

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
ÁREA DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

UM ESTUDO DE PERTURBAÇÕES DEVIDAS A  
ENGASTAMENTO ELÁSTICO  
EM ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS ALTOS  
COM A TÉCNICA CONTÍNUA DE ANÁLISE

**DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS**

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

ENG<sup>o</sup> JOÃO CARLOS ANTUNES DE OLIVEIRA E SOUZA

SÃO CARLOS, MARÇO DE 1986

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
ÁREA DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

UM ESTUDO DE PERTURBAÇÕES DEVIDAS A ENGASTA  
MENTO ELÁSTICO EM ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS  
ALTOS COM A TÉCNICA CONTÍNUA DE ANÁLISE

Eng<sup>o</sup> João Carlos Antunes de Oliveira e Souza

Tese apresentada à Escola de Engenharia de  
São Carlos, da Universidade de São Paulo, co  
mo parte dos requisitos para a obtenção do  
título de Doutor em Engenharia Civil.

ORIENTADOR

Prof. Dr. Eddie Mancini

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Eddie Mancini

Prof. Dr. José Elias Laier

Prof. Dr. Ilio Montanari

Prof. Dr. Tioeturo Yagui

Prof. Dr. Mário Franco

Dedicada a

Helena

## AGRADECIMENTOS

Ao prof. Dr. Eddie Mancini pela orientação e sobretudo pelo entusiasmo transmitido durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos prezados colegas prof.<sup>a</sup> Helena M.C.C. Antunes, prof. Wilson Sérgio Venturini e prof. José Elias Laier, pelo apoio em horas difíceis.

Aos funcionários do Departamento de Estruturas, Sra. Wilma Provinciali Vall, Srta. Silvana Flores, Sr. João Paulo Moretti e Srta. Sylvia Helena Moretti pelos trabalhos de datilografia e desenho.

## RESUMO

Neste trabalho são tratados, com a técnica contínua de análise, alguns problemas decorrentes do engastamento elástico de algumas associações de elementos estruturais, típicas de estruturas de edifícios altos. Inicialmente, através da associação de dois pilares-parede, são discutidas diversas possibilidades matemáticas, baseadas em fenômenos físicos, de contornar a incompatibilidade do equacionamento obtido quando se computa apenas a deformação por flexão das paredes, e se despreza a deformabilidade das lajes em seu plano. Em seguida são analisadas, computando adicionalmente as deformações devidas aos esforços cortantes, associações de pilares parede unidos por lintéis e associações de paredes compondo núcleos estruturais, de seção transversal aberta ou semi fechada por lintéis.

## ABSTRACT

This thesis is related to the analysis of the influence of elastic foundation, or another kind of possible foundation deformation in several types of simple structural elements association, typical of high building structures; the "continuous treatment" was emphasized in this work.

At first, by using the coupling of two shear-walls, several mathematical possibilities, based of course on physical phenomenons, are discussed, in order to offset the incompatibility of the equations obtained by computing only the flexural deformations, and by ignoring the in-plane deformation of the slabs. Secondly, now, in addition, computing the shear deformations, coupled shear-walls, joined by beams, are treated. Further, structural cores, with open or semi-closed transversal sections, are submitted to torsion, and several features of the structural behaviour are analysed; with the computation of shear deformation in the plane walls, a complete analysis is possible to be done in this case.

## ÍNDICE

I. GENERALIDADES .....	1
II. ASSOCIAÇÃO DE DUAS PAREDES .....	5
II.1. Introdução.....	5
II.2. Associação das duas paredes computando só as deformações por flexão .....	5
II.2.1. Condições de equilíbrio.....	6
II.2.2. Condições de equilíbrio do "contínuo- lajes".....	7
II.2.3. Deslocamentos das duas paredes na co ta z .....	7
II.2.4. Condição de compatibilidade de deslo- camentos horizontais.....	8
II.2.5. Obtenção de uma equação diferencial com uma só variável.....	8
II.2.6. Retorno à condição de compatibilidade	10
II.2.7. Condições de contorno.....	11
II.2.8. Esforços internos nas paredes.....	12
II.2.9. Considerações sobre o engastamento e lástico.....	12
II.3. Solução "a sentimento".....	14
II.4. Solução assumindo flexão local entre os anda- res.....	19
II.4.1. Problema (0).....	20
II.4.2. Problema (1).....	20
II.4.3. Problema (2).....	22
II.4.4. Cálculo de $\delta_1$ e $\delta_2$ .....	22
II.4.5. Montagem de resultados.....	23
II.4.6. Observações adicionais.....	24
II.4.7. Exemplo 1 - Comparação da solução do item II.4 com a solução do item II.3.	25
II.5. Associação das duas paredes computando só as deformações por flexão e assumindo lajes de- formáveis no seu plano.....	28

II.5.1. Obtenção de uma equação diferencial para o problema.....	29
II.5.2. Solução da equação diferencial.....	29
II.5.3. Retorno à condição de compatibilidade.....	34
II.5.4. Condições de contorno.....	35
II.5.5. Solução do sistema de equações para determinar as constantes, no caso de base elástica.....	36
II.5.6. Exemplo 2.....	42
II.6. Associação das duas paredes computando além das deformações de flexão as correspondentes a cisalhamento.....	47
II.6.1. Obtenção de uma equação diferencial a uma só variável para o problema..	47
II.6.2. Solução da equação diferencial.....	48
II.6.3. Relacionamento de todas as funções do problema com $p_2$ .....	49
II.6.4. Retorno à condição de compatibilidade.....	51
II.6.5. Condições de contorno.....	53
II.6.6. Determinação das constantes no caso de engastamento elástico.....	54
II.6.7. Exemplo 3 .....	58
II.7. Conclusões parciais.....	63
III. ASSOCIAÇÃO DE PAREDES UNIDAS POR LINTÉIS.....	64
III.1. Introdução.....	64
III.2. Definição da estrutura a ser analisada...	65
III.3. Condições de equilíbrio das paredes.....	66
III.4. Deslocamentos possíveis das bases.....	67
III.5. Deslocamentos possíveis das duas paredes, na linha média dos lintéis.....	68
III.6. Condições de compatibilidade de deslocamentos.....	70



III.7.	Obtenção de uma equação diferencial com uma só variável.....	71
III.8.	Solução da equação diferencial.....	78
III.9.	Relacionamento de todas as funções do problema com $n$ .....	80
III.10.	Introdução dos deslocamentos dos apoios....	92
III.11.	Condições de contorno relativas ao topo....	99
III.12.	Condições de contorno relativas à base.....	100
III.13.	Exemplo 4 .....	106
III.14.	Conclusões parciais.....	111
III.15.	Considerações adicionais quanto à formulação.....	112
IV. NÚCLEO BI-SIMÉTRICO SUBMETIDO A TORÇÃO.....		120
IV.1.	Introdução.....	120
IV.2.	Definição da estrutura a ser analisada.....	121
IV.3.	Condições de equilíbrio.....	122
IV.4.	Condições de equilíbrio horizontal do "contínuo-lajes" .....	123
IV.5.	Deslocamentos compatíveis nas fundações.....	124
IV.6.	Deslocamentos das paredes nas linhas de interseção.....	125
IV.7.	Condição de compatibilidade de deslocamentos horizontais das duas paredes.....	126
IV.8.	Condição de compatibilidade de deslocamentos verticais no centro dos lintéis.....	126
IV.9.	Condição de compatibilidade de deslocamentos verticais na junção das duas paredes.....	127
IV.10.	Obtenção de uma equação diferencial com uma só variável.....	127
IV.11.	Solução da equação diferencial em $p_2$ .....	136
IV.12.	Relacionamento de todas as funções do problema com $p_2$ .....	141
IV.13.	Introdução das rotações dos apoios.....	149
IV.14.	Condições de contorno.....	153

IV.14.1. Condições de contorno relacionadas ao topo.....	153
IV.14.2. Condições de contorno relacionadas às bases.....	155
IV.15. Exemplo 7.....	159
IV.16. Conclusões parciais.....	164
V. CONCLUSÕES GERAIS.....	165
BIBLIOGRAFIA.....	167

## CAPÍTULO I

### GENERALIDADES

A análise de estruturas de edifícios altos submetidos à ação de cargas laterais originadas da ação de vento, tem sido feita de maneira relativamente simples e elegante, com os diversos elementos estruturais supostos interconectados por um meio contínuo, que em princípio substituiria um sistema de lajes suficientemente próximas umas das outras, com a característica essencial de ter rigidez única e infinita em seu plano.

Algumas simplificações têm sido feitas na análise, não comprometendo em si a interpretação de comportamento geral da estrutura, e são responsáveis diretas pela desejada simplicidade de resultados. Assim, ao se tratar com pórticos planos como painéis de contraventamento, computa-se usualmente, nas necessárias compatibilizações de deslocamentos, sua rigidez ao cisalhamento horizontal; tratando-se com pilares-parede despreza-se a flexibilidade ao cisalhamento computando só a rigidez à flexão; tratando com núcleos estruturais abertos utiliza-se a conhecida teoria de VLASOV<sup>(9)</sup>, levando em conta a flexo-torção. Essas simplificações permitiram a análise de um sem-número de associações de elementos estruturais; em muitos casos os resultados foram muito interessantes no sentido de ajudar a compreender o comportamento estrutural; em muitos outros, ape-

sar da elegância de resultados e tratamentos matemáticos, a complexidade da formulação acaba invalidando o caráter prático da análise; programas de computador, com análise discreta, acabam se revelando como uma ferramenta bastante mais eficiente nesses casos.

Os diversos trabalhos desenvolvidos têm basicamente se restrito à análise elástica, dada a natureza dos carregamentos previstos, que tornariam imprudente a exploração do comportamento plástico dos materiais usuais, pela possibilidade bastante frequente de alternância e inversão de solicitações devidas ao vento.

Mesmo na análise elástica e mesmo tratando com as associações simples de elementos estruturais, alguns problemas têm ficado sem uma resposta convincente; é o caso dos engastamentos elásticos de núcleos estruturais ou de associações de pilares-parede. Este assunto foi tratado por diversos autores, alguns passando grosseiramente por cima de problemas como se não existissem; outros detetando incompatibilidades nas formulações montadas exclusivamente sobre condições de deformabilidade à flexão; outros verificando a ocorrência de perturbações locais importantes, tentando interpretar fisicamente o porquê dessas perturbações, sem entretanto desenvolverem modelos físico-matemáticos para explicá-las.

O presente trabalho tem por objetivo mostrar que existiriam diversas possibilidades de tratar esses engastamentos elásticos, através de equacionamento matematicamente compatível e ainda com os recursos simplistas típicos da análise contínua de estruturas de edifícios altos.

No capítulo II é considerada uma das mais simples associações de elementos estruturais, a associação de duas paredes em série, elasticamente engastadas à rotação nas bases. Inicialmente é apresentada a análise usual, conforme MANCINI<sup>(4)</sup>, computando exclusivamente a deformação por flexão, mostrando a incompatibilidade de deslocamentos, exceto para casos particulares em que houvesse uma "proporcionali-

dade" entre parâmetros relativos às paredes e parâmetros relativos às fundações; em seguida é introduzida uma correção grosseira, sugerida pelo mesmo autor, para o caso da inexistência da referida "proporcionalidade"; posteriormente são discutidas suas sugestões para a solução do problema.

A seguir, no mesmo capítulo II, são apresentadas três possibilidades de efetivamente resolver o problema. Uma primeira possibilidade seria decorrente de considerar a liberdade de uma flexão local dos pilares, entre andares consecutivos, mostrando a simplicidade da compatibilização de deslocamentos e da propagação das perturbações; utiliza técnicas de origem discreta provindas da estática clássica, mas permite introduzir correções a problemas tratados com a técnica contínua. Essa idéia seria apropriada para casos de pilares esbeltos relativamente à altura dos andares. Uma segunda possibilidade corresponde a considerar a deformabilidade elástica no plano das lajes, que seria válida para o caso de paredes excessivamente robustas a ponto de deformar essas lajes. Finalmente, uma terceira possibilidade, aparentemente mais geral para paredes usuais, computa as deformações correspondentes a esforço cortante com a teoria técnica de viga e coeficientes de correção dados por COWPER<sup>(8)</sup>; essas deformações são usualmente esquecidas, mas podem ter influência significativa no problema.

No capítulo III pretende-se exclusivamente estender essa última idéia ao caso de associação de pilares unidos por lintéis, com problemas semelhantes de incompatibilidade de deformações. Esse problema foi tratado por alguns autores como TSO<sup>(5)</sup>, que tratou da imposição de recalques de apoio, mas computando deformação axial das lajes e lintéis; TSO & CHAN<sup>(6)</sup>, COULL & CHANTAKSINOPAS<sup>(7)</sup> trataram o problema de engastamento elástico, computando inclusive deformação por esforço cortante, mas sem se preocuparem com a possibilidade de incompatibilidade nas bases, limitando seu estudo a casos de rotações sempre iguais para as sapatas

de fundação das paredes.

No capítulo IV é apresentada uma tentativa de solução para um núcleo estrutural com duplo eixo de simetria, tratado inicialmente por COULL<sup>(1)</sup>, que não se deteve em analisar as perturbações nas vizinhanças do engastamento elástico, decorrentes da total dependência entre os esforços internos nas paredes constituintes do núcleo; MANCINI<sup>(2)</sup> retomou esse problema, corrigiu algumas imperfeições na formulação e tentou introduzir alguns esforços internos de correção para compatibilizar a estrutura com as fundações; COSTA<sup>(3)</sup> tentou resolver o mesmo problema utilizando a teoria de VLASTOV<sup>(9)</sup>, mas continuou com os esforços internos nas paredes todos dependentes de uma única função, e não conseguiu se livrar da aparente necessidade de introdução de esforços internos de correção. Na formulação ora apresentada, ainda como tentativa, consegue-se, aparentemente, eliminar essa total dependência entre os esforços internos, impondo condições de contorno que satisfazem as condições de equilíbrio e compatibilidade.

As análises apresentadas se restringem, todas, a casos de carregamento muito simples, procurando evitar complicações algébricas maiores. O intuito é mais de mostrar caminhos viáveis do que fornecer subsídios para projeto. Um rumo para um aproveitamento melhor deste trabalho, com casos mais complexos de associação de elementos estruturais e com cargas mais gerais, fatalmente levaria, dada a complexidade algébrica das soluções matemáticas completas, à utilização de técnicas numéricas, como o uso de diferenças finitas ou polinômios de interpolação, o que no caso se procurou evitar.

## CAPÍTULO II

### ASSOCIAÇÃO DE DUAS PAREDES

#### II.1. INTRODUÇÃO

O problema de associação de duas paredes unidas por lajes indeformáveis no seu plano e infinitamente flexíveis fora do plano foi historicamente o primeiro problema resolvido via processo do meio contínuo, fornecendo resultados muito simples, quando são computadas exclusivamente as deformações por flexão, para o caso em que as paredes são engastadas na base. Caso se pense em introduzir recalques de rotação nos engastes, ou se pretenda computá-los como engastes elásticos, entretanto, essa simplicidade se perde na incompatibilidade das equações, conforme se verá no item II.2. Nos itens II.3, II.4 e II.5 serão introduzidas algumas possíveis maneiras de se tratar o problema, introduzindo nele graus adicionais de liberdade.

#### II.2. ASSOCIAÇÃO DAS DUAS PAREDES COMPUTANDO SÓ AS DEFORMAÇÕES POR FLEXÃO

Sejam as duas paredes da Fig. 2.1 engastadas elasticamente na base e constrangidas a ter a mesma elástica geral pela existência de lajes indeformáveis, aqui subs

tituídas por lintéis articulados. Sejam  $s_1$  e  $s_2$  as rigidezes à rotação do engaste de cada uma das paredes.

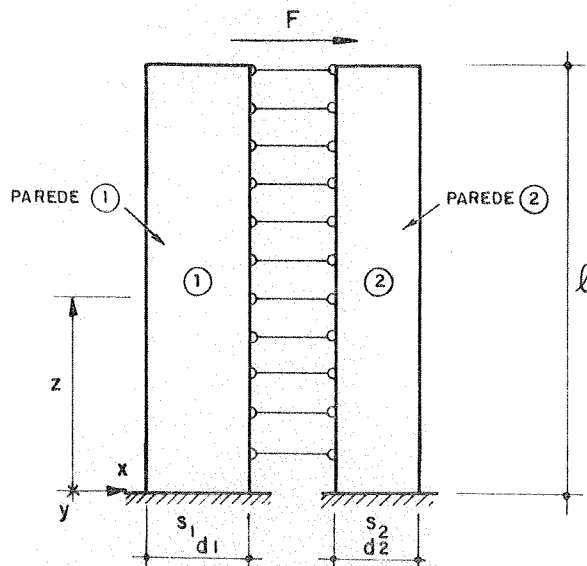


FIG. 2.1 - ESTRUTURA A SER ANALISADA

II.2.1 - CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO DAS PAREDES

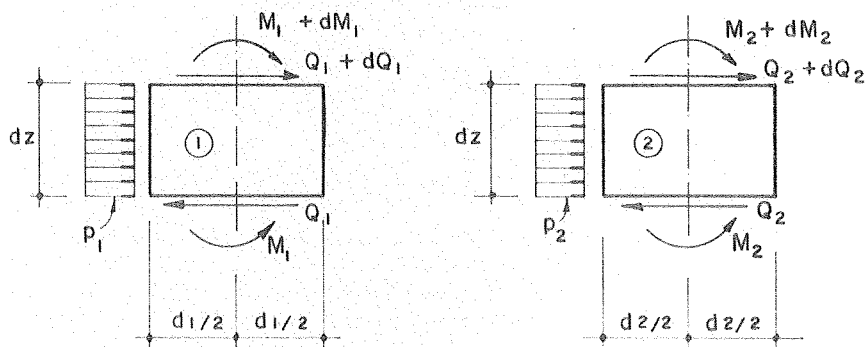


FIG. 2.2 - ESFORÇOS ATUANTES NAS PAREDES

Da Fig. 2.2 tem-se que

$$p_1 dz + dQ_1 = 0$$

$$dM_1 + Q_1 dz = 0$$

$$p_2 dz + dQ_2 = 0$$

$$dM_2 + Q_2 dz = 0$$



ou então

$$Q_1' = -p_1 \quad \dots (2.1)$$

$$M_1' = -Q_1 \quad \dots (2.2)$$

$$Q_2' = -p_2 \quad \dots (2.3)$$

$$M_2' = -Q_2 \quad \dots (2.4)$$

### II.2.2. CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO DO CONTÍNUO-LAJES

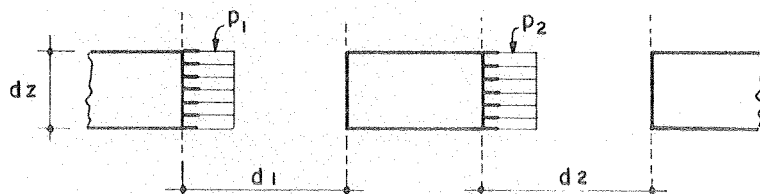


FIG. 2.3 - ESFORÇOS NO SISTEMA DE LAJES

Da Fig. 2.3

$$p_1 dz + p_2 dz = 0$$

ou

$$p_1 + p_2 = 0 \quad \dots (2.5)$$

### II.2.3. DESLOCAMENTOS DAS DUAS PAREDES NA COTA $z$

As bases podem sofrer rotações  $\phi_1$  e  $\phi_2$  conforme Fig. 2.4.

Computando só as deformações de flexão tem-se para os deslocamentos horizontais:

$$u_1 = \phi_1 z + \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz \right) dz \quad \dots (2.6)$$

$$u_2 = \phi_2 z + \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz \right) dz \quad \dots (2.7)$$

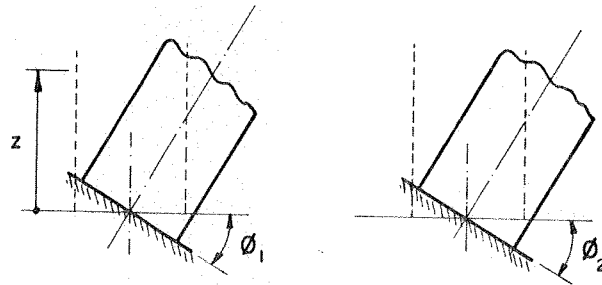


FIG. 2.4 - DESLOCAMENTOS DAS BASES

#### II.2.4. CONDIÇÃO DE COMPATIBILIDADE DE DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS

Com a suposição de distribuição contínua de lajes:

$$\forall z \rightarrow u_1 = u_2 \quad \dots (2.8)$$

Da equação (2.8), com (2.6) e (2.7)

$$\forall z \rightarrow \phi_1 z + \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz \right) dz = \phi_2 z + \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz \right) dz \quad \dots (2.9)$$

#### II.2.5. OBTENÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL COM UMA SÓ VARIÁVEL

Da (2.9) derivando quatro vezes

$$\frac{M_1''}{EI_1} = \frac{M_2''}{EI_2} \quad \dots (2.10)$$

Da (2.2) com (2.1)

$$M_1'' = p_1$$

Da (2.4) com (2.3)

$$M_2'' = p_2$$

Da (2.5)

$$p_1 = -p_2$$

Substituindo na (2.10) tem-se:

$$-\frac{p_2}{EI_1} = \frac{p_2}{EI_2}$$

ou

$$p_2 \left( \frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right) = 0$$

ou

$$p_2 = 0 \quad \dots (2.11)$$

Da (2.5) com (2.11)

$$p_1 = 0 \quad \dots (2.12)$$

Da (2.1) com (2.12)

$$Q_1 = c_1 \quad \dots (2.14)$$

Da (2.3) com (2.11)

$$Q_2 = c_2 \quad \dots (2.15)$$

Da (2.2) com (2.14)

$$M_1 = -c_1 z + c_3 \quad \dots (2.16)$$

Da (2.4) com (2.15)

$$M_2 = -c_2 z + c_4 \quad \dots (2.17)$$

### II.2.6. RETORNO À CONDIÇÃO DE COMPATIBILIDADE

Como

$$\int_0^z \left( \int_0^z M_1 dz \right) dz = -\frac{c_1}{6} z^3 + \frac{c_3}{2} z^2$$

e

$$\int_0^z \left( \int_0^z M_2 dz \right) dz = -\frac{c_2}{6} z^3 + \frac{c_4}{2} z^2$$

tem-se da (2.9)

$$\phi_1 z + \frac{1}{EI_1} \left( -\frac{c_1}{6} z^3 + \frac{c_3}{2} z^2 \right) = \phi_2 z + \frac{1}{EI_2} \left( -\frac{c_2}{6} z^3 + \frac{c_4}{2} z^2 \right)$$

ou

$$\left( \frac{c_2}{6EI_2} - \frac{c_1}{6EI_1} \right) z^3 + \left( \frac{c_3}{2EI_1} - \frac{c_4}{2EI_2} \right) z^2 + (\phi_1 - \phi_2) z = 0 \quad \dots (2.18)$$

Devendo valer a (2.18)  $\forall z$  tem-se que só poderá haver compatibilidade se:

$$c_2 = \frac{I_2}{I_1} c_1 \quad \dots (2.19)$$

$$c_4 = \frac{I_2}{I_1} c_3 \quad \dots (2.20)$$

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \dots (2.21)$$

Com isso tem-se:

Da (2.15) com (2.19)

$$Q_2 = \frac{I_2}{I_1} c_1 \quad \dots (2.22)$$

Da (2.17) com (2.19) e (2.20)

$$M_2 = - \frac{I_2}{I_1} c_1 z + \frac{I_2}{I_1} c_3 \quad \dots (2.23)$$

Da (2.22) e (2.14) observe-se que

$$Q_2 = \frac{I_2}{I_1} Q_1 \quad \dots (2.24)$$

Da (2.23) e (2.16), analogamente

$$M_2 = \frac{I_2}{I_1} M_1 \quad \dots (2.25)$$

## II.2.7. CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno não devem violar as condições (2.24) e (2.25). Assim:

$$\text{Para } x = \ell \rightarrow M_1 = M_2 = 0 \quad \dots (2.26)$$

$$\text{Para } x = \ell \rightarrow Q_1 + Q_2 = F \quad \dots (2.27)$$

Da (2.26) com (2.16) e (2.25)

$$0 = -c_1 \ell + c_3 \quad \dots (2.28)$$

Da (2.27) com (2.14) e (2.22)

$$c_1 + \frac{I_2}{I_1} c_1 = F \quad \dots (2.29)$$

Da (2.29)

$$c_1 = \frac{I_1}{I_1 + I_2} F \quad \dots (2.30)$$

Com (2.30) na (2.28)

$$c_3 = \frac{I_1}{I_1 + I_2} F \ell \quad \dots (2.31)$$

### II.2.8. ESFORÇOS INTERNOS NAS PAREDES

Com (2.30) e (2.31) respectivamente nas (2.14), (2.22), (2.16) e (2.23)

$$Q_1 = \frac{I_1}{I_1 + I_2} F \quad \dots (2.32)$$

$$Q_2 = \frac{I_2}{I_1 + I_2} F \quad \dots (2.33)$$

$$M_1 = \frac{I_1}{I_1 + I_2} F(\ell - z) \quad \dots (2.34)$$

$$M_2 = \frac{I_2}{I_1 + I_2} F(\ell - z) \quad \dots (2.35)$$

### II.2.9. CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENGASTAMENTO ELÁSTICO

Os esforços internos nas paredes, determinados pelas expressões (2.32) a (2.35), independem das rotações  $\phi_1$  e  $\phi_2$  nas bases.

Assumindo que cada parede esteja construída sobre sapatas apoiadas num solo elástico e como, da expressão (2.21), só haverá compatibilidade se  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$  tem-se, atuando nas sapatas, os esforços anotados na Fig.2.5.



FIG. 2.5 - ESFORÇOS NAS SAPATAS

Para haver equilíbrio:

$$(M_1)_0 - s_1 \phi = 0 \quad \dots (2.36)$$

$$(M_2)_0 - s_2 \phi = 0 \quad \dots (2.37)$$

Eliminando  $\phi$ , fazendo  $s_2 \cdot (2.36) - s_1 \cdot (2.37)$ , tem-se:

$$s_2 (M_1)_0 - s_1 (M_2)_0 = 0$$

ou, com (2.34) e (2.35)

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{I_1}{I_2} \quad \dots (2.38)$$

Assumindo que a pressão  $p$  no solo se relacione com o deslocamento  $y$  através da expressão:

$$p = c_\phi \cdot y \quad \dots (2.39)$$

tem-se, como consequência imediata que

$$s_1 = c_\phi \cdot I_{f1} \quad \dots (2.40)$$

$$s_2 = c_\phi \cdot I_{f2} \quad \dots (2.41)$$

onde  $I_{f1}$  e  $I_{f2}$  são os momentos de inércia das áreas de contato das sapatas (1) e (2) com o solo.

Consequentemente só há a possibilidade de equilíbrio da fundação, satisfazendo obviamente as restantes condições para as paredes, se, da (2.38) com (2.40) e (2.41):

$$\frac{I_{f1}}{I_{f2}} = \frac{I_1}{I_2} \quad \dots (2.42)$$

i.é., só se se tiver "fundações proporcionais" às paredes.

O que aconteceria se essas fundações não fossem "proporcionais" é o que se tem há algum tempo procurado determinar.

### II.3. SOLUÇÃO "A SENTIMENTO"

Para a situação de "fundações não proporcionais" MANCINI e STAMATO propuseram uma correção, assumindo a existência de um momento  $\bar{M}$  de interação entre as paredes, na altura de suas bases, resultado de elevadas forças internas que haveriam nos lintéis (ou axialmente nas lajes) nessa região.

Assim, em substituição às condições da Fig. 2.5, ter-se-iam as da Fig. 2.6.

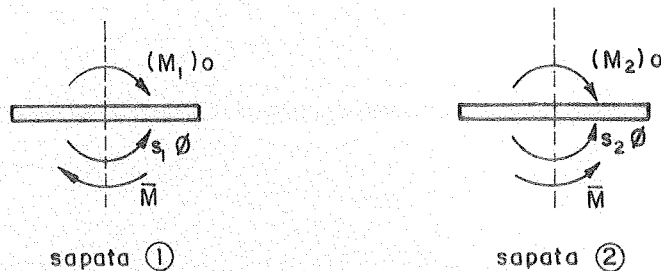


FIG.2.6 - ESFORÇOS NAS SAPATAS



Para haver equilíbrio

$$(M_1)_o - s_1 \phi + \bar{M} = 0 \quad \dots (2.43)$$

$$(M_2)_o - s_2 \phi - \bar{M} = 0 \quad \dots (2.44)$$

Eliminando  $\phi$  fazendo  $s_2 \cdot (2.43) - s_1 \cdot (2.44)$

$$s_2 (M_1)_o - s_1 (M_2)_o + (s_2 + s_1) \bar{M} = 0 \quad \dots (2.45)$$

Da (2.45) com (2.34) e (2.35)

$$(s_2 I_1 - s_1 I_2) \frac{F \ell}{I_1 + I_2} + (s_2 + s_1) \bar{M} = 0$$

ou

$$\bar{M} = \frac{s_2 I_1 - s_1 I_2}{(I_1 + I_2)(s_1 + s_2)} F \ell \quad \dots (2.46)$$

A expressão (2.46) pode ser também posta na forma:

$$\bar{M} = \left( \frac{I_1}{I_1 + I_2} - \frac{s_1}{s_1 + s_2} \right) F \ell \quad \dots (2.47)$$

A origem desse momento de interação ficou por conta de se imaginar uma viga de fundação capaz de transmitir-lo.

A introdução dessa viga de fundação também não resolve o problema. Assim, em substituição às fundações da Fig. 2.6, ter-se-iam as da Fig. 2.7, sendo necessário, naturalmente, prever o engastamento elástico à translação vertical e introduzir os coeficientes de rigidez  $r_1$  e  $r_2$  à translação vertical de ambas as paredes.

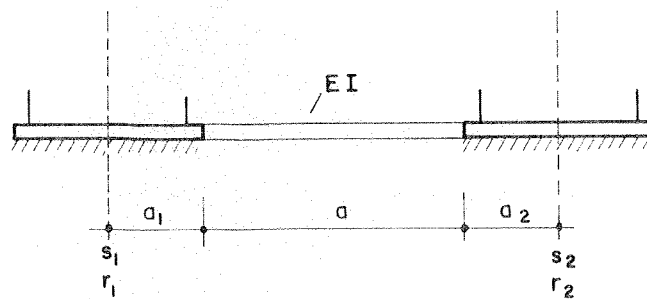
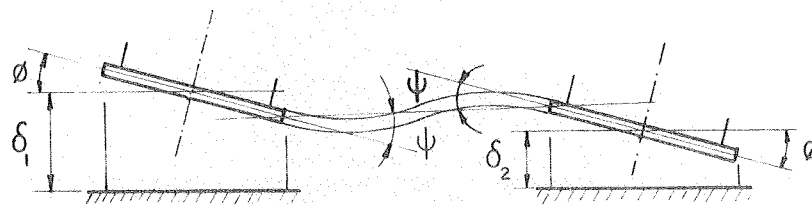
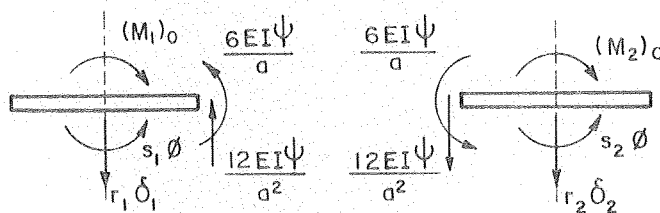


FIG. 2.7 - SAPATAS COM VIGA DE RIGIDEZ

Os deslocamentos possíveis constam da Fig. 2.8.a e os esforços em cada sapata, da Fig. 2.8.b.



(a)



(b)

FIG. 2.8 - DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS NAS SAPATAS.

Da Fig. 2.8.a

$$\psi = \left(1 + \frac{a_1 + a_2}{a}\right) \phi + \frac{\delta_2 - \delta_1}{a} \quad \dots (2.48)$$

Da Fig. 2.8.b, as condições de equilíbrio das duas sapatas seriam:

$$r_1 \delta_1 - \frac{12EI\psi}{a^2} = 0 \quad \dots (2.49)$$

$$(M_1)_o - s_1 \phi - \frac{6EI\psi}{a} - \frac{12EI\psi}{a^2} a_1 = 0 \quad \dots (2.50)$$

$$r_2 \delta_2 + \frac{12EI\psi}{a^2} = 0 \quad \dots (2.51)$$

$$(M_2)_o - s_2 \phi - \frac{6EI\psi}{a} - \frac{12EI\psi}{a^2} a_2 = 0 \quad \dots (2.52)$$

Essas cinco equações, com apenas quatro incógnitas,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\phi$  e  $\psi$ , também não têm solução a menos que se imponha alguma condição sobre os dados.

Da (2.49) e (2.51) na (2.48)

$$\delta_1 = \frac{12EI\psi}{r_1 a^2}$$

$$\delta_2 = - \frac{12EI\psi}{r_2 a^2}$$

$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{a} = - \frac{12EI\psi}{a^3} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\psi = \left( 1 + \frac{a_1 + a_2}{a} \right) \phi - \frac{12EI\psi}{a^3} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\phi = \frac{1 + \frac{12EI}{a^3} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}{1 + \frac{a_1 + a_2}{a}} \cdot \psi \quad \dots (2.53)$$

Fazendo

$$s_1 = s_1 \frac{1 + \frac{12EI}{a^3} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}{1 + \frac{a_1 + a_2}{a}} + \frac{6EI}{a} + \frac{12EI}{a^2} \cdot a_1 \quad \dots (2.54)$$

$$\bar{s}_2 = s_2 \frac{1 + \frac{12EI}{a^3} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}{1 + \frac{a_1 + a_2}{a}} + \frac{6EI}{a} + \frac{12EI}{a^2} a_2 \quad \dots (2.55)$$

tem-se da (2.50) e (2.52), respectivamente com (2.54) e (2.55)

$$(M_1)_o - \bar{s}_1 \psi = 0$$

$$(M_2)_o - \bar{s}_2 \psi = 0$$

Eliminando  $\psi$

$$\bar{s}_2 (M_1)_o - \bar{s}_1 (M_2)_o = 0$$

Com (2.34) e (2.35)

$$\frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2} = \frac{I_1}{I_2} \quad \dots (2.56)$$

A (2.56) implica na obrigatoriedade de outro tipo de relação semelhante à proporcionalidade implícita na expressão (2.38).

Assumindo dados tais que satisfaçam as (2.56) poderiam ser tirados os deslocamentos das fundações.

O conhecimento de  $\bar{M}$  seria interessante de se ter com razoável precisão pois afetaria diretamente a "elástica" dos deslocamentos dos andares. Essa "elástica" u pode ser posta como soma de duas parcelas,  $u_p$  correspondente à deformação dos pilares, e  $u_r$  devido à rotação dos apoios.

Da (2.6) com (2.16), (2.30) e (2.31)

$$\begin{aligned} u_p &= \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz \right) dz = \frac{1}{EI_1} \left( -\frac{c_1}{6} z^3 + \frac{c_3}{2} z^2 \right) = \\ &= \frac{1}{E(I_1 + I_2)} \left( -\frac{F}{6} z^3 + \frac{F\ell}{2} z^2 \right) \end{aligned}$$

ou

$$u_p = \frac{F \ell^3}{6E(I_1 + I_2)} \left( 3 \frac{z^2}{\ell^2} - \frac{z^3}{\ell^3} \right) \dots (2.57)$$

Da (2.43)

$$\phi = \frac{1}{s_1} \left[ (M_1)_o + \bar{M} \right]$$

ou, com (2.34)

$$\phi = \frac{1}{s_1} \left( \frac{I_1 F \ell}{I_1 + I_2} + \bar{M} \right) \dots (2.58)$$

Com (2.58) e (2.47) sai

$$u_r = \frac{F \ell}{s_1} \left( \frac{2I_1}{I_1 + I_2} - \frac{s_1}{s_1 + s_2} \right) z \dots (2.59)$$

$$u = u_p + u_r \dots (2.60)$$

#### II.4. SOLUÇÃO ASSUMINDO FLEXÃO LOCAL ENTRE OS ANDARES

Uma primeira possibilidade de ser coerente com o equacionamento do item II.2, mantendo para o problema ainda as feições de uma análise contínua, poderia ser de introduzir a possibilidade de uma flexão local, idéia razoável se as paredes forem relativamente esbeltas, mesmo em relação à altura dos andares.

Aproveitando a análise do item II.2, válida em particular para  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ , poder-se-ia analisar as perturbações devidas aos engastamentos elásticos através do esquema da Fig. 2.9, típico do processo dos deslocamentos.

Como condições de coerência dos esforços ter-se-iam:

$$S_{10} + \delta_1 S_{11} + \delta_2 S_{12} = 0 \dots (2.61)$$

$$S_{20} + \delta_1 S_{21} + \delta_2 S_{22} = 0 \quad \dots (2.62)$$

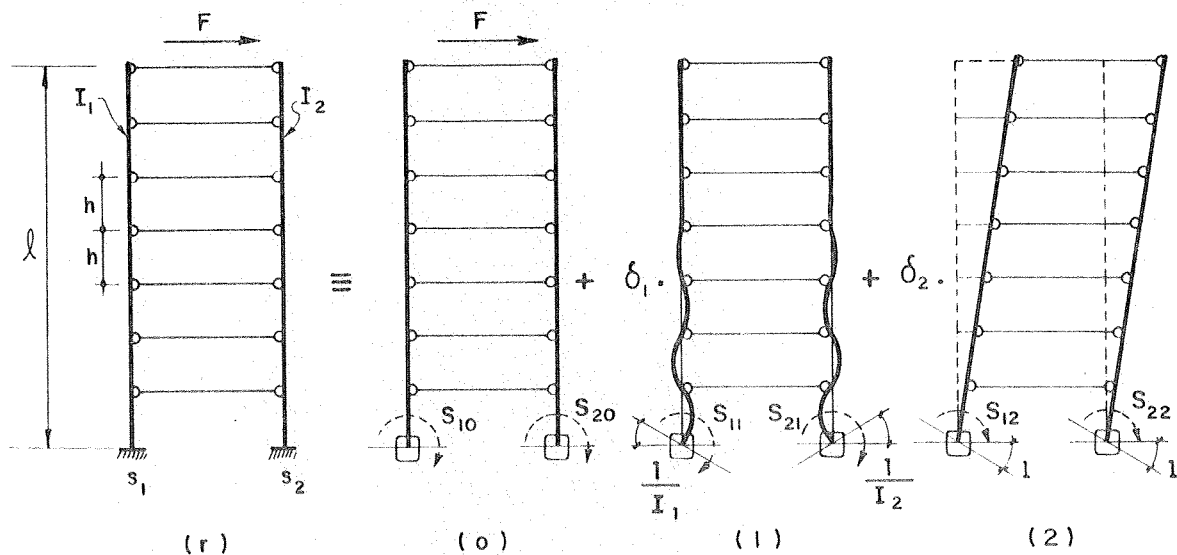


FIG. 2.9 - SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS

#### II.4.1. PROBLEMA (0)

É imediato o cálculo de  $S_{10}$  e  $S_{20}$ ; com (2.34) e (2.35)

$$S_{10} = -(M_1)_o = -\frac{I_1}{I_1 + I_2} F\ell \quad \dots (2.63)$$

$$S_{20} = -(M_2)_o = -\frac{I_2}{I_1 + I_2} F\ell \quad \dots (2.64)$$

#### II.4.2. PROBLEMA (1)

No problema (1) o conjunto resulta indeslocável, e tudo se passa nos pilares como se correspondessem a uma "viga contínua", de momento de inércia constante e vãos iguais, à qual se houvesse imposto uma rotação no apoio extremo.

Do "processo de propagação", do cálculo de vigas

contínuas com o método clássico, assumindo um número grande de "tramos", aplicado um momento  $\bar{M}$  à extremidade inferior, na altura do andar imediatamente superior aparece um momento com tração no lado oposto, igual em módulo a  $\bar{\alpha}\bar{M}$ , onde  $\bar{\alpha}$  é tal que

$$\bar{\alpha} \cong 0,2679 \quad \dots (2.65)$$

Esse "coeficiente de propagação" tenderia a diminuir acentuadamente só nas vizinhanças do topo onde, entre tanto, as perturbações já estariam completamente diluídas e não teriam qualquer significado numérico.

Com isso é fácil calcular os coeficientes  $\beta_1$  e  $\beta_2$  de rigidez à rotação das bases de ambos os pilares.

$$\beta_1 = 3,464 \frac{EI_1}{h} \quad \dots (2.66)$$

$$\beta_2 = 3,464 \frac{EI_2}{h} \quad \dots (2.67)$$

Do equilíbrio da sapata (1), com (2.66)

$$S_{11} = \beta_1 \frac{1}{I_1} + s_1 \frac{1}{I_1}$$

ou então

$$S_{11} = 3,464 \frac{E}{h} + \frac{s_1}{I_1} \quad \dots (2.68)$$

Do equilíbrio da sapata (2), com (2.67)

$$S_{21} = -\beta_2 \frac{1}{I_2} - s_2 \frac{1}{I_2}$$

ou então

$$S_{21} = -3,464 \frac{E}{h} - \frac{s_2}{I_2} \quad \dots (2.69)$$

II.4.3. PROBLEMA (2)

É imediato o cálculo de  $S_{12}$  e  $S_{21}$

$$S_{12} = s_1 \quad \dots (2.70)$$

$$S_{22} = s_2 \quad \dots (2.71)$$

II.4.4. CÁLCULO DE  $\delta_1$  e  $\delta_2$

Com (2.63), (2.64) e (2.68) a (2.71), as (2.61) e (2.62) ficam:

$$-\frac{I_1}{I_1+I_2} F\ell + \left(3,464 \frac{E}{h} + \frac{s_1}{I_1}\right) \delta_1 + s_1 \delta_2 = 0 \quad \dots (2.72)$$

$$-\frac{I_2}{I_1+I_2} F\ell - \left(3,464 \frac{E}{h} + \frac{s_2}{I_2}\right) \delta_1 + s_2 \delta_2 = 0 \quad \dots (2.73)$$

Fazendo (2.72) + (2.73)

$$-F\ell + \left(\frac{s_1}{I_1} - \frac{s_2}{I_2}\right) \delta_1 + (s_1+s_2)\delta_2 = 0 \quad \dots (2.74)$$

Fazendo  $s_2$  (2.72) -  $s_1$  (2.73)

$$-\frac{s_2 I_1 - s_1 I_2}{I_1+I_2} F\ell + \left[3,464 \frac{E}{h} (s_1+s_2) + s_1 s_2 \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right)\right] \delta_1 = 0 \quad \dots (2.75)$$

Da (2.75)

$$\delta_1 = \frac{\frac{I_1}{s_1} - \frac{I_2}{s_2}}{(I_1+I_2) \left[3,464 \frac{E}{h} \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}\right) + \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right)\right]} F\ell \quad \dots (2.76)$$

Da (2.74) com (2.76)



$$\delta_2 = \frac{1}{s_1 + s_2} \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{s_1}{I_1} - \frac{s_2}{I_2}\right) \left(\frac{I_1}{s_1} - \frac{I_2}{s_2}\right)}{(I_1 + I_2) \left[ 3,464 \frac{E}{h} \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}\right) + \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right) \right]} \right\} Fl \dots (2.77)$$

#### 11.4.5. MONTAGEM DE RESULTADOS

Dispondo de  $\delta_1$  e  $\delta_2$  dados pelas expressões (2.76) e (2.77), e dos resultados do problema (0), para o qual a solução do item 11.2 é satisfatória, pode-se encarar os restantes resultados como perturbações decorrentes do engastamento elástico. Assim, recorrendo ao esquema da Fig. 2.9, ter-se-ia:

a) Para os momentos nos pilares

$$\Delta(M_1)_o = - \delta_1 \frac{\beta_1}{I_1}$$

$$\Delta(M_2)_o = \delta_1 \frac{\beta_2}{I_2}$$

No nível da  $i$ -ésima laje, ter-se-ia, genericamente:

$$\Delta(M_1)_i = - \delta_1 \frac{\beta_1}{I_1} (-0,2679)^i \dots (2.78)$$

$$\Delta(M_2)_i = \delta_1 \frac{\beta_2}{I_2} (-0,2679)^i \dots (2.79)$$

b) Para os esforços cortantes nos pilares

Para os pilares do  $o$ -ésimo nível, adjacente ao solo:

$$\Delta(Q_1)_o = - 1,2679 \frac{\delta_1}{h} \frac{\beta_1}{I_1}$$

$$\Delta(Q_2)_0 = 1,2679 \frac{\delta_1}{h} \frac{\beta_2}{I_2}$$

Para os pilares acima da i-ésima laje

$$\Delta(Q_1)_i = -1,2679 \frac{\delta_1}{h} \frac{\beta_1}{I_1} (-0,2679)^i \quad \dots (2.80)$$

$$\Delta(Q_2)_i = 1,2679 \frac{\delta_1}{h} \frac{\beta_2}{I_2} (-0,2679)^i \quad \dots (2.81)$$

c) Esforços axiais aplicados à laje (positivos de tração) e esforço horizontal aplicado às bases (positivo se de uma parede para a outra).

Na base:

$$\Delta(N)_0 = 1,2679 \frac{\delta_1}{h} \frac{\beta_2}{I_2} \quad \dots (2.82)$$

Na i-ésima laje

$$\Delta(N)_i = -1,6076 \frac{\delta_1}{h} \frac{\beta_1}{I_1} (-0,2679)^i \quad \dots (2.83)$$

d) Elástica do conjunto

Já que no problema (1) as lajes não se deslocam, tem-se para a elástica uma variação linear

$$\Delta u = \delta_2 z \quad \dots (2.84)$$

#### II.4.6. OBSERVAÇÕES ADICIONAIS

Todo esse desenvolvimento do item 11.4 pode ser entendido com facilidade para o caso de se ter um número maior de paredes associadas, e, com uma elaboração um pouco maior, para qualquer tipo de associação tridimensional de paredes, desde que elas tenham características geométricas constantes ao longo de toda a altura.

II.4.7. EXEMPLO 1 - COMPARAÇÃO DA SOLUÇÃO DO ITEM II.4 COM A SOLUÇÃO DO ITEM II.3.

Sejam as paredes (1) e (2), mais propriamente chamadas de pilares, no caso, correspondentes a uma associação com 10 andares, com 3m de separação entre as lajes e submetidas a uma carga de 1tf no topo. As dimensões dos pilares e das sapatas são dadas em planta na Fig. 2.10.

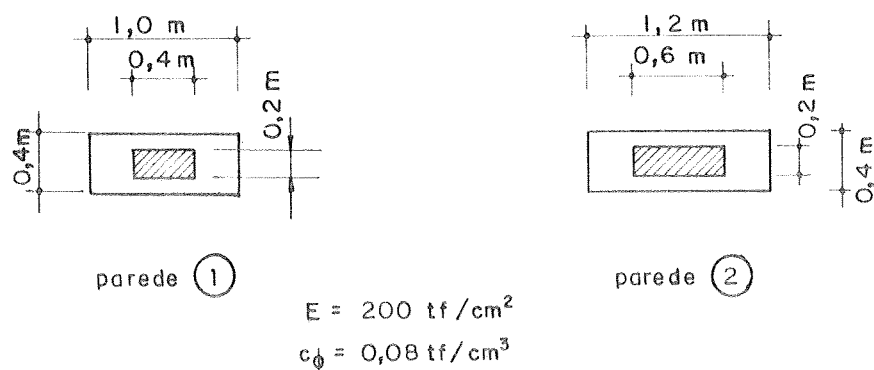


FIG. 2.10 - EXEMPLO 1.

a) Parâmetros elásticos (tf e dm)

$$I_1 = 10,67$$

$$I_2 = 36,00$$

$$I_{f1} = 333,33$$

$$I_{f2} = 576,00$$

$$s_1 = 26666$$

$$s_2 = 46080$$

$$\beta_1 = 24640$$

$$\beta_2 = 83136$$

b) Cargas e esforços da análise contínua

$$M_1 = 68,7 \left(1 - \frac{z}{l}\right)$$

$$M_2 = 231,3 \left(1 - \frac{z}{l}\right)$$

$$Q_1 = 0,229$$

$$Q_2 = 0,771$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = 0$$

c) Elástica devida à deformação dos pilares

$$u_p = 4,82 \left( 3 \frac{z^2}{\ell^2} - \frac{z^3}{\ell^3} \right)$$

d) Elástica devida à rotação das bases na solução do item II.3.

$$u_r = 0,00103 z$$

e) Elástica devida à rotação das bases na solução do item II.4

$$u_r = 0,00428 z$$

f) Perturbações nos esforços internos

Com:

$$\delta_1 = -0,00949$$

$$\delta_2 = 0,00428$$

$$\Delta(M_1)_o = 5,87$$

$$\Delta(M_2)_o = -5,87$$

$$\Delta(Q_1)_o = 0,926$$

$$\Delta(Q_2)_o = -0,926$$

$$\Delta(N)_o = -0,926$$

$$\Delta(N)_1 = 0,315$$

Lançando em gráfico esses resultados pode-se com por a Fig. 2.11.

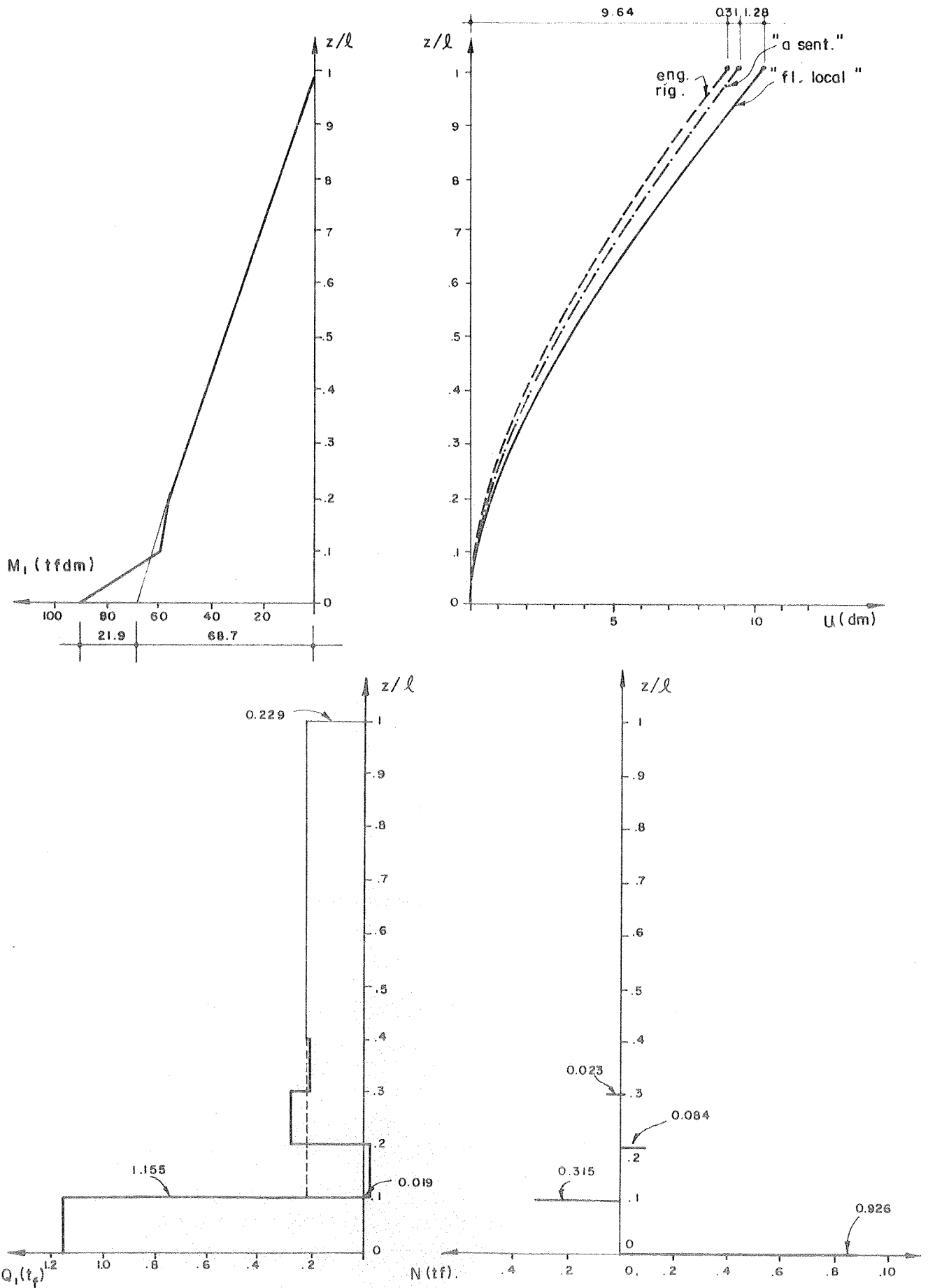


FIG. 2.11. EXEMPLO 1

g) Conclusão parcial

As diferenças começam a ficar realmente significativas sô em termos de esforços cortantes e esforços aplicados aos lintéis (ou às lajes). Nos momentos fletores tem-se apenas pequenas perturbações nas vizinhanças dos engastes, e para a elástica, apesar da grande diferença relativa entre as variações, no conjunto as elásticas são de certa forma semelhantes.

II.5. ASSOCIAÇÃO DAS DUAS PAREDES COMPUTANDO SÔ AS DEFORMAÇÕES POR FLEXÃO E ASSUMINDO LAJES DEFORMÁVEIS NO SEU PLANO

Essa idéia aparentemente poderia ter sentido para uma associação de paredes extremamente rígidas a ponto de invalidar a hipótese usual de indeformabilidade axial das lajes.

Para o caso de associação de sô duas paredes seria viável estimar, com técnicas numéricas aplicadas à teoria da elasticidade de placas, parâmetros de rigidez associados a esse conjunto, de forma que se possa fazer

$$p_2 = r (u_1 - u_2) \dots (2.85)$$

para o problema do item II.2. Essa expressão (2.85) deverá valer para qualquer z, e substituí, no equacionamento do item II.2, a condição de compatibilidade (2.8).

Com (2.6) e (2.7) a (2.85) fica

$$\forall z \rightarrow p_2 = r \left[ (\phi_1 - \phi_2) z + \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz \right) dz - \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz \right) dz \right] \dots (2.86)$$

### II.5.1. OBTENÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARA O PROBLEMA

Derivando quatro vezes a (2.86) tem-se

$$P_2^{IV} - \frac{r}{EI_1} M_1'' + \frac{r}{EI_2} M_2'' = 0 \quad \dots (2.87)$$

Da (2.87) com (2.1) a (2.5)

$$P_2^{IV} + \frac{r}{E} \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) P_2 = 0 \quad \dots (2.88)$$

Fazendo

$$\lambda^4 = \frac{r}{E} \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) \quad \dots (2.89)$$

a equação (2.88) fica

$$P_2^{IV} + \lambda^4 P_2 = 0 \quad \dots (2.90)$$

### II.5.2. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

A equação característica da (2.90) é

$$\alpha^4 + \lambda^4 = 0$$

cujas raízes são

$$\alpha_i = \pm \sqrt{\pm \lambda^2 i} = \pm \sqrt{\pm i} \cdot \lambda$$

ou então

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (1 + i)$$

$$\alpha_2 = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} (1 + i)$$

$$\alpha_3 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (1 - i)$$

$$\alpha_4 = - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (1 - i)$$

ou com  $k = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$  ..... (2.91)

$$\alpha_1 = k + k i$$

$$\alpha_2 = -k - k i$$

$$\alpha_3 = k - k i$$

$$\alpha_4 = -k + k i$$

A solução da equação (2.90) é

$$p_2 = \bar{c}_1 e^{(k+ki)z} + \bar{c}_2 e^{(-k-ki)z} + \bar{c}_3 e^{(k-ki)z} + \bar{c}_4 e^{(-k+ki)z}$$

que pode ser posta facilmente na forma

$$p_2 = c_1 \operatorname{sh} k z \operatorname{sen} k z + c_2 \operatorname{ch} k z \operatorname{cos} k z + c_3 \operatorname{sh} k z \operatorname{cos} k z + c_4 \operatorname{ch} k z \operatorname{sen} k z \quad \dots (2.92)$$

Com  $p_2$  é possível obter os restantes esforços. É interessante observar que se pode fazer

$$\int p_2 dz = a_1 \operatorname{sh} k z \operatorname{sen} k z + a_2 \operatorname{ch} k z \operatorname{cos} k z + a_3 \operatorname{sh} k z \operatorname{cos} k z + a_4 \operatorname{ch} k z \operatorname{sen} k z + a_5 \quad \dots (2.93)$$

Assim, derivando a (2.93), tem-se



$$\begin{aligned} p_2 = & a_1 k \operatorname{ch} k z \operatorname{sen} k z + a_1 k \operatorname{sh} k z \operatorname{cos} k z + \\ & + a_2 k \operatorname{sh} k z \operatorname{cos} k z - a_2 k \operatorname{ch} k z \operatorname{sen} k z + \\ & + a_3 k \operatorname{ch} k z \operatorname{cos} k z - a_3 k \operatorname{sh} k z \operatorname{sen} k z + \\ & + a_4 k \operatorname{sh} k z \operatorname{sen} k z + a_4 k \operatorname{ch} k z \operatorname{cos} k z \quad \dots (2.94) \end{aligned}$$

Comparando a (2.92) com a (2.94)

$$\frac{c_1}{k} = -a_3 + a_4$$

$$\frac{c_2}{k} = a_3 + a_4$$

$$\frac{c_3}{k} = a_1 + a_2$$

$$\frac{c_4}{k} = a_1 - a_2$$

ou então

$$a_1 = \frac{c_3 + c_4}{2k} \quad \dots (2.95)$$

$$a_2 = \frac{c_3 - c_4}{2k} \quad \dots (2.96)$$

$$a_3 = \frac{c_2 - c_1}{2k} \quad \dots (2.97)$$

$$a_4 = \frac{c_1 + c_2}{2k} \quad \dots (2.98)$$

Fazendo

$$f_1 = \operatorname{sh} k z \operatorname{sen} k z \quad (f_1)_0 = 0 \quad \dots (2.99)$$

$$f_2 = \operatorname{ch} kz \cos kz \quad (f_2)_0 = 1 \quad \dots (2.100)$$

$$f_3 = \operatorname{sh} kz \cos kz \quad (f_3)_0 = 0 \quad \dots (2.101)$$

$$f_4 = \operatorname{ch} kz \operatorname{sen} kz \quad (f_4)_0 = 0 \quad \dots (2.102)$$

Da (2.92) com (2.99) a (2.102)

$$p_2 = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 \quad \dots (2.103)$$

Da (2.93) com (2.95) a (2.102)

$$\int p_2 dz = \frac{c_3 + c_4}{2k} f_1 + \frac{c_3 - c_4}{2k} f_2 + \frac{c_2 - c_1}{2k} f_3 + \frac{c_1 + c_2}{2k} f_4 + a_5 \quad \dots (2.104)$$

Analogamente

$$\int \left( \int p_2 dz \right) dz = \frac{c_2}{2k^2} f_1 - \frac{c_1}{2k^2} f_2 - \frac{c_4}{2k^2} f_3 + \frac{c_3}{2k^2} f_4 + a_5 z + a_6 \quad \dots (2.105)$$

Analogamente

$$\int_0^z \left( \int \left( \int p_2 dz \right) dz \right) dz = \frac{c_3 - c_4}{4k^3} f_1 - \frac{c_3 + c_4}{4k^3} f_2 - \frac{c_1 + c_2}{4k^3} f_3 + \frac{c_2 - c_1}{4k^3} f_4 + \frac{a_5 z^2}{2} + a_6 z + \frac{c_3 + c_4}{4k^3} \quad \dots (2.106)$$

$$\int_0^z \left( \int_0^z \left( \int \left( \int p_2 dz \right) dz \right) dz \right) dz = - \frac{c_1}{4k^4} f_1 - \frac{c_2}{4k^4} f_2 - \frac{c_3}{4k^4} f_3 + \frac{c_4}{4k^4} f_4 + \frac{a_5 z^3}{6} + \frac{a_6 z^2}{2} + \frac{c_3 + c_4}{4k^3} z + \frac{c_2}{4k^4} \quad \dots (2.107)$$

Da (2.103)

$$p_2 = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 \quad \dots (2.108)$$

Da (2.3) com (2.104)

$$Q_2 = - \int p_2 dz - c_5$$

$$Q_2 = - \frac{c_3+c_4}{2k} f_1 - \frac{c_3-c_4}{2k} f_2 - \frac{c_2-c_1}{2k} f_3 - \frac{c_1+c_2}{2k} f_4 - c_5 \dots (2.109)$$

Da (2.4) com (2.105)

$$M_2 = - \int Q_2 dz + c_6 = - \int \left( \int p_2 dz \right) dz + c_5 z + c_6$$

$$M_2 = \frac{c_2}{2k^2} f_1 - \frac{c_1}{2k^2} f_2 - \frac{c_4}{2k^2} f_3 + \frac{c_3}{2k^2} f_4 + c_5 z + c_6 \dots (2.110)$$

Da (2.7) com (2.107) e (2.108)

$$u_2 = \phi_2 z - \frac{1}{4k^4 EI_2} p_2 + \frac{1}{EI_2} \left( \frac{c_5 z^3}{6} + \frac{c_6 z^2}{2} + \frac{c_3+c_4}{4k^3} z + \frac{c_2}{4k^4} \right) \dots (2.111)$$

Da (2.5) com (2.108)

$$P_1 = -P_2$$

$$P_1 = -c_1 f_1 - c_2 f_2 - c_3 f_3 - c_4 f_4 \dots (2.112)$$

Da (2.1), com o auxílio de (2.104)

$$Q_1 = \int p_2 dz + c_7$$

$$Q_1 = \frac{c_3+c_4}{2k} f_1 + \frac{c_3-c_4}{2k} f_2 + \frac{c_2-c_1}{2k} f_3 + \frac{c_1+c_2}{2k} f_4 + c_7 (2.113)$$

Da (2.2), com o auxílio de (2.105)

$$M_1 = - \int Q_1 dz = - \int \left( \int p_1 dz \right) dz = - \int \left( \int p_2 dz \right) dz$$

$$M_1 = - \frac{c_2}{2k^2} f_1 + \frac{c_1}{2k^2} f_2 + \frac{c_4}{2k^2} f_3 - \frac{c_3}{2k^2} f_4 - c_7 z - c_8 \quad (2.114)$$

Da (2.6) com (2.107)

$$u_1 = \phi_1 z + \frac{1}{4k^4 EI_1} p_2 - \frac{1}{EI_1} \left( \frac{c_7 z^3}{6} + \frac{c_8 z^2}{2} + \frac{c_3 + c_4}{4k^3} z + \frac{c_2}{4k^4} \right) \dots (2.115)$$

### II.5.3. RETORNO À CONDIÇÃO DE COMPATIBILIDADE

Com (2.111) e (2.115) em (2.85) tem-se:

$$\begin{aligned} v_z \rightarrow \frac{p_2}{r} = (\phi_1 - \phi_2) z + \frac{p_2}{4Ek^4} \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) - \frac{1}{EI_1} \left( \frac{c_7 z^3}{6} + \frac{c_8 z^2}{2} + \right. \\ \left. + \frac{c_3 + c_4}{4k^3} z + \frac{c_2}{4k^4} \right) - \frac{1}{EI_2} \left( \frac{c_5 z^3}{6} + \frac{c_6 z^2}{2} + \frac{c_3 + c_4}{4k^3} z + \frac{c_2}{4k^4} \right) \dots (2.116) \end{aligned}$$

Da (2.116) com (2.92) e (2.89)

$$\begin{aligned} \left( \frac{c_7}{6EI_1} + \frac{c_5}{6EI_2} \right) z^3 + \left( \frac{c_8}{2EI_1} + \frac{c_6}{2EI_2} \right) z^2 + \left[ \frac{c_3 + c_4}{4k^3} \left( \frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right) + \right. \\ \left. + \phi_2 - \phi_1 \right] z + \frac{c_2}{4k^4} \left( \frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right) = 0 \quad \forall z \dots (2.117) \end{aligned}$$

Da (2.117) decorrem, com (2.92) e (2.89)

$$I_2 c_7 = -I_1 c_5 \quad \dots (2.118)$$

$$I_2 c_8 = -I_1 c_6 \quad \dots (2.119)$$

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{k}{r} (c_3 + c_4) \quad \dots (2.120)$$

$$c_2 = 0 \quad \dots (2.121)$$

### II.5.4. CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para determinar as 8 constantes,  $c_1$  a  $c_6$ ,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , dispõe-se, além das quatro condições (2.118) a (2.121), das seguintes:

a) Condições relativas ao topo

$$x = \ell \rightarrow M_1 = 0 \quad \dots (2.122)$$

$$x = \ell \rightarrow M_2 = 0 \quad \dots (2.123)$$

No caso é necessário, obviamente, definir em que parede estaria aplicada a carga  $F$ , já que as paredes têm deslocamentos diferentes no topo.

Assumindo  $v_1$  e  $v_2$  não negativos e tais que  $v_1 + v_2 = 1$  ter-se-ia como condições de contorno:

$$x = \ell \rightarrow Q_1 = v_1 F \quad \dots (2.124)$$

$$x = \ell \rightarrow Q_2 = v_2 F \quad \dots (2.125)$$

b) Condições relativas às bases

As duas condições relativas ao engastamento nas bases dependem do tipo de fundação e poderiam ser, por exemplo:

b<sub>1</sub>) Engastamento rígido

$$\phi_1 = 0 \quad \dots (2.126)$$

$$\phi_2 = 0 \quad \dots (2.127)$$

b<sub>2</sub>) Engastamento elástico com sapatas independentes

$$\phi_1 = \frac{(M_1)_o}{s_1} \quad \dots (2.128)$$

$$\phi_2 = \frac{(M_2)_o}{s_2} \quad \dots (2.129)$$

II.5.5. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA DETERMINAR AS CONSTANTES, NO CASO DE BASE ELÁSTICA

Da (2.118)

$$c_7 = - \frac{I_1}{I_2} c_5 \quad \dots (2.130)$$

Da (2.119)

$$c_8 = - \frac{I_1}{I_2} c_6 \quad \dots (2.131)$$

Da (2.120)

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{k}{r} (c_3 + c_4) \quad \dots (2.132)$$

Da (2.121)

$$c_2 = 0 \quad \dots (2.133)$$

Fazendo

$$\bar{f}_j = (f_j)_\ell \quad \dots (2.134)$$

Da (2.122) com (2.114) e (2.134)

$$-c_2 \bar{f}_1 + c_1 \bar{f}_2 + c_4 \bar{f}_3 - c_3 \bar{f}_4 - 2k^2 \ell c_7 - 2k^2 c_8 = 0 \quad \dots (2.135)$$

Da (2.123) com (2.110) e (2.134)

$$c_2 \bar{f}_1 - c_1 \bar{f}_2 - c_4 \bar{f}_3 + c_3 \bar{f}_4 + 2k^2 \ell c_5 + 2k^2 c_6 = 0 \quad \dots (2.136)$$

Da (2.124) com (2.113) e (2.134)

$$\begin{aligned} c_1 (\bar{f}_4 - \bar{f}_3) + c_2 (\bar{f}_4 + \bar{f}_3) + c_3 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2) + c_4 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) + 2k c_7 = \\ = v_1 F \cdot 2k \quad \dots (2.137) \end{aligned}$$

Da (2.125) com (2.109) e (2.134)

$$c_1(\bar{f}_3 - \bar{f}_4) - c_2(\bar{f}_3 + \bar{f}_4) - c_3(\bar{f}_1 + \bar{f}_2) + c_4(\bar{f}_2 - \bar{f}_1) - 2kc_5 =$$

$$= v_2 F \cdot 2k \quad \dots (2.138)$$

Da (2.128) com (2.114) e (2.99) a (2.102)

$$s_1 \phi_1 = \frac{c_1}{2k^2} - c_8 \quad \dots (2.139)$$

Da (2.129) com (2.110) e (2.99) a (2.102)

$$s_2 \phi_2 = -\frac{c_1}{2k^2} + c_6 \quad \dots (2.140)$$

No sentido de resolver esse sistema de 10 equações a 10 incógnitas ter-se-ia:

Fazendo (2.135) + (2.136)

$$lc_5 - lc_7 + c_6 - c_8 = 0 \quad \dots (2.141)$$

Fazendo (2.136) - (2.135), dividindo por 2 e com (2.133)

$$-c_1 \bar{f}_2 - c_4 \bar{f}_3 + c_3 \bar{f}_4 + k^2 l(c_5 + c_7) + k^2(c_6 + c_8) = 0 \quad (2.142)$$

Fazendo (2.137) + (2.138)

$$c_7 - c_5 = F \quad \dots (2.143)$$

Fazendo (2.137) - (2.138), dividindo por 2, com (2.133)

$$c_1(\bar{f}_4 - \bar{f}_3) + c_3(\bar{f}_1 + \bar{f}_2) + c_4(\bar{f}_1 - \bar{f}_2) + k(c_5 + c_7) = (v_1 - v_2)kF$$

$$\dots (2.144)$$

De (2.143) com (2.130)

$$-\frac{I_1}{I_2} c_5 - c_5 = F$$

ou

$$c_5 = -\frac{I_2}{I_1+I_2} \cdot F \quad \dots (2.145)$$

De (2.130) com (2.145)

$$c_7 = \frac{I_1}{I_1+I_2} \cdot F \quad \dots (2.146)$$

Da (2.141), com (2.143)

$$c_6 - c_8 = \ell (c_7 - c_5)$$

$$c_6 - c_8 = F\ell$$

e com a (2.131).

$$c_6 + \frac{I_1}{I_2} c_6 = F\ell$$

ou

$$c_6 = \frac{I_2}{I_1+I_2} F\ell \quad \dots (2.147)$$

Da (2.131) com (2.147)

$$c_8 = -\frac{I_1}{I_1+I_2} F\ell \quad \dots (2.148)$$

Da (2.139) com (2.148)

$$\phi_1 = \frac{c_1}{2k^2 s_1} + \frac{I_1}{I_1+I_2} \frac{F\ell}{s_1} \quad \dots (2.149)$$

Da (2.140) com (2.147)



$$\phi_2 = -\frac{c_1}{2k^2 s_2} + \frac{I_2}{I_1 + I_2} \cdot \frac{F\ell}{s_2} \quad \dots (2.150)$$

Da (2.132) com (2.149) e (2.150)

$$\frac{c_1}{2k^2} \left( \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) + \frac{F\ell}{(I_1 + I_2)} \left( \frac{I_1}{s_1} - \frac{I_2}{s_2} \right) - \frac{k}{r} (c_3 + c_4) = 0 \quad \dots (2.151)$$

Da (2.144) com (2.145) e (2.146)

$$c_1 (\bar{f}_4 - \bar{f}_3) + c_3 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2) + c_4 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) + k \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} F = k(\nu_1 - \nu_2) F$$

ou

$$c_1 (\bar{f}_4 - \bar{f}_3) + c_3 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2) + c_4 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) + F k (\mu_1 - \mu_2 - \nu_1 + \nu_2) = 0 \quad \dots (2.152)$$

com

$$\mu_1 = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

$$\mu_2 = \frac{I_2}{I_1 + I_2}$$

Da (2.142) com (2.145), (2.146), (2.147) e (2.148)

$$-c_1 \bar{f}_2 - c_4 \bar{f}_3 + c_2 \bar{f}_4 + k^2 \ell \cdot \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} F + k^2 \cdot \frac{I_2 - I_1}{I_1 + I_2} F \ell = 0$$

ou

$$c_1 \bar{f}_2 + c_4 \bar{f}_3 - c_3 \bar{f}_4 = 0 \quad \dots (2.153)$$

Da (2.151)

$$c_1 \frac{r}{2k^3} \left( \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) - c_3 - c_4 + \frac{r \left( \frac{I_1}{s_1} - \frac{I_2}{s_2} \right)}{k(I_1 + I_2)} \cdot F \ell = 0 \quad \dots (2.154)$$

Fazendo

$$\gamma = \frac{r}{2k^3} \left( \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) \dots (2.155)$$

$$\eta = \frac{r \left( \frac{I_1}{s_1} - \frac{I_2}{s_2} \right)}{k^3 (I_1 + I_2)} \dots (2.156)$$

a (2.154) fica

$$c_1 \gamma - c_3 - c_4 + \eta k^2 F \ell = 0 \dots (2.157)$$

Com (2.157), (2.153) e (2.152) tem-se um sistema de três equações a três incógnitas.

$$\begin{bmatrix} \gamma & -1 & -1 \\ \bar{f}_2 & -\bar{f}_4 & \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 - \bar{f}_3 & \bar{f}_1 + \bar{f}_2 & \bar{f}_1 - \bar{f}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta k^2 \ell \\ 0 \\ k(v_1 - v_2 - \mu_1 + \mu_2) \end{bmatrix} \cdot F \dots (2.158)$$

Resolvendo o sistema (2.158)

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \gamma & -1 & -1 \\ \bar{f}_2 & -\bar{f}_4 & \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 - \bar{f}_3 & \bar{f}_1 + \bar{f}_2 & \bar{f}_1 - \bar{f}_2 \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} -\bar{f}_4 & \bar{f}_3 \\ \bar{f}_1 + \bar{f}_2 & \bar{f}_1 - \bar{f}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{f}_2 & \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 - \bar{f}_3 & \bar{f}_1 - \bar{f}_2 \end{vmatrix} + \\ & - \begin{vmatrix} \bar{f}_2 & -\bar{f}_4 \\ \bar{f}_4 - \bar{f}_3 & \bar{f}_1 + \bar{f}_2 \end{vmatrix} = \\ & = \gamma [ -\bar{f}_4 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) - \bar{f}_3 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2) ] + \bar{f}_2 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) - \bar{f}_3 (\bar{f}_4 - \bar{f}_3) - \bar{f}_2 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2) + \\ & - \bar{f}_4 (\bar{f}_4 - \bar{f}_3) = \end{aligned}$$

$$= -\gamma [ \bar{f}_4 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) + \bar{f}_3 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2) ] - 2\bar{f}_2^2 + \bar{f}_3^2 - \bar{f}_4^2$$

$$\frac{\Delta_1}{F} = \begin{vmatrix} -\eta k^2 \ell & -1 & -1 \\ 0 & -\bar{f}_4 & \bar{f}_3 \\ k(v_1 - v_2 - \mu_1 + \mu_2) & \bar{f}_1 + \bar{f}_2 & \bar{f}_1 - \bar{f}_2 \end{vmatrix} = -\eta k^2 \ell \begin{vmatrix} -\bar{f}_4 & \bar{f}_3 \\ \bar{f}_1 + \bar{f}_2 & \bar{f}_1 - \bar{f}_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ k(v_1 - v_2 - \mu_1 + \mu_2) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -\bar{f}_4 & \bar{f}_3 \end{vmatrix} = \eta k^2 \ell [ \bar{f}_4 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) + \bar{f}_3 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2) ] +$$

$$- k(v_1 - v_2 - \mu_1 + \mu_2) (\bar{f}_3 + \bar{f}_4)$$

$$\frac{\Delta_3}{F} = \begin{vmatrix} \gamma & -\eta k^2 \ell & -1 \\ \bar{f}_2 & 0 & \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 - \bar{f}_3 & k(v_1 - v_2 - \mu_1 + \mu_2) & \bar{f}_1 - \bar{f}_2 \end{vmatrix} = +\eta k^2 \ell \begin{vmatrix} \bar{f}_2 & \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 - \bar{f}_3 & \bar{f}_1 - \bar{f}_2 \end{vmatrix} +$$

$$- k(v_1 - v_2 - \mu_1 + \mu_2) \begin{vmatrix} \gamma & -1 \\ \bar{f}_2 & \bar{f}_3 \end{vmatrix} = \eta k^2 \ell [ \bar{f}_2 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) - \bar{f}_3 (\bar{f}_4 - \bar{f}_3) ] +$$

$$- k(v_1 - v_2 - \mu_1 + \mu_2) (\gamma \bar{f}_3 + \bar{f}_2)$$

$$\frac{\Delta_4}{F} = \begin{vmatrix} \gamma & -1 & -\eta k^2 \ell \\ \bar{f}_2 & -\bar{f}_4 & 0 \\ \bar{f}_4 - \bar{f}_3 & \bar{f}_1 + \bar{f}_2 & k(v_1 - v_2 - \mu_1 + \mu_2) \end{vmatrix} = -\eta k^2 \ell \begin{vmatrix} \bar{f}_2 & -\bar{f}_4 \\ \bar{f}_4 - \bar{f}_3 & \bar{f}_1 + \bar{f}_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ k(v_1 - v_2 - \mu_1 + \mu_2) \begin{vmatrix} \gamma & -1 \\ \bar{f}_2 & -\bar{f}_4 \end{vmatrix} = -\eta k^2 \ell [ \bar{f}_2 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2) + \bar{f}_4 (\bar{f}_4 - \bar{f}_3) ] +$$

$$- k(v_1 - v_2 - \mu_1 + \mu_2) (\gamma \bar{f}_4 - \bar{f}_2)$$

Com isso:

$$c_1 = \frac{\eta k^2 \ell [\bar{f}_4 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) + \bar{f}_3 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2)] - k (v_1 - v_2 - \mu_1 + \mu_2) (\bar{f}_3 + \bar{f}_4)}{-\gamma [\bar{f}_4 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) + \bar{f}_3 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2)] - 2\bar{f}_2^2 + \bar{f}_3^2 - \bar{f}_4^2} F \quad (2.159)$$

$$c_3 = \frac{\eta k^2 \ell [\bar{f}_2 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) - \bar{f}_3 (\bar{f}_4 - \bar{f}_3)] - k (v_1 - v_2 - \mu_1 + \mu_2) (\gamma \bar{f}_3 + \bar{f}_2)}{-\gamma [\bar{f}_4 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) + \bar{f}_3 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2)] - 2\bar{f}_2^2 + \bar{f}_3^2 - \bar{f}_4^2} F \quad (2.160)$$

$$c_4 = \frac{-\eta k^2 \ell [\bar{f}_2 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2) + \bar{f}_4 (\bar{f}_4 - \bar{f}_3)] - k (v_1 - v_2 - \mu_1 + \mu_2) (\gamma \bar{f}_4 - \bar{f}_2)}{-\gamma [\bar{f}_4 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) + \bar{f}_3 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2)] - 2\bar{f}_2^2 + \bar{f}_3^2 - \bar{f}_4^2} F \quad (2.161)$$

Da (2.149) com (2.159)

$$\phi_1 = \frac{1}{2k^2 s_1} \left\{ \frac{\eta k^2 \ell [\bar{f}_4 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) + \bar{f}_3 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2)] - k (v_1 - v_2 - \mu_1 + \mu_2) (\bar{f}_3 + \bar{f}_4)}{-\gamma [\bar{f}_4 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) + \bar{f}_3 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2)] - 2\bar{f}_2^2 + \bar{f}_3^2 - \bar{f}_4^2} + \right. \\ \left. + 2k^2 \ell \mu_1 \right\} F \quad \dots (2.162)$$

Da (2.150) com (2.153)

$$\phi_2 = -\frac{1}{2k^2 s_2} \left\{ \frac{\eta k^2 \ell [\bar{f}_4 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) + \bar{f}_3 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2)] - k (v_1 - v_2 - \mu_1 + \mu_2) (\bar{f}_3 + \bar{f}_4)}{-\gamma [\bar{f}_4 (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) + \bar{f}_3 (\bar{f}_1 + \bar{f}_2)] - 2\bar{f}_2^2 + \bar{f}_3^2 - \bar{f}_4^2} + \right. \\ \left. - 2k^2 \ell \mu_2 \right\} F \quad \dots (2.163)$$

### II.5.6. EXEMPLO 2

Assumindo  $v_1 = \mu_1$ ,  $v_2 = \mu_2$  e assumindo a rigidez relativa  $r$ , seja a associação com 10 andares, com 3m entre lajes e carga de 1tf no topo, que consta da fig. 2.12.

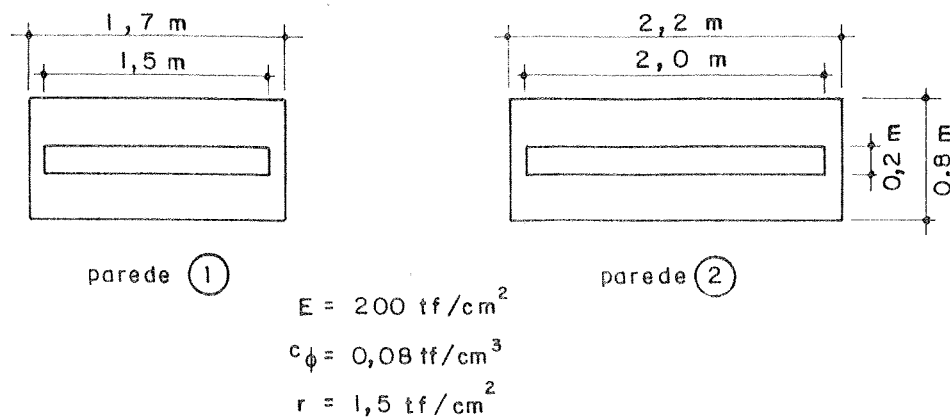


FIG. 2.12 - EXEMPLO 2 .

a) Parâmetros elásticos (tf e dm)

$$I_1 = 563$$

$$I_2 = 1333$$

$$I_{f1} = 3275$$

$$I_{f2} = 7098$$

$$s_1 = 262000$$

$$s_2 = 568000$$

$$k^4 = \frac{r}{4E} \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) = \frac{150}{4 \cdot 200000} \left( \frac{1}{563} + \frac{1}{1333} \right) = 0,000 \ 004 \ 737$$

$$k = 0,04665$$

$$k\ell = 13,996 \text{ rd} \quad k\ell = 801,9^0$$

b) Funções trigonométricas e hiperbólicas

$$\text{sen } k\ell = 0,9900$$

$$\text{cos } k\ell = 0,1409$$

$$\text{sh } k\ell \approx \text{ch } k\ell = 598902$$

$$\bar{f}_1 = 592913$$

$$\bar{f}_2 = 84385$$

$$\bar{f}_3 = 84385$$

$$\bar{f}_4 = 592 \ 913$$

c) Cálculo das constantes

$$\mu_1 = \nu_1 = 0,2969$$

$$\mu_2 = \nu_2 = 0,7031$$

$$c_5 = -0,7031$$

$$c_7 = 0,2969$$

$$c_6 = 210,93$$

$$c_8 = -89,07$$

$$\gamma = \frac{150}{2 \cdot 0,04665^3} \left( \frac{1}{262000} + \frac{1}{568000} \right) = 4,1204$$

$$\eta = \frac{150}{0,04665^3 (563+1333)} \left( \frac{563}{262000} - \frac{1333}{568000} \right) = -0,1543$$

$$\eta k^2 \ell = -0,1543 \cdot 0,04665^2 \cdot 300 = -0,1007$$

$$c_1 = -0,1007 \frac{3,5867 \cdot 10^{11}}{-1,8365 \cdot 10^{12}} = 0,019667$$

$$c_3 = -0,1007 \frac{0}{-1,8365 \cdot 10^{12}} = 0$$

$$c_4 = +0,1007 \frac{3,5867 \cdot 10^{11}}{-1,8365 \cdot 10^{12}} = -0,019667$$

$$c_2 = 0$$

$$\phi_1 = \frac{0,019667}{2 \cdot 0,04665^2 \cdot 262000} + 0,2969 \frac{300}{262000} = 0,0003572$$

$$\phi_2 = - \frac{0,019667}{2 \cdot 0,04665^2 \cdot 568000} + 0,7031 \frac{300}{568000} = 0,0003634$$

$$p_2 = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4$$

$$p_2 = 0,019667 f_1 - 0,019667 f_4$$

$$Q_2 = -\frac{c_3+c_4}{2k} f_1 - \frac{c_3-c_4}{2k} f_2 - \frac{c_2-c_1}{2k} f_3 - \frac{c_1+c_2}{2k} f_4 - c_5$$

$$Q_2 = +0,210793 f_1 - 0,210793 f_2 + 0,210793 f_3 + \\ - 0,210793 f_4 + 0,7031$$

$$Q_2 = 0,210793(f_1 - f_2 + f_3 - f_4) + 0,7031$$

$$M_2 = \frac{c_2}{2k^2} f_1 - \frac{c_1}{2k^2} f_2 - \frac{c_4}{2k^2} f_3 + \frac{c_3}{2k^2} f_4 + c_5 z + c_6$$

$$M_2 = 4,519(f_3 - f_2) - 0,7031 z + 210,93$$

$$p_1 = -p_2$$

$$Q_1 = -0,210793(f_1 - f_2 + f_3 - f_4) + 0,2969$$

$$M_1 = -4,519(f_3 - f_2) - 0,2969 z + 89,07$$

$$u_1 = \phi_1 z + \frac{1}{4k^4 EI_1} p_2 - \frac{1}{EI_1} \left( \frac{c_7 z^3}{6} + \frac{c_8}{2} z^2 + \frac{c_3+c_4}{4k^3} z + \frac{c_2}{4k^4} \right)$$

$$u_1 = 0,0003572 z + 0,004687 p_2 - \frac{z^3}{2,276 \cdot 10^8} + \frac{z^2}{2,528 \cdot 10^5} + \frac{z}{2,325 \cdot 10^5}$$

$$u_1 = 0,004687 p_2 - \frac{z^3}{2,276 \cdot 10^8} + \frac{z^2}{2,528 \cdot 10^5} + 0,0003615 z$$

Os resultados constam da fig. 2.13

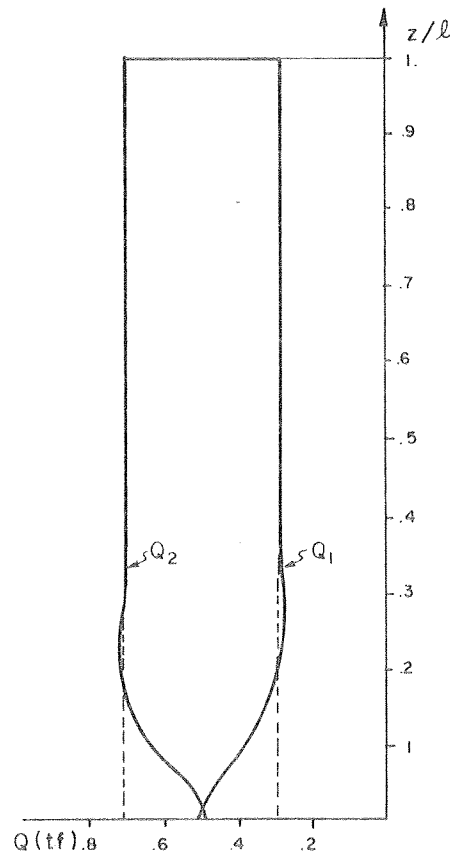
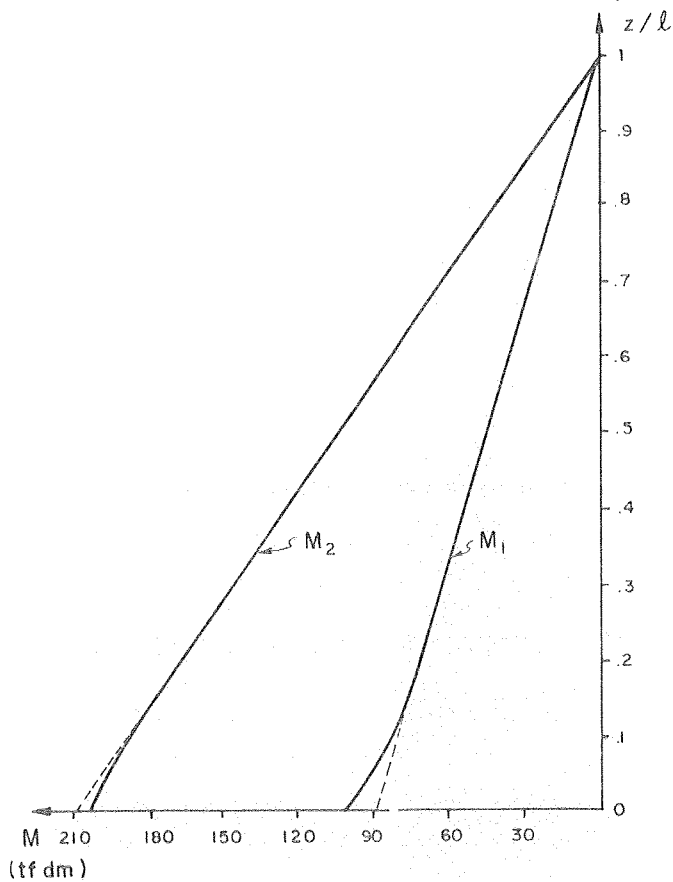
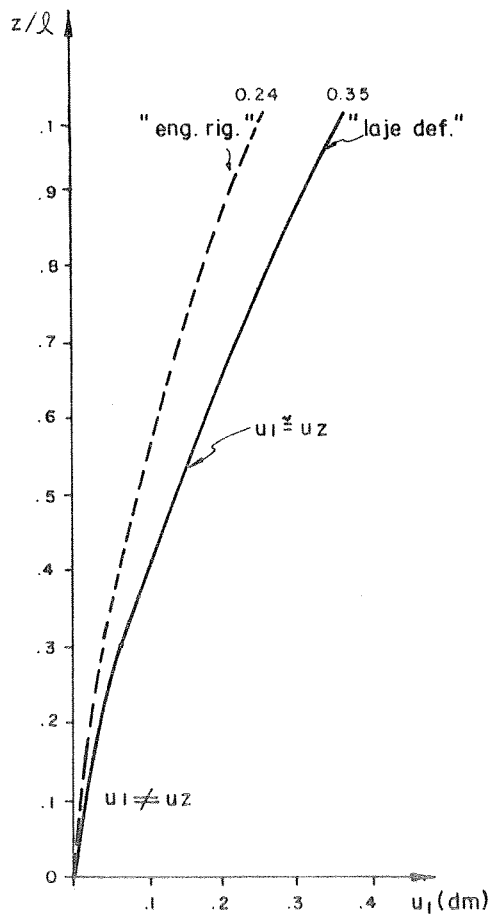
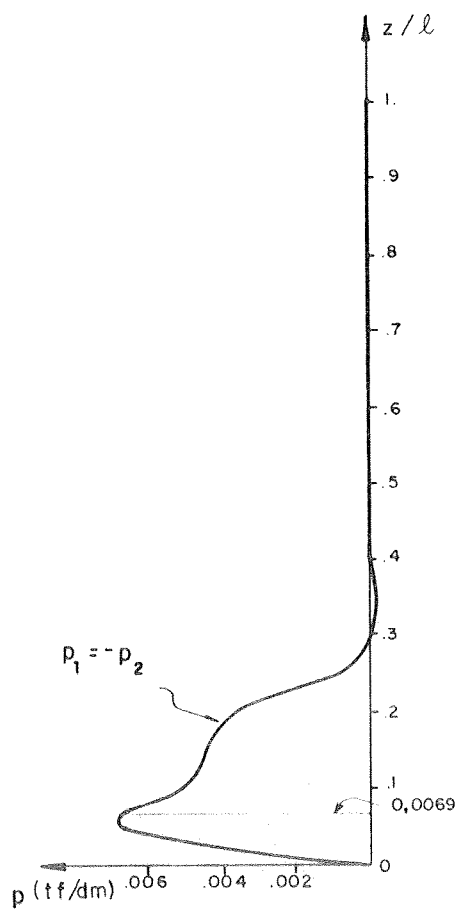


FIG. 2.13 - EXEMPLO 2



II.6. ASSOCIAÇÃO DAS DUAS PAREDES COMPUTANDO ALÉM DAS DEFORMAÇÕES DE FLEXÃO AS CORRESPONDENTES A CISCALHAMENTO

As deformações devidas a esforço cortante têm sido usualmente negligenciadas pelos autores que se dedicam à análise contínua de edifícios altos, apesar de provocarem algumas perturbações dependendo das dimensões dos elementos estruturais. A simples computação dessas deformações permite eliminar a incompatibilidade a que se chegou no item II.3 ao tratar de engastamentos elásticos, sem as aparentes limitações dadas pelas soluções dos itens II.4 e II.5, que, ou são apropriadas para pilares muito esbeltos ou para pilares tremendamente rígidos.

Para o caso das duas paredes o tratamento pode ser feito com a mera substituição das equações (2.6), (2.7) e (2.9) do item II.2 por, respectivamente:

u\_1 = phi\_1 z + integral from 0 to z of (cQ\_1 / GA\_1) dz + integral from 0 to z of (integral from 0 to z of (M\_1 / EI\_1) dz) dz .... (2.167)

u\_2 = phi\_2 z + integral from 0 to z of (cQ\_2 / GA\_2) dz + integral from 0 to z of (integral from 0 to z of (M\_2 / EI\_2) dz) dz .... (2.168)

psi z = phi\_1 z + integral from 0 to z of (cQ\_1 / GA\_1) dz + integral from 0 to z of (integral from 0 to z of (M\_1 / EI\_1) dz) dz = phi\_2 z + integral from 0 to z of (cQ\_2 / GA\_2) dz + integral from 0 to z of (integral from 0 to z of (M\_2 / EI\_2) dz) dz .... (2.169)

II.6.1. OBTENÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL A UMA SÓ VARIÁVEL PARA O PROBLEMA

Da (2.169) derivando quatro vezes

(cQ\_1''' / GA\_1) + (M\_1'' / EI\_1) = (cQ\_2''' / GA\_2) + (M\_2'' / EI\_2) .... (2.170)

Da (2.1) com (2.5)

$$Q_1''' = p_2'' \quad \dots (2.171)$$

Da (2.2) com (2.1) e (2.5)

$$M_1'' = - p_2 \quad \dots (2.172)$$

Da (2.3)

$$Q_2''' = - p_2'' \quad \dots (2.173)$$

Da (2.4) com (2.3)

$$M_2'' = p_2 \quad \dots (2.174)$$

Da (2.170) com (2.171) a (2.174)

$$\frac{c}{GA_1} p_2'' - \frac{1}{EI_1} p_2 = - \frac{c}{GA_2} p_2'' + \frac{1}{EI_2} p_2$$

ou

$$p_2'' \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) - p_2 \left( \frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right) = 0$$

ou ainda

$$p_2'' - k^2 p_2 = 0 \quad \dots (2.175)$$

com

$$k^2 = \frac{\frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2}}{\frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2}} \quad \dots (2.176)$$

### II.6.2. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

A equação característica da (2.175) é

$$r^2 - k^2 = 0 \quad \dots (2.177)$$

cujas raízes são

$$r_i = \pm k$$

Portanto, a solução geral da equação homogênea (2.175) é

$$p_2 = \bar{c}_1 e^{kz} + \bar{c}_2 e^{-kz}$$

A equação acima pode ser facilmente posta na forma:

$$p_2 = c_1 \operatorname{sh} kz + c_2 \operatorname{ch} kz \quad \dots (2.178)$$

### II.6.3. RELACIONAMENTO DE TODAS AS FUNÇÕES DO PROBLEMA COM $p_2$

Da (2.5) com (2.178)

$$p_1 = -c_1 \operatorname{sh} kz - c_2 \operatorname{ch} kz \quad \dots (2.179)$$

Da (2.1) com (2.179)

$$Q_1 = \frac{c_1}{k} \operatorname{ch} kz + \frac{c_2}{k} \operatorname{sh} kz + c_3 \quad \dots (2.180)$$

Da (2.3) com (2.178)

$$Q_2 = -\frac{c_1}{k} \operatorname{ch} kz - \frac{c_2}{k} \operatorname{sh} kz + c_4 \quad \dots (2.181)$$

Da (2.2) com (2.180)

$$M_1 = -\frac{c_1}{k^2} \operatorname{sh} kz - \frac{c_2}{k^2} \operatorname{ch} kz - c_3 z + c_5 \quad \dots (2.182)$$

Da (2.4) com (2.181)

$$M_2 = \frac{c_1}{k^2} \operatorname{sh} kz + \frac{c_2}{k^2} \operatorname{ch} kz - c_4 z + c_6 \quad \dots (2.183)$$

Da (2.180)

$$\int_0^z Q_1 dz = \frac{c_1}{k^2} \text{sh } kz + \frac{c_2}{k^2} \text{ch } kz + c_3 z - \frac{c_2}{k^2}$$

ou, com a (2.178)

$$\int_0^z Q_1 dz = \frac{1}{k^2} p_2 + c_3 z - \frac{c_2}{k^2} \dots (2.184)$$

Da (2.181)

$$\int_0^z Q_2 dz = -\frac{c_1}{k^2} \text{sh } kz - \frac{c_2}{k^2} \text{ch } kz + c_4 z + \frac{c_2}{k^2}$$

ou, com a (2.178)

$$\int_0^z Q_2 dz = -\frac{1}{k^2} p_2 + c_4 z + \frac{c_2}{k^2} \dots (2.185)$$

Da (2.182)

$$\int_0^z M_1 dz = -\frac{c_1}{k^3} \text{ch } kz - \frac{c_2}{k^3} \text{sh } kz - \frac{c_3}{2} z^2 + c_5 z + \frac{c_1}{k^3}$$

e

$$\int_0^z \left( \int_0^z M_1 dz \right) dz = -\frac{c_1}{k^4} \text{sh } kz - \frac{c_2}{k^4} \text{ch } kz - \frac{c_3}{6} z^3 + \frac{c_5}{2} z^2 + \frac{c_1}{k^3} z + \frac{c_2}{k^4}$$

ou, com a (2.178)

$$\int_0^z \left( \int_0^z M_1 dz \right) dz = -\frac{1}{k^4} p_2 - \frac{c_3}{6} z^3 + \frac{c_5}{2} z^2 + \frac{c_1}{k^3} z + \frac{c_2}{k^4} \dots (2.186.a)$$

Da (2.183)

$$\int_0^z M_2 dz = \frac{c_1}{k^3} \text{ch } kz + \frac{c_2}{k^3} \text{sh } kz - \frac{c_4}{2} z^2 + c_6 z - \frac{c_1}{k^3}$$

e

$$\int_0^z \left( \int_0^z M_2 dz \right) dz = \frac{c_1}{k^4} \operatorname{sh} kz + \frac{c_2}{k^4} \operatorname{ch} kz - \frac{c_4}{6} z^3 + \frac{c_6}{2} z^2 - \frac{c_1}{k^3} z - \frac{c_2}{k^4}$$

ou

$$\int_0^z \left( \int_0^z M_2 dz \right) dz = \frac{1}{k^4} p_2 - \frac{c_4}{6} z^3 + \frac{c_6}{2} z^2 - \frac{c_1}{k^3} z - \frac{c_2}{k^4} \quad (2.186.b)$$

#### 11.6.4. RETORNO À CONDIÇÃO DE COMPATIBILIDADE

Com (2.184) a (2.186.b) na (2.169)

$$\begin{aligned} \forall z \rightarrow \phi_1 z + \frac{c}{GA_1} \left( \frac{1}{k^2} p_2 + c_3 z - \frac{c_2}{k^2} \right) + \frac{1}{EI_1} \left( -\frac{1}{k^4} p_2 - \frac{c_3}{6} z^3 + \frac{c_5}{2} z^2 + \right. \\ \left. + \frac{c_1}{k^3} z + \frac{c_2}{k^4} \right) = \\ = \phi_2 z + \frac{c}{GA_2} \left( -\frac{1}{k^2} p_2 + c_4 z + \frac{c_2}{k^2} \right) + \frac{1}{EI_2} \left( \frac{1}{k^4} p_2 - \frac{c_4}{6} z^3 + \frac{c_6}{2} z^2 + \right. \\ \left. - \frac{c_1}{k^3} z - \frac{c_2}{k^4} \right) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \forall z \rightarrow p_2 \left[ \frac{1}{k^2} \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) - \frac{1}{k^4} \left( \frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right) \right] - \left( \frac{c_3}{6EI_1} - \frac{c_4}{6EI_2} \right) z^3 + \\ + \left( \frac{c_5}{2EI_1} - \frac{c_6}{2EI_2} \right) z^2 + \left( \phi_1 - \phi_2 + \frac{cc_3}{GA_1} - \frac{cc_4}{GA_2} + \frac{c_1}{EI_1 k^3} + \frac{c_1}{EI_2 k^3} \right) z + \\ - \frac{cc_2}{GA_1 k^2} - \frac{cc_2}{GA_2 k^2} + \frac{c_2}{EI_1 k^4} + \frac{c_2}{EI_2 k^4} = 0 \quad \dots (2.187) \end{aligned}$$

Para valer a (2.187) para qualquer  $z$  deve-se ter:

$$\frac{1}{k^2} \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) - \frac{1}{k^4} \left( \frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right) = 0 \quad \dots (2.188)$$

$$\frac{c_3}{6EI_1} - \frac{c_4}{6EI_2} = 0 \quad \dots (2.189)$$

$$\frac{c_5}{2EI_1} - \frac{c_6}{2EI_2} = 0 \quad \dots (2.190)$$

$$\phi_1 - \phi_2 + \frac{cc_3}{GA_1} - \frac{cc_4}{GA_2} + \frac{c_1}{k^3} \left( \frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right) = 0 \quad \dots (2.191)$$

$$c_2 \left[ -\frac{1}{k^2} \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) + \frac{1}{k^4} \left( \frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right) \right] = 0 \quad \dots (2.192)$$

A (2.188) e a (2.192) resultam, com a (2.176) em identidades.

Da (2.189)

$$c_3 = \frac{I_1}{I_2} c_4 \quad \dots (2.193)$$

Da (2.190)

$$c_5 = \frac{I_1}{I_2} c_6 \quad \dots (2.194)$$

Da (2.191) com a (2.176)

$$\phi_1 - \phi_2 + \frac{cc_3}{GA_1} - \frac{cc_4}{GA_2} + \frac{c_1}{k^3} k^2 \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) = 0$$

Com (2.193), tem-se

$$\phi_1 - \phi_2 + \frac{c_1}{k} \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) + c_4 \left( \frac{c}{GA_1} \frac{I_1}{I_2} - \frac{c}{GA_2} \right) = 0$$

ou

$$\phi_1 - \phi_2 + \frac{c_1}{k} \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) + \frac{c_4}{I_2} \left( \frac{cI_1}{GA_1} - \frac{cI_2}{GA_2} \right) = 0 \quad \dots (2.195)$$

Com (2.193) a (2.195) também fica

$$\phi_1 - \phi_2 + \frac{c_1}{k} \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) + c_3 \left( \frac{c}{GA_1} - \frac{c}{GA_2} \frac{I_2}{I_1} \right) = 0$$

ou

$$\phi_1 - \phi_2 + \frac{c_1}{k} \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) + \frac{c_3}{I_1} \left( \frac{cI_1}{GA_1} - \frac{cI_2}{GA_2} \right) = 0 \quad \dots (2.196)$$

Fazendo  $I_2 \cdot (2.195) + I_1 \cdot (2.196)$

$$(\phi_1 - \phi_2) I + \frac{c_1 I}{k} + \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) + (c_3 + c_4) \left( \frac{c}{G} \frac{I_1}{A_1} - \frac{cI_2}{GA_2} \right) = 0$$

ou

$$\phi_1 - \phi_2 + c_1 \frac{c}{Gk} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + (c_3 + c_4) \frac{c}{G} \left( \frac{\mu_1}{A_1} - \frac{\mu_2}{A_2} \right) = 0 \quad \dots (2.197)$$

com

$$I = I_1 + I_2 \quad \dots (2.198)$$

$$\mu_1 = \frac{I_1}{I} \quad \dots (2.199)$$

$$\mu_2 = \frac{I_2}{I} \quad \dots (2.200)$$

## II.6.5. CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para determinar as oito incógnitas  $c_1$  a  $c_6$ ,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , dispõe-se, além das três relações (2.193), (2.194) e (2.197), de duas condições relativas ao engastamento das bases e três relativas aos esforços atuantes no topo.

a) Condições de contorno relativas ao topo

$$x = \ell \rightarrow M_1 = 0 \quad \dots (2.201)$$

$$x = \ell \rightarrow M_2 = 0 \quad \dots (2.202)$$

$$x = \ell \rightarrow Q_1 + Q_2 = F \quad \dots (2.203)$$

b) Condição de contorno relativo à base

Havendo engastamento rígido

$$x = 0 \rightarrow \phi_1 = 0 \quad \dots (2.204)$$

$$x = 0 \rightarrow \phi_2 = 0 \quad \dots (2.205)$$

Havendo engastamento elástico ter-se-ia, em substituição a (2.204) e (2.205):

$$x = 0 \rightarrow M_1 = s_1 \phi_1 \quad \dots (2.206)$$

$$x = 0 \rightarrow M_2 = s_2 \phi_2 \quad \dots (2.207)$$

### II.6.6. DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES NO CASO DE ENGASTAMENTO ELÁSTICO

Da (2.193)

$$c_3 = \frac{I_1}{I_2} c_4 \quad \dots (2.208)$$

Da (2.194)

$$c_5 = \frac{I_1}{I_2} c_6 \quad \dots (2.209)$$

Da (2.197)

$$\frac{G}{c}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{c_1}{k} \left( \frac{1}{\Lambda_1} + \frac{1}{\Lambda_2} \right) + (c_3 + c_4) \left( \frac{\mu_1}{\Lambda_1} - \frac{\mu_2}{\Lambda_2} \right) = 0 \quad \dots (2.210)$$

Da (2.201) com (2.182)

$$c_1 \operatorname{sh} k l + c_2 \operatorname{ch} k l + c_3 k^2 l - c_5 k^2 = 0 \quad \dots (2.211)$$



Da (2.202) com (2.183)

$$c_1 \operatorname{sh} k \ell + c_2 \operatorname{ch} k \ell - c_4 k^2 \ell + c_6 k^2 = 0 \quad \dots (2.212)$$

Da (2.203) com (2.180) e (2.181)

$$c_3 + c_4 = F \quad \dots (2.213)$$

Da (2.206) com (2.182)

$$-\frac{c_2}{k^2} + c_5 = s_1 \phi_1 \quad \dots (2.214)$$

Da (2.207) com (2.183)

$$\frac{c_2}{k^2} + c_6 = s_2 \phi_2 \quad \dots (2.215)$$

Da (2.213) com (2.208) e (2.200)

$$\frac{I_1}{I_2} c_4 + c_4 = F$$

ou, com (2.200)

$$c_4 = \mu_2 F \quad \dots (2.216)$$

Da (2.208) com (2.216) e (2.199)

$$c_3 = \mu_1 F \quad \dots (2.217)$$

Fazendo (2.211) - (2.212) e dividindo por  $k^2$

$$(c_3 + c_4) \ell - c_5 - c_6 = 0$$

ou, com (2.216) e (2.217)

$$c_5 + c_6 = F \ell \quad \dots (2.218)$$

Da (2.218) com (2.209)

$$\frac{I_1}{I_2} c_6 + c_6 = F \ell$$

ou, com (2.200)

$$c_6 = \mu_2 F \ell \quad \dots (2.219)$$

Da (2.209) com (2.219) e (2.199)

$$c_5 = \mu_1 F \ell \quad \dots (2.220)$$

Da (2.210) com (2.216) e (2.217)

$$\frac{G}{c} (\phi_1 - \phi_2) + \frac{c_1}{k} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + \left( \frac{\mu_1}{A_1} - \frac{\mu_2}{A_2} \right) F = 0 \quad \dots (2.221)$$

Fazendo  $I_2$  (2.211) +  $I_1$  (2.212), com (2.198)

$$c_1 I \operatorname{sh} k \ell + c_2 I \operatorname{ch} k \ell + (c_3 I_2 - c_4 I_1) k^2 \ell + (c_6 I_1 - c_5 I_2) k^2 = 0$$

ou, com (2.208) e (2.209)

$$c_1 \operatorname{sh} k \ell + c_2 \operatorname{ch} k \ell = 0 \quad \dots (2.222)$$

Fazendo  $I_2$  (2.214) -  $I_1$  (2.215)

$$-\frac{c_2 I}{k^2} + c_5 I_2 - c_6 I_1 = s_1 I_2 \phi_1 - s_2 I_1 \phi_2$$

ou, com (2.209), (2.199) e (2.200)

$$-\frac{c_2}{k^2} = s_1 \mu_2 \phi_1 - s_2 \mu_1 \phi_2 \quad \dots (2.223)$$

Fazendo (2.214) + (2.215) com (2.219) e (2.220)

$$F \ell = s_1 \phi_1 + s_2 \phi_2 \quad \dots (2.224)$$

Fazendo  $\mu_2$  (2.224) - (2.223)

$$\mu_2 F \ell + \frac{c_2}{k^2} = s_2 \phi_2$$

ou

$$\phi_2 = \frac{\mu_2}{s_2} F \ell + \frac{c_2}{s_2 k^2} \quad \dots (2.225)$$

Fazendo  $\mu_1$  (2.224) + (2.223)

$$\mu_1 F \ell - \frac{c_2}{k^2} = s_1 \phi_1$$

ou

$$\phi_1 = \frac{\mu_1}{s_1} F \ell - \frac{c_2}{s_1 k^2} \quad \dots (2.226)$$

Da (2.221) com (2.225) e (2.226)

$$\begin{aligned} \frac{G}{c} \left[ \left( \frac{\mu_1}{s_1} - \frac{\mu_2}{s_2} \right) F \ell - \frac{c_2}{k^2} \left( \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) \right] + \frac{c_1}{k} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + \\ + \left( \frac{\mu_1}{A_1} - \frac{\mu_2}{A_2} \right) F = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} c_1 \frac{c}{kG} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) - c_2 \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) + \left[ \ell \left( \frac{\mu_1}{s_1} - \frac{\mu_2}{s_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{c}{G} \left( \frac{\mu_1}{A_1} - \frac{\mu_2}{A_2} \right) \right] F = 0 \quad \dots (2.227) \end{aligned}$$

Da (2.222)

$$c_2 = -c_1 \text{th } k \ell \quad \dots (2.228)$$

Da (2.227) com (2.228)

$$c_1 = \frac{\ell \left( \frac{\mu_2}{s_2} - \frac{\mu_1}{s_1} \right) + \frac{c}{G} \left( \frac{\mu_2}{A_2} - \frac{\mu_1}{A_1} \right)}{\frac{c}{kG} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + \frac{\text{th } k \ell}{k^2} \left( \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right)} F$$

ou

$$c_1 = \frac{\alpha}{\ell} F \quad \dots (2.229)$$

com

$$\alpha = \frac{\ell^2 \left( \frac{\mu_2}{s_2} - \frac{\mu_1}{s_1} \right) + \frac{c \ell}{G} \left( \frac{\mu_2}{A_2} - \frac{\mu_1}{A_1} \right)}{\frac{c}{kG} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + \frac{\text{th } k \ell}{k^2} \left( \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right)} \quad \dots (2.230)$$

Da (2.228) com (2.229)

$$c_2 = - \frac{\alpha \text{ th } k \ell}{\ell} F \quad \dots (2.231)$$

Da (2.226) com (2.231)

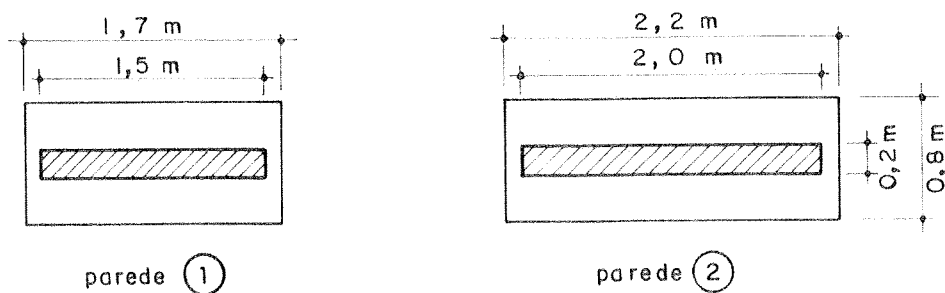
$$\phi_1 = \left( \frac{\mu_1}{s_1} \ell + \frac{\alpha \text{ th } k \ell}{s_1 k^2 \ell} \right) F \quad \dots (2.232)$$

Da (2.225) com (2.231)

$$\phi_2 = \left( \frac{\mu_2}{s_2} \ell - \frac{\alpha \text{ th } k \ell}{s_2 k^2 \ell} \right) F \quad \dots (2.233)$$

### II.6.7. EXEMPLO 3

Seja a associação com 10 andares, com 3 m entre lajes, carga de 1 tf no topo e esquematizada em planta na Fig. 2.14.



$E = 200 \text{ tf/cm}^2$   
 $\nu = 0,10$   
 $c_\phi = 0,08 \text{ tf/cm}^3$

FIG. 2.14 - EXEMPLO 3 .

a) Parâmetros elásticos e geométricos (tf e dm)

$E = 20000$

$G = 9090$

$c = 1,2$

$c_\phi = 80$

$A_1 = 30$

$I_1 = 563$

$I_{f1} = 3275$

$s_1 = 262000$

$\mu_1 = 0,2969$

$A_2 = 40$

$I_2 = 1333$

$I_{f2} = 7098$

$s_2 = 568000$

$\mu_2 = 0,7031$

b) Constantes do problema

$$k^2 = \frac{9090}{1,2 \cdot 20000} \frac{\frac{1}{563} + \frac{1}{1333}}{\frac{1}{30} + \frac{1}{40}} = 0,016403$$

$k = 0,12808$

$k\ell = 38,42$

$\text{th } k\ell = 1,00$

$$\alpha = \frac{300^2 \left( \frac{0,7031}{568000} - \frac{0,2969}{262000} \right) + \frac{1,2 \cdot 300}{9090} \left( \frac{0,7031}{40} - \frac{0,2969}{30} \right)}{0,12808 \cdot 9090 \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{40} \right) + \frac{1}{0,016403} \left( \frac{1}{262000} + \frac{1}{568000} \right)}$$

$$\alpha = \frac{0,009418 + 0,000304}{0,0000601 + 0,0003400} = 24,299$$

$$c_1 = 0,0810$$

$$c_2 = -0,0810$$

$$c_3 = 0,2969$$

$$c_4 = 0,7031$$

$$c_5 = 89,07$$

$$c_6 = 210,93$$

$$\phi_1 = 0,0003588$$

$$\phi_2 = 0,0003627$$

c) Tabelamento das diversas funções

$$p_2 = c_1 \operatorname{sh} kz + c_2 \operatorname{ch} kz$$

$$Q_2 = 0,6324 \operatorname{sh} kz - 0,6324 \operatorname{ch} kz + 0,7031$$

$$p_1 = -p_2$$

$$Q_1 = -0,6324 \operatorname{sh} kz + 0,6324 \operatorname{ch} kz + 0,2969$$

$$M_1 = -60,96 p_2 - 0,2969 z + 89,07$$

$$M_2 = 60,96 p_2 - 0,7031 z + 210,93$$

$$u = u_1 = u_2 = \phi_1 z + \frac{c}{GA_1} \left( \frac{1}{2} p_2 + c_3 z - \frac{c_2}{k} \right) + \frac{1}{EI_1} \left( -\frac{1}{k^4} p_2 + \right. \\ \left. - \frac{c_3}{6} z^3 + \frac{c_5}{2} z^2 + \frac{c_1}{k^3} z + \frac{c_2}{k^4} \right)$$

$$u = \frac{c_2}{k^2} \left( \frac{1}{EI_1 k^2} - \frac{c}{GA_1} \right) - \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{EI_1 k^2} - \frac{c}{GA_1} \right) p_2 + \left( \phi_1 + \frac{c c_3}{GA_1} + \right. \\ \left. + \frac{c_1}{EI_1 k^3} \right) z + \frac{c_5}{2EI_1} z^2 - \frac{c_3}{6EI_1} z^3$$

$$u = -0,00000501 - 0,00006181 p_2 + 0,00036353 z + \\ + 0,000003955 z^2 - 0,00000004395 z^3$$

Os resultados constam da fig. 2.15.

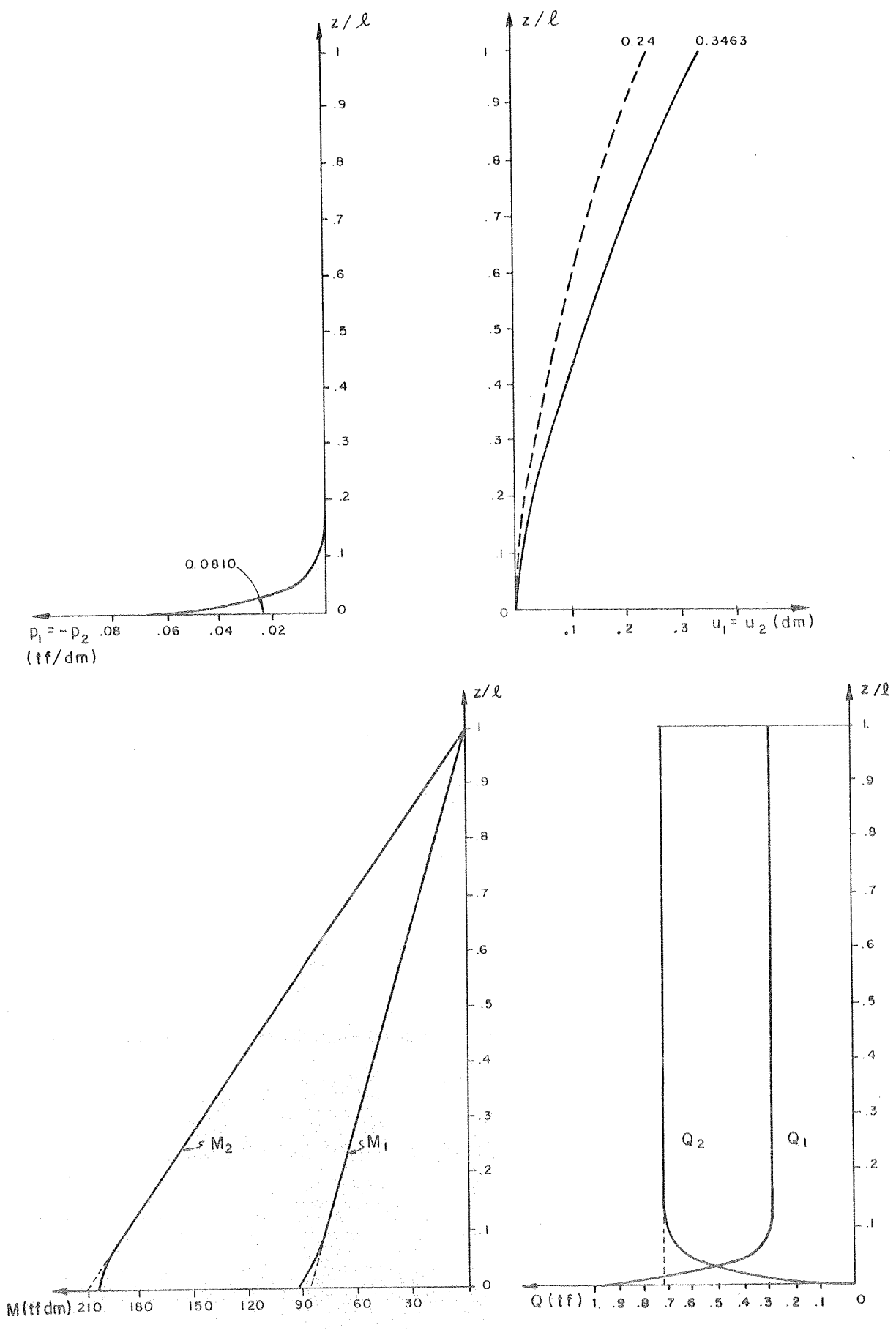


FIG. 2.15 - EXEMPLO 3



## II.7. CONCLUSÕES PARCIAIS

Qualquer das soluções apresentadas deteta grandes perturbações nos esforços cortantes nas bases, perturbações ainda significativas na elástica do conjunto e pequenas perturbações nos momentos fletores nas bases. Essas perturbações tendem a diminuir, ou mesmo se anular, se as fundações forem "proporcionais às paredes", isto é, se houver uma relação constante entre os momentos de inércia das paredes e da área de contato da fundação com o solo. Verificando-se isso, não haverá na versão discreta do Item II.4, nem na versão do Item II.5, qualquer perturbação; na do Item II.6, no caso do exemplo 3,  $\alpha$  ficaria reduzido a 0,76 em lugar de 24,3, fazendo com que as perturbações ficassem quase nulas.

## CAPÍTULO III

### ASSOCIAÇÃO DE PAREDES UNIDAS POR LINTÉIS

#### III.1. INTRODUÇÃO

O mesmo problema de incompatibilidade de deslocamentos aparece também na associação de paredes unidas por lintéis. Esses lintéis, ou vigas de união, são utilizados para obter um comportamento típico de pórtico, aumentando consideravelmente a rigidez lateral do conjunto, em relação ao caso de as paredes trabalharem isoladas. Para o caso de engastamento rígido das bases o problema já foi resolvido, com relativa simplicidade, computando só deformações por flexão das paredes; para a imposição de recalques de apoio, ou para o tratamento de engastamentos elásticos, seria necessária uma sofisticação maior no cálculo. Pensando no caso de paredes relativamente robustas seria interessante a computação das deformações devidas a esforço cortante. Para o caso de paredes mais esbeltas dentro de cada andar, poder-se-ia pensar em analisar as perturbações nas vizinhanças do engastamento com soluções decorrentes da flexão local dos pilares, o que complicaria muito mais o problema em relação à situação análoga tratada no capítulo II.

### III.2. DEFINIÇÃO DA ESTRUTURA A SER ANALISADA

Sejam as duas paredes da fig.3.1 constrangidas a ter a mesma elástica pela existência de lajes indeformáveis em seu plano. Sejam  $s_1$  e  $s_2$  as rigidezes à rotação dos engastes, e  $r_1$  e  $r_2$  as rigidezes à translação vertical dos mesmos. Sejam os lintéis engastados nas paredes, cada um deles com momento de inércia  $i$  e área de seção transversal  $s$ .

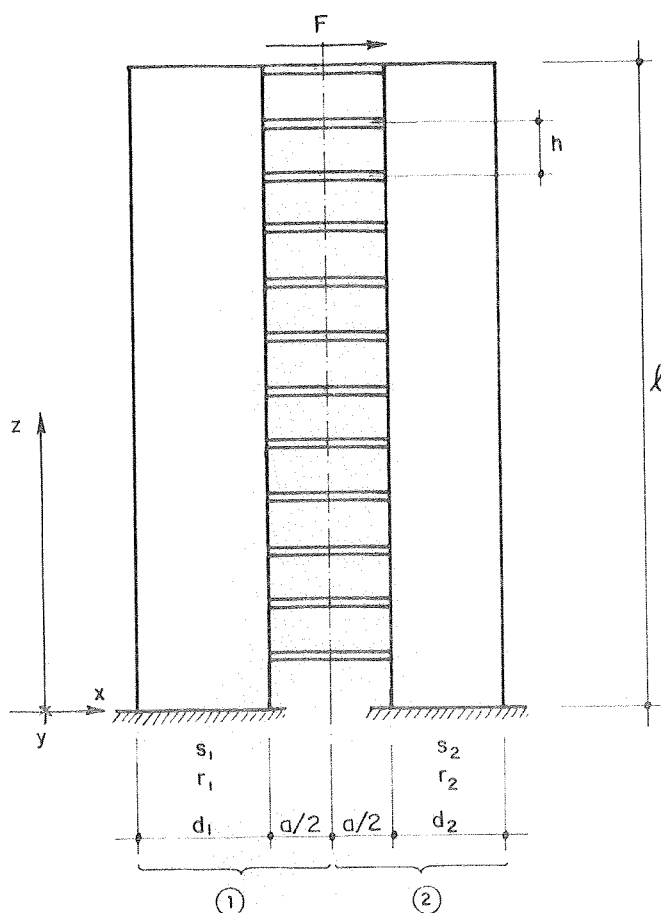


FIG. 3.1 - ESTRUTURA A SER ANALISADA

### III.3. CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO DAS PAREDES

A cada parede será associada a metade adjacente do meio contínuo constituído pelos lintéis.

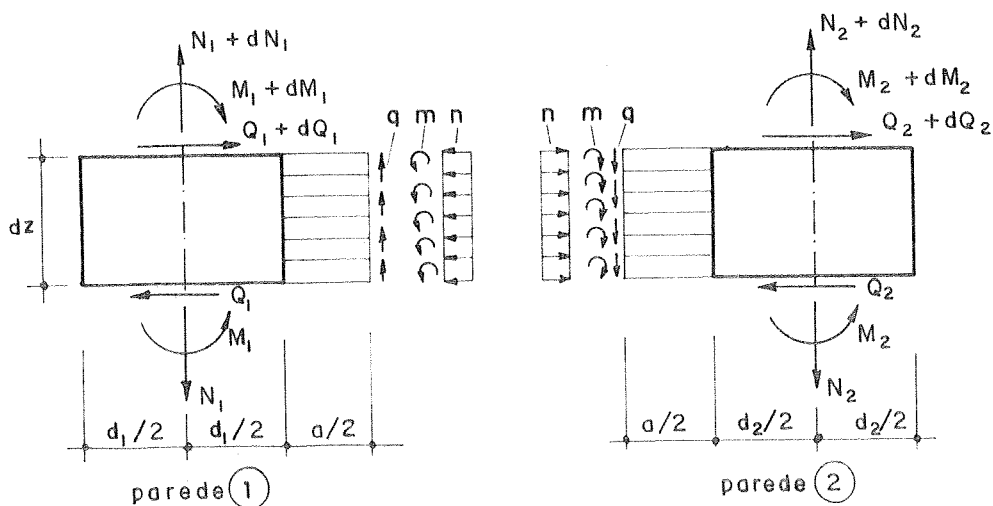


FIG. 3.2 - ESFORÇOS ATUANDO NAS PAREDES

Da fig. 3.2, para a parede 1

$$dQ_1 - ndz = 0$$

$$dN_1 + qdz = 0$$

$$dM_1 + Q_1 dz - qdz \frac{d_1 + a}{2} - mdz = 0$$

ou

$$Q_1' = n \quad \dots (3.1)$$

$$N_1' = -q \quad \dots (3.2)$$

$$M_1' = -Q_1 + \frac{d_1 + a}{2} q + m \quad \dots (3.3)$$

Da fig. 3.2, para a parede 2

$$dQ_2 + ndz = 0$$

$$dN_2 - qdz = 0$$

$$dM_2 + Q_2 dz - \frac{d_2 + a}{2} qdz + mdz$$

ou

$$Q_2' = -n \quad \dots (3.4)$$

$$N_2' = q \quad \dots (3.5)$$

$$M_2' = -Q_2 + \frac{d_2 + a}{2} q - m \quad \dots (3.6)$$

As condições de equilíbrio do meio contínuo constituído pelas lajes estão já implícitas com a introdução só do esforço horizontal  $n$  de interação entre as paredes.

### III.4. DESLOCAMENTOS POSSÍVEIS DAS BASES

Constam da fig. 3.3.

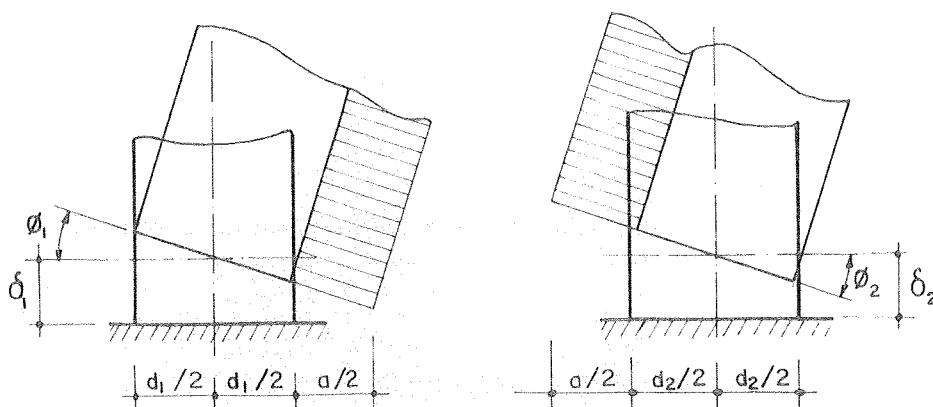


FIG. 3.3 - DESLOCAMENTOS POSSÍVEIS DAS BASES.

### III.5. DESLOCAMENTOS POSSÍVEIS DAS DUAS PAREDES, NA LINHA MÉDIA DOS LINTÊIS

Os deslocamentos de cada parede, na linha média dos lintêis, resultariam de diversos efeitos como:

- a) Deslocamentos possíveis das bases
- b) Deformação por flexão das paredes
- c) Deformação por cortante das paredes desprezando a distorção dos "nós" de interseção dos lintêis com as paredes
- d) Deformação acarretada pela distorção dos "nós" de interseção dos lintêis com as paredes.
- e) Deformação axial das paredes
- f) Deformação por flexão dos lintêis.
- g) Deformação por cortante dos lintêis.

Nesse trabalho serão levados em conta todas essas deformações exceto a (d), em coerência com hipóteses usuais da estática clássica para tratamento de estruturas lineares; acredita-se, não obstante, que essa deformação poderia ter alguma importância para uma análise mais aprimorada do comportamento do conjunto; a análise correspondente não foi concluída em tempo hábil para a apresentação nesta tese, mas se procurará, de qualquer forma, dar indicações sobre o que já foi feito a respeito e as modificações essenciais na formulação.

Com as hipóteses assumidas e com o auxílio da fig. 3.3, os deslocamentos  $u_1, w_1$  e  $\theta_1$  do ponto médio dos lintêis, acoplado à parede 1, respectivamente nas direções x, z e y, seriam, na cota z:

$$u_1 = \phi_1 z + \int_0^z \frac{cQ_1}{GA_1} dz + \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz \right) dz \quad (3.7)$$

$$w_1 = \delta_1 + \int_0^z \frac{N_1}{EA_1} dz - \frac{d_1 + a}{2} \phi_1 - \frac{d_1 + a}{2} \cdot \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz + \frac{\alpha_1}{E} q + \frac{\alpha_2}{Ea} m \quad \dots (3.8)$$

com

$$\alpha_1 = E \left( \frac{ha^3}{24Ei} + \frac{cah}{2Gs} \right) \quad \dots (3.9)$$

e

$$\alpha_2 = E a \left( \frac{ha^2}{8Ei} \right) \quad \dots (3.10)$$

$$\Theta_1 = \phi_1 + \int_0^z \frac{M_1}{EI} dz - \frac{\alpha_3}{Ea} q - \frac{\alpha_4}{Ea^2} m \quad \dots (3.11)$$

com

$$\alpha_3 = E a \cdot \frac{ha^2}{8Ei} \quad \dots (3.12)$$

e

$$\alpha_4 = E a^2 \cdot \frac{ah}{2Ei} \quad \dots (3.13)$$

Analogamente, os deslocamentos  $u_2$ ,  $v_2$  e  $\Theta_2$ , segundo respectivamente  $x$ ,  $z$  e  $y$ , e correspondentes ao ponto médio dos lintéis, seriam, na cota  $z$ , para a parede 2:

$$u_2 = \phi_2 z + \int_0^z \frac{cQ_2}{GA_2} dz + \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz \right) dz \quad (3.14)$$

$$w_2 = \delta_2 + \int_0^z \frac{N_2}{EA_2} dz + \frac{d_2+a}{2} \phi_2 + \frac{d_2+a}{2} \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz +$$

$$- \frac{\alpha_1}{E} q + \frac{\alpha_2}{Ea} m \quad \dots (3.15)$$

$$\theta_2 = \phi_2 + \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz - \frac{\alpha_3}{Ea} q + \frac{\alpha_4}{Ea^2} m \quad \dots (3.16)$$

Caso fosse levada em conta a distorção dos nós de interseção lintel com parede, apareceria um termo adicional em cada uma das expressões (3.8), (3.11), (3.15) e (3.16), termos esses que seriam, respectivamente:

$$- \frac{a}{2} \cdot \frac{CQ_1}{GA_1} ; \frac{CQ_1}{GA_1} ; \frac{a}{2} \cdot \frac{CQ_2}{GA_2} \text{ e } \frac{CQ_2}{GA_2}$$

### III.6. CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE DE DESLOCAMENTOS

$$\forall z \rightarrow u_1 = u_2 \quad \dots (3.17)$$

$$\forall z \rightarrow w_1 = w_2 \quad \dots (3.18)$$

$$\forall z \rightarrow \theta_1 = \theta_2 \quad \dots (3.19)$$

Da (3.17) com (3.7) e (3.14)

$$\forall z \rightarrow \phi_1 z + \int_0^z \frac{cQ_1}{GA_1} dz + \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz \right) dz = \phi_2 z +$$

$$+ \int_0^z \frac{cQ_2}{GA_2} dz + \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz \right) dz \quad \dots (3.20)$$



Da (3.18) com (3.8) e (3.15)

$$\begin{aligned} \forall z \rightarrow & \delta_1 + \int_0^z \frac{N_1}{EA_1} dz - \frac{d_1+a}{2} \phi_1 - \frac{d_1+a}{2} \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz + \\ & + \frac{\alpha_1}{E} q + \frac{\alpha_2}{Ea} m = \delta_2 + \int_0^z \frac{N_2}{EA_2} dz + \frac{d_2+a}{2} \phi_2 + \frac{d_2+a}{2} \cdot \\ & \cdot \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz - \frac{\alpha_1}{E} q + \frac{\alpha_2}{Ea} m \quad \dots (3.21) \end{aligned}$$

Da (3.19) com (3.11) e (3.16)

$$\begin{aligned} \forall z \rightarrow & \phi_1 + \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz - \frac{\alpha_3}{Ea} q - \frac{\alpha_4}{Ea^2} m = \phi_2 + \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz + \\ & - \frac{\alpha_3}{Ea} q + \frac{\alpha_4}{Ea^2} m \quad \dots (3.22) \end{aligned}$$

### III.7. OBTENÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL COM UMA SÔ VARIÁVEL

Da (3.20) derivando duas vezes

$$\frac{M_1}{EI_1} - \frac{M_2}{EI_2} + \frac{cQ_1'}{GA_1} - \frac{cQ_2'}{GA_2} = 0 \quad \dots (3.23)$$

Da (3.21) derivando uma vez

$$\frac{N_1}{EA_1} - \frac{N_2}{EA_2} - \frac{d_1+a}{2} \frac{M_1}{EI_1} - \frac{d_2+a}{2} \frac{M_2}{EI_2} + \frac{2\alpha_1}{E} q' = 0 \quad (3.24)$$

Da (3.22) derivando uma vez

$$\frac{M_1}{EI_1} - \frac{M_2}{EI_2} - \frac{2\alpha}{Ea} m' = 0 \quad \dots (3.25)$$

Da (3.23) com (3.1) e (3.4)

$$\frac{M_1}{EI_1} - \frac{M_2}{EI_2} + \frac{\alpha}{EA} n = 0 \quad \dots (3.26)$$

com

$$\alpha = EA \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) \quad \dots (3.27)$$

Da (3.24) derivando uma vez, com (3.2) e (3.5)

$$(d_1+a) \frac{M'_1}{EI_1} + (d_2+a) \frac{M'_2}{EI_2} - \frac{4\alpha_1}{E} q'' + \left( \frac{2}{EA_1} + \frac{2}{EA_2} \right) q = 0$$

ou

$$(d_1+a) \frac{M'_1}{EI_1} + (d_2+a) \frac{M'_2}{EI_2} - \frac{4\alpha_1}{E} q'' + \frac{2\beta}{EA} q = 0 \quad (3.28)$$

onde

$$\beta = EA \left( \frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} \right) \quad \dots (3.29)$$

e

$$A = A_1 + A_2 \quad \dots (3.30)$$

Fazendo (3.26) - (3.25)

$$\frac{\alpha}{EA} n + \frac{2\alpha_4}{Ea^2} m' = 0$$

ou

$$\alpha a^2 n + 2\alpha_4 Am' = 0 \quad \dots (3.31)$$

Derivando a (3.26) uma vez

$$\frac{M'_1}{EI_1} - \frac{M'_2}{EI_2} + \frac{\alpha}{EA} n' = 0 \quad \dots (3.32)$$

Fazendo (3.28) - (d<sub>1</sub>+a) (3.32)

$$(d_1+d_2+2a) \frac{M'_2}{EI_2} - \frac{4\alpha_1}{E} q'' + \frac{2\beta}{EA} q - \frac{\alpha(d_1+a)}{EA} n' = 0 \quad (3.33)$$

Fazendo (3.28) + (d<sub>2</sub>+a) (3.32)

$$(d_1+d_2+2a) \frac{M'_1}{EI_1} - \frac{4\alpha_1}{E} q'' + \frac{2\beta}{EA} q + \frac{\alpha(d_2+a)}{EA} n' = 0 \quad (3.34)$$

Da (3.33) derivada uma vez, com (3.6) e (3.4).

$$(d_1+d_2+2a) \frac{1}{EI_2} \left( n + \frac{d_2+a}{2} q' - m' \right) - \frac{4\alpha_1}{E} q' + \frac{2\beta}{EA} q - \frac{\alpha(d_1+a)}{EA} n'' = 0$$

ou

$$\frac{d_1+d_2+2a}{EI_2} n - \frac{d_1+d_2+2a}{EI_2} m' + \left( \frac{d_2+a}{2} \cdot \frac{d_1+d_2+2a}{EI_2} + \frac{2\beta}{EA} \right) q' +$$

$$- \frac{4\alpha_1}{E} q'' - \frac{\alpha(d_1+a)}{EA} n'' = 0 \quad \dots (3.35)$$

Da (3.34) derivada uma vez, com (3.3) e (3.1)

$$(d_1+d_2+2a) \frac{1}{EI_1} \left( -n + \frac{d_1+a}{2} q' + m' \right) - \frac{4\alpha_1}{E} q'' + \frac{2\beta}{EA} q' +$$

$$+ \frac{\alpha(d_2+a)}{EA} n' = 0$$

ou

$$- \frac{d_1+d_2+2a}{EI_1} n + \frac{d_1+d_2+2a}{EI_1} m' + \left( \frac{d_1+a}{2} \cdot \frac{d_1+d_2+2a}{EI_1} + \frac{2\beta}{EA} \right) q' +$$

$$- \frac{4\alpha_1}{E} q'' + \frac{\alpha(d_2+a)}{EA} n' = 0 \quad \dots (3.36)$$

Da (3.31)

$$m' = - \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} n \quad \dots (3.37)$$

Da (3.35) com (3.37)

$$\frac{d_1+d_2+2a}{EI_2} \left( 1 + \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} \right) n - \frac{\alpha(d_1+a)}{EA} n'' + \left( \frac{d_2+a}{2} \cdot \frac{d_1+d_2+2a}{EI_2} + \frac{2\beta}{EA} \right) \cdot$$

$$q' - \frac{4\alpha_1}{E} q'' = 0 \quad \dots (3.38)$$

Da (3.36) com (3.37)

$$\begin{aligned}
 & - \frac{d_1+d_2+2a}{EI_1} \left( 1 + \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} \right) n + \frac{\alpha(d_2+a)}{EA} n'' + \\
 & + \left( \frac{d_1+a}{2} \cdot \frac{d_1+d_2+2a}{EI_1} + \frac{2\beta}{EA} \right) q' - \frac{4\alpha_1}{E} q'''' = 0 \dots (3.39)
 \end{aligned}$$

Fazendo (3.38) - (3.39)

$$\begin{aligned}
 & \frac{d_1+d_2+2a}{E} \left( 1 + \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} \right) \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) n - \frac{\alpha(d_1+d_2+2a)}{EA} n'' + \\
 & + \frac{d_1+d_2+2a}{2E} \left( \frac{d_2+a}{I_2} - \frac{d_1+a}{I_1} \right) q' = 0
 \end{aligned}$$

ou

$$2 \left( 1 + \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} \right) \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) n - \frac{2\alpha}{A} n'' + \left( \frac{d_2+a}{I_2} - \frac{d_1+a}{I_1} \right) q' = 0 \dots (3.40)$$

Fazendo  $EI_2$  (3.38) +  $EI_1$  (3.39)

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\alpha}{A} \left[ I_2(d_1+a) - I_1(d_2+a) \right] n'' + \left[ \frac{1}{2}(d_1+d_2+2a)^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{2\beta}{A} (I_1+I_2) \right] q' - 4\alpha_1 (I_1+I_2) q'''' = 0 \dots (3.41)
 \end{aligned}$$

Fazendo agora

$$I = I_1 + I_2 \dots (3.42)$$

$$\mu_1 = \frac{I_1}{I} \quad \dots (3.43)$$

$$\mu_2 = \frac{I_2}{I} \quad \dots (3.44)$$

$$D = \frac{1}{2} (d_1 + d_2 + 2a) \quad \dots (3.45)$$

$$r = \frac{\mu_2(d_1 + a) - \mu_1(d_2 + a)}{D} \quad \dots (3.46)$$

$$\gamma = 1 + \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} \quad \dots (3.47)$$

A (3.40) com (3.42) a (3.47) fica:

$$2\gamma n - 2\alpha\mu_1\mu_2 \frac{I}{A} n'' - r D q' = 0 \quad \dots (3.48)$$

A (3.41) com (3.42) a (3.46) fica

$$- \alpha r D \frac{I}{A} n'' + 2 \left( \beta \frac{I}{A} + D^2 \right) q' - 4\alpha_1 I q''' = 0$$

ou

$$- \alpha r D n'' + 2 \left( \beta + \frac{AD^2}{I} \right) q' - 4\alpha_1 A q''' = 0$$

ou

$$- \alpha r D n'' + \rho q' - 4\alpha_1 A q''' = 0 \quad \dots (3.49)$$

com

$$\rho = 2 \left( \beta + \frac{AD^2}{I} \right) \quad \dots (3.50)$$

Dependendo do valor de r as equações diferenciais para o problema podem ser diferentes.

Incluindo aqui apenas o caso de  $r \neq 0$ , ter-se-ia, da (3.48)

$$q' = \frac{2\gamma}{rD} n - \frac{2\alpha\mu_1\mu_2 I}{rDA} n'' \quad \dots (3.51)$$

Com (3.51) na (3.49)

$$-\alpha r D n'' + \rho \left( \frac{2\gamma}{rD} n - \frac{2\alpha\mu_1\mu_2 I}{rDA} n'' \right) +$$

$$- 4\alpha_1 A \left( \frac{2\gamma}{rD} n'' - \frac{2\alpha\mu_1\mu_2 I}{rDA} n^{IV} \right) = 0$$

ou, multiplicando por  $rD$

$$8\alpha\mu_1\mu_2 I n^{IV} - (\alpha r^2 D^2 + 8\alpha_1 \gamma A + 2\alpha\rho\mu_1\mu_2 \frac{I}{A}) n'' +$$

$$+ 2\gamma \rho n = 0 \quad \dots (3.52)$$

A equação (3.52) pode ser posta como:

$$n^{IV} - 2\lambda_1^2 \frac{A}{I} n'' + \lambda_2^4 \frac{A^2}{I^2} n = 0 \quad \dots (3.53)$$

com

$$\lambda_1^2 = \frac{\alpha v + 8\alpha_1 \gamma + 2\alpha\rho\mu_1\mu_2 \frac{I}{A}}{16\alpha\mu_1\mu_2} \quad \dots (3.54)$$

$$\lambda_2^4 = \frac{\gamma\rho}{4\alpha\mu_1\mu_2} \frac{I}{A^2} \quad \dots (3.55)$$

$$v = \frac{r^2 D^2}{A} \quad \dots (3.56)$$

Para o caso de  $r = 0$  as equações (3.48) e (3.49) se tornam independentes, uma delas apenas em  $n$  e suas derivadas, e outra em  $q$  e suas derivadas. A solução desse caso particular será aqui omitida apenas para evitar redundância algébrica.

Caso fosse levada em conta a distorção dos "nós" de interseção lintel com parede, chegar-se-ia a uma equação diferencial semelhante à (3.53), também de 4.<sup>a</sup> ordem e só com os termos de ordem par. Nessa situação é interessante ressaltar que a função  $m$ , correspondente aos momentos fletores no ponto médio dos lintéis será nula em toda a altura.

### III.8. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

A equação característica da (3.53) é

$$x^4 - 2\lambda_1^2 \frac{A}{I} x^2 + \lambda_2^4 \frac{A^2}{I^2} = 0 \quad \dots (3.57)$$

cuja solução é:

$$x_i = \pm \sqrt{\frac{2\lambda_1^2 \frac{A}{I} \pm \sqrt{4\lambda_1^4 \frac{A^2}{I^2} - 4\lambda_2^4 \frac{A^2}{I^2}}}{2}}$$

ou

$$x_i = \pm \lambda_1 \sqrt{\frac{A}{I}} \left( \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \lambda}} \right) \quad \dots (3.58)$$

com

$$\lambda = \frac{\lambda_2^4}{\lambda_1^4} \quad \dots (3.59)$$



Da (3.59) com (3.54) e (3.55)

$$\lambda = \frac{\gamma \rho}{4\alpha_1 \mu_1 \mu_2} \cdot \frac{I}{A^2} \cdot \frac{256\alpha^2 \alpha_1^2 \mu_1^2 \mu_2^2}{\left(\alpha v + 8\alpha_1 \gamma + 2\alpha \rho \mu_1 \mu_2 \frac{I}{A}\right)^2}$$

ou

$$\lambda = 64 \frac{I}{A^2} \cdot \frac{\alpha \alpha_1 \mu_1 \mu_2 \gamma \rho}{\alpha^2 v^2 + 64\alpha_1^2 \gamma^2 + 4\alpha^2 \rho^2 \mu_1^2 \mu_2^2 \frac{I^2}{A^4} + 16\alpha \alpha_1 v \gamma + 4\alpha^2 v \rho \mu_1 \mu_2 \frac{I}{A} + 32\alpha \alpha_1 \rho \gamma \mu_1 \mu_2 \frac{I}{A}}$$

.... (3.60)

É interessante observar que  $\lambda$  é tal que  $0 < \lambda < 1$ . Para mostrar que  $\lambda$  é menor que 1 basta verificar que se tal ocorresse, da (3.60)

$$\alpha^2 v^2 + 64\alpha_1^2 \gamma^2 + 4\alpha^2 \rho^2 \mu_1^2 \mu_2^2 \frac{I^2}{A^4} + 16\alpha \alpha_1 v \gamma + 4\alpha^2 v \rho \mu_1 \mu_2 \frac{I}{A} + 32\alpha \alpha_1 \rho \gamma \mu_1 \mu_2 \frac{I}{A} - 64\alpha \alpha_1 \rho \gamma \mu_1 \mu_2 \frac{I}{A} > 0$$

ou, reagrupando as 2.<sup>a</sup>, 3.<sup>a</sup>, 6.<sup>a</sup> e 7.<sup>a</sup> parcelas

$$\left(8\alpha_1 \gamma - 2\alpha \rho \mu_1 \mu_2 \frac{I}{A}\right)^2 + \alpha^2 v^2 + 16\alpha \alpha_1 v \gamma + 4\alpha^2 v \rho \mu_1 \mu_2 \frac{I}{A} > 0$$

o que resulta sempre verdadeiro.

Com  $\lambda$  entre zero e um, diferente de zero e de um, as quatro raízes  $x_i$  da (3.57) são reais.

Fazendo

$$k_1 = \lambda_1 \sqrt{\frac{A}{I}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \lambda}} \quad \dots (3.61)$$

$$k_2 = \lambda_1 \sqrt{\frac{A}{I}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \lambda}} \quad \dots (3.62)$$

a solução geral da equação (3.53) fica:

$$n = \bar{c}_1 e^{k_1 z} + \bar{c}_2 e^{-k_1 z} + \bar{c}_3 e^{k_2 z} + \bar{c}_4 e^{-k_2 z} \quad (3.63)$$

A expressão (3.63) pode ser posta facilmente na forma

$$n = c_1 \operatorname{sh} k_1 z + c_2 \operatorname{ch} k_1 z + c_3 \operatorname{sh} k_2 z + c_4 \operatorname{ch} k_2 z \quad \dots (3.64)$$

### III.9. RELACIONAMENTO DE TODAS AS FUNÇÕES DO PROBLEMA COM $n$

Da (3.48)

$$q' = \frac{2\gamma}{rD} n - \frac{2\alpha\mu_1\mu_2 I}{rAD} n''$$

ou

$$q = \frac{2\gamma}{rD} \int n dz - \frac{2\alpha\mu_1\mu_2 I}{rAD} n' + c_5 \quad \dots (3.65)$$

Da (3.2) com (3.65)

$$N_1' = -q$$

$$N_1 = -\frac{2\gamma}{rD} \int \left( \int ndz \right) dz + \frac{2\alpha\mu_1\mu_2 I}{rAD} n - c_5 z + c_6 \quad (3.66)$$

Da (3.5)

$$N_2' = q \quad \text{com (3.65)}$$

$$N_2 = \frac{2\gamma}{rD} \int \left( \int ndz \right) dz - \frac{2\alpha\mu_1\mu_2 I}{rAD} n + c_5 z + c_7 \quad (3.67)$$

Da (3.24) com (3.66), (3.67) e (3.65)

$$\begin{aligned} & \frac{d_1+a}{2} \frac{M_1}{EI_1} + \frac{d_2+a}{2} \frac{M_2}{EI_2} - \frac{1}{EA_1} \left[ -\frac{2\gamma}{r} \int \left( \int ndz \right) dz + \frac{2\alpha\mu_1\mu_2 I}{rAD} n - c_5 z + c_6 \right] + \\ & + \frac{1}{EA_2} \left[ \frac{2\gamma}{rD} \int \left( \int ndz \right) dz - \frac{2\alpha\mu_1\mu_2 I}{rAD} n + c_5 z + c_7 \right] - \frac{2\alpha_1}{E} \left[ \frac{2\gamma}{rD} n + \right. \\ & \left. - \frac{2\alpha\mu_1\mu_2 I}{rAD} n'' \right] = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{d_1+a}{2} \frac{M_1}{EI_1} + \frac{d_2+a}{2} \frac{M_2}{EI_2} + \frac{2\beta\gamma}{rEAD} \int \left( \int ndz \right) dz - \left( \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rEA^2 D} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rED} \right) n + \\ & + \frac{4\alpha\alpha_1\mu_1\mu_2 I}{rEAD} n'' + \frac{c_5\beta}{EA} z - \frac{c_6}{EA_1} + \frac{c_7}{EA_2} = 0 \quad \dots (3.68) \end{aligned}$$

Fazendo (3.68) +  $\frac{d_2+a}{2}$  (3.26), com (3.45)

$$\frac{DM_1}{EI_1} + \frac{2\beta\gamma}{rEAD} \int \left( \int ndz \right) dz - \left[ \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rEA^2 D} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rED} - \frac{\alpha(d_2+a)}{2EA} \right] n +$$

$$+ \frac{4\alpha\alpha_1\mu_1\mu_2 I}{rEAD} n'' + \frac{c_5\beta}{EA} z - \frac{c_6}{EA_1} + \frac{c_7}{EA_2} = 0 \dots (3.69)$$

Fazendo (3.68) -  $\frac{d_1+a}{2}$  (3.26), com (3.45)

$$\frac{DM_2}{EI_2} + \frac{2\beta\gamma}{rEAD} \int \left( \int ndz \right) dz - \left[ \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rEA^2 D} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rED} + \frac{\alpha(d_1+a)}{2EA} \right] n +$$

$$+ \frac{4\alpha\alpha_1\mu_1\mu_2 I}{rEAD} n'' + \frac{c_5\beta}{EA} z - \frac{c_6}{EA_1} + \frac{c_7}{EA_2} = 0 \dots (3.70)$$

Da (3.69)

$$M_1 = - \frac{2\beta\gamma I_1}{rAD^2} \int \left( \int ndz \right) dz + I_1 \left[ \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA^2 D^2} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rD^2} - \frac{\alpha(d_2+a)}{2AD} \right] n +$$

$$- \frac{4\alpha\alpha_1\mu_1\mu_2 II_1}{rAD^2} n'' - \frac{c_5\beta I_1}{AD} z + \frac{c_6 I_1}{A_1 D} - \frac{c_7 I_1}{A_2 D} \dots (3.71)$$

Da (3.70)

$$M_2 = - \frac{2\beta\gamma I_2}{rAD^2} \int \left( \int ndz \right) dz + I_2 \left[ \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA^2 D^2} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rD^2} + \frac{\alpha(d_1+a)}{2AD} \right] n +$$

$$- \frac{4\alpha\alpha_1\mu_1\mu_2 II_2}{rAD^2} n'' - \frac{c_5\beta I_2}{AD} z + \frac{c_6 I_2}{A_1 D} - \frac{c_7 I_2}{A_2 D} \dots (3.72)$$

Da (3.37)

$$m' = - \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} n$$

$$m = - \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} \int ndz + c_8 \quad \dots (3.73)$$

Da (3.3)

$$Q_1 = -M_1' + \frac{d_1+a}{2} q + m$$

ou, com (3.71), (3.65) e (3.73)

$$\begin{aligned} Q_1 = & \frac{2\beta\gamma I_1}{rAD^2} \int ndz - I_1 \left[ \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA^2 D^2} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rD^2} - \frac{\alpha(d_2+a)}{2AD} \right] n' + \\ & + \frac{4\alpha\alpha_1\mu_1\mu_2 II_1}{rAD^2} n''' + \frac{c_5\beta I_1}{AD} + \frac{\gamma(d_1+a)}{rD} \int ndz - \frac{\alpha\mu_1\mu_2 I(d_1+a)}{rAD} n' + \\ & + c_5 \frac{d_1+a}{2} - \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} \int ndz + c_8 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} Q_1 = & \left[ \frac{2\beta\gamma I_1}{rAD^2} + \frac{\gamma(d_1+a)}{rD} - \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} \right] \int ndz - I_1 \left[ \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA^2 D^2} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rD^2} + \right. \\ & \left. - \frac{\alpha(d_2+a)}{2AD} + \frac{\alpha\mu_2(d_1+a)}{rAD} \right] n' + \frac{4\alpha\alpha_1\mu_1\mu_2 II_1}{rAD^2} n''' + c_5 \frac{d_1+a}{2} + \\ & + \frac{c_5\beta I_1}{AD} + c_8 \quad \dots (3.74) \end{aligned}$$

Da (3.6)

$$Q_2 = -M_2' + \frac{d_2+a}{2} q - m$$

ou, com (3.72), (3.65) e (3.73)

$$\begin{aligned}
 Q_2 = & \frac{2\beta\gamma I_2}{rAD^2} \int ndz - I_2 \left[ \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA^2 D^2} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rD^2} + \frac{\alpha(d_1+a)}{2AD} \right] n' + \\
 & + \frac{4\alpha\alpha_1\mu_1\mu_2 II_2}{rAD^2} n''' + \frac{c_5\beta I_2}{AD} + \frac{\gamma(d_2+a)}{rD} \int ndz - \frac{\alpha\mu_1\mu_2 I(d_2+a)}{rAD} n' + \\
 & c_5 \frac{(d_2+a)}{2} + \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} \int ndz - c_8
 \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
 Q_2 = & \left[ \frac{2\beta\gamma I_2}{rAD^2} + \frac{\gamma(d_2+a)}{rD} + \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} \right] \int ndz - I_2 \left[ \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA^2 D^2} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rD^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha(d_1+a)}{2AD} + \frac{\alpha\mu_1(d_2+a)}{rAD} \right] n' + \frac{4\alpha\alpha_1\mu_1\mu_2 II_2}{rAD^2} n''' + \\
 & + c_5 \frac{d_2+a}{2} + \frac{c_5\beta I_2}{AD} - c_8 \quad \dots (3.75)
 \end{aligned}$$

Fazendo:

$$\epsilon_1 = \frac{2\gamma \cdot D}{rD} \quad \dots (3.76)$$

$$\epsilon_2 = \frac{2\alpha\mu_1\mu_2 I}{rAD} \cdot \frac{1}{D} \quad \dots (3.77)$$

$$\epsilon_3 = \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} \quad \dots (3.78)$$

$$\epsilon_4 = \frac{2\beta\gamma I_1}{rAD^2} + \frac{\gamma(d_1+a)}{rD} - \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} \quad \dots (3.79)$$

$$\epsilon_5 = I_1 \left[ \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA^2 D^2} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rD^2} - \frac{\alpha(d_2+a)}{2AD} + \frac{\alpha\mu_2(d_1+a)}{rAD} \right] \frac{1}{D^2} \quad \dots (3.80)$$

$$\epsilon_6 = \frac{4\alpha\alpha_1\mu_1\mu_2}{rAD^2} \frac{II_1}{D} \cdot \frac{1}{D^4} \dots (3.81)$$

$$\epsilon_7 = \frac{2\beta\gamma I_2}{rAD^2} + \frac{\gamma(d_2+a)}{rD} + \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} \dots (3.82)$$

$$\epsilon_8 = I_2 \left[ \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA D^2} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rD^2} + \frac{\alpha(d_1+a)}{2AD} + \frac{\alpha\mu_1(d_2+a)}{rAD} \right] \frac{1}{D^2} \dots (3.83)$$

$$\epsilon_9 = \frac{4\alpha\alpha_1\mu_1\mu_2}{rAD^2} \frac{II_2}{D} \cdot \frac{1}{D^4} \dots (3.84)$$

$$\epsilon_{10} = \frac{2\beta\gamma I_1}{rAD^2} \dots (3.85)$$

$$\epsilon_{11} = I_1 \left[ \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA D^2} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rD^2} - \frac{\alpha(d_2+a)}{2AD} \right] \frac{1}{D^2} \dots (3.86)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{4\alpha\alpha_1\mu_1\mu_2}{rAD^2} \frac{II_1}{D} \cdot \frac{1}{D^4} \dots (3.87)$$

$$\epsilon_{13} = \frac{2\beta\gamma I_2}{rAD^2} \dots (3.88)$$

$$\epsilon_{14} = I_2 \left[ \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA D^2} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rD^2} + \frac{\alpha(d_1+a)}{2AD} \right] \frac{1}{D^2} \dots (3.89)$$

$$\epsilon_{15} = \frac{4\alpha\alpha_1\mu_1\mu_2}{rAD^2} \frac{II_2}{D} \cdot \frac{1}{D^4} \dots (3.90)$$

Da (3.65) com (3.76) e (3.77)

$$q = \frac{\epsilon_1}{D} \int ndz - D\epsilon_2 n' + c_5 \dots (3.91)$$

Da (3.73) com (3.78)

$$m = -\varepsilon_3 \int ndz + c_8 \quad \dots (3.92)$$

Da (3.66) com (3.76) e (3.77)

$$N_1 = -\frac{\varepsilon_1}{D} \int \left( \int ndz \right) dz + D\varepsilon_2 n - c_5 z + c_6 \quad \dots (3.93)$$

Da (3.67) com (3.76) e (3.77)

$$N_2 = \frac{\varepsilon_1}{D} \int \left( \int ndz \right) dz - D\varepsilon_2 n + c_5 z + c_7 \quad \dots (3.94)$$

Da (3.74) com (3.79) a (3.81)

$$Q_1 = \varepsilon_4 \int ndz - D^2 \varepsilon_5 n' + D^4 \varepsilon_6 n''' + c_5 \left( \frac{d_1 + a}{2} + \frac{\beta I_1}{AD} \right) + c_8 \quad \dots (3.95)$$

Da (3.75) com (3.82) a (3.84)

$$Q_2 = \varepsilon_7 \int ndz - D^2 \varepsilon_8 n' + D^4 \varepsilon_9 n''' + c_5 \left( \frac{d_2 + a}{2} + \frac{\beta I_2}{AD} \right) - c_8 \quad \dots (3.96)$$

Da (3.71) com (3.85) a (3.87)

$$M_1 = -\varepsilon_{10} \int \left( \int ndz \right) dz + D^2 \varepsilon_{11} n - D^4 \varepsilon_{12} n'' - \frac{c_5 \beta I_1}{AD} z + \frac{c_6 I_1}{A_1 D} - \frac{c_7 I_1}{A_2 D} \quad \dots (3.97)$$



Da (3.72) com (3.88) a (3.90)

$$M_2 = -\epsilon_{13} \int \left( \int ndz \right) dz + D^2 \epsilon_{14} n - D^4 \epsilon_{15} n'' - \frac{c_5 \beta I_2}{A D} z + \frac{c_6 I_2}{A_1 D} - \frac{c_7 I_2}{A_2 D} \dots (3.98)$$

Da (3.64) tem-se

$$n = c_1 \operatorname{sh} k_1 z + c_2 \operatorname{ch} k_1 z + c_3 \operatorname{sh} k_2 z + c_4 \operatorname{ch} k_2 z \quad (3.99)$$

$$n' = k_1 c_2 \operatorname{sh} k_1 z + k_1 c_1 \operatorname{ch} k_1 z + k_2 c_4 \operatorname{sh} k_2 z + k_2 c_3 \operatorname{ch} k_2 z \quad (3.100)$$

$$n'' = k_1^2 c_1 \operatorname{sh} k_1 z + k_1^2 c_2 \operatorname{ch} k_1 z + k_2^2 c_3 \operatorname{sh} k_2 z + k_2^2 c_4 \operatorname{ch} k_2 z \quad (3.101)$$

$$n''' = k_1^3 c_2 \operatorname{sh} k_1 z + k_1^3 c_1 \operatorname{ch} k_1 z + k_2^3 c_4 \operatorname{sh} k_2 z + k_2^3 c_3 \operatorname{ch} k_2 z \quad (3.102)$$

$$\int ndz = \frac{c_2}{k_1} \operatorname{sh} k_1 z + \frac{c_1}{k_1} \operatorname{ch} k_1 z + \frac{c_4}{k_2} \operatorname{sh} k_2 z + \frac{c_3}{k_2} \operatorname{ch} k_2 z \quad (3.103)$$

$$\int \left( \int ndz \right) dz = \frac{c_1}{k_1^2} \operatorname{sh} k_1 z + \frac{c_2}{k_1^2} \operatorname{ch} k_1 z + \frac{c_3}{k_2^2} \operatorname{sh} k_2 z + \frac{c_4}{k_2^2} \operatorname{ch} k_2 z \dots (3.104)$$

Da (3.91) com (3.100) e (3.103)

$$q = \left( \frac{\epsilon_1}{Dk_1} - \epsilon_2 Dk_1 \right) c_2 \operatorname{sh} k_1 z + \left( \frac{\epsilon_1}{Dk_1} - \epsilon_2 Dk_1 \right) c_1 \operatorname{ch} k_1 z + \left( \frac{\epsilon_1}{Dk_2} - \epsilon_2 Dk_2 \right) c_4 \operatorname{sh} k_2 z + \left( \frac{\epsilon_1}{Dk_2} - \epsilon_2 Dk_2 \right) c_3 \operatorname{ch} k_2 z + c_5 \dots (3.105)$$

Da (3.92) com (3.103)

$$m = -\frac{\varepsilon_3}{k_1} c_2 \operatorname{sh} k_1 z - \frac{\varepsilon_3}{k_1} c_1 \operatorname{ch} k_1 z - \frac{\varepsilon_3}{k_2} c_4 \operatorname{sh} k_2 z +$$

$$- \frac{\varepsilon_3}{k_2} c_3 \operatorname{ch} k_2 z + c_8 \quad \dots (3.106)$$

Da (3.93) com (3.99) e (3.104)

$$N_1 = \left( \varepsilon_2 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_1^2} \right) c_1 \operatorname{sh} k_1 z + \left( \varepsilon_2 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_1^2} \right) c_2 \operatorname{ch} k_1 z +$$

$$+ \left( \varepsilon_1 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_2^2} \right) c_3 \operatorname{sh} k_2 z + \left( \varepsilon_2 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_2^2} \right) c_4 \operatorname{ch} k_2 z +$$

$$- c_5 z + c_6 \quad \dots (3.107)$$

Da (3.94) com (3.99) e (3.104)

$$N_2 = - \left( \varepsilon_2 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_1^2} \right) c_1 \operatorname{sh} k_1 z - \left( \varepsilon_2 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_1^2} \right) c_2 \operatorname{ch} k_1 z +$$

$$- \left( \varepsilon_2 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_2^2} \right) c_3 \operatorname{sh} k_2 z - \left( \varepsilon_2 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_2^2} \right) c_4 \operatorname{ch} k_2 z +$$

$$+ c_5 z + c_7 \quad \dots (3.108)$$

Da (3.95) com (3.100), (3.102) e (3.103)

$$\begin{aligned}
 Q_1 = & \left( \varepsilon_6 D^4 k_1^3 - \varepsilon_5 D^2 k_1 + \frac{\varepsilon_4}{k_1} \right) c_2 \operatorname{shk}_1 z + \left( \varepsilon_6 D^4 k_1^3 - \varepsilon_5 D^2 k_1 + \frac{\varepsilon_4}{k_1} \right) c_1 \operatorname{chk}_1 z + \\
 & + \left( \varepsilon_6 D^4 k_2^3 - \varepsilon_5 D^2 k_2 + \frac{\varepsilon_4}{k_2} \right) c_4 \operatorname{shk}_2 z + \left( \varepsilon_6 D^4 k_2^3 - \varepsilon_5 D^2 k_2 + \frac{\varepsilon_4}{k_2} \right) c_3 \operatorname{chk}_2 z + \\
 & + c_5 \left( \frac{d_1 + a}{2} + \frac{\beta I_1}{AD} \right) + c_8 \quad \dots \quad (3.109)
 \end{aligned}$$

Da (3.96) com (3.100), (3.102) e (3.103)

$$\begin{aligned}
 Q_2 = & \left( \varepsilon_9 D^4 k_1^3 - \varepsilon_8 D^2 k_1 + \frac{\varepsilon_7}{k_1} \right) c_2 \operatorname{shk}_1 z + \left( \varepsilon_9 D^4 k_1^3 - \varepsilon_8 D^2 k_1 + \frac{\varepsilon_7}{k_1} \right) c_1 \operatorname{chk}_1 z + \\
 & + \left( \varepsilon_9 D^4 k_2^3 - \varepsilon_8 D^2 k_2 + \frac{\varepsilon_7}{k_2} \right) c_4 \operatorname{shk}_2 z + \left( \varepsilon_9 D^4 k_2^3 - \varepsilon_8 D^2 k_2 + \frac{\varepsilon_7}{k_2} \right) c_3 \operatorname{chk}_2 z + \\
 & + c_5 \left( \frac{d_2 + a}{2} + \frac{\beta I_2}{AD} \right) - c_8 \quad \dots \quad (3.110)
 \end{aligned}$$

Da (3.97) com (3.99), (3.101) e (3.104)

$$\begin{aligned}
 M_1 = & \left( -\varepsilon_{12} D^4 k_1^2 + \varepsilon_{11} D^2 - \frac{\varepsilon_{10}}{k_1} \right) c_1 \operatorname{shk}_1 z + \left( -\varepsilon_{12} D^4 k_1^2 + \varepsilon_{11} D^2 - \frac{\varepsilon_{10}}{k_1} \right) c_2 \operatorname{chk}_1 z + \\
 & + \left( -\varepsilon_{12} D^4 k_2^2 + \varepsilon_{11} D^2 - \frac{\varepsilon_{10}}{k_2} \right) c_3 \operatorname{shk}_2 z + \left( -\varepsilon_{12} D^4 k_2^2 + \varepsilon_{11} D^2 - \frac{\varepsilon_{10}}{k_2} \right) c_4 \operatorname{chk}_2 z - \\
 & - \frac{c_5 \beta I_1}{AD} z + \frac{c_6 I_1}{A_1 D} - \frac{c_7 I_1}{A_2 D} \quad (3.111)
 \end{aligned}$$

Da (3.98) com (3.99), (3.101) e (3.104)

$$\begin{aligned}
 M_2 = & \left( -\varepsilon_{15} D^4 k_1^2 + \varepsilon_{14} D^2 - \frac{\varepsilon_{13}}{k_1^2} \right) c_1 \operatorname{sh} k_1 z + \left( -\varepsilon_{15} D^4 k_1^2 + \varepsilon_{14} D^2 - \frac{\varepsilon_{13}}{k_1^2} \right) c_2 \operatorname{ch} k_1 z + \\
 & + \left( -\varepsilon_{15} D^4 k_2^2 + \varepsilon_{14} D^2 - \frac{\varepsilon_{13}}{k_2^2} \right) c_3 \operatorname{sh} k_2 z + \left( -\varepsilon_{15} D^4 k_2^2 + \varepsilon_{14} D^2 - \frac{\varepsilon_{13}}{k_2^2} \right) c_4 \operatorname{ch} k_2 z + \\
 & - \frac{c_5 \beta I_2}{AD} z + \frac{c_6 I_2}{A_1 D} - \frac{c_7 I_2}{A_2 D} \quad \dots (3.112)
 \end{aligned}$$

Da (3.17) fazendo

$$u = u_1 = u_2 \quad \dots (3.113)$$

tem-se, com a (3.7)

$$u = \phi_1 z + \frac{c}{GA_1} \int_0^z Q_1 dz + \frac{1}{EI_1} \int_0^z \left( \int_0^z M_1 dz \right) dz \quad (3.114)$$

Mas, da (3.109)

$$\begin{aligned}
 \int_0^z Q_1 dz = & \left( \varepsilon_6 D^4 k_1^2 - \varepsilon_5 D^2 + \frac{\varepsilon_4}{k_1^2} \right) c_1 \operatorname{sh} k_1 z + \left( \varepsilon_6 D^4 k_1^2 - \varepsilon_5 D^2 + \frac{\varepsilon_4}{k_1^2} \right) c_2 \operatorname{ch} k_1 z + \\
 & + \left( \varepsilon_6 D^4 k_2^2 - \varepsilon_5 D^2 + \frac{\varepsilon_4}{k_2^2} \right) c_3 \operatorname{sh} k_2 z + \left( \varepsilon_6 D^4 k_2^2 - \varepsilon_5 D^2 + \frac{\varepsilon_4}{k_2^2} \right) c_4 \operatorname{ch} k_2 z + \\
 & + \left[ c_5 \left( \frac{d_1 + a}{2} + \frac{\beta I_1}{AD} \right) + c_8 \right] z - \left( \varepsilon_6 D^4 k_1^2 - \varepsilon_5 D^2 + \frac{\varepsilon_4}{k_1^2} \right) c_2 + \\
 & - \left( \varepsilon_6 D^4 k_2^2 - \varepsilon_5 D^2 + \frac{\varepsilon_4}{k_2^2} \right) c_4 \quad \dots (3.115)
 \end{aligned}$$

e da (3.111)

$$\begin{aligned}
 \int_0^z \int_0^z M_1 dz dz = & \left( -\varepsilon_{12} D^4 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_1^2} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_1^4} \right) c_1 \operatorname{sh} k_1 z + \\
 & + \left( -\varepsilon_{12} D^4 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_1^2} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_1^4} \right) c_2 \operatorname{ch} k_1 z + \left( -\varepsilon_{12} D^4 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_2^2} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_2^4} \right) c_3 \operatorname{sh} k_2 z + \\
 & + \left( -\varepsilon_{12} D^4 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_2^2} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_2^4} \right) c_4 \operatorname{ch} k_2 z - \frac{c_5 \beta_{I_1}}{6AD} z^3 + \left( \frac{c_6 I_1}{A_1 D} - \frac{c_7 I_1}{A_2 D} \right) \frac{z^2}{2} + \\
 & - \left[ \left( -\varepsilon_{12} D^4 k_1 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_1} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_1^3} \right) c_1 + \left( -\varepsilon_{12} D^4 k_2 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_2} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_2^3} \right) c_3 \right] z + \\
 & - \left[ \left( -\varepsilon_{12} D^4 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_1^2} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_1^4} \right) c_2 + \left( -\varepsilon_{12} D^4 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_2^2} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_2^4} \right) c_4 \right] \\
 & \dots (3.116)
 \end{aligned}$$

Com (3.115) e (3.116) na (3.114)

$$\begin{aligned}
 u = & \left[ \frac{c}{GA_1} \left( \varepsilon_6 D^4 k_1^2 - \varepsilon_5 D^2 + \frac{\varepsilon_4}{k_1} \right) + \frac{1}{EI_1} \left( -\varepsilon_{12} D^4 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_1^2} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_1^4} \right) \right] c_1 \operatorname{sh} k_1 z + \\
 & + \left[ \frac{c}{GA_1} \left( \varepsilon_6 D^4 k_1^2 - \varepsilon_5 D^2 + \frac{\varepsilon_4}{k_1} \right) + \frac{1}{EI_1} \left( -\varepsilon_{12} D^4 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_1^2} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_1^4} \right) \right] c_2 \operatorname{ch} k_1 z + \\
 & + \left[ \frac{c}{GA_1} \left( \varepsilon_6 D^4 k_2^2 - \varepsilon_5 D^2 + \frac{\varepsilon_4}{k_2} \right) + \frac{1}{EI_1} \left( -\varepsilon_{12} D^4 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_2^2} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_2^4} \right) \right] c_3 \operatorname{sh} k_2 z + \\
 & + \left[ \frac{c}{GA_1} \left( \varepsilon_6 D^4 k_2^2 - \varepsilon_5 D^2 + \frac{\varepsilon_4}{k_2} \right) + \frac{1}{EI_1} \left( -\varepsilon_{12} D^4 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_2^2} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_2^4} \right) \right] c_4 \operatorname{ch} k_2 z +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{c_5 \beta}{6EA D} z^3 + \left( \frac{c_6}{EA_1 D} - \frac{c_7}{EA_2 D} \right) \frac{z^2}{2} + \left\{ \phi_1 + \frac{c}{GA_1} \left[ c_5 \left( \frac{d_1 + a}{2} + \frac{\beta I_1}{AD} \right) + c_8 \right] + \right. \\
 & - \frac{1}{EI_1} \left[ \left( -\varepsilon_{12} D^4 k_1 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_1} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_1} \right) c_1 + \left( -\varepsilon_{12} D^4 k_2 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_2} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_2} \right) c_3 \right] \Big\} z + \\
 & - \frac{c}{GA_1} \left[ \left( \varepsilon_6 D^4 k_1^2 - \varepsilon_5 D^2 + \frac{\varepsilon_4}{k_1} \right) c_2 + \left( \varepsilon_6 D^4 k_2^2 - \varepsilon_5 D^2 + \frac{\varepsilon_4}{k_2} \right) c_4 \right] + \\
 & - \frac{1}{EI_1} \left[ \left( -\varepsilon_{12} D^4 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_1} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_1} \right) c_2 + \left( -\varepsilon_{12} D^4 + \frac{\varepsilon_{11} D^2}{k_2} - \frac{\varepsilon_{10}}{k_2} \right) c_4 \right] \\
 & \dots (3.117)
 \end{aligned}$$

### III.10. INTRODUÇÃO DOS DESLOCAMENTOS DOS APOIOS

Voltando às condições de compatibilidade de deslocamentos (3.20), (3.21) e (3.22), que devem valer para qualquer  $z$ , com os resultados obtidos para os esforços internos no item III.9, é possível obter três relações independentes entre as constantes  $c_1$  a  $c_8$  e os deslocamentos dos apoios.

Da expressão (3.20), que deve se verificar para qualquer  $z$ .

$$(\phi_1 - \phi_2) z + \int_0^z \left( \frac{cQ_1}{GA_1} - \frac{cQ_2}{GA_2} \right) dz + \int_0^z \int_0^z \left( \frac{M_1}{EI_1} - \frac{M_2}{EI_2} \right) dz dz = 0$$

que, com a (3.26) fica:

$$(\phi_1 - \phi_2) z - \frac{\alpha}{EA} \int_0^z \left( \int_0^z n dz \right) dz + \int_0^z \left( \frac{cQ_1}{GA_1} - \frac{cQ_2}{GA_2} \right) dz = 0$$

Visando introduzir  $\underline{\alpha}$  na última parcela, seja

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Com

$$Q_1 = Q - Q_2$$

$$(\phi_1 - \phi_2)z - \frac{\alpha}{EA} \int_0^z \left( \int_0^z ndz \right) dz + \int_0^z \left( \frac{cQ}{GA_1} - \frac{cQ_2}{GA_1} - \frac{cQ_2}{GA_2} \right) dz = 0$$

ou, com a (3.27)

$$(\phi_1 - \phi_2)z - \frac{\alpha}{EA} \int_0^z \left( \int_0^z ndz \right) dz + \frac{c}{GA_1} \int_0^z Q dz - \frac{\alpha}{EA} \int_0^z Q_2 dz = 0$$

Analogamente, com

$$Q_2 = Q - Q_1$$

tem-se

$$(\phi_1 - \phi_2)z - \frac{\alpha}{EA} \int_0^z \left( \int_0^z ndz \right) dz + \int_0^z \left( \frac{cQ_1}{GA_1} - \frac{cQ}{GA_2} + \frac{cQ_1}{GA_2} \right) dz = 0$$

ou com a (3.27)

$$(\phi_1 - \phi_2)z - \frac{\alpha}{EA} \int_0^z \left( \int_0^z ndz \right) dz - \frac{c}{GA_2} \int_0^z Q dz + \frac{\alpha}{EA} \int_0^z Q_1 dz = 0$$

Somando as duas expressões resultantes, multiplicadas respectivamente por  $EAA_1/\alpha$  e  $EAA_2/\alpha$  tem-se, eliminando Q:

$$\frac{EA^2}{\alpha} (\phi_1 - \phi_2) z - A \int_0^z \left( \int_0^z ndz \right) dz - A_1 \int_0^z Q_2 dz + A_2 \int_0^z Q_1 dz = 0$$

Observando que, para haver equilíbrio de forças horizontais nas paredes, deve valer:

$$Q_1 = (Q_1)_0 + \int_0^z ndz$$

$$Q_2 = (Q_2)_0 - \int_0^z ndz$$

Também, observando que:

$$\begin{aligned} \int_0^z \left( \int_0^z ndz \right) dz &= \int_0^z \left[ \int ndz - \int ndz \Big|_0 \right] dz = \int \left( \int ndz \right) dz - \int ndz \Big|_0 \cdot z \Big|_0 = \\ &= \int \left( \int ndz \right) dz - \int ndz \Big|_0 \cdot z - \int \left( \int ndz \right) dz \Big|_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^z Q_1 dz &= \int_0^z \left[ (Q_1)_0 + \int_0^z ndz \right] dz = \int_0^z \left[ (Q_1)_0 + \int ndz - \int ndz \Big|_0 \right] dz = \\ &= (Q_1)_0 z + \int \left( \int ndz \right) dz - \int ndz \Big|_0 \cdot z - \int \left( \int ndz \right) dz \Big|_0 \end{aligned}$$



$$\int_0^z Q_2 dz = \int_0^z \left[ (Q_2)_0 - \int_0^z ndz \right] dz = \int_0^z \left[ (Q_2)_0 - \int ndz + \int ndz \Big|_0 \right] dz =$$

$$= (Q_2)_0 \cdot z - \int \left( \int ndz \right) dz + \int ndz \Big|_0 \cdot z + \int \left( \int ndz \right) dz \Big|_0$$

Com isso a condição de compatibilidade fica:

$$\frac{EA^2}{\alpha} (\phi_1 - \phi_2) z - A \int \left( \int ndz \right) dz + A \int ndz \Big|_0 \cdot z + A \int \left( \int ndz \right) dz \Big|_0 +$$

$$- A_1 (Q_2)_0 z + A_1 \int \left( \int ndz \right) dz - A_1 \int ndz \Big|_0 \cdot z - A_1 \int \left( \int ndz \right) dz \Big|_0 +$$

$$+ A_2 (Q_1)_0 z + A_2 \int \left( \int ndz \right) dz - A_2 \int ndz \Big|_0 \cdot z - A_2 \int \left( \int ndz \right) dz \Big|_0 = 0$$

ou

$$\frac{EA^2}{\alpha} (\phi_1 - \phi_2) z - A_1 (Q_2)_0 z + A_2 (Q_1)_0 z = 0$$

Para valer para qualquer z tem-se

$$\frac{EA^2}{\alpha} (\phi_1 - \phi_2) - A_1 (Q_2)_0 + A_2 (Q_1)_0 = 0$$

e finalmente com (3.109) e (3.110)

$$\frac{EA^2}{\alpha} (\phi_1 - \phi_2) + c_1 \left[ A_2 \left( \varepsilon_6 D^4 k_1^3 - \varepsilon_5 D^2 k_1 + \frac{\varepsilon_4}{k_1} \right) - A_1 \left( \varepsilon_9 D^4 k_1^3 - \varepsilon_8 D^2 k_1 + \frac{\varepsilon_7}{k_1} \right) \right] +$$

$$+ c_3 \left[ A_2 \left( \varepsilon_6 D^4 k_2^3 - \varepsilon_5 D^2 k_2 + \frac{\varepsilon_4}{k_2} \right) - A_1 \left( \varepsilon_9 D^4 k_2^3 - \varepsilon_8 D^2 k_2 + \frac{\varepsilon_7}{k_2} \right) \right] +$$

$$+ c_5 \left[ A_2 \left( \frac{d_1 + a}{2} + \frac{\beta I_1}{AD} \right) - A_1 \left( \frac{d_2 + a}{2} + \frac{\beta I_2}{AD} \right) \right] + A c_8 = 0 \quad (3.118)$$

Da expressão (3.21) que deve se verificar para qualquer z:

$$\delta_1 - \delta_2 - \frac{d_1+a}{2} \phi_1 - \frac{d_2+a}{2} \phi_2 + \int_0^z \left( \frac{N_1}{EA_1} - \frac{N_2}{EA_2} \right) dz - \frac{1}{2} \int_0^z \left[ (d_1+a) \frac{M_1}{EI_1} + (d_2+a) \frac{M_2}{EI_2} \right] dz + \frac{2\alpha_1}{E} q = 0$$

Com as (3.65), (3.66), (3.67), (3.71) e (3.72)

$$\begin{aligned} & \delta_1 - \delta_2 - \frac{d_1+a}{2} \phi_1 - \frac{d_2+a}{2} \phi_2 + \int_0^z \left\{ -\frac{2\gamma}{rDEA_1} \int \left( \int ndz \right) dz + \frac{2\alpha\mu_1\mu_2 I}{rADEA_1} n + \right. \\ & - \frac{c_5}{EA_1} z + \frac{c_6}{EA_1} - \frac{2\gamma}{rDEA_2} \int \left( \int ndz \right) dz + \frac{2\alpha\mu_1\mu_2 I}{rADEA_2} n - \left. \frac{c_5}{EA_2} z - \frac{c_7}{EA_2} \right\} dz + \\ & - \frac{1}{2} \int_0^z \left\{ \frac{d_1+a}{E} \left[ -\frac{2\beta\gamma}{rAD^2} \int \left( \int ndz \right) dz + \left[ \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA^2 D^2} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rD^2} - \frac{\alpha(d_2+a)}{2AD} \right] n + \right. \right. \\ & - \left. \frac{4\alpha\alpha_1\mu_1\mu_2 I}{rAD^2} n'' - \frac{c_5\beta z}{AD} + \frac{c_6}{A_1 D} - \frac{c_7}{A_2 D} \right\} + \frac{d_2+a}{E} \left\{ -\frac{2\beta\gamma}{rAD^2} \int \left( \int ndz \right) dz + \right. \\ & + \left. \left[ \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA^2 D^2} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rD^2} + \frac{\alpha(d_1+a)}{2AD} \right] n - \frac{4\alpha\alpha_1\mu_1\mu_2 I}{rAD^2} n'' - \frac{c_5\beta}{AD} z + \frac{c_6}{A_1 D} - \right. \\ & \left. - \frac{c_7}{A_2 D} \right\} dz + \frac{2\alpha_1}{E} \left[ \frac{2\gamma}{rD} \int ndz - \frac{2\alpha\mu_1\mu_2 I}{rAD} n' + c_5 \right] = 0 \end{aligned}$$

ou, com (3.29) e (3.45)

$$\begin{aligned} & \delta_1 - \delta_2 - \frac{d_1+a}{2} \phi_1 - \frac{d_2+a}{2} \phi_2 + \int_0^z \left\{ -\frac{2\beta\gamma}{rDEA} \int \left( \int ndz \right) dz + \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA^2 DE} n + \right. \\ & - \left. \frac{\beta c_5}{EA} z + \frac{c_6}{EA_1} - \frac{c_7}{EA_2} \right\} dz - \frac{1}{2} \int_0^z \left\{ -\frac{4\beta\gamma}{rDEA} \int \left( \int ndz \right) dz + \left[ \frac{4\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA^2 ED} + \frac{8\alpha_1\gamma}{rDE} \right] n + \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{8\alpha_1\mu_1\mu_2 I}{rAED} n'' - \frac{2c_5\beta}{AE} z + \frac{2c_6}{A_1 E} - \frac{2c_7}{A_2 E} \Big\} dz + \frac{4\alpha_1\gamma}{rDE} \int ndz +$$

$$-\frac{4\alpha_1\mu_1\mu_2 I}{rAED} n' + \frac{2\alpha_1}{E} c_5 = 0$$

ou

$$\delta_1 - \delta_2 - \frac{d_1+a}{2} \phi_1 - \frac{d_2+a}{2} \phi_2 + \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA^2 DE} \int_0^z ndz - \frac{\beta c_5}{2EA} z^2 + \frac{c_6 z}{EA_1} +$$

$$-\frac{c_7}{EA_2} z - \left[ \frac{2\alpha\beta\mu_1\mu_2 I}{rA^2 ED} + \frac{4\alpha_1\gamma}{rDE} \right] \int_0^z n dz + \frac{4\alpha_1\mu_1\mu_2 I}{rAED} \int_0^z n'' dz +$$

$$+ \frac{c_5\beta}{2AE} z^2 - \frac{c_6}{A_1 E} z + \frac{c_7}{A_2 E} z + \frac{4\alpha_1\gamma}{rDE} \int ndz - \frac{4\alpha_1\mu_1\mu_2 I}{rAED} n' +$$

$$+ \frac{2\alpha_1}{E} c_5 = 0$$

ou

$$\delta_1 - \delta_2 - \frac{d_1+a}{2} \phi_1 - \frac{d_2+a}{2} \phi_2 + \frac{4\alpha_1\gamma}{rDE} \int ndz \Big|_0 - \frac{4\alpha_1\mu_1\mu_2 I}{rAED} n' \Big|_0 +$$

$$+ \frac{2\alpha_1}{E} c_5 = 0$$

ou, com (3.100) e (3.103)

$$\delta_1 - \delta_2 - \frac{d_1+a}{2} \phi_1 - \frac{d_2+a}{2} \phi_2 + \frac{4\alpha_1\gamma}{rDE} \left( \frac{c_1}{k_1} + \frac{c_3}{k_2} \right) +$$

$$-\frac{4\alpha_1\mu_1\mu_2 I}{rAED} (k_1 c_1 + k_2 c_3) + \frac{2\alpha_1}{E} c_5 = 0$$

ou, com a (3.77)

$$\delta_1^{-\delta_2} - \frac{d_1+a}{2} \phi_1 - \frac{d_2+a}{2} \phi_2 + \frac{4\alpha_1\gamma}{rDE} \left( \frac{c_1}{k_1} + \frac{c_3}{k_2} \right) +$$

$$- \frac{2\alpha_1 D\epsilon_2}{E} (k_1 c_1 + k_2 c_3) + \frac{2\alpha_1}{E} c_5 = 0$$

ou finalmente

$$\delta_1^{-\delta_2} - \frac{d_1+a}{2} \phi_1 - \frac{d_2+a}{2} \phi_2 + \frac{2\alpha_1}{E} \left( \frac{2\gamma}{rDk_1} - D\epsilon_2 k_1 \right) c_1 +$$

$$+ \frac{2\alpha_1}{E} \left( \frac{2\gamma}{rDk_2} - D\epsilon_2 k_2 \right) c_3 + \frac{2\alpha_1}{E} c_5 = 0 \quad \dots (3.119)$$

Da (3.22), que deve ser válida para qualquer  $z$

$$\phi_1 - \phi_2 - \frac{2\alpha_4}{Ea^2} m + \int_0^z \left( \frac{M_1}{EI_1} - \frac{M_2}{EI_2} \right) dz = 0$$

Com a (3.26) e a (3.73)

$$\phi_1 - \phi_2 - \frac{2\alpha_4}{Ea^2} \left( - \frac{\alpha a^2}{2\alpha_4 A} \int n dz + c_8 \right) - \frac{\alpha}{EA} \int_0^z n dz = 0$$

ou

$$\phi_1 - \phi_2 + \frac{\alpha}{EA} \int n dz \Big|_0 - \frac{2\alpha_4}{Ea^2} c_8 = 0$$

ou, finalmente, com (3.103)

$$\phi_1 - \phi_2 - \frac{2\alpha_4}{Ea^2} c_8 + \frac{\alpha}{EAk_1} c_1 + \frac{\alpha}{EAk_2} c_3 = 0 \quad \dots (3.120)$$

III.11. CONDIÇÕES DE CONTORNO RELATIVAS AO TOPO

Para o topo da associação, prevendo s̃o as condições expressas na fig.3.1 ter-se-iam as seguintes condições

$$\text{Para } z = \ell \rightarrow N_1 = 0 \quad \dots (3.121)$$

$$\text{Para } z = \ell \rightarrow N_2 = 0 \quad \dots (3.122)$$

$$\text{Para } z = \ell \rightarrow M_1 = 0 \quad \dots (3.123)$$

$$\text{Para } z = \ell \rightarrow M_2 = 0 \quad \dots (3.124)$$

$$\text{Para } z = \ell \rightarrow Q_1 + Q_2 = F \quad \dots (3.125)$$

Da (3.121) com (3.107)

$$\begin{aligned} & \left( \varepsilon_2 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_1} \right) c_1 \text{shk}_1^{\ell} + \left( \varepsilon_2 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_1} \right) c_2 \text{chk}_1^{\ell} + \left( \varepsilon_2 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_2} \right) c_3 \text{shk}_2^{\ell} + \\ & + \left( \varepsilon_2 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_2} \right) c_4 \text{chk}_2^{\ell} - c_5^{\ell} + c_6 = 0 \quad \dots (3.126) \end{aligned}$$

Da (3.122) com (3.108)

$$\begin{aligned} & \left( \varepsilon_2 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_1} \right) c_1 \text{shk}_1^{\ell} + \left( \varepsilon_2 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_1} \right) c_2 \text{chk}_1^{\ell} + \left( \varepsilon_2 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_2} \right) c_3 \text{shk}_2^{\ell} + \\ & + \left( \varepsilon_2 D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_2} \right) c_4 \text{chk}_2^{\ell} - c_5^{\ell} - c_7 = 0 \quad \dots (3.127) \end{aligned}$$

Da (3.123) com (3.111)

$$\begin{aligned} & \left( -\varepsilon_{12} D^4 k_1^2 + \varepsilon_{11} D^2 - \frac{\varepsilon_{10}}{k_1} \right) c_1 \text{shk}_1^{\ell} + \left( -\varepsilon_{12} D^4 k_1^2 + \varepsilon_{11} D^2 - \frac{\varepsilon_{10}}{k_1} \right) c_2 \text{chk}_1^{\ell} + \\ & + \left( -\varepsilon_{12} D^4 k_2^2 + \varepsilon_{11} D^2 - \frac{\varepsilon_{10}}{k_2} \right) c_3 \text{shk}_2^{\ell} + \left( -\varepsilon_{12} D^4 k_2^2 + \varepsilon_{11} D^2 - \frac{\varepsilon_{10}}{k_2} \right) c_4 \text{chk}_2^{\ell} + \\ & - \frac{c_5 \beta I_1}{AD} \ell + \frac{c_6 I_1}{A_1 D} - \frac{c_7 I_1}{A_2 D} = 0 \quad \dots (3.128) \end{aligned}$$

Da (3.124) com (3.112)

$$\begin{aligned} & \left( -\epsilon_{15} D^4 k_1^2 + \epsilon_{14} D^2 - \frac{\epsilon_{13}}{k_1} \right) c_1 \text{shk}_1^\ell + \left( -\epsilon_{15} D^4 k_1^2 + \epsilon_{14} D^2 - \frac{\epsilon_{13}}{k_1} \right) c_2 \text{chk}_1^\ell + \\ & + \left( -\epsilon_{15} D^4 k_2^2 + \epsilon_{14} D^2 - \frac{\epsilon_{13}}{k_2} \right) c_3 \text{shk}_2^\ell + \left( -\epsilon_{15} D^4 k_2^2 + \epsilon_{14} D^2 - \frac{\epsilon_{13}}{k_2} \right) c_4 \text{chk}_2^\ell + \\ & - \frac{c_5 \beta I_2}{AD} \ell + \frac{c_6 I_2}{A_1 D} - \frac{c_7 I_2}{A_2 D} = 0 \quad \dots (3.129) \end{aligned}$$

Da (3.125) com (3.109) e (3.110)

$$\begin{aligned} & \left[ (\epsilon_6 + \epsilon_9) D^4 k_1^3 - (\epsilon_5 + \epsilon_8) D^2 k_1 + \frac{\epsilon_4 + \epsilon_7}{k_1} \right] c_2 \text{shk}_1^\ell + \\ & \left[ (\epsilon_6 + \epsilon_9) D^4 k_1^3 - (\epsilon_5 + \epsilon_8) D^2 k_1 + \frac{\epsilon_4 + \epsilon_7}{k_1} \right] c_1 \text{chk}_1^\ell + \\ & \left[ (\epsilon_6 + \epsilon_9) D^4 k_2^3 - (\epsilon_5 + \epsilon_8) D^2 k_2 + \frac{\epsilon_4 + \epsilon_7}{k_2} \right] c_4 \text{shk}_2^\ell + \\ & \left[ (\epsilon_6 + \epsilon_9) D^4 k_2^3 - (\epsilon_5 + \epsilon_8) D^2 k_2 + \frac{\epsilon_4 + \epsilon_7}{k_2} \right] c_3 \text{chk}_2^\ell + \\ & + c_5 \left( D + \frac{\beta I}{AD} \right) = F \quad \dots (3.130) \end{aligned}$$

### III.12. CONDIÇÕES DE CONTORNO RELATIVAS À BASE

Para a base, seriam interessantes algumas situações como engastamento perfeito, bases elásticas independentes e bases elásticas acopladas por uma viga de rigidez. Ma

tematicamente seria possível obter qualquer das três situações a partir da última, esquematizada na fig. 3.4.

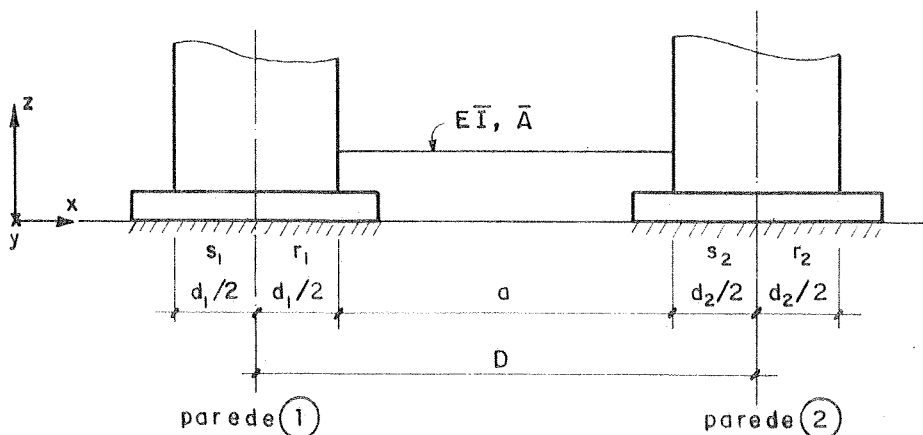


FIG. 3.4 - SAPATAS UNIDAS POR VIGA DE RIGIDEZ

a) Deslocamentos possíveis das fundações das duas paredes, seccionando o centro da viga de rigidez.

Constam da fig. 3.5.

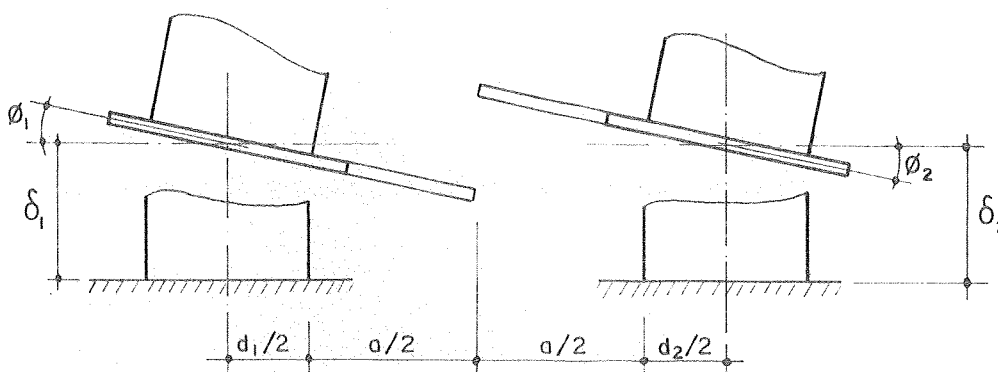


FIG. 3.5 - DESLOCAMENTOS POSSÍVEIS DAS FUNDAÇÕES.

b) Condições de equilíbrio das fundações das duas paredes.

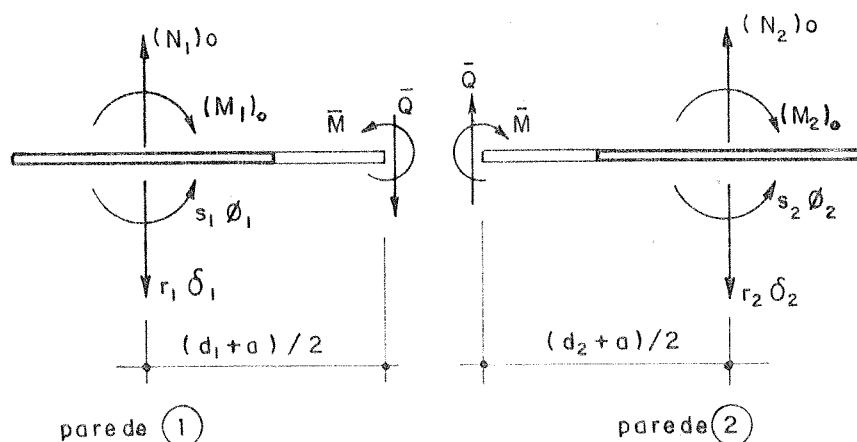


FIG 3.6 - ESFORÇOS NAS SAPATAS DE FUNDAÇÃO.

As condições de equilíbrio das fundações das duas paredes, esquecendo, por motivos óbvios, o equilíbrio de forças horizontais, são, da fig. 3.6:

$$r_1 \delta_1 + \bar{Q} - (N_1)_0 = 0 \quad \dots (3.131)$$

$$s_1 \phi_1 + \bar{M} - \frac{d_1+a}{2} \bar{Q} - (M_1)_0 = 0 \quad \dots (3.132)$$

$$r_2 \delta_2 - \bar{Q} - (N_2)_0 = 0 \quad \dots (3.133)$$

$$s_2 \phi_2 - \bar{M} - \frac{d_2+a}{2} \bar{Q} - (M_2)_0 = 0 \quad \dots (3.134)$$

c) Deslocamentos das fundações na linha média dos lintéis.



$$\omega_1 = \delta_1 - \phi_1 \frac{d_1 + a}{2} - \bar{Q} \left( \frac{a^3}{24E\bar{I}} + \frac{ca}{2G\bar{A}} \right) + \frac{\bar{M} a^2}{8E\bar{I}} \dots (3.135)$$

$$\theta_1 = \phi_1 + \bar{Q} \frac{a^2}{8E\bar{I}} - \bar{M} \frac{a}{2E\bar{I}} \dots (3.136)$$

$$\omega_2 = \delta_2 + \phi_2 \frac{d_2 + a}{2} + \bar{Q} \left( \frac{a^3}{24E\bar{I}} + \frac{ca}{2G\bar{A}} \right) + \bar{M} \frac{a^2}{8E\bar{I}} \dots (3.137)$$

$$\theta_2 = \phi_2 + \bar{Q} \frac{a^2}{8E\bar{I}} + \bar{M} \frac{a}{2E\bar{I}} \dots (3.138)$$

d) Condições de compatibilidade de deslocamentos

$$\omega_1 = \omega_2 \dots (3.139)$$

$$\theta_1 = \theta_2 \dots (3.140)$$

Fazendo:

$$\bar{\alpha}_1 = Ea \left( \frac{a^3}{24E\bar{I}} + \frac{ca}{2G\bar{A}} \right) \dots (3.141)$$

$$\bar{\alpha}_4 = E a^3 \left( \frac{a}{2E\bar{I}} \right) \dots (3.142)$$

Da (3.139) com (3.135), (3.137) e (3.141)

$$\delta_1 - \delta_2 - \phi_1 \frac{d_1 + a}{2} - \phi_2 \frac{d_2 + a}{2} - \bar{Q} \frac{2\bar{\alpha}_1}{Ea} = 0 \dots (3.143)$$

Da (3.140) com (3.136), (3.138) e (3.142)

$$\phi_1 - \phi_2 - \bar{M} \frac{2\bar{\alpha}_4}{Ea^3} = 0 \dots (3.144)$$

Da (3.144)

$$\bar{M} = \frac{Ea^3}{2\bar{\alpha}_4} (\phi_1 - \phi_2) \quad \dots (3.145)$$

Da (3.143)

$$\bar{Q} = \frac{Ea}{2\bar{\alpha}_1} \left( \delta_1 - \delta_2 - \phi_1 \frac{d_1+a}{2} - \phi_2 \frac{d_2+a}{2} \right) \quad \dots (3.146)$$

Eliminando  $\bar{Q}$  e  $\bar{M}$  devem resultar, da (3.131) a (3.134), quatro condições de contorno.

Da (3.131) com (3.146)

$$\delta_1 \left( r_1 + \frac{Ea}{2\bar{\alpha}_1} \right) - \delta_2 \frac{Ea}{2\bar{\alpha}_1} - \phi_1 \frac{Ea(d_1+a)}{4\bar{\alpha}_1} - \phi_2 \frac{Ea(d_2+a)}{4\bar{\alpha}_1} - (N_1)_0 = 0 \quad \dots (3.147)$$

Somando a (3.131) com a (3.133)

$$r_1 \delta_1 + r_2 \delta_2 - (N_1)_0 - (N_2)_0 = 0 \quad \dots (3.148)$$

Somando a (3.132) com a (3.134)

$$s_1 \phi_1 + s_2 \phi_2 - D\bar{Q} - (M_1)_0 - (M_2)_0 = 0$$

ou, com (3.146):

$$\phi_1 \left[ s_1 + \frac{EaD(d_1+a)}{4\bar{\alpha}_1} \right] + \phi_2 \left[ s_2 + \frac{EaD(d_2+a)}{4\bar{\alpha}_1} \right] - \delta_1 \frac{EaD}{2\bar{\alpha}_1} + \delta_2 \frac{EaD}{2\bar{\alpha}_1} - (M_1)_0 - (M_2)_0 = 0 \quad \dots (3.149)$$

Fazendo  $(d_2+a) \cdot (3.132) - (d_1+a) \cdot (3.134)$

$$s_1(d_2+a)\phi_1 - s_2(d_1+a)\phi_2 + 2D\bar{M} - (d_2+a)(M_1)_0 + (d_1+a)(M_2)_0 = 0$$

ou, com a (3.145)

$$\phi_1 \left[ s_1(d_2+a) + \frac{Ea^3 D}{\bar{\alpha}_4} \right] - \phi_2 \left[ s_2(d_1+a) + \frac{Ea^3 D}{\bar{\alpha}_4} \right] + (d_2+a)(M_1)_0 + (d_1+a)(M_2)_0 = 0 \quad \dots (3.150)$$

Da (3.147) com (3.107)

$$\delta_1 \left( r_1 + \frac{Ea}{2\bar{\alpha}_1} \right) - \delta_2 \frac{Ea}{2\bar{\alpha}_1} - \phi_1 \frac{Ea(d_1+a)}{4\bar{\alpha}_1} - \phi_2 \frac{Ea(d_2+a)}{4\bar{\alpha}_1} + \left( \varepsilon_2^D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_1^2} \right) c_2 - \left( \varepsilon_2^D - \frac{\varepsilon_1}{Dk_2^2} \right) c_4 - c_6 = 0 \quad \dots (3.151)$$

Da (3.148) com (3.107) e (3.108)

$$r_1 \delta_1 + r_2 \delta_2 - c_6 - c_7 = 0 \quad \dots (3.152)$$

Da (3.149) com (3.111) e (3.112)

$$\phi_1 \left[ s_1 + \frac{EaD(d_1+a)}{4\bar{\alpha}_1} \right] + \phi_2 \left[ s_2 + \frac{EaD(d_2+a)}{4\bar{\alpha}_1} \right] - \delta_1 \frac{EaD}{2\bar{\alpha}_1} + \delta_2 \frac{EaD}{2\bar{\alpha}_1} + \left[ -(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{15}) D^4 k_1^2 + (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{14}) D^2 - (\varepsilon_{10} + \varepsilon_{13}) \frac{1}{k_1^2} \right] c_2 + \left[ -(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{15}) D^4 k_2^2 + (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{14}) D^2 - (\varepsilon_{10} + \varepsilon_{13}) \frac{1}{k_2^2} \right] c_4 - c_6 \frac{I}{A_1 D} + c_7 \frac{I}{A_2 D} = 0 \quad \dots (3.153)$$

Da (3.150) com (3.111), (3.112) e também a (3.46)

$$\begin{aligned}
 & \left[ s_1(d_2+a) + \frac{Ea^3 D}{\bar{\alpha}_4} \right] \phi_1 - \left[ s_2(d_1+a) + \frac{Ea^3 D}{\bar{\alpha}_4} \right] \phi_2 + \\
 & + \left[ (d_1+a) \left( -\epsilon_{15} D^4 k_1^2 + \epsilon_{14} D^2 - \frac{\epsilon_{13}}{k_1^2} \right) - (d_2+a) \left( -\epsilon_{12} D^4 k_1^2 + \epsilon_{11} D^2 - \frac{\epsilon_{10}}{k_1^2} \right) \right] c_2 + \\
 & + \left[ (d_1+a) \left( -\epsilon_{15} D^4 k_2^2 + \epsilon_{14} D^2 - \frac{\epsilon_{13}}{k_2^2} \right) - (d_2+a) \left( -\epsilon_{12} D^4 k_2^2 + \epsilon_{11} D^2 - \frac{\epsilon_{10}}{k_2^2} \right) \right] c_4 + \\
 & + c_6 \frac{I_r}{A_1} - c_7 \frac{I_r}{A_2} = 0 \qquad \dots (3.154)
 \end{aligned}$$

### III.13. EXEMPLO 4

Seja a associação esquematizada na fig. 3.7, onde se pretende variar alguns parâmetros que aparentemente poderiam influir no comportamento do conjunto.

Para a estrutura básica da fig. 3.7 foram analisadas as seguintes situações:

a) Com a altura dos lintéis igual a 3dm, e a largura da sapata 2 igual a 8dm, variou-se  $c_\phi$  fazendo-o assumir valores: 1; 10; 100 e 1000, em tf/dm<sup>3</sup>.

Alguns dos resultados obtidos constam da fig. 3.8.

b) Com  $c_\phi = 10\text{tf/dm}^3$  e a largura da sapata 2 igual a 8dm variou-se a altura dos lintéis fazendo-a assumir valores: 2; 4 e 8dm

Os resultados constam da fig. 3.9.

c) Com  $c_\phi = 10\text{tf/dm}^3$  e a altura dos lintéis de 3dm variou-se a largura da sapata 2 fazendo-a assumir valores: 8; 16; 24 e 32dm

Os resultados constam da fig. 3.10.

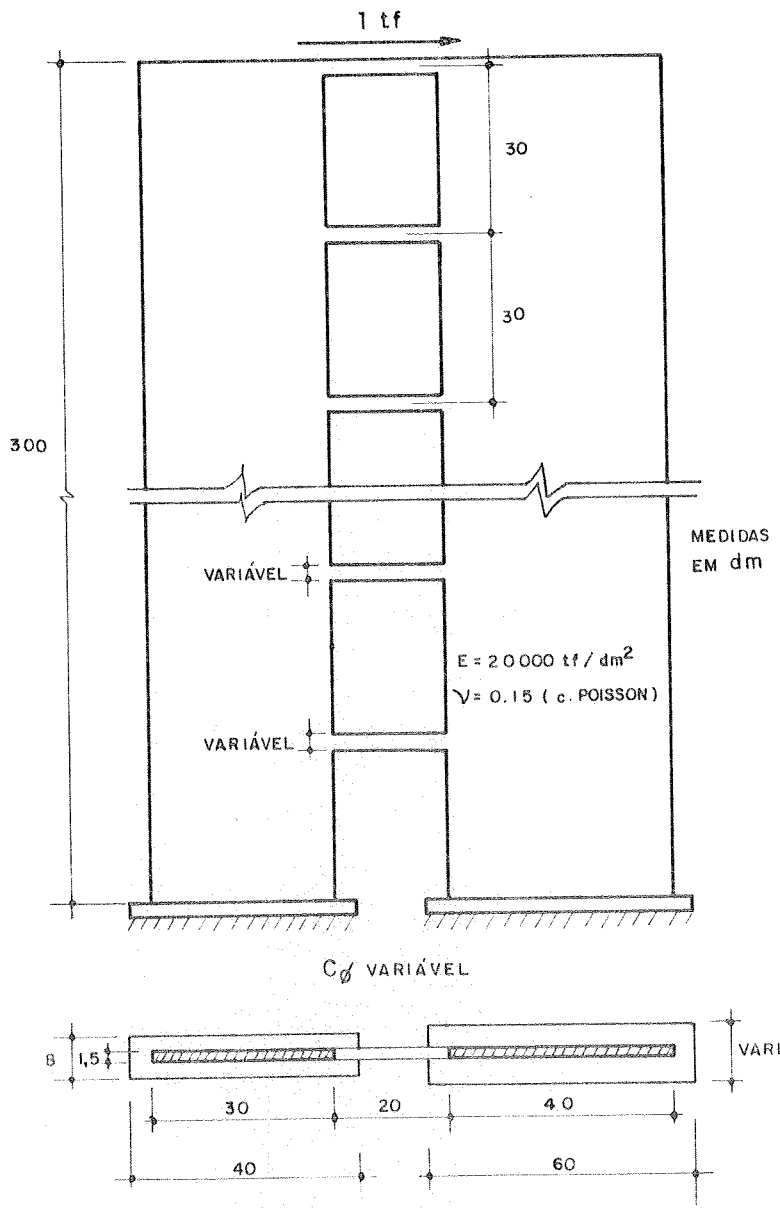


FIG.3.7- EXEMPLO 4

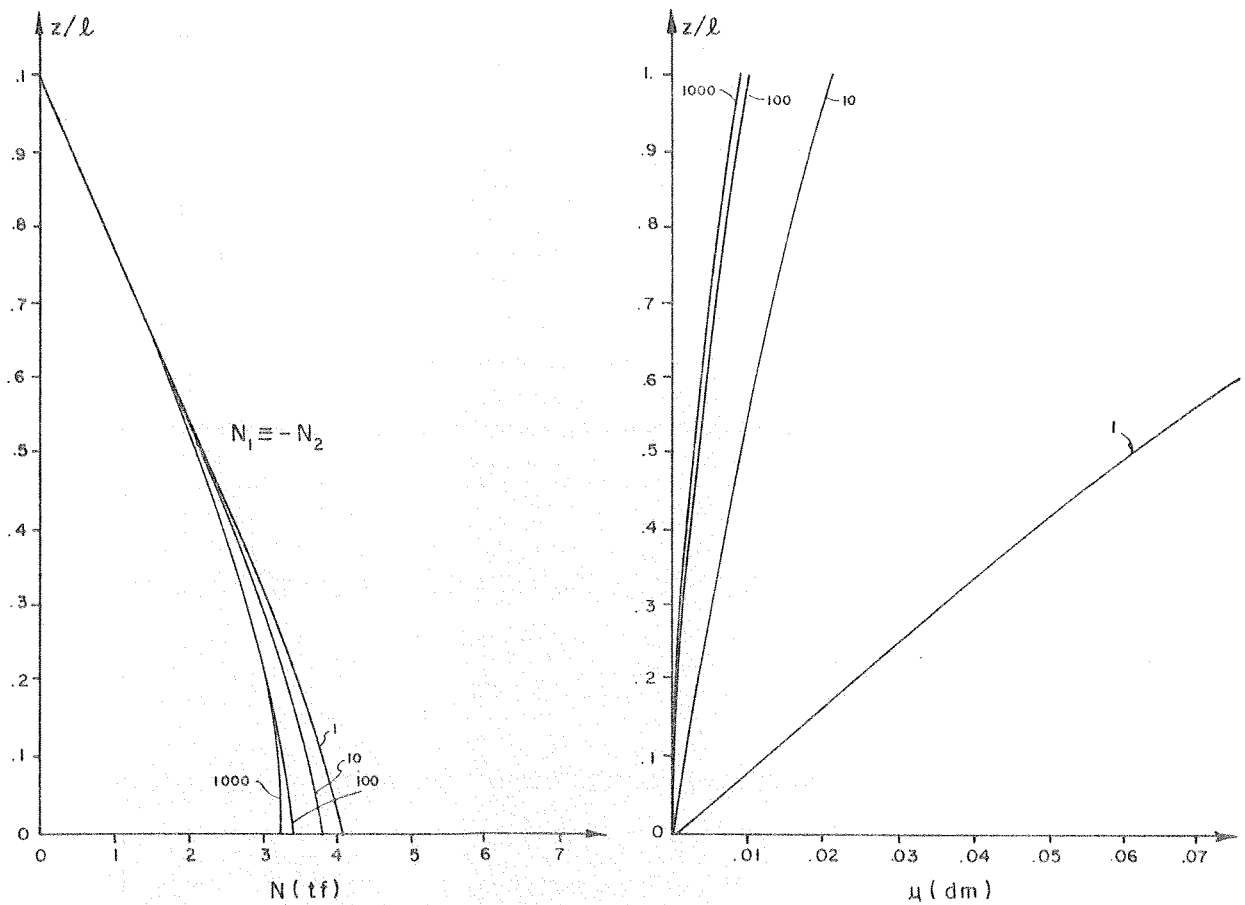
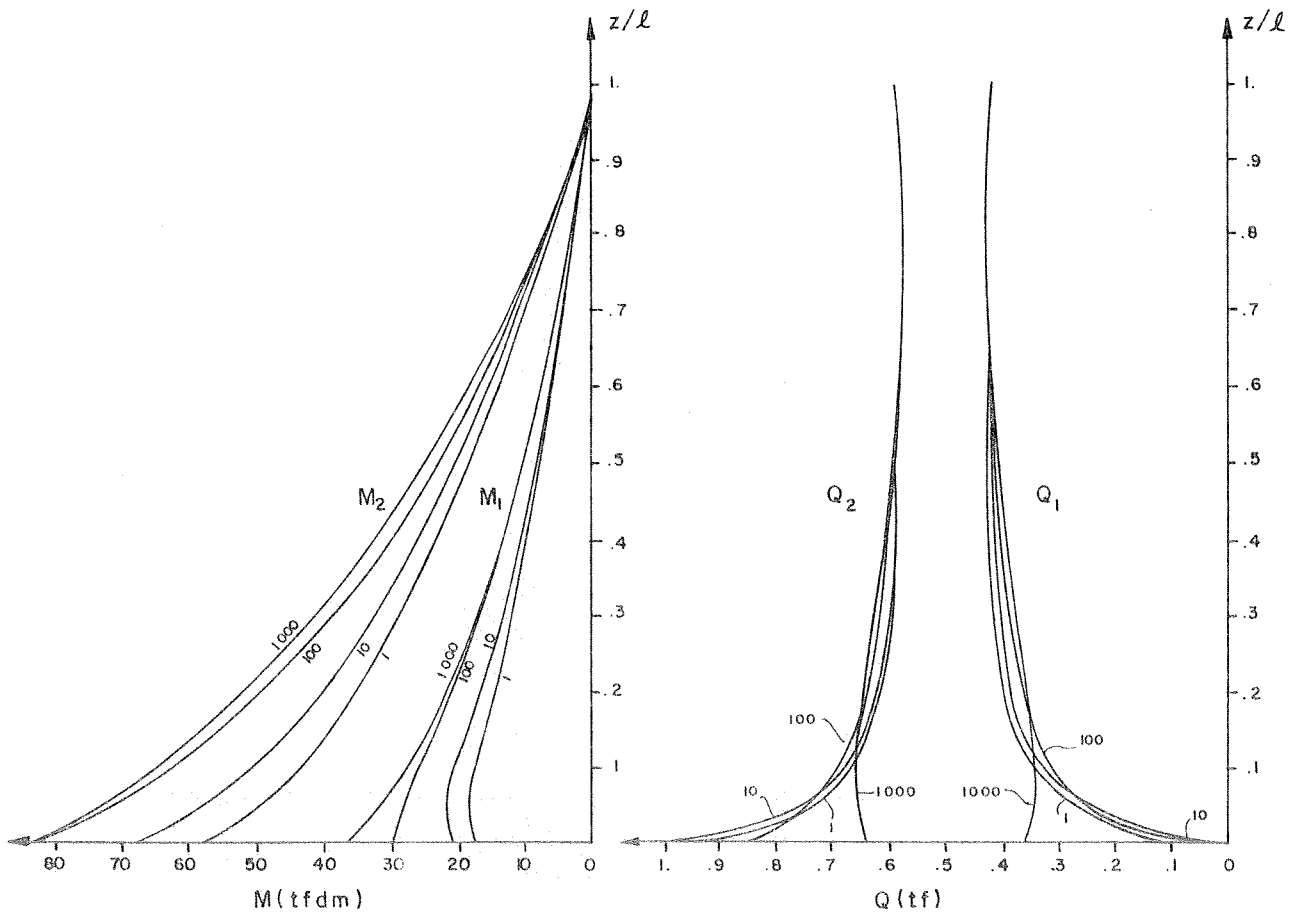


FIG. 3.8 - EXEMPLO 4 - VARIAÇÃO COM  $C_\phi$ .

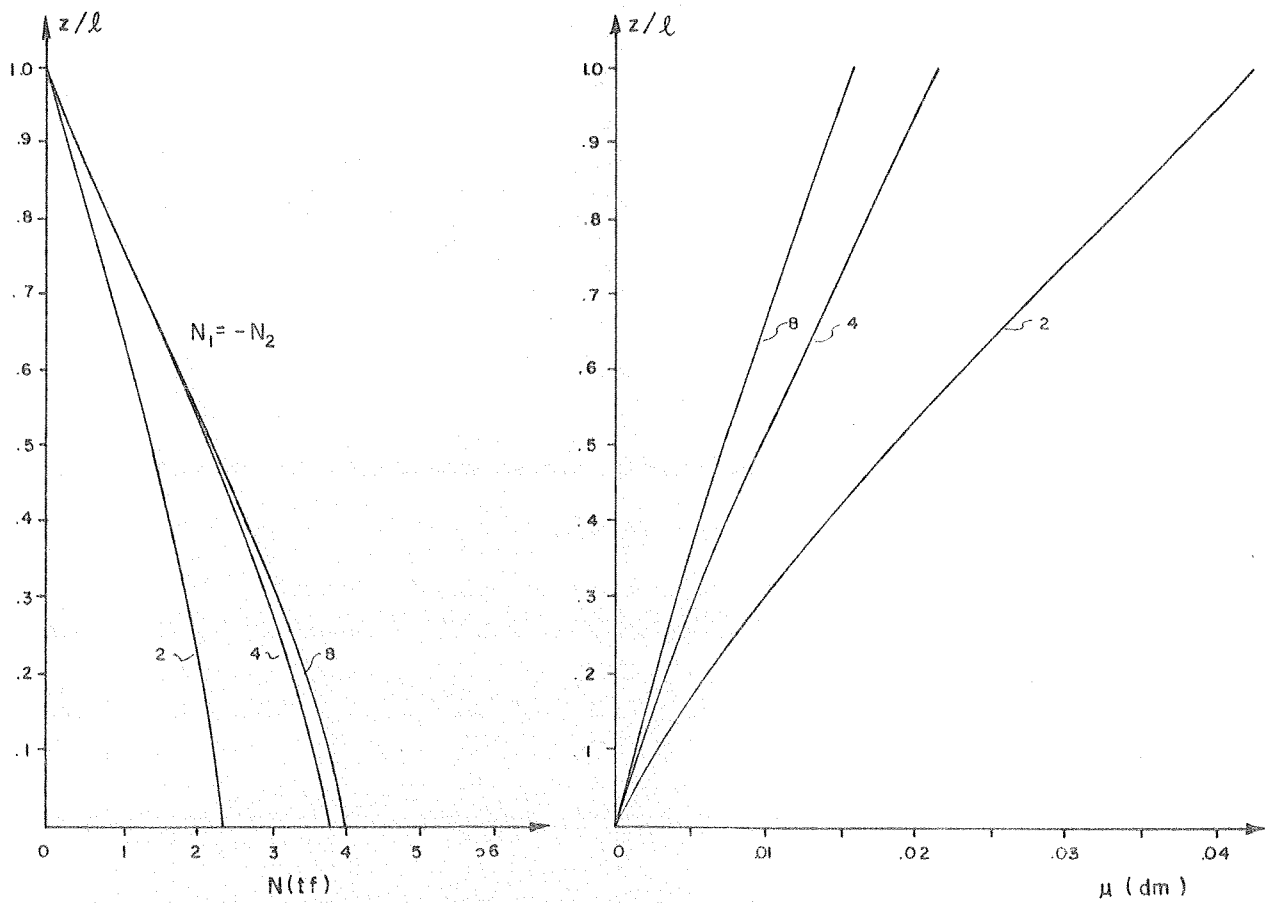
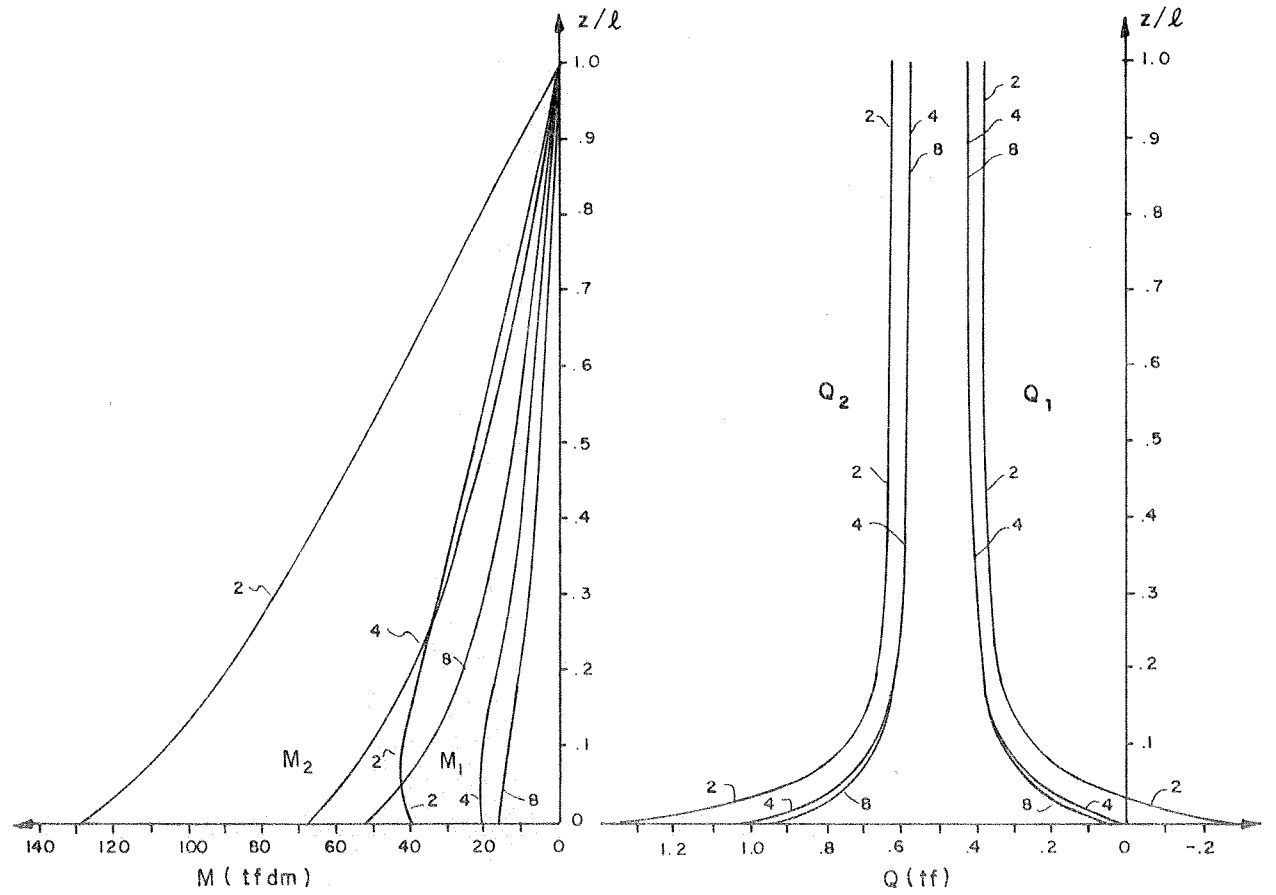


FIG. 3.9 - EXEMPLO 4 - VARIAÇÃO DA ALTURA DOS LINTÉIS.

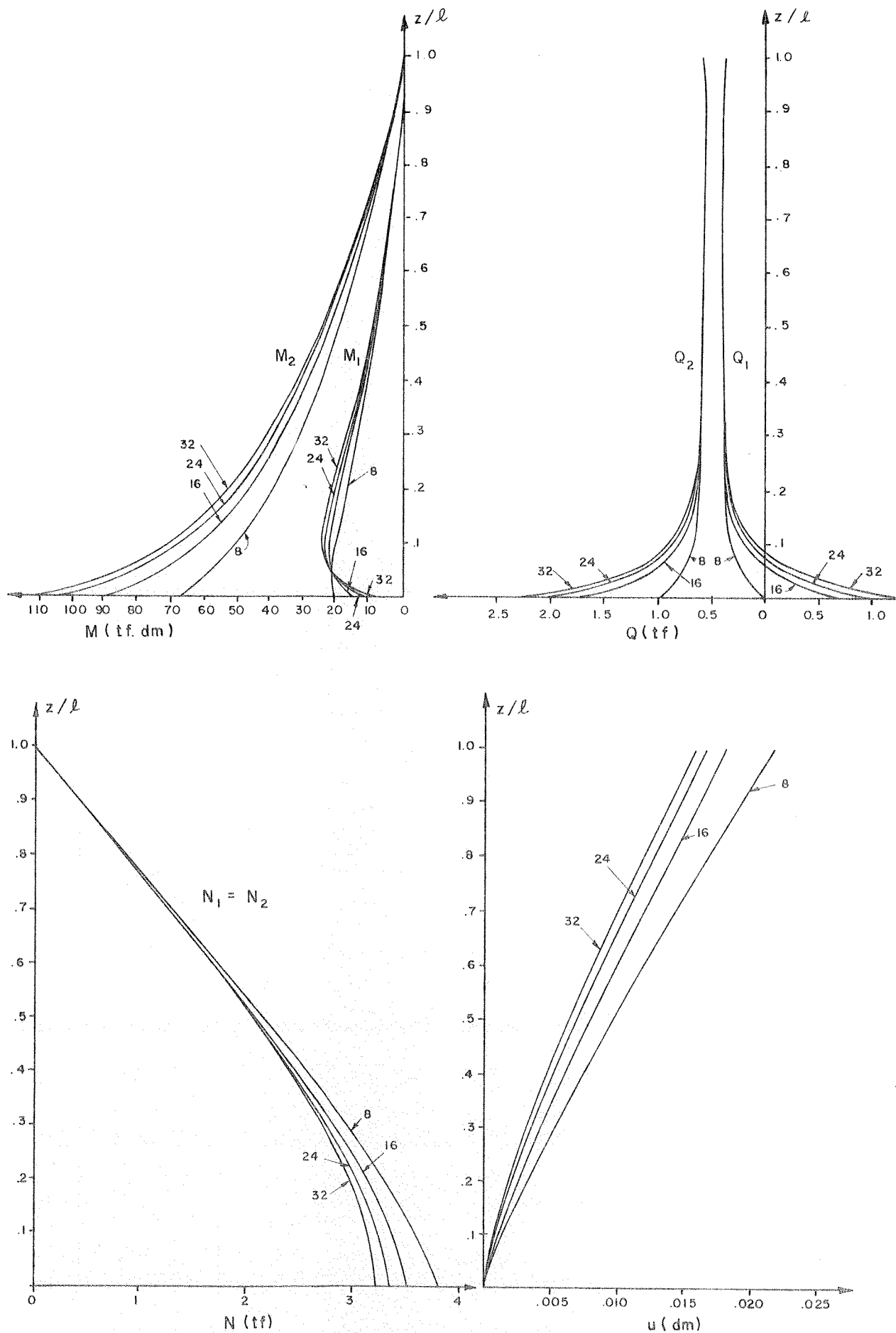


FIG. 3.10 - EXEMPLO 4 - VARIAÇÃO DE UMA SAPATA



### III.14. CONCLUSÕES PARCIAIS

O problema proposto foi resolvido sem qualquer restrição em termos de dependência de esforços, ainda que possa ter ficado um ponto de dúvida quanto às hipóteses adotadas em III.5, ao se desprezar a distorção dos "nós" de interseção entre os lintéis e as paredes verticais, dúvida essa que se reflete não na possibilidade de solução do problema mas na real contribuição dos lintéis na conexão das duas paredes.

De qualquer forma, os resultados já obtidos podem ter um interesse acadêmico maior talvez que um possível interesse prático, já que as perturbações decorrentes do engastamento não rígido são muito grandes, ainda que limitadas aos primeiros andares e não se estendendo a alturas maiores que duas ou tres vezes a dimensão maior da seção transversal do pilar; com esses esforços muito grandes seria talvez interessante computar outros efeitos simultaneamente, considerando a deformabilidade axial dos lintéis (com eventual "colaboração" das lajes) e também a flexão local dos pilares, dentro de cada andar.

Acredita-se que um desenvolvimento posterior desse trabalho deva incluir necessariamente algum tipo de experimentação, ou em modelos físicos ou em modelos matemáticos mais gerais utilizando elementos finitos, para tentar definir a importância de cada um desses efeitos em problemas reais.

De qualquer forma acredita-se ter deixado clara pelo menos a viabilidade de tratar um problema que parece sério e que tem sido esquecido ou contornado pelos autores que tratam desse tipo de associação estrutural.

À guisa de uma pequena contribuição adicional para uma melhoria posterior do trabalho específico de levar em conta a deformabilidade por cortante, procura-se apresentar no item seguinte um resumo da formulação do mesmo problema aqui tratado, levando em conta a possibilidade de distorção dos "nós" de interseção dos lintéis com as paredes.

III.15. CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS QUANTO À FORMULAÇÃO

a) Introdução

Caso fosse levada em conta a distorção dos "nós" de interseção dos lintéis com as paredes as expressões (3.8), (3.11), (3.15) e (3.16) teriam, cada uma delas, um termo adicional, ficando as condições de compatibilidade (3.20), (3.21) e (3.22) do item III.6 com a forma.

$$\begin{aligned} \psi_z \rightarrow \phi_1 z + \int_0^z \frac{cQ_1}{GA_1} dz + \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz \right) dz = \\ = \phi_2 z + \int_0^z \frac{cQ_2}{GA_2} dz + \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz \right) dz \dots (3.155) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_z \rightarrow \delta_1 + \int_0^z \frac{N_1}{EA_1} dz - \frac{d_1+a}{2} \phi_1 - \frac{d_1+a}{2} \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz - \frac{a}{2} \frac{cQ_1}{GA_1} + \\ + \frac{\alpha_1}{E} q + \frac{\alpha_2}{Ea} m = \delta_2 + \int_0^z \frac{N_2}{EA_2} dz + \frac{d_2+a}{2} \phi_2 + \\ + \frac{d_2+a}{2} \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz + \frac{a}{2} \frac{cQ_2}{GA_2} - \frac{\alpha_1}{E} q + \frac{\alpha_2}{Ea} m \dots (3.156) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_z \rightarrow \phi_1 + \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz + \frac{cQ_1}{GA_1} - \frac{\alpha_3}{Ea} q - \frac{\alpha_4}{Ea^2} m = \\ = \phi_2 + \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz + \frac{cQ_2}{GA_2} - \frac{\alpha_3}{Ea} q + \frac{\alpha_4}{Ea^2} m \dots (3.157) \end{aligned}$$

As alterações introduzidas implicariam em mudanças muitas vezes significativas na formulação posterior, va

lendo a pena ressaltar alguns pontos.

b) Obtenção de equações diferenciais com uma única variável.

É interessante observar que, agora, derivando uma vez a (3.155) tem-se com a (3.157):

$$m = 0 \quad \dots (3.158)$$

i.é., o ponto médio dos lentes tem sempre momento fletor nulo.

De qualquer forma ter-se-ia um sistema de 9 equações diferenciais (3.1) a (3.6) e (3.155) a (3.157) com 9 funções incognitas  $M_1, N_1, Q_1, M_2, N_2, Q_2, m, n, q$ .

Em combinações sucessivas dessas equações ou de suas derivadas, é possível chegar facilmente a duas expressões independentes em  $n, q$  e suas derivadas, expressões essas que são:

$$4 \left[ \frac{D^2}{E I_1 I_2} + \left( \frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right) \left( \frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} \right) \right] n - \left\{ 4 \left( \frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} \right) \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) + \frac{c}{GA_1} \left[ \frac{(d_2+a)(d_2+2a)}{EI_2} + \frac{d_1(d_1+a)}{EI_1} \right] + \frac{c}{GA_2} \left[ \frac{(d_1+a)(d_1+2a)}{EI_1} + \frac{d_2(d_2+a)}{EI_2} \right] \right\} n'' + \frac{4\alpha_1}{E} \left( \frac{d_2+a}{EI_2} - \frac{d_1+a}{EI_1} \right) q'' = 0 \quad \dots (3.159)$$

e

$$q' \left( \frac{d_2+a}{EI_2} - \frac{d_1+a}{EI_1} \right) - 2 \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) n'' + 2 \left( \frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right) n = 0 \quad \dots (3.160)$$

Observe-se que os coeficientes de  $q'''$  e  $q'$  em (3.159) e (3.160) são proporcionais entre si e diretamente proporcionais ao coeficiente  $r$  definido pela (3.46).

Se  $r = 0$  resultam da (3.159) e (3.160) duas equações diferenciais lineares homogêneas em  $n$  cujas soluções são idênticas. Com a solução para  $n$ , retornando, recair-se-ia noutra equação diferencial linear, agora não homogênea em  $q$ . Com  $n$  e  $q$  seria possível determinar os esforços internos restantes.

Se  $r \neq 0$  é possível combinar a equação (3.159) com a (3.160), derivada duas vezes, obtendo uma equação diferencial linear homogênea em  $n$ :

$$\begin{aligned} & \frac{8\alpha_1}{E} \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) n^{IV} - \left\{ 4 \left( \frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} \right) \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) + \right. \\ & + \frac{c}{GA_1} \left[ \frac{(d_2+a)(d_2+2a)}{EI_2} + \frac{d_1(d_1+a)}{EI_1} \right] + \frac{c}{GA_2} \left[ \frac{(d_1+a)(d_1+2a)}{EI_1} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{d_2(d_2+a)}{EI_2} \right] + \frac{8\alpha_1}{E} \left( \frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right) \right\} n'' + 4 \left[ \frac{D^2}{E^2 I_1 I_2} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right) \left( \frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} \right) \right] n = 0 \quad \dots (3.161) \end{aligned}$$

A (3.161) pode ser colocada na forma

$$n^{IV} - \lambda_1^2 n'' + \lambda_2^4 n = 0 \quad \dots (3.162)$$

com

$$\lambda_1^2 = \left\{ 4 \left( \frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} \right) \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) + \frac{c}{GA_1} \left[ \frac{(d_2+a)(d_2+2a)}{EI_2} + \frac{d_1(d_1+a)}{EI_1} \right] + \frac{c}{GA_2} \left[ \frac{(d_1+a)(d_1+2a)}{EI_1} + \frac{d_2(d_2+a)}{EI_2} \right] + \frac{8\alpha_1}{E} \left( \frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right) \right\} / \left[ \frac{8\alpha_1}{E} \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right) \right] \dots (3.163)$$

e

$$\lambda_2^4 = \frac{4 \left[ \frac{D^2}{E^2 I_1 I_2} + \left( \frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right) \left( \frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} \right) \right]}{\frac{8\alpha_1}{E} \left( \frac{c}{GA_1} + \frac{c}{GA_2} \right)} \dots (3.164)$$

c) Solução da equação diferencial

Para esse caso de  $r \neq 0$ , o polinômio característico da equação diferencial (3.162) é:

$$x^4 - \lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^4 = 0 \dots (3.165)$$

As quatro soluções desse polinômio característico seriam dadas por

$$x_i = \pm \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \lambda}} \dots (3.166)$$

com

$$\lambda = 4 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^4 \dots (3.167)$$

O valor de  $\lambda$  para associações usuais de paredes unidas por lintéis é consideravelmente menor que a unidade, ainda que não tenha sido possível demonstrar que isso deva ocorrer sempre; em princípio, então, as raízes  $x_i$  poderiam ser reais ou complexas, diferentes ou iguais, o que poderia implicar na necessidade de considerar diversas possibilidades para as funções solução da (3.165).

Para o caso mais frequente, de  $\lambda < 1$  as raízes  $x_i$  seriam sempre reais, simétricas duas a duas e a função solução poderia ser posta como:

$$n = c_1 \operatorname{sh} k_1 z + c_2 \operatorname{ch} k_1 z + c_3 \operatorname{sh} k_2 z + c_4 \operatorname{ch} k_2 z \quad (3.168)$$

com

$$k_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \lambda}} \quad \dots (3.169)$$

$$k_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \lambda}} \quad \dots (3.169)$$

d) Relacionamento de todas as funções do problema com  $\underline{n}$ .

Tendo a solução para  $\underline{n}$  dada pela equação (3.168), no caso válida só para  $\lambda < 1$ , é possível obter todos os esforços internos, voltando às equações que deram origem à (3.161). Assim é possível obter:

$$q = c_1 \varepsilon_1 \operatorname{ch} k_1 z + c_2 \varepsilon_1 \operatorname{sh} k_1 z + c_3 \varepsilon_2 \operatorname{ch} k_2 z + \\ + c_4 \varepsilon_2 \operatorname{sh} k_2 z + c_5 \quad \dots (3.170)$$

$$\begin{aligned}
 N_1 = & -c_1 \varepsilon_3 \operatorname{shk}_1 z - c_2 \varepsilon_3 \operatorname{chk}_1 z - c_3 \varepsilon_4 \operatorname{shk}_2 z + \\
 & -c_4 \varepsilon_4 \operatorname{chk}_2 z - c_5 z + c_6 \quad \dots (3.171)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_2 = & c_1 \varepsilon_3 \operatorname{shk}_1 z + c_2 \varepsilon_3 \operatorname{chk}_1 z + c_3 \varepsilon_4 \operatorname{shk}_2 z + \\
 & +c_4 \varepsilon_4 \operatorname{chk}_2 z + c_5 z + c_7 \quad \dots (3.172)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_1 = & c_1 \varepsilon_5 \operatorname{shk}_1 z + c_2 \varepsilon_5 \operatorname{chk}_1 z + c_3 \varepsilon_6 \operatorname{shk}_2 z + \\
 & + c_4 \varepsilon_6 \operatorname{chk}_2 z - c_5 \varepsilon_7 z + c_6 \varepsilon_8 - c_7 \varepsilon_9 \quad (3.173)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_2 = & c_1 \varepsilon_{10} \operatorname{shk}_1 z + c_2 \varepsilon_{10} \operatorname{chk}_1 z + c_3 \varepsilon_{11} \operatorname{shk}_2 z + \\
 & + c_4 \varepsilon_{11} \operatorname{chk}_2 z - c_5 \varepsilon_{12} z + c_6 \varepsilon_{13} - c_7 \varepsilon_{14} \\
 & \dots (3.174)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_1 = & -c_1 \varepsilon_{15} \operatorname{chk}_1 z - c_2 \varepsilon_{15} \operatorname{shk}_1 z - c_3 \varepsilon_{16} \operatorname{chk}_2 z + \\
 & -c_4 \varepsilon_{16} \operatorname{shk}_2 z + \varepsilon_{17} c_5 \quad \dots (3.175)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 = & -c_1 \varepsilon_{18} \operatorname{chk}_1 z - c_2 \varepsilon_{18} \operatorname{shk}_1 z - c_3 \varepsilon_{19} \operatorname{chk}_2 z + \\
 & -c_4 \varepsilon_{19} \operatorname{shk}_2 z + \varepsilon_{20} c_5 \quad \dots (3.176)
 \end{aligned}$$

Com esses esforços internos é possível obter tam  
bém o deslocamento horizontal  $u$ .

$$\begin{aligned}
 u = & c_1 \left( \frac{\epsilon_5}{k_1^2 EI_1} - \frac{c \epsilon_{15}}{k_1 GA_1} \right) \text{sh} k_1 z + c_2 \left( \frac{\epsilon_5}{k_1^2 EI_1} - \frac{c \epsilon_{15}}{k_1 GA_1} \right) \text{ch} k_1 z + \\
 & + c_3 \left( \frac{\epsilon_6}{k_2^2 EI_1} - \frac{c \epsilon_{16}}{k_2 GA_1} \right) \text{sh} k_2 z + c_4 \left( \frac{\epsilon_6}{k_2^2 EI_1} - \frac{c \epsilon_{16}}{k_2 GA_1} \right) \text{ch} k_2 z + \\
 & - c_5 \frac{\epsilon_7}{GEI_1} z^3 + \left( c_6 \frac{\epsilon_8}{2EI_1} - c_7 \frac{\epsilon_9}{2EI_1} \right) z^2 + \left( \phi_1 + c_5 \frac{c \epsilon_{17}}{GA_1} + \right. \\
 & \left. - c_1 \frac{\epsilon_5}{k_1 EI_1} - c_3 \frac{\epsilon_6}{k_2 EI_1} \right) z + c_2 \left( \frac{c \epsilon_{15}}{k_1 GA_1} - \frac{\epsilon_5}{k_1^2 EI_1} \right) + \\
 & + c_4 \left( \frac{c \epsilon_{16}}{k_2 GA_1} - \frac{\epsilon_6}{k_2^2 EI_1} \right) \quad (3.177)
 \end{aligned}$$

Os coeficientes  $\epsilon_i$  são funções das características elásticas e geométricas da associação e não valeria a pena reproduzi-los aqui.

e) Introdução dos deslocamentos dos apoios

Voltando às condições de compatibilidade (3.155) a (3.157), que devem valer para qualquer  $z$ , com os resultados obtidos para os esforços internos no item anterior, é possível obter duas relações independentes entre as constantes  $c_1$  a  $c_7$  e os deslocamentos  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  dos apoios.

Para valer a (3.155) para qualquer  $z$

$$\phi_1 - \phi_2 + \frac{c}{GA_1} (Q_1)_0 - \frac{c}{GA_2} (Q_2)_0 = 0 \dots (3.178)$$

Para valer a (3.156) para qualquer  $z$



$$\delta_1 - \delta_2 - \frac{d_1+a}{2} \phi_1 - \frac{d_2+a}{2} \phi_2 - \frac{ac}{2GA_1} (Q_1)_o +$$

$$- \frac{ac}{2GA_2} (Q_2)_o + \frac{2\alpha_1}{E} (q)_o = 0 \quad \dots (3.179)$$

A condição de compatibilidade (3.157) levando em conta a (3.158) é consequência direta da equação (3.155).

f) Condições de contorno

Para determinar as, agora, 11 incógnitas,  $c_1$  a  $c_7$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\delta_1$  e  $\delta_2$  dispõe-se, além das duas condições (3.178) e (3.179), de cinco condições relativas ao topo da associação e quatro relativas à base.

As condições de contorno relativas ao topo, para o caso previsto na fig. 3.1 seriam.

$$\text{Para } z = \ell \rightarrow N_1 = 0 \quad \dots (3.180)$$

$$\text{Para } z = \ell \rightarrow N_2 = 0 \quad \dots (3.181)$$

$$\text{Para } z = \ell \rightarrow M_1 = 0 \quad \dots (3.182)$$

$$\text{Para } z = \ell \rightarrow M_2 = 0 \quad \dots (3.183)$$

$$\text{Para } z = \ell \rightarrow Q_1 + Q_2 = F \quad \dots (3.184)$$

As quatro condições de contorno relativas às bases ou poderiam corresponder a valores impostos para  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\delta_1$  e  $\delta_2$  ou, prevendo engastamentos elásticos, às condições das quatro equações (3.147) a (3.150).

Infelizmente não foram obtidos ainda resultados correspondentes a essa análise.

## CAPÍTULO IV

### NÚCLEO BI-SIMÉTRICO SUBMETIDO A TORÇÃO

#### IV.1. INTRODUÇÃO

Este problema de associação de paredes foi apresentado por COULL, que o resolveu levando em conta só a deformação por flexão; entre outros pequenos enganos que cometeu na formulação o essencial foi ter ignorado a incompatibilidade das equações que ele próprio formulara para levar em conta o engastamento elástico das bases. MANCINI retomou o problema, corrigindo as falhas iniciais, procurando explicações físicas para as perturbações de base e procurando inventar correções "a sentimento" para os esforços internos nas bases. Posteriormente COSTA desenvolveu sua dissertação de mestrado tratando o mesmo problema com o auxílio da teoria de VLASOV, introduzindo o "bimomento" como esforço interno no conjunto, mas ainda não conseguindo uma solução convincente, ficando ainda condicionada essa solução à introdução de "troca de forças" entre os elementos do núcleo, troca de forças essa definida também "a sentimento". É possível mostrar que, com a introdução das deformações devidas a esforço cortante nas condições de compatibilidade, chega-se a uma solução definida, respeitando todas as condições do problema e dando, se não a solução real para as per

turbações, pelo menos uma solução matemática coerente para o tratamento do engastamento elástico e da imposição de recalques.

IV.2. DEFINIÇÃO DA ESTRUTURA A SER ANALISADA

Essa definição consta da fig. 4.1,(b)

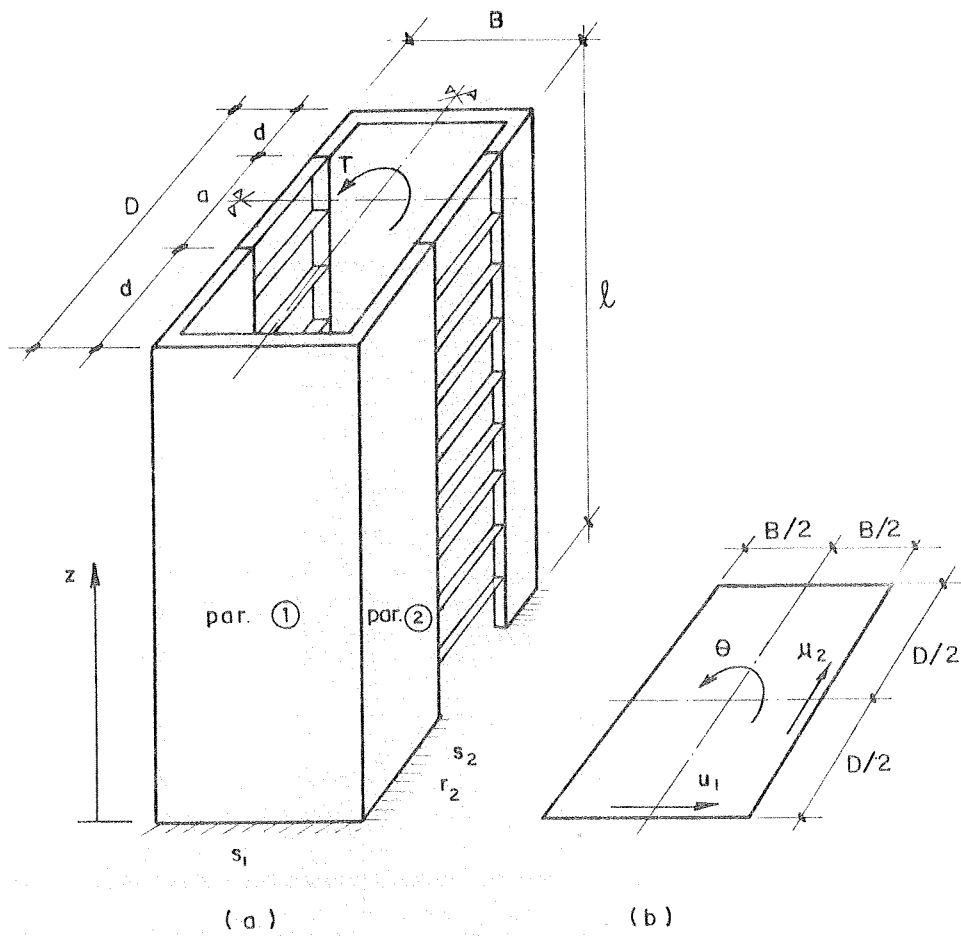


FIG. 4.1 - NÚCLEO BI-SIMÉTRICO

IV.3. CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO

Levando em conta a dupla simetria do núcleo, a análise poderia se restringir à associação das paredes 1 e 2 da fig. 4.2, onde se associou à parede 2 a metade dos lin-têis.

Os esforços internos e de interação entre as pare-des constam também da fig. 4.2.

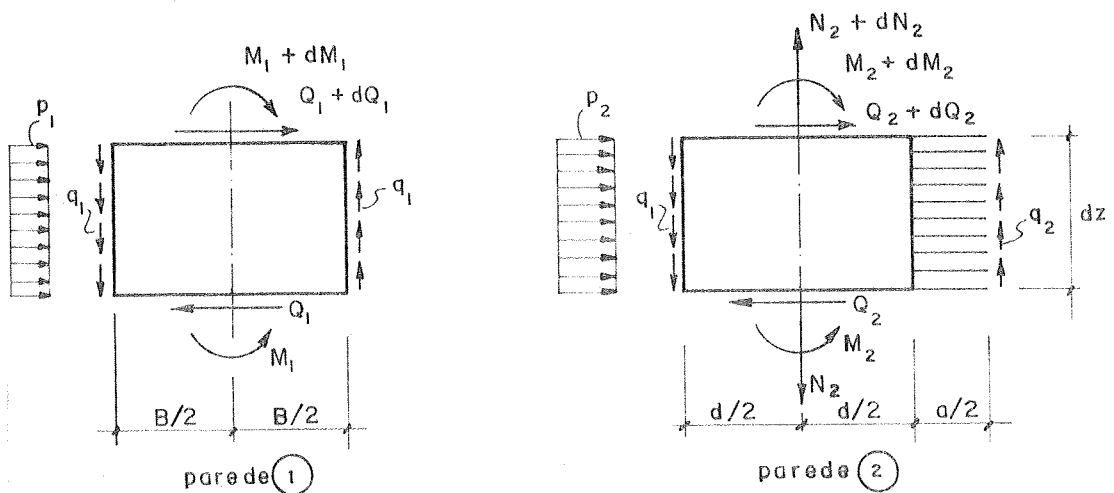


FIG. 4.2 - ESFORÇOS INTERNOS E DE INTERAÇÃO

As condições de equilíbrio para a parede 1 são:

$$dQ_1 + p_1 dz = 0$$

$$dM_1 + Q_1 dz - Bq_1 dz = 0$$

ou então

$$Q_1' = -p_1 \quad \dots (4.1)$$

$$M_1' = Bq_1 - Q_1 \quad \dots (4.2)$$

As condições de equilíbrio para a parede 2, analogamente, são:

$$dQ_2 + p_2 dz = 0$$

$$dM_2 + Q_2 dz - q_1 dz \frac{d}{2} - q_2 dz \frac{1}{2} (d+a) = 0$$

$$dN_2 + q_2 dz - q_1 dz = 0$$

ou então

$$Q_2' = -p_2 \quad \dots (4.3)$$

$$N_2' = q_1 - q_2 \quad \dots (4.4)$$

$$M_2' = \frac{d}{2} q_1 + \frac{1}{2} (d+a) q_2 - Q_2 \quad \dots (4.5)$$

#### IV.4. CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO HORIZONTAL DO "CONTÍNUO - LAJES"

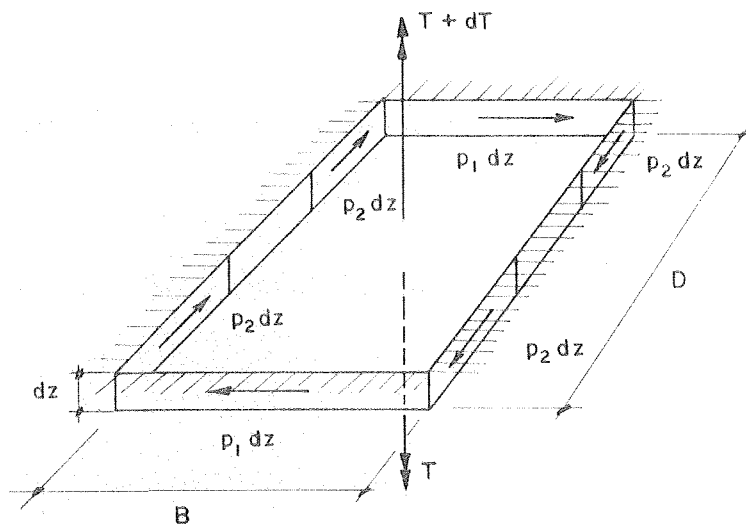


FIG. 4.3 - ESFORÇOS ATUANTES NO "CONTÍNUO - LAJES"

Da fig. 4.3 tem-se:

$$dT - p_1 dz D - 2 p_2 dz B = 0$$

ou então

$$T' = p_1 D + 2 p_2 B \quad \dots (4.6)$$

Se  $T$  é constante

$$p_1 D + 2 B p_2 = 0 \quad \dots (4.7)$$

#### IV.5. DESLOCAMENTOS COMPATÍVEIS NAS FUNDAÇÕES

Os deslocamentos possíveis das fundações constam da fig. 4.4

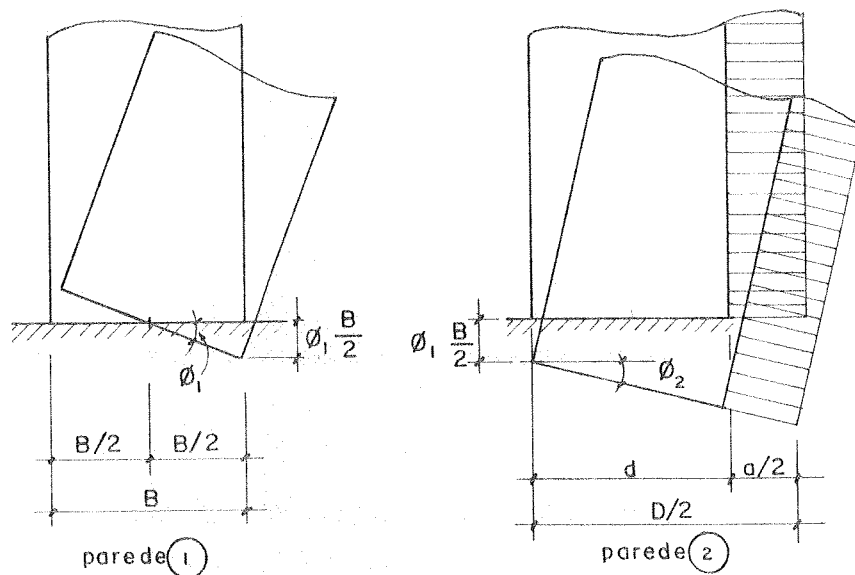


FIG. 4.4 - DESLOCAMENTOS POSSÍVEIS DAS FUNDAÇÕES.

IV.6. DESLOCAMENTOS DAS PAREDES NAS LINHAS DE INTERSEÇÃO

No cálculo dos deslocamentos das paredes nas linhas de interseção não foram computados, como não o foram no capítulo III, os deslocamentos acarretados pela distorção dos "nós" de interseção dos lintéis com a parede anexa, o que implicaria na introdução de termos adicionais às equações (4.10).

Os deslocamentos horizontais das duas paredes, na cota  $z$  serão

$$u_1 = \phi_1 z + \int_0^z \frac{cQ_1}{GA_1} dz + \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz \right) dz \dots (4.8)$$

$$u_2 = \phi_2 z + \int_0^z \frac{cQ_2}{GA_2} dz + \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz \right) dz \dots (4.9)$$

O deslocamento vertical no centro dos lintéis devido à deformação da parede 2, será, na cota  $z$

$$w_{2p} = -\phi_1 \frac{B}{2} - \phi_2 \frac{D}{2} + \int_0^z \frac{N_2}{EA_2} dz - \frac{1}{2}(d+a) \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz (4.10)$$

O deslocamento vertical no centro dos lintéis devido à deformação dos mesmos, será, na cota  $z$ .

$$w_{2\ell} = \left( \frac{hac}{2Gs} + \frac{ha^3}{24Ei} \right) q_2$$

Com

$$\beta = E \left( \frac{hac}{2Gs} + \frac{ha^3}{24Ei} \right) \dots (4.11)$$

tem-se, então

$$w_{2\ell} = \frac{\beta}{E} q_2 \dots (4.12)$$

Os deslocamentos verticais de cada uma das paredes, na linha de interseção e na cota  $z$ , são

$$w_{1d} = -\phi_1 \frac{B}{2} - \frac{B}{2} \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz \dots (4.13)$$

$$w_{2e} = -\phi_1 \frac{B}{2} + \frac{d}{2} \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz + \int_0^z \frac{N_2}{EA_2} dz \dots (4.14)$$

IV.7. CONDIÇÃO DE COMPATIBILIDADE DE DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS DAS 2 PAREDES

$$\forall z \rightarrow \theta = u_1 \frac{2}{D} = u_2 \frac{2}{B}$$

ou

$$\forall z \rightarrow u_1 B = u_2 D \dots (4.15)$$

IV.8. CONDIÇÃO DE COMPATIBILIDADE DE DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO CENTRO DOS LINTÉIS

$$\forall z \rightarrow w_{2p} + w_{2\ell} = 0 \dots (4.16)$$



IV.9. CONDIÇÃO DE COMPATIBILIDADE DE DESLOCAMENTOS VERTICAIS NA JUNÇÃO DAS DUAS PAREDES

$$\forall z \rightarrow w_{1d} = w_{2e}$$

IV.10. OBTENÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL COM UMA SÓ VARIÁVEL

Da (4.15) com (4.8) e (4.9)

$$\begin{aligned} \forall z \rightarrow B\phi_1 z + B \int_0^z \frac{cQ_1}{GA_1} dz + B \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz \right) dz = \\ = D\phi_2 z + D \int_0^z \frac{cQ_2}{GA_2} dz + D \int_0^z \left( \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz \right) dz \quad (4.18) \end{aligned}$$

Da (4.16) com (4.10) e (4.12)

$$\begin{aligned} \forall z \rightarrow -\phi_1 \frac{B}{2} - \phi_2 \frac{D}{2} + \int_0^z \frac{N_2}{EA_2} dz + \\ - \frac{1}{2} (d+a) \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz + \frac{\beta}{E} q_2 = 0 \quad (4.19) \end{aligned}$$

Da (4.17) com (4.13) e (4.14)

$$\forall z \rightarrow -\frac{B}{2} \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz = -\frac{d}{2} \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz + \int_0^z \frac{N_2}{EA_2} dz \quad (4.20)$$

Derivando a (4.18) quatro vezes

$$\frac{Bc}{GA_1} Q_1'''' + \frac{B}{EI_1} M_1'' = \frac{Dc}{GA_2} Q_2'''' + \frac{D}{EI_2} M_2'' \quad \dots \quad (4.21)$$

Derivando a (4.19) três vezes

$$\frac{1}{EA_2} N_2'' - \frac{d+a}{2EI_2} M_2'' + \frac{\beta}{E} q_2'''' = 0 \quad (4.22)$$

Derivando a (4.20) três vezes

$$\frac{B}{EI_1} M_1'' + \frac{d}{EI_2} M_2'' + \frac{2}{EA_2} N_2'' = 0 \quad (4.23)$$

Visando preparar a eliminação de  $Q_1$  e  $Q_2$

De (4.1)

$$Q_1'''' = - p_1'' \quad (4.24)$$

Da (4.1) e da (4.2)

$$M_1'' = Bq_1' - Q_1'$$

$$M_1'' = B q_1' + p_1 \quad (4.25)$$

Da (4.3)

$$Q_2'''' = - p_2'' \quad (4.26)$$

Da (4.5) e (4.3)

$$M_2'' = \frac{d}{2} q_1' + \frac{d+a}{2} q_2' + p_2 \quad (4.27)$$

Da (4.4)

$$N_2'' = q_1' - q_2' \quad (4.28)$$

Da (4.7)

$$P_1 = - \frac{2B}{D} P_2 \quad \dots (4.29)$$

Reorganizando as condições de compatibilidade (4.21), (4.22) e (4.23)

Da (4.22)

$$\frac{1}{EA_2} N_2'' = \frac{d+a}{2EI_2} M_2'' - \frac{\beta}{E} q_2'''' \quad \dots (4.30)$$

Da (4.30) na (4.23)

$$\frac{B}{EI_1} M_1'' + \frac{d}{EI_2} M_2'' + \frac{d+a}{EI_2} M_2'' - \frac{2\beta}{E} q_2'''' = 0$$

ou

$$\frac{B}{EI_1} M_1'' + \frac{D}{EI_2} M_2'' = \frac{2\beta}{E} q_2'''' \quad \dots (4.31)$$

Da (4.21) com (4.24) e (4.26)

$$\frac{B}{EI_1} M_1'' - \frac{D}{EI_2} M_2'' = - \frac{Dc}{GA_2} P_2'' + \frac{Bc}{GA_1} P_1'' \quad \dots (4.32)$$

Somando a (4.31) com a (4.32)

$$\frac{2B}{EI_1} M_1'' = \frac{2\beta}{E} q_2'''' + \frac{Bc}{GA_1} P_1'' - \frac{Dc}{GA_2} P_2'' \quad \dots (4.33)$$

Subtraindo a (4.32) da (4.31)

$$\frac{2D}{EI_2} M_2'' = \frac{2\beta}{E} q_2'''' - \frac{Bc}{GA_1} P_1'' + \frac{Dc}{GA_2} P_2'' \quad \dots (4.34)$$

Substituindo  $M_2''$  da (4.34) na (4.30)

$$\frac{1}{EA_2} N_2'' = \frac{d+a}{2EI_2} \left( \frac{2\beta}{2D} q_2'' - \frac{Bc}{GA_1} p_1'' + \frac{Dc}{GA_2} p_2'' \right) - \frac{\beta}{E} q_2''$$

ou

$$\frac{1}{EA_2} N_2'' = \frac{d+a}{4D} \left( \frac{Dc}{GA_2} p_2'' - \frac{Bc}{GA_1} p_1'' \right) - \left( 1 - \frac{d+a}{2D} \right) \frac{\beta}{E} q_2''$$

ou ainda

$$\frac{1}{EA_2} N_2'' = \frac{d+a}{4D} \left( \frac{Dc}{GA_2} p_2'' - \frac{Bc}{GA_1} p_1'' \right) - \frac{D+d}{2D} \frac{\beta}{E} q_2'' \quad \dots (4.35)$$

Eliminando  $p_1$  nas condições de compatibilidade (4.33), (4.34) e (4.35)

Da (4.29)

$$p_1 = - \frac{2B}{D} p_2 \quad \dots (4.36)$$

Da (4.33) com (4.36)

$$\frac{2B}{EI_1} M_1'' = \frac{2\beta}{E} q_2'' - \frac{2B^2c}{DGA_1} p_2'' - \frac{Dc}{GA_2} p_2'' \quad \dots (4.37)$$

Da (4.34) com (4.36)

$$\frac{2D}{EI_2} M_2'' = \frac{2\beta}{E} q_2'' + \frac{2B^2c}{DGA_1} p_2'' + \frac{Dc}{GA_2} p_2'' \quad \dots (4.38)$$

Da (4.35) com (4.36)

$$\frac{4D}{EA_2} N_2'' = (d+a) \left( \frac{Dc}{GA_2} p_2'' + \frac{2B^2c}{DGA_1} p_2'' \right) - 2(D+d) \frac{\beta}{E} q_2'' \quad (4.39)$$

Fazendo

$$\alpha = \frac{ED}{2} \left( \frac{2B^2c}{DGA_1} + \frac{Dc}{GA_2} \right) \quad \dots (4.40)$$

Da (4.37) com (4.40)

$$\frac{2B}{EI_1} M_1'' = \frac{2\beta}{E} q_2'''' - \frac{2\alpha}{ED} P_2''$$

ou ainda

$$BDM_1'' = \beta DI_1 q_2'''' - \alpha I_1 P_2'' \quad \dots (4.41)$$

Da (4.38) com (4.40)

$$\frac{2D}{EI_2} M_2'' = \frac{2\beta}{E} q_2'''' + \frac{2\alpha}{ED} P_2''$$

ou ainda

$$D^2 M_2'' = \beta DI_2 q_2'''' + \alpha I_2 P_2'' \quad \dots (4.42)$$

Da (4.39) com (4.40)

$$\frac{4D}{EA_2} N_2'' = (D-d) \frac{2\alpha}{ED} P_2'' - 2(D+d) \frac{\beta}{E} q_2''''$$

ou ainda

$$2D^2 N_2'' = \alpha(D-d) A_2 P_2'' - \beta D(D+d) A_2 q_2'''' \quad \dots (4.43)$$

Fazendo

$$r = \frac{d}{D} \quad \dots (4.44)$$

$$f = \frac{A_1}{A_2} \dots (4.45)$$

tem-se

$$\frac{A_2}{I_2} = \frac{12}{r^2 D^2} \dots (4.46)$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{f B^2}{r^2 D^2} \dots (4.47)$$

Da (4.41) com (4.46)

$$BDM_1'' = \beta D \frac{f B^2}{r^2 D^2} I_2 q_2'''' - \alpha \frac{f B^2}{r^2 D^2} I_2 p_2''$$

$$r^2 D^3 M_1'' - \beta f B D I_2 q_2'''' + \alpha f B I_2 p_2'' = 0 \dots (4.48)$$

Da (4.42)

$$D^2 M_2'' - \beta D I_2 q_2'''' - \alpha I_2 p_2'' = 0 \dots (4.49)$$

Da (4.43) com (4.46), (4.47)

$$2D^2 N_2'' = \alpha D(1-r) \frac{12}{r^2 D^2} I_2 p_2'' - \beta D^2(1+r) \frac{12}{r^2 D^2} I_2 q_2''''$$

ou

$$r^2 D^3 N_2'' - 6\alpha(1-r) I_2 p_2'' + 6\beta D(1+r) I_2 q_2'''' = 0 \quad (4.50)$$

Além das condições de compatibilidade (4.48), (4.49) e (4.50) tem-se:

Da (4.1) com (4.36)

$$Q_1' = \frac{2B}{D} p_2 \dots (4.51)$$

Da (4.25) com (4.36)

$$M_1'' = B q_1' - \frac{2B}{D} p_2 \quad \dots (4.52)$$

Da (4.3)

$$Q_2' = - p_2 \quad \dots (4.53)$$

Da (4.27) com (4.45)

$$M_2'' = \frac{rD}{2} q_1' + \frac{D(1-r)}{2} q_2' + p_2 \quad \dots (4.54)$$

Da (4.4)

$$N_2' = q_1 - q_2 \quad \dots (4.55)$$

Tem-se portanto um sistema de 6 equações, (4.48), (4.49), (4.50), (4.52), (4.54) e (4.55) com 6 incógnitas,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $N_2$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  e  $p_2$ .

Da (4.52) na (4.48) para eliminar  $M_1$

$$r^2 BD^3 q_1' - 2r^2 BD^2 p_2 - \beta f B D I_2 q_2'''' + \alpha f B I_2 p_2'' = 0$$

ou

$$r^2 D^3 q_1' - \beta f D I_2 q_2'''' - 2r^2 D^2 p_2 + \alpha f I_2 p_2'' = 0 \quad \dots (4.56)$$

Da (4.54) na (4.49) para eliminar  $M_2$

$$\frac{rD^3}{2} q_1' + \frac{D^3(1-r)}{2} q_2' + D^2 p_2 - \beta D I_2 q_2'''' - \alpha I_2 p_2'' = 0$$

ou

$$rD^3 q_1' + D^3(1-r)q_2' - 2\beta DI_2 q_2'' + 2D^2 p_2 - 2\alpha I_2 p_2'' = 0 \quad (4.57)$$

Da (4.55) na (4.50) para eliminar  $N_2$

$$r^2 D^3 q_1' - r^2 D^3 q_2' + 6\beta D(1+r)I_2 q_2'' - 6\alpha(1-r)I_2 p_2'' = 0 \quad (4.58)$$

Visando eliminar  $q_1'$ :

Fazendo (4.58) - (4.56)

$$\begin{aligned} & \beta DI_2 (f+6+6r) q_2'' - r^2 D^3 q_2' + 2r^2 D^2 p_2 + \\ & - \alpha I_2 (f+6-6r) p_2'' = 0 \quad \dots (4.59) \end{aligned}$$

Fazendo r. (4.57) - (4.56)

$$\begin{aligned} & rD^3(1-r)q_2' + \beta DI_2 (f-2r) q_2'' + 2rD^2 r(1+r) p_2 + \\ & - \alpha I_2 (f+2r) p_2'' = 0 \quad \dots (4.60) \end{aligned}$$

Para isolar  $q_2'$ , fazendo  $(f+6+6r) \cdot (4.60) - (f-2r) \cdot (4.59)$  tem-se:

$$\begin{aligned} & rD^3 q_2' [(f+6+6r)(1-r) + (f-2r)r] + 2rD^2 p_2 [(f+6+6r)(1+r) - (f-2r)r] + \\ & + \alpha I_2 p_2'' [(f+6-6r)(f-2r) - (f+6+6r)(f+2r)] = 0 \end{aligned}$$

ou

$$(6+f-8r^2)rD^3 q_2' + (6+f+12r+8r^2)rD^2 p_2 - 8r(3+2f)\alpha I_2 p_2'' = 0$$



ou ainda

$$D^3(6+f-8r^2)q_2''+2D^2(6+f+12r+8r^2)p_2-8\alpha I_2(3+2f)p_2''=0 \quad (4.61)$$

Para isolar  $q_2''''$ , fazendo  $(1-r)(4.59)+r(4.60)$

$$\beta D I_2 [(1-r)(f+6+6r)+r(f-2r)] q_2''''+2r^2 D^2 (1-r+1+r) p_2 + \\ - \alpha I_2 [(1-r)(f+6-6r)+r(f+2r)] p_2'' = 0$$

ou

$$\beta D I_2 r(6+f-8r^2)q_2''''+4r^2 D^2 p_2 - \alpha I_2 (6+f-12r+8r^2)p_2''=0 \quad (4.62)$$

Derivando 2 vezes a (4.61)

$$D^3(6+f-8r^2)q_2''''+2D^2(6+f+12r+8r^2)p_2'' + \\ -8\alpha I_2(3+2f)p_2^{IV} = 0 \quad \dots (4.63)$$

Fazendo  $D^2 \cdot (4.62) - \beta I_2 r \cdot (4.63)$  elimina-se  $q_2''''$

$$8\alpha\beta I_2^2 r(3+2f)p_2^{IV} - I_2 D^2 [\alpha(6+f-12r+8r^2) + \beta 2r(6+f+12r+8r^2)] p_2'' + \\ + 4r^2 D^4 p_2 = 0$$

ou

$$p_2^{IV} - \frac{D^2}{I_2} \cdot \frac{\alpha(6+f-12r+8r^2) + \beta 2r(6+f+12r+8r^2)}{8\alpha\beta r(3+2f)} p_2'' + \\ + \frac{D^4}{I_2} \frac{r}{2\alpha\beta(3+2f)} p_2 = 0 \quad \dots (4.64)$$

Fazendo

$$\lambda_1^2 = \frac{\alpha_2(6+\alpha f-12r+8r^2)+2r\beta(6+f+12r+8r^2)}{\alpha_2\beta[8rf(1+\alpha)+24r-6f(1-\alpha)]} \dots (4.65)$$

$$\lambda_2^2 = \frac{4r^2}{\alpha_2\beta[8rf(1+\alpha)+24r-6f(1-\alpha)]} \dots (4.66)$$

A (4.62) com (4.63) e (4.64) fica:

$$p_2^{IV} - \frac{D^2}{I_2} \lambda_1^2 p_2'' + \frac{D^4}{I_2^2} \lambda_2^2 p_2 = 0 \dots (4.67)$$

#### IV.11. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL EM $p_2$

A equação característica da (4.67) é

$$x^4 - \frac{D^2}{I_2} \lambda_1^2 x^2 + \frac{D^4}{I_2^2} \lambda_2^2 = 0 \dots (4.68)$$

As raízes da (4.68) são

$$x_i = \pm \sqrt{\frac{D^2 \lambda_1^2}{2I_2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\lambda_2^2}{\lambda_1^4}} \right)} \dots (4.69)$$

Fazendo

$$\lambda = \frac{4\lambda_2^2}{\lambda_1^4} \dots (4.70)$$

Da (4.69), com (4.70) saem as 4 raízes

$$x_i = \pm \frac{D\lambda_1}{\sqrt{2I_2}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \lambda}} \quad \dots (4.71)$$

Essas raízes ou são todas reais ou todas comple\_xas, dependendo do valor de  $\lambda$

É possível mostrar que  $0 < \lambda < 1$  e consequentemente as raízes são todas reais.

Fazendo

$$\xi = \frac{\beta}{\alpha} \quad \dots (4.72)$$

Da (4.70) com (4.66)

$$\lambda = \frac{4r}{2\alpha\beta(3+2f)} \cdot \frac{64\alpha^2\beta^2r^2(3+2f)^2}{[\alpha(6+f-12r+8r^2)+\beta 2r(6+f+12r+8r^2)]^2}$$

ou

$$\lambda = \frac{128\alpha\beta r^3(3+2f)}{[\alpha(6+f-12r+8r^2)+\beta 2r(6+f+12r+8r^2)]^2}$$

ou ainda, com (4,72)

$$\lambda = \frac{128\xi r^3(3+2f)}{[(6+f-12r+8r^2)+2\xi r(6+f+12r+8r^2)]^2} \quad \dots (4.73)$$

O valor de  $\lambda$  é sempre menor que a unidade, independente dos valores de  $r$ ,  $f$  e  $\xi$ . Isso, por exemplo, pode ser constatado minimizando  $\lambda$  em relação a  $\xi$ . Pode-se escrever  $\lambda$  na forma.

$$\lambda = \frac{a_1 \xi}{(a_2 + a_3 \xi)^2} \quad \dots (4.74)$$

com

$$a_1 = 128 r^3 (3+2f) \quad \dots (4.75)$$

$$a_2 = 6 + f - 12r + 2r^2 \quad \dots (4.76)$$

$$a_3 = 2r (6 + f + 12r + 8r^2) \quad \dots (4.77)$$

Da (4.74) derivando em relação a  $\xi$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left[ a_1 \xi (a_2 + a_3 \xi)^{-2} \right] &= a_1 (a_2 + a_3 \xi)^{-2} - 2a_1 \xi (a_2 + a_3 \xi)^{-3} a_3 \\ &= \frac{a_1}{(a_2 + a_3 \xi)^2} \left[ 1 - \frac{2a_3 \xi}{(a_2 + a_3 \xi)} \right] \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = \frac{a_1 (a_2 - a_3 \xi)}{(a_2 + a_3 \xi)^3} \quad \dots (4.78)$$

A expressão (4.78) se anula para

$$\xi = \frac{a_2}{a_3} \quad \dots (4.79)$$

Com (4.79) na (4.74)

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{máx}} &= a_1 \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{1}{\left( a_2 + a_3 \frac{a_2}{a_3} \right)^2} \\ \lambda_{\text{máx}} &= \frac{a_1}{4 a_2 a_3} \quad \dots (4.80) \end{aligned}$$

Esse  $\lambda_{\text{máx}}$  não atinge a unidade; se atingisse, da  
 (4.80)

$$\frac{a_1}{4a_2a_3} = 1 \quad \dots (4.81)$$

Com (4.75), (4.76) e (4.77) na (4.81)

$$32r^3(3+2f) = (6+f-12r+8r^2)2r(6+f+12r+8r^2)$$

ou

$$(f+6-12r+8r^2)(f+6+12r+8r^2) - 16r^2(3+2f) = 0$$

ou, ainda

$$f^2 + (12-16r^2)f + 36-96r^2+64r^4 = 0 \quad \dots (4.82)$$

Da (4.81) ter-se-ia uma única solução para f.

$$f = 8r^2 - 6 \quad \dots (4.83)$$

Para  $0 < r < 0,5$ , a suposição da expressão (4.83) implica em f negativo sempre. O valor de  $\xi$  corresponde de fato a um máximo já que, pode-se verificar, a derivada segunda de  $\lambda$  relativa a  $\xi$  é sempre negativa nesse ponto.

Com isso as raízes  $x_i$  são sempre reais e diferentes e como consequência a equação diferencial homogênea (4.67) terá uma única solução possível.

Da (4.71) tem-se as quatro raízes reais

$$x_1 = \frac{D\lambda_1}{\sqrt{2I_2}} \sqrt{1 + \sqrt{1-\lambda}}$$

$$x_2 = - \frac{D\lambda_1}{\sqrt{2I_2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \lambda}}$$

$$x_3 = \frac{D\lambda_1}{\sqrt{2I_2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \lambda}}$$

$$x_4 = - \frac{D\lambda_1}{\sqrt{2I_2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \lambda}}$$

Fazendo

$$k_1 = \frac{D\lambda_1}{\sqrt{2I_2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \lambda}} \quad \dots (4.84)$$

$$k_2 = \frac{D\lambda_1}{\sqrt{2I_2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \lambda}} \quad \dots (4.85)$$

A solução da equação homogênea (4.67) é:

$$p_2 = \bar{c}_1 e^{k_1 z} + \bar{c}_2 e^{-k_1 z} + \bar{c}_3 e^{k_2 z} + \bar{c}_4 e^{-k_2 z} \quad (4.86)$$

Essa equação (4.86) pode ser posta como

$$p_2 = (\bar{c}_1 - \bar{c}_2) \left( \frac{e^{k_1 z} - e^{-k_1 z}}{2} \right) + (\bar{c}_1 + \bar{c}_2) \left( \frac{e^{k_1 z} + e^{-k_1 z}}{2} \right) +$$

$$+ (\bar{c}_3 - \bar{c}_4) \left( \frac{e^{k_2 z} - e^{-k_2 z}}{2} \right) + (\bar{c}_3 + \bar{c}_4) \left( \frac{e^{k_2 z} + e^{-k_2 z}}{2} \right)$$

ou, então

$$p_2 = c_1 \operatorname{sh} k_1 z + c_2 \operatorname{ch} k_1 z + c_3 \operatorname{sh} k_2 z + c_4 \operatorname{ch} k_2 z \quad \dots (4.87)$$

IV.12. RELACIONAMENTO DE TODAS AS FUNÇÕES DO PROBLEMA COM  $p_2$

---

Da (4.36)

$$P_1 = -\frac{2B}{D} P_2 \quad \dots (4.88)$$

Da (4.1) com (4.88)

$$Q_1 = \frac{2B}{D} \int p_2 dz + c_5 \quad \dots (4.89)$$

Da (4.3)

$$Q_2 = - \int p_2 dz + c_6 \quad \dots (4.90)$$

Da (4.18) derivando duas vezes, com (4.89), (4.90), (4.40) e (4.47).

$$\frac{B}{EI_1} M_1 - \frac{D}{EI_2} M_2 = \frac{Dc}{GA_2} Q_2' - \frac{Bc}{GA_1} Q_1' = -\frac{Dc}{GA_2} p_2 - \frac{2B^2 c}{DGA_1} p_2 = -\frac{2\alpha}{ED} p_2$$

ou

$$r^2 D^3 M_1 - fBD^2 M_2 + 2\alpha fBI_2 p_2 = 0 \quad \dots (4.91)$$

Da (4.19) derivando uma vez, com (4.46)

$$\frac{2}{EA_2} N_2 - \frac{D(1-r)}{EI_2} M_2 + \frac{2\beta}{E} q_2' = 0$$

ou

$$r^2 D^2 N_2 - 6D(1-r)M_2 + 12 \beta I_2 q_2' = 0 \quad \dots (4.92)$$

Da (4.20) derivando uma vez, com (4.46) e (4.47)

$$\frac{B}{EI_1} M_1 + \frac{rD}{EI_2} M_2 + \frac{2}{EA_2} N_2 = 0$$

ou

$$6rDM_1 + 6fBM_2 + frBDN_2 = 0 \quad \dots (4.93)$$

Fazendo  $[rD(4.93) - fB(4.92)] / 6$

$$r^2 D^2 M_1 + fBDM_2 - 2f\beta BI_2 q_2' = 0 \quad \dots (4.94)$$

Fazendo  $[D(4.94) - (4.91)] / 2fB$

$$D^2 M_2 - \beta DI_2 q_2' - \alpha I_2 P_2 = 0 \quad \dots (4.95)$$

Fazendo  $[D(4.94) + (4.91)] / 2$

$$r^2 D^3 M_1 + \alpha fBI_2 P_2 - f\beta BDI_2 q_2' = 0 \quad \dots (4.96)$$

Fazendo  $6(1-r)(4.95) + D(4.92)$

$$r^2 D^3 N_2 - 6\alpha(1-r)I_2 P_2 + 6\beta DI_2(1+r)q_2' = 0 \quad \dots (4.97)$$

Da (4.61) sai

$$q_2' = \frac{\alpha I_2}{D^3} \cdot \frac{8(3+2f)}{(6+f-8r^2)} P_2'' - \frac{1}{D} \frac{2(6+f+12r+8r^2)}{(6+f-8r^2)} P_2 \quad (4.98)$$

Fazendo

$$\mu = \alpha \frac{I_2}{D^4} \frac{8(3+2f)}{6+f-8r^2} \quad \dots (4.99)$$



$$v = \frac{2(6+f+12r+8r^2)}{6+f-8r^2} \quad \dots (4.100)$$

Da (4.98) com (4.99) e (4.100)

$$q_2' = \mu D p_2'' - \frac{v}{D} p_2 \quad \dots (4.101)$$

De (4.95) com (4.101)

$$M_2 = \frac{\beta I_2}{D} \left( \mu D p_2'' - \frac{v}{D} p_2 \right) + \frac{\alpha I_2}{D^2} p_2$$

ou então

$$M_2 = \mu \beta I_2 p_2'' + \frac{I_2}{D^2} (\alpha - v\beta) p_2 \quad \dots (4.102)$$

Da (4.96)

$$M_1 = \frac{f\beta B I_2}{r^2 D^2} \left( \mu D p_2'' - \frac{v}{D} p_2 \right) - \frac{\alpha f B I_2}{r^2 D^3} p_2$$

ou então

$$M_1 = \frac{\mu f \beta B I_2}{r^2 D} p_2'' - \frac{f B I_2}{r^2 D^3} (\alpha + v\beta) p_2 \quad \dots (4.103)$$

Da (4.97).

$$N_2 = \frac{6\alpha(1-r)I_2}{r^2 D^3} p_2 - \frac{6\beta I_2(1+r)}{r^2 D^2} \left( \mu D p_2'' - \frac{v}{D} p_2 \right)$$

ou então

$$N_2 = \frac{6I_2}{r^2 D^3} [\alpha(1-r) + v\beta(1+r)] p_2 - \frac{6\mu\beta I_2(1+r)}{r^2 D} p_2'' \quad (4.104)$$

Fazendo

$$\epsilon_1 = \frac{\mu f \beta B}{r^2 D} \dots (4.105)$$

$$\epsilon_2 = \frac{f B (\alpha + \nu \beta)}{r^2 D} \dots (4.106)$$

$$\epsilon_3 = \mu \beta \dots (4.107)$$

$$\epsilon_4 = \alpha - \nu \beta \dots (4.108)$$

$$\epsilon_5 = \frac{6 \mu \beta (1 + r)}{r^2} \dots (4.109)$$

$$\epsilon_6 = \frac{6 [\alpha (1-r) + \nu \beta (1+r)]}{r^2} \dots (4.110)$$

Da (4.103) com (4.105) e (4.106)

$$M_1 = \epsilon_1 I_2 P_2'' - \epsilon_2 \frac{I_2}{D} P_2 \dots (4.111)$$

Da (4.102) com (4.107) e (4.108)

$$M_2 = \epsilon_3 I_2 P_2'' + \epsilon_4 \frac{I_2}{D} P_2 \dots (4.112)$$

Da (4.104) com (4.109) e (4.110)

$$N_2 = \epsilon_6 \frac{I_2}{D^3} P_2 - \epsilon_5 \frac{I_2}{D} P_2'' \dots (4.113)$$

Da (4.87)

$$p_2 = c_1 \operatorname{sh} k_1 z + c_2 \operatorname{ch} k_1 z + c_3 \operatorname{sh} k_2 z + c_4 \operatorname{ch} k_2 z \dots (4.114)$$

Da (4.114) derivando duas vezes

$$p_2'' = c_1 k_1^2 \operatorname{shk}_1 z + c_2 k_1^2 \operatorname{chk}_1 z + c_3 k_2^2 \operatorname{shk}_2 z + c_4 k_2^2 \operatorname{chk}_2 z \quad (4.115)$$

Da (4.89) com (4.114)

$$Q_1 = \frac{2Bc_1}{Dk_1} \operatorname{chk}_1 z + \frac{2Bc_2}{Dk_1} \operatorname{shk}_1 z + \frac{2Bc_3}{Dk_2} \operatorname{chk}_2 z + \\ + \frac{2Bc_4}{Dk_2} \operatorname{shk}_2 z + c_5 \quad \dots (4.116)$$

Da (4.90) com (4.114)

$$Q_2 = -\frac{c_1}{k_1} \operatorname{chk}_1 z - \frac{c_2}{k_1} \operatorname{shk}_1 z - \frac{c_3}{k_2} \operatorname{chk}_2 z + \\ - \frac{c_4}{k_2} \operatorname{shk}_2 z + c_6 \quad \dots (4.117)$$

Da (4.111) com (4.114) e (4.115)

$$M_1 = \left( \varepsilon_1 I_2 k_1^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D_2} \right) c_1 \operatorname{shk}_1 z + \left( \varepsilon_1 I_2 k_1^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D_2} \right) c_2 \operatorname{chk}_1 z + \\ + \left( \varepsilon_1 I_2 k_2^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D_2} \right) c_3 \operatorname{shk}_2 z + \left( \varepsilon_1 I_2 k_2^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D_2} \right) c_4 \operatorname{chk}_2 z \\ \dots (4.118)$$

Da (4.112)

$$M_2 = \left( \varepsilon_3 I_2 k_1^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D} \right) c_1 \operatorname{shk}_1 z + \left( \varepsilon_3 I_2 k_1^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D} \right) c_2 \operatorname{chk}_1 z + \\ + \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D} \right) c_3 \operatorname{shk}_2 z + \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D} \right) c_4 \operatorname{chk}_2 z \quad (4.119)$$

Da (4.113)

$$\begin{aligned}
 N_2 = & \left( \varepsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \varepsilon_5 \frac{I_2}{D} k_1^2 \right) c_1 \operatorname{sh} k_1 z + \left( \varepsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \varepsilon_5 \frac{I_2}{D} k_1^2 \right) c_2 \operatorname{ch} k_1 z + \\
 & + \left( \varepsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \varepsilon_5 \frac{I_2}{D} k_2^2 \right) c_3 \operatorname{sh} k_2 z + \left( \varepsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \varepsilon_5 \frac{I_2}{D} k_2^2 \right) c_4 \operatorname{ch} k_2 z \\
 & \dots (4.120)
 \end{aligned}$$

Tendo os esforços internos, ainda em função de seis constantes, é possível calcular os esforços de interação entre as paredes, e a rotação do conjunto.

Da (4.2), com (4.118) e (4.116)

$$q_1 = \frac{M_1'}{B} + \frac{Q_1}{B}$$

$$\begin{aligned}
 q_1 = & \left( \varepsilon_1 I_2 k_1^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_1}{B} k_1 \operatorname{ch} k_1 z + \left( \varepsilon_1 I_2 k_1^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_2}{B} k_1 \operatorname{sh} k_1 z + \\
 & + \left( \varepsilon_1 I_2 k_2^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_3}{B} k_2 \operatorname{ch} k_2 z + \left( \varepsilon_1 I_2 k_2^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_4}{B} k_2 \operatorname{sh} k_2 z + \\
 & + \frac{2c_1}{Dk_1} \operatorname{ch} k_1 z + \frac{2c_2}{Dk_1} \operatorname{sh} k_1 z + \frac{2c_3}{Dk_2} \operatorname{ch} k_2 z + \frac{2c_4}{Dk_2} \operatorname{sh} k_2 z + \frac{c_5}{B}
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 q_1 = & \left[ \frac{k_1}{B} \left( \varepsilon_1 I_2 k_1^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) + \frac{2}{Dk_1} \right] c_1 \operatorname{ch} k_1 z + \left[ \frac{k_1}{B} \left( \varepsilon_1 I_2 k_1^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) + \frac{2}{Dk_1} \right] c_2 \operatorname{sh} k_1 z + \\
 & + \left[ \frac{k_2}{B} \left( \varepsilon_1 I_2 k_2^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) + \frac{2}{Dk_2} \right] c_3 \operatorname{ch} k_2 z + \left[ \frac{k_2}{B} \left( \varepsilon_1 I_2 k_2^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) + \frac{2}{Dk_2} \right] c_4 \operatorname{sh} k_2 z +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{c_5}{B} \dots (4.121)$$

Da (4.4), com (4.120) e (4.121)

$$q_2 = q_1 - N_2'$$

$$q_2 = q_1 - \left( \epsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \epsilon_5 \frac{I_2}{D} k_1^2 \right) c_1 k_1 \operatorname{chk}_1 z - \left( \epsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \epsilon_5 \frac{I_2}{D} k_1^2 \right) c_2 k_1 \operatorname{shk}_1 z +$$

$$- \left( \epsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \epsilon_5 \frac{I_2}{D} k_2^2 \right) c_3 k_2 \operatorname{chk}_2 z - \left( \epsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \epsilon_5 \frac{I_2}{D} k_2^2 \right) c_4 k_2 \operatorname{shk}_2 z$$

ou

$$q_2 = \left[ \frac{k_1}{B} \left( \epsilon_1 I_2 k_1^2 - \epsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) + \frac{2}{Dk_1} - k_1 \left( \epsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \epsilon_5 \frac{I_2}{D} k_1^2 \right) \right] c_1 \operatorname{chk}_1 z +$$

$$+ \left[ \frac{k_1}{B} \left( \epsilon_1 I_2 k_1^2 - \epsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) + \frac{2}{Dk_1} - k_1 \left( \epsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \epsilon_5 \frac{I_2}{D} k_1^2 \right) \right] c_2 \operatorname{shk}_1 z +$$

$$+ \left[ \frac{k_2}{B} \left( \epsilon_1 I_2 k_2^2 - \epsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) + \frac{2}{Dk_2} - k_2 \left( \epsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \epsilon_5 \frac{I_2}{D} k_2^2 \right) \right] c_3 \operatorname{chk}_2 z +$$

$$+ \left[ \frac{k_2}{B} \left( \epsilon_1 I_2 k_2^2 - \epsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) + \frac{2}{Dk_2} - k_2 \left( \epsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \epsilon_5 \frac{I_2}{D} k_2^2 \right) \right] c_4 \operatorname{shk}_2 z +$$

$$+ \frac{c_5}{B} \dots (4.122)$$

Da (4.15) com (4.9)

$$\theta = \frac{2}{B} u_2$$

ou

$$\theta = \frac{2}{B} \left[ \phi_2 z + \frac{c}{GA_2} \int_0^z Q_2 dz + \frac{1}{EI_2} \int_0^z \left( \int_0^z M_2 dz \right) dz \right] \dots (4.123)$$

Da (4.117)

$$\int_0^z Q_2 dz = -\frac{c_1}{k_1} \operatorname{sh} k_1 z - \frac{c_2}{k_1} \operatorname{ch} k_1 z - \frac{c_3}{k_2} \operatorname{sh} k_2 z +$$

$$-\frac{c_4}{k_2} \operatorname{ch} k_2 z + c_6 z + \frac{c_2}{k_1} + \frac{c_4}{k_2} \dots (4.124)$$

Da (4.119)

$$\int_0^z \left( \int_0^z M_2 dz \right) dz = \left( \varepsilon_3 I_2 k_1^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_1}{k_1} \operatorname{sh} k_1 z + \left( \varepsilon_3 I_2 k_1^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_2}{k_1} \operatorname{ch} k_1 z +$$

$$+ \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_3}{k_2} \operatorname{sh} k_2 z + \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_4}{k_2} \operatorname{ch} k_2 z +$$

$$- \left[ \left( \varepsilon_3 I_2 k_1^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_1}{k_1} + \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_3}{k_2} \right] z +$$

$$- \left( \varepsilon_3 I_2 k_1^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_2}{k_1} - \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_4}{k_2} \dots (4.125)$$

Da (4.123) com (4.124) e (4.125)

$$\theta = \frac{2}{B} \left\{ \left[ \frac{1}{EI_2} \left( \varepsilon_3 I_2 k_1^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) - \frac{c}{GA_2} \right] \frac{c_1}{k_1} \operatorname{sh} k_1 z + \left[ \frac{1}{EI_2} \left( \varepsilon_3 I_2 k_1^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) - \frac{c}{GA_2} \right] \frac{c_2}{k_1} \operatorname{ch} k_1 z + \right.$$

$$\left. \left[ \frac{1}{EI_2} \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) - \frac{c}{GA_2} \right] \frac{c_3}{k_2} \operatorname{sh} k_2 z + \left[ \frac{1}{EI_2} \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) - \frac{c}{GA_2} \right] \frac{c_4}{k_2} \operatorname{ch} k_2 z + \right.$$

$$\left. \left[ \frac{1}{EI_2} \left( \varepsilon_3 I_2 k_1^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) - \frac{c}{GA_2} \right] \frac{c_2}{k_1} + \left[ \frac{1}{EI_2} \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) - \frac{c}{GA_2} \right] \frac{c_4}{k_2} + \right.$$

$$\left. c_6 z + \frac{c_2}{k_1} + \frac{c_4}{k_2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ \frac{1}{EI_2} \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) - \frac{c}{GA_2} \right] \frac{c_4}{k_2} \operatorname{ch} k_2 z + \left\{ \phi_2 + \frac{c}{GA_2} c_6 + \right. \\
 & \left. - \frac{1}{EI_2} \left[ \left( \varepsilon_3 I_2 k_1^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_1}{k_1} + \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_3}{k_2} \right] \right\} z + \\
 & + \frac{c}{GA_2} \left( \frac{c_2}{k_1} + \frac{c_4}{k_2} \right) - \frac{1}{EI_2} \left[ \left( \varepsilon_3 I_2 k_1^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_2}{k_1} + \right. \\
 & \left. + \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) \frac{c_4}{k_2} \right] \} \dots (4.126)
 \end{aligned}$$

#### IV.13. INTRODUÇÃO DAS ROTAÇÕES DOS APOIOS

Da (4.18)

$$\begin{aligned}
 \Psi_z & \rightarrow (B\phi_1 - D\phi_2)z + \int_0^z \left( \frac{Bc}{GA_1} Q_1 - \frac{Dc}{GA_2} Q_2 \right) dz + \\
 & + \int_0^z \left( \int_0^z \left( \frac{B}{EI_1} M_1 - \frac{D}{EI_2} M_2 \right) dz \right) dz = 0 \dots (4.127)
 \end{aligned}$$

Da (4.18) derivada duas vezes com (4.89), (4.90), (4.40) e (4.47)

$$\frac{B}{EI_1} M_1 - \frac{D}{EI_2} M_2 = - \frac{2\alpha}{ED} P_2 \dots (4.128)$$

Pode-se fazer,

$$Q_1 = (Q_1)_0 - \int_0^z p_1 dz$$

ou, com (4.88)

$$Q_1 = (Q_1)_0 + \frac{2B}{D} \int_0^z p_2 dz \quad \dots (4.129)$$

e também

$$Q_2 = (Q_2)_0 - \int_0^z p_2 dz \quad \dots (4.130)$$

Com a (4.129) e a (4.130) com (4.40)

$$\frac{Bc}{GA_1} Q_1 - \frac{Dc}{GA_2} Q_2 = \frac{Bc}{GA_1} (Q_1)_0 - \frac{Dc}{GA_2} (Q_2)_0 + \frac{2\alpha}{ED} \int_0^z p_2 dz \quad \dots (4.131)$$

Da (4.127) com (4.138) e (4.131)

$$\forall z \rightarrow (B\phi_1 - D\phi_2)z + \left[ \frac{Bc}{GA_1} (Q_1)_0 - \frac{Dc}{GA_2} (Q_2)_0 \right] z = 0 \quad (4.132)$$

A (4.132) é válida para qualquer z se:

$$B\phi_1 - D\phi_2 + \frac{Bc}{GA_1} (Q_1)_0 - \frac{Dc}{GA_2} (Q_2)_0 = 0 \quad \dots (4.133)$$

Da (4.133) com (4.116) e (4.117)

$$B\phi_1 - D\phi_2 + \frac{Bc}{GA_1} \left( \frac{2Bc_1}{Dk_1} + \frac{2Bc_3}{Dk_2} + c_5 \right) + \frac{Dc}{GA_2} \left( -\frac{c_1}{k_1} - \frac{c_3}{k_2} + c_6 \right) = 0$$



ou

$$B\phi_1 - D\phi_2 + \frac{c_1}{k_1} \left( \frac{2B^2c}{DGA_1} + \frac{Dc}{GA_2} \right) + \frac{c_3}{k_2} \left( \frac{2B^2c}{DGA_1} + \frac{Dc}{GA_2} \right) +$$

$$+ \frac{Bc}{GA_1} c_5 - \frac{Dc}{GA_2} c_6 = 0$$

ou ainda, com (4.40)

$$B\phi_1 - D\phi_2 + \frac{2\alpha}{EDk_1} c_1 + \frac{2\alpha}{EDk_2} c_3 + \frac{Bc}{GA_1} c_5 - \frac{Dc}{GA_2} c_6 = 0 \dots (4.134)$$

Da (4.19), repetida simplesmente,

$$\forall z \rightarrow -\phi_1 \frac{B}{2} - \phi_2 \frac{D}{2} + \int_0^z \frac{N_2}{EA_2} dz - \frac{1}{2} (d+a) \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz + \frac{\beta}{E} q_2 = 0$$

..... (4.135)

Da derivada da (4.135)

$$\frac{N_2}{EA_2} - \frac{1}{2} (d+a) \frac{M_2}{EI_2} + \frac{\beta}{E} q_2' = 0 \dots (4.136)$$

Substituindo a (4.136) na (4.135)

$$\forall z \rightarrow -\phi_1 \frac{B}{2} - \phi_2 \frac{D}{2} - \frac{\beta}{E} \int_0^z q_2' dz + \frac{\beta}{E} q_2 = 0 \quad (4.137)$$

Mas  $q_2$  pode ser uma integral indefinida de  $q_2'$

$$q_2 = \int q_2' dz \quad (4.138)$$

e com a (4.138) a (4.137) fica, para qualquer z:

$$\phi_1^B + \phi_2^D - \frac{2\beta}{E} \left( q_2 \right)_0 = 0 \quad \dots (4.139)$$

Finalmente, da (4.139) com (4.122)

$$\begin{aligned} \frac{EB}{2\beta} \phi_1 + \frac{ED}{2\beta} \phi_2 - \left[ \frac{k_1}{B} \left( \epsilon_1 I_2 k_1^2 - \epsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) + \frac{2}{Dk_1} - k_1 \left( \epsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \epsilon_5 \frac{I_2}{D} k_1^2 \right) \right] c_1 + \\ - \left[ \frac{k_2}{B} \left( \epsilon_1 I_2 k_2^2 - \epsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) + \frac{2}{Dk_2} - k_2 \left( \epsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \epsilon_5 \frac{I_2}{D} k_2^2 \right) \right] c_3 - \frac{c_5}{B} = 0 \end{aligned}$$

..... (4.140)

Da (4.20)

$$\forall z \rightarrow B \int_0^z \frac{M_1}{EI_1} dz + \int_0^z \frac{M_2}{EI_2} dz + 2 \int_0^z \frac{N_2}{EA_2} dz = 0$$

..... (4.141)

Da derivada da (4.141)

$$\frac{BM_1}{EI_1} + \frac{dM_2}{EI_2} + \frac{2N_2}{EA_2} = 0 \quad \dots (4.142)$$

Da (4.142) na (4.141)

$$\forall z \rightarrow - \int_0^z \frac{2N_2}{EA_2} dz + 2 \int_0^z \frac{N_2}{EA_2} dz = 0 \quad \dots (4.143)$$

e a (4.143) resulta numa identidade.

#### IV.14. CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para determinar as 8 constantes,  $c_1$  a  $c_6$ ,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  dispõe-se das duas relações (4.134) e (4.140), 3 condições relacionadas ao topo da estrutura e 3 relacionadas às fundações.

##### IV.14.1. CONDIÇÕES DE CONTORNO RELACIONADAS AO TOPO

Os esforços  $M_1$ ,  $M_2$  e  $N_2$  dependem de apenas dois parâmetros. Para impô-los todos nulos no topo, conforme condição implícita na fig. 4.1, ter-se-ia, respectivamente da (4.118), (4.119) e (4.120):

$$\begin{aligned} & \left( \varepsilon_1 I_2 k_1^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D} \right) c_1 \operatorname{shk}_1 \ell + \left( \varepsilon_1 I_2 k_1^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D} \right) c_2 \operatorname{chk}_1 \ell + \\ & + \left( \varepsilon_1 I_2 k_2^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D} \right) c_3 \operatorname{shk}_2 \ell + \left( \varepsilon_1 I_2 k_2^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D} \right) c_4 \operatorname{chk}_2 \ell = 0 \\ & \dots (4.144) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \varepsilon_3 I_2 k_1^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D} \right) c_1 \operatorname{shk}_1 \ell + \left( \varepsilon_3 I_2 k_1^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D} \right) c_2 \operatorname{chk}_1 \ell + \\ & + \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D} \right) c_3 \operatorname{shk}_2 \ell + \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D} \right) c_4 \operatorname{chk}_2 \ell = 0 \\ & \dots (4.145) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \varepsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \varepsilon_5 \frac{I_2}{D} k_1^2 \right) c_1 \operatorname{shk}_1 \ell + \left( \varepsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \varepsilon_5 \frac{I_2}{D} k_1^2 \right) c_2 \operatorname{chk}_1 \ell + \\ & + \left( \varepsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \varepsilon_5 \frac{I_2}{D} k_2^2 \right) c_3 \operatorname{shk}_2 \ell + \left( \varepsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \varepsilon_5 \frac{I_2}{D} k_2^2 \right) c_4 \operatorname{chk}_2 \ell = 0 \\ & \dots (4.146) \end{aligned}$$

As três equações (4.144) a (4.146) podem ser colocadas como:

$$a_1 (c_1 \text{shk}_1^\ell + c_2 \text{chk}_1^\ell) + a_2 (c_3 \text{shk}_2^\ell + c_4 \text{chk}_2^\ell) = 0$$

$$a_3 (c_1 \text{shk}_1^\ell + c_2 \text{chk}_1^\ell) + a_4 (c_3 \text{shk}_2^\ell + c_4 \text{chk}_2^\ell) = 0$$

$$a_5 (c_1 \text{shk}_1^\ell + c_2 \text{chk}_1^\ell) + a_6 (c_3 \text{shk}_2^\ell + c_4 \text{chk}_2^\ell) = 0$$

Essas três equações, de fato a duas incógnitas, têm como solução conjunta:

$$c_1 \text{shk}_1^\ell + c_2 \text{chk}_1^\ell = 0$$

$$c_3 \text{shk}_2^\ell + c_4 \text{chk}_2^\ell = 0$$

ou ainda:

$$c_1 \text{thk}_1^\ell + c_2 = 0 \quad \dots (4.147)$$

$$c_3 \text{thk}_2^\ell + c_4 = 0 \quad \dots (4.148)$$

Além das equações (4.147) e (4.148) que exprimem a nulidade dos esforços  $M_1$ ,  $M_2$  e  $N_2$  no topo, tem-se mais uma condição correspondente ao momento torçor aplicado

$$\text{Para } z = \ell \rightarrow T = Q_1 D + 2Q_2 B \quad \dots (4.149)$$

Da (4.149) com (4.116) e (4.117)

$$T = Dc_5 + 2Bc_6 \quad \dots (4.150)$$

#### IV.14.2. CONDIÇÕES DE CONTORNO RELACIONADAS ÀS BASES

Seriam interessantes pelo menos duas situações para as sapatas, considerando-as independentes e sem conexão no espaço correspondente aos lintéis, e considerando-as unidas por uma viga de rigidez.

a) Sapatas de fundação com resposta elástica, sem conexão.

As fundações terão o esquema constante na fig. 4.5.

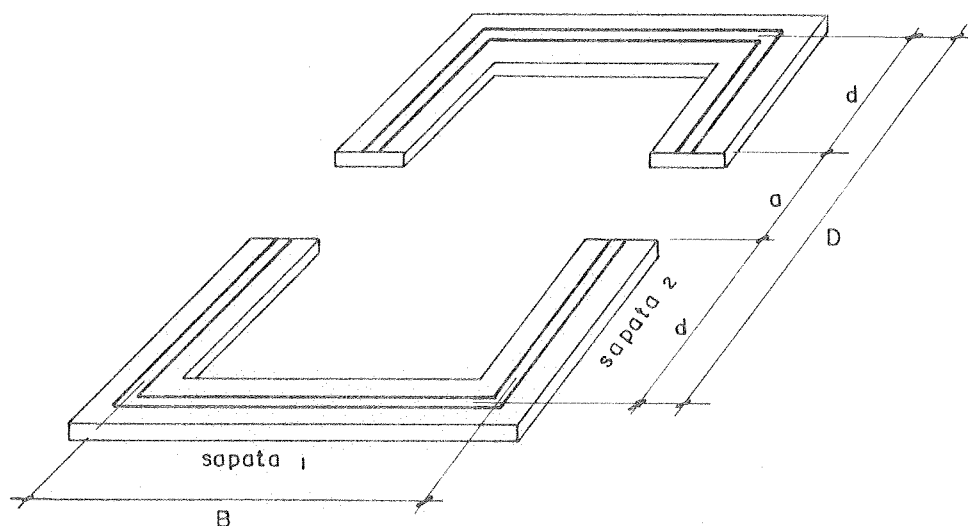


FIG 4.5 - SAPATAS INDEPENDENTES

Desprezando a rigidez torcional de cada conjunto sapata-solo, e não havendo possibilidade de transmissão de esforços verticais de uma sapata para outra, os esforços atuantes nas duas sapatas seriam os da fig. 4.6.

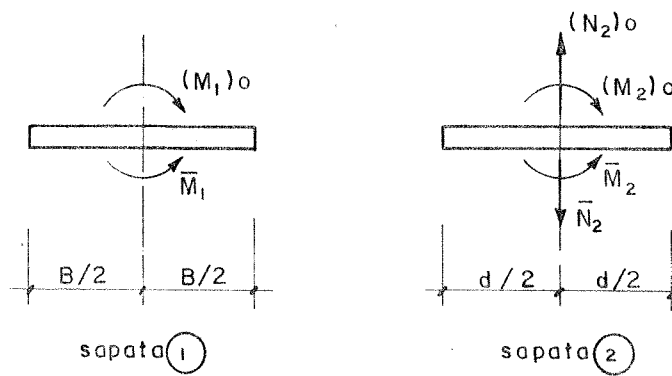


FIG. 4.6- ESFORÇOS NAS SAPATAS

As condições, óbvias, de equilíbrio seriam

$$\bar{M}_1 - (M_1)_0 = 0 \quad \dots (4.151)$$

$$\bar{M}_2 - (M_2)_0 = 0 \quad \dots (4.152)$$

$$\bar{N}_2 - (N_2)_0 = 0 \quad \dots (4.153)$$

Assumindo resposta elástica do solo

$$\bar{M}_1 = s_1 \phi_1 \quad \dots (4.154)$$

$$\bar{M}_2 = s_2 \phi_2 \quad \dots (4.155)$$

$$\bar{N}_2 = -r_2 \left( \phi_1 \frac{B}{2} + \phi_2 \frac{d}{2} \right) \quad \dots (4.156)$$

Da (4.151) com (4.154) e (4.118)

$$s_1 \phi_1 - \left( \epsilon_1 I_2 k_1^2 - \epsilon_2 \frac{I_2}{D} \right) c_2 - \left( \epsilon_1 I_2 k_2^2 - \epsilon_2 \frac{I_2}{D} \right) c_4 = 0 \quad (4.157)$$

Da (4.152) com (4.155) e (4.119)

$$s_2 \phi_2 - \left( \varepsilon_3 I_2 k_1^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) c_2 - \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) c_4 = 0 \quad (4.158)$$

Da (4.153) com (4.156) e (4.120)

$$r_2^B \phi_1 + r_2^d \phi_2 + 2 \left( \varepsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \varepsilon_5 \frac{I_2}{D} k_1^2 \right) c_2 +$$

$$+ 2 \left( \varepsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \varepsilon_5 \frac{I_2}{D} k_2^2 \right) c_4 = 0 \quad \dots (4.159)$$

As equações (4.157), (4.158) e (4.159) são as condições de contorno para o caso.

b) Sapatas com resposta elástica, conectadas por vigas de rigidez

A fundação terá o esquema constante da fig. 4.7

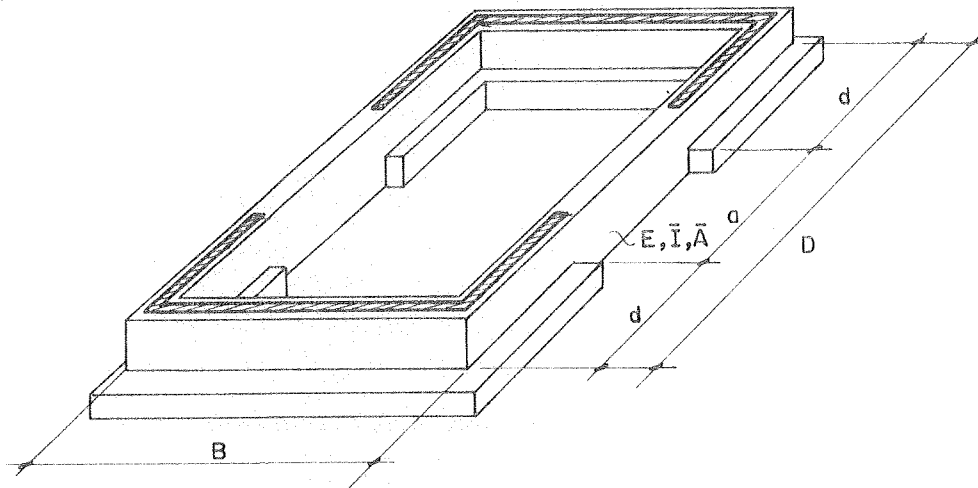


FIG. 4.7 - SAPATAS UNIDAS POR VIGAS DE RIGIDEZ.

Com as mesmas hipóteses adotadas no caso (a) os esforços atuantes nas duas sapatas seriam os da fig. 4.8.

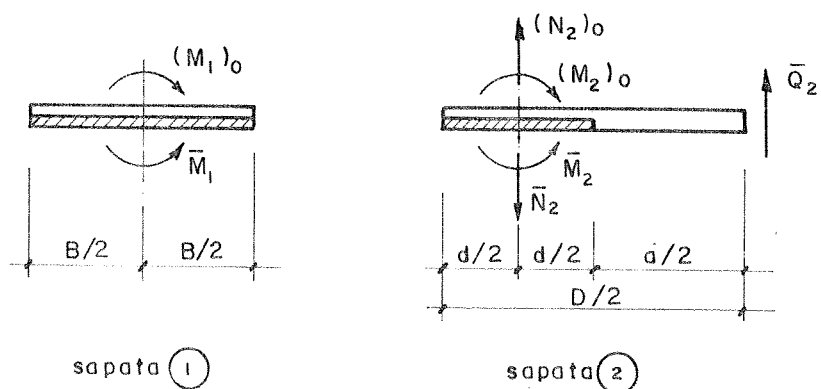


FIG. 4.8 - ESFORÇOS NAS SAPATAS

As condições de equilíbrio entre os esforços constantes da fig. 4.8. são

$$\bar{M}_1 - (M_1)_0 = 0 \quad \dots (4.160)$$

$$\bar{M}_2 - (M_2)_0 + \frac{d + a}{2} \bar{Q}_2 = 0 \quad \dots (4.161)$$

$$\bar{N}_2 - (N_2)_0 - \bar{Q}_2 = 0 \quad \dots (4.162)$$

Sendo nulo, por simetria, o deslocamento vertical no ponto correspondente ao centro da viga de rigidez:

$$-\phi_1 \frac{B}{2} - \phi_2 \frac{D}{2} + \bar{Q}_2 \bar{\beta} = 0 \quad \dots (4.163)$$

com



$$\bar{\beta} = \frac{a^3}{24E\bar{I}} + \frac{ca}{2G\bar{A}} \quad \dots (4.164)$$

Assume-se a mesma resposta elástica do solo expressa pelas relações (4.154) a (4.156).

Da (4.160) com a (4.151) e (4.118)

$$s_1\phi_1 - \left( \varepsilon_1 I_2 k_1^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) c_2 - \left( \varepsilon_1 I_2 k_2^2 - \varepsilon_2 \frac{I_2}{D^2} \right) c_4 = 0 \quad (4.165)$$

Da (4.161) com a (4.163), (4.155) e (4.119)

$$\begin{aligned} \frac{B(d+a)}{4\bar{\beta}} \phi_1 + \left[ s_2 + \frac{D(d+a)}{4\bar{\beta}} \right] \phi_2 - \left( \varepsilon_3 I_2 k_1^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) c_2 + \\ - \left( \varepsilon_3 I_2 k_2^2 + \varepsilon_4 \frac{I_2}{D^2} \right) c_4 = 0 \quad \dots (4.166) \end{aligned}$$

Da (4.162) com (4.163), (4.156), (4.120) e (4.45)

$$\begin{aligned} \frac{B}{2} \left( r_2 - \frac{1}{\bar{\beta}} \right) \phi_1 + \frac{D}{2} \left( r r_2 - \frac{1}{\bar{\beta}} \right) \phi_2 - \left( \varepsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \varepsilon_5 \frac{I_2}{D^3} - k_1^2 \right) c_2 + \\ - \left( \varepsilon_6 \frac{I_2}{D^3} - \varepsilon_5 \frac{I_2}{D^3} - k_2^2 \right) c_4 = 0 \quad \dots (4.167) \end{aligned}$$

As equações (4.165) a (4.167) são as condições de contorno para esse caso.

#### IV.15. EXEMPLO 7

Seja o núcleo representado em planta na fig. 4.9, com  $E = 20000 \text{ t}_f/\text{dm}^2$ ,  $\nu = 0,15$ , 15 andares, com 3 m entre centros de lajes consecutivas. Será apresentada uma série de resultados, representadas nas fig. 4.9 (a) a (f), para

altura dos lintéis igual a 4dm e  $c_\phi$  assumindo valores de 1200, 400 e 100  $t_f/dm^3$ , visando analisar a influência da rigidez do solo nos esforços internos, de interação, e na rotação do núcleo.

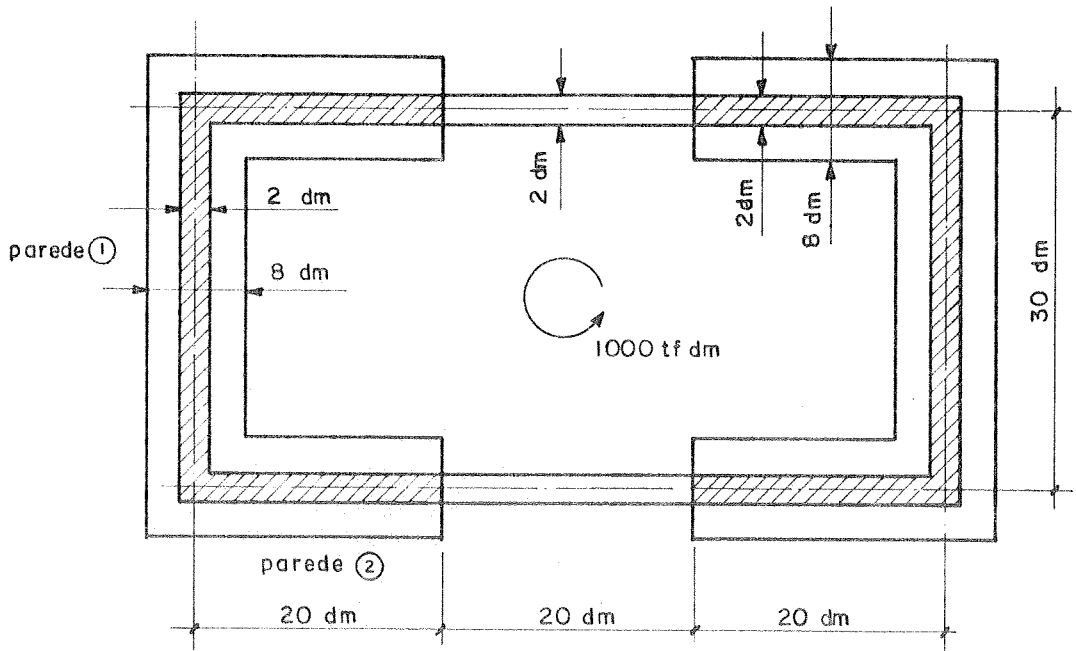
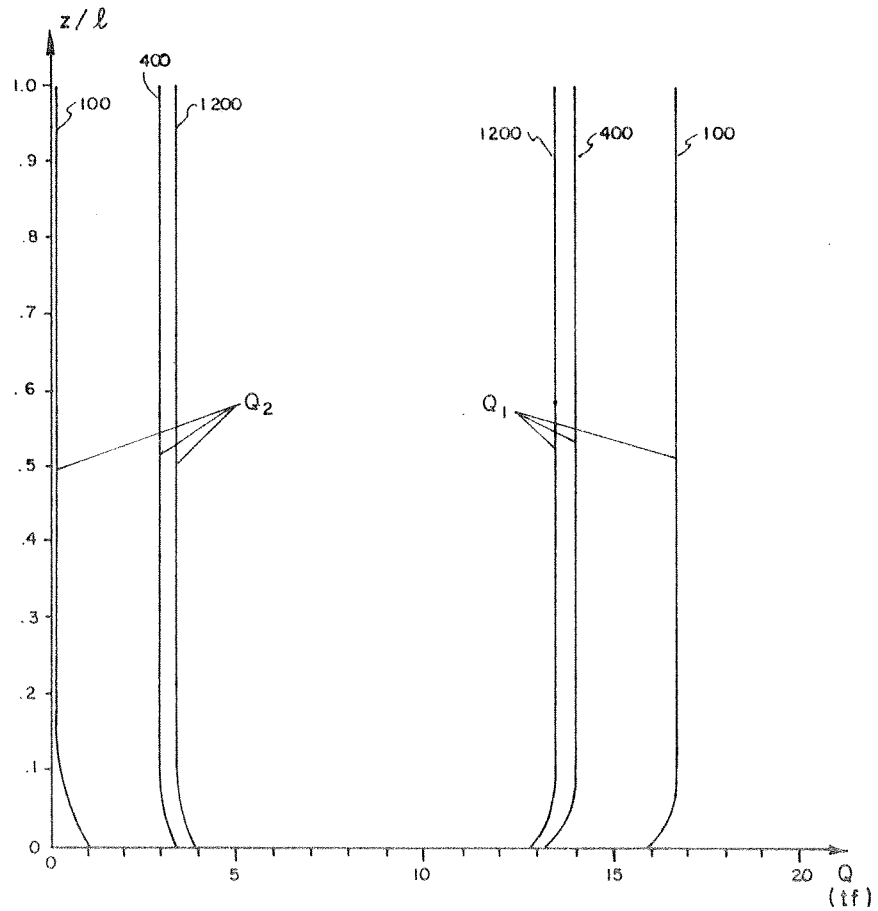
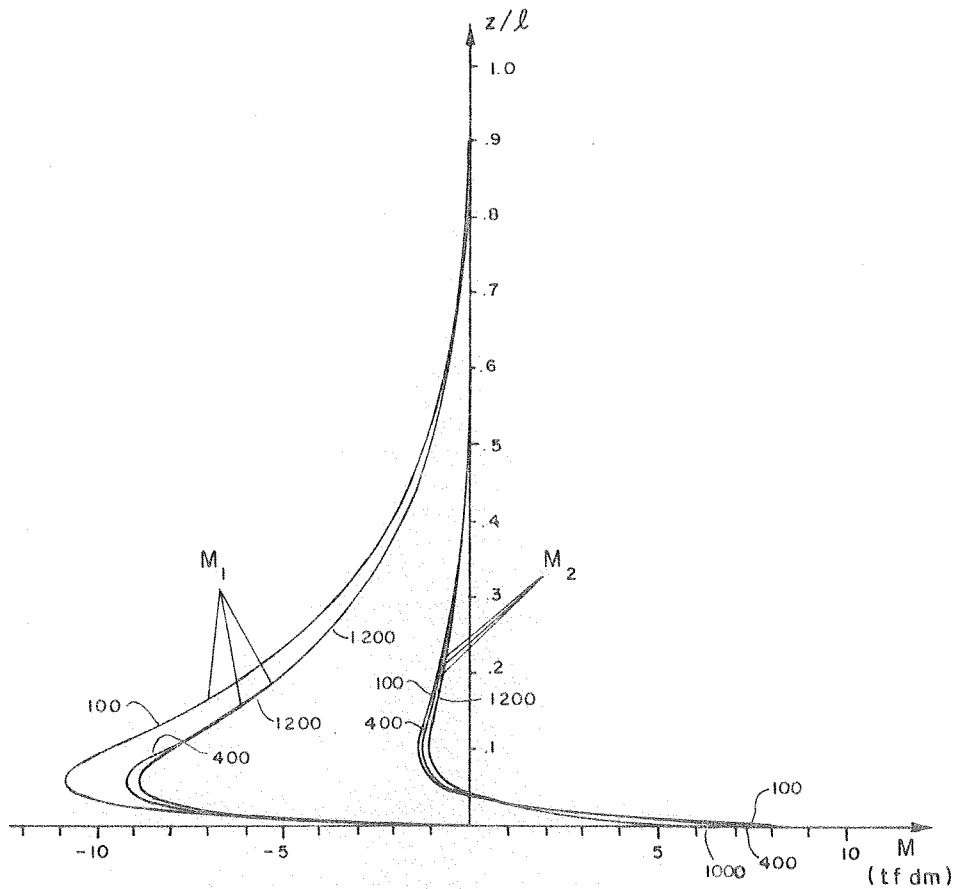


FIG. 4.9 - EXEMPLO 7

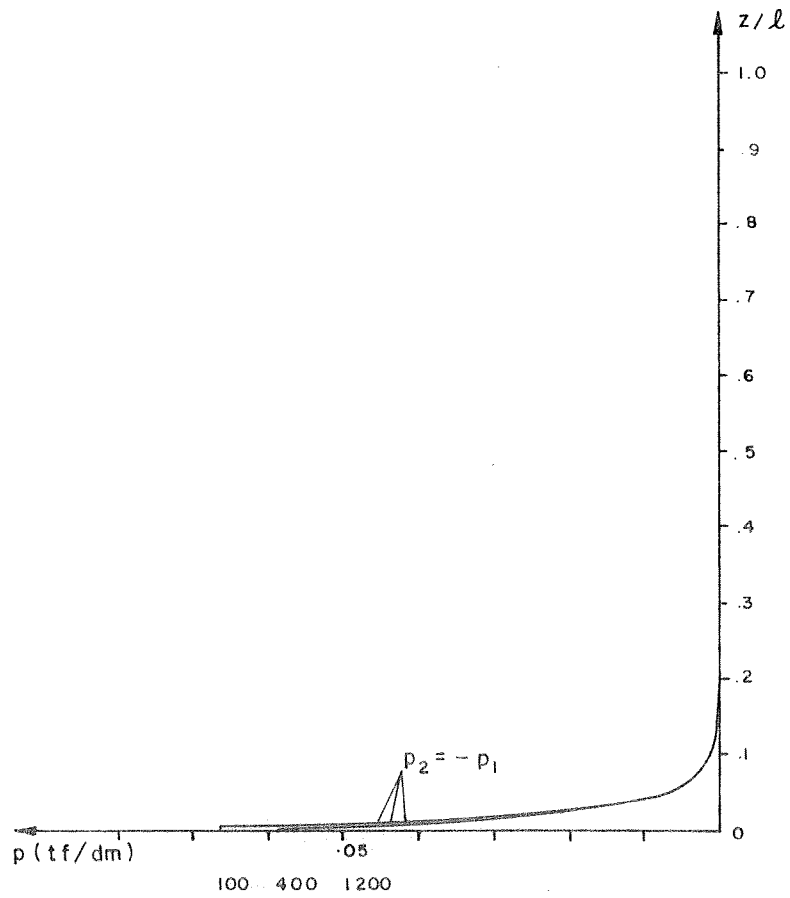


a) Esforços cortantes nas paredes

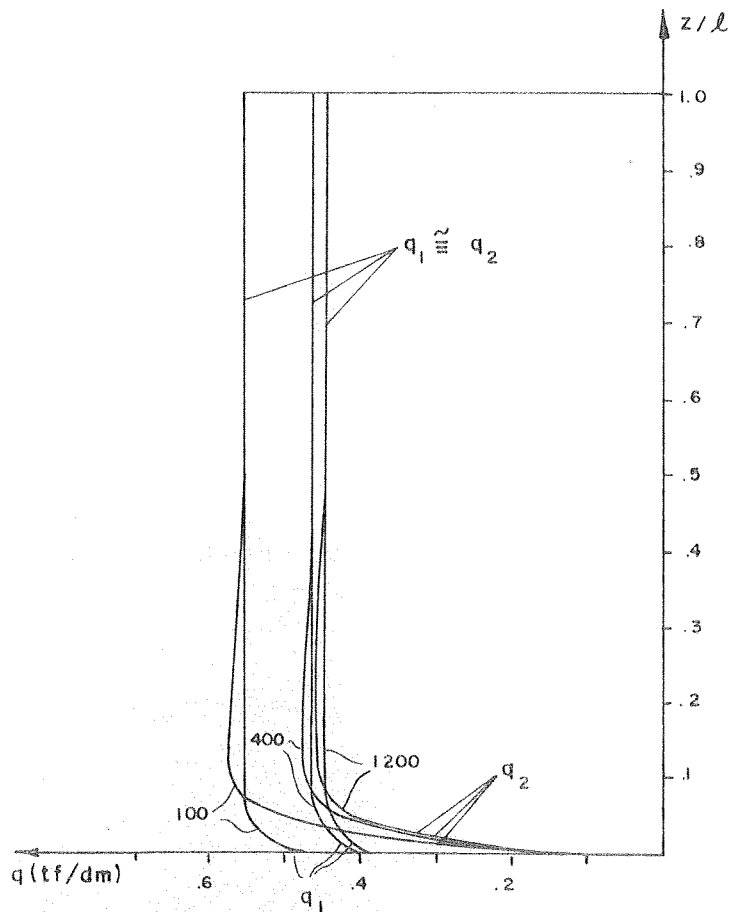


b) Momentos fletores nas paredes

FIG. 4.10 - VARIAÇÃO COM  $C_\phi$  (em  $tf/dm$ )

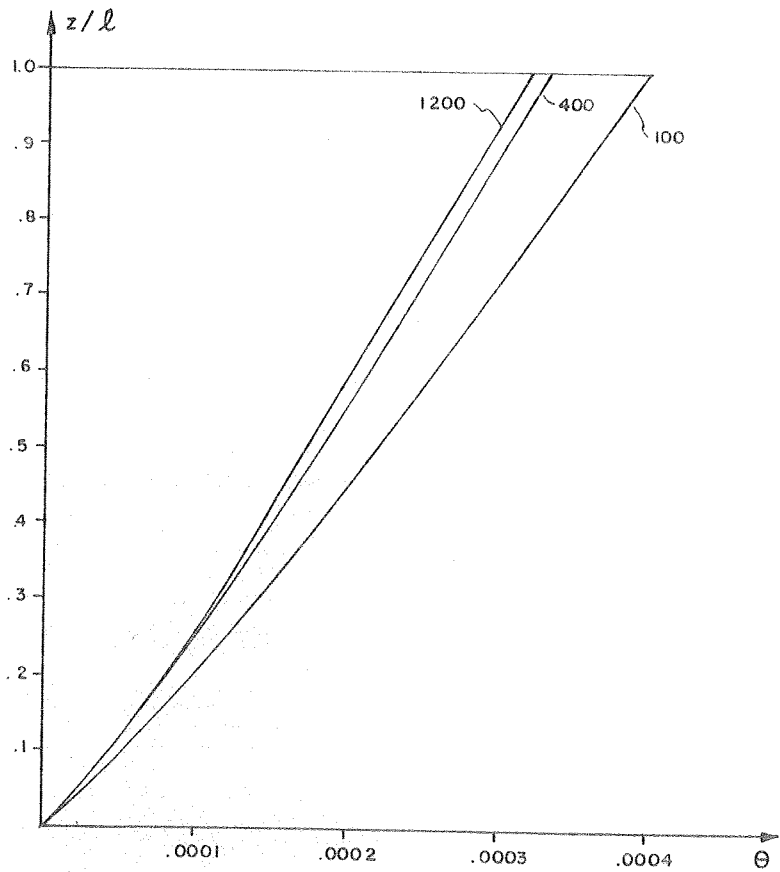
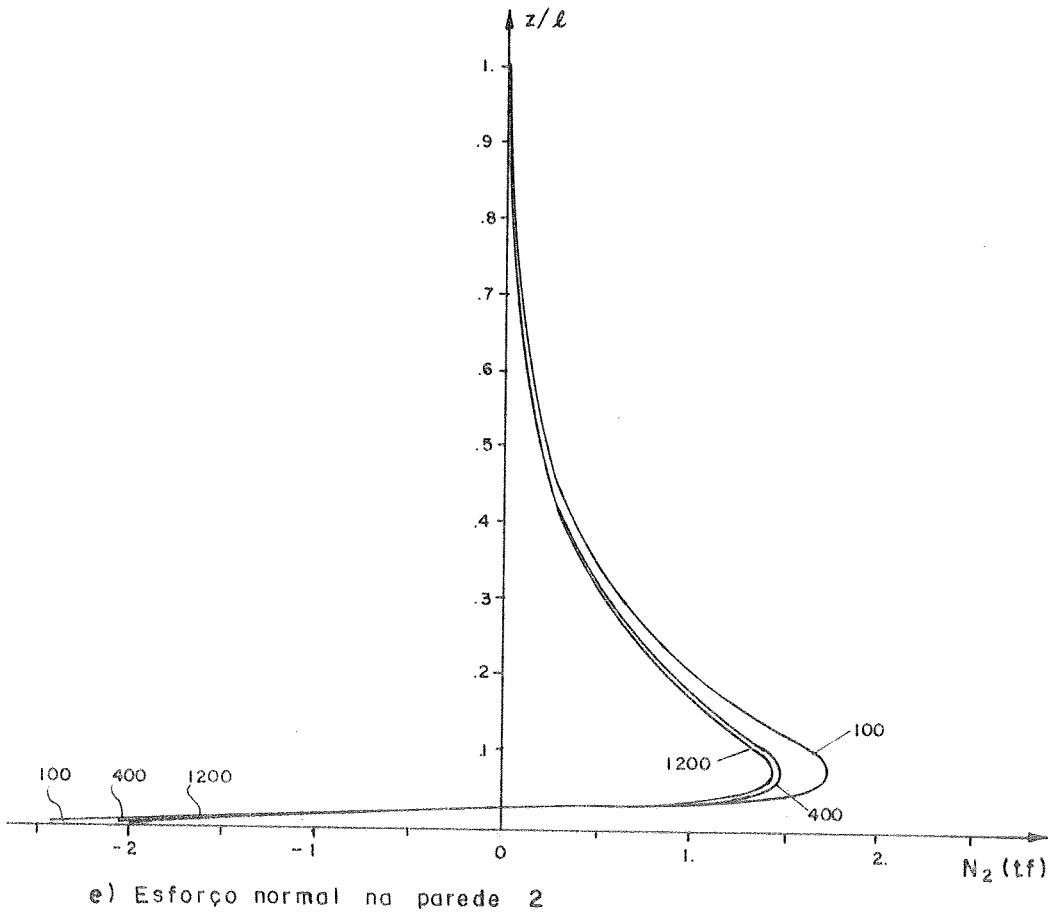


c) Cargas absorvidas pelas paredes.



d) Esforços de interação

FIG. 4.10 - VARIAÇÃO COM  $C_\phi$  (em tf/dm<sup>3</sup>)



f) Rotação da seção transversal

FIG. 4.10 - VARIAÇÃO COM  $C_\phi$  (em  $\text{tf}/\text{dm}^3$ ).

#### IV.16. CONCLUSÕES PARCIAIS

Esse problema pode ser resolvido, eliminando a total dependência entre os esforços internos  $N_2$ ,  $M_2$  e  $M_1$ , que impediam a compatibilização nas bases, no equacionamento à flexão, sem necessidade de introduzir correções "a sentimento" através de esforços internos concentrados nas bases.

A exemplo do que sucedeu nos capítulos II e III, as mais significativas diferenças em comparação com o cálculo à flexão dizem respeito à distribuição dos esforços cortantes; a flexão é quase parasita, conforme se pode observar na fig. 4.10 (b), e seria difícil esperar que os parâmetros a ela associados determinassem efetivamente a distribuição de esforços entre os diversos elementos constituintes do núcleo estrutural.

De qualquer forma fica também a dúvida sobre a eventual importância dos termos desprezados correspondentes à distorção dos "nós" de interseção dos lintéis com os pilares adjacentes; nesse caso as equações diferenciais que regem o problema são em tudo semelhantes, mas não se chegou ainda a resultados em condições de serem apresentados nesta tese.

## CAPÍTULO V

### CONCLUSÕES GERAIS

Os tópicos desenvolvidos nesta tese não permitem ainda tirar conclusões objetivas em termos de projeto; permitem, entretanto, mostrar a viabilidade de uma série de rumos a tomar para a análise de associações de paredes, e mesmo de núcleos estruturais, contornando problemas à primeira vista pequenos de incompatibilidade do equacionamento tradicional, mas que podem induzir a grandes perturbações locais nas associações.

Evitou-se, nesta tese, trabalhar com cargas mais gerais, com maior cunho prático, dada a complexidade meramente algébrica das soluções; procurou-se apenas chegar a soluções completas, pesquisar condições de contorno, sentir os fenômenos envolvidos e a importância das perturbações acarretadas pelos engastamentos elásticos das associações.

Para os problemas tratados, poderiam ser alteradas algumas hipóteses de cálculo introduzidas nos capítulos III e IV referentes a desprezar as distorções dos "nós" de interseção dos lintéis com as paredes; os problemas decorrentes da diversidade de soluções para as equações diferenciais desapareceriam com a utilização de técnicas numéricas simples, como o uso de diferenças finitas ou de polinômios de interpolação. Também com a utilização dessas técnicas po

deriam ser tratados outros tipos de cargas mais complexos sem grande problema adicional, para qualquer das associações tratadas.

Para as associações mais simples tratadas no capítulo II, poder-se-ia estender a aplicação das diversas idéias introduzidas, a casos planos ou tridimensionais mais complexos, sem grande complicação. Seria, também, bastante importante verificar, via experimentação numérica ou com modelos, a significância dos resultados obtidos, no aspecto da validade das hipóteses simplistas do tratamento de paredes como estruturas lineares. Seria também interessante definir a importância relativa dos diversos fenômenos envolvidos: flexão, distorção, deformação das lajes e flexão local das paredes.

Não se acredita seja ainda conclusivo o tratamento dado ao núcleo estrutural tratado no capítulo IV e nem que seja o procedimento generalizável a qualquer tipo de núcleo; acredita-se entretanto que é pelo menos uma tentativa de não fugir de um problema e que algum dia poderá dar origem a soluções com caráter mais definitivo.

A solução apresentada não foi comparada em termos numéricos com outras; os resultados não mais caracterizam uma mera perturbação na base, mas mostram uma radical mudança na distribuição de esforços internos em todo o núcleo.



BIBLIOGRAFIA

1. COULL, A. - Torsion of Structural Cores on Deformable Foundations - Build. Sci. Vol.10, p.p. 57-64 - Pergamon Press, 1975
2. MANCINI, E. - Núcleo Estrutural sobre Fundação Flexível - Publicação da Escola de Engenharia de São Carlos, agosto de 1980.
3. COSTA, J. L. - Núcleos Estruturais sobre Fundações Flexíveis. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, orientada por MANCINI, E. - Escola de Engenharia de São Carlos, maio de 1982.
4. MANCINI, E. - Associação Tridimensional de Pórticos e Paredes com Engastamento Elástico. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, orientada por STAMATO, M.C. Escola de Engenharia de São Carlos, fevereiro de 1972.
5. TSO, W.K. - Stresses in Coupled Shear - Walls Induced by Foundation Deformation - Civil Eng. & Eng. Mechanics Report 71-23, Dec/1971.
6. TSO, W.K. & CHAN, P.C.K. - Flexible Foundation on Coupled Shear Walls - ACI journal, Nov/1972, pp.678 - 683.
7. COULL, A. & CHANTAKSINOPAS, B. - Design Curves for Coupled shear walls on flexible bases - Proc. Instn.Civ.Engrs., Part 2, 1974, 57, pp 595-618.
8. COWPER, G. R. - The Shear Coefficient in Timoshenko's beam theory - J.Appl. Mechs., ASME, Jun/1966.
9. VLASOV, V.Z. - Thin-walled elastic beams. Israel, Israel Program for Scientific Translation, 1961.