(4, 17) &= 24P_{21} \\(4, 19) &= 4P_{03} + 12vP_{21} \\(4, 21) &= 40vP_{03} \\(5, 12) &= 12\mu P_{20} \\(5, 14) &= 12\mu P_{02} \\(5, 18) &= 24\mu P_{21} \\(5, 20) &= 16\mu P_{03} \\(6, 11) &= 24vP_{20} \\(6, 13) &= 4P_{20} + 4vP_{02} \\(6, 15) &= 24P_{02} \\(6, 17) &= 24vP_{21} \\(6, 19) &= 12P_{21} + 4vP_{03} \\(6, 21) &= 40P_{03} \\(7, 8) &= 12P_{11} \\(7, 10) &= 36vP_{11} \\(7, 12) &= 36P_{21} \\(7, 14) &= 36vP_{21} \\(7, 16) &= 120P_{40} \\(7, 18) &= 36P_{22} + 12vP_{40} \\(7, 20) &= 72vP_{22} \\(8, 8) &= 4P_{02} + 16\mu P_{20} \\(8, 10) &= 12vP_{02} \\(8, 12) &= 12P_{12} + 24\mu P_{30} \\(8, 14) &= 12P_{12} \\(8, 16) &= 40P_{31}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4, 6) &= 4vP_{00} \\(4, 12) &= 12P_{11} \\(4, 14) &= 12vP_{11} \\(4, 16) &= 40P_{30} \\(4, 18) &= 12P_{12} + 4vP_{30} \\(4, 20) &= 24vP_{12} \\(5, 5) &= 4\mu P_{00} \\(5, 13) &= 16\mu P_{11} \\(5, 17) &= 16\mu P_{30} \\(5, 19) &= 24\mu P_{12} \\(6, 6) &= 4P_{00} \\(6, 12) &= 12vP_{11} \\(6, 14) &= 12P_{11} \\(6, 16) &= 40vP_{30} \\(6, 18) &= 4P_{30} + 12vP_{12} \\(6, 20) &= 24P_{12} \\(7, 7) &= 36P_{20} \\(7, 9) &= 12vP_{20} \\(7, 11) &= 72P_{30} \\(7, 13) &= 12P_{12} + 12vP_{30} \\(7, 15) &= 72vP_{12} \\(7, 17) &= 72P_{31} \\(7, 19) &= 12P_{13} + 36vP_{31} \\(7, 21) &= 120vP_{13} \\(8, 9) &= (8 - 4v)P_{11} \\(8, 11) &= 24P_{21} \\(8, 13) &= 4P_{03} + (16 - 12v)P_{21} \\(8, 15) &= 24vP_{03} \\(8, 17) &= 24P_{22} + 32\mu P_{40}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8, 18) &= 12P_{13} + (24 - 20\nu)P_{31} \\(8, 20) &= (16 + 8\nu)P_{13} \\(9, 9) &= 4P_{20} + 16\mu P_{02} \\(9, 11) &= 24\nu P_{30} \\(9, 13) &= 4P_{30} + (16 - 12\nu)P_{12} \\(9, 15) &= 24P_{12} \\(9, 17) &= (16 + 8\nu)P_{31} \\(9, 19) &= 12P_{31} + (24 - 20\nu)P_{13} \\(9, 21) &= 40P_{13} \\(10, 11) &= 72\nu P_{21} \\(10, 13) &= 12P_{21} + 12\nu P_{03} \\(10, 15) &= 72P_{03} \\(10, 17) &= 72\nu P_{22} \\(10, 19) &= 36P_{22} + 12\nu P_{04} \\(10, 21) &= 120P_{04} \\(11, 12) &= 72P_{31} \\(11, 14) &= 72\nu P_{31} \\(11, 16) &= 240P_{50} \\(11, 18) &= 72P_{32} + 24\nu P_{50} \\(11, 20) &= 144\nu P_{32} \\(12, 12) &= 36P_{22} + 36\mu P_{40} \\(12, 14) &= (18 + 18\nu)P_{22} \\(12, 16) &= 120P_{41} \\(12, 18) &= 36P_{23} + (36 - 34\nu)P_{41} \\(12, 20) &= (24 + 48\nu)P_{23} \\(13, 13) &= 4P_{40} + 4P_{04} + (32 - 24\nu)P_{22} \\(13, 15) &= 24P_{22} + 24\nu P_{04} \\(13, 17) &= 24P_{23} + (32 - 8\nu)P_{41} \\(13, 19) &= 4P_{05} + 12P_{41} + (48 - 32\nu)P_{23}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8, 19) &= 4P_{04} + (24 - 12\nu)P_{22} \\(8, 21) &= 40\nu P_{04} \\(9, 10) &= 12P_{11} \\(9, 12) &= 12P_{21} \\(9, 14) &= 12P_{21} + 24\mu P_{03} \\(9, 16) &= 40\nu P_{40} \\(9, 18) &= 4P_{40} + (24 - 12\nu)P_{22} \\(9, 20) &= 24P_{22} + 32\mu P_{04} \\(10, 10) &= 36P_{02} \\(10, 12) &= 36\nu P_{12} \\(10, 14) &= 36P_{12} \\(10, 16) &= 120\nu P_{31} \\(10, 18) &= 12P_{31} + 36\nu P_{13} \\(10, 20) &= 72P_{13} \\(11, 11) &= 144P_{40} \\(11, 13) &= 24P_{22} + 24\nu P_{40} \\(11, 15) &= 144\nu P_{22} \\(11, 17) &= 144P_{41} \\(11, 19) &= 24P_{23} + 72\nu P_{41} \\(11, 21) &= 240\nu P_{23} \\(12, 13) &= 12P_{13} + (24 - 12\nu)P_{31} \\(12, 15) &= 72\nu P_{13} \\(12, 17) &= 72P_{32} + 48\mu P_{50} \\(12, 19) &= 12P_{14} + 36P_{32} \\(12, 21) &= 120\nu P_{14} \\(13, 14) &= 12P_{31} + (24 - 12\nu)P_{13} \\(13, 16) &= 40P_{32} + 40\nu P_{50} \\(13, 18) &= 4P_{50} + 12P_{14} + (48 - 32\nu)P_{32} \\(13, 20) &= 24P_{32} + (32 - 8\nu)P_{14}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (13, 21) &= 40P_{23} + 40vP_{05} & (14, 14) &= 36P_{22} + 36\mu P_{04} \\ (14, 15) &= 72P_{13} & (14, 16) &= 120vP_{41} \\ (14, 17) &= (24 + 48v)P_{32} & (14, 18) &= 12P_{41} + 36P_{23} \\ (14, 19) &= 36P_{32} + (36 - 24v)P_{14} & (14, 20) &= 72P_{23} + 48\mu P_{05} \\ (14, 21) &= 120P_{14} & (15, 15) &= 144P_{04} \\ (15, 16) &= 240vP_{32} & (15, 17) &= 144vP_{23} \\ (15, 18) &= 24P_{32} + 72vP_{14} & (15, 19) &= 72P_{23} + 24vP_{05} \\ (15, 20) &= 144P_{14} & (15, 21) &= 240P_{05} \\ (16, 16) &= 400P_{60} & (16, 17) &= 240P_{51} \\ (16, 18) &= 120P_{42} + 40vP_{60} & (16, 19) &= 40P_{33} + 120vP_{51} \\ (16, 20) &= 240vP_{42} & (16, 21) &= 400vP_{33} \\ (17, 17) &= 144P_{42} + 64\mu P_{60} & (17, 18) &= 72P_{33} + (48 - 24v)P_{51} \\ (17, 19) &= 24P_{24} + (48 + 24v)P_{42} & (17, 20) &= (32 + 122v)P_{33} \\ (17, 21) &= 240vP_{24} & (18, 18) &= 4P_{60} + 36P_{24} + (72 - 48v)P_{42} \\ (18, 19) &= 12P_{51} + 12P_{15} + (72 - 32v)P_{33} & (18, 20) &= 24P_{42} + (48 + 24v)P_{24} \\ (18, 21) &= 40P_{33} + 120vP_{15} & (19, 19) &= 4P_{06} + 36P_{42} + (72 - 48v)P_{24} \\ (19, 20) &= 72P_{33} + (48 - 24v)P_{15} & (19, 21) &= 120P_{24} + 40vP_{06} \\ (20, 20) &= 144P_{24} + 64\mu P_{06} & (20, 21) &= 240P_{15} \\ (21, 21) &= 400P_{06} \end{aligned}$$

II.3.2.5 - Determinação dos vetores de cargas nodais equivalentes \underline{S} (21)

São determinados vetores de cargas nodais equivalentes para três casos de carregamentos. Para o caso em que se tem um carregamento distribuído com variação linear, atuando sobre to do o domínio do elemento finito considerado, é utilizado o sistema de coordenadas homogêneas. Para os casos em que se tem um carregamento uniformemente distribuído sobre parte do domínio do elemento finito considerado, ou uma carga concentrada aplicada dentro dos limites do domínio do elemento, é utilizado o sistema de

coordenadas locais.

II.3.2.5.1 - Carregamento distribuído com variação linear aplicado sobre todo o domínio do elemento finito

Para a determinação do Vetor de Cargas Nodais Equivalentes, será adotada uma variação linear para o carregamento $p(x, y)$ distribuído sobre todo o domínio triangular do elemento finito considerado. É possível se determinar, com a utilização de coordenadas homogêneas, o valor do carregamento em qualquer ponto do domínio do elemento em função dos valores do carregamento correspondentes aos vértices do triângulo (vide figura II.10). A expressão utilizada é:

$$P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = P_1 \xi_1 + P_2 \xi_2 + P_3 \xi_3 \dots\dots(II.91)$$

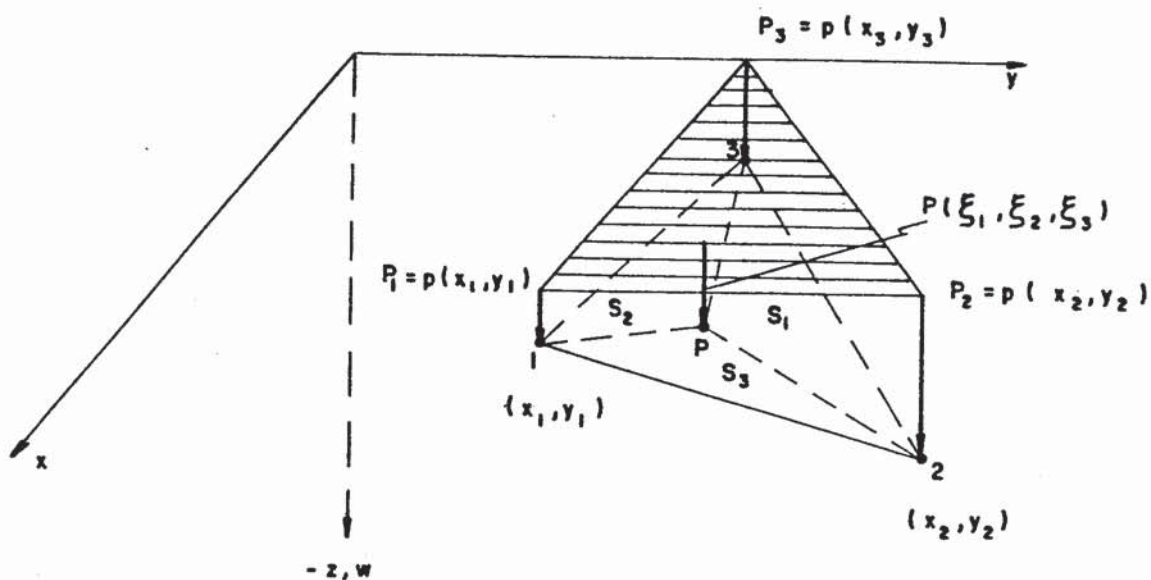


FIG. II. 10 - VARIAÇÃO LINEAR DO CARREGAMENTO NO PLANO

Para a avaliação da expressão referente às Cargas Nodais Equivalentes (II.68), são obtidas para cada termo do vetor, a menos das constantes, expressões do tipo genérico:

$$P_{p\gamma\delta} = \int_{S_\sigma} p(x, y) x^\gamma y^\delta dS \quad \dots\dots(II.92)$$

Colocando-se também os valores de x e y em função das coordenadas homogêneas, e substituindo-se juntamente com (II.91) em (II.92), obtêm-se:

$$P_{p\gamma\delta} = \int_{S_\sigma} [(P_1\xi_1 + P_2\xi_2 + P_3\xi_3)(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3)^\gamma (y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3)^\delta] dS \dots(II.93)$$

Ao se efetuar as operações do integrando de (II.93), a menos de constantes, tem-se parcelas genéricas do tipo:

$$P_{p\gamma\delta} = \int_{S_\sigma} [(P_1\xi_1 + P_2\xi_2 + P_3\xi_3)(x_1^{a'} x_2^{b'} x_3^{c'} y_1^{d'} y_2^{e'} y_3^{f'}) \xi_1^{m_i} \xi_2^{n_i} \xi_3^{p_i}] dS \quad \dots\dots(II.94)$$

ou,

$$P_{p\gamma\delta} = \int_{S_\sigma} \left[\sum_{i=1}^3 P_i (x_1^{a'} x_2^{b'} x_3^{c'} y_1^{d'} y_2^{e'} y_3^{f'}) \xi_1^{m_i} \xi_2^{n_i} \xi_3^{p_i} \right] dS \quad \dots\dots(II.95)$$

sendo que os valores de a', b' e c' podem variar de zero até γ ; e os valores de d', e' e f' de zero até δ . Os diversos valores de m_i , n_i e p_i são os mesmos apresentados na tabela II.1, com:

$$m = a' + d'$$

$$n = b' + e'$$

$$p = c' + f'$$

O vetor $\underline{S}(21)$ é obtido através da pós-multiplicação da matriz \underline{B} pela integral que representa o vetor Carga Nodal Equivalente Generalizado, conforme (II.68).

II.3.2.5.2 - Carregamento uniformemente distribuído aplicado sobre parte do domínio do elemento finito

Como a carga \bar{p} é uniformemente distribuída, $p(x, y)$ é constante, a expressão para Cargas Nodais Equivalentes (II.68) é reescrita para este caso particular como:

$$\underline{S} = q \underline{B} \int_{S_{\sigma}} \underline{w} dS \quad \dots\dots(II.96)$$

sendo que $p(x, y)$ foi substituído por q para indicar que \bar{p} é um valor constante.

Para se obter \underline{S} é necessário se efetuar a integral

$$\int_{S_{\sigma}} \underline{w} dS$$

sendo que \underline{w} é o vetor dado pela expressão (II.30), constituído por 21 termos polinomiais que compõem o polinômio completo do 5º grau em x e y . Com o emprego da expressão (II.84), são apresentados a seguir os 21 termos referentes à integral da expressão (II.96):

$$\int_{S_{\sigma}} 1 dS = \frac{\rho}{2}$$

$$\int_{S_{\sigma}} x dS = \frac{\rho}{6} (a + c)$$

$$\int_{S_{\sigma}} y dS = \frac{\rho}{6} (b + d)$$

$$\int_{S_{\sigma}} x^2 dS = \frac{\rho}{12} (a^2 + ac + c^2)$$

$$\int_{S_{\sigma}} xy \, dS = \frac{\rho}{24} (ad + 2ab + 2cd + bc)$$

$$\int_{S_{\sigma}} y^2 \, dS = \frac{\rho}{12} (b^2 + bd + d^2)$$

$$\int_{S_{\sigma}} x^3 \, dS = \frac{\rho}{20} (a^3 + a^2c + ac^2 + c^3)$$

$$\int_{S_{\sigma}} x^2y \, dS = \frac{\rho}{60} (a^2d + 3a^2b + 2abc + 2acd + 3c^2d + bc^2)$$

$$\int_{S_{\sigma}} xy^2 \, dS = \frac{\rho}{60} (ad^2 + 3ab^2 + 2abd + 2bcd + 3cd^2 + b^2c)$$

$$\int_{S_{\sigma}} y^3 \, dS = \frac{\rho}{20} (b^3 + b^2d + bd^2 + d^3)$$

$$\int_{S_{\sigma}} x^4 \, dS = \frac{\rho}{30} (a^4 + a^3c + a^2c^2 + ac^3 + c^4)$$

$$\int_{S_{\sigma}} x^3y \, dS = \frac{\rho}{120} (a^3d + 4a^3b + 3a^2bc + 2a^2cd + 2abc^2 + 3ac^2d + 4c^3d + bc^3)$$

$$\int_{S_{\sigma}} x^2y^2 \, dS = \frac{\rho}{180} (a^2d^2 + 6a^2b^2 + 3a^2bd + 3ab^2c + 4abcd + 3acd^2 + 3bc^2d + 6c^2d^2 + b^2c^2)$$

$$\int_{S_{\sigma}} xy^3 \, dS = \frac{\rho}{120} (ad^3 + 4ab^3 + 3ab^2d + 2abd^2 + 2b^2cd + 3bcd^2 + 4cd^3 + b^3c)$$

$$\int_{S_{\sigma}} y^4 ds = \frac{\rho}{30} (b^4 + b^3d + b^2d^2 + bd^3 + d^4)$$

$$\int_{S_{\sigma}} x^5 dS = \frac{\rho}{42} (a^5 + a^4c + a^3c^2 + a^2c^3 + ac^4 + c^5)$$

$$\int_{S_{\sigma}} x^4 y dS = \frac{\rho}{210} (a^4d + 5a^4b + 4a^3bc + 2a^3cd + 3a^2bc^2 + 3a^2c^2d + \\ + 4ac^3d + 2abc^3 + 5c^4d + bc^4)$$

$$\int_{S_{\sigma}} x^3 y^2 dS = \frac{\rho}{420} (a^3d^2 + 4a^3bd + 10a^3b^2 + 3a^2cd^2 + 6a^2bcd + 6a^2b^2c + \\ + 6ac^2d^2 + 6abc^2d + 3ab^2c^2 + 10c^3d^2 + 4bc^3d + b^2c^3)$$

$$\int_{S_{\sigma}} x^2 y^3 dS = \frac{\rho}{420} (a^2d^3 + 4acd^3 + 10c^2d^3 + 3a^2bd^2 + 6abcd^2 + \\ + 6bc^2d^2 + 6a^2b^2d + 6ab^2cd + 3b^2c^2d + 10a^2b^3 + 4ab^3c + \\ + b^3c^2)$$

$$\int_{S_{\sigma}} xy^4 dS = \frac{\rho}{210} (ad^4 + 5cd^4 + 2abd^3 + 4bcd^3 + 3ab^2d^2 + 3b^2cd^2 + \\ + 4ab^3d + 2b^3cd + 5ab^4 + b^4c)$$

$$\int_{S_{\sigma}} y^5 dS = \frac{\rho}{42} (b^5 + b^4d + b^3d^2 + b^2d^3 + bd^4 + d^5)$$

onde:

$$\rho = (ad - bc)$$

Neste trabalho são consideradas regiões poligonais carregadas de até 5 vértices, que são suficientes para se abran-

ger todos os casos prováveis de áreas parciais dos domínios dos elementos com carregamentos uniformemente distribuídos. A figura II.11 mostra todos os casos possíveis de serem analisados.

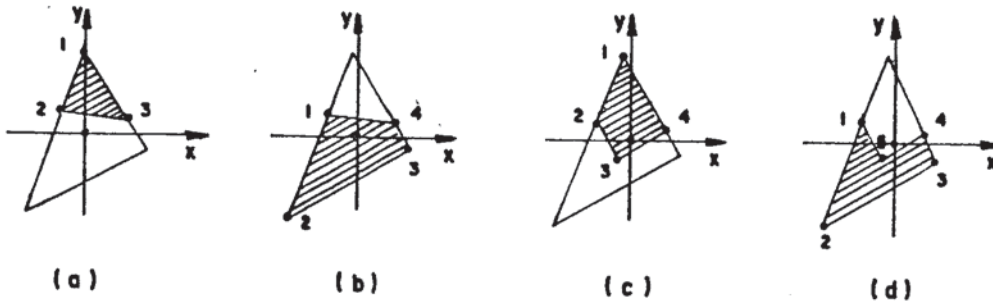


FIG.II.11- ELEMENTOS PARCIALMENTE CARREGADOS COM CARGAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDAS

II.3.2.5.3 - Carga concentrada aplicada no domínio do elemento finito

Para se determinar o Vetor de Cargas Nodais Equivalentes nos casos em que se tem uma carga concentrada P , aplicada em qualquer ponto do domínio do elemento finito, impõem-se que este carregamento seja estaticamente equivalente ao vetor \underline{S} . Uma deflexão virtual \underline{v}^* é definida, conforme (II.64), por:

$$\underline{w}^* = \underline{w}^t \underline{B}^t \underline{v}^*$$

e, ao se igualar o trabalho virtual realizado pelas Cargas Nodais Equivalentes \underline{S} com o trabalho realizado pelo carregamento P , durante o deslocamento virtual, tem-se:

$$\underline{S}^t \underline{v}^* = P w^* \quad \dots\dots(II.97)$$

Substituindo-se (II.64) em (II.97):

$$\underline{S}^t \underline{v}^* = P \underline{w}^t \underline{B}^t \underline{v}^* \quad \dots\dots(II.98)$$

e, aplicando-se o cálculo variacional:

$$\underline{S}^t \delta \underline{v}^* = P \underline{w}^t \underline{B}^t \delta \underline{v}^* \quad \dots\dots(II.99)$$

mas, como $\delta \underline{v}^*$ é arbitrário, tem-se:

$$\underline{S}^t = P \underline{w}^t \underline{B}^t \quad \dots\dots(II.100)$$

ou,

$$\underline{S} = P \underline{B} \underline{w} \quad \dots\dots(II.101)$$

A expressão (II.101) é utilizada ao nível do elemento finito T21 para determinação do Vetor de Cargas Nodais Equivalentes.

II.3.2.6 - Considerações sobre os sinais das derivadas normais aos lados do elemento finito

Os parâmetros nodais, de acordo com a equação (II.55), são representados em forma matricial por:

$$\underline{v}^t = [\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \underline{v}_3 \quad \underline{v}_4 \quad \underline{v}_5 \quad \underline{v}_6]$$

sendo:

$$\underline{v}_i^t = [w \quad w_{,x} \quad w_{,y} \quad w_{,xx} \quad w_{,xy} \quad w_{,yy}]_i \quad (i=1, 2, 3) \quad \dots\dots(II.102)$$

e,

$$\underline{v}_j = [w_{,n}]_j \quad (j = 4, 5, 6) \quad \dots\dots(II.103)$$

Conforme a equação (II.49), pode-se expressar os parâmetros nodais \underline{v} relacionados com os parâmetros generalizados \underline{q} por:

$$\underline{v} = \underline{G}^t \underline{q}$$

ou,

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \underline{v}_4 \\ \underline{v}_5 \\ \underline{v}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}_1^t \\ \underline{G}_2^t \\ \underline{G}_3^t \\ \underline{G}_4^t \\ \underline{G}_5^t \\ \underline{G}_6^t \end{bmatrix} \underline{q} \quad \dots\dots(\text{II.104})$$

Com a substituição das coordenadas locais dos nós 1, 2 e 3 respectivamente nas expressões de \underline{v}_1 , \underline{v}_2 e \underline{v}_3 , são obtidas as submatrizes \underline{G}_1^t , \underline{G}_2^t e \underline{G}_3^t .

Da expressão (II.30) e da figura II.5, tem-se:

$$\underline{v}_i = \begin{bmatrix} w \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,xx} \\ w_{,xy} \\ w_{,yy} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \underline{w}_i^t \\ \underline{w}_{,x_i}^t \\ \underline{w}_{,y_i}^t \\ \underline{w}_{,xx_i}^t \\ \underline{w}_{,xy_i}^t \\ \underline{w}_{,yy_i}^t \end{bmatrix} \underline{q} \quad \dots\dots(\text{II.105})$$

(i = 1, 2, 3)

Comparando (II.104) com (II.105), conclui-se que:

$$\underline{G}_i^t = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & \cdot & \cdot & \cdot & y_i^5 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_i & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 5y_i^4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 20y_i^3 \end{bmatrix} \quad i=1, 2, 3 \quad \dots(II.106)$$

Para a determinação das submatrizes \underline{G}_4^t , \underline{G}_5^t e \underline{G}_6^t é necessário efetuar a transformação das coordenadas x e y para t e n , resultantes de um movimento de rotação do sistema de coordenadas (vide figura II.12).

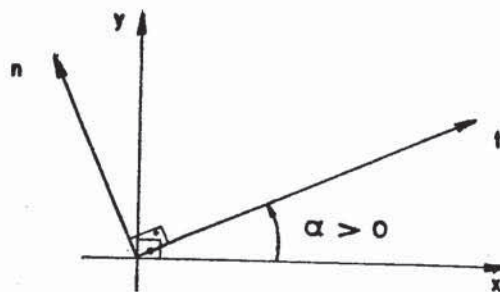


FIG. II. 12- ROTAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS (x,y)

A relação entre os dois sistemas de coordenadas é expressa em forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} t \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \dots(II.107)$$

ou, na forma inversa, por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \end{bmatrix} \quad \dots(II.108)$$

onde:

$$s = \text{sen } \alpha \quad \dots\dots(\text{II.109})$$

$$c = \text{cos } \alpha$$

Ao se diferenciar x e y em relação a t e n , tem-se:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = c, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = s \quad \dots\dots(\text{II.110})$$

$$\frac{\partial x}{\partial n} = -s, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = c$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(\text{II.111})$$

e,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial t \partial n} \\ \frac{\partial^2}{\partial n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & 2sc & s^2 \\ -sc & (c^2-s^2) & sc \\ s^2 & -2sc & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(\text{II.112})$$

Por convenção, a orientação do eixo t será de modo a percorrer os lados de um elemento finito triangular no sentido anti-horário. O eixo n sempre será normal a t , orientado de manei

ra que o semi-eixo positivo \bar{e} é encontrado percorrendo-se um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ rad no sentido anti-horário, a partir do semi-eixo t positivo. Os ângulos $\alpha_j = (j = 4, 5, 6)$ são definidos ao se percorrer do semi-eixo positivo de x ao semi-eixo positivo de t , no sentido sinistrorso. Assim ficam definidas as características locais de cada lado do triângulo, isoladamente (vide figura II.13).

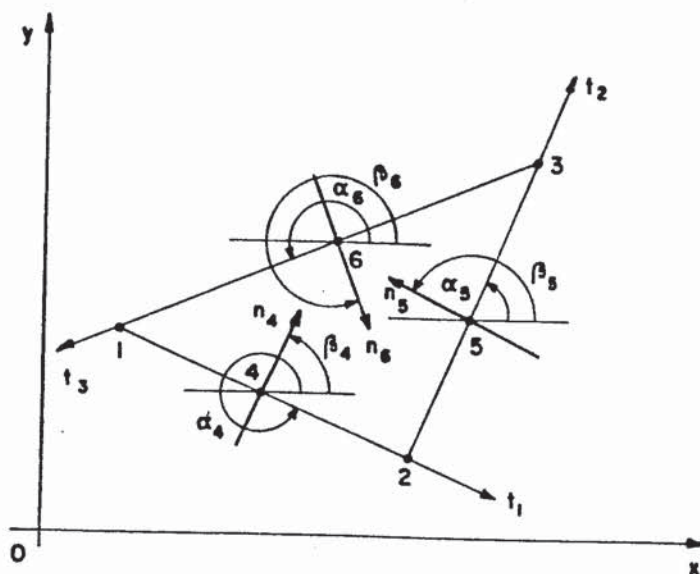


FIG. II.13- EIXOS LOCAIS t E n DO ELEMENTO FINITO

Com a finalidade de proceder a montagem do sistema global de equações, é necessário se adotar uma convenção para se caracterizar os sentidos escolhidos como positivos para os eixos normais aos lados do elemento finito. Isto é importante para que, ao serem acoplados os elementos finitos, os lados em comum tenham as orientações positivas concordantes para os eixos normais referentes a estes lados. Portanto, a orientação positiva para os eixos normais será convencionalizada por $0 \leq \beta_j < \pi$ (vide figura II.14), o que implica que t será positivo quando $0 \leq \alpha_j < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha_j < 2\pi$.

Para a determinação das submatrizes G_4^t , G_5^t e G_6^t , ao se considerar a expressão (II.30) e a figura II.5, tem-se:

$$\underline{v}_j = [w, n]_j = [w^t, n_j^t] q \quad (j = 4, 5, 6) \quad \dots \dots (II.113)$$

e, de (II.111):

$$\left. \frac{\partial \underline{w}}{\partial n} \right|_j = -s_j \frac{\partial \underline{w}}{\partial x_j} + c_j \frac{\partial \underline{w}}{\partial y_j} \quad (j = 4, 5, 6) \dots (II.114)$$

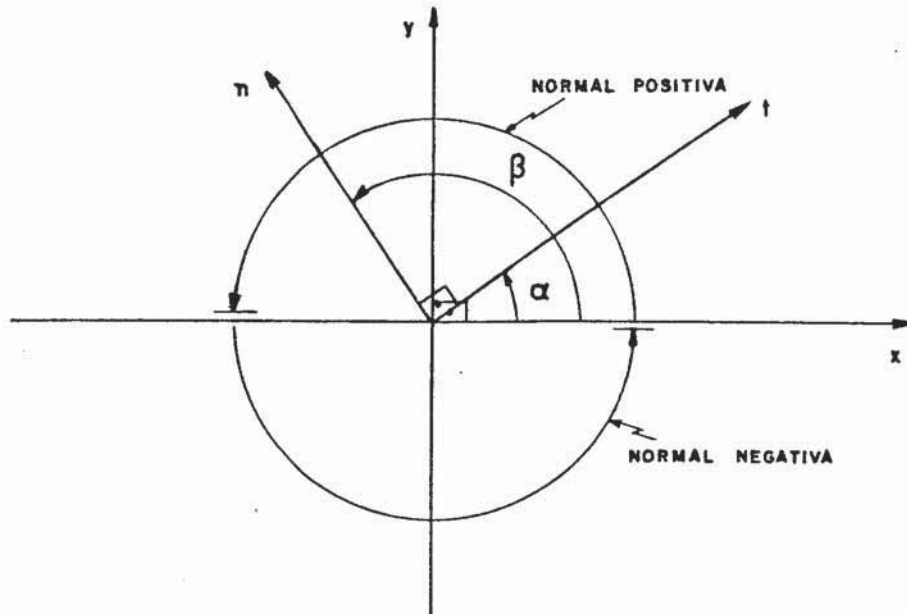


FIG.II.14 - CONVENÇÃO DE SINAIS PARA ORIENTAÇÃO DA NORMAL π

Com procedimento análogo à determinação de \underline{G}_i^t ($i=1, 2, 3$), efetuando-se as operações, tem-se:

$$\underline{G}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ -s_j \\ c_j \\ -2 s_j x_j \\ \vdots \\ 4c_j x_j y_j^3 - s_j y_j^4 \\ 5c_j y_j^4 \end{bmatrix} \dots (II.115)$$

($j = 4, 5, 6$)

sendo:

$$s_j = \text{sen } \alpha_j$$

$$c_j = \text{cos } \alpha_j$$

(x_j, y_j) = coordenadas locais dos pontos médios dos lados do elemento finito

II.3.3 - Transformação do elemento finito triangular T21 para o elemento finito triangular T18

As três incógnitas nodais (w_n) , aliadas respectivamente aos três pontos nodais situados nos pontos médios dos lados do elemento finito triangular T21, podem ser eliminadas sem que deixe de existir compatibilidade de deslocamentos e de derivadas primeiras normais entre elementos que apresentam lado em comum. Esta redução de graus de liberdade do elemento finito T21, para se obter o elemento finito T18, não afeta a qualidade dos resultados obtidos e ainda apresenta vantagens. Com a utilização do elemento finito T18, a largura da banda da Matriz de Rigidez do sistema referente à estrutura é menor, pois há uma redução do número de incógnitas nodais e, conseqüentemente, do número de equações do sistema. Com isto, a precisão dos resultados é melhor, sendo que menos operações serão realizadas pelo computador.

É possível se colocar w_n em função das incógnitas dos dois pontos nodais contidos no mesmo lado, impondo-se que a variação de w_n seja cúbica ao longo da borda do elemento (vide figura II.15).

Ao se colocar w_n em função das incógnitas nodais referentes aos vértices do elemento finito triangular T21, obtêm-se o elemento finito triangular T18 com 6 graus de liberdade por vértice, ou com 18 graus de liberdade no total.

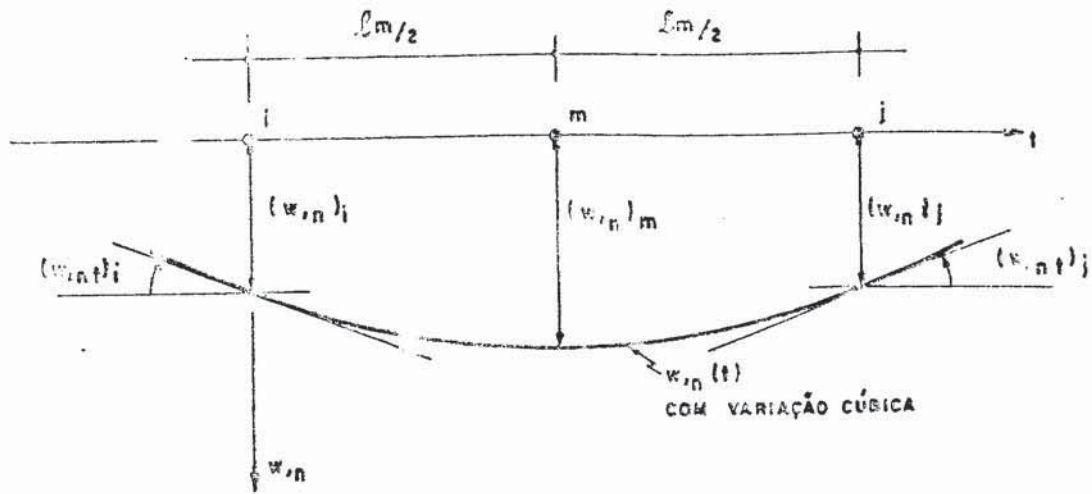


FIG. II.15 - IMPOSIÇÃO DA VARIAÇÃO CÚBICA PARA $w_{,n}(t)$

A função cúbica utilizada para se aproximar a variação de $w_{,n}(t)$ ao longo da borda do elemento \bar{e} :

$$w_{,n}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad \dots\dots(II.116)$$

para $t = 0$:

$$w_{,n} = (w_{,n})_i \quad \dots\dots(II.117)$$

e,

$$w_{,nt} = (w_{,nt})_i \quad \dots\dots(II.118)$$

para $t = l_m$:

$$w_{,n} = (w_{,n})_j \quad \dots\dots(II.119)$$

e,

$$w_{,nt} = (w_{,nt})_j \quad \dots\dots(II.120)$$

Substituindo-se (II.117) e (II.118) em (II.116), tem-se:

$$a_0 = (w_{,n})_i \quad \dots\dots(II.121)$$

$$a_1 = (w,_{nt})_i \quad \dots\dots(II.122)$$

Substituindo-se (II.119) e (II.120) em (II.116), tem-se:

$$a_2 = \frac{3}{\ell_m^2} [-(w,_{n})_i + (w,_{n})_j] - \frac{1}{\ell_m} [2(w,_{nt})_i + (w,_{nt})_j]$$

\dots\dots(II.123)

e,

$$a_3 = \frac{2}{\ell_m^3} [(w,_{n})_i - (w,_{n})_j] + \frac{1}{\ell_m^2} [(w,_{nt})_i + (w,_{nt})_j]$$

\dots\dots(II.124)

A primeira derivada normal no ponto médio do lado $m(t = \ell_m/2)$ é:

$$(w,_{n})_m = \frac{1}{2} [(w,_{n})_i + (w,_{n})_j] + \frac{\ell_m}{8} [(w,_{nt})_i - (w,_{nt})_j]$$

\dots\dots(II.125)

É conveniente exprimir esta derivada normal (II.125) não como dependente de parâmetros relativos aos eixos t e n , mas sim em relação aos parâmetros dos vértices do elemento em função das coordenadas locais x e y . Assim, devem ser feitas as transformações de coordenadas conforme (II.111) e (II.112). Para tanto, serão feitas as seguintes definições:

$$k_1^m = \frac{1}{2} s_m$$

$$k_2^m = \frac{1}{2} c_m$$

$$k_3^m = \frac{1}{8} \ell_m s_m c_m$$

$$k_4^m = \frac{1}{8} \ell_m (c_m^2 - s_m^2) \dots\dots(II.126)$$

sendo:

$$s_m = \text{sen } \alpha_m$$

$$c_m = \text{cos } \alpha_m$$

ℓ_m = comprimento do lado m

Efetuando-se as devidas substituições, a expressão da primeira derivada normal (II.125) em relação aos parâmetros dos vértices será:

$$(w,n)_m = -k_1^m (w,x)_i + k_2^m (w,y)_i - k_1^m (w,x)_j + k_2^m (w,y)_j -$$

$$- k_3^m (w,xx)_i + k_4^m (w,xy)_i + k_3^m (w,yy)_i + k_3^m (w,xx)_j -$$

$$- k_4^m (w,xy)_j - k_3^m (w,yy)_j \dots\dots(II.127)$$

Os parâmetros dos pontos médios dos lados do elemento são relacionados com os parâmetros dos vértices por:

$$\underline{v}_s = \underline{H} \underline{v}_c \dots\dots(II.128)$$

sendo:

$$\underline{v}_s^t = [(w,n)_4 \quad (w,n)_5 \quad (w,n)_6] \dots\dots(II.129)$$

e,

$$\underline{v}_c^t = [\underline{v}_1^t \quad \underline{v}_2^t \quad \underline{v}_3^t] \quad \dots\dots(\text{II.130})$$

A matriz de transformação \underline{H} pode ser dividida em três submatrizes, sendo expressa por:

$$\underline{H} = [\underline{H}_1 \mid \underline{H}_2 \mid \underline{H}_3] \quad \dots\dots(\text{II.131})$$

Se fosse possível se ter um triângulo (1-2-3) (\underline{v}_i de figura II.6) em que fossem válidas todas as desigualdades:

$$x_2 > x_1, x_3 > x_2 \text{ e } x_1 > x_3 \quad \dots\dots(\text{II.132})$$

as submatrizes \underline{H}_i ($i = 1, 2, 3$) seriam representadas por:

$$\begin{aligned} \underline{H}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -k_1^4 & k_2^4 & -k_3^4 & k_4^4 & k_3^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1^6 & k_2^6 & k_3^6 & -k_4^6 & -k_3^6 \end{bmatrix} \\ \underline{H}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -k_1^4 & k_2^4 & k_3^4 & -k_4^4 & -k_3^4 \\ 0 & -k_1^5 & k_2^5 & -k_3^5 & k_4^5 & k_3^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{H}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1^5 & k_2^5 & k_3^5 & -k_4^5 & -k_3^5 \\ 0 & -k_1^6 & k_2^6 & -k_3^6 & k_4^6 & k_3^6 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(\text{II.133}) \end{aligned}$$

mas, como as desigualdades (II.132) não são todas verdadeiras, é necessário se alterar adequadamente os termos k_3 e k_4 das submatrizes (II.133) na fase de cálculo.

A equação de equilíbrio para o elemento finito T21, estabelecida anteriormente em (II.69), pode ser representada por:

$$\underline{S}_{21} = \underline{K}_{21} \underline{v}_{21} \quad \dots\dots(\text{II.134})$$

sendo:

$$\underline{v}_{21} = \begin{bmatrix} \underline{v}_c \\ \underline{v}_s \end{bmatrix} \quad \dots\dots(\text{II.135})$$

Para o elemento finito T18, a respectiva equação de equilíbrio é:

$$\underline{S}_{18} = \underline{K}_{18} \underline{v}_{18} \quad \dots\dots(\text{II.136})$$

sendo:

$$\underline{v}_{18} = \underline{v}_c \quad \dots\dots(\text{II.137})$$

Para se processar a transformação do vetor \underline{S}_{21} (referente ao elemento finito T21) para o vetor \underline{S}_{18} (referente ao elemento finito T18) é imposta a igualdade entre o trabalho virtual realizado pelos dois conjuntos de Cargas Nodais Equivalentes durante os deslocamentos nodais virtuais correspondentes. Portanto:

$$\underline{S}_{18}^t \underline{v}_{18} = \underline{S}_{21}^t \underline{v}_{21} \quad \dots\dots(\text{II.138})$$

De (II.134), tem-se que:

$$\underline{S}_{21}^t = \underline{v}_{21}^t \underline{K}_{21}^t = \underline{v}_{21}^t \underline{K}_{21} \quad \dots\dots(\text{II.139})$$

e, analogamente:

$$\underline{S}_{18}^t = \underline{v}_{18}^t \underline{K}_{18} \quad \dots\dots(\text{II.140})$$

substituindo-se (II.139) e (II.140) em (II.138), têm-se:

$$\underline{v}_{18}^t \underline{K}_{18} \underline{v}_{18} = \underline{v}_{21}^t \underline{K}_{21} \underline{v}_{21} \quad \dots\dots(\text{II.141})$$

e, de (II.128), (II.135) e (II.137):

$$\underline{v}_{21} = \begin{bmatrix} \underline{v}_c \\ \underline{v}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{18} \\ \underline{H} \underline{v}_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{18} & \underline{v}_{18} \\ \underline{H} & \underline{v}_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{18} \\ \underline{H} \end{bmatrix} \underline{v}_{18} \quad \dots\dots(\text{II.142})$$

sendo que \underline{I}_{18} é a matriz identidade (18 x 18); introduzindo-se (II.142) em (II.141):

$$\underline{v}_{18}^t \underline{K}_{18} \underline{v}_{18} = \underline{v}_{18}^t \left[\underline{I}_{18} \mid \underline{H}^t \right] \underline{K}_{21} \begin{bmatrix} \underline{I}_{18} \\ \underline{H} \end{bmatrix} \underline{v}_{18} \quad \dots\dots(\text{II.143})$$

de onde conclui-se que:

$$\underline{K}_{18} = \left[\underline{I}_{18} \mid \underline{H}^t \right] \underline{K}_{21} \begin{bmatrix} \underline{I}_{18} \\ \underline{H} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(\text{II.144})$$

Ao se introduzir (II.144) em (II.136) tem-se:

$$\underline{S}_{18} = \left[\underline{I}_{18} \mid \underline{H}^t \right] \underline{K}_{21} \begin{bmatrix} \underline{I}_{18} \\ \underline{H} \end{bmatrix} \underline{v}_{18} \quad \dots\dots(\text{II.145})$$

e, de (II.142) e (II.145) tem-se que:

$$\underline{S}_{18} = \left[\underline{I}_{18} \mid \underline{H}^t \right] \underline{K}_{21} \underline{v}_{21} \quad \dots\dots(\text{II.146})$$

e, finalmente, de (II.134) e (II.146):

$$\underline{S}_{18} = \left[\underline{I}_{18} \mid \underline{H}^t \right] \underline{S}_{21} \quad \dots\dots(\text{II.147})$$

Em (II.144) é expressa a Matriz de Rigidez e, em (II.147) o Vetor de Cargas Nodais Equivalentes para o elemento f_i

nito T18.

A Matriz de Rigidez do elemento finito T18 também pode ser obtida diretamente através da Matriz de Rigidez Generalizada \underline{K}_q , definida em (II.59). Da expressão (II.52):

$$\underline{q}_{21} = \underline{B}_{21}^t \underline{v}_{21} \quad \dots\dots(II.148)$$

e, substituindo-se (II.142) em (II.148):

$$\underline{q}_{21} = \underline{B}_{21}^t \begin{bmatrix} \underline{I}_{18} \\ \text{---} \\ \underline{H} \end{bmatrix} \underline{v}_{18} \quad \dots\dots(II.149)$$

ou,

$$\underline{q}_{21} = \underline{A}^t \underline{v}_{18} \quad \dots\dots(II.150)$$

sendo:

$$\underline{A} = [\underline{I}_{18} \mid \underline{H}^t] \underline{B}_{21} \quad \dots\dots(II.151)$$

Portanto, de modo análogo a (II.60), tem-se:

$$\underline{K}_{18} = \underline{A} \underline{K}_q \underline{A}^t \quad \dots\dots(II.152)$$

e introduzindo (II.151) em (II.152):

$$\underline{K}_{18} = [\underline{I}_{18} \mid \underline{H}^t] \underline{B}_{21} \underline{K}_q \underline{B}_{21}^t \begin{bmatrix} \underline{I}_{18} \\ \text{---} \\ \underline{H} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(II.153)$$

e, de (II.60) e (II.153), conclui-se que:

$$\underline{K}_{18} = [\underline{I}_{18} \mid \underline{H}^t] \underline{K}_{21} \begin{bmatrix} \underline{I}_{18} \\ \text{---} \\ \underline{H} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(II.154)$$

II.3.4 - Condições de contorno

Ao se tratar de problemas de placas de bordas retilíneas que ocorrem com maior frequência, defronta-se com três casos mais importantes de condições de contorno decorrentes das vinculações estruturais. Além destas condições de contorno, em função do estudo do comportamento de placas esconsas contínuas, é apresentado um quarto caso de condições de contorno. É importante lembrar que as condições de vinculação se referem às superfícies médias das placas.

II.3.4.1 - Condições de contorno para apoios simples

II.3.4.1.1 - Bordas simplesmente apoiadas

A superfície média deformada tem deslocamento vertical nulo, e pode girar livremente em torno do apoio. Consequentemente, os momentos fletores nas bordas são nulos, isto é, $w_{,xx}$ e $w_{,yy}$ devem ser nulos (vide figura II.16).

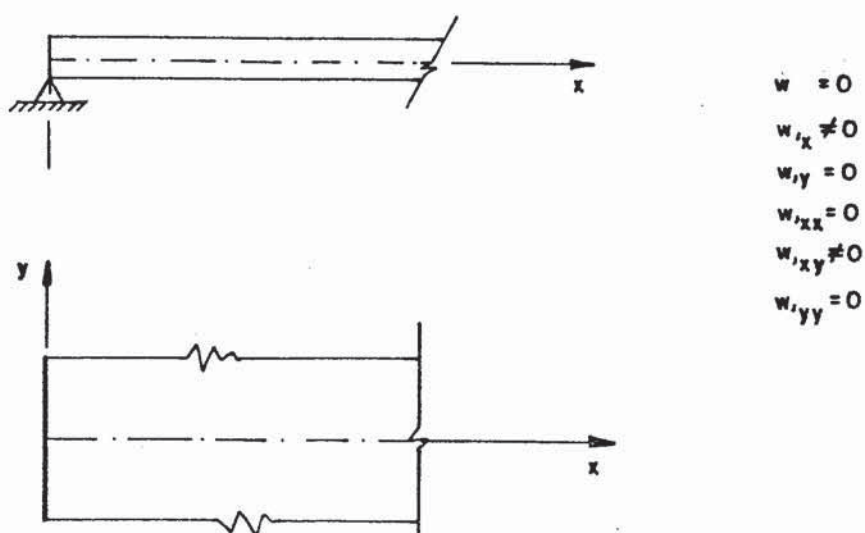


FIG. II.16 - BORDA SIMPLEMENTE APOIADA

II.3.4.1.2 - Apoios simples intermediários

A superfície média deformada tem deslocamento vertical nulo (vide figura II.17).

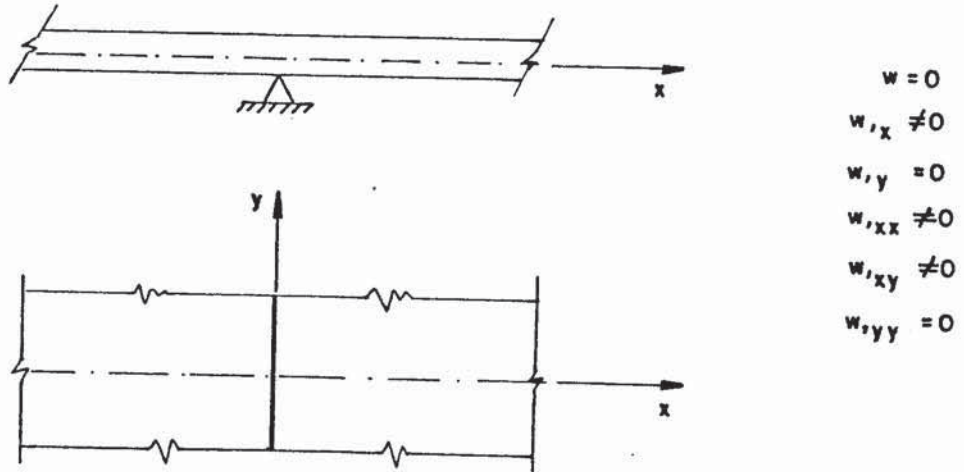


FIG. II. 17- APOIO SIMPLES INTERMEDIÁRIO

II.3.4.2 - Condições de contorno para bordas engastadas

A superfície média deformada tem deslocamento vertical nulo, e também o giro em seção normal ao engaste é nulo (vide figura II.18).

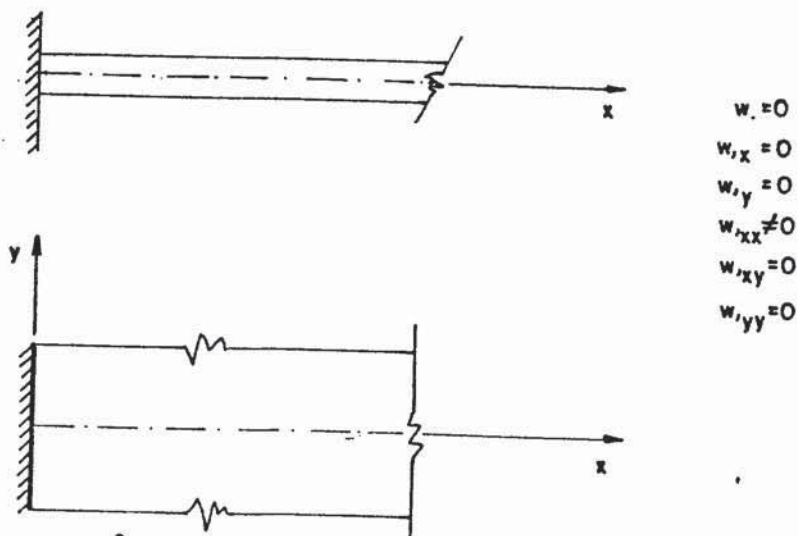


FIG. II. 18 - BORDA ENGASTADA

II.3.4.3 - Condições de contorno para bordas livres

O momento fletor e a reação vertical (força cortante) são nulos ao longo da superfície média deformada (vide figura II.19).

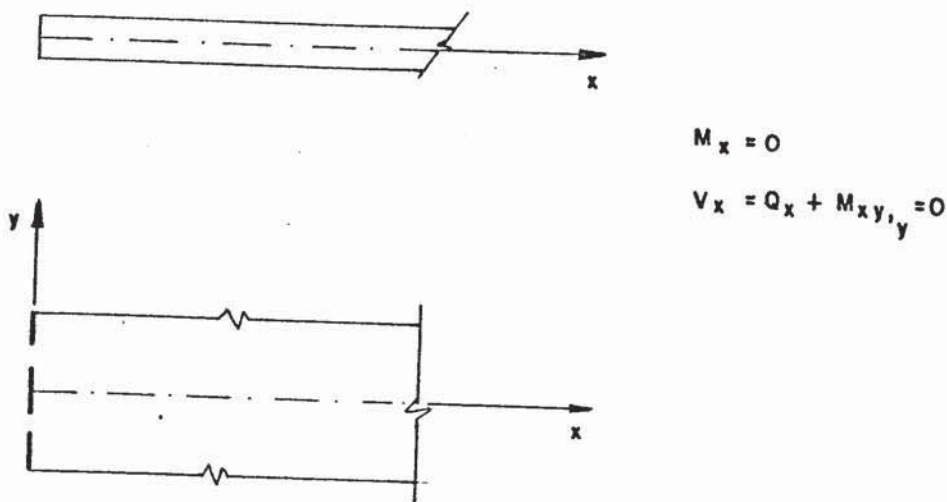


FIG. II.19 - BORDA LIVRE

Considerando-se o elemento finito T18, não há dificuldades para se introduzir as condições de contorno referentes aos apoios simples e engastes, porque são impostas diretamente sobre os parâmetros nodais deste elemento. No entanto, para as placas com bordas livres, a condição de que a reação vertical deve ser igual a zero é impossível de ser atendida, pois não se pode expressar V_x em termos dos parâmetros nodais inicialmente considerados no caso deste elemento finito.

Sabe-se que os momentos fletores M_x e M_y podem ser expressos por uma combinação de dois parâmetros nodais referentes ao elemento finito T18, que são as curvaturas $w_{,xx}$ e $w_{,yy}$. Assim,

$$M_x = 0$$

implica em

$$(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) = 0 \quad \dots\dots(II.155.a)$$

e,

$$M_y = 0$$

implica em

$$(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) = 0 \quad \dots\dots(\text{II.155.b})$$

Portanto, é conveniente transformar o conjunto inicial de parâmetros nodais em um outro conjunto mais adequado, com a finalidade de se impor as condições de contorno para placas com bordas livres.

O conjunto original de parâmetros nodais é relacionado com o conjunto modificado por:

$$\begin{bmatrix} w \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,xx} \\ w_{,xy} \\ w_{,yy} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{1-\nu^2}\right) & 0 & \left(\frac{-\nu}{1-\nu^2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{-\nu}{1-\nu^2}\right) & 0 & \left(\frac{1}{1-\nu^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \\ w_{,xy} \\ (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \end{bmatrix}_i \quad \dots\dots(\text{II.156})$$

ou,

$$\underline{v}_i = \underline{T}_i \underline{v}'_i \quad \dots\dots(\text{II.157})$$

Com o intuito de se aplicar a transformação (II.157) ao nível do elemento, considera-se que a equação de equilíbrio para um elemento "p", conectado ao ponto nodal "i", pertencente à borda livre é:

$$\underline{S}_p = \underline{K}_p \underline{v}_p \quad \dots\dots(\text{II.158})$$

que pode ser transformada em uma equação de equilíbrio modificada ao se multiplicar ambos os lados da equação (II.158) por \underline{T}_p^t :

$$\underline{T}_p^t \underline{S}_p = \underline{T}_p^t \underline{K}_p \underline{v}_p \quad \dots\dots(II.159)$$

e, ao se utilizar (II.157) e (II.159), tem-se:

$$\underline{T}_p^t \underline{S}_p = \underline{T}_p^t \underline{K}_p \underline{T}_p \underline{v}'_p \quad \dots\dots(II.160)$$

ou,

$$\underline{S}'_p = \underline{K}'_p \underline{v}'_p \quad \dots\dots(II.161)$$

sendo que

$$\underline{S}'_p = \underline{T}_p^t \underline{S}_p \quad \dots\dots(II.162)$$

e,

$$\underline{K}'_p = \underline{T}_p^t \underline{K}_p \underline{T}_p \quad \dots\dots(II.163)$$

A matriz de transformação \underline{T}_p é uma matriz diagonal com submatrizes na diagonal principal. Para o elemento "p", tem-se:

$$\underline{T}_p = \begin{bmatrix} \underline{T}_i & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad (\text{para } i = 1)$$

$$\underline{T}_p = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}_i & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad (\text{para } i = 2)$$

$$\underline{T}_p = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{T}_i \end{bmatrix} \quad (\text{para } i = 3) \dots (\text{II.164})$$

sendo \underline{I} a matriz identidade e $\underline{0}$ a matriz nula, ambas de ordem 6.

As transformações (II.162) e (II.163) afetam somente linhas e colunas associadas com o 4º e 6º parâmetros do nó "i". Estas equações são aplicadas aos elementos finitos conectados aos pontos nodais das bordas livres, antes da adição das equações de equilíbrio do elemento na equação de equilíbrio da estrutura completa. Com este procedimento, um sistema de equações modificado é obtido (II.161) em que as condições de contorno de borda livre podem ser aplicadas diretamente. Também, quando da aplicação de momentos fletores externos, serão processadas as modificações (II.161) para se impor os valores desses momentos que atuam sobre a estrutura.

II.3.4.4 - Rotação de eixos para imposição de condições de contorno

Os três casos de condições de contorno apresentados anteriormente, podem também ocorrer em trechos das placas que são inclinados em relação aos eixos globais (X, Y) adotados como referência. Para estes casos, é necessário se efetuar uma transformação de coordenadas, para se impor adequadamente as condições de contorno aos pontos nodais da estrutura pertencentes a esses trechos.

Como exemplo, considerando um eixo da placa que seja coincidente com o eixo t na figura II.12, nem todas as condições de contorno podem ser diretamente formuladas em termos de coordenadas globais (X, Y), e por isso é conveniente transformar estas coordenadas em coordenadas oblíquas. A relação entre os parâmetros nodais dos dois sistemas de coordenadas é expressa matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} w \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,xx} \\ w_{,xy} \\ w_{,yy} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 & -2sc & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & sc & (c^2-s^2) & -sc \\ 0 & 0 & 0 & s^2 & 2sc & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w_{,t} \\ w_{,n} \\ w_{,tt} \\ w_{,tn} \\ w_{,nn} \end{bmatrix}_i \dots (II.165)$$

sendo que:

$$s = \text{sen } \alpha$$

$$c = \text{cos } \alpha$$

A convenção de sinal para as coordenadas oblíquas é mostrada na figura II.14. A equação (II.165) também pode ser escrita como:

$$\underline{v}_i = \underline{T}_i \underline{v}_i'' \dots (II.166)$$

e a transformação é realizada exatamente segundo as equações (II.162) e (II.163), porém, usando para \underline{T}_i a matriz da expressão (II.165). Portanto, um contorno inclinado e livre pode ser tratado aplicando-se as transformações (II.162) e (II.163) duas vezes; primeiro com \underline{T}_i dado pela equação (II.165) e, em seguida com \underline{T}_i dado pela equação (II.156).

II.3.4.5 - Condições de contorno para pontos nodais pertencentes, simultaneamente, à borda livre e a um apoio intermediário inclinado

Para o tratamento mais adequado das condições de contorno de placas esconsas contínuas, é necessária uma transformação dos parâmetros nodais iniciais referentes ao elemento finito T18. Este novo conjunto de parâmetros nodais modificados permite a imposição de condições de contorno para pontos nodais que pertencem à trechos inclinados dos apoios simples intermediários, e que ao mesmo tempo pertencem à borda livre da placa (vide figura II.20).

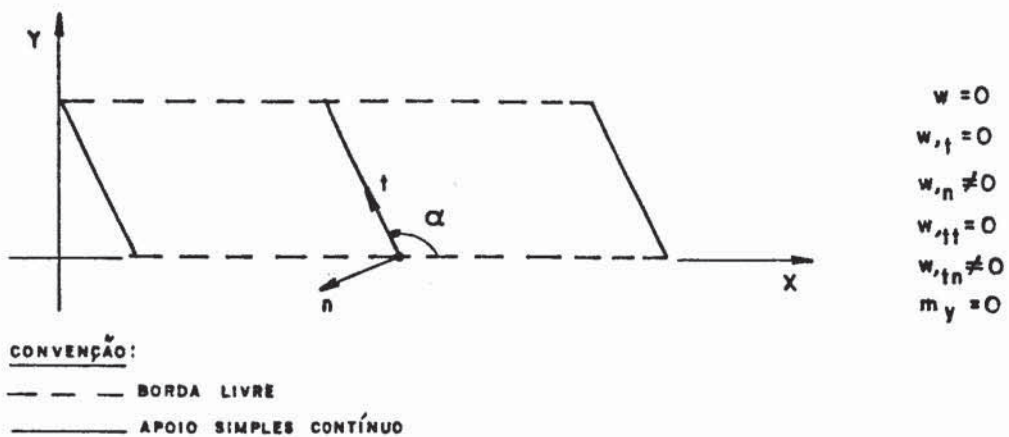


FIG. II. 20 - PLACA ESCONSA CONTÍNUA

Neste caso, quase todas as condições de contorno são impostas através de coordenadas oblíquas; somente a condição de que o momento fletor M_y é nulo se refere às coordenadas (X, Y) . Os casos de placas retangulares contínuas também podem ser abordados fazendo-se $\alpha = 90^\circ$.

O conjunto original de parâmetros nodais é relacionado com o novo conjunto modificado por:

$$\begin{bmatrix} w \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,xx} \\ w_{,xy} \\ w_{,yy} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left[c^2 - \frac{s^2(s^2+vc^2)}{(c^2+vs^2)} \right] & \left[-2sc - \frac{2s^3c(1-\nu)}{(c^2+vs^2)} \right] & \left[\frac{s^2}{(c^2+vs^2)} \right] \\ 0 & 0 & 0 & \left[sc + \frac{sc(s^2+vc^2)}{(c^2+vs^2)} \right] & \left[(c^2-s^2) + \frac{2s^2c^2(1-\nu)}{(c^2+vs^2)} \right] & \left[\frac{-sc}{(c^2+vs^2)} \right] \\ 0 & 0 & 0 & \left[s^2 - \frac{c^2(s^2+vc^2)}{(c^2+vs^2)} \right] & \left[2sc - \frac{2sc^3(1-\nu)}{(c^2+vs^2)} \right] & \left[\frac{c^2}{(c^2+vs^2)} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w_{,t} \\ w_{,n} \\ w_{,tt} \\ w_{,tn} \\ w_{,nn}^* \end{bmatrix}_i$$

.....(II.167)

onde:

$$w_{,nn}^* = M_y$$

ou,

$$\underline{v}_i = \underline{T}_i \underline{v}_i''' \quad \text{.....(II.168)}$$

que é idêntica à expressão (II.157); e a transformação é realizada exatamente segundo as equações (II.162) e (II.163), utilizando-se para \underline{T}_i a matriz da expressão (II.167).

II.3.5 - Determinação dos momentos fletores e volvente

Para a determinação dos momentos fletores M_x e M_y , e do momento volvente M_{xy} em cada ponto nodal da estrutura são utilizadas as curvaturas $w_{,xx}$, $w_{,yy}$ e $w_{,xy}$ que estão incluídas entre os parâmetros nodais \underline{v}_i do elemento finito T18. Ao se utilizar as relações entre momentos e curvaturas (II.33), é possível se determinar diretamente esses momentos. Contudo, para facilitar a saída

da dos resultados é necessário se alterar a formulação anterior. Com a utilização das expressões (II.33) e (II.102), a relação entre momentos e parâmetros nodais pode ser:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}_i = -D \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 0 & \nu & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w',_x \\ w',_y \\ w',_{xx} \\ w',_{xy} \\ w',_{yy} \end{bmatrix}_i \dots\dots(II.169)$$

ou,

$$\underline{m}_i = \underline{n} \underline{v}_i \dots\dots(II.170)$$

onde "i" é o número do ponto nodal da rede de elementos finitos em que é discretizada a estrutura.

Também podem ser calculados os momentos principais (M_1 e M_2) e as respectivas direções principais para cada ponto nodal da estrutura, com o uso das expressões:

$$\left. \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} \right\} = \frac{M_x + M_y}{2} \pm \left[\left(\frac{M_x - M_y}{2} \right)^2 + M_{xy}^2 \right]^{1/2} \dots\dots(II.171)$$

e,

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 M_{xy}}{M_x - M_y} \dots\dots(II.172)$$

Para se fazer o reconhecimento automático das direções principais aliadas aos respectivos momentos principais, pode-se utilizar o que é apresentado por Savassi [12], que recomenda o exame do sinal de:

$$DIF = M_x - M_y$$

$$\begin{cases} \text{se } DIF \geq 0, \theta \text{ indica } M_1 \\ \text{se } DIF < 0, \theta \text{ indica } M_2 \end{cases} \dots\dots(\text{II.173})$$

sendo o ângulo positivo contado a partir de X, em sentido sinistrorso (vide figura II.21).

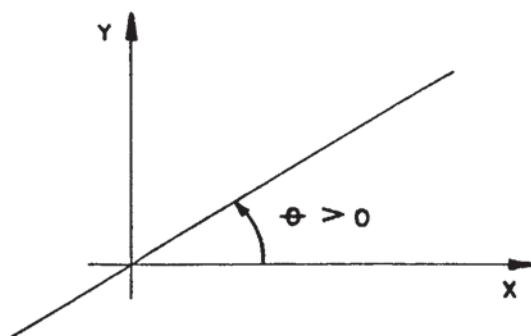


FIG. II. 21- ÂNGULO DAS DIREÇÕES PRINCIPAIS

II.3.6 - Determinação das reações de apoio

Com o emprego das equações de equilíbrio dos elementos finitos, as reações de apoio podem ser obtidas em termos de forças nodais concentradas. A equação de equilíbrio para cada elemento "p" é expressa por:

$$\underline{S}_p = \underline{K}_p \underline{v}_p \dots\dots(\text{II.174})$$

A força nodal do elemento S_{wi} , corresponde à deflexão w_i do ponto nodal de borda "i", é imediatamente determinada uma vez obtida a solução para os parâmetros nodais.

A reação vertical do ponto nodal "i" é obtida pela soma das forças S_{wi} computadas para todos os elementos conecta

dos ao ponto nodal "i"; mais as forças verticais resultantes do carregamento externo e que foram obtidas pela expressão (II.68), para todos os elementos conectados ao ponto nodal "i".

As reações de apoio, determinadas deste modo, satisfazem completamente as condições de equilíbrio vertical. Entretanto, a distribuição das forças reativas ao longo da borda somente poderá ser determinada aproximadamente.

CAPÍTULO III

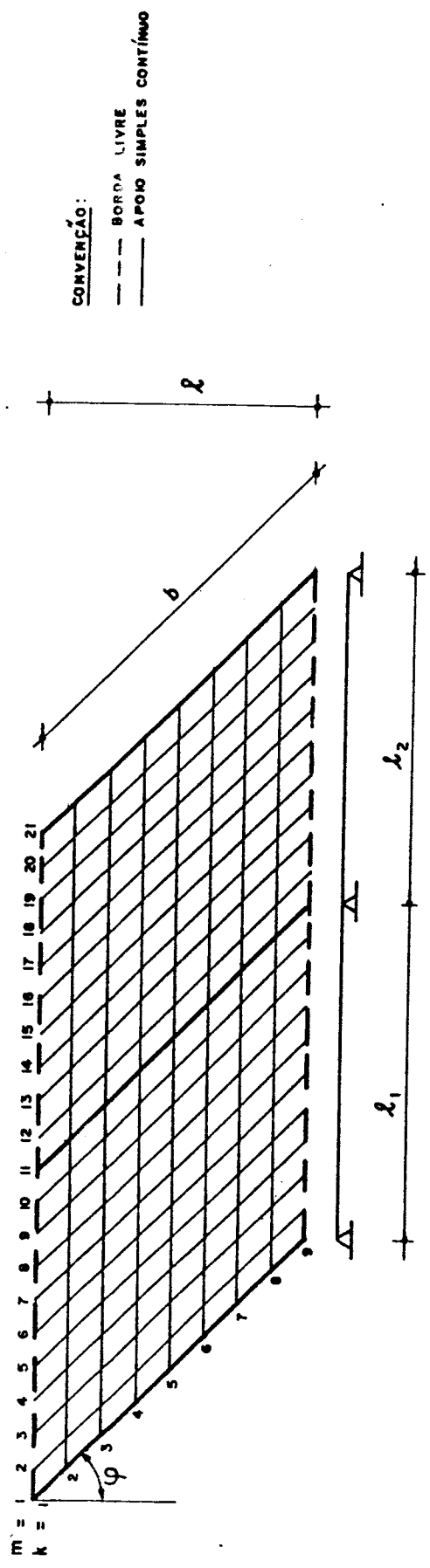
PROGRAMAS PARA GERAÇÃO AUTOMÁTICA DAS REDES DE ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS ESCONSAS CONTÍNUAS

III.1 - Tipos de Estruturas Geradas

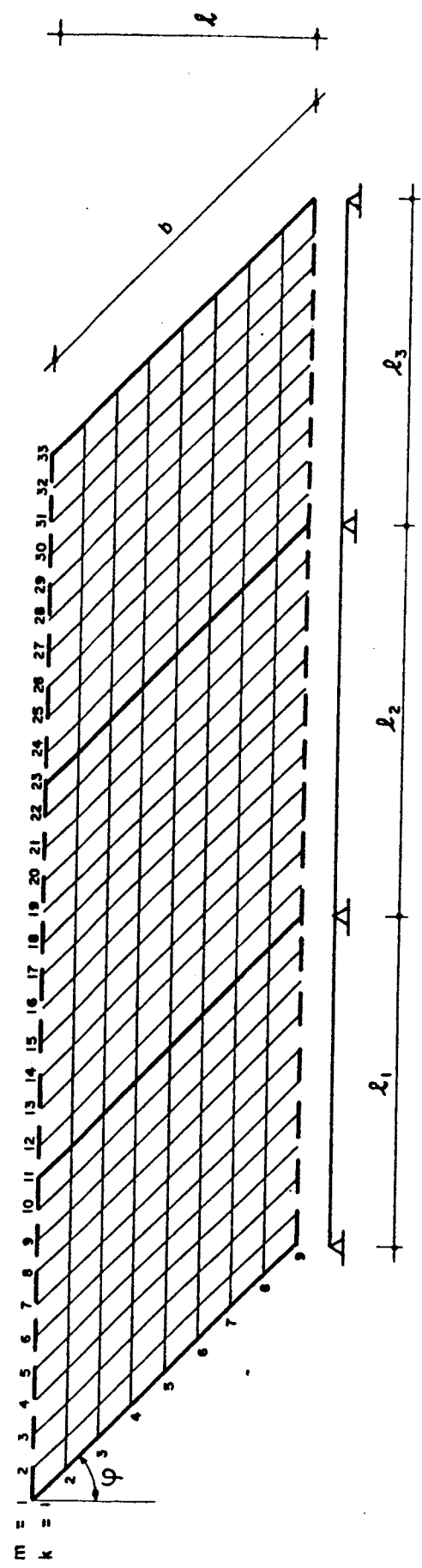
Devido ao grande volume de dados necessários para o processamento de estruturas pelo Método dos Elemento Finitos, como objetivo inicial deste trabalho foi desenvolvida uma pesquisa com a finalidade de se gerar, de maneira automática ou semi-automática, os dados referentes às redes de elementos finitos das estruturas em estudo.

As estruturas consideradas são placas esconsas contínuas, de dois e três vãos, que apresentam bordas livres no sentido longitudinal e apoios simples contínuos no sentido transversal, conforme é mostrado na figura III.1. Com o fornecimento de alguns parâmetros referentes às características geométricas das placas em adição aos dados relativos a uma faixa básica da estrutura, são gerados dados que servem para um processamento posterior da estrutura completa. Os dados gerados também comportam informações sobre condições de contorno a serem impostas no caso específico das placas esconsas contínuas, além de dados sobre os materiais que compõem as estruturas, os carregamentos atuantes, etc...

É importante se ressaltar que as restrições consideradas nos apoios simples contínuos são bi-laterais, e consequentemente os deslocamentos na direção vertical dos pontos da estrutura sobre estes apoios são impedidos. A continuidade destes apoios é na direção transversal, entre as duas bordas livres, na direção da variação do parâmetro k ; por exemplo, para $m = 1$ e k variando de 1 a 9, fica caracterizado um apoio simples contínuo.



PLACAS ESCONÇAS CONTÍNUAS DE 2 VÃOS



PLACAS ESCONÇAS CONTÍNUAS DE 3 VÃOS

FIG. III. 1- REDES PARA DETERMINAÇÃO DOS PONTOS (m, k).

III.1.1 - Nomenclatura utilizada

Os parâmetros gerais que definem as placas esconsas contínuas de dois e três vãos, conforme a figura III.1, são:

- o ângulo de esconsidade ϕ
- a largura da placa ℓ
- o comprimento do primeiro vão ℓ_1
- o comprimento do segundo vão ℓ_2
- o comprimento do terceiro vão ℓ_3 (se a placa tiver três vãos)
- e o valor de b , que é obtido a partir dos valores do ângulo de esconsidade ϕ e da largura da placa ℓ .

São definidas posições relativas no domínio da placa através de uma rede que divide a estrutura em um número de partes iguais no sentido longitudinal, e também em um número de partes iguais no sentido transversal (vide figura III.1). É usada a notação (m, k) para os pontos dessa rede. Para placas com dois vãos, a relação $\ell_1 : \ell_2$ considerada neste trabalho é de 1 : 1; o valor de m varia de 1 a 21, e o valor de k varia de 1 a 9. Para placas com três vãos, a relação $\ell_1 : \ell_2 : \ell_3$ considerada neste trabalho é de 1 : 1,2 : 1; o valor de m varia de 1 a 33, e o valor de k varia de 1 a 9. Portanto para $k = 1, k = 9$ e quaisquer valores de m tem-se pontos pertencentes às bordas livres. Por outro lado, considerando-se $m = 1, m = 11, m = 21, m = 23, m = 33$ e para quaisquer valores de k tem-se pontos pertencentes aos apoios simples contínuos.

III.2 - Programas Prê-Processadores Para Geração Automática de Dados

Um dos obstáculos maiores e mais significativos para a conclusão deste trabalho foi elaborar a geração automática do grande volume de dados para o processamento das placas esconsas contínuas. Desde o início concluiu-se que teriam de ser feitos programas prê-processadores, que gerariam de maneira mais abrangente possível os dados referentes às estruturas para o processamento principal. A idéia era se fornecer alguns parâmetros relativos às placas que seriam suficientes para a geração da maioria dos dados, e que após serem gerados seriam complementados com algumas poucas

informações como, por exemplo, os carregamentos atuantes sobre as estruturas.

Como no início a formulação até então desenvolvida para o elemento T18 só permitia considerar cargas distribuídas com variação linear sobre todo o domínio do elemento, ou cargas concentradas aplicadas diretamente sobre os pontos nodais, para todo o carregamento que não satisfazia estas condições era necessário se gerar outra rede de elementos finitos. Como um dos objetivos do trabalho era estudar os efeitos do trem-tipo rodoviário (classe 45) sobre o comportamento de placas (pontes) esconsas contínuas, para cada posição do trem-tipo era necessário gerar nova rede de elementos finitos, uma vez que a distância entre os eixos e a distância entre as rodas do veículo é padronizada, impossibilitando o posicionamento devido das cargas distribuídas sobre todo o domínio de cada um dos elementos carregados, e das cargas concentradas sobre os pontos nodais da rede. Com estas condições de carregamento das estruturas não era possível uma geração automática de toda a rede. Foram tentadas várias alternativas, mas com a melhor delas só era possível gerar cerca de 70% dos dados. Para redes que chegavam a ter sempre um número expressivo de elementos e de pontos nodais (redes com 800 elementos e 500 pontos nodais), era um trabalho moroso e improdutivo se gerar os dados complementares (cerca de 30%). Portanto, conclui-se que o melhor seria uma outra alternativa de geração dos dados, que chegasse o mais próximo possível da geração total de informações sobre as estruturas a serem processadas.

III.2.1 - Geração automática de redes regulares de elementos finitos

Com a finalidade de se gerar redes regulares de elementos finitos, foram desenvolvidas duas considerações relativas aos carregamentos das placas. A idéia era gerar as redes de elementos das estruturas e aplicar-lhes o carregamento sem ter que se mudar a configuração da rede a cada novo carregamento. Com isso, além dos dois casos de carregamentos já existentes, foi implementada nos programas processadores principais a possibilidade de se analisar estruturas que tenham elementos finitos com cargas u-

niformemente distribuídas sobre parte do domínio, ou cargas concentradas aplicadas em qualquer ponto do domínio dos elementos considerados.

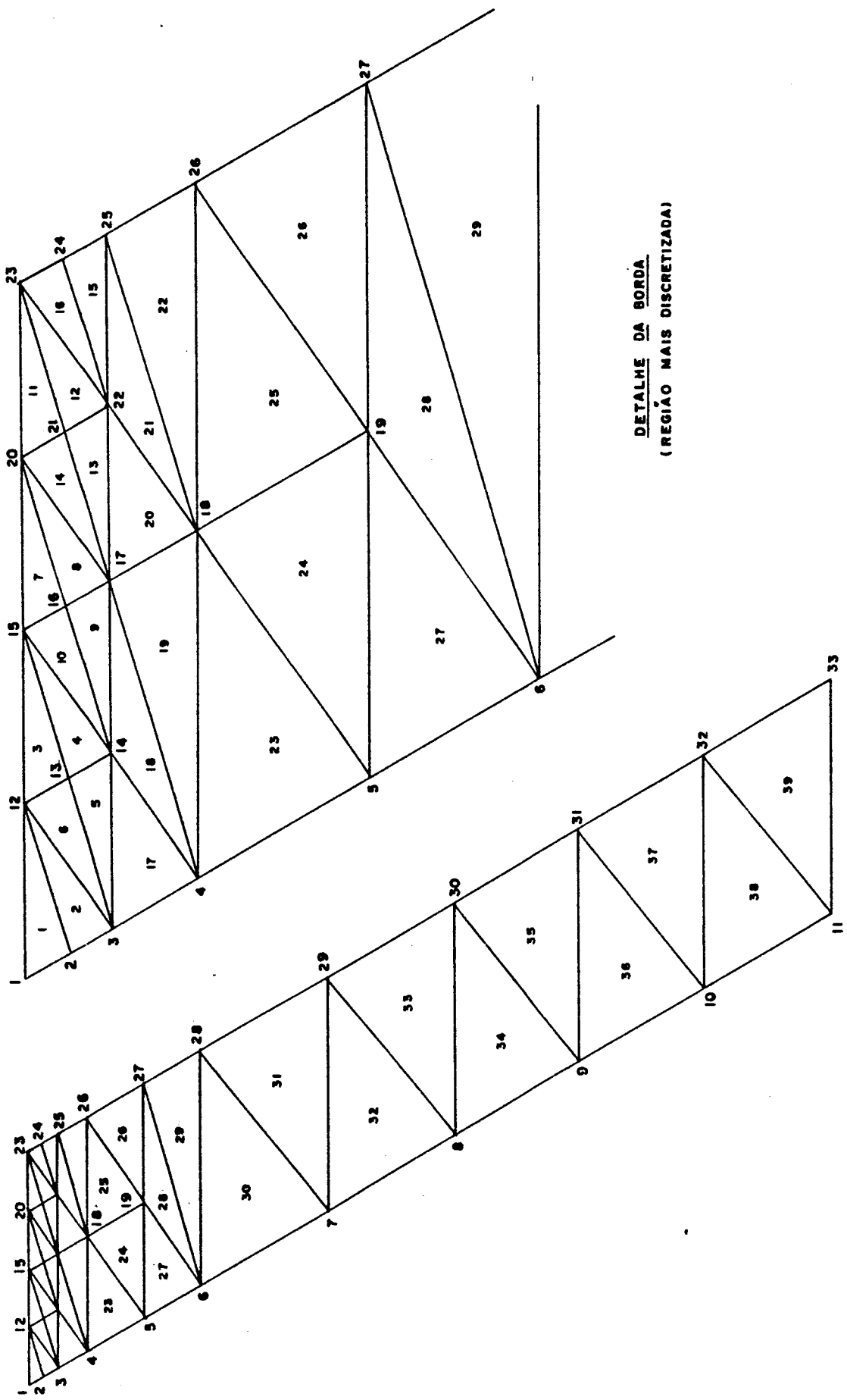
Para a implementação dos dois novos casos de carregamento, foi necessário se desenvolver as expressões para os vetores de Cargas Nodais Equivalentes respectivas. Este assunto é abordado nos itens II.3.2.5.2 e II.3.2.5.3.

Com estas considerações, é facilitada a geração das redes de elementos finitos com formas regulares, pois não há variações nas discretizações das redes provocadas por carregamentos diferentes.

Para se metodizar o trabalho, foi fixada uma largura para as placas abordadas. O valor adotado foi $l = 14,00\text{m}$ (vide figura III.1), e é decorrente dos dados das larguras das estradas em conformidade com o gabarito utilizado atualmente. Com este parâmetro fixado, foram obtidas as diversas placas em função de relações, como a relação entre o primeiro vão (l_1) e a largura (l), e a relação entre os vãos (l_1 e l_2 , se forem placas de 2 tramos; l_1 , l_2 e l_3 , se forem placas de 3 tramos). Os ângulos de esconsidade abrangidos foram: $\phi = 30^\circ$, $\phi = 45^\circ$ e $\phi = 60^\circ$.

Depois de vários estudos para se gerar as redes regulares da melhor forma possível, concluiu-se que a maneira mais adequada seria a formação de uma faixa básica transversal de elementos finitos, a partir da qual se obteria a estrutura completa com um número necessário de faixas básicas justapostas para a montagem dos vãos (vide figuras III.2 e III.3).

Foram considerados dois casos de discretização das placas para se abranger os pontos de maior importância em solicitação das placas esconsas contínuas [13]; esses pontos ocorrem nas bordas livres e na área central longitudinal das placas. Portanto, um primeiro caso é a discretização maior das placas nas regiões da borda livre, e o segundo caso é a discretização maior das placas nas regiões centrais, na direção longitudinal. Assim, com a faixa discretizada mostrada na figura III.2 é gerada a estrutura da figura III.4; e com a faixa discretizada mostrada na figura III.3 é gerada a estrutura da figura III.5. A numeração dos elementos finitos, e dos pontos nodais correspondentes a cada elemento, é feita para a estrutura gerada na mesma ordem e sequência que é feita para a faixa básica considerada. E a largura da faixa



·FIG. III.2- FAIXA BÁSICA DE DISCRETIZAÇÃO PARA GERAÇÃO AUTOMÁTICA DA REDE DE ELEMENTOS FINITOS

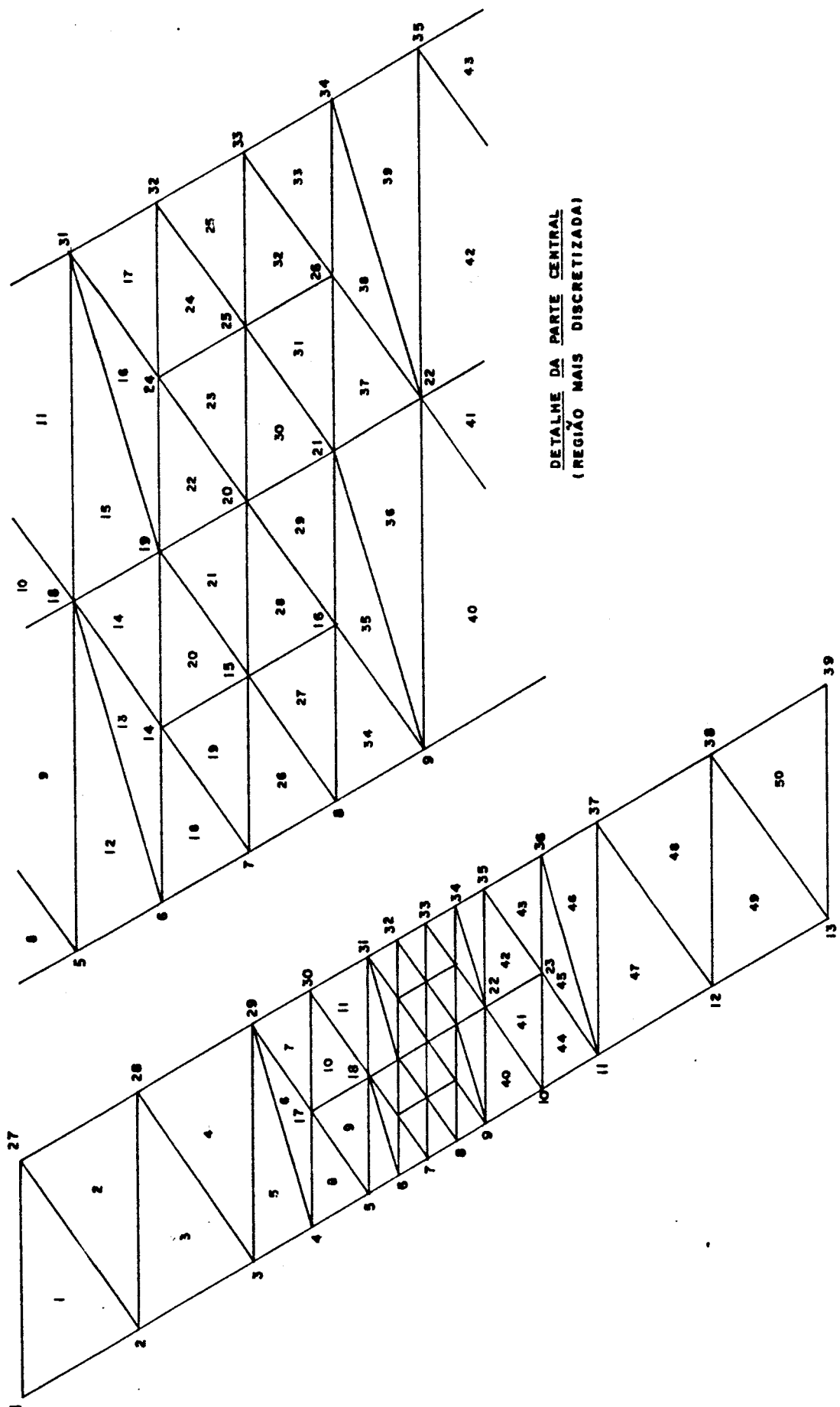


FIG. III.3 - FAIXA BÁSICA DE DISCRETIZAÇÃO PARA GERAÇÃO AUTOMÁTICA DA REDE DE ELEMENTOS FINITOS

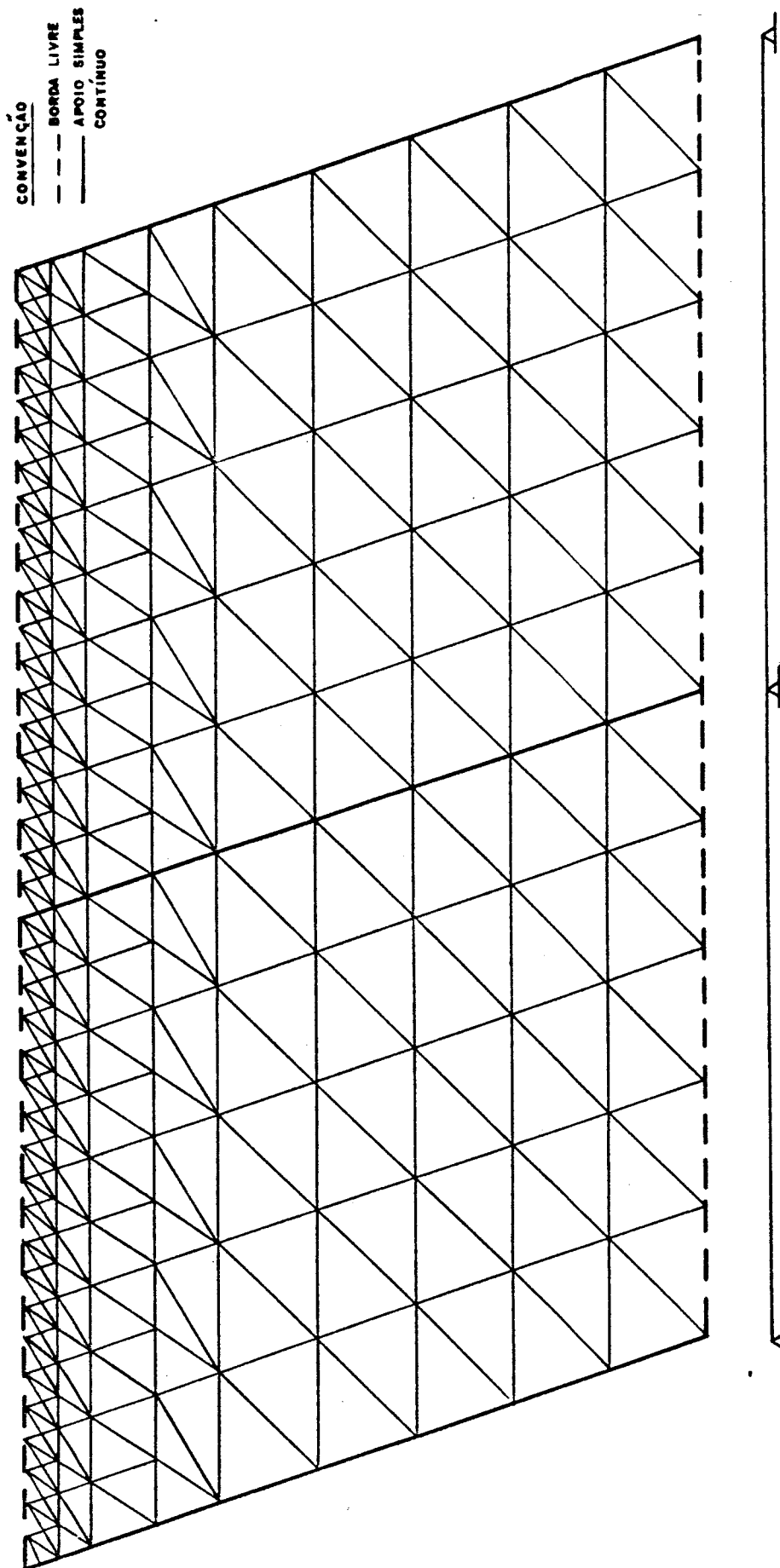


FIG. III.4 - REDE DE ELEMENTOS FINITOS GERADA AUTOMATICAMENTE
(MAIOR DISCRETIZAÇÃO NA BORDA LIVRE)

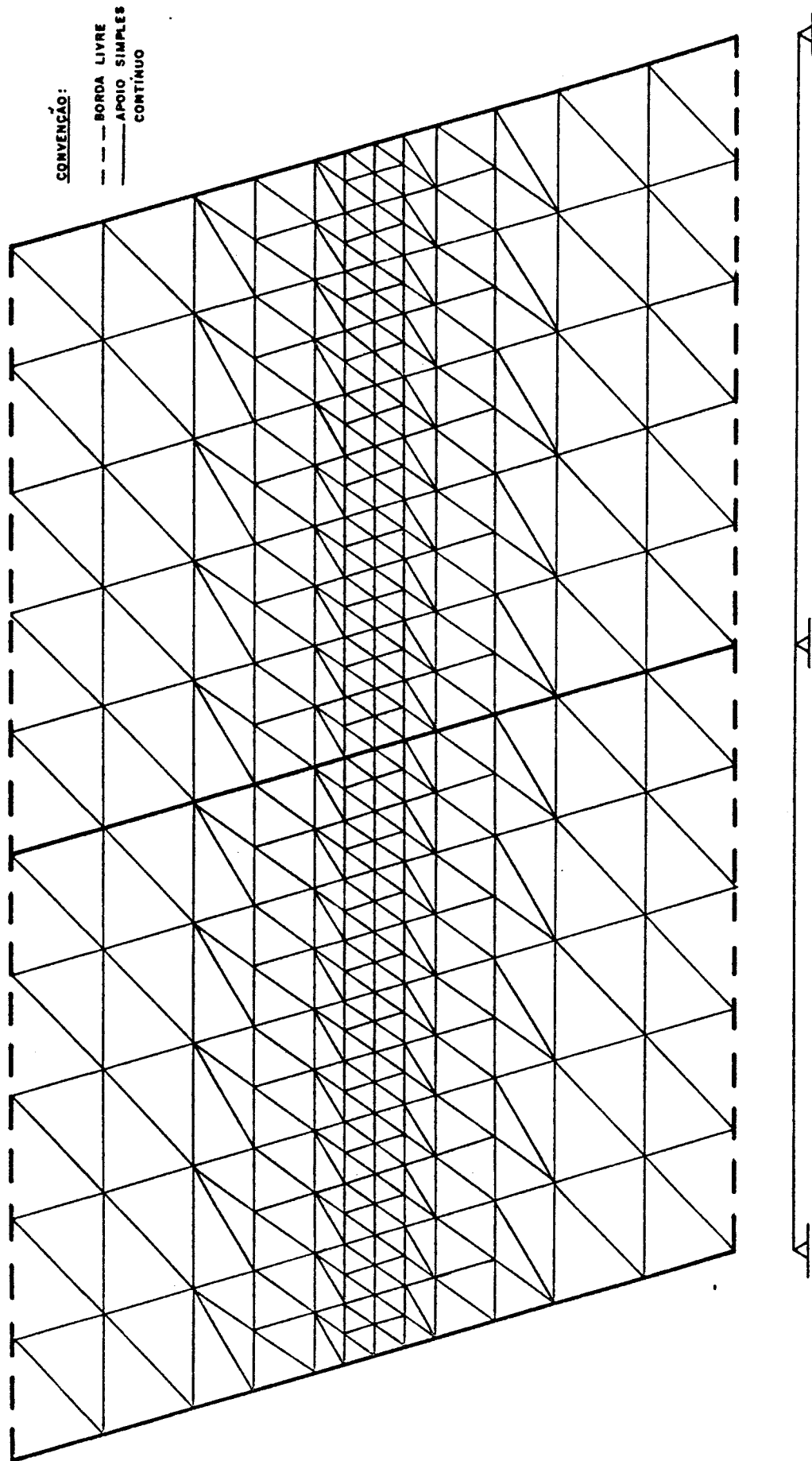


FIG. III.5 - REDE DE ELEMENTOS FINITOS GERADA AUTOMATICAMENTE
(MAIOR DISCRETIZAÇÃO NA FAIXA CENTRAL)

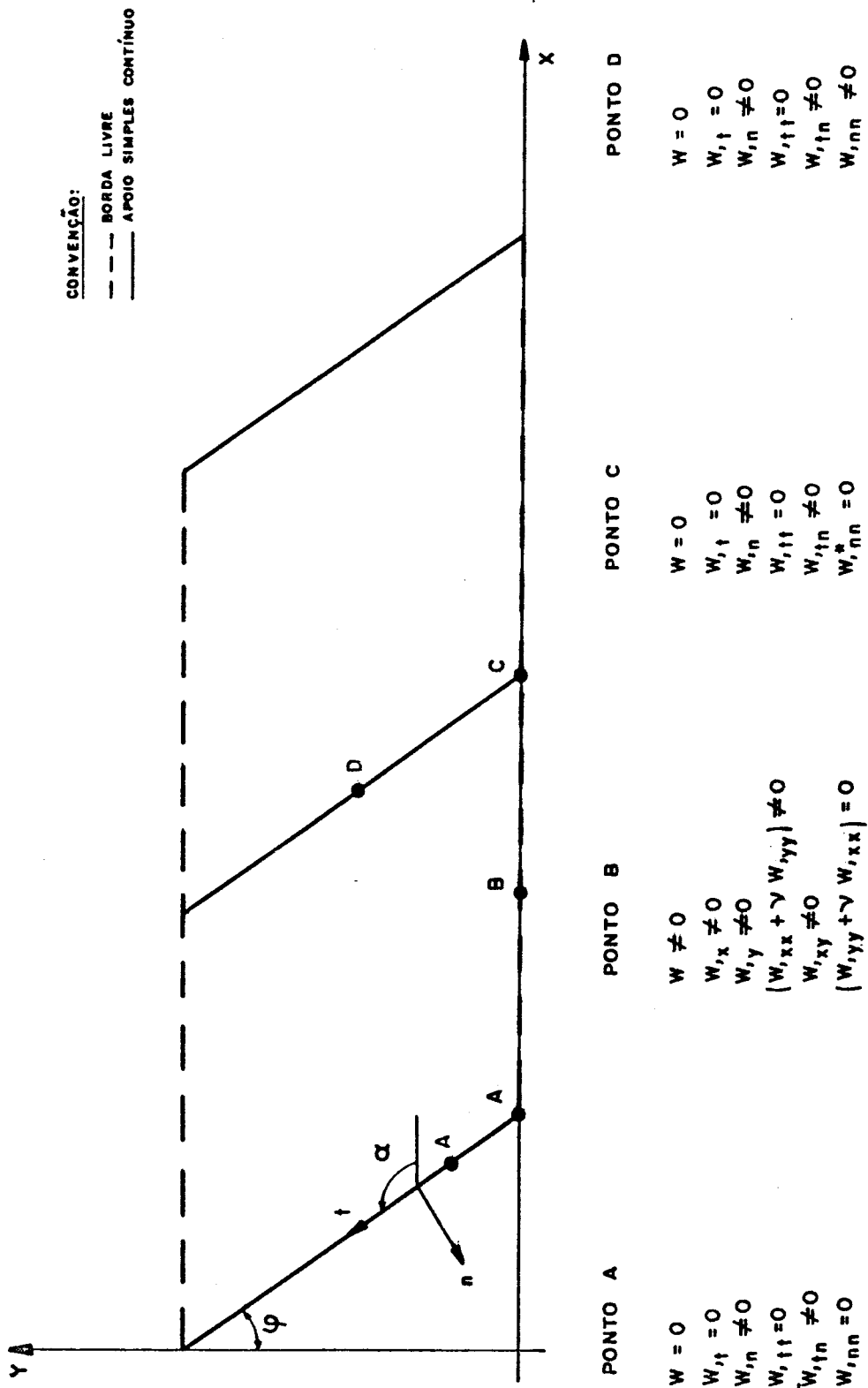


FIG. III. 6 - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA DIVERSOS PONTOS DE PLACAS ESCONSAS CONTÍNUAS

básica é adotada para cada caso em função do ângulo de esconsidade ϕ , de modo que as formas dos elementos finitos sejam regulares a fim de se ter melhor qualidade dos resultados.

Para as relações entre os vãos adotadas ($\lambda_1 : \lambda_2 = 1:1$, para placas com dois vãos; e $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 1:1,2:1$, para placas com três vãos), os vãos externos sempre têm 5 faixas básicas e os vãos internos (para placas com três vãos) sempre têm 6 faixas básicas. Na tabela III.1, são apresentados o número de elementos finitos e o número de pontos nodais para cada caso de rede gerada automaticamente para as placas esconsas contínuas abordadas neste trabalho.

REDES DE ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS ESCONSAS CONTÍNUAS			
Maior discretização na borda livre		Maior discretização na faixa central longitudinal	
2 vãos	3 vãos	2 vãos	3 vãos
390 elementos	624 elementos	500 elementos	800 elementos
231 pontos nodais	363 pontos nodais	273 pontos nodais	429 pontos nodais

Tabela III.1

As condições de contorno para os diversos pontos das placas esconsas contínuas de dois vãos, e a orientação dos eixos de coordenadas globais X e Y são mostradas na figura III.6. Para as placas esconsas contínuas de três vãos ocorrem os mesmos tipos de vinculações que são representadas para placas esconsas contínuas de dois vãos, portanto ocorrem as mesmas condições de contorno mostradas na figura III.6.

III.2.2 - Descrição dos programas

Foram elaborados dois programas para a geração automática de redes de elementos finitos para placas esconsas contínuas: um programa para geração de redes com maior discretização na borda livre (vide figura III.4); e o outro programa para geração de redes com maior discretização na faixa central longitudinal (vi-

de figura III.5).

Os programas foram elaborados em linguagem de programação FORTRAN 77, e processados em um computador VAX-11, modelo 785, com 4 Mbytes de memória central e 2,7 Gbytes de memória auxiliar. A geração de dados para cada estrutura é muito rápida; cerca de 30 segundos em média, para as estruturas com maior número de elementos e pontos nodais. Pelo processo tradicional, a geração destas mesmas estruturas exigiria várias horas para a concepção, digitação e aferição dos dados.

Para cada estrutura, o arquivo de dados é composto por dados referentes ao número de elementos finitos, número de pontos nodais, número de elementos finitos que têm pontos nodais para imposição de condições de contorno, número dos pontos nodais e os tipos de parâmetros nodais para imposição de condições de contorno, pontos nodais que pertencem a um trecho inclinado (esconso), coordenadas globais dos pontos nodais, espessuras da placa nos pontos nodais, condições de contorno, ângulo de esconsidade, módulo de elasticidade do material, coeficiente de Poisson do material, etc. Se a placa tem carregamento uniformemente distribuído sobre todo o seu domínio, este carregamento é gerado automaticamente; em caso contrário, o carregamento é fornecido posteriormente. Estas são as principais informações necessárias para o processamento das placas esconsas contínuas pelo Método dos Elementos Finitos.

A seguir são apresentadas as principais variáveis utilizadas nos programas pré-processadores GERB (para geração automática de placas esconsas contínuas de 2 e de 3 vãos, com maior discretização na borda) e GERC (para geração automática de placas esconsas contínuas de 2 e de 3 vãos, com maior discretização na faixa central longitudinal). Estes dois programas se encontram no Apêndice 2 (itens 2.2 e 2.3, respectivamente). Para o processamento de cada placa, é necessário fornecer aos programas as seguintes informações:

- ANGLE(1): é o valor do ângulo alfa (α) mostrado na figura III.6, que é obtido em função do valor do ângulo de esconsidade (ϕ).
- EM(1): é o valor do Módulo de Elasticidade do Material de que é formada a placa. No caso do concreto,

foi adotado $EM(1) = 2.000.000 \text{tf/m}^2$.

- CP(1): é o valor do coeficiente de Poisson, que neste trabalho foi adotado como 0,2.
- NPDC: é o número de pontos nodais que pertencem, simultaneamente, à borda livre e ao apoio contínuo intermediário.
- NPDC(I): é o valor do ponto nodal I que pertence, simultaneamente, à borda livre e ao apoio contínuo intermediário.
- ILTRAM: é o número de vãos que compõem a placa esconsa contínua (2 ou 3).
- NUFL1: é o número de faixas básicas que compõem os vãos externos da placas esconsas contínuas (5 faixas básicas).
- NUFL2: é o número de faixas básicas que compõem o vão interno das placas esconsas contínuas de 3 vãos (6 faixas básicas).
- XL: é o valor da largura da faixa básica, e que serve para a geração das coordenadas globais X dos pontos nodais da estrutura.
- KARGA(L): código para indicar se há carga distribuída (KARGA = 1), ou não (KARGA = 0) sobre o elemento finito L.
- ZCAR(L,I): valor da coordenada do carregamento distribuído sobre o elemento L, no ponto nodal I.

Algumas destas informações são mantidas constantes para todas as placas esconsas contínuas que são abrangidas neste trabalho, como é o caso de EM(1), CP(1), NUFL1 e NUFL2. As outras informações devem ser verificadas oportunamente para cada

caso de placa a ser gerada. São apresentadas ainda informações sobre outras variáveis importantes dos programas pré-processadores GERB e GERC:

- NUMBC: número de casos de condições de contorno para a estrutura considerada.
- NLOAD: número de casos de carregamento que atuam sobre a estrutura considerada.
- NMAT: número de materiais diferentes que compõem a estrutura.
- ISKEW: é um código para indicar se a estrutura tem algum trecho inclinado; ou é uma estrutura esconsa (ISKEW = 1) ou não (ISKEW = 0).
- NANGL: é o número de ângulos usados para definirem trechos inclinados para imposição de condições de contorno.
- DENS(1): densidade do material de que é formada a estrutura (como os programas principais não usam este parâmetro para o processamento atual, é atribuído o valor nulo).
- DILAT(1): coeficiente de dilatação térmica do material de que é formada a estrutura (como os programas principais não usam este parâmetro para o processamento atual, é atribuído o valor nulo).
- NUMF: é o número de faixas básicas que formam a estrutura.
- NUMF1: é uma variável auxiliar para geração das faixas que compõem a estrutura.
- NUMEL: é o número total de elementos finitos que formam a estrutura.

- NUMNP: é o número total de pontos nodais que tem a estrutura gerada.
- NELBO: é o número total de elementos da estrutura que têm pelo menos um ponto nodal para imposição de condições de contorno.
- NUMPB: é o número total de pontos nodais da estrutura para imposição das condições de contorno.
- NELF: é o número de elementos finitos que compõem a faixa básica para a geração da estrutura.
- NNOSF: é o número de pontos nodais que fazem parte da faixa básica menos o número de pontos nodais que pertencem ao lado externo da faixa básica, e é um número usado para a geração dos pontos nodais da estrutura.
- X(I) e Y(I): são coordenadas globais do ponto nodal I da estrutura, obtidas a partir das coordenadas globais dos pontos nodais da faixa básica.
- XL2, XL4 e XL34: são variáveis auxiliares para a geração das coordenadas globais X dos pontos nodais da estrutura.
- NP(I,L): ponto nodal L ($L = 1, 2, 3$) do elemento finito I, obtido dos pontos nodais dos elementos finitos que compõem a faixa básica.
- IT(L): tipo do elemento L quanto às dimensões, forma, orientação, etc..., e que é obtido a partir dos tipos de elementos da faixa básica.
- KT(I): tipo do elemento I quanto às dimensões, forma, orientação, carregamento, etc..., e que é obtido a partir dos tipos de elementos da faixa básica.

- MAT(L): tipo do material de que é constituído o elemento finito L.
- TH(L,I): valor da espessura do elemento finito L no ponto nodal I ($I = 1, 2, 3$). Se a espessura da placa é constante, o valor adotado é 1.
- LEB(I): número do elemento finito que tem pelo menos um ponto nodal para imposição de condições de contorno, e é obtido a partir de elementos finitos da faixa básica.
- ILAUX, LI1, LI2, LI3, LI4, LI5, LI6, LI7, LI8: são variáveis auxiliares para obtenção dos elementos que têm pelo menos um ponto nodal para imposição de condições de contorno.
- LPB(I): número do ponto nodal para imposição de condições de contorno, obtido a partir de pontos nodais da faixa básica.
- IL1, IL2, IL3, IL4, IL5: são variáveis auxiliares para obtenção dos pontos nodais para imposição de condições de contorno.
- ILANG(L): número do ângulo para o ponto nodal L que pertence a um trecho inclinado, para imposição de condições de contorno.
- ILCC(I,L): variável que indica para o ponto nodal I, pertencente a um trecho que se deve impor condições de contorno, se os parâmetros nodais L ($L = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) são conhecidos ($ILCC = 1$) ou desconhecidos ($ILCC = 0$). Os parâmetros nodais podem ser do vetor \underline{v}_i , \underline{v}_i' , \underline{v}_i'' , ou \underline{v}_i''' , conforme o que é usado para o ponto nodal I.
- IL6, IL7, IL8, IL9, IL10, IL11, IL12: são variáveis auxiliares para saber se são conhecidos os parâ

metros nodais dos pontos nodais, aos quais são impostas condições de contorno.

- LICC(L): é um código condicionado a ILCC. Se $ILCC = 0$, então $LICC = 0$. Se $ILCC = 1$ e o parâmetro nodal correspondente é nulo, então $LICC = 0$; se o parâmetro nodal correspondente não é nulo, então $LICC = 1$.

- ILTPN(L): código para indicar que tipo de parâmetros nodais convêm ao ponto nodal L para imposição de condições de contorno; se v_j , então $ILTPN = 0$; se v_j' , então $ILTPN = 1$.

As informações geradas para as placas esconsas contínuas são armazenadas em um arquivo para posterior utilização no processamento dos programas principais. Os dados contidos no arquivo gerado estão na ordem e sequência exatas para a leitura posterior do primeiro programa principal.

CAPÍTULO IV

ESTRUTURAÇÃO DOS PROGRAMAS PRINCIPAIS E DESCRIÇÃO SUMÁRIA DAS SUBROTINAS

IV.1 - Programas Principais e Subrotinas

Para a análise de placas esconsas contínuas, foram utilizados programas desenvolvidos para o estudo de placas elásticas em geral com o emprego do Método dos Elementos Finitos. Em parte, estes programas foram desenvolvidos por Degaspere [03], que utilizou algumas subrotinas que figuram no trabalho de Savassi [12]; e estas subrotinas, consideradas eficientes, são apresentadas por Savassi quando da resolução de chapas elásticas com o emprego do elemento finito triangular "FORCE" (que apresenta 18 graus de liberdade, com 6 graus de liberdade por vértice), que as adaptou a partir do expressivo trabalho desenvolvido por Felippa [06]. Outras subrotinas relativas ao elemento finito T18 foram desenvolvidas ou adaptadas por Degaspere para atender aos pormenores das placas elásticas.

No presente trabalho, os programas desenvolvidos por Degaspere [03] foram incrementados com algumas considerações para atender as particularidades das placas esconsas contínuas, além das adaptações necessárias para o processamento desses programas em diferentes computadores; algumas subrotinas foram adaptadas e outras foram elaboradas pelo autor para se dar uma maior abrangência aos problemas das placas elásticas e das placas esconsas contínuas.

Os programas foram elaborados em linguagem de programação FORTRAN 77, e processados em um computador VAX-11, modelo 785, com 4 Mbytes de memória central e 2,7 Gbytes de memória auxiliar.

Apesar dos programas terem sido desenvolvidos para computador de razoável capacidade de memória central, optou-se pelo processamento sequencial dos diversos programas, denominados programas principais, que são interligados entre si. Assim, o manuseio dos programas é mais fácil; e, também, se por algum motivo for interrompida a execução do processamento, é possível se reco-

meçar do programa interrompido sem prejuízo do processamento dos programas anteriores. Ao final do primeiro programa principal são armazenados em arquivo de disco os dados necessários para o processamento sequencial, e que serão acessados logo no início do processamento do segundo programa principal; sendo que este procedimento é seguido até o processamento completo dos cinco programas principais. Neste processamento sequencial, os programas principais acessam várias subrotinas, e também outros arquivos de disco que são gerados durante o processamento dos mesmos. Os dados para o início do processamento estão gravados no arquivo de dados denominado "DADOS1."; este arquivo é gerado por um dos programas prē-processadores e complementado com o título do processamento e também com o carregamento (se não for uniformemente distribuído). No segundo programa, é acessado o arquivo de dados "DADOS2." que contém informações sobre cada elemento finito que tem carregamento uniformemente distribuído sobre parte de seu domínio; e também contém informações sobre cada elemento finito com carga concentrada aplicada sobre qualquer ponto do domínio (as informações são fornecidas de acordo com a ordem de numeração dos elementos finitos e os carregamentos correspondentes). E, finalmente, no quarto programa é acessado o arquivo de dados "DADOS3.", que contém informações sobre o número de pontos nodais com cargas concentradas, e os valores dessas cargas aliadas aos respectivos pontos nodais.

Na figura IV.1 é mostrado um organograma do "Programa Geral" que é composto dos cinco programas principais que são processados sequencialmente e das subrotinas utilizadas. E nas figuras IV.2, IV.3, IV.4, IV.5 e IV.6 são apresentados de maneira sucinta os fluxogramas simplificados para os programas principais "DATA", "PROG2", "PROG3", "PROG4" e "SOLVE", respectivamente. O programa "DATA" lê no arquivo "DADOS1." os dados referentes à estrutura a ser processada, faz algumas verificações principais da consistência dos dados (interrompendo a execução, se necessário) e armazena em arquivo de disco o que será utilizado posteriormente no processamento. O programa "PROG2" calcula e armazena em arquivo de disco a Matriz de Rigidez e o Vetor de Cargas Nodais Equivalentes para os elementos finitos. No programa "PROG3" é feita a montagem da Matriz de Rigidez global da estrutura. No programa "PROG4" é procedida a montagem do Vetor de Cargas Nodais Equivalentes global da estrutura. E, finalmente, no programa "SOLVE" é

efetuada a resolução do sistema geral de equações, e fornecidos os resultados das reações verticais, dos momentos fletores, etc... para cada ponto nodal da estrutura. A seguir, é feita a descrição sumária de cada uma das subrotinas utilizadas durante o processamento do "Programa Geral".

COEF: calcula os coeficientes dos monômios que aparecem quando a operação $x^\gamma y^\delta$ é realizada após a substituição de $x = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3$ e $y = y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3$, onde os ξ_i ($i = 1, 2, 3$) são coordenadas homogêneas (vide itens II.3.2.4 e II.3.2.5.1).

EXPS: calcula os expoentes dos monômios que aparecem quando a operação $x^\gamma y^\delta$ é realizada após a substituição de $x = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3$ e $y = y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3$. (vide itens II.3.2.4 e II.3.2.5.1).

COLOC: calcula as coordenadas locais dos v̄rtices e dos pontos médios dos lados do triângulo a partir de coordenadas globais (vide expressão II.72).

MATFT: forma a matriz \underline{G}^t (vide expressões II.106 e II.115).

GJRIS: inverte a matriz \underline{G}^t , obtendo $\underline{B}^t = [\underline{G}^t]^{-1}$ (vide expressão II.51).

MATRH: forma a matriz \underline{H} (vide expressões II.131, II.132 e II.133), admitindo em princípio a validade da expressão II.132; caso não haja observância daquelas desigualdades pelas coordenadas do elemento finito em foco, os sinais dos coeficientes de \underline{H} serão alterados convenientemente no final da subrotina.

POLIN: calcula a integral do tipo $F_{f\gamma\delta} = \int_S f(x,y) x^\gamma y^\delta dS$, utilizando coordenadas homogêneas (vide expressões II.3.2.4 e II.3.2.5.1).

MATPAR: calcula a integral do tipo $F_{f\gamma\delta} = \int_S f(x, y) x^\gamma y^\delta dS$, u-

tilizando coordenadas cartesianas locais, com a finalidade de obtenção do Vetor de Cargas Nodais Equivalentes para os elementos com carga uniformemente distribuída sobre parte do domínio (vide item II.3.2.5.2).

MATWP: calcula os valores dos termos do vetor w para obtenção do Vetor de Cargas Nodais Equivalentes, para os elementos com carga concentrada aplicada em qualquer ponto do domínio (vide item II.3.2.5.3).

MATRG: forma a Matriz de Rigidez Generalizada K_q (vide expressão II.59 e item II.3.2.4).

VINTA: (function) função que calcula as integrais do tipo $\int_S (\xi_1^m \xi_2^n \xi_3^q) dS$, e é utilizada na subrotina POLIN.

TSKEW: transformação que atua nos pontos nodais situados em trechos inclinados para imposição de condições de contorno. Tem como objetivo transformar os parâmetros nodais relacionados aos eixos x e y , em parâmetros nodais relacionados aos eixos t e n .

TFREE: transformação que atua nos pontos nodais situados em bordas livres para se alterar os parâmetros nodais originais em parâmetros nodais modificados para tratamento direto das condições de contorno.

PREPS: executa as transformações contidas nas subrotinas TSKEW e TFREE, conforme a expressão II.163.

THMED: calcula os valores médios nodais das seguintes grandezas: espessura, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e rigidez à flexão da placa.

- TRISK: subrotina de transformação que atua no tratamento de trechos inclinados. Quando a imposição de condições de contorno é feita para trechos inclinados, o vetor solução é obtido em relação aos eixos t e n . Esta subrotina transforma o vetor solução, de modo que a saída dos resultados passa a ser referenciada em relação aos eixos x e y .
- TRFRE: subrotina de transformação que atua no tratamento de trechos especiais onde houve a necessidade de se modificar os parâmetros nodais. O vetor solução é referenciado em relação aos parâmetros modificados, e esta subrotina transforma estes parâmetros de modo que o vetor solução passa a ser referenciado em relação aos parâmetros originais.
- REACA: calcula reações verticais para os pontos nodais de apoios ou engastes.
- FLEVO: imprime os valores das incógnitas nodais; calcula e imprime para cada ponto nodal os valores dos momentos fletores e volventes, os momentos principais e as respectivas direções principais.

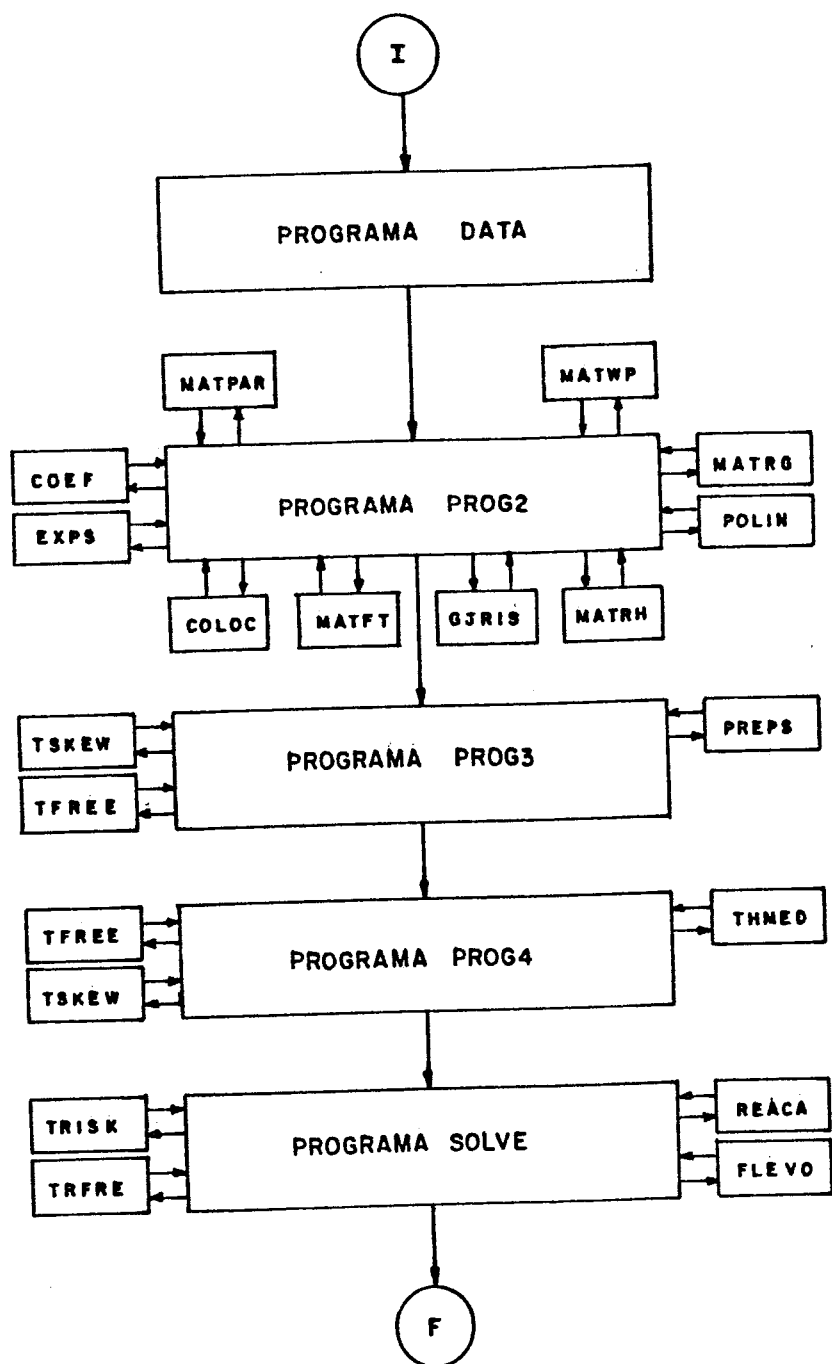


FIG. IV.1 - ORGANOGRAMA DO PROGRAMA GERAL.

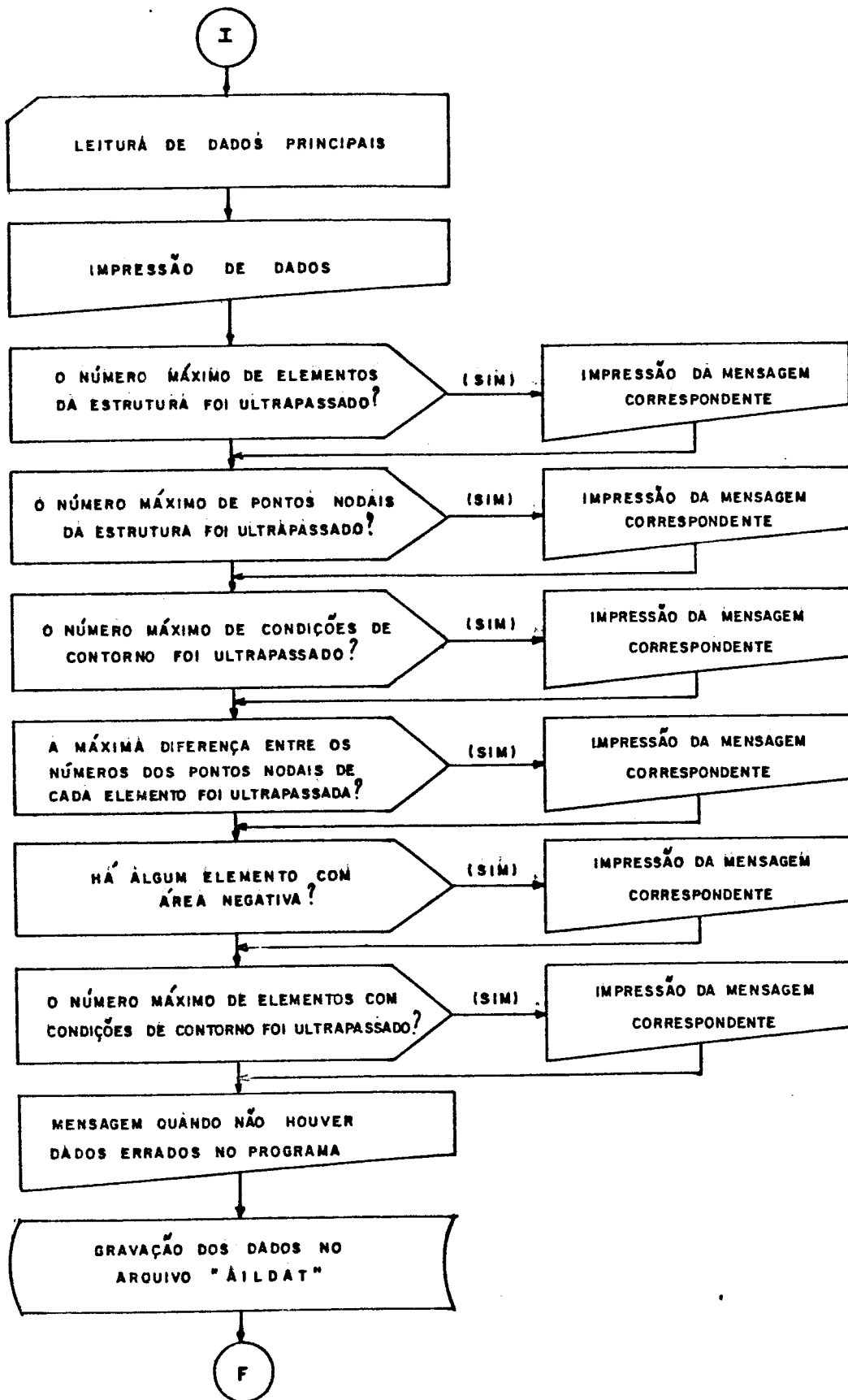


FIG. IV.2 - FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DO PROGRAMA DATA

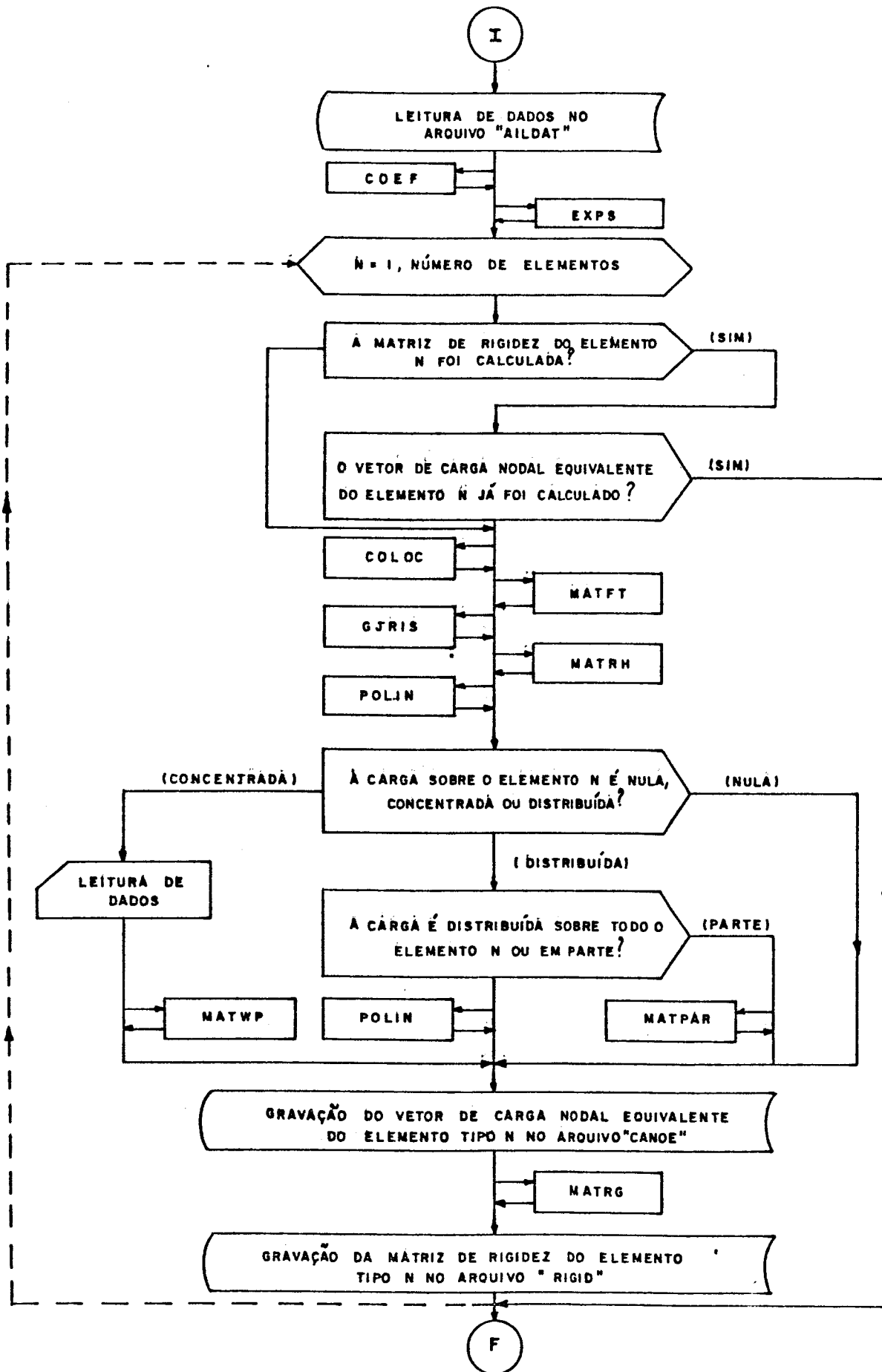


FIG. IV.3 - FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DO PROGRAMA PROG2

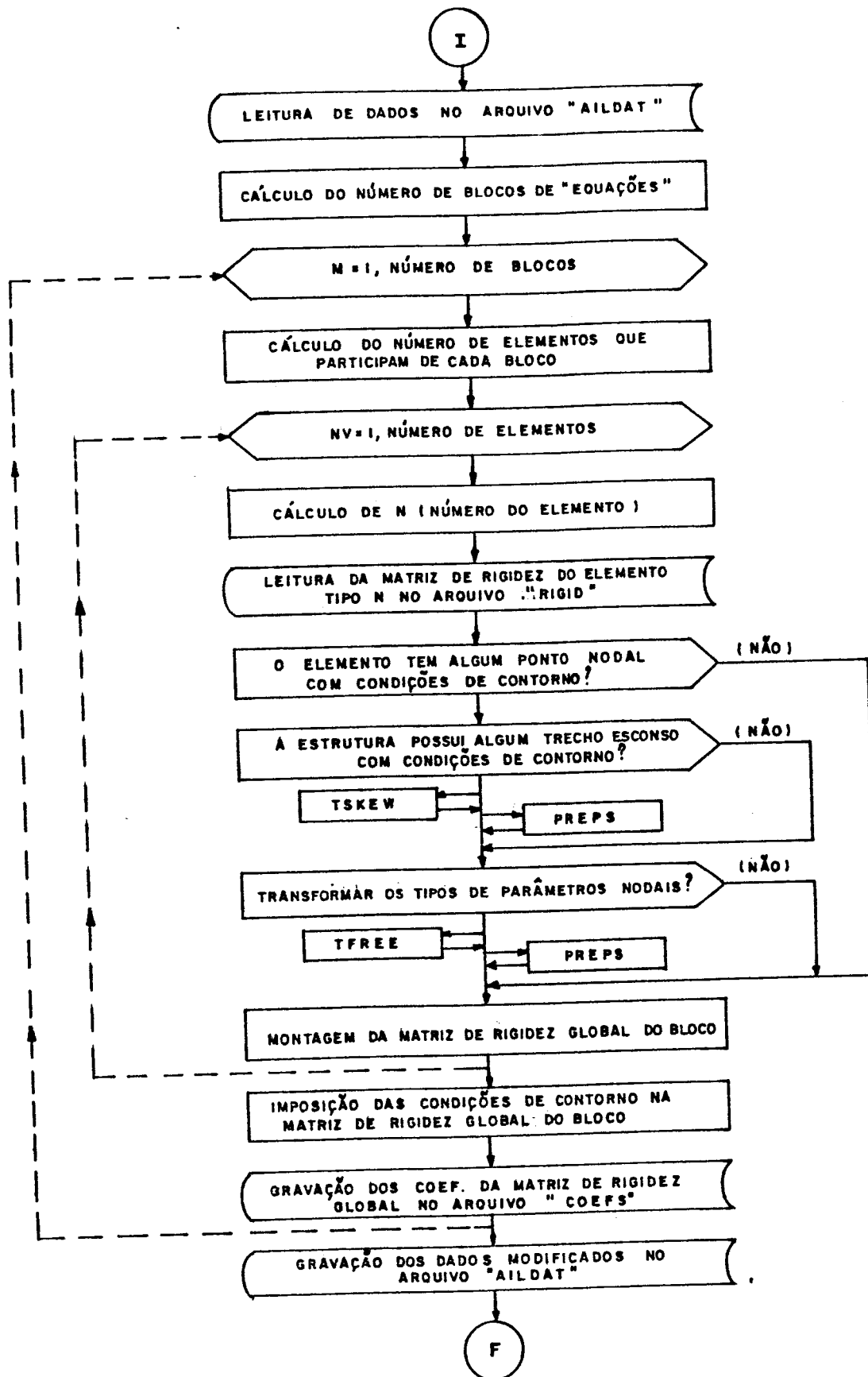


FIG. IV.4 - FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DO PROGRAMA PROG3

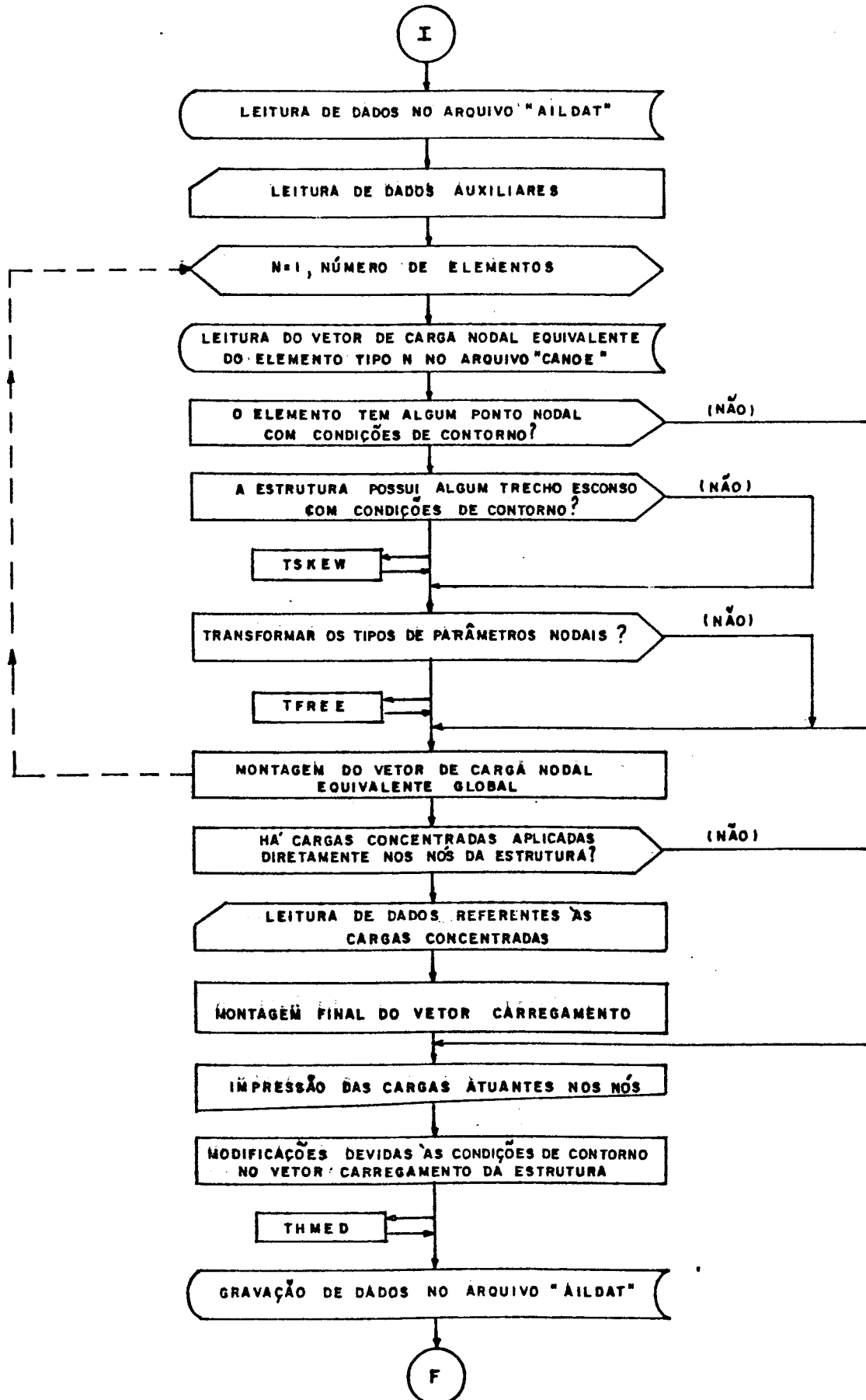


FIG. IV. 5 - FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DO PROGRAMA PROG4

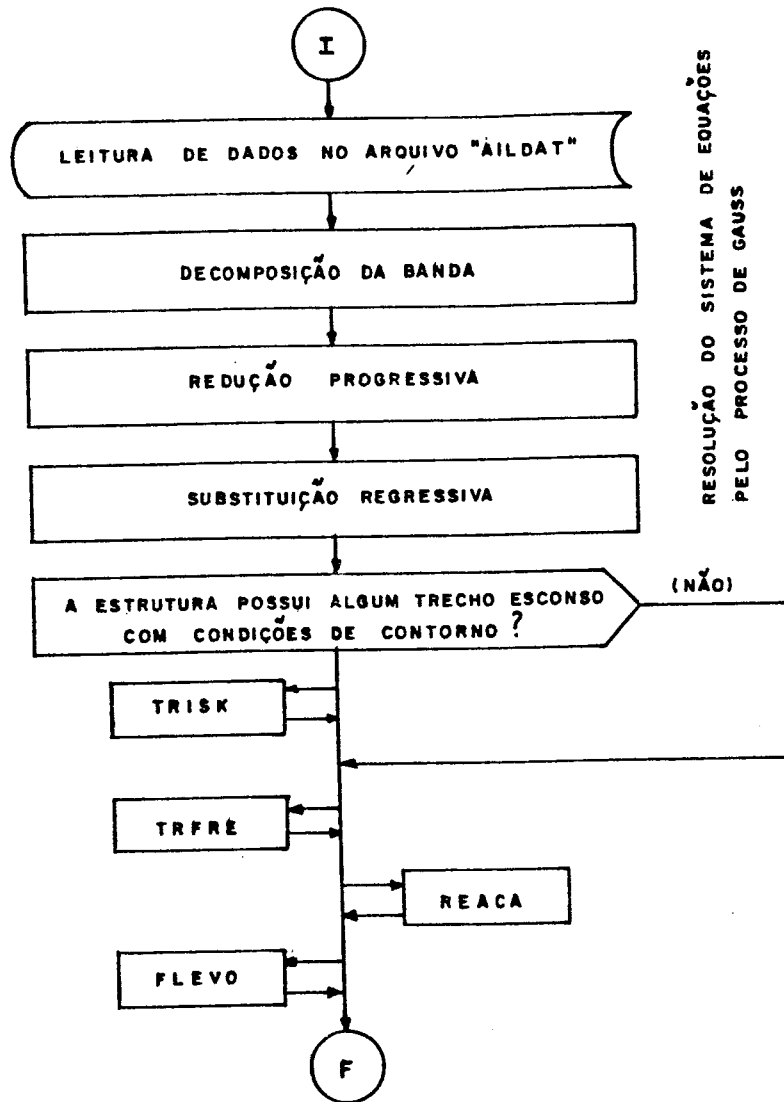


FIG. IV.6 - FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DO PROGRAMA SOLVE

IV.2 - Arquivos de Dados

IV.2.1 - Arquivo de dados "DADOS1."

1º conjunto - título do problema a ser processado

- . quantidade de registros - 1
- . formato - 20A4 (80 colunas)

2º conjunto - especificações gerais da estrutura

- . quantidade de registros - 1
- . formato - livre
- . conteúdo do registro:

NUMEL: número de elementos

ICASO: (código) ICASO = 0 → chapa; ICASO = 1 → placa

NUMNP: número de pontos nodais

NUMBC: número de casos de condições de contorno

NUMPB: número de pontos nodais para imposição das condições de contorno

NLOAD: número de casos de carregamento

NMAT: número de materiais diferentes que compõem a estrutura

NELBO: número de elementos que têm pelo menos um ponto nodal para imposição de condições de contorno

ISKEW: (código) ISKEW = 1 → placa com trecho esconso
ISKEW = 0 → placa retangular

NANGL: número de ângulos para definirem trechos inclinados

NPDC: número de pontos nodais que pertencem, simultaneamente, à borda livre e ao apoio contínuo intermediário

3º conjunto - pontos nodais que pertencem, simultaneamente, à borda livre e ao apoio contínuo intermediário (somente se NPDC \neq 0)

- . quantidade de registros - NPDC
- . formato - livre
- . conteúdo de cada registro:

NPDC: número do ponto nodal

4º conjunto - propriedades dos materiais

- . quantidade de registros - NMAT
(1 para cada material diferente)
- . formato - livre
- . conteúdo de cada registro:

I: número do material

EM(I): módulo de elasticidade do material

CP(I): coeficiente de Poisson do material

RHO(I): densidade do material

ALFA(I): coeficiente de dilatação térmica do material

5º conjunto - informações sobre cada elemento que tem pelo menos um ponto nodal para imposição de condições de contorno

- . quantidade de registros - NELBO
(1 para cada elemento que tem pelo menos um ponto nodal para imposição de condições de contorno)

- . formato - livre
- . conteúdo de cada registro:

LNOBO(K,1): número do elemento

LNOBO(K,2) } são os números dos pontos nodais do elemento
LNOBO(K,3) } (conforme numeração posterior de NP(N,I),
LNOBO(K,4) } I = 1, 2, 3).

Obs.: numerar no sentido sinistrorso.

LNOBO(K,5) } indicam os endereços dos ângulos necessários pa
LNOBO(K,6) } ra as transformações de coordenadas
LNOBO(K,7) }

LNOBO(K,8) } código para indicar o tipo de parâmetros nodais
LNOBO(K,9) } que convêm aos pontos nodais (*)
LNOBO(K,10) }

(*) Se LNOBO (K, M) (M = 8, 9, 10) é zero, os parâmetros nodais serão do TIPO A; se o código é um, os parâmetros nodais serão do TIPO B.

. TIPO A: $\underline{v}_i^t = [w \ w, x \ w, y \ w, xy \ w, yy]_i$

. TIPO B: $\underline{v}_i^t = [w \ w, x \ w, y \ (w, xx + v w, yy) \ w, xy \ (w, yy + v w, xx)]_i$

6º conjunto - ângulos para definirem trechos inclinados (somente se ISKEW = 1)

- . quantidade de registros - NANGL
(1 para cada ângulo)
- . formato - livre
- . conteúdo de cada registro:

ANGLE(NA): ângulo para transformação de coordenadas (em graus)

7º conjunto - dados físicos dos elementos finitos

- . quantidade de registros - NUMEL
(1 para cada elemento)
- . formato - livre
- . conteúdo de cada registro:

N: número do elemento

NP(N,1): número do ponto nodal 1

NP(N,2): número do ponto nodal 2

NP(N,3): número do ponto nodal 3

Obs.: A numeração deve ser feita no sentido anti-horário (sinistrorso), o que corresponde a tribuir orientação positiva para a área do elemento.

MAT(N): número do material do elemento

ITPEL(N): tipo do elemento quanto às dimensões, forma, orientação, etc...

KTPEL(N): tipo do elemento quanto às dimensões, forma, orientação, carregamento, etc...

KARGA(N): (código) indica se há carga distribuída (KARGA = 1) ou não (KARGA = 0). No arquivo "DADOS2." há mais informações.

ZCAR(N,1): valor da coordenada do carregamento distribuído no ponto nodal 1

ZCAR(N,2): valor da coordenada do carregamento distribuído no ponto nodal 2

ZCAR(N,3): valor da coordenada do carregamento distribuído no ponto nodal 3

TH(N,1): valor da espessura da placa no ponto nodal 1

TH(N,2): valor da espessura da placa no ponto nodal 2

TH(N,3): valor da espessura da placa no ponto nodal 3

8º conjunto - coordenadas dos v̄rtices dos pontos nodais da rede de elementos finitos

- . quantidade de registros - NUMNP
(1 para cada ponto nodal)
- . formato - livre
- . conteūdo de cada registro:

J: nūmero do ponto nodal

XORD(J): coordenada X do ponto nodal

YORD(J): coordenada Y do ponto nodal

9º conjunto - condiçōes de contorno

- . quantidade de registros - NUMPB
(1 para cada ponto nodal pertencente a trecho pa
ra imposiçāo das condiçōes de contorno).
- . formato - livre
- . conteūdo de cada registro:

M: nūmero do ponto nodal para imposiçāo das condiçōes de contorno

$\left. \begin{array}{l} L1(1) \\ L1(2) \\ L1(3) \\ L1(4) \\ L1(5) \\ L1(6) \end{array} \right\}$	<p>(cōdigo) $L1(I) = 0$ ($I = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) indica que a incōgnita nodal do vetor \underline{v}_i ou \underline{v}'_i <u>é desco-</u> <u>nhecida</u>; $L1(I) = 1$ indica que <u>é conhecida</u></p>	<p>indica <u>desco-</u></p>
---	---	-----------------------------

ICON(1)	}	(código condicionado)
ICON(2)		se $L1(I) = 0$, implicará em $ICON(I) = 0$;
ICON(3)		se $L1(I) = 1$, implicará em:
ICON(4)		$ICON(I) = 0$ (valor da incôgnita nodal é nulo), ou
ICON(5)		$ICON(I) = 1$ (valor da incôgnita nodal não é nulo)
ICON(6)		

IV.2.2 - Arquivo de dados "DADOS2."

Neste arquivo, os dados são armazenados de modo a estarem correlacionados com os números dos elementos finitos da estrutura, em ordem crescente.

- . quantidade de registros - igual ao número de elementos finitos que tenham carga uniformemente distribuída sobre parte do domínio, mais o número de elementos finitos que tenham carga concentrada aplicada em qualquer ponto do domínio. Portanto, para um elemento, só é considerado um dos dois tipos de carregamento. Para a carga uniformemente distribuída sobre parte do domínio do elemento N , a variável $KARGA(N) = 2$; se a carga for concentrada, aplicada em qualquer ponto do domínio do elemento N , $KARGA(N) = -1$.
- . formato - livre
- . conteúdo dos registros (a cada elemento é associado um dos dois registros):

1º registro - dados relativos à carga uniformemente distribuída sobre parte do domínio do elemento

NV: número de vértices do polígono, dentro do domínio do elemento, que tem carga uniformemente distribuída (até 5 vértices)

X(1),Y(1): coordenadas do 1º vértice do polígono considerado

X(2), Y(2): coordenadas do 2º v̄ertice do polígono considerado

X(3), Y(3): coordenadas do 3º v̄ertice do polígono considerado

X(4), Y(4): coordenadas do 4º v̄ertice (se houver) do polígono considerado

X(5), Y(5): coordenadas do 5º v̄ertice (se houver) do polígono considerado

2º registro - dados relativos à carga concentrada aplicada em qualquer ponto do domínio do elemento

P: valor da carga concentrada

XP, YP: coordenadas do ponto de aplicação da carga concentrada na estrutura

IV.2.3 - Arquivo de dados "DADOS3."

1º conjunto - cargas concentradas aplicadas diretamente sobre os pontos nodais

- . quantidade de registros - 1
- . formato - livre
- . conteúdo do registro:

NPLD: número de pontos nodais com cargas concentradas

2º conjunto - informações sobre cada ponto nodal diretamente carregado

- . quantidade de registros - NPLD
(1 para cada ponto nodal com carga concentrada)
- . formato - livre
- . conteúdo de cada registro:

N: número do ponto nodal carregado

- ALD(1): carga concentrada w
- ALD(2): carga concentrada $w_{,x}$
- ALD(3): carga concentrada $w_{,y}$
- ALD(4): carga concentrada $w_{,xx}$ ou $(w_{,xx} + \nu w_{,yy})$
- ALD(5): carga concentrada $w_{,xy}$
- ALD(6): carga concentrada $w_{,yy}$ ou $(w_{,yy} + \nu w_{,xx})$

Obs.: As cargas concentradas aplicadas em pontos no
dais de trechos esconsos, deverão ser refe-
renciadas aos respectivos eixos inclinados.

CAPÍTULO V

RESULTADOS OBTIDOS

Para a análise de placas esconsas contínuas, foi necessário resolver alguns problemas pertinentes à abordagem deste assunto e que, além de serem abordados nos capítulos anteriores, são ressaltados a seguir, de forma sucinta.

Em primeiro lugar, a geração automática das redes de elementos finitos foi de vital importância para que se pudesse processar diversas estruturas de placas esconsas contínuas submetidas a dezenas de casos de carregamento. Ao se ter que processar muitas estruturas de um mesmo tipo, deve-se de alguma forma gerar os dados relativos a essas estruturas, principalmente quando o volume de informações é significativo, como neste trabalho.

Para facilitar a geração automática das redes de elementos finitos, implementou-se no programa geral de processamento das estruturas a possibilidade de se considerar uma carga concentrada aplicada em qualquer ponto do domínio do elemento, e também a possibilidade de se ter carga uniformemente distribuída atuando sobre uma área poligonal de até 5 vértices no domínio do elemento. Para tanto, foram desenvolvidos os Vetores de Cargas Nodais Equivalentes para os dois tipos de carregamentos citados, além do que já existia anteriormente. E para o cálculo do Vetor de Cargas Nodais Equivalentes referente à carga uniformemente distribuída sobre parte do domínio do elemento finito, foi deduzida a fórmula para o cálculo de integrais de funções monômiais em domínios poligonais planos, e que se encontra no Apêndice 1.

Para o tratamento adequado dos pontos pertencentes; simultaneamente, à borda livre e ao apoio contínuo intermediário foi efetuada uma transformação dos parâmetros nodais originais, referentes ao elemento finito T18, obtendo-se um novo conjunto de parâmetros nodais para a imposição das devidas condições de contorno. Para estes pontos considerados, se as condições de contorno são impostas em relação ao apoio contínuo intermediário ou em relação à borda livre, os resultados dos momentos fletores e volvente diferem muito dos resultados apresentados por Schleicher e Wegener [13] considerando a ação da carga uniformemente distribuída; mas se as

condições de contorno são impostas em relação ao apoio contínuo intermediário e à borda livre simultaneamente, os resultados para os momentos se aproximam mais dos valores apresentados por Schleicher e Wegener [13]. Portanto, este novo conjunto de parâmetros nodais permite para os pontos descritos acima, uma restrição dos graus de liberdade da estrutura que seja mais próxima da realidade.

V.1 - Placas Esconsas Contínuas Analisadas

A obra sobre placas esconsas contínuas de Schleicher e Wegener [13] aborda as estruturas de 2 e de 3 vãos, conforme é descrito no Capítulo III (vide figura III.1). Dentre as diversas relações abrangidas por aqueles autores, adotou-se para o presente trabalho as placas esconsas contínuas de 2 e 3 vãos com as características constantes das Tabelas V.1 e V.2.

$l_1 : l_2$	φ (GRAUS)	b/l_1	l_1 (m)	l_2 (m)
1 : 1	30	3/2	10,780	10,780
1 : 1	45	3/2	13,200	13,200
1 : 1	60	3/2	18,670	18,670

TABELA V.1 - PLACAS ESCONSAS CONTÍNUAS DE 2 VÃOS

$l_1 : l_2 : l_3$	φ (GRAUS)	b/l_1	l_1 (m)	l_2 (m)	l_3 (m)
1 : 1,2 : 1	30	3/2	10,780	12,936	10,780
1 : 1,2 : 1	45	3/2	13,200	15,840	13,200
1 : 1,2 : 1	60	3/2	18,670	22,404	18,670

TABELA V.2 - PLACAS ESCONSAS CONTÍNUAS DE 3 VÃOS

As dimensões para as placas foram obtidas a partir da fixação da largura ℓ , adotada igual a 14,00m, em função das larguras das estradas atuais.

Segundo Schleicher e Wegener [13], utilizando a nomenclatura (m, k) usada para indicar os pontos das redes mostradas na figura III.1, os pontos mais importantes para o dimensionamento das placas esconsas contínuas de 2 vãos são: $(3, 9)$, $(5, 5)$, $(11, 1)$ e $(11, 5)$ para todos os ângulos de esconsidade ϕ considerados; e $(6, 1)$ para $\phi = 30^\circ$, $(7, 1)$ para $\phi = 45^\circ$ e $(8, 1)$ para $\phi = 60^\circ$. Para as placas esconsas contínuas de 3 vãos, os pontos mais importantes são: $(3, 9)$, $(5, 5)$, $(7, 1)$, $(11, 1)$, $(11, 5)$, $(11, 9)$, $(15, 9)$ e $(17, 5)$ para todos os ângulos de esconsidade ϕ considerados. Estes pontos estão situados em duas áreas distintas das placas esconsas contínuas: a primeira área é a região longitudinal ao longo das bordas livres; e a segunda área é a região central longitudinal, na direção da variação do parâmetro m . E para a análise destes pontos importantes, para as redes de elementos finitos que são geradas automaticamente foram elaborados dois modelos: o primeiro com maior discretização da rede na borda livre, e o segundo com maior discretização da rede na faixa central longitudinal (vide Capítulo III).

V.2 - Placas Esconsas Contínuas sob a Ação de Carga Uniformemente Distribuída

Entre outras tabelas apresentadas por Schleicher e Wegener [13], encontram-se tabelas que fornecem valores de momentos fletores e volventes para os pontos (m, k) de placas esconsas contínuas de 2 e de 3 vãos, sob a ação de cargas unitárias uniformemente distribuídas. Para aferição dos resultados fornecidos por Schleicher e Wegener, foram processados vários exemplos de placas esconsas contínuas sob a ação de cargas unitárias uniformemente distribuídas, com o emprego do Método dos Elementos Finitos.

A seguir são apresentados os resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos em comparação com os resultados obtidos por Schleicher e Wegener para uma placa esconsa contínua de 2 vãos, com o ângulo de esconsidade $\phi = 45^\circ$, a relação entre vãos $\ell_1:\ell_2 = 1:1$, a largura $\ell = 14,00\text{m}$ e o comprimento do primeiro vão

$\ell_1 = 13,20\text{m}$; a carga uniformemente distribuída por toda a placa é $q = 1,00\text{tf/m}^2$. O método utilizado por Schleicher e Wegener é o Método das Diferenças Finitas. Na figura V.1 são representados os valores dos momentos fletores M_x , e na figura V.2 são representados os valores dos momentos volventes M_{xy} para os pontos (m, k) que pertencem às bordas livres. Na figura V.3 são representados os valores dos momentos fletores M_x , na figura V.4 os valores dos momentos fletores M_y , e na figura V.5 os valores dos momentos volventes M_{xy} para os pontos (m, k) que pertencem à seção longitudinal central da placa. Na figura V.6 são representados os valores dos momentos fletores M_x e M_y e dos momentos volventes M_{xy} para os pontos (m, k) que pertencem ao apoio contínuo intermediário. E, finalmente, na tabela V.3 são apresentados os resultados dos momentos fletores e volventes, obtidos para os pontos mais importantes para o dimensionamento da placa esconsa contínua de 2 vãos considerada, e comparados com os valores fornecidos por Schleicher e Wegener.

Ao se analisar os resultados para a placa esconsa contínua de 2 vãos, submetida à carga uniformemente distribuída ($q = 1,00\text{tf/m}^2$), verifica-se que os resultados obtidos no trabalho presente através do Método dos Elementos Finitos são bem próximos daqueles obtidos por Schleicher e Wegener, a menos dos resultados apresentados para alguns pontos que são abordados a seguir.

São notadas diferenças consideráveis entre os valores dos esforços solicitantes apresentados por Schleicher e Wegener em relação aos obtidos neste trabalho para os pontos $(11, 1)$ e $(11, 9)$, que são pontos que pertencem simultaneamente à borda livre e ao apoio contínuo intermediário. Isto ocorre pelo fato desses pontos serem "pontos de singularidade". Semelhante comportamento ocorre também com os pontos $(1, 9)$ e $(21, 1)$ para os quais não são fornecidos resultados por Schleicher e Wegener por afirmarem que esses pontos também são "pontos de singularidade". Contudo, os valores dos esforços solicitantes obtidos pelo Método dos Elementos Finitos são fornecidos para estes pontos para servirem como referência para estudos comparativos.

Vários pesquisadores estudaram o assunto dos "pontos de singularidade", e vários deles são mencionados por Schleicher e Wegener [13]. Rumpel determinou o comportamento das tensões em cantos com uma borda livre e o outro lado simplesmente apoiado com

o auxílio de equações de equilíbrio; suas considerações são válidas somente para cantos de ângulo agudo que constituem um "ponto de singularidade". Williams examinou as condições de todas as combinações de bordas livres, apoios simples e engastes pela teoria comum de placas delgadas. A menos das combinações de livre-livre e engastado-engastado, todas as outras combinações levam à obtenção de "pontos de singularidade". Estes resultados foram reafirmados por Morley. Semelhantes considerações são também encontradas no livro de Ufljand. Detalhes do decaimento das perturbações nos cantos com "pontos de singularidade" são dados por Haruška. As tensões em cantos de ângulo obtuso de placas esconsas contínuas são consideravelmente menores devido ao efeito dos vãos adjacentes na divisão das cargas. As investigações dos cantos de ângulo obtuso de acordo com a teoria comum de placas delgadas não refletem a realidade por causa do efeito da terceira dimensão (isto é, a espessura da placa) que tem uma influência considerável naquelas regiões.

Portanto, os resultados obtidos para a placa esconsa contínua de 2 vãos, submetida à carga unitária uniformemente distribuída, são importantes para a análise do comportamento das estruturas esconsas contínuas sob o efeito da carga do peso próprio, ou outro carregamento qualquer uniformemente distribuído. Nas regiões dos "pontos de singularidade" observa-se que o efeito da singularidade é bem localizado e restrito, não interferindo em outras partes das placas. Para a análise das regiões dos "pontos de singularidade", é necessário se utilizar modelos matemáticos que representem melhor a realidade.

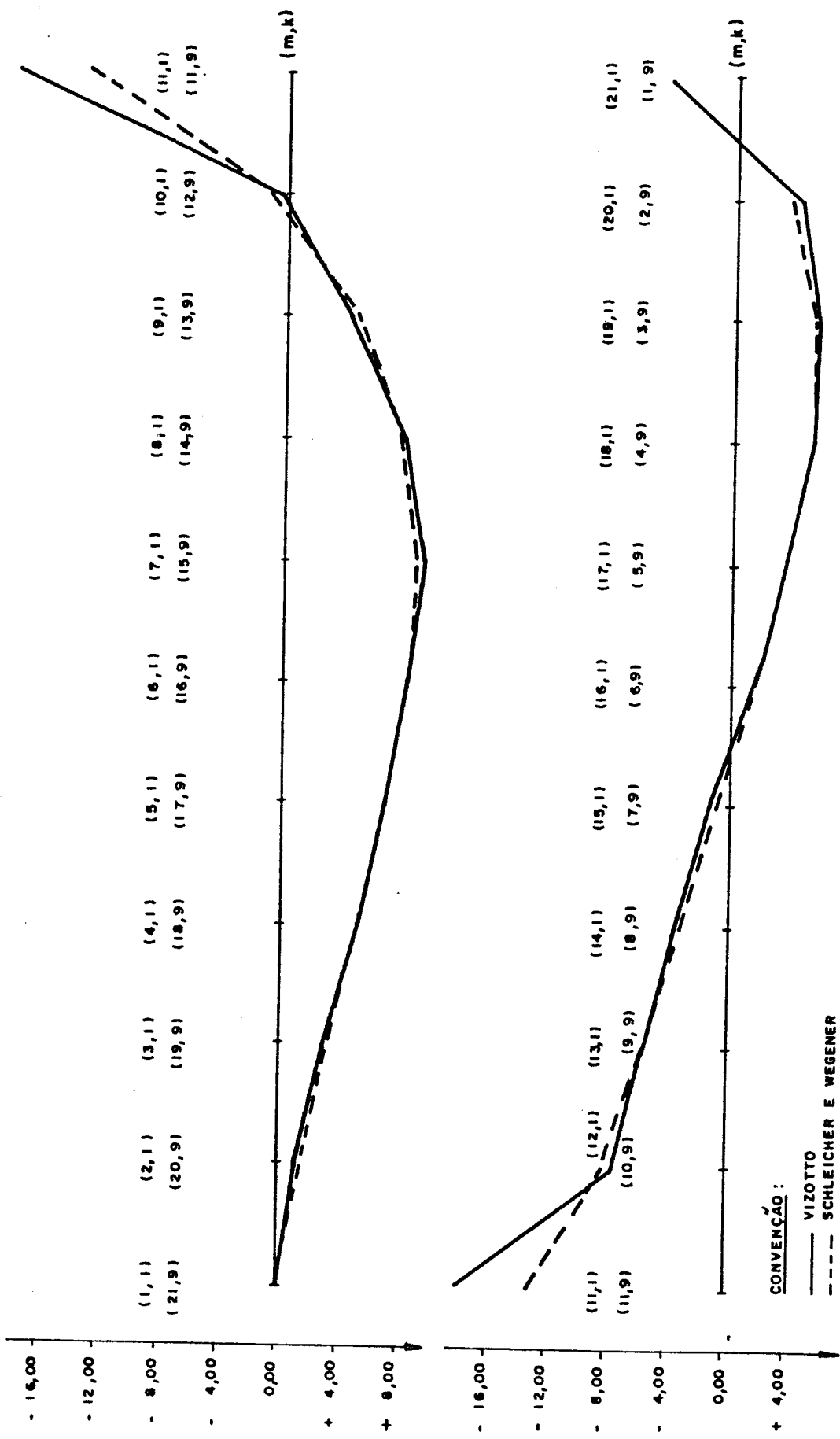


FIG. V.1 - DIAGRAMA DE M_x (tf.m/m) - BORDA LIVRE
 CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA $q = 1,00 \text{ tf/m}^2$
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS ($\lambda_1: \lambda_2 = 1:1$, $\varphi = 45^\circ$, $b/\lambda_1 = 3/2$, $\lambda_1 = 13,20 \text{ m}$)

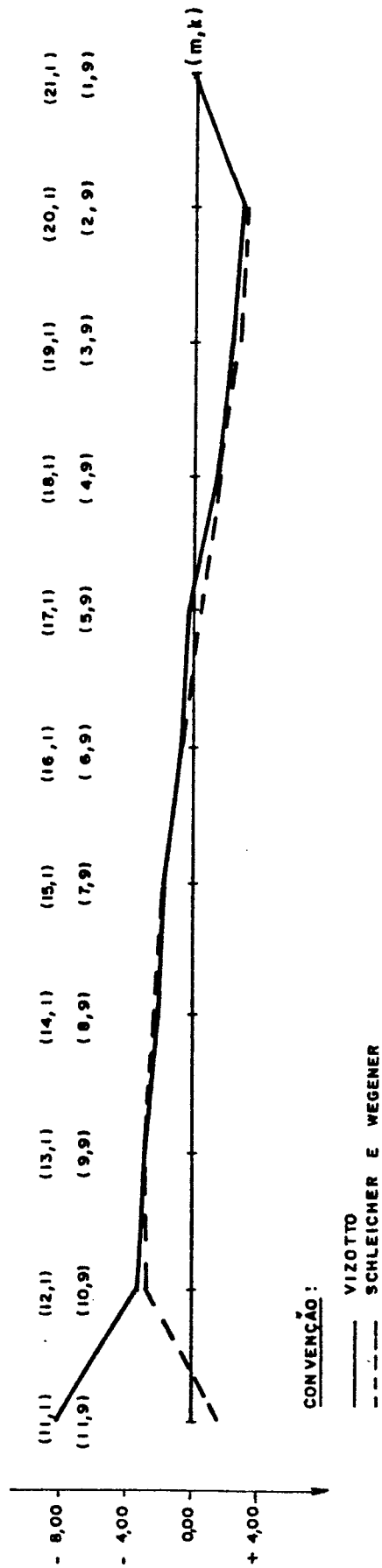
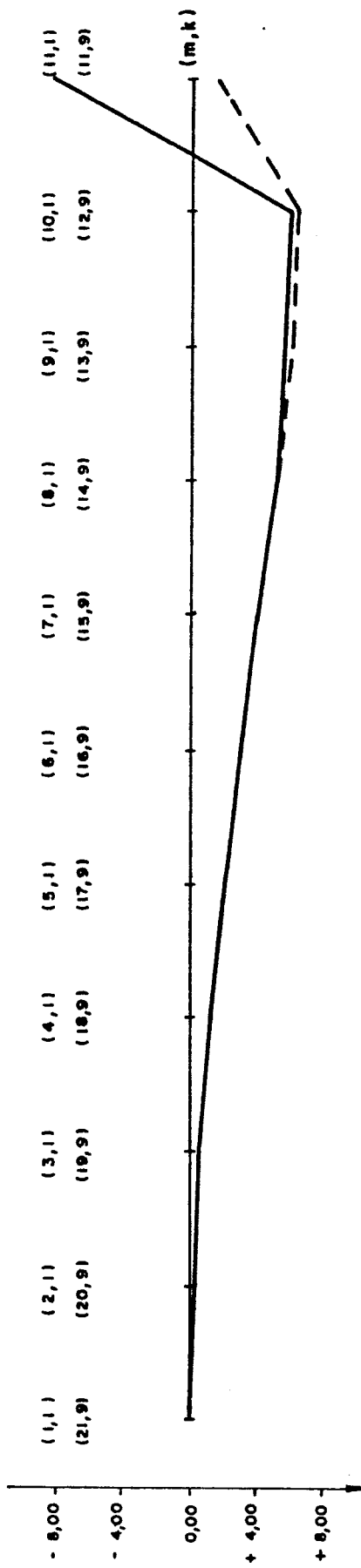


FIG. V. 2 - DIAGRAMA DE M_{xy} (tf.m/m) - BORDA LIVRE
 CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA $q = 1,00 \text{ tf/m}^2$
 PLACA ESCONSA CONTINUA DE 2 VÃOS ($\rho_1 : \rho_2 = 1:1$, $\varphi = 45^\circ$, $b/\rho_1 = 3/2$, $\rho_1 = 13,20 \text{ m}$)

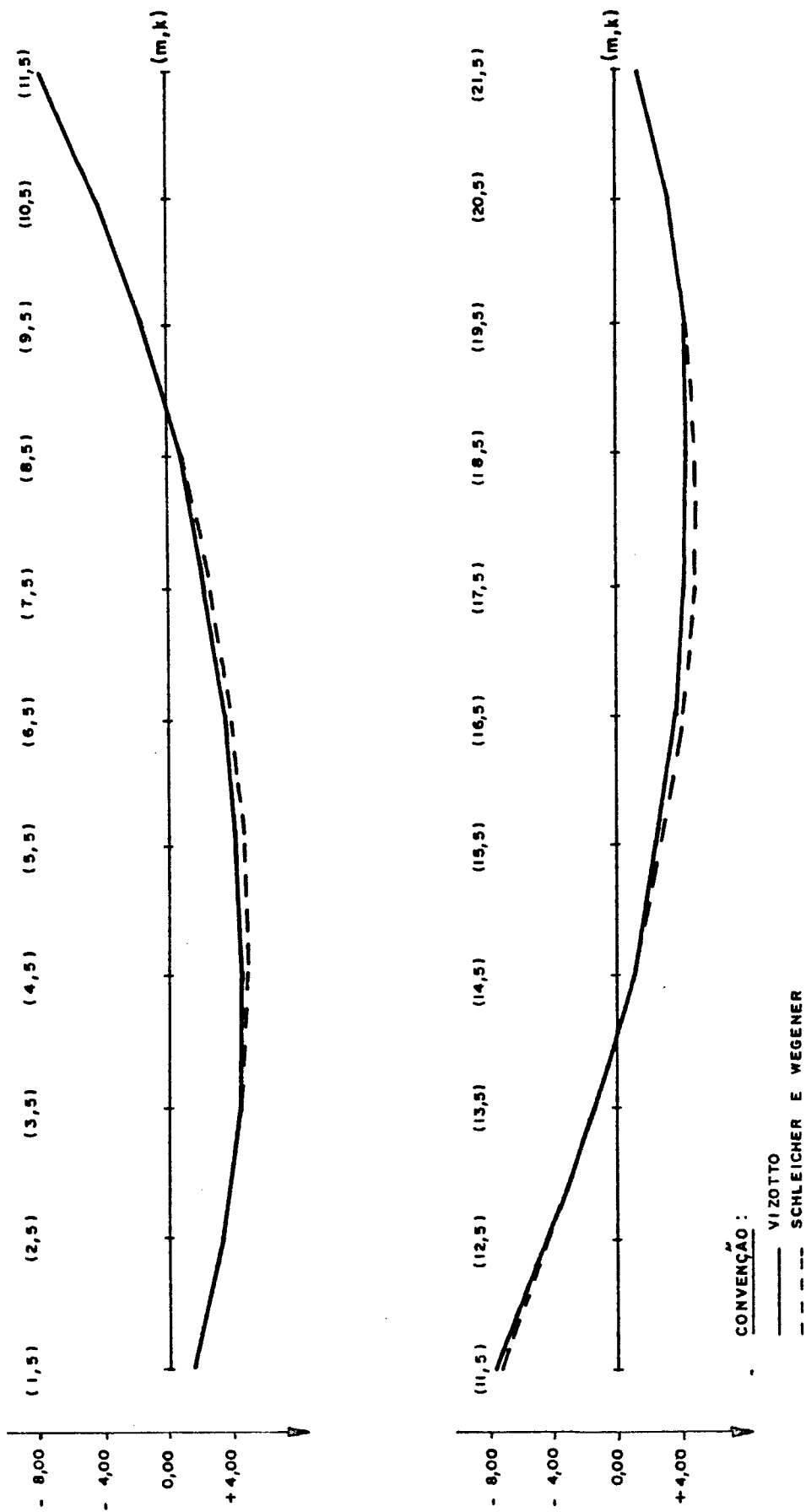


FIG. X. 3 - DIAGRAMA DE M_x ($tf.m/m$) - CENTRO
 CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA $q = 1,00 \text{ tf/m}^2$
 PLACA ESCONSA CONTINUA DE 2 VÃOS ($\lambda_1 : \lambda_2 = 1 : 1$, $\varphi = 45^\circ$, $b/l_1 = 3/2$, $l_1 = 13,20m$)

CONVENÇÃO :
 — VIZOTTO
 - - - SCHLEICHER E WEGENER

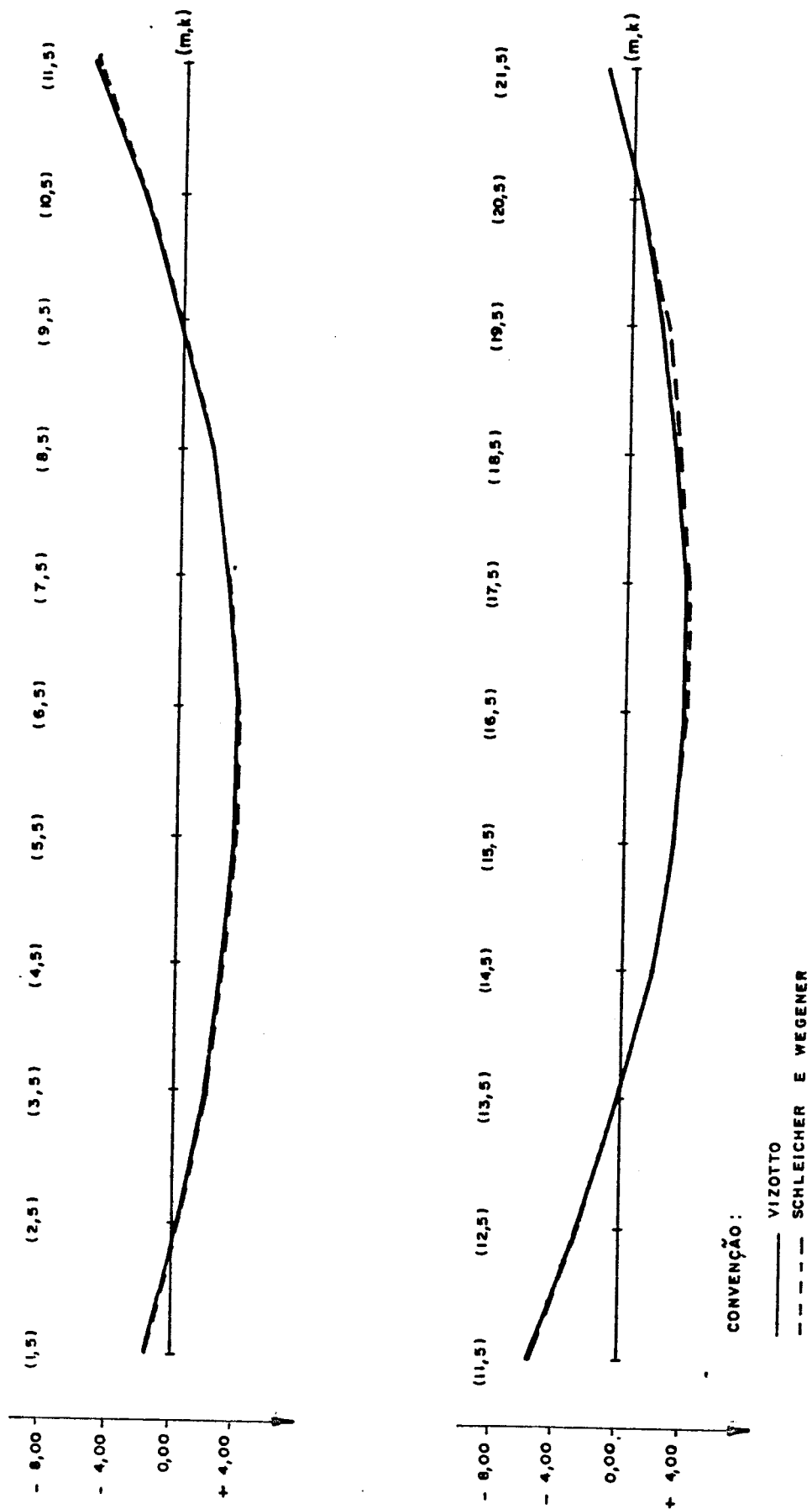


FIG. X. 4 - DIAGRAMA DE M_y ($tf.m/m$) - CENTRO
 CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA $q = 1,00 \text{ tf/m}^2$
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS ($\beta_1: \beta_2 = 1:1$, $\varphi = 45^\circ$, $b/\beta_1 = 3/2$, $f_1 = 13,20m$)

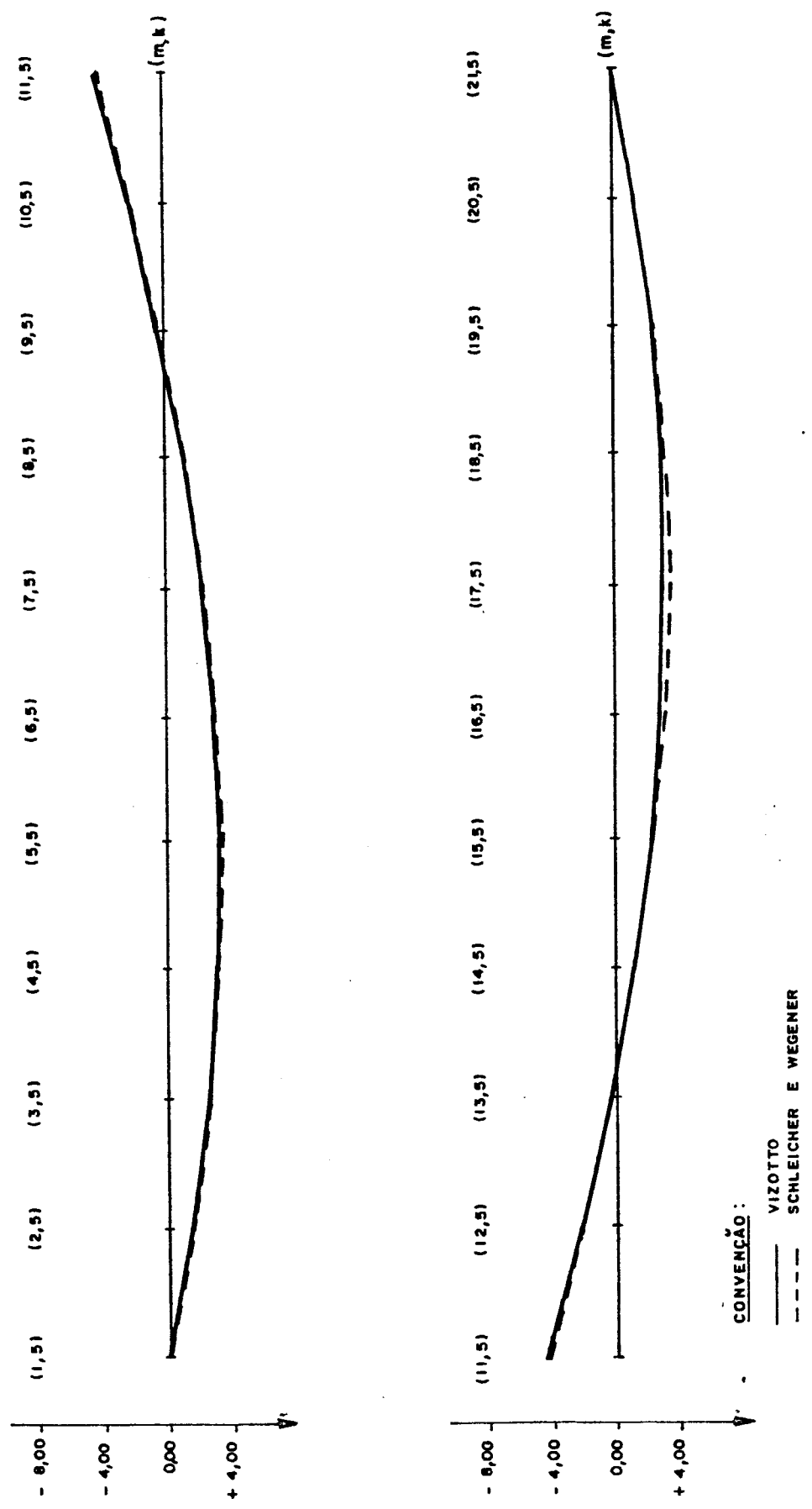
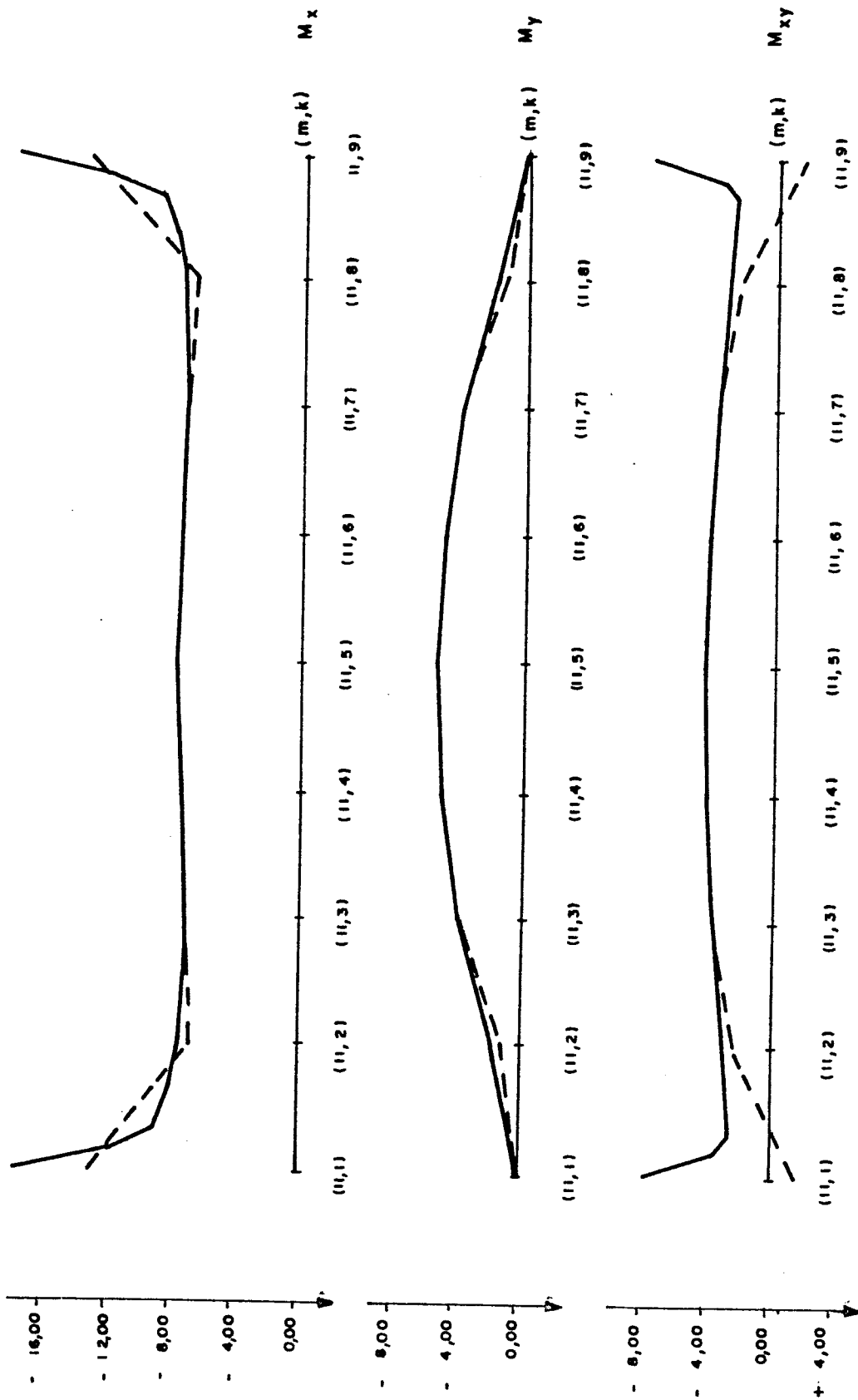


FIG. V. 5 - DIAGRAMA DE M_{xy} (tf.m/m) - CENTRO
 CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA $q = 1,00 \text{ tf/m}^2$
 PLACA ESCONSA CONTINUA DE 2 VÃOS ($\lambda_1 : \lambda_2 = 1 : 1$, $\varphi = 45^\circ$, $b/\lambda_1 = 3/2$, $\lambda_1 = 13,20\text{m}$)



CONVENÇÃO:

- VIZOTTO
- - - SCHLEICHER
E WEGENER

FIG. 5.6 - DIAGRAMAS DE M_x, M_y E M_{xy} (tf.m/m) - APOIO CONTÍNUO INTERMEDIÁRIO
CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA q = 1,00 tf/m²
PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VAOS (ℓ₁:ℓ₂ = 1:1, φ = 45°, b/ℓ₁ = 3/2, ℓ₁ = 13,20m)

PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS					
$l_1 : l_2$	φ (Grous)	l_1 (m)	b/l_1	CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA POR TODA A PLACA $q = 1,00 \text{ tf/m}^2$	
1 : 1	45	13,20	3/2		
PONTOS (m,k)	ESFORÇOS SOLICITANTES (tf.m/m)		VIZOTTO	SCHLEICHER E WEGENER	DIFERENÇA (%)
(3,9)	M_x		+ 5,60982	+ 5,30387	0,30595 (5,77)
	M_y		zero	zero	—
	M_{xy}		+ 2,52017	+ 2,41671	0,10346 (4,28)
(5,5)	M_x		+ 4,09058	+ 4,75849	0,66791 (14,04)
	M_y		+ 3,52079	+ 3,69912	0,17833 (4,82)
	M_{xy}		+ 2,93560	+ 3,31404	0,37844 (11,42)
(7,1)	M_x		+ 9,11070	+ 8,63708	0,47362 (5,48)
	M_y		zero	zero	—
	M_{xy}		+ 3,91252	+ 3,94828	0,03576 (0,91)
(11,1)	M_x		- 18,11491	- 13,11504	4,99987 (38,13)
	M_y		zero	zero	—
	M_{xy}		- 8,01021	+ 1,64134	9,65155 (588,03)
(11,5)	M_x		- 7,34091	- 7,23444	0,10647 (1,47)
	M_y		- 5,48650	- 5,39796	0,08854 (1,64)
	M_{xy}		- 4,27580	- 4,21114	0,06466 (1,54)

TABELA X.3 - VALORES DOS ESFORÇOS SOLICITANTES PARA OS PONTOS (m,k) MAIS IMPORTANTES

V.3 - Placas Esconsas Contínuas sob a Ação de Carga Móvel

Os pontos (m, k), que são apresentados por Schleicher e Wegener [13] como importantes para o dimensionamento das placas esconsas contínuas de 2 e 3 vãos, são adotados em consequência de observações do comportamento das estruturas sob a ação de cargas uniformemente distribuídas, que podem representar, em particular, a ação do peso próprio das estruturas.

Contudo, um dos objetivos deste trabalho é a análise do comportamento estrutural das placas esconsas contínuas sob a ação de carga móvel em ponte rodoviária; e, conseqüentemente, fazer a verificação dos pontos mais solicitados quando as placas são submetidas a esse tipo de carregamento. Portanto, para tal estudo foi adotada a norma brasileira NBR-7188 (Carga Móvel em Ponte Rodoviária e Passarela de Pedestres) de abril de 1984. Convém lembrar que neste trabalho não são consideradas as cargas distribuídas que atuam sobre a estrutura, são consideradas somente as cargas concentradas.

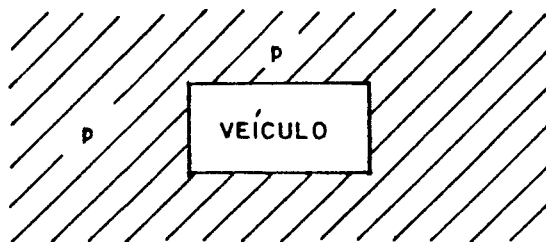
V.3.1 - Carga móvel em ponte rodoviária

A norma NBR-7188 fixa as condições de carga móvel a serem consideradas no cálculo de pontes rodoviárias, que são definidas como estruturas destinadas a permitir a transposição de obstáculos, naturais ou artificiais, por veículos rodoviários. Carga móvel é um sistema representativo dos valores característicos dos carregamentos provenientes do tráfego a que a estrutura está sujeita em serviço. A carga móvel em ponte rodoviária é também referida pelo termo trem-tipo.

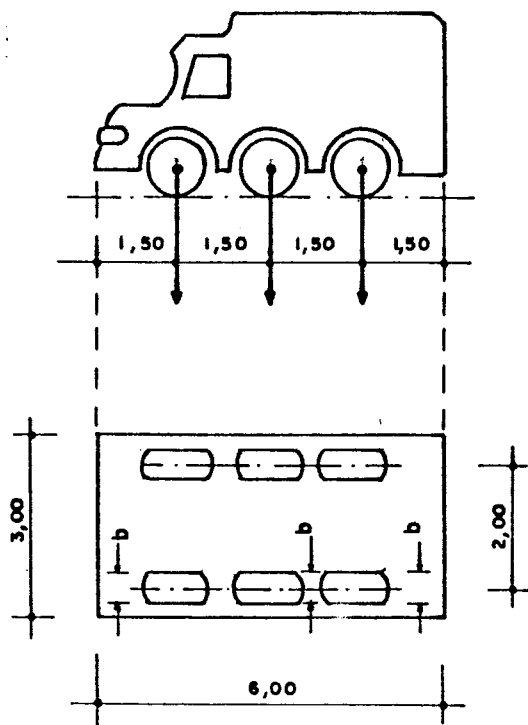
As estruturas de transposição são divididas em três classes quanto às cargas móveis previstas na norma NBR-7188:

- . classe 45 - é a classe na qual a base do sistema é um veículo-tipo de 45tf de peso total.
- . classe 30 - é a classe na qual a base do sistema é um veículo-tipo de 30tf de peso total.
- . classe 12 - é a classe na qual a base do sistema é um veículo-tipo de 12tf de peso total.

Para este trabalho é adotado o trem-tipo classe 45. O trem-tipo é composto por um veículo-tipo e de carga uniformemente distribuída (vide figura V.7). A área do veículo é suposta retangular, com 3,00m de largura e 6,00m de comprimento; a carga uniformemente distribuída atua na área restante da pista de rolamento, nesta incluídas as faixas de tráfego, os acostamentos e os afastamentos. O veículo-tipo é sempre orientado na direção do tráfego e colocado na posição mais desfavorável para o cálculo de cada elemento da ponte. Não se considera a parte do carregamento que provoca redução das solicitações. Na figura V.7 são relacionadas as características do trem-tipo adotado neste trabalho.



TREM - TIPO



VEÍCULO - TIPO

CLASSE DA PONTE : 45

VEÍCULO - TIPO 45

PESO TOTAL: 45 tf

CARGA UNIFORMEMENTE

DISTRIBUÍDA : 0,50 tf/m²

CARACTERÍSTICAS DO VEÍCULO

QUANTIDADE DE EIXOS : 3

PESO EM CADA RODA DIANTEIRA:
7,50 tf.

PESO EM CADA RODA INTERMEDIÁRIA:
7,50 tf.

PESO EM CADA RODA TRASEIRA:
7,50 tf.

LARGURA DE CONTATO b DE CADA
RODA : 0,50 m

COMPRIMENTO DE CONTATO DE CADA
RODA : 0,20m

DISTÂNCIA ENTRE OS EIXOS : 1,50 m

DISTÂNCIA ENTRE OS CENTROS DAS
RODAS DE CADA EIXO : 2,00 m

FIG. V. 7 - CARACTERÍSTICAS DO TREM - TIPO CLASSE 45

V.3.2 - Envolvimentos de esforços solicitantes devidos à carga móvel

Com base no trem-tipo classe 45 descrito no item anterior, foi adotado um procedimento para o estudo dos pontos (m, k) considerados importantes para o dimensionamento das placas esconsas contínuas sob a ação da carga móvel.

Como os efeitos das cargas concentradas do veículo-tipo são bem superiores aos efeitos da carga distribuída do trem-tipo, para a determinação dos esforços solicitantes é muito importante a posição do veículo-tipo em relação ao ponto (m, k) que se deseja considerar. Para um ponto (m, k), a posição do veículo-tipo é que determina os máximos esforços solicitantes para a estrutura. Portanto, por este motivo, e por falta de tempo para se processar os exemplos de placas esconsas contínuas sob a ação da carga uniformemente distribuída do trem-tipo, neste trabalho serão considerados somente os efeitos das cargas concentradas do veículo-tipo classe 45 para o estudo dos pontos (m, k) importantes. Convém ressaltar que a falta de tempo para se processar os casos de carregamentos devidos à carga distribuída do trem-tipo, foi em consequência das dificuldades surgidas com relação aos computadores utilizados; basicamente ocorreram dois problemas: o primeiro, devido à inadequação dos equipamentos inicialmente disponíveis frente aos processamentos necessários, e o segundo, devido às várias mudanças de equipamentos ocorridas por motivos circunstanciais. Em se tratando das cargas concentradas do trem-tipo, será feita uma simplificação; ao invés de se considerar o peso em cada roda de 7,5tf, será considerado o peso de 1,0tf. Assim, pelo Princípio da Superposição de Efeitos, para se obter a ação do veículo-tipo da classe 45 sobre a placa, é só multiplicar os resultados dos esforços solicitantes obtidos para as cargas unitárias por 7,5; além disso é possível se obter os esforços solicitantes para outros valores de cargas do veículo-tipo, como por exemplo, para o veículo do trem-tipo classe 30 em que as cargas concentradas estão na mesma disposição e cada uma tem o valor de 5,0tf.

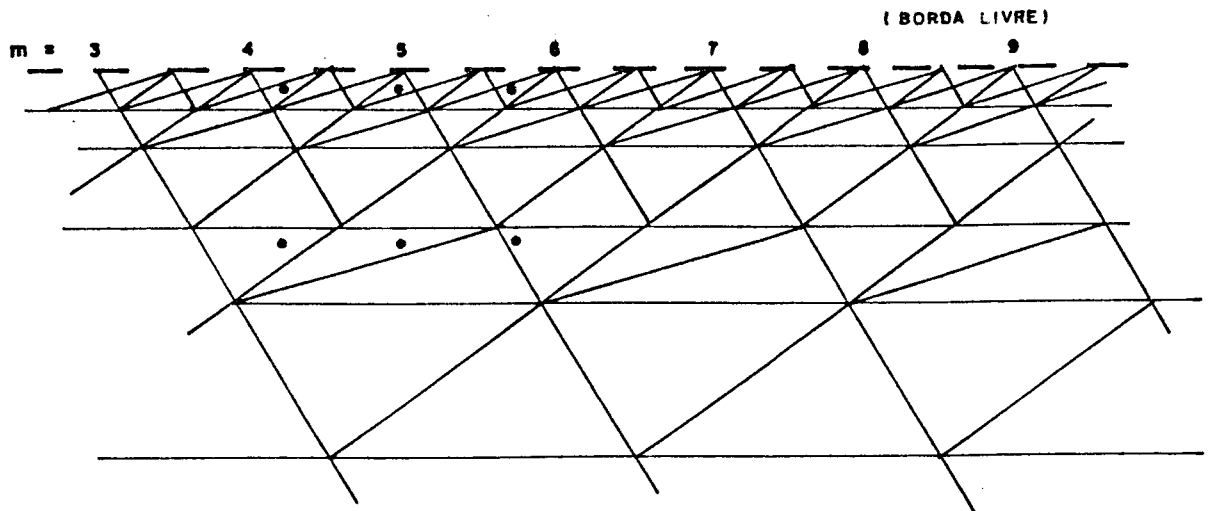
Sabendo-se que as duas regiões mais solicitadas das placas esconsas contínuas são a região longitudinal da borda livre e a região longitudinal central, decidiu-se considerar o veículo-tipo posicionado ao longo dessas regiões, em sucessivas posi

ções de modo a se percorrer as placas no sentido longitudinal. As posições do veículo-tipo são escolhidas de modo a se ter sempre o eixo intermediário alinhado com os pontos (m, k) que pertencem à borda livre (quando o veículo é colocado nesta região), ou à linha central longitudinal (quando o veículo é colocado ao longo da região central). Para cada região é utilizado um tipo de discretização em elementos finitos das placas esconsas contínuas: para o veículo-tipo localizado próximo à borda são utilizadas redes de elementos finitos do tipo da figura III.4, e para o veículo-tipo localizado na faixa central são utilizadas redes de elementos finitos do tipo da figura III.5.

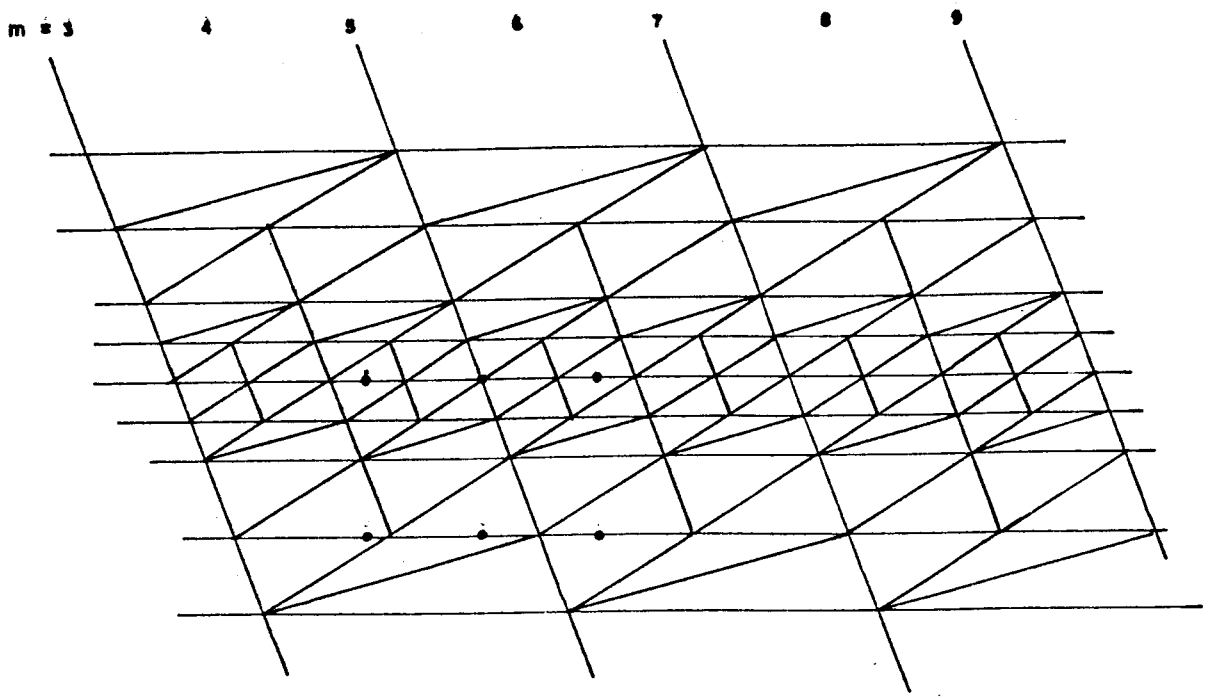
As cargas em cada uma das seis rodas do veículo-tipo são consideradas como cargas concentradas aplicadas no centro de gravidade da área de contato do pneu com o pavimento. Para o veículo-tipo colocado junto à região da borda livre da placa, as rodas são posicionadas rentes à borda livre, de modo que as cargas referentes a estas rodas são aplicadas a 25cm de distância da borda. Na região central o veículo pode ser colocado de um lado ou de outro da linha central longitudinal (para m com quaisquer valores e $k = 5$), pois ao se percorrer a placa no sentido longitudinal com o veículo-tipo de um lado da linha central equivale percorrer a placa no sentido longitudinal oposto ao sentido anterior, mas com o veículo-tipo do outro lado da linha central. O veículo-tipo percorre a placa esconsa contínua desde a primeira posição em que as seis cargas concentradas ficam dentro do primeiro vão até a última posição em que todas as cargas ficam dentro do primeiro vão, sempre alinhando o eixo intermediário com o ponto (m, k) considerado. O mesmo procedimento é adotado para o outro vão, se a placa tiver dois vãos; ou para os outros vãos, se a placa tiver três vãos. Na figura V.8 são mostrados exemplos de posicionamento do veículo-tipo nas duas regiões mais solicitadas das placas esconsas contínuas.

Ao se percorrer uma placa no sentido longitudinal, para cada posição do veículo-tipo são obtidos os esforços solicitantes em cada ponto nodal da rede de elementos finitos que forma a estrutura. Depois de se percorrer toda a placa, para cada ponto nodal são obtidos diversos valores dos esforços solicitantes, correspondentes às diferentes posições do veículo-tipo ao longo da placa. Portanto, para cada ponto nodal, ao longo da borda livre e

ao longo da seção longitudinal, são selecionados dentre os valores obtidos os máximos valores para os esforços solicitantes (momentos fletores M_x e M_y , e momento volvente M_{xy}).



VEÍCULO-TIPO POSICIONADO JUNTO À BORDA LIVRE (PARA QUAISQUER VALORES DE m E k IGUAL A 1 OU 9) - EIXO INTERMEDIÁRIO DO VEÍCULO-TIPO ALINHADO COM O PONTO (5,1)



VEÍCULO-TIPO POSICIONADO JUNTO À LINHA CENTRAL LONGITUDINAL (PARA QUAISQUER VALORES DE m E k IGUAL A 5) - EIXO INTERMEDIÁRIO DO VEÍCULO-TIPO ALINHADO COM O PONTO (5,5)

FIG. V.8 - POSIÇÕES DO VEÍCULO-TIPO NAS DUAS REGIÕES MAIS SOLICITADAS DAS PLACAS ESCONSAS CONTÍNUAS

Esses máximos valores para os esforços solicitantes, referentes aos pontos nodais da borda livre e da seção longitudinal central da placa, são plotados em gráficos de modo a se obter as envoltórias dos esforços solicitantes para placas esconas contínuas de 2 e 3 vãos. As placas que são analisadas estão relacionadas nas Tabelas V.1 e V.2, sendo que o número de elementos finitos e de pontos nodais que formam as redes de cada placa são apresentados na Tabela III.1. Para todas as placas, o número de posições diferentes do veículo-tipo para se obter essas envoltórias é 205, o que corresponde a 205 processamentos, variando-se a estrutura ou o carregamento.

As envoltórias para os esforços solicitantes descritas anteriormente são mostradas nas figura V.9 e V.38. Da figura V.9 a V.13 são mostradas as envoltórias referentes à placa esconsa contínua de 2 vãos com as relações $\lambda_1:\lambda_2 = 1:1$, $\phi = 30^\circ$, $b/\lambda_1 = 3/2$ e $\lambda_1 = 10,780\text{m}$. Da figura V.14 a V.18 são mostradas as envoltórias referentes à placa esconsa contínua de 2 vãos com as relações $\lambda_1:\lambda_2 = 1:1$, $\phi = 45^\circ$, $b/\lambda_1 = 3/2$ e $\lambda_1 = 13,200\text{m}$. Da figura V.19 a V.23 são mostradas as envoltórias referentes à placa esconsa contínua de 2 vãos com as relações $\lambda_1:\lambda_2 = 1:1$, $\phi = 60^\circ$, $b/\lambda_1 = 3/2$ e $\lambda_1 = 18,670\text{m}$. Da figura V.24 a V.28 são mostradas as envoltórias referentes à placa esconsa contínua de 3 vãos com as relações $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3 = 1:1,2:1$, $\phi = 30^\circ$, $b/\lambda_1 = 3/2$ e $\lambda_1 = 10,780\text{m}$. Da figura V.29 a V.33 são mostradas as envoltórias referentes à placa esconsa contínua de 3 vãos com as relações $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3 = 1:1,2:1$, $\phi = 45^\circ$, $b/\lambda_1 = 3/2$ e $\lambda_1 = 13,200\text{m}$. E, finalmente, da figura V.34 a V.38 são mostradas as envoltórias referentes à placa esconsa contínua de 3 vãos com as relações $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3 = 1:1,2:1$, $\phi = 60^\circ$, $b/\lambda_1 = 3/2$ e $\lambda_1 = 18,670\text{m}$. E os valores dos esforços solicitantes nos pontos (m, k) mais importantes para estas placas são relacionados nas tabelas V.4 a V.9b. Quando é feita uma referência, com base no presente trabalho, a algum ponto (m, k) importante que não coincide com a indicação feita por Schleicher e Wegener, os valores dos esforços solicitantes são comparados.

Ao se analisar os resultados dos esforços solicitantes obtidos para as placas esconas contínuas de 2 e de 3 vãos sob a ação da carga móvel, verifica-se de imediato que os pontos (m, k) mais solicitados divergem em muito casos dos pontos (m, k) apresentados por Schleicher e Wegener [13]. As indicações dos pon

tos (m, k) mais solicitados são feitas por Schleicher e Wegener em função das placas esconsas contínuas com carga uniformemente distribuída e não servem para as placas sob ação da carga móvel; contudo, esses pontos podem servir para um primeiro posicionamento do veículo-tipo para dimensionamento das placas.

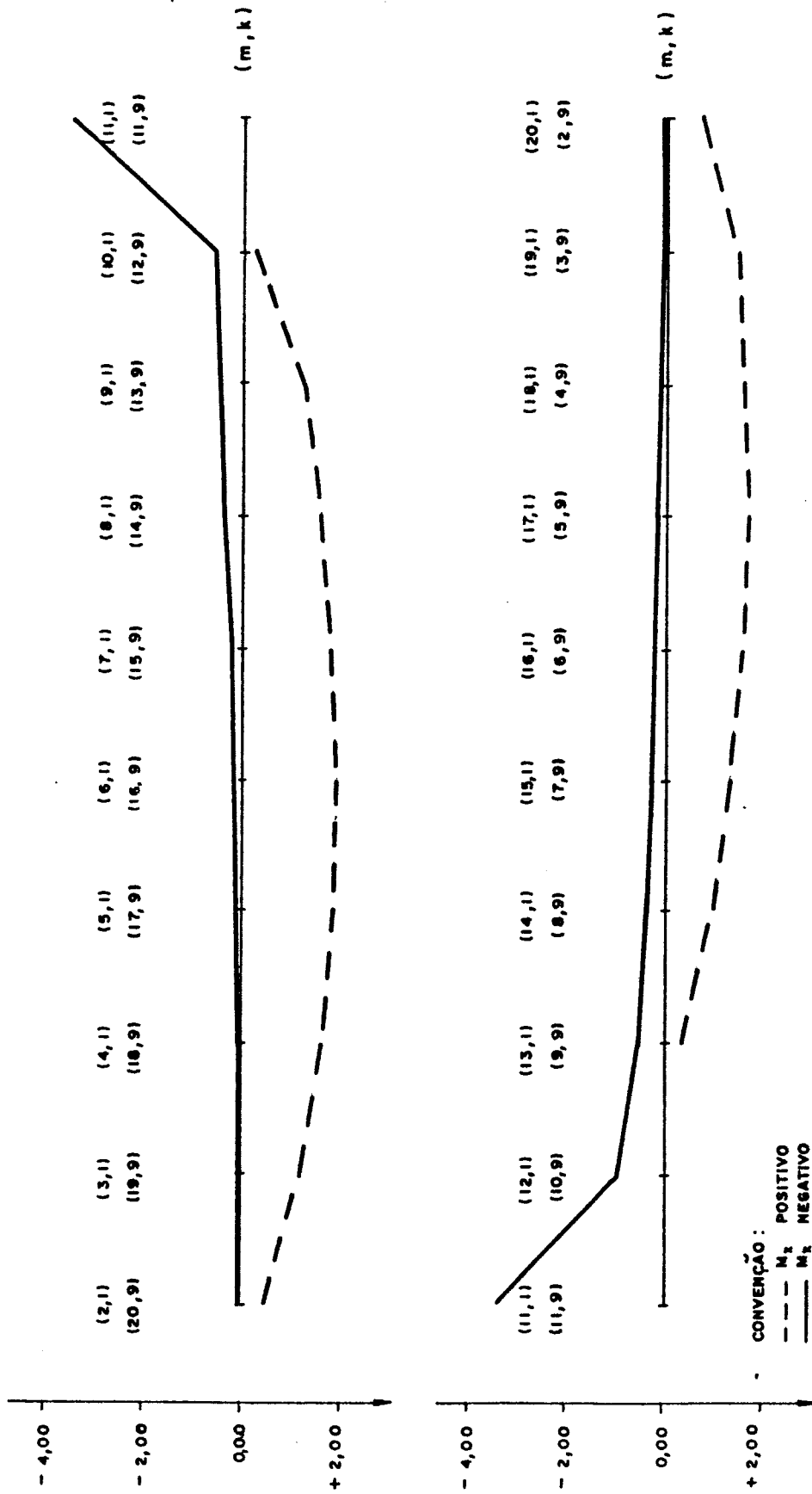


FIG. 9 - ENVOLTÓRIA DE M_x (tf.m/m), BORDA LIVRE
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,00 tf
 PLACA ESCONSA CONTINUA DE 2 VAOS ($\lambda_1 : \lambda_2 = 1 : 1$, $\varphi = 30^\circ$, $b/\lambda_1 = 3/2$, $\lambda_1 = 10,780$ m)

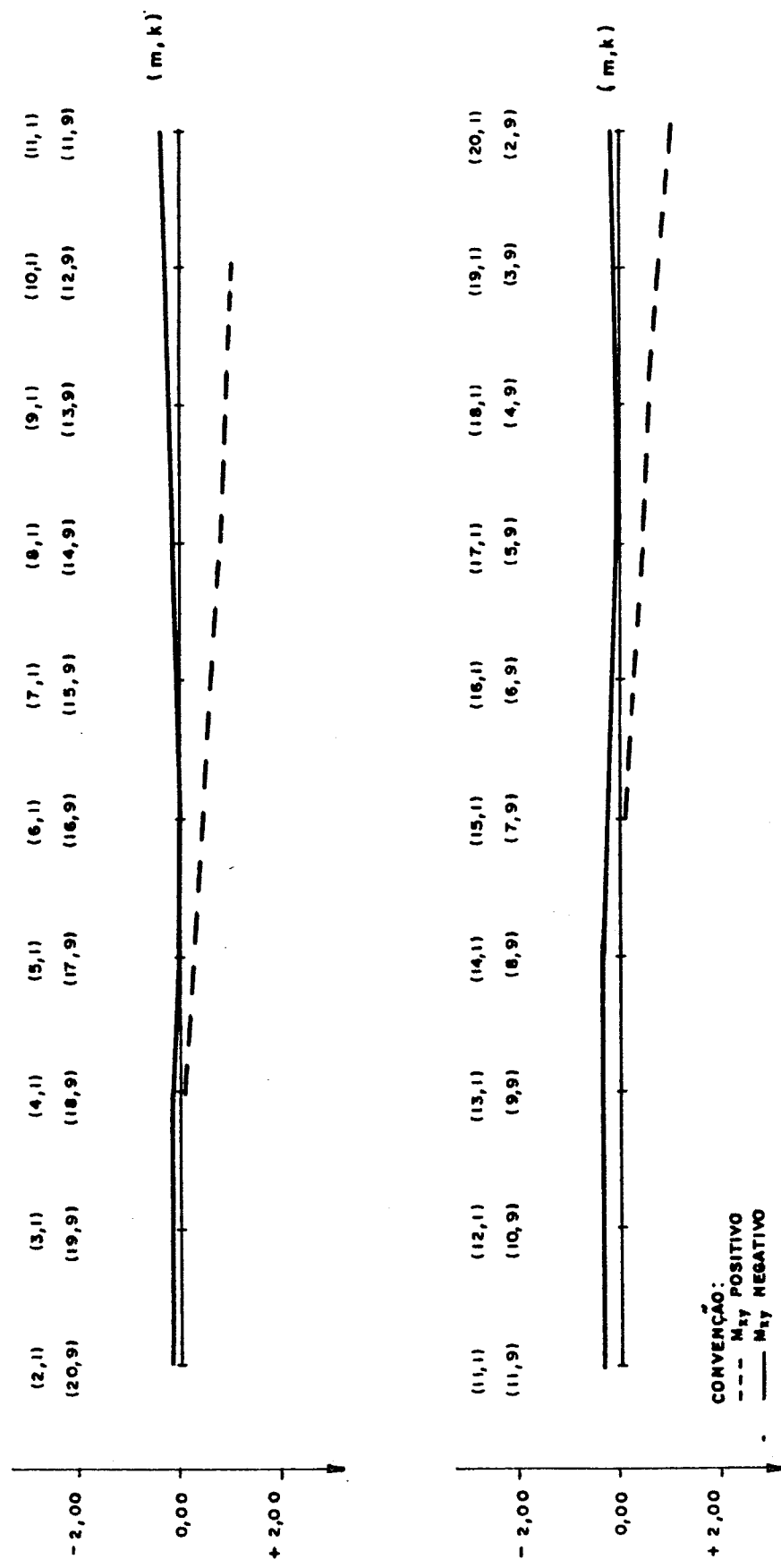


FIG. V.10 - ENVOLTÓRIA DE M_{xy} (tf.m/m) - BORDA LIVRE
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,00 TF
 PLACA ESCONSA CONTINUA DE 2 VÃOS (ℓ₁: ℓ₂ = 1:1, φ = 30°, b/ℓ₁ = 3/2, ℓ₁ = 10,780 m)

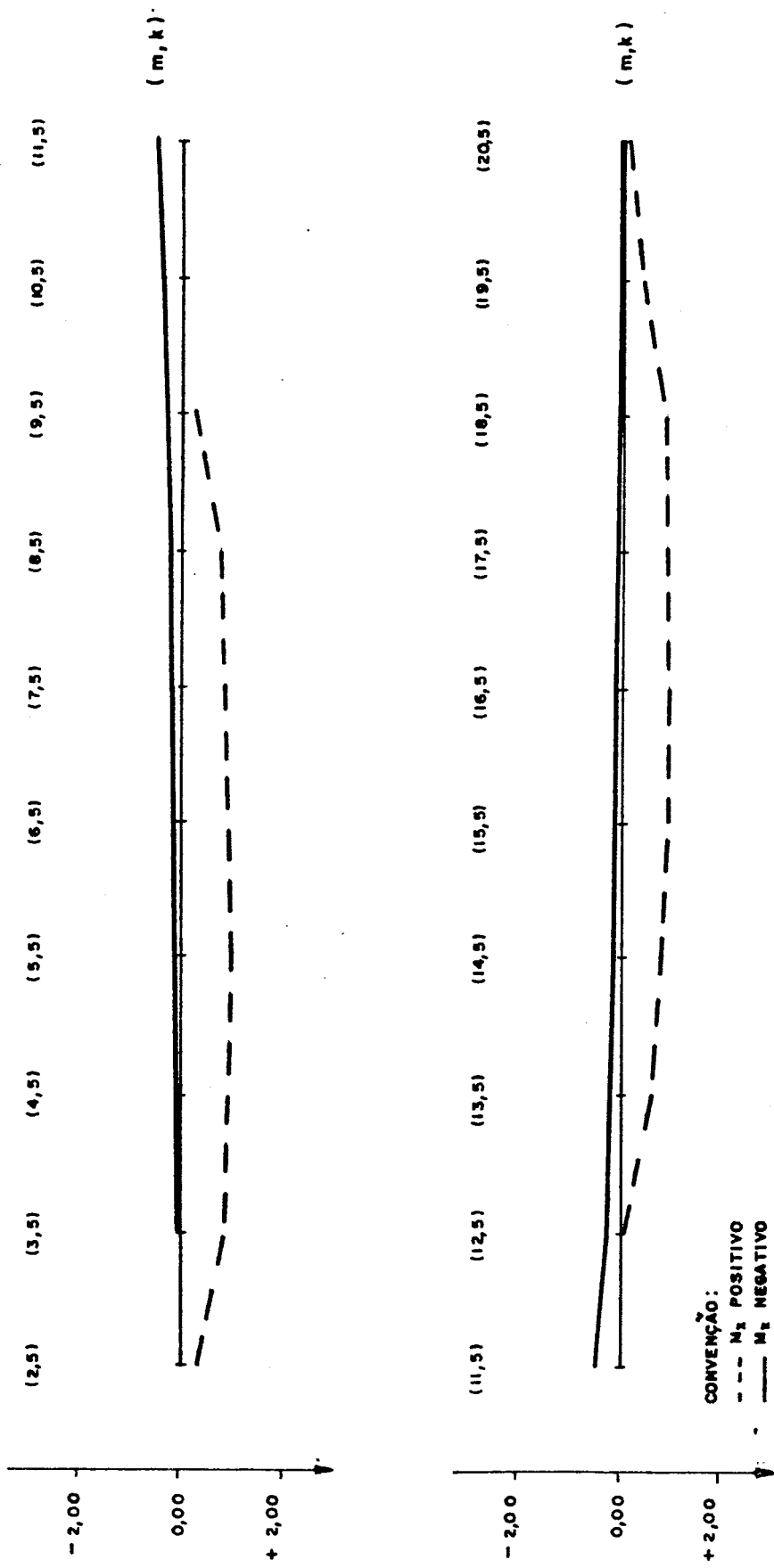


FIG. 11 - ENVOLTÓRIA DE M_x (tf.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,00 tf
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS ($\lambda_1 : \lambda_2 = 1 : 1, \varphi = 30^\circ, b/\lambda_1 = 3/2, \lambda_1 = 10,780 \text{ m}$)

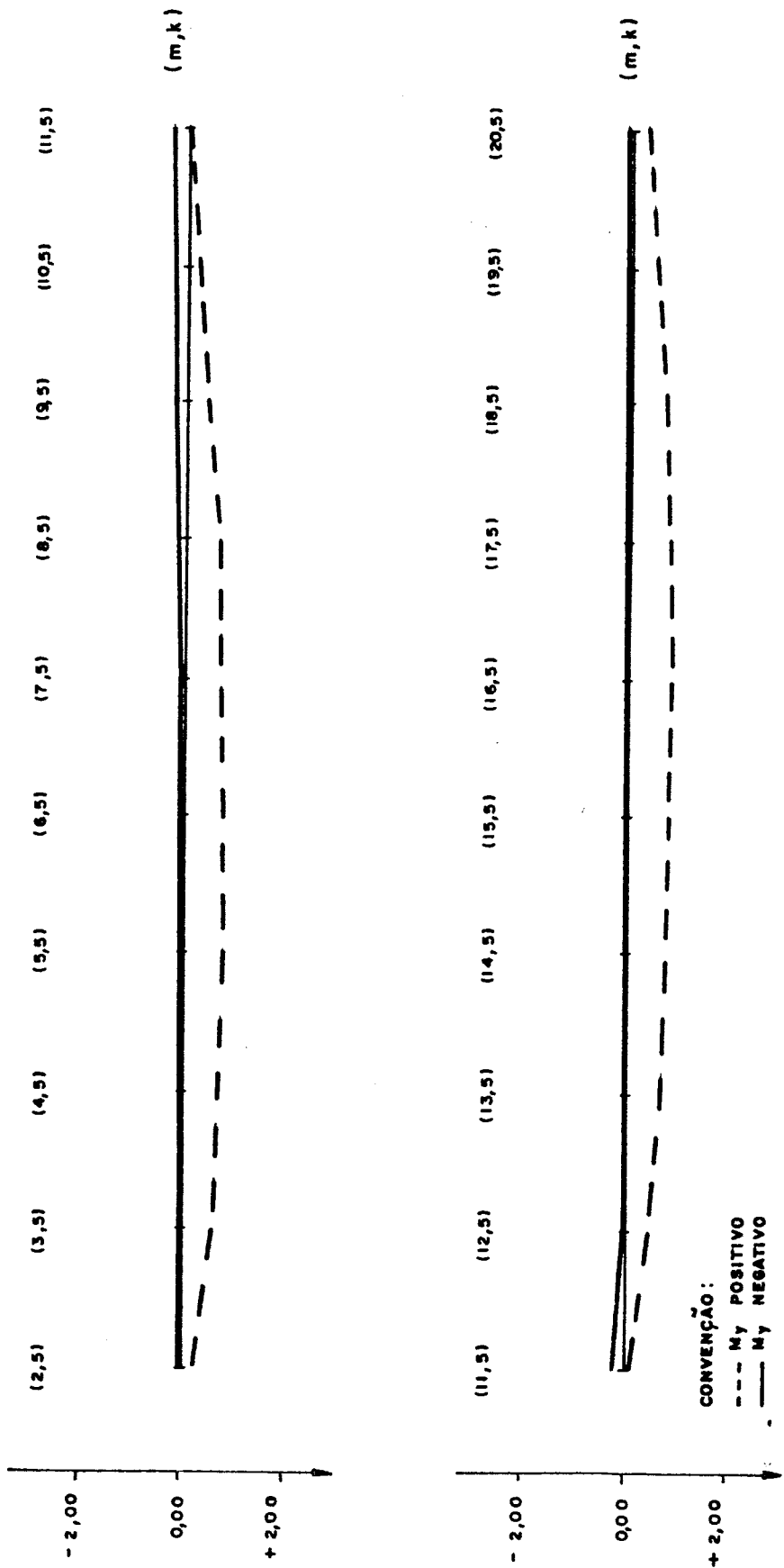


FIG. X.12 - ENVOLTÓRIA DE M_y (tf.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P = 1,00 t t
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS ($L_1 : L_2 = 1 : 1$, $\varphi = 30^\circ$, $b/L_1 = 3/2$, $L_1 = 10,780$ m)

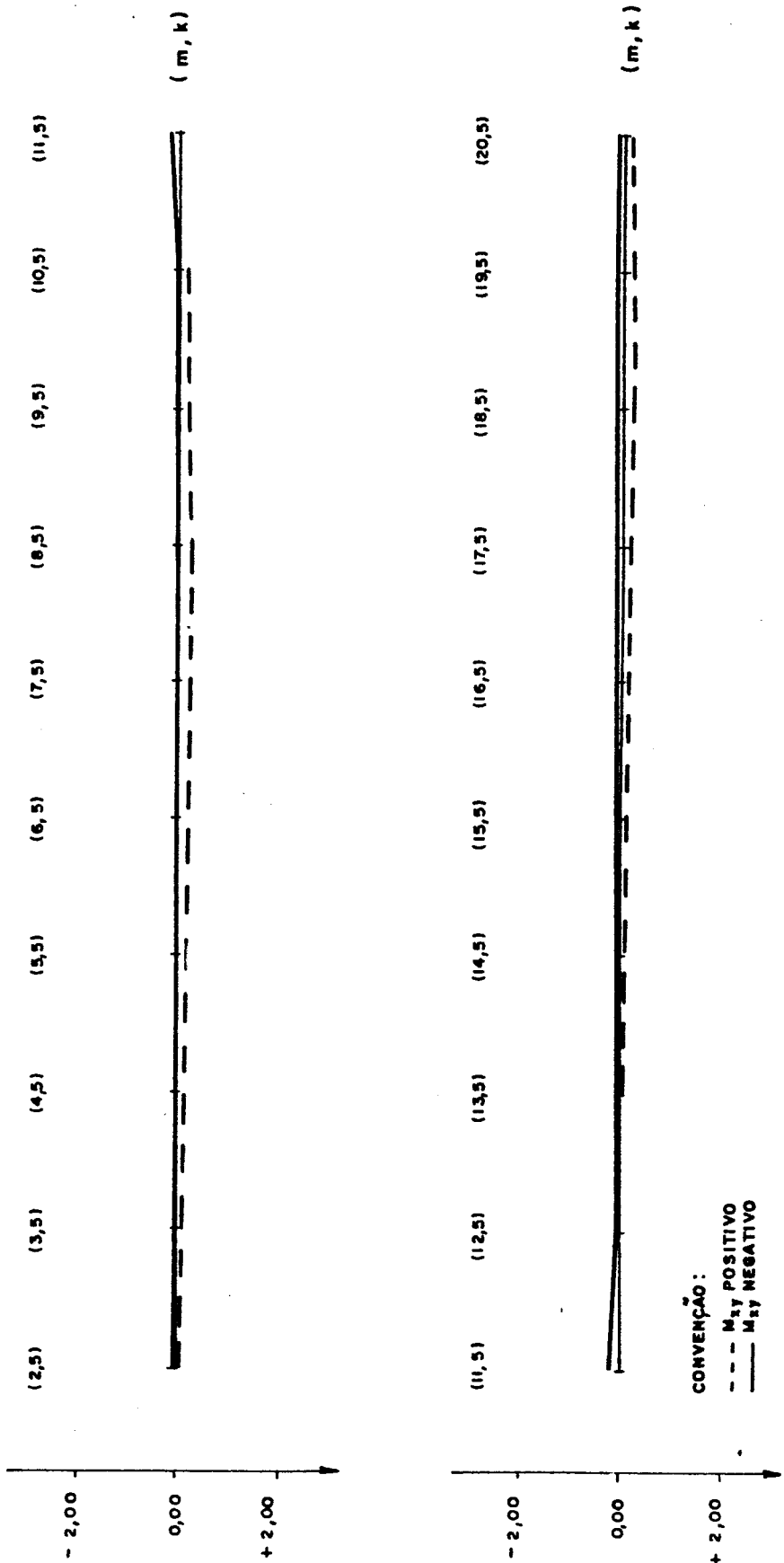


FIG. X. 13 - ENVOLTÓRIA DE M_{xy} (kf.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,00tf
 PLACA ESCONSA CONTINUA DE 2 VÃOS ($\lambda_1 : \lambda_2 = 1 : 1, \varphi = 30^\circ, b/\lambda_1 = 3/2, \lambda_1 = 10,780\text{ m}$)

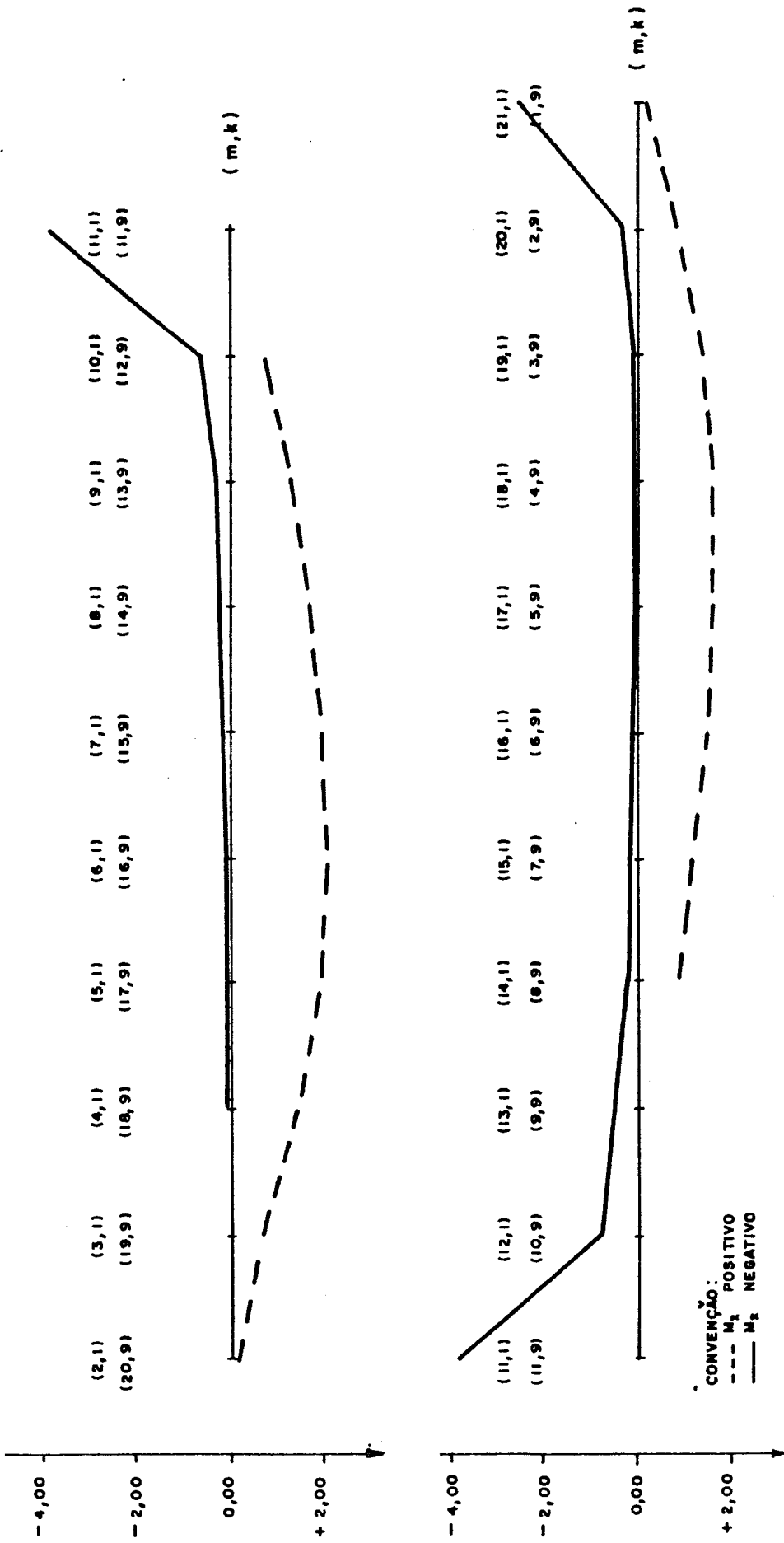


FIG. X. 14 - ENVOLTÓRIA DE M_x (ft.m/m) - BORDA LIVRE
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P = 1,00 tf
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS ($\ell_1: \ell_2 = 1:1$, $\varphi = 45^\circ$, $b/\ell_1 = 3/2$, $\ell_1 = 13,200$ m)

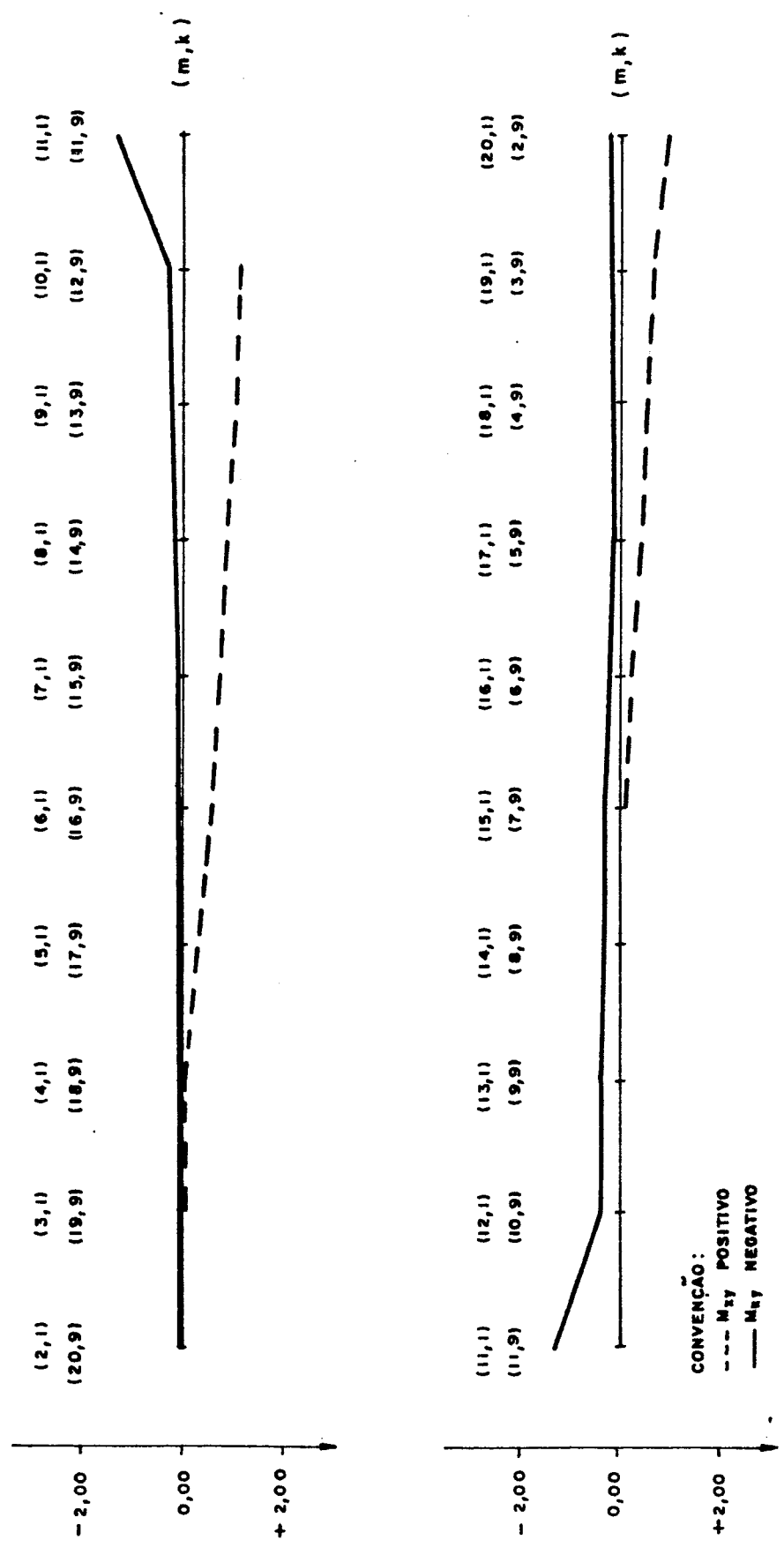


FIG. 15 - ENVOLTÓRIA DE M_{xy} (tf.m/m) - BORDA - LIVRE
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P = 1,00 tf
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS (L₁:L₂ = 1:1, φ = 45°, b/L₁ = 3/2, L₁ = 13,200m)

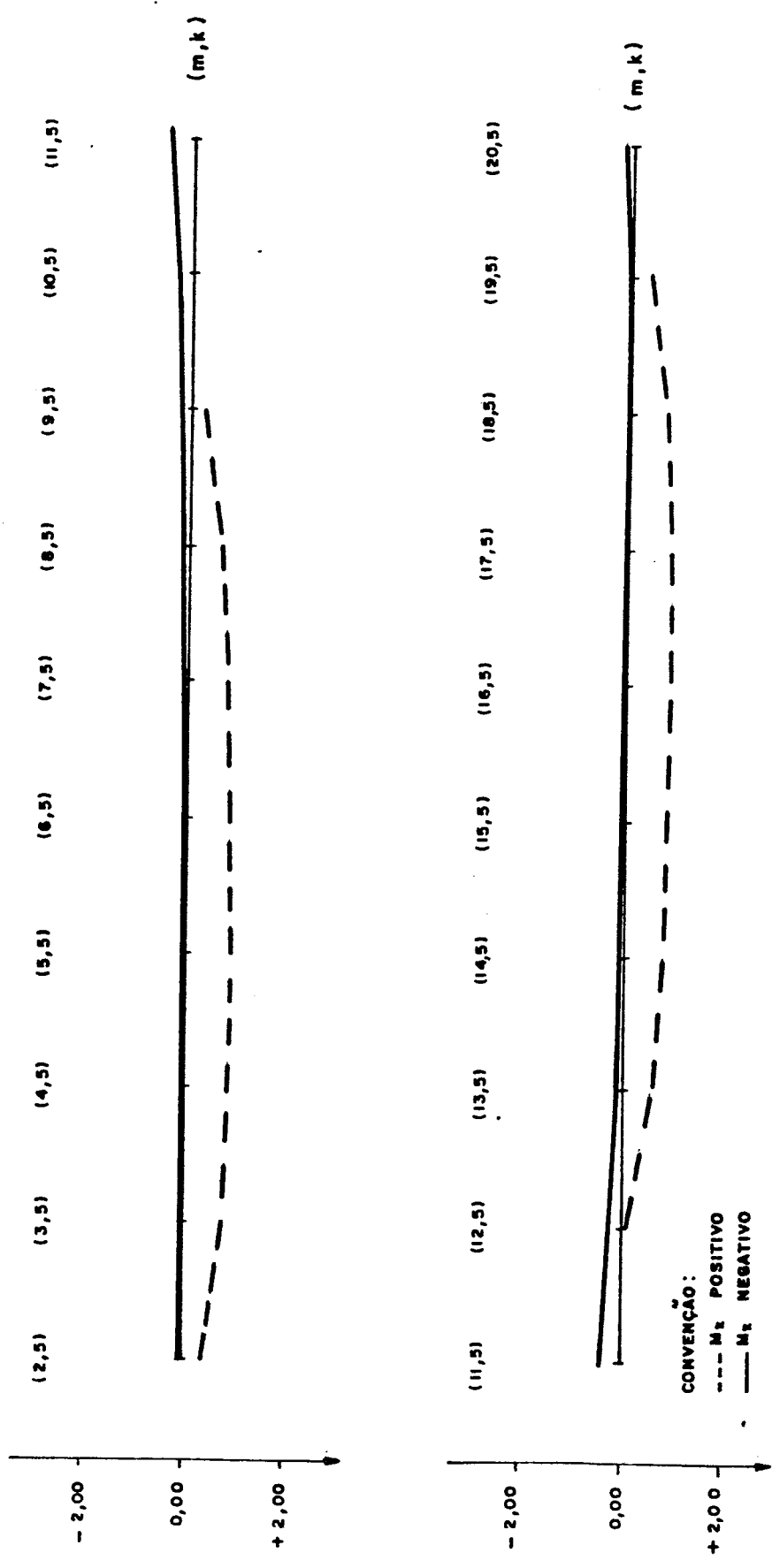


FIG. 5.16 - ENVOLTÓRIA DE M_x (tf.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,00H
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS (ℓ₁:ℓ₂=1:1, φ = 45°, b/ℓ₁ = 3/2, ℓ₁ = 13,200 m)

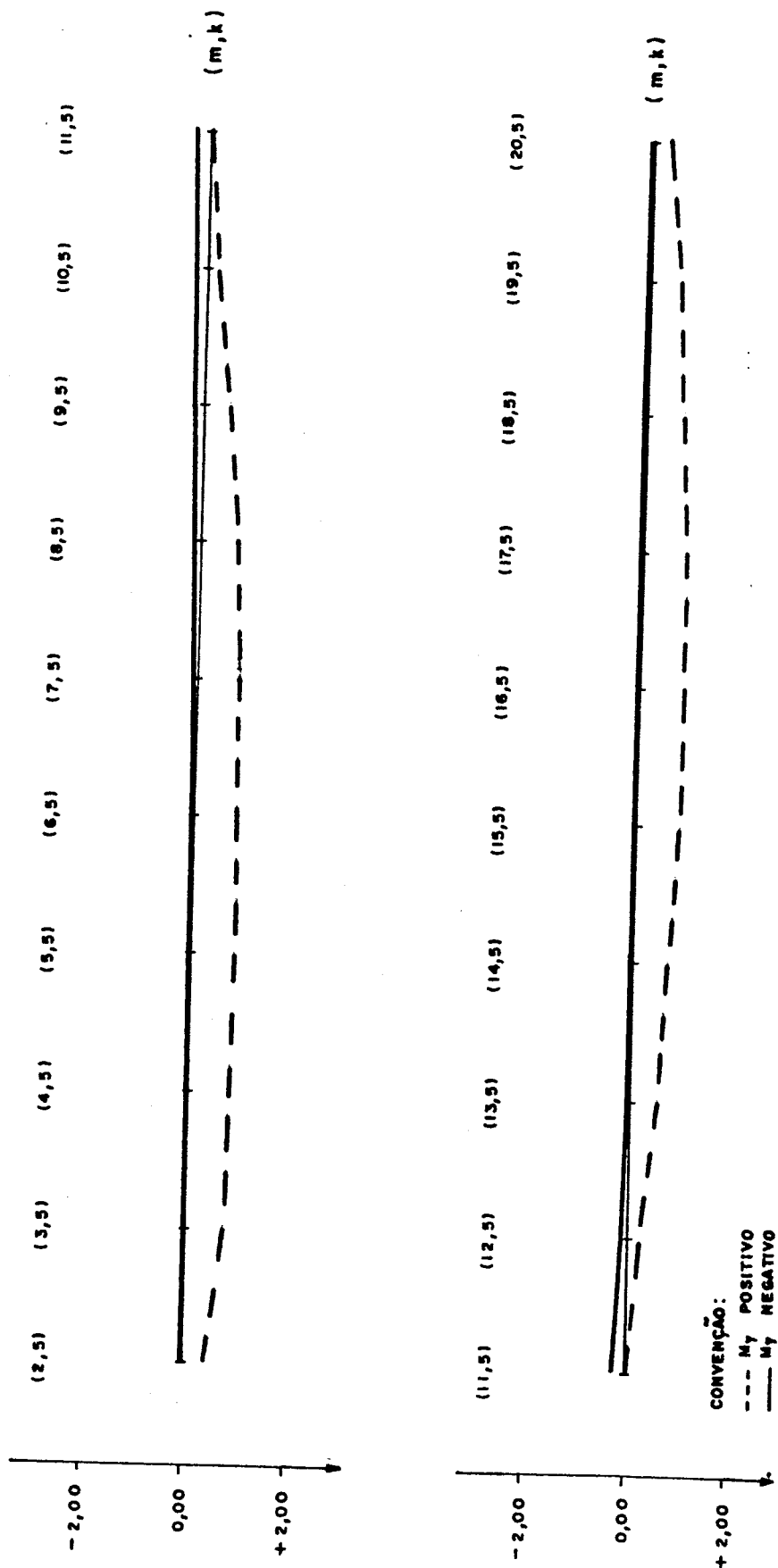


FIG. 17 - ENVOLTÓRIA DE M_y (tf.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P = 100tf
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VAOS ($\lambda_1: \lambda_2 = 1:1$, $\varphi = 45^\circ$, $b/l_1 = 3/2$, $\lambda_1 = 13,200m$)

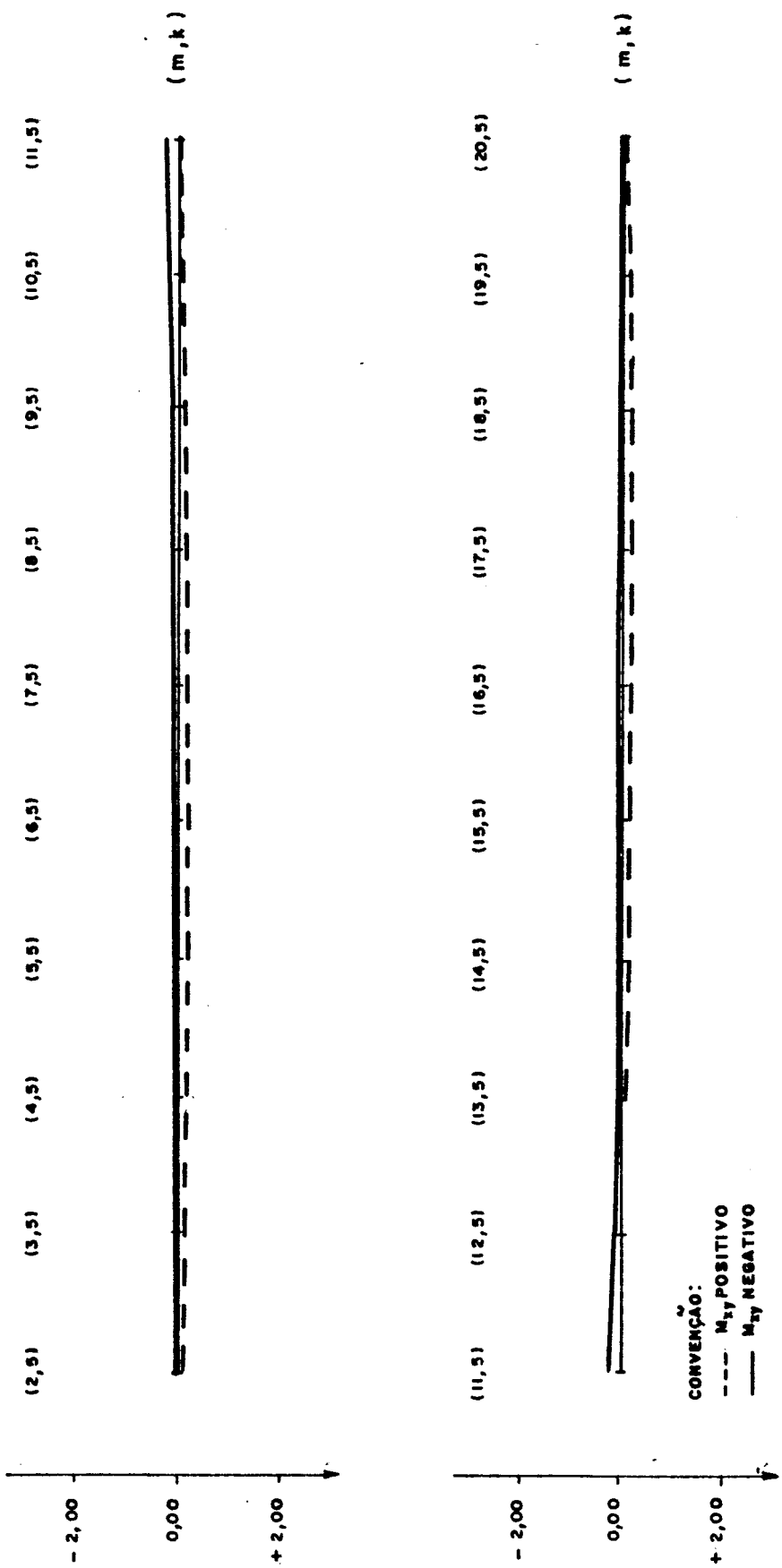


FIG. V. 18 - ENVOLTÓRIA DE M_{xy} (kN.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,001t
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS ($l_1 : l_2 = 1 : 1$, $\varphi = 45^\circ$, $b/l_1 = 3/2$, $l_1 = 13,200m$)

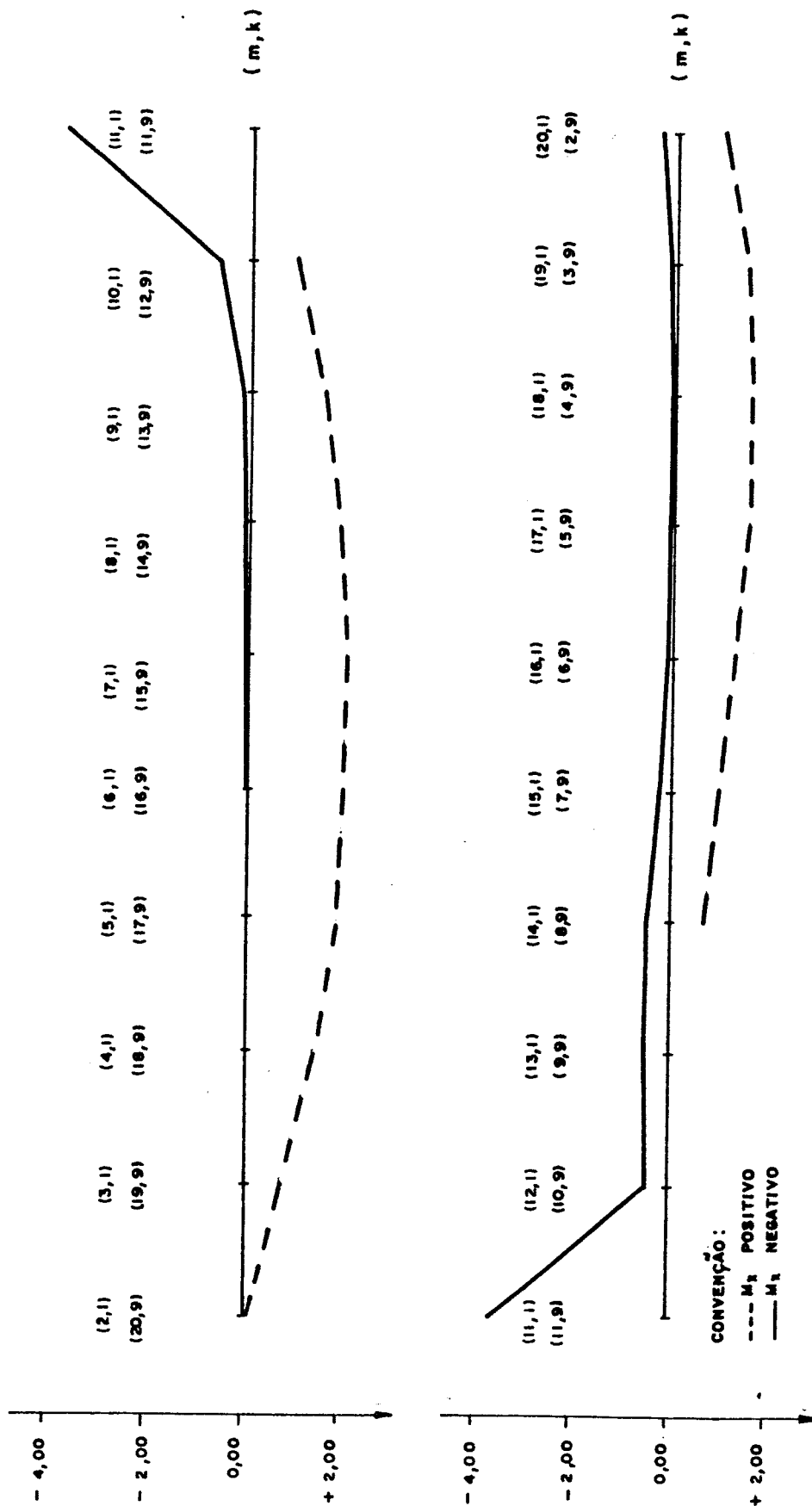


FIG. 19 - ENVOLTÓRIA DE M_x (kN.m/m) - BORDA LIVRE
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,00t
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS ($l_2 : l_1 = 1 : 1$, $\varphi = 60^\circ$, $b/l_1 = 3/2$, $l_1 = 18,670\text{m}$)

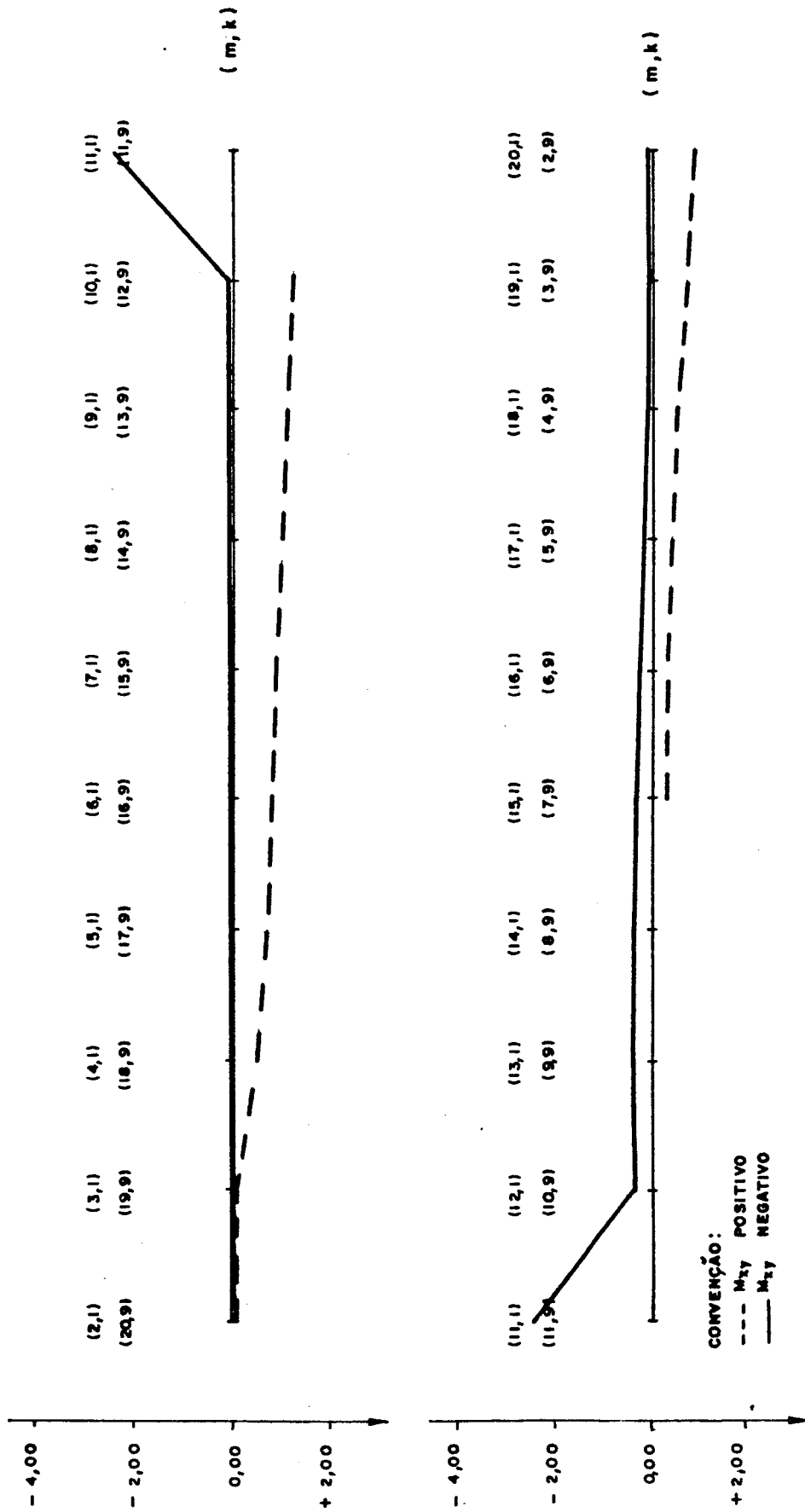


FIG. 20 - ENVOLTÓRIA DE M_{xy} (kN/m) - BORDA LIVRE
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P = 1,00tf
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS (l₁ : l₂ = 1 : 1, φ = 60°, b/l₁ = 3/2, l₁ = 18,670m)

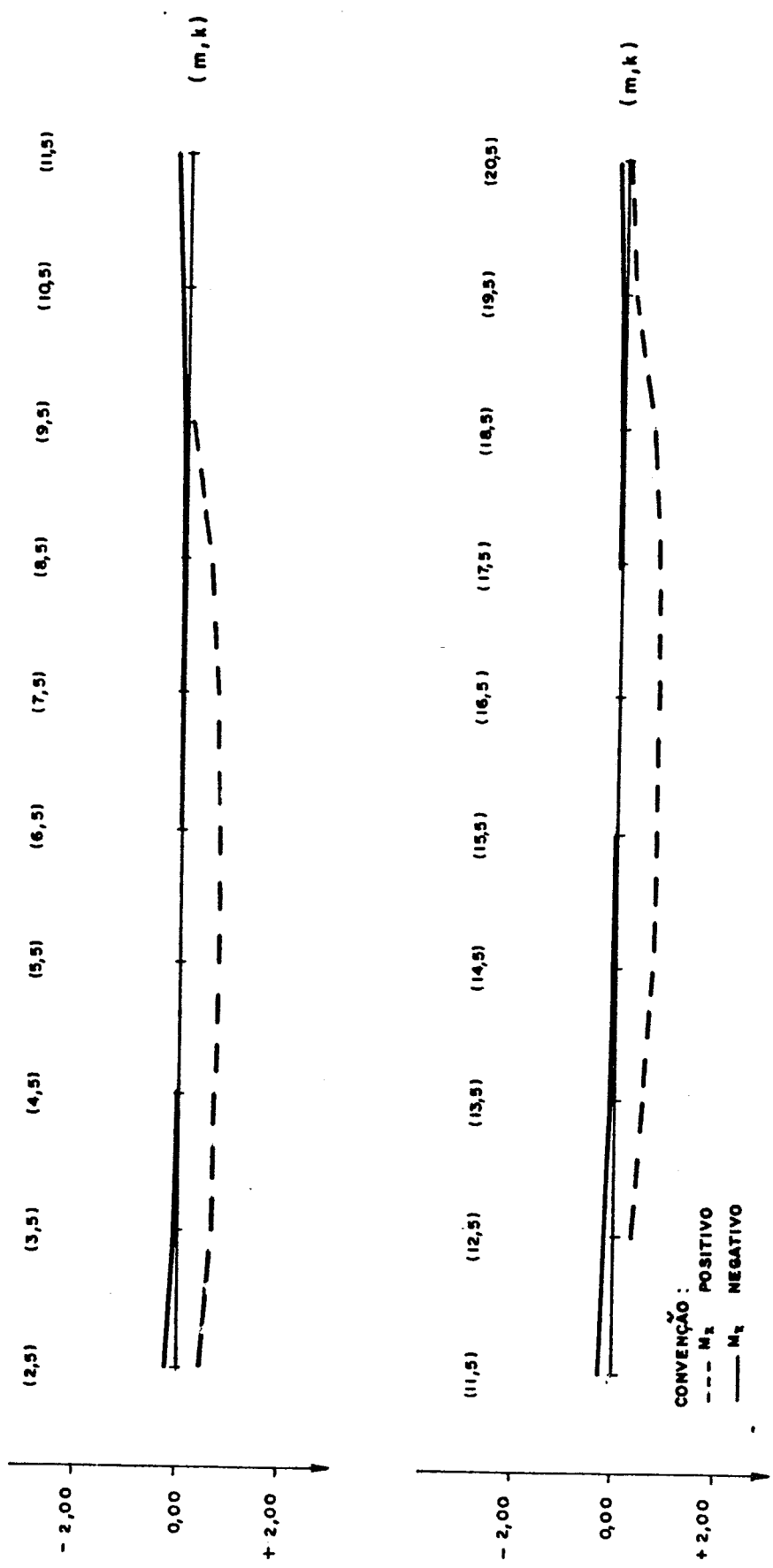


FIG.V.21 - ENVOLTÓRIA DE M_x (tf.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,00 t
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS ($\lambda_1 : \lambda_2 = 1 : 1, \varphi = 60^\circ, b/\lambda_1 = 3/2, \lambda_1 = 18,670 \text{ m}$)

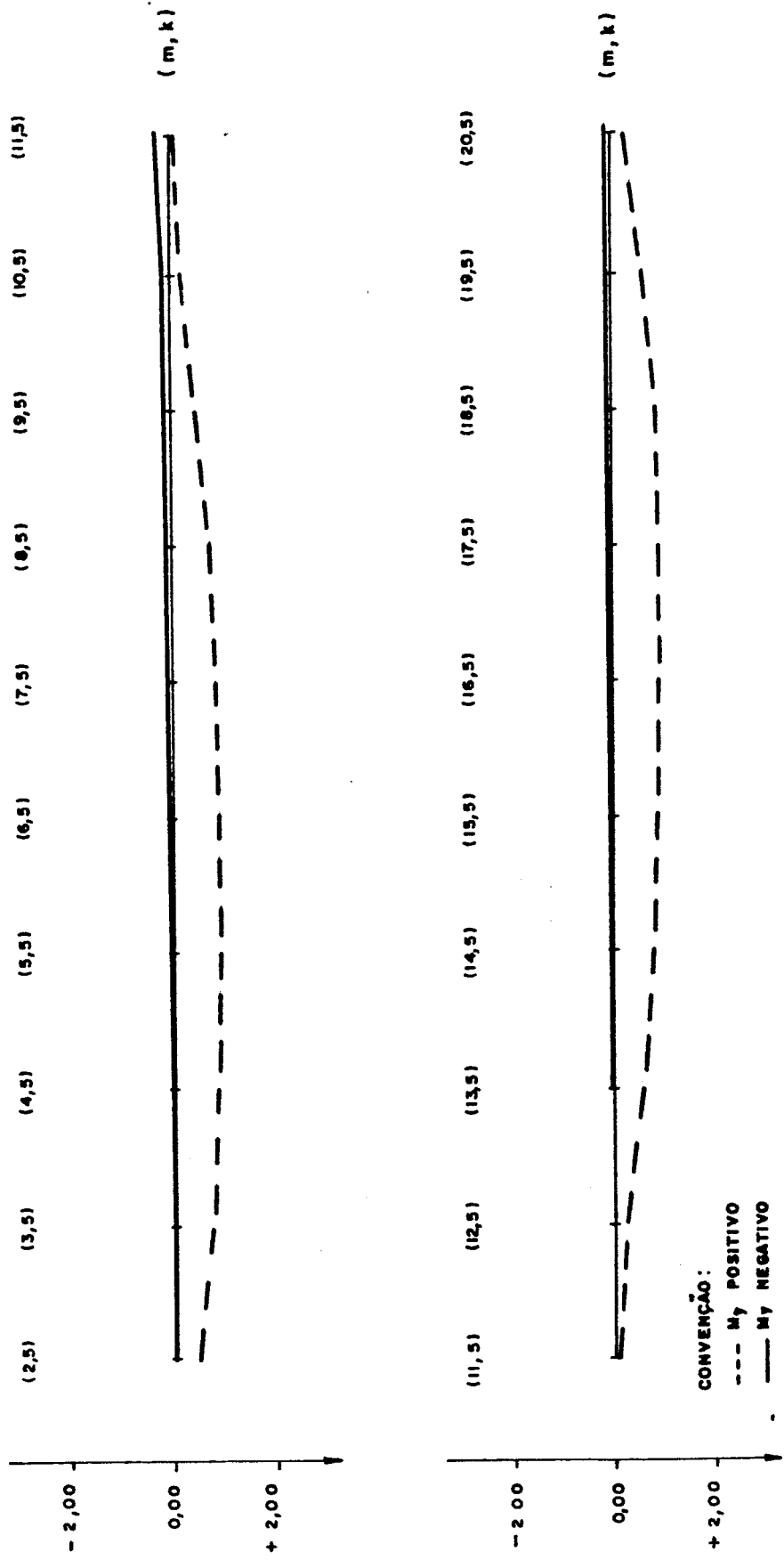


FIG. X.22 - ENVOLTÓRIA DE M_y (11.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,001f
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS ($\lambda_1 : \lambda_2 = 1 : 1$, $\varphi = 60^\circ$, $b/\lambda_1 = 3/2$, $\beta_1 = 18,670$ m)

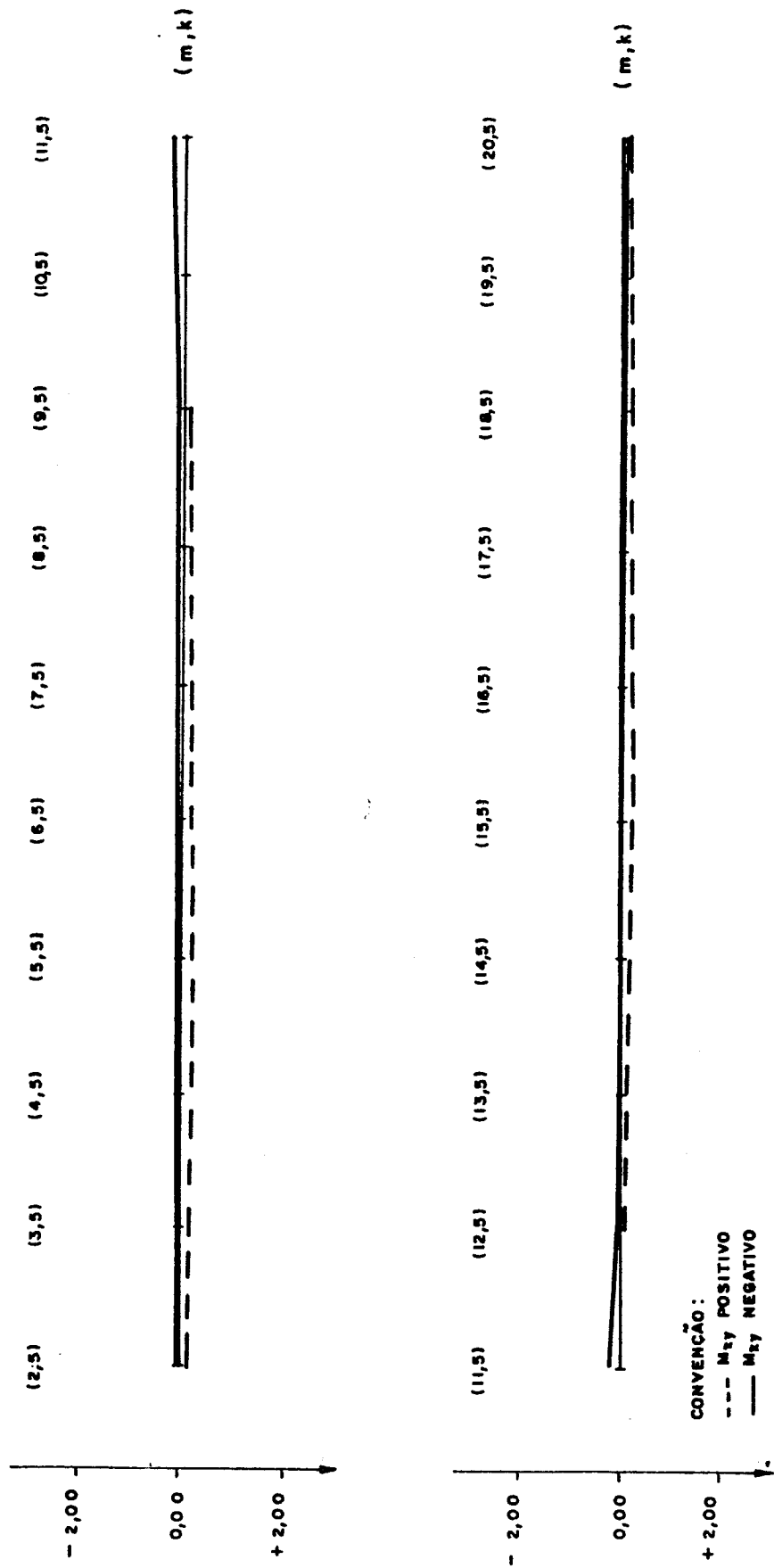


FIG. 23 - ENVOLTÓRIA DE M_{xy} (tf.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,00t
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VAOS ($L_1: L_2 = 1:1$, $\varphi = 60^\circ$, $b/L_1 = 3/2$, $L_1 = 18,670 \text{ m}$)

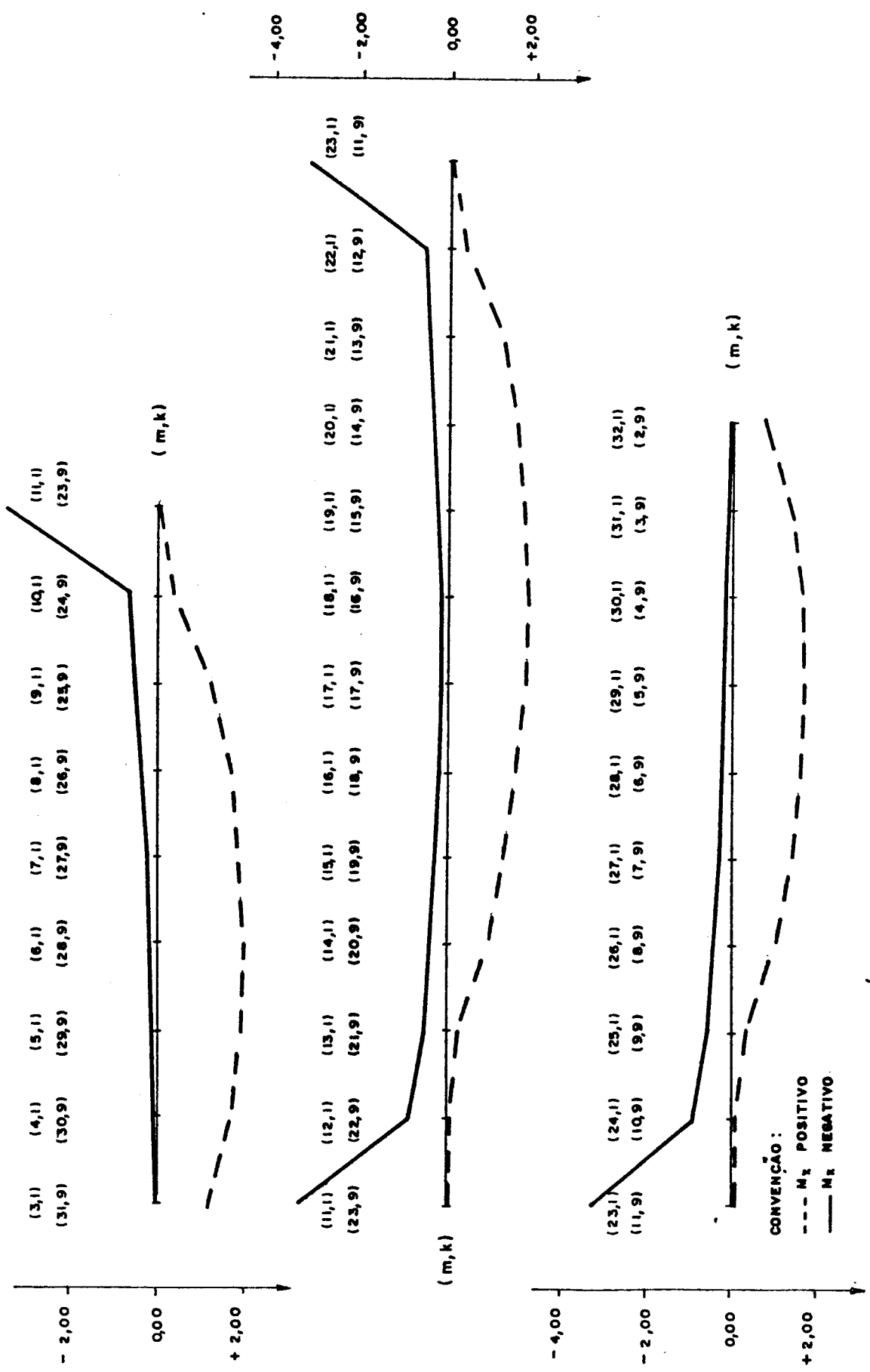


FIG. 24 - ENVOLTÓRIA DE M_x (11.m/m) - BORDA LIVRE
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,00 tf
 PLACA ESCONDA CONTINUA DE 3 VÃOS (l₁ : l₂ : l₃ = 1 : 1,2 : 1,1, ϕ = 30°, b/l₁ = 3/2, β₁ = 10,780m)

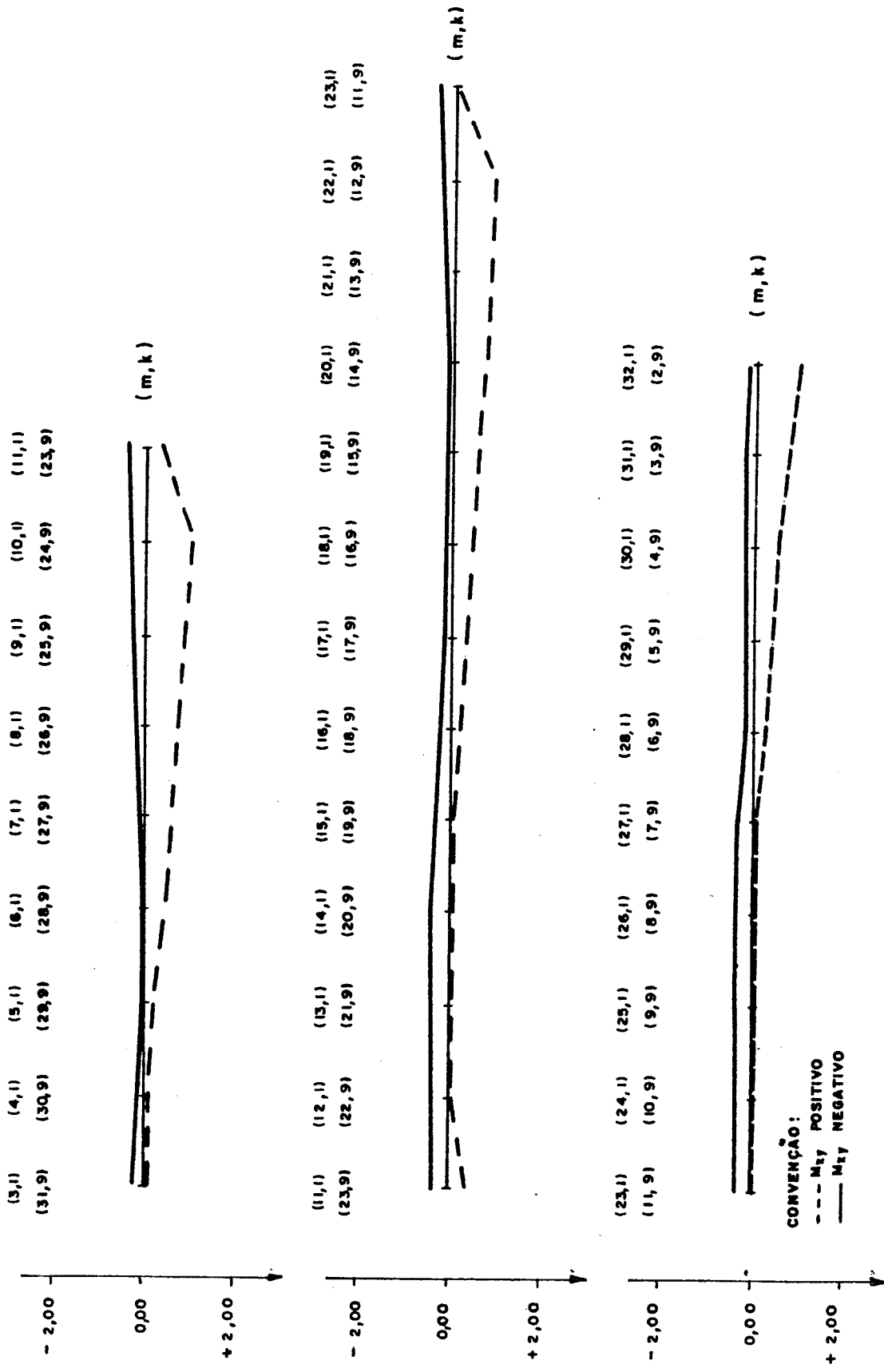


FIG. 25 - ENVOLTÓRIA DE M_{xy} (kg·m/m) - BORDA LIVRE
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P = 1,00 TF
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VÃOS ($\lambda_1: \lambda_2: \lambda_3 = 1:1,2:1, \varphi = 30^\circ, b/\lambda_1 = 3/2, \lambda_1 = 10,780$ m)

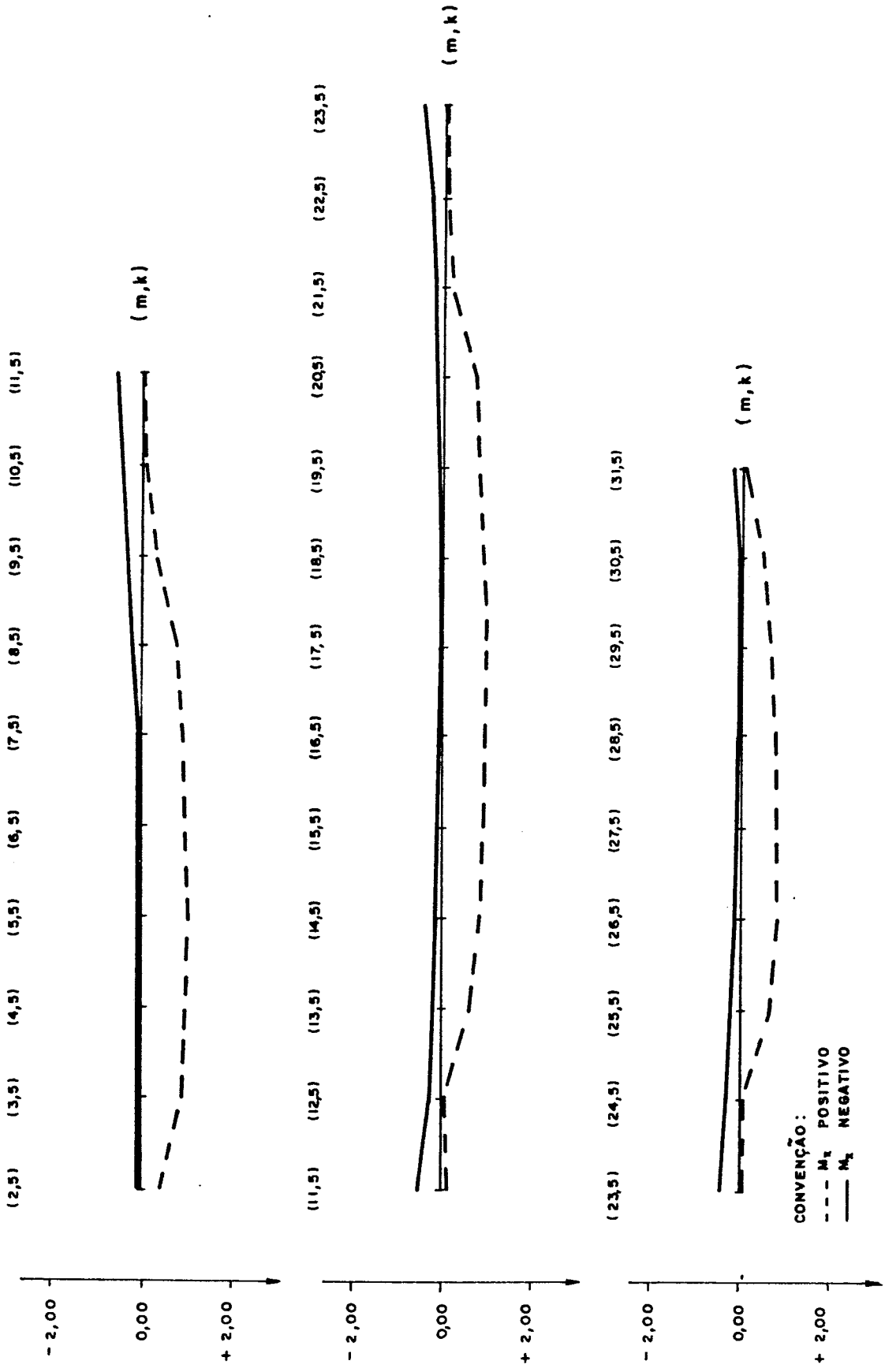


FIG. X.26 - ENVOLTÓRIA DE M_x (kf.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P = 1,00 tf
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VÃOS ($f_1 : f_2 : f_3 = 1 : 2 : 1$, $\varphi = 30^\circ$, $b / f_1 = 3/2$, $f_1 = 10$, 780 m)

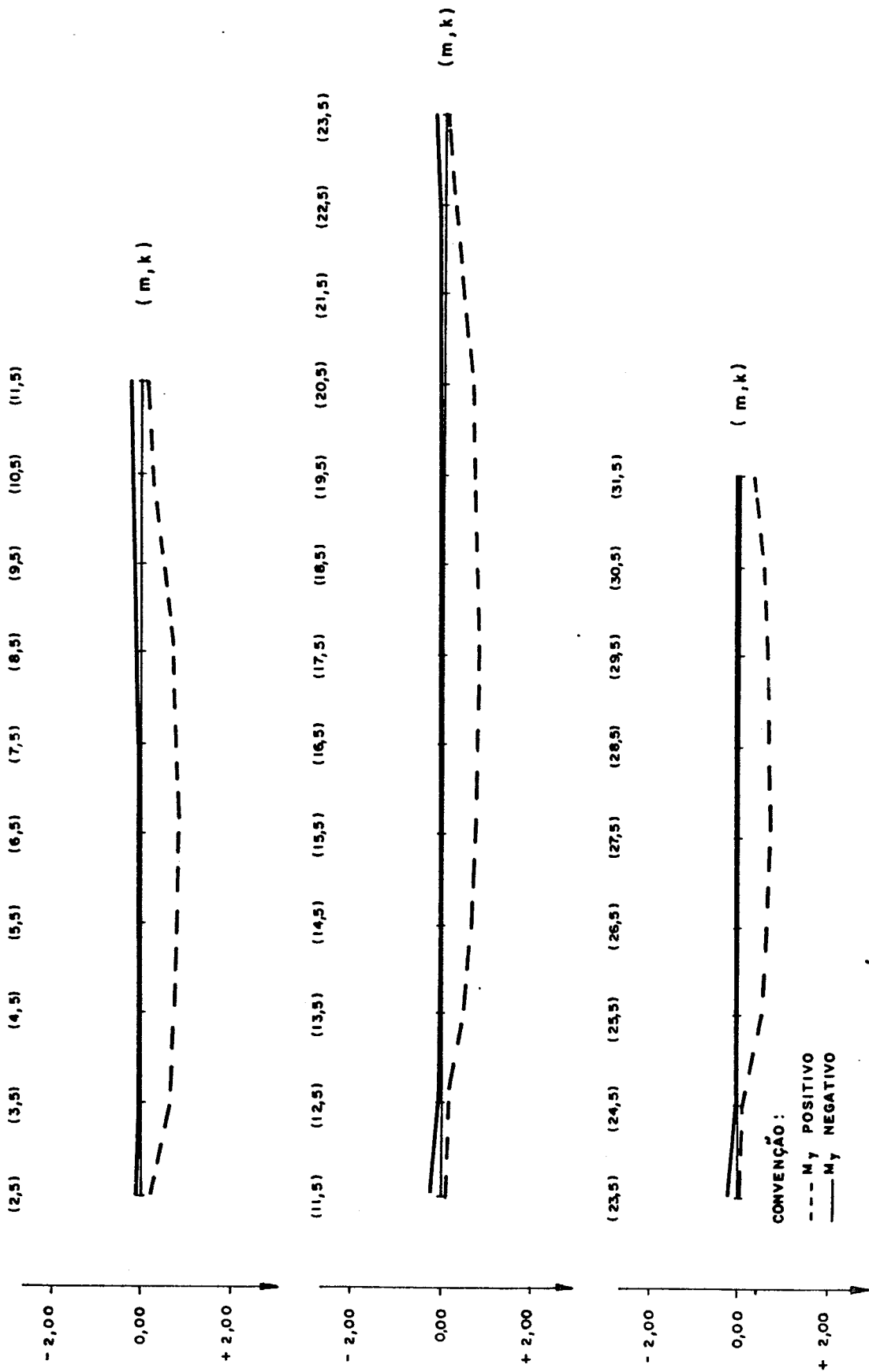


FIG. V.27 - ENVOLTÓRIA DE M_y (kN.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P = 1,001t
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VÃOS (λ₁: λ₂: λ₃ = 1: 1,2: 1, φ = 30°, b/λ₁ = 3/2, λ₁ = 10,780 m)

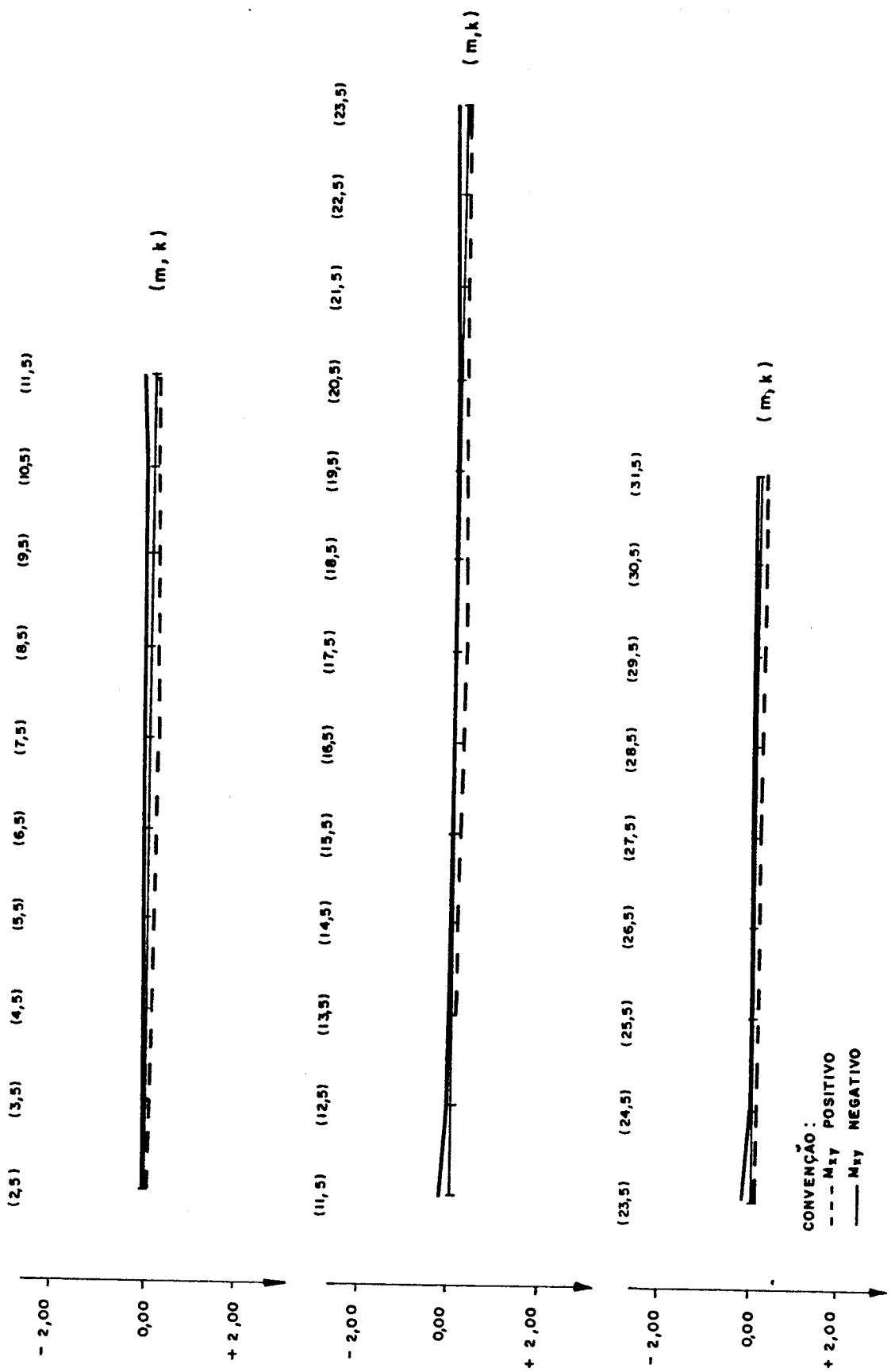


FIG. 28 - ENVOLTÓRIA DE M_{xy} (kN.m/m) - ÇENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P = 1,00tf
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VAOS ($l_1 : l_2 : l_3 = 1 : 1,2 : 1$, $\varphi = 30^\circ$, $b/l_1 = 3/2$, $l_1 = 10,780m$)

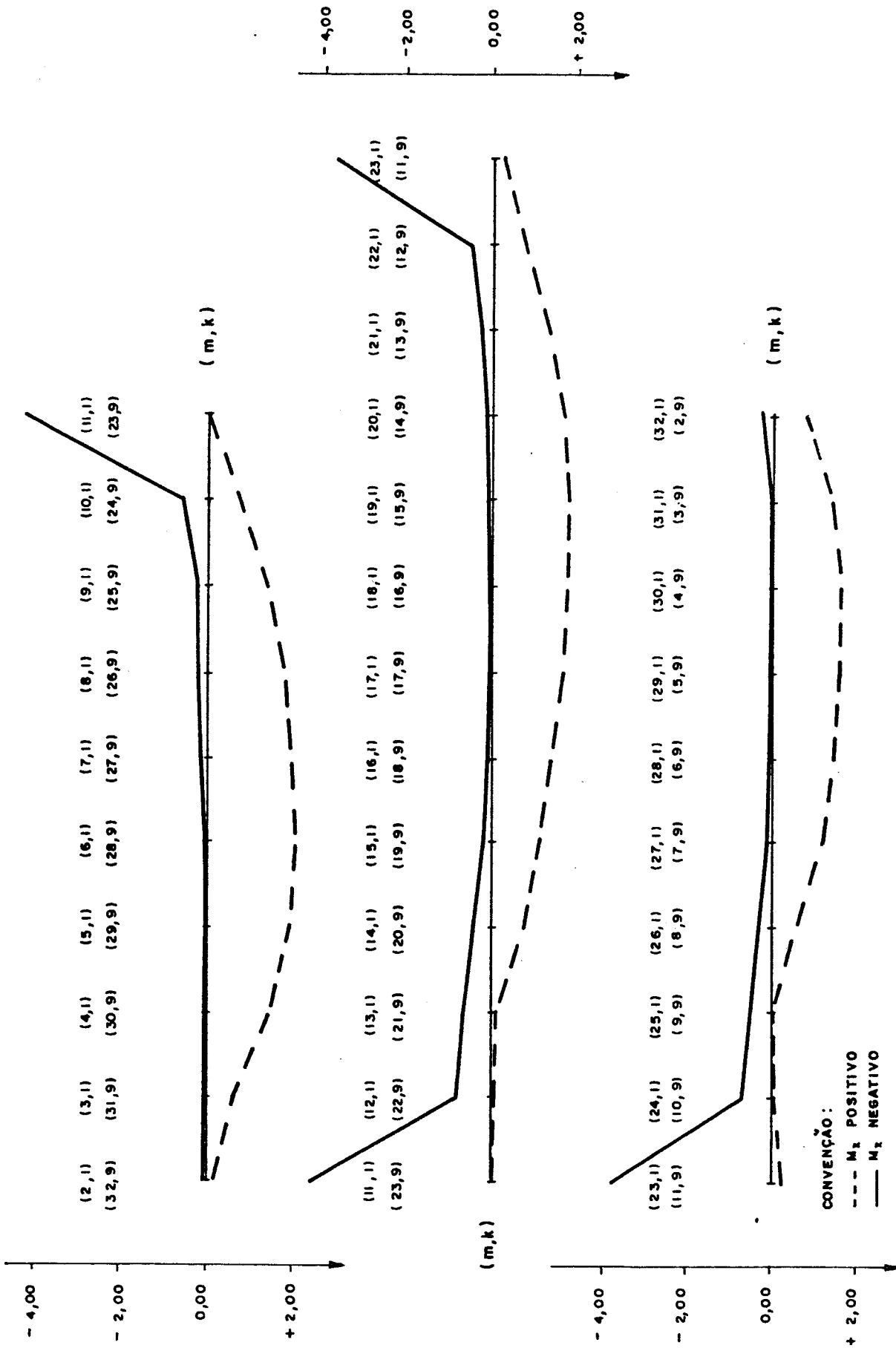


FIG. X.29 - ENVOLTÓRIA DE M_x ($\text{kN}\cdot\text{m}/\text{m}$) - BORDA LIVRE
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,00tt
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VÃOS ($\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 1:1,2:1$; $\varphi = 45^\circ$; $b/\lambda_1 = 3/2$; $\lambda_1 = 13,200\text{m}$)

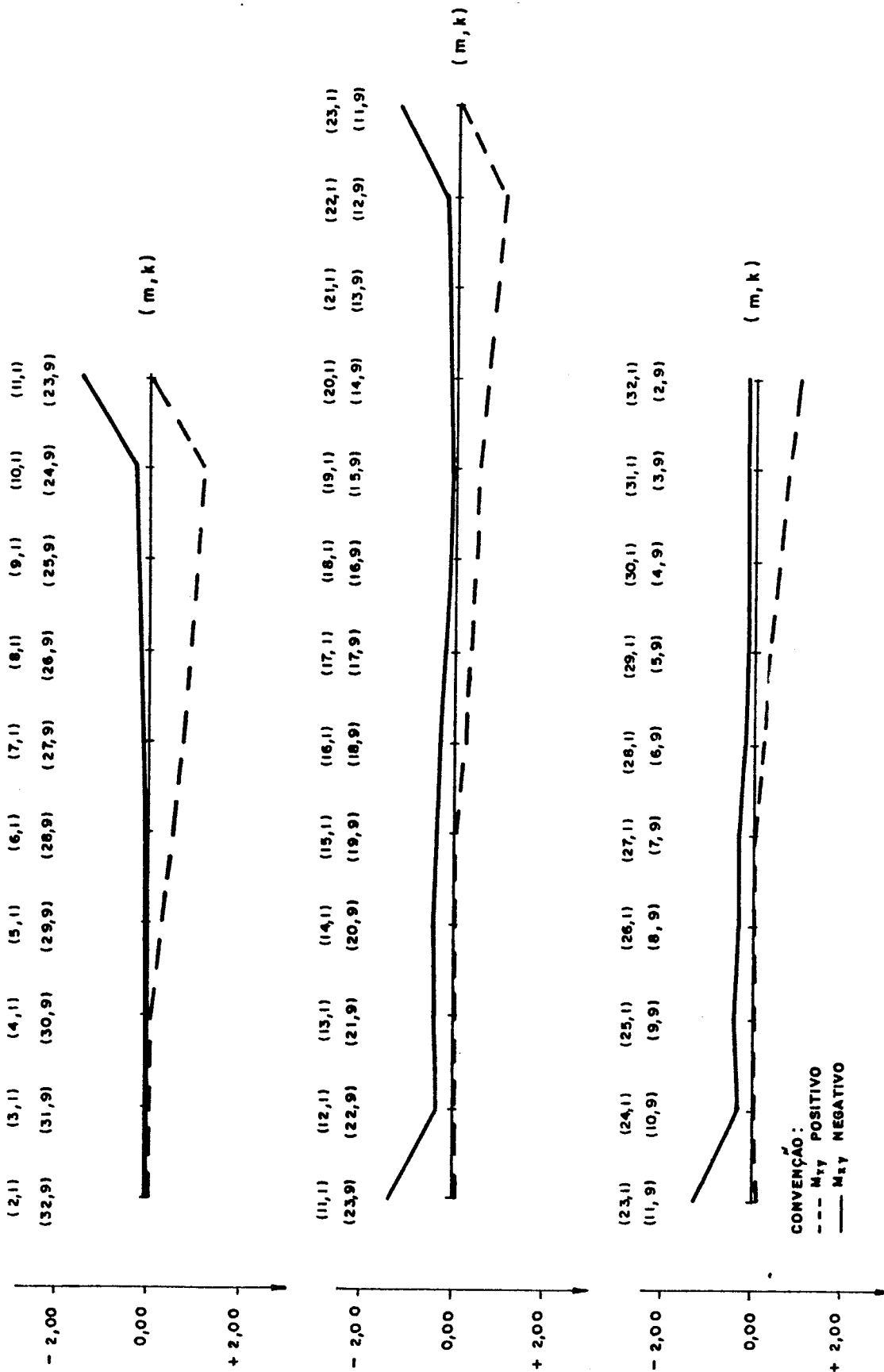


FIG.X. 30 - EN VOLTÓRIA DE M_{xy} (kf. m/m) - BORDA LIVRE
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEICULO - TIPO $P = 1,001f$
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VÃOS ($\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 1 : 2 : 1$, $\varphi = 45^\circ$, $b/\lambda_1 = 3/2$, $\lambda_1 = 13,200m$)

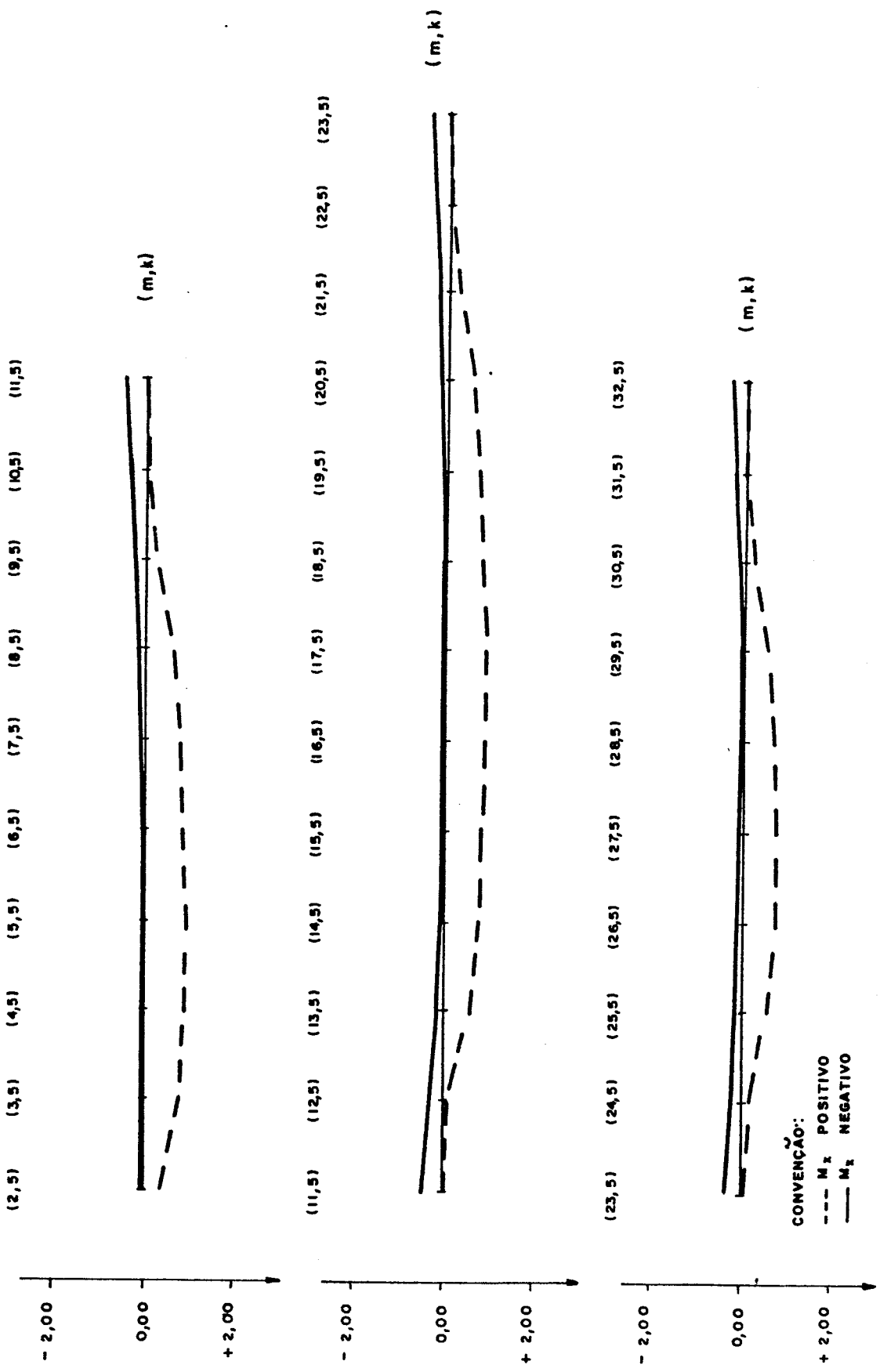


FIG. V. 31 - ENVOLVÍDIA DE M_x (tf.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,00 t†
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VÃOS (l₁:l₂:l₃ = 1:1,2:1, φ = 45°, b/l₁ = 3/2, l₁ = 13,200 m)

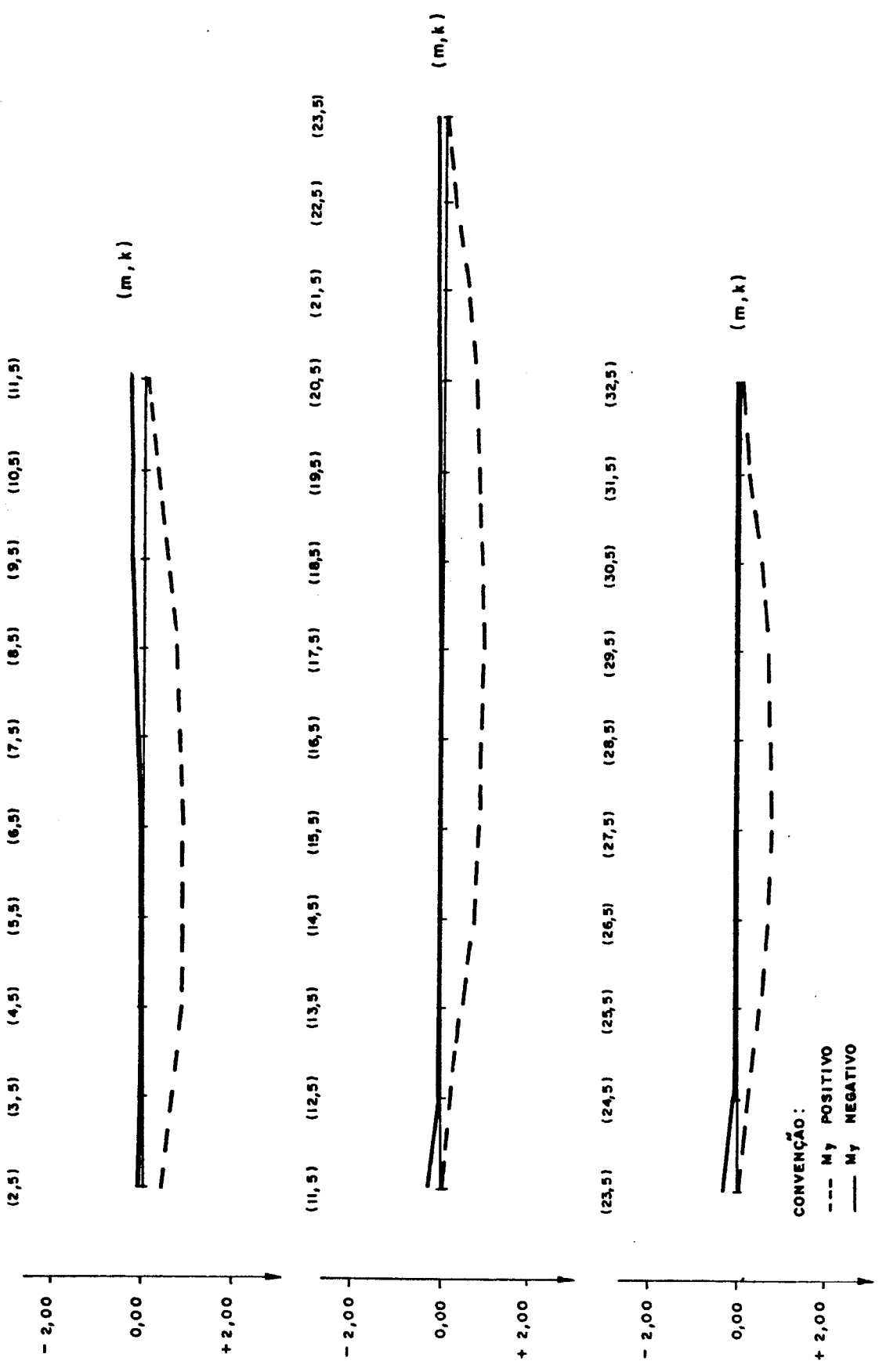


FIG. V. 32 - ENVOLTÓRIA DE M_y (tf.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,00 tf
 PLACA ESCONSA CONTINUA DE 3 VÃOS ($L_1 : L_2 : L_3 = 1 : 1,2 : 1, \varphi = 45^\circ, b/L_1 = 3/2, \lambda_1 = 13,200 \text{ m}$)

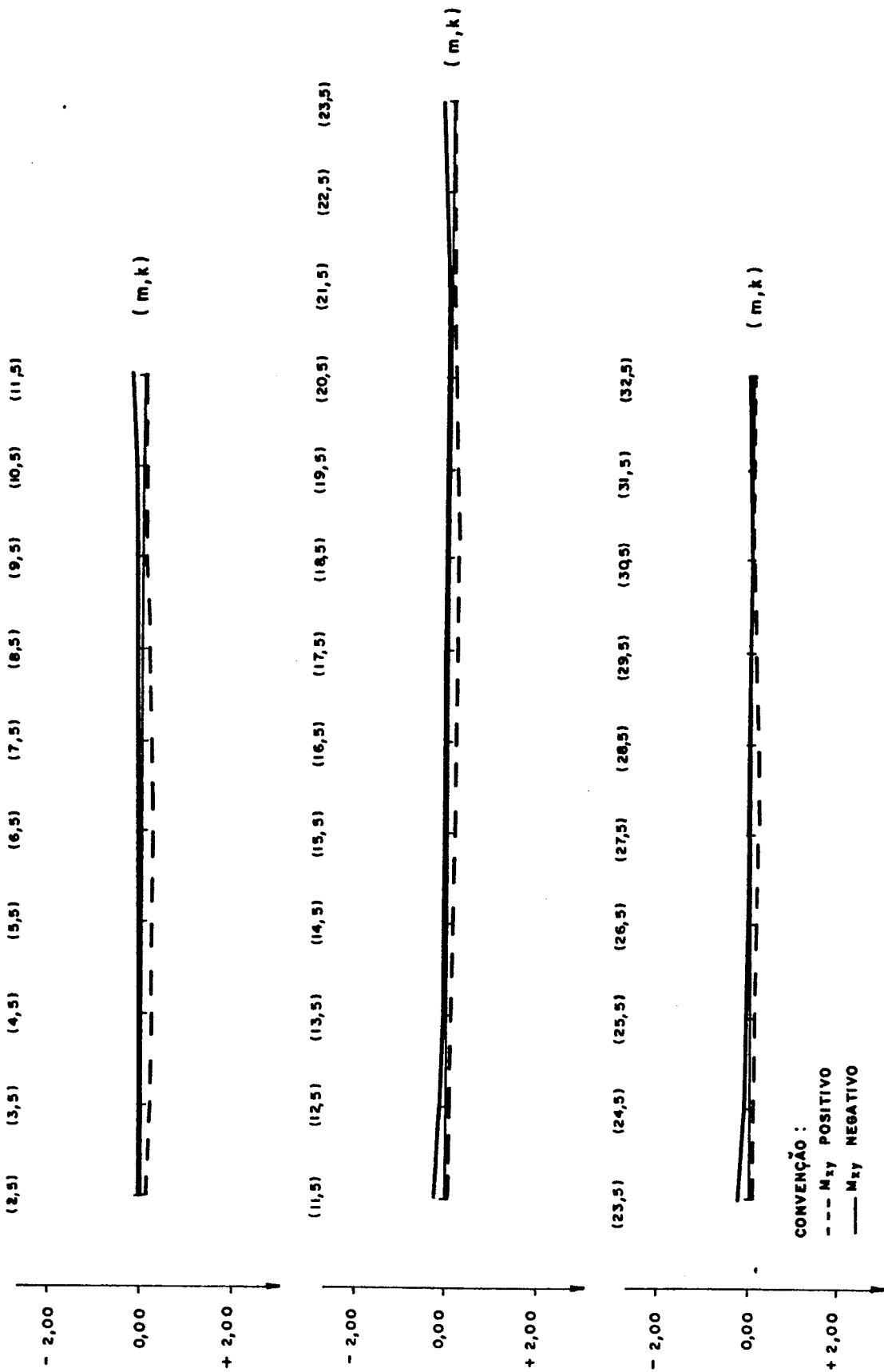


FIG. 33 - ENVOLTÓRIA DE M_{xy} (kN.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P = 1,00 tf
 PLACA ESCONSA CONTINUA DE 3 VÃOS ($\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 1 : 1,2 : 1$, $\varphi = 45^\circ$, $b/\lambda_1 = 3/2$, $\lambda_1 = 13,200m$)

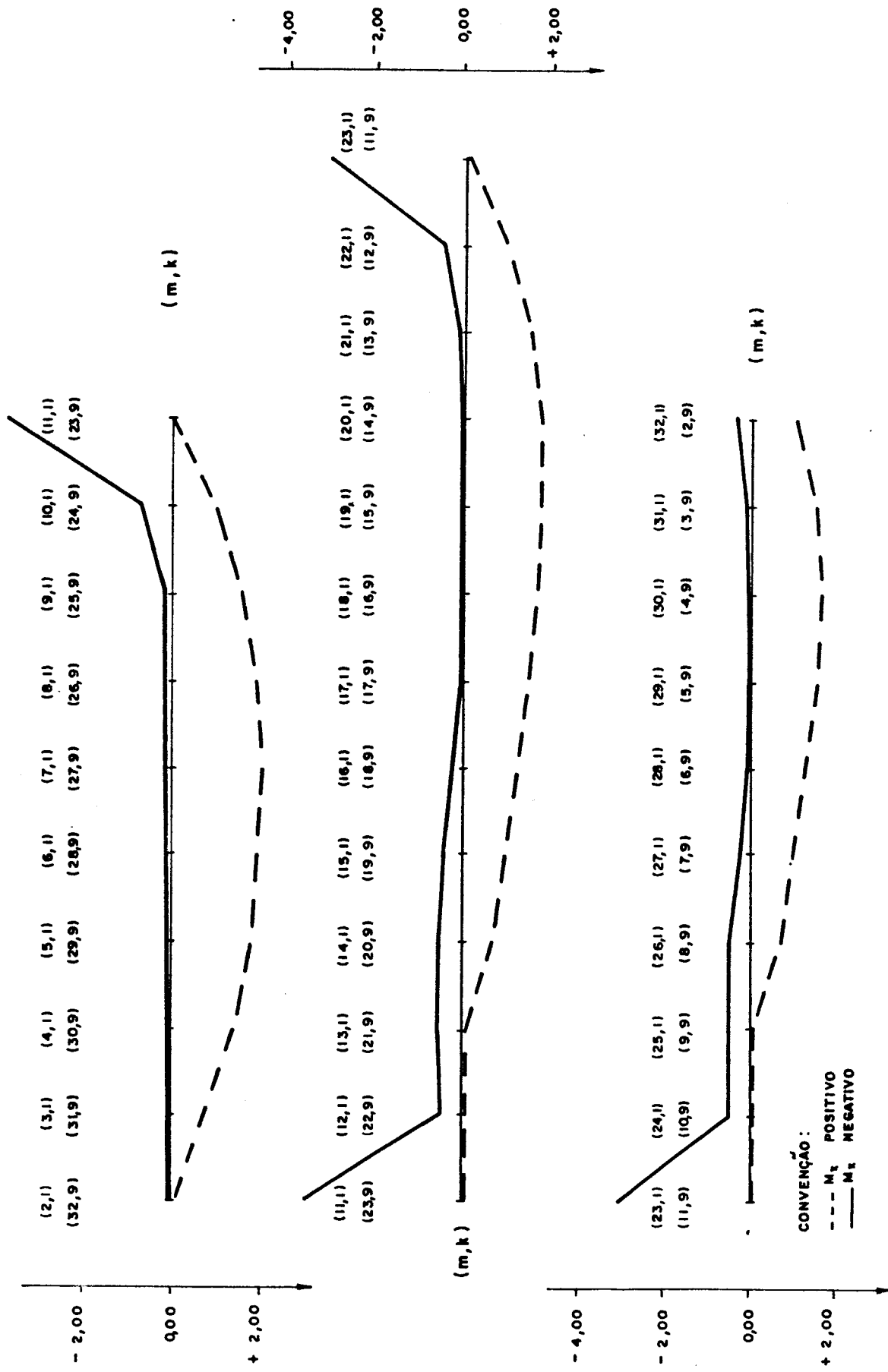


FIG.V.3.4 - ENVOLTÓRIA DE M_x (tf.m/m) - BORDA LIVRE
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,001F
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VÃOS (l₁:l₂:l₃=1:2:1, φ=60°, b/l₁=3/2, l₁=18,670 m)

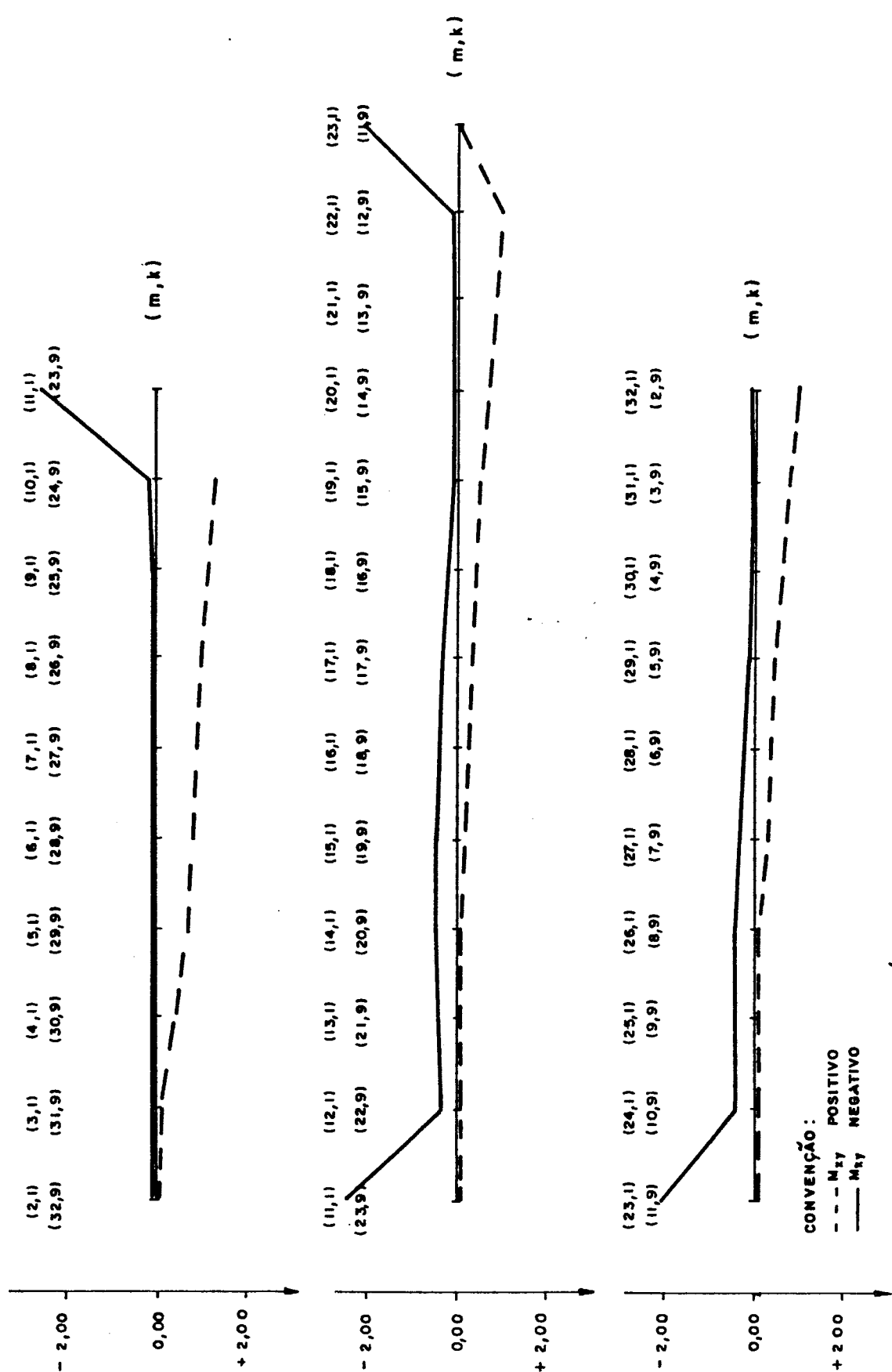


FIG. 35 - EN VOLTÓRIA DE M_{xy} (tf.m/m) - BORDA LIVRE
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P = 1,001t
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VÃOS ($L_1:L_2:L_3 = 1:1,2:1$; $\varphi = 60^\circ$; $b/L_1 = 3/2$; $l_1 = 18,670$ m)

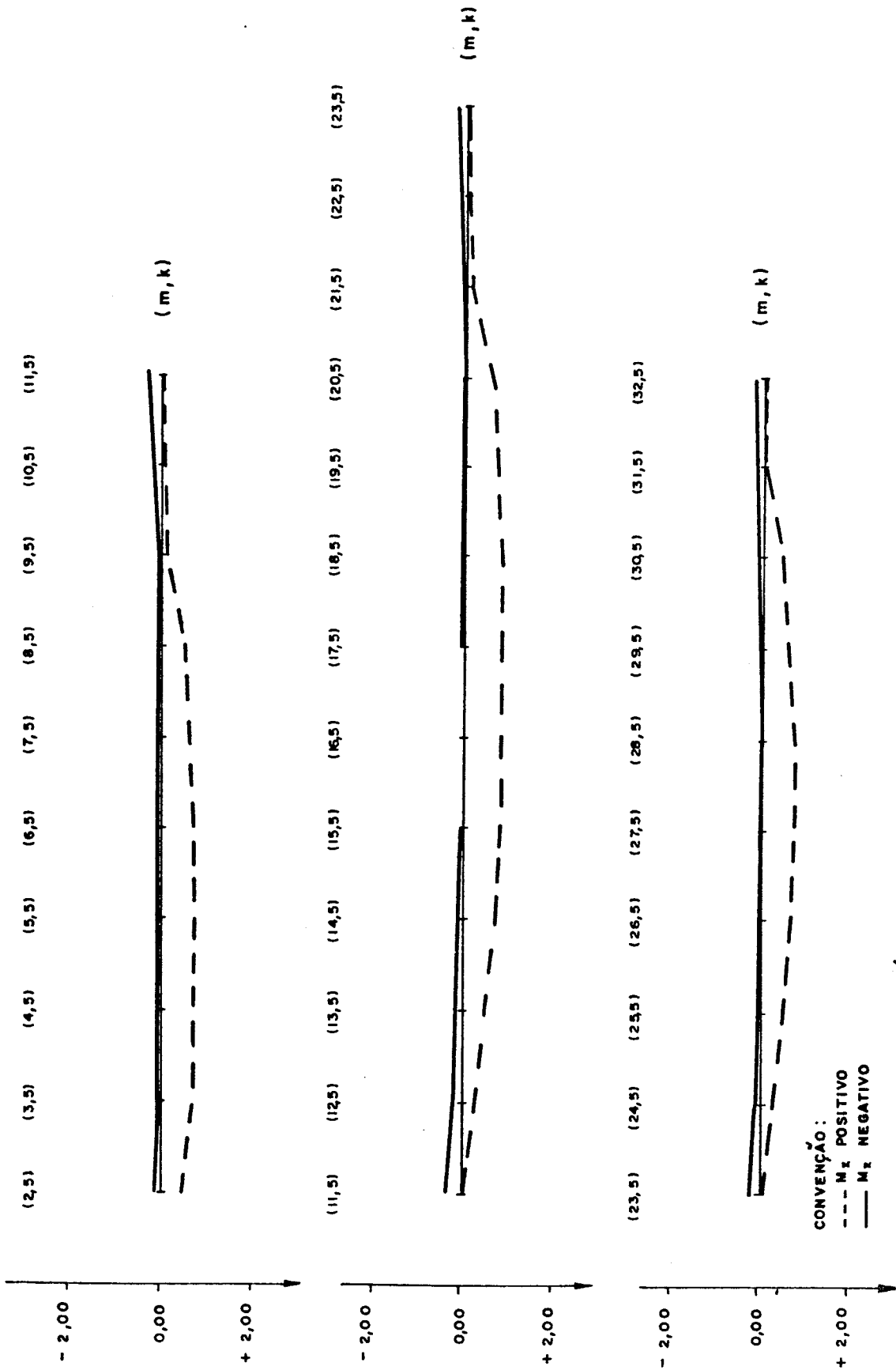


FIG. X. 36 - ENVOLTÓRIA DE M_x (kN.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P = 1,001 t
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VÃOS (L₁: L₂: L₃ = 1: 2: 1, φ = 60°, b/L₁ = 3/2, L₁ = 18,670 m)

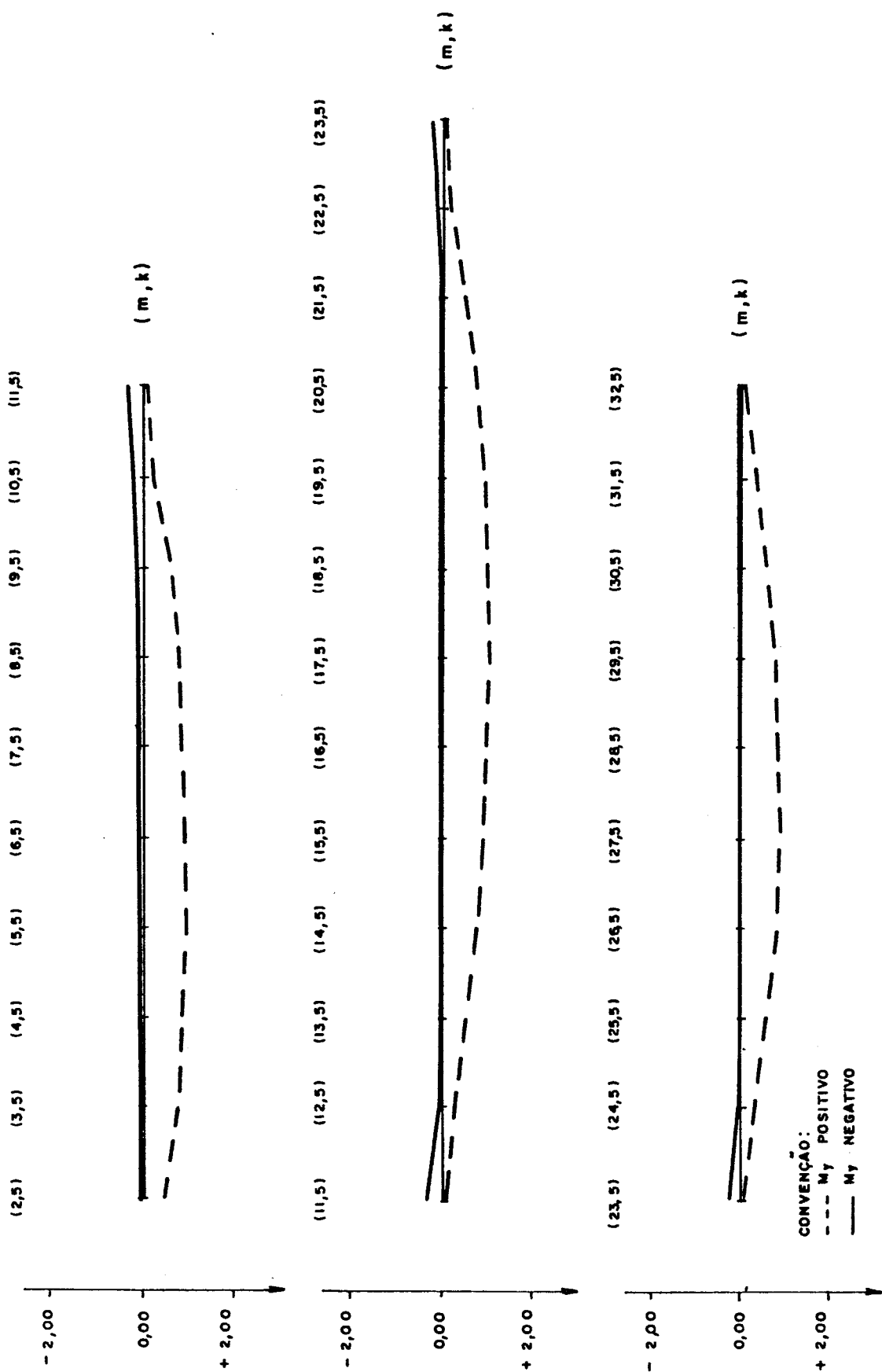


FIG. V.37 - ENVOLTÓRIA DE M_y (tf.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,00tf
 PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VÃOS ($L_1: L_2: L_3 = 1:1,2:1$, $\varphi = 60^\circ$, $b/L_1 = 3/2$, $L_1 = 18,670 \text{ m}$)

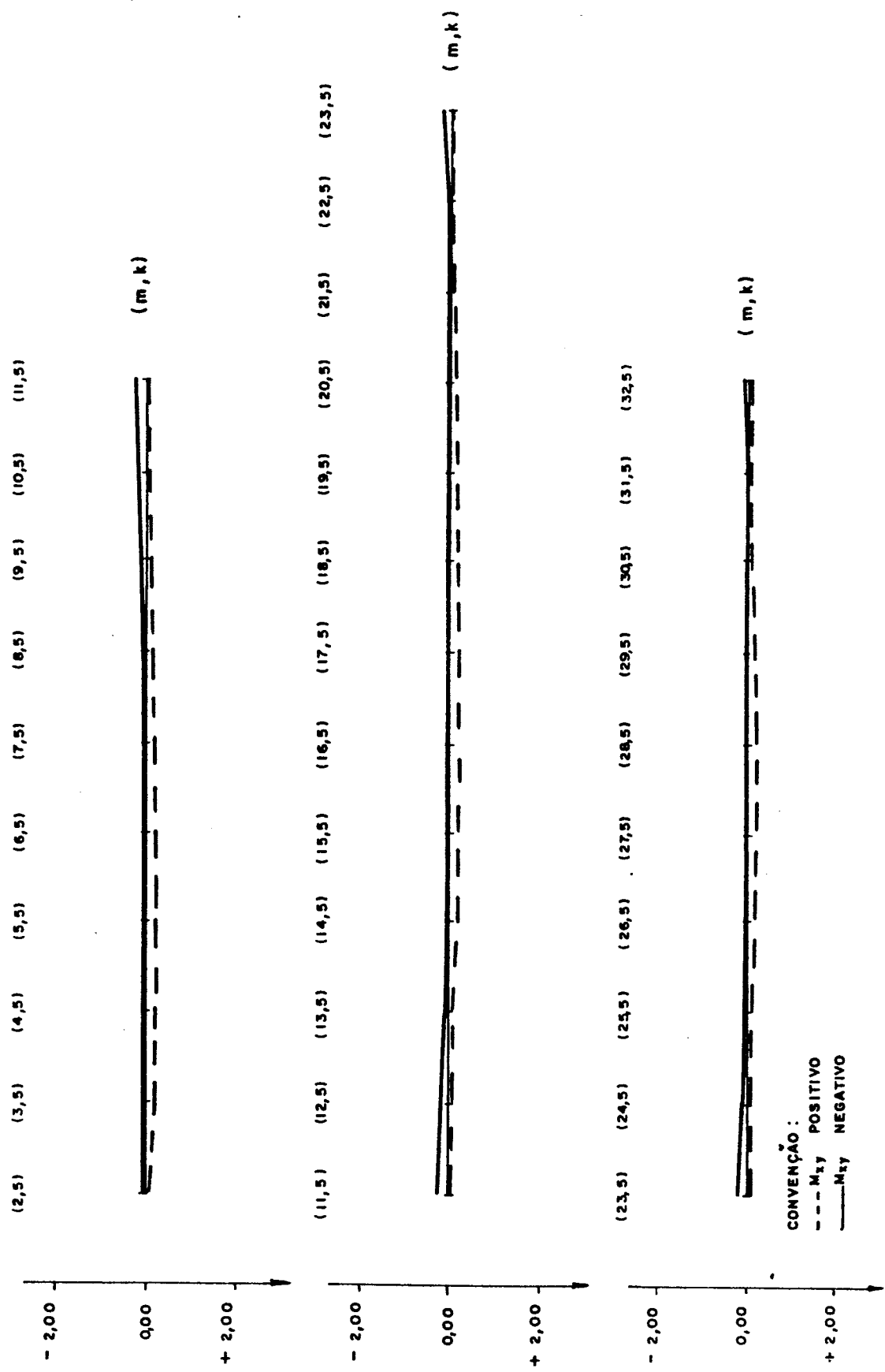


FIG. 38 - ENVOLTÓRIA DE M_{xy} (tf.m/m) - CENTRO
 CARGAS CONCENTRADAS DO VEÍCULO - TIPO P=1,00 tf
 PLACA ESCONSA CONTINUA DE 3 VÃOS ($\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3 = 1:1,2:1$, $\varphi = 60^\circ$, $b/\beta_1 = 3/2$, $\lambda_1 = 18,670$ m)

PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS				
$l_1 : l_2$	φ (GRAUS)	b/l_1	l_1 (m)	l (m)
1 : 1	30	3/2	10,780	14,000
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS FLETORES M_x				
PONTOS (m, k) IMPORTANTES		M_x (tf.m/m)	DIFERENÇA	%
(3,9)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 1,56	0,32	20,51
(5,9)	VIZOTTO	+ 1,88		
	(5,5)	+ 1,08	—	—
	(6,1)	+ 2,19	—	—
	(11,1)	- 3,87	—	—
	(11,5)	- 0,57	—	—
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS FLETORES M_y				
PONTOS (m, k) IMPORTANTES		M_y (tf.m/m)	DIFERENÇA	%
	(5,5)	+ 0,88	—	—
	(11,5)	- 0,23	—	—
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS VOLVENTES M_{xy}				
PONTOS (m, k) IMPORTANTES		M_{xy} (tf.m/m)	DIFERENÇA	%
(3,9)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 0,84	0,24	28,57
(2,9)	VIZOTTO	+ 1,08		
(5,5)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 0,18	0,03	16,67
(7,5)	VIZOTTO	+ 0,21		
(6,1)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 0,50	0,60	120,00
(10,1)	VIZOTTO	+ 1,10		
(11,1)	SCHLEICHER E WEGENER	- 0,37	0,01	2,70
(13,1)	VIZOTTO	- 0,38		
	(11,5)	- 0,21	—	—

TABELA V.4 - PONTOS (m,k) MAIS SOLICITADOS PELA CARGA MÓVEL

PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS				
$l_1 : l_2$	φ (GRAUS)	b/l_1	l_1 (m)	l (m)
1 : 1	45	3/2	13,200	14,000
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS FLETORES M_x				
PONTOS (m,k) IMPORTANTES		M_x (tf.m/m)	DIFERENÇA	%
(3,9) SCHLEICHER E WEGENER		+ 1,58	0,24	15,19
(4,9) E (5,9) VIZOTTO		+ 1,82		
(5,5)		+ 0,99	—	—
(7,1) SCHLEICHER E WEGENER		+ 2,21	0,06	2,71
(6,1) VIZOTTO		+ 2,27		
(11,1)		- 4,25	—	—
(11,5)		- 0,45	—	—
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS FLETORES M_y				
PONTOS (m,k) IMPORTANTES		M_y (tf.m/m)	DIFERENÇA	%
(5,5)		+ 0,97	—	—
(11,5)		- 0,25	—	—
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS VOLVENTES M_{xy}				
PONTOS (m,k) IMPORTANTES		M_{xy} (tf.m/m)	DIFERENÇA	%
(3,9) SCHLEICHER E WEGENER		+ 0,86	0,25	29,07
(2,9) VIZOTTO		+ 1,11		
(5,5)		+ 0,23	—	—
(7,1) SCHLEICHER E WEGENER		+ 0,83	0,50	60,24
(10,1) VIZOTTO		+ 1,33		
(11,1)		- 1,41	—	—
(11,5)		- 0,23	—	—

TABELA V.5 - PONTOS (m,k) MAIS SOLICITADOS PELA CARGA MÓVEL

PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 2 VÃOS				
$l_1 : l_2$	φ (GRAUS)	b/l_1	l_1 (m)	l (m)
1 : 1	60	3/2	18,670	14,000
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS FLETORES M_x				
PONTOS (m,k) IMPORTANTES		M_x (tf.m/m)	DIFERENÇA	%
(3,9)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 1,69	0,15	8,88
(4,9)	VIZOTTO	+ 1,84		
	(5,5)	+ 0,86	—	—
(8,1)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 2,14	0,16	7,48
(7,1)	VIZOTTO	+ 2,30		
	(11,1)	- 4,16	—	—
	(11,5)	- 0,29	—	—
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS FLETORES M_y				
PONTOS (m,k) IMPORTANTES		M_y (tf.m/m)	DIFERENÇA	%
	(3,5)	+ 1,06	—	—
	(11,5)	- 0,29	—	—
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS VOLVENTES M_{xy}				
PONTOS (m;k) IMPORTANTES		M_{xy} (tf.m/m)	DIFERENÇA	%
(3,9)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 0,84	0,19	22,62
(2,9)	VIZOTTO	+ 1,03		
	(5,5)	+ 0,23	—	—
(8,1)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 1,12	0,25	22,32
(10,1)	VIZOTTO	+ 1,37		
	(11,1)	- 2,80	—	—
	(11,5)	- 0,22	—	—

TABELA V.6 - PONTOS (m,k) MAIS SOLICITADOS PELA CARGA MÓVEL

PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VÃOS				
$l_1 : l_2 : l_3$	φ (GRAUS)	b/l_1	l_1 (m)	l (m)
1 : 1,2 : 1	30	3/2	10,780	14,000
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS FLETORES M_x				
PONTOS (m,k) IMPORTANTES		M_x (tf.m/m)	DIFERENÇA	%
(3,9) SCHLEICHER E WEGENER		+ 1,57	0,33	21,02
(5,9) VIZOTTO		+ 1,90		
	(5,5)	+ 1,09	—	—
(7,1) SCHLEICHER E WEGENER		+ 2,09	0,11	5,26
(6,1) VIZOTTO		+ 2,20		
	(11,1)	- 3,87	—	—
	(11,5)	- 0,60	—	—
	(11,9)	- 3,64	—	—
(15,9) SCHLEICHER E WEGENER		+ 1,95	0,07	3,59
(16,9) VIZOTTO		+ 2,02		
	(17,5)	+ 1,07		
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS FLETORES M_y				
PONTOS (m,k) IMPORTANTES		M_y (tf.m/m)	DIFERENÇA	%
	(5,5)	+ 0,88	—	—
	(11,5)	- 0,25	—	—
	(17,5)	+ 0,90	—	—

TABELA V. 7a - PONTOS (m,k) MAIS SOLICITADOS PELA CARGA MÓVEL

PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VÃOS				
$l_1 : l_2 : l_3$	φ (GRAUS)	b/l_1	l_1 (m)	l (m)
1 : 1,2 : 1	30	3/2	10,780	14,000
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS VOLVENTES M_{xy}				
PONTOS (m, k) IMPORTANTES		M_{xy} (tf.m/m)	DIFERENÇA	%
(3,9)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 0,85	0,24	28,24
(2,9)	VIZOTTO	+ 1,09		
(5,5)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 0,18	0,03	16,67
(7,5)	VIZOTTO	+ 0,21		
(7,1)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 0,68	0,43	63,24
(10,1)	VIZOTTO	+ 1,11		
(11,1)	SCHLEICHER E WEGENER	- 0,37	0,06	16,22
(13,1)	VIZOTTO	- 0,43		
	(11,5)	- 0,22	—	—
(11,9)	SCHLEICHER E WEGENER	- 0,35	0,04	11,43
(9,9)	VIZOTTO	- 0,39		
(15,9)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 0,61	0,41	67,21
(12,9)	VIZOTTO	+ 1,02		
	(17,5)	+ 0,18	—	—

TABELA V. 7b - PONTOS (m,k) MAIS SOLICITADOS PELA CARGA MÓVEL

PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VÃOS				
$l_1 : l_2 : l_3$	φ (GRAUS)	b/l_1	l_1 (m)	l (m)
1 : 1,2 : 1	45	3/2	13,200	14,000
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS FLETORES M_x				
PONTOS (m,k) IMPORTANTES	M_x (tf.m/m)	DIFERENÇA	%	
(3,9) SCHLEICHER E WEGENER	+ 1,59	0,23	14,47	
(4,9) VIZOTTO	+ 1,82			
(5,5)	+ 1,00	—	—	
(7,1) SCHLEICHER E WEGENER	+ 2,20	0,06	2,73	
(6,1) VIZOTTO	+ 2,26			
(11,1)	- 4,79	—	—	
(11,5)	- 0,48	—	—	
(11,9)	- 4,23	—	—	
(15,9)	+ 2,01	—	—	
(17,5)	+ 1,02	—	—	
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS FLETORES M_y				
PONTOS (m,k) IMPORTANTES	M_y (tf.m/m)	DIFERENÇA	%	
(5,5)	+ 0,98	—	—	
(11,5)	- 0,29	—	—	
(17,5)	+ 0,99	—	—	

TABELA V. 80 - PONTOS (m,k) MAIS SOLICITADOS PELA CARGA MÓVEL

PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VÃOS				
$l_1 : l_2 : l_3$	φ (GRAUS)	b/l_1	l_1 (m)	l (m)
1 : 1,2 : 1	45	3/2	13,200	14,000
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS VOLVENTES M_{xy}				
PONTOS (m,k) IMPORTANTES		M_{xy} (tf.m/m)	DIFERENÇA	%
(3,9)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 0,87	0,24	27,59
(2,9)	VIZOTTO	+ 1,11		
	(5,5)	+ 0,23	—	—
(7,1)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 0,82	0,50	60,98
(10,1)	VIZOTTO	+ 1,32		
	(11,1)	- 1,60	—	—
	(11,5)	- 0,26	—	—
	(11,9)	- 1,41	—	—
(15,9)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 0,62	0,52	83,87
(12,9)	VIZOTTO	+ 1,14		
	(17,5)	+ 0,22	—	—

TABELA X.8b - PONTOS (m,k) MAIS SOLICITADOS PELA CARGA MÓVEL

PLACA ESCONSA CONTÍNUA DE 3 VÃOS				
$l_1 : l_2 : l_3$	φ (GRAUS)	b/l_1	l_1 (m)	l (m)
1 : 1,2 : 1	60	3/2	18,670	14,000
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS FLETORES M_x				
PONTOS (m,k) IMPORTANTES	M_x (tf.m/m)	DIFERENÇA	%	
(3,9) SCHLEICHER E WEGENER	+ 1,72	0,16	9,30	
(4,9) VIZOTTO	+ 1,88			
(5,5)	+ 0,86	—	—	
(7,1)	+ 2,30	—	—	
(11,1)	- 4,16	—	—	
(11,5)	- 0,32	—	—	
(11,9)	- 3,43	—	—	
(15,9)	+ 2,04	—	—	
(17,5)	+ 0,93	—	—	
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS FLETORES M_y				
PONTOS (m,k) IMPORTANTES	M_y (tf.m/m)	DIFERENÇA	%	
(5,5)	+ 1,06	—	—	
(11,5)	- 0,36	—	—	
(17,5)	+ 1,11	—	—	

TABELA V. 90- PONTOS (m,k) MAIS SOLICITADOS PELA CARGA MÓVEL

PLACA ESCONSAS CONTÍNUA DE 3 VÃOS				
$l_1 : l_2 : l_3$	φ (GRAUS)	b/l	l_1 (m)	l (m)
1 : 1,2 : 1	60	3/2	18,670	14,000
ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS VOLVENTES M_{xy}				
PONTOS (m,k) IMPORTANTES		M_{xy} (tf.m/m)	DIFERENÇA	%
(3,9)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 0,87	0,19	21,84
(2,9)	VIZOTTO	+ 1,06		
(5,5)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 0,23	0,02	8,70
(4,5)	VIZOTTO	+ 0,25		
(7,1)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 1,01	0,36	35,64
(10,1)	VIZOTTO	+ 1,37		
	(11,1)	- 2,80	—	—
	(11,5)	- 0,25	—	—
	(11,9)	- 2,31	—	—
(15,9)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 0,58	0,54	93,10
(12,9)	VIZOTTO	+ 1,12		
(17,5)	SCHLEICHER E WEGENER	+ 0,22	0,01	4,55
(16,5)	VIZOTTO	+ 0,23		

TABELA X. 9b - PONTOS (m,k) MAIS SOLICITADOS PELA CARGA MÓVEL

CAPÍTULO VI

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os programas processadores principais que constam do Apêndice 2 (Ítem 2.1), a menos das considerações desenvolvidas neste trabalho, são explicados e comentados por Degaspere [03], inclusive com vários exemplos de aplicação. No trabalho de Savassi [12] também são explicadas e comentadas várias partes dos programas que foram posteriormente utilizadas por Degaspere.

Ao se examinar os resultados obtidos com o emprego do elemento finito T18 para a resolução de diversos problemas apresentados por Degaspere [03], verifica-se a ótima qualidade do elemento finito adotado, mesmo com redes compostas por poucos elementos. É importante salientar, para a discretização das estruturas, algumas orientações sugestivas, que servem para obtenção dos melhores resultados possíveis:

- a - que, na medida do possível, em cada ponto nodal da estrutura concorra o mesmo número de elementos finitos;
- b - que os elementos finitos sejam de forma mais regular possível;
- c - que se utilize maior número de pontos nodais (elementos finitos) nas regiões das estruturas onde se tem previsão de possíveis concentrações de tensões, principalmente onde se tem cargas concentradas aplicadas, nas regiões onde se tem mudanças bruscas de direções e condições de contorno e também no interior das estruturas onde se pretende obter maiores informações sobre os momentos a serem determinados;
- d - que a largura da faixa do sistema de equações seja a mais estreita possível, o que é conseguido com uma numeração conveniente dos pontos nodais da estrutura de modo que a maior diferença entre os números dos pontos nodais de um mesmo elemento finito seja a mínima possível;

- e - que se tire partido de eventuais simetrias e assimetrias das estruturas analisando somente parte das mesmas; com isto o número de incôgnitas nodais do sistema será menor, e devido a um menor número de operações aritméticas envolvidas os resultados serão de melhor qualidade, além de diminuir o tempo de computação;
- f - que na dúvida da qualidade ou precisão dos resultados, o mesmo problema seja resolvido com uma discretização cada vez maior da estrutura até se atingir o grau de precisão desejado.

Alguns dados acessados pelo programa "DATA" ainda não são efetivamente utilizados, como é o caso da densidade do material que compõe a estrutura e o coeficiente de dilatação térmica. Estes dados podem ser empregados oportunamente com a formulação de subrotinas adequadas para que o programa geral possa se utilizar desses recursos adicionais.

Um aspecto importante neste trabalho é a possibilidade de se processar estruturas em que se tem cargas concentradas aplicadas em quaisquer pontos dos domínios dos elementos finitos, e também a possibilidade de se ter elementos finitos com cargas uniformemente distribuídas sobre parte dos seus domínios. Estas considerações facilitam muito a análise de estruturas que tenham várias hipóteses de carregamento. As subrotinas que tratam dos dois casos de carregamento descritos anteriormente são MATWP e MATPAR, e são elucidadas ao se consultar os tópicos sobre Cargas Nodais Equivalentes do Capítulo II (tópicos II.3.2.5.2 e II.3.2.5.3).

Um problema que ocorre na análise de estruturas pelo Método dos Elementos Finitos, especialmente nos casos de estruturas discretizadas em um número razoavelmente grande de elementos finitos, é a quantidade de informações necessárias para se descrever as estruturas, seus carregamentos e vinculações em termos discretizados. Como o volume de informações é grande, é comum a ocorrência de enganos e erros com a operação de digitação. No presente trabalho este problema foi praticamente sanado com a geração automática quase total das redes de elementos finitos das placas esconsas contínuas de dois e de três vãos, só faltando as informações sobre o carregamento atuante, se este não for uniformemente distribuído por toda a estrutura, e o título do problema. Pa

ra a digitação das informações referentes a uma única estrutura abordada nesta obra, seriam necessárias várias horas de trabalho de um digitador; no entanto, com a geração automática este tempo é reduzido a segundos, e a probabilidade de se cometer algum tipo de erro é muito pequena. As idéias contidas nos programas pré-processadores GERB e GERC podem ser utilizadas como subsídios para se gerar automaticamente outros tipos de estruturas.

Para se ter uma idéia dos esforços solicitantes obtidos com diferentes discretizações de uma placa esbôsa contínua de dois vãos ($\phi = 45^\circ$) sob a ação de carga uniformemente distribuída, a estrutura foi discretizada primeiramente em uma rede de 100 elementos finitos de mesmas formas e dimensões; depois cada elemento finito foi dividido em 4, obtendo-se uma rede de 400 elementos finitos iguais em formas e dimensões; e finalmente cada elemento da última rede foi dividido em 4, obtendo-se assim uma rede de 1600 elementos finitos de mesmas formas e dimensões. Verificou-se que os esforços solicitantes para a rede de 400 elementos finitos tiveram uma pequena diferença em relação aos esforços solicitantes obtidos para a rede de 100 elementos finitos. E para a rede de 1600 elementos finitos os esforços solicitantes tiveram uma alteração insignificante em relação à rede de 400 elementos finitos. Com base nos resultados observados nestes exemplos e outros exemplos processados, as redes de elementos finitos geradas automaticamente tiveram as dimensões de seus maiores elementos restringidos às dimensões dos elementos da rede de 400 elementos finitos; e nas regiões mais discretizadas das faixas básicas, os elementos são da mesma ordem de grandeza que os elementos da rede de 1600 elementos finitos. O objetivo deste procedimento foi a obtenção dos melhores resultados possíveis neste trabalho. Variando-se a discretização das redes de elementos finitos dentro de um padrão de elementos quanto às dimensões, é evitado um número muito grande de elementos e conseqüentemente de incógnitas nodais, fazendo com que os resultados sejam bons com uma economia significativa no tempo de processamento. A maior discretização das redes de elementos finitos foi sempre nas regiões onde eram aplicadas as cargas e se observavam os resultados de interesse, que eram as regiões mais solicitadas das estruturas.

Os problemas dos "pontos de singularidade" deverão ser tratados com ferramentas mais adequadas ao assunto. Apesar de

se tentar uma solução com condições de contorno mais próximas da realidade para os "pontos de singularidade" que pertencem, simultaneamente, à borda livre e ao apoio intermediário das placas esconsas contínuas, ainda persistem os problemas. Sem dúvida alguma, os pontos que pertencem à borda livre e ao apoio intermediário simultaneamente são muito importantes para o estudo, dimensionamento e projeto de placas esconsas contínuas, e merecem uma análise mais profunda. Uma forma imediata de se contornar o problema é verificar o comportamento e os resultados para os pontos nodais das regiões próximas aos "pontos de singularidade". Ainda podem ser utilizados elementos finitos tridimensionais para discretizar os apoios que, apesar de serem representados por uma linha, tem uma largura razoável; para tanto seria necessário se utilizar um programa de elementos finitos que permitisse o uso de elementos de placas acoplados a elementos tridimensionais.

Placas esconsas contínuas sob a ação das cargas concentradas do trem-tipo rodoviário, têm como pontos (m, k) importantes para o dimensionamento, os pontos pertencentes às regiões onde se encontram os pontos (m, k) mais solicitados pelas cargas uniformemente distribuídas. Como o trem-tipo age de maneira intermitente, é possível se utilizar as superfícies de influência fornecidas por Schleicher e Wegener [13] para os pontos (m, k) mais solicitados pelas cargas distribuídas, a fim de se posicionar o veículo-tipo sobre as placas para se obter os esforços solicitantes devidos à carga móvel.

A expressão desenvolvida no Apêndice 1 pode ser usada para qualquer problema que envolva integração de funções nomiais de até duas variáveis em domínios poligonais planos genéricos.

APENDICE 1

INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES MONOMIAIS EM DOMÍNIOS POLIGONAIS PLANOS

A formulação apresentada para a integração de funções monomiais em domínios poligonais, que é empregada neste trabalho, foi desenvolvida a partir de idéias concebidas pelo Professor Eng^o Vinícius Fernando Arcaro, da Faculdade de Engenharia de Limeira - UNICAMP.

É comum em análise numérica estrutural o cálculo de integrais de funções monomiais de uma ou mais variáveis. No caso de estruturas planas (chapas e placas), ocorre a necessidade de se efetuar integrais do tipo:

$$\int_S x^m y^n dS \quad \dots\dots(1)$$

O domínio de integração S é representado pelas regiões do plano médio (x, y) da estrutura; com a formulação desenvolvida a seguir, é possível avaliar a integral (1) para quaisquer valores de m e n .

Considere-se a transformação linear T (vide figura 1), que atua sobre os parâmetros referenciados ao sistema de coordenadas (α, β) transformando-os em parâmetros referenciados ao sistema de coordenadas (x, y) .

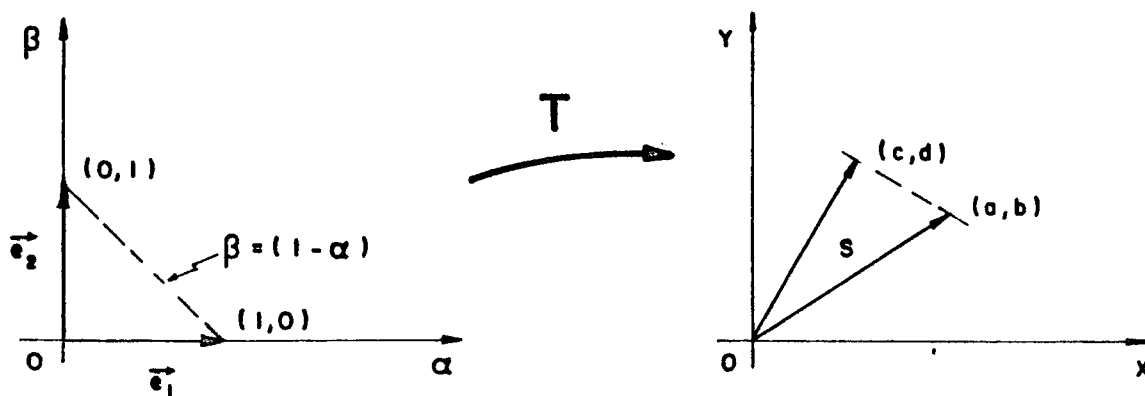


FIGURA 1

Ao se aplicar a transformação linear T aos versores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 do sistema de coordenadas (α, β) tem-se, no sistema de coordenadas (x, y) :

$$T(\vec{e}_1) = (a, b) \dots\dots(2)$$

$$T(\vec{e}_2) = (c, d)$$

Um vetor \vec{v} pode ser representado no sistema de coordenadas (α, β) por:

$$\vec{v} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 \dots\dots(3)$$

E ao se aplicar a transformação linear T sobre \vec{v} :

$$T(\vec{v}) = T(\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2) \dots\dots(4)$$

ou

$$T(\vec{v}) = \alpha T(\vec{e}_1) + \beta T(\vec{e}_2) = (x, y) \dots\dots(5)$$

De (2) em (5):

$$x = \alpha a + \beta c$$

$$y = \alpha b + \beta d \dots\dots(6)$$

A integral (1) pode ser referida ao sistema de coordenadas (α, β) fazendo-se uma mudança de coordenadas de (x, y) para (α, β) . Portanto:

$$\int_S x^m y^n dS = \int_0^1 \int_0^{(1-\alpha)} (\alpha a + \beta c)^m (\alpha b + \beta d)^n \gamma d\beta d\alpha \dots(7)$$

Sendo que γ é o Jacobiano, dado por:

$$\gamma = (ad - bc) \dots\dots(8)$$

A expressão (7) pode ser escrita como:

$$\int_S x^m y^n dS = \int_0^1 \int_0^{(1-\alpha)} \left[\sum_{i=0}^m C_m^i (\alpha a)^i (\beta c)^{m-i} \right] \left[\sum_{j=0}^n C_n^j (\alpha b)^{n-j} (\beta d)^j \right] \gamma d\beta d\alpha \dots\dots(9)$$

onde

$$C_m^i = \frac{m!}{(m-i)! i!} \dots\dots(10)$$

$$C_n^j = \frac{n!}{(n-j)! j!}$$

e

$$\left[\sum_{i=0}^m C_m^i (\alpha a)^i (\beta c)^{m-i} \right] = (\alpha a + \beta c)^m \dots\dots(11)$$

$$\left[\sum_{j=0}^n C_n^j (\alpha b)^{n-j} (\beta d)^j \right] = (\alpha b + \beta d)^n$$

Assim, operando com os termos de (9):

$$\int_S x^m y^n dS = \gamma \int_0^1 \int_0^{(1-\alpha)} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left[C_m^i C_n^j a^i b^{n-j} c^{m-i} d^j \alpha^{n+i-j} \beta^{m-i+j} \right] d\beta d\alpha \dots\dots(12)$$

ou

$$\int_S x^m y^n dS = \gamma \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left[C_m^i C_n^j a^i b^{n-j} c^{m-i} d^j \int_0^1 \int_0^{(1-\alpha)} (\alpha^{n+i-j} \beta^{m-i+j}) d\beta d\alpha \right] \dots\dots(13)$$

chega-se a:

$$\int_S x^m y^n dS = \gamma \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left[C_m^i C_n^j \frac{a^i b^{n-j} c^{m-i} d^j}{(m-i+j+1)} \right] \int_0^1 \left[\alpha^{n+i-j} (1-\alpha)^{m-i+j+1} \right] d\alpha \quad \dots\dots(14)$$

Será considerado agora somente a parte da expressão (14) referente à integral:

$$\int_0^1 \left[\alpha^{n+i-j} (1-\alpha)^{m-i+j+1} \right] d\alpha \quad \dots\dots(15)$$

com:

$$0 \leq i \leq m \quad \dots\dots(16)$$

$$0 \leq j \leq n$$

Portanto, tem-se que:

$$n + i - j = n - (j - i) \geq 0 \quad \dots\dots(17)$$

$$m - i + j + 1 = m + 1 - (i - j) \geq 1$$

Fazendo:

$$K = n + i - j \quad \dots\dots(18)$$

$$L = m - i + j + 1$$

a expressão (15) será reescrita como:

$$\int_0^1 \left[\alpha^{n+i-j} (1-\alpha)^{m-i+j+1} \right] d\alpha = \int_0^1 \left[\alpha^K (1-\alpha)^L \right] d\alpha \quad \dots\dots(19)$$

Chamando:

$$u = \alpha^K \dots\dots(20)$$

$$dv = (1-\alpha)^L d\alpha$$

e, sabendo que:

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du \dots\dots(21)$$

calcula-se, de (20):

$$v = - \frac{(1-\alpha)^{L+1}}{(L+1)} \dots\dots(22)$$

$$du = K \alpha^{(K-1)} d\alpha$$

Utilizando as expressões (20), (21) e (22) tem-se que:

$$\int_0^1 [\alpha^K (1-\alpha)^L] d\alpha = - \frac{\alpha^K (1-\alpha)^{L+1}}{(L+1)} \Big|_0^1 + \int_0^1 K \alpha^{K-1} \frac{(1-\alpha)^{L+1}}{(L+1)} d\alpha \dots\dots(23)$$

ou

$$\int_0^1 [\alpha^K (1-\alpha)^L] d\alpha = \frac{K}{(L+1)} \int_0^1 [\alpha^{K-1} (1-\alpha)^{L+1}] d\alpha \dots\dots(24)$$

Utilizando novamente a equação (21), tem-se

$$\int_0^1 [\alpha^K (1-\alpha)^L] d\alpha = \frac{K}{(L+1)} \frac{(K-1)}{(L+2)} \int_0^1 [\alpha^{K-2} (1-\alpha)^{L+2}] d\alpha \dots\dots(25)$$

Aplicando-se sucessivamente a equação (21), chega-se a:

$$\int_0^1 \left[\alpha^K (1-\alpha)^L \right] d\alpha = \frac{K}{(L+1)} \frac{(K-1)}{(L+2)} \dots \frac{1}{(L+K)} \int_0^1 (1-\alpha)^{L+K} d\alpha \dots (26)$$

mas,

$$(L+K)! = (L+K) [L + (K-1)] \dots (L+1) L! \dots (27)$$

Portanto, ao se aplicar (27) em (26):

$$\int_0^1 \left[\alpha^K (1-\alpha)^L \right] d\alpha = \frac{K!L!}{(L+K)!} \int_0^1 (1-\alpha)^{L+K} d\alpha \dots (28)$$

ou

$$\int_0^1 \left[\alpha^K (1-\alpha)^L \right] d\alpha = \frac{K!L!}{(L+K)!} \left. \frac{-(1-\alpha)^{L+K+1}}{(L+K+1)} \right|_0^1 \dots (29)$$

que resulta:

$$\int_0^1 \left[\alpha^K (1-\alpha)^L \right] d\alpha = \frac{K!L!}{(L+K+1)!} \dots (30)$$

Das equações (14), (18) e (30) tem-se que:

$$\int_S x^m y^n dS = \gamma \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left[C_m^i C_n^j \frac{a^i b^{n-j} c^{m-i} d^j}{(m-i+j+1)} \right] \frac{(n+i-j)!(m-i+j+1)!}{(m+n+2)!} \dots (31)$$

ou

$$\int_S x^m y^n dS = \frac{\gamma}{(m+n+2)!} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left[C_m^i C_n^j (m-i+j)!(n+i-j)! a^i b^{n-j} c^{m-i} d^j \right] \dots (32)$$

$$\text{ou: } \int_S x^m y^n dS = \frac{\gamma}{(m+n+2)!} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left[\frac{m!n!(m-i+j)!(n+i-j)!}{(m-i)!i!(n-j)!j!} a^i b^{n-j} c^{m-i} d^j \right] \dots(33)$$

e:

$$\int_S x^m y^n dS = \frac{\gamma m!n!}{(m+n+2)!} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left[\frac{(m-i+j)!(n+i-j)!}{(m-i)!i!(n-j)!j!} a^i b^{n-j} c^{m-i} d^j \right] \dots(34)$$

Porém, verifica-se que:

$$\frac{(m-i+j)!}{(m-i)!j!} = C_{m-i+j}^j \dots\dots(35)$$

$$\frac{(n+i-j)!}{(n-j)!i!} = C_{n+i-j}^i$$

Ao se substituir (35) em (34), chega-se finalmente a:

$$\int_S x^m y^n dS = \frac{\gamma m!n!}{(m+n+2)!} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left[C_{m-i+j}^j C_{n+i-j}^i a^i b^{n-j} c^{m-i} d^j \right] \dots\dots(36)$$

A equação (36) é utilizada para a avaliação da integral (1) conhecendo-se os expoentes m e n do monômio considerado, e as coordenadas (a, b) e (c, d) dos vértices do triângulo sobre o qual se deseja integrar; o outro vértice do triângulo é a origem 0 do sistema de coordenadas (x, y). Portanto, a área S é delimitada pelos lados do triângulo cujos vértices são os pontos (0, 0), (a, b) e (c, d). Para se utilizar os resultados obtidos, deve-se sempre percorrer os vértices do triângulo no sentido anti-horário; se os vértices do triângulo são percorridos no sentido horário, a expressão (36) tem o seu sinal trocado.

Como exemplo de aplicação, será considerada a seguinte integral:

$$\int_S xy dS \dots\dots(37)$$

Neste caso, tem-se:

$$m = n = 1$$

$$0 \leq i \leq 1 \quad \dots\dots(38)$$

$$0 \leq j \leq 1$$

Então, utilizando (38) em (36):

$$\int_S xy dS = \frac{\gamma}{24} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 C_{1-i+j}^j C_{1+i-j}^i a^i b^{1-j} c^{1-i} d^j \quad \dots\dots(39)$$

que resulta:

$$\int_S xy dS = \frac{\gamma}{24} (ad + 2ab + 2cd + bc) \quad \dots\dots(40)$$

É possível se efetuar a integral (1), considerando como domínio de integração um polígono de N vértices. A origem dos eixos de coordenadas (x, y) pode estar em qualquer posição, fora ou dentro do polígono (vide figuras 2 e 3)

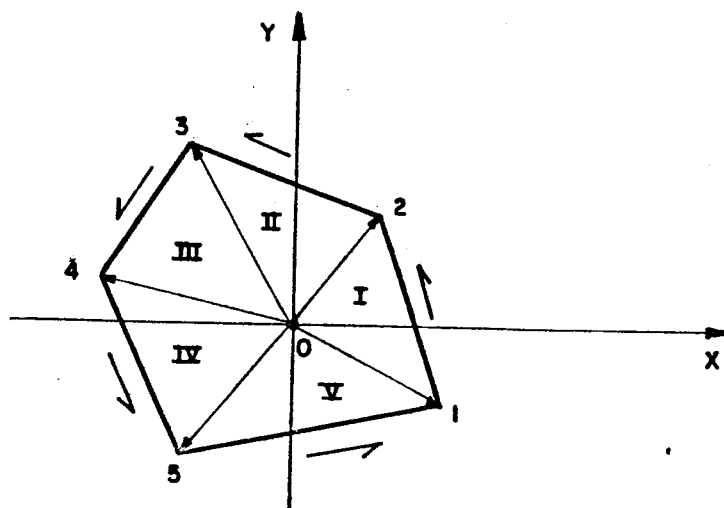


FIGURA 2

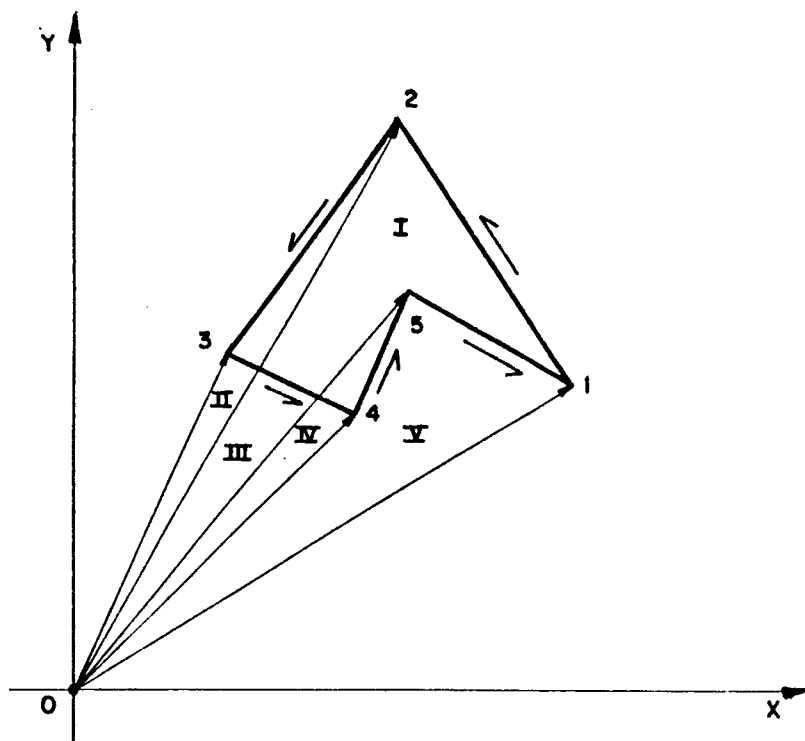


FIGURA 3

Os polígonos de N vértices podem ser subdivididos em N triângulos; sendo que cada triângulo tem como um dos vértices a origem O do sistema de coordenadas (x, y) , e os outros, são dois dos N vértices do polígono considerado. O sentido para se percorrer os N vértices do polígono é anti-horário, conforme a dedução da fórmula (36); e os N triângulos, ao serem considerados separadamente, devem ter os seus vértices percorridos no sentido em que o lado comum ao triângulo e ao polígono é percorrido (do vértice i ao vértice $i+1$).

Assim, os cinco triângulos, que compõem o polígono da figura 2, devem ter seus vértices percorridos no sentido anti-horário. O polígono da figura 3 tem como vértices do triângulo I os pontos $(0 - 1 - 2)$; do triângulo II, os pontos $(0 - 2 - 3)$; do triângulo III, os pontos $(0 - 3 - 4)$; do triângulo IV, os pontos $(0 - 4 - 5)$; e do triângulo V, os pontos $(0 - 5 - 1)$. Portanto, neste caso, os triângulos I, II e IV devem ter seus vértices percorridos no sentido anti-horário; e os triângulos III e V devem ter seus vértices percorridos no sentido horário. Ao se somar as parcelas da integral avaliada para cada triângulo, conforme a expressão (36), tem-se finalmente a integral sobre a área do polígono de N vértices.

APENDICE 2 - LISTAGENS DOS PROGRAMAS

2.1 - Programas Processadores Principais Para Resolução de Placas Delgadas, Elástico-Isótropas Submetidas à Flexão (Método dos Elementos Finitos)

C
C ***** DATA *****
C

PARAMETER MAXEL=800,MAXBC=708,MAXDIF=26,MAXEB=320,MAXNP=429,
*ILC=2574
INTEGER DEV,NAME(20)
DIMENSION DRIG(MAXEL,3),TH(MAXEL,3),KARGA(MAXEL),KTPEL(MAXEL),
*ZCAR(MAXEL,3),X(3),Y(3),L1(6),M1(6),ICDN(6),EM(1),XORD(MAXNP),
*YRD(MAXNP),CP(1),RHO(1),ALFA(1),NP(MAXEL,3),IPERM(3),ANGLE(8)
*,ICDNH(ILC),ITPEL(MAXEL),LNOBO(MAXEB,10),MAT(MAXEL),
*LNOBOD(MAXNP),NEBC(MAXBC)
DATA IPERM/2,3,1/,IENT,ISAI/1,3/,DEV/'DSK'/
ILREC1=MAXEL+MAXNP+MAXEB*11+5
MAXPD=MAXDIF
OPEN(UNIT=1,FILE='DADOS1.',STATUS='OLD',ACCESS='SEQUENTIAL',
*FORM='FORMATTED')
OPEN(UNIT=51,FILE='AILDAT',STATUS='NEW',ACCESS='DIRECT',
*FORM='UNFORMATTED',RECL=4000)

C
C-----
C

READ(IENT,5001)(NAME(I),I=1,20)
5001 FORMAT(20A4)
WRITE(ISAI,6002)(NAME(I),I=1,20)
6002 FORMAT(1H1,120('*')//1H ,17('*'),3X,20A4,3X,17('*')//
1H ,120('')
WRITE(ISAI,11)
11 FORMAT(48X,'FINITE ELEMENT DATA'//)

C
C-----
C

READ(IENT,*)NUMEL,NUMNP,NUMBC,NUMPB,NLOAD,NMAT,NELBO,ISKEW,
*NANGL,NPDCC
WRITE(ISAI,16)NUMEL,NUMNP,NUMBC,NUMPB,NLOAD
16 FORMAT(//35H NUMERO DE ELEMENTOS..... ,I8/
* 35H NUMERO DE PONTOS NODAIS..... ,I8/
* 35H NUMERO DE CONDICIOES DE CONTORNO... ,I8/
* 35H NO. DE PONTOS NO CONTORNO..... ,I8/
* 35H NUMERO DE CASOS DE CARGA..... ,I8/
WRITE(ISAI,17)NMAT,NELBO,ISKEW,NANGL
17 FORMAT(35H NUMERO DE MATERIAIS DIFERENTES.... ,I8/
* 35H NO. DE ELEMENTOS NO CONTORNO..... ,I8/
* 35H =0, LADOS SEGUNDO X/Y,SE=1 ESCONSO ,I8/
* 35H NO. DE ANGULOS P/ DEFINIR LADOS ES ,I8/
IF(NPDCC)1405,7021,1405
1405 DO 1305 IL=1,NUMNP
1305 LNOBOD(IL)=0
DO 1306 IL=1,NPDCC

C
C-----
C

READ(IENT,*)NPDC
1306 LNOBOD(NPDC)=1

C
C-----
C

7021 READ(IENT,*)(I,EM(I),CP(I),RHO(I),ALFA(I),K=1,NMAT)
WRITE(ISAI,22)(I,EM(I),CP(I),RHO(I),ALFA(I),K=1,NMAT)


```
22  FORMAT(53X,27H PROPIEDADES DOS MATERIAIS//9H MAT.NO. , 7X,  
    *15HMODULO DE YOUNG,5X,15HCOEF.DE POISSON, 6X,9HDENSIDADE,  
    *6X,14HCOEF DILATACAO//(15,E20.5,2F19.5,E22.5))  
    DO 7 K=1,NELBO
```

```
C  
C-----  
C  
7  READ(IENT,*)(LNOBO(K,J),J=1,10)  
    WRITE(ISAI,9)ISKEW  
9  FORMAT(/,1X,'ISKEW = 0---- PLACA COM LADOS SEGUNDO X/Y'/1X,'ISKEW  
    *= 1---- PLACA COM LADO ESCONSD '//1X,'ESTE PROBLEMA ISKEW=',I2,/  
    WRITE(ISAI,10)  
10  FORMAT(1H0,'INFORMACOES SOBRE CONTORNOS,NO CASO DE ESCONSIDADE  
    *E/DU CONDICOES DE CONTORNO'  
    *1H0,'ELEM. NO CONTORNO          ',20X,'ENDERECOS DOS ANGULOS'  
    *2X,'TIPOS DE PARAMETROS NODAIS'  
    */1H0,4X,'ELEMENTOS',22X,'NO 1 NO 2 NO 3',1X,'ANG 1 ANG 2 ANG  
    * 3'4X,'NO 1 NO 2 NO 3'/)  
    WRITE(ISAI,12)((LNOBO(K,J),J=1,10),K=1,NELBO)  
12  FORMAT(1X,I9,I29,3I6,2I8,3I7)  
    WRITE(ISAI,77)  
77  FORMAT(///)  
    IF(ISKEW)300,300,301  
301  DO 777 NA=1,NANGL
```

```
C  
C-----  
C  
    READ(IENT,*)ANGLE(NA)  
    ANGLE(NA)=(3.14159265358979323846/180.)*ANGLE(NA)  
    WRITE(ISAI,801)NA,ANGLE(NA)  
801  FORMAT(/,1X,'ANGLE('I2,')='F10.7,2X,'RADIANS')  
777  CONTINUE  
300  DO 6 J=1,NUMEL
```

```
C  
C-----  
C  
6  READ(IENT,*)N,(NP(N,I),I=1,3),MAT(N),ITPEL(N),KTPEL(N),KARGA(N),  
    *(ZCAR(N,L),L=1,3),(TH(N,K),K=1,3)  
    WRITE(ISAI,31)  
31  FORMAT(1H1,'DADOS SOBRE OS ELEMENTOS'//,1X,'ELEMENTO I J K  
    * MAT.TIPO ELEM.TIPO CARR.TIPO KARGA ZCAR(I) ZCAR(J) ZCAR(K)  
    * H(I) H(J) H(K)'/)  
    DO 150 N=1,NUMEL  
    JAUX=MAT(N)  
    IF(IABS(JAUX)-6)771,771,991  
771  IF(MAT(N))991,991,990  
991  MAT(N)=1  
990  DO 992 NH=1,3  
    IF(TH(N,NH))992,992,993  
992  TH(N,NH)=1.  
993  WRITE(ISAI,33)N,(NP(N,I),I=1,3),MAT(N),ITPEL(N),KTPEL(N),KARGA(N),  
    *(ZCAR(N,L),L=1,3),(TH(N,K),K=1,3)  
33  FORMAT(2X,I4,3X,3I4,5X,I2,7X,I4,7X,I4,7X,I2,2X,6(1X,F8.3))  
150  CONTINUE  
    DO 180 N=1,NUMEL  
    DO 180 L=1,3  
    M=MAT(N)  
    DRIG(N,L)=(EM(M)*TH(N,L)**3) / (12.*(1.-CP(M)**2))
```

```

180 CONTINUE
    WRITE(ISAI,35)
35  FORMAT(//,1H.25HCOORDENADAS DOS VERTICES //6H PONTO, 4X,5HX-ORD,
* 8X,5HY-ORD/1X)
    DO 720 M=1,NUMNP

```

C
C-----
C

```

    READ(IENT,*)J,XORD(J),YORD(J)
    WRITE(ISAI,38)J,XORD(J),YORD(J)
720 CONTINUE
38  FORMAT(I4,2(5X,F8.4))
    J=0
    WRITE(ISAI,45)
45  FORMAT(' ',//10X,21HCONDICOES DE CONTORNO//6H.PONTO,3X,6HTAG-W ,
*3X,7HTAG-W,X,3X,7HTAG-W,Y,3X,8HTAG-W,XX,3X,8HTAG-W,XY,3X,
*8HTAG-W,YY/1X)

```

C
C NOTA- A ORDEM EM QUE OS VALORES UNITARIOS OU NULOS DEVERAO SER DA-
C DOS A L1(I) ESTA EXPOSTA NO FORMATO 45.AS INCOGNITAS FINAIS SERAO
C OBTIDAS NESSA ORDEM.
C TERAO TAG=1 OS VALORES DE (W),(W,X),(W,Y),(W,XX),(W,XY),(W,YY)
C POR EXEMPLO - ZERO OU NAO ZERO, NO CONTORNO
C SE O VALOR FOR INCOGNITO A TAG SERA TAG=0
C L1(I)=0 SIGNIFICA QUE O VALOR F E' INCOGNITO NO CONTORNO
C PORTANTO NAO HA CONDICAO DE CONTORNO A IMPOR
C ENTAO - A L1(I)=0 DEVE CORRESPONDER SEMPRE ICON(I)=0
C A L1(I)=1 PODE CORRESPONDER ICON(I)=1
C ICON(I)=0
C SE ICON(I)=0 SIGNIFICA QUE O VALOR CONHECIDO NO CONTORNO E' NULO
C SE ICON(I)=1 SIGNIFICA QUE O VALOR CONHECIDO NO CONTORNO NAO E' NULO
C
C DO 250 N=1,NUMPB

C
C M INDICA NUMERO DO NO' SITUADO NO CONTORNO
C
C-----
C

```

    READ(IENT,*)M,(L1(I),I=1,6),(ICON(I),I=1,6)
    DO 249 I=1,6
    K=6*(M-1)+I
249  ICONH(K)=ICON(I)
    WRITE(ISAI,52)M,(L1(I),I=1,6),(ICON(I),I=1,6)
    DO 250 I=1,6
    IF(L1(I))250,250,242
242  M1(I)=6*(M-1)+I
    J=J+1
    NEBC(J)=M1(I)
250  CONTINUE
52  FORMAT(1X,I4,6X,I2,7X,I2,8X,I2,8X,I2,9X,I2,9X,I2,7X,I2,7X,I2,7X,
*12,7X,I2,7X,I2,7X,I2)
    NEQBC=J
    NEQ=6*NUMNP
    IF (NUMEL-MAXEL)260,260,1000
260  IF (NUMNP-MAXNP)270,270,1010
270  IF (NEQBC-MAXBC)280,280,1020
280  IF (NELBO-MAXEB)740,740,1030
C

```

```
C DETERMINACAO DA LARGURA DE BANDA
C
740 K=0
    DO 320 N=1,NUMEL
    DO 320 I=1,2
    K1=NP(N,I)
    IF(K1)320,320,281
281 I9=I+1
    DO 750 J=I9,3
    K2=NP(N,J)
    IF(K2)750,750,282
282 M=IABS(K2-K1)
    IF(M-K)283,283,284
284 K=M
283 IF(M-MAXPD)750,750,285
285 WRITE(ISAI,760)MAXPD,N
    IFLAG=1
750 CONTINUE
320 CONTINUE
    IBNDW=6*K+6
    WRITE(ISAI,62)IBNDW
62 FORMAT(///,24H.LARGURA DA SEMI-BANDA =,I5//)
760 FORMAT(39H MAXIMA DIFERENCA ENTRE PONTOS NODAIS =,I5,
*31H FOI ULTRAPASSADA NO ELEMENTO =,I5/)
    DO 770 N=1,NUMEL
    DO 380 I=1,3
    J=IPERM(I)
    K1=NP(N,I)
    X(I)=XORD(K1)
380 Y(I)=YORD(K1)
    A2=X(3)-X(1)
    A3=X(2)-X(1)
    B2=Y(3)-Y(1)
    B3=Y(2)-Y(1)
    AREA=A3*B2-B3*A2
    IF(AREA)1050,1050,770
770 CONTINUE
C
C SE IFLAG=0 NAO HA' ERROS NOS DADOS
C SE IFLAG=1 HA' DADOS ERRADOS.VIDE MENSAGEM CORRESPONDENTE
C
    IF(IFLAG)337,420,337
337 WRITE(ISAI,338)
338 FORMAT(1X,'VERIFICAR!!! HA DADOS ERRADOS')
    WRITE(ISAI,6666)IFLAG
    CALL EXIT
420 CONTINUE
    WRITE(ISAI,820)
820 FORMAT(1H0,'PROGRAMA UM ESTA EXECUTADO - NAO HA DADOS ERRADOS'///)
    WRITE(51'1)NUMEL,NUMNP,NELBO,ISKEW,IBNDW,CP,ANGLE,LNOBO
    WRITE(51'2)NP
    WRITE(51'3)MAT,ITPEL,NANGL,NEQBC,NEBC
    WRITE(51'4)LNOBOD,ICONH
    WRITE(51'5)NEQ,XORD,YORD,KTPEL
    WRITE(51'6)NLOAD,EM,RHO,ALFA,TH
    WRITE(51'7)KARGA,ORIG
    WRITE(51'8)ZCAR
    CALL EXIT
```

```
1000 WRITE(ISAI,1001)
1001 FORMAT(40H MAXIMO NUMERO DE ELEMENTOS ULTRAPASSADO)
      IFLAG=1
      GO TO 260
1010 WRITE(ISAI,1011)
1011 FORMAT(44H MAXIMO NUMERO DE PONTOS NODAIS ULTRAPASSADO)
      IFLAG=1
      GO TO 270
1020 WRITE(ISAI,1021)
1021 FORMAT(52H MAXIMO NUMERO DE CONDIC0ES DE CONTORNO ULTRAPASSADO)
      IFLAG=1
      GO TO 280
1030 WRITE(ISAI,1031)
1031 FORMAT(1X,'MAXIMO NUMERO DE ELEMENTOS NO CONTORNO ULTRAPASSADO')
      IFLAG=1
      GO TO 740
1050 WRITE(ISAI,1051)N
1051 FORMAT(41H TRIANGULO COM AREA NEGATIVA,ELEMENTO = ,I5)
      IFLAG=1
      GO TO 770
6666 FORMAT(1H0,'ERROS NOS DADOS - EXECUCAO INTERROMPIDA,IFLAG= 'I6)
      END
```

```
C
C ***** PROG2 *****
C
```

```
C CALCULO DAS MATRIZES DE RIGIDEZ E DAS CARGAS NODAIS EQUIVALENTES
```

```
C
C PARAMETER MAXEL=800,MAXBC=700,MAXPD=26,MAXEB=320,MAXNP=429
C INTEGER CFAU1(6,11),CFAU2(6,10)
C REAL NI
C DIMENSION IXAU1(6,11),IXAU2(6,10),IYAU1(6,11),IYAU2(6,10),SAUX
C 1(21),ZCAR(MAXEL,3),KTPEL(MAXEL),KARGA(MAXEL),IKTVET(MAXEL),X
C 2(3),Y(3),D(3),XLC(6),YLC(6),F(171),FQ(21,21),T(21,21),RHO(1),
C 3SK(18,21),H(3,18),G(21,18),SENO(3),COSO(3),PRS(28),KCF(28)
C DIMENSION MAT(MAXEL),TH(MAXEL,3),XORD(MAXNP),YORD(MAXNP),EM(1)
C 1,CP(1),ALFA(1),NP(MAXEL,3),IPERM(3),NEBC(MAXBC),WP(21),ITPEL
C 2(MAXEL),LNODO(MAXEB,10),ANGLE(8),S18(18),VIN(28),PCAR(3),KR
C 3(28),KS(28),DRIG(MAXEL,3),KE(3,28),CF(18,21),IEX(18,21),
C 4IEY(18,21)
C EQUIVALENCE (FQ(1,1),T(1,1),F(1))
C ILREC1=MAXEL+MAXNP+MAXEB*11+5
C OPEN(UNIT=7,FILE='DADOS2.',STATUS='OLD',ACCESS='SEQUENTIAL',
C 1FORM='FORMATTED')
C OPEN(UNIT=8,FILE='TEGR1',STATUS='NEW',ACCESS='DIRECT',
C 1FORM='UNFORMATTED',RECL=28)
C OPEN(UNIT=9,FILE='TEGR2',STATUS='NEW',ACCESS='DIRECT',
C 1FORM='UNFORMATTED',RECL=84)
C OPEN(UNIT=10,FILE='CANDE',STATUS='NEW',ACCESS='DIRECT',
C 1FORM='UNFORMATTED',RECL=18)
C OPEN(UNIT=11,FILE='RIGID',STATUS='NEW',ACCESS='DIRECT',
C 1FORM='UNFORMATTED',RECL=171)
C OPEN(UNIT=51,FILE='AILDAT',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
```

```
1FORM='UNFORMATTED',RECL=4000)
READ(51'1)NUMEL,NUMNP,NELBO,ISKEW,IBNDW,CP,ANGLE,LNOBO
READ(51'2)NP
READ(51'3)MAT,ITPEL,NANGL,NEQBC,NEBC
READ(51'5)NEQ,XORD,YORD,KTPEL
READ(51'6)NLOAD,EM,RHO,ALFA,TH
READ(51'7)KARGA,DRIG
READ(51'8)ZCAR
KRKS=6
KK=28
KC=21
IPERM(1)=2
IPERM(2)=3
IPERM(3)=1
CFAU1(1,1)=1
CFAU1(1,2)=1
CFAU1(2,2)=1
CFAU1(1,3)=1
CFAU1(3,3)=1
CFAU1(1,4)=1
CFAU1(2,4)=2
CFAU1(4,4)=2
CFAU1(1,5)=1
CFAU1(2,5)=1
CFAU1(3,5)=1
CFAU1(5,5)=1
CFAU1(1,6)=1
CFAU1(3,6)=2
CFAU1(6,6)=2
CFAU1(1,7)=1
CFAU1(2,7)=3
CFAU1(4,7)=6
CFAU1(1,8)=1
CFAU1(2,8)=2
CFAU1(3,8)=1
CFAU1(4,8)=2
CFAU1(5,8)=2
CFAU1(1,9)=1
CFAU1(2,9)=1
CFAU1(3,9)=2
CFAU1(5,9)=2
CFAU1(6,9)=2
CFAU1(1,10)=1
CFAU1(3,10)=3
CFAU1(6,10)=6
CFAU1(1,11)=1
CFAU1(2,11)=4
CFAU1(4,11)=12
CFAU2(1,1)=1
CFAU2(2,1)=3
CFAU2(3,1)=1
CFAU2(4,1)=6
CFAU2(5,1)=3
CFAU2(1,2)=1
CFAU2(2,2)=2
CFAU2(3,2)=2
CFAU2(4,2)=2
CFAU2(5,2)=4
```

CFAU2(6,2)=2
CFAU2(1,3)=1
CFAU2(2,3)=1
CFAU2(3,3)=3
CFAU2(5,3)=3
CFAU2(6,3)=6
CFAU2(1,4)=1
CFAU2(3,4)=4
CFAU2(6,4)=12
CFAU2(1,5)=1
CFAU2(2,5)=5
CFAU2(4,5)=20
CFAU2(1,6)=1
CFAU2(2,6)=4
CFAU2(3,6)=1
CFAU2(4,6)=12
CFAU2(5,6)=4
CFAU2(1,7)=1
CFAU2(2,7)=3
CFAU2(3,7)=2
CFAU2(4,7)=6
CFAU2(5,7)=6
CFAU2(6,7)=2
CFAU2(1,8)=1
CFAU2(2,8)=2
CFAU2(3,8)=3
CFAU2(4,8)=2
CFAU2(5,8)=6
CFAU2(6,8)=6
CFAU2(1,9)=1
CFAU2(2,9)=1
CFAU2(3,9)=4
CFAU2(5,9)=4
CFAU2(6,9)=12
CFAU2(1,10)=1
CFAU2(3,10)=5
CFAU2(6,10)=20
IXAU1(1,2)=1
IXAU1(1,4)=2
IXAU1(2,4)=1
IXAU1(1,5)=1
IXAU1(3,5)=1
IXAU1(1,7)=3
IXAU1(2,7)=2
IXAU1(4,7)=1
IXAU1(1,8)=2
IXAU1(2,8)=1
IXAU1(3,8)=2
IXAU1(5,8)=1
IXAU1(1,9)=1
IXAU1(3,9)=1
IXAU1(6,9)=1
IXAU1(1,11)=4
IXAU1(2,11)=3
IXAU1(4,11)=2
IXAU2(1,1)=3
IXAU2(2,1)=2
IXAU2(3,1)=3

IXAU2(4,1)=1
IXAU2(5,1)=2
IXAU2(1,2)=2
IXAU2(2,2)=1
IXAU2(3,2)=2
IXAU2(5,2)=1
IXAU2(6,2)=2
IXAU2(1,3)=1
IXAU2(3,3)=1
IXAU2(6,3)=1
IXAU2(1,5)=5
IXAU2(2,5)=4
IXAU2(4,5)=3
IXAU2(1,6)=4
IXAU2(2,6)=3
IXAU2(3,6)=4
IXAU2(4,6)=2
IXAU2(5,6)=3
IXAU2(1,7)=3
IXAU2(2,7)=2
IXAU2(3,7)=3
IXAU2(4,7)=1
IXAU2(5,7)=2
IXAU2(6,7)=3
IXAU2(1,8)=2
IXAU2(2,8)=1
IXAU2(3,8)=2
IXAU2(5,8)=1
IXAU2(6,8)=2
IXAU2(1,9)=1
IXAU2(3,9)=1
IXAU2(6,9)=1
IYAU1(1,3)=1
IYAU1(1,5)=1
IYAU1(2,5)=1
IYAU1(1,6)=2
IYAU1(3,6)=1
IYAU1(1,8)=1
IYAU1(2,8)=1
IYAU1(4,8)=1
IYAU1(1,9)=2
IYAU1(2,9)=2
IYAU1(3,9)=1
IYAU1(5,9)=1
IYAU1(1,10)=3
IYAU1(3,10)=2
IYAU1(6,10)=1
IYAU2(1,1)=1
IYAU2(2,1)=1
IYAU2(4,1)=1
IYAU2(1,2)=2
IYAU2(2,2)=2
IYAU2(3,2)=1
IYAU2(4,2)=2
IYAU2(5,2)=1
IYAU2(1,3)=3
IYAU2(2,3)=3
IYAU2(3,3)=2

IYAU2(5,3)=2
IYAU2(6,3)=1
IYAU2(1,4)=4
IYAU2(3,4)=3
IYAU2(6,4)=2
IYAU2(1,6)=1
IYAU2(2,6)=1
IYAU2(4,6)=1
IYAU2(1,7)=2
IYAU2(2,7)=2
IYAU2(3,7)=1
IYAU2(4,7)=2
IYAU2(5,7)=1
IYAU2(1,8)=3
IYAU2(2,8)=3
IYAU2(3,8)=2
IYAU2(4,8)=3
IYAU2(5,8)=2
IYAU2(6,8)=1
IYAU2(1,9)=4
IYAU2(2,9)=4
IYAU2(3,9)=3
IYAU2(5,9)=3
IYAU2(6,9)=2
IYAU2(1,10)=5
IYAU2(3,10)=4
IYAU2(6,10)=3
KR(2)=1
KR(4)=2
KR(5)=1
KR(7)=3
KR(8)=2
KR(9)=1
KR(11)=4
KR(12)=3
KR(13)=2
KR(14)=1
KR(16)=5
KR(17)=4
KR(18)=3
KR(19)=2
KR(20)=1
KR(22)=6
KR(23)=5
KR(24)=4
KR(25)=3
KR(26)=2
KR(27)=1
KS(3)=1
KS(5)=1
KS(6)=2
KS(8)=1
KS(9)=2
KS(10)=3
KS(12)=1
KS(13)=2
KS(14)=3
KS(15)=4


```
KS(17)=1
KS(18)=2
KS(19)=3
KS(20)=4
KS(21)=5
KS(23)=1
KS(24)=2
KS(25)=3
KS(26)=4
KS(27)=5
KS(28)=6
DO 1981 I=1,6
DO 1981 J=1,21
I6=I+6
I12=I+12
IF(J-11)1982,1982,1983
1982 CF(I,J)=CFAU1(I,J)
      IEX(I,J)=IXAU1(I,J)
      IEY(I,J)=IYAU1(I,J)
      CF(I6,J)=CFAU1(I,J)
      IEX(I6,J)=IXAU1(I,J)
      IEY(I6,J)=IYAU1(I,J)
      CF(I12,J)=CFAU1(I,J)
      IEX(I12,J)=IXAU1(I,J)
      IEY(I12,J)=IYAU1(I,J)
      GO TO 1981
1983 L=J-11
      CF(I,J)=CFAU2(I,L)
      IEX(I,J)=IXAU2(I,L)
      IEY(I,J)=IYAU2(I,L)
      CF(I6,J)=CFAU2(I,L)
      IEX(I6,J)=IXAU2(I,L)
      IEY(I6,J)=IYAU2(I,L)
      CF(I12,J)=CFAU2(I,L)
      IEX(I12,J)=IXAU2(I,L)
      IEY(I12,J)=IYAU2(I,L)
1981 CONTINUE
C
C OS VALORES DE CONHE(I) SERAO GERADOS NO PROGRAMA PROG3, QUANDO
C FOREM IMPOSTAS AS CONDICÕES DE CONTORNO. NELE ESTARAO CONTIDOS
C OS VALORES DAS DIAGONAIS AMPLIADAS POR 1*10**18
C
DO 200 I=1,KRKS
NN=(I+1)*(I+2)/2
L=I
IL=I
C
CALL COEF(KCF,L,NN)
C
CALL EXPS(KE,IL)
C
WRITE(8'I')(KCF(J),J=1,NN)
WRITE(9'I')((KE(K,J),J=1,NN),K=1,3)
200 CONTINUE
IKT=0
DO 10 N=1,NUMEL
IF(ITPEL(N)-N)11,50,11
11 IF(KTPEL(N)-N)10,50,10
```

```

50   IKT=IKT+1
      IKTRET(N)=IKT
      DO 20 K=1,3
      K1=NP(N,K)
      D(K)=DRIG(N,K)
      PCAR(K)=ZCAR(N,K)
      X(K)=XORD(K1)
      Y(K)=YORD(K1)
20   CONTINUE
C    PARA H=CTE., DD=D(I),I=1,3
C    DD=D(1)
      MW=MAT(N)
      NI=CP(MW)
C
      CALL COLOC(X,Y,X0,Y0,XLC,YLC,IPERM)
C
      AREA2=0.
      DO 100 I=1,3
      J=IPERM(I)
      K=IPERM(J)
100  AREA2=AREA2+XLC(I)*(YLC(J)-YLC(K))
C
      CALL MATFT(T,X,Y,XLC,YLC,SEND,COSO,CF,IEX,IEY,IPERM)
C
      IEL=21
C
      CALL GJRI(T,IEL)
C
      CALL MATRH(X,Y,SEND,COSO,H,IPERM)
C
      CALL POLIN(XLC,YLC,AREA2,D,PRS,KK,KR,KS)
C
      IF(KARGA(N))12,30,39
39   IF(KARGA(N)-1)29,29,51
C
51   CALL MATPAR(X0,Y0,VIN)
C
      GO TO 5112
30   DO 31 I=1,18
31   S18(I)=0.
      GO TO 28
C
C-----
C
12   READ(7,*)P,XP,YP
C
      CALL MATWP(P,XP,YP,X0,Y0,WP)
C
      DO 121 I=1,KC
      SAUX(I)=0.
      DO 121 IL=1,KC
      SAUX(I)=SAUX(I)+T(IL,I)*WP(IL)
121  CONTINUE
      GO TO 122
C
29   CALL POLIN(XLC,YLC,AREA2,PCAR,VIN,KC,KR,KS)
C
5112 DO 32 J=1,KC

```

```

SAUX(J)=0.
DO 32 IP=1,KC
SAUX(J)=SAUX(J)+T(IP,J)*VIN(IP)
32 CONTINUE
122 DO 322 I=1,18
S18(I)=0.
DO 321 K=1,3
S18(I)=S18(I)+H(K,I)*SAUX(K+18)
321 CONTINUE
S18(I)=S18(I)+SAUX(I)
322 CONTINUE
28 WRITE(10'IKT')(S18(I),I=1,18)
DO 320 I=1,21
DO 320 J=1,18
G(I,J)=T(I,J)
DO 320 K=1,3
PROD=T(I,K+18)*H(K,J)
IF(PROD)120,320,120
120 G(I,J)=G(I,J)+PROD
320 CONTINUE
C
CALL MATRG(PRS,FQ,NI)
C
DO 210 I=1,18
DO 210 J=1,21
SK(I,J)=0.
DO 210 K=1,21
210 SK(I,J)=SK(I,J)+G(K,I)*FQ(K,J)
IJ=0
DO 420 I=1,18
DO 420 J=1,18
IF(I-J)410,410,420
410 IJ=IJ+1
F(IJ)=0.
DO 430 K=1,21
430 F(IJ)=F(IJ)+SK(I,K)*G(K,J)
420 CONTINUE
WRITE(11'IKT')(F(IM),IM=1,171)
10 CONTINUE
WRITE(51'9)IKTVET
CALL EXIT
END

```

```

C
C ***** PROG3 *****
C
C FORMACAO DO SISTEMA GERAL DE EQUACOES LINEARES
C
PARAMETER MAXEL=800,MAXBC=708,MAXPD=26,MAXEB=320,MAXNP=429,
1ILC=2574,ILARG=162,NDIM=13203,ILEQBL=50,ILPBL=8,LIB=100
REAL NI
DIMENSION NP(MAXEL,3),NEBC(MAXBC),CONHE(ILC),ICONH(ILC),ITPEL

```

```
1(MAXEL),FL(18,18),RECUP(171),PSI(18,18),IKTVET(MAXEL),CP(1),  
2S(NDIM),NEL(LIB),NE(LIB,LIB),NEB(LIB),IND(LIB),LI(6),ANGLE(8)  
3,LNOBD(MAXEB,10),MAT(MAXEL),LNOBOD(MAXNP)
```

```
ILB=LIB
```

```
ILREC1=MAXEL+MAXNP+MAXEB*11+5
```

```
OPEN(UNIT=11,FILE='RIGID',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',  
1FORM='UNFORMATTED',RECL=171)
```

```
OPEN(UNIT=13,FILE='COEFS',STATUS='NEW',ACCESS='DIRECT',  
1FORM='UNFORMATTED',RECL=ILARG)
```

```
OPEN(UNIT=51,FILE='AILDAT',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',  
1FORM='UNFORMATTED',RECL=4000)
```

```
READ(51'1)NUMEL,NUMNP,NELBO,ISKEW,IBNDW,CP,ANGLE,LNOBD
```

```
READ(51'2)NP
```

```
READ(51'3)MAT,ITPEL,NANGL,NEQBC,NEBC
```

```
READ(51'4)LNOBOD,ICONH
```

```
READ(51'9)IKTVET
```

C
C
C
C
C
C
C
C

```
NNOS - NUMERO DE NOS DO ELEMENTO
```

```
NVARN - NUMERO DE VARIAVEIS POR NO DO ELEMENTO
```

```
NDIMS - NUMERO DE POSICOES DE MEMORIA CENTRAL DISPONIVEL PARA  
ALOJAR OS COEFICIENTES DE CADA UM DOS BLOCOS DE 'EQUACDES'
```

```
ISAI=23
```

```
NVARN=6
```

```
NNOS=3
```

```
NDIMS=NDIM
```

```
MM=IBNDW
```

C
C
C
C
C
C
C
C

```
NPBL - NUMERO DE PONTOS NODAIS DA ESTRUTURA CORRESPONDENTE  
A CADA BLOCO
```

```
NEQBL - NUMERO DE EQUACOES QUE CADA BLOCO PODERA COMPORTAR
```

```
NB - NUMERO DE BLOCOS
```

```
NEQBL=NDIMS/MM
```

```
NPBL=NEQBL/NVARN
```

```
MM1=MM+1
```

```
MM2=MM+MM
```

```
MM6=NVARN*MM
```

```
NB=1+(NUMNP-1)/NPBL
```

```
DO 120 I=1,NB
```

```
NEB(I)=0
```

```
DO 120 N=1,ILB
```

```
120 NE(N,I)=0
```

```
DO 140 N=1,NUMEL
```

```
DO 130 I=1,NB
```

```
130 IND(I)=0
```

```
DO 140 I=1,NNOS
```

```
K=NP(N,I)
```

```
IF(K)140,140,131
```

```
131 M=1+(K-1)/NPBL
```

```
IF(IND(M))140,132,140
```

```
132 NEB(M)=NEB(M)+1
```

```
L=NEB(M)
```

```
IF(L-ILB)1200,1200,1300
```

```
1200 NE(L,M)=N
      IND(M)=1
140  CONTINUE
      NENT=0
      DO 400 M=1,NB
      LL=NEB(M)
      DO 999 NA=1,ILB
999  NEL(NA)=NE(NA,M)
C
C  N1 - NUMERO DO PRIMEIRO PONTO NODAL DE CADA BLOCO
C
      N1=1+(M-1)*NPBL
C
C  N2 - NUMERO DO ULTIMO PONTO NODAL DE CADA BLOCO
C
      N2=N1+NPBL-1
      IF(N2-NUMNP)335,335,333
333  N2=NUMNP
335  NPTB=N2-N1+1
C
C  NEQB - NUMERO EFETIVO DE EQUACOES DO BLOCO QUE ESTIVER
C  SENDO FORMADO - ESTA VARIABEL PODERA SER MENOR DO QUE NEQBL
C
      NEQB=NVARN*NPTB
C
C  NE1 - NUMERO DA PRIMEIRA EQUACAO DE CADA BLOCO
C
      NE1=NVARN*(N1-1)+1
C
C  NE2 - NUMERO DA ULTIMA EQUACAO DE CADA BLOCO
C
      NE2=NVARN*N2
      N=MM*NEQB
      DO 180 I=1,N
180  S(I)=0.
      DO 820 NV=1,LL
      N=NEL(NV)
      NR=ITPEL(N)
      IKT=IKTVET(NR)
      READ(11'IKT')(RECUP(IN),IN=1,171)
C
C  RECUPERACAO DA MATRIZ FL(18,18)
C
      IJ=0
      DO 99 I=1,18
      DO 99 J=1,18
      IF(I-J)320,320,210
320  IJ=IJ+1
      FL(I,J)=RECUP(IJ)
      GO TO 99
210  FL(I,J)=FL(J,I)
99  CONTINUE
      MW=MAT(N)
      NI=CP(MW)
      LINHA=0
      DO 912 IA=1,NELBO
C
C  CONSULTA LNOBO(NELBO,1) PARA VERIFICAR SE ELEMENTO N TEM NO' PARA
```

```
C      IMPOSICAO DE CONDICAOES DE CONTORNO. SE TIVER, SELECIONA LINHA QUE
C      CORRESPONDE A N.
C
      IF(LNOBO(IA,1)-N)912,911,912
911    LINHA=IA
      GO TO 913
912    CONTINUE
913    IF(LINHA)909,909,914
914    IF(ISKEW)916,916,915
C
915    CALL TSKEW(ANGLE,PSI,LINHA,LNOBO,NI,LNOBOD,MAXEB,MAXNP)
C
      CALL PREPS(FL,PSI)
C
916    DO 630 I=8,10
      IF(LNOBO(LINHA,I))650,630,650
630    CONTINUE
      GO TO 909
C
650    CALL TFREE(PSI,NI,LINHA,LNOBO,MAXEB)
C
      CALL PREPS(FL,PSI)
C
909    DO 820 J=1,3
      L=NP(N,J)
      IF(L-N1)820,221,221
221    IF(L-N2)222,222,820
C
C      NC - NUMERO DA COLUNA DO SISTEMA GERAL DE EQUACOES
C      QUE SERVE DE BASE PARA O ENDERECAMENTO DOS COEFICIENTES
C      DA MATRIZ DE RIGIDEZ
C
222    NC=MM6*(L-N1)+1
      JJ=NVARN*(J-1)+1
      DO 810 I=1,NNOS
      K=NP(N,I)
      IF(K)810,810,223
223    IF(K-L)224,224,810
224    LI(1)=NC+NVARN*(L-K)
      DO 2222 IJ=2,NVARN
2222    LI(IJ)=LI(1)+(IJ-1)*MM
      II=NVARN*(I-1)+1
      DO 2224 IJ=1,NVARN
      DO 2224 IK=1,IJ
      LI=LI(IJ)+IK-1
      IJK=II+IJ-1K
      JJI=JJ+IJ-1
2224    S(LI)=S(LI)+FL(IJK,JJI)
      IF(K-L)225,810,810
225    NVZ=NVARN-1
      NVAR1=NVARN
      DO 2225 IJ=1,NVZ
      NVAR1=NVAR1-1
      DO 2225 IK=1,IJ
      LI=LI(NVAR1)-IK
      INK=II+NVAR1+IK-1
      JNK=JJ+NVAR1-1
2225    S(LI)=S(LI)+FL(INK,JNK)
```

```
810 CONTINUE
820 CONTINUE
    DO 360 I=1,NEQBC
        N=NEBC(I)
        NC=N-NE1+1
        IF(NC)300,300,301
301 IF(NC-NEQB)302,302,300
302 L=MM*(NC-1)+1
    IF(ICONH(N))370,370,375
C
C VARIAVEL CORRESPONDENTE (NO CONTORNO) E' NULA
C
370 S(L)=1.
    GO TO 20
C
C VARIAVEL CORRESPONDENTE (NO CONTORNO) NAO E' NULA
C
375 S(L)=S(L)*10.**18
    CONHE(N)=S(L)
    GO TO 360
C
C ZERAR OS DE MAIS ELEMENTOS DA COLUNA DE S(L)
C
20 DO 280 IW=2,MM
    L=L+1
280 S(L)=0.
300 IF(ICONH(N))111,111,360
111 NCIN=NC+1
    IF(NCMIN-1)444,445,445
444 NCMIN=1
445 NCMAX=NC+MM-1
    IF(NCMAX-NEQB)577,577,578
578 NCMAX=NEQB
577 IF(NCMAX-NCMIN)360,361,361
361 LL=MM1*NCMIN-MM2-NC
    L=LL
C
C ZERAR OS DE MAIS ELEMENTOS DA LINHA DE S(L)
C
    DO 350 J=NCMIN,NCMAX
        L=L+MM1
350 S(L)=0.
360 CONTINUE
    L1=1
    L2=MM
    DO 380 N=1,NEQB
        NENT=NENT+1
        WRITE(13,NENT)(S(I),I=L1,L2)
        L1=L1+MM
380 L2=L2+MM
400 CONTINUE
    WRITE(51,10)CONHE
    GO TO 1400
1300 WRITE(1SAI,1333)L
1333 FORMAT(1HO,'HOUE GERACAO DE ENDERECO MAIOR DO QUE O PREVISTO'//
11HO,10X,'ENDERECO GERADO IGUAL A ',I5)
1400 CALL EXIT
    END
```

C
C ***** PROGA *****
C

PARAMETER MAXEL=800,MAXBC=708,MAXPD=26,MAXEB=320,MAXNP=429,
1ILC=2574
REAL NI
DIMENSION ILTHM(MAXNP),LITHM(MAXNP),S18(18),SAUX(18),ALD(6),
1KTPEL(MAXEL),IKTVET(MAXEL),NP(MAXEL,3),CONHE(ILC),STRS(ILC),
2NEBC(MAXBC),LNOBO(MAXEB,10),ANGLE(8),MAT(MAXEL),TH(MAXEL,3),
3XORD(MAXNP),YORD(MAXNP),EM(1),CP(1),RHO(1),ALFA(1),IPERM(3),
4DE(MAXNP),PR(MAXNP),LNOBOD(MAXNP),PSI(18,18),ITPEL(MAXEL)
ILREC1=MAXEL+MAXNP+MAXEB*11+5
OPEN(UNIT=2,FILE='DADOS3.',STATUS='OLD',ACCESS='SEQUENTIAL',
1FORM='FORMATTED')
OPEN(UNIT=10,FILE='CANOE',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
1FORM='UNFORMATTED',RECL=18)
OPEN(UNIT=51,FILE='AILDAT',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
1FORM='UNFORMATTED',RECL=4000)
READ(51'1)NUMEL,NUMNP,NELBO,ISKEW,IBNDW,CP,ANGLE,LNOBO
READ(51'2)NP
READ(51'3)MAT,ITPEL,NANGL,NEQBC,NEBC
READ(51'4)LNOBOD
READ(51'5)NEQ,XORD,YORD,KTPEL
READ(51'6)NLOAD,EM,RHO,ALFA,TH
READ(51'7)IKTVET
READ(51'10)CONHE
IENT=2
ISAI=5
IPERM(1)=2
IPERM(2)=3
IPERM(3)=1

C
C -----
C

READ(IENT,*)NPLD

C
C MONTAGEM DO VETOR CARGA NODAL EQUIVALENTE - GLOBAL
C

DO 6 N=1,NUMEL
NR=KTPEL(N)
IKT=IKTVET(NR)
READ(10'IKT)(S18(K),K=1,18)
NAUX=N
MW=MAT(N)
NI=CP(MW)
LINHA=0
DO 900 IA=1,NELBO
IF(LNOBO(IA,1)-N)900,910,900
910 LINHA=IA
GO TO 930
900 CONTINUE
930 IF(LINHA)950,950,940
940 IF(ISKEW)960,960,970

C
970 CALL TSKEW(ANGLE,PSI,LINHA,LNOBO,NI,LNOBOD,MAXEB,MAXNP)

C
DO 800 IG=1,18
SAUX(IG)=0.


```
      DO 800 IH=1,18
800    SAUX(IG)=SAUX(IG)+PSI(IH,IG)*S18(IH)
      DO 810 L=1,18
810    S18(L)=SAUX(L)
860    DO 980 I=8,10
      IF(LNOBO(LINHA,I))990,980,990
980    CONTINUE
      GO TO 950
C
990    CALL TFREE(PSI,NI,LINHA,LNOBO,MAXEB)
C
      DO 850 IG=1,18
      SAUX(IG)=0.
      DO 850 IH=1,18
850    SAUX(IG)=SAUX(IG)+PSI(IH,IG)*S18(IH)
      DO 860 L=1,18
860    S18(L)=SAUX(L)
850    CONTINUE
      DO 6 I=1,3
      K=NP(N,I)
      DO 6 J=1,6
      IE=6*(I-1)+J
      IG=6*(K-1)+J
      STRS(IG)=STRS(IG)+S18(IE)
6    CONTINUE
      IF(NPLD)50,30,50
50    DO 170 L=1,NPLD
C
C    LEITURA DAS CARGAS APLICADAS DIRETAMENTE NOS NO'S
C    ESTAS CARGAS (PONTUAIS) SAO DIRETAMENTE APLICADAS EM RELACAO
C    AOS EIXOS T/N DESDE QUE ISKEW=1
C
-----
C
      READ(IENT,*)N,(ALD(NL),NL=1,6)
      K=6*(N-1)
      DO 170 NL=1,6
      KI=K+NL
170    STRS(KI)=STRS(KI)+ALD(NL)
30    IF(ISKEW)40,60,40
60    WRITE(ISAI,33)
33    FORMAT(1H1,'CARGAS APLICADAS'//1X,'PONTO'5X,'CARGA W'7X,'CARGA W
1,X',5X,'CARGA W,Y'5X,'CARGA W,XX'4X,'CARGA W,XY'4X,'CARGA W,YY
1'//)
      GO TO 179
40    WRITE(ISAI,34)
34    FORMAT(1H1,'CARGAS APLICADAS'//1X,'PONTO'5X,'CARGA W'7X,'CARGA W
1,T'5X,'CARGA W,N'5X,'CARGA W,TT'4X,'CARGA W,TN'4X,'CARGA W,NN'//)
179    DO 180 N=1,NUMNP
      K=6*(N-1)+1
      K5=K+5
180    WRITE(ISAI,38)N,(STRS(KL),KL=K,K5)
38    FORMAT(I4,3X,6E14.4)
30    DO 51 I=1,NEQBC
      N=NEBC(I)
51    STRS(N)=STRS(N)*CONHE(N)
C
```

CALL THMED(EM,TH,CP,PR,DE,NUMNP,NUMEL,NP,MAT,MAXEL,MAXNP,
1ILTHM,LITHM)

C

WRITE(51'11)DE,PR,STRS
CALL EXIT
END

C
C
C
C
C
C

***** SOLVE *****

SOLUCAO DO GRANDE SISTEMA - PROCESSO DE GAUSS

PARAMETER MAXEL=800,MAXBC=708,MAXPD=26,MAXEB=320,MAXNP=429,
*ILC=2574,LIC=1287,ILARG=162,LIORD=13203
DIMENSION W(ILC),M(MAXNP,3),SMOM(LIC),ANGULO(MAXNP),RE(ILC),CP(1)
*,ANGLE(8),LNOBOD(MAXEB,10),DE(MAXNP),PR(MAXNP),FA(ILARG),A(LIORD),
*MAT(MAXEL),LNOBOD(MAXNP),STRS(ILC),ND(ILARG),XA(ILARG),IPERM(3),
*ALT(1),XORD(MAXNP),YORD(MAXNP),NP(MAXEL,3),KTPEL(MAXEL),IKTVET
*(MAXEL),ITPEL(MAXEL)

ILREC1=MAXEL+MAXNP+MAXEB*11+5
OPEN(UNIT=10,FILE='CANOE',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
*FORM='UNFORMATTED',RECL=18)
OPEN(UNIT=11,FILE='RIGID',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
*FORM='UNFORMATTED',RECL=171)
OPEN(UNIT=12,FILE='REDUZ',STATUS='NEW',ACCESS='DIRECT',
*FORM='UNFORMATTED',RECL=ILARG)
OPEN(UNIT=13,FILE='COEFS',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
*FORM='UNFORMATTED',RECL=ILARG)
OPEN(UNIT=51,FILE='AILDAT',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
*FORM='UNFORMATTED',RECL=4000)

READ(51'1)NUMEL,NUMNP,NELBO,ISKEW,IBNDW,CP,ANGLE,LNOBOD
READ(51'2)NP
READ(51'3)MAT,ITPEL
READ(51'4)LNOBOD
READ(51'5)NEQ,XORD,YORD,KTPEL
READ(51'9)IKTVET
READ(51'11)DE,PR,STRS

NENT=0
NBUFF=1
MMAX=ILARG
IENT=42
ISAI=4
IPERM(1)=2
IPERM(2)=3
IPERM(3)=1
MM=IBNDW
NN=NEQ
NR=NN-1
NM=NN-MM
NN1=NN+1
MM1=MM+1

C

```
C   DIMENSÃO DO VETOR XA = NBUFF*MMMAX
C
      NC=MMMAX*NBUFF/MM
      NW=NC*MM
      IF(NW-ILARG)1000,1000,1010
1000 NREC1=(NN+NC-2)/NC-1
C
C   DECOMPOSIÇÃO DA BANDA
C
      DO 110 J=1,MM
110  ND(J)=(J*(J+1))/2
C
C   RETIRA DO DISCO O PRIMEIRO BLOCO TRIANGULAR
C
      DO 130 N=1,MM
      LC1=ND(N)-N+1
      LC2=LC1+MM-1
      NENT=NENT+1
      READ(13'NENT)(A(I),I=LC1,LC2)
130  CONTINUE
      NX=0
      NTRAC=1
      DO 200 N=1,NR
      IF(MM-NN1+N)777,777,778
777  MR=MM
      GO TO 779
778  MR=NN1-N
779  JJ=NX*MM+1
      NX=NX+1
      PIVOT=A(1)
      XA(JJ)=PIVOT
      DO 150 J=2,MR
      L=ND(J)
150  FA(J)=A(L)
      DO 160 J=2,MR
      C=FA(J)/PIVOT
      JJ=JJ+1
      XA(JJ)=C
      L=ND(J)
      L1=ND(J-1)+1
      DO 160 I=2,J
      L=L-1
      L1=L1-1
160  A(L1)=A(L)-C*FA(I)
      IF(N-NM)191,191,190
C
C   RETIRA PRÓXIMA COLUNA DO DISCO
C
191  NENT=NENT+1
      READ(13'NENT)(A(I),I=LC1,LC2)
190  IF(NX-NC)200,201,201
C
C   'NC' LINHAS REDUZIDAS SÃO ESCRITAS NAS 'NBUFF' TRILHAS DO DISCO
C
201  WRITE(12'NTRAC)(XA(LX),LX=1,NW)
      NTRAC=NTRAC+NBUFF
      NX=0
200  CONTINUE
```

```
JJ=NX*MM+1
XA(JJ)=A(1)
WRITE(12'NTRAC')(XA(LX),LX=1,JJ)
C
C   REDUCAO PROGRESSIVA
C
NTRAC=1
NX=NC
DO 240 N=1,NR
IF(MM-NN1+N)888,889,889
888 MR=MM
GO TO 885
899 MR=NN1-N
895 IF(NX-NC)230,231,231
231 READ(12'NTRAC')(XA(LX),LX=1,NW)
NTRAC=NTRAC+NBUFF
NX=0
230 JJ=NX*MM+1
NX=NX+1
C=STRS(N)
STRS(N)=C/XA(JJ)
L1=N+1
L2=L1+MR-2
DO 240 I=L1,L2
JJ=JJ+1
240 STRS(I)=STRS(I)-C*XA(JJ)
JJ=NX*MM+1
ALAST=XA(JJ)
ALT(1)=ALAST
IF(NX-NC)233,232,232
232 READ(12'NTRAC)ALT(1)
233 STRS(NN)=STRS(NN)/ALT(1)
C
C   SUBSTITUICAO REGRESSIVA
C
NTRAC=NTRAC-NBUFF
READ(12'NTRAC')(XA(LX),LX=1,NW)
NX=NN-NREC1*NC-1
DO 260 L=2,NN
N=NN1-L
IF(MM-L)666,667,667
666 MR=MM
GO TO 668
667 MR=L
668 NX=NX-1
IF(NX)251,250,250
251 NTRAC=NTRAC-NBUFF
READ(12'NTRAC')(XA(LX),LX=1,NW)
NX=NC-1
250 JJ=NX*MM+1
L1=N+1
L2=L1+MR-2
DO 260 I=L1,L2
JJ=JJ+1
260 STRS(N)=STRS(N)-XA(JJ)*STRS(I)
IF(ISKEW)112,112,2
C
```

2 CALL TRISK(ANGLE, STRS, XORD, YORD, ISAI, NUMNP, NELBO, LNOBO, MAT, CP,
*LNOBOD, MAXEL, MAXEB, MAXNP, ILC, W)

C

112 CALL TRFRE(PR, STRS, NUMNP, NELBO, LNOBO, MAXEB, MAXNP, ILC, W)

C

CALL REACA(STRS, XORD, YORD, ISAI, NP, LNOBO, ITPEL, KPEL, NEQ, NELBO,
*NUMNP, IKT VET, MAXEL, MAXEB, MAXNP, ILC, RE)

C

CALL FLEVO(STRS, DE, PR, XORD, YORD, IENT, ISAI, NUMNP, NEQ, MAXNP,
*ILC, LIC, M, SMOM, ANGULO)

C

GO TO 11

1010 WRITE(ISAI, 1030)

1030 FORMAT(1H0, 10X, 'ENDereco PARA XA MAIOR DO QUE A MAXIMA
*LARGURA DE BANDA')

11 CLOSE(UNIT=10, DISPOSE='DELETE')

CLOSE(UNIT=11, DISPOSE='DELETE')

CLOSE(UNIT=12, DISPOSE='DELETE')

CLOSE(UNIT=13, DISPOSE='DELETE')

CLOSE(UNIT=51, DISPOSE='DELETE')

CALL EXIT

END

C

C

***** COEF *****

C

SUBROUTINE COEF(ICDEF, KK, L)

IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)

DIMENSION ICDEF(28)

IENT=1

ISAI=5

DO 109 I=1, L

109 ICDEF(L)=0

K=1

M=KK+1

MM=M

II=KK

ICDEF(1)=1

IF(KK-1)107, 108, 108

108 ICDEF(L)=1

IF(KK-1)105, 105, 106

106 ICDEF(KK+1)=1

DO 120 I=2, KK

ICDEF(I)=II*ICDEF(I-1)/(I-1)

120 II=II-1

DO 100 IJ=1, KK

K=K+MM

ICDEF(K)=ICDEF(IJ+1)

100 MM=MM-1

K=1

MM=M

KD=KK

KT=KD-1



```

DO 200 J=1,KT
IT=1
KK=KK-1
II=KK
K=K+MM
MM=MM-1
DO 200 I=1,KK
IT=IT+1
KI=K+I
ICDEF(KI)=II*ICDEF(KI-1)/(IT-1)
200 II=II-1
IF(KT)105,105,107
105 ICDEF(2)=1
107 RETURN
END

```

C
C
C ***** EXPS *****

```

SUBROUTINE EXPS(IE,IGR)
DIMENSION IE(3,28)
II=IGR+2
IK=0
N3=-1
IGR1=IGR+1
DO 75 J=1,IGR1
N1=IGR+1
II=II-1
N1=N1-J
N2=0
N3=N3+1
DO 75 I=1,II
IK=IK+1
IE(1,IK)=N1
N1=N1-1
IE(2,IK)=N2
N2=N2+1
75 IE(3,IK)=N3
RETURN
END

```

C
C
C ***** COLOC *****

```

SUBROUTINE COLOC(X,Y,X0,Y0,XLC,YLC,IPERM)
DIMENSION IPERM(3),X(3),Y(3),XLC(6),YLC(6)
DO 99 I=1,3
L=3
XLC(I)=X(I)

```

```

YLC(I)=Y(I)
J=IPERM(I)
LI=L+I
XLC(LI)=0.5*(X(J)+X(I))
99 YLC(LI)=0.5*(Y(J)+Y(I))
X0=(X(1)+X(2)+X(3))/3.
Y0=(Y(1)+Y(2)+Y(3))/3.
DO 919 I=1,6
XLC(I)=XLC(I)-X0
919 YLC(I)=YLC(I)-Y0
RETURN
END

```

C
C ***** MATFT *****
C

```

SUBROUTINE MATFT(EF,X,Y,XLC,YLC,S,C,CF,IEX,IEY,IPERM)
DIMENSION UNUM(3),VDEN(3),F(2),TANG(3),GAMA(3),BETA(3),
*EF(21,21),X(3),Y(3),XLC(6),YLC(6),S(3),C(3),IPERM(3),
*CF(18,21),IEX(18,21),IEY(18,21)
ANG45=3.14159265358979323846/4.
ISAI=4

```

C
C CF(I,J) - CONSTANTES DOS COEFICIENTES, FUNCOES DE XY, DA
C MATRIZ G TRANSPOSTA
C

C
C IEX(I,J) - EXPOENTES DE BASE X DOS COEFICIENTES
C DA MATRIZ G TRANSPOSTA
C

C
C IEY(I,J) - EXPOENTES DE BASE Y DOS COEFICIENTES
C DA MATRIZ G TRANSPOSTA
C

```

DO 100 I=1,21
DO 100 J=1,21
100 EF(I,J)=0.

```

C
C FORMACAO DAS 18 PRIMEIRAS LINHAS DE EF(21,21)
C

```

II=-5
JJ=0
DO 110 K=1,3
II=II+6
JJ=JJ+6
DO 110 I=II,JJ
DO 110 J=1,21
IF(CF(I,J))1000,110,1000
1000 IF(XLC(K))1030,1010,1030
1010 IF(IEX(I,J))1030,1020,1030
1020 XL=1.
GO TO 1040
1030 XL=XLC(K)
1040 IF(YLC(K))1070,1050,1070
1050 IF(IEY(I,J))1070,1060,1070

```

```
1060 YL=1.  
      GO TO 1080  
1070 YL=YLC(K)  
1080 EF(I,J)=CF(I,J)*XL**IEX(I,J)*YL**IEY(I,J)  
110 CONTINUE
```

```
C  
C   CALCULO DOS ANGULOS ENTRE EIXO X E EIXO T  
C
```

```
DO 750 I=1,3  
  J=IPERM(I)  
  VNUM(I)=Y(J)-Y(I)  
  VDEN(I)=X(J)-X(I)  
  IF(VDEN(I))500,600,500  
500 TANG(I)=VNUM(I)/VDEN(I)  
   IF(ABS(TANG(I))-100.)700,959,959  
600 IF(VNUM(I))530,1111,520  
520 S(I)=1.  
   C(I)=0.  
   GO TO 750  
530 S(I)=-1.  
   C(I)=0.  
   GO TO 750  
700 IF(VDEN(I))800,600,900  
800 IF(VNUM(I))801,802,801  
801 S(I)=-SIN(ATAN(TANG(I)))  
   C(I)=-COS(ATAN(TANG(I)))  
   GO TO 750  
802 S(I)=0.  
   C(I)=-1.  
   GO TO 750  
900 S(I)=SIN(ATAN(TANG(I)))  
   C(I)=COS(ATAN(TANG(I)))  
   GO TO 750  
959 A=TANG(I)-1.  
   B=TANG(I)+1.  
   IF(VDEN(I))960,600,970  
960 IF(VNUM(I))965,1111,966  
965 GAMA(I)=ATAN(A/B)  
   BETA(I)=ANG45+GAMA(I)  
   S(I)=-SIN(BETA(I))  
   C(I)=-COS(BETA(I))  
   GO TO 750  
966 GAMA(I)=ATAN((1.+TANG(I))/(1.-TANG(I)))  
   BETA(I)=-ANG45+GAMA(I)  
   S(I)=-SIN(BETA(I))  
   C(I)=-COS(BETA(I))  
   GO TO 750  
970 IF(VNUM(I))975,1111,976  
975 GAMA(I)=ATAN((1.+TANG(I))/(1.-TANG(I)))  
   BETA(I)=-ANG45+GAMA(I)  
   S(I)=SIN(BETA(I))  
   C(I)=COS(BETA(I))  
   GO TO 750  
976 GAMA(I)=ATAN(A/B)  
   BETA(I)=ANG45+GAMA(I)  
   S(I)=SIN(BETA(I))  
   C(I)=COS(BETA(I))  
   GO TO 750
```



```

1111 WRITE(ISAI,1119)
1119 FORMAT(10X,'ERRO NAS COORDENADAS'//)
750 CONTINUE
  DO 299 I=1,3
    IF(VDEN(I))300,303,299
  303 IF(VNUM(I))299,300,300
  300 S(I)=-S(I)
    C(I)=-C(I)
  299 CONTINUE

```

C
C GERACAO DAS LINHAS 19,20,21
C

```

  II=18
  DO 120 K=4,6
    II=II+1
    IK=K-3
    DO 120 J=1,21
      F(1)=0.
      F(2)=0.
      IF(S(IK)*CF(2,J))2000,115,2000
  2000 IF(XLC(K))2030,2010,2030
  2010 IF(IEY(2,J))2030,2020,2030
  2020 XL=1.
      GO TO 2040
  2030 XL=XLC(K)
  2040 IF(YLC(K))2070,2050,2070
  2050 IF(IEY(2,J))2070,2060,2070
  2060 YL=1.
      GO TO 2080
  2070 YL=YLC(K)
  2080 F(1)=-S(IK)*CF(2,J)*XL**IEX(2,J)*YL**IEY(2,J)
    115 IF(C(IK)*CF(3,J))3000,3090,3000
  3000 IF(XLC(K))3030,3010,3030
  3010 IF(IEY(3,J))3030,3020,3030
  3020 XL=1.
      GO TO 3040
  3030 XL=XLC(K)
  3040 IF(YLC(K))3070,3050,3070
  3050 IF(IEY(3,J))3070,3060,3070
  3060 YL=1.
      GO TO 3080
  3070 YL=YLC(K)
  3080 F(2)=C(IK)*CF(3,J)*XL**IEX(3,J)*YL**IEY(3,J)
  3090 EF(II,J)=F(1)+F(2)
  120 CONTINUE
  RETURN
  END

```

C
C ***** GJRIS *****
C

```

SUBROUTINE GJRIS(A,N)
DIMENSION A(21,21),B(21),C(21),IP(21),IQ(21)

```

ISAI=4

C
C INVERSAO DE MATRIZES PELO METODO GAUSS-JORDAN-RUTISHAUSER
C

```
DO 1 K=1,N
T=0.
DO 6 I=K,N
S=0.
DO 3 J=K,N
3 S=S+ABS(A(I,J))
IF(S)4,5,4
4 DO 2 J=K,N
IF(ABS(A(I,J))-S*T)2,2,7
7 IP(K)=I
IQ(K)=J
PIVO=A(I,J)
T=ABS(PIVO/S)
2 CONTINUE
6 CONTINUE
IF(T)101,5,101
101 IF(IP(K)-K)8,98,8
8 DO 9 J=1,N
IPK=IP(K)
Z=A(IPK,J)
A(IPK,J)=A(K,J)
9 A(K,J)=Z
98 IF(IQ(K)-K)10,20,10
10 IQK=IQ(K)
DO 11 I=1,N
Z=A(I,IQK)
A(I,IQK)=A(I,K)
11 A(I,K)=Z
20 DO 12 J=1,N
IF(J-K)13,14,13
14 B(J)=1./PIVO
C(J)=1.
GO TO 15
13 B(J)=-A(K,J)/PIVO
C(J)=A(J,K)
15 A(K,J)=0.
12 A(J,K)=0.
DO 1 I=1,N
DO 1 J=1,N
A(I,J)=A(I,J)+C(I)*B(J)
1 CONTINUE
DO 16 KAUX=1,N
K=N-KAUX+1
IF(IP(K)-K)17,18,17
17 DO 102 I=1,N
IPK=IP(K)
Z=A(I,IPK)
A(I,IPK)=A(I,K)
A(I,K)=Z
102 CONTINUE
18 IF(IQ(K)-K)104,16,104
104 DO 103 J=1,N
IQK=IQ(K)
Z=A(IQK,J)
```

```

A(IQK,J)=A(K,J)
A(K,J)=Z
103 CONTINUE
16 CONTINUE
GO TO 118
5 WRITE(ISAI,100)
100 FORMAT(///5X'PROGRAMA NAO EXECUTADO - MATRIZ SINGULAR'//)
118 RETURN
END

```

```

C
C ***** MATRH *****
C

```

```

SUBROUTINE MATRH(X,Y,S,C,H,IPERM)5

```

```

C
C
C

```

```

FORMACAO DA MATRIZ H

```

```

DIMENSION IPERM(3),AK(4,3),H(3,18),COMPR(3),X(3),Y(3),S(3),C(3),
1DIFX(3),DIFY(3)
DO 2010 I=1,3
J=IPERM(I)
DIFX(I)=X(J)-X(I)
DIFY(I)=Y(J)-Y(I)
2010 COMPR(I)=SQRT((X(J)-X(I))**2+(Y(J)-Y(I))**2)
DO 2020 I=1,3
AK(1,I)=0.5*S(I)
AK(2,I)=0.5*C(I)
AK(3,I)=0.125*COMPR(I)*S(I)*C(I)
2020 AK(4,I)=0.125*COMPR(I)*(C(I)**2-S(I)**2)
DO 300 I=1,3
DO 300 J=1,18
300 H(I,J)=0.
H(1,2)=-AK(1,1)
H(1,3)=AK(2,1)
H(1,4)=-AK(3,1)
H(1,5)=AK(4,1)
H(1,6)=AK(3,1)
H(1,8)=-AK(1,1)
H(1,9)=AK(2,1)
H(1,10)=AK(3,1)
H(1,11)=-AK(4,1)
H(1,12)=-AK(3,1)
H(2,8)=-AK(1,2)
H(2,9)=AK(2,2)
H(2,10)=-AK(3,2)
H(2,11)=AK(4,2)
H(2,12)=AK(3,2)
H(2,14)=-AK(1,2)
H(2,15)=AK(2,2)
H(2,16)=AK(3,2)
H(2,17)=-AK(4,2)
H(2,18)=AK(3,2)
H(3,2)=-AK(1,3)

```

```
H(3,3)=AK(2,3)
H(3,4)=AK(33)
H(3,5)=-AK(4,3)
H(3,6)=-AK(3,3)
H(3,14)=-AK(1,3)
H(3,15)=AK(2,3)
H(3,16)=-AK(3,3)
H(3,17)=AK(4,3)
H(3,18)=AK(3,3)
IF(DIFX(1))100,103,110
103 IF(DIFY(1))110,100,100
100 DO 105 I=4,6
105 H(1,I)=-H(1,I)
DO 106 I=10,12
106 H(1,I)=-H(1,I)
110 IF(DIFX(2))130,133,120
133 IF(DIFY(2))120,130,130
130 DO 135 I=10,12
135 H(2,I)=-H(2,I)
DO 136 I=16,18
136 H(2,I)=-H(2,I)
120 IF(DIFX(3))150,153,140
153 IF(DIFY(3))140,150,150
150 DO 155 I=4,6
155 H(3,I)=-H(3,I)
DO 156 I=16,18
156 H(3,I)=-H(3,I)
140 CONTINUE
RETURN
END
```

C ***** POLIN *****
C

```
SUBROUTINE POLIN(XL,YL,AREA,PCAR,VIN,KP,KR,KS)
DIMENSION XL(6),YL(6),KCFX(28),KCFY(28),PCAR(3),VIN(28),
*KEX(3,28),KEY(3,28),ICSI(4),KR(28),KS(28)
DO 2803 I=1,28
KCFX(I)=0
KCFY(I)=0
DO 2803 L=1,3
KEX(L,I)=0
2803 KEY(L,I)=0
DO 50 II=1,KP
NX=(KR(II)+1)*(KR(II)+2)/2
NY=(KS(II)+1)*(KS(II)+2)/2
IGRX=KR(II)
IGRY=KS(II)
VINTT=0.
IF(IGRX)444,444,555
444 KCFX(1)=1
GO TO 445
555 IGRAU=IGRX
```

```
N=NX
READ(8'IGRAU)(KCFX(I),I=1,N)
445 IF(IGRY)666,666,777
666 KCFY(1)=1
GO TO 665
777 IGRAU=IGRY
N=NY
READ(8'IGRAU)(KCFY(I),I=1,N)
665 IF(NX-3)98,200,200
200 IGRAU=IGRX
N=NX
READ(9'IGRAU)((KEX(K,I),I=1,N),K=1,3)
GO TO 300
98 DO 222 I=1,3
222 KEX(I,1)=0
300 IF(NY-3)308,303,303
303 IGRAU=IGRY
N=NY
READ(9'IGRAU)((KEY(K,I),I=1,N),K=1,3)
GO TO 304
308 DO 333 I=1,3
333 KEY(I,1)=0
304 CONTINUE
DO 999 I=1,NY
DO 999 J=1,NX
CF=(KCFY(I)*KCFX(J))
ICSI(1)=KEX(1,J)+KEY(1,I)
ICSI(2)=KEX(2,J)+KEY(2,I)
ICSI(3)=KEX(3,J)+KEY(3,I)
IMM=ICSI(1)
INN=ICSI(2)
IPP=ICSI(3)
IM1=IMM+1
IN1=INN+1
IP1=IPP+1
VINT1=VINTA(AREA,IM1,INN,IPP)
VINT2=VINTA(AREA,IMM,IN1,IPP)
VINT3=VINTA(AREA,IMM,INN,IP1)
XL1=1.
XL2=1.
XL3=1.
YL1=1.
YL2=1.
YL3=1.
IF(KEX(1,J))3001,3001,3000
3000 XL1=XL(1)**KEX(1,J)
3001 IF(KEX(2,J))3003,3003,3002
3002 XL2=XL(2)**KEX(2,J)
3003 IF(KEX(3,J))3005,3005,3004
3004 XL3=XL(3)**KEX(3,J)
3005 IF(KEY(1,I))3007,3007,3006
3006 YL1=YL(1)**KEY(1,I)
3007 IF(KEY(2,I))3009,3009,3008
3008 YL2=YL(2)**KEY(2,I)
3009 IF(KEY(3,I))998,998,3010
3010 YL3=YL(3)**KEY(3,I)
998 VINT=CF*XL1*XL2*XL3*YL1*YL2*YL3
999 VINTT=VINTT+VINT*(PCAR(1)*VINT1+PCAR(2)*VINT2+PCAR(3)*VINT3)
```

```
50  VIN(II)=VINTT  
    RETURN  
    END
```

```
C  
C ***** MATPAR *****  
C
```

```
    SUBROUTINE MATPAR(X0,Y0,SVIL)  
    DIMENSION X(5),Y(5),IPER(5),VIL(21,5),SVIL(28)  
129  DO 129 IL=1,28  
    SVIL(IL)=0.  
    DO 12 IL=1,5  
12   X(IL)=0.  
    Y(IL)=0.  
    READ(7,*)NV,X(1),Y(1),X(2),Y(2),X(3),Y(3),X(4),Y(4),X(5),Y(5)  
    DO 121 IL=1,NV  
121  X(IL)=X(IL)-X0  
    Y(IL)=Y(IL)-Y0  
    IF(NV-4)122,123,124  
124  IPER(5)=1  
    GO TO 125  
123  IPER(4)=1  
    GO TO 126  
122  IPER(3)=1  
    GO TO 127  
125  IPER(4)=5  
126  IPER(3)=4  
127  IPER(2)=3  
    IPER(1)=2  
    DO 128 I=1,NV  
    L=IPER(I)  
    A=X(I)  
    B=Y(I)  
    C=X(L)  
    D=Y(L)  
    A2=A*A  
    A3=A2*A  
    A4=A3*A  
    A5=A4*A  
    B2=B*B  
    B3=B2*B  
    B4=B3*B  
    B5=B4*B  
    C2=C*C  
    C3=C2*C  
    C4=C3*C  
    C5=C4*C  
    D2=D*D  
    D3=D2*D  
    D4=D3*D  
    D5=D4*D  
    DELTA=A*D-B*C  
    VIL(1,I)=DELTA/2.
```

```

VIL(2,I)=(DELTA/6.)*(A+C)
VIL(3,I)=(DELTA/6.)*(B+D)
VIL(4,I)=(DELTA/12.)*(A2+A*C+C2)
VIL(5,I)=(DELTA/24.)*(A*D+2.*A*B+2.*C*D+B*C)
VIL(6,I)=(DELTA/12.)*(B2+B*D+D2)
VIL(7,I)=(DELTA/20.)*(A3+A2*C+A*C2+C3)
VIL(8,I)=(DELTA/60.)*(A2*D+3.*A2*B+2.*A*B*C+2.*A*C*D+
13.*C2*D+B*C2)
VIL(9,I)=(DELTA/60.)*(A*D2+3.*A*B2+2.*A*B*D+2.*B*C*D+
13.*C*D2+B2*C)
VIL(10,I)=(DELTA/20.)*(B3+B2*D+B*D2+D3)
VIL(11,I)=(DELTA/30.)*(A4+A3*C+A2*C2+A*C3+C4)
VIL(12,I)=(DELTA/120.)*(A3*D+4.*A3*B+3.*A2*B*C+2.*A2*C*D+
12.*A*B*C2+3.*A*C2*D+4.*C3*D+B*C3)
VIL(13,I)=(DELTA/180.)*(A2*D2+6.*A2*B2+3.*A2*B*D+3.*A*B2*C+
14.*A*B*C*D+3.*A*C*D2+3.*B*C2*D+6.*C2*D2+B2*C2)
VIL(14,I)=(DELTA/120.)*(A*D3+4.*A*B3+3.*A*B2*D+2.*A*B*D2+
12.*B2*C*D+3.*B*C*D2+4.*C*D3+B3*C)
VIL(15,I)=(DELTA/30.)*(B4+B3*D+B2*D2+B*D3+D4)
VIL(16,I)=(DELTA/42.)*(A5+A4*C+A3*C2+A2*C3+A*C4+C5)
VIL(17,I)=(DELTA/210.)*(A4*D+5.*A4*B+4.*A3*B*C+2.*A3*C*D+
13.*A2*B*C2+3.*A2*C2*D+4.*A*C3*D+2.*A*B*C3+5.*C4*D+B*C4)
VIL(18,I)=(DELTA/420.)*(A3*D2+4.*A3*B2+10.*A3*B2+3.*A2*C*D2+
16.*A2*B*C*D+6.*A2*B2*C+6.*A*C2*D2+6.*A*B*C2*D+3.*A*B2*C2+
210.*C3*D2+4.*B*C3*D+B2*C3)
VIL(19,I)=(DELTA/420.)*(A2*D3+4.*A*C*D3+10.*C2*D3+3.*A2*B*D2+
16.*A*B*C*D2+6.*B*C2*D2+6.*A2*B2*D+6.*A*B2*C*D+3.*B2*C2*D+
210.*A2*B3+4.*A*B3*C+B3*C2)
VIL(20,I)=(DELTA/210.)*(A*D4+5.*C*D4+2.*A*B*D3+4.*B*C*D3+
13.*A*B2*D2+3.*B2*C*D2+4.*A*B3*D+2.*B3*C*D+5.*A*B4+B4*C)
VIL(21,I)=(DELTA/42.)*(B5+B4*D+B3*D2+B2*D3+B*D4+D5)

```

```

128 CONTINUE
DO 130 L=1,21
DO 131 I=1,NV
131 SVIL(L)=SVIL(L)+VIL(L,I)
130 CONTINUE
RETURN
END

```

C
C ***** MATWP *****
C

```

SUBROUTINE MATWP(P,XP,YP,X0,Y0,WP)
DIMENSION WP(21)
XP=XP-X0
YP=YP-Y0
WP(1)=1
WP(2)=XP
WP(3)=YP
WP(4)=XP*XP
WP(5)=XP*YP
WP(6)=YP*YP
WP(7)=WP(4)*XP

```

```
WP(8)=WP(4)*YP
WP(9)=WP(6)*XP
WP(10)=WP(6)*YP
WP(11)=WP(7)*XP
WP(12)=WP(7)*YP
WP(13)=WP(4)*WP(6)
WP(14)=WP(10)*XP
WP(15)=WP(10)*YP
WP(16)=WP(11)*XP
WP(17)=WP(11)*YP
WP(18)=WP(6)*WP(7)
WP(19)=WP(4)*WP(10)
WP(20)=WP(15)*XP
WP(21)=WP(15)*YP
IF(P-1.)1,2,1
1 DO 3 IL=1,21
3 WP(IL)=P*WP(IL)
2 CONTINUE
RETURN
END
```

```
C
C ***** MATRG *****
C
C CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ GENERALIZADA (KQ)
C
```

```
SUBROUTINE MATRG(PRS,B,NI)
REAL NI
DIMENSION B(21,21),PRS(28)
P00=PRS(1)
P10=PRS(2)
P01=PRS(3)
P20=PRS(4)
P11=PRS(5)
P02=PRS(6)
P30=PRS(7)
P21=PRS(8)
P12=PRS(9)
P03=PRS(10)
P40=PRS(11)
P31=PRS(12)
P22=PRS(13)
P13=PRS(14)
P04=PRS(15)
P50=PRS(16)
P41=PRS(17)
P32=PRS(18)
P23=PRS(19)
P14=PRS(20)
P05=PRS(21)
P60=PRS(22)
P51=PRS(23)
P42=PRS(24)
```



```
P33=PRS(25)
P24=PRS(26)
P15=PRS(27)
P06=PRS(28)
AMI=0.5*(1.-NI)
DO 550 I=1,21
DO 550 J=1,21
550 B(I,J)=0.
D=1.
B(4,4)=D*4.*P00
B(6,6)=B(4,4)
B(4,6)=B(4,4)*NI
B(5,5)=B(4,4)*AMI
B(4,11)=D*24.*P20
B(4,13)=D*(4.*P02+4.*NI*P20)
B(4,14)=D*12.*NI*P11
B(4,15)=D*24.*NI*P02
B(8,10)=0.5*B(4,15)
B(4,16)=D*40.*P30
B(6,16)=B(4,16)*NI
B(7,11)=1.8*B(4,16)
B(4,17)=D*24.*P21
B(8,11)=B(4,17)
B(5,18)=D*24.*AMI*P21
B(6,17)=D*24.*NI*P21
B(9,12)=D*12.*P21
B(10,11)=D*72.*NI*P21
B(4,18)=D*(12.*P12+4.*NI*P30)
B(4,19)=D*(4.*P03+12.*NI*P21)
B(4,20)=D*24.*NI*P12
B(7,15)=3.*B(4,20)
B(10,12)=0.5*B(7,15)
B(6,20)=D*24.*P12
B(9,15)=B(6,20)
B(8,14)=D*12.*P12
B(10,14)=1.5*B(6,20)
B(5,19)=D*24.*AMI*P12
B(6,21)=D*40.*P03
B(4,21)=D*40.*NI*P03
B(5,20)=D*16.*AMI*P03
B(8,15)=D*24.*NI*P03
B(10,15)=D*72.*P03
B(5,12)=D*12.*AMI*P20
B(5,13)=D*16.*AMI*P11
B(5,14)=D*12.*AMI*P02
B(5,17)=D*16.*AMI*P30
B(6,14)=D*12.*P11
B(7,8)=B(6,14)
B(9,10)=B(6,14)
B(4,12)=B(6,14)
B(6,11)=D*24.*NI*P20
B(6,12)=B(6,14)*NI
B(6,13)=D*(4.*P20+4.*NI*P02)
B(7,10)=D*36.*NI*P11
B(7,14)=D*36.*NI*P21
B(7,7)=D*36.*P20
B(6,15)=D*24.*P02
B(6,18)=D*(4.*P30+12.*NI*P12)
```

B(6,19)=D*(12.*P21+4.*NI*P03)
B(7,13)=D*(12.*P12+12.*NI*P30)
B(7,17)=D*72.*P31
B(11,12)=B(7,17)
B(7,16)=D*120.*P40
B(11,11)=1.2*B(7,16)
B(9,21)=D*40.*P13
B(10,20)=1.8*B(9,21)
B(12,15)=D*72.*NI*P13
B(7,20)=D*72.*NI*P22
B(10,17)=B(7,20)
B(11,15)=2.*B(7,20)
B(7,19)=D*(12.*P13+36.*NI*P31)
B(7,18)=D*(36.*P22+12.*NI*P40)
B(7,21)=D*120.*NI*P13
B(8,8)=D*(4.*P02+16.*AMI*P20)
B(8,9)=D*(8.-4.*NI)*P11
B(8,12)=D*(12.*P12+24.*AMI*P30)
B(8,13)=D*(4.*P03+(16.-12.*NI)*P21)
B(8,16)=D*40.*P31
B(8,17)=D*(24.*P22+32.*AMI*P40)
B(8,18)=D*(12.*P13+(24.-20*NI)*P31)
B(8,19)=D*(4.*P04+(24.-12.*NI)*P22)
B(8,20)=D*(16.+8.*NI)*P13
B(8,21)=D*40.*NI*P04
B(9,9)=D*(4.*P20+16.*AMI*P02)
B(9,11)=D*24.*NI*P30
B(9,13)=D*(4.*P30+(16.-12.*NI)*P12)
B(9,14)=D*(12.*P21+24.*AMI*P03)
B(9,16)=D*40.*NI*P40
B(9,17)=D*(16.+8.*NI)*P31
B(9,18)=D*(4.*P40+(24.-12.*NI)*P22)
B(9,19)=D*(12.*P31+(24.-20.*NI)*P13)
B(9,20)=D*(24.*P22+32.*AMI*P04)
B(10,10)=D*36.*P02
B(10,13)=D*(12.*P21+12.*NI*P03)
B(10,16)=D*120.*NI*P31
B(10,18)=D*(12.*P31+36.*NI*P13)
B(10,19)=D*(36.*P22+12.*NI*P04)
B(10,21)=D*120.*P04
B(11,13)=D*(24.*P22+24.*NI*P40)
B(11,14)=D*72.*NI*P31
B(11,16)=D*240.*P50
B(11,17)=D*144.*P41
B(11,18)=D*(72.*P32+24.*NI*P50)
B(11,19)=D*(24.*P23+72.*NI*P41)
B(11,20)=D*144.*NI*P32
B(11,21)=D*240.*NI*P23
B(12,12)=D*(36.*P22+36.*AMI*P40)
B(12,13)=D*(12.*P13+(24.-12.*NI)*P31)
B(12,14)=D*(18.+18.*NI)*P22
B(12,16)=D*120.*P41
B(12,17)=D*(72.*P32+48.*AMI*P50)
B(12,18)=D*(36.*P23+(36.-24.*NI)*P41)
B(12,19)=D*(12.*P14+ 36.*P32)
B(12,20)=D*(24.+48.*NI)*P23
B(12,21)=D*120.*NI*P14
B(13,13)=D*(4.*P40+4.*P04+(32.-24.*NI)*P22)

B(13,16)=D*(40.*P32+40.*NI*P50)
B(13,14)=D*(12.*P31+(24.-12.*NI)*P13)
B(13,15)=D*(24.*P22+24.*NI*P04)
B(13,17)=D*(24.*P23+(32.-8.*NI)*P41)
B(13,18)=D*(4.*P50+12.*P14+(48.-32.*NI)*P32)
B(13,19)=D*(4.*P05+12.*P41+(48.-32.*NI)*P23)
B(13,20)=D*(24.*P32+(32.-8.*NI)*P14)
B(13,21)=D*(40.*P23+40.*NI*P05)
B(14,14)=D*(36.*P22+36.*AMI*P04)
B(14,15)=D*72.*P13
B(14,16)=D*120.*NI*P41
B(14,17)=D*(24.+48.*NI)*P32
B(14,18)=D*(12.*P41+36.*P23)
B(14,19)=D*(36.*P32+(36.-24.*NI)*P14)
B(14,20)=D*(72.*P23+48.*AMI*P05)
B(14,21)=D*120.*P14
B(15,15)=D*144.*P04
B(15,16)=D*240.*NI*P32
B(15,17)=D*144.*NI*P23
B(15,18)=D*(24.*P32+72.*NI*P14)
B(15,19)=D*(72.*P23+24.*NI*P05)
B(15,20)=D*144.*P14
B(15,21)=D*240.*P05
B(16,16)=D*400.*P60
B(16,17)=D*240.*P51
B(16,18)=D*(120.*P42+40.*NI*P60)
B(16,19)=D*(40.*P33+120.*NI*P51)
B(16,20)=D*240.*NI*P42
B(16,21)=D*400.*NI*P33
B(17,17)=D*(144.*P42+64.*AMI*P60)
B(17,18)=D*(72.*P33+(48.-24.*NI)*P51)
B(17,19)=D*(24.*P24+(48.+24.*NI)*P42)
B(17,20)=D*(32.+112.*NI)*P33
B(17,21)=D*240.*NI*P24
B(18,18)=D*(4.*P60+36.*P24+(72.-48.*NI)*P42)
B(18,19)=D*(12.*P51+12.*P15+(72.-32.*NI)*P33)
B(18,20)=D*(24.*P42+(48.+24.*NI)*P24)
B(18,21)=D*(40.*P33+120.*NI*P15)
B(19,19)=D*(4.*P06+36.*P42+(72.-48.*NI)*P24)
B(19,20)=D*(72.*P33+(48.-24.*NI)*P15)
B(19,21)=D*(120.*P24+40.*NI*P06)
B(20,20)=D*(144.*P24+64.*AMI*P06)
B(20,21)=D*240.*P15
B(21,21)=D*400.*P06
B(7,9)=0.5*B(6,11)
B(7,12)=1.5*B(4,17)
DO 700 J=1,21
DO 700 I=1,21
IF(I-J)700,700,800
800 B(I,J)=B(J,I)
700 CONTINUE
RETURN
END

```
C
C ***** VINTA *****
C
FUNCTION VINTA(AREA,M,N,IP)
DIMENSION ICSIS(4),FAT(4)
ICISIS(1)=M
ICISIS(2)=N
ICISIS(3)=IP
ICISIS(4)=2
DO 1920 K=1,3
1920 ICSIS(4)=ICISIS(4)+ICISIS(K)
DO 20 I=1,4
FAT(I)=1.
K=ICISIS(I)
IF(K)20,20,5
5 DO 10 J=1,K
10 FAT(I)=FAT(I)*J
20 CONTINUE
VNUM=AREA
DO 16 L=1,3
16 VNUM=VNUM*FAT(L)
VINTA=VNUM/FAT(4)
RETURN
END
```

```
C
C ***** TSKEW *****
C
SUBROUTINE TSKEW(ANGLE,PSI,LINHA,LNOBO,NI,LNOBOD,MAXEB,MAXNP)
REAL NI
DIMENSION CSI(6,6),LNOBO(MAXEB,10),ANGLE(8),PSI(18,18),
1LNBOBOD(MAXNP)
DO 10 I=1,6
DO 10 J=1,6
10 CSI(I,J)=0.
DO 11 I=1,18
DO 11 J=1,18
11 PSI(I,J)=0.
DO 60 I=1,3
IA=I+4
IF(LNOBO(LINHA,IA))20,40,20
C
C QUANDO LNOBO(LINHA,IA)=0 SIGNIFICA QUE O NO' CORRESPONDENTE
C NAO ESTA NA BORDA.
C
20 IADRR=LNOBO(LINHA,IA)
T=SIN(ANGLE(IADRR))
C=COS(ANGLE(IADRR))
CSI(1,1)=1.
CSI(2,2)=C
CSI(2,3)=-T
CSI(3,2)=T
CSI(3,3)=C
```

```

CSI(4,4)=C**2
CSI(4,5)=-2*T*C
CSI(4,6)=T**2
CSI(5,4)=T*C
CSI(5,5)=CSI(4,4)-CSI(4,6)
CSI(5,6)=-CSI(5,4)
CSI(6,4)=CSI(4,6)
CSI(6,5)=-CSI(4,5)
CSI(6,6)=CSI(4,4)
IEL=I+1
IN=LNOBO(LINHA, IEL)
IF(LNOBOD(IN))100,110,100
100 DENOM=(C**2)+(NI*(T**2))
PNUM1=-((T**2)+(NI*(C**2)))
PNUM2=-2.*T*C*(1.-NI)
CSI(4,4)=(C**2)+(((T**2)*PNUM1)/DENOM)
CSI(4,5)=(-2.*T*C)+(((T**2)*PNUM2)/DENOM)
CSI(4,6)=(T**2)/DENOM
CSI(5,4)=(T*C)-((T*C*PNUM1)/DENOM)
CSI(5,5)=(C**2-T**2)-((T*C*PNUM2)/DENOM)
CSI(5,6)=-T*C/DENOM
CSI(6,4)=(T**2)+(((C**2)*PNUM1)/DENOM)
CSI(6,5)=(2.*T*C)+(((C**2)*PNUM2)/DENOM)
CSI(6,6)=(C**2)/DENOM
110 DO 30 IA=1,6
IE=6*(I-1)+IA
DO 30 IB=1,6
IG=6*(I-1)+IB
30 PSI(IE,IG)=CSI(IA,IB)
GO TO 60
40 INIC=6*(I-1)+1
IFIM=INIC+5
DO 50 K=INIC,IFIM
50 PSI(K,K)=1.
60 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C
C ***** TFREE *****
C

```

```

SUBROUTINE TFREE(PHI,NI,LINHA,LNOBO,MAXEB)
REAL NI
DIMENSION LNOBO(MAXEB,10),CSJ(6,6),PSI(18,18)
DO 10 I=1,6
DO 10 J=1,6
10 CSJ(I,J)=0.
DO 11 I=1,18
DO 11 J=1,18
11 PSI(I,J)=0.
DO 60 I=1,3
IA=I+7
IF(LNOBO(LINHA,IA))40,20,40

```

```

40 CSJ(1,1)=1.
   CSJ(2,2)=CSJ(1,1)
   CSJ(3,3)=CSJ(1,1)
   CSJ(4,4)=1./(1.-NI**2)
   CSJ(4,6)=-NI*CSJ(4,4)
   CSJ(5,5)=CSJ(1,1)
   CSJ(6,4)=CSJ(4,6)
   CSJ(6,6)=CSJ(4,4)
   DO 30 IA=1,6
   IE=6*(I-1)+IA
   DO 30 IB=1,6
   IG=6*(I-1)+IB
30 PSI(IE,IG)=CSJ(IA,IB)
   GO TO 60
20 INIC=6*(I-1)+1
   IFIM=INIC+5
   DO 50 K=INIC,IFIM
50 PSI(K,K)=1.
60 CONTINUE
   RETURN
   END

```

```

C
C ***** PREPS *****
C

```

```

SUBROUTINE PREPS(FL,PSI)
DIMENSION FL(18,18),PSI(18,18),SAVE(18,18)
DO 930 IA=1,18
DO 930 IB=1,18
SAVE(IA,IB)=0.
DO 930 IC=1,18
930 SAVE(IA,IB)=SAVE(IA,IB)+PSI(IC,IA)*FL(IC,IB)
C
C MULTIPLICACAO DE SAVE POR PSI
C
DO 940 IA=1,18
DO 940 IB=1,18
FL(IA,IB)=0.
DO 940 IC=1,18
940 FL(IA,IB)=FL(IA,IB)+SAVE(IA,IC)*PSI(IC,IB)
RETURN
END

```

```

C
C ***** THMED *****
C
SUBROUTINE THMED(EM,TH,CP,PR,DE,NUMNP,NUMEL,NP,MAT,MAXEL,MAXNP,
1THM,E)

```

```

DIMENSION E(MAXNP), THM(MAXNP), PR(MAXNP), NP(MAXEL, 3), EM(1),
1TH(MAXEL, 3), DE(MAXNP), CP(1), MAT(MAXEL)
DO 1000 NO=1, NUMNP
E(NO)=0.
THM(NO)=0.
PR(NO)=0.
COUNT=0.
DO 900 N=1, NUMEL
DO 700 I=1, 3
IF(NP(N, I)-NO)700, 800, 700
800 THM(NO)=THM(NO)+TH(N, I)
M=MAT(N)
PR(NO)=PR(NO)+CP(M)
E(NO)=E(NO)+EM(M)
COUNT=COUNT+1.
GO TO 900
700 CONTINUE
900 CONTINUE
THM(NO)=THM(NO)/COUNT
E(NO)=E(NO)/COUNT
PR(NO)=PR(NO)/COUNT
DE(NO)=(E(NO)*THM(NO)**3)/(12.*(1.-PR(NO)**2))
1000 CONTINUE
RETURN
END

```

C
C ***** TRISK *****
C

```

SUBROUTINE TRISK(ANGLE, STRS, XORD, YORD, ISAI, NUMNP, NELBO, LNOBO, MAT
1, CP, LNOBOD, MAXEL, MAXEB, MAXNP, ILC, W)
REAL NI
DIMENSION STR(6), XORD(MAXNP), YORD(MAXNP), MAT(MAXEL), ANGLE(8),
1LNOBOD(MAXNP), LNOBO(MAXEB, 10), TRC(6, 6), W(ILC), STRS(ILC), CP(1)
WRITE(ISAI, 40)
40 FORMAT(1H1, 'VALORES DAS INCOGNITAS NODAIS DE PONTOS SITUADOS NO
1CONTORNO'//, 11X, 'ANGULO'/1X, 'PONTO'4X, 'COORDENADAS'7X, 'W'14X,
1W, T'12X, 'W, N'12X, 'W, TT'12X, 'W, TN'12X, 'W, NN'4X, '(GRAUS)'/)
COEF=180./3.14159265358979323846
DO 10 N=1, NUMNP
DO 11 M=1, NELBO
DO 11 L=2, 4
IF(LNOBO(M, L)-N)11, 20, 11
20 I=L+3
IF(LNOBO(M, I))90, 10, 90
90 IADRR=LNOBO(M, I)
MW=MAT(M)
NI=CP(MW)
S=SIN(ANGLE(IADRR))
SS=S**2
C=COS(ANGLE(IADRR))
CC=C**2
SC=S*C

```

```

C2S2=CC-SS
DO 30 IA=1,6
DO 30 IB=1,6
30 TRC(IA,IB)=0.
TRC(1,1)=1.
TRC(2,2)=C
TRC(2,3)=-S
TRC(3,2)=-TRC(2,3)
TRC(3,3)=TRC(2,2)
TRC(5,4)=SC
TRC(5,5)=C2S2
TRC(5,6)=-TRC(5,4)
TRC(4,4)=CC
TRC(4,5)=-2.*SC
TRC(4,6)=SS
TRC(6,4)=TRC(4,6)
TRC(6,5)=2.*SC
TRC(6,6)=TRC(4,4)
IF(LNOBOD(N))100,110,100
100 DENOM=CC+(NI*SS)
PNUM1=-(SS+(NI*CC))
PNUM2=-2.*SC*(1.-NI)
TRC(4,4)=CC+((SS*PNUM1)/DENOM)
TRC(4,5)=-2.*SC+((SS*PNUM2)/DENOM)
TRC(4,6)=SS/DENOM
TRC(5,4)=SC-((SC*PNUM1)/DENOM)
TRC(5,5)=C2S2-((SC*PNUM2)/DENOM)
TRC(5,6)=-SC/DENOM
TRC(6,4)=SS+((CC*PNUM1)/DENOM)
TRC(6,5)=2.*SC+((CC*PNUM2)/DENOM)
TRC(6,6)=CC/DENOM
110 K=6*(N-1)
DO 80 I=1,6
KI=K+I
W(KI)=0.
DO 80 J=1,6
KJ=K+J
W(KI)=W(KI)+TRC(I,J)*STRS(KJ)
80 CONTINUE
DO 60 J=1,6
KJ=K+J
60 STR(J)=STRS(KJ)
ANGUL=COEF*ANGLE(IADDR)
WRITE(ISA1,50)N,XORD(N),YORD(N),(STR(J),J=1,6),ANGUL
50 FORMAT(1X,I4,3X,F6.2,2X,F6.2,6(E15.7),2X,F7.2)
DO 12 I=1,6
KI=K+I
STRS(KI)=W(KI)
12 CONTINUE
GO TO 10
11 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

```


C
C
C

***** TRFRE *****

```

SUBROUTINE TRFRE(PR,STRS,NUMNP,NELBO,LNOBD,MAXEB,MAXNP,ILC,W)
DIMENSION LNOBD(MAXEB,10),TBL(6,6),STRS(ILC),PR(MAXNP),W(ILC)
DO 10 N=1,NUMNP
DO 11 M=1,NELBO
DO 11 L=2,4
IF(LNOBD(M,L)-N)11,20,11
20 LL=L+6
IF(LNOBD(M,LL))50,11,50
50 DO 30 IA=1,6
DO 30 IB=1,6
30 TBL(IA,IB)=0.
TBL(1,1)=1.
TBL(2,2)=TBL(1,1)
TBL(3,3)=TBL(1,1)
TBL(4,4)=1./(1-PR(N)**2)
TBL(4,6)=-PR(N)*TBL(4,4)
TBL(5,5)=TBL(1,1)
TBL(6,4)=TBL(4,6)
TBL(6,6)=TBL(4,4)
K=6*(N-1)
DO 60 I=1,6
KI=K+I
W(KI)=0.
DO 60 J=1,6
KJ=K+J
W(KI)= W(KI) + TBL(I,J) * STRS(KJ)
60 CONTINUE
DO 12 I=1,6
KI=K+I
STRS(KI)=W(KI)
12 CONTINUE
GO TO 10
11 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

```

C
C
C

***** REACA *****

```

SUBROUTINE REACA(STRS,XORD,YORD,ISAI,NP,LNOBD,ITPEL,KTPEL,NEQ,
INELBO,NUMNP,IKTVET,MAXEL,MAXEB,MAXNP,ILC,RE)
DIMENSION STRS(ILC),NP(MAXEL,3),XORD(MAXNP),YORD(MAXNP),
1RECUP(171),ITPEL(MAXEL),KTPEL(MAXEL),FL(18,18),RE(ILC),STR(18),
1REAC(18),SP(18),IKTVET(MAXEL),LNOBD(MAXEB,10)
DO 5 I=1,NEQ
5 RE(I)=0.
DO 10 N=1,NELBO
M=LNOBD(N,1)

```

C

```

C      M = NUMERO DO ELEMENTO NA BORDA
C
      DO 300 I=1,3
      K=NP(M,I)
      DO 300 J=1,6
      KI=6*(I-1)+J
      KJ=6*(K-1)+J
      STR(KI)=STRS(KJ)
300    CONTINUE
C
C      RECUPERACAO DE FL(18,18)
C
      NR=ITPEL(M)
      IKT=IKTVET(NR)
      READ(11'IKT')(RECUP(IN),IN=1,171)
      IJ=0
      DO 90 I=1,18
      DO 90 J=1,18
      IF(I-J)100,100,110
100    IJ=IJ+1
      FL(I,J)=RECUP(IJ)
      GO TO 90
110    FL(I,J)=FL(J,I)
90     CONTINUE
      DO 50 I=1,18
      SP(I)=0.
      DO 50 J=1,18
      SP(I)=SP(I)+FL(I,J)*STR(J)
50     CONTINUE
      NRR=KTPEL(M)
      IKT=IKTVET(NRR)
      READ(10'IKT')(STR(II),II=1,18)
      DO 60 I=1,18
      REAC(I)=SP(I)-STR(I)
60     CONTINUE
      DO 70 I=1,3
      K=NP(M,I)
      DO 70 J=1,6
      IE=6*(I-1)+J
      IG=6*(K-1)+J
      RE(IG)=RE(IG)+REAC(IE)
70     CONTINUE
10     CONTINUE
      WRITE(ISAI,75)
75     FORMAT(1H1,'REACAO VERTICAL NOS APOIOS'//1H,'PONTO',5X,'COORDENADAS'7X,'REACAO VERTICAL'/1H,3X,'N',7X,'X',7X,'Y',13X,'R1(W)')
      DO 25 N=1,NUMNP
      DO 20 M=1,NELBD
      DO 20 L=2,4
      IF(LNOBO(M,L)-N)20,30,20
30     K=6*N-5
      IF(STRS(K))25,40,25
40     WRITE(ISAI,80)N,XORD(N),YORD(N),RE(K)
80     FORMAT(I5,2X,2F8.2,5X,E12.4)
      GO TO 25
20     CONTINUE
25     CONTINUE

```

RETURN
END

C
C ***** FLEVO *****
C

SUBROUTINE FLEVO(STRS,DE,PR,XORD,YORD,IENT,ISAI,NUMNP,NEQ,MAXNP,
*ILC,LIC,M,SMOM,ANGULO)

C
C CALCULO DOS MOMENTOS FLETORES E VOLVENTES
C

REAL MX,MY,MXY,M(MAXNP,3)
DIMENSION STRS(ILC),STR(6),TCM(3,6),SMOM(LIC),ANGULO(MAXNP),
*XORD(MAXNP),YORD(MAXNP),DE(MAXNP),PR(MAXNP)
COEF=90./3.14159265358979323846
WRITE(ISAI,40)

40 FORMAT(1H1,'VALORES DAS INCOGNITAS NODAIS',//,1H,'PONTO',4X,'COD
*RDENADAS',7X,'W',14X,'W,X',12X,'W,Y',12X,'W,XX',12X,'W,XY',12X,'W
*,YY'/)

DO 600 I=1,NUMNP
K=6*(I-1)
DO 220 J=1,6
KI=K+J

220 STR(J)=STRS(KI)
WRITE(ISAI,33)I,XORD(I),YORD(I),(STR(J),J=1,6)

33 FORMAT(1X,I4,3X,F6.2,2X,F6.2,6(1X,E14.7))

600 CONTINUE

WRITE(ISAI,30)

30 FORMAT(1H0,'MOMENTOS NODAIS',//,1H,'PONTO',4X,'COORDENADAS',12X,'
* MX ',12X,' MY ',12X,' MXY '')

DO 10 N=1,NUMNP
DO 20 I=1,3
DO 20 J=1,6

20 TCM(I,J)=0.
TCM(1,4)=-DE(N)
TCM(1,6)=-DE(N)*PR(N)
TCM(2,4)=TCM(1,6)
TCM(2,6)=TCM(1,4)
TCM(3,5)=TCM(1,4)-TCM(1,6)

K=3*(N-1)
K2=2*K
DO 60 IM=1,3
KIM=K+IM
SMOM(KIM)=0.

DO 60 L=1,6
KL=K2+L
60 SMOM(KIM)=SMOM(KIM)+TCM(IM,L)*STRS(KL)
KM=K1
KM2=KM+2

10 WRITE(ISAI,32)N,XORD(N),YORD(N),(SMOM(NLL),NLL=KM,KM2)
32 FORMAT(1X,I4,3X,F6.2,2X,F6.2,3E20.10)

C
C CALCULO DOS MOMENTOS NODAIS PRINCIPAIS

```
C
WRITE(ISAI,31)
31  FORMAT(1H0,'MOMENTOS NODAIS PRINCIPAIS'//1H,'PONTO',5X,'COORDENAD
*AS',9X,' M-1 ',10X,' M-2 ',10X,'M-NT-MAX',8X,'ANGLE'//1H,3X,'N',
*7X,'X',7X,'Y'/)
DO 400 N=1,NUMNP
K=3*(N-1)
K1=K+1
K2=K+2
K3=K+3
MX=SMOM(K1)
MY=SMOM(K2)
MXY=SMOM(K3)
C=.5*(MX+MY)
DIF=.5*(MX-MY)
P=SQRT(DIF**2+MXY**2)
M(N,1)=C+P
M(N,2)=C-P
M(N,3)=P
CONST=45.
ANGULO(N)=SIGN(CONST,MXY)
IF(DIF)319,440,319
319 ANGULO(N)=COEF*ATAN(MXY/DIF)
440 WRITE(ISAI,34)N,XORD(N),YORD(N),(M(N,I),I=1,3),ANGULO(N)
34  FORMAT(1H ,1X,13,2X,2F8.2,2X,4(3X,E12.4))
IF(DIF)321,322,323
322 IF(MXY)323,705,323
705 IF(C)710,720,730
710 WRITE(ISAI,740)
IDIR=2
740 FORMAT(1H+,85X,'QUALQUER DIRECAO E'' 2')
GO TO 400
720 WRITE(ISAI,750)
750 FORMAT(1H+,85X,'PONTO COM MOMENTOS NULOS')
IDIR=0
GO TO 400
730 WRITE(ISAI,760)
760 FORMAT(1H+,85X,'QUALQUER DIRECAO E'' 1')
IDIR=1
GO TO 400
321 WRITE(ISAI,37)
37  FORMAT(1H+,85X,'ANGLE INDICA M-2')
IDIR=2
GO TO 400
323 WRITE(ISAI,38)
38  FORMAT(1H+,85X,'ANGLE INDICA M-1')
IDIR=1
400 CONTINUE
RETURN
END
```

2.2 - Programa Prē-processador Para Geração Automática das Redes
de Elementos Finitos Com Maior Discretização na Borda (GERB)

C
C
C

***** GERB *****

DIMENSION NP(1000,3),IT(1000),KT(1000),KARGA(1000),ZCAR(1000,3)
1,TH(1000,3),X(600),Y(600),LEB(600),ILTPN(600),LPB(250),EM(1),
2CP(1),ILCC(250,6),ILANG(600),ANGLE(3),NPDC(6),MAT(1000),
3ILAUX(15),LICC(6),DENS(1),DILAT(1)

C
C
C
C

OS VETORES E MATRIZES SAO ZERADOS AUTOMATICAMENTE QUANDO
DESCRITOS NO COMANDO DIMENSION

NUMBC=1
NLOAD=1
NMAT=1
ISKEW=1
NANGL=1
ANGLE(1)=120.
EM(1)=2000000.
CP(1)=0.2
DENS(1)=0.
DILAT(1)=0.
NPDC=4
NPDC(1)=111
NPDC(2)=121
NPDC(3)=243
NPDC(4)=253

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

.NUMERO DE TRAMOS QUE COMPOEM A ESTRUTURA (ILTRAM)
.NUMERO DE FAIXAS BASICAS QUE COMPOEM A ESTRUTURA (NUMF)
.NUMERO DE FAIXAS BASICAS QUE COMPOEM OS TRAMOS EXTERNOS (NUFL1)
.NUMERO DE FAIXAS BASICAS QUE COMPOEM O TRAMO INTERNO, SE A
PLACA TIVER 3 TRAMOS (NUFL2)
.NUMERO DE ELEMENTOS POR FAIXA BASICA (NELF)
.NUMERO DE NOS POR FAIXA BASICA (NNOSF)

NELF=39
NNOSF=22
ILTRAM=3
NUFL1=5
NUFL2=6
NUMF=2*NUFL1
IF(ILTRAM-2)510,510,511
511 NUMF=NUMF+NUFL2
510 NUMF1=NUMF-1
NUMEL=NUMF*NELF
NUMNP=NUMF*NNOSF+11

C
C
C

LARGURA DE CADA FAIXA BASICA (XL)

XL=2.1560000
XL2=XL/2.
XL4=XL/4.
XL34=XL*3./4.

C

NP(1,1)=1
NP(1,2)=2
NP(1,3)=12
IT(1)=1

KT(1)=1
NP(2,1)=12
NP(2,2)=2
NP(2,3)=3
IT(2)=2
KT(2)=2
NP(3,1)=12
NP(3,2)=13
NP(3,3)=15
IT(3)=1
KT(3)=1
NP(4,1)=15
NP(4,2)=13
NP(4,3)=14
IT(4)=2
KT(4)=2
NP(5,1)=13
NP(5,2)=3
NP(5,3)=14
IT(5)=5
KT(5)=5
NP(6,1)=12
NP(6,2)=3
NP(6,3)=13
IT(6)=6
KT(6)=6
NP(7,1)=15
NP(7,2)=16
NP(7,3)=20
IT(7)=1
KT(7)=1
NP(8,1)=20
NP(8,2)=16
NP(8,3)=17
IT(8)=2
KT(8)=2
NP(9,1)=16
NP(9,2)=14
NP(9,3)=17
IT(9)=5
KT(9)=5
NP(10,1)=15
NP(10,2)=14
NP(10,3)=16
IT(10)=6
KT(10)=6
NP(11,1)=20
NP(11,2)=21
NP(11,3)=23
IT(11)=1
KT(11)=1
NP(12,1)=23
NP(12,2)=21
NP(12,3)=22
IT(12)=2
KT(12)=2
NP(13,1)=21
NP(13,2)=17

NP(13,3)=22
IT(13)=5
KT(13)=5
NP(14,1)=20
NP(14,2)=17
NP(14,3)=21
IT(14)=6
KT(14)=6
NP(15,1)=24
NP(15,2)=22
NP(15,3)=25
IT(15)=5
KT(15)=5
NP(16,1)=23
NP(16,2)=22
NP(16,3)=24
IT(16)=6
KT(16)=6
NP(17,1)=3
NP(17,2)=4
NP(17,3)=14
IT(17)=17
KT(17)=17
NP(18,1)=14
NP(18,2)=4
NP(18,3)=17
IT(18)=18
KT(18)=18
NP(19,1)=17
NP(19,2)=4
NP(19,3)=18
IT(19)=19
KT(19)=19
NP(20,1)=17
NP(20,2)=18
NP(20,3)=22
IT(20)=17
KT(20)=17
NP(21,1)=22
NP(21,2)=18
NP(21,3)=25
IT(21)=18
KT(21)=18
NP(22,1)=25
NP(22,2)=18
NP(22,3)=26
IT(22)=19
KT(22)=19
NP(23,1)=4
NP(23,2)=5
NP(23,3)=18
IT(23)=23
KT(23)=23
NP(24,1)=18
NP(24,2)=5
NP(24,3)=19
IT(24)=24
KT(24)=24

NP(25,1)=18
NP(25,2)=19
NP(25,3)=26
IT(25)=23
KT(25)=23
NP(26,1)=26
NP(26,2)=19
NP(26,3)=27
IT(26)=24
KT(26)=24
NP(27,1)=5
NP(27,2)=6
NP(27,3)=19
IT(27)=23
KT(27)=23
NP(28,1)=19
NP(28,2)=6
NP(28,3)=27
IT(28)=28
KT(28)=28
NP(29,1)=27
NP(29,2)=6
NP(29,3)=28
IT(29)=29
KT(29)=29
NP(30,1)=6
NP(30,2)=7
NP(30,3)=28
IT(30)=30
KT(30)=30
NP(31,1)=28
NP(31,2)=7
NP(31,3)=29
IT(31)=31
KT(31)=31
NP(32,1)=7
NP(32,2)=8
NP(32,3)=29
IT(32)=30
KT(32)=30
NP(33,1)=29
NP(33,2)=8
NP(33,3)=30
IT(33)=31
KT(33)=31
NP(34,1)=8
NP(34,2)=9
NP(34,3)=30
IT(34)=30
KT(34)=30
NP(35,1)=30
NP(35,2)=9
NP(35,3)=31
IT(35)=31
KT(35)=31
NP(36,1)=9
NP(36,2)=10
NP(36,3)=31

```

IT(36)=30
KT(36)=30
NP(37,1)=31
NP(37,2)=10
NP(37,3)=32
IT(37)=31
KT(37)=31
NP(38,1)=10
NP(38,2)=11
NP(38,3)=32
IT(38)=30
KT(38)=30
NP(39,1)=32
NP(39,2)=11
NP(39,3)=33
IT(39)=31
KT(39)=31

```

C

```

DO 120 L=1,NUMEL
KARGA(L)=0
MAT(L)=1
DO 121 I=1,3
ZCAR(L,I)=0.

```

121
120

```

TH(L,I)=1.
CONTINUE

```

2390

```

DO 2390 L=1,6
LICC(L)=0

```

C

```

DO 122 L=1,NUMF1
DO 123 I=1,NELF
DO 124 M=1,3
NP(NELF*L+I,M)=NP(I,M)+NNOSF*L
IT(NELF*L+I)=IT(I)
KT(NELF*L+I)=KT(I)

```

124
123
122

```

CONTINUE
CONTINUE
X(1)=0.
Y(1)=14.
X(2)=.1443376
Y(2)=13.75
X(3)=.2886751
Y(3)=13.5
X(4)=.5773503
Y(4)=13.
X(5)=1.1547005
Y(5)=12.
X(6)=1.7320508
Y(6)=11.
X(7)=3.0022214
Y(7)=8.8
X(8)=4.2723920
Y(8)=6.6
X(9)=5.5425626
Y(9)=4.4
X(10)=6.8127332
Y(10)=2.2
X(11)=8.0829038
Y(11)=0.

```

X(12)=X(1)+XL4
Y(12)=14.
X(13)=X(2)+XL4
Y(13)=13.75
X(14)=X(3)+XL4
Y(14)=13.5
X(15)=X(1)+XL2
Y(15)=14.
X(16)=X(2)+XL2
Y(16)=13.75
X(17)=X(3)+XL2
Y(17)=13.5
X(18)=X(4)+XL2
Y(18)=13.
X(19)=X(5)+XL2
Y(19)=12.
X(20)=X(1)+XL34
Y(20)=14.
X(21)=X(2)+XL34
Y(21)=13.75
X(22)=X(3)+XL34
Y(22)=13.5
X(23)=X(1)+XL
Y(23)=14.
X(24)=X(2)+XL
Y(24)=13.75
X(25)=X(3)+XL
Y(25)=13.5
X(26)=X(4)+XL
Y(26)=13.
X(27)=X(5)+XL
Y(27)=12.
X(28)=X(6)+XL
Y(28)=11.
X(29)=X(7)+XL
Y(29)=8.8
X(30)=X(8)+XL
Y(30)=6.6
X(31)=X(9)+XL
Y(31)=4.4
X(32)=X(10)+XL
Y(32)=2.2
X(33)=X(11)+XL
Y(33)=0.

C

DO 230 L=1,NUMF1
DO 231 I=12,33
X(NNOSF*L+I)=X(I)+L*XL
Y(NNOSF*L+I)=Y(I)
CONTINUE

231

230

C

LEB(1)=1
LEB(2)=2
LEB(3)=3
LEB(4)=4
LEB(5)=6
LEB(6)=7
LEB(7)=8

```

LEB(8)=10
LEB(9)=11
LEB(10)=12
LEB(11)=14
LEB(12)=16
LEB(13)=38
LEB(14)=39

```

```

C
DO 2310 L=1,NUMF1
DO 2310 I=1,14
2310 LEB(L*14+I)=LEB(I)+L*NELF

```

```

C
LI1=NUMF*14

```

```

C
LEB(LI1+1)=5
LEB(LI1+2)=17
LEB(LI1+3)=18
LEB(LI1+4)=19
LEB(LI1+5)=23
LEB(LI1+6)=24
LEB(LI1+7)=27
LEB(LI1+8)=28
LEB(LI1+9)=29
LEB(LI1+10)=30
LEB(LI1+11)=31
LEB(LI1+12)=32
LEB(LI1+13)=33
LEB(LI1+14)=34
LEB(LI1+15)=35
LEB(LI1+16)=36
LEB(LI1+17)=37

```

```

C
LI2=LI1+7
LI3=NUFL1*NELF

```

```

C
DO 2311 I=1,17
2311 LEB(LI2+I)=LEB(LI1+I)+LI3

```

```

C
LI4=LI2+17

```

```

C
ILAUX(1)=15-39
ILAUX(2)=21-39
ILAUX(3)=22-39
ILAUX(4)=25-9
ILAUX(5)=26-39
ILAUX(6)=28-39
ILAUX(7)=29-39
ILAUX(8)=30-39
ILAUX(9)=31-39
ILAUX(10)=32-39
ILAUX(11)=33-39
ILAUX(12)=34-39
ILAUX(13)=35-39
ILAUX(14)=36-39
ILAUX(15)=37-39
IF(ILTRAM-2)2312,2312,2313

```

```

2312 DO 2314 I=1,2
DO 2314 L=1,15

```

```

2314  LEB(LI4+L+(I-1)*15)=ILAUX(L)+I*NELF*NUFL1
C
      NELB0=LI4+30
C
      GO TO 2319
C
2313  LI5=(NUFL1+NUFL2)*NELF
C
      DO 2315 L=1,17
2315  LEB(LI4+L)=LEB(LI1+L)+LI5
C
      LI6=LI4+17
C
      DO 2316 L=1,15
2316  LEB(LI6+L)=ILAUX(L)+NUFL1*NELF
C
      LI7=LI6+15
C
      DO 2317 L=1,15
2317  LEB(LI7+L)=LEB(LI6+L)+NUFL2*NELF
C
      LI8=LI7+15
C
      DO 2318 L=1,15
2318  LEB(LI8+L)=LEB(LI7+L)+NUFL1*NELF
C
      NELB0=LI8+15
C
2319  LPB(1)=1
      LPB(2)=11
      LPB(3)=12
      LPB(4)=15
      LPB(5)=20
C
      DO 2320 L=1,NUMF1
      DO 2320 I=1,5
2320  LPB(L*5+I)=LPB(I)+L*NNOSF
C
      IL1=NUMF*5
C
      LPB(IL1+1)=NUMF*NNOSF+1
      LPB(IL1+2)=LPB(IL1+1)+10
C
      IL2=IL1+2
      IL12=IL2+1
C
      LPB(IL2+1)=2
      LPB(IL2+2)=3
      LPB(IL2+3)=4
      LPB(IL2+4)=5
      LPB(IL2+5)=6
      LPB(IL2+6)=7
      LPB(IL2+7)=8
      LPB(IL2+8)=9
      LPB(IL2+9)=10
C
      IL3=IL2+9
C

```

```
DO 2321 I=1,9
2321 LPB(IL3+I)=LPB(IL2+I)+(NUFL1*NNOSF)
C
IL4=IL3+9
C
IF(ILTRAM-2)2322,2322,2323
2322 DO 2324 I=1,9
2324 LPB(IL4+I)=LPB(IL2+I)+NUMF*NNOSF
C
NUMPB=IL4+9
C
DO 2375 IL=1,2
ILANG(LPB(IL))=1
ILANG(LPB(NUFL1*5+IL))=1
2375 ILANG(LPB(NUMF*5+IL))=1
C
DO 2327 IL=1,27
2327 ILANG(LPB(IL2+IL))=1
GO TO 2329
2323 DO 2325 I=1,9
2325 LPB(IL4+I)=LPB(IL3+I)+NUFL2*NNOSF
C
IL5=IL4+9
C
DO 2326 I=1,9
2326 LPB(IL5+I)=LPB(IL4+I)+NUFL1*NNOSF
C
NUMPB=IL5+9
C
DO 2378 IL=1,2
ILANG(LPB(IL))=1
ILANG(LPB(NUFL1*5+IL))=1
ILANG(LPB((NUFL1+NUFL2)*5+IL))=1
2378 ILANG(LPB(NUMF*5+IL))=1
C
DO 2328 IL=1,36
2328 ILANG(LPB(IL2+IL))=1
C
2329 ILCC(1,1)=1
ILCC(1,2)=1
ILCC(1,3)=0
ILCC(1,4)=1
ILCC(1,5)=0
ILCC(1,6)=1
C
DO 2370 L=1,6
2370 ILCC(2,L)=ILCC(1,L)
C
ILCC(3,1)=0
ILCC(3,2)=0
ILCC(3,3)=0
ILCC(3,4)=0
ILCC(3,5)=0
ILCC(3,6)=1
C
IL6=NUFL1*5
IL7=IL6+3
C
```

```
DO 2330 L=4,IL6
DO 2330 I=1,6
2330 ILCC(L,I)=ILCC(3,I)
C
IF(ILTRAM-2)2331,2331,2332
C
2331 ILB=NUMF*5
C
DO 2333 L=IL7,IL8
DO 2333 I=1,6
2333 ILCC(L,I)=ILCC(3,I)
C
DO 2334 L=IL12,NUMPB
DO 2334 I=1,6
2334 ILCC(L,I)=ILCC(1,I)
C
DO 2371 I=1,2
DO 2371 L=1,6
ILCC(IL6+I,L)=ILCC(1,L)
2371 ILCC(2*IL6+I,L)=ILCC(1,L)
C
ILCC(IL3+1,1)=1
ILCC(IL3+1,2)=1
ILCC(IL3+1,3)=0
ILCC(IL3+1,4)=1
ILCC(IL3+1,5)=0
ILCC(IL3+1,6)=0
C
DO 2373 I=1,8
DO 2373 L=1,6
2373 ILCC(IL3+I+1,L)=ILCC(IL3+1,L)
C
DO 2335 L=1,IL2
2335 ILTPN(LPB(L))=1
DO 2382 IL=1,2
ILTPN(LPB(IL))=0
ILTPN(LPB(NUFL1*5+IL))=0
2382 ILTPN(LPB(NUMF*5+IL))=0
GO TO 2349
C
2332 IL9=(NUFL1+NUFL2)*5
C
DO 2336 L=IL7,IL9
DO 2336 I=1,6
2336 ILCC(L,I)=ILCC(3,I)
C
IL10=IL9+3
IL11=NUMF*5
C
DO 2337 L=IL10,IL11
DO 2337 I=1,6
2337 ILCC(L,I)=ILCC(3,I)
C
DO 2338 L=IL12,NUMPB
DO 2338 I=1,6
2338 ILCC(L,I)=ILCC(1,I)
C
DO 2372 I=1,2
```

```

DO 2372 L=1,6
ILCC(IL6+I,L)=ILCC(1,L)
ILCC(IL9+I,L)=ILCC(1,L)
2372 ILCC(5*NUMF+I,L)=ILCC(1,L)
C
ILCC(IL3+1,1)=1
ILCC(IL3+1,2)=1
ILCC(IL3+1,3)=0
ILCC(IL3+1,4)=1
ILCC(IL3+1,5)=0
ILCC(IL3+1,6)=0
DO 2386 I=1,8
DO 2386 L=1,6
2386 ILCC(IL3+I+1,L)=ILCC(IL3+1,L)
DO 2374 I=1,9
DO 2374 L=1,6
2374 ILCC(IL4+I,L)=ILCC(IL3+1,L)
C
DO 2339 L=1,IL2
2339 ILTPN(LPB(L))=1
DO 2385 IL=1,2
ILTPN(LPB(IL))=0
ILTPN(LPB(NUFL1*5+IL))=0
ILTPN(LPB((NUFL1+NUFL2)*5+IL))=0
2385 ILTPN(LPB(NUMF*5+IL))=0
C
C IMPRESSAO DOS DADOS NO ARQUIVO FOR01.DAT
C
2349 WRITE(1,2350)NUMEL,NUMNP,NUMBC,NUMPB,NLOAD,NMAT,NELBO,
IISKEW,NANGL,NPDCC
2350 FORMAT(1X,I5,I4,I2,I4,2I2,I4,3I2)
IF(NPDCC)2351,2352,2351
2351 DO 2353 IL=1,NPDCC
2353 WRITE(1,2354)NPDC(IL)
2354 FORMAT(1X,I4)
2352 WRITE(1,2355)NMAT,EM(1),CP(1),DENS(1),DILAT(1)
2355 FORMAT(1X,I3,F20.10,2X,3(F5.3,2X))
DO 2356 L=1,NELBO
2356 WRITE(1,2357)LEB(L),(NP(LEB(L),I),I=1,3),
1(ILANG(NP(LEB(L),I)),I=1,3),(ILTPN(NP(LEB(L),I)),I=1,3)
2357 FORMAT(1X,I5,3I4,6I3)
WRITE(1,2358)ANGLE(1)
2358 FORMAT(1X,F10.5)
DO 2359 L=1,NUMEL
2359 WRITE(1,2360)L,(NP(L,I),I=1,3),MAT(L),IT(L),KT(L),KARGA(L),
1(ZCAR(L,I),I=1,3),(TH(L,I),I=1,3)
2360 FORMAT(1X,I5,3I4,I5,2I4,I2,6F4.1)
DO 2361 L=1,NUMNP
2361 WRITE(1,2362)L,X(L),Y(L)
2362 FORMAT(1X,I5,2F20.6)
DO 2363 L=1,NUMPB
2363 WRITE(1,2364)LPB(L),(ILCC(L,I),I=1,6),(LICC(I),I=1,6)
2364 FORMAT(1X,I5,12I3)
CALL EXIT
END

```


2.3 - Programa Prē-processador Para Geração Automática das Redes de Elementos Finitos Com Maior Discretização no Centro (GERC)

C
C
C

C
C
C
C

***** GERC *****

DIMENSION NP(1000,3),IT(1000),KT(1000),KARGA(1000),ZCAR(1000,3)
I,TH(1000,3),X(600),Y(600),LEB(600),ILTPN(600),LPB(250),EM(1),
2CP(1),ILCC(250,6),ILANG(600),ANGLE(3),NPDC(6),MAT(1000),
3ILAUX(22),LICC(6),DENS(1),DILAT(1)

OS VETORES E MATRIZES SAO ZERADOS AUTOMATICAMENTE QUANDO
DESCRITOS NO COMANDO DIMENSION

NUMBC=1
NLOAD=1
NMAT=1
ISKEW=1
NANGL=1
ANGLE(1)=120.
EM(1)=2000000.
CP(1)=0.2
DENS(1)=0.
DILAT(1)=0.
NPDCC=4
NPDC(1)=131
NPDC(2)=143
NPDC(3)=287
NPDC(4)=299

C
C
C
C
C
C
C
C
C

.NUMERO DE TRAMOS QUE COMPOEM A ESTRUTURA (ILTRAM)
.NUMERO DE FAIXAS BASICAS QUE COMPOEM A ESTRUTURA (NUMF)
.NUMERO DE FAIXAS BASICAS QUE COMPOEM OS TRAMOS EXTERNOS (NUFL1)
.NUMERO DE FAIXAS BASICAS QUE COMPOEM O TRAMO INTERNO, SE A
PLACA TIVER 3 TRAMOS (NUFL2)
.NUMERO DE ELEMENTOS POR FAIXA BASICA (NELF)
.NUMERO DE NOS POR FAIXA BASICA (NNOSF)

NELF=50
NNOSF=26
ILTRAM=3
NUFL1=5
NUFL2=6
NUMF=2*NUFL1
IF(ILTRAM-2)510,510,511
511 NUMF=NUMF+NUFL2
510 NUMF1=NUMF-1
NUMEL=NUMF*NELF
NUMNP=NUMF*NNOSF+13

C
C
C

LARGURA DE CADA FAIXA BASICA (XL)

XL=2.1560000
XL2=XL/2.
XL4=XL/4.
XL34=XL*3./4.

C

NP(1,1)=1
NP(1,2)=2
NP(1,3)=27
IT(1)=1

KT(1)=1
NP(2,1)=27
NP(2,2)=2
NP(2,3)=28
IT(2)=2
KT(2)=2
NP(3,1)=2
NP(3,2)=3
NP(3,3)=28
IT(3)=1
KT(3)=1
NP(4,1)=28
NP(4,2)=3
NP(4,3)=29
IT(4)=2
KT(4)=2
NP(5,1)=3
NP(5,2)=4
NP(5,3)=29
IT(5)=5
KT(5)=5
NP(6,1)=29
NP(6,2)=4
NP(6,3)=17
IT(6)=6
KT(6)=6
NP(7,1)=29
NP(7,2)=17
NP(7,3)=30
IT(7)=7
KT(7)=7
NP(8,1)=4
NP(8,2)=5
NP(8,3)=17
IT(8)=8
KT(8)=8
NP(9,1)=17
NP(9,2)=5
NP(9,3)=18
IT(9)=7
KT(9)=7
NP(10,1)=17
NP(10,2)=18
NP(10,3)=30
IT(10)=8
KT(10)=8
NP(11,1)=30
NP(11,2)=18
NP(11,3)=31
IT(11)=7
KT(11)=7
NP(12,1)=5
NP(12,2)=6
NP(12,3)=18
IT(12)=12
KT(12)=12
NP(13,1)=18
NP(13,2)=6

NP(13,3)=14
IT(13)=13
KT(13)=13
NP(14,1)=18
NP(14,2)=14
NP(14,3)=19
IT(14)=14
KT(14)=14
NP(15,1)=18
NP(15,2)=19
NP(15,3)=31
IT(15)=12
KT(15)=12
NP(16,1)=31
NP(16,2)=19
NP(16,3)=24
IT(16)=13
KT(16)=13
NP(17,1)=31
NP(17,2)=24
NP(17,3)=32
IT(17)=14
KT(17)=14
NP(18,1)=6
NP(18,2)=7
NP(18,3)=14
IT(18)=18
KT(18)=18
NP(19,1)=14
NP(19,2)=7
NP(19,3)=15
IT(19)=14
KT(19)=14
NP(20,1)=14
NP(20,2)=15
NP(20,3)=19
IT(20)=18
KT(20)=18
NP(21,1)=19
NP(21,2)=15
NP(21,3)=20
IT(21)=14
KT(21)=14
NP(22,1)=19
NP(22,2)=20
NP(22,3)=24
IT(22)=18
KT(22)=18
NP(23,1)=24
NP(23,2)=20
NP(23,3)=25
IT(23)=14
KT(23)=14
NP(24,1)=24
NP(24,2)=25
NP(24,3)=32
IT(24)=18
KT(24)=18

NP(25,1)=32
NP(25,2)=25
NP(25,3)=33
IT(25)=14
KT(25)=14
NP(26,1)=7
NP(26,2)=8
NP(26,3)=15
IT(26)=18
KT(26)=18
NP(27,1)=15
NP(27,2)=8
NP(27,3)=16
IT(27)=14
KT(27)=14
NP(28,1)=15
NP(28,2)=16
NP(28,3)=20
IT(28)=18
KT(28)=18
NP(29,1)=20
NP(29,2)=16
NP(29,3)=21
IT(29)=14
KT(29)=14
NP(30,1)=20
NP(30,2)=21
NP(30,3)=25
IT(30)=18
KT(30)=18
NP(31,1)=25
NP(31,2)=21
NP(31,3)=26
IT(31)=14
KT(31)=14
NP(32,1)=25
NP(32,2)=26
NP(32,3)=33
IT(32)=18
KT(32)=18
NP(33,1)=33
NP(33,2)=26
NP(33,3)=34
IT(33)=14
KT(33)=14
NP(34,1)=8
NP(34,2)=9
NP(34,3)=16
IT(34)=18
KT(34)=18
NP(35,1)=16
NP(35,2)=9
NP(35,3)=21
IT(35)=35
KT(35)=35
NP(36,1)=21
NP(36,2)=9
NP(36,3)=22

IT(36)=36
KT(36)=36
NP(37,1)=21
NP(37,2)=22
NP(37,3)=26
IT(37)=18
KT(37)=18
NP(38,1)=26
NP(38,2)=22
NP(38,3)=34
IT(38)=35
KT(38)=35
NP(39,1)=34
NP(39,2)=22
NP(39,3)=35
IT(39)=36
KT(39)=36
NP(40,1)=9
NP(40,2)=10
NP(40,3)=22
IT(40)=8
KT(40)=8
NP(41,1)=22
NP(41,2)=10
NP(41,3)=23
IT(41)=7
KT(41)=7
NP(42,1)=22
NP(42,2)=3
NP(42,3)=35
IT(42)=8
KT(42)=8
NP(43,1)=35
NP(43,2)=23
NP(43,3)=36
IT(43)=7
KT(43)=7
NP(44,1)=10
NP(44,2)=11
NP(44,3)=23
IT(44)=8
KT(44)=8
NP(45,1)=23
NP(45,2)=11
NP(45,3)=36
IT(45)=45
KT(45)=45
NP(46,1)=36
NP(46,2)=11
NP(46,3)=37
IT(46)=46
KT(46)=46
NP(47,1)=11
NP(47,2)=12
NP(47,3)=37
IT(47)=1
KT(47)=1
NP(48,1)=37

NP(48,2)=12
NP(48,3)=38
IT(48)=2
KT(48)=2
NP(49,1)=12
NP(49,2)=13
NP(49,3)=38
IT(49)=1
KT(49)=1
NP(50,1)=38
NP(50,2)=13
NP(50,3)=39
IT(50)=2
KT(50)=2

C

DO 120 L=1,NUMEL
KARGA(L)=0
MAT(L)=1
DO 121 I=1,3
ZCAR(L,I)=0.
121 TH(L,I)=1.
120 CONTINUE
DO 2390 L=1,6
2390 LICC(L)=0

C

DO 122 L=1,NUMF1
DO 123 I=1,NELF
DO 124 M=1,3
124 NP(NELF*L+I,M)=NP(I,M)+NNOSF*L
IT(NELF*L+I)=IT(I)
KT(NELF*L+I)=KT(I)
123 CONTINUE
122 CONTINUE
X(1)=0.
Y(1)=14.
X(2)=1.1547005
Y(2)=12.
X(3)=2.3094011
Y(3)=10.
X(4)=2.8867513
Y(4)=9.
X(5)=3.4641016
Y(5)=8.
X(6)=3.7527768
Y(6)=7.5
X(7)=4.0414519
Y(7)=7.
X(8)=4.3301270
Y(8)=6.5
X(9)=4.6188022
Y(9)=6.
X(10)=5.1961524
Y(10)=5.
X(11)=5.7735027
Y(11)=4.
X(12)=6.9282032
Y(12)=2.
X(13)=8.0829038

Y(13)=0.
X(14)=X(6)+XL4
Y(14)=7.5
X(15)=X(7)+XL4
Y(15)=7.
X(16)=X(8)+XL4
Y(16)=6.5
X(17)=X(4)+XL2
Y(17)=9.
X(18)=X(5)+XL2
Y(18)=8.
X(19)=X(6)+XL2
Y(19)=7.5
X(20)=X(7)+XL2
Y(20)=7.
X(21)=X(8)+XL2
Y(21)=6.5
X(22)=X(9)+XL2
Y(22)=6.
X(23)=X(10)+XL2
Y(23)=5.
X(24)=X(6)+XL34
Y(24)=7.5
X(25)=X(7)+XL34
Y(25)=7.
X(26)=X(8)+XL34
Y(26)=6.5
X(27)=X(1)+XL
Y(27)=14.
X(28)=X(2)+XL
Y(28)=12.
X(29)=X(3)+XL
Y(29)=10.
X(30)=X(4)+XL
Y(30)=9.
X(31)=X(5)+XL
Y(31)=8.
X(32)=X(6)+XL
Y(32)=7.5
X(33)=X(7)+XL
Y(33)=7.
X(34)=X(8)+XL
Y(34)=6.5
X(35)=X(9)+XL
Y(35)=6.
X(36)=X(10)+XL
Y(36)=5.
X(37)=X(11)+XL
Y(37)=4.
X(38)=X(12)+XL
Y(38)=2.
X(39)=X(13)+XL
Y(39)=0.

C

DO 230 L=1,NUMF1
DO 231 =14,39
X(NNOSF*L+I)=X(I)+L*XL
Y(NNOSF*L+I)=Y(I)

231

230 CONTINUE

C

LEB(1)=1
LEB(2)=2
LEB(3)=49
LEB(4)=50

C

DO 2310 L=1,NUMF1
DO 2310 I=1,4

2310 LEB(L*4+I)=LEB(I)+L*NELF

C

LI1=NUMF*4

C

LEB(LI1+1)=3
LEB(LI1+2)=4
LEB(LI1+3)=5
LEB(LI1+4)=6
LEB(LI1+5)=8
LEB(LI1+6)=9
LEB(LI1+7)=12
LEB(LI1+8)=13
LEB(LI1+9)=18
LEB(LI1+10)=19
LEB(LI1+11)=26
LEB(LI1+12)=27
LEB(LI1+13)=34
LEB(LI1+14)=35
LEB(LI1+15)=36
LEB(LI1+16)=40
LEB(LI1+17)=41
LEB(LI1+18)=44
LEB(LI1+19)=45
LEB(LI1+20)=46
LEB(LI1+21)=47
LEB(LI1+22)=48

C

LI2=LI1+22
LI3=NUFL1*NELF

C

DO 2311 I=1,22

2311 LEB(LI2+I)=LEB(LI1+I)+LI3

C

LI4=LI2+22

C

ILAUX(1)=3-50
ILAUX(2)=4-50
ILAUX(3)=5-50
ILAUX(4)=6-50
ILAUX(5)=7-50
ILAUX(6)=10-50
ILAUX(7)=11-50
ILAUX(8)=15-50
ILAUX(9)=16-50
ILAUX(10)=17-50
ILAUX(11)=24-50
ILAUX(12)=25-50
ILAUX(13)=32-50
ILAUX(14)=33-50

```
    ILAUX(15)=38-50
    ILAUX(16)=39-50
    ILAUX(17)=42-50
    ILAUX(18)=43-50
    ILAUX(19)=45-50
    ILAUX(20)=46-50
    ILAUX(21)=47-50
    ILAUX(22)=48-50
    IF(ILTRAM-2)2312,2312,2313
2312  DO 2314 I=1,2
      DO 2314 L=1,22
2314  LEB(LI4+L+(I-1)*22)=ILAUX(L)+I*NELF*NUFL1
      C
      NELB0=LI4+44
      C
      GO TO 2319
      C
2313  LI5=(NUFL1+NUFL2)*NELF
      C
      DO 2315 L=1,22
2315  LEB(LI4+L)=LEB(LI1+L)+LI5
      C
      LI6=LI4+22
      C
      DO 2316 L=1,22
2316  LEB(LI6+L)=ILAUX(L)+NUFL1*NELF
      C
      LI7=LI6+22
      C
      DO 2317 L=1,22
2317  LEB(LI7+L)=LEB(LI6+L)+NUFL2*NELF
      C
      LI8=LI7+22
      C
      DO 2318 L=1,22
2318  LEB(LI8+L)=LEB(LI7+L)+NUFL1*NELF
      C
      NELB0=LI8+22
      C
2319  LPB(1)=1
      LPB(2)=13
      C
      DO 2320 L=1,NUMF1
      DO 2320 I=1,2
2320  LPB(L*2+I)=LPB(I)+L*NNOSF
      C
      IL1=NUMF*2
      C
      LPB(IL1+1)=NUMF*NNOSF+1
      LPB(IL1+2)=LPB(IL1+1)+12
      C
      IL2=IL1+2
      IL12=IL2+1
      C
      LPB(IL2+1)=2
      LPB(IL2+2)=3
      LPB(IL2+3)=4
      LPB(IL2+4)=5
```

LPB(IL2+5)=6
LPB(IL2+6)=7
LPB(IL2+7)=8
LPB(IL2+8)=9
LPB(IL2+9)=10
LPB(IL2+10)=11
LPB(IL2+11)=12

C
IL3=IL2+11

C
DO 2321 I=1,11
2321 LPB(IL3+I)=LPB(IL2+I)+(NUFL1*NNOSF)

C
IL4=IL3+11

C
IF (ILTRAM-2)2322,2322,2323
2322 DO 2324 I=1,11
2324 LPB(IL4+I)=LPB(IL2+I)+NUMF*NNOSF

C
NUMPB=IL4+11

C
DO 2375 IL=1,2
ILANG(LPB(IL))=1
ILANG(LPB(NUFL1*2+IL))=1
2375 ILANG(LPB(NUMF*2+IL))=1

C
DO 2327 IL=1,33
2327 ILANG(LPB(IL2+IL))=1
GO TO 2329

2323 DO 2325 I=1,11
2325 LPB(IL4+I)=LPB(IL3+I)+NUFL2*NNOSF

C
IL5=IL4+11

C
DO 2326 I=1,11
2326 LPB(IL5+I)=LPB(IL4+I)+NUFL1*NNOSF

C
NUMPB=IL5+11

C
DO 2378 IL=1,2
ILANG(LPB(IL))=1
ILANG(LPB(NUFL1*2+IL))=1
ILANG(LPB((NUFL1+NUFL2)*2+IL))=1
2378 ILANG(LPB(NUMF*2+IL))=1

DO 2328 IL=1,44
2328 ILANG(LPB(IL2+IL))=1

2329 ILCC(1,1)=1
ILCC(1,2)=1
ILCC(1,3)=0
ILCC(1,4)=1
ILCC(1,5)=0
ILCC(1,6)=1

C
DO 2370 L=1,6
2370 ILCC(2,L)=ILCC(1,L)

C
ILCC(3,1)=0
ILCC(3,2)=0

```
ILCC(3,3)=0
ILCC(3,4)=0
ILCC(3,5)=0
ILCC(3,6)=1
C
  IL6=NUFL1*2
  IL7=IL6+3
C
  DO 2330 L=4,IL6
  DO 2330 I=1,6
2330  ILCC(L,I)=ILCC(3,I)
      IF(ILTRAM-2)2331,2331,2332
2331  IL8=NUMF*2
      DO 2333 L=IL7,IL8
      DO 2333 I=1,6
2333  ILCC(L,I)=ILCC(3,I)
C
      DO 2334 L=IL12,NUMPB
      DO 2334 I=1,6
2334  ILCC(L,I)=ILCC(1,I)
C
      DO 2371 I=1,2
      DO 2371 L=1,6
      ILCC(IL6+I,L)=ILCC(1,L)
2371  ILCC(2*IL6+I,L)=ILCC(1,L)
C
      ILCC(IL3+1,1)=1
      ILCC(IL3+1,2)=1
      ILCC(IL3+1,3)=0
      ILCC(IL3+1,4)=1
      ILCC(IL3+1,5)=0
      ILCC(IL3+1,6)=0
C
      DO 2373 I=1,10
      DO 2373 L=1,6
2373  ILCC(IL3+1+I,L)=ILCC(IL3+1,L)
C
      DO 2335 L=1,IL2
2335  ILTPN(LPB(L))=1
      DO 2382 IL=1,2
      ILTPN(LPB(IL))=0
      ILTPN(LPB(NUFL1*2+IL))=0
2382  ILTPN(LPB(NUMF*2+IL))=0
      GO TO 2349
C
2332  IL9=(NUFL1+NUFL2)*2
C
      DO 2336 L=IL7,IL9
      DO 2336 I=1,6
2336  ILCC(L,I)=ILCC(3,I)
C
      IL10=IL9+3
      IL11=NUMF*2
C
      DO 2337 L=IL10,IL11
      DO 2337 I=1,6
2337  ILCC(L,I)=ILCC(3,I)
      DO 2338 L=IL12,NUMPB
```

```

DO 2338 I=1,6
2338 ILCC(L,I)=ILCC(I,I)
DO 2372 I=1,2
DO 2372 L=1,6
ILCC(IL6+I,L)=ILCC(I,L)
ILCC(IL9+I,L)=ILCC(I,L)
2372 ILCC(2*NUMF+I,L)=ILCC(I,L)
C
ILCC(IL3+1,1)=1
ILCC(IL3+1,2)=1
ILCC(IL3+1,3)=0
ILCC(IL3+1,4)=1
ILCC(IL3+1,5)=0
ILCC(IL3+1,6)=0
DO 2386 I=1,10
DO 2386 L=1,6
2386 ILCC(IL3+I+1,L)=ILCC(IL3+1,L)
DO 2374 I=1,11
DO 2374 L=1,6
2374 ILCC(IL4+I,L)=ILCC(IL3+1,L)
C
DO 2339 L=1,IL2
2339 ILTPN(LPB(L))=1
DO 2385 IL=1,2
ILTPN(LPB(IL))=0
ILTPN(LPB(NUFL1*2+IL))=0
ILTPN(LPB((NUFL1+NUFL2)*2+IL))=0
2385 ILTPN(LPB(NUMF*2+IL))=0
C
C IMPRESSAD DOS DADOS NO ARQUIVO FOR01.DAT
C
2349 WRITE(1,2350)NUMEL,NUMNP,NUMBC,NUMPB,NLOAD,NMAT,NELBO,
1ISKEW,NANGL,NPDCC
2350 FORMAT(1X,I5,I4,I2,I4,2I2,I4,3I2)
IF(NPDCC)2351,2352,2351
2351 DO 2353 IL=1,NPDCC
2353 WRITE(1,2354)NPDC(IL)
2354 FORMAT(1X,I4)
2352 WRITE(1,2355)NMAT,EM(1),CP(1),DENS(1),DILAT(1)
2355 FORMAT(1X,I3,F20.10,2X,3(F5.3,2X))
DO 2356 L=1,NELBO
2356 WRITE(1,2357)LEB(L),(NP(LEB(L),I),I=1,3),(ILANG(NP(LEB(L),I)
1),I=1,3),(ILTPN(NP(LEB(L),I)),I=1,3)
2357 FORMAT(1X,I5,3I4,6I3)
WRITE(1,2358)ANGLE(1)
2358 FORMAT(1X,F10.5)
DO 2359 L=1,NUMEL
2359 WRITE(1,2360)L,(NP(L,I),I=1,3),MAT(L),IT(L),KT(L),KARGA(L),(
1ZCAR(L,I),I=1,3),(TH(L,I),I=1,3)
2360 FORMAT(1X,I5,3I4,I5,2I4,I2,6F4.1)
DO 2361 L=1,NUMNP
2361 WRITE(1,2362)L,X(L),Y(L)
2362 FORMAT(1X,I5,2F20.6)
DO 2363 L=1,NUMPB
2363 WRITE(1,2364)LPB(L),(ILCC(L,I),I=1,6),(LICC(I),I=1,6)
2364 FORMAT(1X,I5,12I3)
CALL EXIT
END

```

BIBLIOGRAFIA

- 01 - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7188: carga móvel em ponte rodoviária e passarela de pedestre. Rio de Janeiro, 1984. 6 p.
- 02 - BREBBIA, C.A. & CONNOR, J.J. Fundamentals of finite element techniques for structural engineers. London, Butterworths, 1973.
- 03 - DEGASPARE, J.C. Aplicações do elemento finito T18 para flexão de placas delgadas elástico-isótropas. São Carlos, EESC-USP, 1978. Tese de Mestrado.
- 04 - DESAI, C.S. & ABEL, J.F. Introduction to the finite element method. New York, Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
- 05 - ELSGOLTZ, L. Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. Moscu, Editorial Mir, 1977.
- 06 - FELIPPA, C.A. Refined finite element analysis of linear and non-linear two-dimensional structures. Berkeley, University of California, SESM. 66-22, 1966.
- 07 - HOLAND, I. & BELL, K. Finite element methods in stress analysis. Trondheim Norway Tapir, 1969.
- 08 - MARTINELLI, D.A.O. & MONTANARI, I. Placas elásticas. São Carlos, EESC-USP, 1974 (Publ. nº 186).
- 09 - OLSEN, H. & REINITZHUBER, F. Lajes. Rio de Janeiro, Globo, 1957.
- 10 - PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of matrix structural analysis. New York, McGraw-Hill, 1968.
- 11 - RÜSCH, H. Berechnungstafeln für schiefwinklige fahrbahnplatten von strassenbrücken. Berlin, Ernest & Sohn, 1967.

- 12 - SAVASSI, W. Contribuição ao emprego dos elementos finitos em elasticidade plana. São Carlos, EESC-USP, 1972. Tese de Doutorado.
- 13 - SCHLEICHER, C. & WEGENER, B. Durchlaufende schiefe platten. Berlin, VEB Verlag für Bauwesen, 1971.
- 14 - TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. Teoria da elasticidade, 3ª ed. Trad. Sérgio Fernandes Villaça, Humberto Lima Soriano, Hierônimo Santos Souza. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1980.
- 15 - TIMOSHENKO, S.P. & WOINOWSKY - KRIEGER, S. Theory of plates and shells, 2ª ed. Tokio, McGraw-Hill Kōgakusha, 1959.
- 16 - VOLTERRA, E. & GAINES, J.H. Advanced strength of materials. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1971.
- 17 - WILLIAMS, M.L. Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending. In: FIRST US NATIONAL CONGRESS OF APPLIED MECHANICS, Chicago, Jun. 11-16, 1951. Journal of Applied Mechanics, 1951.
- 18 - ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method in engineering science. New York, McGraw-Hill, 1971.