

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**DEFORMAÇÃO DAS LIGAÇÕES  
NAS ESTRUTURAS DE MADEIRA**

FRANCISCO ANTONIO ROMERO GESUALDO

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Doutor em Engenharia de Estruturas".



- São Carlos, Abril de 1987 -

**DEFORMAÇÃO DAS LIGAÇÕES  
NAS ESTRUTURAS DE MADEIRA**

FRANCISCO ANTONIO ROMERO GESUALDO

Prof. Dr. JOÃO CESAR HELLMEISTER



## AGRADECIMENTOS

É imensa a satisfação de se realizar um trabalho, principalmente quando se está cercado por um grupo de pessoas interessadas e participantes. Em particular agradeço aos colegas do LaMEM, docentes e pesquisadores, com os quais convivi a quase totalidade do período de desenvolvimento deste trabalho e dos quais recebi apoio e colaboração.

Destaco o incentivo e a orientação do incansável Prof. Dr. João Cesar Hellmeister.

Agradeço a relevante contribuição do LaMEM no custeio dos recursos materiais e operacionais, indispensáveis à parte experimental, computacional e de preparação do texto final; ao Prof. João Carlos Barreiro pelas sugestões apresentadas para o aperfeiçoamento do texto; ao Sr. José Francisco do Nascimento Filho pela datilografia; ao Sr. Jaime Galindo e Roberto Galindo pelos desenhos; ao Aparecido, Sílvio, Arnaldo e Fernando pela participação nas montagens e execuções da experimentação.

Agradeço à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, à Universidade Federal de Uberlândia e à CAPES - PICD pela minha manutenção financeira.

Sou grato à minha família pelo apoio e pelo sacrifício de muitos momentos de convívio.

A Eliete,  
Carla  
e Nathalia

## RESUMO

O cálculo das estruturas de madeira tem sido feito, em duas etapas: o cálculo dos esforços solicitantes e das flechas sem a consideração das deformações devidas às ligações e o cálculo das ligações considerando somente os esforços atuantes.

Neste estudo desenvolveu-se uma análise simultânea das etapas mencionadas.

Foram utilizados os recursos da análise computacional através de microcomputadores.

Foi feito o ensaio de um modelo de viga treliçada de madeira (*Aspidosperma polymneuron*) com dez metros de comprimento, em duas maneiras diferentes: interligadas por parafusos de aço e interligada por cavilhas partidas de madeira (*Eucalyptus citriodora*), com cargas abaixo do limite de proporcionalidade.

A comparação dos resultados teóricos e dos resultados experimentais mostrou-se aceitável.

Confirmou-se a importância da contribuição das deformações das ligações na rigidez da estrutura.

## ABSTRACT

The design of the wooden structures, has been made in two steps: the design of internal loads and deflections, without consideration of the displacements due to the connections and the design of the connections, considering only the internal loads.

In this study it was developed a simultaneous analysis of the steps mentioned.

It was adopted the resort of computational analysis through microcomputers.

The test of one model of a wooden trussed beam (*Aspidosperma polymneuron*), ten meters long, was conducted in two different ways: connected with steel bolts and connected with wooden split dowels (*Eucalyptus citriodora*), under loads below the limit of elasticity.

The comparison of theoretical results and the experimental results was acceptable.

It was confirmed the importance of the contribution of the deformations of the connections and the rigidity of the structure.

## C O N T E Ú D O

	pg.
1. INTRODUÇÃO.....	01
2. REVISÃO DA LITERATURA.....	04
2.1 - Generalidades... ..	04
2.2 - Ligação entre peças estruturais de madeira.....	04
2.3 - Estruturas com nós rígidos.....	10
2.4 - Estruturas com nós deformáveis.....	16
3. AS LIGAÇÕES E O COMPORTAMENTO DA ESTRUTURA.....	22
3.1 - Generalidades.....	22
3.2 - As articulações em nós de treliças.....	23
3.3 - Interação conector-estrutura.....	24
4. ESTRUTURAS COM LIGAÇÕES DEFORMÁVEIS.....	27
4.1 - Generalidades... ..	27
4.2 - Ligações de comportamento não linear.....	30
4.3 - Matriz de rigidez da barra prismática no sistema de eixos local.. ..	37
4.3.1 - Rigidez relacionada com a direção axial... ..	38
4.3.2 - Rigidez nas coordenadas de flexão.....	40
4.3.3 - Matriz de rigidez completa da barra.....	48
4.4 - Matriz de rigidez da barra prismática no sistema de eixos global.....	51
4.5 - Ações de extremidade de barra.....	54
4.5.1 - Das cargas sobre os nós.....	55
4.5.2 - Das cargas sobre a barra.....	56
5. CÁLCULO AUTOMATIZADO DE ESTRUTURA COM LIGAÇÕES DEFORMÁVEIS..	63
5.1 - Generalidades.....	63
5.2 - Sistemas de Eixos de referência.....	64
5.3 - Tipos de Ligações.....	66
5.4 - Capacidade do programa.....	67
5.5 - Carregamentos... ..	67
5.6 - Informações do programa.....	68

6. MATERIAIS E MÉTODOS.....	69
6.1 - Generalidades.....	69
6.2 - Equipamentos.....	69
6.3 - As ligações.....	71
6.3.1 - As cavilhas partidas.....	71
6.3.2 - Corpos de prova.....	72
6.4 - Caracterização da madeira.....	73
6.5 - Modelo estrutural.....	74
6.5.1 - Dimensões.....	74
6.5.2 - Módulo de elasticidade das barras.....	79
6.5.3 - montagem.....	80
6.5.4 - Apoios.....	81
6.5.5 - Contraventamentos.....	82
6.5.6 - Pontos de leitura.....	83
6.5.7 - Cargas.....	84
6.6 - Ensaio complementares.....	86
7. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	91
7.1 - Generalidades.....	91
7.2 - Variação da direção das fibras.....	91
7.3 - Modelo parafusado.....	97
7.4 - Modelo cavilhado.....	98
7.4.1 - Resultados experimentais e teóricos.....	98
7.4.2 - Carga-deslocamento das ligações.....	109
7.4.3 - Aplicação do Módulo de Deformação das ligações no Programa Automatizado.....	118
7.5 - Comparação entre modelo parafusado e cavilhado.....	120
7.6 - Deformação lenta.....	123
7.7 - Comentários gerais.....	124
8. CONCLUSÕES - SUGESTÕES.....	129
9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	132
10. BIBLIOGRAFIA.....	136
ANEXO 01.....	139
ANEXO 02.....	145

## 1. INTRODUÇÃO

Inicialmente será feito um comentário sobre o título deste trabalho, no qual optou-se pela designação genérica "estruturas de madeira", ao invés de "treliças de madeira" que é o enfoque principal deste estudo. A estrutura chamada de treliça está associada a diversas hipóteses de cálculo e perdeu seu sentido quando tratada sem desprezar o efeito das deformações proveniente da força cortante e força normal. Aqui são desprezadas as hipóteses simplificadas que permitem estabelecer nós como articulações perfeitas. Consequentemente, a palavra treliça é usada somente para caracterizar geometricamente as estruturas constituídas de barras cruzadas, formando um conjunto de triângulos.

Utilizou-se a palavra conector para simbolizar cada elemento de ligação (parafuso, cavilha, etc) indiscriminadamente. As ligações não rígidas foram designadas por deformáveis correspondendo à tradução de "semi-rigid" encontrada na literatura internacional de língua inglesa.

Este estudo é uma tentativa de aproximação entre o teórico e o real, pela redução de algumas hipóteses de cálculo simplificadas, usuais para estruturas quaisquer, e em particular, para as estruturas de madeira.

As hipóteses usuais foram estabelecidas para tornar viável o cálculo manual (sem recursos computacionais). Comprovadamente estas hipóteses são aceitáveis para estruturas correntes de nós rígidos de pequenos vãos. À medida em que se aumenta o vão livre das estruturas, aumenta-se também a complexidade do cálculo. Efeito adicionais originados pelas deformações tomam significância e as hipóteses usuais de cálculo tornam-se comprometidas.

Em particular, nas estruturas de madeira formadas por diversas barras interligadas por elementos deformáveis, tais como, parafuso de aço, anéis metálicos, pregos, cavilhas de madeira, etc, somam-se às deformações das barras, as deformações provenientes das ligações, mas estas geralmente não são consideradas.

A Norma Brasileira para Cálculo e Execução de Estruturas de Madeira, NBR 7190/82, considera relevante estes deslocamentos e recomenda em seu item 45, a necessidade de inclusão dos deslocamentos das ligações no cálculo da contraflecha de pontes, ou quaisquer treliças com mais de 10 m de vão livre. Apesar da existência desta recomendação, não se tem conhecimento da existência de estu-

dos teórico-experimentais capazes de satisfazer esta exigência, aplicável à maioria das estruturas correntes de madeira.

Além disto, outras simplificações de cálculo são feitas. O cálculo convencional é aplicado, sem distinção, para qualquer tipo de material, forma geométrica e tipo de continuidade (ligação) das barras da estrutura. O cálculo é sempre feito em duas etapas independentes: inicialmente a parte relativa à estrutura de nós rígidos e a seguir as ligações. Ocorre entretanto que o comportamento das estruturas depende das ligações, formam um conjunto único e inseparável.

A fig. 1.1.1 ilustra a importância do número e da posição dos conectores. Esta estrutura quando considerada perfeitamente rígida, fig. 1.1.1a., é classificada como isostática. Porém, se a ligação do nó central possuir apenas um conector, a estrutura torna-se hipostática (desprezando-se qualquer resistência à torção do conector), fig. 1.1.1c. Se fossem aplicados dois conectores, fig. 1.1.1b., a ligação absorveria algum esforço de flexão. Se fossem utilizados três conectores, maior seria a rigidez da ligação e da estrutura. Assim por diante, quanto maior é o número de conectores, ou quanto melhor é a distribuição dos conectores para absorver esforços de flexão, mais homogênea, mais rígida, é a estrutura, pois cada conector representa um vínculo interno elástico comparável a uma mola.

A partir destas constatações, desenvolveu-se este trabalho com o intuito de avaliar o problema e apresentar sugestões de cálculo, integrando ligação-estrutura, através de uma conceituação teórica generalizada para sistema estrutural plano.

O tema é amplo e complexo, devido ao comportamento não linear das ligações e à sua integração com a estrutura efetivamente constituída por barras e por ligações.

A influência das ligações no comportamento da estrutura cresce com a deformabilidade das ligações. Para se verificar experimentalmente a influência da deformação dos conectores nos deslocamentos da estrutura, fez-se o ensaio de uma viga treliçada com ligações parafusadas e posteriormente com ligações cavilhadas, além de ensaios de corpos de prova reproduzindo casos reais de ligações estruturas de peças de madeira.

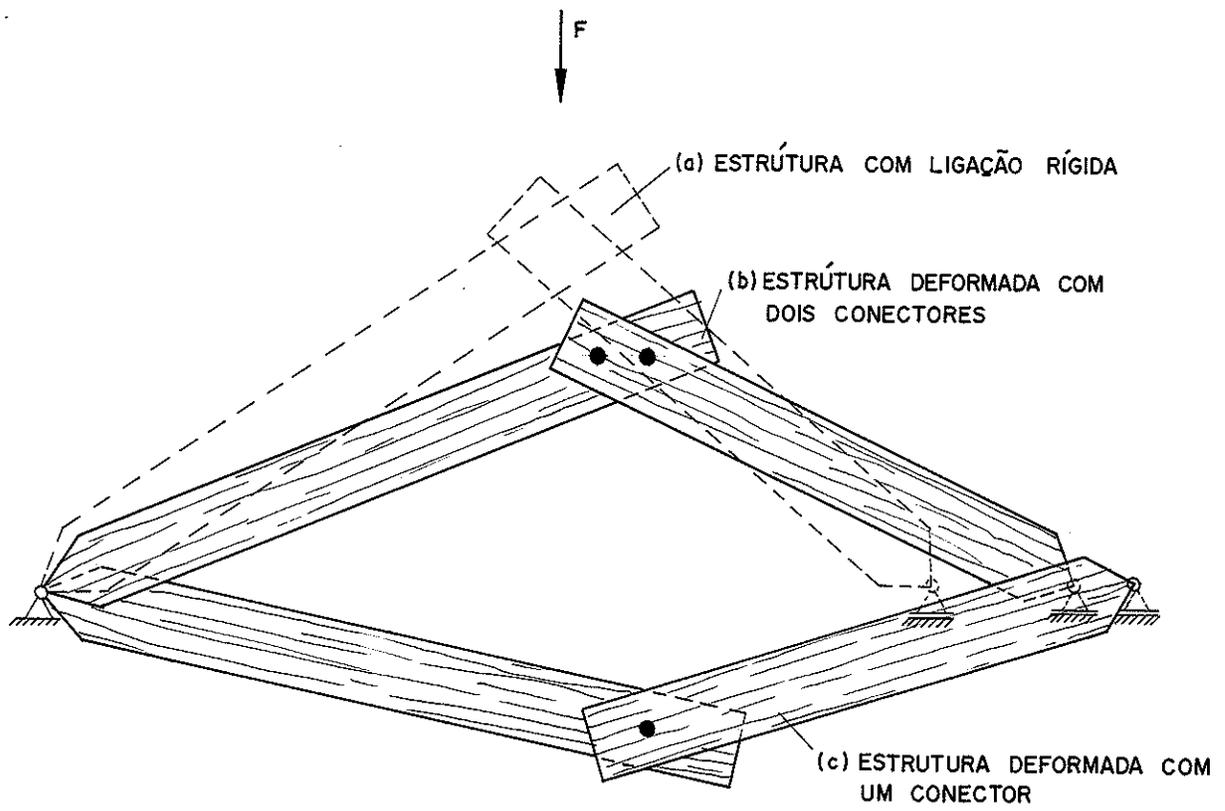


Fig. 1.1.1 - Dependência das ligações

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 - Generalidades

Serão citadas neste capítulo somente as obras que contribuíram efetivamente para o desenvolvimento deste trabalho. Outras obras não citadas neste capítulo aparecerão ao longo do texto em ocasiões oportunas. Outras de contribuição secundária constam da bibliografia.

Serão enfocados três temas principais. O primeiro trata do desenvolvimento do estudo das ligações, indispensáveis para este trabalho. O segundo é de natureza teórica, relativo ao cálculo e ao comportamento das estruturas convencionais de nós perfeitamente rígidos, enfocando as hipóteses de cálculo e a situação atual. O terceiro cita os problemas das estruturas de madeira e enfatiza o tema central - deformação das ligações.

Neste capítulo, foram conservadas na transcrição de fórmulas, dimensões e outros parâmetros, as mesmas notações e unidades dos textos originais.

Para facilitar a conversão de unidades, apresentam-se as seguintes relações, adotando-se a aceleração da gravidade igual a  $10 \text{ m/s}^2$ :

$$1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ ft} = 30,48 \text{ cm}$$

$$1 \text{ lb} = 4,54 \text{ N}$$

$$1 \text{ kip} = 1000 \text{ lb}$$

### 2.2 - Ligações entre Peças Estruturais de Madeira

No exterior, evidencia-se o Wood Research Laboratory, Purdue University, com estudos de ligações voltados para a análise do deslocamento relativo entre as peças interligadas.

Neste laboratório, PERKINS et alii (1962) desenvolveram o estudo de ligações pregadas entre peças de madeira.

As ligações com diversos pregos transmitem esforços de flexão, e portanto, quando aplicadas em estruturas, os nós não devem ser considerados como articulados. Para investigar a rigidez desta ligação, partiram das fórmulas usadas em cálculos de ligações

metálicas fletidas, rebitadas ou parafusadas. Embora, para peças de aço as hipóteses usuais sejam consagradas, para a madeira qua se nada se sabia.

A fórmula empregada para peças fletidas metálica é:

$$F = M \frac{r}{\sum r^2} \dots\dots\dots (2.2.1)$$

sendo:

F = força aplicada em um prego

M = momento aplicado sobre a ligação

r = distância do prego ao centro de gravidade geométrico da ligação

$\sum r^2$  = somatório de  $r^2$

Para analisar a validade da fórmula (2.2.1) foi necessário conhecer a relação carga-deslocamento entre peças solicitadas axialmente. A expressão sugerida é do tipo  $p = a s^b$ , na qual p é a carga em um prego, a e b são constantes e s é o deslocamento relativo entre as peças. Esta relação foi baseada nos trabalhos de Scholten e Molander, 1955 (apud PERKINS et alii, 1955) e Ulrey, 1961 (apud PERKINS et alii, 1961) os quais já haviam estudado as ligações pregadas.

A relação entre a rotação relativa ( $\theta$ ) das peças interligadas e o momento aplicado foi demonstrada ser igual a:

$$\theta^b = \frac{M}{a \sum r_i (1 + b)} \dots\dots\dots (2.2.2)$$

A avaliação da expressão  $p = a s^b$  foi obtida através de ensaios de tração em corpos de prova do tipo apresentado na fig. 2.2.1.

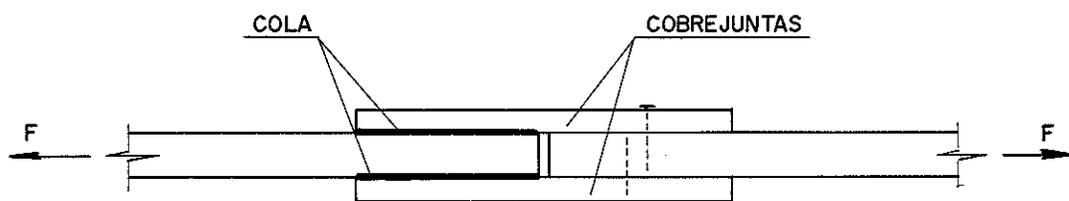


Fig. 2.2.1 - Vista superior do corpo de prova usado por PERKINS et alii (1962)

Os corpos de prova foram preparados tendo um dos lados com as faces ligadas por adesivos e o outro com ligação por pregos, fig. 2.2.1, sendo medidos os deslocamentos relativos entre as partes. Foram ensaiadas quatro combinações entre espécies de madeira da peça principal e das cobrejuntas (peças sobrepostas para promover a transferência de esforços). Para cada combinação ensaiaram-se três exemplares.

Empregando as mesmas combinações de espécies de madeira foram ensaiados corpos de prova à flexão com o esquema ilustrado na fig. 2.2.2.

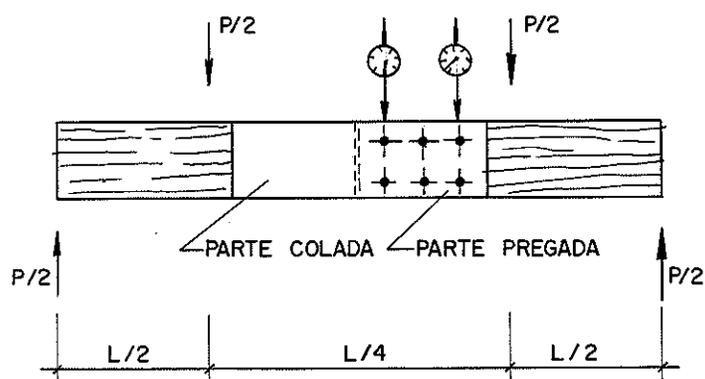


Fig. 2.2.2 - Ensaio de flexão utilizado por PERKINS et alii (1962)

Os corpos de prova foram ensaiados em uma máquina universal hidráulica, com a velocidade de deslocamento igual a 0,018 polegadas por minuto ( $\sim 0,05$  cm/min).

Segundo PERKINS et alii, (1962) a força real (experimental) atuante nos pregos de extremidade é sempre inferior à força calculada. No entanto, para efeitos práticos, a média desta discrepância pode ser considerada desprezível. Conseqüentemente, a equação tradicional de cálculo usada para as ligações metálicas rebitadas ou parafusadas pode ser aplicada para as ligações pregadas de madeira.

Em trabalho subsequente, PERKINS et alii (1964) avaliaram o grau de resistência e de rigidez de vigas contínuas tendo emendas pregadas. Nesse estudo, foram consideradas as conclusões e os procedimentos de cálculo do trabalho realizado pelos mesmos autores em 1962, extendidas ao caso das ligações solicitadas por dois tipos de esforços: momento fletor e força cortante.

A viga ensaiada, de seção 2" x 4", constituída de três partes, é apresentada na fig. 2.2.3 com suas dimensões, vinculação e carregamento.

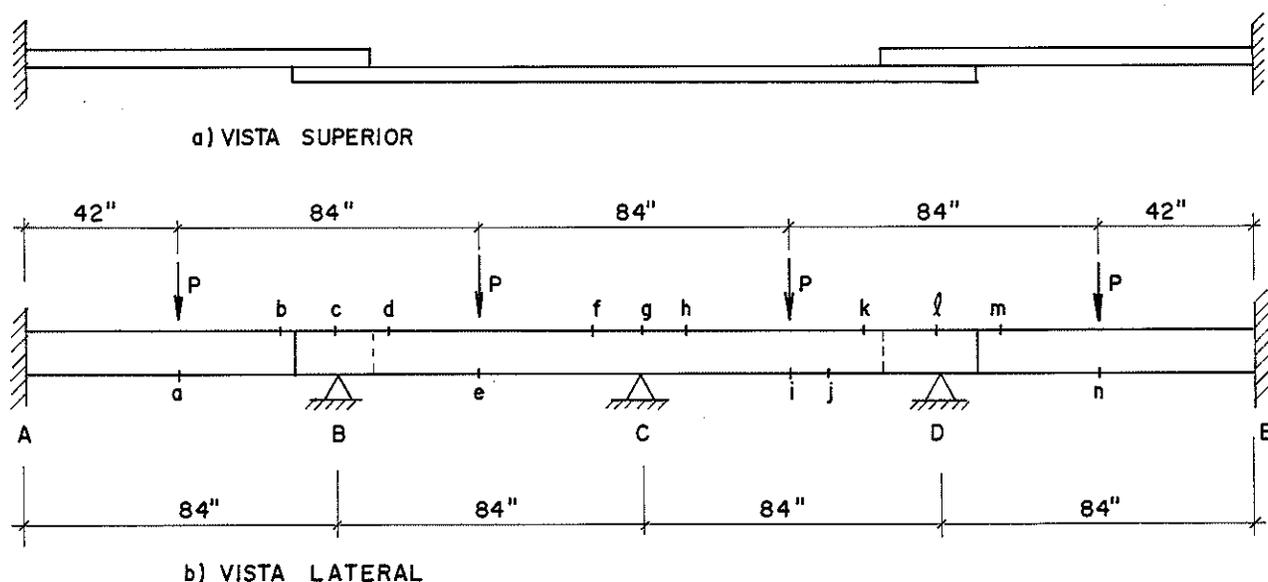


Fig. 2.2.3 - Viga contínua ensaiada por PERKINS et alii (1964)

Nos pontos indicados pelas letras minúsculas a, ..., n, foram colados extensômetros elétricos para a determinação das tensões atuantes. O módulo de elasticidade das peças foi determinado previamente.

As emendas foram ensaiadas com diferentes números de pregos e com dois comprimentos. Esta variação foi feita na mesma viga através de retirada sucessiva de pregos e posterior corte das extremidades em B e D. Resultaram emendas de comprimento de sobreposição igual a 24" (61 cm) e 12" (30,5 cm). Os pregos foram espaçados de 2" (5,1 cm) na direção das fibras e  $2\frac{1}{8}$ " (5,4 cm) na direção perpendicular às fibras.

O número de pregos utilizados para sobreposição de 12" foi 10 e 6.

Os ensaios revelaram uma discrepância acentuada entre o valor experimental e o teórico nos pontos c e  $\ell$  para a viga de emenda com 24". A relação entre valor experimental / teórico foi 1,37 (valor médio para as cinco variações do número de pregos) para os pontos c e  $\ell$ .

Para o caso da emenda com 12" a discrepância não ocorreu e os resultados foram mais uniformes e próximos dos experimentais.

Esta discrepância foi atribuída pelos autores a dois possíveis motivos. O primeiro devido ao aumento de rigidez da seção transversal na região dos apoios com emendas, local onde ocorreu a discrepância, pois a seção transversal nestes pontos ficou duplicada (ver fig. 2.2.3a) num comprimento igual a 24" (61 cm). O segundo, atribuído a eventual imprecisão dos medidores elétricos de deformação.

Trabalhos posteriores continuaram a ser desenvolvidos no Wood Laboratory, Purdue University, porém sempre associando o estudo das ligações com a sua aplicação em estruturas. Comentários destes trabalhos serão vistos no item 2.4.

Comprovando a importância dos deslocamentos entre as peças de ligação, a NATIONAL DESIGN SPECIFICATION (1968) e o TRUSS PLATE INSTITUTE (1978) associam a carga admissível em uma ligação com o deslocamento máximo entre as partes interligadas: 0,015" (0,381 mm), fig. 2.2.4a, ou 0,030" no caso da fig. 2.2.4b.

A contribuição brasileira no estudo das ligações encontra-se basicamente em trabalhos realizados no Laboratório de Madeiras e de Estruturas de Madeira (LaMEM) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, nos quais entretanto não tem sido divulgado o valor da deformação das ligações ou o deslocamento da estrutura.

A preocupação, até então, tem sido voltada para a avaliação da carga última (ruptura) das ligações e dos espaçamentos míni

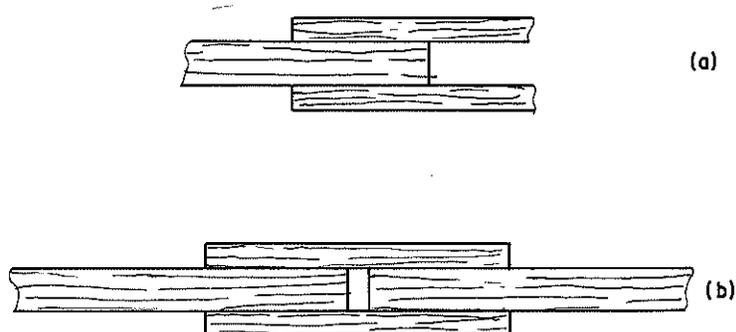


Fig. 2.2.4 - Tipos de ligações

mos entre os elementos de ligação. O deslocamento relativo entre as peças interligadas tem sido utilizado somente para atender à terceira condição do item 66.a da NBR 7190/82, de acordo com o qual o deslocamento relativo entre as partes interligadas deve ser inferior a 1,5 mm, para a solicitação de carga admissível. Mesmo nos ensaios estruturais não tem sido considerada a influência da deformação das ligações na flecha e nem nos esforços ocorridos na estrutura.

As recomendações da norma brasileira e das normas americanas são bastante distintas: a relação entre os deslocamentos das ligações é de aproximadamente 2 para 1, ou seja, a norma brasileira admite até 1,5 mm, enquanto as americanas admitem até 0,76 mm.

Nestas condições a capacidade de carga admissível nas ligações convencionais nunca fica limitada pela condição de deslocamento relativo entre as peças interligadas, pois o deslocamento de 1,5 mm ocorre para cargas elevadas nas ligações, chegando à fase de plastificação. Portanto, os deslocamentos são grandes para as ligações e não podem ser ignorados no cálculo e no projeto das estruturas.

A norma DIN (1973) contém o mesmo critério das normas americanas.

CARVALHO FILHO (1984) desenvolveu no IPT uma pesquisa relativa às estruturas de coberturas do tipo treliça Fink, na qual estudou três tipos de ligações: pregadas alinhadas em corte duplo, grampeadas alinhadas em corte duplo e metálicas alinhadas com chapas dentadas "Gang-nail" e "Hidro-air". Neste trabalho o deslo-

camento relativo de 1,5 mm ocorre para uma carga bastante elevada, já em fase de plastificação. Neste trabalho também foi observado o comportamento não linear da relação carga-deslocamento.

No LaMEM tem sido registrado em diversas pesquisas experimentais a dependência carga-deformação, além da interferência de outras variáveis: MATTHIESEN (1981), MANTILLA (1984) e outros. Trabalho de mesma natureza também foi apresentado por LUCHESE e STAMATO (1971) com relação aos parafusos de aço. GESUALDO (1985 b), quantificou a relação carga-deslocamento para ligações entre peças estruturais de Peroba Rosa através de cavilhas partidas de Eucalipto Citriodora. Foi obtida estatisticamente a relação entre a capacidade de carga de uma cavilha (P), deslocamento relativo ( $\Delta$ ), espessura das peças interligadas (b), diâmetro do furo ( $\phi$ ) e tensão de ruptura na compressão paralela às fibras ( $f_{wc}$ ). Unidades: kN e cm.

Foram apresentadas duas equações, uma para a situação de ligação de peças paralelas e outra, para peças perpendiculares entre si, equações (2.2.3).

$$P_p = 6,53 \Delta^{0,48} b^{0,13} \phi^{1,31} f_{wc}^{0,28} \dots\dots\dots (2.2.3)$$

$$P_n = 1,68 + 1,42 \ell_n \phi - 0,01 [\ell_n \Delta]^2 \cdot [\ell_n b + 5 \ell_n (f_{wc})]$$

Estas equações são de difícil visualização físico-mecânica. Há necessidade de simplificá-las, sem prejuízo da melhor identificação do comportamento da ligação.

### 2.3 - Estruturas com Nós Rígidos

Uma revisão geral dos problemas de cálculo estrutural revelam dois aspectos fundamentais: o primeiro refere-se ao cálculo de esforços em treliças - estrutura com grande número de barras; o segundo é consequência do primeiro, pois quanto maior é o número de barras, maior é o trabalho do calculista desprovido de recursos computacionais.

Em consequência destes aspectos, diversas hipóteses simplificadoras são necessárias para tornar viável o cálculo manual das estruturas. Tratar-se-á somente das estruturas planas.

Diversos autores, entre eles, WANG (1953), PARCEL e MOORMAN (1955), TIMOSHENKO e YOUNG (1957), NORRIS e WILBUR (1960), GREGORY (1966) e GHALI e NEVILLE (1978) sugerem processos de cálculo para esforços em barras de treliças e salientam a relevância das tensões secundárias, provenientes dos esforços de flexão, nas treliças de grandes vãos, caso comum das pontes.

Salientam que as tensões secundárias chegam, em alguns casos, mesma ordem de grandeza das tensões principais (são força normal).

Os autores citados são unânimes na descrição da origem das tensões secundárias, oriundas da deformação da estrutura, e consequente deslocamento relativo entre as extremidades das barras. Como os nós das treliças não são articulados, conforme se idealiza, o deslocamento relativo entre as extremidades da barra provoca esforços de flexão.

A fig. 2.3.1 ilustra a situação deformada e ampliada de uma treliça elementar com nós perfeitamente articulados e perfeitamente rígidos, figs. (a) e (b), respectivamente.

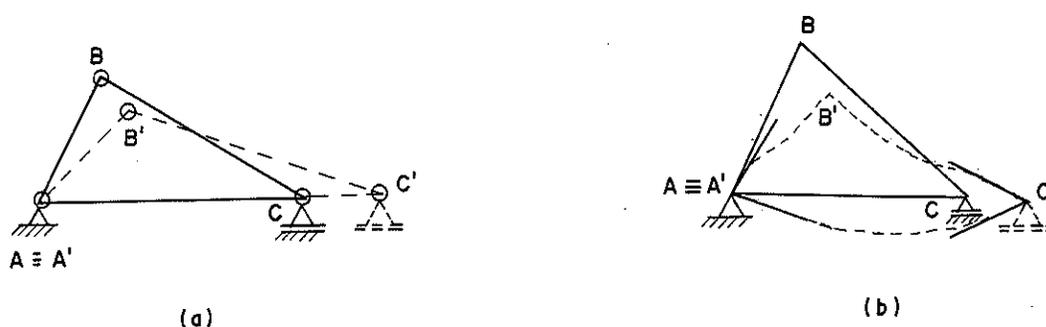


Fig. 2.3.1 - Elástica de estruturas deformadas

No caso da fig. 2.3.1a, a acomodação da estrutura ocorre com o eixo das barras mantido reto, são atuam forças axiais. No caso da fig. 2.3.1b, a acomodação ocorre com deformação dos eixos das barras, pois os ângulos internos dos pontos A, B e C são imutáveis causando os esforços de flexão.

No caso da fig. 2.3.1b, ocorrem tensões secundárias proporcionais à rigidez por flexão de cada barra.

Para simplificar os cálculos adota-se a hipótese da independência de efeitos da tensão primária sobre a tensão secundária e vice-versa.

Com esta hipótese, o cálculo é dividido em três etapas. Primeira: calcula-se a estrutura como treliça convencional (nós articulados), determinando-se os deslocamentos de todos os nós e as forças axiais em todas as barras. Segunda: a partir dos deslocamentos dos nós, determinam-se os deslocamentos de extremidade, perpendiculares ao eixo da barra ou às respectivas rotações, obtendo-se os momentos de engastamento perfeito para cada extremidade de barra. Terceira: aplica-se, por exemplo, o processo de Cross (distribuição de momentos) e determinam-se os momentos nas extremidades das barras.

Os esforços finais nas extremidades das barras são, portanto, as forças axiais calculadas na primeira etapa (nós articulados) e os momentos fletores determinados na terceira etapa. Em geral, não são avaliadas as forças cortantes por serem desprezíveis em relação aos demais esforços. TIMOSHENKO e YOUNG (1957) mostram que a força cortante atinge somente 3% da força axial quando a tensão secundária é de 50% da tensão principal.

Empregando as considerações de cálculo idênticas às descritas anteriormente, SUDDARTH (1961) desenvolveu experimentação em treliças de madeira com nós considerados rígidos (pregado e cola) para comparar os resultados teóricos com os experimentais. Ensaiou três tipos de treliças, com carregamentos distintos, conforme mostra a fig. 2.3.2.

É interessante observar que SUDDARTH (1961) classificou as peças de madeira empregadas na montagem dos modelos e obteve o módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ) através de ensaios de flexão e de compressão. Os valores de  $E$  obtidos nos dois tipos de ensaios foram semelhantes, evidenciando que a prática da caracterização de peças de madeira por ensaios de flexão é válida para os casos de peças solicitadas axialmente. Os ensaios de flexão foram executados em peças com vão livre de 28 in com duas cargas concentradas, igualmente espaçadas, a 7 in dos apoios.

Os resultados obtidos por este pesquisador não foram conclusivos, pois principalmente para a treliça 1, os valores de forças e momentos lidos através dos extensômetros elétricos foram dispersos, ora abaixo, ora acima dos valores esperados. As flechas me

didadas foram acima das calculadas (0,0401 in para 0,0445 in - diferença de 11%).

A treliça 2 apresentou valores de força normal experimental menor que os teóricos, mas momento fletor experimental maior que o teórico. Não foram obtidas as flechas para este treliça.

No ensaio da treliça 3 foram ensaiados cinco exemplares semelhantes e apenas mediram-se flechas. Conclusão idêntica à da treliça 1 foi obtida em relação às flechas; a média das flechas experimentais foi 0,344 in contra 0,321 in da teórica (diferença de 7%), portanto, flecha experimental superior à teórica.

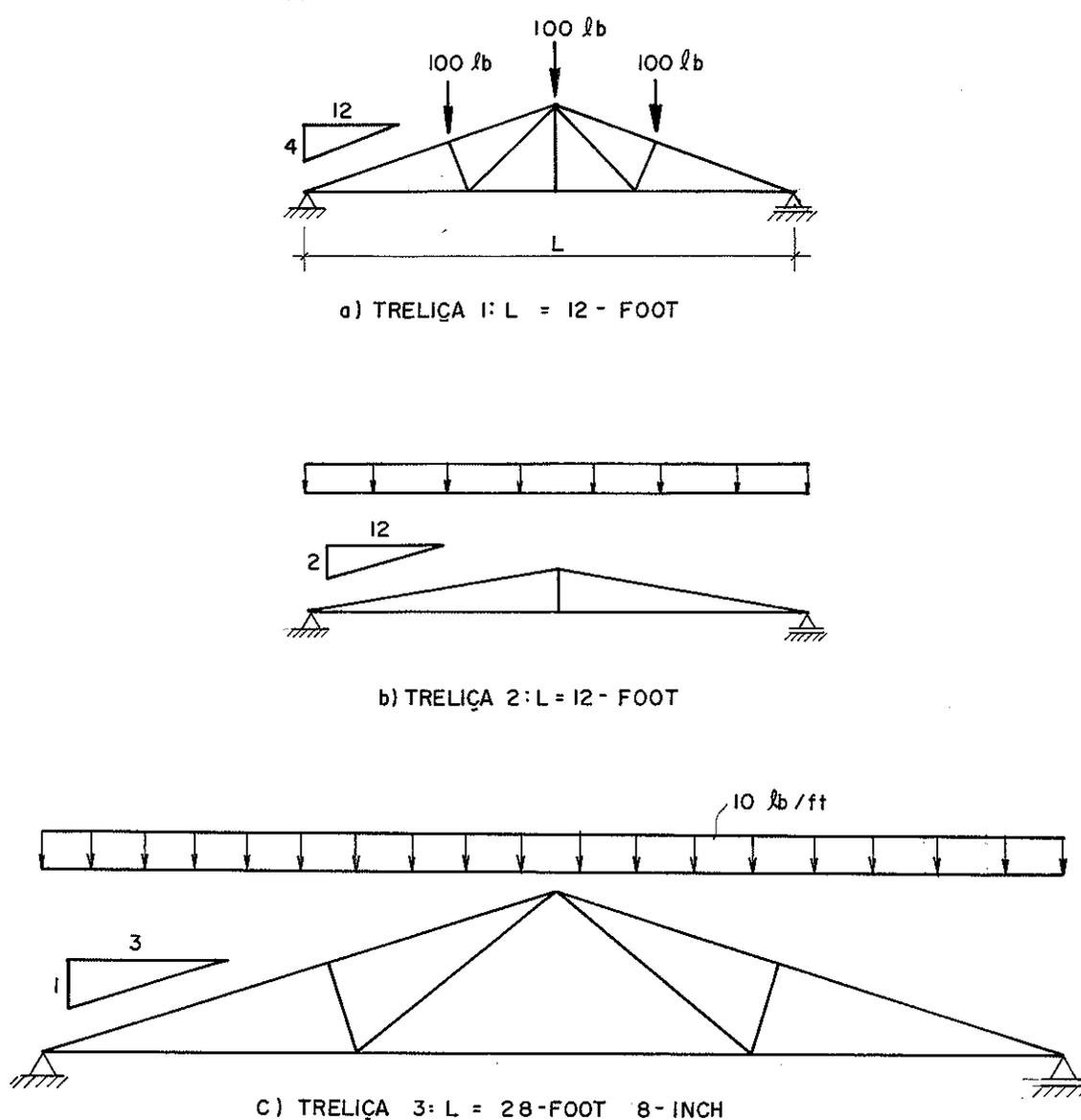


Fig. 2:3.2 - Estruturas ensaiadas por SUDDARTH (1961)

SUDDARTH (1961) concluiu que os resultados encontrados podem ser aceitos como confirmação do cálculo teórico. As diferenças encontradas (pequenas) podem ser atribuídas aos erros de leitura dos esforços combinados entre força axial e momento fletor, e a outros fatores intrínsecos do material madeira. Salaria que o processo de cálculo teórico é bastante exaustivo, e por isto deve ser substituído pelo computador para eliminar esta inconveniência. Adverte, ainda, sobre o fator de escala entre modelo e estrutura real: pode ser questionado.

Em 1964, SUDDARTH et alii apresentaram programa para análise de esforços em barras de treliças do tipo W simétricas, via computador, através do processo das deformações angulares (slope deflection). As treliças tipo W são semelhantes às apresentadas na fig. 2.3.2a e 2.3.2c.

De uma forma geral, o cálculo automatizado através de equipamentos eletrônicos, tais como, computadores e microcomputadores, tem difundido-se largamente nos meios acadêmicos e empresariais.

Para cálculo de estruturas com nós perfeitamente rígidos, o processo mais empregado é o dos deslocamentos, ou também chamado de processo da rigidez. GERE e WEAVER (1965) apresentam as noções matriciais deste processo e fluxogramas para montagem de programas computacionais para estruturas planas e espaciais. Detalhes sobre o assunto também podem ser visto em RUBSTEIN (1966), PRZEMIENIECKI (1968), LIVESLEY (1975) e outros.

Cálculo mais apurado pode ser aplicado para obtenção dos esforços em treliças ou qualquer outro tipo de estrutura, adicionando-se o efeito das forças axiais na flexão das barras. Neste processo, a rigidez à flexão da barra é dependente da força axial, pois se considera esta ação atuando na barra já fletida, e portanto, a força axial produz momento fletor, como ilustra a fig. 2.3.3.

As considerações teóricas deste procedimento podem ser vistas em GHALI e NEVILLE (1978), ANTUNES (1972), KETTER et alii (1979), e outros.

Como a rigidez à flexão da barra depende da força axial (N), este processo torna-se iterativo, ou seja, é feita uma estimativa inicial de N e a partir desta calculam-se os novos esforços. Com o novo valor de N, repete-se o processo até que os esforços calculados entre duas iterações sucessivas sejam equivalentes.

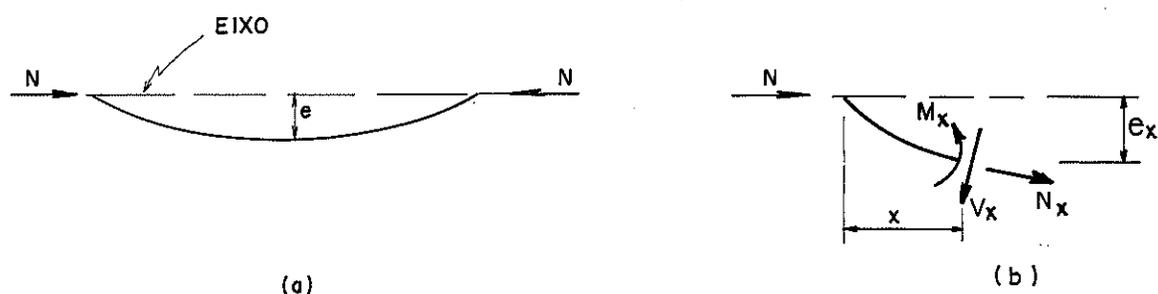


Fig. 2.3 .3 - Efeito da força axial na flexão

Neste processo o cálculo é mais realista, pois considera a influência das deformações, assim como a variação da geometria da estrutura. Porém, sua aplicação nas estruturas usuais só é viável com o auxílio de recursos computacionais, por ser um processo mais elaborado e iterativo, e conseqüentemente mais laborioso.

Para exemplificar a precisão deste processo, KETTER et alii (1979) apresenta um gráfico relacionando o carregamento e o deslocamento para comparar a solução incluindo a força axial e a solução convencional sem o efeito da força axial, fig. 2.3.4.

Quanto ao número de iterações, estes autores ilustram com a mesma estrutura e o mesmo carregamento, fazendo  $q = 5$  kips/ft. Obtiveram em três iterações a convergência completa da solução. A título de informação, a relação entre  $\Delta$  calculado incluindo a força axial e não a incluindo foi 1,21, ou seja, 21% a mais que o convencional. Os esforços, para o exemplo, não variou mais que 10% entre um processo e outro.

Mais recentemente, CARVALHO FILHO (1984) constatou experimentalmente que o cálculo teórico obtido pelas hipóteses convencionais de treliças (nós articulados, ligações infinitamente rígidas, geometria invariável, etc) não corresponde à realidade para treliças do tipo Fink (W) com ligações feitas através de pregos ou grampos com chapas de compensado. Neste caso, a flecha medida no centro do vão da treliça é bem maior que a calculada. O referido au-

tor atribui esta diferença às deformações das ligações. Resultados compatíveis com os teóricos foram obtidos para treliças com ligações por chapas metálicas.

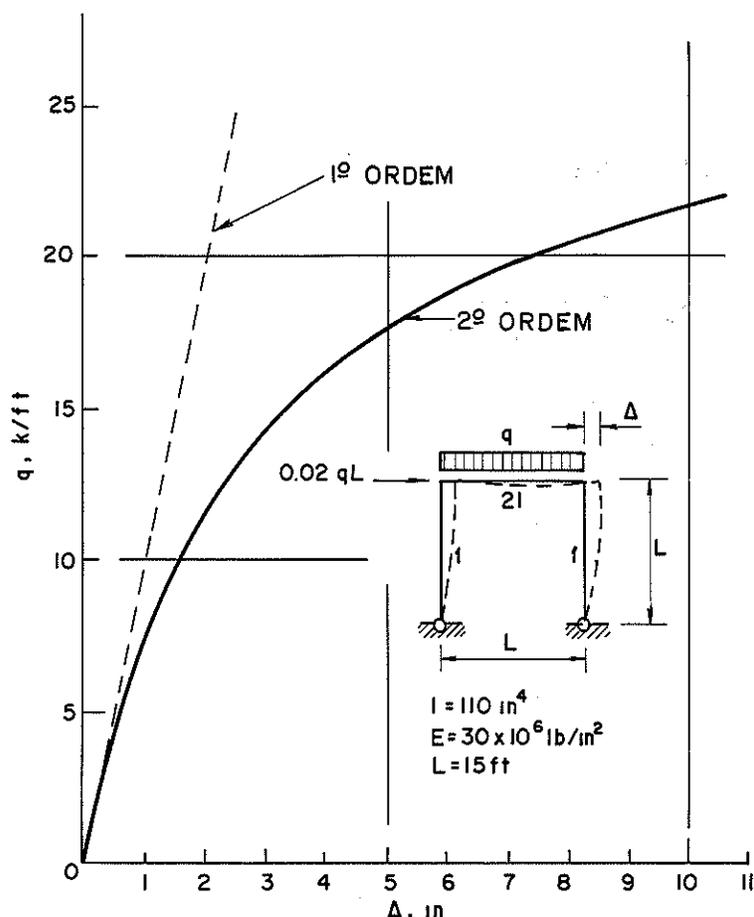


Fig. 2.3.4 - Gráfico comparativo de KETTER et alii (1979)

#### 2.4 - Estruturas com Nós Deformáveis

Inicia-se esta revisão com a transcrição do item 45 da NBR 7190/82 a qual desde 1951 contém em seu texto a seguinte recomendação: "Deve-se dar às pontes ou quaisquer treliças com mais de 10 m de vão uma contraflecha tal que a estrutura tome a forma prevista no cálculo, quando sob a ação da carga permanente mais metade da carga acidental. No cálculo dessa contraflecha, deve-se levar em conta os deslocamentos nas ligações. No caso de treliças sobre dois apoios, basta calcular a contraflecha para o meio do vão e supor os demais pontos situados sobre uma parábola".

A recomendação anterior parece oportuna e necessária, porém muito pouco é conhecido sobre o assunto; nem mesmo a norma fornece qualquer esclarecimento.

SALGO (1956) descreve os problemas encontrados em estruturas de madeira durante o acelerado programa de reconstrução, após a Segunda Guerra Mundial. Todas as estruturas citadas são de grandes vãos (de 79 ft a 176 ft, ou 24 m a 54m). Nesse artigo são citados cinco exemplos de ruínas de estruturas treliçadas de coberturas para depósitos e hangares, e estruturas mistas de edifícios com dois pavimentos. Um dos problemas enfatizados, como possível causador da ruptura das estruturas citadas, é a existência da flecha considerável não prevista no cálculo, capaz de promover o já citado efeito das "tensões secundárias". Este efeito, em muitos casos, são provenientes da deformação elástica das barras e da deformação das ligações. Outro problema detectado foi o da falta de apertos periódicos dos parafusos.

A contribuição mais relevante sobre o assunto foi empreendida por RODDA (1965a) assim como os trabalhos subsequentes de RODDA (1965 b) e RODDA et alii (1966).

RODDA (1965a) em sua tese de doutoramento desenvolve estudo teórico-experimental a respeito de estruturas com nós deformáveis (semi-rígido). Investigou o comportamento experimental de uma viga contínua com dois tramos, com emenda sobre o apoio central através de placas metálicas pregadas, carregada com carga concentrada no meio de um dos vãos. Experimentação semelhante foi feita com uma treliça triangular mostrada na fig. 2.4.1.

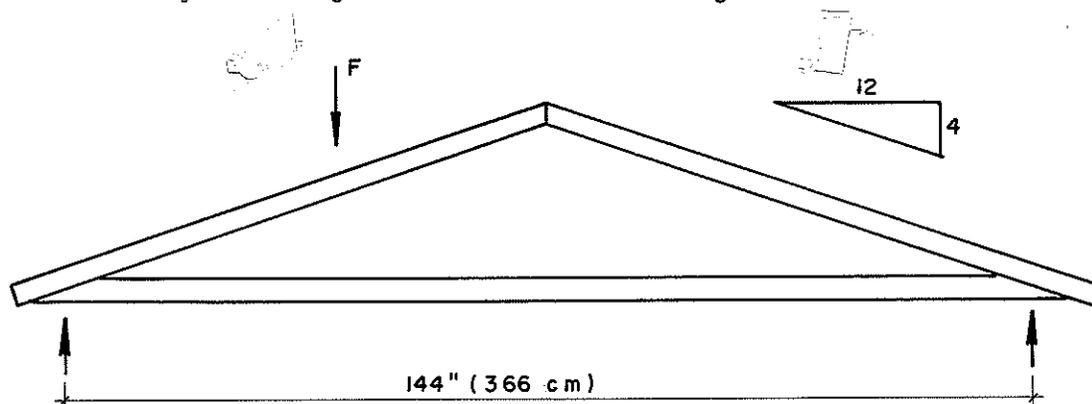


Fig. 2.4.1 - Treliça ensaiada por RODDA (1965 a)

O cálculo teórico dos esforços é feito pelo processo dos deslocamentos angulares modificados para a situação de vinculações deformáveis. O cálculo é feito por processo iterativo, pois a relação carga-deslocamento das ligações não é linear. Somente é considerada a flexibilidade angular das ligações.

O módulo de deformação angular ( $Z$ ) da ligação é estimado pela relação entre o giro ( $\theta$ ) entre as peças interligadas e o momento aplicado ( $M$ ). A expressão relacionando  $M$ ,  $\theta$  e as características geométricas da ligação são fornecidas por PERKINS et alii (1962), conforme já mostrado com a equação 2.2.2.

O valor de  $Z$  é calculado a partir da estimativa de  $M$ . Com auxílio da equação 2.2.2 determina-se  $\theta$ , e portanto,  $Z = \frac{\theta}{M}$ . Assim a relação giro da ligação e momento torna-se linear para cada iteração, tornando-se válidas as hipóteses de cálculo convencionais. O processo se repete até que os resultados alcançados em duas iterações sucessivas sejam bastante próximos, dentro da precisão desejada.

Para determinar o valor de  $Z$  a ser usado na iteração subsequente, RODDA (1965a) recomenda uma correção no valor de  $\phi$  devido ao ajuste da posição do centro de gravidade da ligação em função da solicitação efetiva em cada conector. Foram desenvolvidos programas específicos para o computador IBM 7090 e 7040, para cálculo dos esforços nas barras da viga e da treliça ensaiadas. Conclui-se com este trabalho que a precisão alcançada com o procedimento de cálculo adotado é suficiente para a situação geral; a distribuição dos momentos é função do deslocamento relativo das ligações; as flechas e rotações dos nós calculadas não representam uma boa estimativa das reais. Os resultados experimentais obtidos para a viga contínua foram mais próximos dos calculados; o mesmo não ocorreu com a estrutura treliçada.

A NATIONAL DESIGN SPECIFICATION (1968) sugere a aplicação de uma contraflecha em treliças com ligações por conectores, para melhorar sua aparência. Esta contraflecha pode ser estimada pela seguinte fórmula empírica:

$$\Delta = K_1 \frac{L^3}{H} + K_2 \frac{L^2}{H}$$

sendo:

$\Delta$  = contraflecha (polegada) no centro do vão da treliça

$L$  = vão da treliça (feet)

$H$  = altura da treliça no meio do vão (feet)

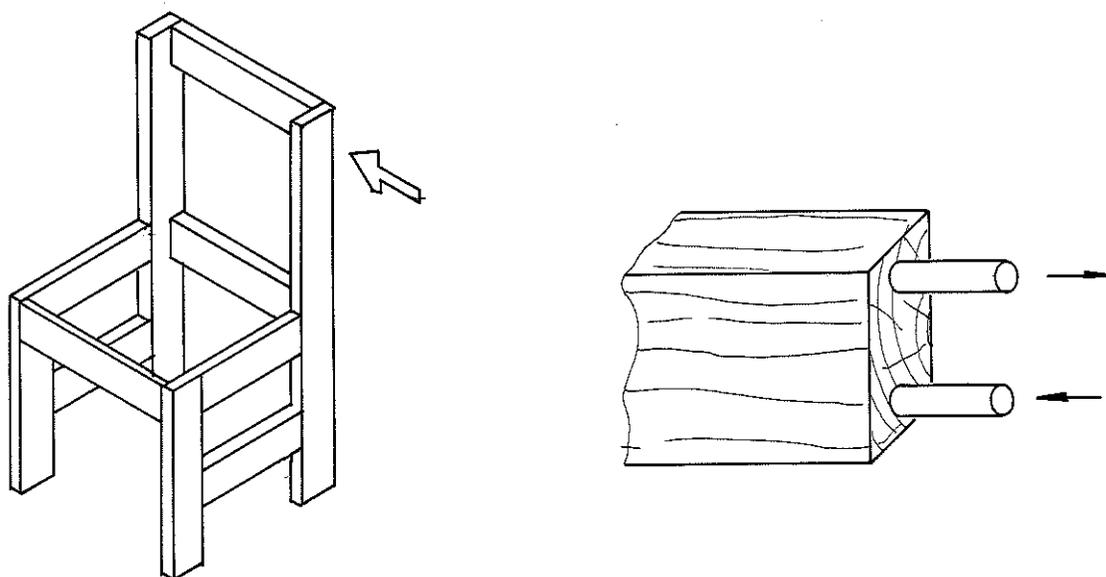
$K_1$  = 0,000032 para qualquer tipo de treliça

$K_2 = \begin{cases} 0,0028 & \text{para treliças de banzos retos ou inclinados} \\ 0,00063 & \text{para treliças com banzo superior sem emendas.} \end{cases}$

A sugestão anterior não quantifica com exatidão a flecha real produzida pelas ligações, pois esta flecha é função de diversos parâmetros não considerados na equação, tais como, tipo de conector, intensidade de carga, geometria da treliça, etc. Tem, portanto, sentido somente prático e manifesta a preocupação com o cálculo das deformações das ligações.

Equação semelhante é recomendada pelo AMERICAN INSTITUTE OF TIMBER CONSTRUCTION (1966).

ECKELMAN (1970) salienta os efeitos das ligações não perfeitamente rígidas nas estruturas de móveis e sugere que as estruturas sejam calculadas com nós deformáveis. Apresenta formulação teórica para montagem de programa de computador através do processo matricial da rigidez, considerando a estrutura de móvel tridimensionalmente, incluindo o efeito de torção. As ligações analisadas são do tipo mostrado na fig. 2.4.2b, executadas com cavilhas de solicitação principal ao arrancamento.



a) ESTRUTURA DE MOBÍLIA

b) LIGAÇÃO DE TOPO

Fig. 2.4.2 - Ligações e estrutura estudadas por ECKELMAN (1970) a HATA (1985)

OZELTON e BAIRD (1976) consideram significativo o efeito das deformações das ligações e apresentam critério prático para cálculo de flechas devido às ligações. Afirmam que o procedimento sugerido adapta-se bem à realidade. Fornecem tabelas de deformações para alguns tipos de ligações (valores fixos - não dependem

da intensidade de carga ou posição dos conectores), ver tabela 2.1. A contribuição destas deformações são calculadas como variações de comprimentos nas barras, pela aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, resultando a equação seguinte:

$$\Delta = \sum U \Delta_s$$

sendo:

$\Delta$  = flecha da estrutura devido às ligações

$U$  = força axial devida à carga unitária aplicada

$\Delta_s$  = deslocamento da ligação, conforme tabela apresentada em função do tipo de conector

Com a formulação anterior é apresentado um exemplo de treliça com banzos paralelos de vão 12 m, altura 2 m e distância entre montantes igual a 2 m. O carregamento é de 6 kN/m ao longo do banzo superior (12 kN por nó). As ligações são feitas através de anéis metálicos abertos de diâmetro 64 mm, os quais de acordo com o tabelado, têm deslocamento de 0,0008 m em cada ligação. O resultado obtido comprova a importância das deformações das ligações, pois a flecha devida somente à madeira foi praticamente igual à das ligações, ou seja, 0,0144 m e 0,0140 m, respectivamente.

Mais recentemente, HATA (1985) desenvolveu trabalho semelhante ao de ECKELMAN (1970) e verificou experimentalmente o comportamento estrutural de uma cadeira com deformáveis, utilizando o cálculo tri-dimensional pelo método dos elementos finitos. Encontrou boa aproximação entre os deslocamentos experimentais e os calculados (ver fig. 2.4.2).

É mencionada por PFEIL (1985) a recomendação de contra-flecha em treliças da ordem de 4% do vão ( $L$ ), para compensar os deslocamentos decorrentes da deformabilidade elástica do material, da deformabilidade das ligações e da deformação lenta. Com base na NBR 7190/82 a qual indica flecha admissível de  $\frac{L}{350}$ , a parcela de 4% do vão é bastante significativa, pois  $\frac{L}{350}$  representa somente 0,3% de  $L$ . Sendo 0,04  $L$  a flecha total e 0,003  $L$  ( $\frac{L}{350}$ ) a flecha devida à deformação do material e à deformação lenta (parcelas previstas no cálculo convencional), então o deslocamento das ligações corresponde a 93% da flecha total.

Um balanço geral da literatura citada indica a necessidade de conhecimento relativo ao efeito das deformações das ligações nas estruturas. Os estudos desenvolvidos sobre o assunto ain-

da não atingiram conclusão definitiva, porém revelam a preocupação com o problema, até então ignorado pelos calculistas carentes de recursos computacionais.

O avanço tem sido conseguido graças à crescente disponibilidade de equipamentos eletrônicos de médio e pequeno porte, e assim, o cálculo estrutural vem se aprimorando e a cada dia torna-se mais realista, mais preciso, mas prático e mais rápido.

TABELA 2.1 - Deslocamento em ligações apresentados por OZELTON e BAIRD (1976)

TIPO DE CONECTOR	DESLOCAMENTO (m)
Cola.....	nulo
Parafuso.....	0,0026
Placas dentadas.....	0,0026
Anéis metálicos abertos, diâmetro 64 mm....	0,0008
Anéis metálicos abertos diâmetro 104 mm....	0,0010
Anéis especiais* diâmetro 67 mm	
madeira com madeira.....	0,0026
madeira com aço.....	0,0018
Anéis especiais* diâmetro 104 mm	
madeira com madeira.....	0,0031
madeira com aço.....	0,0026

\* Shear plate

### 3 - AS LIGAÇÕES E O COMPORTAMENTO DA ESTRUTURA

#### 3.1 - Generalidades

O cálculo teórico usual das estruturas está embasado nas hipóteses do método clássico, ou seja, são admitidas como válidas a equação de Hooke, as hipóteses de Bernoulli-Navier, a continuidade da linha elástica do eixo da estrutura e a geometria não varia com o carregamento. Além destas hipóteses, é comum serem desprezadas as parcelas das deformações oriundas da força cortante e normal.

O conjunto destas hipóteses resulta em diversas simplificações de cálculo, aceitáveis para a maioria das estruturas.

O material e as ligações influem sobremaneira no comportamento das estruturas. Exemplifica-se com o caso das estruturas metálicas soldadas e de concreto armado, as quais apesar de serem constituídas por diversas barras, formam um conjunto contínuo. Ao contrário destas, as estruturas metálicas rebitadas ou parafusadas e as estruturas de madeira não coladas apresentam alteração da função da linha elástica nas junções das barras, e portanto são mais deformáveis.

Com base nestes fatos, são justificadas certas limitações das hipóteses do método clássico em função do tipo de estrutura a ser calculada. A rigidez (ou flexibilidade) da estrutura é o parâmetro mais limitante para caracterizar a validade das hipóteses convencionais, pois quanto maiores as deformações, mais o comportamento das estruturas se distancia das hipóteses.

Serão distinguidos dois tipos básicos de estruturas: a estrutura com nós perfeitamente rígidos e a estrutura com nós deformáveis (barras interligadas por conectores).

As estruturas com diversas barras do tipo treliçado geram dificuldades de entendimento quanto à sua concepção, pois nesta estrutura de nós rígidos, são usados nós perfeitamente articulados (rótulas) para efeito de cálculo. O item seguinte fornece uma justificativa teórica a respeito desta consideração, tentando mostrar o porquê das articulações do nó rígido.

### 3.2 - Articulações em Nós de Treliça

A primeira aproximação estrutural utilizada para cálculo das estruturas com diversas barras com nós perfeitamente rígidos, com aparência geométrica das treliças (conjunto de barras formando triângulos) foi a adoção de rótulas perfeitas (sem atrito) no encontro das barras.

Esta aproximação é bastante interessante e se constitui em alternativa eficaz quando o cálculo da estrutura é feito manualmente. Caso contrário (nós perfeitamente rígidos), o cálculo é deveras laborioso.

Aplicando-se as hipóteses do método clássico, é fácil concluir que os esforços nas barras de uma estrutura treliçada são exatamente os mesmos que aqueles calculados para a estrutura com nós rígidos ou articulados.

Se os nós são perfeitamente rígidos, a estrutura é altamente hiperestática. Neste caso pode ser aplicado qualquer processo de cálculo (dos esforços, dos deslocamentos, de Cross, etc) recomendados pelos especialistas no assunto.

Para explicar a articulação dos nós nas treliças será escolhido o processo de Cross (poderia ser qualquer outro). A aplicação direta deste processo, sem composição de estruturas, só pode ser feita para estruturas indeslocáveis. Como no cálculo usual de estruturas são desprezadas as parcelas de deformações decorrentes da força normal e cortante, então na determinação da deslocabilidade também supõe-se que não exista deformabilidade devido às forças citadas, ou seja, as barras são inextensíveis na direção paralela e perpendicular ao seu eixo. Estas suposições são feitas para simplificar o cálculo manual.

Sendo assim, toda treliça isostática ou hiperestática, será indeslocável, e portanto, o processo de Cross pode ser aplicado diretamente.

Pela condição de cargas aplicadas somente sobre os nós, resultam momentos de engastamento perfeito nulo em toda extremidade de barra. Logo, não existe distribuição (compensação) de momentos, e por decorrência, os momentos fletores e forças cortantes são nulos em toda e qualquer posição das barras. Consequentemente toda extremidade de barra tem momento nulo e pode ser considerada como articulada, resultando somente forças axiais nas barras.

Por isto, a adoção dos nós como rótulas não é uma simplificação, mas sim uma eliminação de passos intermediários relativos ao cálculo do momento fletor e força cortante inexistentes.

É necessário notar que esta constatação é uma consequência da prática de diversas hipóteses, e portanto, é uma conclusão limitada.

Dois aspectos contraditórios podem ser apontados entre as hipóteses adotadas e os resultados.

Primeiro: por hipótese as barras são inextensíveis axialmente, ou seja, não têm deformação pela ação de força normal, porém o resultado é a ação de somente força axial, contrariando a hipótese.

Segundo: há deslocamento diferencial entre dois nós consecutivos da estrutura, então existe flexão nas barras.

Apesar destas observações, o cálculo de estruturas treliçadas com nós articulados é consagrado nos meios técnicos e científicos, sendo adotado como boa aproximação da realidade. Especial atenção deve ser dada às treliças de grandes vãos, caso geral das pontes, onde os efeitos das deformações não previstas no cálculo (efeitos secundários) são em geral altamente significativos.

Em particular, quando as barras são interligadas por elementos deformáveis (ligações não coladas em estruturas de madeira) os deslocamentos dos nós são maiores, pois cada barra tem deformação elástica do material e deformação da ligação, sendo necessário avaliar com mais cautela os efeitos secundários.

### 3.3 - Interação Conector-Estrutura

Uma estrutura é um conjunto de partes resistentes, podendo ser formada por barras interligadas. Cada barra, cada elemento de ligação tem sua função, e mesma importância para formar um conjunto harmonioso e inseparável.

Em geral, uma ligação constituída por mais de um elemento é considerada com uma característica única, ou seja, a ligação representa o comportamento de todos os conectores.

Na realidade, numa ligação solicitada por esforços quaisquer (momento, cortante e normal), é adotado que cada conector é solicitado por força diferenciada, concentrada no centro geométrico do conector.

Cada conector pode ser julgado como um vínculo entre as barras. Se o nó central da estrutura da fig. 3.3.1 é

uma ligação com apenas um conector sem resistência à torção, conclue-se que a estrutura é hipostática (articulada no nó central, com três vinculações de apoio. Porém, se a ligação for executada com dois conectores, a estrutura torna-se isostática e sua rigidez é função também da rigidez de cada elemento de ligação.

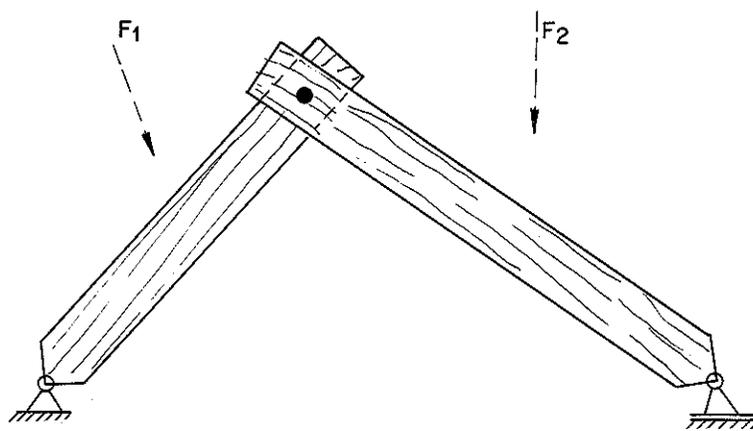


Fig. 3.3.1 - Vínculo barra-ligação

À medida que se aumenta o número de conectores, aumenta-se também o número de vínculos entre as barras interligadas. Conseqüentemente, o número de forças a serem determinadas é maior.

A estrutura e cada barra isolada estão em equilíbrio, logo o somatório de forças na horizontal e na vertical deve ser nulo, fig. 3.3.2 (é mostrada uma ligação através de dois conectores para não saturar o desenho).

Notar que para a estrutura elementar da fig. 3.3.2 tem-se quatro incógnitas: duas forças ( $P_1$  e  $P_2$ ) e dois ângulos (inclinação de  $P_1$  e  $P_2$ ). O estado final de equilíbrio mostrado é proporcional à rigidez de cada conector e de cada barra, e portanto, para cada tipo e intensidade de carregamento há uma situação de equilíbrio.

A solução do problema torna-se mais trabalhosa à medida em que se aumenta o número de conectores e de ligações. A propósito, as ligações tem comportamento não linear na relação carga-deslocamento.

A fig. 22 ilustra em corte transversal, o aspecto final de ligações cavilhadas levadas à ruptura. Observa-se pela posição final das cavilhas, o efeito da flexão e o esmagamento, da cavilha e das peças interligadas, localizado principalmente nas suas interfaces.

Em função destas considerações, pode-se admitir uma distribuição de tensões com o aspecto da fig. 23, também sugerida por LUCHESE E STAMATO<sup>17</sup> nas ligações parafusadas com pinos de aço de pequena rigidez.

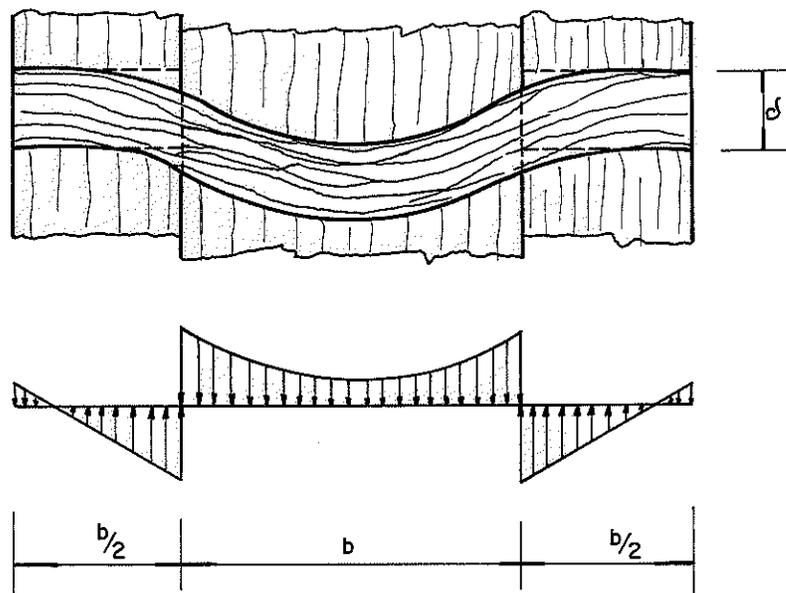


FIG.23 - Distribuição de tensões ao longo da cavilha

Logicamente, a ilustração da fig. 23 fornece apenas uma idéia, pois a forma exata depende das características relacionadas com a ligação: diâmetro das cavilhas, espessura das peças ligadas, tensão de ruptura à compressão, umidade e densidade da madeira.

O aumento da espessura das peças ou o aumento de diâmetro das cavilhas, produz maior rigidez da cavilha dentro do furo, acarretando menor deformação da mesma e, conseqüentemente, menor concentração de tensões nas interfaces das peças ligadas.

O mesmo comportamento ocorre quanto maior for a tensão de ruptura da madeira da cavilha e das peças interligadas.

Para ligações mais rígidas, ocorre uma distribuição de

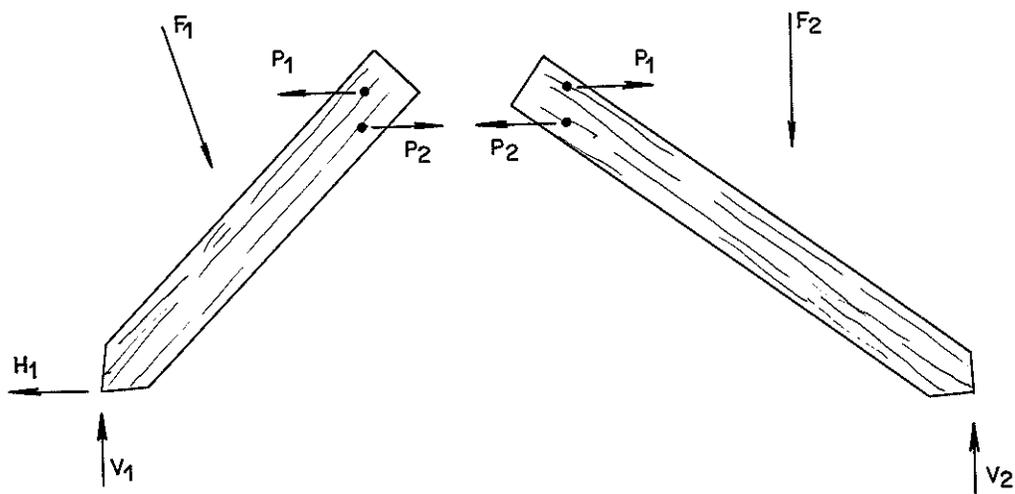


Fig. 3.3.2 - Equilíbrio das barras de uma estrutura

## 4. ESTRUTURAS COM LIGAÇÕES DEFORMÁVEIS

### 4.1 - Generalidades

As estruturas com ligações deformáveis são aquelas cujas ligações não são rígidas.

As ligações entre peças estruturais de madeira, em particular através de cavilhas de madeira, apresentam a relação carga - deslocamento não linear, idêntica à mostrada na fig. 4.1.1.

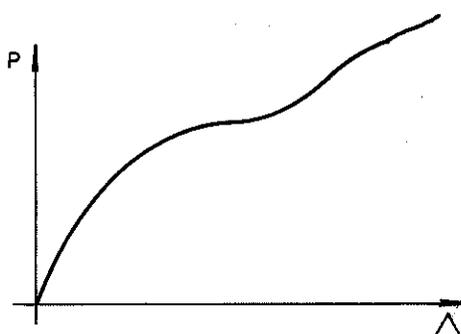


Fig. 4.1.1 - Cavilhas de madeira: carga-deslocamento

Isto torna o problema mais complexo. O comportamento de uma estrutura com estas ligações é diferente do convencional.

Esquemáticamente, as extremidades de uma barra podem ser representadas conforme fig. 4.1.2a, ou 4.1.2b, nas quais as ligações são idealizadas como molas na direção axial ( $x$ ), perpendicular ao eixo ( $y$ ) e perpendicular ao plano da ligação ( $z$ ) - rotação.

O cálculo de esforços para estruturas com nós deformáveis obedece os procedimentos convencionais, desde que as constantes de rigidez das molas de extremidades sejam conhecidas e a relação carga-deslocamento seja linear. Não sendo linear, não vale a superposição de efeitos.

Para contornar este inconveniente é adotado um processo iterativo, no qual se considera a linearidade da função para cada passo.

Inicia-se o processo adotando constantes de molas de extremidade infinita ou zero, de acordo com a condição de vinculação da barra. É infinita se a vinculação é perfeitamente rígida ou deformável; é zero se não houver vinculação na direção considerada.

Os coeficientes de rigidez das molas são proporcionais à

solicitação dos conectores. Por conseguinte estes coeficientes devem ser ajustadas para cada etapa da iteração, em função do esforço solicitante na extremidade da barra.

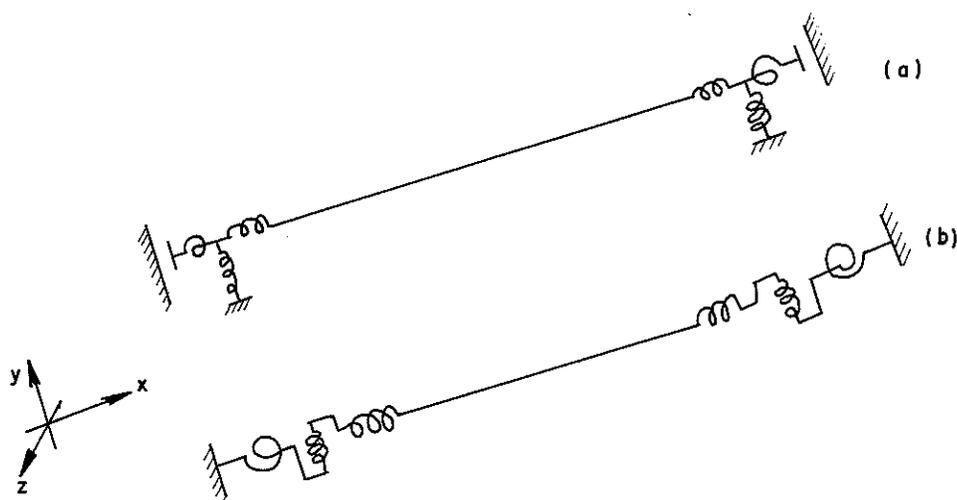


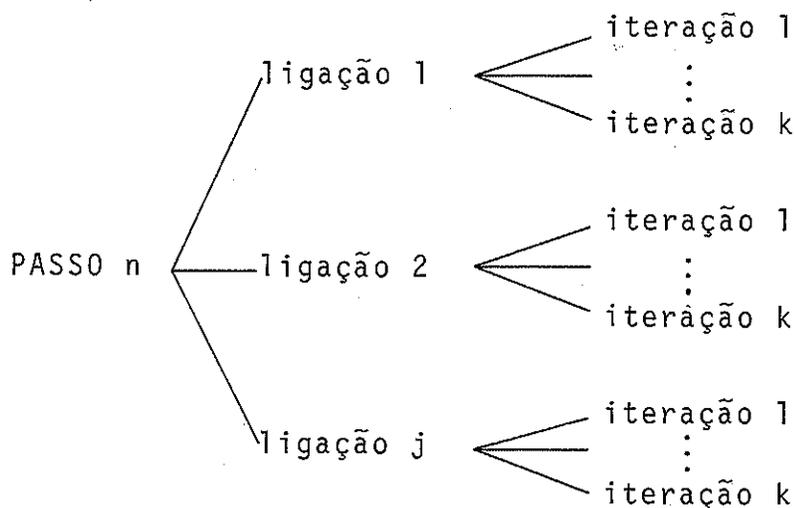
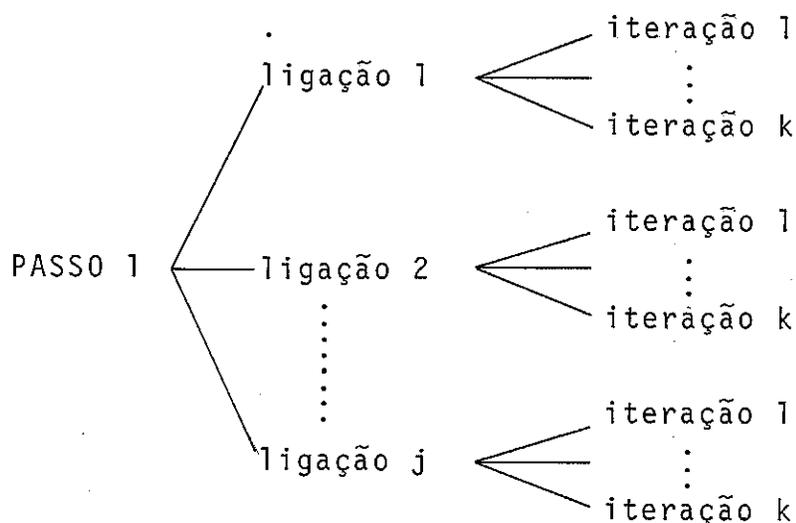
Fig. 4.1.2 - Barra com extremidades deformáveis

É necessário entender que a determinação do coeficiente de rigidez de mola constitui-se num outro processo iterativo, pois os conectores são solicitados por forças desiguais (ver item 4.2).

Existem, portanto dois processos iterativos concomitantes. Um é global (esforços na estrutura) e o outro é local coeficiente de rigidez de cada ligação).

Sem dúvida este é um processo trabalhoso, somente viável com auxílio de recursos computacionais.

Para uma visualização mais ampla do processo é apresentada a esquematização seguinte, onde cada passo corresponde a uma estimativa de esforços em cada extremidade de barra.



O processo é interrompido quando se atingir a precisão desejada entre dois passos consecutivos.

Depois da montagem do programa automatizado para cálculo de esforços em estruturas com estas características, concluiu-se para o caso estudado, que seis é o número suficiente de iterações para uma precisão maior que 95% e três é o número de iterações para as ligações.

No próximo item é descrito o artifício da linearização sucessiva da relação carga-deslocamento, do processo iterativo para cálculo das constantes de rigidez de mola das ligações. Estas constantes receberam o nome específico de módulo de deformação da ligação.

#### 4.2 - Ligações de Comportamento não Linear

A princípio será adotada uma expressão do tipo 4.2.1 para representar o comportamento do conector, individualmente. Nesta expressão,  $P$  é a força de um conector,  $k$  e  $c$  são constantes e  $\Delta$  é o deslocamento relativo entre as peças interligadas.

$$P = k \Delta^c \dots\dots\dots (4.2.1)$$

A equação (4.2.1) é totalmente empírica. Para cada tipo de conector há uma expressão apropriada. Pode, inclusive, ser formada por diversos termos que relacionam  $P$  e  $\Delta$ , porém é sempre uma função exponencial (não linear).

Para uma ligação solicitada por esforços quaisquer, será admitida a validade de distribuição de forças proporcional à rigidez de cada conector e à distância ao centro de gravidade da ligação. É suposta a inexistência de atrito entre as peças interligadas e estas peças são admitidas como perfeitamente rígidas. É usada a teoria dos pequenos deslocamentos.

Considerando a natureza não linear entre carga-deslocamento de cada conector, o problema torna-se mais complexo e foge do sistema convencional de determinação de forças em um grupo de conectores.

A fig. 4.2.1b ilustra a incompatibilidade entre força e deslocamento de cada conector de comportamento não linear caso a ligação seja calculada pelo sistema tradicional encontrado na literatura, utilizado nas ligações metálicas. Geometricamente, neste caso,  $P_i$  e  $\Delta_i$  são proporcionais às respectivas distâncias  $r_i$ . Porém a relação  $P$  e  $\Delta$  não é linear, causando a falta de ajuste entre o cálculo e a realidade, indicada em pontilhado na fig. 4.2.1b.

Para eliminar a incompatibilidade entre o cálculo e a realidade, é adotado o processo de cálculo iterativo. O processo assume inicialmente todos conectores igualmente solicitados. A cada iteração faz-se o ajuste da rigidez de cada conector, até atingir a estabilização entre duas iterações sucessivas.

Será definido para cada conector um módulo de deformação ( $K$ ), pela relação entre  $P$  e  $\Delta$ . Esta é uma forma de linearizar a função carga-deslocamento, tornando assim o cálculo iterativo, linear em cada etapa.

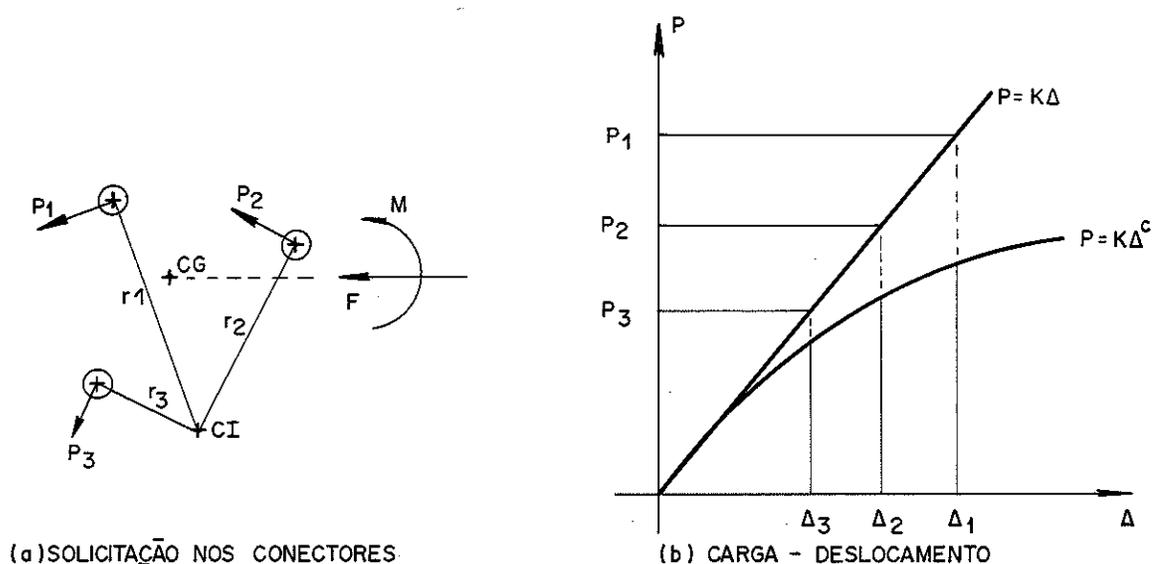


Fig. 4.2.1 - Comparação entre ligação linear e não linear

O valor de  $K$  para cada conector não é único; é definido para cada intensidade de carga aplicada.

A partir de uma carga  $P$  aplicada sobre o conector, determina-se  $\Delta$  através da equação (4.2.1). A relação entre  $P$  e  $\Delta$  fornece  $K$ , ou seja,  $K = P/(P/k)^{1/c}$  ou  $K = k^{1/c} P^{1-1/c}$ .

O centro de gravidade da ligação dos conectores é determinado em função da rigidez de cada conector (proporcional à solicitação), ou seja, em cada etapa do processo existe um centro de gravidade relacionado com a rigidez dos conectores, designado por ponto de rigidez equivalente (RE), determinado pelas equações (4.2.2) - supõe-se que todos os conectores têm a mesma seção transversal.

$$X_{cg} = \frac{(\sum K_i r_{xi})}{\sum K_i}$$

$$Y_{cg} = \frac{(\sum K_i r_{yi})}{\sum K_i} \dots \dots \dots (4.2.2)$$

onde  $X_{cg}$  e  $Y_{cg}$  são as coordenadas do RE nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $r_{xi}$  e  $r_{yi}$  são os raios vetores, distâncias entre  $X_{cg}$  (ou  $Y_{cg}$ ) e o conector  $i$ , nas respectivas direções  $x$  e  $y$ .

Com esta sistemática desenvolve-se o cálculo convencional aplicando-se o procedimento de BRESLER et alii (1970), com referência ao centro instantâneo de rotação (CI). O CI é caracterizado como o ponto em torno do qual ocorrem os deslocamentos (rotação e translação) da peça interligada.

A formulação teórica refere-se à fig. 4.2.2. Três pontos são distinguidos nessa figura em relação ao grupo de conectores: centro geométrico (CG), ponto de rigidez equivalente (RE) e centro instantâneo (CI).

O CG é uma característica geométrica, não se altera com o carregamento, é um ponto fixo.

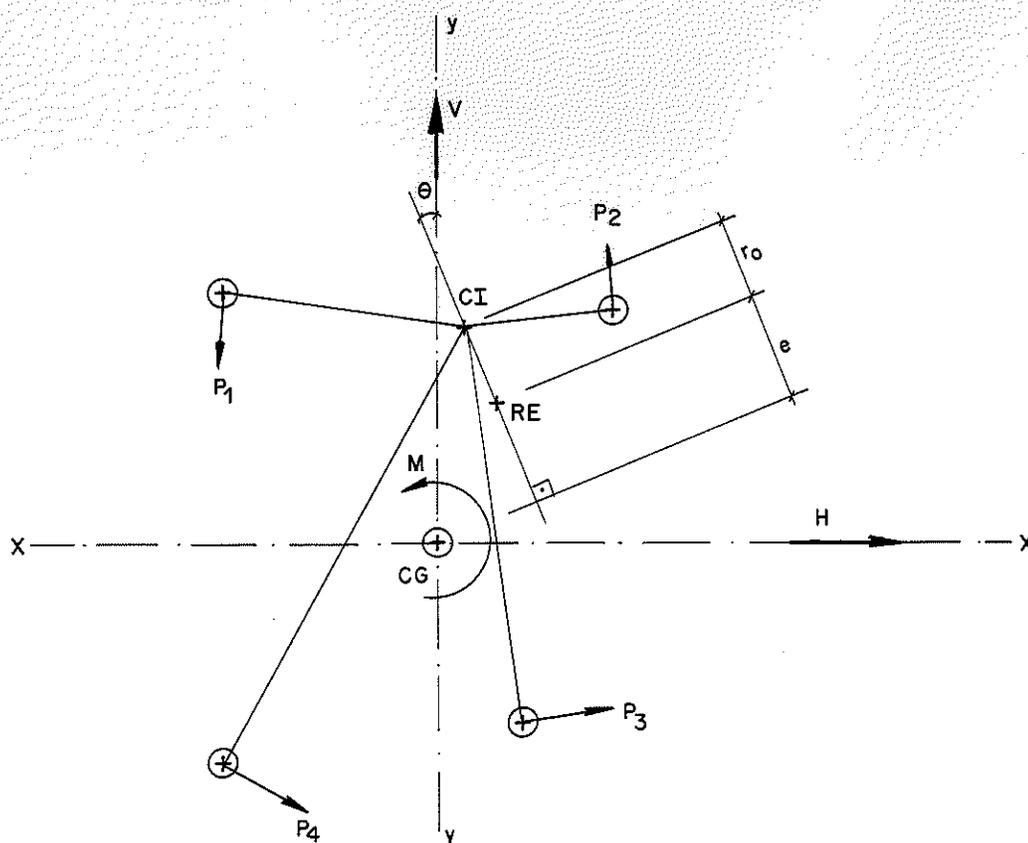


Fig. 4.2.2 - Características geométricas de uma ligação

Na fig. 4.2.2,  $M$ ,  $H$ ,  $V$  e  $R$  são esforços solicitantes, respectivamente, momento, força na direção  $x$ , força na direção  $y$  e resultante de  $H$  e  $V$ .  $P_1, \dots, P_4$  são as forças resultantes em cada conector e atuam perpendicularmente ao seu correspondente raio vetor com origem em CI.

Para determinar o CI, supõe-se um conector imaginário localizado nessa posição. Como esse é o ponto em torno do qual ocorrem os deslocamentos, ele não sofre solicitação. Logo, impõe-se a condição de força nula sobre o ponto, ou seja, a força devido ao momento fletor ( $P'_m$ ) é igual em módulo e de sentido contrário ao da força resultante ( $P'_r$ ).

As forças  $P'_m$  e  $P'_r$  são calculadas com referência ao CG. A situação de equilíbrio é mostrada na fig. 4.2.3.

$M'$  é a soma do momento fletor solicitante ( $M$ ) mais o momento produzido por  $R$  na excentricidade ( $e$ ), portanto,  $M' = M + e R$ .

O conector genérico  $i$ , representado na parte inferior da fig. 4.2.3, é sollicitado pela força  $P'_M$  na direção perpendicular ao raio vetor com origem no RE e  $P'_R$  é a força na direção de  $R$ . Respetivamente, valem:

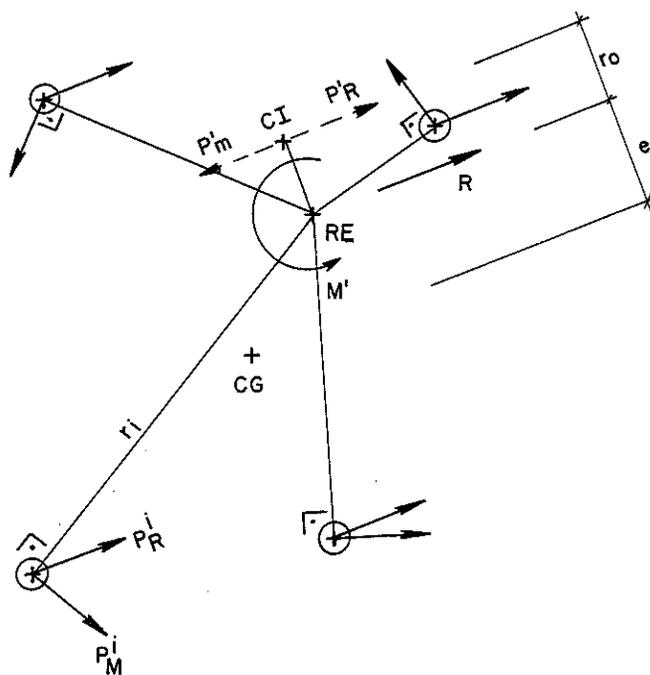


Fig. 4.2.3 - Cálculo do CI

$$P_M^i = \frac{r_i K_i}{\sum K_i r_i^2} M' \dots \dots \dots (4.2.3)$$

$$P_R^i = \frac{K_i}{\sum K_i} R$$

Em particular para o conector imaginário do CI, tem-se:

$$P_M^i = \frac{r_0 K_i}{\sum K_i r_i^2} (M + e R) = P_R^i = \frac{K_i}{\sum K_i} R$$

portanto:

$$r_0 = \frac{\sum K_i r_i^2}{\sum K_i} \cdot \frac{R}{(M + e R)} \dots \dots \dots (4.2.4)$$

Com o valor de  $r_0$  o CI fica perfeitamente definido. Logo, todos os raios vetores ( $r_i'$ ) com centro em CI são calculados, assim como a força resultante em cada conector, perpendicular à direção do seu raio vetor, fig. 4.2.4

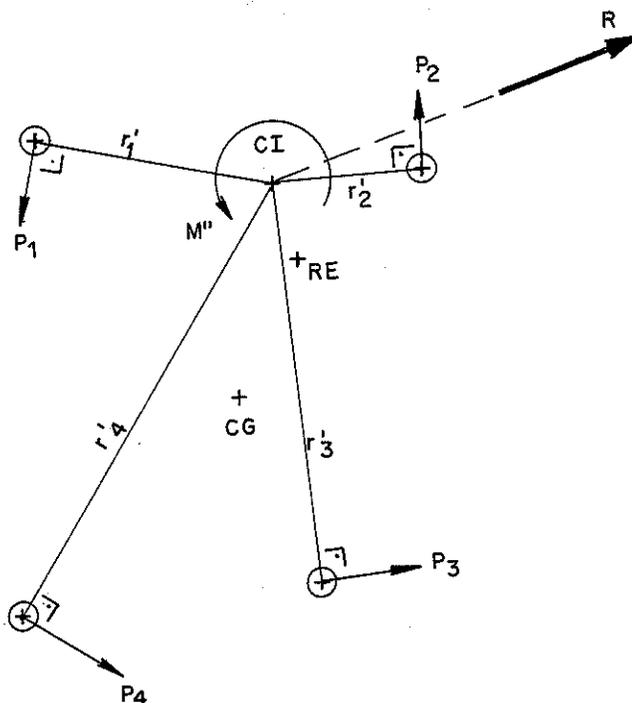


Fig. 4.2.4 - Forças nos conectores relacionadas com o CI

Sendo o CI o ponto em torno do qual acontece a rotação da ligação, tudo se passa como se o momento fletor fosse aplicado em torno desse ponto. O momento fletor vale:

$$M'' = M + (e + r_0) R \dots\dots\dots (4.2.5)$$

A força resultante em cada conector é então calculada por equação idêntica à (4.2.3a) resultando a equação (4.2.6).

$$P_i = \frac{r_i' K_i}{\sum K_j (r_j')^2} \cdot M'' \dots\dots\dots (4.2.6)$$

O cálculo de uma ligação deformável pode ser resumido nas seguintes etapas:

a) conhecer as solicitações na direção x (H), direção y (V) e na direção z (M). H e V são forças (normal e cortante, ou vice versa) e M é momento fletor. O sentido destas solicitações é o indicado na fig. 4.2.2;

b) determinar o vetor resultante (R) entre H e V;

c) determinar o centro geométrico da ligação (CG);

d) determinar o ponto de rigidez equivalente (RE) através da equação (4.2.2);

e) determinar a excentricidade "e" (direção perpendicular a R), e o valor de  $M' = M + e R$ ;

f) determinar  $r_0$  pela equação (4.2.4), sendo  $r_i$  os raios vetores com centro em RE;

g) determinar a posição do CI e os respectivos  $r_i'$  de cada conector. Determinar  $M''$  pela equação (4.2.5);

h) determinar  $P_i$  pela equação (4.2.6);

i) determinar  $\Delta_i = (P_i/k)^{1/c}$ ;

j) determinar o  $K_i'$  do conector  $\left( K_i' = \frac{P_i}{\Delta_i} \right)$  e comparar com o  $K_i$  anterior do conector;

k) se  $K_i' = K_i$ , volte ao passo h, se i é o último conector vá para m;

l) se  $K_i' \neq K_i$  faça  $K_i = (K_i + K_i')/2$  e volte para o passo h, se não for o último conector.

m) se todos os  $K'_i$  são iguais aos  $K_i$ , os  $P_i$  e  $\Delta_i$  determinados são efetivamente atuantes; caso contrário volte ao passo d e recomece o cálculo com os novos  $K_i \rightarrow K'_i$ .

A partir de  $\Delta_i$  e da posição do CI determinam-se o módulo de deformação da ligação na direção x, y e z.

A fig. 4.2.5 ilustra este cálculo considerando a posição deslocada (deformada) do conector.

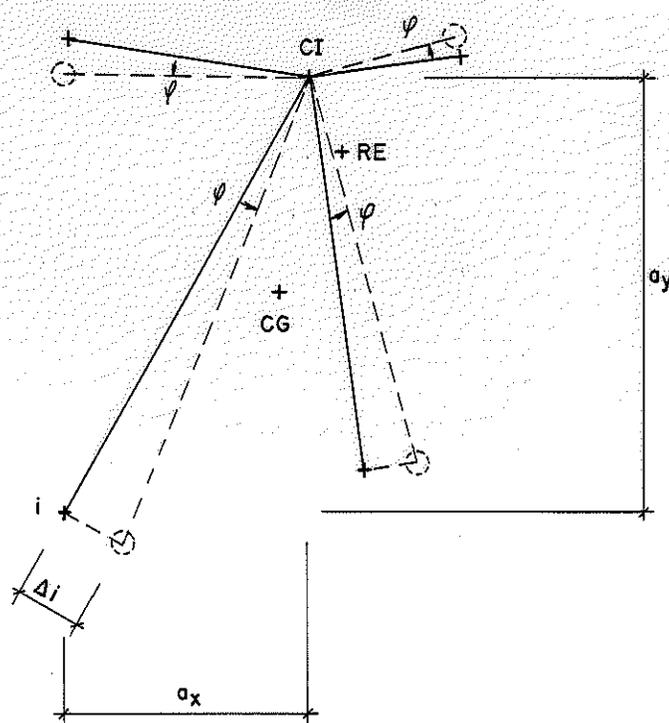


Fig. 4.2.5 - Ligação deformada

Pela teoria dos pequenos deslocamentos pode ser escrito:

$$\varphi a_y = \Delta_{xi}$$

$$\varphi a_x = \Delta_{yi}$$

$$\varphi r_i = \Delta_i \rightarrow \varphi = \Delta_i / r_i \dots\dots\dots (4.2.7)$$

Assim os módulos de deformação nas direções x, y e z são respectivamente:

$$K_x = H/\Delta_{xi}$$

$$K_y = V/\Delta_{yi} \quad \dots\dots\dots (4.2.8)$$

$$K_z = M/\psi$$

Com estes valores, equações (4.2.8), tem-se as constantes de rigidez de molas das vinculações de extremidade das barras.

#### 4.3 - Matriz de Rigidez da Barra Prismática no Sistema de Eixos Local

Foram adotadas como designação do sistema de eixos, as palavras local e global, representando, respectivamente, o sistema de eixos de uma barra e o sistema de eixos da estrutura.

Depois de conhecidas as constantes de rigidez (módulo de deformação) de cada mola hipotética nas extremidades das barras, o problema passa a ser tratado como linear dentro do passo de reiteração de cálculo da estrutura.

O problema toma a forma geral, embora não usual, pelas três deformabilidades das ligações nas direções x, y e z.

Aqui será deduzida a matriz de rigidez da barra de seção transversal constante.

A barra está associada a seis eixos de referência mostrados na fig. 4.3.1. Relacionam-se a este sistema de eixos seis constantes de rigidez de mola, respectivamente  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$ ,  $K_5$  e  $K_6$ .

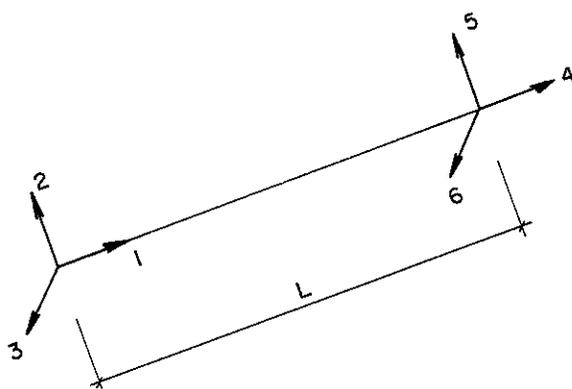


Fig. 4.3.1 - Eixos de referência da barra

Foi suposto que os esforços na direção axial são independentes dos esforços cortantes e dos momentos fletores. Em primeiro lugar serão deduzidos os elementos da matriz de rigidez relacionados com a força axial.

#### 4.3.1 - Rigidez Relacionada com a Direção Axial

Seja a barra da fig. 4.3.2. A rigidez axial é função do material no comprimento  $L$  e das molas de extremidade, de constantes elásticas  $K_1$  e  $K_4$ , respectivamente.

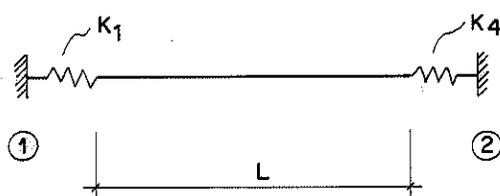


Fig. 4.3 .2 - Barra com extremidades deformáveis axialmente

Impondo um deslocamento axial unitário na extremidade (1), a força necessária para produzir este deslocamento é  $N$ , constante ao longo de toda barra.

O deslocamento total ( $u$ ) é a soma dos deslocamentos de cada trecho da barra: molas e material. Chamando de  $u_m$  o deslocamento devido ao material (madeira),  $u_1$  e  $u_4$  os deslocamentos provenientes das molas, e supondo válida a superposição de efeitos (carga-deslocamento linear para a iteração), tem-se:

$$u = u_m + u_1 + u_4$$

sendo:

$$u_m = \frac{N}{EA} L$$

$$u_1 = \frac{N}{K_1}$$

$$u_4 = \frac{N}{K_4}$$

assim:

$$u = N \left( \frac{L}{EA} + \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_4} \right) = 1$$

portanto:

$$N = \frac{1}{\left( \frac{L}{EA} + \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_4} \right)} \dots \dots \dots (4.3.1)$$

Os elementos da matriz de rigidez relacionados com a força axial são:

$$R_{11} = R_{44} = N$$

$$R_{14} = R_{41} = -N$$

$$R_{12} = R_{13} = R_{15} = R_{16} = 0$$

$$R_{21} = R_{31} = R_{51} = R_{61} = 0$$

Para facilitar a programação computacional e evitar divisões com denominador nulo, será adotado o recurso algébrico de MONFORTON e WU (1963) os quais desenvolveram a matriz de rigidez para barra com vinculação rotacional semi-rígida (deformável).

Manipulando algebricamente a equação (4.3.1) vem:

$$N = \frac{EA}{L + EA \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_4} \right)}$$

ou:

$$N = \frac{EA}{\left( \frac{L + \frac{EA}{K_1}}{L} \right) L + \left( \frac{L + \frac{EA}{K_4}}{L} \right) L - L}$$

Introduzindo a notação por dois coeficientes adimensionais,  $\gamma_1$  e  $\gamma_4$ :

$$\gamma_1 = \frac{L}{L + \frac{EA}{K_1}} \quad \text{e} \quad \gamma_4 = \frac{L}{L + \frac{EA}{K_4}}$$

Resulta a equação (4.3.2).

$$N = \frac{EA}{L} \left( \frac{\gamma_1 \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_4 - \gamma_1 \gamma_4} \right) \dots \dots \dots (4.3.2)$$

### 4.3.2 - Rigidez nas Coordenadas de Flexão

A barra com extremidades deformáveis nas coordenadas de flexão é representada na fig. 4.3.3.

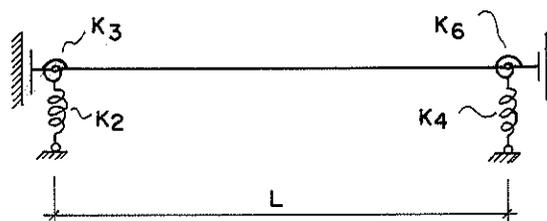


Fig. 4.3.3 - Barra com extremidades deformáveis por flexão

Foi adotado o Processo dos Esforços para dedução dos coeficientes de rigidez da barra. Foram escolhidos como incógnitas os momentos de extremidade, e com isto, resultou o esquema de solução apresentado na fig. 4.3.4, genérico para qualquer carregamento sobre a barra.

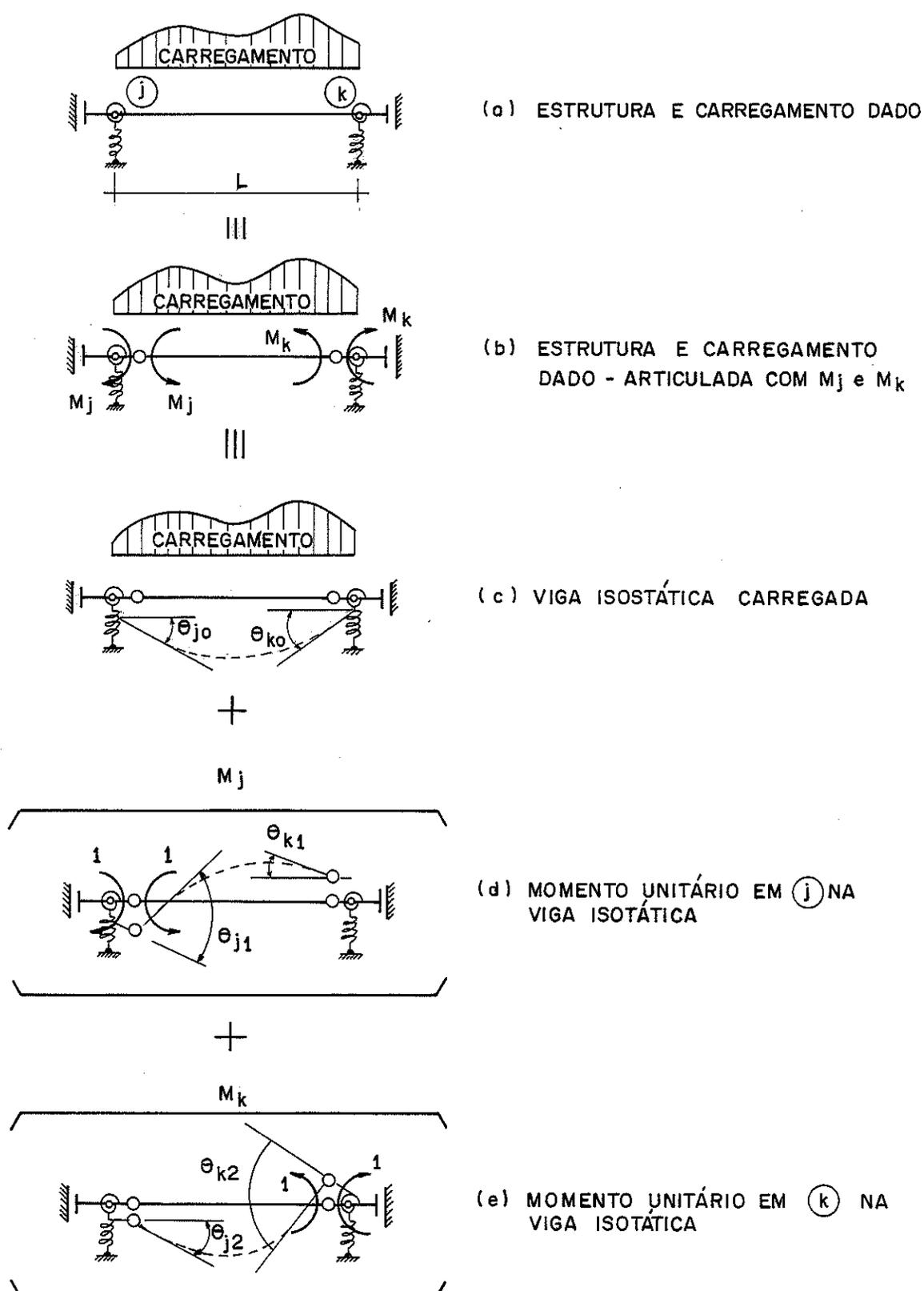


Fig. 4.3.4 - Esquema de solução da viga com extremidades deformáveis

Equações de compatibilidade de deslocamento (giros):

$$\begin{cases} \theta_{10} + M_1 \theta_{11} + M_2 \theta_{12} = 0 \\ \theta_{20} + M_1 \theta_{21} + M_2 \theta_{22} = 0 \end{cases}$$

As soluções do sistema anterior são:

$$M_1 = \frac{\theta_{20} \theta_{12} - \theta_{10} \theta_{22}}{\theta_{11} \theta_{22} - \theta_{12}^2} \dots\dots\dots (4.3.3)$$

$$M_2 = \frac{\theta_{10} \theta_{21} - \theta_{20} \theta_{11}}{\theta_{11} \theta_{22} - \theta_{12}^2}$$

Os giros relativos  $\theta_{11}$ ,  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{21}$  e  $\theta_{22}$  são:

$$\theta_{11} = \frac{L}{3EI} + \frac{1}{K_3} + \frac{1}{L^2} \left( \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_5} \right)$$

$$\theta_{12} = \theta_{21} = \frac{-L}{6EI} + \frac{1}{L^2} \left( \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_5} \right)$$

$$\theta_{22} = \frac{L}{3EI} + \frac{1}{K_6} + \frac{1}{L^2} \left( \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_5} \right)$$

Assim o sistema de equações é:

$$\begin{cases} \left[ \frac{L}{3} + \frac{EI}{K_3} + \frac{EI}{L^2} \left( \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_5} \right) \right] M_1 + \left[ -\frac{L}{6} + \frac{EI}{L^2} \left( \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_5} \right) \right] M_2 = -EI \theta_{10} \\ \left[ -\frac{L}{6} + \frac{EI}{L^2} \left( \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_5} \right) \right] M_1 + \left[ \frac{L}{3} + \frac{EI}{K_6} + \frac{EI}{L^2} \left( \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_5} \right) \right] M_2 = -EI \theta_{20} \end{cases}$$

Os coeficientes deste sistema de equações são os  $\theta_{jk}$  multiplicados por EI. Manipulando algebricamente estes coeficientes, obtêm-se expressões mais adequadas em função dos parâmetros adimensionais  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ ,  $\gamma_5$  e  $\gamma_6$ , conforme se demonstra a seguir.

$$a) EI \theta_{11} = \frac{L}{3} + \frac{EI}{K_3} + \frac{EI}{L^2} \left( \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_5} \right)$$

ou

$$EI \theta_{11} = \left( \frac{L + 3EI/K_3}{L} \right) \frac{L}{3} + \left( \frac{L^3 + EI/K_2}{L^3} \right) L + \left( \frac{L^3 + EI/K_5}{L^3} \right) L - 2L$$

b) Analogamente, obtêm-se  $EI \theta_{22}$

$$EI \theta_{22} = \left( \frac{L + 3EI/K_6}{L} \right) \frac{L}{3} + \left( \frac{L^3 + EI/K_2}{L^3} \right) L + \left( \frac{L^3 + EI/K_5}{L^3} \right) L - 2L$$

$$c) EI \theta_{12} = EI \theta_{21} = -\frac{L}{6} + \frac{EI}{L^2} \left( \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_5} \right)$$

ou

$$EI \theta_{12} = EI \theta_{21} = -\frac{L}{6} + \left( \frac{L^3 + EI/K_2}{L^3} \right) L + \left( \frac{L^3 + EI/K_5}{L^3} \right) L - 2L$$

Definindo-se os parâmetros  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ ,  $\gamma_5$  e  $\gamma_6$  como:

$$\gamma_2 = \frac{L^3}{L^3 + EI/K_2} \quad \gamma_3 = \frac{L}{L + 3EI/K_3}$$

$$\gamma_5 = \frac{L^3}{L^3 + EI/K_5} \quad \gamma_6 = \frac{L}{L + 3EI/K_6}$$

Assim:

$$a) EI \theta_{11} = L \left( \frac{1}{3 \gamma_3} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_5} - 2 \right), \text{ ou:}$$

$$EI \theta_{11} = \frac{L}{3 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_5} \left[ \gamma_2 \gamma_5 + 3 \gamma_3 (\gamma_2 + \gamma_5 - 2 \gamma_2 \gamma_5) \right]$$

$$b) EI \theta_{22} = \frac{L}{3 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_5} \left[ \gamma_2 \gamma_5 + 3 \gamma_6 (\gamma_2 + \gamma_5 - 2 \gamma_2 \gamma_5) \right]$$

$$c) EI \theta_{12} = EI \theta_{21} = \frac{L}{\gamma_2 \gamma_5} \left[ (\gamma_2 + \gamma_5 - 2 \gamma_2 \gamma_5) - \frac{1}{6} \gamma_2 \gamma_5 \right]$$

Para compactar as três últimas expressões, são introduzidos os parâmetros:

$$C_v = \gamma_2 + \gamma_5$$

$$C_f = \gamma_3 + \gamma_6$$

$$C_q = \gamma_2 \gamma_5$$

$$C_m = \gamma_3 \gamma_6$$

Tem-se, portanto:

$$a) EI \theta_{11} = \frac{L}{3\gamma_3 C_q} [C_q + 3\gamma_3 (C_v - 2C_q)]$$

$$b) EI \theta_{22} = \frac{L}{3\gamma_6 C_q} [C_q + 3\gamma_6 (C_v - 2C_q)]$$

$$c) EI \theta_{12} = EI \theta_{21} = \frac{L}{6C_q} [-C_q + 6(C_v - 2C_q)]$$

Sabendo-se que os momentos nas extremidades da barra são fornecidos pela equação (4.3.3), calculam-se os numeradores e denominadores das soluções.

O denominador  $\bar{e}$  :

$$\theta_{11} \theta_{22} - \theta_{12}^2 =$$

$$= \frac{L}{9C_m C_q} [C_q (1 - \frac{1}{4} C_m) + 3(C_v - 2C_q)(C_f + C_m)] (EI)^2$$

O numerador do valor de  $M_1$   $\bar{e}$ :

$$\theta_{20} \theta_{12} - \theta_{10} \theta_{22} =$$

$$= \frac{L}{3\gamma_6 C_q} [3\gamma_6 (C_v - 2C_q) (\theta_{20} - \theta_{10}) - C_q (\frac{1}{2} \gamma_6 \theta_{20} + \theta_{10})] EI$$

O numerador do valor de  $M_2$   $\bar{e}$ :

$$\theta_{10} \theta_{21} - \theta_{20} \theta_{11} =$$

$$= \frac{L}{3\gamma_3 C_q} [3\gamma_3 (C_v - 2C_q) (\theta_{10} - \theta_{20}) - C_q (\frac{1}{2} \gamma_3 \theta_{10} + \theta_{20})] EI$$

Introduzindo uma nova notação para as parcelas repetitivas:

$$\psi_v = C_v - 2C_q$$

$$\psi_m = C_f + C_m$$

As soluções de  $M_1$  e  $M_2$  em função de  $\theta_{10}$  e  $\theta_{20}$  são:

$$M_1 = \frac{6EI \gamma_3}{L} \left[ \frac{6\gamma_6 \psi_v (\theta_{20} - \theta_{10}) - C_q(\gamma_6 \theta_{20} + 2\theta_{10})}{C_q(4 - C_m) + 12 \psi_v \psi_m} \right]$$

$$M_2 = \frac{6EI \gamma_6}{L} \left[ \frac{6\gamma_3 \psi_v (\theta_{10} - \theta_{20}) - C_q(\gamma_3 \theta_{10} + 2\theta_{20})}{C_q(4 - C_m) + 12 \psi_v \psi_m} \right]$$

Fazendo:

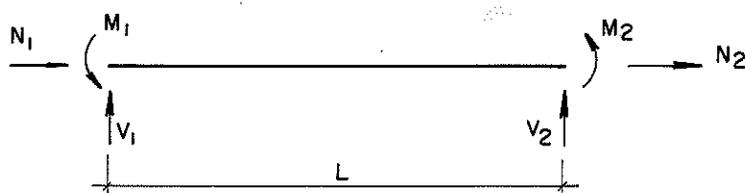
$$\psi = \frac{EI}{[C_q(4 - C_m) + 12 \psi_v \psi_m]}$$

resultam as equações indicadas por 4.3.4:

$$M_1 = \frac{6\psi}{L} \gamma_3 \left[ 6\gamma_6 \psi_v (\theta_{20} - \theta_{10}) - C_q(\gamma_6 \theta_{20} + 2\theta_{10}) \right] \dots \dots \dots (4.3.4)$$

$$M_2 = \frac{6\psi}{L} \gamma_6 \left[ 6\gamma_3 \psi_v (\theta_{10} - \theta_{20}) - C_q(\gamma_3 \theta_{10} + 2\theta_{20}) \right]$$

Encontrados os momentos fletores nas extremidades da barra, as forças cortantes ficam também conhecidas por simples equilíbrio de forças, conforme ilustra a fig. 4.3.5.

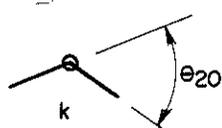
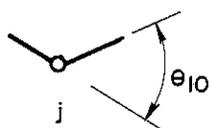


$$V_1 = \frac{M_1 + M_2}{L}$$

$$V_2 = \frac{-(M_1 + M_2)}{L}$$

Fig. 4.3.5 - Equilíbrio da barra

Resta conhecer os valores de  $\theta_{10}$  e  $\theta_{20}$ . Estes serão impostos, um por vez, nas coordenadas 2, 3, 5 e 6, para a determinação dos elementos  $(R_{jk})$  da matriz de rigidez.

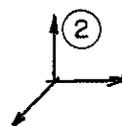
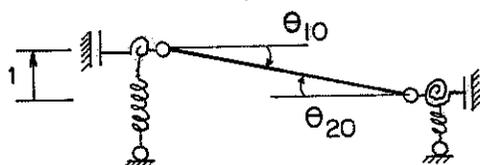


Pela convenção adotada, estes giros serão positivos quando ocorrerem conforme indica a fig. 4.3.6.

Fig. 4.3.6 - Giros relativos nas extremidades das barras

Os giros relativos para os deslocamentos unitários aplicados em cada uma das coordenadas são:

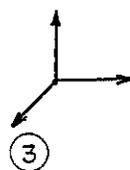
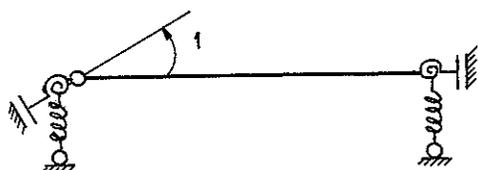
a) deslocamento unitário na coordenada 2



$$\theta_{10} = -1/L$$

$$\theta_{20} = -1/L$$

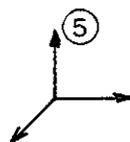
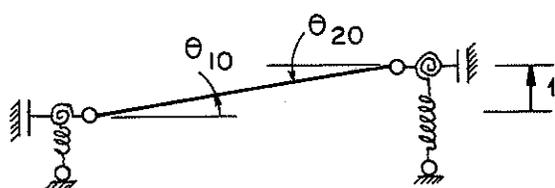
b) giro unitário na coordenada 3



$$\theta_{10} = -1$$

$$\theta_{20} = 0$$

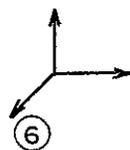
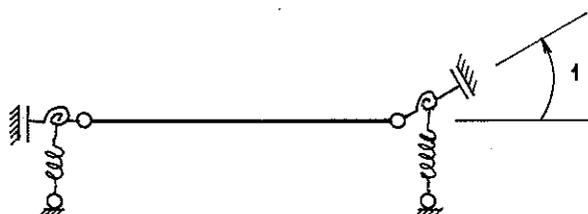
c) deslocamento unitário na coordenada 5



$$\theta_{10} = 1/L$$

$$\theta_{20} = 1/L$$

d) giro unitário na coordenada 6



$$\theta_{10} = 0$$

$$\theta_{20} = -1$$

Em função dos parâmetros definidos e deduzidos anteriormente, encontram-se os elementos de rigidez das coordenadas de flexão.

a) elemento  $R_{2k}$ :

$$\text{Deslocamentos:} \quad \theta_{10} = -\frac{1}{L} \quad \text{e} \quad \theta_{20} = -\frac{1}{L}$$

Substituindo estes valores na equação (4.3.4a) vem:

$$M_1 = R_{23} = \frac{6C_q \psi \gamma_3}{L^2} (\gamma_6 + 2)$$

Substituindo  $\theta_{10}$  e  $\theta_{20}$  na equação (4.3.4b) vem:

$$M_2 = R_{26} = \frac{6C_q \psi \gamma_6}{L^2} (\gamma_3 + 2)$$

Pelo equilíbrio da barra, indicada na fig. 4.3.5, vem:

$$V_1 = R_{22} = \frac{12C_q \psi}{L^3} (C_f + C_m) = \frac{12C_q \psi}{L^3} \psi_m$$

$$V_2 = -V_1 = -R_{22} = R_{25} = \frac{-12C_q \psi}{L^3} \psi_m$$

b) elementos  $R_{3k}$ :

$$\text{Deslocamentos:} \quad \theta_{10} = -1 \quad \text{e} \quad \theta_{20} = 0$$

Analogamente ao caso (a) vem:

$$M_1 = R_{33} = \frac{12\psi \gamma_3}{L} (3\gamma_6 \psi_v + C_q)$$

$$M_2 = R_{36} = \frac{6 \psi C_m}{L} (-6 \psi_v + C_q)$$

$$V_1 = R_{32} = \frac{6 \psi C_q}{L^2} (2 + \gamma_6)$$

$$V_2 = R_{35} = -\frac{6 \psi C_q}{L^2} (2 + \gamma_6)$$

c) elementos  $R_{5k}$

$$\text{Deslocamentos: } \theta_{10} = \frac{1}{L} \quad \text{e} \quad \theta_{20} = \frac{1}{L}$$

Analogamente aos casos anteriores vem:

$$M_1 = R_{53} = - \frac{6C_q \psi \gamma_3}{L^2} (\gamma_6 + 2)$$

$$M_2 = R_{56} = - \frac{6C_q \psi \gamma_6}{L^2} (\gamma_3 + 2)$$

$$V_1 = R_{52} = - \frac{12 C_q \psi}{L^3} \psi_m$$

$$V_2 = R_{55} = \frac{12C_q \psi}{L^3} \psi_m$$

d) elementos  $R_{6k}$

$$\text{Deslocamentos: } \theta_{10} = 0 \quad \text{e} \quad \theta_{20} = -1$$

Analogamente aos casos anteriores vem:

$$M_1 = R_{63} = \frac{6 \psi C_m}{L} (C_q - 6\psi_v)$$

$$M_2 = R_{66} = \frac{12 \psi \gamma_6}{L} (3\gamma_3 \psi_v + C_q)$$

$$V_1 = R_{62} = \frac{6\psi C_q \gamma_6}{L^2} (\gamma_3 + 2)$$

$$V_2 = R_{65} = \frac{6\psi C_q \gamma_6}{L^2} (\gamma_3 + 2)$$

#### 4.3.3 - Matriz de Rigidez Completa da Barra

A matriz de rigidez completa para barra prismática será chamada de  $[R_b]$  e seus elementos são os indicados na Tabela 4.1.

O sistema de referência e os valores das constantes de rigidez das molas ( $K_i$ ) estão indicados na fig. 4.3.7.

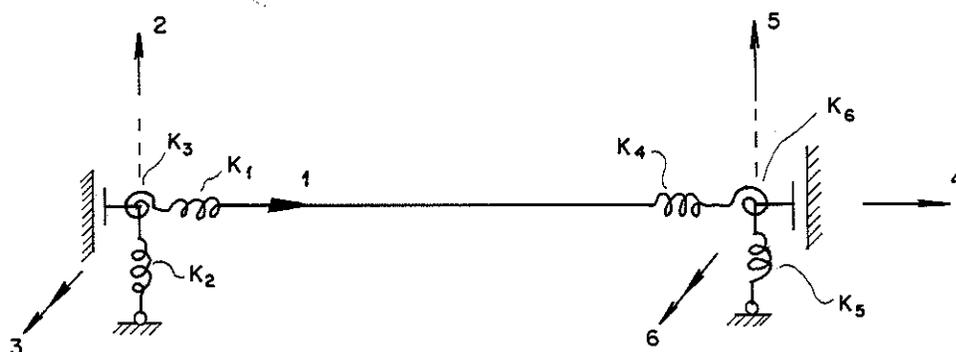


Fig. 4.3.7. - Sistemas de eixos e constantes  $K_i$  das molas

A seguir é apresentado um resumo de todos os parâmetros definidos para caracterizar a matriz de rigidez completa da barra.

$$\gamma_1 = \frac{L}{L + \frac{EI}{K_1}} \quad \gamma_2 = \frac{L^3}{L^3 + \frac{EI}{K_2}} \quad \gamma_3 = \frac{L}{L + \frac{3EI}{K_3}}$$

$$\gamma_4 = \frac{L}{L + \frac{EI}{K_4}} \quad \gamma_5 = \frac{L}{L^3 + \frac{EI}{K_5}} \quad \gamma_6 = \frac{L}{L + \frac{3EI}{K_6}}$$

$$\psi_n = \frac{\gamma_1 \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_4 - \gamma_1 \gamma_4}$$

$$\psi_v = \gamma_2 + \gamma_5 - 2\gamma_2 \gamma_5$$

$$\psi_m = \gamma_3 + \gamma_6 + \gamma_3 \gamma_6$$

$$C_q = \gamma_2 \gamma_5$$

$$C_m = \gamma_3 \gamma_6$$

$$\psi = \frac{EI}{C_q(4 - C_m) + 12\psi_v \psi_m}$$

TABELA 4.1 - Matriz de Rigidez para Barra Prismática com Extremidades Deformáveis para o Sistema de Eixos da Barra (local)

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} \psi_n & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \psi_n & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12}{L} \psi C_q \psi_m & \frac{6}{L^2} (\gamma_6 + 2) \psi C_q \gamma_3 & 0 & -\frac{12}{L} \psi C_q \psi_m & \frac{6}{L^2} (\gamma_3 + 2) \psi C_q \gamma_6 \\
 0 & \frac{6}{L^2} (\gamma_6 + 2) \psi C_q \gamma_3 & \frac{12}{L} \psi \gamma_3 (3\gamma_6 \psi_v + C_q) & 0 & -\frac{6}{L^2} (\gamma_6 + 2) \psi C_q \gamma_3 & \frac{6}{L} \psi C_m (C_q - 6 \psi_v) \\
 -\frac{EA}{L} \psi_n & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \psi_n & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12}{L} \psi C_q \psi_m & -\frac{6}{L^2} (\gamma_6 + 2) \psi C_q \gamma_3 & 0 & \frac{12}{L} \psi C_q \psi_m & -\frac{6}{L^2} (\gamma_3 + 2) \psi C_q \gamma_6 \\
 0 & \frac{6}{L^2} (\gamma_3 + 2) \psi C_q \gamma_6 & \frac{6}{L} \psi C_m (C_q - 6 \psi_v) & 0 & -\frac{6}{L^2} (\gamma_3 + 2) \psi C_q \gamma_6 & \frac{12}{L} \psi \gamma_6 (3\gamma_3 \psi_v + C_q)
 \end{bmatrix}$$

#### 4.4 - Matriz de Rigidez da Barra Prismática no Sistema de Eixos Global.

Para facilitar a representação das matrizes, será adotada a notação relativa aos elementos da matriz  $[R_b]$  seguinte:

$$N = \frac{EA}{L} \psi_n$$

$$V = \frac{12}{L^3} \psi C_q \psi_m$$

$$V_m = \frac{6}{L^2} (\gamma_6 + 2) \psi C_q \gamma_3$$

$$M_v = \frac{6}{L} (\gamma_3 + 2) \psi C_q \gamma_6$$

$$M_m = \frac{6}{L} \psi C_m (C_q - 6 \psi_v)$$

$$M_1 = \frac{12}{L} \psi \gamma_3 (3\gamma_6 \psi_v + C_q)$$

$$M_2 = \frac{12}{L} \psi \gamma_6 (3\gamma_3 \psi_v + C_q)$$

Com esta notação a matriz  $[R_b]$  fica:

$$[R_b] = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 & -N & 0 & 0 \\ 0 & V & V_m & 0 & -V & M_v \\ 0 & V_m & M_1 & 0 & -V_m & M_m \\ -N & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & -V & -V_m & 0 & V & -M_v \\ 0 & M_v & M_m & 0 & -M_v & M_2 \end{bmatrix}$$

Para transformar a matriz de rigidez da barra com eixo de referência na barra  $([R_b])$ , para a matriz de rigidez da barra com eixo de referência da estrutura  $[R_e]$ , será aplicada a equação:

$$[R_e] = [T]^t [R_b] [T] \dots\dots\dots (4.4.1)$$

sendo:

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & 0 \\ 0 & [t] \end{bmatrix}$$

e

$$[t] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação:  $\alpha$  é o ângulo formado entre o sistema de eixos da estrutura e o sistema de eixos da barra.

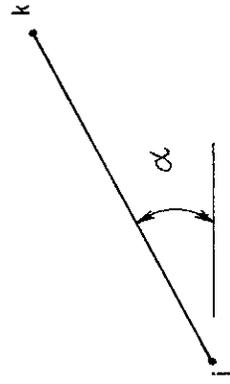
Resolvendo a equação (4.4.1) resulta a matriz de rigidez  $[R_e]$  mostrada a seguir na Tabela 4.2.

TABELA 4.2 - Matriz de Rigidez da Barra para Sistema de Eixo da Estrutura (Global)

$$[R_e] = \begin{bmatrix} N \cos^2 + V \operatorname{sen}^2 & (N - V) \cos \operatorname{sen} & -V_m \operatorname{sen} & -(N \cos^2 + \operatorname{sen}^2) & -(N - V) \operatorname{sen} \cos & -M_V \operatorname{sen} \\ (N - V) \operatorname{sen} \cos & N \operatorname{sen}^2 + V \cos^2 & -V_m \cos & -(N - V) \operatorname{sen} \cos & -(N \operatorname{sen}^2 + V \cos^2) & M_V \cos \\ -V_m \operatorname{sen} & V_m \cos & M_1 & V_m \operatorname{sen} & -V_m \cos & M_m \\ -(N \cos^2 + V \operatorname{sen}^2) & -(N - V) \operatorname{sen} \cos & V_m \operatorname{sen} & N \cos^2 + V \operatorname{sen}^2 & (N - V) \operatorname{sen} \cos & M_V \operatorname{sen} \\ -(N - V) \operatorname{sen} \cos & -(N \operatorname{sen}^2 + V \cos^2) & -V_m \cos & (N - V) \operatorname{sen} \cos & N \operatorname{sen}^2 + V \cos^2 & -M_V \cos \\ -M_V \operatorname{sen} & M_V \cos & M_m & M_V \operatorname{sen} & -M_V \cos & M_2 \end{bmatrix}$$

OBS:  $\cos = \cos \alpha$

$\operatorname{sen} = \operatorname{sen} \alpha$



#### 4.5 Ações de Extremidade de Barra

O cálculo pelo processo dos deslocamentos é feito para cargas concentradas sobre os n $\bar{o}$ s, ou seja, todas as cargas são consideradas como atuantes sobre as coordenadas dos n $\bar{o}$ s no sistema de coordenadas global.

Assim sendo, toda carga aplicada sobre a estrutura é transformada em carga concentrada sobre os n $\bar{o}$ s. Torna-se necessário distinguir dois tipos de cargas, as cargas aplicadas diretamente sobre os n $\bar{o}$ s e as cargas aplicadas sobre a barra.

As cargas aplicadas sobre os n $\bar{o}$ s são simplesmente decompostas em parcelas nas direções dos eixos no sistema global. As cargas aplicadas ao longo da barra serão transformadas em cargas nodais, por suas resultantes nas direções do eixo no sistema de eixos global, considerando a barra isolada com n $\bar{o}$ s de extremidades bloqueados. Entende-se por n $\bar{o}$  bloqueado como um ponto fixo de cada extremidade da barra em relação às demais que convergem para o n $\bar{o}$ , e por isto, a vinculação entre a barra e o n $\bar{o}$  pode ser deformável ou não.

É oportuno lembrar que n $\bar{o}$  é todo ponto de convergência de duas ou mais barras. Numa barra reta convencional podem ser adotados diversos n $\bar{o}$ s, de acordo com a necessidade, subdividindo-a em diversas barras.

Os deslocamentos são calculados para cada n $\bar{o}$  supondo as cargas concentradas sobre as respectivas coordenadas dos n $\bar{o}$ s. Estas cargas são, então, a soma das cargas aplicadas sobre os n $\bar{o}$ s e das cargas aplicadas sobre a barra, transferidas para os n $\bar{o}$ s, designadas pelo vetor  $\{F_{n,e}\}$ , onde F indica ação e os índices "n,e" indicam, respectivamente, n $\bar{o}$ s e estrutura (sistema global).

Com carregamento indicado pelo vetor  $\{F_{n,e}\}$  calculam-se os deslocamentos pela expressão  $\{F_{n,e}\} = [R] \{D\}$ , onde [R] é a matriz de rigidez completa da estrutura e {D} é o vetor dos deslocamentos de n $\bar{o}$ s.

Pelos deslocamentos de n $\bar{o}$ s determinam-se as ações nas extremidades de cada barra. Estas ações serão representadas pelo vetor  $\{F_n\}$  indicando a ação nas extremidades da barra devido ao carregamento nodal.

Quando existe carga aplicada ao longo da barra o esforço final na extremidade da barra {F} é a soma destas ações  $\{F_n\}$  mais as ações de extremidade da barra com n $\bar{o}$ s bloqueados, designada pe-

lo vetor  $\{F_b\}$ . O esforço final nas extremidades de barra é representado matricialmente pela equação (4.5.1).

$$\{F\} = \{F_n\} + \{F_b\} \dots\dots\dots (4.5.1)$$

Os vetores das ações de extremidade  $\{F_n\}$  e  $\{F_b\}$  são determinados conforme se descreve nos itens seguintes.

#### 4.5.1 - Das Cargas sobre os Nôs

As ações de extremidade devido às cargas nodais são determinadas pela equação (4.5.2) ( $\{D\}$  é o vetor dos deslocamentos para as coordenadas dos nós da barra). São dispensados maiores comentários sobre esta equação por ser tratada com detalhes na literatura especializada.

$$\{F_n\} = [R_b] [T] \{D\} \dots\dots\dots (4.5.2)$$

A equação (4.5.2) pode ser representada algebricamente para estruturas com nós deformáveis. Resultam seis equações (4.5.3), uma para cada coordenada de extremidade de barra (os índices subscritos de 1 a 6 para  $F_n$  e  $D$ , indicam os números da coordenada da barra ilustrados na fig. 4.3.7 - pag.49.

$$\begin{aligned} (F_n)_1 &= N [(D_1 - D_4) \cos + (D_2 - D_5) \text{sen}] \\ (F_n)_2 &= V [-(D_1 - D_4) \text{sen} + (D_2 - D_5) \cos] + V_m D_3 + M_V D_6 \\ (F_n)_3 &= V_m [-(D_1 - D_4) \text{sen} + (D_2 - D_5) \cos] + M_1 D_3 + M_m D_6 \\ &\dots\dots\dots (4.5.3) \end{aligned}$$

$$(F_n)_4 = - N [(D_1 - D_4) \cos + (D_2 - D_5) \text{sen}]$$

$$(F_n)_5 = V [(D_1 - D_4) \text{sen} - (D_2 - D_5) \cos] - V_m D_3 - M_V D_6$$

$$(F_n)_6 = M_V [-(D_1 - D_4) \text{sen} + (D_2 - D_5) \cos] + M_m D_3 + M_2 D_6$$

#### 4.5.2 - Das Cargas sobre a Barra

São as ações produzidas nas extremidades da barra pelas cargas aplicadas ao longo da barra. São determinadas através de procedimento idêntico ao desenvolvido para a matriz de rigidez da barra, sendo inclusive utilizada a equação (4.3.4) pag. 45.

As ações dependem do tipo de carregamento, e esta dependência afeta somente os valores de  $\theta_{i0}$  na equação (4.3.4). Por conseguinte, o objetivo é determinar os valores de  $\theta_{i0}$  (giros de extremidade para viga isostática com apoios deformáveis na direção perpendicular ao eixo, fig. 4.5.1).

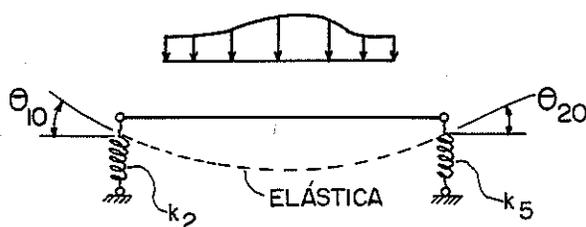


Fig. 4.5.1 - Giros de extremidade  $\theta_{10}$  e  $\theta_{20}$

Serão deduzidos analiticamente os valores de  $\theta_{i0}$  para os carregamentos mais usuais: carga concentrada, uniformemente distribuída, linearmente distribuída e momento concentrado.

A seguir é feita a dedução das expressões para determinação das ações de extremidade para carga concentrada. Os outros casos de carregamentos são análogos, e por isto, somente são apresentadas as expressões finais, conforme mostra a tabela 4.3, pag. 60.

Para este primeiro caso será mostrado o esquema de solução, ilustrado na fig. 4.5.2.

Da fig. 4.5.2 vem:

$$\theta_{10} = \theta'_{10} - \theta''_{10} \quad \text{e} \quad \theta_{20} = \theta'_{20} + \theta''_{20}$$

Aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais e considerando que os giros nas extremidades são positivos quando ocorrem no sentido anti-horário, tem-se:

$$\theta'_{10} = - (L + b) \frac{ab}{6EI L} F$$

$$\theta'_{20} = (L + a) \frac{ab}{6EI L} F$$

Os valores de  $\theta''_{10}$  e  $\theta''_{20}$  são iguais e valem:

$$\theta''_{10} = \theta''_{20} = \frac{\Delta_2 - \Delta_5}{L}$$

Se as molas de extremidade se comportam de acordo com a função linear  $F = K \Delta$ , então:

$$\Delta_2 = \frac{F_2}{K_2} = \frac{b}{L K_2} F$$

$$\Delta_5 = \frac{F_5}{K_5} = \frac{a}{L K_5} F$$

portanto:

$$\theta''_{10} = \theta''_{20} = \left( \frac{b}{K_2} - \frac{a}{K_5} \right) \frac{F}{L^2}$$

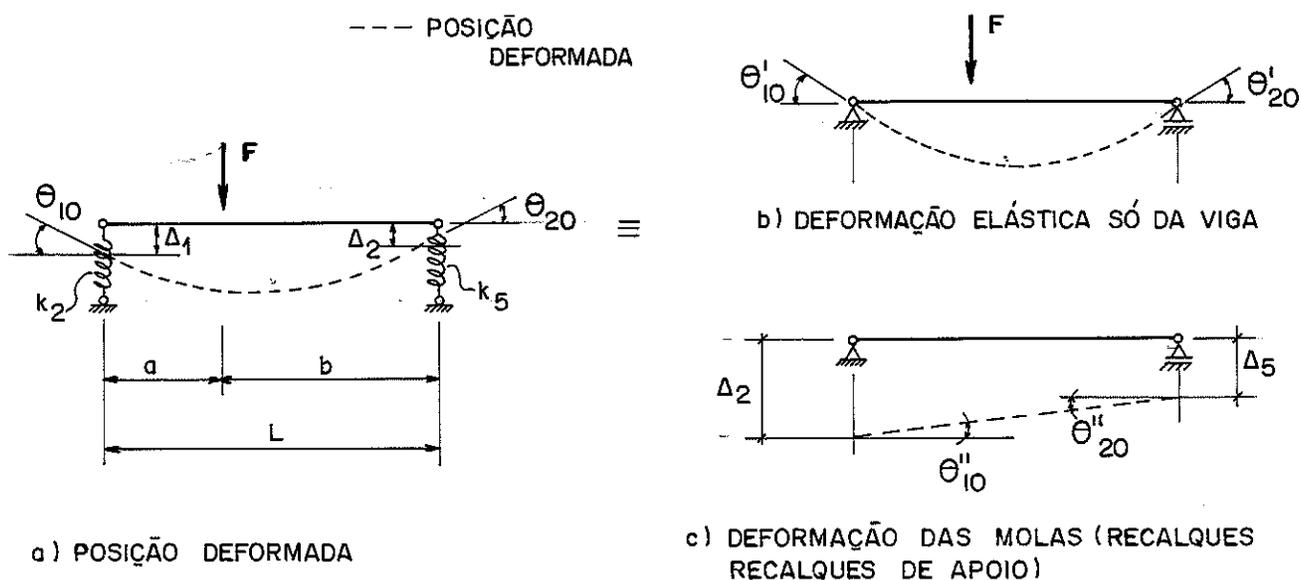


Fig. 4.5.2 - Giros de extremidade

Substituindo-se os valores de  $\theta_{10}$  e  $\theta_{20}$  na equação 4.3.4 resultam os momentos de extremidade, e conseqüentemente os valores das forças cortantes.

São haverá ação de extremidade nas coordenadas 1 e 4 (direção paralela ao eixo) se houver carga sobre a barra nessa direção. Considerando essas ações independentes das demais e com o auxílio da fig. 4.5.3 são deduzidas as ações de extremidades nessas direções.

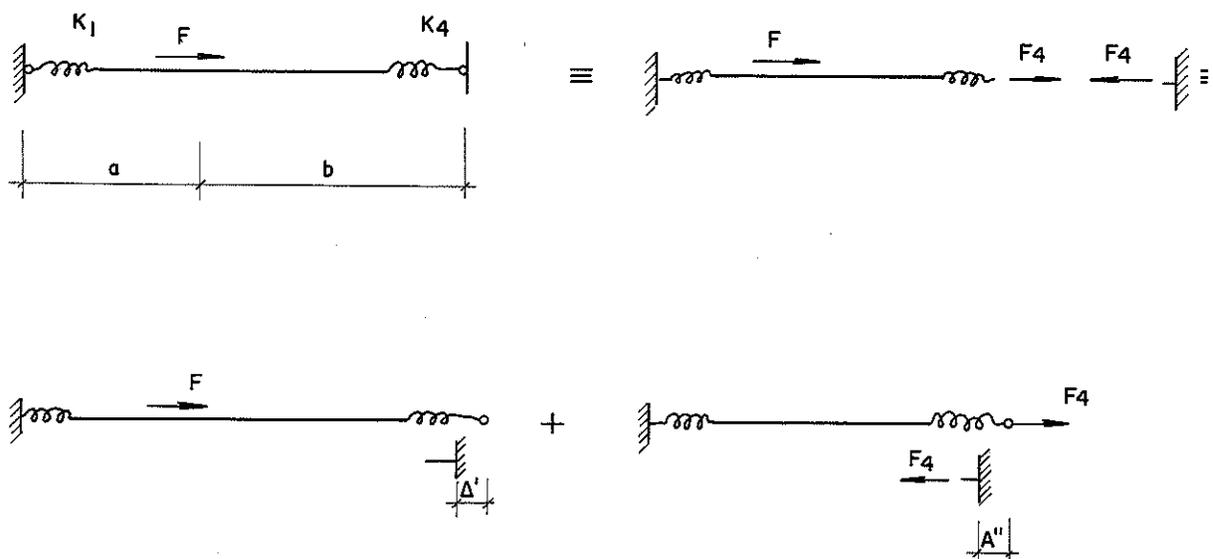


Fig. 4.5.3 - Ações nas extremidades 1 e 4

Compatibilizando o deslocamento relativo na extremidade 4, ou seja, igualando-o a zero, vem:

$$\Delta'' + \Delta' = 0$$

ou

$$\Delta'' = -\Delta'$$

Os valores de  $\Delta'$  e  $\Delta''$  são, respectivamente:

$$\Delta' = \left( \frac{a}{EA} + \frac{1}{K_1} \right) F$$

$$\Delta'' = \left( \frac{L}{EA} + \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_4} \right) F_4$$

Igualando as duas parcelas tem-se:

$$F_4 = - \frac{\left(a + \frac{EA}{K_1}\right)}{L + \frac{EA}{K_1} + \frac{EA}{K_4}} F \dots\dots\dots (4.5.4)$$

Ou, em função dos parâmetros  $\gamma_1$  e  $\gamma_4$ :

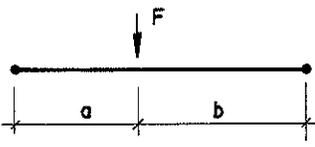
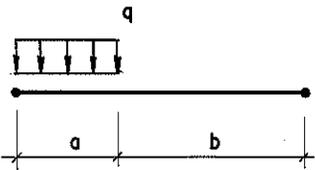
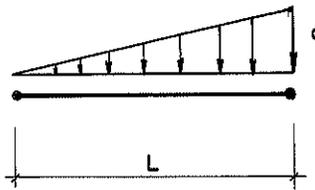
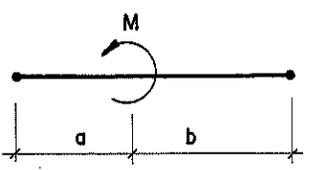
$$F_4 = \frac{\left(a + \frac{EA}{K_1}\right)}{L} \cdot \frac{\gamma_1 \gamma_4}{\gamma_1 \gamma_4 - \gamma_1 - \gamma_4} F$$

Tendo-se  $F_4$  obtêm-se  $F_1$  (positivo segundo o sistema de coordenadas adotado) através da equação:

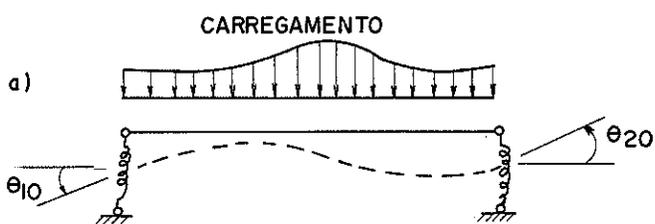
$$F_1 = - (F + F_4) \dots\dots\dots (4.5.5)$$

A tabela 4.3 reúne as expressões de  $\theta_{10}$  e  $\theta_{20}$  para os casos de carregamentos indicados. Esta tabela está associada aos parâmetros definidos para a tabela 4.1 (pag. 50). Os valores de  $\theta_{10}$  e  $\theta_{20}$  devem ser substituídos na equação (4.3.4) para determinar os momentos fletores nas extremidades da barra. As forças cortantes são obtidas por simples equilíbrio de forças (ver fig. 4.3.6) a seguir.

TABELA 4.3 - Valores  $\theta_{10}$  e  $\theta_{20}$ 

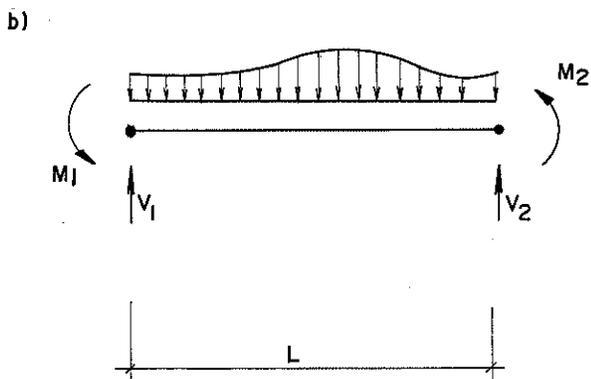
TIPOS DE CARGA	VALORES DE $\theta_{10}$ e $\theta_{20}$
<p>(A)</p> 	$\theta_{10} = \frac{-F}{L^2} \left[ (L + b) \frac{abL}{6EI} - \frac{a}{K_5} + \frac{b}{K_2} \right]$ $\theta_{20} = \frac{F}{L^2} \left[ (L + a) \frac{abL}{6EI} + \frac{a}{K_5} - \frac{b}{K_2} \right]$
<p>(B)</p> 	$\theta_{10} = \frac{q a^2}{2 L^2} \left[ \frac{-L}{12EI} (2L - a)^2 + \frac{2L - a}{a K_2} - \frac{1}{K_5} \right]$ $\theta_{20} = \frac{q a^2}{2 L^2} \left[ \frac{L}{12EI} (2L^2 - a^2) + \frac{2L - a}{a K_2} - \frac{1}{K_5} \right]$
<p>(C)</p> 	$\theta_{10} = -\frac{q \ell}{6} \left( \frac{7 \ell^2}{60EI} + \frac{1}{K_2} - \frac{2}{K_5} \right)$ $\theta_{20} = \frac{q \ell}{6} \left( \frac{6 \ell^2}{45EI} - \frac{1}{K_2} + \frac{2}{K_5} \right)$
<p>(D)</p> 	$\theta_{10} = \frac{M}{L^2} \left[ \frac{L}{6EI} (3b^2 - L^2) + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_5} \right]$ $\theta_{20} = \frac{M}{L^2} \left[ \frac{L}{6EI} (3a^2 - L^2) + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_5} \right]$

NOTAS:



$$V_1 = \frac{M_1 + M_2}{L} + R_1$$

$$V_2 = \frac{-(M_1 + M_2)}{L} + R_2$$



Obs: a)  $R_1$  e  $R_2$  são as reações de apoio devido ao carregamento.

b) Os sinais das cargas para os casos A, B e C estão com sinais contrários em relação ao sistema de eixos adotado.

A tabela 4.3 é adequada para a notação generalizada dos valores de  $\theta_{i0}$ , porém sua adaptação em programas computacionais não é eficiente. Otimiza-se a programação com a subdivisão de  $\theta_{i0}$  em duas parcelas, conforme já descrito:  $\theta_{i0}' + \theta_{i0}''$ . Nas equações da referida tabela,  $\theta_{i0}'$  é a parte não dependente dos módulos de deformação ( $K_2$  e  $K_5$ ) e  $\theta_{i0}''$  é a parte dependente. Com isto são economizados tempo de processamento e memória, pois, para cada barra carregada, são armazenados somente os valores de  $\theta_{i0}'$ ,  $\theta_{20}'$  e as reações verticais. Determinam-se  $\theta_{i0}''$  e  $\theta_{20}''$  a partir das reações verticais, pelas relações matemáticas obtidas com o auxílio da fig. 4.5.4.

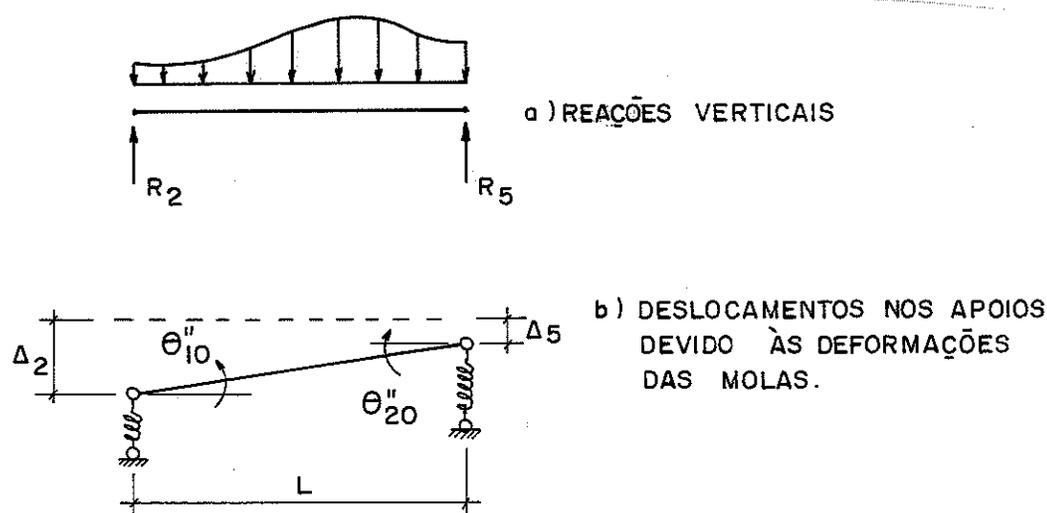


Fig. 4.5.4 - Barra deslocada

Assim pode ser escrito:

$$\Delta_2 = \frac{R_2}{K_2} \quad \text{e} \quad \Delta_5 = \frac{R_5}{K_5}$$

$$\theta_{10}'' = \theta_{20}'' = \frac{\Delta_2 - \Delta_5}{L} = \frac{1}{L} \left[ \frac{R_2}{K_2} - \frac{R_5}{K_5} \right]$$

É interessante notar que o caso (c) da tabela 4.3, pode ser aplicado, tanto para carga uniformemente distribuída ao longo de toda barra, como para carga distribuída em um trecho central distante dos dois apoios, conforme mostra a fig. 4.5.5.

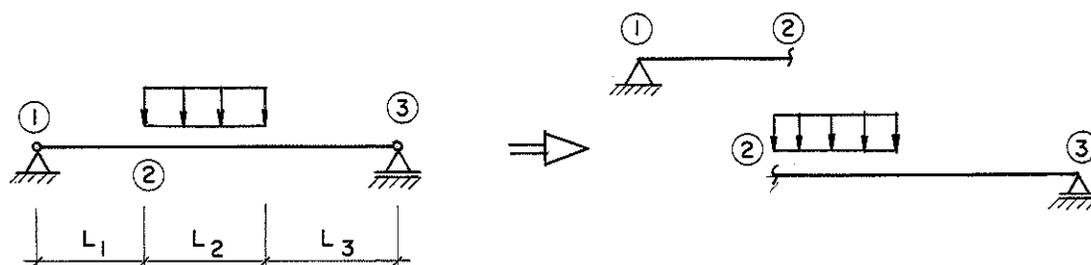


Fig. 4.5.5 - Subdivisão em duas barras

A solução para resolver o caso anterior é a subdivisão da barra 1, 2 e 3 em duas outras barras, a 1 - 2 e a 2 - 3. A barra 1 - 2 não possui carregamento e a barra 2 - 3 tem um carregamento conhecido (tabelado). Computacionalmente este procedimento é inconveniente em relação ao uso de memória, pois, obviamente, utiliza-se maior quantidade de memória, pelo aumento do número de barras e nós da estrutura.

## 5 - CÁLCULO AUTOMATIZADO DE ESTRUTURA COM LIGAÇÕES DEFORMÁVEIS

### 5.1 - Generalidades

Para a realização de cálculo automatizado de estruturas com ligações deformáveis não existe programação disponível. Foi elaborado um programa especial para o cálculo automatizado, através de um microcomputador da marca Hewlett Packard, modelo 9825 T, com 61670 bytes de memória RAM, em linguagem HPL.

O programa é a transcrição dos fundamentos teóricos e do desenvolvimento analítico do capítulo 4.

Como já foi dito, utilizou-se o processo dos deslocamentos (ou da rigidez).

Serão omitidos aqui os detalhes de montagem do programa por se tratar de técnica considerada de conhecimento geral.

Para otimização de memória e precisão, e para redução do tempo de processamento foram utilizadas as eficazes sugestões de programação indicadas por HEHL (1974).

Otimizou-se o uso de memória através do armazenamento em banda, da matriz de rigidez da estrutura. Também foram eliminadas as linhas e colunas desta matriz correspondentes às coordenadas de apoios fixos. A matriz de rigidez da estrutura é processada com as coordenadas reordenadas para tornar possível a compactação citada.

Os vetores de números inteiros foram armazenados em variáveis alfabéticas. Este artifício, no equipamento usado, promove uma redução de memória equivalente a  $6(n-1)$  bytes, sendo  $n$  o número de elementos armazenados em vetor.

Para resolver o sistema de equações e determinar os deslocamentos optou-se pelo método de Cholesky, por ser de rápida solução, sem exigir a criação de vetores adicionais quando a estrutura tem mais de um carregamento.

O Anexo 01 contém a listagem do programa na linguagem HPL. Maiores detalhes sobre o programa podem ser vistos no Manual do Usuário, preparado pelo Autor para utilização no LaMEM, no qual se encontra o microcomputador HP 9825 T.

A seguir, serão entretanto, comentadas algumas características do programa, importantes para entender a sua utilização.

## 5.2 - Sistemas de Eixos de Referência

Basicamente existem três sistemas de eixos de referência: o global, o local e o das ligações.

O sistema global é o da estrutura, ao qual são associadas as características geométricas, de carregamento de nós e de apoios da estrutura.

O sistema local é específico para cada barra, ao qual são associados os dados de cada barra: nós de incidência, características geométricas da seção, tipos de vinculação e esforços de extremidade. Este sistema é definido para cada extremidade de barra (ver fig. 4.3.7).

O sistema de referência das ligações destina-se à caracterização da posição dos conectores. Tem origem no centro geométrico do nó e seus eixos devem ser paralelos aos eixos do sistema global. Quando um nó é o encontro de duas ou mais barras, o programa transforma as coordenadas dos conectores no sistema global  $(x, y)$  em coordenadas no sistema local das ligações  $(x', y')$ , pelas equações (5.2.1).

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \dots \dots \dots (5.2.1)$$

Quando em um nó as barras não convergirem para um mesmo ponto, fig. 5.2.1, deve-se considerar dois nós independentes.

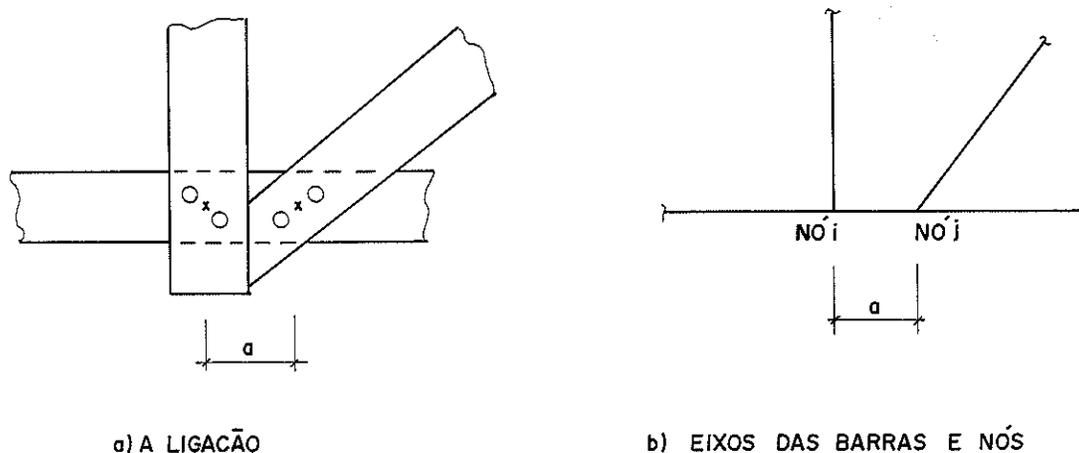


Fig. 5.2.1 - Ligações deslocadas

Caso ocorra uma ligação como a da fig. 5.2.2, considera-se um único nó e diversos tipos de ligações para cada extremidade de barra. Porém, este tipo de ligação não foi analisado experimentalmente; apesar das barras convergirem para o mesmo ponto (nó) efeitos adicionais de distribuição de tensões na chapa de ligação, devem afetar as características da ligação, principalmente quando existem momentos fletores nas extremidades das barras.

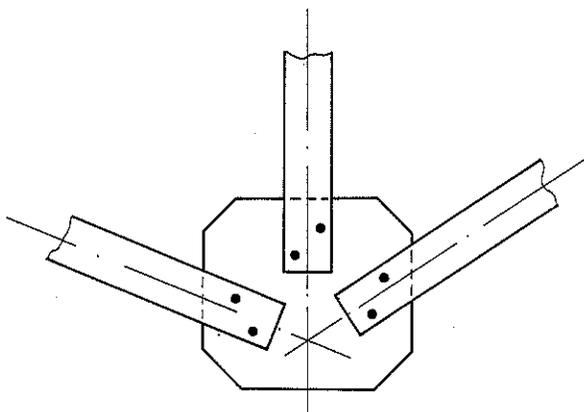


Fig. 5.2.2 - Barras com vinculações de extremidade diferentes

Situação idêntica à anterior ocorre nas emendas de barras, fig. 5.2.3. Estando alinhados os eixos das barras, é mais conveniente adotar uma barra intermediária e definir dois nós, conforme ilustra a fig. 5.2.3.

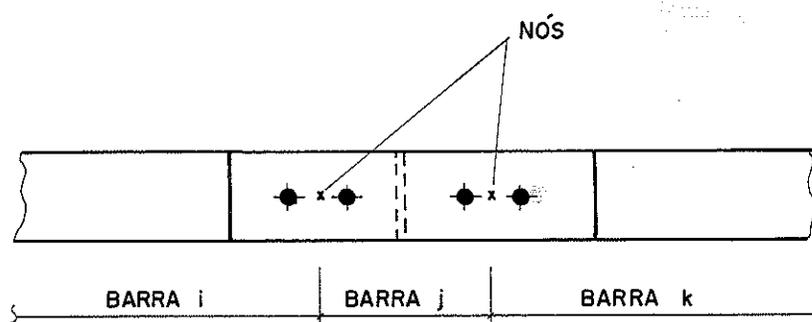


Fig. 5.2.3 - Emendas de barras

### 5.3 - Tipos de Ligações

Foram previstos três tipos de vinculações de extremidade das barras: articulada, perfeitamente engastada e deformável. Os dois primeiros tipos poderiam ser obtidos do terceiro, bastando adotar, respectivamente, um conector e dois conectores, ambos com rigidez infinita. Prevendo-se estas situações no programa reduz-se a quantidade de dados.

Outras situações de vinculação não foram previstas por não representarem a prática das estruturas convencionais.

O caso da articulação ocorre se a extremidade da barra for ligada por apenas um conector, caso particular da ligação por anéis. A articulação "perfeita" também pode ser considerada nas ligações de peças de madeira por chapas metálicas do tipo mostrado na fig. 5.2.4, indicadas pelo SYNDICAT NATIONAL DES CONSTRUCTEURS DE CHARPENTES EN BOIS LAMELLÉ-COLLÉ (1976).

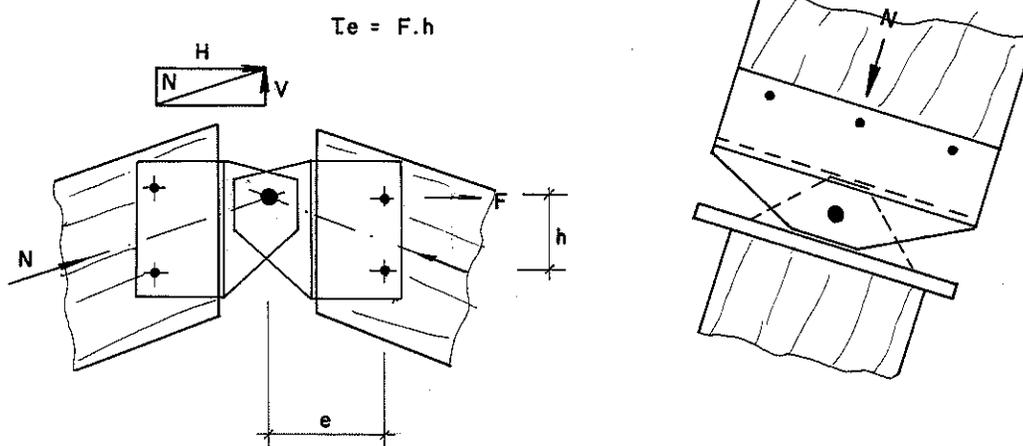


Fig. 5.2.4 - Ligações articuladas

Como se observa, apesar da ligação entre as chapas metálicas ser articulada, existe a ligação deformável entre a chapa metálica e a madeira, solicitada por momento fletor, força cortante e força normal.

No programa, a extremidade com articulação perfeita (sem deformabilidade por força normal e força cortante) é simbolizada pelo número zero; o engastamento perfeito pelo número um; os ou-

tros tipos de ligações deformáveis são designados por dois, três... Se existirem diversas ligações deformáveis com mesma distribuição e distância entre conectores, estas serão consideradas do mesmo tipo, minorando a quantidade de dados de entrada.

Cada barra é identificada pelas características de extremidade: nó inicial, nó final e tipo de ligação em cada extremidade.

Uma situação real de vinculação não incluída como tipo de ligação, é a de extremidade livre (balanço). Este caso é resolvido pelo artifício de um apoio imaginário na extremidade livre. A princípio, considera-se a existência de um apoio e, posteriormente, informa-se ao computador que este é um apoio sem restrições (vínculos) nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Na extremidade livre, considera-se a ligação do tipo um (engastada).

#### 5.4 - Capacidade do Programa

A capacidade do programa está vinculada ao número de nós e barras. Além disto, depende também, da posição dos nós e barras, pois a numeração dos nós deve seguir uma ordem, capaz de minorar a diferença numérica entre os nós das extremidades de cada barra.

De uma forma geral, para uma diferença máxima entre dois nós de extremidades de barra igual a quatro, o equipamento usado com 61670 bytes, permite o cálculo de estruturas com, aproximadamente, 60 nós e 180 barras, ou, 80 nós e 160 barras.

#### 5.5 - Carregamentos

As cargas podem ser aplicadas diretamente sobre os nós e/ou ao longo das barras.

As cargas sobre os nós são fornecidas de acordo com a orientação de eixos do sistema global adotado, segundo os eixos  $x$  e  $y$  (forças concentradas) e  $z$  (momento).

Quando a carga atua ao longo da barra, o programa somente aceita quatro tipos básicos de cargas: força concentrada, momento concentrado, carga uniformemente e linearmente distribuída. Ocorrendo outros tipos de cargas, sugerem-se simplificações no carregamento, aproximando-o por diversas cargas concentradas, co-

mo se exemplifica na fig. 5.5.1 para o caso de carga distribuída seguindo uma função qualquer.

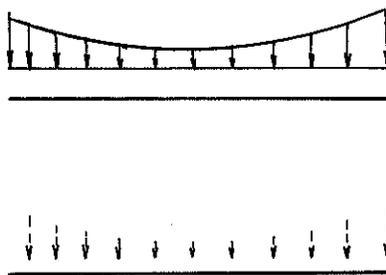


Fig. 5.5.1 - Carga distribuída transformada em concentrada

#### 5.6 - Informações do Programa

O programa fornece somente as informações solicitadas pelo usuário. Podem ser obtidas as seguintes informações: todas as características geométricas fornecidas como dados, deslocamentos  $x$  e  $y$  e  $z$  para todos os nós, esforços  $x$ ,  $y$  e  $z$  para cada extremidade de barra, e todas as reações de apoio.

Para a estrutura analisada com 38 nós, 57 barras e 6 tipos diferentes de ligações deformáveis, o tempo de processamento do programa é inferior a 20 minutos.

## 6 - MATERIAIS E MÉTODOS

### 6.1 - Generalidades

Este trabalho foi realizado no Laboratório de Madeiras e de Estruturas de Madeira (LaMEM) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.

Os dados utilizados neste trabalho foram colhidos no período entre os anos de 1984 e 1985.

Foram organizados basicamente três tipos de experimentação, a de ensaios de ligações estruturais, a de caracterização física e mecânica das peças de madeira empregadas nos ensaios anteriores e ensaio de modelo estrutural.

A madeira das peças de ligação e do modelo foi a Peroba Rosa *Aspidosperma polymneuron*. Os conectores usados foram cavilhas partidas de Eucalipto Citriodora *Eucalyptus Citriodora* e parafusos de aço, para comparar o comportamento do modelo cavilhado com o parafusado.

### 6.2 - Equipamentos

A seguir é apresentada uma relação dos equipamentos utilizados para medidas de deformações, deslocamentos, forças, registro de dados e equipamentos auxiliares.

a)- relógios comparadores da marca Mitutoyo com precisão de centésimo e de milésimo de milímetro, curso de 10 e de 5mm.

Foram usados para medição dos deslocamentos relativos entre as partes das ligações, e para caracterização mecânica das barras de madeira do modelo estrutural.

b)- extensômetros elétricos de resistência (strain gage) da marca Kyowa para avaliação das deformações e das tensões nas barras do modelo.

c)- transdutores diferenciais da marca Hewlett Packard, modelo HP 24 DCDT 500 com precisão de milésimo de milímetro, curso de 2,54 cm, empregados para medir os deslocamentos verticais (flechas) dos nós do modelo e para medir deslocamentos relativos entre as peças das ligações.

d) máquina universal de ensaios da marca Alfred J. Amsler para ensaios das ligações.

e)- sistema de aquisição de dados da marca Hewlett Packard para leitura dos transdutores diferenciais. Foram usados o total de 20 canais.

f)- microcomputador da marca Hewlett Packard modelo 9825 T para controle e armazenamento das leituras do sistema de aquisição de dados, capacidade de memória RAM: 61670 bytes, saída através de impressora de mesma marca, modelo 2631 G, com a qual se fez o registro gráfico. Arquivo de dados em fita magnética. Todas as análises de dados e programação do cálculo estrutural foram executados neste equipamento.

g)- anéis dinamométricos ingleses da marca E L E.

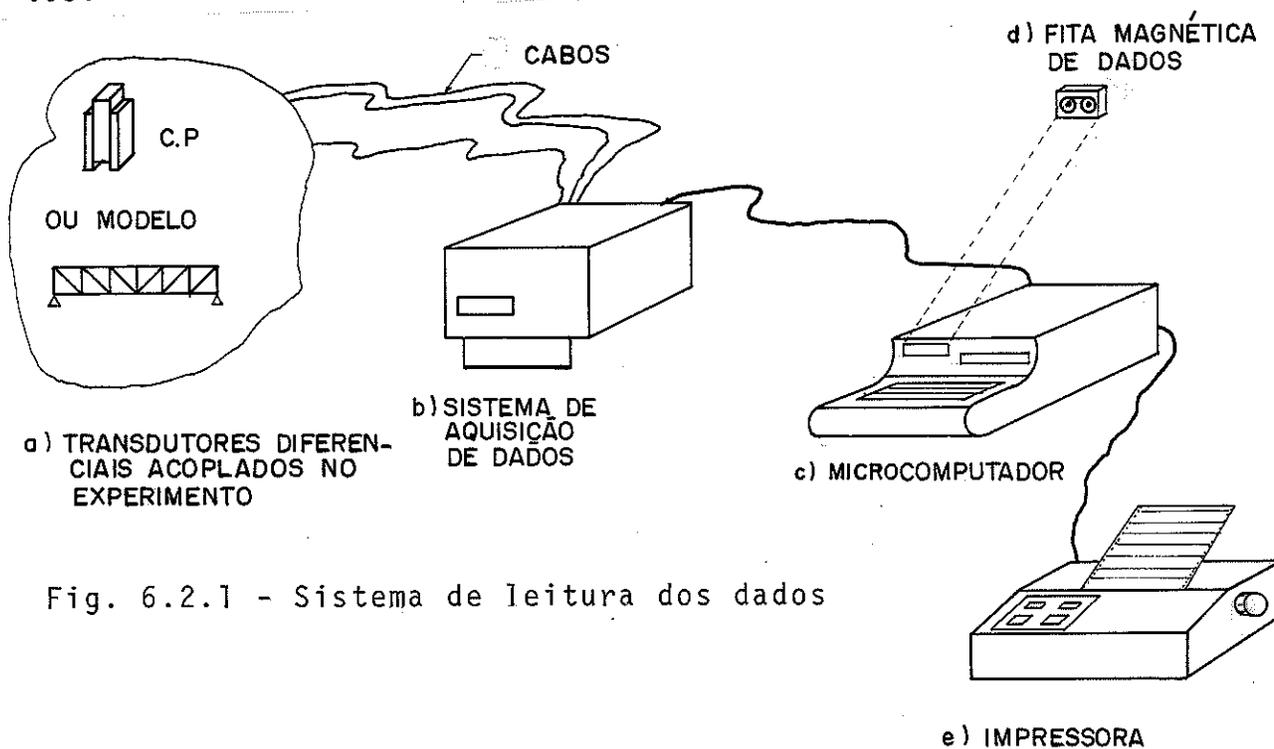
h)- célula de carga da marca Kyowa com capacidade de 1 tf (10 kN).

i) balanceador e comutador para 24 canais da marca Kyowa.

j)- equipamentos da oficina de marcenaria do LaMEM: serra circular, tupia, serra de fita, plaina, desempenadeira, torno, etc.

Dentre estes equipamentos destaca-se a leitura automatizada via microcomputador, ligado ao sistema de aquisição de dados e transdutores diferenciais.

A fig. 6.2.1 esquematiza a composição destes equipamentos.



Este sistema permite a organização das leituras, na velocidade de 186 pontos (canais) por segundo, além de proporcionar a impressão, análise e arquivamento automático dos dados.

### 6.3 - As Ligações

#### 6.3.1 - As Cavilhas Partidas

O trabalho experimental voltou-se inicialmente para análise das ligações cavilhadas e sua aplicação nas estruturas.

As cavilhas usadas têm a particularidade de serem partidas, ou seja, são elementos cilíndricos cortados longitudinalmente com inclinação, fig. 6.3.1, resultando duas cunhas plano-cilíndricas para favorecer o ajuste da cavilha no furo.

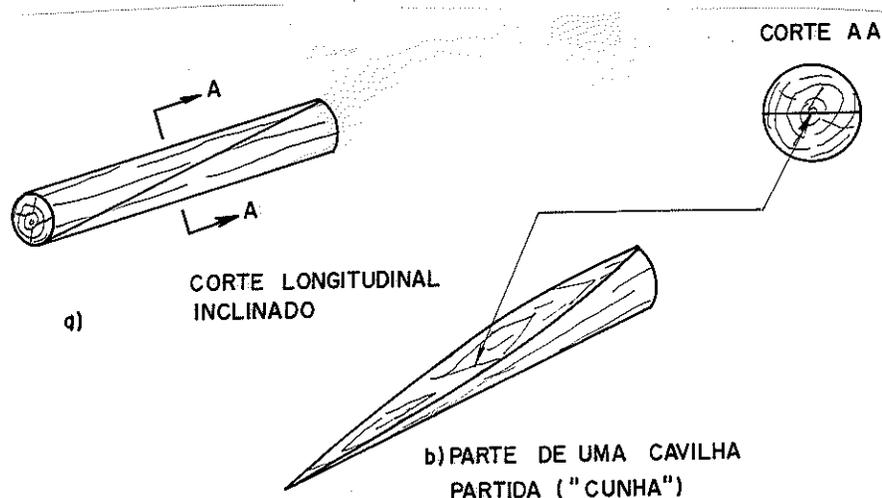


Fig. 6.3.1 - Detalhes de uma cavilha partida

Maiores detalhes sobre as cavilhas podem ser vistos em GESUALDO (1982).

O diagrama carga-deslocamento para este tipo de ligação não é linear, adotando para representá-lo o modelo mostrado na fig. 4.1.1. (pag. 27). É interessante ressaltar que a carga correspondente ao deslocamento relativo de 1,5 mm equivale a 60% da carga de ruptura da ligação. Para 50% do deslocamento relativo anterior, ou seja, 0,75 mm a relação é aproximadamente 45%.

De uma forma ou de outra, o critério de adotar o limite da capacidade de uma ligação pela condição de deslocamento relativo, deve ser revisto em futura proposta de norma brasileira, pois os limites estabelecidos são bastante altos e o efeito da deformação da ligação é bastante significativo.

### 6.3.2 - Corpos de Prova

O corpo de prova adotado no LaMEM para o ensaio de ligações é formado por uma peça central e por duas laterais, sendo a espessura da primeira igual ao dobro das outras duas. Foram, ensaiados dois tipos de montagem:

a) Fibras e solicitação na mesma direção, fig. 6.3.2a.

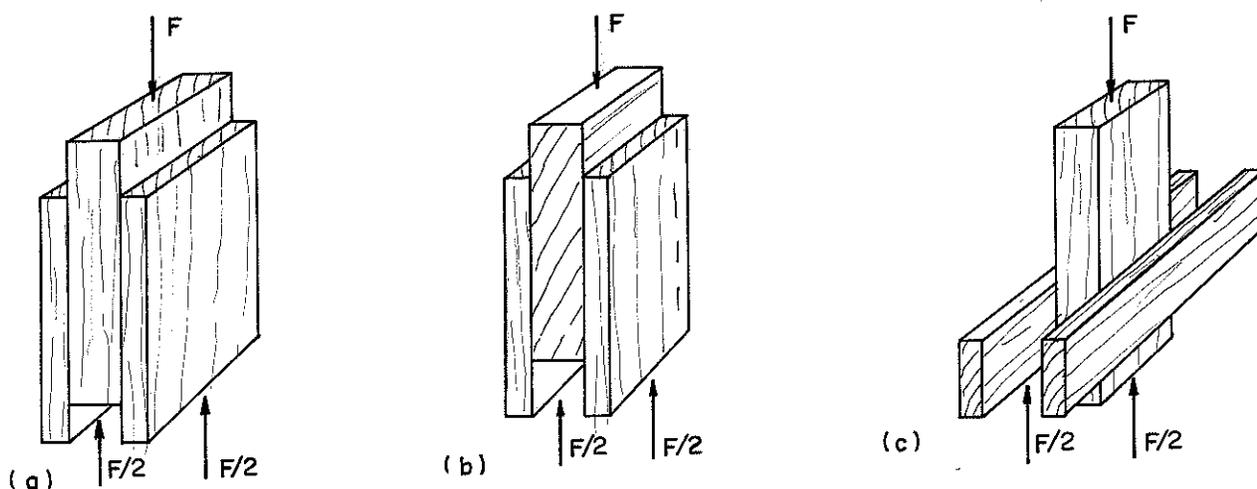


Fig. 6.3.2 - Direções de fibras e cargas

b) Fibras e solicitação em direções perpendiculares, fig. 6.3.2b e 6.3.2c. Nestes corpos de prova as fibras e a solicitação são perpendiculares entre si somente para uma das peças, conforme fig. 6.3.3.

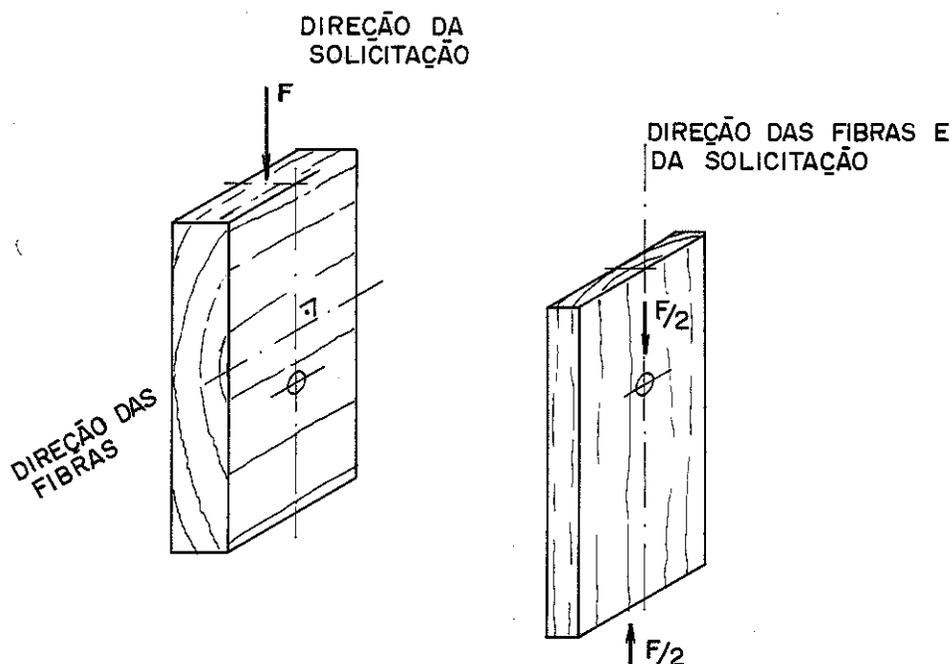
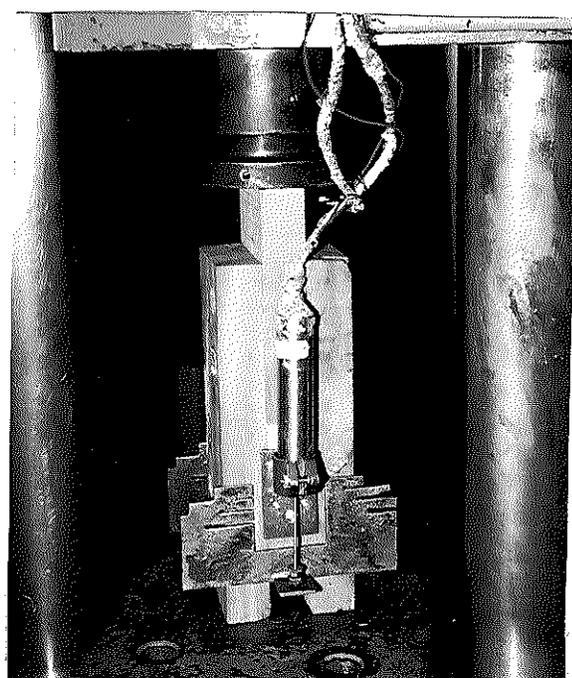
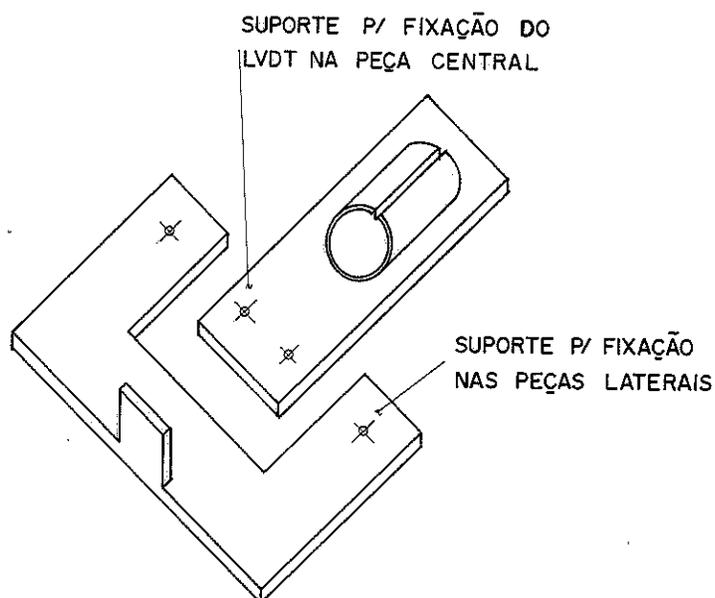


Fig. 6.3.3 - Vista expandida da ligação tipo (b)

A leitura dos deslocamentos relativos foi feita através do sistema descrito na fig. 6.2.1, por meio de dois transdutores diferenciais colocados em cada uma das faces do corpo de prova. Para garantir a leitura do deslocamento relativo, sem a parcela de deformação da madeira, empregou-se o sistema de hastes mostrado na fig. 6.3.4.



a) vista geral



b) detalhe do suporte de fixação

Fig. 6.3.4 - Ensaio de ligações simples

Outras ligações específicas, retiradas do modelo ensaiado, são descritas no item 6.5.

#### 6.4 - Caracterização da Madeira

As peças de madeira ensaiadas foram caracterizadas pela resistência limite à compressão paralela às fibras ( $f_{wc}$ ), módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ), umidade ( $u$ ) e massa específica aparente ( $\rho$ ) em corpos de prova com dimensões variáveis, em função da natureza da ligação ensaiada. Os corpos de prova de caracterização física e mecânica foram sempre de seção quadrada, com arestas tendo um terço do comprimento do corpo de prova.

Para determinação de  $f_{wc}$  e  $E$  aplicaram-se cargas grada-

tivas na razão de  $1 \text{ kN/cm}^2/\text{min}$ , de acordo com a NBR 7190/82.

Todos ensaios foram normalizados, seguindo-se as recomendações do Método Brasileiro para Ensaio Físico e Mecânico NBR 6230. Porém, destaca-se a particularidade dos ensaios para determinar o módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ) das barras usadas no modelo. Neste caso, as barras foram ensaiadas depois de adequadamente preparadas para serem aplicadas no modelo. O esquema usado é mostrado na fig. 6.4.1.

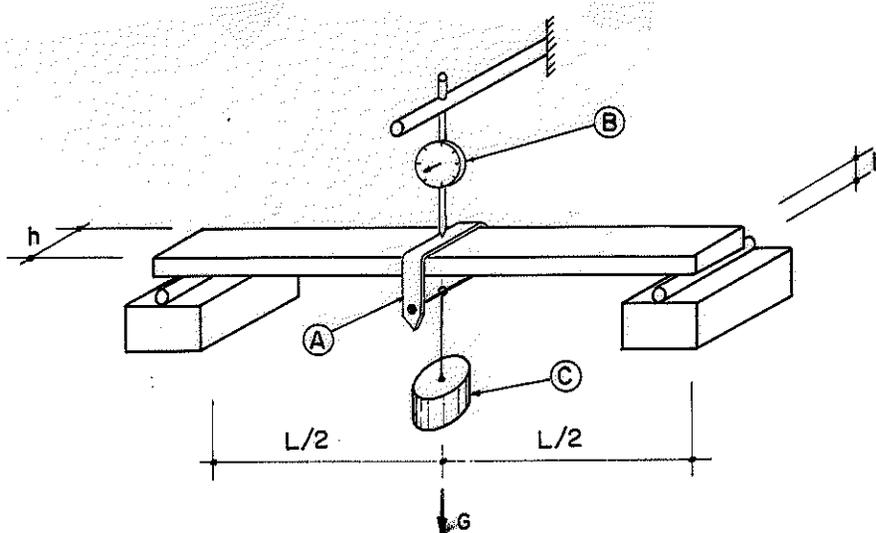


Fig. 6.4.1 - Determinação do módulo de elasticidade

A massa  $C$  de peso  $G$  é pendurada no suporte central  $A$  e a flecha ( $a$ ) é lida no relógio comparador  $B$  após o tempo necessário para ocorrer a aplicação da carga  $G$  à velocidade de  $1 \text{ kN/cm}^2/\text{min}$  na fibra mais solicitada.

O valor de  $E$  é determinado pela equação  $E = (F L^3)/(48 I a)$ , desprezando-se as parcelas de deformação provenientes da força cortante, adotando-se  $L/b > 21$  para todas as barras ensaiadas.

## 6.5 - Modelo Estrutural

### 6.5.1 - Dimensões

Foi escolhida uma estrutura do tipo viga treliçada (bancos paralelos), por ser uma estrutura de fácil montagem e de grande deformabilidade.

A distância entre os apoios, vão livre, ficou limitada pelas dimensões do espaço físico e da laje de reação das dependências do LaMEM. Resultou um modelo com 10 m de vão livre, com montantes colocados a cada metro e a distância entre banzos igual a 1 m. O apoio da esquerda foi considerado fixo para deslocamento vertical e horizontal, e o da direita foi considerado móvel (livre na horizontal). A fig. 6.5.1 mostra as características anteriores, assim como a numeração adotada para os nós.

As relações entre dimensões foram baseadas nas sugestões de KARLSEN (1967) e OZELTON (1976). A estrutura é composta de 22 nós e 41 barras.

As dimensões das seções transversais das barras foram escolhidas sem um critério de cálculo pré-fixado, pois neste modelo não se pretendeu obter a representação fiel de uma viga para cobertura ou para outros fins.

As seções transversais das barras foram derivadas da seção comercial (6 x 16) cm<sup>2</sup>, tendo em mente que o modelo poderia estar representando uma viga real em escala reduzida de 1 : 2. Porém devido às perdas no desdobro e no acabamento das peças, as suas dimensões finais foram:

banzos: 2(2,5 cm x 7,0 cm)

diagonais: 2(1,25 cm x 7,0 cm)

montantes: (2,5 cm x 7,0 cm)

A fig. 6.5.2 mostra detalhes de ligações do modelo. Todas as ligações são idênticas, e independentemente da solicitação, foram adotados dois conectores por ligação. Também foram previstas emendas nas barras indicadas na fig. 6.5.2b.

A fig. 6.5.3 apresenta outros detalhes do modelo. Destaca-se o detalhe do nó central inferior no qual se fez a sobreposição das diagonais, evitando-se excentricidade na ligação, fig. 6.5.3b.

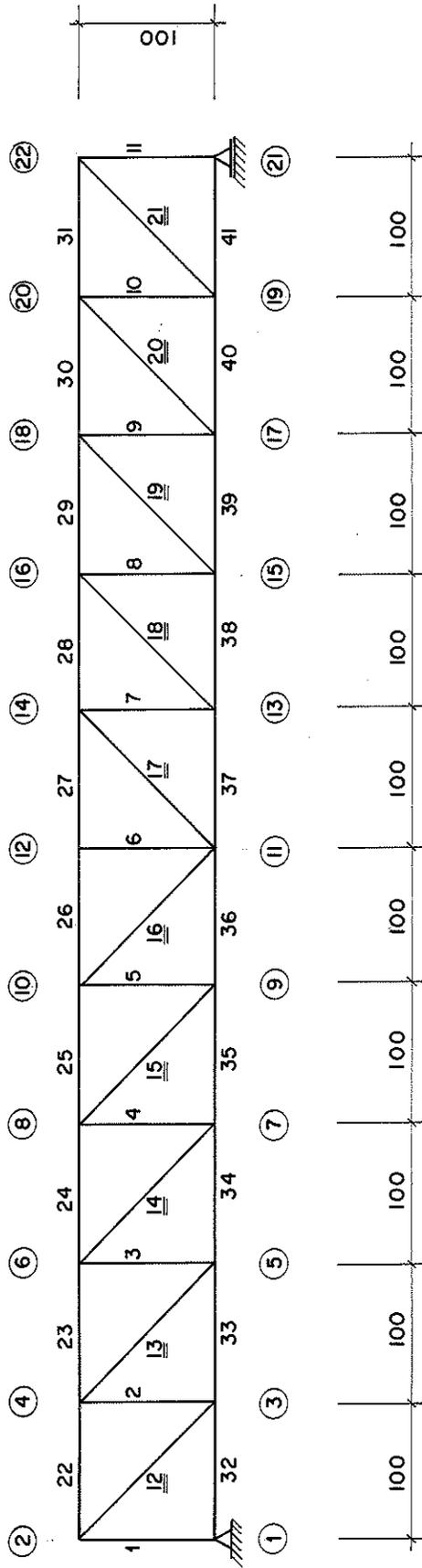
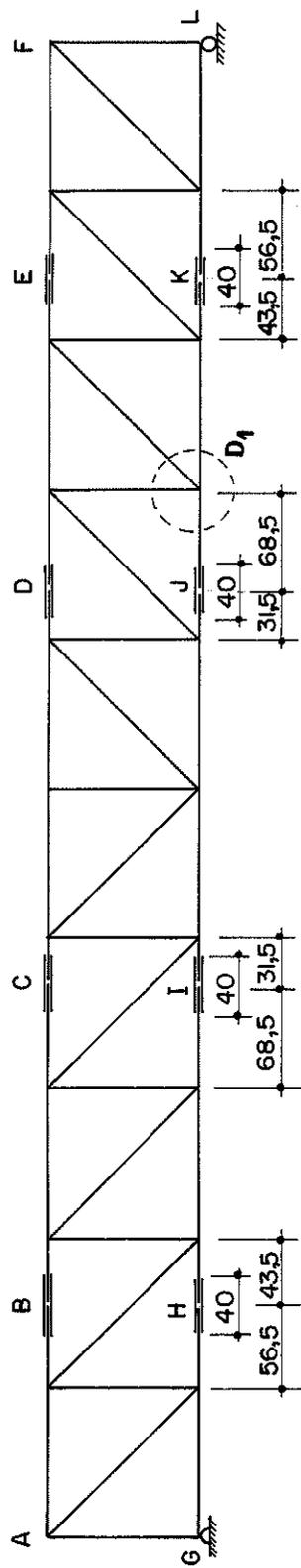
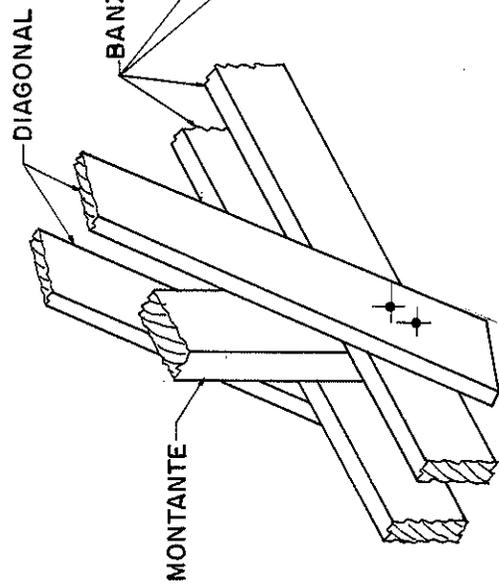


Fig. 6.5.1 - Dimensões e distribuição de barras

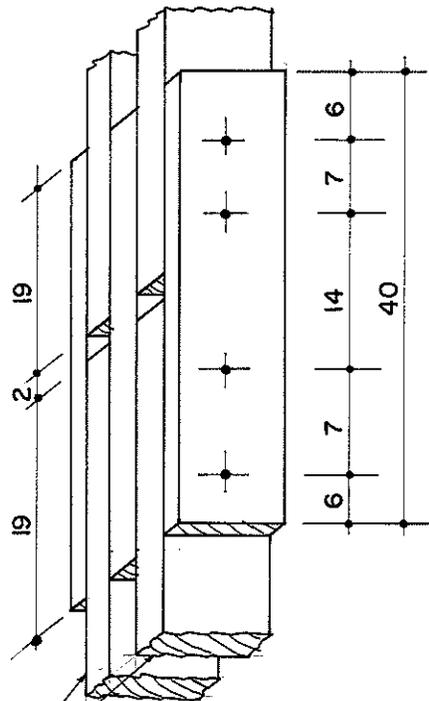


(a) POSIÇÃO DAS EMENDAS NO MODELO

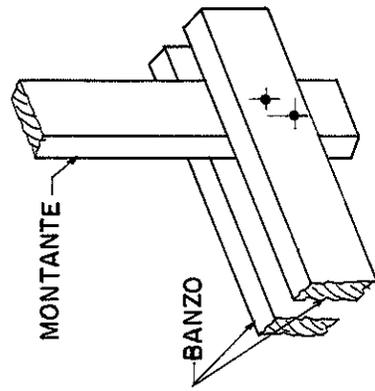
MED. (CM)



(b) DETALHE D<sub>1</sub> LIGAÇÃO TÍPICA



(c) EMENDA TÍPICA



(d) LIGAÇÃO DO APOIO

Fig. 6.5.2 - Detalhes dos Modelos

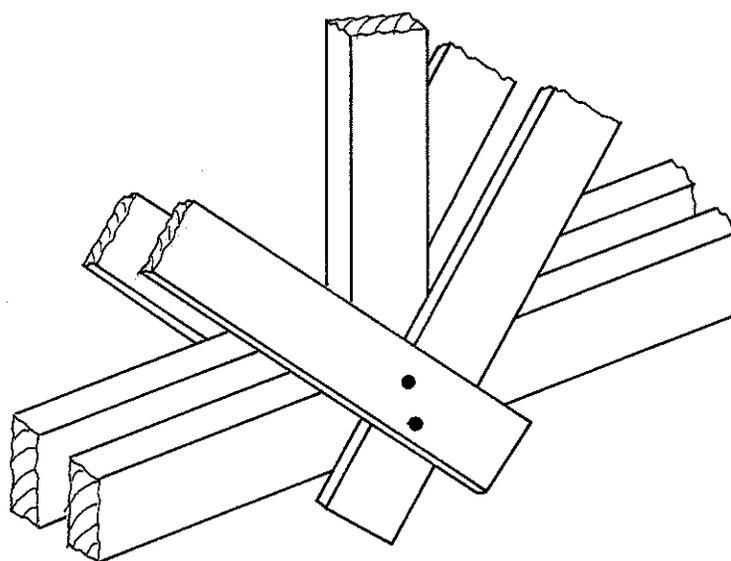
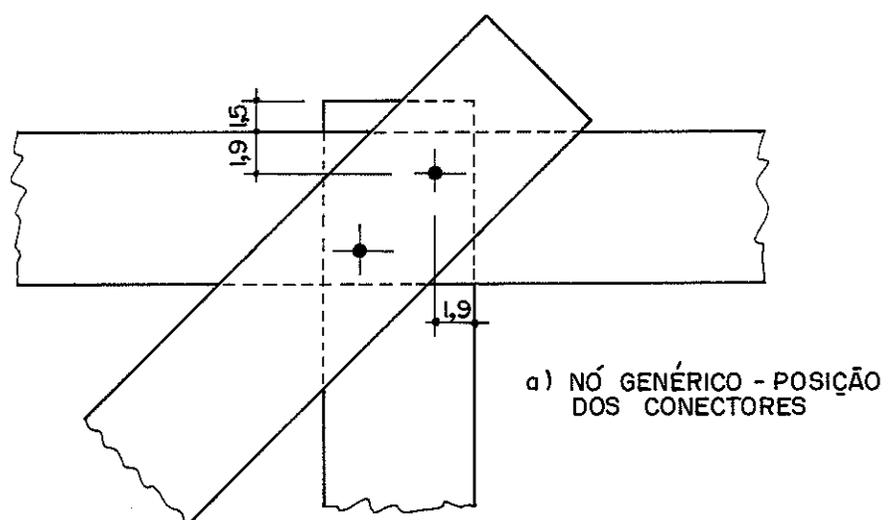


Fig. 6.5.3 - Detalhes do modelo

### 6.5.2 - Módulo de Elasticidade das Barras

Após a preparação das barras nas dimensões desejadas foram executados ensaios de flexão para caracterização e classificação das barras quanto ao módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ), seguindo as especificações do item 6.4.

O critério para distribuição das barras no modelo em função de  $E$  foi o de agrupamento crescente a partir do apoio, ou seja, valores de  $E$  maiores nas posições centrais. Desta forma, obteve-se uma variação gradativa de  $E$ .

Para as seções transversais múltiplas (duplas), caso dos banzos e diagonais, adotou-se como valor de  $E$  da barra, a média entre os  $E$  de cada peça.

A fig. 6.5.4 mostra as barras e os respectivos valores de  $E$ . As emendas nos banzos foram consideradas como barras.

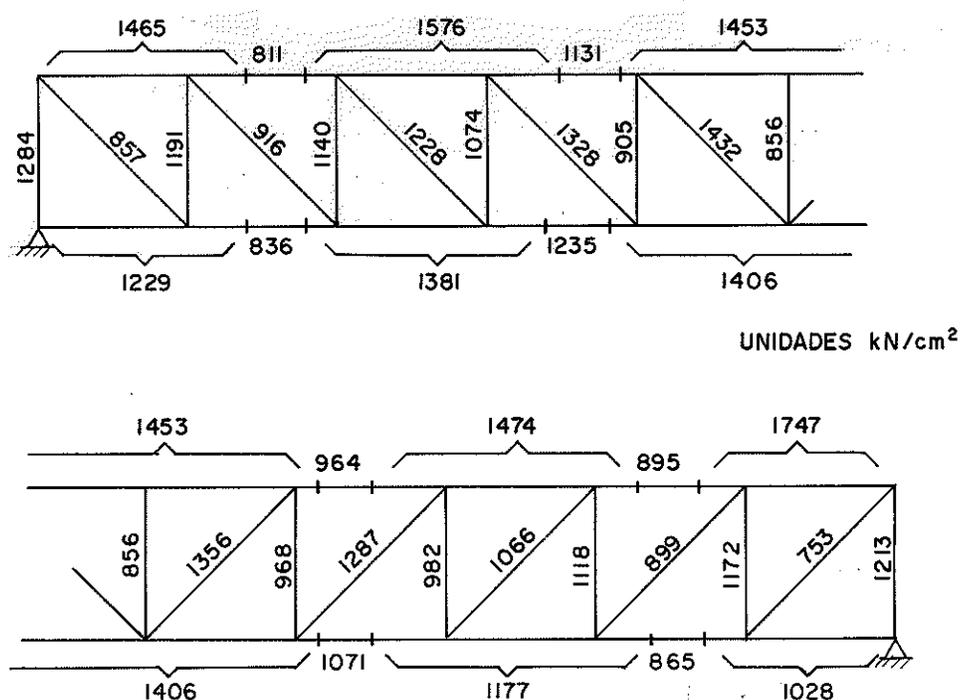


Fig. 6.5.4 - Valores de  $E$  para barras do modelo

A barra de extremidade do banzo superior direito tem valor de  $E = 1747 \text{ kN/cm}^2$ , fugindo da regra de variação. Isto ocorreu por problema na fase de montagem; a barra prevista apresentou grande empenamento e foi substituída por outra, com a característica mostrada.

### 6.5.3 - Montagem

Neste item é feita a descrição da montagem do modelo. Na fig. 6.5.2a, tem-se a designação dos quadros (A, B..., L) usados como referência nesta descrição.

A fixação das barras foi feita com o modelo "deitado" sobre um piso regular e nivelado. A fixação inicial foi feita através de pequenos pregos. Montou-se a estrutura pregada completa somente em um dos lados, lembrando-se que as seções dos banzos e diagonais são duplos.

Iniciou-se pela fixação do quadro central C-D-I-J. Pelas emendas C, D, I e J foram posicionadas as barras seguintes dos banzos e as barras dos montantes. Tendo-se os montantes presos aos banzos, fez-se a verificação do alinhamento dos banzos e do ângulo (90°) entre banzos e montantes. Sequencialmente foi pregada uma das partes de cada diagonal, completando-se a fixação por pregos de um dos lados do modelo. A fixação do outro lado fez-se após giro de 180° da estrutura.

Completada a fixação de todas as barras através de pregos, foram demarcadas as posições dos conectores. Após a execução dos furos, foram retirados os pregos e introduzidos os conectores.

Inicialmente foram usados parafusos de aço de 13 mm como conectores. Posteriormente, estes parafusos foram substituídos pelas cavilhas partidas de mesmo diâmetro, conforme já descrito no item 6.6.

## 6.5.4 - Apoios

O apoio da esquerda foi do tipo fixo (2º gênero) e, o da direita, móvel (1º gênero), conforme indicado na fig. 6.5.5.

O apoio fixo é semelhante ao anterior, apenas o cilindro de aço é substituído por um semi-cilindro (meio cilindro) com o dobro do diâmetro.

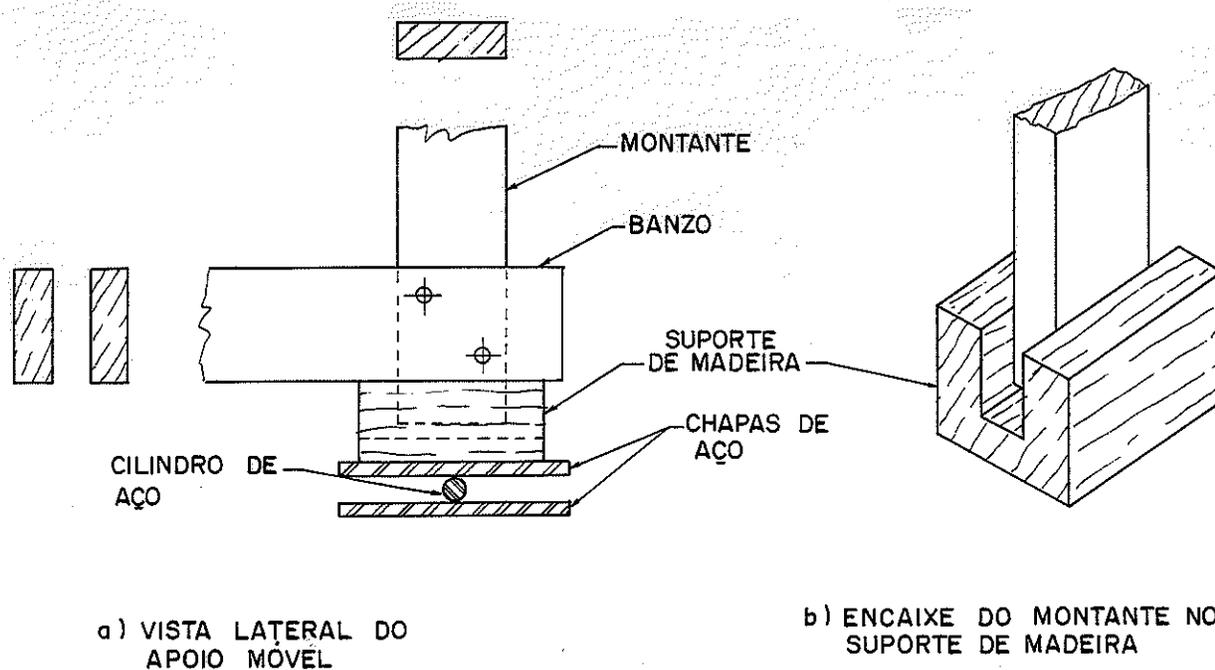
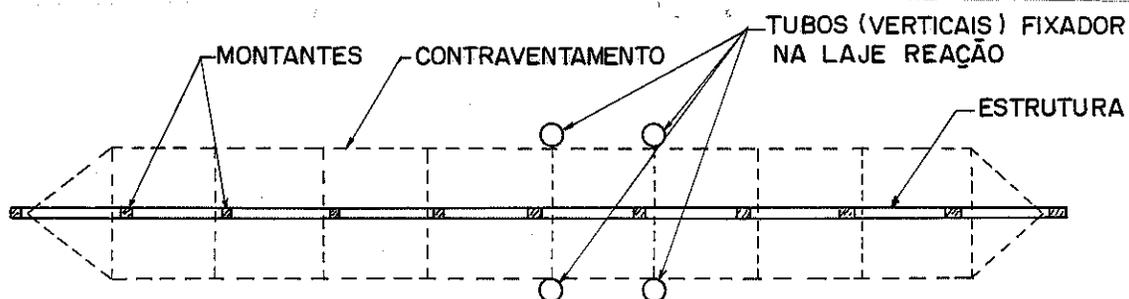


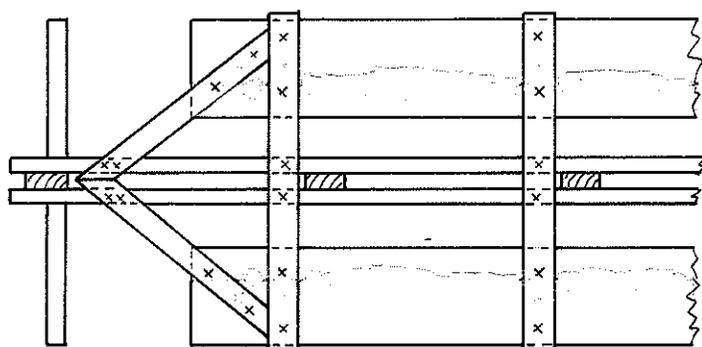
Fig. 6.5.5 - Detalhes de apoio

### 6.5.5 - Contraventamentos

Os contraventamentos (suportes laterais) foram colocados ao longo do banzo superior. Foram feitos de tábua laterais interligadas por sarrafos, conforme é indicado na fig. 6.5.6.



(a) VISTA SUPERIOR ESQUEMÁTICA DO CONTRAVENTAMENTO



(b) DETALHES DO CONTRAVENTAMENTO - VISTA SUPERIOR

(c) DETALHE DO APOIO CORTE TRANSVERSAL

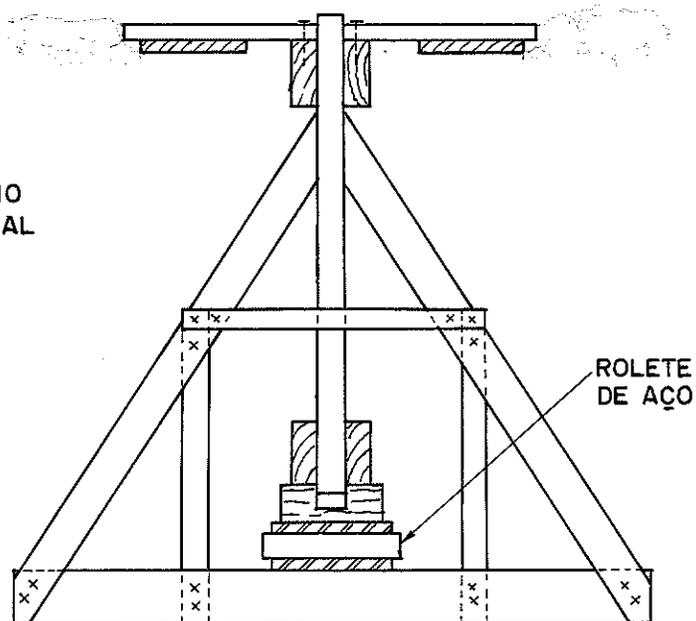


Fig. 6.5.6 - Contraventamento do modelo

6.5.6 - Pontos de Leitura

Foram instalados no modelo um total de 39 pontos de leitura, sendo 19 transdutores diferenciais e 20 extensômetros elétricos.

Os transdutores diferenciais estão simbolizados por  $I_1, I_2, \dots, I_{19}$ . Os extensômetros elétricos por  $R_1, R_2, \dots, R_{20}$ . A posição deles no modelo é mostrada na fig. 6.5.7.

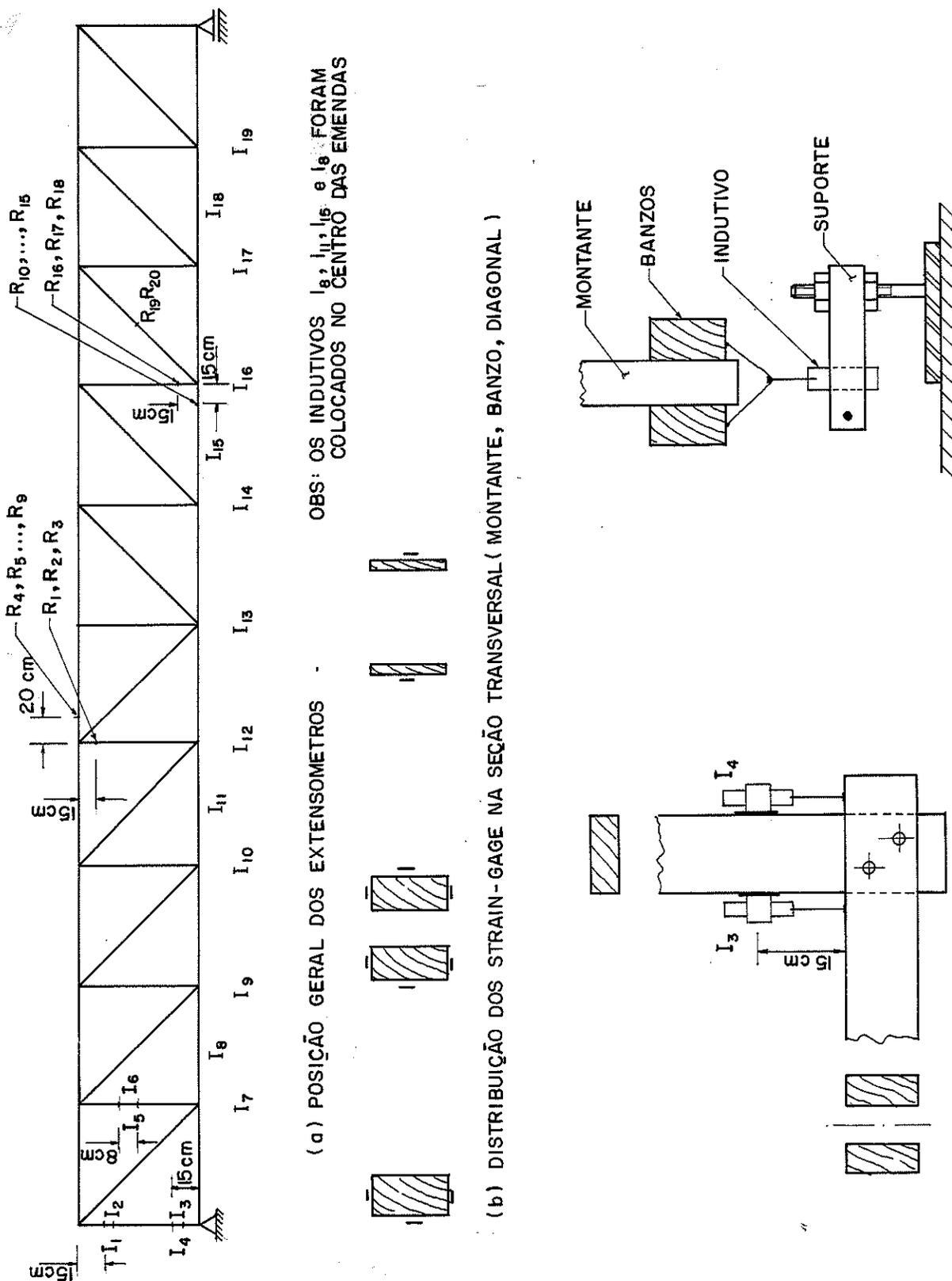


Fig. 6.5.7 - Pontos de leitura

6.5.7 - Cargas

O sistema de aplicação de cargas foi o mais elementar possível. Foi montado um sistema manual constituído por um anel dinamométrico e por barras de aço, fig. 6.5.8. Escolheu-se este sistema por questão de simplicidade na montagem, pois não exigiu nenhuma estrutura auxiliar para suporte. Qualquer outro sistema de aplicação de cargas por cilindros hidráulicos exigiria um espaço maior entre o piso e o modelo, ou suportes auxiliares na parte superior do modelo.

Cada carregamento correspondeu à aplicação de duas cargas concentradas sobre o banzo superior, fig. 6.5.8a. As cargas foram conseguidas pelo aperto sucessivo das porcas A e B da fig. 6.5.8b, e o valor da força atuante foi medido diretamente no anel dinamométrico.

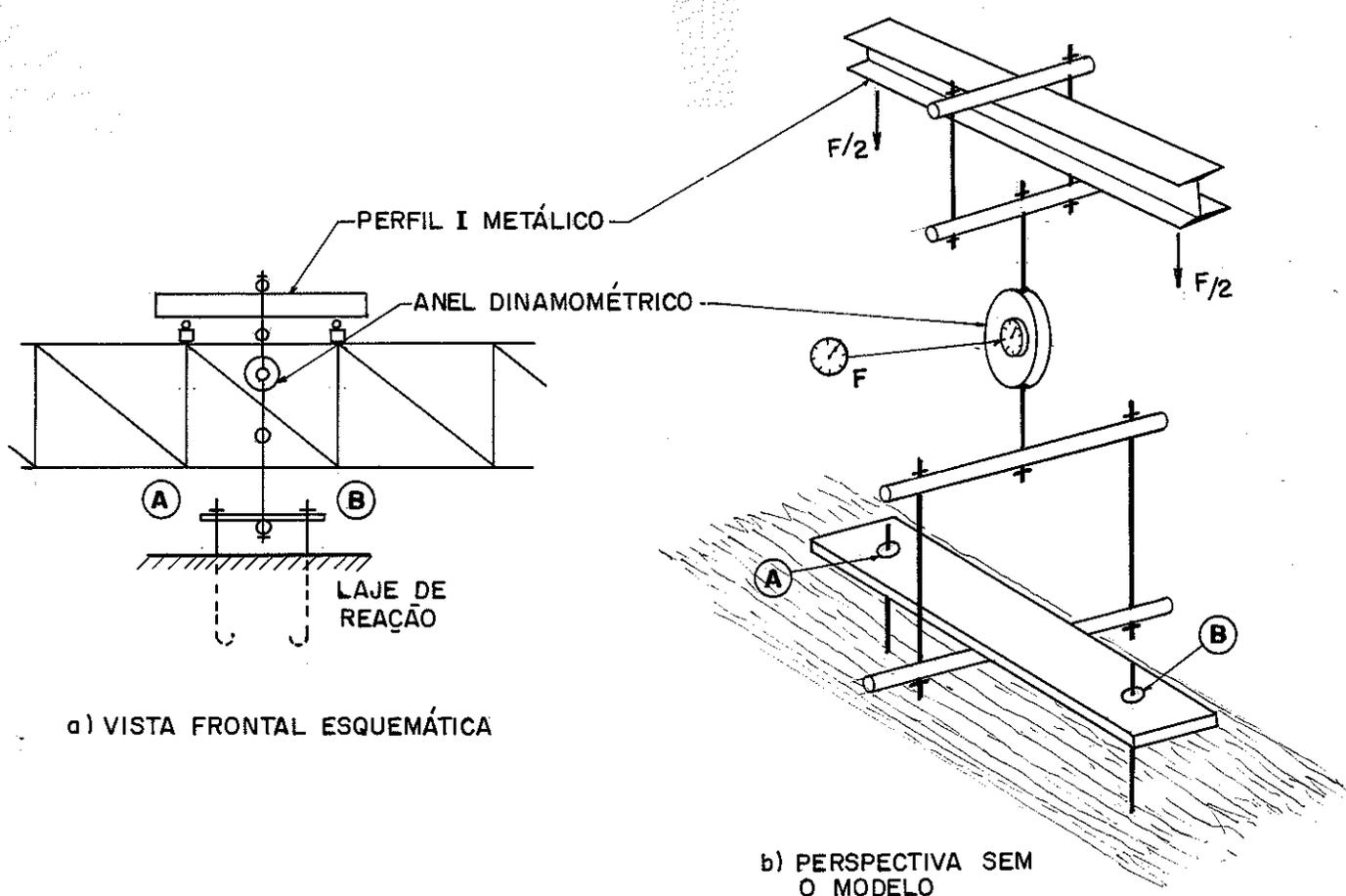


Fig. 6.5.8 - Esquema de aplicação de carga

Os pontos de aplicação do par de cargas foram vários, pois o sistema de aplicação de carga era deslocado para os nós ou para as barras a carregar.

Para análise do comportamento da estrutura para carga de longa duração fez-se a aplicação da carga em esquema semelhante ao apresentado. A carga permanente foi conseguida por um sistema de alavanca conforme fig. 6.5.9.

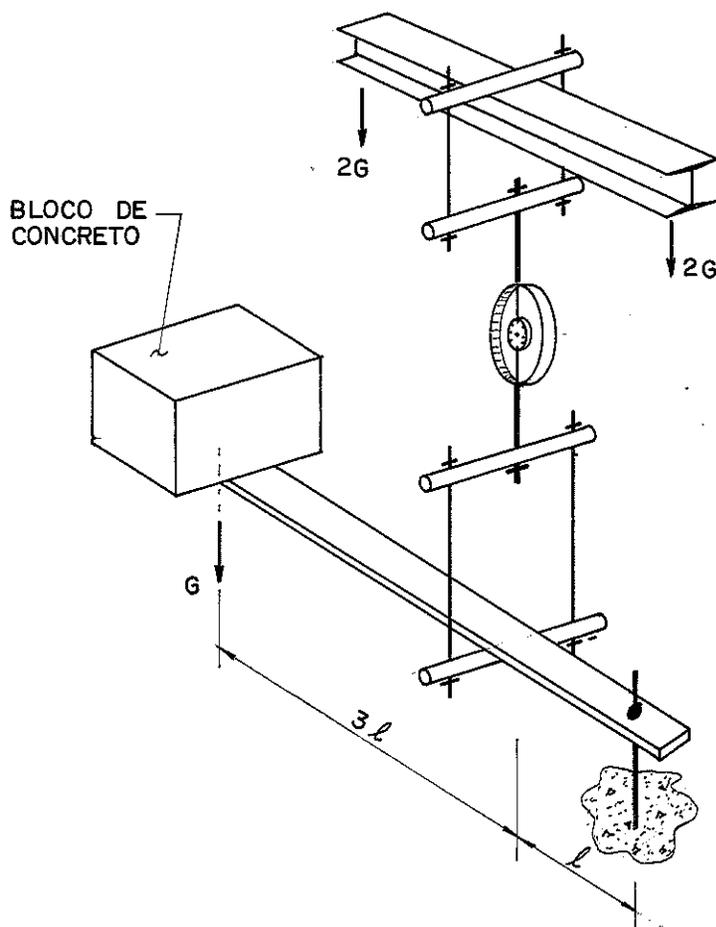


Fig. 6.5.9 - Aplicação de carga de longa duração

O sistema apresentado foi eficiente, pois mesmo com a deformação da estrutura a carga era mantida praticamente constante. A variação de carga pela acomodação da estrutura foi inferior a 0,1 kN.

### 6.6 - Ensaio Complementares

Foram feitos ensaios complementares para avaliar as características das ligações do modelo. Foram usadas as mesmas peças de madeira do modelo. A maioria dos corpos de prova foi constituída pela própria ligação do modelo, ou seja, terminados os carregamentos, as ligações foram cortadas e ensaiadas como testemunhas.

As ligações retiradas do modelo foram as indicadas por um círculo na fig. 6.5.10.

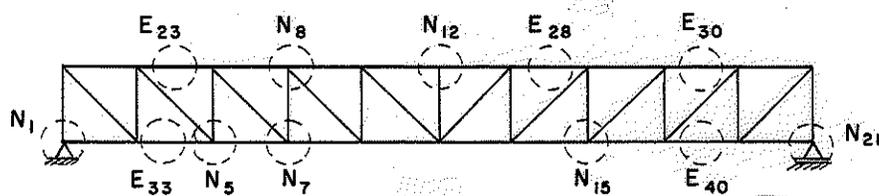


Fig. 6.5.10 - Ligações ensaiadas

A simbologia para identificação das ligações baseia-se na numeração de nós e barras da fig. 6.5.1 (pag. 76). No caso,  $N_i$  corresponde à ligação do nó  $i$ , e  $E_j$  corresponde à emenda da barra  $j$ .

As emendas  $E_{23}$ ,  $E_{33}$ ,  $E_{28}$ ,  $E_{30}$  e  $E_{40}$  foram duplamente ensaiadas, à flexão e à compressão axial. Na compressão atingiu-se a ruptura. Nos ensaios à flexão foram lidas as flechas em cinco pontos: na direção dos conectores (quatro) e no ponto central; a carga foi aplicada no centro do vão. Nos ensaios à compressão foram medidos os deslocamentos entre os banzos e o enchimento (central)-fig. 6.5.11. Em ambos os casos foram utilizados transdutores diferenciais acoplados ao sistema de aquisição de dados e controlado pelo microcomputador.

As ligações  $N_1$ ,  $N_{12}$  e  $N_{21}$  representam o caso típico de peça com direções perpendiculares entre as fibras e a solicitação mencionado no item 6.3.1, e portanto constituem-se no caso convencional de ligações.

Também foram ensaiados dois corpos de prova montados com madeira do modelo, para representar a ligação entre peças paralelas, com madeira das barras 1 e 32, e barras 11 e 41, identificados respectivamente por  $N'_1$  e  $N'_{21}$ .

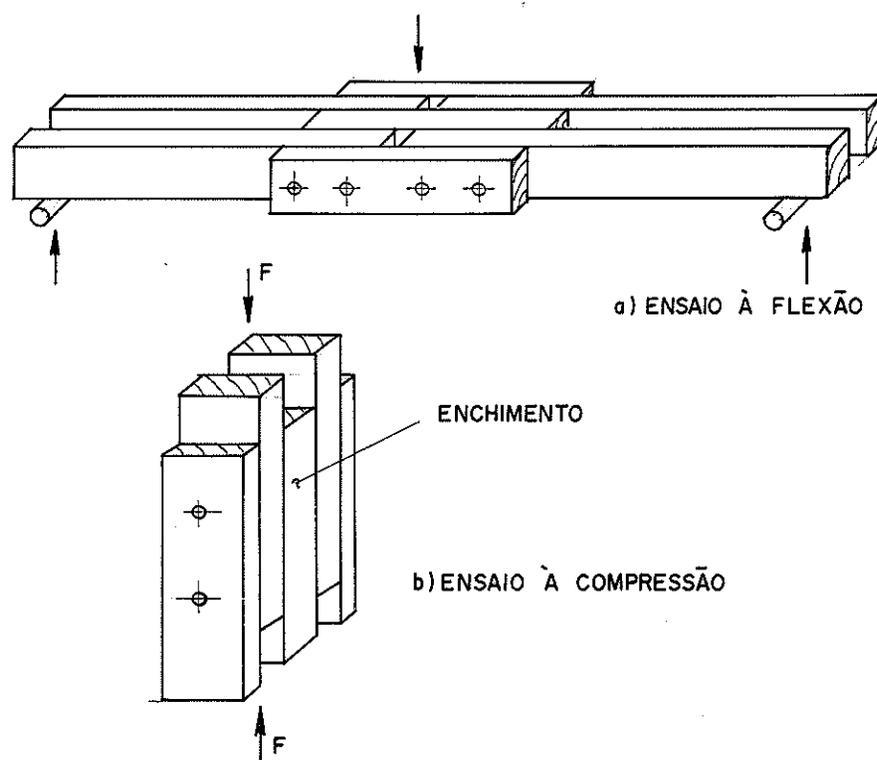


Fig. 6.5.11 - Ensaio das emendas

As ligações  $N_5$ ,  $N_7$ ,  $N_8$  e  $N_{15}$  são os casos mais gerais e mais complexos, pois envolvem a interligação de quatro barras: dois banzos, uma diagonal e um montante. A transmissão de esforços ocorre, basicamente, em três direções diferentes, como pode ser visto na fig. 6.5.12b. Para comparação é mostrada a fig. 6.5.12a com a situação de ligação convencional com transmissão de esforços em uma única direção.

Observar que a resistência da cavilha é função do tipo de ligação. Cada ligação da estrutura tem sua característica própria, em função da posição das barras e da intensidade de solicitação.

Para a ligação de um nó típico da treliça, fig. 6.5.12b do ponto de vista teórico, considerando como nó de treliça, a força  $N_{\text{banzo}}$  é a diferença (resultante) das forças nos banzos à direita e à esquerda, e corresponde à projeção na direção do banzo da força atuante nas diagonais. Teoricamente, o banzo é a referência para deslocamentos relativos; a força do montante transfere-se diretamente para as diagonais, ou vice-versa. A diagonal transfere a força do banzo, e assim, existe deslocamento relativo entre montante/diagonal e diagonal/banzo.

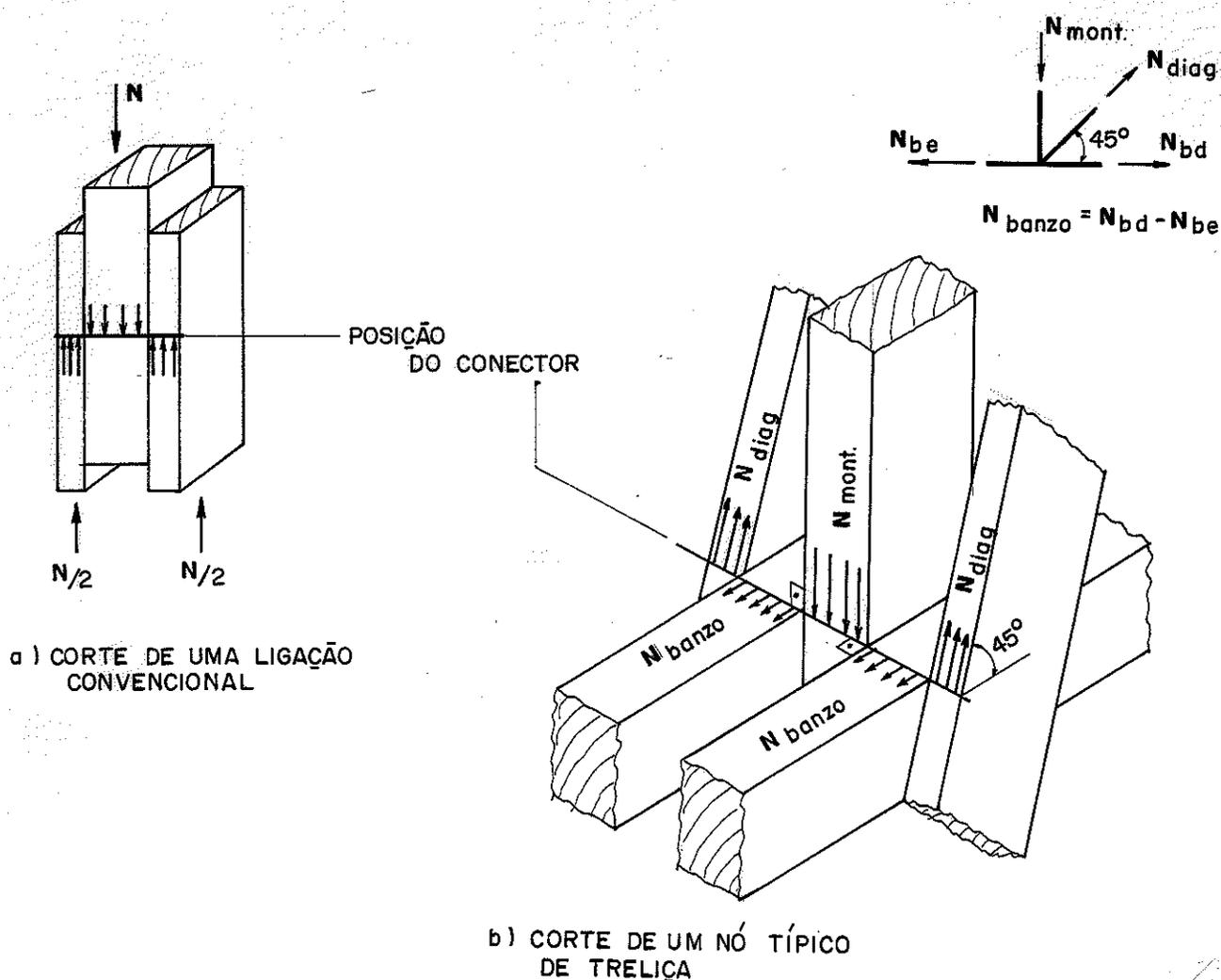


Fig. 6.5.12 - Distribuição esquemática de forças nas ligações

A análise anterior não representa a realidade, mas serve somente como indicador do comportamento da ligação. Efeitos adicionais atuam sobre um nó desse tipo.

Com a intenção de avaliar as características da ligação típica da treliça foram feitos os ensaios do tipo esquematizado na fig. 6.5.13, nos corpos de prova retirados do modelo.

Foram instalados oito pontos de leitura de deformações relativas por meio dos transdutores diferenciais. Cada deformação relativa foi obtida pela média entre duas leituras. Foram escolhidos pontos de leitura de deformação entre: a) diagonal e montante na direção do montante; b) diagonal e banzo na direção da diagonal c) banzo e montante na direção do montante e d) banzo e montante na direção do banzo. A fig. 6.5.14 mostra uma vista geral deste ti

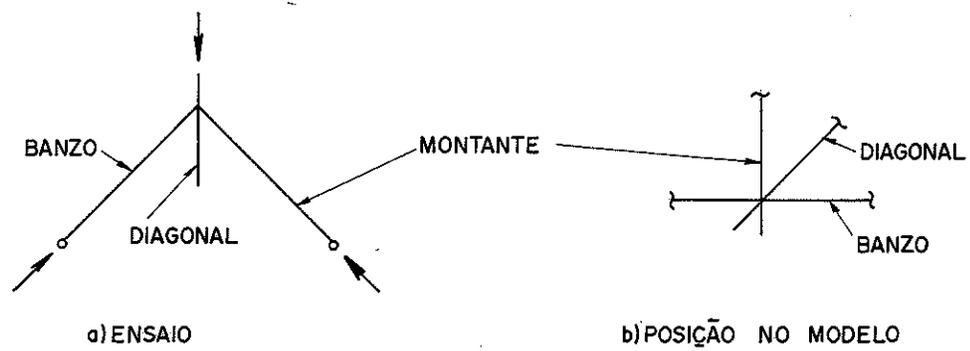


Fig. 6.5.13 - Esquema de ensaio do nó típico

po de corpo de prova. Notar a posição dos oito transdutores diferenciais, de difícil instalação. Este ensaio tornou-se viável com o auxílio dos recursos experimentais automatizados, via microcomputador.

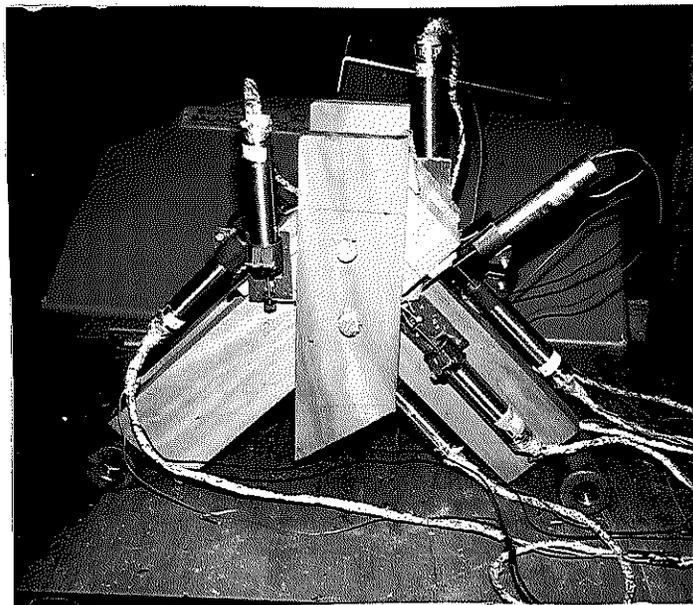


Fig. 6.5.14 - Corpo de prova para ensaio do nó típico

Os ensaios foram realizados na máquina universal de ensaios, aplicando-se a carga na parte superior do corpo de prova, ou seja, na diagonal, sendo resistida pelo banzo e pelo montante inclinados, conforme esquema da fig. 6.5.15. Com isto, conseguiu-se simular os esforços principais da ligação: tração na diagonal, compressão no montante e variação de força no banzo igual à projeção da força da diagonal na direção do banzo.

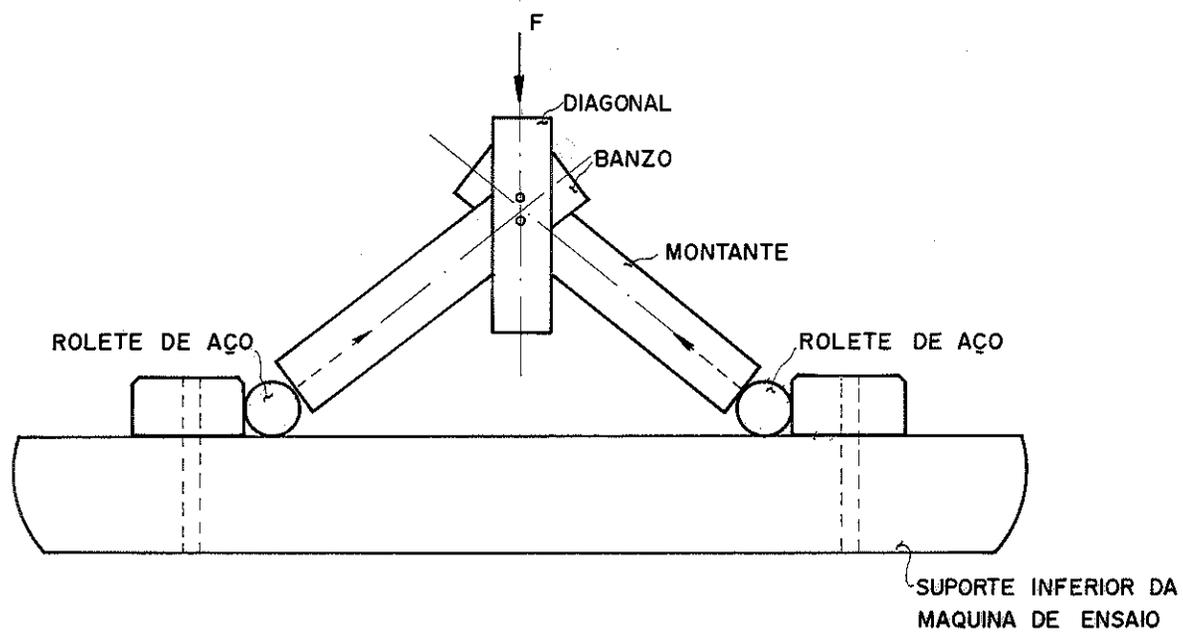


Fig. 6.5.15 - Carga e apoios

## 7. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 7.1 - Generalidades

Serão apresentados somente os dados necessários e suficientes para a discussão de forma compactada, preferencialmente em gráficos. Os outros dados obtidos na experimentação serão omitidos pelo grande volume que representam; estão arquivados em fitas e em gráficos. Foram compilados aproximadamente 15000 dados.

Os resultados serão discutidos na ordem cronológica dos ensaios. A experimentação do modelo foi realizada em duas etapas. A primeira com ligações feitas através de dois parafusos de aço; a segunda com ligações feitas através de duas cavilhas partidas de Eucalipto Citriódora. Para os dois tipos de ligações usaram-se os mesmos furos, ou seja, após o ensaio não destrutivo do modelo para fusado, os parafusos foram substituídos pelas cavilhas.

Para efeito comparativo adotou-se o nível de carregamento correspondente a 9,36 kN, ou seja, compararam-se os deslocamentos e os esforços para o modelo carregado com duas cargas 9,36/2 kN (4,68 kN) espaçadas de 1 m em posições sucessivas ao longo do modelo. A posição das cargas é indicada para cada comparação, fig. 7.1.1.

A análise estatística aplicada seguiu o mesmo procedimento de GESUALDO (1985) empregando programa computacional implantado no microcomputador Hewlett Packard modelo 9825 T.

Conforme pode ser observado neste trabalho, foram desprezados os efeitos da direção entre fibras das peças interligadas, ou seja, o cálculo das ligações considera a mesma capacidade de carga, independentemente da direção do esforço e/ou das fibras. A inclusão desta variação tornaria o problema ainda mais complexo, para melhoria de precisão pouco significativa, conforme será mostrado.

Para quantificar esta variação foram montadas duas séries especiais de ensaios, descritas no item seguinte.

### 7.2 - Variação da Direção das Fibras

A maioria dos pesquisadores já citados estudou as liga-

ções pregadas, não considerando a variação da direção entre fibras. BOYD, 1959 (apud RODDA, 1967) comenta que a influência da direção das fibras depende das dimensões da área de contato para transmissão dos esforços, quanto menor a área de contato, menor é a influência; no caso específico dos pregos de pequeno diâmetro confirma-se

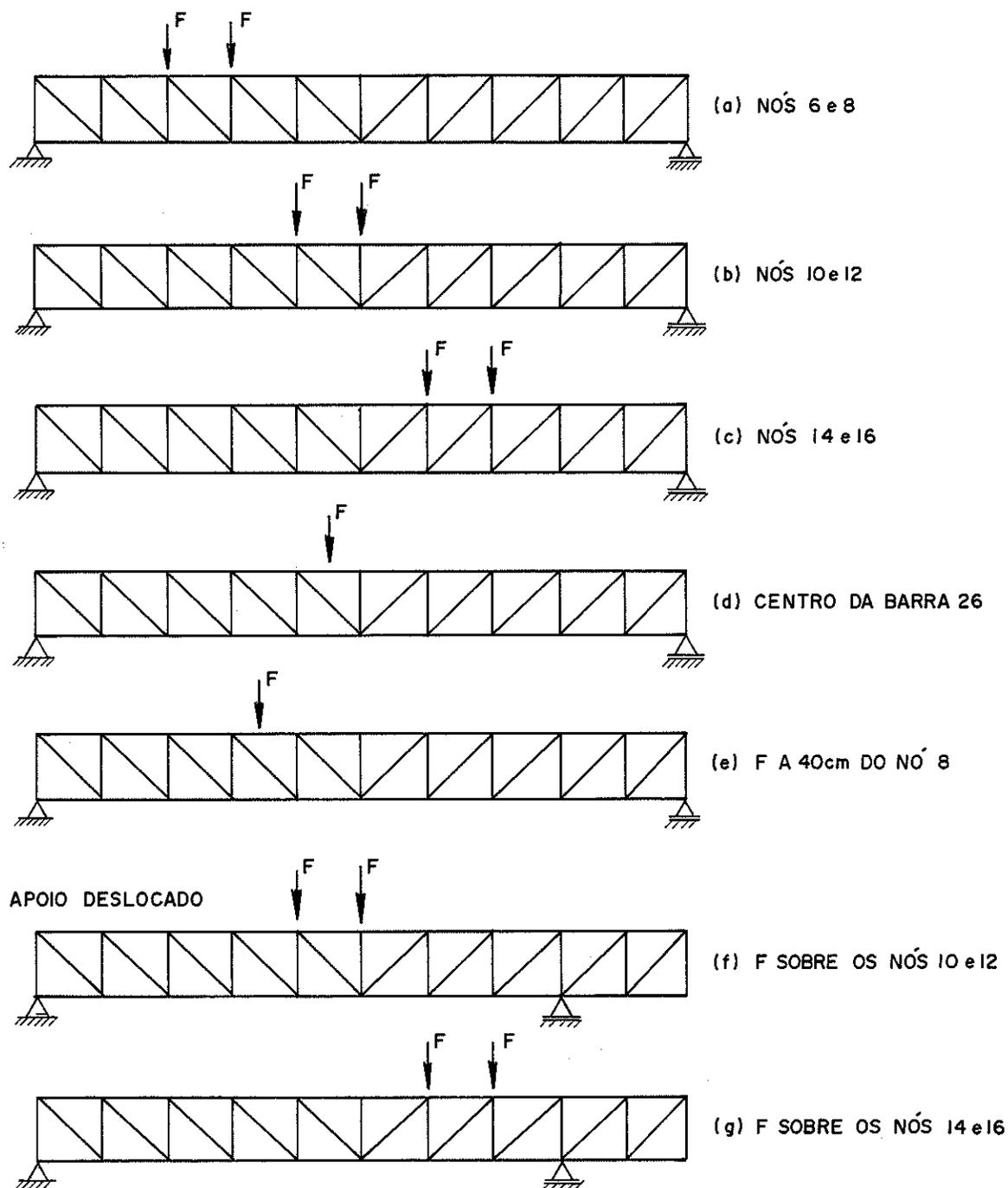


Fig. 7.1.1.- Posicionamento das cargas

experimentalmente esta evidência, podendo-se confundir a resistência das ligações pregadas entre peças paralelas ou perpendiculares entre si.

Para avaliar esta influência para as ligações cavilhadas fez-se experimentação em corpos de prova do tipo descrito no item 6.3.2. Esta experimentação consistiu de duas séries de ensaios.

A primeira série foi constituída por quatro corpos de prova, com duas cavilhas, retirados de uma mesma peça de madeira, com tensão de ruptura à compressão paralela às fibras igual a  $5,35 \text{ kN/cm}^2$ .

Para cada posição de fibras foram montados dois corpos de prova com cavilhas de diâmetro 13 mm e 19 mm, conforme esquematizado na fig. 7.2.1.

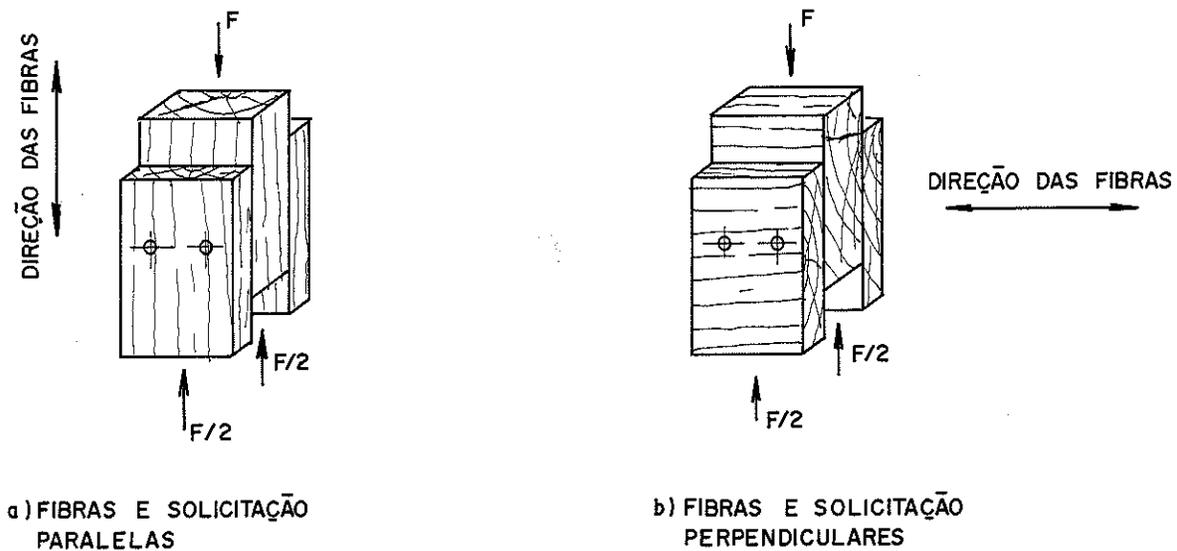


Fig. 7.2.1 - Influência da direção das fibras em relação à solicitação

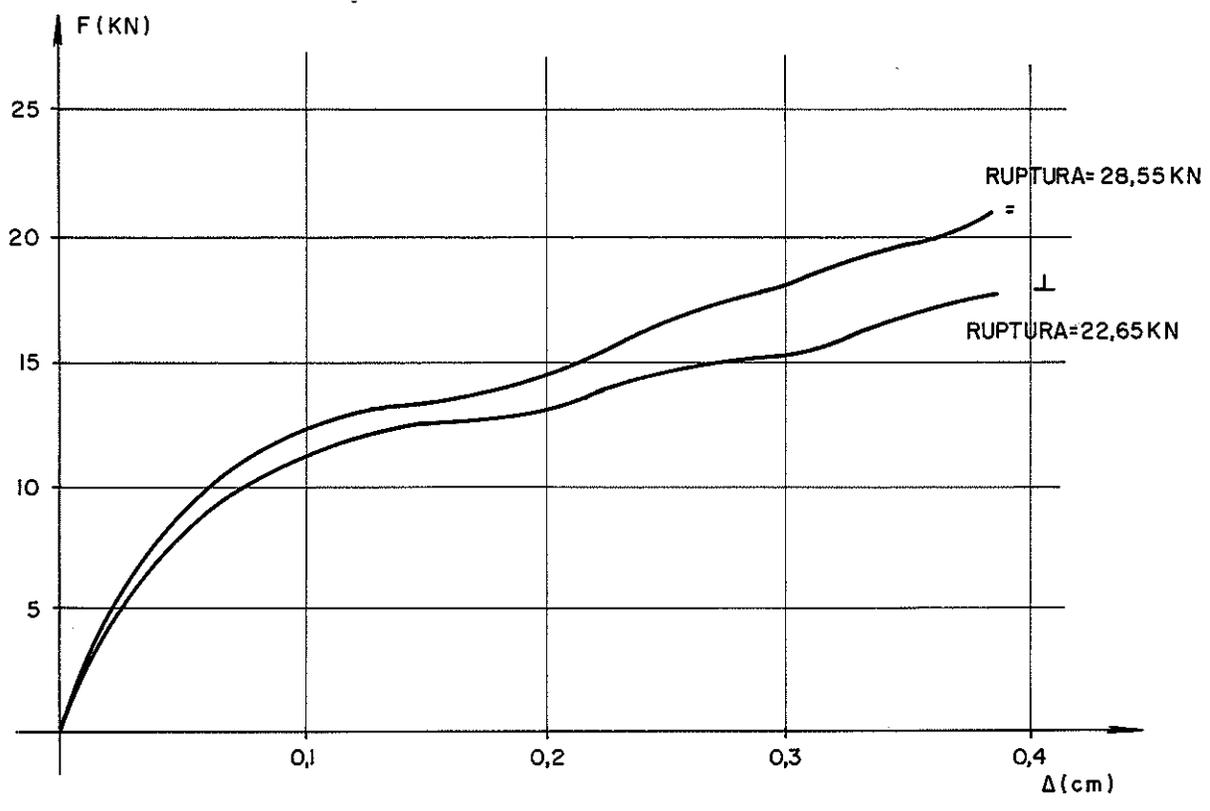


Fig. 7.2.2 - Resultados de ensaios -  $\phi = 13$  mm

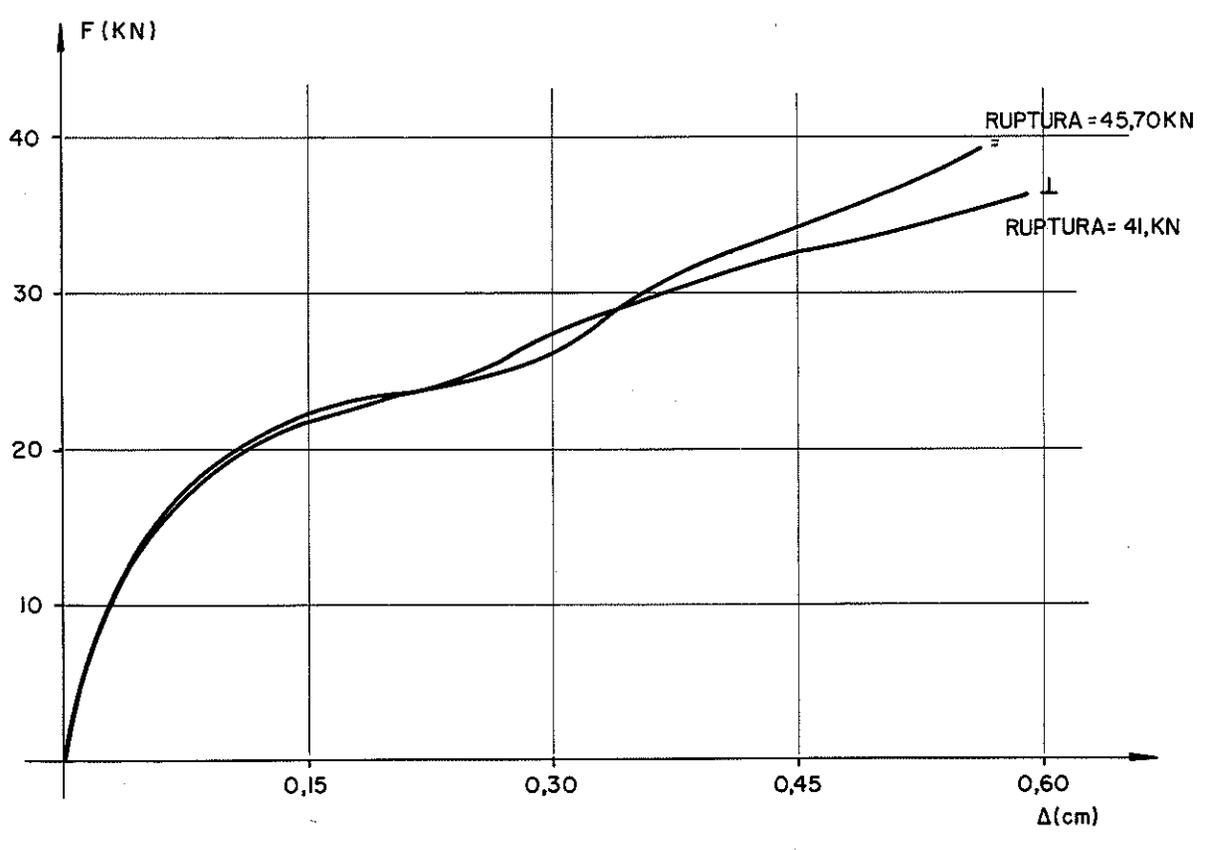


Fig. 7.2.3 - Resultados de ensaios -  $\phi = 19$  mm

Nos dois casos ficou evidente que a influência da direção das fibras é mais significativa quanto maior é a carga aplicada (maior deslocamento). Para deslocamento relativo  $\Delta = 0,2$  cm a relação de cargas é aproximadamente 10%, para cavilhas de diâmetro 13 mm, e para diâmetro 19 mm, a variação de 10% ocorre para  $\Delta$  em torno de 0,5 cm. Em ambos os casos a variação de 10% acontece para deslocamentos bastante grandes, em relação às cargas de trabalho, podendo, portanto, confundir a capacidade de carga para ligações de fibras paralelas ou perpendiculares.

A segunda série de ensaios constou de oito corpos de prova com variação da direção entre fibras, desde  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , incluindo a situação de fibras paralelas e carga perpendicular às fibras (fig. 7.2.1.b), conforme se esquematiza na fig. 7.2.4.

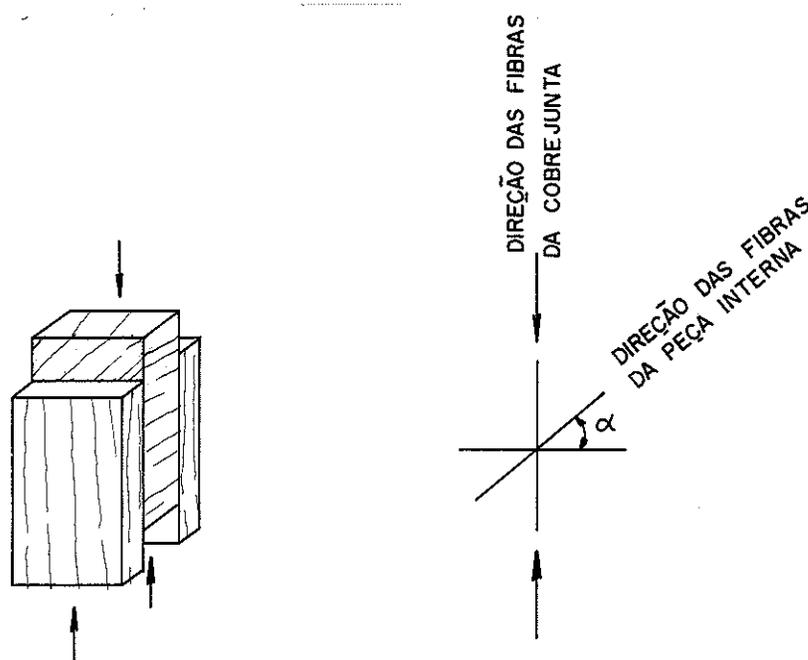


Fig. 7.2.4 - Variação da direção das fibras

Fez-se a variação de  $\alpha$  para os valores  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $0^\circ$  com carga perpendicular. Todos os corpos de prova foram montados com duas cavilhas de diâmetro igual a 13 mm e espessura das peças igual a 5 cm.

As características físicas e mecânicas da madeira, Peroba Rosa, da barra usada nos corpos de prova foram: umidade 12%, massa específica  $0,78 \text{ g/cm}^3$  e tensão de ruptura à compressão paralela  $5,03 \text{ KN/cm}^2$  - valores médios.

A fig. 7.2.5 reúne todos os resultados dos oito corpos de prova ensaiados, através da relação carga-deslocamento.

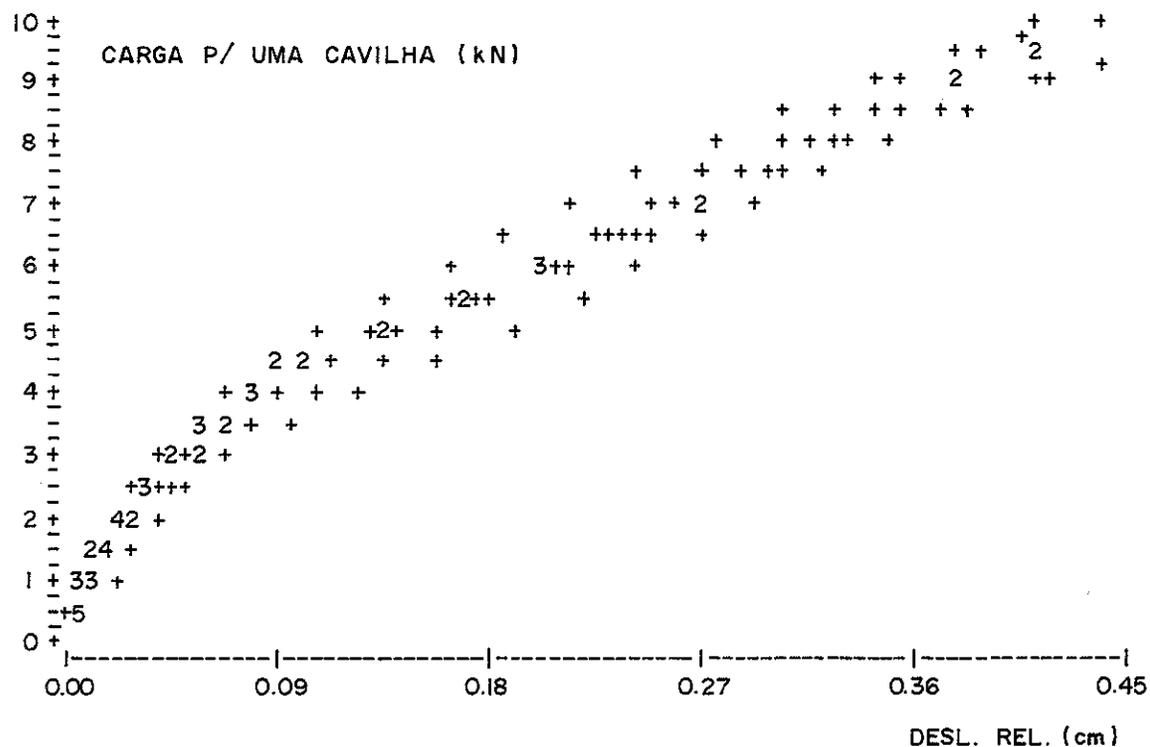


Fig. 7.2.5 - Resultados: carga-deslocamento

Por análise de variância constatou-se que há grande evidência (38%) do ângulo  $\alpha$  não influenciar na capacidade de carga das ligações cavilhadas com as características apresentadas. Por análise de regressão, uma expressão do tipo logarítmico apresenta um ajuste de 98%, com valor da distribuição de F igual a 2519 com 2 e 125 graus de liberdade. A expressão obtida foi:

$$\ell_n P = 2,736 + 0,575 \ell_n \Delta + 3,286 \cdot 10^{-4} \ell_n \alpha$$

Notar que o coeficiente de  $\ell_n \alpha$  é praticamente nulo. Confirma-se a pequena (desprezível) contribuição de  $\alpha$  pela análise do valor de t desta variável na regressão: 0,89 com 125 grau de liberdade, ou seja, há 38% de evidência de ser nula a contribuição desta variável. Assim: para este caso particular de ligação, a relação carga-deslocamento (para uma cavilha) escrita na forma exponencial é:

$$P = 15,43 \Delta^{0,575}$$

Em função dos resultados experimentais e de justificativas de ordem prática adotou-se a mesma capacidade de carga para as ligações, independentemente da direção entre as fibras e/ou entre as cargas. Podem ser citadas como justificativas de ordem prática os seguintes argumentos:

- Na Peroba Rosa as fibras da madeira são bastante retorcidas e mudam de direção ao longo da barra;

- Quando se executa uma ligação, dificilmente consegue-se uma furação perfeita de acordo com o desejado; acontecem ligeiras mudanças de posição e prumo;

- Nas estruturas, as ligações em geral, são solicitadas em diversas direções, de acordo com as barras que convergem para um determinado nó.

Os argumentos anteriores, quando associados, parecem ter maior influência que a própria mudança teórica da direção das fibras.

Reafirma-se que estas observações e conclusões são válidas para as ligações entre peças estruturais de madeira através de cavilhas. Estes resultados poderão não ser os mesmos para conectores mais rígidos, por exemplo, nos casos de parafusos, anéis metálicos, etc.

### 7.3 - Modelo Parafusado

O primeiro ensaio realizado foi com o modelo parafusado. Os primeiros carregamentos aplicados foram para acomodação da estrutura, eliminando-se as deformações por acomodação, efeito presente nas estruturas reais. Este efeito foi evitado para unificar os resultados e permitir comparações entre os diversos carregamentos.

Para facilitar as citações de carregamentos e leituras de deslocamentos, serão repetidas na fig. 7.3.1 algumas informações já prestadas.

Na fig. 7.3.1 os algarismos arábicos circunscritos por circunferências indicam o número de cada nó, a posição dos transdutores diferenciais (indutivos) estão indicadas por  $I_7, \dots, I_{19}$ .

O modelo parafusado foi ensaiado através de três repetições de carregamentos sobre os nós 6 e 8, três repetições sobre os nós 10 e 12 e um carregamento sobre os nós 14 e 16. Conforme já foi dito

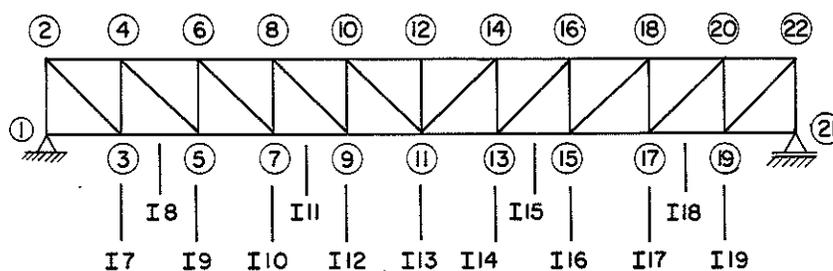


Fig. 7.3.1 - Nós e posições dos transdutores diferenciais ( $I_j$ )

cada carregamento foi constituído por somente duas cargas concentradas, sem representar qualquer simulação de carregamento real, uma vez que o objetivo foi avaliar o comportamento da estrutura em função das ligações. Também foram lidas as deformações específicas de extensômetros elétricos, nas posições indicadas na fig. 6.5.7. Totalizaram, para este ensaio, 4920 leituras.

Os resultados obtidos para o modelo parafusado serviram somente para comparação com os do modelo cavilhado, pois não foram determinadas as características das ligações parafusadas. Esta comparação será feita no item 7.5.

#### 7.4 - Modelo Cavilhado

##### 7.4.1 - Resultados Experimentais e Teóricos

Depois da realização dos ensaios no modelo parafusado, foram substituídos os parafusos pelas cavilhas partidas de Eucalipto Citriodora. A substituição foi feita com o modelo na vertical (posição de ensaio). Ocorreu um fato bastante interessante nesta operação de transferência de conectores. Observou-se que os nós do modelo sofreram deslocamentos para cima, influenciados pelo ajuste das cavilhas no furo. Isto reafirmou a eficiência das cavilhas quanto ao ajuste, ou seja, uma estrutura cavilhada mantém seus elementos em permanente contato, mesmo sem carregamento, e com isto, a resposta da estrutura para o carregamento é imediato. Além disto, a posi-

ção inicial da estrutura descarregada é a prevista, sem deslocamentos provenientes de folgas entre as peças estruturais e os conectores.

Para o modelo cavilhado foram realizados diversos carregamentos, variando a posição e a forma de aplicação da carga. O Anexo 02 reúne em gráficos a relação carga-deslocamento do modelo, alterando para cada carregamento o comportamento dos transdutores diferenciais  $I_9$  e  $I_{13}$ , ou  $I_8$  e  $I_{12}$ , ou  $I_8$  e  $I_{13}$ , e os deslocamentos dos nós da estrutura. Nos diagramas mostrando as leituras do par de indutivos é possível verificar como foi o histórico de cada carregamento. O par de indutivos escolhidos obedeceu ao simples critério do deslocamento de maior ordem de grandeza, sem irregularidades ou defeitos de funcionamento. Nos diagramas mostrando os deslocamentos dos nós, tem-se subdivisões em quatro etapas, por razões de clareza do desenho, evitando a sobreposição de linhas; na margem esquerda tem-se os deslocamentos em mm e na parte central os sucessivos valores do carregamento em kN (carga total - metade para cada nó indicado no rodapé e por dois traços em cada linha de subdivisão) - cada valor de carga impresso corresponde à respectiva linha de deslocamento.

Observam-se algumas falhas de leitura ou de mau funcionamento, para alguns pontos de leitura dos extensômetros indutivos.

Para ilustrar a descrição anterior, são apresentadas as fig. 7.4.1 e 7.4.2 referentes a um caso de carregamento da estrutura com nós cavilhados e cargas aplicadas sobre os nós 10 e 12. Neste caso, a primeira etapa de carga foi de 0 a 6,24 kN, com leituras sucessivas para cargas iguais a 3,12 kN, 4,68 kN e 6,24 kN (indicadas na parte central da fig. 7.4.2. A estrutura foi descarregada até atingir a carga de 3,12 kN, sendo novamente carregada até 10,92 kN, com leituras a cada 1,56 kN. Finalmente foi totalmente descarregada, registrando-se valores residuais de flechas.

Foram adotados diversos tipos de sequência de carregamento, ou seja, diversas formas de aplicação de carga e descarga, incluindo a recomendação da norma DIN 1052 (apud MUÑOZ, 1979) para ensaios de ligações, onde são recomendadas treze repetições para a intensidade de carga aproximadamente igual à admissível e descarga até 25% desta carga, ver páginas 169).

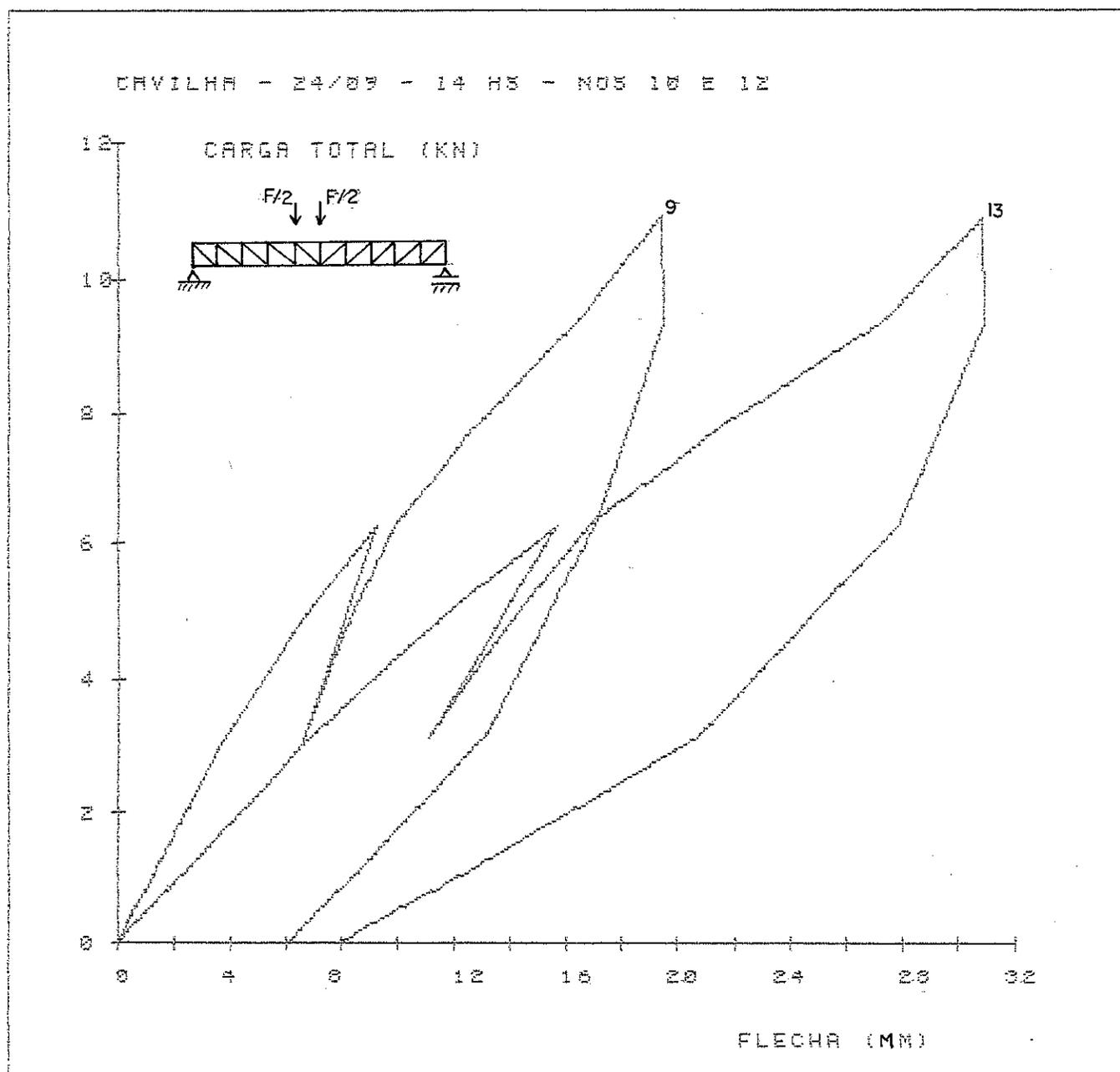


Fig. 7.4.1 - Relação carga-flecha para os LVDT 19 e 113

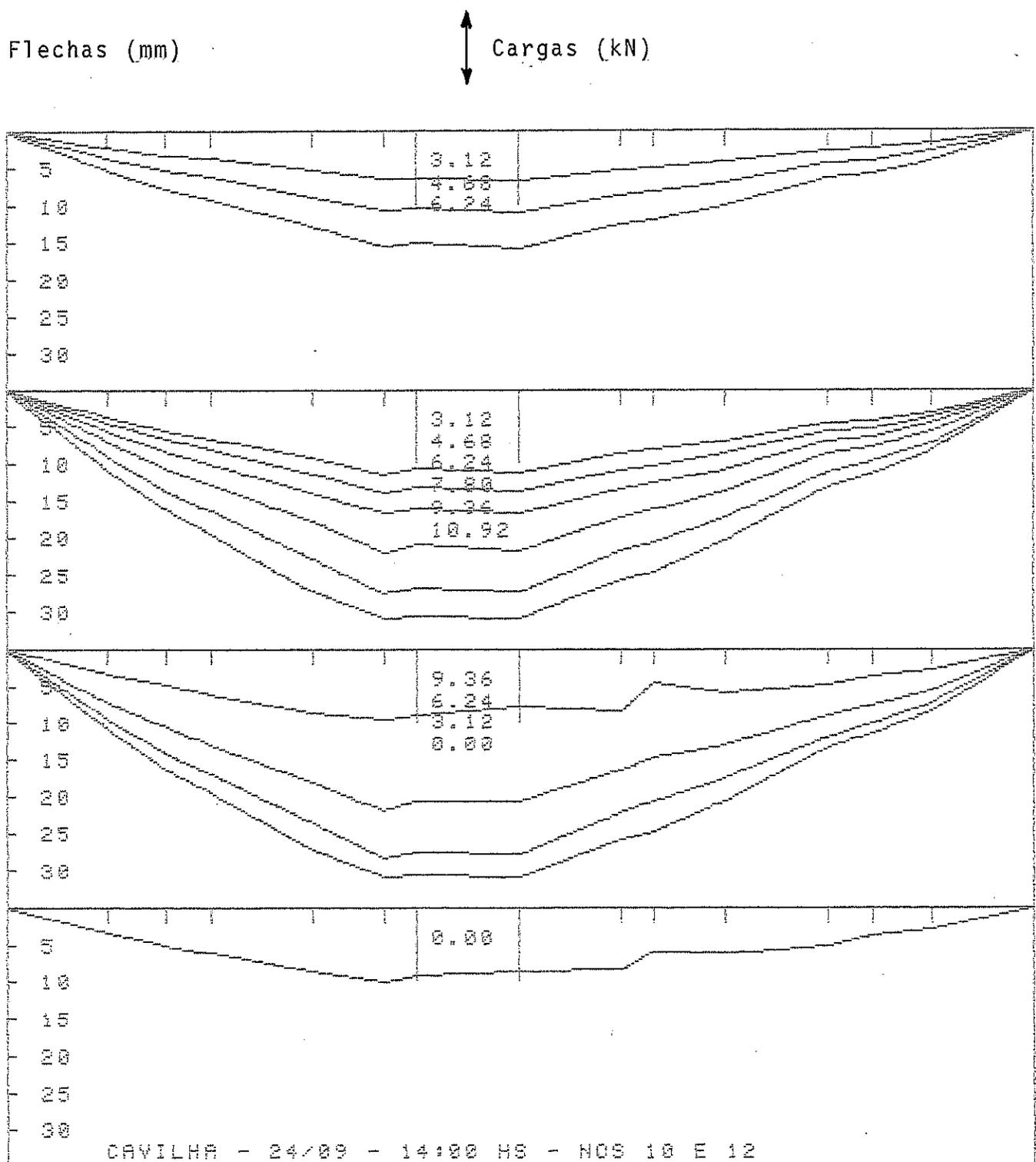


Fig. 7.4.2 - Flechas ao longo do vão.

Nos gráficos do Anexo 02 verifica-se a não interferência dos ciclos ou formas de carregamentos no comportamento global da estrutura, assim como para ligações isoladas ensaiadas com carregamentos semelhantes. Isto significa a existência de uma função única, para cada ligação, relacionando carga-deslocamento relativo. Cargas e descargas produzem somente alterações para cargas inferiores às envolvidas no fenômeno. Outra constatação é um aumento de rigidez (ou módulo de deformação tangente na retomada do carregamento, conforme se ilustra na fig. 7.4.3.

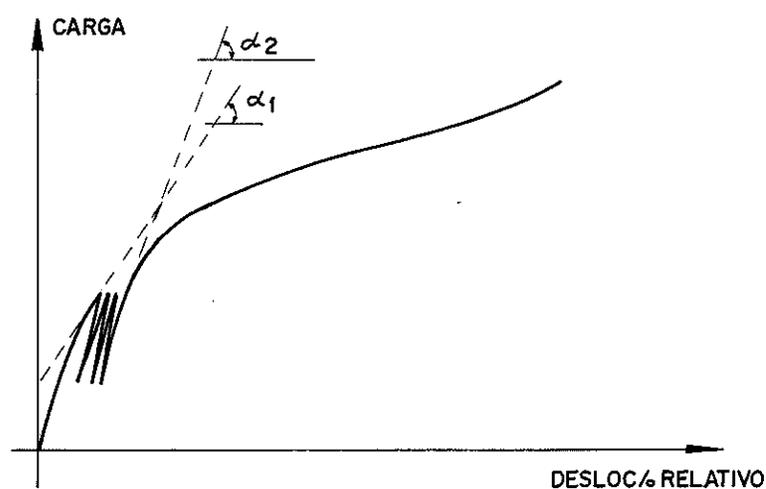


Fig. 7.4.3 - Efeito da carga e descarga

As figs. 7.4.4 a 7.4.9 mostram as elásticas experimentais e teóricas. As elásticas experimentais correspondem àquelas obtidas nos ensaios; foram escolhidas para cada posição da carga a linha de menor deslocamento (A) e a de maior deslocamento (B) para a solicitação de 9,36 kN (4,68 kN por nó) para cargas sobre nós e 6,24 kN para carga concentrada ao longo da barra. Os valores máximos e mínimos correspondem respectivamente ao maior e menor valor de flecha alcançado nas diversas repetições de carregamentos.

As elásticas teóricas são aquelas obtidas através de cálculos considerando o modelo estrutural como pórtico deformáveis (C), como pórtico de nós rígidos (D) e como treliça (E).

O cálculo com nós deformáveis foi feito com o programa automatizado descrito no capítulo 5. As relações entre carga e deslo-

cimento das ligações do modelo usadas no cálculo, são descritas com detalhes no item 7.4.2 e apresentadas no Quadro 7.9.

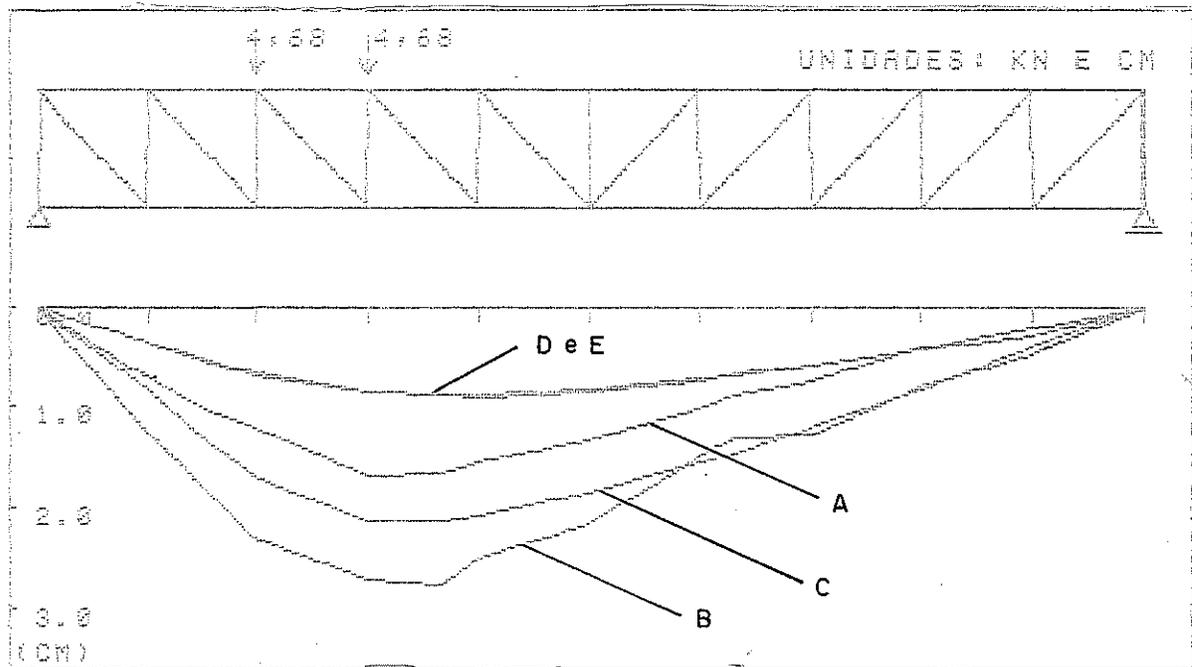


Fig. 7.4.4 - Cargas sobre os n̄os 6 e 8

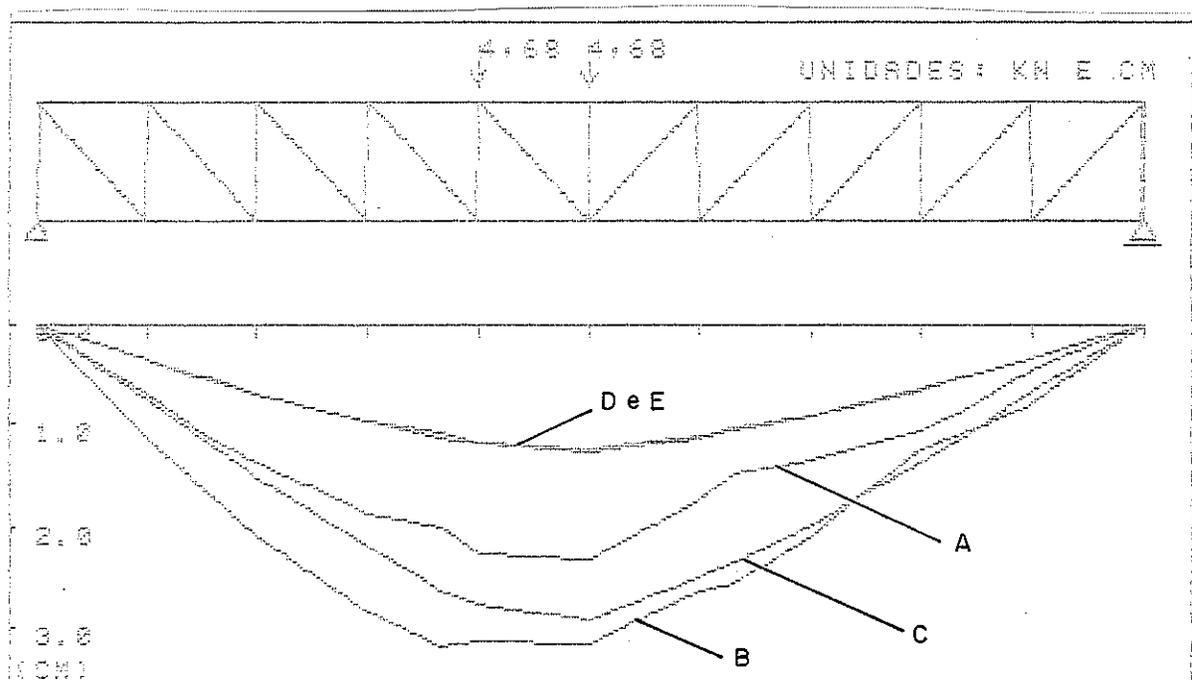


Fig. 7.4.5 - Cargas sobre os n̄os 10 e 12

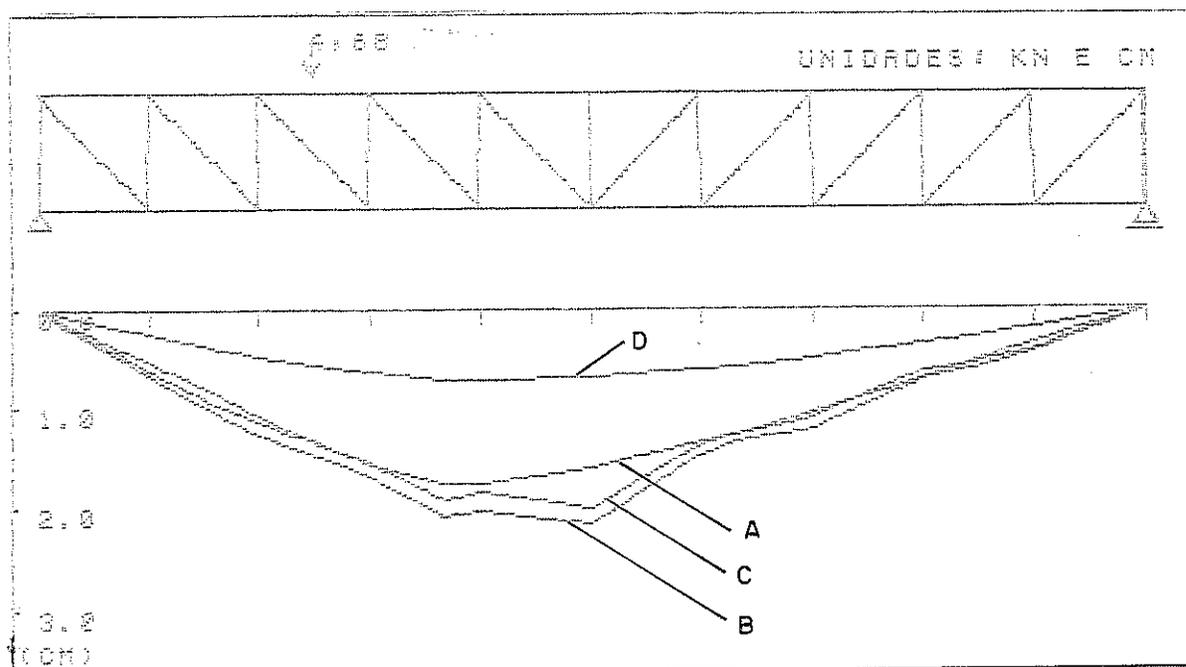


Fig. 7.4.6 - Carga no centro da barra 26 - 50 cm do n<sup>o</sup> 6

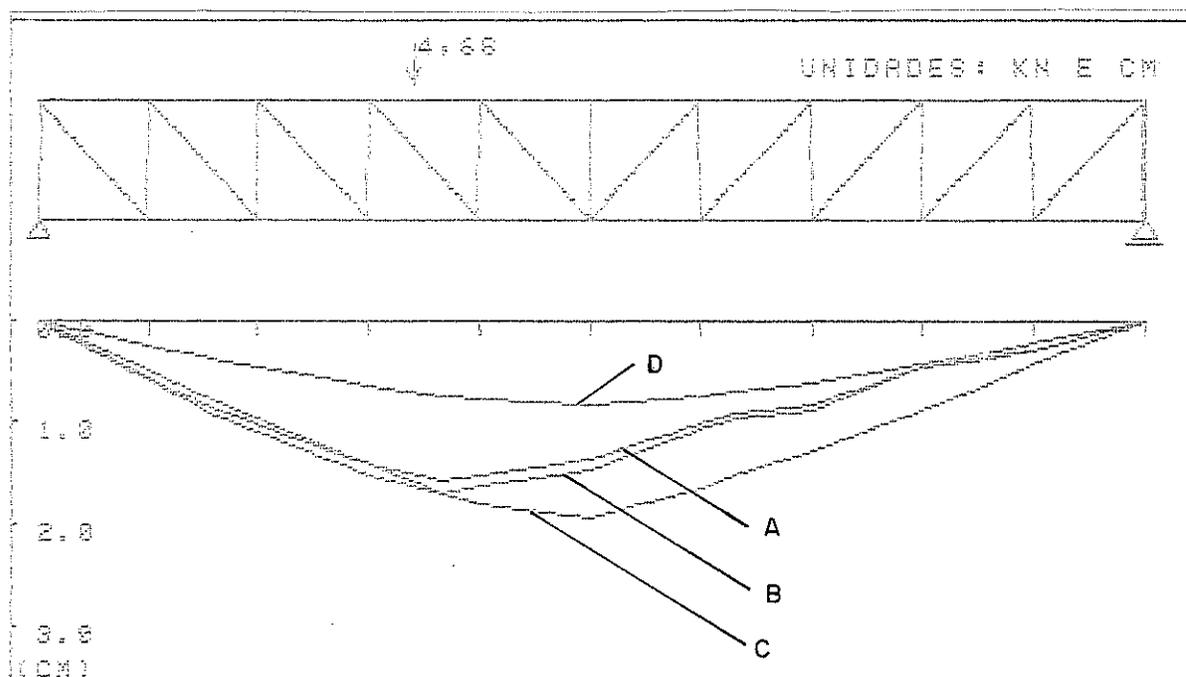


Fig. 7.4.7 - Carga a 40 cm do n<sup>o</sup> 8

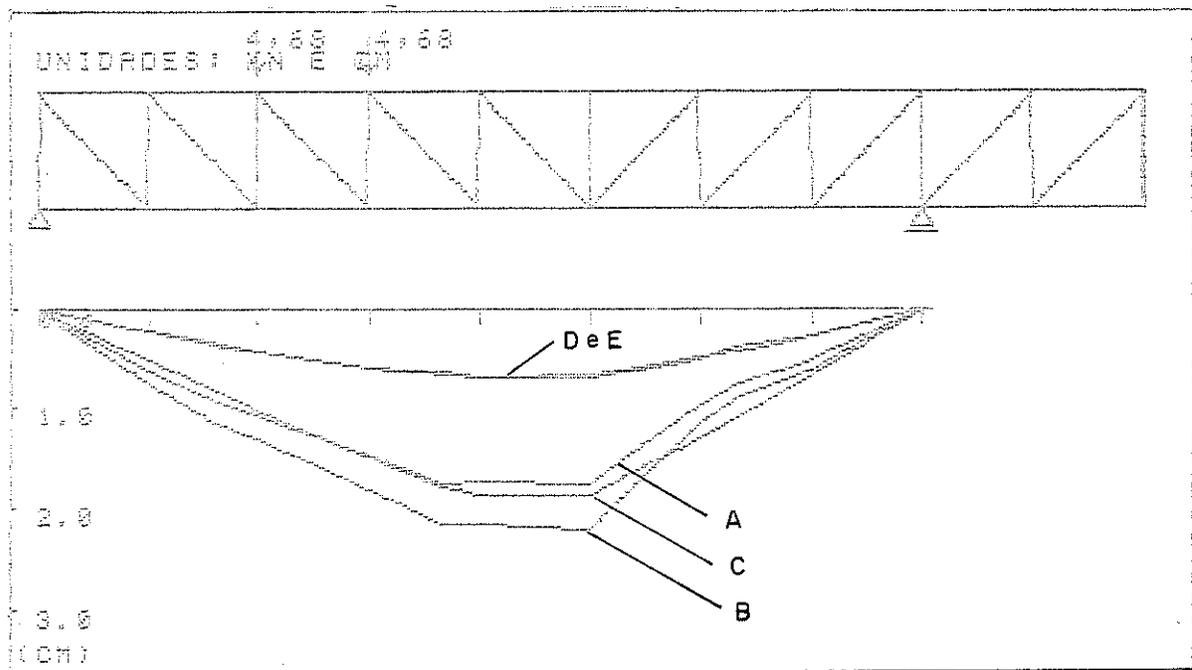


Fig. 7.4.8 - Carga sobre os nós 10 e 12 com apoio deslocado

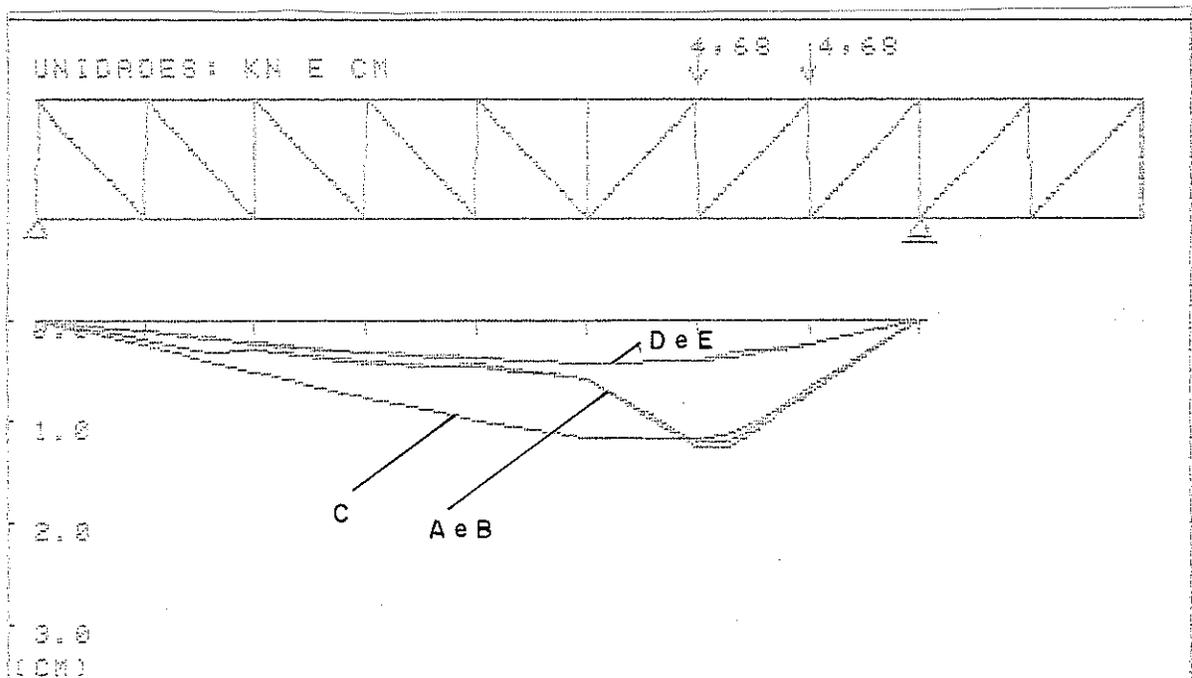


Fig. 7.4.9 - Carga sobre nós 14 e 16 com apoio deslocado

Para uma análise quantitativa dos dados, o Quadro 7.1 apresenta a relação entre os valores dos deslocamentos dos nós da estrutura analisada, já representados graficamente nas fig. 7.4.4 a 7.4.9. Os valores constantes desta tabela tomam como base os deslocamentos considerados usuais, ou seja, aqueles resultantes do cálculo da estrutura como treliça.

QUADRO 7.1 - Relação entre flechas da estrutura calculada (ou ensaiada) com os tipos de estruturas indicadas abaixo e calculada como treliça:

POSIÇÃO DA CARGA	COMP. COM	3	5	7	9	11	13	15	17	19
6 e 8	(A)	1,99	1,74	1,92	1,71	1,58	1,37	1,26	0,94	1,35
	(B)	3,40	3,32	3,11	2,79	2,55	2,01	2,14	1,89	2,15
	(C)	2,30	2,42	2,44	2,32	2,19	2,09	2,01	1,94	1,85
	(D)	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
10 e 12	(A)	1,92	1,93	1,93	1,92	1,85	1,55	1,46	1,57	1,31
	(B)	3,10	2,96	2,92	2,67	2,54	2,34	2,26	1,86	2,34
	(C)	2,04	2,14	2,25	2,35	2,34	2,24	2,14	2,05	1,95
	(D)	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
Apoio deslocado - nós 10 e 12	(A)	2,67	2,42	2,45	2,44	2,54	1,90	2,40		
	(B)	3,23	2,96	3,03	3,04	3,18	2,28	2,81		
	(C)	2,18	2,32	2,48	2,64	2,68	2,58	2,45		
	(D)	0,98	0,98	0,99	0,98	0,98	0,99	0,99		
Apoio deslocado - nós 14 e 16	(A)	1,59	1,30	1,28	1,12	1,85	1,90	3,60		
	(B)	1,63	1,33	1,30	1,14	1,37	3,04	3,77		
	(C)	2,11	2,23	2,35	2,49	2,68	2,87	2,89		
	(D)	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98		

Obs: (A) modelo cavilhado com mínimos deslocamentos

(B) modelo cavilhado com máximo deslocamento

(C) pórtico com nós deformáveis

(D) pórtico com nós rígidos

(\*) equipamento de leitura anômalo

O Quadro 7.2 contém as relações entre os deslocamentos mínimos e máximos, respectivamente, obtidos no ensaio do modelo cavilhado e os deslocamentos obtidos com o programa automatizado.

QUADRO 7.2 - Relação entre as flechas experimentais e flechas calculadas

POSIÇÃO DA CARGA	NÓS	3	5	7	9	11	13	15	17	19	VALOR MÉDIO
6 e 8	Min.	0,87	0,72	0,79	0,74	0,72	0,66	0,62	0,48	0,73	0,73
	Max.	1,48	1,37	1,28	1,20	1,17	0,96	1,07	0,97	1,16	1,21
10 e 12		0,94	0,90	0,86	0,82	0,79	0,69	0,68	0,76	0,67	0,79
		1,52	1,38	1,30	1,14	1,08	1,04	1,05	0,91	1,20	1,21
6,24 kN a 40 cm do nó 8		1,17	1,05	1,00	0,83	0,70	0,61	0,63	0,50	0,66	0,83
		1,24	1,11	1,07	0,89	0,75	0,66	0,68	0,53	0,70	0,85
6,24 kN a 50 cm do nó 10		1,17	1,06	0,98	1,05	1,25	1,02	1,05	0,91	1,19	1,10
		1,29	1,17	1,06	1,15	1,36	1,10	1,15	1,03	1,30	1,20
Apoio deslocado no 10 e 12		1,23	1,04	0,99	0,92	0,95	0,73	0,98			0,98
		1,48	1,28	1,22	1,15	1,19	0,88	1,15			1,19
Apoio deslocado no 14 e 16		0,76	0,58	0,54	0,45	0,51	1,01	1,25			0,73
		0,77	0,59	0,55	0,46	0,51	1,06	1,30			0,75

Nota: os números inteiros neste Quadro referem-se ao número do nó do modelo

Nestes dados existe uma sistemática anomalia nos dados referentes à flechas do nó 17. Provavelmente a falha deve ser devida ao equipamento de leitura naquele ponto.

A variação dos resultados é significativa. Nas comparações do Quadro 7.2 (flechas experimentais / flechas teóricas) obtêm-se 0,45 como limite inferior e 1,52 como limite superior, ou seja, aproximadamente  $\pm 55\%$  de variação. A média global, de todos

os dados individuais (100 observações) corresponde a um número esperado ideal igual a 0,98 (aproximadamente um) o que mostraria um perfeito ajuste entre resultados experimental e de cálculo.

Apesar desta média ser "ótima" não se pode considerar um resultado plenamente satisfatório, pois há um grande desvio padrão para o conjunto de dados. Uma das possíveis justificativas para esta variação de resultados pode ser atribuída à sensibilidade da madeira às mudanças climáticas, conforme já constatado experimentalmente no LaMEM.

Considerando a dificuldade de se controlar experimentalmente todos os parâmetros do problema, e considerando o "comportamento médio" do modelo, parece bastante aceitável adotar o cálculo teórico usado como um procedimento muito mais coerente com a realidade, em relação ao cálculo convencional sem considerar as deformações das ligações. Basta fazer uma comparação numérica: sem considerar as deformações das ligações obtêm-se flechas experimentais até 3,77 vezes maiores que as calculadas (Quadro 7.1), ou no mínimo 1,12 vezes maior, enquanto que usando o cálculo sugerido neste trabalho obtêm-se flechas no máximo 1,52 vezes maior, ou 0,45 vezes menor, restringindo-se o intervalo de variação.

Adotando-se o cálculo teórico usado como aceitável, pode-se chegar a resultados comparativos interessantes, relacionando as flechas teóricas do modelo calculado com as ligações deformáveis, com as flechas do modelo calculado com ligações rígidas, conforme se apresenta no Quadro 7.3.

QUADRO 7.3 - Comparação entre os resultados de cálculo

POSIÇÃO DA CARGA \ NÓS	3	5	7	9	11	13	15	17	19
6 e 8	2,30	2,42	2,44	2,32	2,19	2,09	2,01	1,94	1,85
10 e 12	2,04	2,14	2,25	2,35	2,34	2,24	2,14	2,05	1,95
6,24 a 40 cm do Nº 8	1,99	2,10	2,20	2,32	2,33	2,21	2,11	2,04	1,92
6,24 kN a 50 cm do Nº 10	2,13	2,25	2,41	2,42	2,27	2,17	2,08	2,00	1,70
Apoio deslocado 10 e 12	2,18	2,32	2,48	2,64	2,68	2,58	2,45		
Apoio deslocado 14 e 16	2,11	2,23	2,35	2,49	2,68	2,87	2,89		

NOTA: os números inteiros neste Quadro referem-se ao número do nó do modelo

Os valores apresentados no Quadro 7.3 tem média aritmética igual a 2,26, significando que as flechas "reais" são, em média, 126% maiores que as calculadas pelos processos convencionais (pórtico ou treliça) - altamente significativas.

#### 7.4.2 - Carga-Deslocamento das Ligações

Para caracterizar a relação carga-deslocamento das ligações do modelo foram feitos ensaios com as próprias ligações retiradas do modelo e com ligações montadas com partes das barras do modelo, chamadas por ensaios complementares no item 6.6.

Distinguem-se, entre as ligações do modelo, três tipos básicos de ligações: as dos apoios (fig. 7.4.10a), as de emendas dos banzos (fig. 7.4.10b) e as do nó típico (fig. 7.4.10c).

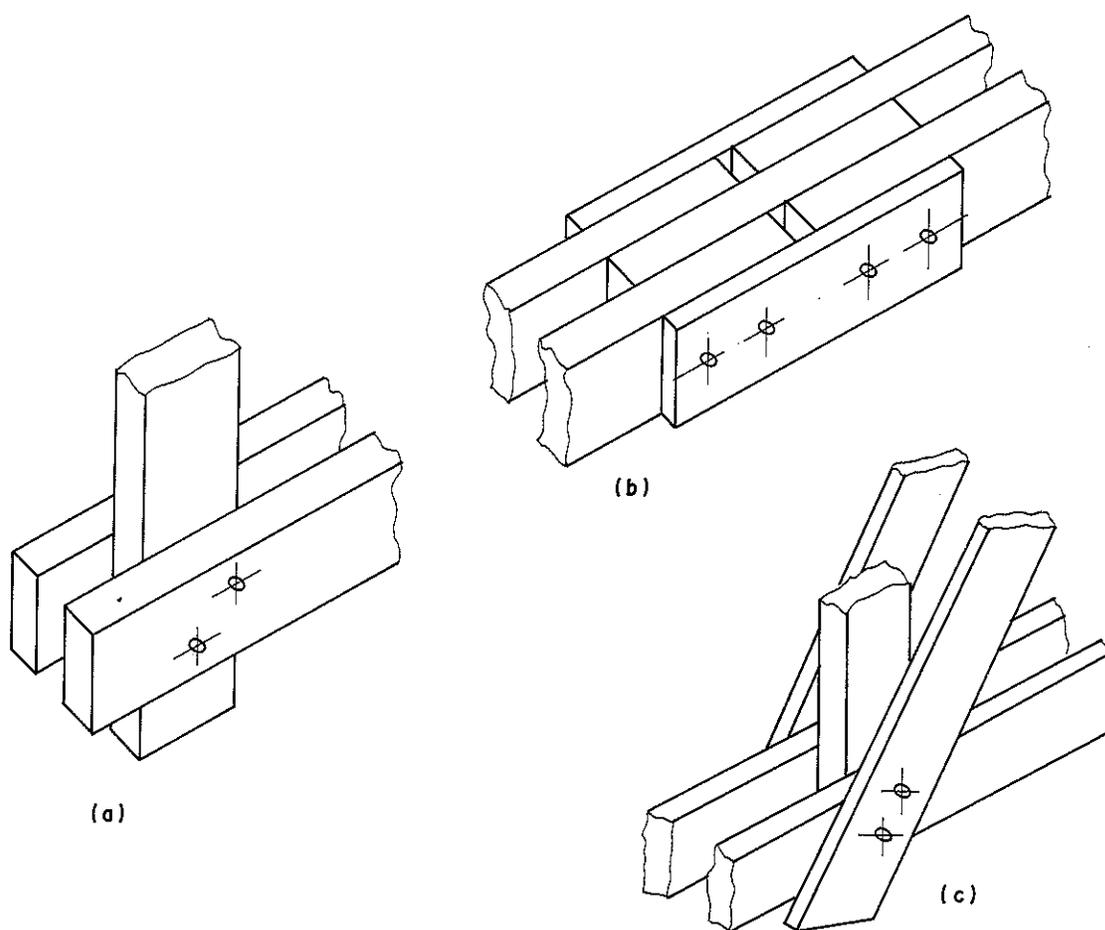


Fig. 7.4.10 - Tipos de ligações do modelo

As ligações dos apoios designadas na fig. 6.5.10 por  $N_1$  e  $N_2$  envolvem três peças: uma do montante e duas do banzo inferior. As três peças possuem a mesma largura. As fibras são perpendiculares entre si. As ligações ensaiadas foram as próprias do modelo (duas - dois apoios) e mais duas com fibras paralelas montadas com peças retiradas do modelo, das respectivas barras dos apoios.

Para análise de regressão aplicada aos dados de cada ensaio na relação carga-deslocamento resultou o Quadro 7.4.

QUADRO 7.4 - Relação  $P = k \Delta^C$  para as Ligações de Apoio

TIPO DE LIGAÇÃO	$P = k \Delta^C$	$P_{ruptura}$
Apoio esquerdo - n $\bar{o}$ (1)		
- ligação paralela	$P = 25,53 \Delta^{0,51}$	16,55
- ligação perpendicular	$P = 33,65 \Delta^{0,68}$	18,10
Apoio direito - n $\bar{o}$ (2)		
- ligação paralela	$P = 32,77 \Delta^{0,55}$	18,20
- ligação perpendicular	$P = 233 \Delta^{1,30}$	15,30

NOTA: As cargas  $P$  e  $P_{rupt}$  são dadas em kN para uma cavilha e  $\Delta$  está em cm

As ligações do tipo da fig. 7.4.7b (emendas) foram designadas por  $E_{23}$ ,  $E_{28}$ ,  $E_{30}$ ,  $E_{33}$  e  $E_{40}$ , cujas posições no modelo são indicadas na fig. 6.5.10. A relação  $P = k \Delta^C$  de cada uma está indicada no Quadro 7.5.

QUADRO 7.5 - Relação  $P = k \Delta^C$  para as emendas dos banzos

LIGAÇÃO	$P = k \Delta^C$	$P_{ruptura}$
$E_{23}$	$P = 55,03 \Delta^{0,73}$	28,45
$E_{28}$	$P = 138,09 \Delta^{0,90}$	23,95
$E_{30}$	$P = 81,93 \Delta^{0,73}$	31,45
$E_{33}$	$P = 50,90 \Delta^{0,67}$	29,25
$E_{40}$	$P = 48,20 \Delta^{0,75}$	20,10

NOTA: As cargas  $P$  e  $P_{rupt}$  são em kN para uma cavilha e  $\Delta$  está em cm.

As ligações do nó típico do tipo indicado na fig.7.4.10c foram ensaiadas para os nós 5, 7, 8 e 15, sendo designadas, respectivamente, por  $N_5$ ,  $N_7$ ,  $N_8$  e  $N_{15}$  na fig. 6.5.10.

As figs. 7.4.11 a 7.4.14 mostram a relação carga-deslocamento destas ligações, para cada posição de leitura, indicadas por algarismos arábicos de 1 a 4, representando, respectivamente, os deslocamentos entre diagonal e montante na direção do montante (1), entre diagonal e banzo na direção da diagonal (2), entre banzo e montante na direção do montante (3) e entre banzo e montante na direção do banzo (4). Esta simbologia também é usada no Quadro 7.6. que reúne os coeficientes ( $K = P/\Delta$ ) de cada leitura anterior.

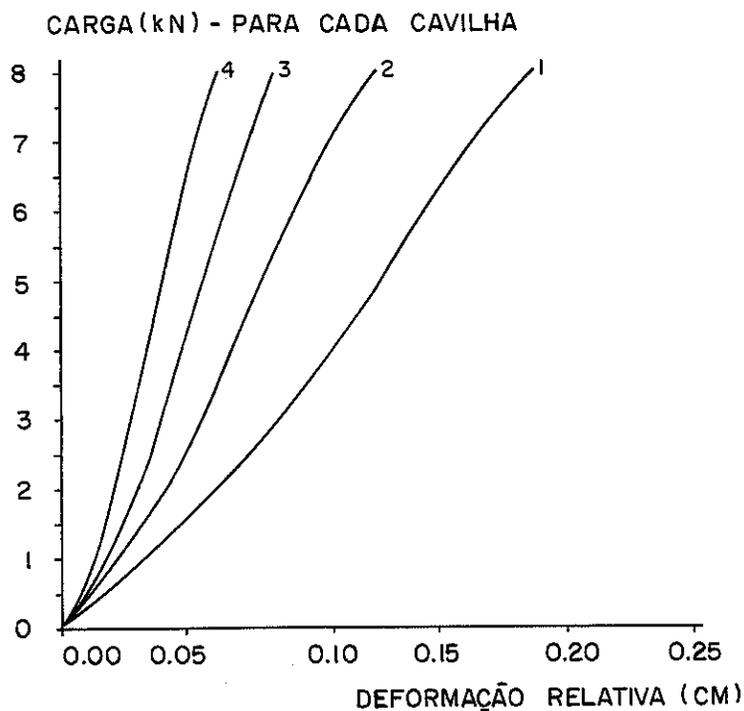
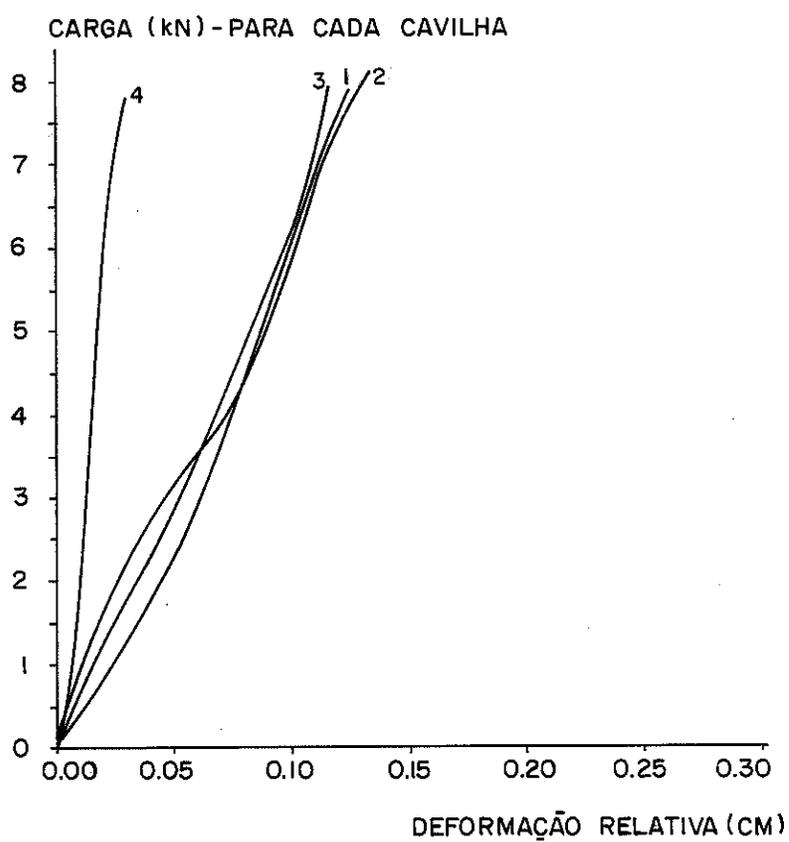
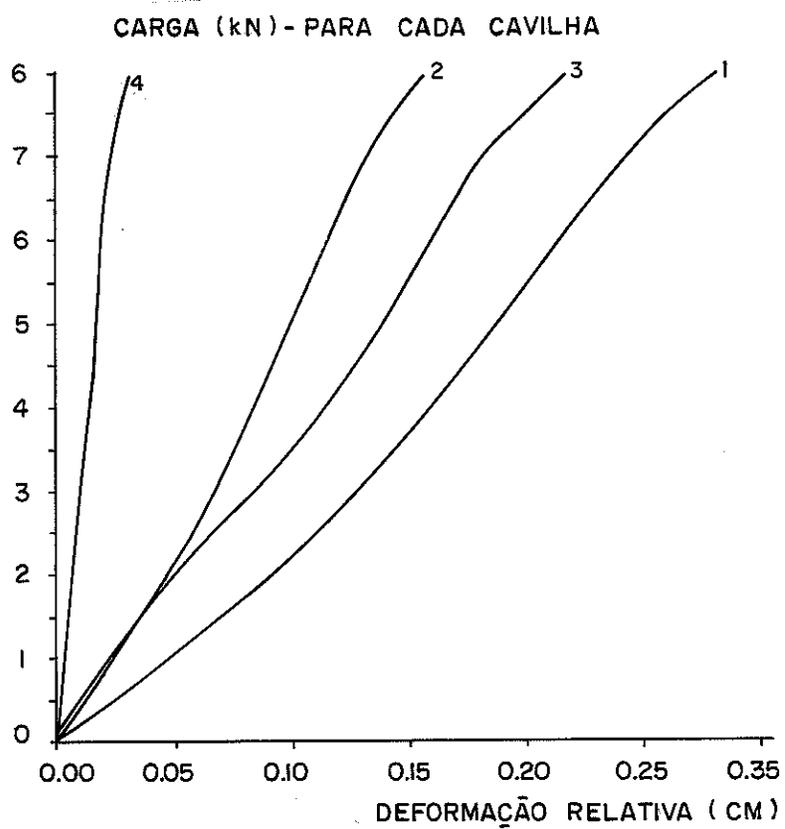
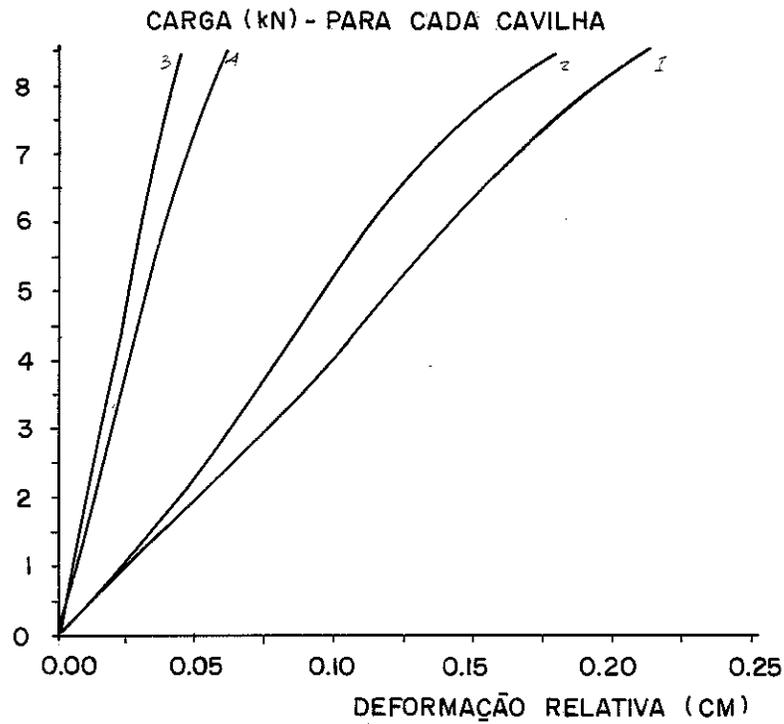


Fig. 7.4.11 - Ligação  $N_5$

Fig. 7.4.12 - Ligação N<sub>7</sub>Fig. 7.4.13 - Ligação N<sub>8</sub>

Fig. 7.4.14 - Ligação N<sub>15</sub>

QUADRO 7.6 - Coeficiente K para as ligações do nó típico para uma cavilha:  $K = P/\Delta$

Ligação Leitura	N <sub>5</sub>	N <sub>7</sub>	N <sub>8</sub>	N <sub>15</sub>	Média I	Média II
(1)	18,13	23,81	9,95 <sup>(*)</sup>	17,53	17,36	19,82
(2)	27,73	25,67	18,43	20,50	23,08	23,08
(3)	37,68	24,05	7,21 <sup>(*)</sup>	80,43 <sup>(*)</sup>	37,34	30,87
(4)	50,14	77,42	63,48	55,22	61,66	61,56
P <sub>Ruptura</sub> (kN)	13,23	13,80	21,38	13,15	13,14	

NOTAS: Os valores de K assinalados com (\*) correspondem a pontos sujeitos a alguma provável deficiência do equipamento de leitura. A média I corresponde à média total. A média II corresponde à média sem os pontos anômalos indicados (\*).

É interessante notar que aumentando o valor de K, mais rígida é a ligação, ou para o caso, menor é o deslocamento relativo entre as barras interligadas. Coerentemente com a análise teórica descrita no item 6.6, as maiores parcelas de carga são transferidas entre a diagonal e o montante, e entre a diagonal e o banzo. Comparativamente, a transmissão de carga entre o banzo e o montante na direção do montante é bastante pequena.

Para a análise dos dados será adotada a média II (expurgada). Porém, estas médias não parecem adequadas uma vez que representam a média entre os valores de K discretizados para cada ligação. Para evitar este inconveniente fez-se nova regressão linear retirando-se as leituras anômalas, obtendo-se um único valor (de todas ligações) representante de cada leitura, antes designada por médio. Estes valores de K e os respectivos coeficientes de correlação ( $R^2$ ) são mostrados no Quadro 7.7.

QUADRO 7.7 - Valores de K e  $R^2$

LEITURA	K	$R^2$ (%)
(1) diagonal/montante montante	16,45	88,02
(2) diagonal/banzo diagonal	19,42	89,56
(3) banzo/montante montante	27,07	86,70
(4) banzo/montante banzo	47,97	74,35

É curioso observar que o cociente entre as leituras (2) e (3) resulta 0,718, um valor muitíssimo próximo de  $\cos(45^\circ) = 0,707$ , significando que a carga (ou deslocamento) entre o montante e o banzo na direção do montante é a projeção da carga (ou deslocamento) entre a diagonal e o banzo na direção da diagonal.

A avaliação da relação carga-deslocamento das ligações é bastante complexa, pois nas estruturas têm-se ligações de diversas barras, em diferentes direções. Por isto, parece mais adequado estudar e ensaiar cada ligação de acordo com sua aplicação na estrutura, como foi feito para a ligação do nó típico do modelo.

Com o objetivo de comparar dados de ligações típicas e de ligações simuladas foram preparados oito corpos de prova, procurando-se representar a ligação entre montante e diagonal, fig. 7.4.15b e entre banzo e diagonal, fig. 7.4.15c.

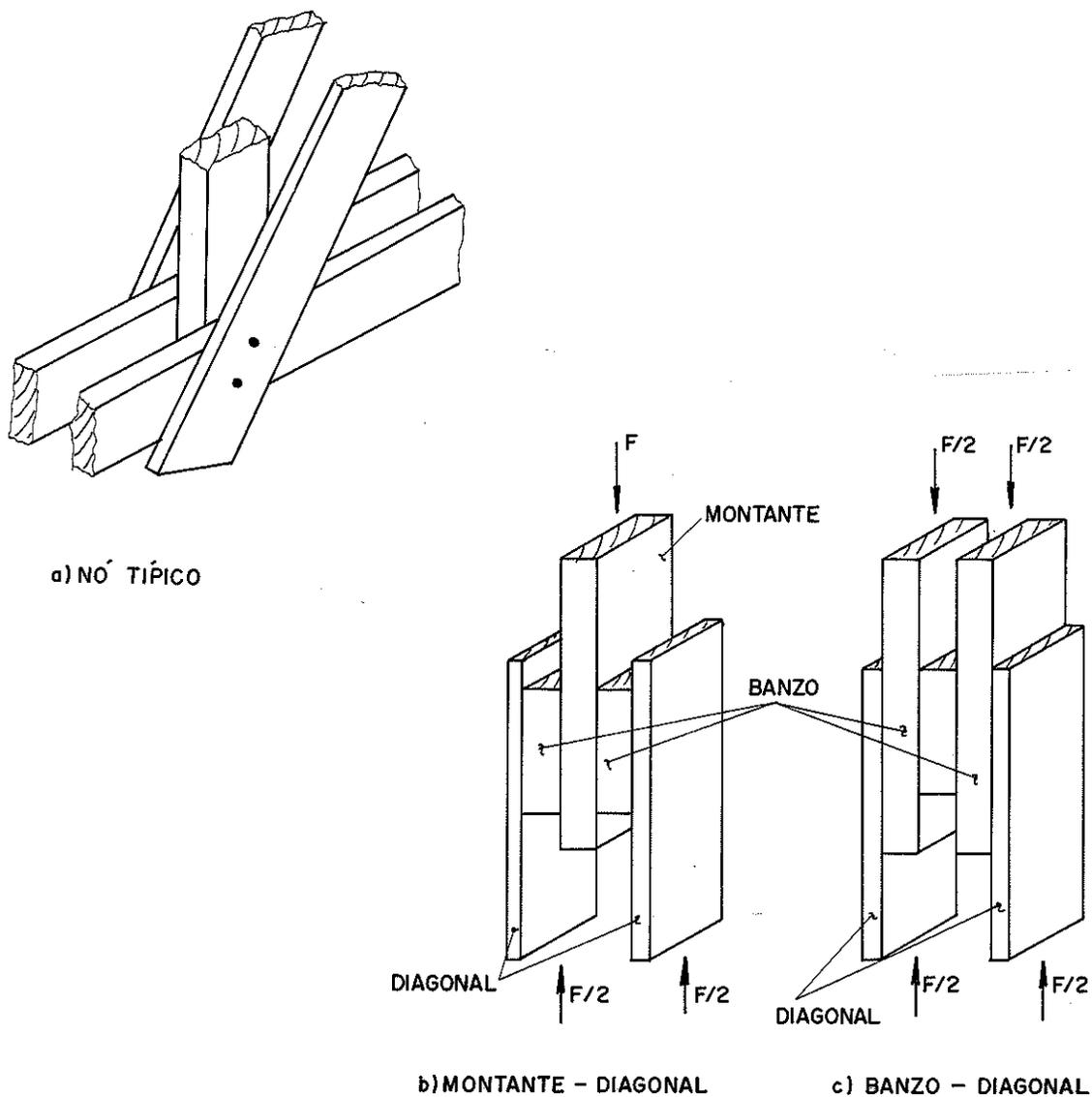


Fig. 7.4.15 - Ligações representativas do nó típico

A fig. 7.4.16 mostra através de gráfico os resultados obtidos nesta série de ensaios.

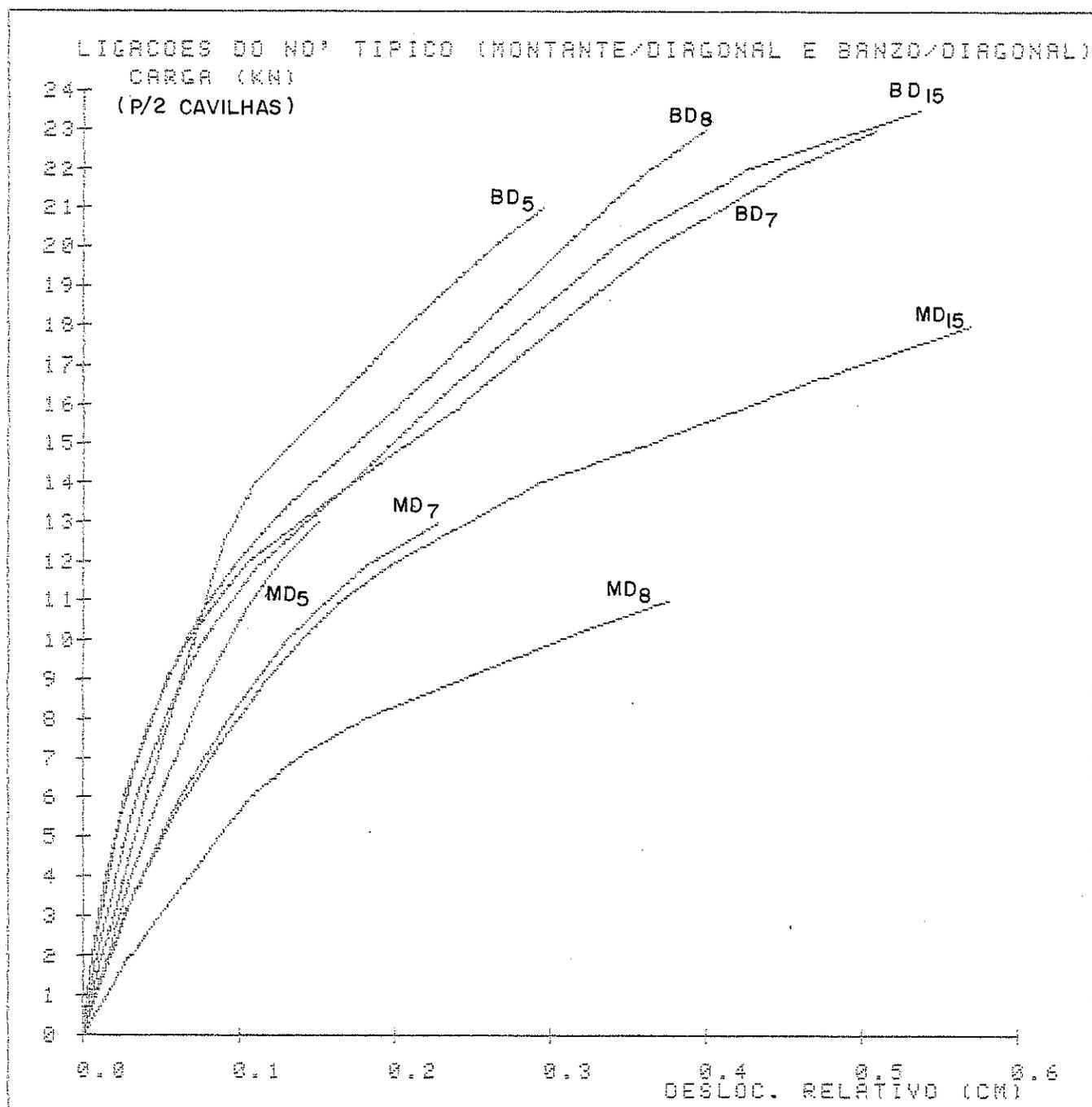


Fig. 7.5.16 - Ligações do nó típico: mont/diag e banzo/diag.

Pela comparação dos gráficos das fig. 7.4.11 a 7.4.14 com a fig. 7.4.16 fica nítida a diferença de rigidez entre as formas de ligações. Para uma carga de 8 kN a ligação possui a relação carga-deslocamento, ainda, praticamente linear para o primeiro caso, enquanto que para a segunda forma de ligação a relação é não linear.

A diferença de comportamento entre dois tipos de ligações é evidente, quando se analisa a distribuição de forças na cavilha. No primeiro tipo, a distribuição de forças (ou tensões) ocorre em três direções, causando um "auto-equilíbrio". No segundo tipo, especificamente para a ligação montante-diagonal fig. 7.4.15b), existe uma grande excentricidade entre os pontos de aplicação de forças, gerando uma sollicitação adicional altamente prejudicial, do tipo descrito no item 7.7.

O Quadro 7.8 acrescenta mais alguns dados relativos a estas ligações.

QUADRO 7.8 - Dados adicionais das ligações representativas do n<sup>o</sup> típico.

LIGAÇÃO	$P = k \Delta^c$	$R^2$ (%)	$P_{ruptura}$ (kN) (p/cada cavilha)
MD <sub>5</sub>	$P = 38,09 \Delta^{0,863}$	99	9,55
MD <sub>7</sub>	$P = 20,97 \Delta^{0,726}$	99	9,08
MD <sub>8</sub>	$P = 11,71 \Delta^{0,664}$	97	7,50
MD <sub>15</sub>	$P = 15,77 \Delta^{0,651}$	97	9,48
BD <sub>5</sub>	$P = 28,53 \Delta^{0,707}$	97	13,75
BD <sub>7</sub>	$P = 18,34 \Delta^{0,563}$	98	12,13
BD <sub>8</sub>	$P = 19,83 \Delta^{0,545}$	99	14,00
BD <sub>15</sub>	$P = 16,74 \Delta^{0,405}$	99	11,78

O Quadro 7.9 reúne as características das ligações usadas no cálculo de esforços e deslocamento do modelo, através do programa automatizado. Considerou-se a mesma relação  $P$  e  $\Delta$  para todas as ligações do n<sup>o</sup> típico, assim como para as emendas. Esta consideração está embasada na exposição de GESUALDO (1985 b), que con

cluiu ser pequena a influência das características mecânicas da madeira, na capacidade de carga das ligações cavilhadas. Sendo assim, adotou-se o valor médio obtido estatisticamente pela regressão do conjunto de dados dos corpos de prova de mesmas características.

QUADRO 7.9 - Relação  $P = k \Delta^c$  das ligações do modelo

LIGAÇÃO	K	c
apoio esquerdo n <sup>o</sup> 1	57,80	0,600
apoio direito n <sup>o</sup> 21	64,20	0,551
n <sup>o</sup> central n <sup>o</sup> 12	18,35	0,577
emendas	97,51	0,598
banzo/montante	27,07	1,000
banzo / diagonal	19,42	1,000

#### 7.4.3 - Aplicação do Módulo de Deformação das Ligações no Programa Automatizado

A relação carga - deslocamento (módulo de deformação) das ligações foi obtida através de ensaios em corpos de prova já descritos (fig. 7.4.10) com uma característica comum, ou seja o deslocamento relativo foi sempre medido entre as peças diretamente ligadas.

Como já foi dito, o programa automatizado foi desenvolvido com o emprego do processo dos deslocamentos. Com isto, foi considerado que toda barra possui três molas em cada extremidade. Assim um n<sup>o</sup> de estrutura fica genericamente representado conforme indica a fig. 7.4.17

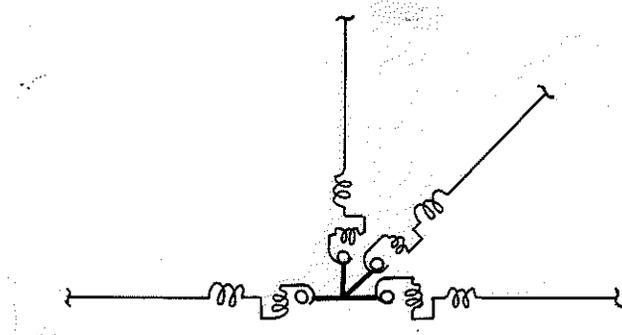


Fig. 7.4.17 - Representação esquemática de um nó

Representando o nó esquematizado na fig. 7.4.17 em dimensões reais, para efeito do programa automatizado, este nó é considerado como o mostrado na fig. 7.4.18.

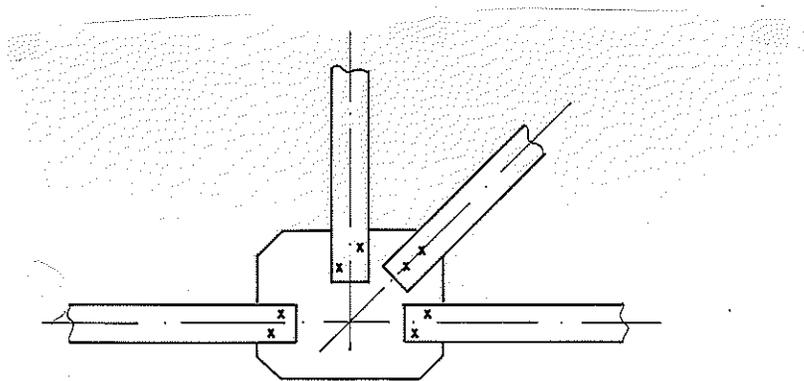


Fig. 7.4.18 - Nó considerado no programa automatizado

Fazendo-se a projeção deste nó na vertical ou horizontal, tem-se (na horizontal) a fig. 7.4.19

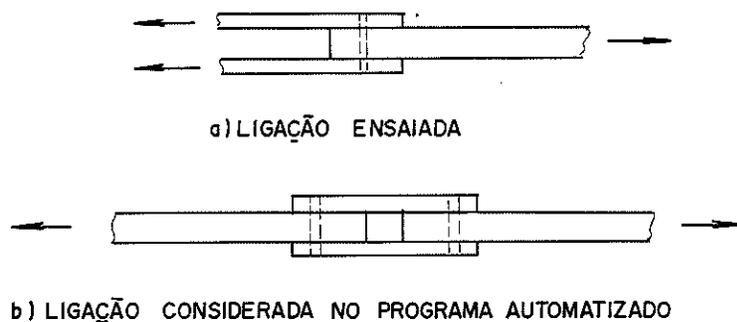


Fig. 7.4.19 - Ligação entre barra - nó

Pela fig. 7.4.19 pode ser notado que se for considerada a relação  $P = k \Delta^C$  obtida nos ensaios, o deslocamento entre as peças, para solicitações axiais, torna-se o dobro, pois o programa considera duas ligações ao invés de somente uma.

Esta consideração está embutida no programa e não significa dobrar a capacidade de carga das ligações, ( $P = 2k \Delta^C$ ), mas sim, corresponde a dobrar o deslocamento, ou seja, a expressão anterior (no programa) torna-se  $P = k (2 \Delta)^C$ .

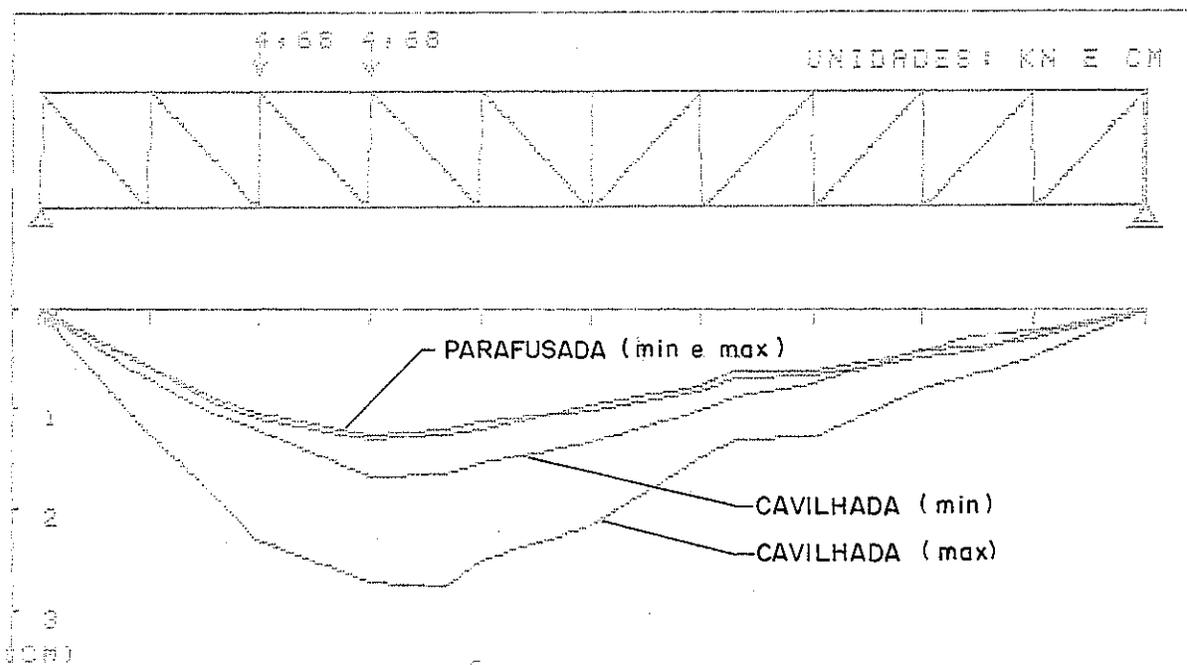
O mesmo ocorre para as ligações solicitadas por momento fletor uma vez que a rotação de uma ligação é diretamente proporcional ao deslocamento dos conectores.

#### 7.5. - Comparação entre Modelo Parafusado e Cavilhado

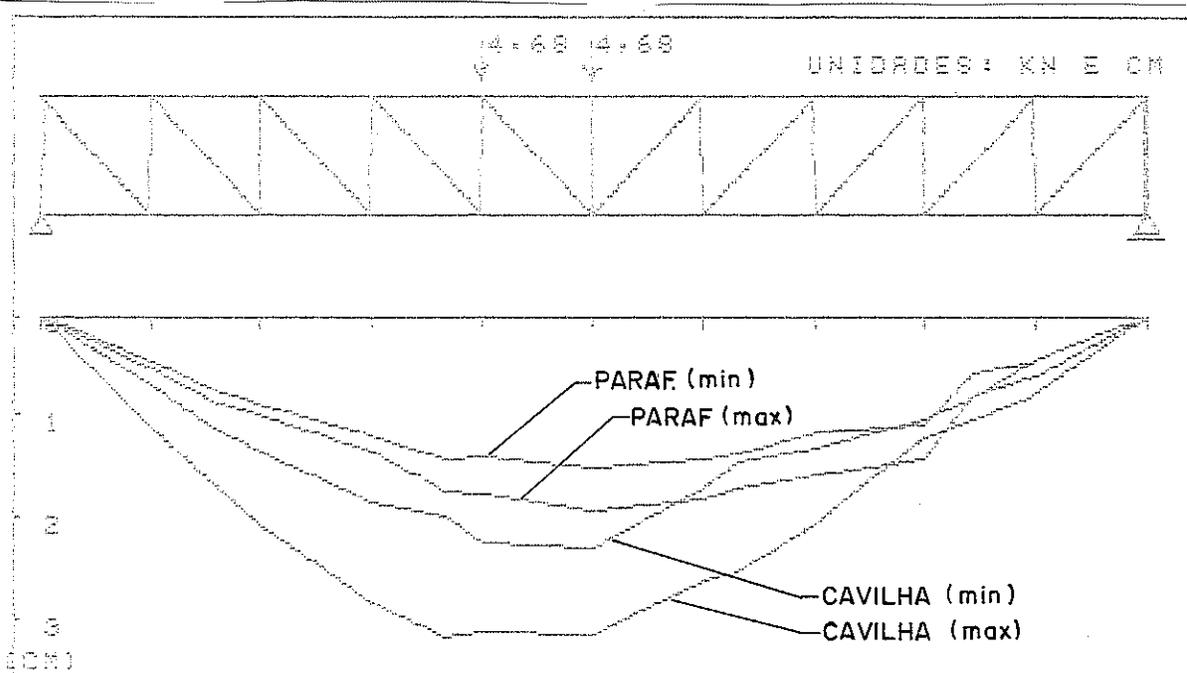
Para comparar os resultados foram traçadas as curvas de deslocamentos dos dois modelos ao longo do vão. Foram traçadas as curvas de máximo e mínimo deslocamentos obtidos para cada caso, para uma carga total de 9,36 kN, ou seja, duas cargas de 4,68 kN sobre os nós indicados na fig. 7.5.1.

Com a comparação (fig. 7.5.1) ficou notória a importância do tipo de ligação. Para os dois casos comparados o máximo deslocamento do modelo parafusado foi menor do que o mínimo deslocamento do modelo cavilhado. Esta constatação evidencia a importância da ligação no cálculo das flechas das estruturas, efeito ignorado nos padrões de cálculo até o momento.

Como era de se esperar, a estrutura com ligações parafusadas é menos deformável que a estrutura com ligações cavilhadas. No entanto, mesmo sendo mais rígida, a parafusada, ainda é mais deformável que a estrutura calculada convencionalmente com nós rígidos (ou perfeitamente articulados). A fig. 7.5.2 compara as mínimas deformações apresentadas no modelo parafusado com as deformações do modelo calculado como treliça e como pórtico, constatando-se o efeito significativo das ligações nos deslocamentos de nós.

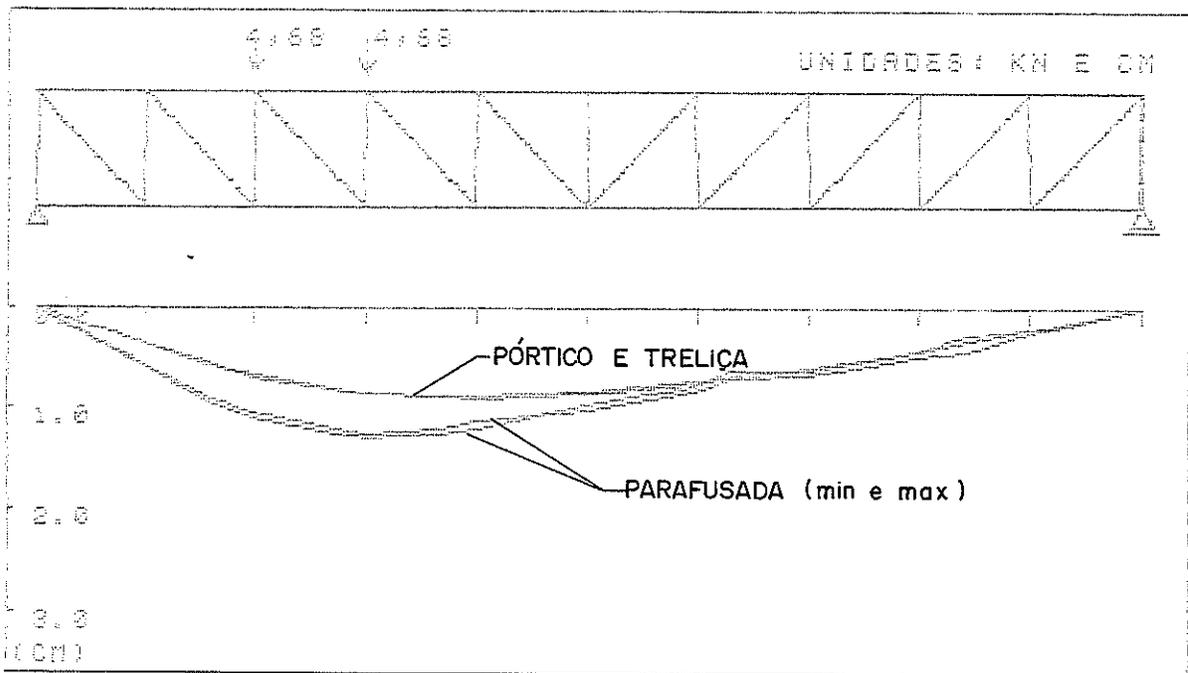


(a)- Carga sobre os n̄s 6 e 8

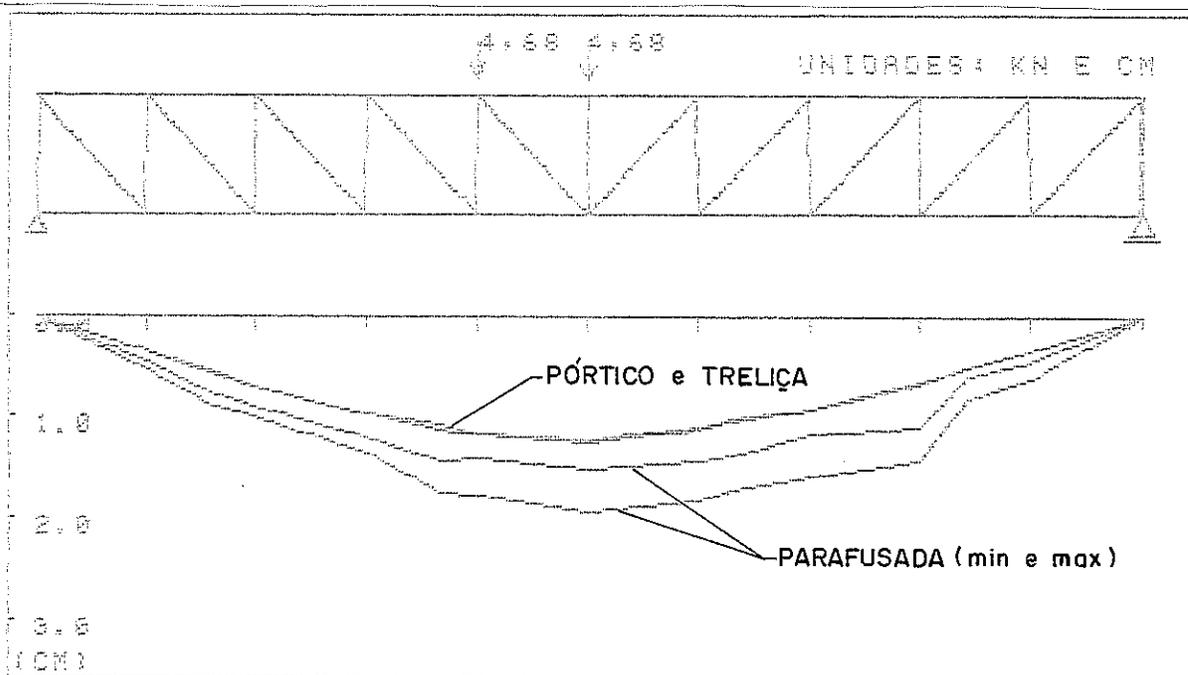


(b)- Carga sobre os n̄s 10 e 12

Fig. 7.5.1 - Deslocamento de n̄s - modelo parafusado e cavilhado



(a)- Carga sobre os nós 6 e 8



(b)- Carga sobre os nós 10 e 12.

Fig. 7.5.2 - Comparação entre modelo parafusado ensaiado e calculado como pórtico e como treliça

### 7.6 - Deformação Lenta

Através do sistema de carregamento descrito no item 6.5.7, manteve-se durante aproximadamente 35 dias (827 horas) o modelo carregado por uma carga 5,7 kN aplicada sobre os n<sup>o</sup>s 10 e 12.

A figura 7.6.1 mostra os diagramas de deslocamento em função do tempo para cada n<sup>o</sup>, através da indicação em algarismos arábicos referente ao número do transdutor diferencial mostrado na fig. 7.3.1.

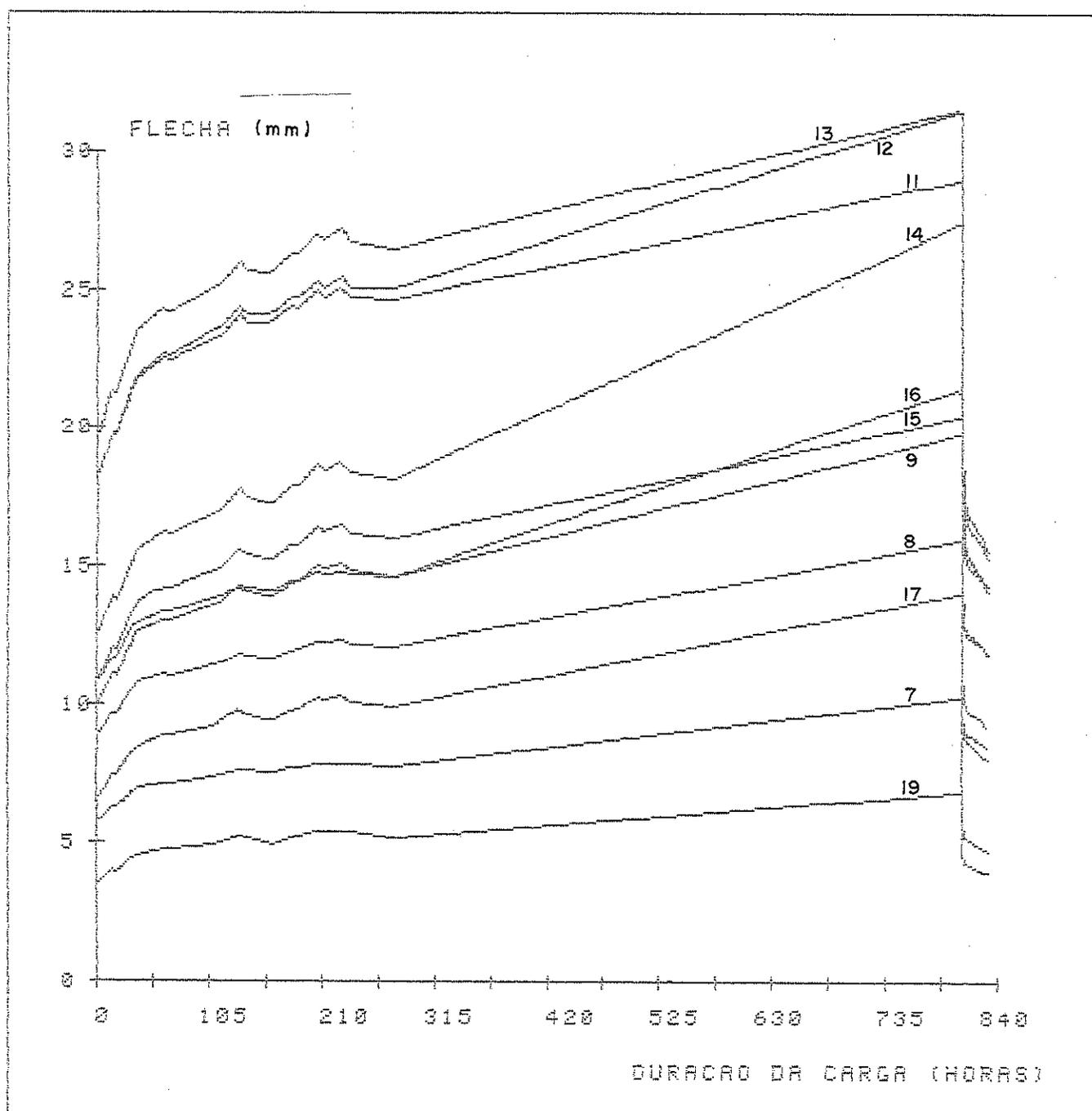


Fig. 7.6.1 - Diagramas flecha x tempo

O diagrama obtido tem o aspecto típico dos diagramas apresentados na literatura para peças simples de madeira. O modelo teve uma deformação inicial e contínuo acréscimo, mais acelerado, até às primeiras 50 horas ( $\sim 2$  dias). A partir daí sua progressão deu-se mais lentamente de forma praticamente constante.

A relação entre o deslocamento inicial e o deslocamento ocorrido em 827 h varia entre 41% a 58%, com média exatamente igual a 50%, obtida para o conjunto de 11 valores: 52, 52, 51, 58, 53, 58, 41, 49, 42, 45, e 49.

Este dado parece bastante importante, pois na estimativa da flecha de uma estrutura deve-se prever uma parcela adicional de deslocamento ou seja, além da contribuição da deformação elástica da madeira e da deformação das ligações, deve-se prever, pelo menos, mais 50% desse valor. Uma parcela deste acréscimo de flecha é levado em consideração pela norma NBR 7190/82, quando se reduz o módulo de elasticidade para  $2/3$  do valor obtidos nos ensaios, para os casos de peças fletidas sob carregamento de longa duração, aumentando-se, portanto, a flecha de cálculo em apenas 34%.

### 7.7 - Comentários Gerais

O objetivo deste item é apresentar alguns detalhes relacionados com as ligações, que em geral passam despercebidos quando se estudam as ligações, mas que influenciam no comportamento das próprias ligações e da estrutura da qual elas fazem parte.

O primeiro efeito bastante significativo existente nas ligações é o do momento produzido pela excentricidade das peças interligadas, fig. 7.7.1, inclusive já estudada por MANTILLA (1984) para ligações por adesivos.

O momento  $M$  é interno à ligação, e por isto, deixa a falsa aparência de ser inexistente para quem analisa a ligação como um todo. É comum observar em laboratório a ruptura "inexplicada" de ligações parafusadas por tração no parafuso. A explicação existe quando se faz o equilíbrio de forças internas, mostrado na fig. 7.7.1, onde fica evidente que o momento interno tem de ser absorvido por braços de alavanca e forças concentradas nos conectores. Este momento é perpendicular ao momento "principal" de flexão. A fig. 7.7.2 ilustra a posição deformada de uma ligação.

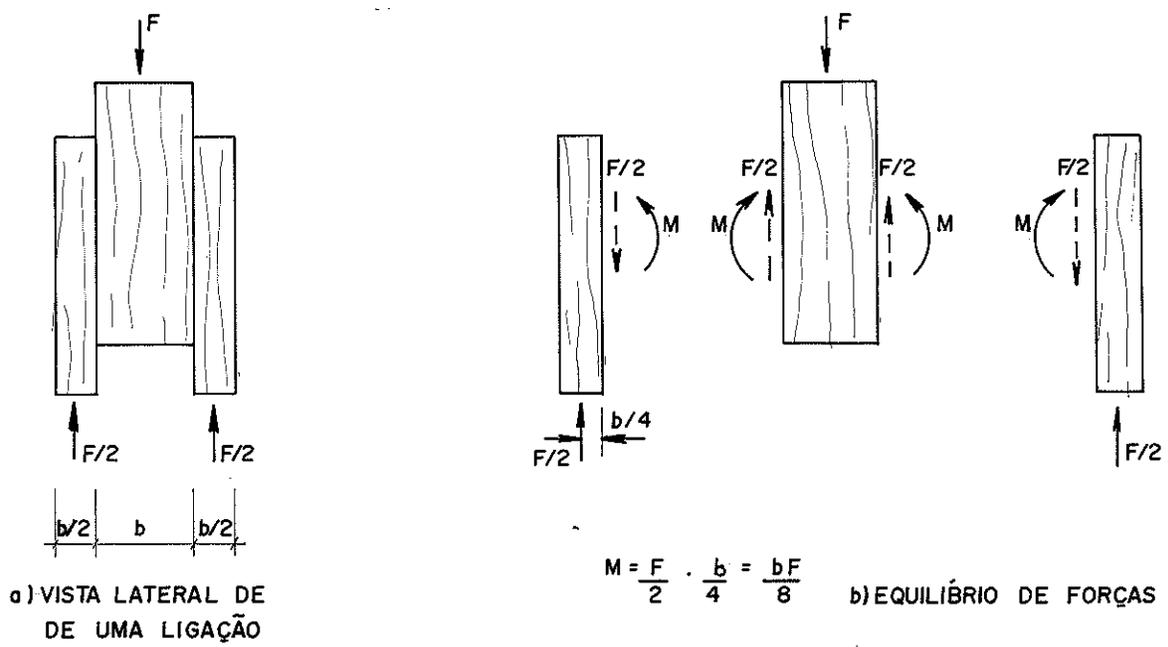


Fig. 7.7.1 - Momento na ligação

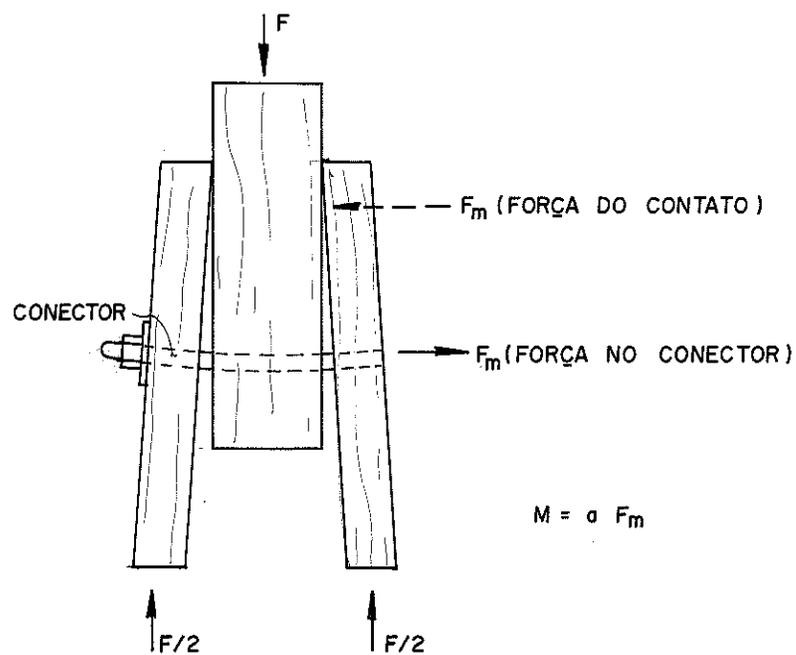


Fig. 7.7.2 - Vista de uma ligação deformada (exagerada)

Consequência do efeito anteriormente citado é causado nas barras das estruturas usuais. Este efeito é exemplificado com as diagonais do modelo estrutural ensaiado. A fig. 7.7.3 ilustra uma vista longitudinal de uma diagonal ligada ao banzo e ao montante nas extremidades.

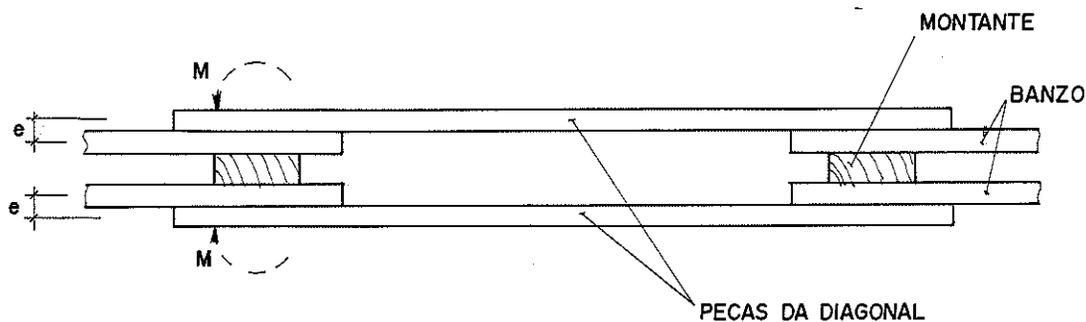


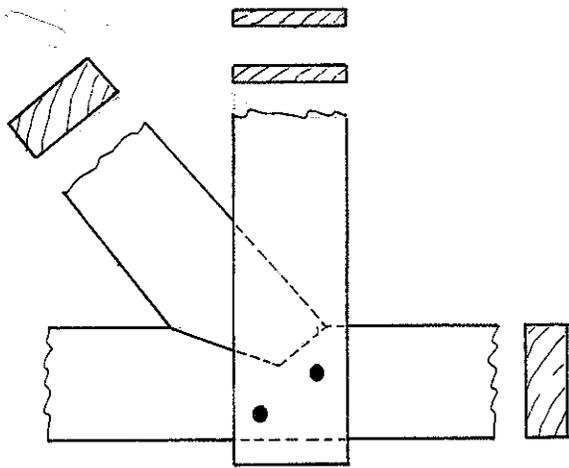
Fig. 7.7.3 - Barra e ligações de extremidade

Para a barra ilustrada verifica-se que na transmissão de forças entre a diagonal e o banzo existe uma excentricidade ( $e$ ). Essa excentricidade gera o momento citado na fig. 7.7.2. A parcela desse momento não absorvido pela ligação será transferido para a barra, causando uma sollicitação adicional na barra não prevista no cálculo. Esse momento é perpendicular ao momento fletor (convencional) e estimula a flambagem da barra comprimida. A sollicitação final na barra é uma flexo-compressão (ou tração), com momentos fletores em duas direções.

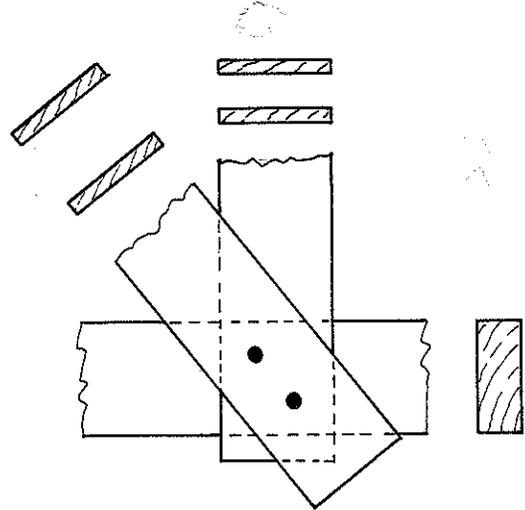
Outra situação que merece destaque é a de um nó convencional de treliça. A fig. 7.7.4 mostra duas possíveis formas de ligação para um mesmo nó. No caso (a) a diagonal é uma peça simples comprimida ligada por entalhe, enquanto, no caso (b), a diagonal tem a mesma seção transversal, porém desdobrada em duas e ligada por conectores.

As diferenças entre estas duas formas de ligação estão na forma de transmissão dos esforços. Considerando como esforço principal somente as forças normais, tem-se no caso (a), a transferência do esforço do montante para a diagonal através do banzo, ou seja, o montante transfere para o banzo (por conector) e o banzo transfere para a diagonal (por entalhe). Diferentemente, no caso (b) os esforços entre a diagonal e o montante são transferidos diretamente, pelo mesmo conector. A sollicitação no conector é dife

rente para os dois casos, fig. 7.7.5, logo a capacidade de carga da ligação também é diferente.

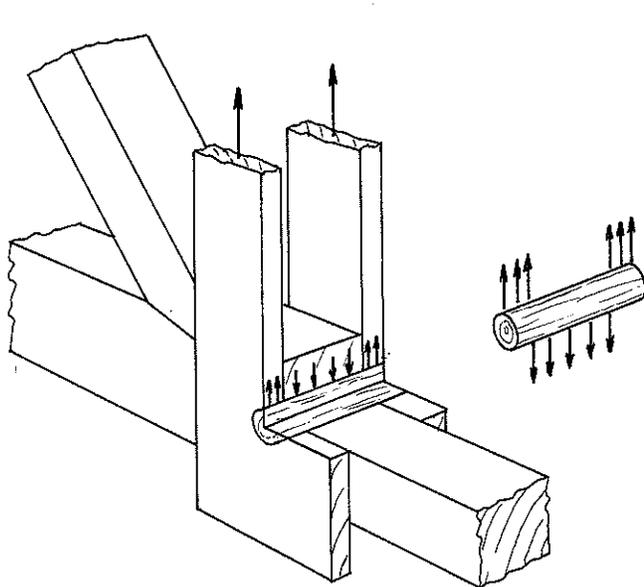


(a) DIAGONAL ÚNICA

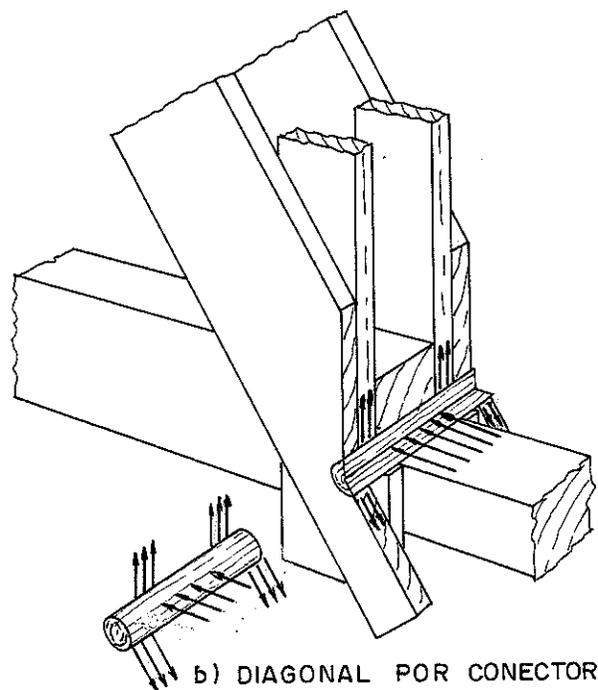


(b) DIAGONAL DUPLA

Fig. 7.7.4 - Formas de ligações



a) DIAGONAL ENTALHADA



b) DIAGONAL POR CONECTOR

Fig. 7.7.5 - Solicitação no conector

Para o mesmo tipo de ligação também pode ser citada a ligação "excentrica", ou seja, ligação com diagonal dupla deslocada, fixada no banzo, como mostra a fig. 7.7.6. Neste caso resultam duas ligações, semelhantes à da fig. 7.7.5a, interligando o montante ao banzo e a diagonal ao banzo. Adiciona-se, para este caso, a verificação da excentricidade dos nós no comportamento da estrutura.

Conclue-se que existem diversas formas de se fazer as ligações e cada uma possui um comportamento diferente da outra. Cada uma dessas alternativas irá influenciar nos esforços e deslocamentos da estrutura.

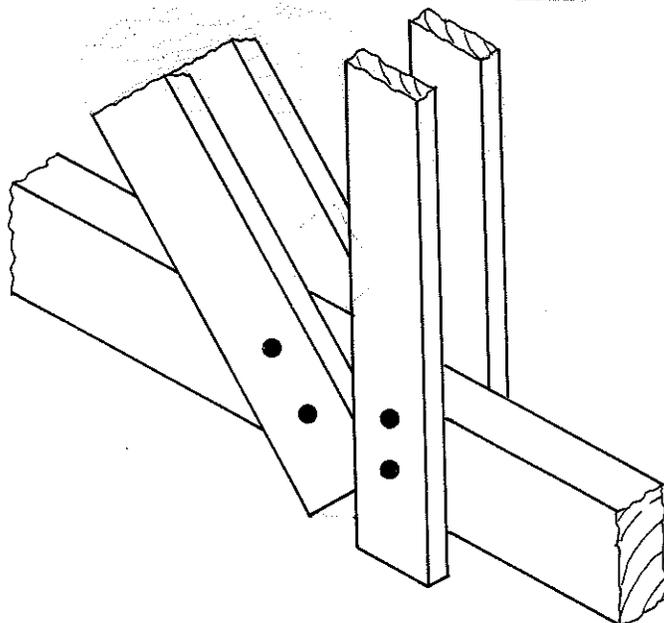


Fig. 7.7.6 - Ligação excêntrica

## 8. CONCLUSÕES - SUGESTÕES

Este capítulo, além de conter as conclusões, também apresenta algumas sugestões de temas para trabalhos complementares necessários para o aprimoramento do estudo das estruturas de madeira, em especial, a respeito do efeito da deformabilidade das ligações nas estruturas.

Comenta-se inicialmente a evidência da necessidade de se considerar o comportamento das ligações como parte integrante do comportamento da estrutura de madeira. Não é aconselhável separar o cálculo de esforços e deslocamentos da estrutura, sem considerar as ligações.

Foi constatado experimentalmente, que os deslocamentos reais atingem valores elevados em relação aos do cálculo usual, no qual tem sido considerada apenas a deformação das peças de madeira, sem a consideração da deformação das ligações. Os deslocamentos reais chegam a atingir três vezes o valor dos deslocamentos do cálculo usual. Constatou-se ainda que o tipo de ligação, no caso, parafuso ou cavilha, exerce influência significativa na rigidez da estrutura.

Pela análise dos resultados teóricos (de cálculo), considerando a estrutura como treliça, ou como pórtico de nós rígidos ou como pórtico com ligações deformáveis, as forças axiais nas barras são praticamente iguais para todos os casos; o momento fletor apresenta variação significativa se a estrutura é calculada como pórtico de nós rígidos ou com nós deformáveis; em algumas barras alcançam uma variação da ordem de 60%.

Situação semelhante ocorre com as tensões normais, obtendo-se, em algumas barras tensões devidas ao momento fletor da ordem de 75% das tensões devidas à força normal. Estes dados referem-se a carregamentos aplicados sobre os nós.

O desconhecimento e a desconsideração destes dados limitam o cálculo através de processos empregados até agora, atribuindo valores elevados aos coeficientes de segurança.

Acrescenta-se a estas considerações o efeito da deformação lenta. Para o modelo ensaiado, as flechas dos banzos aumentaram de um valor igual a 50% da flecha inicial, durante o período de aproximadamente 35 dias de carga constante. Este período não foi suficiente para se atingir a estabilidade das flechas, e conse

quentemente, estas poderiam alcançar valores maiores.

Outra conclusão importante é a constatação da igualdade de capacidade de carga, para as ligações cavilhadas entre peças com fibras em direções quaisquer. Convém lembrar que esta conclusão não é válida na ruptura, mas foi comprovada estatisticamente a partir dos dados de experimentações para cargas de serviço ou maiores.

Para a análise dos dados e para as conclusões é importante estabelecer critérios de ensaios de modelos, pois a uniformização, do histórico e da intensidade de carregamento permitiram comparações com resultados de outras pesquisas.

Para a utilização do programa automatizado desenvolvido é necessário o conhecimento das características de cada ligação através da relação carga-deslocamento relativo. A determinação desta relação, para diversos tipos de ligação e para várias espécies de madeiras, deve ser objeto de estudos sistemáticos. Nestes ensaios deve ser tomada em consideração a posição relativa da direção das peças e o número de peças interligadas.

Um procedimento altamente benéfico para a rigidez das estruturas (ligações) é sempre empregar mais de um conector, preferencialmente espaçados na direção paralela à solicitação, para combater mais eficazmente o momento interno da ligação, descrito no item 7.7. Quando a ligação, é solicitada por momento fletor perpendicular ao plano de cargas, a recomendação anterior fica reforçada pois neste caso, o aumento da distância entre conectores torna maior o braço de alavanca para absorver os momentos aplicados sobre a ligação.

Para o dimensionamento de estruturas seguindo os procedimentos expostos neste trabalho, deve-se adotar a conduta sugerida a seguir, considerando por enquanto o critério das tensões admissíveis, segundo a norma vigente. Recomenda-se que a estrutura seja calculada (esforços e deslocamentos) através de programa automatizado; posteriormente devem ser verificados os esforços em cada conector, para garantir que não seja ultrapassada a solicitação admissível no conector.

Diversos trabalhos devem ser realizados para complementar este estudo. A seguir são apresentadas algumas sugestões de temas detectados durante a realização deste trabalho:

i)- estudo detalhado dos efeitos do momento interno das ligações e do efeito das excentricidades das ligações nas estrutu-

ras, descritos no item 7.7.

ii)- estudo da relação carga-deslocamento para diversas espécies de madeira para ligações representativas da distribuição de barras e esforços em nós típicos de estruturas.

iii)- experimentação de outros modelos estruturais com outras dimensões e outras distribuições de barras.

iv)- estudo do fenômeno da viscoelasticidade da madeira, permitindo estabelecer um procedimento padrão para ensaios, quanto ao tempo de carregamento, intervalo de variação da carga, etc.

v)- estudo do efeito da deformação lenta.

vi)- verificação da variação do módulo de deformação das ligações, em função da posição das fibras e do esforço para conectores mais rígidos que a cavilha.

Acredita-se ter conseguido um avanço quanto ao cálculo estrutural através da consideração da deformabilidade das ligações nas estruturas de madeira. Sem dúvida, é imprescindível o emprego de recursos computacionais, para se conseguir cálculos mais eficientes.

Novas realizações e otimizações deverão ser feitas para o avanço e o aprimoramento das estruturas de madeira.

## 9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AMERICAN INSTITUTE OF TIMBER CONSTRUCTION - Timber construction manual.  
New York, John Wiley, 1966.
- ANTUNES, H.M.C.C. - Instabilidade elástica de estruturas lineares planas usuais. São Carlos, EESC-USP, 1972. Dissertação (Mestre-Engenharia de Estruturas).
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - Cálculo e execução de estruturas de madeira - NBR 7190/82. Rio de Janeiro, ABNT, 1982. 23p.
- BRESLER, Boris; LIN, T.Y.; SCALIZI, John B. - Diseño de estructuras de acero. Trad. Enrique M. Romero e José Luís Flores Feregrino. México, Centro Regional de Ayuda Técnica, Limusa-Wiley, 1970. 926p.
- CARVALHO FILHO, Waldevino de - Desenvolvimento de estruturas pré-fabricadas de madeira tipo "trussed-rafters". São Paulo, Instituto de Pesquisas Tecnológicas, 1984. (Pesquisa & Desenvolvimento - nº 17, publicação nº 1547). 59p.
- ECKELMAN, Carl A. - The stiffness matrix method of furniture frame analysis. Wood Science, 2 (4), Abril, 1970.
- GERE, James M. & WEAVER, William - Analysis of frame structures. Princeton, D. Van Nostrand, 1965. (University Series in Civil Engineering and Applied Mechanics).
- GESUALDO, Francisco Antonio Romero - Ligação de peças estruturais de madeira através de cavilhas partidas de Eucalipto Citriodora. Orientador: Prof. Dr. João Cesar Hellmeister. São Carlos, LaMEM-EESC-USP, 1982. 91p. Dissertação (Mestre-Engenharia de Estruturas).
- \_\_\_\_\_ - Carga-deslocamento nas ligações através de cavilhas partidas de Eucalipto Citriodora. In: COLLOQUIA 85 - Memórias B: Ingeniería Estructural, Octubre, 1985. Tomo V, p.1347-1357.

- Manual de subprogramas estatísticos - microcomputador Hewlett Packard modelo 9825 T. São Carlos, LaMEM-EESC-USP, 1985. 62 p.
- GHALI, Amin & NEVILLE, Adam M. - Structural analysis: a unified classical and matrix approach. 2.ed. London, Chapman and Hall, 1978.
- GREGORY, Malcom S. - Linear framed structures. London, Longmans Green, 1966.
- HATA, Masanori - Structural analysis of a wooden chair as a semi-rigid jointed frame with a three-dimensional structure. Journal of the Japan Wood Research Society, 31 (10): 807-813, 1985.
- HEHL, Maximilian Emil - Fortran: técnicas práticas e eficientes em programação. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1974. 132 p.
- KARLSEN, G.G., ed. - Wooden structures. Moscou, Mir Publishers, 1967. 638 p.
- KETTER, R.L.; LEE, G.C.; PRAWEL JR, S.P. - Structural analysis and design. Tokyo, McGraw-Hill, Kogakusha, 1979. 825 p.
- LIVESLEY, R.K. - Matrix methods of structural analysis. 2.ed. Oxford, Pergamon, 1975.
- MANTILLA CARRASCO, Edgar V. - Ligações estruturais de madeira por adesivos. Orientador: Prof.Dr. João Cesar Hellmeister. São Carlos, LaMEM-EESC-USP, 1984. 436p. Dissertação (Mestre-Engenharia de Estruturas).
- MATTHIESEN, José Antonio - Ligação de peças estruturais de madeira por anéis metálicos. Orientador: Prof.Dr. João Cesar Hellmeister. São Carlos, LaMEM-EESC-USP, 1981. 138 p. Dissertação (Mestre-Engenharia de Estruturas).
- MONFORTON, G.R. & WU, T.S. - Matrix analysis of semi-rigidly connected frames. American Society of Civil Engineers, PROCEEDINGS, December 1963. p.13-42.

- MÚÑOZ, Mario Wagner - El fundamento de las especificaciones de la norma alemana DIN 1052 relativas al diseño de piezas estructurales de madera de seccion transversal compuesta solicitadas a flexion y a compresion. Santiago-Chile, Universidad de Chile, 1979. 112p. (Informe nº 45).
- NATIONAL FOREST PRODUCTS ASSOCIATION - National design specification for stress-grade lumber and its fastenings. Washington, D.C., NFPA, 1968. (Table I - Separate Printing).
- NORRIS, C.H. & WILBUR, J.B. - Elementary structural analysis. 2.ed. New York, McGraw-Hill Book, 1960. 651p.
- OZELTON, E.C. & BAIRD, J.A. - Timber designer's manual. London, Crosby Lockwood Staples, 1976. 518p.
- PANDIT, G.S. & GUPTA, S.P. - Structural analysis: a matrix approach. New Delhi, Tata McGraw-Hill, 1981. 602p.
- PARCEL, J.I. & MOORMAN, R.B. - Analysis of statically indeterminate structures. New York, John Wiley & Sons, 1955.
- PERKINS, R.H.; SUDDARTH, S.K.; DALE, A.C. - Rotational resistance of three-membered nailed joints subjected to bending moment. Lafayette, Indiana, Purdue University, Agricultural Experiment Station, Dec.1962. 12p. (Research Bulletin nº 753).
- \_\_\_\_\_ - Moment resistance capabilities of 2"x4" roof purlins lap-spliced over a support. Lafayette, Indiana, Purdue University, Agricultural Experiment Station, 1964. (Research Bulletin nº 790).
- PFEIL, Walter - Estruturas de Madeira. 4.ed. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1985. 295p.
- PRZEMIENIECKI, J.S. - Theory of matrix structural analysis. New York, McGraw-Hill Book, 1968.
- RODDA, Errol David - The analysis of trusses with semi-rigid joints. Lafayette, Indiana, Purdue University, Jan.1965. 159p. Thesis (Doctor of Philosophy).

- \_\_\_\_\_ - Analysis of indeterminate nailed structures. Forest Products Journal, 17 (6): 35-41, June, 1967.
- RODDA, E.D.; SUDDARTH, S.K.; DALE, A.C. - Analysis of wood trusses with nailed metal-plate joints. Transactions of the ASAE, 9 (3): 411-416, 1966.
- RUBINSTEIN, Moshe F. - Matrix computer analysis of structures. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1966. 402p.
- SALGO, Michael N. - Exemples of timber-structures failures. Transactions of the ASCE, 121: 588-604, 1956.
- SYNDICAT NATIONAL DES CONSTRUCTEURS DE CHARPENTES EM BOIS LAMELLÉ-COLLÉ - Charpentes em bois lamellé-collé. Paris, Eyrolles, 1976. 177p.
- SUDDARTH, Stanley K. - Determination of member stresses in wood trusses with rigid joints. Lafayette, Indiana, Purdue University, Agricultural Experiment Station, Feb.1961. (Research Bulletin n° 714).
- \_\_\_\_\_ - A detailed study of a W truss made with metal gusset plates. Lafayette, Indiana, Purdue University, Agricultural Experiment Station, April, 1963. (Research Progress Report n° 50).
- SUDDARTH, S.K.; GOODRICK, F.E.; DRESS, P.E. - A digital computer program for analysis of member stresses in symmetric W trusses. Lafayette, Indiana, Purdue University, Agricultural Experiment Station, Aug.1964. (Research Bulletin n° 783).
- TIMOSHENKO, Stephen P. & YOUNG, D.H. - Teoria das Estruturas. Trad.por Antonio A.Noronha. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1957.
- TRUSS PLATE INSTITUTE - Design specification for metal plate connected wood trusses. Illinois, TPI, September, 1978. 35p.
- WANG, Chu-Kia - Statically indeterminate structures. New York, McGraw-Hill Book; Tokyo, Kogakusha, 1953. (International Student Edition).

10. BIBLIOGRAFIA

- ANTUNES, H.M.C.C. - Instabilidade elástica de treliças planas. São Carlos, EESC-USP, 1971.
- \_\_\_\_\_ - Ensaíos físicos e mecânicos de madeiras: método brasileiro - NBR 6230/82. Rio de Janeiro, ABNT, 1982. 16p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - Símbolos gráficos para projetos de estruturas - simbologia- NBR 7808/83. Rio de Janeiro, ABNT, 1982. 12p.
- BARRASS, Robert - Os cientistas precisam escrever. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 1979. 218p.
- BODIG, Jozsef & JAYNE, Benjamin A. - Mechanics of wood and wood composites. New York, Van Nostrand Reinhold, 1982. 711p.
- BOX, G.E.P.; HUNTER, W.G.; HUNTER, J.S. - Statistics for experimenters. s.n.t.
- DANIEL, Cuthbert & WOOD, Fred S. - Fitting equations to data-computer analysis of multifactor data for scientists and engineers. New York, John Wiley & Sons, 1971.
- DRAPER, N.R. & SMITH, H. - Applied regression analysis. New York, John Wiley & Sons, 1966.
- ECKELMAN, Carl A. - How to design dowel joints. Lafayette, Indiana, Purdue University, Agricultural Experiment Station, May, 1970. 7p.  
(Research Progress Report nº 373).
- \_\_\_\_\_ - Withdrawal strength of dowel joints: effect of shear. Forest Products Journal, 29 (1): 48-52, Jan.1979.
- HELLMEISTER, João Cesar - Estruturas de madeira. 2.ed.4.reimp.rev. e corrig. São Carlos, EESC-USP, 1977. 113p. (Notas de aula).

- JOHNSTON, Bruce & MOUNT, Edward H. - Analysis of building frames with semi-rigid connections. American Society of Civil Engineers, PROCEEDINGS, 67 (3): 405-431, Jan.1941.
- LOTHERS, John E. - Cálculo superior de estruturas de acero. Trad.por Jorge Trejo Blancas. Barcelona, Compañia Editorial Continental, 1971. 622p.
- LUCHESE, J.A. & STAMATO, M.C. - Ligações de peças de peroba rosa com parafusos de aço. São Carlos, EESC-USP, 1967.
- MATEUS, Tomás J.E. - Bases para o dimensionamento de estruturas de madeira. Lisboa, LNEC, 1962. 306p.
- McGUIRE, William - Steel structures. London, Prentice-Hall, 1968. 1112p. (Prentice-Hall International Series in Theoretical and Applied Mechanics).
- MOLITERNO, Antonio - Caderno de projetos de telhados em estruturas de madeira. São Paulo, Edgar Blücher, 1981. 419p.
- MORETTI FILHO, Justo - Redação de dissertações e teses. Piracicaba, FEALQ, 1982. 67p.
- PIEIDADE JR., Cezar - Ligações de peças de peroba rosa e pinho do Paraná com cavilhas de eucalipto citriodora. Orientador: Prof.Dr. Miguel Carlos Stamato. Botucatu, FCMBB, 1972. 132p. Tese (Doutor em Ciências).
- ROCCO LAHR, Francisco Antonio - Sobre a determinação de propriedades de elasticidade da madeira. São Carlos, LaMEM-EESC-USP, 1983. 221p. Tese (Doutor-Engenheiro).
- SNEDECOR, George W. & COCHRAN, William G. - Métodos estadísticos. México, Compañia Editorial Continental, 1977. 703p.
- SUDDARTH, S.K. & GOODRICK, F.E. - Future importance of computers in wood engineering. Forest Products Journal, 17 (6): 49-54, June, 1967.

TIMOSHENKO, Stephen P. - History of strength of materials with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. New York, McGraw-Hill Book, 1953. 452p.

TIMOSHENKO, Stephen P. & GERE, James E. - Mecânica dos sólidos. Trad. José Rodrigues de Carvalho. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1983. p.257-450.

## A N E X O 01

Listagem do programa computacional para cálculo de estruturas com nós deformáveis.

```

0: % "ESFORÇOS EM BARRAS DE ESTRUTURAS DE NOS DEFORMÁVEIS"
1: ent "Numero de Nos ?",N,"Numero de Barras ?",B;3N3M;fxd 0
2: dim XINI,YINI,IIBI,FIIBI,SIBI,JIIBI,EIIBI,AIIBI,LIIBI,TIIBI,6I,NIC2,BI,WI2,BI
3: dim NIMI,DIIM,PIIM+4I,ZIIBI,6I,E#I1I,L#I2I,D#I3I,A#I10I,C#I4I,B#I2,BI
4: ent "Numero de iteracoes ?",PIM+4I
5: dim VI2,BI;ent "Unidade de Comprimento (cm ou m) ?",L$;cap(L$)3L$
6: ent "Unidade de Carga (kgf/tf/kN/N) ?",D$;cap(D$)3D$
7: dsp "COORDENADAS DOS NOS";wait 800;for I=i to N
8: ent XIII,YIII;ent "Coord. do ultimo no' OK ? (s/n)",A$
9: if flgi3=0 and cap(A$)="N";gto -1
10: next I;ent "Mod. Elasticidade e' const.(s/n)?",A$
11: cap(A$)3A$;if A$#N";ent "Modulo de Elasticidade ?",E;"S"3E$
12: for I=i to B
13: wrt 0,"No' Inicial da Barra "&str(I);ent "",I1I1
14: wrt 0,"No' Final da Barra"&str(I);ent "",F1I1;if A$#N";EJEI1I;gto +2
15: wrt 0,"Mod.de Elasticid.da Barra"&str(I);ent "",E1I1
16: wrt 0,"Tipo de Lig. extr. 1 - Barra"&str(I);ent "",A
17: wrt 0,"Tipo de Lig. extr. 2 - Barra"&str(I);ent "",C
18: char(A)3B#I1I,I,I1I;char(C)3B#I2I,I,I1I
19: ent "Dados da Ultima Barra OK ? (s/n)",C$
20: if flgi3=0 and cap(C$)="N";gto -7
21: next I;ent "No. de Secoes Transv. Diferentes?",K;for I=i to K
22: ent "No. de Barras com esta Secao ?",L;wrt 0,"Area ( "&L$&"2 ) ?"
23: ent "",A;wrt 0,"Momento de Inercia ( "&L$&"4 ) ?";ent "",C
24: for J=i to L;ent "Numero da Barra ?",Q
25: A3S(QI);C3J(QI);next J;next I
26: dsp "CARACT. GEOMETRICAS DAS LIGACOES";wait 800
27: ent "No. de Tipos de Lig. Deformaveis ?",L;if L=0;gto "R600"
28: ent "No. Max.de Conect. por Ligacao ?",A
29: dim GII,A+2I,HII,AI,N#(LI),KIAI,UI2,AI,A+1I)R0;for I=i to L
30: wrt 0,"No. de Conect. da Lig. Tipo"&str(I+1);ent "",K
31: char(K)3N#(I,I1I);ent "COEFIC. DA EQUACAO p/ este tipo ?",GII,A+1I
32: ent "EXPOENTE DA EQUACAO p/ este Tipo?",GII,A+2I
33: for J=i to K;wrt 0,"Coordenada X do conector"&str(J);ent "",GII,J1I
34: wrt 0,"Coordenada Y do conector"&str(J);ent "",HII,J1I;next J
35: ent "Dados deste tipo de lig.OK (s/n)?",C$
36: if flgi3=0 and cap(C$)="N";gto -6
37: next I
38: "R600":ent "Numero de Apoios ?",R;for I=i to R
39: ent "Numero do No' de Apoio ?",V;3V3L
40: wrt 0,"Restricao X (0 ou 1) - APOIO"&str(V);ent "",NII-2I
41: wrt 0,"Restricao Y (0 ou 1) - APOIO"&str(V);ent "",NII-1I
42: wrt 0,"Restricao Z (0 ou 1) - APOIO"&str(V);ent "",NII
43: ent "Dados deste Apoio OK (s/n) ?",C$
44: if flgi3=0 and cap(C$)="N";gto -5
45: next I;for I=i to B
46: XIF(III)-X(III)3X;YIF(III)-Y(III)3Y;\(XX+YY)3L(II);X/L(II)3X
47: acs(X)3V;if Y(0,-V)3V
48: V3A(II);next I;03K;M3L
49: for I=i to M;if N(II)=1;L3N(II);L-13L;gto "A100"
50: K+13K3N(II)
51: "A100":next I;L3M;abs(III-F(II)3W
52: for I=2 to B;if (abs(III-F(II)3L)>W)3W;L3W
53: next I;3(W+1)3W;if W>M)3W
54: 3N3Z;dim RIM,WI,CIZ-MI
55: ent "Numero de Carregamentos ?",PIZ+1I
56: ent "No. max. de barras carreg. ?",K;if K#0;dim BIK,7I
57: for 0=i to PIZ+1I;10^973A

```



```

116: K-1)JL;GIL,r0)JS;1/GIL,r0+1)E;num(N*(L,L))C;if P#0;gto +2
117: if A=0 or V=0;1)U;gto "L50"
118: sin(AI1))Y;cos(AI1))X;for R=i to C;1)KIR1;GIL,R)X+HIL,R)Y)U(I,R)
119: HIL,R)X-GIL,R)Y)U(2,R);next R;\(AA+VV))R;'ANG'(A,V))G
120: "VOLTA":0)U)H)F;for K=i to C;KIK1)U(1,K)+U)U;KIK1)U(2,K)+H)H;KIK1+F)F
121: next K;U/F)X;H/F)Y;0)T;for K=i to C;((U(2,K)-X)^2+(U(2,K)-Y)^2)KIK1+T)T
122: next K;'ANG'(X,Y))Q;\(XX+YY)*sin(Q-G))H;RT/F/(P+HR))r13
123: 0)T;Y+r13*cos(G))Y;X-r13*sin(G))X;for K=i to C
124: (U(1,K)-X)^2+(U(2,K)-Y)^2)Q;KIK1*Q+T)T;\Q)R)K;next K
125: (P+R(H+r13))/T)Q;0)H;for K=i to C;abs(KIK1*rK*Q))F;(F/S)^E)U
126: F/U)T;if .95KIK1)T or T)1.05KIK1;1)H
127: if KIK1=i;T)KIK1
128: (KIK1+T)/2)KIK1;next K;if H=i;gto "VOLTA"
129: "L50":2abs(P/U*rC))M(I,I);if A#0;2abs(A/abs(A/C/S)^E))W(I,I)
130: if V#0;2abs(V/abs(V/C/S)^E))V(I,I)
131: "200":next J;next I;gto "R100"
132: "IMPRIMA":fmt 1,"ESTRUTURA PLANA COM:",2/,"Numero de Nos",1)X,"=",f9.0
133: fmt 2,"Numero de Barras",8x,"=",f9.0
134: fmt 3,"Modulo de Elasticidade =",f9.0,1)X,c3,"/",c2,"2"
135: wrt 705.1,N;wrt 705.2,B;if E#="S";wrt 705.3,E(I),D$,L$;gto "I100"
136: ent "Imprime Mod. de Elasticidade ? (s/n)",E$;if cap(E#)="N";gto "I100"
137: fmt 1,/, "BARRA",10x, "MOD. DE ELASTICIDADE (" ,c4, "/",c2, "2 )",/
138: wrt 705.1,D$,L$;fmt 2,f5.0,18x,fi2.3;for I=i to B;wrt 705.2,I,E(I);next I
139: "I100":ent "Imprime Coordenadas dos Nos ? (s/n)",E$
140: if cap(E#)="N";gto "I200"
141: fmt 1,/, "COORDENADAS DOS NOS",2/,10x, "NO'",6x, "ORD. X",7x, "ORD. Y",/
142: wrt 705.1;fmt 2,10x,f2.0,6x,f7.2,6x,f7.2
143: for I=i to N;wrt 705.2,I,X(I),Y(I);next I;gto "I200"
144: "I200A":fmt 1,2/, "NO' DE APOIO",f4.0,10x, "Desloc. X",6x, "Desloc. Y",6x,z
145: fmt 2, "Desloc. Z",/,26x,z;fmt 3,c9,6x,z
146: for I=3 to Z by 3;0)A;for J=1 to 3;if N(I-J+1)<=H;gto +5
147: A+1)A;if A=1;wrt 705.1,I/3;wrt 705.2
148: if A(J;wrt 705.3, "Livre";A+1)A;gto +0
149: wrt 705.3, "Impedido"
150: next J;next I
151: "I200":ent "Imprime Deslocamentos ? (s/n)",E$
152: if cap(E#)="N";gto "I300"
153: fmt 1,2/, "DESLOCAMENTOS DOS NOS (" ,c3, " )",/,7"====",2/, "NO'",6x,z
154: fmt 2, "DIRECAO X",10x, "DIRECAO Y",10x, "DIRECAO Z",/;wrt 705.1,L$
155: wrt 705.2;fmt 1,f3.0,3x,fi4.9,5x,fi4.9,5x,fi4.9
156: ent "Deslocamento de Quantos nos ?",A
157: for I=i to A;1)K;if A#N;ent "numero do no' ?",K
158: wrt 705.1,K,-D(NI(3K-2)), -D(NI(3K-1)), -D(NI(3K)) ;next I
159: "I300":ent "Esforços em Quantas Barras ?",R
160: fmt 1,2/, "CARACTERISTICAS E ESFORÇOS DAS BARRAS",/,37"=";wrt 705.1
161: fmt 7,18"====";wrt 705.7
162: fmt 3, "BARRA SECAO INERCIA EXTREM.",3x, "DIRECAO X ",z
163: wrt 705.3;fmt 3, "DIRECAO Y DIRECAO Z";wrt 705.3
164: fmt 3,8x,c2,"2",9x,c3,"4",17x,c3,9x,c3,8x,c3,".",c2
165: wrt 705.3,L$,L$,D$,D$,L$;wrt 705.7;fmt 6,29x,z;c11 'FORM'
166: for D=i to R;D)I;if R(B;ent "Numero da Barra ?",I
167: wrt 705.4,I,S(I),J(I);wrt 705.5,I(I),Z(I,1),Z(I,2),Z(I,3)
168: wrt 705.6;wrt 705.5,F(I),Z(I,4),Z(I,5),Z(I,6);wrt 705.7;next D
169: for I=i to B;Z(I,1))F;Z(I,2))V;Z(I,3))J
170: sin(AI1))Y;cos(AI1))X;3I(I)A;3F(I)C;Z+1)L;NIA-2)G;NIA-1)S;NIA)A
171: NIC-2)T;NIC-1)D;NIC)C
172: for Q=i to 2;if G)H;C(L-GI-FX+VY)C(L-G)
173: if S)H;C(L-SI-VX-FY)C(L-S)

```

```

174: if A=M;CII-AI-JJC[L-AI
175: TIG;D)S;CJA;ZII,4)F;ZII,5)J)V;ZII,6)J)J;next Q
176: next I;fmt 1,/, "REACOES DE APOIO",/,16"=";wrt 705.1;Z+1)A
177: fmt 1,/, "APOIO",f5.0;fmt 2,12x,c10,2x, "=",f15.4
178: for V=3 to A-i by 3;0)S;for I=V-2 to V;if N(II)<=M;gto "350"
179: if S=0;wrt 705.1,V/3;1)S
180: CIA-N(II)J)F;if I=V-2;"Horizontal")A$;gto "400"
181: if I=V-1;"Vertical")A$;gto "400"
182: "Momento")A$
183: "400":wrt 705.2,A$, -F
184: "350":next I;next V
185: for I=1 to Z-M;0)C(II);next I
186: next 0;fxd 2;end
187: "APOIO":if pi=0;"Livre")A$;gto +2
188: "Impedido")A$
189: wrt 705.1,A$;ret
190: "CHOLESKY":\RII,1)J)RII,1)A;for J=2 to W;R(I,J)/A)R(I,J);next J
191: cll 'AUXCH'(2,W,1);for D=J to M;c11 'AUXCH'(D,D,D-W+1);next D;ret
192: "AUXCH":p3+1)C;for J=pi to p2;J+1)H;for I=C to J-1;H-I)L;R(II,L)A
193: for K=p3 to I-1;i-K)T;A-RIK,I+T)RIK,J+T)A;next K;A/R(II,1)J)R(II,L)
194: next I;R(I,J,1)A;for K=p3 to J-1;A-RIK,H-K)A)2)A;next K
195: \A)R(I,J,1);next J;R(II,W)/R(II,1)J)R(II,W);ret
196: "CONC":ent "Numero de Ptos Carregados ?";X;for Y=1 to X
197: ent "Distancia Carga-No' Inicial ?";A
198: ent "Projecao Carga Direcao da Barra?";H
199: ent "Projecao Carga Perpend. a Barra?";G;L(I)J-A)D
200: GAD/6/E(I)J/L(I)J/J(I)J)K;B(II,6)I+(A+2D)*K)B(II,6)I;B(II,7)I-(2A+D)*K)B(II,7)I
201: B(II,2)I+A*H)B(II,2)I;B(II,3)I+H)B(II,3)I
202: B(II,4)I-GD/L(I)J)B(II,4)I;B(II,5)I-GA/L(I)J)B(II,5)I;next Y;ret
203: "DIST":ent "Carga Distr. Paralela 'a Barra ?";r7
204: ent "Carga Distr. Perpend. 'a Barra ?";H
205: B(II,2)I+r7*L(I)J^2/2)B(II,2)I;B(II,3)I+r7*L(I)J)B(II,3)I
206: ent "Comprim/te do trecho carregado ?";A;L(I)J-A)D;HAA/2/L(I)J)G
207: B(II,4)I-HA+G)B(II,4)I;B(II,5)I-G)B(II,5)I;G/12/E(I)J/J(I)J)G
208: B(II,6)I+G(2L(I)J-A)^2)B(II,6)I;B(II,7)I-G(2L(I)J^2-AA))B(II,7)I;ret
209: "MOM":ent "No.de momentos aplicados ?";X;for Y=1 to X
210: ent "Distancia Carga-No' Inicial ?";A
211: ent "Valor do Momento ?";K;L(I)J-A)D;K/L(I)J)G
212: B(II,4)I+G)B(II,4)I;B(II,5)I-G)B(II,5)I;G/6/E(I)J/J(I)J)G
213: B(II,6)I+(3KD-L(I)J^2)G)B(II,6)I;B(II,7)I+(3AA-L(I)J^2)G)B(II,7)I;next Y;ret
214: "FORM":fmt 4,f3.0,f11.7,f14.9,ix,z
215: if L$="CM";fmt 4,f3.0,f10.2,f13.2,3x,z;gto "f1"
216: if D$="KGF";fmt 5,f3.0,f15.0,f12.0,f12.3;gto "f2"
217: if D$="TF";fmt 5,f3.0,f15.3,f12.3,f12.7;gto "f2"
218: if D$="KN";fmt 5,f3.0,f15.3,f12.3,f12.5;gto "f2"
219: fmt 5,f3.0,f15.4,f12.4,f12.2;gto "f2"
220: "f1":if D$="KGF";fmt 5,f3.0,f15.0,f12.0,f12.1;gto "f2"
221: if D$="TF";fmt 5,f3.0,f15.3,f12.3,f12.4;gto "f2"
222: if D$="KN";fmt 5,f3.0,f15.3,f12.3,f12.3;gto "f2"
223: fmt 5,f3.0,f15.4,f12.4,f12.0
224: "f2":ret
225: "II":fmt 9,f10.3,z;for O=1 to M;for T=1 to W;wrt 705.9,R(O,T);next T
226: wrt 705;next 0;wrt 705;ret
227: "RIGIDEZ":for I=1 to B;c11 'COEFBAR';AXX+DYY)r1;(A-D)XY)r2;CY)r3
228: AYY+DXX)r4;GX)r5;U)r6;F)r7;CY)r8;CX)r9;R)r10;if J<K;gto +2
229: -r3)A;-r8)r3;A)r8;-r5)A;-r9)r5;A)r9;r6)A;r10)r6;A)r10;J)K;3F(II)J
230: N(I)J)L;if L<=M;c11 'RG1'(J+1,K-2,r6,r3,-r5,r7)

```

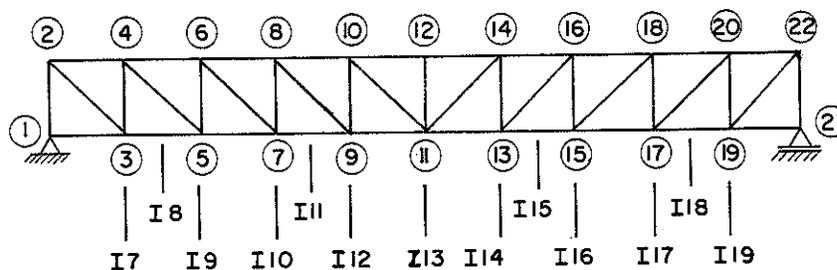
```

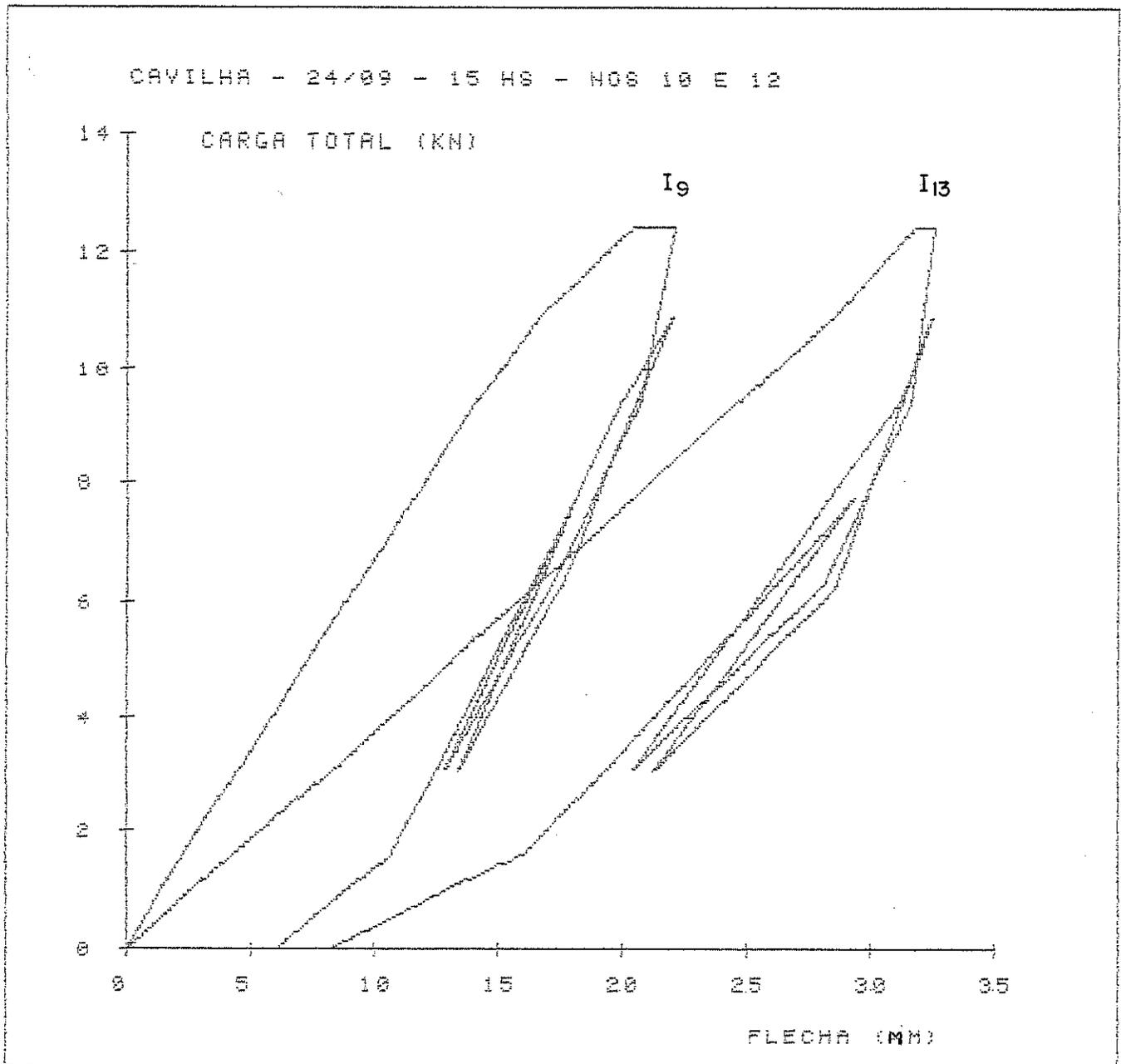
231: NIJ-1)JL;if L<=M;c11 'RG1'(J,K-2,r4,r5,-r2,-r4,r9)
232: NIJ-2)JL;if L<=M;c11 'RG1'(J-1,K-2,ri,r2,-r3,-ri,-r2,-r8)
233: NIK1)JL;if L<=M;RIL,i1+ri0)RIL,i1
234: NIK-1)JL;if L)M;gto "C500"
235: RIL,i1+r4)RIL,i1;NIK1)T;if T<=M;T-L+1)C;RIL,C1-r9)RIL,C1
236: "C500":NIK-2)JL;if L<=M;c11 'RG1'(J+1,K-1,ri,r2,r8)
237: next I;ret
238: "RG1":RIL,i1+p3)RIL,i1;4)H;J)p9;pi)D
239: "srg1":for A=D to p9;N(A)T;if T<=M;T-L+1)C;RIL,C1+pH)RIL,C1
240: H+1)H;next A;if p9=J;p2)D;K)p9;gto "srg1"
241: ret
242: "PARAM":E(I)I)E;L(I)I)J;J(I)I)J;EJ)K;L^3)C;0)ri)r2)r3)r4)r5)r6)r7
243: if W1,I1#0;E*S(I)I)/W1,I1)r7;L/(L+r7)r1
244: if W2,I1#0;L/(L+E(I)I)/W2,I1)r4
245: if V1,I1#0;C/(C+K/V1,I1)r2
246: if V2,I1#0;C/(C+K/V2,I1)r5
247: 3K)K;if M1,I1#0;L/(L+K/M1,I1)r3
248: if M2,I1#0;L/(L+K/M2,I1)r6
249: E(I)I)r1*r4/(ri+r4-ri*r4)/L)A;r2*r5)r1;r3*r6)r4
250: r2+r5-2ri)r2;r3+r6+r4)r5;EJ/(ri(4-r4)+i2*r2*r5)H;ret
251: "COEFBAR":cos(A(I)I)X;sin(A(I)I)Y;c11 'PARAM'
252: 6H/L)K;2K*r3(3r6*r2+ri)U;2Kr6(3r3*r2+ri)R;K*r4(ri-6r2)F
253: K*ri*r6(r3+2)/L)C;K*ri*r3(r6+2)/L)G;2K*ri*r5/L/L)D;3I(I)I)J;3F(I)I)K
254: ret
255: "ANG":if pi=0 and p2#0;90p2/abs(p2)p3;gto +2
256: if pi#0;atn(p2/pi)p3;if pi<0;180+p3)p3
257: ret p3

```

## A N E X O 02

Diagramas carga x flecha obtidos nos ensaios do modelo cavilhado. A posição da carga e os pontos de leitura estão indicados em cada diagrama, seguindo a notação apresentada na figura abaixo.

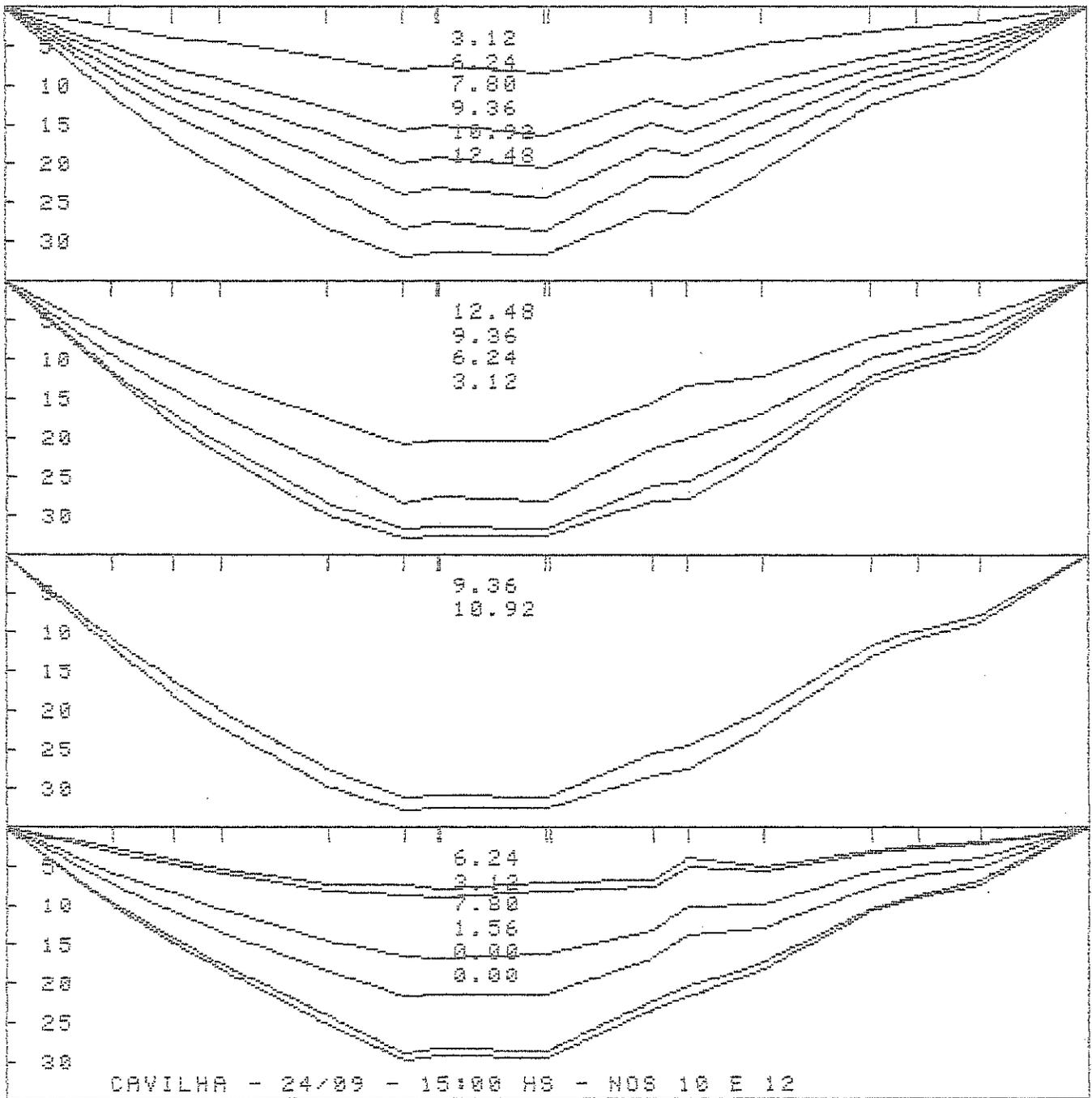


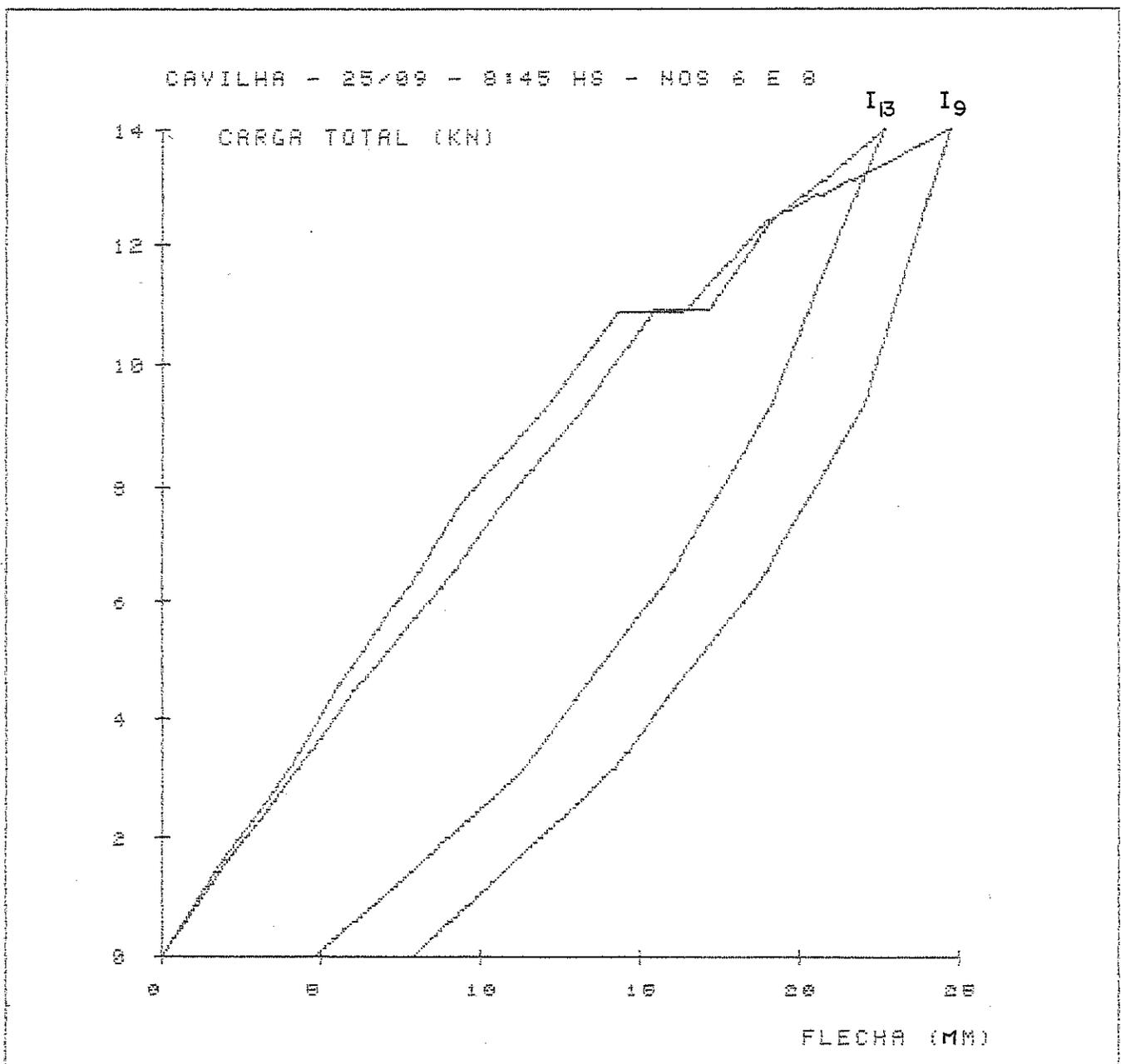


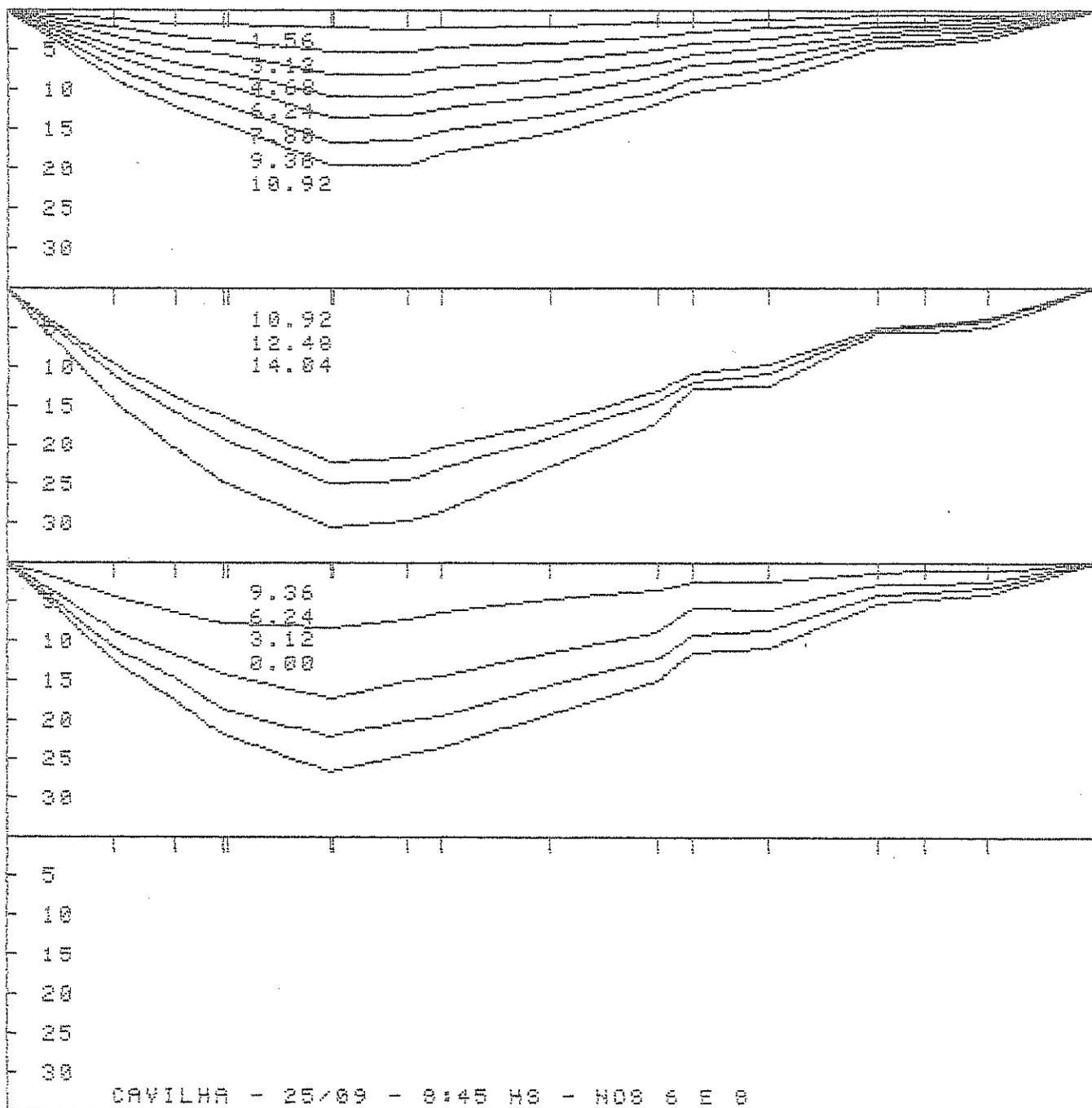
Flecha (mm)

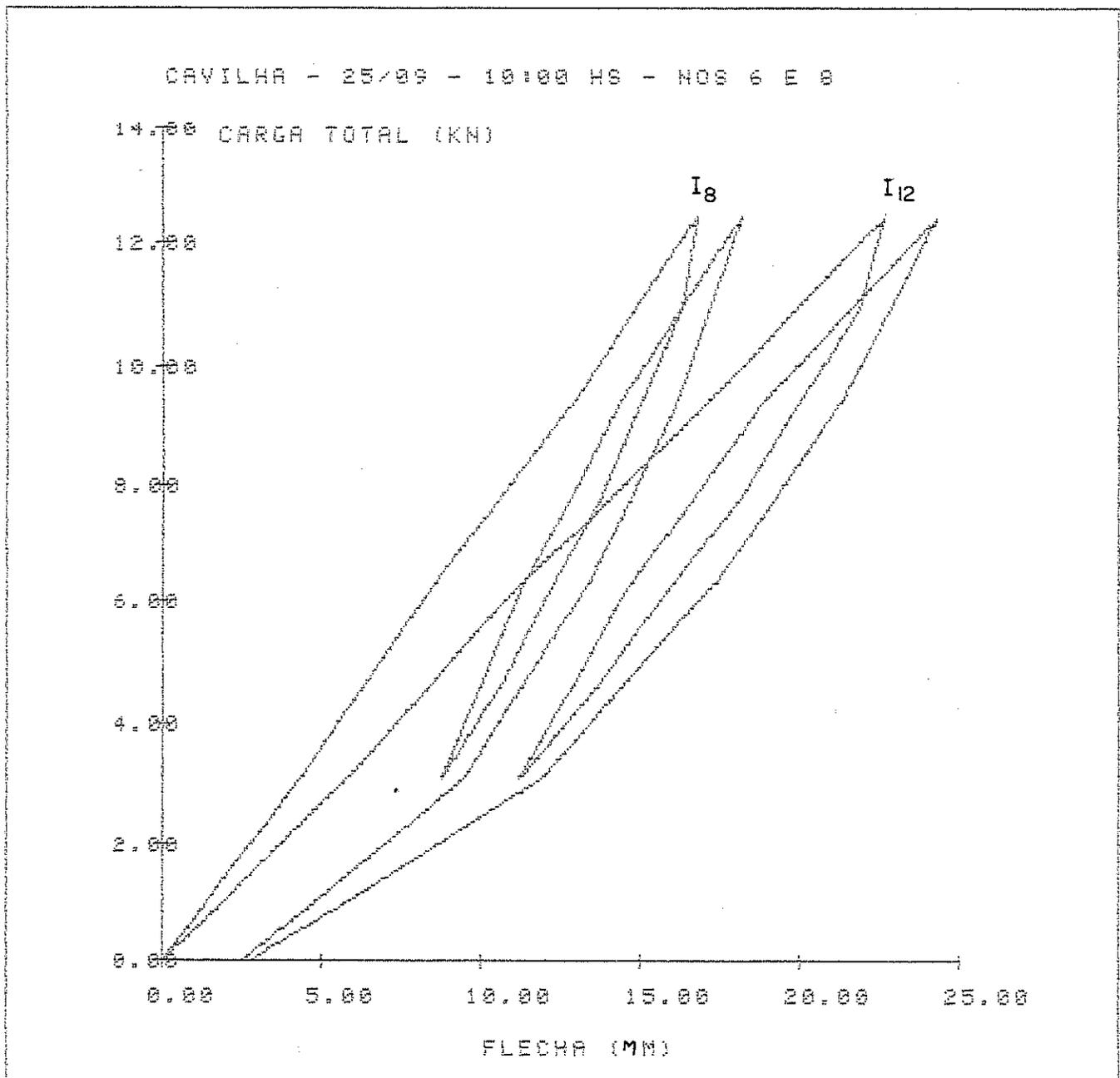


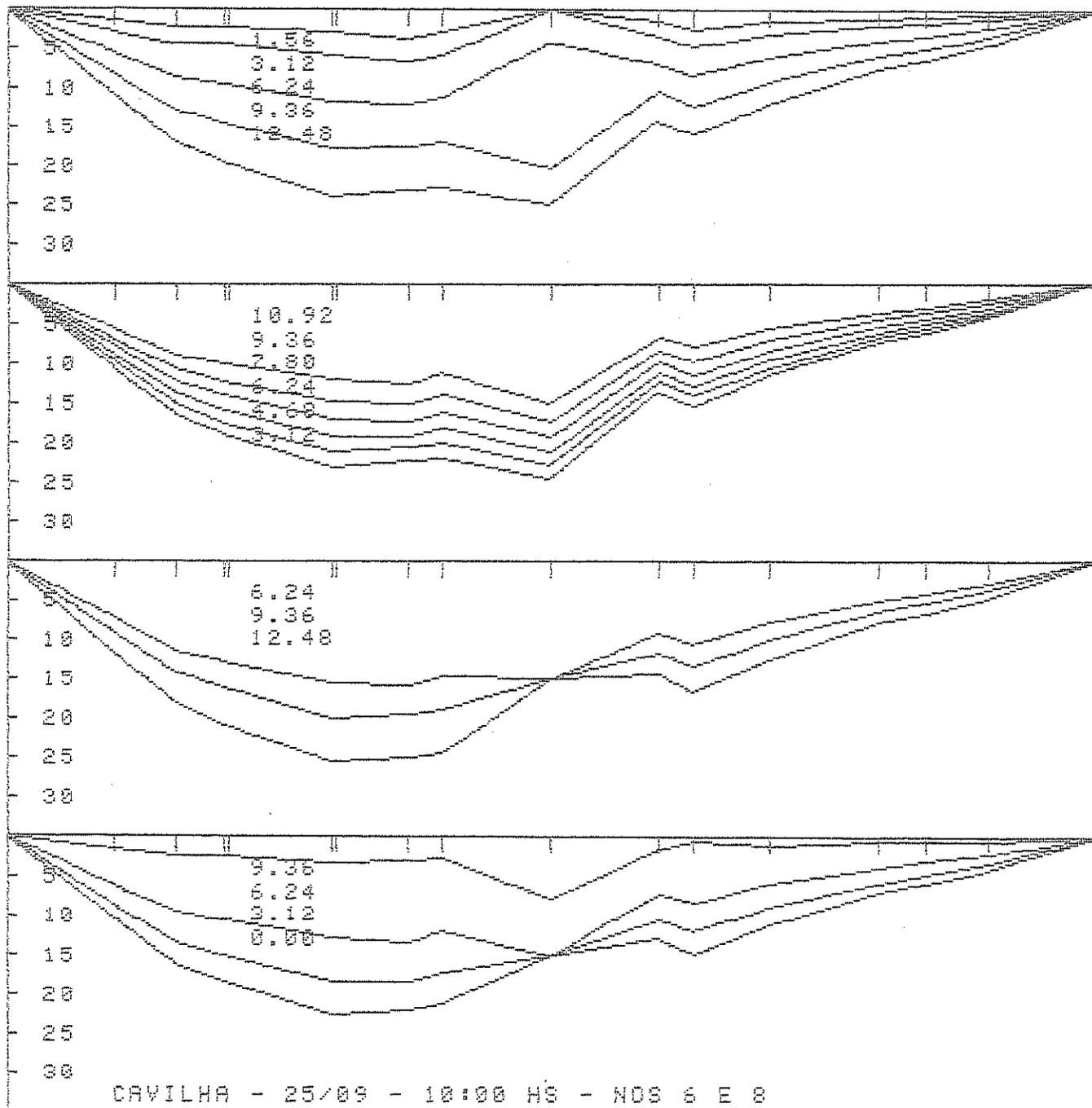
Cargas (kN)

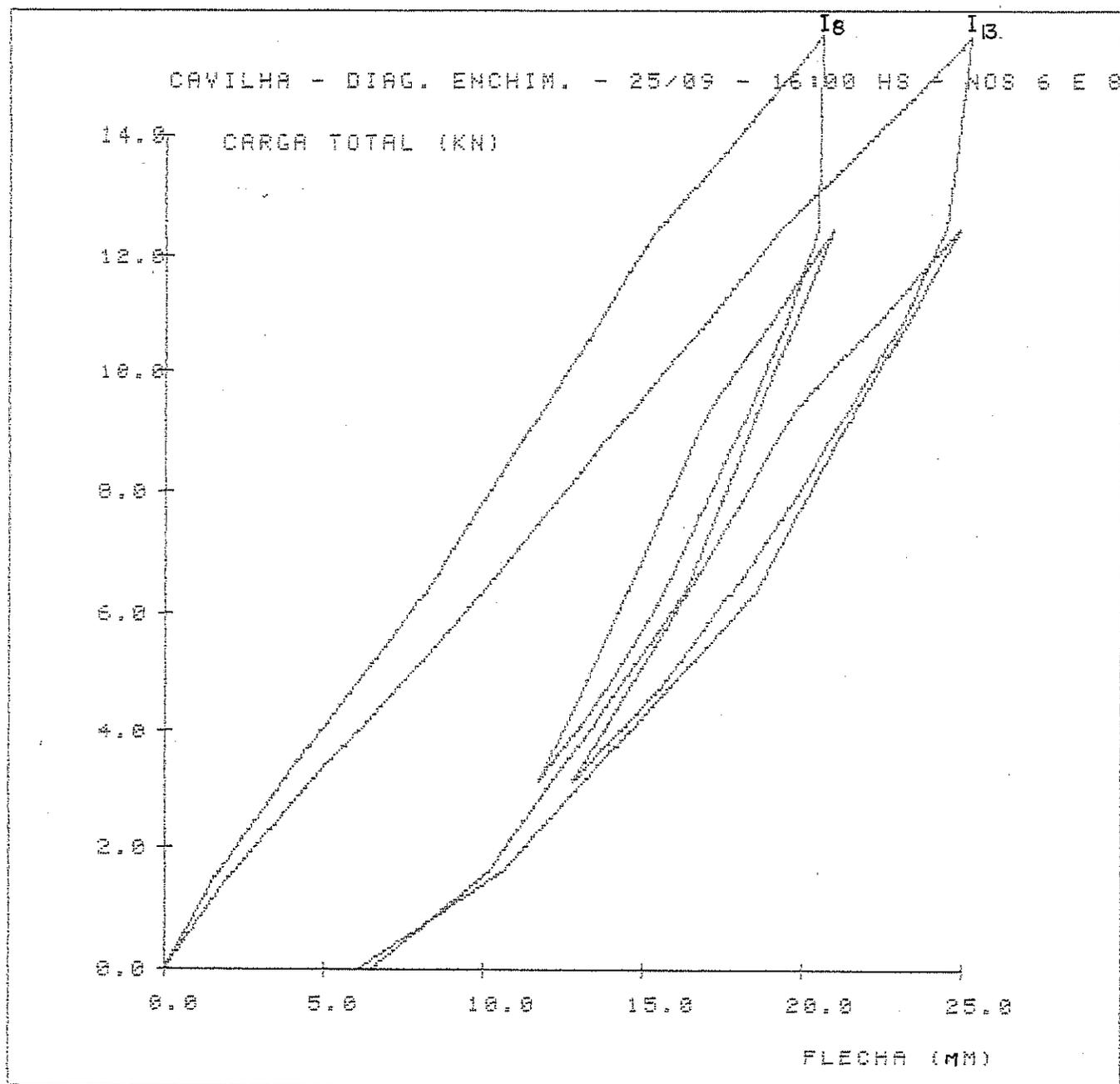


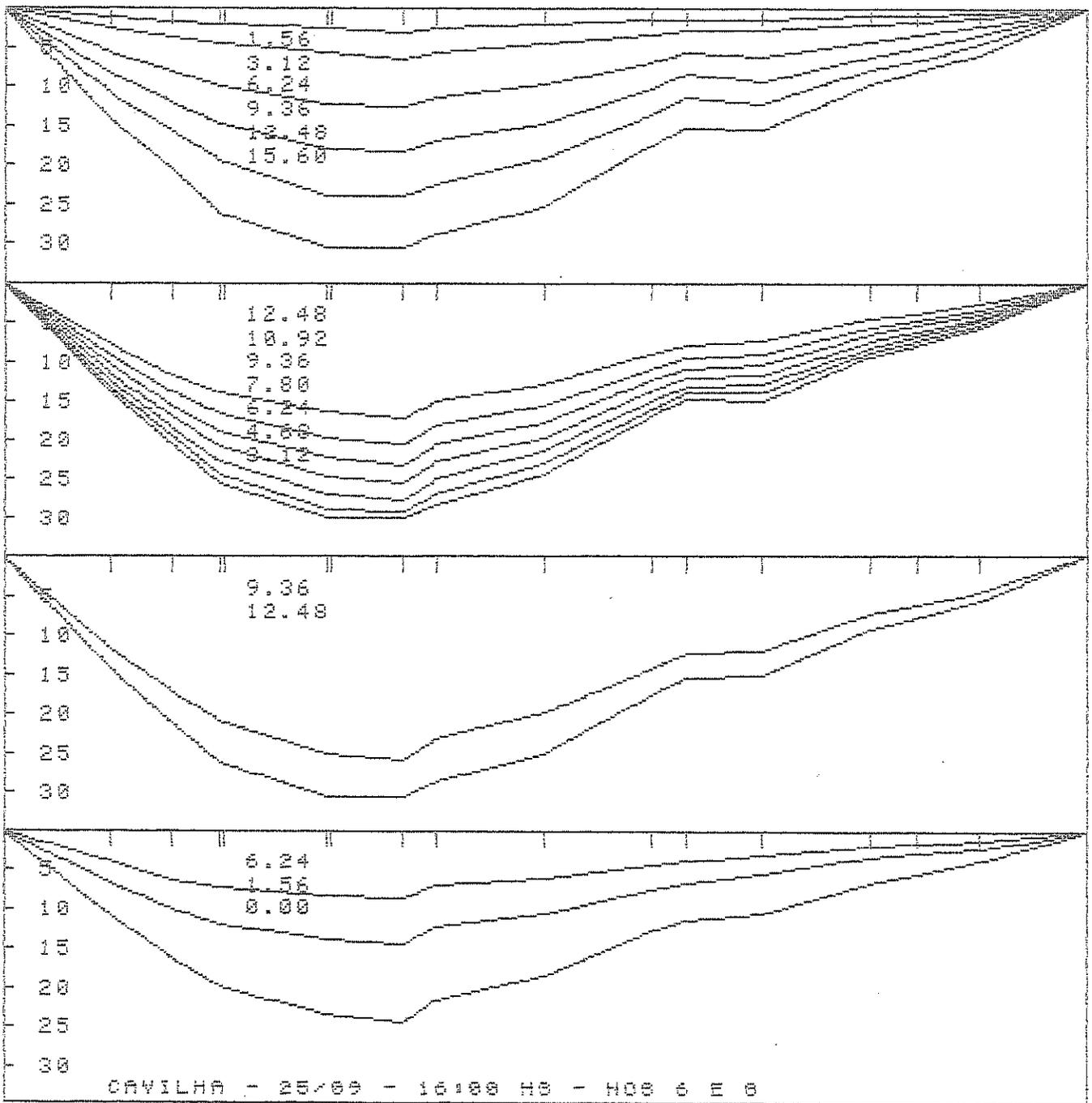




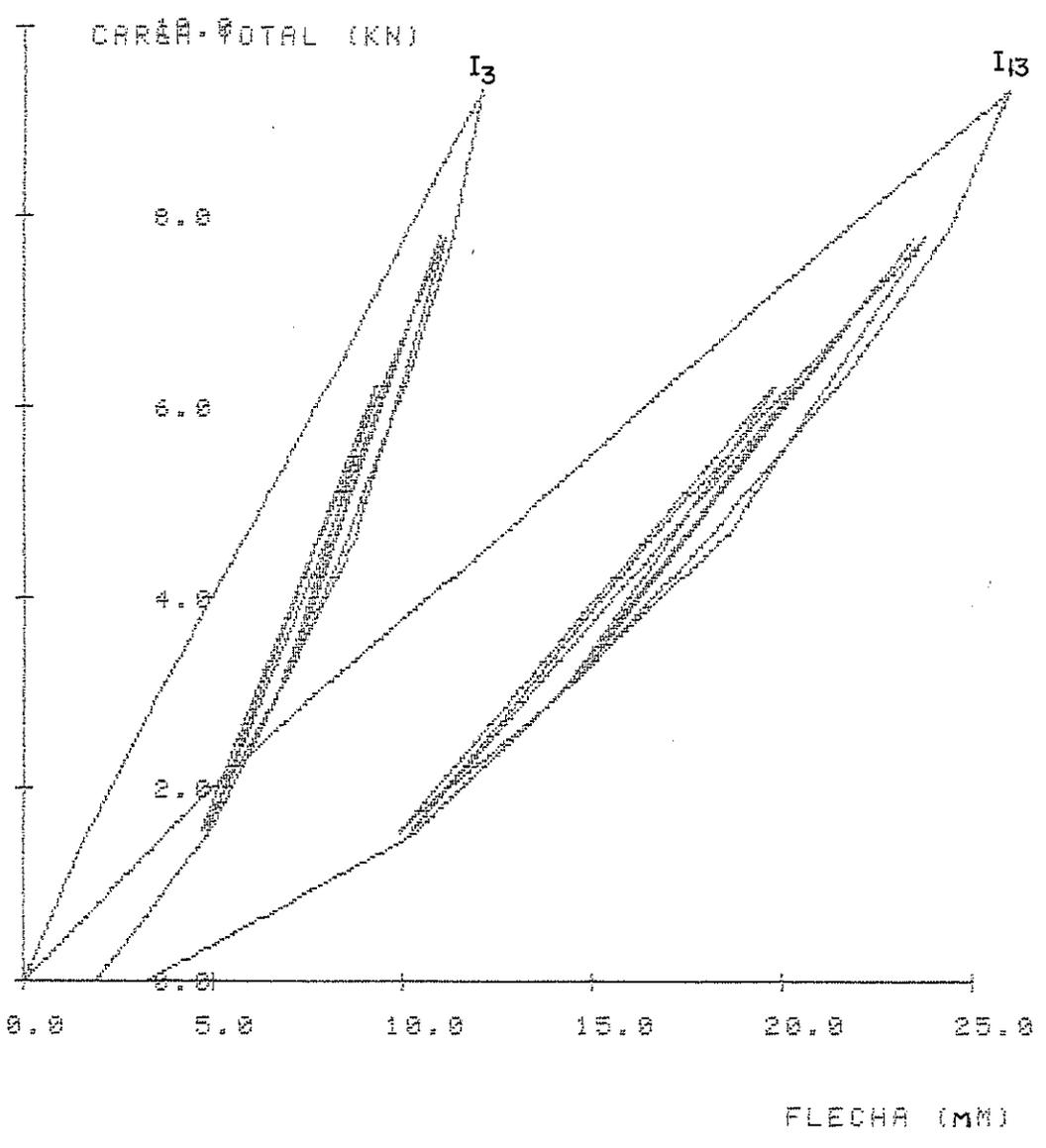


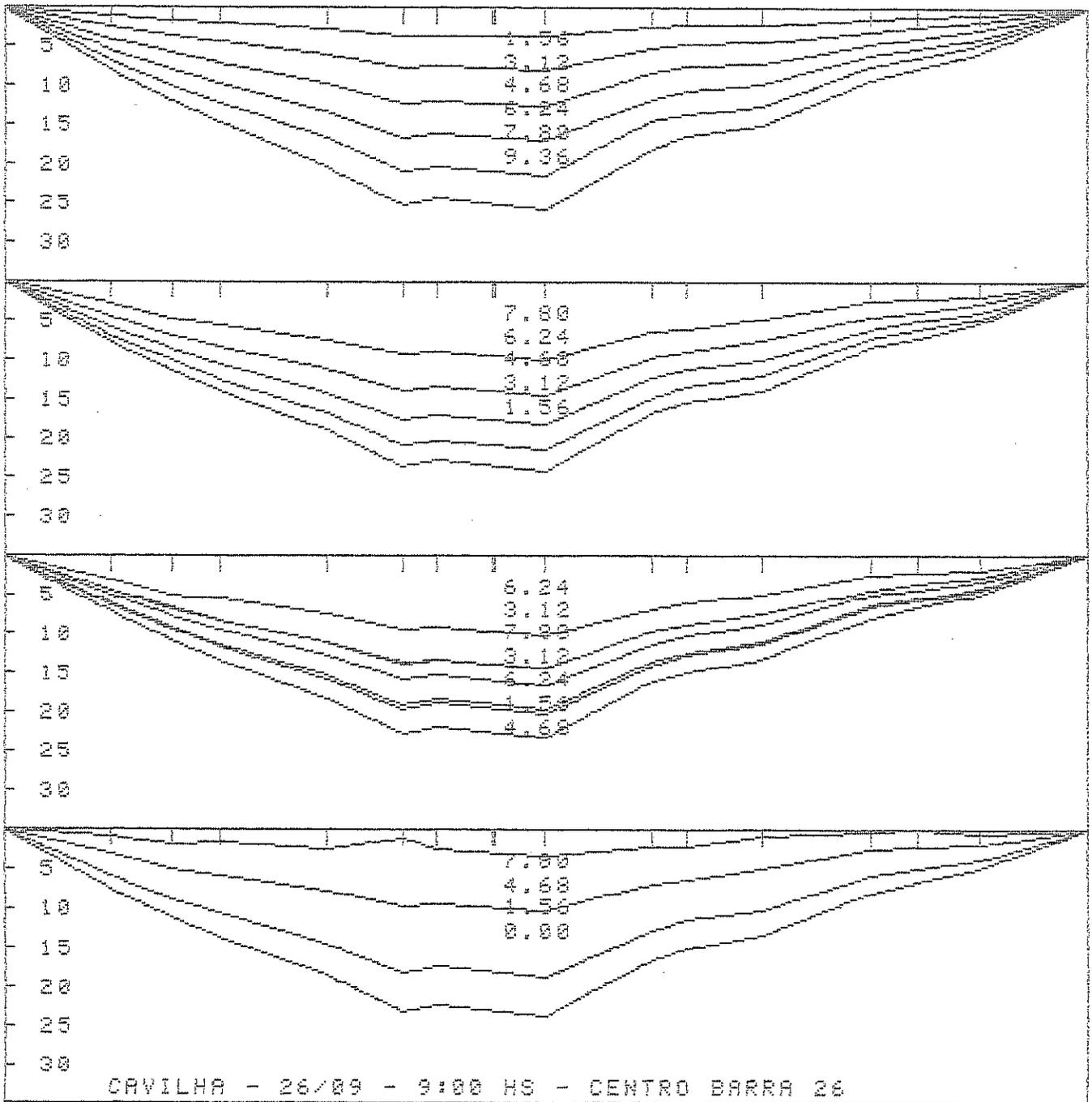


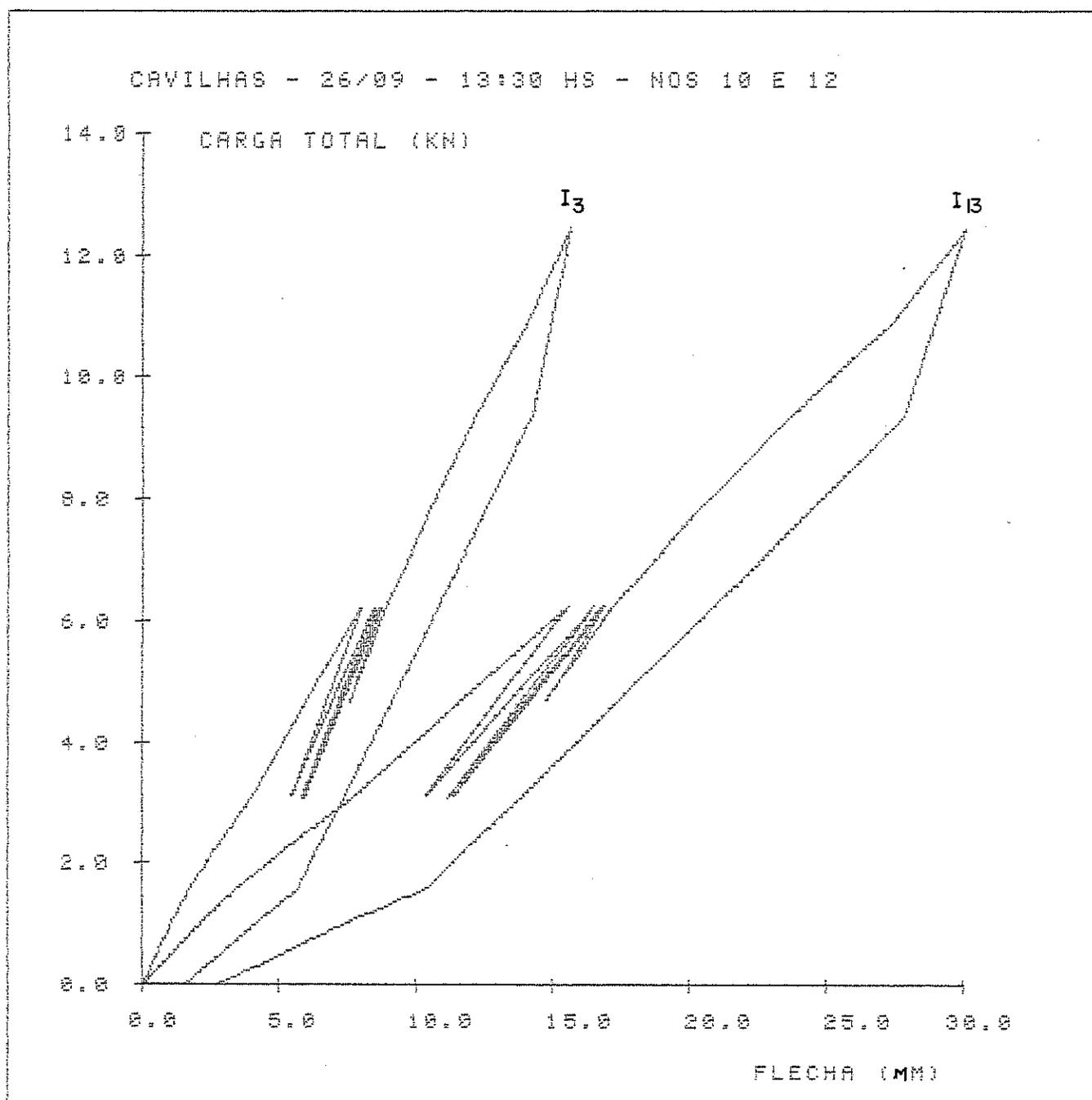


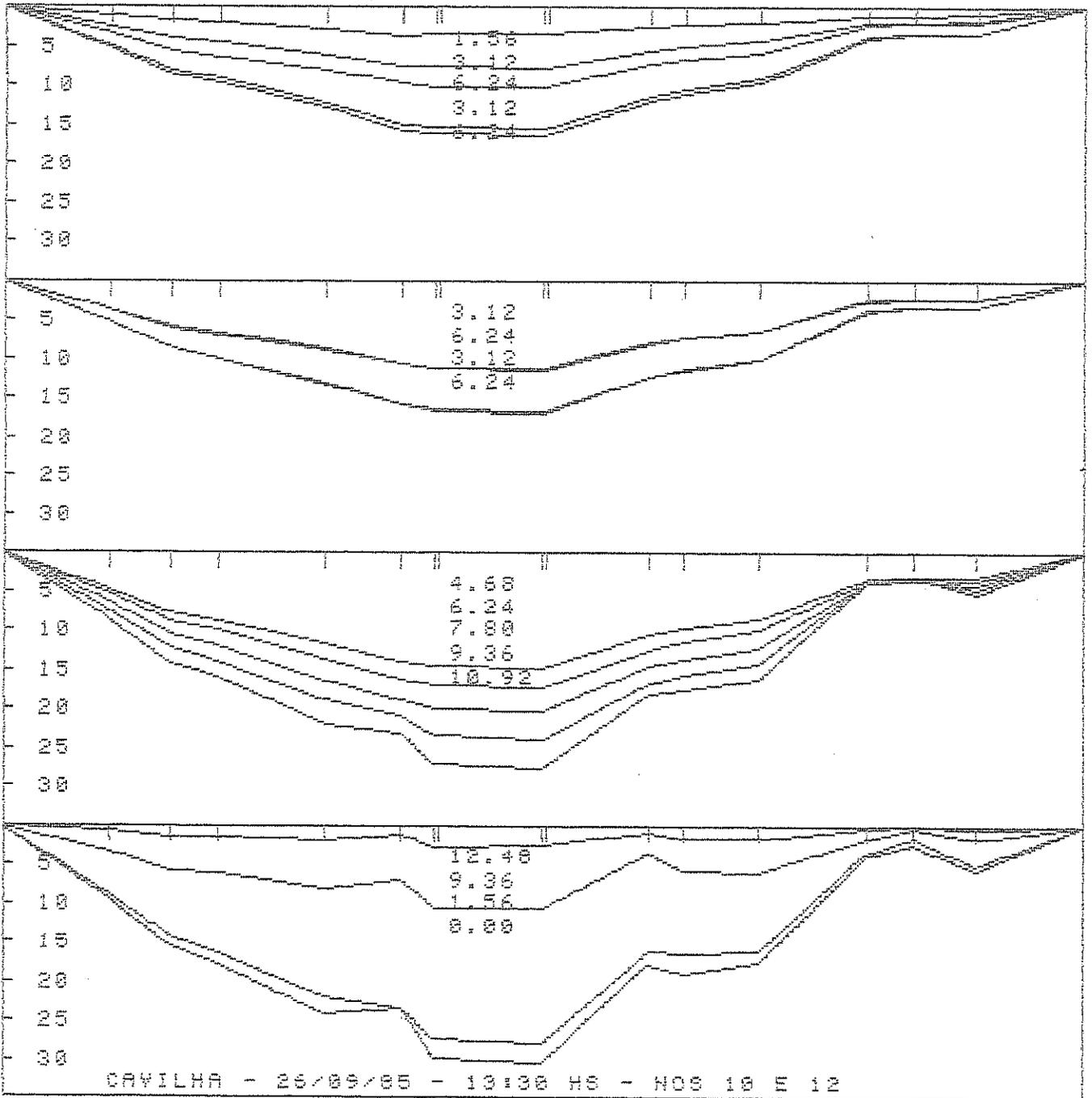


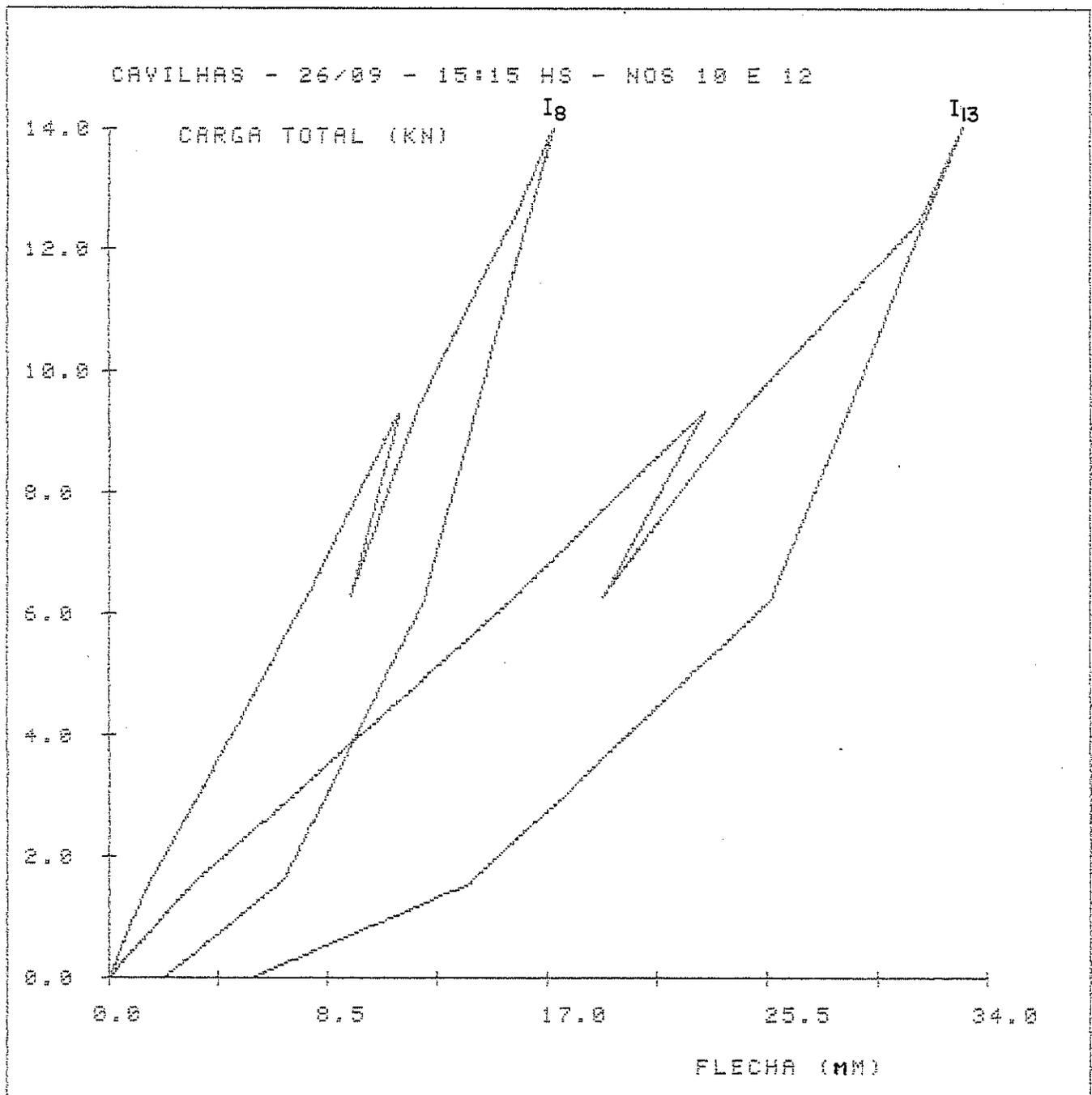
CAVILHAS - CARGA CENTRO BARRA 26-26/09-948

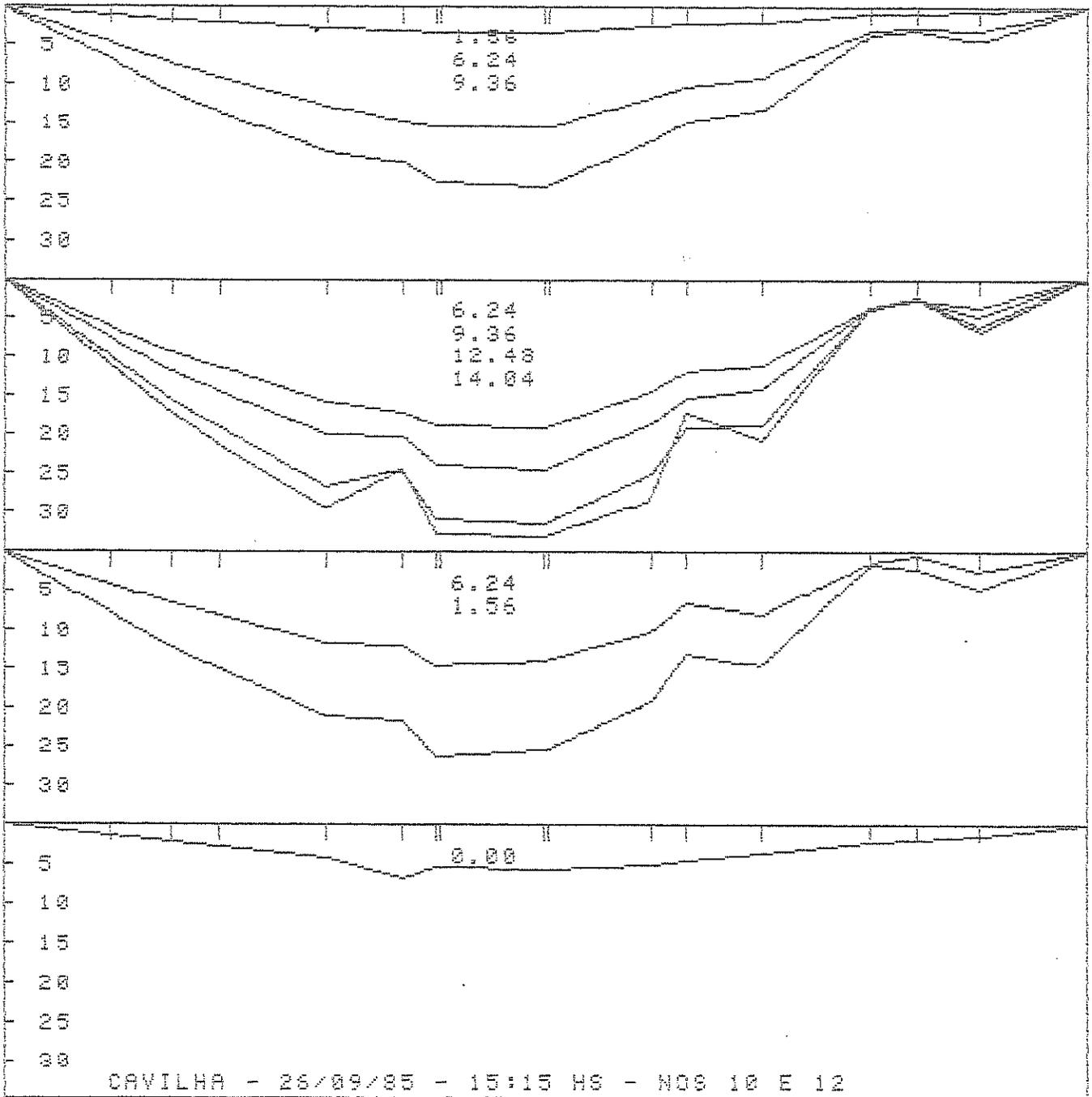




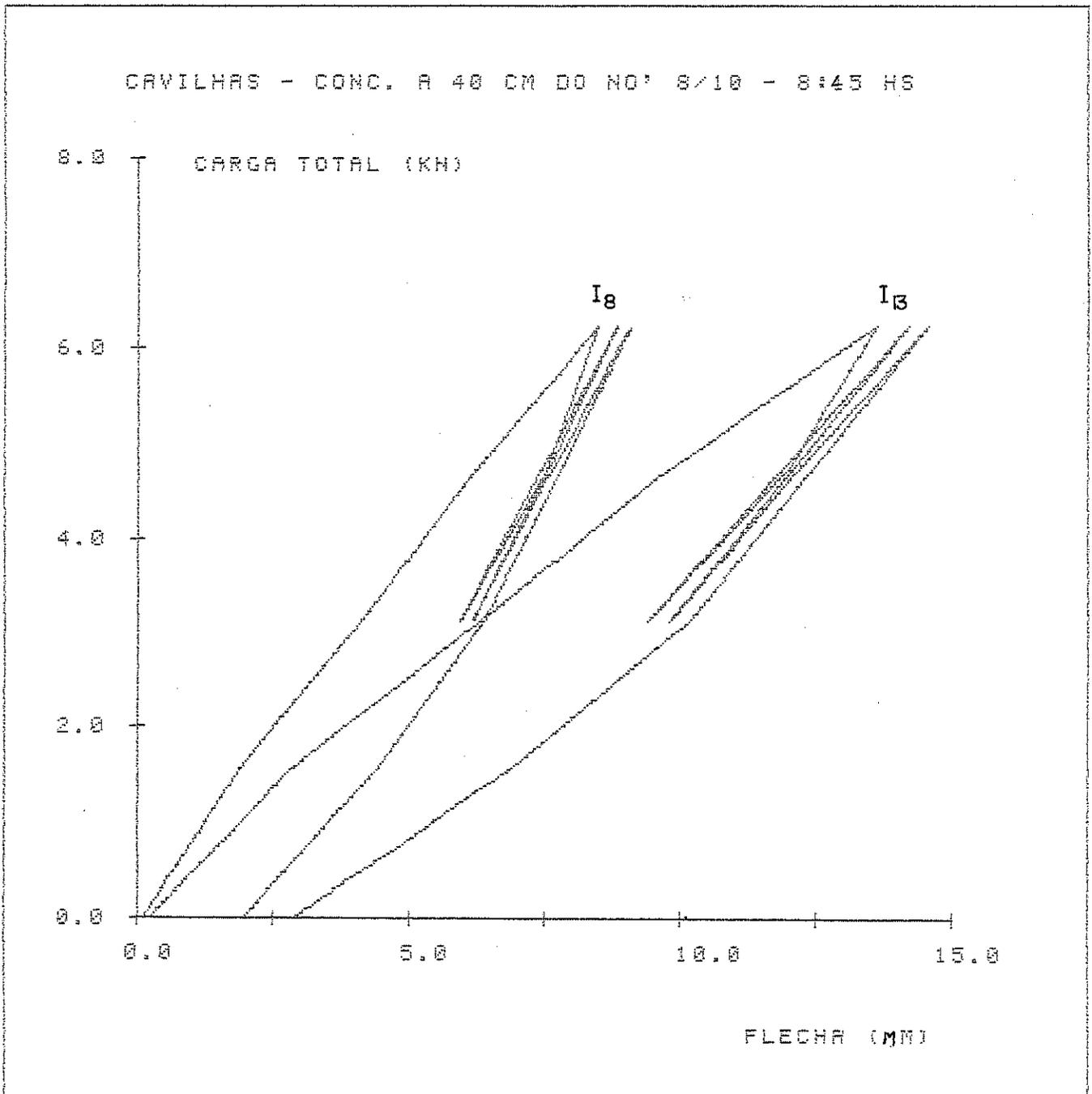




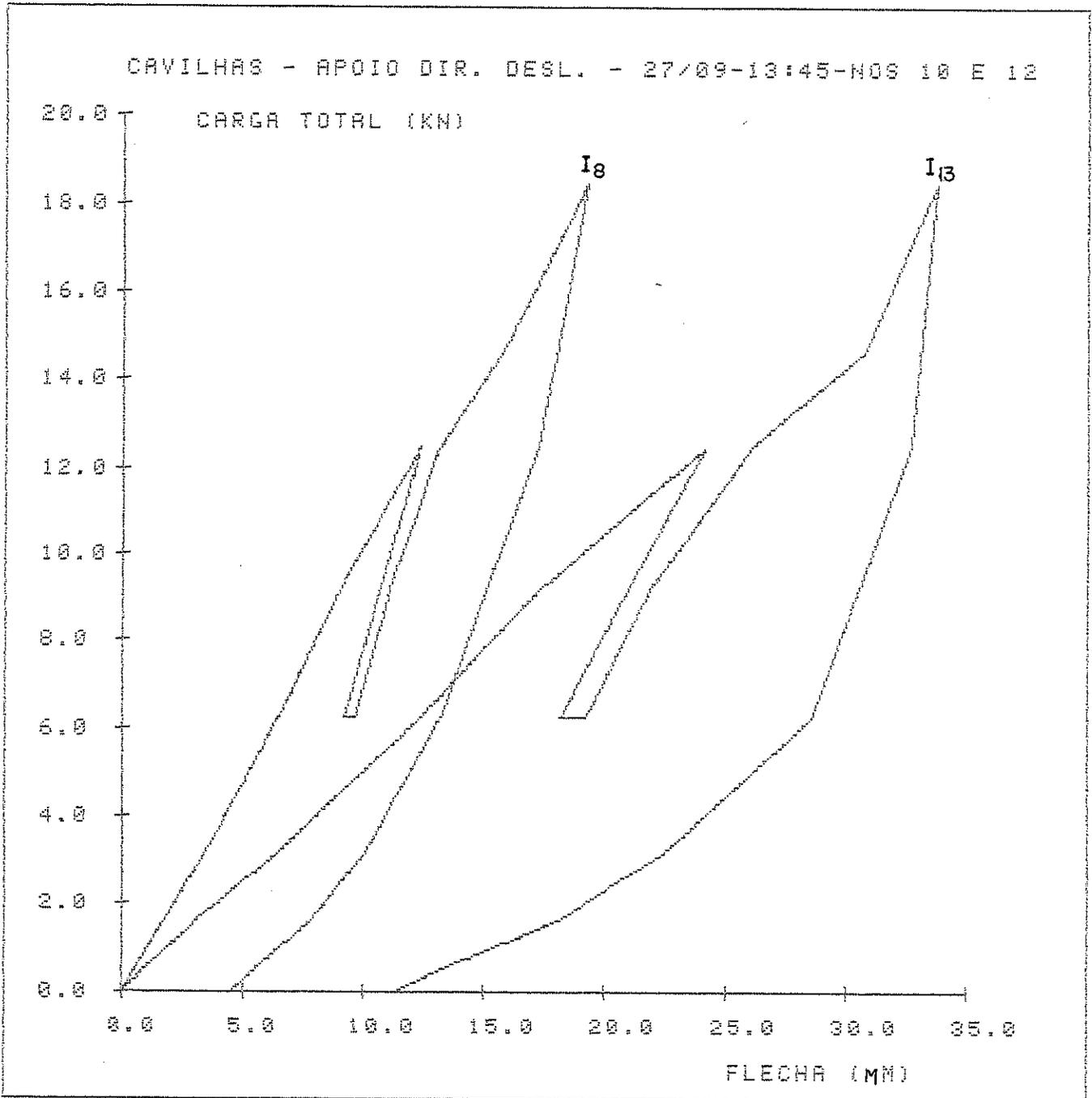


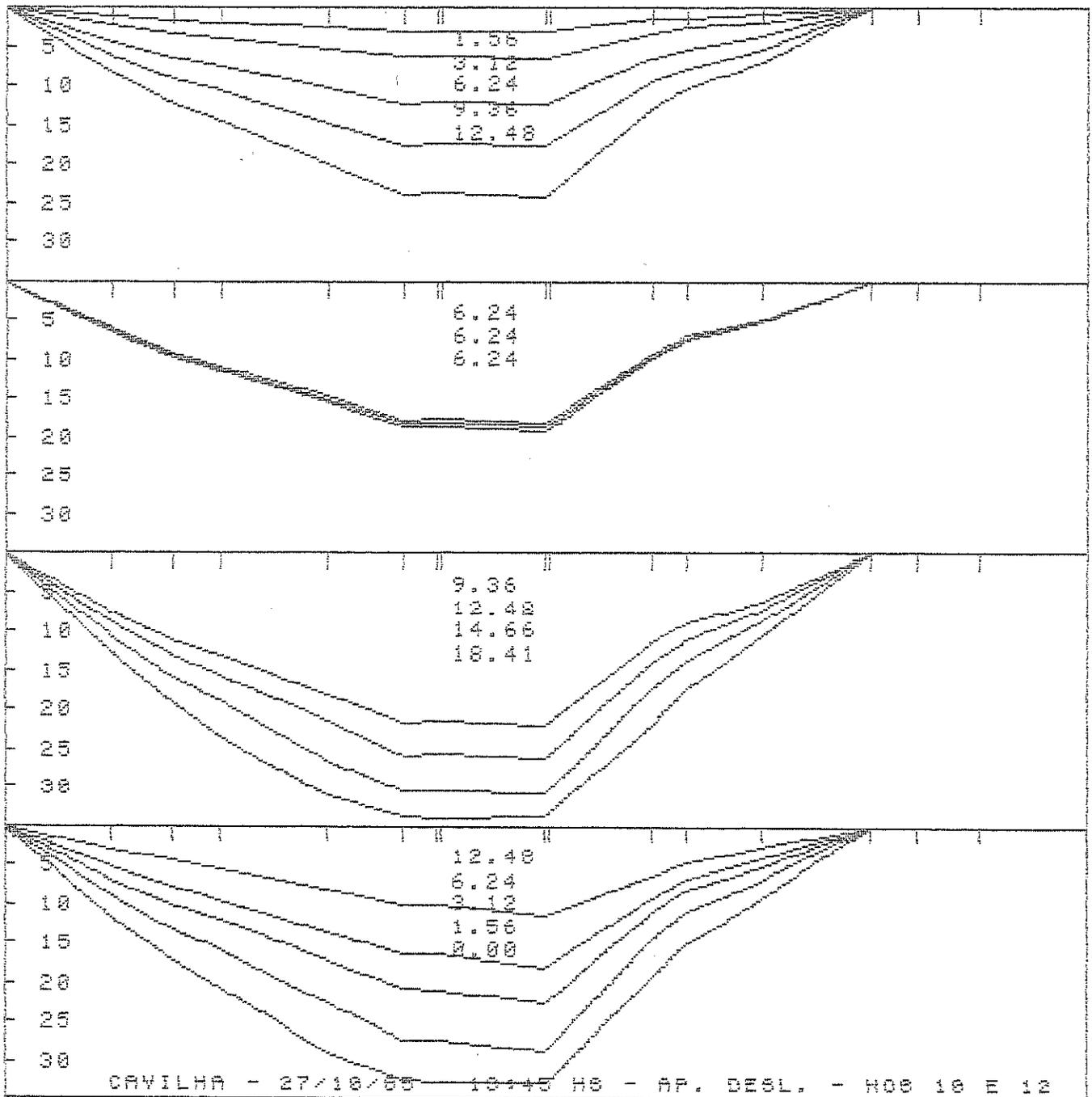


CAVILHA - 26/09/85 - 15:15 HS - NOS 10 E 12

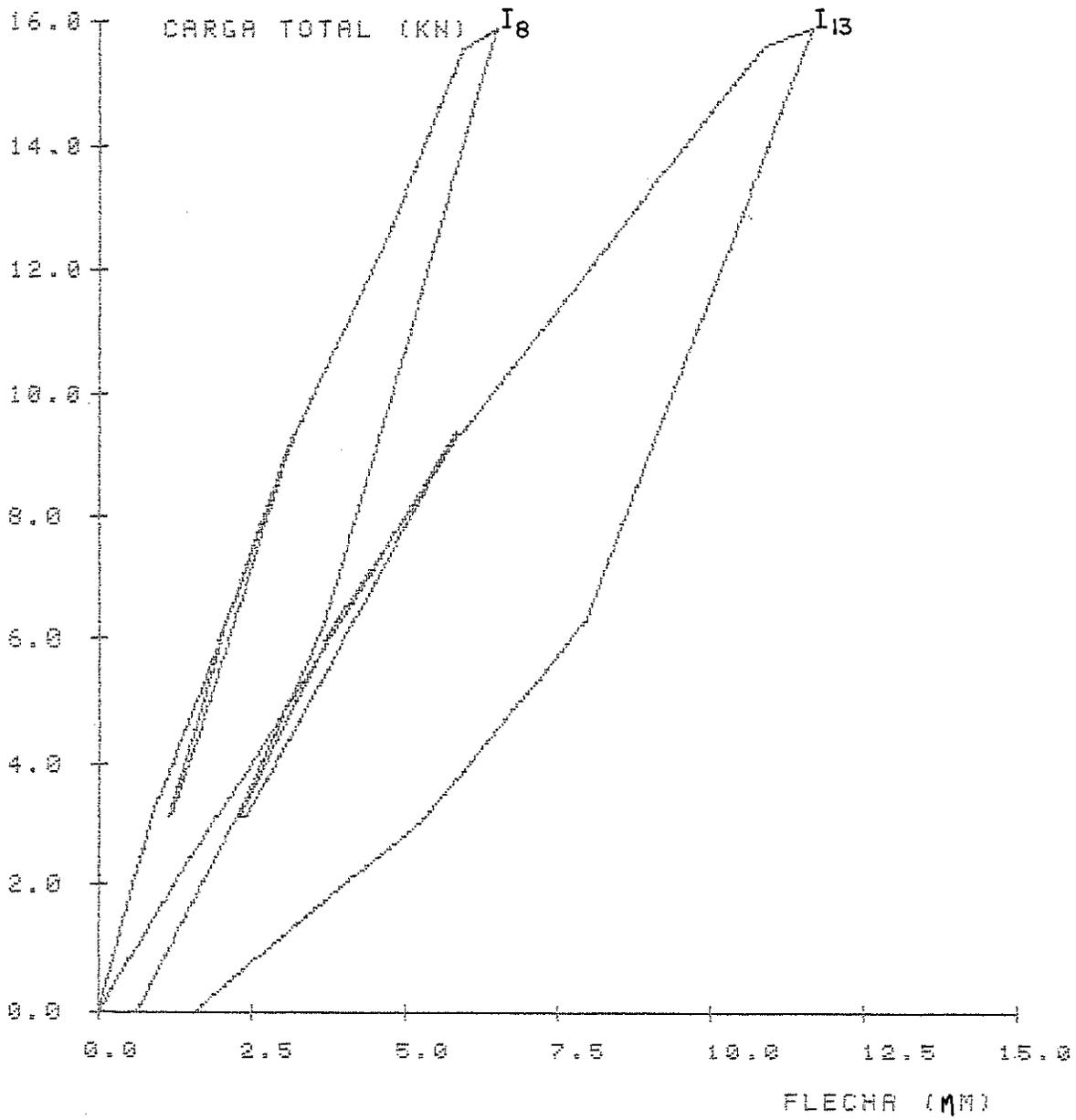


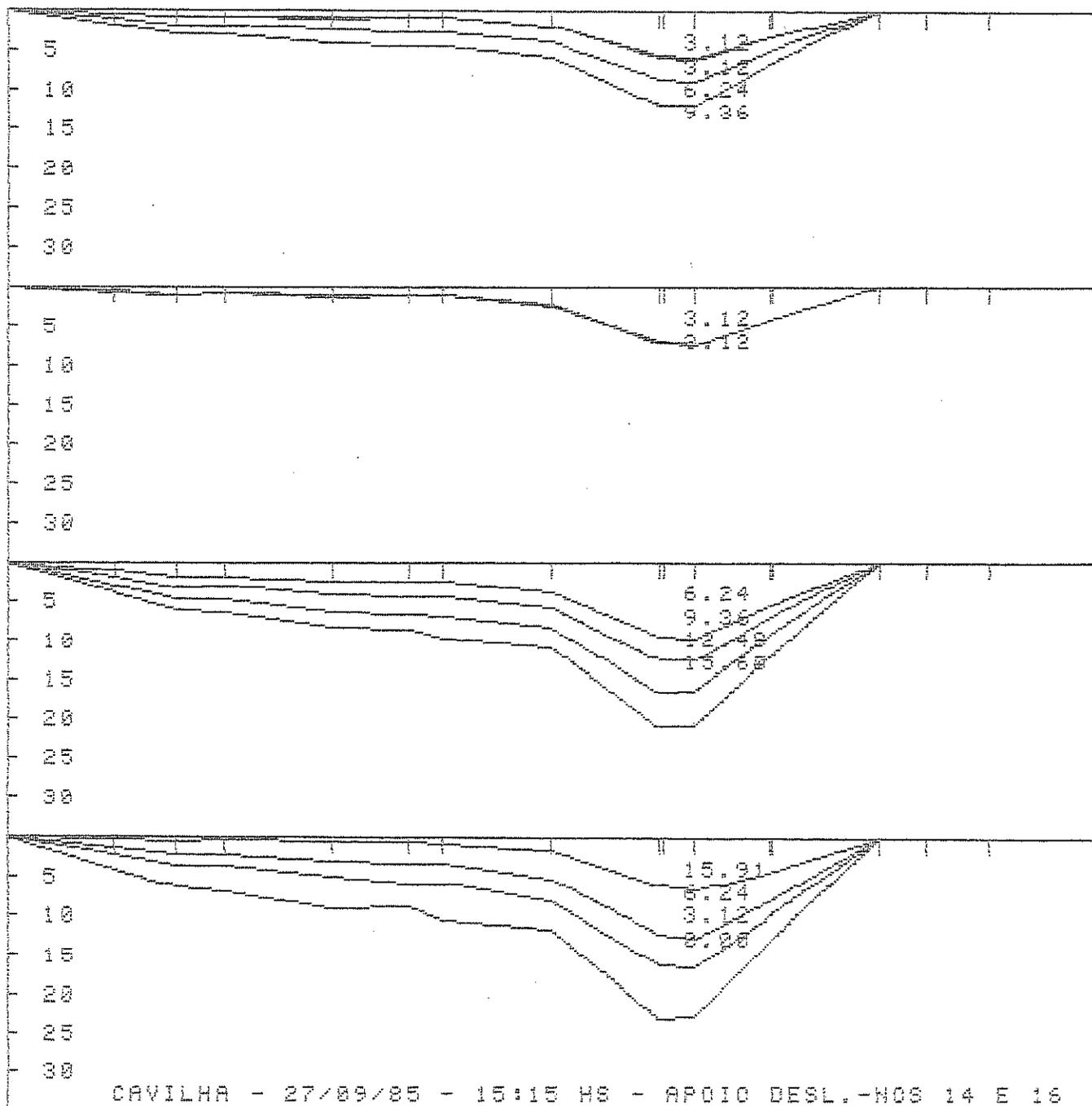




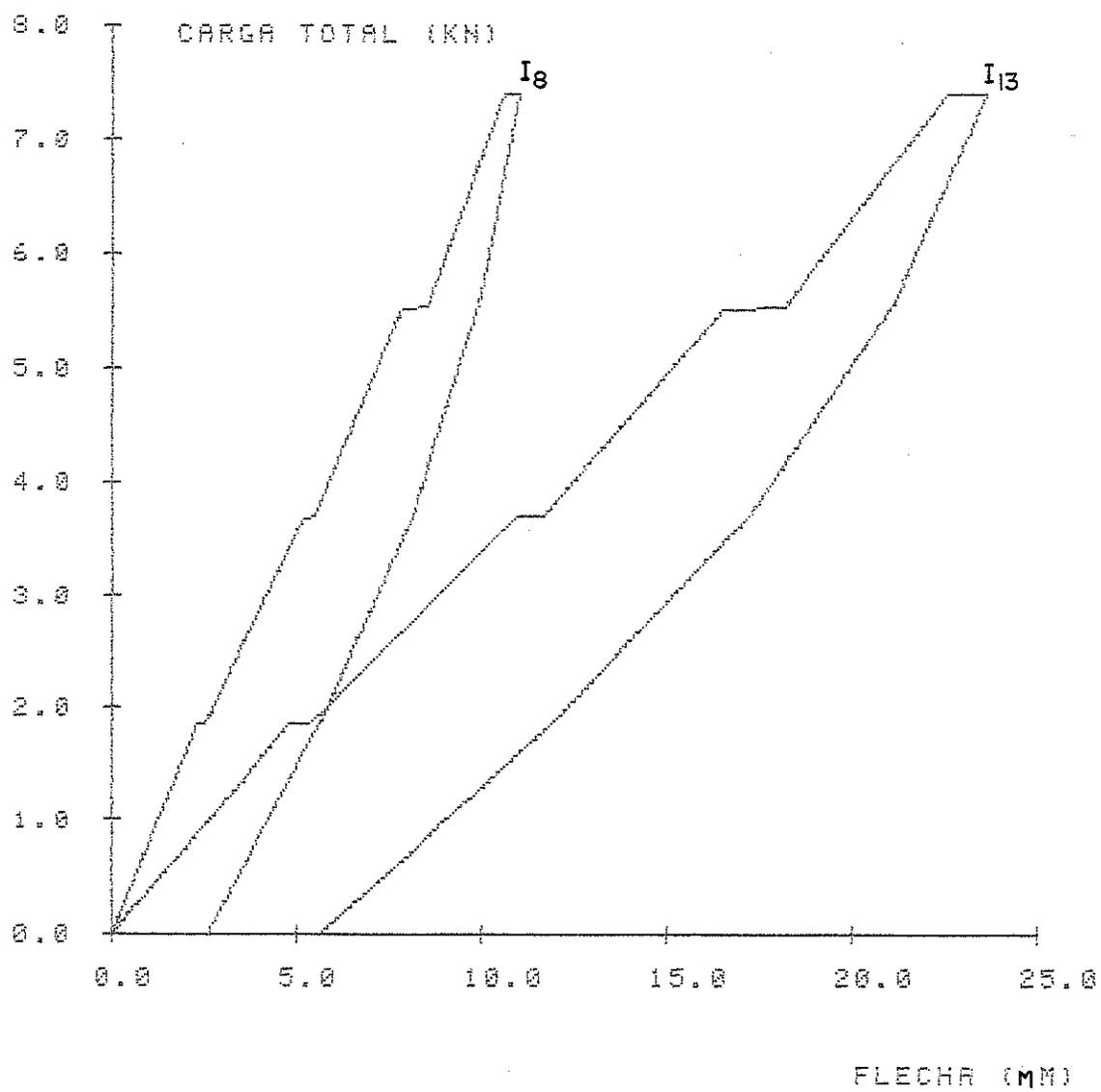


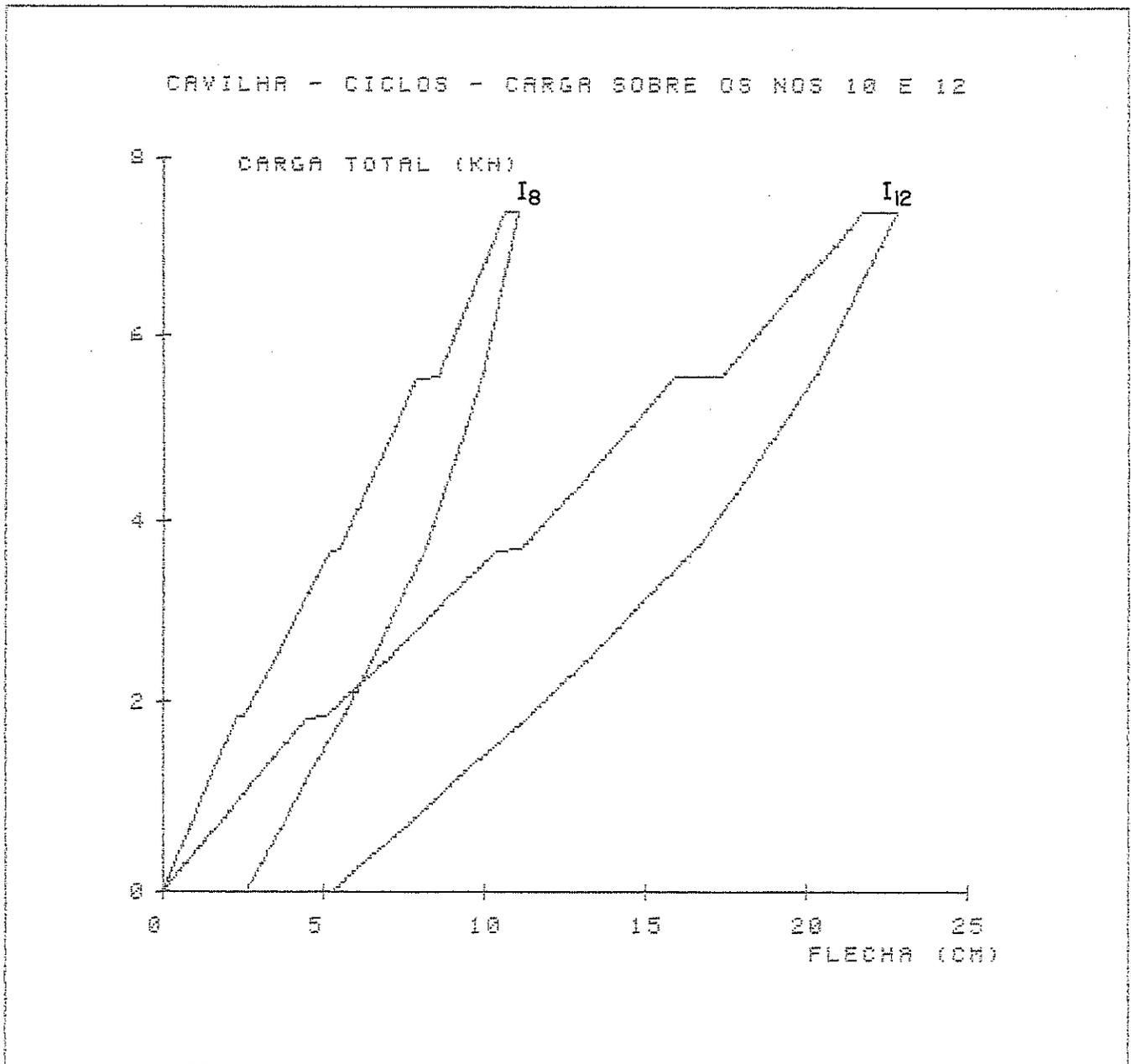
CAVILHAS - APOIO DIR. DESL.-27/09-15:15 HS-NOS 14 E 16

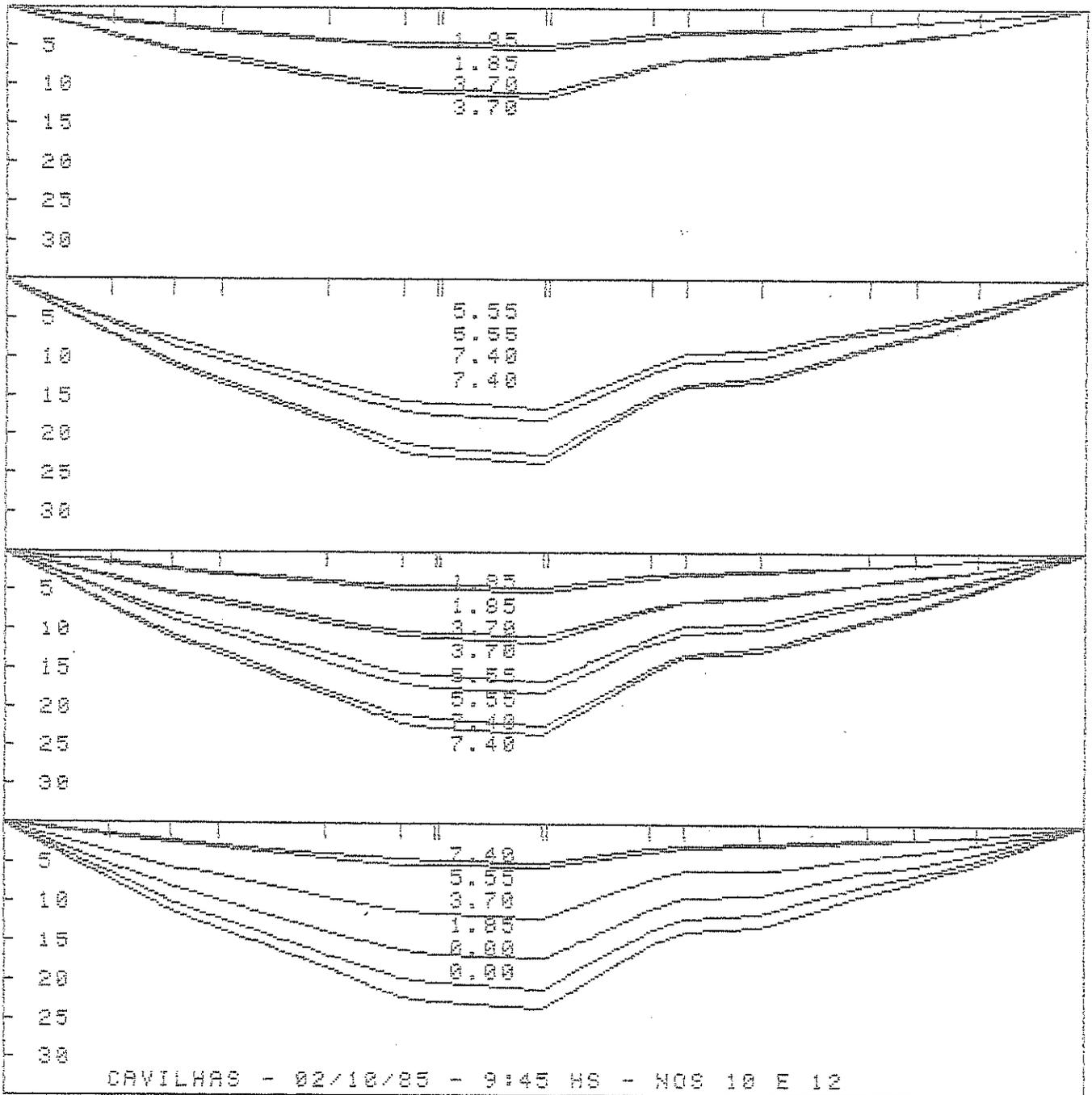




CAYILHA - CICLOS - 02/10 - 9:45 HS - NOS 10 E 12







CAVILHAS - CICLOS - 02/10 - 10:45 HS - NOS 10 E 12

