

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ESFORÇOS DE FLEXÃO E FLEXO-TORÇÃO
EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM
AUTOMATIZAÇÃO DO CÁLCULO

ENG. LEANDRO PALERMO JUNIOR

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

SÃO CARLOS, JULHO DE 1985

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ESFORÇOS DE FLEXÃO E FLEXO-TORÇÃO
EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM
AUTOMATIZAÇÃO DO CÁLCULO

Dissertação apresentada à Escola de
Engenharia de São Carlos, Departamento de
Estruturas, visando à obtenção do título de
" Mestre em Engenharia de Estruturas "

ENG. LEANDRO PALERMO JUNIOR
ORIENTADOR : PROF. DR. MUNIR RACHID

Banca Examinadora

Prof. Dr. Munir Rachid (Orientador)

Prof. Dr. Walter Savassi (EESC-USP)

Prof. Dr. João Cyro André (POLI-USP)

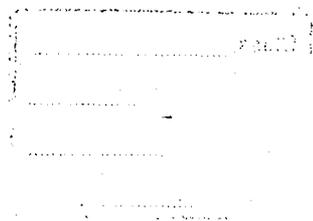
Suplentes

Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini (EESC-USP)

Prof. Dr. João Lirani (EESC-USP)

SÃO CARLOS, JULHO DE 1985

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS



Aos meus pais
Durvalina e Leandro,
aos meus irmãos Ana
e Sérgio.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que contribuíram para a realização deste trabalho e, em particular:

- Ao meu orientador, Professor Dr. Munir Rachid.
- Aos Professores Colaboradores Dagoberto Dario Mori e João Batista de Paiva.
- Aos Professores do Departamento de Estruturas:
 - . Dra. Helena M.C. Carmo Antunes
 - . João Carlos Barreiro
 - . Márcio Roberto Silva Corrêa
 - . Sérgio Persival Baroncini Proença
 - . Dr. Walter Savassi
 - . Dr. Wilson Sérgio Venturini
- Aos Professores do Instituto de Ciências Matemáticas:
 - . Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues
 - . Dra. Neide Maria Bertoldi Franco
 - . Dr. Odelar Leite Linhares
- Aos analistas, operadores e recepcionistas do Centro de Processamento de Dados da Escola de Engenharia de São Carlos.
- À Sra. Wilma Provinciali Vall pela datilografia, ao Sr. João Paulo Moretti e Srta. Sylvia Helena Morette pelos desenhos.
- À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo total apoio a este trabalho.

RESUMO

Neste trabalho é feito um estudo geral de instabilidade elástica para barras de secção delgada aberta, utilizando o método dos elementos finitos. Desta forma, podem ser considerados os efeitos da flexão, torção e flexão-torção independentemente ou em sua forma acoplada.

Em problemas de primeira espécie, a carga crítica e o modo de flambagem são encontrados empregando o método da iteração inversa. Em problemas de segunda espécie, os esforços e deslocamentos, obtidos da resolução do sistema linear de equações, podem ser calculados tanto em teoria de primeira como de segunda ordem.

Vários exemplos foram resolvidos e os resultados são comparados com a solução exata quando possível, mostrando a precisão da sistemática proposta.

A B S T R A C T

In this work a general study of elastic instability, for open cross section thin-walled bars, is carried out using the finite element method. Thus, bending, torsion and torsional-flexural effects can be considered independently or in a coupled form.

For first kind problems, critical load and buckling shape are found employing inverse iteration process. For second kind problem, internal forces and displacements, computed after the linear equation system solution, can be obtained assuming or not geometrical nonlinearity.

Several examples are solved and the results, are compared with exact solution whenever possible, showing the accuracy of the proposed formulation.

LISTA DE SÍMBOLOS USADOS NESTE TRABALHO

A	= área
B	= bimomento
B_e	= bimomento externo
C.G.	= centro de gravidade
D	= centro de cisalhamento
E	= módulo de Young
$F(v_D, v'_D, v''_D, w_D, w'_D, w''_D, \phi_D, \phi'_D, \phi''_D)$	= funcional
F_a	= carregamento externo aplicado
F_i	= parcela i do funcional
G	= módulo de elasticidade transversal
J_y	= momento de inércia em relação ao eixo y
J_z	= momento de inércia em relação ao eixo z
J_ω	= momento setorial de inércia
J_{yz}	= momento centrífugo
$J_{\omega z}$	= momento setorial central de inércia
$J_{\omega y}$	= momento setorial central de inércia
J_t	= momento de inércia à torção
K_y	= coordenada do centro do círculo de estabilidade na direção y
K_z	= coordenada do centro do círculo de estabilidade na direção z
M_y	= momento fletor em relação ao eixo y

M_z	= momento fletor em relação ao eixo z
M_ℓ	= momento de torção livre
M_{ft}	= momento de flexo-torção
M_t	= momento torçor
ME_j	= momento de flexão concentrado em relação ao eixo j
N	= força normal
O_s	= origem da ordenada s
Q_y	= cortante na direção y
Q_z	= cortante na direção z
P_j	= carga concentrada na direção j
$S_o(x)$	= função que representa as tensões cisalhantes atuando na extremidade s_1
S_y	= momento estático em relação ao eixo y
S_z	= momento estático em relação ao eixo z
S_ω	= momento setorial estático
T	= energia cinética
U	= energia de deformação
U_ω	= característica geométrica definida por Vlassov
V	= energia potencial das cargas externas
W	= trabalho realizado pela tensão σ
W_i	= trabalho realizado pelas forças internas
W_e	= trabalho realizado pelas forças externas
X	= força volumétrica na direção X
c_i	= constantes não nulas que dependem de c_i
c_r	= ordenada perpendicular ao esqueleto
d	= dimensão característica da secção transversal
d_d	= deslocamento do ponto de aplicação do carregamento

externo aplicado, medido na direção e sentido do mesmo

- d_i^k = componente i do vetor \underline{d}^k
- f_m = fator de multiplicação do carregamento unitário que o transforma no carregamento aplicado à viga
- $g(x)$ = função de x que representa os deslocamentos só dependentes da ordenada x e constantes em toda seção
- h_i = comprimento do elemento finito i
- i_D = raio de giração polar
- l = comprimento da viga
- m = carga torçora distribuída
- n_B = distância do ponto B ao ponto E, ambos no esqueleto
- n_i = é uma relação entre o menor auto-valor e λ_i
- p = aproximação ao auto-valor desejado
- q_j = carga distribuída, na direção j
- r = segmento característico
- s = ordenada que percorre a linha do esqueleto
- t = deslocamento na direção tangente ao esqueleto
- u = deslocamento na direção x
- u_e = deslocamento na direção da tensão externa
- v = deslocamento na direção do eixo y
- w = deslocamento na direção do eixo z
- w_B, v_B, t_B, u_B = deslocamento do ponto B
- x = eixo longitudinal da viga
- y = eixo principal de inércia
- z = eixo principal de inércia
- α = ângulo que a tangente do esqueleto faz com o eixo z

- γ_{jk} = distorção correspondente a τ_{jk}
 γ_{jk}^* = distorção de segunda ordem correspondente a τ_{jk}
 δ = espessura
 δ_M = o maior valor da espessura
 δv_i = primeira variação em relação a v_i
 ϵ = deformação longitudinal
 ϵ^* = deformação de segunda ordem na direção longitudinal
 λ = um auto-valor
 λ^* = auto-valor do problema (capítulo 6)
 λ_1 = menor auto-valor
 λ_m = maior auto-valor da estrutura para a ordem m da matriz M_c ou M_u
 λ_i = auto-valor com i-ésimo valor de grandeza ($i=1\dots n$)
 λ_k = auto-valor da iteração k
 $(\lambda_i)^k$ = auto-valor λ_i elevado ao número da iteração k
 ν = coeficiente de Poisson
 ξ = relação entre a ordenada x, local no elemento, e o comprimento do elemento finito
 π = energia potencial total
 σ = tensão na direção longitudinal
 σ_j = tensão na direção j
 σ_e = tensão externa na direção longitudinal
 τ_ℓ = tensão cisalhante devido à torção livre
 τ = tensão cisalhante média na espessura
 τ_{jk} = tensão cisalhante atuando no plano perpendicular a j na direção k
 ϕ = ângulo de rotação da seção transversal
 ω = área setorial

ω_C = área setorial em relação a um ponto C.

ω_E = área setorial em relação a um ponto E

As letras das matrizes e vetores utilizadas neste trabalho foram:

C = matriz da estrutura cujos elementos são invariantes à carga crítica

F = vetor independente da estrutura

H = matriz da estrutura que concentra os termos constantes e os variáveis com a carga crítica

I = matriz identidade

K = matriz da estrutura

M_i = matriz do funcional i

M_c = matriz das características geométricas

M_u = matriz da estrutura montada para um carregamento unitário, abaixo do crítico

MC = matriz das características geométricas e do carregamento constante

MV = matriz do carregamento variável

R = vetor das funções aproximadoras

U = matriz da estrutura variável com a carga crítica e montada para um valor unitário desta

d = vetor dos parâmetros nodais

d^k = vetor dos parâmetros nodais da iteração k

d^* = auto-vetor de baixa precisão (capítulo 5), parâmetros nodais do elemento (capítulo 6)

d^n = parâmetros nodais da estrutura

e_i = são os auto-valores que formam a base

f = vetor independente

- f_i = auto-vetor associado a λ_i , já determinado (Capítulo 5): vetor dos termos independentes devido ao nó i (Capítulo 4).
- f_e = vetor independente formado pelo carregamento aplicado aos nós
- f_i^k = vetor dos termos independentes devido a i no elemento k
- k = matriz do elemento finito
- k_{ij}^k = matriz do elemento finito de efeitos em i devido a j
- k_{ij}^k = matriz dos efeitos em i devido a j no elemento k
- p = vetor dos esforços no elemento finito
- r^k = vetor resto na iteração k
- r^* = vetor não nulo
- t_i = vetor dos parâmetros do nó i
- v^n = vetor dos deslocamentos nodais v do elemento finito
- w^n = vetor dos deslocamentos nodais w do elemento finito
- z^k = vetor resultante na iteração k , no cálculo dos auto-valores seguintes ao primeiro
- ϕ^n = vetor dos deslocamentos nodais ϕ do elemento finito

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
2. RESUMO DA TEORIA DE FLEXO-TORÇÃO	3
2.1 - Introdução	3
2.2.- Hipóteses Básicas	4
2.3 - Deslocamentos	5
2.4 - Características Geométricas	10
2.5 - Polo das Superfícies Setoriais	11
2.6 - Tensões	14
2.7 - Esforços	17
2.8 - O Centro de Flexão ou Centro de Cisalhamento.	19
2.9 - Equação Básica da Torção	20
3. O MÉTODO DA ENERGIA	24
3.1 - Tipos de Problema	27
3.1.1 - Problemas de Primeira Espécie	27
3.1.2 - Problemas de Segunda Espécie	27
3.2 - Energia de Deformação	28
3.3 - Energia Potencial das Tensões de Primeira Ordem nos Deslocamentos de Segunda Ordem	29
3.3.1 - Energia Potencial da Tensão Normal ..	31
3.3.2 - Energia Potencial das Tensões Cisalhantes	33
3.4 - Energia Potencial das Cargas Transversais ...	35
3.5 - Energia Potencial Total	37
3.6 - Os Problemas Analisados	40

4. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	42
4.1 - Montagem da Matriz do Elemento	46
4.2 - Matriz do Primeiro Tipo	48
4.3 - Matriz do Segundo Tipo	50
4.4 - Matriz do Terceiro Tipo	54
4.5 - Matriz do Quarto Tipo	56
4.6 - Montagem do Vetor Independente	59
4.7 - Montagem da Matriz e do Vetor Independente da Estrutura	61
4.8 - Imposição das Condições de Contorno	63
5. PROBLEMAS DE PRIMEIRA ESPÉCIE	64
5.1 - Vantagens do Método	66
5.2 - Convergência	67
5.3 - O Quociente de Rayleigh	69
5.4 - Cálculo dos Auto-Valores Seguintes	72
5.5 - Interpretação dos Resultados	73
6. DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS NOS PROBLEMAS DE SEGUNDA ESPÉCIE	74
6.1 - Problemas de Segunda Espécie em Primeira e Segunda Ordem	76
6.2 - Resolução do Sistema de Equações	77
7. EXEMPLOS	79
7.1 - Exemplo Numérico 1	79
7.2 - Exemplo Numérico 2	87
7.2.1 - Carga de Compressão no Centro de Flexão	88
7.2.2 - Carga de Compressão no Centro de Gravidade	94
7.3 - Exemplo Numérico 3	97
7.4 - Exemplo Numérico 4	101
7.5 - Exemplo Numérico 5	105
7.6 - Exemplo Numérico 6	109
7.7 - Exemplo Numérico 7	111

7.8 - Exemplo Numérico 8	116
7.9 - Exemplo Numérico 9	119
7.10 - Exemplo Numérico 10	123
8. PROGRAMA PARA RESOLUÇÃO DE INSTABILIDADE DE PRI- MEIRA E SEGUNDA ESPÉCIE	128
8.1 - Estrutura do Programa	129
8.2 - Leitura dos Dados	130
8.3 - Montagem da Matriz da Estrutura	133
8.4 - Resolução dos Problemas de Auto-Valor	141
8.5 - Cálculo dos Deslocamentos	144
8.6 - Conclusões	146
9. CONCLUSÕES	147
10. BIBLIOGRAFIA	149

1. INTRODUÇÃO

O problema de flexo-torção e instabilidade lateral, no regime elástico, de barras de seção delgada com esqueleto aberto, embora estudado anteriormente, ver TIMOSHENKO [19], foi sistematizado por VLASSOV [21].

Obtêm-se equações diferenciais nas funções: ângulo de rotação (ϕ) e deslocamentos (v_D e w_D) do centro de cisalhamento nas direções dos eixos principais (y e z , respectivamente) da seção. Estas equações são de difícil solução direta mesmo para casos simples de vinculação e carregamento.

A técnica dos elementos finitos, baseada em considerações de energia potencial total do sistema, tem sido usada para a resolução das equações regentes do problema.

Problemas de primeira espécie (elástica indeterminada) foram estudados [14] com a determinação da carga crítica de instabilidade de Euler, puramente torcional ou lateral. Neste último trabalho foi estudada, também, a influência do bimomento no valor da carga crítica.

Cargas torçoras, imperfeições geométricas da barra, cargas axiais excêntricas e o bimomento transformam um problema de primeira espécie em um problema de segunda espécie (elástica determinada).

Problemas de segunda espécie, para elásticas puramente de torção [6], ou puramente de flexão em um dos planos principais [10], já foram estudados com a determinação dos esforços e deslocamentos de segunda ordem e o

cálculo da carga crítica de instabilidade de Euler ou instabilidade puramente torcional.

Pode ser verificado, [6], [10], que, em problemas de segunda espécie, os esforços de segunda ordem podem ser determinantes no dimensionamento das estruturas.

O presente trabalho pretende, utilizando ainda a técnica dos elementos finitos, retomar as equações básicas do problema de flexo-torção e de instabilidade elástica e fazer o seu estudo geral, levantando as restrições existentes nos trabalhos anteriores.

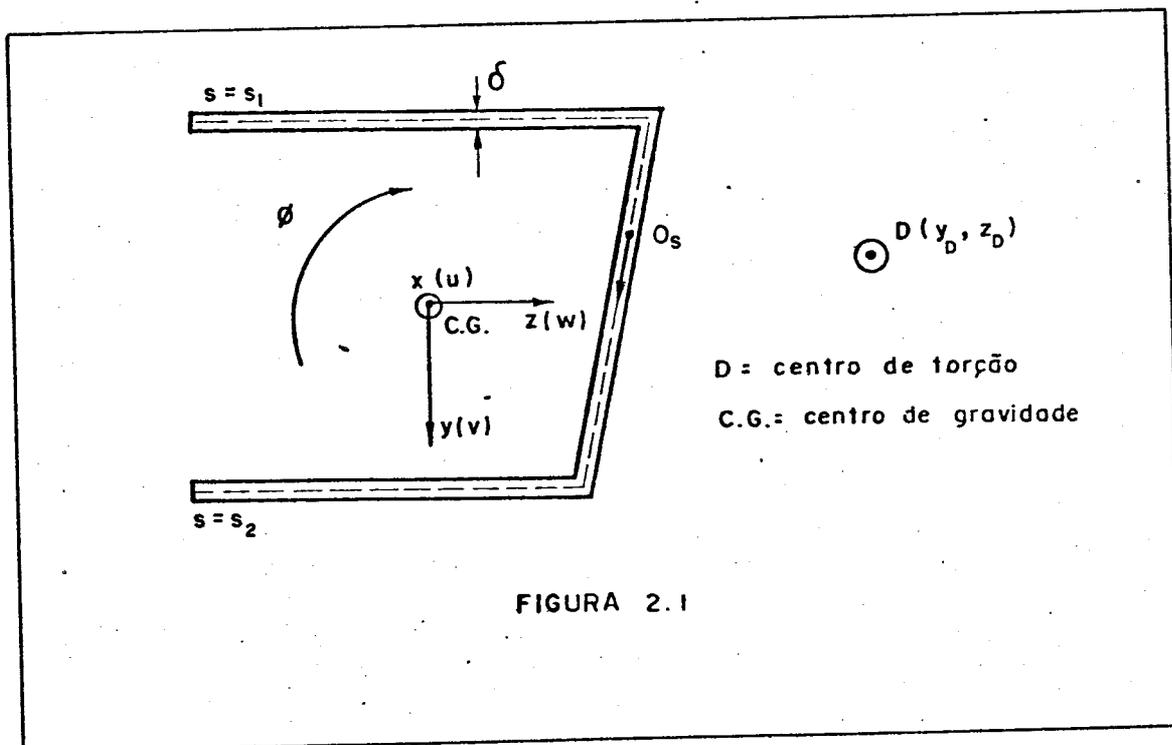
Assim, em relação aos problemas estudados em [6] e [10], serão estudados os efeitos recíprocos da flexão e flexo-torção nos respectivos esforços e deslocamentos de segunda ordem; será feita, também, uma verificação da influência deste acoplamento na carga crítica.

Em relação aos problemas estudados em [14], será levantada a restrição de as vigas serem altas (um momento de inércia bem maior que o outro) com o carregamento contido no plano de maior rigidez. Como consequência, as três equações em v_D , w_D e ϕ não são mais independentes e este fato deverá ser levado em conta, no procedimento computacional. Serão igualmente estudados os esforços e deslocamentos de segunda ordem do problema de segunda espécie.

2. RESUMO DA TEORIA DE FLEXO-TORÇÃO

2.1 - INTRODUÇÃO

Seja a secção transversal de uma barra mostrada na Fig. 2.1.



A barra que possui esta secção está referida a três eixos ortogonais x, y, z , nos quais x é um eixo longitudinal passando pelos centros de gravidade das seções e os outros dois (mostrados na Fig. 2.1) são os eixos principais de inércia. Nesta figura, a linha de esqueleto

é representada por uma linha pontilhada equidistante dos bordos e na qual uma ordenada s com origem O_s pode ser estabelecida.

A espessura δ pode variar com s e o elemento de área da secção é dado por:

$$dA = \delta \cdot ds \quad \dots (2.1)$$

O deslocamento sofrido pela barra tem as suas componentes na direcção e sentido de x , y e z representados por u , v e w , respectivamente e para a componente angular ϕ , o sentido mostrado na Fig. 2.1.

2.2 - HIPÓTESES BÁSICAS

A existência de determinados tipos de perfis transversais que, ao sofrerem flexão, produzem empenamento da secção transversal foi constatada experimentalmente por Bach, ver [21], em 1909 para um perfil U de ferro. VLASSOV [21] chama esta solicitação de flexo-torção e sua principal diferença com a torção estudada por Saint-Venant é a ocorrência de tensões normais acompanhadas por tensões tangenciais. Neste trabalho será usada a teoria de flexo-torção com as seguintes hipóteses:

- a) Deve-se abandonar a hipótese de secções planas e estudar a flexo-torção de uma barra de secção delgada como a torção de um sistema espacial de paredes delgadas sujeito ao empenamento das secções transversais.
- b) A barra é constituída de um número finito de placas delgadas e estreitas, planas ou curvilíneas. Supõe-se que a ligação entre estas placas, constituída ao longo das arestas, seja rígida e de tal modo que o deslocamento relativo entre placas seja impedido.

Sendo δ_M o maior valor da espessura da secção, d

uma dimensão característica da secção transversal e l o comprimento da barra, são admitidas as relações para as dimensões do perfil:

$$\frac{\delta_M}{d} \ll 0,1 \quad \dots (2.2)$$

$$\frac{d}{l} \ll 0,1 \quad \dots (2.3)$$

- c) Admite-se a secção transversal constante ao longo de todo o comprimento da barra.
- d) O perfil transversal de uma barra de secção delgada é considerado como rígido, ou seja, ele é indeformável no plano da secção transversal.
- e) A deformação por distorção do esqueleto é considerada como nula, ou seja, o ângulo reto formado pelas linhas de coordenadas x constante e s constante permanece reto após a deformação..

2.3 - DESLOCAMENTOS

Devido à hipótese de indeformabilidade da secção transversal em seu plano, os deslocamentos de dois pontos E e B, mostrados na Fig. 2.2, guardam no seu plano yz as seguintes relações:

$$w_B = w_E - (y_B - y_E) \phi \quad \dots (2.4)$$

$$v_B = v_E + (z_B - z_E) \phi \quad \dots (2.5)$$

onde:

v_E e w_E são os deslocamentos do ponto E

v_B e w_B são os deslocamentos do ponto B.

ϕ é o giro da secção transversal

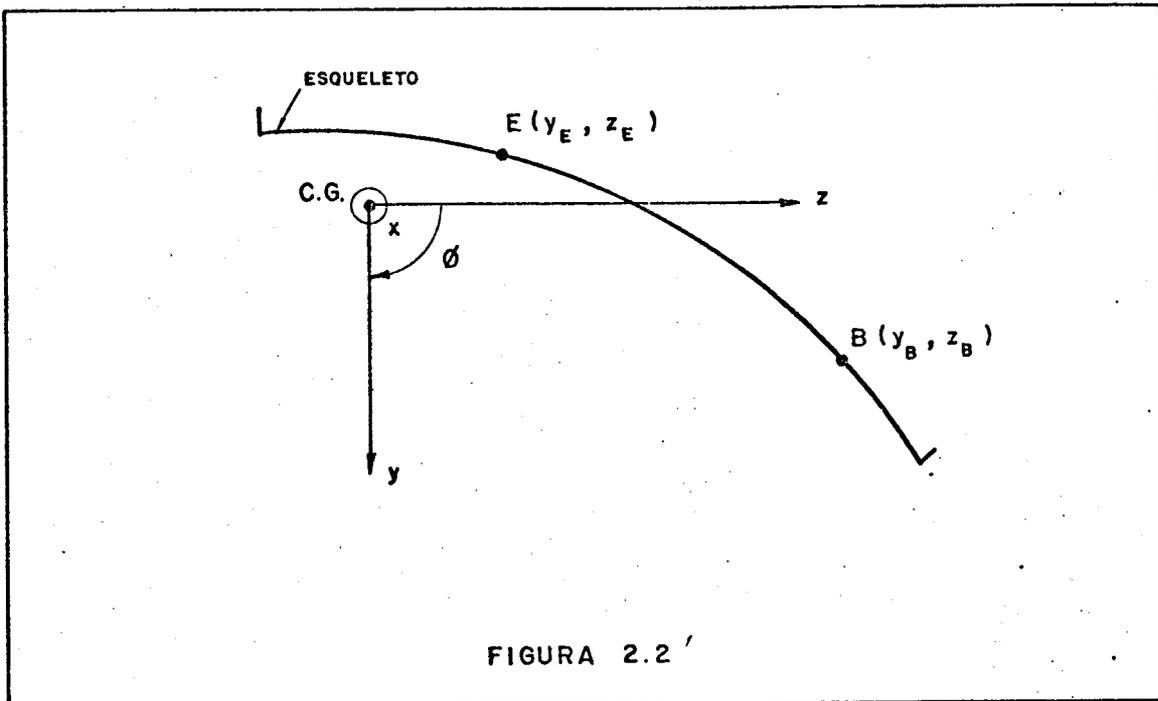


FIGURA 2.2'

o caso em que v_B e w_B são nulos significa que o ponto B é o centro instantâneo de rotação.

Por haver o empenamento da secção transversal, o deslocamento total de um ponto no esqueleto terá componentes nas direções x, y e z. Sabendo-se que para os deslocamentos transversais valem as relações (2.4) e (2.5), o deslocamento longitudinal é encontrado utilizando-se a hipótese de a deformação por distorção ser nula no esqueleto, ou seja:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \quad \dots (2.6)$$

onde t é o deslocamento na direção tangente ao esqueleto.

Para o cálculo de t, toma-se a posição deslocada de uma secção transversal, mostrada na Fig. 2.3; o deslocamento tangencial no ponto B é dado por:

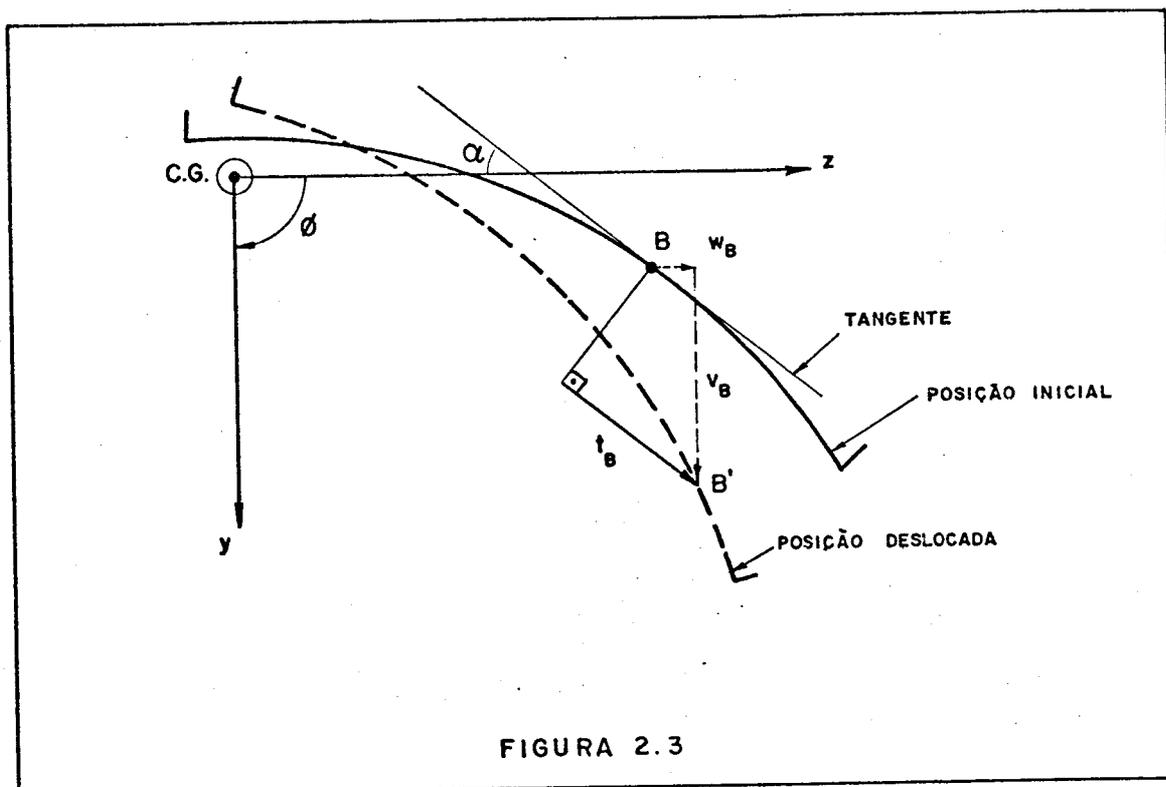


FIGURA 2.3

$$t_B = w_B \cos \alpha + v_B \sin \alpha \quad \dots (2.7)$$

Substituindo-se, em (2.7), w_B e v_B por suas expressões (2.4) e (2.5) obtêm-se:

$$t_B = w_E \cos \alpha + v_E \sin \alpha + \left[(z_B - z_E) \sin \alpha - (y_B - y_E) \cos \alpha \right] \phi \quad \dots (2.8)$$

Os termos entre colchetes, na expressão (2.8), representam a distância do ponto E à tangente ao esqueleto passando pelo ponto B, como mostra a Fig. 2.4, e define a grandeza n_B , na seguinte expressão:

$$n_B = (z_B - z_E) \sin \alpha - (y_B - y_E) \cos \alpha \quad \dots (2.9)$$

Substituindo-se n_B pela expressão (2.9), na expressão (2.8), resulta:

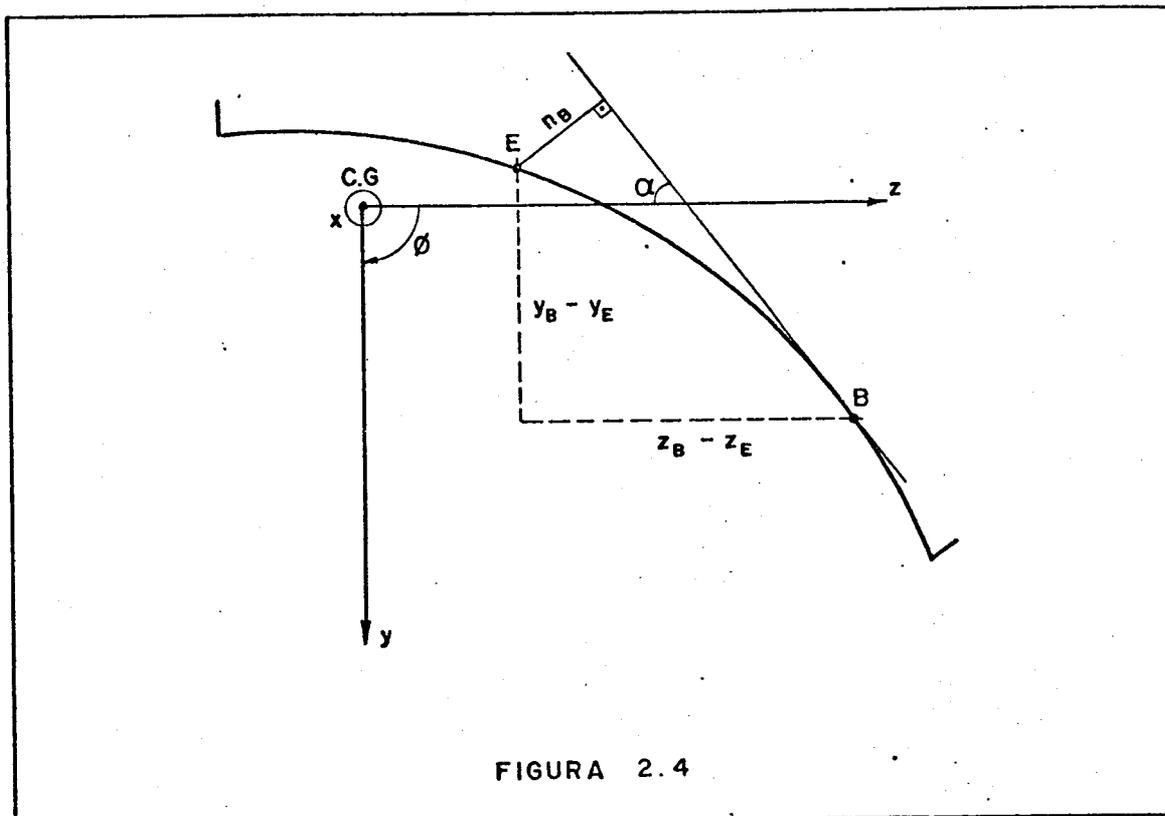


FIGURA 2.4

$$t_B = w_E \cos \alpha + v_E \sin \alpha + n_B \phi \quad \dots (2.10)$$

No caso de B ser um ponto qualquer do esqueleto, a expressão (2.10) do deslocamento na direção tangente passa a ser escrita como:

$$t(x, s) = w_E(x) \cos \alpha(s) + v_E(x) \sin \alpha(s) + \phi(x) \cdot n(s) \quad (2.11)$$

A partir da expressão (2.6), o deslocamento longitudinal é dado por:

$$u(x, s) = g(x) - \int_{s_1}^s \frac{\partial t}{\partial x} ds \quad \dots (2.12)$$

onde $g(x)$ é uma função de x .

Diferenciando-se a expressão dada por (2.11) em relação a x , e multiplicando-a por ds , obtêm-se:

$$\frac{\partial t}{\partial x} \cdot ds = w'_E(x) \cos \alpha(s) ds + v'_E(x) \cdot \text{sen} \alpha(s) ds + \phi'(x) \cdot n(s) \cdot ds \quad \dots (2.13)$$

Observando-se a Fig. 2.5, notam-se as seguintes relações:

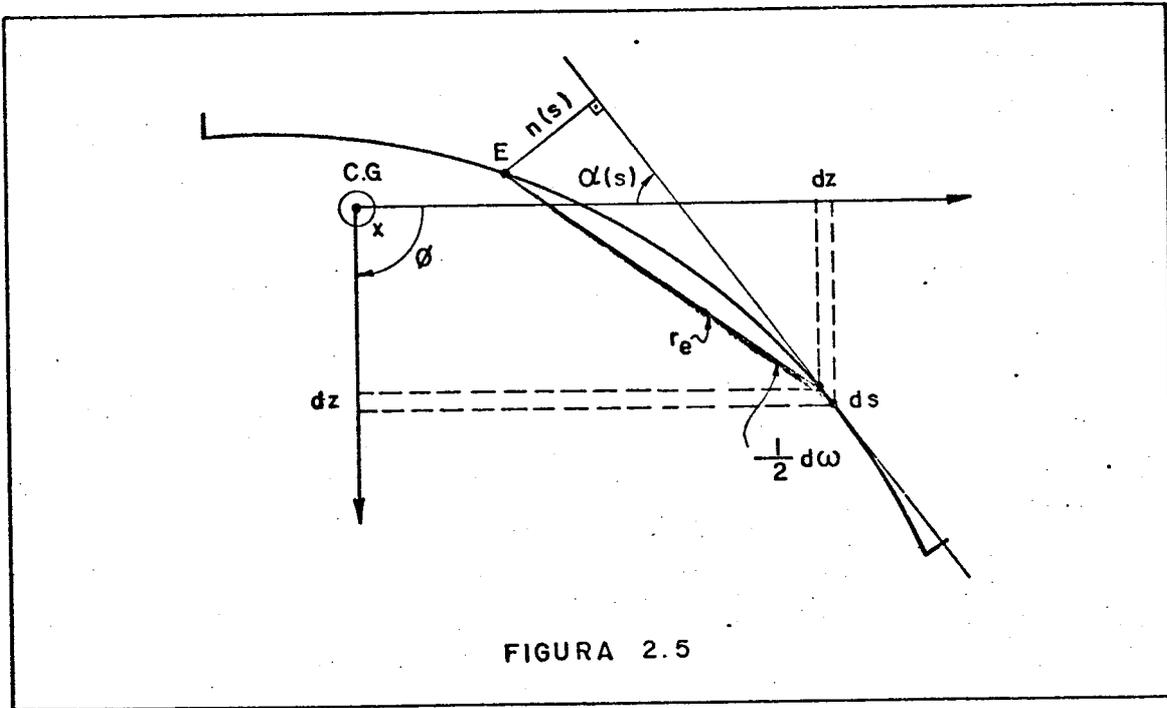


FIGURA 2.5

$$\cos \alpha \cdot ds = dz \quad \dots (2.14)$$

$$\text{sen} \alpha \cdot ds = dy \quad \dots (2.15)$$

Definindo-se uma nova grandeza como área setorial, pelo fato desta fornecer o dobro da área do setor, como mostra a Fig. 2.5, tem-se:

$$\omega = \int_{s_1}^s n(s) ds \quad \dots (2.16)$$

onde a área setorial é considerada positiva quando o raio vetor r_e (com sentido do ponto E para o ponto de coordenada s) girar no mesmo sentido que ϕ .

Assim, utilizando-se as relações (2.14), (2.15) e (2.16) na expressão (2.13), obtêm-se:

$$\frac{\partial t}{\partial x} \cdot ds = w'_E(x) dz + v'_E(x) dy + \phi'(x) d\omega \quad \dots (2.17)$$

Utilizando-se a expressão (2.17) em (2.12) e fazendo-se a integração, resulta a seguinte expressão:

$$u(x,s) = g(x) - w'_E(x)z(s) - v'_E(x)y(s) - \phi'_E(x)\omega(s) \quad \dots (2.18)$$

Nota-se que o deslocamento longitudinal de um ponto no esqueleto, dado por (2.18), tem, nos três primeiros termos, as parcelas correspondentes à lei das secções planas e no último a parcela correspondente ao empenamento da secção transversal segundo a lei das superfícies setoriais.

2.4 - CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS

a) Momentos Estáticos

$$S_z = \int_{s_1}^s y \, dA \quad \dots (2.19)$$

$$S_y = \int_{s_1}^s z \, dA \quad \dots (2.20)$$

b) Momentos de Inércia

$$J_y = \int_A z^2 \, dA \quad \dots (2.21)$$

$$J_z = \int_A y^2 \, dA \quad \dots (2.22)$$

c) Momento Centrífugo

$$J_{yz} = \int_A y \cdot z \cdot dA \quad \dots (2.23)$$

Por analogia com estas características geométricas, VLASSOV [21] definiu as seguintes:

d) Momento Setorial Estático

$$S_{\omega} = \int_{s_1}^s \omega \, dA \quad \dots (2.24)$$

e) Momento Setorial de Inércia (ou bimomento de inércia)

$$J_{\omega} = \int_A \omega^2 \, dA \quad \dots (2.25)$$

f) Momentos Setoriais Centrais de Inércia

$$J_{\omega z} = \int_A \omega \, z \, dA \quad \dots (2.26)$$

$$J_{\omega y} = \int_A \omega \, y \, dA \quad \dots (2.27)$$

2.5 - POLO DAS SUPERFÍCIES SETORIAIS

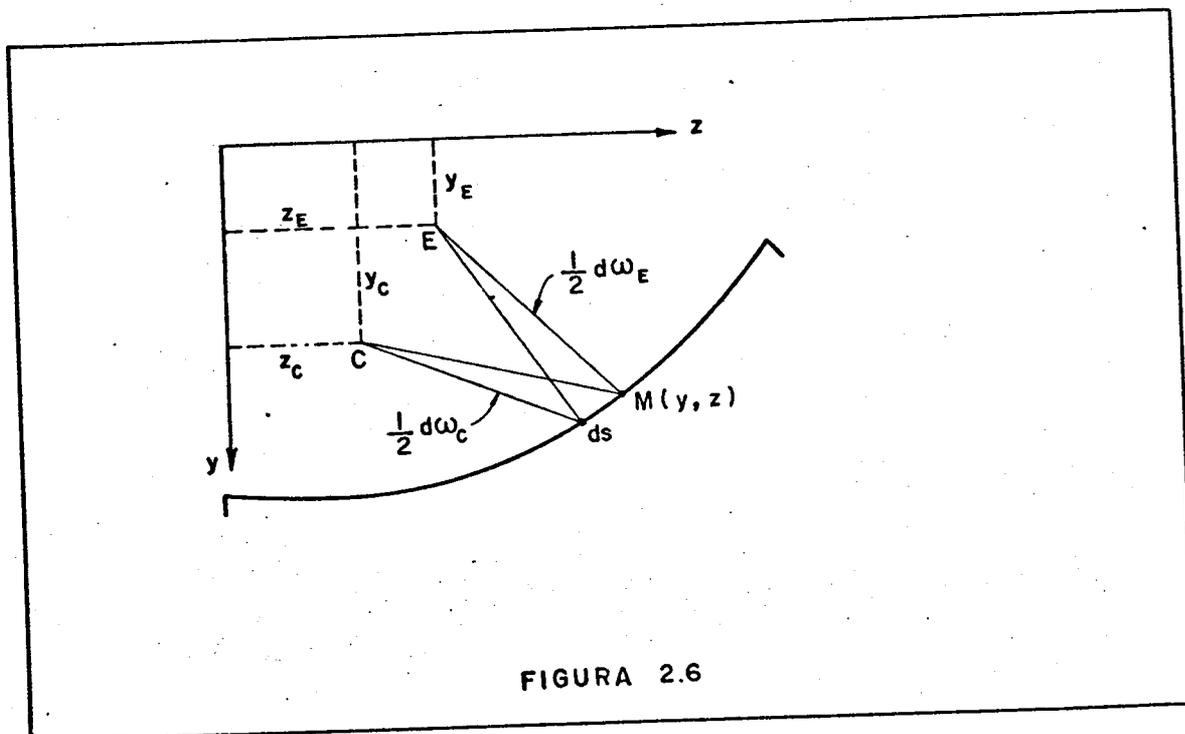
A equação (2.18), que fornece o deslocamento longitudinal de um ponto qualquer da secção transversal em relação ao ponto E, mostrado na Fig. 2.2, usa as funções 1 , $y(s)$, $z(s)$ e $\omega(s)$ que são linearmente independentes.

Para que estas funções sejam ortogonais é necessário que as seguintes condições sejam satisfeitas:

a) Os momentos estáticos, dados por (2.19) e (2.20), quando integrados para toda a secção transversal devem ser nulos. Esta condição é satisfeita quando os eixos têm origem no centro de gravidade.

- b) O momento centrífugo de inércia, dado por (2.23), deve ser nulo. Isto ocorre quando os eixos y e z são eixos principais de inércia.
- c) Os momentos setoriais centrais de inércia dados por (2.26) e (2.27) devem ser nulos. Para os eixos principais y e z , com origem no C.G., será determinado, no plano da secção transversal, o ponto que satisfaz esta condição. Este ponto será chamado de polo das superfícies setoriais.
- d) O momento setorial estático, dado por (2.24), seja nulo quando integrado em toda secção transversal. Esta condição determina a origem (ou as origens) O_s .

A determinação do polo das superfícies setoriais é feita utilizando-se a terceira condição de ortogonalidade.



Assim, um diferencial de área setorial em relação ao ponto E, mostrado na Fig. 2.6, é dado por:

$$d\omega_E = (z - z_E) dy - (y - y_E) dz \quad \dots (2.28)$$

Com procedimento análogo em relação ao ponto C da mesma figura, obtém-se um outro diferencial de área setorial, com a seguinte expressão:

$$d\omega_C = (z - z_C) dy - (y - y_C) dz \quad \dots (2.29)$$

Subtraindo-se a expressão (2.29) da expressão (2.28) e fazendo-se a integração, resulta:

$$\omega_E = \omega_C + (y_E - y_C)z - (z_E - z_C)y + K \quad \dots (2.30)$$

onde K é uma constante resultante da integração.

A expressão (2.30) representa a área setorial calculada em relação ao ponto E a partir do valor calculado em relação ao ponto C.

Para que o ponto E seja o polo das superfícies setoriais é necessário anular as expressões (2.26) e (2.27) para ω_E . Substituindo-se, na expressão (2.26), ω pela expressão de ω_E , dada pela expressão (2.30), fazendo-se a integração e utilizando-se as condições de ortogonalidade, tem-se a seguinte igualdade:

$$\int_A \omega_C \cdot z \cdot dA + (y_E - y_C) J_y = 0 \quad \dots (2.31)$$

Procedendo-se de maneira análoga com relação à expressão (2.27), tem-se uma outra igualdade que é dada por:

$$\int_A \omega_C \cdot y \cdot dA - (z_E - z_C) J_z = 0 \quad \dots (2.32)$$

Portanto, as coordenadas do polo das superfícies setoriais são calculadas utilizando-se um polo C arbitrário, de acordo com as seguintes equações:

$$y_E = y_C - \frac{1}{J_y} \int_A \omega_C \cdot z \cdot dA \quad \dots (2.33)$$

$$z_E = z_C + \frac{1}{J_z} \int_A \omega_C y \, dA \quad \dots (2.34)$$

2.6 - TENSÕES

Retomando-se a expressão (2.18), que exprime o deslocamento de um ponto no esqueleto em relação ao ponto E, tem-se:

$$u(x, s) = g(x) - w'_E(x)z(s) - v'_E(x)y(s) - \phi'(x)\omega(s)$$

Admite-se que o ponto E seja o polo das superfícies setoriais e as funções 1 , $y(s)$, $z(s)$ e $\omega(s)$ sejam ortogonais. Utilizando-se a teoria de primeira ordem (pequenas deformações), a tensão normal na direção x , admitindo-se tração como positiva, é dada por:

$$\sigma = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots (2.35)$$

onde E é o módulo de Young.

Fazendo-se a diferenciação em relação a x da expressão (2.18) e colocando-se o resultado na expressão (2.35), obtém-se:

$$\sigma = E \left[g'(x) - w''_E(x)z(s) - v''_E(x)y(s) - \phi''(x)\omega(s) \right] \dots (2.36)$$

Analogamente à expressão (2.18), os três primeiros termos da expressão (2.36) representam as tensões repartidas segundo a lei das secções planas e no último as

tensões produzidas pela lei das superfícies setoriais. Neste último termo é que existe a diferença da teoria de Vlasov [21] com a torção livre de Saint-Venant pois, na torção livre não aparecem tensões normais e a tensão existente é apenas tangencial.

A torção livre de peças delgadas pode ser estudada utilizando-se a analogia de membrana. Neste estudo, mostra-se que a tensão cisalhante é linearmente distribuída na espessura e com a seguinte expressão:

$$\tau_{\ell} = 2 \cdot \frac{M_{\ell}}{J_t} \cdot c_r \quad \dots (2.37)$$

Nesta expressão c_r é uma ordenada perpendicular ao esqueleto com origem nele; J_t é o momento de inércia à torção, sendo dado pela expressão:

$$J_t = \frac{1}{3} \int_s t^3 ds \quad \dots (2.38)$$

M_{ℓ} é o momento de torção livre que tem a seguinte relação com o ângulo ϕ

$$M_{\ell} = G \cdot J_t \cdot \phi' \quad \dots (2.39)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal que guarda com o módulo de Young e o coeficiente de Poisson (ν) a relação:

$$G = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)} \quad \dots (2.40)$$

Na teoria de Vlasov [21], a ocorrência de tensões normais leva à existência de tensões cisalhantes para equilibrá-las. No cálculo da tensão cisalhante, utiliza-se o elemento infinitesimal de barra mostrado na Fig. 2.7.

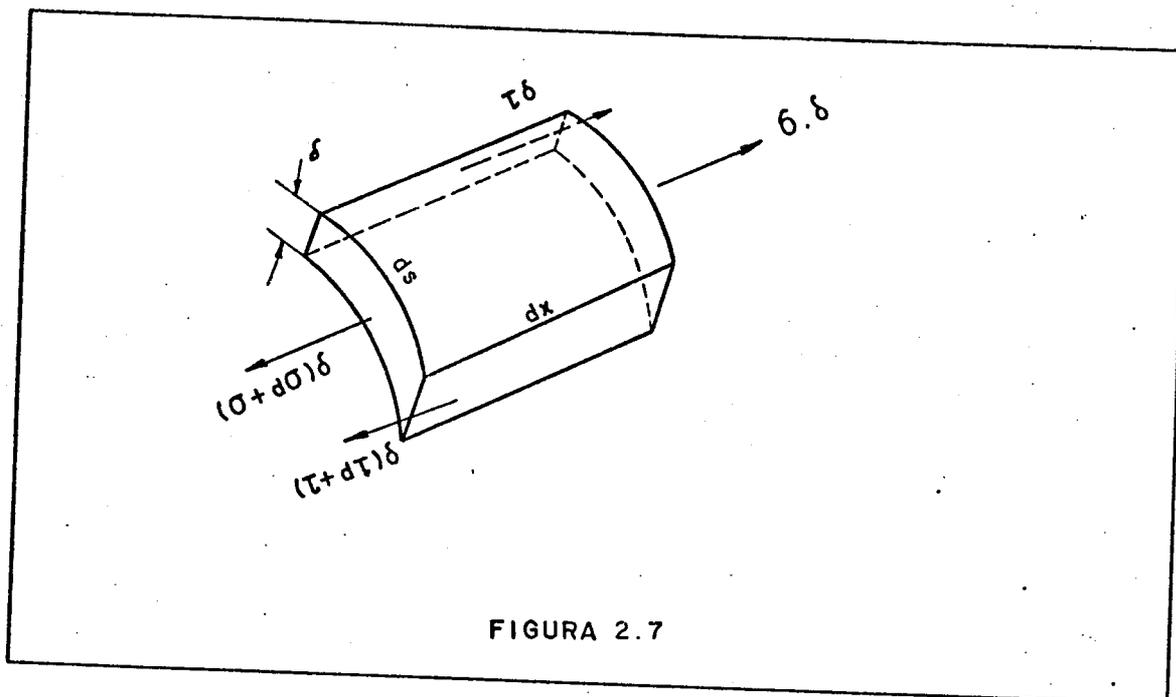


FIGURA 2.7

Admitindo-se que no elemento infinitesimal desta figura a força volumétrica X seja nula, tem-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial s} = 0 \quad \dots (2.41)$$

A expressão da tensão cisalhante média atuando na espessura δ é dada por:

$$\tau(x, s) = \frac{1}{\delta} \left[S_0(x) - \int_{s_1}^s \frac{\partial\sigma}{\partial x} \cdot \delta \cdot ds \right] \quad \dots (2.42)$$

onde S_0 é uma função de x.

O significado físico de S_0 pode ser encontrado calculando o valor de τ na ordenada s_1 , ou seja:

$$\tau(x, s_1) = \frac{1}{\delta} S_0(x) \quad \dots (2.43)$$

A equação (2.43) mostra que $S_0(x)$ é a função que representa as tensões cisalhantes atuando na extremidade

s_1 . Na ausência destas tensões cisalhantes, a equação (2.42) torna-se:

$$\tau(x, s) = \frac{1}{\delta} \left[- \int_{s_1}^s \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \delta \cdot ds \right] \dots (2.44)$$

Substituindo-se na equação (2.44) σ pela relação (2.36) e fazendo-se as operações necessárias, resulta a seguinte expressão para $\tau(x, s)$:

$$\tau(x, s) = - \frac{E}{\delta} \left[g''(x) A(s) - \frac{w'''(x)}{E} S_y(s) - \frac{v'''(x)}{E} S_z(s) + \phi'''(x) S_\omega(s) \right] \dots (2.45)$$

onde:

$A(s)$ é a área da parte da secção compreendida entre as ordenadas s_1 e s .

$S_y(s)$, $S_z(s)$ e $S_\omega(s)$ são os momentos estáticos deste ponto da secção.

2.7 - ESFORÇOS

De acordo com a Resistência dos Materiais, os esforços têm as seguintes definições:

a) Força Normal (positiva quando de tração)

$$N = \int_A \sigma \cdot l \cdot dA \dots (2.46)$$

b) Momentos Fletores

$$M_z = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA \dots (2.47)$$

$$M_y = - \int_A \sigma \cdot z \cdot dA \dots (2.48)$$

onde o momento M_z traciona as fibras com ordenada y positiva e M_y traciona aquelas com ordenada z negativa.

c) Forças Cortantes

$$Q_z = \int_A (\tau\delta) dz \quad \dots (2.49)$$

$$Q_y = \int_A (\tau\delta) dy \quad \dots (2.50)$$

Analogamente a estas definições, Vlassov [21] introduziu:

d) Bimomento - traciona as fibras com área setoria positiva

$$B = \int_A \sigma \cdot \omega \cdot dA \quad \dots (2.51)$$

e) Momento de Flexo-Torção

$$M_{ft} = \int_A (\tau\delta) d\omega \quad \dots (2.52)$$

Utilizando-se nestas definições as expressões de σ e τ dadas por (2.36) e (2.45), respectivamente, e tendo-se em vista, além das condições de ortogonalidade, que a segunda derivada da função g é nula por não serem aplicadas tensões tangenciais nas bordas longitudinais, resultam as seguintes relações:

$$N = E \cdot A \cdot g'(x) \quad \dots (2.53)$$

$$M_y = E J_y \cdot w_E''(x) \quad \dots (2.54)$$

$$M_z = -E J_z \cdot v_E''(x) \quad \dots (2.55)$$

$$B = -E J_\omega \cdot \phi''(x) \quad \dots (2.56)$$

$$Q_z = - E J_y \cdot w_E'''(x) \quad \dots (2.57)$$

$$Q_y = - E J_z \cdot v_E'''(x) \quad \dots (2.58)$$

$$M_{ft} = -E J_\omega \cdot \phi'''(x) \quad \dots (2.59)$$

Assim as expressões das tensões normais e tangenciais podem ser colocadas em função dos esforços sollicitantes, na seguinte forma:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y} \cdot z + \frac{M_z}{J_z} \cdot y + \frac{B}{J_\omega} \cdot \omega \quad \dots (2.60)$$

$$\tau = -\frac{1}{\delta} \left[\frac{Q_z}{J_y} \cdot S_y(s) \cdot \frac{Q_y}{J_z} \cdot S_z(s) + \frac{M_{ft}}{J_\omega} \cdot S_\omega(s) \right] \quad \dots (2.61)$$

A tensão cisalhante média, dada pela expressão (2.61), deve-se acrescentar a distribuição linear de tensões cisalhantes da torção livre dada pela expressão (2.37):

$$\tau = 2 \frac{M_\ell}{J_t} \cdot c_r$$

Assim, utilizando-se as expressões (2.61) e (2.37), tem-se a distribuição de tensões cisalhantes na espessura.

2.8 - O CENTRO DE FLEXÃO OU CENTRO DE CISALHAMENTO

O centro de flexão é qualquer geratriz da barra na qual passam as linhas de ação do carregamento e das reações de apoio. Quando as cargas passam pelo centro de flexão a sollicitação resultante é apenas de flexão.

Nas barras que possuem secção transversal constante, a linha do polo das superfícies setoriais coincide com o centro de flexão. Para demonstrar esta afirmação, basta anular-se o momento das tensões cisalhantes em relação ao polo das superfícies setoriais, ou seja:

$$\int_A \tau \cdot \delta \cdot d\omega = 0 \quad \dots (2.62)$$

Utilizando-se a expressão de τ dada por (2.61) tem-se:

$$\frac{Q_z}{J_z} \int_A S_y(s) d\omega + \frac{Q_y}{J_y} \int_A S_z(s) d\omega + \frac{M_{ft}}{J_\omega} \int_A S_\omega(s) d\omega = 0 \quad \dots (2.63)$$

Devido às condições de ortogonalidade, os dois primeiros termos da expressão (2.63) são nulos. Assim, quando o momento de flexo-torção é nulo, a carga transversal e o esforço cortante que a equilibra passam pelo polo das superfícies setoriais e a sollicitação resultante é de flexão. Quando o polo das superfícies setoriais for o centro de flexão será notado com a letra D.

2.9 - EQUAÇÃO BÁSICA DA TORÇÃO

De acordo com a teoria de Vlassov [21], a torção de uma barra é composta por duas parcelas, a primeira é a torção livre caracterizada pela torção sem empenamento e a segunda é a flexo-torção, ou seja:

$$M_t = M_\ell + M_{ft} \quad \dots (2.64)$$

Utilizando-se, na equação (2.64), as relações (2.39) e (2.59), obtém-se

$$M_t = G J_t \phi' - E J_\omega \phi'' \quad \dots (2.65)$$

A equação (2.65) é a equação clássica da flexo-torção e quando a barra está sujeita apenas à torção o ponto E, polo das superfícies setoriais, será o centro de torção.

Diferenciando-se a equação (2.65) em relação a x ,
obtem-se:

$$M_t' = G J_t \phi'' - E J_w \phi^{IV} \quad \dots (2.66)$$

A equação (2.66) pode ser escrita em função do
bimomento, utilizando-se a relação (2.56) e tem a seguinte
forma:

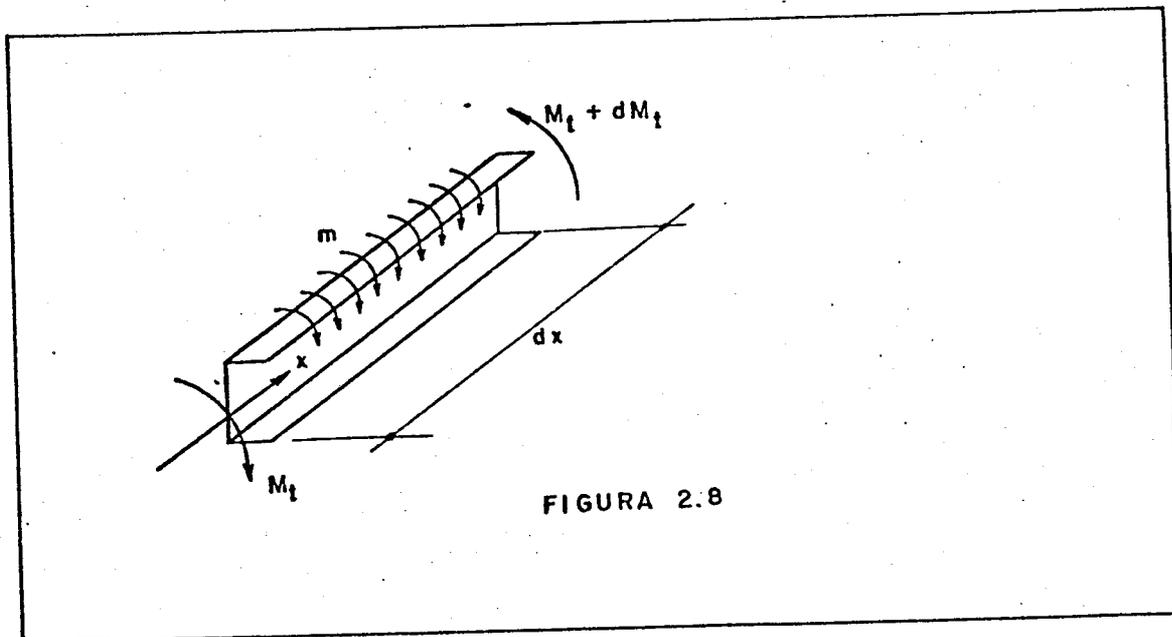
$$r^2 B'' - B = - r^2 m \quad \dots (2.67)$$

onde:

r é definido como segmento característico e tem a ex
pressão:

$$r = \sqrt{\frac{E J_w}{G J_t}}$$

m é a carga torçora distribuída sendo igual a M_t' e
tendo seu sentido positivo mostrado na Fig. 2.8.



Para os casos de m constante ou variando linearmente em x , a solução geral da equação (2.67) será dada por:

$$B = C_1 \sinh\left(\frac{x}{r}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{x}{r}\right) + r^2 m \quad \dots (2.68)$$

onde C_1 e C_2 são determinados pelas seguintes condições de contorno:

a) Extremidade livre

Sendo σ_x nulo, de (2.51) vem:

$$B = 0$$

b) Extremidade engastada

Com o deslocamento longitudinal (u) nulo para qualquer ponto do esqueleto, ocorre, por (2.18):

$$\phi' = 0$$

O momento de torção livre, por (2.39), também será nulo. Baseando-se em (2.64), o momento torçor será apenas o de flexo-torção.

Utilizando-se as relações (2.56) e (2.59) sabe-se que:

$$M_{ft} = B' \quad \dots (2.69)$$

Assim, devido ao momento livre ser nulo, resulta:

$$M_t = B'$$

c) Extremidade com distribuição dada de tensões

Pode ser utilizada a própria definição (2.51) para o cálculo do bimomento ou, no caso de cargas concentradas, utiliza-se:

$$B = \sum_i^n P_i \omega_i \quad \dots (2.70)$$

onde P_i são cargas concentradas aplicadas a pontos de área setorial ω_i .

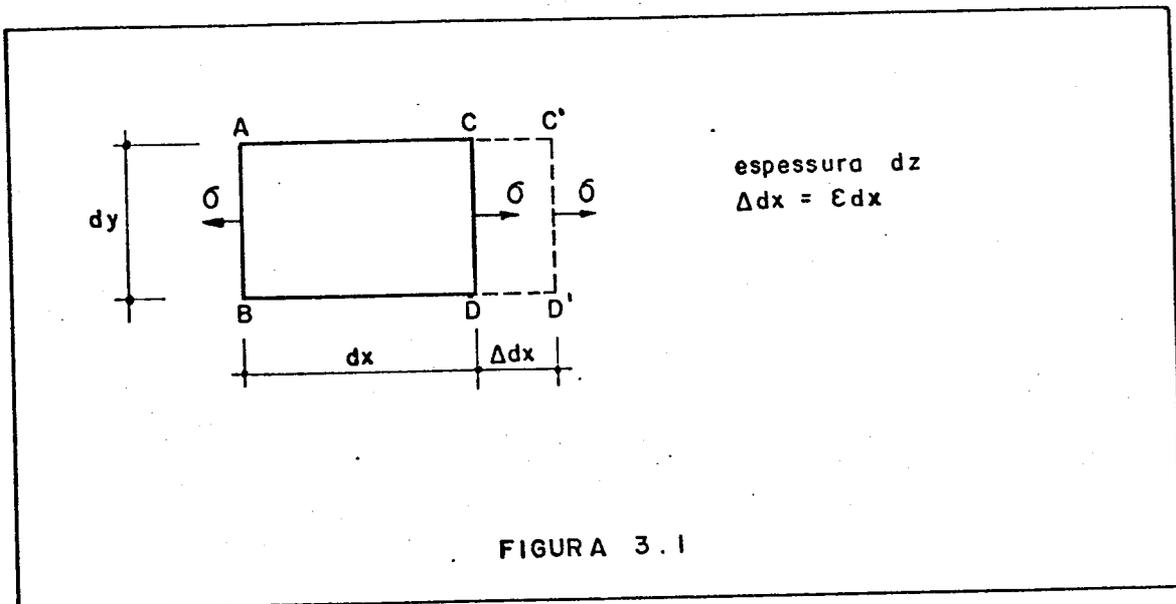
d) Secção intermediária com descontinuidade no diagrama de M_t

A descontinuidade no diagrama é resultante da aplicação de um momento torçor concentrado externo, mas a continuidade exige a igualdade de σ_x em secções adjacentes, logo:

$$B_{\text{esquerda}} = B_{\text{direita}}$$

3. O MÉTODO DA ENERGIA

Uma estrutura em regime elástico deforma-se sob a ação de um carregamento qualquer e ocupa uma posição final diferente da inicial. Assim, um elemento plano ABCD sujeito a uma tensão normal σ , aplicada lentamente, ocupará uma posição deslocada dada por ABC'D', conforme mostra a Fig. 3.1.



O deslocamento do ponto de aplicação da tensão σ mostra que nessa deformação houve a realização de trabalho. Devido à lei de Hooke, a expressão do trabalho realizado pela tensão σ é dada por:

$$dW = \frac{1}{2} \sigma \cdot \epsilon \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad \dots (3.1)$$

Genericamente, para um elemento infinitesimal de volume $dx \, dy \, dz$, sujeito a tensões normais e cisalhantes, a expressão do trabalho será dada por:

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy dz \quad \dots (3.2)$$

onde:

- σ_j é a tensão normal na direção j
- ϵ_j é a deformação específica na direção j
- τ_{jk} é a tensão cisalhante atuando no plano perpendicular a j e na direção k
- γ_{jk} é a distorção correspondente a τ_{jk}

Em uma estrutura o trabalho total é dado pela soma dos trabalhos executados pelas forças internas com o das forças externas, ou seja:

$$W = W_i + W_e \quad \dots (3.3)$$

Analogamente à expressão (3.3), utilizando-se as definições de energia potencial dos esforços internos ou energia de deformação e energia potencial dos esforços externos ou apenas chamada de energia potencial, a energia potencial total de uma estrutura será a soma da energia de deformação (U) com a energia potencial dos esforços externos (V), ou seja:

$$\pi = U + V \quad \dots (3.4)$$

Para o estudo da estabilidade de uma estrutura, deve-se recordar que a energia mecânica de um corpo é constante e dada como a soma da energia potencial com a energia cinética, ou seja:

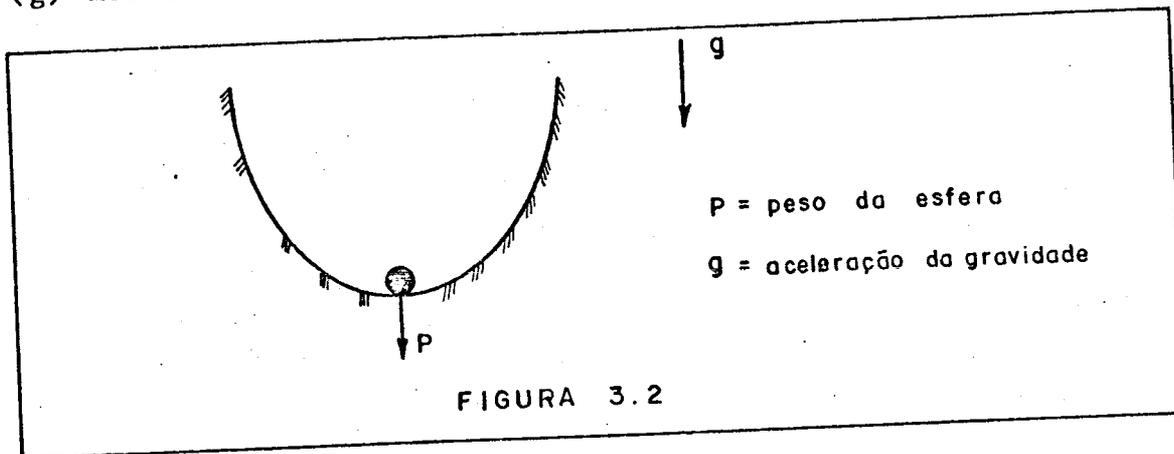
$$\text{Energia} = \pi + T \quad \dots (3.5)$$

onde:

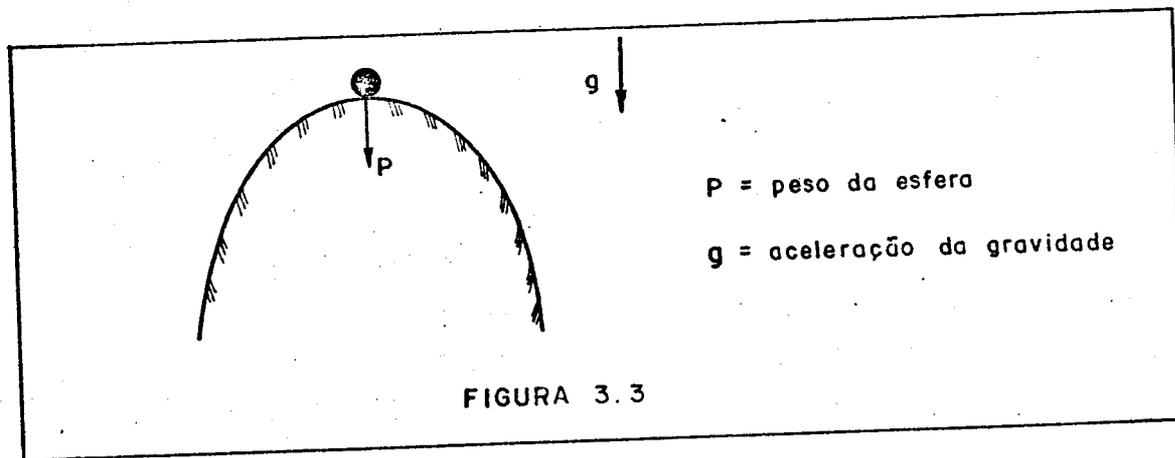
T é energia cinética.

Assim seja uma esfera situada no percurso mostra

do na Fig. 3.2, com o sentido da aceleração da gravidade (g) mostrado.



Observando-se esta figura, nota-se que a esfera tende a permanecer nesta posição ou em locais próximos, se houver uma pequena perturbação. A esfera está em equilíbrio estável pois, uma pequena perturbação corresponderá a variações pequenas das energias potencial e cinética



Para mostrar um caso de equilíbrio instável, seja a Fig. 3.3 em que a esfera está situada em um novo percurso. Percebe-se nesta figura que uma pequena perturbação na esfera fará com que ela abandone a posição de repouso e não passe mais por este local. Em termos de energia, o que ocorre é uma diminuição da energia potencial e um aumento

da energia cinética, indefinidamente. O princípio do equilíbrio instável é que uma perturbação infinitesimal na posição de repouso produzirá grandes variações nas energias cinética e potencial.

Com base nas figuras 3.2 e 3.3, conclui-se que o equilíbrio será estável quando a energia potencial for mínima. Portanto, quando a expressão (3.4) da energia potencial for uma função da posição da estrutura no espaço, a posição de equilíbrio corresponderá a um extremo desta expressão.

O equilíbrio indiferente é caracterizado por uma energia potencial total constante.

3.1 - TIPOS DE PROBLEMAS

3.1.1 - Problemas de Primeira Espécie

Neste tipo de problema, existe uma carga crítica que altera o estado de equilíbrio. Para cargas abaixo da carga crítica, a estrutura ocupa posições de equilíbrio estável e com a pequena deformação dos materiais que resulta em pequenos deslocamentos, é válida a teoria de primeira ordem.

Ao ser atingida a carga crítica, o equilíbrio torna-se indiferente ou seja, a energia potencial total da estrutura é constante. Por ser o equilíbrio indiferente, os grandes deslocamentos correspondentes invalidam a teoria de primeira ordem. Um exemplo de problema de primeira espécie é uma barra esbelta com carga axial cêntrica.

3.1.2 - Problemas de Segunda Espécie

Nestes problemas, desde o início do carregamento, os deslocamentos não são funções lineares das cargas, pela

própria consideração da posição deformada no equilíbrio de um elemento da estrutura, o que inviabiliza a utilização da teoria da primeira ordem. Por outro lado, se o material se guisse indefinidamente a lei de Hooke, por mais aumentado que fosse o carregamento, seu equilíbrio continuaria estável e sem nenhum ponto em que a teoria utilizada no início do carregamento deixasse de ser válida. Um exemplo deste tipo de problema é uma barra esbelta com carga longitudinal excêntrica.

3.2 - ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Nas barras que terão sua estabilidade estudada segundo a teoria de Vlassov [21], as tensões internas consideradas são a tensão normal σ e as tensões cisalhantes τ_ℓ . A energia de deformação, segundo a expressão (3.2), para estas tensões internas é dada por:

$$dU = \frac{1}{\delta} (\sigma \cdot \epsilon + \tau_\ell \gamma_\ell) dx dy dz \quad \dots (3.6)$$

Utilizando-se a lei de Hooke na expressão (3.6), tem-se:

$$dU = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau_\ell^2}{G} \right) dx dy dz \quad \dots (3.7)$$

Substituindo-se, na expressão (3.7), σ e τ_ℓ pelas expressões (2.60) e (2.37), a expressão da energia de deformação da estrutura passa à seguinte forma:

$$U = \int_\ell \int_A \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E} \left(\frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{B}{J_\omega} \omega \right)^2 + \frac{1}{G} \left(2 \frac{M_\ell}{J_t} c_r \right)^2 \right] dA dx \quad \dots (3.8)$$

Desprezando a contribuição da força normal (N), por ser pequena, a energia de deformação reduz-se à expressão:

$$U = \int_{\ell} \int_A \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E} \left(\frac{M_z}{J_z} y - \frac{M_y}{J_y} z + \frac{B}{J_\omega} \omega \right)^2 + \frac{1}{G} \left(2 \frac{M_\ell}{J_t} \cdot c_r \right)^2 \right] dA \cdot dx \quad \dots (3.9)$$

Lembrando-se as condições de ortogonalidade e que um diferencial de área pode ser colocado na forma:

$$dA = d c_r \cdot ds \quad \dots (3.10)$$

A expressão (3.9), quando integrada na secção transversal, torna-se:

$$U = \int_{\ell} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E} \left(\frac{M_z^2}{J_z} + \frac{M_y^2}{J_y} + \frac{B^2}{J_\omega} \right) + \frac{1}{G} \frac{M_\ell^2}{J_t} \right] dx \quad \dots (3.11)$$

A expressão (3.11) representa a energia de deformação colocada em função dos esforços produzidos na estrutura. Para colocar a energia de deformação em função dos deslocamentos v , w e ϕ , deve-se utilizar as relações (2.54), (2.55), (2.56) e (2.39). De acordo com as hipóteses, as barras analisadas são de secção constante e o ponto E , polo das superfícies setoriais, é o centro de flexão. Assim, a expressão da energia de deformação, colocada em função dos deslocamentos v , w e ϕ do centro de flexão (D), é dada por:

$$U = \int_{\ell} \frac{1}{2} \left[E J_z v_D''^2 + E J_y w_D''^2 + E J_\omega \phi_D''^2 + G J_t \phi_D'^2 \right] dx \quad \dots (3.12)$$

3.3 - ENERGIA POTENCIAL DAS TENSÕES DE PRIMEIRA ORDEM NOS DESLOCAMENTOS DE 2ª ORDEM

A necessidade do acréscimo desta parcela fica evidenciada pelo exemplo a seguir.

Seja uma viga com carregamento no plano xy e que assume uma posição deformada com deslocamentos v_D , w_D e ϕ_D de uma secção genérica. Considerando-se as tensões referentes aos deslocamentos w_D e ϕ_D , produzidos pela instabilidade, como pequenas de primeira ordem, seus efeitos recíprocos são de segunda ordem e, portanto, negligenciáveis. Entretanto, as tensões produzidas pelo deslocamento v_D e dependentes do carregamento, terão seu trabalho na rotação da secção não desprezível e portanto, a sua contribuição deverá ser computada.

Com o carregamento sendo feito em dois planos, resultará em somar-se também o trabalho das tensões devidos a w_D , nas rotações, à expressão final da energia de deformação.

Assim, pela não proporcionalidade entre esforço de primeira ordem e deslocamento final, segundo a teoria de segunda ordem, a parcela de energia a ser somada é dada como:

$$V^* = \int_l \int_A (\sigma \cdot \epsilon^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^* + \tau_{xz} \gamma_{xz}^*) dA dx \quad \dots (3.13)$$

onde:

σ é dada pela expressão (2.60).

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{\delta} \left[\frac{Q_y}{J_z} S_z(s) + \frac{Q_z}{J_y} S_y(s) \right] \sin \alpha(s) \quad \dots (3.14)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{1}{\delta} \left[\frac{Q_z}{J_y} S_y(s) + \frac{Q_y}{J_z} S_z(s) \right] \cos \alpha(s) \quad \dots (3.15)$$

O ângulo $\alpha(s)$ é o ângulo que a tangente da linha esqueleto faz com o eixo z, como mostra a Fig. 2.3.

ϵ^* , γ_{xy}^* e γ_{xz}^* , deformações de 2ª ordem, são dadas por:

$$\epsilon^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad \dots (3.16)$$

$$\gamma_{xy}^* = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad \dots (3.17)$$

$$\gamma_{xz}^* = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \quad \dots (3.18)$$

Devido a instabilidade ocorrer com deslocamentos v , w e ϕ , a parcela referente ao deslocamento u deve ser retirada das expressões (3.16), (3.17) e (3.18). Resultam as seguintes expressões para ϵ^* , γ_{xy}^* e γ_{xz}^* :

$$\epsilon^* = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad \dots (3.19)$$

$$\gamma_{xy}^* = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad \dots (3.20)$$

$$\gamma_{xz}^* = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \quad \dots (3.21)$$

3.3.1 - Energia Potencial da Tensão Normal

Quando o carregamento externo produzir momentos fletores de primeira ordem constantes ou nulos e portanto, com tensões cisalhantes de primeira ordem nulas, a energia potencial das tensões de primeira ordem nos deslocamentos de segunda ordem é reduzida a apenas esta parcela. Assim, seja a tensão σ dada pela expressão (2.60):

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y} \cdot z + \frac{M_z}{J_z} \cdot y + \frac{B}{J_\omega} \cdot \omega$$

Substituindo-se na expressão de ϵ^* , dada por (3.19), v e w pelas relações (2.4) e (2.5), a deformação ϵ^* em um ponto qualquer da secção transversal, colocada em função de v , w e ϕ do centro de flexão (D), torna-se:

$$\epsilon^* = \frac{1}{2} \left[v_D'^2 + 2(z-z_D)v_D'\phi_D' + (z-z_D)^2\phi_D'^2 + w_D'^2 + 2(y-y_D)\phi_D'w_D' + (y-y_D)^2\phi_D'^2 \right] \quad \dots (3.22)$$

A energia potencial das tensões normais de primeira ordem tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 V_1^* = & \frac{1}{2} \int_{\ell} \left\{ N \left[v_D'^2 + w_D'^2 + i_D^2 \cdot \phi_D'^2 + 2(y_D w_D' - z_D v_D') \phi_D' \right] + \right. \\
 & + 2 M_z \left[(K_y - y_D) \phi_D'^2 - \phi_D' w_D' \right] - 2 M_y \left[(K_z - z_D) \phi_D'^2 + v_D' \phi_D' \right] + \\
 & \left. + B \frac{U_\omega}{J_\omega} \phi_D'^2 \right\} \cdot dx \quad \dots (3.23)
 \end{aligned}$$

Nesta expressão tem-se:

i_D é o raio de giração polar em relação a um eixo passando pelo centro de flexão e com a definição

$$i_D^2 = y_D^2 + z_D^2 + \frac{J_y + J_z}{A} \quad \dots (3.24)$$

K_y e K_z são [21] as coordenadas do centro do círculo de estabilidade nos eixos y e z , respectivamente.

Suas expressões são:

$$K_y = \frac{1}{2J_z} \int_A y(y^2 + z^2) dA \quad \dots (3.25)$$

$$K_z = \frac{1}{2J_y} \int_A z(y^2 + z^2) dA \quad \dots (3.26)$$

U_ω - Vlassov [21] definiu esta nova característica, de mesma dimensão que o momento setorial de inércia, com a seguinte expressão:

$$U_\omega = \int_A \omega (y^2 + z^2) dA \quad \dots (3.27)$$

3.3.2 - Energia Potencial das Tensões Cisalhantes

Quando existem tensões cisalhantes, deve-se acrescentar esta parcela de energia à expressão (3.23). Para calcular-se a energia potencial das tensões cisalhantes nas rotações da secção transversal, despreza-se a contribuição da energia potencial da cortante por ser pequena frente àquela do momento fletor relacionado; as expressões para γ_{xy}^* e γ_{xz}^* tornam-se:

$$\gamma_{xy}^* = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad \dots (3.28)$$

$$\gamma_{xz}^* = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \quad \dots (3.29)$$

Substituindo-se, nas expressões (3.28) e (3.29), v e w pelas relações (2.4) e (2.5), as deformações γ_{xy}^* e γ_{xz}^* colocadas em função dos deslocamentos v , w e ϕ do centro de flexão (D) ficam com a seguinte forma:

$$\gamma_{xy}^* = -\phi_D \left[w_D' - (y - y_D) \phi_D' \right] \quad \dots (3.30)$$

$$\gamma_{xz}^* = \phi_D \left[v_D' + (z - z_D) \phi_D' \right] \quad \dots (3.31)$$

Assim, utilizando-se para γ_{xy}^* e γ_{xz}^* as expressões (3.30) e (3.31), respectivamente, a energia potencial das tensões cisalhantes é dada por:

$$V_2^* = \int_{\ell} \int_A \left\{ \tau_{xy} \cdot \phi_D \left[-w_D' + (y - y_D) \phi_D' \right] + \tau_{xz} \cdot \phi_D \left[v_D' + (z - z_D) \phi_D' \right] \right\} dA \cdot dx \quad \dots (3.32)$$

Utilizam-se, para τ_{xy} e τ_{xz} as expressões (3.14) e (3.15). Pode-se demonstrar:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \int_{\ell} \int_A \tau_{xy} \phi_D (y - y_D) \phi_D' \, dA \, dx + \int_{\ell} \int_A \tau_{xz} \phi_D (z - z_D) \phi_D' \, dA \, dx = \\
 & = \int_{\ell} Q_y \phi_D (y_c - y_D) \phi_D' \, dx + \int_{\ell} Q_z \phi_D (z_c - z_D) \phi_D' \, dx \quad \dots (3.33)
 \end{aligned}$$

onde y_c e z_c são as coordenadas do ponto de aplicação da carga transversal.

$$\text{b)} \quad \int_A \frac{1}{\delta} S_z(s) \operatorname{sen} \alpha(s) \, dA = -J_z \quad \dots (3.34)$$

$$\int_A \frac{1}{\delta} S_y(s) \operatorname{cos} \alpha(s) \, dA = -J_y \quad \dots (3.35)$$

$$\int_A \frac{1}{\delta} S_z(s) \operatorname{cos} \alpha(s) \, dA = 0 \quad \dots (3.36)$$

$$\int_A \frac{1}{\delta} S_y(s) \operatorname{sen} \alpha(s) \, dA = 0 \quad \dots (3.37)$$

A expressão (3.32) se reduz à forma:

$$\begin{aligned}
 V_2^* = \int_{\ell} \left[-Q_y w_D' \phi_D + Q_z v_D' \phi_D + Q_y (y_c - y_D) \phi_D' \phi_D + \right. \\
 \left. + Q_z (z_c - z_D) \phi_D' \phi_D \right] dx \quad \dots (3.38)
 \end{aligned}$$

As relações entre cortantes e momentos são dadas

por:

$$Q_z = -M_y' \quad \dots (3.39)$$

$$Q_y = M_z' \quad \dots (3.40)$$

Colocando-se estas relações na expressão (3.38), resulta:

$$V_2^* = \int_{\ell} \left\{ M'_z \left[(y_c - y_D) \phi'_D \phi_D - w'_D \phi_D \right] - M'_y \left[(z_c - z_D) \phi'_D \phi_D + v'_D \phi_D \right] \right\} dx \quad \dots (3.41)$$

3.4 - Energia Potencial das Cargas Transversais

As cargas transversais são constituídas por:

- a) Forças distribuídas q_y e q_z e forças concentradas P_y e P_z , aplicadas nas direções y e z , respectivamente.
- b) Momentos ME_y e ME_z cujos planos de ação são perpendiculares aos eixos y e z , respectivamente.
- c) Momento torçor M_t e carga torçora distribuída m .
- d) Bimomento B_e .

A energia potencial de qualquer um dos carregamentos pode ser escrita, genericamente, como:

$$V_e = - F_a d_d \quad \dots (3.42)$$

onde:

F_a é o carregamento aplicado

d_d é o deslocamento medido na direção e sentido deste carregamento externo.

A energia potencial das cargas transversais pode ser separada nas seguintes parcelas:

- a) Cargas concentradas P_y e P_z e cargas distribuídas q_y e q_z .

$$V_{e1} = -P_{yi} v_i - P_{zi} w_i - \int_{\ell} (q_y v_D + q_z w_D) dx \quad \dots (3.43)$$

onde os deslocamentos são aqueles do centro de flexão nas seções.

b) Momentos ME_y e ME_z

$$V_{e2} = -ME_{yi} \cdot w_i' - ME_{zi} \cdot v_i' \quad \dots (3.44)$$

c) Momento de torção concentrado M_t e carga torçora distribuída m .

$$V_{e3} = M_{ti} \cdot \phi_i + \int_{\ell} m \phi_D dx \quad \dots (3.45)$$

Na expressão (3.45) a ausência do sinal negativo é devida à convenção de cargas torçoras e ângulo de rotação ϕ , positivos, ser contrária.

d) Bimomento (B_e)

As tensões normais externas que representam o bimomento aplicado são distribuídas segundo a lei:

$$\sigma_e = \frac{B_{ei}}{J_{\omega}} \cdot \omega \quad \dots (3.46)$$

Sabendo-se que os deslocamentos dos pontos de aplicação destas tensões seguem a lei das superfícies setoriais e dado por:

$$u_e = \phi_i' \cdot \omega \quad \dots (3.47)$$

A energia potencial do bimomento aplicado será dada por:

$$V_{e4} = - \int_A \sigma_e u_e dA \quad \dots (3.48)$$

Substituindo-se na expressão (3.48) σ_e e u_e pe-

las relações (3.46) e (3.47), respectivamente, e fazendo-se a integração, resulta:

$$V_{e4} = - B_{ei} \phi_i' \quad \dots (3.49)$$

A energia potencial das cargas externas, que é a soma das expressões (3.43), (3.44), (3.45), (3.49), pode ser escrita, em sua forma completa, como:

$$V_e = - \sum P_{yi} v_i - \sum P_{zi} w_i - \sum ME_{yi} w_i' - \sum ME_{zi} v_i' + \sum M_{ti} \phi_i + \\ - \sum BE_i \phi_i' + \int_{\ell} (m\phi_D - q_y v_D - q_z w_D) dx \quad \dots (3.50)$$

3.5 - ENERGIA POTENCIAL TOTAL

Somando-se a energia de deformação (3.12) com a energia potencial das tensões de primeira ordem nos deslocamentos de 2ª, dada pelas parcelas (3.23) e (3.41), e a energia potencial das cargas transversais externas, dada por (3.50), obtém-se a expressão da energia potencial total que, colocada na forma de um funcional, é do tipo:

$$\pi = \int_{\ell} F(v_D, v_D', v_D'', w_D, w_D', w_D'', \phi_D, \phi_D', \phi_D'') dx - \sum P_{yi} v_i - \sum P_{zi} w_i + \\ - \sum ME_{yi} w_i' - \sum ME_{zi} v_i' - \sum BE_i \phi_i' + \sum M_{ti} \phi_i \quad \dots (3.51)$$

onde:

$$F = \frac{1}{2} \left\{ E J_z v_D''^2 + E J_y w_D''^2 + E J_{\omega} \phi_D''^2 + G J_t \phi_D'^2 + N \left[v_D'^2 + w_D'^2 + i_D^2 \phi_D'^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(y_D w_D' - z_D v_D') \phi_D' \right] + B \frac{U}{J_{\omega}} \phi_D'^2 + 2 M_z \left[(K_y - y_D) \phi_D'^2 - \phi_D' w_D' \right] + \right. \\ \left. - 2 M_y \left[(K_z - z_D) \phi_D'^2 + \phi_D' v_D' \right] + 2 M_z' \left[(y_c - y_D) \phi_D' \phi_D - w_D' \phi_D \right] + \right.$$

$$-2M'_y \left[(z_c - z_D) \phi_D \phi'_D + v'_D \phi_D \right] + 2m\phi_D - 2q_y v_D - 2q_z w_D \} \dots (3.52)$$

A energia total será extrema na posição de equilíbrio. Para encontrar o extremo do funcional (π), recorre-se às equações de Euler, ou seja:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v_D} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial v'_D} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial v''_D} \right) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial w_D} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'_D} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''_D} \right) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \phi_D} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi'_D} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \phi''_D} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (3.53)$$

A aplicação das equações (3.53) para o funcional da energia potencial total conduz às seguintes equações diferenciais nas funções v_D , w_D e ϕ_D :

$$E J_z v_D^{IV} - \left[N(v'_D - z_D \phi'_D) \right]' + (M_y \phi_D)'' - q_y = 0 \dots (3.54)$$

$$E J_y w_D^{IV} - \left[N(w'_D + y_D \phi'_D) \right]' + (M_z \phi_D)'' - q_z = 0 \dots (3.55)$$

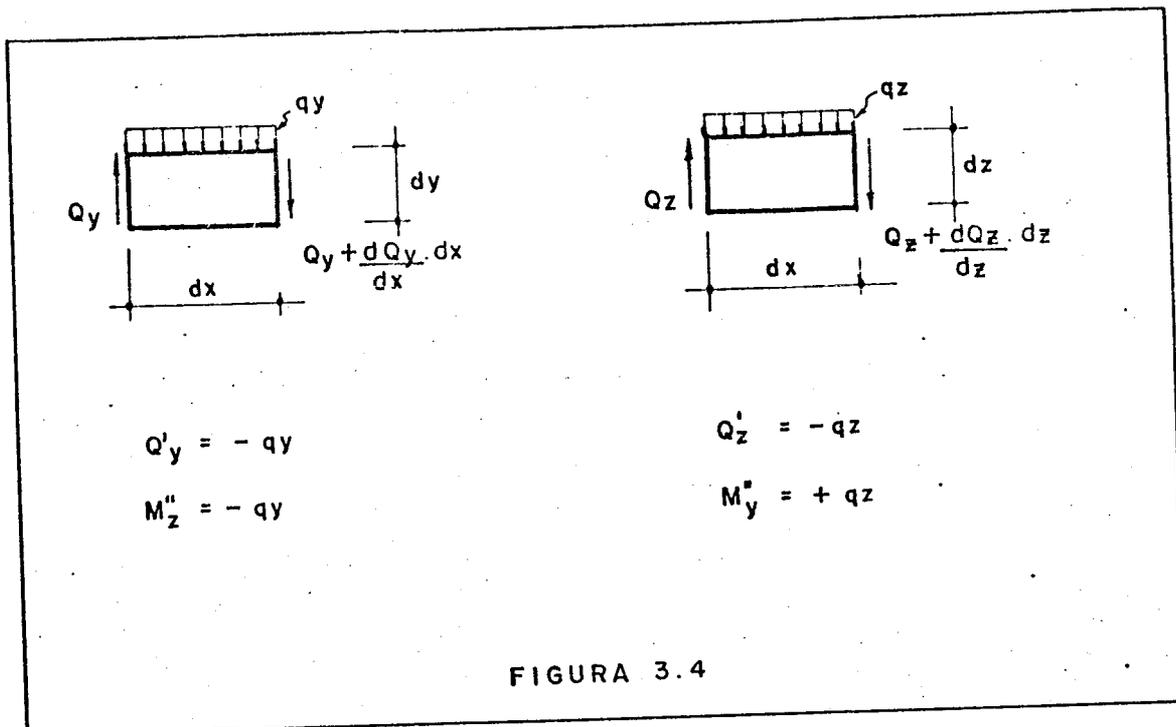
$$\begin{aligned} E J_\omega \phi_D^{IV} - G J_t \phi_D'' - \left\{ \left[N i_D^2 + 2M_z (K_y - y_D) - 2M_y (K_z - z_D) + \frac{B U_\omega}{J_\omega} \right] \phi'_D + \right. \\ \left. + N(y_D w'_D - z_D v'_D) \right\}' + M_z w_D'' + M_y v_D'' + m + \left[M_y'' (z_c - z_D) + \right. \\ \left. - M_z'' (y_c - y_D) \right] \phi_D = 0 \dots (3.56) \end{aligned}$$

onde:

$$M_y'' = q_z \dots (3.57)$$

$$M_z'' = -q_y \dots (3.58)$$

As relações (3.57) e (3.58) são explicadas na Fig. 3.4 em que utilizaram-se as relações (3.39) e (3.40).



As funções encontradas para v_D , w_D e ϕ_D , soluções das equações diferenciais, são as que tornam extremo este funcional e portanto, aquelas da posição de equilíbrio. Em alguns problemas a procura do extremo do funcional leva a equações diferenciais cuja solução direta é extremamente trabalhosa ou mesmo impossível, o que resulta na utilização de processos aproximados.

Um processo muito conhecido para encontrarem-se soluções aproximadas é um que foi convenientemente utilizado, pela primeira vez no estudo de vibrações, por Rayleigh.

O método de Rayleigh parte da idéia que um sistema mecânico com infinitos graus de liberdade pode ser reduzido a um sistema com um número finito de graus de liberdade por meio de hipóteses a respeito da natureza das deformações. Na pesquisa do extremo do funcional (3.51), este processo consiste na escolha de funções aproximadas para os deslocamentos dependentes de alguns parâmetros, e o problema de encontrar-se o extremo de um funcional transform-

ma-se no problema de encontrar o extremo de uma função com um número finito de variáveis, que são os parâmetros. Ritz em 1909, refinou e generalizou este método, impondo que as funções escolhidas satisfizessem as condições de contorno. Sobre a convergência da solução aproximada para a solução exata, Ritz afirmou que as funções escolhidas seriam exatas quando elas formassem uma base do espaço vetorial de soluções, no intervalo considerado. Entretanto o maior inconveniente deste método é a escolha adequada das funções, as quais, para cada caso particular, devem satisfazer as condições de contorno do problema. Além disso, as integrações que devem ser feitas podem tornar o problema extremamente trabalhoso.

3.6 - PROBLEMAS ANALISADOS

Nos problemas de primeira espécie, também chamados de auto valor, até o valor da carga crítica, o equilíbrio é estável e resulta um valor nulo para os deslocamentos. Quando a carga atinge o valor crítico, a viga passa a ocupar uma posição de equilíbrio indiferente, caracterizada pelo fato de que as funções v_D , w_D e ϕ_D , que definem essa nova posição, são determinadas apenas na sua forma.

A resolução do problema de primeira espécie pelo método de Ritz conduz a um sistema de equações homogêneas nos parâmetros. A carga crítica será aquela que anula o determinante deste sistema e torna as equações linearmente dependentes. Os parâmetros serão determinados em função de um, pelo menos, o que mostra que o conhecimento da elástica dar-se-á apenas em sua forma.

Nos problemas de segunda espécie não se define carregamento crítico pois não existe uma carga a partir da qual muda o estado de equilíbrio. Portanto, o equilíbrio é sempre estável independentemente se há aumento indefinido do valor do carregamento desde a posição descarregada.

Devido a aproximação utilizada, para cargas próximas do carregamento crítico do problema de primeira espécie relacionado, existirá uma variação grande no valor dos deslocamentos para uma pequena variação da carga .

A resolução de problemas de segunda espécie, pelo método de Ritz, conduz a um sistema linear não homogêneo nos parâmetros, o que determina de maneira única os seus valores. O fator determinante nas vigas, em problemas de segunda espécie, será a tensão admissível pois, se esta tensão fosse infinita, o carregamento, por mais aumentado que fosse, produziria maiores deslocamentos mas, não alteraria o equilíbrio da viga. Assim, nestes problemas define-se um carregamento de ruptura, que é aquele em que a tensão admissível estará sendo atingida, em uma seção qualquer da viga, pelo menos.

4. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Para a resolução dos problemas de instabilidade optou-se pela utilização do método dos elementos finitos.

O método dos elementos finitos consiste numa sistematização do processo de Ritz para a utilização do computador.

A viga, chamada de domínio, é dividida em segmentos de barra, chamados sub-domínios, que são os elementos finitos mostrados mostrados na Fig. 4.1.

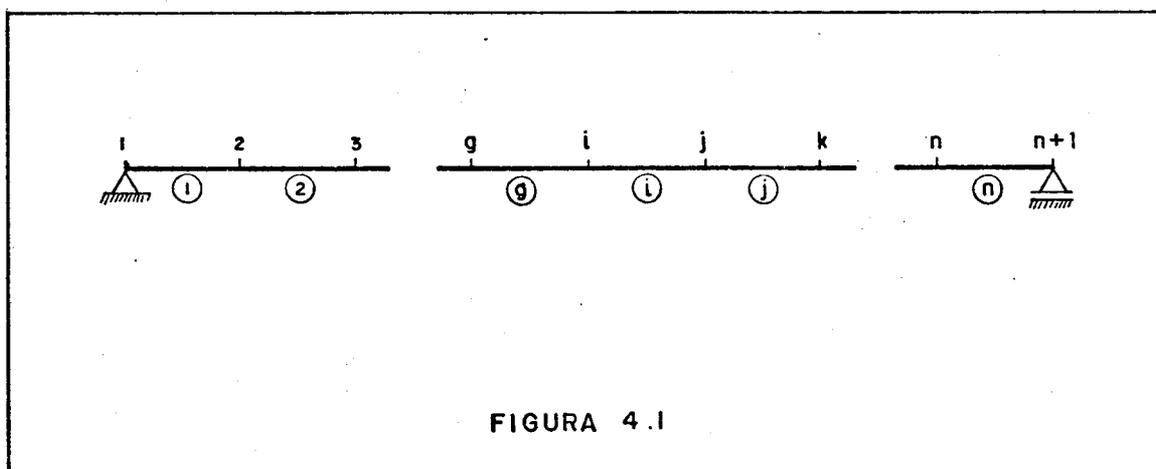


FIGURA 4.1

Aos pontos de conexão entre os elementos finitos dá-se o nome de nós e, para a viga da Fig. 4.1, com n elementos finitos, existem $n+1$ nós. Aos nós associam-se parâmetros que, neste estudo, são em número de seis, sendo para um nó i , genérico, os seguintes:

- a) ordenada da elástica w_D no ponto (w_i)
- b) primeira derivada de w_D no ponto (w_i')
- c) ordenada da elástica v_D no ponto (v_i)
- d) primeira derivada de v_D no ponto (v_i')
- e) rotação ϕ_D no ponto (ϕ_i)
- f) primeira derivada de ϕ_D no ponto (ϕ_i')

onde v_D e w_D referem-se aos deslocamentos do centro de flexão (D) e ϕ_D à rotação da secção transversal.

A um elemento finito individual associaram-se funções independentes para w_D , v_D e ϕ_D do tipo parábola de 3º grau em função dos correspondentes parâmetros de nó. Assim, com eixo x local, como mostra a Fig. 4.2, têm-se as expressões de v_D , w_D e ϕ_D utilizando a notação de produto interno de vetores.

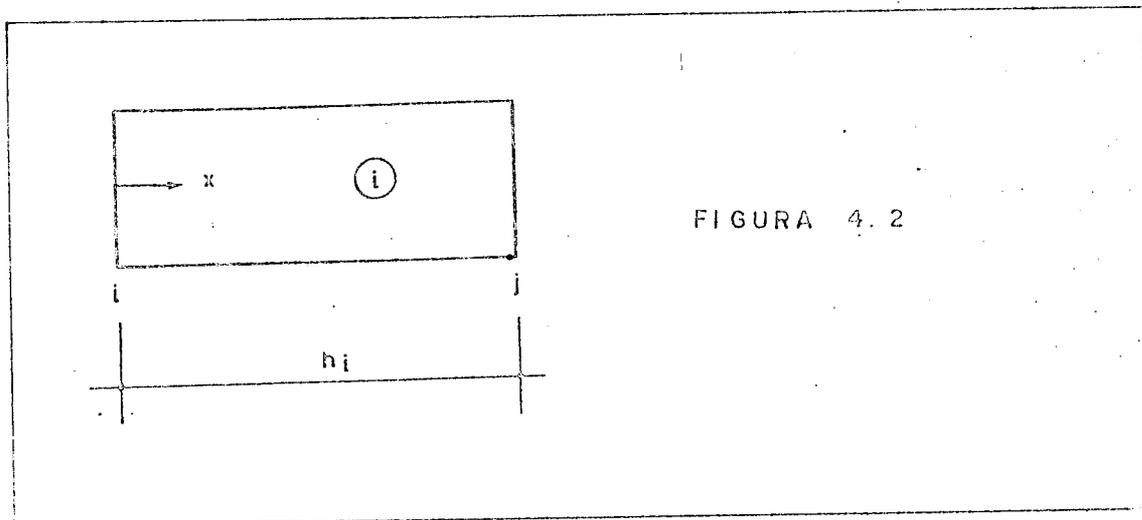


FIGURA 4.2

$$v_D = \tilde{R} \cdot \tilde{v}^n \quad \dots (4.1)$$

$$w_D = \tilde{R} \cdot \tilde{w}^n \quad \dots (4.2)$$

$$\phi_D = \tilde{R} \cdot \tilde{\phi}^n \quad \dots (4.3)$$

onde:

$$\underline{\tilde{R}} = \{1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, h_i(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), 3\xi^2 - 2\xi^3, h_i(-\xi^2 + \xi^3)\} \dots (4.4)$$

$$\xi = \frac{x}{h_i} \dots (4.5)$$

$$\underline{\tilde{v}}^{n,t} = \{v_i, v_i', v_j, v_j'\} \dots (4.6)$$

$$\underline{\tilde{w}}^{n,t} = \{w_i, w_i', w_j, w_j'\} \dots (4.7)$$

$$\underline{\tilde{\phi}}^{n,t} = \{\phi_i, \phi_i', \phi_j, \phi_j'\} \dots (4.8)$$

(o índice t como expoente indica matriz transposta).

Para as expressões das primeira e segunda derivadas, têm-se:

$$v_D' = \frac{1}{h_i} \cdot \underline{\tilde{R}}' \cdot \underline{\tilde{v}}^n \dots (4.9)$$

$$w_D' = \frac{1}{h_i} \cdot \underline{\tilde{R}}' \cdot \underline{\tilde{w}}^n \dots (4.10)$$

$$\phi_D' = \frac{1}{h_i} \cdot \underline{\tilde{R}}' \cdot \underline{\tilde{\phi}}^n \dots (4.11)$$

$$v_D'' = \frac{1}{h_i^2} \cdot \underline{\tilde{R}}'' \cdot \underline{\tilde{v}}^n \dots (4.12)$$

$$w_D'' = \frac{1}{h_i^2} \cdot \underline{\tilde{R}}'' \cdot \underline{\tilde{w}}^n \dots (4.13)$$

$$\phi_D'' = \frac{1}{h_i^2} \cdot \underline{\tilde{R}}'' \cdot \underline{\tilde{\phi}}^n \dots (4.14)$$

onde:

$$\underline{\tilde{R}}' = \{-6\xi + 6\xi^2, h_i(1 - 4\xi + 3\xi^2), 6\xi - 6\xi^2, h_i(-2\xi + 3\xi^2)\} \dots (4.15)$$

$$\underline{\tilde{R}}'' = \{-6 + 12\xi, h_i(-4 + 6\xi), 6 - 12\xi, h_i(-2 + 6\xi)\} \dots (4.16)$$

Com as expressões (4.1) a (4.16) e o funcional da estrutura, dado por (3.51), integrado no comprimento h_i do elemento finito, tem-se a energia total de um elemento em função dos parâmetros nodais incógnitos:

$$\pi = F(v_i, v_i', w_i, w_i', \phi_i, \phi_i', v_j, v_j', w_j, w_j', \phi_j, \phi_j') \dots (4.17)$$

Como é de interesse encontrar o extremo do funcional, o que se faz é igualar a zero a primeira variação do mesmo, assim:

$$\begin{aligned} \delta F = & \frac{\partial F}{\partial v_i} \delta v_i + \frac{\partial F}{\partial v_i'} \delta v_i' + \frac{\partial F}{\partial w_i} \delta w_i + \frac{\partial F}{\partial w_i'} \delta w_i' + \frac{\partial F}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial F}{\partial \phi_i'} \delta \phi_i' + \\ & + \frac{\partial F}{\partial v_j} \delta v_j + \frac{\partial F}{\partial v_j'} \delta v_j' + \frac{\partial F}{\partial w_j} \delta w_j + \frac{\partial F}{\partial w_j'} \delta w_j' + \frac{\partial F}{\partial \phi_j} \delta \phi_j + \frac{\partial F}{\partial \phi_j'} \delta \phi_j' \dots (4.18) \end{aligned}$$

Devido aos acréscimos de $\delta v_i, \dots, \delta \phi_j'$, na expressão (4.18), serem arbitrários, resulta um sistema de 12 equações lineares nos parâmetros $v_i, v_i', w_i, w_i', \phi_i, \phi_i', v_j, v_j', w_j, w_j', \phi_j$ e ϕ_j' .

O motivo do sistema de equações ser linear é devido à lei de Hooke, onde as deformações são lineares com as tensões correspondentes.

Assim, o método dos elementos finitos transforma o trabalho de se encontrar a função que satisfaz um extremo de determinado funcional, na procura do extremo de uma função com n parâmetros e, neste caso, na resolução de um sistema de equações lineares que determine os valores da função incógnita nos pontos desejados. A aproximação será melhor quanto maior for o número de elementos em que se divide a estrutura.

4.1 - MONTAGEM DA MATRIZ DO ELEMENTO

A matriz de um elemento, que formará a matriz da estrutura, é montada na disposição mostrada na Fig. 4.3. Nota-se nesta figura que a primeira linha provém da primeira variação da energia do elemento em relação ao deslocamento v_i e seguindo-se a ordem $v_i', w_i, w_i', \phi_i, \phi_i', v_j, v_j', w_j, w_j', \phi_j, \phi_j'$ tanto na seqüência de linhas das variações como na disposição do vetor das incógnitas.

	v_i	v_i'	w_i	w_i'	ϕ_i	ϕ_i'	v_j	v_j'	w_j	w_j'	ϕ_j	ϕ_j'
δv_i												
$\delta v_i'$												
δw_i												
$\delta w_i'$												
$\delta \phi_i$												
$\delta \phi_i'$												
δv_j												
$\delta v_j'$												
δw_j												
$\delta w_j'$												
$\delta \phi_j$												
$\delta \phi_j'$												

FIGURA 43

Pelo processo de resolução ser computacional e devido ao fato de as funções v_D, w_D e ϕ_D , no elemento, serem iguais, a menos dos parâmetros incógnitos, optou-se pe

la montagem da matriz final através da soma conveniente de matrizes básicas.

Considerando-se o funcional dado pela expressão (3.51), percebe-se a existência de quatro matrizes básicas, ou seja:

- a) Matriz do primeiro tipo, dependente do quadrado da segunda derivada da função aproximadora, presente nos termos:

$$F_1 = \int_{h_i} \frac{1}{2} (E J_y w_D''^2 + E J_z v_D''^2 + E J_\omega \phi_D''^2) dx \quad \dots (4.19)$$

- b) Matriz do segundo tipo, dependente do quadrado primeira derivada da função aproximadora ou do produto de primeira derivada de funções aproximadoras diferentes, presente nos seguintes termos:

$$F_2 = \int_{h_i} \frac{1}{2} \left\{ G J_t \phi_D'^2 + N \left[v_D'^2 + w_D'^2 + i_D^2 \phi_D'^2 + 2(y_D w_D' + z_D v_D') \phi_D' \right] + 2 M_z \left[(K_y - y_D) \phi_D'^2 - \phi_D' w_D' \right] + 2 M_y \left[(K_z - z_D) \phi_D'^2 + \phi_D' v_D' \right] \right\} dx \quad \dots (4.20)$$

- c) Matriz do terceiro tipo, dependente do produto da função aproximadora pela primeira derivada desta ou de outra função aproximadora, presente nos termos:

$$F_3 = \int_{h_i} M_z' \left[(y_c - y_D) \phi_D' \phi_D - w_D' \phi_D \right] - M_y' \left[(z_c - z_D) \phi_D' \phi_D + v_D' \phi_D \right] dx \quad \dots (4.21)$$

- d) Matriz do quarto tipo representando a influência do bimomento:

$$F_4 = \int_{h_i} B \cdot \frac{U_\omega}{J_\omega} \phi_D'^2 \cdot dx \quad \dots (4.22)$$

Os esforços de primeira ordem, presentes no funcional (3.51), foram aproximados no elemento. A normal (N) foi assumida com variação linear, os momentos fletores como parábolas de segundo grau e o bimomento como soma de funções hiperbólicas. As expressões destes esforços são:

$$N(x) = N_i + (N_j - N_i) \cdot \xi \quad \dots (4.23)$$

$$M_y(x) = M_{yi} + (M_{yj} - M_{yi} - \frac{1}{2} q_{zi} h_i^2) \xi + \frac{1}{2} q_{zi} h_i^2 \xi^2 \quad (4.24)$$

$$M_z(x) = M_{zi} + (M_{zj} - M_{zi} + \frac{1}{2} q_{yi} h_i^2) \xi - \frac{1}{2} q_{yi} h_i^2 \xi^2 \quad (4.25)$$

$$B(x) = \frac{(B_j - r^2 m_i) - (B_i - r^2 m_i) \cosh(\frac{h}{r})}{\sinh(\frac{h}{r})} \sinh(\frac{x}{r}) + \\ + (B_i - r^2 m_i) \cosh(\frac{x}{r}) + r^2 m_i \quad \dots (4.26)$$

onde os índices i e j na força normal, nos momentos fletores e no bimomento referem-se aos números dos nós inicial e final, enquanto nas cargas uniformemente distribuídas o índice i refere-se ao número do elemento. Os sentidos destes esforços são aqueles das definições (2.46), (2.47), (2.48) e (2.51); para o sentido das cargas transversais distribuídas, assume-se o dos eixos y e z, respectivamente e, da carga distribuída de torção é contrário ao giro ϕ .

4.2 - MATRIZ DO PRIMEIRO TIPO

Esta matriz é obtida a partir do funcional F_1 dado por (4.19). As parcelas de F_1 produzem a matriz M_1 da seguinte forma:

$$a) \quad F_{1a} = \int_{h_i} \frac{1}{2} (E J_y w_D''^2) dx \quad \dots (4.27)$$

Substituindo-se w'' pela equação (4.13), obtêm-se:

$$F_{1a} = \underline{w}^{n,t} \frac{1}{2h_i^3} \left[\int_1 (R''^{n,t} \cdot E J_y \cdot R'') d\xi \right] \underline{w}^n \dots (4.28)$$

Fazendo-se a primeira variação de F_{1a} na expressão (4.28) e chamando-se o resultado da integral entre colchetes de matriz M_1 , mostrada na Fig. 4.4, a expressão da

	c_i'	c_i	c_j	c_j'
$\delta c_i'$	12α	$6 \alpha h_i$	-12α	$6 \alpha h_i$
δc_i		$4 \alpha h_i^2$	$-6 \alpha h_i$	$2 \alpha h_i^2$
δc_j			12α	$-6 \alpha h_i$
$\delta c_j'$				$4 \alpha h_i^2$

onde α e um fator de multiplicação

- FIGURA 4.4

primeira variação torna-se:

$$\delta F_{1a} = \delta \underline{w}^{n,t} \cdot \frac{1}{h_i^3} \cdot M_1 \cdot \underline{w}^n \dots (4.29)$$

onde, na matriz M_1 têm-se:

$$\alpha = E J_y$$

$$c = w$$

$$b) \quad F_{1b} = \int_{h_i} \frac{1}{2} (E J_z v_D''^2) dx \quad \dots (4.30)$$

Analogamente a F_{1a} , a primeira variação de F_{1b} produz a matriz M_1 da seguinte forma:

$$\delta F_{1b} = \delta \underline{v}^{n,t} \cdot \frac{1}{h_i} \cdot M_1 \cdot \underline{v}^n \quad \dots (4.31)$$

onde na matriz M_1 , têm-se:

$$\alpha = E J_z$$

$$c = v$$

$$c) \quad F_{1c} = \int_{h_i} \frac{1}{2} (E J_\omega \phi_D''^2) dx \quad \dots (4.32)$$

Para a primeira variação F_{1c} , analogamente às parcelas anteriores, resulta:

$$\delta F_{1c} = \delta \underline{\phi}^{n,t} \cdot \frac{1}{h_i} \cdot M_1 \cdot \underline{\phi}^n \quad \dots (4.33)$$

onde, na matriz M_1 têm-se:

$$\alpha = E J_\omega$$

$$c = \phi$$

As matrizes resultantes de F_1 são somadas convenientemente na matriz do elemento mostrada na Fig. 4.3.

4.3 - MATRIZ DO SEGUNDO TIPO

A matriz do segundo tipo M_2 é obtida a partir da primeira variação do funcional F_2 dado por (4.20), analogamente ao mostrado no item 4.2. A matriz M_2 é mostrada na Fig. 4.5, onde a e c são os deslocamentos v , w ou ϕ .

As parcelas de F_2 relacionam-se com a matriz M_2 da seguinte forma:

	e_i	e_i'	e_j	e_j'
δa_i	$\frac{12\alpha + 6\beta + 24\gamma}{5}$	$h_i \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{5} \right)$	$\frac{-12\alpha - 6\beta - 24\gamma}{5}$	$h_i \left(\frac{\alpha - \gamma}{5} \right)$
$\delta a_i'$		$h_i^2 \left(\frac{4\alpha + \beta + 4\gamma}{15} \right)$	$h_i \left(\frac{-\alpha - \beta - \gamma}{5} \right)$	$h_i^2 \left(\frac{-\alpha - \beta - \gamma}{15} \right)$
δa_j			$\frac{12\alpha + 6\beta + 24\gamma}{5}$	$h_i \left(\frac{-\alpha + 2\gamma}{5} \right)$
$\delta a_j'$				$h_i^2 \left(\frac{4\alpha + \beta + 6\gamma}{15} \right)$

α, β, γ : Fatores de multiplicação

FIGURA 4.5

$$a) \quad \delta F_{2a} = \int_{h_i} \frac{1}{2} \left[G J_t + N i_D^2 + 2 M_z (K_y - y_D) - 2 M_y (K_z - z_D) \right] \phi_D'^2 dx \quad \dots (4.34)$$

$$F_{2a} = \delta \tilde{\phi}^{n,t} \cdot \frac{1}{h_i} \cdot M_2 \cdot \tilde{\phi}^n \quad \dots (4.35)$$

onde na matriz M_2 , têm-se:

$$a = \phi$$

$$c = \phi$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (G J_t + N_i i_{D_i}^2) + M_{z_i} (K_y - y_D)_i - M_{y_i} (K_z - z_D)_i$$

$$\beta = \frac{1}{2} (N_j - N_i) i_{D_i}^2 + (M_{z_j} - M_{z_i} + \frac{1}{2} q y_i h_i^2) (K_y - y_D)_i +$$

$$- (M_{y_j} - M_{y_i} - \frac{1}{2} q z_i h_i^2) (K_z - z_D)_i$$

$$\gamma = - \frac{1}{2} q y_i h_i^2 (K_z - z_D)_i - \frac{1}{2} q z_i (K_y - y_D)_i h_i^2$$

$$b) F_{2b} = \int_{h_i} \frac{1}{2} \cdot N \cdot v_D'^2 \cdot dx \quad \dots (4.36)$$

$$\delta F_{2b} = \delta \tilde{v}^{n,t} \cdot \frac{1}{h_i} \cdot M_2 \cdot \tilde{v}^n \quad \dots (4.37)$$

onde na matriz M_2 , têm-se:

$$a = v$$

$$c = v$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot N_i$$

$$\beta = \frac{1}{2} (N_j - N_i)$$

γ é nulo.

$$c) F_{2c} = \int_{h_i} \frac{1}{2} \cdot N \cdot w_D'^2 \cdot dx \quad \dots (4.38)$$

$$\delta F_{2c} = \delta \tilde{w}^{n,t} \cdot \frac{1}{h_i} \cdot M_2 \cdot \tilde{w}^n \quad \dots (4.39)$$

onde:

$$a = w$$

$$c = w$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot N_i$$

$$\beta = \frac{1}{2} (N_j - N_i)$$

γ é nulo.

$$d) F_{2d} = \int_{h_i} (N y_D - M_z) w'_D \phi'_D dx \quad \dots (4.40)$$

$$\delta F_{2d} = \delta \tilde{w}^{n,t} \cdot \frac{1}{h_i} \cdot M_2 \cdot \phi^n + \delta \phi^n \cdot \frac{1}{h_i} (M_2)^t \tilde{w}^n$$

onde, na matriz M_2 , têm-se:

$$a = w$$

$$c = \phi$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (N_i y_{Di} - M_{zi})$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left[(N_j - N_i) y_{Di} - M_{zj} + M_{zi} - \frac{1}{2} q y_i h_i^2 \right]$$

$$\gamma = \frac{1}{4} q y_i h_i^2$$

$$e) F_{2e} = - \int_{h_i} (N_{zD} + M_y) v'_D \phi'_D \cdot dx \quad \dots (4.42)$$

$$\delta F_{2e} = \delta \tilde{v}^{n,t} \cdot \frac{1}{h_i} \cdot M_2 \cdot \phi^n + \delta \phi^{n,t} \cdot \frac{1}{h_i} (M_2)^t \cdot \tilde{v}^n \quad (4.43)$$

onde valem as relações:

$$a = v$$

$$c = \phi$$

$$\alpha = - \frac{1}{2} \left[N_i z_{Di} + M_{yi} \right]$$

$$\beta = - \frac{1}{2} \left[(N_j - N_i) z_{D_i} + M_{y_j} - M_{y_i} - \frac{1}{2} q z_i h_i^2 \right]$$

$$\gamma = - \frac{1}{4} q z_i h_i^2$$

Analogamente ao que foi feito no item 4.2, as matrizes resultantes de F_2 são somadas convenientemente à matriz do elemento mostrada na Fig. 4.3.

4.4 - MATRIZ DO TERCEIRO TIPO

Esta matriz, obtida a partir da primeira variação do funcional F_3 dado por (4.21), somente é diferente de zero quando da existência de carregamento transversal.

O funcional F_3 usa derivadas dos momentos fletores que, de acordo com as expressões (4.24) e (4.25), são:

$$M'_y(x) = \frac{1}{h_i} (M_{y_j} - M_{y_i} - \frac{1}{2} q z_i h_i^2) + q z_i h_i \xi \quad \dots (4.44)$$

$$M'_z(x) = \frac{1}{h_i} (M_{z_j} - M_{z_i} + \frac{1}{2} q y_i h_i^2) - q y_i h_i \xi \quad \dots (4.45)$$

O cálculo da primeira variação procede-se como o mostrado no item 4.2, com a utilização das expressões (4.44) e (4.45) para as derivadas dos momentos fletores. A matriz do terceiro tipo M_3 , é mostrada na Fig. 4.6, onde c é um deslocamento v , w ou ϕ . As parcelas do funcional F_3 relacionam-se com a matriz M_3 da seguinte forma:

	ϕ_i	ϕ_i'	ϕ_j	ϕ_j'
δc_i	$-\frac{\alpha}{2} - \frac{13\beta}{70}$	$h_i(-\frac{\alpha}{10} - \frac{3\beta}{70})$	$-\frac{\alpha}{2} - \frac{22\beta}{70}$	$h_i(\frac{\alpha}{10} + \frac{4\beta}{70})$
$\delta c_i'$	$h_i(\frac{\alpha}{10} - \frac{2\beta}{210})$	$h_i^2(-\frac{\beta}{210})$	$h_i(-\frac{\alpha}{10} - \frac{31\beta}{420})$	$h_i^2(\frac{\alpha}{60} + \frac{\beta}{84})$
δc_j	$\frac{\alpha}{2} + \frac{13\beta}{70}$	$h_i(\frac{\alpha}{10} + \frac{3\beta}{70})$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{22\beta}{70}$	$h_i(-\frac{\alpha}{10} - \frac{4\beta}{70})$
$\delta c_j'$	$h_i(-\frac{\alpha}{10} - \frac{11\beta}{420})$	$h_i^2(\frac{\alpha}{60} - \frac{\beta}{210})$	$h_i(\frac{\alpha}{10} + \frac{23\beta}{210})$	$h_i^2(-\frac{\beta}{210})$

ONDE α β SÃO FATORES DE MULTIPLICAÇÃO

FIGURA 4.6

$$a) F_{3a} = \int_{h_i} \left[M'_z (y_c - y_D) - M'_y (z_c - z_D) \right] \phi'_D \phi_D dx \quad (4.46)$$

$$\delta F_{3a} = \delta \phi^{n,t} (M_3 + M_3^t) \phi^n \quad \dots (4.47)$$

onde na matriz M_3 , têm-se:

$$c = \phi$$

$$\alpha = \frac{1}{h_i} \left[(M_{z_j} - M_{z_i} + \frac{1}{2} q y_i h_i^2) (y_c - y_D)_i - (M_{y_j} - M_{y_i} + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} q z_i h_i^2) (z_c - z_D)_i \right]$$

$$\beta = h_i \left[- q y_i (y_c - y_D)_i - q z_i (z_c - z_D)_i \right]$$

$$b) F_{3b} = - \int_{h_i} M'_z w'_D \phi_D dx \quad \dots (4.48)$$

$$\delta F_3 = \delta \underline{w}^{n,t} \cdot M_3 \cdot \underline{\phi}^n + \delta \underline{\phi}^{n,t} \cdot M_3^t \cdot \underline{w}^n \quad \dots (4.49)$$

onde na matriz M_3 , têm-se:

$$c = w$$

$$\alpha = - \frac{1}{h_i} (M_{zj} - M_{zi} + \frac{1}{2} q y_i h_i^2)$$

$$\beta = q y_i h_i$$

$$c) F_{3c} = - \int_{h_i} M'_y v'_D \phi_D dx \quad \dots (4.50)$$

$$\delta F_{3c} = \delta \underline{v}^{n,t} \cdot M_3 \cdot \underline{\phi}^n + \delta \underline{\phi}^{n,t} \cdot M_3^t \cdot \underline{v}^n \quad \dots (4.51)$$

onde na matriz M_3 , têm-se:

$$c = v$$

$$\alpha = - \frac{1}{h_i} (M_{yj} - M_{yi} - \frac{1}{2} q z_i h_i^2)$$

$$\beta = - q z_i \cdot h_i$$

A matriz M_3 não é simétrica mas, somada à matriz do elemento de acordo com as relações (4.47), (4.49) e (4.51) para as parcelas a, b e c respectivamente, não alterará a simetria da matriz final.

4.5 - MATRIZ DO QUARTO TIPO

Esta matriz, obtida do funcional F_4 dado por (4.22), seria igual à matriz M_2 caso o bimomento não fosse aproximado no elemento como soma de funções hiperbólicas

e sim como uma parábola ou reta. Para melhores resultados o bimomento foi aproximado como soma de funções hiperbólicas e a primeira variação do funcional F_4 é dada por:

$$\delta F_4 = \delta \phi^{n,t} \cdot \frac{1}{h_i} \cdot \int_1 (R',t \cdot B \cdot \frac{U}{J\omega} \cdot R') d\xi \cdot \phi^n \dots (4.52)$$

A matriz M_4 , encontrada como resultado da integral indicada na expressão (4.52), tem as seguintes expressões para seus elementos:

$$\begin{aligned} \ell_{11} &= \alpha \left[\frac{72}{\rho^3} (\cosh(\rho) - 1) - \frac{432}{\rho^4} \sinh(\rho) + \frac{864}{\rho^5} (\cosh(\rho) - 1) \right] + \\ &+ \beta \left[-\frac{72}{\rho^3} \sinh(\rho) - \frac{432}{\rho^4} (\cosh(\rho) + 1) + \frac{864}{\rho^5} \sinh(\rho) \right] + \\ &+ \frac{6\gamma}{5} \\ \ell_{12} &= h_i \left\{ \alpha \left[\frac{24}{\rho^3} (\cosh(\rho) - \frac{5}{2}) - \frac{180}{\rho^4} \sinh(\rho) + \frac{432}{\rho^5} (\cosh(\rho) - 1) \right] + \right. \\ &+ \beta \left[-\frac{6}{\rho^2} + \frac{24}{\rho^3} \sinh(\rho) - \frac{180}{\rho^4} \cosh(\rho) - \frac{252}{\rho^4} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{432}{\rho^5} \sinh(\rho) \right] + \frac{\gamma}{10} \right\} \end{aligned}$$

$$\ell_{13} = -\ell_{11}$$

$$l_{14} = h_i \left\{ \alpha \left[-\frac{6 \operatorname{senh}(\rho)}{\rho^2} + \frac{24}{\rho^3} \left(\frac{5 \cosh(\rho)}{2} - 1 \right) - \frac{252}{\rho^4} \operatorname{senh}(\rho) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{432}{\rho^5} (\cosh(\rho) - 1) \right] + \beta \left[-\frac{6 \cosh(\rho)}{\rho^2} + \frac{60 \operatorname{senh}(\rho)}{\rho^3} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{252}{\rho^4} \cosh(\rho) - \frac{180}{\rho^4} + \frac{432}{\rho^5} \operatorname{senh}(\rho) \right] + \frac{\gamma}{10} \right\}$$

$$l_{22} = h_i^2 \left\{ \alpha \left[-\frac{1}{\rho} + \frac{8 \cosh(\rho)}{\rho^3} - \frac{44}{\rho^3} - \frac{72}{\rho^4} \operatorname{senh}(\rho) + \frac{216}{\rho^5} (\cosh(\rho) - 1) \right] + \right. \\ \left. + \beta \left[\frac{8}{\rho^3} (\operatorname{senh}(\rho) - \rho) - \frac{72}{\rho^4} (\cosh(\rho) + 2) + \frac{216}{\rho^5} \operatorname{senh}(\rho) \right] + \frac{2\gamma}{15} \right\}$$

$$l_{23} = -l_{12}$$

$$l_{24} = h_i^2 \left\{ \alpha \left[-\frac{2 \operatorname{senh}(\rho)}{\rho^2} + \left(\frac{22}{\rho^3} + \frac{216}{\rho^5} \right) (\cosh(\rho) - 1) - \frac{108}{\rho^4} \operatorname{senh}(\rho) \right] + \right. \\ \left. + \beta \left[\frac{22 \operatorname{senh}(\rho)}{\rho^3} - \left(\frac{2}{\rho^2} + \frac{108}{\rho^4} \right) (\cosh(\rho) + 1) + \frac{216 \operatorname{senh}(\rho)}{\rho^5} \right] + \right. \\ \left. - \frac{\gamma}{30} \right\}$$

$$l_{33} = l_{11}$$

$$l_{34} = -l_{14}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{44} = h_i^2 \{ & \beta \left[\frac{\sinh(\rho)}{\rho} - \frac{8 \cosh(\rho)}{\rho^2} + \frac{44 \sinh(\rho)}{\rho^3} - \frac{72}{\rho^4} (2 \cosh(\rho) + 1) + \right. \\
 & + \frac{216 \sinh(\rho)}{\rho^5} \left[+ \alpha \left[\frac{\cosh(\rho)}{\rho} - \frac{8}{\rho^2} (\sinh(\rho) + \frac{1}{\rho}) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{44 \cosh(\rho)}{\rho^3} + \frac{216}{\rho^5} (\cosh(\rho) - 1) - \frac{144 \sinh(\rho)}{\rho^4} \right] + \frac{2\gamma}{15} \right\}
 \end{aligned}$$

onde

$$\rho = \frac{h}{r}$$

$$\gamma = r^2 m$$

$$\alpha = \frac{1}{\sin(\rho)} \left[B_j - \gamma - (B_i - \gamma) \cosh(\rho) \right]$$

$$\beta = B_i' - \gamma$$

A matriz M_4 , simétrica, somada à matriz do elemento conforme (4.52) não alterará a simetria da matriz final.

4.6 - MONTAGEM DO VETOR INDEPENDENTE

O vetor independente é formado pela energia potencial das cargas externas. A primeira linha deste vetor, analogamente à matriz do elemento, vem da primeira variação em relação a v_i e as seguintes estão relacionadas com a primeira variação em relação a $v_i', w_i', w_i'', \phi_i, \phi_i', v_j, v_j', w_j, w_j', \phi_j, \phi_j'$. A existência do vetor independente ocorre nos problemas de segunda espécie quando a resolução do problema, analogamente ao explicado para o método de

Ritz, consistirá na resolução de um sistema linear não homogêneo. Para o elemento finito genérico, mostrado na Fig. 4.2, o vetor dos termos independentes é dado por:

$$\underline{f}_e = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} q y_i h_i \\ \frac{1}{12} q y_i h_i^2 \\ \frac{1}{2} q z_i h_i \\ \frac{1}{12} q z_i h_i^2 \\ - \frac{1}{2} m h_i \\ - \frac{1}{12} m h_i^2 \\ \frac{1}{2} q y_i h_i \\ - \frac{1}{12} q y_i h_i^2 \\ \frac{1}{2} q z_i h_i \\ - \frac{1}{12} q z_i h_i^2 \\ - \frac{1}{2} m h_i \\ \frac{1}{12} m h_i^2 \end{array} \right] \dots (4.53)$$

onde foram colocadas apenas as contribuições das cargas distribuídas no elemento. Para as cargas concentradas a montagem é feita por nó, ou seja, para as cargas concentradas atuando no nó i , o vetor devido a este nó é:

$$\underline{f}_n = \begin{Bmatrix} P y_i \\ M E z_i \\ P z_i \\ M E y_i \\ -M t_i \\ B E_i \end{Bmatrix} \dots (4.54)$$

A primeira linha do vetor dado por (4.54) vem da variação em relação a v_i e a última linha da variação em relação a ϕ_i . Para o vetor final do elemento finito soma-se o vetor \underline{f}_i^n nas linhas correspondentes de \underline{f}_e .

Quando são montados os vetores dos elementos finitos, separadamente, a contribuição dos nós ocorrerá em apenas um elemento finito e não nos dois elementos finitos adjacentes.

4.7 - MONTAGEM DA MATRIZ E DO VETOR INDEPENDENTE DA ESTRUTURA

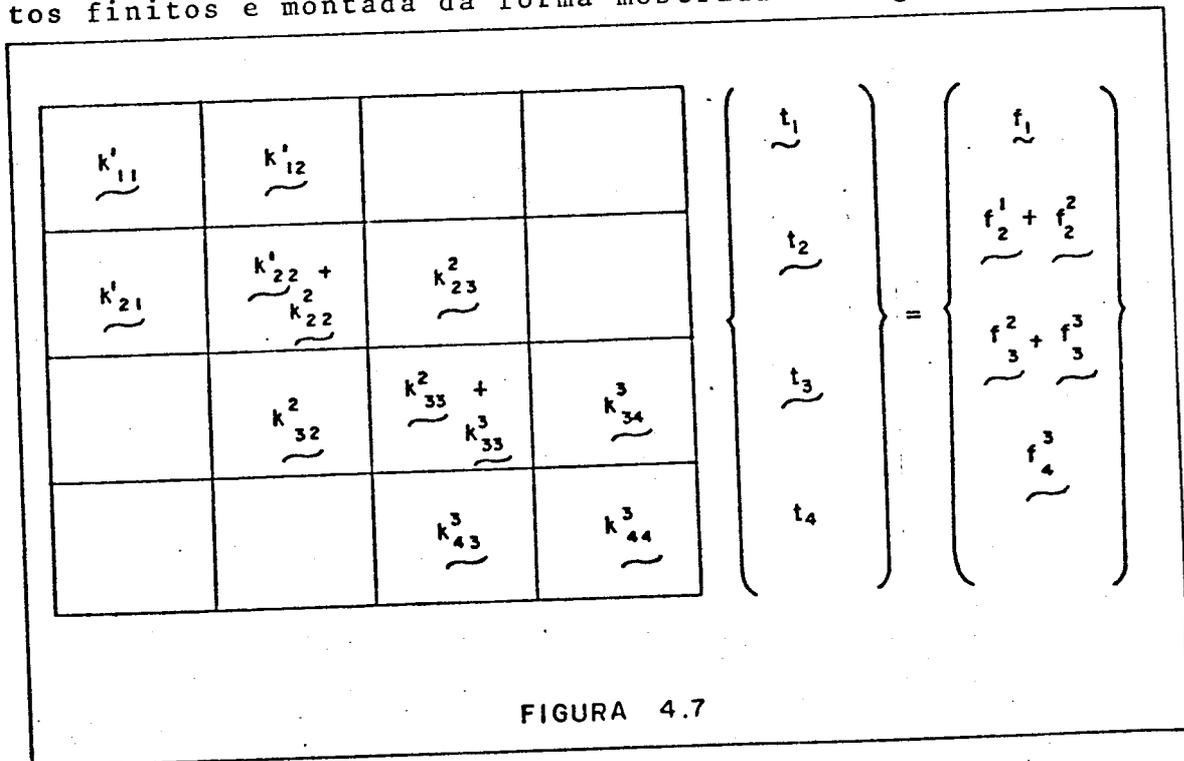
A matriz da estrutura, como o vetor dos termos independentes, é formada a partir da soma das contribuições dos elementos finitos. Para o elemento finito, mostrado na Fig. 4.2, a matriz e o vetor dos termos independentes podem ser divididos em blocos da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \underline{k}_{ii} & \underline{k}_{ij} \\ \underline{k}_{ji} & \underline{k}_{jj} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{t}_i \\ \underline{t}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{f}_i \\ \underline{f}_j \end{Bmatrix}$$

onde:

- \tilde{k}_{ii} é uma matriz de efeitos correspondentes ao nó i
- \tilde{k}_{jj} é uma matriz de efeitos correspondentes ao nó j
- \tilde{k}_{ij} é a matriz de efeitos em i devido ao nó j
- \tilde{k}_{ji} é a matriz de efeitos em j devido ao nó i
- \tilde{t}_i é o vetor dos parâmetros do nó i
- \tilde{t}_j é o vetor dos parâmetros do nó j
- \tilde{f}_i é o vetor dos termos independentes devido ao nó i
- \tilde{f}_j é o vetor dos termos independentes devido ao nó j

Como se percebe na Fig. 4.1, a disposição dos elementos finitos na estrutura é sequencial e assim, o nó j de um elemento é o nó i do elemento seguinte. Por esta razão, a matriz e o vetor independente de uma viga com três elementos finitos é montada da forma mostrada na Fig. 4.7.



onde:

- \tilde{k}_{ij}^k é a matriz dos efeitos no nó i devido ao nó j no elemento k

\underline{t}_i é o vetor dos parâmetros do nó i

\underline{f}_i^k é o vetor dos termos independentes devido ao nó i do elemento k

4.8 - IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

À matriz da estrutura impõem-se as condições de contorno anulando-se os parâmetros $v_i, v_i', w_i, w_i', \phi_i, \phi_i'$ correspondentes ao nó que possui vinculação rígida.

A anulação de um parâmetro conduziria à eliminação da linha e da coluna correspondentes da matriz da estrutura; essa eliminação obrigaria a um novo arranjo da matriz. Para evitar essa dificuldade, utilizou-se um método alternativo de se fornecer à matriz as informações sobre as condições de vinculação.

Esse método consiste em se anularem todos os elementos da linha e da coluna consideradas, com exceção do elemento da diagonal, que é feito igual a unidade e zerar, na linha, o termo independente.

A matriz assim obtida equivale àquela de ordem menor, obtida pelo processo de eliminação.

5 , PROBLEMAS DE PRIMEIRA ESPÉCIE

Nos problemas de primeira espécie, a determinação da carga crítica, em aproximação de segunda ordem, conduz a um problema de auto-valor. Encontrando-se o menor auto-valor, tem-se a carga crítica que ao ser atingida, na discretização da viga pelos elementos finitos, reduz o sistema de equações nos parâmetros de nó a um sistema linearmente dependente com a elástica conhecida apenas em sua forma.

Para o cálculo de auto-vetores e auto-valores existem muitos métodos com vantagens e desvantagens próprias. Tendo em vista estes fatos, procurou-se escolher um método que trabalhasse com matrizes simétricas e já calculasse o menor auto-valor com o auto-vetor. Nestas condições, um método recomendado pela simplicidade e confiabilidade é a iteração vetorial clássica.

O problema de auto-valor considerado tem a seguinte forma:

$$(\underline{C} - \lambda \underline{U}) \underline{d} = \underline{0} \quad \dots (5.1)$$

onde:

\underline{C} é a matriz da estrutura cujos elementos são invariantes em relação à carga crítica

\underline{U} é a matriz da estrutura em que os elementos são alterados com a variação da carga crítica.

\underline{d} é o vetor dos parâmetros incôgnitos
 λ é a carga crítica ou o auto-valor.

O processo iterativo parte de um vetor arbitrário que foi assumido como aquele cujas componentes são iguais a um. A seguir, calcula-se o menor auto vetor através da equação:

$$\underline{C} \underline{d}^k = \underline{U} \underline{d}^{k-1} \quad \dots (5.2)$$

Na equação (5.2) a matriz \underline{U} é montada para uma carga crítica de valor unitário e, como a matriz \underline{C} , permanece inalterada ao longo da iteração.

O auto valor é aproximado a cada iteração através da seguinte expressão, que é recomendada por Schwarz [17]:

$$\lambda_K = \frac{\sum d_i^{k-1}}{\sum d_i^k} \quad \dots (5.3)$$

A expressão (5.3) calcula o auto valor como o quociente da soma das componentes dos auto vetores de duas iterações sucessivas. Para o caso de o problema ser tal que os dois menores auto valores sejam de mesmo módulo e sinais diferentes, o cálculo do auto valor modifica-se e passa a ter a expressão:

$$\lambda_K = \sqrt{\frac{\sum d_i^{k-2}}{\sum d_i^k}} \quad \dots (5.4)$$

O processo iterativo termina quando a diferença relativa entre duas aproximações sucessivas do auto valor for menor que a precisão desejada.

5.1 - VANTAGENS DO MÉTODO

As vantagens da iteração vetorial clássica são:

- a) De acordo com a equação (5.2), trabalha-se com produtos de matrizes por vetores iterados e, portanto, as matrizes \underline{C} e \underline{U} são montadas uma vez.
- b) Devido a matriz \underline{C} não ser alterada, pode-se decompô-la apenas uma vez para a resolução do sistema de equações.
- c) Devido ao segundo membro da equação (5.2) resultar em vetor, optou-se pela utilização da matriz \underline{U} na forma de matrizes de elementos finitos individuais, guardadas em memória auxiliar e recuperadas individualmente no momento do produto com o vetor \underline{d}^{k-1} , para redução da memória central utilizada.
- d) A grande simplicidade e confiabilidade do método, em relação aos outros, para calcular o menor auto-valor com o respectivo auto-vetor, em problemas mal condicionados.
- e) Não há necessidade de a matriz \underline{U} ser montada com um valor maior ou menor que a carga crítica assim como, ser de mesmo sinal ou sinal contrário. A matriz utilizada para resolver o sistema de equações é a matriz \underline{C} , positiva definida, que não é influenciada pela carga crítica. Desta forma o cálculo do auto-valor e auto-vetor tem um carregamento unitário de valor arbitrário e, portanto, a resposta será o produto do auto-valor calculado pelo carregamento assumido como unitário.
- f) Para encontrar o auto-valor não há necessidade de modificar a equação (5.1) em uma equação do tipo

$$(\underline{H} - \lambda \underline{I}) \underline{d}' = 0 \quad \dots (5.5)$$

onde a matriz \underline{H} concentra as matrizes \underline{C} e \underline{U} .

O único cuidado refere-se às imposições das condições de contorno pois, embora as linhas e colunas correspondentes ao vínculo sejam anuladas, apenas a diagonal da matriz \underline{C} possuirá a unidade.

5.2 - CONVERGÊNCIA

A convergência deste método, também conhecido como iteração inversa, pode ser mostrada da seguinte forma:

Um auto vetor \underline{d}^k iterado pode ser escrito:

$$\underline{d}^k = C_1 \frac{1}{(\lambda_1)^k} \underline{e}_1 + \dots + C_n \frac{1}{(\lambda_n)^k} \underline{e}_n \quad \dots (5.6)$$

nesta expressão tem-se:

\underline{e}_i ($i = 1, \dots, n$) são os auto-vetores que formam uma base dos auto-vetores solução da equação (5.1);

$(\lambda_i)^k$ ($i = 1, \dots, n$) são os auto-valores da equação (5.1) que estão elevados ao número da iteração;

C_i são constantes não nulas que dependem de \underline{e}_i .

Assumindo-se que λ_1 a λ_n são numerados em ordem crescente de valores absolutos e colocando-se em evidência, na equação (5.6), o inverso do menor auto-valor, obtém-se:

$$\underline{d}^k = \frac{1}{\lambda_1^k} \left[C_1 \underline{e}_1 + C_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k \underline{e}_2 + \dots + C_n \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^k \underline{e}_n \right] \dots (5.7)$$

Com o aumento do número de iterações k , os quocientes $(\lambda_1/\lambda_i)^k$ convergem para zero, o que determina o menor auto-valor e correspondente auto-vetor.

A convergência deste método é rápida, só tornando-se lenta quando o sistema for mal condicionado ou seja, os dois menores auto-valores são tais que sua relação é próxima de um.

Uma solução muito citada, para aumentar a velocidade de convergência, é fazer uma modificação conhecida como deslocamento de origem. Neste caso, transforma-se a equação (5.2) em uma outra do tipo:

$$(\underline{C} - p \underline{U}) \underline{d}^k = \underline{U} \underline{d}^{k-1} \quad \dots (5.8)$$

onde p é um valor que, se escolhido convenientemente, aumenta a taxa de convergência.

Wielandt [22], trabalhando nesta equação em 1944, mostrou que, ao assumir-se para o valor de p uma aproximação do auto-valor desejado, a convergência segundo (5.8) seria muito rápida.

Wilkinson [22] trata da iteração inversa de Wielandt assim como formas de melhorá-la; entretanto, devem ser lembrados os seguintes fatos:

- a) Para encontrar-se o valor de p através de uma aproximação grosseira do auto-valor desejado, deve-se, antes, calcular esta aproximação. Para este cálculo, sugere-se o uso da equação (5.2) e a matriz \underline{C} é montada e decomposta pela primeira vez.
- b) A matriz do membro esquerdo da equação (5.8), devido a p , não será necessariamente positiva definida, o que inviabiliza a utilização do método de Cholesky que é muito prático para resoluções de sistemas de equação com banda estreita.
- c) A matriz que será usada para resolver o sistema de equações é montada e decomposta duas vezes, a primeira quando se calcula a aproximação grosseira do auto-valor e a segunda quando da utilização da equação (5.8).

d) A resolução da equação (5.8) através de computador requer o uso de subrotinas, para resolução do sistema de equações, mais elaboradas do que as que são utilizadas normalmente pois, o determinante da matriz a ser decomposta, na segunda vez, é próximo de zero.

Schwarz [17] recomenda para a implementação da taxa de convergência o uso de relaxações. Neste caso, a relaxação a ser feita na equação (5.2) é do tipo:

$$\tilde{r}^k = \frac{1}{d_{i_{\max}}^{k-1}} \cdot \tilde{d}^{k-1} - \frac{1}{d_{i_{\max}}^k} \cdot \tilde{d}^k \quad \dots (5.9)$$

$$\tilde{d}^{k+1} = \frac{1}{d_{i_{\max}}^k} \tilde{d}^k - \tilde{r}^k \quad \dots (5.10)$$

onde

\tilde{r}^k é chamado de vetor resto da iteração k.

A utilização das expressões (5.9) e (5.10), em alguns casos, em vez de acelerar o processo de convergência até piorou, o que levou a seu abandono por não ter aplicabilidade geral.

Assim, para o cálculo de auto-valores e auto-vetores continuou-se a utilizar as expressões (5.2) e (5.3) com o procedimento de, a cada iteração, tornar a componente máxima do vetor \tilde{d}^k igual a um.

5.3 - O QUOCIENTE DE RAYLEIGH

Nos exemplos resolvidos, notou-se que o erro relativos nas componentes do auto-vetor era menor que o do auto-valor, o que levava a um número maior de iterações para atingir a precisão desejada na carga crítica ou auto-valor. Devido ao maior interesse ser a carga crítica pois o auto-vetor trata apenas da forma da flambagem, procurou-

-se uma expressão para o cálculo de auto-valores melhor que a expressão (5.3).

Para o cálculo de um auto-valor a partir de um auto-vetor com baixa precisão, Wilkinson [22] recomenda a utilização do quociente de Rayleigh.

Sabe-se que um auto-vetor \underline{d}^* , de baixa precisão, ao ser aplicado na equação (5.1) não produzirá como resultado um vetor nulo mas um vetor diferente de zero. Analogamente, quando a matriz \underline{U} for a identidade haverá o mesmo problema ou seja:

$$(\underline{C} - \lambda \underline{I}) \underline{d}^* = \underline{r}^* \quad \dots (5.11)$$

onde \underline{r}^* é o vetor diferente de zero.

Rayleigh mostrou que o auto-valor λ que torna mínima a norma de \underline{r}^* é dado por:

$$\lambda = \frac{\underline{d}^{*,t} \cdot \underline{C} \cdot \underline{d}^*}{\underline{d}^{*,t} \cdot \underline{d}^*} \quad \dots (5.12)$$

Para utilizar a expressão (5.12) na iteração vetorial, Wilkinson [22] recomendou que o auto-valor λ_k seja calculado da seguinte forma:

$$\lambda_k = \frac{\underline{d}^{k-1,t} \cdot \underline{d}^k}{\underline{d}^{k,t} \cdot \underline{d}^k} \quad \dots (5.13)$$

A convergência com a expressão (5.13), na equação (5.11), pode ser mostrada escrevendo-se os vetores \underline{d}^{k-1} e \underline{d}^k através da expressão (5.7), ou seja:

$$\underline{d}^k = \frac{1}{\lambda_1^k} \left[C_1 \underline{e}_1 + C_2 \lambda_2^k \underline{e}_2 + \dots + C_n \lambda_n^k \underline{e}_n \right] \quad \dots (5.14)$$

$$\underline{d}^{k-1} = \frac{1}{\lambda_1^{k-1}} \left[C_1 \underline{e}_1 + C_2 \lambda_2^{k-1} \underline{e}_2 + \dots + C_n \lambda_n^{k-1} \underline{e}_n \right] \quad \dots (5.15)$$

onde:

λ_1 é o menor auto-valor

n_i é uma relação entre λ_i e os outros auto-valores, ou seja:

$$n_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} < 1 \quad (i = 2, \dots, n) \quad \dots (5.16)$$

Substituindo-se \underline{d}^{k-1} e \underline{d}^k pelas expressões (5.14) e (5.15) na expressão (5.13), resulta a seguinte expressão, devido à ortogonalidade dos vetores da base.

$$\lambda_k = \lambda_1 \frac{[C_1 + C_2 n_2^{2k-1} + \dots + C_n n_n^{2k-1}]}{[C_1 + C_2 n_2^{2k} + \dots + C_n n_n^{2k}]} \quad \dots (5.17)$$

Nota-se, na expressão (5.17), que, devido as relações n_i serem menores que 1, o auto-valor λ_k tende para λ_1 à medida que o número de iterações k aumenta. Portanto, a expressão (5.13) tem maior taxa de convergência que a expressão (5.3) pois, como mostra a expressão (5.17), a atenuação é relacionada a um expoente elevado a duas vezes o número de iterações. Entretanto, há uma perda maior na precisão dos auto-vetores.

Tendo em vista a expressão (5.13), foi utilizada uma outra expressão para o cálculo de auto-valores com mesmo módulo e sinais opostos. Esta expressão é dada por:

$$\lambda = \left(\frac{\underline{d}^{k-1,t} \cdot \underline{d}^{k-1}}{\underline{d}^{k+1,t} \cdot \underline{d}^{k+1}} \right)^{1/2} \quad \dots (5.18)$$

A demonstração da convergência na expressão (5.18) é análoga à feita para a expressão (5.13).

A convergência do processo em todos os exemplos foi levemente melhorada, o que levou a utilizar-se as expressões (5.13) e (5.18) sistematicamente.

5.4 - CÁLCULO DOS AUTO-VALORES SEGUINTES

No cálculo do segundo auto-valor, a componente do primeiro auto-valor, já determinado, é retirada a cada iteração, ou seja:

$$\underline{C} \underline{z}^k = \underline{U} \underline{d}^{k-1} \quad \dots (5.19)$$

$$\underline{d}^k = \underline{z}^k - \frac{1}{(\underline{f}_1^t \cdot \underline{B} \underline{f}_1)} (\underline{z}^{k,t} \cdot \underline{B} \underline{f}_1) \underline{f}_1 \quad \dots (5.20)$$

onde:

\underline{z}^k é o auto-vetor calculado da resolução do sistema de equações (5.19)

\underline{f}_1 é o auto-vetor já determinado.

O vetor \underline{d}^k dado pela expressão (5.20), ortogonal ao primeiro auto-vetor \underline{f}_1 , é usado na expressão (5.13) e (5.18) para o cálculo do auto-valor associado.

Os auto-valores seguintes ($\lambda_3 \dots \lambda_n$) e seus auto-vetores são calculados ortogonalizando-se, a cada iteração, o novo vetor em relação aos auto-vetores conhecidos.

O método da iteração vetorial clássica é vantajoso quando se deseja calcular apenas uma parte do conjunto de auto-valores, não sendo recomendado para calcular todo o conjunto, por existirem métodos mais eficientes a empregar.

Para o cálculo dos auto-vetores seguintes ao primeiro, foram utilizadas as equações (5.19) e (5.20), para continuar fazendo uso das vantagens mostradas no ítem 5.1, e pelas matrizes serem simétricas pois, caso contrário, Wilkinson [22] recomenda o uso de deflações.

Em alguns casos, na utilização das equações (5.19) e (5.20), pode ocorrer que a ortogonalização em relação a um vetor conhecido leve a um vetor ortogonal ao desejado. Schwarz [17], quando apresenta o cálculo de um gru

po de auto-vetores, faz uma série de modificações nas equações (5.19) e (5.20) para otimizar o processo. No programa feito para o computador, como o interesse principal era calcular a menor carga crítica, optou-se para o cálculo dos auto-valores e auto-vetores seguintes ao primeiro utilizando as expressões (5.19) e (5.20). Para evitar que o auto-vetor calculado seja ortogonal ao desejado, recomenda-se calcular alguns auto-vetores a mais que o número desejado. Confirma-se a correspondência entre o segundo auto-valor apresentado e o segundo menor auto-valor através do modo de flambagem. Assim, quando a elástica tem um ponto de cruzamento com o eixo da barra, o auto-valor associado a este auto-vetor é referente ao segundo modo de flambagem.

5.5 - INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

O auto-vetor iterado converge assintoticamente ao desejado. Para facilitar a visualização dos resultados, o auto-vetor iterado teve a sua maior componente de valor unitário. Para as componentes nulas o processo leva a valores próximos de zero. Por esta razão, quando da apresentação de resultados, mostram-se os resultados das quatro últimas iterações para verificar as componentes que estão sendo atenuadas e desprezã-las.

6 . DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS NOS PROBLEMAS DE SEGUNDA ESPÉCIE

Sabe-se que os problemas de segunda espécie correspondem à resolução de um sistema linear não homogêneo para a determinação dos valores dos parâmetros nodais incógnitos. Em uma estrutura, esse sistema linear de equações provém da anulação da primeira variação da energia, ou seja:

$$\underline{K} \cdot \underline{d}^n = \underline{F} \quad \dots (6.1)$$

onde:

\underline{K} é a matriz da estrutura

\underline{d}^n são os parâmetros nodais incógnitos

\underline{F} é o vetor independente.

Assim, a partir da resolução do sistema de equações (6.1), obtêm-se os valores dos parâmetros nodais. Para o cálculo dos esforços no elemento finito, multiplica-se a matriz do elemento \underline{k} pelo vetor \underline{d}^* com os valores dos parâmetros nodais calculados e obtêm-se o vetor dos esforços neste elemento, ou seja:

$$\underline{k} \underline{d}^* = \underline{p} \quad \dots (6.2)$$

onde:

\underline{k} é a matriz do elemento finito

\underline{d}^* são os parâmetros nodais do elemento e do tipo:

$$\underline{d}^{*,t} = \{v_i, v_i', w_i, w_i', \phi_i, \phi_i', v_j, v_j', w_j, w_j', \phi_j, \phi_j'\}$$

\underline{p} é o vetor dos esforços no elemento e do tipo:

$$\underline{p}^t = \{Q_{y_i}, M_{z_i}, Q_{z_i}, M_{y_i}, M_{t_i}, B_i, Q_{y_j}, M_{z_j}, Q_{z_j}, M_{y_j}, M_{t_j}, B_j\}$$

Q_{y_i} e Q_{y_j} são cortantes nos nós i e j

M_{t_i} e M_{t_j} são os momentos torçores nos nós i e j .

A partir dos valores calculados dos momentos torçores nos nós (M_{t_i} e M_{t_j}), calculam-se os valores dos momentos de flexo-torção (M_{ft_i} e M_{ft_j}) e momentos de torção livre (M_{ℓ_i} e M_{ℓ_j}) que ocorrem nestes nós.

Sabe-se das relações (2.39) e (2.64) que:

$$M_{\ell} = G J_t \phi'$$

$$M_t = M_{ft} + M_{\ell}$$

Assim, com ϕ_i' e ϕ_j' do vetor \underline{d}^* obtêm-se os valores do momento de torção livre:

$$M_{\ell_i} = G J_t \phi_i' \quad \dots (6.3)$$

$$M_{\ell_j} = G J_t \phi_j' \quad \dots (6.4)$$

Com os valores de M_{t_i} e M_{t_j} do vetor \underline{p} e os do momento de torção livre (M_{ℓ_i} e M_{ℓ_j}) obtêm-se os momentos de flexo-torção no elemento, ou seja:

$$M_{ft_i} = M_{t_i} - M_{\ell_i} \quad \dots (6.5)$$

$$M_{ftj} = M_{tj} - M_{\rho j} \quad \dots (6.6)$$

Em teoria de segunda ordem, as expressões (6.3) e (6.4) alteram-se da seguinte forma:

- a) Quando existe apenas o bimomento, Mori [6] mostrou que:

$$M_{\rho} = (G J_t + B \frac{U_{\omega}}{J_{\omega}}) \phi' \quad \dots (6.7)$$

- b) Quando existe apenas a força normal aplicada no centro de gravidade, em uma secção que o centro de gravidade coincide com o centro de cisalhamento, Vlasov [21] mostrou que:

$$M_{\rho} = (G J_t + N i_D^2) \phi' \quad \dots (6.8)$$

Deve-se lembrar que a força normal e o bimomento, utilizados nas expressões (6.7) e (6.8), são aqueles obtidos da teoria de primeira ordem e utilizados no funcional dado por (3.52)

6.1 - PROBLEMAS DE SEGUNDA ESPÉCIE EM PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM

Pode-se resolver problemas de segunda espécie em aproximação de primeira ordem ou de segunda ordem, fazendo-se as seguintes modificações:

- a) Para obtenção dos esforços de primeira ordem, utiliza-se o funcional dado por (3.51) sem considerar a energia potencial devida aos esforços de primeira ordem.

b) Para obtenção dos esforços de segunda ordem, utiliza-se o funcional dado por (3.51) na sua forma completa.

6.2 - RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Para resolver o sistema de equações foi utilizado o processo de Cholesky. Sabe-se que este método aplica-se à decomposição de matriz quando esta for positiva definida e isto ocorre quando todos os auto-valores da matriz são positivos e não nulos.

Este método, portanto, só resolverá o sistema de equações quando o carregamento não ultrapassar o menor auto-valor. Assim, caso o carregamento ultrapasse o menor auto-valor, que é o primeiro ponto onde os deslocamentos tendem para infinito, o sistema de equações não poderá ser resolvido.

Esta afirmação pode ser mostrada facilmente pela seguinte forma:

Seja a seguinte equação:

$$(\underline{M}_c - f_M \underline{M}_u) \underline{d}^n = \underline{F} \quad \dots (6.9)$$

onde:

\underline{M}_c é matriz das características geométricas

\underline{M}_u é a matriz da estrutura montada para um carregamento unitário, abaixo do crítico

f_M é o fator de multiplicação do carregamento unitário que o transforma no carregamento aplicado à viga.

Um problema de auto-valor do tipo

$$\underline{M}_c \cdot \underline{d} = \lambda \underline{M}_u \cdot \underline{d} \quad \dots(6.10)$$

onde:

λ é um auto-valor.

tem os auto-valores da estrutura, colocados em ordem crescente de acordo com o índice, do tipo:

$$\lambda = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \} \quad \dots(6.11)$$

onde:

λ_1 é menor auto-valor da estrutura

λ_n é o maior auto-valor da estrutura para a ordem da matriz M_c ou M_u .

O problema de auto-valor associado à equação (6.9) é do tipo:

$$(M_c - f_M M_u) \underline{d} = \lambda^* \cdot \underline{d} \quad \dots(6.12)$$

onde:

λ^* é um auto-valor do problema.

Wilkinson [22] mostra que os auto-valores λ^* deste problema são:

$$\lambda^* = \{ (\lambda_1 - f_m), (\lambda_2 - f_m), \dots, (\lambda_n - f_m) \} \quad \dots (6.13)$$

A equação (6.13) mostra que os auto-valores λ^* do problema dado por (6.12) são os auto-valores λ do problema (6.10) subtraídos de f_m .

Assim a matriz do sistema de equações dado por (6.9) será positiva definida quando todos λ^* forem positivos, ou seja:

$$\lambda_1 > f_m \quad \dots (6.14)$$

Desta forma, pode-se utilizar o processo de Cholesky que, interpretado desta forma, constitui-se em uma segurança ao usuário.

7 . EXEMPLOS

7.1 - EXEMPLO NUMÉRICO 1

A viga de secção transversal mostrada na Fig. 7.1 é comprimida por uma força aplicada no centro da gravidade.

O problema de instabilidade desta viga foi resolvido variando-se o seu comprimento l e com as seguintes características geométricas da secção e constantes elásticas:

$$J_y = 434 \text{ cm}^4$$

$$J_z = 2898 \text{ cm}^4$$

$$J_\omega = \text{zero}$$

$$J_t = 13 \text{ cm}^4$$

$$A = 39 \text{ cm}^2$$

$$i_D^2 = 152 \text{ cm}^2$$

$$y_D = -6,3 \text{ cm}$$

$$z_D = 5,2 \text{ cm}$$

$$E = 2100 \text{ tf} \cdot \text{cm}^{-2}$$

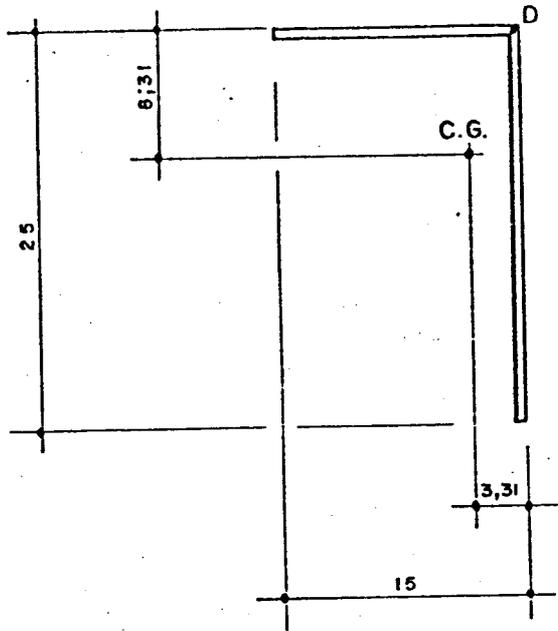
$$G = 840 \text{ tf} \cdot \text{cm}^{-2}$$

As equações diferenciais do problema são acopladas, ou seja, relacionam deslocamentos v com ϕ , w com ϕ , sendo da seguinte forma:

$$E J_z v_D^{IV} + N (v_D'' - z_D \phi_D'') = 0 \quad \dots (7.1)$$

$$E J_y w_D^{IV} + N (w_D'' + y_D \phi_D'') = 0 \quad \dots (7.2)$$

$$E J_\omega \phi_D^{IV} + (N i_D^2 - G J_t) \phi_D'' + N (y_D w_D'' - z_D v_D'') = 0 \quad \dots (7.3)$$



Espessura constante = 1,0 cm
Medidas em cm

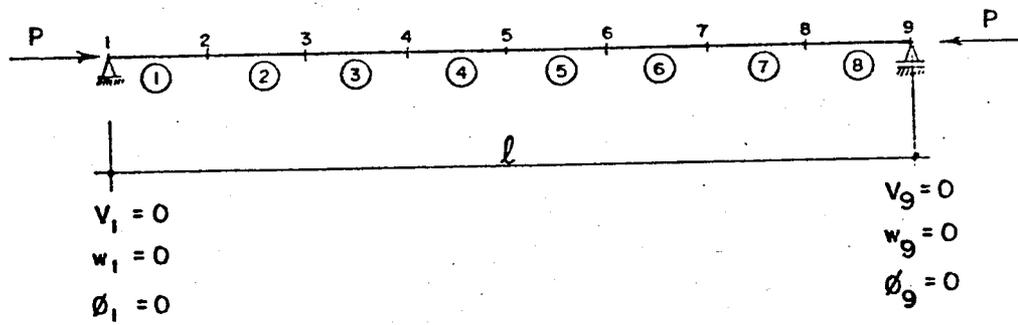


FIGURA 7.1

Devido a igualdade de condições de contorno nos apoios extremos para v , w e ϕ , as funções v , w e ϕ , soluções das equações diferenciais, são as seguintes:

$$v_D = K_1 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x \right) \quad \dots (7.4)$$

$$w_D = K_2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x \right) \quad \dots (7.5)$$

$$\phi_D = K_3 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x \right) \quad \dots (7.6)$$

As funções v , w e ϕ dadas por (7.4), (7.5) e (7.6) satisfazem as condições de vinculação do problema e da substituição nas equações (7.1), (7.2) e (7.3) resulta um sistema linear homogêneo nas incógnitas K_1 , K_2 e K_3 . O determinante da matriz dos coeficientes deste sistema de equações é da forma:

$$(P_z - P)(P_y - P)(P_W - P) i_D^2 - z_D^2 P^2 (P_y - P) - y_D^2 P^2 (P_z - P) = 0 \quad \dots (7.7)$$

onde:

P_z e P_y são as cargas de flambagem por flexão, também chamadas cargas de Euler e sua expressão para o menor auto-valor é:

$$P_z = \frac{\pi^2 E J_z}{\ell^2} \quad \dots (7.8)$$

$$P_y = \frac{\pi^2 E J_y}{\ell^2} \quad \dots (7.9)$$

P_W é chamada de carga de Wagner e não representa a carga de flambagem por torção, sua definição sendo:

$$P_W = \frac{1}{i_D^2} \left(\frac{\pi^2 E J_\omega}{\ell^2} + G J_t \right) \quad \dots (7.10)$$

Sabe-se que, quando o determinante da matriz dos coeficientes deste sistema de equações for diferente de zero, as constantes K_1 , K_2 e K_3 são nulas. A carga crítica P anula o determinante dado por (7.7) logo, as constantes são diferentes de zero e conhecidas a partir de uma delas ser arbitrada. Por esta razão, este problema de instabilidade é de primeira espécie.

A análise deste problema foi feita no computador para uma precisão fixada de 10^{-5} e os resultados são mostrados na Tabela 7.1.

l (cm)	P (exato) (tf)	P (obtido) (tf)	Erro (%)
100	70,073	70,103	+0,043
200	64,487	64,476	-0,016
300	54,182	54,179	-0,056
400	41,241	41,241	-
500	30,167	30,167	-

TABELA 7.1

Na Tabela 7.2 apresentam-se os resultados da menor carga de flambagem por flexão (P_y), da carga de Wagner (P_w) e do valor da carga P que anula a equação (7.7). Deve-se notar que à medida que o comprimento aumenta, a carga P que anula o determinante dado por (7.7) aproxima-se da carga de Euler, enquanto que para comprimentos pequenos, a carga crítica aproxima-se da carga de Wagner.

Outro aspecto que se deve notar na Tabela 7.2, é a constância da carga de Wagner com a variação do comprimento de flambagem, pelo fato de ser nulo o momento setorial de inércia (J_ω). Sobre esta carga, sabe-se que Wagner trabalhou com flambagem por torção, utilizando uma teoria parecida com a de Vlasov [21] mas, fez algumas hipóteses errôneas a respeito da posição do centro de cisalhamento

l (cm)	P (tf)	P_y (tf)	P_W (tf)
100	70,073	899,52	71,764
200	64,487	224,88	71,764
300	54,182	99,946	71,764
400	41,241	56,220	71,764
500	30,167	35,981	71,764

TABELA 7.2

no instante da flambagem, o que restringiu a utilização de sua teoria somente a alguns casos particulares de secção transversal.

Vlassov [21], ao analisar este problema, mostra que a carga crítica P , que anula o determinante (7.7) do sistema de equações, será sempre menor que P_y , P_W e P_z . A análise por computador, deste problema, mostrou, além deste fato, que para os comprimentos de 100 cm e 200 cm da Tabela 7.3 o problema de auto-valor é mal condicionado, ou seja, a relação entre o primeiro e segundo menor auto-valor é próxima de um. Assim, no cálculo do menor auto-valor para o comprimento de 100 cm, já na segunda iteração o auto-valor obtido foi 70,133 tf, na terceira o auto-valor foi de 70,908 tf, mas, somente na nonagésima primeira iteração é que o auto-valor foi de 70,073 tf.

Os auto-valores seguintes ($\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$) situaram-se próximos de 71,500 tf e o número máximo de iterações foi nove. A explicação para este fato é que a carga P_W não se altera com a diminuição do comprimento de flambagem e, portanto, todos os auto-valores seguintes convergem assintoticamente para 71,764 tf que é o valor P_W .

Utilizando-se os resultados obtidos para os comprimentos testados, pode-se mostrar a variação da taxa de convergência em função da relação entre o primeiro e o segundo auto-valor. A Tabela 7.3 mostra, em função do compri

mento ℓ e a relação entre o primeiro e o segundo auto-valor, o número de iterações necessárias para atingir o menor auto-valor.

ℓ (cm)	λ_2/λ_1	Iterações
100	1,018	91
200	1,087	29
300	1,252	10
400	1,563	12
500	1,99	11

TABELA 7.3

Deve-se lembrar que a Tabela 7.3 não é geral, pois somente se aplica à matriz desta estrutura.

Por outro lado, não é somente o segundo auto-valor que está próximo do primeiro mas todos os outros pois eles também tendem assintoticamente ao valor de P_W . Assim, pode-se notar o bom comportamento do método iterativo, mesmo em problemas de auto-valor muito mal condicionado.

Quanto aos modos de flambagem obtidos, foi notado que nas barras curtas predominaram os deslocamentos de torção, enquanto nas longas predominaram os deslocamentos de flexão.

Sobre a precisão destes resultados pode-se afirmar que eles diferiram do exato em 1,0% no maior erro. Entretanto, para o menor comprimento ($\ell = 100$ cm), onde o problema é dramaticamente mal condicionado, os erros foram maiores.

Cumprе notar que Wilkinson [22], ao analisar os problemas mal condicionados, afirma que, quando dois auto-valorеs são muito próximos, o auto-vetor correspondente ao menor auto-valor sofre uma influência não desprezível daquele correspondente ao segundo menor auto-valor. Por esta

razão, a precisão do auto-vetor associado ao menor auto-valor, do comprimento de 100 cm, é mais baixa.

A Tabela 7.4 apresenta os resultados obtidos no meio do vão para v , w e ϕ em função do comprimento ℓ .

ℓ		Exato	Obtido	Erro %
100	v	-0,0614	-0,0630	+ 2,6
	w	-0,5322	-0,5468	+ 2,7
	ϕ	1,000	+1,000	-
200	v	-0,0921	-0,0921	-
	w	-1,000	-1,000	-
	ϕ	0,3947	0,3946	- 0,025
300	v	-0,0616	-0,0616	-
	w	-1,000	-1,000	-
	ϕ	0,1341	0,1340	- 0,075
400	v	-0,0370	-0,0370	-
	w	-1,000	-1,000	-
	ϕ	0,0576	0,0576	-
500	v	-0,0228	0,0228	-
	w	-1,000	-1,000	-
	ϕ	0,0306	0,0306	-

TABELA 7.4

Finalmente, apresentam-se na Tabela 7.5 os resultados obtidos para as cargas críticas, utilizando-se para P_1 o quociente de Rayleigh dado por (5.13), procedimento adotado neste trabalho, e para P_2 a expressão proposta por Schwarz [17], dada por (5.3).

Na Tabela 7.6 apresenta-se o número de iterações necessárias para ser atingida a carga crítica, tanto nos casos 1 como 2, em função do vão ℓ e da relação entre o segundo e o primeiro auto-valores.

ℓ (cm)	P_1 (tf)	P_2 (tf)
100	70,073	-
200	64,476	64,491
300	54,182	54,185
400	41,241	41,241
500	30,167	30,167

TABELA 7.5

ℓ (cm)	λ_2/λ_1	N_1	N_2
100	1,018	91	150
200	1,087	29	61
300	1,252	10	27
400	1,563	12	16
500	1,99	11	12

TABELA 7.6

Nota-se, nas Tabelas 7.5 e 7.6 que:

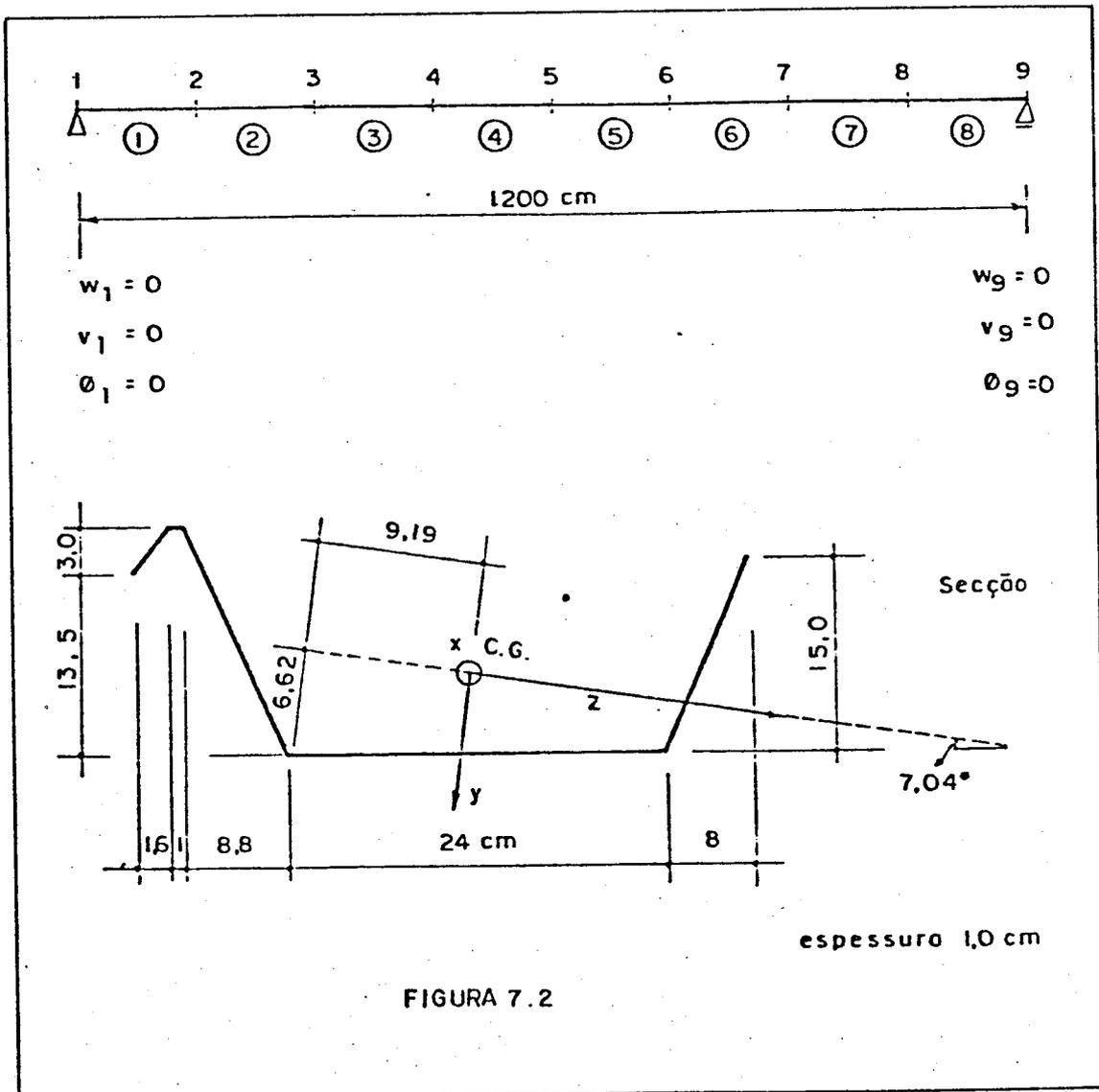
- a) A utilização do quociente de Rayleigh incrementou a taxa de convergência nos casos em que o problema é mal condicionado ($\ell = 100$ e 200 cm), como mostra a coluna N_1 da Tabela 7.6.
- b) Para o comprimento de 100 cm a utilização da expressão proposta por Schwarz [17] dada por (5.3) não conduziu ao auto-valor P_2 , na precisão desejada de 10^{-5} , em 150 iterações como mostram as primeiras linhas das colunas P_2 e N_2 das Tabelas 7.5 e 7.6, respectivamente.

Vale lembrar que estas conclusões não são ge-

rais mas, considerando-se o fato de os auto-valores seguintes ($\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$) aglutinarem-se no valor 71,764, como foi explicado anteriormente, pode-se ter uma idéia quantitativa da razão da escolha do quociente de Rayleigh.

7.2 - EXEMPLO NUMÉRICO 2

A viga de secção transversal mostrada na Fig. 7.2, de comprimento 1200 cm, é dividida em oito elementos finitos iguais.



As condições de vinculação dos apoios extremos são de restrição aos deslocamentos v , w e ϕ (Garfos)

Foi também tratado o caso de restrição aos deslocamentos v , w e ϕ e suas primeiras derivadas (engastamentos).

As características geométricas da secção transversal e as constantes elásticas são:

$$E = 2100 \text{ tf} \cdot \text{cm}^{-2}$$

$$G = 800 \text{ tf} \cdot \text{cm}^{-2}$$

$$J_z = 1946 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 12820 \text{ cm}^4$$

$$J_\omega = 101900 \text{ cm}^6$$

$$J_t = 21,37 \text{ cm}^4$$

$$A = 64,1 \text{ cm}^2$$

$$i_D^2 = 352,27 \text{ cm}^2$$

$$K_z = 1,473126 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

$$K_y = -13,7 \text{ cm}$$

$$z_D = 2,2 \text{ cm}$$

$$y_D = 10,82 \text{ cm}$$

A precisão fixada no programa foi de 10^{-5} .

7.2.1 - Carga de Compressão no Centro de Flexão

Quando o único carregamento é uma carga de compressão aplicada no centro de flexão, as equações diferenciais de instabilidade são independentes e do seguinte tipo:

$$E J_z v_D^{IV} + N v_D'' = 0 \quad \dots (7.11)$$

$$E J_y w_D^{IV} + N w_D'' = 0 \quad \dots (7.12)$$

$$E J_\omega \phi_D^{IV} + \left\{ N \left[i_D^2 + 2 y_D (K_y - y_D) + 2 z_D (K_z - z_D) \right] + \right. \\ \left. - G J_t \right\} \phi_D'' = 0 \quad \dots (7.13)$$

A independência das equações (7.11), (7.12) e (7.13) ocorre devido à existência dos momentos fletores do carregamento excêntrico aplicados às extremidades da viga. Por esta razão, a viga solicitada por este carregamento será estudada com apoio simples nas extremidades (caso a) pois, para o caso b, o engaste na extremidade absorve este momento aplicado e as tensões normais serão apenas devido à força normal.

As condições de contorno do problema são:

$$v_D(0) = 0 \quad \dots (7.14)$$

$$v_D(\ell) = 0 \quad \dots (7.15)$$

$$E J_z v_D''(0) = N y_D \quad \dots (7.16)$$

$$E J_z v_D''(\ell) = N y_D \quad \dots (7.17)$$

$$w_D(0) = 0 \quad \dots (7.18)$$

$$w_D(\ell) = 0 \quad \dots (7.19)$$

$$E J_y w_D''(0) = -N z_D \quad \dots (7.20)$$

$$E J_y w_D''(\ell) = -N z_D \quad \dots (7.21)$$

$$\phi_D(0) = 0 \quad \dots (7.22)$$

$$\phi_D(\ell) = 0 \quad \dots (7.23)$$

$$\phi_D''(0) = 0 \quad \dots (7.24)$$

$$\phi_D''(\ell) = 0 \quad \dots (7.25)$$

As equações (7.11) e (7.12) têm a elástica determinada, ou seja:

$$v_D(x) = y_D \left\{ 1 - \frac{\cos [g_1 (\frac{\ell}{2} - x)]}{\cos (g_1 \frac{\ell}{2})} \right\} \dots (7.26)$$

$$w_D(x) = -z_D \left\{ 1 - \frac{\cos [g_1 (\frac{\ell}{2} - x)]}{\cos (g_1 \frac{\ell}{2})} \right\} \dots (7.27)$$

onde:

$$g_1 = \sqrt{\frac{N}{E J_z}} \dots (7.28)$$

$$g_2 = \sqrt{\frac{N}{E J_y}} \dots (7.29)$$

Das relações (7.28) e (7.29) nota-se que as soluções (7.26) e (7.27) valem quando a força normal é de compressão e com as seguintes condições:

$$\cos (g_1 \frac{\ell}{2}) \neq 0 \quad e \quad \sin (g_1 \frac{\ell}{2}) \neq 0 \quad \dots (7.30)$$

$$\cos (g_2 \frac{\ell}{2}) \neq 0 \quad e \quad \sin (g_2 \frac{\ell}{2}) \neq 0 \quad \dots (7.31)$$

As condições (7.30) e (7.31) podem ser colocadas em outra forma, ou seja:

$$N \neq E J_z \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad \dots (7.32)$$

$$N \neq E J_y \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad \dots (7.33)$$

As relações (7.32) e (7.33) impõem que a carga de compressão deve ser diferente das cargas de flambagem por flexão de Euler, para que não haja divisão por zero em (7.26) e (7.27).

Logo, o problema de instabilidade existente para (7.11) e (7.12) é de 2ª espécie.

A resolução da equação diferencial (7.13) resulta em deslocamentos angulares ϕ nulos até a carga de flambagem e uma elástica conhecida apenas em sua forma na carga de flambagem, o problema da instabilidade nestes deslocamentos é de primeira espécie.

A menor carga de flambagem por torção é:

$$P_{\phi} = \left(\frac{\pi^2 E J_{\omega}}{l^2} + G J_t \right) \frac{1}{i_D^2 + 2 y_D (K_y - y_D) + 2 z_D (K_z - z_D)} \quad \dots (7.34)$$

A forma de flambagem será:

$$\phi_D = K_1 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{l} x \right) \quad \dots (7.35)$$

Vlassov [21] ao analisar este tipo de problema recomenda que sejam calculadas as cargas de flambagem de Euler (flambagem por flexão em y e z) e carga de flambagem por torção; a menor carga será a carga crítica. Caso a flambagem seja por flexão, no plano que haja momentos fletores do carregamento excêntrico, o problema será de segunda espécie; caso não haja momentos fletores aplicados neste plano ou a flambagem deu-se por torção, o problema será de primeira espécie.

Para encontrar a carga crítica pelo computador, o procedimento, a partir dos resultados obtidos, é o mesmo de Vlassov [21]. Caso o problema seja de segunda espécie, pode-se, em uma segunda execução, calcular os valores dos deslocamentos com uma carga de compressão fixada.

A resolução exata deste problema encontra para a menor carga crítica o valor 28,009 tf que é a carga de Euler da equação (7.11). Portanto, o problema é de segunda espécie, apesar de o estado de equilíbrio não alterar-se na carga crítica, os deslocamentos que ocorrem tendem para infinito; na aproximação de segunda ordem, para o valor da carga crítica, há divisão por zero na equação (7.26).

A resolução por computador encontrou para o menor auto-valor o resultado de 28,01 tf (erro de +0,0036 %) em seis iterações. O auto-vetor associado teve as maiores componentes em v, enquanto as componentes em w e ϕ da penúltima para a última iteração mudaram de sinal e sua ordem era de 10^{-3} . A interpretação do auto-vetor mostra:

- a) Os deslocamentos w e ϕ devem ser desprezados pois mudaram de sinal em duas iterações com redução da ordem de grandeza.
- b) Os deslocamentos v que decorreram indicam ser o problema de segunda espécie pela existência de flexão normal devido a momentos fletores externos nesta direção.

A resolução do problema de segunda espécie levou aos resultados para $N = 10,0$ tf nas Tabelas 7.7 a 7.10.

x/l	Obtido	Exato
0,125	-3,138	-3,138
0,25	-5,510	-5,510
0,5	-7,490	-7,490

TABELA 7.7 - Deslocamento v_D (cm)

x/l	Obtido ($\times 10^{-2}$)	Exato (10^{-2})	Erro %
0,125	6,771	6,772	-0,015
0,25	11,65	11,65	-
0,5	15,58	15,58	-

TABELA 7.8 - Deslocamento w_D (cm)

x/l	Obtido	Exato
0,125	-139,6	-139,6
0,25	-163,3	-163,3
0,5	-183,1	-183,1

TABELA 7.9 - Momentos Fletores M_z (tf·cm)

x/l	Obtido	Exato
0,125	22,68	22,68
0,25	23,16	23,16
0,5	23,56	23,56

TABELA 7.10 - Momentos Fletores M_y (tf·cm)

Pelo tratamento deste problema ser em teoria de segunda ordem, o equilíbrio dos elementos é feito na posição deslocada e, portanto, os momentos fletores da força normal excêntrica são equilibrados por ela na posição final, o que resulta na anulação do esforço cortante.

Nos resultados obtidos pelo computador, as cortantes Q_y e Q_z , como os deslocamentos e esforços de torção, foram inferiores a 10^{-12} .

O problema de instabilidade de segunda espécie é confirmado nos resultados obtidos pela variação, por exemplo, do deslocamento v do centro do vão e da primeira derivada v' no apoio com a variação da força de compressão N , como mostra a Tabela 7.11.

A Tabela 7.11 mostra que, à medida que a força normal tende a 28,01 tf, os deslocamentos tendem assintoticamente para o infinito.

N	v_D (cm)	v'_D (rad)
1	-0,463	-0,001
10,0	-7,489	-0,023
15,0	-15,64	-0,046
20,0	-34,06	-0,096
25,0	-114,03	-0,308

TABELA 7.11

7.2.2 - Carga de Compressão no C.G.

Este problema é análogo ao apresentado no item 7.1, com as mesmas equações diferenciais (7.1), (7.2) e (7.3) e de primeira espécie em v , w e ϕ . A carga crítica e xata anula o determinante (7.7) e deve-se lembrar que, no caso de engaste em ambas as extremidades, as cargas P_y , P_W e P_z são calculadas com o comprimento de flambagem igual à metade da distância entre apoios. A Tabela 7.12 apresenta as cargas P_y , P_W e P_z para os dois casos de vinculação.

Vinculação	P_y (tf)	P_z (tf)	P_W (tf)
Apoiado	184,5	28,01	52,69
Engastado	738,1	112,0	65,18

TABELA 7.12

Na Tabela 7.13 apresentam-se as cargas críticas para os dois casos de vinculação.

Vinculação	P (exato) (tf)	P (obtido) (tf)	Erro %
Apoiado	27,562	27,562	+0,015
Engastado	62,214	62,222	+0,013

TABELA 7.13

O modo de flambagem, no caso de apoio simples nas extremidades, tem para as funções v , w e ϕ as senóides dadas por (7.4), (7.5) e (7.6), ou seja:

$$v_D = K_1 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x \right)$$

$$w_D = K_2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x \right)$$

$$\phi_D = K_3 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x \right)$$

Quando existirem engastes nas extremidades, as funções v , w e ϕ do modo de flambagem são as seguintes:

$$v_D = K_4 \left[1 - \cos \left(2 \frac{\pi}{\ell} \cdot x \right) \right] \quad \dots (7.36)$$

$$w_D = K_5 \left[1 - \cos \left(2 \frac{\pi}{\ell} \cdot x \right) \right] \quad \dots (7.37)$$

$$\phi_D = K_6 \left[1 - \cos \left(2 \frac{\pi}{\ell} \cdot x \right) \right] \quad \dots (7.38)$$

Na Tabela 7.14 apresentam-se os resultados para v , w e ϕ obtidos no caso de apoios simples e, na Tabela 7.15 o modo de flambagem obtido no caso de extremidades engastadas. Deve-se notar nestas tabelas que, em ambas, os maiores deslocamentos ocorridos foram para o deslocamento de flexão v .

Assim, apesar de a viga ao ser engastada ter a sua carga crítica (62,2 tf) próxima de P_W (65,2 tf), como mostram as Tabelas 7.12 e 7.13, não significa que a proximidade da carga de Wagner implicará em maiores deslocamentos por torção como ocorreu no exemplo anterior, ítem 7.1.

x/l		Exato	Obtido
0,125	v	-0,3827	-0,3827
	w	0,0053	0,0053
	ϕ	0,0028	0,0028
0,25	v	-0,7071	-0,7071
	w	0,0098	0,0098
	ϕ	0,0052	0,0052
0,5	v	-1,000	-1,000
	w	0,0139	0,0139
	ϕ	0,0073	0,0073

TABELA 7.14

x/l		Exato	Obtido	Erro %
0,125	v	0,1464	-0,1562	+ 6,6
	w	0,0531	0,0581	+ 9,4
	ϕ	0,0533	0,0616	+15,6
0,25	v	-0,5000	-0,5246	+ 4,92
	w	0,1813	0,1939	+ 5,90
	ϕ	0,1820	0,2029	+11,48
0,5	v	-1,000	-1,000	-
	w	0,3626	0,3627	0,03
	ϕ	0,3640	0,3643	0,08

TABELA 7.15

Por outro lado o engaste nas extremidades introduziu maiores perturbações, como mostra a Tabela 7.13, para os erros 0,125 e do apoio.

7.3 - EXEMPLO NUMÉRICO 3

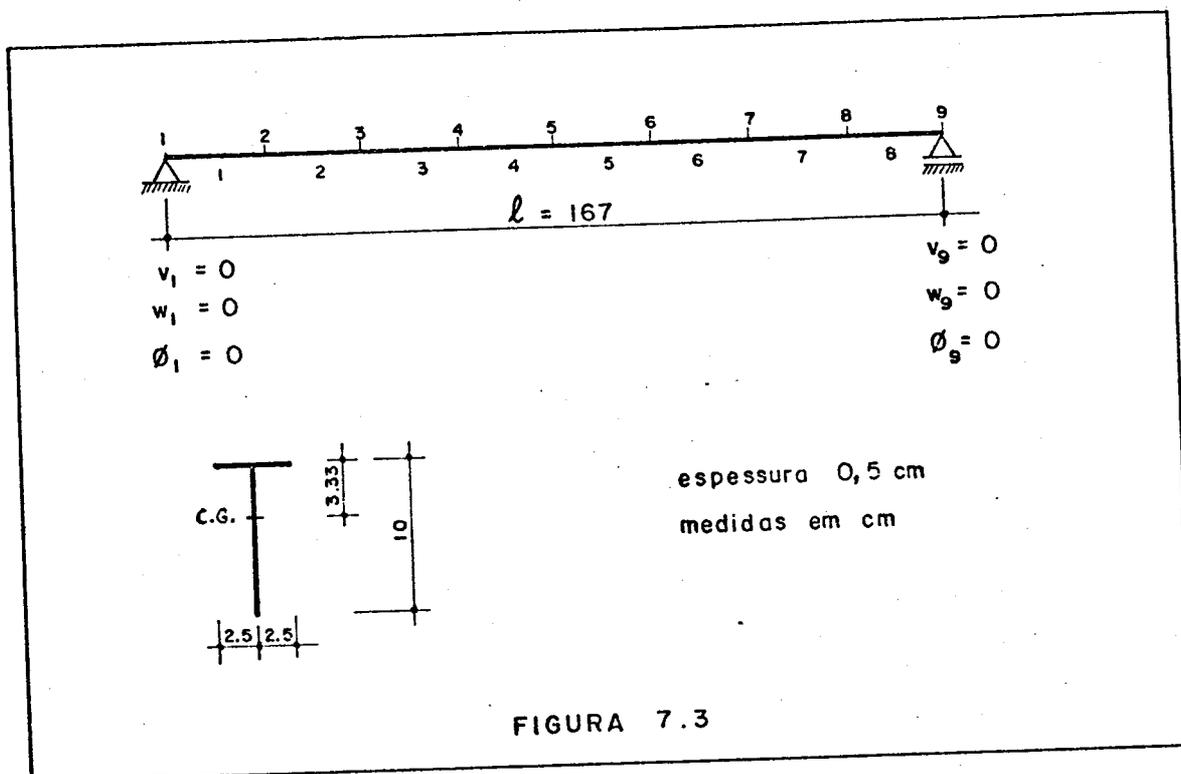


FIGURA 7.3

Na viga de secção transversal e comprimento mostrados na Fig. 7.3, foi aplicada uma carga de compressão no centro de flexão (D).

Devido a secção ter um eixo de simetria, as características geométricas K_z e z_D são nulas, enquanto que a forma do tipo da secção em estudo leva a um momento setorial de inércia (J_ω) nulo.

As equações diferenciais do problema de instabilidade são as equações (7.11), (7.12) e (7.13) fazendo-se a eliminação dos termos nulos, ou seja:

$$E J_z v_D^{IV} + N v_D'' = 0 \quad \dots (7.39)$$

$$E J_y w_D^{IV} + N w_D'' = 0 \quad \dots (7.40)$$

$$\left\{ N \left[i_D^2 + 2 y_D (K_y - y_D) \right] - G J_t \right\} \phi_D'' = 0 \quad \dots (7.41)$$

As condições de contorno são dadas por:

$$v_D(o) = 0 \quad \dots (7.42)$$

$$v_D(l) = 0 \quad \dots (7.43)$$

$$E J_z v_D''(o) = -N y_D \quad \dots (7.44)$$

$$E J_z v_D''(l) = N y_D \quad \dots (7.45)$$

$$w_D(o) = 0 \quad \dots (7.46)$$

$$w_D(l) = 0 \quad \dots (7.47)$$

$$w_D''(o) = 0 \quad \dots (7.48)$$

$$w_D''(l) = 0 \quad \dots (7.49)$$

$$\phi_D(o) = 0 \quad \dots (7.50)$$

$$\phi_D(l) = 0 \quad \dots (7.51)$$

Nota-se, em relação ao ítem 7.2.1, que devido à existência de um eixo de simetria na secção transversal, o problema de instabilidade é de primeira espécie nos deslocamentos w e ϕ e de segunda espécie nos deslocamentos v , com equações independentes.

As cargas críticas dos problemas de primeira espécie são:

$$P_y = \frac{\pi^2 E J_y}{l^2} \quad \dots (7.52)$$

$$P_\phi = \frac{G J_t}{i_D^2 + 2 y_D (K_y - y_D)} \quad \dots (7.53)$$

Nos problemas de primeira espécie, com este tipo de vinculação, o modo de flambagem para flexão será uma senóide do seguinte tipo:

$$w_D = K_1 \text{ sen } \left(\frac{\pi}{l} x \right) \quad \dots (7.54)$$

Para flambagem por torção, neste problema, ϕ será qualquer função que satisfaça as condições de contorno.

Para o problema de segunda espécie os deslocamentos serão conhecidos com uma equação análoga à dada por (7.26) e do seguinte tipo:

$$v_D(x) = y_D \left[\frac{\cos \left[g_1 \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]}{\cos \left(g_1 \frac{l}{2} \right)} - 1 \right] \quad \dots (7.55)$$

onde:

$$g_1 = \sqrt{\frac{N}{E J_z}} \quad \dots (7.56)$$

Deve-se lembrar que a solução (7.56) é válida quando a força normal N é de compressão e com a restrição (7.32), ou seja:

$$N \neq E J_z \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

O procedimento de cálculo da carga crítica é o descrito no item 7.2.1.

Os valores numéricos deste problema são:

$$E = 2\,100\,000 \text{ kgf} \cdot \text{cm}^{-2}$$

$$G = 840\,000 \text{ kgf} \cdot \text{cm}^{-2}$$

$$J_z = 83,39 \text{ cm}^4$$

$$i_D^2 = 22,94 \text{ cm}^2$$

$$K_y = 0,731 \text{ cm}$$

$$y_D = -3,333 \text{ cm}$$

$$J_y = 5,313 \text{ cm}^4$$

$$J_t = 0,625 \text{ cm}^4$$

$$A = 7,5 \text{ cm}^2$$

A menor carga crítica é dada pela expressão (7.52), com valor de 3948 kgf e, portanto, o problema é de primeira espécie.

O resultado obtido no computador foi 3949 kgf (erro de +0,025%) em quatro iterações e a análise do modo de flambagem mostrou:

- a) Os deslocamentos v e ϕ tiveram sua ordem de grandeza reduzida em duas iterações sucessivas e na última iteração os maiores deslocamentos em v e ϕ eram 10^{-4} vezes o deslocamento w .
- b) Os deslocamentos w que ocorreram indicam ser o problema de primeira espécie por não haver deslocamentos iniciais devido à flexão nesta direção.

A Tabela 7.16 mostra os resultados obtidos para o modo de flambagem comparados com a expressão (7.55) onde a constante K_2 foi arbitrada como a unidade.

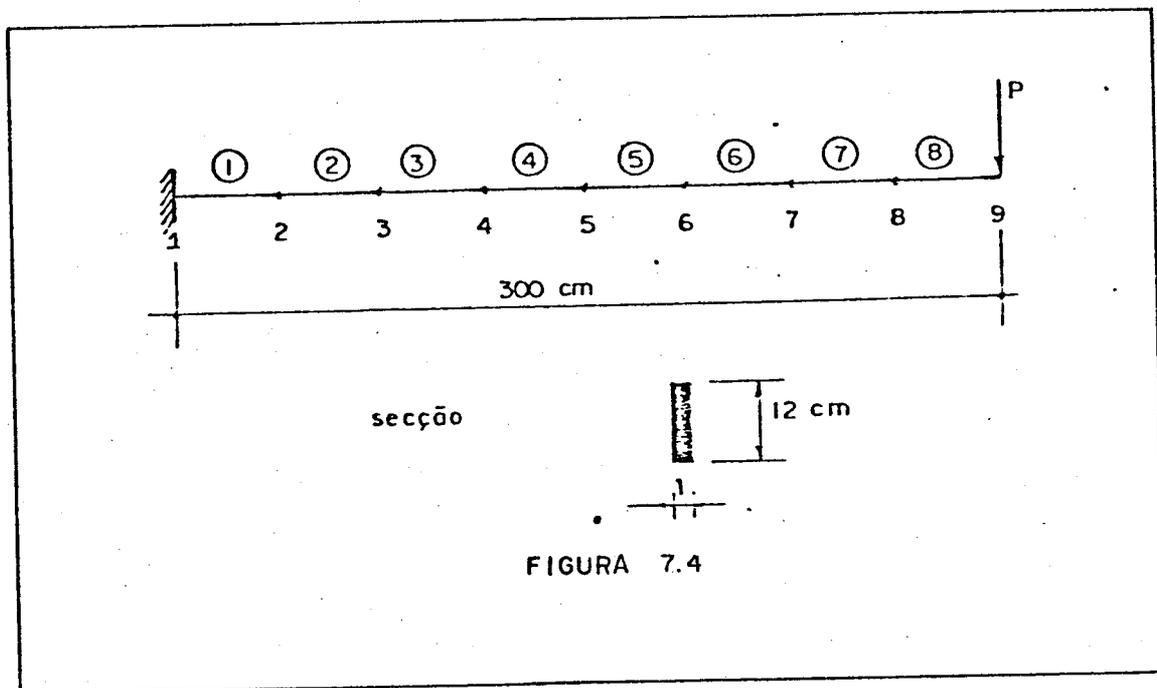
x/l	w (obtido)	w (exato)	Erro %
0,125	0,3827	0,3827	-
0,25	0,7072	0,7071	+0,014
0,5	1,000	1,000	-

TABELA 7.16

A precisão dos resultados foi considerada boa e pode-se notar que mesmo com número reduzido de iterações os erros obtidos no modo de flambagem foram pequenos.

Devido à independência das equações diferenciais, este problema de primeira espécie tem deslocamentos em v até a carga crítica e neste ponto os deslocamentos em w passam bruscamente a valores diferentes de zero e produzem a instabilidade da estrutura.

7.4 - EXEMPLO NUMÉRICO 4



A viga da Fig. 7.4, engastada em uma extremidade e livre em outra, possui a carga concentrada aplicada sobre o eixo axial que passa pelo C.G.

Devido à dupla simetria da secção transversal, K_y , K_z , y_D e z_D são nulos, enquanto que a forma retangular torna nulo o momento setorial de inércia (J_ω).

As equações diferenciais do problema de instabilidade são:

$$E J_z v_D^{IV} = 0 \quad \dots (7.57)$$

$$E J_y w_D^{IV} + (M_z \phi_D)'' = 0 \quad \dots (7.58)$$

$$G J_t \phi_D'' - M_z w_D'' = 0 \quad \dots (7.59)$$

onde:

$$M_z = -P\ell(1 - x/\ell) \quad \dots (7.60)$$

Este problema, também conhecido como problema de Prandtl, é de primeira espécie em w e ϕ com as equações diferenciais acopladas nestes deslocamentos e tem as seguintes condições de contorno:

$$E J_y w_D'''(\ell) + M_z(\ell) \phi_D'(\ell) + M_z'(\ell) \phi_D(\ell) = 0 \quad \dots (7.61)$$

$$w_D(0) = 0 \quad \dots (7.62)$$

$$G J_t \phi_D'(\ell) - M_z(\ell) w_D'(\ell) = 0 \quad \dots (7.63)$$

$$\phi_D(0) = 0 \quad \dots (7.64)$$

$$E J_y w_D''(\ell) = 0 \quad \dots (7.65)$$

$$w_D'(0) = 0 \quad \dots (7.66)$$

A solução das equações diferenciais (7.58) e (7.59), segundo Timoshenko [19], é dada por:

$$w_D''(x) = \frac{G J_t \phi_D''(x)}{M_z(x)} \quad \dots (7.67)$$

$$\phi_D(x) = K \cdot \sqrt{|x-\ell|} \cdot J_{-1/4} \left(\frac{P(x-\ell)^2}{2\sqrt{E J_y \cdot G J_t}} \right) \quad \dots (7.68)$$

onde:

K é uma constante qualquer

$J_{-1/4}$ representa uma função de Bessel de primeiro tipo de ordem $-1/4$ e dada pela expressão:

$$J_n(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{-\rho^2}{4}\right)^m \dots (7.69)$$

para $n = -1/4$

onde:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{a-1} dt \dots (7.70)$$

As soluções dadas por (7.67) e (7.68) existem quando a carga crítica P é dada por:

$$P = \frac{4,0126}{\ell^2} \sqrt{E J_y \cdot G \cdot J_t} \dots (7.71)$$

Os valores numéricos deste problema são:

$$J_y = 1,0 \text{ cm}^4$$

$$J_z = 144,0 \text{ cm}^4$$

$$A = 12,0 \text{ cm}^2$$

$$J_t = 4,0 \text{ cm}^4$$

$$E = 2100 \text{ tf} \cdot \text{cm}^{-2}$$

$$G = 800 \text{ tf} \cdot \text{cm}^{-2}$$

$$\ell = 300 \text{ cm}$$

A viga foi dividida em oito elementos iguais e a precisão foi fixada em 10^{-5} . A carga crítica foi de 0,1156 tf, que coincidiu com a calculada pela expressão (7.71), devido ao arredondamento e foram necessárias 13 iterações.

Para comparar os resultados encontrados para o ângulo ϕ , utilizaram-se os valores da função de Bessel dada por (7.69), que foram tabeladas em Jahnke [4]. Os resultados são apresentados na tabela 7.17.

x/l	ϕ (obtido)	ϕ (Jahnke)	Erro (%)
0		0	
0,125	0,3461	0,3406	+1,61
0,25	0,6292	0,6185	+1,73
0,375	0,8259	0,8114	+1,79
0,5	0,9425	0,9300	+1,34
0,625	1	1	-
1,0	1,0271	1,0088	+1,81

TABELA 7.17

Por outro lado, confirmou-se nos resultados, que a carga crítica temos menores valores de mesmo módulo e sinais opostos:

- a) A expressão que calculou a carga crítica na precisão desejada foi (5.18)
- b) A existência de dois auto-vetores de direções diferentes nas últimas iterações.

Fisicamente, pode ser notado, na Fig. 7.4, que a inversão de sentido da carga P, com as consequentes mudanças de sinal desta carga nas expressões (7.67) e (7.68), produzirá o mesmo problema de instabilidade, com a mesma carga crítica mas, de sinal trocado.

A precisão do resultado para a carga crítica foi considerada boa, enquanto que os erros encontrados para o modo de flambagem situaram-se, nos valores mostrados, inferiores a 2,0%.

Na Tabela 7.18 apresentam-se os valores do deslocamento ϕ que foram obtidos para uma divisão em quatro (ϕ_4), oito (ϕ_8) e dezesseis (ϕ_{16}) elementos finitos iguais.

x/l	ϕ_4	ϕ_8	ϕ_{16}	ϕ_{Jahnke}
0	0,6292	0,6292	0,6292	0,6185
0,5	0,9424	0,9425	0,9425	0,9300

TABELA 7.18

Deve-se observar que os valores mostrados na Tabela 7.18 foram obtidos fazendo-se o deslocamento ϕ a $0,625l$ igual à unidade, por tratar-se de auto-vetores. O deslocamento ϕ a $0,625l$ na divisão em quatro elementos finitos foi obtido através da expressão (4.3) pois, esta divisão implica em deslocamentos de pontos distanciados de $0,25l$.

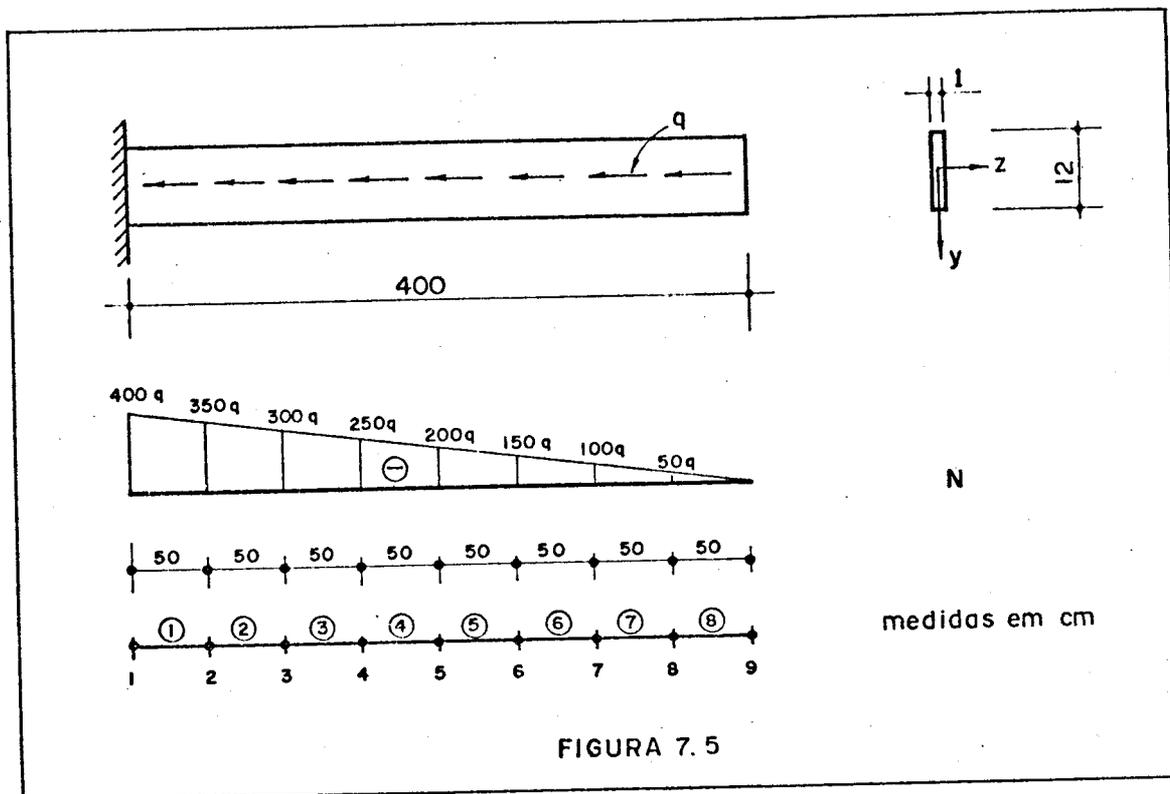
Observando-se as tabelas 7.17 e 7.18 pode-se notar:

- a) Os erros mostrados na Tabela 7.17 oscilam em torno de 1,5% e são maiores que os obtidos com a função de Bessel aproximada.
- b) A Tabela 7.18 mostrou uma constância nos valores de ϕ para as três divisões em elementos finitos, mesmo observando-se os deslocamentos de dois pontos apenas.

Como os valores da função de Bessel foram retirados da tabela de Jahnke [4] por interpolação linear e tendo-se em vista as observações a e b anteriores pode-se concluir que os valores obtidos no computador com oito elementos finitos, tiveram boa precisão.

7.5 - EXEMPLO NUMÉRICO 5

Este exemplo mostra o cálculo da carga de compressão variável que é crítica para a viga da Fig. 7.5.



A Fig. 7.5 mostra, além da secção transversal da viga, o número e o comprimento dos elementos finitos em que foi dividida. As características geométricas e as constantes elásticas são da viga do exemplo numérico 4.

As equações deste problema são:

$$E J_z v_D^{IV} + (N v_D')' = 0 \quad \dots (7.72)$$

$$E J_y w_D^{IV} + (N w_D')' = 0 \quad \dots (7.73)$$

$$G J_t \phi_D'' - (N i_D^2 \phi_D')' = 0 \quad \dots (7.74)$$

onde:

$$N = q(l-x) \quad \dots (7.75)$$

As condições de contorno são:

$$v_D(0) = 0 \quad \dots (7.76)$$

$$N(\ell) v_D'(\ell) + E J_z v_D'''(\ell) = 0 \quad \dots (7.77)$$

$$v_D'(0) = 0 \quad \dots (7.78)$$

$$v_D''(\ell) = 0 \quad \dots (7.79)$$

$$w_D(0) = 0 \quad \dots (7.80)$$

$$N(\ell) w_D'(\ell) + E J_y w_D'''(\ell) = 0 \quad \dots (7.81)$$

$$w_D'(0) = 0 \quad \dots (7.82)$$

$$w_D''(\ell) = 0 \quad \dots (7.83)$$

$$\phi_D(0) = 0 \quad \dots (7.84)$$

$$G J_t \phi_D'(\ell) - N(\ell) i_D^2 \phi_D'(\ell) = 0 \quad \dots (7.85)$$

As três equações diferenciais são independentes e a equação diferencial (7.74) tem solução quando a derivada do ângulo de giro (ϕ_D') for nula. A carga crítica será a menor das cargas críticas das equações (7.72) e (7.73). A equação (7.73) possui a menor carga crítica e sua solução é dada por:

$$w_D' = K \cdot \left(\frac{q}{EJ_y} (\ell-x) \right)^{1/2} \cdot J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{q}{EJ_y} (\ell-x)^3} \right) \dots (7.86)$$

onde:

K é uma constante qualquer

$J_{-1/3}$ representa uma função de Bessel do primeiro tipo de ordem -1/3 e dada pela expressão (7.69) fazendo-se $n = -1/3$.

A solução dada por (7.86) existe quando a carga crítica q é dada por:

$$q_{cr} = 7,8369 \frac{E J_y}{l^3} \dots (7.87)$$

Como o problema é de primeira espécie, para valores de q inferiores ao crítico os deslocamentos são nulos e ao ser atingida a carga crítica os deslocamentos têm a sua forma dada por (7.86).

A viga foi dividida em oito elementos finitos iguais e a precisão desejada foi de 10^{-5} . A carga crítica encontrada foi de 0,257 kgf/cm, que coincidiu com a calculada pela expressão (7.87) devido ao arredondamento.

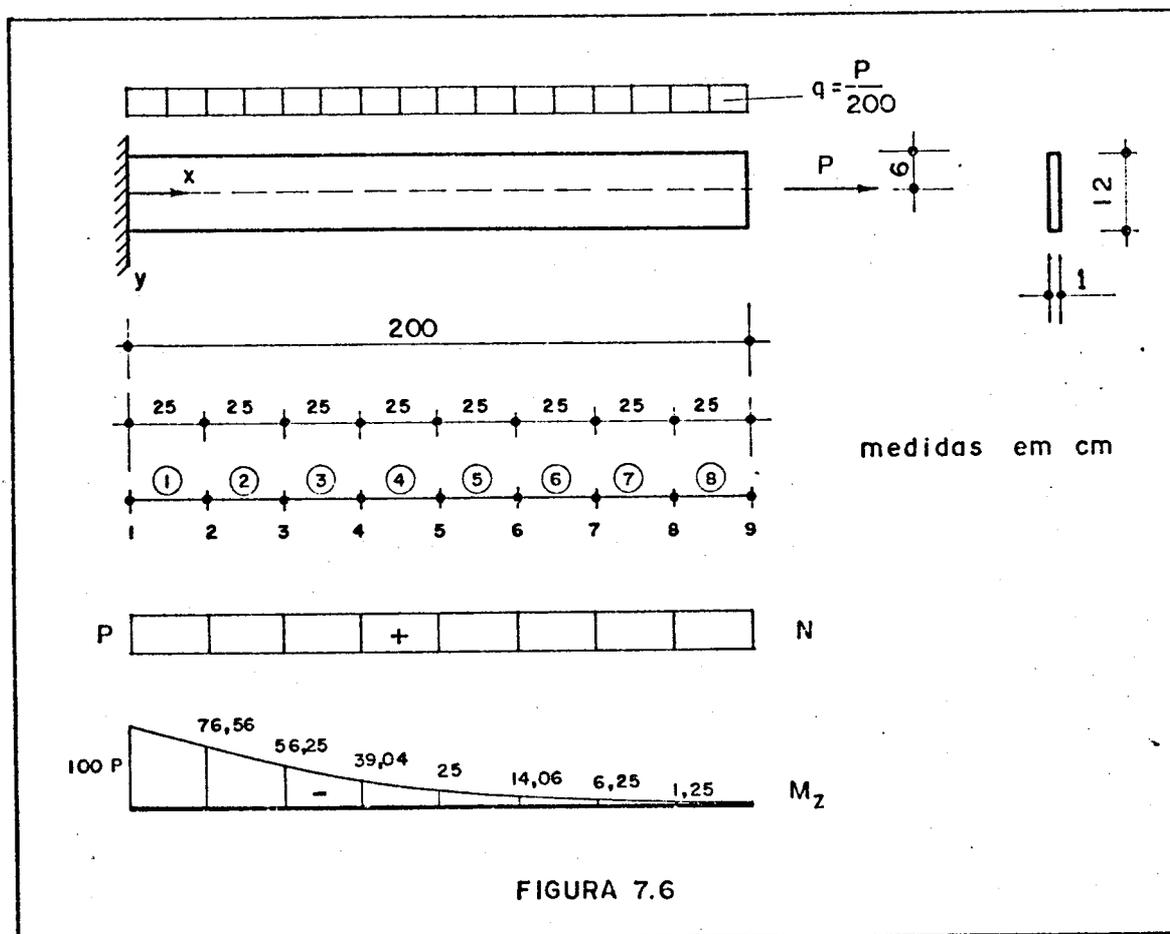
Para comparar os resultados da derivada do modo de flambagem (w') utilizaram-se as Tabelas de Abramowitz [1], que apresenta os valores da função de Bessel desejada através de soma de funções de Airy. Os resultados são apresentados na Tabela 7.19.

x/l	w' (obtido)	w' (tabela)	Erro (%)
0	0	0	--
0,125	0,3170	0,3175	-0,16
0,25	0,6017	0,6021	-0,07
0,375	0,8312	0,8324	-0,14
0,50	1	1	--
0,625	1,1070	1,1070	--
0,75	1,1636	1,1635	+0,01
0,875	1,1848	1,1846	+0,02
1,0	1,1876	1,1878	-0,02

TABELA 7.19

7.6 - EXEMPLO NUMÉRICO 6

Este exemplo trata da conjugação de uma carga transversal uniformemente distribuída com uma carga axial. A secção da viga deste problema, assim como a divisão em elementos finitos, os esforços de primeira ordem e o comprimento são mostrados na Fig. 7.6.



As características geométricas e as constantes elásticas são do exemplo 4, ítem 7.4.

As equações diferenciais de instabilidade deste problema são:

$$E J_z v_D^{IV} - N v_D'' - q_y = 0 \quad \dots (7.88)$$

$$E J_y w_D^{IV} - N w_D'' + (M_z \phi_D)'' = 0 \quad \dots (7.89)$$

$$M_z w_D'' - (N \cdot i_D^2 + G J_t) \phi_D'' = 0 \quad \dots (7.90)$$

onde:

$$M_z = - \frac{P}{400} (\ell - x)^2 \quad \dots (7.91)$$

$$N = P \quad \dots (7.92)$$

Para este problema resultam as condições de contorno:

$$v_D(0) = 0 \quad \dots (7.93)$$

$$- N v_D'(\ell) + E J_z v_D'''(\ell) = 0 \quad \dots (7.94)$$

$$v_D'(0) \quad \dots (7.95)$$

$$v_D''(\ell) = 0 \quad \dots (7.96)$$

$$w_D(0) = 0 \quad \dots (7.97)$$

$$(+M_z(\ell) \phi_D(\ell))' + E J_y w_D'''(\ell) - N w_D'(\ell) = 0 \quad \dots (7.98)$$

$$w_D'(0) = 0 \quad \dots (7.99)$$

$$w_D''(\ell) = 0 \quad \dots (7.100)$$

$$\phi_D(0) = 0 \quad \dots (7.101)$$

$$(G J_t + N i_D^2) \phi_D'(\ell) - M_z(\ell) w_D'(\ell) = 0 \quad \dots (7.102)$$

Enquanto a equação diferencial (7.88) é independente, as equações (7.89) e (7.90) são acopladas e representam um problema de primeira espécie nestes deslocamentos.

Submetido este exemplo no computador para uma precisão de 10^{-5} , a carga crítica P encontrada foi de -0,1275 tf, ou seja, a carga axial é de compressão e a transversal está dirigida contra o eixo y.

7.7. EXEMPLO NUMÉRICO 7

Neste exemplo numérico utilizou-se a viga apresentada no exemplo numérico 2, mostrada na Fig. 7.2.

O carregamento constou de uma carga de compressão excêntrica N aplicada no ponto A da secção mostrada na Fig. 7.7.a.

Para a resolução do problema são necessários os bimomentos e momentos fletores de primeira ordem. O momento fletor de primeira ordem é constante e igual ao produto da carga de compressão pela excentricidade em relação ao centro de gravidade.

Para contar com a influência do bimomento, são necessários os valores destes, obtidos na teoria de primeira ordem.

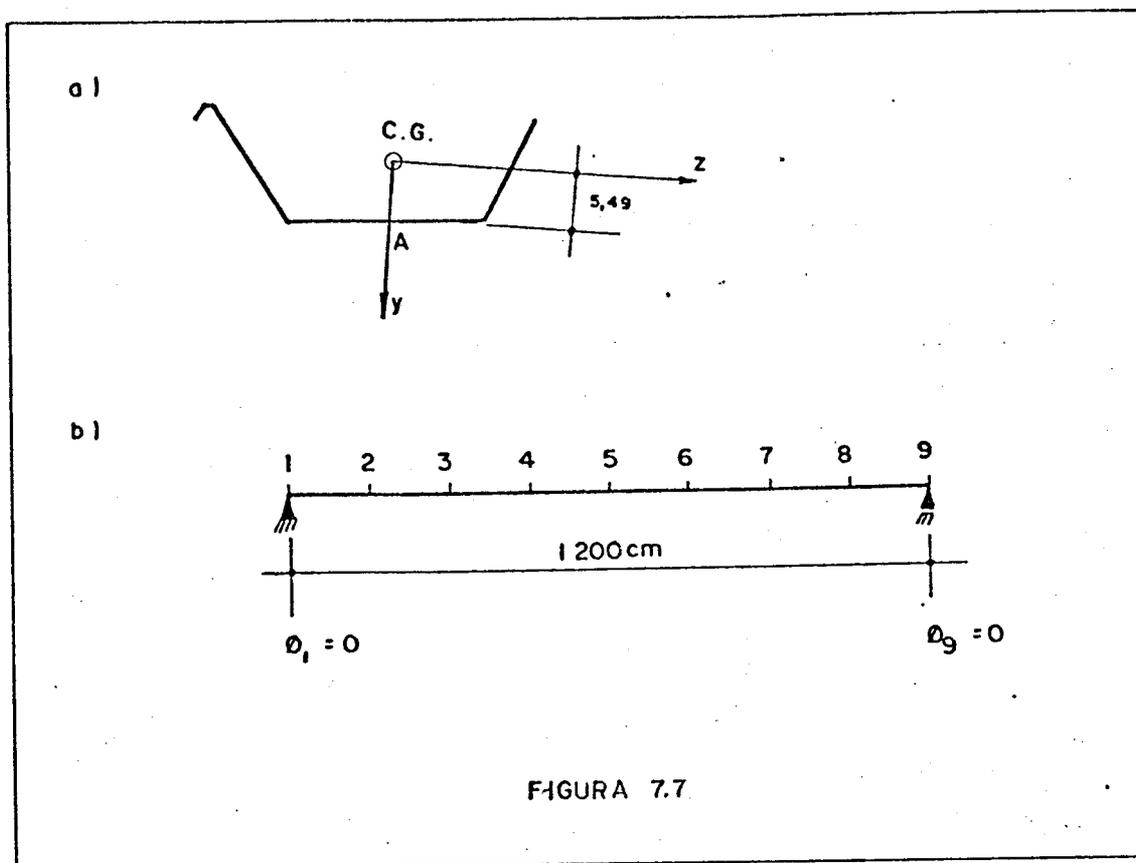
A expressão dos bimomentos de primeira ordem é dada por:

$$B = \frac{B_d}{\sinh\left(\frac{l}{r}\right)} \left[\sinh\left(\frac{x}{r}\right) + \sinh\left(\frac{l-x}{r}\right) \right] \quad \dots (7.103)$$

onde:

B_d é o valor do bimomento externo aplicado em ambas extremidades da viga, produzido pela carga de compressão aplicada em um ponto de área setorial diferente de zero.

Os resultados obtidos para os bimomentos de primeira ordem em alguns pontos da viga e comparados com os valores exatos são apresentados na Tabela 7.20. As características geométricas são as mesmas do exemplo numérico



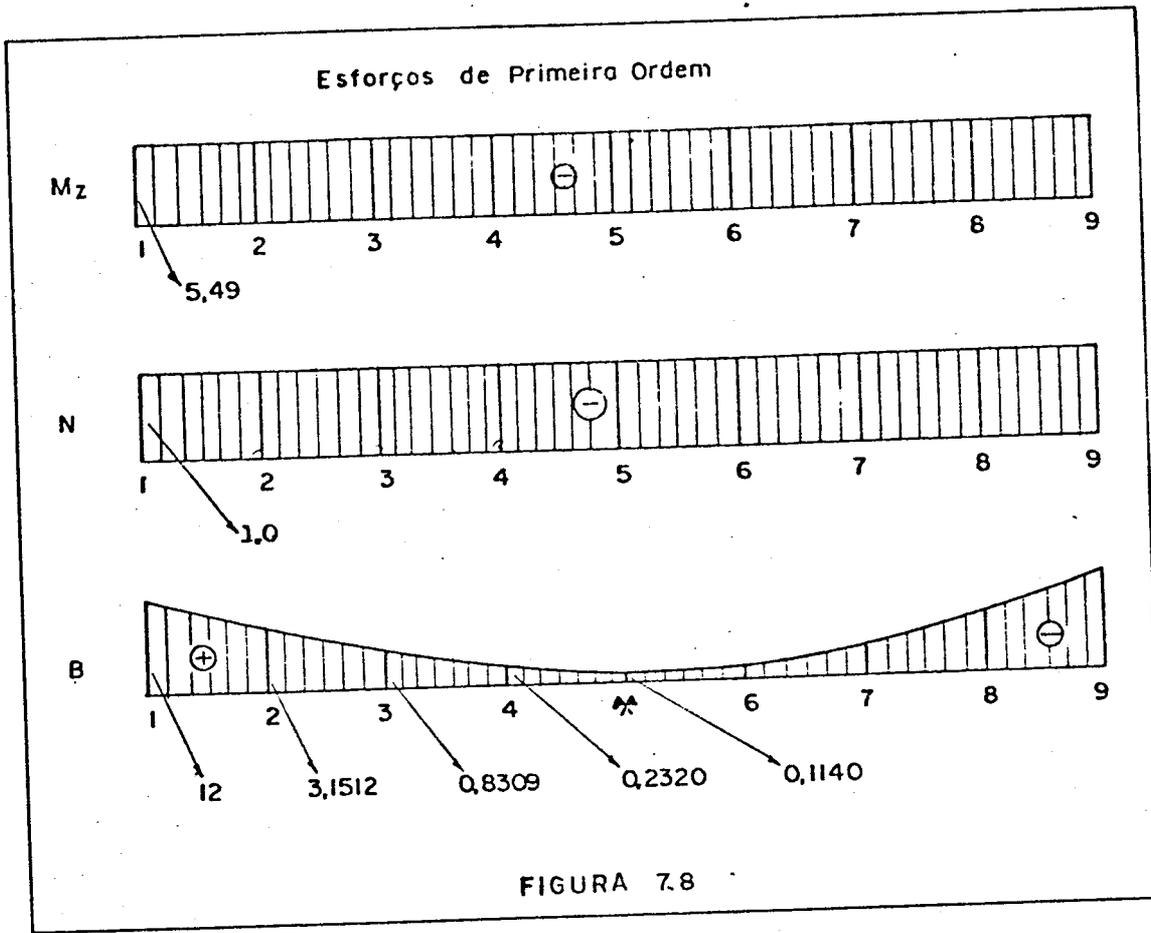
2 e a viga foi dividida em oito elementos finitos. O valor do bimomento da extremidade é dado por:

$$B_d = N \cdot \omega_A = 1 \text{ tf} \cdot 12 \text{ cm}^2 = 12 \text{ tfcm}^2$$

x/l	Exato (tf·cm ²)	Obtido (tf·cm ²)	Erro (%)
0,125	3,1408	3,1512	+0,33
0,25	0,8254	0,8309	+0,67
0,5	0,1125	0,1140	+1,33

TABELA 7.20 - Bimomentos de Primeira Ordem

Assim o diagrama de esforços de primeira ordem para uma carga de compressão unitária é mostrada na Fig. 7.8.



As equações diferenciais do problema são:

$$E J_z v_D^{IV} - N (v_D'' - z_D \phi_D'') = 0 \quad \dots (7.104)$$

$$E J_y w_D^{IV} - N (w_D'' + y_D \phi_D'') + M_z \phi_D'' = 0 \quad \dots (7.105)$$

$$E J_\omega \phi_D^{IV} - G J_t \phi_D'' - \left[N i_D^2 + 2 M_z (K_y - y_D) + B \frac{U_\omega}{J_\omega} \right] \phi_D' + N y_D w_D'' - N z_D v_D'' + M_z w_D'' = 0 \quad \dots (7.106)$$

O momento fletor e a força normal são constantes e o bimomento é dado pela expressão (7.103).

As condições de contorno deste problema são:

$$v_D(o) = 0 \quad \dots (7.107)$$

$$E J_z v_D''(o) = -5,49 \text{ N} \quad \dots (7.108)$$

$$w_D(o) = 0 \quad \dots (7.109)$$

$$w_D''(o) = 0 \quad \dots (7.110)$$

$$\phi_D(o) = 0 \quad \dots (7.111)$$

$$E J_\omega \phi_D''(o) = 12 \cdot \text{N} \quad \dots (7.112)$$

$$v_D(l) = 0 \quad \dots (7.113)$$

$$E J_z v_D''(l) = -5,49 \text{ N} \quad \dots (7.114)$$

$$w_D(l) = 0 \quad \dots (7.115)$$

$$w_D''(l) = 0 \quad \dots (7.116)$$

$$\phi_D(l) = 0 \quad \dots (7.117)$$

$$E J_\omega \phi_D''(l) = 12 \text{ N} \quad \dots (7.118)$$

Da observação das equações diferenciais (7.104) a (7.106) nota-se que elas estão acopladas e a determinação de uma elástica (v , w ou ϕ) leva à determinação das outras.

Portanto, este problema é de segunda espécie em v , w e ϕ . Entretanto, devido à aproximação utilizada, com a aproximação da carga de compressão a um auto-valor da matriz da estrutura, os deslocamentos crescem muito para um pequeno acréscimo na carga de compressão. Isto é mostrado neste exemplo da seguinte forma:

a) Em função da carga de compressão e sua relação com

os momentos fletores e bimomentos de primeira ordem, o menor auto-valor desta estrutura é atingido quando:

$$P = 27,77 \text{ tf}$$

Esta carga não representa carga crítica pois não há mudança no estado de equilíbrio.

- b) Tomando-se como referência o giro e os deslocamentos w_D e v_D do nó central, construiu-se a Tabela 7.21 que mostra a influência do aumento da carga de compressão nestes deslocamentos.

P	($\times 10^{-2}$ rad)	w_D ($\times 10^{-3}$ cm)	v_D (cm)
14	0,1743	0,0894	-6,870
19,25	2,388	13,54	-15,30
24,5	15,03	120,7	-50,85
27,77	∞	∞	∞

TABELA 7.21

Observando-se a tabela nota-se que a aproximação da carga de compressão ao menor auto-valor da matriz da estrutura leva os deslocamentos ao infinito, como mostra a Fig. 7.9. Isto ocorre devido ao fato que para deslocamentos grandes em relação à estrutura, a aproximação, segundo a teoria de segunda ordem, torna-se imprecisa. Entretanto, na prática, devido às limitações de tensões de ruptura nos materiais, dificilmente serão atingidos valores grandes de deslocamentos.

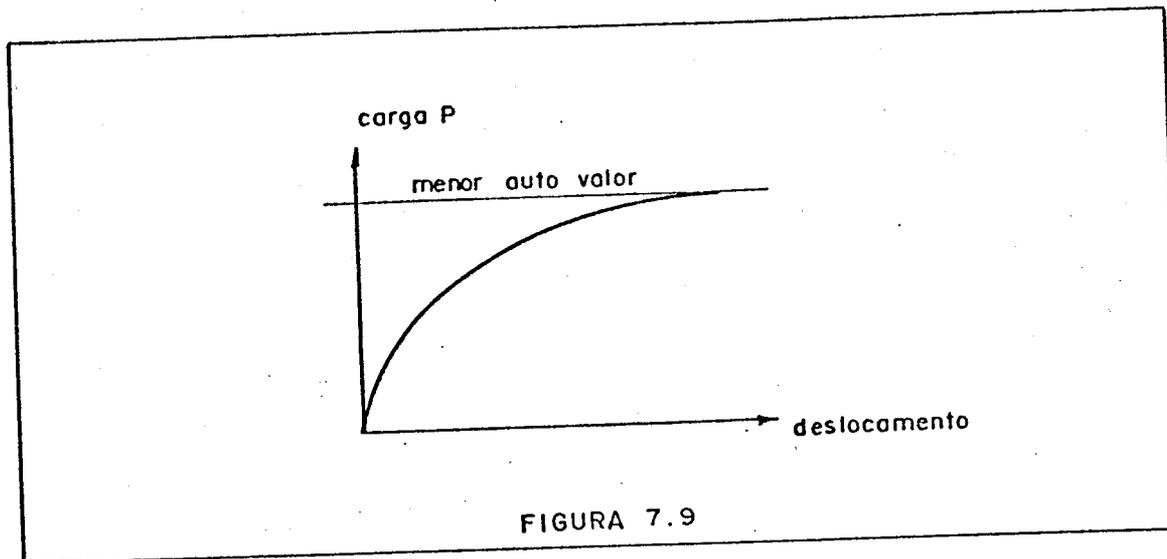


FIGURA 7.9

7.8 - EXEMPLO NUMÉRICO 8

Neste exemplo retoma-se o caso de instabilidade de colunas por carregamento distribuído axial com momento de inércia setorial não nulo.

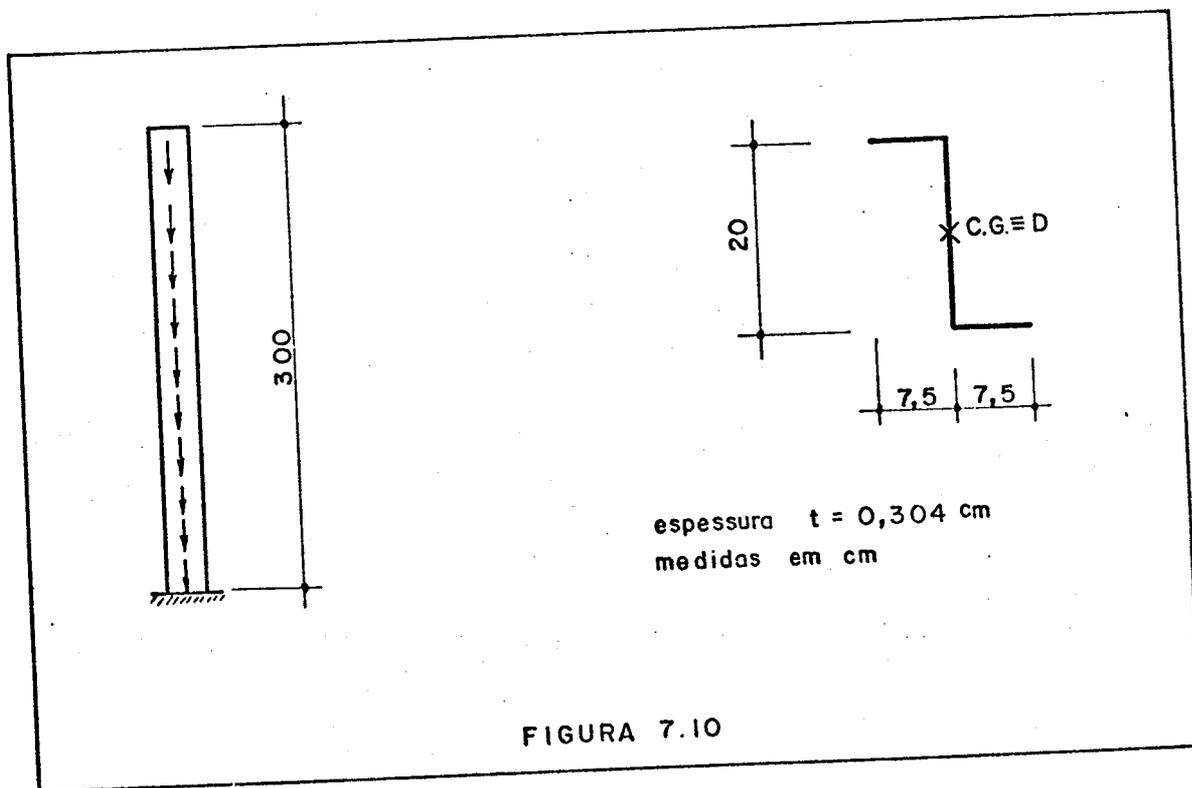


FIGURA 7.10

As equações diferenciais deste problema são:

$$E J_z v_D^{IV} + (N v_D')' = 0 \quad \dots (7.119)$$

$$E J_y w_D^{IV} + (N w_D')' = 0 \quad \dots (7.120)$$

$$E J_\omega \phi_D^{IV} - G J_t \phi_D'' + \left[N i_D^2 \phi_D' \right]' = 0 \quad \dots (7.121)$$

onde:

$$N = q (\ell - x) \quad \dots (7.122)$$

As condições de contorno deste problema são:

$$v_D(0) = 0 \quad \dots (7.123)$$

$$N(\ell) v_D'(\ell) + E J_z v_D'''(\ell) = 0 \quad \dots (7.124)$$

$$v_D'(0) = 0 \quad \dots (7.125)$$

$$v_D''(\ell) = 0 \quad \dots (7.126)$$

$$w_D(0) = 0 \quad \dots (7.127)$$

$$N(\ell) w_D'(\ell) + E J_y w_D'''(\ell) = 0 \quad \dots (7.128)$$

$$w_D'(0) = 0 \quad \dots (7.129)$$

$$w_D''(\ell) = 0 \quad \dots (7.130)$$

$$\phi_D(0) = 0 \quad \dots (7.131)$$

$$(G J_t - N(\ell) i_D^2) \phi_D'(\ell) - E J_\omega \phi_D'''(\ell) = 0 \quad \dots (7.132)$$

$$\phi_D'(0) = 0 \quad \dots (7.133)$$

$$\phi_D''(\ell) = 0 \quad \dots (7.134)$$

As três equações diferenciais, (7.119) a (7.121), são independentes e homogêneas, caracterizando um problema de primeira espécie.

Para análise deste problema calculam-se os menores auto-valores das três equações e o menor deles será o da estrutura.

Os valores numéricos deste exemplo são:

$$E = 2100 \text{ tf} \cdot \text{cm}^{-2}$$

$$G = 800 \text{ tf} \cdot \text{cm}^{-2}$$

$$J_y = 38,4 \text{ cm}^4$$

$$J_z = 704 \text{ cm}^4$$

$$J_\omega = 5802 \text{ cm}^6$$

$$J_t = 0,3278 \text{ cm}^4$$

$$A = 10,64 \text{ cm}^2$$

$$y_D = 0$$

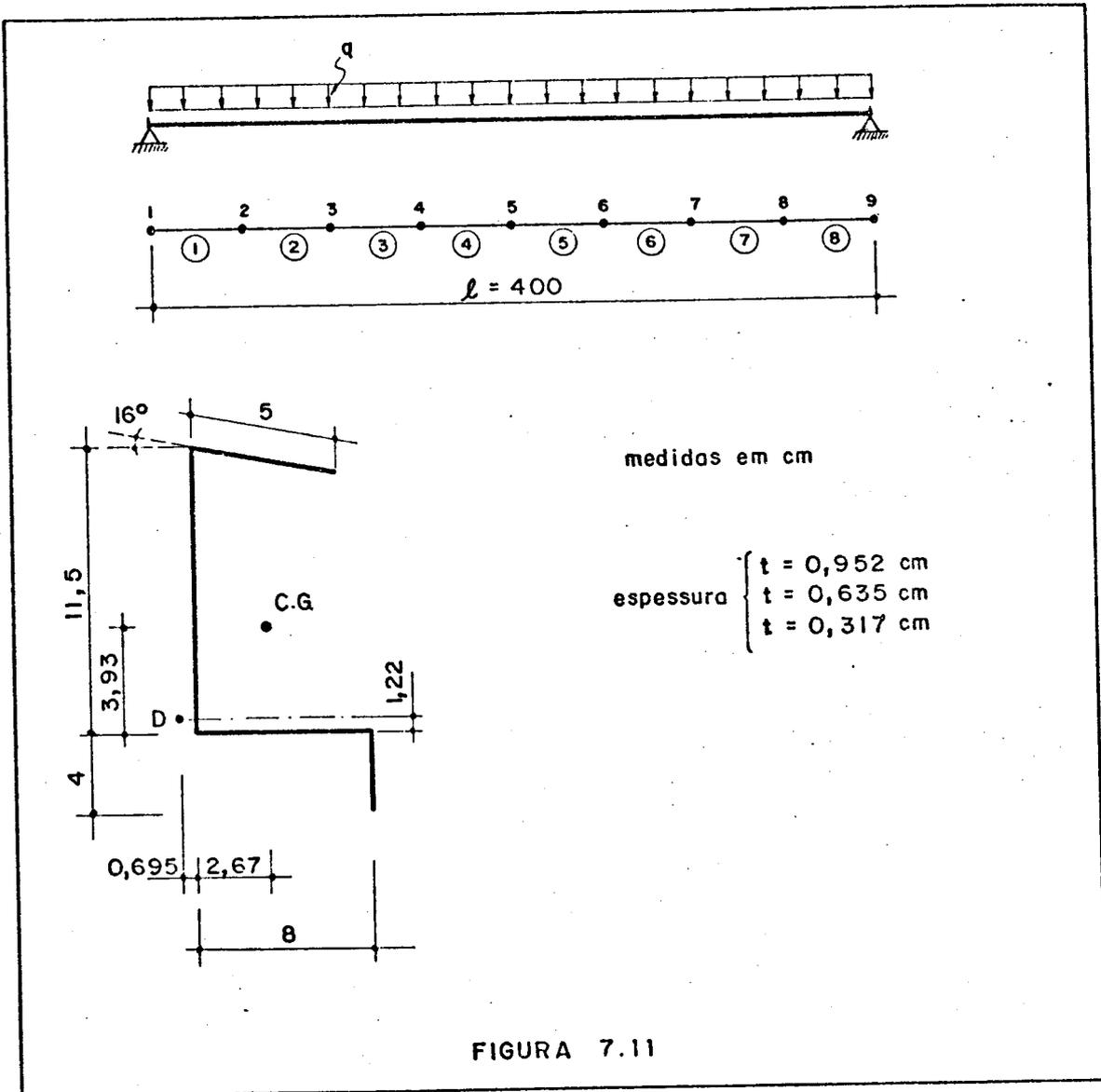
$$z_D = 0$$

Este exemplo foi submetido ao computador, com uma divisão em oito elementos finitos e uma precisão de 10^{-5} , para dois comprimentos da coluna e os resultados foram:

- a) Para o comprimento de 300 cm o valor do mínimo q foi de 23,41 kgf/cm que é o menor auto-valor da equação (7.120). Deve-se lembrar que a equação (7.120) tem solução através de funções de Bessel e com expressão para o modo de flambagem análoga à expressão (7.86). A carga crítica é dada pela expressão (7.87). O resultado obtido pelo computador confirma estes resultados e, para a carga crítica, foi encontrado o mesmo valor do calculado por (7.87), devido ao arredondamento.
- b) Para o comprimento de 600 cm, o menor auto-valor continuou sendo o da equação (7.120) e carga crítica obtida no computador foi 2,926 kgf/cm, que coincidiu com a calculada por (7.87) devido ao arredondamento.

7.9 - EXEMPLO NUMÉRICO 9

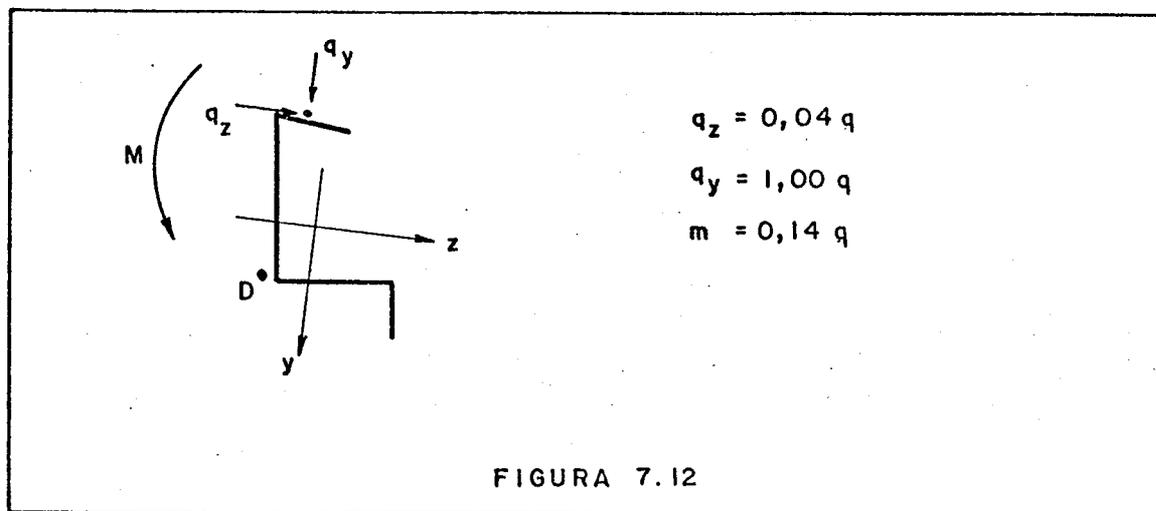
Este exemplo faz a comparação entre resultados obtidos para três valores de espessura de secção da viga mostrada na Fig. 7.11.



A viga desta figura é muito utilizada em edifícios industriais e o carregamento constou de duas cargas distribuídas (q_y e q_z) e uma carga distribuída de torção (m).

Este é um problema de segunda espécie nos deslocamentos v , w e ϕ . Admitiu-se que os carregamentos q_y , q_z e m guardassem alguma relação.

A relação entre os carregamentos distribuídos foi baseada em Yagui [23] e é mostrada na Fig. 7.12.



As equações diferenciais deste problema são acopladas e da seguinte forma:

$$E J_z v_D^{IV} + (M_y \phi_D)'' - q_y = 0 \quad \dots (7.135)$$

$$E J_y w_D^{IV} + (M_z \phi_D)'' - q_z = 0 \quad \dots (7.136)$$

$$E J_\omega \phi_D^{IV} - G J_t \phi_D'' - \left\{ \left[2 M_z (K_y - y_D) - 2 M_y (K_z - z_D) \right] \phi_D' \right\}' +$$

$$+ m + M_z w_D'' + M_y v_D'' + \left[q_z (z_c - z_D) + q_y (y_c - y_D) \right] \phi_D = 0 \quad \dots (7.137)$$

onde:

$$M_z = \frac{1}{2} q_y \cdot x \cdot (\ell - x) \quad \dots (7.138)$$

$$M_y = -\frac{1}{2} q_z \cdot x \cdot (\ell - x) \quad \dots (7.139)$$

As condições de contorno deste problema são:

$$\begin{aligned}
 v_D(o) &= 0 && \dots (7.140) \\
 v_D''(o) &= 0 && \dots (7.141) \\
 w_D(o) &= 0 && \dots (7.142) \\
 w_D''(o) &= 0 && \dots (7.143) \\
 \phi_D(o) &= 0 && \dots (7.144) \\
 \phi_D''(o) &= 0 && \dots (7.145) \\
 v_D(l) &= 0 && \dots (7.146) \\
 v_D''(l) &= 0 && \dots (7.147) \\
 w_D(l) &= 0 && \dots (7.148) \\
 w_D''(l) &= 0 && \dots (7.149) \\
 \phi_D(l) &= 0 && \dots (7.150) \\
 \phi_D''(l) &= 0 && \dots (7.151)
 \end{aligned}$$

Os valores numéricos deste exemplo são:

$$\begin{aligned}
 E &= 2100 \text{ tf} \cdot \text{cm}^{-2} && G = 800 \text{ tf} \cdot \text{cm}^{-2} \\
 l &= 480 \text{ cm} \\
 z_c &= -2,493 \text{ cm} && y_c = -6,308 \text{ cm} \\
 z_D &= -3,361 \text{ cm} && y_D = 2,709 \text{ cm} \\
 K_z &= 2,306 \text{ cm} && K_y = -0,3558 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Assumiu-se que os valores de J_y , J_z e J_ω tivessem variação linear com a espessura e estes valores com o de J_t são mostrados na Tabela 7.22.

t (mm)	J_t (cm ⁴)	J_z (cm ⁴)	J_y (cm ⁴)	J_ω (cm ⁶)
9,52	8,20	827	166	3503
6,35	2,43	551	111	2337
3,17	0,303	275	55	1167

TABELA 7.22

Na Tabela 7.23 apresenta-se o menor auto-valor de q , que faz os deslocamentos tenderem para o infinito e na Tabela 7.24 têm-se os deslocamentos v , w e ϕ do centro do vão que ocorrem quando a carga q tem um valor fixo de 0,1 tf/m.

t (mm) =	9,52	6,35	3,17
g(tf/m) =	1,113	0,431	0,119

TABELA 7.23

t (mm)	v_D (cm)	w_D (cm)	ϕ ($\times 10^{-2}$ rad)
9,52	3,58	0,79	-0,344
6,35	5,97	1,17	-0,752
3,17	11,95	4,39	-35,71

TABELA 7.24

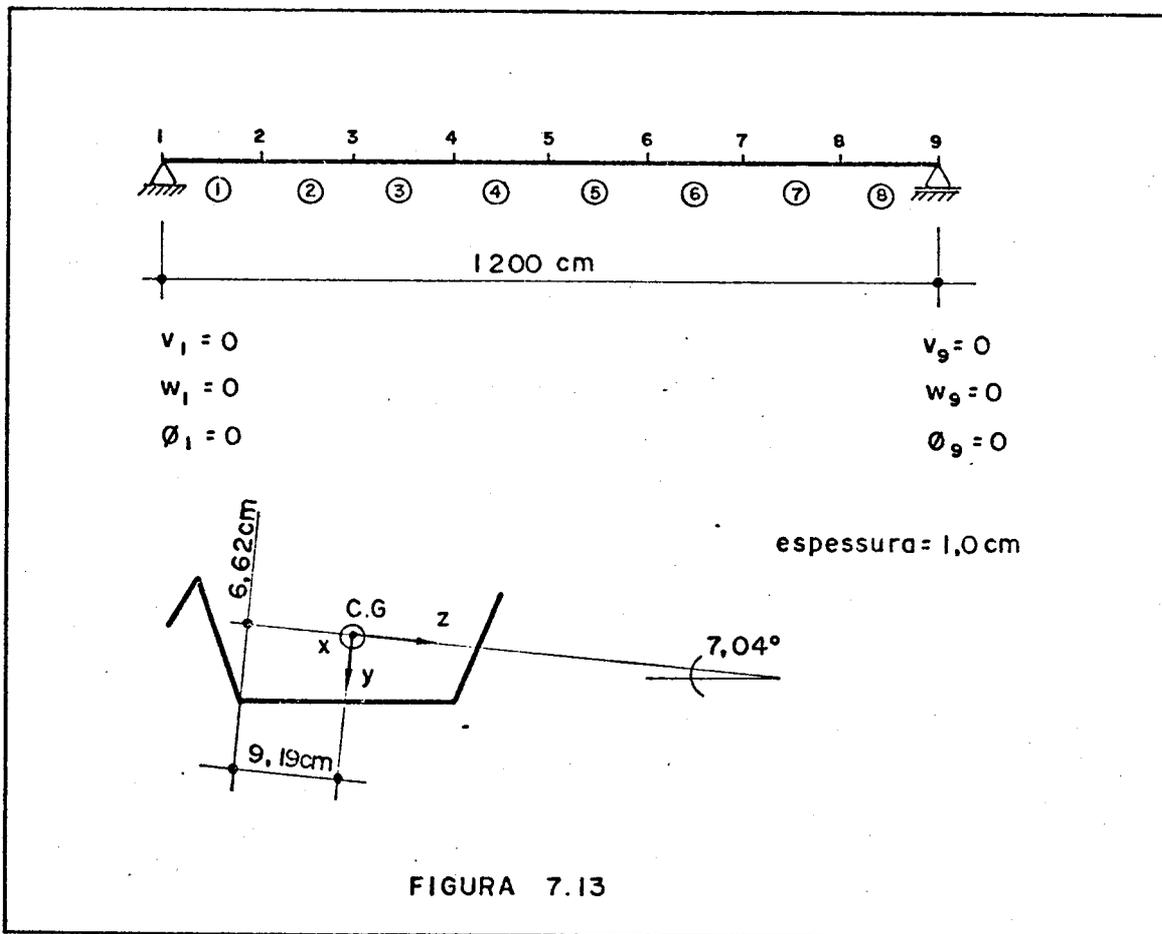
Deve-se notar, nas Tabelas 7.23 e 7.24, que enquanto os deslocamentos tornam-se infinitos em 1,113 tf/m para 9,52 mm de espessura, os deslocamentos são da ordem de $l/120$ para uma carga de 0,1 tf/m que é um limite considerado alto em construções metálicas.

Por outro lado, este exemplo também mostra uma extensão do programa desenvolvido para carregamentos distribuídos não localizados no centro de gravidade ou centro de flexão.

7.10 - EXEMPLO NUMÉRICO 10

Este exemplo trata do cálculo dos auto-valores seguintes à carga crítica da viga do exemplo numérico 2, ítem 7.2.

A divisão em elementos finitos e a seção da viga é lembrada na Fig. 7.13.



A carga de compressão foi aplicada no centro de gravidade e, portanto, o problema de instabilidade é de primeira espécie. Os auto-valores seguintes serão as outras raízes do determinante dado por (7.7), ou seja:

$$(P_z - P)(P_y - P)(P_w - P)i_D^2 - z_D^2 P^2 (P_y - P) - y_D^2 P^2 (P_z - P) = 0$$

onde;

$$P_z = \frac{\pi^2 E J_z}{l_{fl}^2} \quad \text{para } l_{fl} = \left(l, \frac{l}{2}, \frac{l}{3}, \frac{l}{4}, \frac{l}{5}, \frac{l}{6}, \frac{l}{7}, \frac{l}{8}, \dots \right)$$

$$P_y = \frac{\pi^2 E J_y}{l_{fl}^2}$$

$$P_W = \frac{1}{i_D^2} \left(\frac{\pi^2 E J_w}{l_{fl}^2} + G J_t \right)$$

Os resultados foram obtidos no computador para u ma divisão da viga em oito elementos finitos, precisão de 10^{-5} e desejando-se que o programa fornecesse os nove meno res auto-valores com os respectivos modos de flambagem.

A Tabela 7.25 mostra, além do auto-valor, o núme ro da ordem de saída no computador, o número de vezes que o modo de flambagem cruzou o eixo da viga e o deslocamento v, w e ϕ que tem maior componente.

Nº Saída	P (tf)	Nº Cruz.	Desl. máx
1º	27,566	0	v
2º	48,520	0	v
3º	84,035	2	v
4º	152,16	4	ϕ
5º	62,22	1	v
6º	113,68	3	ϕ
7º	115,23	1	v
8º	257,60	2	v
9º	200,74	5	ϕ

TABELA 7.25

Na Tabela 7.26 os auto-valores apresentados em 7.25 são colocados em ordem crescente de seu valor absoluto, são acompanhados do número de saída e o deslocamento que possuiu a máxima componente.

Nº Aut.Val.	P (tf)	Desl.	Nº Cruz.	Nº Saída
1º	27,57	v	0	1º
2º	48,52	v	0	2º
3º	62,22	v	1	5º
4º	84,04	v	2	3º
5º	113,7	φ	3	6º
6º	115,2	v	1	7º
7º	152,2	φ	4	4º
8º	200,7	φ	5	9º
9º	257,6	v	2	8º

TABELA 7.26

Na Tabela 7.27 apresentam-se os valores de P_y , P_z e P_w calculados para os seis primeiros comprimentos de flambagem.

Nº Auto-Val.	P_z (tf)	P_y (tf)	P_w (tf)
1	28,01	184,5	52,69
2	112,00	738,1	65,18
3	252,10	1660,0	86,00
4	448,20	2952,0	115,10
5	700,20	4613,0	152,60
6	1008,00	6642,00	198,40

TABELA 7.27

As características geométricas e elásticas são as do exemplo 2;

$$E = 2100 \text{ tf} \cdot \text{cm}^{-2}$$

$$G = 800 \text{ tf} \cdot \text{cm}^{-2}$$

$$J_z = 1946 \text{ cm}^4$$

$$J_y = 12820 \text{ cm}^4$$

$$J_w = 101900 \text{ cm}^6$$

$$i_D^2 = 352,27 \text{ cm}^2$$

$$l = 1200 \text{ cm}$$

Vlassov, ao analisar este problema, mostrou que a carga crítica P será menor que P_y , P_z e P_w como mostrou-se no exemplo 1, ítem 7.1. Confirmam-se estes valores para as menores cargas críticas dos comprimentos de flambagem $0,5l$, $0,33l$, $0,25l$, $0,2l$ e $0,167l$. Entretanto, entre os menores auto-valores estão aqueles referentes às outras raízes do determinante dado por (7.7), ou seja, a segunda raiz para o comprimento de flambagem igual a l é menor que a menor raiz do comprimento de flambagem igual a $0,5l$. Este fato é um caso diverso daquele mostrado no ítem 7.1.

Na Tabela 7.28 apresentam-se as raízes do determinante dado por 7.7 para os seis primeiros comprimentos de flambagem.

l (fl)	P_1 (tf)	P_2 (tf)	P_3 (tf)
l	27,57	48,51	331,4
$0,5l$	62,21	115,2	1149,0
$0,33l$	83,94	256,9	2551,0
$0,25l$	113,1	456,0	4517,0
$0,20l$	150,4	711,7	7044,0
$0,17l$	195,8	1024,0	10130,0

TABELA 7,28

Com os auto-valores apresentados na Tabela 7.28 e os obtidos do programa, que foram apresentados na Tabela 7.26, monta-se a Tabela 7.29.

Nº Auto-Val.	P(exato) tf	P(obtido) tf	Erro (%)	λ_{FL}
1º	27,57	27,57	--	λ
2º	48,51	48,52	+0,02	λ
3º	62,21	62,22	+0,02	0,5 λ
4º	83,94	84,04	+0,12	0,33 λ
5º	113,10	113,70	+0,53	0,25 λ
6º	115,20	115,20	--	0,50 λ
7º	150,40	152,20	1,20	0,20 λ
8º	195,80	200,70	2,50	0,17 λ
9º	256,90	257,60	0,27	0,33 λ

TABELA 7.29

Sobre os erros apresentados entre o exato e o obtido, deve-se lembrar que quando o comprimento de flambagem torna-se próximo do comprimento do elemento, e a elástica aproximadora dos deslocamentos no elemento for uma curva diferente do modo de flambagem, os erros nos auto-valores serão aumentados.

Por outro lado, a Tabela 7.29 confirmou os resultados obtidos no computador, devendo-se acrescentar:

- a) O cálculo dos auto-valores seguintes, com os correspondentes auto-vetores, deve ser acompanhado de uma interpretação do modo de flambagem pois, conforme foi explicado no Capítulo 5, a ortogonalização em relação ao auto-vetor calculado pode levar a um vetor ortogonal não desejado e o número n de saída do auto-valor, como mostrou-se na Tabela 7.25, não é o enésimo auto-valor em valor absoluto.
- b) Por estas razões deve-se deixar o programa calcular sempre alguns auto-valores a mais que o número de auto-valores desejados.

Considerando-se que o programa não foi otimizado para resolver grupos de menores auto-valores, como Schwarz [17] recomenda, os resultados obtidos foram considerados bons.

8. PROGRAMA PARA RESOLUÇÃO DE INSTABILIDADE DE PRIMEIRA E SEGUNDA ESPÉCIES

A partir dos trabalhos desenvolvidos por Rachid [14], Mori [6] e Paiva [10], foi necessário o desenvolvimento de um programa para computador que, considerando a instabilidade geral com os deslocamentos v , w e ϕ , resolvesse os seguintes problemas:

- a) Resolução dos problemas de primeira espécie com a determinação da menor carga crítica e o respectivo modo de flambagem.
- b) Resolução dos problemas de segunda espécie em duas formas:
 - b.1) Determinação do menor auto-valor que faz com que os deslocamentos que ocorrem em valores próximos deste número cresçam indefinidamente.
 - b.2) Cálculo dos deslocamentos que ocorrem em uma viga devido a um carregamento pré-fixado. Devido-se notar que este carregamento pré-fixado produz deslocamentos finitos na estrutura quando é menor que o mínimo auto-valor.

Assim, a consideração do caso geral de instabilidade possibilita a resolução de problemas com secção transversal sem simetria para os mais variados tipos de carregamento e vinculação.

8.1 - ESTRUTURA DO PROGRAMA

Tendo em vista os objetivos do programa, procurou-se desenvolvê-lo com os seguintes aspectos:

- a) Devido aos problemas analisados serem vigas simples ou contínuas, era necessário que o tamanho do programa e a memória utilizada para armazenamento de variáveis fossem mínimos pois, desta forma, poderia ser utilizado em computadores de mesa com pequena capacidade de memória.
- b) Por outro lado, o tempo de processamento do programa deveria ser rápido, assim o usuário não procuraria utilizar outros recursos para a solução do problema.
- c) O método de resolução dos problemas deveria possuir um mínimo de restrições quanto à utilização, para que as possibilidades de erros de um usuário, com pouca experiência no programa, fossem reduzidas.
- d) Finalmente, a resolução deveria ser confiável sobre o maior número possível de casos de instabilidade.

Tendo-se em vista estes aspectos, a estrutura básica do programa deividu-se em quatro partes de execução linear, ou seja:

- a) Leitura dos dados que são armazenados em vetor e, dependendo das necessidades do equipamento de utilização, podendo ser utilizada memória auxiliar.
- b) Montagem da matriz de cada elemento de forma individual e conseqüente armazenamento em memória auxiliar para redução da memória central utilizada.
- c) Resolução do problema de auto-valor de acordo com baliza existente.
- d) Cálculo de deslocamentos de acordo com baliza existente.

Deve-se notar que a única relação que existe entre os itens a, b e c ou a, b e d são os dados que estão em memória central ou auxiliar. Assim, quando da resolução de problemas de auto-valor ou do cálculo de deslocamentos não há necessidade de se montar a matriz da estrutura (b) ou se recorrer à leitura de algum dado do problema.

Este expediente possibilita a resolução do problema através de segmentação do programa, quando houver pequena memória disponível.

8.2 - LEITURA DOS DADOS

O programa inicia-se com a leitura de informações a respeito do problema a ser resolvido. Desta forma são lidos:

- a) Número de elementos em que irá dividir-se a viga.
- b) Número de nós com carregamento concentrado.
- c) Número de elementos com carregamento distribuído.
- d) Número de nós que possuem vinculação.
- e) Baliza que indica se o programa deve calcular os auto-valores ou se deve calcular os deslocamentos para um carregamento fixado.
- f) Indicador do deslocamento que será desprezado.
- g) Indicador de um outro deslocamento a ser desprezado.
- h) Número de auto-valores a ser calculado.
- i) Baliza indicando se a influência do bimomento será considerada.
- j) Módulo de Young.
- k) Módulo de elasticidade transversal.

Cumpramos observar que a existência dos indicadores de deslocamento a ser desprezado (itens f e g), refere-se

a uma comodidade ao usuário. Assim, se houver necessidade de resolver o problema considerando-se apenas um ou dois deslocamentos, basta indicar os respectivos números nestes indicadores. Por exemplo:

- 1 é o mesmo que deslocamento v ,
- 2 é o mesmo que deslocamento w ,
- 3 é o mesmo que deslocamento ϕ .

A partir das restrições aos deslocamentos, o programa elimina, na matriz da estrutura, as linhas e colunas correspondentes a estes deslocamentos.

Em um segundo passo, são lidas as características geométricas de cada elemento, ou seja:

- a) Comprimento do elemento.
- b) Momentos de Inércia em relação ao eixo y
- c) Momento de Inércia em relação ao eixo z .
- d) Momentos Setorial de Inércia.
- e) Momento de Inércia à Torção.
- f) Área da Secção Transversal.
- g) Ordenada z do centro do círculo de estabilidade.
- h) Ordenada y do centro do círculo de estabilidade.
- i) Ordenada do centro de flexão no eixo y .
- j) Ordenada do centro de flexão no eixo z .
- k) Característica geométrica U_{ω} .

O terceiro grupo de dados refere-se aos momentos de flexão e bimomentos obtidos segundo a teoria de primeira ordem:

- a) Momento de flexão em y que não é alterado com a variação da carga crítica.
- b) Momento de flexão em z que não é alterado com a variação da carga crítica.

- c) Bimomento que não é alterado com a variação da carga crítica.
- d) Ordenada z do ponto de aplicação do carregamento transversal.
- e) Ordenada y do ponto de aplicação do carregamento transversal.
- f) Momento de flexão em y que é alterado com a carga crítica.
- g) Momento de flexão em z que é alterado com a carga crítica.
- h) Bimomento que é alterado com a carga crítica.

Deve-se acrescentar que as coordenadas y e z do ponto de aplicação do carregamento transversal são aproximadas no elemento finito com a média dos valores dos nós.

Passa-se, a seguir, à leitura dos carregamentos aplicados à viga.

Para o elemento finito são lidos:

- a) Carregamento distribuído constante em y que é invariante em relação à carga crítica.
- b) Carregamento distribuído constante em z que é invariante em relação à carga crítica.
- c) Carregamento distribuído constante de torção que é invariante com a carga crítica.
- d) Carregamento distribuído constante em y que é variável com a carga crítica.
- e) Carregamento distribuído constante em z que é variável com a carga crítica.
- f) Carregamento distribuído constante de torção que é variável com a carga crítica.

Para cada nó da viga é lido:

- a) Força normal que é invariante com a carga crítica.

- b) Momento concentrado de flexão (M_z).
- c) Momento concentrado de flexão (M_y).
- d) Força normal que é variável com a carga crítica.
- e) Carga concentrada na direção y.
- f) Carga concentrada na direção z.

Finalmente, são lidos os números dos nós que possuem vinculação. Para cada nó existe um indicador de cada um dos parâmetros de nó ($v, v', w, w', \phi, \phi'$). Assim, quando um indicador for assinalado, significando a existência de restrição a um parâmetro de nó, o programa elimina, na matriz da estrutura, a linha e a coluna correspondente a este parâmetro.

8.3 - MONTAGEM DA MATRIZ DA ESTRUTURA

Conforme mostrado no Capítulo 4, a matriz da estrutura é formada a partir das matrizes dos elementos finitos, com a matriz de cada elemento formada a partir da soma conveniente de matrizes básicas.

Para o espalhamento das matrizes básicas foi utilizada a subrotina MONRI, que é dada a seguir.

A subrotina MONRI soma os elementos da matriz básica (A) nas correspondentes posições da matriz do elemento (RI). Por exemplo:

Um elemento a_{ij} da matriz A, da linha da primeira variação em relação a v_i e da coluna cujos elementos multiplicam o deslocamento v_j (ver Fig. 8.1), será somado ao elemento r_{ij} que pertence à linha da primeira variação em relação a v_i e da coluna cujos elementos multiplicam o deslocamento v_j .

Devido a uma matriz básica ser usada tanto para deslocamentos v, w e ϕ como para produtos entre deslocamentos, para que houvesse aplicabilidade maior de MONRI é que

```

SUBROUTINE MONFI(NP1, NP2, A, PI)
  IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
  DIMENSION A(4, 4), PI(12, 12)
  M=0
  IFLAG1=0
  N1=0
10  N2=0
  K=0
  IFLAG2=0
20  LD= 2*NP1 + N1 - 2
  KD= 2*NP2 + N2 - 2
  DO 30 J=1, 2
  DO 30 J=1, 2
30  KI(LD+I, KD+J)= RI(LD+I, KD+J) + A(I+M, J+K)
  IF (IFLAG2) 50, 40, 50
40  K= K + 2
  N2= N2 + 6
  IFLAG2=1
  GO TO 20
50  IF (IFLAG1) 70, 60, 70
60  N1= N1 + 6
  M= M + 2
  IFLAG1=1
  GO TO 10
70  RETURN
  END
  
```

```

INB00010
INB00020
INB00030
INB00040
INB00050
INB00060
INB00070
INB00080
INB00090
INB00100
INB00110
INB00120
INB00130
INB00140
INB00150
INB00160
INB00170
INB00180
INB00190
INB00200
INB00210
INB00220
INB00230
INB00240
INB00250
INB00260
INB00270
  
```

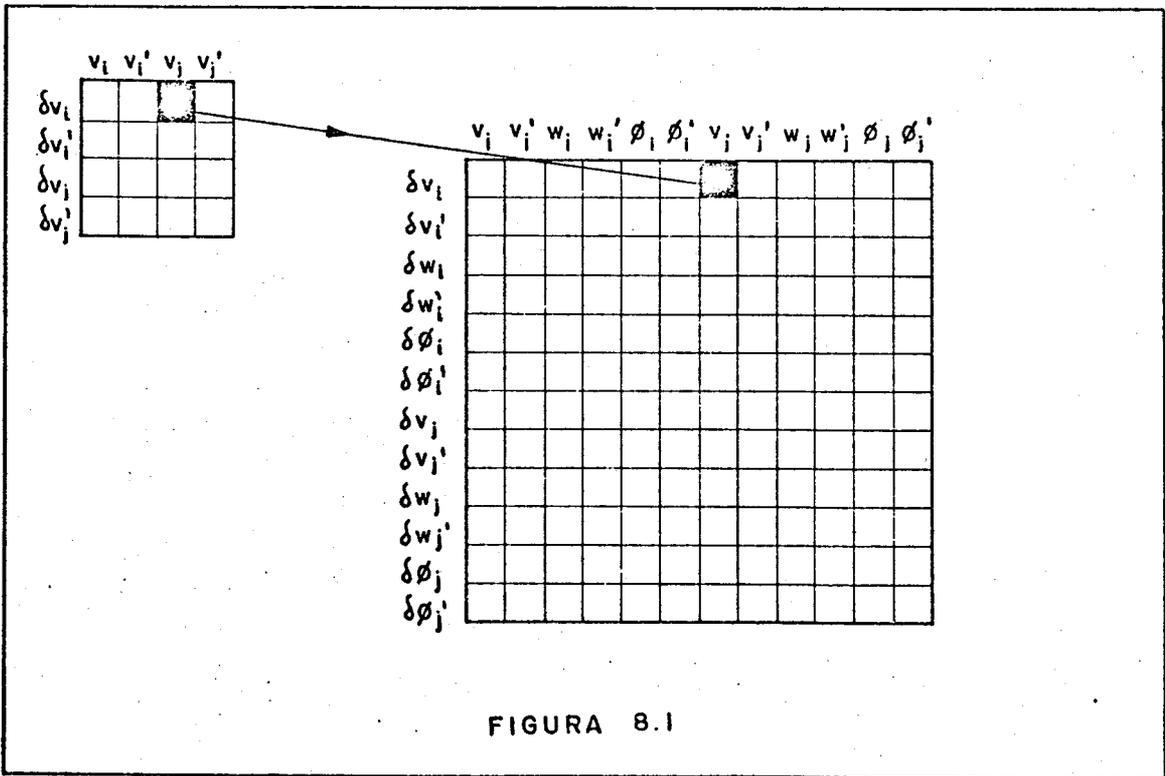


FIGURA 8.1

se incluíram as constantes NP1 e NP2. Desta forma, NP1 refere-se às linhas correspondentes a variações nos deslocamentos e NP2 refere-se às colunas, como explicado a seguir.

Se uma matriz A será scmada nas posições de colunas em v e linhas de variações em v, as constantes NP1 e NP2 serão iguais à unidade pois os deslocamentos v foram convencionados com o número um.

A seguir, são apresentadas as codificações das subrotinas que calculam as matrizes básicas.

a) Matriz do primeiro tipo, apresentada no item 4.2.

```
C
SUBROUTINE MPV2(R,H,A)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,C-7)
DIMENSION A(4,4)
A(1,1)= 12.*R
A(1,2)= 6.*R*H
A(1,3)= -A(1,1)
A(1,4)= A(1,2)
A(2,2)= 4.*H*H*R
A(2,3)= -A(1,2)
A(2,4)= 2.*H*H*R
A(3,3)= A(1,1)
A(3,4)= A(2,3)
A(4,4)= A(2,2)
DO 30 I=1,4
DO 30 J=1,4
30 A(J,I)= A(I,J)
RETURN
END
INF00930
INF00940
INF00950
INF00960
INF00970
INF00980
INF00990
INF01000
INF01010
INF01020
INF01030
INF01040
INF01050
INF01060
INF01070
INF01080
INF01090
INF01100
INF01110
```

b) Matriz do segundo tipo, apresentada no item 4.3.

```
C
SUBROUTINE MPV1(F,C,D,H,A)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,C-7)
DIMENSION A(4,4)
A(1,1)=( 2.4*F + 1.2*Q + 24.*D/35.)/H
A(1,2)= .2*(F+Q) + D/7.
A(1,3)= -A(1,1)
A(1,4)= .2*F - 2.*D/35.
A(2,2)= ( 4.*F/15. + Q/15. + 4.*D/105.)*H
A(2,3)= -A(1,2)
A(2,4)= ( -F/15. -Q/30. - D/35. )*H
A(3,3)= A(1,1)
A(3,4)= -A(1,4)
A(4,4)= ( 4.*F/15. + .2*Q + 6./35.*D )*H
DO 30 I=1,4
DO 30 J=1,4
30 A(J,I)= A(I,J)
RETURN
END
INF01140
INF01150
INF01160
INF01170
INF01180
INF01190
INF01200
INF01210
INF01220
INF01230
INF01240
INF01250
INF01260
INF01270
INF01280
INF01290
INF01300
INF01310
INF01320
```

c) Matriz do terceiro tipo, apresentada no item 4.4.

C

```

SUBROUTINE MPV6(C,P,H,A)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,C-Z)
DIMENSION A(4,4)
A(1,1)= -.5*C - 13./70.*B
A(2,1)= (.1*C - 2./210.*B)*H
A(3,1)= -A(1,1)
A(4,1)= (-.1*C - 11./420.*B)*H
A(1,2)= (-.1*C - 3./70.*B)*H
A(2,2)= -B/210.*H*H
A(3,2)= -A(1,2)
A(4,2)= (-C/60. - B/210.)*H*H
A(1,3)= -.5*C - 22./70.*B
A(2,3)= (-.1*C - 31./420.*B)*H
A(3,3)= -A(1,3)
A(4,3)= (.1*C + 23./210.*B)*H
A(1,4)= (.1*C + 4./70.*B)*H
A(2,4)= (C/50. + 3/84.)*H*H
A(3,4)= -A(1,4)
A(4,4)= A(2,2)
RETURN
END

```

d) Matriz do quarto tipo, apresentada no item 4.5.

```

SUBROUTINE MPV5(BI,BJ,T,H,R,FM,A)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,U-Z)
DIMENSION A(4,4)
A1= F/R
A2= A1*A1
A3= A2*A1
A4= A2*A2
A5= A4*A1
SH= DSINH(A1)
CH= DCOSH(A1)
P3= R*R*T*FM
P2= BI*FM - P3
P1= (BJ*FM - P3 - P2*CH)/SH
A(1,1)=(P1*(72.*(CH-1.)*A2 -432.*SH*A1 +864.*(CH-1.))/A5 +P2*(72.*
*SH*A2 -432.*(CH+1.)*A1 +864.*SH)/A5 +P3*1.2)/H
A(1,2)= P1*(24.*CH*A2 -80.*A2 -180.*SH*A1 +432.*(CH-1.))/A5 +P2*(2
*4.*SH*A2 -6.*A3 -180.*CH*A1 -252.*A1 +432.*SH)/A5 +P3*.1
A(1,3)= -A(1,1)
A(1,4)= P1*(60.*CH*A2 -6.*SH*A3 -24.*A2 -252.*SH*A1 +432.*(CH-1.))/
*/A5 +P2*(60.*SH*A2 -6.*CH*A3 -252.*CH*A1 -180.*A1 +432.*SH)/A5 +P3
A(2,2)=(P1*(3.*CH*A2 -A4 -44.*A2 -72.*SH*A1 +216.*(CH-1.))/A5 +P2*(
*(8.*(SH-A1)*A2 -72.*(CH+2.)*A1 +216.*SH)/A5 +2.*P3/15.)*H
A(2,3)= -A(1,2)
A(2,4)=(P1*(22.*(CH-1.)*A2 -2.*SH*A3 -108.*SH*A1 +216.*(CH-1.))/A5
* +P2*(22.*SH*A2 -2.*A3*(CH+1.) -108.*A1*(CH+1.) +216.*SH)/A5 -P3/3
*0.)*H
A(3,3)= A(1,1)
A(3,4)= -A(1,4)
A(4,4)=(P2*(SH*A4 -8.*CH*A3 +44.*SH*A2 -72.*(2.*CH+1.)*A1 +216.*SH
*/A5 +P1*(CH*A4 -8.*SH*A3 +44.*CH*A2 -8.*A2 -144.*SH*A1 +216.*(CH-
*1.))/A5 +2.*P3/15.)*H
DO 40 I=1,3
DO 40 J=1,3
A(J+1,I)= A(I,J+1)
CONTINUE
RETURN
END

```

40

Com as subrotinas MPV1, MPV2, MPV5, MPV6 e MONRI são montadas as matrizes dos elementos, da forma mostrada no Capítulo 4.

O único cuidado foi a divisão da matriz de cada elemento em duas matrizes, ou seja:

- a) matriz das características geométricas e carregamento constante (MC);
- b) matriz do carregamento variável (MV).

Desta forma as matrizes, guardadas em memória auxiliar, estão prontas para resolver os problemas de primeira ou de segunda espécie.

A sequência de operações foi:

```
DO 510 IJ=1,2
DO 320 I=1,NMHS
BMY(I)= BMYV(I,IJ)
BMZ(I)= BMZV(I,IJ)
BA(I)= BAV(I,IJ)
FN(I)= FNV(I,IJ)
320 CONTINUE
DO 330 I=1,NMEL
QX(I)= (FN(I) - FN(I+1))/H(I)
QY(I)= QYV(I,IJ)
QZ(I)= QZV(I,IJ)
330 CONTINUE
DO 500 I=1,NMEL
DO 360 L=1,12
DO 360 K=1,12
RI(L,K)=0.
360 CONTINUE
NO2=I+1
AXY= PKY(I) - YD(I)
AXZ= PKZ(I) - ZD(I)
AUX1= BMZ(I)*AXY - BMY(I)*AXZ
AUX3= -.5*QY(I)*H(I)*H(I)*AXY -.5*QZ(I)*H(I)*H(I)*AXZ
AUX2= BMZ(NO2)*AXY - BMY(NO2)*AXZ - AUX1 - AUX3
FAT= AUX1 + .5*FN(I)*FCP(I)
QAT= AUX2 - .5*QX(I)*H(I)*RGP(I)
AUX4= H(I)
CALL MPV1(FAT,QAT,AUX3,AUX4,A)
CALL MONRI(3,3,A,RI)
AUX3= -(QY(I)*EQY(I) + QZ(I)*FCZ(I))*AUX4
AUX2=((BMZ(NO2)-BMZ(I))*EQY(I) - (BMY(NO2)-BMY(I))+EJZ(I))/AUX4 -
*.5*AUX3
CALL MPV6(AUX2,AUX3,AUX4,A)
CALL MONRI(3,3,A,RI)
DO 380 L=1,3
DO 380 K=1,3
AXY= A(L,K+1)
A(L,K+1)= A(K+1,L)
A(K+1,L)= AXY
380 CONTINUE
CALL MONRI(3,3,A,RI)
```

INB0443C
INB04440
INB04450
INB04460
INB04470
INB04480
INB04490
INB04500
INB04510
INB04520
INB04530
INB04540
INB04550
INB04560
INB04570
INB04580
INB04590
INB04600
INB04610
INB04620
INB04630
INB04640
INB04650
INB04660
INB04670
INB04680
INB04690
INB04700
INB04710
INB04720
INB04730
INB04740
INB04750
INB04760
INB04770
INB04780
INB04790
INB04800
INB04810
INB04820

```

AUX3= JY(I)*AUX4
AUX2= (-JY(NO2) + BMZ(I))/AUX4 - .5*AUX3
CALL MPV5(AUX2,AUX3,AUX4,A)
CALL MONRI(2,3,A,RI)
DO 450 L=1,3
DO 450 K=L,3
AXY= A(L,K+1)
A(L,K+1)= A(K+1,L)
A(K+1,L)= AXY
450 CONTINUE
CALL MONRI(3,2,A,RI)
AUX3= -JZ(I)*AUX4
AUX2= (-BMY(NO2) + BMY(I))/AUX4 - .5*AUX3
CALL MPV6(AUX2,AUX3,AUX4,A)
CALL MONRI(1,3,A,RI)
DO 460 L=1,3
DO 460 K=L,3
AXY= A(L,K+1)
A(L,K+1)= A(K+1,L)
A(K+1,L)= AXY
460 CONTINUE
CALL MONRI(3,1,A,RI)
AUX1= .5*(FN(I)*YD(I) - BMZ(I))
AUX3= .25*OY(I)*AUX4*AUX4
AUX2= -.5*(QX(I)*H(I)*YD(I) + BMZ(NO2) - BMZ(I) + 2.*AUX3)
CALL MPV1(AUX1,AUX2,AUX3,AUX4,A)
CALL MONRI(2,3,A,RI)
CALL MONRI(3,2,A,RI)
AUX1= -.5*(ZD(I)*FN(I) + BMY(I))
AUX3= -.25*Z(I)*AUX4*AUX4
AUX2= .5*(ZD(I)*OX(I)*H(I) - BMY(NO2) + BMY(I) - 2.*AUX3)
CALL MPV1(AUX1,AUX2,AUX3,AUX4,A)
CALL MONRI(1,3,A,RI)
CALL MONRI(3,1,A,RI)
AUX1= .5*FN(I)
AUX2= -.5*OX(I)*H(I)
CALL MPV1(AUX1,AUX2,0.00+00,AUX4,A)
CALL MONRI(1,1,A,RI)
CALL MONRI(2,2,A,RI)
IF(IJ.EQ.2) GO TO 480
KAT= .5*TM*RT(I)
CALL MPV1(FAT,0.00+00,0.00+00,AUX4,A)
CALL MONRI(3,3,A,RI)
RAT= YM*RJY(I)/(AUX4*AUX4*AUX4)
CALL MPV2(RAT,AUX4,A)
CALL MONRI(3,3,A,RI)
AUX1= YM*RJY(I)/(AUX4*AUX4*AUX4)
CALL MPV2(AUX1,AUX4,A)
CALL MONRI(2,2,A,RI)
AUX1= YM*RJZ(I)/(AUX4*AUX4*AUX4)
CALL MPV2(AUX1,AUX4,A)
CALL MONRI(1,1,A,RI)
480 IF(ID.EQ.0) GO TO 490
AUX1= BA(I)
AUX2= BA(NO2)
AUX3= TSH(I)
RAT= DSQR(YM*RJY(I)/(TM*RT(I)))
FAT= UR(I)/RM(I)
CALL MPV5(AUX1,AUX2,AUX3,AUX4,RAT,FAT,A)
CALL MONRI(3,3,A,RI)
490 MON= 7 + IJ
WRITE(MON,REC=I)RI
500 CONTINUE
510 CONTINUE

```

```

INB04830
INB04840
INB04850
INB04860
INB04870
INB04880
INB04890
INB04900
INB04910
INB04920
INB04930
INB04940
INB04950
INB04960
INB04970
INB04980
INB04990
INB05000
INB05010
INB05020
INB05030
INB05040
INB05050
INB05060
INB05070
INB05080
INB05090
INB05100
INB05110
INB05120
INB05130
INB05140
INB05150
INB05160
INB05170
INB05180
INB05190
INB05200
INB05210
INB05220
INB05230
INB05240
INB05250
INB05260
INB05270
INB05280
INB05290
INB05300
INB05310
INB05320
INB05330
INB05340
INB05350
INB05360
INB05370
INB05380
INB05390
INB05400
INB05410
INB05420
INB05430
INB05440
INB05450
INB05460

```

Para a montagem da matriz da estrutura da forma mostrada na Fig. 4.7, ítem 4.7, é utilizada a subrotina MONGE que é dada por:

```

SUBROUTINE MONGE(N,NP,SM,ST)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION ST(306,12),SM(12,12),NP(50,2)
C MACRO LINHA L
C MACRO COLUNA C
C NGL NUMERO DA PRIMEIRA LINHA EM CADA MACRO LINHA
C NCG NUMERO DA PRIMEIRA COLUNA EM CADA MACRO COLUNA
C NUMEL NUMERO DA LINHA DA MATRIZ SM
C NUMCL NUMERO DA COLUNA DA MATRIZ SM
NNOS=2
NVARN=6
DO 820 I=1,NNOS
L=NP(N,I)
NLG=NVARN*L-(NVARN-1)
DO 810 J=1,NNOS
K=NP(N,J)
NCG=NVARN*K-(NVARN-1)
DO 830 II=1,NVARN
NUMLL=(NVARN*(I-1)+II)
NUMLG=(NLG-1)+II
61 DO 840 JJ=1,NVARN
NUMCL=(NVARN*(J-1)+JJ)
NUMCG=(NCG-1)+JJ
36 IF (NUMCG-NUMLG)840,50,50
50 KI=NUMCG-NUMLG+1
ST(NUMLG,KI)=ST(NUMLG,KI)+SM(NUMLL,NUMCL)
840 CONTINUE
830 CONTINUE
810 CONTINUE
820 CONTINUE
RETURN
END
INFO2050
INFO2060
INFO2070
INFO2080
INFO2090
INFO2100
INFO2110
INFO2120
INFO2130
INFO2140
INFO2150
INFO2160
INFO2170
INFO2180
INFO2190
INFO2200
INFO2210
INFO2220
INFO2230
INFO2240
INFO2250
INFO2260
INFO2270
INFO2280
INFO2290
INFO2300
INFO2310
INFO2320
INFO2330
INFO2340
INFO2350
INFO2360
```

onde:

- N é o número do elemento que está sendo montado;
- NP é a matriz que apresenta, na linha n, o número do nó inicial (coluna 1) e o número do nó final (coluna 2) do elemento n;
- SM é a matriz do elemento finito;
- ST é a matriz da estrutura.

De acordo com o problema a ser resolvido, a matriz dos coeficientes do sistema de equações é formada com as duas matrizes de cada elemento ou com apenas uma, ou seja:

- a) Problemas de auto-valor têm a matriz dos coeficientes montada apenas com a matriz (MC),

b) Cálculo de deslocamentos nos problemas de segunda espécie tem a matriz da estrutura formada com as duas matrizes de cada elemento (MC e MV) e o vetor independente formado a partir do carregamento transversal.

Após a montagem da matriz dos coeficientes do sistema de equações e do vetor independente (quando do cálculo de deslocamentos), são impostas as condições de vinculação e a matriz dos coeficientes é decomposta pelo método de Cholesky.

```

DO 520 I=1,NEL
F(I)=0.
DO 520 J=1,12
R(I,J)=0.
520 CONTINUE
DO 525 I=1,NMEL
READ(8,REC=1)R1
CALL MONGE(I,MP,R1,R)
525 CONTINUE
IF(KIPR.EQ.0) GO TO 529
DO 527 I=1,NMEL
NO2=I+1
READ(9,REC=1)R I
CALL MONGE(I,MP,R1,R)
F(6*I-5)= F(6*I-5) + ETQY(I)*H(I)/2.
F(6*I-4)= F(6*I-4) + ETQY(I)*H(I)*H(I)/12.
F(6*I-3)= F(6*I-3) + ETQZ(I)*H(I)/2.
F(6*I-2)= F(6*I-2) + ETQZ(I)*H(I)*H(I)/12.
F(6*I-1)= F(6*I-1) - TSM(I)*H(I)/2.
F(6*I)= F(6*I) - TSM(I)*H(I)*H(I)/12.
F(6*NO2-5)= F(6*NO2-5) + ETQY(I)*H(I)/2.
F(6*NO2-4)= F(6*NO2-4) - ETQY(I)*H(I)*H(I)/12.
F(6*NO2-3)= F(6*NO2-3) + ETQZ(I)*H(I)/2.
F(6*NO2-2)= F(6*NO2-2) - ETQZ(I)*H(I)*H(I)/12.
F(6*NO2-1)= F(6*NO2-1) - TSM(I)*H(I)/2.
F(6*NO2)= F(6*NO2) + TSM(I)*H(I)*H(I)/12.
527 CONTINUE
DO 528 I=1,NNDS
F(6*I-5)= F(6*I-5) + ETY(I,2)
F(6*I-4)= F(6*I-4) + ETY(I,1)
F(6*I-3)= F(6*I-3) + ETZ(I,2)
F(6*I-2)= F(6*I-2) + ETZ(I,1)
F(6*I-1)= F(6*I-1) - TS(I)
F(6*I)= F(6*I) + PS(I)
528 CONTINUE
C IMPOSICAO DAS CONDICAOES DE CONTORNO
529 DO 590 I=1,NV
DO 590 J=2,7
K= 6*ICV(I,1) + J - 7
IF(ICV(I,J).EQ.0) GO TO 590
DO 580 KA=2,12
LA= K - KA + 1
R(K,KA)=0.
IF(LA)570,580,570
570 R(LA,KA)=0.
580 CONTINUE
R(K,1)=1.
F(K)=0.
590 CONTINUE
600 CONTINUE
CALL DECOM(NEQ,12,8,IND)
```

8.4 - RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE AUTO-VALOR

Para a resolução do problema de auto-valor foi utilizada a iteração vetorial clássica como foi explicado no Capítulo 5.

Inicialmente são impostas as condições de vinculação nas matrizes do carregamento variável. Neste processo, anulam-se as linhas e colunas que contribuem ao n^o que foi vinculado.

Em seguida, o vetor independente, que será utilizado na primeira iteração, tem suas componentes iguais a um, exceto para as que são vinculadas, que são nulas.

A sequência de passos é mostrada a seguir:

	IF (KIPR.NE.0) GO TO 900	INB0598C
	DO 640 I=1,NUMEL	INB0599C
	NO2= I + 1	INB0600C
	READ(9,REC=I)RI	INB0601C
	DO 630 J=1,NV	INB0602C
	IF (I.NE.ICV(J,1)) GO TO 560	INB0603C
	DO 550 K=2,7	INB0604C
	IF (ICV(J,K).EQ.0) GO TO 550	INB0605C
	DO 540 L=1,12	INB0606C
	RI(K-1,L)=0.	INB0607C
	RI(L,K-1)=0.	INB0608C
540	CONTINUE	INB0609C
550	CONTINUE	INB0610C
560	IF (NO2.NE.ICV(J,1)) GO TO 630	INB0611C
	DO 620 K=2,7	INB0612C
	IF (ICV(J,K).EQ.0) GO TO 620	INB0613C
	DO 610 L=1,12	INB0614C
	RI(K+5,L)=0.	INB0615C
	RI(L,K+5)=0.	INB0616C
610	CONTINUE	INB0617C
620	CONTINUE	INB0618C
630	CONTINUE	INB0619C
	WRITE(9,REC=I)RI	INB0620C
640	CONTINUE	INB0621C
	DO 890 L=1,NMVC	INB0622C
	WRITE(14,890)L	INB0623C
880	FORMAT(//10X,'CALCULO DO AUTO-VALOR E AUTO-VECTOR DE NRO. ',I5//)	INB0624C
	ITE=ITE+1	INB0625C
	VA=0.	INB0626C
	VAR=0.	INB0627C
	FVA=0.	INB0628C
	DO 740 I=1,NEQ	INB0629C
	FA(I,1)= 0.	INB0630C
	FA(I,2)= 0.	INB0631C
	F(I)=1.	INB0632C
740	CONTINUE	INB0633C

Antes de iniciar o processo iterativo, o vetor iterado é ortogonalizado em relação aos auto-vetores conhecidos.

	IF(L.EQ.1) GO TO 530	INB06340
	DO 1790 I=1, IAVC	INB06350
	DO 1520 J=1, NEQ	INB06360
	AVCMB(J) = 0.	INB06370
1520	CONTINUE	INB06380
	DO 1535 IJ=1, NUMEL	INB06390
	READ(9, REC=IJ) RI	INB06400
	DO 1525 J=1, 12	INB06410
	DO 1525 K=1, 12	INB06420
	AVCMB(6*(IJ-1)+J) = AVCMB(6*(IJ-1)+J) - P I(J,K)*AVCM(6*(IJ-1)+K, I)	INB06430
1525	CONTINUE	INB06440
1535	CONTINUE	INB06450
	AUX4 = 0.	INB06460
	PINV = 0.	INB06470
	DO 1770 J=1, NEQ	INB06480
	PINV = PINV + F(J)*AVCMB(J)	INB06490
	AUX4 = AUX4 + AVCMB(J, I)*AVCMB(J)	INB06500
1770	CONTINUE	INB06510
	PINV = PINV/AUX4	INB06520
	DO 1780 J=1, NEQ	INB06530
	F(J) = F(J) - PINV*AVCM(J, I)	INB06540
1780	CONTINUE	INB06550
1790	CONTINUE	INB06560

Inicia-se o processo iterativo com os seguintes aspectos:

- a) São acumulados, em memória central ou auxiliar, os quatro últimos vetores iterados.
- b) Calculam-se os auto-valores pelas equações (5.13) e (5.18).
- c) A cada iteração, o auto-vetor iterado é ortogonalizado em relação aos auto-vetores conhecidos.
- d) Compara-se o número de iterações já feito com um valor limite para que o programa termine o processo iterativo ao ser atingido esse valor.
- e) Calcula-se o erro relativo a cada iteração.

Quando este erro relativo for menor que o desejado, o programa para.

A sequência de operações é mostrada a seguir.

530	AUX1= 0. DO 531 I=1,NEQ FA(I,2)= FA(I,1) FA(I,1)= F(I) AUX1= AUX1 + F(I)*F(I)	INB06570 INB06580 INB06590 INB06600 INB06610 INB06620 INB06630 INB06640 INB06650 INB06660 INB06670 INB06680 INB06690 INB06700 INB06710 INB06720 INB06730 INB06740 INB06750 INB06760 INB06770 INB06780 INB06790 INB06800 INB06810 INB06820 INB06830 INB06840 INB06850 INB06860 INB06870 INB06880 INB06890 INB06900 INB06910 INB06920 INB06930 INB06940 INB06950 INB06960 INB06970 INB06980 INB06990 INB07000 INB07010 INB07020 INB07030 INB07040 INB07050 INB07060 INB07070 INB07080 INB07090 INB07100 INB07110 INB07120 INB07130 INB07140 INB07150 INB07160 INB07170 INB07180 INB07190 INB07200 INB07210 INB07220 INB07230 INB07240 INB07250
531	CONTINUE DO 645 I=1,12 AVX(I)= 0.	
645	CONTINUE DO 655 I=1,NUMEL READ(9,REC=I)RI DO 650 J=1,12 DO 650 K=1,12 AVX(J)= AVX(J) - RI(J,K)*F(6*(I-1)+K)	
650	CONTINUE DO 653 J=1,6 F(6*(I-1)+J)= AVX(J) AVX(J)= AVX(J+6) AVX(J+6)= 0.	
653	CONTINUE	
655	CONTINUE DO 660 J=1,5 F(6*NUMEL+J)= AVX(J)	
660	CONTINUE CALL SOLVE (NEQ,12,P,F,IND) IF(L.EQ.1) GO TO 705 DO 700 I=1,IAVC DO 1500 J=1,NEQ AVCMB(J)= 0.	
1500	CONTINUE DO 1515 IJ=1,NUMEL READ(9,REC=IJ)RI DO 1510 J=1,12 DO 1510 K=1,12 AVCMB(6*(IJ-1)+J)= AVCMB(6*(IJ-1)+J) -RI(J,K)*AVCM(6*(IJ-1)+K,I)	
1510	CONTINUE	
1515	CONTINUE AUX4= 0. PINV= 0. DO 770 J=1,NEQ PINV= PINV + F(J)*AVCMB(J) AUX4= AUX4 + AVCM(J,1)*AVCMB(J)	
770	CONTINUE PINV= PINV/AUX4 DO 780 J=1,NEQ F(J)= F(J) - PINV*AVCM(J,1)	
780	CONTINUE	
790	CONTINUE	
705	AUX2= 0. AUX3= 0. AUX4= 0. DO 680 J=1,NEQ AUX2= AUX2 + F(J)*F(J) AUX4= AUX4 + FA(J,1)*F(J) IF (AUX3-DABS(F(J))) 670,680,680	
670	AUX3= DABS(F(J))	
680	CONTINUE DO 700 J=1,NEQ F(J)= F(J)/AUX3 IF(DABS(F(J)).GT.1.E0-15) GO TO 700 F(J)= 0.	
700	CONTINUE ATVR= AUX4/AUX2 AUX3= DSORT(AUX1/AUX2) ATV2= DSORT(AUX3*VAR) IF(ITE.EQ.ITEB) GO TO 720 ITE= ITEB - ITE + 1 WRITE(IP,690)ATVR,ATV2,ITEM	

```

690  FORMAT(//5X,'AUTO VALOR MODO 1 =',G15.9,', MODO 2 =',G15.9,', ITER INBO7260
      *. =',I5) INBO7270
      ERRO=(1-DABS(VA/ATV1))/(1+DABS(VA/ATV1)) INBO7280
      ERROF=(1-DABS(RVA/ATV2))/(1+DABS(RVA/ATV2)) INBO7290
      IF(DABS(ERRO) - .00001)730,730,715 INBO7300
715  IF(DABS(ERROF) - .00001)730,730,720 INBO7310
720  VA=ATV1 INBO7320
      VAR=AUX3 INBO7330
      RVA=ATV2 INBO7340
      ITE=ITE-1 INBO7350
      IF(ITE.GE.1) GO TO 530 INBO7360
      WRITE(14,725)ITE INBO7370
725  FORMAT(//10X,'AUTO-VALOR NAO ATINGIDO EM ',I5,' ITERACOES'///10X,' INBO7380
      *AUTO-VETOR DA ULTIMA ITERACAO'///) INBO7390
      GO TO 871 INBO7400
730  DO 870 I=1,NEO INBO7410
      IF(DABS(F(I)).GT.1.0D-10) GO TO 835 INBO7420
      F(I)=0. INBO7430
835  AVC=(I,IAVC+1)=F(I) INBO7440
830  CONTINUE INBO7450
      IAVC=IAVC+1 INBO7460
      WRITE(14,870) INBO7470
870  FORMAT(//10X,'AUTO VETOR DESTE AUTO VALOR '///) INBO7480
871  WRITE(14,710)(F(J),J=1,NEO) INBO7490
      DO 877 I=1,3 INBO7500
      WRITE(14,875)I INBO7510
875  FORMAT(//10X,'AUTO VETOR DA ITERACAO N-',I1'///) INBO7520
      WRITE(14,710)(F(J),J=1,NEO) INBO7530
710  FORMAT(6(5X,G15.9)) INBO7540
877  CONTINUE INBO7550
      IF(ITE.EQ.0) GO TO 560 INBO7560
890  CONTINUE INBO7570
      GO TO 560 INBO7580

```

8.5 - CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS

Para o cálculo de deslocamentos, resolve-se a matriz da estrutura para o vetor independente montado com o carregamento transversal.

Com os deslocamentos determinados, procede-se o cálculo dos esforços como explicado no Capítulo 6.

A subrotina que decompõe a matriz segundo Cholesky é chamada DECOM e a que resolve o sistema de equações assim decomposto é chamada de SOLVE.

As codificações destas rotinas em linguagem FORTRAN são dadas a seguir.

```

SUBROUTINE DECOM(N,IB,A,KS) INBO1670
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z) INBO1680
  DIMENSION A(3D6,12) INBO1690
  KS=0 INBO1700
  DO 2 I=1,N INBO1710
  NP=N-I+1 INBO1720
  IF(LB-NP)1,3,3 INBO1730
1  NP=1 INBO1740
3  DO 2 J=1,NP INBO1750
  AUX=A(I,J) INBO1760
  NQ=LB-J INBO1770

```

```

IF (NO-1) 11, 5, 7
7 NO=I-1
5 IF (NO) 9, 9, 11
11 DO 4 K=1, NO
    IK=I-K
    JK=J+K
    KI=K+1
4 AUX=AUX-A(IK, KI)*A(IK, JK)
9 IF (J-1) 13, 13, 15
13 IF (AUX) 17, 17, 19
19 TEMPP=1.0/DSORT(AUX)
    A(I, J)=TEMP
    GO TO 2
15 A(I, J)=AUX*TEMP
2 CONTINUE
    GO TO 6
17 KS=I
    WRITE(5, 90) AUX, A(IK, KI), A(IK, JK), IK, JK, KI
901 FORMAT(3(10X, E14.7), 3(10X, I10))
18 WRITE(5, 10)
10 FORMAT(/, /, IX, 'A MATRIZ NAO E DEFINIDA POSITIVA, VER INTRODUCAO DE
    *DADOS')
6 RETURN
    END

```

INB01740
INB01790
INB01800
INB01810
INB01820
INB01830
INB01840
INB01850
INB01860
INB01870
INB01880
INB01890
INB01900
INB01910
INB01920
INB01930
INB01940
INB01950
INB01960
INB01970
INB01980
INB01990
INB02000
INB02010

```

SUBROUTINE SOLVE(N, LB, U, B, KS)
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
DIMENSION U(306, 12), B(306)
DO 2 I=1, N
    AUX=B(I)
    NP=I-LB+1
    NQ=I-1
    IF (NP-1) 1, 3, 3
1    NP=1
3    IF (NP-N) 5, 5, 2
5    DO 4 J=NP, NQ
        K=I-J+1
4    AUX=AUX-U(J, K)*B(J)
2    B(I)=AUX*U(I, 1)
    DO 6 L=1, N
        I=N-L+1
        AUX=U(I)
        NP=I+LB-1
        NQ=I+1
        IF (NP-N) 7, 7, 9
9        NP=N
7        IF (NQ-NP) 11, 11, 6
11       DO 8 J=NQ, NP
            K=J-I+1
8        AUX=AUX-U(J, K)*B(J)
6        B(I)=AUX*U(I, 1)
    RETURN
    END

```

INB01360
INB01370
INB01380
INB01390
INB01400
INB01410
INB01420
INB01430
INB01440
INB01450
INB01460
INB01470
INB01480
INB01490
INB01500
INB01510
INB01520
INB01530
INB01540
INB01550
INB01560
INB01570
INB01580
INB01590
INB01600
INB01610
INB01620
INB01630

Para a apresentação de resultados, o elemento finito é individualizado com os valores dos deslocamentos e esforços do nó apresentado.

Apesar desta forma de apresentação tornar lenta a leitura de resultados, por outro lado evita que o usuário inexperiente cometa erros.

A listagem deste procedimento é dada a seguir.

```
900 CALL SOLVE(IE),12,R,F,IND) INB07590
DO 900 I=1,NIMEL INB07600
READ(I,REC=I)PI INB07610
KA=6*(I-1) INB07620
DO 905 J=1,12 INB07630
RESP(J)=0. INB07640
DO 905 K=1,12 INB07650
RESP(J)=RESP(J)+PI(J,K)*F(KA+K) INB07660
905 CONTINUE INB07670
READ(I,REC=I)RI INB07680
DO 906 J=1,12 INB07690
DO 906 K=1,12 INB07700
RESP(J)=RESP(J)+RI(J,K)*F(KA+K) INB07710
906 CONTINUE INB07720
WRITE(I,910)I INB07730
910 FORMAT(///IX,'ELEMENTO ',I5//) INB07740
WRITE(I,915)(F(KA+J),J=1,12) INB07750
915 FORMAT(' VI =',G15.9,' DVI=',G15.9,' WI =',G15.9,' DWI=',G15.9/' G INB07760
*I =',G15.9,' DGI=',G15.9//' VJ =',G15.9,' DVJ=',G15.9,' WJ =',G15. INB07770
*9,' DWJ=',G15.9/' GJ =',G15.9,' DGJ=',G15.9//) INB07780
WRITE(I,925)RESP INB07790
925 FORMAT(' PYI=',G15.9,' MYI=',G15.9,' PZI=',G15.9,' MYI=',G15.9/' M INB07800
*TI=',G15.9,' BMI=',G15.9//' PYJ=',G15.9,' MZJ=',G15.9,' PZJ=',G15. INB07810
*9,' YZJ=',G15.9/' NZJ=',G15.9,' BMJ=',G15.9//) INB07820
950 CONTINUE INB07830
960 CALL EXIT INB07840
END INB07850
```

8.6 - CONCLUSÕES

Como se pode notar pelos resultados mostrados no Capítulo 7, o programa apresenta boa precisão e boa confiabilidade.

Pelas considerações sobre o programa computacional pode-se notar que ele exige muito pouca memória central para variáveis e possibilita a execução através de segmentação.

Para o cálculo dos auto-valores, ele não exige nenhum conhecimento do usuário para fornecer um valor unitário do carregamento variável menor que o crítico, como mostrado no Capítulo 5.

Por estas razões e a boa taxa de convergência é que este programa torna-se indicado para a resolução deste tipo de problema.

Finalmente, o cálculo de deslocamentos só exige que antes seja calculado o menor auto-valor para que um carregamento transversal próximo deste número não produza deslocamentos grandes e incompatíveis na estrutura.

9. CONCLUSÕES

Os exemplos mostrados no Capítulo 7 trazem, individualmente, as conclusões parciais sobre a precisão dos resultados e as observações necessárias sobre a convergência do método numérico envolvido.

Assim, a precisão obtida foi boa, mesmo no exemplo um que é um caso típico de problema de auto-valor mal-condicionado pois, a relação entre eles, em alguns casos, era muito próxima de um.

Foram também mostrados as particularidades do cálculo dos auto-valores seguintes ao primeiro.

Pode-se concluir dos exemplos, que o cálculo do modo de flambagem, no caso geral de instabilidade, é importante em processo computacional pois pode auxiliar na determinação do tipo de problema envolvido (como no segundo e décimo exemplos), na dependência ou independência das equações envolvidas no problema (exemplos um, dois e quatro) e na determinação da ordem da carga crítica, no cálculo dos auto-valores seguintes ao primeiro.

Em problemas de segunda espécie, o trabalho desenvolvido permite o cálculo de deslocamentos e esforços de segunda ordem com boa precisão.

Os objetivos fixados para este trabalho foram plenamente alcançados. Podem ser tratados problemas de instabilidade no caso geral de vinculação, carregamento e geometria da seção. O programa desenvolvido, cujas caracterís

ticas permitem a sua utilização mesmo em computadores de pequeno porte, constitui um instrumento rápido e eficiente para o cálculo da carga crítica e modo de flambagem em problemas de primeira espécie, como o dos esforços e deslocamentos de segunda ordem em problemas de segunda espécie.

10 . BIBLIOGRAFIA

1. ABRAMOWITZ, M. & SEGUN, I.A. - Handbook of Mathematical Functions. 5^a ed. New York, Dover Publications, 1968.
2. BREBBIA, C.A. & CONNOR, J.J. - Método de los Elementos Finitos en la Ingeniería Civil. 2^a ed. Madrid, Colégio Oficial de Ingenieros de Caminos, Canales y Portos, 1975.
3. ELSGOLTZ, L. - Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional. - Moscou, Editorial MIR, 1969.
4. JAHNKE, E. & EMDE, F. - Tables of Functions with Formulae and Curves. 4^a ed. New York, Dover Publications, 1945.
5. LANGHAAR, H.L. - Energy Methods in Applied Mechanics. New York, John Wiley & Sons, 1962.
6. MORI, D.D. - Flexo-Torção: Teoria de 1^a e 2^a Ordem - Automatização de Cálculo. São Carlos, Universidade de São Paulo, 1978.
7. NAYLOR, D. & DUFF, G.F.D - Differential Equations of Applied Mathematics. New York, John Wiley & Sons, 1962.

8. OLIVEIRA, E.A. - Theoretical Foundations of Finite Element Method. Laboratório Nacional de Engenharia Civil, memória nº 384 - Lisboa, 1971.
9. ONUCHIC, N. - Equações Diferenciais a Derivadas Parciais: Problemas de Valor de Contorno. S. Carlos, Universidade de São Paulo, 1979.
10. PAIVA, J.B. - Flambagem de Barras com Vinculação Elástica - Relatórios à FAPESP (Processo 74/200).
11. PALERMO JÚNIOR, L. - Problemas Especiais de Instabilidade de Vigas - Relatórios à FAPESP (Processo 82/0068-4).
12. PALERMO JÚNIOR, L. - Esforços de Flexão e Flexo-Torção em Teoria de Segunda Ordem - Automatização do Cálculo - Relatórios à FAPESP (Processo 82/1566-8).
13. RACHID, M. - Características de Perfis - Revista da Escola de Engenharia da UFMG - nº 12, ano 8 (junho de 1969).
14. RACHID, M. - Instabilidade de Barras de Secção Delgada. São Carlos, Universidade de São Paulo, 1976.
15. SHIEL, F. - Introdução à Resistência dos Materiais. São Carlos, Universidade de São Paulo, 1978.
16. SCHIEL, F. - Barras de Secção Delgada. São Carlos, Universidade de São Paulo, 1964.
17. SCHWARZ, H.R. - Numerical Analysis of Symmetric Matrices. New Jersey, Prentice Hall, 1973.
18. SORIANO, H.L. & AZEVEDO, A.V. - Estudo Comparativo para Resolução de Grandes Sistemas de Equações em Análise Estrutural. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, IV, n. 11, Lisboa, 1981.
19. TIMOSHENKO, S.P. & GERE, J.M. - Theory of Elastic Instability. 2^a ed., Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, 1961.

20. TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. - Teoria da Elasticidade. 3^a ed. Trad. Sergio Fernandes Villaça, Humberto Lima Soriano, Hierônimo Santos Souza. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1980.
21. VLASSOV, B.Z. - Pieces Longues en Voiles Minces. 10^a ed. Trad. de G. Smirnoff. Paris, Eyrolles, 1962.
22. WILKINSON, J.H. - The Algebraic Eigenvalue Problem. Londres, Oxford University Press, 1965.
23. YAGUI, T. - Estrutura Metálica para Telhado de Duas Águas, Exemplo Numérico. Limeira, Universidade Estadual de Campinas, 1980.