

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
DE CONTORNO PARA FLEXÃO DE PLACAS E SUAS
APLICAÇÕES EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

JOÃO BATISTA DE PAIVA

ORIENTADOR: PROF. DR. WILSON SERGIO VENTURINI

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

"FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
DE CONTORNO PARA FLEXÃO DE PLACAS E SUAS
APLICAÇÕES EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS"

JOÃO BATISTA DE PAIVA

COMISSAO EXAMINADORA:

PROF.DR. WILSON SERGIO VENTURINI (ORIENTADOR)

PROF.DR. WEBE JOÃO MANSUR (COPPE/UFRJ)

PROF.DR. ROBERTO K. NAKAGUMA (IPT/SP)

PROF.DR. MITSUO TSUTSUMI (EESC/USP)

PROF.DR. JOSÉ ELIAS LAIER (EESC/USP)

SÃO CARLOS
NOVEMBRO, 1987

À Stela,
minha esposa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

Ao Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini, pela orientação dada no decorrer deste trabalho.

Ao Centro de Processamento de dados da escola de Engenharia de São Carlos, pela utilização de seus equipamentos.

À Sra. Wilma P. Vall e Silvana Flores, pela datilografia. Ao Sr. João Paulo Moretti e Sylvia Helena M. Villani, pelos desenhos.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho é dedicado à formulação do método dos elementos de contorno à resolução de problemas de flexão de placas e às suas aplicações na análise de problemas práticos de engenharia. O algoritmo numérico desenvolvido possibilita a modelagem de interações de placas com outros elementos estruturais, tais como vigas e pilares, permitindo assim a análise de estruturas de edifícios.

Inicialmente a obtenção da representação integral dos deslocamentos em placas é obtida considerando as aproximações de Kirchhoff. Após a montagem do sistema algébrico de equações, obtido com a discretização do contorno das placas, soluções numéricas para diversos casos de carregamento, condições de contorno, discretização e posição do nó singular são estudadas para verificar o desempenho do programa elaborado.

A extensão do método dos elementos de contorno, para a análise de estruturas formadas por placas, vigas e pilares, é também mostrada. Os elementos de vigas e pilares são equacionados pelo método dos deslocamentos, sendo as respectivas relações, juntamente com as condições de equilíbrio e compatibilidade de deslocamento, introduzidas no sistema de equações do método dos elementos de contorno.

Finalmente são feitas aplicações usando o algoritmo numérico desenvolvido para mostrar como o programa funciona em casos práticos. Os exemplos resolvidos mostram a eficiência da formulação proposta para modelar estruturas mais complexas.

ABSTRACT

This work is concerned with the formulation of the boundary element method for plate bending problems and its applications for practical engineering analysis. The numerical algorithm developed includes cases of modelling single plates and also interactions of plates with other structural elements such as beams and columns in order to allow analysis of building structures.

Initially the derivation of the plate integral displacement representation is shown within the context of Kirchhoff theory. After showing the algebraic system of equations obtained by discretizing the plate boundary, numerical solutions of plates including many cases of domain loads, boundary conditions, discretizations and position of singular nodes are studied in order to verify the algorithm performance.

The extension of the boundary element method to model composed structures formed by plates, columns and beams is proposed. Beam and column element influences are represented by usual stiffness method relations, now introduced into the boundary element system, which together with equilibrium and displacement compatibility conditions, give the final set of equations.

Finally practical analysis of plates problems are carried out using the numerical algorithm developed in order to show how the code works for engineering analysis. The examples pointed out the efficiency of the boundary formulation to model more complex structures.

Í N D I C E

I. INTRODUÇÃO	1
II. FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS	7
2.1 - Introdução	7
2.2 - Hipóteses Básicas	8
2.3 - Relações Básicas para Placas Isótropas	8
2.4 - Equações de Placas em Coordenadas Polares ...	18
2.5 - Solução Fundamental de Placas	25
III. EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS	33
3.1 - Introdução	33
3.2 - Equação Integral de um ponto do Domínio da Placa	33
3.3 - Equação Integral de um ponto do Contorno	43
3.4 - Transformações das Integrais de Domínio ...	63
IV. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	66
4.1 - Introdução	66
4.2 - Tipos de Elementos de Contorno	67
4.3 - Sistema de Equações Lineares: Método Usual ..	70
4.4 - Condições de Contorno	73
4.5 - Equações Matriciais para os Elementos Cons- tante e Linear	74
4.5.1 - Elemento constante	74
4.5.2 - Elemento linear	78
4.6 - Sistema de Equações Lineares: Formulação Alternativa	86

4.7 - Montagem das Matrizes [H] e [G]	89
4.7.1 - Integrais numéricas e singulares ..	89
4.7.2 - Propriedades da matriz [H]	91
4.8 - Condições de Contorno Adicionais nos Cantos de Placa	92
4.9 - Avaliação Numérica da Formulação Proposta .	95
4.9.1 - Análise de placas utilizando-se as equações integrais de w e $\partial w/\partial m$...	96
4.9.1.1 - Exemplo 1: Placa quadrada uniformemente carregada .	96
4.9.1.2 - Exemplo 2: Placa quadrada com carregamento distri- buído linearmente	102
4.9.1.3 - Exemplo 3: Placa quadrada parcialmente carregada ..	112
4.9.1.4 - Exemplo 4: Placa quadrada apoiada nos quatro cantos .	116
4.9.1.5 - Exemplo 5: Placa quadrada com carregamento distri- buído ao longo de uma linha	118
4.9.1.6 - Exemplo 6: Placa triangu- lar equilátera	121
4.9.1.7 - Exemplo 7: Placa trapezoi- dal	127
4.9.2 - Análise de placas utilizando apenas a equação integral do deslocamento.	128
4.9.2.1 - Exemplo 8: Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada	129
4.9.2.2 - Exemplo 9: Placa retangu- lar engastada em um lado e livre nos outros três .	131
4.9.2.3 - Exemplo 10: Placa esconsa	133

V. PLACAS COM CONDIÇÕES DE VINCULAÇÃO EM SEU DOMÍNIO ..	139
5.1 - Introdução	139
5.2 - Equações Integrais para Placa com condições de vinculação em seu domínio	140
5.3 - Associação de Placa com uma Estrutura qual quer	144
5.4 - Associação Placa-Pilar	146
5.5 - Associação Placa-Grelha	154
5.6 - Avaliação das Formulações Propostas para Análise da Associação da Placa com outros elementos estruturais	157
5.6.1 - Exemplo 1: Placa quadrada apoiada no contorno e em pontos de seu domínio.	158
5.6.2 - Exemplo 2: Placa quadrada com apoio contínuo	163
5.6.3 - Exemplo 3: Placa quadrada apoiada em vigas elásticas	164
5.6.4 - Exemplo 4: Análise do piso de um e- difício	170
VI. CONCLUSÕES	176
VII. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	179
VIII. BIBLIOGRAFIA	185

CAPÍTULO I

I. INTRODUÇÃO

O método dos elementos de contorno teve seu desenvolvimento depois que os chamados métodos de domínio, diferenças finitas e elementos finitos, já tinham suas formulações consolidadas e com vasto campo de aplicações. Ao contrário dos métodos de domínio, que têm incógnitas em pontos do domínio e do contorno, o método dos elementos de contorno têm incógnitas apenas em pontos do contorno. Suas principais características, mostradas desde as primeiras formulações, são: a redução das aproximações envolvidas em qualquer análise numérica, a diminuição da ordem dos sistemas de equações lineares a serem resolvidos e a redução e simplificação dos dados de entrada. Todas essas características são basicamente decorrentes da diminuição da dimensão do problema. Por exemplo, num problema tridimensional, a análise recairá no estudo de sua superfície.

A primeira das formulações dos chamados métodos de contorno foi proposta por KUPRADZE [1] que utilizou a técnica indireta para o equacionamento de problemas de elastostática. A partir dessa técnica, RIZZO [2] formulou o chamado método das equações integrais de contorno em sua forma direta - BIEM. A partir dessa, outras formulações, dentro do campo da elastostática, foram elaboradas, dentre as quais podem-se destacar: CRUZE [3,4,5], WATSON [6,7], LACHAT [8], e outros.

A denominação "Método dos Elementos de Contor-

no" é sugerida apenas a partir de 1978, juntamente com novas bases matemáticas [9]. A partir da técnica dos resíduos ponderados, obteve-se uma maior generalização da formulação, sendo permitida sua associação com outras técnicas numéricas. As pesquisas intensificaram-se e considerável progresso foi obtido na elaboração de novas formulações com aplicações no campo da engenharia. Destacam-se aqui as formulações, ainda no campo da elasticidade linear, que utilizam soluções fundamentais próprias para a consideração de superfície livre, que são muito versáteis na solução de problemas que envolvem análise de tensões próximas a uma borda livre [10,11]. Diversas formulações não lineares, de grande interesse para a solução de problemas em engenharia, foram desenvolvidas. Em particular, para meios contínuos planos, formulações que levam em conta comportamentos plástico, viscoelástico, viscoplástico e outros já foram objeto de estudo de vários pesquisadores [12,13, 14, 15]. Nesse campo, VENTURINI [16,17,18,19] deu sua colaboração com a formulação de algoritmos para a simulação de materiais não resistentes à tração e descontinuidade. Uma monografia com outros estudos [20] mostra, também, de maneira resumida, a evolução do método até o momento.

O descrito acima relata apenas o progresso do método quanto à análise de meios contínuos tri e bidimensionais. Com relação à aplicação do método na resolução de placas, o seu desenvolvimento tem sido mais lento, com poucas formulações e respectivas aplicações conhecidas. Nesse campo de aplicação, o desenvolvimento do método tem como marco inicial o trabalho de JASWON et alii [21] que propôs a solução, via equação integral, de equação biharmônica e subsequentemente aplicando-a à solução de placas. Nessa formulação, a equação biharmônica é decomposta em duas equações harmônicas que são resolvidas por equações integrais.

Posteriormente HANSEN [22] propôs uma formulação direta para a análise de placas infinitas com furos de

contorno não carregado. Neste trabalho são utilizadas duas equações integrais, correspondentes às expressões do deslocamento transversal e de sua derivada em relação a uma direção qualquer. BEZINI [23] e STERN [24] desenvolveram a formulação direta para a análise de placas finitas com quaisquer condições de contorno. Posteriormente, BEZINI [25] propôs a substituição da segunda equação integral, que apresenta singularidades do tipo $1/r^2$, por outra obtida pela aplicação do princípio da semelhança.

A formulação indireta também é possível destacando-se, neste campo, o trabalho de WU e ALTIERO [26] no qual uma placa circular engastada no contorno, de solução conhecida, é utilizada como contorno auxiliar.

Outros trabalhos foram sendo subsequentemente desenvolvidos para a análise dos mais diversos problemas de placas, destacando-se o de BEZINI [27], que propôs uma formulação mista, envolvendo o contorno e domínio, para a análise de vibrações e o de KAMIYA et alii [28], onde o método é aplicado na análise do efeito da temperatura. TANAKA [29] e KAMIYA [30] desenvolveram ainda uma formulação para a análise de placas com grandes deslocamentos. VANDER WEEËN [31] propôs uma formulação para a análise de placas grossas, baseada na teoria de REISSNER [32]. Nesta formulação são utilizadas três equações integrais para cada nó do contorno. Placas sobre fundação elástica foram objeto de estudo de COSTA [33] que propôs, também, uma formulação para a análise da instabilidade de placas. Dentre outros autores que estudaram estes últimos problemas destacam-se BEZINI [34] que estudou a flambagem de placas com fundação elástica unilateral e KATSIKADELIS [35] que analisou placas apoiadas em fundação elástica bi-lateral. A formulação para a análise da não linearidade física foi desenvolvida por MORJARIA [36]. No que se refere à formulação para a análise de placas com condições de contorno em seu domínio, o passo inicial foi dado por BEZINI [37], sendo que as aplicações de sua formulação foram voltadas para o problema

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma formulação do método dos elementos de contorno para a resolução dos problemas usuais da engenharia e que represente uma alternativa confiável para os métodos já existentes, método dos elementos finitos e método das diferenças finitas.

Na formulação proposta, mesmo para a análise de placas isoladas, principalmente aquelas com borda livre, a facilidade com que é feita a imposição das condições de contorno, principalmente com relação à força cortante equivalente, torna o método muito mais eficiente na modelagem do contorno do que o método dos elementos finitos onde as condições de contorno relativas à força cortante equivalente e, em alguns elementos finitos, relativas ao momento fletor, não podem ser impostas.

No caso específico de placas apoiadas diretamente em pilares, denominadas lajes cogumelo, sua modelagem pelo método dos elementos finitos pode conduzir a valores irrealistas para os esforços em pontos da interface placa-pilar. Com a formulação proposta, esse problema é facilmente modelado obtendo-se os esforços anteriormente referidos com grande precisão, além de ser possível o estudo das diversas possibilidades de ligação entre a placa e os pilares. Esta ligação pode ser rígida ou flexível tanto para o deslocamento vertical quanto para as rotações da face do pilar em contacto com a placa.

Já no estudo da associação da placa com elementos de viga, embora não seja possível determinar os esforços nos pontos considerados como os de ligação entre as duas estruturas, o método permite que se obtenham ótimos resultados para outros pontos o que torna possível que, por interpolação, se obtenham bons resultados para os esforços nos pontos da interface. Se, neste estudo, pretende-se considerar vigas de rigidez infinita, os problemas acima mencionados não ocorrem e os esforços na interface são obtidos com grande precisão.

Inicialmente, o problema teórico da formulação dos elementos de contorno foi desenvolvido nos capítulos iniciais incluindo também um resumo da teoria de KIRCHHOFF [38] para placas. Após a elaboração teórica do problema, passa-se, nos capítulos finais, ao estudo numérico da formulação, mostrando-se inúmeros casos práticos de aplicação da mesma em problemas de engenharia. Assim, no Capítulo II é feita uma revisão da teoria de placas delgadas e são obtidas as expressões dos esforços em função do deslocamento w , tanto em coordenadas cartesianas como em coordenadas polares. É determinada também a solução fundamental de placas, ou seja, a função deslocamento para uma placa infinita submetida a um carregamento transversal definido pela função Delta de Dirac.

No Capítulo III, são obtidas as equações integrais de placas, correspondentes ao deslocamento transversal e sua derivada direcional, para pontos do domínio. Em seguida, são obtidas as correspondentes equações integrais para ponto de contorno. A integral de domínio correspondente à contribuição do carregamento transversal é também transformada em integral sobre seu contorno.

No Capítulo IV, as equações integrais obtidas no capítulo anterior são transformadas em equações algébricas lineares mediante a escolha de funções aproximadoras para os deslocamentos e esforços em subdomínios do contorno que são denominados elementos de contorno. Escrevendo-se as equações integrais para todos os nós associados aos elementos de contorno, obtém-se um sistema de equações lineares que, após a imposição das condições de contorno e de sua resolução, fornece os valores incógnitos do contorno em função dos quais são determinados os deslocamentos e esforços em qualquer ponto do domínio. Este sistema de equações pode ser obtido utilizando-se apenas a equação integral referente ao deslocamento, caso que exige a definição de pontos de carregamento fora do domínio da placa, ou utilizando-se duas equações integrais referentes ao deslocamento

transversal e sua derivada direcional. Nesta última formulação são definidos apenas pontos de carregamento no contorno da placa. Em seguida, são apresentados os resultados obtidos da análise de diversas placas isoladas com as formulações propostas. É feito também um estudo comparativo da eficiência das formulações anteriormente citadas.

No Capítulo V, as equações integrais obtidas no Capítulo III são modificadas para prever pontos com condições de contorno no domínio da placa. Como primeira aplicação é obtida a formulação para a análise de lajes cogumelo considerando-se a ligação elástica entre a placa e os pilares. Mediante a manipulação das constantes elásticas do pilar, pode ser simulada a ligação total ou parcialmente rígida entre os elementos estruturais. Em seguida, é obtida a formulação para a interação entre a placa e uma estrutura qualquer e sua aplicação para o caso da interação da placa com a grelha. Vários exemplos são analisados.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS

2.1 - INTRODUÇÃO

Dentre os elementos estruturais de superfície a placa é um dos mais utilizados nas estruturas usuais. Esse elemento estrutural é usualmente definido como sendo um corpo limitado por duas superfícies planas, sendo admissíveis casos de pequena curvatura. Uma de suas características é que a distância entre as duas superfícies, chamada espessura, é pequena quando comparada com as demais dimensões do corpo. O plano equidistante às duas superfícies que definem a placa é denominado superfície média da placa. O carregamento é sempre transversal ao plano médio, podendo ou não estar combinado com outro carregamento contido no plano médio.

Dependendo das propriedades do material que constitui a placa, essa pode ser: anisótropa - com propriedades diferentes em qualquer direção; ortótropa - com propriedades diferentes em duas direções ortogonais; ou isotropa - se as propriedades são iguais em todas direções. A placa, de acordo com a espessura, pode ser classificada como: muito delgada, delgada e espessa.

Neste trabalho, será considerada apenas a placa delgada e isotropa submetida a carregamento transversal e ortogonal ao plano médio e, na eventualidade da existência de um carregamento contido no plano médio, seu efeito deverá ser analisado pela teoria de estado plano de ten-

2.2 - HIPÓTESES BÁSICAS

Definindo-se o elemento estrutural como descrito no item 2.1, as seguintes hipóteses são necessárias para se escreverem as equações diferenciais básicas das placas delgadas:

- o material de que é feito a placa é elástico-linear;
- os deslocamentos transversais são pequenos quando comparados com a espessura t da placa;
- não há deformação do plano médio da placa;
- os pontos situados inicialmente em uma normal ao plano médio da placa permanecem, depois da flexão, em uma normal à sua superfície elástica, que é o plano médio deformado;
- as tensões normais na direção transversal à placa são desprezíveis.

2.3 - RELAÇÕES BÁSICAS PARA PLACAS ISÓTROPAS

Considere-se o elemento de placa da figura 2.1.a, onde estão indicados seu estado de tensão juntamente com um carregamento transversal q distribuído em sua área. As resultantes dessas componentes de tensão, figura 2.1.b, m_x , m_y , m_{xy} , q_x e q_y , são dadas, como é usual, pelas seguintes integrais sobre a altura do elemento:

$$m_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_x z dz \quad \dots (2.1.a)$$

$$m_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma_y z dz \quad \dots (2.1.b)$$

$$m_{xy} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xy} z dz \quad \dots (2.1.c)$$

$$m_{yx} = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yx} z dz \quad \dots (2.1.d)$$

$$q_x = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{xz} dz \quad \dots (2.1.e)$$

$$q_y = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{yz} dz \quad \dots (2.1.f)$$

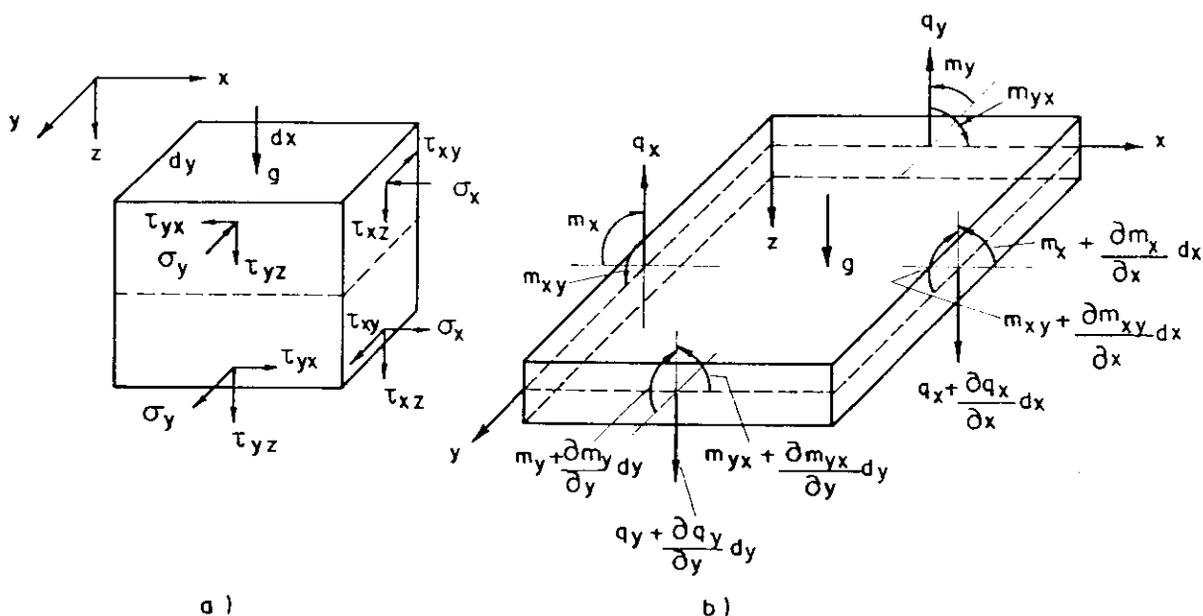


FIG. 2.1 - Tensões e esforços em um elemento de placa.

Do equilíbrio de forças verticais e de momento em torno dos eixos x e y , obtêm-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + g = 0 \quad \dots (2.2)$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - q_x = 0 \quad \dots (2.3)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = 0 \quad \dots (2.4)$$

Eliminando-se q_x e q_y nas equações (2.2), (2.3) e (2.4) e considerando-se a simetria do tensor dos momentos ($m_{xy} = m_{yx}$), obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -g \quad \dots (2.5)$$

Considerem-se agora as posições inicial e final de um elemento de placa $abcd$, paralelo ao plano médio da placa e cujos lados ab e ad são, respectivamente, paralelos aos eixos x e y , e estão situados a uma distância z do plano médio (ver figura 2.2).

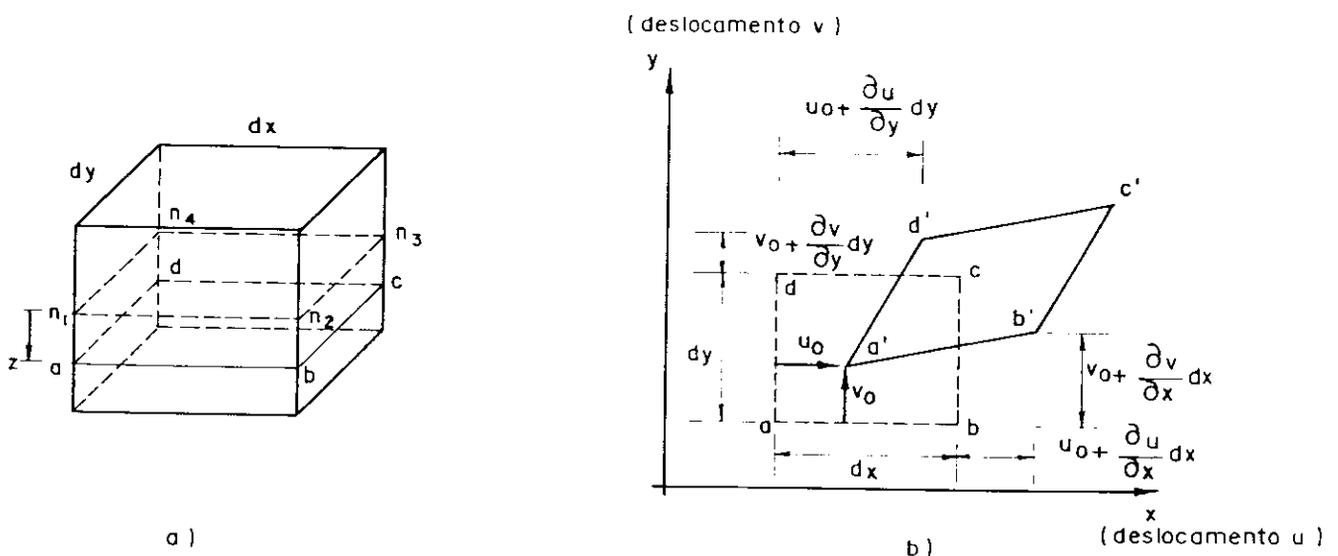


FIG. 2.2 - Posições inicial e final da lâmina de placa $abcd$.

Admitindo-se que, durante a flexão da placa, os pontos a , b , c e d sofrem pequenos deslocamentos, passando para as posições a' , b' , c' e d' , e denominando-se u_0 e v_0

as componentes de deslocamento do ponto a nas direções x e y, respectivamente, o deslocamento do ponto b na direção x é:

$$u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Assim, a variação de comprimento do lado dx, segundo x é:

$$\Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

e, portanto, a deformação relativa na direção x fica dada por:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots (2.6)$$

Pode-se, analogamente, escrever a deformação relativa na direção y:

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \dots (2.7)$$

e a variação do ângulo reto formado pelos segmentos ab e ad:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots (2.8)$$

Na figura 2.3 estão representadas as posições i inicial e final de uma secção da placa, paralela ao plano xz, passando pelos pontos a, b, n₁ e n₂ (ver figura 2.2.a).

A rotação do elemento an₁, inicialmente colocado em uma posição vertical, é igual a $\partial w / \partial x$. Assim, o deslocamento, na direção x, do ponto a situado a uma distância z da superfície média é:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \dots (2.9)$$

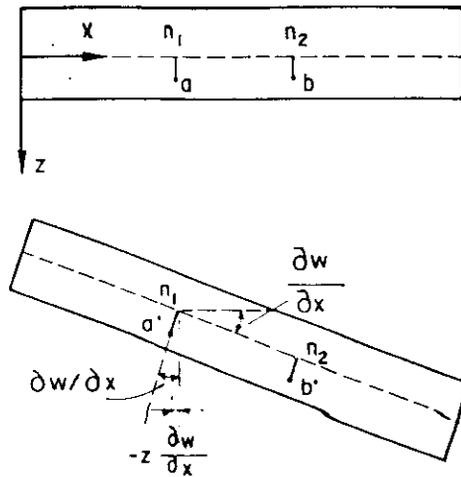


FIG. 2.3 - Posições inicial e final do elemento de placa $a b n_1 n_2$.

Analogamente, o deslocamento do ponto a na direção y é:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad \dots (2.10)$$

Substituindo-se em (2.6), (2.7) e (2.8) u e v por suas expressões, (2.9) e (2.10), encontram-se as componentes de deformação escritas em função do deslocamento transversal w ,

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \dots (2.11)$$

$$\epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \dots (2.12)$$

$$\gamma_{xy} = -2 z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \dots (2.13)$$

Conhecidas as deformações em um ponto da placa, as tensões correspondentes podem ser determinadas a partir da Lei de Hooke, dadas a seguir:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad \dots (2.14)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \quad \dots (2.15)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad \dots (2.16)$$

Onde:

E : módulo de elasticidade longitudinal;

ν : coeficiente de Poisson;

G : módulo de elasticidade transversal;

sendo:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \dots (2.17)$$

Substituindo-se, nas expressões das componentes de tensão, (2.14), (2.15) e (2.16), as componentes de deformação ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} , (2.11), (2.12) e (2.13), obtêm-se:

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z \quad \dots (2.18)$$

$$\sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z \quad \dots (2.19)$$

$$\tau_{xy} = -2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \quad \dots (2.20)$$

Substituindo-se, em (2.1.a), (2.1.b) e (2.1.c) os valores das componentes de tensão σ_x , σ_y e τ_{xy} , por suas expressões, (2.18), (2.19) e (2.20), deduz-se:

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \dots (2.21)$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \dots (2.22)$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \dots (2.23)$$

A expressão (2.5) pode ainda ser modificada in trozindo-se os valores de m_x , m_y e m_{xy} , (2.21), (2.22) e (2.23), obtendo-se a conhecida equação diferencial de placas:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad \dots (2.24)$$

Esta última equação é geralmente escrita em sua forma implícita:

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D} \quad \dots (2.25)$$

onde:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \dots (2.26)$$

Substituindo-se, em (2.3) e (2.4), as expressões de m_x , m_y e m_{xy} , (2.21), (2.22) e (2.23), obtêm-se q_x e q_y em função do deslocamento w ,

$$q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \dots (2.27)$$

$$q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \dots (2.28)$$

ou:

$$q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \quad \dots (2.29)$$

$$q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \quad \dots (2.30)$$

As componentes de momento, inicialmente referidas às direções x e y , podem agora ser reescritas em relação a um sistema genérico de coordenadas u e v . Considere-se um elemento de placa abc (fig. 2.4.a), paralelo ao plano médio e a uma distância z desse plano, com as res

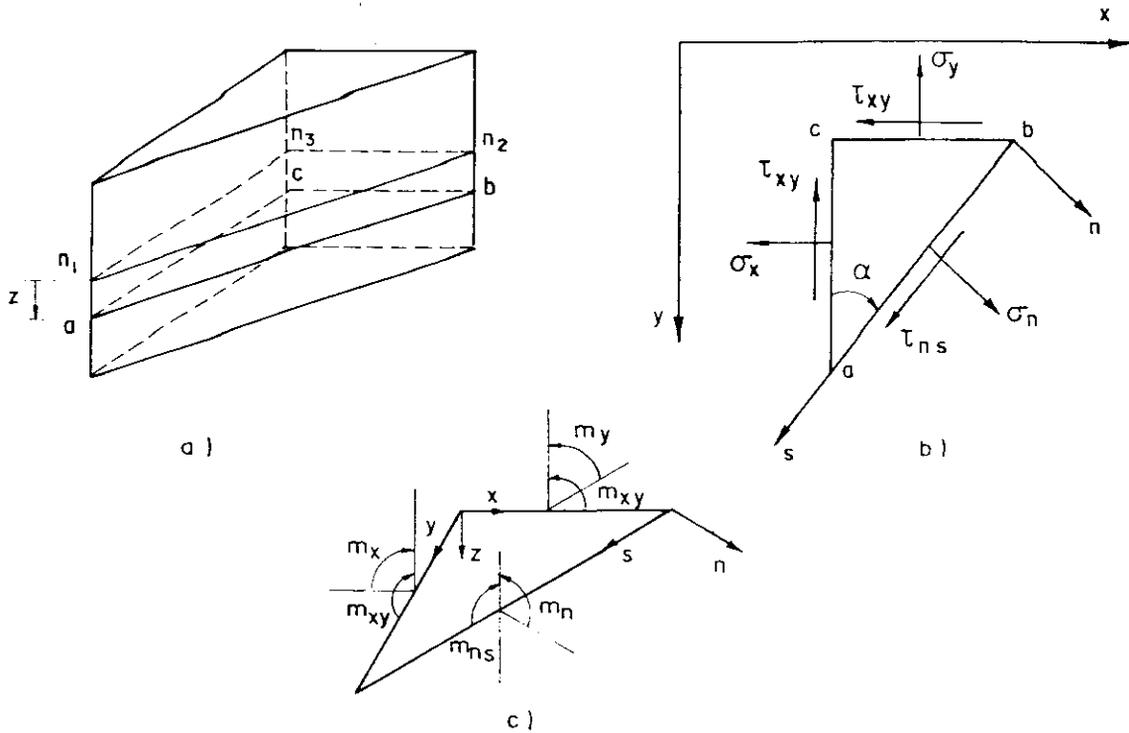


FIG. 2.4 - Componentes de tensão no elemento de placa abc e respectivos esforços resultantes.

As componentes de tensão σ_n e τ_{ns} , respectivamente tensões normal e tangencial ao lado ab (ver figura 2.4.b), estão relacionadas com as componentes de tensão σ_x , σ_y e τ_{xy} através de:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2 \tau_{xy} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{cos}\alpha \quad \dots (2.31)$$

$$\tau_{ns} = (\sigma_y - \sigma_x) \operatorname{sen}\alpha \operatorname{cos}\alpha + \tau_{xy} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \quad \dots (2.32)$$

Utilizando-se as definições dadas em (2.1), podem ser obtidos os momentos fletor e volvente referidos às direções \underline{n} e \underline{s} (ver fig. 2.4.c),

$$m_n = m_x \cos^2\alpha + m_y \sin^2\alpha + 2 m_{xy} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{cos}\alpha \quad \dots (2.33)$$

$$m_{ns} = (m_y - m_x) \operatorname{sen}\alpha \operatorname{cos}\alpha + m_{xy} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \quad \dots (2.34)$$

A componente de momento m_s pode ser obtida a partir de (2.33), considerando

$$\alpha^* = \frac{\pi}{2} + \alpha \quad \dots (2.35)$$

assim:

$$m_s = m_x \sin^2 \alpha + m_y \cos^2 \alpha - 2m_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad \dots (2.36)$$

Pode-se também estabelecer uma relação entre as cortantes q_x e q_y e a cortante q_n na direção normal ao lado ab. Considere-se o equilíbrio de forças verticais no elemento de placa da figura 2.4.a, conforme indica a figura 2.5.

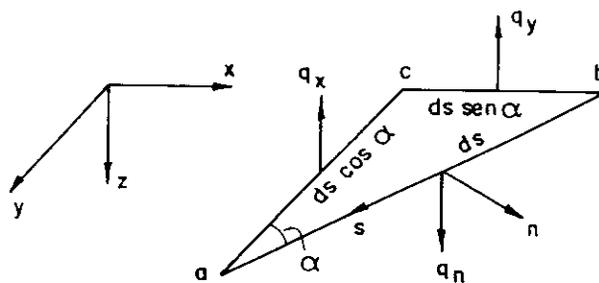


FIG. 2.5 - Forças cortantes atuantes no elemento de placa abc.

Da condição de equilíbrio de forças verticais pode-se escrever:

$$q_n ds = q_x ds \cos \alpha + q_y ds \sin \alpha$$

ou

$$q_n = q_x \cos \alpha + q_y \sin \alpha \quad \dots (2.37)$$

Procedendo-se de forma análoga ao caso do momento m_s , obtém-se:

$$q_s = -q_x \text{ sen}\alpha + q_y \text{ cos}\alpha \quad \dots (2.38)$$

Na resolução da equação diferencial de placas é necessário impor condições de contorno com relação ao deslocamento w , à sua derivada, $\partial w/\partial n$, e aos esforços m_n , m_{ns} e q_n (ver figuras 2.4.c e 2.5). KIRCHHOFF [38], entretanto, demonstrou que as condições de contorno relativas à cortante, q_n , e ao momento volvente, m_{ns} , podem ser agrupadas em uma única. Considere-se uma placa de contorno curvo para o qual se define, em um ponto genérico, P, um sistema de referência cartesiano, na direção normal e tangencial a este contorno (figura 2.6).

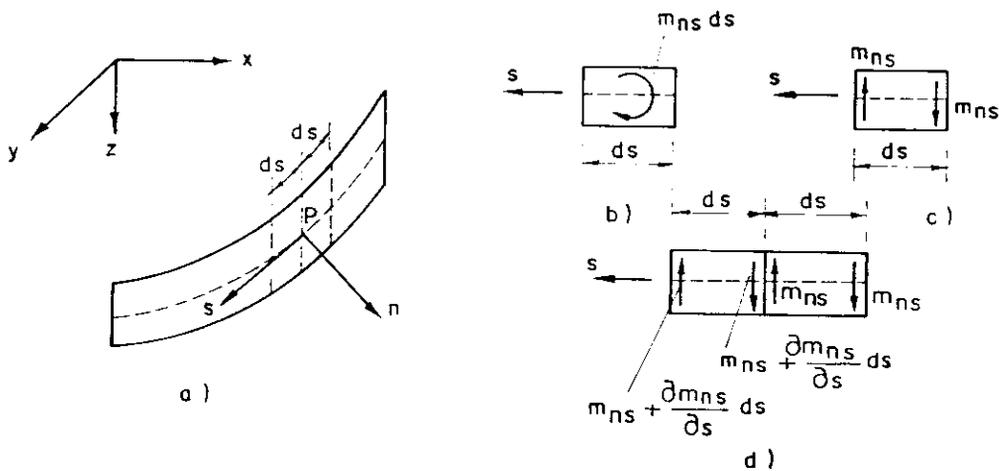


FIG. 2.6 - Momento volvente no contorno.

O momento volvente resultante em um elemento de comprimento ds do contorno vale $m_{ns} ds$ (figura 2.6.b). Esse momento pode ser interpretado como o resultante de um binário de forças de intensidade m_{ns} aplicadas nas extremidades do elemento ds (fig. 2.6.c). Na figura 2.6.d é mostrada a justaposição de dois elementos de comprimento ds e os respectivos momentos volventes interpretados como binários. A resultante das forças aplicadas na junção dos dois elementos é $(\partial m_{ns}/\partial s)ds$. Esta força, somada à resultante da força cortante, $q_n ds$, resulta em um esforço denominado cor

tante equivalente, cuja intensidade por unidade de comprimento é:

$$V_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} \quad \dots (2.39)$$

Para o caso particular de n coincidindo com x ou y , obtêm-se:

$$V_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad \dots (2.40)$$

$$V_y = q_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad \dots (2.41)$$

2.4 - EQUAÇÕES DE PLACAS EM COORDENADAS POLARES

Certos problemas de análise estrutural são mais facilmente analisados quando a equação diferencial de placas está referida a um sistema de coordenadas polares. Considerem-se os sistemas de coordenadas cartesianas e polares indicados na figura 2.7.

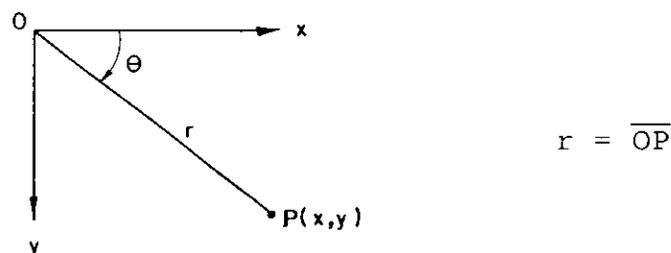


FIG. 2.7 - Sistemas de coordenadas cartesianas e polares.

O ponto P de coordenadas (x, y) pode ser definido em função de r e θ , respectivamente, distância desse ponto à origem do sistema de coordenadas e ângulo entre a primeira variável e o semi-eixo positivo de x . Assim, pode-se escrever as seguintes relações entre as coordenadas dos sistemas cartesiano e polar:

$$\begin{aligned}x &= r \cos\theta \\y &= r \operatorname{sen}\theta\end{aligned}\quad \dots (2.42)$$

Para se obter as relações entre as derivadas das coordenadas dos dois sistemas escrevem-se, inicialmente, as seguintes expressões, obtidas a partir de (2.42)

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \dots (2.43)$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \quad \dots (2.44)$$

Com as relações diretas e inversas entre os sistemas cartesianos e polar, definidos em (2.42), (2.43) e (2.44), podem-se agora obter as relações derivadas:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta \quad \dots (2.45)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta \quad \dots (2.46)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \quad \dots (2.47)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r} \quad \dots (2.48)$$

Sendo os deslocamentos transversais, w , da placa dados em função de x e y , escreve-se:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad \dots (2.49)$$

Obtém-se, analogamente:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \text{sen}\alpha \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad \dots (2.50)$$

Pode-se escrever ainda:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos\theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\text{sen}\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

que, após as derivações, fica:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \cos^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \text{sen}^2\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2 \text{sen}\theta \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad \dots (2.51)$$

Obtêm-se, analogamente:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \text{sen}^2\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \cos^2\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2 \text{sen}\theta \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad \dots (2.52)$$

e

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\text{sen}\theta \cos\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad \dots (2.53)$$

Somando-se (2.51) e (2.52), obtêm-se a expressão do operador diferencial de Laplace em coordenadas polares:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w \quad \dots (2.54)$$

ficando, portanto, a equação diferencial da placa, (2.25), em coordenadas polares, dada por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q}{D} \quad \dots (2.55)$$

Substituindo-se, em (2.21), as curvaturas por suas expressões em coordenadas polares, (2.51) e (2.52),

$$m_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) + \right. \\ \left. - 2 \sin \theta \cos \theta (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad \dots (2.56)$$

Analogamente:

$$m_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) + \right. \\ \left. + 2 \sin \theta \cos \theta (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad \dots (2.57)$$

e

$$m_{xy} = D(1-\nu) \left[\sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) - (\cos^2 \theta + \right. \\ \left. - \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad \dots (2.58)$$

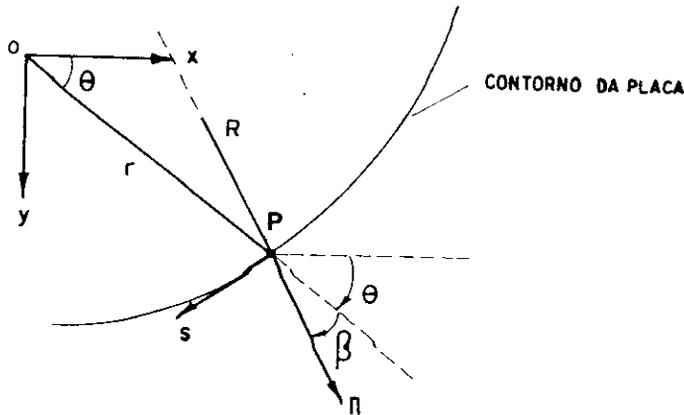
Do mesmo modo, as expressões (2.29) e (2.30), que representam as cortantes q_x e q_y , são também escritas em coordenadas polares e suas formas finais são dadas por:

$$q_x = -D \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \Delta w - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w \right] \quad \dots (2.59)$$

$$q_y = -D \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \Delta w + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w \right] \quad \dots (2.60)$$

Conhecidas as expressões, em coordenadas polares, de m_x , m_y , m_{xy} , q_x e q_y podem ser deduzidas, nesse mesmo sistema de coordenadas, as expressões de m_n , m_{ns} e V_n em um ponto P genérico do contorno, onde \underline{n} e \underline{s} são vetores normal e tangente ao contorno e de origem em P (ver figura 2.8).

Considerando-se (n,s) um sistema de coordenadas cartesianas, pode-se escrever a relação entre suas coordenadas e as do sistema (x,y):



$$\alpha = \theta + \beta$$

FIG. 2.8 - Ponto P do contorno da placa e os respectivos vetores \underline{n} e \underline{s} .

$$\begin{aligned} x &= x_p + n \cos(\theta + \beta) - s \sin(\theta + \beta) \\ y &= y_p + n \sin(\theta + \beta) + s \cos(\theta + \beta) \end{aligned} \quad \dots (2.61)$$

ou, em sua forma inversa:

$$\begin{aligned} n &= n_o + x \cos(\theta + \beta) + y \sin(\theta + \beta) \\ s &= s_o - x \sin(\theta + \beta) + y \cos(\theta + \beta) \end{aligned} \quad \dots (2.62)$$

onde (x_p, y_p) e (n_o, s_o) são, respectivamente, as coordenadas dos pontos \underline{P} e \underline{O} .

A expressão do momento fletor m_n no ponto \underline{P} fica (ver expressão 2.33):

$$m_n = m_x \cos^2(\theta + \beta) + m_y \sin^2(\theta + \beta) + 2 m_{xy} \sin(\theta + \beta) \cos(\theta + \beta) \quad \dots (2.63.a)$$

Substituindo-se, em (2.63.a), as expressões de m_x , m_y e m_{xy} em coordenadas polares, (2.56), (2.57) e (2.58), obtém-se:

$$m_n = -D \left[(\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \right.$$

Analogamente:

$$m_s = -D \left[(\text{sen}^2\beta + \nu \text{cos}^2\beta) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (\text{cos}^2\beta + \nu \text{sen}^2\beta) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2(1-\nu) \text{sen}\beta \text{cos}\beta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \dots (2.64)$$

e

$$m_{ns} = -D(1-\nu) \left[\text{sen}\beta \text{cos}\beta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + (\text{cos}^2\beta + \text{sen}^2\beta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \dots (2.65)$$

Para se escrever a expressão da força cortante equivalente, V_n , em coordenadas polares, considere-se inicialmente sua expressão, (2.39), no sistema de coordenadas cartesiano (n, s) :

$$V_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} \dots (2.39)$$

onde q_n pode ser escrita em função de q_x e q_y a partir de (2.37), como se segue:

$$q_n = q_x \text{cos}(\theta+\beta) + q_y \text{sen}(\theta+\beta) \dots (2.66)$$

Substituindo-se, em (2.66), as expressões de q_x e q_y em coordenadas polares, (2.59) e (2.60), obtém-se:

$$q_n = -D \left(\frac{\partial}{\partial r} \Delta w \text{cos}\beta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w \text{sen}\beta \right) \dots (2.67)$$

Sendo m_{ns} uma função de r , θ e β , sua derivada em relação à coordenada s é escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial m_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial m_{ns}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} \dots (2.68)$$

Na expressão acima, é necessário determinar os valores das derivadas das coordenadas do sistema polar em

relação à coordenada \underline{s} do contorno. Assim, escreve-se inicialmente:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \dots (2.69)$$

Substituindo-se, em (2.69), os valores de $\partial r/\partial x$ e $\partial r/\partial y$, (2.45) e (2.46), e de $\partial x/\partial s$ e $\partial y/\partial s$ por expressões obtidas a partir de (2.61), deduz-se:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = - \operatorname{sen} \beta \quad \dots (2.70)$$

Procedendo-se de maneira análoga, obtém-se também:

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{r} \operatorname{cos} \beta \quad \dots (2.71)$$

Sabe-se ainda que:

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{1}{R} - \frac{\operatorname{cos} \beta}{r} \quad \dots (2.72)$$

onde R é o raio de curvatura do contorno no ponto P (ver figura 2.8).

Substituindo-se, em (2.68), os valores de $\partial r/\partial s$, $\partial \theta/\partial s$ e $\partial \beta/\partial s$, conforme as expressões (2.70), (2.71) e (2.72), deduz-se:

$$\frac{\partial m_{ns}}{\partial s} = - \frac{\partial m_{ns}}{\partial r} \operatorname{sen} \beta + \frac{1}{r} \frac{\partial m_{ns}}{\partial \theta} \operatorname{cos} \beta + \left(\frac{1}{R} - \frac{\operatorname{cos} \beta}{r} \right) \frac{\partial m_{ns}}{\partial \beta} \quad (2.73)$$

Introduzindo-se, na expressão da força cortante equivalente V_n , (2.39), os valores de q_n e de $\partial m_{ns}/\partial s$ em coordenadas polares, (2.67) e (2.73), chega-se finalmente a:

$$V_n = \left(-D \frac{\partial}{\partial r} \Delta w + \frac{1}{r} \frac{\partial m_{ns}}{\partial \theta} \right) \operatorname{cos} \beta - \left(D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w + \frac{\partial m_{ns}}{\partial r} \right) \operatorname{sen} \beta +$$

$$1 - \operatorname{cos} \beta \frac{\partial m_{ns}}{\partial \beta}$$

2.5 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE PLACAS

Para qualquer trabalho que tem como base o uso de equações integrais, é sempre necessário o estudo das soluções fundamentais. Entende-se como solução fundamental a resposta em um ponto genérico p de um domínio (em geral infinito), denominado domínio fundamental, devido à aplicação de uma carga unitária em outro ponto q deste domínio. No caso particular de placas, a solução fundamental é o deslocamento transversal, w , em um ponto p qualquer, de coordenadas $[x(p), y(p)]$, denominado ponto de deslocamento devido a uma carga unitária aplicada em $[x(q), y(q)]$, denominado ponto de carregamento. Esta solução fundamental é obtida a partir da seguinte equação (ver figura 2.9):

$$\Delta \Delta w^* = \delta [x(p) - x(q), y(p) - y(q)] \quad \dots (2.75)$$

onde $\delta [x - x(q), y - y(q)]$ é a função delta de Dirac, cujas propriedades dão:

$$\delta [x(p) - x(q), y(p) - y(q)] = 0 \text{ para } x(p) \neq x(q) \text{ ou } y(p) \neq y(q) \quad (2.76)$$

$$\delta [x(p) - x(q), y(p) - y(q)] = \infty \text{ para } x(p) = x(q) \text{ e } y(p) = y(q) \quad (2.77)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta [x(p) - x(q), y(p) - y(q)] \phi(x, y) dx dy = \phi [x(q), y(q)] \quad (2.78)$$

A partir de (2.78) pode-se escrever:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta [x(p) - x(q), y(p) - y(q)] dx dy = 1 \quad (2.79)$$

ou seja, a resultante do carregamento transversal aplicado sobre o domínio fundamental é uma força unitária aplicada no ponto $[x(q), y(q)]$.

A solução fundamental de placas é obtida pela resolução da equação diferencial (2.75) para todos pontos

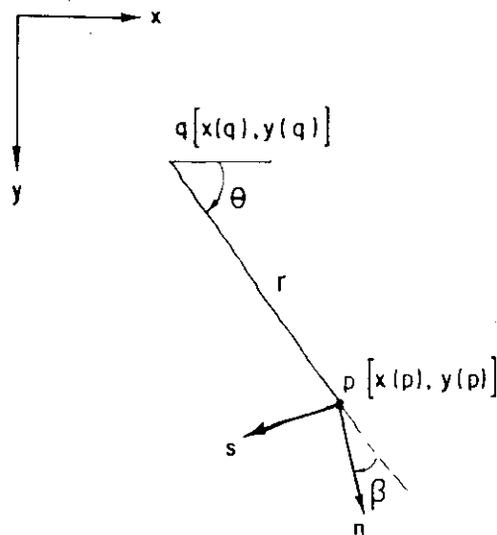


FIG. 2.9 - Pontos de carregamento (q) e de deslocamento (p).

do domínio fundamental, com exceção do ponto de carregamento $[x(q), y(q)]$. Nestas condições, a equação diferencial (2.75) fica:

$$\Delta \Delta w^* = 0 \quad \dots (2.80)$$

Considerando-se um sistema de coordenadas polares de origem em q (ver figura 2.9) e também a simetria existente, a equação (2.80) pode ser escrita na seguinte forma (ver equação 2.55):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} \right) = 0 \quad \dots (2.81)$$

onde o diferencial agora é total, pois w é função apenas de r.

Reescrevendo-se (2.81) em uma forma mais conveniente para sua solução, obtêm-se:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw^*}{dr} \right) \right] \right\} = 0 \quad \dots (2.82)$$

Por integrações sucessivas, chega-se à solução geral desta equação:

$$w^* = \frac{c_1}{4} r^2 \ln r + (c_2 - c_1) \frac{r^2}{4} + c_3 \ln r + c_4 \quad \dots (2.83)$$

Considerando-se a condição de simetria em relação ao ponto q (fig. 2.9), pode-se escrever:

$$\frac{dw^*}{dr} = 0 \quad \text{para } r = 0$$

o que leva a

$$c_3 = 0 \quad \dots (2.84)$$

A constante de integração c_1 é obtida a partir da condição de equilíbrio das forças verticais atuantes em um círculo de raio r , cujo centro é o ponto de aplicação da carga unitária (ver figura 2.10).

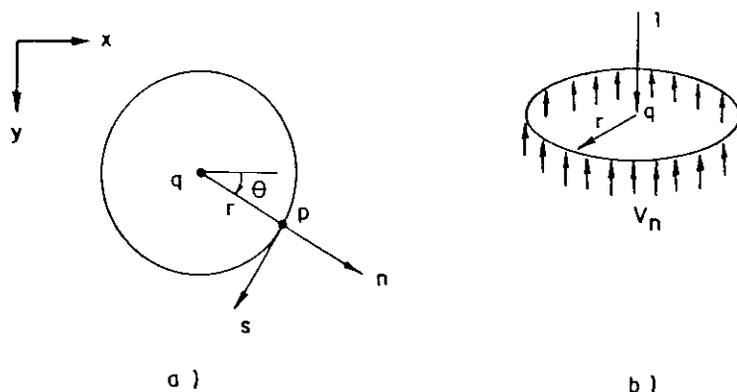


FIG. 2.10 - Forças verticais atuantes no círculo de raio r e centro $[x(q), y(q)]$.

A cortante equivalente, V_n , em um ponto p qualquer da circunferência, necessário para equilibrar a carga unitária, é:

$$V_n = - \frac{1}{2\pi r} \quad \dots (2.85)$$

A expressão de V_n é obtida a partir de (2.74),

sendo apenas função de r e $\beta = 0$ para todos os pontos da circunferência, o que resulta em:

$$V_n = -D \frac{d}{dr} \Delta w^* \quad \dots (2.86)$$

De (2.85) e (2.86), obtém-se:

$$-D \frac{d}{dr} \Delta w^* = - \frac{1}{2\pi r} \quad \dots (2.87)$$

Expressando-se o Laplaceano em coordenadas polares, deduz-se:

$$-D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} \right) = - \frac{1}{2\pi r} \quad \dots (2.88)$$

Substituindo-se em (2.88) w^* por sua expressão, (2.83), obtém-se:

$$c_1 = \frac{1}{2\pi D} \quad \dots (2.89)$$

Utilizando-se os valores de c_1 , (2.89) e c_3 , (2.84), em (2.83), chega-se a:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r + \frac{r^2}{4} \left(c_2 - \frac{1}{2\pi D} \right) + c_4 \quad \dots (2.90)$$

Para uma solução de placa qualquer, as constantes c_2 e c_4 seriam definidas a partir de condições sobre seu contorno. No caso da placa fundamental aqui analisada, de raio infinito, estes valores podem ser quaisquer. STERN [24] e BEZINI [23] adotam:

$$c_2 = \frac{1}{2\pi D} \quad e \quad c_4 = 0$$

portanto:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad \dots (2.91)$$

De acordo com DANSON [39] é válido utilizar:

$$c_2 = c_4 = 0$$

obtendo-se, para a solução fundamental, a seguinte expressão:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad \dots (2.92)$$

A partir de (2.92) obtêm-se as expressões dos deslocamentos e esforços em um ponto, p , genérico do domínio fundamental. Em particular, as componentes de momento, a derivada do deslocamento e a força cortante equivalente referidas a um sistema de coordenadas (n,s) qualquer localizado no ponto p , são obtidas a partir de (2.92), (2.63), (2.65) e (2.74) e suas expressões são (ver figura 2.9):

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r \cos \beta \quad \dots (2.93)$$

$$m_n^* = - \frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r + (1-\nu) \cos^2 \beta + \nu \right] \quad \dots (2.94)$$

$$m_{ns}^* = \frac{1-\nu}{8\pi} \sin 2\beta \quad \dots (2.95)$$

$$V_n^* = \frac{\cos \beta}{4\pi r} \left[2(1-\nu) \sin^2 \beta - 3 + \nu \right] + \frac{1-\nu}{4\pi R} \cos 2\beta \quad \dots (2.96)$$

onde:

$$r = \left\{ \left[x(p) - x(q) \right]^2 + \left[y(p) - y(q) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \dots (2.97)$$

Também têm especial interesse as derivadas dos deslocamentos e esforços fundamentais em relação à coordenada m do sistema de eixos cartesianos (m,u) de origem no ponto de deslocamento p (ver figura 2.11).

Para a avaliação dessas derivadas considere-se inicialmente a expressão da derivada de r em relação a x :

Pretende-se agora obter a expressão da derivada de V_n^* , (2.96), em relação à coordenada m (ver figura 2.11). Pode-se escrever, a partir dos sistemas de coordenadas indicados na figura 2.11, que:

$$\cos\beta = \vec{n} \cdot \vec{r} \quad \dots (2.105)$$

$$\text{sen}\beta = -\vec{s} \cdot \vec{r} \quad \dots (2.106)$$

onde \vec{r} é um versor associado ao vetor \vec{pq} .

Substituindo-se na expressão de V_n , (2.96), as expressões de $\cos\beta$ e $\text{sen}\beta$, (2.105) e (2.106), obtém-se:

$$V_n^* = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{4\pi r} \left[2(1-v)(\vec{s} \cdot \vec{r})^2 - 3 + v \right] + \frac{1-v}{4\pi R} \left[1 - 2(\vec{s} \cdot \vec{r})^2 \right] \quad \dots (2.107)$$

Chamando-se de $(n_x; n_y)$ e $(s_x; s_y)$, respectivamente, os cossenos diretores dos vetores \vec{n} e \vec{s} em relação ao sistema de coordenadas (x,y) , a expressão de V_n^* pode ser reescrita:

$$V_n^* = \frac{1}{4\pi r} (n_x r_x + n_y r_y) \left[2(1-v)(s_x r_x + s_y r_y)^2 + \right. \\ \left. - 3 + v \right] + \frac{1-v}{4\pi R} \left[1 - 2(s_x r_x + s_y r_y)^2 \right] \quad \dots (2.108)$$

A derivada de V_n^* em relação a m pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial V_n^*}{\partial m} = \frac{\partial V_n^*}{\partial x(p)} \frac{\partial x(p)}{\partial m} + \frac{\partial V_n^*}{\partial y(p)} \frac{\partial y(p)}{\partial m} \quad \dots (2.109)$$

sendo (ver figura 2.11):

$$\frac{\partial x(p)}{\partial m} = \cos\phi = m_x \quad \dots (2.110)$$

$$\frac{\partial Y(p)}{\partial m} = \text{sen}\phi = m_{,y} \quad \dots (2.111)$$

onde $m_{,x}$ e $m_{,y}$ são os cossenos diretores de \vec{m} em relação ao sistema de coordenadas (x,y) . A expressão da derivada, (2.109), fica:

$$\frac{\partial V_n^*}{\partial m} = \frac{\partial V_n^*}{\partial x(p)} m_{,x} + \frac{\partial V_n^*}{\partial y(p)} m_{,y} \quad \dots (2.112)$$

As expressões de $\partial V_n^*/\partial x(p)$ e $\partial V_n^*/\partial y(p)$ são obtidas a partir de (2.108), (2.101), (2.102), (2.103) e (2.104). Substituindo-se essas expressões em (2.112), obtêm-se a expressão final de $\partial V_n^*/\partial m$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^*}{\partial m} = & \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu) (\vec{s} \cdot \vec{r}) \left[(\vec{s} \cdot \vec{r}) (\vec{m} \cdot \vec{n}) + 2(\vec{n} \cdot \vec{r}) (\vec{m} \cdot \vec{s}) + \right. \right. \\ & \left. \left. - 4(\vec{s} \cdot \vec{r}) (\vec{m} \cdot \vec{r}) (\vec{n} \cdot \vec{r}) \right] + (3-\nu) \left[-(\vec{m} \cdot \vec{n}) + 2(\vec{m} \cdot \vec{r}) (\vec{n} \cdot \vec{r}) \right] \right\} + \\ & + \frac{1-\nu}{\pi Rr} \vec{s} \cdot \vec{r} \left[-(\vec{m} \cdot \vec{s}) + (\vec{m} \cdot \vec{r}) (\vec{s} \cdot \vec{r}) \right] \quad \dots (2.113) \end{aligned}$$

Com procedimento semelhante, obtêm-se:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{r}{4\pi D} \vec{m} \cdot \vec{r} \ln r \quad \dots (2.114)$$

$$\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \right) = \frac{1}{4\pi D} \left[(\vec{m} \cdot \vec{r}) (\vec{n} \cdot \vec{r}) + \vec{m} \cdot \vec{n} \ln r \right] \quad \dots (2.115)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_n^*}{\partial m} = & -\frac{1}{4\pi r} \left\{ (1+\nu) \vec{m} \cdot \vec{r} - 2(1-\nu) (\vec{n} \cdot \vec{r}) \left[(\vec{m} \cdot \vec{r}) (\vec{n} \cdot \vec{r}) + \right. \right. \\ & \left. \left. - (\vec{m} \cdot \vec{n}) \right] \right\} \quad \dots (2.116) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial m_{ns}}{\partial m} = \frac{1-\nu}{4\pi r} \left[2(\vec{m} \cdot \vec{r}) (\vec{n} \cdot \vec{r}) (\vec{s} \cdot \vec{r}) - (\vec{m} \cdot \vec{n}) (\vec{s} \cdot \vec{r}) - (\vec{m} \cdot \vec{s}) (\vec{n} \cdot \vec{r}) \right] \quad (2.117)$$

CAPÍTULO III

EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS

3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, com a aplicação dos teoremas de Betti e de Green e utilizando-se as equações e expressões obtidas no capítulo anterior, obtém-se uma equação integral que relaciona o deslocamento, $w(q)$, de um ponto qualquer do domínio da placa com os deslocamentos e esforços no contorno.

A equação que relaciona a derivada do deslocamento de um ponto do domínio da placa, em relação a uma coordenada m_q de um sistema cartesiano qualquer, $\partial w(q)/\partial m_q$, com os deslocamentos e esforços do contorno, também é determinada. Esta equação integral é também importante para a definição do sistema de equações algébricas que governam o método dos elementos de contorno em uma das formulações propostas neste trabalho.

3.2 - EQUAÇÃO INTEGRAL DE UM PONTO DO DOMÍNIO DA PLACA

Seja uma placa isótropa qualquer de contorno Γ e domínio Ω , submetida a um carregamento distribuído g em uma área Ω_g conforme indicado na figura 3.1.a. Esta placa está contida em uma placa infinita da qual é apenas um subdomínio, conforme indica a figura 3.1.b.

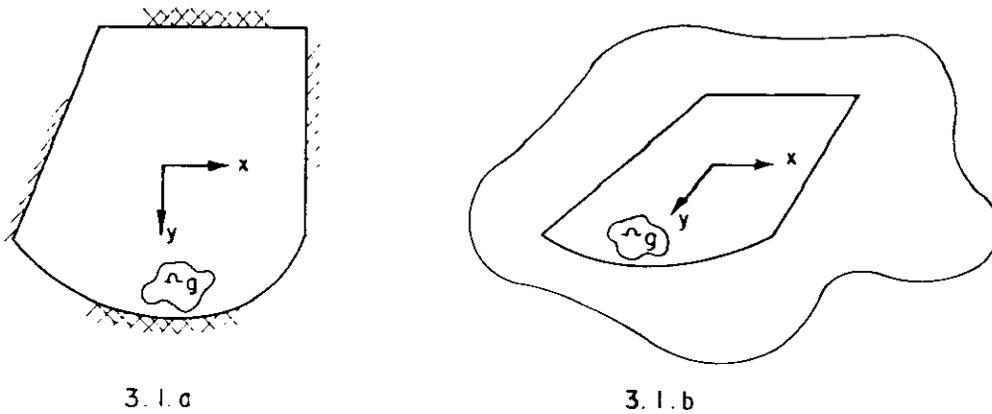


FIG. 3.1 - Placa de dimensões finitas contida em uma placa infinita.

Considerando-se a placa da figura 3.1.b submetida a dois carregamentos não simultâneos g e g^* com as superfícies elásticas a eles associadas dadas por w e w^* e sendo σ_{ij} e ϵ_{ij} as tensões e deformações associadas a g , σ_{ij}^* e ϵ_{ij}^* aquelas associadas a g^* , pode-se escrever o teorema de Betti utilizando-se a seguinte expressão:

$$\int_V \sum \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} dv = \int_V \sum \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dv \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \dots (3.1)$$

O termo da direita da expressão (3.1), denominado aqui de U , pode ser escrito, com o uso da notação clássica, na seguinte forma:

$$U = \int_V \sum \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dv = \int_V \left[\sigma_x \epsilon_x^* + \sigma_y \epsilon_y^* + \sigma_z \epsilon_z^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^* + \tau_{xz} \gamma_{xz}^* + \tau_{yz} \gamma_{yz}^* \right] dv \quad \dots (3.2)$$

Desprezando-se as tensões relativas à direção normal ao plano da placa, a expressão (3.2) pode ser reescrita:

$$U = \int_V (\sigma_x \epsilon_x^* + \sigma_y \epsilon_y^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^*) dv \quad \dots (3.3)$$

Substituindo em (3.3) σ_x , σ_y e τ_{xy} , conforme as expressões (2.18), (2.19) e (2.20); e ϵ_x^* , ϵ_y^* e γ_{xy}^* por (2.11), (2.12) e (2.13), obtêm-se:

$$U = \int_V \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 W^*}{\partial x^2} z^2 + \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 W^*}{\partial y^2} z^2 + 4G \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W^*}{\partial x \partial y} z^2 \right] dv \quad \dots (3.4)$$

Após a integração ao longo da espessura da placa, chega-se a:

$$U = \int_{\Omega} \left[D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 W^*}{\partial x^2} + D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 W^*}{\partial y^2} + 2D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W^*}{\partial x \partial y} \right] d\Omega \quad \dots (3.5)$$

De (3.5), (2.21), (2.22) e (2.23) pode-se escrever:

$$U = \int_{\Omega} \left[-m_x \frac{\partial^2 W^*}{\partial x^2} - m_y \frac{\partial^2 W^*}{\partial y^2} - 2m_{xy} \frac{\partial^2 W^*}{\partial x \partial y} \right] d\Omega \quad \dots (3.6)$$

Para obtenção das equações necessárias à formulação transforma-se agora esta integral de domínio em uma integral de contorno. Chamando-se a primeira das parcelas de (3.6) de u_1 e, considerando-se que, para duas funções diferenciáveis $f(x,y)$ e $g(x,y)$, é válida a relação dada a seguir:

$$f \frac{\partial g}{\partial x} = -g \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (fg) \quad \dots (3.7)$$

pode-se escrever:

$$u_1 = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(m_x \frac{\partial W^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial W^*}{\partial x} \frac{\partial m_x}{\partial x} \right] d\Omega \quad \dots (3.8)$$

Do teorema geral de Gauss tem-se (ver fig. 3.2):

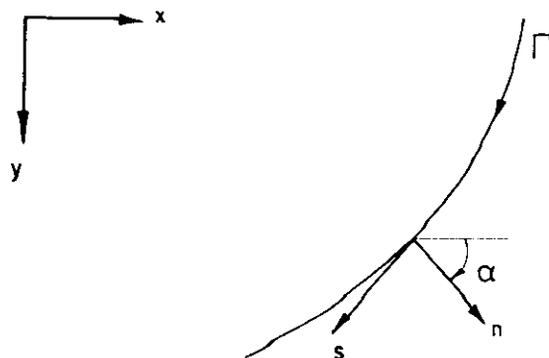


FIG. 3.2 - Sistema de coordenadas (n,s) normal e tangente ao contorno Γ .

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} N \, dx dy = \int_{\Gamma} N \cos \alpha \, d\Gamma \quad \dots (3.9.a)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} N \, dx dy = \int_{\Gamma} N \sin \alpha \, d\Gamma \quad \dots (3.9.b)$$

Aplicando-se (3.9) à primeira parcela do integrando de (3.8), obtêm-se para u_1 :

$$u_1 = - \int_{\Gamma} m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha \, d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial m_x}{\partial x} \, d\Omega \quad \dots (3.10)$$

Com o emprego da regra de derivação, definida em (3.7), à segunda parcela de (3.10), a expressão de u_1 fica:

$$u_1 = - \int_{\Gamma} m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha \, d\Gamma + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w^* \frac{\partial m_x}{\partial x} \right) - w^* \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} \right] d\Omega \quad \dots (3.11)$$

Após a aplicação do teorema de Gauss, chega-se a:

$$u_1 = \int_{\Gamma} \left(-m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + w^* \frac{\partial m_x}{\partial x} \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} w^* \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} \, d\Omega \quad (3.12)$$

Chamando-se de u_2 a segunda parcela de (3.6) e fazendo-se transformações análogas às mostradas para u_1 , deduz-se:

$$u_2 = \int_{\Gamma} \left(-m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha + w^* \frac{\partial m_y}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} w^* \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} d\Omega \quad (3.13)$$

O desenvolvimento da terceira parcela de (3.6), denominado u_3 , exige o desmembramento em duas outras parcelas assim definidas:

$$u_3 = - \int_{\Omega} m_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega - \int_{\Omega} m_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega \quad \dots (3.14)$$

As duas parcelas de (3.14) são tratadas da mesma forma que u_1 e u_2 , sendo que uma é decomposta em derivadas em relação a x , e a outra, em relação a y . Assim,

$$u_3 = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) - \frac{\partial w^*}{\partial y} \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. - \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right] d\Omega \quad \dots (3.15)$$

Utilizando-se novamente o teorema de Gauss, (3.9), deduz-se:

$$u_3 = - \int_{\Gamma} \left(m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \operatorname{coss} \alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \operatorname{sen} \alpha \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) d\Omega \quad \dots (3.16)$$

Da aplicação da regra de derivação (3.7) na integral de domínio de (3.16) e, posteriormente, do teorema de Gauss (3.9), chega-se à seguinte expressão:

$$u_3 = \int_{\Gamma} \left(-m_{XY} \frac{\partial w^*}{\partial Y} \cos \alpha - m_{XY} \frac{\partial w^*}{\partial X} \sin \alpha + w^* \frac{\partial m_{XY}}{\partial X} \sin \alpha + \right. \\ \left. + w^* \frac{\partial m_{XY}}{\partial Y} \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} 2 w^* \frac{\partial^2 m_{XY}}{\partial X \partial Y} d\Omega \quad \dots (3.17)$$

Com os valores de u_1 , u_2 e u_3 , a expressão de U , (3.6), pode agora ser reescrita na seguinte forma:

$$U = - \int_{\Gamma} \left(m_X \frac{\partial w^*}{\partial X} \cos \alpha + m_Y \frac{\partial w^*}{\partial Y} \sin \alpha + m_{XY} \frac{\partial w^*}{\partial Y} \cos \alpha + \right. \\ \left. + m_{XY} \frac{\partial w^*}{\partial X} \sin \alpha \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* \left[\cos \alpha \left(\frac{\partial m_X}{\partial X} + \frac{\partial m_{XY}}{\partial Y} \right) + \right. \\ \left. + \sin \alpha \left(\frac{\partial m_Y}{\partial Y} + \frac{\partial m_{XY}}{\partial X} \right) \right] d\Gamma - \int_{\Omega} w^* \left(\frac{\partial^2 m_X}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{XY}}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 m_Y}{\partial Y^2} \right) d\Omega \\ \dots (3.18)$$

A partir de (3.18), (2.3), (2.4), (2.5) e (2.37), pode-se escrever:

$$U = - \int_{\Gamma} \left[m_X \frac{\partial w^*}{\partial X} \cos \alpha + m_Y \frac{\partial w^*}{\partial Y} \sin \alpha + m_{XY} \frac{\partial w^*}{\partial Y} \cos \alpha + \right. \\ \left. + m_{XY} \frac{\partial w^*}{\partial X} \sin \alpha \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} w^* q_n d\Gamma + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad \dots (3.19)$$

Da relação entre os dois sistemas de coordenadas (x,y) e (n,s) , (2.61), e fazendo $\alpha = \theta + \beta$, deduz-se (ver figuras 2.8 e 3.2):

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \quad \dots (3.20)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial y} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha \quad \dots (3.21)$$

Substituindo-se, em (3.19), $\partial w^*/\partial x$ e $\partial w^*/\partial y$ por suas expressões, (3.20) e (3.21), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 U = & \int_{\Gamma} \left[m_x \cos \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \right) + m_y \sin \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha \right) + m_{xy} \cos \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha \right) + \right. \\
 & \left. + m_{xy} \sin \alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \right) \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} q_n w^* d\Gamma + \\
 & + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad \dots (3.22)
 \end{aligned}$$

Após convenientes operações, a expressão (3.22) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 U = & - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial n} (m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + 2 m_{xy} \sin \alpha \cos \alpha) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial w^*}{\partial s} \left[m_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (m_y - m_x) \sin \alpha \cos \alpha \right] \right\} d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma} q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad \dots (3.23)
 \end{aligned}$$

De (3.23), (2.33) e (2.34), obtêm-se:

$$U = - \int_{\Gamma} \left(m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - q_n w^* \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad \dots (3.24)$$

Integrando-se, por partes, o segundo termo da integral de contorno de (3.24), obtêm-se:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = (m_{ns} w^*) \left[\Gamma_2 - \Gamma_1 \right] - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad \dots (3.25)$$

onde Γ_1 e Γ_2 são as coordenadas dos extremos do contorno onde está sendo realizada a integração. Para o caso de um contorno fechado, cuja representação paramétrica e a respectiva derivada sejam contínuas, a primeira parcela de (3.25) se anula. Para o caso de contorno com angulosidades

(cantos) isto não ocorre e a expressão (3.25) pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = - \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i} w_{C_i}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad \dots (3.26)$$

onde:

$$R_{C_i} = m_{ns_i}^+ - m_{ns_i}^- \quad \dots (3.27)$$

sendo $w_{C_i}^*$, $m_{ns_i}^+$, $m_{ns_i}^-$, respectivamente, os valores do deslocamento e do momento volvente posterior e anterior ao canto i da placa, N_C o número total de cantos do contorno considerado (ver figura 3.3). R_{C_i} pode também ser interpretado como a reação de canto da placa.

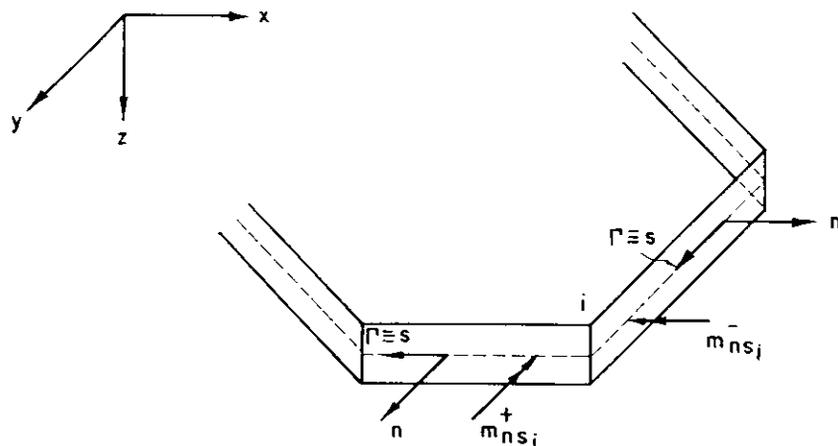


FIG. 3.3 - Canto i da placa e os momentos volventes anterior e posterior a este canto.

A partir de (3.24) e de (3.26), pode-se escrever:

$$U = \int_{\Gamma} (q_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^*) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i} w_{C_i}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad \dots (3.28)$$

De (3.28) e (2.39) obtêm-se:

$$U = \int_{\Gamma} (V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i} w_{C_i}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \dots (3.29)$$

O termo da esquerda da expressão (3.1), após tratamento análogo ao visto anteriormente para o termo da direita, fica:

$$\int_V \sum \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} dv = \int_{\Gamma} (V_n^* w - m_n^* \frac{\partial w}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}^* w_{C_i} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega \dots (3.30)$$

Assim, a expressão final do teorema de Betti aplicado às placas fica dado por:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (V_n^* w - m_n^* \frac{\partial w}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}^* w_{C_i} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega = \\ = \int_{\Gamma} (V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n}) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i} w_{C_i}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \dots (3.31) \end{aligned}$$

Supondo-se que o carregamento g^* seja uma carga concentrada unitária aplicada em um ponto \underline{q} do domínio da placa e cuja representação matemática é uma função Delta de Dirac, (2.76), (2.77) e (2.78), os deslocamentos e esforços a ele associados são funções do ponto de carregamento, \underline{q} , e do ponto de deslocamento, \underline{p} , definido no domínio Ω ou sobre o contorno Γ . Os deslocamentos e esforços correspondentes ao carregamento distribuído \underline{g} são funções apenas do ponto onde os efeitos de \underline{g} são determinados, ou seja, do ponto de deslocamento, uma vez que a posição deste carregamento está previamente fixada.

Escrevendo-se cada variável da equação (3.31) em função de dois pontos, quando se tratar de solução fun-

damental, e de apenas um ponto em caso contrário, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} g^*(q,p) w(p) d\Omega(p) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(q,P) w(P) + \right. \\ & \quad \left. - m_n^*(q,P) \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}^*(q,P) w_{C_i}(P) = \\ & = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(q,P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] d\Gamma(P) + \\ & \quad + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}(P) w_{C_i}^*(q,P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega_g(p) \dots (3.32) \end{aligned}$$

Aplicando-se a propriedade (2.78) à integral de domínio do termo da esquerda de (3.32), obtém-se:

$$\int_{\Omega} g^*(q,p) w(p) d\Omega(p) = w(x_q, y_q) = w(q) \dots (3.33)$$

e, portanto, a expressão do teorema de Betti pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} w(q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(q,P) w(P) - m_n^*(q,P) \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}^*(q,P) w_{C_i}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(q,P) + \right. \\ \left. - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}(P) w_{C_i}^*(q,P) + \\ + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega_g(p) \dots (3.34) \end{aligned}$$

3.3 - EQUAÇÃO INTEGRAL DE UM PONTO DO CONTORNO

A equação (3.34) é válida para um ponto q qualquer do domínio; entretanto, para a formulação do problema pelo método dos elementos de contorno é necessário obter-se a equação integral para um ponto Q do contorno. Para isso, considere-se a placa da figura 3.4, onde o contorno inicial foi acrescido de um contorno circular Γ_ξ de raio ξ e λ^- e λ^+ são cantos do novo contorno da placa.

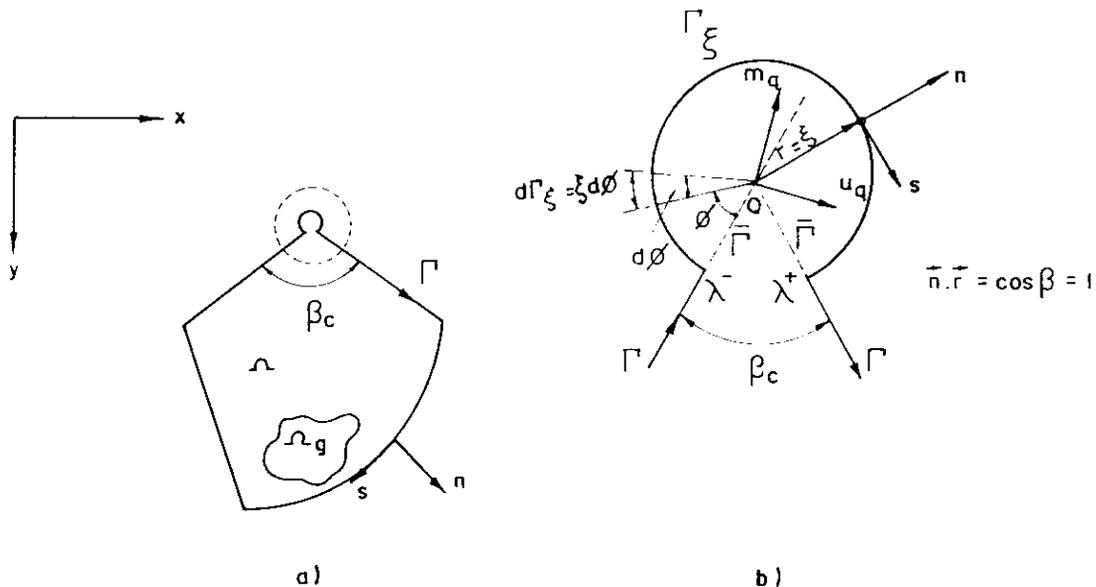


FIG. 3.4 - Contorno circular acrescido a um canto de placa.

Considerando-se a modificação do contorno Γ , a equação integral (3.34) para o ponto Q do contorno da placa, e agora pertencente ao domínio modificado, é:

$$w(Q) + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) +$$

$$+ \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{N_C-1} R_{C_i}^*(Q, P) w_{C_i}(P) + R_{C_{\lambda^-}}^*(Q, P) w_{C_{\lambda^-}}(P) + \\
 & + R_{C_{\lambda^+}}^*(Q, P) w_{C_{\lambda^+}}(P) = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n(P) w^*(Q, P) + \right. \\
 & \left. - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(P) w^*(Q, P) + \right. \\
 & \left. - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{N_C-1} R_{C_i}(P) w_{C_i}^*(Q, P) + \\
 & + R_{C_{\lambda^+}}(P) w_{C_{\lambda^+}}^*(Q, P) + R_{C_{\lambda^-}}(P) w_{C_{\lambda^-}}^*(Q, P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) \quad \dots (3.35)
 \end{aligned}$$

À medida que ξ se aproxima de zero, o ponto Q se aproxima do contorno e, na condição limite, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 w(Q) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
 + \sum_{i=1}^{N_C-1} R_{C_i}^*(Q, P) w_{C_i}(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[R_{C_{\lambda^+}}^*(Q, P) w_{C_{\lambda^+}}(P) + \right. \\
 \left. + R_{C_{\lambda^-}}^*(Q, P) w_{C_{\lambda^-}}(P) \right] = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n(P) w^*(Q, P) + \right. \\
 \left. - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(P) w^*(Q, P) + \right. \\
 \left. - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{N_C-1} R_{C_i}(P) w_{C_i}^*(Q, P) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[R_{C\lambda^+}(P) w_{C\lambda^+}^*(Q, P) + R_{C\lambda^-}(P) w_{C\lambda^-}^*(Q, P) \right] + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(P) w^*(Q, P) d\Omega_g(P) \quad \dots (3.36)
 \end{aligned}$$

Os limites das integrais sobre $\Gamma - \bar{\Gamma}$ indicadas em (3.36), por definição, representam o valor principal das mesmas. Assim:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) = & \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q, P) w(P) + \right. \\
 & \left. - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) \quad \dots (3.37)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n(P) w^*(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) = & \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(Q, P) + \right. \\
 & \left. - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) \quad \dots (3.38)
 \end{aligned}$$

Passa-se agora ao estudo da parcela de (3.36), referente à integral sobre o trecho Γ_ξ , cujo integrando, para facilidade de entendimento, é indicado por $\phi(\xi)$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi(P) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q, P) w(P) + \right. \\
 & \left. - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) \quad \dots (3.39)
 \end{aligned}$$

Aplicando-se a propriedade referente à integral de uma soma de funções, a expressão (3.39) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi(P) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ V_n^*(Q,P) \left[w(P) - w(Q) \right] + \right. \\ &\quad \left. - m_n^*(Q,P) \left[\frac{\partial w}{\partial n}(P) - \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right] \right\} d\Gamma_\xi(P) + \\ &\quad + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n^*(Q,P) w(Q) d\Gamma_\xi(P) - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} m_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) d\Gamma_\xi(P) \end{aligned} \quad \dots (3.40)$$

Supondo que é válida a condição de HÖLDER [40]:

$$|w(P) - w(Q)| \leq c_1 r^{\alpha_1}(P,Q) \quad \dots (3.41)$$

e

$$\left| \frac{\partial w}{\partial n}(P) - \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right| \leq C_2 r^{\alpha_2}(P,Q) \quad \dots (3.42)$$

onde C_1 e C_2 são constantes e

$$0 < \alpha_i \leq 1, \quad i = 1, 2$$

a primeira integral de (3.40) se anula. Como $w(Q)$ e $\partial w(Q)/\partial n$ são valores do domínio, a expressão (3.40) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi(P) &= w(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n^*(Q,P) d\Gamma_\xi(P) + \\ &\quad - \frac{\partial w(Q)}{\partial n} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} m_n^*(Q,P) d\Gamma_\xi(P) \end{aligned} \quad \dots (3.43)$$

Substituindo-se em (3.43), $V_n^*(Q,P)$ e $m_n^*(Q,P)$, segundo (2.96) e (2.94), e considerando-se ainda que $\cos\beta = 1$ e $r = \xi$ (ver figura 3.4), obtém-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \phi(\xi) d\Gamma_{\xi}(P) = w(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} -\frac{1}{2\pi\xi} d\Gamma_{\xi}(P) + \\ + \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \xi + 1 \right] d\Gamma_{\xi}(P) \quad \dots (3.44) \end{aligned}$$

Como

$$d\Gamma_{\xi}(P) = \xi d\phi \quad \dots (3.45)$$

a expressão (3.44) fica reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \phi(\xi) d\Gamma_{\xi}(P) = w(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta_C} -\frac{1}{2\pi\xi} \xi d\phi + \\ + \frac{\partial w(Q)}{\partial n} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta_C} \frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \xi + 1 \right] \xi d\phi \quad \dots (3.46) \end{aligned}$$

onde β_C é o ângulo do canto da placa (ver figura 3.4). Integrando-se e calculando-se o limite indicado, obtém-se:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \phi(\xi) d\Gamma_{\xi}(P) = -\frac{2\pi-\beta_C}{2\pi} w(Q) \quad \dots (3.47)$$

As demais integrais sobre Γ_{ξ} indicadas em (3.36) são determinadas de forma semelhante e conduzem a valores nulos, o mesmo ocorrendo com os limites sobre as parcelas que envolvem as reações de canto R_C . Portanto, a equação integral para um ponto do contorno fica:

$$\begin{aligned} K(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q,P)w(P) - m_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}^*(Q,P) w_{C_i}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P)w^*(Q,P) + \right. \\ \left. - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}(P) w_{C_i}^*(Q,P) + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) \quad \dots (3.48)$$

onde:

$$K(Q) = \frac{\beta C}{2\pi} \quad \dots (3.49)$$

Para o caso particular de pontos do contorno com uma única tangente,

$$K(Q) = \frac{1}{2} \quad \dots (3.50)$$

As variáveis da equação (3.48) são os deslocamentos $w(P)$ e $\partial w(P)/\partial n$ e os esforços $m_n(P)$ e $V_n(P)$. Em função da vinculação do contorno da placa, alguns valores são conhecidos e outros não. Como será visto no Capítulo 4, uma das alternativas possíveis para a determinação dos valores desconhecidos é escrever também a equação integral correspondente à derivada do deslocamento $w(q)$ em relação à coordenada m_q de um sistema de coordenadas cartesianas genérico (m_q, u_q) e de origem em q (ver figura 2.11). Esta equação é obtida a partir de (3.34) e é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial m_q}(q) + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m_q}(q, P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_C} \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial m_q}(q, P) w_{C_i}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(q, P) + \right. \\ \left. - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m_q} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}(P) \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial m_q}(q, P) + \\ + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(q, p) d\Omega_g(p) \quad \dots (3.51) \end{aligned}$$

Na equação (3.51) aparecem derivadas da solução fundamental no ponto de carregamento \underline{q} . Estas derivadas são obtidas com procedimento análogo ao utilizado na dedução das expressões (2.113), (2.114), (2.115), (2.116) e (2.117) e são dadas por:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m_q}(q, P) = - \frac{r}{4\pi D} (\vec{m} \cdot \vec{r}) \ln r \quad \dots (3.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial m_q} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] = - \frac{1}{4\pi D} \left[(\vec{m} \cdot \vec{r}) (\vec{n} \cdot \vec{r}) + (\vec{m} \cdot \vec{n}) \ln r \right] \quad \dots (3.53)$$

$$\frac{\partial m_n^*}{\partial m_q}(q, P) = \frac{1}{4\pi r} \left\{ (1+\nu) (\vec{m} \cdot \vec{r}) - 2(1-\nu) (\vec{n} \cdot \vec{r}) \left[(\vec{m} \cdot \vec{r}) (\vec{n} \cdot \vec{r}) - \vec{m} \cdot \vec{n} \right] \right\} \quad \dots (3.54)$$

$$\frac{\partial m_{ns}^*}{\partial m_q}(q, P) = - \frac{1-\nu}{4\pi r} \left[2 (\vec{m} \cdot \vec{r}) (\vec{n} \cdot \vec{r}) (\vec{s} \cdot \vec{r}) - (\vec{m} \cdot \vec{n}) (\vec{s} \cdot \vec{r}) - (\vec{m} \cdot \vec{s}) (\vec{n} \cdot \vec{r}) \right] \quad \dots (3.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n^*}{\partial m_q}(q, P) = & - \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu) (\vec{s} \cdot \vec{r}) \left[(\vec{s} \cdot \vec{r}) (\vec{m} \cdot \vec{n}) + 2 (\vec{n} \cdot \vec{r}) (\vec{m} \cdot \vec{s}) + \right. \right. \\ & \left. \left. - 4 (\vec{s} \cdot \vec{r}) (\vec{m} \cdot \vec{r}) (\vec{n} \cdot \vec{r}) \right] + (3-\nu) \left[- (\vec{m} \cdot \vec{n}) + 2 (\vec{m} \cdot \vec{r}) (\vec{n} \cdot \vec{r}) \right] \right\} + \\ & - \frac{1-\nu}{\pi R r} (\vec{s} \cdot \vec{r}) \left[- (\vec{m} \cdot \vec{s}) + (\vec{m} \cdot \vec{r}) (\vec{s} \cdot \vec{r}) \right] \quad \dots (3.56) \end{aligned}$$

A equação (3.51) é referente a um ponto do domínio. A correspondente representação para pontos do contorno é formulada de modo análogo ao da equação (3.34). Considerando-se o contorno da placa e o acréscimo circular do mesmo, indicados na figura 3.4, a equação para a derivada de w no ponto \underline{Q} pode ser escrita a partir da equação (3.51), isto é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial m_q}(Q) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[\frac{\partial v_n^*}{\partial m_q}(Q, P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \int_{\Gamma_\xi} \left[\frac{\partial v_n^*}{\partial m_q}(Q, P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{N_C-1} \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial m_q} (Q, P) w_{C_i} (P) + \frac{\partial R_{C_{\lambda^-}}^*}{\partial m_q} (Q, P) w_{C_{\lambda^-}} (P) + \\
 & + \frac{\partial R_{C_{\lambda^+}}^*}{\partial m_q} (Q, P) w_{C_{\lambda^+}} (P) = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left\{ V_n (P) \frac{\partial w^*}{\partial m_q} (Q, P) + \right. \\
 & - m_n (P) \frac{\partial}{\partial m_q} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n} (Q, P) \right] \left. \right\} d\Gamma (P) + \int_{\Gamma_\xi} \left\{ V_n (P) \frac{\partial w^*}{\partial m_q} (Q, P) + \right. \\
 & - m_n (P) \frac{\partial}{\partial m_q} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n} (Q, P) \right] \left. \right\} d\Gamma_\xi (P) + \sum_{i=1}^{N_C-1} R_{C_i} (P) \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial m_q} (Q, P) + \\
 & + R_{C_{\lambda^-}} (P) \frac{\partial w_{C_{\lambda^-}}^*}{\partial m_q} (Q, P) + R_{C_{\lambda^+}} (P) \frac{\partial w_{C_{\lambda^+}}^*}{\partial m_q} (Q, P) + \\
 & + \int_{\Omega_q} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m_q} (Q, P) d\Omega_g (p) \quad \dots (3.57)
 \end{aligned}$$

O ponto Q , inicialmente de domínio, será ponto do contorno quando se calcularem os limites indicados a seguir:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial w}{\partial m_q} (Q) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m_q} (Q, P) w (P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q} (Q, P) \frac{\partial w}{\partial n} (P) \right] d\Gamma (P) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m_q} (Q, P) w (P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q} (Q, P) \frac{\partial w}{\partial n} (P) \right] d\Gamma_\xi (P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_C-1} \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial m_q} (Q, P) w_{C_i} (P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{\partial R_{C_{\lambda^-}}^*}{\partial m_q} (Q, P) w_{C_{\lambda^-}} (P) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial R_{C_{\lambda^+}}^*}{\partial m_q} (Q, P) w_{C_{\lambda^+}} (P) \right] = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left\{ V_n (P) \frac{\partial w^*}{\partial m_q} (Q, P) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -m_n(P) \frac{\partial}{\partial m_q} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n} (Q, P) \right] \Big] d\Gamma(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ v_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m_q} (Q, P) + \right. \\
 & \left. - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m_q} \left[\frac{\partial w^*}{\partial m_q} (Q, P) \right] \right\} d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{N_C-1} R_{C_i}(P) \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial m_q} (Q, P) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[R_{C_{\lambda^-}}(P) \frac{\partial w_{C_{\lambda^-}}^*}{\partial m_q} (Q, P) + R_{C_{\lambda^+}}(P) \frac{\partial w_{C_{\lambda^+}}^*}{\partial m_q} (Q, P) \right] + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m_q} (Q, p) d\Omega(p) \quad \dots \quad (3.58)
 \end{aligned}$$

Lembrando que os limites das integrais sobre $\Gamma-\bar{\Gamma}$ são, por definição, os valores principais das integrais sobre Γ , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial w(Q)}{\partial m_q} + \int_{\bar{\Gamma}} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m_q} (Q, P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q} (Q, P) \frac{\partial w}{\partial n} (P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m_q} (Q, P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q} (Q, P) \frac{\partial w}{\partial n} (P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_C-1} \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial m_q} (Q, P) w_{C_i}(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{\partial R_{C_{\lambda^-}}^*}{\partial m_q} (Q, P) w_{C_{\lambda^-}}(P) + \right. \\
 & \left. \frac{\partial R_{C_{\lambda^+}}^*}{\partial m_q} (Q, P) w_{C_{\lambda^+}}(P) \right] = \int_{\Gamma} \left\{ v_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m_q} (Q, P) + \right. \\
 & \left. - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m_q} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n} (Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ v_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m_q} (Q, P) + \right. \\
 & \left. - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m_q} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n} (Q, P) \right] \right\} d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{N_C-1} R_{C_i}(P) \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial m_q} (Q, P) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[R_{C_{\lambda^-}}(P) \frac{\partial w_{C_{\lambda^-}}^*}{\partial m_q} (Q, P) + R_{C_{\lambda^+}}(P) \frac{\partial w_{C_{\lambda^+}}^*}{\partial m_q} (Q, P) \right] +
 \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q, p) d\Omega_g(p) \dots (3.59)$$

Para remover a singularidade que esta equação apresenta quando $\xi \rightarrow 0$, é conveniente dar à placa um deslocamento vertical de corpo rígido igual a $-w(Q)$. Como todas as derivadas permanecem inalteradas, a equação (3.59) fica agora expressa na seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial m_q}(Q) + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial m_q}(Q, P) [w(P) - w(Q)] - \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma(P) + \\ & \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial m_q}(Q, P) [w(P) - w(Q)] - \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma_\xi(P) + \\ & + \sum_{i=1}^{N_C-1} \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial m_q}(Q, P) [w(P) - w(Q)] + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial R_{C_{\lambda^-}}^*}{\partial m_q}(Q, P) [w_{C_{\lambda^-}}(P) + \right. \\ & \left. - w(Q)] + \frac{\partial R_{C_{\lambda^+}}^*}{\partial m_q}(Q, P) [w_{C_{\lambda^+}}(P) - w(Q)] \right\} = \\ & = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m_q} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \\ & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m_q} \left[\frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q, P) \right] \right\} d\Gamma_\xi(P) + \\ & + \sum_{i=1}^{N_C-1} R_{C_i}(P) \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial m_q}(Q, P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[R_{C_{\lambda^-}}(P) \frac{\partial w_{C_{\lambda^-}}^*}{\partial m_q}(Q, P) + \right. \\ & \left. + R_{C_{\lambda^+}}(P) \frac{\partial w_{C_{\lambda^+}}^*}{\partial m_q}(Q, P) \right] + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q, p) d\Omega_g(p) \dots (3.60) \end{aligned}$$

O limite da primeira integral sobre Γ_ξ , cujo integrando passa a ser denominado $\phi'(\xi)$, pode ser convenientemente reescrito:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi'(\xi) d\Gamma_\xi(P) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial m_q}(Q, P) [w(P) - w(Q)] + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q}(Q, P) \left[\frac{\partial w}{\partial n}(P) - \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right] \right\} d\Gamma_\xi(P) + \\ &\quad - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) d\Gamma_\xi(P) \quad \dots (3.61) \end{aligned}$$

Supondo que é válida a condição de Hölder, (3.41) e (3.42), o segundo termo da primeira integral de (3.61) se anula e, portanto:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi'(\xi) d\Gamma_\xi(P) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \frac{\partial V_n^*}{\partial m_q}(Q, P) [w(P) - w(Q)] d\Gamma_\xi + \\ &\quad - \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q}(Q, P) d\Gamma_\xi(P) \quad \dots (3.62) \end{aligned}$$

Considere-se agora a figura 3.5, onde estão indicados os pontos Q e P e seus respectivos deslocamentos:

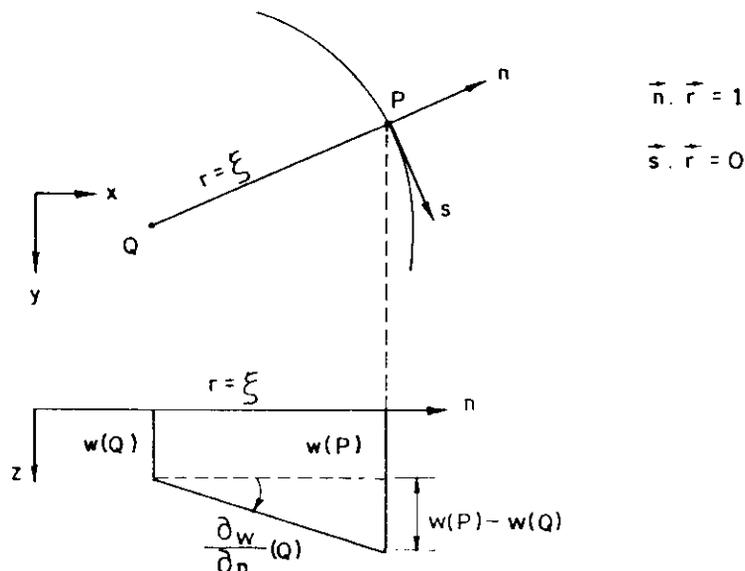


FIG. 3.5 - Deslocamentos verticais do ponto do domínio Q e do ponto do contorno circular P.

Quando $\xi \rightarrow 0$ o conceito de derivada de uma função permite que se escreva a seguinte relação (ver figura 3.5):

$$w(P) - w(Q) = \xi \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \quad \dots (3.63)$$

Considerando-se que, para qualquer ponto do contorno Γ_ξ , $\vec{n} \equiv \vec{r}$, deduz-se que:

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = \vec{m} \cdot \vec{r} \quad \dots (3.64)$$

Substituindo-se, em (3.62), $\partial V_n^*(Q,P)/\partial m_q$, $\partial m_n^*(Q,P)/\partial m_q$ e $w(P) - w(Q)$ por seus valores, (3.56), (3.54) e (3.63), e fazendo-se a mudança de variáveis indicada em (3.45), obtém-se:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi'(\xi) d\Gamma_\xi(P) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{\phi} \frac{\partial w}{\partial n}(Q) (\vec{m} \cdot \vec{r}) d\phi \right\} \dots (3.65)$$

Considere-se agora a figura 3.6. Chamando-se de γ o ângulo entre os eixos dos sistemas de coordenadas cartesianas (n_1, s_1) e (m_q, u_q) , pode-se escrever, para qualquer ponto de Γ_ξ :

$$\vec{m} \cdot \vec{r} = \text{sen}(\phi - \gamma) \quad \dots (3.66)$$

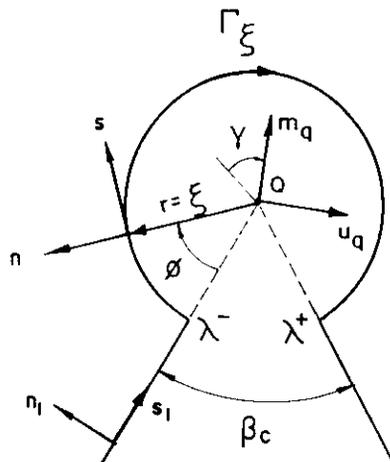


FIG. 3.6 - Sistemas de coordenadas no ponto Q e no contorno.

As relações entre as derivadas de $w(Q)$ nos sistemas de coordenadas (n, s) e (m_q, u_q) são:

$$\frac{\partial w}{\partial n}(Q) = \frac{\partial w}{\partial m_q}(Q) \frac{\partial m_q}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial u_q}(Q) \frac{\partial u_q}{\partial n} \quad \dots (3.67)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}(Q) = \frac{\partial w}{\partial m_q}(Q) \frac{\partial m_q}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial u_q}(Q) \frac{\partial u_q}{\partial s} \quad \dots (3.68)$$

A relação entre os dois sistemas de coordenadas (n, s) e (m_q, u_q) é obtida a partir de (2.61) fazendo $\theta + \beta = \pi/2 - \phi + \gamma$.

$$m_q = m_q^0 + n \operatorname{sen}(\phi - \gamma) + s \operatorname{cos}(\phi - \gamma) \quad \dots (3.69)$$

$$u_q = u_q^0 - n \operatorname{cos}(\phi - \gamma) + s \operatorname{sen}(\phi - \gamma) \quad \dots (3.70)$$

A partir de (3.67), (3.69) e (3.70) pode-se escrever:

$$\frac{\partial w}{\partial n}(Q) = \operatorname{sen}(\phi - \gamma) \frac{\partial w}{\partial m_q}(Q) - \operatorname{cos}(\phi - \gamma) \frac{\partial w}{\partial u_q}(Q) \quad \dots (3.71)$$

Substituindo-se, em (3.65), $\partial w(Q)/\partial n$ e $\vec{m} \cdot \vec{r}$ por suas expressões, (3.71) e (3.66), obtém-se:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{-\xi}^{\xi} \phi'(\xi) d\Gamma_{\xi}(P) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi - \beta_c} \left[\operatorname{sen}^2(\phi - \gamma) \frac{\partial w}{\partial m_q}(Q) + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2(\phi - \gamma) \frac{\partial w}{\partial u_q}(Q) \right] d\phi \right\} \quad \dots (3.72)$$

Integrando-se e calculando-se o limite final, deduz-se:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \phi'(\xi) d\Gamma_{\xi} = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \left[(4\pi - 2\beta_c) + \operatorname{sen} 2(\gamma + \beta_c) \right] + \right.$$

Pretende-se agora estudar a parcela de (3.60) referente a $\partial R_{C\lambda^-}^*(Q,P)/\partial m_q$, que passa a ser denominada $H(\xi)$, podendo-se escrever:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} H(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial R_{C\lambda^-}^*}{\partial m_q}(Q,P) \left[w_{C\lambda^-}(P) - w(Q) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial R_{C\lambda^+}^*}{\partial m_q}(Q,P) \left[w_{C\lambda^+}(P) - w(Q) \right] \right\} \quad \dots (3.74) \end{aligned}$$

sendo a expressão de $\partial R_C^*(Q,P)/\partial m_q$ obtida a partir de (3.27):

$$\frac{\partial R_C^*}{\partial m_q}(Q,P) = \frac{\partial m_{ns}^*}{\partial m_q}(Q,P) \Big|^{+} - \frac{\partial m_{ns}^*}{\partial m_q}(Q,P) \Big|^{-} \quad \dots (3.75)$$

com o valor de $\partial m_{ns}^*(Q,P)/\partial m_q$ definido em (3.55).

Na figura 3.7, estão representados os cantos λ^- e λ^+ do contorno indicado na figura 3.4 e os sistemas de coordenadas cartesianas a eles associados.

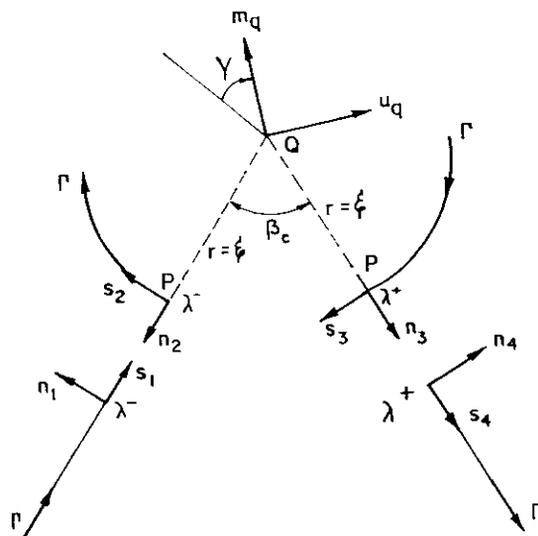


FIG. 3.7 - Sistemas de coordenadas associados aos pontos anterior e posterior aos cantos λ^- e λ^+ .

Para o ponto do contorno anterior ao canto λ^- pode-se escrever, a partir de (3.55), a seguinte expressão:

$$\frac{\partial m_{\vec{n}_1}^* s_1}{\partial m_q}(Q, P) = - \frac{1-v}{4\pi\xi} \vec{m} \cdot \vec{n}_1 \quad \dots (3.76)$$

Obtém-se, analogamente, para o ponto posterior ao canto λ^- :

$$\frac{\partial m_{\vec{n}_2}^* s_2}{\partial m_q}(Q, P) = \frac{1-v}{4\pi\xi} \vec{m} \cdot \vec{s}_2 \quad \dots (3.77)$$

A partir de (3.63), pode-se escrever:

$$w_{c\lambda^-}(P) - w(Q) = \xi \frac{\partial w}{\partial n_2}(Q) \quad \dots (3.78)$$

Com procedimento análogo para o canto λ^+ , chega-se a:

$$\frac{\partial m_{\vec{n}_3}^* s_3}{\partial m_q}(Q, P) = \frac{1-v}{4\pi\xi} \vec{m} \cdot \vec{s}_3 \quad \dots (3.79)$$

$$\frac{\partial m_{\vec{n}_4}^* s_4}{\partial m_q}(Q, P) = \frac{1-v}{4\pi\xi} \vec{m} \cdot \vec{n}_4 \quad \dots (3.80)$$

e

$$w_{c\lambda^+}(P) - w(Q) = \xi \frac{\partial w}{\partial n_3}(Q) \quad \dots (3.81)$$

Substituindo-se as parcelas de (3.74) por suas expressões, (3.76) a (3.81), e considerando-se ainda que $\vec{n}_1 = \vec{s}_2$ e $\vec{n}_4 = -\vec{s}_3$, obtém-se:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} H(\xi) = \frac{1-v}{2\pi} \left[(\vec{m} \cdot \vec{s}_2) \frac{\partial w}{\partial n_2}(Q) - (\vec{m} \cdot \vec{s}_3) \frac{\partial w}{\partial n_3}(Q) \right] \quad (3.82)$$

A partir da figura 3.7, as seguintes relações podem ser escritas:

$$\vec{m} \cdot \vec{s}_2 = \cos \gamma \quad \dots (3.83)$$

$$\vec{m} \cdot \vec{s}_3 = \cos (\gamma + \beta_c) \quad \dots (3.84)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n_2}(Q) = -\text{sen} \gamma \frac{\partial w}{\partial m_q}(Q) - \cos \gamma \frac{\partial w}{\partial u_q}(Q) \quad \dots (3.85)$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial n_3}(Q) = -\text{sen}(\gamma + \beta_c) \frac{\partial w}{\partial m_q}(Q) - \cos(\gamma + \beta_c) \frac{\partial w}{\partial u_q}(Q) \quad \dots (3.86)$$

Substituindo-se, em (3.82), os valores de $\vec{m} \cdot \vec{s}_2$, $\vec{m} \cdot \vec{s}_3$, $\partial w(Q)/\partial n_2$ e $\partial w(Q)/\partial n_3$ por suas expressões, (3.83), (3.84), (3.85) e (3.86), deduz-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} H(\xi) &= \frac{1-\nu}{4\pi} \left\{ - \left[\text{sen} 2 \gamma - \text{sen} 2 (\gamma + \beta_c) \right] \frac{\partial w}{\partial m_q}(Q) + \right. \\ &\quad \left. + \left[-\cos 2 \gamma + \cos 2 (\gamma + \beta_c) \right] \frac{\partial w}{\partial u_q}(Q) \right\} \quad \dots (3.87) \end{aligned}$$

As outras parcelas de (3.60) dependentes de ξ são calculadas de forma semelhante e são iguais a zero. Assim, após a substituição de (3.73) e (3.87) em (3.60), obtém-se, para a derivada da equação integral em um canto do contorno, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} K_1 \frac{\partial w}{\partial m_q}(Q) + K_2 \frac{\partial w}{\partial u_q}(Q) + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial m_q}(Q, P) \left[w(P) - w(Q) \right] + \right. \\ \left. - \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial m_q}(Q, P) \left[w_{c_i}(P) + \right. \\ \left. - w(Q) \right] = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m_q} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial m_q}(Q, P) + \int_{\Omega_q} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q, P) d\Omega_q(p) \dots (3.88) \end{aligned}$$

onde:

$$K_1 = \frac{\beta}{2\pi} + \frac{\nu}{4\pi} \left[\text{sen } 2\gamma - \text{sen } 2(\gamma + \beta_c) \right] \quad \dots (3.89)$$

$$K_2 = \frac{\nu}{4\pi} \left[\text{cos } 2\gamma - \text{cos } 2(\gamma + \beta_c) \right] \quad \dots (3.90)$$

Nas somatórias indicadas em (3.88), referentes às contribuições dos cantos, devem ser eliminadas as parcelas do próprio canto a que se refere a equação.

Pode-se demonstrar que a derivada da solução fundamental é outra solução fundamental, agora para um momento unitário aplicado no ponto Q [41]. Assim, $\partial V_n^*(Q,P)/\partial m_q$ e $\partial R_{C_i}^*(Q,P)/\partial m_q$ são, respectivamente, a cortante equivalente e as reações de canto da placa para um momento unitário aplicado no ponto Q. Da condição de equilíbrio vertical, pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial V_n^*}{\partial m_q}(Q,P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_C} \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial m_q}(Q,P) = 0 \quad \dots (3.91)$$

A partir de (3.88) e (3.91) e, considerando-se que $w(Q)$ é um deslocamento de corpo rígido, portanto, uma constante, obtém-se a seguinte expressão para a derivada da equação integral:

$$\begin{aligned} & K_1 \frac{\partial w}{\partial m_q}(Q) + K_2 \frac{\partial w}{\partial u_q}(Q) + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m_q}(Q,P) w(P) + \right. \\ & \left. - \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q}(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_C} \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial m_q}(Q,P) w_{C_i}(P) = \\ & = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q,P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m_q} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}(P) \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial m_q}(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q,p) d\Omega_g(p) \quad (3.92) \end{aligned}$$

Pretende-se reescrever a equação (3.92) como uma função apenas das derivadas no sentido normal ao contorno da placa. Considere-se a figura 3.8, onde estão indicados um canto placa e os sistemas de coordenadas (n_1, s_1) e (n_2, s_2) associados aos seus lados.

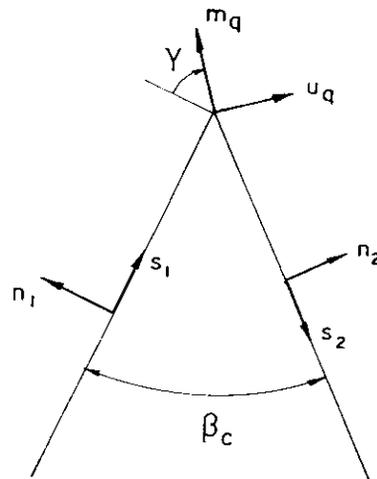


FIG. 3.8 - Sistemas de coordenadas associados ao canto da placa.

A parcela de (3.92), que passa a ser denominada de K_w , referente à contribuição do canto para o qual se escreve a derivada da equação integral, é definida por:

$$K_w = K_1 \frac{\partial w}{\partial m_q}(Q) + K_2 \frac{\partial w}{\partial u_q}(Q) \quad \dots (3.93)$$

Para $\vec{m} \equiv \vec{n}_1$, o valor de γ é zero e os coeficientes K_1 e K_2 , (3.89) e (3.90), assumem os seguintes valores:

$$K_1 = \frac{\beta_c}{2\pi} - \frac{\nu}{4\pi} \text{sen } 2\beta_c \quad \dots (3.94)$$

$$K_2 = \frac{\nu}{4\pi} (1 - \cos 2\beta_c) \quad \dots (3.95)$$

e, portanto, a expressão (3.93) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$K_w = \left(\frac{\beta_c}{2\pi} - \frac{\nu}{4\pi} \operatorname{sen} 2\beta_c \right) \frac{\partial w}{\partial n_1}(Q) - \frac{\nu}{4\pi} (1 - \cos 2\beta_c) \frac{\partial w}{\partial s_1}(Q) \quad \dots (3.96)$$

Pretende-se agora escrever $\partial w(Q)/\partial s_1$ como função das derivadas normais aos lados do canto da placa, ou seja, em função de $\partial w(Q)/\partial n_1$ e $\partial w(Q)/\partial n_2$.

Escrevendo-se as relações entre as derivadas do deslocamento $w(Q)$ em relação aos dois sistemas de coordenadas, obtêm-se:

$$\frac{\partial w}{\partial n_2}(Q) = -\cos\beta_c \frac{\partial w}{\partial n_1}(Q) + \operatorname{sen}\beta_c \frac{\partial w}{\partial s_1}(Q) \quad \dots (3.97)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s_2}(Q) = -\operatorname{sen}\beta_c \frac{\partial w}{\partial n_1}(Q) - \cos\beta_c \frac{\partial w}{\partial s_1}(Q) \quad \dots (3.98)$$

A partir de (3.97), pode-se escrever:

$$\frac{\partial w}{\partial s_1}(Q) = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta_c} \left[\frac{\partial w}{\partial n_2}(Q) + \cos\beta_c \frac{\partial w}{\partial n_1}(Q) \right] \quad \dots (3.99)$$

Substituindo-se o valor de $\partial w(Q)/\partial s_1$, (3.99), em (3.96), deduz-se:

$$K_w = \frac{\beta_c}{2\pi} \frac{\partial w}{\partial n_1}(Q) + \frac{\nu}{2\pi} \operatorname{sen}\beta_c \frac{\partial w}{\partial n_2}(Q) \quad \dots (3.100)$$

Obtêm-se, analogamente, para $\vec{m} \equiv \vec{n}_2$,

$$K_w = \frac{\nu}{2\pi} \operatorname{sen}\beta_c \frac{\partial w}{\partial n_1}(Q) + \frac{\beta_c}{2\pi} \frac{\partial w}{\partial n_2}(Q) \quad \dots (3.101)$$

Assim, para cada canto da placa, pode-se escrever duas equações integrais para as derivadas do deslocamento em relação às duas normais ao contorno que podem ser definidas. Sendo cada uma dessas equações escrita para os

pontos posterior e anterior ao canto, tais equações ficam dadas por:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_c}{2\pi} \frac{\partial w}{\partial n_1}(Q) + \frac{\nu}{2\pi} \operatorname{sen} \beta_c \frac{\partial w}{\partial n_2}(Q) + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial n_1}(Q, P) w(P) + \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial n_1}(Q, P) w_{C_i}(P) = \\ & = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial n_1} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \\ & \quad + \sum_{i=1}^{N_c} R_{C_i}(P) \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial n_1}(Q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q, p) d\Omega_g(p) \dots (3.102) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{2\pi} \operatorname{sen} \beta_c \frac{\partial w}{\partial n_1}(Q) + \frac{\beta_c}{2\pi} \frac{\partial w}{\partial n_2}(Q) + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial n_2}(Q, P) w(P) + \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial m_n^*}{\partial n_2}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial n_2}(Q, P) w_{C_i}(P) = \\ & = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_2}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial n_2} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) \\ & \quad + \sum_{i=1}^{N_c} R_{C_i}(P) \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial n_2}(Q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial n_2}(Q, p) d\Omega_g(p) \quad (3.103) \end{aligned}$$

Para o caso particular de pontos do contorno com uma única tangente, isto é, com uma única normal, o valor de β_c é igual a π e, portanto, as equações (3.102) e (3.103) se reduzem a uma única equação dada por:

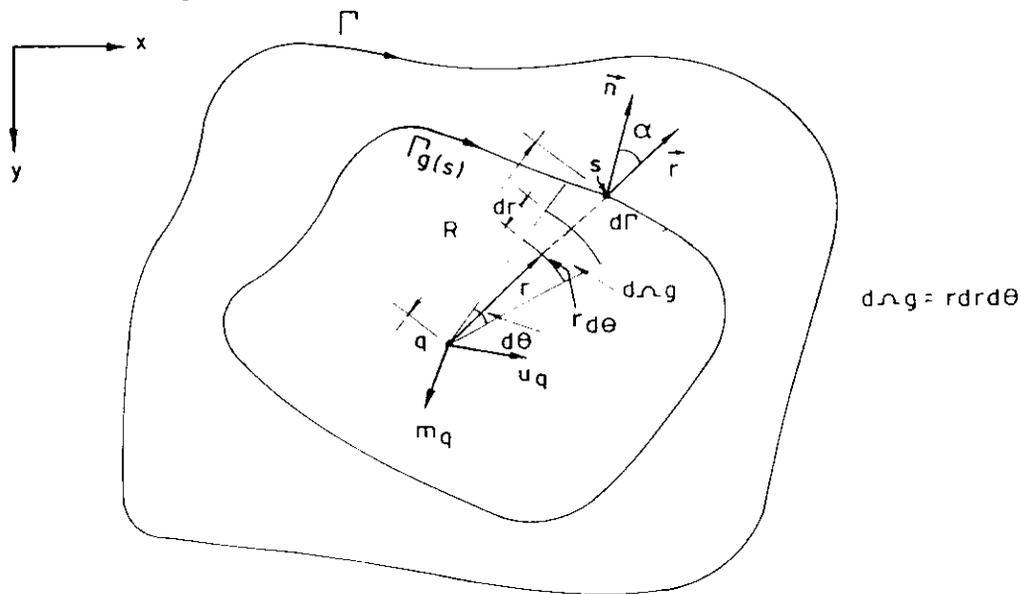
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial w(Q)}{\partial n_1} + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial n_1}(Q, P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ & \quad + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial n_1}(Q, P) w_{C_i}(P) = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q, P) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - m_n(P) \frac{\partial}{\partial n_1} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n} (Q, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}(P) \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial n_1} (Q, P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial n_1} (Q, p) d\Omega_g(p) \quad \dots (3.104)
 \end{aligned}$$

3.4 - TRANSFORMAÇÕES DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO

As integrais de domínio nas equações (3.34), (3.48), (3.51), (3.102), (3.103) e (3.104), que correspondem às influências do carregamento distribuído, na área Ω_g nos deslocamentos e em suas derivadas, podem ser calculadas supondo várias cargas concentradas equivalentes. Embora essa solução conduza a bons resultados no contorno da placa, ela não permite o cálculo direto dos esforços nos pontos de aplicação dessas cargas. Para se evitar esse problema, as integrais de domínio, devido ao carregamento distribuído, são transformadas em integrais sobre o contorno de Ω_g .

Considere-se a placa da figura 3.9, submetida a um carregamento g aplicado em uma área Ω_g e sendo q o ponto singular, isto é, o ponto de aplicação do carregamento unitário g^* .



Admitindo-se que o carregamento g varie linearmente sobre a área Ω_g , a integral que dá a influência do carregamento distribuído em $w(Q)$ pode ser expressa da seguinte forma:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega_g(p) = \int_{\Omega_g} [Ax(p) + By(p) + C] w^*(Q,p) r dr d\theta \dots (3.105)$$

ou

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega_g(p) = \int_{\theta} \left\{ \int_0^R [Ax(p) + By(p) + C] w^*(Q,p) r dr \right\} d\theta \dots (3.106)$$

onde R é o valor de r em um ponto qualquer do contorno de Ω_g . Denominando-se de F^* a seguinte parcela de (3.106):

$$F^* = \int_0^R [Ax(p) + By(p) + C] w^*(Q,p) r dr \dots (3.107)$$

pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega_g(p) = \int_{\theta} F^* d\theta \dots (3.108)$$

Utilizando-se os vetores \vec{n} e \vec{r} indicados na figura 3.9, pode-se efetuar uma mudança de variável, obtendo-se a seguinte relação:

$$d\theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{R} d\Gamma_g \dots (3.109)$$

e, portanto, a expressão (3.108) torna-se

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega_g(p) = \int_{\Gamma_g} \frac{F^*}{R} \vec{n} \cdot \vec{r} d\Gamma_g \quad \dots (3.110)$$

Substituindo-se, em (3.110), o valor de F^* devidamente integrado para o valor de w^* , (2.92), obtêm-se:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega_g(p) = \frac{1}{400\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 (20 \ln R-17) \left[Ax(p) + By(p) \right] \vec{n} \cdot \vec{r} d\Gamma_g + \frac{C}{128\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 (4 \ln R-3) \vec{n} \cdot \vec{r} d\Gamma_g \quad \dots (3.111)$$

Pode-se analogamente, obter:

$$\int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q,p) d\Omega_g(p) = \frac{1}{400\pi D} \int_{\Gamma_g} \left\{ \left[Ax(p) + By(p) \right] \left[R^2 (20 \ln R-17) \left[-(\vec{m} \cdot \vec{r}) - 2(\vec{m} \cdot \vec{r})(\vec{n} \cdot \vec{r}) \right] + 10 R^2 (\vec{m} \cdot \vec{r})(\vec{n} \cdot \vec{r}) \right] + R^3 (20 \ln R-7) \left[Am_1 + Bm_2 \right] \vec{n} \cdot \vec{r} \right\} d\Gamma_g + \frac{1}{128\pi D} \int_{\Gamma_g} \left\{ (Am_1+Bm_2) R^3 (4 \ln R-3) \vec{n} \cdot \vec{r} + [Ax(p) + By(p) + C] \left[R^2 (4 \ln R-3) [-\vec{m} \cdot \vec{n} - 2(\vec{m} \cdot \vec{r})(\vec{n} \cdot \vec{r})] + 4 R^2 (\vec{m} \cdot \vec{r})(\vec{n} \cdot \vec{r}) \right] \right\} d\Gamma_g \quad \dots (3.112)$$

Portanto, substituindo-se (3.111) e (3.112), respectivamente nas equações (3.34) e (3.51), o equacionamento dos deslocamentos para pontos do domínio fica dado apenas por integrais sobre o contorno. O mesmo é válido para pontos do contorno, quando (3.111) e (3.112) são substituídas em (3.48), (3.102), (3.103) e (3,104).

CAPÍTULO IV

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se uma formulação numérica para a resolução aproximada das equações integrais de placas, (3.48) e (3.92).

Como é impossível obter-se a solução exata das equações acima mencionadas para a maioria dos casos de interesse prático, a alternativa é resolvê-las numericamente, transformando-as em equações algébricas. Essa transformação envolve a discretização do contorno da placa em segmentos, ditos "elementos de contorno", sobre os quais deslocamentos e esforços são aproximados por funções previamente escolhidas.

As equações algébricas resultantes das transformações das equações integrais constituem um sistema de equações lineares onde as incógnitas são deslocamentos e esforços em pontos definidos sobre o contorno. Após a imposição das condições de contorno e a resolução final do sistema de equações resultante, valores do domínio podem ser obtidos a partir de (3.34).

São apresentadas, finalmente, algumas aplicações práticas das formulações desenvolvidas e, quando possível, os resultados obtidos são comparados com os da solução exata da equação diferencial de placas e com os obtidos por outras técnicas numéricas.

4.2 - TIPOS DE ELEMENTOS DE CONTORNO

Considere-se a figura 4.1 onde o contorno da placa está aproximado por uma série de segmentos Γ_i chamados "elementos de contorno". Caso o contorno seja curvo, ele é aproximado por uma série de elementos cujo número e forma são escolhidos para representá-lo adequadamente.

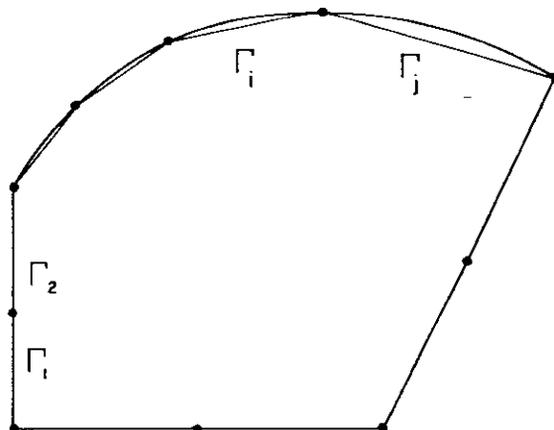
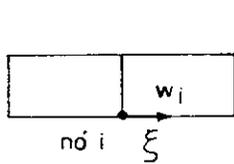
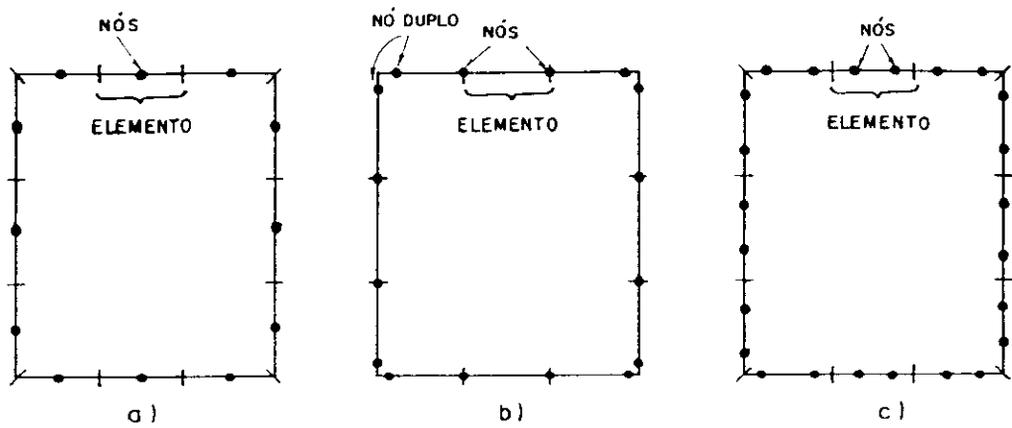


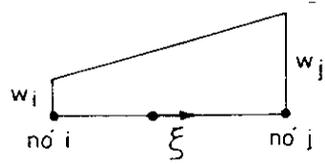
FIG. 4.1 - Contorno de uma placa dividida em elementos de contorno.

A cada elemento de contorno associam-se um ou mais pontos denominados "nós" ou "pontos nodais" e os valores das variáveis a eles associados são denominados "valores nodais". Os deslocamentos e esforços ao longo de cada elemento serão agora aproximados por funções polinomiais em função das quais é definido o número de pontos nodais do elemento. As funções geralmente utilizadas são a constante, a linear e a quadrática, o que implica elementos com um, dois e três pontos nodais, respectivamente. Na figura 4.2 está indicada a aproximação do deslocamento w sobre um elemento utilizando as funções já mencionadas.

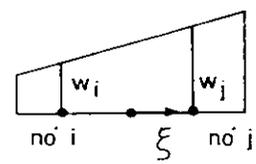
No elemento constante, como é necessário apenas um parâmetro para definir a função aproximadora, o ponto nodal é, geralmente, escolhido no meio do elemento. No



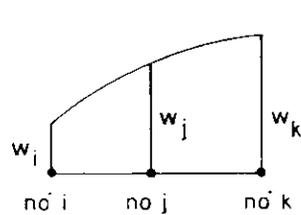
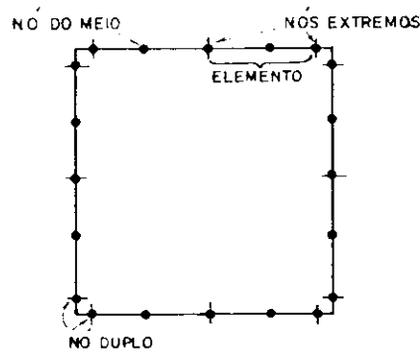
a) elemento constante



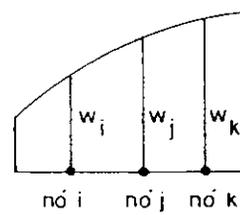
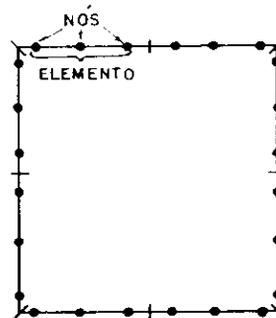
b) elemento linear contínuo ;



c) elemento linear descontínuo



d) elemento quadrático contínuo ;



e) elemento quadrático descontínuo

FIG. 4.2 - Aproximação da variável de contorno w por funções polinomiais.

elemento linear já é necessária a definição de dois pontos nodais, que podem ser fixados nas extremidades do elemento caracterizando o elemento linear contínuo. Caso algum desses pontos nodais seja definido no interior do elemento, fica caracterizado o elemento linear descontínuo (figura 4.2.b e 4.2.c). No elemento quadrático, são necessários três nós, pois são três os parâmetros que definem uma função quadrática. No elemento quadrático contínuo, esses pontos são definidos nas extremidades e no meio do elemento e a descontinuidade pode, neste caso, também ser utilizada bastando para isso definir pontos nodais fora das extremidades do elemento (figuras 4.2.d e 4.2.e).

De um modo geral, o deslocamento sobre um elemento de contorno K pode ter sua aproximação dada pela seguinte expressão:

$$w = [\phi_i] \{w_i\}_{\Gamma_k} \quad \dots (4.1)$$

onde $[\phi_i]$ é a matriz das funções aproximadoras e $\{w_i\}_{\Gamma_k}$ é o vetor dos deslocamentos nodais.

Assim, para o elemento linear contínuo, a expressão (4.1) é escrita da seguinte forma:

$$w = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \end{Bmatrix} \quad \dots (4.2)$$

onde:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad \dots (4.3)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad \dots (4.4)$$

As funções aproximadoras para o elemento linear descontínuo são:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} - \xi \quad \dots (4.5)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} + \xi \quad \dots (4.6)$$

e, para o elemento quadrático contínuo, são:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \quad \dots (4.7)$$

$$\phi_2 = (1 - \xi) (1 + \xi) \quad \dots (4.8)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \quad \dots (4.9)$$

Quaisquer valores do deslocamento w para pontos do elemento distintos dos nós são obtidos a partir de (4.2).

Analogamente à expressão (4.1), pode-se escrever:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \left[\phi_i \right] \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_k} \quad \dots (4.10)$$

$$m_n = \left[\phi_i \right] \left\{ m_{ni} \right\}_{\Gamma_k} \quad \dots (4.11)$$

$$V_n = \left[\phi_i \right] \left\{ V_{ni} \right\}_{\Gamma_k} \quad \dots (4.12)$$

onde, $\left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_k}$, $\left\{ m_{ni} \right\}_{\Gamma_k}$ e $\left\{ V_{ni} \right\}_{\Gamma_k}$, a exemplo de $\left\{ w_i \right\}_{\Gamma_k}$, são os valores nodais dos deslocamentos e esforços. Expressões análogas podem ser escritas para os elementos constante e quadrático.

4.3 - SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES: MÉTODO USUAL

A equação integral, para um ponto genérico Q do contorno, é agora transformada em uma equação algébrica, da

da em função dos parâmetros nodais, como se segue.

Para cada ponto substituem-se em sua equação integral correspondente ao deslocamento transversal, (3.48), os valores de w , $\partial w/\partial n$, V_n e m_n , por suas aproximações sobre os elementos do contorno da placa, dadas em (4.1), (4.10), (4.11) e (4.12), obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 & K(Q)w(Q) + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \left\{ \left[\phi(P) \right] \{w_i\}_{\Gamma_k} V_n^*(Q,P) + \right. \\
 & \quad \left. - \left[\phi(P) \right] \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_i \right\}_{\Gamma_k} m_n^*(Q,P) \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q,P)w_{c_i}(P) = \\
 & = \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \left\{ \left[\phi(P) \right] \{V_{n_i}\}_{\Gamma_k} w^*(Q,P) + \right. \\
 & \quad \left. - \left[\phi(P) \right] \{m_{n_i}\}_{\Gamma_k} \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} w_{c_i}^*(Q,P)R_{c_i}(P) + \\
 & \quad + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega_g(p) \quad \dots (4.13)
 \end{aligned}$$

onde m é o número total de elementos de contorno e N_c é o número de cantos da placa.

Como os valores nodais são independentes de Γ , após o cálculo das integrais indicadas em (4.13), a equação integral se transforma em uma equação algébrica do tipo:

$$\begin{aligned}
 a_i w_i + b_i \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_i &= c_i V_{n_i} + d_i m_{n_i} + f_k R_{c_k} + p \quad \dots (4.14) \\
 i &= 1, npn; \quad k = 1, N_c
 \end{aligned}$$

onde a repetição de índices indica somatória, $n_p n$ é o número de pontos nodais do contorno e N_c é o número de cantos da placa.

Fazendo-se as mesmas transformações para a equação (3.102) ou (3.103), se for um ponto do canto, ou

(3.104), em caso contrário, obtêm-se outra equação algébrica referente ao ponto genérico Q do contorno:

$$a_i^! w_i + b_i^! \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_i = c_i^! V_{n_i} + d_i^! m_{n_i} + f_k^! R_{c_k} + p^! \quad \dots (4.15)$$

$$i = 1, npn ; \quad k = 1, N_c$$

Assim, após as transformações realizadas, os deslocamentos w e $\partial w / \partial n$ do ponto Q , que inicialmente estavam relacionados com todos os deslocamentos e esforços do contorno através de (3.48), (3.102), (3.103) e (3.104), dependendo de Q ser ponto do canto ou não, passaram a se relacionar apenas com os valores nodais do contorno da placa a através de (4.14) e (4.15).

Transformando-se as equações integrais referentes a todos pontos nodais em equações algébricas, obtêm-se o seguinte sistema cujo número de equações é igual a duas vezes o número de nós do contorno.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij}^! w_j + b_{ij}^! \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_j = c_{ij}^! V_{n_j} + d_{ij}^! m_{n_j} + f_k^! R_{c_k} + p_i^! \\ \dots (4.16-a) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij}^! w_j + b_{ij}^! \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_j = c_{ij}^! V_{n_j} + d_{ij}^! m_{n_j} + f_k^! R_{c_k} + p_i^! \\ \dots (4.16-b) \end{array} \right.$$

$$i, j = 1, npn ; \quad k = 1, N_c ;$$

Este sistema de equações pode ser escrito na forma matricial:

$$[H] \{w_P\} = [G] \{V_P\} + [F] \{R_C\} + \{P\} \quad \dots (4.17)$$

onde $\{R_C\}$ é o vetor das reações de canto da placa; $\{P\}$ é o vetor calculado a partir do carregamento transversal; $\{w_P\}$ e $\{V_P\}$ são, respectivamente, os vetores dos deslocamentos e esforços nos pontos nodais conforme indicado a seguir:

$$\{W_{\Gamma}\}^T = \left[w_1 \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_1 \quad w_2 \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_2 \quad \dots \quad w_{n_{pn}} \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{n_{pn}} \right] \dots \quad (4.18)$$

$$\{V_{\Gamma}\} = \left[V_{n_1} m_{n_1} \quad V_{n_2} m_{n_2} \quad \dots \quad V_{n_{n_{pn}}} m_{n_{n_{pn}}} \right] \dots \quad (4.19)$$

4.4 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

Ao sistema de equações (4.17) devem ser impostas as condições de contorno da placa. Para cada nó existem quatro variáveis: w , $\partial w/\partial n$, V_n e m_n , duas das quais são sempre conhecidas. De um modo geral, quando um deslocamento (w ou $\partial w/\partial n$) é conhecido, o esforço correspondente (V_n ou m_n) é desconhecido e vice-versa. No caso das vinculações clássicas de placas - apoio, engaste e borda livre - têm-se:

- Borda simplesmente apoiada

$$w = m_n = 0$$

$$V_n \text{ e } \frac{\partial w}{\partial n} \text{ desconhecidos}$$

- Borda engastada

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

$$V_n \text{ e } m_n \text{ desconhecidos}$$

- Borda livre

$$V_n = m_n = 0$$

$$w \text{ e } \frac{\partial w}{\partial n} \text{ desconhecidos}$$

Portanto, após a imposição das condições de contorno, têm-se em cada nó duas equações e duas incógnitas, exceto nos nós dos cantos, onde aparece também, como incógnita, a reação de canto da placa R_c .

4.5 - EQUAÇÕES MATRICIAIS PARA OS ELEMENTOS CONSTANTE E LINEAR

O sistema de equações lineares, (4.17), deverá ainda ser acrescido de equações adicionais, em função do tipo de elemento adotado, para que possa ser resolvido. A seguir, serão mostrados os procedimentos usuais para a montagem do sistema final de equações algébricas para as aproximações constante e linear dos valores de contorno.

4.5.1 - Elemento constante

Neste caso, os deslocamentos e esforços são considerados constantes ao longo de cada elemento de contorno e iguais a seu valor nodal. Nesta formulação, o ponto nodal do elemento constante é escolhido no ponto médio do elemento (ver figura 4.3). Neste caso o valor da variável está associada, na realidade, ao elemento. O nó será utilizado apenas como ponto de carregamento para se escrever as correspondentes representações do deslocamento e de sua derivada.

Na figura 4.3 está representado o elemento constante, sendo que u_i representa qualquer um dos valores nodais já descritos: w_i , $(\partial w / \partial n)_i$, V_{ni} e m_{ni} .

Considerando-se que, no ponto médio do elemento, existe apenas uma tangente ao contorno, as equações integrais para o nó genérico Q , (3.48) e (3.104), após a discretização do contorno da placa, ficam:

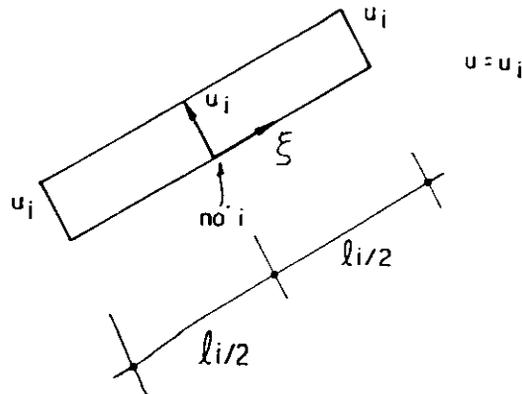


FIG. 4.3 - Elemento de contorno constante.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} w(Q) + \sum_{k=1}^m \left\{ w_k \int_{\Gamma_k} V_n^*(Q, P) d\Gamma_k(P) - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_k \int_{\Gamma_k} m_n^*(Q, P) d\Gamma_k(P) \right\} + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}^*(Q, P) w_{C_i}(P) = \sum_{k=1}^m \left\{ V_{n_k} \int_{\Gamma_k} w^*(Q, P) d\Gamma_k(P) + \right. \\
 & - m_{n_k} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial w^*}{\partial n_k}(Q, P) d\Gamma_k(P) \left. \right\} + \sum_{i=1}^{N_C} w_{C_i}^*(Q, P) R_{C_i}(P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) \quad \dots (4.20)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + \sum_{k=1}^m \left\{ w_k \int_{\Gamma_k} \frac{\partial V_n^*}{\partial n}(Q, P) d\Gamma_k(P) - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_k \int_{\Gamma_k} \frac{\partial m_n^*}{\partial n}(Q, P) d\Gamma_k(P) \right\} + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_C} \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial n}(Q, P) w_{C_i}(P) = \sum_{k=1}^m \left\{ V_{n_k} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) d\Gamma_k(P) + \right. \\
 & - m_{n_k} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial^2 w^*}{\partial n \partial n_k}(Q, P) d\Gamma_k(P) \left. \right\} + \sum_{i=1}^{N_C} \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial n}(Q, P) R_{C_i}(P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, p) d\Omega_g(p) \quad \dots (4.21)
 \end{aligned}$$

Nestas equações, além das incógnitas dos nós dos elementos, aparecem ainda as do canto, que podem ser os deslocamentos verticais, w_{c_i} , ou as reações de canto a eles associadas. Assim, o número de equações obtidas, após a aplicação das equações integrais para os nós dos elementos de todo o contorno não é suficiente e novas equações, em número igual ao número de cantos da placa, precisam ser obtidas. Para isso, define-se um nó em cada canto da placa e escrevem-se as equações integrais relativas aos deslocamentos verticais desses nós, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_c}{2\pi} w_{c_j}(Q) + \sum_{k=1}^m \left\{ w_k \int_{\Gamma_k} v_n^*(Q,P) d\Gamma_k(P) + \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_k \int_{\Gamma_k} m_n^*(Q,P) d\Gamma_k(P) \right\} + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q,P) w_{c_i}(P) = \sum_{k=1}^m \left\{ v_{nk} \int_{\Gamma_k} w^*(Q,P) d\Gamma_k(P) + \right. \\ \left. - m_{nk} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial w^*}{\partial n_k}(Q,P) d\Gamma_k(P) \right\} + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) w_{c_i}^*(Q,P) + \\ + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega_g(p) \quad \dots (4.22) \end{aligned}$$

onde $j = 1, N_c$

Assim, o número de equações se torna igual ao número de incógnitas e o sistema de equações final, em notação matricial é dado por:

$$\begin{bmatrix} \underline{H} & \underline{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{W}}_{\Gamma} \\ \underline{\tilde{W}}_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G} & \underline{F} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{V}_{\Gamma} \\ \underline{R}_C \end{Bmatrix} + \{P\} \quad \dots (4.23)$$

onde o símbolo "~" é usado para indicar sub-matrizes e sub-vetores e \underline{w}_C e \underline{R}_C são, respectivamente, os sub-vetores dos deslocamentos verticais dos cantos e das reações a eles associadas, isto é:

$$\begin{aligned} \underline{w}_c^T &= \{w_c\}^T = \left[w_{c1}, w_{c2} \dots w_{N_c} \right] \\ & \dots (4.24) \\ \underline{R}_c^T &= \{R_c\}^T = \left[R_{c1}, R_{c2} \dots R_{N_c} \right] \end{aligned}$$

Após a imposição das condições de contorno, o sistema de equações (4.23) pode ser reescrito levando-se todos os valores incógnitos para o primeiro membro, obtendo-se:

$$[A] \{x\} = \{b\} \quad \dots (4.25)$$

onde $\{x\}$ é o vetor formado pelos valores nodais desconhecidos.

Após a resolução do sistema de equações, indicado em (4.25), todos os valores nodais são conhecidos e, a partir deles, deslocamentos e curvaturas, em qualquer ponto q do domínio, podem ser obtidos a partir de (3.34) e suas expressões têm a seguinte forma, após a discretização do contorno da placa:

$$\begin{aligned} w(q) + \sum_{k=1}^m \left\{ w_k \int_{\Gamma_k} V_n^*(q, P) d\Gamma(P) - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_k \int_{\Gamma_k} m_n^*(q, P) d\Gamma(P) \right\} + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* (q, P) w_{ci}(P) = \sum_{k=1}^m \left\{ V_{nk} \int_{\Gamma_k} w^*(q, P) d\Gamma_k(P) + \right. \\ \left. - m_{nk} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial w^*}{\partial n_k}(q, P) d\Gamma_k(P) \right\} + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \\ + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) \quad \dots (4.26) \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial^2 w}{\partial m^* \partial u^*}(q) + \sum_{k=1}^m \left\{ w_k \int_{\Gamma_k} \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial m^* \partial u^*}(q, P) d\Gamma_k(P) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_k \left\{ \int_{\Gamma_k} \frac{\partial^2 m^*}{\partial m^* \partial u^*} (q, P) d\Gamma(P) \right\} + \sum_{i=1}^{N_C} \frac{\partial^2 R_{C_i}^*}{\partial m^* \partial u^*} (q, P) w_{C_i}(P) = \\
 & = \sum_{k=1}^m \left\{ V_{nk} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial^2 w^*}{\partial m^* \partial u^*} (q, P) d\Gamma_k(P) + \right. \\
 & \quad \left. - m_{nk} \int_{\Gamma_k} \frac{\partial^2}{\partial m^* \partial u^*} \left[\frac{\partial w^*(q, P)}{\partial n_k} \right] d\Gamma_k(P) \right\} + \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}(P) \frac{\partial^2 w_{C_i}^*}{\partial m^* \partial u^*} (q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial m^* \partial u^*} (q, P) d\Omega_g(p) \\
 & \qquad \qquad \qquad \dots (4.27)
 \end{aligned}$$

onde (m^*, u^*) é o sistema de coordenadas cartesianas, de origem em q , em relação ao qual serão calculadas as curvaturas. Os deslocamentos transversais e curvaturas dos pontos do domínio em função dos parâmetros nodais podem ser escritos em forma matricial:

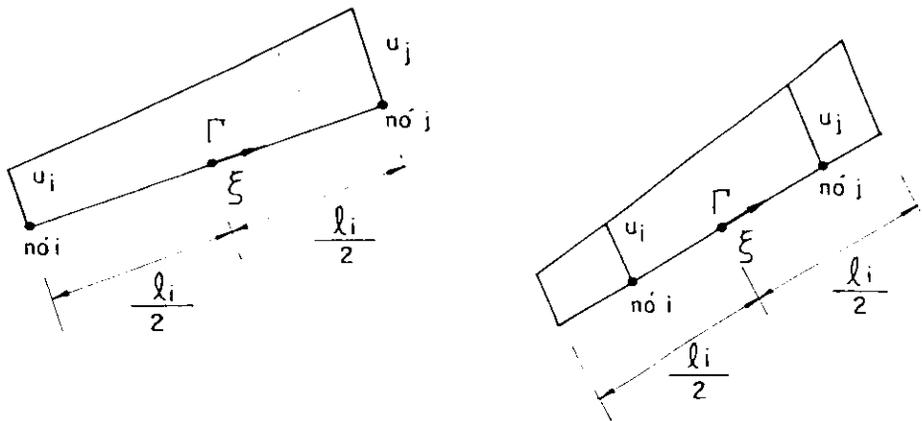
$$\{ W_D \} = - \begin{bmatrix} \underline{H}' & \underline{C}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{W}_\Gamma \\ \underline{W}_C \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{G}' & \underline{F}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{V}_\Gamma \\ \underline{R}_C \end{Bmatrix} + \{ P \} \quad (4.28)$$

onde $\{ W_D \}$ é o vetor dos deslocamentos transversais e das curvaturas dos pontos internos a partir dos quais os momentos fletores e volvente serão obtidos.

A força cortante em pontos do domínio pode ser obtida de forma análoga.

4.5.2 - Elemento Linear

Neste caso, considera-se que os deslocamentos e esforços variem linearmente ao longo de cada elemento cujos nós podem ou não estar definidos em suas extremidades. Os valores para quaisquer outros pontos sobre o elemento são obtidos a partir dos valores nodais com o uso das funções aproximadoras.



$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2} - \xi$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} + \xi$$

FIG. 4.4 - Elementos de contorno linear contínuo e descontínuo.

No elemento linear contínuo, a definição de um único nó associado a um canto de placa não permite que as descontinuidades dos esforços, quando existentes, como, por exemplo, no caso de um canto formado por um lado engastado e outro livre, sejam determinadas. Para permitir a representação destas descontinuidades, uma das possibilidades é associar a cada canto dois nós, um anterior e outro posterior e ambos com as mesmas coordenadas, o que torna independentes os valores nodais anterior e posterior ao canto (ver figura 4.5). Esse conjunto de nós associados ao canto é usualmente denominado de "nó duplo".

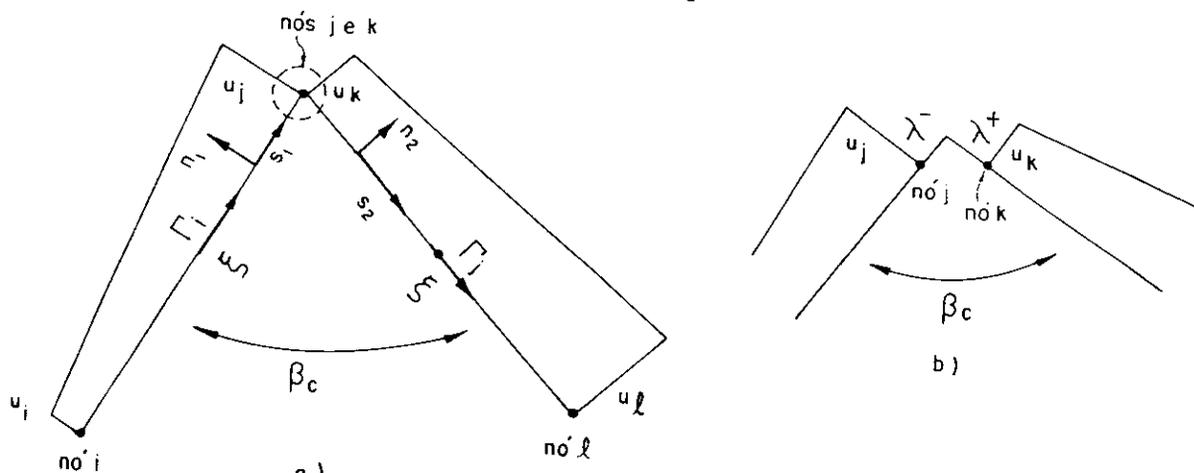


FIG. 4.5 - Nó duplo em canto de placa.

As equações integrais para pontos do contorno fora dos cantos, (3.48) e (3.104), já considerando a discretização do contorno em elementos lineares, são dadas por:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} w(Q) + \sum_{k=1}^m \left\{ w_i \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) V_n^*(Q,P) d\Gamma_k(P) + \right. \\
 & + w_j \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) V_n^*(Q,P) d\Gamma_k(P) - \left. \left(\frac{\partial w}{\partial n_k} \right)_i \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) m_n^*(Q,P) d\Gamma_k(P) + \right. \\
 & - \left. \left(\frac{\partial w}{\partial n_k} \right)_j \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) m_n^*(Q,P) d\Gamma_k(P) \right\} + \sum_{\ell=1}^{N_C} R_{C\ell}^*(Q,P) w_{C\ell}(P) = \\
 & = \sum_{k=1}^m \left\{ V_{ni} \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) w^*(Q,P) d\Gamma_k(P) + \right. \\
 & + V_{nj} \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) w^*(Q,P) d\Gamma_k(P) - m_{ni} \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_k}(Q,P) d\Gamma_k(P) + \\
 & - m_{nj} \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_k}(Q,P) d\Gamma_k(P) \left. \right\} + \sum_{\ell=1}^{N_C} w_{C\ell}^*(Q,P) R_{C\ell}(P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega_g(P) \quad \dots \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + \sum_{k=1}^m \left\{ w_i \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) \frac{\partial V_n^*}{\partial n}(Q,P) d\Gamma_k(P) + \right. \\
 & + w_j \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) \frac{\partial V_n^*}{\partial n}(Q,P) d\Gamma_k(P) - \left. \left(\frac{\partial w}{\partial n_k} \right)_i \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) \frac{\partial m_n^*}{\partial n}(Q,P) d\Gamma_k(P) + \right. \\
 & - \left. \left(\frac{\partial w}{\partial n_k} \right)_j \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) \frac{\partial m_n^*}{\partial n}(Q,P) d\Gamma_k(P) \right\} + \sum_{\ell=1}^{N_C} \frac{\partial R_{C\ell}^*}{\partial n}(Q,P) w_{C\ell}(P) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^m \left\{ V_{ni} \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) d\Gamma_k(P) + \right. \\
 &+ V_{nj} \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) d\Gamma_k(P) - m_{ni} \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial n \partial n_k}(Q, P) d\Gamma_k(P) + \\
 &- m_{nj} \int_{\Gamma_k} \left. \phi_2(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial n \partial n_k}(Q, P) d\Gamma_k(P) \right\} + \sum_{\ell=1}^{N_C} R_{C\ell}(P) \frac{\partial w_{C\ell}^*}{\partial n}(Q, P) + \\
 &+ \int_{\Omega_g} g(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) d\Omega_g(P) \quad \dots \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

onde i e j são os nós associados ao elemento de contorno genérico K , e n_k é o vetor normal a este elemento.

Para pontos do canto, por exemplo, para o nó j da figura 4.5, as equações integrais correspondentes, (3.48) e (3.102), são expressas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\beta_C}{2\pi} w(Q) + \sum_{k=1}^m \left\{ w_i \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) V_n^*(Q, P) d\Gamma_k(P) + \right. \\
 &+ w_j \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) V_n^*(Q, P) d\Gamma_k(P) - \left. \left(\frac{\partial w}{\partial n_k} \right)_i \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) m_n^*(Q, P) d\Gamma_k(P) + \right. \\
 &- \left. \left(\frac{\partial w}{\partial n_k} \right)_j \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) m_n^*(Q, P) d\Gamma_k(P) \right\} + \sum_{\ell=1}^{N_C} R_{C\ell}^*(Q, P) w_{C\ell}(P) = \\
 &= \sum_{k=1}^m \left\{ V_{ni} \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) w^*(Q, P) d\Gamma_k(P) + V_{nj} \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) w^*(Q, P) d\Gamma_k(P) + \right. \\
 &- m_{ni} \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_k}(Q, P) d\Gamma_k(P) - m_{nj} \int_{\Gamma_k} \left. \phi_2(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_k}(Q, P) d\Gamma_k(P) \right\} + \\
 &+ \sum_{\ell=1}^{N_C} w_{C\ell}^*(Q, P) R_{C\ell}(P) + \int_{\Omega_g} g(P) w^*(Q, P) d\Omega_g(P) \quad \dots \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \frac{\beta}{2\pi} \frac{\partial W}{\partial n_1}(Q) + \frac{\nu}{2\pi} \operatorname{sen} \beta_c \frac{\partial W}{\partial n_2}(Q) + \sum_{k=1}^m \left\{ w_i \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1}(Q, P) d\Gamma_k(P) + \right. \\
 & + w_j \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1}(Q, P) d\Gamma_k(P) - \left. \left(\frac{\partial w}{\partial n_k} \right)_i \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1}(Q, P) d\Gamma_k(P) + \right. \\
 & - \left. \left(\frac{\partial w}{\partial n_k} \right)_j \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1}(Q, P) d\Gamma_k(P) \right\} + \sum_{\ell=1}^{N_c} \frac{\partial R_{C\ell}^*}{\partial n_1}(Q, P) w_{C\ell}(P) = \\
 & = \sum_{k=1}^m \left\{ V_{n_i} \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q, P) d\Gamma_k(P) + V_{n_j} \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q, P) d\Gamma_k(P) + \right. \\
 & - m_{n_i} \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_k \partial n_1}(Q, P) d\Gamma_k(P) + \\
 & - m_{n_j} \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial n_k \partial n_1}(Q, P) d\Gamma_k(P) \left. \right\} + \sum_{\ell=1}^{N_c} R_{C\ell}(P) \frac{w_{C\ell}^*}{\partial n_1}(Q, P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q, p) d\Omega_g(p) \quad \dots \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

Escrevendo-se as equações integrais para todos os pontos do contorno obtém-se o sistema de equações, já definido em (4.17), cujo número de incógnitas, após a imposição das condições de contorno, pode ser superior ao número de equações. Estas incógnitas adicionais, quando existentes, são as reações de canto da placa. Uma das alternativas para eliminá-las é escrevê-las, aproximadamente, em função dos valores nodais dos nós vizinhos.

Considere-se o canto da placa, já dividida em elementos de contorno, da figura 4.6 onde s_a e s_p são eixos de coordenadas lineares de origens nos nós h e i , respectivamente.

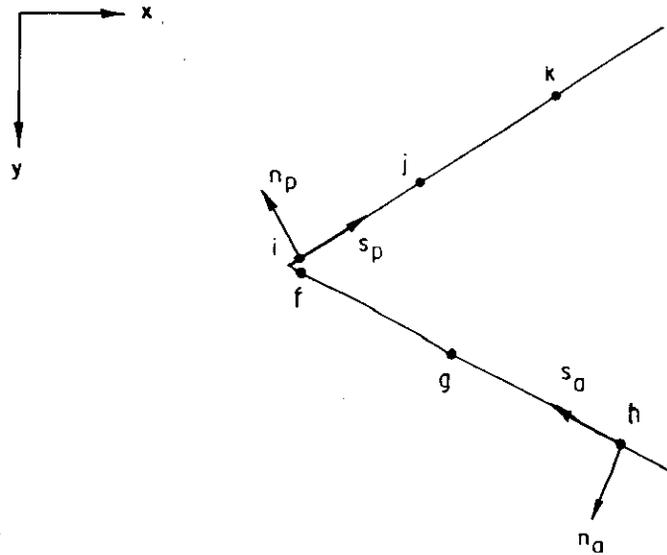


FIG. 4.6 - Nós vizinhos ao canto da placa.

A derivada no sentido normal ao contorno, nas proximidades do canto, pode ser aproximada por uma função quadrática, ou seja, para o lado posterior ao canto pode-se escrever:

$$\frac{\partial w}{\partial n_p} = K_1 s_p^2 + K_2 s_p + K_3 \quad \dots (4.33)$$

As constantes K_1 , K_2 e K_3 podem ser escritas em função dos parâmetros nodais $(\partial w / \partial n)$ dos nós i , j e k . Para isso impõe-se que:

$$\text{- para } s_p = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial n_p} = \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_i \quad \dots (4.34)$$

$$\text{- para } s_p = s_j \quad \frac{\partial w}{\partial n_p} = \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_j \quad \dots (4.35)$$

$$\text{- para } s_p = s_k \quad \frac{\partial w}{\partial n_p} = \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_k \quad \dots (4.36)$$

obtendo-se os seguintes valores para as constantes K_1 , K_2 e K_3 :

$$K_1 = \frac{\left[\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_j - \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_i\right] s_k - \left[\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_k - \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_i\right] s_j}{s_j s_k (s_j - s_k)} \quad \dots (4.37)$$

$$K_2 = \frac{[(\frac{\partial w}{\partial n})_k - (\frac{\partial w}{\partial n})_j] s_j^2 - [(\frac{\partial w}{\partial n})_j - (\frac{\partial w}{\partial n})_i] s_k^2}{s_j s_k (s_j - s_k)} \dots (4.38)$$

$$K_3 = (\frac{\partial w}{\partial n})_i \dots (4.39)$$

Pode-se, analogamente, escrever para o lado anterior ao canto:

$$\frac{\partial w}{\partial n_a} = K_5 s_a^2 + K_6 s_a + K_7 \dots (4.40)$$

onde:

$$K_5 = \frac{[(\frac{\partial w}{\partial n})_g - (\frac{\partial w}{\partial n})_h] s_f - [(\frac{\partial w}{\partial n})_f - (\frac{\partial w}{\partial n})_h] s_g}{s_g s_f (s_g - s_f)} \dots (4.41)$$

$$K_6 = \frac{[(\frac{\partial w}{\partial n})_f - (\frac{\partial w}{\partial n})_h] s_g^2 - [(\frac{\partial w}{\partial n})_g - (\frac{\partial w}{\partial n})_h] s_f^2}{s_g s_f (s_g - s_f)} \dots (4.42)$$

$$K_7 = (\frac{\partial w}{\partial n})_h \dots (4.43)$$

A parcela da equação integral correspondente à reação de canto, denominada aqui de V, escrita para o nó duplo indicado na figura 4.6, é dada por:

$$V = -D(1-\nu) \left[(\frac{\partial^2 w}{\partial n_p \partial s_p})_i - (\frac{\partial^2 w}{\partial n_a \partial s_a})_f \right] w_c^*(Q,P) \dots (4.44)$$

As derivadas indicadas em (4.44) podem ser obtidas a partir de (4.33) e (4.40) e, portanto, pode-se escrever:

$$V = -D(1-\nu) \left[K_2 - 2K_5 s_f - K_6 \right] w_c^*(Q,P) \dots (4.45)$$

Substituindo-se, em (4.45), K_2 e K_6 por suas expressões, (4.38) e (4.42), obtém-se:

$$V = -D(1-\nu) \left[K_1^* (\frac{\partial w}{\partial n})_i + K^* (\frac{\partial w}{\partial n})_j + K_3^* (\frac{\partial w}{\partial n})_k + K_4^* (\frac{\partial w}{\partial n})_f + \right]$$

onde:

$$K_1^* = - \frac{s_k + s_j}{s_k s_j} \quad \dots (4.47)$$

$$K_2^* = - \frac{s_k}{s_j (s_j - s_k)} \quad \dots (4.48)$$

$$K_3^* = \frac{s_j}{s_k (s_j - s_k)} \quad \dots (4.49)$$

$$K_4^* = - \frac{s_g - 2s_f}{s_f (s_g - s_f)} \quad \dots (4.50)$$

$$K_5^* = - \frac{s_f}{s_g (s_g - s_f)} \quad \dots (4.51)$$

$$K_6^* = \frac{s_g - s_f}{s_g s_f} \quad \dots (4.52)$$

Assim, após a substituição, nas equações integrais, das parcelas relativas à contribuição das reações de canto por suas expressões em função das derivadas normais a seus lados, obtidas a partir de (4.46), o número de incógnitas fica igual ao de equações e o sistema pode ser escrito, matricialmente, da seguinte forma:

$$[H^*] \{W_T\} = [G] \{V_T\} + \{P\} \quad \dots (4.53)$$

A imposição das condições de contorno e a resolução do sistema final de equações, bem como a obtenção de deslocamentos e curvaturas para pontos do domínio, são feitas de forma análoga à já mostrada para o elemento constante (ver expressões (4.25) e (4.28)).

Uma outra alternativa para a montagem do sistema de equações, sem o uso das expressões algébricas de R_C , e que pode ser adotada, consiste na análise individual das condições de contorno de cada canto. Para exemplificar examina-se agora o caso de placa com dois lados adjacentes apoiados. Neste caso a reação de canto é nula quando o ângu

lo do canto é diferente de $\pi/2$ e $3\pi/2$ e é diferente de zero para os demais valores, acontecendo o contrário com a força cortante equivalente, V_n . Assim, no canto simplesmente apoiado, o número de incógnitas é igual ao número de equações obtidas a partir de (3.48) e (3.92), o que torna, neste canto, desnecessário escrever R_c , aproximadamente, em função dos valores nodais dos nós vizinhos.

4.6 - SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES: FORMULAÇÃO ALTERNATIVA

No item 4.3 e nos seguintes foi apresentada a formulação usual do Método dos Elementos de Contorno, que consiste em escrever, para cada nó, duas equações integrais, referentes ao deslocamento transversal e sua derivada na direção normal ao contorno. O emprego de duas equações para cada nó visa estabelecer um número de equações igual ao de incógnitas nodais.

Uma alternativa para esse procedimento é utilizar apenas a representação integral do deslocamento transversal, (3.48), aplicando-a um número suficiente de vezes, tal que o sistema de equações obtido possa ser resolvido.

Considere-se a figura 4.7, onde está indicada uma placa cujo contorno já está discretizado. Para cada nó definido no contorno escreve-se a equação algébrica correspondente à representação integral do deslocamento transversal deste ponto, obtendo-se, portanto, um sistema de equações algébricas cujo número de incógnitas é igual ao dobro do número de equações. Para completar o sistema escrevem-se equações adicionais relativas à representação integral dos deslocamentos transversais de pontos externos. Estas equações adicionais devem ser em número igual ao número de pontos nodais.

A equação integral em função dos carregamentos transversais g e g^* , (3.32), utilizada anteriormente para

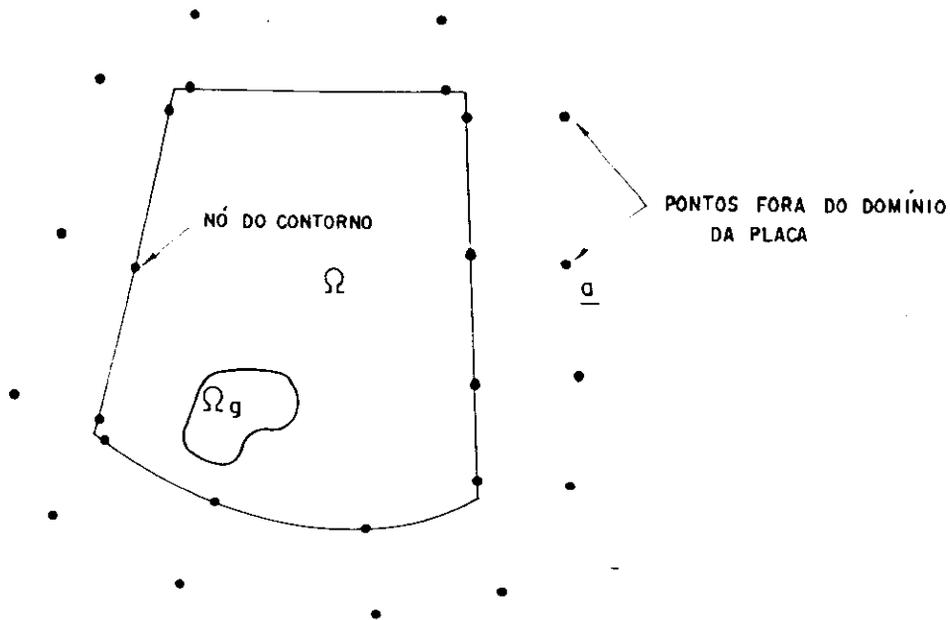


FIG. 4.7 - Placa dividida em elementos de contorno com pontos definidos fora de seu domínio.

se escrever os deslocamentos de pontos internos, é agora empregada para um ponto genérico externo \underline{a} (ver figura 4.7).

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} g^*(a,p) w(a) d\Omega(p) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(a,P) w(P) - m_n^*(a,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}^*(a,P) w_{C_i}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(a,P) + \right. \\
 & \left. - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(a,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}(P) w_{C_i}^*(a,P) + \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(a,p) d\Omega_g(p) \quad \dots (4.54)
 \end{aligned}$$

Considerando-se que o carregamento g^* é uma carga unitária representada pela função Delta de Dirac, (2.76), (2.77) e (2.78), e, considerando-se ainda que o ponto \underline{a} está fora do domínio da placa, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} g^*(a,p) w(p) d\Omega(p) = 0 \quad \dots (4.55)$$

Assim, a equação integral correspondente ao ponto a, fora do domínio da placa, fica dada por:

$$\int_{\Gamma} \left[V_n^*(a, P) w(P) - m_n^*(a, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}^*(a, P) w_{C_i}(P) =$$

$$= \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(a, P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(a, P) \right] d\Gamma(P) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}(P) w_{C_i}^*(a, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(a, p) d\Omega_g(p) \dots (4.56)$$

Substituindo-se, nessa equação, os deslocamentos e esforços do contorno por suas aproximações em função dos parâmetros nodais, obtém-se uma equação algébrica semelhante às obtidas anteriormente. Por exemplo, para o elemento linear, essa equação fica:

$$\sum_{k=1}^n \left\{ w_i \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) V_n^*(a, P) d\Gamma_k(P) + w_j \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) V_n^*(a, P) d\Gamma_k(P) + \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial w}{\partial n_k} \right)_i \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) m_n^*(a, P) d\Gamma_k(P) - \left(\frac{\partial w}{\partial n_k} \right)_j \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) m_n^*(a, P) d\Gamma_k(P) \right\} +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{N_C} R_{C_\ell}^*(a, P) w_{C_\ell}(P) = \sum_{k=1}^m \left\{ V_{n_i} \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) w^*(a, P) d\Gamma_k(P) + \right.$$

$$V_{n_j} \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) w^*(a, P) d\Gamma_k(P) - m_{n_i} \int_{\Gamma_k} \phi_1(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_k}(a, P) d\Gamma_k(P) +$$

$$\left. - m_{n_j} \int_{\Gamma_k} \phi_2(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_k}(a, P) d\Gamma_k(P) \right\} + \sum_{\ell=1}^{N_C} R_{C_\ell}(P) w_{C_\ell}^*(a, p) +$$

$$+ \int_{\Omega_g} g(p) w^*(a, p) d\Omega_g(p) \dots (4.57)$$

Pode-se notar que a equação (4.57), embora semelhante à equação (4.31), não se trata da mesma equação, pois elas foram escritas para pontos distintos.

Portanto, escrevendo-se a equação (4.31) para todos os nós do contorno e (4.57) para um igual número de pontos fora do domínio da placa, obtém-se um sistema de equações semelhante ao definido em (4.17). Após a eliminação das incógnitas adicionais dos cantos, conforme explicado em (4.5.2), obtém-se um sistema de equações lineares análogo ao dado por (4.53). Os deslocamentos e curvaturas para pontos internos são obtidos de forma semelhante à mostrada anteriormente para o elemento constante (ver expressão (4.28)).

4.7 - MONTAGEM DAS MATRIZES [H] E [G]

4.7.1 - Integrais numéricas e singulares

Nos itens anteriores, foi mostrada a obtenção do sistema de equações lineares, (4.23) e (4.53), para os elementos constante e linear, que relaciona esforços e deslocamentos dos nós do contorno. Embora as matrizes envolvidas nestas equações estejam bem definidas, a determinação de cada termo precisa ser analisada.

Para se obter esses valores deve-se calcular, para cada elemento de contorno, integrais do tipo:

$$I = \int_{\Gamma_k} \phi(P)\phi^*(Q,P) d\Gamma_k(P) \quad \dots (4.58)$$

onde $\phi(P)$ é a função aproximadora dos deslocamentos e esforços no contorno e $\phi^*(Q,P)$ é a solução fundamental. Nesta integração podem ocorrer duas situações distintas. Considere-se a figura 4.8, onde estão indicados o elemento de contorno li-

near contínuo, K , sobre o qual se está calculando a integral, e as possíveis posições do ponto de carregamento, coincidente ou não com um dos nós do elemento.

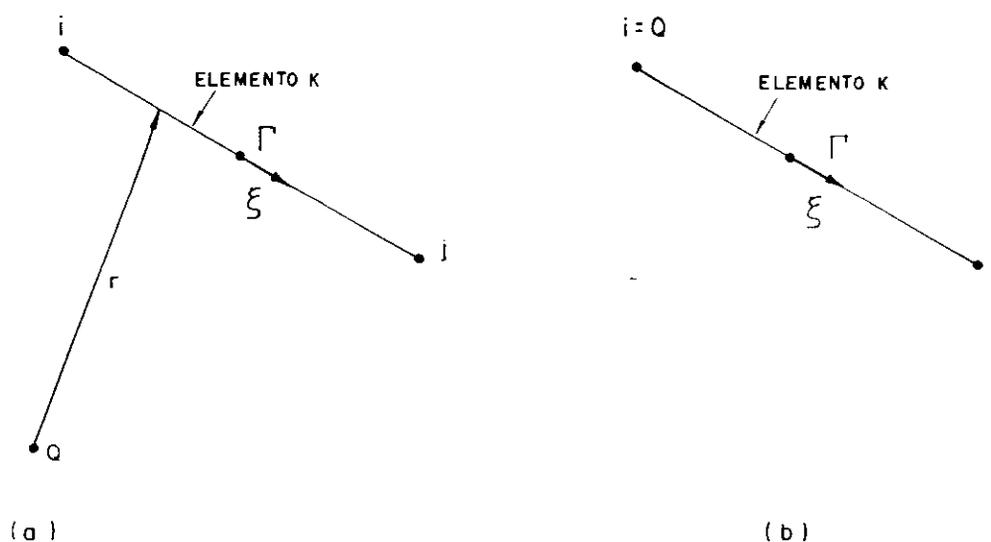


FIG. 4.8 - Posições possíveis para o ponto Q:

- a) fora do elemento;
- b) coincidente com um dos nós do elemento.

Para o caso do ponto Q não pertencer ao elemento K (figura 4.3.a), não existem singularidades e, portanto, as integrais podem ser calculadas, numericamente ou não, no sentido usual de integração. O mesmo não ocorre quando o ponto P coincide com um dos nós do elemento, pois aparecem singularidades do tipo $1/r$ e $1/r^2$ e, apenas no sentido de valor principal de Cauchy, essas integrais podem ser calculadas. Para os dois casos, a integral pode ser calculada analítica ou numericamente; entretanto, do ponto de vista da automatização de cálculo, é conveniente que as integrais não singulares sejam calculadas numericamente e as singulares, analiticamente. O cálculo numérico geralmente é feito usando-se Quadratura de Gauss [42].

4.7.2 - Propriedades da matriz [H]

Considere-se a placa, já dividida em elementos de contorno, indicada na figura 4.9.

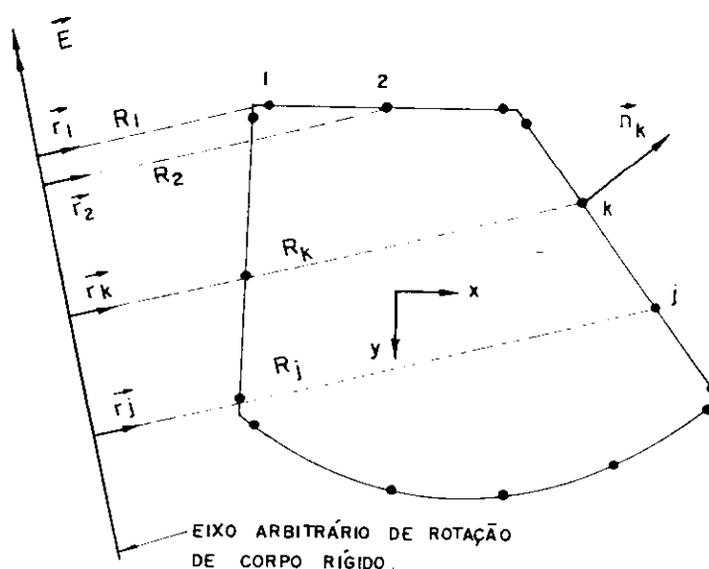


FIG. 4.9 - Placa com carregamento transversal nulo.

Admitindo-se que o carregamento transversal é nulo, todos os esforços do contorno também o são e, portanto, o sistema (4.53) pode ser reescrito:

$$[H] \{w_T\} = \{0\} \quad \dots (4.59)$$

Este sistema de equações admite soluções não triviais, correspondentes aos movimentos de corpo rígido, isto é, deslocamento vertical e rotação em torno de um eixo arbitrário.

O deslocamento de corpo rígido w_0 , correspondente ao movimento vertical é dado pelo seguinte vetor:

$$\{w_T\}^T = [w_0 \ 0 \ w_0 \ 0 \ w_0 \ 0 \ \dots \ w_0 \ 0] \quad \dots (4.60)$$

que, uma vez substituído no sistema (4.59) permite que se

escreva a seguinte propriedade:

$$\sum_{j=1}^{n/2} h_{i,2j-1} = 0 \quad \dots (4.61)$$

Para se definir a rotação de corpo rígido considere-se a figura 4.9, onde \vec{E} representa um eixo arbitrário de rotação, R_k é a distância do nó genérico, K , a esse eixo e \vec{r}_k é o versor associado a R_k .

Considerando-se um giro de corpo rígido α_{cr} no sentido indicado pelo eixo \vec{E} , o vetor deslocamento correspondente é dado por:

$$\{w_{\Gamma}\}^T = \alpha_{cr} \left[R_1 \vec{n}_1 \vec{r}_1 \quad R_2 \vec{n}_2 \vec{r}_2 \quad \dots \quad R_k \vec{n}_k \vec{r}_k \quad \dots \quad R_n \vec{n}_n \vec{r}_n \right] \quad \dots (4.62)$$

que, uma vez substituído em (4.59), fornece a seguinte propriedade para os elementos da matriz [H]:

$$\sum_{j=1}^{n/2} (h_{i,2j-1} R_j + h_{i,2j} \vec{n}_j \cdot \vec{r}_j) = 0 \quad \dots (4.63)$$

Essas propriedades podem ser utilizadas tanto para conferir a matriz [H] como para obter os elementos da diagonal principal, correspondentes às integrais com singularidades, quando o cálculo das integrais sobre os elementos adjacentes for evitado.

4.8 - CONDIÇÕES DE CONTORNO ADICIONAIS NOS CANTOS DE PLACA

Devido à utilização de nós duplos, a imposição das condições de contorno destes nós pode conduzir, em certos casos, a singularidades na matriz [A] do sistema de equações (4.25). Portanto, é necessário determinar uma con-

dição de contorno adicional que, aplicada a esses cantos, elimine tais singularidades. Essa condição de contorno é obtida partindo-se da hipótese de unicidade do tensor de tensões em um meio contínuo qualquer.

Considerem-se o canto de placa e os respectivos momentos fletores e volventes, anteriores e posteriores ao canto, indicados na figura 4.10.

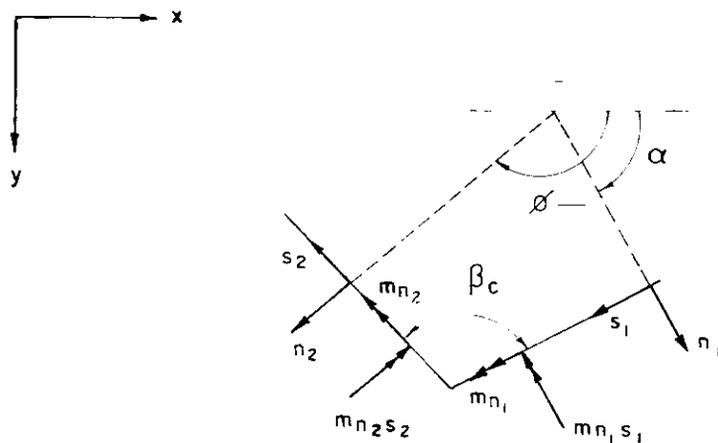


FIG. 4.10 - Canto de placa com os momentos fletores e volventes aplicados.

Chamando-se de α o giro relativo entre os sistemas de coordenadas (x,y) e (n_1,s_1) , pode-se escrever:

$$m_{n_1} = m_x \cos^2\alpha + m_y \sin^2\alpha + 2m_{xy} \sin\alpha \cos\alpha \quad \dots (4.64)$$

$$m_{n_1s_1} = m_{xy} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (m_y - m_x) \sin\alpha \cos\alpha \quad \dots (4.65)$$

Analogamente, chamando de ϕ o giro relativo entre os sistemas (x,y) e (n_2,s_2) , obtêm-se:

$$m_{n_2} = m_x \cos^2\phi + m_y \sin^2\phi + 2m_{xy} \sin\phi \cos\phi \quad \dots (4.66)$$

$$m_{n_2s_2} = m_{xy} (\cos^2\phi - \sin^2\phi) + (m_y - m_x) \sin\phi \cos\phi \quad \dots (4.67)$$

Colocando-se as expressões anteriores em notação matricial, deduz-se:

$$\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos^2\phi & \sin^2\phi & 2\sin\phi\cos\phi \\ -\sin\phi\cos\phi & \sin\phi\cos\phi & \cos^2\phi - \sin^2\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{n_1} \\ m_{n_1}s_1 \\ m_{n_2} \\ m_{n_2}s_2 \end{Bmatrix} \dots (4.68)$$

Para que esse sistema de equações tenha uma única solução é necessário que as características da matriz completa e incompleta sejam iguais a três; portanto, a seguinte relação deve ser obedecida:

$$\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha & m_{n_1} \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & m_{n_1}s_1 \\ \cos^2\phi & \sin^2\phi & 2\sin\phi\cos\phi & m_{n_2} \\ -\sin\phi\cos\phi & \sin\phi\cos\phi & \cos^2\phi - \sin^2\phi & m_{n_2}s_2 \end{vmatrix} = 0 \dots (4.69)$$

o que resulta em:

$$-2\sin^2(\phi - \alpha) (m_{n_2}s_2 + m_{n_1}s_1) + (m_{n_2} - m_{n_1}) \sin 2(\phi - \alpha) = 0 \dots (4.70)$$

como:

$$\phi - \alpha = \pi - \beta_c \dots (4.71)$$

a expressão (4.70) pode ser reescrita:

$$(m_{n_1}s_1 + m_{n_2}s_2) \operatorname{sen}\beta_c + (m_{n_2} - m_{n_1}) \operatorname{cos}\beta_c = 0 \quad \dots (4.72)$$

que é a equação adicional a ser utilizada, quando necessário, nos cantos da placa para eliminar possíveis singularidades.

4.9 - AVALIAÇÃO NUMÉRICA DA FORMULAÇÃO PROPOSTA

As formulações desenvolvidas nos itens anteriores são utilizadas na análise de diversos exemplos de placas usuais e os resultados são comparados, quando possível, com os obtidos a partir de soluções exatas e, caso contrário, com os obtidos por outros processos numéricos, como, por exemplo, diferenças finitas e métodos dos elementos finitos.

Em diversos exemplos analisados o elemento linear se mostrou mais eficiente que o constante. Os exemplos aqui apresentados foram estudados com o elemento linear.

Em todos os exemplos analisados, a contribuição do carregamento distribuído é calculada a partir das integrais sobre o seu contorno, utilizando-se, para isso, as fórmulas desenvolvidas no item 3.4.

Na comparação dos resultados obtidos pelas formulações propostas com os obtidos por outros métodos numéricos foi adotado o seguinte critério: em primeiro lugar, procurou-se comparar os resultados obtidos com a solução exata do problema recorrendo-se, para isto, às soluções analíticas de diversos problemas, que se encontram em TIMOSHENKO^[43]. Na ausência destas, os resultados foram comparados com as tabelas organizadas por BARES^[44], cujos resultados, em sua grande maioria, foram obtidos pelo método das diferenças finitas. Entretanto, para alguns exemplos,

os resultados fornecidos pelas tabelas de Bares são incompletos e, nestes casos, os resultados fornecidos pelas formulações propostas foram comparados com os obtidos pelo método dos elementos finitos utilizando-se, para isto, malhas bem refinadas que, aliadas à precisão do elemento finito triangular de 18 parâmetros nodais, forneceram resultados mais confiáveis para esta comparação. O método dos elementos finitos também foi utilizado nos exemplos para os quais não se dispunham de outros resultados para comparação.

4.9.1 - Análise de placas utilizando-se as equações integrais de w e $\partial w/\partial m$

São apresentados a seguir vários exemplos analisados pela formulação usual do método dos elementos de contorno, ou seja, utilizando-se as representações integrais de w e $\partial w/\partial m$ para cada ponto do contorno. Em todos os exemplos apresentados, são utilizadas malhas relativamente finas, garantindo uma boa precisão do método, embora em vários casos analisados, malhas mais simples levaram a resultados aceitáveis para problemas usuais da engenharia civil.

4.9.1.1 - Exemplo 1: Placa quadrada uniformemente carregada

Neste exemplo, analisa-se uma placa quadrada simplesmente apoiada no contorno com carregamento uniformemente distribuído, conforme indica a figura 4.11. Nas figuras 4.12 a 4.15, estão representadas, respectivamente, as variações do deslocamento transversal e dos momentos fletores m_x e m_y ao longo do eixo de simetria e a força cortante equivalente ao longo do lado da placa. Os valores obtidos com esta formulação, quando comparados com a solução exata^[43], apresentaram erros inferiores a 0,5% para o des

locamento e momentos fletores máximos, e erro inferior a 1% para a cortante equivalente máxima. Tais resultados não se modificaram consideravelmente para malhas mais refinadas. Com relação à reação de canto da placa, o valor obtido, $0,06534 qa^2$, é 0,52% superior ao valor exato.

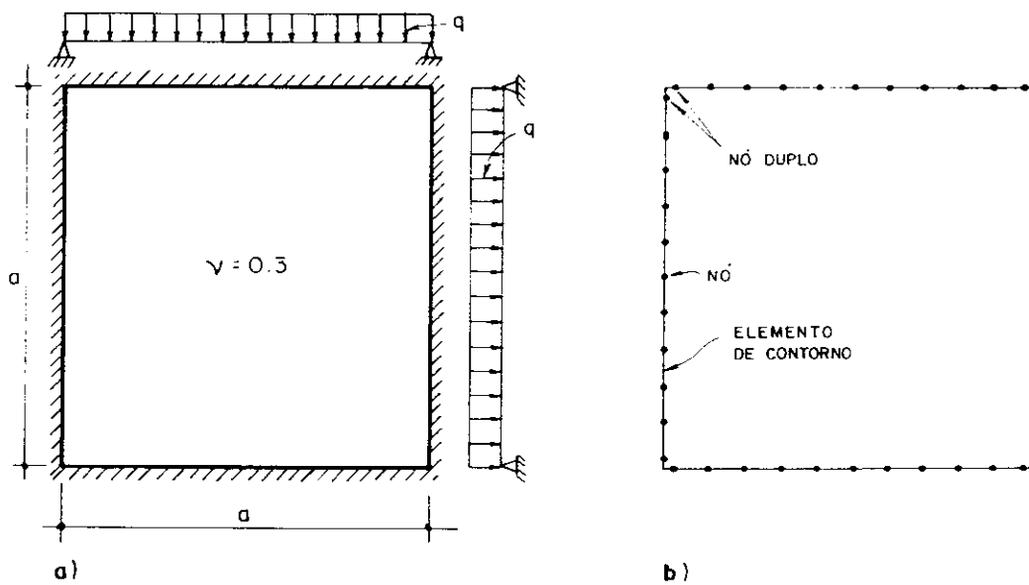


FIG. 4.11 - a) placa simplesmente apoiada no contorno;
b) partição adotada para análise.

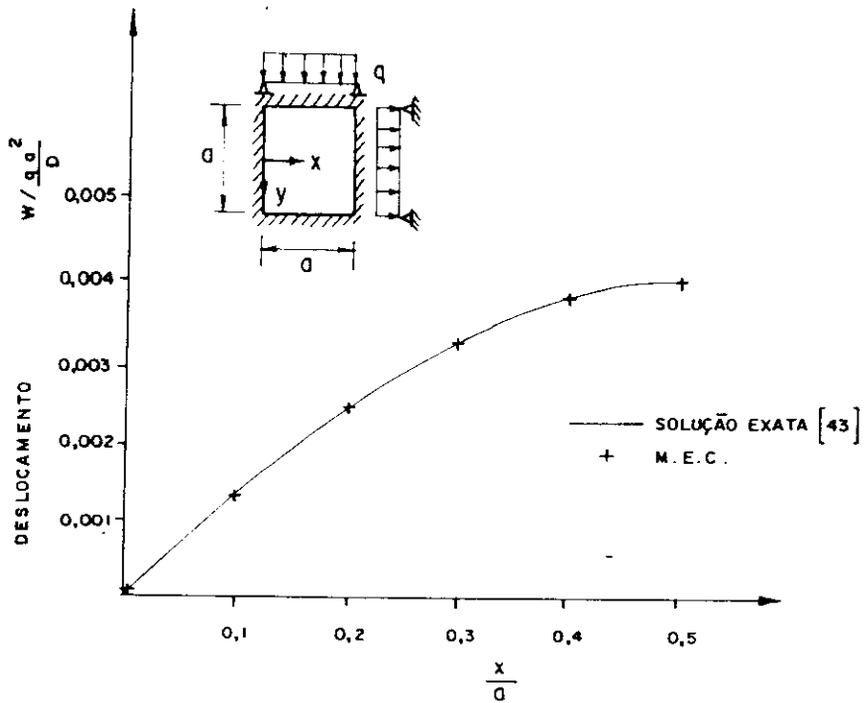


FIG. 4.12 - Deslocamento transversal ao longo do eixo de simetria.

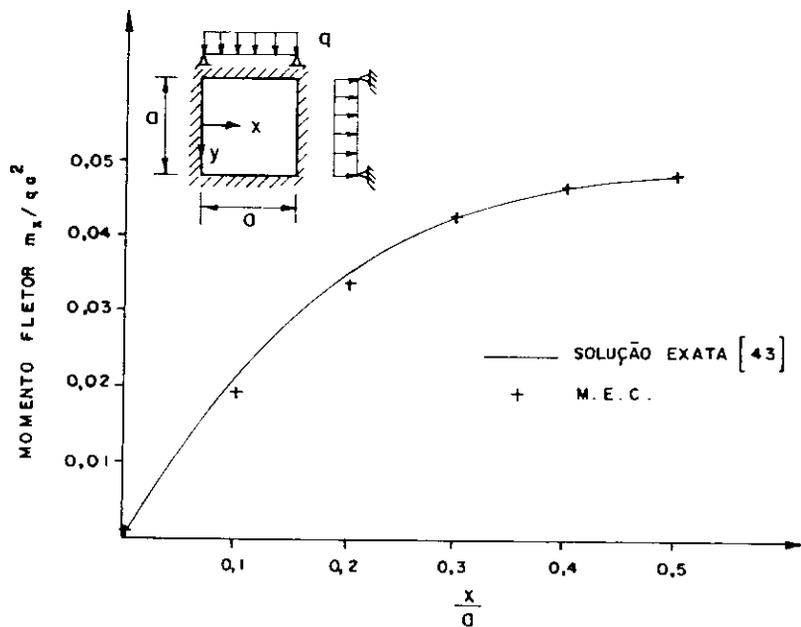


FIG. 4.13 - Momento fletor m_x ao longo do eixo de simetria.

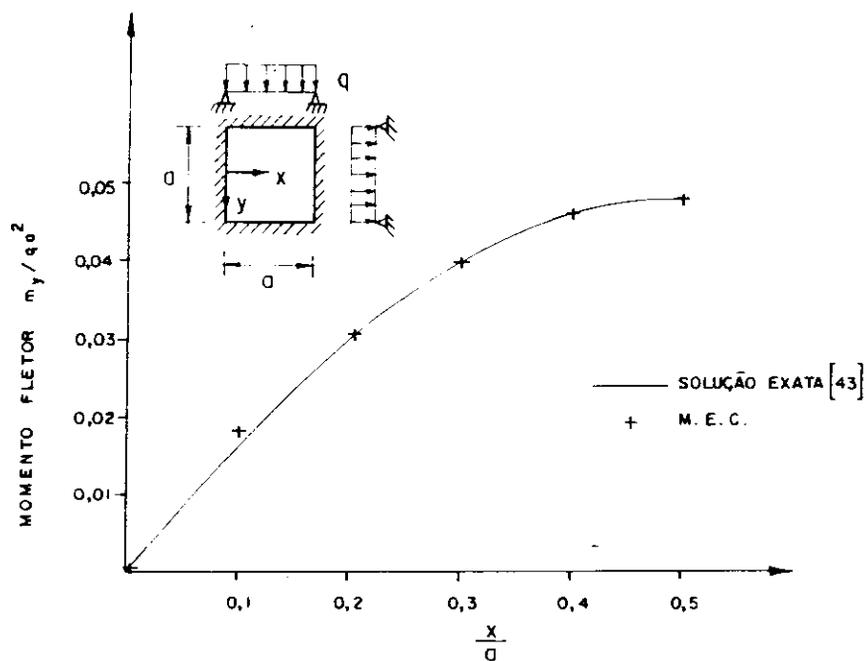


FIG: 4.14 - Momento fletor m_y ao longo do eixo de simetria.

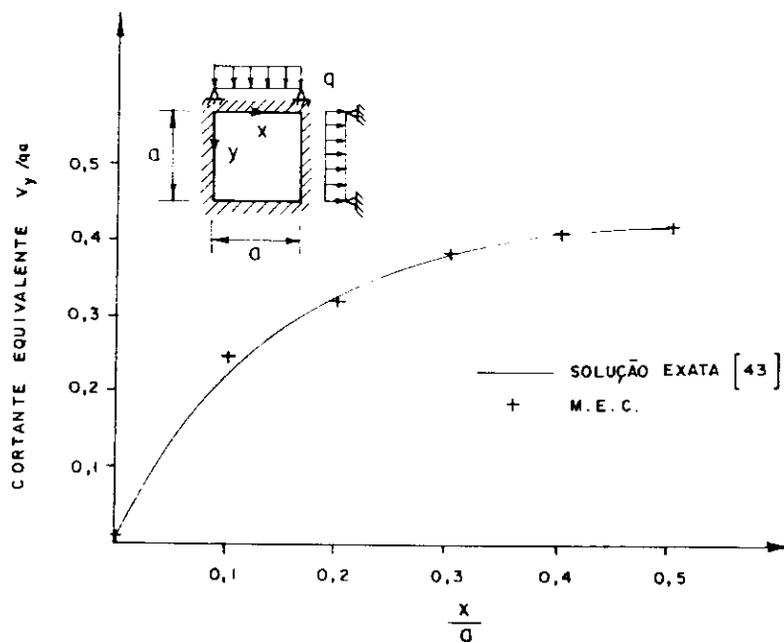


FIG. 4.15 - Cortante equivalente V_y ao longo do eixo x.

A mesma precisão de resultados é obtida na análise da placa quadrada engastada no contorno e uniformemente carregada (ver figura 4.16). Embora a solução exata do problema permita que se obtenha resultados para qualquer ponto da placa, aqui os resultados numéricos são comparados apenas com os máximos valores teóricos do deslocamento e esforços^[43], que ocorrem no centro da placa e no meio do lado. Neste estudo o contorno foi dividido em 40 elementos iguais e, na tabela 1, estão indicados os valores obtidos para os pontos A e B da figura 4.16 juntamente com os valores exatos.

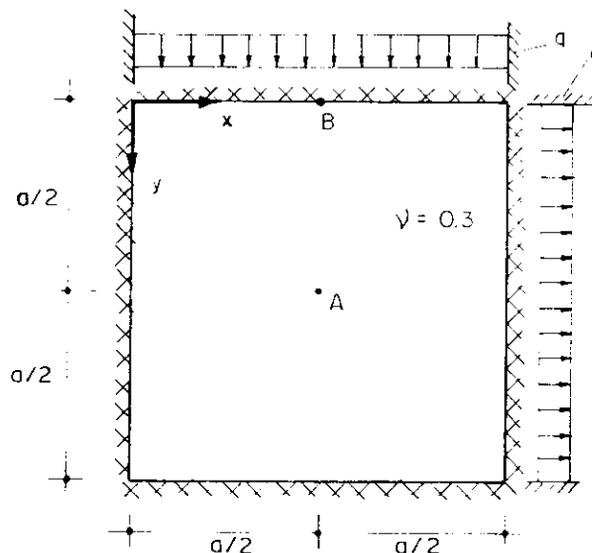


FIG. 4.16 - Placa quadrada engastada no contorno e uniformemente carregada.

A existência de condições de contorno diferentes para os diversos lados da placa não resultou em variação significativa da precisão dos resultados obtidos com a formulação proposta. Para a placa quadrada engastada em dois lados e apoiada nos outros dois (ver figura 4.17), os resultados obtidos com a divisão do contorno em 40 elementos iguais apresentaram diferenças da ordem de 2% quando comparados com os obtidos a partir da solução exata. Es-

TABELA 1 - Deslocamentos e esforços para a placa quadrada engastada no contorno obtidos pelo método dos elementos de contorno e pela solução da equação diferencial [43].

PONTO	w		m _x		m _y	
	MEC	TIMOSHENKO [43]	MEC	TIMOSHENKO [43]	MEC	TIMOSHENKO [43]
A	0,00126	0,00126	0,0229	0,0231	0,0229	0,0231
B	0	0	-0,0155	-0,0154	-0,0518	-0,0513
	Fator: qa ⁴ /D		Fator: qa ²		Fator: qa ²	

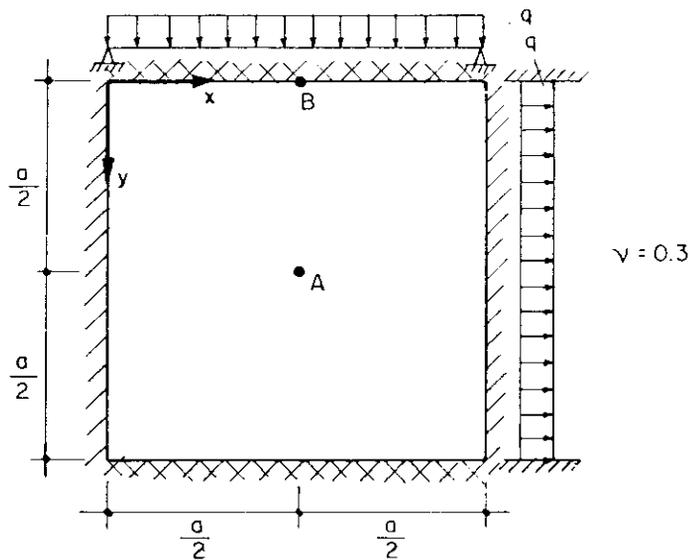


FIG. 4.17 - Placa quadrada engastada em dois lados opostos e apoiados nos outros dois.

TABELA 2 - Deslocamentos e esforços, analíticos^[43] e numé-
ricos, para a placa indicada na figura 4.17.

PONTO	w		m _x		m _y	
	MEC	TIMOSHENKO [43]	MEC	TIMOSHENKO [43]	MEC	TIMOSHENKO [43]
B	0	0	-0,0210	-0,0209	-0,0701	-0,0697
A	0,00191	0,00192	0,0237	0,0244	0,0338	0,0332

4.9.1.2 - Exemplo 2 - Placa quadrada com carregamento linearmente distribuído.

Em diversas estruturas como, por exemplo, silos e reservatórios, freqüentemente são utilizadas placas submetidas a carregamentos linearmente distribuídos, tornando este tipo de carga importante no estudo aqui desenvolvido. Na formulação proposta, a contribuição desse carregamento é calculada a partir de integrais sobre seu contorno.

Considere-se, inicialmente, uma placa simplesmente apoiada no contorno e submetida a carregamento transversal linearmente distribuído, conforme indica a figura 4.18.

As variações do deslocamento transversal e dos momentos fletores, ao longo do eixo de simetria e da força cortante equivalente ao longo do lado, estão representadas nas figuras 4.19 a 4.22. Nos pontos de máximos valores, as diferenças entre os resultados obtidos pela formulação proposta e a solução exata^[43] são inferiores a 0,5%. Estes resultados foram obtidos com o contorno dividido em 40 elementos lineares.

Da mesma forma que no exemplo anterior, o tipo de vinculação do contorno não teve influência significativa sobre a precisão dos resultados. Assim, para a placa

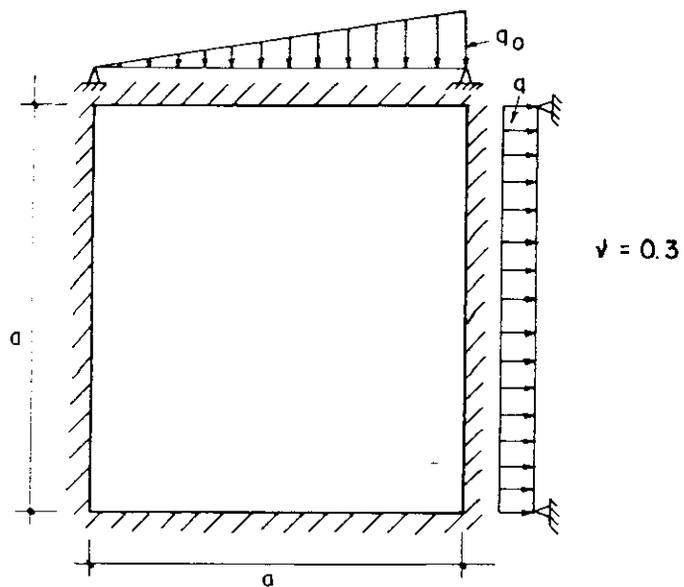


FIG. 4.18 - Placa simplesmente apoiada no contorno e com carregamento linearmente distribuído.

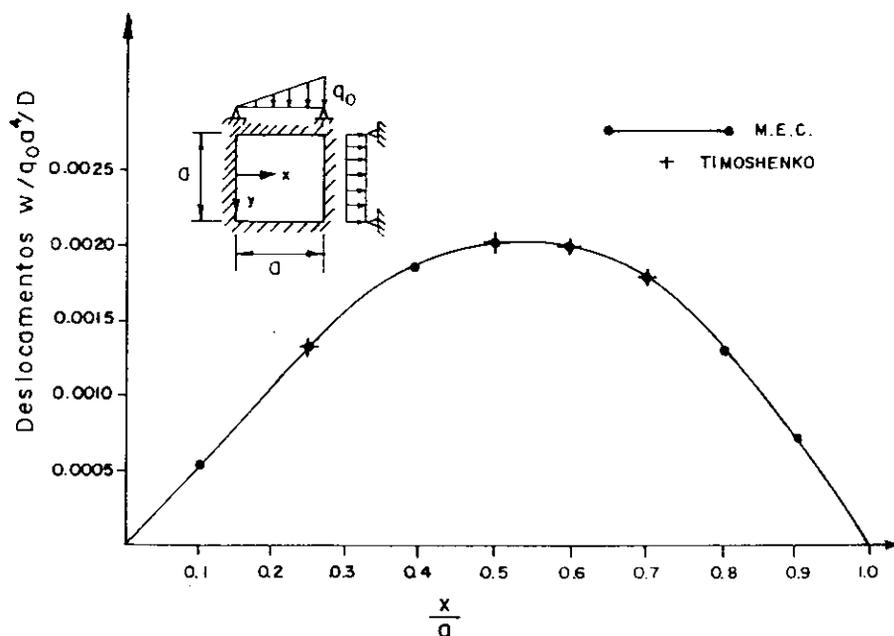


FIG. 4.19 - Deslocamento transversal ao longo do eixo x.

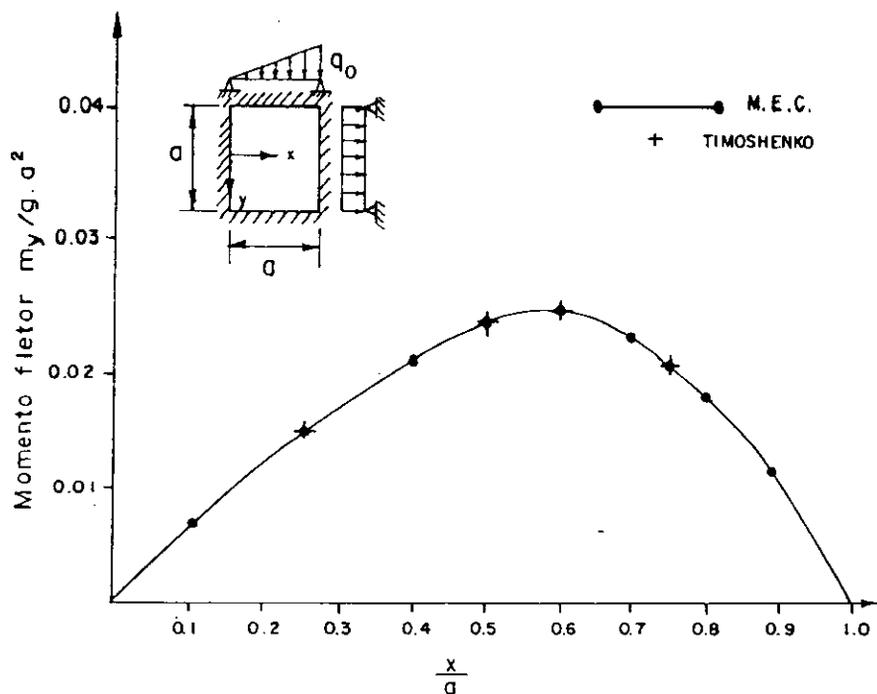


FIG. 4.20 - Momento fletor m_y ao longo do eixo x.

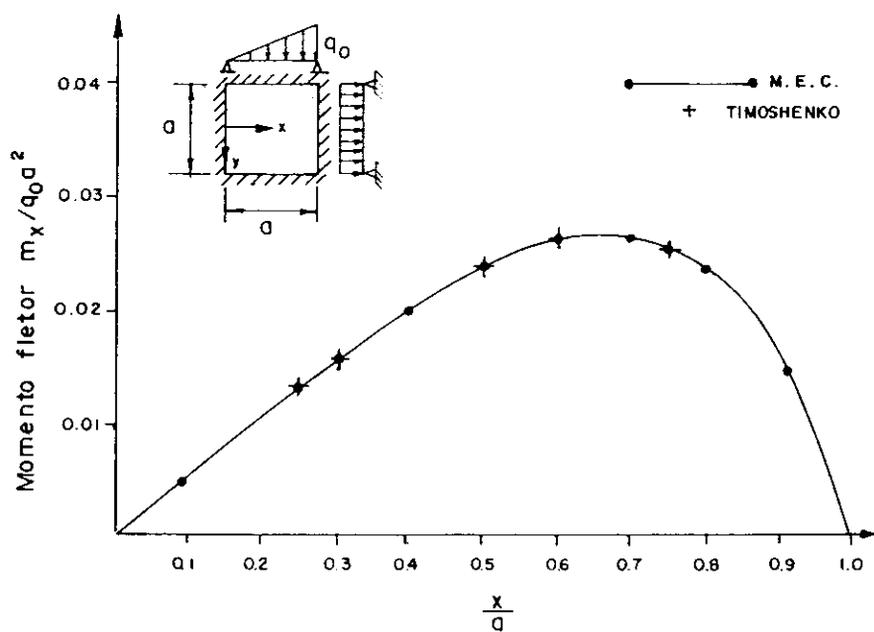


FIG. 4.21 - Momento fletor m_x ao longo do eixo x.

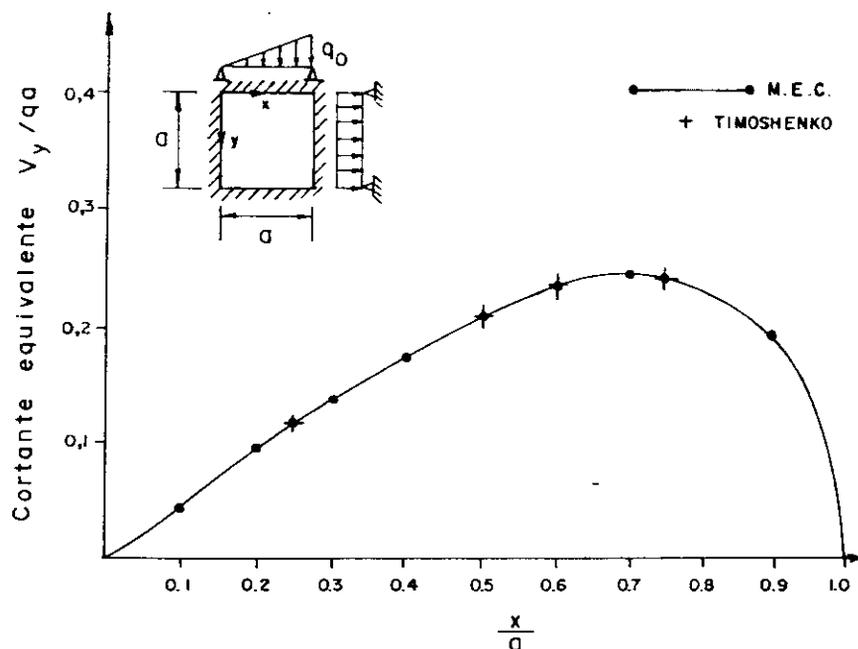


FIG. 4.22 - Força cortante equivalente V_y ao longo do eixo x .

quadrada engastada no contorno e submetida a carregamento linearmente distribuído — figura 4.23 — a máxima diferença entre os valores obtidos com a formulação proposta, para uma divisão do contorno em 40 elementos iguais entre si, e os valores disponíveis obtidos a partir da solução exata^[43], é inferior a 1%. Esses valores estão indicados na tabela 3.

No caso de placas quadradas com condições de contorno diferentes para cada lado, embora a solução exata seja mais difícil de ser obtida, o método dos elementos de contorno se mostrou muito eficaz. Na tabela 4, estão indicados os valores obtidos com a formulação proposta e os da solução exata^[43] para uma placa engastada em dois lados e apoiada nos outros dois, e submetida a carregamento transversal linearmente distribuído, conforme indica a figura 4.24. Na solução numérica, o contorno foi dividido em 40 elementos de igual tamanho.

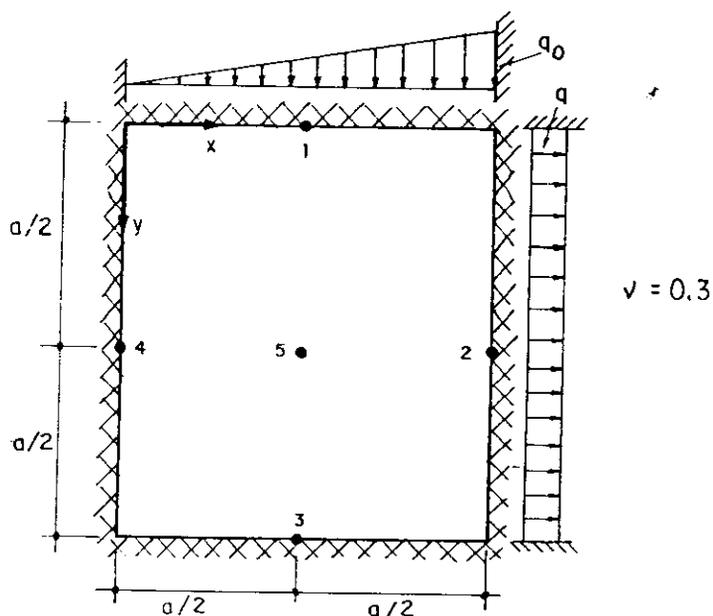


FIG. 4.23 - Placa engastada no contorno com carregamento linearmente distribuído.

TABELA 3 - Deslocamentos e esforços, analíticos^[43] e numéricos, para a placa quadrada engastada no contorno e com carregamento linearmente distribuído.

PONTO	w		m _x		m _y	
	MEC	TIMOSHENKO [43]	MEC	TIMOSHENKO [43]	MEC	TIMOSHENKO [43]
1	-	-	-0,0077	-0,0077	-0,0259	-0,0257
2	-	-	-0,0338	-0,0334	-0,0101	-0,0100
3	-	-	-0,0077	-0,0077	-0,0259	-0,0257
4	-	-	-0,0181	-0,0179	-0,0054	0,0054
5	0,00063	0,00063	0,0115	0,0115	0,0115	0,0115
Fator Multiplicativo	qa ⁴ /D		qa ²		qa ²	

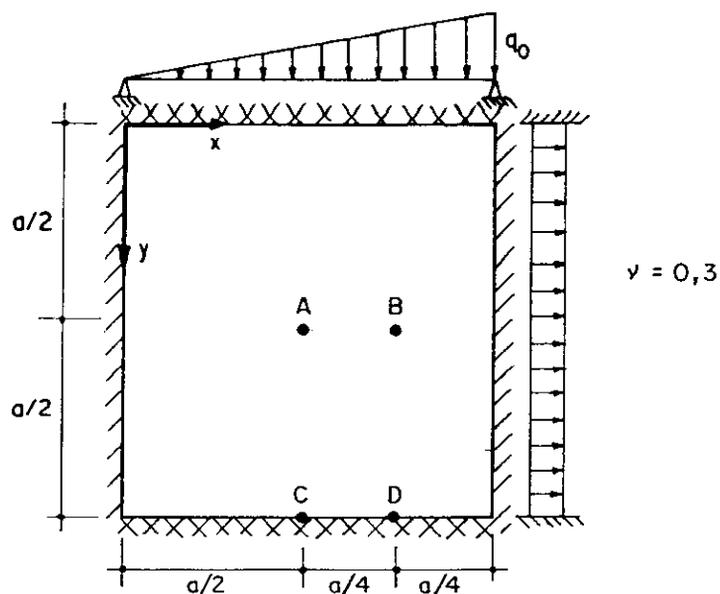


FIG. 4.24 - Placa engastada em dois lados opostos e apoiada nos outros dois e com carregamento linearmente distribuído.

TABELA 4 - Momentos fletores para a placa engastada em dois lados opostos e apoiada nos outros dois com carregamento linearmente distribuído obtidos pela solução da equação diferencial^[43] e pelo método dos elementos de contorno (M.E.C.)

PONTO	m_x		m_y	
	MEC	TIMOSHENKO [43]	MEC	TIMOSHENKO [43]
A	0,012	0,013	0,017	0,017
B	0,016	0,017	0,016	0,015
C	-0,0105	-0,0105	-0,035	-0,035
D	-0,0105	-0,0105	-0,035	-0,035
Fator de				

Para se testar a eficiência do método para outras combinações de vinculação, foi analisada uma placa quadrada engastada em um lado e apoiada nos outros três e submetida a dois tipos de carregamento, conforme indica a figura 4.25. Na tabela 5, estão indicados os valores obtidos a partir da solução exata^[43] e os resultados da análise numérica, obtidos com uma divisão do contorno em 40 elementos iguais. Como a diferença entre as duas soluções, teórica e numérica, é inferior a 0,5%, fica também neste caso comprovada a eficácia da formulação proposta.

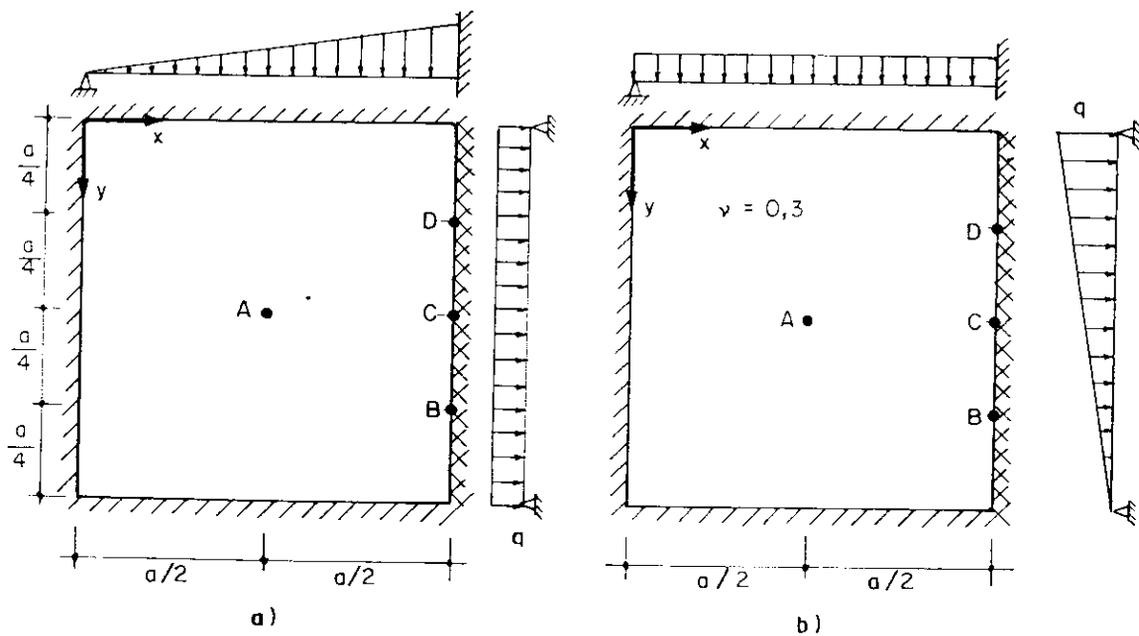


FIG: 4.25 - Placa quadrada engastada em um lado e apoiada nos outros três e com carregamento linearmente distribuído.

TABELA 5 - Deslocamento e esforços exatos^[43] e obtidos pelo método dos elementos de contorno para a placa quadrada engastada em um lado e apoiada nos outros três e com carregamentos linearmente distribuídos (figura 4.25).

VALORES	CARREGAMENTO <u>a</u>		CARREGAMENTO <u>b</u>	
	MEC	TIMOSHENKO [43]	MEC	TIMOSHENKO [43]
$w_a/qa^4/D$	0,0013	0,0013	0,0014	-
m_{xA}/qa^2	0,019	0,019	0,0167	-
m_{yA}/qa^2	0,016	0,016	0,0197	-
m_{xB}/qa^2	-0,038	-	-0,025	-0,025
m_{xC}/qa^2	-0,048	-0,048	-0,042	-0,042
M_{xD}/qa^2	-0,038	-	-0,040	-0,040

A formulação proposta mostrou-se eficiente também na análise de placas com borda livre. Como seus parâmetros nodais são deslocamentos e esforços é possível, ao contrário do método dos elementos finitos, representar facilmente as condições de contorno existentes nessas bordas, ou seja, momento fletor e força cortante equivalente nulas na direção normal ao contorno.

Na figura 4.26, está indicada uma placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois e que foi analisada pela formulação proposta. Os resultados obtidos pelo método dos elementos de contorno, pa-

ra uma divisão em 40 elementos iguais, e os obtidos pelo método dos elementos finitos, para uma divisão do domínio em 144 elementos triangulares de seis parâmetros por nó, (T-18), estão indicados na tabela 6.

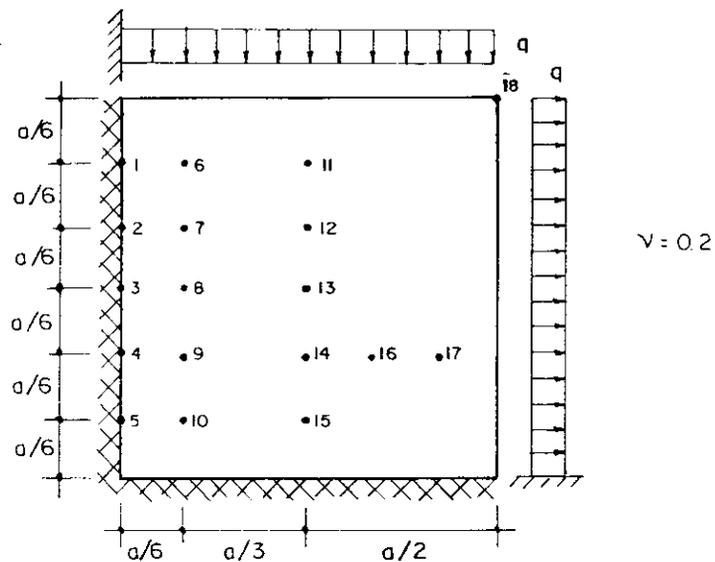


FIG. 4.26 - Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois.

TABELA 6 - Resultados obtidos pelo método dos elementos de contorno (M.E.C.) e pelo método dos elementos finitos (M.E.F.) para a placa da figura 4.26.

	M.E.C.	M.E.F.	FATOR
w_{18}	0,0458	0,0407	$q a^4/D$
w_{11}	0,0171	0,0156	
w_{12}	0,0131	0,0121	
m_{x1}	-0,2630	-0,2409	$q a^2$
m_{x2}	-0,1944	-0,1824	
m_{x3}	-0,1318	-0,1268	
m_{x4}	-0,0707	-0,0700	
m_{x5}	-0,0170	-0,0196	
m_{x6}	-0,1185	-0,1123	
m_{x7}	-0,0941	-0,0883	
m_{x8}	-0,0652	-0,0608	
m_{y6}	-0,0162	-0,0230	
m_{y7}	-0,0204	-0,0177	
m_{y10}	-0,0141	-0,0130	
m_{y14}	-0,0229	-0,0191	
m_{y15}	-0,0652	-0,0608	
m_{y16}	-0,0318	-0,0269	
m_{y17}	-0,0418	-0,0337	

4.9.1.3 - Exemplo 3 - Placa quadrada parcialmente carregada

É muito frequente ocorrerem, na prática, placas parcialmente carregadas, como, por exemplo, em paredes de reservatórios, o que torna necessário o desenvolvimento de formulações que possam modelar corretamente tais carregamentos. Na formulação proposta, a contribuição do carregamento transversal é calculada, como já foi dito, através de integrais sobre seu contorno, que pode estar em qualquer parte do domínio ou coincidir com o contorno da placa. No caso do contorno do carregamento não coincidir com o da placa, é também necessário dividi-lo em elementos para que a integração possa ser feita. Embora sejam definidos nós em pontos do domínio correspondentes ao contorno do carregamento, isso não implica num aumento do número de incógnitas que continuam sendo apenas as do contorno da placa. A divisão em elementos para a integração da carga pode ser menos refinada que a divisão do contorno, o que só vai introduzir erros na avaliação do vetor de cargas.

A placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e parcialmente carregada, conforme indicado na figura 4.27, foi calculada com seu contorno dividido em 40 elementos e com o contorno do carregamento dividido em 30 segmentos. Os resultados obtidos por essa formulação e por diferenças finitas estão indicados na tabela 7.

Com o objetivo de avaliar a formulação proposta para placas com outras condições de contorno, foi analisada a placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois e parcialmente carregada, conforme indica a figura 4.28. Neste caso, como já foi visto, a formulação proposta permite a imposição de todas as condições de contorno existentes nas bordas livres, proporcionando uma moldagem mais realística do problema. Na tabela 8, estão indicados os resultados obtidos com os contornos da placa e do carregamento divididos, respectivamente, em 40

e 30 elementos iguais e os obtidos pelo Método dos Elementos Finitos para uma divisão da placa em 144 elementos triangulares (T-18).

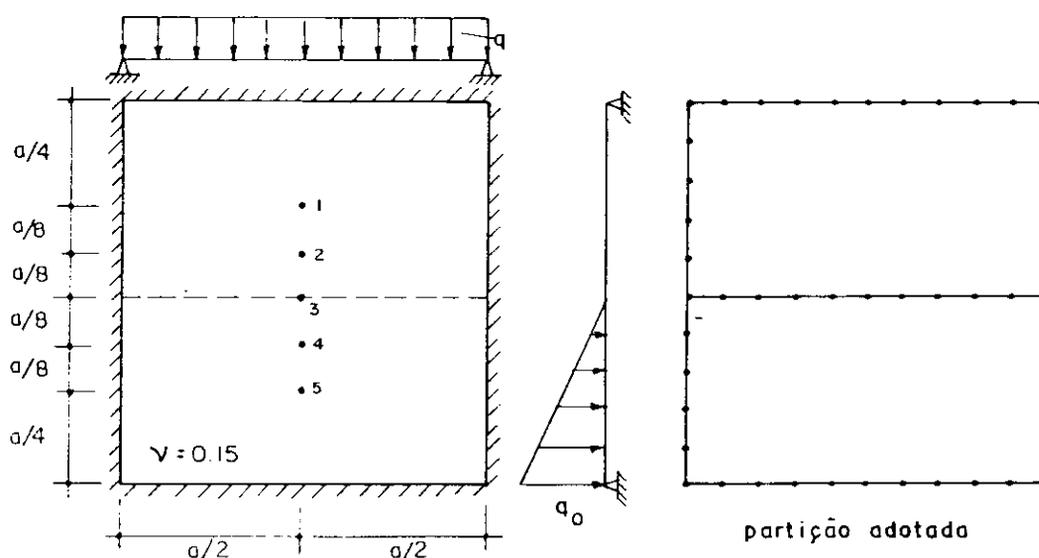


FIG. 4.27 - a) Placa simplesmente apoiada no contorno parcialmente carregada.
b) Partição adotada.

TABELA 7 - Esforços obtidos na análise da placa da figura 4.27, pelo Método dos Elementos de Contorno (M.E.C.) e por diferenças finitas^[44].

VALORES	M.E.C.	D. FINITAS BARES [44]
m_{x1}	0,0038	0,0039
m_{y1}	0,0009	0,0011
m_{x3}	0,0072	0,0073
m_{y3}	0,0060	0,0059
m_{x4}	0,0085	0,0084
m_{y4}	0,0108	0,0103
m_{x5}	0,0079	0,0080
m_{y5}	0,0138	0,0135
FATOR	$q_0 a^2$	

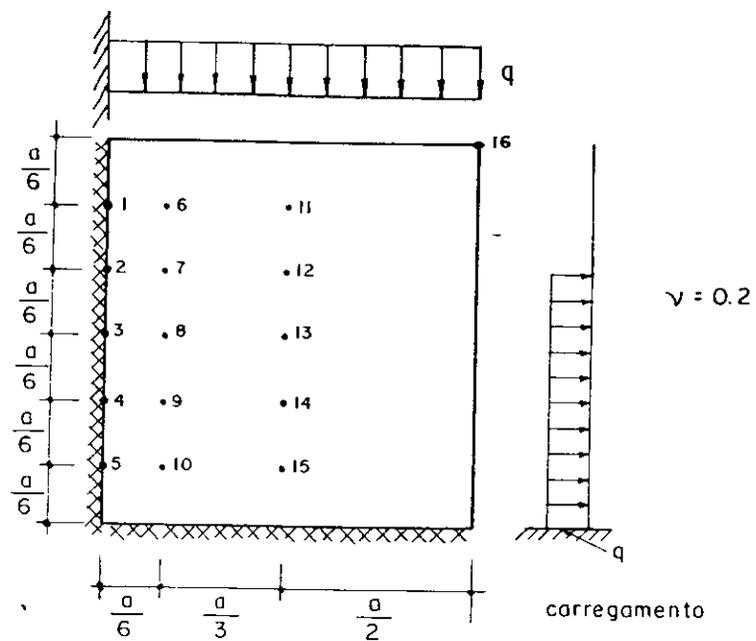


FIG. 4.28 - Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois e parcialmente carregada.

TABELA 8 - Deslocamentos e esforços, obtidos pelo Método dos Elementos de Contorno (M.E.C.) e pelo Método dos Elementos Finitos (M.E.F.) para a placa da figura 4.28.

VALORES	M.E.C.	M.E.F.	FATOR
w_6	0,0009	0,0009	$\frac{qa^4}{D}$
w_7	0,0009	0,0009	
w_{11}	0,0059	0,0054	
w_{13}	0,0041	0,0039	
w_{14}	0,0026	0,0024	
w_{16}	0,0154	0,0137	
m_{x1}	-0,0836	-0,0772	qa^2
m_{x2}	-0,0825	-0,0784	
m_{x3}	-0,0762	-0,0732	
m_{x4}	-0,0518	-0,0512	
m_{x5}	-0,0181	-0,0188	
m_{x6}	-0,0422	-0,0409	
m_{x7}	-0,0354	-0,0337	
m_{x8}	-0,0252	-0,0238	
m_{x9}	-0,0146	-0,0138	
m_{y12}	0,0126	0,0137	
m_{y13}	0,0187	0,0200	
m_{y14}	0,0066	0,0081	
m_{y15}	-0,0265	-0,0244	

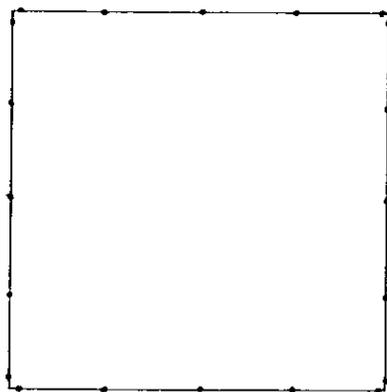
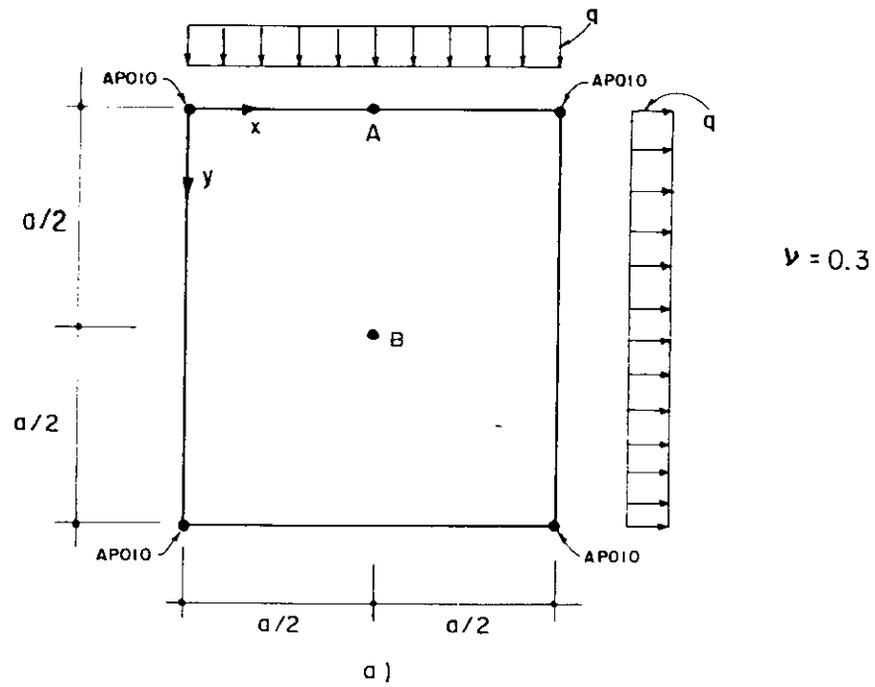
4.9.1.4 - Exemplo 4: Placa quadrada apoiada nos quatro cantos

As placas apoiadas diretamente sobre os pilares constituem uma interessante opção para o projetista de estruturas, principalmente pela facilidade e rapidez na construção que tais estruturas proporcionam.

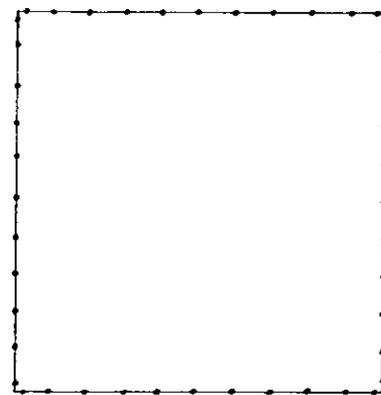
Para analisar esses elementos estruturais pelo método dos elementos de contorno, devem ser introduzidas modificações na formulação para prever a existência de vínculos discretos, uma vez que apenas os contínuos estão previstos na formulação usual do método. Para o caso de placas com tais vínculos no contorno, a modificação consiste em escrever as equações integrais prevendo a ação de forças concentradas incógnitas nos pontos de vinculação, ao mesmo tempo em que se admite que as forças cortantes equivalentes nesses pontos são nulas. Assim, as incógnitas finais desses pontos, que inicialmente eram as forças cortantes, passam a ser as reações dos vínculos. O desenvolvimento posterior destas equações integrais é semelhante ao já visto e, após a resolução do sistema de equações algébricas, obtêm-se as reações nos vínculos do contorno. As transformações para prever a existência de apoios, discretos ou não, no domínio da placa, serão vistas no capítulo 5.

Na bibliografia usual, existem vários exemplos tabelados de placas com apoios discretos; entretanto, apenas o caso de placas retangulares apoiadas nos quatro cantos e uniformemente carregadas, pode ser resolvido analiticamente^[43].

Na tabela 9, estão indicados os valores analíticos e os obtidos pela formulação proposta para a placa quadrada (ver figura 4.29). Na solução numérica, o contorno foi dividido em 24 e em 40 elementos de igual tamanho.



b)



c)

FIG. 4.29 - a) Placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro cantos;
b) contorno da placa discretizado em 24 elementos;
c) contorno discretizado em 40 elementos.

TABELA 9 - Valores dos deslocamentos e esforços obtidos pela solução exata^[43] e pelo método dos elementos de contorno para a placa da figura 4.29.

VALORES	M.E.C. 24 ELEMENTOS	M.E.C. 40 ELEMENTOS	TIMOSHENKO [43]
$w_B/qa^4/D$	0,0229	0,0246	0,0249
M_{xB}/qa^2	0,109	0,110	0,109
M_{yB}/qa^2	0,109	0,110	0,109
$w_A/qa^4/D$	0,0147	0,0163	--
m_{xA}/qa^2	0,1290	0,1404	0,1404

4.9.1.5 - Exemplo 5 - Placa quadrada com carregamento distribuído ao longo de uma linha

Em pavimentos de edifícios e outros tipos usuais de estruturas de obras civis, o carregamento transversal resultante de paredes está distribuído ao longo de linhas e é importante que as formulações desenvolvidas para análise dessas estruturas possam prever tais carregamentos.

Na formulação proposta, a contribuição das linhas de carga é calculada da mesma forma que a do carregamento parcialmente distribuído devendo-se observar que, nesse caso, as integrais correspondentes ao carregamento transversal são calculadas ao longo de uma linha.

Para se testar a formulação, foi analisada a placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e com uma linha de carga, conforme indica a figura 4.30.

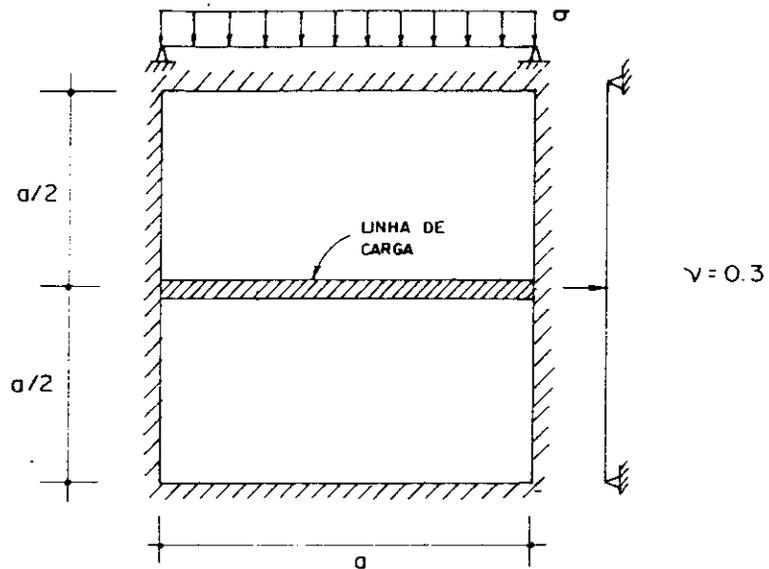


FIG. 4.30 - Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e com carregamento distribuído ao longo de uma linha.

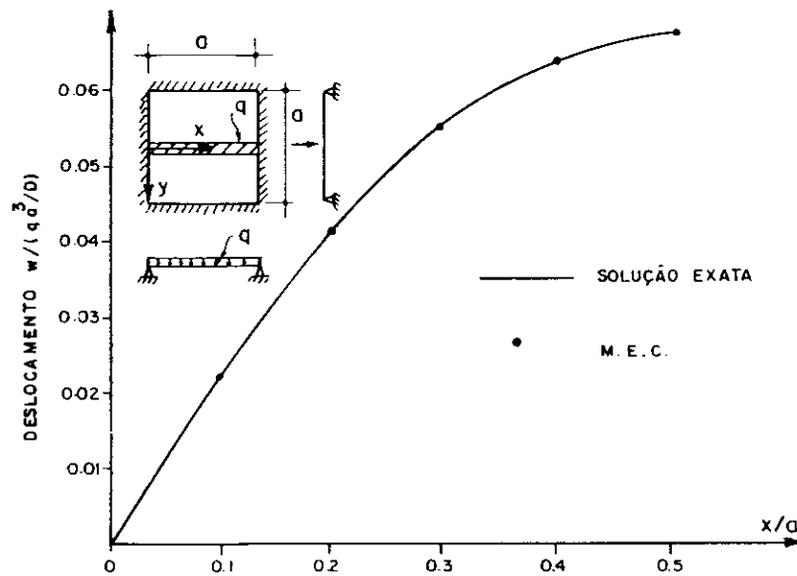


FIG. 4.31 - Deslocamento transversal sob a linha de carga.

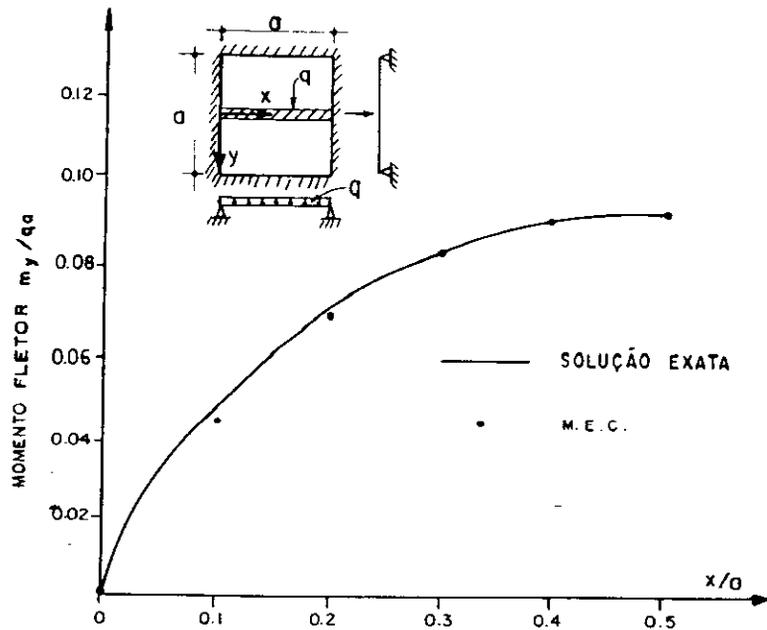


FIG. 4.32 - Momento fletor m_y sob a linha de carga.

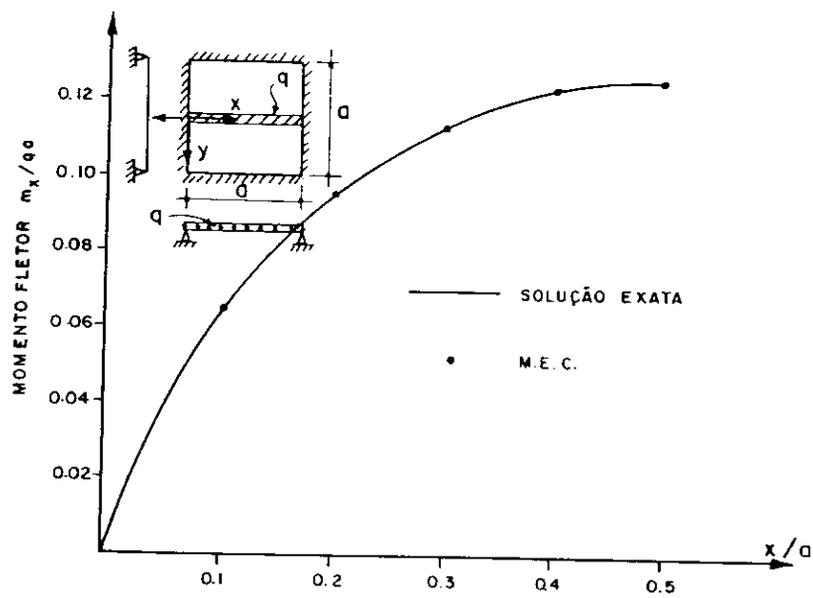


FIG. 4.33 - Momento fletor m_x sob a linha de carga.

Nas figuras 4.31 a 4.33, estão indicados os resultados obtidos com a solução numérica para uma divisão do contorno da placa em 40 elementos iguais juntamente com os fornecidos pela solução exata do problema^[43]. A contribuição do carregamento transversal para o vetor de cargas foi avaliada adotando-se uma divisão da linha de carga em 10 segmentos de igual tamanho. O erro máximo observado no ponto central é de 0,3% para o deslocamento transversal e de 0,8% para os momentos m_x e m_y .

4.9.1.6 - Exemplo 6.- Placa triangular equilátera

Exemplos com a utilização da placa triangular aparecem com frequência em textos básicos sobre teoria de placas. Assim, a avaliação da formulação dos elementos de contorno na modelagem deste elemento estrutural é conveniente para ressaltar sua eficiência em um tipo de placa menos usual que a retangular. Dentre todas as placas triangulares, poucas são as que possuem solução analítica e, dentre elas, destaca-se a placa triangular equilátera simplesmente apoiada no contorno e com carregamento transversal uniformemente distribuído^[43], indicada na figura 4.34. A solução analítica desta placa é dada por uma função polinomial, o que torna possível a elaboração dos gráficos representativos das variações dos deslocamentos e esforços em qualquer eixo escolhido. Nas figuras 4.35 a 4.37 estão indicadas, respectivamente, as variações do deslocamento transversal, w , e dos momentos fletores, m_x e m_y , ao longo do eixo de simetria para as soluções analítica e numérica, esta última obtida com o contorno dividido em 30 elementos iguais.

Para placas triangulares com outras condições de contorno, só estão disponíveis os resultados obtidos por outros processos numéricos, como, por exemplo, diferenças finitas^[44]. Este é o caso da placa indicada na figura

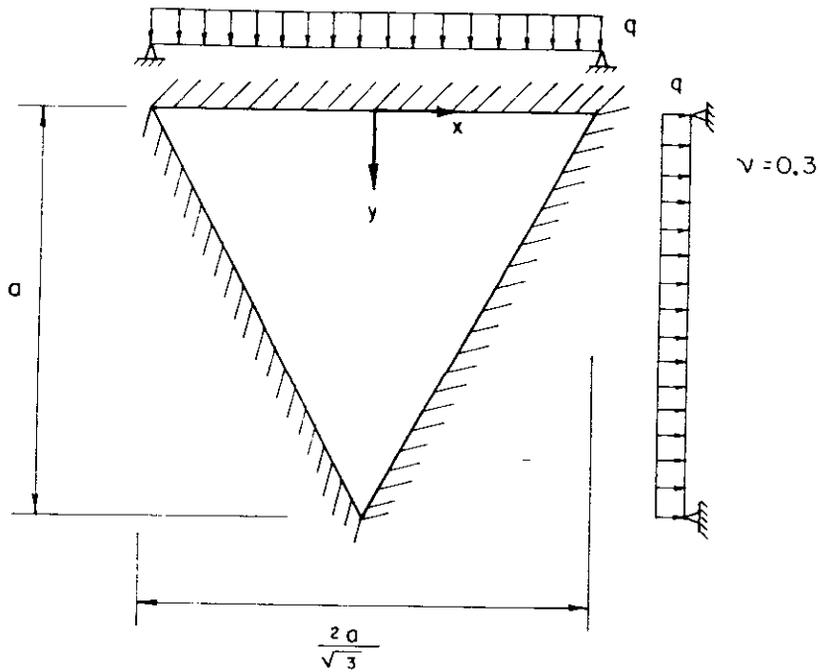


FIG. 4.34 - Placa triangular equilátera simplesmente apoiada no contorno e com carregamento transversal uniformemente distribuído.

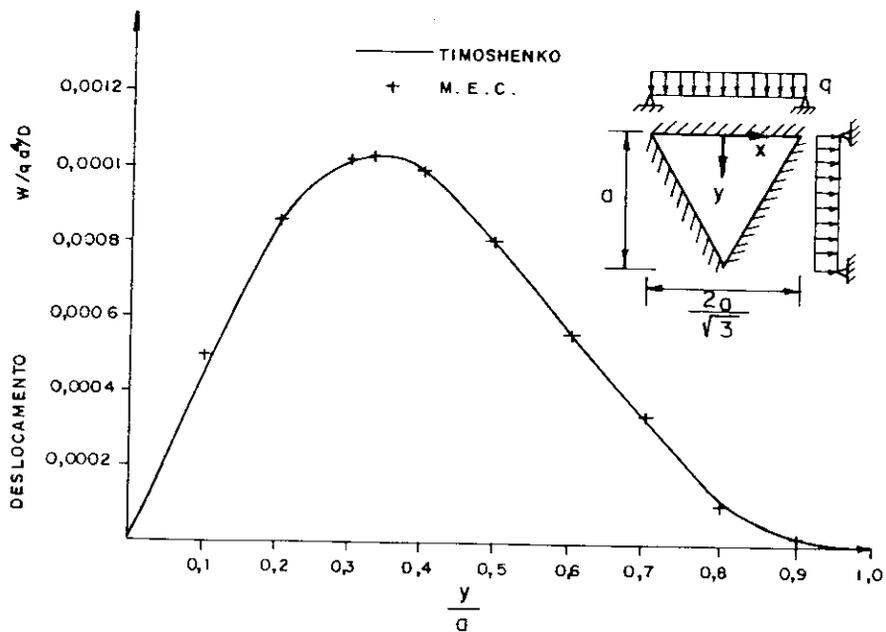


FIG. 4.35 - Deslocamento transversal ao longo do eixo y.

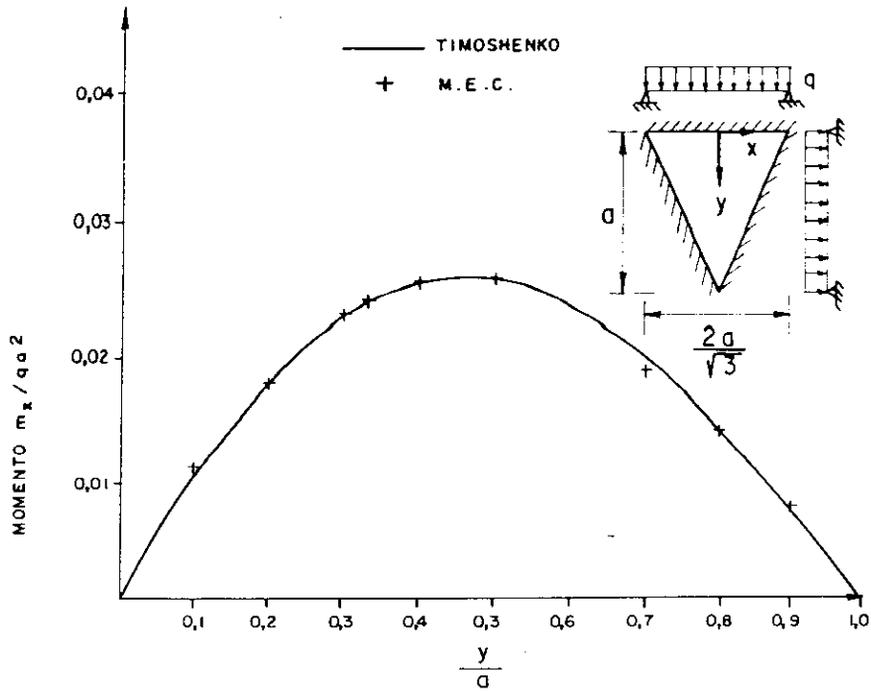


FIG. 4.36 - Momento m_x ao longo do eixo y .

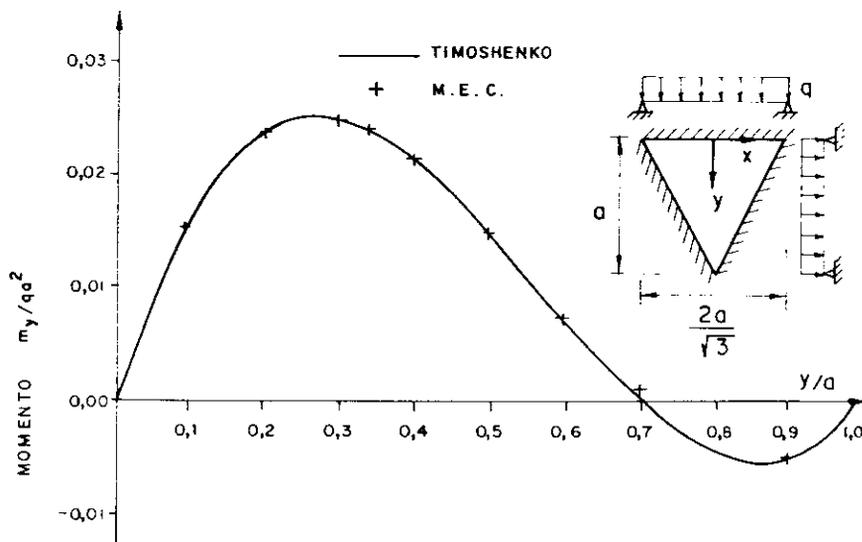


FIG. 4.37 - Momento m_y ao longo do eixo y .

4.38, submetida a três tipos de carregamento. A análise desta placa pelo método dos elementos de contorno forneceu resultados próximos dos disponíveis na bibliografia, e estes resultados não se modificaram significativamente com o aumento do número de elementos de contorno; e é possível que a diferença entre estes resultados e os fornecidos por diferenças finitas seja consequência da malha adotada para a análise por diferenças finitas. Na tabela 10 estão indicados os resultados obtidos com a formulação proposta, para o contorno da placa dividido em 30 elementos iguais, e os obtidos por diferenças finitas.

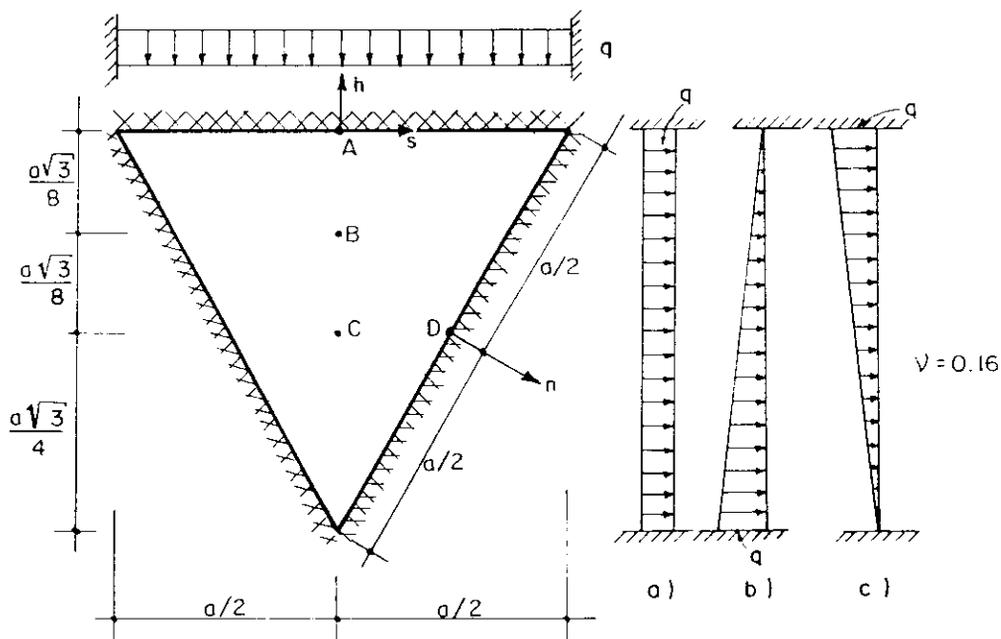


FIG. 4.38 - Placa triangular equilátera engastada no contorno e submetida a carregamentos uniforme e linearmente distribuído.

TABELA 10 - Deslocamentos e esforços obtidos pelo método dos elementos de contorno e por diferenças finitas^[44] para a placa triangular indicada na figura 4.38.

VALORES	CARREGAMENTO A		CARREGAMENTO B		CARREGAMENTO C		FATOR
	M.E.C.	BARES [44]	M.E.C.	BARES [44]	M.E.C.	BARES [44]	
w_B	0,1506	0,2087	0,0458	0,0627	0,1047	0,1460	$10^{-3} \frac{qa^4}{D}$
w_C	0,1168	0,1677	0,0476	0,0700	0,0692	0,0980	
m_{x2}	0,5664	0,6448	0,1801	0,2028	0,3862	0,4420	$10^{-2} qa^2$
m_{y2}	0,7215	0,8037	0,1754	0,1929	0,5461	0,6108	
m_{x3}	0,7694	0,8429	0,3314	0,3668	0,4380	0,4761	
m_{y3}	0,2475	0,3239	0,1532	0,1958	0,0943	0,1281	
m_{x4}	0,2925	0,3265	0,1880	0,2236	0,1045	0,1029	
m_{y4}	-0,2099	-0,1958	-0,0710	-0,0387	-0,1388	-0,1570	
m_{nA}	-1,989	-1,786	-0,477	-0,452	-1,513	-1,335	
m_{nD}	-1,989	-1,786	-0,756	-0,681	-1,233	-1,119	

Completando o estudo sobre a eficiência da formulação proposta na análise de placas triangulares, foi analisada a placa engastada em dois lados e apoiada no terceiro, como indicado na figura 4.39. Este exemplo visa testar a formulação para placas triangulares com condições de contorno diferentes para cada um dos lados. Os máximos valores dos momentos fletores, m_x e m_y , obtidos pela formulação proposta, com o contorno dividido em 30 elementos iguais, e os obtidos por diferenças finitas^[43] estão indicados na tabela 11.

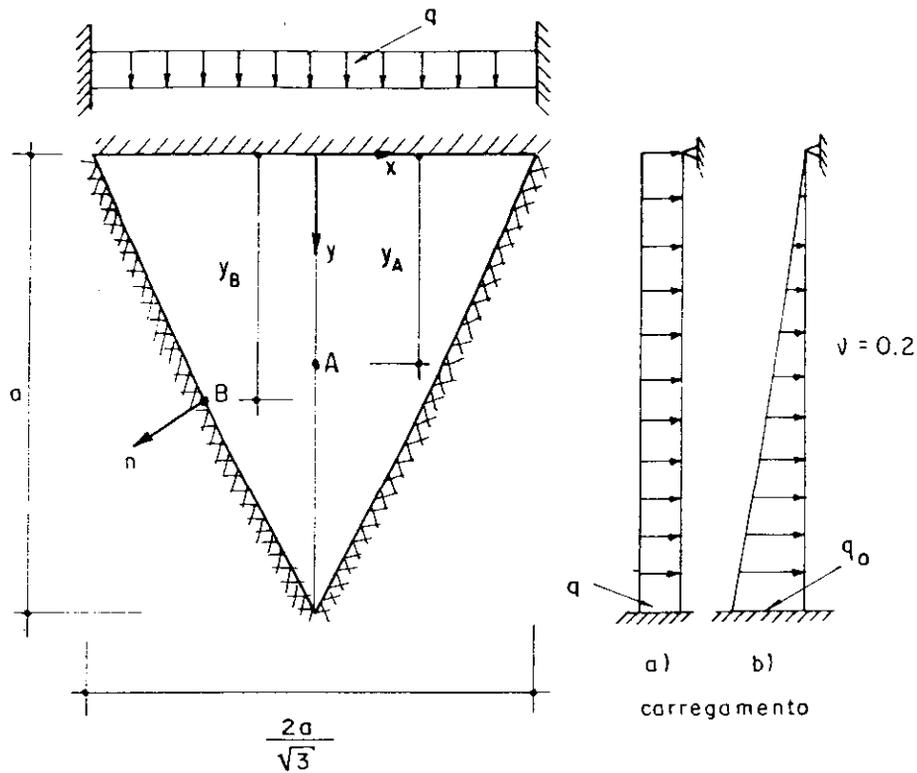


FIG. 4.39 - Placa triangular equilátera engastada em dois lados e apoiada no terceiro.

TABELA 11 - Resultados obtidos pelo método dos elementos de contorno e por diferenças finitas [43] na análise da placa triangular indicada na figura 4.39.

VALORES	CARREGAMENTO A			CARREGAMENTO B		
	M.E.C.	TIMOSHENKO [43]	Y_A ou Y_B	M.E.C.	TIMOSHENKO [43]	Y_A ou Y_B
m_{xA}	0,0135	0,0126	0,35	0,0048	0,0053	0,475
m_{yA}	0,0140	0,0147	0,20	0,0033	0,0035	0,333
m_{nB}	-0,0318	-0,0285	0,44	-0,011	-0,010	0,562
FATOR	qa^2		a	$q_0 a^2$		a

4.9.1.7 - Exemplo 7 - Placa trapezoidal

As placas trapezoidais são elementos estruturais que podem estar presentes em estruturas de silos de base poligonal, sendo importante, portanto, que possam ser convenientemente analisadas pela formulação proposta.

Neste exemplo, analisa-se uma placa trapezoidal isósceles apoiada nas duas bases e engastada nos dois lados não paralelos e uniformemente carregada, conforme indica a figura 4.40. Na tabela 12 estão indicados os resultados obtidos com a divisão do contorno em 40 elementos e os obtidos por diferenças finitas [44].

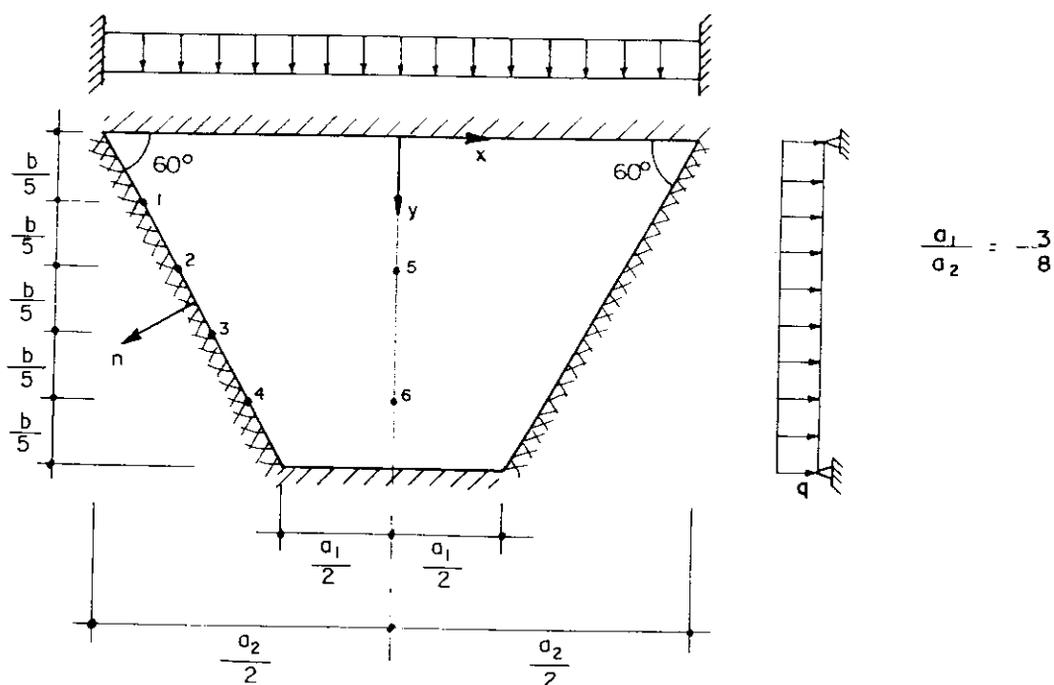


FIG. 4.40 - Placa trapezoidal isósceles engastada em dois lados e apoiada nas bases e uniformemente carregada.

TABELA 12 - Valores dos esforços da placa trapezoidal (figura 4.40), obtidos pelo método dos elementos de contorno e por diferenças finitas [44].

VALORES	M.E.C.	BARES [44]
m_{n1}	-0,005802	-0,004468
m_{n2}	-0,016069	-0,013576
m_{n3}	-0,02366	-0,020370
m_{n4}	-0,02660	-0,020583
m_{x5}	0,008962	0,009233
m_{y5}	0,010077	0,011522
m_{x6}	0,0074936	0,007392
m_{y6}	0,0032924	0,004536
FATOR	qa_2^2	

4.9.2 - Análise de placas utilizando apenas a equação integral do deslocamento

Como já foi visto, é possível analisar placas pelo método dos elementos de contorno utilizando-se apenas a equação integral do deslocamento transversal, bastando para isso definir fora do domínio um número de pontos igual ao número de nós do contorno.

Em vários exemplos analisados, cujas soluções exatas são conhecidas, esta formulação mostrou-se superior àquela que utiliza também a equação integral da derivada do deslocamento.

Nos resultados obtidos pelas duas formulações

observa-se que, para uma mesma divisão do contorno, a formulação alternativa fornece resultados mais precisos que a formulação usual.

Entretanto, deve-se observar que, na grande maioria dos casos, essa diferença é pouco significativa, pois os resultados obtidos com as duas formulações apresentam erros pequenos quando comparados com os valores exatos.

A partir de um certo número de elementos de contorno não há mais diferença entre os resultados obtidos com as duas formulações.

4.9.2.1 - Exemplo 8 - Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada

A placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e uniformemente carregada (ver figura 4.11) foi analisada com as duas formulações propostas para diversas divisões do contorno. As diferenças percentuais entre os valores do deslocamento transversal e esforços no centro da placa e os exatos - estes últimos obtidos com 100 termos da série de duplo seno da solução de Navier - estão representadas, respectivamente, nas figuras 4.41 e 4.42 em função do número de elementos de contorno. Na figura 4.43, estão indicadas a divisão do contorno em 40 elementos e os pontos fora do domínio utilizados na formulação alternativa.

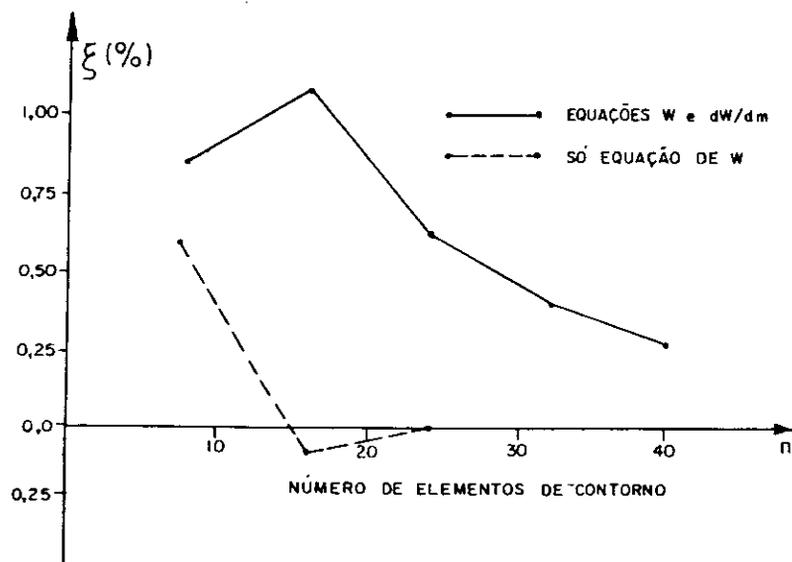


FIG. 4.41 - Variação do deslocamento transversal no centro da placa em função do número de elementos de contorno.

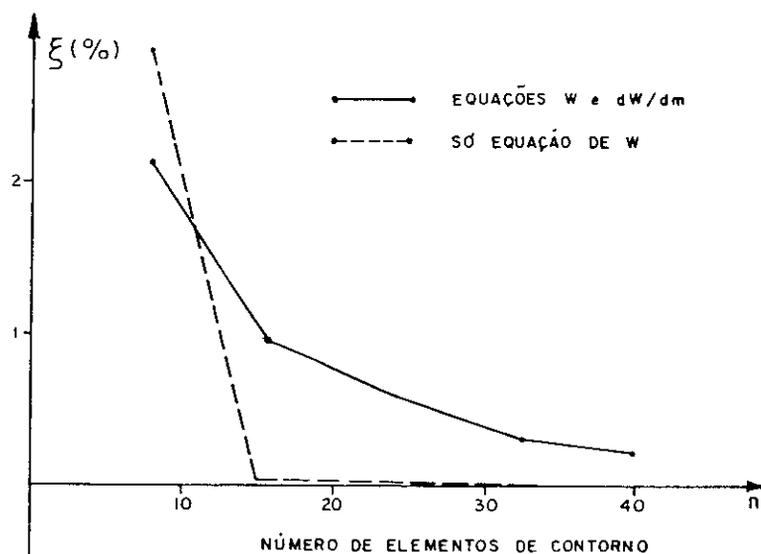


FIG. 4.42 - Variação dos momentos m_x e m_y no centro da placa em função do número de elementos do contorno.

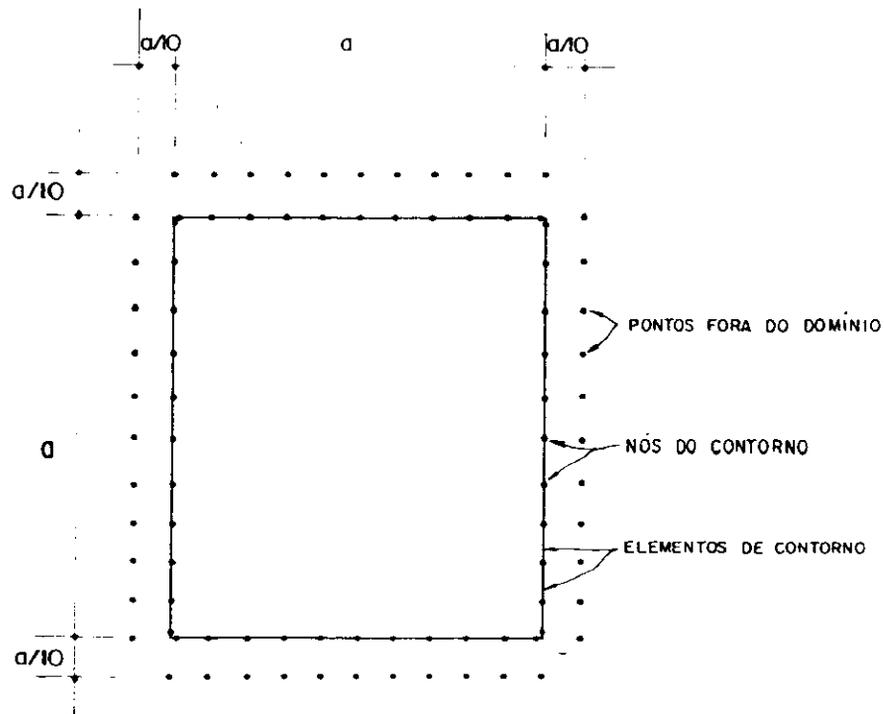
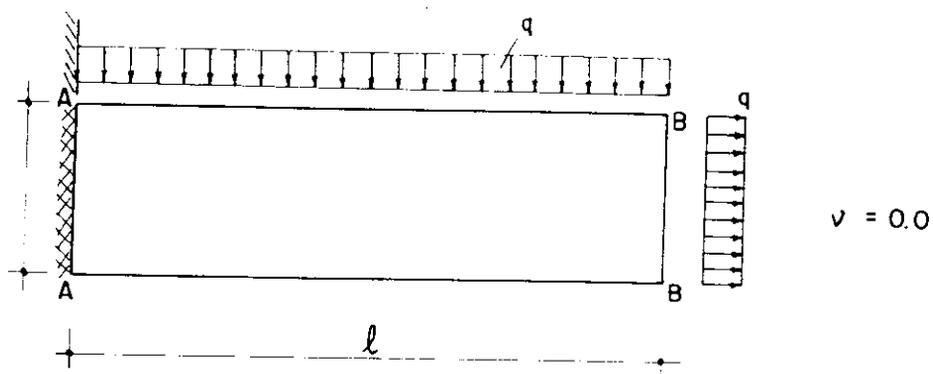


FIG. 4.43 - Pontos de carregamento definidos no contorno e fora do domínio da placa.

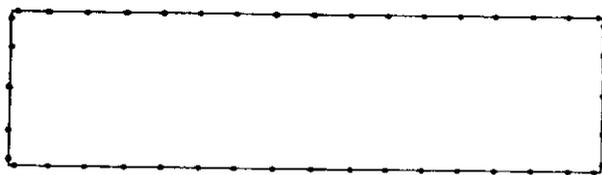
4.9.2.2 - Exemplo 9 - Placa retangular engastada em um lado e livre nos outros três

Um exemplo que mostra claramente a superioridade da formulação que utiliza apenas a equação integral do deslocamento é a placa retangular engastada em um lado e livre nos outros três e uniformemente carregada, conforme indicado na figura 4.44. Neste problema, mesmo para uma partição refinada do contorno, os resultados das duas formulações são bem diferentes, com a evidente superioridade da formulação alternativa.

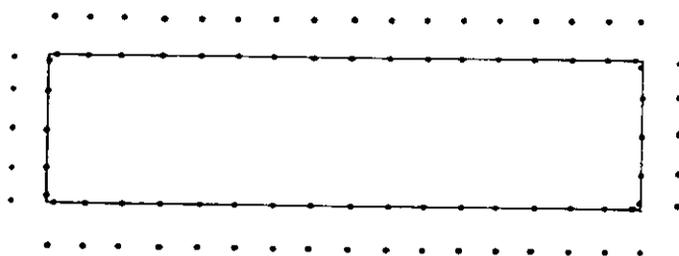
Na tabela 13 estão indicados os valores médios dos esforços no lado engastado e o deslocamento transversal do lado oposto, obtidos com as duas formulações, para uma divisão do contorno em 40 elementos de igual tamanho, e também os valores exatos, obtidos a partir da teoria de viga.



a)



b)



c)

FIG. 4.44 - a) Placa retangular engastada em um lado e livre nos outros três;
b) Divisão do contorno para a análise com a formulação usual;
c) divisão do contorno e definição de pontos fora do domínio para a análise com a formulação alternativa.

TABELA 13 - Valores analíticos e numéricos para a placa indicada na figura 4.44.

VALORES MÉDIOS	FORMULAÇÃO USUAL	FORMULAÇÃO ALTERNATIVA	VALORES EXATOS	FATOR
$m_{x_{A-A}}$	0,431	0,489	0,5	ql^2
$v_{x_{A-A}}$	0,828	1,0117	1,0	ql
w_{B-B}	0,0976	0,1220	0,1250	ql^4/EJ

4.9.2.3 - Exemplo 10 - Placa esconsa

As placas esconsas são elementos estruturais muito utilizados em pontes e, atualmente, em edifícios. Essas placas geralmente estão vinculadas nos quatro lados ou em dois lados opostos, enquanto os outros dois são livres.

A análise destes elementos estruturais não representa maiores problemas para o método dos elementos de contorno uma vez que é o contorno, não importando sua geometria, que é discretizado. No caso de placas esconsas com bordas livres, já foi vista a facilidade com que as condições de contorno nestes lados podem ser impostas.

Considere-se a placa esconsa apoiada em dois lados opostos e livres nos outros dois e uniformemente carregada, conforme indica a figura 4.45. Este exemplo também foi analisado numericamente utilizando-se as duas formulações propostas, isto é, considerando-se duas equações para cada nó do contorno e apenas a equação do deslocamento para nós do contorno e pontos fora do domínio da placa. Consideraram-se também duas discretizações do contorno, figuras 4.46 a 4.49, e os resultados foram comparados com os obtidos pelo método dos elementos finitos (elemento T-18) para

duas malhas distintas^[45], figuras 4.50 e 4.51, e os obtidos por diferenças finitas^[43]. Estes resultados estão indicados na tabela 14.

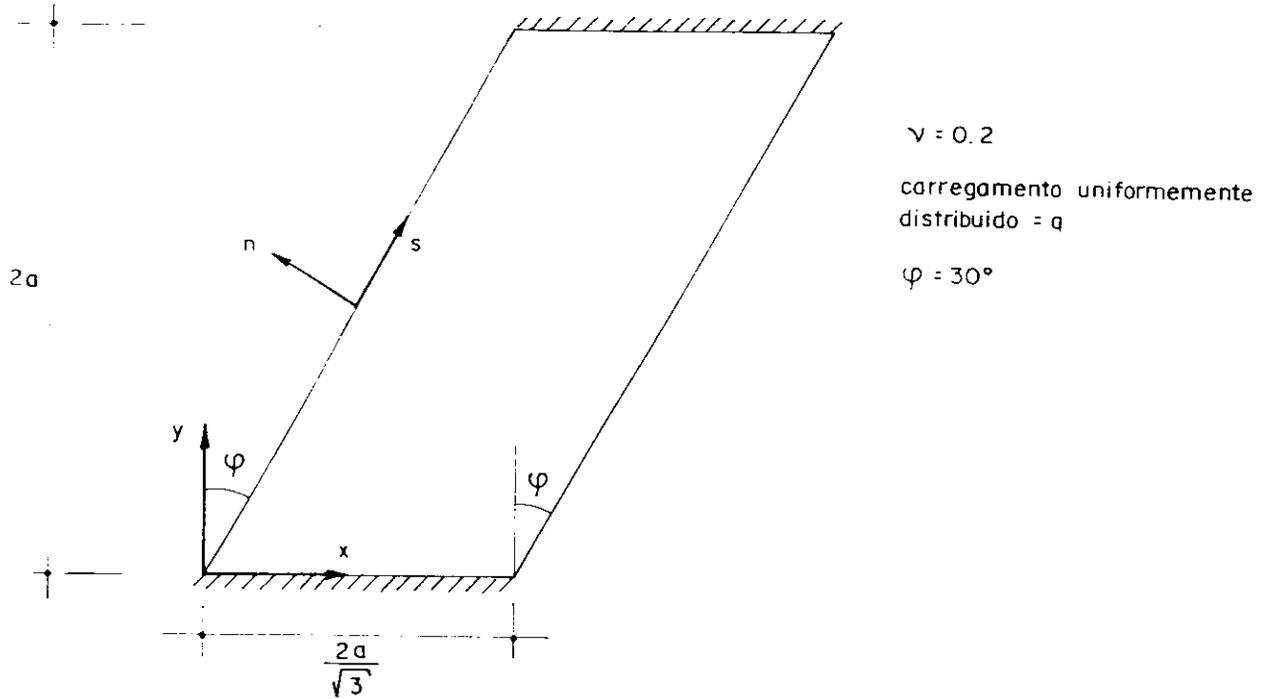


FIG. 4.45 - Placa esconsa apoiada em dois lados opostos e livre nos outros dois.

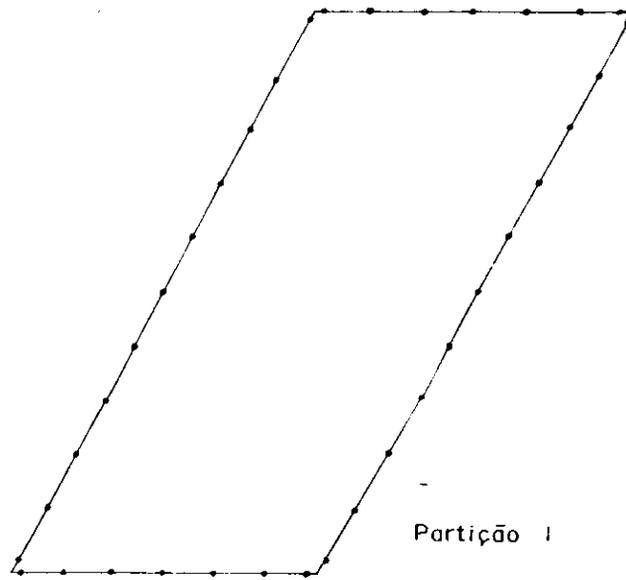


FIG. 4.46 - Contorno da placa esconsa dividida em 32 elementos para a análise pela formulação usual.

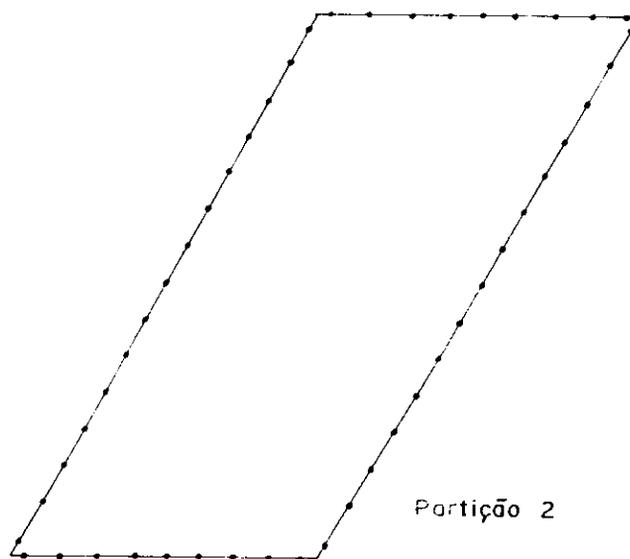


FIG. 4.47 - Contorno da placa esconsa dividida em 44 elementos para a análise pela formulação usual.

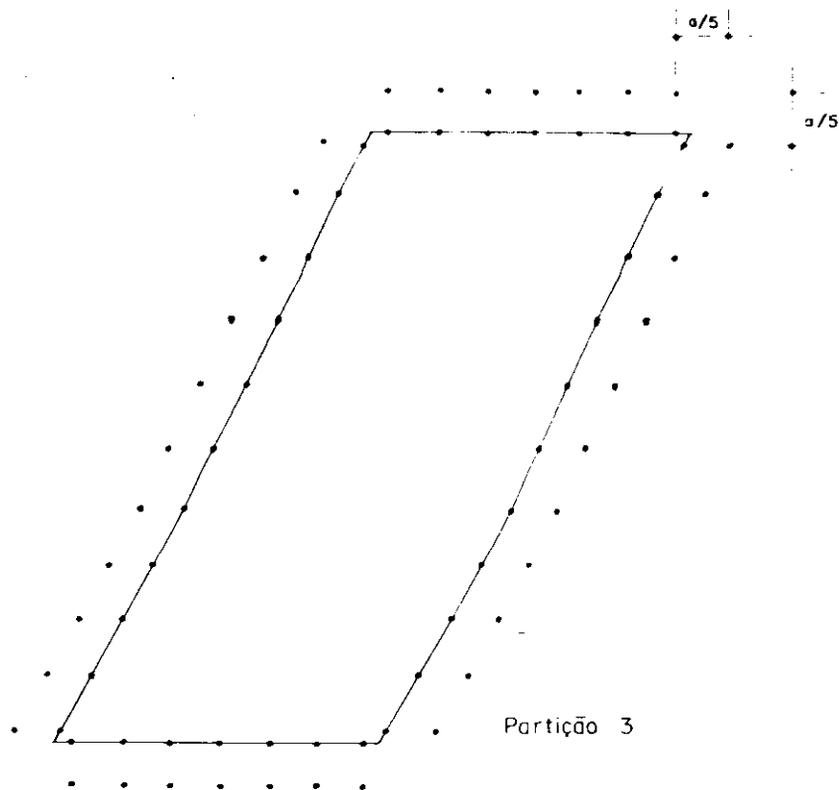


FIG. 4.48 - Contorno da placa esconsa dividida em 32 elementos e os pontos definidos fora do domínio para a análise pela formulação alternativa.

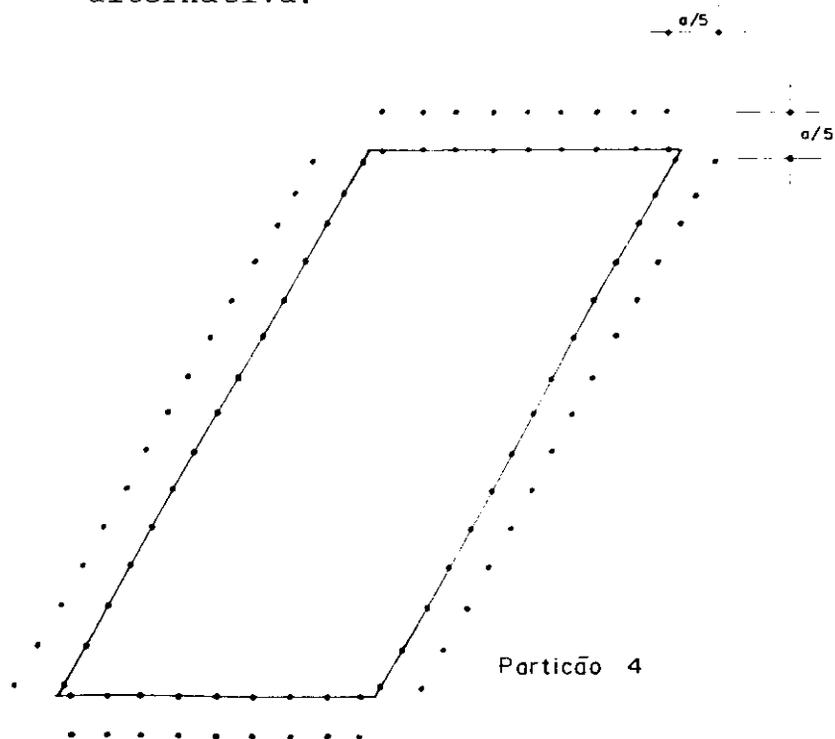


FIG. 4.49 - Contorno da placa esconsa dividido em 44 elementos e os pontos definidos fora do domínio para a análise pela formulação alternativa.

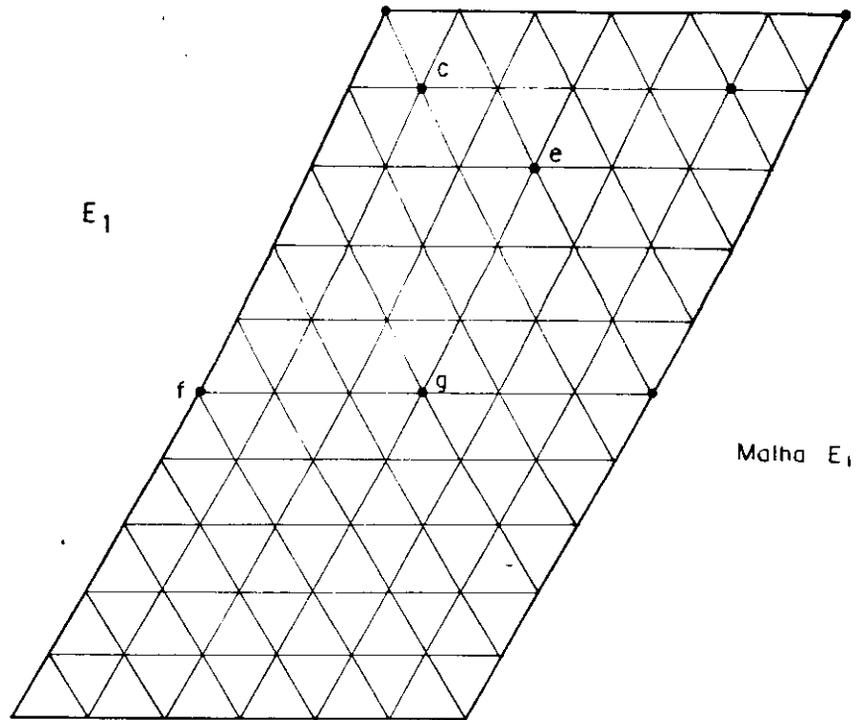


FIG. 4.50 - Domínio da placa esconsa dividida em 120 elementos finitos triangulares.

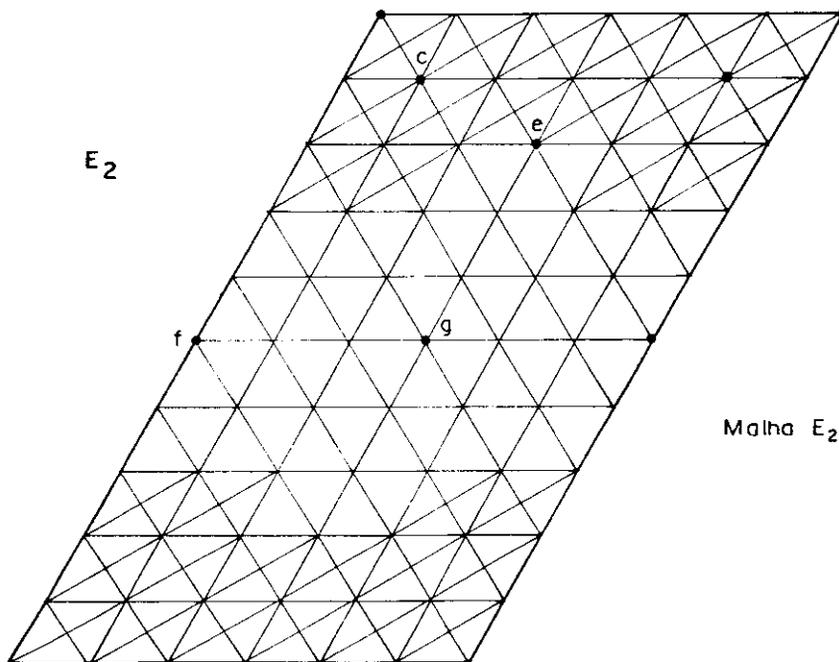


FIG. 4.51 - Domínio da placa esconsa dividida em 184 elementos finitos triangulares.

TABELA 14 - Resultados obtidos na análise da placa esconsa indicada na figura 4.41, pelas duas formulações do método dos elementos de contorno; pelo método dos elementos finitos [45] e por diferenças finitas [43].

MÉTODOS UTILIZADOS	w_g	w_f	m_{yg}	m_{sf}^*	m_{ye}	m_{yc}
M.E.C. 2 eq. int. Partição 1	0,1144	0,1254	0,3407	0,3133	0,1967	0,1647
M.E.C. 2 eq. int. Partição 2	0,1133	0,1237	0,3392	0,3102	0,1955	0,1600
M.E.C. 1 eq. int. Partição 3	0,1182	0,1313	0,3474	0,3750	0,2006	0,1767
M.E.C. 1 eq. int. Partição 4	0,1129	0,1246	0,3420	0,5316	0,2057	0,1771
M.E.F. Malha E ₁	0,1149	0,1258	0,3593	0,3440	0,2159	0,2962
M.E.F. Malha E ₂	0,1149	0,1257	0,3593	0,3440	0,2160	0,1782
Diferenças Finitas [43]	0,1183	0,1302	0,368	0,3670	-	-
FATOR	$q a^4/D$	$q a^4/D$	$q a^2$	$q a^2$	$q a^2$	$q a^2$

C A P Í T U L O V

PLACAS COM CONDIÇÕES DE VINCULAÇÃO

EM SEU DOMÍNIO

5.1 - INTRODUÇÃO

O sistema de equações lineares (4.17), obtido a partir das equações integrais (3.48) e (3.92), tem como incógnitas os esforços e os deslocamentos no contorno da placa e, portanto, não permite a análise de placas com condições de vinculação em seu domínio, como é o caso das lajes contínuas e lajes cogumelo usuais em projetos de edifícios.

Neste capítulo, as equações (3.48) e (3.92) são modificadas para prever a existência de pontos do domínio com carregamentos ou deslocamentos prescritos, permitindo a análise das placas anteriormente referidas. Com esta modificação, são introduzidas novas incógnitas e, portanto, novas equações devem ser obtidas para que o sistema possa ser resolvido. Essas novas equações são obtidas escrevendo-se, para cada ponto do domínio, as equações integrais referentes aos deslocamentos prescritos.

Inicialmente, é apresentada a formulação para a análise de placas contínuas e lajes cogumelo supondo-se, neste último caso, que apenas os deslocamentos verticais dos pontos da interface placa-pilar estão impedidos, desprezando-se, portanto, a rigidez à flexão dos pilares. Pos

teriormente, é desenvolvida uma formulação geral para a análise da associação da placa com uma estrutura genérica. Em seguida, são feitas as particularizações da formulação geral para a análise da associação placa-pilar, considerando a rigidez do pilar à compressão e à flexão, e da associação placa-grelha.

Finalmente, são apresentados vários exemplos de placas analisadas com a formulação proposta e a comparação dos resultados com os obtidos por outros processos numéricos.

5.2 - EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA PLACAS COM CONDIÇÕES DE VINCULAÇÃO EM SEU DOMÍNIO

As equações integrais (3.48) e (3.92) podem ser modificadas para incluir a influência de cargas distribuídas ao longo das linhas S_{v_i} ou em sub-regiões S_{p_i} do domínio Ω (figura 5.1), podendo ser interpretadas tanto como carregamentos prescritos ou reações incógnitas da interface placa-viga e placa-pilar, respectivamente.

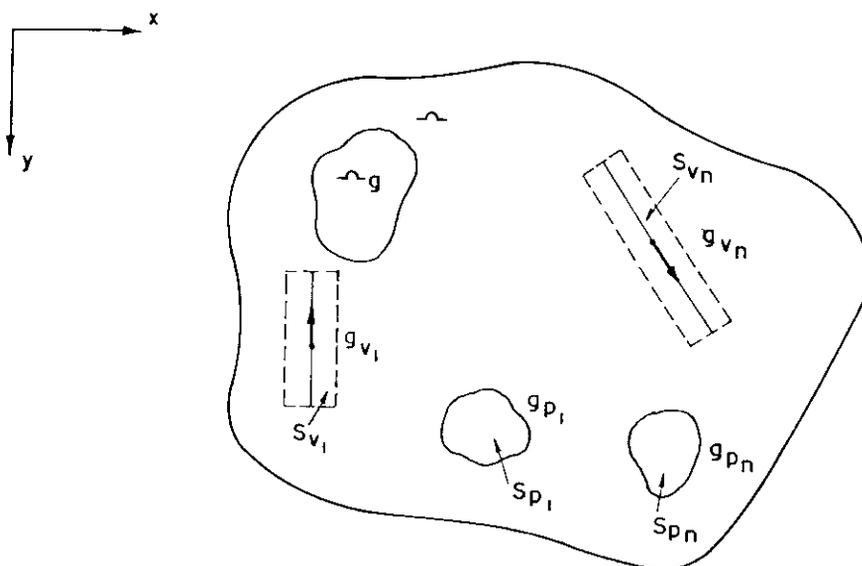


FIG. 5.1 - Placa com linhas de carga e sub-regiões carregadas.

Nesse caso, as equações integrais, para um ponto qualquer do contorno, ficam expressas na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 K(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q,P)w(P) - m_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}^*(Q,P) w_{C_i}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(Q,P) + \right. \\
 \left. - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}(P) w_{C_i}^*(Q,P) + \\
 + \sum_{i=1}^{n_V} \int_{S_{V_i}} g_{V_i} w^*(Q,P) dS_{V_i} + \sum_{i=1}^{n_P} \int_{S_{P_i}} g_{P_i} w^*(Q,P) dS_{P_i} + \\
 + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega_g(p) \quad \dots (5.1)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 K_1 \frac{\partial w}{\partial m_q}(Q) + K_2 \frac{\partial w}{\partial u_q}(Q) + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m_q}(Q,P)w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q}(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 + \sum_{i=1}^{N_C} \frac{\partial R_{C_i}^*}{\partial m_q}(Q,P) w_{C_i}(P) = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q,P) + \right. \\
 \left. - m_n(P) \frac{\partial}{\partial m_q} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] \right\} d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}(P) \frac{\partial w_{C_i}^*}{\partial m_q}(Q,P) + \\
 + \sum_{i=1}^{n_V} \int_{S_{V_i}} g_{V_i} \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q,p) dS_{V_i} + \sum_{i=1}^{n_P} \int_{S_{P_i}} g_{V_i} \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q,p) dS_{P_i} + \\
 + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q,p) d\Omega_g(p) \quad \dots (5.2)
 \end{aligned}$$

onde:

n_p = número de sub-regiões com carregamento g_p ou número de apoios discretos;

n_v = número de linhas de carga g_v ou número de elementos nos quais foi dividido o apoio contínuo;

g_{p_i} = carga uniformemente distribuída na área s_{p_i} ;

g_{v_i} = carga uniformemente distribuída na linha s_{v_i} .

Essas equações integrais, após a discretização do contorno, resultam no sistema de equações lineares análogo ao já mostrado no capítulo 3:

$$[H] \{W_T\} = [G] \{V_T\} + [S] \{P_\Omega\} + [F] \{R_C\} + \{P\} \quad \dots (5.3)$$

onde

$$\{P_\Omega\}^T = [g_{v_1} \ g_{v_2} \ \dots \ g_{v_n} \ g_{p_1} \ g_{p_2} \ \dots \ g_{p_n}] \quad \dots (5.4)$$

O vetor $\{P_\Omega\}$ contém os valores dos carregamentos nas linhas de carga e sub-áreas que podem ou não ser prescritos. No caso de valor não prescrito, os carregamentos são interpretados como as reações nos apoios contínuo e discreto.

Com as equações (5.1) e (5.2), é possível analisar placas com linhas de carga, g_{v_i} , e com cargas distribuídas em uma pequena área, g_{p_i} . Entretanto, se os deslocamentos sob g_{v_i} e g_{p_i} forem valores conhecidos, por exemplo, nulos, como é o caso das placas contínuas e das lajes cogumelo, nas quais se considera rigidez infinita para vigas e pilares, tais carregamentos passam a ser incógnitas nas equações integrais. Portanto, novas equações precisam ser escritas para que, após a discretização do contorno, se tenha igual número de equações e incógnitas. Estas equações adicionais são obtidas escrevendo-se a equação integral referente ao deslocamento transversal, (3.34), para os pon-

tos centrais de S_{vi} e S_{pi} , considerando-se também, o efeito das cargas lineares e discretas aplicadas no domínio. Assim, sendo s_i o ponto central de S_{vi} ou de S_{pi} , pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 w(s_i) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(s_i, P) w(P) - m_n^*(s_i, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 + \sum_{i=1}^{N_C} R_{ci}^*(s_i, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(s_i, P) + \right. \\
 \left. - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(s_i, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_C} R_{ci}(P) w_{ci}^*(s_i, P) + \\
 + \sum_{i=1}^{n_v} \int_{S_{vi}} g_{vi} w^*(s_i, p) dS_{vi} + \sum_{i=1}^{n_p} \int_{S_{pi}} g_{pi} w^*(s_i, p) dS_{pi} + \\
 + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(s_i, p) d\Omega_g(p) \quad \dots (5.5)
 \end{aligned}$$

Essas equações, após a discretização do contorno em elementos e a integração sobre os mesmos, podem ser escritas em forma matricial:

$$\begin{aligned}
 [H'] \{W_{\Gamma}\} + [I] \{W_{\Omega}\} = [G'] \{V_{\Gamma}\} + [S'] \{P_{\Omega}\} + \\
 + [F'] \{R_C\} + \{P'\} \quad \dots (5.6)
 \end{aligned}$$

onde $\{W_{\Omega}\}$ é o vetor dos deslocamentos dos pontos internos, s_i , e $[I]$ é a matriz identidade.

Os dois sistemas de equações, (5.3) e (5.6), após a eliminação das incógnitas adicionais dos cantos, conforme explicado em (4.2), podem ser agrupados em um único sistema de equações, dado por:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{H}} & \underline{\underline{O}} \\ \underline{\underline{H'}} & \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{W}}_{\Gamma} \\ \underline{\underline{W}}_{\Omega} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{S}} \\ \underline{\underline{G'}} & \underline{\underline{S'}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{V}}_{\Gamma} \\ \underline{\underline{P}}_{\Omega} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{\underline{P}} \\ \underline{\underline{P'}} \end{Bmatrix} \quad \dots (5.7)$$

Se os deslocamentos $\underline{\underline{w}}_{\Omega}$ são prescritos, o sistema de equações é rearranjado passando-se os valores das reações internas para o primeiro membro,

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{H}} & -\underline{\underline{S}} \\ \underline{\underline{H'}} & -\underline{\underline{S'}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{W}}_{\Gamma} \\ \underline{\underline{P}}_{\Omega} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{O}} \\ \underline{\underline{G'}} & -\underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{V}}_{\Gamma} \\ \underline{\underline{W}}_{\Omega} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{\underline{P}} \\ \underline{\underline{P'}} \end{Bmatrix} \quad \dots (5.8)$$

A resolução desse sistema fornece os valores das reações nas vigas e nos pilares, além dos valores de contorno. Com tais parâmetros, os deslocamentos e curvaturas de pontos internos podem ser obtidos considerando-se agora os esforços da interface como carregamento transversal ao plano médio da placa.

$$\{ \underline{\underline{W}}_D \} = - [\underline{\underline{H}}^*] \{ \underline{\underline{W}}_{\Gamma} \} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}^* & \underline{\underline{S}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{V}}_{\Gamma} \\ \underline{\underline{P}}_{\Omega} \end{Bmatrix} + \{ \underline{\underline{P}}^* \} \quad \dots (5.9)$$

5.3 - ASSOCIAÇÃO DA PLACA COM UMA ESTRUTURA QUALQUER

Pretende-se analisar a associação da placa com uma estrutura qualquer. Para isso, considera-se que os novos elementos estruturais estejam ligados a pontos discretos da placa, através dos quais é feita a interação entre as duas estruturas (figura 5.4).

Interpretando-se os esforços da interface entre as estruturas como um carregamento externo aplicado à placa, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$[\underline{\underline{H}}] \{ \underline{\underline{W}}_{\Gamma} \} = [\underline{\underline{G}}] \{ \underline{\underline{V}}_{\Gamma} \} + [\underline{\underline{G}}_{\Omega}] \{ \underline{\underline{P}}_{\Omega} \} + \{ \underline{\underline{P}} \} \quad \dots (5.10)$$

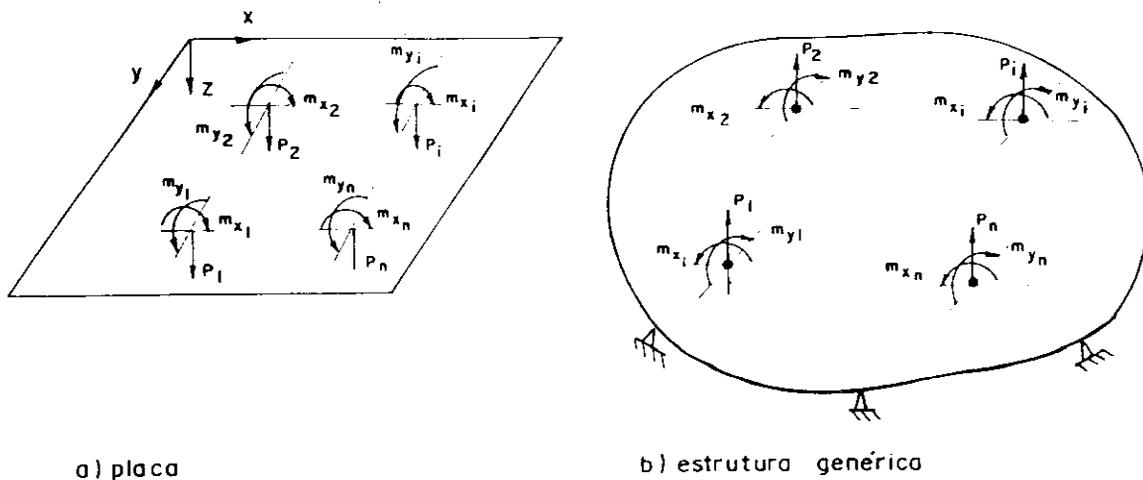


FIG. 5.2 - Associação da placa com uma estrutura qualquer.

onde $\{P_{\Omega}\}$ é o vetor dos esforços da interface, isto é, reações e momentos fletores necessários ao equilíbrio. Note-se que os esforços paralelos ao plano da placa não estão sendo considerados já que esta análise não inclui os esforços de membrana.

Os esforços P_i , m_{x_i} e m_{y_i} da estrutura genérica se relacionam com os deslocamentos correspondentes através de:

$$[K_g] \{W_g\} = \{P_{\Omega}\} \quad \dots (5.11)$$

onde $[K_g]$ é a matriz de rigidez desta estrutura, e $\{W_g\}$ são os deslocamentos nodais correspondentes. Como os deslocamentos da interface são os mesmos para as duas estruturas, a equação (5.11) pode ser reescrita:

$$[K_g] \{W_{\Omega}\} = \{P_{\Omega}\} \quad \dots (5.12)$$

Substituindo-se em (5.10), $\{P_{\Omega}\}$ por sua expressão, (5.12), obtém-se:

$$[\underline{H} - \underline{G}_{\Omega} \underline{K}_g] \begin{Bmatrix} \underline{W}_{\Gamma} \\ \underline{W}_{\Omega} \end{Bmatrix} = [\underline{G}] \{V_{\Gamma}\} + \{P\} \quad \dots (5.13)$$

Escrevendo-se as equações integrais referentes aos deslocamentos $\{w_\Omega\}$ obtêm-se, após a discretização do contorno:

$$\begin{bmatrix} \underline{H}' & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{W}_\Gamma \\ \underline{W}_\Omega \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}' \end{bmatrix} \{V_\Gamma\} + \begin{bmatrix} \underline{G}'_\Omega \end{bmatrix} \{P_\Omega\} + \{P'\} \quad \dots (5.14)$$

Com a substituição, em (5.14) de P_Ω , (5.12), obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} \underline{H}' & \underline{I} - \underline{G}'_\Omega \underline{K}_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{W}_\Gamma \\ \underline{W}_\Omega \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}' \end{bmatrix} \{V_\Gamma\} + \{P'\} \quad \dots (5.15)$$

Finalmente, agrupando-se (5.13) e (5.15) em um único sistema de equações, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} \underline{H} & -\underline{G}_\Omega \underline{K}_g \\ \underline{H}' & \underline{I} - \underline{G}'_\Omega \underline{K}_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{W}_\Gamma \\ \underline{W}_\Omega \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G} \\ \underline{G}' \end{bmatrix} \{V_\Gamma\} + \begin{Bmatrix} \underline{P} \\ \underline{P}' \end{Bmatrix} \quad \dots (5.16)$$

A solução do sistema acima, (5.16), fornece os deslocamentos $\{w_\Omega\}$ da interface e os respectivos esforços são obtidos a partir de (5.12). A estrutura genérica, quando necessário, pode ser analisada considerando-se os esforços da interface como carregamento externo aplicado, o que permitirá a obtenção de deslocamentos e esforços em pontos internos da mesma. Deslocamentos e curvaturas de pontos internos da placa são dados por (5.9), onde os esforços da interface são considerados carregamentos transversais.

5.4 - ASSOCIAÇÃO PLACA-PILAR

Pretende-se, neste item, particularizar a formulação genérica, desenvolvida no item 5.3, para o estudo da associação da placa com o pilar. Neste estudo conside

ra-se, como hipótese, que a secção do pilar, em contato com a placa permanece plana após a deformação do conjunto e, conseqüentemente, a tensão atuante no pilar varia linearmente. Definindo um sistema local de coordenadas cartesianas (\bar{x}, \bar{y}) , relativas às direções principais de inércia da secção transversal do pilar (figura 5.3), a tensão atuante nesta secção é dada pela seguinte expressão:

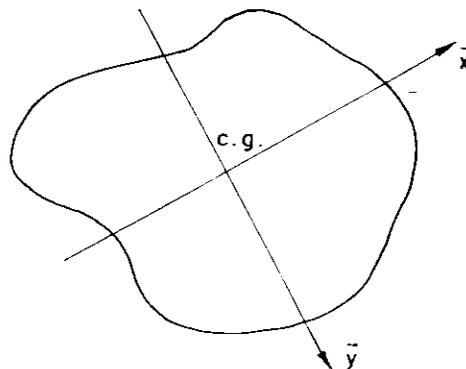


FIG. 5.3 - Sistema de coordenadas cartesianas coincidente com as direções principais de inércia da secção do pilar.

$$\sigma_P = \frac{M_{\bar{x}}^-}{I_{P_{\bar{x}}}^-} \bar{y} + \frac{M_{\bar{y}}^-}{I_{P_{\bar{y}}}^-} \bar{x} + \sigma_0 \quad \dots (5.17)$$

onde:

σ_P = tensão no pilar na secção da interface;

$M_{\bar{x}}^-$, $M_{\bar{y}}^-$ = momentos fletores no pilar;

$I_{P_{\bar{x}}}^-$, $I_{P_{\bar{y}}}^-$ = momentos principais de inércia;

σ_0 = tensão devida ao esforço normal atuante no pilar.

Na figura 5.4 está indicado o conjunto placa-pilar nas posições inicial e deformada. O deslocamento transversal w_p e suas derivadas, $\partial w_p / \partial \bar{x}$ e $\partial w_p / \partial \bar{y}$, que ocorrem na placa, são os mesmos para a correspondente face do pilar. Uma vez que a posição deformada da interface está

sendo considerada plana, deslocamentos em qualquer outro ponto da interface ficam dados por esses parâmetros, isto é, w_p , $\partial w_p / \partial \bar{x}$ e $\partial w_p / \partial \bar{y}$.

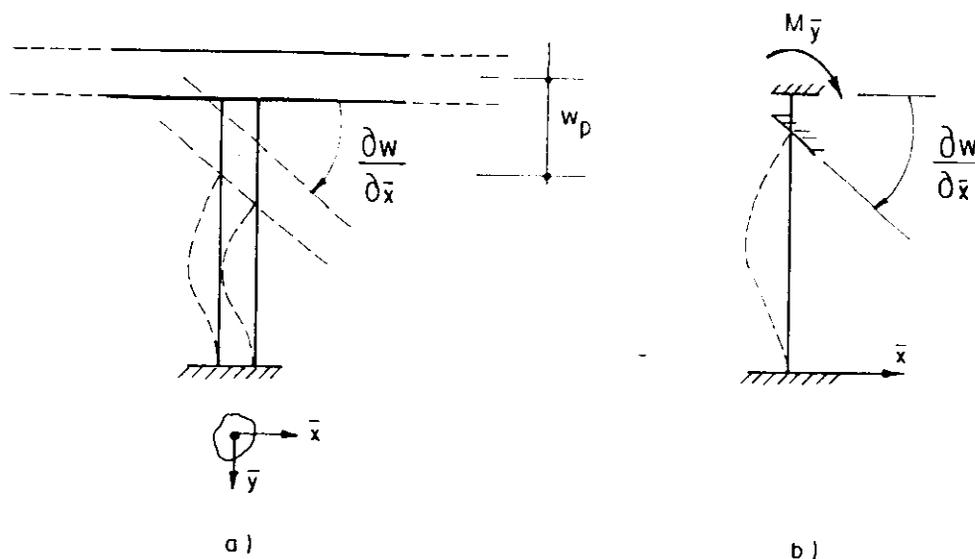


FIG. 5.4 - Conjunto placa-pilar nas posições inicial e deformada.

Os momentos fletores resultantes das tensões aplicadas no pilar se relacionam com as derivadas da elástica através de (figura 5.4.b):

$$M_{\bar{x}} = - \frac{K_p E_p I_{p\bar{x}}}{\ell_p} \frac{\partial w_p}{\partial \bar{y}} \quad \dots (5.18)$$

e

$$M_{\bar{y}} = - \frac{K_p E_p I_{p\bar{y}}}{\ell_p} \frac{\partial w_p}{\partial \bar{x}} \quad \dots (5.19)$$

onde:

E_p = módulo de elasticidade do pilar

ℓ_p = comprimento do pilar

e

$$K_p = \begin{cases} 4 & \text{para o pilar engastado na base;} \\ 3 & \text{para o pilar articulado na base.} \end{cases}$$

A relação entre a tensão σ_o e o deslocamento vertical w_p do centro de gravidade da face do pilar em contato com a placa é:

$$\sigma_o = - \frac{E_p}{\ell_p} w_p \quad \dots (5.20)$$

Substituindo-se em (5.17) os valores de $M_{\bar{x}}$ e $M_{\bar{y}}$ e σ_o , (5.18), (5.19) e (5.20), obtém-se:

$$\sigma_p = - \frac{K_p E_p}{\ell_p} \bar{x} \frac{\partial w_p}{\partial \bar{x}} - \frac{K_p E_p}{\ell_p} \bar{y} \frac{\partial w_p}{\partial \bar{y}} - \frac{E_p}{\ell_p} w_p \quad \dots (5.21)$$

Interpretando-se σ_p como carregamento externo aplicado à placa, a equação integral do deslocamento de um ponto, Q, do contorno, é:

$$\begin{aligned} K(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q,P)w(P) - m_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q,P)w_{c_i}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P)w^*(Q,P) + \right. \\ \left. - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)w_{c_i}^*(Q,P) + \\ + \sum_{i=1}^{n_p} \int_{S_{p_i}} \left[- \frac{K_{p_i} E_{p_i}}{\ell_{p_i}} \bar{x}_i \frac{\partial w_{p_i}}{\partial \bar{x}_i} - \frac{K_{p_i} E_{p_i}}{\ell_{p_i}} \bar{y}_i \frac{\partial w_{p_i}}{\partial \bar{y}_i} + \right. \\ \left. - \frac{E_{p_i}}{\ell_{p_i}} w_{p_i} \right] w^*(Q,p) dS_{p_i} + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,p) d\Omega_g(p) \quad \dots (5.22) \end{aligned}$$

onde n_p é o número de interfaces.

Como a secção do pilar permanece plana após a deformação, os valores $\partial w_{p_i} / \partial \bar{x}_i$, $\partial w_{p_i} / \partial \bar{y}_i$ e w_{p_i} são constantes para cada interface e, portanto, a expressão (5.22) pode ser reescrita:

$$\begin{aligned}
 K(Q)w(Q) &+ \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q,P) w(P) - m_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}^*(Q,P) w_{C_i}(P) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_p} \left[\frac{K_{p_i} E_{p_i}}{\ell_{p_i}} \frac{\partial w_{p_i}}{\partial \bar{x}_i} \int_{S_{p_i}} \bar{x}_i w^*(Q,p) dS_{p_i} + \right. \\
 &+ \left. \frac{K_{p_i} E_{p_i}}{\ell_{p_i}} \frac{\partial w_{p_i}}{\partial \bar{y}_i} \int_{S_{p_i}} \bar{y}_i w^*(Q,p) dS_{p_i} + \right. \\
 &+ \left. \frac{E_{p_i}}{\ell_{p_i}} w_{p_i} \int_{S_{p_i}} w^*(Q,p) dS_{p_i} \right] = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(Q,P) + \right. \\
 &- \left. m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}(P) w_{C_i}^*(Q,P) + \\
 &+ \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega_g(p) \quad \dots (5.23)
 \end{aligned}$$

Obtém-se, analogamente, para a equação da derivada de w , a seguinte representação integral:

$$\begin{aligned}
 K_1 \frac{\partial w}{\partial m_q}(Q) + K_2 \frac{\partial w}{\partial u_q}(Q) &+ \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial m_q}(Q,P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m_q}(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{n_p} \left[\frac{K_{p_i} E_{p_i}}{\ell_{p_i}} \frac{\partial w_{p_i}}{\partial \bar{x}_i} \int_{S_{p_i}} \bar{x}_i \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q,p) dS_{p_i} + \right. \\
 &+ \left. \frac{K_{p_i} E_{p_i}}{\ell_{p_i}} \frac{\partial w_{p_i}}{\partial \bar{y}_i} \int_{S_{p_i}} \bar{y}_i \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q,p) dS_{p_i} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{E_{pi}}{\ell_{pi}} w_{pi} \int_{S_{pi}} \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q, p) dS_{pi} \Big] + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m_q}(Q, P) w_{ci}(P) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left[v_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial m_q \partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m_q}(Q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m_q}(Q, p) d\Omega_g(p) \dots (5.24)
 \end{aligned}$$

Essas equações, após a discretização do contorno e eliminação das eventuais incógnitas adicionais dos cantos, se transformam no seguinte sistema de equações lineares:

$$[H] \{w_{\Gamma}\} + [H_{\Omega}] \{w_{\Omega}\} = [G] \{v_{\Gamma}\} + \{P\} \dots (5.25)$$

onde $\{w_{\Omega}\}$ é o vetor dos deslocamentos w_p , $\partial w_p / \partial \bar{x}$ e $\partial w_p / \partial \bar{y}$ de todas interfaces.

No sistema de equações (5.25) existem $3n_p$ incógnitas a mais que o número de equações, e que são os deslocamentos transversais das interfaces e suas derivadas, o que exige igual número de equações adicionais. Estas equações são obtidas a partir das expressões integrais de w_p , $\partial w / \partial \bar{x}$ e $\partial w / \partial \bar{y}$ para todas interfaces placa-pilar, e que são, para um pilar genérico j :

$$\begin{aligned}
 w(q_j) + \int_{\Gamma} \left[v_n^*(q_j, P) w(P) - m_n^*(q_j, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 + \sum_{i=1}^{n_p} \left[\frac{K_{pi} E_{pi}}{\ell_{pi}} \frac{\partial w_{pi}}{\partial \bar{x}_i} \int_{S_{pi}} \bar{x}_i w^*(q_j, p) dS_{pi} + \right. \\
 \left. + \frac{K_{pi} E_{pi}}{\ell_{pi}} \frac{\partial w_{pi}}{\partial \bar{y}_i} \int_{S_{pi}} \bar{y}_i w^*(q_j, p) dS_{pi} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{E_{pi}}{\ell_{pi}} w_{pi} \left[\int_{S_{pi}} w^*(q_j, p) dS_{pi} \right] + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}^*(q_j, P) w_{C_i}(P) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(q_j, P) - m_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q_j, P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_C} R_{C_i}(P) w_{C_i}^*(q_j, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q_j, p) d\Omega_g(p) \quad \dots (5.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial \bar{x}_i}(q_j) & + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial \bar{x}_i}(q_j, P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial \bar{x}_i}(q_j, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{n_p} \left[\frac{K_{pi} E_{pi}}{\ell_{pi}} \frac{\partial w_{pi}}{\partial \bar{x}_i} \int_{S_{pi}} \bar{x}_i \frac{\partial w^*}{\partial \bar{x}_i}(q_j, p) dS_{pi} + \right. \\
 & + \left. \frac{K_{pi} E_{pi}}{\ell_{pi}} \frac{\partial w_{pi}}{\partial \bar{y}_i} \int_{S_{pi}} \bar{y}_i \frac{\partial w^*}{\partial \bar{x}_i}(q_j, p) dS_{pi} + \right. \\
 & + \left. \frac{E_{pi}}{\ell_{pi}} w_{pi} \left[\frac{\partial w^*}{\partial \bar{x}_i}(q_j, p) dS_{pi} \right] + \sum_{\ell=1}^{N_C} \frac{\partial R_{C_\ell}^*}{\partial \bar{x}_i}(q_j, p) w_{C_\ell}(P) = \right. \\
 & = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial \bar{x}_i}(q_j, P) - m_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial n \partial \bar{x}_i}(q_j, P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{\ell=1}^{N_C} R_{C_\ell}(P) \frac{\partial w_{C_\ell}^*}{\partial \bar{x}_i}(q_j, P) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial \bar{x}_i}(q_j, p) d\Omega_g(p) \quad \dots (5.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial \bar{y}_i}(q_j) & + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial \bar{y}_i}(q_j, P) w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial \bar{y}_i}(q_j, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{n_p} \left[\frac{K_{pi} E_{pi}}{\ell_{pi}} \frac{\partial w_{pi}}{\partial \bar{x}_i} \int_{S_{pi}} \bar{x}_i \frac{\partial w^*}{\partial \bar{y}_i}(q_j, p) dS_{pi} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{K_{pi} E_{pi}}{\ell_{pi}} \frac{\partial w_{pi}}{\partial \bar{y}_i} \int_{S_{pi}} \frac{\partial w^*}{\partial \bar{y}_i} (q_j, P) dS_{pi} + \\
 & + \frac{E_{pi}}{\ell_{pi}} w_{pi} \int_{S_{pi}} \frac{\partial w^*}{\partial \bar{y}_i} (q_j, P) dS_{pi} \Big] + \sum_{\ell=1}^{N_c} \frac{\partial R_{c\ell}^*}{\partial \bar{y}_i} (q_j, P) w_{c\ell}(P) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial \bar{y}_i} (q_j, P) - m_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial n \partial \bar{y}_i} (q_j, P) \right] d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{\ell=1}^{N_c} R_{c\ell}(P) \frac{\partial w_{c\ell}^*}{\partial \bar{y}_i} (q_j, P) + \int_{\Omega_g} \bar{g}(P) \frac{\partial w^*}{\partial \bar{y}_i} (q_j, P) d\Omega_g(P) \\
 & \dots (5.28)
 \end{aligned}$$

Escrevendo-se essas equações para todos os pilares obtém-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$[H'] \{W_{\Gamma}\} + [H'_{\Omega}] \{W_{\Omega}\} = [G'] \{V_{\Gamma}\} + \{P'\} \dots (5.29)$$

Os dois sistemas de equações, (5.25) e (5.29), podem ser agrupados, obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} \underline{H} & \underline{H}_{\Omega} \\ \underline{H}' & \underline{H}'_{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{W}_{\Gamma} \\ \underline{W}_{\Omega} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G} \\ \underline{G}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{\Gamma} \\ \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{P} \\ \underline{P}' \end{Bmatrix} \dots (5.30)$$

A solução do sistema global, (5.30), fornece, além dos valores nodais, os deslocamentos da interface placa-pilar, a partir dos quais são calculados os esforços atuantes no pilar através de (5.18), (5.19) e (5.20). Deslocamentos e curvaturas em pontos do domínio, usualmente necessários na análise completa da estrutura, são obtidos através de:

$$\{W_D\} = - \begin{bmatrix} \underline{H}^* & \underline{H}_{\Omega}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{W}_{\Gamma} \\ \underline{W}_{\Omega} \end{Bmatrix} + [G^*] \{V_{\Gamma}\} + \{P^*\} \dots (5.31)$$

5.5 - ASSOCIAÇÃO PLACA-GRELHA

Nas estruturas usuais de edifícios, a placa está associada com elementos lineares trabalhando à flexão, cujo conjunto define uma grelha. A ligação entre os elementos estruturais é monolítica e a análise deste comportamento da associação das duas estruturas só é possível considerando-as como uma única estrutura tridimensional. Na interpretação do pavimento como estrutura bidimensional, o que torna mais simples a análise, consideram-se as duas estruturas interagindo entre si em pontos previamente definidos no domínio da placa. Na formulação desenvolvida neste item considera-se que os esforços de interação são forças verticais, conforme indica a figura 5.5.

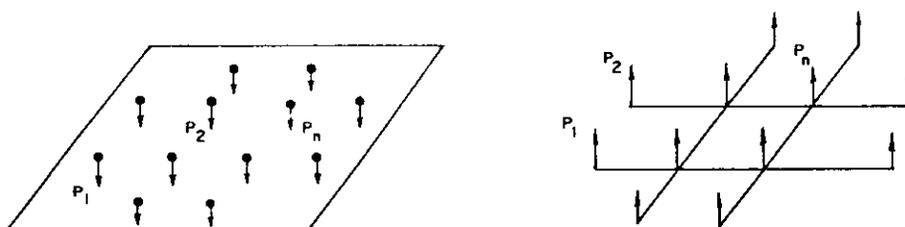


FIG. 5.5 - Esforços da interação placa-grelha.

Considerando-se os esforços de interação entre as duas estruturas como carregamento externo, as equações integrais referentes ao deslocamento de um ponto do contorno e de sua derivada na direção normal podem ser escritas e, nestas equações, os valores das forças de interação, P_n , aparecem como incógnitas. Estendendo-se essas equações a todos os pontos nodais, o seguinte sistema de equações lineares é obtido após a discretização do contorno da placa:

$$[H] \{w_{\Gamma}\} = [G] \{v_{\Gamma}\} + [S] \{P_{\Omega}\} + \{P\} \quad \dots (5.32)$$

onde $\{P_{\Omega}\}$ é o vetor dos esforços da interface.

Neste sistema existem n_v incógnitas adicionais, onde n_v é o número de pontos de ligação entre a placa e a grelha. As equações adicionais são obtidas escrevendo-se a equação integral para o deslocamento transversal destes pontos, as quais fornecem, após a discretização do contorno, o sistema de equações:

$$[H'] \{w_\Gamma\} + [I] \{w_\Omega\} = [G'] \{v_\Gamma\} + [S'] \{P_\Omega\} + \{P'\} \quad \dots (5.33)$$

O vetor $\{P_\Omega\}$ pode ser escrito em função dos deslocamentos transversais dos nós da grelha e suas respectivas rotações a partir do processo dos deslocamentos [46]

$$\begin{bmatrix} R_{vv} & R_{v\theta} \\ R_{\theta v} & R_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_\Omega \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots (5.34)$$

onde $\{v\}$ é o vetor dos deslocamentos transversais e θ é o vetor das rotações θ_{xi} , θ_{yi} de todos os nós da grelha. Como a placa e a grelha, nos pontos de ligação entre elas, têm o mesmo deslocamento vertical, ou seja, $v = \{w_\Omega\}$, o sistema (5.34) pode ser reescrito:

$$\begin{bmatrix} R_{vv} & R_{v\theta} \\ R_{\theta v} & R_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_\Omega \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_\Omega \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots (5.35)$$

O sistema de equações (5.35) pode ser decomposto em dois outros sistemas de equações:

$$\begin{bmatrix} R_{vv} & R_{v\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_\Omega \\ \theta \end{Bmatrix} = \{P_\Omega\} \quad \dots (5.36)$$

e

$$\begin{bmatrix} \underline{R}_{\theta v} & \underline{R}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{W}_{\Omega} \\ \underline{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix} \quad \dots (5.37)$$

Substituindo-se, em (5.32) e (5.33), o valor de $\{P_{\Omega}\}$, (5.36), e reunindo-se tais equações em um único sistema, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \underline{H} & -\underline{S} \underline{R}_{vv} & -\underline{S} \underline{R}_{v\theta} \\ \underline{H}' & \underline{I} - \underline{S}' \underline{R}_{vv} & -\underline{S}' \underline{R}_{v\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{W}_{\Gamma} \\ \underline{W}_{\Omega} \\ \underline{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G} \\ \underline{G}' \end{bmatrix} \{V_{\Gamma}\} + \begin{Bmatrix} \underline{P} \\ \underline{P}' \end{Bmatrix} \quad \dots (5.38)$$

Observe-se que em (5.38) existem incógnitas adicionais, isto é, os giros dos nós da grelha, e portanto, novas equações são necessárias. As equações adicionais utilizadas são as definidas por (5.37) e que, após serem incluídas em (5.38), fornecem o sistema final de equações algébricas a ser resolvido:

$$\begin{bmatrix} \underline{H} & -\underline{S} \underline{R}_{vv} & -\underline{S} \underline{R}_{v\theta} \\ \underline{H}' & \underline{I} - \underline{S}' \underline{R}_{vv} & -\underline{S}' \underline{R}_{v\theta} \\ \underline{0} & \underline{R}_{\theta v} & \underline{R}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{W}_{\Gamma} \\ \underline{W}_{\Omega} \\ \underline{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G} \\ \underline{G}' \\ \underline{0} \end{bmatrix} \{V_{\Gamma}\} + \begin{Bmatrix} \underline{P} \\ \underline{P}' \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \quad \dots (5.39)$$

Após a imposição das condições de contorno, a resolução do sistema (5.39) fornece, além dos parâmetros nodais, os deslocamentos e rotações dos nós da grelha. Assim, os esforços nas barras da grelha podem ser obtidos a partir da condição de equilíbrio de cada elemento, ou seja:

$$[K]_b \{\delta\}_b = \{P\}_b \quad \dots (5.40)$$

onde $[K]_b$ é a matriz de rigidez da barra; $\{\delta\}_b$ é o vetor

dos deslocamentos e rotações dos nós da barra e $\{P\}_b$ é o vetor dos esforços solicitantes.

Os deslocamentos e curvaturas de pontos do domínio da placa são obtidos a partir de (5.9).

5.6 - AVALIAÇÃO DAS FORMULAÇÕES PROPOSTAS PARA ANÁLISE DA ASSOCIAÇÃO DA PLACA COM OUTROS ELEMENTOS ESTRUTURAIS

A seguir, as formulações desenvolvidas nos itens anteriores são utilizadas na análise de diversos exemplos de pavimentos de edifícios.

Embora as formulações possam ser desenvolvidas utilizando-se uma ou duas equações integrais para cada ponto do contorno, apenas a formulação que utiliza duas equações foi usada na resolução dos exemplos aqui apresentados e os elementos de contorno utilizados foram o linear, contínuo e descontínuo, e o constante. Os resultados obtidos são comparados, quando possível, com os fornecidos por soluções exatas e, caso contrário, com os obtidos por outros processos numéricos como, por exemplo, diferenças finitas e elementos finitos.

Na análise dos pavimentos pelo método dos elementos finitos, o elemento utilizado foi o triangular com 18 parâmetros nodais (T-18) associado com o elemento de barra de 6 parâmetros nodais. Nesta análise foram adotadas malhas de elementos finitos bem refinadas para não haver dúvidas sobre a precisão dos resultados obtidos.

5.6.1 - Exemplo 1: Placa quadrada apoiada no contorno e em pontos de seu domínio

Neste exemplo, analisa-se uma placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e, em seu domínio, apoiada em quatro pilares, conforme indica a figura 5.6. O carregamento transversal é uniformemente distribuído.

Embora as dimensões deste exemplo não sejam usuais, o interesse em analisá-lo se justifica pelo fato de que sua solução exata é conhecida, permitindo estudos comparativos mais completos.

Como uma placa retangular simplesmente apoiada no contorno tem solução exata conhecida, a solução da placa da figura 5.6 pode ser facilmente obtida pelo processo dos esforços, compatibilizando-se os deslocamentos transversais e suas derivadas, nas direções x e y , nos pontos da interface placa-pilar^{[43],[47]}.

Considere-se inicialmente o caso em que a rigidez axial dos pilares é infinita e que a rigidez ao giro nas direções x e y é nula. Os resultados obtidos com uma divisão do contorno em 24 elementos iguais, estão indicados na tabela 15, juntamente com os valores teóricos calculados com 50 termos da série. São apresentados também os erros observados em cada um dos seis pontos indicados na figura 5.6.

Considere-se agora a ligação elástica entre a placa e os pilares, admitindo-se que estes últimos estejam engastados em sua extremidade inferior. Adota-se também o comprimento do lado da placa igual a 12m e a altura dos pilares, 3m. Na figura 5.6.b estão indicados também os valores dos momentos de inércia nas direções \bar{x}_i e \bar{y}_i de cada pilar.

A resolução deste exemplo possibilita a comparação entre os resultados fornecidos pelo método dos elementos

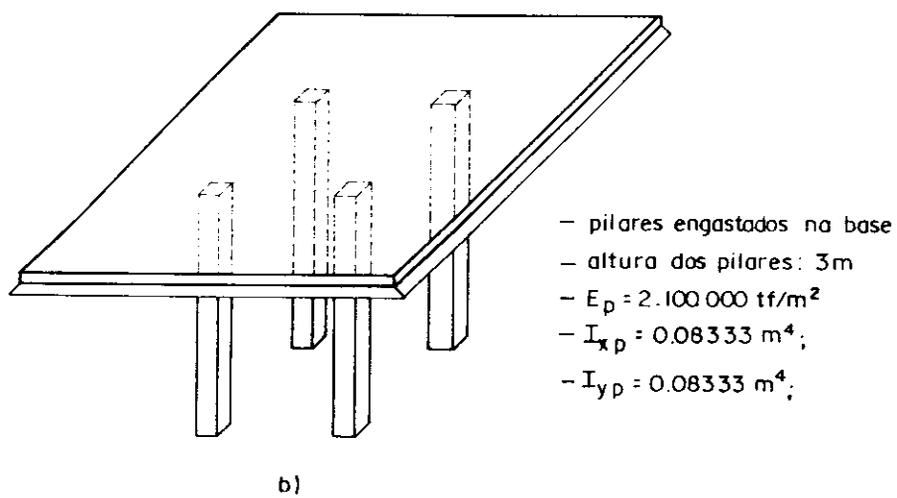
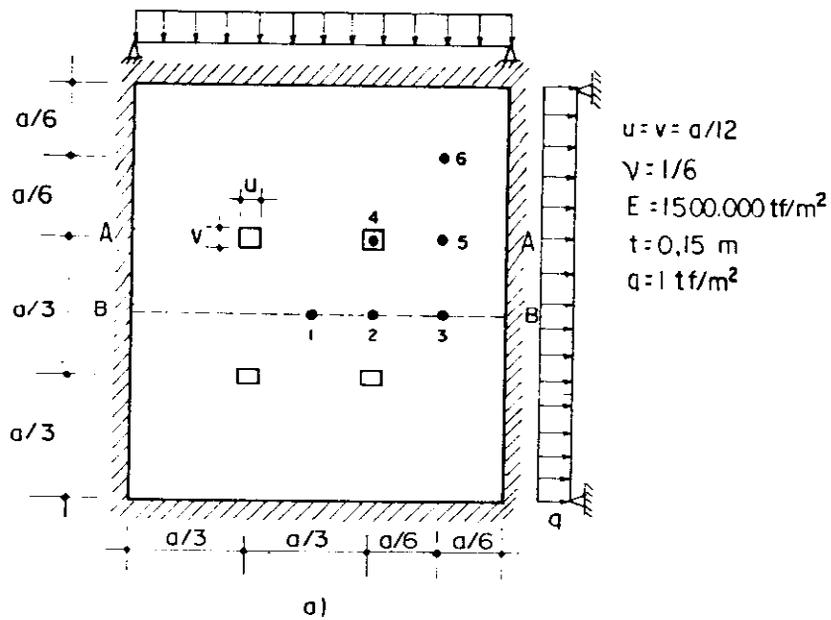


FIG. 5.6 - Placa apoiada no contorno e em pontos do domínio.

TABELA 15 - Resultados obtidos analítica e numericamente na análise da placa apoiada no contorno e, em seu domínio, em quatro pilares de rigidez axial infinita e rigidez ao giro nula.

PONTO	w			m _x			m _y		
	M.E.C.	TEOR.	ERRO %	M.E.C.	TEOR.	ERRO %	M.E.C.	TEOR.	ERRO %
1	0,283	0,278	1,5	0,185	0,184	0,8	0,185	0,184	0,8
2	0,318	0,315	0,9	-0,361	-0,360	0,3	0,467	0,464	0,8
3	0,895	0,894	0,2	0,742	0,748	0,8	0,240	0,231	3,7
4	0,00	0,00	-	-1,491	-1,491	0,0	-1,491	-1,491	0,0
5	0,867	0,865	0,2	0,845	0,850	0,5	-0,255	-0,256	0,4
6	0,940	0,950	1,1	0,555	0,563	1,3	0,555	0,563	1,3
FATOR	$10^{-4} q a^4 / D$			$10^{-2} q a^2$			$10^{-2} q a^2$		

de contorno e os valores obtidos com 17 termos da série da solução exata^[47].

Os resultados fornecidos pela formulação proposta, com uma divisão do contorno em 40 elementos de igual comprimento, estão indicados nas figuras 5.7, 5.8 e 5.9. Foram representados os momentos m_x e m_y e também os deslocamentos transversais ao longo da linha dos pilares (A-A) e ao longo da linha central e paralela ao lado da placa (B-B). Nos deslocamentos, os valores obtidos estão praticamente iguais aos fornecidos pela solução exata. Para os valores dos momentos, foi observada uma diferença próxima de 2% que está dentro do erro esperado, uma vez que a solução analítica^[47] foi obtida com apenas 17 termos da série.

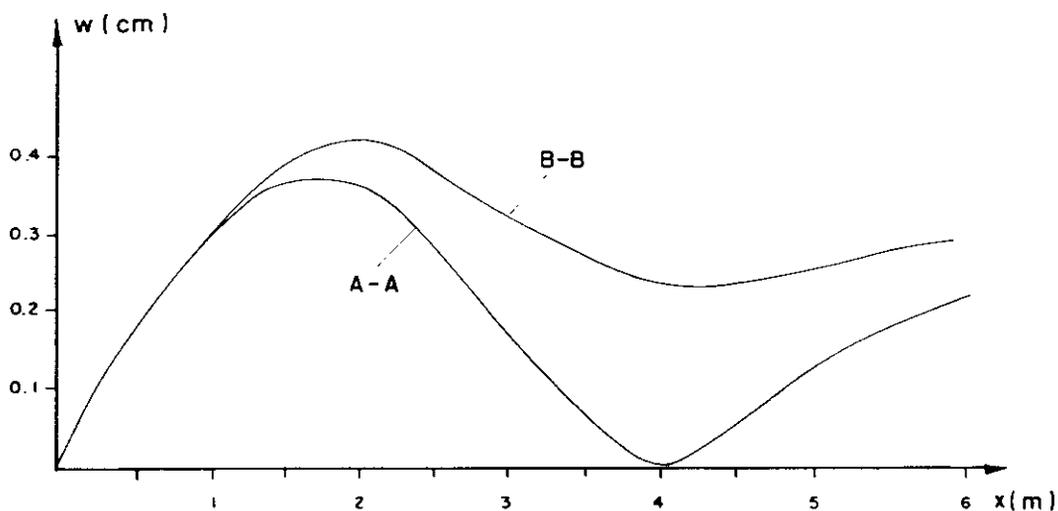


FIG. 5.7 - Deslocamentos transversais ao longo de A-A e B-B.

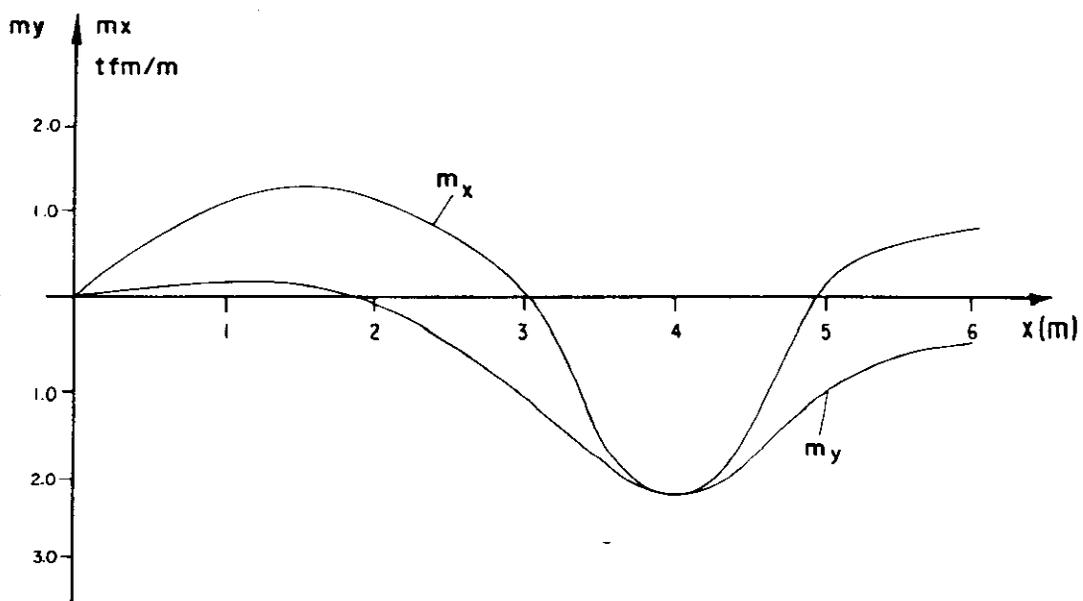


FIG. 5.8 - Momentos m_x e m_y ao longo de A-A.

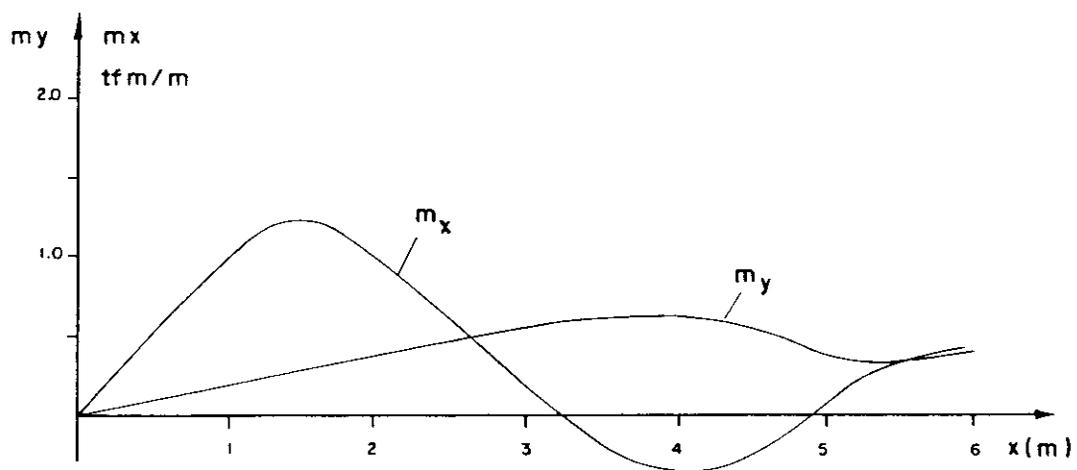


FIG. 5.9 - Momentos m_x e m_y ao longo de B-B.

5.6.2 - Exemplo 2: Placa quadrada com apoio contínuo

Neste exemplo, analisa-se uma placa quadrada apoiada no contorno e com um apoio contínuo em seu domínio, conforme indica a figura 5.10.

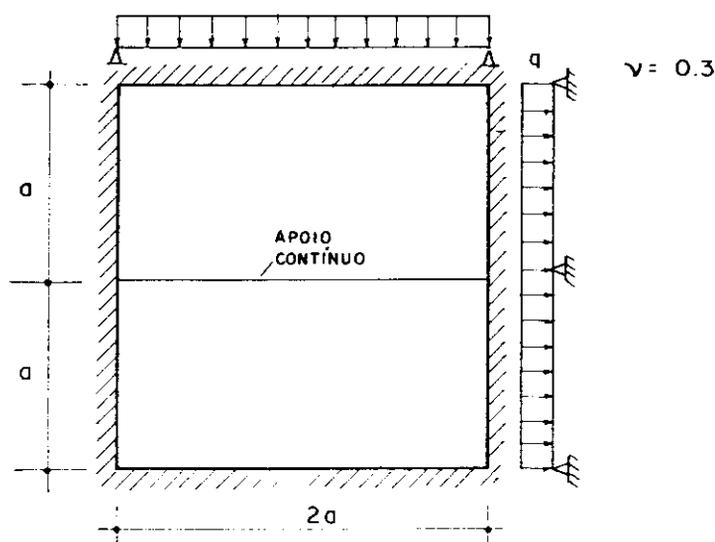


FIG. 5.10 - Placa quadrada simplesmente apoiada no contorno e com apoio contínuo em seu domínio.

Nesta análise foi utilizado o elemento de contorno com aproximação constante para forças e deslocamentos e, tanto o contorno como o apoio contínuo foram discretizados em segmentos de comprimento igual a $a/6$. Admitiu-se que a reação no apoio contínuo é constante ao longo de cada elemento e apenas os deslocamentos nos centros dos segmentos internos foram tomados iguais a zero, sendo que as derivadas dos deslocamentos transversais na direção do apoio não tiveram restrições.

Os valores numéricos obtidos para deslocamentos e momentos são praticamente iguais aos valores teóricos^[43],

com erro máximo para os momentos igual a 0,09% no centro da placa. Na figura 5.11 está representada a variação dos momentos fletores ao longo do apoio interno e, na mesma figura, é também indicada a solução exata, que foi obtida empregando-se 100 termos da série.

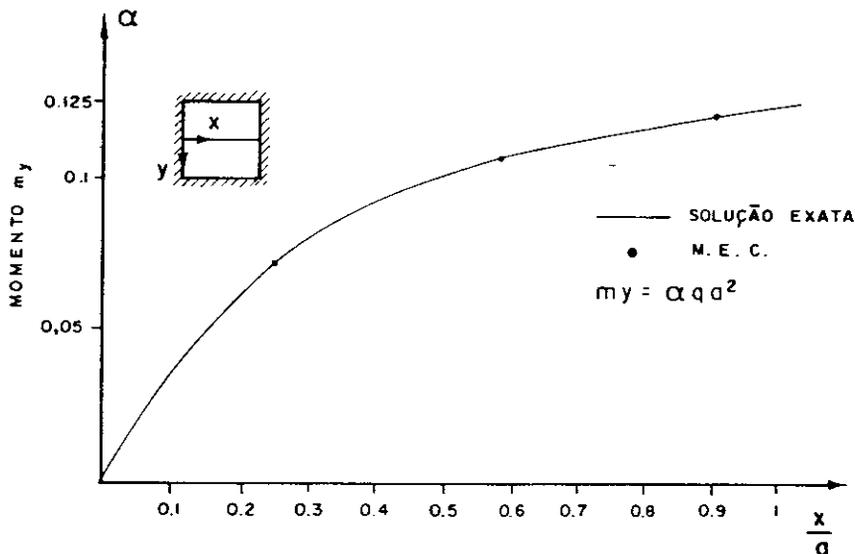


FIG. 5.11 - Valores numéricos e teóricos dos momentos sobre o apoio contínuo.

5.6.3 - Exemplo 3: Placa quadrada apoiada em vigas elásticas

Geralmente, no cálculo de pavimentos de edifícios, as vigas são consideradas de rigidez infinita e cada placa, definida pelas vigas do pavimento, é calculada isoladamente fazendo-se, posteriormente, uma compensação dos momentos na junção dessas placas. Tal procedimento se justifica pela dificuldade de se obter a solução exata da associação da placa com a viga elástica, o que só é possível em casos particulares. Assim, apenas pelos processos numéricos, o estudo da maioria dos problemas envolvendo a associação destes dois elementos estruturais é possível.

Nos itens anteriores, foram mostradas as modificações que devem ser introduzidas no método dos elementos de contorno para que tais problemas possam ser analisados. Como aplicação da formulação proposta, considere-se a placa quadrada apoiada, em seu contorno, em vigas elásticas de Momentos de Inércia I_1 , I_2 , I_3 e I_4 e rigidamente apoiada em seus cantos, conforme indica a figura 5.12.

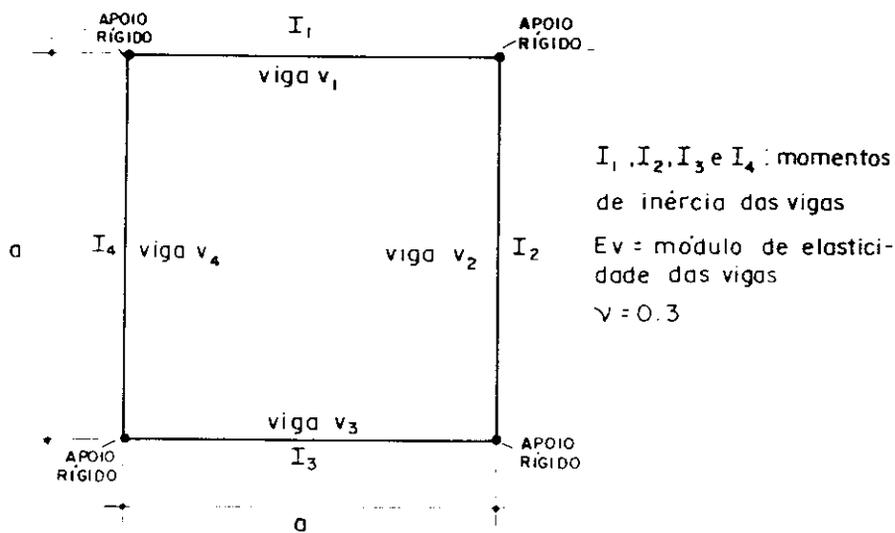


FIG. 5.12 - Placa quadrada apoiada em vigas elásticas.

Considere-se, inicialmente, o caso em que as vigas v_1 e v_3 são completamente rígidas e que:

$$I_2 = I_4 = \frac{6 a D}{E_V}$$

Nas figuras de números 5.13 a 5.18 estão indicados os deslocamentos e esforços ao longo dos eixos de simetria da placa, obtidos pela formulação proposta, e os da solução teórica, obtidos com 50 termos da série^[43]. Nesta análise, os lados da placa e as vigas foram divididos em 10 elementos iguais. Para os deslocamentos, a diferença entre

os máximos valores obtidos pelas duas soluções foi de 3,2% e, para os momentos fletores, 3,7%.

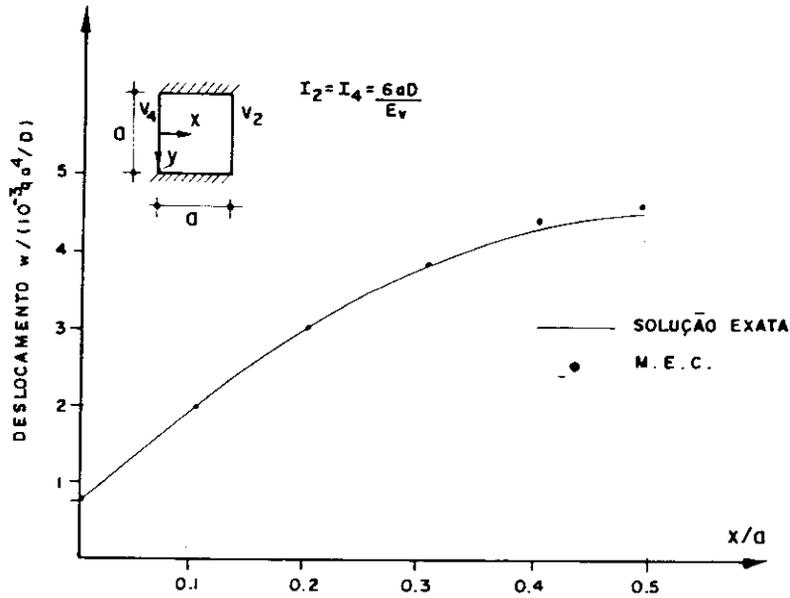


FIG. 5.13 - Valores teóricos e numéricos para os deslocamentos ao longo do eixo de simetria, X.

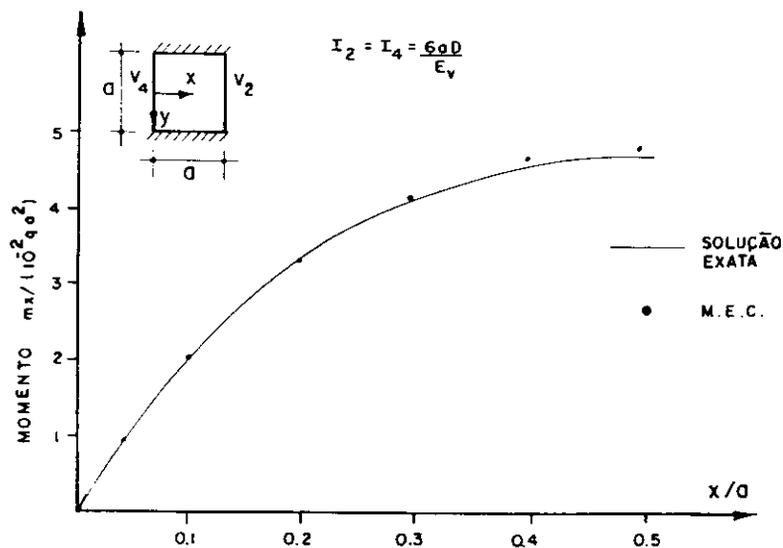


FIG. 5.14 - Momento fletor m_x , obtido pelo método dos elementos de contorno e pela solução exata, ao longo do eixo X.

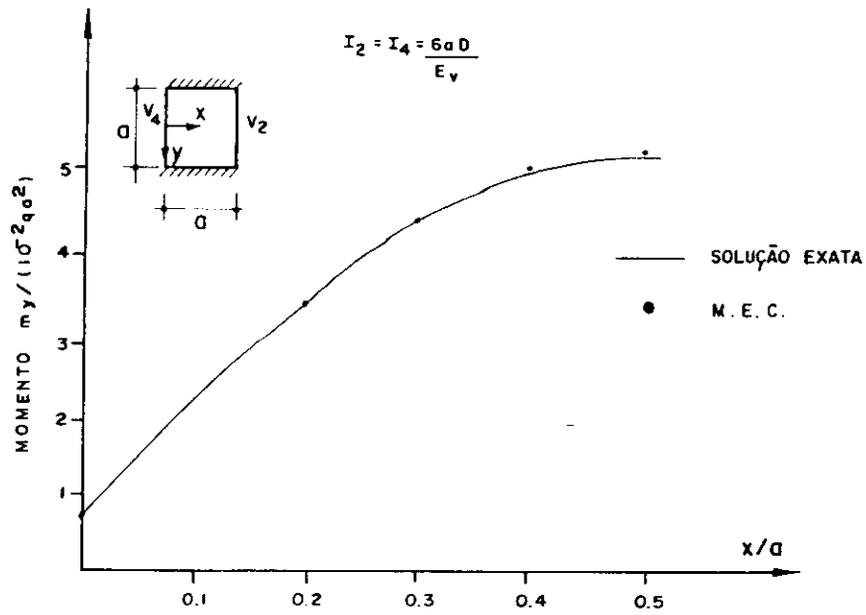


FIG. 5.15 - Momento fletor m_y , obtido analítica e numericamente, ao longo do eixo X.

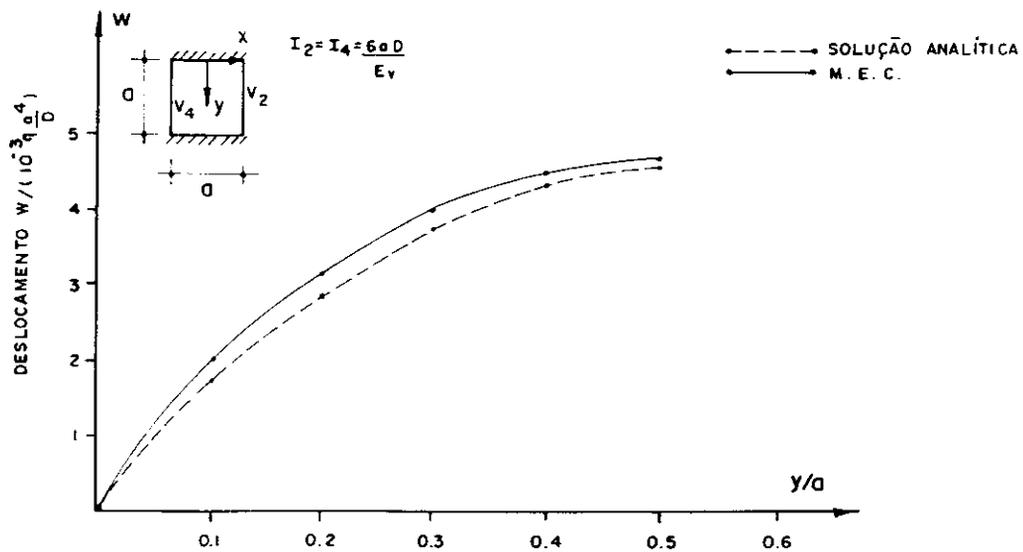


FIG. 5.16 - Valores teóricos e numéricos para os deslocamentos ao longo do eixo de simetria, y.

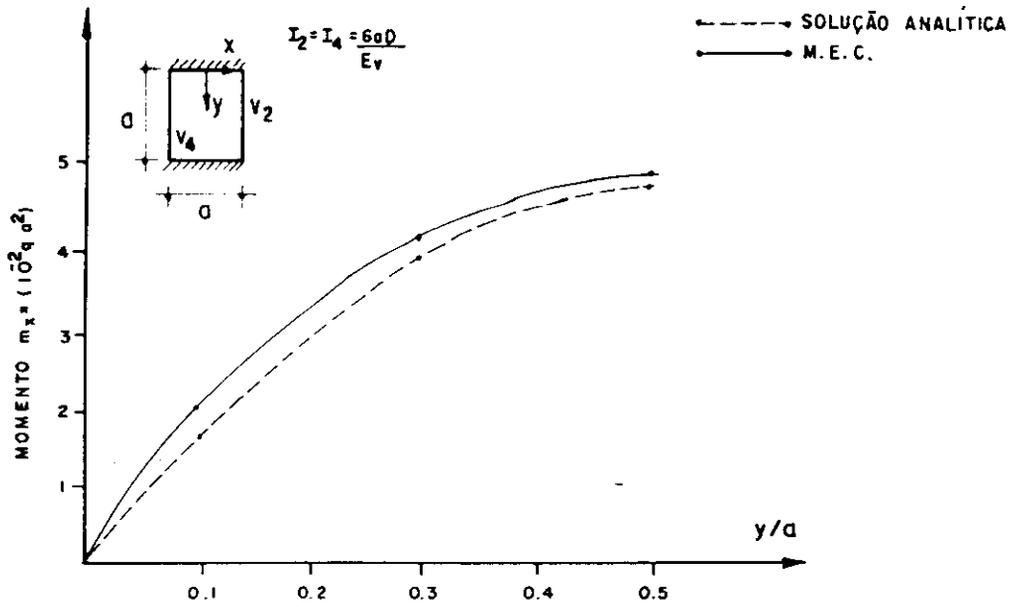


FIG. 5.17 - Momento fletor m_x obtido pelo método dos elementos de contorno e pela solução exata, ao longo do eixo y .

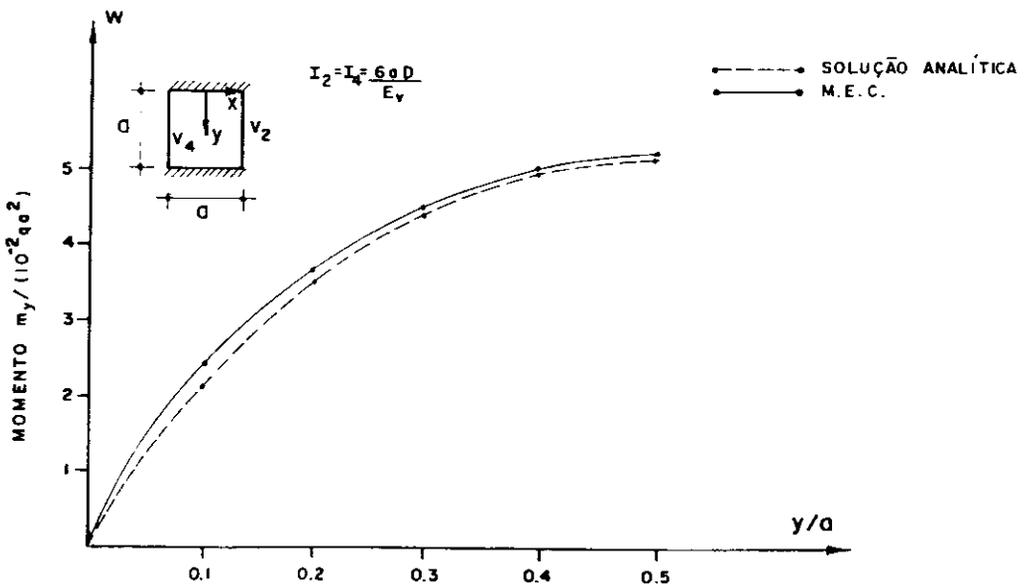


FIG. 5.18 - Momento fletor m_y , obtido analítica e numericamente, ao longo do eixo y .

Considere-se agora que todas as vigas são flexíveis com

$$I_i = 5 \frac{a D}{E_v} \quad , \quad i = 1, \dots, 4$$

Na tabela 16 estão indicados os valores do deslocamento e momentos fletores no centro da placa, obtidos a partir da solução exata, considerando-se 4 termos não nulos da série^[43] e os obtidos pela formulação proposta com uma divisão do contorno e das vigas igual à do exemplo anterior.

TABELA 16 - Valores teóricos e numéricos para a placa com vigas elásticas em seu contorno.

	M.E.C.	SOLUÇÃO EXATA	ERRO (%)
w	0,560	0,519	-7,8
m _x	0,534	0,494	-8,0
m _y	0,534	0,494	-8,0

A diferença entre os valores teóricos (calculados por série) e os numéricos possivelmente se explica pelo reduzido número de termos da série utilizado na solução analítica. Se os valores teóricos fossem obtidos com um número maior de termos da série, a diferença entre as duas soluções provavelmente seria menor.

Considere-se, finalmente, que as vigas são completamente rígidas. Neste caso, o problema recai naquele de uma placa simplesmente apoiada no contorno (ver exemplo 1). Os valores do deslocamento e momentos fletores no centro da placa, obtidos pela formulação proposta, apresentam diferença da ordem de 3% dos valores exatos^[43].

5.6.4 - Exemplo 4: Análise do piso de um edifício

Neste exemplo, é analisado um piso de edifício já projetado e construído. O piso é constituído pela associação de uma placa quadrada de $9 \times 9 \text{ m}^2$, com uma grelha formada por 24 elementos lineares e por 4 pilares sobre os quais estão apoiados os cantos do pavimento. As secções transversais adotadas para os elementos lineares do contorno da grelha e para os elementos interiores são $0,3 \times 0,8 \text{ m}^2$ e $0,2 \times 0,8 \text{ m}^2$, respectivamente. A secção transversal das colunas é de $0,3 \times 0,3 \text{ m}^2$, a altura é de 4m e a espessura da placa é 8cm. Este pavimento está indicado na figura 5.19.

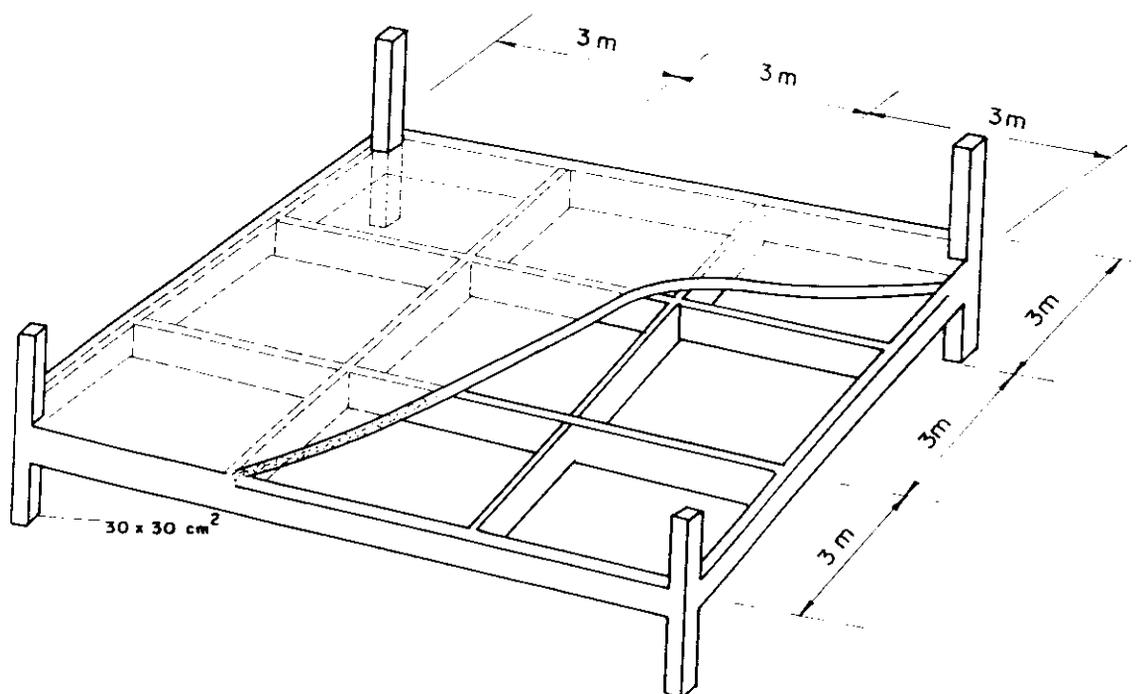


FIG. 5.19 - Pavimento de edifício analisado.

Na figura 5.20, está indicada a discretização adotada para o contorno da placa e para a grelha.

Na análise dos resultados obtidos por esta formulação, deve-se considerar que, como os esforços de interação entre a placa e a grelha são forças concentradas, não é

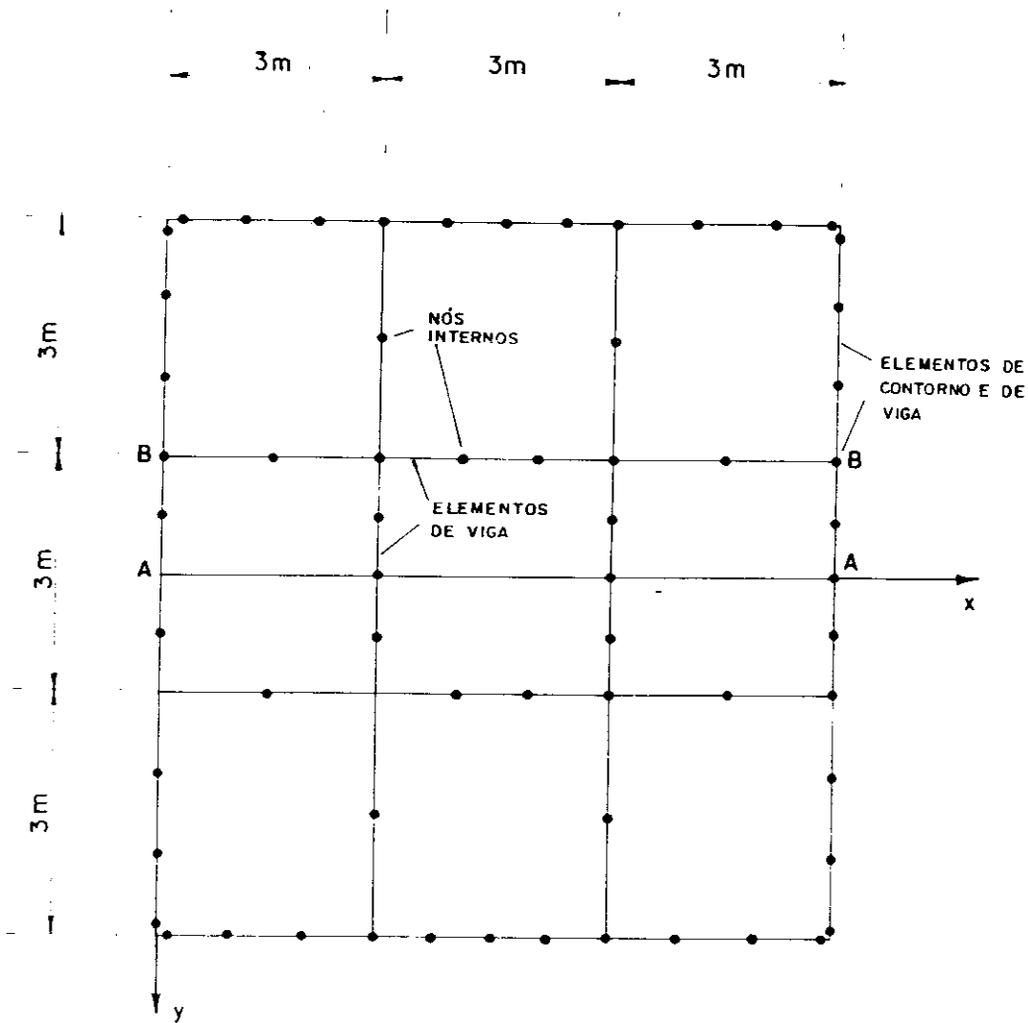


FIG. 5.20 - Discretização do contorno da placa e da grelha.

possível calcular os momentos fletores da placa nos pontos de ligação das duas estruturas, pois estes pontos são singulares com relação a esses esforços.

Analogamente ao que é feito na análise de tais problemas pelo método dos elementos finitos, pode-se estabelecer um critério para o arredondamento dos valores dos momentos fletores da placa nos pontos de ligação das duas estruturas. Este critério consiste em obter numericamente os valores dos esforços em pontos da placa correspondentes às faces laterais da viga e, a partir deles, estabelecer valores aproximados para os esforços nos pontos de interação placa-grelha. Uma primeira aproximação, que pode ser adotada, é a média aritmética desses valores. Outra aproximação,

já mais rigorosa, consiste em atribuir aos pontos da interface os valores obtidos a partir de uma interpolação, por função parabólica, dos esforços ao longo da largura da viga, conforme indica a figura 5.21. Nesta parábola, a flecha é estimada tomando-se por base a reação nesse ponto da interface.

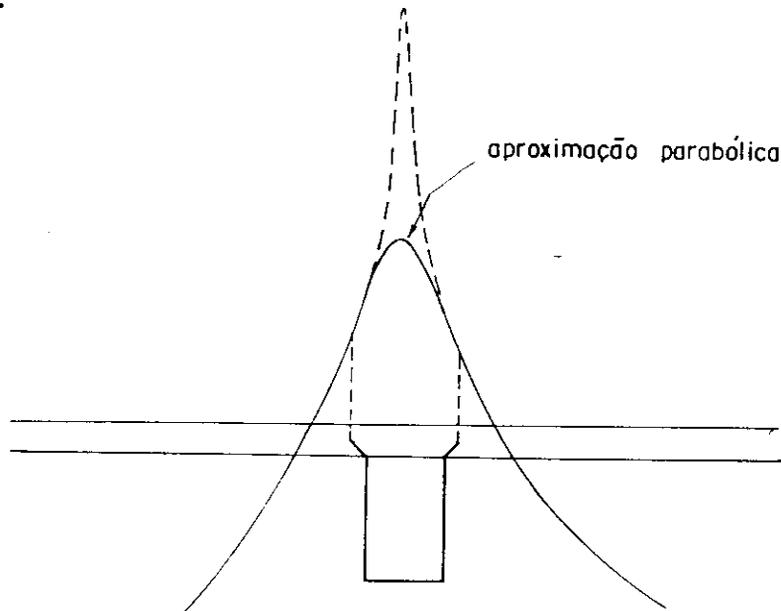


FIG. 5.21 - Aproximação parabólica nos pontos de indeterminação dos momentos da placa.

Nas figuras 5.22, 5.23 e 5.24, estão indicados, respectivamente, os valores do deslocamento e momentos fletores ao longo de A-A, obtidos por esta formulação e pelo método dos elementos finitos, considerando-se uma malha de 592 elementos triangulares (T-18).

Os resultados obtidos ao longo de B-B estão indicados nas figuras 5.25, 5.26 e 5.27, onde apenas os deslocamentos são comparados com os obtidos pelo método dos elementos finitos. No caso dos momentos fletores, os resultados se mostraram bem diferentes, inclusive com inversão de sinal. Nos gráficos destes esforços, foram adotadas aproximações parabólicas para se eliminar as singularidades no cruzamento de duas barras da grelha (no ponto de ordenada $X = 0,33$).

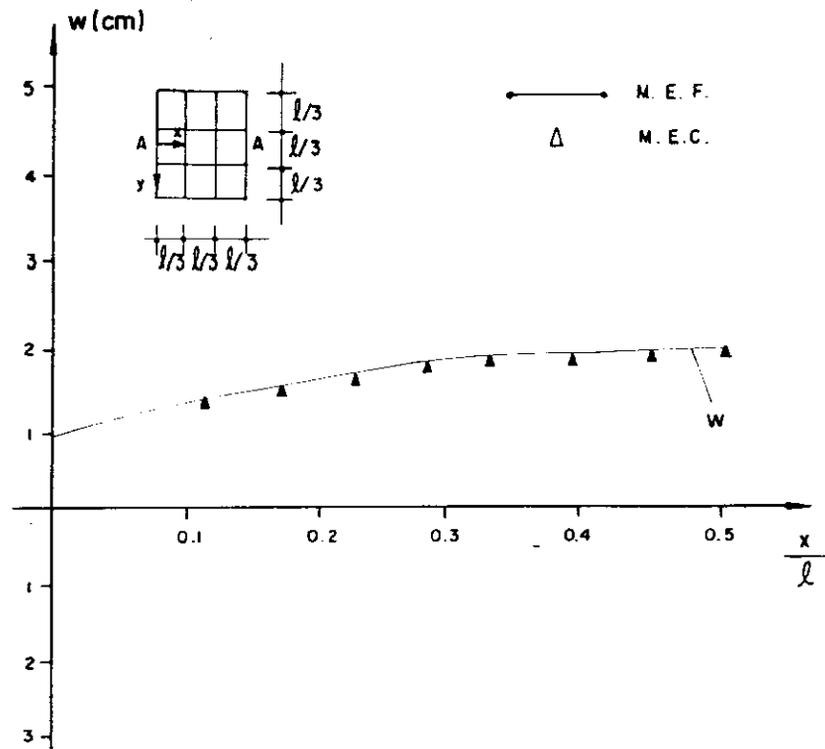


FIG. 5.22 - Deslocamento w ao longo de A-A.

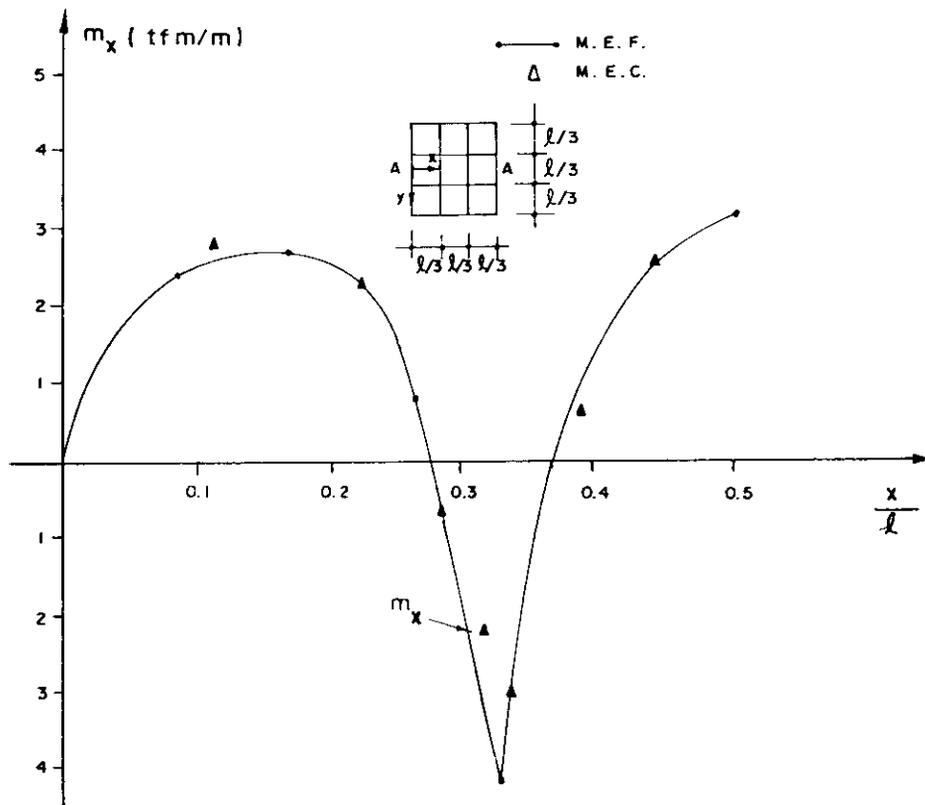


FIG. 5.23 - Momento m_x ao longo de A-A.

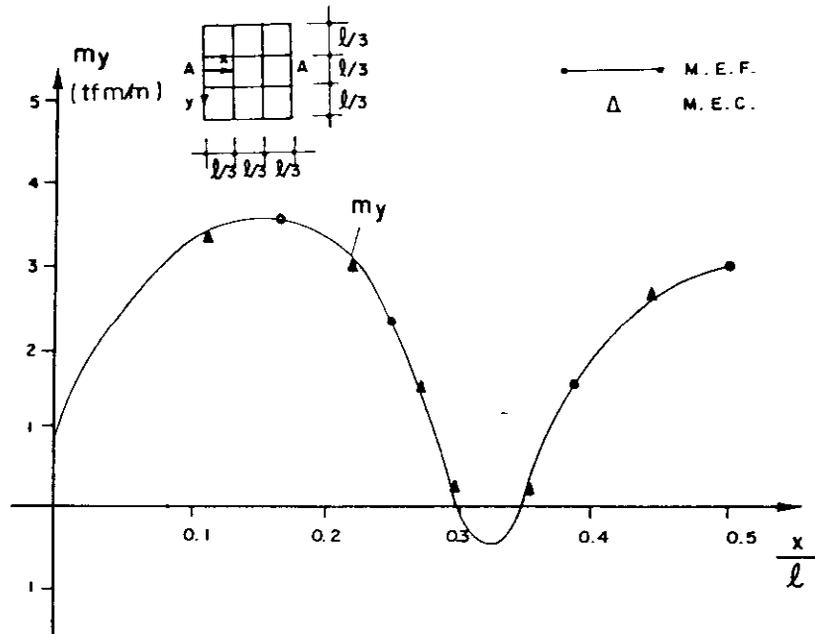


FIG. 5.24 - Momento m_y ao longo de A-A.

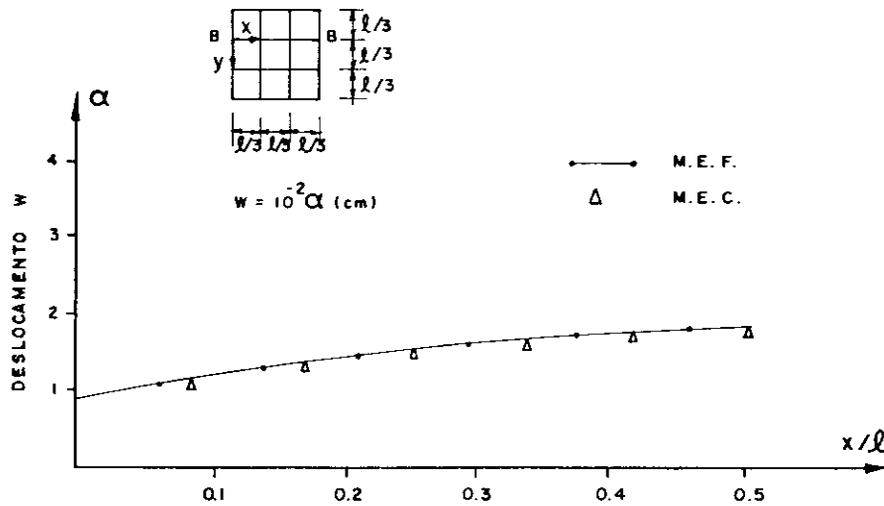


FIG. 5.25 - Deslocamento w ao longo de B-B.

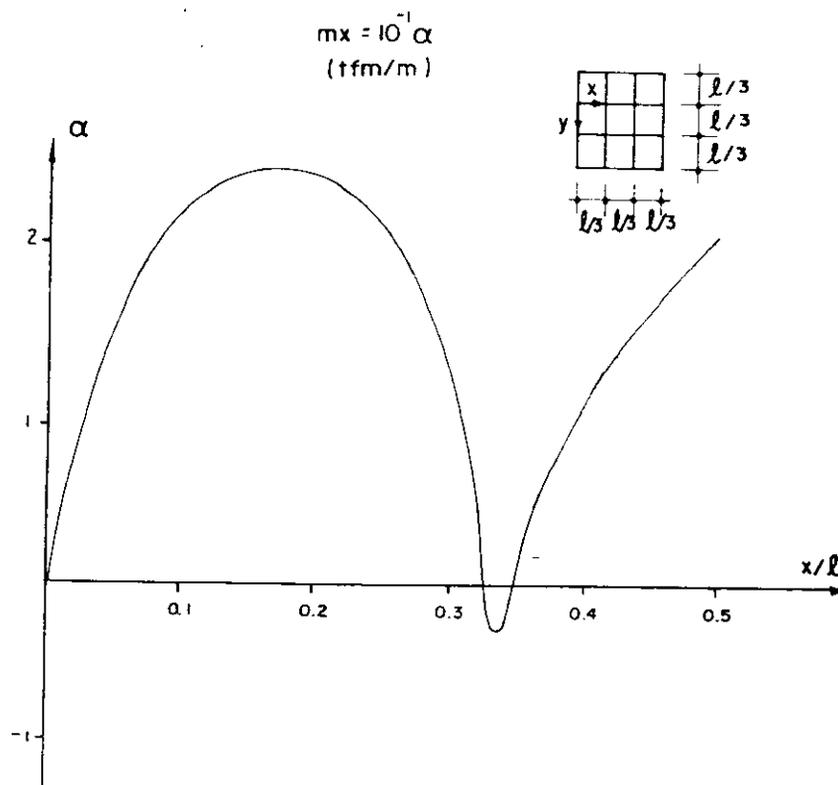


FIG. 5.26 - Momento fletor m_x ao longo de B-B.

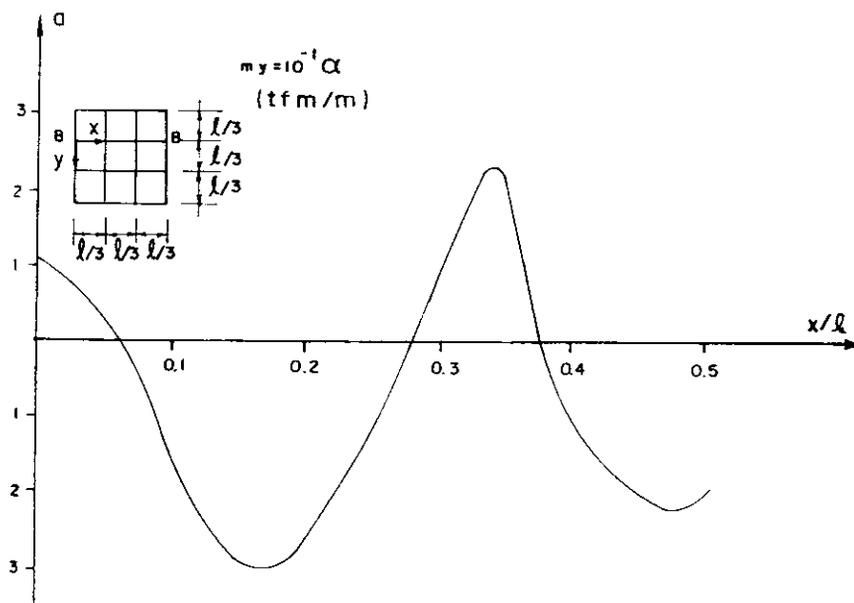


FIG. 5.27 - Momento m_y ao longo de B-B.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho era apresentar uma formulação para a análise de problemas usuais de engenharia, como placas cogumelo e placas enrijecidas por vigas, além de placas isoladas com qualquer geometria e quaisquer condições de contorno.

No capítulo III, foi desenvolvida a formulação para a análise de placas vinculadas em seu contorno. Os diversos exemplos apresentados mostraram a eficiência da formulação na modelagem dos mais diversos tipos de placa no que diz respeito ao contorno, às vinculações e ao carregamento que pode ser distribuído em um subdomínio da placa ou ao longo de uma linha. Cargas concentradas podem ser, com vantagem, simuladas como carregamentos distribuídos em uma pequena área. Os resultados obtidos estão de acordo com os fornecidos por outras formulações e com a solução exata, quando existente.

Deve-se ressaltar a facilidade com que placas apoiadas em pontos discretos do contorno podem ser modeladas, pois apenas a divisão do contorno deve ser tal que um de seus nós coincida com os apoios. Neste estudo, não é necessário dividir o contorno próximo ao apoio em grande número de elementos, pois, mesmo com uma divisão regular, os resultados obtidos são praticamente os valores exatos. As condições de contorno ao longo das bordas livres são também

facilmente impostas, uma vez que a força cortante equivalente v_n e o momento fletor m_n são parâmetros nodais.

Na análise da associação da placa com outros elementos estruturais, os resultados obtidos se mostraram de acordo com os fornecidos pela solução exata da equação diferencial e pelo método dos elementos finitos.

Na associação da placa com o pilar os valores dos momentos fletores e volventes na junção da placa com o pilar são obtidos com grande precisão, o mesmo ocorrendo em qualquer ponto do domínio da placa evidenciando a eficácia da formulação proposta. Embora o programa, de computador, desenvolvido preveja o caso da ligação elástica entre as duas estruturas, outras condições de vinculação podem ser simuladas mediante a manipulação das constantes elásticas do pilar. Assim, podem ser simuladas, por exemplo, a ligação totalmente rígida entre a placa e os pilares, atribuindo-se valor infinito ao módulo de elasticidade do pilar e a ligação rígida apenas para os deslocamentos verticais e livre para suas derivadas, atribuindo-se zero ao valor da constante k_p da equação 5.21.

No estudo da associação da placa com o elemento de viga, embora não seja possível avaliar os momentos nos pontos de ligação entre as duas estruturas, pode-se determinar estes esforços com grande precisão em pontos próximos o que permite que se obtenha, por interpolação, os valores dos esforços nos pontos da interface. Este procedimento conduz a resultados coerentes com o obtidos por outros processos.

Assim, a formulação desenvolvida neste trabalho se mostrou eficaz na análise dos mais diversos problemas de engenharia transformando-se em uma valiosa ferramenta de cálculo no estudo destes problemas.

Como sugestões para a continuidade deste trabalho cita-se o desenvolvimento de formulações para a análise de placas com espessura variável discreta ou não. Para variação discreta de espessura a técnica recomendada seria a di-

visão do domínio em sub-regiões correspondentes às várias espessuras do pavimento e para a variação contínua da espessura a sugestão seria a formulação do problema utilizando o conceito da reciprocidade dual^[48]. Também devem ser desenvolvidas formulações para a análise da combinação placa-grelha onde seja possível o cálculo dos esforços nos pontos de ligação entre as duas estruturas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] KUPRADZE, V.D. Potential methods in theory of elasticity. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translation, 1965.
- [2] RIZZO, F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quart. Appl. Math., 25: 83-95, 1967.
- [3] CRUSE, T.A. Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. Int. J. Solids Struct., 5:1259-1274, 1969.
- [4] CRUSE, T.A. Mathematical foundations of the boundary integral equation method in solid mechanics. Pratt and Whitney Aircraft Group, 1977. (Report nº AFOSR-IR-1002).
- [5] CRUSE, T.A.; SNOW, D.W.; WILSON, R.B. Numerical solutions in axisymmetric elasticity. Comp. and Struct., 7: 445-451, 1977.
- [6] WATSON, J.O. The analysis of thick shells with holes, by integral representation of displacement. Southampton, University of Southampton, 1972. (Ph.D. Thesis)
- [7] WATSON, J.O. The analysis of three-dimensional problems of elasticity by integral representation of displacement. In: INT.CONF.ON VARIATIONAL METHODS IN ENGINEERING, University of Southampton, 1972-Proceedings.

- [8] LACHAT, J.C. A further development of the boundary integral technique for elastostatics. Southampton, University of Southampton, 1975. (Ph.D.Thesis).
- [9] BREBBIA, C.A. The boundary element method for engineers. London, Pentech Press, 1978.
- [10] NAKAGUMA, R.K. Three-dimensional elastostatics using the boundary element method. Southampton, University of Southampton, 1979. (Ph.D.Thesis).
- [11] TELLES, J.C.F. & BREBBIA, C.A. Boundary element solution of half-plane problems. Int.J.Solids Struct., 17: 1149-1158, 1981.
- [12] RICCARDELLA, P.C. An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity. Pittsburg, Carnegie Mellon University, Dept. Mech. Engng., 1973. (Report n° SM-73-10).
- [13] CHAUDONNERET, M. Méthode des équations intégrales appliquées a la résolution de problèmes de viscoplasticité. J. Mécanique-Appliquée, 1: 113-132, 1977.
- [14] TELLES, J.C.F. & BREBBIA, C.A. On the application of the boundary element method to plasticity. Appl. Math. Modelling, 3: 466-470, 1980
- [15] VENTURINI, W.S. & BREBBIA, C.A. Boundary element formulation for nonlinear applications in geomechanics. Appl. Math. Modelling, 8: 251-260, 1984.
- [16] VENTURINI, W.S. & BREBBIA, C.A. The boundary element method for the solution of no-tension materials. In: BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods. Berlin, Springer-verlag, 1981.

- [17] VENTURINI, W.S. & BREBBIA, C.A. Boundary element formulation to solve no-tension problems in geomechanics. In: MARTINS, J.B., ed. Numerical methods in geomechanics. 1982.
- [18] VENTURINI, W.S. & BREBBIA, C.A. Some applications of the boundary element method in geomechanics. Int. J. Numer. & Analyt. Meth. in Geomech., 7: 419-433, 1983.
- [19] VENTURINI, W.S. & BREBBIA, C.A. Formulação do método dos elementos de contorno para domínios descontínuos. In: CONGRESSO LATINOAMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA INGENIERIA, Santiago, Chile, 7-11 nov. 1983. - Anais.
- [20] VENTURINI, W.S. Boundary element method in geomechanics. Berlin, Springer-Verlag, 1983. 246p.
- [21] JASWON, M.A.; MAITI, M.; SYMM, G.T. Numerical biharmonic analysis and some applications. Int. J. Solids Structures, 3: 309-332, 1967.
- [22] HANSEN, E.B. Numerical solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems. Journal of Elasticity, 6 (1):39-56, Jan. 1976.
- [23] BÉZINE, G. Boundary integral formulation for Plate flexure with arbitrary boundary conditions. Mechanics Research Communications, 5 (4): 197-206, 1978.
- [24] STERN, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. Int. J. Solids Structures, 15: 769-782, 1979.

- [25] BÉZINE, G. Application of similarity to research of new boundary integral equations for plate flexure problems. Appl. Math. Modelling, 5 (2): 66-70, Apr. 1981.
- [26] WU, B.C. & ALTIERO, N.J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. Computers & Structures, 10: 703-707, 1979.
- [27] BÉZINE, G. A mixed boundary integral: finite element approach to plate vibration problems. Mechanics Research Communications, 7 (3): 141-150, 1980.
- [28] KAMIYA, N. et al. An approximate finite deflection analysis of a heated elastic plate by the boundary element method. Appl. Math. Modelling, 6 (1): 23-27, Feb. 1982.
- [29] TANAKA, M. Large deflection analysis of thin elastic plates. In: BANERJEE, P.K. & MUKHERJEE, S., eds. Developments in boundary element methods-3. London, Elsevier, 1984. Chap. 5, p. 115-136.
- [30] KAMIYA, N. & SAWAKY, Y. An integral equation approach to finite deflection of elastic plates. Int. J. Non-Linear Mechanics, 17(3): 187-194, 1982.
- [31] VANDER WEEËN, F. Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model. In: BREBBIA, C.A., ed. Boundary Element Methods in Engineering: Proceedings of the Fourth International Seminar, Southampton, England, sept. 1982. Berlin
- [32] REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech., 12: A69-A77, 1945.

- [33] COSTA, JR. J.A. & BREBBIA, C.A. Elastic buckling of plates using the boundary element method. In: BREBBIA, C.A. & MAIER, G., eds. Boundary elements VII: Proceedings of the 7th International Conference, Villa Olmo, Lake Como, Italy, Sept. 1985. Berlin, Springer-Verlag, 1985. V. 1, p.4.29 - 4.42.
- [34] BÉZINE, G.; CIMETIERE, A.; GELBERT, J.P. Unilateral buckling of thin elastic plates by the boundary integral equation method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21: 2189-2199, 1985.
- [35] KATSIKADELIS, J.T. & ARMENĀKAS, A.E. Plates on elastic foundation by BIE method. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 110 (7): 1086-1104, July, 1984.
- [36] MORJARIA, M. & MUKHERJEE, S. Inelastic analysis of transverse deflection of plates by the boundary element method. Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 47 (2): 291-296, June 1980.
- [37] BÉZINE, G. A boundary integral equation method for plate flexure with conditions inside the domain. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17: 1647-1657, 1981.
- [38] KIRCHHOFF, G. Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. J. Math., Crelle, 40: 51-58, 1850.
- [39] DANSON, D.J. Analysis of plate bending problems by direct boundary element method. Southampton, University of Southampton, 1979. (M.Sc. Dissertation)
- [40] JASWON, M.A. & SYMM, G.T. Integral equation methods in potential theory and elastostatics. London, Academic Press, 1977. 287 p.

- [41] TOTTENHAM, H. The boundary element method for plates and shells. In: BANERJEE, P.K. & BUTTERFIELD, R., eds. Developments in boundary element methods-1. London, Applied Science Publ., 1979. Chap. 8, p. 173-205.
- [42] STROUD, A.H. & SECREST, D. Gaussian quadrature formulas. New York, Prentice-Hall, 1966.
- [43] TIMOSHENKO, S. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. Teoria de placas y laminas. Trad. F.J. Medina Salanova. Bilbao, España, Ediciones URMO, 1970. 621 p.
- [44] BARES, R. Tablas para el calculo de placas y vigas pared. Barcelona, G. Gili, 1972. 538 p.
- [45] DEGASPARE, J.C. Aplicações do elemento finito T-18 para flexão de placas delgadas elástico-isótropas. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1975. 139 p. (Dissertação de mestrado). (Orientador: Walter Savassi).
- [46] GERE, J.M. & WEAVER JR., W. Análises de estructuras reticulares. (Analysis of framed structures). Trad. Sergio Vargas Romero. México, Compañía Editorial Continental, 1972. 535 p.
- [47] CAMELO, M.R. Placas cogumelo retangulares simplesmente apoiadas nos quatro bordos. Rio de Janeiro, Pontifícia Universidade Católica-RJ, 1976. 68 p. (Dissertação de Mestrado). (Orientador: Jorge de Mello e Souza).
- [48] BREBBIA, C.A. & NARDINI, D. Solution of parabolic and hiperbolic time dependent problems using boundary elements. Computer & Mathematics with Applications, 12B (5/6): 1061-1072, 1986.

BIBLIOGRAFIA

1. ALTIERO, N.J. & SIKARSKIE, D.L. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. Computers & Structures, 9: 163-168, 1978.
2. BANERJEE, P.K. & BUTTERFIELD, R. Plate-bending problems. In: _____. Boundary element methods in engineering science. London, McGraw-Hill, 1981. chap. 11, p. 281-297.
3. BÉZINE, G. A boundary integral equation method for plate flexure with conditions inside the domain. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17: 1647-1657, 1981.
4. BÉZINE, G.; CIMENTIERE, A.; GELBERT, J.P. Unilateral buckling of thin elastic plates by the boundary integral equation method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21: 2189-2199, 1985.
5. BÉZINE, G. A mixed boundary integral: finite element approach to plate vibration problems. Mechanics Research Communications, 7 (3): 141-150, 1980.
6. BÉZINE, G. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. Mechanics Research Communications, 5 (4): 197-206, 1978.
7. BÉZINE, G. Application of similarity to research of new boundary integral equations for plate flexure problems. Appl. Math. Modelling, 5 (2): 66-70, Apr. 1981.

8. BÉZINE, G. & BORNEAU, D. On a procedure for numerical evaluation of surface integrals in two-dimensional boundary integral equation method. Journal Engineering Analysis, 2 (1): 2-8, 1985.
9. BÉZINE, G.P. & GAMBY, D.A. A new integral equation formulation for plate bending problems. In: BREBBIA, C.A., ed. Recent advances in boundary element methods. London, Pentech Press, 1978. p. 327-342.
10. BARES, R. Tablas para el calculo de placas y vigas pared. Barcelona, G. Gili, 1972. 538 p.
11. BREBBIA, C.A. The boundary element method for engineers. London, Pentech Press, 1978.
12. BREBBIA, C.A. Weighted residual classification of approximate methods. Appl. Math. Modelling, 2: 160-164, 1978.
13. BREBBIA, C.A., ed. Recent advances in boundary elements: Proceedings of the 1st Int. Conf. on BEM. London, Pentech Press, 1978.
14. BREBBIA, C.A., ed. New developments in boundary element methods: Proceedings of the 2nd Int. Conf. on BEM, Southampton, 1980. 2.ed. Southampton, CML Publications, 1983.
15. BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods: Proceedings of the 3rd Int. Conf. on BEM, California. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1981.
16. BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods in engineering: Proceedings of the 4th Int. Conf. on BEM, Southampton. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1982.

17. BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods. Proceedings of the 5th Int. Conf. on BEM, Hiroshima. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1983.
18. BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods: Proceedings of the 6th Int. Conf. on BEM, QE2. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1984.
19. BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods: Proceedings of the 7th Int. Conf. on BEM, Italy. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1985.
20. BREBBIA, C.A.; TELLES, J.; WROBEL, L. Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1984.
21. BUTTERFIELD, R. New concepts illustrated by old problems. In: BANERJEE, P. K. & BUTTERFIELD, R., eds. Developments in boundary element methods-1. London, Applied Science Publ., 1979. ch.1, p.1-20.
22. CAMELO, M.R. Placas cogumelo retangulares simplesmen apoiadas nos quatro bordos. Rio de Janeiro, Pontifícia Universidade Católica-RJ, 1976. 68 p. (Dissertação de Mestrado). (Orientador: Jorge de Mello e Souza).
23. CHAUDONNET, M. Méthode des équations intégrales appliquées a la résolution de problèmes de viscoplasticité. J. Mécanique-Appliquée, 1: 113-132, 1977.
24. COSTA JR., J.A. & BREBBIA, C.A. Bending of plates on elastic foundations using the boundary element method: Proceedings of the 2nd Int. Conf., University of Southampton. Berlin, Springer-Verlag, 1985.

25. COSTA JR., J.A. & BREBBIA, C.A. Elastic buckling of plates using the boundary element method. In: BREBBIA, C.A. & MAIER, G., eds. Boundary elements VII: Proceedings of the 7th International Conference, Villa Olmo, Lake Como, Italy, Sept. 1985. Berlin, Springer-Verlag, 1985. v.1, p.4.29-4.42.
26. COSTA JR., J.A. & BREBBIA, C.A. Plate bending problems using B.E.M. In: BREBBIA, C.A., ed. Boundary elements VI: Proc. of the 6th International Conference, on board the liner, the Queen Elizabeth 2, Southampton to New York, July 1984. Berlin, Springer-Verlag, 1984. p.3.43-3.63.
27. CRUSE, T.A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. Int. J. of Solids Structures, 5: 1259-1274, 1969.
28. CRUSE, T.A. Mathematical foundations of the boundary integral equation method in solid mechanics. Pratt and Whitney Aircraft Group, 1977. (Report nº AFOSR-IR-1002).
29. CRUSE, T.A.; SNOW, D.W.; WILSON, R.B. Numerical solutions in axisymmetric elasticity. Comp. and Struct., 7: 445-451, 1977.
30. DANSON, D.J. Analysis of plate bending problems by direct boundary element method. Southampton, University of Southampton, 1979. (M.Sc.Dissertation).
31. DEGASPARE, J.C. Aplicações do elemento finito T-18 para flexão de placas delgadas elástico-isótropas. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1975. 139 p. (Dissertação de mestrado). (Orientador: Walter Savassi).
32. DIRAC, P.A.M. The principles of quantum mechanics. 2.ed. Oxford, Clarendon, 1935.

33. FELIPPA, C.A. . Interfacing finite element and boundary element discretizations. Appl. Math. Modelling, 5 (5): 383-386, Oct. 1981.
34. FREDHOLM, I. Sur une classe d'equations fonctionnelles Acta Math., 27: 365-390, 1903
35. GERE, J.M. & WEAVER JR., W. Análise de estruturas reticulares. (Analysis of framed structures). Trad. Sergio Vargas Romero. México, Compañía Editorial Continental, 1972. 535 p.
36. GOSPODINOV, G. & LJUTSKANOV, D. The boundary element method applied to plates. Appl. Math. Modelling, 6 (4): 237-244, Aug. 1982.
37. HANSEN, E.B. Numerical solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems. Journal of Elasticity, 6 (1): 39-56, Jan. 1976.
38. HARTMANN, F. A note on the domain force integral of Kirchhoff plates. Journal Engineering Analysis, 2 (2): 111-112, 1985.
39. JASWON, M.A. Integral equation methods in potential theory-I. Proc. Roy. Soc., A, (275): 23-32, 1963.
40. JASWON, M.A.; MAITI, M.; SYMM, G.T. Numerical biharmonic analysis and some applications. Int. J. Solids Structures, 3: 309-332, 1967
41. JASWON, M.A. & PONTER, A.R.S. An integral equation solution of the torsion problem. Proc. Roy. Soc., A, (273): 237-246, 1963.
42. JASWON, M.A. & SYMM, G.T. Integral equation methods in potential theory and elastostatics. London, Academic Press, 1977. 287 p.

43. KAMIYA, N. et al. An approximate finite deflection analysis of a heated elastic plate by the boundary element method. Appl. Math. Modelling, 6 (1): 23-27, Febr. 1982.
44. KAMIYA, N. & SAWAKY, Y. Boundary element analysis of non-linear bending of sandwich plates and shallow shells. In: BANERJEE, P.K. & WATSON, J.O., eds. Developments in boundary element methods-4. London, Elsevier, 1986. Chap. 5, p. 121-148.
45. KAMIYA, N.; SAWAKY, Y.; NAKAMURA, Y. Thermal bending analysis by boundary integral equation method. Mechanics Research Communications, 8 (6): 369-373, 1981.
46. KAMIYA, N.; SAWAKY, Y.; NAKAMURA, Y. Boundary element nonlinear bending analysis of clamped sandwich plates and shells. In: BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods in engineering: Proceedings of the fourth International Seminar, Southampton, England, Sept. 1982. Berlin, Springer-Verlag. 1982. p.515-525.
47. KAMIYA, N. & SAWAKY, Y. An integral equation approach to finite deflection of elastic plates. Int. J. Non-Linear Mechanics, 17 (3): 187-194, 1982.
48. KATSIKADELIS, J.T. & ARMENAKAS, A.E. Plates on elastic foundation by BIE method. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 110 (7): 1086-1104, July, 1984.
49. KIRCHHOFF, G. Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. J.Math., Crelle, 40: 51-58, 1850.
49. KUPRADZE, V.D. Potential methods in theory of elasticity. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translation, 1965.

50. LACHAT, J.C. A further development of the boundary integral technique for elastostatics. Southampton, University of Southampton, 1975. (Ph.D.Thesis).
51. MAITI, M. & CHAKRABARTY, S.K. Integral equation solutions for simply supported polygonal plates. Int. J. Engng. Sci., 12: 793-806, 1974.
52. MIKHLIN, S.G. Integral equations. New York, Pergamon Press, 1957.
53. MODDY, N.T. Moments and reactions for rectangular plates. US Department of Interior, Bureau of Reclamation, 1960. (Engineering Monograph, 27).
54. MORJARIA, M. & MUKHERJEE, S. Inelastic analysis of transverse deflection of plates by the boundary element method. Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 47 (2): 291-296, June 1980.
55. NAKAGUMA, R.K. Three-dimensional elastostatics using the boundary element method. Southampton, University of Southampton, 1979. (Ph.D.Thesis).
56. NIWA, Y.; KOBAYASHI, S.; KITAHARA, M. Determination of eigenvalues by boundary element method. In: DEVELOPMENTS in boundary element methods. Applied Science Publishers, 1982. v.2
57. OVUNC, B.A. Application of complex variable theory to boundary element method. In: BREBBIA, C.A. ed. Boundary element methods in engineering: Proceedings of the fourth International Seminar, Southampton, England, Sept. 1982. Berlin, Springer-Verlag, 1982. p.500-514.
58. PARIS, F. & LEON, S. An alternative analysis of thin elastic plates with any boundary conditions, using B.E.M. In: BREBBIA, C.A. & MAIER, G., eds. Boundary elements VII: Proceedings of the 7th Internatio

- nal Conference, Villa Olmo, Lake Como, Italy, Sept. 1985. Berlin, Springer-Verlag, 1985. v.1, p.4.17-4.28.
59. PARIS, F. & LEÓN, S. Simply supported plates by the boundary integral equation method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 23(2): 173-191, Feb. 1986.
60. PATTERSON, C. & SHEIKH, M.A. Non-conforming boundary elements for stress analysis. Proceedings of the Second International Conference on Boundary Element Methods.
61. PINA, H.L.G.; FERNANDES, J.L.M.; BREBBIA, C.A. Some numerical integration formulae over triangles and squares with a $1/r$ singularity. Appl. Math. Modeling, 5: 209-211, 1981.
62. REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech, 12: A-69, 1945
63. RICCARDELLA, P.C. An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity. Pittsburg, Carnegie Mellon University, Dept. Mech. Engng., 1973. (Report nº SM-73-10).
64. RIZZO, F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quart. Appl. Math., 25: 83-95, 1967.
65. STERN, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. Int. J. Solids Structures, 15: 769-782, 1979.

66. STERN, M. Boundary integral equations for bending of thin plates. In: BREBBIA, C.A., ed. Progress in boundary element methods. London, Pentech Press, 1983. v.2.
67. STROUD, A.H. & SECREST, D. Gaussian quadrature formulas. New York, Prentice-Hall, 1966.
68. TANAKA, M. Large deflection analysis of thin elastic plates. In: BANERJEE, P.K. & MUKHERJEE, S. eds. Developments in boundary element methods-3. London, Elsevier, 1984. chap.5, p. 115-136.
69. TANAKA, M. Integral equation approach to small and large displacements of thin elastic plates. In: BREBBIA, C.A. ed. Boundary element methods in engineering: Proceedings of the fourth International Seminar, Southampton, England, Sept. 1982. Berlin, Springer-Verlag, 1982. p. 526-539.
70. TANAKA, M. & MIYAZAKI, K. A direct BEM for elastic plate-structures subjected to arbitrary loadings. In: BREBBIA, C.A. & MAIER, G. eds. Boundary elements VII: Proceedings of the 7th International Conference, Villa Olmo, Lake Como, Italy, Sept. 1985. Berlin, Springer-Verlag, 1985. v.1, p.4.3-4.16.
71. TELES, J.C.F. & BREBBIA, C.A. Boundary element solution of half-plane problems. Int. J. Solids Struct., 17: 1149-1158, 1981.
72. TELLES, J.C.F. & BREBBIA, C.A. On the application of the boundary element method to plasticity. Appl. Math. Modelling, 3: 466-470, 1980.
73. TIMOSHENKO, S. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. Teoria de placas y laminas. Trad. F.J. Medina Salanova. Bilbao, España, Ediciones URMO, 1970. 621 p.

74. TOTTENHAM, H. The boundary element method for plates and shells. In: BANERJEE, P.K. & BUTTERFIELD, R., eds. Developments in boundary element methods-1. London, Applied Science Publ., 1979. Chap. 8, p. 173-205.
75. VENTURINI, W.S. Boundary element methods in geomechanics. Berlin, Springer-Verlag, 1984. 246 p.
76. VENTURINI, W.S. & BREBBIA, C.A. Boundary element formulation to solve no-tension problems in geomechanics. In: MARTINS, J.B., ed. Numerical methods in geomechanics. 1982
77. VENTURINI, W.S. & BREBBIA, C.A. The boundary element method for the solution of no-tension material. In: BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods. Berlin, Springer-Verlag, 1981.
78. VENTURINI, W.S. & BREBBIA, C.A. Boundary element formulation for nonlinear applications in geomechanics. Appl. Math. Modelling, 8: 251-260, 1984.
79. VENTURINI, W.S. & BREBBIA, C.A. Some applications of the boundary element method in geomechanics. Int. J. Numer. & Analyt. Meth. in Geomech., 7: 419-433, 1983.
80. VENTURINI, W.S. & BREBBIA, C.A. Formulação do método dos elementos de contorno para domínios descontínuos. In: CONGRESSO LATINOAMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA INGENIERIA, Santiago, Chile, 7-11 nov. 1983. Anais.
81. VANDER WEEËN, F. Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model. In: BREBBIA, C.A., ed. Boundary Element Methods in Engineering: Proceedings of the Fourth International Seminar, Southampton, England, sept. Berlin, Springer-Verlag, 1982.

82. WATSON, J.O. The analysis of three-dimensional problems of elasticity by integral representation of displacement. In: INT.CONF.ON.VARIATIONAL METHODS IN ENGINEERING, University of Southampton, 1972 - Proceedings.
83. WATSON, J.O. The analysis of thick shells with holes, by integral representation of displacement. Southampton, University of Southampton, 1972. (Ph. D. The sis).
84. WERNER, H. & PROTOPSALTIS, B. A boundary superposition element method for the Kirchoff plate bending problem. In: BREBBIA, C.A. & MAIER, G., eds. Boundary elements VII: Proceedings of the 7th International Conference, Villa Olmo, Lake Como, Italy, Sept. 1985. Berlin, Springer-Verlag, 1985. v.1, p. 4.63-4.80.
85. WONG, G.K.K. & HUTCHINSON, J.R. An improved boundary element method for plate vibrations. In: BREBBIA, C.A., ed. Boundary element methods: Proceedings of the third International Seminar, Irvine, California, July 1981. Berlin, Springer-Verlag, 1981. p. 272-289.
86. WU, B.C. & ALTIERO, N.J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. Computers & Structures, 10: 703-707, 1979.
87. ZHU, J. Integral equation solutions for finite and infinite plate. In: BREBBIA, C.A. & MAIER, G., eds. Boundary elements VII: Proceedings of the 7th International Conference, Villa Olmo, Lake Como, Italy, Sept. 1985. Berlin, Springer-Verlag, 1985. v.1, p. 4.103-4.112.