

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
ÁREA DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

APLICAÇÃO DO PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS NO CÁLCULO
DOS ESFORÇOS EM TANQUES CILÍNDRICOS CIRCULARES

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

ENG^a YVONNE FARAH SABE

SÃO CARLOS, JANEIRO DE 1986

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
ÁREA DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

APLICAÇÃO DO PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS NO CÁLCULO
DOS ESFORÇOS EM TANQUES CILÍNDRICOS CIRCULARES

ENG^a YVONNE FARAH SABE

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

ORIENTADOR :

PROF^a DR^a HELENA M.C. CARMO ANTUNES

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

SÃO CARLOS, JANEIRO DE 1986

Para

Laura, Dinette, Felipe,
José Guilherme e André

dedico este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Em especial à Prof^a Dr^a Helena M.C.Carmo Antunes não somente pela orientação mas também pela maneira segura e eficaz com que me ajudou nos momentos difíceis.

A grande amiga Solange cuja colaboração teve essencial importância aumentando também a confiança, coragem e perseverança para o desenvolvimento e conclusão do presente trabalho.

A Sra. Wilma Provinciali Vall pelo carinho e dedicação no serviço de datilografia.

A Srta. Sylvia Helena Moretti pelos desenhos executados.

Aos colegas e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC-USP, que direta ou indiretamente contribuíram na elaboração deste trabalho.

Ao CPD da Universidade por ter possibilitado o uso constante de seus equipamentos.

Ao CNPq e CAPES pelas bolsas de estudos concedidas.

SUMÁRIO

Trata-se da resolução de reservatórios metálicos ou de concreto, de parede cilíndrica, com ou sem cobertura, cujo fundo é uma placa circular apoiada em base rígida ou elástica. A cobertura pode ter a forma de uma calota esférica ou de uma casca cônica. A parede é composta de um ou mais segmentos de casca cilíndrica circular de espessura constante. É usado o método dos deslocamentos, compatibilizando-se as deformações nas juntas entre dois elementos, com base na teoria linear das cascas de revolução, considerando-se a solução exata (casca curta) para o cilindro e a aproximação de Geckeler para a cobertura. Para a placa de fundo sobre base rígida é adotada a aproximação de Girkmann. Os cálculos são realizados automaticamente por computador, através de um programa em linguagem FORTRAN, para computador IBM/370. Para comparações de resultados, são resolvidos alguns exemplos disponíveis na literatura. O problema é resolvido para os carregamentos de peso próprio, sobrecargas usuais e efeitos do peso e da pressão interna exercida pela coluna líquida sobre a estrutura. São dadas ainda indicações para a consideração dos efeitos da variação de temperatura e da carga de vento, bem como uma breve apresentação dos problemas de flambagem dos elementos que compõem o reservatório. Finalmente, é discutida a validade da formulação adotada.

A B S T R A C T

Circular cylindrical tanks for liquid storage either in concrete or in steel with elastic roof and bottom are solved by means of the stiffness method. The tank can combine a roof which is a spherical dome or a conical shell and a bottom plate on elastic or on rigid foundation. The cylindrical wall is assembled of various circular cylindrical shells of different thickness. The solutions are taken off the linear shell theory, in which the exact solution of a short cylinder is combined with the Geckeler approximation for the spherical or conical roof. For the bottom plate laying on a rigid foundation, is used the simplified analysis proposed by Girkmann. The calculations are carried on by a IBM/370 computer and the results are compared with those encountered in the literature. Dead and live loads plus the weight and hydrostatic pressure of the filling liquid are considered. A short discussion of thermal stresses, wind loads and buckling problems is also added. Finally, the limitations of the accomplished analysis are pointed out.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

| | |
|-----------------------------------|---|
| 1 - Considerações Gerais | 1 |
| 2 - Conteúdo da Dissertação | 3 |

CAPÍTULO II

ELEMENTOS DA TEORIA DAS CASCAS DE REVOLUÇÃO

| | |
|--|----|
| 1 - Introdução | 6 |
| 2 - Hipóteses e definições | 6 |
| 3 - Esforços solicitantes | 8 |
| 4 - Equações de equilíbrio | 11 |
| 5 - Relações deformações - deslocamentos | 12 |
| 6 - Relações tensões - deformações | 14 |
| 7 - Relações esforços - deslocamentos | 14 |
| 8 - Teoria de membrana das cascas de revolução | 15 |
| 9 - Esforços e deslocamentos de membrana | 16 |
| 9.1 - Cascas esféricas..... | 19 |
| 9.2 - Cascas cônicas | 22 |
| 9.3 - Cascas cilíndricas circulares | 26 |

CAPÍTULO III

SOLUÇÃO DA TEORIA DE FLEXÃO DAS CASCAS DE REVOLUÇÃO

| | |
|--|----|
| 1 - Equação diferencial homogênea para a cobertura do reservatório | 31 |
| 1.1 - Cascas esféricas | 32 |
| 1.2 - Cascas cônicas | 37 |
| 2 - Equação diferencial homogênea para a parede do reservatório | 44 |

CAPÍTULO IV

PLACAS E CHAPAS

| | |
|---|----|
| 1 - Introdução | 55 |
| 2 - Placas circulares assentes em base rígida | 55 |
| 3 - Placas circulares assentes em base elástica | 58 |
| 4 - Chapas | 68 |

CAPÍTULO V

ESFORÇOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO

| | |
|---|----|
| 1 - Introdução | 70 |
| 2 - Matriz de rigidez do elemento | 71 |
| 2.1 - Cobertura do reservatório | 72 |
| 2.2 - Parede do reservatório | 73 |
| 2.3 - Fundo do reservatório | 74 |
| 3 - Esforços de extremidade nos elementos perfeitamente engastados para os carregamentos externos | 77 |
| 3.1 - Cobertura do reservatório | 78 |
| 3.2 - Parede do reservatório | 78 |
| 3.3 - Fundo do reservatório | 79 |

CAPÍTULO VI

CARREGAMENTOS SECUNDÁRIOS

| | |
|---|----|
| 1 - Introdução | 80 |
| 2 - Efeitos de variação de temperatura | 81 |
| 2.1 - Casca cilíndrica | 81 |
| 2.2 - Casca esférica | 87 |
| 2.3 - Casca cônica | 90 |
| 3 - Efeitos da carga de vento | 92 |
| 3.1 - Casca cilíndrica | 93 |
| 3.2 - Casca esférica | 95 |
| 3.3 - Casca cônica | 96 |
| 4 - Considerações finais sobre os carregamentos secundários | 97 |

CAPÍTULO VII

ANÁLISE DA ESTRUTURA INTEGRADA

| | |
|--|-----|
| 1 - Considerações gerais | 98 |
| 2 - Matriz de rigidez da estrutura integrada | 99 |
| 3 - Vetor de carga da estrutura integrada | 100 |
| 4 - Vetor dos deslocamentos | 101 |
| 4.1 - Do reservatório | 101 |
| 4.2 - Dos elementos | 101 |
| 5 - Determinação dos esforços finais | 101 |
| 5.1 - Nas extremidades dos elementos | 101 |
| 5.2 - Ao longo dos diversos elementos | 102 |

CAPÍTULO VIII

VERIFICAÇÕES DE PROJETO E DIMENSIONAMENTO

| | |
|---|-----|
| 1 - Introdução | 104 |
| 2 - Considerações gerais sobre a flambagem de cascas .. | 105 |
| 3 - Casca cilíndrica..... | 107 |
| 4 - Casca esférica | 109 |
| 5 - Casca cônica | 110 |
| 6 - Resultados experimentais e segurança à flambagem .. | 111 |

CAPÍTULO IX

AUTOMATIZAÇÃO PARA COMPUTADOR

| | |
|---|-----|
| 1 - Considerações Gerais | 115 |
| 1.1 - Pressão hidrostática num elemento qualquer da parede do reservatório | 118 |
| 1.2 - Largura da coroa do fundo em base rígida | 120 |
| 2 - Mecanismo do programa | 123 |
| 3 - Fluxograma | 123 |
| 3.1 - Lista das variáveis principais | 123 |
| 3.2 - Subrotinas utilizadas pelo programa principal | 124 |
| 3.3 - Fluxograma do programa principal | 126 |
| 4 - Manual do usuário | 128 |

CAPÍTULO X

ANÁLISE DOS RESULTADOS

| | |
|---|-----|
| 1 - Considerações gerais | 130 |
| 2 - Exemplos analisados | 131 |
| 3 - Comparação com exemplos disponíveis na literatura . | 144 |
| 4 - Coerência dos resultados | 147 |
| 5 - Reservatórios assentes sobre base rígida | 148 |
| 6 - Reservatórios sobre base elástica | 149 |

| | |
|-------------------------|-----|
| <u>CONCLUSÕES</u> | 151 |
|-------------------------|-----|

| | |
|---------------------------|-----|
| <u>BIBLIOGRAFIA</u> | 154 |
|---------------------------|-----|

| | |
|---------------------|-----|
| <u>ANEXOS</u> | 157 |
|---------------------|-----|

Anexo 1 - Funções $F_j(\xi)$ para a solução da casca cilíndrica

Anexo 2 - Funções $Z_i(\xi)$ usadas para resolução da placa em base elástica.

Anexo 3 - Listagem

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

A grande expansão das usinas de álcool e as necessidades crescentes das indústrias petrolíferas quanto ao armazenamento de líquidos, conduziram à execução de tanques de grandes volumes.

Para isto utilizam-se geralmente os reservatórios cilíndricos circulares de grande diâmetro, pois devido à simetria de revolução tanto da estrutura como dos carregamentos a que ela fica submetida, apresentam uma melhor distribuição de esforços quando comparados, por exemplo, a outra forma de reservatório, também utilizada, que é a retangular.

Para atingir volumes elevados (maiores que 5 000 m³) é também mais econômico aumentar-se o diâmetro do reservatório e não a altura. Por isso são freqüentemente executados tanques com diâmetro de 40 a 80 metros e altura de 12 a 20 metros, com relação diâmetro/altura variando de 2 a 4. Como consequência disso os métodos de cálculo e de construção foram radicalmente revolucionados, exigindo a adoção de modelos teóricos de cálculo mais elaborados. Soluções mais exatas estão sendo buscadas e a fonte, como não poderia deixar de ser, é a teoria das cascas.

Devido as equações da teoria exata serem muito

trabalhosas e na maioria das vezes impraticáveis de serem resolvidas manualmente, quase sempre se calcula, por exemplo, a parede cilíndrica como casca longa, admitindo-se que não haja influência dos esforços de uma borda na outra. Com o advento dos computadores essa dificuldade pode ser e eliminada, usando-se a formulação exata e automatizando-se os cálculos.

Distinguem-se nos reservatórios cilíndricos, três elementos estruturais principais:

- a cobertura ou teto
- a parede ou corpo cilíndrico do reservatório
- o fundo.

A cobertura, que serve para proteger o produto ar mazenado, pode ser executada na forma de uma calota esférica, ou de uma casca cônica. São também comuns os tetos em umbrela (superfície poliédrica com vigamento de suporte se melhante à estrutura de um guarda-chuva) e a cobertura flutuante. Em reservatórios de água, onde não há formação de gases acima da coluna líquida, usa-se ainda uma placa circular para fazer o fechamento superior da estrutura.

O corpo do reservatório pode ser constituído de um único elemento cilíndrico, de espessura constante, ou variável, ou composto de vários segmentos cilíndricos, tendo, cada um deles, espessura constante. Geralmente, reservatórios de concreto são construídos com parede de espessura variando continuamente e tanques metálicos são feitos com segmentos cilíndricos de espessura constante.

Para o fundo do reservatório, usa-se uma placa, que pode ser apoiada diretamente no terreno, ou sobre uma estrutura rígida intermediária (fundação em anel ou placa rígida). Eventualmente dá-se ao fundo a forma de um cone reto abatido, isto é, cuja geratriz tem pequena inclinação com relação ao plano horizontal da base.

Do ponto de vista construtivo, há regras específicas a serem seguidas em cada caso. Assim, em estruturas

de concreto, é necessário um rigoroso controle da fissuração e da impermeabilização, para garantir que o reservatório seja estanque. Em tanques metálicos soldados, deve-se estabelecer um plano de soldagem cuidadoso, com pré-posicionamento das chapas, de modo a assegurar o fechamento da estrutura e minimizar as tensões internas introduzidas pelo processo de solda. Além disso, o controle de qualidade das soldas é sempre feito com esmerado cuidado, através de exames radiográficos e de ultra-som, de modo a detectar eventuais defeitos que obriguem à rejeição da solda.

Idealmente, reservatórios metálicos deveriam ser sempre executados alinhando-se as chapas que compõe cada elemento pelo seu plano médio, para evitar excentricidades na transmissão dos esforços entre duas chapas. No entanto, por razões construtivas, é mais comum fazer-se o alinhamento das chapas por uma das faces interna ou externa da estrutura.

2. CONTEÚDO DA DISSERTAÇÃO

A consideração de todas as possibilidades construtivas mencionadas no item 1 ultrapassaria os limites usualmente aceitos para trabalhos da envergadura deste. Assim, optou-se por um tratamento teórico mais rigoroso do problema, eliminando-se algumas formas específicas de cada um dos elementos que compõe a estrutura. Pela mesma razão, não é discutido o detalhamento de projeto (dimensionamento de armaduras ou verificação de soldas, por exemplo), preferindo-se manter a generalidade do tema, sem particularizar quanto a detalhes pertinentes ao material usado na construção.

São aqui resolvidos reservatórios metálicos ou de concreto, de forma cilíndrica, com ou sem cobertura, que podem ser compostos dos seguintes elementos:

- a) para a cobertura - calota esférica ou casca cônica;
- b) para a parede - uma única casca cilíndrica ou vários segmentos de casca cilíndrica com espessura constante. Paredes de espessura variável podem ser tratadas deste modo, considerando-se, para cada segmento, a espessura média do trecho correspondente da parede;
- c) para o fundo - uma placa circular assente em base elástica ou em base rígida.

Nas cascas que compõem a cobertura, é usada a aproximação de Geckeler, para o cálculo dos esforços de flexão.

Nas cascas cilíndricas são usadas tanto a formulação exata (considerando-se a influência dos esforços de uma borda na outra) de cascas curtas, como a aproximação de casca longa, em que os esforços de uma borda não influenciam a outra borda.

Para o fundo do reservatório adotou-se a solução da placa sobre base elástica dada por Schleicher (B26), que considera constante o coeficiente elástico do solo, e a aproximação de Girkmann (B12) para a placa assente em base rígida.

É usado o método dos deslocamentos, compatibilizando-se as deformações nas juntas, considerando-se que os elementos que nelas concorrem são co-axiais. A solução é obtida de modo automático por computador, programada em linguagem FORTRAN para computador IBM/370, e os resultados são comparados com exemplos disponíveis na literatura.

São considerados os carregamentos de peso próprio, sobrecargas usuais de projeto, o peso e a pressão interna que a coluna líquida exerce sobre o reservatório. São dados ainda indicações sobre os efeitos de variação de temperatura e da carga de vento sobre a estrutura. Apresenta-se também uma breve discussão sobre a flambagem dos diversos elementos que compõem o reservatório.

Nos capítulos II, III e IV é deduzido o formulário básico; isto é: teoria de membrana e de flexão das cascas de revolução; equações das placas e das chapas.

No capítulo V são apresentadas as soluções correspondentes aos carregamentos de peso próprio, sobrecargas verticais, peso e pressão interna da coluna líquida, e são dadas as matrizes de rigidez de cada elemento.

No capítulo VI são considerados os efeitos de variação de temperatura e a carga de vento.

No capítulo VII é feita a análise da estrutura integrada, indicando-se como obter a matriz de rigidez, o vetor dos deslocamentos e os esforços finais na estrutura global.

No capítulo VIII são dadas as indicações sobre a flambagem das cascas.

No capítulo IX são discutidos os detalhes pertinentes à resolução automática por computador.

No capítulo X são apresentados alguns exemplos de cálculo, explorando as potencialidades do programa elaborado para computador, cujos resultados são comparados com as soluções obtidas por diversos autores.

No anexo 1 são dadas as Funções $F_j(\xi)$ utilizadas para a solução da casca cilíndrica.

No anexo 2 são mostradas as funções $Z_i(\xi)$ usadas para resolução da placa em base elástica.

No anexo 3 é apresentada a listagem do programa elaborado em linguagem FORTRAN para computador IBM/370.

CAPÍTULO II

ELEMENTOS DA TEORIA DAS CASCAS DE REVOLUÇÃO

1. INTRODUÇÃO

Apresenta-se neste capítulo a teoria das cascas de revolução sujeitas a carregamentos com simetria axial, necessária à posterior formulação das equações a serem utilizadas no processo dos deslocamentos.

2. HIPÓTESES E DEFINIÇÕES

Pode-se definir uma casca como sendo uma estrutura bidimensional cuja superfície média (a que divide em cada ponto a espessura da casca em duas partes iguais) é curva. A espessura h é pequena em relação às outras dimensões da casca, podendo ser sempre a mesma ou variar de ponto para ponto e é definida como a distância, medida perpendicularmente à superfície média, que existe entre as faces externa e interna. Estaticamente a superfície média e a espessura representam a casca, do mesmo modo que uma barra é representada por seu eixo e sua seção transversal. Neste trabalho, são analisadas as cascas de revolução, ou seja, dentro de uma classificação geral, aquelas cuja superfície média é uma superfície de revolução.

No estudo das cascas, admitem-se as seguintes hipóteses fundamentais propostas por Love, ver p.ex. Gravina (B13) e Kraus (B19).

- a) - O material que constitui a estrutura é homogêneo, isotrópico e obedece à lei de Hooke.
- b) - A espessura h é pequena em relação às dimensões e aos raios de curvatura da superfície média.
- c) - As tensões normais à superfície média são desprezíveis em relação às demais tensões.
- d) - Os pontos pertencentes, antes da deformação, a retas normais à superfície média, encontram-se, após a deformação, sobre retas perpendiculares à superfície média deformada.
- e) - Os deslocamentos são muito pequenos em relação à espessura h , sendo possível desprezar a influência dos mesmos no estudo das condições de equilíbrio do elemento de superfície.

A primeira dessas hipóteses permite que se escreva um único conjunto de equações de equilíbrio, válidas para qualquer ponto da estrutura, formuladas segundo os princípios da Teoria da Elasticidade. A quinta hipótese permite que todas as grandezas envolvidas no problema, bem como todas as deduções, sejam referidas à superfície não deformada da casca. Juntos, estes dois postulados conduzem a equações fundamentais lineares, o que garante a validade da lei de superposição dos efeitos.

A quarta hipótese representa uma extensão à Teoria das Cascas, da conhecida lei de Bernoulli da Teoria das vigas, de que "as seções planas antes da deformação permanecem planas após a deformação". Como consequência das hipóteses três e quatro, o problema torna-se bidimensional.

O segundo postulado de Love é o mais importante

de todos e, na verdade, as hipóteses subseqüentes sã se verificam se ele for atendido. Novozhilov (B23) sugere que a casca pode ser considerada delgada quando a relação entre a espessura e o raio de curvatura satisfaz a:

$$\left(\frac{h}{R}\right)_{\max} \leq \frac{1}{20}$$

Nas estruturas que se pretende resolver aqui, a espessura h é, no máximo, da ordem de algumas dezenas de centímetros (para reservatórios de concreto armado), enquanto que o raio R é expresso em dezenas de metros, de modo que o limite acima é sempre satisfatoriamente respeitado.

3. ESFORÇOS SOLICITANTES

Sobre a espessura h da casca atuam esforços definidos por unidade de comprimento da superfície média, que resultam da integração das tensões ao longo da espessura da casca (ver Fig. 2.1).

Efetuando-se a integração na espessura h de cada face do elemento, obtêm-se segundo Hampe (B16):

$$N_{\theta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\theta} \left(1 + \frac{z}{r_{\phi}}\right) dz \quad ; \quad N_{\phi} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\phi} \left(1 + \frac{z}{r_{\theta}}\right) dz$$

$$N_{\theta\phi} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\theta\phi} \left(1 + \frac{z}{r_{\phi}}\right) dz \quad ; \quad N_{\phi\theta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\phi\theta} \left(1 + \frac{z}{r_{\theta}}\right) dz$$

$$Q_{\theta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\theta z} \left(1 + \frac{z}{r_{\phi}}\right) dz \quad ; \quad Q_{\phi} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\phi z} \left(1 + \frac{z}{r_{\theta}}\right) dz$$

$$M_{\theta} = - \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\theta} z \left(1 + \frac{z}{r_{\phi}}\right) dz ; \quad M_{\phi} = - \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\phi} z \left(1 + \frac{z}{r_{\theta}}\right) dz$$

$$M_{\theta\phi} = - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\theta\phi} z \left(1 + \frac{z}{r_{\phi}}\right) dz ; \quad M_{\phi\theta} = - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\phi\theta} z \left(1 + \frac{z}{r_{\theta}}\right) dz$$

.... (2.1)

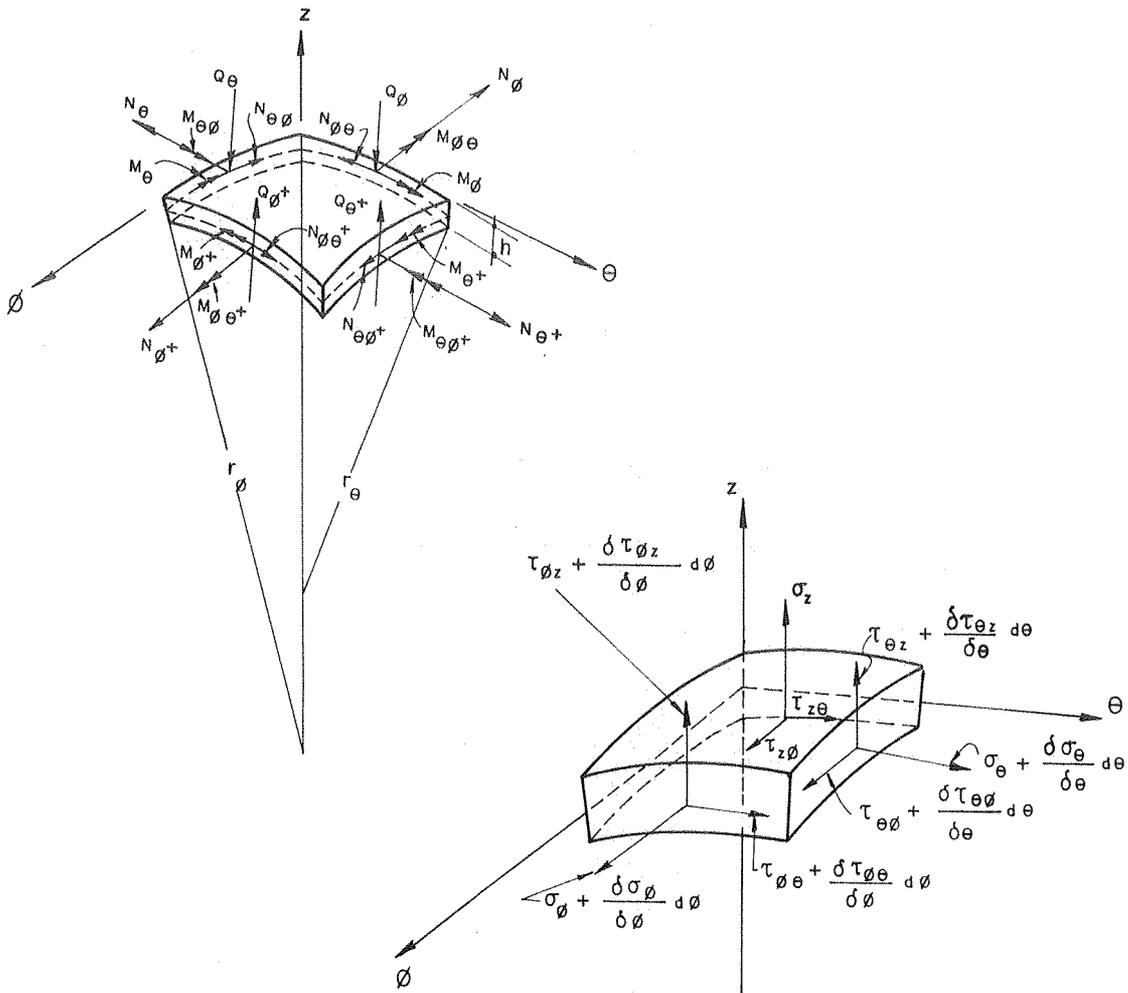


FIG. 2.1 - Esforços e Tensões atuantes num elemento de casca.

Devido à hipótese dois, desprezam-se nas expressões acima, os valores de \$z/r_{\phi}\$ e \$z/r_{\theta}\$ perante a unidade. É importante também definir a convenção para o

sentido positivo dos esforços, mostrada a seguir (Fig.2.2). Os esforços são referidos às direções de curvatura principal, ϕ e θ , sendo r_ϕ e r_θ os respectivos raios de curvatura dessas direções. O carregamento é representado pelas componentes p_θ , p_ϕ e p_z segundo os eixos θ , ϕ e z .

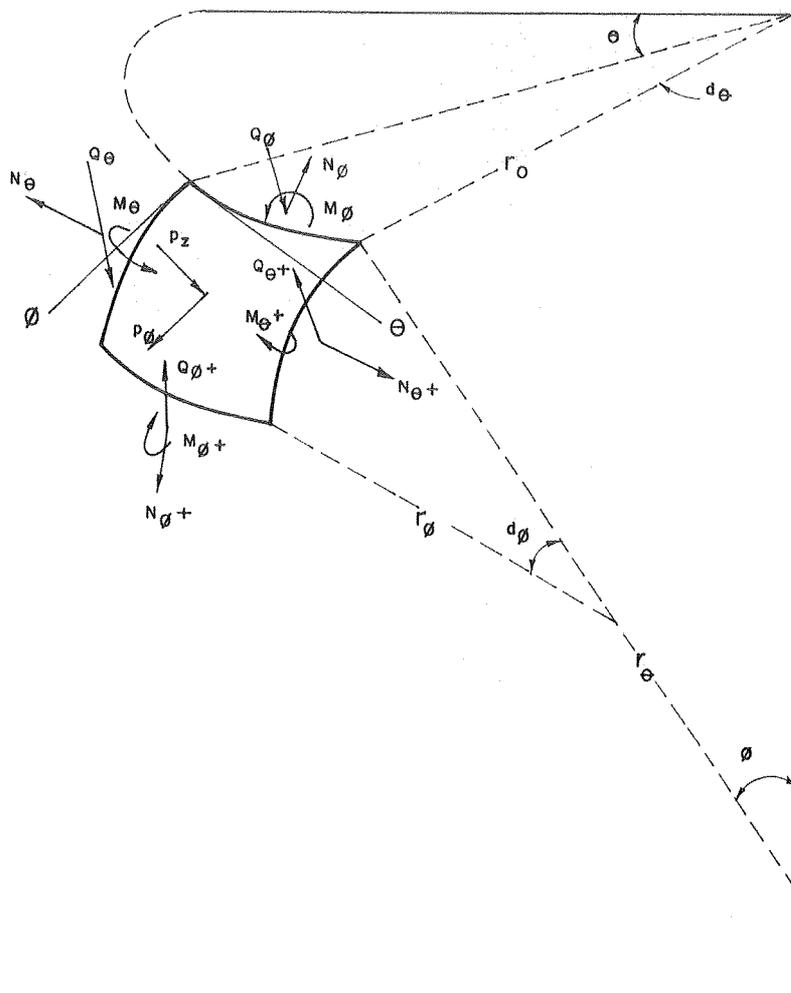


FIG. 2.2 - Esforços internos e cargas atuando num elemento, considerando-se a simetria axial.

No presente caso, considerando-se apenas carregamentos de revolução, tem-se que:

$$N_{\phi\theta} = N_{\theta\phi} = M_{\phi\theta} = M_{\theta\phi} = Q_{\theta} = p_{\theta} = 0 \quad \dots (2.2)$$

4. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Toma-se um elemento infinitesimal de casca (Fig. 2.3) submetido à ação de uma força externa expressa pelas componentes p_{ϕ} (força por unidade de área agindo na direção da tangente ao meridiano) e p_z (força por unidade de área agindo na direção normal à superfície média). Considera-se ainda que todas as derivadas em relação a θ são nulas, devido à simetria de revolução da casca e do carregamento.

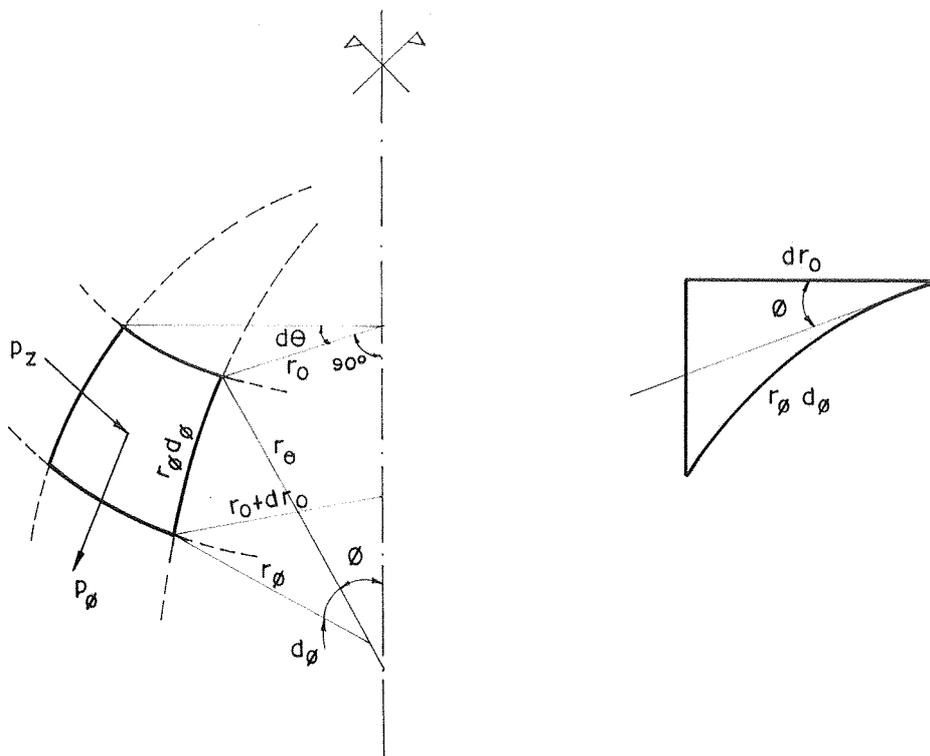


FIG. 2.3 - Geometria das cascas de revolução.

Sendo r_ϕ o raio de curvatura do meridiano e r_o o raio de curvatura do paralelo, tem-se, da Fig. 2.3, as seguintes relações entre estes raios, e o segundo raio de curvatura principal, r_θ :

$$r_o = r_\theta \operatorname{sen} \phi \quad \text{e} \quad \frac{dr_o}{d\phi} \sim r_\phi \cos \phi$$

Desprezando-se os infinitésimos de ordem superior chega-se às seguintes relações de equilíbrio:

- a somatória das forças na direção ϕ é nula,

$$\frac{d(N_\phi r_o)}{d\phi} - N_\theta r_\phi \cos \phi + Q_\phi r_o + p_\phi r_o r_\phi = 0 \quad \dots (2.3)$$

- a somatória das forças na direção z é nula,

$$N_\theta r_\phi \operatorname{sen} \phi + N_\phi r_o - \frac{d(Q_\phi r_o)}{d\phi} + p_z r_o r_\phi = 0 \quad \dots (2.4)$$

- a somatória dos momentos em torno da direção θ é nula,

$$M_\theta r_\phi \cos \phi - \frac{d(M_\phi r_o)}{d\phi} - Q_\phi r_o r_\phi = 0 \quad \dots (2.5)$$

Observa-se que as equações de equilíbrio constituem um sistema de três equações a cinco incógnitas. Há portanto necessidade de introduzir as equações de compatibilidade de deslocamentos para a resolução da estrutura.

5. RELAÇÕES DEFORMAÇÕES-DESLOCAMENTOS

Considere-se as componentes do deslocamento (v e w), na direção da tangente ao meridiano e da normal (ϕ e z respectivamente) à superfície média de um elemento infinitesimal de casca (Fig. 2.4).

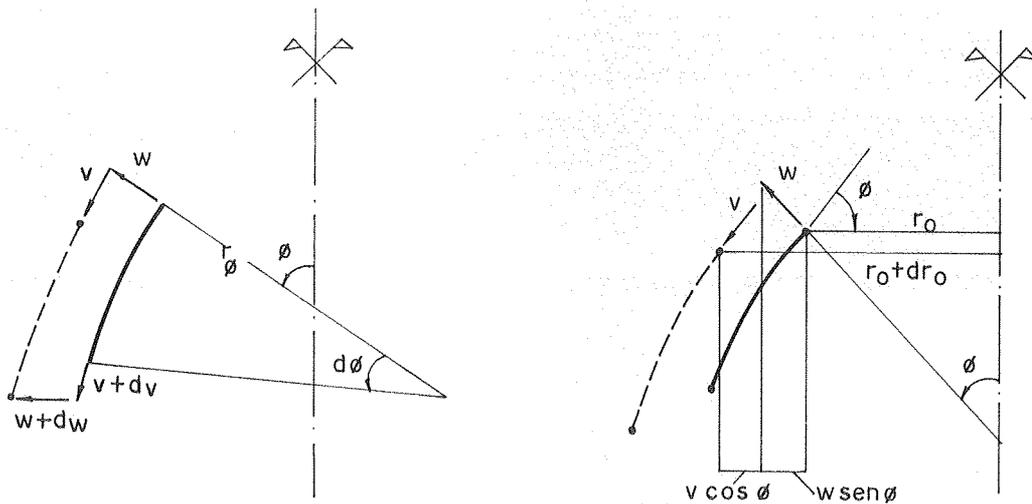


FIG. 2.4 - Deslocamentos v e w na superfície média.

As deformações segundo ϕ e θ respectivamente ficam:

$$\xi_{\phi} = \frac{1}{r_{\phi}} \left(\frac{dv}{d\phi} + w \right) \quad \dots (2.6)$$

$$\xi_{\theta} = \frac{1}{r_{\theta}} (v \cotg \phi + w)$$

A rotação da tangente ao meridiano quando a estrutura se deforma é:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r_{\phi}} \left(v - \frac{dw}{d\phi} \right) \quad \dots (2.7)$$

As variações das curvaturas principais, com $\Delta\phi$ dado pela equação (2.7), são:

$$\chi_{\theta} = \frac{\Delta\phi}{r_{\theta}} \cotg \phi \quad \dots (2.8)$$

$$\chi_{\phi} = \frac{1}{r_{\phi}} \frac{d\Delta\phi}{d\phi}$$

6. RELAÇÕES TENSÕES-DEFORMAÇÕES

Considerando-se que o material é linearmente elástico, isotrópico e homogêneo e que possui módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν , são válidas as seguintes relações,

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\xi_{\theta} + \nu \xi_{\phi} + z(\chi_{\theta} + \nu \chi_{\phi}) \right] \quad \dots (2.9)$$

$$\sigma_{\phi} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\xi_{\phi} + \nu \xi_{\theta} + z(\chi_{\phi} + \nu \chi_{\theta}) \right]$$

onde σ_{θ} e σ_{ϕ} são as tensões normais nas direções θ e ϕ respectivamente.

7. RELAÇÕES ESFORÇOS-DESLOCAMENTOS

Substituindo as relações (2.9) e (2.2) nas equações (2.1), efetuando as integrações sobre a espessura h e introduzindo nesses resultados as expressões (2.6) e (2.8), obtêm-se as seguintes fórmulas para os esforços,

$$N_{\theta} = K \left[\frac{1}{r_{\theta}} (\nu \cot g \phi + w) + \frac{\nu}{r_{\phi}} \left(\frac{dv}{d\phi} + w \right) \right]$$

$$N_{\phi} = K \left[\frac{\nu}{r_{\theta}} (\nu \cot g \phi + w) + \frac{1}{r_{\phi}} \left(\frac{dv}{d\phi} + w \right) \right]$$

..... (2.10)

$$M_{\theta} = -D \left[\frac{1}{r_{\theta}} \Delta \phi \cot g \phi + \frac{\nu}{r_{\phi}} \frac{d\Delta \phi}{d\phi} \right]$$

$$M_{\phi} = -D \left[\frac{\nu}{r_{\theta}} \Delta \phi \cot g \phi + \frac{1}{r_{\phi}} \frac{d\Delta \phi}{d\phi} \right]$$

onde:

$\Delta\phi$ é dado pela equação (2.7),

$$K = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \quad \dots (2.11)$$
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

são, respectivamente, as rigidezes de membrana e de flexão.

As equações (2.3), (2.4), (2.5) e (2.10) formam um sistema de sete equações a sete incógnitas; com isso o problema está teoricamente resolvido.

8. TEORIA DE MEMBRANA DAS CASCAS DE REVOLUÇÃO

Consegue-se resolver um sistema de equações diferenciais somando-se uma solução particular do sistema completo à solução do sistema homogêneo.

No caso das cascas, a solução do sistema particular é, aproximadamente a solução de membrana, idealizada quando se despreza as rigidezes à flexão e à torção, resultando apenas os esforços atuantes no plano tangente, N_ϕ e N_θ . Pode-se portanto admitir o comportamento de membrana nas cascas, desde que sejam satisfeitas as condições, cfr. p. ex., Gravina (B13),

- a) - A variação das curvaturas normais da superfície média deverá ser contínua.
- b) - A variação da espessura h da casca deverá ser contínua.
- c) - A distribuição das forças externas deverá ser contínua.
- d) - As forças externas aplicadas às bordas livres deve

rão atuar nos correspondentes planos tangentes à superfície média.

e) - As reações dos vínculos deverão estar contidas nos planos tangentes à superfície média.

Qualquer alteração nas condições acima acarretará uma perturbação, para a qual se deve levar em consideração a rigidez da casca à flexão.

A solução do sistema homogêneo por sua vez é obtida quando se eliminam os termos correspondentes ao carregamento externo, levando-se em consideração apenas o efeito dos esforços locais gerados pelas reações dos vínculos, o que será tratado no capítulo III.

9. ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS DE MEMBRANA

Introduzindo-se as simplificações que regem o comportamento de membrana ($M_\theta = M_\phi = Q_\phi = 0$) nas equações de equilíbrio (2.3) e (2.4), obtêm-se as seguintes equações de equilíbrio:

$$d \left(\frac{N'_\phi r_o}{d\phi} \right) - N'_\theta r_\phi \cos\phi + p_\phi r_o r_\phi = 0 \quad \dots (2.12)$$

$$N'_\theta r_\phi \sin\phi + N'_\phi r_o + p_z r_o r_\phi = 0$$

Deve ainda ser ressaltado que os esforços N_ϕ e N_θ passam a ser chamados respectivamente de N'_ϕ e N'_θ para não haver confusão entre a solução do sistema homogêneo e a solução de membrana; e, que a solução da casca em regime de membrana é isostática e depende apenas do carregamento a que ela está submetida, já que a condição cinco do item anterior impõe restrições aos vínculos de apoio que podem ser utilizados.

Pode-se achar o esforço N'_ϕ diretamente, através do equilíbrio vertical (Fig. 2.5) das forças que atuam acima do paralelo definido por ϕ .

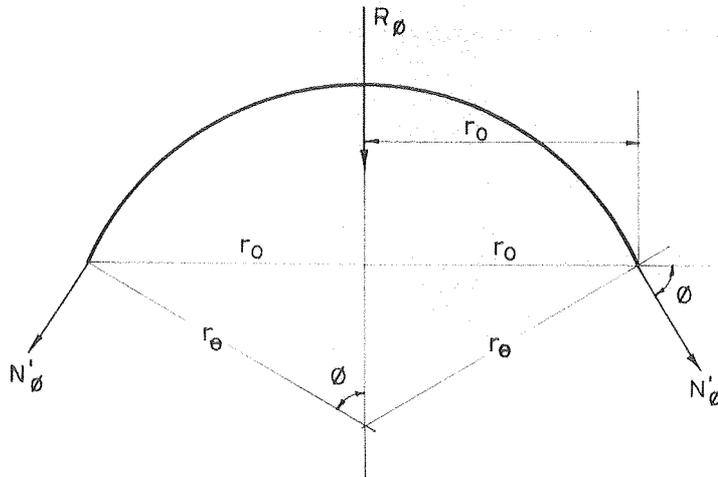


FIG. 2.5 - Equilíbrio dos esforços.

$$R_\phi = \int_0^\phi (p_\phi \sin\phi + p_z \cos\phi) (2\pi r_0) r_\phi d\phi \quad \dots (2.13)$$

$$N'_\phi = \frac{-R_\phi}{2\pi r_0 \sin\phi} \quad \dots (2.14)$$

Introduzindo a equação (2.14) na segunda das expressões (2.12), tem-se:

$$N'_\theta = \frac{R_\phi}{2\pi r_\phi \sin^2\phi} - p_z \frac{r_0}{\sin\phi} \quad \dots (2.15)$$

No cálculo dos deslocamentos de membrana, Δr_0 e $\Delta\phi$ respectivamente, deslocamento horizontal segundo o raio r_0 do paralelo e rotação da tangente ao meridiano, da borda da casca, utiliza-se a lei de Hooke generalizada.

$$\xi_{\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \nu \sigma_{\phi}) \quad \dots (2.16)$$

$$\xi_{\phi} = \frac{1}{E} (\sigma_{\phi} - \nu \sigma_{\theta})$$

onde ξ_{θ} e ξ_{ϕ} são as deformações segundo θ e ϕ respectivamente para as tensões normais σ_{θ} e σ_{ϕ} correspondentes. Como as cascas analisadas são delgadas, admite-se que as tensões sejam constantes ao longo da espessura, possibilitando com isto que as deformações sejam expressas em função dos esforços. Tem-se então:

$$\xi_{\theta} = \frac{1}{Eh} (N'_{\theta} - \nu N'_{\phi}) \quad \dots (2.17)$$

$$\xi_{\phi} = \frac{1}{Eh} (N'_{\phi} - \nu N'_{\theta}) \quad \dots (2.18)$$

Da Resistência dos Materiais, sabe-se ainda que:

$$\Delta r_o = r_o \xi_{\theta} \quad \dots (2.19)$$

Introduzindo-se a expressão acima na equação (2.17) com $r_o = r_{\theta} \text{sen}\phi$, obtém-se o deslocamento horizontal de membrana na borda da casca. Assim:

$$\Delta r_o = r_{\theta} \frac{\text{sen}\phi}{Eh} (N'_{\theta} - \nu N'_{\phi}) \quad \dots (2.20)$$

A rotação da tangente ao meridiano na borda é encontrada combinando-se as equações (2.6), (2.7), (2.17) e (2.18), resultando

$$\Delta\phi = \frac{\text{cotg}\phi}{r_{\phi} Eh} \left[N'_{\phi} (r_{\phi} + \nu r_{\theta}) - N'_{\theta} (r_{\theta} + \nu r_{\phi}) \right] - \frac{1}{r_{\phi}} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\Delta r_o}{\text{sen}\phi} \right) \quad \dots (2.21)$$

9.1 - CASCAS ESFÉRICAS

As expressões para a determinação dos esforços e deslocamentos de membrana (Fig. 2.6), para cada carregamento, são obtidas introduzindo-se os parâmetros $r_\phi = r_\theta = a$ (raio da esfera), nas equações (2.14), (2.15), (2.20) e (2.21), devidamente particularizadas para a casca da Fig. 2.7

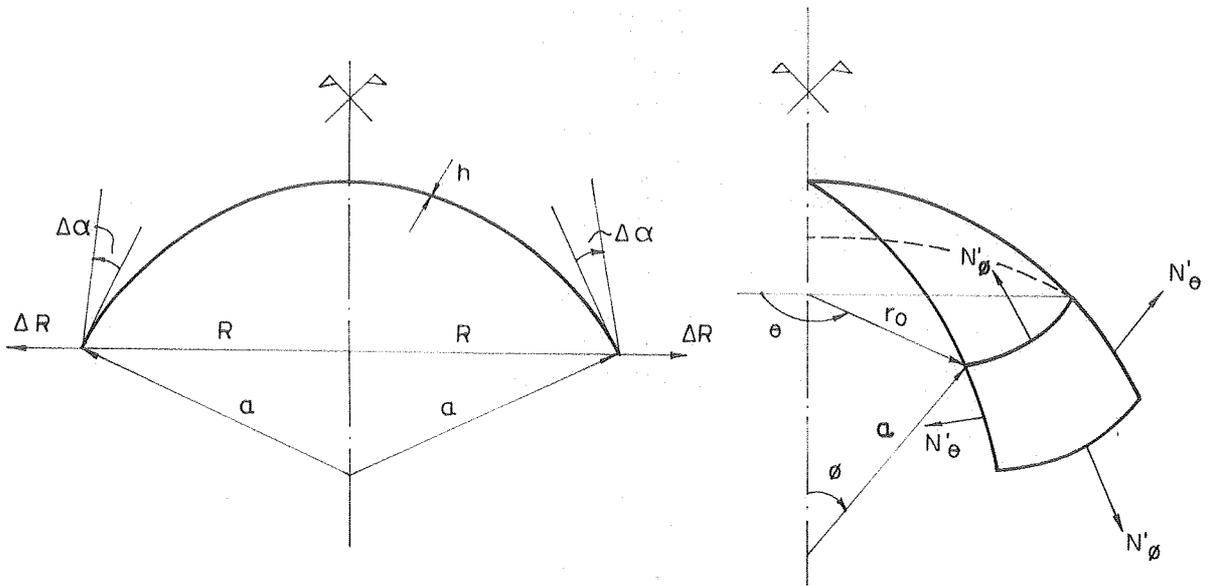


FIG. 2.6 - Esforços e deslocamentos de membrana - sentidos positivos.

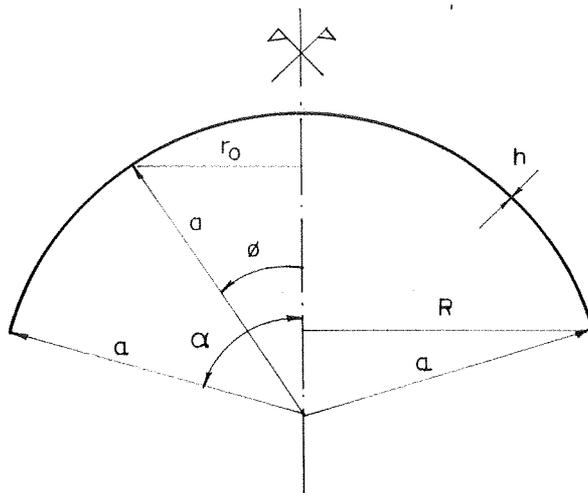


FIG. 2.7 - Geometria da superfície média da casca esférica.

Apresentam-se a seguir as equações para a determinação dos esforços e deslocamentos de membrana, oriundos de diferentes carregamentos, segundo Billington (B6).

a) Peso Próprio

Para a casca esférica (Fig. 2.8), os esforços de membrana em qualquer ponto da casca são dados por:

$$N'_\phi = - \frac{a g}{(1 + \cos\phi)}$$

$$N'_\theta = a g \left(\frac{1}{1 + \cos\phi} - \cos\phi \right) \quad \dots (2.22)$$

onde $g = \gamma_{\text{mat}} \cdot h$, sendo γ_{mat} o peso específico do material.

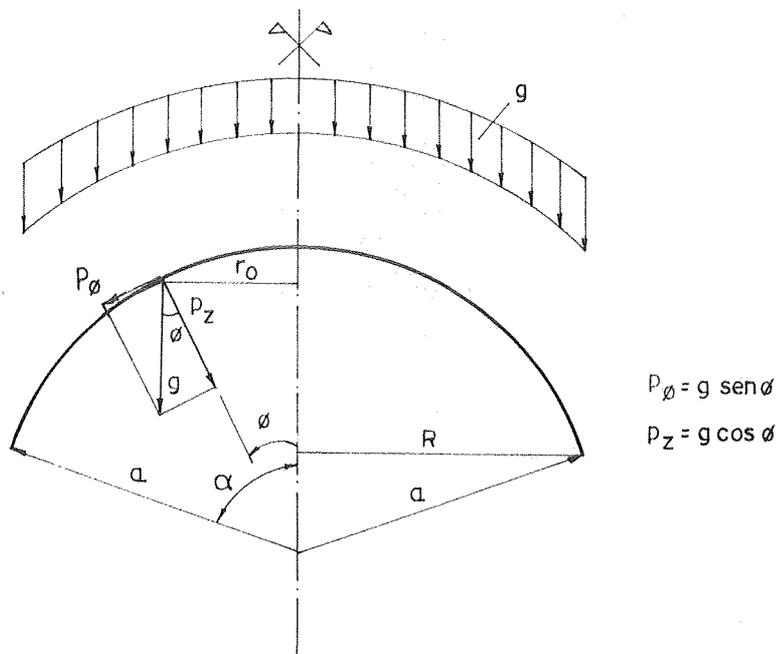


FIG. 2.8 - Peso próprio na cobertura esférica.

Os deslocamentos de membrana nas bordas são dados por:

$$\Delta R = \frac{a^2 g}{Eh} \left(\frac{1 + \nu}{1 + \cos\alpha} - \cos\alpha \right) \sin\alpha$$

$$\Delta \alpha = \frac{-ag}{Eh} (2 + \nu) \sin\alpha \quad \dots (2.23)$$

onde ΔR representa o deslocamento horizontal segundo o raio do paralelo e $\Delta\alpha$ a rotação da tangente ao meridiano.

b) Sobrecarga

Para a casca esférica submetida ao carregamento uniformemente distribuído sobre a projeção horizontal (Fig. 2.9), os esforços de membrana em qualquer ponto da casca são dados por:

$$N'_\phi = -\frac{pa}{2} \dots (2.24)$$

$$N'_\theta = -\frac{pa}{2} \cos 2\phi$$

onde p é o valor da carga distribuída sobre a projeção horizontal da superfície da casca.

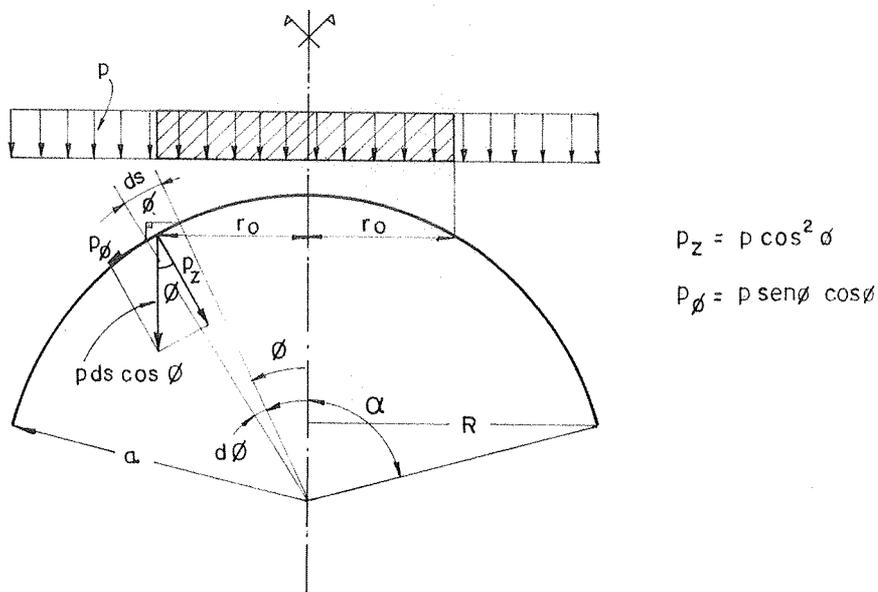


FIG. 2.9 - Sobrecarga na cobertura esférica.

Os deslocamentos de membrana nas bordas são dados por:

$$\Delta R = \frac{pa^2}{Eh} \left[\frac{1+\nu}{2} - \cos^2 \alpha \right] \sin \alpha \quad \dots (2.25)$$

$$\Delta \alpha = - \frac{pa}{Eh} (3 + \nu) \cos \alpha \sin \alpha$$

9.2 - CASCAS CÔNICAS

Em se tratando de cascas cônicas, não é conveniente ter-se r_ϕ nas equações de equilíbrio (2.12), pois $r_\phi = \infty$. Substitui-se então nestas equações a direção ϕ por y , sendo $dy = r_\phi d\phi$ e tem-se $d/d\phi = (d/dy)r_\phi$, o que permite eliminar r_ϕ .

A coordenada y (segundo a geratriz) é medida a partir do vértice do cone (Fig. 2.10).

Tem-se também, $\sin \phi = \sin \alpha$; $\cos \phi = \cos \alpha$; $r_0 = y \cos \alpha$.

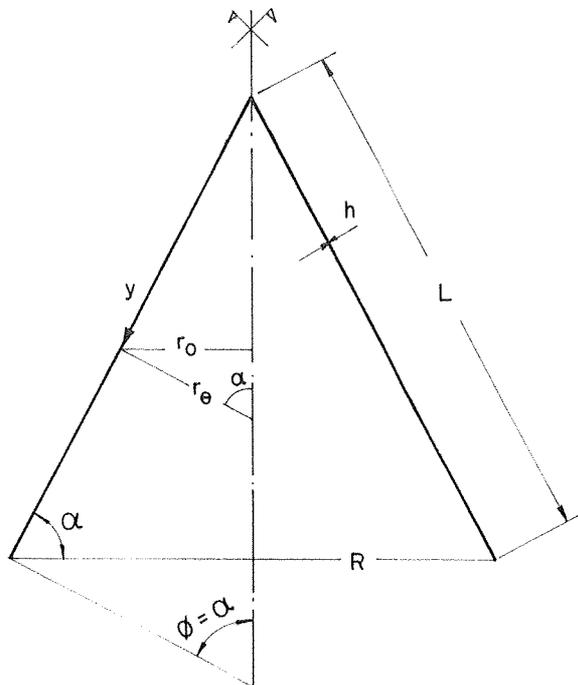


FIG. 2.10 - Geometria da superfície média da casca.

Com o que foi mostrado, obtêm-se as equações para a determinação dos esforços e deslocamentos de membrana (Fig. 2.11).

Para os diferentes tipos de carregamento tem-se então conforme, por exemplo, Billington (B6).

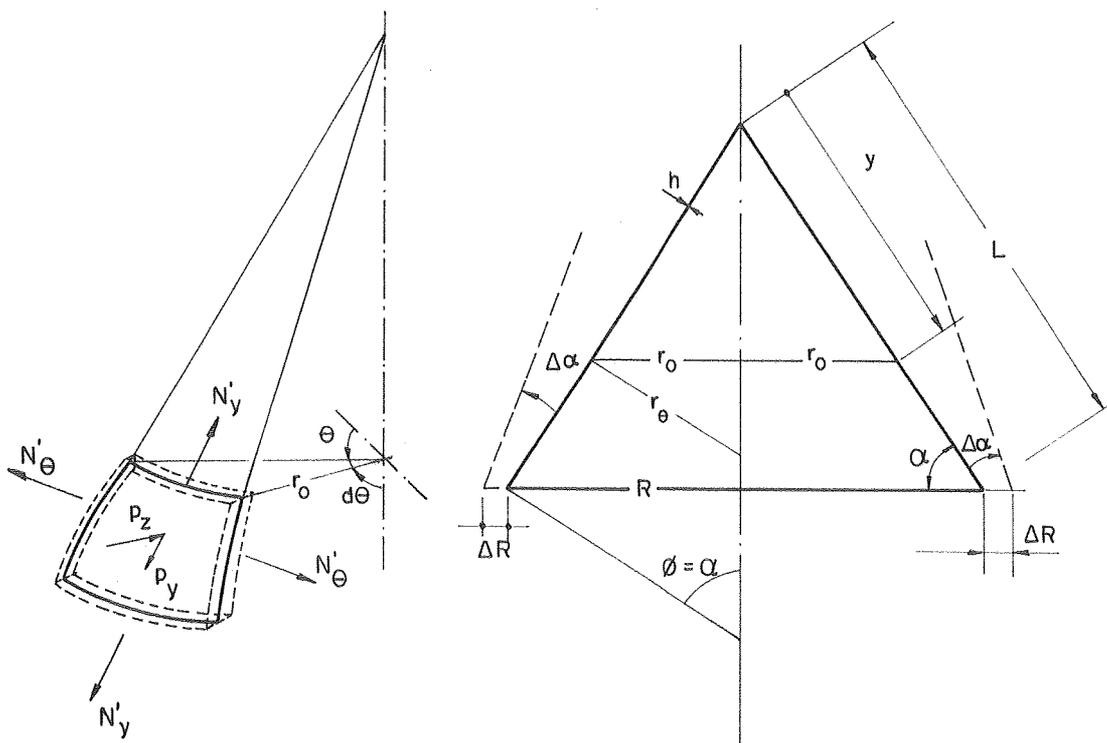


FIG. 2.11 - Esforços e deslocamentos de membrana - sentidos positivos.

a) Peso Próprio

Para a casca cônica (Fig. 2.12), os esforços de membrana em qualquer ponto da casca são dados por:

$$N'_y = - \frac{gy}{2 \operatorname{sen} \alpha}$$

$$N'_\theta = -gy \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{coss} \alpha$$

.... (2.26)

onde

$g = \gamma_{\text{mat}} \cdot h$, sendo γ_{mat} o peso específico do material.

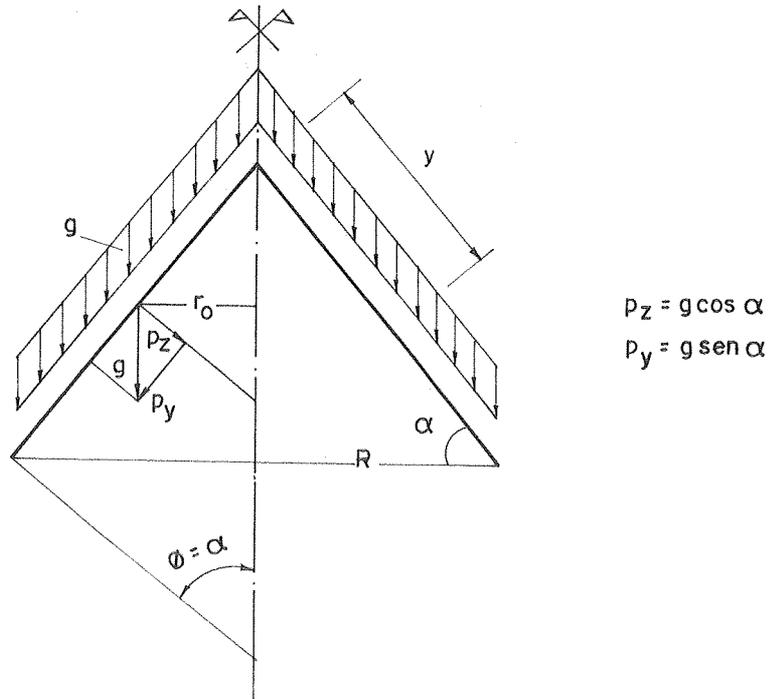


FIG. 2.12 - Casca cônica submetida ao peso próprio.

Os deslocamentos de membrana nas bordas são dados por:

$$\Delta R = \frac{gL^2}{2Eh} \left[\frac{\nu - 2 \cos^2 \alpha}{\text{tg } \alpha} \right] \dots (2.27)$$

$$\Delta \alpha = - \frac{gL}{2Eh} \left[\frac{1 + 2\nu - 2(2+\nu) \cos^2 \alpha}{\text{sen } \alpha \text{ tg } \alpha} \right]$$

onde ΔR representa o deslocamento horizontal segundo o raio do paralelo e $\Delta \alpha$ a rotação da tangente ao meridiano.

b) Sobrecarga

Para a casca cônica submetida ao carregamento uniformemente distribuído sobre a projeção horizontal (Fig. 2.13), os esforços de membrana em qualquer ponto da casca são dados por:

$$N'_y = \frac{-py}{2} \cotg \alpha$$

$$N'_\theta = -py \cotg \alpha \cos^2 \alpha \quad \dots (2.28)$$

onde p é o valor da carga distribuída sobre a projeção horizontal da superfície da casca.

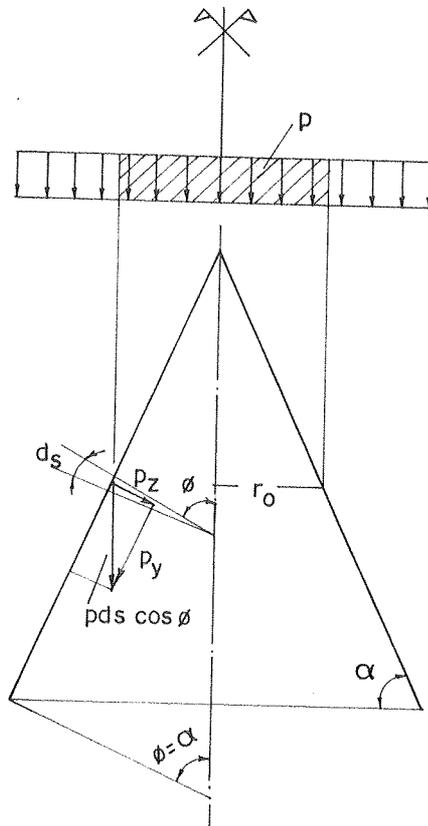


FIG. 2.13 - Sobrecarga na cobertura cônica.

Os deslocamentos de membrana nas bordas são dados por:

$$\Delta R = \frac{pL^2}{2Eh} \cos \alpha \left[\frac{(\nu - 2 \cos^2 \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha} \right]$$

$$\Delta \alpha = \frac{-pL}{2Eh} \left[\frac{1 + 2\nu - 2(2+\nu) \cos^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right] \quad \dots (2.29)$$

9.3 - CASCAS CILÍNDRICAS CIRCULARES

Na parede cilíndrica adota-se o mesmo procedimento utilizado na casca cônica para obter-se $d/d\phi = (d/dy)r_\phi$.

A coordenada y (medida na geratriz), possui sua origem na base do reservatório de comprimento total H ; o ângulo $\phi = \pi/2$ é constante. Designando por R o raio do cilindro (Fig. 2.14), tem-se $r_o = r_\theta \text{ sen}\phi = R$.

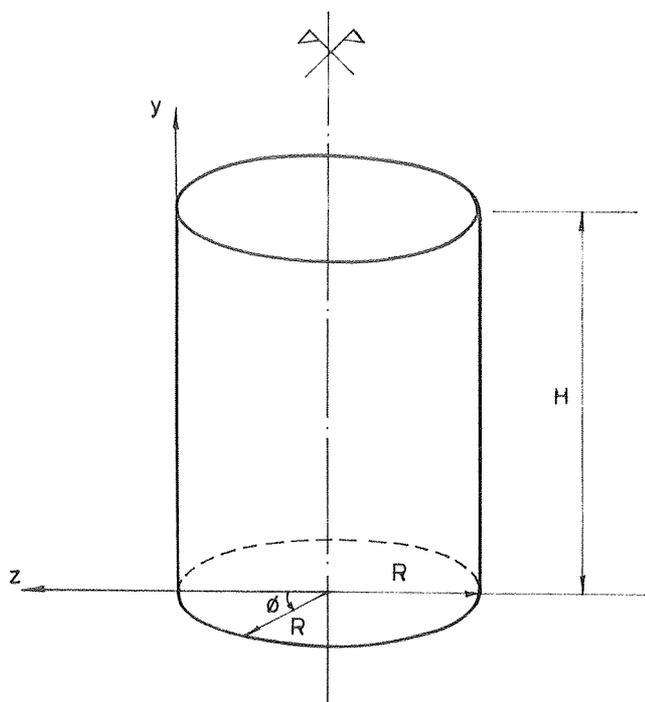


FIG. 2.14 - Geometria da superfície média da parede cilíndrica.

Como a parede do reservatório pode ser composta de vários elementos, as formulações serão apresentadas para um elemento genérico de comprimento L , designando-se pelos índices i e k suas bordas inferior e superior, respectivamente. A coordenada y é então substituída por y_i (a contar da borda inferior) ou y_k (a contar da borda superior do elemento), ou em termos adimensionais, $\xi = y_i/L$ e $\bar{\xi} = y_k/L$. O posicionamento do elemento estudado na parede do reservatório será mostrado no capítulo IX.

A pressão interna devida à coluna líquida fornece um diagrama trapezoidal de carregamento, p_z , subdividido numa parcela constante, p_0 , e num diagrama triangular, de valor máximo p_v .

Deve ser observado que para manter a coerência da notação, a rotação da tangente ao meridiano nas bordas da casca será designada por $\Delta\alpha$.

Deste modo, as equações para a determinação dos esforços e deslocamentos de membrana (Fig. 2.15) para os diferentes tipos de carregamentos são, conforme Hampe(B16).

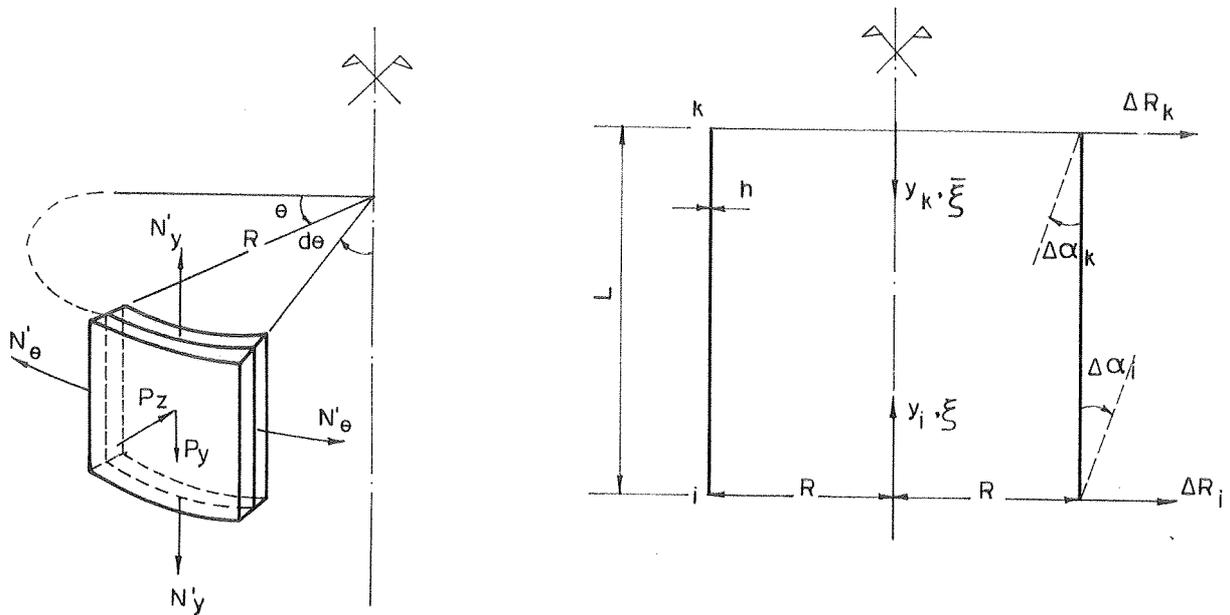


FIG. 2.15 - Esforços e deslocamentos de membrana - sentidos positivos.

a) Peso Próprio

Para a casca cilíndrica circular (Fig. 2.17) os esforços de membrana em qualquer ponto da casca são dados por:

$$\begin{aligned} N'_y &= - g L (1 - \xi) \\ N'_\theta &= 0 \end{aligned} \quad \dots (2.30)$$

onde

$g = \gamma_{\text{mat}} \cdot h$, sendo γ_{mat} o peso específico do material.

Os deslocamentos de membrana são, no entanto, desprezíveis.

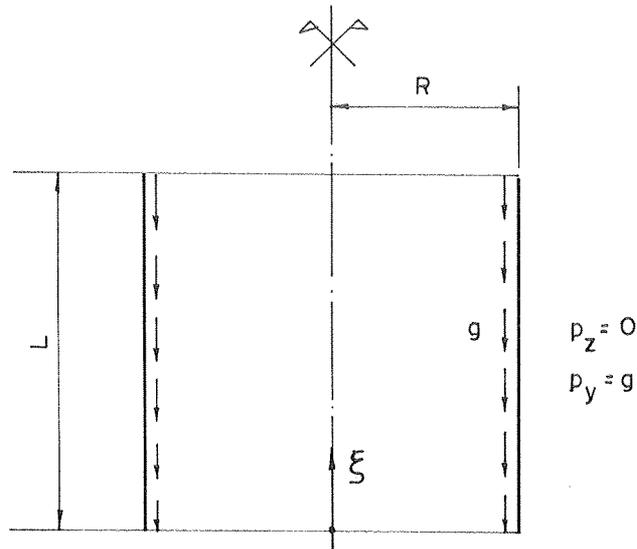


FIG. 2.16 - Peso próprio no elemento.

b) Pressão Uniforme

Para a casca cilíndrica circular (Fig.2.17), os esforços de membrana em qualquer ponto da casca são dados por:

$$\begin{aligned} N'_y &= 0 \\ N'_\theta &= p_o R \end{aligned} \quad \dots (2.31)$$

onde p_o é a pressão uniforme ao longo da altura do elemento.

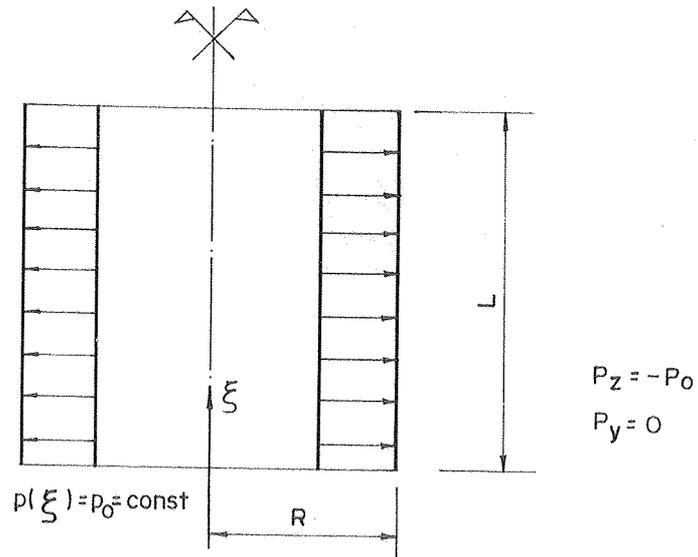


FIG. 2.17 - Pressão uniforme no elemento.

Os deslocamentos de membrana nas bordas são dados pelas seguintes fórmulas:

$$\Delta R_i = \frac{p_0 R^2}{Eh}$$

$$\Delta \alpha_i = 0$$

$$\Delta R_k = \frac{p_0 R^2}{Eh}$$

$$\Delta \alpha_k = 0$$

.... (2.32)

c) Variação Linear da Pressão Interna

Para a casca cilíndrica circular (Fig. 2.18) os esforços de membrana em qualquer ponto da casca são dados por:

$$N'_y = 0$$

$$N'_\theta = p_v (1 - \xi) R$$

.... (2.33)

onde p_v é o valor máximo da pressão com variação linear ao longo do elemento.

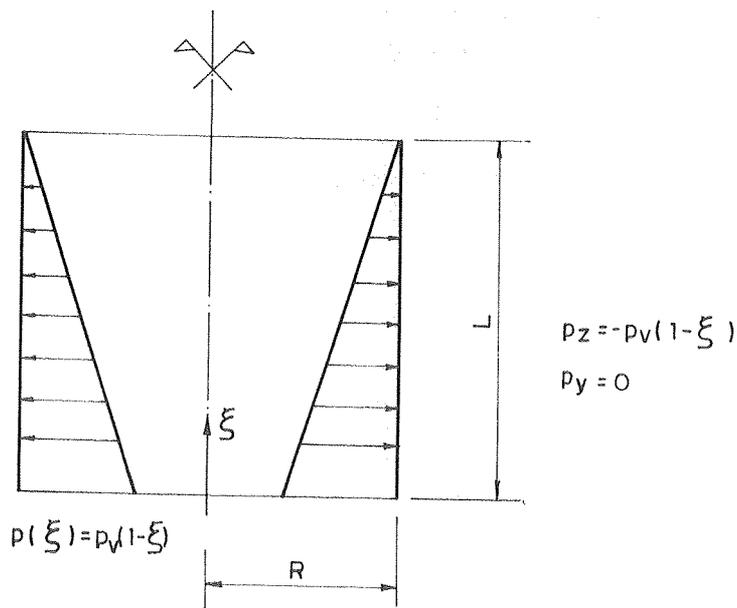


FIG. 2.18 - Variação linear da pressão ao longo do elemento.

Os deslocamentos de membrana são dados pelas seguintes fórmulas:

$$\Delta R_i = \frac{p_v R^2}{Eh}$$

$$\Delta \alpha_i = \frac{-p_v R^2}{Eh L}$$

$$\Delta R_k = 0$$

$$\Delta \alpha_k = \frac{-p_v R^2}{Eh L}$$

.... (2.34)

CAPÍTULO III

SOLUÇÃO DA TEORIA DE FLEXÃO DAS CASCAS DE REVOLUÇÃO

1. EQUAÇÃO DIFERENCIAL HOMOGENEA PARA A COBERTURA DO RESER- VATÓRIO

Partindo das equações de equilíbrio (2.3), (2.4) e (2.5) e dos esforços (2.10), onde todas as grandezas são funções apenas de ϕ pode-se, agrupando todas elas, e fazendo as devidas compatibilizações de deslocamentos, chegar a um sistema de duas equações diferenciais em V e U conforme p. ex., Billington (B6); sendo V a rotação da tangente ao meridiano dada pela equação (2.7) e U uma variável auxiliar que vale:

$$U = r_{\theta} Q_{\phi} \quad \dots (3.1)$$

Para a cobertura de espessura constante, abandonando-se também o efeito dos esforços de membrana na flexão, tem-se:

$$\frac{r_{\theta}}{r_{\phi}^2} \frac{d^2 U}{d\phi^2} + \frac{1}{r_{\phi}} \left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{r_{\theta}}{r_{\phi}} \right) + \frac{r_{\theta}}{r_{\phi}} \cot g \phi \right] \frac{dU}{d\phi} - \frac{1}{r_{\phi}} \left[\frac{r_{\phi}}{r_{\theta}} \cot g^2 \phi + \right. \\ \left. - \nu \right] U = -Eh V$$

$$\frac{r_{\theta}}{r_{\phi}} \frac{d^2 v}{d\phi^2} + \frac{1}{r_{\phi}} \left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{r_{\theta}}{r_{\phi}} \right) + \frac{r_{\theta}}{r_{\phi}} \cotg \phi \right] \frac{dv}{d\phi} - \frac{1}{r_{\phi}} \left[v + \frac{r_{\phi}}{r_{\theta}} \cotg^2 \phi \right] v = - \frac{U}{D} \quad \dots (3.2)$$

Na obtenção da solução das equações (3.2) será utilizada a simplificação de Geckeler, 1926, que consiste em desprezar os valores da função e a primeira derivada da função diante da segunda derivada.

1.1 - CASCAS ESFÉRICAS

Introduzindo-se a simplificação de Geckeler, os parâmetros e as particularidades geométricas do Capítulo II, ítem 9.1, e substituindo-se a relação (3.1) na equação (3.2) obtêm-se:

$$\frac{d^2 Q_{\phi}}{d\phi^2} + Eh V = 0 \quad \dots (3.3)$$

$$\frac{d^2 v}{d\phi^2} - \frac{a^2 Q_{\phi}}{D} = 0$$

Resolvendo o sistema por substituição, chega-se a:

$$\frac{d^4 Q_{\phi}}{d\phi^4} + \frac{Eh a^2}{D} Q_{\phi} = 0 \quad \dots (3.4)$$

definindo-se um parâmetro que caracteriza a geometria da casca.

$$\lambda^4 = 3 (1 - \nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 \quad \dots (3.5)$$

Desenvolvendo a equação (3.4), substituindo a equação (2.11) e a relação (3.5) resulta:

$$\frac{d^4 Q_\phi}{d\phi^4} + 4 \lambda^4 Q_\phi = 0 \quad \dots (3.6)$$

A solução geral de uma equação deste tipo é da forma

$$Q_\phi = e^{\lambda\phi} (C_1 \cos \lambda\phi + C_2 \sen \lambda\phi) + e^{-\lambda\phi} (C_3 \cos \lambda\phi + C_4 \sen \lambda\phi) \quad \dots (3.7)$$

Como Q_ϕ diminui à medida que diminui ϕ (Fig. 3.1), eliminam-se portanto o terceiro e o quarto termo da equação (3.7) restando então:

$$Q_\phi = e^{\lambda\phi} (C_1 \cos \lambda\phi + C_2 \sen \lambda\phi) \quad \dots (3.8)$$

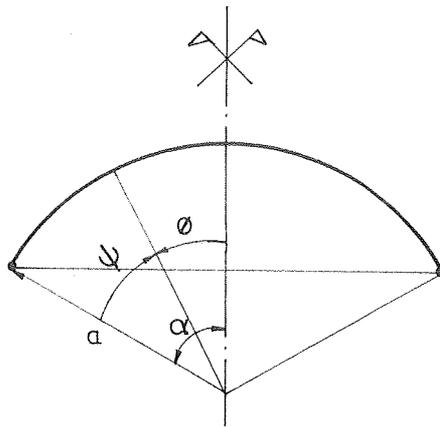


FIG. 3.1 - Coordenadas usadas para a casca esférica.

Sendo mais conveniente partir-se da borda, a equação (3.8) fica:

$$Q_\phi = C e^{-\lambda\phi} \sen (\lambda\psi + \gamma) \quad \dots (3.9)$$

onde C e γ são constantes a determinar (que dependem das condições de contorno) e ψ é o ângulo contado a partir da borda inferior (ver Fig. 3.1).

Introduzindo a equação (3.9) na primeira expressão de (3.3), obtém-se a rotação da tangente ao meridiano para um momento positivo na borda.

$$v = \frac{1}{Eh} 2 \lambda^2 C e^{-\lambda\psi} \cos(\lambda\psi + \gamma) \quad \dots (3.10)$$

Os esforços podem ser obtidos substituindo as equações (3.9), (3.10) e suas derivadas nas equações (2.3), (2.4) e (2.10), ficando:

$$M_\phi = - \frac{a}{\lambda\sqrt{2}} C e^{-\lambda\psi} \text{sen}(\lambda\psi + \gamma + \frac{\pi}{4})$$

$$M_\theta = \nu M_\phi \quad \dots (3.11)$$

$$N_\phi = \text{cotg}(\alpha - \psi) C e^{-\lambda\psi} \text{sen}(\lambda\psi + \gamma)$$

$$N_\theta = \lambda \sqrt{2} C e^{-\lambda\psi} \text{sen}(\lambda\psi + \gamma - \frac{\pi}{4})$$

O deslocamento horizontal é obtido pela equação (2.20) com os esforços de flexão e desprezando-se o termo que contém ν . Tem-se então:

$$\Delta r_o = \frac{a \text{sen}(\alpha - \psi)}{Eh} \lambda \sqrt{2} C e^{-\lambda\psi} \text{sen}(\lambda\psi + \gamma - \frac{\pi}{4}) \quad \dots (3.12)$$

Partindo das condições de contorno obtêm-se as constantes C e γ da seguinte forma:

- a) Para o momento M_α , uniformemente distribuído em torno do círculo paralelo em $\phi = \alpha(\psi=0)$, tem-se $M_\phi = M_\alpha$, $Q_\phi = Q_\alpha = 0$ e $N_\phi = N_\alpha = 0$; entrando-se com esses valores na equação (3.11) obtêm-se:



$$C = - \frac{2\lambda}{a} M_\alpha \quad \text{e} \quad \gamma = 0 \quad \dots (3.13)$$

Os esforços ao longo da cobertura esférica para o momento M_α aplicados são encontrados mediante substitui-

ção das relações (3.13) nas equações (3.9) e (3.11), ficando:

$$\begin{aligned}
 N_{\phi} &= -\frac{2\lambda}{a} \cotg(\alpha - \psi) e^{-\lambda\psi} \text{sen}(\lambda\psi) M_{\alpha} \\
 N_{\theta} &= -\frac{2\sqrt{2}}{a} \lambda^2 e^{-\lambda\psi} \text{sen} \left[\lambda\psi - \frac{\pi}{4} \right] M_{\alpha} \\
 M_{\phi} &= \sqrt{2} e^{-\lambda\psi} \text{sen} \left[\lambda\psi + \frac{\pi}{4} \right] M_{\alpha} \quad \dots (3.14)
 \end{aligned}$$

$$M_{\theta} = \nu M_{\phi}$$

$$Q_{\phi} = -\frac{2\lambda}{a} e^{-\lambda\psi} \text{sen}(\lambda\psi) M_{\alpha}$$

b) Para a força horizontal H_{α} , uniformemente distribuída no círculo paralelo $\phi = \alpha$ ($\psi = 0$), tem-se $M_{\phi} = M_{\alpha} = 0$; $Q_{\phi} = Q_{\alpha} = H_{\alpha} \text{sen}\alpha$ e $N_{\phi} = N_{\alpha} = H_{\alpha} \text{cos}\alpha$; entrando-se com esses valores na equação (3.11) obtêm-se:



$$C = -\sqrt{2} \text{sen}\alpha H_{\alpha} \quad \text{e} \quad \gamma = -\frac{\pi}{4} \quad \dots (3.15)$$

Os esforços ao longo da cobertura esférica para a força horizontal uniforme H_{α} aplicada são encontrados mediante substituição das relações (3.15) nas equações (3.9) e (3.11):

$$N_{\phi} = -\sqrt{2} \cotg(\alpha - \psi) \text{sen}\alpha e^{-\lambda\psi} \text{sen} \left[\lambda\psi - \frac{\pi}{4} \right] H_{\alpha}$$

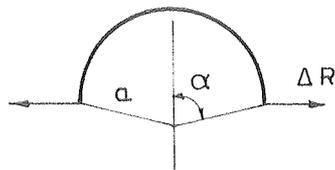
$$N_{\theta} = -2 \lambda \text{sen}\alpha e^{-\lambda\psi} \text{sen} \left[\lambda\psi - \frac{\pi}{2} \right] H_{\alpha}$$

$$M_{\phi} = \frac{a}{\lambda} \text{sen}\alpha e^{-\lambda\psi} \text{sen}(\lambda\psi) H_{\alpha}$$

$$M_{\theta} = \nu M_{\phi}$$

$$Q_{\phi} = -\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha e^{-\lambda \psi} \operatorname{sen} \left[\lambda \psi - \frac{\pi}{4} \right] H_{\alpha} \quad \dots (3.16)$$

c) Para o deslocamento horizontal Δr_o constante no círculo paralelo $\phi = \alpha (\psi = 0)$, tem-se $\Delta r_o = \Delta R$ e $V = \Delta \phi = \Delta \alpha = 0$; entrando-se com esses valores nas equações (3.10) e (3.12) obtêm-se:



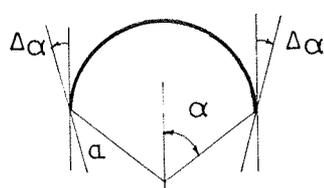
$$C = \frac{Eh}{\lambda a \operatorname{sen} \alpha} \Delta R \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \dots (3.17)$$

Os esforços nas bordas da cobertura esférica para o deslocamento horizontal ΔR aplicado são encontrados mediante substituição das relações (3.17) nas equações (3.11) com $H_{\alpha} = N_{\alpha} / \cos \alpha$:

$$H_{\alpha} = \frac{Eh}{\lambda a \operatorname{sen}^2 \alpha} \Delta R \quad \dots (3.18)$$

$$M_{\alpha} = \frac{-Eh}{2 \lambda^2 \operatorname{sen} \alpha} \Delta R$$

d) Para a rotação da tangente ao meridiano $V = \Delta \phi$, uniforme em torno do círculo paralelo $\phi = \alpha (\psi = 0)$, tem-se $\Delta r_o = \Delta R = 0$ e $V = \Delta \phi = \Delta \alpha$; entrando-se com esses valores nas equações (3.10) e (3.12) obtêm-se:



$$C = \frac{Eh}{\lambda^2 \sqrt{2}} \Delta \alpha \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{\pi}{4} \quad \dots (3.19)$$

Os esforços nas bordas da cobertura esférica para a rotação $\Delta\alpha$ aplicada são encontrados mediante substituição das relações (3.19) nas equações (3.11) com $H_\alpha = N_\alpha / \cos\alpha$:

$$H_\alpha = \frac{Eh}{2\lambda^2 \operatorname{sen}\alpha} \Delta\alpha \quad \dots (3.20)$$

$$M_\alpha = \frac{-Eh a}{2\lambda^3} \Delta\alpha$$

1.2 - CASCAS CÔNICAS

Partindo-se da simplificação de Geckeler, dos parâmetros e particularidades geométricas do Capítulo II, item 9.2 e substituindo-se a relação (3.1) nas equações (3.2) obtêm-se:

$$y^2 \frac{d^2 Q_y}{dy^2} + \frac{Eh V}{\cotg^2 \alpha} = 0 \quad \dots (3.21)$$

$$\frac{d^2 v}{dy^2} - \frac{Q_y}{D} = 0$$

Resolvendo o sistema por substituição, chega-se a

$$\frac{d^4 v}{dy^4} + \frac{Eh \operatorname{tg}^2 \alpha}{Dy^2} v = 0 \quad \dots (3.22)$$

ou

$$\frac{d^2}{dy^2} \left(y^2 \frac{d^2 Q_\phi}{dy^2} \right) + \frac{Eh \operatorname{tg}^2 \alpha}{D} Q_\phi = 0 \quad \dots (3.23)$$

definindo-se o parâmetro

$$\lambda^4 = \frac{y^2 h^2 \cotg^2 \alpha}{3(1 - \nu^2)} \quad \dots (3.24)$$

desenvolvendo a equação (3.22), substituindo a equação (2.11) e a relação (3.24), resulta:

$$\frac{d^4 V}{dy^4} + \frac{4}{\lambda_y^4} V = 0 \quad \dots (3.25)$$

O parâmetro da equação (3.25) comparado com o da equação (3.6) já não é constante, mas sim uma função que varia com y . Segundo novamente Geckeler, subdivide-se o comprimento da geratriz do cone mediante paralelos em zonas de λ_y aproximadamente constante. Para a casca fechada (Fig. 3.2) o coeficiente $4/\lambda_y^4$ é calculado para a borda, com $y = L$. Veja-se, por exemplo Hampe (B16), Backer (B2) e Venturini (B29).

Assim, o parâmetro do cone passa a valer

$$\lambda_L^4 = \frac{L^2 h^2 \cotg^2 \alpha}{3(1 - \nu^2)} \quad \dots (3.26)$$

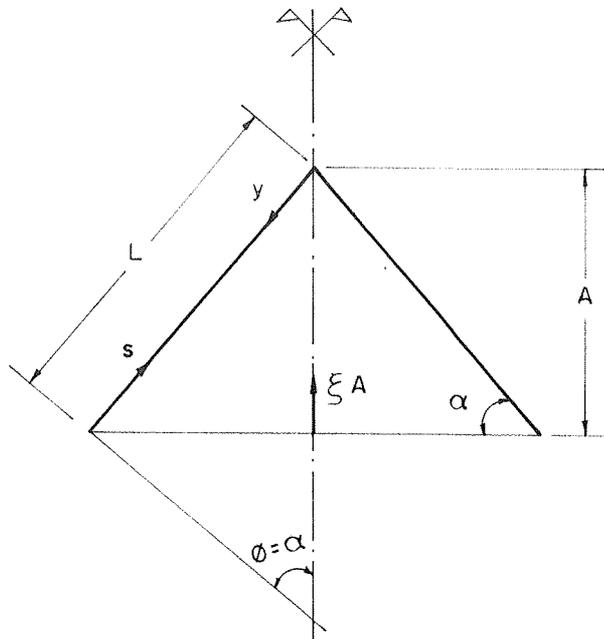


FIG. 3.2 - Coordenadas usadas para a casca cônica.

Sendo conveniente trabalhar-se a partir da borda, com $s = L - y$ ($ds = -dy$) define-se um parâmetro adimensional

$$\eta = \frac{s}{\lambda_L} \dots (3.27)$$

Substituindo-se o parâmetro definido pela expressão (3.27) na equação (3.25) resulta

$$\frac{d^4 v}{d\eta^4} + 4 v = 0 \dots (3.28)$$

Comparando-se agora a equação (3.28) com a equação (3.6) verifica-se que ambas possuem a mesma forma de solução geral; assim

$$v = e^{-\eta} (C_1 \cos \eta + C_2 \operatorname{sen} \eta) + e^{+\eta} (C_3 \cos \eta + C_4 \operatorname{sen} \eta) \dots (3.29)$$

Como a rotação da tangente ao meridiano e Q_ϕ são nulos no vértice por razões de simetria, a solução da equação diferencial fica então:

$$v = e^{-\eta} (C_1 \cos \eta + C_2 \operatorname{sen} \eta) \dots (3.30)$$

Por conveniência, introduz-se ainda o parâmetro adimensional ξ medido na altura A do cone (Fig. 3.2), tendo-se:

$$s = \frac{\xi A}{\operatorname{sen} \alpha} = \xi L \dots (3.31)$$

Combinando as expressões (3.31) e (3.27), define-se o parâmetro K a ser usado na flexão.

$$K = \frac{L}{\lambda_L} \dots (3.32)$$

sendo, então:

$$\eta = K \xi \quad \dots (3.33)$$

Das relações geométricas da Figura 3.2 e com a equação (3.31) tem-se também

$$y = L (1 - \xi) \quad \dots (3.34)$$

Com a expressão (3.33) a equação (3.30) pode ser escrita como

$$v = C e^{-K\xi} \text{sen}(K\xi + \gamma) \quad \dots (3.35)$$

onde C e γ são constantes a determinar (que dependem das condições de contorno) e ξ é uma coordenada adimensional medida a partir da base, segundo a altura A do cone (Fig. 3.2).

Introduzindo-se a equação (3.35) na segunda expressão de (3.21) e levando em consideração ainda a relação (3.34), obtém-se:

$$Q_y = - \frac{2K^2 D}{L} C e^{-K\xi} \text{sen}(K\xi + \gamma + \pi/2) \quad \dots (3.36)$$

Calculam-se os esforços utilizando a aproximação de Geckeler, substituindo as equações (3.35) e (3.36) e suas derivadas nas equações (2.3), (2.4) e (2.10), resultando

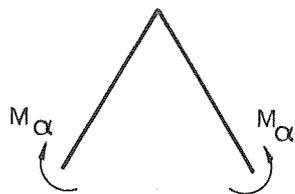
$$\begin{aligned} M_y &= \frac{DK}{L} \sqrt{2} C e^{-K\xi} \cos(K\xi + \gamma + \pi/4) \\ M_\theta &= \nu M_y \\ N_y &= - \frac{2K^2 D}{L^2} C e^{-K\xi} \text{sen}(K\xi + \gamma + \pi/2) \cotg\alpha \\ N_\theta &= \frac{2\sqrt{2} K^3 D}{L^2} \cotg\alpha (1 - \xi) C e^{-K\xi} \cos(K\xi + \gamma + 3\pi/4) \end{aligned} \quad \dots (3.37)$$

O deslocamento horizontal \bar{e} é obtido pela equação (2.20) com os esforços de flexão e desprezando-se o termo em ν :

$$\Delta r_o = \frac{2\sqrt{2}(1-\xi)^2}{L E h} K^3 D \cotg\alpha \cos\alpha C e^{-K\xi} \cos(K\xi + \gamma + 3\pi/4) \dots (3.38)$$

Partindo-se das condições de contorno obtêm-se as constantes C e γ da seguinte forma:

- a) Para o momento M_α , uniformemente distribuído na borda ($\xi = 0$), tem-se $M_y = M_\alpha$, $N_y = N_\alpha = 0$; entrando-se com esses valores na equação (3.37) obtêm-se



$$\gamma = -\frac{\pi}{2} \quad e \quad C = \frac{L}{DK} M_\alpha \dots (3.39)$$

Os esforços ao longo da cobertura cônica para o momento M_α aplicado são encontrados mediante substituição das relações (3.39) nas equações (3.36) e (3.37):

$$N_y = -\frac{2K}{L} e^{-K\xi} \text{sen}(K\xi) \cotg\alpha M_\alpha$$

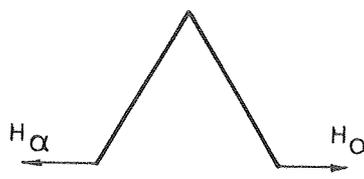
$$N_\theta = \frac{2\sqrt{2} K^2}{L} (1-\xi) e^{-K\xi} \cos(K\xi + \frac{\pi}{4}) \cotg\alpha M_\alpha$$

$$M_y = \sqrt{2} e^{-K\xi} \cos(K\xi - \frac{\pi}{4}) M_\alpha \dots (3.40)$$

$$M_\theta = \nu M_y$$

$$Q_y = -\frac{2K}{L} e^{-K\xi} \text{sen}(K\xi) M_\alpha$$

b) Para a força horizontal H_α , uniforme na borda ($\xi=0$), tem-se $M_y = M_\alpha = 0$ e $Q_y = Q_\alpha = H_\alpha \operatorname{sen}\alpha$; entrando-se com esses valores na equação (3.37) obtêm-se:



$$\gamma = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad C = - \frac{L^2 \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{2} D K^2} H_\alpha$$

.... (3.41)

Os esforços ao longo da cobertura cônica para a força horizontal uniforme H_α aplicada são encontrados mediante substituição das relações (3.41) nas equações (3.36) e (3.37):

$$N_y = \sqrt{2} \operatorname{cos}\alpha e^{-K\xi} \operatorname{sen}\left(K\xi + \frac{3\pi}{4}\right) H_\alpha$$

$$N_\theta = -2(1-\xi)\operatorname{cos}\alpha K e^{-K\xi} \operatorname{cos}(K\xi + \pi) H_\alpha$$

$$M_y = - \frac{L \operatorname{sen}\alpha}{K} e^{-K\xi} \operatorname{cos}\left(K\xi + \frac{\pi}{2}\right) H_\alpha \quad \text{.... (3.42)}$$

$$M_\theta = \nu M_y$$

$$Q_y = \sqrt{2} \operatorname{sen}\alpha e^{-K\xi} \operatorname{sen}\left(K\xi + \frac{3\pi}{4}\right) H_\alpha$$

c) Para o deslocamento horizontal Δr_0 constante na borda ($\xi = 0$); tem-se $\Delta r_0 = \Delta R$ e $V = \Delta y = \Delta\alpha = 0$; entrando-se com esses valores nas equações (3.35) e (3.38) obtêm-se:



$$\gamma = 0 \quad \text{e} \quad C = - \frac{2 K}{L \operatorname{sen} \alpha} \Delta R$$

.... (3.43)

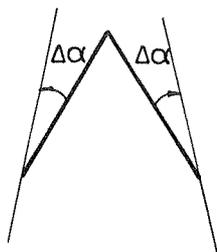
Os esforços nas bordas da cobertura cônica para o deslocamento horizontal ΔR aplicado são encontrados mediante substituição das relações (3.43) nas equações (3.36) e (3.37) com $H_{\alpha} = Q_{\alpha} / \operatorname{sen} \alpha$:

$$H_{\alpha} = \frac{4 D K^3}{L^3 \operatorname{sen}^2 \alpha} \Delta R$$

.... (3.44)

$$M_{\alpha} = - \frac{2 D K^2}{L^2 \operatorname{sen} \alpha} \Delta R$$

d) Para a rotação da tangente ao meridiano $V = \Delta y$, uniforme na borda ($\xi = 0$); tem-se $\Delta r_o = \Delta R = 0$ e $V = \Delta y = \Delta \alpha$; entrando-se com esses valores nas equações (3.35) e (3.38) obtém-se:



$$\gamma = - \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad C = -\sqrt{2} \Delta \alpha$$

.... (3.45)

Os esforços nas bordas da cobertura cônica para a rotação $\Delta \alpha$ aplicada são encontrados mediante substituição das relações (3.43) nas equações (3.36) e (3.37), com $H_{\alpha} = Q_{\alpha} / \operatorname{sen} \alpha$:

$$H_{\alpha} = \frac{2 D K^2}{L^2 \operatorname{sen} \alpha} \Delta \alpha$$

$$M_{\alpha} = - \frac{2 D K}{L} \Delta \alpha \quad \dots (3.46)$$

2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL HOMOGENEA PARA A PAREDE DO RESERVATÓRIO

Partindo-se das equações de equilíbrio (2.4) e (2.5) e dos esforços (2.10), introduzindo os parâmetros e particularidades geométricas do Capítulo II, item 9.3 e com o esforço N_y absorvendo as cargas de revolução dirigidas ao longo do eixo reto do cilindro, obtêm-se para uma casca cilíndrica circular intermediária qualquer, de espessura constante, a seguinte equação diferencial homogênea:

$$\frac{d^4 w}{dy^4} + \frac{Eh}{DR^2} w = 0 \quad \dots (3.47)$$

definindo-se o parâmetro β , que caracteriza a geometria da casca,

$$\beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2} \quad \dots (3.48)$$

desenvolvendo a equação (3.47), e aplicando a equação (2.11) e a relação (3.48), resulta

$$\frac{d^4 w}{dy^4} + 4 \beta^4 w = 0 \quad \dots (3.49)$$

ou

$$\frac{d^4 w}{d\eta^4} + 4 w = 0 \quad \dots (3.50)$$

onde

$$\eta = \beta y = \beta L \xi \quad \dots (3.51)$$

Analogamente à casca cônica da Fig. 3.2, na casca cilíndrica circular (Fig. 3.3) o coeficiente $4\beta^4$ da equação (3.49) pode ser calculado para ambas as bordas. A coordenada que determina o deslocamento na borda superior é $y_k = \bar{\xi}L$ e na borda inferior é $y_i = \xi L$.

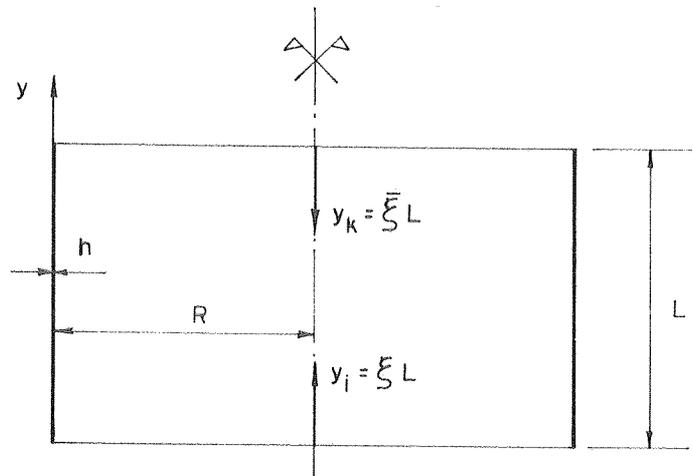


FIG. 3.3 - Coordenadas usadas para a casca cilíndrica.

A solução da equação diferencial (3.49), de uma maneira genérica para a borda superior ou inferior, pode ser representada conforme, por exemplo, Hampe (B16), pela combinação das funções trigonométricas e hiperbólicas:

$$\begin{array}{ll} \cosh\beta L\xi \cos\beta L\xi & \sinh\beta L\xi \cos\beta L\xi \\ \cosh\beta L\xi \sen\beta L\xi & \sinh\beta L\xi \sen\beta L\xi \end{array}$$

onde βL é um parâmetro adimensional e $\xi = y/L$ é a coordenada também adimensional definida por (3.51).

Tem-se, então;

$$w = C_1 F_7(\xi) + C_2 F_{15}(\xi) + C_3 F_{16}(\xi) + C_4 F_8(\xi) \quad \dots (3.52)$$

sendo as expressões para o cálculo de $F_j(\xi)$ fornecidas no Anexo 1 e C_1, C_2, C_3 e C_4 as constantes de integração determinadas pelas condições de contorno, de modo análogo ao que foi feito para a cobertura esférica ou cônica.

Os esforços podem ser obtidos substituindo-se as equações (3.52) nas equações (2.5) e (2.10). A rotação da tangente ao meridiano é obtida pela equação (2.7). Os sentidos positivos dos esforços e deslocamentos correspondem à convenção da Teoria da Elasticidade e são fornecidos na Fig. 3.4.

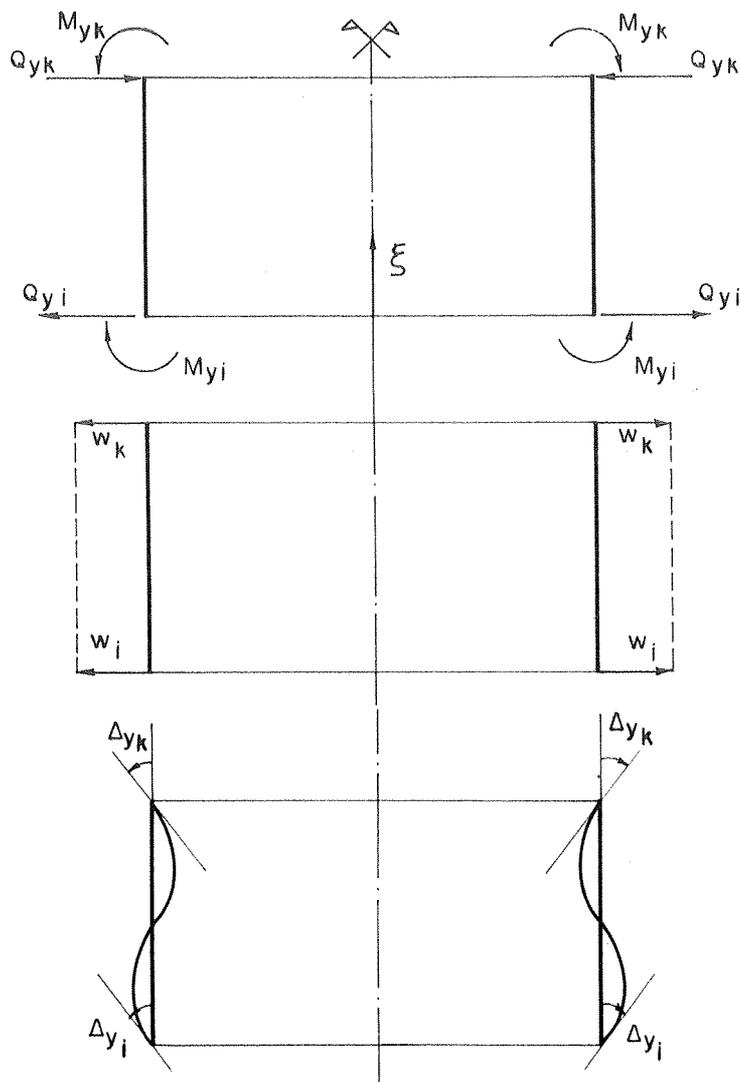
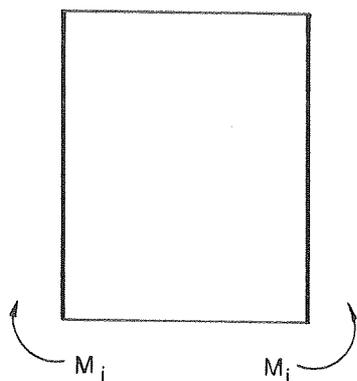


FIG. 3.4 - Sentidos positivos dos esforços e deslocamentos da casca cilíndrica segundo a convenção da Teoria da Elasticidade.

Analogamente à cobertura esférica, obtêm-se para a borda inferior:

a.1) Para o momento $M_y = M_i$, uniformemente distribuído em torno do círculo paralelo em $y = y_i = 0$ ($\xi = 0$) tem-se os esforços ao longo da parede cilíndrica circular dados por:



$$N_{\theta} = -2\beta^2 R \left[-\frac{F_2}{F_1} F_7(\xi) + \frac{F_3}{F_1} F_{10}(\xi) - F_8(\xi) \right] M_i$$

$$M_y = - \left[\frac{F_2}{F_1} F_8(\xi) - \frac{F_3}{F_1} F_9(\xi) + F_7(\xi) \right] M_i$$

$$M_{\theta} = \nu M_y$$

$$Q_y = \beta \left[\frac{F_2}{F_1} F_{10}(\xi) - \frac{2F_3}{F_1} F_8(\xi) + F_9(\xi) \right] M_i \quad \dots (3.53)$$

onde $F_j(\xi)$ são os valores das funções ao longo da parede para $\xi = y_i/L$ e F_j são os valores da funções em $y_i = L$ ($\xi = 1, \bar{\xi} = 0$).

Quando se tem o produto $\beta L \geq 4$ ver, p.ex. Hampe (B16) e Baker (B2), a casca cilíndrica circular pode ser considerada longa e,

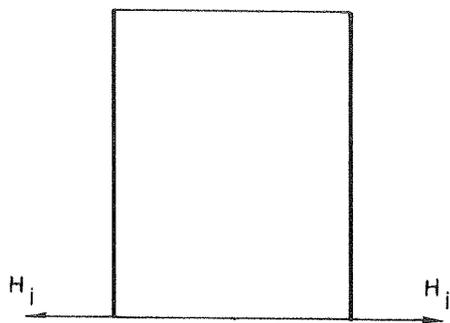
$$\frac{F_2}{F_1} \approx \frac{F_3}{F_1} \approx 1 \quad \dots (3.54)$$

Substituindo as relações (3.54) nas equações (3.53) tem-se os esforços ao longo da parede cilíndrica circular para a casca longa ($\beta L \geq 4$):

$$\begin{aligned}
 N_{\theta} &= 2 \beta^2 R F_{20}(\xi) M_i \\
 M_y &= F_{19}(\xi) M_i \\
 M_{\theta} &= \nu M_y \\
 Q_y &= 2 \beta F_{18}(\xi) M_i
 \end{aligned}
 \dots (3.55)$$

onde $F_j(\xi)$ são os valores das funções ao longo da parede para $\xi = y_i/L$.

b.1) Para a força horizontal $Q_y = H_i$, uniformemente distribuída no círculo paralelo em $y = y_i = 0$ ($\xi = 0$), tem-se os esforços ao longo da parede cilíndrica circular dados por:



$$\begin{aligned}
 N_{\theta} &= 2\beta R \left[\frac{F_4}{F_1} F_7(\xi) - \frac{F_5}{F_1} F_{15}(\xi) + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{F_6}{F_1} F_{16}(\xi) \right] H_i \\
 M_y &= \left[- \frac{F_4}{F_1} F_8(\xi) - \frac{F_5}{F_1} F_{16}(\xi) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{F_6}{F_1} F_{15}(\xi) \right] \frac{H_i}{\beta} \\
 M_{\theta} &= \nu M_y \\
 Q_y &= \left[\frac{F_4}{F_1} F_{10}(\xi) + \frac{F_5}{F_1} F_{13}(\xi) + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{F_6}{F_1} F_{14}(\xi) \right] H_i
 \end{aligned}
 \dots (3.56)$$

onde $F_j(\xi)$ e F_j são calculados de maneira análoga ao caso a.1).

Para a casca longa ($\beta L \geq 4$) tem-se ainda

$$\frac{F_4}{F_1} \approx \frac{F_6}{F_1} \approx 1$$

$$\frac{F_5}{F_1} \approx 0$$

.... (3.57)

Substituindo as relações (3.57) nas equações (3.56) tem-se os esforços ao longo da parede cilíndrica circular dados por:

$$N_\theta = 2 \beta R F_{17}(\xi) H_i$$

$$M_y = F_{18}(\xi) \frac{H_i}{\beta}$$

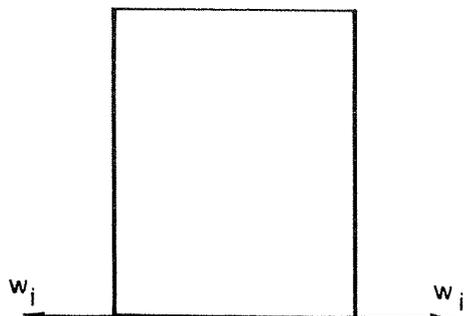
.... (3.58)

$$M_\theta = \nu M_y$$

$$Q_y = - F_{20}(\xi) H_i$$

onde $F_j(\xi)$ são calculados de maneira análoga ao caso a.1).

c.1) Para o deslocamento horizontal $\Delta H = w_i$, constante no círculo paralelo $y = y_i = 0$ ($\xi = 0$), tem-se os esforços nas bordas da parede cilíndrica circular dados por:



$$Q_{yi} = \frac{Eh}{2R^2\beta} \frac{2F_3}{F_1} w_i$$

$$M_{yi} = \frac{-Eh}{2R^2\beta} \frac{F_2}{F_1} w_i$$

$$Q_{yk} = \frac{Eh}{2R^2\beta} \frac{2F_{10}}{F_1} w_i$$

$$M_{yk} = \frac{+Eh}{2R^2\beta^2} \frac{2F_8}{F_1} w_i \dots (3.59)$$

Para a casca longa, obtêm-se substituindo as relações (3.54) nas equações (3.59):

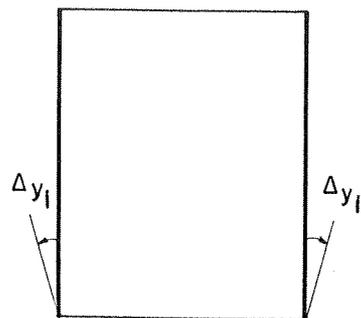
$$Q_{yi} = \frac{Eh}{R^2\beta} w_i$$

$$M_{yi} = \frac{-Eh}{2R^2\beta^2} w_i \dots (3.60)$$

$$Q_{yk} = \frac{Eh}{2R^2\beta} \frac{2F_{10}}{F_1} w_i \approx 0$$

$$M_{yk} = \frac{Eh}{2R^2\beta} \frac{2F_8}{F_1} w_i \approx 0$$

d.1) Para a rotação da tangente ao meridiano $V = \Delta y_i$, uniforme em torno do círculo paralelo $y=y_i=0(\xi=0)$, tem-se os esforços nas bordas da parede cilíndrica circular dados por



$$Q_{yi} = \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \frac{F_2}{F_1} \Delta y_i$$

$$M_{yi} = \frac{-Eh}{2R^2\beta^3} \frac{F_4}{F_1} \Delta y_i \dots (3.61)$$

$$Q_{yk} = \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \frac{2F_8}{F_1} \Delta y_i$$

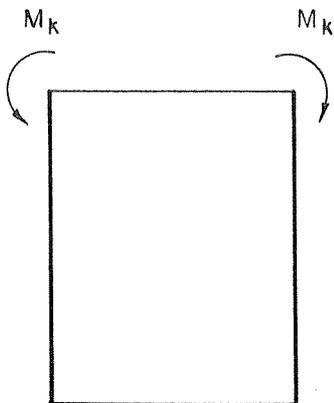
$$M_{yk} = \frac{Eh}{2R^2\beta^3} \frac{F_9}{F_1} \Delta y_i$$

Para a casca longa, obtêm-se, substituindo as relações (3.54) nas equações (3.61):

$$\begin{aligned}
 Q_{yi} &= \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \Delta y_i \\
 M_{yi} &= \frac{-Eh}{2R^2\beta^3} \Delta y_i \\
 &\dots (3.62) \\
 Q_{yk} &= \frac{+Eh}{2R^2\beta^2} \frac{2F_8}{F_1} \Delta y_i \approx 0 \\
 M_{yk} &= \frac{Eh}{2R^2\beta^3} \frac{F_9}{F_1} \Delta y_i \approx 0
 \end{aligned}$$

Para a borda superior da casca tem-se também analogamente a cobertura esférica e cônica:

a.2) Para o momento $M_y = M_k$, uniformemente distribuído em torno do círculo paralelo em $y = y_i = L$ ($\xi = 1$) tem-se os esforços ao longo da parede cilíndrica circular dados por:



$$\begin{aligned}
 N_\theta &= 2\beta^2 R \left[-\frac{2F_8}{F_1} F_7(\xi) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{F_{10}}{F_1} F_{10}(\xi) \right] M_k \\
 M_y &= \left[\frac{2F_8}{F_1} F_8(\xi) - \frac{F_{10}}{F_1} F_9(\xi) \right] M_k \\
 M_\theta &= \nu M_y \quad \dots (3.63) \\
 Q_y &= -\beta \left[\frac{2F_8}{F_1} F_{10}(\xi) + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2F_{10}}{F_1} F_8(\xi) \right] M_k
 \end{aligned}$$

onde $F_j(\xi)$ são os valores das funções ao longo da parede para $\xi = y_i/L$ e F_j são os valores das funções em $y_i=L$ ou $\xi = 1$ ($y_k = 0$).

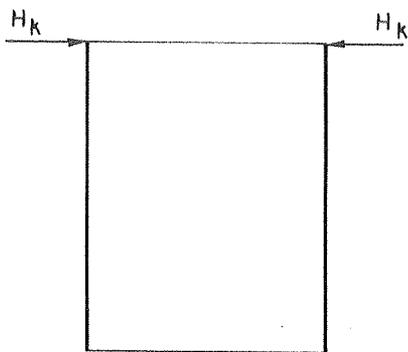
Analogamente à borda inferior, tem-se para a casca cilíndrica circular longa ($\beta L \geq 4$)

$$\begin{aligned} N_{\theta} &= 2 \beta^2 R F_{20}(\bar{\xi}) M_k \\ M_y &= F_{19}(\bar{\xi}) M_k \\ M_{\theta} &= \nu M_y \end{aligned} \quad \dots (3.64)$$

$$Q_y = 2 \beta F_{18}(\bar{\xi}) M_k$$

onde $F_j(\bar{\xi})$ são os valores das funções ao longo da parede para $\bar{\xi} = y_k/L$.

b.2) Para a força horizontal $Q_y = H_k$, uniformemente distribuída no círculo paralelo em $y = y_i = L$ ($\xi = 1$), tem-se os esforços ao longo da parede cilíndrica circular dados por:



$$\begin{aligned} N_{\theta} &= 2\beta R \left[\frac{F_9}{F_1} F_7(\xi) - \frac{F_8}{F_1} F_{10}(\xi) \right] H_k \\ M_y &= - \left[\frac{F_9}{F_1} F_8(\xi) - \frac{F_8}{F_1} F_9(\xi) \right] \frac{H_k}{\beta} \\ M_{\theta} &= \nu M_y \\ Q_y &= - \left[\frac{F_9}{F_1} F_{10}(\xi) - \frac{2F_8}{F_1} F_8(\xi) \right] H_k \end{aligned} \quad \dots (3.65)$$

Analogamente à borda inferior, tem-se para a casca cilíndrica circular longa ($\beta L \geq 4$).

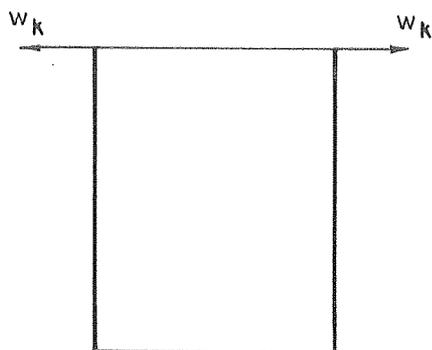
$$N_{\theta} = -2 \beta R F_{17}(\bar{\xi}) H_k$$

$$M_y = - F_{18}(\bar{\xi}) \frac{H_k}{\beta}$$

$$M_\theta = \nu M_y$$

$$Q_y = F_{20}(\bar{\xi}) H_k \quad \dots (3.66)$$

c.2) Para o deslocamento horizontal $\Delta H = w_k$, constante no círculo paralelo $y = y_k = 0 (\bar{\xi} = 0)$, tem-se os esforços nas bordas da parede cilíndrica circular dados por:



$$Q_{yi} = \frac{-Eh}{2R^2\beta} \frac{2F_{10}}{F_1} w_k$$

$$M_{yi} = \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \frac{2F_8}{F_1} w_k \quad \dots (3.67)$$

$$Q_{yk} = \frac{-Eh}{2R^2\beta} \frac{2F_3}{F_1} w_k$$

$$M_{yk} = \frac{-Eh}{2R^2\beta^2} \frac{F_2}{F_1} w_k$$

Para a casca longa, obtêm-se substituindo as relações (3.54) nas equações (3.67):

$$Q_{yi} = \frac{-Eh}{2R^2\beta} \frac{2F_{10}}{F_1} w_k \approx 0$$

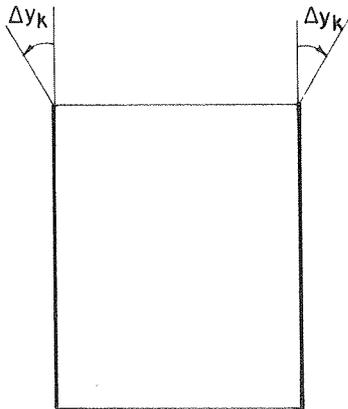
$$M_{yi} = \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \frac{2F_8}{F_1} w_k \approx 0$$

..... (3.68)

$$Q_{yk} = \frac{-Eh}{R^2\beta} w_k$$

$$M_{yk} = \frac{-Eh}{2R^2\beta^2} w_k$$

d.2) Para a rotação da tangente ao meridiano $V = \Delta y_k$, uniforme em torno do círculo paralelo $y = y_k = 0 (\bar{\xi} = 0)$, tem-se os esforços nas bordas da parede cilíndrica circular dados por:



$$\begin{aligned}
 Q_{yi} &= \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \frac{2F_8}{F_1} \Delta y_k \\
 M_{yk} &= \frac{-Eh}{2R^2\beta^3} \frac{F_9}{F_1} \Delta y_k \\
 &\dots (3.69) \\
 Q_{yk} &= \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \frac{F_2}{F_1} \Delta y_k \\
 M_{yk} &= \frac{Eh}{2R^2\beta^3} \frac{F_4}{F_1} \Delta y_k
 \end{aligned}$$

Para a casca longa ($\beta L \geq 4$), obtêm-se substituindo as relações (3.54) nas equações (3.69):

$$\begin{aligned}
 Q_{yi} &= \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \frac{2F_8}{F_1} \Delta y_k \approx 0 \\
 M_{yi} &= \frac{-Eh}{2R^2\beta^3} \frac{F_9}{F_1} \Delta y_k \approx 0 \\
 &\dots (3.70) \\
 Q_{yk} &= \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \Delta y_k \\
 M_{yk} &= \frac{Eh}{2R^2\beta^3} \Delta y_k
 \end{aligned}$$

CAPÍTULO IV

PLACAS E CHAPAS

1. INTRODUÇÃO

Embora as placas e chapas sejam estruturas com superfície média plana, deve ser observado que no seu estudo utilizam-se hipóteses análogas às definidas no capítulo II, item 2, cfr. p. ex., Gravina (B13) e Timoshenko (B27).

As placas são submetidas a esforços que atuam perpendicularmente à superfície média e as chapas, a esforços contidos no plano da superfície média.

Serão estudadas, neste trabalho, placas e chapas circulares de espessura constante e com simetria central de carregamento.

2. PLACAS CIRCULARES ASSENTES EM BASE RÍGIDA

Admitindo-se que o fundo do reservatório está assente em fundação indeformável, apresenta-se a aproximação de Girkmann (B12), que admite que a placa de fundo da Fig. 4.1.a sofre apenas uma flexão local numa região próxima à ligação com a parede, região esta que é definida por uma coroa de largura b , permanecendo o restante da placa sem esforços ou deformações, sob a ação do peso da coluna líquida q , e da reação da fundação, que lhe é igual e contrária.

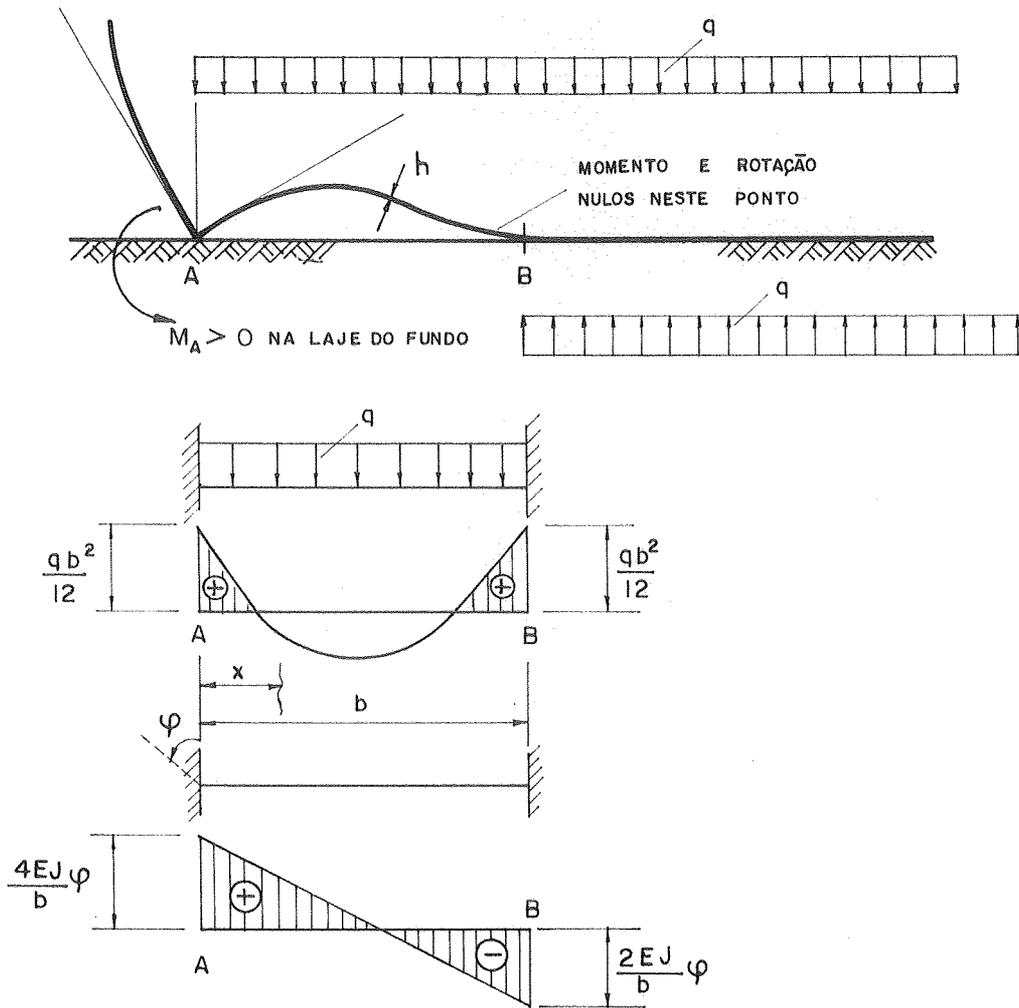


FIG. 4.1 - Fundo do reservatório.

A largura "b" da coroa é calculada admitindo-se que a placa seja cortada em setores constantes de largura unitária considerando-os como vigas. Com o propósito de calcular este comprimento utiliza-se a viga bi-engastada (Fig. 4.1.b e c), adotando-se a mesma convenção de sinais estabelecida nos cálculos anteriores e com a condição de que

$$M_B = 0 \quad , \quad M_B = \frac{qb^2}{12} - \frac{2EJ}{b} \varphi = 0 \quad , \quad \text{ou:}$$
$$\varphi = \frac{qb^3}{24EJ} \quad \dots (4.1)$$

Calcula-se então o valor do momento em A

$$M_A = \frac{qb^2}{12} + \frac{4EJ}{b} \varphi \quad \dots (4.2)$$

Substituindo a equação (4.1) na equação (4.2), tem-se, facilmente

$$b = 2 \sqrt{\frac{M_A}{q}} \quad \dots (4.3)$$

onde M_A é o momento aplicado na borda da placa e q é o carregamento vertical que atua sobre a laje de fundo.

$$q = \gamma_{liq} \cdot H + \gamma_{mat} h \quad \dots (4.4)$$

sendo γ_{liq} e γ_{mat} respectivamente o peso específico do líquido e do material da placa do fundo; H a altura total da coluna líquida supondo-se o reservatório cheio, e h a espessura do fundo.

Deve ser observado ainda que embora a aproximação utilizada seja para uma viga, devido a ligação transversal entre as diversas barras ideais, adota-se nos cálculos o momento de inércia.

$$J = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots (4.5)$$

As equações para determinação dos esforços ao longo do fundo do reservatório são tiradas facilmente da Fig. 4.1.b e c, num ponto genérico distante "x" da borda do reservatório, chegando-se a

$$M = \frac{qx^2}{2} - \frac{qbx}{2} + \left[\frac{b-x}{b} \right] M_A \dots (4.6)$$
$$Q = \frac{-qb}{2} + qx - \frac{M_A}{b}$$

Para a rotação φ na borda da placa (Fig. 4.1.c), tem-se assim, com a mesma notação do capítulo III,

$$M_\alpha = \frac{4EJ}{b} \varphi_\alpha \dots (4.7)$$

sendo b dado pela expressão (4.3). Da equação (4.2), vê-se que a largura b da coroa fletida é definida em função do próprio momento M_A , ou da rotação φ da junta, o que conduz a um sistema não linear de equações, quando se impõem as condições de compatibilidade entre a placa de fundo e a parede do reservatório. No capítulo IX, mostra-se como contornar esta dificuldade. Quanto ao esforço cortante da placa, este não é considerado no equilíbrio da junta, pois corresponde ao esforço normal N_y da parede.

3. PLACAS CIRCULARES ASSENTES EM BASE ELÁSTICA

Hertz, 1884, fez uma experiência mostrando como uma placa elástica finita se comportava. Para isto, cortou uma placa de gelo de espessura uniforme e colocou-a na água, analisando então o equilíbrio de pressões quando se colocava um peso sobre a placa. A placa de Hertz é da mesma natureza das placas sobre apoio elástico estudadas por Schleicher (B26), pois em ambos os casos tem-se por baixo da placa uma pressão proporcional ao recalque.

No caso da placa de gelo tem-se o empuxo hidrostático da água: $p = \gamma_{liq} w$; já no outro caso tem-se a reação do apoio elástico.

$$p = K_s w \dots (4.8)$$

Em se tratando da placa de Hertz, tem-se o peso específico da água (γ_{liq}) como fator proporcional, já no caso da placa assente em base elástica, tem-se a constante da fundação, K_s , que tem significado físico de um módulo de elasticidade.

O valor de K_s pode ser obtido tanto através de ensaios, como através de correlações empíricas. Na Tabela 4.1 são fornecidos os valores propostos por Terzaghi - in Bowles (B8). No entanto, as indicações variam grandemente de um para outro autor; compare-se, por exemplo, os dados da Tabela 4.1 com os valores sugeridos por Grekow (B14), e sua utilização prática depende mais da experiência do projetista.

| SOLOS GRANULARES | | | |
|---|---------------------|---------------------|-----------------------|
| | COMPACIDADE | | |
| | FOFA | MÉDIA | DENSA |
| Areia seca ou úmida (VALORES LIMITES) (VALORES PROPOSTOS) | 0.64 — 1.92 1.28 | 1.92 — 9.60 4.16 | 9.60 — 32.00 16.00 |
| SOLO SATURADO (VALORES PROPOSTOS) | 0.80 | 2.56 | 9.60 |
| ARGILAS PRÉ - ADENSADAS | | | |
| | CONSISTENCIA | | |
| | FOFA | MUITO RIJA | DURA |
| (VALORES LIMITES) (VALORES PROPOSTOS) | 1.60 — 3.20 2.40 | 3.20 — 6.40 4.80 | 6.40 9.60 |

TABELA 4.1 - Valores da constante elástica do solo K_s -
(Kg/cm³)

As expressões aqui apresentadas para a determinação dos esforços e deslocamentos provenientes dos diversos carregamentos poderiam ser obtidas quase que imediatamente de Hampe (B16) e de Schleicher (B26). Embora seja utilizada, no que diz respeito à parte elástica da solução da equação diferencial da placa, a aproximação de proporcionalidade entre a pressão p e o recalque w do solo, este assunto é ainda desconhecido por muitos leitores. Por este motivo faz-se uma apresentação rápida da obtenção da equação diferencial total e sua solução, antes de se chegar propriamente às expressões para a determinação dos esforços e deslocamentos na placa de fundo do reservatório.

Sobre a espessura constante h da laje atuam esforços, definidos por unidade de comprimento da superfície média, que resultam da integração das tensões ao longo da espessura da placa (ver Fig. 4.2.a e b).

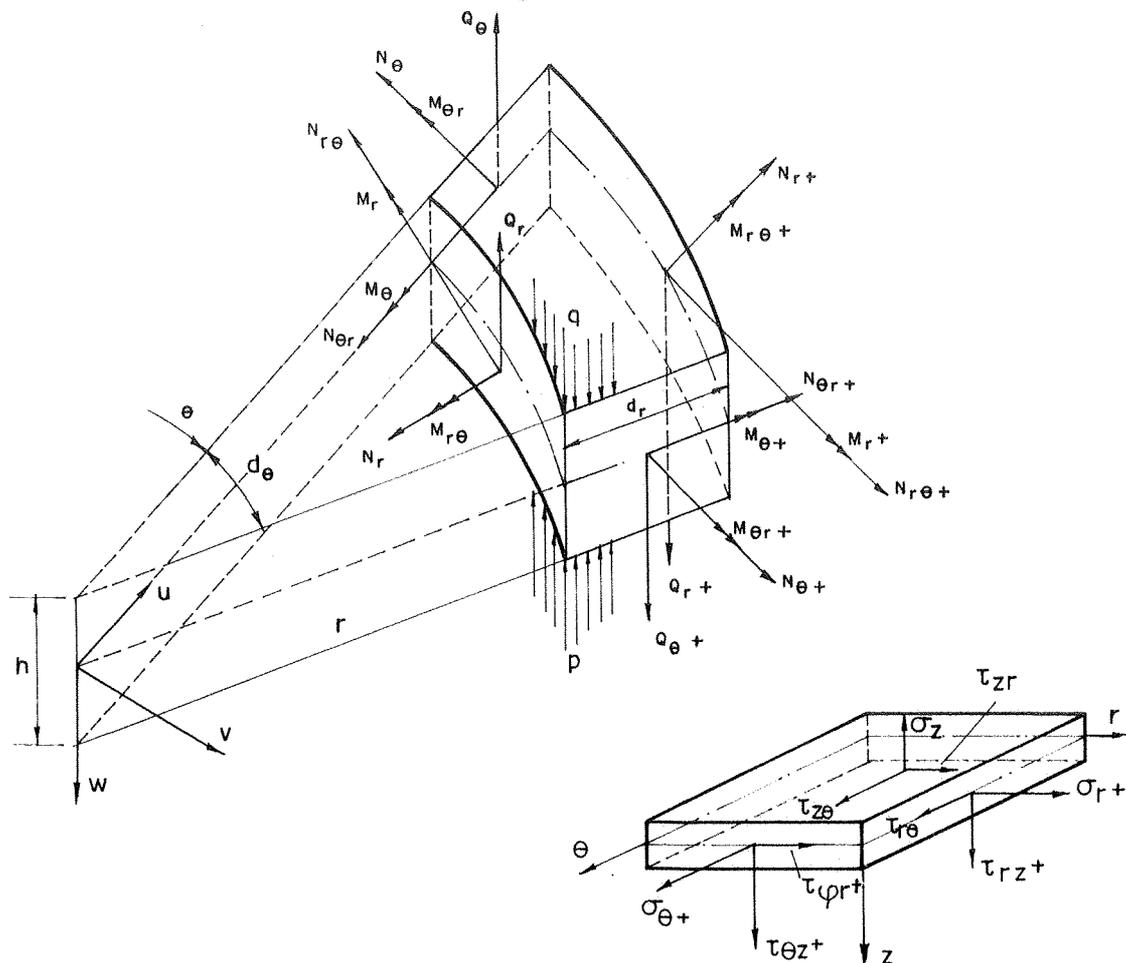


FIG. 4.2 - Esforços e tensões atuando no elemento de fundo do reservatório.

Adotou-se o sistema de coordenadas polares (r, θ) pois devido à simetria central geométrica todas as relações são independentes do ângulo θ ; e como também a placa em estudo possui simetria central de carregamento, as grandezas a serem determinadas são o esforço cortante Q_r , o momento fletor radial M_r , o momento fletor tangencial M_θ , o deslocamento vertical w , cujos sentidos positivos são mostrados na Fig. 4.2.a.

Os esforços são dados em função das derivadas da elástica da placa veja-se, por exemplo, Timoshenko (B27),

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right] \\ M_\theta &= -D \left[\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right] \quad \dots (4.9) \\ Q_r &= -D \left[\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right] \end{aligned}$$

sendo a equação diferencial da placa:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} + \frac{K_s w}{D} = \frac{q}{D} \quad \dots (4.10)$$

onde D é dado pela equação (2.11).

Usando-se o operador Laplaciano em coordenadas polares

$$\nabla_r^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \quad \dots (4.11)$$

vem,

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left[\Delta_r^2 w - \frac{(1-\nu)}{r} \frac{dw}{dr} \right] \\ M_\theta &= D \left[\nu \nabla_r^2 w + \frac{(1-\nu)}{r} \frac{dw}{dr} \right] \end{aligned}$$

$$Q_r = - D \frac{d\nabla_r^2 w}{dr} \quad \dots (4.12)$$

e, para a equação (4.10):

$$\nabla_r^4 w + \frac{K_s}{D} w = \frac{q}{D} \quad \dots (4.13)$$

Admitindo como constante o carregamento q uniformemente distribuído sobre um trecho da placa, a equação diferencial de w pode tornar-se homogênea mediante a substituição

$$\bar{w} = w - \frac{q}{K_s} \quad \dots (4.14)$$

A equação (4.13) fica então:

$$\nabla_r^4 \bar{w} + \frac{K_s}{D} \bar{w} = 0 \quad \dots (4.15)$$

Com a finalidade de utilizar-se tabelas de funções cilíndricas para um ponto genérico da placa circular, introduz-se ainda:

$$\ell = \sqrt[4]{\frac{D}{K_s}} \quad \dots (4.16)$$

sendo ℓ um comprimento característico.

Para a distância r , medida a partir do centro até um ponto qualquer da placa, tem-se

$$r = \xi \ell \quad \dots (4.17)$$

As derivadas com relação a r são dadas por:

$$\frac{d^n}{dr^n} = \frac{1}{\ell^n} \frac{d^n}{d\xi^n} \quad \dots (4.18)$$

Substituindo as equações (4.16), (4.17) e (4.18)

na equação (4.15) obtêm-se, para a equação diferencial homogênea em um ponto genérico da placa

$$\nabla_{\xi}^4 \bar{w} + \bar{w} = 0 \quad \dots (4.19)$$

A resolução da equação (4.19) é feita utilizando-se funções cilíndricas de Bessel e de Hankel, podendo ser encontrada em Schleicher (B26). Seu desenvolvimento matemático é extenso e foge ao objetivo deste trabalho; assim são fornecidos aqui apenas os resultados que interessam para o prosseguimento dos cálculos.

$$\bar{w} = C_1 z_1(\xi) + C_2 z_2(\xi) + C_3 z_3(\xi) + C_4 z_4(\xi) \quad \dots (4.20)$$

As funções $z_1(\xi)$, $z_2(\xi)$, $z_3(\xi)$ e $z_4(\xi)$ são dadas no Anexo 2 e C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são constantes que dependem apenas do tipo de carregamento e das condições de contorno. Assim a expressão (4.20) independe da intensidade do carregamento.

Interessam ainda as relações:

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi}^2 z_1(\xi) &= + z_2(\xi) \\ \nabla_{\xi}^2 z_2(\xi) &= - z_1(\xi) \\ \nabla_{\xi}^2 z_3(\xi) &= + z_4(\xi) \\ \nabla_{\xi}^2 z_4(\xi) &= - z_3(\xi) \end{aligned} \quad \dots (4.21)$$

Substituindo a equação (4.20) na equação (4.14) tem-se finalmente a solução da equação diferencial para a placa cilíndrica circular com simetria central geométrica e de carregamento

$$w(\xi) = \frac{q}{K_s} + \omega \left[C_1 z_1(\xi) + C_2 z_2(\xi) + C_3 z_3(\xi) + C_4 z_4(\xi) \right] \quad \dots (4.22)$$

onde ω é função da intensidade da carga e das características peculiares de cada problema.

Com as equações (4.22), (4.18) e (4.21) chega-se a:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{\omega}{\ell} \left[C_1 z_1'(\xi) + C_2 z_2'(\xi) + C_3 z_3'(\xi) + C_4 z_4'(\xi) \right]$$

$$\nabla_r^2 w = \frac{\omega}{\ell^2} \left[C_1 z_2(\xi) - C_2 z_1(\xi) + C_3 z_4(\xi) - C_4 z_3(\xi) \right] \dots (4.23)$$

$$\frac{d\nabla_r^2 w}{dr} = \frac{\omega}{\ell^3} \left[C_1 z_2'(\xi) - C_2 z_1'(\xi) + C_3 z_4'(\xi) - C_4 z_3'(\xi) \right]$$

Para a placa circular sobre apoio elástico com bordas livres (Fig. 4.3) tem-se as condições de contorno:

- Para $r = 0$ ($\xi = 0$) são nulos a rotação e o cortante; ou seja

$$\left[\frac{dw}{dr} \right]_0 = 0 \quad \text{e} \quad \left[\frac{d\nabla_r^2 w}{dr} \right]_0 = 0, \quad \text{o que fornece:}$$

$$C_3 = C_4 = 0 \quad \dots (4.24)$$

- Para a borda da placa, $r = R$ ($\xi = \alpha$);

$$M_{r\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad Q_{r\alpha} = 0 \quad \dots (4.25)$$

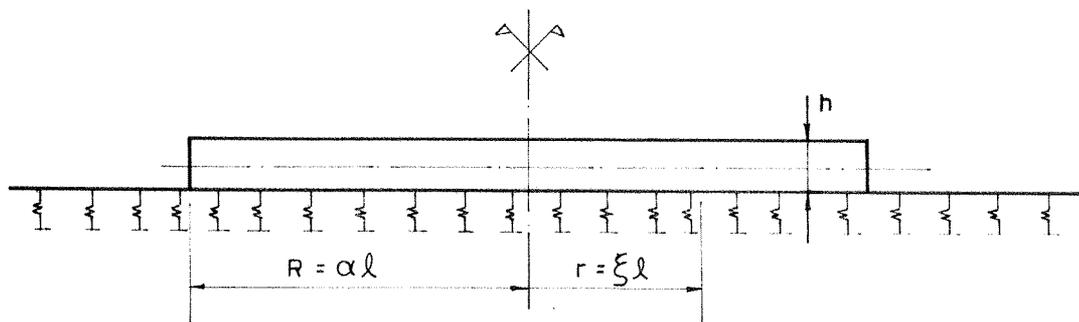


FIG. 4.3 - Geometria da placa.

Para a placa circular sobre apoio elástico com bordas livres e carga uniforme q sobre toda a placa (Fig. 4.4) tem-se, substituindo as equações (4.24) em (4.23), (4.25) em (4.12) e juntando os resultados

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0 \quad \dots (4.26)$$

Substituindo agora a equação acima na equação (4.22) resulta que:

$$w(\xi) = w_0 = \frac{q}{K_s} \quad \dots (4.27)$$

isto é, a placa sofre recalque uniforme igual a w_0 , de modo que nela não aparecem esforços de flexão.

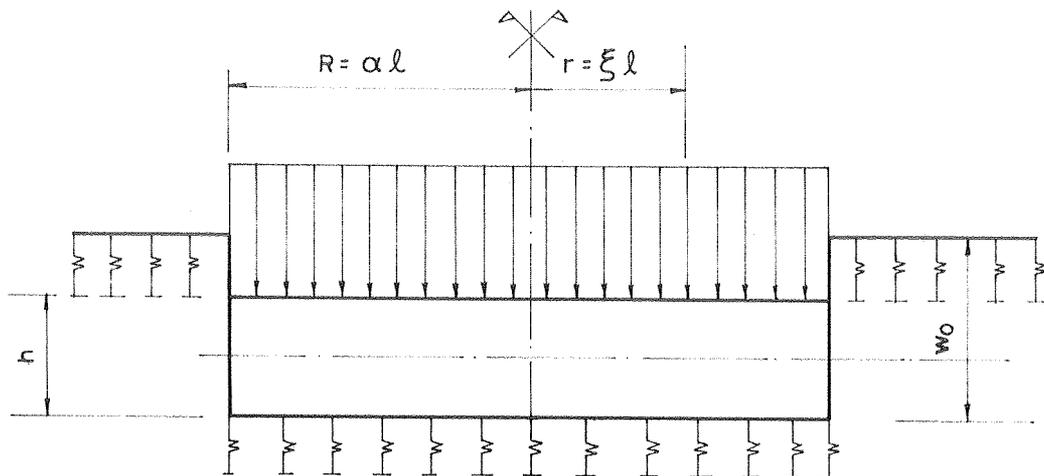


FIG. 4.4 - Placa com borda livre e carregamento uniforme.

Para a placa circular sobre apoio elástico, com condições de borda tais que a rotação dw/dr seja impedida, mas o deslocamento w seja livre - ver Fig. 4.5 - as constantes C_3 e C_4 são dadas pela equação (4.24).

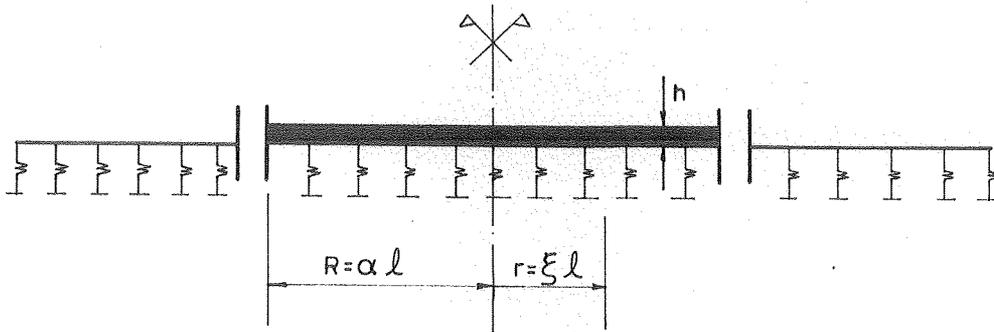


FIG. 4.5 - Placa com rotação impedida na borda.

As constantes C_1 e C_2 podem ser obtidas da seguinte forma:

- a) Para o momento M_α , uniformemente distribuído, aplicado no eixo da placa em $r = R$ ($\xi = \alpha$), tem-se $M_r = M_\alpha$ e $Q_r = Q_\alpha = 0$; entrando com esses valores nas equações (4.23) e (4.12) chega-se a

$$C_1 = \frac{z_1''(\alpha)}{N + \frac{(1-\nu)}{\alpha} S} \quad e \quad C_2 = \frac{z_2'(\alpha)}{N + \frac{(1-\nu)}{\alpha} S} \quad \dots (4.28)$$

sendo

$$N = z_1(\alpha) z_2'(\alpha) - z_2(\alpha) z_1'(\alpha) \quad e \quad S = z_1'^2(\alpha) + z_2'^2(\alpha) \quad \dots (4.29)$$

Os esforços num ponto qualquer do fundo do reservatório para o momento M_α aplicado são encontrados mediante substituição das relações (4.29) e (4.28) nas equações (4.23) e (4.12) ficando:

$$M_r = - \left\{ C_1 z_2(\xi) - C_2 z_1(\xi) - \frac{(1-\nu)}{\xi} \left[C_1 z_1'(\xi) + C_2 z_2'(\xi) \right] \right\} M_\alpha$$

$$Q_r = - \left[C_1 z_2'(\alpha) - C_2 z_1'(\alpha) \right] \frac{M_\alpha}{l} \quad \dots (4.30)$$

$$M_\theta = \left\{ C_1 z_2(\xi) - C_2 z_1(\xi) + \frac{(1-\nu)}{\nu \xi} \left[C_1 z_1'(\xi) + C_2 z_2'(\xi) \right] \right\} \nu M_\alpha$$

b) Para a rotação $\varphi = -dw/dr$ uniforme, aplicada no eixo da placa em $r = R$ ($\xi = \alpha$), tem-se $Q_r = Q_\alpha = 0$ e $\varphi = \varphi_\alpha = -dw/dr$; entrando com esses valores nas equações (4.23) e (4.12) chega-se a:

$$C_1 = \frac{-z_1'(\alpha)}{S} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{-z_2'(\alpha)}{S} \quad \dots (4.31)$$

sendo S dado pela equação (4.29).

Os esforços nas bordas da placa para a rotação $\varphi_\alpha = -dw/dr$ são encontrados mediante substituição das relações (4.31) nas equações (4.23) e (4.12), ficando com a mesma notação do Capítulo III,

$$M_\alpha = -\left[\frac{N}{S} + \frac{1-\nu}{\alpha} \right] \frac{D}{\ell} \varphi_\alpha \quad \dots (4.32)$$

sendo N e S dados pela equação (4.29).

c) Para a carga q uniformemente distribuída sobre toda a placa, tem-se em $r = R$ ($\xi = \alpha$), que $Q_r = Q_\alpha = 0$ e $dw/dr = 0$; entrando com esses valores nas equações (4.23) e (4.12) chega-se a:

$$C_1 = C_2 = 0 \quad \dots (4.33)$$

Este resultado é o mesmo obtido para a placa circular sobre apoio elástico com bordas livres e carga uniforme q sobre toda a placa. Assim, a placa da Fig. 4.5, com carga q uniforme, também sofre um recalque constante w_0 — ver equação (4.27) e, analogamente, nela não aparecem esforços de flexão.

4. CHAPAS

Para a obtenção das fórmulas de uma chapa circular de espessura constante h , com simetria central geométrica e de carregamento, Schleicher (B26) parte do elemento de casca da Fig. 4.2, chegando às expressões para os esforços

$$N_r = \frac{12 D}{h^2} \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right]$$
$$N_\theta = \frac{12 D}{h^2} \left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right] \quad \dots (4.34)$$

$$N_{r\theta} = N_{\theta r} = (1-\nu) \frac{6D}{h^2} \left[\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right]$$

e às equações diferenciais totais

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$
$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0 \quad \dots (4.35)$$

A solução completa das equações (4.35) é imediata e da forma:

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$
$$v = B_1 r + \frac{B_2}{r} \quad \dots (4.36)$$

onde C_1 , C_2 , B_1 e B_2 são constantes que dependem das condições de contorno.

Para a chapa circular da Fig. 4.6, sendo R o raio na borda da chapa, tem-se com as equações (4.36);

$$\text{em } r = 0 \rightarrow C_2 = B_2 = 0 \quad \dots (4.37)$$

em $r = R$, com $u = \Delta R$ e $v = 0$,

$$C_1 = \frac{\Delta R}{R} \quad \text{e} \quad B_1 = 0 \quad \dots (4.38)$$

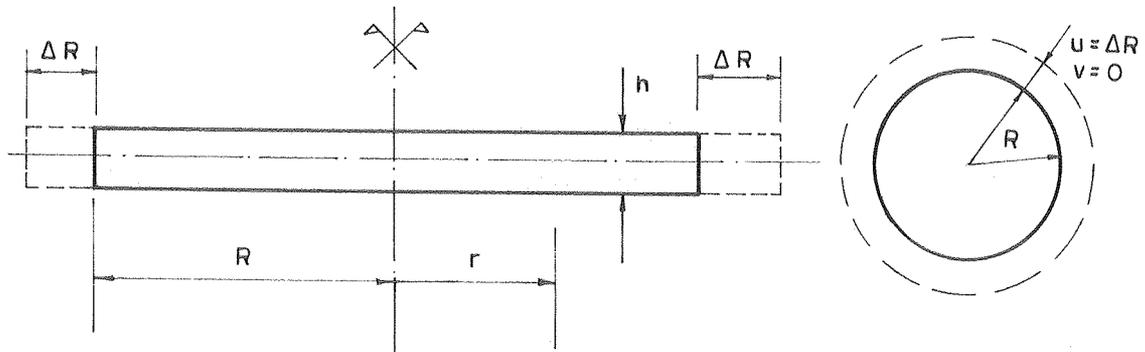


FIG. 4.6 - Chapa circular com deslocamento radial ΔR uniforme.

Substituindo as equações (4.37) e (4.38) nas equações (4.34), obtêm-se para o deslocamento radial ΔR constante, os esforços nas bordas da chapa

$$N_{r\theta} = N_{\theta r} = 0 \quad \dots (4.39)$$

$$N_{\theta} = \frac{Eh}{(1-\nu)R} \Delta R$$

e o esforço radial utilizando a mesma notação do capítulo III (independente do tipo de base em que está assente a chapa).

$$H_{\alpha} = \frac{Eh}{(1-\nu)R} \Delta R \quad \dots (4.40)$$

CAPÍTULO V

ESFORÇOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO

1. INTRODUÇÃO

Nos capítulos II, III e IV estudou-se os elementos que irão compor o reservatório a ser analisado. Neles foram mostradas soluções que dependem dos carregamentos que podem atuar no reservatório, sendo assim possível a determinação de todos os esforços e deslocamentos.

Far-se-á, agora, uma adaptação dos estudos efetuados anteriormente a um sistema de coordenadas, chamadas aqui de locais, por estarem relacionadas aos diversos elementos da estrutura integrada. Uma vez feita esta adaptação procurar-se-á relacioná-las a um outro sistema de coordenadas, chamadas de globais, a serem definidas no capítulo IX. O motivo disto decorre da técnica utilizada na análise do reservatório.

Os sentidos considerados positivos para os esforços e deslocamentos nas bordas dos elementos (coordenadas locais) são mostrados na Fig. 5.1. Observa-se a inversão de alguns dos sentidos quando referidos àqueles apresentados anteriormente, baseados na Teoria da Elasticidade.

Definidos os sistemas de coordenadas locais, precisa-se agora escrever, identificar e organizar matricialmente cada um dos diversos elementos, tendo em vista o emprego do computador. Utilizar-se-á dentre os processos e-

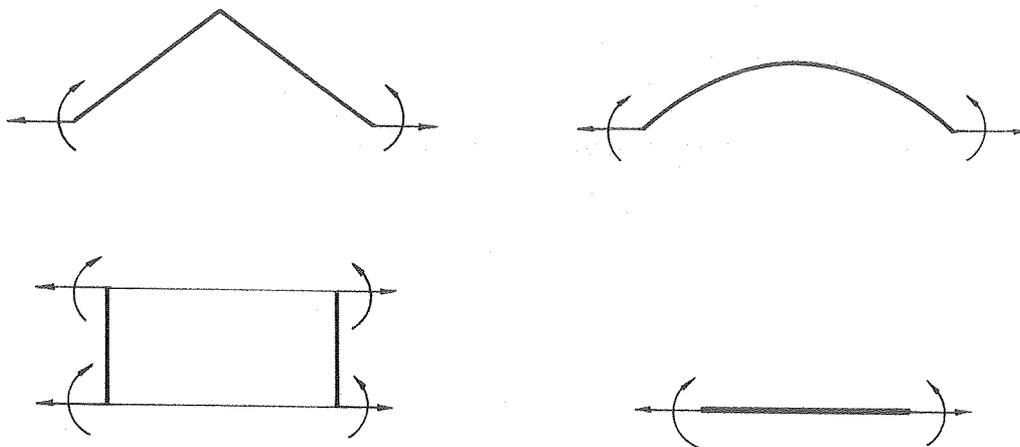


FIG. 5.1 - Sentidos positivos dos esforços e deslocamentos nas bordas dos elementos.

xistentes, o Processo dos Deslocamentos. Dessa maneira, precisa-se da matriz de rigidez dos elementos (capítulos III e IV) e dos esforços de engastamento perfeito devido aos diversos carregamentos (capítulos II e IV).

2. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

Para encontrar-se a matriz de rigidez de um elemento genérico j da estrutura, basta aplicar um deslocamento unitário na coordenada m do elemento de casca, enquanto permanecem impedidos os deslocamentos nas demais coordenadas e calcular as ações externas r_{nm} em todas as coordenadas. Fazendo-se isso para cada coordenada, obtém-se as m -ésimas colunas da matriz de rigidez, sendo n o número da coordenada e m o índice da ação externa.

Observa-se ainda que as matrizes de rigidez de cada um dos elementos serão posteriormente associadas ao reservatório e que se um elemento de casca apresentar uma única borda, a matriz $[R]_j$ será da ordem 2×2 , da mesma maneira que havendo duas bordas distintas ela será da ordem de 4×4 .

2.1 - COBERTURA DO RESERVATÓRIO

Apresenta-se a matriz de rigidez tanto para a cobertura esférica quanto para a cônica, a fim de obter-se uma formulação geral, muito embora possa ser utilizada a mesma matriz para as duas cascas, pois as equações (3.35); (3.36); (3.37) e (3.38) do cone reduzem-se às suas equivalentes na esfera, respectivamente: (3.10); (3.9); (3.11) e (3.12), bastando para isso que se tome, para o cone, as constantes

$$\gamma_{\text{cone}} = \frac{\pi}{2} + \gamma_{\text{esfera}} \quad \text{e} \quad C_{\text{cone}} = \frac{2\lambda^2}{Eh} C_{\text{esfera}}$$

sendo $a = L \cotg \alpha$. O raio da esfera tangente ao cone.

- a) Para a cobertura em casca esférica, a primeira coluna da matriz é obtida através da equação (3.18) para $\Delta R = 1$ e a segunda coluna, através da equação (3.20) com $\Delta\alpha = -1$, ficando então:

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{Eh}{a\lambda \text{sen}^2 \alpha} & \frac{-Eh}{2\lambda^2 \text{sen} \alpha} \\ \frac{-Eh}{2\lambda^2 \text{sen} \alpha} & \frac{Eha}{2\lambda^3} \end{bmatrix} \quad \dots (5.1)$$

- b) Para a cobertura em casca cônica, a primeira coluna da matriz é obtida com a equação (3.44) fazendo-se $\Delta R = 1$ e a segunda coluna, através da equação (3.46) com $\Delta\alpha = -1$, obtendo-se então:

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{4DK^3}{L^3 \text{sen}^2 \alpha} & \frac{-2DK^2}{L^2 \text{sen} \alpha} \\ \frac{-2DK^2}{L^2 \text{sen} \alpha} & \frac{2DK}{L} \end{bmatrix} \quad \dots (5.2)$$

2.2 - PAREDE DO RESERVATÓRIO

c) Para o elemento intermediário da parede em casca cilíndrica circular curta tem-se, através das equações (3.59) com $w_i = 1$, (3.61) com $\Delta y_i = -1$, (3.67) com $w_k = 1$ e (3.69) com $\Delta y_k = -1$, respectivamente, a primeira, segunda, terceira e quarta colunas da matriz de rigidez, ficando então:

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{Eh}{2R^2\beta} \frac{2F_3}{F_1} & \frac{-Eh}{2R^2\beta^2} \frac{F_2}{F_1} & \frac{-Eh}{2R^2\beta} \frac{2F_{10}}{F_1} & \frac{-Eh}{2R^2\beta^2} \frac{2F_8}{F_1} \\ \frac{-Eh}{2R^2\beta^2} \frac{F_2}{F_1} & \frac{Eh}{2R^2\beta^3} \frac{F_4}{F_1} & \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \frac{2F_8}{F_1} & \frac{Eh}{2R^2\beta^3} \frac{F_9}{F_1} \\ \frac{-Eh}{2R^2\beta} \frac{2F_{10}}{F_1} & \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \frac{2F_8}{F_1} & \frac{Eh}{2R^2\beta} \frac{2F_3}{F_1} & \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \frac{F_2}{F_1} \\ \frac{-Eh}{2R^2\beta^2} \frac{2F_8}{F_1} & \frac{Eh}{2R^2\beta^3} \frac{F_9}{F_1} & \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \frac{F_2}{F_1} & \frac{Eh}{2R^2\beta^3} \frac{F_4}{F_1} \end{bmatrix} \dots (5.3)$$

d) Para o elemento intermediário da parede em casca cilíndrica circular longa ($\beta L \geq 4$), tem-se com as equações (3.60) para $w_i = 1$, (3.62) para $\Delta y_i = -1$, (3.68) para $w_k = 1$ e (3.70) para $\Delta y_k = -1$, respectivamente, a primeira, segunda, terceira e quarta colunas da matriz de rigidez na forma:

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{Eh}{R^2\beta} & \frac{-Eh}{2R^2\beta^2} & \frac{-Eh}{2R^2\beta} \frac{2F_{10}}{F_1} \approx 0 & \frac{-Eh}{2R^2\beta^2} \frac{2F_8}{F_1} \approx 0 \\ \frac{-Eh}{2R^2\beta^2} & \frac{Eh}{2R^2\beta^3} & \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \frac{2F_8}{F_1} \approx 0 & \frac{Eh}{2R^2\beta^3} \frac{F_9}{F_1} \approx 0 \\ \frac{-Eh}{2R^2\beta} \frac{2F_{10}}{F_1} \approx 0 & \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \frac{2F_8}{F_1} \approx 0 & \frac{Eh}{R^2\beta} & \frac{Eh}{2R^2\beta^2} \\ \frac{-Eh}{2R^2\beta^2} \frac{2F_8}{F_1} \approx 0 & \frac{Eh}{2R^2\beta^3} \frac{F_9}{F_1} \approx 0 & \frac{Eh}{2R^2\beta^2} & \frac{Eh}{2R^2\beta^3} \end{bmatrix} \dots (5.4)$$

2.3 - FUNDO DO RESERVATÓRIO

e) Para o fundo assente em base elástica tem-se a primeira coluna da matriz dada pela expressão (4.40) para $\Delta R = 1$ e a segunda coluna dada pela equação (4.32) com $\varphi_\alpha = +1$, ficando então:

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{Eh}{(1-\nu)R} & 0 \\ 0 & - \left[\frac{N}{S} + \frac{(1-\nu)}{\alpha} \right] \frac{D}{\ell} \end{bmatrix} \dots (5.5)$$

Algumas vezes interessa obter os esforços M_α e H_α da primeira junta do reservatório ao nível da face superior da placa de fundo (é o caso, por exemplo, de reservatórios de concreto, existentes em Hampe (B 16) vol. 2, pag. 234). Para isso faz-se uso dos deslocamentos que ocorrem na borda superior da placa, conforme mostra a Fig. 5.2.

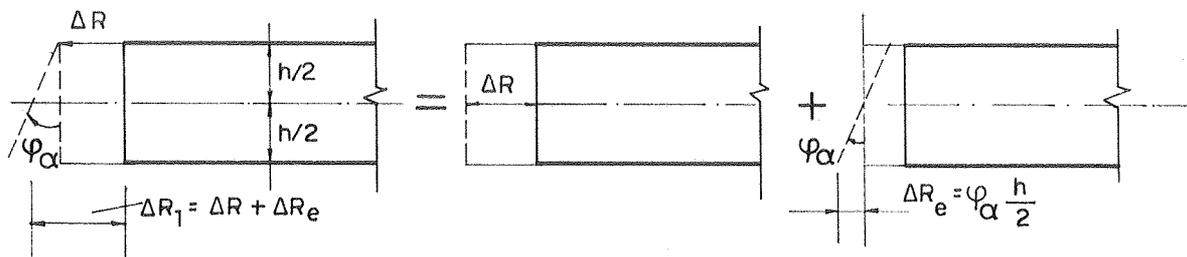


FIG. 5.2 - Deslocamentos que ocorrem na borda superior da placa de fundo.

Como consequência, obtêm-se no eixo da placa os esforços mostrados na Fig. 5.3. Sendo:

H_e o esforço horizontal na extremidade da placa, dado pela equação (4.40);

M_e o momento na extremidade da placa, dado pela equação (4.32); e

$$\Delta H_e = \frac{Eh}{(1-\nu)R} \cdot \varphi_\alpha \frac{h}{2} \dots (5.6)$$



Fig. 5.3.a - devido ao deslocamento ΔR

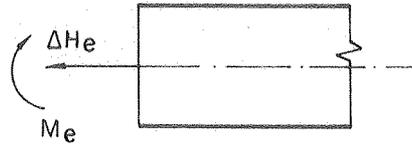


Fig. 5.3.b - devido à rotação φ_α

FIG. 5.3 - Esforços no eixo da placa de fundo devido aos deslocamentos

Transferindo esses esforços para a face superior, fica-se com os esforços devidos ao deslocamento radial ΔR dados por

$$H_\alpha = H_e = \frac{Eh}{(1-\nu)R} \Delta R \quad \dots (5.7)$$

$$M_\alpha = H_e \cdot \frac{h}{2} = \frac{Eh}{(1-\nu)R} \frac{h}{2} \Delta R$$

De maneira análoga, obtêm-se os esforços provenientes da rotação φ_α utilizando a equação (5.6)

$$H_\alpha = \Delta H_e = \frac{Eh}{(1-\nu)R} \frac{h}{2} \varphi_\alpha \quad \dots (5.8)$$

$$M_\alpha = M_e + \Delta H_e \cdot \frac{h}{2} = - \left[\frac{N}{S} + \frac{1-\nu}{\alpha} \right] \frac{D}{\ell} \varphi_\alpha + \frac{Eh}{(1-\nu)R} \frac{h^2}{4} \varphi_\alpha$$

Deste modo, a matriz de rigidez proveniente dos deslocamentos ao nível da face superior da placa de fundo, tem sua primeira coluna dada pela equação (5.7) com $\Delta R = 1$ e a sua segunda coluna através da equação (5.8) com $\varphi_\alpha = 1$, passando a ser:

$$\begin{bmatrix} R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Eh}{(1-\nu)R} & \frac{Eh}{(1-\nu)R} \frac{h}{2} \\ \frac{Eh}{(1-\nu)R} \frac{h}{2} & - \left[\frac{N}{S} + \frac{(1-\nu)}{\alpha} \right] \frac{D}{\ell} + \frac{Eh}{(1-\nu)R} \cdot \frac{h^2}{4} \end{bmatrix} \quad \dots (5.9)$$

Observa-se, comparando a matriz da equação (5.5) com a da equação (5.9), que:

- 1 - O elemento r_{11} manteve-se inalterado;
- 2 - Os elementos $r_{21} = r_{12}$ que antes não existiam, passaram a ter valores

$$r_{21} = r_{12} = r_{11} \frac{h}{2} \quad \dots (5.10)$$

- 3 - Ao elemento r_{22} foi acrescida a parcela $r_{11} \frac{h^2}{4}$ proveniente do deslocamento ΔR , que provoca um momento na face superior da placa, ficando então:

$$r_{22} \rightarrow r_{22} + r_{11} \frac{h^2}{4} \quad \dots (5.11)$$

Deste modo, pode-se escrever a matriz (5.9) como sendo:

$$\begin{bmatrix} R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{11} \frac{h}{2} \\ r_{11} \frac{h}{2} & r_{22} + r_{11} \frac{h^2}{4} \end{bmatrix} \quad \dots (5.12)$$

- f) Para o fundo do reservatório assente em base rígida, tem-se a primeira coluna da matriz dada pela equação (4.40) para $\Delta R = 1$ e a segunda coluna dada pela equação (4.7) com $\varphi_\alpha = 1$, ficando então:

$$\begin{bmatrix} R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Eh}{(1-\nu)R} & 0 \\ 0 & \frac{4EJ}{b} \end{bmatrix} \quad \dots (5.13)$$

Para obter-se os esforços H_α e M_α ao nível da face superior da placa de fundo do reservatório, usa-se a matriz (5.12) com o elemento r_{22} da matriz (5.13).

3. ESFORÇOS DE EXTREMIDADE NOS ELEMENTOS PERFEITAMENTE ENGASTADOS PARA OS CARREGAMENTOS EXTERNOS

Tem-se agora que resolver o caso da casca bi-engastada submetida aos carregamentos do capítulo II, que pode ser facilmente resolvido já que os deslocamentos de suas bordas são nulos. Assim, os esforços de engastamento perfeito são tais que provocam deslocamentos que compensam os de membrana, resultando deslocamentos nulos.

Pelo processo dos esforços, tem-se para um elemento genérico j

$$\{0\} = \{DM\}_j + [A]_j \{EP\}_j \quad \dots (5.14)$$

onde

$\{DM\}_j$ é o vetor dos deslocamentos de membrana

$\{EP\}_j$ é o vetor dos esforços de extremidade

$[A]_j$ é a matriz de flexibilidade

Pela análise matricial tem-se também

$$[R]_j = [A]_j^{-1} \quad \dots (5.15)$$

sendo

$[R]_j$ - matriz de rigidez para um elemento genérico j da estrutura (apresentada no item 2 para os diversos elementos de casca)

Com as equações (5.14) e (5.15) chega-se a

$$\{EP\}_j = -[R]_j \{DM\}_j \quad \dots (5.16)$$

A equação (5.16) é válida para qualquer dos elementos que compõem o reservatório, tomando-se para $[R]_j$ a

matriz de rigidez correspondente ao elemento em particular, dentre aquelas dadas no item 2. Tendo sido adotado o processo automático por computador, citam-se a seguir, as equações que devem ser usadas para a obtenção dos respectivos vetores $\{DM\}_j$ dos deslocamentos de membrana.

3.1 - COBERTURA DO RESERVATÓRIO

a) Para a cobertura em casca esférica a matriz $[R]_j$ é dada pela equação (5.1).

Quando a casca esférica está submetida ao peso próprio, o vetor $\{DM\}_j$ é dado pela equação (2.23) e quando atua a sobrecarga ele é dado pela equação (2.25).

b) Para a cobertura em casca cônica a matriz $[R]_j$ é dada pela equação (5.2).

Para o peso próprio, o vetor $\{DM\}_j$ é dado pela equação (2.27) e para a sobrecarga através da equação (2.29)

3.2 - PAREDE DO RESERVATÓRIO

Para a casca cilíndrica circular intermediária curta a matriz $[R]_j$ é dada pela equação (5.3) e quando a casca é longa ($\beta L \geq 4$), tem-se $[R]_j$ dado pela equação (5.4).

Quando a parede cilíndrica está submetida ao carregamento de pressão uniforme da coluna líquida o vetor $\{DM\}_j$ é dado pela equação (2.32) e para a variação linear da pressão o vetor $\{DM\}_j$ é fornecido pela equação (2.34).

3,3 - FUNDO DO RESERVATÓRIO

a) Para a placa de fundo com aproximação de Girkmann (Capítulo IV, item 1 - Fig. 4.1,b) tem-se imediatamente os esforços de engastamento perfeito

$$H = 0 \quad \dots (5.17)$$

$$M = \frac{q b^2}{12}$$

e o vetor dos esforços de engastamento perfeito fica então

$$\left\{ \begin{matrix} EP \\ \cdot \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \frac{qb^2}{12} \end{matrix} \right\} \quad \dots (5.18)$$

onde q é dado pela equação (4.4).

b) Para a placa circular sobre apoio elástico (Capítulo IV, item 2 - Fig. 4.5) submetida ao carregamento c) daquele mesmo item, tem-se também imediatamente para os esforços de engastamento perfeito

$$H = 0 \quad \dots (5.19)$$

$$M = 0$$

e o vetor dos esforços de engastamento perfeito

$$\{EP\} = \{0\} \quad \dots (5.20)$$

CAPÍTULO VI

CARREGAMENTOS SECUNDÁRIOS

1. INTRODUÇÃO

Os regulamentos normativos de cálculo, por exemplo DIN 4119, STD 650, PNB 89, para tanques metálicos soldados recomendam que, além dos carregamentos primários tratados nos capítulos II, III e IV, sejam também considerados os carregamentos secundários, ou sejam, basicamente: efeitos da variação de temperatura e de carga de vento sobre a estrutura.

É bastante difícil a análise rigorosa das cargas secundárias, pois exige a solução das equações diferenciais para carregamentos não simétricos. Pretende-se fornecer neste capítulo os elementos básicos para a solução do problema, dentro dos limites indicados na literatura corrente. Assim, serão considerados dois casos de variação de temperatura:

- aquecimento uniforme da casca, com temperatura da superfície externa, T_{ext} , igual à temperatura da superfície interna, T_{int} ;
- gradiente radial de temperatura, com $T_{ext} \neq T_{int}$.

Em ambos os casos considera-se que as temperaturas T_{ext} e T_{int} são axialmente simétricas e não variam ao longo dos meridianos.

A carga de vento é aproximada por um carregamento

obtido através da combinação de senos e cossenos; no caso, por meio da série de Fourier.

2. EFEITOS DA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

A interação dos diversos elementos estruturais, gera restrições aos deslocamentos da estrutura ao longo das juntas do reservatório. Essas, ao se deformarem fazem com que os elementos da estrutura fiquem submetidos a esforços internos adicionais que devem ser somados às solicitações produzidas pelos carregamentos principais.

2.1 - CASCA CILÍNDRICA

O problema é resolvido a partir das indicações de Hampe [B16] e por simplicidade, adotou-se a notação do autor, com pequenas modificações, para evitar conflitos com a notação utilizada neste trabalho.

A equação diferencial que governa o problema [B16], 2º volume, pág. 40, é:

$$\frac{d^4 w}{dy^4} + 4\beta^4 w = 4\beta^4 \alpha_T RT - \frac{1+\nu}{h} \alpha_T \frac{d^2}{dy^2} (\Delta T) \quad \dots (6.1)$$

onde se tem:

α_T - coeficiente de dilatação térmica do material;

T - temperatura de aquecimento uniforme; e

ΔT - gradiente de temperatura aplicado à parede do reservatório.

Para resolução da equação diferencial (6.1) usa-se o seguinte algoritmo:

- 1) Toma-se os coeficientes S_1 , S_2 , S_3 e S_4 (da Tabela 1.49, págs. 133/134).

- 2) Introduce-se os coeficientes S_1 , S_2 , S_3 e S_4 nas expressões dos esforços (da Tabela 1.31, pág. 92).
- 3) Considera-se os valores das funções $F_i(\xi)$ nas expressões dos esforços para $\xi = 0$ (esforços na borda inferior da casca) e $\xi = 1$, esforços na borda superior da casca (ver Tabela 1.18, pág. 55).
- 4) Adiciona-se às expressões obtidas no passo 3 os termos correspondentes à solução particular do problema (Tabelas: 1.15, pág. 45 para aquecimento uniforme, T, e 1.16, pág. 51 para gradiente radial de temperatura, ΔT).

Deste modo, as equações para a determinação dos esforços e deslocamentos para os diferentes tipos de carregamento são dadas a seguir:

a) Aquecimento uniforme da parede:

Os valores de S_1 , S_2 , S_3 e S_4 são:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= -\alpha_T RT \\
 S_2 = -S_3 &= -\alpha_T RT \left(\frac{F_3}{F_1} - \frac{F_{10}}{F_1} \right) \\
 S_4 &= \alpha_T RT \left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{2F_8}{F_1} \right)
 \end{aligned}
 \dots (6.2)$$

Para a solução particular, tem-se:

$$\begin{aligned}
 N_{\theta p} = M_{yp} = Q_{yp} = \frac{dw}{dy} = 0 \\
 w_p = \alpha_T RT
 \end{aligned}
 \dots (6.3)$$

Seguindo-se o algoritmo dado, chega-se facilmente aos esforços de engastamento perfeito na borda inferior da casca:

$$M_{yi} = \frac{Eh}{2R\beta^2} T \alpha_T \left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{2F_8}{F_1} \right)$$

$$Q_{yi} = H_i = - \frac{Eh}{2R\beta} T \alpha_T \left(\frac{F_3}{F_1} - \frac{F_{10}}{F_1} \right) \dots (6.4)$$

onde o sinal de H_i foi tomado de acordo com a Fig. 5.1.

Para a borda superior, é necessário um certo trabalho algébrico para simplificar as expressões gerais dos esforços referidos no passo 2, fazendo-se $\xi = 1$, conforme indicado no passo 3. No entanto, lembrando que o aumento uniforme da temperatura introduz apenas um deslocamento radial constante (que é a solução particular w_p) na casca, tem-se imediatamente:

$$M_{yk} = M_{yi} \dots (6.5)$$

$$Q_{yk} = H_k = -H_i$$

O esforço N_θ pode ser obtido propagando-se os efeitos de M_{yi} , Q_{yi} , M_{yk} e Q_{yk} ao longo da casca, como apresentado no Capítulo III.

b) Gradiente radial de temperatura na parede.

Neste caso, todos os valores de S_i são nulos:

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 0 \dots (6.6)$$

A solução particular é:

$$M_{yp} = M_{\theta p} = D \left(\frac{1+\nu}{h} \right) \alpha_T \Delta T \dots (6.7)$$

$$Q_{yp} = w_p = \frac{dw_p}{dy} = 0$$

Sendo nulos os coeficientes S_i , a solução de resume às expressões (6.7).

$$M_{yi} = M_{yk} = \frac{D(1+\nu)}{h} \alpha_T \Delta T \dots (6.8)$$

c) Outra dedução dos esforços devidos à variação de temperatura.

Os esforços da equação (6.4) podem ser obtidos, alternativamente, pelo Método dos Esforços, tal como foi indicado no Capítulo V, ítem 3, para os carregamentos principais, usando-se para vetor dos deslocamentos as deformações produzidas pela variação de temperatura sobre a casca cilíndrica livre de quaisquer vínculos nas bordas (regime de membrana). É interessante apresentar-se aqui esta demonstração, que, como se verá nos itens a seguir, também é válida para as cascas esféricas e cônicas.

O aquecimento uniforme do cilíndrico provoca um deslocamento radial uniforme ao longo da casca, como mostra a Fig.6.1.

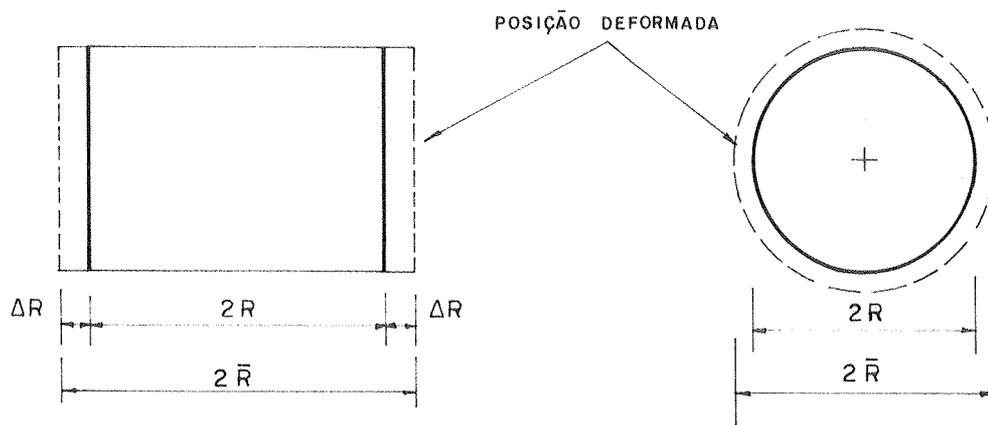


FIG. 6.1 - Deformação radial para a temperatura T.

A circunferência do círculo paralelo na posição deformada é

$$\bar{C} = 2 \pi \bar{R} = C(1 + T\alpha_T) = 2 \pi R (1 + T\alpha_T) \quad \dots (6.9)$$

o que fornece para o deslocamento radial

$$\Delta R = R T \alpha_T \quad \dots (6.10)$$

Usando-se a matriz de rigidez da relação (5.4) e considerando-se o cilindro longo, de modo a tornarem-se independentes as equações das bordas inferior e superior, tem-se

$$\begin{bmatrix} \frac{Eh}{R^2\beta} & \frac{-Eh}{2R^2\beta^2} \\ \frac{-Eh}{2R^2\beta^2} & \frac{Eh}{2R^2\beta^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -R T \alpha_T \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{yi} \\ M_{yi} \end{Bmatrix} \dots (6.11)$$

em que Q_{yi} atua no sentido negativo (a seta aponta para o interior da casca) e M_{yi} no sentido positivo (tracionando as fibras internas), conforme definidos no Capítulo III.

A resolução das equações (6.11) fornece:

$$M_{yi} = \frac{Eh}{2R\beta^2} T \alpha_T$$

$$Q_{yi} = \frac{-Eh}{R\beta} T \alpha_T$$

..... (6.12)

que concordam com a equação (6.4) já que, para cilindros longos

$$\frac{F_2}{F_1} \approx \frac{F_3}{F_1} \approx 1 \quad e \quad \frac{F_8}{F_1} \approx \frac{F_{10}}{F_1} \approx 0$$

Também as expressões (6.7) podem ser obtidas diretamente, considerando-se as relações entre os momentos fletores M_ϕ e M_θ e as variações de curvatura χ_ϕ e χ_θ para uma casca de revolução:

$$M_\phi = -D (\chi_\phi + \nu \chi_\theta)$$

$$M_\theta = -D (\chi_\theta + \nu \chi_\phi)$$

..... (6.13)

Submetido a gradiente radial de temperatura, o cilindro apresenta as seguintes variações de curvatura:

- na direção dos meridianos,

$$d\ell_{\text{ext}} = d\ell \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_T \Delta T \right) \quad \dots (6.14)$$

$$d\ell_{\text{int}} = d\ell \left(1 - \frac{1}{2} \alpha_T \Delta T \right)$$

onde $d\ell_{\text{ext}}$ e $d\ell_{\text{int}}$ são os comprimentos do elemento $d\ell$ nas superfícies deformadas externa e interna da casca.

De acordo com a Fig. 6.2, o ângulo $d\phi$ que define o elemento deformado da casca é dado por:

$$d\phi = \frac{1}{h} (d\ell_{\text{ext}} - d\ell_{\text{int}}) \quad \dots (6.15)$$

ou,

$$d\phi = \frac{d\ell}{h} \alpha_T \Delta T \quad \dots (6.16)$$

Para a curvatura χ_ϕ tem-se, então

$$\chi_\phi = \frac{1}{\rho_\phi} = \frac{-d\phi}{d\ell} = \frac{-\alpha_T \Delta T}{h} \quad \dots (6.17)$$

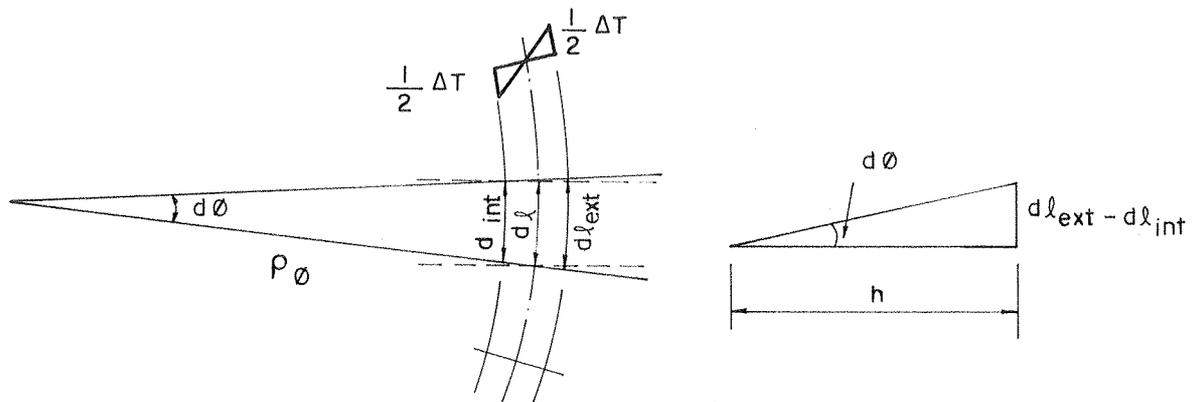


FIG. 6.2 - Deformação dos meridianos para gradiente de temperatura ΔT .

- na direção dos paralelos (Fig. 6.3),

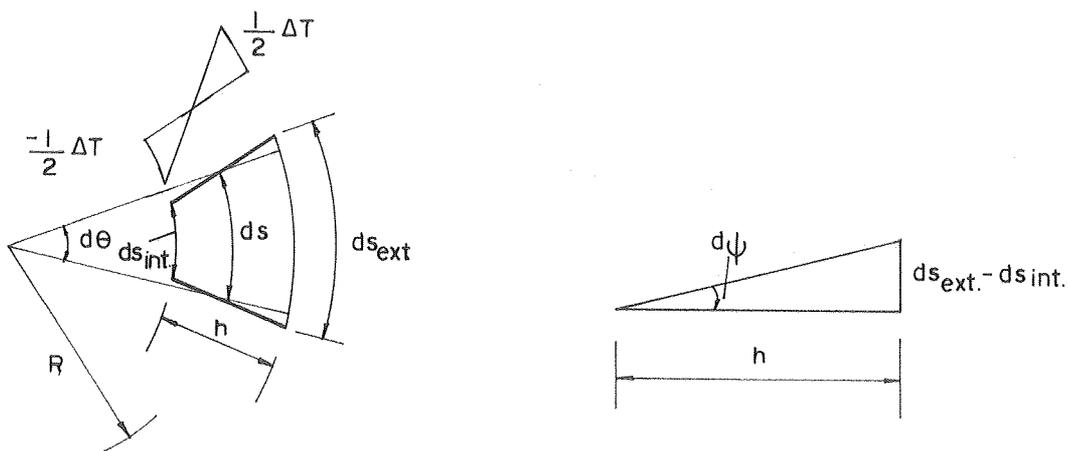


FIG. 6.3 - Deformação dos paralelos para gradiente de temperatura ΔT .

os comprimentos do elemento $ds = R d\theta$ nas superfícies deformadas externa e interna da casca são dados por expressões análogas a (6.14). Também o ângulo $d\psi$ que limita o elemento deformado é definido de modo semelhante a (6.15). Obtem-se, portanto

$$\chi_\phi = \frac{-d\psi}{ds} = \frac{-\alpha_T \Delta T}{h} \quad \dots (6.18)$$

Vê-se que $\chi_\phi = \chi_\theta = -\chi$; de (6.13), tem-se então:

$$M_\phi = M_\theta = D(1+\nu)\chi \quad \dots (6.19)$$

ou,

$$M_\phi = M_\theta = \frac{D(1+\nu)}{h} \alpha_T \Delta T \quad \dots (6.20)$$

2.2 - CASCA ESFÉRICA

Os esforços no elemento esférico engastado submetido a variações térmicas são determinados como indicado no item 2.1.c). A matriz de rigidez já foi apresentada no Capítulo V.

Deste modo, as equações para a determinação dos esforços e deslocamentos para os diversos tipos de carregamentos são:

a) Aquecimento uniforme da cobertura

A deformação da casca esférica livre de vínculos e sujeita a um aquecimento uniforme é mostrada na Fig. 6.4.

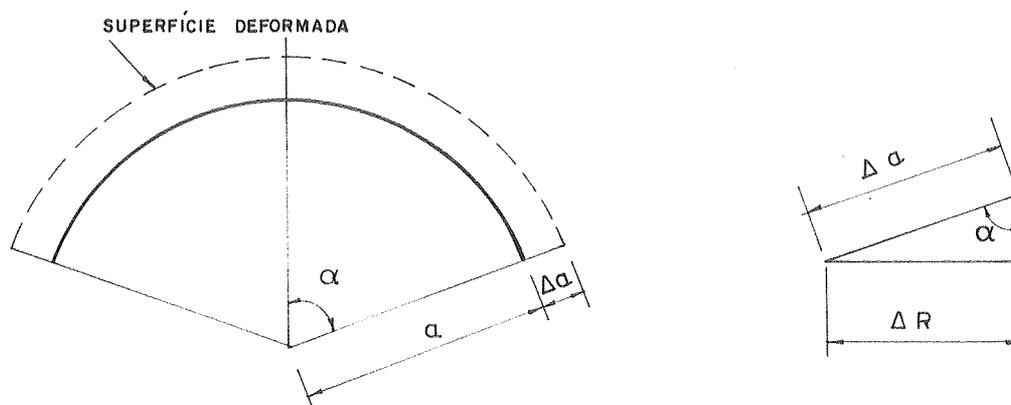


FIG. 6.4 - Deformações da casca esférica para temperatura T.

Analogamente ao cilindro, para o meridiano deformado tem-se

$$\bar{C} = 2 \pi a = C (1 + T \alpha_T) = 2 \pi a (1 + T \alpha_T) \quad \dots (6.21)$$

e, para o deslocamento radial

$$\Delta a = a T \alpha_T \quad \dots (6.22)$$

O deslocamento horizontal da borda será, de acordo com a Fig. 6.4,

$$\Delta R = \Delta a \operatorname{sen} \alpha \quad \dots (6.23)$$

ou substituindo a equação (6.22) na relação (6.23):

$$\Delta R = a T \alpha_T \operatorname{sen} \alpha \quad \dots (6.24)$$

Tem-se, então, com a matriz de rigidez da relação (5.1):

$$\begin{bmatrix} \frac{Eh}{a \lambda \operatorname{sen}^2 \alpha} & \frac{-Eh}{2\lambda^2 \operatorname{sen} \alpha} \\ \frac{-Eh}{2\lambda^2 \operatorname{sen} \alpha} & \frac{Eha}{2\lambda^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -a T \alpha_T \operatorname{sen} \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_\alpha \\ M_\alpha \end{Bmatrix} \quad \dots (6.25)$$

em que H_α e M_α foram tomados nos sentidos positivos, conforme definidos no Capítulo III. A solução das equações (6.25) fornece os esforços de engastamento perfeito:

$$M_\alpha = \frac{Eha}{2\lambda^2} T \alpha_T \quad \dots (6.26)$$

$$H_\alpha = \frac{-Eh}{\lambda \operatorname{sen} \alpha} T \alpha_T$$

Para os demais esforços podem ser usadas as expressões (3.14) e (3.16) do Capítulo III.

b) Gradiente radial de temperatura

As equações (6.13) apresentadas no item 2.1.c) são gerais e valem para qualquer casca de revolução. Por outro lado, as relações (6.17) e (6.18) também representam as variações de curvatura para uma casca de revolução em geral, já que os elementos diferenciais de comprimento $d\lambda$ e ds foram tomados, respectivamente, segundo os meridianos e paralelos da casca. Conclui-se assim que a expressão (6.20) é válida para qualquer casca de revolução em geral e, em particular, para a casca esférica também.

2.3 - CASCA CÔNICA

As deduções são análogas àquelas efetuadas para a casca esférica, assim as equações para a determinação dos esforços e deslocamentos para os diversos tipos de carregamento são:

a) Aquecimento uniforme da cobertura

Na casca cônica, tem-se segundo a Fig. 6.5, a relação entre o raio máximo dos paralelos e a geratriz do cone

$$R = L \cos \alpha \quad \dots (6.27)$$

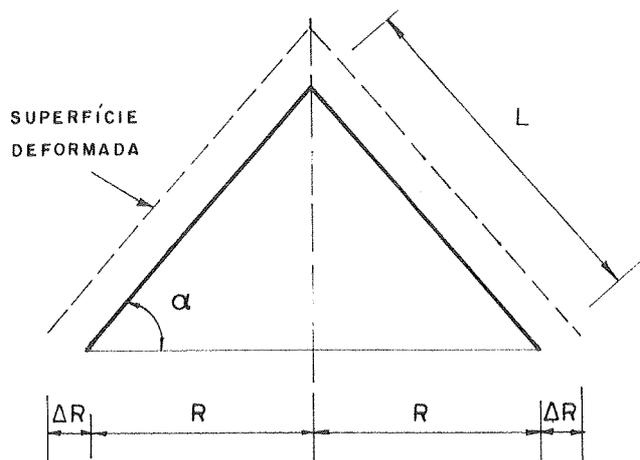


FIG. 6.5 - Deformações da casca cônica para temperatura T.

Na superfície deformada,

$$\bar{R} = \bar{L} \cos \alpha = L (1 + T \alpha_T) \cos \alpha \quad \dots (6.28)$$

resultando então para o deslocamento horizontal na borda:

$$\Delta R = L T \alpha_T \cos \alpha \quad \dots (6.29)$$

e com a matriz de rigidez da relação (5.2):

$$\begin{bmatrix} \frac{4DK^3}{L^3 \sin^2 \alpha} & \frac{-2DK^2}{L^2 \sin \alpha} \\ \frac{-2DK^2}{L^2 \sin \alpha} & \frac{2DK}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -L T \alpha_T \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_\alpha \\ M_\alpha \end{Bmatrix} \dots (6.30)$$

Como já se viu no Capítulo V, como resultado da aproximação de Geckeler, a matriz de rigidez da casca cônica é a mesma da casca esférica tangente. Considerando-se as relações geométricas entre estas duas cascas, o segundo membro da primeira equação (6.30) pode ser escrita como:

$$-L T \alpha_T \cos \alpha = -a T \alpha_T \sin \alpha$$

Assim, a solução de (6.30) são as próprias expressões (6.26), considerando-se que

$$\lambda_{\text{cone}} = \frac{a}{\lambda_{\text{esfera}}},$$

$$M_\alpha = \frac{Eh}{2a} \lambda_L^2 T \alpha_T$$

.... (6.31)

$$H_\alpha = \frac{-Eh}{a \sin \alpha} \lambda_L T \alpha_T$$

b) Gradiente radial de temperatura

Conforme já discutido no item 2.2.b), a expressão (6.20) também pode ser usada para as cascas cônicas.

3. EFEITOS DA CARGA DE VENTO

Ensaio em túneis aerodinâmicos mostram que a ação do vento em estruturas de contorno curvilíneo gera um diagrama de cargas, em que pressão (de fora para dentro) e sucção (de dentro para fora) se alternam ao longo do contorno da estrutura. Tal carregamento obviamente não apresenta simetria axial e portanto, as equações deduzidas nos Capítulos II e III não se aplicam na determinação dos esforços devidos à carga de vento, sendo necessário lançar mão das equações gerais de equilíbrio para uma carga qualquer não-simétrica. Assim, o tratamento rigoroso das cargas de vento constituiria, por si só, uma dissertação.

Diante dessas limitações, decidiu-se restringir aqui o estudo dos efeitos da carga de vento à teoria de membrana.

As equações gerais de equilíbrio da membrana com simetria axial, para carregamentos não simétricos são:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi}(N'_{\phi} r_{\theta} \sin\phi) - N'_{\theta} r_{\phi} \cos\phi + \frac{dN'_{\theta\phi}}{d\theta} r_{\phi} + p_{\phi} r_{\phi} r_{\theta} \sin\phi &= 0 \\ \frac{d}{d\phi}(N'_{\theta\phi} r_{\theta} \sin\phi) + N'_{\theta\phi} r_{\phi} \cos\phi + \frac{dN'_{\theta}}{d\theta} r_{\phi} + p_{\theta} r_{\phi} r_{\theta} \sin\phi &= 0 \\ N'_{\phi} r_{\theta} + N'_{\theta} r_{\phi} + p_z r_{\phi} r_{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad \dots (6.32)$$

O problema é resolvido desenvolvendo-se tanto o carregamento como os esforços em série de Fourier,

$$\begin{aligned} p_{\theta} &= p_{\phi} = 0 \\ p_z &= \sum_n p_{zn} \cos n\theta \\ N'_{\theta} &= \sum_n N'_{\theta n} \cos n\theta \\ N'_{\phi} &= \sum_n N'_{\phi n} \cos n\theta \end{aligned} \quad \dots (6.33)$$

$$N'_{\theta\phi} = \sum_n N'_{\theta\phi n} \text{ sen } n\theta \quad \dots (6.34)$$

e determinando-se os parâmetros $N'_{\theta n}$, $N'_{\phi n}$ e $N'_{\theta\phi n}$ de modo a satisfazer a equação (6.32).

Como não será feita a compatibilidade dos deslocamentos entre os diversos elementos do reservatório (já que as matrizes de rigidez apresentadas no Capítulo V são se aplicam a carregamentos axi-simétricos), não há interesse em mostrar aqui as expressões dos deslocamentos.

3.1 - CASCA CILÍNDRICA

Introduzindo as equações (6.33) e (6.34) nas relações (6.32) e levando em conta as peculiaridades geométricas da casca cilíndrica tem-se para um termo genérico da série (6.33), com $p_{zn} = p_{wn}$,

$$N'_{yn} = \frac{n^2}{2R} p_{wn} y^2 - \frac{n}{R} C_1 y + C_2$$

$$N'_{\theta n} = -p_{wn} R \quad \dots (6.35)$$

$$N'_{y\theta n} = -n p_{wn} y + C_1$$

Dispondo-se de apenas duas constantes de integração, só é possível satisfazer as condições de contorno em uma das bordas $y = 0$ ou $y = H$ da parede do reservatório. Faz-se então $N'_{yn} = N'_{y\theta n} = 0$ na relação (6.35) para $y = H$, obtendo-se as constantes

$$C_1 = n H p_{wn} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{n^2 H^2}{2R} p_{wn} \quad \dots (6.36)$$

As expressões gerais dos esforços para um termo genérico da série de Fourier são, portanto substituindo-se a equação (6.36) na relação (6.35):

$$N'_y = \frac{n^2}{2R} p_{wn} (H - y)^2 \cos n\theta$$

$$N'_\theta = -p_{wn} R \cos n\theta \quad \dots (6.37)$$

$$N'_{y\theta} = n p_{wn} (H - y) \sin n\theta$$

Os valores máximos dos esforços N'_y e $N'_{y\theta}$ ocorrem na seção $y=0$. É fácil ver que escolhendo-se $N'_y = N'_{y\theta} = 0$ para $y=0$, os valores máximos dos esforços seriam os mesmos, apenas ocorrendo no topo e não na base do elemento de parede.

Nas expressões (6.35) e (6.37) admite-se que a pressão exercida pelo vento sobre a casca cilíndrica é constante ao longo de toda a altura da casca, ou seja, $p_{wn} = \text{const.}$, e varia segundo os círculos paralelos de acordo com o valor de n . A Fig. 6.6 mostra os primeiros termos da série (6.33) para o cilindro.

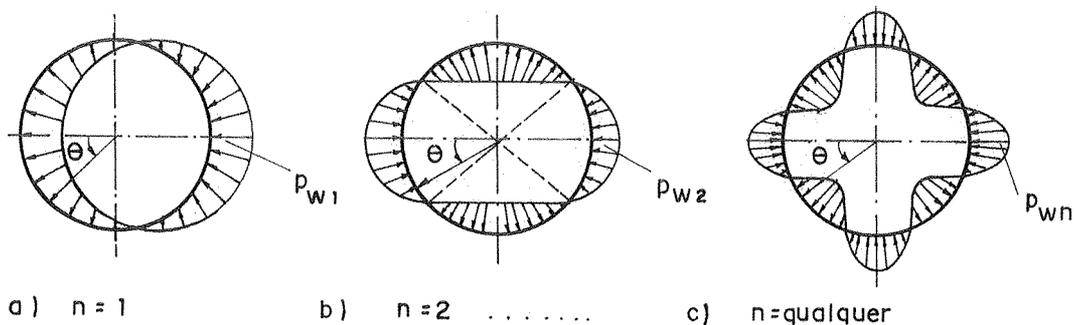


FIG. 6.6 - Carga de vento desenvolvida em série de Fourier.

A Norma Brasileira NB-599, que rege os efeitos do vento na construção civil, recomenda um diagrama de pressões e sucções como o da Fig. 6.7. Tal carregamento pode ser obtido mediante uma escolha adequada dos termos da série (6.33) a serem usados e de seus parâmetros p_{wn} .

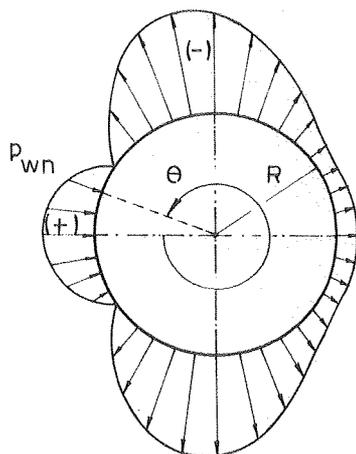


FIG. 6.7 - Diagrama real de pressões de vento ao longo de um círculo paralelo.

3.2 - CASCA ESFÉRICA

Seguindo-se o procedimento indicado no item 3.1, não se obtêm expressões gerais dos esforços para um termo genérico da série (6.33), como foi feito para a casca cilíndrica, pois, no decurso do desenvolvimento matemático surgem integrais que são podem ser calculadas por recorrência (integrais do tipo $\int \cotg\phi \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{tg}^n\phi / 2 \, d\phi$, por exemplo). Assim, os esforços N'_ϕ , N'_θ e $N'_{\theta\phi}$ devem ser deduzidos caso a caso, partindo-se de cada um dos termos $p_{w1} \cos\theta$, $p_{w2} \cos 2\theta$, etc. Além disso, para atender às recomendações da Norma Brasileira NB-599 torna-se ainda necessário considerar a variação de p_{zn} ao longo dos meridianos, ou seja: $p_{zn} = p_{zn}(\phi)$. Tendo em vista a complexidade do assunto, são fornecidos aqui apenas os resultados correntemente encontrados na literatura, ver por exemplo, Hampe (B 16) ou Baker (B 2), e que correspondem ao primeiro termo da série (6.33). Considerando $p_{z1} = p_w \operatorname{sen}\phi$ e sendo a pressão horizontal de vento p_w constante ao longo da altura da cúpula, tem-se:

$$N'_{\phi} = \frac{p_w a \cos \phi}{3 \text{sen}^3 \phi} (3 \cos \phi - \cos^3 \phi - 2) \cos \theta$$

$$N'_{\theta} = \frac{p_w a}{3 \text{sen}^3 \phi} (2 \cos \phi - 3 \text{sen}^2 \phi - 2 \cos^4 \phi) \cos \theta \quad \dots (6.38)$$

$$N'_{\theta \phi} = \frac{p_w a}{3 \text{sen}^3 \phi} (3 \cos \phi - \cos^3 \phi - 2) \text{sen} \theta$$

A variação de $p_{z1} = p_w \text{sen} \phi \cos \theta$ é mostrada na Fig. 6.8.

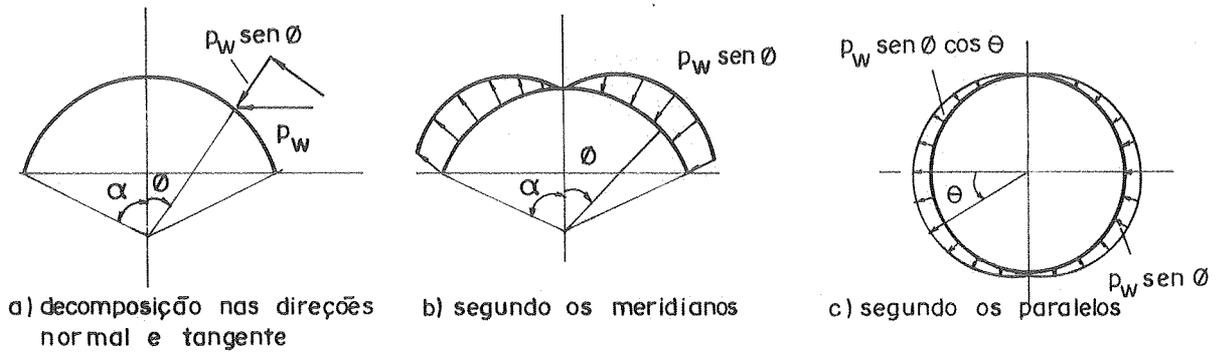


FIG. 6.8 - Diagrama de vento na casca esférica.

3.3 - CASCA CÔNICA

Para a casca cônica (Fig. 6.9), a partir das expressões (6.32) a (6.34) e com o método delineado anteriormente, sendo aqui $p_{zn} = p_{wn} \text{sen} \alpha$, chega-se a:

$$N'_{y} = \frac{n^2 - 3 \cos^2 \alpha}{3 \text{sen} 2 \alpha} y p_{wn} \text{sen} \alpha \cos n \theta$$

$$N'_{\theta} = -p_{wn} y \cos \alpha \cos n \theta \quad \dots (6.39)$$

$$N'_{y \theta} = -\frac{ny}{3} p_{wn} \text{sen} n \theta$$

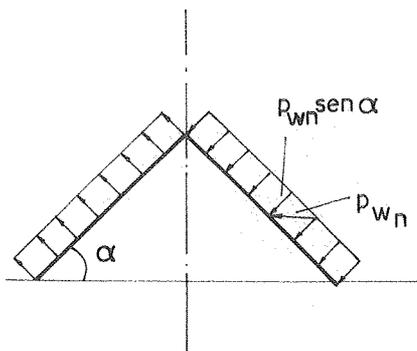


FIG. 6.9 - Variação da pressão de vento segundo os meridianos.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE OS CARREGAMENTOS SECUNDÁRIOS

Como se viu anteriormente, a avaliação correta dos esforços devidos aos carregamentos secundários é muito abrangente, constituindo tema para um trabalho independente. Dentro das limitações impostas pela complexidade do assunto, foi apresentado neste capítulo o formulário corrente na literatura para levar em conta, no dimensionamento do reservatório, os efeitos devidos à variação de temperatura e à carga de vento sobre a estrutura.

Os esforços definidos pelas equações (6.4), (6.8), (6.26) e (6.31) apresentam simetria axial e, portanto, podem ser adicionados às equações de compatibilidade das juntas da estrutura. Assim, basta somar aos termos de carga deduzidos no Capítulo V para os diversos carregamentos, as expressões pertinentes à variação térmica cujo efeito se deseja avaliar: aquecimento uniforme do elemento à temperatura, T , ou gradiente radial de temperatura, ΔT .

Para a carga de vento, as equações (6.37), (6.38) e (6.39) fornecem os esforços de membrana, que devem ser adicionados aos valores de N'_ϕ e N'_θ calculados automaticamente por computador para os carregamentos primários, de modo a obter-se os valores finais dos esforços. Para tanto, será aqui considerado apenas o primeiro termo da série (6.33), ou seja, $n = 1$.

CAPÍTULO VII

ANÁLISE DA ESTRUTURA INTEGRADA

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Trata-se neste capítulo de reunir os elementos de casca estudados até o momento, para que os esforços e deslocamentos que ocorrem no reservatório sejam calculados através de um programa de computador.

Os diversos elementos estão ligados entre si pelas juntas, denominadas a partir de agora de nós, onde se supõem concentradas todas as forças de ligação entre eles.

Precisa-se também escolher um sistema de coordenadas para o reservatório, chamado de sistema de coordenadas globais, onde se possa escrever, identificar e organizar matricialmente as ações externas (aplicadas aos nós) e os deslocamentos dos nós do reservatório (ver Capítulo IX, Fig. 9.2.a e b).

Precisa-se agora transformar as informações das coordenadas locais (ver Capítulo V, ítem 1) para as coordenadas globais. Isto é feito construindo uma matriz de transformação $[\beta]$, que fornece a relação entre o sistema global e o sistema local de coordenadas para os deslocamentos.

Tem-se então para cada elemento genérico j , uma matriz $[\beta]_j$ dada por

$$\{\delta\}_j = [\beta]_j \{U\} \quad \dots (7.1)$$

onde

$\{\delta\}_j$ é o vetor dos deslocamentos nas extremidades das coordenadas locais,

$\{U\}$ é o vetor dos deslocamentos dos nós.

Constrói-se a matriz $[\beta]_j$, impondo-se um deslocamento unitário na direção de cada coordenada global do reservatório ao mesmo tempo em que mantém-se nulos os deslocamentos segundo as demais coordenadas globais e verificando-se os deslocamentos que aparecem nas coordenadas locais do elemento que está sendo estudado. Repete-se este processo para todas as coordenadas globais e obtém-se facilmente a matriz $[\beta]_j$, que possui tantas colunas quantas forem as coordenadas globais do reservatório e tantas linhas quantas forem as coordenadas locais do elemento j .

Conhecido o vetor dos deslocamentos nas coordenadas locais dado pela equação (7.1), obtém-se o vetor dos esforços nas extremidades do elemento genérico j com a relação

$$\{P\}_j = [R]_j \{\delta\}_j \quad \dots (7.2)$$

onde

$\{P\}_j$ é o vetor dos esforços internos, nas coordenadas locais

$[R]_j$ é a matriz de rigidez já vista no Capítulo V, ítem 2, para os diversos elementos.

2. MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA INTEGRADA

A matriz de rigidez do reservatório é obtida em relação ao sistema de coordenadas globais partindo-se da matriz de rigidez $[R]_j$ dos diversos elementos de casca que compõem o reservatório, através da seguinte expressão:

$$[RJ] = \sum_{j=1}^{n^{\circ}\text{elementos}} [\beta]_j^T [R]_j [\beta]_j \quad \dots (7.3)$$

onde

$[RJ]$ é a matriz de rigidez do reservatório

$[R]_j$ é a matriz de rigidez dos diversos elementos que compõem o reservatório (ver Capítulo V, item 2)

$[\beta]_j$ é a matriz de transformação

3. VECTOR DE CARGA DA ESTRUTURA INTEGRADA

O vetor das cargas nodais equivalentes, é referido ao sistema de coordenadas globais e é composto dos esforços de engastamento perfeito (forças horizontais e momentos devidos aos carregamentos externos) dos elementos que concorrem na junta, com os sinais trocados, por se tratar de ações sobre os nós e não sobre os elementos. Ele é obtido da seguinte expressão:

$$\{F\} = - \sum_{j=1}^{n^{\circ}\text{elementos}} [\beta]_j^T \{EP\}_j \quad \dots (7.4)$$

onde

$[\beta]_j^T$ é a matriz transposta de $[\beta]_j$, cuja obtenção é mostrada no ítem 1.

$\{EP\}_j$ é o vetor dos esforços de engastamento perfeito já visto no Capítulo V, ítem 3, para os diversos carregamentos.

4. VETOR DOS DESLOCAMENTOS

4.1 - DO RESERVATÓRIO

É o vetor dos deslocamentos que ocorrem nas coordenadas globais da estrutura integrada e é dado por:

$$\{U\} = [RJ]^{-1} \{F\} \quad \dots (7.5)$$

sendo $[RJ]$ e $\{F\}$ calculados respectivamente pelas equações (7.3) e (7.4).

4.2 - DOS ELEMENTOS

Determinando-se $\{U\}$ através da equação (7.5), calculam-se os vetores dos deslocamentos $\{\delta\}_j$ para cada elemento j da estrutura integrada em relação às coordenadas locais do elemento considerado através da equação (7.1).

5. DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS FINAIS

5.1 - NAS EXTREMIDADES DOS ELEMENTOS

O vetor dos esforços internos finais nas extremidades do elemento genérico j é obtido por:

$$\{ESF\}_j = \{P\}_j + \{EP\}_j \quad \dots (7.6)$$

onde

$\{P\}_j$ é o vetor dos esforços internos nas extremidades do elemento genérico j dado pela equação (7.2)

$\{EP\}_j$ é o vetor dos esforços de engastamento perfeito já visto no Capítulo V, item 3, para os diversos carregamentos.

5.2 - AO LONGO DOS DIVERSOS ELEMENTOS

Determinada a equação (7.6), observa-se de imediato que o vetor $\{ESF\}_j$ terá quatro componentes (dois esforços horizontais H_i e H_k e dois momentos M_i e M_k) se o elemento de casca tiver duas bordas, e duas componentes (um esforço horizontal H e um momento M) caso ele tenha apenas uma borda. Portanto, introduzindo-se as componentes do vetor $\{ESF\}_j$ nas equações de flexão (dadas nos Capítulos III e IV, obtêm-se os esforços de flexão que somados aos de membrana fornecem os esforços finais ao longo de cada elemento de casca. Deste modo tem-se:

a) Cobertura esférica do reservatório

Os esforços de flexão ao longo da cobertura são obtidos introduzindo-se as componentes H e M respectivamente nas equações (3.16) e (3.14).

Os esforços de membrana para o carregamento do peso próprio são fornecidos pela equação (2.22) e para a sobrecarga uniformemente distribuída sobre a projeção horizontal da casca pela equação (2.24).

b) Cobertura cônica do reservatório

Os esforços de flexão ao longo da cobertura são encontrados introduzindo-se as componentes H e M respectivamente nas equações (3.42) e (3.40).

Encontram-se os esforços de membrana para o peso próprio pela equação (2.26) e para a sobrecarga através da equação (2.28).

c) Elemento intermediário da parede cilíndrica circular

Para o elemento de casca considerado curto, os esforços de flexão ao longo da casca cilíndrica circular intermediária são encontrados, introduzindo-se as componentes H_i , M_i , H_k e M_k respectivamente nas equações (3.56), (3.53), (3.65) e (3.63). No caso do elemento de casca ser considerado longo, introduz-se as componentes H_i , M_i , H_k e

M_k , respectivamente nas equações (3.58), (3.55), (3.66) e (3.64).

Os esforços de membrana ao longo da casca cilíndrica circular intermediária, independentemente do elemento de casca ser curto ou longo, são encontrados para o carregamento de pressão uniforme através da equação (2.31) e para a variação linear da pressão pela equação (2.33).

d) Fundo do reservatório assente em base rígida

Os esforços de flexão ao longo do fundo para a aproximação de Girkmann são encontrados introduzindo-se a componente M na equação (4.6).

e) Fundo do reservatório assente em base elástica

Os esforços de flexão ao longo da placa assente em base elástica são encontrados introduzindo-se a componente M nas equações (4.30).

CAPÍTULO VIII

VERIFICAÇÕES DE PROJETO E DIMENSIONAMENTO

1. INTRODUÇÃO

O dimensionamento dos reservatórios é feito, como aliás é sempre o caso na construção civil, pelo chamado método do ensaio-e-erro, ou seja: baseado em sua própria experiência profissional, o engenheiro estima preliminarmente as espessuras dos elementos e, a partir desta estimativa inicial, determina os esforços que atuam nos diversos componentes da estrutura; só então ele procede a verificação das tensões e dimensionamento das ligações (em estruturas metálicas), ou ao cálculo das armaduras e/ou cabos de protensão (em estruturas de concreto), redimensionando as espessuras dos elementos, caso necessário. Admite-se comumente que, se a variação do peso próprio da estrutura, em decorrência deste redimensionamento, for inferior a alguns por cento, não é necessário recalcular os esforços internos. A Norma Brasileira NB-2, de 1961, por exemplo, que regulamenta estruturas de ponte de concreto armado, fixa a variação máxima tolerável do peso próprio em 5%.

A sistemática de cálculo apresentada nos capítulos anteriores aplica-se tanto a tanques metálicos, como a reservatórios de concreto, desde que estes satisfaçam às limitações mencionadas no Capítulo II e possam ser tratados como cascas delgadas. Assim, julgou-se inconveniente intro-

duzir aqui critérios para dimensionamento, que, forçosamente, teriam que ser apresentados de forma muito compacta.

Outro tópico de grande importância no projeto de reservatórios, especialmente tanques metálicos, é o da flambagem que, pela complexidade do tema, e pela diversidade de carregamentos e dos próprios elementos que compõem a estrutura, mereceria uma discussão mais detalhada do que o âmbito deste trabalho permite.

Face às limitações expostas, pretende-se aqui apenas fornecer os principais elementos para as verificações básicas de flambagem das diversas cascas que compõem o reservatório.

2. CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A FLAMBAGEM DE CASCAS

A determinação da carga crítica de flambagem de um pilar é feita, veja-se por exemplo Benévolo [B4], exprimindo-se a equação da linha elástica por uma função trigonométrica que, introduzida na equação de equilíbrio, conduz à chamada fórmula de Euler,

$$P_{cr} = c \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$$

onde EJ é a rigidez à flexão, L o comprimento do pilar, e c um coeficiente que depende das condições de apoio nas extremidades da coluna.

Procedimento semelhante fornece ainda as tensões críticas de flambagem para chapas planas, ver, por exemplo Timoshenko [B27], sujeitas a diversos tipos de carregamento contidos no plano da chapa.

Os resultados assim obtidos correspondem à chamada Teoria Linear, em que se admite:

- a) que as deformações são pequenas;
- b) que o material é perfeitamente elástico;

ou seja, que há linearidade física (proporcionalidade en-

tre tensões e deformações, através da Lei de Hooke) e geométrica (nas relações entre os deslocamentos e as deformações). Além disso, a teoria linear exige ainda que não haja desvios de forma, isto é, que o eixo da coluna seja perfeitamente reto e a placa perfeitamente plana, sem deformações iniciais.

De modo geral, no caso de chapas e colunas, observa-se boa concordância entre os resultados teóricos (teoria linear) e experimentais. Já em se tratando de cascas, ocorre o contrário, havendo grande divergência entre estes resultados, de tal monta que a média dos valores experimentais pode representar até apenas 1/8 da carga teórica de flambagem definida pela teoria linear (cf. Baker [B2], pag. 221). Kollár [B18] apresenta uma extensa discussão das discrepâncias entre os resultados teóricos e experimentais para cascas cilíndricas e esféricas, com diversos gráficos, que situam os valores experimentais na faixa de 15% a 60% dos resultados da teoria linear.

Ambos os autores acima citados concordam em que a disparidade de resultados é devida, principalmente à alta sensibilidade das estruturas em casca, com relação a desvios de forma (deformações iniciais) e pequenas variações de contorno (sendo muito difícil a reprodução, mesmo em laboratório, das condições idealizadas na teoria e vice-versa, isto é, formular um modelo teórico que descreva fielmente as condições de apoio reais da casca).

São dados a seguir os principais resultados da teoria linear para os diversos elementos que constituem o reservatório e, no ítem 6, apresentam-se as indicações relativas aos coeficientes de segurança a serem adotados.

3. CASCA CILÍNDRICA

A pressão interna devida à coluna líquida tende a estabilizar a estrutura, devido às tensões de tração que desperta ao longo dos círculos paralelos. As verificações principais de flambagem correspondem portanto ao tanque vazio.

Para tensão axial σ_y (peso próprio do cilindro e cargas provenientes da cobertura), Flügge - veja-se, por exemplo, Kollár [B18] - fornece o ábaco da Fig. 8.1 - em que o trecho a) é usado para cascas curtas e o trecho b) para cascas longas.

$$K_{cr} = \sigma_{ycr} \frac{\sqrt{1-\nu^2} R}{Eh}$$

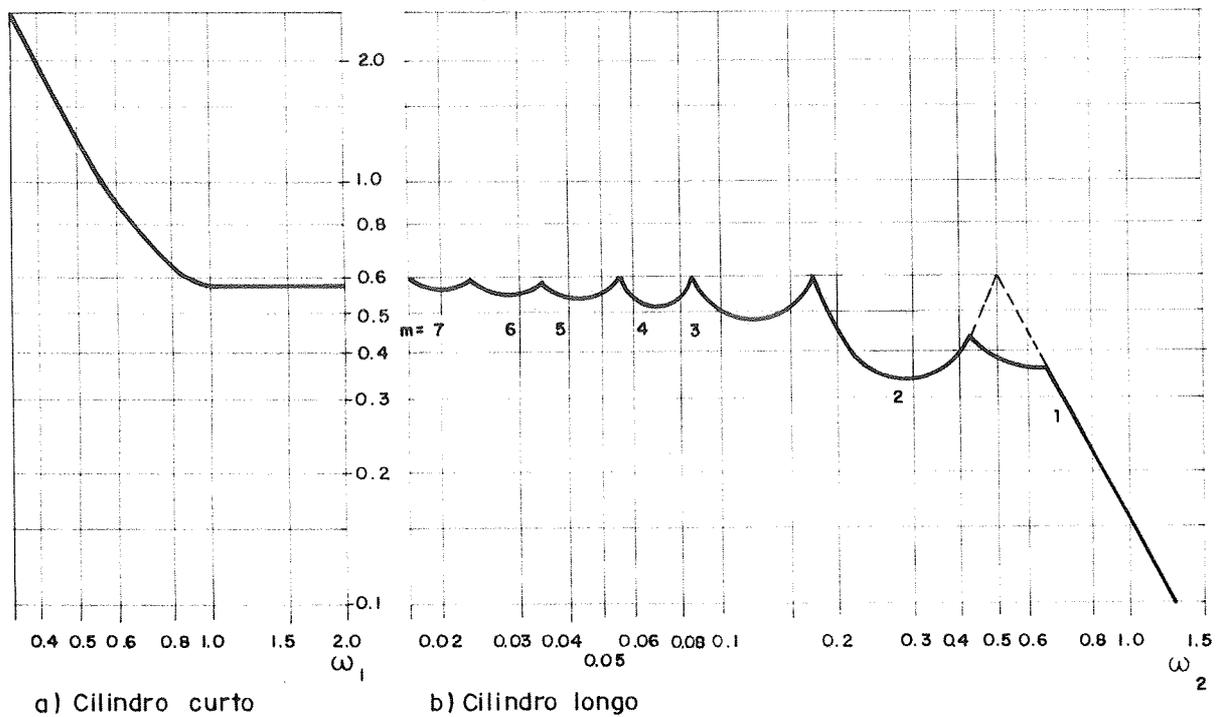


FIG. 8.1 - Coeficiente K_{cr} para determinação da tensão axial crítica (teoria linear) segundo Flügge - in Kollár [B18].

Entrando-se no ábaco com os parâmetros das cascas curtas e longas,

$$\omega_1 = \frac{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}{\pi} \frac{H}{\sqrt{Rh}} \quad \dots (8.1)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{4\sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{H}{R} \sqrt{\frac{h}{R}} \quad \dots (8.2)$$

respectivamente, obtêm-se o coeficiente K_{cr} , que determina a tensão crítica de flambagem:

$$\sigma_{ycr} = K_{cr} \frac{Eh}{R\sqrt{(1-\nu^2)}} \quad \dots (8.3)$$

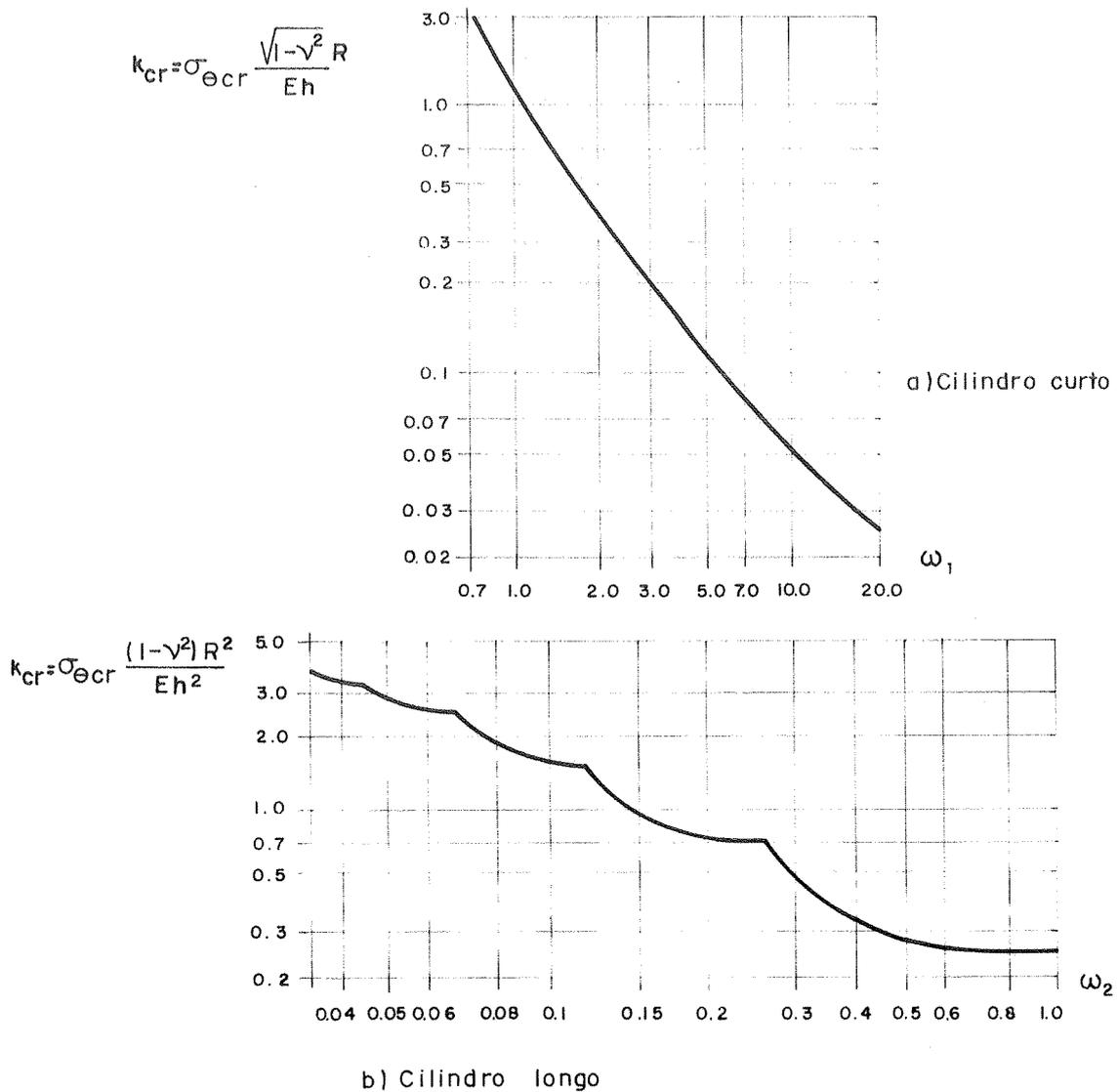


FIG. 8.2 - Coeficiente K_{cr} para determinação da tensão circunferencial crítica (teoria linear) segundo Flügge - in Kollár [B18].

Para o cilindro submetido à pressão externa radial constante p_z , usam-se as expressões (8.4) e (8.5), com o coeficiente K_{cr} do âbaco da Fig. 8.2, devido também a Flügge e apresentado por Kóllar [B18]:

$$\text{cilindro curto} \quad \sigma_{\theta cr} = K_{cr} \frac{Eh}{\sqrt{1-\nu^2} R} \quad \dots (8.4)$$

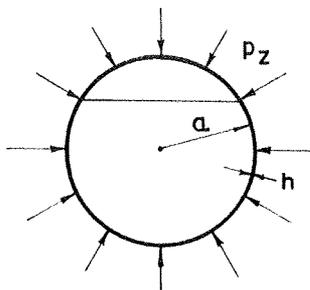
$$\text{cilindro longo} \quad \sigma_{\theta cr} = K_{cr} \frac{Eh^2}{(1-\nu^2)R^2} \quad \dots (8.5)$$

Tendo os mesmos parâmetros de entrada já definidos nas equações (8.1) e (8.2).

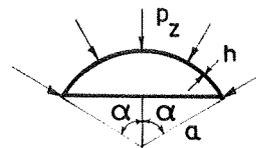
4. CASCA ESFÉRICA

A membrana externa da Fig. 8.3 submetida a pressão externa uniforme, p_z , comporta-se exatamente como a parte que lhe corresponde na casca esférica fechada (completa), sujeita a pressão radial de fora para dentro, pois admite deslocamentos radiais sem sofrer flexão. Assim, no âmbito da Teoria Linear, a carga crítica de flambagem da cobertura esférica será:

$$p_{z cr} = \frac{1,16}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{Eh^2}{a^2} \quad \dots (8.6)$$



a) esfera sob pressão radial constante



b) calota esférica sob pressão radial constante

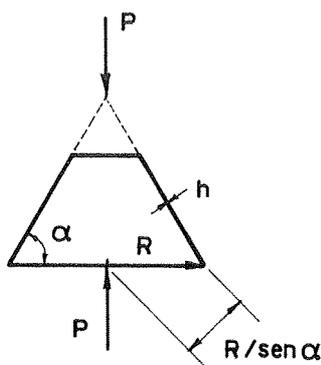
Fig. 8.3 - Carga crítica de flambagem para cascas esféricas.

5. CASCA CÔNICA

Na casca cônica sujeita à compressão axial, P , (Fig. 8.4), a única tensão não nula ocorre segundo os meridianos e vale:

$$\sigma_y = \frac{P}{2 \pi r_o h \operatorname{sen} \alpha} \quad \dots (8.7)$$

Seide - veja-se Kóllar [B18], pag. 40 - determinou o valor crítico de σ_y , segundo a teoria linear de flambagem, tomando um cilindro equivalente, cujo raio é igual ao raio de curvatura da casca cônica, r_θ . Com base em resultados experimentais para cascas cilíndricas, que mostram tanto maior divergência da teoria linear, quanto maior é a relação entre o raio e a espessura do cilindro - veja-se o item 6 deste capítulo -, Kóllar [B18] sugere que se tome como raio do cilindro equivalente o maior raio de curvatura do cone, isto é, que se substitua, no cálculo da carga crítica de flambagem através do ábaco da Fig. 8.1, R por $r_{\theta \max} = R/\operatorname{sen} \alpha$.



c) casca cônica sob compressão axial P

FIG. 8.4 - Carga crítica de flambagem para cascas cônicas.

Calculando $\sigma_{y_{cr}}$, substituindo-se em (8.7) σ_y por este valor crítico, vem:

$$P_{cr} = 2 \pi r_o h \text{ sen} \alpha \sigma_{y_{cr}} \quad \dots (8.8)$$

Baker [B2], pág. 247, indica ainda, para a casca cônica aberta, que se deve usar em (8.8) o menor raio r_o .

6. RESULTADOS EXPERIMENTAIS E SEGURANÇA À FLAMBAGEM

Como já mencionado no item 2, os resultados experimentais conduzem a valores efetivos da tensão (ou da carga) para a qual ocorre a flambagem, σ_{fl} , muito inferiores aos que se obtêm com a teoria linear. A Fig. 8.5 - veja-se Kollár [B18], pág. 13 - ilustra essa divergência.

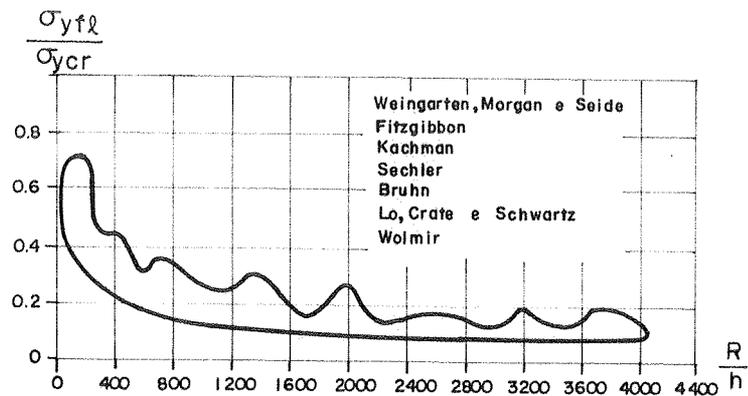


FIG. 8.5 - Relação entre a tensão axial efetiva de flambagem, σ_{fl} (resultados experimentais), e a tensão crítica determinada pela teoria linear, $\sigma_{y_{cr}}$, segundo Kollár [B18].

Girkmann [B12] observa que discrepâncias dessa ordem não podem ser atribuídas exclusivamente a desvios de forma e pequenas modificações nas condições de contorno, situando o problema no âmbito das grandes deformações (isto é, deformações fínitas) e fornece, para a casca esférica sob pressão radial externa, o resultado de Kárman e Tsien, obtido pela Teoria não linear,

$$\bar{p}_{zfl} = 0,365 \frac{Eh^2}{a^2} \dots (8.9)$$

que se aproxima dos valores experimentais e corresponde a apenas cerca de 30% da carga definida pela teoria linear - compare-se as expressões (8.9) e (8.6). Kollár [B18] cita os resultados de pesquisadores soviéticos, que determinaram valores ainda menores para o coeficiente numérico na fórmula (8.9), tendo, por exemplo, Dostanowa e Raiser chegado a $p_{zfl} = 0,108 p_{zcr}$.

A discussão acima mostra claramente a necessidade de se estabelecer um coeficiente de minoração para os resultados apresentados nos itens 3 a 5 com base na teoria linear. Baker [B2] sugere, para cascas esféricas com $\lambda_1 > 2$ sob pressão radial externa:

$$\frac{p_{zfl}}{p_{zcr}} = 0,14 + \frac{3,2}{\lambda^2} \dots (8.10)$$

em que λ_1 é o parâmetro geométrico da casca,

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{4 \sqrt{12(1-\nu^2)} a^2}{h^2}} 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \dots (8.11)$$

Encontra-se em Kollár [B18] um enfoque mais generalizado, em que ele fornece curvas de $p_{f\ell}/p_{cr}$ em função da relação entre a deformação inicial w_0 e a espessura h da casca, tanto para o cilindro como para a esfera - ver Fig. 8.6.

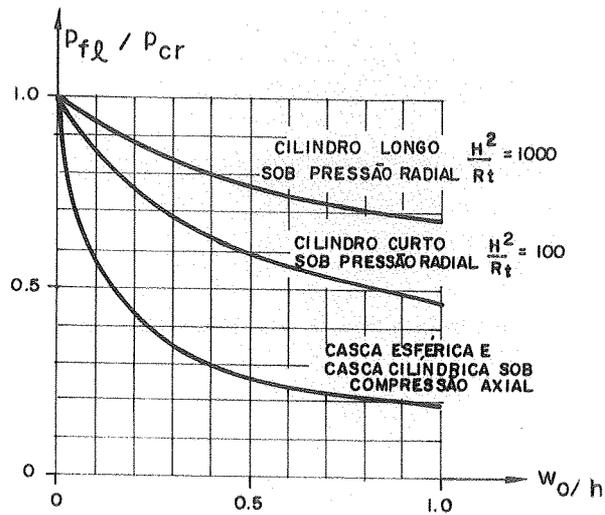


FIG. 8.6 - Relação entre a tensão efetiva de flambagem (teoria não-linear) e a tensão calculada pela teoria linear segundo Kollár [B18].

A partir dessas relações e de gráficos como o da Fig. 8.5, Kollár [B18] sugere as expressões aproximadas

$$\frac{P_{f\ell}}{P_{cr}} = \frac{1}{1 + 6 \frac{w_o}{h}} \quad \dots (8.12)$$

$$\frac{P_{f\ell}}{P_{cr}} = \frac{1}{1 + 1,7 \frac{R}{1000h}}$$

válidas para a esfera de raio $a = R$ com pressão radial externa e para o cilindro sob compressão axial. Igualando estas duas expressões, ele obtém então

$$w_o = \frac{R}{3500} \quad \dots (8.13)$$

como um valor confiável, em comparação com medidas levadas a cabo em cilindros com relação raio/espessura $R/h = 1000$.

Com base nessas considerações e na análise estática de resultados experimentais, Kollár [B18] sugere ain

da o fator de segurança $v_{fl} = 3,50$ para a determinação da carga crítica de flambagem de cascas cilíndricas e esféricas, de metal ou de concreto, a partir dos resultados da teoria linear:

$$p_{fl} = \frac{P_{cr}}{v_{fl}} = \frac{P_{cr}}{3,5} \quad \dots (8.14)$$

devendo-se, para efeitos de flambagem, comparar a carga atuante, P , com o valor de p_{fl} correspondente à teoria não linear, dado pela equação (8.14).

CAPÍTULO IX

AUTOMATIZAÇÃO PARA COMPUTADOR

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

A utilização do computador torna-se necessária pois devido à grande complexidade das equações manipuladas, as soluções obtidas manualmente seriam quase que impraticáveis.

O computador utilizado foi o IBM-370 e a programação, cuja listagem e resultados são apresentados no Apêndice 3, foi executada em linguagem FORTRAN.

O programa elaborado tem uma flexibilidade muito grande para a obtenção dos esforços em reservatórios cilíndricos circulares, pois através dele pode-se calcular:

1. reservatórios com cobertura esférica, cônica ou mesmo reservatórios sem cobertura;
2. reservatórios com paredes de espessura variável mas constantes ao longo de cada elemento de casca cilíndrica circular, dando portanto uma boa aproximação para a parede com espessura variável ao longo da altura do reservatório (Fig. 9.1).
3. reservatórios assentes em base rígida (aproximação de Girkmann) ou em base elástica (diretamente apoiados no solo).

Trata-se também neste capítulo de vários problemas para computador, tais como: determinação dos esforços p_v e p_o num elemento da parede (ver Capítulo II, ítem 3) e determinação da largura da coroa da placa de fundo utilizada na aproximação de Girkmann (ver Capítulo IV, ítem 2), já que ambos os casos dizem respeito à estrutura integrada.

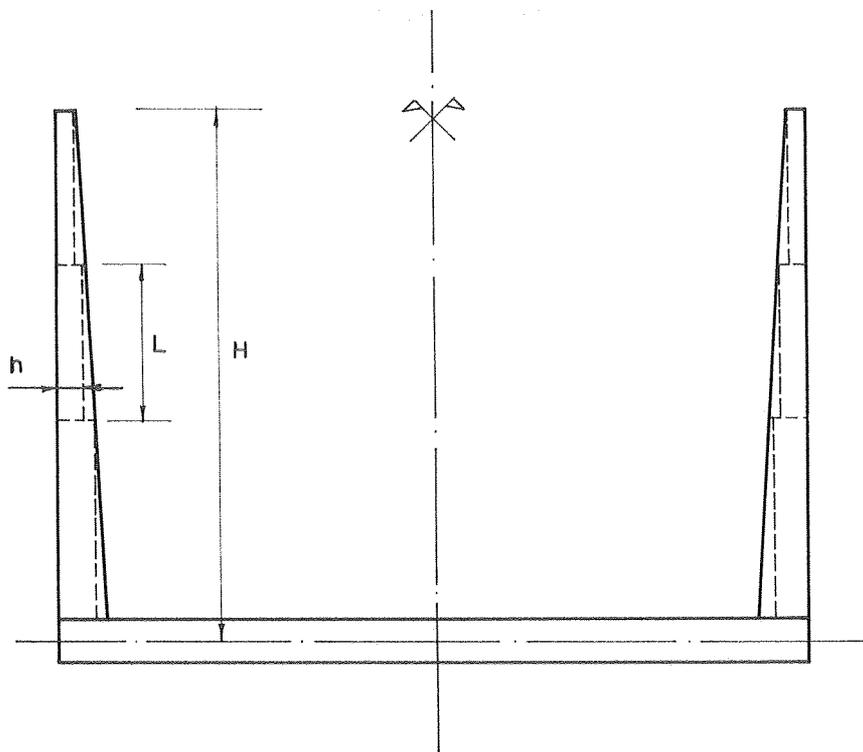


FIG. 9.1 - Reservatório com espessura de parede variável. Subdivisão em elementos de espessura constante.

Sabendo-se a priori, o número de elementos $(n+1)$ e o número de nós (n) , que compõem o reservatório a ser analisado (Fig. 9.2.a e b), tem-se:

1. O sistema global adotado tem origem no fundo do reservatório.
2. A numeração dos nós varia de 1 (na junção parede x fundo) até n .
3. A numeração das coordenadas globais varia de 1 (na junção parede x fundo) até $2n$.

4. A numeração dos diversos elementos que compõem o reservatório varia de 1 (fundo) até $n+1$, e são os números fornecidos dentro dos círculos.
5. A numeração das coordenadas locais vai sempre de 1 a 4 para elementos com duas bordas (parede) e de 1 a 2 para elementos com apenas uma borda (fundo e cobertura).

Deve ser observado ainda que adotou-se na figura 9.2.a e 9.2.b os sentidos positivos (tanto para os esforços como para os deslocamentos) mais convenientes para o processamento automático do problema; por isto, como mencionado no Capítulo V, as matrizes de rigidez são dadas nestes sistemas de coordenadas.

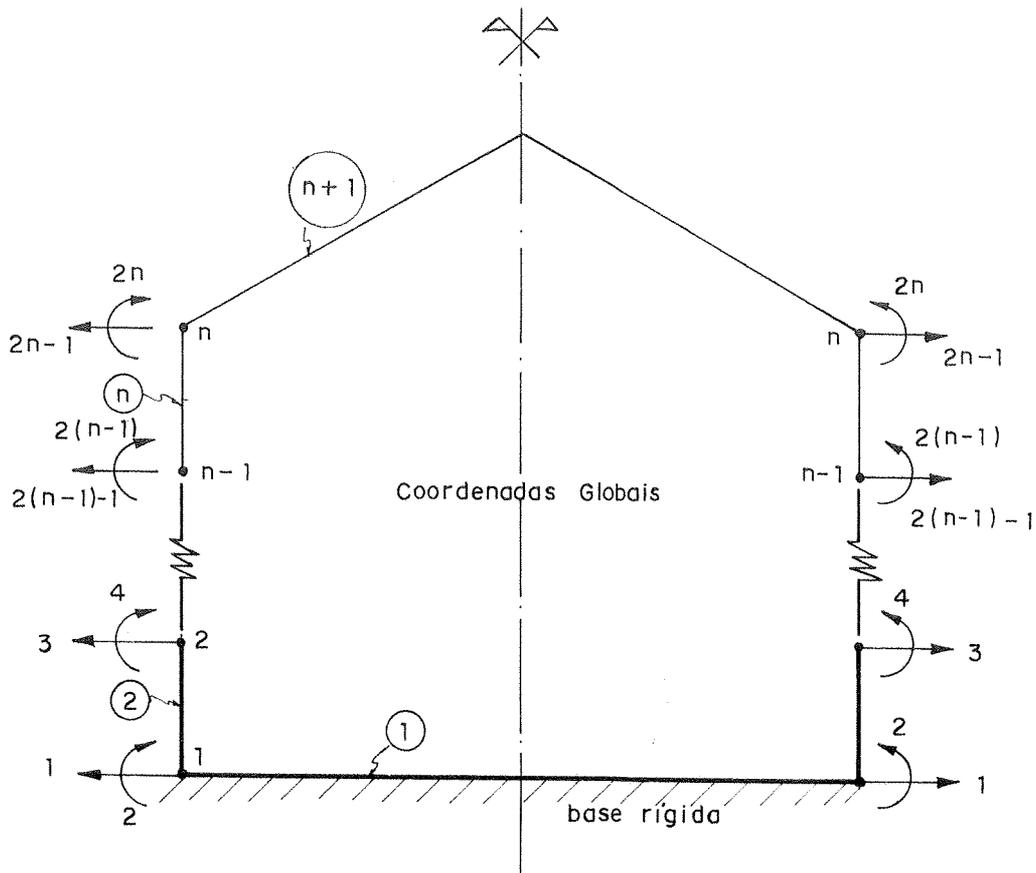


FIG. 9.2.a - Estrutura integrada e suas coordenadas - sentidos positivos para esforços e deslocamentos

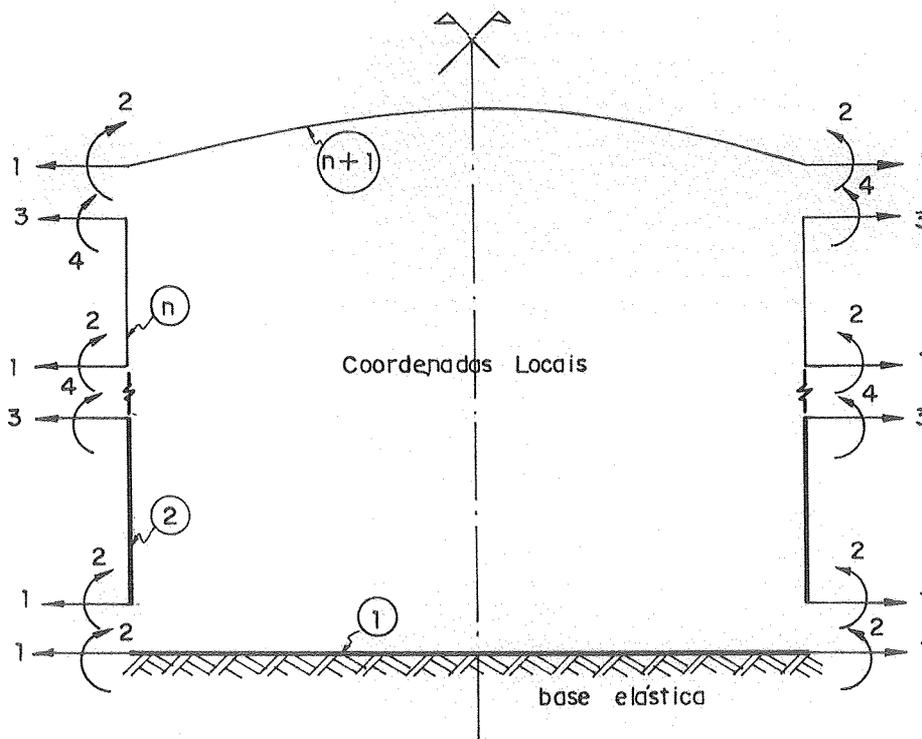


FIG. 9.2.b - Elementos que compõem o reservatório e suas coordenadas - sentidos positivos para esforços e deslocamentos.

1.1 - PRESSÃO HIDROSTÁTICA NUM ELEMENTO QUALQUER DA PAREDE DO RESERVATÓRIO

Juntando-se os carregamentos de pressão uniforme com o da variação linear da pressão num elemento genérico da parede (Fig. 9.3) e chamando

$$p_o = \lambda_p p_v \quad \dots\dots (9.1)$$

tem-se, segundo Baker [B2], a pressão atuante num ponto intermediário qualquer do elemento dada por

$$p_z = p_v (1 + \lambda_p - \xi) \quad \dots\dots (9.2)$$

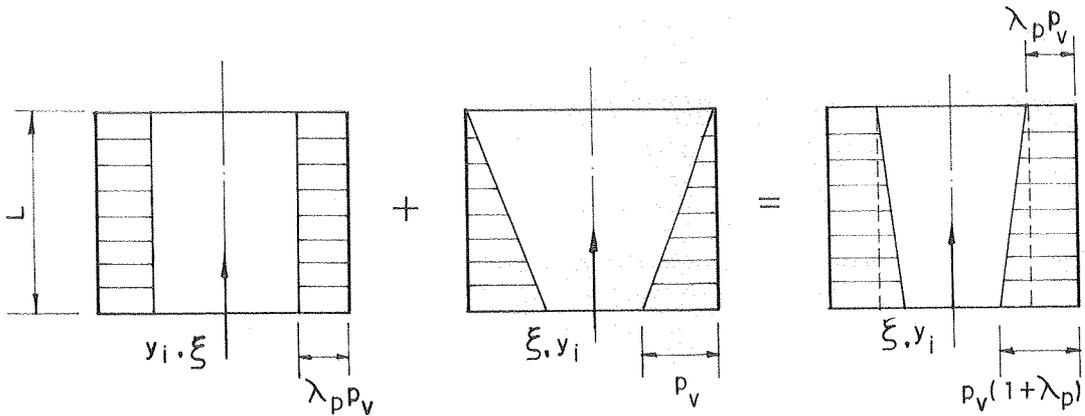


FIG. 9.3 - Composição da pressão interna num elemento qualquer da parede do reservatório.

Tratando-se agora dos carregamentos em relação à parede do reservatório, tem-se por exemplo para uma parede constituída por três elementos (Fig. 9.4), juntamente com a equação (9.1):

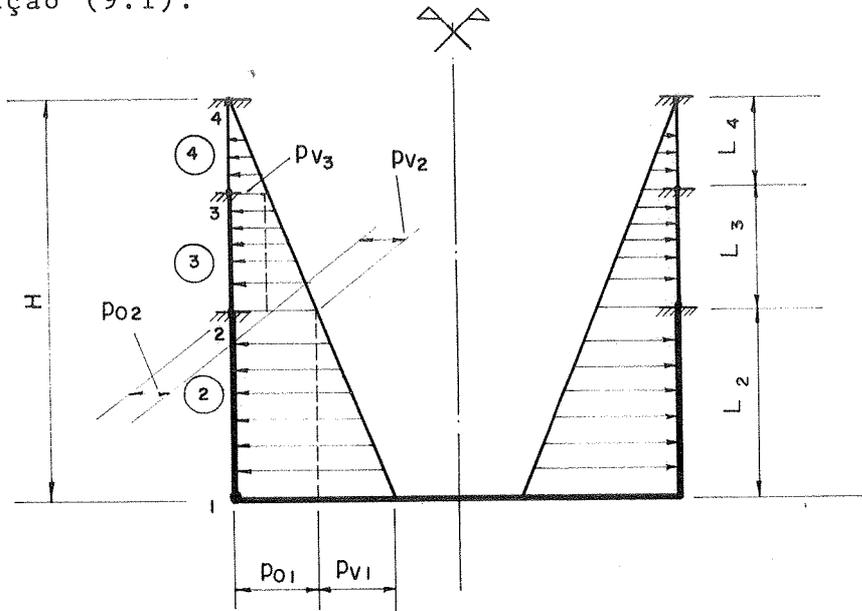


FIG. 9.4 - Parede do reservatório constituída de três elementos.

- Para o elemento 2

$$p_{v1} = \gamma_{liq} \cdot L_2 \quad e \quad p_{o1} = \gamma_{liq} (H - L_2)$$

ficando

$$\lambda_p = \frac{H-L_2}{L_2}$$

- Para o elemento 3

$$P_{v2} = \lambda_{liq} L_3 \quad e \quad P_{o2} = \lambda_{liq} [H - (L_2 + L_3)]$$

ficando

$$\lambda_p = \frac{H - (L_2 + L_3)}{L_3}$$

então para um reservatório de altura H composto por n elementos, tem-se para um elemento qualquer de sua parede:

$$P_v = \gamma_{liq} L_{elemento} \quad \dots (9.3)$$

$$\lambda_p = \frac{H - (\sum L \text{ dos elementos abaixo} + L \text{ do elemento})}{L \text{ do elemento}}$$

e a pressão em um ponto qualquer intermediário é calculada pela fórmula (9.2) variando-se $\xi = y_i / L_{(elemento)}$ dentro do próprio elemento em questão.

1.2 - LARGURA DA COROA DO FUNDO EM BASE RÍGIDA

Com a aproximação de Girkmann, a resolução do problema do nó 1 conduziria a um sistema não linear de equações; já que \underline{b} é determinado a partir de uma das incógnitas do problema conforme pode ser visto pela equação (4.7). Para contornar esta fato, resolveu-se numericamente o sistema de equações com o auxílio do elemento (2) da parede, já que este também concorre no nó 1.

Sabe-se que para o nó 1 do reservatório tem-se

$$[RJ] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & \dots & \dots \\ r_{21} & r_{22} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \dots (9.4)$$

sendo qualquer um dos elementos da matriz de rigidez acima mostrados resultante da contribuição do fundo e parede simultaneamente, como por exemplo o elemento que nos interessa pois é ele que contém \underline{b} (ver Capítulo V, item 2.3).

$$r_{22} = r_{22}^f + r_{22}^p \dots (9.5)$$

Da mesma forma que tem-se também o vetor dos esforços de engastamento perfeito - ver equação (7.4):

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \dots (9.6)$$

com

$$F_2 = F_2^f + F_2^p \dots (9.7)$$

No caso tem-se, para a segunda componente do vetor $\{F\}$ uma parcela correspondente ao momento de engastamento perfeito da placa, igual a $qb^2/12$ - ver Capítulo V, equação (5.18); e uma outra parcela correspondente ao momento de engastamento perfeito do elemento (2) da parede do reservatório, dada no vetor $\{EP\}_2$, ver equação (5.16). Faz-se então, conforme sugerido por Martinelli et. al. $[B21]$, em primeira aproximação, $M_1 =$ segunda componente do vetor $\{EP\}_2$, definindo-se o valor inicial de:

$$b = \sqrt{\frac{M_1}{2}} \quad \dots (9.8)$$

Adotado o valor inicial de \underline{b} , calcula-se então a matriz de rigidez $[R]_1$ e o vetor dos esforços de engastamento perfeito $\{EP\}_1$ da placa de fundo.

Utilizando-se as relações (7.3) e (7.4) monta-se a matriz de rigidez $[RJ]$ e o vetor dos esforços $\{F\}$ referidos neste capítulo pelas equações (9.4) e (9.6) respectivamente.

Resolvido o sistema de equações, calcula-se o vetor dos deslocamentos das extremidades do elemento ② da parede, $\{\delta\}_2$, com a equação (7.1).

Feito isto, determina-se o vetor dos esforços internos nas extremidades do elemento ② da parede $\{P\}_2$ com a relação (7.2) e finalmente o vetor dos esforços finais nas extremidades do mesmo elemento, $\{ESF\}_2$, com a equação (7.6). A segunda componente deste vetor fornece um valor de momento que para haver compatibilidade, deve ser o mesmo momento da placa de fundo (calculado no vetor $\{ESF\}_1$), quando o valor de \underline{b} estiver correto.

Assim sendo, utiliza-se a equação (4.7) com o momento M_A igual à segunda componente do vetor $\{ESF\}_2$. Com isto tem-se um novo valor de \underline{b} .

Como pode ser visto pelas relações (9.5) e (9.7), as únicas parcelas que serão alteradas em $[RJ]$ e $\{F\}$ com o novo valor de \underline{b} , serão r_{22}^f e F_2^f pois são as únicas que o contém. Assim sendo, recalcula-se estes valores, desta feita com a nova aproximação de \underline{b} .

Resolve-se novamente o sistema de equações, obtendo-se um novo vetor $\{\delta\}_2$.

Como para achar-se o valor correto de \underline{b} , só interessará a mudança que ocorrerá na coordenada 2 do elemento ② da parede, passa-se a trabalhar somente com a segunda linha da matriz $[R]_2$, repetindo-se o processo a cada passo, até chegar-se ao valor correto de \underline{b} (aquele para o qual a

segunda coordenada do vetor $\{ESF\}_2$ é igual à segunda coordenada do vetor $\{ESF\}_1$).

2. MECANISMO DO PROGRAMA

Consiste em montar a matriz de rigidez e o vetor dos esforços do reservatório para calcular os deslocamentos dos nós. Em seguida transformam-se os deslocamentos dos nós em deslocamentos dos elementos para obter-se os esforços internos, que somados aos esforços de engastamento perfeito resultam nos esforços finais nas extremidades dos diversos elementos. De posse destes esforços, calculam-se os esforços ao longo dos elementos da estrutura.

3. FLUXOGRAMA

Com a finalidade de dar maior clareza no acompanhamento do programa elaborado em linguagem FORTRAN, cuja listagem é apresentada no Anexo 3, apresenta-se a seguir o diagrama de blocos, bem como as variáveis principais e subrotinas do programa principal.

3.1 - LISTA DAS VARIÁVEIS PRINCIPAIS

No programa principal utilizam-se as seguintes variáveis:

- J - número de elementos da estrutura integrada.
- NNOS - número de nós da estrutura integrada.
- NPROC - processo utilizado no cálculo da casca cilíndrica circular, zero significa processo aproximado no cálculo dos elementos que compõem a parede e $NPROC = 1$ a casca é curta.

- ITFUN - tipo de base em que está assente o reservatório, igual a 1 a base é rígida e para ITFUN = 2 significa base elástica.
- ITCOB - tipo de cobertura utilizada no reservatório; valor 1 significa cobertura esférica e ITCOB = 2 é cônica.
- R - raio do reservatório
- E - módulo de elasticidade do material
- CP - coeficiente de Poisson
- GAMAL - peso específico do líquido armazenado
- GAMAM - peso específico do material
- ALFA - ângulo de inclinação da cobertura
- SC - sobrecarga
- [RJ] - matriz de rigidez do reservatório
- {DE} - vetor das cargas nodais equivalentes (antes da resolução do sistema de equações) ou vetor dos deslocamentos dos nós (após a resolução)
- H(J) - espessura dos diversos elementos componentes do reservatório
- COMP(J) - comprimento dos diversos elementos da estrutura integrada
- CE - constante elástica do solo

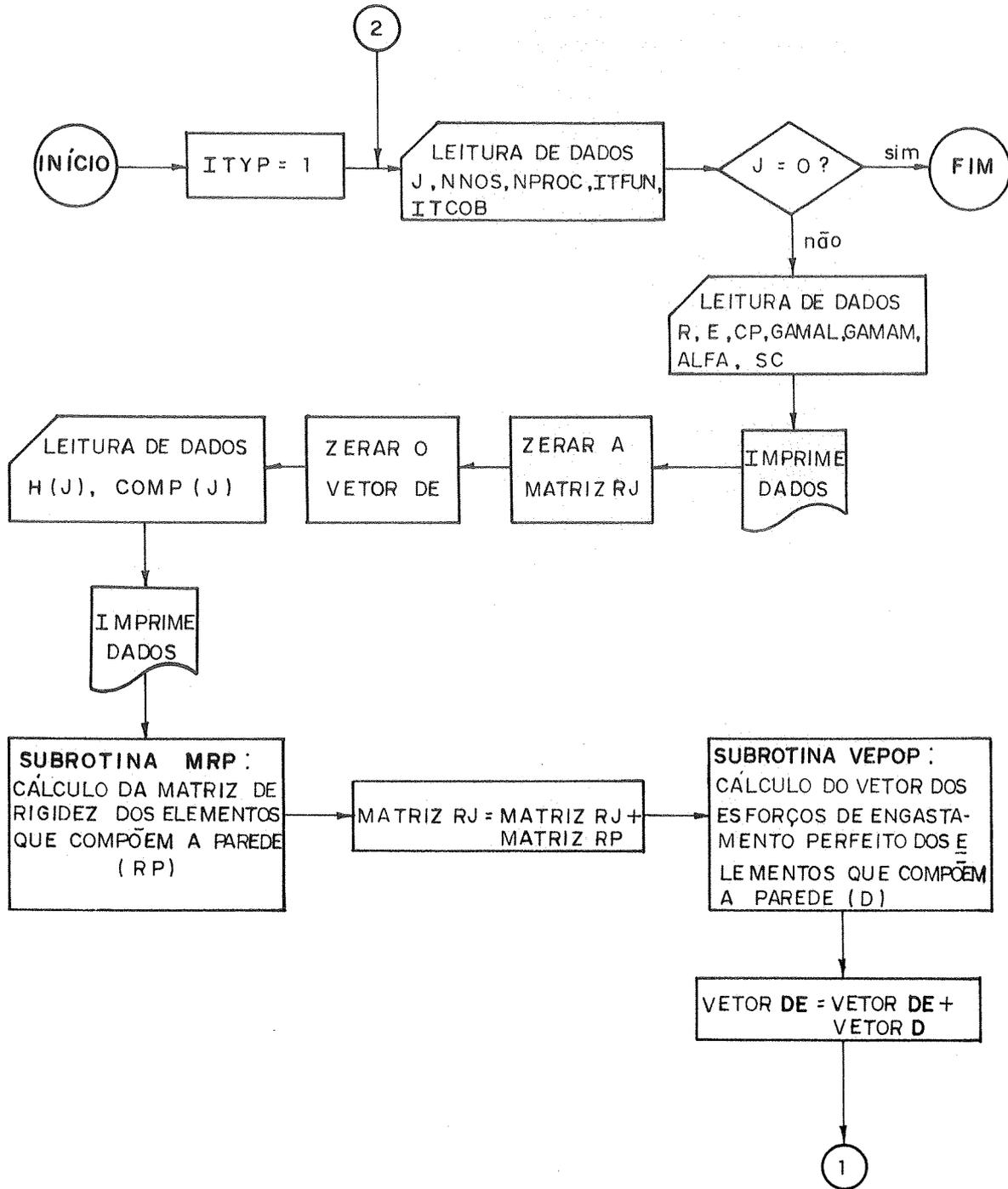
3.2 - SUBROTINAS UTILIZADAS PELO PROGRAMA PRINCIPAL

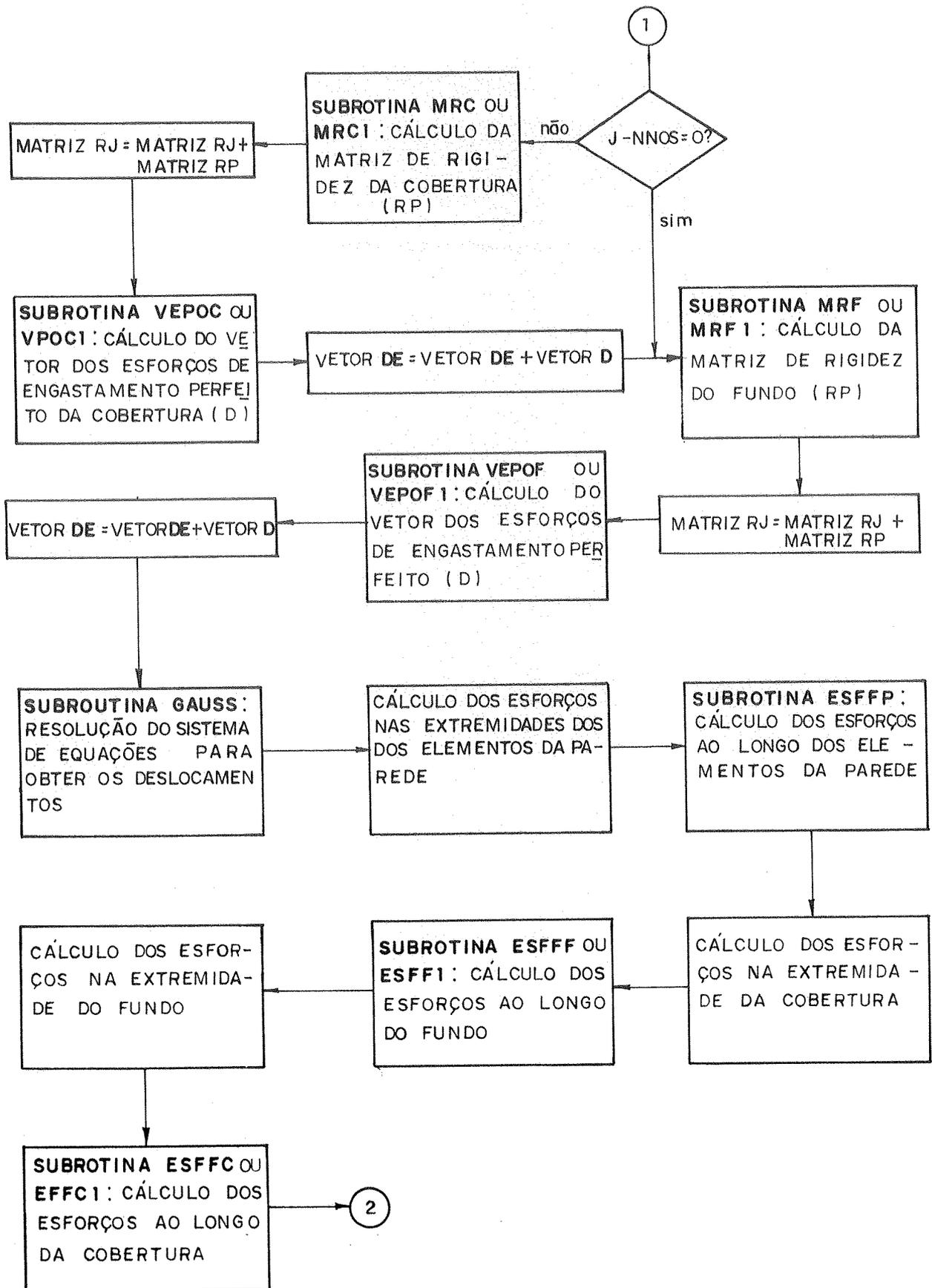
No programa principal utilizam-se as seguintes subrotinas:

- MRP - calcula a matriz de rigidez do elemento que compõe a parede do reservatório (tantas quantas forem o número de elementos)
- MRC - calcula a matriz de rigidez da cobertura esférica

- MRC1 - calcula a matriz de rigidez da cobertura cônica
- MRF - calcula a matriz de rigidez do fundo assente em base rígida
- MRF1 - calcula a matriz de rigidez do fundo assente em base elástica
- VEPOP - calcula o vetor dos esforços de engastamento perfeito do elemento que compõe a parede (tantos quanto forem o número de elementos)
- VEPOC - calcula o vetor dos esforços de engastamento perfeito da cobertura esférica
- VPOC1 - calcula o vetor dos esforços de engastamento perfeito da cobertura cônica
- VEPOF - calcula o vetor dos esforços de engastamento perfeito do fundo assente em base rígida
- VPOF1 - calcula o vetor dos esforços de engastamento perfeito do fundo assente em base elástica
- GAUSS - fornece a resolução do sistema de equação para obter os deslocamentos nodais
- ESFFP - fornece os esforços finais ao longo do(s) elemento(s) da parede
- ESFFC - fornece os esforços finais ao longo da cobertura esférica
- EFFC1 - fornece os esforços finais ao longo da cobertura cônica
- ESFFF - fornece os esforços finais ao longo do fundo assente em base rígida
- ESFF1 - fornece os esforços finais ao longo do fundo assente em base elástica

3.3 - FLUXOGRAMA DO PROGRAMA PRINCIPAL





4. MANUAL DO USUÁRIO

No primeiro cartão de dados (Fig. 9.5) são fornecidos os valores de J, NNOS, NPROC, ITFUN e ITCOB, utilizando-se o formato I2 para cada um destes valores. Reserva-se portanto para isto os dez primeiros espaços do cartão de dados.

No segundo cartão de dados (Fig. 9.6), são lidos R, E, CP, GAMAL, GAMAM, ALFA e SC, cada um deles no formato E10.4; ocupando-se portanto setenta espaços.

A seguir são fornecidos (Fig. 9.7), a espessura e o comprimento de cada elemento que compõe o reservatório (um cartão por elemento) no formato E12.6, consumindo-se com isto vinte e quatro espaços por cartão. Deve ser observado também que tem-se tantos cartões de dados quantos forem os elementos que compõem o reservatório.

Estando a estrutura assente em base elástica de ser acrescentado ainda, no formato E10.4, um cartão de dados (Fig. 9.8) que forneça a constante elástica do solo - chamada de CE no programa e K_g no Capítulo IV.

Outra observação a ser feita é que o programa pode calcular mais de um reservatório, bastando para isto que se introduza os dados do segundo reservatório, por exemplo, imediatamente atrás dos cartões de dados do primeiro e obedecendo a sequência explanada anteriormente. O término do fornecimento de todos os dados é caracterizado sempre por um cartão em branco.

Com tudo o que foi dito anteriormente tem-se para a primeira estrutura:

| | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|-------------|
| J | NNOS | NPROC | ITFUN | ITCOB | ← Variáveis |
| (I2) | (I2) | (I2) | (I2) | (I2) | ← Formato |

FIG. 9.5 - Primeiro cartão de dados.

| | | | | | | | |
|--------------|--------------|---------------|------------------|------------------|-----------------|---------------|--------------------------|
| R (E10.4) | E (E10.4) | CP (E10.4) | GAMAL (E10.4) | GAMAM (E10.4) | ALFA (E10.4) | SC (E10.4) | ← Variáveis ← Formato |
|--------------|--------------|---------------|------------------|------------------|-----------------|---------------|--------------------------|

FIG. 9.6 - Segundo cartão de dados

| | | |
|--------------|-----------------|--------------------------|
| H (E12.6) | COMP (E12.6) | ← Variáveis ← Formato |
|--------------|-----------------|--------------------------|

FIG. 9.7 - Terceiro cartão ao (J+2)^o cartão

| | |
|----------------|-------------------------|
| C E (E10.4) | ← Variável ← Formato |
|----------------|-------------------------|

FIG. 9.8 - (J+3)^o cartão (opcional)

Para mais de uma estrutura repete-se a sequência de cartões acima, não esquecendo do cartão em branco que acompanha o fim dos dados.

CAPÍTULO X

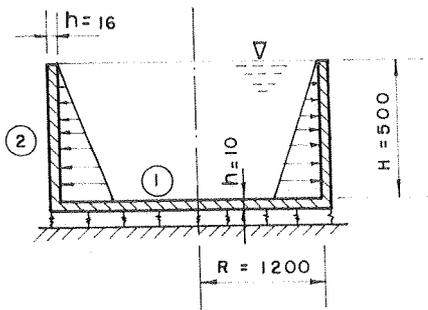
ANÁLISE DOS RESULTADOS

1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Para verificação dos resultados obtidos através do programa em linguagem FORTRAN apresentado no Anexo 3, foram resolvidos diversos problemas e feitas comparações com exemplos encontrados na literatura. Assim, nos exemplos números 1, 2, 7 e 9 estuda-se o reservatório apoiado sobre base elástica; no exemplo número 5, a parede cilíndrica é composta de três elementos, considerados como casca curta; no exemplo número 8 são usadas as equações de casca longa, zerando-se porém os elementos da matriz de rigidez que correspondem à influência dos efeitos de uma borda sobre a outra borda do elemento.

Nos exemplos números 1 e 2, consideram-se os esforços da primeira junta do reservatório atuando ao nível da face superior da placa de fundo e não no eixo da placa (como nos demais exemplos), alternado-se a matriz de rigidez do fundo, conforme equação (5.9):

2. EXEMPLOS ANALISADOS



EXEMPLO Nº 1 - Reservatório sobre base elástica com compatibilização feita na face superior da placa de fundo.

$R = 1200 \text{ cm}$

$H = 500 \text{ cm}$

$h_{(1)} = 10 \text{ cm}$

$h_{(2)} = 16 \text{ cm}$

$K_s = 12 \text{ kgf/cm}^3$

$E = 2,1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$

$\nu = 1/6$

$\gamma_{liq} = 0,1 \times 10^{-2} \text{ kgf/cm}^3$

$\gamma_{mat} = 0,25 \times 10^{-2} \text{ kgf/cm}^3$

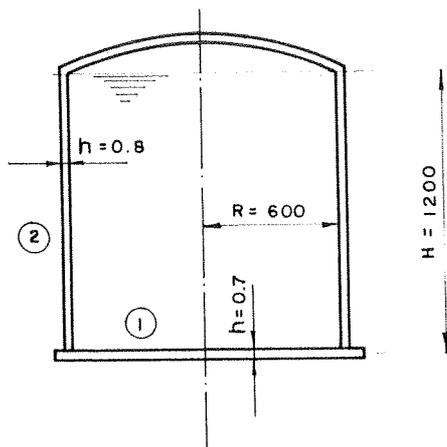
$L_{(1)} = 1208 \text{ cm}$

$L_{(2)} = 500 \text{ cm}$

Os diagramas dos esforços finais são apresentados na Fig. 10.1.a, b e c.

EXEMPLO Nº 2 - Igual ao exemplo nº 1, sendo $K_s = 20 \text{ kgf/cm}^3$

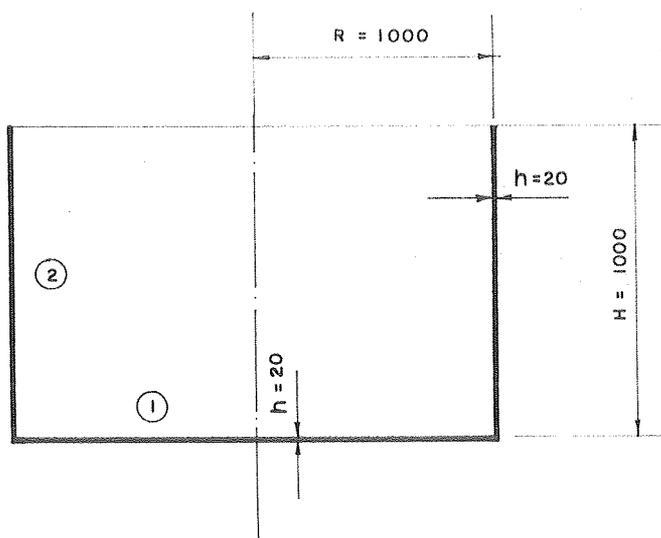
Os diagramas dos esforços finais também são apresentados na Fig. 10.1.a, b e c.



EXEMPLO Nº 3 - Reservatório assente em base rígida, compatibilização feita no eixo dos elementos.

| | |
|--|---|
| $R = 600 \text{ cm}$ | $\nu = 1/3$ |
| $H = 1200 \text{ cm}$ | $\gamma_{\text{liq}} = 0,14 \times 10^{-2} \text{ kgf/cm}^3$ |
| $h_{(1)} = 0,7 \text{ cm}$ | $\gamma_{\text{mat}} = 0,785 \times 10^{-2} \text{ kgf/cm}^3$ |
| $h_{(2)} = 0,8 \text{ cm}$ | $L_{(1)} = 600 \text{ cm}$ |
| $E = 2,1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ | $L_{(2)} = 1200 \text{ cm}$ |

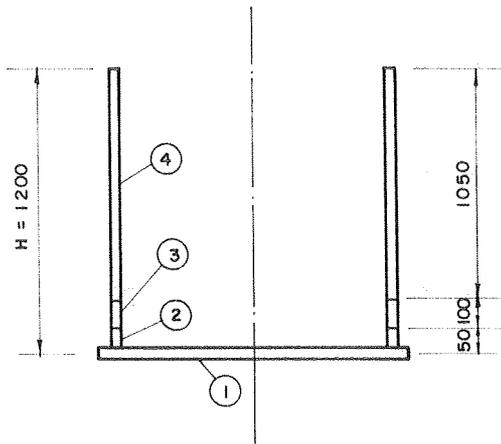
Os diagramas dos esforços finais são apresentados na Fig. 10.2.a, b e c.



EXEMPLO Nº 4 - Reservatório assente em base rígida, compatibilização feita no eixo dos elementos.

| | |
|--|--|
| $R = 1000 \text{ cm}$ | $\nu = 1/5$ |
| $H = 1000 \text{ cm}$ | $\gamma_{\text{liq}} = 0,1 \times 10^{-2} \text{ kgf/cm}^3$ |
| $h_{(1)} = 20 \text{ cm}$ | $\gamma_{\text{mat}} = 0,25 \times 10^{-2} \text{ kgf/cm}^3$ |
| $h_{(2)} = 20 \text{ cm}$ | $L_{(1)} = 1000 \text{ cm}$ |
| $E = 2,0 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ | $L_{(2)} = 1000 \text{ cm}$ |

Os diagramas dos esforços finais são mostrados na Fig. 10.3.a, b e c.



EXEMPLO Nº 5 - Igual ao exemplo nº 3, considerando-se a parede composta de três elementos.

$$h_{(2)} = h_{(3)} = h_{(4)} = 0,8 \text{ cm}$$

$$L_{(3)} = 100 \text{ cm}$$

$$L_{(2)} = 50 \text{ cm}$$

$$L_{(4)} = 1050 \text{ cm}$$

Os diagramas dos esforços finais são apresentados na Fig. 10.2.a, b e c.

EXEMPLO Nº 6 - Igual ao Exemplo nº 1, estando o reservatório apoiado em base rígida e sendo a compatibilização no eixo dos elementos.

Os diagramas dos esforços finais são mostrados na Fig. 10.1.a, b e c.

EXEMPLO Nº 7 - Igual ao exemplo nº 1, com compatibilização feita no eixo dos elementos resolvido para $K_s = 12 \text{ kgf/cm}^3$; $K_s = 20 \text{ kgf/cm}^3$; $K_s = 30 \text{ kgf/cm}^3$ e $K_s = 50 \text{ kgf/cm}^3$.

Os valores dos esforços são apresentados na Tabela 10.1.

EXEMPLO Nº 8 - Igual ao exemplo nº 6, considerando-se a casca cilíndrica da parede como longa, tendo-se porém zerado os elementos da matriz de rigidez que correspondem à influência de uma borda sobre outra borda do elemento.

Os diagramas dos esforços finais são mostrados na Fig. 10.1.a, b e c.

EXEMPLO Nº 9 - Igual ao exemplo nº 3, estando o reservatório assente em base elástica com $K_S = 12 \text{ kgf/cm}^3$.

Os diagramas dos esforços finais são mostrados na Fig. 10.2.a, b e c.

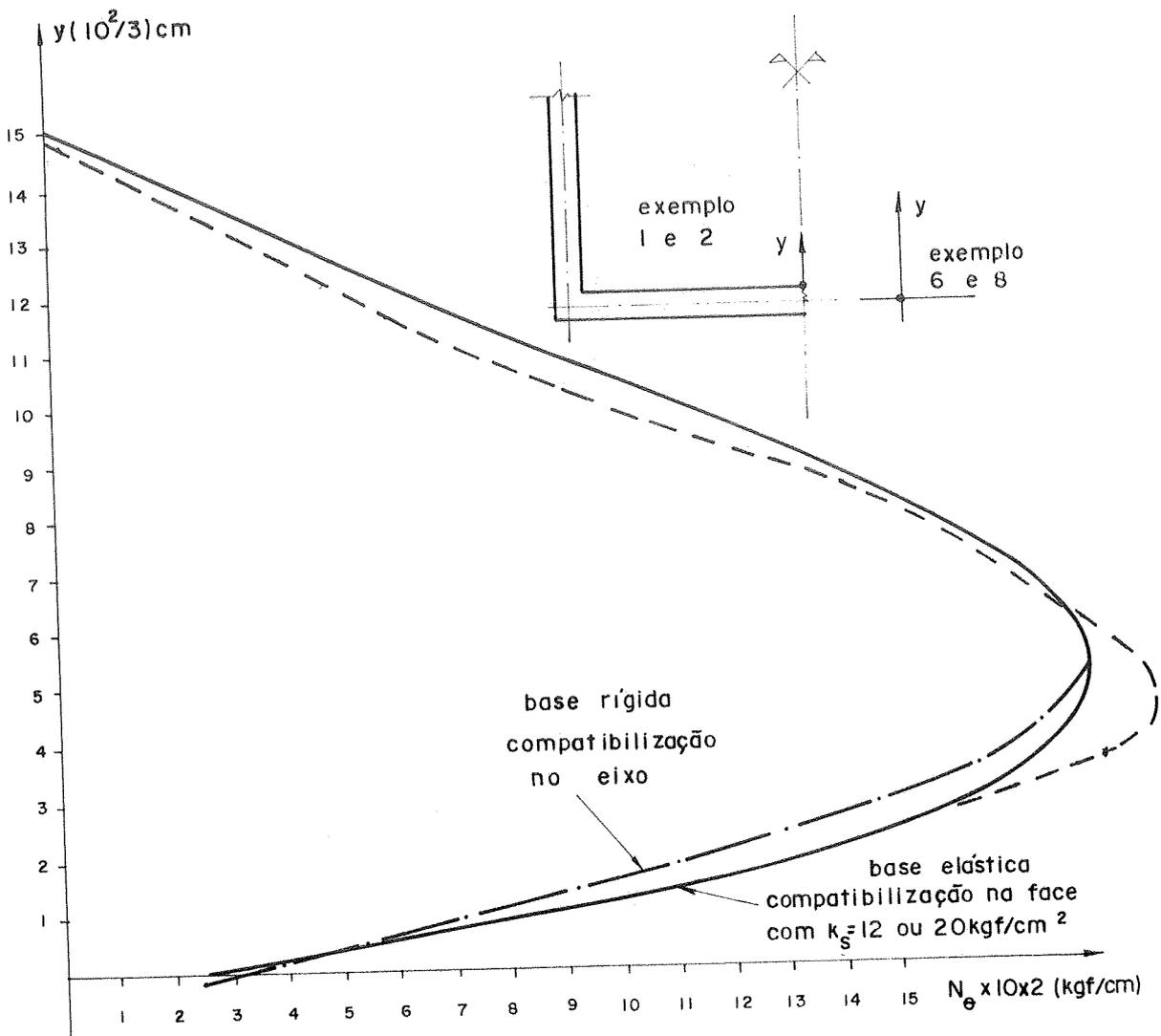


FIG. 10.1.a - Diagrama de N_θ (kgf/cm)

Convenção:

- - Refere-se aos exemplos 1 e 2
- - - - - - - Refere-se aos exemplos 6 e 8
- . - . - . - Hampe (B16), vol 2 pág. 237

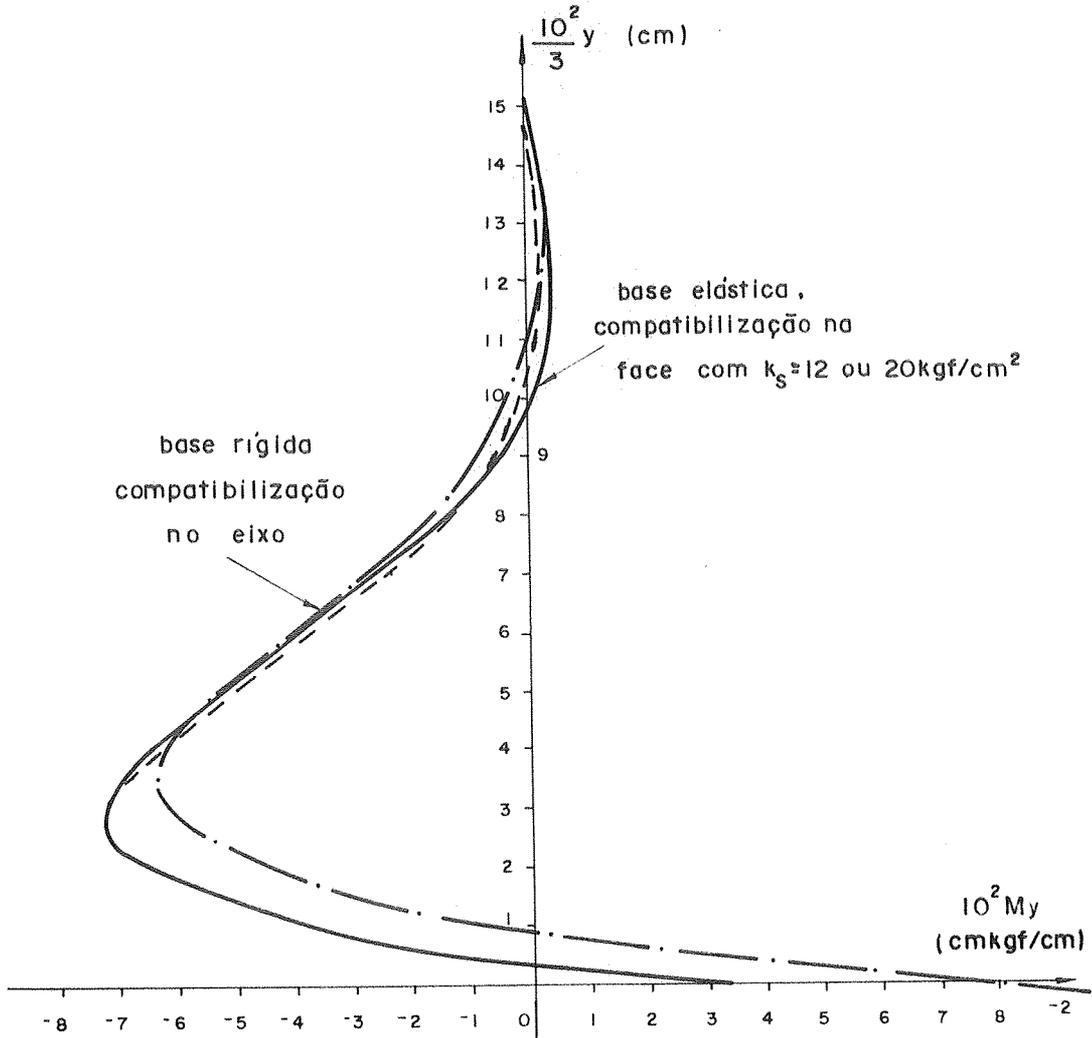


FIG. 10.1.b - Diagrama de M_y (cm kgf/cm)

Convenção:

- - Refere-se aos exemplos 1 e 2
- . - . - - - - - Refere-se aos exemplos 6 e 8
- - - - - Hampe (B16), vol 2 pág. 237

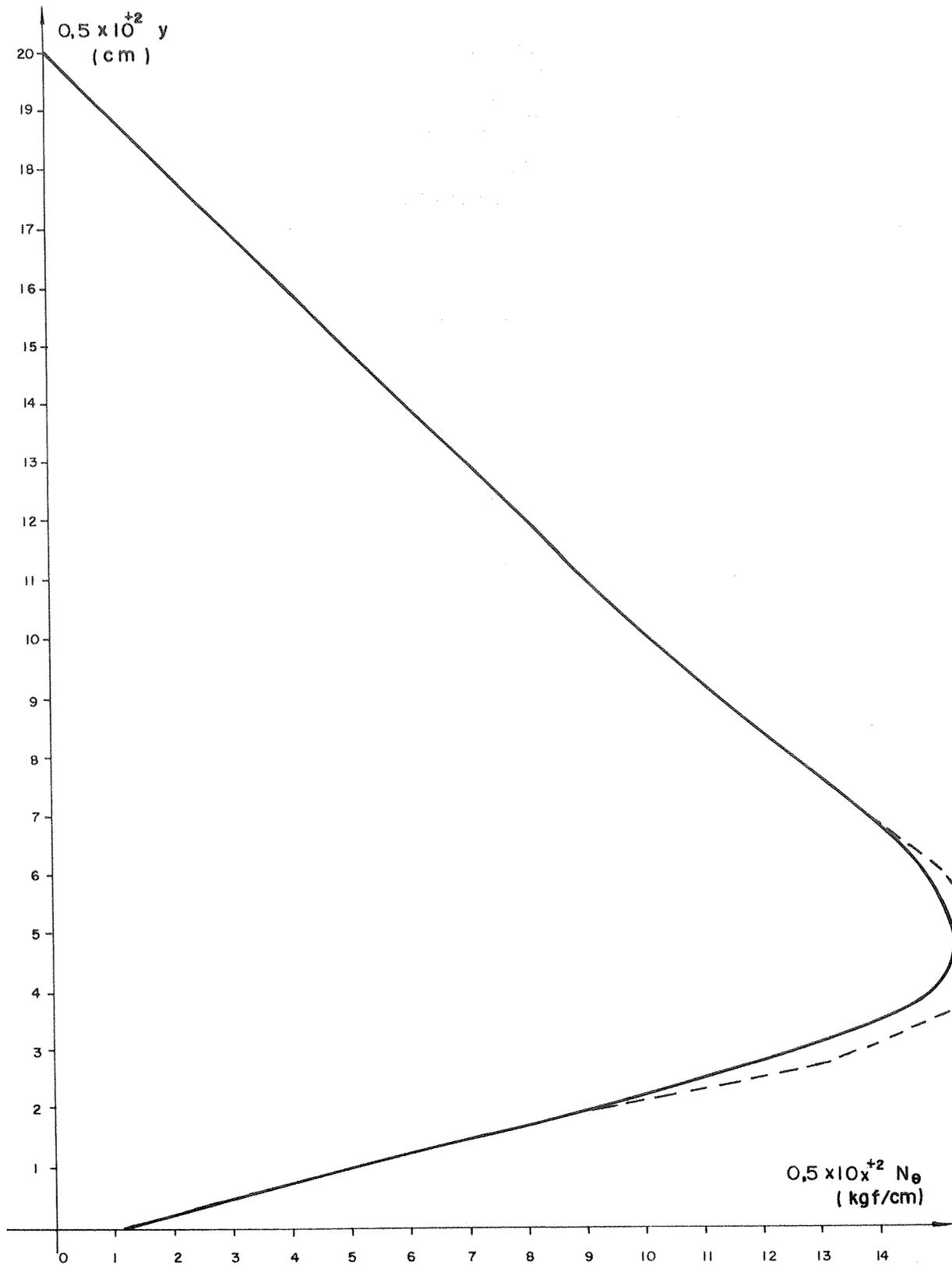


FIG. 10.3.a - Diagrama de N_θ (kgf/cm)

Convenção:

———— - Refere-se ao exemplo 4

----- - Martinelli et all (B21) pág. 2.45

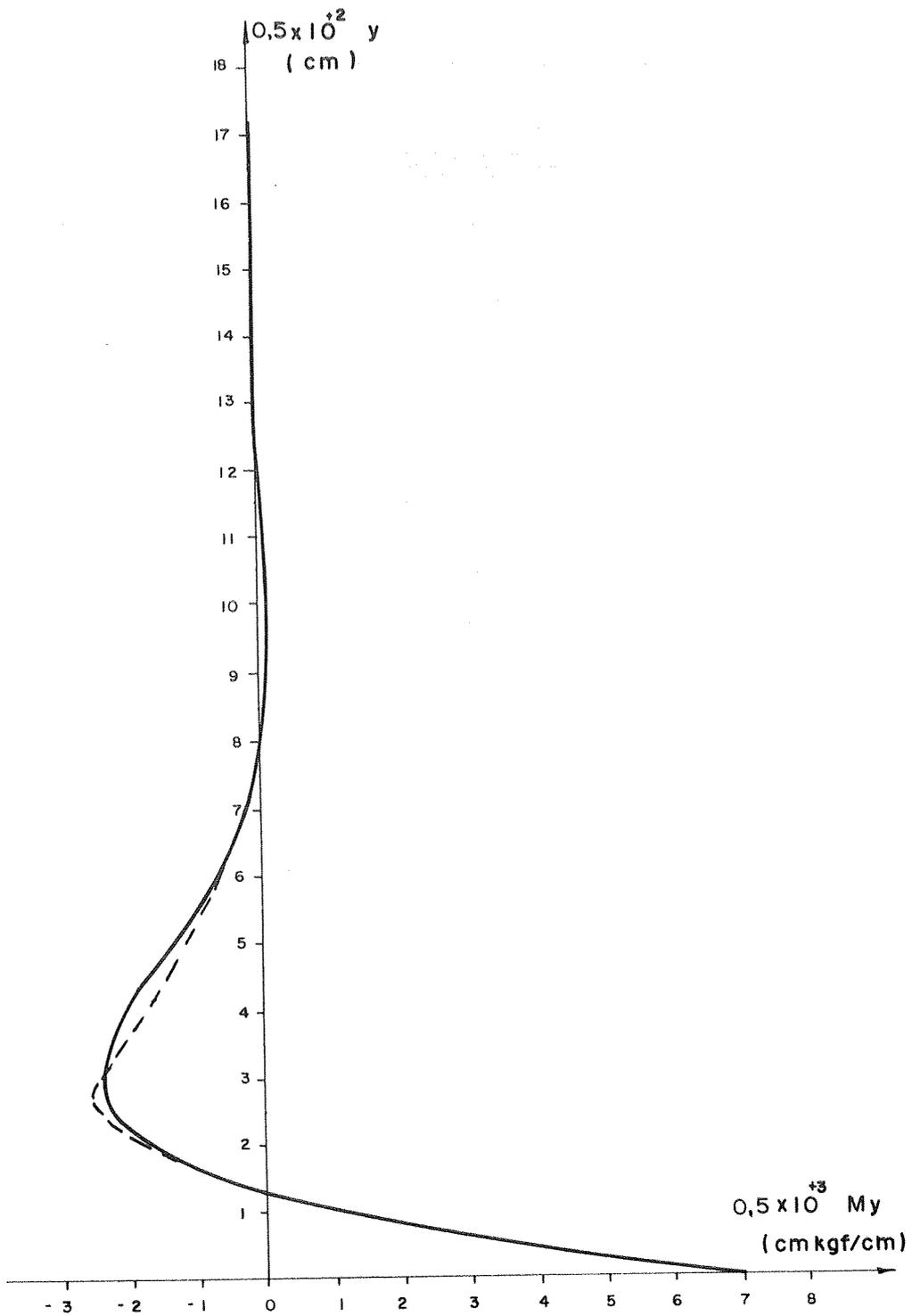


FIG. 10.3.b - Diagrama de M_y (cm kgf/cm)

Convenção:

————— - Refere-se ao exemplo 4

----- - Martinelli et al (B21) pág. 2.45

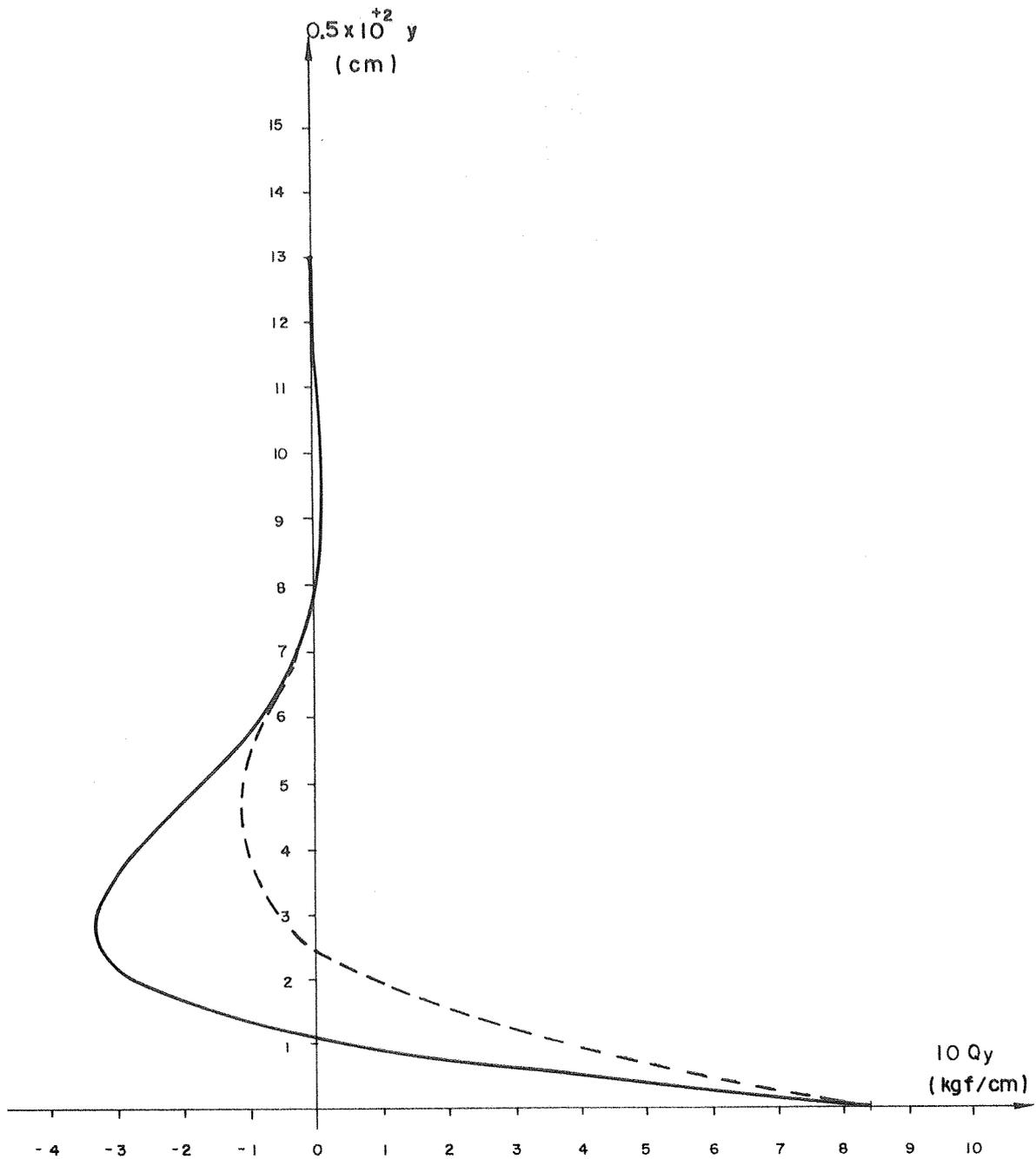


FIG. 10.3.c - Diagrama de Q_y (kgf/cm)

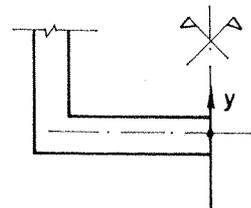
Convenção:

————— - Refere-se ao exemplo 4

----- - Martinelli et all (B21) pág. 2.45

| K _s | y | ESFORÇOS | | | K _s | y | ESFORÇOS | | |
|------------------------|--------|----------------|----------------|----------------|------------------------|--------|----------------|----------------|----------------|
| | | N _e | M _y | Q _y | | | N _e | M _y | Q _y |
| (kgf/cm ³) | (cm) | (kgf/cm) | (cmkgf/cm) | (kgf/cm) | (kgf/cm ³) | (cm) | (kgf/cm) | (cmkgf/cm) | (kgf/cm) |
| 12,00 | 0,00 | 40,90 | 419,00 | -29,00 | 12,00 | 171,70 | 389,70 | -533,90 | +4,45 |
| 20,00 | | 41,40 | 465,00 | -29,40 | 20,00 | | 387,80 | -533,80 | +4,40 |
| 30,00 | | 41,85 | 503,00 | -29,80 | 30,00 | | 386,10 | -533,70 | +4,30 |
| 50,00 | | 42,45 | 554,00 | -31,00 | 50,00 | | 384,00 | -533,60 | +4,20 |
| 12,00 | 5,05 | 57,70 | 280,00 | -26,70 | 12,00 | 186,85 | 387,30 | -465,80 | +4,50 |
| 20,00 | | 57,80 | 322,20 | -27,00 | 20,00 | | 385,60 | -466,80 | +4,45 |
| 30,00 | | 57,85 | 358,70 | -27,40 | 30,00 | | 384,20 | -467,70 | +4,39 |
| 50,00 | | 57,90 | 407,00 | -27,90 | 50,00 | | 382,30 | -468,80 | +4,32 |
| 12,00 | 15,15 | 92,10 | 31,90 | -22,30 | 12,00 | 348,45 | 210,90 | -2,30 | +0,98 |
| 20,00 | | 91,35 | 71,10 | -22,70 | 20,00 | | 210,90 | -4,00 | +1,00 |
| 30,00 | | 90,70 | 104,20 | -23,00 | 30,00 | | 210,90 | -5,40 | +1,00 |
| 50,00 | | 89,90 | 148,10 | -23,50 | 50,00 | | 211,00 | -7,30 | +1,00 |
| 12,00 | 20,20 | 109,40 | -75,50 | -20,30 | 12,00 | 353,50 | 203,8 | 2,45 | +0,90 |
| 20,00 | | 108,30 | -38,30 | -20,70 | 20,00 | | 203,8 | 0,83 | +0,90 |
| 30,00 | | 107,40 | -7,00 | -21,00 | 30,00 | | 203,8 | -0,54 | +0,92 |
| 50,00 | | 106,20 | -34,70 | -21,40 | 50,00 | | 203,8 | -2,36 | +0,94 |
| 12,00 | 95,95 | 322,40 | -743,20 | -0,60 | 12,00 | 425,25 | 99,00 | 32,10 | +0,03 |
| 20,00 | | 319,50 | -731,00 | -0,80 | 20,00 | | 99,20 | 31,55 | +0,04 |
| 30,00 | | 315,20 | -722,60 | -0,95 | 30,00 | | 99,30 | 31,10 | +0,05 |
| 50,00 | | 313,70 | -707,10 | -1,30 | 50,00 | | 94,40 | 30,50 | +0,06 |
| 12,00 | 101,00 | 331,60 | -744,40 | +0,11 | 12,00 | 434,30 | 92,30 | 32,20 | 0,00 |
| 20,00 | | 328,70 | -733,40 | -0,12 | 20,00 | | 92,40 | 31,70 | +0,01 |
| 30,00 | | 326,20 | -724,10 | -0,32 | 30,00 | | 92,50 | 31,30 | +0,02 |
| 50,00 | | 323,00 | -712,00 | -0,60 | 50,00 | | 92,70 | 30,70 | +0,03 |
| 12,00 | 106,50 | 336,20 | -737,00 | +0,80 | 12,00 | 439,35 | 85,55 | 32,00 | -0,03 |
| 20,00 | | 335,10 | -728,40 | +0,95 | 20,00 | | 85,70 | 31,70 | -0,02 |
| 30,00 | | 334,80 | -724,10 | +0,33 | 30,00 | | 85,80 | 31,30 | -0,01 |
| 50,00 | | 331,60 | -713,00 | +0,08 | 50,00 | | 85,90 | 30,80 | 0,00 |
| 12,00 | 111,00 | 347,90 | -737,10 | +1,30 | 12,00 | 505,00 | 0,60 | 23,25 | -0,20 |
| 20,00 | | 345,10 | -728,30 | +1,09 | 20,00 | | 0,70 | 23,20 | -0,20 |
| 30,00 | | 343,20 | -723,80 | +0,60 | 30,00 | | 0,80 | 23,20 | -0,20 |
| 50,00 | | 341,60 | -710,40 | +0,55 | 50,00 | | 0,85 | 23,20 | -0,20 |

TABELA 10.1 - Esforços finais - Exemplo 7.



3. COMPARAÇÃO COM EXEMPLOS DISPONÍVEIS NA LITERATURA

Os resultados obtidos mostram excelente concordância com os exemplos disponíveis na literatura, tanto para reservatórios assentes em base rígida (exemplos números 3 e 4), como para tanques sobre base elástica (exemplos números 1 e 2), como se vê na Tabela 10.2.

| EXEMPLO | Solução deste trabalho | | Solução original | | |
|---------|-------------------------------|----------------------------|------------------|---------------|-------------------------|
| | M ₁ (cm kgf/cm) | H ₁ (kgf/cm) | M (cm kgf/cm) | H (kgf/cm) | REFERÊNCIA |
| 1 | 290,0 | 26,8 | 296,2 | 26,9 | (B16) vol. 2 , pág. 235 |
| 2 | 334,3 | 27,2 | 504,0 | * | (B16) vol. 2 , pág. 237 |
| 3 | 153,8 | 23,1 | 147,0 | 21,0 | (B1) pág. 79 |
| 4 | 3576,8 | 83,6 | 3520,0 | 82,8 | (B21) pág. 259 |

TABELA 10.2 - Esforços na junta entre a parede e o fundo do reservatório.

OBS.: * O autor não fornece o valor deste esforço.

A discordância observada no exemplo número 2 só pode ser atribuída a um erro de Hampe pois, resolvendo-se o problema diretamente pelo método das forças, segundo sua própria notação, de acordo com as indicações por ele fornecidas, [B16], vol. 2, págs. 231/237, tem-se:

$$CE = 20 \text{ kgf/cm}^3$$

$$B = 0,1799 \times 10^8 \text{ kgf/cm}$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{B}{CE}} = \sqrt[4]{\frac{0,1799 \times 10^8}{20}} = 30,7964 \text{ cm}$$

$$r = 1208 \text{ cm}$$

$$\alpha_1 = \frac{r}{\lambda} = \frac{1208}{30,7964} = 39,225 \approx 39$$

$$\frac{\lambda}{B} = \frac{30,7964}{0,1799 \times 10^8} = 1,71186 \times 10^{-6}$$

$$\frac{1-\nu}{\alpha_1} = \frac{5}{6 \times 39} = 0,02136$$

Das Tabelas III, vol. 4, págs, 270 e 276,

$$G_1(\alpha_1) = -0,27942 \times 10^{11}$$

$$G_2(\alpha_1) = -0,53852 \times 10^{11}$$

$$G'_1(\alpha_1) = -0,57481 \times 10^{11}$$

$$G'_2(\alpha_1) = -0,17626 \times 10^{11}$$

tendo-se, então,

$$G_2 G'_1 = 3,09546 \times 10^{21}$$

$$- G_1 G'_2 = -0,49250 \times 10^{21}$$

$$A = G_2 G'_1 - G_1 G'_2 = 2,60296 \times 10^{21}$$

$$(G'_1)^2 = 3,30406 \times 10^{21}$$

$$(G'_2)^2 = 0,310675 \times 10^{21}$$

$$B = (G'_1)^2 + (G'_2)^2 = 3,61474 \times 10^{21}$$

$$N = A - \frac{1-\nu}{\alpha_1} B = (2,60296 - 0,02136 \times 3,61474) \times 10^{21}$$

$$N = 2,52575 \times 10^{21}$$

$$W'_P = \chi^{(M)}_P = \frac{\lambda}{B} \frac{(G'_1)^2 + (G'_2)^2}{N} = 1,71186 \times 10^{-6} \times \frac{3,61474 \times 10^{21}}{2,52575 \times 10^{21}}$$

$$W'_P = \chi^{(M)}_P = 2,45 \times 10^{-6}$$

$$\chi^{(Q)}_P = W^{(M)} = \chi^{(M)} \frac{h}{2} = 5 \chi^{(M)} = 1,2225 \times 10^{-5}$$

$$W^{(Q)}_P = \frac{r}{Eh} (1-\nu) + \frac{h^2}{4} \chi^{(M)}$$

$$W_P^{(Q)} = \frac{1208}{2,1 \times 10^5 \times 10} \times \frac{5}{6} + 5 \times 1,2225 \times 10^{-5}$$

$$W_P^{(Q)} = 4,79365 \times 10^{-4} + 6,1125 \times 10^{-5} = 5,405 \times 10^{-4}$$

$$W^{(Q)} = 5,405 \times 10^{-4} + 0,81 \times 10^{-2} = 8,6405 \times 10^{-3}$$

$$\chi^{(Q)} = 1,2225 \times 10^{-5} - 0,765 \times 10^{-4} = -6,4275 \times 10^{-5}$$

$$\chi^{(M)} = 2,45 \times 10^{-6} + 1,447 \times 10^{-6} = 3,897 \times 10^{-6}$$

Para a determinação de M e H, tem-se então o sistema:

$$8,6405 \times 10^{-3} Q - 6,4275 \times 10^{-5} M = 0,214$$

$$-6,4275 \times 10^{-5} Q + 3,897 \times 10^{-6} M = -0,0428 \times 10^{-2}$$

cuja resolução fornece

$$M = 340,43 \text{ cm kgf/cm}$$

$$Q = 27,30 \text{ kgf/cm}$$

valores estes que confirmam a solução obtida neste trabalho, com erro inferior a 2%. Tem-se ainda na primeira junta do reservatório $N_0 = 55 \text{ kgf/cm}$ enquanto Hampe (B16) vol 2 pág. 238 apresenta 53 kgf/cm . Os valores máximos de N_0 são respectivamente 387 kgf/cm (a 1,65 da junta) e $\sim 375 \text{ kgf/cm}$ (a cerca também de 1,65 da junta).

Todos estes exemplos foram calculados considerando-se um único elemento na parede do reservatório, com a matriz de rigidez dada por (5.4), isto é, considerando-se a casca longa. O parâmetro βH de amortecimento dos efeitos de flexão vale 4,72 nos exemplos números 1 e 2; aproximadamente 70 no terceiro e 9,2 no quarto. Vê-se que, com efeito, $\beta H > 4$ em todos os casos.

4. COERÊNCIA DOS RESULTADOS

No exemplo número 5 foi calculado o mesmo reservatório do terceiro problema, considerando-se a parede com posta de três elementos, com alturas de 50cm, 1m e 10,50m respectivamente, utilizando-se, para cada elemento, a matriz de rigidez (5.3), obtendo-se na junta com a placa de fundo os mesmos valores que constam da Tabela 10.2. Tem-se aqui os seguintes valores para βL : 2,9 no primeiro elemento, 5,83 no segundo e 61,2 no terceiro. Todos os elementos foram considerados como casca curta.

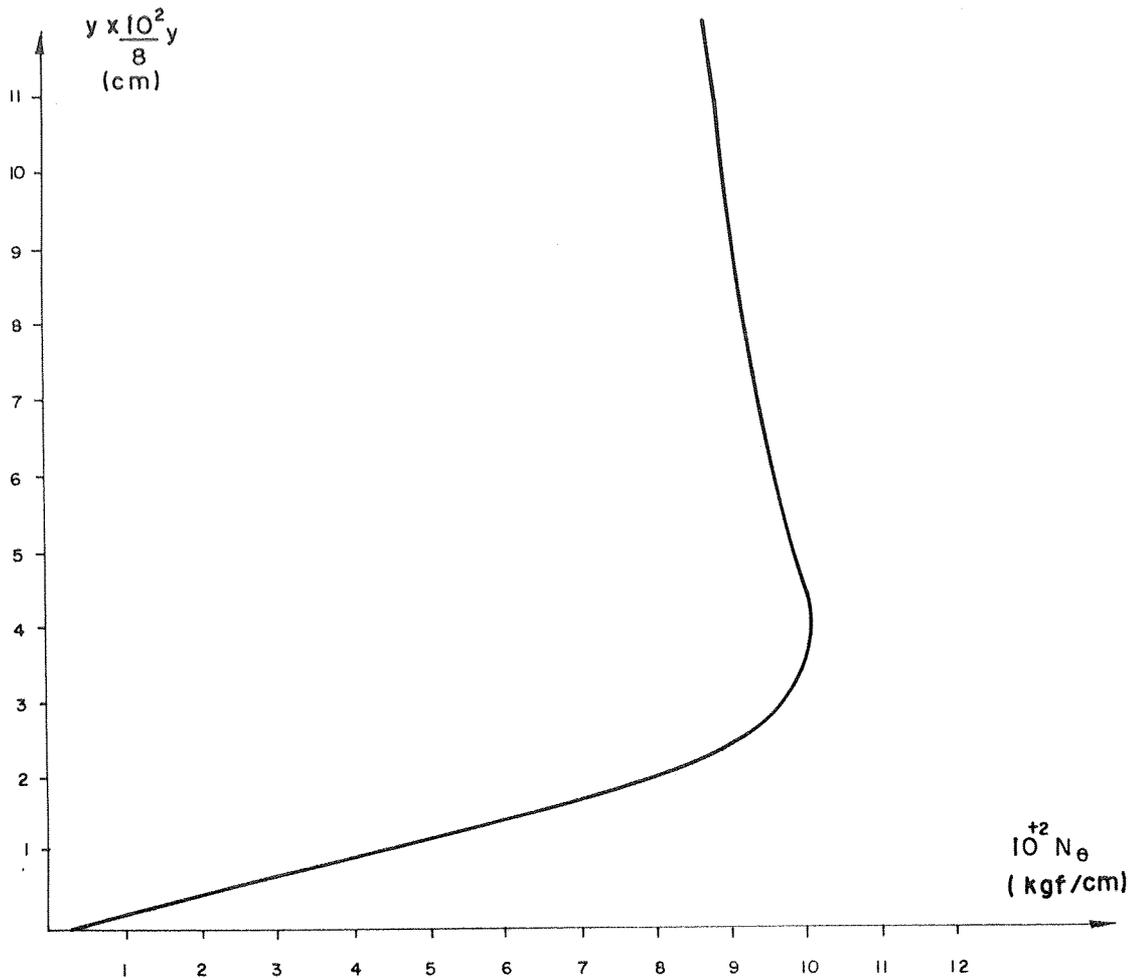


FIG. 10.4 - Detalhe do diagrama de flexão. Exemplos números 3 e 5.

Na Fig. 10.4 e apresentado o gráfico de N_{θ} correspondente à parte inferior da parede do reservatório, para os exemplos n.ºs 3 e 5. Da comparação com os valores indicados por Affonso (B1), pág. 81, vê-se que as soluções são concordes.

5. RESERVATÓRIOS ASSENTES SOBRE BASE RÍGIDA

No Capítulo IX, mostrou-se como contornar o problema que a aproximação de Girkmann acarreta, por introduzir termos não lineares no sistema de equações. A solução é obtida iterativamente, com excelente convergência, chegando-se à largura b da coroa fletida já na terceira iteração, com erro inferior a 2%.

No exemplo número 3, tem-se $b = 19,1\text{cm}$. Affonso [B1], pág. 84, fornece 16cm . No entanto, calculando $b = 2\sqrt{M/q}$, com $M = 147\text{ cmkgf/cm}$ e $q = 1,686\text{ kgf/cm}^2$ (valores indicados pela autora), tem-se $b = 18,7\text{cm}$.

No exemplo número 4, o programa acusa $b = 116,7\text{cm}$, enquanto Martinelli et.al. [B21], pág. 2.59, dá $b = 119\text{cm}$.

No exemplo número 6 é resolvido o mesmo reservatório dos exemplos números 1 e 2, considerando porém, apoiado em base rígida e tomando-se os esforços da primeira junta ao nível da superfície média da placa de fundo. Foi obtido para b o valor de $85,7\text{cm}$.

Para efeito de comparação com os resultados do problema número 7, fornecem-se ainda os esforços na primeira junta do exemplo número 6.

$$M_1 = 973,3\text{ cmkgf/cm}$$

$$H_1 = 33,9\text{ kgf/cm}$$

6. RESERVATÓRIOS SOBRE BASE ELÁSTICA

No exemplo número 7 é resolvido o mesmo reservatório dos exemplos números 1 e 2, para diversos valores do coeficiente elástico do solo, considerando-se os esforços da primeira junta M_1 e H_1 atuando no nível do plano médio da placa de fundo. Na Tabela 10.3 são fornecidos estes valores e também os esforços M e Q na parede cilíndrica, ao nível da face superior da placa de fundo.

| COEFICIENTE ELÁSTICO K_s (kgf/cm ³) | ESFORÇOS NA PRIMEIRA JUNTA DO RESERVATÓRIO | | | | LARGURA DA COROA b (cm) |
|---|--|-------------------|--------------------|-----------------|---------------------------------|
| | no eixo | | na face | | |
| | M_1 (cm kgf/cm) | H_1 (kgf/cm) | M (cm kgf/cm) | Q (kgf/cm) | |
| 12 | 419,0 | 29,0 | 280,0 | 26,7 | 275 |
| 20 | 465,0 | 29,4 | 322,2 | 27,0 | 240 |
| 30 | 503,0 | 29,8 | 358,7 | 27,4 | 220 |
| 50 | 554,0 | 31,0 | 407,0 | 27,9 | 195 |

TABELA 10.3 - Influência do coeficiente elástico do solo. Exemplo número 7.

A comparação entre os valores de M e Q para $K_s = 12 \text{ kgf/cm}^3$ e 20 kgf/cm^3 da Tabela 10.2, com os esforços M_1 e H_1 dos exemplos números 1 e 2 (Tabela 10.2) mostra uma boa concordância, indicando que os esforços excêntricos na junta podem ser obtidos diretamente dos diagramas de momento fletor e esforço cortante ao longo da parede cilíndrica, no nível superior da placa de fundo do reservatório.

Na Tabela 10.3 é fornecida ainda a largura aproximada da coroa fletida, tomando-se como tal a distância radial, medida a contar da borda da placa, a partir da qual o momento fletor da placa troca de sinal pela segunda vez, assumindo valores desprezíveis.

Pelos gráficos da Fig. 10.5, observa-se que a largura b da coroa fletida diminui quando K_s cresce, e tende a um valor que corresponde a aproximadamente o dobro da largura fornecida por Girkmann (cfr. exemplo número 6), enquanto que o momento fletor da primeira junta cresce com K_s , tendendo a aproximadamente 70% do valor obtido na base rígida

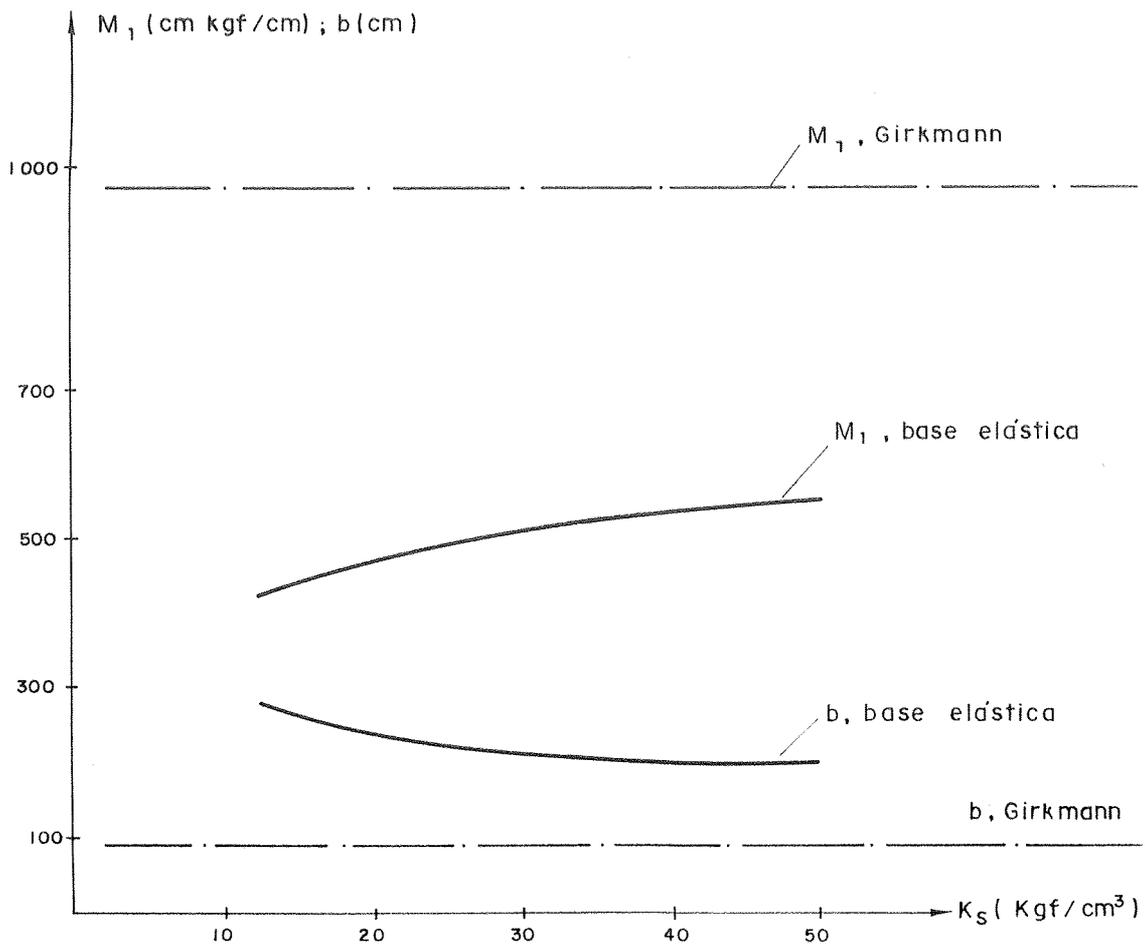


FIG. 10.5 - Variação de M_1 e b com K_s - Exemplo número 7.

CONCLUSÕES

No capítulo X foram apresentados diversos exemplos, para verificar a coerência da formulação adotada e a operação do programa FORTRAN escrito para resolução do problema.

Assim, os exemplos 1 e 2 foram tirados de Hampe (B16), o exemplo 3 de Affonso (B1) e o exemplo 4 de Martinelli et al (B21). Os dois primeiros foram calculados considerando base elástica e os outros dois bases rígidas. A Tabela 10.2 mostra a comparação entre os resultados aqui obtidos e aqueles apresentados pelos autores acima mencionados. A discrepância observada no exemplo 2 já foi comentada no item 3 do capítulo X, onde se prova que o valor fornecido por Hampe (B16) está incorreto. Nos demais exemplos, os resultados obtidos mostram excelente concordância com os valores fornecidos pelos autores citados.

Não se encontrando, para comparação, exemplos disponíveis na literatura, referentes a cilíndricos curtos, ou compostos de anéis, optou-se por resolver o mesmo problema do exemplo nº 3, considerando-se a parede composta de três elementos, com alturas de 50cm, 1m e 10,50m respectivamente, e tratando-se todos os elementos como casca curta. A comparação entre as duas soluções mostrou que são obtidos os mesmos resultados nos dois casos.

Nos exemplos 6 e 8 é resolvido novamente o problema do exemplo 1, considerando-se porém o reservatório apoiado sobre base rígida. No exemplo 6 é usada a matriz de rigidez completa da parede e no exemplo 8 foram zerados os elementos desta matriz que traduzem a influência de uma borda do elemento sobre a outra. Também aqui os resultados obtidos foram os mesmos nos dois casos.

A influência do coeficiente de recalque do solo sobre os esforços internos na parede do reservatório é ana-

lizado no exemplo 7 e no item 6 do Capítulo X, tomando-se valores de $K_s = 12 ; 20 ; 30$ e 50 kgf/cm^3 . Dos resultados constantes da Tabela 10.1 vê-se que esta influência é bastante pequena tanto sobre o esforço anular de tração N_θ , como sobre a força cortante, fazendo-se sentir, porém, fortemente sobre o momento fletor M_y até a altura de aproximadamente um metro a contar do fundo do reservatório, e diluindo-se a partir daí, devido ao amortecimento típico da casca cilíndrica longa.

Nota-se ainda, que o valor do momento fletor, na junta entre a parede cilíndrica e a placa de fundo do reservatório, cresce com K_s , tendendo a se estabilizar quando $K_s \rightarrow \infty$ em aproximadamente 70% do valor obtido, usando-se a aproximação de Girkmann para base rígida (Cfr. ex.6). Igualmente, verificando-se a largura da coroa fletida no fundo do reservatório, chega-se a cerca do dobro do valor proposto por Girkmann, quando se define esta largura excluindo-se a região central da placa, em que as deformações w se tornam constantes.

Observou-se, porém, que, definindo-se a largura da coroa fletida como a distância medida no diagrama de momentos radiais da placa de fundo, a contar da junta com a parede, até o ponto em que o fletor muda de sinal pela primeira vez, o valor de b assim determinando coincide com aquele proposto por Girkmann.

Pode-se explicar fisicamente a razão da aproximação de Girkmann fornecer valores um pouco maiores para o momento da primeira junta, do que aqueles obtidos pelo processo de limite acima mencionado.

Da fig. 4.1., vê-se que, na idealização proposta por Girkmann, a rotação φ imposta à placa deve ser suficiente para anular o momento que ocorre na outra extremidade da viga substituta, em decorrência da carga q . Admitindo-se o deslocamento da placa com relação aos apoios A e B em todo trecho de largura b , nenhuma força se opõe à flexão da viga ao longo de seu comprimento b .

Uma fundação perfeitamente rígida corresponde a um valor de K_s infinito. Da equação (4.8), vê-se que se $K_s \rightarrow \infty$, deve-se ter $w \rightarrow 0$, pois o produto $K_s w$ fornece a reação do apoio elástico e, portanto

$$\lim_{K_s \rightarrow \infty} (K_s w) = \lim_{K_s \rightarrow \infty} p = q$$

Assim, na placa sobre apoio elástico, pode-se imaginar, de (4.13), que a atuação do apoio elástico corresponde a uma redução do carregamento q , ou seja a rotação φ_α imposta à placa, precisa apenas vencer uma carga que é inferior a q ; em outras palavras, a atuação do apoio elástico se opõe à flexão da placa, inclusive no trecho de largura b .

Consequentemente, o apoio elástico tende a aliviar a flexão da placa, reduzindo assim o momento M_1 da primeira junta do reservatório. No entanto, são ainda incipientes os resultados disponíveis, para que se possam elaborar recomendações de projeto.

BIBLIOGRAFIA

- B.1 - AFFONSO, S. - Tanques cilíndricos soldados - PUC/USIMEC, fascículo nº 10, 1972.
- B.2 - BAKER, E.; KOVALEVSKY, L.; RISH, F. - Structural analysis of shells - McGraw-Hill, New York, 1972.
- B.3 - BELLUZI, O. - Ciência de la construccion - v.I e III, Aguilar, Madrid.
- B.4 - BENEVOLO, N. - Flambagem das peças retas - PUC/USIMEC, fascículo nº 3, 1972.
- B.5 - BEYER, K. - Estatica del hormigon armado - v. 2, Nigar, Buenos Aires, 1959.
- B.6 - BILLINGTON, D.P. - Thin shell concrete structures - McGraw-Hill, New York, 1965.
- B.7 - BORN, J. - Pracktiche schalenstatik - v. 1, W. Ernest & Sohn, Berlin, 1968.
- B.8 - BOWLES, J. - Foundation analysis and design - McGraw-Hill, New York, 1968.
- B.9 - CIESIELSKI, R.; MITZEL, A.; STACHURSKI, W.; SUWALSKI, J.; ZMUDZINSKI, Z. - Behälter. Bunker. Silos. Schornstein. Fernsehürme und Freileitungsmaste. - W. Ernest & Sohn, Berlin, 1970.
- B.10- FISCHER, L. - Theory and practice of shell structures - W. Ernest & Sohn, Berlin, 1968.
- B.11- FLÜGGE, W. - Stresses in shells - Springer-Verlag, Berlin, 1960.
- B.12- GIRKMANN, K. - Flächentragwerke - 6^a ed., Springer-Verlag, Viena, 1959.

- B.13 - GRAVINA, P. - Cascas de revolução - São Paulo, 1957.
- B.14 - GREKOW, A.; ISNARD, V.; MROZOWICZ, P. - Formulário del Ingeniero - Urmo, Espanha, 1971.
- B.15 - HAAS, A.M. - Design of thin concrete shells - v. 2, John Wiley & Sons, New York, 1967.
- B.16 - HAMPE, E. - Statik rotationssymmetrischer flächen-tragwerke - v. 1-4, Veb-Verlag, Berlin, 1967.
- B.17 - HARTDOG, D. - Advanced strenght of materials - Mc Graw-Hill, New York, 1952.
- B.18 - KOLLÁR, L.; DULASKA, E. - Schalenbeulung - Werner-Verlag, Düsseldorf, 1975.
- B.19 - KRAUS, H. - Thin elastic shells - John Wiley & Sons, New York, 1967.
- B.20 - MANNING, G. - Reinforced concrete reservoirs and tanks - Butler & Tanner, London, 1972.
- B.21 - MARTINELLI, D.A.O.; COSTARDI, N.; PROENÇA, S.P.B.; MIGLIORE JR., A.; PASTORE, M. - Introdução às estruturas em casca de revolução - Capítulo 2, EESC-USP, São Carlos, 1983.
- B.22 - MUKHANOV, K. - Design of metal structures - Mir Publishers, Moscow, 1968.
- B.23 - NOVOZHILOV, V. - Thin shell theory - Wolters Noordhoff, Groningen, 1970.
- B.24 - PFLÜGER, A. - Estatica elemental de las cascaras - EUDEBA, Buenos Aires, 1964.
- B.25 - REITMAN, G. - On the calculation of plates on an elastic foundation - Porceedings of the 4th All-Union Conference on Shells and Plates held at Erevan 24-31 October 1962, Translated from Russian, Jerusalem, 1966, págs. 766-771.
- B.26 - SCHLEICHER, F. - Kraisplatten auf elastischer unterlage - Springer-Verlag, Berlin, 1926.

- B.27 - TIMOSHENKO, S. - Theory of plates and shells - 2^a ed, McGraw-Hill, New York, 1959.
- B.28 - VARDANYAN, V. - On the theory of calculating plates on a elastic foundation - Proceedings of the 4th All-Union Conference on Shells and Plates held at Erevan 24-31 October 1962, Translated from Russian, Jerusalem, 1966, págs. 279-285.
- B.29 - VENTURINI, W.S. - Contribuição ao dimensionamento de reservatórios cilíndricos protendidos - Dissertação de mestrado, EESC-USP, São Carlos, 1977.
- B.30 - VOROVICH, I.; KOPASENKO, V. - Contact problem for foundations subject to bending strains - Proceedings of the 4th All-Union Conference on Shells and Plates held at Erevan 24-31 October 1962, Translated from Russian, Jerusalem, 1966, págs. 316-324.
- B.31 - WILBY, C. - Optimization of design of circular tanks - v. 63, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, London, 1977, págs. 921-924.
- B.32 - NB-2 - Cálculo e execução de pontes de concreto armado - ABNT, 1961.
- B.33 - NB-14 - Cálculo e execução de estruturas de aço - ABNT, 1968.
- B.34 - NB-599 - Forças devidas ao vento em edificações-procedimento, ABNT, 1978.
- B.35 - PNB-89 - Tanques soldados para armazenamento de petróleo e derivados - ABNT, 1961.
- B.36 - STD 650 - Welded steel tanks for oil storage - API, Ed de 1971.
- B.37 - STD 3050 - Construction procedures for float bottom ground storage tanks - API, Ed. de Jun. de 1968.
- B.38 - STD 9106-4 - Umbrella roofs - API, Rev. Jun. de 1969.
- B.39 - DIN 4119 - Tanques cilíndricos de aço não enterrados, bases de cálculo - Ed. de outubro de 1961.

A N E X O S

ANEXO 1 - FUNÇÕES $F_j(\xi)$ PARA A SOLUÇÃO DA CASCA CILÍNDRICA

No Capítulo III apresentou-se a solução da equação homogênea da casca cilíndrica. Pretende-se, neste Anexo, fornecer as funções $F_j(\xi)$ utilizadas na resolução das cascas cilíndricas circulares e que são dadas por Hampe [B 16], vol. 4. São elas:

$$F_1(\xi) = \sinh^2(\beta L \xi) - \sin^2(\beta L \xi)$$

$$F_2(\xi) = \sinh^2(\beta L \xi) + \sin^2(\beta L \xi)$$

$$F_3(\xi) = \sinh(\beta L \xi) \cos(\beta L \xi) + \sin(\beta L \xi) \cosh(\beta L \xi)$$

$$F_4(\xi) = \sinh(\beta L \xi) \cos(\beta L \xi) - \sin(\beta L \xi) \cosh(\beta L \xi)$$

$$F_5(\xi) = \sin^2(\beta L \xi)$$

$$F_6(\xi) = \sinh^2(\beta L \xi)$$

$$F_7(\xi) = \cosh(\beta L \xi) \cos(\beta L \xi)$$

$$F_8(\xi) = \sinh(\beta L \xi) \sin(\beta L \xi)$$

$$F_9(\xi) = \cosh(\beta L \xi) \sin(\beta L \xi) - \sinh(\beta L \xi) \cos(\beta L \xi)$$

$$F_{10}(\xi) = \cosh(\beta L \xi) \sin(\beta L \xi) + \sinh(\beta L \xi) \cos(\beta L \xi)$$

$$F_{11}(\xi) = \sin(\beta L \xi) \cos(\beta L \xi)$$

$$F_{12}(\xi) = \sinh(\beta L \xi) \cosh(\beta L \xi)$$

$$F_{13}(\xi) = \cosh(\beta L \xi) \cos(\beta L \xi) + \sinh(\beta L \xi) \sin(\beta L \xi)$$

$$F_{14}(\xi) = \cosh(\beta L \xi) \cos(\beta L \xi) - \sinh(\beta L \xi) \sin(\beta L \xi)$$

$$F_{15}(\xi) = \cosh(\beta L \xi) \sin(\beta L \xi)$$

$$F_{16}(\xi) = \sinh(\beta L \xi) \cos(\beta L \xi)$$

$$F_{17}(\xi) = \exp(-\beta L \xi) \cos(\beta L \xi)$$

$$F_{18}(\xi) = \exp(-\beta L \xi) \sin(\beta L \xi)$$

$$F_{19}(\xi) = \exp(-\beta L \xi) [\cos(\beta L \xi) + \sin(\beta L \xi)]$$

$$F_{20}(\xi) = \exp(-\beta L \xi) [\cos(\beta L \xi) - \sin(\beta L \xi)]$$

Os valores F_j que aparecem nas formulações correspondem aos valores da função $F_j(\beta L \xi)$, para $\xi = 1$.

ANEXO 2 - FUNÇÕES $z_i(\xi)$ USADAS PARA A RESOLUÇÃO DA PLACA EM BASE ELÁSTICA.

No Capítulo IV apresentou-se a solução da equação diferencial das placas colocada na forma da relação (4.19). Esta solução é dada pela equação (4.20), reescrita abaixo

$$\bar{w} = C_1 z_1(\xi) + C_2 z_2(\xi) + C_3 z_3(\xi) + C_4 z_4(\xi) \quad \dots (A.1)$$

Nesta expressão aparecem as funções $z_1(\xi)$, $z_2(\xi)$, $z_3(\xi)$ e $z_4(\xi)$, respectivamente funções cilíndricas de Bessel e Hankel. Para a placa circular da Fig. 4.5 (ver Capítulo IV), tem-se pela relação (4.24) que $C_3 = C_4 = 0$; assim sendo interessam apenas:

$$z_1(\xi) = 1 - \frac{(\xi/2)^4}{2!^2} + \frac{(\xi/2)^8}{4!^2} - \dots \dots \dots \quad \dots (A.2)$$

$$z_2(\xi) = (\xi/2)^2 - \frac{(\xi/2)^6}{3!^2} + \frac{(\xi/2)^{10}}{5!^2} - \dots \dots$$

Quando a variável ξ tende a valores muito grandes as expressões (A.2) passam a ser escritas na forma:

$$z_1(\xi) = c \cos \rho \quad \dots (A.3)$$

$$z_2(\xi) = -c \sen \rho$$

sendo

$$c = \frac{e^{\xi/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi\xi}} \quad \dots (A.4)$$

$$\rho = \frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}$$

Por outro lado, nas expressões (4.23) aparecem

$z_1'(\xi)$ e $z_2'(\xi)$, que para valores pequenos da variável ξ são as derivadas das equações (A.2) e para valores grandes,

$$\begin{aligned} z_1'(\xi) &= \frac{c}{\sqrt{2}} (\cos\rho - \operatorname{sen}\rho) \\ z_2'(\xi) &= -\frac{c}{\sqrt{2}} (\cos\rho + \operatorname{sen}\rho) \end{aligned} \quad \dots (A.5)$$

onde c e ρ são dados pelas relações (A.4).

Cabe ressaltar que tomou-se como referência para o tamanho da variável ξ , pequeno ($\xi < 9$) ou grande ($\xi \geq 9$), tendo em vista a Tabela apresentada em Hampe [B16] vol 4. Deve-se lembrar também que pela equação (4.17) tem-se $\xi = \frac{r}{\lambda}$

ANEXO 3 - LISTAGEM