

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Estruturas

SOBRE O EMPREGO DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO EM
PROBLEMAS ELÁSTICOS BIDIMENSIONAIS

José Carlos Gil Rodríguez

São Carlos, 1986

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

SOBRE O EMPREGO DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO EM
PROBLEMAS ELÁSTICOS BIDIMENSIONAIS

Eng. José Carlos Gil Rodríguez

Comissão Examinadora

Suplentes

Titulares

Mario Pinotti Junior

Roberto K. Nakaguma

Helena M. C. Carmo Antunes

Hermano de Souza Ribeiro

Wilson Sergio Venturini

(Orientador)

SÃO CARLOS, MAIO DE 1986

Aos meus pais e irmãs, cujo car
inho e apoio sempre senti, mesmo
quando o tempo e a distância pre
tendiam nos separar.

À Família Pezzolo, pelas inúmeras
alegrias que passei com eles.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Wilson Sergio Venturini pela orientação do presente trabalho com tanto interesse e dedicação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES que mediante a Coordenadoria de Cooperação Internacional concedeu a bolsa de estudos que possibilitou a execução deste trabalho.

Ao Departamento de Estruturas pela colaboração prestada.

Ao CPD - Centro de Processamento de Dados em cujos equipamentos foi desenvolvida grande parte deste trabalho.

A todos os amigos em cuja convivência encontrei o apoio necessário para a realização destes estudos.

À Srta. Silvana Flores e ao Sr. Rui Roberto Casale pela dedicação com que datilografaram este trabalho e à Sra. Sylvia Helena Morette Villani por fazer os desenhos que ilustram esta dissertação.

À bibliotecária Neide Goi pela colaboração prestada ao revisar e orientar a colocação dos dados contidos nas referências bibliográficas.

RESUMO

A formulação do Método dos Elementos de Contorno é aplicada na resolução de problemas de elasticidade linear bidimensional. É usada a aproximação linear para representar a forma e os parâmetros deslocamento e força de superfície do problema. É introduzido o elemento descontínuo cujos pontos nodais são deslocados para dentro do elemento, evitando assim os nós com descontinuidade das forças de superfície. O elemento deduzido tem a característica de permitir a geração de uma rede mista formada tanto por elementos contínuos como descontínuos. São feitas análises para avaliar o desempenho dos elementos descontínuos e seus resultados são comparados com aqueles obtidos com o emprego de equações extras geralmente usadas para resolver os casos de descontinuidade. Outras análises feitas neste trabalho incluem a otimização na definição do número de pontos de integração e a localização do nó dentro do elemento descontínuo. Como consequência da implantação no programa de um sistema de resolução de equações por blocos, avalia-se também a conveniência da subdivisão do domínio em subregiões visando melhoras de aspecto computacional.

ABSTRACT

The Boundary Element Method is applied to the resolution of two-dimensional linear-elasticity problems. A linear variation is used to represent the shape, the tractions and displacements of the problem. A discontinuous element is introduced with its nodal points removed from the element ends in order to avoid nodes having traction discontinuity. The element here derived has properties that permit to establish a mixed discretization being formed with continuous and discontinuous elements. Analyses are carried out to evaluate the performance of the discontinuous elements and the results are compared with those obtained using the extra-conditions commonly employed to resolve discontinuity problems. Other analyses performed in this work include a optimized definition of the number of integration points and the appropriate location of the node in discontinuous elements. A block equation solver is adapted to the program and for that reason is also evaluated the convenience of dividing the domain into subregions trying to get computational improvements.

S U M Á R I O

I - INTRODUÇÃO.....	1
II - FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA ELAS <u>TICIDADE LINEAR</u>	7
2.1 - CONCEITOS DE ELASTICIDADE LINEAR.....	7
2.1.1 - Equações Básicas.....	7
2.1.2 - Estado plano de Tensão e Deformação... 14	
2.2 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL.....	15
2.3 - EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO.....	17
2.3.1 - Equação Integral de Contorno para Pon- tos no Interior.....	17
2.3.2 - Equação Integral para Pontos no Con- torno.....	20
2.3.3 - A Equação Integral de Contorno como uma Formulação Derivada dos Resíduos Pon- derados.....	23
2.3.4 - Equação Integral de Contorno para Ten- sões.....	24
III - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	27
3.1 - INTRODUÇÃO.....	27
3.2 - DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO	27
3.3 - DESCRIÇÃO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO UTILIZA- DOS.....	34

3.3.1 - Aproximação Linear para a Geometria do Elemento.....	34
3.3.2 - Aproximação Linear dos Deslocamentos e Forças de Superfície.....	35
3.4 - INTEGRAÇÃO SOBRE OS ELEMENTOS.....	41
3.4.1 - Integração Numérica.....	41
3.4.2 - Integração Analítica nos Casos de Singularidade.....	42
3.5 - SUBREGIÕES.....	45
3.6 - CÁLCULO DAS TENSÕES NO CONTORNO.....	48
3.7 - TRATAMENTO DA DESCONTINUIDADE DAS FORÇAS DE SUPERFÍCIE.....	51
IV - PROGRAMAÇÃO.....	53
4.1 - INTRODUÇÃO.....	53
4.2 - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA.....	54
4.2.1 - Descrição Geral.....	54
4.2.2 - Entrada e Geração de Dados de Controle.....	55
4.2.3 - Cálculo do Sistema de Equações.....	65
4.2.4 - Resolução do Sistema de Equações com Tratamento em Blocos.....	71
4.2.5 - Cálculo dos Deslocamentos e Tensões dos Pontos Internos.....	82
V - AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	84
5.1 - DEFINIÇÃO DO NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO..	84
5.2 - POSIÇÃO DOS PONTOS NODAIS EM ELEMENTOS DESCONTÍNUOS.....	87

5.3 - ANÁLISES SOBRE O TRATAMENTO DA DESCONTINUIDADE DAS FORÇAS DE SUPERFÍCIE.....	89
5.3.1 - Análise Comparativa Feita Sobre a Viga em Balanço.....	89
5.3.2 - Análise da Chapa com Furo Circular....	95
5.3.3 - Avaliação do Elemento Descontínuo em Corpos de Várias Regiões com Descontinuidade Especial.....	99
5.4 - DIVISÃO DOS DOMÍNIOS EM SUBREGIÕES VISANDO REDUÇÕES NOS TEMPOS DE EXECUÇÃO.....	104
5.5 - EMPREGO DE SUBREGIÕES PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM CARREGAMENTO APLICADO DENTRO DO DOMÍNIO.....	112
5.6 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO.....	115
VI - CONCLUSÕES.....	122
VII - REFERÊNCIAS.....	125

C A P Í T U L O I

INTRODUÇÃO

Os últimos anos têm sido caracterizados por inúmeros avanços em muitas das áreas do conhecimento humano. O alto grau de especialização alcançado em cada uma delas abre maiores perspectivas para o desenvolvimento geral da ciência.

Foi nesse contexto que o aparecimento dos computadores de grande capacidade tornou possível e prático o uso de métodos numéricos aplicados à resolução de diversos problemas físicos. A solução aproximada das equações que regem determinado tipo de problema vem sendo feita, desde algum tempo atrás, com técnicas que discretizam o domínio, como o método das diferenças finitas - MDF(1) e o método dos elementos finitos - MEF(2, 3, 4). Este último método tem sido muito estudado nos últimos 20 anos, tendo atualmente um vasto campo de aplicação dentro da engenharia(5).

Recentemente tem ganhado importância um outro método numérico que, pelas suas características, apresenta-se como uma alternativa promissora. É o método dos elementos de contorno - MEC, assim chamado pois é formulado a partir de equações integrais de contorno. Sua característica principal é, portanto, a de reduzir em um a dimensão do problema o que na prática significa menor quantidade de dados de entrada, diminuição do tempo de processamento e menor consumo de memó

ria de computador. O MEC tem evoluído bastante, e hoje oferece uma diversidade de aplicações que o torna uma eficiente ferramenta de cálculo para os problemas mais usuais de engenharia.

Apesar de só recentemente ter crescido o interesse dos pesquisadores pelo método dos elementos de contorno, as equações integrais são conhecidas desde há muito tempo. Segundo Elliot(6) foi Abel(7) em 1823 quem primeiro deduziu uma equação integral para resolver o problema chamado de pêndulo isócrono. Avanços posteriores foram devidos a Liouville(8) que em 1837 transformou um problema de valor inicial em uma equação integral e a resolveu usando aproximações sucessivas. Foi, contudo, o estudo dos problemas da teoria do potencial que contribuiu decisivamente para o desenvolvimento das equações integrais. Já dentro desta área, Volterra (9), em 1884, estudando a distribuição de cargas elétricas na superfície de uma esfera encontrou uma equação integral, realizando importantes estudos posteriormente em 1896. Fredholm (10) em 1903 apresentou seu estudo de uma equação integral com núcleo definido e integrável, influenciando muito trabalhos posteriores como os que foram realizados por Hilbert(11) entre 1904 e 1910. É importante, também, citar o trabalho de Kellogg(12) sobre teoria do potencial.

Após esse período, outros estudos foram realizados por matemáticos russos, entre eles Muskhelishvili (13), que aplicou as equações integrais à resolução de problemas em elasticidade linear bidimensional, assunto este tratado no presente trabalho. Muskhelishvili, Mikhlin(14) e Kupradze(15) propuseram métodos de resolução baseados na teoria das variáveis complexas. Usando funções auxiliares (conhecidas matematicamente como densidades de superfície) e os procedimentos da teoria do potencial, obtiveram relações aproximadas entre estas funções, razão pela qual são chamados de Métodos Indiretos. Estes métodos estavam restritos geralmente a elasticidade bidimensional e sujeitos a certa instabilidade numérica (ver Cruse(20)). Outros trabalhos

segundo o tratamento indireto foram realizados por investigadores como Massonnet, Oliveira, Watson e Van Buren (ver Banerjee(21)). Em 1963, Jaswon e Symm(16, 17, 18) introduziram um equacionamento do problema usando variáveis reais e ainda mantendo uma função de tensão auxiliar sendo por isso chamado por alguns autores (21) de Método Semi-direto.

Em 1967 Rizzo(19) apresenta um método para elasticidade em duas dimensões que na equação integral relaciona valores não fictícios no contorno, isto é, deslocamentos e forças de superfície (ou reações aplicadas no contorno) estabelecendo, portanto, o Método Direto, que logo foi extendido à elasticidade tridimensional por Cruse(20). Nestes trabalhos a equação é discretizada dividindo a superfície em elementos, empregando uma aproximação constante para as forças e os deslocamentos que atuam em cada elemento. Ricardella(22) e Cruse(23) introduziram aproximação linear para tais variáveis em problemas de duas e três dimensões, respectivamente, e Lachat(24) posteriormente desenvolveu elementos com aproximações de ordem superior.

Para a dedução da formulação do método inclui-se a adoção de uma "Solução Fundamental" das equações diferenciais que expressam o problema (assunto que será tratado com maior detalhe no capítulo seguinte) e no caso da elasticidade é comumente usada a solução de Kelvin(25) que representa o efeito da aplicação de uma carga pontual unitária num domínio infinito. Nakaguma(26) além da solução de Kelvin introduziu a solução fundamental de Midlin(27) que é a aplicação de uma carga pontual num espaço semi-infinito, e resulta vantajosa para determinados tipos de problemas, pois evita a discretização da superfície não carregada do semi-espaço.

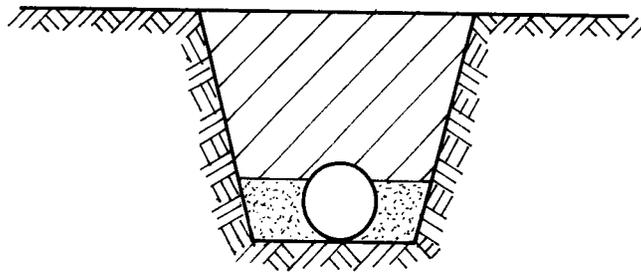
O método tem sido aplicado também a materiais com comportamento não linear. Trabalhos considerando metais sujeitos a ações que introduzem no material deformações inelásticas foram desenvolvidos na década dos setenta (22, 28, 29, 30). Telles e Brebbia(31) propuseram a resolução de

problemas elastoplásticos e visco-plásticos incluindo no equacionamento do MEC esforços e deformações iniciais. Venturini(32, 33) aplicou o método na área da mecânica dos solos, analisando comportamento plástico, visco-plástico e materiais rochosos com pouca resistência à tração. Vários outros trabalhos tratando a não linearidade têm sido desenvolvidos recentemente (34, 35, 36).

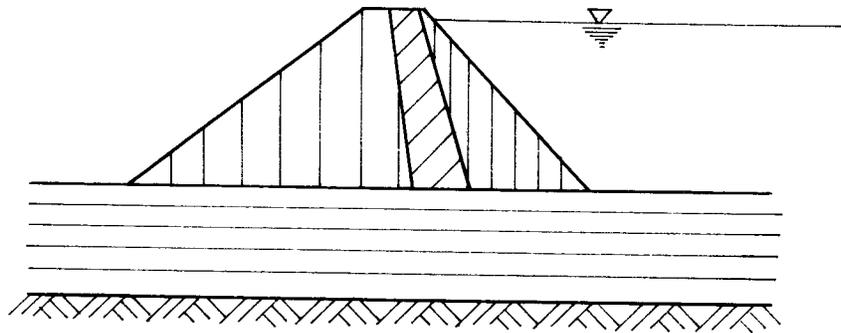
Alguns autores (37, 38, 39, 40, 41, 42, 43) têm utilizado conjuntamente o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos, visando aproveitar as principais características de cada um. O MEC, por exemplo, representa adequadamente domínios infinitos ou semi-infinitos, no entanto com o MEF pode-se tratar mais facilmente regiões que apresentem anisotropia. Em geral isto é feito encontrando uma matriz de rigidez equivalente para a zona discretizada com elementos de contorno, resolvendo-se então o sistema global como sendo um problema tratado pelo MEF.

Existem na atualidade muitos programas aplicativos que usam o MEC para o cálculo das tensões e que incluem a utilização de modernos recursos tipo "CAD" ("Computer Aided Design" ou projeto assistido por computador)(44, 45, 46, 47). Um artigo de Mackerle e Andersson(48) publicado em 1983 fornece uma coletânea dos principais programas produzidos até então.

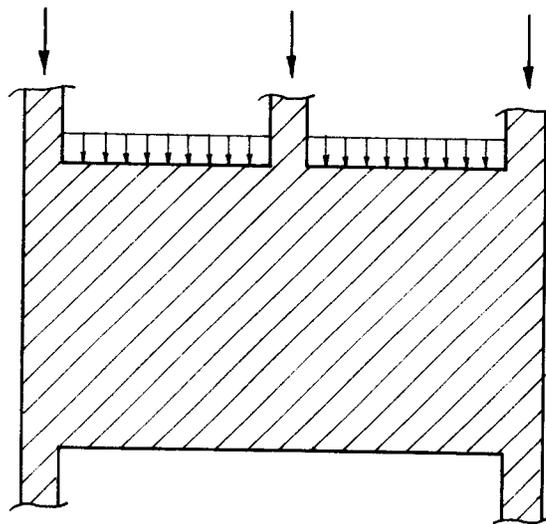
O presente trabalho versa sobre a aplicação do Método dos Elementos de Contorno para a resolução de problemas de elasticidade plana linear. Como se mencionou anteriormente, o MEC representa com facilidade domínios infinitos, assim sua aplicação é conveniente no estudo da iteração solo-estrutura. Desta forma podem ser analisados túneis, barragens, fundações, galerias, escavações e também estruturas do tipo viga-parede ou chapas de maquinária (ver Fig.1.1). Convém ser lembrado que na prática busca-se, sempre que possível, simplificar problemas tridimensionais analisando-os como bidimensionais, apesar que tal artifício leva, algumas vezes, a aproximações pouco precisas.



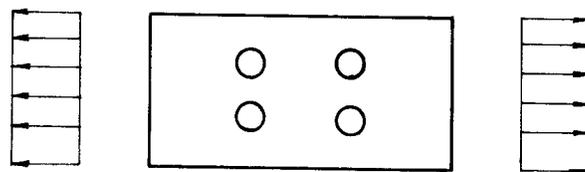
a) Túneis



b) Barragens



c) Viga Parede



d) Chapas

FIG. 1.1 — ALGUNS PROBLEMAS EM ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

Procura-se, neste trabalho, apresentar uma versão do MEC com alguns parâmetros numéricos otimizados, usando elementos isoparamétricos lineares. No capítulo 2 descreve-se o equacionamento básico do método, referindo-se a: elasticidade linear, solução fundamental e equações integrais de contorno. No capítulo 3 trata-se da aproximação numérica das equações integrais, introduzindo-se um elemento em que os pontos nodais podem ser colocados em qualquer posição ao longo do mesmo, dando origem tanto aos elementos contínuos como aos descontínuos, simétricos ou não. Isto é de grande utilidade nos pontos de contorno com descontinuidade, os quais geralmente são tratados com equações auxiliares originadas nas hipóteses de invariância do traço do tensor de deformação e da simetria do tensor tensão (49, 50).

O capítulo 4 descreve diversos aspectos da programação em computador do algoritmo numérico elaborado a partir da formulação proposta. Destaca-se o esquema de resolução das equações lineares especialmente desenvolvido para o MEC(51), cuja matriz resultante é não-simétrica e para estruturas compostas de vários materiais possui blocos contendo apenas zeros. Esta subrotina foi adaptada ao computador IBM/370 e introduzida no programa desenvolvido.

Algumas características de ordem numérica são estudadas no capítulo 5, incluindo análises sobre a integração numérica, resolução dos problemas de descontinuidade tanto usando elemento descontínuo (também chamado não conforme) como forçando a simetria do tensor tensão. Analisa-se também a conveniência da divisão em subregiões visando melhoras de aspecto computacional.

Para ressaltar a utilidade do programa aqui desenvolvido, incluídas todas as melhoras sugeridas pelas análises, é resolvido um exemplo de aplicação prática na última parte do capítulo 5.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões tiradas a partir do desenvolvimento teórico da formulação e também dos resultados numéricos obtidos nos capítulos 3, 4 e 5.

C A P Í T U L O I I

FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE
CONTORNO PARA ELASTICIDADE LINEAR

2.1 - CONCEITOS DE ELASTICIDADE LINEAR

2.1.1 - Equações Básicas

Define-se um corpo perfeitamente elástico como sendo aquele que mantém uma relação linear entre a deformação e o carregamento aplicado, tal como foi enunciado por Robert Hooke(25). O sólido ao ser descarregado voltará à posição original correspondente ao carregamento nulo. Adota-se também que o material que compõe o corpo elástico é homogêneo e distribuído de maneira contínua, ou seja que um elemento extraído de qualquer parte do sólido manterá as mesmas características que possui o sólido. Admite - se que este seja isótropo, isto é, mantém as mesmas propriedades elásticas em qualquer direção.

Pela teoria da elasticidade se estabelece o conceito de tensão σ num ponto como sendo (52, 53):

$$\sigma = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{dF}{dS} \quad (2.1.1)$$

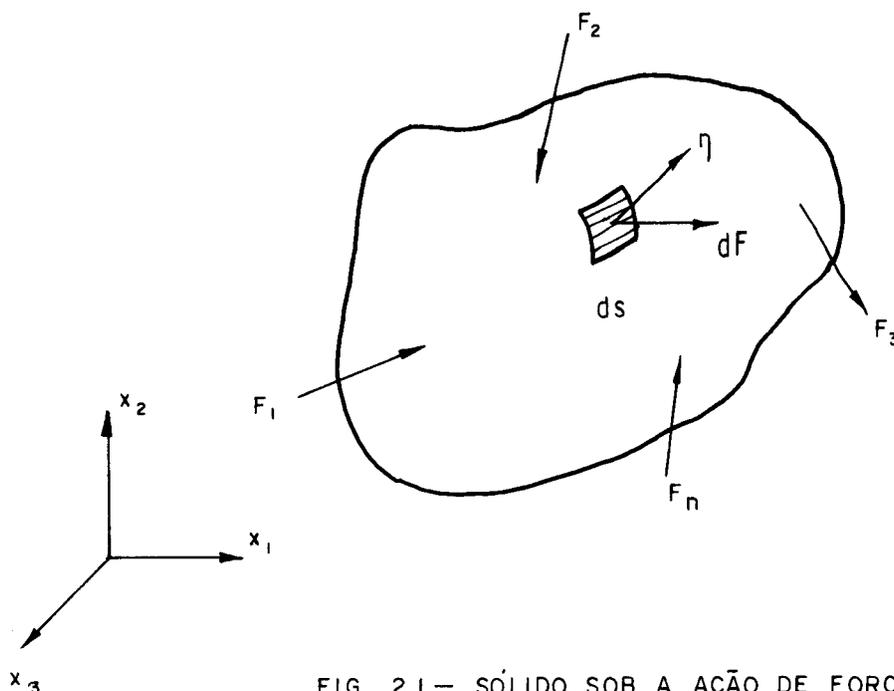


FIG. 2.1— SÓLIDO SOB A AÇÃO DE FORÇAS F_j , REFERENCIADO A UM SISTEMA DE COORDENADAS x_i

onde dF é o diferencial da força que atua em dS , sendo dS a área elementar com orientação definida pela normal η que está referida a um sistema de coordenadas x_1, x_2, x_3 . Admitindo o referencial cartesiano, pode-se definir as componentes da tensão σ_{ij} com $i, j = 1, 3$ como indicado na figura 2.2.

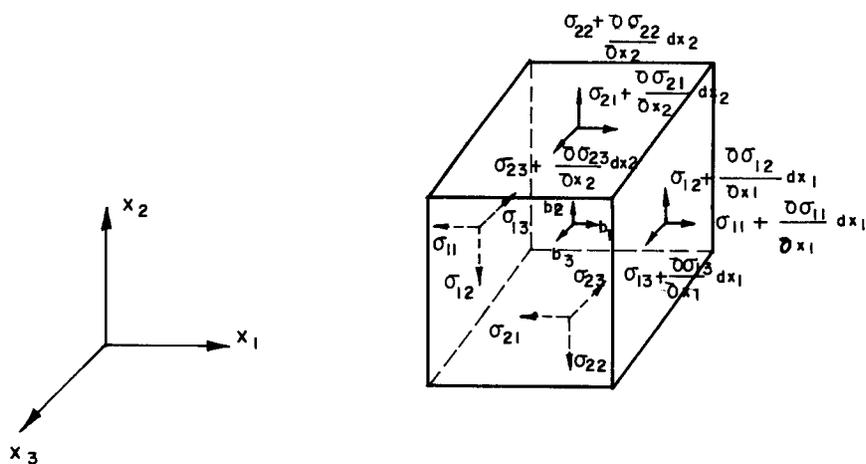


FIG. 2.2 -- SÓLIDO ELEMENTAR EM EQUILÍBRIO

Para simplificar a escrita das expressões usar-se-ã de maneira geral neste trabalho a notação indicial, adotando-se as seguintes regras:

a) Convenção de somatõria. A repetiçã de um índice num termo indica a soma de todas as componentes referidas a esse índice, por exemplo:

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad (i = 1, 2, 3)$$

ou: (2.1.2)

$$a_{ij}b_i = a_{1j}b_1 + a_{2j}b_2 + a_{3j}b_3$$

b) Convenção de derivadas parciais: a vírgula indica derivada parcial com respeito ã coordenada cartesiana indicada pelo índice precedente:

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

ou (2.1.3)

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \quad (j = 1, 2, 3)$$

c) Delta de Kronecker δ_{ij} : É um parâmetro que assume valor igual a um, quando seus índices são iguais, e a zero, em caso contrário:

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{se} \quad i = j$$

(2.1.4)

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j$$

Voltando ã figura 2.2, as equações de equilíbrio estático aplicadas no sólido elementar mostrado conduzem a:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.1.5)$$

que representa a condição de simetria do tensor das tensões e

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.1.6)$$

onde b_i são as forças de volume.

Adotando-se agora um elemento em forma de tetraedro conforme se mostra na figura 2.3, o equilíbrio na superfície do mesmo leva à expressão:

$$\sigma_{ij} \eta_j = p_i \quad (2.1.7)$$

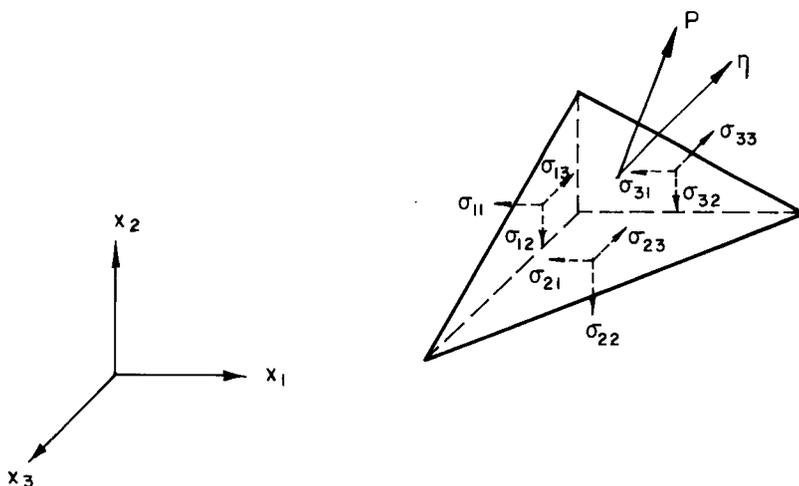


FIG. 2.3 — FORÇAS DE SUPERFÍCIE NO TETRAEDRO DE CAUCHY

Admitindo-se as hipóteses de continuidade e que pontos vizinhos no corpo permanecem na vizinhança após este ser deformado, chega-se a definir o tensor de deformação, que referido ao mesmo sistema cartesiano de coordenadas ortogonais, tanto para a configuração original quanto para a deformada (ver fig. 2.4), é:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[u_{j,i} + u_{i,j} - u_{k,i} u_{k,j} \right] \quad (2.1.8)$$

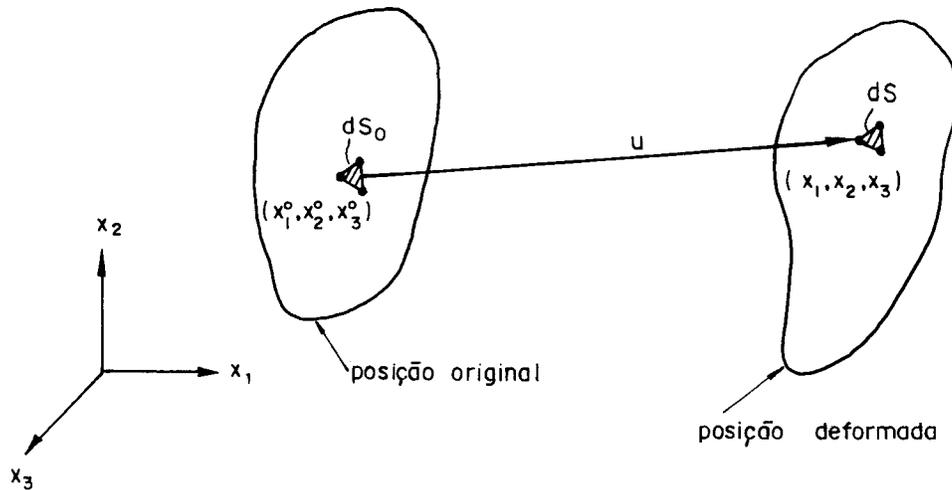


FIG. 2.4 — DEFINIÇÃO DO VETOR DESLOCAMENTO 'u'

Restringindo-se apenas ao estudo dos pequenos deslocamentos, podem-se desprezar infinitésimos de ordem superior como o último termo da equação (2.1.8). As componentes da deformação podem então ser escritas:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (2.1.9)$$

Na teoria da elasticidade define-se a relação entre o tensor tensão e o tensor deformação pela chamada lei de Hooke generalizada:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.1.10)$$

onde C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem que contém as constantes que caracterizam o material no âmbito elástico.

A simetria dos tensores tensão e deformação, o princípio de conservação da energia, e a suposição do material ser isótropo (isto é, possui as mesmas características elásticas em qualquer direção) reduz o número de constantes elásticas a dois, em geral definidas por:

E = módulo de Young ou módulo de elasticidade; e

ν = coeficiente de Poisson

assim, para esse tipo de material, a relação entre tensão e deformação (equação 2.1.10) pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (2.1.11)$$

ou:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.1.12)$$

onde λ , G são as chamadas constantes de Lamé, que são escritas em função de E e ν com as seguintes relações:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.1.13)$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \quad (2.1.14)$$

sendo G conhecido como módulo de elasticidade transversal.

As expressões anteriores dão origem a outras que são de utilidade na resolução de problemas elásticos. Desta maneira, a partir das equações (2.1.9) e (2.1.11) escreve-se a tensão em termos de deslocamento:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (2.1.15)$$

nesta última ao incluir a equação (2.1.6) obtêm-se a equação de Navier:

$$G u_{i,jj} + (\lambda + G) u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (2.1.16)$$

que também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,j} + \frac{b_i}{G} = 0 \quad (2.1.17)$$

onde:

$$\nabla^2 u_i = u_{i,jj} \quad (2.1.18)$$

A equação de Navier (2.1.16) pode ser resolvida para condições de contorno específicas, ou seja:

a) Deslocamentos impostos. Deslocamentos u_i são prescritos ao longo de uma parte do contorno, isto é,

$$u_i(Q) = \bar{u}_i(Q), \quad \text{com } Q \in \Gamma_1 \quad (2.1.19)$$

b) Forças de superfície impostas na parte restante do contorno:

$$p_i(S) = \bar{p}_i(S), \quad \text{com } S \in \Gamma_2 \quad (2.1.20)$$

de tal forma que,

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma \quad (2.1.21)$$

Nas expressões acima (2.1.19), (2.1.20) e (2.1.21) \bar{u}_i e \bar{p}_i são, respectivamente, os valores de deslocamento e forças de superfície conhecidos, e Γ significa o contorno total do domínio em análise.

Convém ressaltar, porém, que esta divisão do contorno só adquire essa aparente correspondência geométrica mostrada na figura 2.5 quando se restringe a um eixo i específico, pois um ponto genérico do contorno pode ter condições de tipos diferentes em eixos diferentes, ou seja, pode ter deslocamento prescrito numa direção e força de superfície em outra.

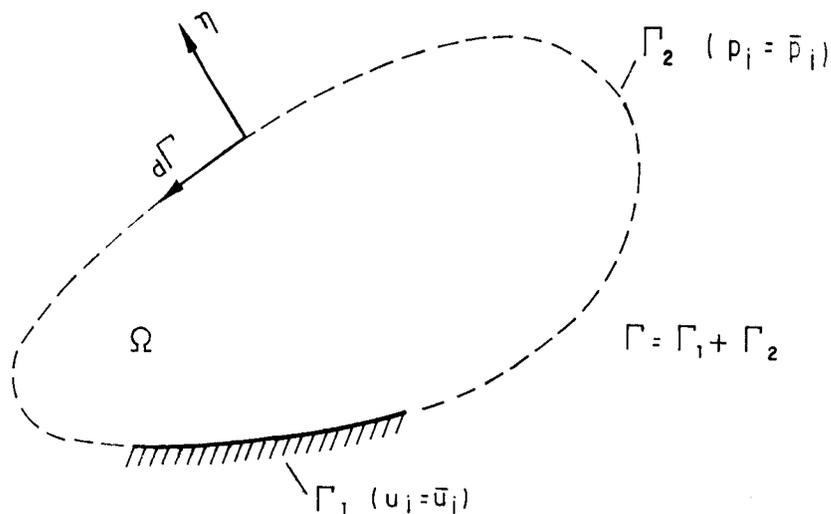


FIG. 2.5 — DOMÍNIO Ω COM O CONTORNO DEFINIDO PELAS CONDIÇÕES \bar{u}_i e \bar{p}_i EM Γ_1 e Γ_2 .

2.1.2 - Estado Plano de Tensão e Deformação

Quando uma das dimensões do corpo (por facilidade toma-se aquela na direção x_3) for muito menor que as outras duas, e o carregamento é unicamente no plano destas (x_1, x_2) , pode-se supor que as tensões ao longo da terceira direção (x_3) são nulas, isto é,

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \quad (2.1.22)$$

ficando as componentes de tensão sã em função das coordenadas do plano (x_1, x_2) , ou seja um Estado Plano de Tensão, com:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}) \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{22} + \nu\epsilon_{11}) \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{12} \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

A equação de Navier (2.1.16) agora é expressa da seguinte forma:

$$G u_{i,jj} + G \frac{1+\nu}{1-\nu} u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (i,j=1, 2) \quad (2.1.24)$$

Se pelo contrário, a dimensão de um problema medida em uma direção (x_3) for muito maior que as das outras duas (x_1, x_2), num corpo de forma prismática ou cilíndrica, carregado no plano (x_1, x_2), pode-se considerar o deslocamento paralelo ao terceiro eixo (x_3) impedido, e os deslocamentos do plano (u_1 e u_2) sem variação ao longo de x_3 , estabelecendo-se, portanto, o Estado Plano de Deformação, ou seja:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = u_3 = 0 \quad (2.1.25)$$

Desta maneira a equação básica (2.1.16) é neste caso dada por:

$$G u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} G u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (2.1.26)$$

É conveniente observar que ao ser substituído ν por $\nu/(1+\nu)$ na equação (2.1.26) esta fica idêntica à equação (2.1.24) o que indica que um problema do estado plano de tensão pode ser resolvido como plano de deformação fazendo-se esta substituição ou vice-versa quando para a equação (2.1.24) for utilizado o coeficiente dado por $\nu/(1-\nu)$.

2.2 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

A formulação do Método dos Elementos de Contorno, a ser tratada posteriormente (Item 2.3), exige o emprego das chamadas soluções fundamentais que são soluções conhecidas de problemas específicos dentro da área em estudo. Neste trabalho, em particular, far-se-á uso da solução de Kel-

vin(25) que fisicamente representa o efeito de uma carga concentrada atuando em um domínio infinito.

Para a obtenção da solução fundamental procurada substitui-se na equação de Navier para deslocamentos(2.1.17) o termo correspondente às forças de volume b_i pela função conhecida como Delta de Dirac $\delta(s, q)$, assim tem-se:

$$b_i(q) = \delta(s, q) c_i(s) \quad (2.2.1)$$

onde c_i são os vetores unitários atuando na direção dos eixos coordenados x_i .

Para facilidade de entendimento deve-se ressaltar as seguintes propriedades do delta de Dirac:

$$\begin{aligned} \delta(s, q) &= \infty & \text{se } q &= s \\ \delta(s, q) &= 0 & \text{se } q &\neq s \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

e

$$\int_{\Omega} g(q) \delta(s, q) d\Omega(q) = g(s)$$

Introduzindo-se (2.2.1) na equação (2.1.17) obtém-se:

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{j,ij}^* + u_{i,jj}^* + \frac{1}{G} \delta(s, q) c_i(s) = 0 \quad (2.2.3)$$

onde o símbolo * é usado para indicar a solução fundamental

A solução desta equação (2.2.3) é para elasticidade plana dada por:

$$u_{ij}^*(s, q) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right] \quad (2.2.4)$$

correspondendo o primeiro índice à direção de aplicação da carga unitária e o segundo à direção do correspondente deslocamento.

As forças de superfície podem ser calculadas pela equação (2.1.7):

$$p_i = \sigma_{ij} \eta_j \quad (2.1.7)$$

Substituindo na equação acima o tensor σ_{ij} em termos de deslocamentos (2.1.15) a solução fundamental de forças de superfície fica dada por:

$$p_i = \frac{2\nu}{1-2\nu} u_{k,k} \eta_i + G \left(\frac{\partial u_i}{\partial \eta} + u_{j,i} \eta_j \right) \quad (2.2.5)$$

que fornece os valores de p_i referidos à direção normal η da superfície considerada. Sabendo-se o valor de u_{ij}^* dado pela equação (2.2.4) e efetuando-se as derivadas indicadas em (2.2.5) obtêm-se a forma final da solução fundamental para forças de superfície:

$$p_{ij}^*(s, q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) (r_{,i} \eta_j - r_{,j} \eta_i) \right\} \quad (2.2.6)$$

As equações (2.2.4) e (2.2.6) são as soluções fundamentais de Kelvin da elasticidade plana para deslocamentos e forças de superfície, respectivamente.

2.3 - EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

2.3.1 - Equação Integral de Contorno para Pontos no Interior

Com a existência de dois estados possíveis de

tensão σ_{ij} e σ'_{ij} em um domínio Ω e seus respectivos estados de deformação ϵ_{ij} e ϵ'_{ij} pode-se estabelecer:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon'_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma'_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega \quad (2.3.1)$$

identidade conhecida como primeiro teorema de Betti(54) ou Teorema da Reciprocidade. Introduzindo-se a lei de Hooke (2.1.11) em uma das integrais e operando sobre os coeficientes elásticos, (2.3.1) pode ser facilmente provada. Se em vez de tensões e deformações fossem utilizadas forças de superfície (p_i, p'_i) e deslocamentos (u_i, u'_i) chegar-se-ia no segundo teorema de Betti que é expressado pela seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} p_i u'_i d\Gamma = \int_{\Gamma} p'_i u_i d\Gamma \quad (2.3.2)$$

A relação anterior(2.3.2) pode ser demonstrada pela aplicação do teorema da Divergência, também conhecido como teorema generalizado de Gauss, em um dos lados da equação (2.3.1), desde que a relação (2.1.7) seja convenientemente introduzida.

Relação análoga pode ser obtida quando são incluídas as forças de volume. Neste caso tem-se:

$$\int_{\Gamma} p_i u'_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u'_i d\Omega = \int_{\Gamma} p'_i u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b'_i u_i d\Omega \quad (2.3.3)$$

A identidade acima (2.3.3) é o ponto de partida para a obtenção da equação integral de contorno. Para isto, far-se-á aqui uso da solução fundamental já mostrada(2.2.4) e (2.2.6). Inicialmente convém definir as resultantes dos deslocamentos e forças de superfície em uma direção j , resultando nas expressões abaixo:

$$\begin{aligned} u_j^*(s, q) &= u_{ij}^*(s, q) c_i(s) \\ p_j^*(s, q) &= p_{ij}^*(s, q) c_i(s) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

onde c_i é o vetor unitário direcional.

Substituindo-se as variáveis $u_i^!$ e $p_i^!$ da equação (2.3.3) pelos valores dados em (2.3.4) e mantendo-se p_i e u_i como sendo um estado real de forças e deslocamentos atuando em um corpo de domínio Ω e contorno Γ , obtêm-se:

$$\int_{\Gamma} p_j(Q) u_{*j}^*(s, Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} b_j(q) u_{*j}^*(s, q) d\Omega(q) = \int_{\Gamma} p_j^*(s, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} \delta_{ij}(s, Q) c_i(s) u_j(Q) d\Omega(q) \quad (2.3.5)$$

onde Q é definido para pontos no contorno, enquanto s e q indicam pontos do interior.

Utilizando-se as propriedades da função delta de Dirac (2.2.2) na última integral, e considerando a aplicação da carga unitária em uma direção de cada vez, a equação (2.3.5) fica:

$$u_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} p_j(Q) u_{*ij}^*(s, Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} b_j(q) u_{*ij}^*(s, q) d\Omega(q) \quad (2.3.6)$$

A expressão acima fornece os deslocamentos u_i para pontos s no interior da região Ω , e é chamada Identidade Somigliana para deslocamentos, uma vez que foi obtida em 1885 por Carlo Somigliana(55).

Comparando-se os termos da equação (2.3.6) com as integrais definidas na teoria do potencial (12, 15, 56, 57) verifica-se que a mesma está definida por potenciais de camada simples e de camada dupla, devendo ressaltar que estes não conservam mais o sentido físico dos potenciais newtonianos ou gravitacionais, e ainda os valores calculados não são mais magnitudes escalares e sim vetoriais. Esta dis

tinção dos tipos de potenciais observados na equação integral é de utilidade na dedução da equação integral para pontos no contorno que é feita a seguir.

2.3.2 - Equação Integral para Pontos no Contorno

A identidade Somigliana (2.3.6) é válida para pontos s contidos no interior do corpo Ω . Procurar-se-á, agora, a expressão correspondente ao caso em que o ponto pertence ao contorno Γ , isto é, a origem do campo de forças e deslocamentos está localizada no contorno do corpo.

Definindo-se sobre o contorno um ponto S , a equação integral (2.3.6) somente será aplicável se for adicionado ao domínio Ω uma parte infinitesimal complementar Ω_ϵ de maneira que se possa caracterizar S como ponto do interior (Fig. 2.6).

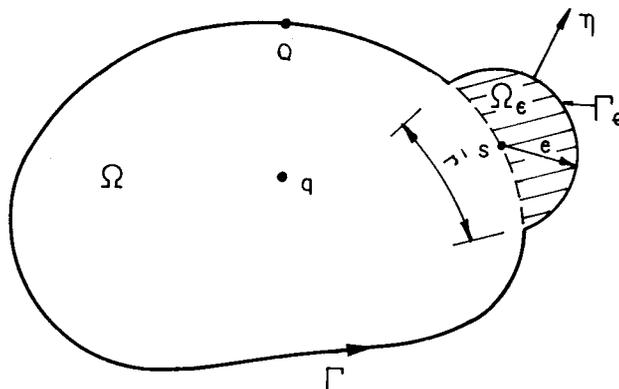


FIG. 2.6 — DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL PARA PONTOS S NO CONTORNO.

Com esta modificação o contorno do novo domínio $\Omega + \Omega_\epsilon$ passa a ser $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon$, levando a equação (2.3.6) a ser escrita da seguinte forma:

$$u_i(S) = - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon} p^*_{ij}(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon} p_j(Q) u^*_{ij}(S, Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega + \Omega_\epsilon} b_j(q) u^*_{ij}(S, q) d\Omega(q) \quad (2.3.7)$$

escrevendo-se separadamente as integrais para cada parte do domínio e do contorno tem-se:

$$\begin{aligned}
 u_i(S) = & - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} p^*_{ij}(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma_\epsilon} p^*_{ij}(S, Q) u_j(Q) d\Gamma_\epsilon(Q) + \\
 & + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} p_j(Q) u^*_{ij}(S, Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma_\epsilon} p_j(Q) u^*_{ij}(S, Q) d\Gamma_\epsilon(Q) + \\
 & + \int_{\Omega} b_j(q) u^*_{ij}(S, q) d\Omega(q) + \int_{\Omega_\epsilon} b_j(q) u^*_{ij}(S, q) d\Omega_\epsilon(q)
 \end{aligned}
 \tag{2.3.8}$$

É fácil demonstrar que as integrais sobre Γ_ϵ cujos núcleos são u^*_{ij} têm limites quando $\epsilon \rightarrow 0$ iguais a zero, já que elas são do tipo integrais de camada simples.

Para a integral sobre Γ_ϵ de núcleo p^*_{ij} que corresponde a uma integral de camada dupla uma descontinuidade é esperada no limite $\epsilon \rightarrow 0$. Este limite pode ser escrito:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p^*_{ij}(S, Q) u_j(Q) d\Gamma_\epsilon(Q) = & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p^*_{ij}(S, Q) [u_j(Q) - u_j(S)] d\Gamma_\epsilon(Q) + \\
 & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_j(S) \int_{\Gamma_\epsilon} p^*_{ij}(S, Q) d\Gamma_\epsilon(Q)
 \end{aligned}
 \tag{2.3.9}$$

sendo o primeiro termo identicamente nulo desde que a densidade $u_j(Q)$ obedeça a condição de Hölder.

$$([u_j(Q) - u_j(S)] < A r(S, Q)^\alpha \text{ com } A, \alpha > 0);$$

ficando, portanto, definida a descontinuidade pelo seguinte limite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_j(S) \int_{\Gamma_\epsilon} p^*_{ij}(S, Q) d\Gamma_\epsilon(Q) \tag{2.3.10}$$

Assim a equação para o ponto de contorno S é obtida fazendo-se o limite quando $\Omega_\epsilon \rightarrow 0$, o que levará ao domínio original Ω em análise.

Desta forma os limites das integrais sobre $\Gamma - \bar{\Gamma}$ ficam:

$$\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} p^*_{ij}(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} p^*_{ij}(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q)$$

e

$$\lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} p_j(Q) u^*_{ij}(S, Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} p_j(Q) u^*_{ij}(S, Q) d\Gamma(Q)$$

(2.3.11)

Na análise da primeira integral acima o valor deve ser computado no sentido de valor principal. Neste caso particular, pela singularidade envolvida, tem-se um valor principal de Cauchy.

Depois de feitas as considerações anteriores a equação integral para pontos do contorno pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c_{ij}(S) u_j(S) = & - \int_{\Gamma} p^*_{ij}(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) + \\ & + \int_{\Gamma} p_j(Q) u^*_{ij}(S, Q) d\Gamma(Q) + \\ & + \int_{\Omega} b_j(q) u^*_{ij}(S, q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

com o termo correspondente à descontinuidade estando incluído no coeficiente c_{ij} , que assim fica definido por:

$$c_{ij}(S) = \delta_{ij} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p^*_{ij}(S, Q) d\Gamma_\epsilon(S) \quad (2.3.13)$$

Para o caso particular em que o contorno tem uma única derivada no ponto S o limite da expressão anterior (2.3.13) é igual a $-\frac{1}{2} \delta_{ij}$, conseqüentemente o coeficiente c_{ij} é:

$$c_{ij}(S) = \delta_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (2.3.14)$$

A aproximação numérica da equação (2.3.12) dá origem ao Método dos Elementos de Contorno - MEC a ser descrito no capítulo seguinte. Como pode ser notado, (2.3.12) expressa uma relação entre deslocamentos u_i e forças de superfície p_i dos pontos do contorno do sólido em análise, e por isso é chamada de Formulação Direta, já que utiliza variáveis reais do problema físico.

2.3.3 - A Equação Integral de Contorno como uma Formulação Derivada dos Resíduos Ponderados

Alguns autores (26, 58) preferem mostrar a obtenção da equação integral de contorno através da formulação dos resíduos ponderados. Argumentam que assim fica mais clara a concepção numérica do método e, portanto, sua relação com outras técnicas aproximadas.

O ponto de partida é então a equação dos resíduos ponderados aplicada nas relações de equilíbrio(58):

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,i} + b_j) u^*_j d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_j - \bar{p}_j) u^*_j d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_j - u_j) p^*_j d\Gamma \quad (2.3.15)$$

sendo u^*_j a função ponderadora e Γ_2 e Γ_1 são partes do contorno ($\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_1$) onde as condições essenciais e naturais são respectivamente prescritas. No caso elástico Γ_1 contém as restrições dos deslocamentos e Γ_2 as das forças de superfície. Nesta equação u_j e p_j são variáveis da equação diferencial que rege o problema em estudo, e quando estes são restritos a um valor determinado são designados por \bar{u}_j e \bar{p}_j .

Integrando-se (2.3.15) por partes duas vezes elimina-se o diferencial em σ_{ij} obtendo-se a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij,i}^* u_j d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_j u_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_j p_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_j p_j^* d\Gamma \quad (2.3.16)$$

ou de uma maneira mais geral pode-se escrever:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sigma_{ij,i}^*(q) u_j(q) d\Omega(q) + \int_{\Gamma} p_j^*(Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) &= \\ = \int_{\Omega} u_j^*(q) b_j(q) d\Omega(q) + \int_{\Gamma} u_j^*(Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) &\quad (2.3.17) \end{aligned}$$

Com a inclusão da equação de equilíbrio (2.1.6) e da solução fundamental, e ainda tomando independentemente ca da direção chega-se à equação (2.3.6) já obtida anteriormente:

$$\begin{aligned} u_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s,Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s,Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) + \\ + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s,q) b_j(q) d\Omega(q) \quad (2.3.6) \end{aligned}$$

2.3.4 - Equação Integral de Contorno para Tensões

Nos itens anteriores 2.3.1 e 2.3.3, **chegou-se** a obter uma equação integral de contorno (2.3.6) que permite o cálculo dos deslocamentos para pontos s localizados no interior do sólido considerado. Um problema elástico sõ se considera resolvido, porém, quando se conhece o estado de tensão em que se encontra o corpo em análise. Para chegar

a uma expressão nesse sentido, faz-se necessário o emprego da relação tensão-deformação (2.1.15):

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.1.15)$$

Fazendo-se as operações na equação anterior (2.1.15) a expressão (2.3.6) fica:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \int_{\Gamma} p_k \left[\lambda \delta_{ij} u_{ik,l}^* + G(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma} u_k \left[\lambda \delta_{ij} p_{ik,l}^* + G(p_{ik,j}^* + p_{jk,i}^*) \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

onde por simplicidade não se inclui o termo das forças de volume b_i . Adotando uma notação específica para os tensores de terceira ordem contidos entre colchetes em (2.3.18), escreve-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(s) = & \int_{\Gamma} p_k(Q) D_{kij}(s,Q) d\Gamma(Q) - \\ & + \int_{\Gamma} u_k(Q) S_{kij}(s,Q) d\Gamma(Q) + \\ & + \int_{\Omega} b_k(q) D_{kij}(s,q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

sendo que D_{kij} e S_{kij} resultam, para o caso bidimensional em:

$$D_{kij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu) (\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \quad (2.3.20)$$

$$S_{kij} = \frac{2G}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ijr,k} + \nu(\delta_{ikr,j} + \delta_{jkr,i}) - \right. \right. \\ \left. \left. + 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] + 2\nu (\eta_{i}r_{,j}r_{,k} + \eta_{j}r_{,i}r_{,k}) + \right. \\ \left. + (1-2\nu) (2\eta_{k}r_{,i}r_{,j} + \eta_{j}\delta_{ik} + \eta_{i}\delta_{jk}) - (1-4\nu)\eta_{k}\delta_{ij} \right\}$$

(2.3.21)

Note-se que a equação (2.3.19) dá as tensões para pontos do interior do corpo. No caso de pontos de contorno é possível deduzir a equação integral apenas quando na superfície do contorno só pode ser definido um único valor da derivada. Nesta situação a equação (2.3.19) pode ser usada e fornece exatamente a metade do valor da tensão no ponto em análise. Nos cantos as tensões devem forçosamente ser calculadas pelas cargas ou reações atuantes. Geralmente para qualquer caso de pontos de contorno (canto ou não), opta-se por uma solução aproximada como se verá no capítulo seguinte.

C A P Í T U L O I I I

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3.1 - INTRODUÇÃO

No capítulo anterior foi mostrado o procedimento que permite obter a equação integral que relaciona forças de superfície e deslocamentos no contorno (2.3.12). A solução analítica desta equação é, porém, muito difícil, tornando-a praticamente inaplicável. Adota-se, então, uma aproximação numérica para esta equação, obtendo-se como resultado um conjunto de equações algébricas lineares, como é mostrado a seguir.

3.2 - DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Basicamente, a aproximação é feita considerando que o contorno Γ do domínio Ω está formado por um número finito de segmentos ou elementos de contorno Γ_j nos quais são definidos pontos nodais onde são expressos valores de deslocamentos e forças de superfície (ver fig. 3.1.). Além disso, estabelece-se uma forma para definir as variáveis de contorno sobre os elementos. Em geral, funções polinomiais são escolhidas para essa interpolação, levando os deslocamentos e reações a serem expressos do seguinte modo:

$$\underline{u}^{(j)} = \underline{\phi}^T \underline{U}^{(N)} \quad \text{em } \Gamma_j \quad (3.2.1)$$

$$\underline{p}^{(j)} = \underline{\phi}^T \underline{P}^{(N)}$$

onde $\underline{U}^{(N)}$ e $\underline{P}^{(N)}$ são vetores que contêm os valores nodais, $\underline{u}^{(j)}$ e $\underline{p}^{(j)}$ correspondem aos deslocamentos e forças de superfície de pontos quaisquer situados sobre o elemento Γ_j , sendo $\underline{\phi}^T$ o vetor que contêm as funções polinomiais.

A forma geométrica e a localização do elemento são similarmemente dadas por valores nodais e funções interpoladoras que para serem distinguidas das anteriores são agora designadas por ψ , podendo-se escrever a seguinte relação:

$$\underline{x}^{(j)} = \underline{\psi}^T \underline{X}^{(N)} \quad (3.2.2)$$

sendo $\underline{X}^{(N)}$ o arranjo vetorial que contêm as coordenadas dos nós e $\underline{x}^{(j)}$ as coordenadas de um ponto genérico do elemento.

As forças de volume por sua própria característica envolvem integrais de volume, obrigando, portanto, a serem aproximadas com a divisão do corpo em células ou elementos de domínio Ω_m , onde se adotam parâmetros nodais $\underline{B}^{(N)}$ e funções aproximadoras $\underline{\phi}_c$, ficando:

$$\underline{b}^{(m)} = \underline{\phi}_c^T \underline{B}^{(N)} \quad (3.2.3)$$

em Ω_m

De maneira análoga à expressão (3.2.2), pontos pertencentes ao elemento de domínio podem ter suas coordenadas expressas mediante pontos nodais e funções interpoladoras:

$$\underline{x}^{(m)} = \underline{\psi}_c^T \underline{X}_c^{(N)} \quad \text{em } \Omega_m \quad (3.2.4)$$

onde o subíndice 'c' indica que se trata de uma subregião ou célula do domínio Ω .

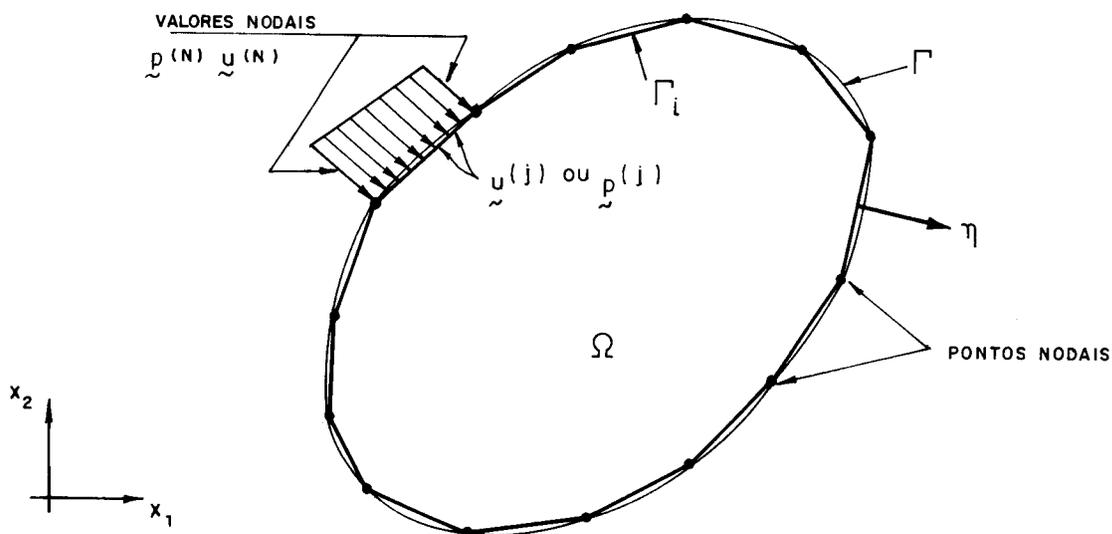


FIG. 3.1 — DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO EM ELEMENTOS LINEARES

Levando-se em conta todas as considerações anteriores, com o contorno discretizado em 'J' elementos, 'N' pontos nodais e o domínio em 'M' células, a equação integral de contorno para o nó 'S' (2.3.12) é discretizada na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \underline{C}(S) \underline{U}^{(N)}(S) + \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \underline{P}^*(S, Q) \underline{\Phi}^T(Q) d\Gamma \right] \underline{U}^{(N)}(Q) = \\ = \sum_{j=1}^J \left[\int_{\Gamma_j} \underline{U}^*(S, Q) \underline{\Phi}^T(Q) d\Gamma \right] \underline{P}^{(N)}(Q) + \sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega_m} \underline{U}^*(S, q) \underline{\Phi}_c^T(q) d\Omega \right] \underline{B}^{(N)}(q) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Efetuada adequadamente as integrais da equação (3.2.5) (assunto que será discutido posteriormente), e aplicando esta equação aos 'N' pontos de contorno, estabelece-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\underline{C} \underline{U} + \underline{\bar{H}} \underline{U} = \underline{G} \underline{P} + \underline{D} \underline{B} \quad (3.2.6)$$

onde $\underline{\bar{H}}$, \underline{G} e \underline{D} são matrizes cujos elementos resultam do cálculo das integrais indicadas. Efetuando-se a soma das matrizes \underline{C} e $\underline{\bar{H}}$ do primeiro membro de (3.2.6) obtém-se,

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{P} + \underline{D} \underline{B} \quad (3.2.7)$$

onde

$$\underline{H} = \underline{C} + \underline{\bar{H}} \quad (3.2.8)$$

A expressão (3.2.7) representa um sistema de equações lineares, sendo que para um problema bidimensional com 'N' pontos nodais tal sistema contém 2N equações relacionando deslocamentos e forças de superfície. Tais valores estão representados pelos vetores \underline{U} e \underline{P} , respectivamente. Em um corpo em equilíbrio, com condições de contorno impostas, necessariamente conhecem-se N_1 deslocamentos e N_2 valores de forças de superfície, tal que $N_1 + N_2 = 2N$. Neste caso os valores das incógnitas do sistema serão N_1 reações e N_2 deslocamentos.

Como já descrito no capítulo anterior, ao levar a equação integral para o contorno surge uma descontinuidade representada na equação (3.2.5) pela matriz \underline{C} que matricialmente corresponde a: (ver eq.(2.3.13))

$$\underline{C}(S) = \underline{I} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \underline{P}^*(S,Q) d\Gamma(Q) \quad (3.2.9)$$

onde \underline{I} é a matriz identidade que para o caso plano é dada por:

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

O limite da integral da equação (3.2.9) pode ser avaliado adicionando o segmento de círculo Ω_ϵ com raio ϵ ao domínio original Ω do corpo, admitindo-se a geometria da seguinte figura:

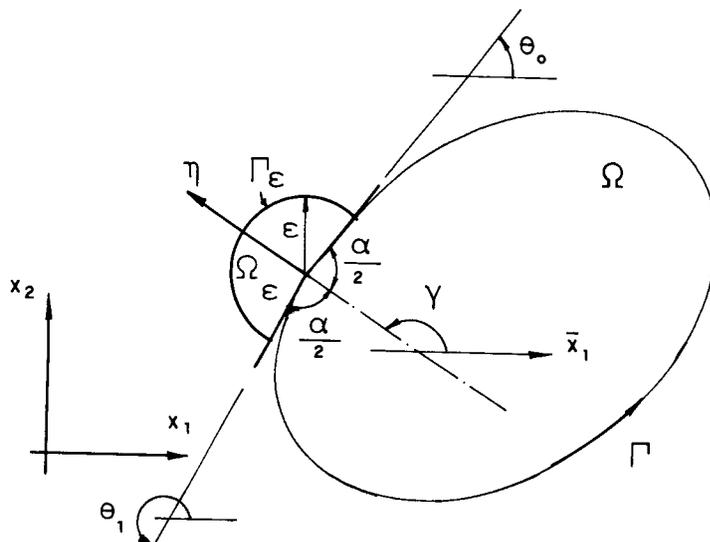


FIG. 3.2 - CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA PARA A DETERMINAÇÃO DE \underline{C}

Após se fazer a integração indicada na equação (3.2.9) e o correspondente limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ obtém-se uma expressão matricial para o valor de $\underline{C}(S)$ dada por:

$$\underline{C}(S) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos(2\gamma) \text{sen}\alpha}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\text{sen}(2\gamma) \text{sen}\alpha}{4\pi(1-\nu)} \\ \frac{\text{sen}(2\gamma) \text{sen}\alpha}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{\cos(2\gamma) \text{sen}\alpha}{4\pi(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

Os valores acima deverão ser adicionados às submatrizes diagonais da matriz \underline{H} para a determinação precisa do sistema de equações.

Uma outra maneira de calcular os valores das submatrizes diagonais é considerar na estrutura um movimento de corpo rígido, isto é, impor deslocamento ao corpo sem aplicação de carga alguma. Considerando-se então um deslocamento de corpo rígido de magnitude unitária na direção 'i', cada nó 'k' terá seu deslocamento expresso por:

$$u_j^k = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2; k = 1, \dots, N) \quad (3.2.12)$$

sabendo ainda que as forças de superfície são iguais a zero:

$$\underline{p}^k = \underline{0} \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.2.13)$$

A equação matricial (3.2.7) fica expressa na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} & \dots & \underline{H}_{1N} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} & \dots & \underline{H}_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{H}_{N1} & \underline{H}_{N2} & \dots & \underline{H}_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{I} \\ \underline{I} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{I} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \quad (3.2.14)$$

onde cada submatriz $\underline{H}_{\ell m}$ contém os coeficientes que dão a influência do nó 'm' no ponto nodal 'ℓ', sendo para o caso bidimensional de dimensão 2 x 2.

Da identidade (3.2.14) deduz-se que:

$$\underline{H}_{mm} = - \sum_{k=1}^N \underline{H}_{mk} \quad \begin{matrix} (k \neq m) \\ (m, k = 1, \dots, N) \end{matrix} \quad (3.2.15)$$

Alguns autores (33), porém, recomendam que a determinação das submatrizes diagonais sejam obtidas pela soma dos valores de \underline{C} e das integrais principais de Cauchy que correspondem à integração das soluções fundamentais da reação p_{ik}^* sobre os elementos adjacentes ao nó singular em consideração, isto é a submatriz \underline{H}_{mm} da equação (3.2.6). Quando se faz a determinação analítica descrita acima a propriedade expressa em (3.2.15) servirá apenas como forma de

verificação da precisão dos valores de \underline{H} obtidos em geral por integrais numéricas.

Com um procedimento similar àquele que permitiu a dedução da equação (3.2.6), obtém-se a equação matricial que fornece os deslocamentos ' \underline{U} ' nos pontos internos 's' a partir da equação integral (2.3.6).

$$\underline{U} = - \underline{H}\underline{U} + \underline{G}\underline{P} + \underline{D}\underline{B} \quad (3.2.16)$$

Da mesma forma, para o cálculo das tensões internas, parte-se da expressão (2.3.19) e obtém-se:

$$\underline{\sigma} = - \underline{H}'\underline{U} + \underline{G}'\underline{P} + \underline{D}'\underline{B} \quad (3.2.17)$$

onde \underline{H}' , \underline{G}' e \underline{D}' são as matrizes obtidas ao se efetuar as integrais da equação (2.3.19) sobre todos os elementos de contorno Γ_j .

Resolvendo adequadamente a equação (3.2.7) para os pontos de contorno e utilizando-se as equações (3.2.17) e (3.2.16) para os pontos do interior onde se quer conhecer tensões e deslocamentos, obtém-se a análise do problema elástico completa. Uma observação deve ser feita em relação à equação (3.2.7). Como já se mencionou anteriormente, o equacionamento feito leva a um método misto de cálculo, isto é, os deslocamentos são incógnitas em uma parte do contorno enquanto na parte complementar desse contorno as forças de superfície aparecem como valores não conhecidos. Portanto, na solução do sistema (3.2.7) é necessária a troca de colunas das matrizes \underline{H} e \underline{G} de maneira a ficarem todas as incógnitas de um lado da equação e os valores conhecidos do outro lado. Efetuando-se essa operação matricial obtém-se um sistema final do tipo:

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{B} \quad (3.2.18)$$

onde o vetor \underline{X} contém as incógnitas, \underline{A} é a matriz dos coeficientes que multiplicam \underline{X} enquanto que \underline{B} é o vetor que contém a influência dos valores nodais conhecidos e das forças de volume.

Assim a solução do sistema (3.2.18) é dada por:

$$\underline{X} = \underline{A}^{-1} \underline{B} \quad (3.2.19)$$

3.3 - DESCRIÇÃO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO UTILIZADOS

3.3.1 - Aproximação Linear para a Geometria do Elemento

Neste trabalho considerar-se-á unicamente o contorno dividido em segmentos retos (ver fig. 3.1). Deixa-se claro que elementos de formas definidas por outras funções polinomiais, quadráticas e cúbicas, por exemplo, têm sido também empregados (24) não sendo, porém, considerados como objetivo deste trabalho.

Para a definição geométrica de uma reta é condição necessária e suficiente o conhecimento de dois pontos que pertençam a ela; assim, neste caso, as coordenadas dos pontos extremos bastam para definir o elemento e constituem-se na melhor escolha já que são a base para a determinação da geometria dos elementos de um contorno genérico com o mínimo número de pontos.

É conveniente, para a realização da integração numérica sobre o elemento, expressar as coordenadas de cada ponto em função de coordenadas locais homogêneas ' ξ ' (fig. 3.3). A partir da equação (3.2.2) tem-se:

$$\underline{x}^{(j)} = \underline{\psi}^T(\xi) \underline{x}^{(N)} \quad (3.3.1)$$

ou de forma explícita:

$$\tilde{x}^{(j)} = \begin{Bmatrix} x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}^T & 0 \\ 0 & \tilde{\Psi}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_1^2 \\ X_2^1 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.3.2)$$

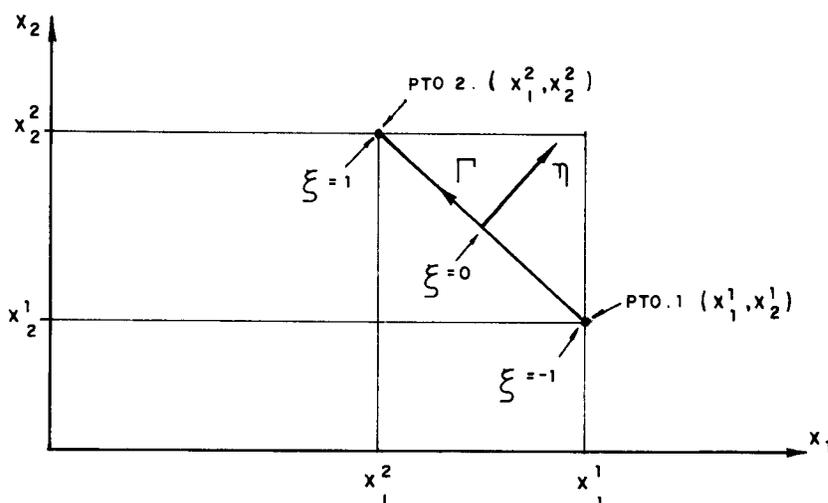


FIG. 3.3 — DESCRIÇÃO GEOMÉTRICA DO ELEMENTO LINEAR

$$\tilde{\Psi} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} (1-\xi) \\ \frac{1}{2} (1+\xi) \end{Bmatrix} \quad (3.3.3)$$

3.3.2 - Aproximação Linear dos Deslocamentos e Forças de Superfície

a) Elemento Contínuo

Quando se trabalha com as mesmas aproximações tanto para a geometria do elemento quanto para as ações, como se faz neste trabalho, originam-se os elementos isoparamétricos. Isto, no caso da aproximação linear, sugere imediatamente a escolha dos pontos geométricos extremos como os nós onde serão expressas as variáveis do problema. Estabelece-se, assim, o elemento linear contínuo, mostrado na figura 3.4.

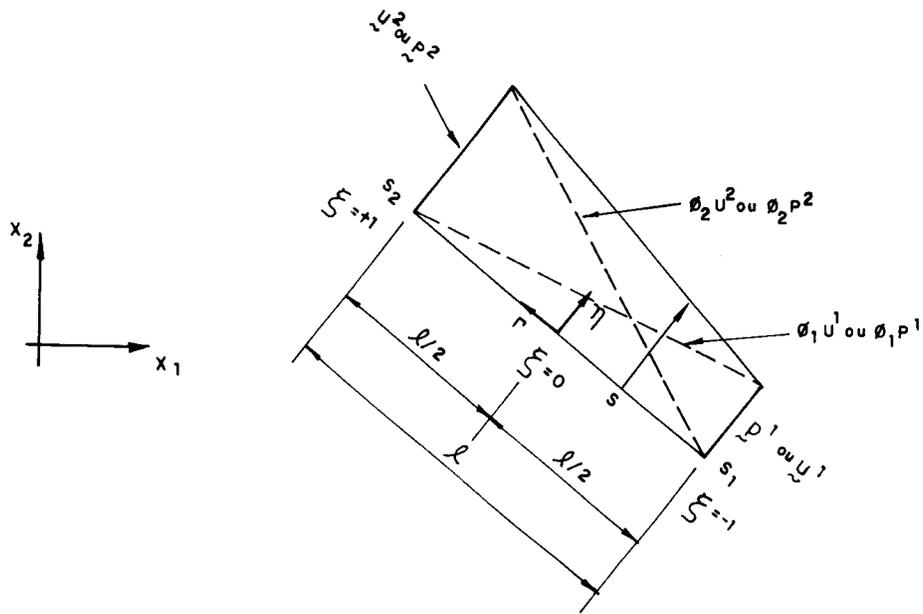


FIG. 3.4 — ELEMENTO LINEAR CONTÍNUO

b) Elemento Descontínuo

Os casos práticos que se encontram no estudo da mecânica dos sólidos apresentam freqüentemente pontos nos quais o vetor força de superfície é descontínuo (ver figura 3.5). Uma das maneiras que têm sido propostas para o tratamento deste problema é a utilização de elementos descontínuos (chamados também não conformes) nos quais os pontos onde são calculados os deslocamentos e reações não correspondem aos extremos geométricos dos elementos, e daí o nome "descontínuos" já que devido a essa configuração as variáveis de nós vizinhos pertencentes a elementos diferentes não possuem necessariamente o mesmo valor. Outra forma de resolver a descontinuidade de reações é discutida posteriormente no item 3.7 .

A adoção de uma rede composta por elementos descontínuos na totalidade do contorno implica, não obstante, em um aumento considerável no número de equações algébricas se comparada com uma discretização feita apenas com elementos contínuos. Assim, por exemplo, uma estrutura de uma única região discretizada em 'J' elementos lineares con

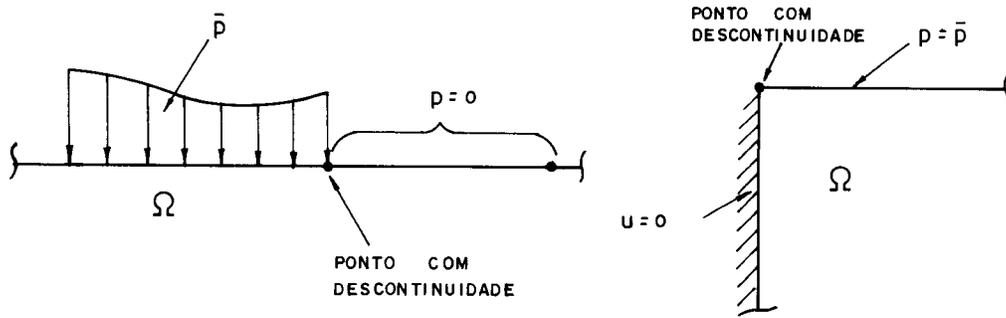


FIG. 3.5 — DESCONTINUIDADE DE REAÇÕES

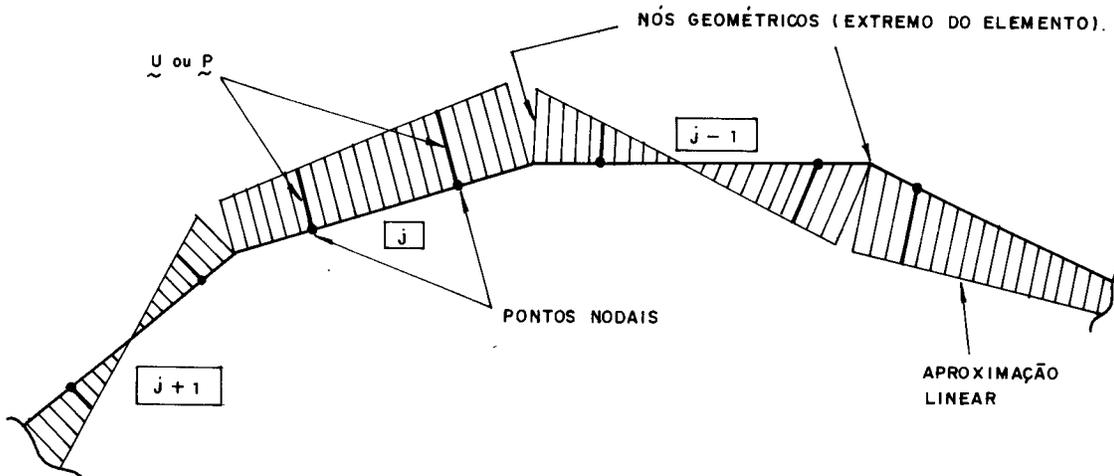


FIG. 3.6 — ELEMENTOS LINEARES DESCONTÍNUOS

tínuos, terá 'J' pontos nodais ou seja '2J' equações se o problema é bidimensional. A mesma estrutura com o mesmo número 'J' de elementos descontínuos terá '2J' nós e por conseguinte '4J' equações. O tamanho do problema é duplicado, aumentando portanto o seu tempo de resolução e ocupação de memória do computador, o que é, a partir desse ponto de vista, desaconselhável.

Procurando-se uma solução que concilie as vantagens de cada um dos elementos, introduz-se neste trabalho uma formulação genérica para o elemento linear, com o pro-

pósito de incluir a não conformidade sô onde se faz necessária para contornar problemas de descontinuidade, deixando o resto por conta dos elementos contínuos. Isto dá origem então a uma rede mista, composta por elementos contínuos e descontínuos, o que leva ao emprego do elemento descontínuo assimétrico, isto é, que seja descontínuo sô em um dos seus extremos.

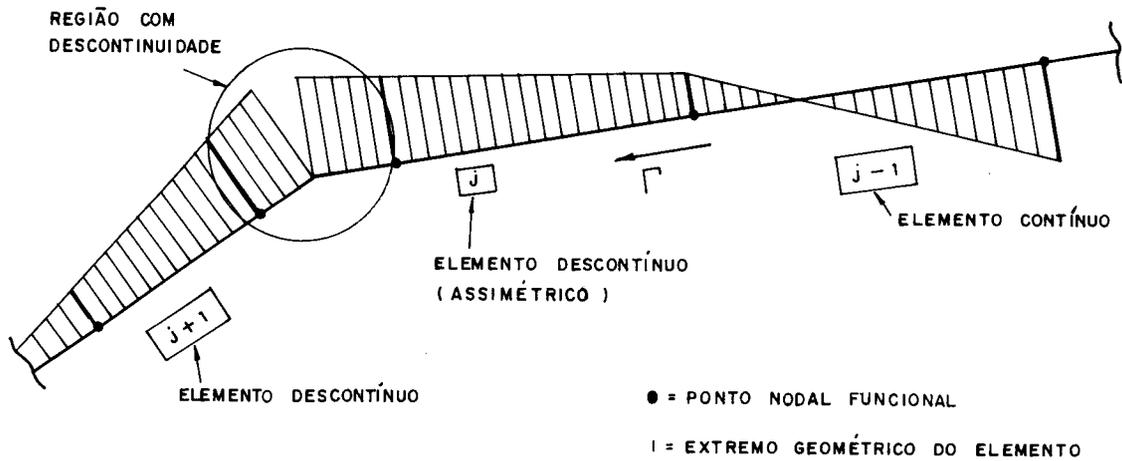
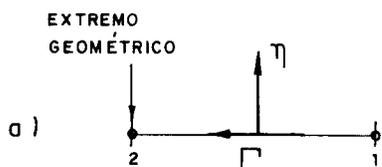
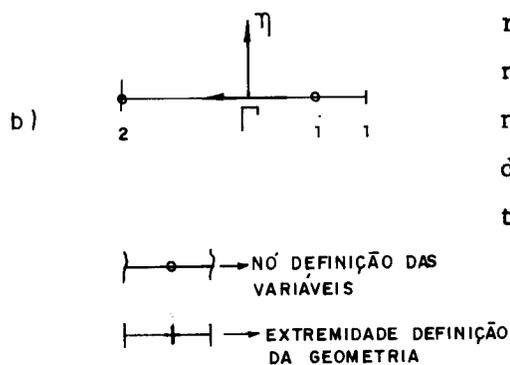


FIG. 3.7 — REDE MISTA, COM ELEMENTOS LINEARES CONTÍNUOS E DESCONTÍNUOS.

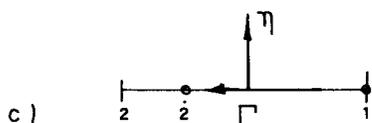
Assim, no equacionamento utilizado, o nó onde são calculadas as variáveis nodais pode ser definido em qualquer ponto dentro do elemento. Desta forma podem ser criados os seguintes elementos:



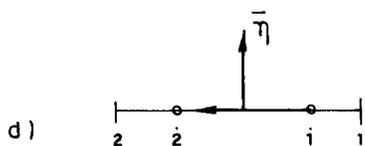
Isoparamétrico linear, ou linear contínuo, com os nós definidos nas extremidades do elemento.



Descontínuo à direita com referência a um observador situado no centro do elemento, olhando no sentido da normal. O nó da direita não corresponde ao ponto da extremidade.



Descontínuo à esquerda. O nó da esquerda não está localizado na extremidade. O elemento que continua à esquerda deverá ser, pelo menos, não conforme à direita.



Descontínuo. Nenhum dos nós elásticos está localizado nas extremidades do elemento.

FIG. 3.8 — DIFERENTES TIPOS DE ELEMENTOS

Com a finalidade de desenvolver a formulação desejada, definem-se inicialmente alguns parâmetros (ver fig. 3.9):

C_1 - Posição do nó direito com referência ao centro do elemento, em coordenadas homogêneas.

C_2 - Posição do nó esquerdo com referência ao centro do elemento, em coordenadas homogêneas.

ξ - Coordenada homogênea

l - Comprimento do elemento

ϕ_i - Função interpoladora

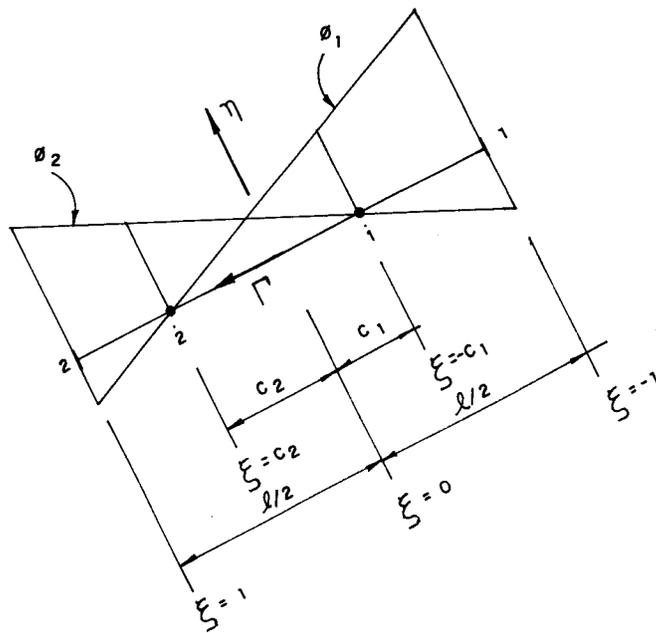


FIG. 3.9 — NOTAÇÃO USADA NO ELEMENTO DESCONTÍNUO

A aproximação linear indicada na figura 3.9 é facilmente deduzida, resultando em:

$$\phi_1 = \frac{1}{c_1 + c_2} (c_2 - \xi) \quad (3.3.4)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{c_1 + c_2} (c_1 - \xi)$$

uma comprovação destas funções (3.3.4), fazendo $c_2 = c_1 = 1$ leva a uma expressão análoga a (3.3.3)

$$\phi_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad ; \quad \phi_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad (3.3.5)$$

que são as funções interpoladoras do elemento linear comum.

3.4 - INTEGRAÇÃO SOBRE OS ELEMENTOS

3.4.1 - Integração Numérica

As características das integrais indicadas na equação (3.2.5) permitem que estas sejam efetuadas numericamente já que esse procedimento é simples e adequado para o tratamento computacional do método. Para isto emprega-se a quadratura de Gauss, que é dada pela expressão abaixo (60):

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad (3.4.1)$$

onde n = número total de pontos de integração

ξ_i = coordenada adimensional do i -ésimo ponto de integração, definida em função de n

e

w_i = fator ponderador, também calculado em função de n

Assim, expressando as funções que serão integradas em coordenadas homogêneas, têm-se para cada elemento as seguintes grandezas:

$$h_{ik}^s(Q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 p_{ik}^*(S, Q) \phi(Q, \xi) d\xi$$

e

(3.4.2)

$$g_{ik}^s(Q) = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 u_{ik}^*(S, Q) \phi(Q, \xi) d\xi$$

onde os índices indicam:

S = nó singular, isto é, ponto onde é aplicada a carga unitária ou para o qual se escreve a equação.

i = direção da carga unitária no n^o singular
k = direção da força ou deslocamento medido sobre o elemento em análise.

O número de pontos de integração necessário para obter resultados satisfatórios depende, entre outras coisas, da distância do n^o ao elemento, da função a ser integrada, do comprimento do elemento e dos ângulos formados entre o vetor posição e o elemento. No capítulo 5 apresenta-se uma análise para a verificação da influência desses fatores, tentando-se propor limites adequados para a elaboração de um algoritmo que selecione o número de pontos de integração.

É preciso notar que há uma limitação do sistema de integração numérica até aqui discutido. Quando o n^o singular pertence ao elemento em que se realiza a integração tem-se uma integral singular cujo valor obtido pelo processo descrito poderá conter erros. Assim recomenda-se a utilização de técnicas de integração numérica que levem em conta essas singularidades, ou, como é preferida neste trabalho, a resolução analítica dessas integrais.

3.4.2 - Integração Analítica nos Casos de Singularidade

A resolução analítica das integrais singulares resultantes quando o n^o singular está contido no elemento deve ser feita sob o conceito de valor principal, e para o caso dos elementos conformes faz-se necessária a integração simultânea dos elementos vizinhos. A seguinte notação é usada para distinguir os diversos valores que resultam ao integrar sobre o próprio elemento:

$$h_{ik}^{mn} = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 p_{ik}^* \phi^m d\xi$$
$$g_{ik}^{mn} = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 u_{ik}^* \phi^m d\xi$$

(3.4.3)

onde m = número que indica a função aproximadora (para elemento linear, $m = 1, 2$).

n = nó singular (também com numeração local, $n = 1, 2$).

i e k = análogo aos utilizados em (3.4.2).

O resultado das integrações acima já é amplamente conhecido para o elemento linear conforme (33). Para o elemento proposto neste trabalho e discutido no item 3.3.2 o valor dessas integrais é apresentado a seguir.

Para facilitar o entendimento da formulação, adota-se a notação indicada na figura 3.10.

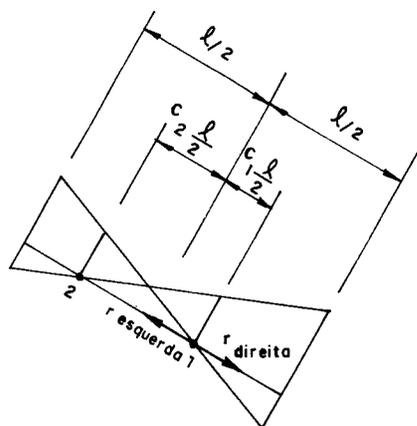


FIG.3.10 — ELEMENTO LINEAR GENÉRICO. NOTAÇÃO PARA INTEGRAÇÃO ANALÍTICA

onde os coeficientes C_1, C_2 correspondem àqueles mostrados na figura 3.9.

Avaliando cada uma das integrais com as devidas subdivisões à direita e à esquerda (ver fig. 3.10) obtém-se a seguinte expressão:

$$g_{ik}^{mn} = \frac{1-2\delta_{mn}}{8\pi(1-\nu)G} \left(\frac{l}{2}\right) \left[(1-C_n) \left\{ \left[\delta_{mn} + \frac{(1-C_n)}{2(C_1+C_2)} \right] \right\} \right]^*$$

$$\begin{aligned}
 & * \left[(3-4\nu) \left\{ \ell_n \left[\frac{\ell}{2}(1-C_n) \right] - 1 \right\} \delta_{ik}^{-r, i^r, k} + \frac{(1-C_n)}{4(C_1+C_2)} (3-4\nu) \delta_{ik} \right\} + \\
 & + (1+C_n) \left\{ \left[\delta_{mn} - \frac{(1+C_n)}{2(C_1+C_2)} \right] \left[(3-4\nu) \left\{ \ell_n \left[\frac{\ell}{2}(1+C_n) \right] - 1 \right\} \delta_{ik}^{-r, i^r, k} \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{(1+C_n)}{4(C_1+C_2)} (3-4\nu) \delta_{ik} \right\} \quad (3.4.4)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 h_{ik}^{mn} = & \frac{-(-1)^n (2\delta_{mn} - 1) (i-k) (1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \left[\delta_{mn} \left\{ \ell_n \left[\frac{\ell}{2}(1+C_n) \right] - \ell_n \left[\frac{\ell}{2}(1-C_n) \right] \right\} - \right. \\
 & \left. - \frac{2}{(C_1+C_2)} \right] \quad (3.4.5)
 \end{aligned}$$

(válidas para C_1 e $C_2 < 1$)

É importante notar que apenas a integral que origina o termo h_{ik}^{mn} é integral principal. O termo g_{ik}^{mn} pode ser obtido sem a necessidade de integração simultânea.

As equações acima são válidas sempre que C_1 e $C_2 < 1$. Caso algum destes coeficientes seja igual a um, equivalendo ao elemento contínuo (em um dos lados, pelo menos), a expressão de h_{ik}^{mn} (3.4.5) só tem sentido ao ser somada à correspondente do elemento vizinho, já que só assim é eliminada a singularidade logarítmica que ali aparece (em outras palavras isto corresponde à integração simultânea, isto é, a obtenção do valor principal). Desta forma na expressão (3.4.4) o termo multiplicado por $(1-C_n)$ torna-se zero e na equação (3.4.5) anula-se o logaritmo que contém $(1-C_n)$. Na programação do método podem ser usadas as expressões acima (3.4.4) e (3.4.5) tomando o devido cuidado de eliminar o cálculo das parcelas que desaparecem quando C_n for igual a um. Neste caso, estas equações fornecem parte do valor procurado, sendo completado quando se realiza a integração no elemento vizinho.

Outra pequena observação pode ser feita para o caso em que C_1 ou C_2 seja igual a zero. Isto equivale a localizar um dos nós no centro do elemento. Evidentemente só um dos valores (C_1 ou C_2) pode ser zero pois do contrário estar-se-ia definindo a mesma localização para os dois pontos nodais.

3.5 - SUBREGIÕES

Para ampliar de maneira considerável o campo de aplicação da formulação até aqui tratada, é preciso estudar o caso de estruturas formadas por várias subregiões (fig. 3.11) constituídas de materiais homogêneos e com constantes elásticas independentes.

Considere-se assim, um domínio formado por distintas subregiões designadas por Ω_i . Para cada uma delas pode ser calculado um sistema equivalente a (3.2.7) podendo-se escrever:

$$\underline{H}^{(i)} \underline{U}^{(i)} = \underline{G}^{(i)} \underline{P}^{(i)} + \underline{D}^{(i)} \underline{B}^{(i)} \quad (3.5.1)$$

onde o índice indica a i-ésima subregião

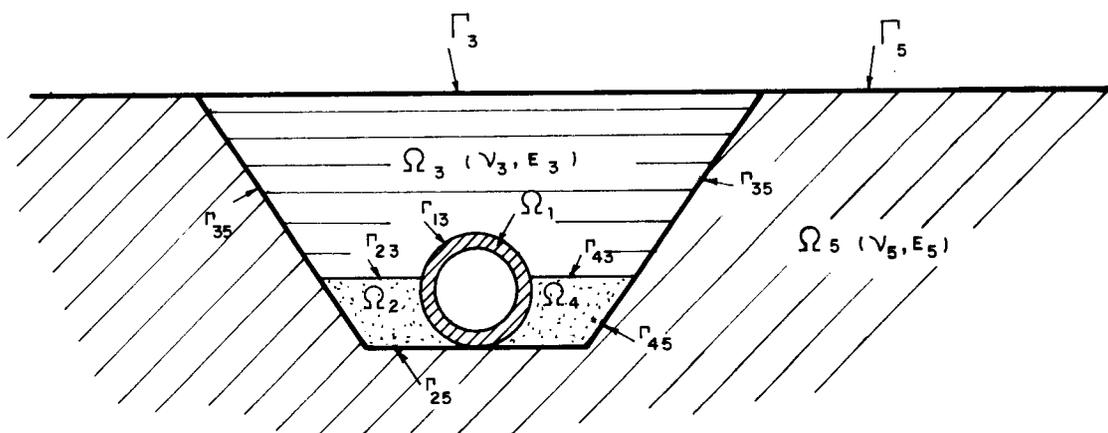


FIG. 3.11 — EXEMPLO DE DOMÍNIO FORMADO POR VÁRIAS SUB-REGIÕES

Para os pontos que pertencem aos contornos que dividem duas subregiões, isto é, as interfaces, devem ser acrescentadas expressões que relacionem essas subregiões entre si. Recorre-se então às condições de equilíbrio e compatibilidade, que para a interface das subregiões 'i' e 'j' podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\underline{\underline{u}}(ij) = \underline{\underline{u}}(ji) \quad (3.5.2)$$

$$\underline{\underline{p}}(ij) = -\underline{\underline{p}}(ji) \quad (3.5.3)$$

onde o primeiro índice indica a subregião à qual se referem os valores nodais e o segundo a subregião adjacente.

Indicando o contorno externo com o índice 'e', os vetores de deslocamento e força de superfície podem ser representados da seguinte forma:

$$\underline{\underline{u}}(i) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{u}}(ie) \\ \underline{\underline{u}}(ij) \end{bmatrix} \quad (3.5.4)$$

e

$$\underline{\underline{p}}(i) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{p}}(ie) \\ \underline{\underline{p}}(ij) \end{bmatrix} \quad (3.5.5)$$

podendo-se escrever a equação (3.5.1) como segue:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{H}}(ie) & \underline{\underline{H}}(ij) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{u}}(ie) \\ \underline{\underline{u}}(ij) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}(ie) & \underline{\underline{G}}(ij) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{p}}(ie) \\ \underline{\underline{p}}(ij) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}(i) & \underline{\underline{B}}(i) \end{bmatrix} \quad (3.5.6)$$

O mesmo procedimento aplicado à subregião j, com um ordenamento diferente das submatrizes para facilitar passos seguintes resulta em:

$$\begin{bmatrix} \underline{H}(ji) & \underline{H}(je) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}(ji) \\ \underline{U}(je) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}(ji) & \underline{G}(je) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}(ji) \\ \underline{P}(je) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{D}(j) & \underline{B}(j) \end{bmatrix} \quad (3.5.7)$$

Ao juntar as equações matriciais indicadas em (3.5.6) e (3.5.7), incluindo as condições (3.5.4) e (3.5.5) e ainda deixando tanto $\underline{U}^{(ij)}$ quanto $\underline{P}^{(ij)}$ do lado esquerdo (ambos são desconhecidos), o sistema acoplado fica:

$$\begin{bmatrix} \underline{H}(ie) & \underline{H}(ij) & -\underline{G}(ij) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{H}(ji) & \underline{G}(ji) & \underline{H}(je) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}(ie) \\ \underline{U}(ij) \\ \underline{P}(ij) \\ \underline{U}(je) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}(ie) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{G}(je) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}(ie) \\ \underline{P}(je) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{D}(i) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{D}(j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}(i) \\ \underline{B}(j) \end{bmatrix} \quad (3.5.8)$$

Ao serem incluídas forças prescritas na interface ' \bar{P} ' a condição de equilíbrio (3.5.3) fica dada por:

$$\underline{P}^{(ij)} + \underline{P}^{(ji)} = \bar{P} \quad (3.5.9)$$

e a equação (3.5.8) é alterada para:

$$\begin{bmatrix} \underline{H}(ie) & \underline{H}(ij) & -\underline{G}(ij) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{H}(ji) & \underline{G}(ji) & \underline{H}(je) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}(ie) \\ \underline{U}(ij) \\ \underline{P}(ij) \\ \underline{U}(je) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}^{(ie)} & \tilde{G}^{(ij)} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{G}^{(je)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}^{(ie)} \\ \tilde{P}^{(ij)} \\ \tilde{P}^{(je)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{D}^{(i)} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{D}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}^{(i)} \\ \tilde{B}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (3.5.10)$$

onde $\tilde{P}^{(ij)}$ indica carregamento prescrito na interface i-j.

Dadas as características das equações que fornecem os deslocamentos e as tensões em pontos internos, o cálculo destas quantidades é feito avaliando-se as equações (3.2.16) e (3.2.17) para a subregião em que o ponto está contido, de maneira similar ao caso de corpos com uma única região.

3.6 - CÁLCULO DAS TENSÕES NO CONTORNO

No item 2.3.4 foi mencionado que para o cálculo das tensões nos pontos de contorno é utilizada uma aproximação usando os valores de reações e deslocamentos. Esta aproximação é descrita a seguir.

Tome-se um elemento qualquer (fig. 3.12) admitindo que se conhecem os deslocamentos e reações nos pontos extremos.

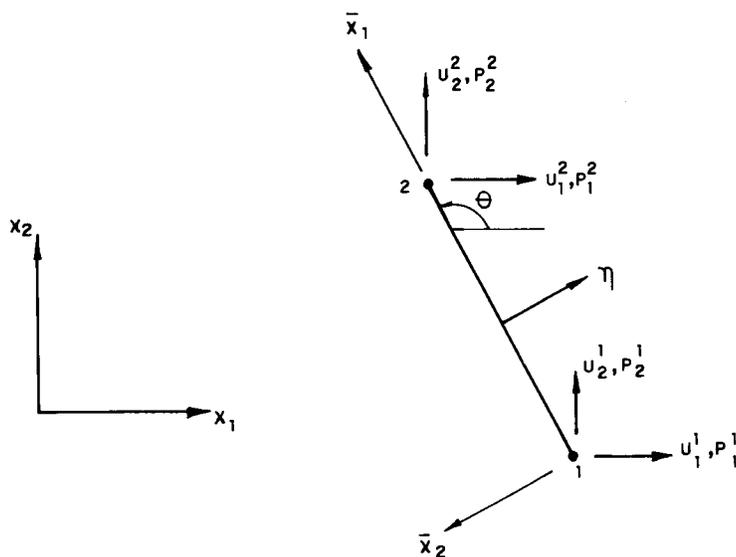


FIG. 3.12 — COORDENADAS GLOBAIS E LOCAIS DE UM ELEMENTO

Considerando x_1, x_2 o sistema global de coordenadas e \bar{x}_1, \bar{x}_2 o sistema local do elemento, orientado como se mostra na figura 3.12 e empregando-se inicialmente a relação tensão-forças de superfície (2.1.7):

$$\sigma_{ij} \eta_j = p_i \quad (2.1.7)$$

no sistema local \bar{x}_1, \bar{x}_2 com $\bar{\eta}_1 = 0$ e $\bar{\eta}_2 = -1$, obtêm-se os valores das tensões:

$$\bar{\sigma}_{12} = -\bar{p}_1 \quad (3.6.1)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = -\bar{p}_2$$

Por simetria do tensor tensão eq. (2.1.5) sabe-se que $\bar{\sigma}_{21} = \bar{\sigma}_{12}$, restando apenas definir o valor de $\bar{\sigma}_{11}$. Para a obtenção desse valor aplica-se a lei de Hooke (2.1.11):

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad (2.1.11)$$

Escrevendo a expressão acima em sua forma explícita para σ_{11} e σ_{22} e fazendo as operações algébricas necessárias, é fácil obter:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{2G}{1-\nu} \bar{\epsilon}_{11} + \frac{\nu}{1-\nu} \bar{\sigma}_{22} \quad (3.6.2)$$

Faltando agora averiguar $\bar{\epsilon}_{11}$. Por definição as deformações são dadas por (2.1.9):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.1.9)$$

No elemento conhecem-se os valores de deslocamentos nos extremos. Como a expressão (2.1.9) contém a derivada dos deslocamentos, é necessário admitir alguma lei de variação dos deslocamentos dentro do elemento. Adotando-se uma aproximação linear, ε_{11} fica expresso por:

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\bar{U}_1^2 - \bar{U}_1^1}{\ell} \quad (3.6.3)$$

Substituindo (3.6.3) em (3.6.2) obtêm-se:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{2G}{1-\nu} \left(\frac{\bar{U}_1^2 - \bar{U}_1^1}{\ell} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} \bar{p}_2 \quad (3.6.4)$$

Sendo necessário obter as tensões no sistema global de coordenadas, realizam-se as operações pertinentes correspondentes às transformações vetoriais de \underline{U} e \underline{P} e tensoriais de $\underline{\sigma}$ e chega-se às expressões abaixo:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \frac{2G}{(1-\nu)\ell} \left[\cos^3\theta (U_1^2 - U_1^1) + \text{sen}\theta \cos^2\theta (U_2^2 - U_2^1) \right] + \\ & + p_1 \left[\frac{2-\nu}{1-\nu} \text{sen}\theta \cos^2\theta + \text{sen}^3\theta \right] + p_2 \left[\cos\theta \text{sen}^2\theta - \frac{\nu}{1-\nu} \cos^3\theta \right] \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = & \frac{2G}{(1-\nu)} \left[\text{sen}\theta \cos^2\theta (U_1^2 - U_1^1) + \text{sen}^2\theta \cos\theta (U_2^2 - U_2^1) \right] + \\ & + p_1 \left[\frac{\nu}{1-\nu} \text{sen}^2\theta \cos\theta - \cos^3\theta \right] + p_2 \left[\text{sen}^3\theta - \frac{\nu}{1-\nu} \text{sen}\theta \cos^2\theta \right] \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

e

$$\sigma_{22} = \frac{2G}{(1-\nu)\ell} \left[\text{sen}^2\theta \cos\theta (U_1^2 - U_1^1) + \text{sen}^3\theta (U_2^2 - U_2^1) \right] +$$

$$+ p_1 \left[\frac{v}{1-v} \operatorname{sen}^3 \theta - \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta \right] - p_2 \left[\frac{2-v}{1-v} \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta \right] \quad (3.6.8)$$

sendo θ o ângulo de rotação entre as coordenadas globais e locais, conforme se mostra na figura 3.12.

3.7 - TRATAMENTO DA DESCONTINUIDADE DAS FORÇAS DE SUPERFÍCIE

A descontinuidade do vetor de forças de superfície tem sido geralmente tratada no MEC com a adoção de nós duplos e a imposição de equações suplementares (49)

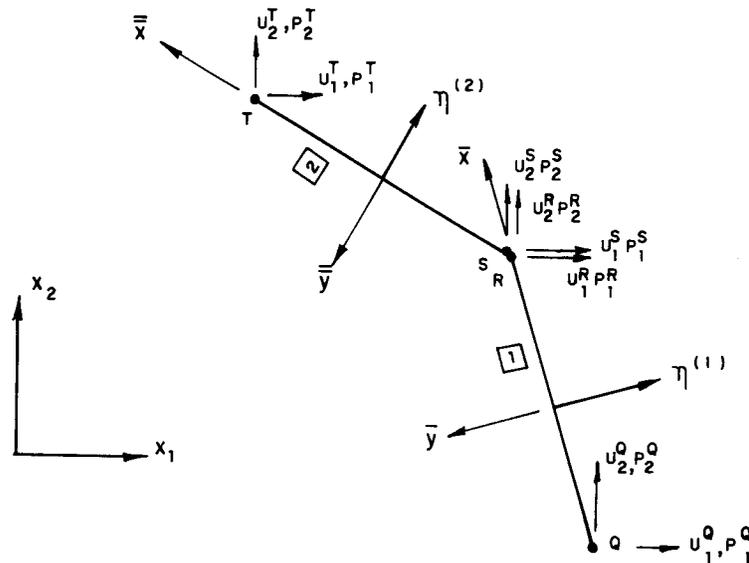


FIG. 3.13 — DEFINIÇÃO DOS NÓS DUPLOS

O nó duplo consiste em definir na região que apresenta a descontinuidade dois pontos nodais com a mesma localização geométrica, isto é, com as mesmas coordenadas. Cada um deles, porém, é suposto como pertencendo a elementos diferentes (ver figura 3.13). Esta técnica resolve convenientemente alguns dos problemas de descontinuidade de reações. No entanto, existem casos em que a adoção de nós duplos não é suficiente para resolver o problema (50), ou simplesmente

para melhorar a aproximação dos resultados. Nesta situação equações adicionais aplicadas aos nós duplos que são baseadas na invariância do traço do tensor de deformações e na simetria do tensor de tensões (49,50) substituem aquelas calculadas a partir da equação integral de contorno (3.2.5).

Neste trabalho será incluída unicamente a relação resultante da imposição de simetria do tensor tensão eq. (2.1.5), tendo em conta que o elemento descontínuo aqui utilizado (item 3.3.2) trata qualquer tipo de descontinuidade de reações.

Assim, escrevendo as equações que relacionam tensão-força de superfície eq. (2.1.7), incluindo a propriedade da simetria (2.1.5) e fazendo algumas operações algébricas necessárias, obtêm-se a seguinte expressão:

$$P_1^{(R)} \eta_1^{(2)} + P_2^{(R)} \eta_2^{(2)} = P_1^{(S)} \eta_1^{(1)} + P_2^{(S)} \eta_2^{(1)} \quad (3.7.1)$$

Expressão esta que pode substituir uma das equações para um dos nós duplos.

Com o objetivo de deixar completa a alternativa de uso do nó duplo, mostra-se aqui a outra equação adicional usada para solucionar casos de descontinuidade das forças de superfície onde uma única equação não é suficiente, tais como descontinuidades de nós em interface ou nós duplos externos com todos os deslocamentos prescritos.

A equação, deduzida por Chaudonneret (49), baseia-se na invariância do traço do tensor das deformações aplicada aos nós duplos. Utilizando-se essa propriedade e operando-se com os parâmetros nodais tem-se

$$\epsilon^{(S)} - \epsilon^{(Q)} = (P^{(S)} - P^{(Q)})/2G \quad (3.7.2)$$

sendo ϵ a componente de deformação paralela ao elemento correspondente e escrita a partir de valores nodais de deslocamentos, e P forças de superfície na direção da normal do elemento e referidas apenas aos nós S e Q .

C A P Í T U L O I V

PROGRAMAÇÃO

4.1 - INTRODUÇÃO

A finalidade do Método dos Elementos de Contorno -MEC, como a de todo método numérico, é a resolução de problemas cuja solução analítica ou é muito complexa ou ainda não foi determinada, contando para isto com o apoio de computadores. Assim, uma parte essencial deste trabalho foi o desenvolvimento de um programa em linguagem FORTRAN 77 feito no computador IBM/370-148 do Centro de Processamento de Dados - CPD da Escola de Engenharia de São Carlos - EESC.

O programa resolve problemas de elasticidade linear bidimensional, isto é, estado plano de tensão e estado plano de deformação, admitindo-se a possibilidade da estrutura estar composta por várias subregiões, as quais podem estar dispostas de maneira arbitrária.

Emprega-se no programa o elemento linear deduzido no capítulo anterior, e desta maneira tem-se a capacidade de geração de uma rede mista com elementos contínuos e descontínuos, resolvendo-se assim de forma precisa o problema da descontinuidade de reações.

Adaptou-se ao programa um sofisticado esquema de resolução de sistemas de equações em blocos, elaborado por Crotty(51) especificamente para tratar do tipo de matriz resul

tante do Método de Elementos de Contorno.

Na época atual é preocupação dos investigadores criar programas aplicativos ("software") especialmente desenvolvidos para micro-processadores dada a grande utilização que se prevê para esse tipo de equipamento. Assim, o esquema geral do programa, incluindo características como armazenamento das matrizes em forma vetorial e uso de memória auxiliar, facilitam uma eventual adaptação deste a microcomputadores.

A seguir descrevem-se com detalhe as diversas partes que compõem o programa.

4.2 - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

4.2.1 - Descrição Geral

O programa segue a forma simples dos programas básicos do MEC(58). Pode ser dividido nas seguintes partes:

- a) Entrada e geração de dados;
- b) Cálculo do sistema de equações;
- c) Resolução do sistema, resultando no conhecimento das forças de superfície e deslocamentos nos pontos de contorno;
- d) Cálculo das tensões nos pontos de contorno, cálculo dos deslocamentos e tensões nos pontos internos e impressão de resultados.

O programa está dividido em 20 segmentos, sendo 9 destes do sistema de resolução adaptado. No primeiro subprograma, que é o programa principal, são definidos os números limites do programa, tais como dimensões dos vetores, número máximo de equações, etc.. Também são dados os comandos que definem e identificam os arquivos usados que neste caso são cinco: um arquivo para dados de entrada (leitora), outro para dados de saída ou resultados (impressora) e três arquivos para uso de memória auxiliar na execução do programa, sendo dois deles arquivos de acesso direto e

um seqüencial. Deste programa principal são chamadas as diversas subrotinas, seguindo a ordem que se mostra de maneira simplificada no diagrama de blocos 4.1. No diagrama 4.2 estão os nomes de todas as subrotinas, suas ligações e ordem de execução.

A seguir é feita uma descrição de cada uma das partes mencionadas dividindo-as de acordo com os itens mostrados nos diagramas 4.1 e 4.2.

4.2.2 - Entrada e Ceração de Dados de Controle

Como já se mencionou, no começo do programa são definidos os limites do mesmo e em seguida é chamada a subrotina de leitura de dados ENTR, para depois serem chamadas as subrotinas INTERF, PABLOC e PRELIM para definições que se fazem necessárias antes da montagem do sistema.

a) Subrotina ENTR. Nesta subrotina são lidos todos os dados usados nos cálculos posteriores.

Inicia-se então com a leitura do título do problema empregando-se uma variável com caracteres alfanuméricos. Logo após é lido o tipo de problema a ser resolvido, podendo ser estado plano de tensão ou de deformação. Isto será identificado pelo código dado a uma determinada variável.

A estrutura é identificada com a leitura do número de pontos de contorno em que está discretizada, número de pontos internos para os quais é previsto algum cálculo, e o número de subregiões que a compõem.

Sabendo-se o número de pontos de contorno é feita a leitura das coordenadas cartesianas (x_1 , x_2) de cada um, aproveitando-se para ler juntamente um vetor de identificação do tipo de nó, utilizando-se para isto uma variável inteira que receberá os seguintes valores: 0 se o nó for simples; 1 se for nó duplo; e 2 se este nó vai ser deslocado do extremo do elemento para dar origem a um elemento descontínuo. Note-se que na maioria dos casos este valor vai ser zero (nó simples), não sendo necessário, por conseguinte, digitar este valor.

DIAGRAMA DE BLOCOS

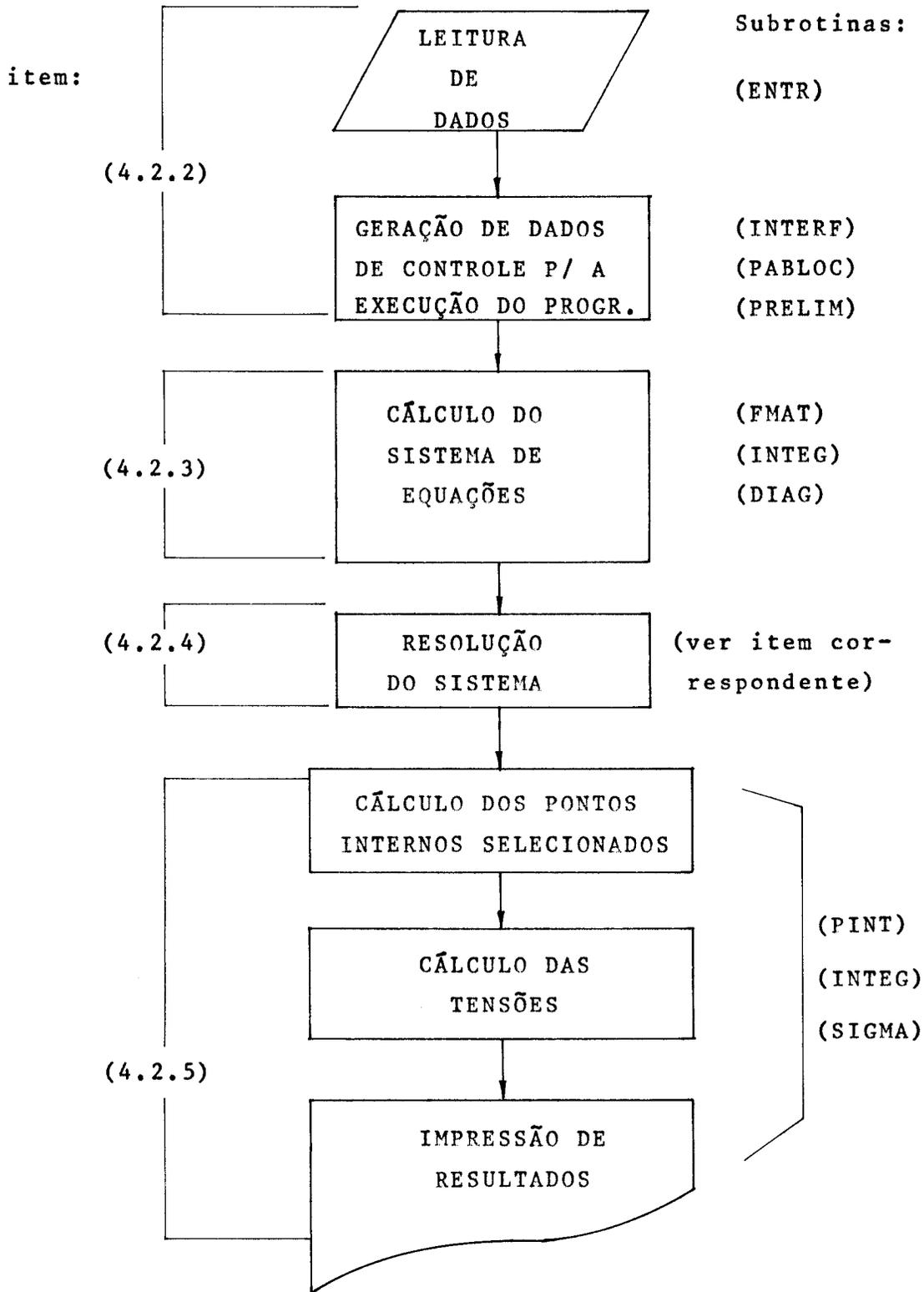


Diagrama 4.1 - Diagrama de Blocos Geral do Programa

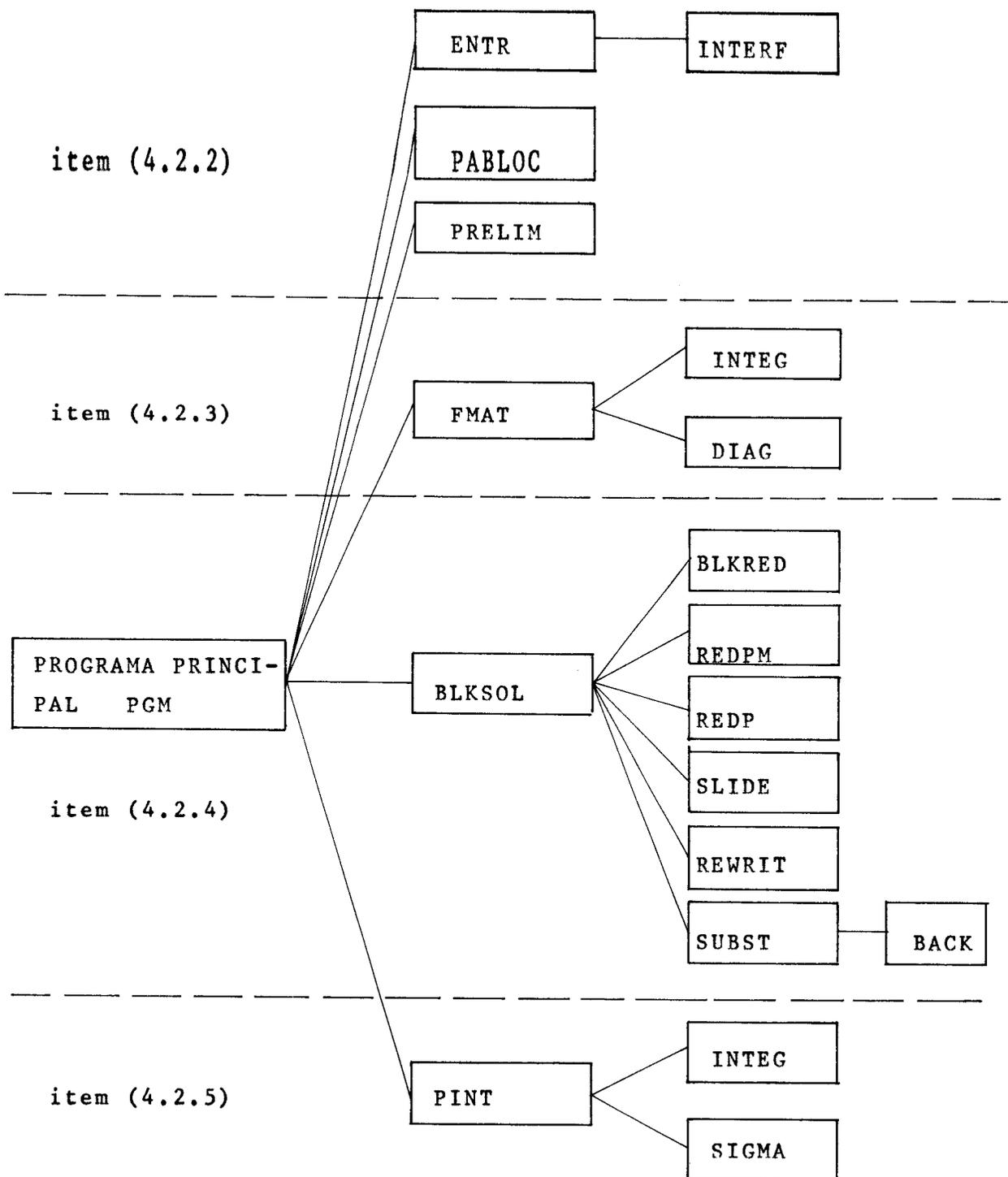


Diagrama 4.2 - Esquema das Subrotinas Utilizadas no Programa

Em seguida são lidas as coordenadas dos pontos internos com o auxílio de um vetor que contém o número da subregião a que pertence cada ponto.

A definição dos elementos de contorno é feita por subregião empregando-se uma variável indexada unidimensional onde duas posições são reservadas para cada elemento, correspondendo a primeira delas ao nó inicial e a segunda ao nó final do elemento. Esta ordem (nó inicial, nó final), é dada pelo sentido do contorno Γ (ver figura 4.1).

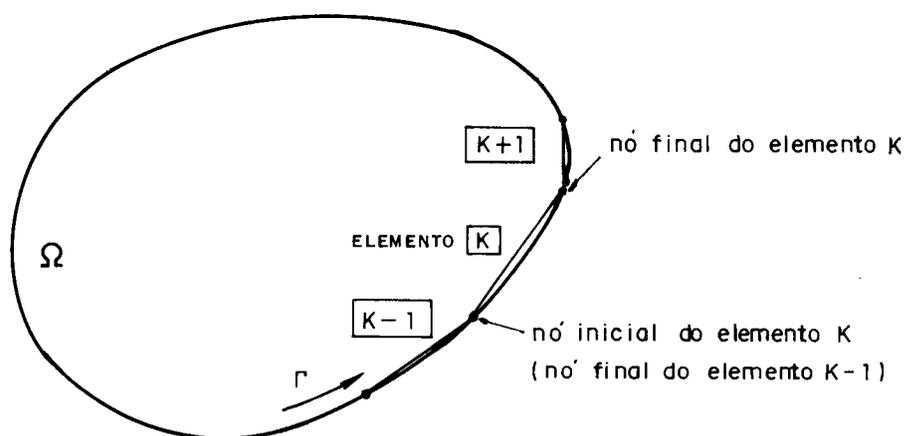


FIG. 4.1— IDENTIFICAÇÃO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A numeração dos elementos é feita dentro do programa seguindo a ordem em que estes são lidos. Criam-se automaticamente também dois vetores que armazenam o primeiro e o último elemento de cada subregião, respectivamente. Estes valores auxiliam no cálculo do sistema de equações.

No passo seguinte desta subrotina (ENTR) chama-se a subrotina INTERF que terá suas características relatadas no próximo item.

Dando seqüência à entrada de dados lêem-se as condições de contorno. Para facilitar esta leitura assume-se inicialmente que o carregamento está prescrito em todo o contorno. Posteriormente é dado o número de nós onde o deslocamento é imposto em alguma direção e então são lidas as condições destes nós. Pelo fato de cada nó ter imposições em duas direções a variável que define o tipo de contorno

tem duas posições por nó, de maneira similar à identificação dos elementos de contorno.

Já definido o tipo de imposição são então lidos os valores das forças e deslocamentos prescritos. Outra vez, para facilitar a entrada de dados, inicialmente todos esses valores são assumidos como sendo zero. Antes disso é definido o número de carregamentos diferentes a serem analisados. É lido depois o número de prescrições com valor diferente de zero, e logo então o nó e suas imposições correspondentes. Neste ponto é usada a localização das equações do nó dentro do sistema de equações que é obtida da subrotina INTERF. Isto se faz necessário devido ao fato de que os nós localizados na interface das subregiões têm quatro equações, enquanto que os nós de borda têm só duas, dificultando assim o uso de algum algoritmo usual de endereçamento das equações. Com a ajuda do vetor de localização as imposições no contorno são colocadas corretamente dentro de um vetor que contém inicialmente tanto forças quanto deslocamentos, segundo a correspondente condição de contorno.

Nesta subrotina ENTR são impressos os valores de entrada para facilitar uma eventual verificação dos mesmos, caso se dê algum erro na execução do programa. É conveniente notar que o programa não conta com um sistema completo de testes de consistência dos dados para indicar com precisão a posição e tipo de cada erro.

b) Subrotina INTERF

Ao trabalhar com subregiões faz-se necessário conhecer as subregiões a que pertence cada nó. Nesta subrotina, então, é calculado um vetor com duas posições para cada nó indicando suas subregiões da seguinte forma:

Para o nó N a posição de memória $2*N-1$ conterá o número da subregião, com ordem menor, à que o nó pertence. A posição $2*N$ conterá o número da outra subregião (cada nó pode pertencer no máximo a duas subregiões). Caso o ponto nodal seja de borda (pertence a uma única subregião) a segunda posição de memória terá valor zero.

A determinação deste vetor faz-se comparando-se cada nó com as extremidades dos elementos de cada subregião. Toma-se o cuidado de evitar comparações com nós cujas subregiões já foram encontradas, diminuindo-se assim o número de operações. A listagem desta subrotina é dada abaixo (List. 4.1) sendo a variável INF o vetor onde se armazenam estes dados. É evidente que tudo isto pode ser fornecido na entrada, porém, é objetivo facilitar, na medida do possível, a entrada de dados para diminuir o trabalho do usuário.

```

C ----- PGM
C                                     PGM
C  CALCULO DO VETOR INF, QUE IDENTIFICA OS PONTOS DA INTERFACE PGM
C ----- PGM
C                                     PGM
SUBROUTINE INTERF (NPEX,NSUB,INIC,IFIN,IEL,INF,LOC,NEQ) PGM
COMMON LEC,IMP PGM
DIMENSION INIC(1),IFIN(1),IEL(1),INF(1),LOC(1) PGM
DO 100 I=1,NPEX PGM
  INF(2*I)=0 PGM
100 CONTINUE PGM
  DO 170 I=1,NSJB PGM
    IN=I+1 PGM
    DO 160 J=INIC(I),IFIN(I) PGM
      DO 150 L=1,2 PGM
        NO=IEL(2*J-2+L) PGM
        IF(INF(2*NO).NE.0) GO TO 150 PGM
        DO 120 K=IN,NSUB PGM
          DO 110 M=INIC(K),IFIN(K) PGM
            IF(NO.EQ.IEL(2*M-1).OR.NO.EQ.IEL(2*M)) GO TO 130 PGM
110          CONTINUE PGM
120          CONTINUE PGM
            GO TO 140 PGM
130          INF(2*NO)=K PGM
140          INF(2*NO-1)=I PGM
150          CONTINUE PGM
160          CONTINUE PGM
170 CONTINUE PGM
C                                     PGM
C LOCALIZACAO DOS NOS DENTRO DO SISTEMA DE EQUACOES. PGM
C LOC(I) = NO. DA EQUACAO QUE PRECEDE AS CORRESPONDENTES AO NO I PGM
C                                     PGM
  LOC(1)=0 PGM
  DO 180 I=1,NPEX PGM
    LOC(I+1)=LOC(I)+2 PGM
    IF(INF(2*I).NE.0) LOC(I+1)=LOC(I+1)+2 PGM
180 CONTINUE PGM
  NEQ=LOC(NPEX+1) PGM
  RETURN PGM
  END PGM

```

Listagem 4.1 - Subrotina INTERF

Também é calculada nesta subrotina a localização das equações de cada ponto de contorno dentro do sistema global. Isto é feito usando uma variável obtida com a soma do número de equações de cada nó verificando-se sempre se o nó

é de interface ou não. Neste cálculo é usado pela primeira vez o vetor definido anteriormente nesta subrotina, como se pode observar na listagem (4.1). O último número computado corresponde ao número total de equações e incógnitas do problema, sendo referido a uma variável específica.

c) Subrotina PABLOC

O algoritmo adaptado para a resolução do sistema de equações com tratamento em blocos exige a preparação de dados de controle da execução. É na verdade a determinação dos números que definem a forma da matriz. Deve ser calculado o número de colunas-bloco, o número de colunas da matriz que tem cada coluna-bloco, o número de linhas-bloco e o número de linhas por linha-bloco (ver figura 4.2).

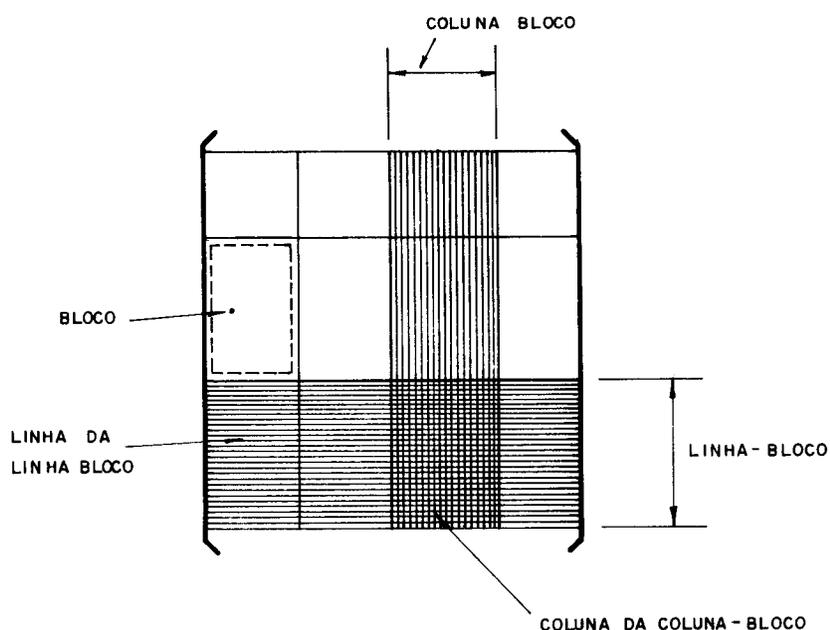


FIG. 4.2— DEFINIÇÃO DOS TERMOS USADOS PARA DEFINIR A MATRIZ EM BLOCOS.

A determinação do número de colunas que contém cada da coluna-bloco (vetor KOLL) é feita de maneira indireta como se explica a seguir (ver listagem 4.2.1). Inicialmente são definidas colunas-bloco de tamanho igual ao de cada

subregião (linha-bloco). A razão disto será explicada no item correspondente à resolução do sistema. Em continuação é feita uma comparação sucessiva entre cada ponto e o ponto anterior, definindo - se uma coluna - bloco quando esses pontos não pertencem às mesmas subregiões. É por esse motivo que o vetor calculado na subrotina anterior (INTERF) é de grande utilidade. Terminados estes cálculos têm-se definidas todas as colunas-bloco mas de maneira desordenada, fazendo-se necessário ordená-las. Depois disto é feita a definição do conteúdo dos blocos atribuindo-se valor zero para os que contêm zeros e um para aqueles que contêm números diferentes de zero. A seguir são definidos os valores verdadeiros do número de colunas que cada coluna - bloco tem, pois até aqui o vetor que define isto está em valores globais com números tomados da posição que a última coluna da coluna-bloco possui dentro da matriz inteira. Assim, efetua-se uma subtração começando pela última coluna-bloco. A razão de calcular estes vetores indiretamente é que, apesar da aparente complicação causada, foi a forma mais simples que se encontrou para poder considerar todas as circunstâncias que definem as colunas-bloco, incluindo também os casos particulares que podem ocorrer.

Finalmente verificam-se algumas condições de erro pois os dados aqui calculados permitem saber se o problema ultrapassa os limites máximos (List. 4.2.2).

Existe uma outra subrotina que processa os dados aqui obtidos e calcula todos os números de controle usados na resolução do sistema de equações. Como ela faz parte do sistema de resolução em blocos (51) será tratado no item 4.2.4, dedicado exclusivamente a este assunto.

```

C ----- PGM
C DETERMINACAO DOS NUMEROS DE CONTROLE PARA RESOLUCAO POR BLOCOS PGM
C ----- PGM
C SUBROUTINE PABLOC (NSUB,NROWS,INF,NPEX,KOLL,MAP,MAXR,MAXC, PGM
- INIC,IFIN,IEL,NCLBL,LOC,MAXSTO,NEQ,LREC,MAXE) PGM
COMMON LEC,IMP PGM
DIMENSION MAP(MAXR,MAXC),NROWS(1),INF(1),KOLL(1),INIC(1), PGM
-IFIN(1),IEL(1),LOC(1) PGM
C PGM
C DETERMINACAO DO NUMERO DE COLUNAS-BLOCO, NO. DE COLUNAS POR COLUNA- PGM
C BLOCO, E NO. DE LINHAS POR LINHA-BLOCO PGM
C PGM
DO 100 I=1,NSJB PGM
100 NROWS(I)=0 PGM
NCLBL=1 PGM
DO 110 I=1,NPEX PGM
NROWS(INF(2*I-1))=NROWS(INF(2*I-1))+2 PGM
110 IF (INF(2*I).NE.0) NROWS(INF(2*I))=NROWS(INF(2*I))+2 PGM
C PGM
C DIVISAO INICIAL. GARANTIR QUE TODO BLOCO-PIVO UMA VEZ LIDO TENHA PGM
C TODAS SUAS COLUNAS PROCESSADAS PGM
KOLL(1)=NROWS(1) PGM
DO 120 I=1,NSJB PGM
120 KOLL(I)=NROWS(I)+KOLL(I-1) PGM
C PGM
C DIVISAO SEGUNDA AS INTERFACES PGM
NCLBL=NSUB PGM
LIM=NSUB-1 PGM
DO 140 I=2,NPEX PGM
IF (INF(2*I).EQ.INF(2*I-2).AND.INF(2*I-1).EQ.INF(2*I-3)) PGM
- GO TO 140 PGM
DO 130 J=1,LIM PGM
IF (LOC(I).EQ.KOLL(J)) GO TO 140 PGM
130 CONTINUE PGM
NCLBL=NCLBL+1 PGM
KOLL(NCLBL)=LJC(I) PGM
140 CONTINUE PGM
C PGM
C ORDENAR KOLL(I) PGM
DO 160 I=2,NCLBL PGM
DO 150 J=I,NCLBL PGM
IF (KOLL(J).GT.KOLL(I-1)) GO TO 150 PGM
IAX=KOLL(I-1) PGM
KOLL(I-1)=KOLL(J) PGM
KOLL(J)=IAX PGM
150 CONTINUE PGM
160 CONTINUE PGM

```

Listagem 4.2.1 - Definição das Colunas-bloco
Subrotina PABLOC

```
C
C  CALCULAR MAP(I,J)                                PGM
      DO 170 I=1,NSUB                                PGM
      DO 170 J=1,NCLBL                                PGM
170  MAP(I,J)=0                                       PGM
      K=2                                             PGM
      NFIN=NCLBL-1                                    PGM
      DO 190 J=1,NFIN                                PGM
        DO 180 I=K,NPEX                              PGM
          IF(LOC(I).GE.KOLL(J)) GO TO 185            PGM
180  CONTINUE                                         PGM
185  MAP(INF(2*I-3),J) = 1                            PGM
      IF(INF(2*I-2).NE.0) MAP(INF(2*I-2),J)=1      PGM
      K=I+1                                           PGM
190  CONTINUE                                         PGM
      MAP(INF(2*NPEX-1),NCLBL) = 1                  PGM
      IF(INF(2*NPEX).NE.0) MAP(INF(2*NPEX),NCLBL)=1 PGM
C
C  CALCULO DOS VERDADEIROS VALORES DE KOLL(I)      PGM
      DO 200 I=NCLBL,2,-1                             PGM
200  KOLL(I)=KOLL(I)-KOLL(I-1)                       PGM
C
C  VERIFICACAO SE O PROBLEMA ULTRAPASSA A DIMENSAO MAXIMA ADMISSIVEL PGM
      DO 220 I=1,NSJB                                 PGM
      KONTA=NROWS(I)*(NEQ+NH)                         PGM
      IF(KONTA.GT.MAXSTO) THEN                        PGM
        WRITE (6,10) I,KONTA                          PGM
10  FORMAT(//' + A SUBREGIAO',I3,' ULTRAPASSA A CAPACIDADE MAXIMA ADMIPGM
      -SSIVEL DO PROGRAMA.'/'INTERRUPCAO, VERIFIQUE DIMENSAO MAXSTO',I9)PGM
        STOP                                           PGM
      END IF                                           PGM
      DO 220 J=1,NCLBL                                PGM
      IF(MAP(I,J).EQ.0) GO TO 220                     PGM
      NJN = KOLL(J)                                    PGM
      IF(NJN.GT.MAXE) NJN=MAXE                         PGM
      IF(NROWS(I)*NJN*4.GT.LREC) THEN                 PGM
        WRITE(6,20) I,J,NJN                            PGM
20  FORMAT(//' +++++ INTERRUPCAO. A CAPACIDADE MAXIMA DO ARQUIVO EM DIPGM
      -SCO E ULTRAPASSADA NA REGIAO',I3,' BLOCO-COLUNA',I3/
      -' +++++ AUMENTE RECL NO OPEN E A VARIABEL LREC NO PROGRAMA OU DIVPGM
      -IDA O PROBLEMA EM SUBREGIDES',I10)             PGM
        STOP                                           PGM
      END IF                                           PGM
220  CONTINUE                                         PGM
      RETURN                                          PGM
      END                                             PGM
```

Listagem 4.2.2 - Definição do Conteúdo dos blocos e verificação de condições de erro.

Subrotina PABLOC

4.2.3 - Cálculo do Sistema de Equações

a) Subrotina FMAT

A subrotina FMAT comanda o cálculo e a montagem das equações do MEC, ou seja o sistema indicado pela expressão (3.2.7):

$$\underline{\underline{HU}} = \underline{\underline{GP}} + \underline{\underline{DB}} \quad (3.2.7)$$

Inicialmente calculam-se as magnitudes geométricas dos elementos tais como comprimento, localização do ponto médio, etc.. Estes valores são armazenados em memória pois são utilizados repetidas vezes em cálculos posteriores. A seguir calcula-se o módulo de elasticidade transversal G (eq.2.1.13) e modifica-se o coeficiente de Poisson no caso de se tratar de um problema plano de tensão, fazendo a equação (2.1.26) equivalente à equação (2.1.24).

Depois inicia-se o cálculo das matrizes correspondentes à equação integral de contorno discretizada (3.2.7), ou seja as matrizes \underline{H} e \underline{G} (não se consideram no programa forças de volume). Convém lembrar que o sistema indicado pela equação (3.2.7) é transformado mediante troca de colunas e multiplicação matricial num sistema do tipo:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}} \quad (3.2.18)$$

Calculando-se diretamente (3.2.18), isto é, evitando o cálculo prévio de (3.2.7), consegue-se uma considerável economia na quantidade de memória utilizada, pois em vez de duas armazena-se uma só matriz (a matriz \underline{A}). Alguns aspectos do cálculo da equação (3.2.18) são discutidos a seguir.

A montagem da matriz dos coeficientes \underline{A} é feita unidimensionalmente para assim facilitar a utilização de memória auxiliar. Isto também é recomendável pela forma de ocupação da memória central.

O cálculo de \underline{A} é feito por subregião ou seja por linha-bloco (ver figura 4.2), sendo calculada uma por vez e armazenada na memória auxiliar. Com isto pretende-se aproveitar a capacidade do sistema de resolução por blocos, que para condições de memória mais limitada sugere ainda a montagem e armazenagem bloco por bloco. Neste programa não foi seguido o esquema de cálculo bloco a bloco devido principalmente a ter sido o programa inicialmente estruturado para ser resolvido por sistemas convencionais que trabalham matrizes cheias. Assim foi definida a montagem subregião a subregião que, mesmo não explorando toda a capacidade oferecida pelo sistema de resolução por blocos, apresenta uma melhora apreciável se comparado com o método tradicional.

Voltando à descrição do processo de execução, o passo seguinte na subrotina FMAT é definir a subregião a ser calculada. Dentro de cada subregião as equações são montadas pela ordem de numeração dos pontos nodais. Devido à possível existência de elementos descontínuos calculam-se as coordenadas cartesianas (x_1, x_2) do ponto nodal em análise, e levando-se em conta que na formulação deduzida a localização dos nós em elementos descontínuos é deixada de maneira geral, utiliza-se aqui uma variável cujo valor foi previamente definido no começo do programa. Este valor pode ser então facilmente mudado caso assim se deseje. Um estudo para a escolha desse parâmetro é apresentado no capítulo seguinte.

O passo seguinte é definir qual é o elemento vizinho ao nó em análise, o que ajuda a definir posteriormente o tipo de integração (numérica ou analítica) a ser utilizada em determinado elemento. Este cálculo serve também para a inclusão de uma condição extra que impõe a simetria do tensor de tensões (ver artigo 3.7) que foi motivo de análise nas primeiras versões do programa.

Realiza-se em seguida a integração sobre cada elemento da subregião, e dadas as características do programa de considerar elementos contínuos e descontínuos e nós duplos, nesta parte do programa são necessários vários testes

para definir e preparar os dados adequadamente para cada caso (ver listagem 4.3). A integração numérica é realizada na subrotina INTEG, enquanto que a integração analítica para integrais singulares é feita na subrotina DIAG.

Da integração de um elemento resultam submatrizes de \underline{H} e de \underline{G} de ordem 2×4 que correspondem fisicamente à influência dos deslocamentos e reações nas duas direções do nó em análise sobre os dois nós do elemento integrado. Para evitar a formação das duas matrizes \underline{H} e \underline{G} são verificadas as condições de contorno e se necessário faz-se a troca de valores, ficando assim \underline{H} como a matriz que contém os coeficientes das incógnitas, ou seja a matriz \underline{A} da equação (3.2.18). Quando é preciso trocar colunas, multiplicam-se os valores de \underline{G} pelo módulo de elasticidade transversal procurando-se com isto dar um melhor condicionamento à matriz, pois os valores de \underline{G} são usualmente muito menores que aqueles de \underline{H} . Depois disto cada um destes números é colocado na posição correspondente da matriz global. As forças de superfície e deslocamentos conhecidos são de uma vez multiplicados pelos seus respectivos coeficientes, formando-se assim o vetor independente.

Ao incluir os cálculos para todos os nós da subregião tem-se o sistema de equações equivalente a (3.2.18) da subregião, que para possibilitar a continuidade da geração do sistema global é armazenado em memória auxiliar. Efetuando-se o mesmo procedimento para as outras subregiões, tem-se no final desta subrotina o sistema total de equações da estrutura armazenado em memória auxiliar.

b) Subrotina INTEG

Calcula o valor da integral no elemento usando integração numérica de Gauss (ver equação 3.4.1). Em termos gerais esta subrotina é praticamente a mesma já desenvolvida por outros autores (58).

Um dos estudos feitos neste trabalho foi tentar definir o número de pontos de integração (pontos de Gauss) de forma seletiva, dependendo da distância do nó ao elemen-

```

DIMENSION HIJ(8),GIJ(8),IAD(MAXR,MAXI),SM(1),EPR(1),YM(1),PR(1), PGM
-CODIGO(1),XC(1),YC(1),IEL(1),Q(1),INIC(1),IFIN(1),INF(1),LDC(1), PGM
-P(1),U(1),IFIPO(1),NOTIPO(1),AX(1),BX(1),AY(1),COMP(1),BY(1), PGM
-GI(1),OME(1),Z(1),NROWS(1),KS2(1),NCL(1) PGM
COMMON LEC,IMP PGM
C PGM
C LOCALIZACAO DOS NOS A SEREM DESLOCADOS PGM
C PGM
DO 100 I=1,NPEX PGM
100 IF(NOTIPO(I).EQ.2) CODIGO(I)=C PGM
C PGM
C CALCULO DAS CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DOS ELEMENTOS PGM
DO 120 J=1,NSUB PGM
DO 120 I=INIC(J),IFIN(J) PGM
K1=IEL(2*I-1) PGM
K2=IEL(2*I) PGM
C1=CODIGO(K1) PGM
C2=CODIGO(K2) PGM
AX(I)=(XC(K2)-XC(K1))/2 PGM
AY(I)=(YC(K2)-YC(K1))/2 PGM
BX(I)=(XC(K2)+XC(K1))/2 PGM
BY(I)=(YC(K2)+YC(K1))/2 PGM
COMP(I)=SQRT(AX(I)**2+AY(I)**2) PGM
C PGM
C CALCULO DO MODULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL E DO COEFICIENTE PGM
DE POISSON EQUIVALENTE (ODO. ESTADO PLANO DE DEFORMACAO) PGM
C PGM
DO 130 I=1,NSUB PGM
SM(I)=YM(I)/2/(1+PR(I)) PGM
EPR(I)=PR(I) PGM
130 IF(ESTADO) EPR(I)=PR(I)/(1+PR(I)) PGM
C PGM
C FORMACAO DAS MATRIZES ARMAZENADAS COMO VETOR UNIDIMENSIONAL PGM
C PGM
C PGM
C CALCULO DA SUBREGIAO 'I' PGM
C PGM
DO 230 I=1,NSUB PGM
LIN=0 PGM
K=(NEQ+NH)*NROWS(I) PGM
DO 140 J=1,K PGM
140 Z(J)=0 PGM
LINHA=0 PGM
C PGM
C DETERMINACAO DO NO A SER CALCULADO PGM
DO 210 J=INIC(I),IFIN(I) PGM
DO 210 K=1,2 PGM
NO=IEL(2*(J-1)+K) PGM
IF(K.EQ.2.AND.NOTIPO(NO).EQ.0) GO TO 210 PGM
XNO=BX(J)+(2*K-3)*CODIGO(NO)*AX(J) PGM
YNO=BY(J)+(2*K-3)*CODIGO(NO)*AY(J) PGM
LNO=LDC(NO) PGM
IF(INF(2*NO).EQ.1) LNO=LNO+2 PGM
LV=J+2*K-3 PGM
IF(LV.GT.IFIN(I)) LV= INIC(I) PGM
IF(LV.LT.INIC(I)) LV= IFIN(I) PGM
LVI=LV PGM
IF(NOTIPO(NO).EQ.2) LV=J PGM

```

Listagem 4.3.1 - Subrotina FMAT. Definição geométrica dos elementos e iterações iniciais para o cálculo das matrizes

```

C
C DETERMINACAO DO ELEMENTO A SER INTEGRADO SOB A INFLUENCIA DO *NO* PGM
DO 200 L=INIC(I),IFIN(I) PGM
I1=IEL(2*L-1) PGM
I2=IEL(2*L) PGM
NSINAL=-1 PGM
IF(INF(2*I1).EQ.I) NSINAL=1 PGM
LSINAL=1 PGM
IDN=0 PGM
IF((LV.EQ.L.AND.NOTIPO(NO).EQ.1.AND.K.EQ.1).OR.NO.EQ.I2) THEN PGM
LSINAL=-1 PGM
ICH=I2 PGM
I2=I1 PGM
I1=ICH PGM
END IF PGM
IF(J.EQ.L) IDN=1 PGM
IF(L.EQ.J.OR.L.EQ.LV) THEN PGM
CALL DIAG (AX(L),AY(L),COMP(L),AX(LV),AY(LV),COMP(LV),CODIGO(I1), PGM
-CODIGO(I2),LSINAL,SM(I),EPR(I),HIJ,GIJ,IDN,PI) PGM
ELSE PGM
CALL INTEG (SM(I),EPR(I),XNO,YNO,AX(L),AY(L),BX(L),BY(L),COMP(L), PGM
-CODIGO(I1),CODIGO(I2),HIJ,GIJ,GI,OME,PI) PGM
END IF PGM
C PGM
C ESPALHAMENTO (COM TROCA DE COLUNAS DEVIDO AS CONDICÕES DE CONTORNO) PGM
C PGM
LI1=LOC(I1) PGM
LI2=LOC(I2) PGM
ISUM=0 PGM
DO 200 M1=1,2 PGM
C PGM
C TROCA DE COLUNAS SE TIPO FOR DIFERENTE DE ZERO PGM
IF(TIPO(LI1+M1).NE.0) THEN PGM
DO 150 IK=1,2 PGM
AUX=HIJ(2*(M1-1)+IK) PGM
HIJ(2*(M1-1)+IK)=-GIJ(2*(M1-1)+IK)*SM(I) PGM
150 GIJ(2*(M1-1)+IK)=-AUX PGM
END IF PGM
IF(TIPO(LI2+M1).NE.0) THEN PGM
DO 160 IK=1,2 PGM
AUX=HIJ(2*(M1+1)+IK) PGM
HIJ(2*(M1+1)+IK)=-GIJ(2*(M1+1)+IK)*SM(I) PGM
160 GIJ(2*(M1+1)+IK)=-AUX PGM
END IF PGM
DO 200 M2=1,2 PGM
ISUM=ISUM+1 PGM
IPO1=NROWS(I)*(LI1+M1-1)+LIN+M2 PGM
IPO2=NROWS(I)*(LI2+M1-1)+LIN+M2 PGM
Z(IPO1)=Z(IPO1)+HIJ(ISUM) PGM
Z(IPO2)=Z(IPO2)+HIJ(ISUM+4) PGM
IF(INF(2*I1).EQ.J) GO TO 180 PGM
IPO1S=IPO1+2*NROWS(I) PGM
IPO2S=IPO2+2*NROWS(I) PGM
Z(IPO1S)=Z(IPO1S)+GIJ(ISUM)*NSINAL*SM(I) PGM
Z(IPO2S)=Z(IPO2S)+GIJ(ISUM+4)*NSINAL*SM(I) PGM
DO 170 IK=1,NH PGM
IPO1S=NEQ*(NROWS(I)+IK-1)+LIN+M2 PGM
IPO2S=NEQ*(IK-1)+M1 PGM
IF(INF(2*I1).EQ.I) IPO2S=IPO2S+2 PGM
170 Z(IPO1S)=Z(IPO1S)+GIJ(ISUM)*P(IPO2S+LI1)+GIJ(ISUM+4)*P(IPO2S+LI2) PGM
GO TO 200 PGM
180 DO 190 IK=1,NH PGM
IPO1=NEQ*(NROWS(I)+IK-1)+LIN+M2 PGM
IPO2=NEQ*(IK-1)+M1 PGM
190 Z(IPO1)=Z(IPO1)+GIJ(ISUM)*P(IPO2+LI1)+GIJ(ISUM+4)*P(IPO2+LI2) PGM
200 CONTINUE PGM
LIN=LIN+2 PGM

```

Listagem 4.3.2 - Cálculo dos elementos das matrizes e en-
dereçamento em vetor unidimensional.
Subrotina FMAT

to e o comprimento deste. Este estudo é exposto no capítulo 5. Assim, nesta subrotina INTEG é aplicado este critério seletivo da seguinte forma (ver listagem 4.4). Assume-se inicialmente que são necessários apenas 2 pontos de integração e então verifica-se se a distância mínima para que isto seja aplicável está satisfeita. Se a condição não é verificada adota-se 4 pontos de integração para a integração, assim verificado se o número escolhido é aplicável podem ser definidos 2, 4, 6 ou 10 pontos de Gauss segundo os limites estabelecidos, o que permite resultados satisfatórios, tanto em termos de aproximação como de tempos de execução.

```
C
C  DEFINICAO SELETIVA DO NUMERO DE PONTOS DE INTEGRACAO
      RM=SQRT((XP-BX)**2+(YP-BY)**2)
      NI=2
      NF=3
      IF(RM.GE.10*COMP) GO TO 110
      NI=4
      NF=7
      IF(RM.GE.1.5*COMP) GO TO 110
      NI=8
      NF=13
      IF(RM.GE.COMP) GO TO 110
      NI=14
      NF=23
110 DO 120 I=NI,NF
```

PGM
PGM

Listagem 4.4 - Definição do número de pontos de integração na subrotina INTEG.

c) Subrotina DIAG

Efetua-se nesta subrotina a integração analítica das integrais singulares. São avaliadas então, as expressões deduzidas no item 3.4.2 correspondendo às equações (3.4.4) e (3.4.5). Estas equações, porém, contêm uma parcela que resulta singular quando o elemento é contínuo, e no caso da equação (3.4.5) a singularidade só pode ser eliminada quando é integrado o elemento vizinho. As expressões são então divididas em duas partes: uma aplicável tanto a elementos contínuos como descontínuos e outra só aplicável aos elementos descontínuos.

Nesta subrotina é incluída também a avaliação da descontinuidade definida pela expressão (3.2.11). Desta for

ma, nesta equação aparecem valores de ângulos entre elementos (mostrados na fig.3.2). Estes são calculados a partir dos dados que determinam a orientação do elemento com o auxílio de identidades trigonométricas (ver listagem 4.5).

```
C
C  DESCONTINUIDADE DA MATRIZ H                                PGM
110 HIJ(1)=0.5                                                PGM
    HIJ(4)=0.5                                                PGM
    RETURN                                                    PGM
C
C  DESCONTINUIDADE DA MATRIZ H PARA ELEMENTO CONFORME       PGM
120 CONTINUE                                                  PGM
    IF (LSINAL.EQ.1) GO TO 130                                PGM
    COS1=DRX                                                  PGM
    SEN1=DRY                                                  PGM
    COS2=-LSINAL*AX2/COMP2                                    PGM
    SEN2=-LSINAL*AY2/COMP2                                    PGM
    GO TO 140                                                 PGM
130 COS1=-LSINAL*AX2/COMP2                                    PGM
    SEN1=-LSINAL*AY2/COMP2                                    PGM
    COS2=DRX                                                  PGM
    SEN2=DRY                                                  PGM
140 SNALFA=SEN1*COS2-SEN2*COS1                                PGM
    CSALFA=COS1*COS2+SEN1*SEN2                                PGM
    ALFA=ACOS(CSALFA)                                         PGM
    IF (SNALFA.LT.0) ALFA=2*PI-ALFA                            PGM
    CS2GMA=COS1*COS2-SEN1*SEN2                                PGM
    SN2GMA=SEN1*COS2+SEN2*COS1                                PGM
    F4=4*PI*(1-EPR)                                           PGM
    HIJ(1)=ALFA/(2*PI)+CS2GMA*SNALFA/F4                       PGM
    HIJ(4)=ALFA/(2*PI)-CS2GMA*SNALFA/F4                       PGM
    HIJ(2)=HIJ(2)+SN2GMA*SNALFA/F4                            PGM
    HIJ(3)=HIJ(3)+SN2GMA*SNALFA/F4                            PGM
    RETURN                                                    PGM
```

Listagem 4.5 - Listagem do cálculo da expressão (3.2.11) na subrotina DIAG

4.2.4 - Resolução do Sistema de Equações com Tratamento em Blocos.

Devido a características próprias do equacionamento do método, a matriz resultante é assimétrica e diagonalmente dominante. Quando a estrutura analisada está composta por uma única região, a matriz é cheia, porém, quando se trabalha com corpos formados por várias subregiões a matriz contém grupos definidos de zeros. Assim, por exemplo, o problema que é mostrado na figura 4.3 tem como resultado uma matriz com a forma indicada na figura 4.4.

Pelo anteriormente exposto, vê-se que é de grande interesse a incorporação ao programa de um sistema de resolução que trate de maneira adequada estas características. Assim, foi adotado neste programa o sistema de resolução

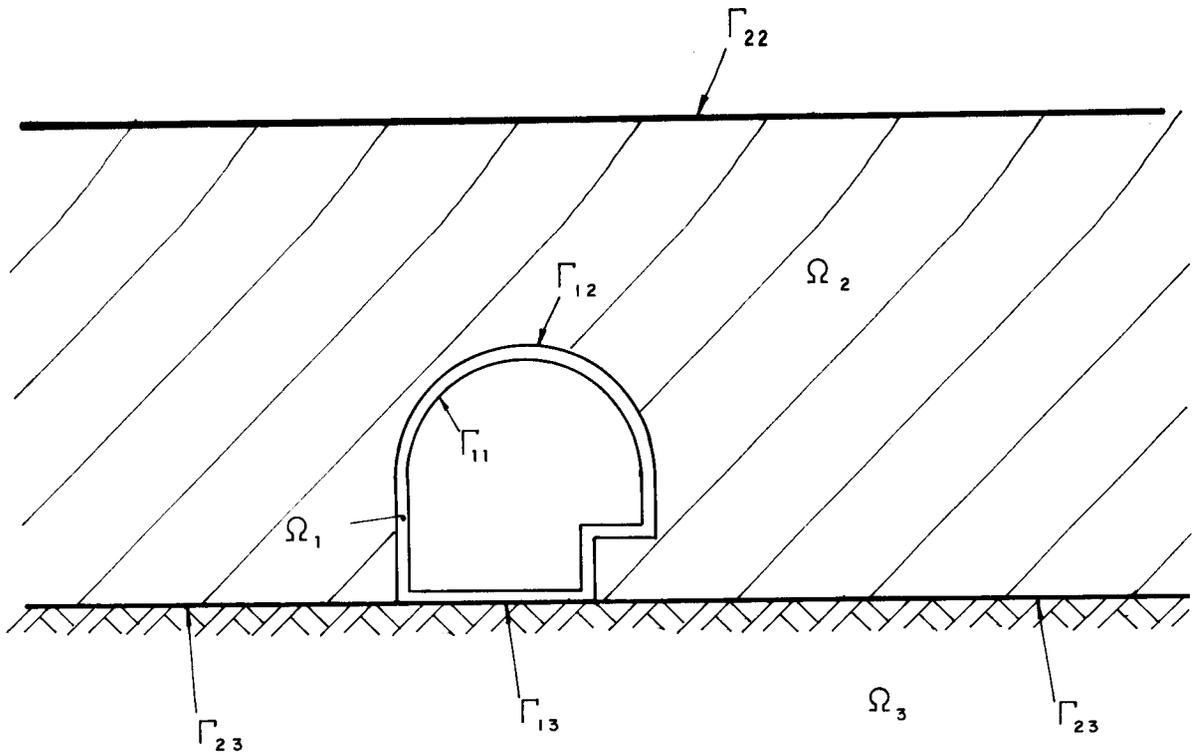


FIG. 4.3 — EXEMPLO DE ESTRUTURA FORMADA POR VÁRIAS SUBREGIÕES

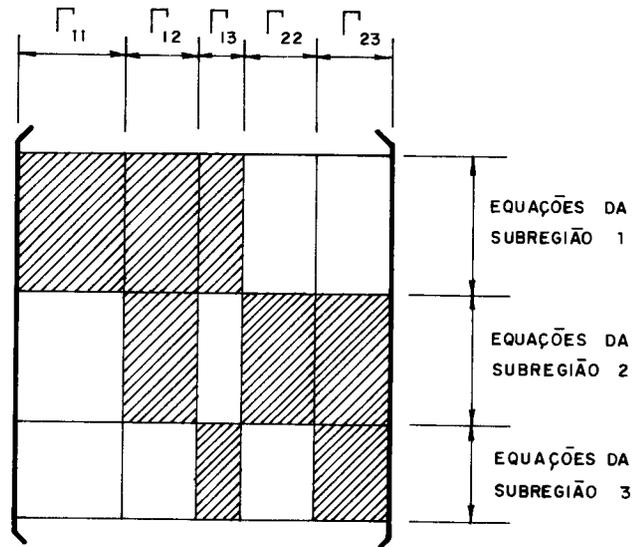


FIG. 4.4 — MATRIZ CORRESPONDENTE À ESTRUTURA DA FIG. 4.3. AS PARTES NÃO SOMBREADAS CON-TÉM APENAS ZEROS.

por blocos para matrizes não simétricas, desenvolvido por Crotty(51), que trata da solução de grandes sistemas e utiliza amplamente memória auxiliar.

Para o funcionamento deste subprograma, inicialmente devem ser fornecidos os números que definem a forma da matriz tais como: número de equações, número de linhas-bloco (ver fig. 4.2), número de linhas por linha-bloco (ou seja número de equações por subregião), etc.; o que é feito na subrotina PABLOC como foi explicado no item correspondente (4.2.2.c).

Com os dados anteriores entra-se na subrotina PRELIM que forma parte do programa de Crotty. Nesta é calculada a área de memória central que será ocupada tanto na eliminação quanto na retrossubstituição (é utilizado o algoritmo de GAUSS na resolução), e se esta área for maior que os limites estabelecidos no programa divide-se os blocos em sub-blocos, devendo-se notar que o mínimo sub-bloco possível tem uma coluna para que seja eliminada pelo menos uma variável quando cada sub-bloco é lido e trabalhado na memória principal. Se esta condição não se cumpre, interrompe-se a execução e a mensagem correspondente é enviada. Nesta subrotina, PRELIM, são calculados também vetores de controle que servirão posteriormente no processo de triangularização da matriz, assim como um arranjo matricial que contém o endereçamento ou número de registro onde será armazenado determinado sub-bloco. O seu armazenamento em memória auxiliar é feito na subrotina FMAT(item 4.2.3.a).

A divisão da matriz em blocos (ou submatrizes) permite, além da resolução de grandes sistemas, aplicar os critérios das matrizes esparsas, isto é, evitar cálculos desnecessários devido à presença de elementos com valor igual a zero. Neste mesmo aspecto, tem sido usado também o tratamento em banda para as matrizes do MEC (24, 59) sendo então desprezados os zeros que estão fora da largura de banda. É fácil encontrar, porém, problemas onde a matriz contém grupos de zeros dentro da banda (ver por exemplo figs. 4.3 e 4.4), o que indica que é preferível um sistema de resolução

que despreze os zeros qualquer que seja sua localização na matriz. A subrotina utilizada trabalha desta maneira.

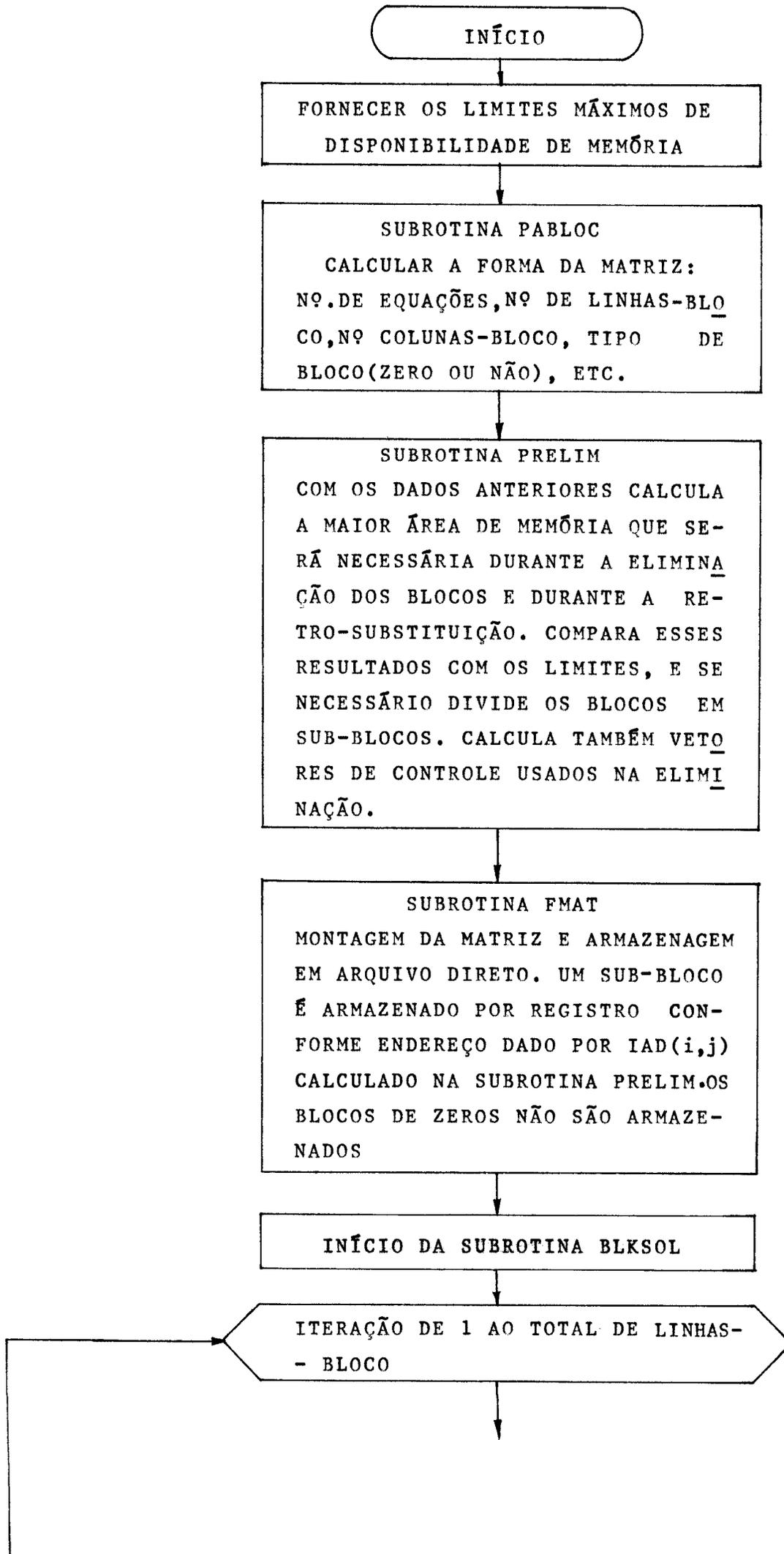
A seguir descreve-se como funciona este sistema de resolução:

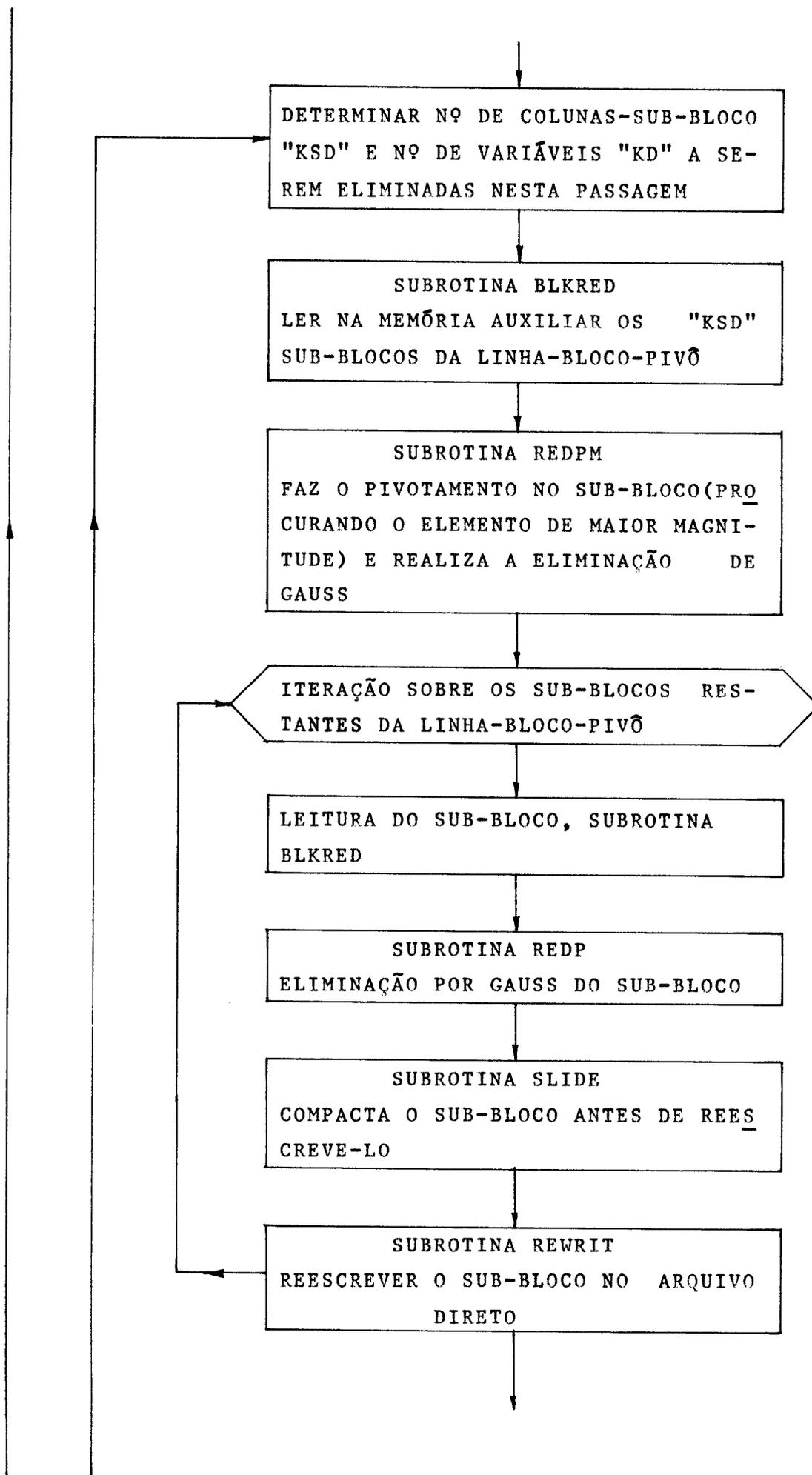
A matriz deve estar armazenada num arquivo de acesso direto seguindo a numeração dos registros determinada na subrotina PRELIM, com cada sub-bloco ocupando um registro. Os vetores dos termos independentes são armazenados como colunas adicionais à matriz, pois segundo o autor, isto facilita o cálculo de vários carregamentos de uma só vez.

O processo de eliminação é controlado pela subrotina BLKSOL. Para a melhor compreensão acompanhar-se-á aqui a redução da primeira linha-bloco. O diagrama 4.3 complementa esta explicação. Inicialmente é calculado o número de sub-blocos que podem ser eliminados desta vez. Estes então são lidos e a seguir começa sua eliminação na subrotina REDPM.

Neste ponto deve ser mencionado algo importante. Visando a estabilidade numérica na resolução de sistemas de equações é geralmente feita a procura do maior número para que este funcione como pivô na eliminação de cada linha ou coluna da matriz do sistema, evitando-se assim erros numéricos decorrentes das operações de eliminação. Quando se trabalha com a matriz inteira esta procura é facilmente feita em toda a matriz. Em uma matriz esparsa, porém, isto pode ocasionar a geração de números diferentes de zero em posições que anteriormente eram ocupadas por zeros. Este efeito é evitado tomando como pivôs os elementos da diagonal, sucessivamente. Assim, para conservar a estrutura da matriz, os blocos da diagonal são considerados como blocos-pivô, sucessivamente, e é dentro destes blocos que é feita a procura do maior número para que funcione como pivô. Desta maneira é impedida a transformação de blocos zero em não zero e se procura também garantir uma boa aproximação nos resultados.

Ainda com respeito à estabilidade numérica, Lachat e Watson (24,59) acharam empiricamente que esta era garanti





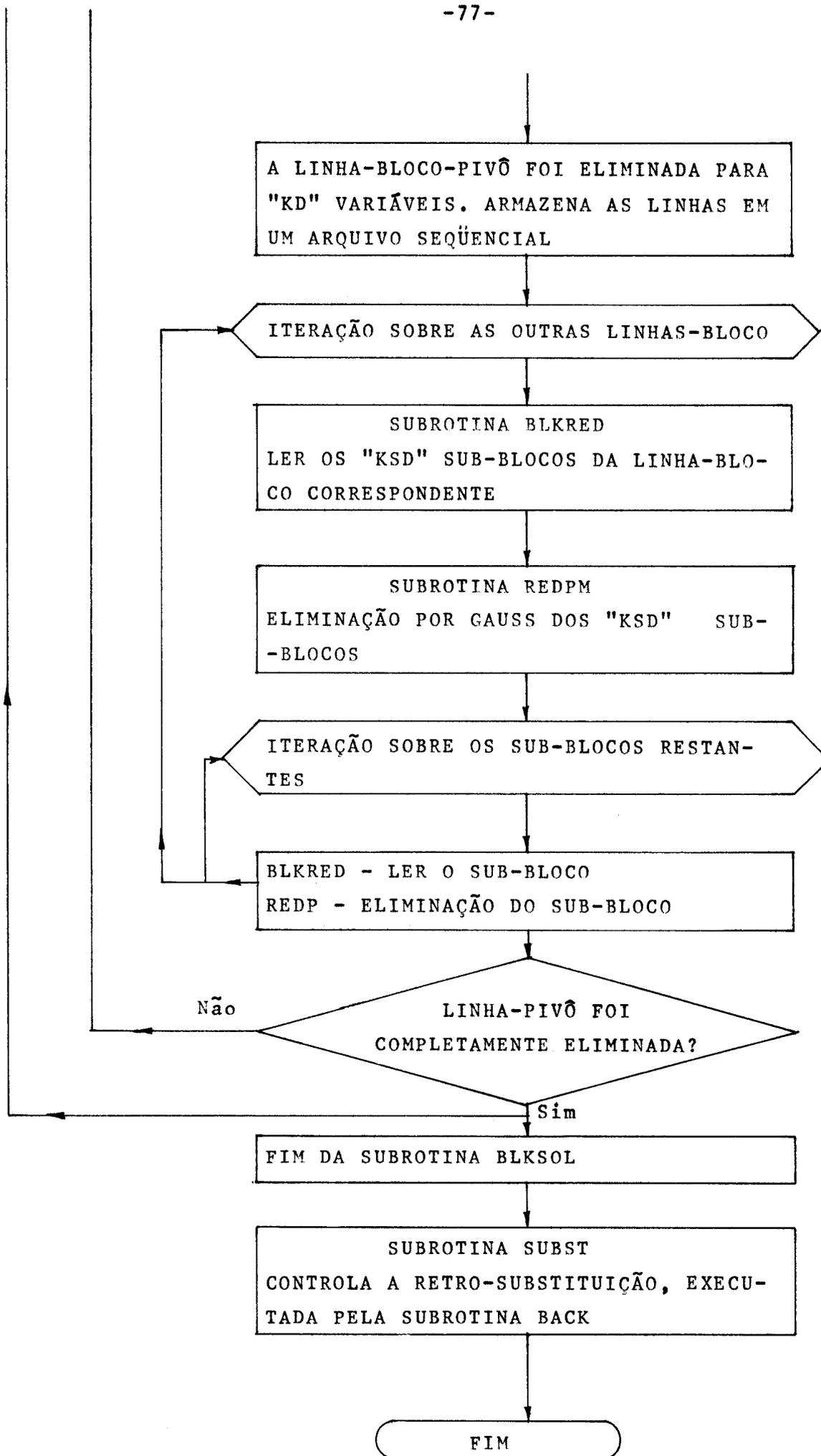


Diagrama 4.3 - Diagrama de Blocos do Sistema de Resolução por Blocos.

da ao separar os coeficientes relativos às forças de superfície daqueles relativos aos deslocamentos, isto valendo para os nós localizados na interface, devendo-se colocar primeiro os correspondentes às forças de superfície e depois aqueles que multiplicam os deslocamentos (ver figura 4.5).

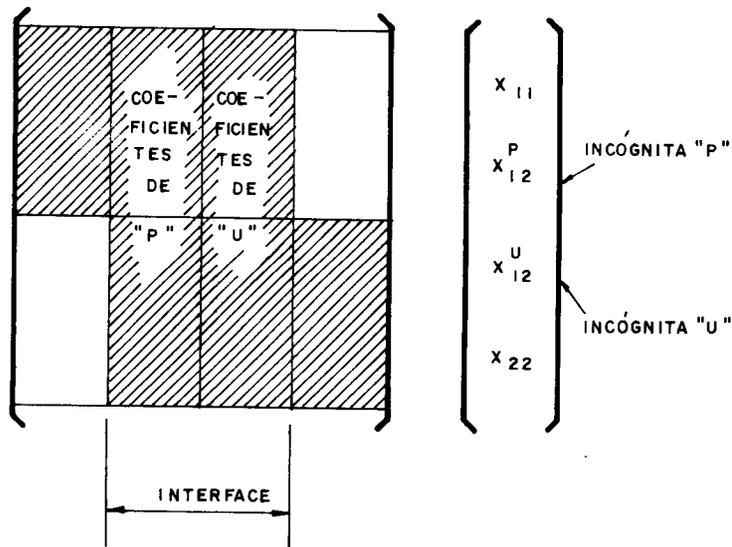


FIG. 4.5 — ORDENAMENTO DAS INCÓGNITAS SEPARADAS P e U.

Esta regra, porém, não foi ainda incorporada ao programa aqui descrito. Mesmo assim, os exemplos que foram testados neste programa (apresentados no capítulo seguinte) proporcionaram bons resultados.

Voltando agora à descrição do funcionamento do programa, na subrotina REDPM efetua-se a procura do pivô e a eliminação de Gauss. Depois procede-se à eliminação dos outros sub-blocos dessa mesma linha-bloco. Cada um destes sub-blocos é lido (com a subrotina BLKRED) e eliminado na subrotina REDP. Note-se que neste caso a subrotina que faz a eliminação de Gauss não é mais a REDPM, empregada nos blocos-pivô. A diferença básica é que para trabalhar estes blocos são necessários valores dos blocos-pivô o que é uma consequência do processo de triangularização da matriz. Depois de eliminado, o sub-bloco é compactado e reescrito no regis

tro correspondente. Este processo é feito um a um para cada sub-bloco da linha-bloco-pivô (linha-bloco que está sendo eliminada). Os blocos que contêm apenas zeros não são trabalhados.

Terminada esta seqüência foi eliminado um número de variáveis equivalente ao número de colunas dos sub-blocos-pivô inicialmente trabalhados. Estas linhas "eliminadas" são armazenadas em um arquivo seqüencial que ao final conterá os elementos da matriz triangularizada, pronta para a retro-substituição.

Até aqui têm-se efetuado apenas cálculos na linha-bloco-pivô, devendo ser modificadas as outras linhas-bloco. Nesta parte são utilizadas as características das matrizes esparsas o que permite evitar cálculos nos elementos que certamente não vão sofrer alteração. Deste modo não mudarão as linhas-bloco cujo bloco na coluna-bloco-pivô seja de zeros, assim como as colunas-bloco com zero na linha-bloco-pivô. É por isto que só são trabalhados os blocos chamados ativos durante a eliminação de um bloco-pivô específico. A figura 4.6 mostra um exemplo disto.

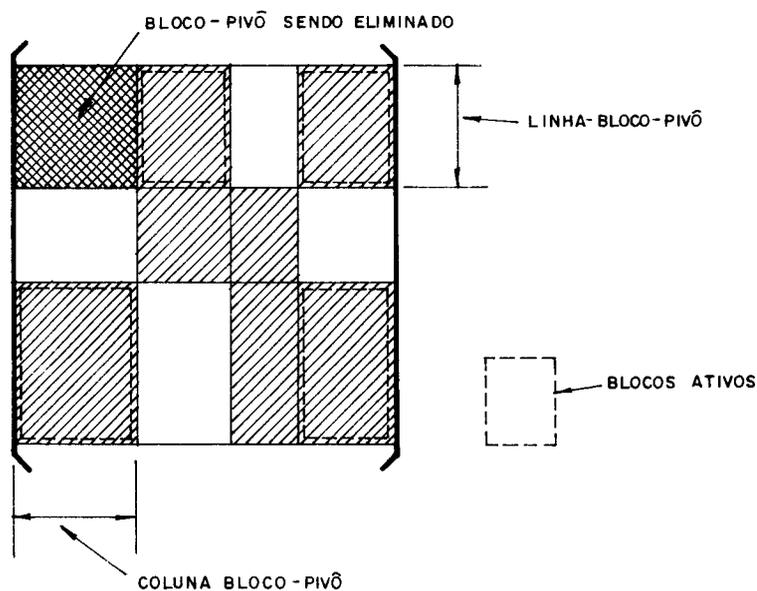


FIG. 4.6 - EXEMPLO DE BLOCOS ATIVOS DURANTE A ELIMINAÇÃO DO BLOCO - PIVÔ

As linhas-bloco restantes são eliminadas de maneira similar à linha-bloco-pivô. Inicialmente trabalha-se os sub-blocos localizados na coluna-bloco-pivô, usando-se as subrotinas BLKRED (leitura) e REDPM (eliminação). Depois são eliminados os outros sub-blocos, um a um com a subrotina REDP. Ao final destes cálculos tem-se a eliminação completa das primeiras linhas da matriz. Posteriormente verifica-se se a linha-bloco-pivô em andamento foi completamente reduzida, isto é, não restam mais linhas dela a serem trabalhadas. Se a resposta for afirmativa passa-se à linha-bloco seguinte, caso contrário volta-se e continua-se operando a mesma linha-bloco.

Na descrição da subrotina PABLOC fazia-se menção a uma subdivisão dos blocos quando o número de colunas era igual ao número de linhas da linha-bloco. Isto foi resultado de um problema enfrentado nos primeiros testes deste programa. O problema origina-se quando um bloco-pivô não tem todas suas colunas completamente eliminadas, condição que ocorre freqüentemente no final do cálculo de uma subregião (linha-bloco) e inicia-se o cálculo da seguinte, como é mostrado no exemplo da figura 4.7.

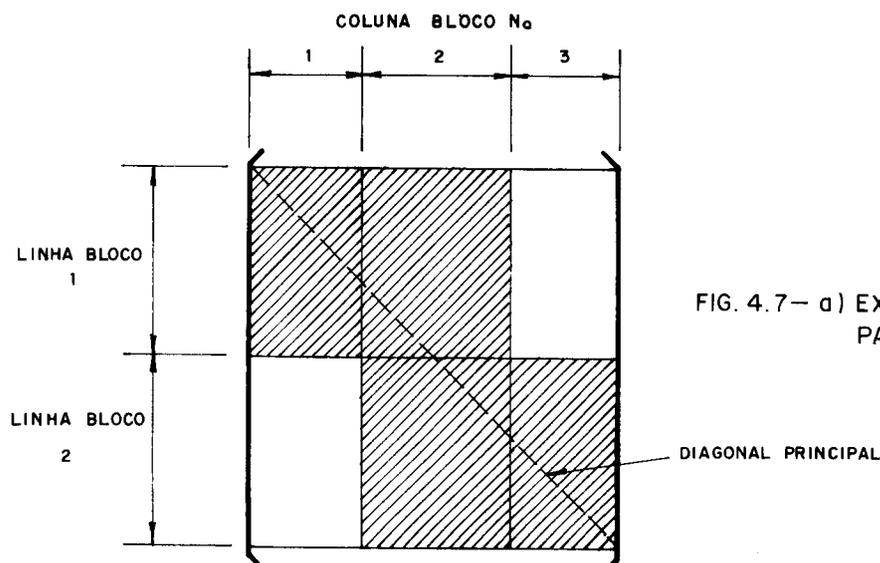


FIG. 4.7- a) EXEMPLO DE MATRIZ PARA 2 SUB-REGIÕES

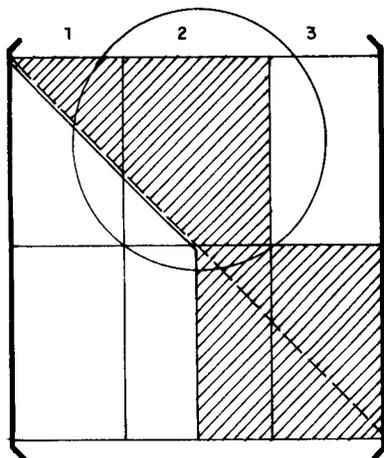


FIG. 4.7— b) LINHA-BLOCO 1 ELIMINADA. BLOCO-PIVÔ EM DESTAQUE COM SUAS COLUNA PARCIALMENTE E-LIMINADAS.

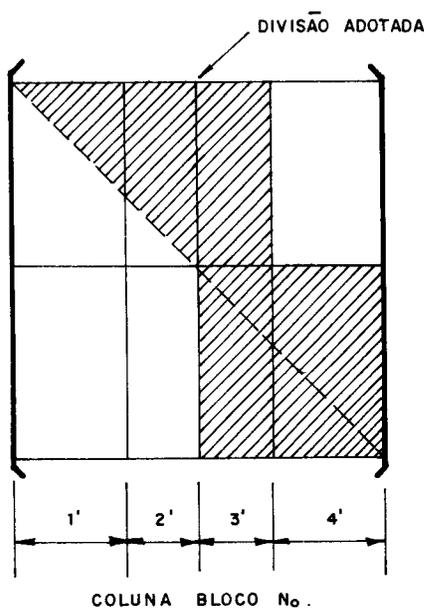


FIG. 4.7 - c) SUBDIVISÃO ADOTADA. LINHA - BLOCO 1 ELIMINADA.

A solução adotada foi dividir os blocos coluna a maneira de fazer a última coluna do bloco-pivô aquela coluna que é a última a ser afetada na eliminação da linha-bloco respectiva, como se mostra na figura 4.7.(c).

Uma vez realizada a eliminação de todas as linhas da matriz tem-se num arquivo seqüencial todos os coeficientes necessários para efetuar a retrossubstituição. Esta é feita pela subrotina BACK comandada pela subrotina SUBST que entre outras coisas controla quantos vetores podem ser calculados a cada vez, de acordo com os limites especificados para a memória principal. Finalmente os vetores solução são escritos num segundo arquivo de acesso direto.

4.2.5 - Cálculo dos Deslocamentos e Tensões dos Pontos Internos.

a) Subrotina PINT

Nesta parte do programa o sistema de equações já foi resolvido e portanto conhecem-se as forças de superfície e os deslocamentos em todo o contorno. Inicialmente faz-se um reordenamento entre o vetor solução e aquele que contém os valores prescritos (condições de contorno) para assim colocar as forças de superfície num vetor e os deslocamentos em outro.

Estando o contorno plenamente definido podem ser aplicadas as equações (3.2.16) e (3.2.17) para o cálculo dos deslocamentos e tensões nos pontos internos. É característica vantajosa deste método que os deslocamentos e tensões internas só sejam calculadas nos pontos de interesse.

Os deslocamentos internos são calculados com a mesma subrotina INTEG que efetua numericamente as integrais de contorno e que foi usada para o cálculo do sistema de equações (item 4.2.3.b). Como neste caso não se apresenta nenhuma integral singular (o ponto interno não pertence a nenhum elemento de contorno) a integração de todos os termos da equação (3.2.16) é feita numericamente.

Para determinar as tensões também devem ser efetuadas as integrais indicadas na equação (2.3.19) que para um contorno discretizado dá origem à equação (3.2.17). Esta integração é feita numericamente na subrotina SIGMA. Pelo próprio equacionamento, cada ponto interno precisa da integração de todo o contorno da subregião à qual ele pertence.

Posteriormente, são calculadas as tensões dos pontos do contorno conforme equacionamento deduzido no item 3.6. No programa são calculadas as tensões de todos os pontos de contorno, podendo-se, porém, modificar facilmente, e assim calcular somente nos pontos de interesse.

A parte final desta subrotina (PINT) efetua a impressão de todos os resultados o que é feito ordenadamente por carregamento, subregião, pontos de contorno e pontos internos.

b) Subrotina SIGMA

Como foi mencionado, esta subrotina executa a integração numérica pelo método de Gauss das integrais da equação (2.3.19). Como na expressão há tensores de terceira ordem (S_{ijk} e D_{ijk}), resultam para cada elemento 24 valores na integração, sendo 6 referentes a S_{ijk} e 6 a D_{ijk} para cada ponto nodal do elemento.

Nesta subrotina define-se também a variável do número de pontos de integração já descrita na subrotina INTEG e que visa otimizar o tempo de execução sem prejuízo da aproximação numérica.

C A P Í T U L O V

AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO MÉTODO
DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

5.1 - DEFINIÇÃO DO NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO

A maior parte dos valores que compõem os sistemas de equações de problemas analisados com o MEC são calculados através de integrações numéricas. Neste trabalho, como em muitos outros, usa-se a quadratura gaussiana na qual a função a ser integrada é avaliada em certos pontos, sendo estes valores multiplicados por números ponderadores definidos e depois somados, fornecendo o valor da integral procurada. É sabido que a quadratura de Gauss é exata para funções polinomiais sempre que o grau delas seja igual ou inferior a $(2n-1)$ onde n é o número de pontos de integração. As integrais encontradas no MEC, porém, envolvem funções como $\ln(r)$ e $1/r$ para as quais a fórmula de Gauss fornece apenas valores aproximados, que podem conter imprecisões especialmente quando r assume valores pequenos (o ponto singular encontra-se perto do elemento a ser integrado), já que nessa condição as funções anteriormente citadas adquirem valores preponderantes. Neste caso uma boa aproximação exige um grande número de pontos de integração. Por outro lado, quando se tem a condição oposta, isto é, o raio r tendo um valor grande, bastam poucos pontos de integração para garantir bons resultados.

Considerando o elevado número de vezes que é feita a integração numérica na resolução de um problema é recomendável então, do ponto de vista computacional, a utilização do menor número de pontos de integração possível, para diminuir assim o número de operações e, conseqüentemente, o tempo de execução sem introduzir alterações importantes no resultado final. No entanto, deve-se notar que uma boa aproximação requer para certos casos um elevado número de pontos de integração.

Para conciliar as duas exigências do parágrafo anterior, opta-se neste trabalho por uma definição variável do número de pontos de Gauss. Assim, para distâncias curtas (r pequeno) seria usado um maior número de pontos e conforme a distância aumentasse usar-se-iam menos pontos. Para fazer isto, porém, devem ser definidos os limites para os quais um determinado número de pontos de integração é recomendável e os parâmetros em função dos quais estes limites devem ser estabelecidos.

A distância entre o ponto e o elemento é um dos parâmetros que devem ser considerados. Esta, entretanto, é relativa pois a definição de um ponto estar perto ou longe nestes casos tem relação com o tamanho do elemento a ser integrado. Por estas razões, os limites são dados em função da relação entre a distância do nó ao elemento e o comprimento do elemento. Outro parâmetro que pode ter influência é a inclinação entre o elemento e o vetor da distância (raio) devido a existência de relações trigonométricas dentro das funções a serem integradas. Este também é considerado, mesmo que parcialmente, dentro desta análise.

Em estudo feito por Bolteus e Tullberg(61) concluiu-se que com 10 pontos de integração são obtidos bons resultados até para distâncias curtas, e portanto neste trabalho analisa-se o desempenho de 6, 4 e 2 pontos de integração tomando como base de comparação o resultado obtido com 10 pontos de integração.

A definição dos intervalos de atuação de cada número de pontos de integração é feita da seguinte forma: ado

ta-se um elemento de comprimento unitário e coloca-se o ponto singular a partir de uma distância r igual a 0,1. São calculadas as integrais h_{ik}^s e g_{ik}^s (Equação 3.4.2) com 10, 6, 4 e 2 pontos. O processo é sucessivamente repetido para distâncias maiores do ponto singular em relação ao elemento.

Para poder incluir a possível influência da inclinação do elemento com relação ao raio foram analisados três casos diferentes:

Caso a: O ponto singular é posicionado sobre a mesma direção da normal do elemento como se ilustra a seguir (Fig. 5.1).

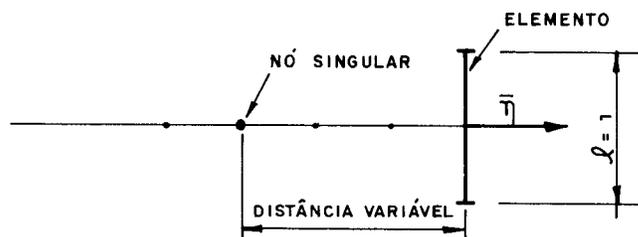


FIG. 5.1 — CASO a. POLO LOCALIZADO NA DIREÇÃO DA NORMAL

Caso b: O ponto singular é posicionado numa linha que forma um ângulo de quarenta e cinco graus com respeito à normal do elemento.

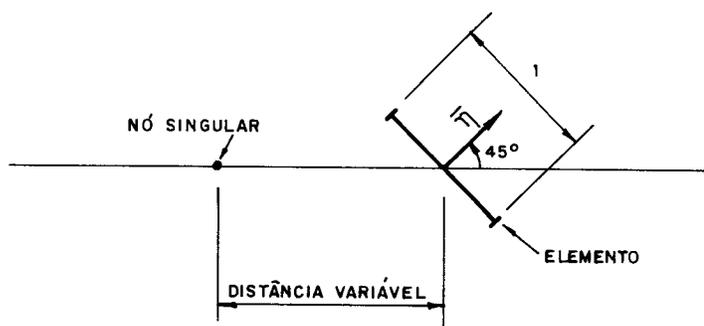


FIG. 5.2 — CASO b. LINHA DE LOCALIZAÇÃO DO PÓLO A 45° DA NORMAL DO ELEMENTO.

Caso c: O ponto singular \bar{e} posicionado em uma linha que forma um ângulo reto com respeito à normal do elemento.

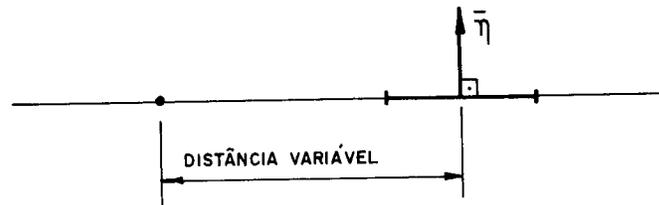


FIG. 5.3 — CASO c. POLO POSICIONADO SOBRE UMA LINHA QUE FORMA 90° COM A NORMAL DO ELEMENTO.

Deve ser mencionado ainda que para esta análise todas as distâncias foram medidas a partir do ponto médio do elemento. Analisando-se os resultados obtidos pode-se estabelecer os limites dados na tabela 5.1 para a obtenção de valores com aproximação no quarto ou quinto algarismo significativo.

nº de pontos	Aproximação	
	5 casas decimais	4 casas decimais
10 pontos	$r/l < 1,0$	$r/l < 0,8$
06 pontos	$1,0 \leq r/l < 2,0$	$0,8 \leq r/l < 1,2$
04 pontos	$2,0 \leq r/l < 10,0$	$1,2 \leq r/l < 5,0$
02 pontos	$r/l \geq 10,0$	$r/l \geq 5,0$

Tabela 5.1 - Definição do número de Pontos de Integração

5.2 - POSIÇÃO DOS PONTOS NODAIS EM ELEMENTOS DESCONTÍNUOS

Nos elementos descontínuos, já discutidos em capítulos anteriores, existe certa liberdade para definir a localização dos nós ao longo do elemento. Por esta razão neste trabalho foram feitos testes com o objetivo de encontrar quais os pontos do elemento que seriam mais convenientes pa

ra a definição dos nós. Os testes circunscrevem-se ao elemento parcialmente descontínuo ou assimétrico, isto é, aquele elemento que é contínuo em um dos seus lados e descontínuo no outro. A razão de se estudar só este elemento é que para a discretização mista proposta neste trabalho (formada tanto por elementos lineares contínuos como descontínuos) o elemento de maior interesse é precisamente o assimétrico, enquanto que, dentro desse contexto, o elemento descontínuo simétrico apresenta poucas oportunidades de aplicação, além de já ter sido estudado por outros autores (62).

O teste é feito sobre um exemplo de fácil resolução teórica: uma chapa retangular tracionada, discretizada com 20 elementos de contorno, dos quais apenas os adjacentes aos cantos são descontínuos. O exemplo é calculado inúmeras vezes mudando-se sempre a posição do ponto nodal dentro dos elementos descontínuos, o que é facilitado dado o caráter geral do equacionamento deduzido no capítulo 3. Para diminuir a influência de erros ocasionados pela integração numérica, usam-se 10 pontos de Gauss em todas as integrações.

Distância entre o nó e o centro do elemento	Reação (teoria = -1,0)	
	Extremo esquerdo	Extremo direito
0,50	-0,99905	-0,99902
0,40	-0,99925	-0,99925
0,30	-0,99941	-0,99941
0,20	-0,99948	-0,99949
0,10	-0,99952	-0,99952
0,075	-0,99959	-0,99962
0,05	-0,99959	-0,99959
0,00	-0,99951	-0,99951

Tabela 5.2 - Localização dos nós em Elementos Descontínuos

Dos resultados obtidos (Tabela 5.2) pode-se observar que as melhores aproximações foram alcançadas para os pontos nodais situados de 0,0 a 0,1 do centro do elemento. Entretanto outras posições até o quarto do elemento poderiam ser tomadas mas com um pouco de perda na precisão dos resultados. Pontos com nós descontínuos muito próximos dos cantos são totalmente desaconselháveis, uma vez que tendem a criar condições muito semelhantes àquelas que originaram o estudo e a aplicação dos elementos descontínuos.

Apesar do teste limitar-se ao exemplo aqui descrito e serem os resultados próximos para todos os pontos é evidente a influência da distância entre os nós descontínuos.

5.3 - ANÁLISES SOBRE O TRATAMENTO DA DESCONTINUIDADE DAS FORÇAS DE SUPERFÍCIE

5.3.1 - Análise Comparativa Feita sobre a Viga em Balanço

O problema da viga em balanço, dadas suas características, é conhecido por oferecer alguma dificuldade quando resolvido por métodos numéricos, sendo que um bom resultado só é conseguido mediante uma discretização refinada ou usando aproximações de ordem elevada, o que transforma a viga em balanço em um exemplo clássico para o teste de técnicas de resolução numérica.

Com respeito à descontinuidade das forças de superfície a viga em balanço apresenta regiões críticas nos cantos vizinhos ao engaste, podendo ainda apresentar outros pontos de descontinuidade devido ao carregamento.

Para que a descontinuidade não comprometa os resultados obtidos com o MEC, se faz necessário adotar medidas que tratem o problema adequadamente. Neste trabalho estudam-se as seguintes alternativas para essa análise: a inclusão de equações adicionais formando o chamado nó duplo, a substituição das equações de contorno por outras que garantam a simetria do tensor das tensões e a utilização de elementos descontínuos. É ainda testado o emprego de elementos descontí-

nuos com a imposição da simetria do tensor tensão, isto visando unicamente melhoras nos resultados pois o elemento descontinuo enfrenta por si só qualquer caso de descontinuidade de reações.

A viga usada nas análises tem uma relação altura/comprimento igual a 1/5 e as três discretizações básicas são constituídas de 24, 48 e 72 elementos como se mostra na figura 5.4. Adota-se um módulo de elasticidade igual a 1000 e como coeficiente de poisson o valor 0,0.

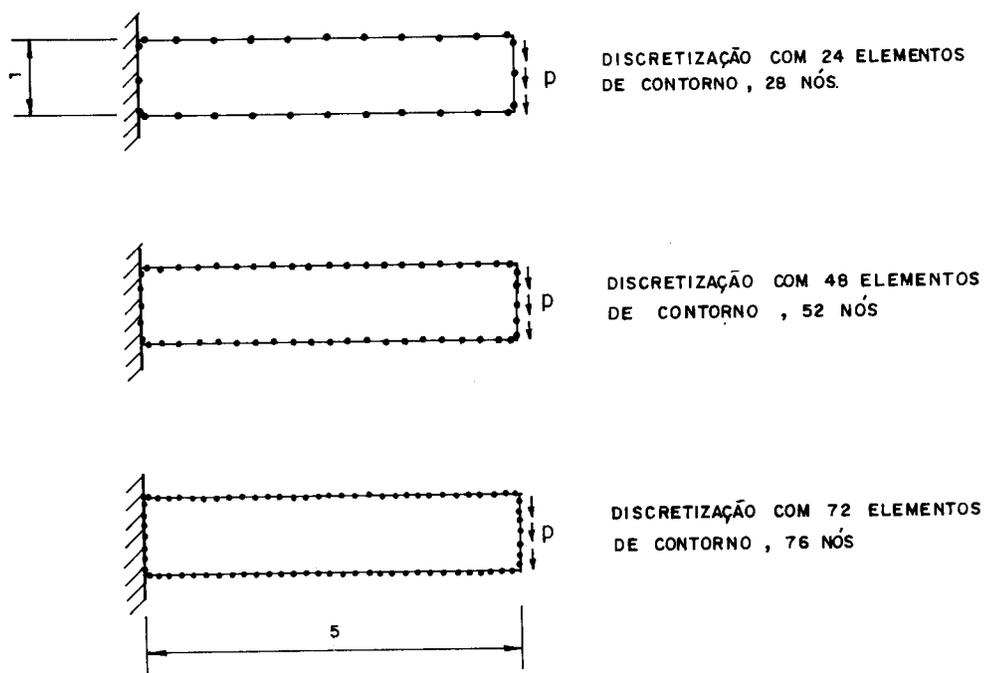


FIG. 5.4 — DISCRETIZAÇÃO DA VIGA EM BALANÇO

Cada discretização foi resolvida para os seguintes casos:

Caso 1: Malha composta unicamente por elementos lineares contínuos com nós duplos nos quatro cantos.

Caso 2: Igual ao caso anterior mas com imposição de simetria do tensor tensão nos cantos.

Caso 3: Malha mista na qual os elementos que formam os cantos são descontínuos e os restantes são contínuos.

Caso 4: Igual ao caso 3 com inclusão da condição de simetria do tensor das tensões nos cantos da viga.

O resultado teórico da viga em balanço estudada indica um deslocamento vertical do extremo livre igual a 30 unidades para um carregamento vertical igual a 60. Os resultados para todas as combinações estudadas apresentam-se na tabela 5.3 e são plotados nos gráficos 5.5 e 5.6.

DESCRIÇÃO DA DISCRETIZAÇÃO	REAÇÃO VERTICAL		DESLOCAMENTO VERTICAL EXTREMO LIVRE		
	Valor Calculado	$\Delta \%$ da Teoria	Valor Calculado	$\Delta \%$ da Teoria	
24 elementos 28 pontos nodais 56 equações	caso 1	52,11	-13,15	20,957	-30,14
	caso 2	51,97	-13,38	20,662	-31,13
	caso 3	55,20	-8,0	22,542	-24,86
	caso 4	56,35	-6,08	22,431	-25,23
48 elementos 52 nós 104 equações	caso 1	57,27	-4,55	27,460	-8,47
	caso 2	57,25	-4,58	27,435	-8,55
	caso 3	58,27	-2,88	27,310	-8,97
	caso 4	58,575	-2,38	27,317	-8,94
72 elementos 76 nós 152 equações	caso 1	58,55	-2,42	29,151	-2,83
	caso 2	58,74	-2,10	29,157	-2,81
	caso 3	59,21	-1,32	28,758	-4,14
	caso 4	59,45	-0,92	28,784	-1,74

Tabela 5.3 - Resultados da viga em balanço

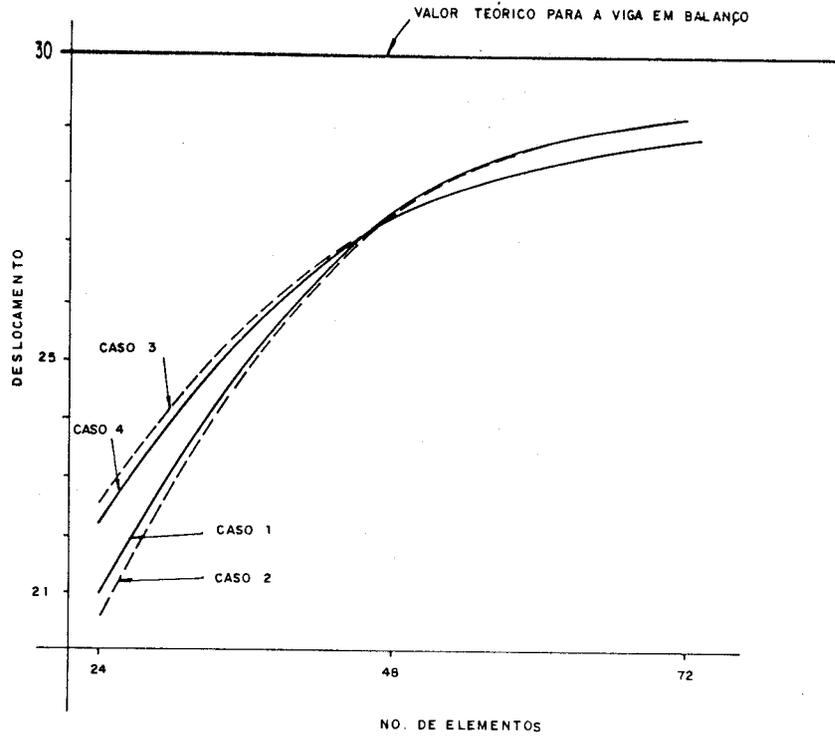


FIG. 5.5 — DESLOCAMENTO VERTICAL DA VIGA EM BALANÇO

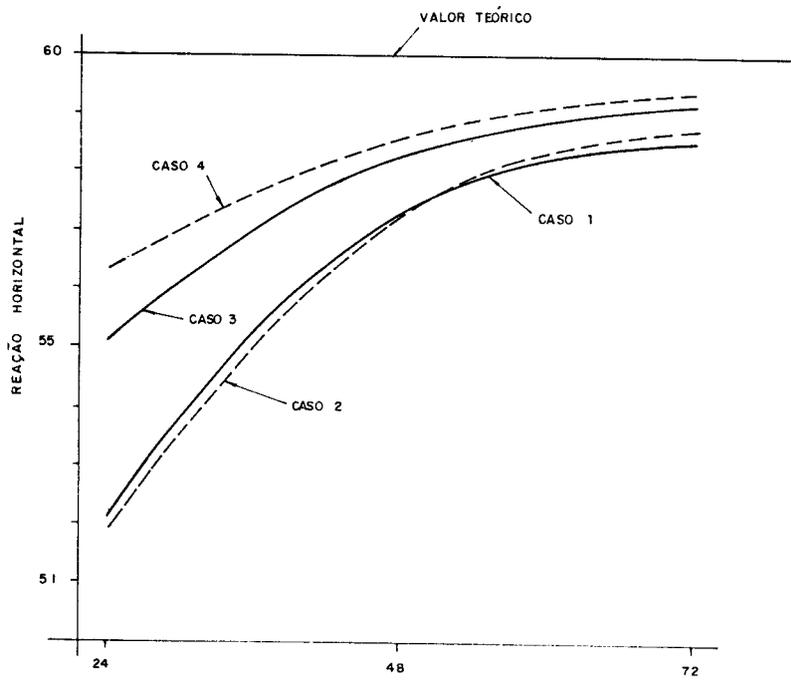


FIG. 5.6 — REAÇÃO VERTICAL DA VIGA EM BALANÇO

Nos gráficos das figuras 5.5 e 5.6 é fácil observar a convergência do método à medida em que a discretização é refinada. Fazendo as comparações entre os quatro casos estudados nota-se na análise da reação vertical melhor desempenho para os casos (3 e 4) em que o elemento descontínuo é usado, para as três discretizações adotadas.

Com respeito ao deslocamento vertical no extremo livre, deve-se ressaltar que no cálculo do seu valor teórico é suposto apenas a rotação nula do eixo da peça no seu extremo engastado (ver por exemplo Timoshenko (52)). Entretanto, as prescrições no apoio para estes exemplos praticamente impedem qualquer distorção da seção do engastamento, e como consequência disto o valor teórico obtido não pode ser considerado um valor rigorosamente exato. Já com respeito à comparação dos resultados, nota-se que para a discretização pobre as malhas com elementos descontínuos apresentam resultados mais próximos do teórico mas sua convergência é mais lenta, invertendo-se a situação nas discretizações mais refinadas onde os casos 1 e 2 mostram-se melhores.

A imposição da condição de simetria do tensor das tensões tem pouca influência nos valores da cortante e do deslocamento como se conclui a partir da tabela e gráficos anteriores. Sua contribuição se faz sentir, porém, na distribuição da tensão de cisalhamento ao longo do extremo engastado, e para mostrar isto nas figuras 5.7 e 5.8 desenham-se os gráficos correspondentes às malhas com 48 e 72 elementos.

Nas figuras 5.7 e 5.8 pode observar-se então, a influência da equação suplementar (Equação 3.7.1) que garante a simetria do tensor das tensões. Assim, nas figuras colocadas à direita, que representam os casos em que se faz a imposição, nota-se o valor zero da tensão de cisalhamento nos extremos (coordenadas $\pm c$). É interessante observar particularmente os casos que contêm elementos descontínuos (casos 3 e 4): sem a imposição da simetria do tensor tensão

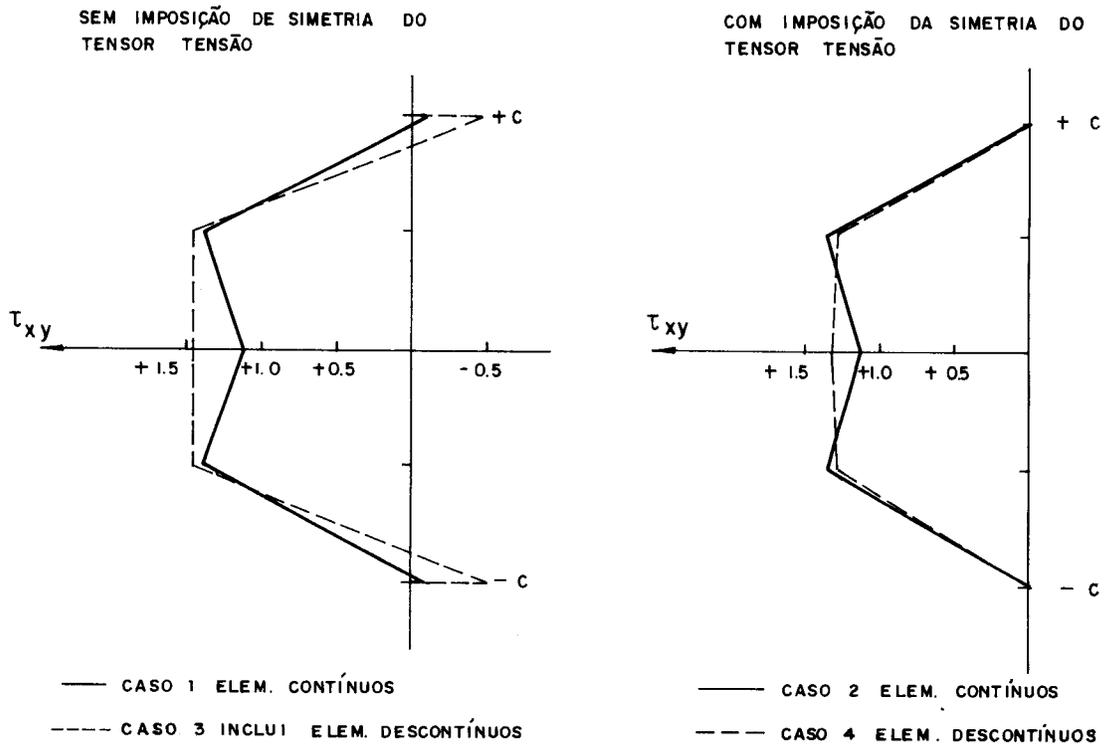


FIG. 5.7 — TENSÃO DE CISALHAMENTO NO EXTREMO ENGASTADO, 48 ELEMENTOS COM 4 NO ENGASTAMENTO

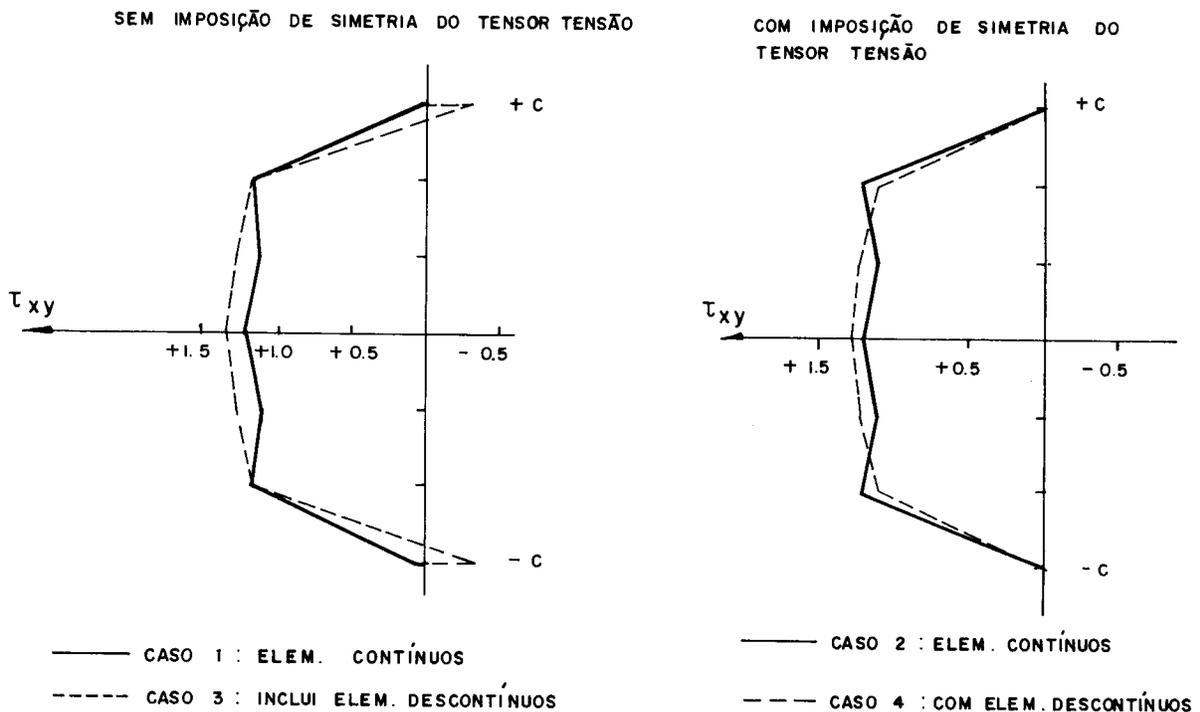


FIG. 5.8 — TENSÃO CISALHANTE NO EXTREMO ENGASTADO VIGA EM BALANÇO COM 72 ELEMENTOS, 6 NO ENGASTAMENTO

(caso 3) a tensão cisalhante nos extremos é significativa. Forçando a simetria (caso 4) parte-se do valor zero nos extremos e obtêm-se uma curva sem os picos das outras discretizações.

Sabendo-se que a maior dificuldade para a representação da viga em balanço com a aproximação aqui utilizada (elementos lineares) é com relação às extremidades da viga, as análises foram completadas com 3 novas discretizações feitas a partir das malhas de 48 e 72 elementos, refinando-se unicamente os extremos e vizinhanças. O quadro abaixo mostra as melhoras obtidas desta maneira. (F analisado unicamente o caso 1).

DISCRETIZAÇÃO	REAÇÃO VERTICAL		DESLOC. VERTICAL	
	Resultado	$\Delta\%$ teoria	Resultado	$\Delta\%$ teoria
48 elementos 4 no extremo	57,27	-4,55	27,460	-8,47
54 elementos 6 no extremo	57,76	-3,73	28,347	-5,51
60 elementos 8 no extremo	58,18	-3,03	28,666	-4,45
72 elementos 6 no extremo	58,55	-2,42	29,151	-2,83
78 elementos 8 no extremo	58,96	-1,73	29,479	-1,74

Tabela 5.4 - Viga em balanço. Discretização fina no engastamento

5.3.2 - Análise da Chapa com Furo Circular

Um outro exemplo típico para o teste de métodos numéricos em elasticidade bidimensional é o da chapa furada. O caso resulta interessante porque além de conter pontos com descontinuidade de forças de superfície, apresenta também concentração de tensões nas vizinhanças do furo o que permite medir o desempenho do método nessas situações, além de permitir também a avaliação do elemento descontínuo.

O exemplo analisado é uma chapa quadrada com furo circular no centro e solicitada a tração. Sua geometria é definida pela figura 5.9 onde é desenhada apenas uma quarta parte da chapa dada sua simetria.

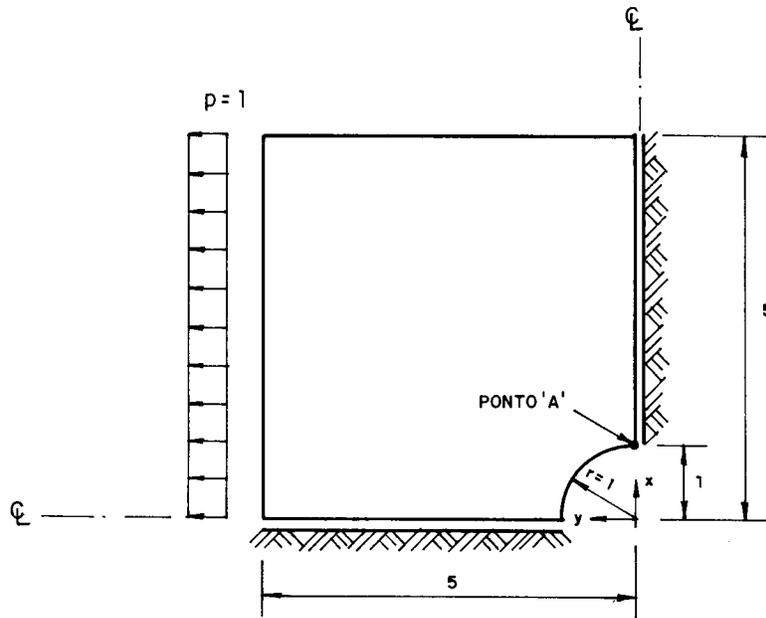


FIG. 5.9 — CHAPA COM FURO CIRCULAR

Calcula-se a chapa pelo MEC utilizando as discretizações mostradas na figura 5.10 tendo 23 e 26 pontos nodais. Nos cantos são colocados elementos descontínuos e os restantes são elementos lineares contínuos.

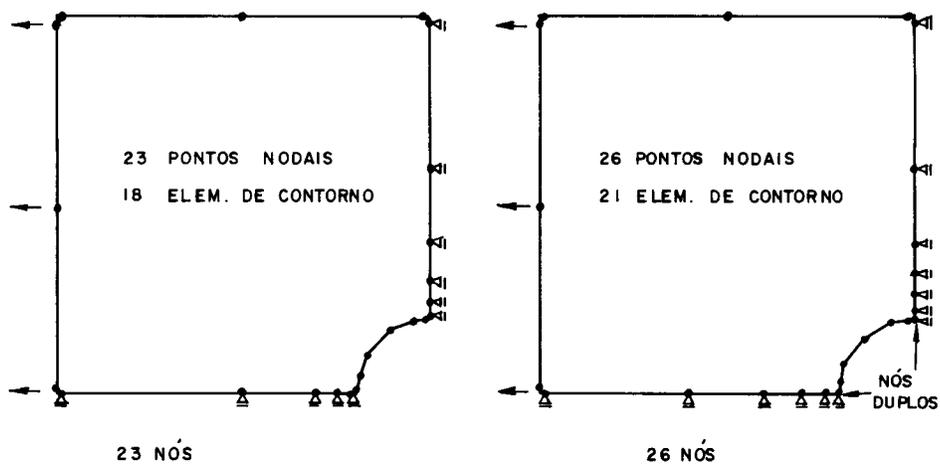


FIG. 5.10 — DISCRETIZAÇÕES DA CHAPA FURADA

A solução analítica para o problema da chapa com furo circular (52) mostra um coeficiente de concentração de tensões igual a 3 no ponto A da figura 5.9 quando se considera uma chapa de dimensão infinita, ficando a curva das tensões σ_y ao longo do eixo x com a forma representada na figura 5.11. O valor corrigido para levar em conta as dimensões da chapa exemplo é, segundo Roark & Young(63) 3,93 obtido de uma fórmula empírica.

O desempenho do algoritmo utilizado neste trabalho é comparado inicialmente com a solução teórica para chapa infinita na figura 5.11. A seguir é comparada a discretização com 26 nós com outra equivalente só que composta por elementos lineares contínuos incluindo-se a condição extra para o tratamento da descontinuidade de reações, ou seja, a simetria do tensor das tensões. Com o objetivo de testar o elemento descontínuo no caso em que para ambos os lados de um canto são prescritos deslocamentos formando assim uma descontinuidade especial (a ser discutida no item seguinte), o exemplo foi calculado de novo prescrevendo agora no contorno os deslocamentos obtidos previamente, esperando - se, portanto, os mesmos valores da tensão. Para poder fazer isto com a discretização formada unicamente com elementos contínuos precisa-se de uma outra condição obtida geralmente a partir da invariância do traço do tensor de deformação (Equação (3.7.2)). O resultado desta análise é também mostrado na figura 5.12 (ver ref.64), para comparação.

Analisando a figura 5.12 nota-se que para o caso em que as forças estão prescritas na região do furo a discretização com elementos contínuos apresenta um resultado mais próximo do empírico sendo igual a 3,67 contra 3,61 obtido com elementos descontínuos nos cantos. No caso seguinte, porém, com a imposição dos deslocamentos na região do furo, a discretização que inclui elementos descontínuos mostrou-se mais consistente mantendo o mesmo valor de tensão, enquanto o algoritmo que inclui as duas condições extra cai para o valor 3,30, mostrando assim que a segunda condição extra, que introduz no sistema de equações relações de diferenças finitas para a avaliação das deformações, prejudica os resultados.

Na figura 5.12 inclui-se também o valor empírico de Roark & Young(63) e para mostrar a necessidade de tratar adequadamente o problema da descontinuidade de forças de superfície em especial quando se trabalha com elementos lineares, indica-se o valor obtido por Seabra Pereira et alii(65) para o mesmo problema discretizado com 28 nós e elementos contínuos sem impor nenhuma condição extra, apontando um resultado bastante pobre (aproximadamente = 1,75).

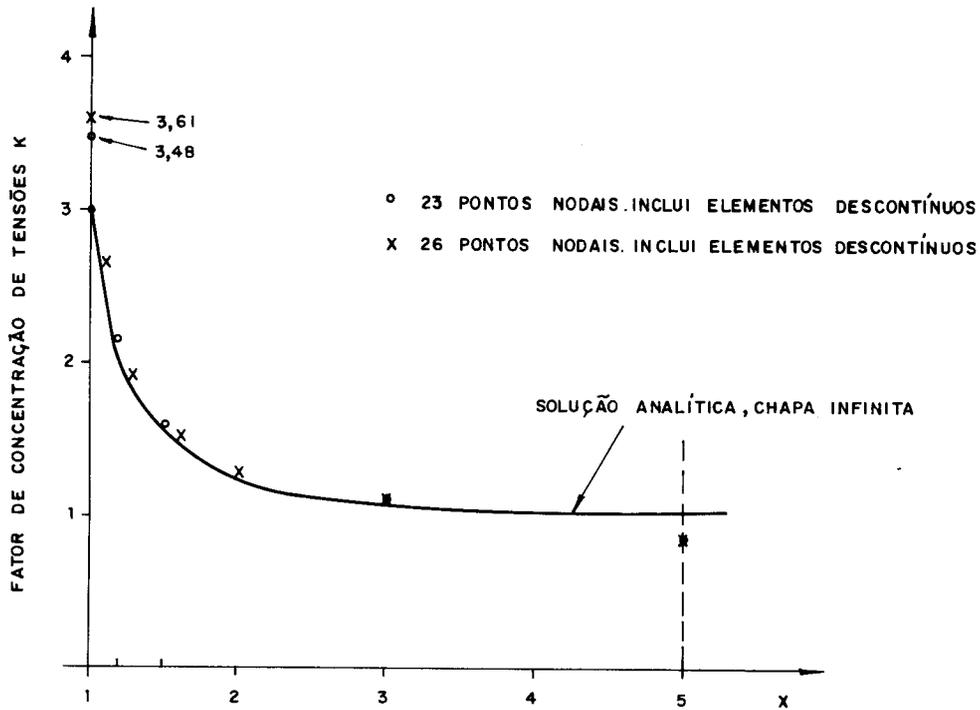


FIG. 5.11 - DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES σ_y AO LONGO DO EIXO 'X' CHAPA COM FURO CIRCULAR

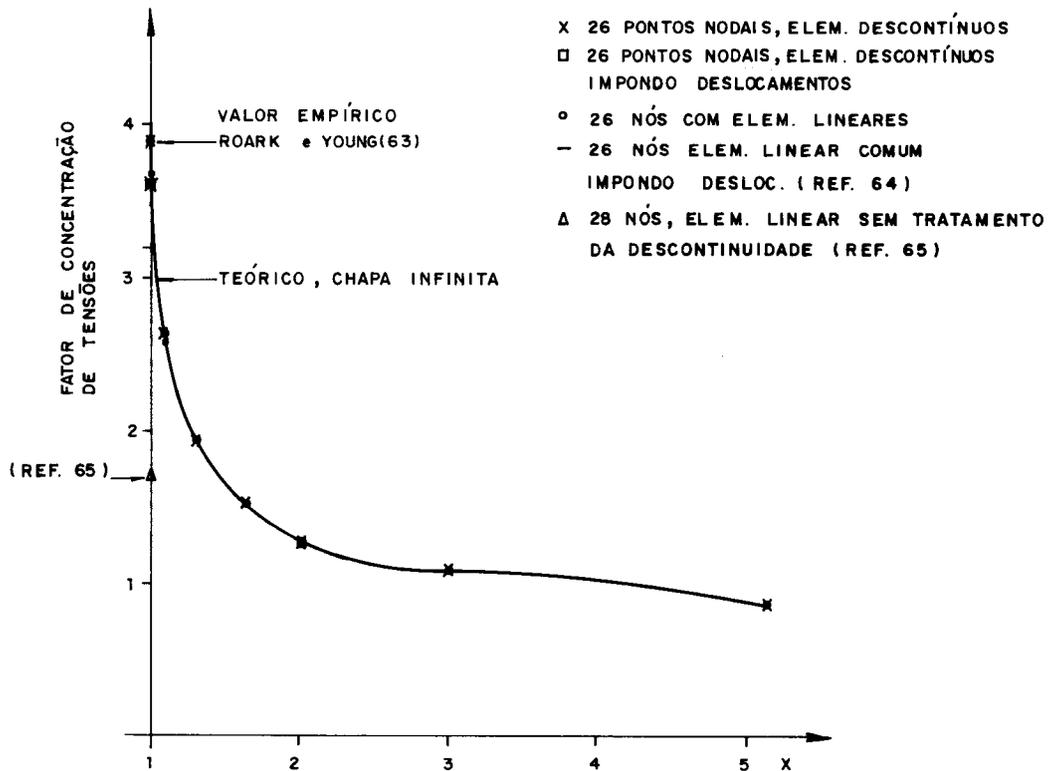


FIG. 5.12 — RESULTADOS DA CHAPA FURADA COM VÁRIAS DISCRETIZAÇÕES

5.3.3 - Avaliação do Elemento Descontínuo em Corpos de Várias Regiões com Descontinuidade Especial

A descontinuidade das forças de superfície apresenta diferentes casos segundo sejam as razões que a originam. Muitos dos casos de descontinuidade, como por exemplo: mudança abrupta no carregamento aplicado ou mudança da condição de contorno (de restrição de forças para restrição de deslocamentos ou vice-versa) entre dois segmentos contíguos, podem ser tratados com a simples adoção de nós duplos que proporcionam equações suficientes para a determinação das incógnitas envolvidas. Outros casos, porém, exigem relações adicionais para que seja possível sua resolução, entre eles a descontinuidade formada quando dois elementos adjacentes, ambos com seus deslocamentos prescritos, for-

nam um canto, ou também quando elementos adjacentes da interface entre duas regiões formam vértices internos. Seguindo a terminologia utilizada por Moreira(50) estes casos são denominados de descontinuidade especial e são tratados geralmente com equações extra aqui já comentadas, ou com a adoção de elementos descontínuos como no presente trabalho.

Em estruturas de várias regiões torna-se bastante provável a ocorrência de interfaces formando vértices, e por esta razão é verificado neste item o desempenho do elemento descontínuo no tratamento destes casos de descontinuidade especial.

No exemplo analisado a descontinuidade especial encontra-se no ponto que pertence a 4 subregiões diferentes (ver figuras 5.13 e 5.15). Inicialmente é testada uma chapa solicitada a tração conforme se mostra na figura 5.13.

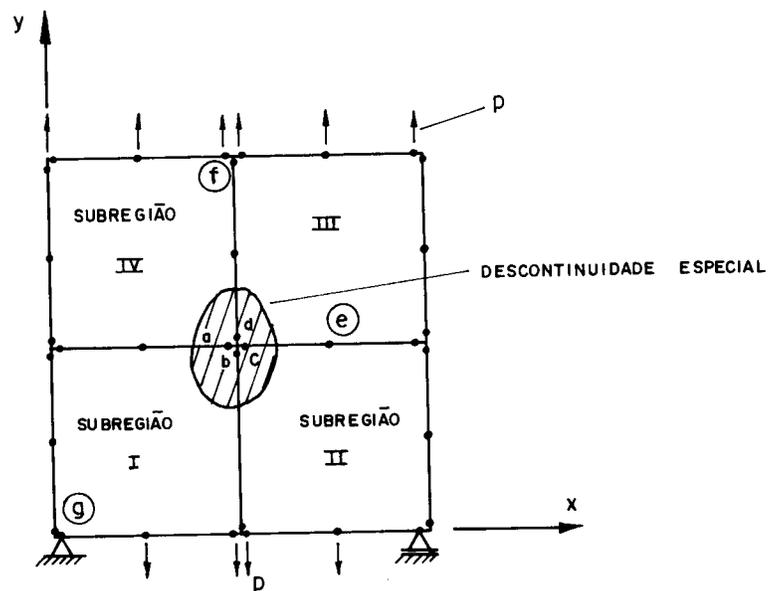


FIG. 5.13-CHAPA QUADRADA COM 4 SUBREGIÕES

O ponto ressaltado na figura 5.13 é então tratado com elementos descontínuos com os respectivos nós a, b, c e d afastados do ponto central onde ocorre a descontinuidade. Os resultados obtidos são amplamente satisfatórios como é demonstrado na tabela 5.5.

Ponto	DESLOCAMENTO EM X		TENSÃO σ_y	
	MEC	Teórico	MEC	Teórico
a	0,40018	0,40000	100,01	100,00
b	0,39982	"	99,87	"
c	0,40018	"	100,01	"
d	0,39983	"	100,13	"
e	0,40003	"	99,99	"
f	0,80009	0,80000	100,00	"
g	0,0000	0,0000	100,01	"

Tabela 5.5 - Resultados da Chapa com 4 Subregiões

Como o exemplo mostrado é facilmente modelado pelos métodos numéricos levando a resultados praticamente exatos, em continuação resolve-se um problema mais difícil: uma viga em balanço curta com as dimensões indicadas na figura 5.14 empregando-se apenas uma região.

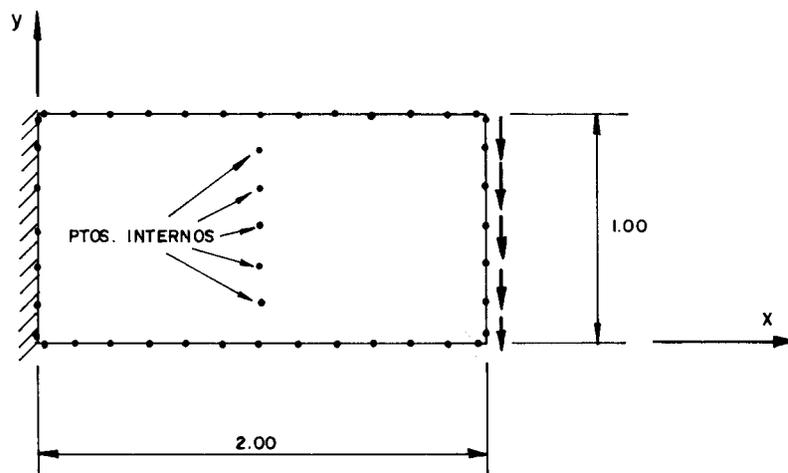


FIGURA 5.14 — VIGA EM BALANÇO CURTA

A viga é calculada inicialmente com a discretização da figura 5.14 com o objetivo de comparar os resultados com uma viga das mesmas dimensões só que agora dividida em 4 subregiões com um ponto de descontinuidade especial como indicado na figura 5.15.

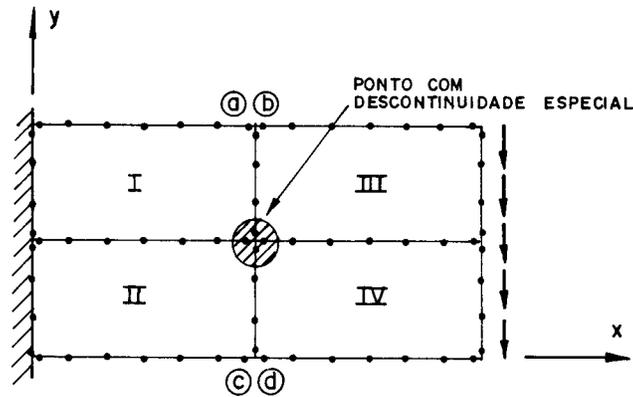


FIGURA 5.15 - VIGA EM BALANÇO CURTA COM 4 SUBREGIÕES

Novamente os elementos adjacentes ao ponto de descontinuidade foram definidos como sendo descontínuos e assim os nós correspondentes são deslocados dos extremos ao interior dos elementos.

A tabela 5.6 resume os resultados obtidos para os dois casos que são comparados com aqueles provenientes da teoria de viga.

DESCRIÇÃO	DESLOC. VERTICAL		REAÇÃO VERTICAL		σ_x AO LADO DO ENGASTE	
	valor x 10^{-4}	$\Delta\%$	Valor	$\Delta\%$	Valor	$\Delta\%$
Teoria	-1,068	-	6,00	-	-12,00	-
MEC 1 REG	-1,094	2,46	5,88	-1,98	-12,28	2,34
MEC 4 REG	-1,060	-0,77	5,34	-11,00	-11,79	-1,72

Tabela 5.6 - Resultados da Viga Curta

Os resultados obtidos são bons tanto para a viga de região única quanto para a viga dividida em 4 sub-regiões. A maior perda de aproximação encontra-se no valor da reação vertical para a viga com 4 sub-regiões (11%), perda que pode ser vista mais claramente na figura 5.16 onde se desenham as tensões cisalhantes no apoio para as duas discretiza-

ções, notando-se a semelhança das curvas com exceção da região central onde ocorre um decremento na tensão da viga subdividida, precisamente no ponto onde começa uma das interfaces. Isto pode ser explicado pelo fato que no MEC, diferente dos métodos de domínio, são melhor satisfeitas as equações de equilíbrio do que as condições de contorno(58). Com a inclusão de interfaces são então introduzidas novas aproximações no domínio, levando ao aumento do erro.

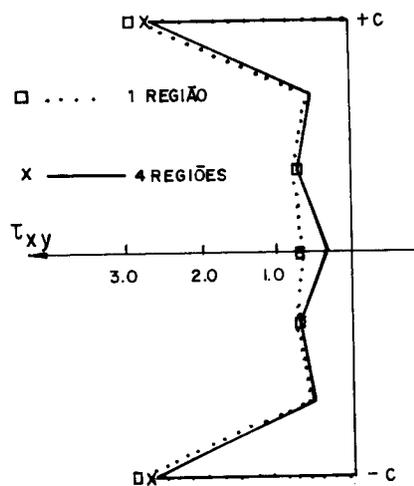


FIG. 5.16— TENSÕES DE CISALHAMENTO NAS SEÇÕES DE APOIO DAS VIGAS DAS FIGURAS 5.14 e 5.15

Visando estudar melhor a região onde acontece a descontinuidade especial analisam-se para o caso de uma região os pontos internos indicados na figura 5.14 situados na seção média da viga, seção esta que para o caso de 4 sub-regiões define uma das interfaces. Os resultados de ambos os casos estão desenhados no gráfico 5.17 que contém as distribuições das tensões normal e cisalhante da seção média da viga paralela ao eixo y . As linhas contínuas na figura indicam o resultado teórico obtido diretamente das equações de elasticidade(52) e os outros pontos provêm dos cálculos feitos com o MEC. Pode-se observar que para muitos pontos os valores obtidos são praticamente exatos, estando portanto sobre a curva teórica. Comparando as duas discretizações os resultados são muito semelhantes, notando-se apenas uma variação nos extremos da curva da tensão de cisa-

lhamento que para o caso de 4 subregiões não parte do valor zero (Fig. 5.17.b). Este resultado, porém, não afeta os nós de contorno vizinhos (a, b, c, d na figura 5.15) cujos valores de tensão cisalhante são zero.

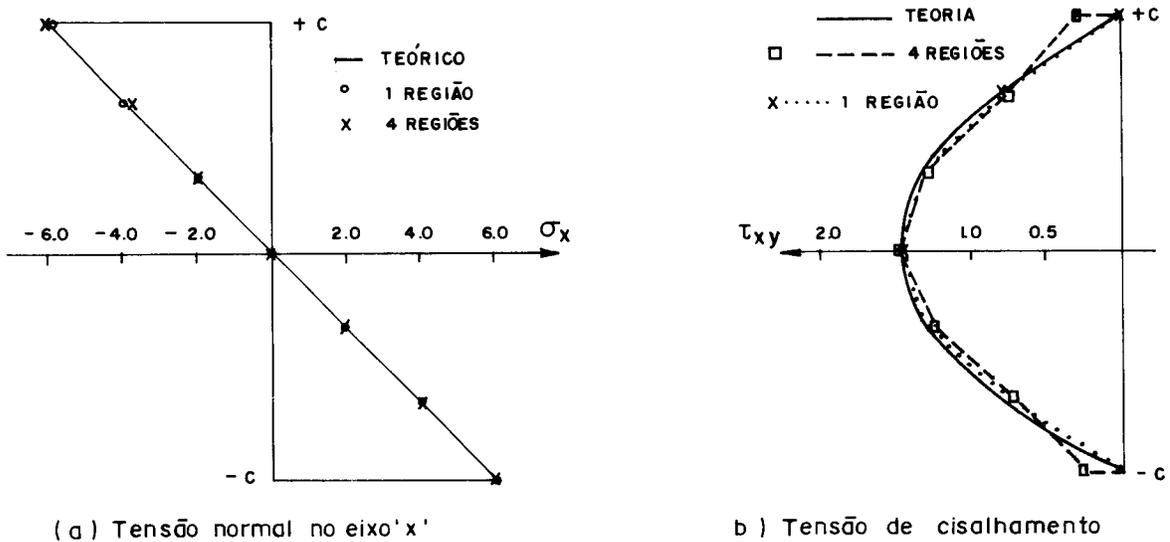


FIG. 5.17 — DIAGRAMA DE TENSÕES NA SEÇÃO CENTRAL DA VIGA CURTA

Os resultados mostrados provam que o desempenho dos elementos descontínuos nestas situações é excelente. Deve ser mencionado o fato que os exemplos calculados neste item foram resolvidos usando-se a inversão da matriz inteira por causa de que a resposta obtida através do sistema de resolução por blocos acusou uma forte perturbação.

5.4 - DIVISÃO DOS DOMÍNIOS EM SUBREGIÕES VISANDO REDUÇÕES NOS TEMPOS DE EXECUÇÃO

É sabido que a resolução do sistema de equações consome uma parte considerável do tempo de execução de um problema tratado numericamente. Alguns processos como o método dos elementos finitos têm a característica de formar sistemas de equações cuja matriz apresenta números só den-

tro de uma determinada faixa ou "banda" fora da qual só existem zeros. Esta característica permite a adoção de técnicas de resolução que trabalham unicamente dentro da banda da matriz diminuindo drasticamente a ocupação de memória e o tempo de execução. No método dos elementos de contorno, no entanto, toda estrutura formada de uma única região tem a matriz do sistema cheia, impedindo qualquer economia do tipo acima citado. Já um corpo composto por várias sub-regiões contém grupos de zeros formando uma matriz em blocos (ver item 4.2.4). Como consequência disto, tem sido sugerida a divisão de estruturas em várias sub-regiões obtendo-se assim as vantagens da matriz em blocos. No entanto, esta partição traz as desvantagens de aumentar o contorno do corpo em análise o que significa o aumento do número de pontos nodais e introduz também o erro da aproximação no domínio do corpo devido às interfaces entre as sub-regiões criadas.

Contando o programa com um adequado sistema de resolução de matrizes em blocos faz-se então um estudo tomando como base a viga em balanço analisada no item 5.3.1 sendo agora também analisada quando dividida em 2 e 3 sub-regiões a partir das discretizações básicas usadas no item mencionado.

As diferentes discretizações da viga são identificadas da seguinte maneira:

Alternativa A: A discretização original contém 24 elementos sendo 2 no extremo engastado. Assim, para 1, 2 e 3 sub-regiões definem-se os casos seguintes:

Alternativa A-1 região: 24 elementos de contorno; 28 pontos nodais e 56 equações.

Alternativa A-2 sub-regiões: 14 elementos por sub-região; 33 nós (3 na interface) e 72 equações.

Alternativa A-3 sub-regiões: 2 sub-regiões com 10 elementos cada e a outra com 12 elementos totalizando 32 elementos; 38 pontos nodais sendo 6 nas interfaces (3 em cada uma) e 88 equações.

Na figura 5.18 estão desenhadas as discretizações correspondentes à alternativa A.

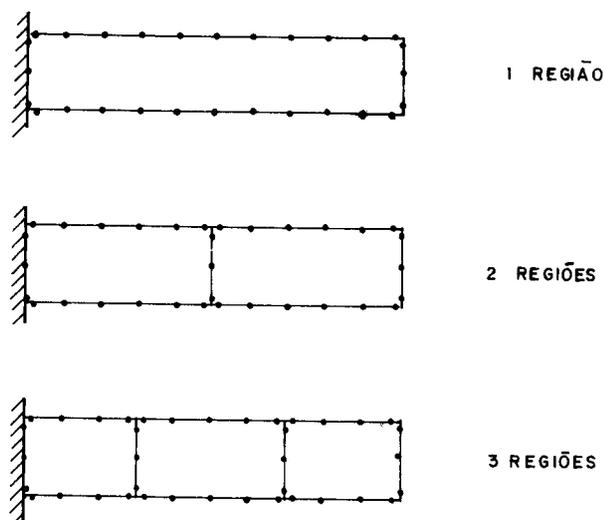


FIG. 5.18 — DISCRETIZAÇÕES DA ALTERNATIVA A PARA O TESTE DA DIVISÃO EM SUBREGIÕES

Alternativa B: A discretização original tem 48 elementos, sendo 4 deles no extremo engastado.

Alternativa B-1 região: 48 elementos; 52 pontos de contorno; 104 equações.

Alternativa B-2 subregiões: 28 elementos por sub-região; 59 pontos nodais (5 na interface); 128 equações.

Alternativa B-3 subregiões: 2 subregiões com 20 elementos cada e a outra com 24 elementos; 66 pontos nodais sendo 10 nas interfaces (5 em cada uma); 152 equações.

Alternativa C: A discretização original possui 72 elementos de contorno 6 deles no extremo engastado.

Alternativa C-1 região: 72 elementos; 76 nós; 152 equações.

Alternativa C-2 subregiões: 42 elementos por sub-região; 85 pontos nodais (7 de interface); 184 equações.

Alternativa C-3 subregiões: 2 subregiões com 30 elementos cada e a outra com 36 elementos; 94 pontos nodais (14 de interface); 216 equações.

No item 5.3.1 foram testadas diversas formas para o tratamento da descontinuidade das forças de superfície. A qui interessa particularmente a medição dos tempos de execução e portanto só é considerado o caso que possui unicamente elementos lineares contínuos e nós duplos nos cantos das vigas.

Os valores que têm sido usados ao longo deste capítulo como referência para as comparações que são o deslocamento vertical do extremo livre e a reação vertical no engastamento estão na tabela 5.7.

ALTERNATIVA	DESLOCAMENTO VERTICAL		REAÇÃO VERTICAL		
	Valor	$\Delta\%$ (teoria)	Valor	$\Delta\%$ (teoria)	$\Delta\%$ (1 região)
A-1	22,420	-25,3	-52,598	-12,3	-
A-2	24,063	-19,8	-44,220	-26,3	-15,9
A-3	24,276	-19,1	-37,020	-38,3	-29,6
B-1	28,287	- 5,71	-57,702	- 3,83	-
B-2	28,818	- 3,94	-55,184	- 8,03	- 4,4
B-3	29,139	- 2,87	-53,287	-11,19	- 7,7
C-1	29,685	- 1,05	-58,974	- 1,71	-
C-2	29,872	- 0,43	-57,720	- 3,80	- 2,1
C-3	29,940	- 0,20	-56,593	- 5,68	- 4,0

Tabela 5.7 - Resultados da Subdivisão da Viga em Balanço

Analisando os números da tabela 5.7 nota-se primeiro uma aproximação dos deslocamentos obtidos com o valor teórico esperado. É na reação vertical, porém, que as comparações permitem uma melhor avaliação. O valor do deslocamento vertical no extremo livre está sujeito a certas imposições teóricas do extremo engastado, no entanto, a reação vertical deve obedecer simplesmente à condição de equilíbrio,

condição esta básica na dedução das equações da teoria da elasticidade. Comparando-se então a reação resultante nos casos em que a viga é dividida em subregiões nota-se uma queda na aproximação dos resultados com relação àqueles obtidos com uma região só. Esta perda de precisão é fácil de perceber no gráfico 5.19 que mostra as curvas correspondentes à viga com 1, 2 e 3 subregiões. Nota-se que o resultado piora a medida que aumenta o número de subregiões e afeta principalmente as discretizações pobres melhorando a medida que a discretização é mais densa (observar também a variação em porcentagem na última coluna da tabela 5.7).

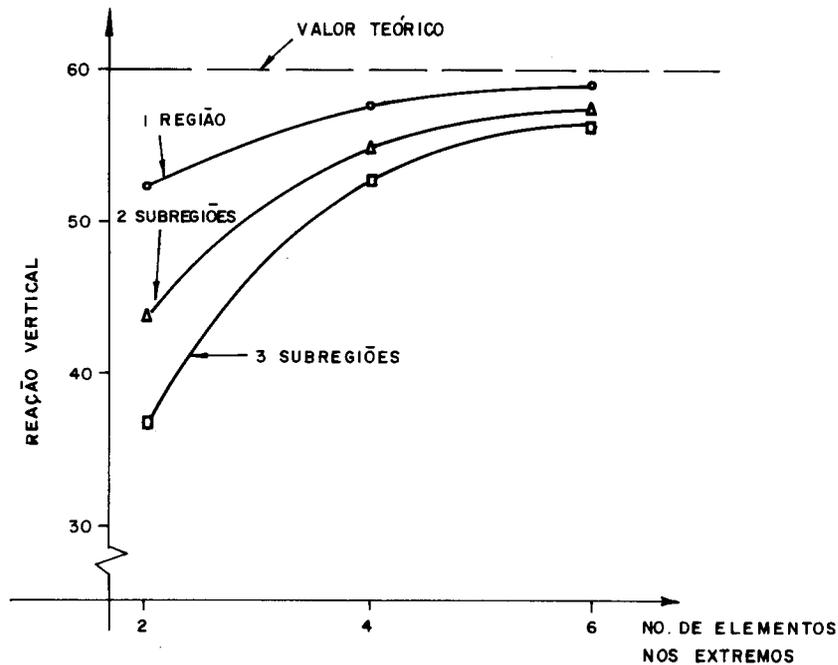


FIGURA 5.19- REAÇÕES VERTICAIS DA VIGA DIVIDIDA EM SUBREGIÕES

Outro assunto que pode ser observado é a distribuição da tensão de cisalhamento no apoio. Na figura 5.20 estão desenhados os diagramas da tensão cisalhante no extremo engastado da viga para os casos de 1, 2 e 3 subregiões, obtendo-se curvas completamente diferentes. Notam-se, nos casos da viga com várias subregiões, grandes concentrações perto dos extremos, e para a viga com uma região não são observados esses picos. Isto é explicado pela forma em que

foi subdividida a viga, ficando os casos com 2 e 3 sub-regiões pela sua geometria, semelhantes a uma viga curta cuja tendência é fornecer este tipo de distribuição de tensões tangenciais. Nas interfaces, no entanto, esta curva fica próxima do valor teórico, como se mostra na figura 5.21 onde está representada uma interface da viga dividida em 3 sub-regiões.

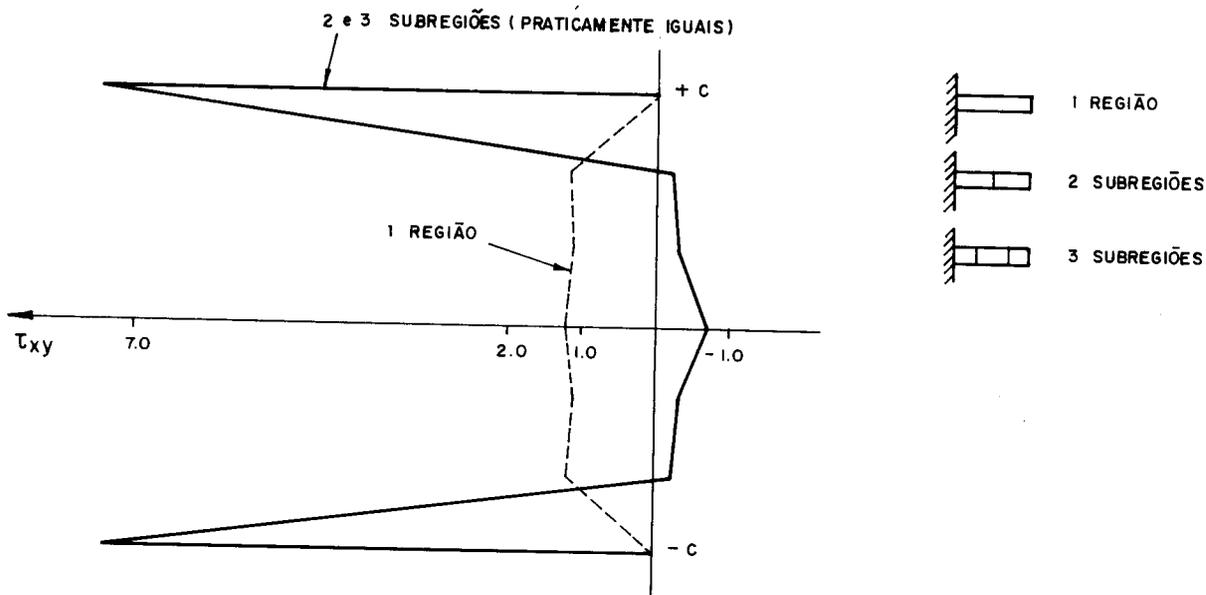


FIG. 5.20 — DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO CISALHANTE NO EXTREMO ENGASTADO DA VIGA EM BALANÇO

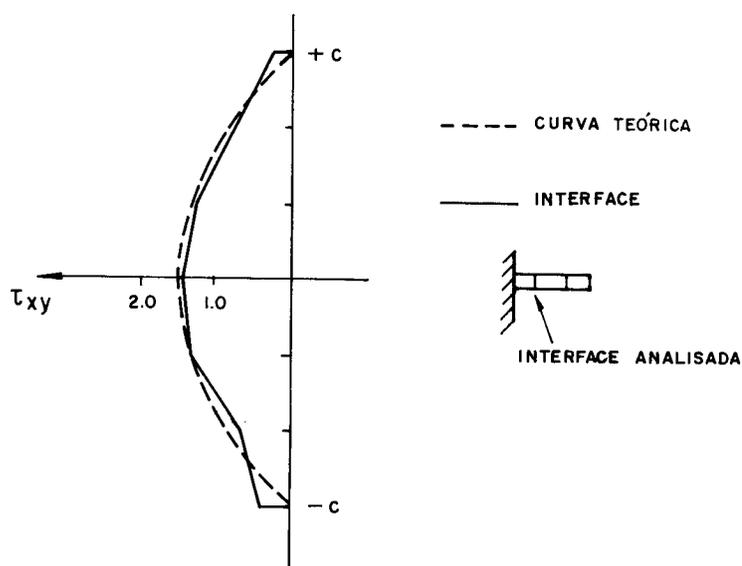


FIG. 5.21 — DISTRIBUIÇÃO DA TENSÃO DE CISALHAMENTO NUMA INTERFACE DA VIGA COMPOSTA POR 3 SUBREGIÕES

Até aqui apenas os resultados elásticos foram analisados para as subdivisões propostas. Com respeito aos tempos de execução, objetivo principal da subdivisão, os resultados confirmam as expectativas referentes a uma diminuição destes. A tabela 5.8 resume os números obtidos para as diferentes discretizações analisadas, e com base nestes números é traçado o gráfico das figuras 5.22 e 5.23. As discretizações mais refinadas são as que mais mostram as reduções dos tempos de execução, obtendo-se economias de até 40% do tempo gasto para resolver o problema com uma região. Para a discretização menos refinada pouca redução é observada. Lembrando-se a perda de aproximação dos resultados (tabela 5.7), pode-se concluir que esta discretização é prejudicada com a subdivisão. Já as outras duas discretizações (com 4 e 6 elementos nos extremos) obtiveram reduções maiores nos tempos de processamento sem comprometer tanto os resultados numéricos. Com respeito à divisão em 2 ou 3 subregiões nota-se (ver figura 5.22) que o maior ganho se dá ao passar de uma para duas subregiões, no entanto, ao passar de duas para três subregiões os decréscimos nos tempos de execução são menores.

ALTERNATIVA	% DE ZEROS	Nº DE EQUAÇÕES		TEMPO DE EXECUÇÃO (APROXIMADO)	
		Total	Δ%	Segundos	Δ%
A-1	0,0	56	-	26,4	-
A-2	41,7	72	28,6	24,1	-8,8
A-3	57,2	88	57,1	24,9	-5,7
B-1	0,0	104	-	93,2	-
B-2	42,2	128	23,1	70,6	-24,3
B-3	57,5	152	46,2	67,6	-27,5
C-1	0,0	152	-	237,0	-
C-2	42,4	184	21,1	157,6	-33,5
C-3	57,6	216	42,1	141,3	-40,4

Tabela 5.8 - Tempos de execução da viga em balanço subdividida

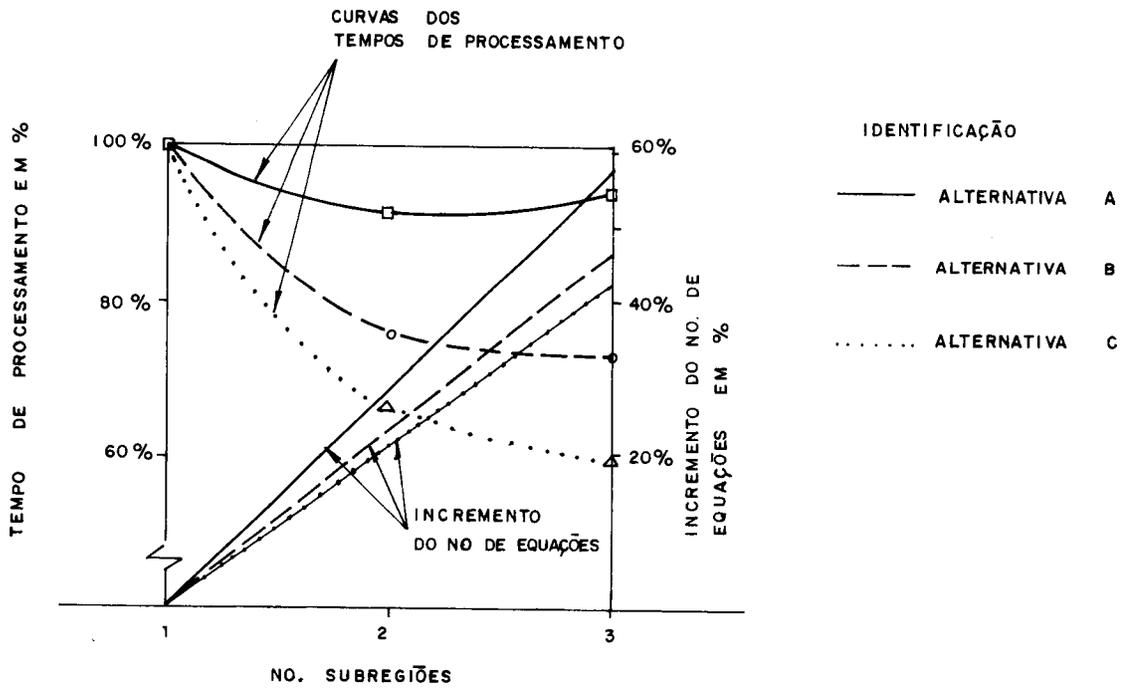


FIG. 5.22 — GRÁFICO DOS TEMPOS DE PROCESSAMENTO DA VIGA SUBDIVIDIDA

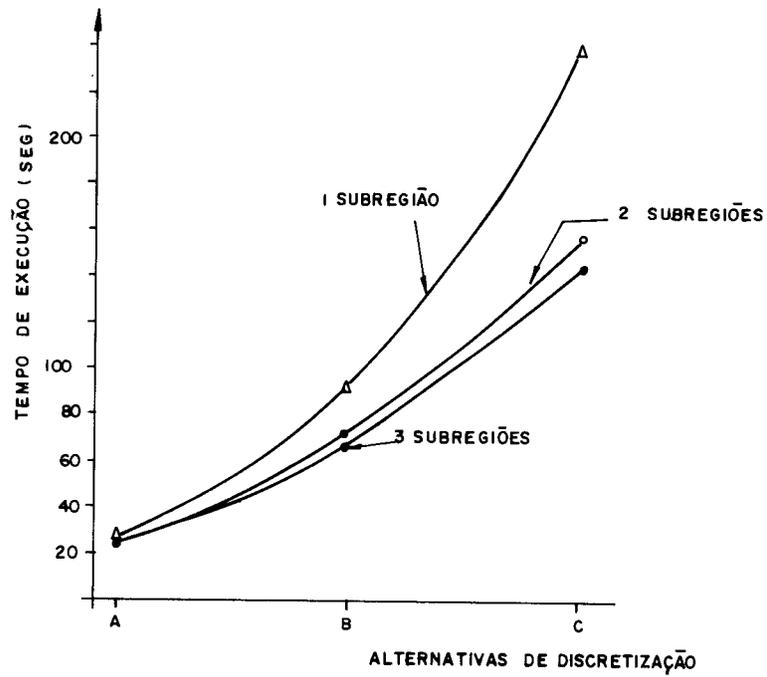


FIG. 5.23 — TEMPOS DE EXECUÇÃO DAS DIFERENTES ALTERNATIVAS

Cabe ressaltar que no exemplo aqui analisado, isto é, a viga em balanço, a criação de subregiões implica na geração de interfaces (as linhas que dividem duas subregiões) relativamente pequenas e portanto o incremento de pontos nodais e, conseqüentemente, do número de incógnitas é também pequeno, apesar de que cada nó de interface tem o dobro de incógnitas em comparação com um nó de borda. Este fato favorece a subdivisão, o que pode não acontecer em corpos cujas formas impeçam subdivisões com interfaces pequenas, ainda que isto dependa de outros fatores como a porcentagem de zeros que resultam ao se fazer a divisão. Outro ponto a ser considerado e que resulta difícil de ponderar é o trabalho de preparação e entrada de dados que logicamente é aumentado ao dividir o domínio em subregiões.

5.5 - EMPREGO DE SUBREGIÕES PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM CARREGAMENTO APLICADO DENTRO DO DOMÍNIO

O objetivo principal do equacionamento do MEC para corpos de várias regiões é o cálculo de estruturas formadas por vários materiais com constantes elásticas diferentes. Entretanto, a sua aplicação pode estender-se a outras situações como a discutida no artigo anterior ou para enfrentar problemas com formas que possam afetar a aproximação do método como por exemplo aquele mostrado na figura 5.24 que por causa da proximidade entre as duas faces das fendas utilizam-se subregiões para diminuir os erros de aproximação, ou ainda para resolver o caso de sobrecargas atuando dentro do corpo. Note-se que neste caso, uma integral de linha interna resolve também o problema.

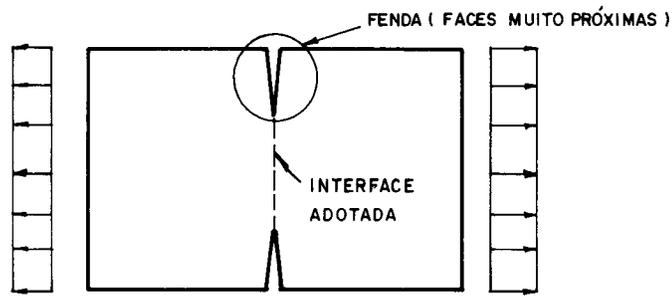


FIGURA 5.24 — SUBDIVISÃO DA CHAPA COM FENDAS

Com a intenção de mostrar esta última utilidade é analisado um exemplo contendo essa característica. Assim foi escolhida uma viga-parede apoiada nos seus extremos recebendo duas vigas que formam um conjunto simétrico como se mostra na figura 5.25. A discretização escolhida para representar esta situação é mostrada na figura 5.26, trabalhando-se apenas com a metade da estrutura como consequência da simetria. Para poder aplicar as cargas devidas as vigas que se apoiam na viga-parede admite-se uma interface definindo-se assim duas subregiões.

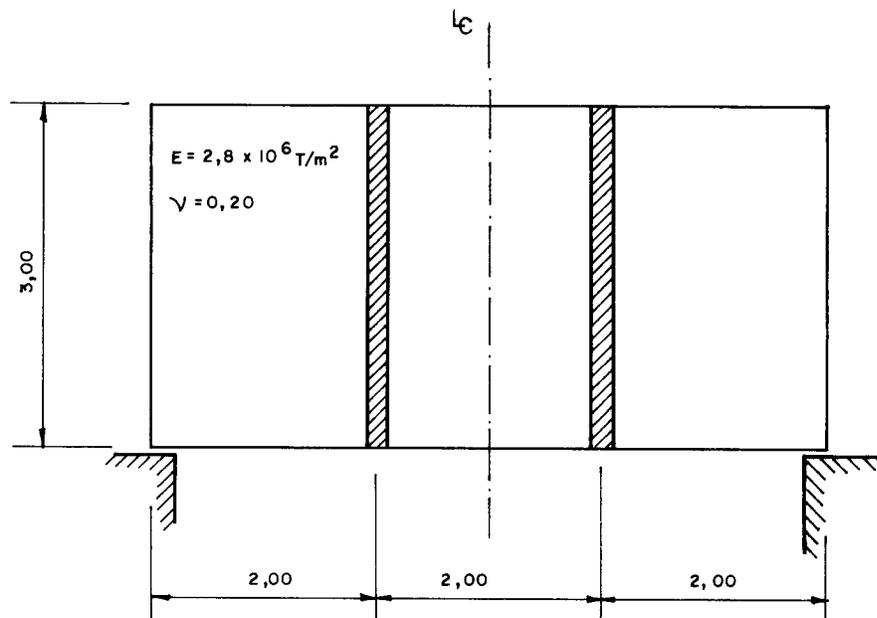


FIG. 5.25 — VIGA PAREDE (VISTA FRONTAL)

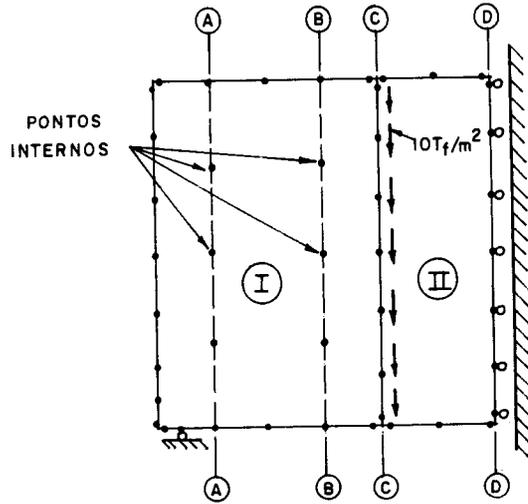
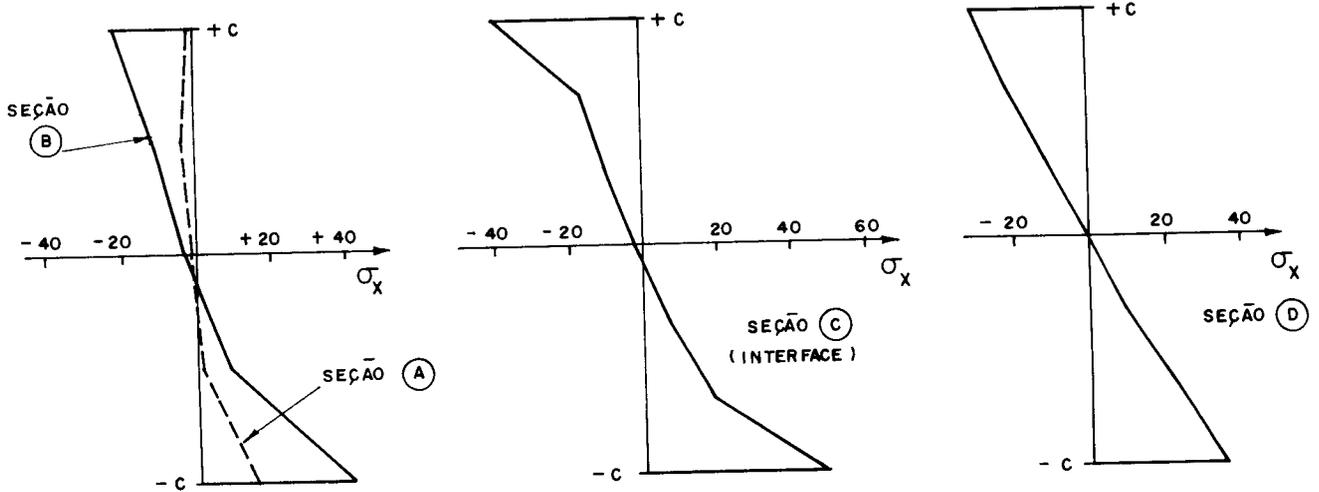


FIG. 5.26 — MODELAÇÃO DA ESTRUTURA DA FIG. 5.25

Desta maneira é prescrito um carregamento de $10t_f/m^2$ ao longo da interface (por facilidade adota-se um valor constante e não parabólico como sugeriria a tensão cisalhante das vigas apoiadas). Os resultados são mostrados na figura 5.27 que contém os diagramas de tensão normal no eixo horizontal e da tensão de cisalhamento nas seções A, B, C e D (indicadas na figura 5.26) e suas formas confirmam a distribuição de tensões esperada em estruturas deste tipo.



(a) TENSÃO NORMAL NO EIXO HORIZONTAL σ_x

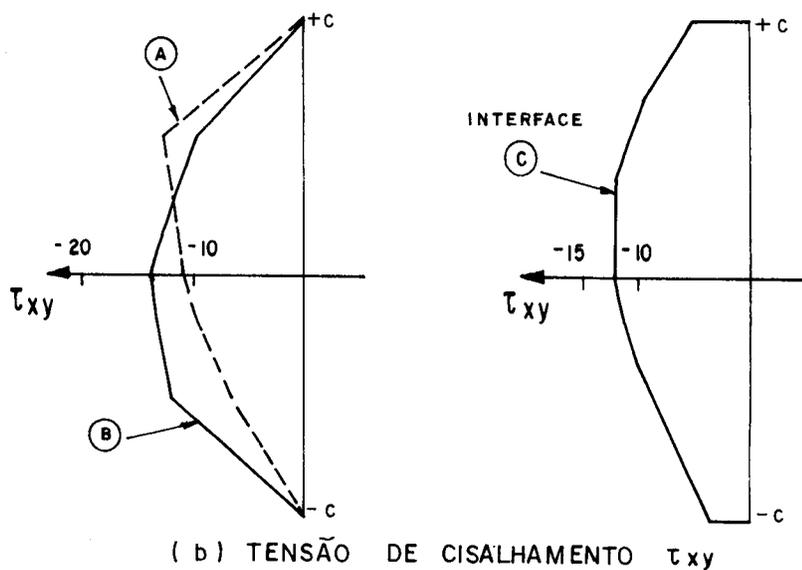


FIG. 5.27 — DIAGRAMAS DE TENSÕES NA VIGA PAREDE

5.6 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Para completar este capítulo apresenta-se um exemplo de aplicação do algoritmo aqui desenvolvido. O exemplo escolhido reúne várias das características que foram objeto das análises nos capítulos anteriores assim como outras características interessantes. Trata-se do túnel assimétrico mostrado em detalhe na figura 5.28 localizado num meio rochoso infinito. Assim distinguem-se nessa estrutura as seguintes características:

a) O exemplo inclui o domínio infinito representado pelo meio rochoso que é facilmente modelado com o Método dos Elementos de Contorno em contraste com a dificuldade que isto representa para outros métodos.

b) Dois materiais são considerados no problema (o concreto do túnel e a rocha) usando-se, portanto, o equacionamento de corpos formados por várias regiões.

c) O carregamento do túnel é feito no contorno de interface entre túnel e rocha.

d) Os cantos ou vértices localizados na interface entre túnel e rocha são pontos com descontinuidade especial das forças de superfície sendo tratados aqui com os elementos descontínuos.

e) A subregião que define o túnel (subregião de concreto) tem as características de uma subregião fina e pode, por causa da proximidade dos elementos entre uma face e outra, ser afetada por erros numéricos. O cálculo desta subregião é altamente beneficiado, então, pelo critério seletivo para a definição do número de pontos de integração, podendo-se definir até 10 pontos de gauss nos casos de elementos muito próximos.

f) Trata-se de um exemplo que representa o estado plano de deformação, não incluído nos exemplos anteriores.

Dois materiais compõem a estrutura a ser analisada. Para a rocha é adotado um módulo de elasticidade igual a $1,2 \times 10^6 \text{ Tf/m}^2$ e um coeficiente de Poisson igual a 0,15. O estado das tensões na rocha é determinado por um peso específico $\gamma = 2,5 \text{ Tf/m}^3$ com a tensão normal vertical σ_v igual a γH e a tensão normal horizontal σ_h igual a $K_0 \sigma_v$. Adota-se K_0 igual a 0,20 e a altura H é de 20 metros.

Para o concreto admite-se um módulo de elasticidade da ordem de $2,8 \times 10^6 \text{ Tf/m}^2$ com um coeficiente de Poisson de 0,20.

A discretização do problema é feita com 90 pontos nodais ilustrados na figura 5.28 sendo 48 deles nós de interface. O número total de elementos de contorno é 126, 82 definindo o túnel e 44 o meio rochoso. O sistema está formado então por 276 equações. São calculados também 30 pontos internos para medir a variação das tensões na rocha.

Os resultados são apresentados em diagramas para serem mais facilmente entendidos. Inicialmente apresenta-se o resultado dos deslocamentos com o desenho do túnel deformado (figura 5.29), e como pode-se ver o resultado é compatível com o carregamento aplicado. As outras figuras mostram as tensões nos diferentes pontos do contorno exterior do túnel: a figura 5.30 representa a tensão normal vertical, a figura 5.31 a tensão normal horizontal e a figura 5.32 a tensão de cisalhamento. A última figura representa a variação da distribuição das tensões σ_v na rocha calculadas para 5 trechos diferentes.

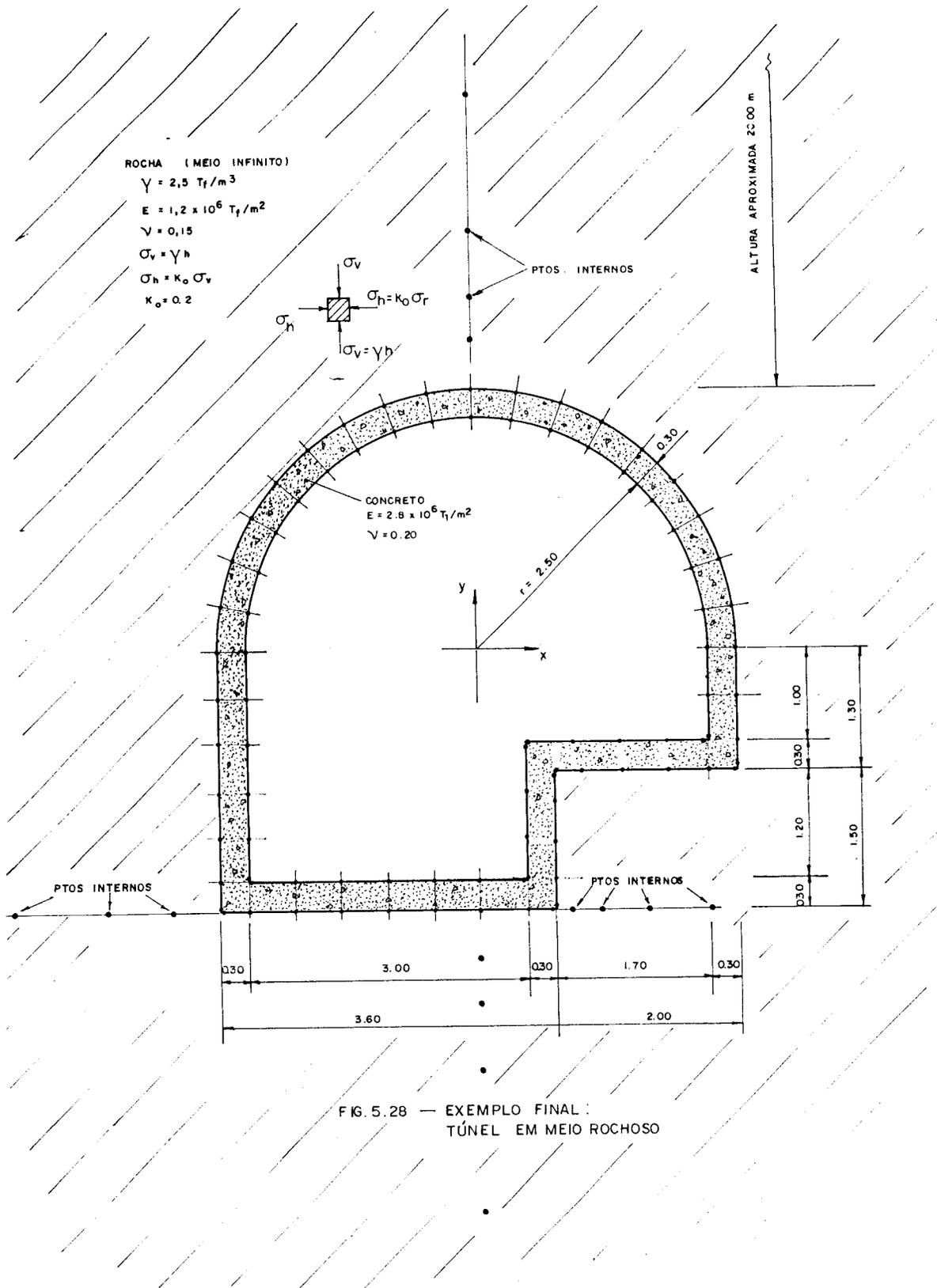


FIG. 5.28 — EXEMPLO FINAL :
TÚNEL EM MEIO ROCHOSO

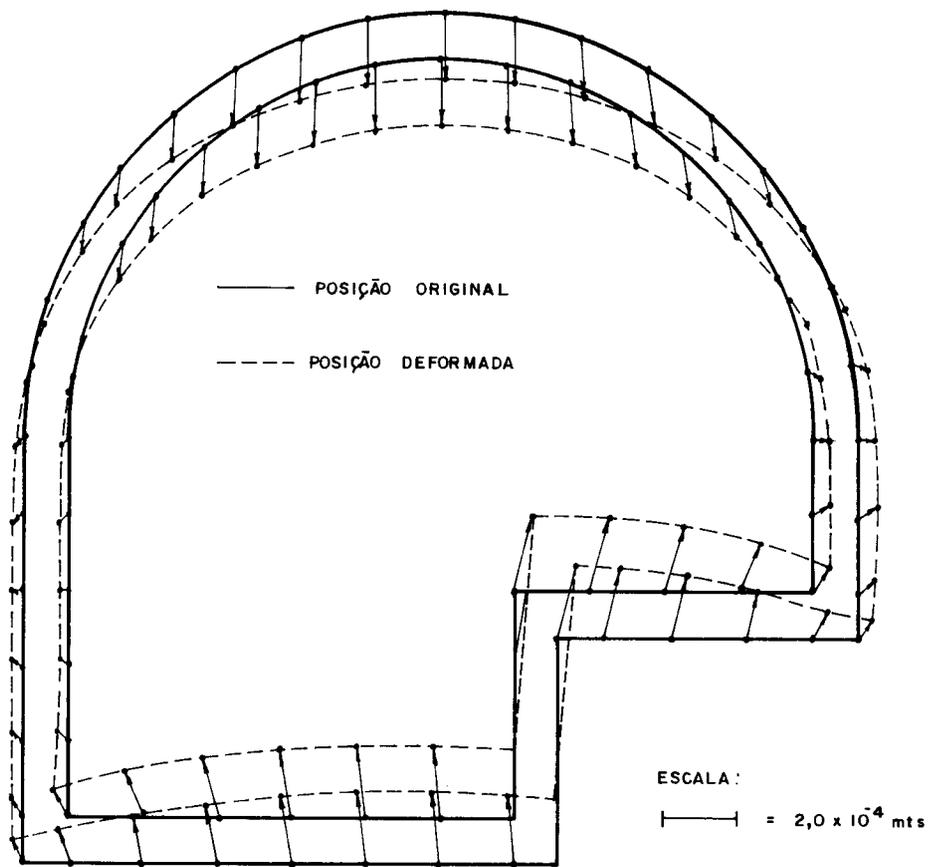


FIG. 5.29 — TÚNEL — POSIÇÃO ORIGINAL E POSIÇÃO DEFORMADA

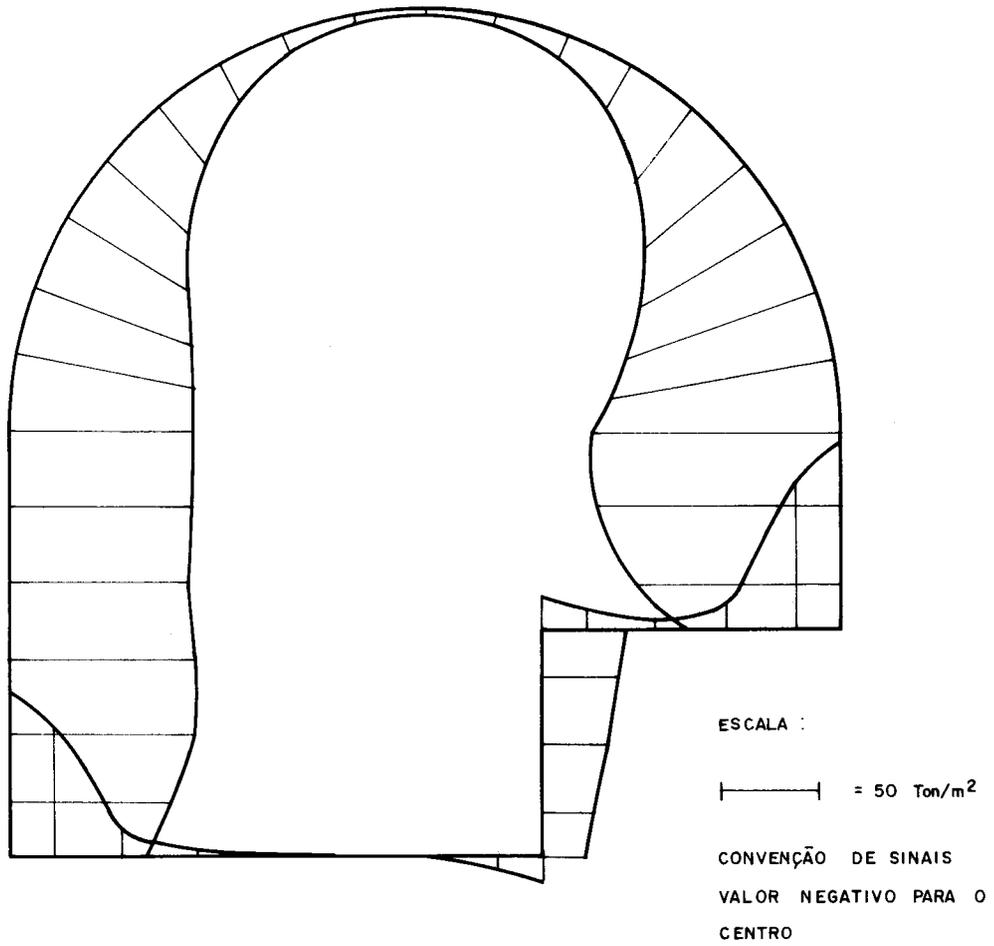


FIG. 5.30 — TENSÃO NORMAL NO EIXO VERTICAL σ_y
NA BORDA EXTERNA DO TÚNEL

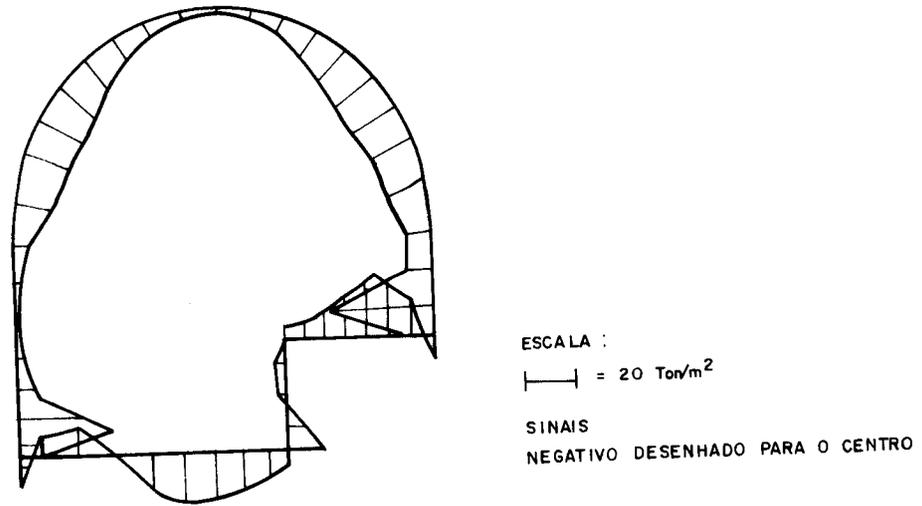


FIG. 5.31 - TENSÃO NORMAL AO LONGO DO EIXO HORIZONTAL σ_x
NO CONTORNO EXTERIOR DO TÚNEL

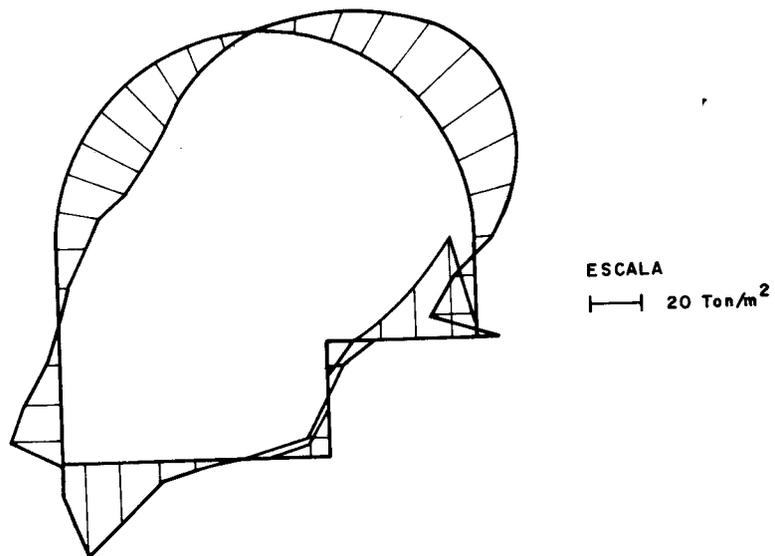


FIG. 5.32 - TENSÃO DE CISALHAMENTO τ_{xy}
NO CONTORNO EXTERIOR DO TÚNEL

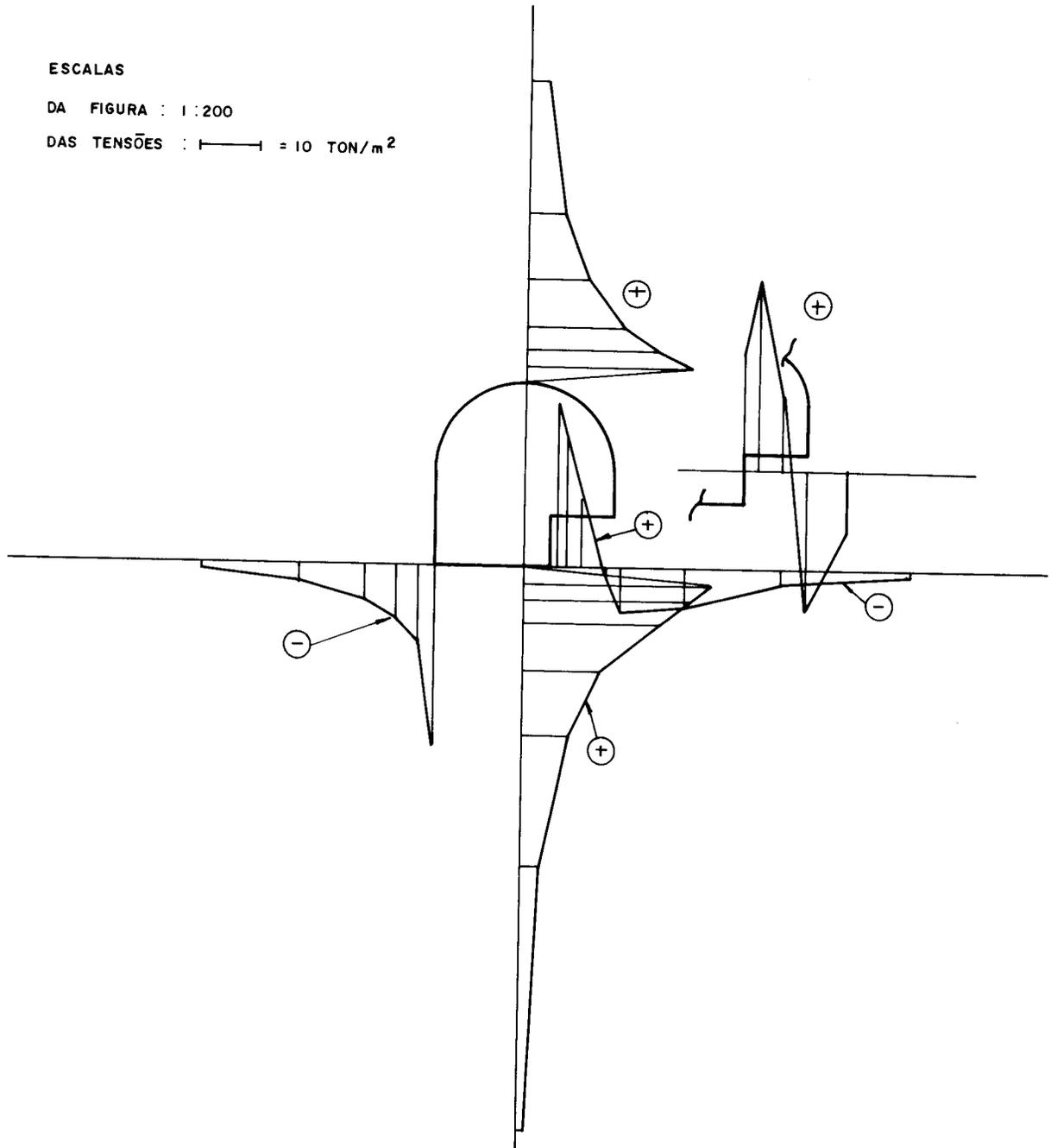


FIG. 5.33 — VARIAÇÃO DE σ_y NA ROCHA

C A P Í T U L O VI

CONCLUSÕES

Dos assuntos estudados ao longo deste trabalho podem ser estabelecidas as seguintes conclusões:

O Método dos Elementos de Contorno, contando com uma aproximação linear, tanto para a geometria como para as variáveis deslocamento e reação, e dispondo também de um tratamento adequado para os casos de descontinuidade das forças de superfície, proporciona bons resultados quando aplicado à resolução de problemas da elasticidade linear bi dimensional.

A obtenção de bons resultados depende, logicamente, de uma adequada discretização, podendo variar desde uma discretização pobre em problemas com distribuições lineares de tensões ou deslocamentos até discretizações refinadas em áreas sujeitas a concentrações de esforços ou similares.

As análises feitas na viga em balanço mostradas no capítulo 5 indicam claramente a convergência obtida com o algoritmo utilizado, pois a medida que é aumentado o número de elementos na discretização da viga, a aproximação dos resultados melhora.

É observado também um bom desempenho da formulação em problemas que apresentam casos de concentração de tensões como o exemplo da chapa com furo circular analisado no capítulo 5.

Destaca-se neste trabalho o uso do elemento descontínuo introduzido no capítulo 3 indicado para ser empregado só nos pontos onde é necessária a adoção de medidas para contornar problemas decorrentes das descontinuidades das forças de superfície. Os resultados obtidos demonstram a validade do equacionamento deduzido e levam a propor o elemento descontínuo como uma boa alternativa para a representação de descontinuidades, evitando-se assim a inclusão de equações extra dentro do sistema calculado com o MEC. Os elementos descontínuos permitem enfrentar qualquer problema de descontinuidade com expressões provenientes das equações de contorno como todas as outras, ao passo que as expressões usuais obtidas das hipóteses de simetria do tensor de tensões e a invariância do traço do tensor das deformações podem incluir outras aproximações, prejudicando a análise do problema físico.

Outro item que merece ser considerado em qualquer programa do MEC é a adoção de um esquema seletivo para a definição do número de pontos de integração a ser usado para o cálculo das integrais. Esse número que neste trabalho pode variar de 2 até 10 pontos de gauss conforme a tabela 5.1, permite a obtenção de bons resultados evitando a execução de cálculos desnecessários sem prejuízo da resposta final.

O sistema de resolução por blocos mostrou que seu uso torna-se quase que imprescindível para a resolução de grandes sistemas de equações provenientes de estruturas formadas por várias regiões. A sua eficiência começa pela drástica redução que se obtém nos tempos de processamento e inclui também a considerável economia de memória, permitindo-se assim pensar na possível adaptação de um programa como o do presente trabalho para equipamentos de cálculo com menor disponibilidade de memória tais como os microprocessadores ou os minicomputadores.

Os resultados numéricos obtidos ao empregar a resolução por blocos são satisfatórios, a execução do caso mencionado no item 5.3.3. No entanto, uma primeira tentativa

para a superação deste problema seria o ordenamento das variáveis proposto por Lachat(24) e sugerido no trabalho de Crotty(51) que deve produzir um melhor condicionamento da matriz do sistema.

Com respeito à divisão em subregiões visando as vantagens que o algoritmo de resolução por blocos oferece, as análises mostram que os resultados nos casos de problemas com um número elevado de equações é favorecido mas para isto sacrifica-se um pouco a aproximação das respostas, além de outros inconvenientes que devem ser ponderados ao aplicar este critério, como por exemplo o trabalho de preparação dos dados de entrada e o aumento do número de equações.

Finalmente, o último exemplo do capítulo 5 prova que o melhor campo para o emprego do método dos elementos de contorno é a resolução de problemas que contenham domínios infinitos os quais são facilmente modelados pelo MEC. Neste campo de aplicação em particular, o MEC leva ampla vantagem ao ser comparado com os outros métodos numéricos. É bom lembrar que estes problemas são freqüentes em obras enterradas, fundações, barragens, etc..

C A P Í T U L O VII

REFERÊNCIAS

- 1) SOUTHWELL, R.V. - Relaxation methods in theoretical physics. London, Oxford University Press, 1946. 256p. (The Oxford Engineering Science Series).
- 2) ARGYRIS, J. H. & KELSET, S. - Energy theorems and structural analysis. London, Butterworths, 1960. 85 p.
- 3) TURNER, M.J. et alii - Stifness and deflection analysis of complex structures. Journal Aero. Science, 23: 805-823, 1956.
- 4) CLOUGH, R.W. - The finite element in plane stress analysis. Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Comp., 1960.
- 5) ZIENKIEWICZ, O.C. - The finite element method in engineering science. London, McGraw-Hill, 1971. 521 p.
- 6) ANDERSSEN, R.S. et alii - The application and numerical solution of integral equations. Alphen aan den Rijn, The Netherlands, Sijthoff & Noordhoff, 1980. 259 p.
- 7) ABEL, N.H. - Ouevres Complètes. Norvégien Christiania, 1881. V. 1. 621 p.
- 8) LIOUVILLE, V. - Sur le développement des fonctions. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2: 16-35, 1837.

- 9) VOLTERRA, V. - Opere matematiche. Rome, Acad. Naz. Lincei, 1956. V. 2. p. 216-275.
- 10) FREDHOLM, I. - Ouevres Complètes. Malmö, 1955.
- 11) HILBERT, D. - Grundzüge einer allgemeinen theorie der linearen integralgleichungen. New York, Chelsea Publishing Company, 1953. 282 p.
- 12) KELLOG, O.D. - Foundations of potential theory. Berlin, Springer-Verlag, 1967, 1967. 384 p.
- 13) MUSKHELISHVILI, N.I. - Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Groningen Holland, Noordhoff, 1953. 704 p.
- 14) MIKHLIN, S.G. - Integral equations. London, Pergamon Press, 1957. 338 p. (International series of monographs in pure and applied mathematics).
- 15) KUPRADZE, V.D. - Potential methods in the theory of elasticity. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1965. 339 p.
- 16) JASWON, M.A. - Integral equation methods in potential theory I. Proc. Royal Society, A 275: 23-32, 1963.
- 17) SYMM, G.T. - Integral equation methods in potential theory II. Proc. Royal Society, A 275: 33-46, 1963.
- 18) JASWON, M.A. & PONTER, A.R. - An integral equation solution of the torsion problem. Proc. Royal Society, A 273: 237-246, 1962.
- 19) RIZZO, F.J. - An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quarterly of Applied Mathematics, 25 (1): 83-92, 1967.
- 20) CRUSE, T.A. - Numerical solutions in three dimensional elastostatics. Int. Journal of Solids and Structures, 5: 1259-1274, 1969.
- 21) BANERJEE, P.K. - Integral equation methods for analysis of piece-wise non-homogeneous three-dimensional

- elastic solids of arbitrary shape. Int. Journal Mechanical Science, 18: 293-303, 1976.
- 22) RICARDELLA, P.C. - An implementation of the boundary-integral technique for planar problems of elasticity and elasto-plasticity. Carnegie-Mellon University, 1973. 189 p. (Ph.D. Thesis).
- 23) CRUSE, T.A. - An improved boundary integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. Computers & Structures, 4: 741-754, 1974.
- 24) LACHAT, J.A. - A further development of the boundary integral technique for elastostatics. Southampton, University of Southampton, 1975. (Ph.D. Thesis).
- 25) LOVE, A.E.H. - A treatise on the mathematical theory of elasticity. New York, Dover Publications, 1944. 643 p.
- 26) NAKAGUMA, R.K. - Three dimensional elastostatics using the boundary element method. Southampton, University of Southampton, 1979. 200 p. (Ph.D. Thesis).
- 27) MIDLIN, R.D. - Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. Journal of Physics, 7, 1936.
- 28) MENDELSON, A. - Boundary integral methods in elasticity and plasticity. NASA report TN D - 7418, 1973.
- 29) MUKHERJEE, S. - Corrected boundary integral equation in planar thermoelastoplasticity. Int. Journal of Solids & Structures, 13: 331-335, 1977.
- 30) CHAUDONNERET, M. - Méthode des équations intégrales appliquées a la résolution de problèmes de viscoplasticité. Journal Mécanique Appliquée, 1: 113-132, 1977.
- 31) TELLES, J.C.F. & BREBBIA, C.A. - New developments in elastoplastic analysis. Berlin, Springer-Verlag, 1981. p. 350-370. (Boundary Element Methods).

- 32) VENTURINI, W.S. & BREBBIA, C.A. - The boundary element method for the solution of no-tension materials. Berlin, Springer-Verlag, 1981. P. 371-390. (Boundary Element Methods).
- 33) VENTURINI, W.S. - Boundary element method in geomechanics. Berlin, Springer-Verlag, 1983. 246 p. (Lecture Notes in Engineering, V. 4).
- 34) MAIER, G. & POLIZZOTTO, C. - A boundary element approach to limit analysis. Berlin, Springer-Verlag, 1983. P. 551-566. (Boundary Elements).
- 35) TSUTA, T. & YAMAJI, S. - Boundary element analysis of contact thermo-elastoplastic problems with creep and the numerical technique. Berlin, Springer-Verlag, 1983. P. 567-576. (Boundary Elements).
- 36) TAKAKUDA, K.; KOIZUMI, T. & SHIBUYA, T. - On integral equation methods for crack problems. Bulletin of JSME, 28 (236): 217-224, 1985.
- 37) FELIPPA, C.A. - Interfacing finite element and boundary element discretizations. Berlin, Springer-Verlag, 1981, p. 541-551. (Boundary Element Methods).
- 38) BEER, G. & MEEK, J.L. - The coupling of boundary and finite element methods for infinite domain problems in elasto-plasticity. Berlin, Springer-Verlag, 1981. P. 575-591. (Boundary Element Methods).
- 39) DENDROU, B.A. & DENDROU, S.A. - A finite-element boundary integral scheme to simulate rock effects on the linear of an underground intersection. Berlin, Springer-Verlag, 1981. P. 592-599. (Boundary Element Methods).
- 40) BRADY, B.H.G. & WASSYNG, A. - A coupled finite element - boundary element method of stress analysis. International Journal of Rock Mechanics, Mining Science & Geomechanics Abstracts, 18: 475-485, 1981.

- 41) KISHIMOTO, K. et alii - Elastic-plastic fracture mechanics analysis by combination of boundary and finite element methods. Berlin, Springer-Verlag, 1983. P. 975-984. (Boundary Elements).
- 42) HISATAKE, M.; ITO, T. & UEDA, H. - Three-dimensional Symmetric coupling of boundary and finite element methods. Berlin, Springer-Verlag, 1983. p. 985-994. (Boundary Elements).
- 43) ICHIKAWA, Y.; OBARA, Y. & KAWAMOTO, T. - A coupling scheme for boundary and finite elements using a joint element. Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 9: 161-172, 1985.
- 44) CHAUDOUET, A. & AFZALI, M. - CA.ST.OR 3D: Three dimensional boundary element analysis computer code. Berlin, Springer-Verlag, 1983. P. 797-810. (Boundary Elements).
- 45) HIGASHIMACHI, T. et alii - Interactive structural analysis system using the advanced boundary element method. Berlin, Springer-Verlag, 1983. P. 847-856. (Boundary Elements).
- 46) DANSON, D.J. & BREBBIA, C.A. - Further engineering applications of BEASY. Berlin, Springer-Verlag, 1983. P. 857-880. (Boundary Elements).
- 47) PERUCCHIO, R. & INGRAFFEA, A.R. - An integrated boundary element analysis system with interactive computer graphics for three-dimensional linear-elastic fracture mechanics. Computers & Structures, 20 (1-3): 157-171, 1985.
- 48) MACKERLE, J. & ANDERSSON, T. - Boundary element software in engineering. Advances in Engineering Software, 6 (2): 66-102, 1983.
- 49) CHAUDONNET, M. - Sur la discontinuité du vecteur contrainte dans les calculs de structure par la méthode des équations intégrales. C.R. Acad. Sc. Paris, 284 série A: 463-466, 1977.

- 50) MOREIRA, M.S.S. - Método dos elementos de contorno para elasticidade linear bidimensional, Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1983. 179 p. (Tese de Mestrado).
- 51) CROTTY, J.M. - A block equation solver for large unsymmetric matrices arising in the boundary integral equation method. International Journal Numerical Methods in Engineering, 18: 997-1017, 1982.
- 52) TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. - Theory of elasticity. Tokio, McGraw-Hill Kogakusha, 1970. 567 p.
- 53) FUNG, Y.C. - Foundations of solid mechanics. Englewood Cliffs N.J., Prentice-Hall, 1965. 525 p. (Prentice-Hall International series in Dynamics).
- 54) BETTI, E. - Teoria dell elasticita. Il Nuovo Cimento, 7-10, 1872.
- 55) SOMIGLIANA, C. - Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo. Il Nuovo Cimento, 17-19, 1886.
- 56) WEBSTER, A.G. - Partial differential equations of mathematical physics. New York, Dover Publications, 1955. 440 p.
- 57) CRUSE, T.A. - Mathematical foundations of the boundary integral equation method in solid mechanics. Bolling AFB, Air Force Office of Scientific Research, USA, 1977. 116 p. (Report no. AFOSR - IR - 77-1002).
- 58) BREBBIA, C.A. - The boundary element method for engineers, London, Pentech Press, 1978. 189 p.
- 59) LACHAT, J.C. & WATSON, J.O. - Progress in the use of boundary integral equations, illustrated by examples. Computer Methods Applied Mechanical Engineering, 10: 273-289, 1977.
- 60) STROUD, A.H. & SECREST, D. - Gaussian quadrature formulas, New York, Prentice-Hall, 1966.

- 61) BOLTEUS, L. & TULLBERG, O. - BEMSTAT - a new type of boundary element program for two-dimensional elasticity problems. Berlin, Springer-Verlag, 1981. P. 518-537. (Boundary Element Methods).
- 62) PATTERSON, C. & SHEIK, M.A. - Non-conforming boundary elements for stress analysis. Berlin, Springer-Verlag, 1981. P. 137-152. (Boundary Element Methods).
- 63) ROARK, R.J. & YOUNG, W. - Formulas for stress and strain. Tokio, McGraw-Hill, 1975.
- 64) GIL, J.C. & VENTURINI, W.S. - Boundary element technique for the analysis of tension discontinuity problems. Berlin, Springer-Verlag, 1985. P. 143-150. (BETECH - Boundary Element Technology Conference).
- 65) SEABRA PEREIRA, M.F.; MOTA SOARES, C.A. & OLIVEIRA FARRIA, L.M. - A comparative study of several boundary elements in elasticity. Berlin, Springer-Verlag, 1981. P. 123-136. (Boundary Element Methods).