

V

**O ELEMENTO FINITO TRIDIMENSIONAL
ISOPARAMÉTRICO LINEAR E APLICAÇÕES.**

Eng. ELIANA M. DE MELLO FRANCISCO ROSSI

Orientador: Prof. Dr. WALTER SAVASSI

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
ÁREA DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

O ELEMENTO FINITO TRIDIMENSIONAL
ISOPARAMÉTRICO LINEAR E APLICAÇÕES

ENG. ELIANA MARIA DE MELLO FRANCISCO ROSSI

SÃO CARLOS, JUNHO DE 1987

**O ELEMENTO FINITO TRIDIMENSIONAL
ISOPARAMÉTRICO LINEAR E APLICAÇÕES**

ENG. ELIANA MARIA DE MELLO FRANCISCO ROSSI

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para a obtenção do
título de "Mestre em Engenharia de Estruturas"

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Walter Savassi

Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan

Prof. Dr. Fernando Venâncio Filho

ORIENTADOR

PROF. DR. WALTER SAVASSI

Aos meus pais,
Amadeu, Nicolas e Yuri.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Professor Doutor Walter Savassi pela orientação dada durante o desenvolvimento desse trabalho.

Ao Professor Francisco Antonio Menezes pela valiosa cooperação na fase de implantação do programa.

Ao C.C.U.E.C. (Centro de Computação da UNICAMP) pelo uso dos seus recursos computacionais.

Aos colegas do Departamento de Construção Civil da Faculdade de Engenharia de Limeira - UNICAMP, pelo incentivo constante.

Aos funcionários: Elisabete Miranda Gonçalves pela eficiência e esmero nos trabalhos de datilografia; Dalva Maria Michel Ferrari e Cristiane Aparecida Delmondi pelo capricho com que executaram os desenhos; Rosângela Fontes pela digitação e conferência dos arquivos de dados.

A Vera Christina de Mello Francisco dos Santos pelo auxílio durante a revisão.

R E S U M O

O presente trabalho tem por objetivo, através da utilização do método dos elementos finitos, o estudo completo sobre a formulação de um elemento para o equilíbrio de sólidos tridimensionais, com aplicações à análise estrutural em regime elástico.

Optou-se pelo elemento isoparamétrico linear, hexaédrico, com oito nós, uma vez que o mesmo revela uma clara superioridade sobre o elemento tetraédrico.

A fim de realizar-se testes de comparação dos resultados obtidos, tanto em problemas puramente teóricos como em casos reais, desenvolveu-se um programa de cálculo automático, que fornece, além das deformações, os valores das tensões principais e suas respectivas direções nos pontos nodais da estrutura em estudo.

Apresentam-se exemplos com casos simples para realçar a precisão dos resultados. Outros exemplos tem suas soluções numéricas comparadas com as respectivas soluções analíticas, quando existentes.

No final do trabalho, encontram-se, em apêndice, as listagens completas e pormenorizadas dos programas principais e suas subrotinas. Todos os programas foram elaborados para um computador PDP-10 da Digital, e depois adaptados ao VAX II modelo 785.

A B S T R A C T

This paper presents a complete analysis of the formulation of an element for the equilibrium of solid bodies with the use of the finite element technique for application to structural analysis in elastic range.

A choice was made for the linear isoparametric hexahedral element with eight nodes, as it has a clear superiority over the tetrahedral element.

With the objective of performing comparison testes of the results obtained, as in purely theoretical problems as in real ones, a computer code was developed, that gives the values of the principal stresses and their directions, as well as the strains on the nodal points of the structure being analysed.

Simple case examples are shown to enhance the accuracy of the results. Other examples have their numerical solutions compared to their respective analytical solutions when existent.

At the end of this thesis are shown the complete and detailed computer printouts of the main programs and their subroutines. The programs were coded for the Digital PDP-10 computer, and then modified to suit to the VAX 11 model 785.

LISTA DE NOTAÇÕES

$[\quad]$	- matriz quadrada ou retangular;
$ \quad $	- determinante;
T	- como expoente indicará transposta da matriz base;
\underline{B}	- letras com o símbolo til na base serão utilizadas para indicar matrizes;
$- 1$	- como expoente indica matriz inversa;
$[X]$	- indica a referência bibliográfica X;
E	- módulo de elasticidade do material;
ν	- coeficiente de Poisson;
\int_s	- integral de área;
\int_v	- integral de volume;
π_p	- energia potencial de deformação total;
U	- energia potencial de deformação;
Ω	- energia potencial das cargas externas;
W	- energia potencial de deformação específica;
W^*	- energia potencial de deformação complementar específica;
$\underline{\sigma}$	- matriz das componentes de tensão;
$\underline{\epsilon}$	- matriz das componentes de deformação;

- $\int_S \underline{b}^T \underline{u} dS$ - potencial das cargas externas;
- $\int_V \underline{T}^T \underline{u} dV$ - potencial das forças de massa;
- $\underline{u}^T = [u \ v \ w]$ - componentes dos deslocamentos;
- ϕ - matriz que contém as funções de mapeamento;
- \underline{u}^n - vetor dos deslocamentos nodais (u);
- \underline{v}^n - vetor dos deslocamentos nodais (v);
- \underline{w}^n - vetor dos deslocamentos nodais (w);
- \underline{J} - matriz Jacobiana
- J_{mn}^* - elemento da linha m e coluna n da matriz inversa da matriz Jacobiana;
- $\det \underline{J}$ - determinante da matriz Jacobiana.

I N D I C E

I	- INTRODUÇÃO	I.1
II	- O PROBLEMA TRIDIMENSIONAL	II.1
II.1	- Teoria Elástica Básica	II.1
II.1.1	- Componentes de Tensão	II.1
II.1.2	- Componentes de Deformação	II.3
II.1.3	- Relações Tensão-Deformação	II.4
II.2	- A Formulação Variacional	II.5
II.3	- Os Elementos Finitos	II.9
II.4	- Elementos Isoparamétricos	II.11
II.4.1	- Elemento Isoparamétrico Plano	II.12
II.5	- Elemento Isoparamétrico Tridimensional Linear..	II.20
II.5.1	- Sistema de Coordenadas Naturais	II.20
II.5.2	- Funções Deslocamento	II.21
II.5.3	- Matriz de Transformação B	II.23
II.5.4	- A Matriz Jacobiana	II.25
II.5.5	- Matriz de Rigidez K	II.29
II.5.6	- Quadratura de Gauss	II.30
II.5.7	- Vetor de Carga Nodal Equivalente	II.31
II.5.8	- Determinação das Tensões e Deformações.	II.32
II.5.9	- Tensões e Direções Principais	II.36
III	- APLICAÇÕES	III.1
III.1	- Exemplo 1: Placa com Momento na Extremidade ...	III.1
III.2	- Exemplo 2: Placa com Forças na Extremidade	III.6
III.3	- Exemplo 3: Verificação da influência do número de elementos	III.10
III.4	- Exemplo 4: Laje Cogumelo	III.14
IV	- ESTRUTURAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO EM LINGUAGEM FORTRAN	IV.1
IV.1	- Organograma do Programa Geral	IV.2
IV.2	- Principais Variáveis	IV.3
IV.3	- Principais Matrizes e Vetores	IV.4
IV.4	- Descrição dos Programas	IV.6
IV.4.1	- DADOS . FOR	IV.6
IV.4.2	- RIGCAR . FOR	IV.7

IV.4.3 - MONTD . FOR	IV.8
IV.4.4 - SOLUCD . FOR	IV.8
IV.4.5 - DEFORTEN . FOR	IV.8
IV.5 - Entrada de Dados	IV.8
V - CONSIDERAÇÕES FINAIS	V.1
VI - BIBLIOGRAFIA	VI.1
APÊNDICE I	A.I.1
APÊNDICE II	A.II.1
APÊNDICE III	A.III.1
Programas em Linguagem FORTRAN	A.III.1
Programa DADOS	A.III.1
Programa RIGCAR	A.III.5
Programa MONTD	A.III.18
Programa SOLUCD	A.III.23
Programa DEFORTEN	A.III.26

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

No estudo de equilíbrios estruturais por modelos matemáticos é habitual recorrer-se a hipóteses simplificadoras. Esta necessidade deriva das dificuldades inerentes ao tratamento numérico de grandes volumes de informações que surgem no estudo de equilíbrios tridimensionais (caracterizados por três componentes de deslocamento, por seis componentes de deformação e por seis componentes de tensão) em estruturas maciças e laminares, quando consideradas com suas três dimensões.

Atualmente com equipamentos computacionais mais poderosos, o estudo desses equilíbrios tridimensionais torna-se viável em termos de aplicações práticas, desde que se disponha de métodos numéricos adequados.

Um dos métodos para estudo de equilíbrios estruturais é o método dos elementos finitos, que teve as publicações de ZIENKIEWICZ [17] e HOLLAND e BELL [9] como primeiros livros textos.

Neste método divide-se a estrutura num conjunto de elementos sem sobreposição nem aberturas. Em seguida define-se o comportamento de cada um deles em função de forças e deslocamentos em determinados pontos (pontos nodais). Finalmente analisa-se o comportamento do conjunto impondo as condições de equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamentos nos pontos nodais.

Desde a proposição do método, tem-se verificado em diversos trabalhos publicados (DEGASPARÉ [7], PEDRO [12], COOK [6]) que o processo dos deslocamentos tem merecido a preferência dos diversos autores, pois este é o que melhor se adapta ao cálculo automático. Neste processo impõe-se diretamente certas condições de compatibilidade, para que possam ser estabelecidas as de equilíbrio. Associam-se aos elementos finitos funções que representam as variações dos deslocamentos.

A solução do problema resulta da determinação deste estado de deslocamento, o que pode ser conseguido, como uma das possibilidades, com a minimização de um certo funcional, correspondente à energia potencial de deformação total da estrutura.

Assim, a solução aproximada do problema pode ser obtida; entretanto, para que se alcance resposta convergente em relação à solução exata do problema e extremos para a energia potencial de deformação total, exige-se que haja compatibilidade de deslocamentos nas interfaces do elemento.

Neste trabalho apresenta-se o desenvolvimento completo da teoria e da programação em Fortran IV, capaz de fornecer soluções numéricas através do método dos elementos finitos, para problemas tridimensionais.

A partir do elemento finito plano (COOK [5]), fez-se a formulação do elemento tridimensional isoparamétrico linear.

Uma das dificuldades encontradas foi a falta de resultados para se comparar valores obtidos no cálculo da matriz de rigidez. Um teste foi realizado ao se estudar um caso particular, no qual as faces do hexaedro eram paralelas aos eixos x, y e z. Os resultados obtidos foram os mesmos calculados utilizando-se a formulação de Melosh [10], desenvolvida para este elemento.

Em face da geometria e dos carregamentos tem-se, muitas vezes, que se utilizar redes de cálculo com um número considerável de elementos, introduzindo, desta forma, dificuldades na preparação de dados e necessidades de utilização de computadores de grande capacidade.

Elaboraram-se programas para o PDP-10 da Digital, onde foram processados os primeiros testes de aferição, com poucos elementos e um número reduzido de equações na resolução do sistema. Foi adquirido, posteriormente, o computador VAX 11 modelo 785, e os programas foram adaptados a ele, havendo mudanças também na criação e leitura dos discos de armazenagem de dados.

A capacidade do novo computador possibilitou o estudo de estruturas que exigiam divisões em muitos elementos para obtenção de bons resultados. Um dos exemplos, um painel de uma laje cogumelo, com 436 elementos, necessita aproximadamente 60 min de CPU apenas para a resolução do sistema de equações.

Definido o objetivo fundamental do trabalho, passa-se agora a resumir o conteúdo específico de cada capítulo.

No capítulo dois relembram-se conceitos fundamentais necessários a uma melhor compreensão da formulação do elemento em estudo. A seguir apresenta-se o elemento isoparamétrico plano, ponto de partida para o caso tridimensional. Finalmente deduzem-se as

equações e montam-se as principais matrizes para aplicação do elemento finito isoparamétrico linear.

No capítulo três apresenta-se uma série de exemplos, cujos resultados são comparados aos obtidos através de cálculo manual, ou com resultados obtidos por outros autores.

No capítulo quatro apresenta-se um organograma do programa geral e definem-se as principais variáveis e matrizes utilizadas. Indica-se a forma de entrada de dados e faz-se uma descrição sucinta dos programas e suas subrotinas.

As considerações finais e sugestões são apresentadas no capítulo cinco.

Nos apêndices I e II apresentam-se os termos não nulos das matrizes B e U e no apêndice III as listagens dos programas em linguagem FORTRAN IV.

CAPÍTULO II
O PROBLEMA TRIDIMENSIONAL

II.1 - Teoria Elástica Básica

II.1.1 - Componentes de Tensão

O estado de tensões em um elemento de volume, recortado de um sólido sollicitado (figura II.1.1), é definido, em termos das seis componentes de tensão, pela matriz $\underline{\sigma}$:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \dots\dots(II.1.1)$$

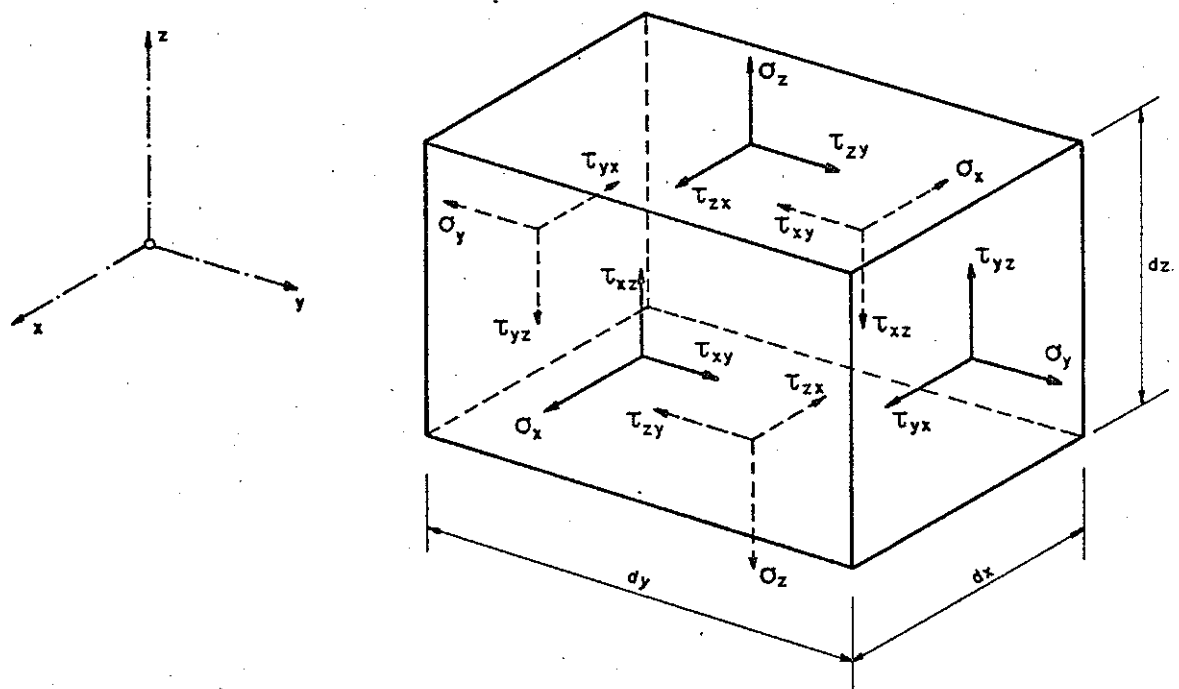


FIG. II.1.1.- COMPONENTES DE TENSÃO NO CASO GERAL

Conclue-se que as tensões normais nas faces opostas serão iguais em módulo e de sentidos contrários, ao se fazer abstração das forças volumétricas e das diferenciais das tensões.

Através das três condições de nulidade dos momentos estáticos, que são aplicados no elemento em forma de binários, chega-se ao Teorema de Cauchy, pelo qual:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

.....(II.1.2)

As tensões normais σ são positivas no caso de tração. As tensões tangenciais τ têm dois índices, indicando, o primeiro, o eixo perpendicular ao plano de atuação dessa componente e o segundo o eixo coordenado paralelo a ela. Os sentidos positivos das tensões tangenciais e normais são os indicados na figura II.1.1.

Para obter a tensão em um plano inclinado qualquer, passando pelo ponto O, isola-se um tetraedro ABCDO do corpo (figura II.1.2). Nas considerações das condições de equilíbrio do tetraedro elementar, as forças de massa foram desprezadas. Além disso, já que o elemento é infinitesimal, despreza-se também a variação das tensões através do mesmo e supõe-se que as tensões são uniformemente distribuídas nas suas faces.

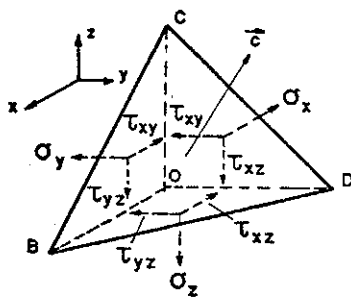


FIG. II.1.2 - TENSÕES ATUANTES NO TETRAEDRO

As forças que atuam sobre o tetraedro podem ser determinadas multiplicando-se as componentes de tensão pelas áreas das faces. Sendo \vec{c} o vetor unitário com direção perpendicular ao plano BCD, os cossenos diretores (c_x, c_y, c_z) obedecem à relação:

$$c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 1 \quad \text{.....(II.1.3)}$$

Pode-se obter as áreas das três outras faces do tetraedro, que serão $c_x dS, c_y dS$ e $c_z dS$ (figura II.1.3), onde dS é a área BCD.

Designando-se por X, Y e Z as três componentes de tensão, paralelas aos eixos coordenados, que atuam na face inclinada

BCD, a componente da força, agindo na face BCD, na direção do eixo x, é $X dS$ e, analogamente, as outras componentes serão $Y dS$ e $Z dS$.

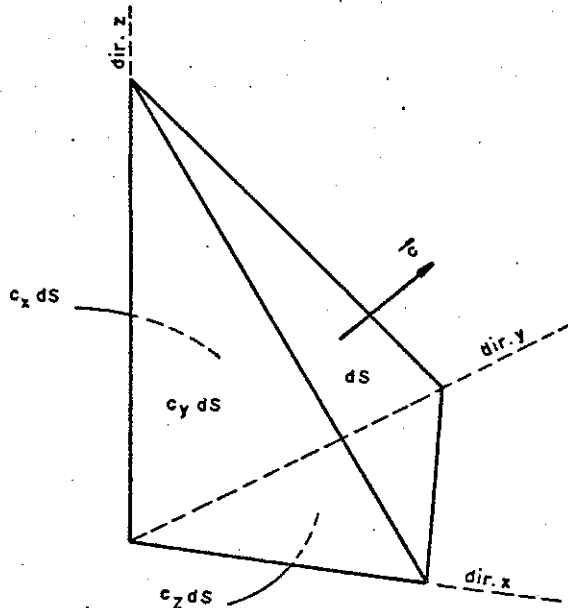


FIG. II.1.3 - ÁREAS DAS FACES DO TETRAEDRO

Através da projeção das forças sobre os eixos coordenados x , y e z , obtêm-se as equações de equilíbrio, que com o cancelamento do fator dS , serão escritas:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{Bmatrix}_{3 \times 1} \quad \dots\dots(II.1.4)$$

Logo, as componentes de tensão, num plano qualquer, definido pelos seus cossenos diretores, podem ser calculadas pela equação (II.1.4) desde que a matriz $\underline{\sigma}$ (equação II.1.1) seja conhecida.

II.1.2 - Componentes de Deformação

O estado de deformação na vizinhança de um ponto O , de um corpo deformado é dado pela matriz $c^{[15]}$ (no caso de teoria de primeira ordem):

$$c = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \dots\dots(\text{II.1.5})$$

As relações entre as componentes de deformação e as componentes do deslocamento do ponto 0, designadas por u, v e w, podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \dots\dots(\text{II.1.6})$$

II.1.3 - Relações Tensão - Deformação

No caso tridimensional, como uma extensão da lei de Hooke, as seis componentes de tensão podem ser expressas como uma função linear das seis componentes de deformação e vice-versa.

Logo

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon} \dots\dots(\text{II.1.7})$$

Assume-se que o material em estudo é linear, isotrópico e elástico. Pode-se verificar que, nesse caso, somente duas constantes elásticas são necessárias para representar o comportamento do material.

Portanto, a equação (II.1.7), em função do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν , torna-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad \dots(\text{II.1.8})$$

II.2 - A formulação variacional

A energia potencial de deformação elástica total para um corpo pode ser expressa como a soma da energia interna, que é a energia de deformação relativa aos esforços internos, e o potencial das cargas externas:

$$\pi_p = U + \Omega \quad \dots(\text{II.2.1})$$

Seja W a energia de deformação por unidade de volume, isto é, a energia de deformação específica. Por definição [1], δW é igual ao trabalho, por unidade de volume, realizado pelos esforços quando se dá um incremento de deslocamento Δu na posição de equilíbrio.

Tem-se que:

$$\delta W = \underline{\sigma}^T \delta \underline{\epsilon} \quad \dots(\text{II.2.2})$$

onde:

$\underline{\sigma}$ = matriz das componentes de tensão (eq. II.1.1)

$\underline{\epsilon}$ = matriz das componentes de deformação (eq. II.1.5)

Pode-se interpretar W como a área abaixo da curva $\sigma \times \epsilon$ (figura II.2.1), no caso em que σ e ϵ correspondam às componentes únicas que contribuem para a energia (caso unidimensional).

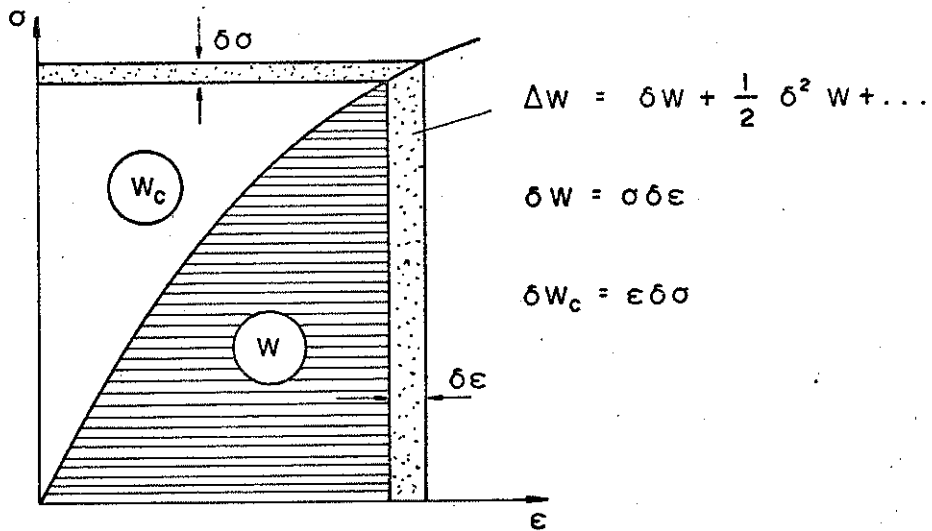


FIG. II.2.1 - ENERGIAS ESPECÍFICAS DE DEFORMAÇÃO E DEFORMAÇÃO COMPLEMENTAR

A energia de deformação para o corpo todo será:

$$U = \int_V W \, dV = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma}^T \underline{\epsilon} \, dV \quad \dots\dots(II.2.3)$$

Se as forças externas e volumétricas independem do tempo, pode-se expressar o trabalho externo em termos da energia potencial Ω , a qual é definida como:

$$\Omega = - \int_S \underline{b}^T \underline{u} \, dS - \int_V \underline{T}^T \underline{u} \, dV \quad \dots\dots(II.2.4)$$

onde:

$\underline{b}^T = \{ b_x \ b_y \ b_z \}$ = componentes das cargas externas

$\underline{T}^T = \{ T_x \ T_y \ T_z \}$ = componentes das forças volumétricas

A equação (II.2.1) pode ser escrita como:

$$\pi_p = \int_V W \, dV - \int_S \underline{b}^T \underline{u} \, dS - \int_V \underline{T}^T \underline{u} \, dV \quad \dots\dots(II.2.5)$$

O funcional definido em (II.2.5) passa por um extremo no equilíbrio. Isto é, de todas as configurações de deslocamentos possíveis que um corpo pode assumir, tais que satisfaçam a compatibilidade e as condições de contorno, a configuração que satisfaz o equilíbrio faz com que a energia potencial total assuma um valor mínimo.

Esse é o princípio da mínima energia potencial, que pode ser escrita como:

$$\delta\pi_p = \int_V \underline{\underline{\sigma}}^T \delta\underline{\underline{\epsilon}} dV - \int_S \underline{\underline{b}}^T \delta\underline{\underline{u}} dS - \int_V \underline{\underline{T}}^T \delta\underline{\underline{u}} dV = 0$$

..... (II.2.6)

Após a introdução das relações entre $\underline{\underline{\sigma}}$ e $\underline{\underline{\epsilon}}$ e $\underline{\underline{\epsilon}}$ e $\underline{\underline{u}}$, aplica-se o cálculo variacional para se tentar encontrar uma solução do problema que, se existir, será a função $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}(x, y, z)$. Muitas vezes essa solução exata não será facilmente encontrada, sendo necessário recorrer a métodos numéricos, como por exemplo, o método dos elementos finitos.

Quando as forças que atuam na superfície do corpo e as forças volumétricas são independentes do deslocamento a segunda variação do funcional π_p se reduz a:

$$\delta^2\pi_p = \delta^2U$$

..... (II.2.7)

Como o material é elástico linear:

$$\delta^2U = \int_V \delta\underline{\underline{\sigma}}^T \delta\underline{\underline{\epsilon}} dV = \int_V \delta\underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{D}} \delta\underline{\underline{\epsilon}} dV$$

..... (II.2.8)

Visto que a matriz $\underline{\underline{D}}$ deve ser positiva definida para um material estável, pode-se concluir que os deslocamentos reais correspondem a um valor mínimo de π_p , pois:

$$\delta^2\pi_p > 0$$

..... (II.2.9)

Logo, a energia potencial correspondente a um campo

de deslocamentos aproximados u^{apr} , o qual satisfaz as condições de contorno, é maior que a energia potencial correspondente à função dos deslocamentos reais.

$$\pi_p^{apr} \geq \pi_p^{exato} \quad \dots\dots (II.2.10)$$

Esse resultado é usado para estabelecer limites nas soluções de campos de deslocamentos aproximados.

O princípio da mínima energia potencial assegura que, se os campos de deslocamentos selecionados satisfazem as condições do problema, a energia potencial total da estrutura discretizada será maior que a energia correspondente a deformação exata. Se a discretização é refinada, a energia potencial total convergirá para o valor correto.

Considerando-se o caso de uma única carga concentrada P_c atuando no sistema, ter-se-á um deslocamento w_c , componente na direção da força. Reescrevendo (II.2.1), vem:

$$U = \frac{1}{2} P_c w_c \quad \dots\dots (II.2.11)$$

e

$$\Omega = - P_c w_c \quad \dots\dots (II.2.12)$$

portanto:

$$\pi_p = \frac{1}{2} P_c w_c - P_c w_c = - \frac{1}{2} P_c w_c \quad \dots\dots (II.2.13)$$

Introduzindo esse valor em (II.2.10), vem:

$$- \frac{1}{2} P_c w_c^{apr} \geq - \frac{1}{2} P_c w_c^{exato} \quad \dots\dots (II.2.14)$$

resultando então:

$$w_c^{apr} \leq w_c^{exato}$$

Diante disso, observa-se que a solução aproximada forneceu um limite inferior para o deslocamento procurado, pois é menor que o deslocamento real.

II.3 - Os Elementos Finitos

As estruturas reticuladas mais complexas geralmente são estudadas por métodos de transformação, decompondo-as noutras de comportamento conhecido que são depois integradas num funcionamento de conjunto pelas condições de equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamentos nos seus pontos de contato designados por pontos nodais.

A generalização deste método para estruturas contínuas, planas ou tridimensionais conduziu inicialmente à idealização do comportamento destas como conjunto de elementos unidimensionais. Verifica-se, no entanto, que o comportamento destas estruturas pode ser representado mais corretamente por meio de elementos finitos de duas ou três dimensões, com um certo número de pontos nodais sobre a fronteira. No volume destes elementos fixam-se as leis de variação dos deslocamentos (funções de deslocamentos) como funções (lineares neste trabalho) de um certo número finito de parâmetros. Definem-se os modos de deformação de cada elemento em função de deslocamentos nodais, calculam-se as tensões aceitando uma relação linear (ou não) entre tensões e deformações e obtêm-se as equações de equilíbrio discretas nos pontos nodais pelas condições de mínimo da energia potencial elástica.

O comportamento da estrutura contínua, sob a ação das diversas solicitações, vai ser aproximado pelo de um conjunto de elementos finitos, ligados entre si por um número discreto de pontos nodais sobre as fronteiras, no volume dos quais são definidas as funções de deslocamento:

$$\underline{u} = \underline{\phi} \underline{u}^n \quad (\text{II.3.1})$$

Os elementos do vetor \underline{u} são componentes do deslocamento num ponto do volume do elemento finito; os da matriz $\underline{\phi}$ são funções das coordenadas do ponto estudado e os do vetor \underline{u}^n são os deslocamentos dos pontos nodais.

O número de pontos nodais e de graus de liberdade em cada um deles e o número de elementos, sua forma, disposição e dimensões, dependem de diversos fatores, entre os quais do tipo de estrutura, da sua geometria e propriedades físicas, das solicitações, do campo de tensões a estudar e, ainda, do grau de aproximação desejado.

Deduzem-se em seguida as equações de equilíbrio nos pontos nodais de cada elemento finito. Seja então considerado um elemento genérico sollicitado por forças distribuídas \underline{T} no volume e \underline{b} sobre a superfície de fronteira.

A partir das funções de deslocamento (II.3.1) obtêm-se facilmente uma matriz \underline{B} que permite relacionar as deformações $\underline{\epsilon}$ num ponto com os deslocamentos dos pontos nodais:

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{u}^n \quad \dots\dots(\text{II.3.2})$$

Aceitando uma relação linear entre tensões e deformações (II.1.7), pode-se escrever:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon} = \underline{D} \underline{B} \underline{u}^n \quad \dots\dots(\text{II.3.3})$$

sendo a matriz \underline{D} , no caso particular de elementos isotropos, obtida através da equação (II.1.8).

A condição de estacionaridade da energia potencial elástica numa deformação virtual $\delta\epsilon$ do elemento, correspondente aos deslocamentos virtuais δu , é dada pela equação (II.2.6).

$$\delta\pi_p = \int_V \underline{\sigma}^T \delta\underline{\epsilon} dV - \int_S \underline{b}^T \delta\underline{u} dS - \int_V \underline{T}^T \delta\underline{u} dV = 0$$

Através da substituição de (II.3.1), (II.3.2) e (II.3.3), obtêm-se a equação de equilíbrio:

$$\underline{K} \underline{u}^n = \underline{P} \quad \dots\dots(\text{II.3.4})$$

onde

$$\underline{K} = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV = \text{matriz de rigidez para forças e deslocamentos nodais}$$

$$\underline{P} = \int_V \underline{\phi}^T \underline{T} dV + \int_S \underline{\phi}^T \underline{b} dS = \text{vetor de carga nodal equivalente às forças distribuídas no volume e às forças distribuídas sobre a superfície.}$$

Estabelecida a equação de equilíbrio (II.3.4) para a estrutura em estudo, através do cálculo da matriz de rigidez \underline{K} e do vetor de carga nodal \underline{P} , introduz-se as alterações correspondentes às condições de apoio (deslocamentos conhecidos), e resolve-se o sistema de equações obtendo-se os valores dos deslocamentos nodais u^n .

As tensões em cada elemento finito calculam-se, finalmente, a partir dos deslocamentos nodais pela equação (II.3.3).

II.4 - Elementos Isoparamétricos

Um dos mais interessantes progressos nos últimos anos; no campo do método dos elementos finitos, foi a família dos elementos isoparamétricos, introduzidos por Zienkiewicz, Irons e Ergatoudis, em 1968. Eles têm sido usados com grande sucesso na solução de problemas de várias áreas, incluindo elasticidade bidimensional e tridimensional, placas e cascas.

O nome isoparamétrico é decorrente do fato de que a geometria desses elementos é representada em termos das coordenadas dos seus pontos nodais, usando as mesmas funções de interpolação que exprimem os deslocamentos do elemento, em termos de deslocamentos nodais. Portanto para existir um elemento isoparamétrico, o número de coordenadas de forma deve ser igual ao número de coordenadas de deslocamento. Para um elemento sólido, por exemplo, há três coordenadas de forma (x, y, z) e três coordenadas de deslocamento (u, v, w). Elementos lineares têm lados retos, mas elementos isoparamétricos quadráticos e de ordem mais alta podem ter lados curvos, o que faz com que eles sejam muito usados em estruturas curvas.

Um sistema local de coordenada é definido para um elemento, não sendo necessariamente o mesmo para todos os elementos

da estrutura. O sistema de coordenadas para a estrutura toda é o sistema global.

O sistema natural de coordenadas é um sistema local, que permite a especificação de um ponto interno ao elemento, através de um conjunto de números adimensionais, cujo valor (módulo) máximo não excede a unidade. Esse sistema, que depende da geometria do elemento e não da orientação dele no sistema global, é sempre colocado de modo que as coordenadas naturais tenham valor unitário nos pontos nodais extremos. A utilização do sistema natural em elementos isoparamétricos não só simplifica a formulação como também facilita a integração, a qual é necessária para se obter a matriz de rigidez do elemento.

Um simples exemplo de sistema de coordenadas naturais é considerar uma barra de comprimento l , que está sobre um eixo, com seu ponto médio onde o valor de x é nulo. Os dois extremos possuem coordenada x de valores $-l/2$ e $l/2$. Por outro lado os extremos serão definidos por -1 e $+1$ quando a coordenada adotada for:

$$\xi = \frac{2x}{l} \quad \dots\dots(\text{II.4.1})$$

Querendo que o eixo seja fixado na barra e haja uma coordenada longitudinal independente de como a barra possa ser orientada no sistema global, então ξ pode ser chamado de coordenada natural.

II.4.1 - Elemento Isoparamétrico Plano

Seja um quadrilátero com dois graus de liberdade (u_i e v_i) em cada um dos quatro nós (i). O elemento tem lados retos mas tem forma qualquer e pode ser considerado uma distorção do elemento tipo, que é o retângulo. Adote-se as funções de mapeamento:

$$\underline{x} = \underline{\phi} \underline{x}^n$$

$$\underline{y} = \underline{\phi} \underline{y}^n$$

ou

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix}_{2 \times 8} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}_{8 \times 1} \dots (II.4.2)$$

onde:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4} & \phi_2 &= \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4} \\ \phi_3 &= \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4} & \phi_4 &= \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)}{4} \end{aligned}$$

Esse mapeamento relaciona um quadrado nas coordenadas ξ, η com um quadrilátero nas coordenadas xy cujo tamanho e forma são dados pelas oito coordenadas nodais. Nota-se que na figura II.4.1.a os eixos x e y não estão necessariamente com a origem no centro de gravidade do elemento.

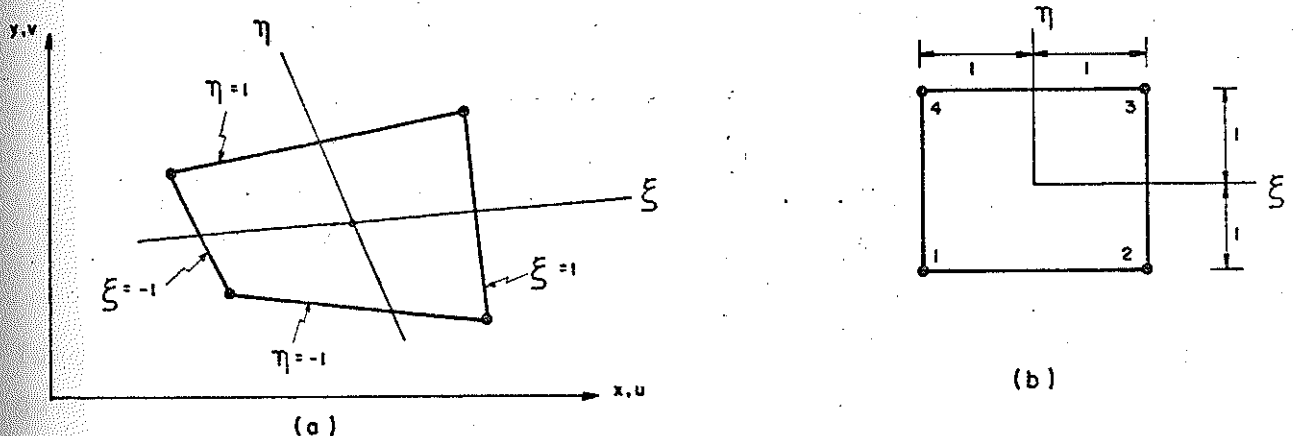


FIG. II.4.1- a) ELEMENTO ISOPARAMETRICO
b) MAPEAMENTO

Pode-se definir as coordenadas x e y como funções lineares das coordenadas naturais ξ , η através das constantes a_1 , a_2 , a_3 e a_4 , como

$$x = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi\eta \quad \dots\dots(\text{II.4.3})$$

As constantes são obtidas através das substituições $x = x_1$ e $\xi = \eta = -1$ para o nó 1 e de forma semelhante para os outros nós, chegando-se assim ao elemento da figura II.4.1.b.

Geralmente os eixos $\xi\eta$ (mapeados no plano xy) não são ortogonais. Eles serão ortogonais para o elemento retangular no qual eles são apenas formas adimensionais de coordenadas retangulares que passam pelo centro de gravidade. O elemento quadrado de lados 2×2 para o qual pode-se escrever $\xi = x$ e $\eta = y$ é um caso especial conveniente para se referir no desenvolvimento a seguir.

Os deslocamentos dentro do elemento são definidos pelas mesmas funções de interpolação usadas para definir sua forma:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \underset{2 \times 8}{\phi} \begin{Bmatrix} \underline{u}^n \\ \underline{v}^n \end{Bmatrix}_{8 \times 1} \quad \dots\dots(\text{II.4.4})$$

sendo a matriz ϕ definida na equação (II.4.2) e

$$\underline{u}^{nT} = \{ u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \}$$

$$\underline{v}^{nT} = \{ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \}$$

A formulação das matrizes do elemento é feita em função das coordenadas isoparamétricas ξ , η . Se o elemento é retangular, a deformação ϵ_ξ varia diretamente com η e é independente de ξ . Analogamente, sendo K , C_1 , C_2 e C_3 constantes:

$$\begin{aligned} \epsilon_\eta &= k \ \eta \\ \gamma_{\xi\eta} &= C_1 + C_2 \xi + C_3 \eta \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{II.4.5})$$

A equação (II.4.2) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^4 \phi_i x_i & y &= \sum_{i=1}^4 \phi_i y_i \\
 u &= \sum_{i=1}^4 \phi_i u_i & v &= \sum_{i=1}^4 \phi_i v_i
 \end{aligned}
 \dots\dots(II.4.6)$$

Através da regra da cadeia de diferenciação pode-se obter as relações entre as derivadas dos dois sistemas de coordenadas:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{Bmatrix}_{2 \times 8} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix}_{2 \times 8} = \underline{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} \dots\dots(II.4.7)$$

Então a matriz Jacobiana fica sendo, com uso de (II.4.7) e (II.4.6):

$$\underline{J}_{2 \times 2} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{Bmatrix}_{2 \times 4} \begin{bmatrix} x^n & y^n \end{bmatrix}_{4 \times 2} \dots\dots(II.4.8)$$

onde

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} \right\}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} \quad \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} \right\}$$

Seja J^* um elemento da matriz inversa da matriz Jacobiana. Usando a equação (II.4.7) pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J^*_{11} & J^*_{12} & 0 & 0 \\ J^*_{21} & J^*_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J^*_{11} & J^*_{12} \\ 0 & 0 & J^*_{21} & J^*_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} \dots (II.4.9)$$

A relação deformação-deslocamento é dada por:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{4 \times 1} \dots (II.4.10)$$

Da equação (II.4.4), tem-se:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{4 \times 8} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}_{8 \times 1} \dots (II.4.11)$$

Define-se a matriz \underline{B} com uma combinação das equações (II.4.9) e (II.4.11), tal que:

$$\underline{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \underline{B}_{3 \times 8} \begin{Bmatrix} \underline{u}^n \\ \underline{v}^n \end{Bmatrix}_{8 \times 1} \quad \dots\dots(II.4.12)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \begin{bmatrix} J^*_{11} & J^*_{12} & 0 & 0 \\ J^*_{21} & J^*_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J^*_{11} & J^*_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Efetuada-se as operações acima, os termos não nulos da matriz \underline{B} serão:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{25} & B_{26} & B_{27} & B_{28} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} & B_{37} & B_{38} \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = J^*_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta}$$

$$B_{12} = J^*_{11} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta}$$

$$B_{13} = J^*_{11} \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta}$$

$$B_{14} = J^*_{11} \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta}$$

$$B_{25} = J^*_{21} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta}$$

$$B_{26} = J^*_{21} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta}$$

$$B_{27} = J^*_{21} \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta}$$

$$B_{28} = J^*_{21} \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta}$$

$$B_{31} = J^*_{21} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta}$$

$$B_{32} = J^*_{21} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta}$$

$$B_{33} = J^*_{21} \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta}$$

$$B_{34} = J^*_{21} \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta}$$

$$B_{35} = J^*_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta}$$

$$B_{36} = J^*_{11} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta}$$

$$B_{37} = J^*_{11} \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta}$$

$$B_{38} = J^*_{11} \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta}$$

Tendo-se as matrizes $\underline{\phi}$ e \underline{B} pode-se obter a matriz de rigidez do elemento, através da integração $\underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}$ onde \underline{D} é a matriz que relaciona tensões e deformações, a qual é função das constantes físicas do material: coeficiente de Poisson e módulo de elasticidade (equação II.1.8).

Para a integral acima, a mudança de coordenadas é:

$$\iint F(x,y) dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta) \det \underline{J} d\xi d\eta$$

.....(II.4.14)

Se as colunas da matriz Jacobiana \underline{J} são consideradas como dois vetores \underline{A} e \underline{B} , o determinante dessa matriz ($\det \underline{J}$) é o módulo do produto vetorial ($\underline{A} \times \underline{B}$), o qual é a área do paralelogramo de lados \underline{A} e \underline{B} . O determinante de \underline{J} é o fator de magnitude que leva a área $dx dy$ para a área $d\xi d\eta$, e que é uma função da posição dentro do elemento.

Tendo expressado todas as matrizes em termos de ξ e η , pode-se integrar nessas coordenadas. Devido à complexidade das expressões polinomiais, será mais cômodo utilizar integração numérica, em lugar de tentar integração direta.

Essa integração é feita com o emprego das fórmulas da quadratura de Gauss, através de pesos conhecidos, dependentes do número de pontos de integração escolhidos.

O número de pontos deve ser tomado de maneira que a área do elemento possa ser determinada com a precisão desejada [5].

A descrição e o uso das fórmulas de Gauss será feita posteriormente no ítem II.5.6.

II.5 - Elemento Isoparamétrico Tridimensional Linear

Conforme explicado anteriormente, no estudo das estruturas pelos métodos numéricos podem ser feitas algumas simplificações:

- as placas estudadas como submetidas a um estado bidimensional de tensões.
- sistemas tridimensionais tratados como planos reticulados.
- estados triplos de tensões (e deformações) analisados como estados planos.

No caso de estruturas maciças ou mesmo placas espessas, as simplificações podem não conduzir a bons resultados.

Portanto, para obtenção de soluções mais precisas, hipóteses simplificadoras são evitadas com o uso de elementos finitos tridimensionais.

Optou-se pela formulação do elemento isoparamétrico linear (hexaedro) uma vez que o mesmo revela uma clara superioridade sobre o elemento tetraédrico [4].

II.5.1 - Sistema de Coordenadas Naturais

Nesse sistema, cada eixo (ξ , η , ζ) está associado a um par de faces opostas, e os valores das coordenadas variam de -1 a +1. Assim, nas coordenadas naturais locais, o elemento é um cubo com lados de comprimento igual a 2, como mostrado na figura II.5.1.a, enquanto que nas coordenadas cartesianas ele pode ser um sólido distorcido, com forma qualquer, como mostra a figura II.5.1.b [5], para o caso linear.

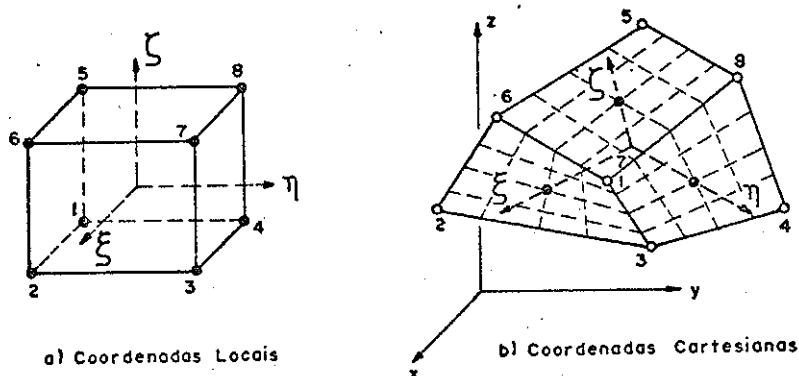


FIG. II.5.1 - HEXAEDRO COM DESLOCAMENTO LINEAR

Para esse hexaedro com oito nós, a relação entre as coordenadas locais e as coordenadas cartesianas globais  dada por um conjunto de funções de interpolação linear, as quais satisfazem a continuidade entre elementos, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} \underline{\phi} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\phi} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{\phi} \end{bmatrix}_{3 \times 24} \begin{Bmatrix} \underline{x}^n \\ \underline{y}^n \\ \underline{z}^n \end{Bmatrix}_{24 \times 1} \dots\dots(II.5.1)$$

onde:

$$\underline{x}^n{}^T = \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8\}$$

$$\underline{y}^n{}^T = \{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5 \quad y_6 \quad y_7 \quad y_8\}$$

$$\underline{z}^n{}^T = \{z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \quad z_5 \quad z_6 \quad z_7 \quad z_8\}$$

$$\underline{\phi} = \{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4 \quad \phi_5 \quad \phi_6 \quad \phi_7 \quad \phi_8\}$$

sendo

$$\phi_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i) \dots\dots(II.5.2)$$

II.5.2 - Funções Deslocamento

O elemento tridimensional linear tem três graus de liberdade em cada nó, representados pelos deslocamentos u, v, e w respectivamente nas direções x, y, z. Admite-se que esses deslocamentos no elemento variam linearmente entre os nós e são expressos pelas mesmas funções de interpolação usadas para descrever a geometria. Logo, por analogia com a equação (II.5.1) tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} \underline{\phi} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\phi} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{\phi} \end{bmatrix}_{3 \times 24} \begin{Bmatrix} \underline{u}^n \\ \underline{v}^n \\ \underline{w}^n \end{Bmatrix}_{24 \times 1} \quad (\text{II.5.3})$$

onde $\underline{\phi}$ é o vetor que contém as funções já definidas e:

$$\underline{u}^{nT} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8\}$$

$$\underline{v}^{nT} = \{v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6 \ v_7 \ v_8\}$$

$$\underline{w}^{nT} = \{w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ w_5 \ w_6 \ w_7 \ w_8\}$$

O elemento tipo a ser usado terá a seguinte numeração de nós:

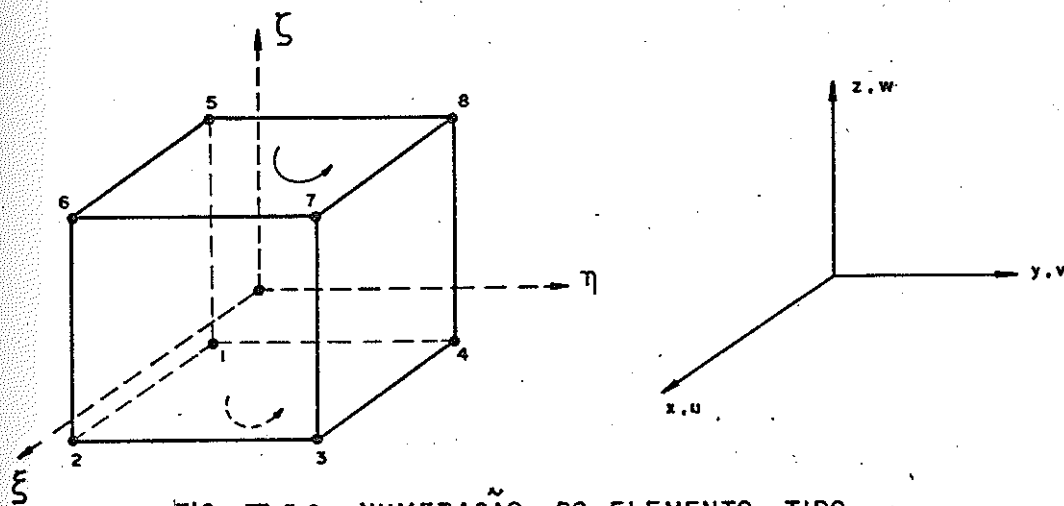


FIG. II.5.2 - NUMERAÇÃO DO ELEMENTO TIPO

Logo, as funções serão:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) & \phi_2 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\
 \phi_3 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) & \phi_4 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\
 \phi_5 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) & \phi_6 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\
 \phi_7 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) & \phi_8 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)
 \end{aligned}
 \dots(\text{II.5.4})$$

II.5.3 - Matriz de Transformação \underline{B}

Considerando-se a relação deformação-deslocamento para o caso tridimensional e utilizando-se a equação (II.5.3), define-se a matriz de transformação \underline{B} .

$$\begin{aligned}
 \underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}^n \\ \underline{v}^n \\ \underline{w}^n \end{Bmatrix} = \underline{B} \begin{Bmatrix} \underline{u}^n \\ \underline{v}^n \\ \underline{w}^n \end{Bmatrix} \dots(\text{II.5.5})
 \end{aligned}$$

6×1 6×24 24×1

Como não se tem a matriz $\underline{\phi}$ expressa em função de coordenadas cartesianas x, y, z , para obter $\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ será necessário, preliminarmente, supor que essas derivadas estejam disponíveis, de modo a poder calcular, com uso da regra da cadeia de diferenciação:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \end{pmatrix}_{3 \times 8} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \underline{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \dots (II.5.6)$$

Logo os termos da equação (II.5.5) são dados pela inversa da equação (II.5.6).

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad \dots (II.5.7)$$

Tem-se que calcular, além da matriz \underline{J} , as derivadas de ϕ com relação aos eixos ξ, η, ζ , que serão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} &= -\frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta) & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} &= \frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} &= \frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta) & \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} &= -\frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta) \\ \frac{\partial \phi_5}{\partial \xi} &= -\frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta) & \frac{\partial \phi_6}{\partial \xi} &= \frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta) \end{aligned} \quad \dots (II.5.8)$$

$$\frac{\partial \phi_7}{\partial \xi} = \frac{1}{8} (1+n)(1+z)$$

$$\frac{\partial \phi_8}{\partial \xi} = -\frac{1}{8} (1+n)(1+z)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\frac{1}{8} (1-\xi)(1-z)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial n} = -\frac{1}{8} (1+\xi)(1-z)$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial n} = \frac{1}{8} (1+\xi)(1-z)$$

$$\frac{\partial \phi_4}{\partial n} = \frac{1}{8} (1-\xi)(1-z)$$

$$\frac{\partial \phi_5}{\partial n} = -\frac{1}{8} (1-\xi)(1+z)$$

$$\frac{\partial \phi_6}{\partial n} = -\frac{1}{8} (1+\xi)(1+z)$$

$$\frac{\partial \phi_7}{\partial n} = \frac{1}{8} (1+\xi)(1+z)$$

$$\frac{\partial \phi_8}{\partial n} = \frac{1}{8} (1-\xi)(1+z)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = -\frac{1}{8} (1-\xi)(1-n)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = -\frac{1}{8} (1+\xi)(1-n)$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial z} = -\frac{1}{8} (1+\xi)(1+n)$$

$$\frac{\partial \phi_4}{\partial z} = -\frac{1}{8} (1-\xi)(1+n)$$

$$\frac{\partial \phi_5}{\partial z} = \frac{1}{8} (1-\xi)(1-n)$$

$$\frac{\partial \phi_6}{\partial z} = \frac{1}{8} (1+\xi)(1-n)$$

$$\frac{\partial \phi_7}{\partial z} = \frac{1}{8} (1+\xi)(1+n)$$

$$\frac{\partial \phi_8}{\partial z} = \frac{1}{8} (1-\xi)(1+n)$$

II.5.4 - Matriz Jacobiana

A matriz Jacobiana foi definida pela equação (II.5.6) como sendo:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

Para se obter os termos da matriz \underline{J} , deriva-se cada equação (II.5.1) em relação às coordenadas ξ , η , ζ . Para a primeira delas:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} x_4 + \frac{\partial \phi_5}{\partial \xi} x_5 + \frac{\partial \phi_6}{\partial \xi} x_6 + \frac{\partial \phi_7}{\partial \xi} x_7 + \frac{\partial \phi_8}{\partial \xi} x_8$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} x_3 + \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} x_4 + \frac{\partial \phi_5}{\partial \eta} x_5 + \frac{\partial \phi_6}{\partial \eta} x_6 + \frac{\partial \phi_7}{\partial \eta} x_7 + \frac{\partial \phi_8}{\partial \eta} x_8$$

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta} x_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta} x_2 + \frac{\partial \phi_3}{\partial \zeta} x_3 + \frac{\partial \phi_4}{\partial \zeta} x_4 + \frac{\partial \phi_5}{\partial \zeta} x_5 + \frac{\partial \phi_6}{\partial \zeta} x_6 + \frac{\partial \phi_7}{\partial \zeta} x_7 + \frac{\partial \phi_8}{\partial \zeta} x_8$$

.....(II.5.9)

A matriz \underline{J} pode ser obtida, utilizando-se a equação (II.5.2) como o produto:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}^n & \underline{y}^n & \underline{z}^n \end{bmatrix}_{8 \times 3} \quad \text{.....(II.5.10)}$$

3x8

Com as expressões das derivadas da equação (II.5.8) obtêm-se

..(II.5.11)

x_1	y_1	z_1
x_2	y_2	z_2
x_3	y_3	z_3
x_4	y_4	z_4
x_5	y_5	z_5
x_6	y_6	z_6
x_7	y_7	z_7
x_8	y_8	z_8

$-1+\eta+\zeta-\eta\zeta$	$1-\eta-\zeta+\eta\zeta$	$1+\eta-\zeta-\eta\zeta$	$-1-\eta+\zeta+\eta\zeta$	$1-\eta+\zeta-\eta\zeta$	$1+\eta+\zeta+\eta\zeta$	$-1-\eta-\zeta-\eta\zeta$
$-1+\xi+\eta-\xi\eta$	$-1-\xi+\eta+\xi\eta$	$-1-\xi-\eta-\xi\eta$	$1+\xi-\eta-\xi\eta$	$1+\xi-\zeta-\xi\zeta$	$1+\xi+\zeta+\xi\zeta$	$1-\xi+\zeta-\xi\zeta$
$-1+\xi+\eta-\xi\eta$	$-1-\xi+\eta+\xi\eta$	$-1-\xi-\eta-\xi\eta$	$1+\xi-\eta-\xi\eta$	$1+\xi-\eta-\xi\eta$	$1+\xi+\eta+\xi\eta$	$1-\xi+\eta-\xi\eta$

3x8

$$\tilde{J} = \frac{1}{8}$$

Para facilitar a programação, depois de feito o produto das matrizes foram definidas constantes, que são combinações algébricas dos valores das coordenadas nodais. Assim:

$$a(x) = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 + x_7 - x_8$$

$$b(x) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8$$

$$c(x) = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 + x_7 - x_8$$

$$d(x) = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 \quad \dots\dots(II.5.12)$$

$$e(x) = -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + x_7 + x_8$$

$$f(x) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 + x_7 + x_8$$

$$g(x) = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

Do mesmo modo obtêm-se $a(y)$ e $a(z)$. A matriz \underline{J} pode ser escrita como:

$$\underline{J} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} a(x)+b(x)^n+c(x)^\zeta+d(x)^\eta\zeta & | & a(y)+b(y)^n+c(y)^\zeta+d(y)^\eta\zeta & | & a(z)+b(z)^n+c(z)^\zeta+d(z)^\eta\zeta \\ e(x)+b(x)^\xi+f(x)^\zeta+d(x)^\xi\zeta & | & e(y)+b(y)^\xi+f(y)^\zeta+d(y)^\xi\zeta & | & e(z)+b(z)^\xi+f(z)^\zeta+d(z)^\xi\zeta \\ g(x)+c(x)^\xi+f(x)^\eta+d(x)^\xi\eta & | & g(y)+c(y)^\xi+f(y)^\eta+d(y)^\xi\eta & | & g(z)+c(z)^\xi+f(z)^\eta+d(z)^\xi\eta \end{bmatrix}$$

.....(II.5.13)

Conhecida \underline{J} pode-se determinar a sua inversa (\underline{J}^*) e, com as derivadas da equação (II.5.8), montar a matriz de transformação \underline{B} (apêndice I).

II.5.5 - Matriz de Rigidez \underline{K}

A matriz de rigidez \underline{K} foi definida pela equação (II.3.4) como:

$$\underline{K} = \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \, dV$$

Como a matriz de propriedade dos materiais \underline{D} é simétrica e positiva definida, pode-se fatorá-la pelo método de Choleski [5]:

$$\underline{D} = \underline{V}^T \cdot \underline{V} \quad \dots\dots(\text{II.5.14})$$

A matriz \underline{V} é triangular superior, ou seja, todos os termos abaixo da diagonal são nulos. O termo $\underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}$ da matriz de rigidez torna-se:

$$\underline{B}^T \cdot \underline{V}^T \cdot \underline{V} \cdot \underline{B} = (\underline{V} \cdot \underline{B})^T (\underline{V} \cdot \underline{B}) \quad \dots\dots(\text{II.5.15})$$

Isso foi feito para melhor eficiência computacional, pois somente os elementos não nulos da matriz \underline{V} precisam ser processados para formar $\underline{V} \cdot \underline{B}$. Os termos da matriz \underline{V} encontram-se no Apêndice II.

Para se proceder a integração da equação (II.3.4) faz-se uma mudança de coordenadas:

$$\int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, dV = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \det \underline{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad \dots\dots(\text{II.5.16})$$

Devido a complexidade das expressões polinomiais, a matriz \underline{K} é obtida por integração numérica. Calculam-se os valores das derivadas parciais de ϕ com relação as coordenadas naturais ξ , η , ζ (equação II.5.8), a matriz Jacobiana \underline{J} (equação II.5.11), seu

determinante ($\det J$) e sua inversa nos pontos escolhidos pelo método de Gauss.

Conhecida a matriz D (equação II.1.8), pode-se determinar os valores numéricos dos coeficientes da matriz de integração da equação (II.5.16) para os mesmos pontos. Multiplica-se cada coeficiente pelo peso correspondente e faz-se a somatória, obtendo-se a matriz de rigidez K .

II.5.6 - Quadratura de Gauss

Para avaliação numérica de integrais definidas, o método de Gauss tem sido um dos mais utilizados quando se trata de elementos finitos.

Por exemplo, para avaliar a integral

$$I = \int_{-1}^{+1} y \, dx \quad \dots\dots (II.5.17)$$

a maneira mais simples é multiplicar o valor de y no ponto médio pelo comprimento do intervalo (figura II.5.3).

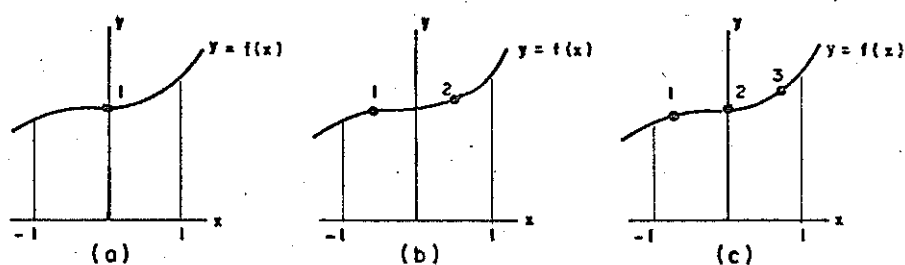


FIG. II.5.3 - QUADRATURA DE GAUSS COM
(a) UM PONTO (b) DOIS PONTOS
(c) TRÊS PONTOS

Obtêm-se $I = 2y_1$, que é o resultado exato se a curva for uma linha reta.

Generalizando, tem-se que:

$$I = \int_{-1}^{+1} y \, dx \approx \sum_i W_i y_i \quad (II.5.18)$$

Para se efetuar uma integral, avalia-se a função em pontos escolhidos, multiplica-se cada valor y_i pelo peso correspondente W_i e adiciona-se. O método de Gauss fornece os pontos a serem considerados, os quais estão localizados simetricamente com relação ao centro do intervalo. Pontos simétricos possuem o mesmo peso.

Nº de Pontos	Localização	Pesos Associados (W_i)
1	$x_1 = 0,000000000000000000000000$	2.
2	$x_1, x_2 = \pm 0,5773502691896257645091488$	1.
3	$x_1, x_3 = \pm 0,7745966692414833770358531$ $x_2 = 0,000000000000000000000000$	$\frac{5}{9}$ (= 0,555...) $\frac{8}{9}$ (= 0,888...)

No caso tridimensional, a expressão torna-se

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_i \sum_j \sum_k W_i W_j W_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

.....(II.5.19)

Essa integração numérica converge para o resultado correto sempre que o número de pontos escolhidos for suficiente para se obter o volume exato do elemento em estudo 5. No caso do hexaedro são necessários oito pontos, cujas coordenadas serão:

$$\xi_i = \eta_i = \zeta_i = \pm 0,57735... = \pm 1/\sqrt{3}$$

II.5.7 - Vetor de Carga Nodal Equivalente

Considere-se um hexaedro com faces solicitadas por carregamentos linearmente distribuídos (p), que corresponde aos casos mais frequentes encontrados na prática.

O carregamento verdadeiro pode ser aproximado, por

intermédio de um conjunto de cargas concentradas aplicadas diretamente nos nós do elemento. Essas cargas nodais concentradas são mais convenientemente definidas quando se considera a contribuição de cada elemento e, em cada um deles, a contribuição de cada face individualmente. Toma-se um carregamento transversalmente distribuído aplicado sobre uma das faces carregadas do elemento. Faz-se com que este carregamento seja estaticamente equivalente ao vetor carregamento \underline{p} (associado a face), de cargas concentradas nodais.

Igualando o trabalho virtual realizado pelas cargas nodais equivalentes \underline{p} e o trabalho realizado pelo carregamento distribuído \underline{p} , durante um deslocamento virtual, resulta:

$$\underline{p}^T \underline{u}^n = \int_S \underline{p}^T \underline{u} \, ds \quad \dots\dots(\text{II.5.20})$$

Por se estar analisando a face, as funções ϕ serão dadas pela equação (II.4.2):

$$\underline{p}^T \underline{u}^n = \int_S \underline{p}^T \phi \underline{u}^n \, dS \quad \dots\dots(\text{II.5.21})$$

$$\underline{p}^T = \int_S \underline{p}^T \phi \, dS \quad \dots\dots(\text{II.5.22})$$

A carga \underline{p} tem variação linear. Portanto:

$$\underline{p} = \phi \underline{p}^n \quad \dots\dots(\text{II.5.23})$$

Substituindo-se na equação (II.5.22):

$$\underline{p}^T = \int_S \phi^T \phi \underline{p}^n \, dS \quad \dots\dots(\text{II.5.24})$$

Utilizando coordenadas naturais:

$$\underline{p}^T = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{\phi}^T \underline{\phi} \underline{p}^n \det \underline{J} d\xi d\eta \dots (II.5.25)$$

A matriz $\underline{\phi}$, no caso plano \bar{e} função de duas coordenadas, que dependem da face em estudo.

Analisando, por exemplo, a face perpendicular ao eixo ξ (sentido positivo) figura II.5.4, as funções ϕ serão:

$$n\bar{o} 2 \dots \phi_2 = \frac{1}{4} (1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$$n\bar{o} 3 \dots \phi_3 = \frac{1}{4} (1 + \eta)(1 - \zeta)$$

$$n\bar{o} 6 \dots \phi_6 = \frac{1}{4} (1 - \eta)(1 + \zeta)$$

$$n\bar{o} 7 \dots \phi_7 = \frac{1}{4} (1 + \eta)(1 + \zeta)$$

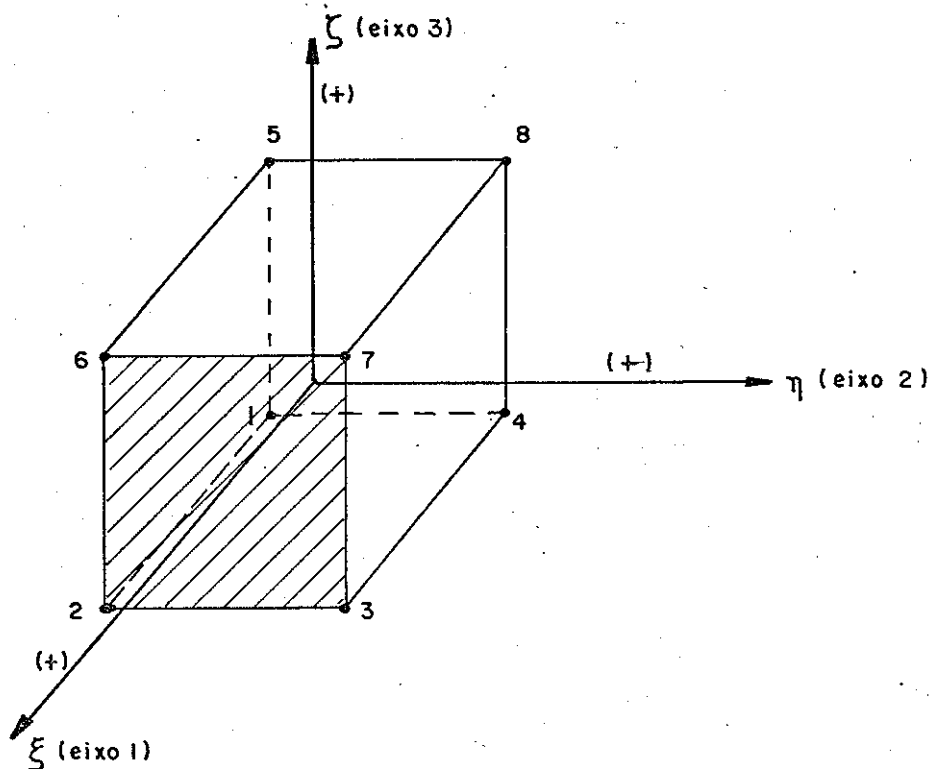


FIG. II. 5.4 - ELEMENTO TIPO COM CARGA \underline{p} APLICADA NA FACE PERPENDICULAR AO EIXO ξ (SENTIDO POSITIVO)

A matriz Jacobiana \bar{e} dada por:

$$\underline{J} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 + \zeta & 1 - \zeta & -1 - \zeta & 1 + \zeta \\ -1 + \eta & -1 - \eta & 1 - \eta & 1 + \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \\ y_6 & z_6 \\ y_7 & z_7 \end{bmatrix}$$

.....(II.5.26)

Como foi feito para a matriz de rigidez, combinações algébricas serão definidas para facilitar a programação. Assim, para a face em estudo:

$$A_{11} = y_2 - y_3 - y_6 + y_7 \quad \text{.....(II.5.27)}$$

$$A_{22} = z_2 - z_3 - z_6 + z_7$$

$$B_{11} = -y_2 + y_3 - y_6 + y_7$$

$$B_{22} = -z_2 + z_3 - z_6 + z_7$$

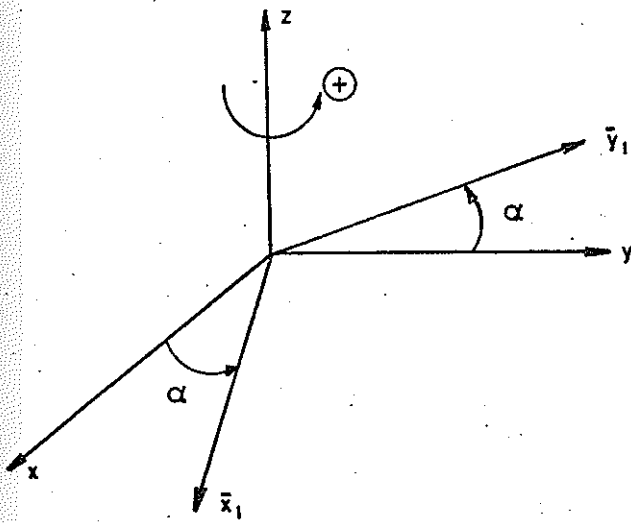
$$C_{11} = -y_2 - y_3 + y_6 + y_7$$

$$C_{22} = -z_2 - z_3 + z_6 + z_7$$

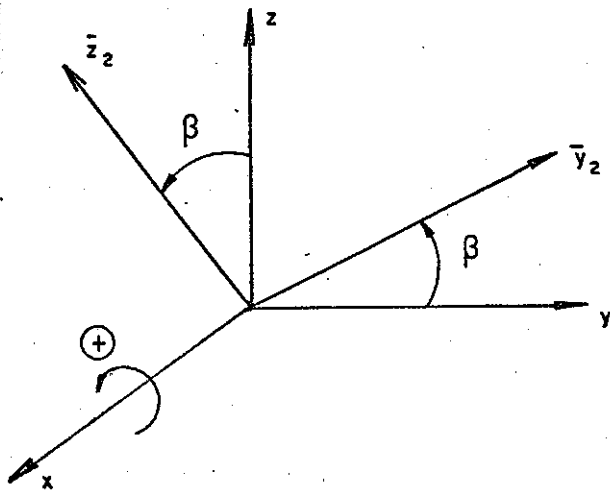
Para as demais faces as constantes acima definidas serão calculadas trocando-se apenas as coordenadas (x, y, z) a fim de adaptá-las ao plano em estudo.

O vetor de cargas nodais equivalentes \underline{P} será obtido através de integração numérica pelo método de Gauss (II.5.6).

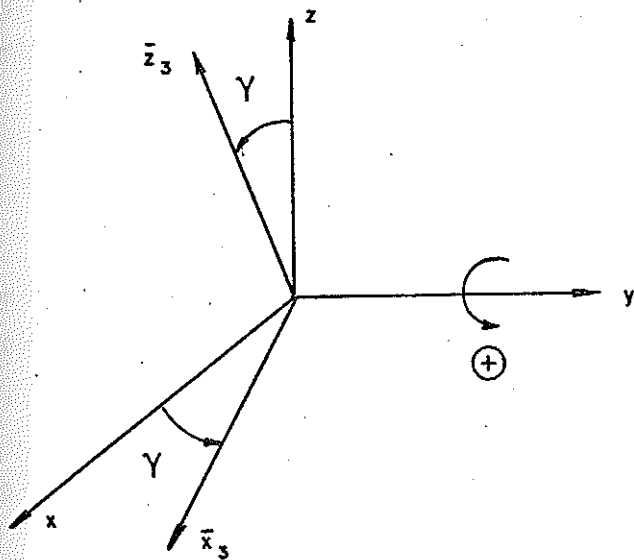
Se a face em estudo for inclinada, o vetor de cargas nodais equivalentes obtido \bar{e} referido ao sistema de coordenadas $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ (figura II.5.5). Define-se os ângulos α, β e γ como:



ROTAÇÃO DO PLANO xy EM TORNO DO
EIXO z (SENTIDO ANTI-HORÁRIO ⊕)



ROTAÇÃO DO PLANO yz EM TORNO DO
EIXO x (SENTIDO ANTI-HORÁRIO ⊕)



ROTAÇÃO DO PLANO xz EM TORNO DO
EIXO y (SENTIDO ANTI-HORÁRIO ⊕)

FIG. II. 5.5 - ÂNGULOS α, β, γ CORRESPONDENTES RESPECTIVAMENTE
A ROTAÇÕES DOS PLANOS xy, yz E xz.

A matriz de rotação \underline{R} é dada por:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix}$$

O vetor de cargas nodais equivalentes referente ao sistema de eixos x, y, z é obtido pela relação:

$$\begin{Bmatrix} P_{\bar{x}} \\ P_{\bar{y}} \\ P_{\bar{z}} \end{Bmatrix} = \underline{R} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (II.5.29)$$

II.5.8 - Determinação das Tensões e Deformações

Conhecidos os valores dos deslocamentos em todos os pontos nodais da estrutura, calcula-se as deformações específicas através da equação (II.5.3)

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{u}^n$$

Como a variação dos deslocamentos é linear, as derivadas com relação ao sistema de eixos naturais serão constantes e portanto pode-se determinar a matriz \underline{B} tomando-se os valores de ξ, η, ζ num nó qualquer do elemento.

As tensões normais e de cisalhamento serão calculadas substituindo os valores das deformações na equação (II.1.8).

II.5.9 - Tensões e Direções Principais

Procura-se a direção particular do plano na qual não há tensões de cisalhamento, isto é, as tensões resultantes são

perpendiculares aos planos nos quais atuam. Estas tensões são chamadas tensões principais no ponto considerado; suas direções são os eixos principais, ou direções principais, e os planos em que atuam são os planos principais.

Sejam c_x , c_y e c_z os cossenos diretores da normal a um plano principal e seja σ o valor da tensão principal correspondente. Suas componentes serão:

$$\begin{aligned} X &= \sigma c_x \\ Y &= \sigma c_y \\ Z &= \sigma c_z \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{II.5.30})$$

Substituindo-se (II.5.30) em (II.1.4), encontra-se:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) c_x + \tau_{xy} c_y + \tau_{xz} c_z &= 0 \\ \tau_{xy} c_x + (\sigma_y - \sigma) c_y + \tau_{yz} c_z &= 0 \\ \tau_{xz} c_x + \tau_{yz} c_y + (\sigma_z - \sigma) c_z &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{II.5.31})$$

Essas são três equações lineares homogêneas em c_x , c_y e c_z , que admitirão soluções diferentes de zero somente se o seu determinante for nulo.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots(\text{II.5.32})$$

Calculando este determinante e igualando-o a zero, chega-se a seguinte equação cúbica em σ :

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2)\sigma + (\tau_{xz}^2\sigma_y + \tau_{yz}^2\sigma_x + \tau_{xy}^2\sigma_z - 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\sigma_y\sigma_z) = 0 \dots\dots(II.5.33)$$

As três raízes desta equação fornecem os valores das três tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 . Pela substituição de cada uma destas tensões nas equações (II.5.31), e por meio da relação (II.1.3), pode-se determinar três conjuntos de cossenos diretores, correspondendo às três direções principais.

Para o cálculo das raízes e dos cossenos diretores a elas correspondentes, usar-se-á o método de Jacobi. É um método iterativo para transformar uma matriz real e simétrica na forma diagonal.

Esse método consiste em aplicar na matriz uma sucessão de rotações planas a fim de reduzir os elementos fora da diagonal para zero. Os auto valores são os elementos da diagonal da matriz transformada. Os auto vetores a eles correspondentes são os elementos da coluna de uma nova matriz, formada a partir do produto das sucessivas matrizes ortogonais criadas para diagonalizar a matriz inicial.

Para melhor entendimento do método sugere-se que seja consultada a referência bibliográfica [3].

CAPÍTULO III

APLICAÇÕES

Os exemplos 1 e 2 tiveram como finalidade testar o elemento tridimensional isoparamétrico linear.

Uma placa de espessura igual a 1 polegada (in) é o elemento em estudo. Os dois casos de carregamento são:

Exemplo 1: momentos fletores aplicados, através de binários, na extremidade livre.

Exemplo 2: cargas aplicadas nos nós da extremidade livre, na direção do eixo z.

Os resultados foram obtidos em testes nos quais os nós 1, 2, 5 e 6 têm deslocamentos impedidos nas direções x, y e z.

As tensões foram calculadas nos oito pontos de Gauss e extrapoladas para os nós. O vetor de carga nodal equivalente do elemento foi obtido através do mesmo método de integração usado no cálculo da matriz de rigidez.

Apresentam-se na Tabela III.1 alguns resultados de Cook e Bretl [6], podendo-se verificar sua concordância com os valores apresentados nos itens (III.1) e (III.2).

III.1 - Exemplo 1: Placa com Momento na Extremidade

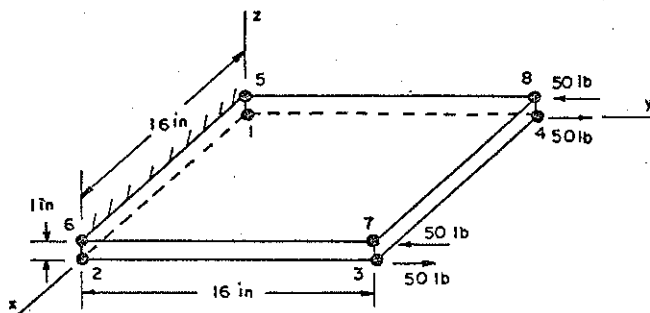


FIG. III. 1

 ***** PLACA COM MOMENTO NA EXTREMIDADE *****

NUMERO DE ELEMENTOS----- 1
 NUMERO DE PONTOS NODAIS----- 8
 NUMERO DE CONDICoes DE CONTORNO-- 2
 NUMERO DE PONTOS NA BORDA----- 8
 NUMERO DE CASOS DE CARGA----- 0
 NUMERO DE MATERIAIS DIFERENTES--- 1
 NUMERO DE ELEMENTOS NA BORDA----- 1
 =0,LADOS SEGUNDO X/Y,SE=1,ESCO- 0
 N. PONTOS NODAIS COM CARGA CONC.-- 4

PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

MAT.N.	MODULO DE ELASTICIDADE	COEF. DE POISSON	DENSIDADE
1	0.10000E+07	0.25000E+00	0.00000E+00

SKEW=0---ESTRUTURA COM LADOS SEGUNDO X/Y
 ISKEW=1---ESTRUTURA COM LADO ESCONSO
 ESTE PROBLEMA TEM ISKEW= 0

DADOS SOBRE OS ELEMENTOS

ELEMENTO	N01	N02	N03	N04	N05	N06	N07	N08	MAT.TIPO	ELEM.TIPO	KARGA	N.F. CARR	N.F.INCL.
1	1	2	3	4	5	6	7	8	1	1	0	0	0

N. DO NO	CARGA DIRECAO U	CARGA DIRECAO V	CARGA DIRECAO W
1 3	0.0000000E+00	0.5000000E+02	0.0000000E+00
2 4	0.0000000E+00	0.5000000E+02	0.0000000E+00
3 7	0.0000000E+00	-0.5000000E+02	0.0000000E+00
4 8	0.0000000E+00	-0.5000000E+02	0.0000000E+00

COORDENADAS DOS VERTICES

PONTO	X	Y	Z
1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	0.1600000E+02	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	0.1600000E+02	0.1600000E+02	0.0000000E+00
4	0.0000000E+00	0.1600000E+02	0.0000000E+00
5	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.1000000E+01
6	0.1600000E+02	0.0000000E+00	0.1000000E+01
7	0.1600000E+02	0.1600000E+02	0.1000000E+01
8	0.0000000E+00	0.1600000E+02	0.1000000E+01

COORDENADAS LOCAIS DO ELEMENTO TIPO

XII	ETI	ZET
-0.1000000E+01	-0.1000000E+01	-0.1000000E+01
0.1000000E+01	-0.1000000E+01	-0.1000000E+01
0.1000000E+01	0.1000000E+01	-0.1000000E+01
-0.1000000E+01	0.1000000E+01	-0.1000000E+01
-0.1000000E+01	-0.1000000E+01	0.1000000E+01
0.1000000E+01	-0.1000000E+01	0.1000000E+01
0.1000000E+01	0.1000000E+01	0.1000000E+01
-0.1000000E+01	0.1000000E+01	0.1000000E+01

PARAMETROS PARA INTEGRACAO PELO METODO DE GAUSS

NUMERO DE PONTOS	LOCALIZACAO	PESOS ASSOCIADOS
1	0.5773503E+00	0.1000000E+01
2	-0.5773503E+00	0.1000000E+01

CONDICAOES DE CONTORNO

PONTO	L1(1)	L1(2)	L1(3)	ICON(1)	ICON(2)	ICON(3)
1	1	1	1	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	0	0	0
6	1	1	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0

LARGURA DA SEMI BANDA= 24

CALCULO DOS DESLOCAMENTOS

NO	DESL. U	DESL. V	DESL. W
1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	-0.1675478E-07	0.5791570E-05	0.9266513E-04
4	0.1675478E-07	0.5791570E-05	0.9266513E-04
5	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
6	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
7	0.1675478E-07	-0.5791570E-05	0.9266513E-04
8	-0.1675478E-07	-0.5791570E-05	0.9266513E-04

CALCULO DAS DEFORMACOES NO ELEMENTO N. 1

EPSILON XX	EPSILON YY	EPSILON ZZ	GAMA XY	GAMA YZ	GAMA XZ
0.0000000E+00	0.3619732E-06	0.0000000E+00	0.1047174E-08	0.5791570E-05	0.0000000E+00

CALCULOS DAS TENSOES NO ELEMENTO N. 1

SIGMA X	SIGMA Y	SIGMA Z	TAU XY	TAU YZ	TAU XZ
0.1447893E+00	0.4343678E+00	0.1447893E+00	0.4188696E-03	0.2316628E+01	0.0000000E+00

TENSOES PRINCIPAIS	DIRECOES PRINCIPAIS			
0.1447893E+00	0.1000000E+01	0.1232775E-16	-0.1808100E-03	(c ₁)
0.2610727E+01	0.1238002E-03	0.7288272E+00	0.6846976E+00	(c ₂)
-0.2031570E+01	0.1317793E-03	-0.6846976E+00	0.7288272E+00	(c ₃)

Apresenta-se na figura III.2 a representação gráfica das direções principais.

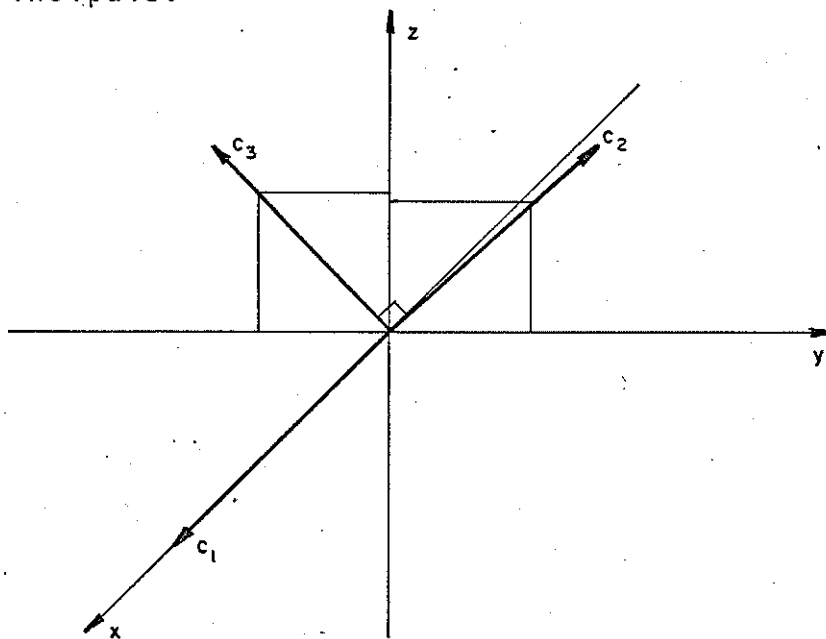


FIG. III. 2

Foram determinadas as componentes (cossenos diretores) dos três versores das normais (c_1, c_2, c_3) aos três planos principais. Verifica-se que os planos são mutuamente perpendiculares ao se efetuar o produto interno dos versores. Isso também pode ser comprovado na figura III.2, onde dois versores estão no plano yz e são perpendiculares entre si e o terceiro coincide com o eixo x, que é perpendicular ao plano yz.

III.2 - Exemplo 2: Placa com Força na Extremidade

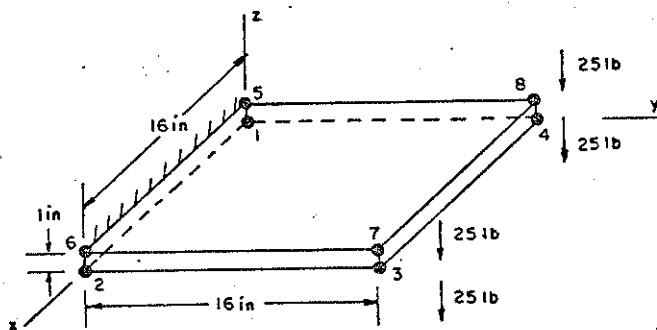


FIG. III.3

 ***** PLACA COM FORÇA NA EXTREMIDADE *****

NUMERO DE ELEMENTOS----- 1
 NUMERO DE PONTOS NODAIS----- 8
 NUMERO DE CONDICÕES DE CONTORNO-- 2
 NUMERO DE PONTOS NA BORDA----- 8
 NUMERO DE CASOS DE CARGA----- 0
 NUMERO DE MATERIAIS DIFERENTES--- 1
 NUMERO DE ELEMENTOS NA BORDA----- 1
 =0, LADOS SEGUNDO X/Y, SE=1, ESCONSO- 0
 N. PONTOS NODAIS COM CARGA CONC.-- 4

PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

MAT.N.	MODULO DE ELASTICIDADE	COEF. DE POISSON	DENSIDADE
1	0.10000E+07	0.25000E+00	0.00000E+00

SKEW=0----ESTRUTURA COM LADOS SEGUNDO X/Y
 ISKEW=1----ESTRUTURA COM LADO ESCONSO
 ESTE PROBLEMA TEM ISKEW= 0

DADOS SOBRE OS ELEMENTOS

ELEMENTO	NO1	NO2	NO3	NO4	NO5	NO6	NO7	NO8	MAT.TIPO	ELEM.TIPO	KARGA	N.F. CARR	N.F.INCL.
1	1	2	3	4	5	6	7	8	1	1	0	0	0

	N. DO NO	CARGA DIRECAO U	CARGA DIRECAO V	CARGA DIRECAO W
1	3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.2500000E+01
2	4	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.2500000E+01
3	7	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.2500000E+01
4	8	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-0.2500000E+01

COORDENADAS DOS VERTICES

PONTO	X	Y	Z
1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	0.1600000E+02	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	0.1600000E+02	0.1600000E+02	0.0000000E+00
4	0.0000000E+00	0.1600000E+02	0.0000000E+00
5	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.1000000E+01
6	0.1600000E+02	0.0000000E+00	0.1000000E+01
7	0.1600000E+02	0.1600000E+02	0.1000000E+01
8	0.0000000E+00	0.1600000E+02	0.1000000E+01

COORDENADAS LOCAIS DO ELEMENTO TIPO

XII	ETI	ZET
-0.1000000E+01	-0.1000000E+01	-0.1000000E+01
0.1000000E+01	-0.1000000E+01	-0.1000000E+01
0.1000000E+01	0.1000000E+01	-0.1000000E+01
-0.1000000E+01	0.1000000E+01	-0.1000000E+01
-0.1000000E+01	-0.1000000E+01	0.1000000E+01
0.1000000E+01	-0.1000000E+01	0.1000000E+01
0.1000000E+01	0.1000000E+01	0.1000000E+01
-0.1000000E+01	0.1000000E+01	0.1000000E+01

PARAMETROS PARA INTEGRACAO PELO METODO DE GAUSS

NUMERO DE PONTOS	LOCALIZACAO	PESOS ASSOCIADOS
1	0.5773503E+00	0.1000000E+01
2	-0.5773503E+00	0.1000000E+01

CONDICOES DE CONTORNO

PONTO	L1(1)	L1(2)	L1(3)	ICON(1)	ICON(2)	ICON(3)
1	1	1	1	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	0	0	0
6	1	1	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0

LARGURA DA SEMI BANDA= 24

CALCULO DOS DESLOCAMENTOS

NO	DESL. U	DESL. V	DESL. W
1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	0.1340383E-07	-0.4633256E-05	-0.9913210E-04
4	-0.1340383E-07	-0.4633256E-05	-0.9913210E-04
5	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
6	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
7	-0.1340383E-07	0.4633256E-05	-0.9913210E-04
8	0.1340383E-07	0.4633256E-05	-0.9913210E-04

CALCULO DAS DEFORMACOES NO ELEMENTO N. 1

EPSILON XX	EPSILON YY	EPSILON ZZ	GAMA XY	GAMA YZ	GAMA XZ
0.0000000E+00	-0.2895785E-06	0.0000000E+00	-0.8377392E-09	-0.6195756E-05	0.0000000E+00

CALCULOS DAS TENSOES NO ELEMENTO N. 1

SIGMA X	SIGMA Y	SIGMA Z	TAU XY	TAU YZ	TAU XZ
-0.1158314E+00	-0.3474942E+00	-0.1158314E+00	-0.3350957E-03	-0.2478303E+01	0.0000000E+00

TENSOES PRINCIPAIS

DIRECOES PRINCIPAIS

-0.1158314E+00	0.1000000E+01	0.6339416E-17	-0.1352118E-03	(c ₁)
-0.2712671E+01	0.9335062E-04	0.7234249E+00	0.6904031E+00	(c ₂)
0.2249345E+01	0.9781557E-04	-0.6904031E+00	0.7234249E+00	(c ₃)

Apresenta-se na figura III.4 a representação gráfica das direções principais.

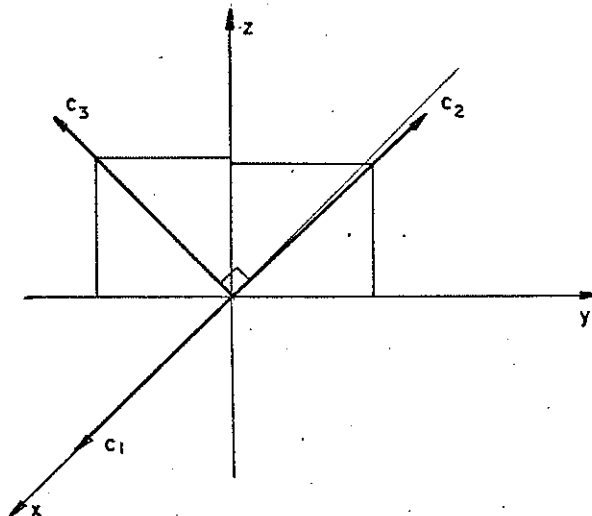


FIG. III.4

	Deslocamento w da extremidade (in)	σ_x (psi)	σ_y (psi)	τ_{yz} (psi)
[6]	$0,9 \cdot 10^{-4}$	0,14	0,43	2,32
Exemplo 1	$0,9267 \cdot 10^{-4}$	0,1448	0,4344	2,3166
[6]	$0,1 \cdot 10^{-3}$	0,12	0,35	2,48
Exemplo 2	$0,991 \cdot 10^{-4}$	0,1158	0,3475	2,4783

Tabela III.1 - Comparação dos Resultados

Nota-se na Tabela III.1 que o elemento isoparamétrico linear apresentou melhores resultados no exemplo de cisalhamento que no de flexão. Isto está de acordo com os resultados de COOK e BRETL [6]. Sabe-se que este elemento apresenta bons resultados no cisalhamento com reduzido tempo computacional (poucos elementos finitos são utilizados); para que o elemento considerado represente o mecanismo de flexão de maneira adequada é necessária a utilização de malhas refinadas.

III.3 - Exemplo 3: Verificação da influência do número de elementos

A estrutura em estudo é um pilar com carga unitária aplicada nos nós da extremidade superior e com deslocamentos impedidos nas três direções (x, y, z) dos nós da extremidade inferior.

Inicialmente foi estudada uma divisão em apenas 2 elementos. Neste caso o deslocamento vertical (w) do nó da extremidade (z = 20m) corresponde a 0,78% do valor teórico. A seguir estudaram-se as divisões em 08 e 16 elementos, como mostra a figura III.5. Os valores obtidos dos deslocamentos foram comparados com os resultados teóricos na tabela III.2.

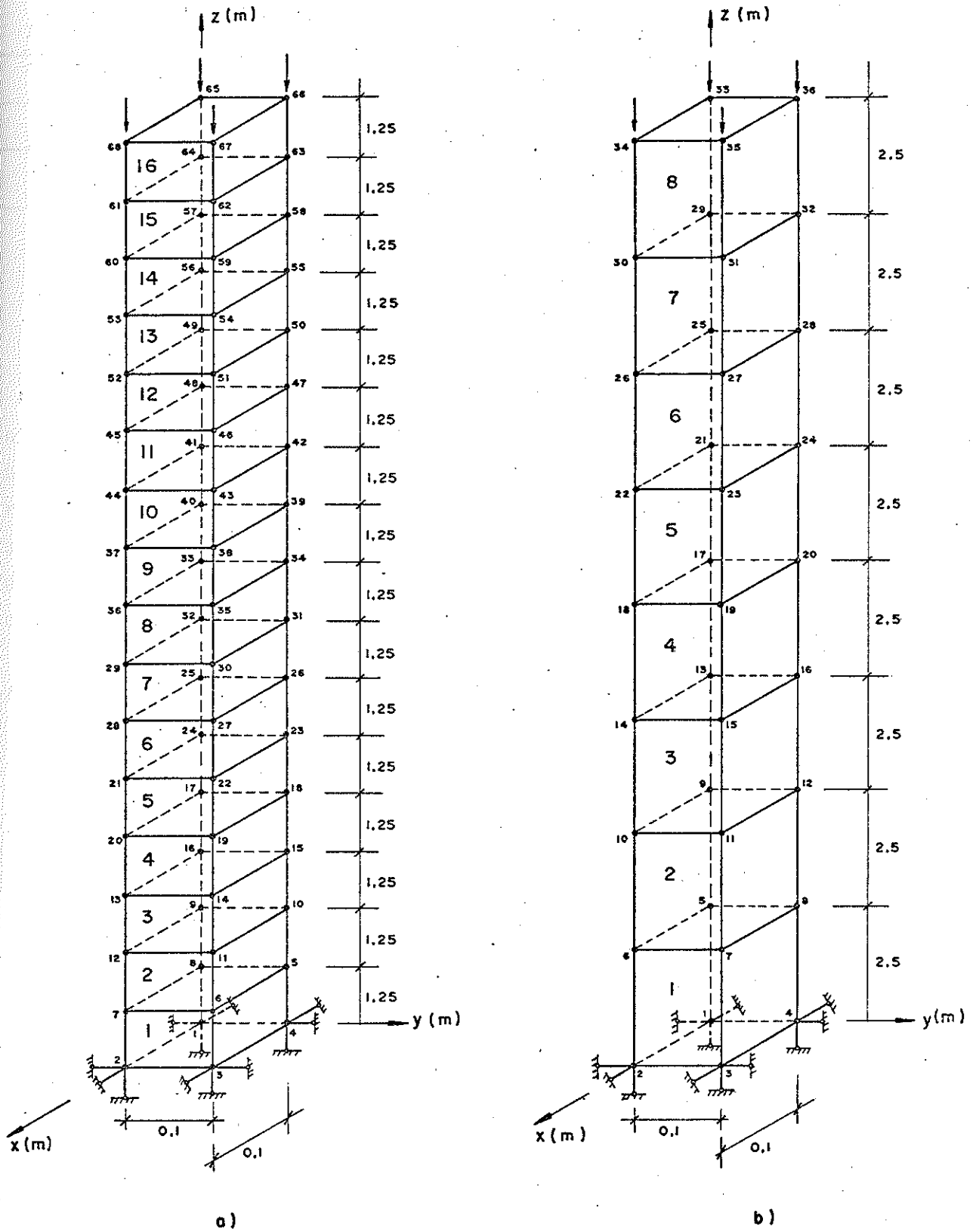


FIG. III.5

z(m)	Teórico	08 elementos	Erro (%)	16 elementos	Erro (%)
10	$0,2 \times 10^{-2}$	$0,1992 \times 10^{-2}$	0,40	$0,1996 \times 10^{-2}$	0,20
15	$0,3 \times 10^{-2}$	$0,2992 \times 10^{-2}$	0,27	$0,2996 \times 10^{-2}$	0,13
20	$0,4 \times 10^{-2}$	$0,3992 \times 10^{-2}$	0,20	$0,3996 \times 10^{-2}$	0,10

Tabela III.2 - Comparação dos deslocamentos verticais (w)

As tensões normais e de cisalhamento obtidas para 8 e 16 elementos estão nas tabelas III.3 e III.4 respectivamente. No elemento inferior (1) que possui deslocamento impedido nas direções x, y e z, as tensões σ_x e σ_y tem valores iguais a $-10,9597 \text{ kg/cm}^2$. A partir daí, elas tendem rapidamente para zero, que é o valor esperado nos outros elementos, havendo uma pequena região cuja influência da vinculação faz com que elas sejam pequenas, porém não nulas. A tensão σ_z no elemento 8 (e 16) é igual ao resultado teórico conhecido.

As tabelas III.5 e III.6 dão os valores das deformações nos dois casos em estudo.

Nº DOS ELEMENTOS	SIGMA x	SIGMA y	SIGMA z	TAU xy	TAU yz	TAU xz
1	- 109,597	-109,597	-621,049	0	-0,9823	-0,9823
2	+ 27,964	+ 27,964	-594,630	0	0,2506	0,2506
3	- 7,135	- 7,135	-601,370	0	-0,064	- 0,064
4	+ 1,820	+ 1,820	-599,650	0	+0,016	+ 0,016
5	- 0,464	- 0,464	-600,090	0	-0,004	- 0,004
6	0,118	0,118	-600,000	0	-0,001	0,001
7	- 0,030	- 0,030	-600,000	0	0	0
8	0,008	0,008	-600,000	0	0	0

TABELA III.3 - TENSÕES (tf/m^2)

Nº DOS ELEMENTOS	SIGMA x	SIGMA y	SIGMA z	TAU xy	TAU yz	TAU xz
1	-109,596	-109,596	-621,042	0	-1,964	-1,964
2	+ 27,920	+ 27,920	- 594,639	0	0,500	0,500
3	-7,113	-7,113	-601,366	0	- 0,1275	- 0,1275
4	+1,812	+1,812	-599,652	0	0,032	0,032
5	-0,462	-0,462	-600,009	0	- 0,008	- 0,008
6	0,118	0,118	-599,978	0	0,002	0,002
7	-0,030	-0,030	-600,006	0	0	0
8	0,008	0,008	-600,000	0	0	0
9	-0,002	-0,002	-600,000	0	0	0
10	0	0	-600,000	0	0	0
11	0	0	-600,000	0	0	0
12	0	0	-600,000	0	0	0
13	0	0	-600,000	0	0	0
14	0	0	-600,000	0	0	0
15	0	0	-600,000	0	0	0
16	0	0	-600,000	0	0	0

TABELA III.4 - TENSÕES (tf/m²)

Nº DOS ELEMENTOS	EPSILON xx	EPSILON yy	EPSILON zz	GAMA xy	GAMA yz	GAMA xz
1	0	0	-0,1960	0	-0,0007	-0,0007
2	0,0376	0,0376	-0,2010	0	0,0002	0,0002
3	0,0280	0,0280	-0,1997	0	0	0
4	0,0305	0,0305	-0,2000	0	0	0
5	0,0299	0,0299	-0,2000	0	0	0
6	0,0300	0,0300	-0,2000	0	0	0
7	0,0300	0,0300	-0,2000	0	0	0
8	0,0300	0,0300	-0,2000	0	0	0

VALORES DEVEM SER MULTIPLICADOS POR 10⁻³

TABELA III.5 - DEFORMAÇÕES

Nº DOS ELEMENTOS	EPSILON xx	EPSILON yy	EPSILON zz	GAMA xy	GAMA yz	GAMA xz
1	0	0	- 0,1960	0	-0,0015	-0,0015
2	0,0376	0,0376	- 0,2010	0	0,0004	0,0004
3	0,0280	0,0280	- 0,1997	0	0	0
4	0,0305	0,0305	- 0,2000	0	0	0
5	0,0299	0,0299	- 0,2000	0	0	0
6	0,0300	0,0300	- 0,2000	0	0	0
7	0,0300	0,0300	- 0,2000	0	0	0
8	0,0300	0,0300	- 0,2000	0	0	0
9	0,0300	0,0300	- 0,2000	0	0	0
10	0,0300	0,0300	- 0,2000	0	0	0
11	0,0300	0,0300	- 0,2000	0	0	0
12	0,0300	0,0300	- 0,2000	0	0	0
13	0,0300	0,0300	- 0,2000	0	0	0
14	0,0300	0,0300	- 0,2000	0	0	0
15	0,0300	0,0300	- 0,2000	0	0	0
16	0,0300	0,0300	- 0,2000	0	0	0

VALORES DEVEM SER MULTIPLICADOS
POR 10^{-3}

TABELA III.6 - DEFORMAÇÕES

III.4 - Exemplo 4: Laje Cogumelo

A finalidade deste exemplo foi o estudo das tensões e deformações em um painel de uma laje cogumelo, conforme mostrado na figura III.6. Aproveitando a simetria, dividiu-se 1/4 do painel destacado em 436 elementos. Procurou-se tomar elementos de menores dimensões na região próxima ao pilar, onde existe maior concentração de tensões.

As dimensões dos elementos bem como os eixos x, y e w são mostrados na figura III.8. Nesta figura o eixo auxiliar w é aquele onde será feito um dos cortes para análise das tensões.

A altura da laje é 10cm e foi dividida em quatro níveis. Para que o efeito da vinculação dos nós não afetasse a laje, optou-se por tomar elementos com alturas maiores (5cm) no pilar, conforme figura III.9.

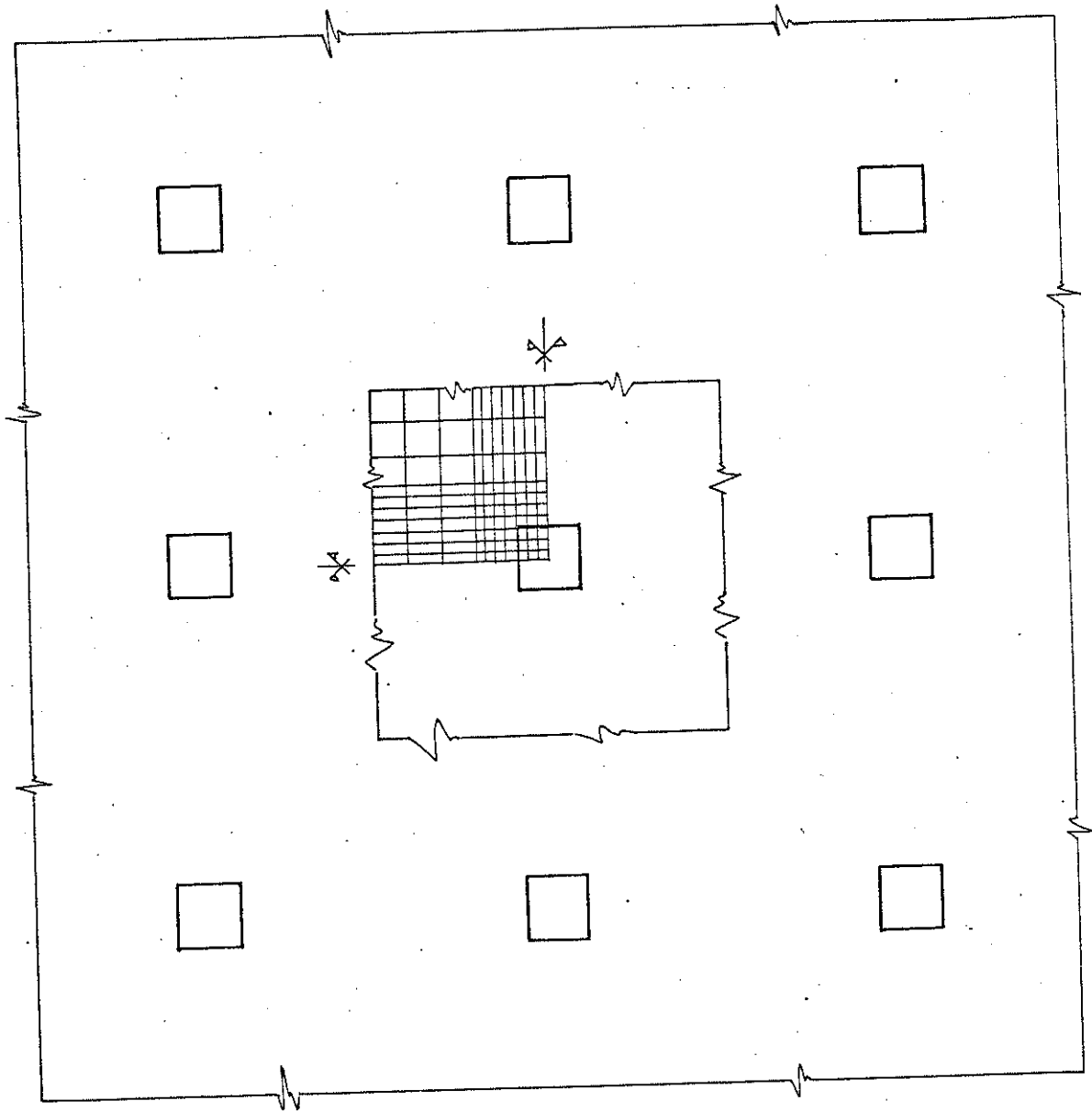


FIG. III.6 - PLANTA ESQUEMÁTICA - LOCAÇÃO DOS PILARES

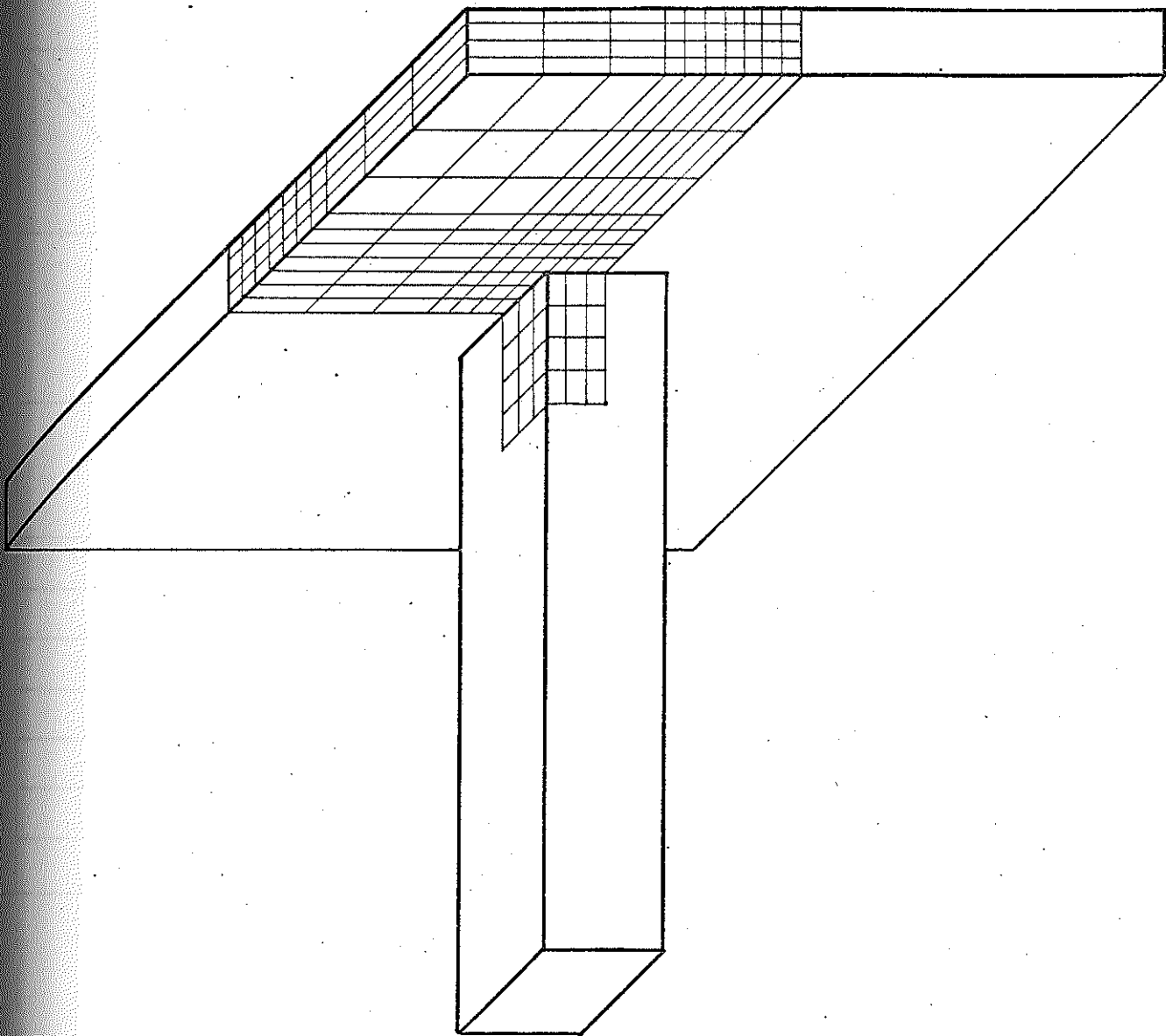


FIG. III. 7 - VISTA INFERIOR DO PILAR EM ANÁLISE

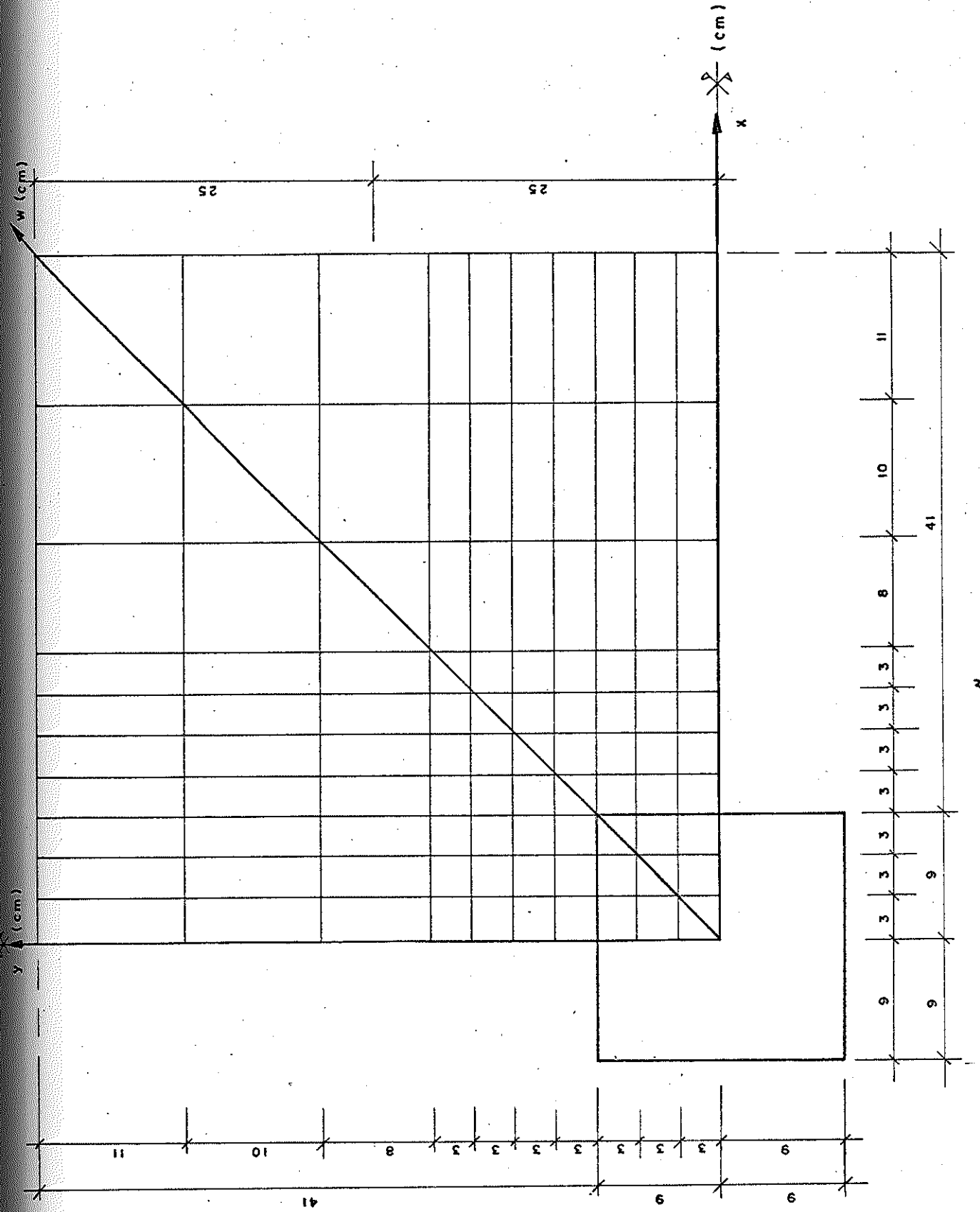


FIG. III. 8 - DISPOSIÇÃO DOS ELEMENTOS EM PLANTA

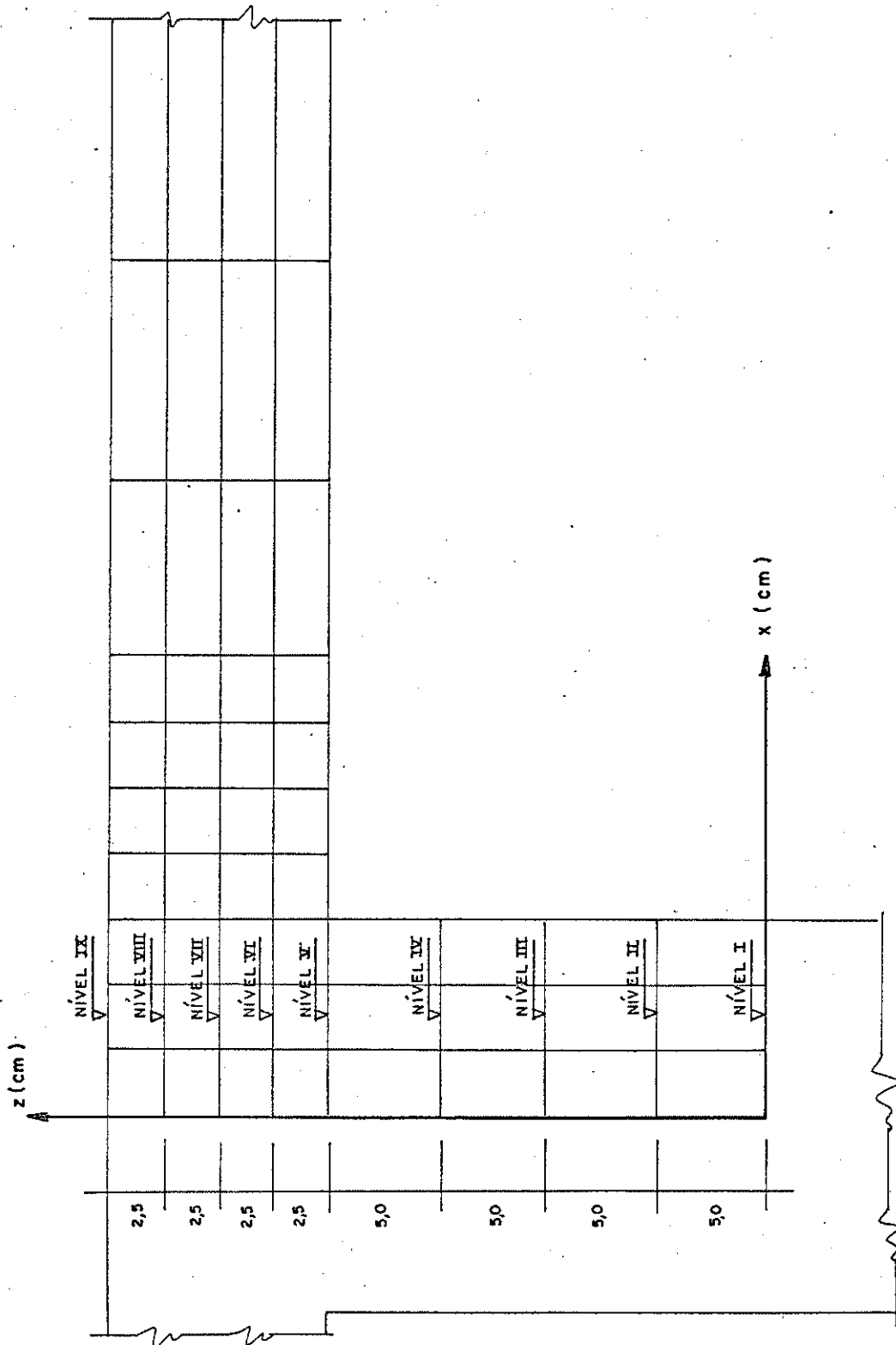


FIG. III. 9 - ELEVACÃO

Para cada nível em estudo foi feita uma planta mostrando a numeração dos elementos e dos nós (figuras III.10 a III.18).

Na figura III.18 estão assinalados os pontos de aplicação das cargas unitárias.

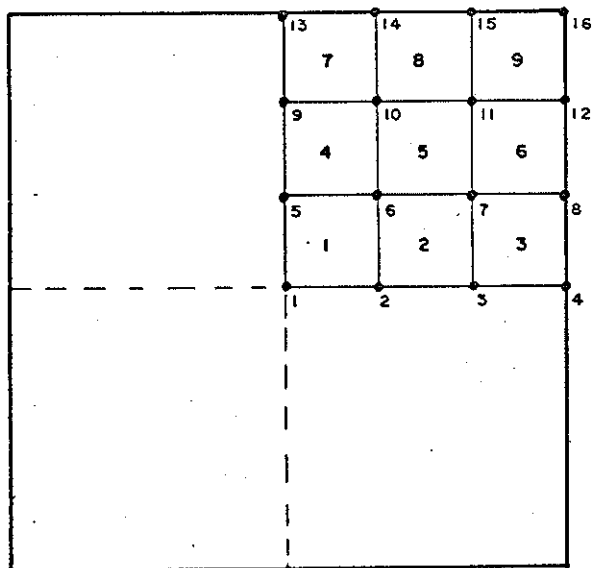


FIG. III.10 - PLANTA - NÍVEL I ($z = 0$)

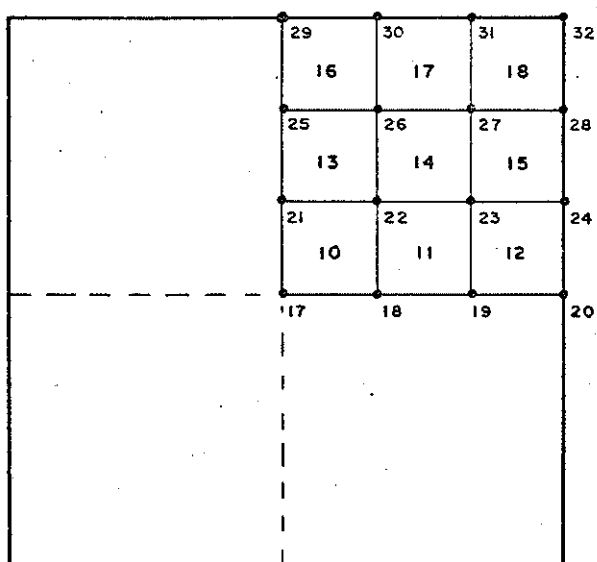


FIG. III.11 - PLANTA - NÍVEL II ($z = 5$ cm)

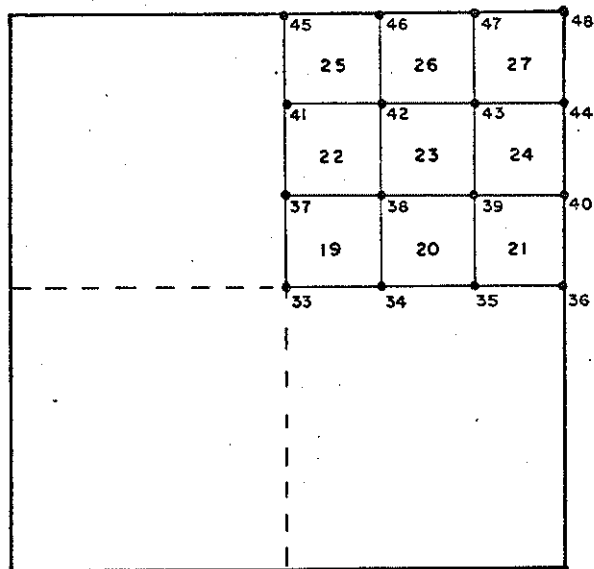


FIG. III.12 - PLANTA - NÍVEL III (z=10cm)

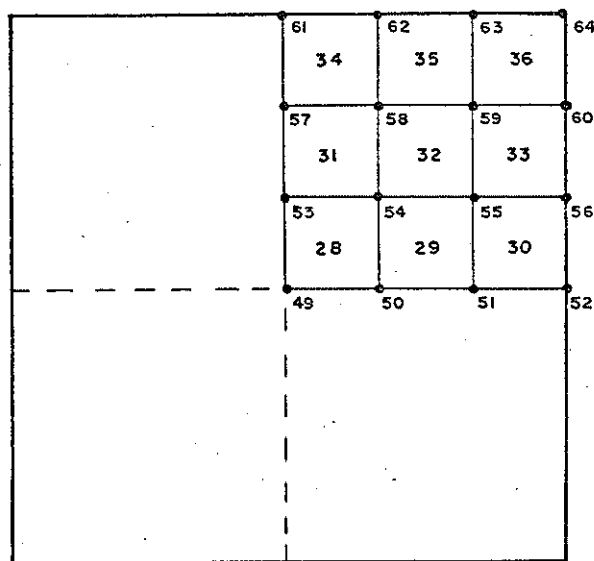


FIG. III.13 - PLANTA - NÍVEL IV (z=15 cm)

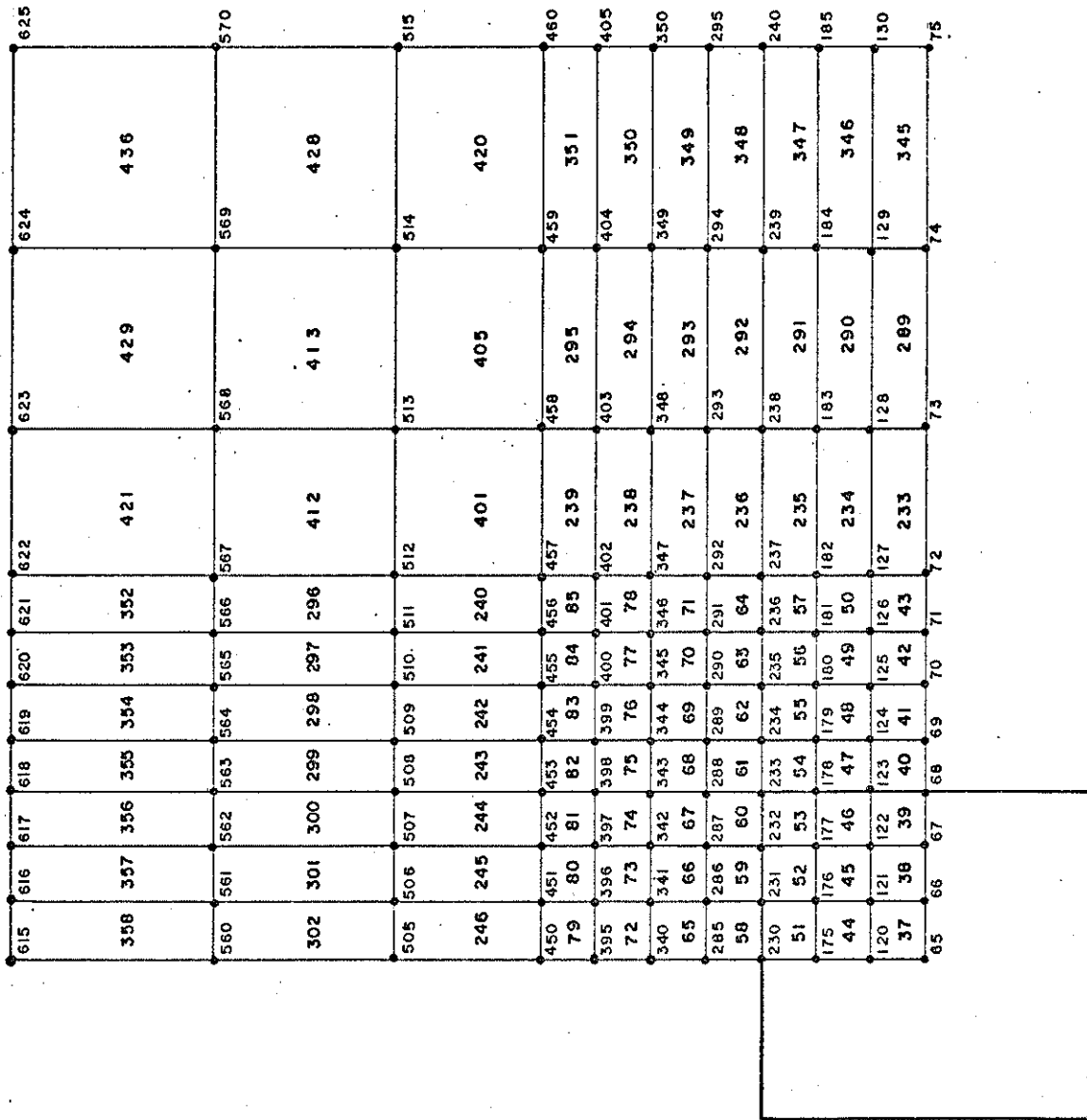


FIG. III. 14 - PLANTA - NIVEL IV (z = 20 cm)

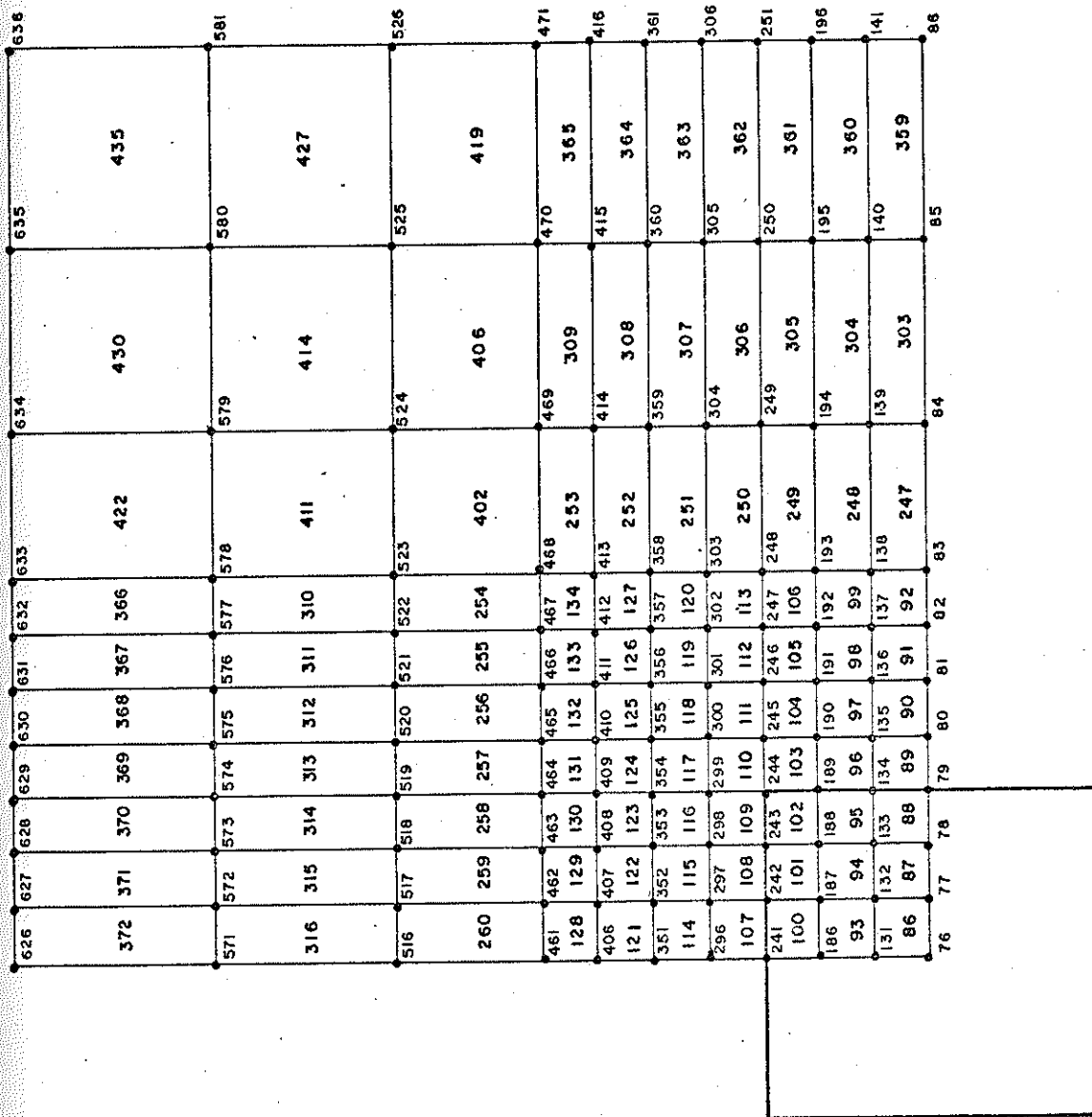


FIG. III. 15 - PLANTA-NÍVEL VI (z = 22,5 cm)

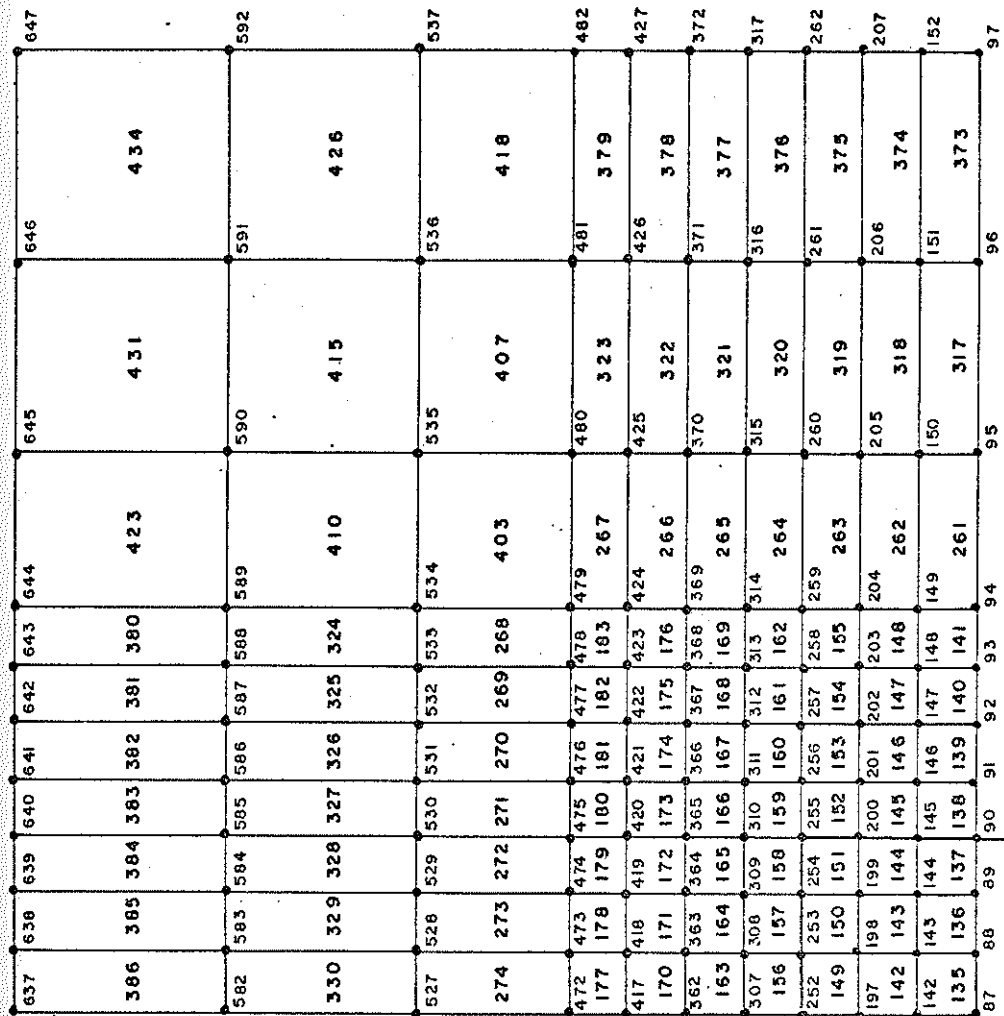


FIG. III.16 - PLANTA - NÍVEL VII (z = 25 cm)

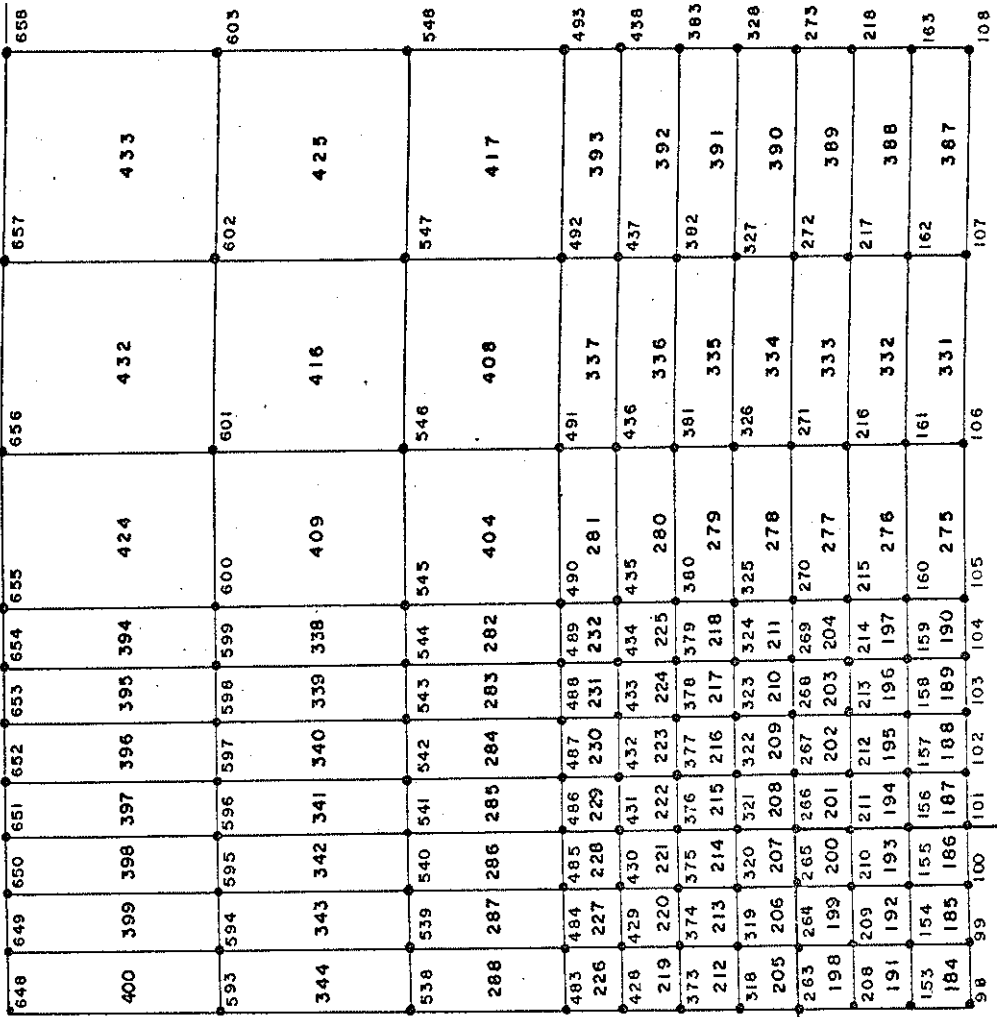


FIG. III. 17 - PLANTA - NÍVEL VIII (z = 27,5 cm)

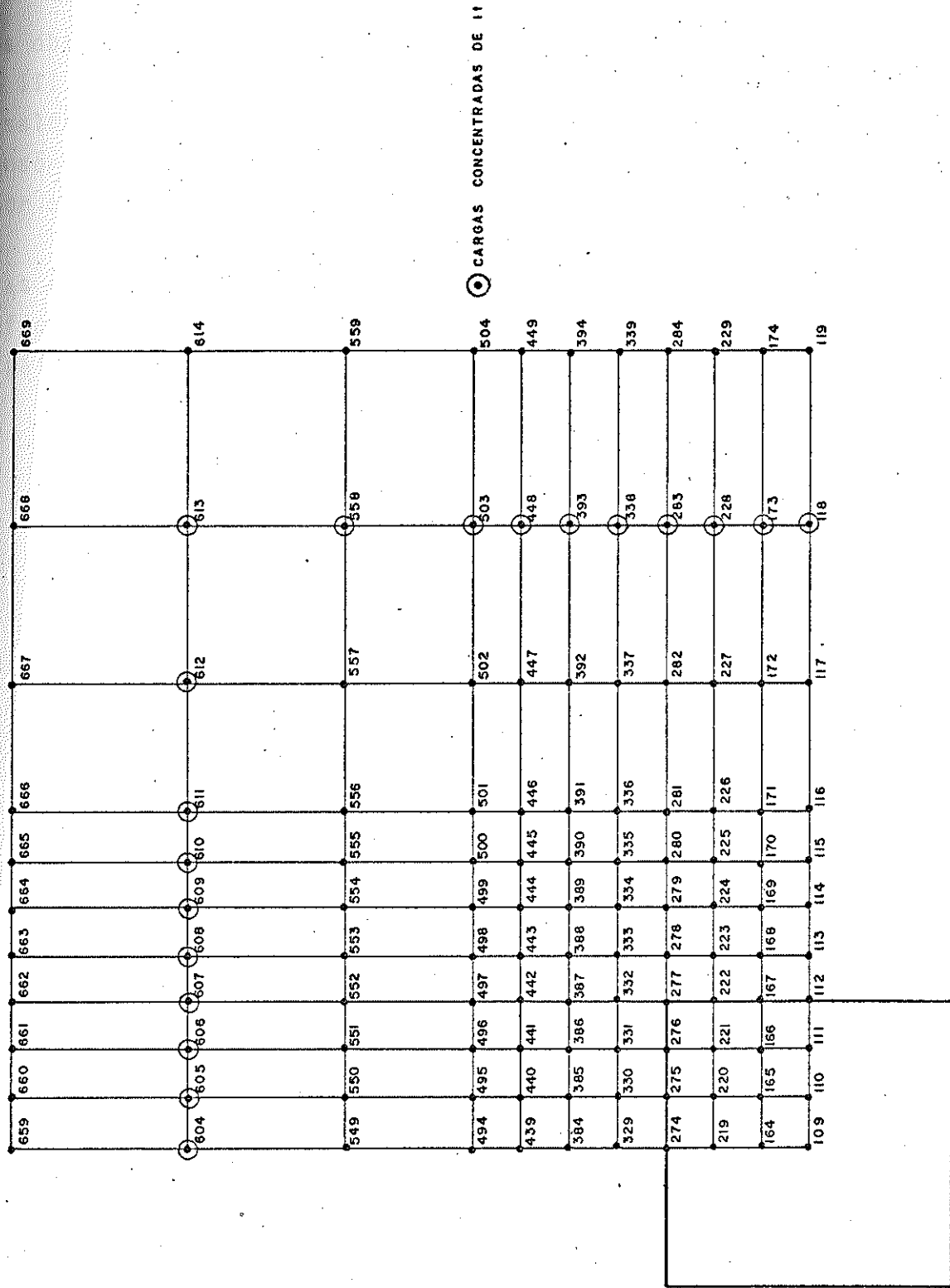


FIG. III.18 - PLANTA - NÍVEL IX (z = 30 cm)

Por não ser possível a colocação de todos os resultados obtidos no exemplo, foram feitos três cortes: AA, BB, CC (figura III.19). Para cada um deles mostrou-se as tensões normais e de cisalhamento em cada elemento do corte. Gráficos com as variações de tensões em cortes paralelos ao eixo x (ou w) foram feitos para melhor análise do comportamento da estrutura.

Finalmente foram calculadas as tensões principais e suas direções, que dão idéia do estado de fissuração antes da plastificação. Para alguns elementos foram desenhadas as direções principais para melhor visualização dos resultados.

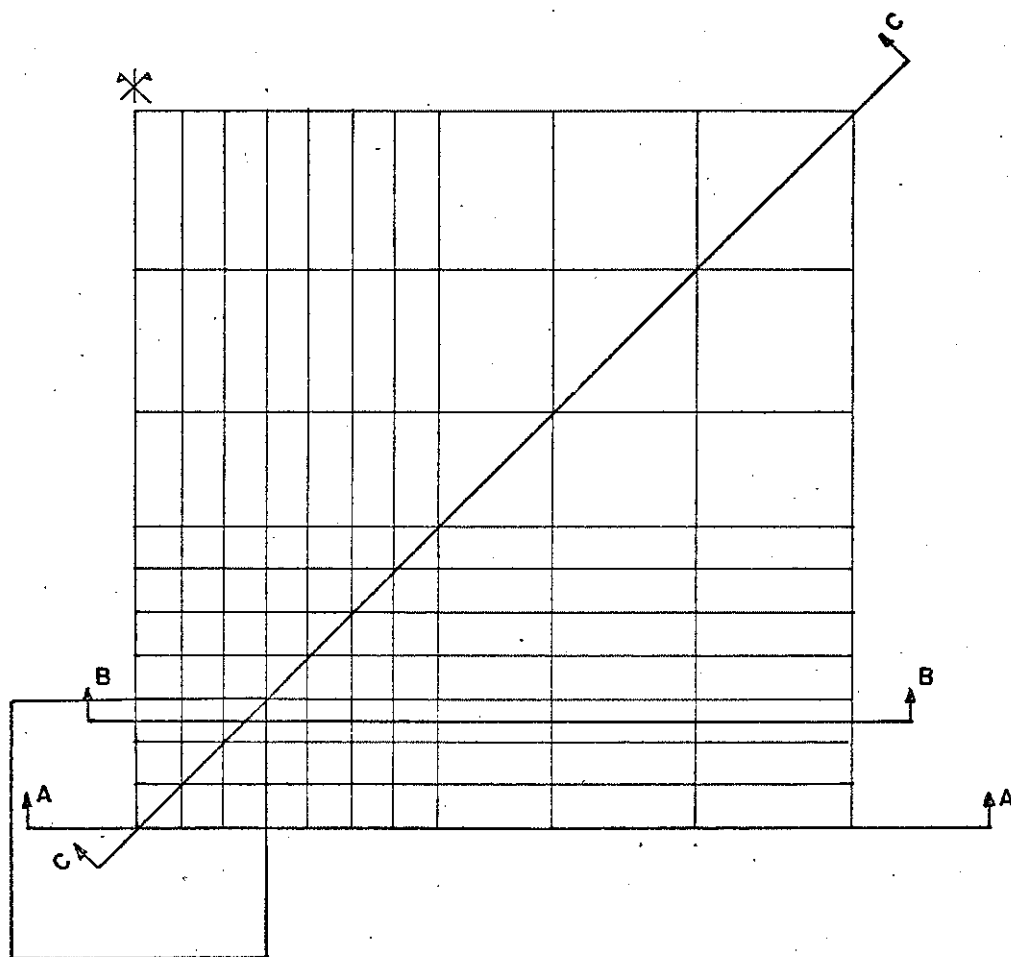


FIG. III. 19 CORTES PARA ANÁLISE DE TENSÕES

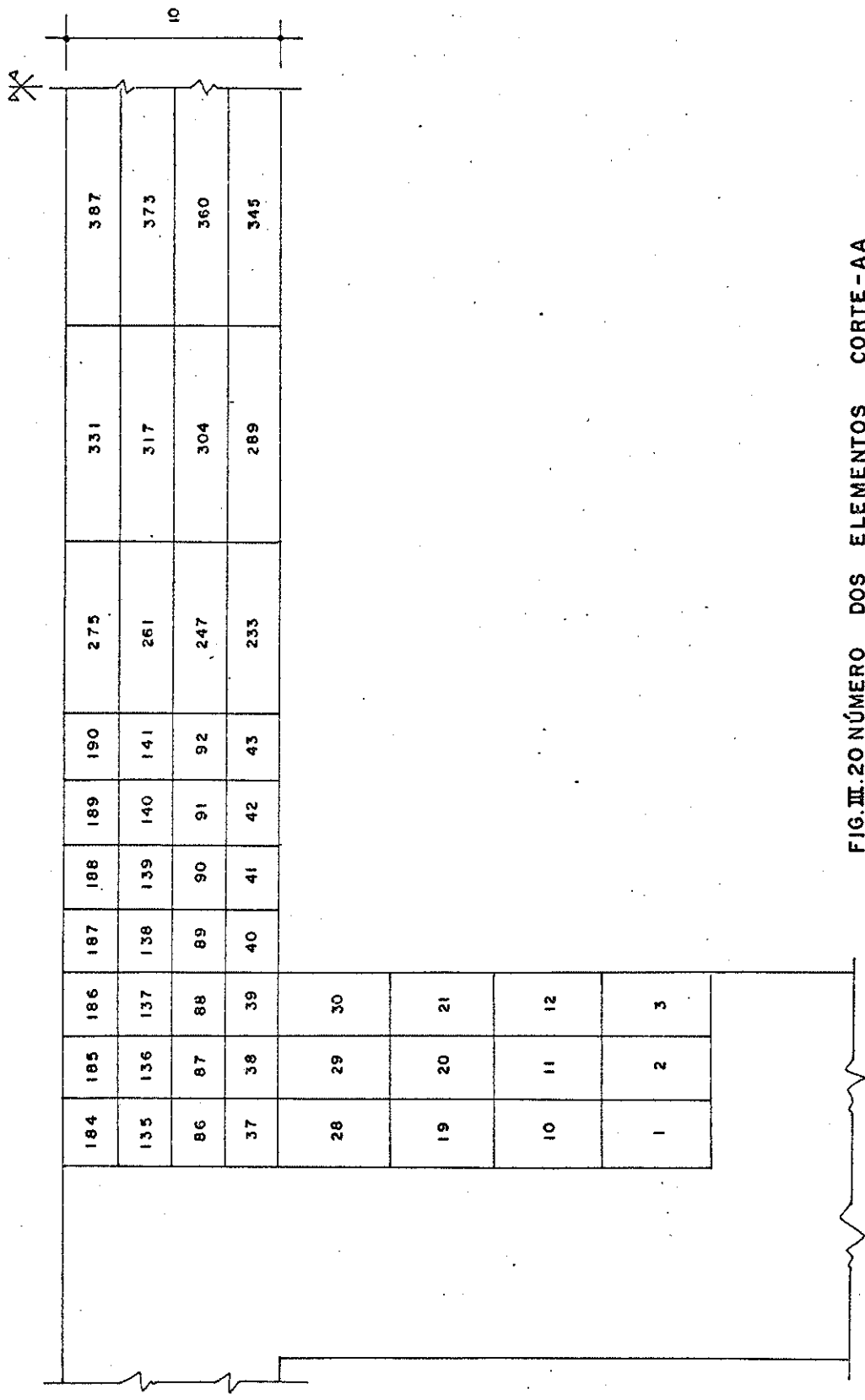


FIG. III.20 NÚMERO DOS ELEMENTOS CORTE-AA

111.28

AA

+1958,6	+1985,5	+1932,9	+1675,5	+1214,2	+725,6	+346,0	-282,8	-750,4	-1279,0
+344,8	+329,7	+359,6	+142,8	-130,8	-255,7	-180,1	-138,0	-25,8	-132,7
-903,8	-1112,7	-1329,0	-1481,4	-1919,1	-1142,4	-632,7	+7,0	+712,6	+972,2
-1513,2	-1865,6	-2483,3	-6500,7	-2974,4	-1844,4	-949,6	+212,2	+1550,4	+2108,1
-848,7	-522,0	+357,6							
-115,9	+493	-88,8							
-113,8	-102,6	+23,0							
-431,8	-427,3	-421,8							

FIG. III. 21 TENSÕES NORMAIS σ_x NOS ELEMENTOS DO CORTE AA (tf/m²)

+1958,6	+1959,2	+1933,9	+1854,1	+1712,8	+1532,5	+1343,1	+1093,3	+708,8	+187,2
+3448	+333,0	+296,1	+206,4	+142,9	+106,0	+84,2	+62,9	+55,2	-35,6
-903,8	-955,0	-1088,4	-1346,6	-1447,4	-1288,9	-1163,0	-976,6	-551,5	-282,8
-1513,2	-1601,7	-1825,7	-3105,5	-2901,1	-2783,4	-2491,4	-2088,3	-1232,9	-548,4
-848,7	-829,3	-808,5							
-115,9	-113,6	-197,6							
-113,8	-116,8	-86,7							
-431,8	-427,3	-421,8							

FIG. III.22 TENSÕES NORMAIS σ_y NOS ELEMENTOS DO CORTE AA (tf/m^2)

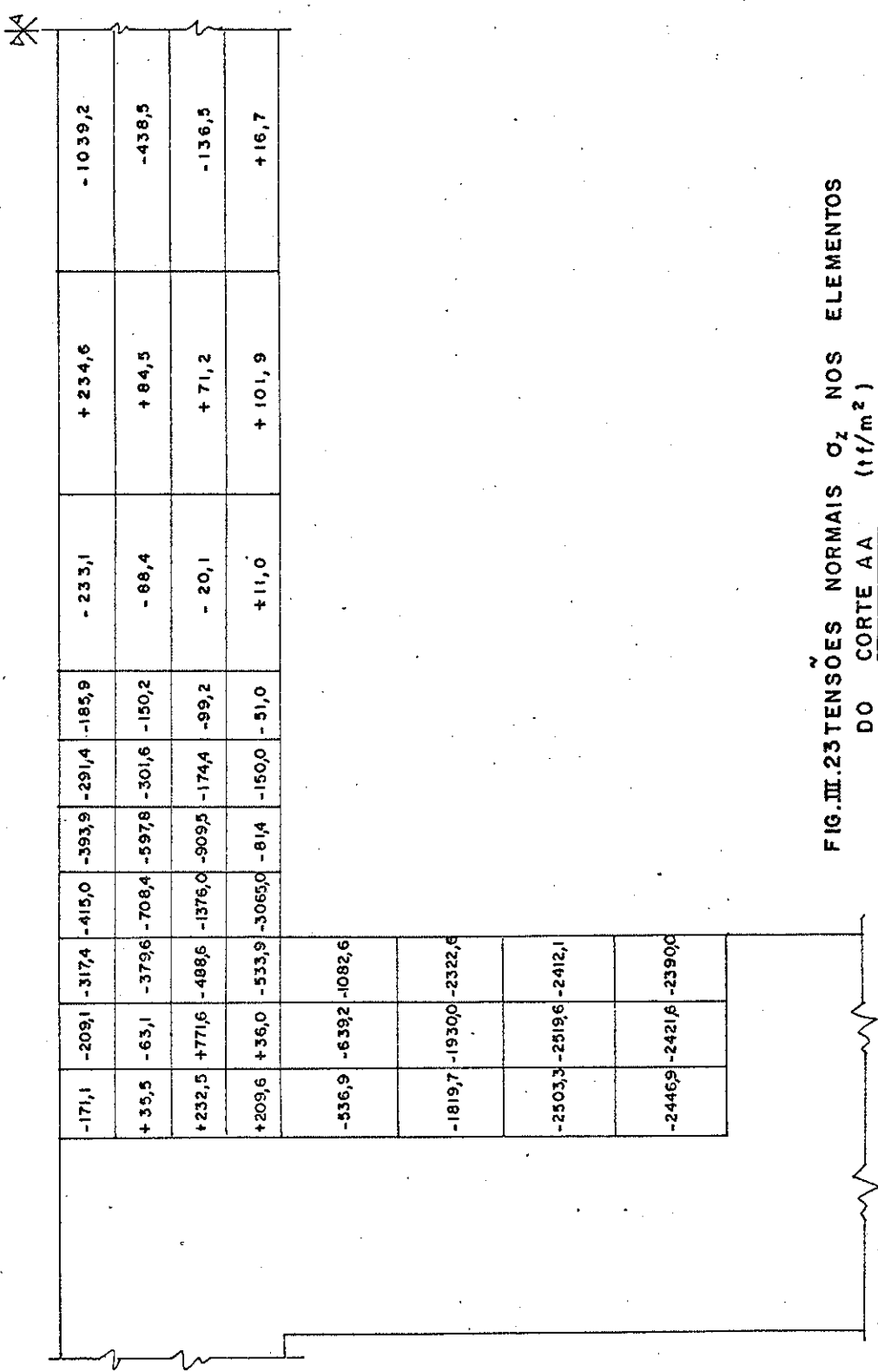


FIG. III.23 TENSÕES NORMAIS σ_z NOS ELEMENTOS DO CORTE AA (tf/m²)

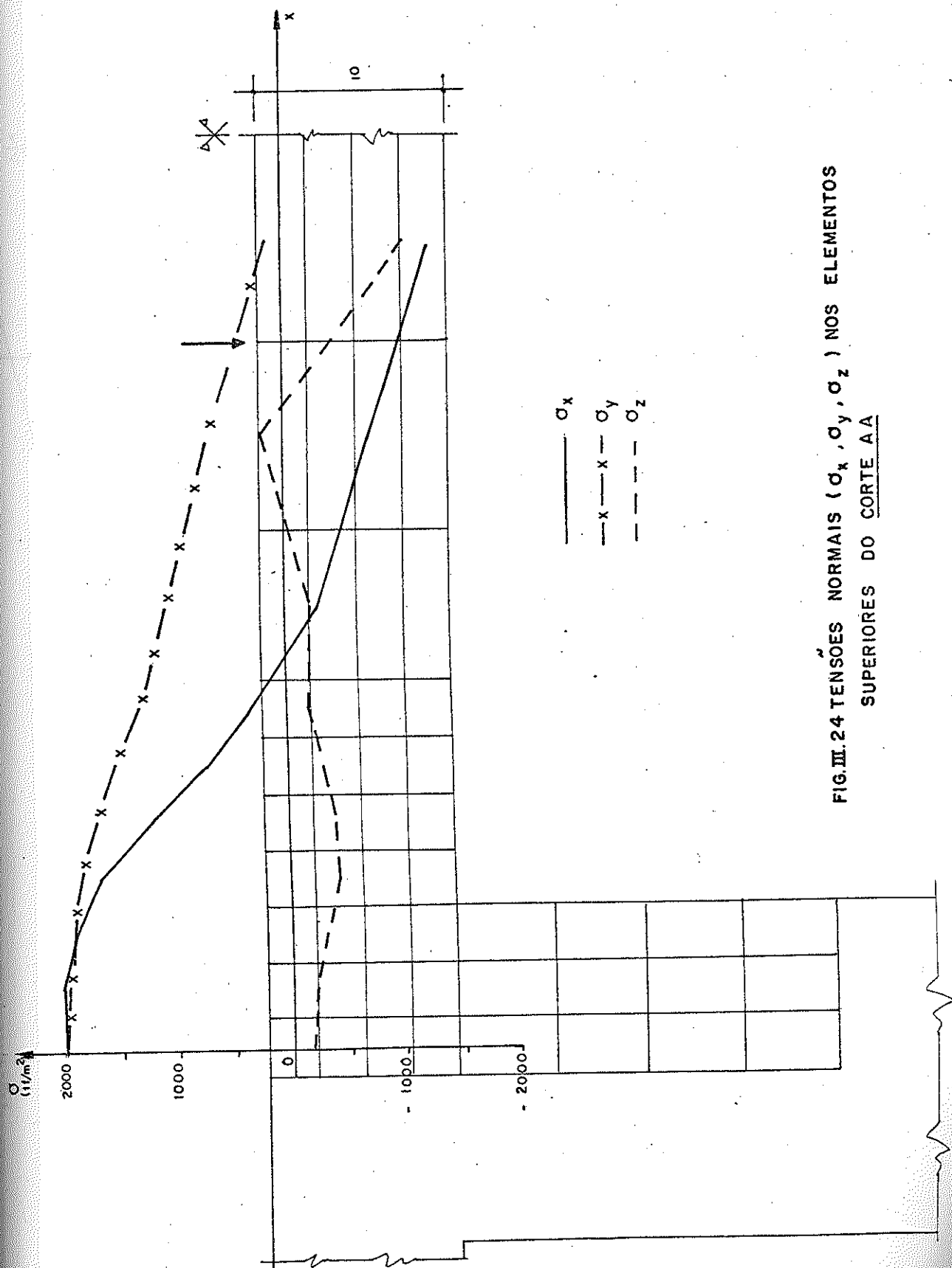


FIG.III.24 TENSÕES NORMAIS ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) NOS ELEMENTOS SUPERIORES DO CORTE AA

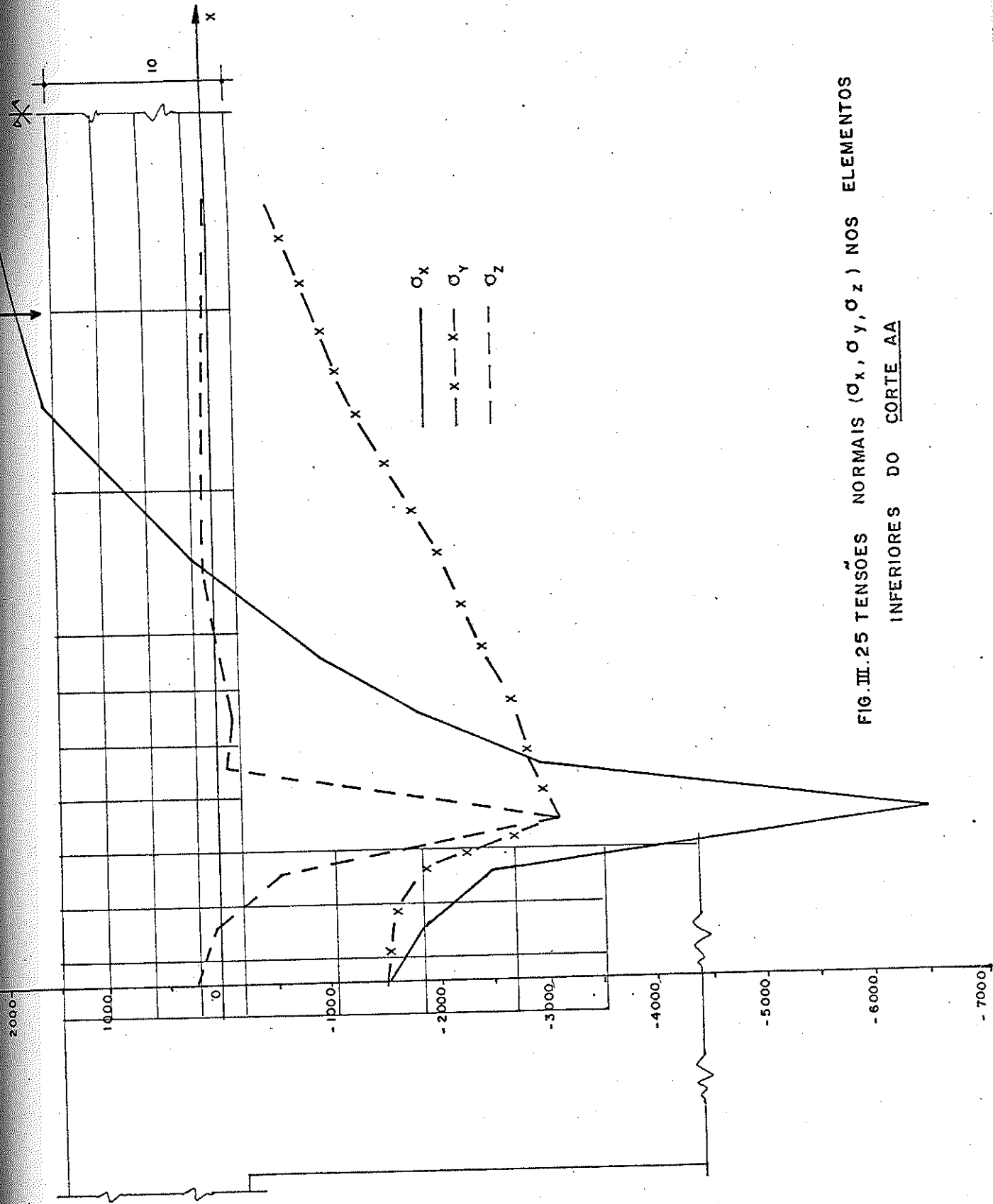


FIG. III.25 TENSÕES NORMAIS ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) NOS ELEMENTOS INFERIORES DO CORTE AA

AA

0,0	+1,0	+2,0	-4,5	-13,3	-22,5	-27,0	-35,0	-17,9	-16,6
0,0	+2,3	+6,3	+8,7	+6,1	-0,2	-4,0	-4,1	+0,57	-1,2
0,0	+1,5	+7,7	+20,4	+21,4	+18,6	+21,0	+23,6	+104,6	+47,3
0,0	-4,2	+0,8	-2,1	+7,3	+32,8	+50,6	+54,9	+50,0	+26,7
0,0	-6,2	-13,1							
0,0	-2,5	-3,7							
0,0	-0,9	-2,9							
0,0	0,0	0,0							

FIG.III.26 TENSÕES DE CISCALHAMENTO τ_{xy} NOS
ELEMENTOS DO CORTE AA (tf/m^2)

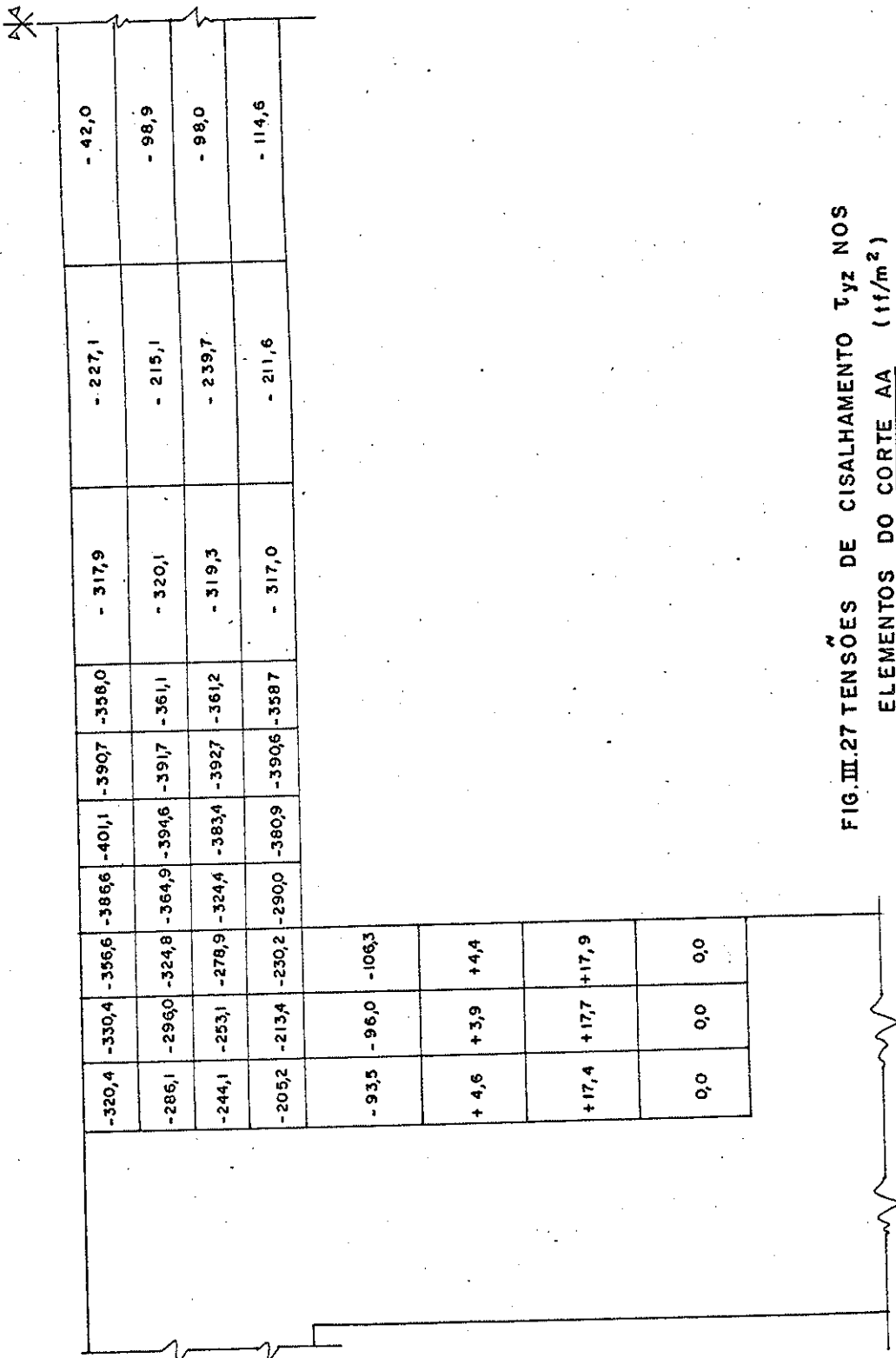


FIG. III.27 TENSÕES DE CISCALHAMENTO τ_{yz} NOS
ELEMENTOS DO CORTE AA (kgf/m²)

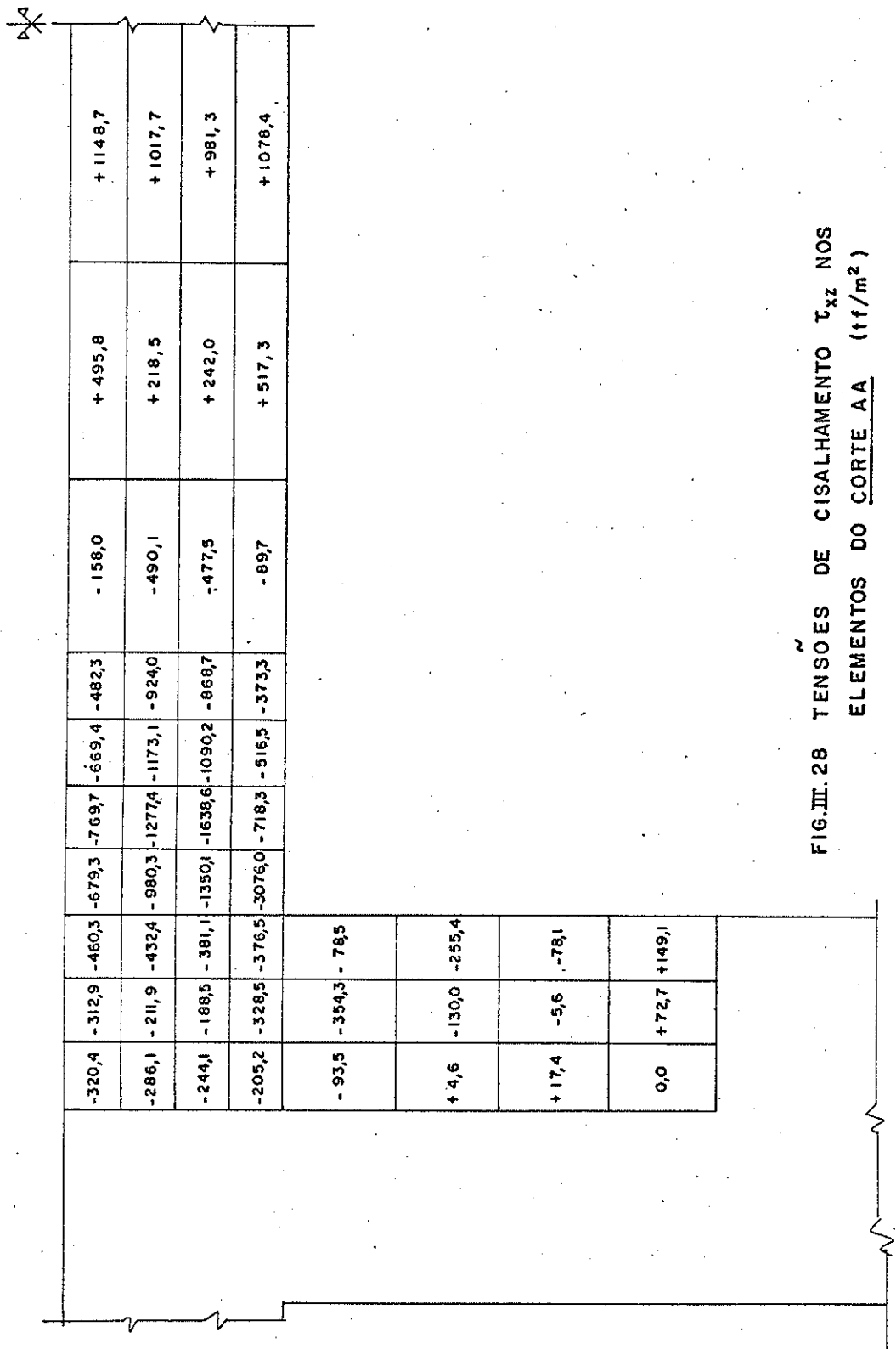


FIG. III.28 TENSOES DE CISCALHAMENTO τ_{xz} NOS ELEMENTOS DO CORTE AA (tf/m²)

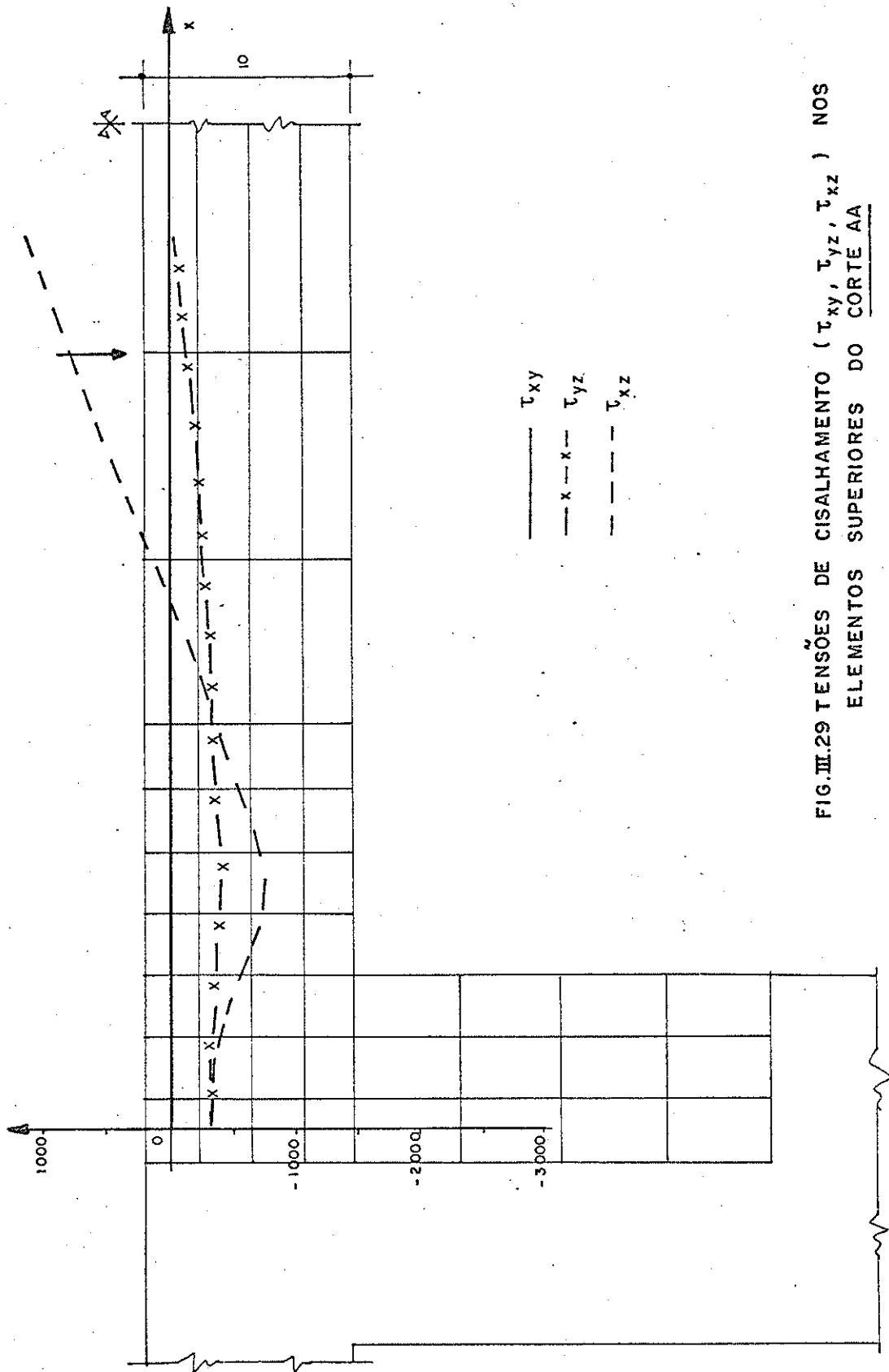


FIG. III.29 TENSÕES DE CISCALHAMENTO (τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz}) NOS ELEMENTOS SUPERIORES DO CORTE AA

TABELA III. 3 - TENSÕES E DIREÇÕES PRINCIPAIS - CORTE AA

Elemento	Tensões Princ. tf/m ²	Cossenos Diretores		
		C _x	C _y	C _z
1	-431,810	1,0000	0,0000	0,0000
	-431,810	0,0000	1,0000	0,0000
	-2.446,924	0,0000	0,0000	1,0000
2	-424,692	0,9993	0,0000	0,0364
	-427,340	0,0000	1,0000	0,0000
	-2.424,244	-0,0364	0,0000	0,9993
3	-410,534	0,9972	0,0000	0,0751
	-421,769	0,0000	1,0000	0,0000
	-2.401,260	-0,0751	0,0000	0,9972
10	-113,548	0,7071	0,7071	0,0102
	-113,548	-0,7071	0,7071	0,0000
	-2.503,555	-0,0073	-0,0073	0,9999
11	-102,476	0,9974	-0,0715	-0,0028
	-116,757	0,0715	0,9974	0,0072
	-2.519,776	0,0023	-0,0073	0,9999
12	+25,615	0,9990	-0,0309	-0,0322
	-86,646	0,0309	0,9995	0,0067
	-2.414,760	0,0320	-0,0077	0,9995
19	-115,916	0,7071	0,7071	0,00386
	-115,941	-0,7071	0,7071	0,0000
	-1.819,781	-0,0027	-0,0027	1,0000
20	+57,823	0,9977	-0,0163	-0,0653
	-113,598	0,0165	0,9999	0,0010
	-1.938,535	0,0653	-0,0209	0,9979
21	-59,875	0,9932	-0,0300	-0,1122
	-197,679	0,0300	0,9995	-0,0016
	-2.351,490	0,1122	-0,0018	0,9937
28	-488,437	-0,2436	-0,2436	0,9388
	-848,660	-0,7071	0,7071	0,0000
	-897,163	0,6638	0,6638	0,3445
29	-216,055	0,7527	0,0944	-0,6515
	-794,080	-0,3691	0,8800	-0,2989
	-980,359	0,5452	0,4654	0,6972
30	+361,962	0,9985	-0,0063	-0,0537
	-772,287	-0,0113	0,9468	-0,3215
	-1.123,231	0,0529	0,3217	0,9454
37	+257,151	-0,1144	-0,1144	0,9868
	-1.513,227	-0,7071	0,7071	0,0000
	-1.560,797	0,6978	0,6978	0,1618
38	+116,735	-0,1620	-0,1212	0,9793
	-1.622,160	-0,1481	0,9842	0,0973
	-1.925,897	0,9756	0,1293	0,1774
39	-427,025	-0,1778	-0,1599	0,9709
	-1.859,927	-0,0871	0,9854	0,1463
	-2.555,982	0,9802	0,0585	0,1891
40	-1.226,638	-0,4994	-0,1316	0,8563
	-3.154,268	-0,0912	0,9909	0,0991
	-8.310,350	0,8616	0,0286	0,5068
41	+132,861	-0,2238	-0,1219	0,9670
	-2.918,870	-0,3510	0,9356	0,0367
	-3.170,975	0,9092	0,3312	0,2522
42	+47,471	-0,2631	-0,1349	0,9552
	-1.983,142	0,9636	-0,0842	0,2536
	-2.842,125	0,0462	0,9873	0,1521

Elemento	Tensões Princ. tf/m ²	Cossenos Diretores		
		C _x	C _y	C _z
43	+131,868	-0,3289	-0,1314	0,9348
	-1.080,802	0,9443	-0,0488	0,3253
	-2.543,060	0,0020	0,9897	0,1427
86	+329,171	-0,1907	-0,1907	0,9629
	-903,847	-0,7071	0,7071	0,0000
	-1.000,527	0,6809	0,6809	0,2696
87	+162,892	-0,1429	-0,2187	0,9653
	-1.001,670	-0,2801	0,9443	0,1725
	-1.151,292	0,9493	0,2458	0,1962
88	-257,586	-0,3212	-0,3040	0,8969
	-1.147,764	-0,3509	0,9178	0,1854
	-1.500,724	0,8796	0,2552	0,4015
89	-30,281	-0,6705	-0,1873	0,7178
	-1.363,267	-0,2338	0,9716	-0,0351
	-2.810,453	0,7041	0,1442	0,6953
90	+357,747	-0,5760	-0,1763	0,7982
	-1.478,544	-0,2049	0,9764	0,0678
	-3.155,331	0,7913	0,1245	0,5986
91	+596,050	-0,5241	-0,1786	0,8327
	-1.282,928	-0,3668	0,9297	-0,0314
	-1.918,762	0,7686	0,3219	0,5528
92	+595,656	-0,5708	-0,1717	0,8029
	-1.048,123	-0,6079	0,7475	-0,2726
	-1.442,431	0,5520	0,6437	0,5301
135	+623,327	0,5825	0,5825	-0,5670
	+344,833	-0,7071	0,7071	0,0000
	-243,034	0,4009	0,4009	0,8237
136	+550,151	0,4980	0,7010	-0,5104
	+328,672	0,8144	-0,5802	-0,0022
	-279,262	0,2977	0,4146	0,8599
137	+633,949	0,7504	0,4654	-0,4693
	+311,136	-0,5485	0,8347	-0,0492
	-668,934	0,3688	0,2943	0,8817
138	+856,591	0,7667	0,3220	-0,5554
	+192,291	-0,3704	0,9285	0,0269
	-1.408,007	0,5243	0,1850	-0,8312
139	+1.013,366	0,7127	0,2937	-0,6370
	+112,744	-0,3284	0,9422	-0,0670
	-1.711,849	0,6199	0,1613	0,7679
140	+983,540	0,6540	0,3082	-0,6909
	+66,82	-0,3417	0,9351	0,0938
	-1.501,618	0,6750	0,1747	0,7169
141	+847,831	-0,6306	-0,3291	0,7029
	+50,320	-0,3795	0,9207	0,0907
	-1.144,204	0,6770	0,2096	0,7055
184	+2.050,997	0,6928	0,6928	-0,1998
	+1.958,617	-0,7071	0,7071	0,0000
	-263,490	0,1413	0,1413	0,9798
185	+2.065,546	0,7672	0,6112	-0,1943
	+1.970,302	-0,6272	0,7783	-0,0279
	-300,299	0,1342	0,1433	0,9805
186	+2.075,173	0,7655	0,5984	-0,2365
	+1.933,266	0,6156	-0,788	-0,0010
	-459,108	0,1869	0,1447	0,9716

Elemento	Tensões Princip. tf/m ²	Cossenos Diretores		
		C _x	C _y	C _z
187	+1.998,599	0,5942	0,7512	-0,2875
	+1.787,249	0,7557	-0,6436	-0,1200
	-671,233	0,2753	0,1459	0,9502
188	+1.830,231	0,3247	0,9048	-0,2755
	+1.463,513	0,8747	-0,3981	-0,2765
	-760,681	0,3598	0,1512	0,9207
189	+1.631,089	0,1614	0,9546	-0,2502
	+1.018,689	0,8904	-0,2502	-0,3803
	-682,235	0,4257	0,1614	0,8904
190	+1.429,247	0,0823	0,9675	-0,2390
	+600,811	0,8731	-0,1857	-0,4508
	-526,822	0,4805	0,1716	0,8600
233	+259,342	0,9014	0,0786	-0,4259
	+11,428	0,4327	-0,1235	0,8930
	-2.135,829	-0,0176	0,9892	0,1453
247	+510,907	0,6826	0,1637	-0,7122
	-412,454	0,7198	-0,3189	0,6166
	-1.088,206	0,1262	0,9336	0,3355
261	+508,642	-0,5232	-0,4941	0,6944
	+4,317	-0,5607	0,8131	0,1561
	-676,416	0,6418	0,3077	0,7025
275	+1.165,543	0,0006	0,9751	-0,2217
	-131,824	-0,7312	0,1516	0,6650
	-456,296	0,6821	0,1617	0,7131
289	+1.716,353	0,9521	-0,0058	0,3058
	-24,910	-0,3020	-0,1766	0,9368
	-1.271,873	-0,0486	0,9843	0,1699
304	+794,139	0,9499	0,0183	0,3119
	+95,075	-0,2829	-0,3734	0,8835
	-656,792	-0,1326	0,9275	0,3495
317	+360,108	0,4211	-0,5223	0,7415
	+18,000	0,6759	0,7259	0,1275
	-262,186	0,6048	-0,4474	-0,6387
331	+831,639	-0,1543	0,8741	-0,4607
	+321,233	0,3608	0,4838	0,7973
	-959,757	0,9198	-0,043	-0,3900
345	+2.564,728	0,9208	-0,0065	0,3900
	-366,025	-0,3324	-0,5362	0,7758
	-622,258	-0,2041	0,8440	0,4959
360	+1.544,913	0,8636	-0,0047	0,5042
	-256,788	0,1216	0,9724	-0,1991
	-735,211	-0,4894	0,2332	0,8403
373	+730,086	0,7601	-0,0844	0,6443
	-36,784	0,1014	0,9948	0,0107
	-1.345,132	-0,6418	0,0571	0,7647
387	+196,309	-0,1337	0,9784	-0,1576
	-13,113	0,6560	0,2067	0,7259
	-2.314,197	0,7428	-0,0063	-0,6695

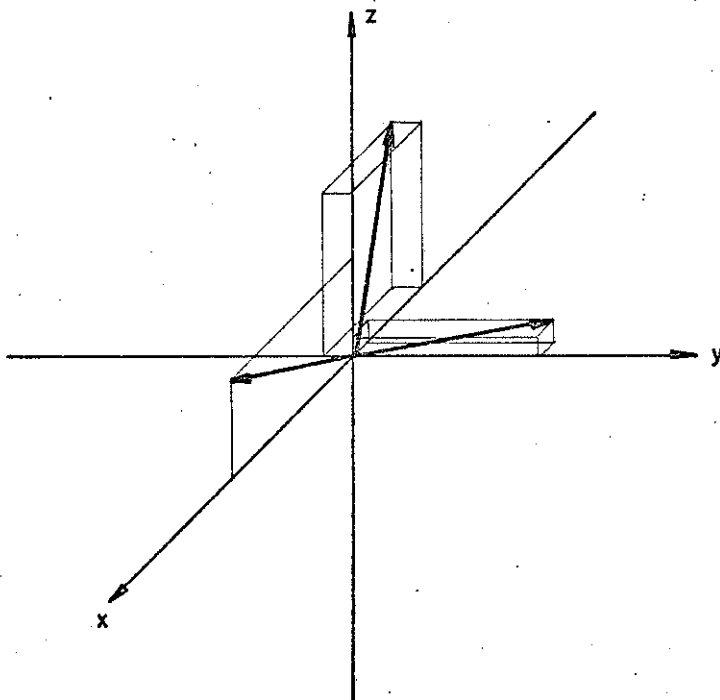


FIG. III.30 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS DIREÇÕES PRINCIPAIS
ELEMENTO 40

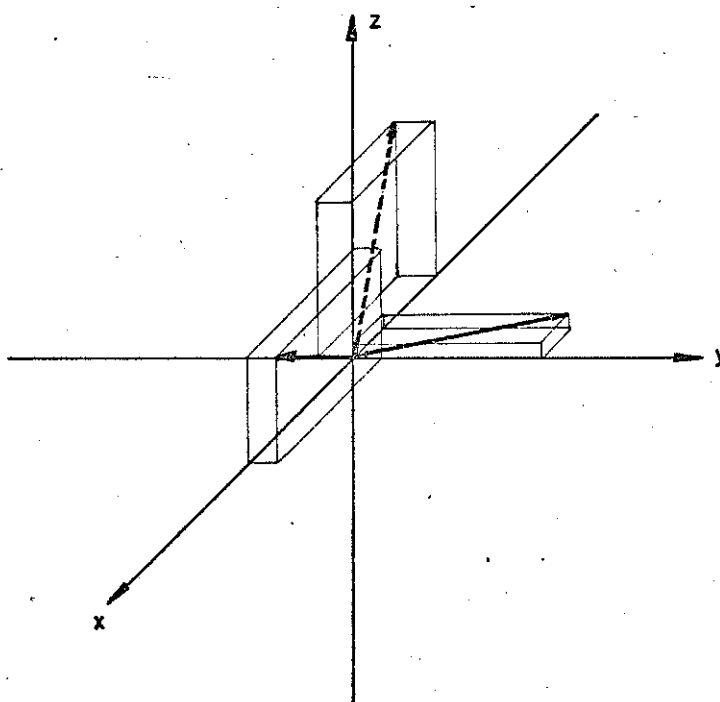


FIG. III.31 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS DIREÇÕES PRINCIPAIS
ELEMENTO 90

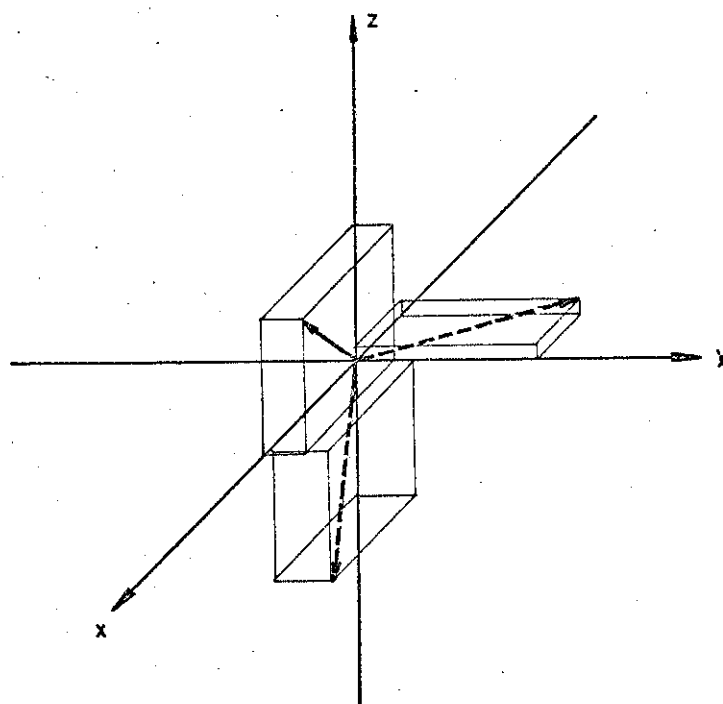


FIG. III.32 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS DIREÇÕES PRINCIPAIS
ELEMENTO 140

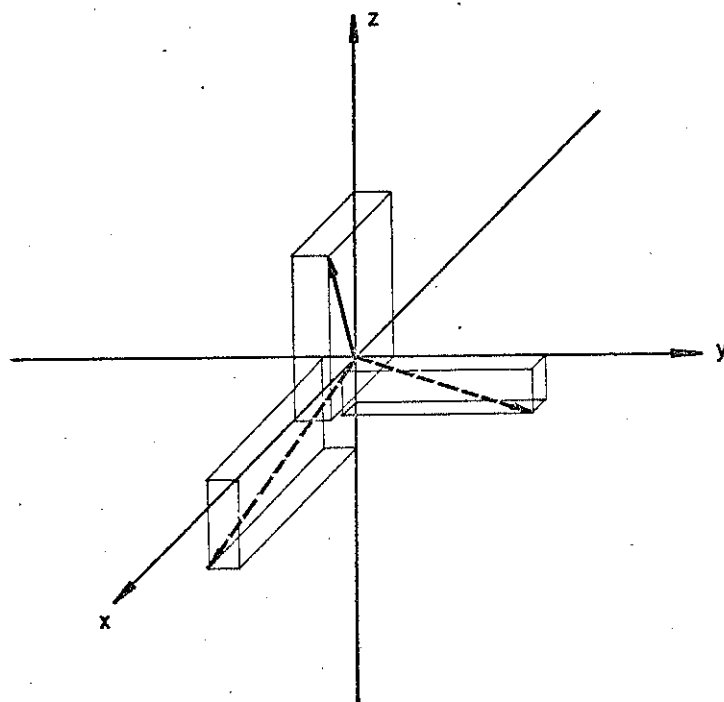


FIG. III.33 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS DIREÇÕES PRINCIPAIS
ELEMENTO 190

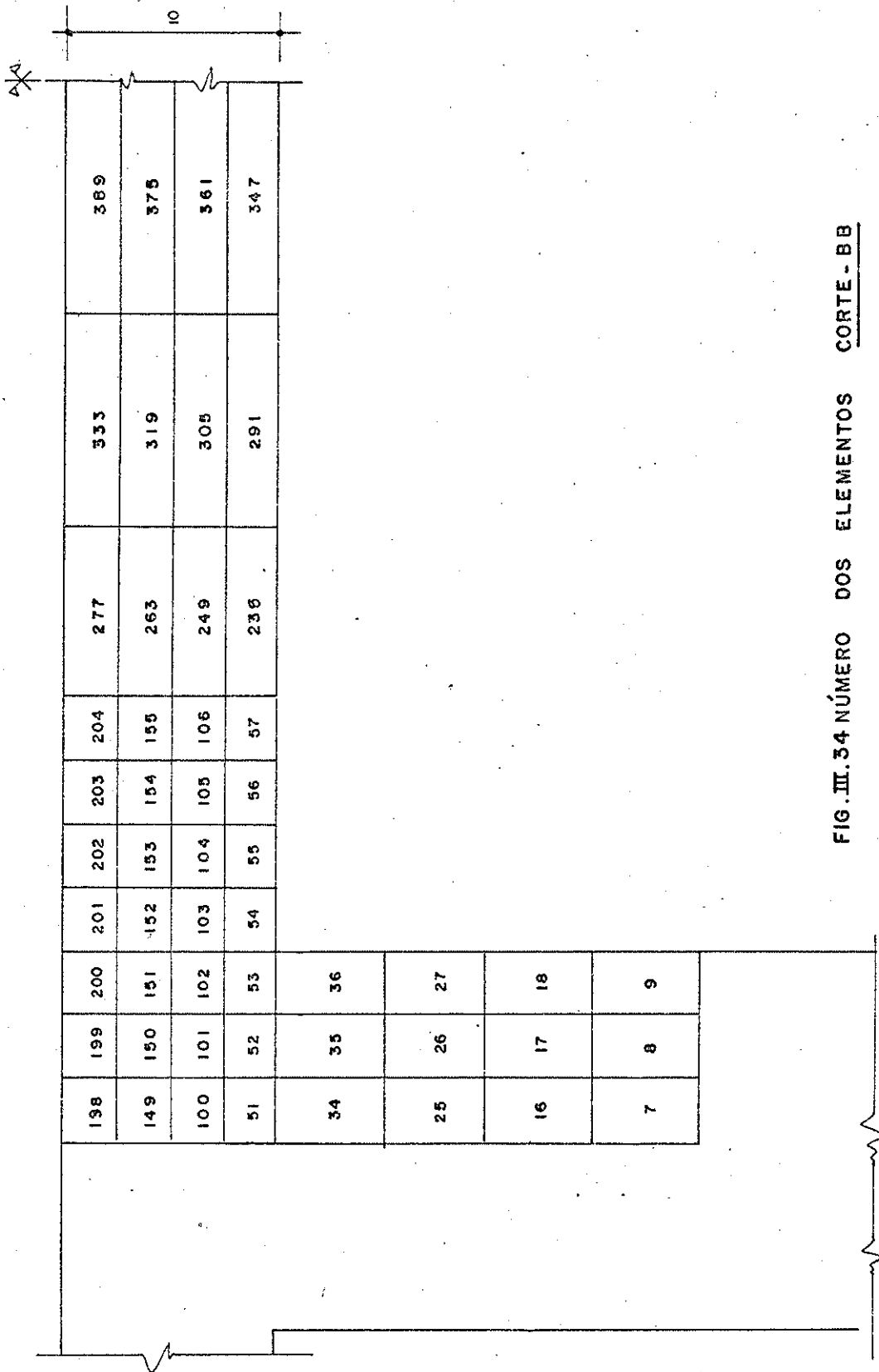


FIG. III.34 NÚMERO DOS ELEMENTOS CORTE - BB

+1933,9	+1942,6	+1851,0	+1565,5	+1109,3	+656,5	+289,7	-268,3	-769,7	-1156,2
+296,1	+303,6	+328,1	+75,7	-185,6	-278,6	-174,8	-126,7	-33,9	-95,1
-1088,4	-1232,6	-1388,9	-1497,2	-1957,1	-1070,5	-585,6	+25,2	+700,3	+960,0
-1825,6	-2163,4	-2581,0	-6767,6	-2676,0	-1682,8	-868,9	+239,0	+1517,8	+2055,8
-808,5	-464,5	+449,1							
-197,5	-36,7	-185,0							
-86,6	-82,5	+30,7							
-421,7	-417,1	-411,4							

FIG. III.35 TENSÕES NORMAIS σ_x NOS ELEMENTOS DO CORTE BB (tf/m²)

-1932,8	+1918,4	+1851,6	+1718,3	+1534,5	+1339,2	+1154,6	+ 938,3	+ 567,2	+181,8
+3596	+352,8	+328,1	+216,5	+113,0	+64,7	+57,3	+ 44,3	+ 44,2	- 41,1
-1329,0	-1344,0	-1380,8	-1373,1	-1428,5	-1184,5	-1030,2	- 851,4	- 494,0	- 251,5
-2483,3	-2570,9	-2581,8	-3979,6	-3079,9	-2585,5	-2203,1	-1806,2	-1045,5	- 476,8
+357,6	+407,8	+449,1							
- 88,8	- 91,2	-185,8							
+ 23,0	+17,0	+30,7							
-421,7	-417,1	-411,4							

FIG. III.36 TENSÕES NORMAIS σ_x NOS ELEMENTOS DO CORTE BB (tf/m²)

X

- 317,4	- 349,6	- 429,7	- 476,2	- 411,3	- 288,0	- 191,5	- 179,1	+ 68,9	- 436,7
- 379,6	- 467,4	- 726,7	- 905,9	- 643,9	- 290,6	- 130,5	- 77,6	+ 39,0	- 243,5
- 488,6	- 639,3	- 1165,1	- 1826,7	- 995,0	- 124,3	- 80,6	- 8,3	+ 69,0	- 93,3
- 533,8	- 732,4	- 1289,1	- 3934,5	- 20,6	- 123,5	- 25,1	+ 32,3	+ 112,1	+ 38,5
- 1082,5	- 1194,4	- 1719,9							
- 2322,6	- 2451,6	- 2903,3							
- 2412,1	- 2431,1	- 2322,6							
- 2390,0	- 2363,8	- 2331,5							

FIG. III.37 TENSÕES NORMAIS σ_x NOS ELEMENTOS DO CORTE BB (tf/m²)

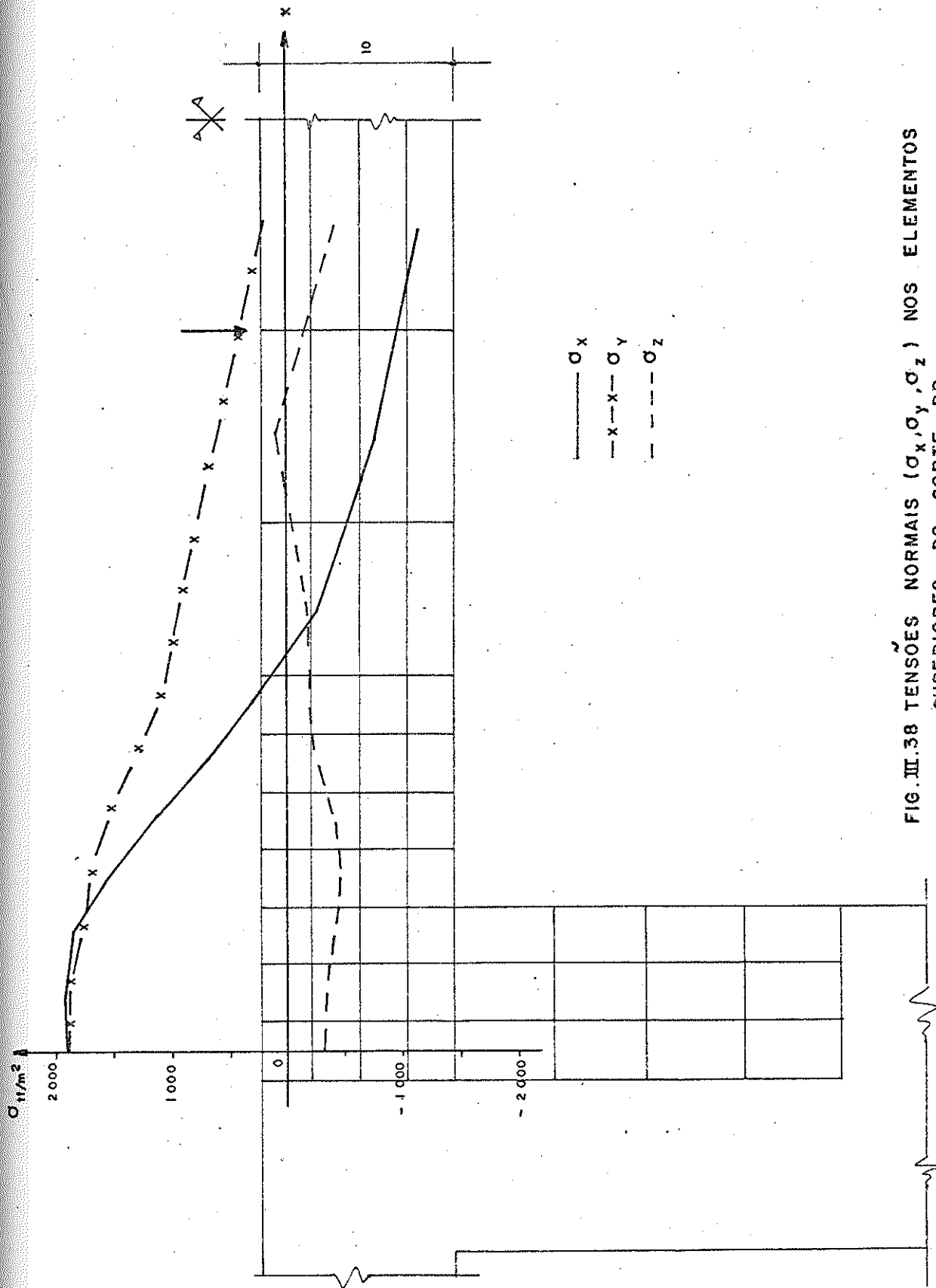


FIG. III.38 TENSÕES NORMAIS ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) NOS ELEMENTOS SUPERIORES DO CORTE BB

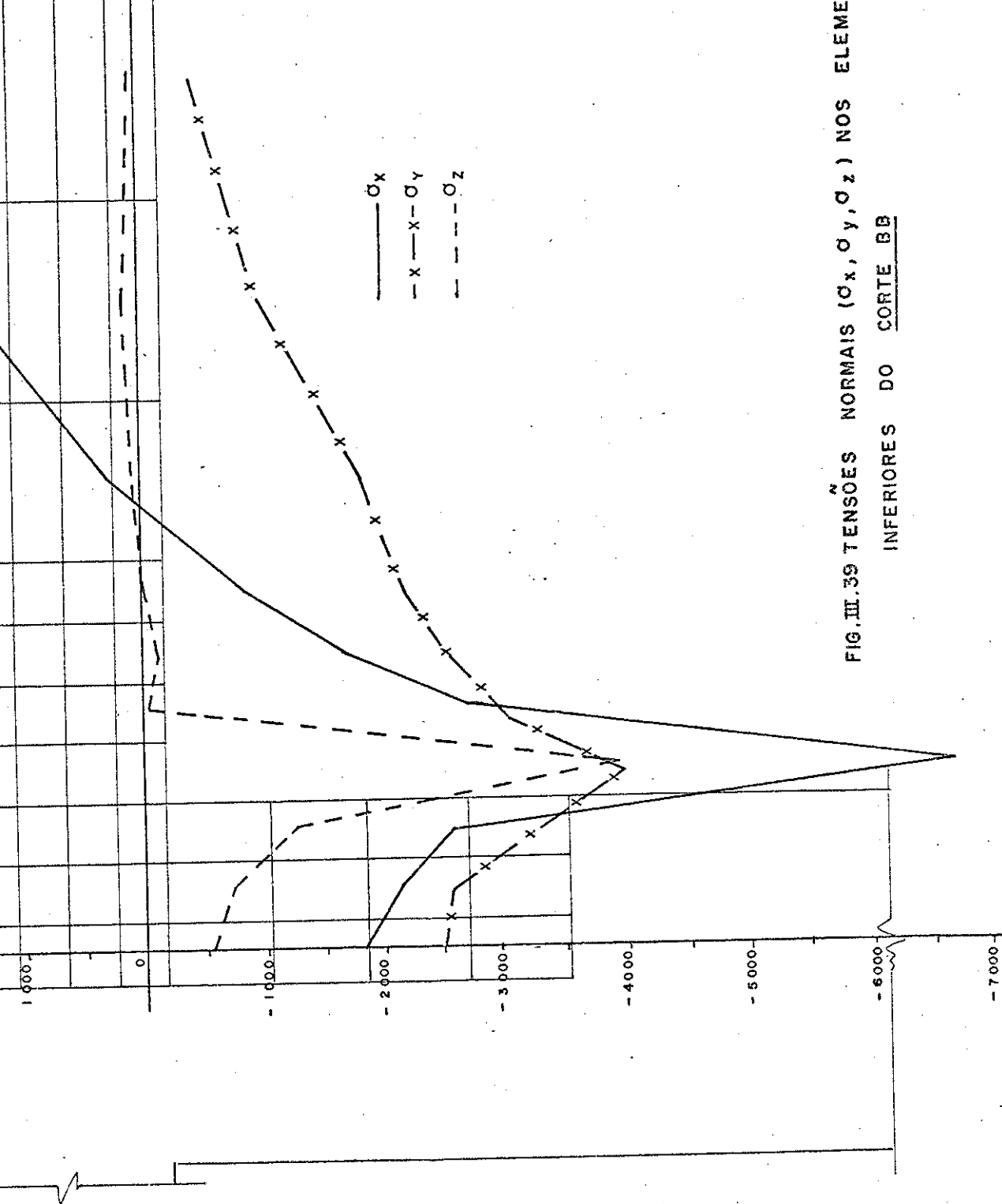


FIG. III.39 TENSÕES NORMAIS ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) NOS ELEMENTOS INFERIORES DO CORTE BB

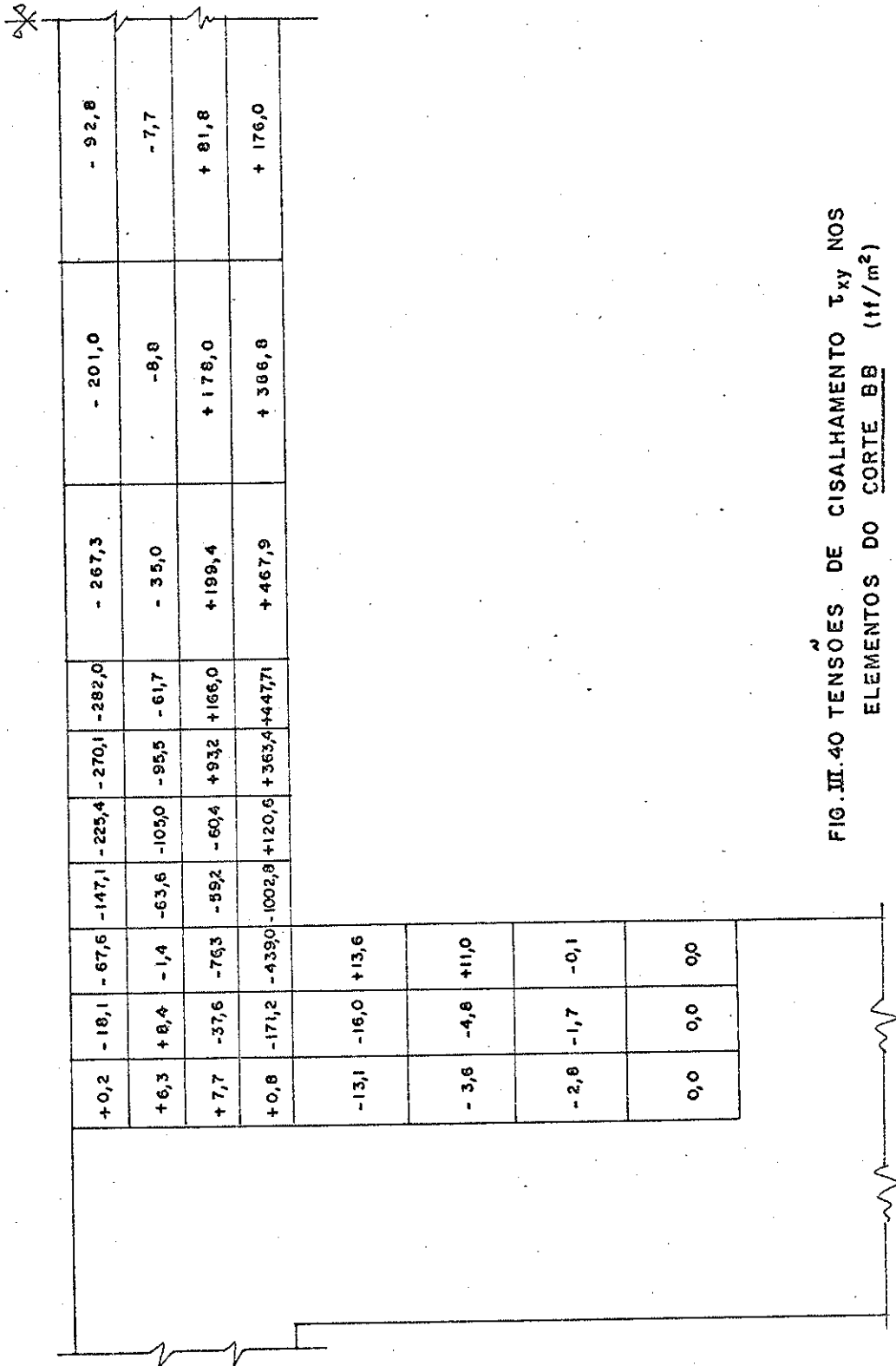


FIG. III.40 TENSÕES DE CISCALHAMENTO τ_{xy} NOS ELEMENTOS DO CORTE BB (tf/m²)

-460,2	-482,8	-536,4	-577,7	-564,8	-502,6	-426,3	-355,8	-218,0	-128,2
-432,3	-479,7	-614,1	-751,4	-752,9	-640,9	-531,3	-436,7	-254,0	-117,6
-381,0	-428,8	-593,5	-859,6	-855,3	-638,1	-522,6	-431,5	-254,4	-105,5
-376,4	-427,9	-500,3	-1135,0	-667,8	-479,5	-404,9	-343,5	-215,5	-108,4
-78,4	-68,6	-98,5							
-255,4	-262,5	-265,1							
-78,1	-76,5	-77,9							
+149,1	+147,4	+143,8							

FIG. III.41 TENSOES DE CISALHAMENTO τ_{yz} NOS ELEMENTOS DO CORTE BB (kg/m²)

-356,6	-383,6	-536,4	-720,7	-765,5	-638,6	-457,9	-138,1	+490,9	+1076,3
-324,8	-329,9	-614,1	-1129,7	-1317,2	-1138,7	-871,7	-465,6	+235,6	+970,4
-278,8	-295,1	-593,5	-1597,6	-1713,1	-1030,8	-820,9	-450,3	+244,9	+955,2
-230,1	-407,5	-500,3	-351,5	-606,3	-470,2	-351,6	-83,0	+503,1	+1040,7
-105,3	-389,4	-98,5							
-14,3	-138,3	-265,1							
+17,9	-5,8	-77,9							
0,0	+70,0	+143,8							

FIG. III.42 TENSÕES DE CISCALHAMENTO τ_{xz} NOS ELEMENTOS DO CORTE BB (tf/m²)



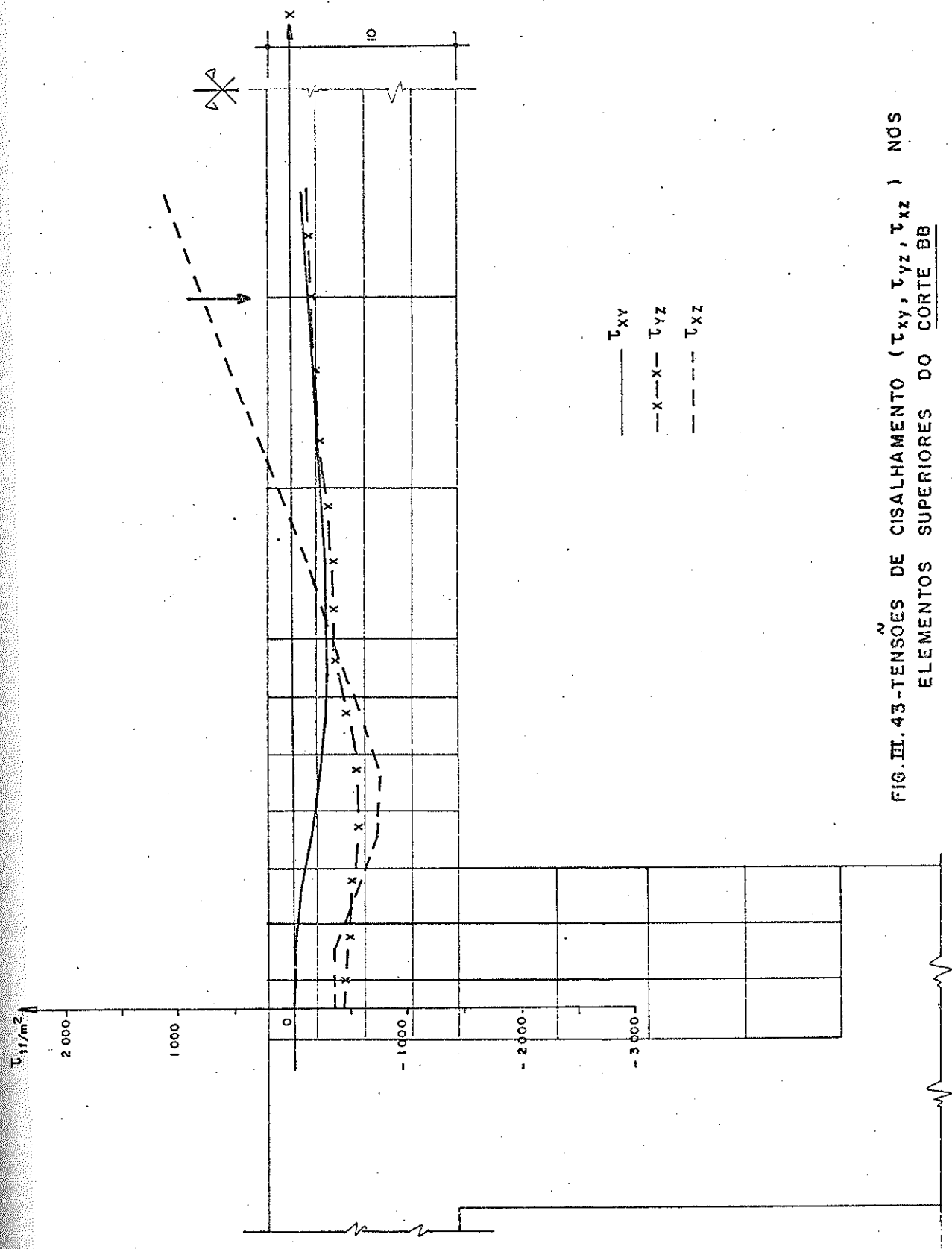


FIG. III. 43 - TENSÕES DE CISCALHAMENTO ($\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$) NOS ELEMENTOS SUPERIORES DO CORTE BB

TABELA III. 4 - TENSÕES E DIREÇÕES PRINCIPAIS - CORTE BB

Elemento	Tensões Princ. tf/m ²	Cossenos Diretores		
		C _x	C _y	C _z
7	-410.534	0.0000	0.9972	0.0751
	-421.769	1.0000	0.0000	0.0000
	-2.401.260	0.0000	-0.0751	0.9972
8	-403.504	0.4318	0.8981	0.0831
	-417.149	0.9012	-0.4334	0.0000
	-2.377.491	-0.0360	-0.0749	0.9965
9	-390.141	0.7033	0.7033	0.1042
	-411.449	-0.7071	0.7071	0.0000
	-2.352.853	-0.0737	-0.0737	0.9946
16	-25.615	-0.0309	0.9990	-0.0323
	-86.646	0.9995	0.0311	0.0067
	-2.414.760	-0.0077	0.0320	0.9995
17	+19.448	-0.0157	0.9994	-0.0312
	-82.521	0.9999	0.0156	-0.0030
	-2.433.561	0.0025	0.0312	0.9995
18	+35.730	0.7063	0.7063	-0.0467
	+30.941	-0.7071	0.7071	0.0000
	-2.327.764	0.0330	0.0330	0.9989
25	-59.875	-0.0300	0.9932	-0.1122
	-197.679	0.9995	0.0300	-0.0016
	-2.351.490	-0.0018	0.1122	0.9937
26	-26.040	0.9610	0.2635	-0.0833
	-65.265	-0.2706	0.9585	-0.0897
	-2.488.300	0.0562	0.1088	0.9925
27	-124.136	0.7007	0.7007	-0.1337
	-196.936	-0.7071	0.7071	0.0000
	-2.953.921	0.0945	0.0945	0.9910
34	+361.962	-0.0063	0.9985	-0.0538
	-772.229	0.9468	-0.0113	-0.3215
	-1.123.231	0.3217	0.0529	0.9454
35	+410.785	0.0007	0.9990	-0.0429
	-296.048	0.9179	-0.0176	-0.3965
	-1.365.889	0.3969	0.0391	0.9170
36	+471.726	0.7057	0.7057	-0.0635
	+435.513	-0.7071	0.7071	0.0000
	-1.728.836	0.0448	0.0448	0.9980
51	-427.025	-0.1599	-0.1778	0.9709
	-1.859.927	0.9854	-0.0870	0.1463
	-2.555.982	0.0585	0.9802	0.1891
52	-555.145	-0.2227	-0.1843	0.9573
	-2.130.795	0.8817	-0.4570	0.1172
	-2.782.839	0.4159	0.8701	0.2643
53	-1.036.724	-0.2375	-0.2375	0.9419
	-2.142.799	0.7071	0.7071	0.0000
	-3.273.237	0.6660	0.6660	0.3359
54	-1.495.600	-0.5240	-0.1704	0.8345
	-3.648.300	-0.3074	0.9516	0.0013
	-9.528.966	0.7943	0.2558	0.5510
55	+249.434	-0.2067	-0.1996	0.9578
	-2.806.576	0.9783	-0.0558	0.1996
	-3.219.474	0.0136	0.9783	0.2068
56	+125.134	-0.2849	-0.2060	0.9361
	-1.763.100	0.9181	0.2221	0.3283
	-2.724.900	-0.2755	0.9530	0.1259

Elemento	Tensões Princip. tf/m ²	Cossenos Diretores		
		C _x	C _y	C _z
57	+222.095	-0.3792	-0.2195	0.8989
	-945.023	0.8899	0.1794	0.4192
	-2.376.325	-0.2532	0.9590	0.1273
100	-257.586	-0.3040	-0.3212	0.8969
	-1.147.764	0.9178	-0.3509	0.1855
	-1.500.724	0.2551	0.8796	0.4015
101	-362.944	-0.2834	-0.3744	0.8829
	-1.230.686	0.8583	-0.5096	0.0594
	-1.622.304	0.4277	0.7746	0.4658
102	-462.400	-0.4539	-0.4539	0.7668
	-1.312.492	0.7071	-0.7071	0.3207
	-2.167.884	0.5422	0.5422	0.6419
103	+148.335	0.6440	0.3571	-0.6765
	-1.351.610	-0.4763	0.8792	0.0108
	-3.493.398	0.5987	0.3152	0.7363
104	+525.621	-0.5315	-0.3261	0.7818
	-1.480.219	-0.4253	0.9009	0.0866
	-3.424.944	0.7325	0.2864	0.6175
105	+718.790	-0.4854	-0.2991	0.8209
	-1.238.586	-0.5308	0.8475	-0.0057
	-1.867.661	0.6940	0.4386	0.5709
106	+683.811	-0.5461	-0.2911	0.7855
	-1.024.793	-0.7028	0.6695	-0.2405
	-1.363.516	0.4559	0.6834	0.5701
149	+633.949	0.4654	0.7504	-0.4693
	+311.136	0.8347	-0.5485	-0.0492
	-668.934	0.2943	0.3688	0.8817
150	+649.442	0.4577	0.7599	-0.4616
	+310.013	0.8473	-0.5301	-0.0325
	-771.376	0.2694	0.3763	0.8865
151	+815.759	0.6161	0.6161	-0.4906
	+329.626	0.7071	-0.7071	0.0000
	-1.215.803	0.3469	0.3469	0.8714
152	+1.018.802	0.6567	0.4871	-0.5757
	-230.904	-0.5765	0.8164	0.0332
	-1.863.390	0.4862	0.3100	0.8170
153	+1.113.252	0.6272	0.4253	-0.6524
	+127.882	-0.5199	0.8524	0.0558
	-1.957.630	0.5798	0.3042	0.7558
154	+1.032.142	-0.5797	-0.4137	0.7020
	+60.599	-0.5122	0.8550	0.0809
	-1.597.238	0.6337	0.3127	0.7075
155	+875.738	-0.5651	-0.4188	0.7107
	+48.292	-0.5303	0.8444	0.0759
	-1.172.089	0.6320	0.3340	0.6993
198	+2.075.173	0.5984	0.7655	-0.2365
	+1.933.266	-0.7880	0.6156	-0.0010
	-459.108	0.1448	0.1869	0.9716
199	+2.068.014	0.6513	0.7176	-0.2467
	+1.950.455	0.7432	-0.6688	0.0164
	-507.002	0.1532	0.1940	0.9689
200	+2.016.941	0.67543	0.67543	-0.2959
	+1.919.272	-0.7071	0.7071	0.0000
	-664.755	0.2092	0.2092	0.9552

Elemento	Tensões Princip. tf/m ²	Cossenos Diretores		
		C _x	C _y	C _z
201	+1.871,275	0,3188	0,8930	-0,3176
	+1.779,751	-0,9017	0,3690	0,1885
	-843,366	0,2919	0,2263	0,9293
202	+1.687,821	-0,0629	0,9693	-0,2379
	+1.427,612	0,9262	-0,0321	-0,3757
	-882,946	0,3718	0,2439	0,8957
203	+1.494,360	-0,1427	0,9648	-0,2209
	+978,203	0,8883	0,0263	-0,4585
	-764,770	0,4365	0,2617	0,8608
204	+1.302,542	-0,1666	0,9605	-0,2230
	+565,930	0,8492	0,0248	-0,5274
	-615,626	0,5011	0,2772	0,8198
235	+411,936	0,8743	0,2489	-0,4167
	+12,526	0,4423	-0,0553	0,8951
	-1.959,247	-0,1998	0,9669	0,1585
249	+597,337	0,6524	0,2975	-0,6971
	-398,604	0,7578	-0,2432	0,6055
	-1.033,282	-0,0105	0,9232	0,3841
263	+564,898	-0,4437	-0,5583	0,7010
	-2,057	-0,6895	0,7124	0,1310
	-722,824	0,5725	0,4252	0,7010
277	+1.078,237	-0,1636	0,9538	-0,2520
	-88,747	-0,6774	0,0770	0,7315
	-498,547	0,7172	0,2903	0,6335
291	+1.713,219	0,9523	0,1113	0,2843
	+42,133	-0,2450	-0,2718	0,9304
	-1.170,874	-0,1808	0,9559	0,2315
305	+790,631	0,9518	0,0729	0,2978
	+126,699	-0,2402	-0,4263	0,8721
	-641,244	-0,1905	0,9016	0,3882
319	+376,012	0,4226	-0,5580	0,7142
	-6,093	0,7189	0,6862	0,1109
	-321,604	0,5520	-0,4665	-0,6911
333	+762,440	-0,2565	0,8551	-0,4505
	+125,510	0,3204	0,5150	0,7951
	-1.001,499	0,9119	0,0596	-0,4060
347	+2.501,368	0,9210	0,0403	0,3874
	-268,945	-0,2810	-0,6200	0,7325
	-614,866	-0,2698	0,7835	0,5597
361	+1.524,245	0,8613	0,0095	0,5079
	-212,322	0,1370	0,9564	-0,2502
	-697,005	-0,4892	0,2851	0,8242
375	+812,602	0,7270	-0,1002	0,6792
	-43,803	0,1233	0,9927	0,0145
	-1.148,635	-0,6754	0,0732	0,7338
389	+428,736	0,4948	-0,5399	0,6809
	+80,273	0,3176	0,8417	0,4366
	-1.940,100	0,8089	-0,0001	-0,5880

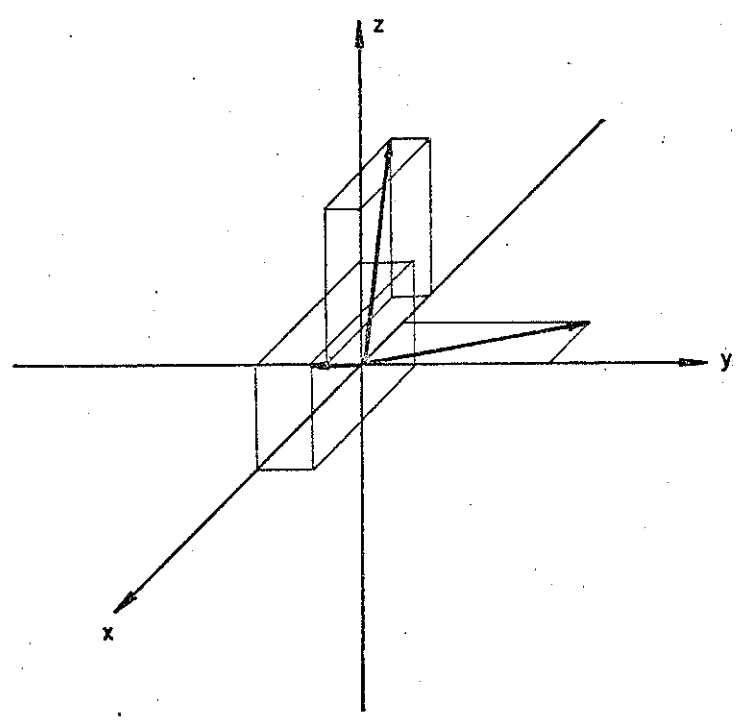


FIG. III.44 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS DIREÇÕES PRINCIPAIS ELEMENTO 54

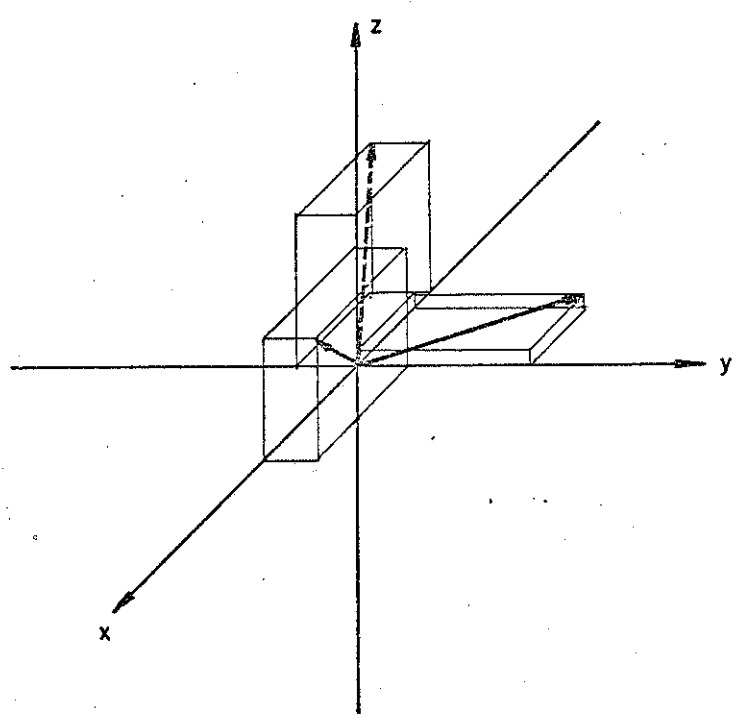


FIG. III.45 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS DIREÇÕES PRINCIPAIS ELEMENTO 104

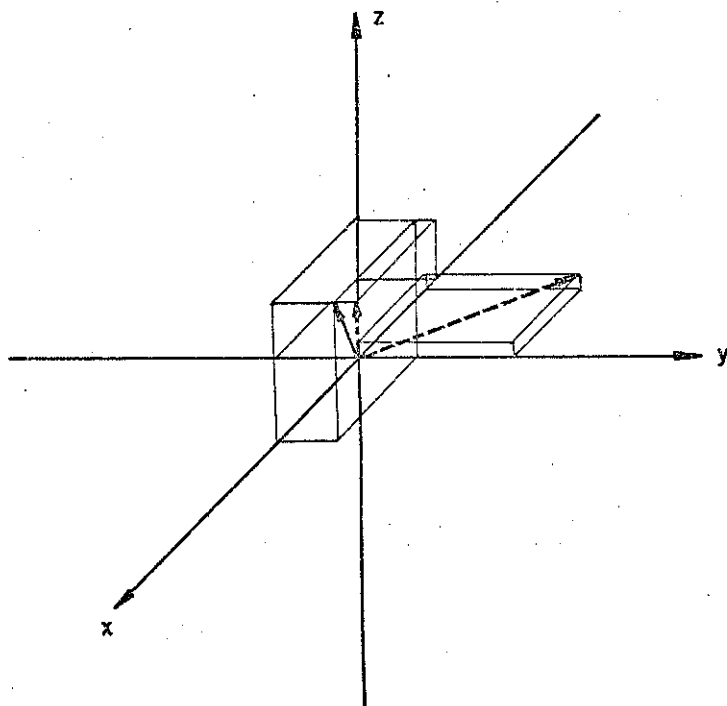


FIG. III.46 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS DIREÇÕES PRINCIPAIS
ELEMENTO 154

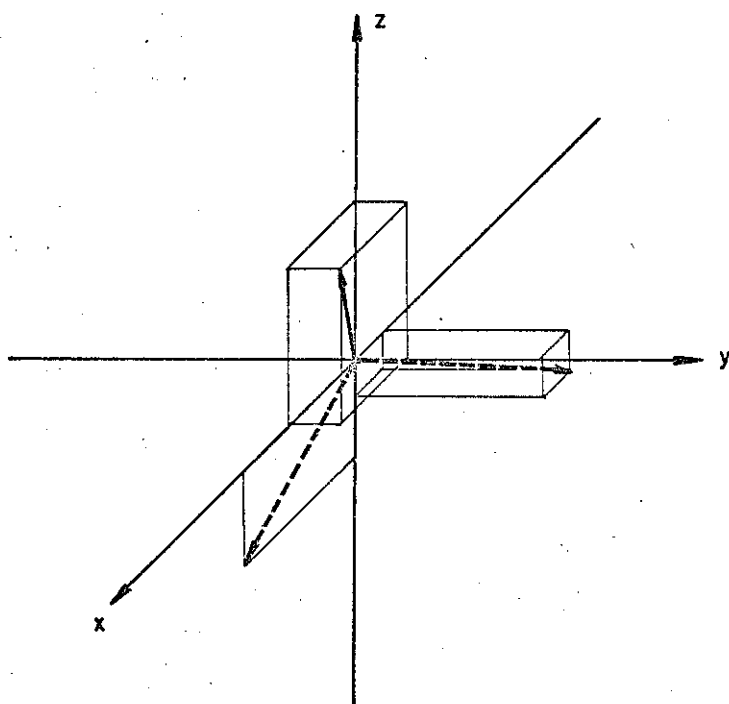


FIG. III.47 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS DIREÇÕES PRINCIPAIS
ELEMENTO 204

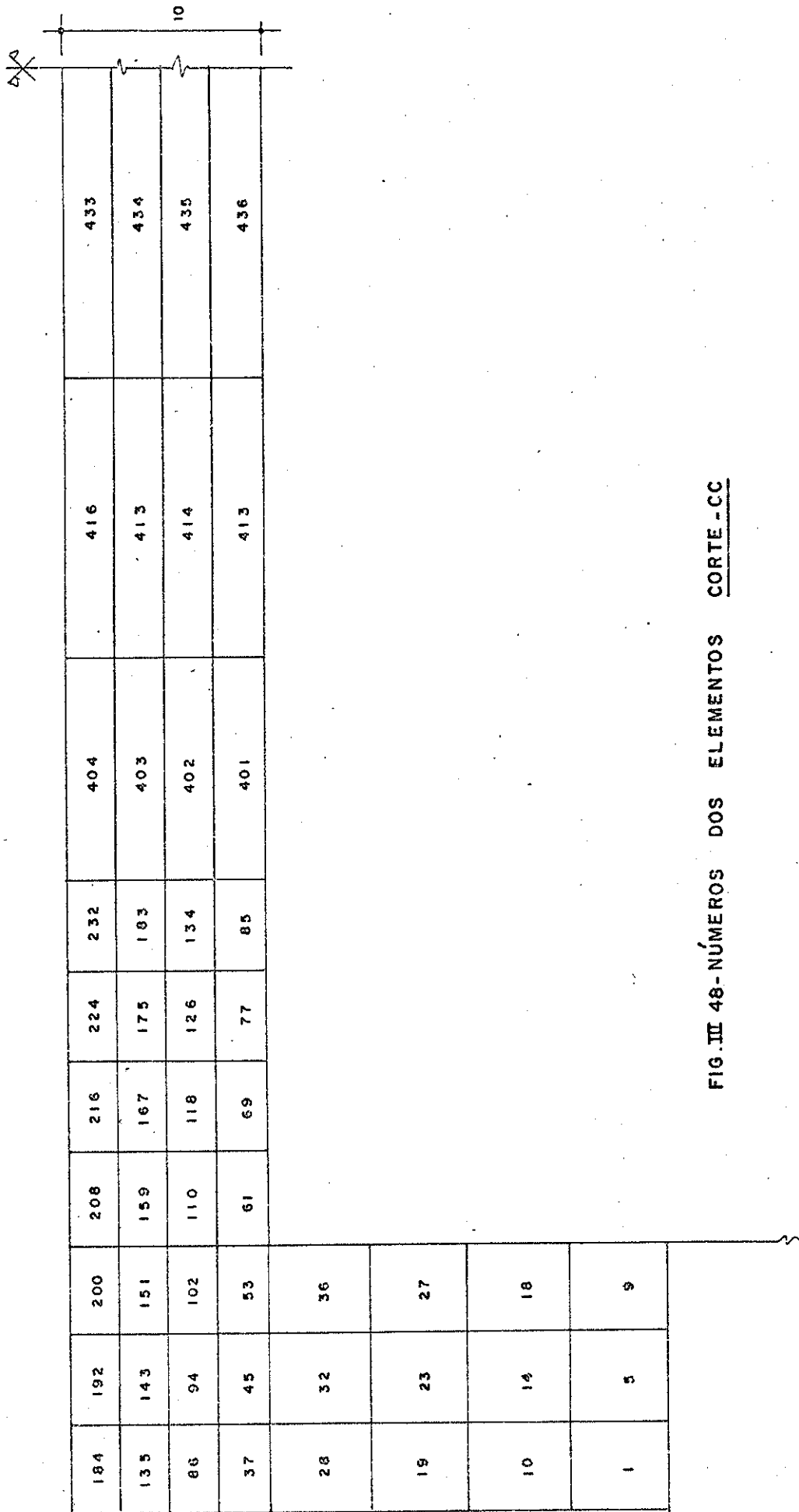


FIG. III 48- NÚMEROS DOS ELEMENTOS CORTE -CC

AXX

+1958,6	+1981,5	+1851,6	+1426,8	+909,2	+509,1	+215,1	-244,6	-471,0	-460,1
+344,8	+322,9	+328,2	-5,1	-151,8	-77,4	-50,4	-51,8	-7,1	-36,1
+903,8	-1150,8	-1388,9	-1593,8	-1163,1	-656,2	-295,2	+145,4	+459,9	+387,4
-1513,2	-1928,4	-2381,8	-6059,8	-2236,8	-1215,3	-521,5	-377,5	+951,6	+803,0
-848,7	-506,1	+449,2							
-1159	+55,2	-1858							
-113,8	-108,5	+30,7							
-431,8	-422,8	-411,4							

FIG. III.49 TENSÕES NORMAIS σ_x (OU σ_y) NOS ELEMENTOS DO CORTE CC (tf/m²)

AA

- 171,1	- 246,5	- 429,7	- 475,3	- 310,7	- 179,5	- 104,2	- 111,5	+ 77,9	- 105,3
+ 35,5	- 160,6	- 726,8	- 905,1	- 362,6	- 12,7	- 78,5	- 8,1	+ 77,3	- 34,2
+ 232,5	- 75,9	- 1165,1	- 1932,2	- 325,3	- 76,3	- 21,1	+ 74,8	+ 116,8	+ 22,0
+ 209,6	- 132,0	- 1289,1	- 4457,0	- 291,4	- 26,6	+ 36,4	+ 158,5	+ 160,5	+ 67,4
- 536,9	- 750,3	- 1720,0							
- 1819,7	- 2041,8	- 2903,3							
- 2503,3	- 2538,1	- 2322,6							
- 2446,9	- 2395,9	- 2331,5							

FIG. III.50 TENSÕES NORMAIS σ_x NOS ELEMENTOS DO CORTE CC (tf/m^2)

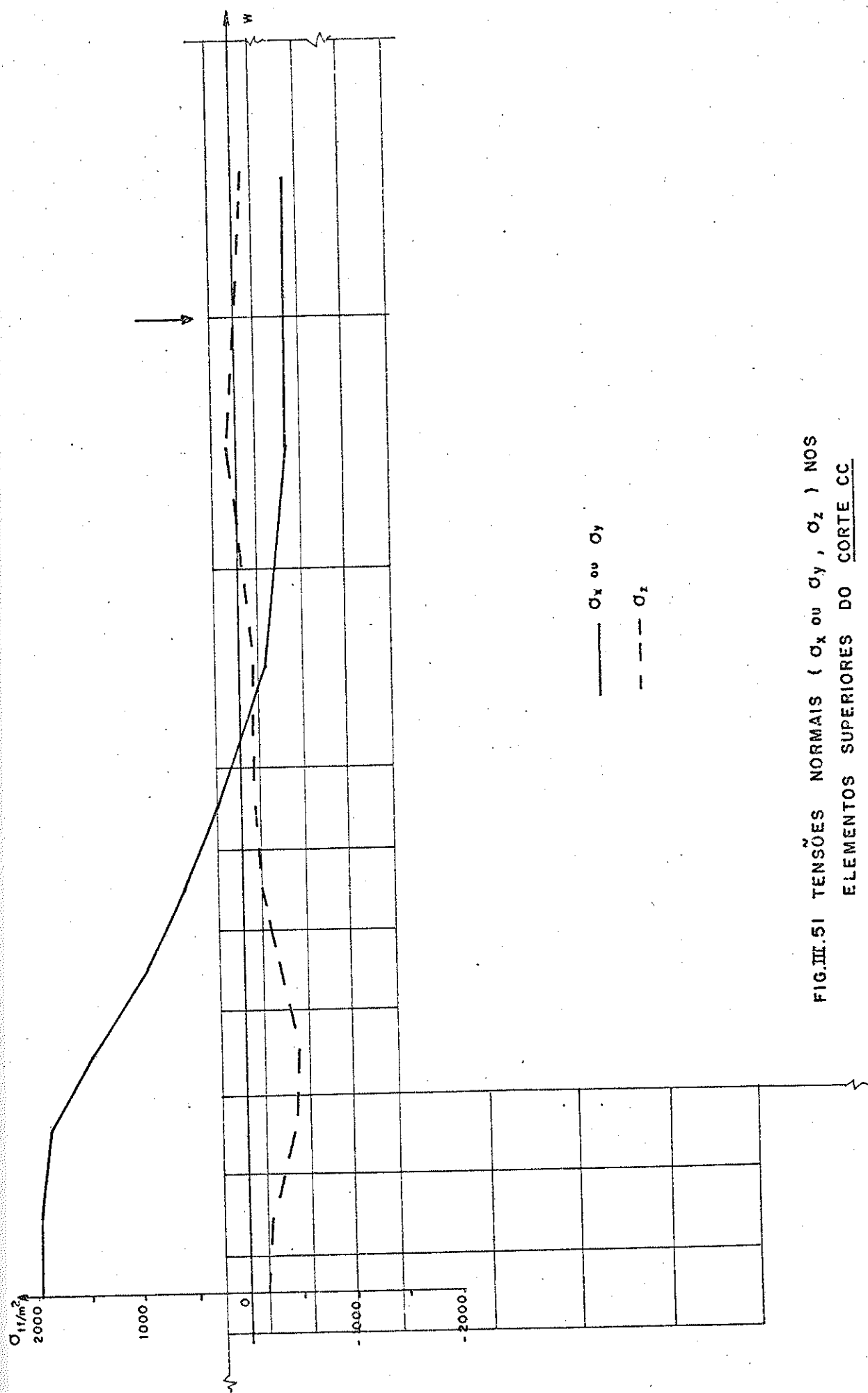


FIG.III.51 TENSÕES NORMAIS (σ_x ou σ_y , σ_z) NOS ELEMENTOS SUPERIORES DO CORTE CC

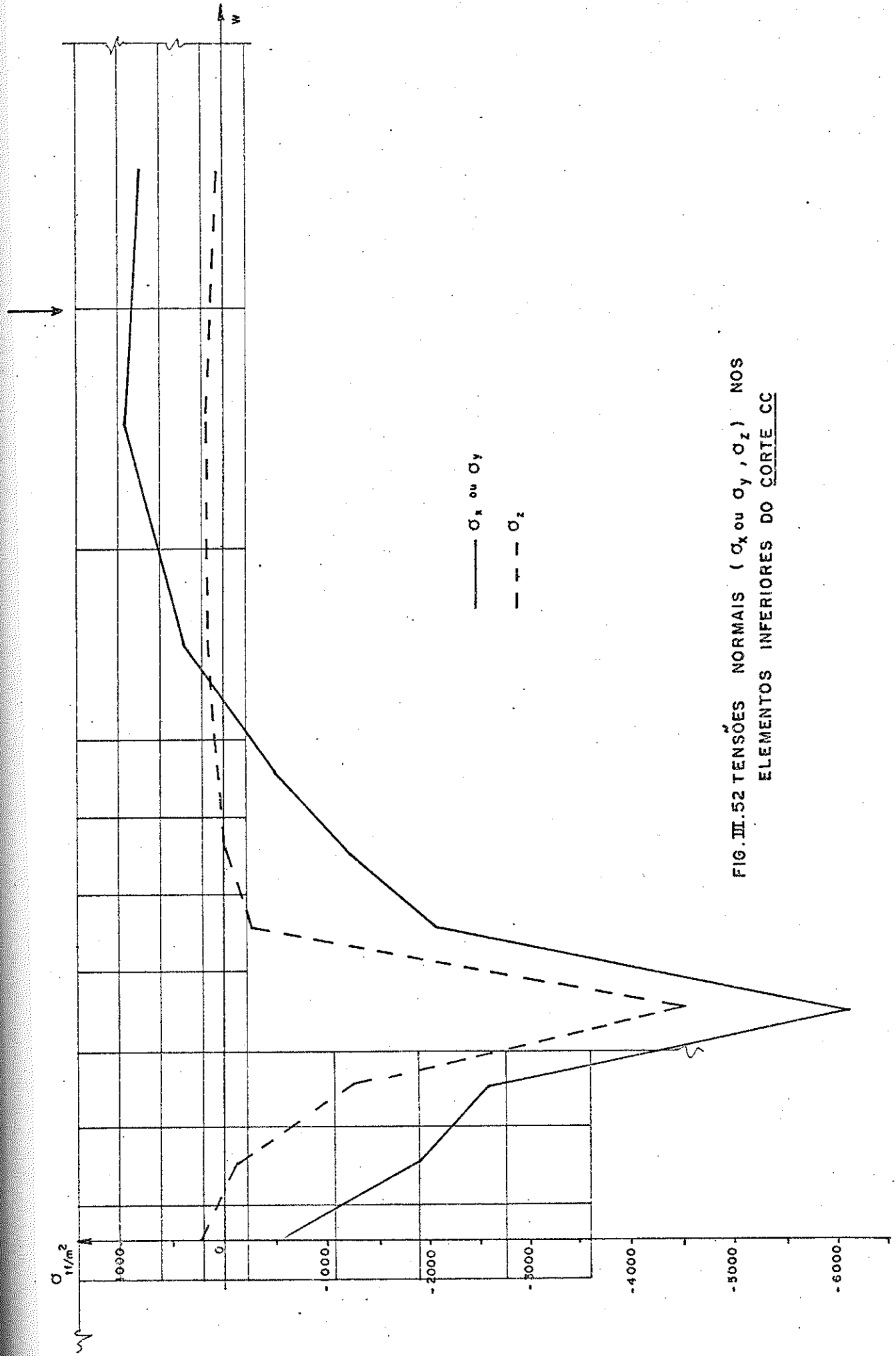


FIG. III.52 TENSÕES NORMAIS (σ_x ou σ_y , σ_z) NOS ELEMENTOS INFERIORES DO CORTE CC

4/2

0,0	-1,0	-67,7	-263,0	-451,9	-530,4	-548,0	-521,7	-336,4	-76,0
0,0	+5,3	-1,4	-175,1	-223,4	-126,2	-77,0	-42,6	-6,8	-6,6
0,0	-14,0	-76,3	-250,9	+33,0	+294,4	+399,5	+436,2	+318,2	+64,6
0,0	-39,9	-439,0	-1519,5	+477,7	+828,9	+954,5	+965,5	+671,2	+137,8
0,0	-36,8	+13,7							
0,0	-3,8	+11,1							
0,0	-4,2	-0,2							
0,0	0,0	0,0							

FIG. III.53 TENSÕES DE CISALHAMENTO τ_{xy} NOS ELEMENTOS DO CORTE CC (tf/m²)

-320,3	-332,2	-536,4	-712,2	-612,0	-414,8	-2665	-72,5	+ 257,6	+ 332,2
-286,1	-242,3	-614,1	-1148,4	-1007,2	-696,4	-4945	-226,1	+ 198,6	+ 344,3
-244,1	-213,3	-593,6	-1684,0	-1013,2	-673,8	-481,3	-232,2	+ 201,9	+ 341,8
-205,2	-338,5	-500,4	-3228,7	-648,9	-370,0	-237,6	-45,0	+ 260,4	+ 329,6
-93,5	-363,4	-98,6							
+ 4,6	-131,0	-265,2							
+ 17,3	-6,2	-78,0							
0,0	+ 72,1	+143,8							

FIG. III.54 TENSÕES DE CISCALHAMENTO τ_{yz} (OU τ_{xz}) NOS ELEMENTOS DO CORTE CC (tf/m²)

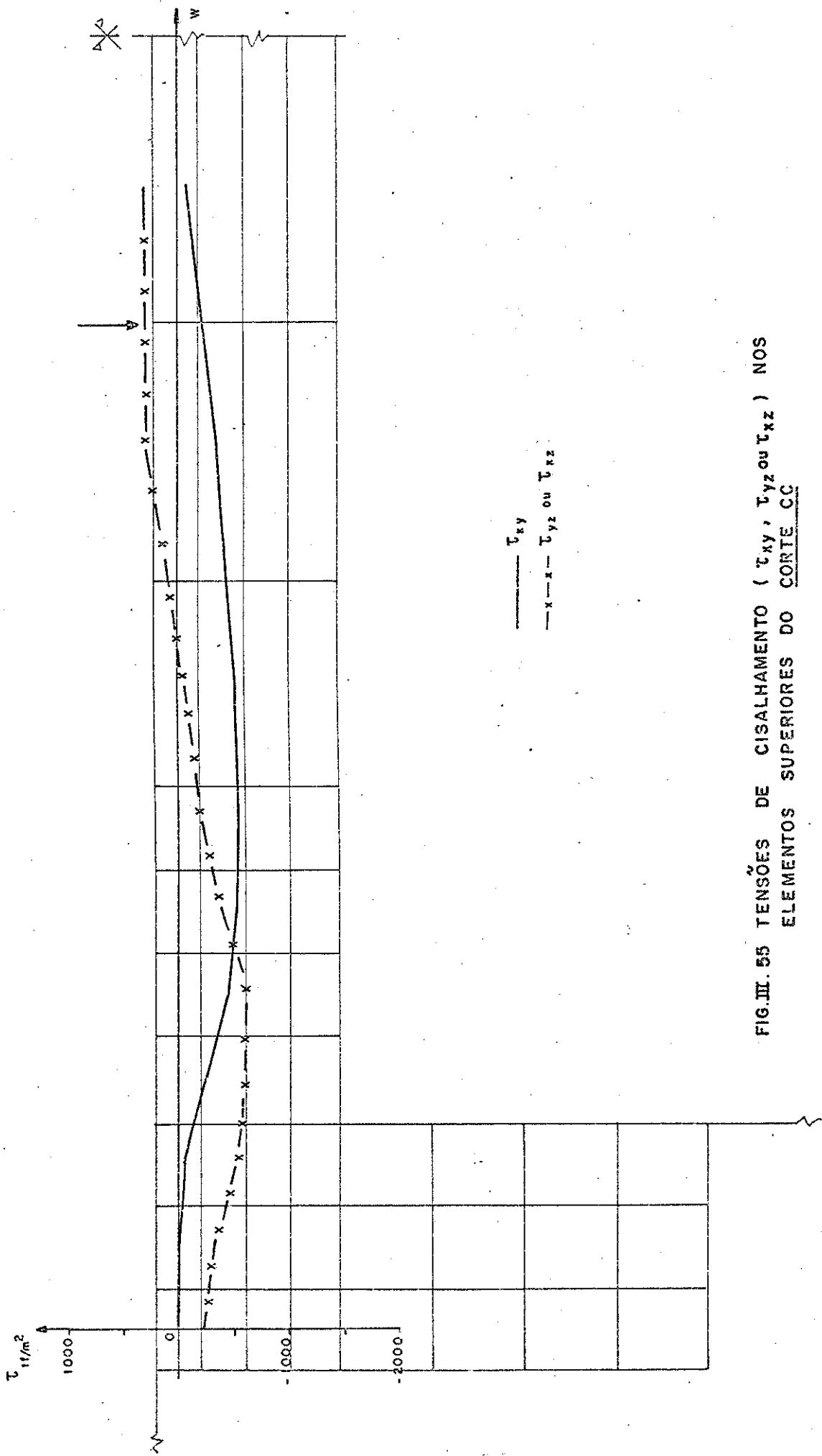


FIG. III. 55 TENSÕES DE CISALHAMENTO (τ_{xy} , τ_{yz} ou τ_{xz}) NOS ELEMENTOS SUPERIORES DO CORTE CC

TABELA III.5 - TENSÕES E DIREÇÕES PRINCIPAIS - CORTE CC

Elemento	Tensões Princip. tf/m ²	Cossenos Diretores		
		C _x	C _y	C _z
1	-431.810	1.0000	0.0000	0.0000
	-431.810	0.0000	1.0000	0.0000
	-2.446.924	0.0000	0.0000	1.0000
5	-417.538	0.7062	0.7062	0.0515
	-422.798	-0.7071	0.7071	0.0000
	-2.401.117	-0.0364	-0.0364	0.9987
9	-390.141	0.7033	0.7033	0.1042
	-411.449	-0.7071	0.7071	0.0000
	-2.352.853	-0.0737	-0.0737	0.9946
10	-113.548	0.7071	0.7071	0.0103
	-113.800	-0.7071	0.7071	0.0000
	-2.503.555	-0.0073	-0.0073	0.9999
14	-104.292	0.7071	-0.7071	0.0000
	-112.650	0.7071	0.7071	-0.0036
	-2.538.180	0.0026	0.0026	0.9999
18	+35.730	0.7063	0.7063	-0.0467
	+30.941	-0.7071	0.7071	0.0000
	-2.327.764	0.0330	0.0330	0.9989
19	-115.916	0.7071	0.7071	0.0039
	-115.916	-0.7071	0.7071	0.0000
	-1.819.781	-0.0027	-0.0027	0.9999
23	+67.906	0.7044	0.7044	-0.0880
	+59.065	0.7071	-0.7071	0.0000
	-2.058.255	0.0622	0.0622	0.9961
27	-124.136	0.7008	0.7008	-0.1337
	-196.936	-0.7071	0.7071	0.0000
	-2.953.921	0.0945	0.0945	0.9910
28	-488.437	-0.2436	-0.2436	0.9388
	-848.660	-0.7071	0.7071	0.0000
	-897.163	0.6638	0.6638	0.3445
32	-123.505	0.5468	0.5468	-0.6340
	-467.257	0.7071	-0.7071	0.0000
	-1.171.744	0.4483	0.4483	0.7733
36	+471.726	0.7057	0.7057	-0.0635
	+435.512	-0.7071	0.7071	0.0000
	-1.728.836	0.0448	0.0448	0.9980
37	+257.151	-0.1144	-0.1144	0.9868
	-151.323	-0.7071	0.7071	0.0000
	-1.560.797	0.6978	0.6978	0.1617
45	-14.734	-0.1683	-0.1683	0.9713
	-1.888.503	0.7071	-0.7071	0.0000
	-2.085.530	0.6868	0.6868	0.2380
53	-1.036.724	-0.2375	-0.2375	0.9419
	-2.142.799	0.7071	-0.7071	0.0000
	-3.273.237	0.6660	0.6660	0.3359
61	-1.193.283	-0.4112	-0.4112	0.8135
	-4.540.236	-0.7071	0.7071	0.0000
	-10.843.050	0.5752	0.5752	0.5816
69	+149.808	-0.3064	-0.3064	0.9012
	-2.200.345	0.6373	0.6373	0.4333
	-2.714.471	-0.7071	0.7071	0.0000
77	+346.874	-0.4107	-0.4107	0.6139
	-759.783	0.5756	0.5756	0.5809
	-2.044.213	0.7071	-0.7071	0.0000

Elemento	Tensões Princip. tf/m ²	Cossenos Diretores		
		C _x	C _y	C _z
85	+624,955	0,6141	0,6141	-0,4959
	-155,532	0,3506	0,3506	0,8684
	-1.475,991	-0,7071	0,7071	0,0000
86	+329,171	-0,1907	-0,1907	0,9630
	-903,847	-0,7071	0,7071	0,0000
	-1.000,527	0,6809	0,6809	0,2696
94	+2,118	-0,1770	-0,1770	0,9682
	-1.136,814	0,7071	-0,7071	0,0000
	-1.242,778	0,6846	0,6846	0,2503
102	-462,400	-0,4540	-0,4540	0,7688
	-1.312,492	0,7071	-0,7071	0,0000
	-2.167,884	0,5422	0,5422	0,6419
110	+493,510	0,5046	0,5046	-0,7006
	-1.342,934	0,7071	-0,7071	0,0000
	-4.270,455	0,4954	0,4954	0,7136
118	+753,294	-0,4253	-0,4253	0,7989
	-1.216,147	0,7071	-0,7071	0,0000
	-2.228,697	0,5649	0,5649	0,6014
126	+744,518	-0,4615	-0,4615	0,7577
	-950,652	-0,7071	0,7071	0,0000
	-1.182,633	0,5357	0,5357	0,6526
134	+725,181	0,5224	0,5224	-0,6739
	-641,903	0,4765	0,4765	0,7388
	-694,705	-0,7071	0,7071	0,0000
135	+623,327	0,5825	0,5825	-0,5670
	+344,833	-0,7071	0,7071	0,0000
	-243,034	0,4009	0,4009	0,8237
143	+504,807	0,6286	0,6286	-0,4578
	+317,639	0,7071	-0,7071	0,0000
	-337,073	0,3237	0,3237	0,8890
151	+815,759	0,6161	0,6161	-0,4906
	+329,626	0,7071	-0,7071	0,0000
	-1.215,803	0,3469	0,3469	0,8714
159	+1.121,535	0,5518	0,5518	-0,6254
	+169,981	0,7071	-0,7071	0,0000
	-2.206,735	0,4422	0,4422	0,7803
167	+1.055,454	-0,4989	-0,4989	0,7087
	+71,615	0,7071	-0,7071	0,0000
	-1.793,259	0,5011	0,5011	0,7055
175	+820,235	-0,4902	-0,4902	0,7207
	+48,840	0,7071	-0,7071	0,0000
	-1.150,985	0,5096	0,5096	0,6932
183	+596,996	-0,4912	-0,4912	0,7194
	+26,655	0,7071	-0,7071	0,0000
	-802,834	0,5087	0,5087	0,6946
184	+2.050,997	0,6928	0,6928	-0,1998
	+1.958,617	-0,7071	0,7071	0,0000
	-263,490	0,1413	0,1413	0,9798
192	+2.075,514	0,6931	0,6931	-0,1983
	+1.982,519	-0,7071	0,7071	0,0000
	-341,561	0,1402	0,1402	0,9801
200	+2.018,941	0,6754	0,6754	-0,2959
	+1.919,272	-0,7071	0,7071	0,0000
	-664,755	0,2092	0,2092	0,9552

Elemento	Tensões Princip. tf/m ²	Cossenos Diretores		
		C _x	C _y	C _z
208	+1.689,830	0,7071	-0,7071	0,0000
	+1.642,693	0,6386	0,6386	-0,4295
	-954,351	0,3037	0,3037	0,9031
216	+1.361,045	-0,7071	0,7071	0,0000
	+1.020,113	0,5929	0,5929	-0,5452
	-873,527	0,3855	0,3855	0,8383
224	+1.039,435	-0,7071	0,7071	0,0000
	+491,532	0,5324	0,5324	-0,6582
	-692,335	0,4654	0,4654	0,7529
232	+763,154	-0,7071	0,7071	0,0000
	+175,501	-0,4212	-0,4212	0,8032
	-612,600	0,5679	0,5679	0,5957
401	+1.346,445	0,7061	0,7061	-0,053
	+135,101	0,0372	0,0372	0,9986
	-587,986	-0,7071	0,7071	0,0000
402	+731,911	0,6379	0,6379	-0,4315
	-75,505	0,3051	0,3051	0,9021
	-290,795	-0,7071	0,7071	0,0000
403	+271,425	-0,4654	-0,4654	0,7529
	-9,291	0,7071	-0,7071	0,0000
	-373,946	0,5324	0,5324	0,6581
404	+277,087	-0,7071	0,7071	0,0000
	-95,764	-0,1069	-0,1069	0,9885
	-782,034	0,6990	0,6990	0,1512
413	+1.710,420	0,6879	0,6879	0,2311
	+280,374	-0,7071	0,7071	0,0000
	+73,042	-0,1635	-0,1635	0,9729
414	+844,267	0,6627	0,6627	0,3486
	+141,702	-0,7071	0,7071	0,0000
	+10,377	-0,2465	-0,2465	0,9372
415	+316,331	0,4582	0,4582	0,7617
	-0,243	-0,7071	0,7071	0,0000
	-252,925	0,5386	0,5386	-0,6479
416	+208,494	0,2387	0,2387	0,9413
	-134,582	-0,7071	0,7071	0,0000
	-937,969	0,6656	0,6656	-0,3375
433	+196,173	0,3816	0,3816	0,8417
	-384,066	0,7071	-0,7071	0,0000
	-837,605	0,5952	0,5952	-0,5399
434	+448,552	0,4978	0,4978	0,7102
	-29,530	0,7071	-0,7071	0,0000
	-525,476	0,5022	0,5022	-0,7040
435	+766,033	0,5929	0,5929	0,5448
	+322,810	0,7071	-0,7071	0,0000
	-291,946	-0,3852	-0,3852	0,8386
436	+1.142,732	0,6488	0,6488	0,3977
	+665,232	0,7071	-0,7071	0,0000
	-134,611	-0,2812	-0,2812	0,9175

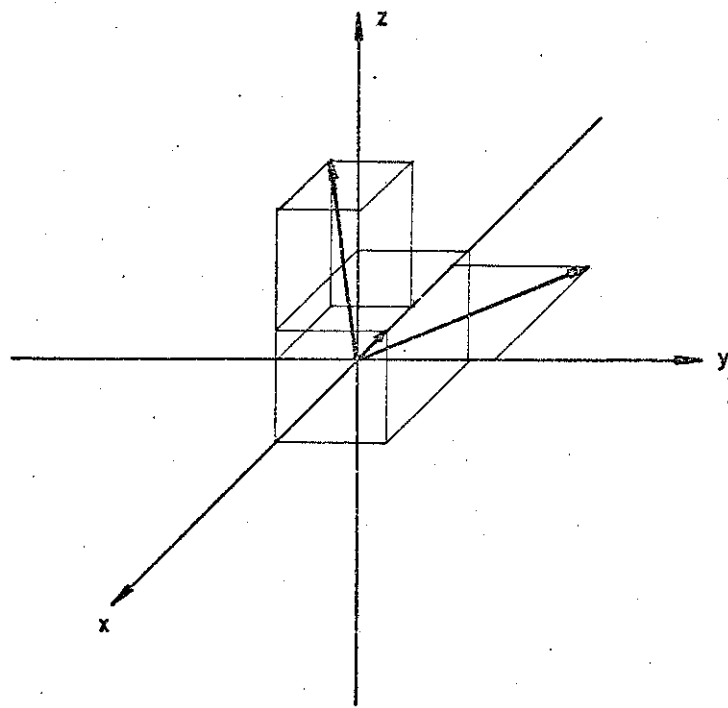


FIG. III. 56 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS DIREÇÕES PRINCIPAIS
ELEMENTO 61

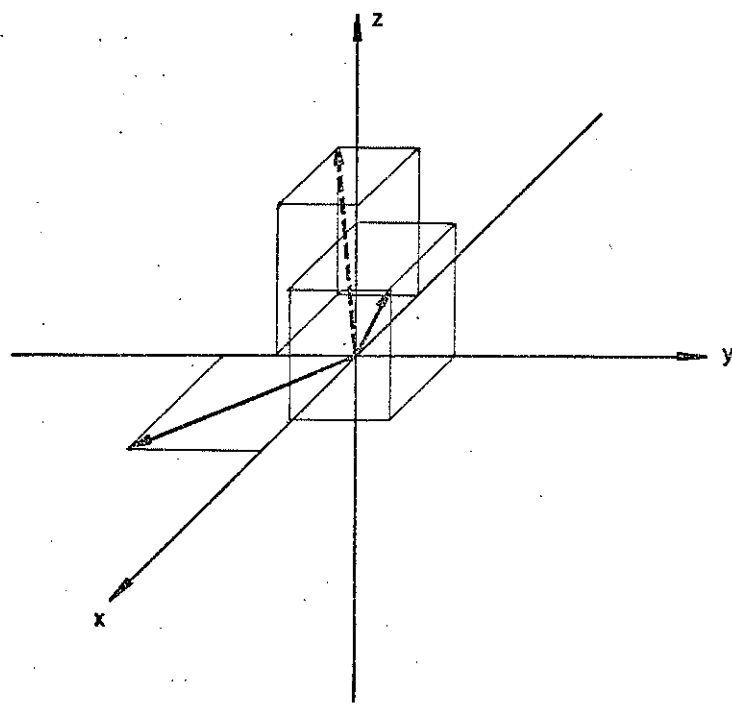


FIG. III. 57 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS DIREÇÕES PRINCIPAIS
ELEMENTO 118

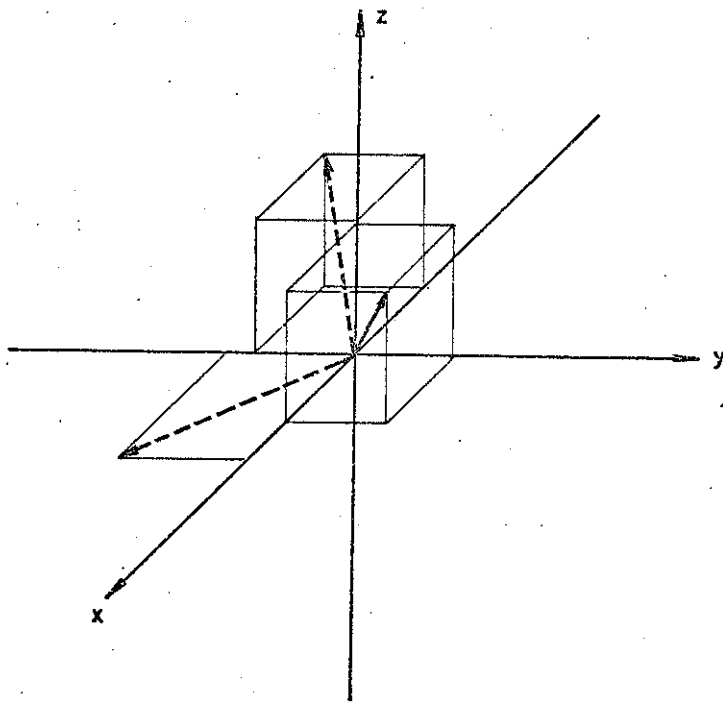


FIG. III. 58 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS DIREÇÕES PRINCIPAIS
ELEMENTO 175

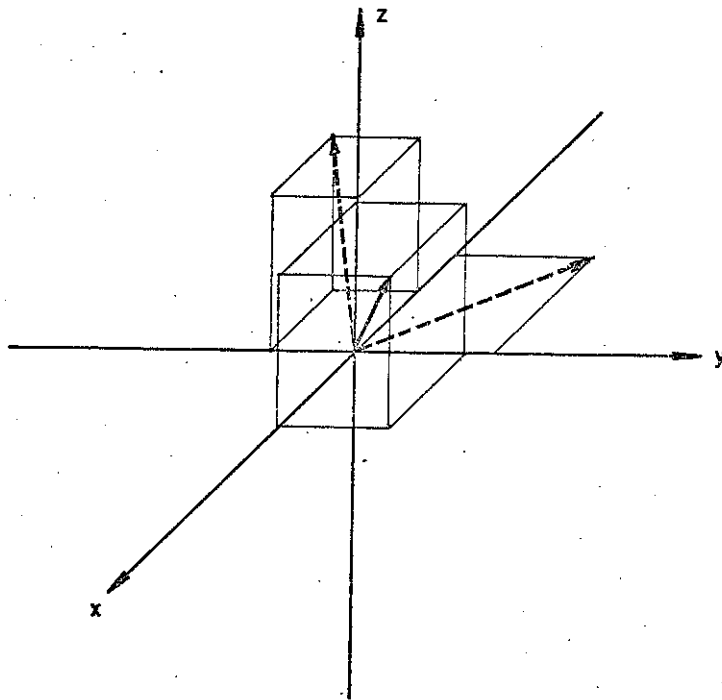


FIG. III. 59 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS DIREÇÕES PRINCIPAIS
ELEMENTO 232

A variação das tensões normais na borda superior, encontrada nesse exemplo nas figuras III.24, III.38 e III.51, apresenta um comportamento coerente com os resultados obtidos pela teoria de laje cogumelo (ACI 318-71). O mesmo pode ser observado em relação à variação das tensões normais na borda inferior (figuras III.25, III.39 e III.52), a menos dos elementos que estão localizados na junção laje-pilar, os quais apresentam valores discrepantes, por ser esta uma região de concentração de tensões. Melhores resultados podem ser obtidos com um refinamento da malha nesse local.

Como observação final verifica-se na figura III.51 que a simetria é completamente atendida, em face dos resultados idênticos obtidos para as tensões σ_x e σ_y .

CAPÍTULO IV

ESTRUTURAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO EM LINGUAGEM FORTRAN

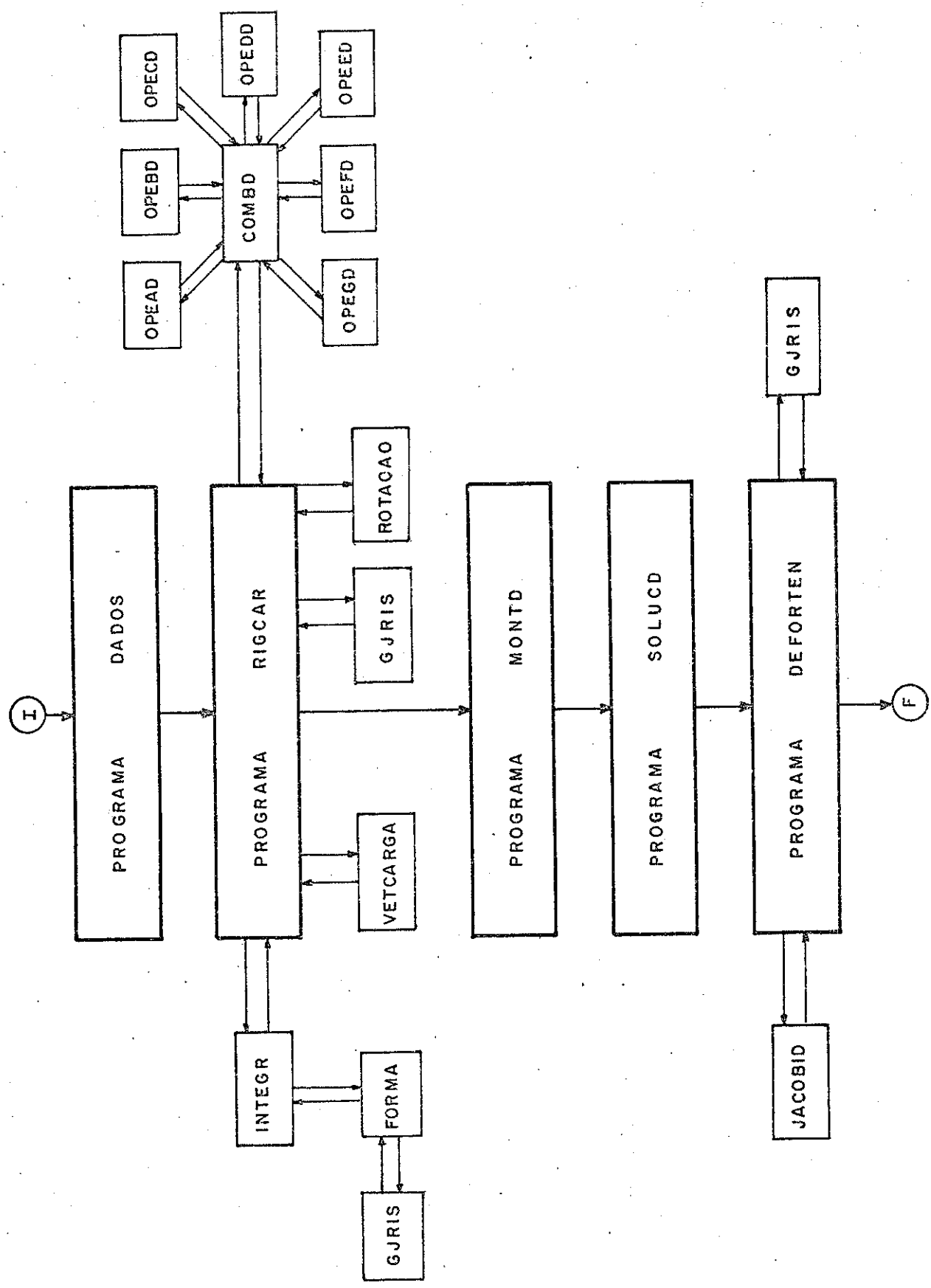
Para a utilização do elemento isoparamétrico linear na análise estrutural em regime elástico elaborou-se um programa em linguagem FORTRAN. Optou-se, como em Savassi [14] e em Degaspere [7], por subdividir o programa geral em cinco subprogramas interligados entre si por arquivos abertos nas unidades periféricas (discos), e processados sequencialmente sem interrupção. Isso foi feito pelas mesmas razões expostas por aqueles autores, pois se fossem todos reunidos em apenas um programa, tornariam seu manuseio muito difícil.

Os programas principais: DADOS.FOR, RIGCAR.FOR, MONTD.FOR, SOLUCD.FOR e DEFORTEN.FOR e todas as subrotinas foram escritos em linguagem FORTRAN usando-se precisão dupla para todas as variáveis, e desenvolvidos em um computador VAX 11 modelo 785. Algumas subrotinas utilizadas figuram no trabalho de Savassi [14] e Degaspere [7], outras foram adaptadas ou criadas, pela autora do trabalho, para o caso tridimensional em estudo.

Não serão apresentados diagramas de blocos, preferindo-se mostrar um organograma do programa geral e descrever, sumariamente, as principais subrotinas e variáveis que nele intervêm.

O problema de tempo de execução do programa geral, que aparece à medida que o número de dados aumenta, já foi comentado junto aos exemplos apresentados.

IV.1 - Organograma do Programa Geral



IV.2 - Principais Variáveis

A lista de variáveis apresentada tem como finalidade facilitar a leitura dos programas. Algumas estão melhor definidas na entrada de dados (IV.5).

- DETJAC = valor do determinante da matriz Jacobiana J .
- IBNDW = largura da semi-banda do sistema de equações.
- ISKEW = se a estrutura tiver lados, segundo X/Y/Z vale 0; caso contrário vale 1.
- MAXDIF = máxima diferença entre dois nós de um elemento.
- MAXEB = número máximo de elementos na borda.
- MAXNP = número máximo de nós da estrutura.
- NB = número de blocos.
- NC = número da coluna do sistema global de equações que serve para o endereçamento dos coeficientes da matriz de rigidez.
- NDIM = número de posições na memória central, disponíveis para alojar os coeficientes de cada um dos blocos de equações.
- NELBO = número de elementos com nós na borda.
- NEMAX = número máximo de elementos da estrutura.
- NEQ = número de equações do sistema global de equações.
- NEQB = número efetivo de equações de cada bloco que está sendo formado.
- NEQBC = número de equações com condições de contorno.

- NEQBL = número de equações que cada bloco poderá comportar.
- NLOAD = número de casos de carga.
- NMAT = número de materiais que compõem a estrutura.
- NNOS = número de nós do elemento. Vale oito.
- NPBL = número de nós da estrutura correspondente a cada bloco.
- NPC = número de nós com carga diretamente aplicada.
- NUMBC = número de condições de contorno.
- NUMEL = número total de elementos da estrutura.
- NUMNP = número total de nós da estrutura.
- NUMPB = número de nós na borda (com condições de contorno a impor).
- NVARN = número de variáveis por nó do elemento. Vale três.

IV.3 - Principais Matrizes e Vetores

- AA = coordenada do ponto utilizado na integração numérica.
- ALFA = ângulo de inclinação da face (vide entrada de dados).
- BETA = ângulo de inclinação da face (vide entrada de dados).
- CON = valor da carga diretamente aplicada sobre o nó do elemento.

- EIXO = número do eixo perpendicular à face carregada.
- ETI = coordenada (n) de cada nó de cada elemento no sistema local de coordenadas.
- FC = número da face do elemento com carga distribuída.
- GAMA = ângulo de inclinação da face (vide entrada de dados).
- ICON = código para imposição de condições de contorno em cada nó (vide entrada de dados).
- ICONH = arranjo dos ICON para a estrutura global.
- INCL = código que indica se a face carregada é inclinada ou não.
- ITPEL = código que indica o tipo de cada elemento (vide entrada de dados).
- KARGA = código para indicar se há carga distribuída (1) ou não (0) sobre o elemento.
- L1 = código para imposição de condições de contorno em cada nó (vide entrada de dados).
- MAT = tipo de material que constitui cada elemento.
- NC = número do nó da estrutura com carga concentrada.
- NEBC = número de cada equação com condição de contorno.
- NFA = número de faces com carga distribuída em cada elemento.
- NFI = número de faces inclinadas do elemento.
- NO = número do nó da face do elemento com carga distribuída.

- NP = número de cada n \bar{o} de cada elemento, numeração global.
- REM = m \bar{o} dulo de elasticidade longitudinal, ou m \bar{o} dulo de Young, de cada material.
- RHO = densidade do material.
- RNI = coeficiente de Poisson.
- VC = valor do carregamento no n \bar{o} da face do elemento com carga distribuída.
- XII = coordenada (ξ) de cada n \bar{o} do elemento tipo no sistema local de coordenadas.
- XORD = coordenada (x) de cada n \bar{o} de cada elemento no sistema global de coordenadas.
- ZET = coordenada (ζ) de cada n \bar{o} do elemento tipo no sistema local de coordenadas.
- ZORD = coordenada (z) de cada n \bar{o} de cada elemento no sistema global de coordenadas.
- YORD = coordenada (y) de cada n \bar{o} de cada elemento no sistema global de coordenadas.
- W = peso correspondente ao ponto utilizado na integração numérica.

IV.4 - Descrição dos Programas

IV.4.1 - DADOS.FOR

Este programa tem como finalidade ler e imprimir os dados de entrada. Além disso calcula algumas variáveis de interesse posterior e armazena todos os dados, que serão utilizados pelos de-

mais programas, em unidades de discos.

IV.4.2 - RIGCAR.FOR

O objetivo deste programa é o cálculo da matriz de rigidez e do vetor de cargas nodais equivalentes para cada elemento da estrutura.

As subrotinas chamadas durante sua execução são:

- FORMA = calcula as funções de forma, suas derivadas, a matriz Jacobiana, seu determinante e a matriz \underline{B} em cada ponto de Gauss.
- INTEGR = forma a matriz \underline{U} a partir da matriz \underline{D} conhecida e monta a matriz de rigidez do elemento através da quadratura de Gauss. Esse processo faz com que a subrotina FORMA seja solicitada tantas vezes quantos forem os pontos de Gauss utilizados.
- GJRIIS = inverte as matrizes pelo processo de Gauss-Jordan, quando necessário.
- VETCARGA = calcula o vetor de carga nodal equivalente em faces cujo carregamento tem variação linear e direção normal à face em estudo.
- ROTACAO = objetiva transformar o vetor de carga nodal equivalente, relacionado aos eixos perpendiculares à face em estudo, em parâmetros relacionados aos eixos x, y, z. Essa transformação aplica-se ao tratamento das faces inclinadas.
- COMBD = tem por objetivo calcular as combinações algébricas necessárias à montagem da matriz de rigidez. São elas: OPEAD, OPEBD, OPECD, OPEDD, OPEED, OPEFD, OPEGD.

IV.4.3 - MONTD.FOR

Monta a matriz de rigidez da estrutura a partir das matrizes de rigidez dos diversos elementos. A matriz é criada em forma de vetor e armazenada na unidade de disco por blocos.

IV.4.4 - SOLUCD.FOR

Neste programa é resolvido o sistema global de equações pelo método de Gauss-Jordan. A solução é armazenada em unidade de disco.

IV.4.5 - DEFORTEN.FOR

São calculadas as deformações e as tensões em cada elemento estrutural a partir dos deslocamentos conhecidos. Calcula-se também as tensões e as direções principais.

As subrotinas chamadas serão:

JACOBID = calcula auto-valores e auto-vetores de matrizes reais e simétricas pelo método de Jacobi.

GJRIJ = inverte a matriz Jacobiana J , pelo método de Gauss-Jordan.

IV.5 - Entrada de Dados

Como já se viu anteriormente, a entrada de dados é toda realizada no programa DADOS.FOR.

Primeira leitura: em um único cartão

NUMEL = número total de elementos da estrutura.

NUMNP = número total de nós da estrutura.

NUMBC = número de condições de contorno.

NUMPB = número de nós da borda.

NLOAD = número de casos de carga.

NMAT = número de materiais diferentes.

NELBO = número de elementos na borda.

ISKEW = se a estrutura tem lados segundo x/y/z igual a 0;
caso contrário igual a 1.

NPC = número de nós com carga diretamente aplicada.

Segunda leitura: tantos cartões quantos forem os NMAT

I = número do material.

REM(I) = módulo de elasticidade longitudinal do material, ou
módulo de Young.

RNI(I) = coeficiente de Poisson do material.

RHO(I) = densidade do material.

Terceira leitura: tantos cartões quantos forem os NUMEL

N = número do elemento

NP(N,I), I = 1, ... 8 = número de cada nó. A numeração deverá
ser feita de acordo com o indicado na
figura II.5.2.

MAT(N) = número do material do elemento N.

ITPEL(N) = número que identifica a que tipo pertence cada ele

mento, em termos de dimensão, forma, orientação, etc.

KARGA(N) = código que indica se há carga distribuída (KARGA = 1) ou não (KARGA = 0) sobre o elemento.

NFA(N) = número de faces do elemento N com carga distribuída.

NFI(N) = número de faces inclinadas do elemento N.

Quarta Leitura: tantos cartões quantas forem as faces da estrutura com carga distribuída.

NE = número do elemento

NI = número de faces carregadas do elemento NE.

FC(NE, NI) = número da face carregada do elemento NE.

NO(NE, NI, K); K = 1, ..., 4 = número dos nós da face carregada. A numeração dos nós depende da face em estudo e deve seguir sempre a ordem mostrada na tabela IV.5.1, montada para o elemento tipo.

EIXO(NE, NI) = número atribuído ao eixo perpendicular a face carregada.

Eixo ξ { sentido positivo (+1)
sentido negativo (-1)

Eixo η { sentido positivo (+2)
sentido negativo (-2)

Eixo ζ { sentido positivo (+3)
sentido negativo (-3)

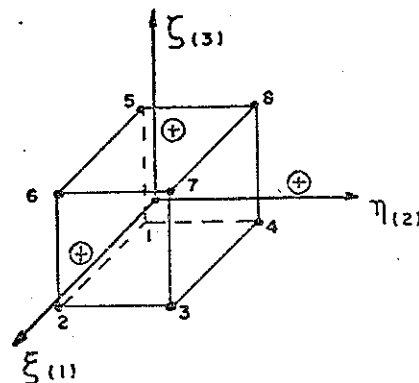


FIG. IV. 5.1 - ELEMENTO TIPO

EIXO NORMAL A FACE	Nº DA FACE	ORDEM PARA ENTRADA DE DADOS			
		1º n̄o	2º n̄o	3º n̄o	4º n̄o
+1	1	2	3	6	7
-1	2	1	4	5	8
+2	3	3	4	7	8
-2	4	2	1	6	5
+3	5	5	6	7	8
-3	6	1	2	3	4

Tabela IV.5.1

VC(NE, NI, K), K = 1, ... 4: valor do carregamento no n̄o k

INCL(NE, NI) = código que indica se a face em estudo é inclinada (= 1) ou não (= 0)

A próxima leitura s̄o ser̄a feita se houver faces inclinadas na estrutura (ISKEW = 1)

Quinta leitura: tantos cartões quantas forem as faces inclinadas da estrutura.

NE = número do elemento com NI faces inclinadas.

FC(NE, NI) = número da face inclinada do elemento NE.

ALFA (NI) = ângulo de inclinação α (figura IV.5.2).

BETA (NI) = ângulo de inclinação β (figura IV.5.2).

GAMA (NI) = ângulo de inclinação γ (figura IV.5.2).

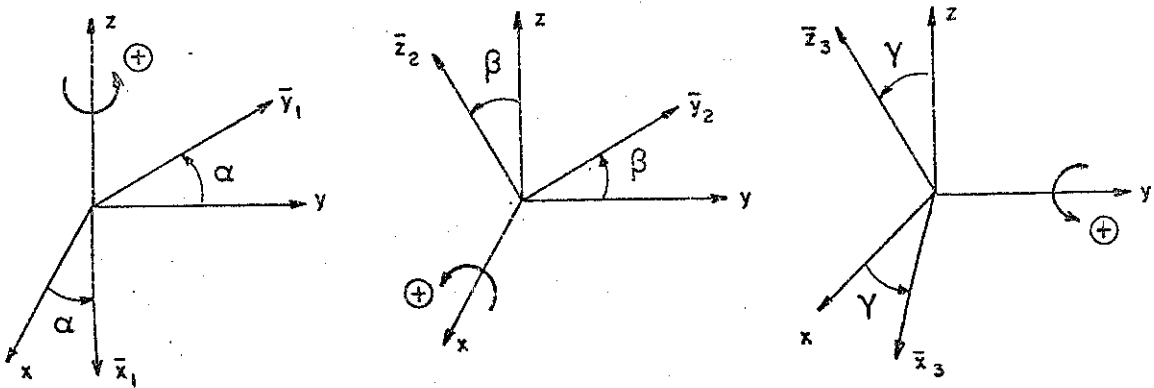


FIG. IV.5.2 - ÂNGULOS DE INCLINAÇÃO

A próxima leitura só será feita se houver cargas aplicadas diretamente nos nós da estrutura.

Sexta Leitura: tantos cartões quantos forem os NPC.

NC(I) = número do nó com carga concentrada.

CON(NC(I), NL), NL = 1, 2, 3: valor da carga concentrada aplicada no nó NC(I) nas direções x, y, z respectivamente.

Sétima Leitura: tantos cartões quantos forem os NUMNP.

J = número do nó do elemento.

XORD = coordenada x.

YORD = coordenada y.

ZORD = coordenada z.

Oitava Leitura: fornece as coordenadas locais dos nós do elemento tipo (oito cartões).

I = número do nó do elemento tipo.

XII(I) = coordenada ξ .

ETI(I) = coordenada η

ZET(I) = coordenada ζ

Nona leitura: dois cartões

L = 1, 2

AA(L) = coordenada do ponto em estudo

W(L) = peso associado ao ponto em estudo

Décima leitura: tantos cartões quantos forem os NUMPB.

M = número do n \bar{o} .

L1(I), I = 1, 2, 3, L1(I) = 0: indica que o deslocamento \bar{e} desconhecido e não h \bar{a} condi \bar{c} o de borda a impor. Nesse caso ICON(I) = 0.
L1(I) = 1 indica que o deslocamento \bar{e} conhecido; h \bar{a} condi \bar{c} o de borda a impor.

ICON(I), I = 1, 2, 3: Se L1(I) = 1 pode corresponder
ICON(I) = 0 se o deslocamento conhecido \bar{e} nulo.
ICON(I) = 1 se o deslocamento conhecido n \bar{a} o \bar{e} nulo.

Décima Primeira leitura: vinte e quatro cartões.

JK = 1, ..., 24

IRE(JK) = fornece os n \bar{u} meros dos n \bar{o} s para reorganiza \bar{c} o da matriz de rigidez do elemento.

CAPÍTULO V

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os objetivos fixados para este trabalho foram plenamente alcançados.

A utilização do elemento finito tridimensional isoparamétrico linear tem como vantagens: a) facilitar na representação das características geométricas e mecânicas da estrutura, b) assegurar melhor precisão das respostas do ponto de vista das aplicações em Engenharia Civil, o que pode ser notado ao se analisar os resultados obtidos nos exemplos.

O programa desenvolvido permite calcular deslocamentos e tensões em estruturas tridimensionais para diversas solicitações, correspondentes a forças distribuídas sobre a superfície, forças de massa e forças concentradas.

Finalmente são determinadas as tensões principais e suas direções com a finalidade de se dar idéia da fissuração das estruturas, antes da plastificação, quando de concreto, por exemplo.

Para melhor utilização do programa alguns cuidados deverão ser tomados, quando forem analisadas estruturas com o emprego do elemento aqui formulado:

- a) fazer com que em cada nó da estrutura concorra o mesmo número de elementos;
- b) manter a largura da faixa do sistema tão estreita quanto possível; isto é conseguido com uma numeração conveniente dos nós da estrutura, ou seja, que a maior diferença entre os números dos pontos nodais de um mesmo elemento seja a mínima possível;
- c) fornecer corretamente a sequência da numeração dos vértices de cada elemento da estrutura, uma vez que esta deve ser igual à do elemento tipo utilizado na formulação desenvolvida;
- d) procurar tomar os elementos de forma regular, sempre que possível;
- e) tirar partido de eventuais simetrias, analisando apenas parte da estrutura; assim o tempo de computação será menor e a qualidade dos resultados será melhor;
- f) procurar utilizar maior número de nós nas regiões

onde haja previsão de concentrações de tensões, no interior da estrutura onde se pretenda obter maiores informações sobre deformações e tensões ou nos lugares onde haja cargas concentradas aplicadas.

Visando implementar o presente trabalho, pode-se ainda desenvolver:

- a) estudo de métodos de geração dos dados de cálculo;
- b) desenvolvimento de modelos de ações, como por exemplo ações térmicas e ações de vento;
- c) utilização dos recursos dos programas elaborados para estudo de vários carregamentos num só processamento, inclusive peso próprio da estrutura;
- d) generalização dos programas de cálculo automático, de modo que permitam a consideração de estruturas formadas por alguns materiais de comportamento não linear.

CAPÍTULO VI

BIBLIOGRAFIA

- 1 - BREBBIA, C.A. & CONNOR, J.J. - Fundamentals of finite element techniques for structural engineers. London. Butterworths, 1973.
- 2 - BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. - The finite element technique. Porto Alegre, Editora da URS, 1975.
- 3 - CARNAHAN, B. & LUTHER, H.A. & WILKES, J.O. - Applied Numerical Methods. New York, John Wiley & Sons, 1969.
- 4 - CLOUGH, R.W. - Comparison of three dimensional finite elements. Walla Walla District Office, U.S. Army Corps of Engineers,
- 5 - COOK, R.D. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc., 1974.
- 6 - COOK, R.D. & BRETL, J.L. - A new eight - node solid element. International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons, vol 14, pp 593-615, 1979.
- 7 - DEGASPARE, J.C. - Aplicações do elemento finito T18 para flexão de placas delgadas elástico-isótropas. São Carlos. EESC-USP. 1978. Tese
- 8 - DESAI, C.S. & ABEL, J.F. - Introduction to the finite element method. New York, Van Nostrand Reinhold Company, 1972
- 9 - HOLLAND, I. & BELL, K. - Finite element methods in stress analysis. Trondheim Norway Taper, 1969.
- 10 - MELOSH, R.J. - Structural Analysis of Solids. Journal Structural Division, ASCE, vol. 89, nº ST-4, pp 205-223, 1963.
- 11 - PEDRO, J.O. - Dimensionamento das barragens abóbada pelo método dos elementos finitos. Memória nº 479. Laboratório Nacional de Engenharia Civil. Lisboa, 1977.

- 12 - PEDRO, J.O. - Estudo de Estruturas Tridimensionais pelo Método dos Elementos Finitos. JORNADAS LUSO-BRASILEIRAS DE ENGENHARIA CIVIL, 2, Rio de Janeiro - São Paulo, 1967.
- 13 - PEDRO, J.O. & CIFÚ, S. - Cálculo de estruturas tridimensionais pelo método dos elementos finitos. JORNADAS LUSO-BRASILEIRAS DE ENGENHARIA CIVIL, 3, Luanda. 1971.
- 14 - SAVASSI, W. - Contribuição ao emprego dos elementos finitos em elasticidade plana. São Carlos. EESC- 1972 - Tese.
- 15 - TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. - Teoria da Elasticidade, 3ª edição. Trad. Sérgio Fernandes Villça, Humberto Lima Soriano, Hierônimo Santos Souza. Rio de Janeiro. Guanabara Dois, 1980.
- 16 - ZIENKIEWICZ, O.C. - The finite element method in engineering science. New York, Mc Graw-Hill, 1971.
- 17 - ZIENKIEWICZ, O.C. - The finite element method in Structural and Continuum. Mc Graw-Hill, 1972.

APÊNDICE I

A seguir apresentam-se os coeficientes não nulos da matriz de transformação B.

$$(1,1) = J^*_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + J^*_{13} \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta}$$

$$(1,2) = J^*_{11} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} + J^*_{13} \frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta}$$

$$(1,3) = J^*_{11} \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} + J^*_{13} \frac{\partial \phi_3}{\partial \zeta}$$

$$(1,4) = J^*_{11} \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} + J^*_{13} \frac{\partial \phi_4}{\partial \zeta}$$

$$(1,5) = J^*_{11} \frac{\partial \phi_5}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_5}{\partial \eta} + J^*_{13} \frac{\partial \phi_5}{\partial \zeta}$$

$$(1,6) = J^*_{11} \frac{\partial \phi_6}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_6}{\partial \eta} + J^*_{13} \frac{\partial \phi_6}{\partial \zeta}$$

$$(1,7) = J^*_{11} \frac{\partial \phi_7}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_7}{\partial \eta} + J^*_{13} \frac{\partial \phi_7}{\partial \zeta}$$

$$(1,8) = J^*_{11} \frac{\partial \phi_8}{\partial \xi} + J^*_{12} \frac{\partial \phi_8}{\partial \eta} + J^*_{13} \frac{\partial \phi_8}{\partial \zeta}$$

$$(2,9) = J^*_{21} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + J^*_{23} \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta}$$

$$(2,10) = J^*_{21} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} + J^*_{23} \frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta}$$

$$(2,11) = J^*_{21} \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} + J^*_{23} \frac{\partial \phi_3}{\partial \zeta}$$

$$(2,12) = J^*_{21} \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} + J^*_{23} \frac{\partial \phi_4}{\partial \zeta}$$

$$(2,13) = J^*_{21} \frac{\partial \phi_5}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_5}{\partial \eta} + J^*_{23} \frac{\partial \phi_5}{\partial \zeta}$$

$$(2,14) = J^*_{21} \frac{\partial \phi_6}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_6}{\partial \eta} + J^*_{23} \frac{\partial \phi_6}{\partial \zeta}$$

$$(2,15) = J^*_{21} \frac{\partial \phi_7}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_7}{\partial \eta} + J^*_{23} \frac{\partial \phi_7}{\partial \zeta}$$

$$(2,16) = J^*_{21} \frac{\partial \phi_8}{\partial \xi} + J^*_{22} \frac{\partial \phi_8}{\partial \eta} + J^*_{23} \frac{\partial \phi_8}{\partial \zeta}$$

$$(3,17) = J^*_{31} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + J^*_{32} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + J^*_{33} \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta}$$

$$(3,18) = J^*_{31} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} + J^*_{32} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} + J^*_{33} \frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta}$$

$$(3,19) = J^*_{31} \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} + J^*_{32} \frac{\partial \phi_3}{\partial \eta} + J^*_{33} \frac{\partial \phi_3}{\partial \zeta}$$

$$(3,20) = J^*_{31} \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} + J^*_{32} \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} + J^*_{33} \frac{\partial \phi_4}{\partial \zeta}$$

$$(3,21) = J^*_{31} \frac{\partial \phi_5}{\partial \xi} + J^*_{32} \frac{\partial \phi_5}{\partial \eta} + J^*_{33} \frac{\partial \phi_5}{\partial \zeta}$$

$$(3,22) = J^*_{31} \frac{\partial \phi_6}{\partial \xi} + J^*_{32} \frac{\partial \phi_6}{\partial \eta} + J^*_{33} \frac{\partial \phi_6}{\partial \zeta}$$

$$(3,23) = J^*_{31} \frac{\partial \phi_7}{\partial \xi} + J^*_{32} \frac{\partial \phi_7}{\partial \eta} + J^*_{33} \frac{\partial \phi_7}{\partial \zeta}$$

$$(3,24) = J^*_{31} \frac{\partial \phi_8}{\partial \xi} + J^*_{32} \frac{\partial \phi_8}{\partial \eta} + J^*_{33} \frac{\partial \phi_8}{\partial \zeta}$$

(4,1) = (2,9)	(4,9) = (1,1)
(4,2) = (2,10)	(4,10) = (1,2)
(4,3) = (2,11)	(4,11) = (1,3)
(4,4) = (2,12)	(4,12) = (1,4)
(4,5) = (2,13)	(4,13) = (1,5)
(4,6) = (2,14)	(4,14) = (1,6)
(4,7) = (2,15)	(4,15) = (1,7)
(4,8) = (2,16)	(4,16) = (1,8)

(5,9) = (3,17)	(5,17) = (2,9)
(5,10) = (3,18)	(5,18) = (2,10)
(5,11) = (3,19)	(5,19) = (2,11)
(5,12) = (3,20)	(5,20) = (2,12)
(5,13) = (3,21)	(5,21) = (2,13)
(5,14) = (3,22)	(5,22) = (2,14)
(5,15) = (3,23)	(5,23) = (2,15)
(5,16) = (3,24)	(5,24) = (2,16)

(6,1) = (3,17)	(6,17) = (1,1)
(6,2) = (3,18)	(6,18) = (1,2)
(6,3) = (3,19)	(6,19) = (1,3)
(6,4) = (3,20)	(6,20) = (1,4)
(6,5) = (3,21)	(6,21) = (1,5)
(6,6) = (3,22)	(6,22) = (1,6)
(6,7) = (3,23)	(6,23) = (1,7)
(6,8) = (3,24)	(6,24) = (1,8)

APÊNDICE II

Os elementos não nulos da matriz \underline{U} (equação II.5.4) são:

$$V(1,1) = [D(1,1)]^{1/2}$$

$$V(1,2) = D(1,2)/V(1,1)$$

$$V(1,3) = D(1,3)/V(1,1)$$

$$V(1,4) = D(1,4)/V(1,1)$$

$$V(1,5) = D(1,5)/V(1,1)$$

$$V(1,6) = D(1,6)/V(1,1)$$

$$V(2,2) = \left\{ D(2,2) - [V(1,2)]^2 \right\}^{1/2}$$

$$V(2,3) = [D(2,3) - V(1,2) \cdot U(1,3)] / V(2,2)$$

$$V(2,4) = [D(2,4) - V(1,2) \cdot U(1,4)] / V(2,2)$$

$$V(2,5) = [D(2,5) - V(1,2) \cdot U(1,5)] / V(2,2)$$

$$V(2,6) = [D(2,6) - V(1,2) \cdot U(1,6)] / V(2,2)$$

$$V(3,3) = \left\{ D(3,3) - [V(1,3)]^2 - [V(2,3)]^2 \right\}^{1/2}$$

$$V(3,4) = [D(3,4) - V(1,3) \cdot V(1,4) - V(2,3) \cdot V(2,4)] / V(3,3)$$

$$V(3,5) = [D(3,5) - V(1,3) \cdot V(1,5) - V(2,3) \cdot V(2,5)] / V(3,3)$$

$$V(3,6) = [D(3,6) - V(1,3) \cdot V(1,6) - V(2,3) \cdot V(2,6)] / V(3,3)$$

$$V(4,4) = \left\{ D(4,4) - [V(1,4)]^2 - [V(2,4)]^2 - [V(3,4)]^2 \right\}^{1/2}$$

$$V(4,5) = [D(4,5) - V(1,4) \cdot V(1,5) - V(2,4) \cdot V(2,5) - V(3,4) \cdot V(3,5)] / V(4,4)$$

$$V(4,6) = [D(4,6) - V(1,4) \cdot V(1,6) - V(2,4) \cdot V(2,6) - V(3,4) \cdot V(3,6)] / V(4,4)$$

$$V(5,5) = \left\{ D(5,5) - [V(1,5)]^2 - [V(2,5)]^2 - [V(3,5)]^2 - [V(4,5)]^2 \right\}^{1/2}$$

$$V(5,6) = [D(5,6) - V(1,5) \cdot V(1,6) - V(2,5) \cdot V(2,6) - V(3,5) \cdot V(3,6) - V(4,5) \cdot$$

$$V(4,6)] / V(5,5)$$

$$V(6,6) = \left\{ D(6,6) - [V(1,6)]^2 - [V(2,6)]^2 - [V(3,6)]^2 - [V(4,6)]^2 - [V(5,6)]^2 \right\}^{1/2}$$

APÊNDICE III

DADOS.FOR

```
C
C   PROGRAMA DE LEITURA DE DADOS
C
C   IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C   PARAMETER ILC=2007
C   PARAMETER NEMAX=430,MAXBC=711,MAXDIF=174,MAXEB=176,MAXNP=669
C   INTEGER FC(NEMAX,6),EIXO(NEMAX,6)
C
C   DIMENSION KARGA(NEMAX),MAT(NEMAX),XII(8),ETI(8),ZET(8)
C   DIMENSION NP(NEMAX,8),NEBC(MAXBC),ICONH(ILC)
C   DIMENSION ITPEL(NEMAX),AA(2),W(2)
C   DIMENSION M1(3),NO(NEMAX,6,4),VC(NEMAX,6,4)
C   DIMENSION L1(3),ICON(3),NFA(NEMAX),ALFA(100),BETA(100),GAMA(100)
C   DIMENSION INCL(NEMAX,6),CON(MAXNP,3),NC(NEMAX),IRE(24)
C   DIMENSION NFI(NEMAX),REM(6),RNI(6),RHO(6)
C   DIMENSION XORD(MAXNP),YORD(MAXNP),ZORD(MAXNP)
C
C   WRITE(6,5040)
C
C   READ(2,*)NUMEL,NUMNP,NUMBC,NUMPB,NLOAD,NMAT,NELBO,ISKEW,NPC
C   WRITE(6,5060)NUMEL,NUMNP,NUMBC,NUMPB,NLOAD
C   WRITE(6,5080)NMAT,NELBO,ISKEW,NPC
C
C   C
C   C   PROPRIEDADES DOS MATERIAIS
C   C
C   READ(2,*)(I,REM(I),RNI(I),RHO(I),K=1,NMAT)
C   WRITE(6,5100)(I,REM(I),RNI(I),RHO(I),K=1,NMAT)
C
C   WRITE(6,5120)ISKEW
C   DO 20 J=1,NUMEL
C
C   C
C   C   LEITURA DOS NOS DE CADA ELEMENTO, MATERIAL, TIPO, NUMERO DE FACES
C   C   CARREGADAS E NUMERO DE FACES INCLINADAS.
C   C
C   READ(2,*)N,(NP(N,I),I=1,8),MAT(N),ITPEL(N),KARGA(N),NFA(N),NFI(N)
20  CONTINUE
C   WRITE(6,5140)
C   DO 40 N=1,NUMEL
C   WRITE(6,5160)N,(NP(N,I),I=1,8),MAT(N),ITPEL(N),KARGA(N),NFA(N),NFI(N)
40  CONTINUE
C
C   C
C   C   LEITURA DO VALOR DAS CARGAS NOS NOS P/ CARREGAMENTO DISTRIBUIDO
C   C
C   DO 100 NK=1,NUMEL
C   KL=NFA(NK)
C   IF(KL)100,100,60
60  DO 80 IK=1,KL
80  READ(2,*)NE,NI,FC(NE,NI),(NO(NE,NI,K),K=1,4),EIXO(NE,NI),
```

```
1(VC(NE,NI,K),K=1,4),INCL(NE,NI)
100 CONTINUE
NN=0
DO 200 NE=1,NUMEL
KL=NFA(NE)
IF(KL)200,200,120
120 NN=NN+1
IF(NN-1)160,140,160
140 WRITE(6,5180)
160 DO 180 KJ=1,KL
180 WRITE(6,5200) NE,KJ,FC(NE,KJ),(NO(NE,KJ,J),J=1,4),EIXO(NE,KJ),
1(VC(NE,KJ,J),J=1,4),INCL(NE,KJ)
200 CONTINUE
```

```
C
C
C LEITURA DOS ANGULOS DE INCLINACAO DAS FACES.
```

```
C
C
C IF(ISKEMEL)GOTO,220
220 DO 280 NF=1,NUMEL
KF=NFI(NF)
IF(KF)280,280,240
240 DO 260 KI=1,KF
260 READ(2,*)NE,NI,FC(NE,NI),ALFA(NI),BETA(NI),GAMA(NI)
280 CONTINUE
WRITE(6,5000)
DO 340 NI=1,NUMEL
KI=NFI(NI)
IF(KI)340,340,300
300 DO 320 KK=1,KI
320 WRITE(6,5020)NI,KK,FC(NI,KK),ALFA(KK),BETA(KK),GAMA(KK)
340 CONTINUE
```

```
C
C
C LEITURA DO VALOR DAS CARGAS CONCENTRADAS APLICADAS NOS NOS
```

```
C
C
C IF(NPC)420,420,380
380 WRITE(6,5360)
DO 400 IJ=1,NPC
READ(2,*)I,NC(I),(CON(NC(I),NL),NL=1,3)
400 WRITE(6,5380)IJ,NC(IJ),(CON(NC(IJ),NL),NL=1,3)
420 WRITE(6,5220)
DO 440 MJ=1,NUMNP
```

```
C
C
C COORDENADAS XORD,YORD,ZORD DOS VERTICES
```

```
C
C
C READ(2,*)J,XORD(J),YORD(J),ZORD(J)
440 WRITE(6,5240)MJ,XORD(MJ),YORD(MJ),ZORD(MJ)
```

```
C
C
C LEITURA DAS COORDENADAS LOCAIS DO ELEMENTO TIPO
```

```
C
C
C DO 460 I=1,8
460 READ(2,*)XII(I),ETI(I),ZET(I)
```

WRITE(6,5260).

DO 480 I=1,8

WRITE(6,5200)XII(I),ETI(I),ZET(I)

LEITURA DOS PARAMETROS NECESSARIOS PARA INTEGRACAO
PELO METODO DE GAUSS

DO 500 L=1,2

READ(2,*)AA(L),W(L)

WRITE(6,5440)

DO 520 KL=1,2

WRITE(6,5460)KL,AA(KL),W(KL)

WRITE(6,5300)

J=0

DESLOCAMENTO IMPEDIDO OU IMPOSTO TEM LI(I)=1

DESLOCAMENTO LIVRE TEM LI(I)=0

DESLOCAMENTO IMPEDIDO TEM ICON(I)=0

DESLOCAMENTO IMPOSTO TEM ICON(I)=1

M INDICA NUMERO DO NO SITUADO NA BORDA

DO 580 N=1,NUMPB

READ(2,*)M,(LI(I),I=1,3),(ICON(I),I=1,3)

DO 540 I=1,3

K=3*(M-1)+I

ICONH(K)=ICON(I)

WRITE(6,5320)M,(LI(I),I=1,3),(ICON(I),I=1,3)

DO 580 I=1,3

IF(LI(I))580,580,560

M1(I)=3*(M-1)+I

J=J+1

NE8C(J)=M1(I)

CONTINUE

DO 600 JK=1,24

READ(2,*)IRE(JK)

NE08C=J

NEQ=3*NUMNP

DETERMINACAO DA LARGURA DA BANDA
IBNDW=LARGURA DE SEMI-BANDA

K=0

DO 700 N=1,NUMEL

DO 700 I=1,7

K1=NP(N,I)

IF(K1)700,700,620

I9=I+1

DO 680 J=I9,8

K2=NP(N,J)

```
IF(K2)690,680,640
640 M=IABS(K2-K1)
IF(M-K)690,680,660
660 K=M
680 CONTINUE
700 CONTINUE
IBNDW=3*(K+1)
WRITE(6,5340)IBNDW

WRITE(10)NUMEL,NUMNP,NUMBC,NMAT,NLOAD,NELBO,ISKEW
WRITE(11)REK,RNI,RHO
DO 720 J=1,8
720 WRITE(12)(NP(I,J),I=1,NEMAX)
WRITE(13)MAT,ITPEL,KARGA,NFA
DO 740 JJ=1,6
740 WRITE(14)(FC(IJ,JJ),IJ=1,NEMAX)
DO 760 KK=1,4
DO 760 JK=1,6
760 WRITE(15)(NO(IK,JK,KK),IK=1,NEMAX)
DO 780 JL=1,6
780 WRITE(16)(EIXO(IL,JL),IL=1,NEMAX)
DO 800 KN=1,4
DO 800 JN=1,6
800 WRITE(17)(VC(IN,JN,KN),IN=1,NEMAX)
WRITE(18)XII,ETI,ZET,XORD,YORD,ZORD
WRITE(19)AA,W
WRITE(20)ICQNH
WRITE(21)IBNDW,NEQBC,NEQ
WRITE(23)NEBC
WRITE(24)NFI
WRITE(25)ALFA,BETA,GAMA
DO 820 JM=1,6
820 WRITE(26)(INCL(IM,JM),IM=1,NEMAX)
WRITE(27)NPC,IRE
DO 840 JI=1,3
840 WRITE(27)(CON(II,JI),II=1,MAXNP)

CALL EXIT

5000 FORMAT(10X,'INFORMACOES SOBRE FACES INCLINADAS CARREGADAS'
1,/,2X,'ELEMENTO',5X,'FACE',5X,'ALFA',6X,'BETA',7X,'GAMA'
1,/)
5020 FORMAT(2X,I2,2X,I2,2X,I2,5X,F8.3,6X,F8.3,7X,F8.3)
5040 FORMAT(3X,90('*'),/,3X,17('*'),3X,'ELEMENTOS FINITOS',3X
1,17('*'),/,3X,90('*'))
5060 FORMAT(/,3X,'NUMERO DE ELEMENTOS-----',I8,/,3X,'NU
MERO DE PONTOS NODAIS-----',I8,/,3X,'NUMERO DE CONDIC
20ES DE CONTOURO--',I8,/,3X,'NUMERO DE PONTOS NA BORDA-----
1-',I8,/,3X,'NUMERO DE CASOS DE CARGA-----',I8,/)
5080 FORMAT(3X,'NUMERO DE MATERIAIS DIFERENTES---',I8,/,3X,'NUMERO
1 DE ELEMENTOS NA BORDA-----',I8,/,3X,'=0,LADOS SEGUNDO X/Y,
2SE=1,ESCONSO-',I8,/,3X,'N. PONTOS NODAIS COM CARGA CONC.--',
1I8,/)
5100 FORMAT(20X,'PROPRIEDADES DOS MATERIAIS',/,2X,'MAT.N.',5X,
1'MODULO DE ELASTICIDADE',5X,'COEF. DE POISSON',5X,'DENSIDADE',
2/,I5,8X,E14.5,8X,E14.5,8X,E14.5)
5120 FORMAT(10X,/,/,,'ISKEW=0---ESTRUTURA COM LADOS SEGUNDO X/Y',/)
```

```
110X,'ISKEW=1----ESTRUTURA COM LADO ESCONSO',/,10X,'ESTE PROBLE  
2MA TEM ISKEW=',I2,////)  
5140 FORMAT(15X,'DADOS SOBRE OS ELEMENTOS',/,1X;'ELEMENTO NO1  
1NO2 NO3 NO4 NO5 NO6 NO7 NO8 MAT.TIPO ELEM.TIPO KAR  
2GA N.F. CARR H.F.INCL.',/)  
5160 FORMAT(1X,I4,3X,I4,7I5,5X,I2,7X,I4,7X,I2,4X,I5,6X,I3)  
5180 FORMAT(////,1X,'ELEMENTO',10X,'NOS DA FACE',14X,'VALOR DO  
1 CARREGAMENTO',/,8X,'FACE',7X,'NO1 NO2 NO3 NO4 EI  
2X0',10X,'VC1',5X,'VC2',7X,'VC3',8X,'VC4',8X,'INCL',/)  
5200 FORMAT(2X,I2,2X,I2,2X,I2,8X,I2,3I5,5X,I2,4X,4(1X,F8.3),4X,I2)  
5220 FORMAT(////,9X,'COORDENADAS DOS VERTICES',/,1X,'PONTO',5X,'X',  
115X,'Y',15X,'Z',/)  
5240 FORMAT(2X,I3,2X,E14.7,2X,E14.7,4X,E14.7)  
5260 FORMAT(////,9X,'COORDENADAS LOCAIS DO ELEMENTO TIPO',/,15X,'XII',  
120X,'ETI',22X,'ZET',/)  
5280 FORMAT(3(10X,E14.7))  
5300 FORMAT(////,10X,'CONDICOES DE CONTORNO',/,2X,'PONTO',4X,'L1(1)',  
15X,'L1(2)',5X,'L1(3)',6X,'ICON(1)',6X,'ICON(2)',6X,'ICON(3)',/)  
5320 FORMAT(1X,I4,6X,I2,8X,I2,9X,I2,10X,I2,10X,I2,10X,I2)  
5340 FORMAT(////,5X,'LARGURA DA SEMI BANDA=',I5,//)  
5360 FORMAT(////,5X,'N. DO NO',5X,'CARGA DIRECAO U',5X,'CARGA  
1 DIRECAO V',5X,'CARGA DIRECAO W',/)  
5380 FORMAT(1X,I2,2X,I4,8X,E14.7,7X,E14.7,8X,E14.7)  
5400 FORMAT(3F)  
5420 FORMAT(2X,3(1X,F8.3))  
5440 FORMAT(////,9X,'PARAMETROS PARA INTEGRACAO PELO METODO DE GAU  
1SS',/,1X,'NUMERO DE PONTOS',10X,'LOCALIZACAO',17X,'PESOS ASS  
1OCIADOS',//)  
5460 FORMAT(4X,I3,20X,E14.7,15X,E14.7)  
END
```

RIGCAR.FOR

```
C  
C PROGRAM QUE CALCULA AS MATRIZES DE RIGIDEZ E DE CARGAS NODAIS  
C EQUIVALENTES  
C  
C IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)  
C PARAMETER ILC=2007  
C PARAMETER NEMAX=436,MAXBC=711,MAXPD=174,MAXEB=176,MAXNP=669  
C INTEGER FC(NEMAX,6)  
C REAL*8 NI  
C INTEGER EIXO(NEMAX,6)  
C  
C DIMENSION XII(8),ETI(8),ZET(8),AA(2),N(2),B(6,24),SE(24,24)  
C DIMENSION PFI(4),F(4,4),XORD(MAXNP),YORD(MAXNP),ZORD(MAXNP)  
C DIMENSION NXI(MAXNP),NET(MAXNP),NZE(MAXNP),VET(3),C(3),IRE(24)  
C DIMENSION CAR(3,MAXNP),KARGA(NEMAX),MAT(NEMAX),NP(NEMAX,8)  
C DIMENSION NEBC(MAX9C),RECUP(300),CA(4),K(4),E(6,6)  
C DIMENSION COMIE(ILC),ICONH(ILC),ITPEL(NEMAX),REM(6),RNI(6)  
C DIMENSION RHO(6),X(8),Y(8),Z(8),M1(3),ICON(3),L1(3),P(ILC)  
C DIMENSION NO(NEMAX,6,4),VC(NEMAX,6,4),NFA(NEMAX)
```

```
DIMENSION ALFA(100),BETA(100),GAMA(100),ROD(3,3),XB(4),YB(4)
DIMENSION ZB(4),NFI(NEMAX),INCL(NEMAX,5),XOR(MAXNP),YOR(MAXNP)
DIMENSION ZOR(MAXNP),CON(MAXNP,3),RI(24,24)
```

```
C
OPEN(UNIT=29,FILE='AR00',ACCESS='DIRECT',STATUS='NEW',
1FORM='UNFORMATTED',RECL=600)
OPEN(UNIT=30,FILE='CARGA',ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS='NEW',
1FORM='UNFORMATTED',RECL=ILC)
```

```
C
C
C OS VALORES DE CONHE(I) SERAO GERADOS NO PROGRAMA MONTO QUANDO FOREM
C IMPOSTAS AS CONDIC0ES DE CONTORNO.NELE ESTARAO CONTIDOS OS VALORES
C DAS DIAGONAIS AMPLIADAS POR 1*10**18
C
```

```
READ(10)NUMEL,NUMNP,NUMBC,NMAT,NLOAD,NELBO,ISKEW
READ(11)REM,RNI,RHO
```

```
DO 20 J=1,8
```

```
20 READ(12)(NP(I,J),I=1,NEMAX)
```

```
READ(13)MAT,ITPEL,KARGA,NFA
```

```
DO 40 JJ=1,6
```

```
40 READ(14)(FC(IJ,JJ),IJ=1,NEMAX)
```

```
DO 60 KK=1,4
```

```
DO 60 JK=1,6
```

```
60 READ(15)(NO(IK,JK,KK),IK=1,NEMAX)
```

```
DO 80 JL=1,6
```

```
80 READ(16)(EIXD(IL,JL),IL=1,NEMAX)
```

```
DO 100 KN=1,4
```

```
DO 100 JN=1,6
```

```
100 READ(17)(VC(IN,JN,KN),IN=1,NEMAX)
```

```
READ(18)XII,ETI,ZET,XORD,YORD,ZORD
```

```
READ(19)AA,W
```

```
READ(24)NFI
```

```
READ(25)ALFA,BETA,GAMA
```

```
DO 120 JM=1,6
```

```
120 READ(26)(INCL(IM,JM),IM=1,NEMAX)
```

```
READ(27)NPC,IRE
```

```
DO 140 JI=1,3
```

```
140 READ(27)(CON(II,JI),II=1,MAXNP)
```

```
IJ=NUMNP
```

```
DO 160 L=1,IJ
```

```
CAR(1,L)=0.
```

```
CAR(2,L)=0.
```

```
160 CAR(3,L)=0.
```

```
DO 180 IF=1,ILC
```

```
180 P(IF)=0.
```

```
C
C
C CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ
C
C
```

```
DO 700 N=1,NUMEL
```

```
NW=MAT(N)
```

```
NI=RNI(NW)
```

```
EM=REM(NW)
```

```
DE=RHO(NW)
```

```
IF(ITPEL(N)-N)320,200,320
200 DO 220 J=1,8
    M=NP(N,J)
    X(J)=XORD(M)
    Y(J)=YORD(M)
220 Z(J)=ZORD(M)
C
CALL COMBD(X,Y,Z,A1,A2,A3,B1,B2,B3,C1,C2,C3,D1,D2,D3,E1,E2,E3,F1,F2,
1F3,G1,G2,G3)
C
DO 240 LI=1,6
DO 240 J=1,6
240 E(LI,J)=0.
E(1,1)=EM*(1.-NI)/((1.+NI)*(1.-2.*NI))
E(1,2)=EM*NI/((1.+NI)*(1.-2.*NI))
E(1,3)=E(1,2)
E(2,1)=E(1,2)
E(2,2)=E(1,1)
E(2,3)=E(1,2)
E(3,1)=E(1,3)
E(3,2)=E(2,3)
E(3,3)=E(1,1)
E(4,4)=EM/(2.*(1.+NI))
E(5,5)=E(4,4)
E(6,6)=E(4,4)
C
CALL INTEGR(E,B,SE,N,XII,ETI,ZET,AA,A1,A2,A3,B1,B2,B3,C1,C2,C3,D1,D2,
1D3,E1,E2,E3,F1,F2,F3,G1,G2,G3,DETJAC,IRE,RI)
C
IJ=0
DO 300 I=1,24
DO 300 J=1,24
IF(I-J)260,260,280
260 IJ=IJ+1
    RECUP(IJ)=SE(I,J)
    GO TO 300
280 SE(I,J)=SE(J,I)
300 CONTINUE
    WRITE(28)8
    NR=2*N-1
    WRITE(29'NR)(RECUP(IK),IK=1,300)
C
C
C   CALCULO DO VETOR DE CARGAS NODAIS EQUIVALENTE
C
C
320 IF(DE)380,380,340
340 DO 360 IN=1,8
    M=NP(N,J)
360 CAR(3,M)=DE*DETJAC*-1.
380 IF(KARGA(N))700,700,400
400 KL=NFA(N)
    DO 680 KJ=1,KL
    DO 420 L=1,4
    K(L)=ND(N,KJ,L)
    CA(L)=VC(N,KJ,L)
    NF=K(L)
    XOR(NF)=XORD(NF)
```

```
YOR(NF)=YORD(NF)
420 ZOR(NF)=ZORD(NF)
    IE=EIXD(N,KJ)
    DO 440 NA=1,8
        KK=NP(N,NA)
        NXI(KK)=XII(NA)
        NET(KK)=ETI(NA)
440 NZE(KK)=ZET(NA)
    IF(INCL(N,KJ))460,520,460
C
460 CALL ROTACAO(ALFA,BETA,GAMA,ROD)
C
    DO 500 KC=1,4
        NN=K(KC)
        VET(1)=XORD(NN)
        VET(2)=YORD(NN)
        VET(3)=ZORD(NN)
        DO 480 I=1,3
            C(I)=0.0
        DO 480 J=1,3
480 C(I)=ROT(I,J)*VET(J)+C(I)
        XOR(NN)=C(1)
        YOR(NN)=C(2)
500 ZOR(NN)=C(3)
C
520 CALL VETCARGA(XOR,YOR,ZOR,NXI,NET,NZE,AA,W,PFI,K,CA,IE,I,L,M,J)
C
    IF(INCL(N,KJ))660,660,540
C
540 CALL GJRIS(ROD)
C
    DO 620 JM=1,4
        XB(JM)=0.
        YB(JM)=0.
        ZB(JM)=0.
        GO TO (560,580,600)IE
560 XB(JM)=PFI(JM)
        GO TO 620
580 YB(JM)=PFI(JM)
        GO TO 620
600 ZB(JM)=PFI(JM)
620 CONTINUE
    DO 640 JI=1,3
        CAR(JI,I)=ROT(JI,1)*XB(1)+ROT(JI,2)*YB(1)+ROT(JI,3)*ZB(1)+
        1CAR(JI,I)
        CAR(JI,L)=ROT(JI,1)*XB(2)+ROT(JI,2)*YB(2)+ROT(JI,3)*ZB(2)+
        1CAR(JI,L)
        CAR(JI,M)=ROT(JI,1)*XB(3)+ROT(JI,2)*YB(3)+ROT(JI,3)*ZB(3)+
        1CAR(JI,M)
640 CAR(JI,J)=ROT(JI,1)*XB(4)+ROT(JI,2)*YB(4)+ROT(JI,3)*ZB(4)+
        1CAR(JI,J)
        GO TO 680
660 CAR(IE,I)=CAR(IE,I)+PFI(1)
        CAR(IE,L)=CAR(IE,L)+PFI(2)
        CAR(IE,M)=CAR(IE,M)+PFI(3)
        CAR(IE,J)=CAR(IE,J)+PFI(4)
680 CONTINUE
```



```

700 CONTINUE
      IK=NUMNP
      DO 720 NN=1,IK
        NU=3*NN-2
        P(NU)=CAR(1,NN)+CON(NN,1)
        P(NU+1)=CAR(2,NN)+CON(NN,2)
720   P(NU+2)=CAR(3,NN)+CON(NN,3)
      WRITE(30)(P(IH),IH=1,ILC)
      CALL EXIT
      END

```

INTEGR.SUB

SUBROUTINE INTEGR(E,B,SE,W,XII,ETI,ZET,AA,A1,A2,A3,B1,B2,B3,C1,IC2,C3,D1,D2,D3,E1,E2,E3,F1,F2,F3,G1,G2,G3,DETJAC,IRE,RI)

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION E(6,6),B(6,24),SE(24,24),W(2),XII(8),ETI(8),ZET(8),IAA(2),IRE(24),N(8),RI(24,24)

```

DO 20 K=1,24
DO 20 L=K,24
RI(K,L)=0.
SE(K,L)=0.

```

20
C
C
C
C
C

MONTAGEM DA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR U

```

E(1,1)=DSQRT(E(1,1))
E(1,2)=E(1,2)/E(1,1)
E(1,3)=E(1,3)/E(1,1)
E(1,4)=E(1,4)/E(1,1)
E(1,5)=E(1,5)/E(1,1)
E(1,6)=E(1,6)/E(1,1)
E(2,1)=0.
E(2,2)=DSQRT(E(2,2)-E(1,2)*E(1,2))
E(2,3)=(E(2,3)-E(1,2)*E(1,3))/E(2,2)
E(2,4)=(E(2,4)-E(1,2)*E(1,4))/E(2,2)
E(2,5)=(E(2,5)-E(1,2)*E(1,5))/E(2,2)
E(2,6)=(E(2,6)-E(1,2)*E(1,6))/E(2,2)
E(3,1)=0.
E(3,2)=0.
E(3,3)=DSQRT(E(3,3)-E(1,3)*E(1,3)-E(2,3)*E(2,3))
E(3,4)=(E(3,4)-E(1,3)*E(1,4)-E(2,3)*E(2,4))/E(3,3)
E(3,5)=(E(3,5)-E(1,3)*E(1,5)-E(2,3)*E(2,5))/E(3,3)
E(3,6)=(E(3,6)-E(1,3)*E(1,6)-E(2,3)*E(2,6))/E(3,3)
E(4,4)=DSQRT(E(4,4)-E(1,4)*E(1,4)-E(2,4)*E(2,4)-E(3,4)*E(3,4))
E(4,5)=(E(4,5)-E(1,4)*E(1,5)-E(2,4)*E(2,5)-E(3,4)*E(3,5))/E(4,4)
E(4,6)=(E(4,6)-E(1,4)*E(1,6)-E(2,4)*E(2,6)-E(3,4)*E(3,6))/E(4,4)
E(5,5)=DSQRT(E(5,5)-E(1,5)*E(1,5)-E(2,5)*E(2,5)-E(3,5)*E(3,5)-E(4,5)*E(4,5))
E(5,6)=(E(5,6)-E(1,5)*E(1,6)-E(2,5)*E(2,6)-E(3,5)*E(3,6)-E(4,5)*E(4,6))/E(5,5)

```

```
E(6,6)=DSORT(E(6,6)-E(1,6)*E(1,6)-E(2,6)*E(2,6)-E(3,6)*E(3,6)-E(4,6)*E(4,6)-E(5,6)*E(5,6))
```

C
C
C
C
C

INICIANDO GAUSS

```
DO 100 II=1,2  
DO 100 JJ=1,2  
DO 100 KK=1,2
```

C

```
CALL FORMA(II, JJ, KK, XII, ETI, ZET, AA, B, A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2, C3, D1, D2,  
103, E1, E2, E3, F1, F2, F3, G1, G2, G3, DETJAC)
```

C
C
C
C
C

MULTIPLICANDO U*B

```
DO 60 K=1,6  
DO 60 L=1,24  
DUM1=0.  
DO 40 M=K,6  
DUM1=DUM1+E(K,M)*B(M,L)  
B(K,L)=DUM1
```

40
60

C
C
C
C
C

CALCULANDO A MATRIZ DE RIGIDEZ

```
DUM1=W(II)*W(JJ)*W(KK)*DETJAC  
DO 100 NROW=1,24  
DO 100 NCOL=1,24  
DUM2=0.  
DO 80 L=1,6  
DUM2=DUM2+B(L, NROW)*B(L, NCOL)  
RI(NROW, NCOL)=RI(NROW, NCOL)+DUM1*DUM2
```

80
100

C
C
C
C
C

FIM DA QUADRATURA COMPLETAR A MATRIZ DE RIGIDEZ POR SINETRIA

120

```
DO 120 K=2,24  
DO 120 L=1,K  
RI(K,L)=RI(L,K)
```

```
DO 140 J=1,24  
K=IRE(J)  
SE(1,J)=RI(1,K)  
SE(2,J)=RI(9,K)  
SE(3,J)=RI(17,K)  
SE(4,J)=RI(2,K)  
SE(5,J)=RI(10,K)  
SE(6,J)=RI(18,K)  
SE(7,J)=RI(3,K)  
SE(8,J)=RI(11,K)  
SE(9,J)=RI(19,K)  
SE(10,J)=RI(4,K)
```

```

SE(11,J)=RI(12,K)
SE(12,J)=RI(20,K)
SE(13,J)=RI(5,K)
SE(14,J)=RI(13,K)
SE(15,J)=RI(21,K)
SE(16,J)=RI(6,K)
SE(17,J)=RI(14,K)
SE(18,J)=RI(22,K)
SE(19,J)=RI(7,K)
SE(20,J)=RI(15,K)
SE(21,J)=RI(23,K)
SE(22,J)=RI(8,K)
SE(23,J)=RI(16,K)
140 SE(24,J)=RI(24,K)
RETURN
END

```

FORMA SUB

```

SUBROUTINE FORMA(II,JJ,KK,XII,ETI,ZET,AA,B,A1,A2,A3,B1,B2,B3
1,C1,C2,C3,D1,D2,D3,E1,E2,E3,F1,F2,F3,G1,G2,G3,DETJAC)

```

```

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 JAC(3,3)
REAL*8 N(8),NXI(8),NET(8),NZE(8),B(6,24),XII(8),ETI(8)
REAL*8 ZET(8),AA(2)

```

C
C
C
C
C

FUNCOES DE FORMA E SUAS DERIVADAS

```

DO 20 I=1,8
DUM1=(1.+XII(I)*AA(II))*125
DUM2=(1.+ETI(I)*AA(JJ))*125
DUM3=(1.+ZET(I)*AA(KK))*125
N(I)=64.*DUM1*DUM2*DUM3
NXI(I)=8.*XII(I)*DUM2*DUM3
NET(I)=8.*ETI(I)*DUM1*DUM3
NZE(I)=8.*ZET(I)*DUM1*DUM2
20

```

20
C
C
C
C
C

ENCONTRAR MATRIZ JACOBIANA

```

DO 40 I=1,3
DO 40 J=1,3
40 JAC(I,J)=0.
JAC(1,1)=(A1+B1*AA(JJ)+C1*AA(KK)+D1*AA(JJ)*AA(KK))/8
JAC(1,2)=(A2+B2*AA(JJ)+C2*AA(KK)+D2*AA(JJ)*AA(KK))/8
JAC(1,3)=(A3+B3*AA(JJ)+C3*AA(KK)+D3*AA(JJ)*AA(KK))/8
JAC(2,1)=(E1+B1*AA(II)+F1*AA(KK)+D1*AA(II)*AA(KK))/8
JAC(2,2)=(E2+B2*AA(II)+F2*AA(KK)+D2*AA(II)*AA(KK))/8
JAC(2,3)=(E3+B3*AA(II)+F3*AA(KK)+D3*AA(II)*AA(KK))/8
JAC(3,1)=(G1+C1*AA(II)+F1*AA(JJ)+D1*AA(II)*AA(JJ))/8

```

40

```
JAC(3,2)=(G2+C2*AA(II)+F2*AA(JJ)+D2*AA(II)*AA(JJ))/8  
JAC(3,3)=(G3+C3*AA(II)+F3*AA(JJ)+D3*AA(II)*AA(JJ))/8
```

C
C
C
C
C

CALCULO DO DETERMINANTE

```
DE1=JAC(1,1)*JAC(2,2)*JAC(3,3)  
DE2=JAC(1,2)*JAC(2,3)*JAC(3,1)  
DE3=JAC(1,3)*JAC(2,2)*JAC(2,1)  
DE4=JAC(3,1)*JAC(2,2)*JAC(1,3)  
DE5=JAC(3,2)*JAC(2,3)*JAC(1,1)  
DE6=JAC(3,3)*JAC(1,2)*JAC(2,1)  
DETJAC=DE1+DE2+DE3-DE4-DE5-DE6
```

C
C
C
C
C

CALCULO DA INVERSA

CALL GJRIS(JAC)

C
C
C
C
C

MONTANDO A MATRIZ B

```
DO 60 I=1,8  
J=I+8  
K=J+8  
B(1,I)=JAC(1,1)*NXI(I)+JAC(1,2)*NET(I)+JAC(1,3)*NZE(I)  
B(1,J)=0.  
B(1,K)=0.  
B(2,I)=0.  
B(2,J)=JAC(2,1)*NXI(I)+JAC(2,2)*NET(I)+JAC(2,3)*NZE(I)  
B(2,K)=0.  
B(3,I)=0.  
B(3,J)=0.  
B(3,K)=JAC(3,1)*NXI(I)+JAC(3,2)*NET(I)+JAC(3,3)*NZE(I)  
B(4,I)=B(2,J)  
B(4,J)=B(1,I)  
B(4,K)=0.  
B(5,I)=0.  
B(5,J)=B(3,K)  
B(5,K)=B(2,J)  
B(6,I)=B(3,K)  
B(6,J)=0.  
B(6,K)=B(1,I)  
RETURN  
END
```

VETCARGA.SUB

SUBROUTINE VETCARGA(XOR,YOR,ZOR,NXI,NET,NZE,AA,W,PFI,K,CA,IE
1,I,L,M,J)

C
C
C
C
C
C

CALCULO DO VETOR DE CARGA NODAL EQUIVALENTE.
CARGA COM VARIACAO LINEAR E PERPENDICULAR A FACE

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
PARAMETER MAXNP=649
DIMENSION XOR(MAXNP),YOR(MAXNP),ZOR(MAXNP),NXI(MAXNP)
DIMENSION NET(MAXNP),NZE(MAXNP),AA(2),W(2),PFI(4),F(4,4)
DIMENSION K(4),CA(4),PFN(4)
REAL*8 NI(200),JAC(2,2)
DO 20 JN=1,4
20 PFI(JN)=0.
I=K(1)
L=K(2)
M=K(3)
J=K(4)
GO TO (40,60,80),IE
40 A11=YOR(I)-YOR(L)-YOR(M)+YOR(J)
A22=ZOR(I)-ZOR(L)-ZOR(M)+ZOR(J)
B11=YOR(L)-YOR(I)-YOR(M)+YOR(J)
B22=ZOR(L)-ZOR(I)-ZOR(M)+ZOR(J)
C11=YOR(M)+YOR(J)-YOR(L)-YOR(I)
C22=ZOR(M)+ZOR(J)-ZOR(L)-ZOR(I)
GO TO 100
60 B11=XOR(I)-XOR(L)+XOR(M)-XOR(J)
B22=ZOR(I)-ZOR(L)+ZOR(M)-ZOR(J)
A11=XOR(L)-XOR(I)+XOR(M)-XOR(J)
A22=ZOR(L)-ZOR(I)+ZOR(M)-ZOR(J)
C11=XOR(M)+XOR(J)-XOR(L)-XOR(I)
C22=ZOR(M)+ZOR(J)-ZOR(L)-ZOR(I)
GO TO 100
80 A11=XOR(I)-XOR(L)+XOR(M)-XOR(J)
A22=YOR(I)-YOR(L)+YOR(M)-YOR(J)
B11=XOR(L)-XOR(I)+XOR(M)-XOR(J)
B22=YOR(L)-YOR(I)+YOR(M)-YOR(J)
C11=XOR(M)+XOR(J)-XOR(L)-XOR(I)
C22=YOR(M)+YOR(J)-YOR(L)-YOR(I)
100 DO 300 IN=1,2
DO 300 JN=1,2
DO 120 KJ=1,4
120 PFN(KJ)=0.
DO 220 II=1,4
JJ=K(II)
GO TO (140,160,180),IE
140 XX=NET(JJ)
YY=NZE(JJ)
GO TO 200
160 XX=NXI(JJ)
YY=NZE(JJ)
GO TO 200
180 XX=NXI(JJ)
YY=NET(JJ)

```
200 DUM1=(1.+XX*AA(IN))* .25
    DUM2=(1.+YY*AA(JN))* .25
220 NI(JJ)=4.*DUM1*DUM2
    DO 240 IF=1,4
    DO 240 LF=1,4
    JF=K(IF)
    JI=K(LF)
240 F(IF,LF)=NI(JF)*NI(JI)
    DO 260 JA=1,4
    DO 260 LN=1,4
260 PFN(JA)=PFN(JA)+F(JA,LN)*CA(LN)
    JAC(1,1)=(A11*AA(JN)+B11)/4.
    JAC(2,1)=(A11*AA(IN)+C11)/4.
    JAC(1,2)=(A22*AA(JN)+B22)/4.
    JAC(2,2)=(A22*AA(IN)+C22)/4.
    DETJAC=JAC(1,1)*JAC(2,2)-JAC(2,1)*JAC(1,2)
    DO 280 KK=1,4
    PFN(KK)=PFN(KK)*DETJAC*W(IN)*W(JN)
280 PFI(KK)=PFI(KK)+PFN(KK)
300 CONTINUE
    RETURN
    END
```

ROTACAO . SUB

SUBROUTINE ROTAC(ALFA, BETA, GAMA, ROT)

```
    IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
    DIMENSION ROT(3,3)
    DO 20 I=1,3
    DO 20 J=1,3
20  ROT(I,J)=0.
    CAL=DCOS(ALFA)
    SAL=DSIN(ALFA)
    CBE=DCOS(BETA)
    SBE=DSIN(BETA)
    CGA=DCOS(GAMA)
    SGA=DSIN(GAMA)
    ROT(1,1)=CAL*CGA-SAL*SBE*SGA
    ROT(1,2)=SAL*CBE
    ROT(1,3)=CAL*SGA+SAL*SBE*CGA
    ROT(2,1)=(-1.)*SAL*CGA-CAL*SBE*SGA
    ROT(2,2)=CAL*CBE
    ROT(2,3)=CAL*SBE*CGA-SAL*SGA
    ROT(3,1)=(-1.)*CBE*SGA
    ROT(3,2)=(-1.)*SBE
    ROT(3,3)=CBE*CGA
    DO 40 II=1,3
    DO 40 JJ=1,3
40  WRITE(6,60)ROT(II,JJ)
60  FORMAT(10X,E14.7)
    RETURN
    END
```

COMBD.SUB

SUBROUTINE COMBD(X,Y,Z,A1,A2,A3,B1,B2,B3,C1,C2,C3,D1,D2,D3,E1
1,E2,E3,F1,F2,F3,G1,G2,G3)

C
C
C
C
C
C

CALCULA AS COMBINACOES ALGEBRICAS NECESSARIAS A MONTAGEM
DA MATRIZ JACOBIANA

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION X(8),Y(8),Z(8)
A1=OPEAD(X)
A2=OPEAD(Y)
A3=OPEAD(Z)
B1=OPEBD(X)
B2=OPEBD(Y)
B3=OPEBD(Z)
C1=OPECD(X)
C2=OPECD(Y)
C3=OPECD(Z)
D1=OPEDD(X)
D2=OPEDD(Y)
D3=OPEDD(Z)
E1=OPEED(X)
E2=OPEED(Y)
E3=OPEED(Z)
F1=OPEFD(X)
F2=OPEFD(Y)
F3=OPEFD(Z)
G1=OPEGD(X)
G2=OPEGD(Y)
G3=OPEGD(Z)
RETURN
END

GJRI3.SUB

SUBROUTINE GJRI3(AA)

C
C
C
C
C

INVERSAO DE MATRIZES PELO METODO GAUSS-JORDAN-RUTISHAUSER

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION AA(3,3),BB(3),C(3),IP(3),IQ(3)
DO 340 K=1,3
T=0.
DO 100 I=K,3
S=0.
DO 20 J=K,3
20 S=S+ABS(AA(I,J))
IF(S)40,400,40
40 DO 80 J=K,3

```
IF (ABS(AA(I, J)) - S * T) 80, 80, 40
60 IP(K) = I
   IQ(K) = J
   PIVO = AA(I, J)
   T = ABS(PIVO / S)
80 CONTINUE
100 CONTINUE
   IF(T) 120, 480, 120
120 IF(IP(K) - K) 140, 180, 140
140 DO 160 J = 1, 3
   IPK = IP(K)
   Z = AA(IPK, J)
   AA(IPK, J) = AA(K, J)
160 AA(K, J) = Z
180 IF(IQ(K) - K) 200, 240, 200
200 IQK = IQ(K)
   DO 220 I = 1, 3
   Z = AA(I, IQK)
   AA(I, IQK) = AA(I, K)
220 AA(I, K) = Z
240 DO 320 J = 1, 3
   IF(J - K) 280, 260, 280
260 BB(J) = 1 / PIVO
   C(J) = 1.
   GO TO 300
280 BB(J) = -AA(K, J) / PIVO
   C(J) = AA(J, K)
300 AA(K, J) = 0.
320 AA(J, K) = 0.
   DO 340 I = 1, 3
   DO 340 J = 1, 3
   AA(I, J) = AA(I, J) + C(I) * BB(J)
340 CONTINUE
   DO 460 KAUX = 1, 3
   K = 3 - KAUX + 1
   IF(IP(K) - K) 360, 400, 360
360 DO 380 I = 1, 3
   IPK = IP(K)
   Z = AA(I, IPK)
   AA(I, IPK) = AA(I, K)
   AA(I, K) = Z
380 CONTINUE
400 IF(IQ(K) - K) 420, 460, 420
420 DO 440 J = 1, 3
   IQK = IQ(K)
   Z = AA(IQK, J)
   AA(IQK, J) = AA(K, J)
   AA(K, J) = Z
440 CONTINUE
460 CONTINUE
   GO TO 520
480 WRITE(5, 500)
500 FORMAT(///SX'PROGRAMA NAO EXECUTADO--MATRIZ SINGULAR'//)
520 CONTINUE
   RETURN
   END
```


OPFAD.SUB

```
C SUBPROGRAMA OPEAD
  FUNCTION OPEAD(X)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
  DIMENSION X(8)
  OPFAD=X(2)-X(1)+X(3)-X(4)-X(5)+X(6)+X(7)-X(8)
  RETURN
  END
```

OPEBD.SUB

```
C SUBPROGRAMA OPEBD
  FUNCTION OPEBD(X)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
  DIMENSION X(8)
  OPEBD=X(1)-X(2)+X(3)-X(4)+X(5)-X(6)+X(7)-X(8)
  RETURN
  END
```

OPECD.SUB

```
C SUBPROGRAMA OPECD
  FUNCTION OPECD(X)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
  DIMENSION X(8)
  OPECD=X(1)-X(2)-X(3)+X(4)-X(5)+X(6)+X(7)-X(8)
  RETURN
  END
```

OPEDD.SUB

```
C SUBPROGRAMA OPEDD
  FUNCTION OPEDD(X)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
  DIMENSION X(8)
  OPEDD=X(2)-X(1)-X(3)+X(4)+X(5)-X(6)+X(7)-X(8)
  RETURN
  END
```

OPEED.SUB

```

C   SUBPROGRAMA OPEED
      FUNCTION OPEED(X)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION X(8)
      OPEED=X(3)+X(4)-X(1)-X(2)-X(5)-X(6)+X(7)+X(8)
      RETURN
      END

```

OPEFD.SUB

```

C   SUBPROGRAMA OPEFD
      FUNCTION OPEFD(X)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION X(8)
      OPEFD=X(1)+X(2)-X(3)-X(4)-X(5)-X(6)+X(7)+X(8)
      RETURN
      END

```

OPEGD.SUB

```

C   SUBPROGRAMA OPEGD
      FUNCTION OPEGD(X)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION X(8)
      OPEGD=X(5)+X(6)+X(7)+X(8)-X(1)-X(2)-X(3)-X(4)
      RETURN
      END

```

MONTD.FOR

```

C
C   FORMACAO DO SISTEMA DE EQUACOES LINEARES
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      PARAMETER LIB=150
      PARAMETER ILC=2007, ILARG=525, NDIM=130600
      PARAMETER NEMAX=436, MAXBC=711, MAXPD=174, MAXEB=176, MAXNP=669

      DIMENSION SE(24,24), RECUP(300), AA(2), W(2), B(6,24)
      DIMENSION CAR(3, MAXNP), NFA(NEMAX), E(6,6), XII(8), ETI(8), ZET(8)
      DIMENSION KARGA(NEMAX), NO(NEMAX,6,4), VC(NEMAX,6,4)
      DIMENSION NP(NEMAX,8), ITPEL(NEMAX), NEBC(MAXBC), CONHE(ILC)

```

```

DIMENSION ICONH(ILC),REN(6),RHO(6),PSI(24,24)
DIMENSION NEL(LIB),NE(LIB,LIB),NEB(LIB),IND(LIB),S(NDIM)
DIMENSION MAT(NEMAX),RNI(6),LI(3),P(ILC)
DIMENSION XORD(MAXNP),YORD(MAXNP),ZORD(MAXNP),CON(MAXNP,3)
INTEGER FC(NEMAX,6),EIXO(NEMAX,6)
REAL*8 NI
IILARG=2*ILARG

```

```

OPEN(UNIT=29,STATUS='OLD',FILE='AR00',ACCESS='DIRECT',
1FORM='UNFORMATTED',RECL=600)

```

```

OPEN(UNIT=30,ACCESS='SEQUENTIAL',FILE='CARGA',STATUS='OLD',
1FORM='UNFORMATTED',RECL=ILC)

```

```

OPEN(UNIT=32,ACCESS='DIRECT',FORM='UNFORMATTED',STATUS='NEW',
1FILE='ARQ1',RECL=IILARG)

```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

NNOS=NUMERO DE NOS DO ELEMENTO

NVARN=NUMERO DE VARIAVEIS POR NO DO ELEMENTO

NDIM=NUMERO DE POSICOES NA MEMORIA CENTRAL,DISPONIVEIS PARA ALOJAR
OS COEFICIENTES DE CADA UM DOS BLOCOS DE EQUACOES

```

DATA NVARN,NNOS/3,8/
READ(30)(P(IF),IF=1,ILC)

```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

NPBL=NUMERO DE PONTOS NODAIS DA ESTRUTURA CORRESPONDENTE A CADA
BLOCO

NEQBL=NUMERO DE EQUACOES QUE CADA BLOCO PODERA COMPORTAR

NB=NUMERO DE BLOCOS

NEQS=NUMERO 'EFETIVO' DE EQUACOES DE CADA BLOCO QUE ESTA
SENDO FORMADO

```

READ(10)NUMEL,NUMNP,NUMBC,MMAT,NLOAD,NELBO,ISKEM
READ(11)REN,RNI,RHO
DO 20 J=1,8
READ(12)(NP(I,J),I=1,NEMAX)
READ(13)MAT,ITPEL,KARGA,NFA
READ(20)ICONH
READ(21)IBNDW,NEQBC,NEQ
READ(23)NESC

```

20

```

MM=IBNDW
NEQSL=NDIM/MM
NPBL=NEQBL/NVARN

```

```
MM1=MM+1
MM2=MM+MM
MM3=NVARN*MM
NB=1+(NUMNP-1)/NPBL
DO 40 I=1,NB
NEB(I)=0
OO 40 N=1,LIB
40 NE(N,I)=0
DO 140 N=1,NUMEL
DO 60 I=1,NB
60 IND(I)=0
DO 140 I=1,NNOS
K=NP(N,I)
IF(K)140,140,80
80 M=1+(K-1)/NPBL
IF(IND(M))140,100,140
100 NEB(M)=NEB(M)+1
L=NEB(M)
IF(L-LIB)120,120,860
120 NE(L,M)=N
IND(M)=1
140 CONTINUE
NENT=0
DO 820 M=1,NB
LL=NEB(M)
DO 160 NA=1,LJB
160 NEL(NA)=NE(NA,M)
```

C
C
C
C
C

N1=NUMERO DO PRIMEIRO PONTO NODAL DE CADA BLOCO

C
C
C
C
C
C

$N1=1+(N-1)*NPBL$

N2=NUMERO DO ULTIMO PONTO NODAL DE CADA BLOCO

180
200
C
C
C

```
N2=N1+NPBL-1
IF(N2-NUMNP)200,200,180
N2=NUMNP
NPTB=N2-N1+1
NEQB=NVARN*NPTB
```

C
C
C
C

NE1=NUMERO DA PRIMEIRA EQUACAO DE CADA BLOCO

C
C
C
C
C

$NE1=NVARN*(N1-1)+1$

NE2=NUMERO DA ULTIMA EQUACAO DE CADA BLOCO

220

```
NE2=NVARN*N2
N=MM*NEQB
DO 220 I=1,N
S(I)=0.
```

```

DO 480 NV=1,LL
N=NEL(NV)
NR=2*ITPEL(N)-1
READ(29'NR)(RECUP(IN),IN=1,300)

```

C
C
C
C
C

RECUPERACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ SE(24,24)

```

IJ=0
DO 280 I=1,24
DO 280 J=1,24
IF(I-J)240,240,260
240 IJ=IJ+1
SE(I,J)=RECUP(IJ)
GO TO 280
260 SE(I,J)=SE(J,I)
280 CONTINUE
MW=MAT(N)
NI=RNI(MW)
NAUX=N

```

```

DO 480 J=1,8
L=NP(N,J)
IF(L-N1)480,300,300
300 IF(L-N2)320,320,480

```

C
C
C
C
C
C

NC=NUMERO DA COLUNA DO SISTEMA GERAL DE EQUACOES QUE SERVE DE
BASE PARA O ENDEECAMENTO DOS COEFICIENTES DA MATRIZ DE RIGIDEZ

```

320 NC=NM3*(L-N1)+1
JJ=NVARN*(J-1)+1
DO 400 I=1,MMDS
K=NP(N,I)
IF(K)460,460,340
340 IF(K-L)360,360,460
360 LI(1)=NC+NVARN*(L-K)
DO 380 IJ=2,NVARN
380 LI(IJ)=LI(1)+(IJ-1)*NM
II=NVARN*(I-1)+1
DO 400 IJ=1,NVARN
DO 400 IK=1,IJ
LI=LI(IJ)+IK-1
IJK=II+IJ-1K
JJT=JJ+IJ-1
400 S(L1)=S(L1)+SE(IJK,JJI)
IF(K-L)420,460,460
420 NVZ=NVARN-1
NVAR1=NVARN
DO 440 IJ=1,NVZ
NVAR1=NVAR1-1
DO 440 IK=1,IJ
LI=LI(NVAR1)-IK
INK=II+NVAR1+IK-1
JNK=JJ+NVAR1-1
440 S(L1)=S(L1)+SE(INK,JNK)

```

```

460 CONTINUE
480 CONTINUE
DO 700 I=1,NEQB
N=NE9C(I)
NC=N-NE1+1
IF(NC)520,620,500
500 IF(NC-NE0B)520,520,620
520 L=MM*(NC-1)+1
IF(ICONH(N))540,540,560

```

C
C
C
C
C

VARIAVEL CORRESPONDENTE A BORDA E NULA

```

540 S(L)=1.
GO TO 580

```

C
C
C
C
C

VARIAVEL CORRESPONDENTE A BORDA NAO E NULA

```

560 S(L)=S(L)*10.**18
CONHE(N)=S(L)
GO TO 780

```

C
C
C
C
C

ZERAR TODOS OS DEMAIS ELEMENTOS DA COLUNA DE S(L)

```

580 DO 600 IW=2,MM
L=L+1
600 S(L)=0.
620 IF(ICONH(N))640,640,780
640 NCMIN=NC+1
IF(NCMIN-1)660,680,680
660 NCMIN=1
680 NCMAX=NC+MM-1
IF(NCMAX-NE0B)720,720,700
700 NCMAX=NEQB
720 IF(NCMAX-NCMIN)780,740,740
740 LL=MM1*NCMIN-MM2-NC
L=LL

```

C
C
C
C
C

ZERAR OS DEMAIS ELEMENTOS DA LINHA DE S(L)

```

DO 760 J=NCMIN,NCMAX
L=L+MM1
760 S(L)=0.
780 CONTINUE
L1=1
L2=MM
DO 800 N=1,NEQB
NENT=NENT+1
WRITE(32,NENT)(S(I),I=L1,L2)
L1=L1+MM
800 L2=L2+MM

```

```

620 CONTINUE
    DO 840 I=1,NEQBC
    N=NEBC(I)
840 P(N)=P(N)*CONHE(N)
    WRITE(33)P
    GO TO 900
860 WRITE(6,880)L
880 FORMAT(3X,'HOUE GERACAO DE ENDEREÇO MAIOR DO QUE O PREVISTO',//
1,10X,'ENDEREÇO GERADO IGUAL A ',15)
900 CALL EXIT
    END

```

SOLUCD.FOR

```

C
C SOLUCAO DO GRANDE SISTEMA-PROCESSO DE GAUSS
C
C
C IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C PARAMETER ILC=2007,LIC=1004,MAXNPD=2007
C PARAMETER ILARG=525,NDIM=138600
C PARAMETER NEMAX=436,MAXBC=711,MAXPD=174,MAXEB=176,MAXNP=669
C
C DIMENSION F(ILARG),P(ILC),A(NDIM),ND(ILARG)
C DIMENSION X(ILC),NP(NEMAX,8)
C DIMENSION ALI(1),XORD(MAXNP),YORD(MAXNP),ZORD(MAXNP)
C DIMENSION ITPEL(NEMAX),CONHE(ILC),B(6,24),DEF(6),MAT(NEMAX)
C DIMENSION KARGA(NEMAX),XII(8),ETI(8),ZET(8),NFA(NEMAX)
C DIMENSION REM(6),RHO(6),RNI(6),SIGMA(6)
C IILARG=2*ILARG
C
C OPEN(UNIT=32,ACCESS='DIRECT',FILE='ARQ1',STATUS='OLD',
C IFORM='UNFORMATTED',RECL=IILARG)
C
C OPEN(UNIT=34,ACCESS='DIRECT',FILE='ARQ2',STATUS='NEW',
C IFORM='UNFORMATTED',RECL=IILARG)
C
C READ(11)REM,RNI,RHO
C READ(10)NUMEL,NUMNP,NUMBC,NMAT,NLOAD,NELBO,ISKEW
C DO 40 J=1,8
40 READ(12)(NP(I,J),I=1,NEMAX)
C READ(13)MAT,ITPEL,KARGA,NFA
C READ(33)P
C READ(18)XII,ETI,ZET,XORD,YORD,ZORD
C READ(21)IBNDW,NEQBC,NEQ
C NENT=0
C NBUFF=1
C NMMAX=ILARG
C MM=ISNDW
C NN=NEQ
C NR=NN-1
C NM=NN-MM

```

```
NN1=NN+1
MM1=MM+1
```

```
C
C
C
C
C
```

```
DIMENSAO DO VETOR X=NBUFF*MMMAX
```

```
NC=MMMAX*NBUFF/MM
NW=NC*MM
IF(NW-MMMAX)60,60,620
NREC1=(NN+NC-2)/NC-1
```

```
60
C
C
C
C
C
```

```
DECOMPOSICAO DA BANDA
```

```
DO 80 J=1,MM
ND(J)=(J*(J+1))/2
```

```
80
C
C
C
C
C
```

```
RETIRA DO DISCO O PRIMEIRO BLOCO TRIANGULAR
```

```
DO 100 N=1,MM
LC1=ND(N)-N+1
LC2=LC1+MM-1
NENT=NENT+1
READ(32,NENT)(A(I),I=LC1,LC2)
```

```
100
```

```
CONTINUE
```

```
NX=0
```

```
NTRAC=1
```

```
DO 200 N=1,MR
```

```
IF(MM-NN1+N)120,120,140
```

```
120
```

```
MR=MM
```

```
GO TO 160
```

```
140
```

```
MR=NN1-N
```

```
160
```

```
JJ=NX*MM+1
```

```
NX=NX+1
```

```
PIVOT=A(1)
```

```
X(JJ)=PIVOT
```

```
DO 180 J=2,MR
```

```
L=ND(J)
```

```
180
```

```
F(J)=A(L)
```

```
DO 200 J=2,MR
```

```
C=F(J)/PIVOT
```

```
JJ=JJ+1
```

```
X(JJ)=C
```

```
L=ND(J)
```

```
LI=ND(J-1)+1
```

```
DO 200 I=2,J
```

```
L=L-1
```

```
LI=LI-1
```

```
200
```

```
A(LI)=A(L)-C*F(I)
```

```
IF(N-NM)220,220,240
```

```
C
C
C
C
```

```
RETIRA PROXIMA COLUNA DO DISCO
```



```
C
220  NENT=NENT+1
      READ(32'NENT)(A(I),I=LC1,LC2)
240  IF(NX-NC)280,260,260
C
E
C  NC LINHAS REDUZIDAS SAO ESCRITAS NAS NBUFF TRILHAS DO DISCO
C
260  WRITE(34'NTRAC)(X(LX),LX=1,NW)
      NTRAC=NTRAC+NBUFF
      NX=0
280  CONTINUE
      JJ=NX*MM+1
      X(JJ)=A(1)
      WRITE(34'NTRAC)(X(LX),LX=1,JJ)
C
C
C  REDUCAO PROGRESSIVA DO TERMO INDEPENDENTE
C
C
      NTRAC=1
      NX=NC
      DO 400 N=1,NR
        IF(MM-MN1+N)300,320,320
300   MR=MM
        GO TO 340
320   MR=MN1-N
340   IF(NX-NC)380,360,360
360   READ(34'NTRAC)(X(LX),LX=1,NW)
        NTRAC=NTRAC+NBUFF
        NX=0
380   JJ=NX*MM+1
        NX=NX+1
        C=P(N)
        P(N)=C/X(JJ)
        L1=N+1
        L2=L1+MR-2
        DO 400 I=L1,L2
          JJ=JJ+1
400   P(I)=P(I)-C*X(JJ)
        JJ=NX*MM+1
        ALAST=X(JJ)
        ALT(1)=ALAST
        IF(NX-NC)440,420,420
420   READ(34'NTRAC)ALT(1)
440   P(NN)=P(NN)/ALT(1)
C
C
C  SUBSTITUICAO REGRESSIVA
C
C
      NTRAC=NTRAC-NBUFF
      READ(34'NTRAC)(X(LX),LX=1,NW)
      NX=NN-NREC1*NC-1
      DO 560 L=2,NN
        N=NN1-L
        IF(NN-L)460,480,480
460   MR=MM
```

```
      GO TO 500
480  MR=L
500  NX=NX-1
      IF(NX)520,540,540
520  NTRAC=NTRAC-NBUFF
      READ(34,NTRAC)(X(LX),LX=1,NW)
      NX=NC-1
540  JJ=NX*NM+1
      L1=N+1
      L2=L1+MR-2
      DO 560 I=L1,L2
          JJ=JJ+1
560  P(N)=P(N)-X(JJ)*P(I)
      NF=3*NUMNP
      IZ=0
      DO 600 N=1,NUMNP
          IX=IZ+1
          IY=IX+1
          IZ=IX+2
      WRITE(6,500)N,P(IX),P(IY),P(IZ)
580  FORMAT(///,3X,I4,3(3X,E14.7))
600  CONTINUE
      GO TO 660
620  WRITE(6,640)
640  FORMAT(///,10X,'ENDERECO PARA X MAIOR QUE PREVISTO')
660  WRITE(35)P
      CALL EXIT
      END
```

DEFORTEN.FOR

```
C
C   CALCULO DAS TENSOES E DEFORMACOES NOS ELEMENTOS
C
      PARAMETER NEMAX=436,ILC=2007,MAXNP=669
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      REAL*8 JA(3,3)

      DIMENSION BN(6,24),NP(NEMAX,8),P(ILC),DEF(6),PNEW(ILC),SIGMA(6)
      DIMENSION BE(3,8),XORD(MAXNP),YORD(MAXNP),ZORD(MAXNP),DE(6,6)
      DIMENSION AU(3,8),REN(4),RNI(4),RHO(6),MAT(NEMAX),XII(8)
      DIMENSION ETI(8),ZET(8),ITPEL(NEMAX),KARGA(NEMAX),NFA(NEMAX)
      DIMENSION A(4),X(3),XI(3),TEN(3,3),V(3,3)

      READ(11)REN,RNI,RHO
      READ(10)NUMEL,NUMNP,NUMBC,NMAT,NLOAD,NELBO,ISKEW
      DO 20 J=1,8
20    READ(12)(NP(I,J),J=1,NEMAX)
      READ(13)MAT,ITPEL,KARGA,NFA
      READ(35)P
      READ(18)XII,ETI,ZET,XORD,YORD,ZORD

      DO 40 I=1,3
      DO 40 J=1,8
```

```
40  AU(I,J)=0.
    AU(1,1)=-0.5
    AU(1,2)=0.5
    AU(2,1)=-0.5
    AU(2,4)=0.5
    AU(3,1)=-0.5
    AU(3,5)=0.5
    DO 300 II=1,NUMEL
    WRITE(6,5000)II
    MW=MAT(II)
    TNI=RNI(MW)
    DEN=RHO(MW)
    EM=REM(MW)
    DO 60 ID=1,6
    DO 60 JD=1,6
60  DE(ID,JD)=0.
    CONST1=(1.+TNI)*(1.-2.*TNI)
    CONST=EM/CONST1
    DE(1,1)=(1.-TNI)*CONST
    DE(1,2)=TNI*CONST
    DE(1,3)=DE(1,2)
    DE(2,1)=DE(1,2)
    DE(2,2)=DE(1,1)
    DE(2,3)=DE(1,2)
    DE(3,1)=DE(1,3)
    DE(3,2)=DE(2,3)
    DE(3,3)=DE(1,1)
    RNU1=(1.-2.*TNI)
    RNU=RNU1/2.
    DE(4,4)=RNU*CONST
    DE(5,5)=DE(4,4)
    DE(6,6)=DE(4,4)
    DO 80 I=1,3
    DO 80 J=1,3
80  TEN(I,J)=0.
    JA(I,J)=0.
    DO 100 IR=1,6
100  SIGMA(IR)=0.
    DEF(IR)=0.
    K=NP(II,1)
    L=NP(II,2)
    M=NP(II,4)
    N=NP(II,5)
    JA(1,1)=-0.5*XORD(K)+0.5*XORD(L)
    JA(1,2)=-0.5*YORD(K)+0.5*YORD(L)
    JA(1,3)=-0.5*ZORD(K)+0.5*ZORD(L)
    JA(2,1)=-0.5*XORD(K)+0.5*XORD(M)
    JA(2,2)=-0.5*YORD(K)+0.5*YORD(M)
    JA(2,3)=-0.5*ZORD(K)+0.5*ZORD(M)
    JA(3,1)=-0.5*XORD(K)+0.5*XORD(N)
    JA(3,2)=-0.5*YORD(K)+0.5*YORD(N)
    JA(3,3)=-0.5*ZORD(K)+0.5*ZORD(N)
C
    CALL GJRIS(JA)
C
    DO 120 IX=1,3
    DO 120 JJ=1,3
120  BE(IX, JJ)=0.
```

```
DO 140 IB=1,3
DO 140 JB=1,8
DO 140 KB=1,3
140 DE(IB,JB)=BE(IB,JB)+JA(IB,KB)*AU(KB,JB)
DO 160 IN=1,6
DO 160 JN=1,24
160 BN(IN,JN)=0.
DO 180 IM=1,8
BN(1,IM)=BE(1,IM)
IM1=IM+8
IM2=IM+16
BN(2,IM1)=BE(2,IM)
BN(3,IM2)=BE(3,IM)
BN(4,IM)=BE(2,IM)
BN(5,IM1)=BE(3,IM)
BN(6,IM)=BE(3,IM)
BN(4,IM1)=BE(1,IM)
BN(5,IM2)=BE(2,IM)
180 BN(6,IM2)=BE(1,IM)
DO 200 KP=1,24
200 PNEW(KP)=0.
DO 220 JL=1,8
K=NP(II,JL)
KK=3*K-2
PNEW(JL)=P(KK)
PNEW(JL+8)=P(KK+1)
220 PNEW(JL+16)=P(KK+2)
DO 240 IC=1,6
DO 240 JC=1,24
240 DEF(IC)=DEF(IC)+BN(IC,JC)*PNEW(JC)
WRITE(6,5020)
```

```
WRITE(6,5040)(DEF(KL),KL=1,6)
```

```
DO 260 IY=1,6
DO 260 JY=1,6
260 SIGMA(IY)=SIGMA(IY)+DE(IY,JY)*DEF(JY)
WRITE(6,5060) II
```

```
WRITE(6,5080)
```

```
WRITE(6,5100)(SIGMA(KK),KK=1,6)
```

C
C
C
C
C

```
CALCULO DAS TENSOES E DIRECOES PRINCIPAIS
```

```
SIGX=SIGMA(1)
SIGY=SIGMA(2)
SIGZ=SIGMA(3)
TALXY=SIGMA(4)
TALYZ=SIGMA(5)
TALXZ=SIGMA(6)
TAQXY=TALXY**2
TAQYZ=TALYZ**2
TAQXZ=TALXZ**2
A(1)=1.
A(2)=- SIGX-SIGY-SIGZ
```

```
A(3)=-TAQXY-TAQYZ-TAQXZ+(SIGX*SIGZ)+(SIGY*SIGZ)+(SIGX*SIGY)
AUX=(TAQXZ*SIGY)+(TAQYZ*SIGX)+(TAQXY*SIGZ)
A(4)=- (SIGX*SIGY*SIGZ)-(2*TALXY*TALYZ*TALXZ)+AUX
TEN(1,1)=SIGX
TEN(1,2)=TALXY
TEN(1,3)=TALXZ
TEN(2,1)=TEN(1,2)
TEN(2,2)=SIGY
TEN(2,3)=TALYZ
TEN(3,1)=TEN(1,3)
TEN(3,2)=TEN(2,3)
TEN(3,3)=SIGZ
N=3

C
CALL JACOBID(TEN,V,N,ITR)

C
WRITE(6,5120)
DO 280 IM=1,3
280 WRITE(6,5140)TEN(IM,IM),(V(IL,IM),IL=1,3)
300 CONTINUE
CALL EXIT

5000 FORMAT(///// ,10X,'CALCULO DAS DEFORMACOES NO ELEMENTO N.',I3,/)
5020 FORMAT(/ ,4X,'EPSILON XX',5X,'EPSILON YY',6X,'EPSILON ZZ',6X,
i'GAMA XY',9X,'GAMA YZ',9X,'GAMA XZ',/)
5040 FORMAT(6(2X,E14.7))
5060 FORMAT(/// ,10X,'CALCULOS DAS TENSOES NO ELEMENTO N.',I3,/)
5080 FORMAT(4X,'SIGMA X',9X,'SIGMA Y',9X,'SIGMA Z',9X,'TAL XY',10X,
i'TAL YZ',10X,'TAL XZ',/)
5100 FORMAT(6(2X,E14.7))
5120 FORMAT(///// ,5X,'TENSOES PRINCIPAIS',10X,'DIRECOES PRINCIPAIS')
5140 FORMAT(/ ,8X,E14.7,5X,3(3X,E14.7))
END
```

JACOBID.SUB

```
SUBROUTINE JACOBID(A,V,N,ITR)

C
C
C CALCULA TODOS OS AUTO-VALORES E CORRESPONDENTES AUTO-VETORES
C DE UMA MATRIZ SIMETRICA PELO METODO DE JACOBI, ONDE EPS E'
C O MAXIMO VALOR ABSOLUTO DE UM ELEMENTO FORA DA DIAGONAL
C
C
PARAMETER NMAX=3, EPS=0.100D-15
LOGICAL FLAG
INTEGER I,J,N,P,Q,ITR
REAL*8 VIP,VIQ,R,APP,AQQ,COSA,SINA,AUX
REAL*8 A(3,3),V(3,3)

C
C
C INICIALIZACAO DAS VARIAVEIS
C
```

```
ITR=0
DO 20 IW=1,N
DO 20 JW=1,N
20 V(IW,JW)=0.0
DO 40 I=1,N
40 V(I,I)=1.0
60 FLAG=.FALSE.
DO 240 P=1,(N-1)
DO 240 Q=(P+1),N
IF (ABS(A(P,Q)).LE.EPS) GO TO 240
FLAG=.TRUE.
R=(A(Q,Q)-A(P,P))/A(P,Q)/2.0
AUX=1.0
IF (R.EQ.0.0) GO TO 80
AUX=1.0/(R+DSIGN(DSQRT(1.0+R*R),R))
80 COSA=1.0/DSQRT(1.0+AUX*AUX)
SINA=COSA*AUX
```

C
C
C
C
C

ROTACAO PARA ANULAR ELEMENTO A(P,Q)

```
APP=A(P,P)
AQQ=A(Q,Q)
AUX=2*COSA*SINA*A(P,Q)
A(P,Q)=0.0
A(P,P)=COSA*COSA*APP-AUX+SINA*SINA*AQQ
A(Q,Q)=SINA*SINA*APP+AUX+COSA*COSA*AQQ
IF (P.LT.2) GO TO 120
DO 100 J=1,(P-1)
AUX=COSA*A(J,P)-SINA*A(J,Q)
A(J,Q)=SINA*A(J,P)+COSA*A(J,Q)
100 A(J,P)=AUX
120 IF (Q.LT.(P+2)) GO TO 160
DO 140 J=(P+1),(Q-1)
AUX=COSA*A(P,J)-SINA*A(J,Q)
A(J,Q)=SINA*A(P,J)+COSA*A(J,Q)
140 A(P,J)=AUX
160 IF (N.LT.(Q+1)) GO TO 200
DO 180 J=(Q+1),N
AUX=COSA*A(P,J)-SINA*A(Q,J)
A(Q,J)=SINA*A(P,J)+COSA*A(Q,J)
180 A(P,J)=AUX
200 ITR=ITR+1
```

C
C
C
C
C

APROXIMACAO DOS AUTO-VETORES

```
DO 220 I=1,N
VIP=V(I,P)
VIO=V(I,Q)
V(I,P)=VIP*COSA-VIO*SINA
220 V(I,Q)=VIP*SINA+VIO*COSA
240 CONTINUE
IF (FLAG) GO TO 60
RETURN
END
```