

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**ANÁLISE DE NÚCLEOS ESTRUTURAIS DE
EDIFÍCIOS SUJEITOS À TORÇÃO**

ENG. ARMANDO BRASIL ROCHA

**ANÁLISE DE NÚCLEOS ESTRUTURAIS DE
EDIFÍCIOS SUJEITOS À TORÇÃO**

ENG. ARMANDO BRASIL ROCHA

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Orientador

Prof. Dr. Eddie Mancini

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Eddie Mancini - (EESC-USP)

Prof. Dr. Walter Abrahão Nimir - (EESC-USP)

Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli - (EPUSP)

Suplentes:

Profª Drª Helena M.C. Carmo Antunes - (EESC-USP)

Prof. Dr. João Cyro André (EPUSP)

À Renata e
aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Sou grato a todos, que direta ou indiretamente, co laboraram para a execução deste trabalho. No entanto devido a uma participação mais direta ou especialmente grato:

ao Prof. Dr. Eddie Mancini, meu orientador,

ao Sr. Rui Roberto Casale, pela cuidadosa datilografia do original.

à Sra. Sylvia Helena Morette Villani, pelo cuidadoso trabalho na confecção dos desenhos.

aos amigos Libânio e Tânia e aos meus familiares pelos incentivos dados em todos os momentos.

RESUMO

O presente trabalho estuda, utilizando a técnica do meio contínuo, a determinação dos esforços e deslocamentos, em núcleos estruturais de edifícios altos sujeitos à torção.

Apresentam-se três processos, sendo que todos utilizam a Técnica do Meio Contínuo. O primeiro é baseado na hipótese de que as paredes se comportam como vigas de paredes delgadas segundo a Teoria de Flexo-Torção. O segundo também baseado na mesma hipótese, considera ainda a deformação das paredes do núcleo devido à força cortante. O terceiro combina a teoria de flexo-torção e a análise pelo Método da Energia.

Nos dois primeiros processos, a equação governante do problema é obtida pela consideração do equilíbrio entre os momentos internos e os aplicados. A rotação da estrutura é a variável incógnita do problema.

No terceiro processo é obtida uma equação diferencial na força cortante nos lintéis, minimizando a energia potencial complementar da estrutura. Os deslocamentos são obtidos pela aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

ABSTRACT

This work is concerned with the analysis of Core Wall Structures subjected to Applied Torque. The continuous medium technique is used for the analysis.

Three analysis methods are presented, based on continuous idealization. The first one analyses the structure assuming walls to behave like thin-walled beams, according to Vlassov Theory. The second one, is based on the same hypothesis, however the shearing strain and deformation of the channel walls are taken into account. The third one combines the warping-torsion theory of thin-walled beams of open cross section and the energy method of structural analysis.

S U M Á R I O

I	- Introdução	I-1
II	- Análise de Núcleos Estruturais sujeitos a Torção segundo TSO e BISWAS	II-1
III	- Análise de Núcleos Estruturais sujeitos a Torção segundo RUTENBERG e TSO	III-1
IV	- Análise de Núcleos Estruturais sujeitos a Torção segundo ROSMAN	IV-1
V	- Exemplos Numéricos e Conclusão	V-1
Apêndice A	- Resumo da Teoria de Flexo-Torção	A-1
Apêndice B	- Solução para Secção Fechada dada por ODEN	B-1
Bibliografia	BI-1

I - INTRODUÇÃO

Em muitos edifícios altos, a resistência lateral da estrutura é fornecida, total ou parcialmente, por um núcleo estrutural, onde internamente podem estar localizadas escadas, elevadores e outras áreas comunitárias do edifício.

Em vários desses edifícios, o núcleo estrutural consiste em dois pilares de concreto, unidos por lintéis ao nível dos andares, como ilustra a figura (I.1).

BARBOSA (1) apresenta em seu trabalho, o estudo destas estruturas, através dos processos discreto (utilizando a análise matricial) e contínuo (utilizando a Técnica do Meio Contínuo). Em seu trabalho a solução do problema é obtida através da utilização de computadores devido às grandes dimensões dos cálculos envolvidos.

A estrutura a ser analisada neste trabalho, é apresentada na figura (II.1). Devido à sua natureza simétrica, os estudos de seu comportamento, quando sujeita às cargas laterais nas direções X e Y, e à momento em relação ao eixo Z, podem ser feitos separadamente.

Este trabalho visa estudar o comportamento do núcleo estrutural sujeito à momentos torçores aplicados, que aparecem quando o núcleo não está localizado no centro do edifício ou quando existe uma outra assimetria na estrutura.

Para o seu desenvolvimento, é usada a Técnica do Meio Contínuo, que consiste basicamente em substituir-se o sistema discreto de conexões horizontais ao nível dos andares, formado pelas lajes e vigas (lintéis), por um meio contínuo, com propriedades de rigidez equivalentes, uniformemente distribuído ao longo da altura do edifício.

As lajes são assimiladas a diafragmas horizontais com rigidez infinita no seu plano e desprezível transversalmente. Desta maneira, elas só podem transmitir esforços horizontais aos elementos verticais e não impedem os seus empenamentos.

Os lintéis são considerados como vigas engastadas em suas extremidades, deformáveis ao momento fletor e à força cortante.

A estrutura do núcleo é suposta ser engastada em sua base em uma fundação rígida.

No Capítulo II, apresenta-se o estudo do núcleo estrutural baseado em TSO e BISWAS (2), supondo que os pilares comportam-se como vigas de secção aberta de paredes finas. Em outras palavras, supõe-se que a distribuição da tensão axial de empenamento é dada pela Teoria de VLASOV (3) para vigas de secção aberta de paredes finas. A deformação dos pilares do núcleo devido à força cortante não é considerada nesta análise

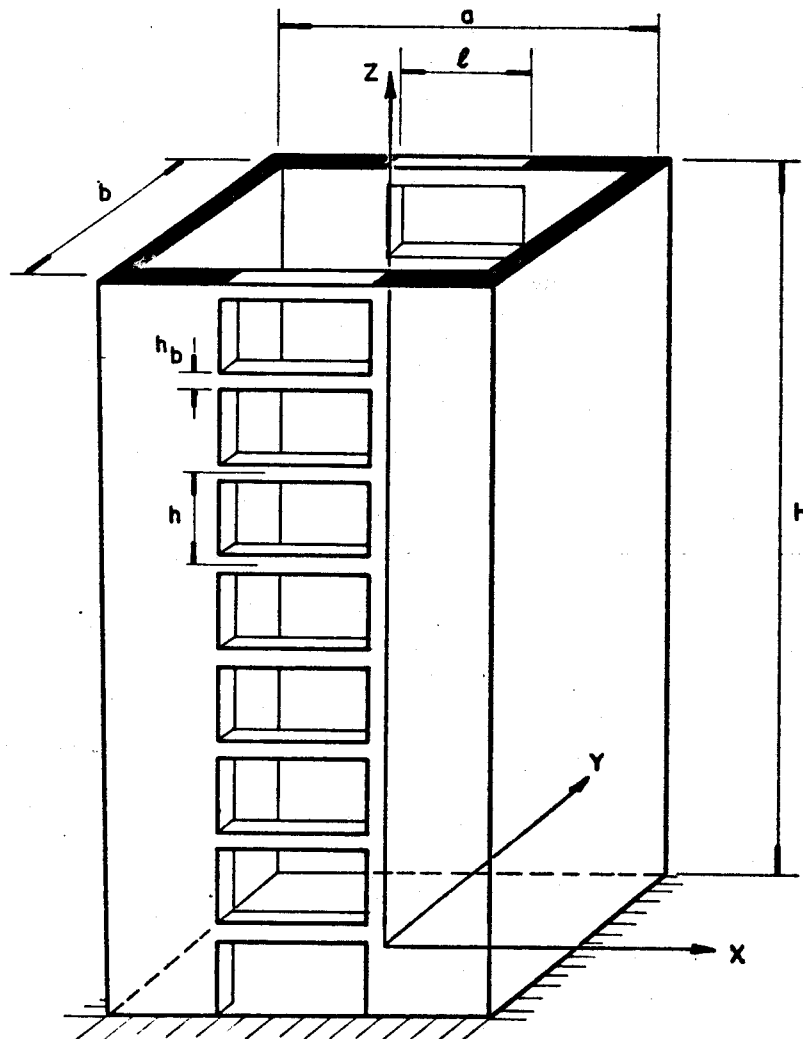


FIG. I.1 - NÚCLEO ESTRUTURAL SIMÉTRICO.

A rotação da secção horizontal do núcleo é a variável incógnita do problema e a equação governante é obtida pelo equilíbrio entre os momentos internos e os aplicados.

No Capítulo III é apresentada a mesma análise, agora baseada em RUTENBERG e TSO (4), onde as deformações das paredes do núcleo devido à força cortante são levadas em consideração. Devido à inclusão do efeito da força cortante, esta análise descreve o comportamento do núcleo mais acuradamente que a apresentada no Capítulo anterior e ainda fornece a solução da secção fechada, dada por ODEN (5), quando os comprimentos dos lintéis tendem à zero.

No Capítulo IV, a mesma estrutura é estudada, agora baseada em ROSMAN (6), que soluciona o problema combinando a Teoria de VLASOV (3) com sua própria teoria, baseada no Método da Energia, para o estudo do comportamento de núcleos estruturais.

Ao final de cada Capítulo, são mostrados os resultados de um exemplo e a marcha de cálculo utilizada. Esses resultados são comparados aos encontrados por BARBOSA (1) em seu trabalho, onde foi utilizada a análise matricial.

No Capítulo V é feita a comparação entre os resultados encontrados utilizando as teorias de TSO e BISWAS (2), RUTENBERG e TSO (4) e ROSMAN (6).

II - ANÁLISE DE NÚCLEOS ESTRUTURAIS SUJEITOS À TORÇÃO SE GUNDO TSO E BISWAS (2)

Tratar-se-á neste Capítulo, do estudo de núcleos estruturais de edifícios, núcleos estes, que serão simétricos, constituídos por dois pilares unidos por lintéis ao nível das lajes dos andares, como mostrado nas figuras (I.1) e (II.1).

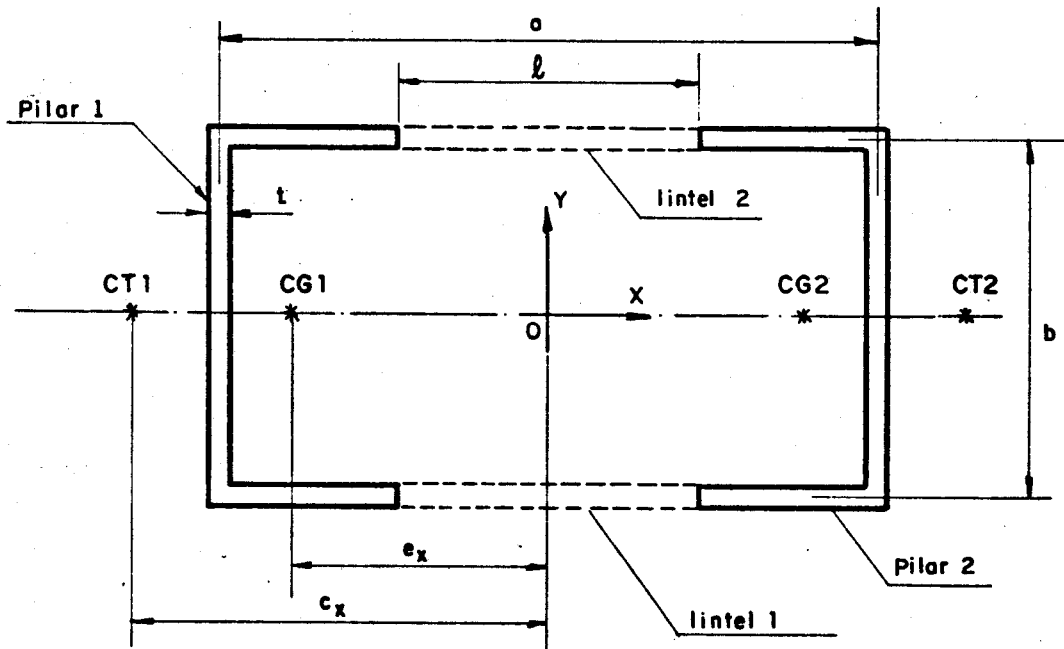


FIG. II.1 - PLANTA DO NÚCLEO ESTRUTURAL

O ponto O é o centro geométrico da estrutura, e os eixos coordenados OX e OY , são eixos paralelo e perpendicular aos lintéis, respectivamente. OZ é o eixo vertical ao longo da altura do edifício, orientado da base para o topo, como mostrado na figura (I.1).

Serão consideradas, para o referido estudo, as seguintes hipóteses básicas:

- 1) A laje tem o comportamento de um diafragma. Com isto, todo o conjunto estrutural funciona como um corpo rígido na direção horizontal;

2) Os pilares comportam-se como vigas de secção aberta de paredes finas. Portanto, a Teoria de Vlasov (3), para vigas de secção aberta de paredes finas, é válida para os pilares;

Será utilizada a Técnica do Meio Contínuo, que consiste em substituir-se o sistema discreto de conexões horizontais ao nível dos andares, por um meio contínuo de rigidez equivalente.

II.1 - Determinação dos Momentos Internos

Sejam CG_j e CT_j , o centróide e o centro de torção do pilar j ($j=1,2$), respectivamente.

Sejam os deslocamentos horizontais do ponto O nas direções X e Y , chamados de ϵ e η , respectivamente e a rotação da secção de ϕ .

O deslocamento horizontal ϵ será positivo quando concordar com o sentido positivo de OX e da mesma forma, η será positivo quando concordar com o sentido positivo de OY .

A rotação da secção, ϕ , será positiva, quando estiver no sentido anti-horário para um observador olhando no sentido positivo de OZ .

Devido ao carregamento na estrutura ser constituído somente por momento torçor e à simetria da estrutura, sabe-se que:

$$\epsilon = \eta = 0$$

Devido ao comportamento da laje, admitido na primeira hipótese, os deslocamentos e rotação do pilar j em torno do seu centro de torção, podem ser referidos aos deslocamentos em O , por:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi$$

(II.1-1)

$$\eta_1 = + c_x \phi \quad (\text{II.1-2})$$

$$\eta_2 = - c_x \phi \quad (\text{II.1-3})$$

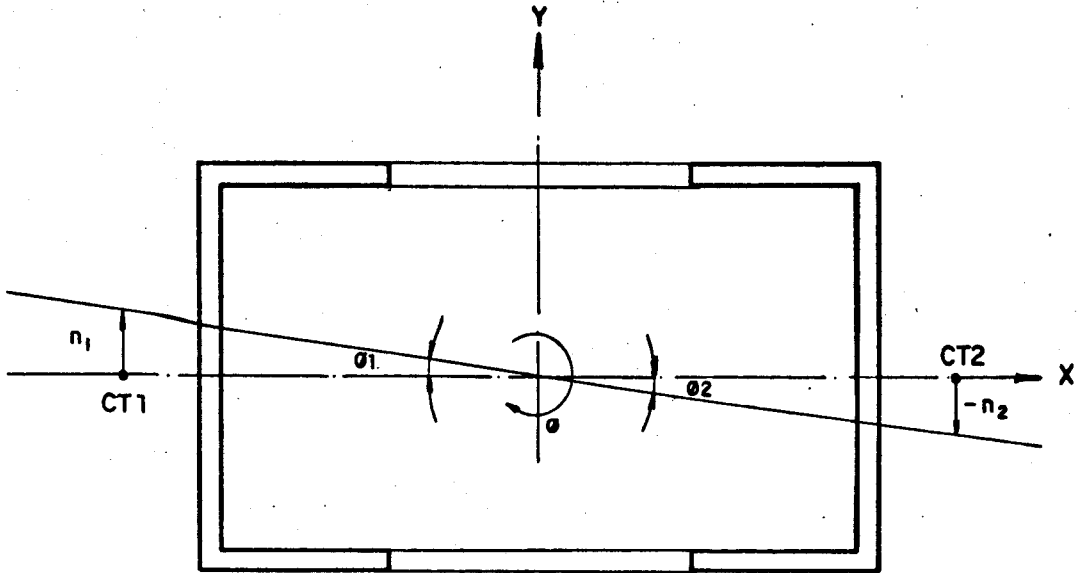
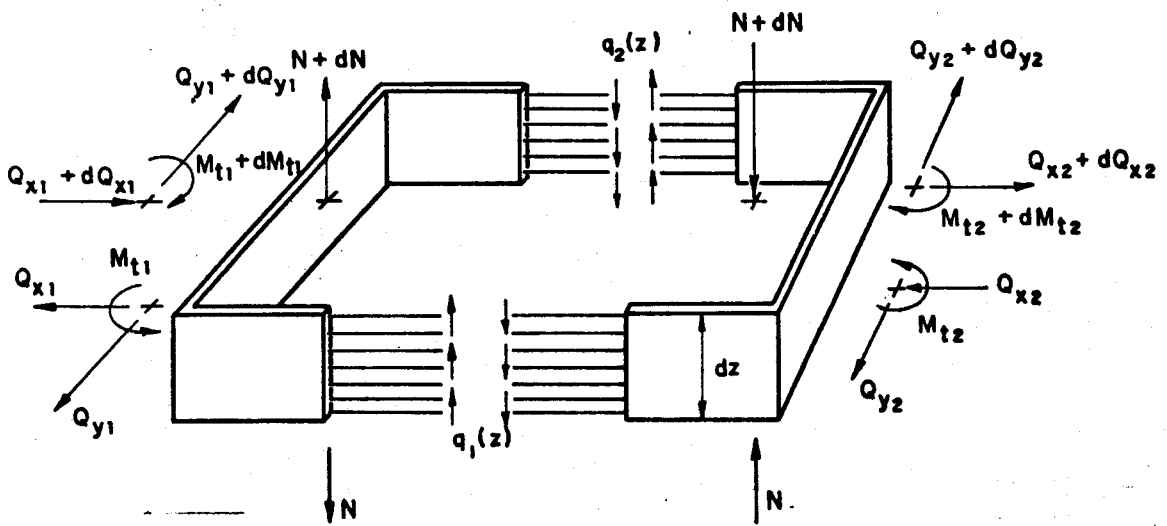


FIG. II.2- DESLOCAMENTO DOS PILARES.

Sejam feitos cortes imaginários ao longo dos pontos médios das duas fileiras do meio contínuo. Como os pontos médios do meio contínuo são pontos de inflexão, somente forças cortantes q_1 e q_2 aparecem nesses cortes, conforme ilustrado na figura (II.3)



O momento interno total, T_1 , oferecido pela estrutura será composto por duas parcelas, uma referente ao momento interno gerado pelos esforços internos nos pilares constituintes do núcleo, e a outra referente aos esforços internos que aparecem nos pilares devido à presença das forças cortantes q_1 e q_2 atuando ao longo dos pontos médios do meio contínuo.

Calculando-se o momento interno gerado pelos esforços internos nos pilares, T_1 , em torno de O, obtém-se

$$T_1 = M_{t_1} + M_{t_2} + Q_{y_1} c_x - Q_{y_2} c_x \quad (\text{II.1-4})$$

onde

M_{t_1} e M_{t_2} - momentos torçores totais nos pilares 1 e 2 respectivamente.

Q_{y_1} e Q_{y_2} - esforços cortantes nos pilares 1 e 2, respectivamente.

O equilíbrio interno do pilar 1, baseado na figura (II.4-a), fornece:

$$M_{f_1} + dM_{f_1} - M_{f_1} + Q_{y_1} dz + (q_1 + q_2) dz \frac{b}{2} = 0$$

ou

$$Q_{y_1} = - \frac{dM_{f_1}}{dz} - (q_1 + q_2) \frac{b}{2} \quad (\text{II.1-5})$$

O momento fletor do pilar 1, também pode ser escrito como:

$$M_{f_1} = E_1 J_{x_1} \eta_1'' \quad (\text{II.1-6})$$

onde

E_1 - módulo de elasticidade longitudinal referente ao pilar 1.

J_{X_1} - momento de inércia a flexão do pilar 1, em relação ao eixo X.

η_1'' - segunda derivada do deslocamento η_1

Substituindo a expressão (II.1-6) em (II.1-5):

$$Q_{y_1} = - E_1 J_{X_1} \eta_1'' - (q_1 + q_2) \frac{b}{2} \quad (II.1-7)$$

Usando a expressão (II.1-2) em (II.1-7), vem:

$$Q_{y_1} = - E_1 J_{X_1} c_x \phi'' - (q_1 + q_2) \frac{b}{2} \quad (II.1-8)$$

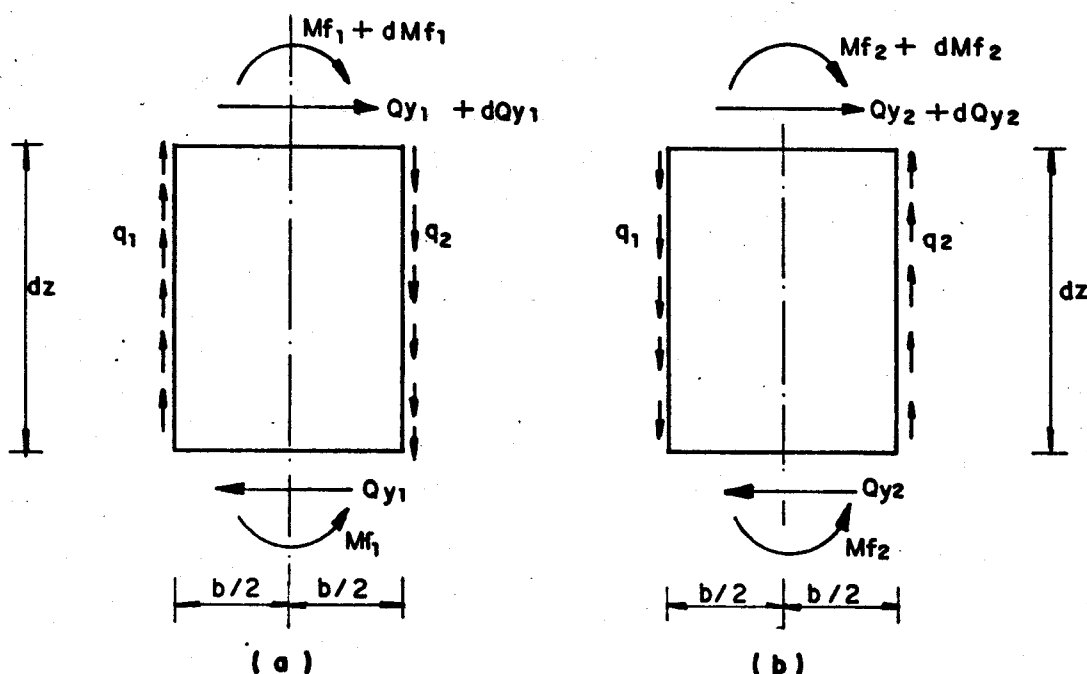


FIG. II.4 - EQUILÍBRIO INTERNO NOS PILARES 1 E 2

A segunda parcela da expressão (II.1-8) representa o esforço cortante Q_{y_1} devido as forças q_1 e q_2 agindo nos pontos médios das duas fileiras do meio contínuo.

Para o pilar 2, utilizando o mesmo raciocínio, chega-se a:

$$Q_{y_2} = E_2 J_{x_2} c_x \phi''' + (q_1 + q_2) \frac{b}{2} \quad (\text{II.1-9})$$

onde

E_2 - módulo de elasticidade longitudinal referente ao material do pilar 2.

J_{x_2} - momento de inércia à flexão do pilar 2, em relação do eixo X.

Observar novamente que na expressão (II.1-9), o esforço cortante Q_{y_2} é a soma de duas parcelas, uma referente ao momento interno do pilar 2 e a outra devido às forças q_1 e q_2 .

Considerando que os dois pilares são constituídos do mesmo material, tem-se

$$E_p = E_1 = E_2$$

Considerando a simetria da estrutura, também pode-se escrever que

$$J_x = J_{x_1} = J_{x_2}$$

Da Teoria de Flexo-torção, exposta no Apêndice A, tem-se que o momento torçor, M_{t_j} ($j=1,2$), é a soma do momento de flexo-torção e o momento de torção livre, portanto

$$M_{t_1} = - E_p J_{\omega_1} \phi_1''' + G_p J_{t_1} \phi_1' \quad (\text{II.1-12})$$

e

$$M_{t_2} = - E_p J_{\omega_2} \phi_2''' + G_p J_{t_2} \phi_2' \quad (\text{II.1-13})$$

onde

J_{ω_1} e J_{ω_2} - momentos setoriais de inércia dos pilares 1 e 2, respectivamente, calculados em relação aos seus centros de torção.

G_p - módulo de elasticidade transversal referente ao material dos pilares.

J_{t_1} e J_{t_2} - momentos de inércia à torção, dos pilares 1 e 2, respectivamente.

Devido à simetria da secção do núcleo, tem-se

$$J_{\omega} = J_{\omega_1} = J_{\omega_2} \quad (\text{II.1-14})$$

e

$$J_t = J_{t_1} = J_{t_2} \quad (\text{II.1-15})$$

Substituindo na expressão (II.1-4) as expressões (II.1-8 à 16), tem-se

$$T_1 = - 2 E_p J_{\omega} \phi''' + 2 G_p J_t \phi' - 2 E_p J_x \frac{c^2}{x} \phi''' + (q_1 + q_2) b.c_x \quad (\text{II.1-16})$$

Da outra parcela do momento interno total, aquela referente ao momento gerado pelos esforços internos que aparecem nos pilares devido à presença das forças cortantes q_1 e q_2 , falta apenas considerar o efeito do Bimomento que elas produzem.

A figura II.5 apresenta o diagrama de área setorial, ω , para cada pilar isolado, com o polo em seu respectivo centro de torção.

Para o pilar 1, tem-se:

$$\omega = \omega_1 = -\omega_2 = -b \frac{c_x}{2} + \frac{ab}{2} \quad (\text{II.1-17})$$

Para o pilar 2, tem-se:

$$\omega = \omega'_2 = -\omega'_1 = -b \frac{c_x}{2} + \frac{ab}{2} \quad (\text{II.1-18})$$

onde ω_1 e ω_2 são as áreas setoriais de inércia da secção transversal de cada pilar, nos pontos 1 e 2, respectivamente, pontos estes de aplicação das forças cortantes q_1 e q_2 .

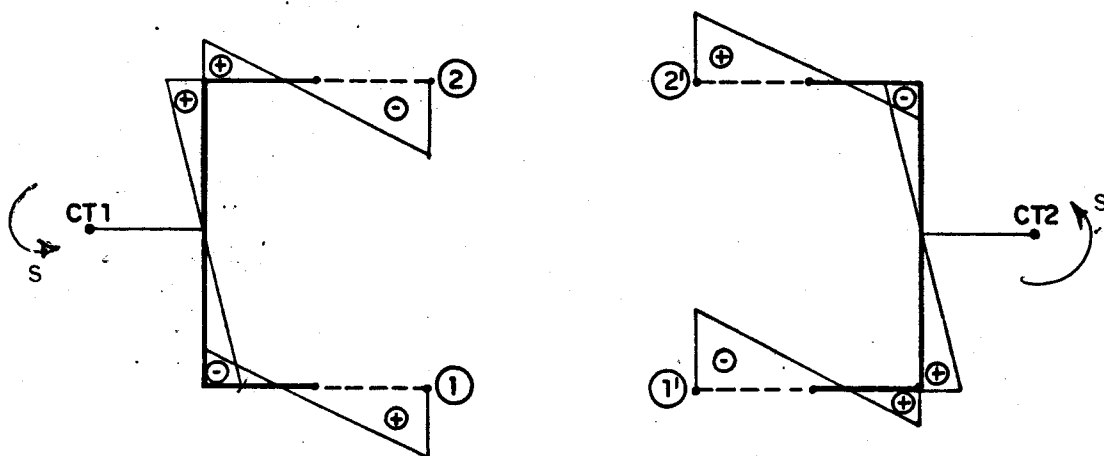


FIG. II.5 - DIAGRAMA DE ÁREA SETORIAL ω

Da Teoria de Flexo-torção, a variação do Bimomento no pilar 1, na altura dz , devido a aplicação das forças cortantes q_1 e q_2 , é:

$$dB_1 = q_1 dz \omega_1 - q_2 dz \omega_2 \quad (\text{II.1-19})$$

Usando em (II.1-19), as expressões dadas em (II.1-17), tem-se

$$\frac{dB_1}{dz} = (q_1 + q_2)\omega \quad (\text{II.1-20})$$

Também da Teoria de Flexo-torção, sabe-se que

$$M_{ft} = - \frac{dB}{dz} \quad (\text{II.1-21})$$

onde M_{ft} é o momento de flexo-torção.

Portanto, de (II.1-20) usando (II.1-21) tem-se

$$M_{ft_1} = - (q_1 + q_2)\omega \quad (\text{II.1-22})$$

onde M_{ft_1} é o momento de flexo-torção no pilar 1 resultante da aplicação ao longo dos cortes no meio contínuo, das forças cortantes q_1 e q_2 .

Para o pilar 2, tem-se, usando o mesmo raciocínio, que

$$M_{ft_2} = - (q_1 + q_2)\omega \quad (\text{II.1-23})$$

Portanto, a parcela T_2 , do Momento Interno Total será

$$T_2 = M_{ft_1} + M_{ft_2} \quad (\text{II.1-24})$$

Usando as equações (II.1-22) e (II.1-23), vem

$$T_2 = - 2 \omega (q_1 + q_2)$$

O Momento Interno Total será a soma das duas parcelas T_1 e T_2 , portanto

$$T_i = -2E J_p^* \phi''' + 2G_p J_t \phi' - \Omega (q_1 + q_2) \quad (\text{II.1-25})$$

onde

$$J_p^* = J_\omega + J_x c_x^2 \quad (\text{II.1-26})$$

e

$$\Omega = (2\omega + c_x b) = ab \quad (\text{II.1-27})$$

II.2 - Compatibilidade de Deslocamentos

A fim de se obter mais duas equações para as variáveis q_1 e q_2 , será feita a compatibilidade de deslocamentos no corte 1 entre os pilares 1 e 2 e também a compatibilidade no corte 2 entre os mesmos pilares.

O deslocamento do pilar 1, no corte 1, será:

$$\delta_1 = \eta_1' \frac{b}{2} + \phi_1' \omega_1 + \frac{q_1}{2 E \gamma} \quad (\text{II.2-1})$$

Como se sabe, de antemão, pela simetria do núcleo e para o carregamento de torção, que $q_1 = q_2$, omite-se na expressão (II.2-1) o efeito da deformação por força normal do pilar 1, uma vez que esta é nula.

Consideração análoga vale para a expressão (II.2-6) que dá o deslocamento do mesmo ponto de corte, considerando agora pertencente ao pilar 2.

O primeiro termo da expressão (II.2-1), é referente ao deslocamento vertical do pilar 1, no corte 1, devido à flexão do pilar.

O segundo termo, dessa expressão, é referente ao empenamento da secção do pilar 1, no corte 1, devido à rotação da secção de ϕ_1 .

O último termo, considera o deslocamento no corte 1, no pilar 1, devido à flexão do meio contínuo, causada pela força cortante, q_1 .

A seguir será demonstrada a determinação do último termo da expressão (II.2-1).

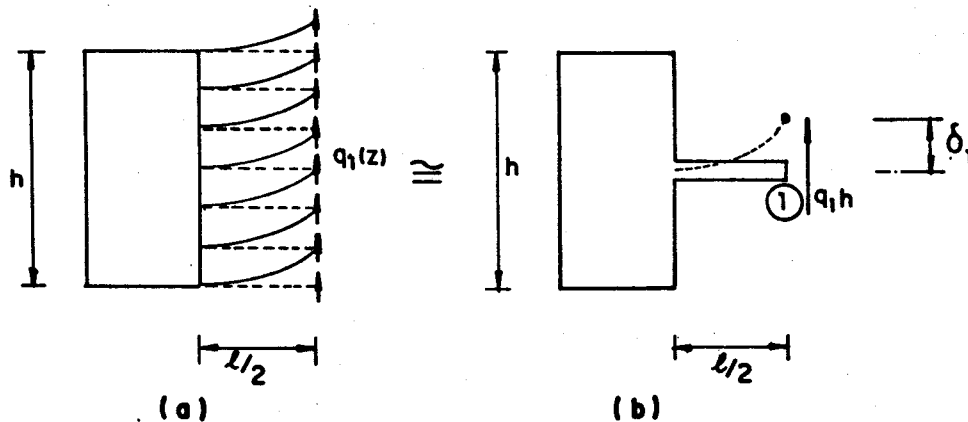


FIG.II.6 . EQUIVALÊNCIA ENTRE A RIGIDEZ DO MEIO CONTÍNUO E A DO LINTEL

A flexão do meio contínuo está esquematizada na figura (II.6-a) e na figura (II.6-b) está indicada a flexão do lintel seccionado em seu ponto médio, com uma força aplicada em sua extremidade livre de (q_1h).

O deslocamento vertical da extremidade livre do lintel, conforme mostrado na figura (II.6-b), é :

$$\delta_1 = \frac{q_1 \cdot h}{3E_b J_b} \left(\frac{l}{2}\right)^3 + k \frac{q_1 h}{G_b S_b} \left(\frac{l}{2}\right) \quad (\text{II.2-2})$$

onde

E_b - módulo de elasticidade longitudinal referente ao material do lintel.

G_b - módulo de elasticidade transversal referente ao material do lintel.

J_b - momento de inércia à flexão do lintel.

S_b - área da secção transversal do lintel.

k - constante de forma da secção transversal do lintel (igual a zero se não for levada em conta a deformação devido ao esforço cortante no lintel e igual a 1,2 para secções retangulares quando o deslocamento devido ao esforço cortante no lintel for considerado).

A expressão (II.2-2) também pode ser escrita como:

$$\delta_1 = \frac{q_1}{2 E_b \gamma} \quad (\text{II.2-3})$$

onde

$$\gamma = \frac{12 J_b}{\ell^3 h \left[1 + \frac{k \cdot 12 \cdot E_b \cdot J_b}{\ell^2 G_b S_b} \right]} \quad (\text{II.2-4})$$

Usando em (II.2-1), as expressões (II.1-1), (II.1-2) e (II.1-17), tem-se

$$\delta_1 = c_x \frac{b}{2} \phi' + \omega \phi' + \frac{q_1}{2 E_b \gamma} \quad (\text{II.2-5})$$

O deslocamento do pilar 2, no corte 1, usando o mesmo raciocínio, será:

$$\delta_2 = - c_x \frac{b}{2} \phi' - \omega \phi' - \frac{q_1}{2 E_b \gamma} \quad (\text{II.2-6})$$

A compatibilidade entre os deslocamentos dados pelas expressões (II.2-5) e (II.2-6) requer que eles sejam iguais ou

$$c_x b \phi' + 2 \omega \phi' + \frac{q_1}{E_b \gamma} = 0$$

ou

$$q_1 = - (2\omega + c_x b) \phi' E_b \gamma \quad (\text{II.2-7})$$

Repetindo-se todo o raciocínio, agora para os deslocamentos dos pilares 1 e 2, no corte 2, tem-se

$$q_2 = - (2\omega + c_x b) \phi' E_b \gamma \quad (\text{II.2-8})$$

Comparando-se as expressões (II.2-7) e (II.2-8) conclui-se que q_1 é igual a q_2 , o que já era esperado devido à simetria da estrutura.

A soma de q_1 e q_2 será:

$$(q_1 + q_2) = - 2 (2\omega + c_x b) \phi' E_b \gamma$$

ou usando a expressão (II.1-27)

$$(q_1 + q_2) = - 2 \Omega \phi' E_b \gamma \quad (\text{II.2-9})$$

Finalmente, o Momento Interno Total, será:

$$T_i = -2E_p J_\omega^* \phi''' + 2G_p J_t \phi' + 2E_b \gamma \Omega^2 \phi' \quad (\text{II.2-10})$$

II.3 - Equação Diferencial Resultante

Igualando-se o Momento Interno Total com o Momento Torçor Aplicado, T_e , tem-se:

$$T_e = -2E_p J_\omega^* \phi''' + 2G_p J_t \phi' + 2E_b \gamma \Omega^2 \phi' \quad (\text{II.3-1})$$

Chamando de

$$\lambda^2 = \frac{E_b \gamma \Omega^2 + G_p J_t}{E_p J_\omega^*} \quad (\text{II.3-2})$$

e

$$\beta = \frac{1}{2E_p J_\omega^*} \quad (\text{II.3-3})$$

tem-se

$$-\beta T_e = \phi''' - \lambda^2 \phi' \quad (\text{II.3-4})$$

O problema da análise à torção dos núcleos sujeitos a momentos torçores aplicados está reduzido à solução da equação diferencial dada em (II.3-4).

As condições de contorno são:

a) na base, a rotação é nula, portanto:

$$\phi(0) = 0$$

b) na base, o empenamento também é nulo, admitindo-se uma fundação rígida, portanto:

$$\phi'(0) = 0$$

c) no topo do edifício, não existem cargas axiais aplicadas, portanto o bimomento é nulo ou

$$\phi''(H) = 0$$

Para uma carga torçora constituída por um momento uniformemente distribuído ao longo de toda a altura do edifício, m , a solução será:

$$\phi(z) = \frac{-\beta}{\lambda^3} mH \left\{ -\sinh(\lambda z) + \left[\tanh(\lambda H) + \frac{\operatorname{sech}(\lambda H)}{\lambda H} \right] \left[\cosh(\lambda z) - 1 \right] + \lambda z - \frac{\lambda z^2}{2H} \right\} \quad (\text{II.3-5})$$

Para uma carga torçora constituída por um momento torçor concentrado e aplicado no topo do edifício, M , a solução será:

$$\phi(z) = \frac{\beta}{\lambda^3} M \left\{ -\sinh(\lambda z) + \tanh(\lambda H) \left[\cosh(\lambda z) - 1 \right] + \lambda z \right\} \quad (\text{II.3-6})$$

II.4 - Exemplo Numérico

A figura (II.7) apresenta a planta e elevação da estrutura de um edifício de vinte andares, com 10,5 ft de pé direito, com dois eixos de simetria, constituída de duas paredes de secção aberta uniforme ao longo de toda a altura. As espessuras das paredes que compõem a estrutura são todas iguais a 2,0 ft e os dois lintéis que contraventam as paredes de secção aberta, ao nível dos andares, têm a mesma espessura das paredes, às quais estão ligadas, e 2,5 ft de altura

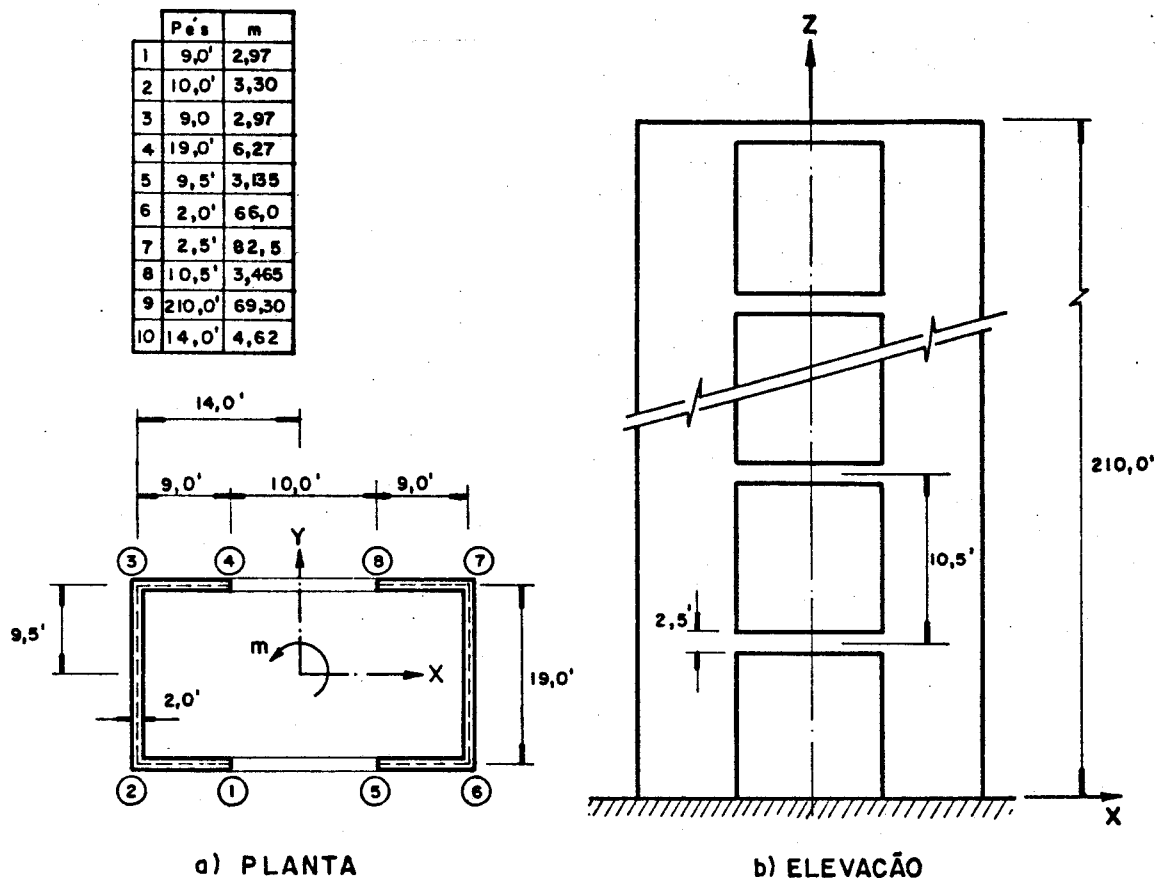


FIG. II. 7a-NÚCLEO COM DUAS PAREDES DE SECÇÃO ABERTA.

Para o módulo de elasticidade longitudinal foi adotado o valor de $4,32 \times 10^8$ lb/ft² e, para o transversal o valor de $1,728 \times 10^8$ lb/ft².

O momento torçor uniformemente distribuído e aplicado ao longo da altura do edifício será de 6400 lb.ft/ft (100 vezes o utilizado por BARBOSA (1) no mesmo exemplo).

II.4.1 - Determinação da posição do centro de torção de um pilar isolado.

Da Teoria de Flexo-torção, exposta no Apêndice A, a posição do centro de torção para uma secção aberta de paredes finas, como é o pilar mostrado na figura (II.8) é dada pela expressão (A.3-06) ou

$$x_{CT} - x_p = \frac{1}{J_x} \int_S \omega_p \cdot y \, dS$$

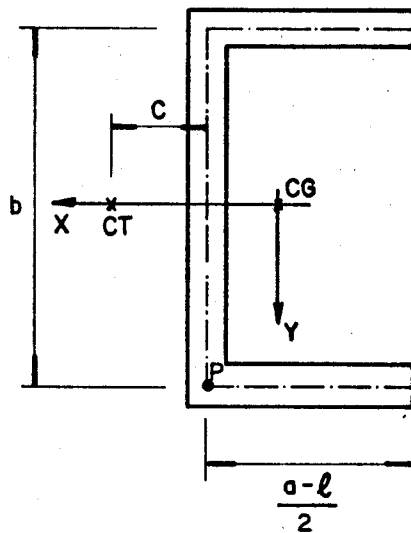


FIG. II. 7b-PILAR ISOLADO

onde

x_{CT} - posição em relação ao centro de gravidade da secção do centro de torção da secção.

x_p - posição em relação ao centro de gravidade da secção do polo arbitrário P.

J_x - momento de inércia da secção em relação ao eixo x.

ω_p - área setorial da secção com o polo arbitrário P.

A figura (II.8) apresenta o traçado dos diagramas de ω_p e de y, para a secção do pilar em estudo.

Portanto:

$$\int_S \omega_p y dS = \frac{tb^2}{4} \left(\frac{a-l}{2}\right)^2 \quad (\text{II.4-1})$$

O valor de J_x será:

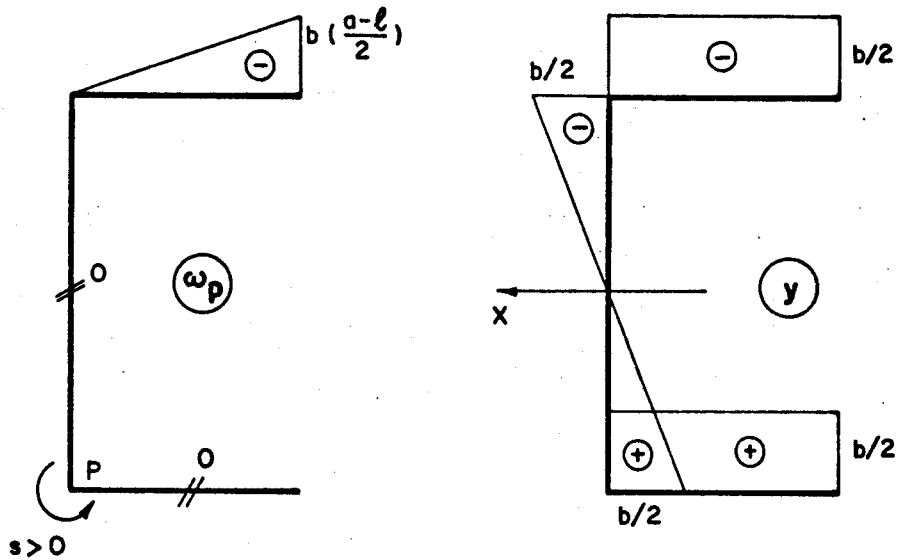


FIG. II.8 - DIAGRAMAS DE ω_p E DE y .

$$J_x = \frac{t}{12} \left[b^3 + 6b^2 \left(\frac{a-l}{2} \right) \right] \quad (\text{II.4-2})$$

Analisando a figura II.7, pode-se notar que

$$x_{CT} - x_p = c$$

E o valor de "c", será, usando as expressões (II.4-1) e (II.4-2):

$$c = \frac{3b^2 \left(\frac{a-l}{2} \right)^2}{b^3 + 6b^2 \left(\frac{a-l}{2} \right)} \quad (\text{II.4-3})$$

Notar que a posição do centro de torção de um pilar isolado, em relação ao centro geométrico da estrutura do núcleo, será:

$$c_x = c + \frac{a}{2} \quad (\text{II.4-4})$$

Para o exemplo, aqui estudado, tem-se

$$J_x = 4392,167 \text{ ft}^4$$

$$c_x = 17,3287 \text{ ft}$$

II.4.2 - Determinação do Momento Setorial de Inércia, J_ω , para um pilar isolado.

Da teoria de Flexo-torção, exposta no Apêndice A, da expressão (A.5-08) tem-se:

$$J_\omega = \int_S \omega^2 dS$$

Para uma secção, com a espessura constante, como no caso do exemplo, tem-se

$$J_\omega = t \int_s \omega^2 ds \quad (\text{II.4-5})$$

A figura (II.9), apresenta o diagrama de área setorial do pilar isolado, com o polo em seu centro de torção.

Tem-se, para as áreas setoriais, de um pilar isolado, os seguintes valores:

$$\omega_1 = -\frac{bc}{2} + \frac{b}{2} \left(\frac{a-l}{2}\right)$$

$$\omega_2 = -\frac{bc}{2}$$

$$\omega_3 = -\omega_2 = \frac{bc}{2}$$

$$\omega_4 = -\omega_1 = \frac{bc}{2} - \frac{b}{2} \left(\frac{a-l}{2}\right)$$

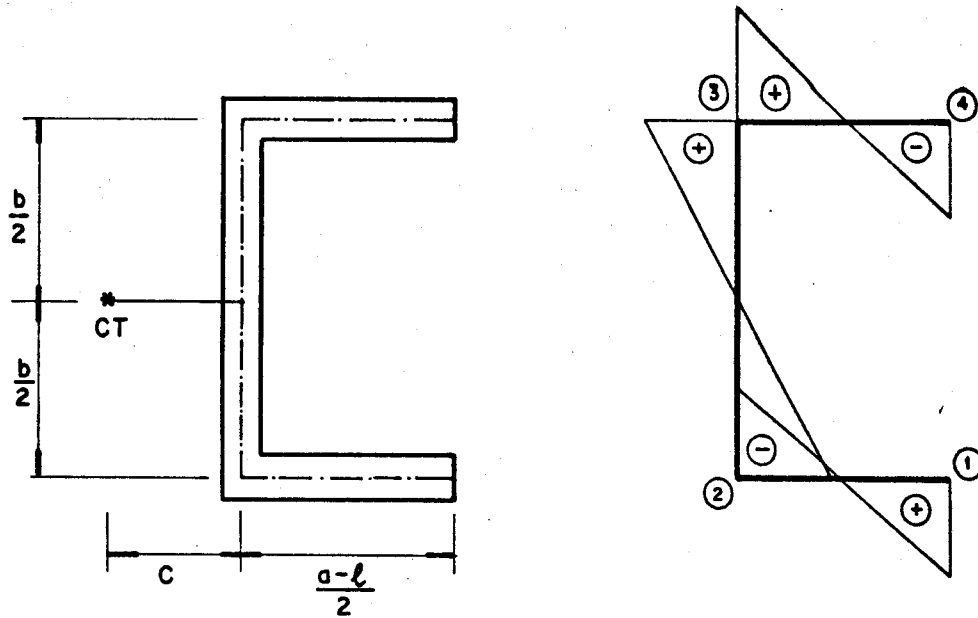


FIG. II.9 - DIAGRAMA DE ω PARA UM PILAR ISOLADO.

Portanto, o valor de J_ω , será:

$$J_\omega = \frac{tb^2}{12} \left[bc^2 + 6c^2 \left(\frac{a-l}{2} \right) - 6c \left(\frac{a-l}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{a-l}{2} \right)^3 \right] \quad (\text{II.4-6})$$

Para o exemplo

$$J_\omega = 39054,76 \text{ ft}^6$$

II.4.3 - Determinação do Momento de Inércia à Torção de um pilar isolado.

Para uma secção aberta, o momento de inércia à torção, é dado por

$$J_t = \frac{1}{3} t^3 \int_s ds \quad (\text{II.4-7})$$

Para o pilar dado na figura (II.9), tem-se

$$J_t = \frac{1}{3} t^3 \left(\frac{a-l}{2} + \frac{a-l}{2} + b \right)$$

ou

$$J_t = \frac{1}{3} t^3 (a-l+b) \quad (\text{II.4-8})$$

Para o exemplo, tem-se:

$$J_t = 98,667 \text{ ft}^4$$

II.4.4 - Determinação do Momento de Inércia à Flexão e da Área da secção transversal dos lintéis.

Para um lintel, de secção retangular de altura h_b e largura t , tem-se:

$$J_b = \frac{t}{12} \cdot h_b^3 \quad (\text{II.4-9})$$

$$S_b = t \cdot h_b \quad (\text{II.4-10})$$

Para o exemplo, tem-se

$$J_b = 2,6042 \text{ ft}^4$$

$$S_b = 5,0 \text{ ft}^2$$

II.4.5 - Determinação das Constantes da Equação dada em (III.3-5)

Adotando-se para k o valor zero, da expressão (II.2-4), tem-se:

$$\gamma = 2,97619 \times 10^{-3}$$

Da expressão (II.1-26), tem-se

$$J_{\omega}^* = 1.357.961,666 \text{ ft}^6$$

Da expressão (II.1-27), tem-se

$$\Omega = + 532 \text{ ft}^2$$

O valor de λ^2 dado pela expressão (II.3-2) será

$$\lambda^2 = 5,51415 \times 10^{-4} \frac{1}{\text{ft}^2}$$

O valor de β dado pela expressão (II.3-3) será

$$\beta = 8,52312 \times 10^{-16} \frac{1}{\text{lb.ft}^4}$$

II.4.6 - Determinação da rotação da secção, ϕ , ao nível de cada andar.

A Tabela II.1 mostra os resultados para a rotação da secção ao nível de cada andar, calculados por BARBOSA(1) utilizando o processo discreto (análise matricial) e os re-

sultados obtidos pela teoria apresentada calculados, primeiro não considerando a deformação dos lintéis devido ao esforço cortante ($k=0$) e segundo, considerando esta deformação ($k=1,2$).

Andar	Rotações [x 10 ⁻⁴ rad]		
	BARBOSA	TSO e BISWAS (k=0)	TSO e BISWAS (k=1,2)
BASE	0,000	0,000	0,000
1	0,018	-0,018	-0,019
2	0,065	-0,065	-0,070
3	0,133	-0,132	-0,144
4	0,213	-0,213	-0,232
5	0,302	-0,301	-0,330
6	0,394	-0,393	-0,433
7	0,487	-0,487	-0,537
8	0,579	-0,579	-0,641
9	0,668	-0,667	-0,742
10	0,753	-0,752	-0,839
11	0,832	-0,832	-0,930
12	0,906	-0,905	-1,015
13	0,974	-0,973	-1,094
14	1,034	-1,034	-1,165
15	1,089	-1,089	-1,230
16	1,137	-1,137	-1,289
17	1,179	-1,181	-1,341
18	1,216	-1,220	-1,388
19	1,249	-1,255	-1,432
20	1,279	-1,288	-1,474

Tabela II.1

A Tabela II.2 mostra os resultados para a força cortante nos pontos médios do meio contínuo, ao nível de cada andar, calculados por BARBOSA (1) utilizando a técnica do meio contínuo e os encontrados utilizando a expressão (II.2-9).

Andar	Força cortante q distribuída nos lintéis [lb/ft]		
	BARBOSA	TSO e BISWAS ($k=0$)	TSO e BISWAS ($k=1,2$)
BASE	0,000	0,000	0,000
1	223,50	223,5	202,5
2	380,54	380,5	347,9
3	486,78	486,8	448,7
4	554,21	554,2	514,9
5	592,03	592,0	553,9
6	607,31	607,3	572,1
7	605,51	605,5	573,9
8	590,82	590,8	563,4
9	566,55	566,5	543,4
10	535,28	535,3	516,4
11	499,12	499,1	484,3
12	459,79	459,8	449,0
13	418,82	418,8	411,9
14	377,60	377,6	374,3
15	337,50	337,5	337,7
16	299,98	299,9	303,4
17	266,69	266,7	273,0
18	239,57	239,6	248,4
19	221,01	221,0	231,6
20	214,03	214,0	225,4

Tabela II.2

Para um carregamento torçor uniformemente distribuído, m , derivando-se em relação a "z" a expressão (II.3-5), obtem-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \phi'(z) = \frac{-\beta m H}{\lambda^3} & \left\{ -\lambda \cosh(\lambda z) + \lambda \sinh(\lambda z) \left[\tanh(\lambda H) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\operatorname{sech}(\lambda H)}{\lambda H} \right] + \lambda - \frac{\lambda z}{H} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.4-11})$$

$$\begin{aligned} \phi''(z) = \frac{-\beta m H}{\lambda^3} & \left\{ -\lambda^2 \sinh(\lambda z) + \lambda^2 \cosh(\lambda z) \left[\tanh(\lambda H) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\operatorname{sech}(\lambda H)}{\lambda H} \right] - \frac{\lambda}{H} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.4-12})$$

$$\begin{aligned} \phi'''(z) = -\beta m H & \left\{ -\cosh(\lambda z) + \sinh(\lambda z) \left[\tanh(\lambda H) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\operatorname{sech}(\lambda H)}{\lambda H} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.4-13})$$

III - ANÁLISE DE NÚCLEOS ESTRUTURAIS SUJEITOS À TORÇÃO SE- GUNDO RUTENBERG E TSO.

Neste Capítulo será apresentada a teoria proposta por RUTENBERG e TSO (4) para o problema em questão.

Esta teoria conserva as mesmas hipóteses básicas admitidas no capítulo anterior, ou seja, que as lajes do edifício funcionam como diafragmas na direção horizontal e que os pilares do núcleo podem ser tratados através da teoria de VLASOV, como vigas de secção aberta de paredes finas.

A diferença básica desta teoria para a do capítulo anterior, é que esta inclui o efeito da força cortante nas paredes do núcleo, na determinação dos deslocamentos.

Assim sendo, a teoria ora apresentada é mais refinada, pois apesar de supor o comportamento dos pilares do núcleo similar ao da viga de secção aberta, ela, levando em conta o efeito da força cortante nos deslocamentos, fornece a solução dada por ODEN (5) para a secção fechada quando os comprimentos dos lintéis tendem a zero.

III.1 - Determinação dos Momentos Internos

Considere uma estrutura de núcleo tendo uma secção uniforme com a altura H , e com uma planta como mostra a figura (III.1).

Aplicando a Técnica do Meio Contínuo, ou seja, substituindo os lintéis ao nível de cada andar, por um meio contínuo unindo os dois pilares do núcleo, com propriedades de rigidez equivalentes e fazendo-se cortes imaginários ao longo dos pontos médios das duas fileiras do meio contínuo, somente forças cortantes, $q(z)$ surgirão como ilustra a figura (III.2).

A distribuição da força cortante, $q(z)$, será igual, mas oposta em sentido ao longo dos dois cortes, como já visto no capítulo anterior.

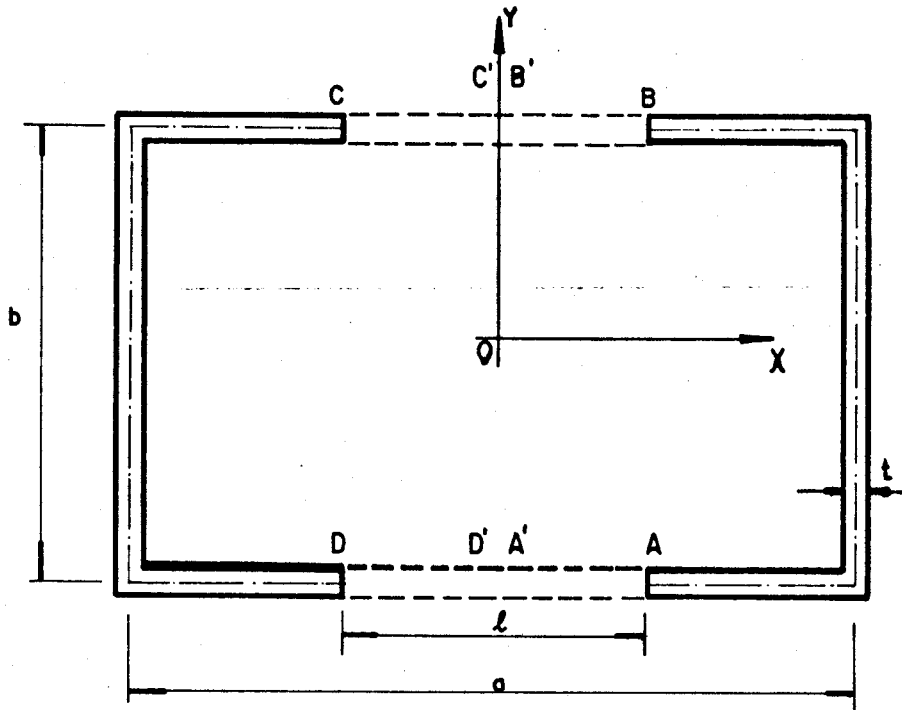
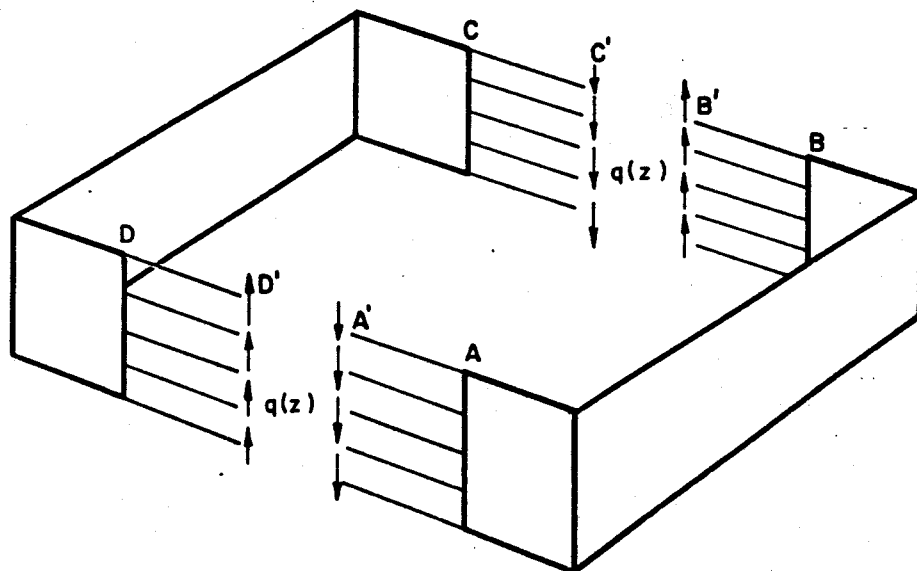


FIG. III.1 - PLANTA DA ESTRUTURA

Devido a simetria da secção é suficiente considerar apenas meia estrutura e estudar os momentos internos gerados nela. Esses momentos internos podem ser determinados isoladamente e depois superpostos.

FIG. III.2 - DISTRIBUIÇÃO DE $q(z)$

Como no Capítulo II, serão duas as parcelas compo-
nentes do Momento Interno Total, T_i . A primeira parcela é
composta pelo Momento Torçor, M_t , que por sua vez é compos-
to pelo Momento de Flexo-torção e pelo Momento Torçor Livre,
conforme exposto no Apêndice A. Portanto para um pilar gené-
rico, tem-se

$$T_1 = - E_p J_\omega^* \phi''' + G_p J_t \phi' \quad (\text{III.1-1})$$

onde J_ω^* é o momento setorial de inércia de um pilar genéri-
co do núcleo com o polo em 0 e as demais grandezas são as
mesmas do Capítulo II.

A outra parcela componente do Momento Interno To-
tal, T_i , será a referente ao momento de flexo-torção devido
ao Bimomento originado pela aplicação das forças cortantes,
 $q(z)$, aplicadas ao longo dos dois cortes (em C' e D' para o
pilar 1 e A' e B' para o pilar 2).

A figura (III.3) mostra o diagrama de área seto-
rial, ω , do núcleo estrutural com o polo em 0.

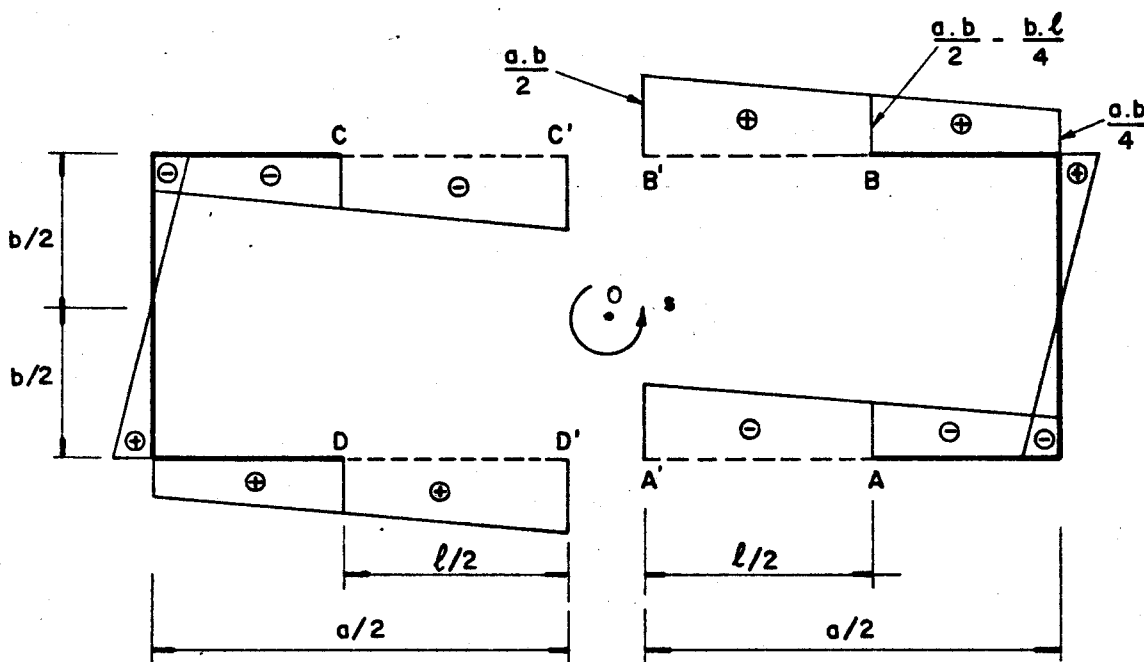


FIG III-3 - DIAGRAMAS DE ÁREA SETORIAL COM POLO 0.

Para um pilar genérico, conforme o exposto no Apêndice A, esse momento será:

$$- M_{ft} = \frac{dB}{dz} = \sum q_i \omega_i \quad (\text{III.1-2})$$

Para o pilar 1, tem-se

$$M_{ft_1} = - (q \omega_{D'} - q \omega_{C'}) \quad (\text{III.1-3})$$

Para o pilar 2, tem-se

$$M_{ft_2} = - (q \omega_{B'} - q \omega_{A'}) \quad (\text{III.1-4})$$

Substituindo em (III.1-3) e (III.1-4), os valores das áreas setoriais indicados na figura (III.3), tem-se

$$M_{ft_1} = - q \cdot ab = - q \cdot \Omega$$

e

$$M_{ft_2} = - q \cdot ab = - q \cdot \Omega$$

Portanto para um pilar genérico, o valor do Momento de Flexo-torção devido ao Bimomento originado pela aplicação das forças cortantes, $q(z)$, será

$$T_2 = - q \cdot \Omega \quad (\text{III.1-5})$$

Superpondo os momentos, T_1 e T_2 , e multiplicando-se por dois, encontrar-se-á, o Momento Interno Total oferecido pelo núcleo, e que será igual ao Momento Torçor Externo. T .

Daí

$$T_e = - 2 E_p J_\omega^* \phi''' + 2 G_p J_t \phi' - 2 q.\Omega \quad (\text{III.1-6})$$

Notar a igualdade entre a expressão (III.1-6) e a (II.1-25).

III.2 - Compatibilidade de Deslocamentos

O valor de $q(z)$ pode ser determinado através da condição de compatibilidade de deslocamentos nos cortes imaginários.

Devido à simetria da secção transversal do núcleo, o deslocamento de D' será igual ao de B' .

Por conveniência os deslocamentos de B' e A' serão os comparados nesta análise.

Há duas contribuições aos deslocamentos relativos de B' e A' , a da deformação das paredes do núcleo e a da deformação do meio contínuo sujeito à força cortante $q(z)$.

Definindo-se o deslocamento na direção do eixo z como " u ", o deslocamento relativo entre B' e A' , devido a deformação do meio contínuo, conforme já visto no capítulo anterior, pode ser escrito como

$$u_{B'} - u_{A'} = \frac{q(z)}{E_b \gamma} \quad (\text{III.2-1})$$

onde γ representa a rigidez do meio contínuo e já foi definido em (II.2-4).

Na determinação do deslocamento relativo entre B' e A' , devido à deformação do pilar do núcleo, que a seguir será apresentada, é onde reside a principal diferença entre as duas teorias até aqui estudadas.

A figura III.4 mostra a linha esqueleto da secção transversal de um pilar do núcleo, definida como sendo a li

nha que passa pelos pontos médios da espessura "t" das paredes do pilar.

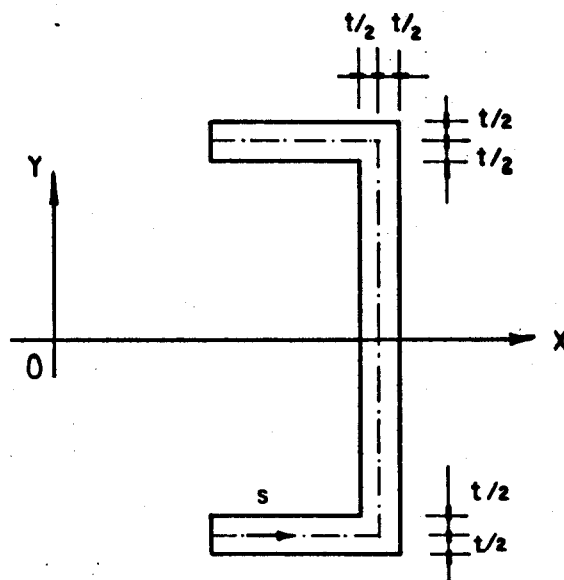


FIG. III. 4 — COORDENADA s NA LINHA DO ESQUELETO

Definindo-se como sendo "s", uma coordenada na linha esqueleto, com uma origem qualquer O_s , da Teoria da Elasticidade, tem-se a seguinte relação diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau}{G_p} \quad (\text{III.2-2})$$

A expressão (III.2-2) define a distorção de um elemento de área ($dsdz$) e que normalmente é tomada como nula no esqueleto, como foi feito no capítulo anterior.

O tratamento dado a seguir, não supõe nula esta distorção.

Da Teoria de Flexo-torção, exposta no Apêndice A, o deslocamento "v" na direção do contorno "s" é dado por:

$$v(s, z) = -n(s)\phi(z) \quad (\text{A.4-05})$$

onde "n" é o raio vetor que une o centro de torção da secção à reta tangente à linha do esqueleto no ponto considerado. Usando em (III.2-2) a expressão (A.4-05) tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\tau}{G_p} + \frac{\partial [n(s)\phi(z)]}{\partial z}$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\tau}{G_p} + n(s)\phi'(z) \quad (\text{III.2-3})$$

Integrando a expressão (III.2-3), a fim de se obter o deslocamento relativo entre os pontos B e A, pontos que pertencem às extremidades da linha do esqueleto da secção do pilar, tem-se:

$$\int_A^B \frac{\partial u}{\partial s} ds = \int_A^B \frac{\tau}{G_p} ds + \int_A^B n(s)\phi'(z) ds$$

ou

$$u_B - u_A = \int_A^B \frac{\tau}{G_p} ds + \phi'(z) [\omega_B - \omega_A] \quad (\text{III.2-4})$$

Observando que devido a força cortante $q(z)$ aplicada ao longo dos cortes imaginários nos pontos médios do meio contínuo e transmitida pelo próprio meio contínuo até as faces das paredes dos pilares, a tensão de cisalhamento τ será a soma da tensão de cisalhamento da flexo-torção, τ_{ft} , deduzida no Apêndice A e a tensão de cisalhamento devido a força cortante $q(z)$ agora aplicada nas faces das paredes dos pilares de espessura "t", daí:

$$\tau = \tau_{ft} + \frac{q(z)}{t} \quad (\text{III.2-5})$$

Substituindo a expressão (III.2-5) em (III.2-4)

vem

$$u_B - u_A = \phi'(z) [\omega_B - \omega_A] + \int_A^B \frac{\tau_{ft}}{G_p} ds + \int_A^B \frac{q(z)}{G_p} \frac{ds}{t} \quad (\text{III.2-6})$$

Da Teoria de Flexo-torção, sabe-se que a tensão de cisalhamento da flexo-torção vale:

$$\tau_{ft} = \frac{E_p \phi'''(z)}{t} \int_{s_1}^s \omega dS \quad (\text{III.2-7})$$

onde s_1 é a origem arbitrada para a ordenada s , s é a ordenada do ponto onde se deseja determinar a tensão e ω é a área setorial.

Usando a expressão (III.2-7) em (III.2-6), vem:

$$u_B - u_A = \phi'(z) [\omega_B - \omega_A] + \int_A^B \left[\frac{E_p \phi'''(z)}{t G_p} \int_{s_1}^s \omega dS \right] ds + \int_A^B \frac{q}{G_p} \frac{ds}{t}$$

ou ainda

$$u_B - u_A = \phi'(z) [\omega_B - \omega_A] + \frac{q(z)}{G_p} \int_A^B \frac{ds}{t} + \frac{E_p \phi'''(z)}{G_p} \int_A^B S_\omega \frac{ds}{t} \quad (\text{III.2-8})$$

onde S_ω é o momento estático setorial, definido pela expressão (A.5-09) no Apêndice A.

O deslocamento axial relativo entre B' e B , vale

$$u_{B'} - u_B = \phi'(z) [\omega_{B'} - \omega_B] \quad (\text{III.2-9})$$

O deslocamento axial relativo entre A e A', vale

$$u_A - u_{A'} = \phi'(z) [\omega_A - \omega_{A'}] \quad (\text{III.2-10})$$

Portanto o deslocamento axial do ponto B' relativo a A', vale:

$$(u_{B'} - u_{A'}) = (u_{B'} - u_B) + (u_B - u_A) + (u_A - u_{A'}) \quad (\text{III.2-11})$$

Substituindo em (III.2-11), as expressões (III.2-8), (III.2-9) e (III.2-10), tem-se:

$$u_{B'} - u_{A'} = \phi'(z) \Omega + \frac{q(z)}{G_p} \int_A^B \frac{ds}{t} + \frac{E_p \phi'''(z)}{G_p} \int_A^B S_\omega \frac{ds}{t} \quad (\text{III.2-12})$$

A compatibilidade requer que o deslocamento vertical relativo total do ponto B' e o ponto A' seja nulo. Usando as equações (III.2-1) e (III.2-12) tem-se:

$$\frac{q(z)}{E_b \gamma} + \frac{q(z)}{G_p} \int_A^B \frac{ds}{t} + \Omega \phi'(z) + \frac{E_p \phi'''(z)}{G_p} \int_A^B S_\omega \frac{ds}{t} = 0$$

Portanto

$$q(z) = \frac{-G_p \Omega \phi'(z) - E_p \phi'''(z) \int_A^B S_\omega \frac{ds}{t}}{\frac{G_p}{E_b \gamma} + \int_A^B \frac{ds}{t}} \quad (\text{III.2-12})$$

III.3 - Equação Diferencial Resultante

Substituindo a equação (III.2-12) em (III.1-6) ob-
têm-se a equação diferencial procurada,

$$T_e = - E\Gamma\phi''(z) + G_p^* \phi'(z) \quad (\text{III.3-1})$$

onde

$$\Gamma = 2 J_\omega^* - \frac{2 \Omega \int_A^B S_\omega \frac{ds}{t}}{\frac{G_p}{E_b \gamma} + \int_A^B \frac{ds}{t}} \quad (\text{III.3-2})$$

e

$$J^* = 2 J_t + \frac{2 \Omega^2}{\frac{G_p}{E_b \gamma} + \int_A^B \frac{ds}{t}} \quad (\text{III.3-3})$$

Para a resolução da equação diferencial encontra-
da em (III.3-1) serão usadas as mesmas condições de contor-
no empregadas no capítulo anterior.

Para um momento torçor aplicado no topo da estru-
tura, M, a solução será:

$$\phi(z) = \frac{\beta}{\lambda^3} M \left\{ -\sinh(\lambda z) + \tanh(\lambda H) \left[\cosh(\lambda z) - 1 \right] + \lambda z \right\} \quad (\text{III.3-4})$$

onde $\beta = \frac{1}{E_p \Gamma} \quad (\text{III.3-5})$

e

$$\lambda^2 = \frac{G_p J^*}{E_p \Gamma} \quad (\text{III.3-6})$$

E para um momento torçor, m , uniformemente distribuído ao longo da altura do edifício, a solução será:

$$\phi(z) = \frac{-\beta}{\lambda^3} mH \left\{ -\operatorname{senh}(\lambda z) + \left[\tanh(\lambda H) + \frac{\operatorname{sech}(\lambda H)}{\lambda H} \right] * \right.$$

$$* \left[\operatorname{cosh}(\lambda z) - 1 \right] + \lambda z - \frac{\lambda z^2}{2H} \left. \right\} \quad (\text{III.3-7})$$

Observar que para a rigidez do meio contínuo tendendo para o infinito ($E_b \gamma \rightarrow \infty$) a solução apresentada por RUTENBERG e TSO (4) coincide com a proposta por ODEN (5) para a torção da secção fechada.

III.4 - Exemplo Numérico

Será resolvido a seguir, usando a teoria aqui apresentada, o mesmo exemplo resolvido para o capítulo II.

III.4.1 - Determinação do Momento Setorial de Inércia J_ω^*

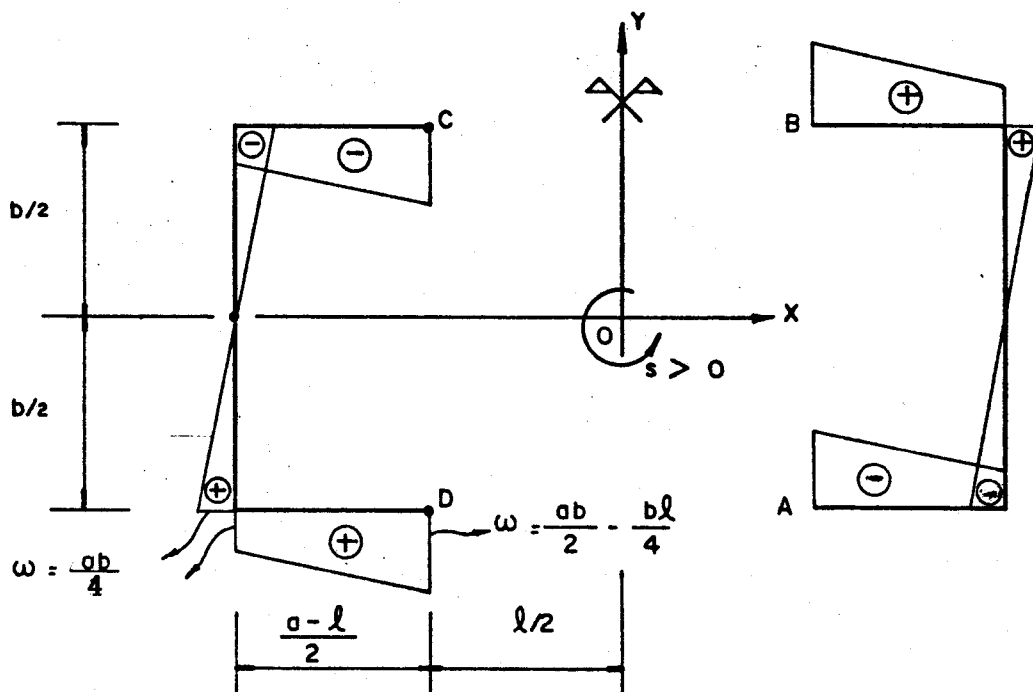


FIG. III.-5 - DIAGRAMA DE ω PARA O NÚCLEO COM POLO EM O

Por definição, da Teoria de Flexo-torção, tem-se:

$$J_{\omega} = \int_s \omega^2 t ds$$

Para um pilar, tem-se:

$$J_{\omega} = \int_A^B \omega^2 t ds$$

Considerando que a espessura das paredes do pilar, seja constante, então:

$$J_{\omega} = t \int_A^B \omega^2 ds$$

Para cada pilar do núcleo, considerando o diagrama de área setorial mostrado na figura III.5, tem-se

$$J_{\omega}^* = \frac{tb^2}{96} \left[2a^2b + 14a^3 - 24a^2l + 12al^2 - 2l^3 \right]$$

Para o exemplo, tem-se:

$$J_{\omega}^* = 1357961,67 \text{ ft}^6$$

III.4.2 - Determinação do Momento Estático Setorial de um pilar.

Por definição, da Teoria de Flexo-torção, tem-se:

$$S_{\omega} = \int_{s_1}^s \omega t ds$$

onde S_{ω} é o momento estático setorial da secção na coordena da "s" e " s_1 " é a origem da coordenada s.

Se a espessura t das paredes de um pilar do núcleo é constante, então:

$$S_{\omega} = t \int_{s_1}^s \omega ds$$

Para um pilar do núcleo, utilizando o diagrama de área setorial dado na figura (III.5), para o trecho da aba da secção U do pilar, com a origem s_1 em A, tem-se:

$$S_{\omega}(s) = \frac{bt}{4} (2a-l-s)s \quad \text{para } s \leq \frac{a-l}{2}$$

E para uma coordenada s genérica na alma vale:

$$S_{\omega}(s) = \frac{bt}{16}(3a-l)(a-l) + \frac{ab}{4}s - \frac{a}{4}s^2 \quad s \leq \frac{b}{2}$$

(com a origem em "s", agora na intersecção da alma com a aba.

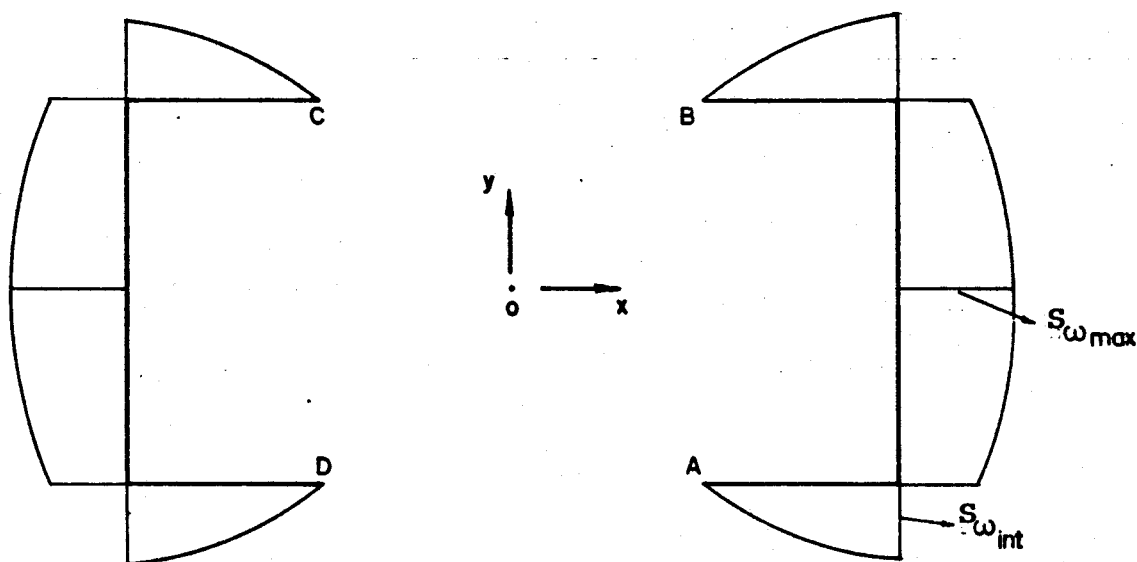


FIG. III. 6 - DIAGRAMA DE S_{ω}

A figura III.6 mostra o diagrama de S_{ω} , com o seu valor máximo nos pontos médios da alma da secção U dos pilares.

A utilização desse formulário fornece:

$$S_{\omega_{int}} = \frac{tb}{16} [(3a-l)(a-l)]$$

e

$$S_{\omega_{max}} = \frac{tb}{16} [(3a-l)(a-l) + ab]$$

III.4.3 - Determinação do valor de $\int_A^B S_{\omega} \frac{ds}{t}$

Utilizando o diagrama de S_{ω} , dado na figura(III.6), o valor desta integral para um pilar, será:

$$\int_A^B S_{\omega} \frac{ds}{t} = \frac{1}{48} [2ab^3 + 3b^2(3a-l)(a-l) + b(6a-2l)(a-l)^2]$$

Para o exemplo, tem-se:

$$\int_A^B S_{\omega} \frac{ds}{t} = 57036,4 \text{ ft}^4$$

III.4.3 - Determinação do valor de $\int_A^B \frac{ds}{t}$

A resolução desta integral, resulta em:

$$\int_A^B \frac{ds}{t} = \frac{1}{t} (a-l+b)$$

Para o exemplo, tem-se:

$$\int_A^B \frac{ds}{t} = 18,5$$

III.4.4 - Determinação das Constantes da Equação dada em (III.3-7)

Já conhecendo os valores de:

$$\Omega = 532 \text{ ft}^2$$

$$J_b = 2,6042 \text{ ft}^4$$

$$S_b = 5,0 \text{ ft}^2$$

$$J_t = 98,6667 \text{ ft}^4$$

$$\gamma = 2,97619 \times 10^{-3}$$

Da expressão (III.3-2), tem-se

$$\Gamma = 231902 \text{ ft}^6$$

Da expressão (III.3-3), tem-se

$$J^* = 3899,41 \text{ ft}^4$$

Da expressão (III.3-5), tem-se

$$\beta = 9,98187 \times 10^{-16} \frac{1}{\text{lb.ft}^4}$$

Da expressão (III.3-6), tem-se

$$\lambda^2 = 6,72597 \times 10^{-4} \frac{1}{ft^2}$$

III.4.5 - Determinação da rotação da secção, ϕ , ao nível de cada andar.

A Tabela III.1 mostra os resultados para as rotações da secção ao nível de cada andar, calculados por BARBOSA (1), utilizando o processo discreto (via análise matricial) e os resultados obtidos pela teoria apresentada, calculados primeiramente, não considerando a deformação dos lintéis devido à força cortante e depois, considerando esta deformação.

Andar	Rotações ($\times 10^{-4}$ rad)		
	Barbosa	Rutenberg e TSO (k=0)	Rutenberg e TSO (k=1,2)
Base	0,000	0,000	0,000
1	0,018	-0,021	-0,022
2	0,065	-0,075	-0,079
3	0,133	-0,153	-0,162
4	0,213	-0,244	-0,261
5	0,302	-0,345	-0,371
6	0,394	-0,451	-0,486
7	0,487	-0,558	-0,603
8	0,579	-0,662	-0,719
9	0,668	-0,764	-0,832
10	0,753	-0,861	-0,940
11	0,832	-0,950	-1,042
12	0,906	-1,034	-1,137
13	0,974	-1,110	-1,224
14	1,034	-1,179	-1,303
15	1,089	-1,241	-1,375
16	1,137	-1,297	-1,440
17	1,179	-1,345	-1,498
18	1,216	-1,389	-1,550
19	1,249	-1,428	-1,598
20	1,279	-1,465	-1,643

Tabela III.1

A Tabela III.2 mostra os valores da força cortante distribuída ao longo dos pontos médios do meio contínuo, ao nível de cada andar, encontrados por BARBOSA (1) utilizando o processo do meio contínuo e os encontrados através da utilização da expressão (III.2-12).

Andar	Força Cortante q , distribuída nos lintéis [lb/ft]		
	BARBOSA	RUTENBERG ($k=0$)	RUTENBERG ($k=1,2$)
BASE	0,000	216,192	181,214
1	223,50	61,86	63,75
2	380,54	259,53	241,54
3	486,78	396,03	367,12
4	554,21	486,02	452,13
5	592,03	540,70	505,69
6	607,31	568,61	534,91
7	605,51	576,30	545,38
8	590,82	568,84	541,50
9	566,55	550,13	526,78
10	535,28	523,26	504,04
11	499,12	490,69	475,60
12	459,79	454,47	443,39
13	418,82	416,36	409,15
14	377,60	378,00	374,46
15	337,50	341,00	340,88
16	299,98	307,08	310,05
17	266,69	278,18	283,76
18	239,57	256,60	264,12
19	221,01	245,23	253,62
20	214,03	247,65	255,34

Tabela III.1

A expressão (III.3-7) que define a rotação da secção de núcleo ao nível de cada andar, é a mesma que a encontrada no capítulo II, (II.3-5), com modificações apenas nos coeficientes β e λ . Portanto as expressões (II.4-11), (II.4-12) e (II.4-13), que determinam a primeira, a segunda e a terceira derivadas da rotação da secção são válidas também para esta teoria.

IV - ANÁLISE DE NÚCLEOS ESTRUTURAIS SUJEITOS À TORÇÃO SEGUNDO ROSMAN

O tratamento dado por ROSMAN (6) para a análise em questão, é feito combinando a teoria de flexo-torção e a análise pelo Método da Energia.

As hipóteses básicas conservam-se as mesmas dos capítulos anteriores e a Técnica do Meio Contínuo também será utilizada.

Os esforços internos serão encontrados, utilizando-se de uma equação em função da força cortante nos lin-tês. Outra equação será usada para a determinação da rota-ção da estrutura.

IV.1 - Definições dos Parâmetros de Rigidez

A rigidez à flexo-torção do núcleo se define como sendo a somatória estendida a todas as paredes do produto do módulo de elasticidade longitudinal e o momento setorial de inércia com relação ao eixo de rotação da secção. Consi-derando que o núcleo em estudo, possui dois pilares e que sua secção é simétrica, então

$$K = 2 E_p J_{\omega}^* \quad (\text{IV.1-01})$$

onde K é a rigidez à flexo-torção do núcleo e J_{ω}^* é o momen-to setorial de inércia de um dos pilares em relação ao cen-tro geométrico da secção do núcleo.

IV.2 - Momentos Torçores Internos

Será empregada neste estudo a mesma convenção de sinais, tanto para momentos torçores quanto para os deslo-camentos, que a usada nos capítulos anteriores.

Por conveniência, o eixo OZ será agora orientado do topo do edifício para a base.

A figura (IV.1) mostra um pilar engastado na sua base e com sua extremidade superior livre, sujeito a um momento torçor, m , uniformemente distribuído ao longo de sua altura, positivo, de acordo com a convenção de sinais aqui utilizada e com o novo sentido do eixo OZ.

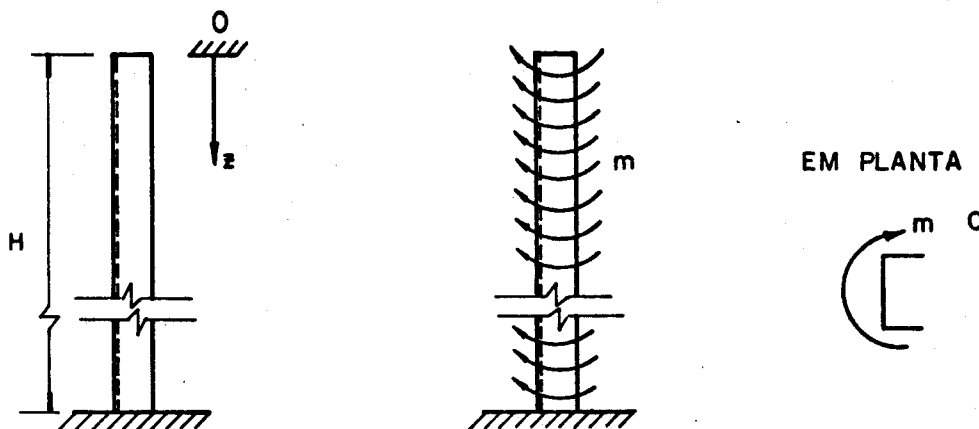


FIG. IV. 1- PILAR EM BALANÇO

Definindo-se como H a altura total do pilar e como α , a abscissa relativa reduzida para a altura H do pilar ($\alpha=z/H$), é possível relacionar o Bimomento e o Momento de Flexo-torção em uma secção qualquer do pilar com o Bimomento e o Momento de Flexo-torção na base do pilar, respectivamente.

Da Teoria de Flexo-torção apresentada no Apêndice A, tem-se:

$$- B'(z) = M_{ft}(z) \quad (IV.2-1)$$

A expressão (IV.2-1) derivada uma vez, em relação a z , resulta:

$$- B''(z) = M'_{ft}(z) \quad (IV.2-2)$$

Da mesma teoria, se desprezado o momento de torção livre, tem-se:

$$M'_{ft}(z) = m \quad (\text{IV.2-3})$$

Portanto, de (IV.2-2) e (IV.2-3), conclui-se que:

$$B''(z) = -m \quad (\text{IV.2-4})$$

A fim de encontrar o valor do Bimomento na base do pilar, integrando a expressão (IV.2-4), tem-se que

$$B'(z) = -mz + C \quad (\text{IV.2-5})$$

E integrando novamente, tem-se

$$B(z) = -m \frac{z^2}{2} + C \cdot z + D \quad (\text{IV.2-6})$$

Para encontrar o valor das constantes, C e D, basta aplicar as condições de contorno do problema, ou seja

$$B(z=0) = 0 \quad (\text{IV.2-7})$$

e

$$B'(z=0) = 0 \quad (\text{IV.2-8})$$

De (IV.2-07), tem-se que

$$D = 0$$

De (IV.2-06), tem-se que

$$C = 0$$

Portanto a expressão (IV.2-06) se transforma em

$$B(z) = -m \frac{z^2}{2} \quad (\text{IV.2-09})$$

Para encontrar-se o Bimomento na base do pilar, basta fazer $z = H$, daí:

$$B_H = -m \frac{H^2}{2} \quad (\text{IV.2-10})$$

Para obter-se o Bimomento em uma secção qualquer do pilar, em função do Bimomento na base do pilar, substitui-se em (IV.2-09) o valor de z pelo seu valor em função da abscissa relativa reduzida α , ou seja:

$$B(z) = -\frac{m}{2} \alpha^2 H^2 \quad (\text{IV.2-11})$$

Substituindo na expressão (IV.2-11), o valor do Bimomento na base dado por (IV.2-10), tem-se:

$$B(z) = \alpha^2 B_H \quad (\text{IV.2-12})$$

Para relacionar o Momento de Flexo-torção em uma secção qualquer do pilar com o Momento de Flexo-torção na base do pilar, pode-se usar a expressão (IV.2-03), que integrada uma vez resulta em

$$M_{ft}(z) = mz + C_1 \quad (\text{IV.2-13})$$

Sabendo que a condição de contorno, que determina a constante C_1 , é:

$$M_{ft}(z=0) = 0$$

Daí:

$$C_1 = 0$$

Portanto, a equação (IV.2-13), resulta em

$$M_{ft}(z) = mz \quad (\text{IV.2-14})$$

Na base do pilar, onde $z = H$, tem-se

$$M_{ft_H} = mH \quad (\text{IV.2-15})$$

Substituindo z por αH em IV.2-14 e usando o valor do Momento de Flexo-torção na base do pilar dado em (IV.2-15), chega-se a

$$M_{ft}(z) = \alpha M_{ft_H} \quad (\text{IV.2-16})$$

Tanto a expressão (IV.2-12) quanto a (IV.2-16) são válidas para uma carga torçora uniformemente distribuída ao longo da altura H do pilar. Para um momento torçor, M , concentrado e aplicado na extremidade livre do pilar, usando o mesmo raciocínio, chega-se a

$$B_H = - M \cdot H \quad (\text{IV.2-17})$$

$$M_{ft_H} = M \quad (\text{IV.2-18})$$

$$B(z) = \alpha B_H \quad (\text{IV.2-19})$$

$$M_{ft}(z) = M_{ft_H} \quad (\text{IV.2-20})$$

De uma forma geral, pode-se escrever que:

$$B(z) = K_B \cdot B_H \quad (\text{IV.2-21})$$

onde

$$K_B = \begin{Bmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.2-22})$$

e

$$M_{ft}(z) = K'_B \cdot M_{ft_H} \quad (\text{IV.2-23})$$

onde

$$K'_B = \begin{Bmatrix} \alpha \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.2-24})$$

Nas expressões (IV.2-22) e (IV.2-24), o valor superior dentro das chaves, corresponde ao caso da carga torçora ser um momento uniformemente distribuído e o valor inferior, um momento aplicado no topo do pilar.

Considerando a notação usada em (IV.2-22) e (IV.2-24), então:

$$B_H = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} m H^2 \\ -M H \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.2-25})$$

e

$$M_{ft_H} = \begin{Bmatrix} m H \\ M \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.2-26})$$

IV.3 - Relações Básicas entre Forças e Deslocamentos

Aplicando a Técnica do Meio Contínuo, ou seja, substituindo os lintéis que unem os pilares do núcleo ao nível de cada andar, por um meio contínuo de rigidez equivalente e fazendo-se cortes imaginários ao longo dos pontos médios de cada uma das fileiras do meio contínuo, aparecerão forças cortantes $q(z)$ distribuídas ao longo de toda a altura dos dois cortes no meio contínuo, como representa a figura (IV.2).

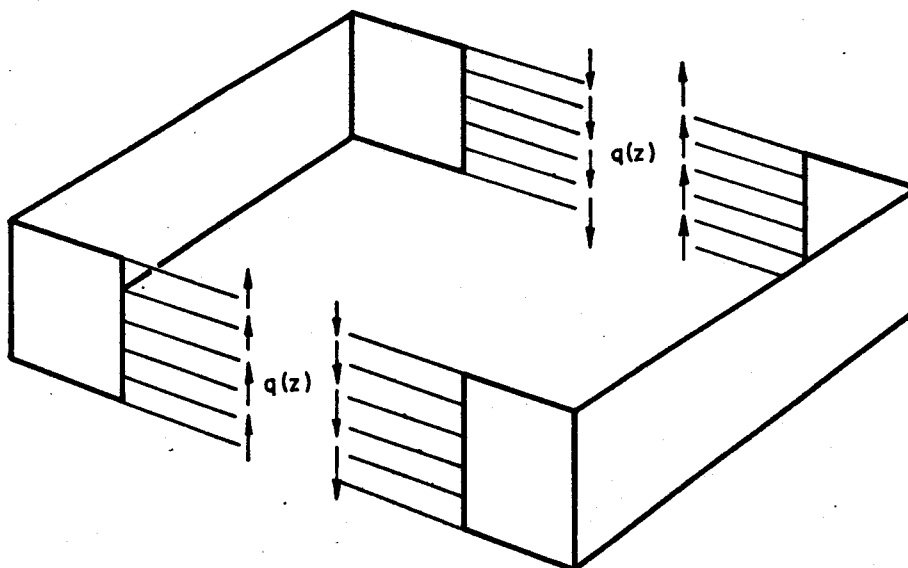
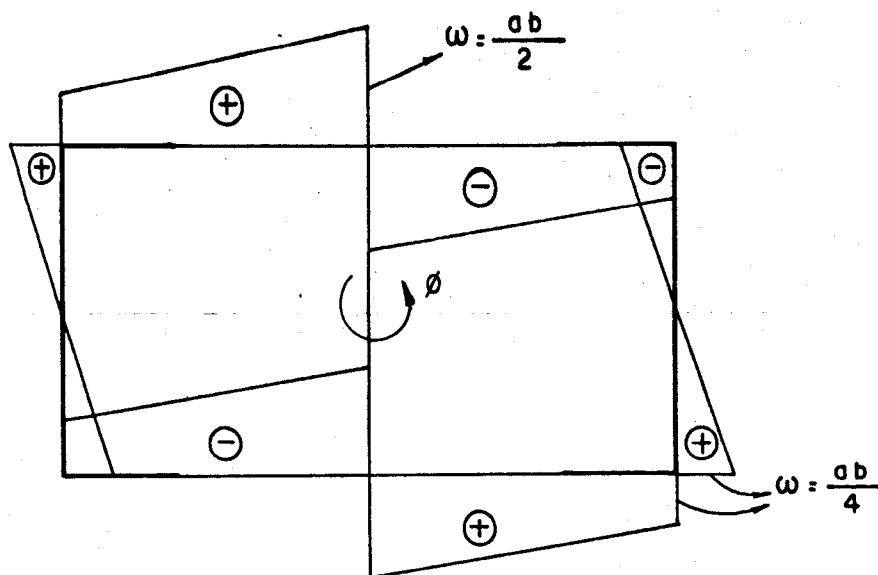


FIG. IV.2 - DISTRIBUIÇÃO DE $q(z)$.

De acordo com a convenção de sinais adotada e o sentido do eixo OZ , a figura (IV.3) mostra o diagrama de área setorial da secção do núcleo.

Define-se Q , como a resultante em uma secção z da força cortante q , aplicada nos cortes, ou

$$Q = \int_0^z q \, dz \quad (IV.3-01)$$

FIG. IV.3 - DIAGRAMA DE ω

O Bimomento produzido pelas forças Q , em uma secção qualquer do núcleo, conforme exposto no Apêndice A, será:

$$B_Q = \sum Q_i \omega_i = -2 \Omega Q \quad (\text{IV.3-02})$$

onde

$$\Omega = a \cdot b$$

Convém notar que, para o cálculo do Bimomento, Q será positiva quando de tração e negativa quando de compressão, daí o sinal negativo na expressão (IV.3-02).

O Bimomento, B_T , em uma secção qualquer do núcleo, definido como sendo a somatória dos Bimomentos em todos os pilares, é igual a soma entre o Bimomento, B , do pilar em balanço, e o Bimomento B_Q , produzido pelas forças $q(z)$. Isto é:

$$B_T = B + B_Q \quad (\text{IV.3-03})$$

A equação (IV.3-03) diferenciada em relação a z , resulta em:

$$M_{ft_T} = M_{ft} + M_{ft_Q} \quad (IV.3-04)$$

onde M_{ft_T} é o Momento de Flexo-torção em uma secção arbitrária do núcleo, M_{ft} é o momento de torção encontrado para o pilar em balanço e M_{ft_Q} é o momento de flexo-torção devido as forças cortantes $q(z)$.

O M_{ft_Q} é obtido derivando-se uma vez a equação (IV.3-02) em relação a z e trocando-se o sinal:

$$M_{ft_Q} = 2 \Omega q(z) \quad (IV.3-05)$$

IV.4 - Equação Resultante

IV.4-01 - Energia Potencial Complementar do Núcleo

A Energia Potencial Complementar do Núcleo consiste na contribuição do Bimomento dos pilares do núcleo e dos Momentos Fletores produzidos pelas forças cortantes $q(z)$ no meio contínuo e pode ser escrita como:

$$\pi_c = \int_0^H \left[\frac{B_T^2}{2K} + \frac{Q'^2}{S} \right] dz \quad (IV.4-01)$$

A contribuição dos momentos fletores produzidos pelas forças cortantes $q(z)$ pode ser deduzida como mostrado a seguir.

A figura(IV.4) mostra um trecho do núcleo, com os lintéis cortados em seu ponto médio e sujeitos a cargas concentradas " $q(z)h$ " ou simplesmente " qh " aplicadas em suas extremidades livres. Os lintéis são supostos engastados no pilares. O diagrama de momento fletor para os lintéis, também é mostrado na figura (IV.4).

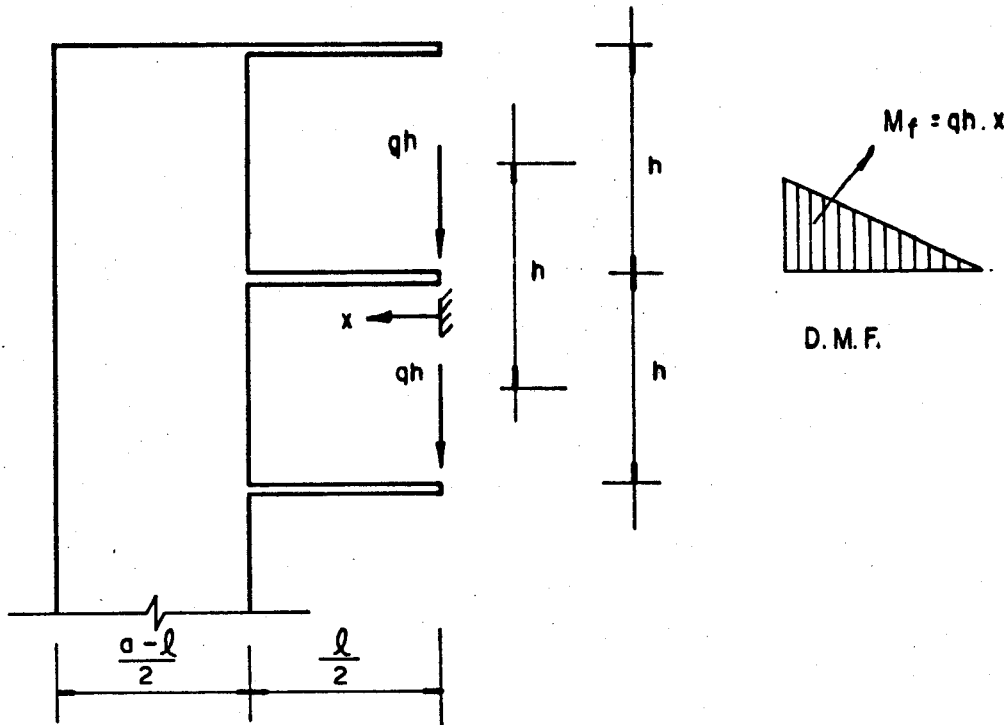


FIG. IV. 4 - MOMENTO FLETOR NOS LINTÉIS

A contribuição dos momentos fletores nos lintéis, na energia potencial complementar do núcleo, será:

$$u_{\ell} = \frac{1}{2} \int_0^H \left[\int_0^{\ell/2} \frac{(M_f)^2}{E_b J_b} dx \right] \frac{1}{h} dz \quad (\text{IV.4-02})$$

Na expressão (IV.4-02), J_b é o momento de inércia à flexão do lintel, E_b o seu módulo de elasticidade longitudinal, e o resultado encontrado para a expressão entre colchetes é dividido por "h", para se obter a energia por unidade de comprimento vertical.

Desenvolvendo a expressão (IV.4-02), tem-se:

$$u_{\ell} = \frac{1}{2} \int_0^H \left[\frac{1}{24} q^2 h^2 \ell^3 \right] \frac{1}{h} \frac{1}{E_b J_b} dz \quad (\text{IV.4-03})$$

ou

$$u_{\ell} = \frac{1}{2} \int_0^H \frac{1}{24 E_b J_b} q^2 h \ell^3 dz \quad (\text{IV.4-04})$$

Em uma secção "z" qualquer, tem-se 4 trechos de lintéis de comprimento $\ell/2$, portanto:

$$u_{\ell} = \int_0^H \frac{\frac{q^2}{12 E_b J_b}}{h \ell^3} dz \quad (\text{IV.4-05})$$

O denominador da expressão dada em (IV.4-05), na da mais é do que a rigidez dos lintéis à distorção, desprezando-se o efeito da deformação por força cortante.

Usando a expressão (II.2-4) já deduzida anteriormente para a rigidez do lintel, considerando-se o efeito da força cortante, a expressão (IV.4-05) se modifica para

$$u_{\ell} = \int_0^H \frac{q^2}{E_b \gamma} dz \quad (\text{IV.4-06})$$

Da expressão (IV.3-01), sabe-se que

$$q = \frac{dQ}{dz} = Q' \quad (\text{IV.4-07})$$

Usando-se (IV.4-07) em (IV.4-06), vem

$$u_{\ell} = \int_0^H \frac{Q'^2}{S} dz \quad (\text{IV.4-08})$$

onde $S = E_b \gamma \quad (\text{IV.4-09})$

com γ calculado desprezando-se a deformação por força constante nos lentes.

IV.4.2 - Equação Diferencial e sua solução

Substituindo a expressão (IV.3-02) na expressão (IV.4-01), tem-se:

$$\pi_c = \int_0^H \left[\frac{(B+B_Q)^2}{2K} + \frac{Q'^2}{S} \right] dz \quad (\text{IV.4-10})$$

Substituindo a expressão (IV.3-01) em (IV.4-10) tem-se

$$\pi_c = \int_0^H \left[\frac{(B-2\Omega Q)^2}{2K} + \frac{Q'^2}{S} \right] dz \quad (\text{IV.4-11})$$

A equação de Euler referida ao funcional da expressão (IV.4-11), a fim de promover a sua minimização, pode ser escrita como:

$$\phi_Q - \frac{d}{dz} \phi_{Q'} = 0 \quad (\text{IV.4-12})$$

onde ϕ_Q é a derivada em relação a "Q" da expressão entre colchetes enquanto que $\phi_{Q'}$ é a derivada em relação a "Q'" da mesma expressão.

Portanto, a equação de Euler referida ao funcional conduz à seguinte equação diferencial

$$\frac{2(B-2\Omega Q) \cdot (-2\Omega)}{2K} - \frac{2Q''}{S} = 0$$

ou
$$\frac{2\Omega^2 Q}{K} - \frac{Q''}{S} = \frac{\Omega B}{K} \quad (\text{IV.4-13})$$

Supondo ser a rigidez do meio contínuo infinita, a expressão (IV.4-13) conduz ao seguinte resultado

$$Q = \frac{B}{2\Omega} \quad (\text{IV.4-14})$$

Substituindo em (IV.4-14) a equação (IV.2-12), vã lida para uma carga torçora uniformemente distribuída, m, tem-se:

$$Q = \alpha^2 \frac{B_H}{2\Omega} \quad (\text{IV.4-15})$$

Retornando à equação diferencial (IV.4-13) e procurando sua solução na forma:

$$Q = K_Q \frac{B_H}{2\Omega} \quad (\text{IV.4-16})$$

onde, K_Q é um coeficiente adimensional que leva em conta a deformação dos lintéis e descreve a variação de Q ao longo da altura do edifício.

Substituindo (IV.4-16) em (IV.4-13), tem-se:

$$-\frac{d^2 K_Q}{dz^2} + \frac{2\Omega^2 S}{K} K_Q = \frac{2\Omega^2 S}{K} \cdot \alpha^2 \quad (\text{IV.4-17})$$

Usando em (IV.4-17) a abscissa reduzida α no lugar de z , tem-se:

$$-\frac{d^2 K_Q}{d\alpha^2} + \frac{2\Omega^2 H^2 S}{K} K_Q = \frac{2\Omega^2 H^2 S}{K} \alpha^2$$

ou
$$-\frac{d^2 K_Q}{d\alpha^2} + A^2 K_Q = A^2 \alpha^2 \quad (\text{IV.4-18})$$

onde
$$A = \Omega H \sqrt{\frac{2S}{K}} \quad (\text{IV.4-19})$$

A equação dada em (IV.4-16), derivada uma vez em relação a z , resulta em

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{dK_Q}{dz} \cdot \frac{B_H}{2\Omega}$$

ou

$$q = \frac{dK_Q}{dz} \frac{B_H}{2\Omega} \quad (\text{IV.4-20})$$

Usando em (IV.4-20), a abscissa relativa reduzida ($\alpha = z/H$), tem-se:

$$q = \frac{dK_Q}{d\alpha} \cdot \frac{1}{H} \cdot \frac{B_H}{2\Omega} \quad (\text{IV.4-21})$$

Multiplicando o segundo membro no numerador e no denominador por M_{ft_H} , tem-se

$$q = \frac{M_{ft_H}}{2\Omega} \left[\frac{B_H}{H M_{ft_H}} \cdot \frac{dK_Q}{d\alpha} \right] \quad (\text{IV.4-22})$$

A equação (IV.4-22) também pode ser apresentada da seguinte forma:

$$q = K'_Q \frac{M_{ft_H}}{2\Omega} \quad (\text{IV.4-23})$$

onde
$$K'_Q = \frac{B_H}{H \cdot M_{ft_H}} \frac{dK_Q}{d\alpha} \quad (\text{IV.4-24})$$

A equação diferencial (IV.4-18), válida para um momento torçor uniformemente distribuído, tem como solução:

$$K_Q = D_1 \sinh A\alpha + D_2 \cosh A\alpha + \alpha^2 + \frac{2}{A^2} \quad (\text{IV.4-25})$$

As condições de contorno válidas para o problema são:

$$K_Q (\alpha=0) = 0 \quad (\text{IV.4-26})$$

e
$$\frac{dK_Q}{d\alpha} (\alpha=1) = 0, \text{ pois } q(H) = 0 \quad (\text{IV.4-27})$$

Aplicando (IV.4-26) e (IV.4-27) em (IV.4-25), chega-se a:

$$K_Q(\alpha) = \alpha^2 - \frac{2}{A^2} \left(\frac{A - \sinh A}{\cosh A} \sinh A\alpha + \cosh A\alpha - 1 \right) \quad (\text{IV.4-28})$$

e

$$K'_Q(\alpha) = -\alpha + \frac{1}{A} \left(\frac{A - \sinh A}{\cosh A} \cosh A\alpha + \sinh A\alpha \right) \quad (\text{IV.4-29})$$

Observar que na expressão (IV.4-29), já foi usada a relação entre K'_Q e $\frac{dK_Q}{d\alpha}$, expressa em (IV.4-24).

Substituindo-se em (IV.4-14) a expressão (IV.2-19) válida para um momento torçor concentrado e aplicado no topo do edifício e usando o mesmo raciocínio aqui empregado, chega-se às seguintes expressões:

$$K_Q(\alpha) = \alpha - \frac{\sinh A\alpha}{A \cosh A} \quad (\text{IV.4-30})$$

e

$$K'_Q(\alpha) = \frac{\cosh A\alpha}{\cosh A} - 1 \quad (\text{IV.4-31})$$

As figuras (IV.6-a) e (IV.6-b) mostram a variação dos coeficientes $K_Q(\alpha)$ e $K'_Q(\alpha)$, dados pelas expressões (IV.4-28) e (IV.4-29) respectivamente, para diversos valores da constante A.

IV.4.03 - Forças Internas

Substituindo-se nas equações (IV.3-03) e (IV.3-04), os valores de B_Q e M_{ft_Q} , dados pelas expressões (IV.3-02) e (IV.3-05), respectivamente, tem-se:

$$B_T = B - 2 \Omega Q \quad (\text{IV.4-32})$$

e

$$M_{ft_T} = M_{ft} + 2 \Omega q(z) \quad (\text{IV.4-33})$$

Substituindo-se agora, os valores de Q e de q(z), dados pelas expressões (IV.4-16) e (IV.4-23), tem-se:

$$B_T = B - K_Q B_H \quad (\text{IV.4-34})$$

e

$$M_{ft_T} = M_t + K'_Q M_{ft_H} \quad (\text{IV.4-35})$$

Finalmente, usando em (IV.4-34) e (IV.4-35), as expressões (IV.2-21) e (IV.2-23), tem-se

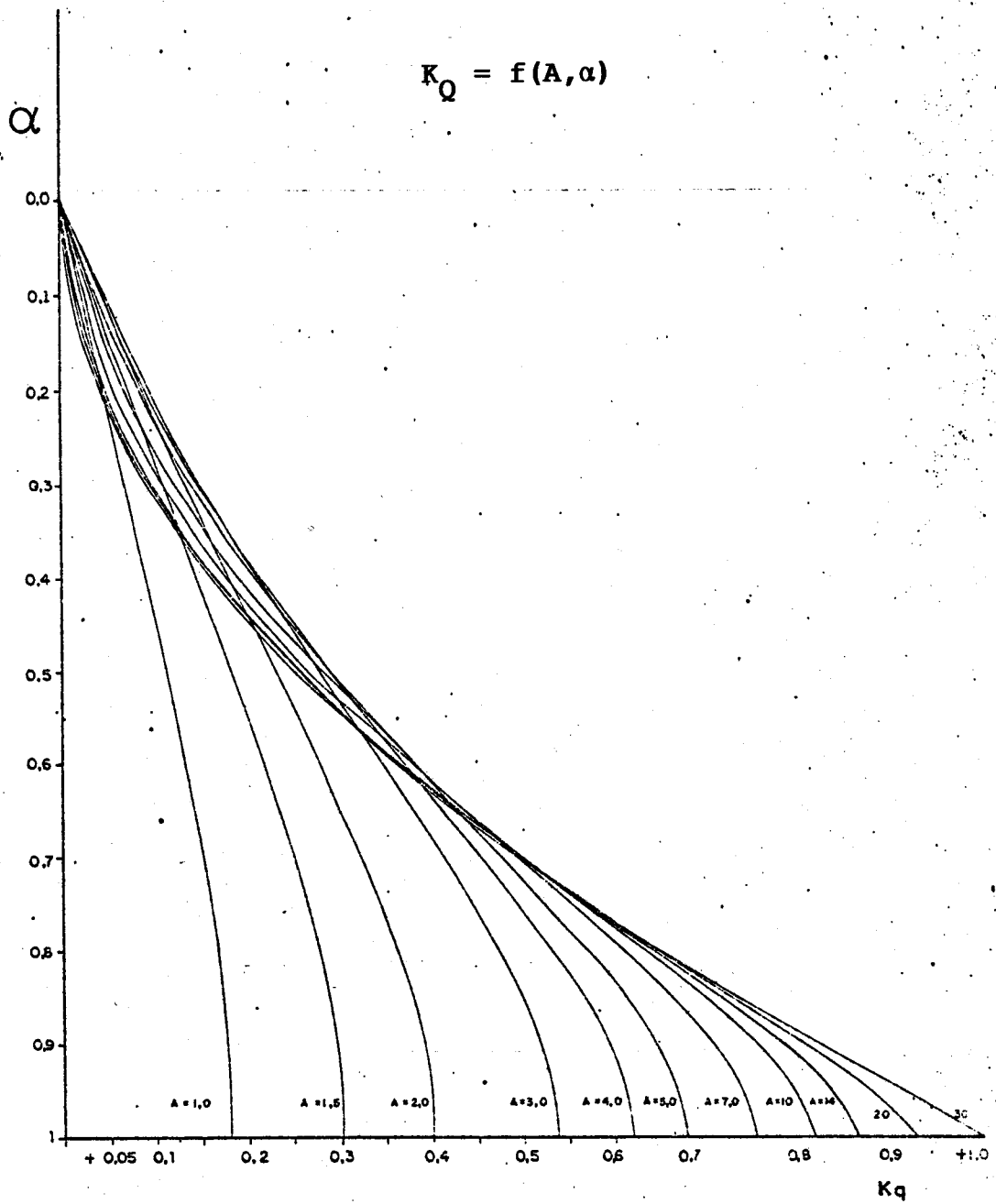


FIG. IV-5

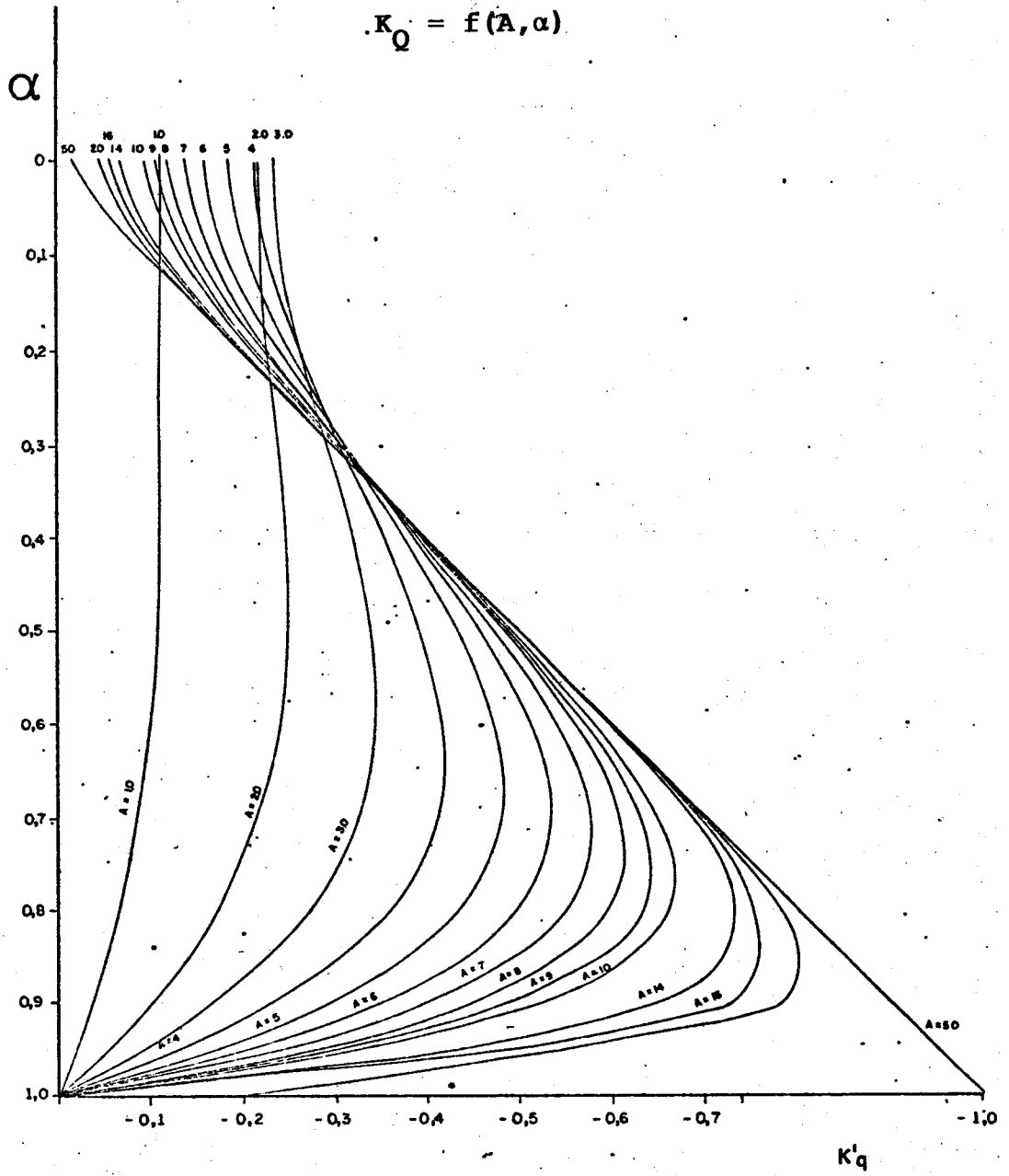


FIG. IV. 6

$$B_T = B_H (K_B - K_Q) \quad (\text{IV.4-36})$$

$$e \quad M_{ft_T} = M_{ft_H} (K_B + K_Q) \quad (\text{IV.4-37})$$

IV.5 - Rotação da Secção Transversal do Núcleo

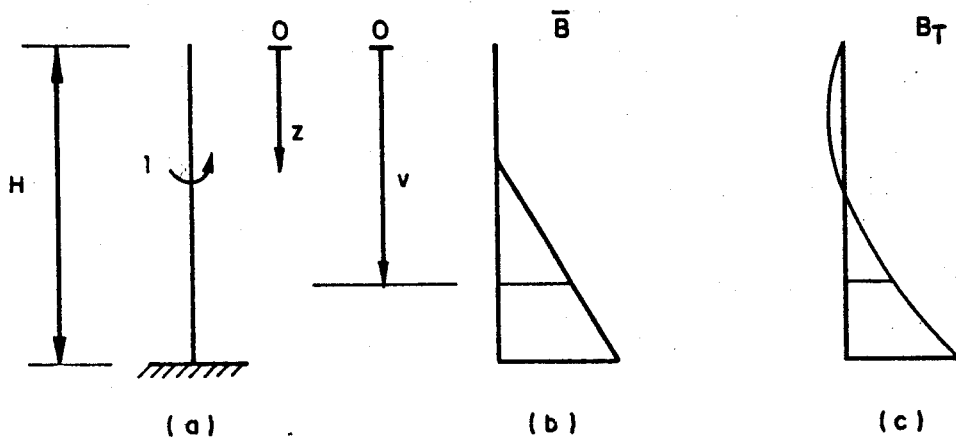


FIG. IV.-7

A fig. (IV.7-a) mostra um pilar engastado em sua base e com sua extremidade superior em balanço, de altura H, com um momento torçor concentrado unitário, aplicado a uma distância z de sua extremidade livre.

Na figura (IV.7-b), o diagrama de bimomento devido a aplicação do momento torçor unitário em "z" é apresentado e na figura (IV.7-c) é mostrado o diagrama de bimomento total devido a um carregamento torçor qualquer.

A aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, considerando como estado de deslocamento o mostrado pela figura (IV.7-c) e como estado de carregamento o mostrado pela figura (IV.7-b), a fim de se conhecer a rotação da secção em torno de seu centro de torção, resulta em

$$\phi = \int_z^H \frac{B_T(v) \cdot \bar{B}(v)}{K} dv \quad (\text{IV.5-01})$$

Introduzindo na equação(IV.5-01), a forma geral para o Bimomento Total, tem-se

$$\phi = \int_z^H \frac{B_H (K_B - K_Q) \bar{B}}{K} dv \quad (\text{IV.5-02})$$

O valor do Bimomento devido ao momento torçor unitário aplicado em "z", \bar{B} , calculado em uma secção qualquer "v", sendo que "v" está compreendido no intervalo (z,H), vale:

$$\bar{B} = (v-z) \quad (\text{IV.5-03})$$

Então a expressão IV.5-02, se modifica para

$$\phi = \int_z^H \frac{B_H (K_B - K_Q) (v-z)}{K} dv \quad (\text{IV.5-04})$$

Introduzindo os coeficientes adimensionais $\alpha = \frac{z}{H}$ e $\bar{v} = \frac{v}{H}$ na expressão IV.5-04, tem-se

$$\phi = \int_{\alpha}^1 \frac{B_H (K_B - K_Q) (\bar{v} - \alpha) H^2}{K} d\bar{v}$$

$$\text{ou} \quad \phi = \frac{B_H \cdot H^2}{K} \int_{\alpha}^1 (K_B - K_Q) (\bar{v} - \alpha) d\bar{v} \quad (\text{IV.5-05})$$

Para facilitar a determinação da rotação do núcleo em uma secção qualquer, pode-se relacioná-la com a rotação no topo do sistema básico constituído apenas pelos dois pilares contraventados pelas lajes (com isso $K_Q = 0$)

$$\phi = \delta \cdot \phi_0 \quad (\text{IV.5-06})$$

onde
$$\phi_o = \frac{B_H \cdot H^2}{K} \int_0^1 K_B \bar{v} d\bar{v} \quad (\text{IV.5-07})$$

Para um carregamento torçor uniformemente distribuído ao longo da altura do edifício e para um momento torçor concentrado e aplicado no topo do edifício, tem-se os seguintes valores para a expressão (IV.5-07):

$$\phi_o = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \frac{MH^4}{K} \\ -\frac{1}{3} \frac{MH^3}{K} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5-08})$$

O coeficiente adimensional δ é achado introduzindo na equação (IV.5-06), as expressões (IV.5-05) e (IV.5-07), assim

$$\delta = \frac{\int_{\alpha}^1 (K_B - K_Q) (\bar{v} - \alpha) d\bar{v}}{\int_0^1 K_B \bar{v} d\bar{v}} \quad (\text{IV.5-09})$$

Para uma carga torçora uniformemente distribuída a equação (IV.5-09) se transforma em:

$$\delta = \frac{4}{A^2} \left[1 - \alpha^2 - \frac{1 + A(\sinh A - \sinh A\alpha) - \cosh(A - A\alpha)}{\frac{1}{2} A^2 \cosh A} \right] \quad (\text{IV.5-10})$$

A Figura (IV.8) mostra a variação do coeficiente δ , para diversos valores da constante A.

Para uma carga torçora concentrada no topo, a equação (IV.5-10), se transforma em:

$$\delta = \frac{3}{A^2} \left[1 - \alpha - \frac{\sinh A - \sinh A\alpha}{A \cosh A} \right] \quad (\text{IV.5-11})$$

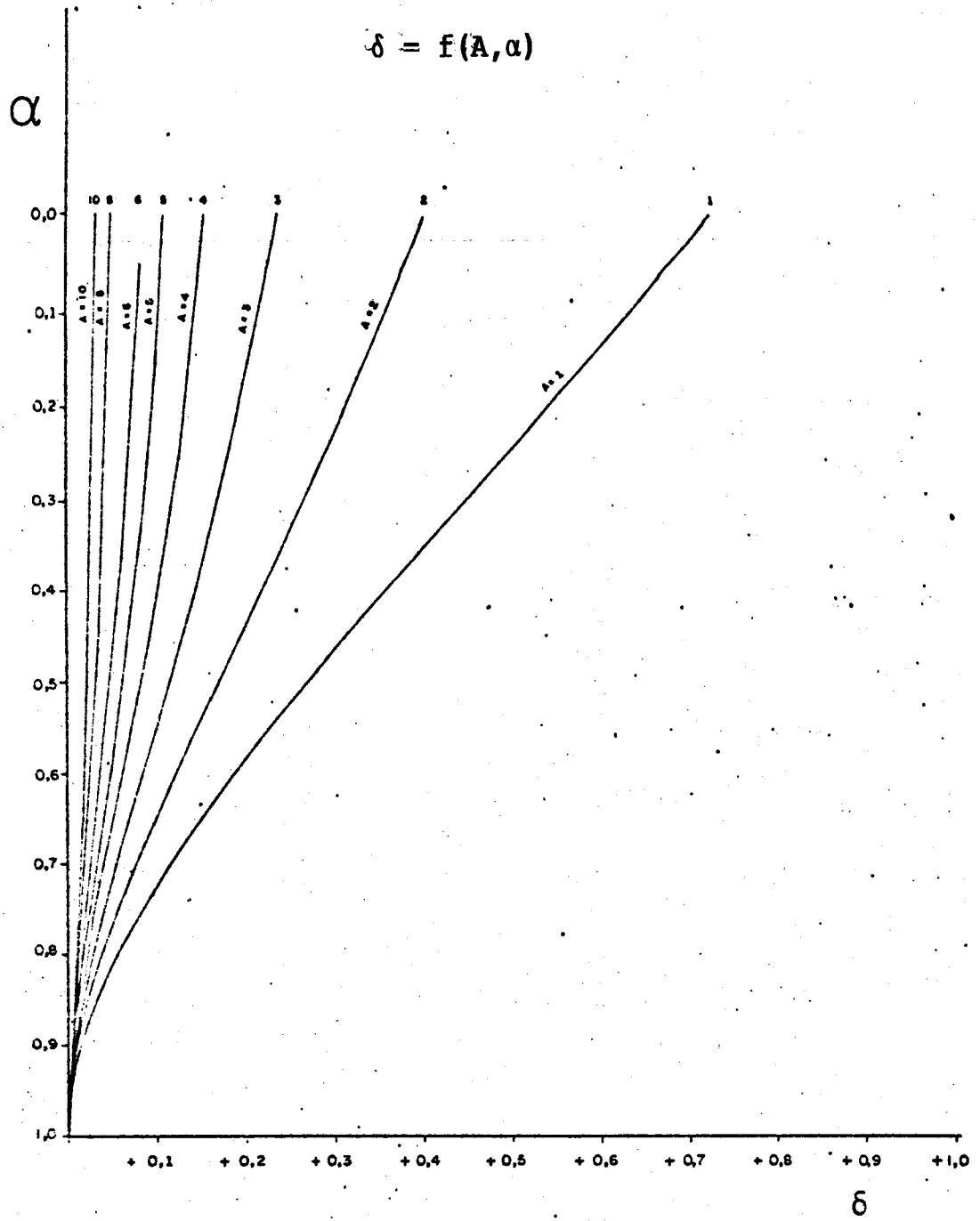


FIG. IV. - 8

Se somente a rotação no topo da estrutura do núcleo é procurada, podem-se usar as seguintes expressões:

$$\phi (\alpha=0) = \delta_0 \cdot \phi_0 \quad (\text{IV.5-12})$$

onde

$$\delta_0 = \frac{4}{A^2} \left[1 - \frac{1+A \operatorname{senh} A - \operatorname{cosh} A}{\frac{1}{2} A^2 \operatorname{cosh} A} \right] \quad (\text{IV.5-13})$$

A expressão (IV.5-13) é encontrada substituindo-se na expressão (IV.5-10) o valor de α no topo, ou seja $\alpha = 0$.

Observar que o valor de δ_0 mostra a influência dos lintéis na rigidez do sistema constituído pelos pilares contraventados.

IV.6 - Exemplo Numérico

Novamente, serão comparados os resultados obtidos para a rotação da secção ao nível de cada andar, encontrados por BARBOSA (1) utilizando o processo discreto e os encontrados utilizando a teoria anterior. Os dados da estrutura e do carregamento serão os mesmos dos capítulos anteriores.

IV.6.1 - Determinação dos parâmetros de rigidez

Da expressão (IV.1-01), tem-se:

$$K = 2 E_p J_{\omega}^*$$

O valor de J_{ω}^* será o mesmo que o encontrado para o capítulo anterior, portanto, para o exemplo:

$$K = 1,17328 \times 10^{+15} \text{ lb x ft}^4$$

Da expressão (IV.4-09), tem-se:

$$S = E_b \gamma$$

O valor de γ também será igual ao encontrado nos capítulos anteriores, adotando $k = 0$, daí:

$$S = 1,28571 \times 10^6 \text{ lb/ft}^2$$

Com esses valores encontrados, da expressão (IV.4-19) tem-se:

$$A = 5,2302$$

Da expressão (IV.5-08), para um momento torçor niformemente distribuído, tem-se:

$$\phi_o = 1,3261 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

IV.6.2 - Determinação da rotação da secção, ϕ , ao nível de cada andar.

O uso das expressões (IV.5-10) e (IV.5-06) fornece a rotação da secção, ϕ , ao nível de cada andar.

A Tabela (IV.1) mostra os resultados encontrados por BARBOSA (1) e pela teoria proposta por ROSMAN.

Andar	Rotações ($\times 10^{-4}$ rad)	
	BARBOSA	ROSMAN (k=0)
BASE	0,000	0,000
1	0,018	0,018
2	0,065	0,067
3	0,133	0,135
4	0,213	0,218
5	0,302	0,309
6	0,394	0,404
7	0,487	0,500
8	0,579	0,596
9	0,668	0,688
10	0,753	0,776
11	0,832	0,858
12	0,906	0,935
13	0,974	1,005
14	1,034	1,069
15	1,089	1,127
16	1,137	1,178
17	1,179	1,224
18	1,216	1,265
19	1,249	1,303
20	1,279	1,338

Tabela IV.1

IV.6.3 - Determinação das forças cortantes, $q(z)$, distribuídas ao longo do meio contínuo.

O uso das expressões (IV.4-29) e (IV.4-23) fornece o valor de $q(z)$ ao nível de cada andar.

Para uma carga distribuída uniformemente ao longo da altura, m , a expressão (IV.2-15) resulta em:

$$M_{ft_H} = 13440 \text{ lb x ft}$$

A Tabela (IV.2) mostra os resultados encontrados para $q(z)$ ao nível de cada andar.

Andar	BARBOSA	ROSMAN	
	$q(z)$	$q(z)$	lb/ft
BASE	0,000	0,000	
1	223,50	-228,2	
2	380,54	-389,5	
3	486,78	-499,4	
4	554,21	-569,9	
5	592,03	-610,0	
6	607,31	-626,9	
7	605,51	-626,2	
8	590,82	-612,0	
9	566,55	-587,8	
10	535,28	-556,2	
11	499,12	-519,5	
12	459,79	-479,4	
13	418,82	-437,5	
14	377,60	-395,3	
15	377,50	-354,3	
16	299,98	-315,8	
17	266,69	-281,8	
18	239,57	-254,0	
19	221,01	-235,1	
20	214,03	-227,9	

Tabela IV.2

V - EXEMPLOS NUMÉRICOS E CONCLUSÃO

V.1 - Exemplo nº 1

A Figura (V.1) mostra a planta de um núcleo, com as dimensões em metros.

Os demais dados a serem considerados para a determinação das rotações dos diafragmas ao nível de cada andar e da força cortante distribuída nos lintéis, serão:

- a) altura dos andares: 300cm
- b) número de andares: 20
- c) módulo de elasticidade longitudinal: 200tf/cm^2
- d) módulo de elasticidade transversal: $83,333\text{tf/cm}^2$
- e) carregamento torçor uniformemente distribuído ao longo da altura: $8,64\text{tf.m/m}$ (sentido anti-horário para um observador olhando no sentido do topo para a base).

A seguir são mostrados nas Tabelas (V.1-a), (V.2-a) e (V.3-a), as rotações dos diafragmas e nas Tabelas (V.1-b), (V.2-b) e (V.3-b), a força cortante distribuída nos lintéis, calculadas segundo as três teorias, considerando para a altura dos lintéis, os valores 15, 30 e 40 centímetros respectivamente.

Esses resultados foram encontrados sem levar em conta a deformação dos lintéis devido à força cortante, ou seja adotando $k = 0$ na determinação do parâmetro de rigidez dos lintéis.

Observar que o momento torçor adotado, indicado na figura (V.1), será positivo na convenção de sinais adotada nos capítulos II e III, e será negativo na convenção adotada no capítulo IV.

A rotação da secção é positiva quando for no sentido anti-horário para um observador olhando no sentido po

sitivo do eixo OZ , sendo assim para o sentido do momento distribuído aplicado no exemplo, resultará rotações negativas segundo TSO e BISWAS (2) e RUTENBERG e TSO (4), e rotações positivas segundo ROSMAN (6).

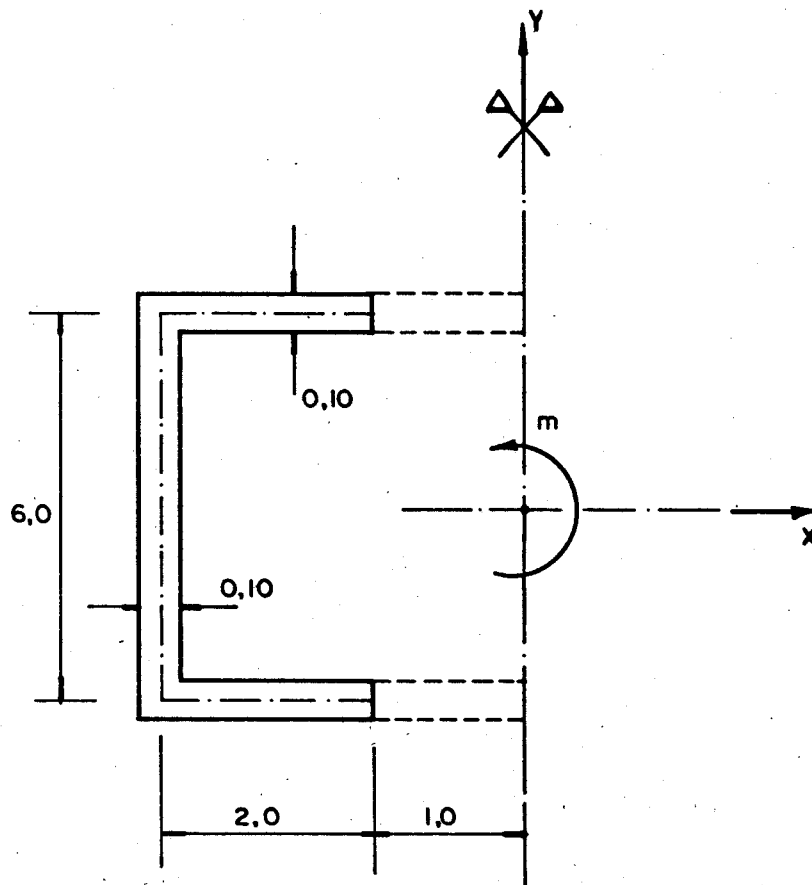


FIG. V.1 — PLANTA DA ESTRUTURA EXEMPLO

ANDAR	ROTAÇÕES DOS DIAFRAGMAS (rad)		
	TSO e BISWAS	RUTENBERG e TSO	ROSMAN
BASE	0,0	0,0	0,0
1	-0,0002	-0,0002	0,0002
2	-0,0007	-0,0007	0,0007
3	-0,0015	-0,0015	0,0016
4	-0,0026	-0,0026	0,0027
5	-0,0039	-0,0039	0,0040
6	-0,0054	-0,0055	0,0055
7	-0,0071	-0,0071	0,0072
8	-0,0089	-0,0089	0,0090
9	-0,0108	-0,0108	0,0110
10	-0,0128	-0,0128	0,0130
11	-0,0148	-0,0149	0,0151
12	-0,0169	-0,0170	0,0172
13	-0,0191	-0,0192	0,0194
14	-0,0213	-0,0213	0,0216
15	-0,0234	-0,0235	0,0238
16	-0,0256	-0,0257	0,0261
17	-0,0278	-0,0279	0,0283
18	-0,0299	-0,0301	0,0305
19	-0,0321	-0,0322	0,0327
20	-0,0343	-0,0344	0,0349

Tabela V.1-a

ANDAR	FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDA NO MEIO CONTÍNUO (TF/CM)		
	TSO e BISWAS	RUTENBERG e TSO	ROSMAN
BASE	0,0	0,0	0,0
1	0,0012	0,00094	0,00124
2	0,0023	0,00204	0,00233
3	0,0032	0,00300	0,00329
4	0,00406	0,00384	0,00412
5	0,00476	0,00456	0,00483
6	0,00536	0,00517	0,00544
7	0,00585	0,00568	0,00594
8	0,00626	0,00611	0,00636
9	0,00658	0,00645	0,006698
10	0,00684	0,00672	0,00696
11	0,00703	0,00693	0,00716
12	0,00717	0,00709	0,00731
13	0,00726	0,00719	0,00741
14	0,00732	0,00726	0,00747
15	0,00734	0,00730	0,007499
16	0,00735	0,00732	0,007506
17	0,00733	0,00733	0,007497
18	0,00732	0,00732	0,00748
19	0,00730	0,00732	0,007466
20	0,00729	0,00733	0,00746

Tabela V.1-b

ANDAR	ROTAÇÕES DOS DIAFRAGMAS (rad)		
	TSO e BISWAS	RUTENBERG	ROSMAN
BASE	0,0	0,0	0,0
1	-0,0001905	-0,0001129	0,0001098
2	-0,0004098	-0,0004227	0,0004113
3	-0,0008632	-0,0008902	0,0008663
4	-0,001437	-0,001481	0,001442
5	-0,002102	-0,002167	0,002110
6	-0,002834	-0,002922	0,002846
7	-0,003613	-0,003724	0,003629
8	-0,004421	-0,004556	0,004441
9	-0,005242	-0,005401	0,005266
10	-0,006064	-0,006248	0,006093
11	-0,00688	-0,007086	0,006912
12	-0,007675	-0,007906	0,007715
13	-0,008450	-0,008703	0,008495
14	-0,009199	-0,009474	0,009250
15	-0,009920	-0,01022	0,009977
16	-0,01061	-0,01093	0,01068
17	-0,01128	-0,01161	0,01135
18	-0,01192	-0,01227	0,01199
19	-0,01255	-0,01292	0,01263
20	-0,01317	-0,01355	0,01325

Tabela V.2-a

ANDAR	FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDA NO MEIO CONTÍNUO (TF/CM)		
	TSO e BISWAS	RUTENBERG	ROSMAN
BASE	0,0	0,0	0,0
1	0,005716	0,00360	0,005735
2	0,01033	0,00852	0,01037
3	0,01400	0,01245	0,01405
4	0,01684	0,01552	0,01691
5	0,01897	0,01785	0,01906
6	0,02049	0,01954	0,02059
7	0,02149	0,02069	0,02159
8	0,02205	0,02139	0,02217
9	0,02224	0,02171	0,02237
10	0,02213	0,02171	0,02226
11	0,02178	0,02147	0,02192
12	0,02125	0,02104	0,02139
13	0,02059	0,02047	0,02074
14	0,01985	0,01982	0,02000
15	0,01909	0,01915	0,01924
16	0,01834	0,01850	0,01849
17	0,01767	0,01792	0,01783
18	0,01713	0,01748	0,01728
19	0,01676	0,01721	0,01691
20	0,01662	0,01719	0,01677

Tabela V.2-b

ANDAR	ROTAÇÕES DOS DIAFRAGMAS (rad)		
	TSO e BISWAS	RUTENBERG	ROSMAN
BASE	0,0	0,0	0,0
1	-0,00008	-0,000086	0,00008
2	-0,00029	-0,00031	0,00029
3	-0,00060	-0,00065	0,00060
4	-0,00099	-0,00106	0,00099
5	-0,00142	-0,00152	0,00142
6	-0,00187	-0,00201	0,00188
7	-0,00235	-0,00252	0,00235
8	-0,00282	-0,00303	0,00283
9	-0,00329	-0,00353	0,00330
10	-0,00375	-0,00401	0,00376
11	-0,00419	-0,00448	0,00420
12	-0,00460	-0,00492	0,00461
13	-0,00499	-0,00534	0,005
14	-0,00535	-0,00572	0,005363
15	-0,00568	-0,00607	0,005697
16	-0,00599	-0,00640	0,006
17	-0,00627	-0,00670	0,00629
18	0,00653	-0,00670	0,00655
19	-0,00678	-0,00724	0,00680
20	-0,00702	-0,00749	0,00704

Tabela V.3-a

ANDAR	FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDA (TF/CM)		
	TSO e BISWAS	RUTENBERG	ROSMAN
BASE	0,0	0,0	0,0
1	0,00976	0,0000507	0,00978
2	0,01709	0,01336	0,01712
3	0,02243	0,01947	0,02248
4	0,02617	0,02382	0,02623
5	0,02860	0,02674	0,02867
6	0,02998	0,02852	0,03005
7	0,03051	0,02937	0,03059
8	0,03040	0,02949	0,03045
9	0,02970	0,02904	0,02979
10	0,02863	0,02815	0,02871
11	0,02725	0,02692	0,02734
12	0,02566	0,02548	0,02575
13	0,02395	0,02389	0,02403
14	0,02219	0,02223	0,02227
15	0,02045	0,02065	0,02053
16	0,01882	0,01916	0,01890
17	0,01738	0,01788	0,01746
18	0,01622	0,01690	0,01630
19	0,01543	0,01633	0,01551
20	0,01514	0,01631	0,01522

Tabela V.3-b

V.2 - Exemplo nº 2

As Tabelas (V.4) e (V.5) mostram os resultados en contrados para as rotações dos diafragmas e para a força cortante distribuída nos lintéis, para um núcleo estrutural, cujas dimensões são as mesmas que as do exemplo anterior, a penas alterando-se o comprimento dos lintéis de 200 para 100 cm.

A Tabela (V.4) mostra os resultados obtidos consi derando para os lintéis uma altura de 15 cm e a Tabela (V.5), uma altura de 30 cm.

Novamente, foi adotado $k = 0$, para a determina- ção do parâmetro de rigidez dos lintéis.

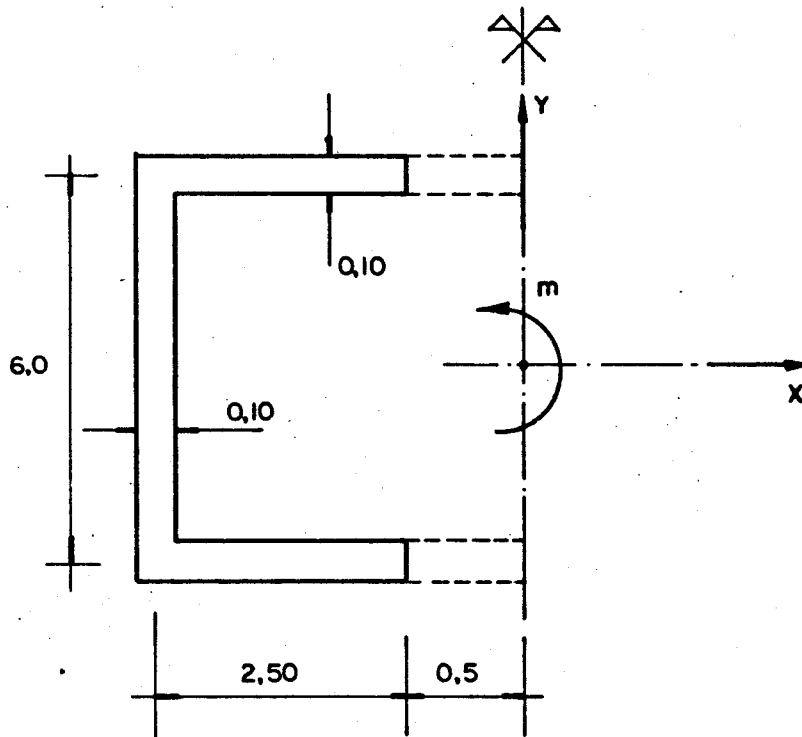


FIG. V. 2 - PLANTA DA ESTRUTURA EXEMPLO

ANDAR	ROTAÇÕES DOS DIAFRAGMAS (rad)		
	TSO e BISWAS	RUTENBERG e TSO	ROSMAN
BASE	0,0	0,0	0,0
1	-0,00009	-0,00009	0,00009
2	-0,00034	-0,00035	0,00034
3	-0,00072	-0,00074	0,00072
4	-0,00121	-0,00125	0,00121
5	-0,00177	-0,00183	0,00179
6	-0,00240	-0,00248	0,00242
7	-0,00308	-0,00318	0,00309
8	-0,00379	-0,00391	0,00381
9	-0,00451	-0,00466	0,00453
10	-0,00525	-0,00541	0,00527
11	-0,00598	-0,00617	0,00601
12	-0,00670	-0,00692	0,00674
13	-0,00742	-0,00765	0,00746
14	-0,00811	-0,00837	0,00816
15	-0,00879	-0,00906	0,00884
16	-0,00944	-0,00974	0,00950
17	-0,01008	-0,01040	0,01014
18	-0,01070	-0,01104	0,01077
19	-0,01131	-0,01167	0,01139
20	-0,01191	-0,01229	0,01199

Tabela V.4

ANDAR	ROTAÇÕES DOS DIAFRAGMAS (rad)		
	TSO e BISWAS	RUTENBERG e TSO	ROSMAN
BASE	0,0	0,0	0,0
1	-0,00004	-0,00005	0,00004
2	-0,00014	-0,00018	0,00014
3	-0,00029	-0,00036	0,00029
4	-0,00045	-0,00057	0,00045
5	-0,00063	-0,00080	0,00063
6	-0,00082	-0,00103	0,00082
7	-0,00100	-0,00126	0,00100
8	-0,00118	-0,00148	0,00118
9	-0,00136	-0,00169	0,00136
10	-0,00152	-0,00190	0,00152
11	-0,00167	-0,00208	0,00167
12	-0,00180	-0,00225	0,00180
13	-0,00193	-0,00240	0,00193
14	-0,00204	-0,00254	0,00204
15	-0,00213	-0,00266	0,00214
16	-0,00222	-0,00276	0,00222
17	-0,00229	-0,00285	0,00229
18	-0,00235	-0,00293	0,00236
19	-0,00241	-0,00300	0,00241
20	-0,00246	-0,00307	0,00246

Tabela V.5-a

ANDAR	FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDA (TF/CM)		
	TSO e BISWAS	RUTENBERG e TSO	ROSMAN
BASE	0,0	0,0	0,0
1	0,01634	0,001957	0,01635
2	0,02716	0,01705	0,02718
3	0,03399	0,02689	0,03402
4	0,03795	0,03296	0,03798
5	0,03982	0,03633	0,03985
6	0,04019	0,03775	0,04023
7	0,03948	0,03778	0,03952
8	0,03800	0,03683	0,03805
9	0,03598	0,03519	0,03602
10	0,03358	0,03306	0,03362
11	0,03092	0,03062	0,03096
12	0,02812	0,02799	0,02815
13	0,02524	0,02527	0,02527
14	0,02237	0,02257	0,02240
15	0,01959	0,01997	0,01962
16	0,01698	0,01760	0,01700
17	0,01464	0,01558	0,01466
18	0,01272	0,01409	0,01274
19	0,01137	0,01336	0,01139
20	0,01086	0,01372	0,01088

Tabela V.5-b

CONCLUSÃO

Observando os resultados encontrados nos exemplos feitos ao final dos capítulos II e III, pode-se notar a influência da consideração, na rigidez do lintel, de sua deformação devido ao esforço cortante.

Os resultados segundo BARBOSA (1), mostrados nas tabelas (II.1), (III.1) e (IV.1) para o ângulo de giro, calculados usando-se a Análise Matricial, não consideravam na matriz de rigidez dos lintéis, a influência da deformação por força cortante.

Os resultados segundo TSO e BISWAS (2), mostrados na tabela (II.1) quando calculados considerando para o lintel somente sua deformação por flexão (para $k = 0$) se aproximam dos encontrados por BARBOSA (1). Os encontrados por RUTENBERG e TSO (4), dados na tabela (III.1), com a mesma consideração para o lintel ($k=0$), são maiores devido a consideração da deformação por força cortante das paredes dos pilares, tornando assim a estrutura do núcleo mais deformável.

Observa-se também, através do exemplo nº 01, tabelas (V.1), (V.2) e (V.3), que com o aumento da rigidez dos lintéis, aumenta também a diferença entre os resultados obtidos segundo TSO e BISWAS (2) e RUTENBERG e TSO (4).

Comparando-se as expressões (II.3-5) e (IV.5-06), que fornecem a rotação da estrutura ao nível de cada andar, segundo TSO e BISWAS (2) e ROSMAN (6) respectivamente verifica-se sua identidade, caso fosse desprezada a parcela $(G \cdot J_t)$, referente à torção livre da expressão (II.3-5).

ROSMAN (6) chegou à mesma expressão que TSO e BISWAS (2), utilizando o processo da energia e desprezando o momento de torção livre.

Através dos exemplos feitos, pode-se notar a pequena influência desta parcela nos resultados obtidos.

O coeficiente δ , usado por ROSMAN na expressão (IV.5-06), quantifica a influência do lintel na rigidez do núcleo.

APÊNDICE A - RESUMO DA TEORIA DE FLEXO-TORÇÃO

A-1 - INTRODUÇÃO

Neste Apêndice é apresentado um resumo da Teoria das Barras de Secção Delgada ou Teoria de Flexo-Torção com base em RACHID (7) e SCHIEL (8). O comportamento dos pilares ou paredes que compõem o núcleo estrutural, estudado neste trabalho, é suposto, similar ao comportamento das vigas de secção aberta de paredes finas, que são tratadas nesta teoria.

Considere-se a viga de secção aberta de paredes finas apresentada na figura (A-1.1).

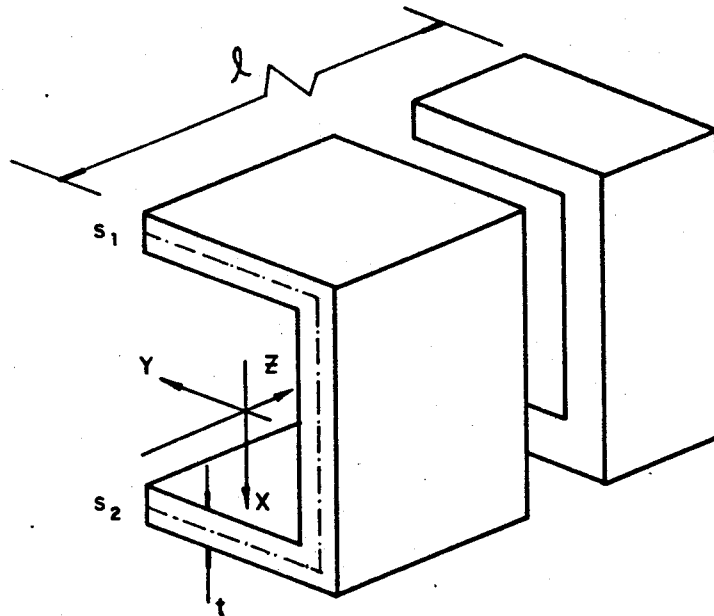


FIG. A-1.1 - SISTEMAS DE EIXOS "XYZ"

A viga será referida a um sistema de eixos XYZ, sendo X e Y eixos principais de inércia da secção e Z um eixo longitudinal passando pelos centros de gravidade das secções transversais.

Na figura A-1.1 está representada também, a "linha do esqueleto da secção", que é uma linha que passa pelos pontos médios da espessura "t". Define-se ainda uma ordenada "s" na linha do esqueleto, com origem "O_s" a ser estabelecida convenientemente.

A espessura "t" pode variar com "s" e o elemento de área da secção é dado por:

$$dS = t ds \quad (\text{A.I-01})$$

As extremidades da linha do esqueleto tem coordenadas "s = s₁" e "s = s₂".

Supõe-se que a viga não varie de secção com a coordenada "z", que a espessura "t" é bem menor que as dimensões do esqueleto, que por sua vez são bem menores que o comprimento "l" da viga e que a secção é indeformável no seu plano, portanto o seu deslocamento nesse plano será um deslocamento de corpo rígido.

A-2 - CENTRO DE TORÇÃO OU DE CISALHAMENTO

O centro de torção ou de cisalhamento é o ponto do plano da secção transversal por onde deve passar a linha de ação de uma carga transversal para que a viga fique solicitada somente à flexão e não à torção.

Da Resistência dos Materiais sabe-se que as tensões de cisalhamento provocadas por uma força cortante "Q" são dadas por:

$$\tau_Q = \frac{Q M_s}{t I} \quad (\text{A-2.01})$$

onde M_s é o momento estático e I, o momento de inércia, tomados em relação aos eixos apropriados.

Para um carregamento paralelo ao plano XZ, deve-se fazer em A-2.01:

$$Q = Q_x$$

$$I = I_y \quad (A-2.02)$$

$$M_s = \int_{s_1}^s x \, dS$$

A substituição de A-1.01 e A-2.02 em A-2.01 fornece:

$$\tau_{Qx} = \frac{Q_x}{I_y t} \int_{s_1}^s x \, t \, ds \quad (A-2.03)$$

A condição que fornece um dos lugares geométricos do centro de torção é que a resultante dos momentos das tensões τ_{Qx} , supostos uniformemente distribuídos na espessura t , em relação ao centro de torção seja nula.

Tem-se então:

$$\int_{s_1}^{s_2} \tau_{Qx} \, dS \, n = 0 \quad (A-2.04)$$

onde n é a distância do centro de torção à tangente ao esqueleto, conforme mostra a figura (A-2-1.a)

Substituindo A-2.03 em A-2.04:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{s_1}^s x \, t \, ds \right) n \, dS = 0 \quad (A-2.05)$$

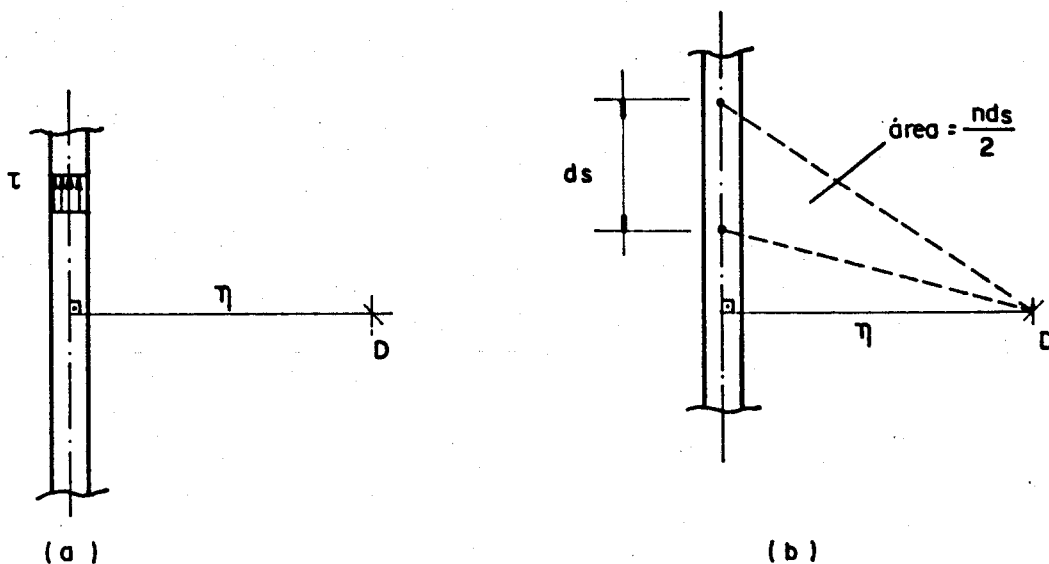


FIG. A-2-1- ÁREA SETORIAL

A equação A-2.05, após uma integração por partes e a devida simplificação se transforma em:

$$\int_S \left(\int_{s_1}^s n ds \right) x dS = 0 \quad (\text{A-2.06})$$

Supondo agora um carregamento paralelo ao plano YZ, tem-se por um procedimento análogo ao anterior, o segundo lugar geométrico do centro de torção dado por:

$$\int_S \left(\int_{s_1}^s n ds \right) y dS = 0 \quad (\text{A-2.07})$$

Definindo-se como Área Setorial a seguinte característica geométrica:

$$\omega = \int_{s_1}^s n dS \quad (\text{A-2.08})$$

A área setorial, ω , é uma função da ordenada s e a razão de seu nome, provém da propriedade esquematizada na figura A-2.1-b, o elemento de área setorial " $d\omega$ " é o dobro da área do setor elementar com polo no centro de torção, D , e que compreende o arco elementar " ds ".

Substituindo-se a equação A-2.08 em A-2.06 e 07 tem-se as duas condições que determinam a posição do centro de torção, como:

$$\int_S \omega x dS = 0 \quad (A.2.09)$$

$$\int_S \omega y dS = 0$$

onde se subentende que as integrais devem ser extendidas a toda a secção.

A origem O_s da ordenada s não influi nas equações A-2.09, pois a mudança de origem acarretaria um acréscimo de uma constante na área setorial; essa constante daria uma contribuição nula para as integrais, por ser nulo o momento estático quando se considera a secção inteira.

Em vista do exposto, para facilitar o desenvolvimento, a origem O_s é escolhida de maneira a satisfazer a condição:

$$\int_S \omega dS = 0 \quad (A-2.10)$$

Caso se tenha a área setorial $\bar{\omega}$ com origem arbitrária e se queira a área setorial ω satisfazendo a equação A-2.10, se faz

$$\omega = \bar{\omega} + C \quad (A-2.11)$$

A aplicação da equação A-2.10 fornece o valor da constante C de A-2.11:

$$C = -\frac{1}{S} \int_S \bar{\omega} dS \quad (A-2.12)$$

A-3 - FÓRMULAS PARA AS COORDENADAS DO CENTRO DE TORÇÃO

A forma de apresentação das equações A-2.09 impede sua aplicação direta na determinação do centro de torção, mas uma interpretação geométrica da área setorial ω , fornecerá a marcha de cálculo para a sua obtenção.

A figura A-3.1 mostra um trecho de esqueleto com origem $O_s(x_o, y_o)$ e um ponto genérico $Q(x, y)$. Pelo centro de torção, $D(X_D, Y_D)$ e pelos pontos O_s e Q , traçam-se retas paralelas aos eixos principais de inércia X e Y .

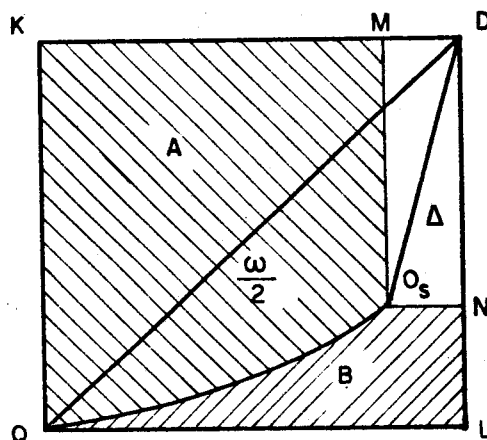


FIG. A-3.1

Chamando-se de Δ a área do triângulo DMO_s (ou DNO_s) e sendo a área do quadrilátero $DKQL$ igual ao dobro da área do triângulo DQL , pode-se escrever:

$$A + B + 2\Delta = 2\left(\frac{\omega}{2} + B + \Delta\right) \quad (\text{A-3.01})$$

onde A e B são as áreas hachuradas na figura.

Da equação A-3.01 se obtém:

$$\omega = A - B \quad (\text{A-3.02})$$

Considere-se agora a figura A-3.2, onde foi escolhido arbitrariamente um polo provisório $P(x_p, y_p)$. Indicando com ω_p , a área setorial com polo provisório em P, pode-se escrever, considerando a equação A-3.02 aplicada à figura A-3.2:

$$\omega_p = A + (y - y_o)(x_D - x_p) - B - (x - x_o)(y_D - y_p) \quad (\text{A-3.3})$$

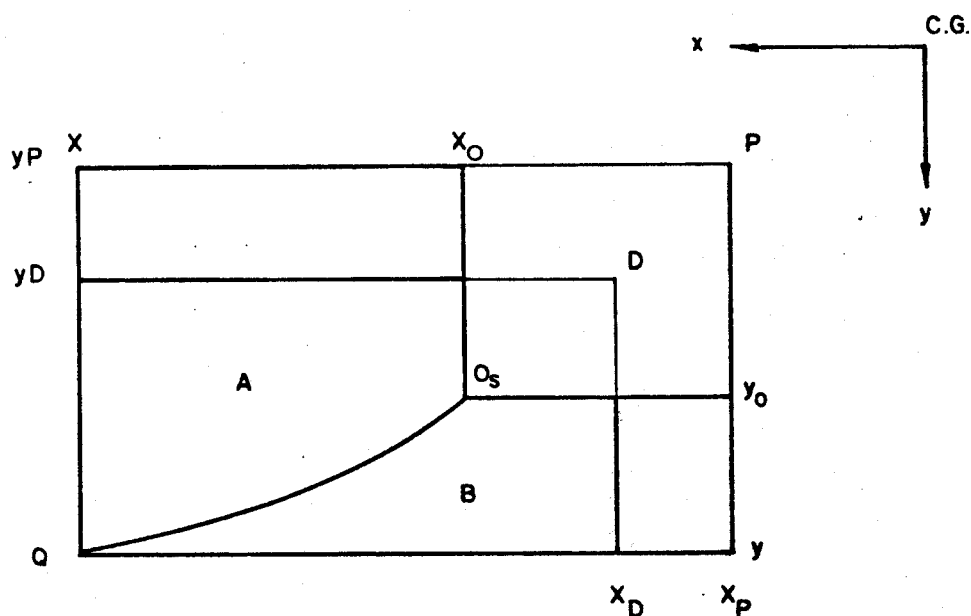


FIG. A - 3.2

Rearranjando-se a equação A-3.3 e utilizando A-3.2 chega-se a:

$$\omega = \omega_p + (x - x_o)(y_D - y_p) - (y - y_o)(x_D - x_p) \quad (\text{A-3.4})$$

Sendos os eixos X e Y, eixos principais de inércia da secção transversal, então valem:

$$\int_S x^2 dS = I_y$$

$$\int_S y^2 dS = I_x$$

$$\int_S x dS = \int_S y dS = \int_S xy dS = 0$$

(A-3.5)

Substituindo-se as equações A-3.4 e A-3.5 em A-2.09, têm-se as coordenadas do centro de torção para um sistema de eixos no centro de gravidade com X e Y eixos principais de inércia, dadas por:

$$x_D = x_p + \frac{1}{I_x} \int_S \omega_p y dS$$

$$y_D = y_p - \frac{1}{I_y} \int_S \omega_p x dS$$

(A-3.06)

A-4 - TORÇÃO UNIFORME OU LIVRE OU DE SAINT VENANT

A-4.1 - Condições para a torção livre

Ocorre a torção livre ou uniforme quando são satisfeitas as seguintes condições:

a) a secção é constante com o eixo Z, onde Z é o eixo que passa pelos centros de gravidade da secção transversal;

b) a viga é solicitada por um momento torçor M_t constante, resultante da aplicação de dois momentos externos iguais, mas de sentidos contrários nas secções extremas da mesma;

c) não há vínculos que impeçam deslocamentos longitudinais.

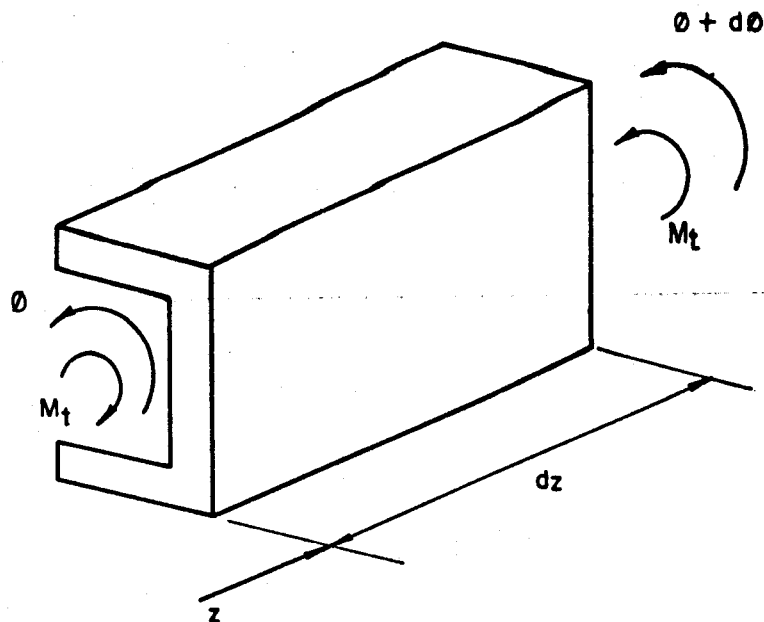


FIG. A-4.1— CONVENÇÃO DE SINAIS PARA M_t e ϕ

Da Resistência dos Materiais tem-se que a derivada do ângulo de giro, na torção livre, é dada por:

$$\phi' = \frac{M_t}{G J_t} \quad (\text{A-4.01})$$

onde J_t é o momento de inércia à torção da secção transversal e G o módulo de elasticidade transversal.

Admite-se que a tensão tangencial é linearmente distribuída na espessura, sendo nula no esqueleto e tendo os seus valores máximos nas bordas, dados por:

$$\tau = \frac{M_t}{J_t} \cdot t \quad (\text{A-4.02})$$

A convenção de sinais usada neste estudo será: um momento torçor M_t que solicita um parafuso direito no sentido de apertá-lo é positivo e uma rotação anti-horária em torno do eixo Z é positiva, para um observador olhando no sentido positivo deste eixo.

Esta convenção está ilustrada na figura A-4.1.

A-4.2 - Deslocamentos

Serão considerados agora os deslocamentos "u" na direção de "z" e "v" na direção de "s".

Devido a uma rotação ϕ da secção em torno do centro de torção, um ponto genérico Q do esqueleto sofrerá o deslocamento QQ' , conforme a figura A-4.2

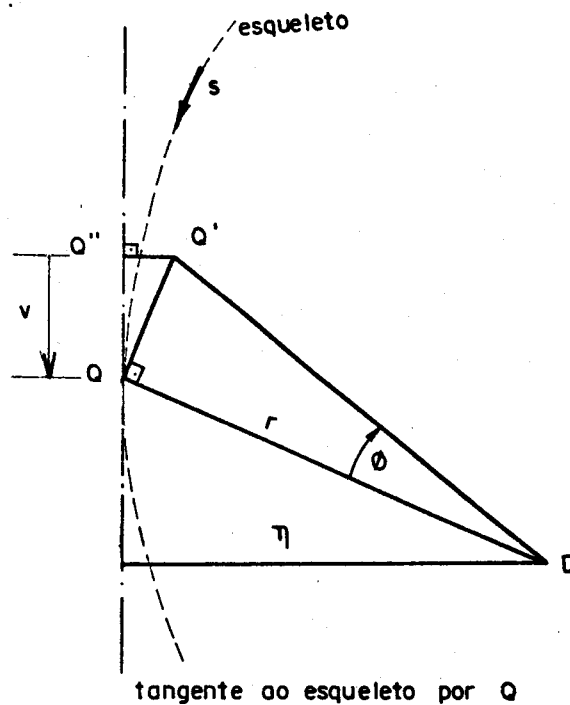


FIG. A-4.2

Para ângulos pequenos

$$\overline{QQ'} = r \cdot \phi \quad (A-4.03)$$

onde r é o comprimento do raio vetor que une o centro de torção ao ponto genérico Q do esqueleto.

O deslocamento v na direção da tangente ao esqueleto é dado pela projeção de $\overline{QQ'}$ sobre esta tangente, ou seja:

$$v = - r \phi \quad (A-4.04)$$

onde n é a distância entre a tangente no ponto Q e o centro de torção. Este deslocamento é negativo devido à convenção de sinais para ϕ e para a coordenada s (positiva quando o raio vetor gira no sentido horário para um observador olhando no sentido positivo do eixo z).

Derivando-se a equação A-4.04 em relação a z , obtêm-se:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -n\phi' \quad (\text{A-4.05})$$

Seja γ , a distorção de um elemento $dzds$ situado no esqueleto. Da Teoria da Elasticidade

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{A-4.06})$$

Como a tensão tangencial é nula no esqueleto, pela Lei de Hooke se conclui que a distorção também o será. Nesse caso, a utilização de A-4.05 em A-4.06 e lembrando que na torção livre o deslocamento longitudinal não é função de z , tem-se:

$$\frac{du}{ds} = n\phi' \quad (\text{A-4.07})$$

Efetuando-se agora a integração em s , desde a origem O_s até o ponto genérico Q , obtém-se:

$$u = \phi' \int_{O_s}^Q nds \quad (\text{A-4.08})$$

Da equação A-2.08 pode-se escrever A-4.08, como:

$$u = \omega \phi' \quad (A-4.09)$$

Portanto os deslocamentos longitudinais são contados a partir do ponto O_s no sentido positivo de z .

A fórmula A-4.09 fornece a deformação de qualquer ponto do esqueleto fora do plano, chamada de "empenamento", que na torção livre é constante em todas as secções ao longo de z .

A-5 - TORÇÃO NÃO UNIFORME OU FLEXO-TORÇÃO

A-5.1 - Hipóteses de Cálculo

Neste estudo, apenas serão consideradas as barras de secção constante, com isso a ocorrência de flexo-torção fica limitada aos casos em que o momento torçor não é constante e aos casos em que a vinculação da barra impede os deslocamentos longitudinais de alguma secção.

A suposição básica para resolver o problema de flexo-torção é que a equação A-4.09 continua válida, agora com a particularidade de que a derivada do ângulo de giro não é mais constante com z , implicando em deslocamentos longitudinais dependentes de z .

A-5.2 - Tensão Normal de Flexo-Torção

Serão desprezadas as tensões normais, com exceção daquelas em cortes transversais.

Chamando de σ_z e ϵ_z , a tensão normal e a deformação longitudinal, tem-se, da Lei de Hooke e da Teoria da Elasticidade, que:

$$\sigma_z = E \epsilon_z$$

(A-5.01)

$$\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}$$

onde E , é o módulo de elasticidade longitudinal.

Combinando-se A-5.01 com A-4.09, tem-se:

$$\sigma_z = E \omega \phi'' \quad (\text{A-5.02})$$

A proporcionalidade entre σ_z e ω indica, utilizando-se as equações A-2.09 e A-2.10, que as tensões longitudinais não tem força e nem momentos resultantes na secção, sendo sua resultante um novo esforço solicitante denominado "Bimomento" e definido mais a frente. A tensão longitudinal em um ponto da secção será considerada positiva se for de tração.

A-5.3 - Tensão Tangencial de Flexo-Torção

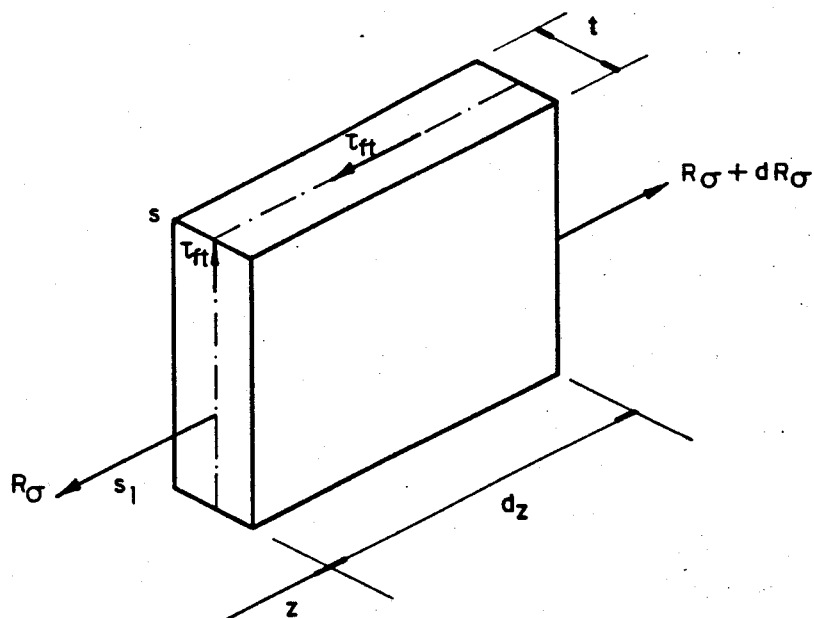


FIG. A- 5.01

Considerando-se o equilíbrio longitudinal do elemento de comprimento dz representado na figura A-5.1 conclui-se a existência da tensão tangencial em cortes longi-

tudinais como o indicado. Pelo Teorema de Cauchy, essa tensão também atuará na secção transversal. Essa tensão representada na Figura A-5.1 por τ_{ft} , será suposta uniforme na espessura e recebe o nome de tensão tangencial de flexo-torção.

Seja R_{σ} , a resultante das tensões σ_z aplicadas na face de ordenada z do elemento, tem-se, utilizando A-5.02 que:

$$R_{\sigma} = E\phi'' \int_{s_1}^s \omega \, dS \quad (A-5.03)$$

Fazendo-se o equilíbrio do elemento na direção longitudinal e utilizando-se a A-5.03, chega-se a:

$$\tau_{ft} = \frac{E\phi'''}{t} \int_{s_1}^s \omega \, dS \quad (A-5.04)$$

As tensões τ_{ft} são suficientemente pequenas para não ameaçar a base de cálculo da Teoria de Flexo-torção, ou seja a distorção nula no esqueleto.

A-5.4 - Momento de Flexo-Torção

Apesar de serem pequenas, as tensões tangenciais de flexo-torção, estas podem dar uma contribuição apreciável para o momento torçor. Chamando de M_{ft} a contribuição das tensões tangenciais de flexo-torção, tem-se que:

$$M_{ft} = \int_{s_1}^{s_2} n \tau_{ft} \, dS \quad (A.5.05)$$

Usando-se na A-5.05 as equações A-1.01 e A-5.04, tem-se:

$$M_{ft} = E\phi''' \int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{s_1}^s \omega dS \right) nds \quad (A-5.06)$$

Efetuando-se a integração por partes e, usando A-2.08 e A-2.10, obtêm-se finalmente:

$$M_{ft} = - E\phi''' \int_{s_1}^{s_2} \omega^2 dS \quad (A-5.07)$$

São introduzidas as seguintes características de secção denominadas por analogia com expressões já conhecidas da Resistência dos Materiais:

a) momento setorial de inércia

$$J_{\omega} = \int_S \omega^2 dS \quad (A-5.08)$$

b) momento estático setorial

$$S_{\omega} = \int_{s_1}^s \omega t ds \quad (A-5.09)$$

com essas novas características a expressão A-5.07 pode ser escrita, como

$$M_{ft} = - EJ_{\omega} \phi''' \quad (A-5.10)$$

Substituindo-se as expressões A-5.08 e A-5.09 em A-5.04, vem

$$\tau_{ft} = - \frac{M_{ft} S_{\omega}}{t J_{\omega}} \quad (\text{A-5.11})$$

A-5.5 - Equação Diferencial da Flexo-Torção

O momento torçor M_t será agora definido como a soma de duas parcelas, ou seja

$$M_t = M_{\ell} + M_{ft} \quad (\text{A-5.12})$$

onde M_{ℓ} , é o momento da torção livre e M_{ft} o de flexo-torção. Lembrando que M_{ℓ} é apenas uma parte de M_t , a equação A-4.01 deve ser transformada em

$$M_{\ell} = G J_t \phi' \quad (\text{A-5.13})$$

As equações A-5.10 e A-5.13 substituídas em A-5.12 fornecem a equação diferencial no ângulo de giro:

$$M_t = G J_t \phi' - E J_{\omega} \phi''' \quad (\text{A-5.14})$$

Encontrado o ângulo de giro, pela resolução da equação diferencial está resolvido o problema, uma vez que é possível encontrar todas as grandezas envolvidas.

É corrente apresentar-se a equação A-5.14 em função do momento torçor distribuído, m , ou seja

$$m = M_t' = G J_t \phi'' - E J_{\omega} \phi^{IV} \quad (\text{A-5.15})$$

onde a convenção para os sentidos positivos de m e M_t é apresentada na figura A-5.2

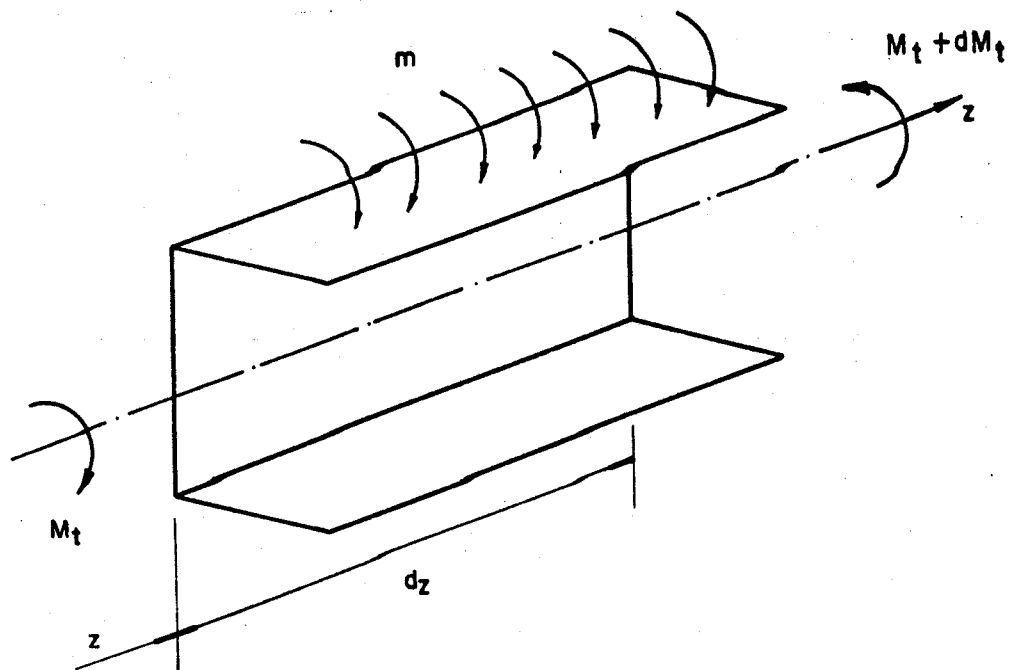


FIG. A.-5.2 - CONVENÇÃO DE MOMENTOS TORÇORES POSITIVOS

A-5.6 - Bimomento

Define-se o bimomento como

$$B = \int_S \sigma_z \omega dS \quad (\text{A-5.16})$$

Substituindo-se as equações A-5.02 e A-5.08 na anterior, tem-se:

$$B = E J_\omega \phi'' \quad (\text{A-5.17})$$

Pela substituição de A-5.17 em A-5.02 se obtém a expressão da tensão normal de flexo-torção em função do bi momento

$$\sigma_z = \frac{B}{J_\omega} \cdot \omega \quad (\text{A-5.18})$$

que é análoga à expressão da tensão normal no caso de flexão simples.

Derivando-se a equação A-5.17 e comparando-a com A-5.10, conclui-se que

$$M_{ft} = - B' \quad (\text{A-5.19})$$

A equação diferencial agora pode ser escrita como

$$M_t = G J_t \phi' - B' \quad (\text{A-5.20})$$

Derivando-se uma vez esta última expressão em relação ao ângulo de giro ϕ , tem-se

$$M'_t = G J_t \phi'' - B'' \quad (\text{A-5.21})$$

Usando-se a relação entre a segunda derivada do ângulo de giro e o bimomento dada em A-5.17, tem-se

$$M'_t = \frac{G J_t}{E J_\omega} B - B'' \quad (\text{A-5.22})$$

que também pode ser escrita como

$$M'_t = \frac{B}{r^2} - B'' \quad (\text{A-5.23})$$

sendo

$$r^2 = \frac{E J_\omega}{G J_t} \quad (\text{A-5.24})$$

Sendo $M'_t = \frac{dM_t}{dz} = m$ então

$$m = \frac{B}{r^2} - B'' \quad \text{ou}$$

$$-r^2 m = r^2 B'' - B$$

(A-5.25)

APÊNDICE B - SOLUÇÃO PARA CAIXÃO FECHADO

A solução para uma secção fechada de parede fina apresentada por ODEN (5), baseia-se na validade da expressão A-5.02 da teoria de flexo-torção para secções abertas de paredes finas e considerando que a distorção no esqueleto não seja nula.

Da relação entre tensões e deslocamentos

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau}{G} \neq 0$$

Sendo $v(s, z) = -n(s)\phi(z)$ dada em A-4.04 então

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\tau}{G} + \frac{\partial [n(s)\phi(z)]}{\partial z} = \frac{\tau}{G} + n(s)\phi'(z)$$

Integrando-se

$$\int_s \frac{\partial u}{\partial s} ds = \int_s \frac{\tau}{G} ds + \int_s n(s)\phi'(z) ds$$

Sabendo que

$$\int \frac{\partial u}{\partial s} ds = 0$$

Então

$$\int \frac{\tau}{G} ds + \phi'(z) \int n(s) ds = 0 \quad (B-1)$$

Fazendo um corte imaginário (longitudinal) e promovendo o equilíbrio em z do elemento, resulta

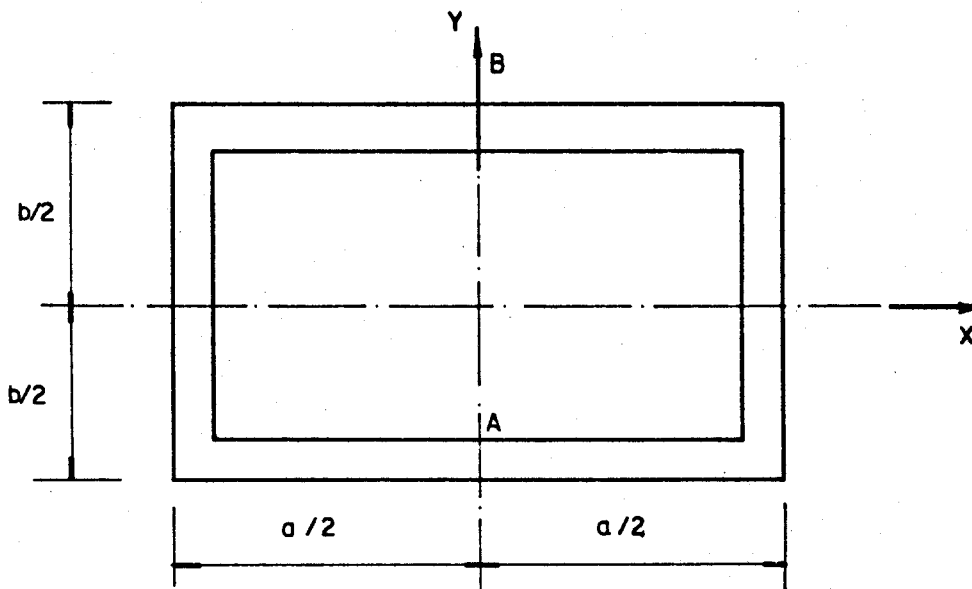


FIG. B-1 - SECÇÃO FECHADA

$$R_{\sigma} + dR_{\sigma} - R_{\sigma} + qdz - \tau t dz = 0 \quad (\text{B-2})$$

donde

$$\tau \cdot t = \frac{dR_{\sigma}}{dz} + q \quad (\text{B-3})$$

sendo R_{σ} a resultante das tensões σ_z e q a força de iteração no corte imaginário.

Usando as expressões A-5.3 e A-5.9 na B-3, tem-se

$$\tau \cdot t = E\phi''' S_{\omega} + q \quad (\text{B-4})$$

Substituindo B-3 em B-1, resulta:

$$\oint \frac{q}{tG} ds + \oint \frac{E\phi'''}{tG} S_{\omega} ds + \phi' \oint \omega ds = 0 \quad (\text{B-5})$$

De B-5, tem-se uma expressão para q em função de ϕ , o ângulo de giro da secção, ou

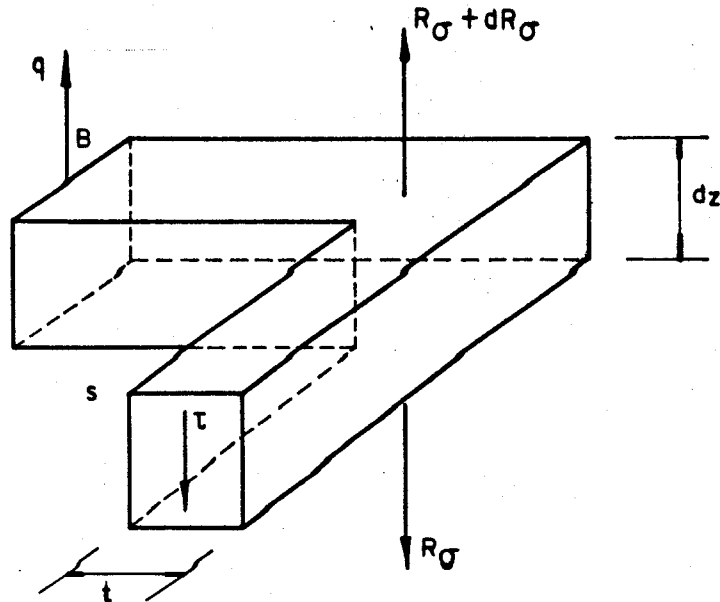


FIG. B-2 - EQUILÍBRIO DO ELEMENTO EM z

$$q = -E\phi'''' \frac{\int_S \omega \frac{ds}{t}}{\int \frac{ds}{t}} - G\phi' \frac{\int n ds}{\int \frac{ds}{t}} \quad (\text{B-6})$$

Calculando o Momento torçor interno gerado pelas tensões internas

$$M_t = -\int \tau t n ds + 2 G J_t \phi' \quad (\text{B-7})$$

onde J_t é o momento de inércia à torção da secção de A até B.

Substituindo em B-7, a expressão B-4, tem-se

$$M_t = -\int E\phi'''' S_\omega n ds - \int q n ds + 2 G J_t \phi' \quad (\text{B-8})$$

Substituindo agora em B-8, a equação B-6, tem-se

$$M_t = -E\phi'''' \Gamma + G J_t^* \phi' \quad (\text{B-9})$$

onde

$$\Gamma = 2 \int_A^B S_{\omega} n ds - 2 \Omega \frac{\int_A^B S_{\omega} \frac{ds}{t}}{\int_A^B \frac{ds}{t}} \quad (\text{B-10})$$

$$J^* = 2 J_t + \frac{2 \Omega^2}{\int_A^B \frac{ds}{t}} \quad (\text{B-11})$$

$$\Omega = a.b \quad (\text{B-12})$$

BIBLIOGRAFIA

- 1 - BARBOSA, J.A. - Edifícios com Paredes de Secção Aberta Contraventadas por Lintéis sob Carga Lateral. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, fev. 1978.
- 2 - TSO, W.K. and BISWAS, J.K. - Analysis of Core Wall Structure Subjected to Applied Torque. Build Sci.Vol.8, pp 251.257, 1973.
- 3 - VLASOV, V.Z. - Thin-Walled Elastic Beams. Israel, Israel Program for Scientific Translation, 1961.
- 4 - RUTENBERG, A.V. and TSO, W.K. - Torsional Analysis of Perforated Core Structure. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 101, N^o ST3, pp 539-550, MARCH 1975.
- 5 - ODEN, J.T. - Mechanics of Elastic Structures, McGraw-Hill Book Company, pp 218-224, 1967.
- 6 - ROSMAN, R. - Analysis of Pierced Torsion-Boxes. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 65 (3-4), pp 365-397, 1969.
- 7 - RACHID, M. - Instabilidade de Barras de Secção Delgada. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, fev. 1975.
- 8 - SCHIEL, F. - Barras de Secção Delgada. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1964/1965.
- 9 - ROSMAN, R. - Torsion of Perforated Concrete Shafts - Journal of the Structural Division, ASCE - Vol. 95, N^o ST5, pp 991-1010, May 1969.