

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

CÁLCULO ELASTOPLÁSTICO DE ESTRUTURAS LINEARES DE CONCRETO

ENG<sup>o</sup> JOSÉ SERGIO KOMATSU

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

SÃO CARLOS  
1985

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

CÁLCULO ELASTOPLÁSTICO DE ESTRUTURAS LINEARES DE CONCRETO

ENGº JOSÉ SERGIO KOMATSU

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

COMISSÃO EXAMINADORA.

Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini  
Prof. Dr. Mounir Khalil El Debs  
Prof. Dr. Péricles Brasiliense Fusco (orientador)

SUPLENTES

Prof. Dr. Roberto L.A. Barbato  
Prof. Dr. Lafael Petroni

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

SÃO CARLOS

1985

À Ailza, Juliana e Camila.  
Aos meus pais e familiares.  
Aos meus amigos.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Pêricles Brasiliense Fusco pela ori  
entação deste trabalho.

Aos Srs. Rui Roberto Casale, Sylvia Helena Morete  
e João Paulo Moretti, pelos trabalhos de datilografia e  
desenho.

A todos que, de uma forma ou de outra, colabora-  
ram para a realização deste trabalho.

## R E S U M O

Estuda-se neste trabalho, o comportamento elasto-plástico de estruturas estaticamente indeterminadas, compostas por elementos lineares.

Apresenta-se o método das rótulas plásticas, que se aplica com bons resultados às estruturas de materiais dúcteis. Para elas a capacidade de rotação das rótulas plásticas é suficientemente grande para permitir a formação de mecanismos de colapso.

No caso de estruturas de concreto armado, a capacidade de rotação é normalmente pequena, e existe portanto, a possibilidade de um colapso prematuro da estrutura. Por esta razão, estuda-se o método das rotações impostas, o qual procura garantir a segurança em relação à ruptura frágil.

A presente dissertação procura esclarecer os conceitos básicos do método das rotações impostas, sendo uma tentativa de sistematização de sua aplicação no meio técnico nacional.

## A B S T R A C T

The present work is concerned with the elastoplastic behaviour of statically indetermined structures composed by linear members.

It is presented the Plastic Hinge Method which can be applied with good results in the structures of ductile materials. In this case, the rotation capacity of plastic hinges is sufficiently large to allow the formation of collapse's mechanisms.

In the case of reinforced concrete structures, the rotation capacity is usually small and must be taken into account, therefore, there is the possibility of a premature collapse of the structure. Thus, the Imposed Rotation Method is introduced, in order to guarantee the safety regarding the brittle rupture.

In this work, the basic concepts of the Imposed Rotation Method are presented; it can also be seen as an attempt to achieve the systematization of the method for the application in the brazilian current engineering practices.

## S U M Á R I O

NOTAÇÕES .....	1
1. INTRODUÇÃO .....	4
2. MÉTODO DAS RÔTULAS PLÁSTICAS .....	6
2.1 - Generalidades .....	6
2.2 - Hipóteses básicas .....	6
2.3 - Diagrama Tensão-Deformação para aços estrutu- rais .....	8
2.4 - Estudo das vigas de material elastoplástico ideal .....	9
2.4.1 - Hipóteses .....	9
2.4.2 - Flexão plástica pura de uma viga de seção duplamente simétrica .....	11
2.4.3 - Lei de variação do momento fletor com a curvatura .....	14
2.4.4 - Seção transversal com um eixo de sime- tria .....	19
2.5 - Casos simples de colapso plástico .....	20
2.5.1 - Generalidades .....	20
2.5.2 - Princípio dos trabalhos virtuais .....	21
2.5.3 - Viga biapoiada .....	23
2.5.4 - Viga biengastada .....	28
2.6 - Teoremas fundamentais .....	34
2.6.1 - Generalidades .....	34

2.6.2 - Teorema estático ou teorema do limite inferior para F .....	35
2.6.3 - Teorema cinemático ou teorema do limite superior para F .....	38
2.6.4 - Teorema da unicidade .....	40
2.7 - Métodos gerais de determinação da carga limite .....	40
2.7.1 - Generalidades .....	40
2.7.2 - Método de combinação de mecanismos ..	41
2.8 - Tipos de colapso .....	41
2.8.1 - Colapso completo .....	41
2.8.2 - Colapso redundante .....	42
2.8.3 - Colapso parcial .....	42
2.9 - Influência do esforço normal sobre o valor do momento de plastificação total .....	42
3. ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS DE CONCRETO COMPOSTAS POR ELEMENTOS LINEARES .....	46
3.1 - Generalidades .....	46
3.2 - Diagrama Tensão-Deformação do concreto .....	48
3.3 - A teoria elastoplástica .....	52
3.4 - Método das rotações impostas .....	54
3.4.1 - Considerações gerais .....	54
3.4.2 - Seções críticas .....	57
3.4.3 - Cálculo do efeito elástico do carregamento externo .....	59
3.4.4 - Cálculo do efeito das rotações unitárias .....	59
3.4.5 - Cálculo dos momentos resistentes últimos das seções críticas .....	61
3.4.6 - Diagramas Momento Fletor - Curvatura e Momento Fletor - Rotação .....	61
3.4.7 - Verificação do estado limite último .	72

3.5 - Método aproximado para análise limite de es	
truturas simples de concreto armado .....	77
3.6 - Análise experimental e instrumentação .....	82
3.6.1 - Generalidades .....	82
3.6.2 - Instrumentação .....	84
3.6.3 - Plano de ensaio de uma viga contínua	
de dois tramos .....	92
4. APLICAÇÃO .....	96
5. CONCLUSÕES .....	152
6. ANEXOS .....	154
6.1 - Anexo I .....	154
6.2 - Anexo II .....	158
7. BIBLIOGRAFIAS .....	163

NOTAÇÕES

- M - momento fletor
- $M_u$  - momento resistente último (máximo momento fletor que a seção pode resistir).
- $M_p$  - momento de plastificação total
- $M_e$  - momento de início de plastificação
- $M_r$  - momento fletor de fissuração
- F - força, ação
- $F_e$  - carga de início de plastificação
- $F_u$  - carga última (de colapso)
- $R_c$  - resultante das tensões de compressão na seção transversal
- $R_t$  - resultante das tensões de tração na seção transversal
- N - força normal
- V - força cortante
- $\sigma$  - tensão normal
- $\sigma_e$  - tensão normal de início de plastificação
- $f_{tk}$  - resistência característica do concreto à tração
- $f_{ck}$  - resistência característica do concreto à compressão
- $f_{yk}$  - resistência característica do aço à tração
- $f_{yd}$  - resistência de cálculo do aço à tração

- A - área da seção transversal
- I - momento de inércia
- W - módulo de resistência à flexão (em regime elástico)
- Z - módulo de resistência à plastificação (na flexão)
- $W_e$  - módulo de resistência da parte interna em regime elástico
- $Z_e$  - módulo de resistência à plastificação que se aplicaria à parte média da seção transversal que é realmente elástica
- S - momento estático de área.
- $A_s$  - área da seção transversal da armadura longitudinal traçãoada
- E - módulo de deformação longitudinal
- $E_c$  - módulo de deformação longitudinal do concreto
- $E_s$  - módulo de deformação longitudinal do aço
- $\gamma_f$  - coeficiente de segurança
- $\gamma_s$  - coeficiente de minoração da resistência do aço
- $\gamma_c$  - coeficiente de minoração da resistência do concreto
- r - raio de curvatura
- $1/r$  - curvatura do eixo da peça
- $(1/r)_e$  - curvatura do eixo da peça em regime elástico
- $\epsilon$  - deformação específica normal
- $\epsilon_{cu}$  - deformação específica última do concreto à compressão
- $\alpha$  - fator de forma da seção transversal
- $\theta$  - ângulo, rotação
- $\theta_{pl}$  - rotação plástica
- $\beta$  - ângulo
- $\rho$  - taxa geométrica da armadura

- $\omega$  - taxa mecânica da armadura
  - $\alpha_e$  - razão entre  $E_s$  e  $E_c$
  - $x$  - coordenada; profundidade da linha neutra; distância da linha neutra ao ponto de maior encurtamento na seção transversal de uma peça fletida
  - $y$  - distância da extremidade tracionada ao centro de gravidade da seção transversal; altura do diagrama retangular de tensões de compressão do concreto na seção transversal de uma peça fletida; distância de uma fibra à linha neutra
  - $z$  - distância entre  $R_c$  e  $R_t$
  - $d$  - distância do ponto de aplicação da resultante das tensões de compressão na armadura longitudinal ao ponto de maior encurtamento de uma seção transversal de peça fletida, medida normalmente à linha neutra (altura útil).
  - $h$  - altura da seção transversal
  - $L$  - vão; comprimento
  - $L_{II}$  - comprimento entre os pontos onde o momento de fissuração corta o diagrama de momentos resistentes últimos, conforme a seção crítica analisada
  - $v$  - deslocamento, flecha
  - $n$  - grau de hiperestaticidade
  - $u$  - deslocamento horizontal
- CEB - Comité Européen du Béton

## 1. INTRODUÇÃO

Quando se projeta uma estrutura, é necessário garantir uma certa margem de segurança contra a ruína, pois em sua utilização, ela deve resistir a todas as solicitações previstas, sem ocorrência dos estados limites. A segurança das estruturas é um problema que sempre existiu para os engenheiros.

Em se tratando de segurança estrutural, a ruptura dos materiais e o colapso das estruturas, são dois fenômenos muito importantes. Para se caracterizar a capacidade resistente das estruturas, estabelece-se de forma convencional o esgotamento da resistência dos materiais, baseando-se em vários fenômenos, além da simples ruptura dos mesmos.

Pode-se dividir a ruptura dos materiais em dois tipos, frágil e dúctil. Considera-se ruptura frágil quando os materiais se rompem com deformações específicas relativamente pequenas. Caso contrário, tem-se a ruptura dúctil.

Em termos de resistência estrutural, o material é dúctil se permite a acomodação plástica, com deformações de ruína suficientemente grandes, de tal modo que ocorra uma redistribuição completa dos esforços na estrutura.

O concreto estrutural apresenta os dois tipos de ruína, pois é formado pela armadura, que é um material dúctil, e pelo concreto, que é um material frágil.

Em uma estrutura de concreto, ocorre a ruína dúctil quando é o escoamento das armaduras que condiciona o seu aparecimento, sendo visíveis os sinais de advertência. Quando o escoamento das armaduras não influi no aparecimento da ruína, não existem sinais de advertência e fica caracterizado a ruína frágil.

Portanto, para cada tipo de estrutura é necessário uma certa ponderação na escolha dos métodos de cálculo.

Para uma estrutura estaticamente indeterminada, de material dúctil, em regime elastoplástico, aumentando-se as cargas de forma progressiva e proporcional, surgem regiões plastificadas, onde os momentos fletores atingem o momento de plastificação total. Admite-se, nestas regiões plastificadas, a formação de rótulas plásticas onde se concentram as deformações plásticas. Para acréscimos posteriores de carga, estas rótulas plásticas podem sofrer rotações, permanecendo com momentos fletores constantes e de valor igual ao momento de plastificação total. Entende-se por regime elastoplástico, o estado de solicitação no qual parte da estrutura se comporta elasticamente, existindo no entanto, regiões já plastificadas.

Em uma estrutura  $n$  vezes estaticamente indeterminada de material dúctil, geralmente, chega-se a um mecanismo de colapso, pois não se esgota a capacidade de rotação das rótulas plásticas, permitindo assim a formação das  $(n+1)$  rótulas plásticas sem que ocorra uma ruptura prematura.

Nas estruturas estaticamente indeterminadas de concreto estrutural, os métodos de cálculo devem prever as verificações do estado limite último, abertura das fissuras e deformações. Deve-se observar também a capacidade de rotação das rótulas plásticas, que é normalmente pequena, e pode impedir uma adaptação completa da estrutura.

Neste trabalho existe a preocupação em verificar apenas o estado limite último. Quando se fizer necessário, as verificações da fissuração e deformação devem estar de acordo com as normas existentes.

## 2. MÉTODO DAS RÔTULAS PLÁSTICAS

### 2.1 - Generalidades

Aumentando-se gradativamente o carregamento de uma estrutura, ela permanece em regime totalmente elástico até que, em um ou mais pontos da estrutura, ocorra a plastificação do material. A partir desse ponto ainda é possível aumentar o carregamento, passando a estrutura a ter um comportamento elastoplástico até que, em uma situação limite seja atingido o colapso.

Pela teoria plástica quando uma seção transversal se plastifica totalmente, forma-se uma rótula plástica e o momento fletor transmitido permanece constante. Admite-se que o momento fletor atuante na rótula plástica seja o momento de plastificação total  $M_p$ .

O método das rótulas plásticas estuda o comportamento da estrutura na iminência do colapso plástico, isto é, na iminência da situação em que a estrutura não reage a acréscimos de carga ou em que as deformações são crescentes para uma carga constante. Aplica-se principalmente no cálculo de estruturas estaticamente indeterminadas de materiais dúcteis, submetidas à flexão.

### 2.2 - Hipóteses básicas

São estabelecidas em função do diagrama momento fletor - curvatura das barras da estrutura, conforme Fig. 2.2.1.

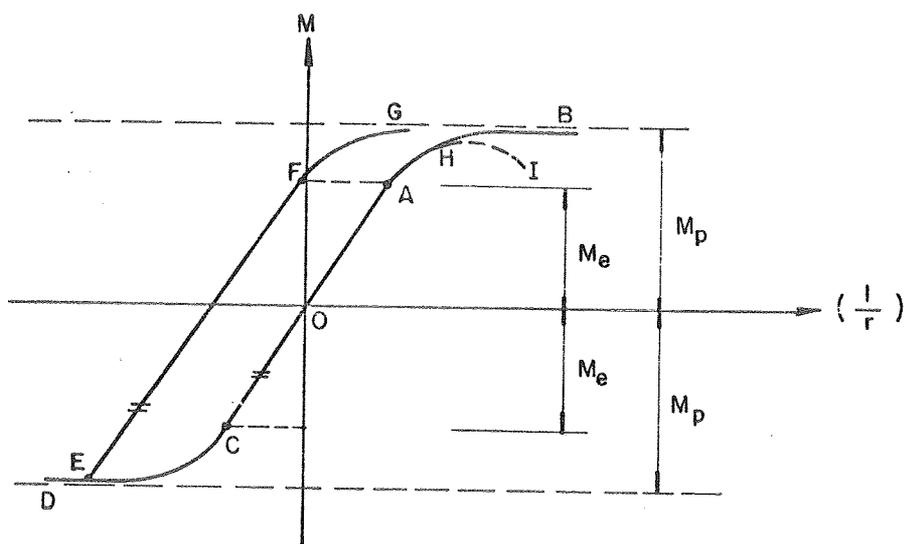


Fig. 2.2.1 - Diagrama momento fletor - curvatura

Convenção de sinais

Definindo-se o momento fletor como positivo, quando traciona as fibras inferiores ou as fibras do lado tracejado da estrutura, tem-se que a curvatura é positiva quando causa alongamento nas mesmas fibras.

Conforme a Fig. 2.2.1, quando se aplica um momento fletor em uma viga indeformada e sem cargas, a curvatura cresce linearmente com o momento fletor no trecho  $OA$ . Esta região é elástica e termina quando se atinge o momento de início de plastificação  $M_e$  no ponto  $A$ .

Aumentando-se o momento fletor, a curvatura começa a crescer mais rapidamente por unidade de acréscimo do momento fletor no trecho  $AB$  e tende finalmente ao infinito com um valor limite do momento de plastificação total  $M_p$ . Basicamente, isto corresponde a propagar a plastificação das fibras extremas para as internas.

Quando se aplica um momento fletor negativo, obtém-se para o trecho  $OCD$  um comportamento idêntico ao do trecho  $OAB$ , notando-se que acréscimos negativos de momento fletor acarretam acréscimos negativos de curvatura.

O trecho EFG resulta da aplicação de um momento fletor negativo ao longo de OCE e em seguida um momento fletor positivo. O diagrama momento fletor-curvatura é linear no trecho EF, com inclinação igual à da reta OA. Para momentos fletores acima do valor correspondente ao do ponto F, a curvatura cresce mais rapidamente e o momento fletor tende ao valor limite  $M_p$ .

Não é possível ocorrer a trajetória AHI, pois a relação entre momento fletor e curvatura é monotônica.

Estas hipóteses se resumem a:

$$- M_p \leq M \leq M_p$$

$$\frac{dM}{d\left(\frac{1}{r}\right)} \geq 0$$

### 2.3 - Diagrama tensão-deformação para aços estruturais

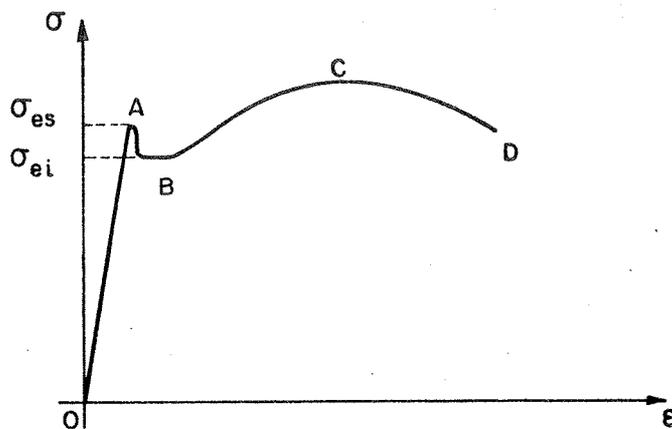


Fig. 2.3.1 - Diagrama tensão-deformação (aço com baixo teor de carbono).

$\sigma_{es}$  - Tensão normal superior de início de plastificação.

$\sigma_{ei}$  - Tensão normal inferior de início de plastificação.

Admite-se um comportamento elastoplástico ideal, onde se despreza o encruamento, considera-se a tensão normal superior de início de plastificação igual à inferior e também que exista uma reserva de deformação plástica infinita sem que haja ruptura, sendo o comportamento à tração idêntico à compressão

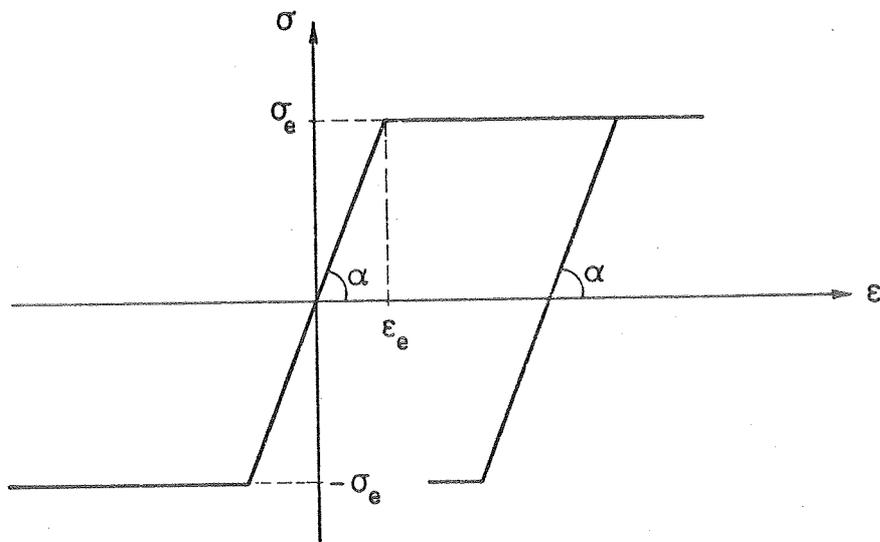


Fig. 2.3.2 - Diagrama tensão-deformação ideal

## 2.4 - Estudo das vigas de material elastoplástico ideal

Considera-se apenas o estudo da flexão pura, desprezando-se os efeitos dos esforços normal e cortante.

### 2.4.1 - Hipóteses

a) As seções transversais planas permanecem planas na deformação, tanto em regime elástico como em regime plástico.

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \epsilon$$

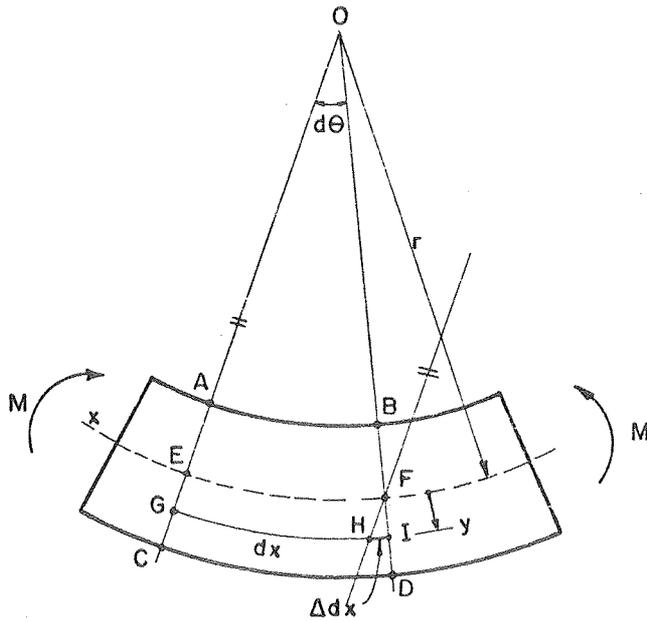


Fig. 2.4.1

$$\frac{\overline{EF}}{r} = \frac{\overline{HI}}{y} \quad (\text{semelhança dos triângulos OEF e FHI})$$

$$\frac{dx}{r} = \frac{\Delta dx}{y}$$

Portanto

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \epsilon = \frac{y}{r}$$

b) O diagrama tensão-deformação é idealizado de modo a ter duas linhas retas.

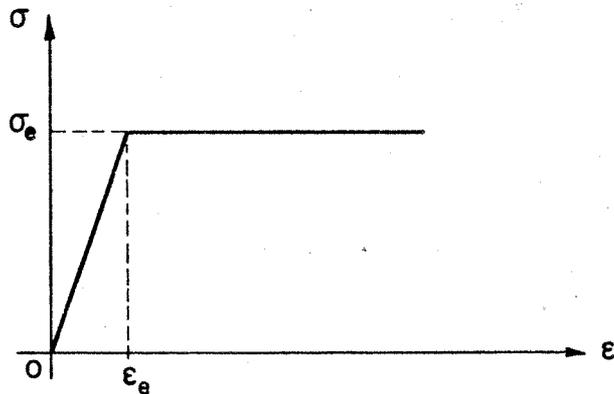


Fig. 2.4.2 - Diagrama tensão-deformação ideal

c) As deformações são suficientemente pequenas de modo que:

$$d\theta = \frac{dx}{r} = \frac{\Delta dx}{y}$$

d) As condições de equilíbrio são expressas por:

- Força normal:  $N = \int_A \sigma \, dA$

- Momento fletor:  $M = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA$

#### 2.4.2 - Flexão plástica pura de uma viga de seção transversal duplamente simétrica

Considere-se a seção transversal da Fig. 2.4.3 com dois eixos de simetria, sujeita a um momento fletor atuando no plano que contém o eixo de simetria vertical.

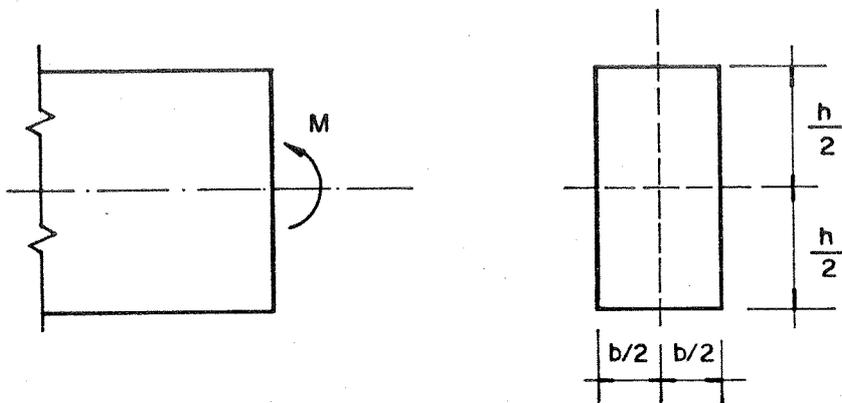
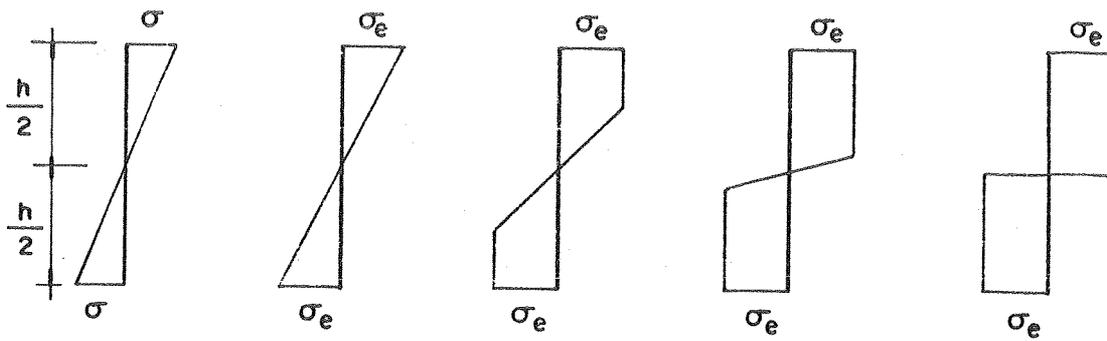


Fig. 2.4.3

A linha neutra passa pelo centro de gravidade situado na metade da altura como consequência do equilíbrio das forças axiais.

Aumentando-se o momento fletor, as tensões normais e as deformações se comportam conforme a Fig. 2.4.4.

TENSÕES



DEFORMAÇÕES

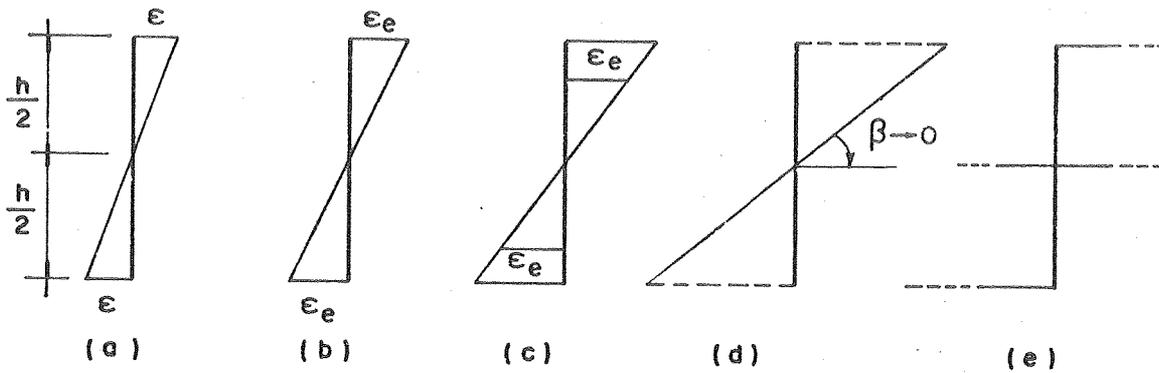


Fig. 2.4.4

Quando se atinge o valor da tensão normal de início de plastificação  $\sigma_e$  nas fibras extremas, tem-se que:

$$M_e = \sigma_e \cdot W = \left(\frac{1}{r}\right)_e \cdot EI$$

$$\sigma_e = E \cdot \epsilon_e$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_e = \frac{M_e}{EI} = \frac{\sigma_e \cdot W}{EI} = \frac{E \epsilon_e W}{EI}$$

Como  $W = \frac{I}{h/2}$  tem-se:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_e = \frac{\epsilon_e \cdot 2I}{hI}$$

Portanto,

$$\left(\frac{1}{r}\right)_e = \frac{2\varepsilon_e}{h} \quad (2.4.1)$$

Com acréscimos no momento fletor, para valores acima de  $M_e$ , as fibras extremas se plastificam e esta plastificação se propaga para as fibras internas até a linha neutra.

Devido a manutenção da seção plana, a curvatura  $\frac{1}{r} > \left(\frac{1}{r}\right)_e$ , se relaciona com a distância  $y$  à linha neutra.

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_e}{y}$$

Logo,

$$\varepsilon_e = \frac{1}{r} \cdot y$$

Substituindo na expressão (2.4.1) tem-se:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_e = \frac{2}{h} \cdot \frac{1}{r} \cdot y$$

Portanto,

$$\frac{2y}{h} = \frac{(1/r)_e}{1/r}$$

Teoricamente, para uma curvatura infinita  $y_e = 0$ , tem-se a distribuição birectangular de tensões representada na Fig. 2.4.4(e). Como  $M_p$  é proporcional a  $\sigma_e$  pode-se escrever;

$$M_p = \sigma_e \cdot Z$$

2.4.3 - Lei de variação do momento fletor com a curvatura

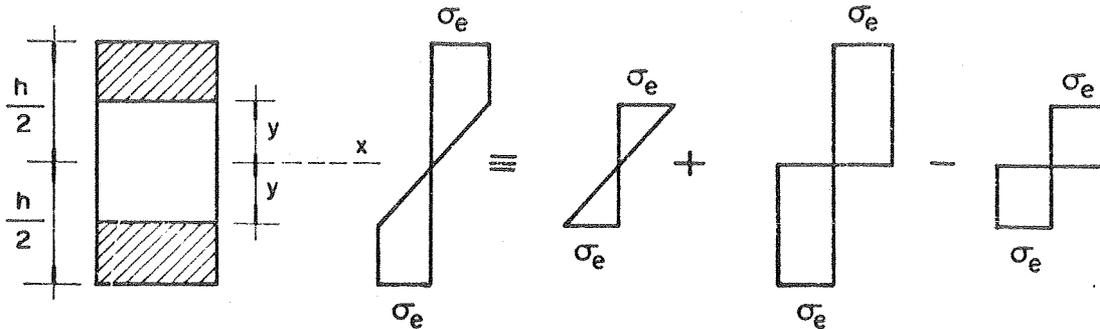


Fig. 2.4.5 - Seção parcialmente plastificada

Dividindo-se o diagrama trapezoidal das tensões em três partes, pode-se escrever a equação de equilíbrio,

$$M = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA$$

da seguinte maneira:

$$M = \sigma_e \cdot W_e + \sigma_e \cdot Z - \sigma_e \cdot Z_e \quad (2.4.2)$$

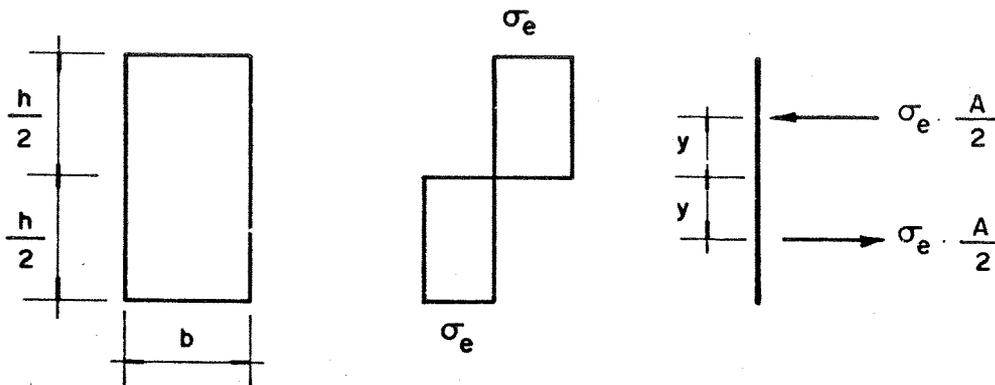


Fig. 2.4.6 - Diagrama birectangular de tensões

Na plastificação total, para se obter o equilíbrio das forças axiais, a linha neutra divide a seção transversal em duas partes iguais:

$$M_p = 2 \int_{A/2} \sigma_e \cdot dA |y| = \sigma_e \int_A |y| dA$$

Por definição

$$M_p = \sigma_e \cdot Z$$

Logo,

$$\sigma_e \cdot Z = \sigma_e \int_A |y| dA$$

$$Z = \int_A |y| dA = 2S_x$$

Portanto,

$$Z = 2S_x$$

onde  $S_x$  é o momento estático de área da parte da seção de um lado do eixo x, em relação ao eixo de simetria horizontal x.

Substituindo  $\sigma_e = \frac{M}{Z}$  na expressão (2.4.2), tem-se:

$$M = \frac{M}{Z} \cdot W_e + \frac{M}{Z} \cdot Z - \frac{M}{Z} \cdot Z_e = M_p \left( \frac{W_e + Z - Z_e}{Z} \right)$$

dividindo por  $M_e$ ;

$$\frac{M}{M_e} = \frac{M_p}{M_e} \left[ 1 - \left( \frac{Z_e - W_e}{Z} \right) \right] \quad (2.4.3)$$

$W_e$  e  $Z_e$  dependem somente da altura relativa  $\frac{2y}{h}$  da região interna da seção transversal que permanece em regime elástico.

Como,

$$\frac{2y}{h} = \frac{(1/r)_e}{1/r}$$

Pode-se escrever a expressão (2.4.3) da seguinte forma;

$$\frac{M}{M_e} = \frac{M_p}{M_e} \left[ 1 - \psi \left( \frac{(1/r)_e}{1/r} \right) \right] \quad (2.4.4)$$

onde  $\psi$  é uma função que relaciona,

$$\frac{(1/r)_e}{1/r} \quad \text{com} \quad \left( \frac{Z_e - Z}{Z} \right)$$

A expressão (2.4.4) permite construir, para cada tipo de seção transversal, um diagrama adimensional que dá a variação do momento fletor reduzido  $M/M_e$  em função da curvatura reduzida  $\frac{1/r}{(1/r)_e}$ .

No caso da seção circular, tem-se:

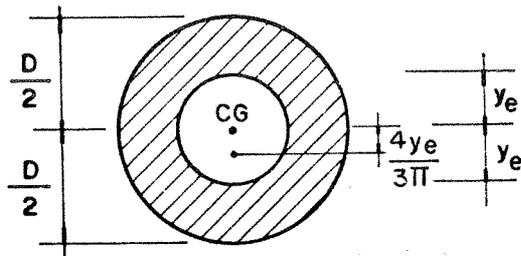


Fig. 2.4.7

$$W = \frac{I}{D/2} = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32}$$

$$W_e = \frac{I}{y_e} = \frac{\frac{\pi (2y_e)^4}{64}}{y_e} = \frac{\pi y_e^3}{4}$$

$$Z = 2S_x = 2 \cdot \frac{\pi D^2}{8} \cdot \frac{2D}{3\pi} = \frac{D^3}{6}$$

$$Z_e = 2\pi \frac{(2y_e)^2}{8} \cdot \frac{4y_e}{3\pi} = \frac{4y_e^3}{3}$$

$$M_e = \sigma_e \cdot W = \sigma_e \cdot \frac{\pi D^3}{32}$$

$$M_p = \sigma_e \cdot Z = \sigma_e \cdot \frac{D^3}{6}$$

tem-se que,

$$\frac{Z_e - W_e}{Z} = \frac{\frac{4y_e^3}{3} - \frac{\pi y_e^3}{4}}{D^3/6} = 3,3 \frac{y_e^3}{D^3}$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)_e = \frac{E \cdot \epsilon_e \cdot W}{EI} = \frac{\epsilon_e \cdot W}{I}$$

Com,

$$\epsilon_e = \left(\frac{1}{r}\right)_e \cdot y_e$$

tem-se:

$$\frac{\left(\frac{1}{r}\right)_e}{\frac{1}{r}} = \frac{W \cdot y_e}{I} = \frac{\frac{\pi D^3}{32} \cdot y_e}{\frac{\pi D^4}{64}} = \frac{2y_e}{D}$$

Portanto,

$$\frac{Z_e - Z}{Z} = \frac{3,30}{8} \left(\frac{2y_e}{D}\right)^3 = \frac{3,30}{8} \cdot \left[\frac{(1/r)_e}{1/r}\right]^3$$

$$\frac{M}{M_e} = \frac{M_p}{M_e} \left[1 - \psi\left(\frac{(1/r)_e}{1/r}\right)\right] = \frac{\sigma_e \cdot \frac{D^3}{6}}{\sigma_e \cdot \frac{\pi D^3}{32}} \left[1 - 0,41 \left(\frac{(1/r)_e}{1/r}\right)^3\right]$$

$$\frac{M}{M_e} = 1,70 \left[1 - 0,41 \left(\frac{(1/r)_e}{1/r}\right)^3\right]$$

$$\frac{M_p}{M_e} = \frac{Z}{W} = \alpha$$

A curva  $\frac{M}{M_e} = \psi\left(\frac{1/r}{(1/r)_e}\right)$  é assintótica à horizontal com ordenada  $\frac{M_p}{M_e} = 1,70$ .

Para outras seções transversais, obtêm-se curvas idênticas, conforme Fig. 2.4.8

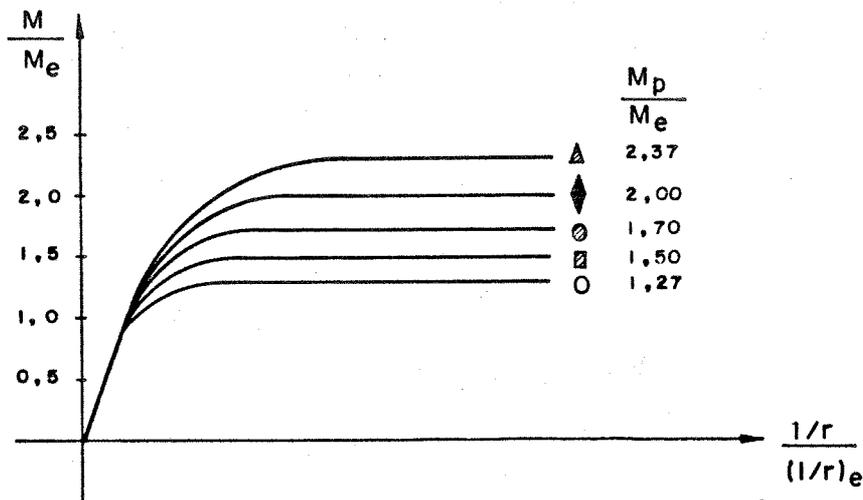


Fig. 2.4.8

2.4.4 - Seção transversal com um eixo de simetria

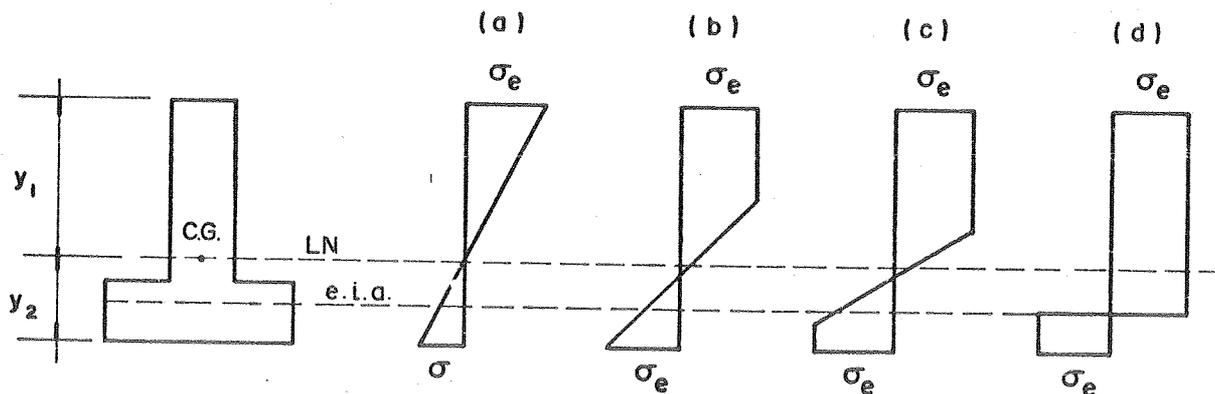


Fig. 2.4.9

e.i.a - eixo de igual área.

Fig. 2.4.9(a) - As tensões se encontram no regime elástico e a linha neutra passa pelo centro de gravidade da seção transversal. O momento fletor máximo vale:

$$M_e = \sigma_e \cdot \frac{I}{y_1}$$

Fig. 2.4.9(b) - A plastificação começa na fibra extrema mais afastada da linha neutra, caminhando para as fibras internas. A tensão permanece constante no valor  $\sigma_e$ .

Fig. 2.4.9(c) - Nas fibras extremas menos afastadas da linha neutra, a plastificação começa a caminhar para as fibras internas, com a tensão normal  $\sigma_e$  constante. O momento fletor tende assintoticamente ao seu valor último.

Fig. 2.4.9(d) - Quando a seção transversal estiver totalmente plastificada, a linha neutra é tal que existe o equilíbrio das forças axiais.

$$\int_A \sigma \cdot dA = \sigma_e \cdot (A_1 - A_2) = 0$$

Isto é, que as áreas de ambos os lados do eixo de igual área (e.i.a) sejam iguais.

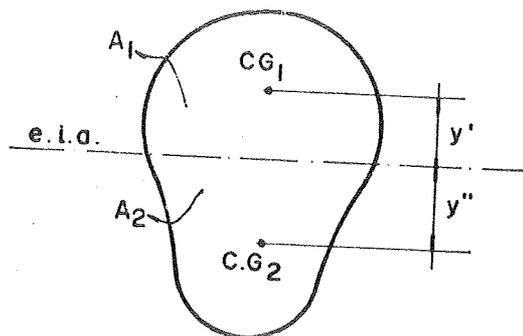


Fig. 2.4.10

O eixo de igual área de uma seção transversal qualquer com um eixo de simetria, é a reta normal a este eixo que divide a seção em duas partes iguais e o módulo de resistência à plastificação correspondente, vale:

$$Z = \frac{A}{2} (y' + y'')$$

sendo  $y'$  e  $y''$  as distâncias dos centros de gravidade  $CG_1$  e  $CG_2$ , respectivamente, ao eixo de igual área.

## 2.5 - Casos simples de colapso plástico

### 2.5.1 - Generalidades

Nas estruturas isostáticas, aumentando-se as cargas aplicadas, o colapso ocorre tão logo se forme a primeira rótula plástica, quando o momento fletor máximo atinge o valor do momento de plastificação total  $M_p$ , e a estrutura se transforma em um mecanismo que continua deformando sob carga constante.

Nas estruturas hiperestáticas, o colapso geralmente não ocorre quando se forma a primeira rótula. Ao se atingir o momento de plastificação total  $M_p$  em uma determi-

nada seção transversal, forma-se uma rótula plástica. Para se formar outras rótulas plásticas é preciso que se aumentem os momentos fletores, mantendo-se constante o momento de plastificação total na rótula plástica já formada.

### 2.5.2 - Princípio dos trabalhos virtuais

A palavra virtual significa susceptível de se realizar. Por deslocamento virtual entende-se um deslocamento hipotético infinitesimal, de um ponto ou sistema de pontos materiais. O deslocamento é suposto de modo a não alterar a configuração estática e geométrica do sistema e das forças que nele agem, não violando as condições de equilíbrio a que tais forças obedecem.

Utilizando o princípio dos trabalhos virtuais pode-se expressar o equilíbrio de uma estrutura e pode ser enunciado da seguinte forma,

"Se a uma estrutura deformável, em equilíbrio sob a ação de um sistema de forças externas, for imposto um deslocamento virtual compatível com seus vínculos, o trabalho realizado pelas forças externas durante o deslocamento é igual ao trabalho realizado pelas forças internas, isto é;  $T_{ext} = T_{int}$ ".

Se o sistema é indeformável, as forças internas não produzem nenhum trabalho e o princípio se reduz à forma bem conhecida da mecânica racional,  $T_{ext.} = 0$ .

Se o sistema é uma estrutura plana formada por barras, carregadas em seu próprio plano, o trabalho das  $k$  forças externas  $F_i$ , vale;

$$T_{ext.} = \sum_{i=1}^k F_i a_i$$

onde  $a_i$  é a componente de deslocamento do ponto de aplicação da força  $F_i$ , na direção desta força. As componentes

da resultante dos esforços internos em uma seção transversal são a força normal  $N$ , o esforço cortante  $V$  e o momento fletor resultante destes esforços que se reduz ao momento fletor  $M$ .

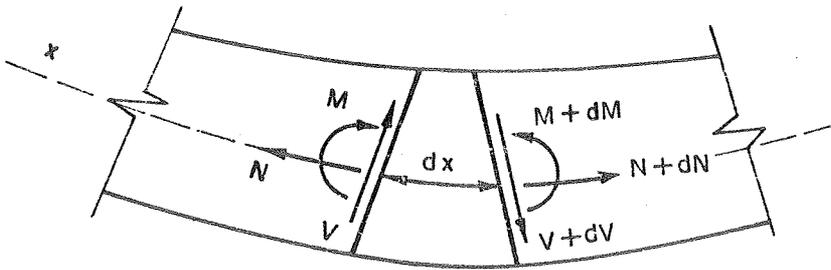


Fig. 2.5.1

Um elemento de viga de comprimento  $dx$ , medido ao longo do eixo longitudinal  $x$ , conforme Fig. 2.5.1, sofre um deslocamento  $\Delta dx$  ao longo do seu eixo  $x$  e  $dy$  na direção perpendicular, sofrendo as seções transversais que limitam este elemento, uma rotação relativa  $\Delta d\theta$ .

O trabalho realizado pelas forças internas, vale

$$T_{int.} = \int_{\text{sistema}} (N\Delta dx + Vdy + M\Delta d\theta)$$

de modo que o princípio dos trabalhos virtuais fica;

$$\sum_{i=1}^k F_i a_i = \int_{\text{sistema}} (N\Delta dx + Vdy + M\Delta d\theta) \quad (2.5.1)$$

Aplica-se o princípio dos trabalhos virtuais para determinar a carga de colapso das estruturas planas. Considera-se um deslocamento de modo arbitrário em um sistema que sofre colapso sob carga constante. Neste deslocamento as deformações elásticas do sistema não variam, e sendo muito pequenas, não modificam significativamente a forma inicial. Pode-se admitir que a estrutura se comporta como um conjunto de barras retilíneas indeformáveis e articuladas entre si por rótulas plásticas.

Conclui-se que  $\Delta dx$ ,  $dy$  e  $\Delta d\theta$  são nulos em todos os pontos, exceto nas "m" rótulas plásticas, onde se produzem as rotações finitas  $\theta_j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ). A expressão (2.5.1) se reduz à igualdade:

$$\sum_{i=1}^k F_i \cdot a_i = \sum_{j=1}^m M_j \theta_j$$

onde a primeira somatória se estende às k forças externas aplicadas ao sistema e a segunda às "m" rótulas plásticas que se formaram.

Caso existam somente cargas distribuídas, a primeira somatória é substituída por,

$$\int_{\text{sistema}} p \cdot a \cdot dx$$

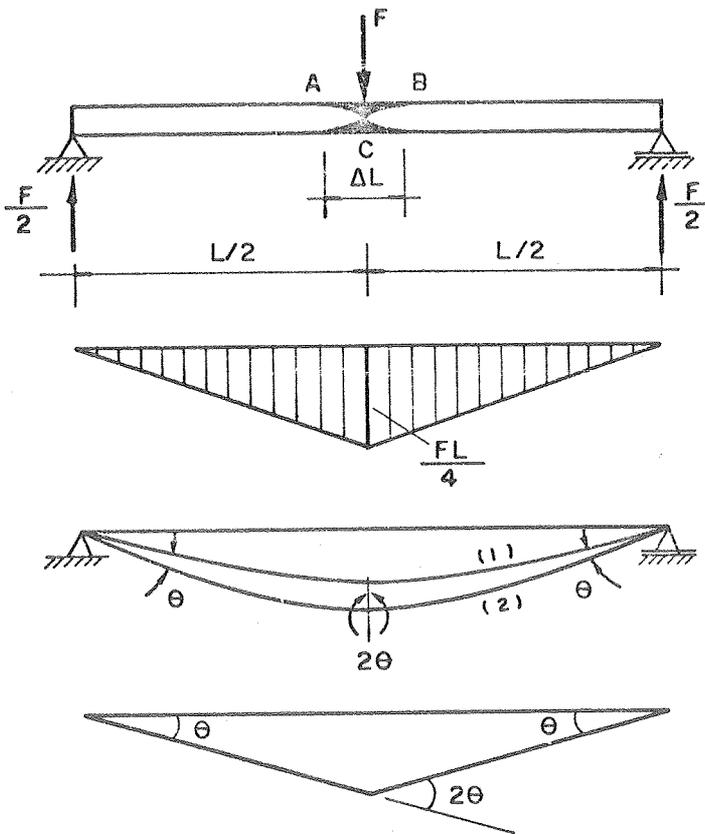
### 2.5.3 - Viga biapoiada

A viga simplesmente apoiada da Fig. 2.5.2, tem seção transversal constante, comprimento L e carga concentrada F, na seção do meio do vão.

Admite-se que esta viga simplesmente apoiada tenha rigidez à flexão EI. O diagrama momento fletor-curvatura é conforme a Fig. 2.5.3.

Quando se aumenta a carga continuamente, a partir de zero, tem-se no início um comportamento elástico. Para um determinado valor da carga, ao se atingir o momento de plastificação total na seção de máximo momento fletor, forma-se uma rótula plástica. Na maioria dos casos as rótulas plásticas se formam em seções isoladas onde supõe-se ocorrer toda a rotação plástica. Na realidade, o comprimento da zona plastificada se estende sobre a viga e depende da carga e da geometria.

Mantendo-se o equilíbrio, não é possível acréscimos de carga, porque o momento fletor não ultrapassa o



a) Carregamento

b) Diagrama de momento fletor.

c) Configurações deformadas:  
 (1) para  $F = F_u$   
 (2) durante o colapso.

d) Mudança da flecha durante o colapso.

Fig. 2.5.2

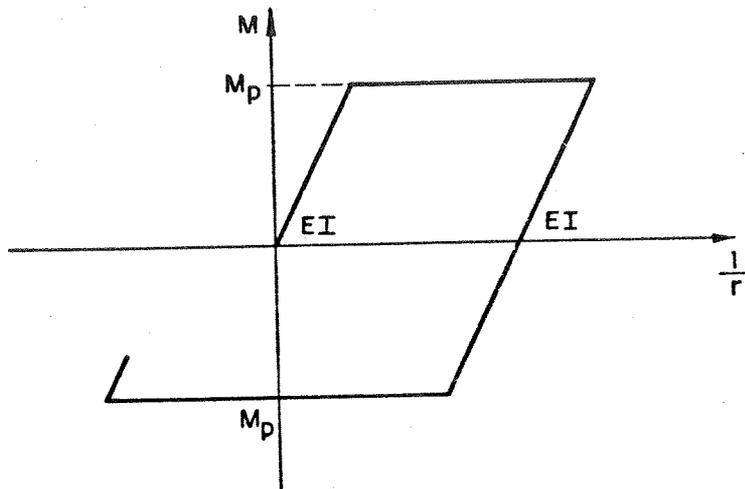


Fig.2.5.3. - Diagrama momento fletor-curvatura, ideal.

momento de plastificação total. Contudo, a rótula plástica pode, por hipótese, sofrer rotações mantendo-se constantes o momento fletor e a carga.

Com a formação da rótula plástica, a viga continua a se deformar sob carga constante e chega à ruína por colapso plástico. A carga na qual isto ocorre é denominada carga última (de colapso plástico), sendo determinada por,

$$\frac{F_u \cdot L}{4} = M_p$$

Logo,

$$F_u = \frac{4M_p}{L}$$

Nas proximidades dos pontos A e B (Fig. 2.5.2a) da zona plastificada, a curvatura é muito pequena, e nas proximidades do ponto C (de aplicação da carga), a curvatura é extremamente grande. Devido a este fato, admite-se a viga constituída por dois tramos rígidos articulados entre si no ponto de aplicação da carga.

A viga permanece em regime elástico enquanto os momentos fletores são menores que  $M_p$ .

Na seção onde se forma a rótula plástica, a carga e conseqüentemente o momento fletor se mantêm constantes.

O aumento da flecha durante o colapso é devido somente à rotação da rótula plástica, Fig. 2.5.2(c). A curva (1) mostra a configuração deformada, no momento em que se atinge a carga última  $F_u$ , e antes de ocorrer qualquer rotação na rótula plástica já formada. Isto se dá devido à aproximação adotada de que o comportamento é elástico até  $M_p$ , desprezando-se a plastificação após a fase elástica real. A curva (2) mostra a configuração da flecha após a rótula plástica já formada ter sofrido rotação de um ângulo arbitrário  $2\theta$ .

A Fig. 2.5.2(d) mostra a mudança de flecha ocorrida durante o colapso, que é devido somente à rotação da rótula plástica já formada. Pode-se dizer que representa o mecanismo de colapso para este caso simples.

No regime elástico, a flecha no meio do vão é dada por:

$$v = \frac{FL^3}{48EI}$$

Quando se atinge a carga última, se fosse mantido o regime elástico, a flecha valeria,

$$v = \frac{F_u \cdot L^3}{48EI}$$

Com,  $F_u = \frac{4M_p}{L}$  tem-se:

$$v = \frac{M_p \cdot L^2}{12EI}$$

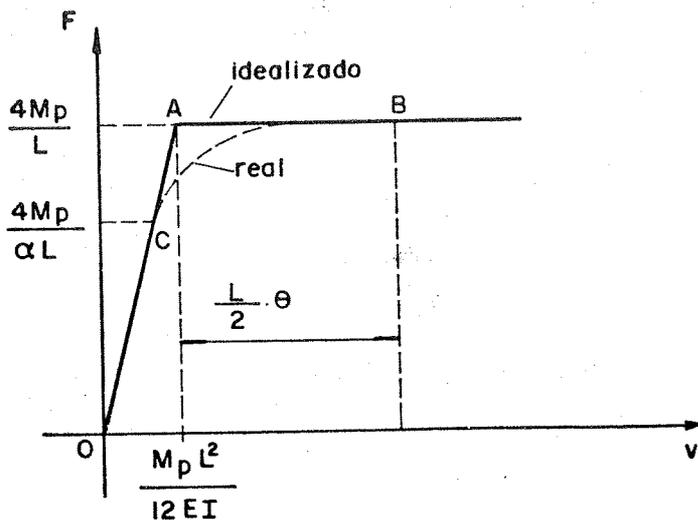


Fig. 2.5.4 - Diagrama carga-deslocamento (seção do meio do vão).

Conforme a Fig. 2.5.4, o comportamento é elástico na região OA. Mantendo a carga constante, a região AB representa o colapso, com o deslocamento aumentando de A para B, do valor  $\frac{L}{2} \cdot \theta$ , conforme o mecanismo da Fig. 2.5.2(d).

Admitindo-se o diagrama momento fletor-curvatura da Fig. 2.2.1, o comportamento elástico termina em C, enquanto que o momento fletor máximo é  $M_e$ . Sendo  $M_e = M_p / \alpha$ , a carga  $F_e$  na qual o comportamento elástico termina e a primeira plastificação ocorre é:

$$F_e = \frac{F_u}{\alpha} = \frac{4M_p}{\alpha L}$$

com 
$$F_u = \frac{4M_p}{L} \text{ e } \alpha = \frac{M_p}{M_e} = \frac{Z}{W}$$

Durante o colapso, a energia de deformação elástica armazenada na viga não se altera, pois a distribuição de momento fletor permanece constante. Assim, o trabalho realizado pela carga última durante o pequeno movimento do mecanismo de colapso é igual ao trabalho realizado na rótula plástica. No mecanismo da Fig. 2.5.2(d), o ponto de aplicação da carga  $F_u$  se desloca de uma distância  $\frac{L}{2} \cdot \theta$ , logo o trabalho realizado pela carga última  $F_u$ , é:

$$T_{\text{ext.}} = \frac{1}{2} \cdot F_u \cdot L\theta$$

A rotação da rótula plástica é  $2\theta$ , logo o trabalho realizado na rótula é:

$$T_{\text{int.}} = 2 M_p \cdot \theta$$

Como o trabalho externo é igual ao interno, tem-se:

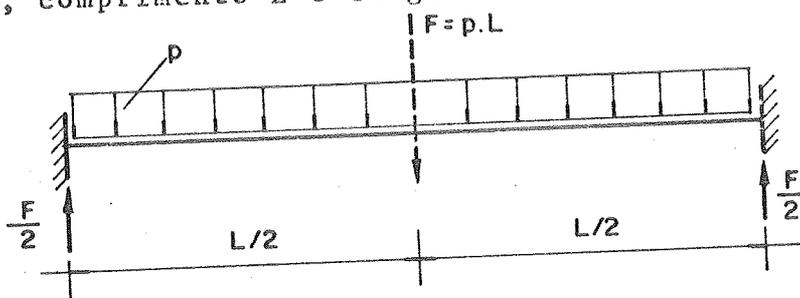
$$\frac{1}{2} \cdot F_u \cdot L\theta = 2M_p \cdot \theta$$

Logo,

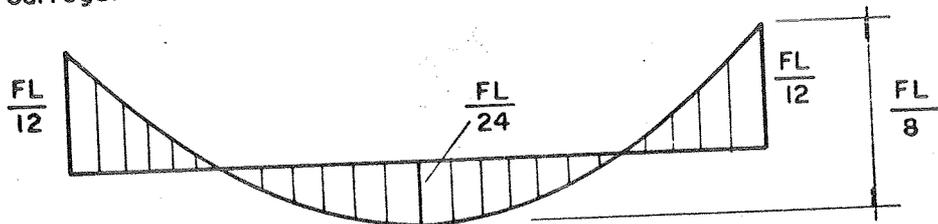
$$F_u = \frac{4M_p}{L}$$

### 2.5.4 - Viga biengastada

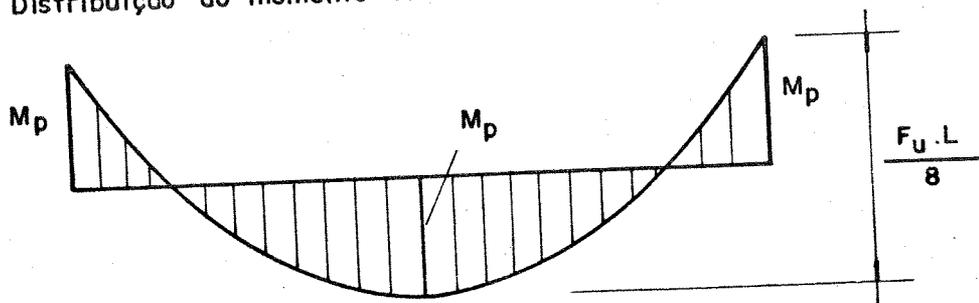
A viga da Fig. 2.5.5, tem seção transversal constante, comprimento L e carga uniformemente distribuída p.



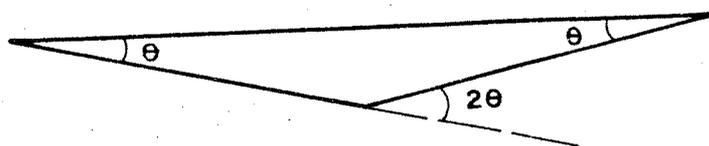
a) Carregamento



b) Distribuição do momento fletor na fase elástica



c) Distribuição do momento fletor no colapso



d) Mecanismo de colapso

Fig. 2.5.5

Os maiores momentos fletores que ocorrem na viga são os de extremidades, onde se formam rótulas plásticas quando se atinge o momento de plastificação total.

Se fosse mantido o regime elástico até a plastificação total dos apoios, a carga seria dada por:

$$\frac{F'_e \cdot L}{12} = M_p.$$

Logo,

$$F'_e = 12 \frac{M_p}{L}$$

Para a carga  $F'_e$ , o momento fletor positivo na seção do meio do vão da viga vale;

$$\frac{F'_e \cdot L}{24} \text{ ou } \frac{1}{2} M_p.$$

A flecha na seção do meio do vão, em regime elástico, é dada por;

$$v = \frac{FL^3}{384EI}$$

Para a carga de início convencional de plastificação  $F'_e$ , tem-se:

$$v_e = \frac{F'_e \cdot L^3}{384EI} = \frac{M_p \cdot L^2}{32EI}$$

onde  $F'_e = 12 \frac{M_p}{L}$

Aumentando-se a carga de  $\Delta F$  acima de  $F'_e$ , as duas rótulas plásticas nas extremidades da viga sofrem rotações, enquanto que o momento fletor de cada uma delas permanece constante no valor  $M_p$ .

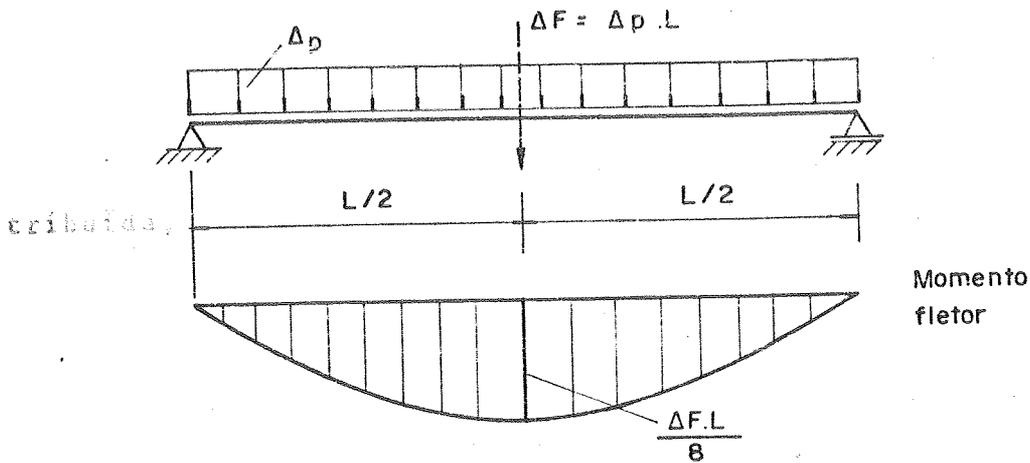


Fig. 2.5.6

Portanto, para este incremento de carga  $F$  acima de  $F_e$ , a viga se comporta como simplesmente apoiada. O momento fletor na seção do meio do vão, com carga  $(F_e + \Delta F)$  é dado por;

$$\frac{1}{2} M_p + \frac{\Delta F \cdot L}{8}$$

Este processo de acréscimos de carga termina quando o momento fletor positivo na seção do meio do vão atinge  $M_p$ .

Portanto,

$$\frac{1}{2} M_p + \frac{\Delta F \cdot L}{8} = M_p$$

Logo,

$$\Delta F = \frac{4M_p}{L}$$

Para a carga última (de colapso), tem-se:

$$F_u = F'_e + \Delta F = \frac{12M_p}{L} + \frac{4M_p}{L} = \frac{16M_p}{L}$$

Em uma viga biapoiada com carga uniformemente distribuída, a flecha na seção do meio do vão, vale:

$$v = \frac{5FL^3}{384EI}$$

Assim, o acréscimo da flecha quando se tem o incremento de carga  $\Delta F$  acima de  $F'_e$ , se continuasse válido o regime elástico, seria dado por:

$$v_u - v_e = \frac{5FL^3}{384EI} = \frac{5(F_u - F'_e) \cdot L^3}{384EI} = \frac{5M_p \cdot L^2}{96EI}$$

Ter-se-ia então, a flecha para a carga última:

$$v_u = \frac{5M_p \cdot L^2}{96EI} + v_e = \frac{5M_p \cdot L^2}{96EI} + \frac{M_p \cdot L^2}{32EI} = \frac{M_p \cdot L^2}{12EI}$$

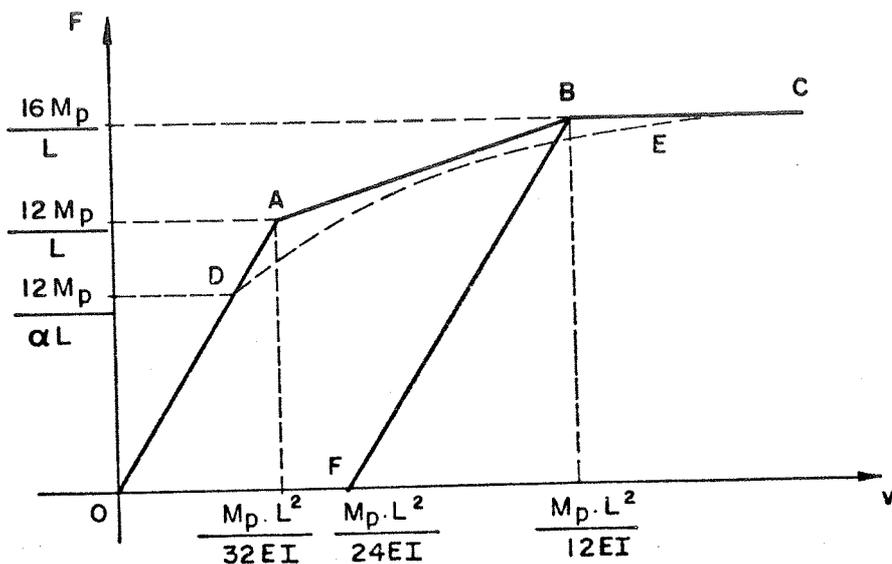


Fig. 2.5.7 - Diagrama carga-deslocamento (seção do meio do vão).

Obtêm-se o trecho OABC da Fig. 2.5.7, quando se admite a relação momento fletor-curvatura, ideal. Tem-se comportamento elástico no trecho OA, sendo que no trecho AB as rótulas plásticas estão girando nas extremidades da viga. O colapso plástico ocorre no trecho BC. A trajetória ODEC representa o tipo de relação carga-deslocamento que se obtém quando  $M_e$  não coincide com  $M_p$ . O comportamento elástico real termina no ponto D, e a carga correspondente vale;

$$\frac{12M_p}{\alpha L} = \frac{12M_e}{L}$$

Aumentando-se a carga F até o valor último  $\frac{16M_p}{L}$ , e retirando-a antes que a rótula plástica do meio do vão sofra rotações, a descarga ocorre ao longo do trecho BF.

Descarregando a viga depois de se atingir a carga última (ponto B da Fig. 2.5.7), o comportamento é elástico e portanto a flecha diminui de,

$$\frac{F_u \cdot L^3}{384EI} = \frac{M_p \cdot L^2}{24EI}$$

onde  $F_u = \frac{16M_p}{L}$

Depois de se descarregar totalmente a viga, resta uma flecha residual de valor,

$$\frac{M_p \cdot L^2}{12EI} - \frac{M_p \cdot L^2}{24EI} = \frac{M_p \cdot L^2}{24EI}$$

Os momentos fletores residuais existentes na viga após a descarga completa, são determinados conforme Fig. 2.5.5, da seguinte maneira;

a) Nas seções das extremidades da viga

$$- M_p - \left( - \frac{F_u \cdot L}{12} \right) = - M_p + \frac{F_u \cdot L}{12}$$

com  $F_u = \frac{16M_p}{L}$  tem-se:

$$- M_p + \frac{16M_p}{L} \cdot \frac{L}{12} = \frac{1}{3} M_p$$

b) Na seção do meio do vão da viga

$$M_p - \frac{F_u \cdot L}{24} = M_p - \frac{16}{24} M_p = \frac{1}{3} M_p$$

Pode-se calcular a carga última  $F_u$ , conforme a Fig. 2.5.5(c), onde se tem;

$$2M_p = \frac{1}{8} \cdot F_u \cdot L \quad \text{Logo } F_u = \frac{16M_p}{L}$$

É possível também, calcular a carga última  $F_u$ , utilizando o mecanismo de colapso da Fig. 2.5.5(d), onde o deslocamento vertical da seção do meio do vão da viga, durante este pequeno movimento do mecanismo de colapso é  $\frac{1}{4} \cdot L\theta$ , por se ter carregamento uniformemente distribuído.

O trabalho externo realizado pela carga  $F_u$  é dado por,

$$T_{\text{ext.}} = \frac{1}{4} \cdot F_u \cdot L\theta$$

A rótula plástica da seção do meio do vão da viga sofre uma rotação de  $2\theta$ , sendo o trabalho interno realizado de  $2M_p \cdot \theta$ . A rotação de cada uma das rótulas das extremidades da viga é  $\theta$  e o trabalho interno realizado em cada rótula da extremidade vale  $M_p \cdot \theta$ .

Portanto, o trabalho interno realizado por todas as rótulas plásticas é dado por;

$$T_{int.} = 2M_p \theta + M_p \theta + M_p \theta = 4M_p \theta$$

Pela igualdade  $T_{ext.} = T_{int.}$ , tem-se:

$$\frac{1}{4} \cdot F_u \cdot L\theta = 4M_p \theta$$

Logo,

$$F_u = \frac{16M_p}{L}$$

## 2.6 - Teoremas fundamentais

### 2.6.1 - Generalidades

Em uma estrutura carregada, os métodos gerais de investigação da carga última, se baseiam em dois teoremas fundamentais que são respectivamente, teorema estático e teorema cinemático. Estes teoremas se devem a Greenberg e Prager. O primeiro dá um valor aproximado da carga última por defeito e o segundo por excesso.

Nas estruturas simples em que existe apenas um mecanismo de colapso possível, o cálculo da carga última não apresenta dificuldades. Porém, nas estruturas em que se tem mais de um mecanismo de colapso possível, é necessário distinguir qual o mecanismo de colapso real.

A validade destes teoremas depende essencialmente do diagrama momento fletor-curvatura da Fig. 2.2.1. Nota-se neste diagrama que um acréscimo de momento fletor sempre causa um acréscimo da curvatura de mesmo sinal, e quando o momento fletor tende ao seu valor limite  $M_p$ , a curvatura torna-se indefinidamente grande.

Como consequência, quando o momento fletor atinge o valor  $M_p$  admite-se nesta seção transversal a formação de uma rótula plástica que pode sofrer grandes rotações sem alterar o momento de plastificação total  $M_p$ . Não se consideram os efeitos das forças axiais e esforços cortantes que possam existir nos elementos da estrutura e exclui-se a possibilidade de ruptura por flambagem antes de se atingir a carga última.

Durante o colapso plástico, a distribuição de momentos fletores permanece constante, enquanto que os deslocamentos aumentam, e a curvatura não pode se alterar em qualquer seção transversal da estrutura, exceto nas seções onde se tem o momento de plastificação total. O acréscimo dos deslocamentos no colapso plástico é devido somente a rotações das rótulas plásticas, que são em número suficiente para transformar a estrutura em um mecanismo.

### 2.6.2 - Teorema estático ou teorema do limite inferior para F.

Baseia-se na consideração de um equilíbrio estático das solicitações de uma dada estrutura. No caso de estruturas isostáticas, a distribuição de momentos fletores que obedece as relações de equilíbrio é única.

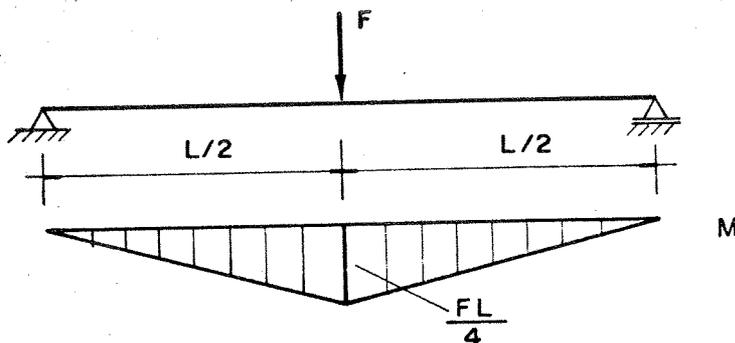


Fig. 2.6.1

No caso de estruturas hiperestáticas, existem várias possibilidades.

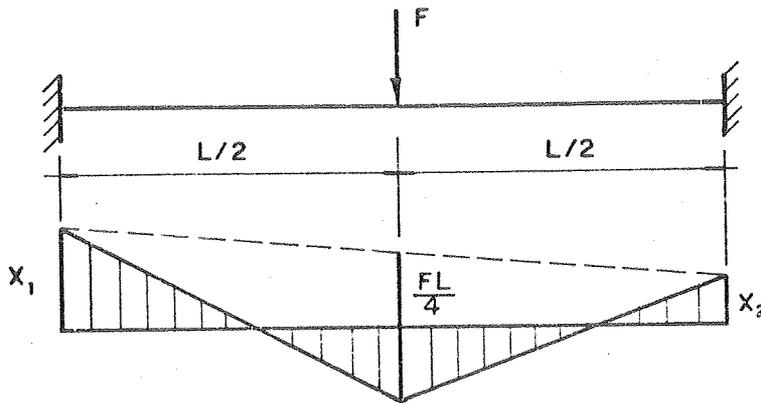


Fig. 2.6.2

Adotando-se valores quaisquer para os momentos fletores  $X_1$  e  $X_2$ , pode-se obter várias distribuições de momentos fletores que obedecem as relações de equilíbrio.

Considera-se uma distribuição de momentos fletores estaticamente admissível, quando não se ultrapassa o momento de plastificação total em nenhuma seção transversal da estrutura.

Tem-se um carregamento proporcional quando todas as cargas aplicadas na estrutura são múltiplas de valores de referência  $F_i$  por um fator  $\lambda$ .

Enunciado

"Para uma dada estrutura com carregamento proporcional, se existe uma distribuição de momentos fletores ao longo da estrutura, que seja estaticamente admissível e obedeça as relações de equilíbrio, o valor do carregamento  $F$  deve ser menor ou igual à carga última  $F_u$ ".

Supõe-se uma estrutura sujeita a um conjunto de cargas definidas por  $\lambda F_i$ , que atinja o colapso quando a carga  $F_i$  for igual a  $F_u$  e que se tenha um acréscimo de deslocamentos posteriores ao colapso.

$a_i$  é o deslocamento na direção e sentido de  $\lambda F_i$

$\theta_j$  é a rotação nas posições  $j$  onde se tem rótulas com  $M_{pj}$  (sinais de  $M_{pj}$  e  $\theta_j$  coerentes).

Aplicando-se o princípio dos trabalhos virtuais, tem-se:

$$F_u \cdot \sum_i \lambda_i a_i = \sum_j M_{pj} \cdot \theta_j \quad (2.6.1)$$

Como  $M_{pj}$  e  $\theta_j$  têm sinais coerentes, o produto é sempre positivo.  $F_u$  também é sempre positivo.

Portanto,

$$\sum_i \lambda_i a_i > 0.$$

Em uma outra distribuição de momentos fletores, com  $M_j$  nas posições  $j$ , em equilíbrio com  $F$  e segura, tem-se:

$$|M_j| \leq |M_{pj}| \quad (2.6.2)$$

Impondo os mesmos deslocamentos anteriores e aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, tem-se,

$$F \cdot \sum_i \lambda_i a_i = \sum_j M_j \cdot \theta_j \quad (2.6.3)$$

Das expressões (2.6.1) e (2.6.3) obtêm-se:

$$(F_u - F) \cdot \sum_i \lambda_i a_i = \sum_j (M_{pj} - M_j) \cdot \theta_j.$$

Com a expressão (2.6.2) garante-se que  $(M_{pj} - M_j)$  tem o mesmo sinal de  $\theta_j$ , e portanto:

$$\sum_j (M_{pj} - M_j) \theta_j \geq 0$$

Como,  $\sum_i \lambda_i a_i > 0$  tem-se que:

$$(F_u - F) \geq 0$$

Logo  $F \leq F_u$ .

2.6.3 - Teorema cinemático ou teorema do limite superior para F.

Conhecendo-se o mecanismo de colapso real de uma dada estrutura que tenha carregamento proporcional, pode-se determinar o valor da carga última igualando-se o trabalho realizado pelas cargas externas, durante um pequeno movimento do mecanismo de colapso.

Quando não se conhece o mecanismo de colapso real, é possível escrever uma equação de trabalho desta natureza, para qualquer mecanismo que se adota como sendo o de colapso, determinando assim, um valor para F.

Enunciado,

"Para uma dada estrutura sujeita a um carregamento proporcional, o valor de F determinado através de qualquer mecanismo que se adota como sendo o de colapso, deve ser maior ou igual à carga última  $F_u$ ".

Supõe-se uma estrutura sujeita a um conjunto de cargas definidas por  $\lambda F_i$  e adota-se um mecanismo com deslocamentos  $a_i$  na direção e sentido de  $\lambda F_i$  e rotações  $\theta_j$  nas posições j onde se tem rótulas plásticas com o momento de plastificação total  $M_{pj}$ .

Aplicando-se o princípio dos trabalhos virtuais, tem-se:

$$F \cdot \sum_i \lambda_i a_i = \sum_j M_{pj} \cdot \theta_j \quad (2.6.4)$$

Como  $M_{pj}$  e  $\theta_j$  têm sinais coerentes, o produto é sempre positivo. F também é sempre positivo.

Portanto,

$$\sum_i \lambda_i a_i > 0$$

Considerando a distribuição de momentos fletores no colapso, correspondente a  $F_u$  em equilíbrio e com  $M_j$  nas mesmas posições  $j$ , garante-se que,

$$|M_j| \leq |M_{pj}| \tag{2.6.5}$$

Aplicando-se o princípio dos trabalhos virtuais, resulta:

$$F_u \cdot \sum_i \lambda_i a_i = \sum_j M_j \theta_j \tag{2.6.6}$$

Das expressões (2.6.4) e (2.6.6) obtêm-se,

$$(F - F_u) \sum_i \lambda_i a_i = \sum_j (M_{pj} - M_j) \cdot \theta_j$$

Com a expressão (2.6.5) garante-se que  $(M_{pj} - M_j)$  tem o mesmo sinal de  $\theta_j$  e portanto,

$$\sum (M_{pj} - M_j) \cdot \theta_j \geq 0$$

Como  $\sum_i \lambda_i a_i > 0$ , tem-se que:

$$F - F_u \geq 0$$

Logo ,  $F \geq F_u$

Este resultado é importante, pois quando se encontram os valores de  $F$  correspondentes a todos os mecanis-

mos de colapso possíveis, a carga última  $F_u$  real, é o menor destes valores. Procedendo desta maneira, determina-se a carga última através de considerações puramente cinemáticas.

#### 2.6.4 - Teorema da unicidade

Os teoremas estático e cinemático podem ser combinados para formar o teorema da unicidade. Pelo teorema estático, sabe-se que para valores de  $F$  acima de  $F_u$  é impossível encontrar uma distribuição de momento fletor, que seja estaticamente admissível e obedeça as relações de equilíbrio. Entretanto pelo teorema cinemático é impossível encontrar um mecanismo no qual a carga correspondente é menor que  $F_u$ .

Enunciado;

"Se em uma dada estrutura com carregamento proporcional, pode-se encontrar uma distribuição de momentos fletores, que seja estaticamente admissível e obedeça as relações de equilíbrio, e nessa distribuição o momento fletor é igual ao momento de plastificação total em um número suficiente de seções para causar a ruína da estrutura por um mecanismo de colapso devido à rotação das rótulas plásticas nestas seções, então a carga correspondente é igual à carga última  $F_u$ ".

#### 2.7 - Métodos gerais de determinação da carga limite

##### 2.7.1 - Generalidades

Em uma estrutura complexa com alto grau de hiperestaticidade, é trabalhoso analisar todas as formas possíveis de colapso.

Necessita-se, portanto, de um procedimento que conduza sistematicamente à solução.

Dentre os vários métodos existentes, utiliza-se neste trabalho, apenas o método de combinação de mecanismos,

idealizado por Neal e Symonds, que conduz rapidamente ao resultado exato, porém requer certa habilidade do projetista e se baseia no teorema cinemático.

### 2.7.2 - Método de combinação de mecanismos

O método consiste em construir o mecanismo de colapso através de um certo número de mecanismos independentes. Começa-se por identificar todos estes mecanismos independentes e escrever a equação de trabalho para cada um deles.

Sabe-se pelo teorema cinemático que, de todos os mecanismos possíveis, o de colapso se distingue pelo maior valor do momento de plastificação  $M_p$ .

A técnica consiste em selecionar o mecanismo independente que proporciona o maior valor de  $M_p$  e combiná-lo com um ou vários mecanismos independentes para formar um mecanismo combinado que dê um valor maior de  $M_p$ . É importante começar pela combinação em que é possível o fechamento de rótulas plásticas. Analisam-se todas as combinações mais apropriadas até que se pense ter encontrado o mecanismo de colapso, ou pelo menos um mecanismo que se aproxime muito do mecanismo de colapso. Uma verificação estática é suficiente para ser aquele o maior valor de  $M_p$  possível.

## 2.8 - Tipos de colapso

### 2.8.1 - Colapso completo

É aquele em que o número de rótulas plásticas que se formam é igual ao grau de hiperestaticidade mais um, e a distribuição de momento fletor é definida, sendo possível de terminar as incógnitas hiperestáticas e o valor de  $F$ .

### 2.8.2 - Colapso redundante

É o colapso que ocorre simultaneamente com dois ou mais mecanismos. O mecanismo de colapso tem dois ou mais graus de liberdade.

### 2.8.3 - Colapso parcial

É o colapso no qual o número de rótulas plásticas que se formam é menor que o grau de hiperestaticidade mais um, e a distribuição de momentos fletores não é definida.

### 2.9 - Influência do esforço normal sobre o valor do momento de plastificação total

Além de causar instabilidade nos pilares, a presença da força normal de compressão tende a reduzir o momento de plastificação total. No entanto, pode-se modificar facilmente os procedimentos de cálculo para considerar esta influência, devido ao fato de que as características principais de uma rótula plástica continuam existindo na presença desta força, mesmo até quando se reduz a capacidade do momento de plastificação total.

O efeito não é muito importante no caso de força axial pequena, porque nos pilares de pórticos comuns, qualquer redução do momento fletor na rótula pode geralmente, ser desprezada. Entretanto, no caso de estruturas de vários pavimentos, o momento fletor resistente dos pilares de pavimentos inferiores é reduzido por influência da força normal e no cálculo da carga última deve-se considerar esta influência.

Uma determinada viga de material elastoplástico que tenha o diagrama tensão-deformação da Fig. 2.9.1 é submetida à flexão composta em seu único plano de simetria conforme Fig. 2.9.2.

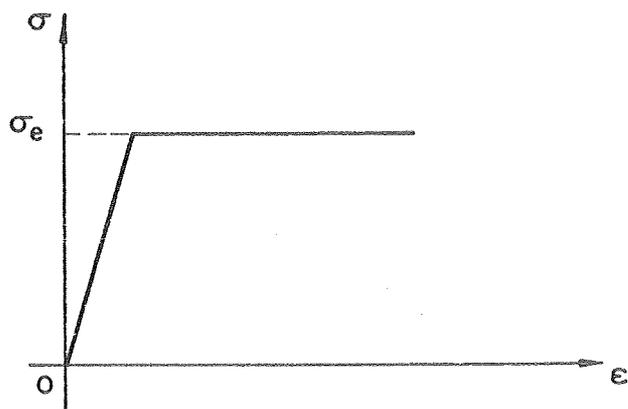


Fig. 2.9.1 - Diagrama tensão-deformação (material elasto-plástico)

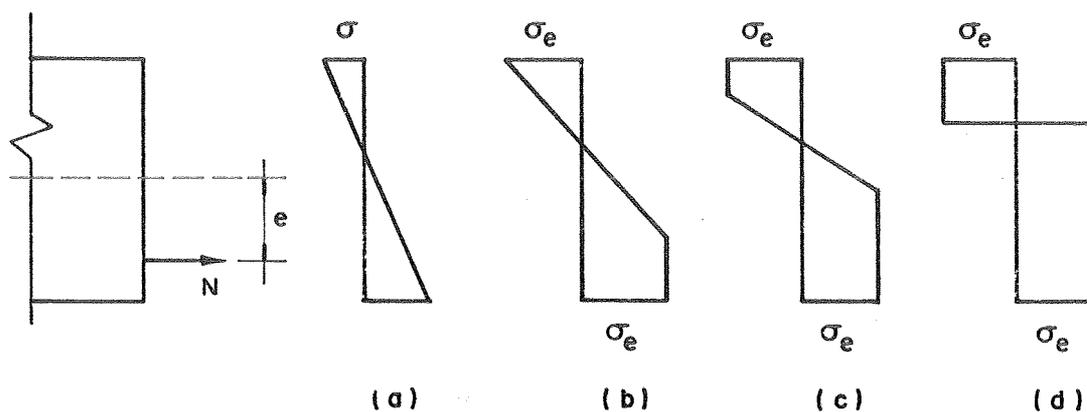


Fig. 2.9.2

Aumentando-se gradativamente o esforço de tração excêntrica  $N$ , a distribuição de tensões normais em uma determinada seção transversal, passa pelas três fases seguintes:

- 1) Distribuição elástica, Fig. 2.9.2(a).
- 2) Distribuição elasto-plástica com plastificação de um só lado, Fig. 2.9.2(b).
- 3) Distribuição elasto-plástica com plastificação nos dois lados, Fig. 2.9.2(c) e tende à última fase, que é a plástica, Fig. 2.9.2(d), em que o diagrama se compõe de dois retângulos desiguais.

Limita-se neste trabalho, discutir o efeito do esforço normal sobre o momento de plastificação total, restringindo a discussão para uma viga cuja seção transversal apresenta dois eixos de simetria.

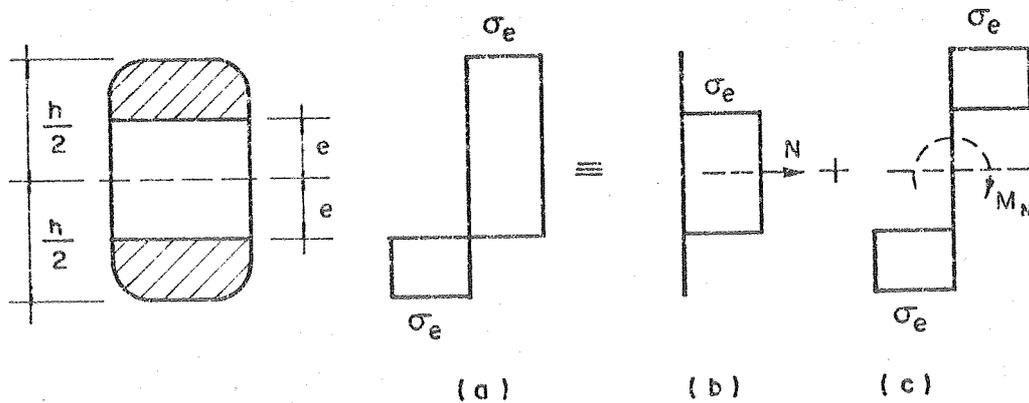


Fig. 2.9.3

Seja,

- $M_p$  - momento de plastificação total sem  $N$
- $M_N$  - momento de plastificação total com  $N$
- $N_p$  - esforço normal de plastificação sem  $M$
- $A_e$  - área da parte interna da seção que permanece em regime elástico.

Admitindo-se que a seção transversal esteja inteiramente plastificada, obtém-se a distribuição biretangular de tensões Fig. 2.9.2(a). A fibra de tensão nula está situada à distância "e" do eixo de simetria horizontal e constitui o eixo de igual área.

Para calcular o esforço normal e o momento fletor, convém decompor o diagrama em duas partes, Fig. 2.9.3(b) e (c), das quais uma se estende a ambos os lados do eixo de simetria horizontal de uma altura  $2e$ , equilibrando o esforço normal e a outra tem resultante nula que equi

libra o momento fletor  $M$ . Esta decomposição demonstra que o momento de plastificação total  $M_p$  se reduz de uma quantidade representada pelo momento de início de plastificação  $M_e$  da parte interna da viga que permanece em regime elástico, de altura  $2e$ .

Tem-se que,

$$N = A_e \cdot \sigma_e$$

$$N_p = A \cdot \sigma_e$$

$$M_N = (Z - W_e) \cdot \sigma_e$$

$$M_p = Z \cdot \sigma_e$$

sendo

$$n = \frac{N}{N_p} = \frac{A_e}{A}$$

determina-se o valor de "e".

$$\frac{M_N}{M_p} = 1 - \frac{W_e}{Z}$$

### 3. ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS DE CONCRETO COM- POSTAS POR ELEMENTOS LINEARES

#### 3.1 - Generalidades

Quando uma estrutura deixa de atender a qualquer uma das finalidades para as quais foi construída, pode-se dizer que nesta estrutura apareceu um estado limite.

Os estados limites últimos surgem quando ocorre o esgotamento da capacidade resistente de parte ou de toda a estrutura, e os estados limites de utilização surgem quando as exigências de conforto e durabilidade da estrutura, não são atendidas.

As principais causas que podem levar uma estrutura de concreto a um estado limite são as seguintes:

- a) Dos estados limites últimos
  - a1) Perda de estabilidade de uma parte ou do conjunto da estrutura assimilada a um corpo rígido.
  - a2) Ruptura de seções críticas da estrutura
  - a3) Transformação da estrutura em um mecanismo, isto é, ruptura após a plastificação
  - a4) Instabilidade por deformação (flambagem)
  - a5) Deterioração por efeito de fadiga
  - a6) Deformações elásticas ou plásticas, deformação lenta e fissuração, que provoquem uma mudança de geometria que exija uma substituição da estrutura.

- b) Dos estados limites de utilização
- b1) Deformações excessivas para uma utilização normal da estrutura
  - b2) Fissuração prematura ou excessiva
  - b3) Danos indesejáveis (corrosão)
  - b4) Deslocamentos excessivos sem perda do equilíbrio
  - b5) Vibrações excessivas

Nas estruturas estaticamente determinadas, o esgotamento da capacidade resistente ocorre quando em uma seção qualquer da estrutura se tem a ruptura do concreto comprimido ou deformação excessiva da armadura tracionada.

No caso de estruturas estaticamente indeterminadas, quando se excede a capacidade resistente em uma determinada região, os momentos fletores se redistribuem para as regiões vizinhas que ainda oferecem resistência. Desta maneira, existem nestas estruturas, reservas de capacidade resistente, que são utilizadas quando se formam rótulas plásticas nas seções críticas.

O diagrama de momentos fletores é alterado toda vez que se forma uma rótula plástica, e após várias adaptações é possível se obter a carga última.

Em uma estrutura  $n$  vezes estaticamente indeterminada, somente é possível uma adaptação completa, quando o colapso ocorre com a formação de  $(n+1)$  rótulas plásticas. Para que isto ocorra, é necessário que todas as rótulas plásticas que se formam anteriormente tenham capacidade de rotação suficiente, pois caso contrário, não se obtém uma adaptação completa, e a carga última é menor do que a correspondente ao mecanismo de colapso final.

Quando se aplica o cálculo plástico em estruturas de concreto armado, é necessário verificar a segurança quanto ao colapso, fissuração, flechas, e também a capacidade de rotação das rótulas plásticas.

Na verificação da segurança quanto ao colapso da estrutura, as cargas de serviço multiplicadas pelos coeficientes de segurança não devem ultrapassar as cargas últimas. Quanto à fissuração, as cargas de serviço não devem provocar fissuras com aberturas excessivas, isto é, aberturas superiores às máximas admissíveis. As flechas não podem comprometer a estética da estrutura e devem respeitar os limites máximos admissíveis.

Deve-se garantir que nenhuma rótula plástica exceda o limite de sua capacidade de rotação, antes de se formar as  $n$  rótulas plásticas que precedem o colapso da estrutura. Esta verificação é importante, pois em estruturas de concreto armado, a capacidade de rotação das rótulas plásticas não é grande, e isto favorece a ocorrência de um colapso prematuro da estrutura.

A possibilidade de se alterar, tanto as taxas de armadura, quanto a sua distribuição, favorece a aplicação do cálculo plástico em estruturas estaticamente indeterminadas de concreto armado.

### 3.2 - Diagrama tensão-deformação do concreto

Para qualquer tipo de concreto, o diagrama tensão-deformação não segue a lei de Hooke, sendo sempre curvo praticamente desde a origem 0, conforme Fig. 3.2.1.

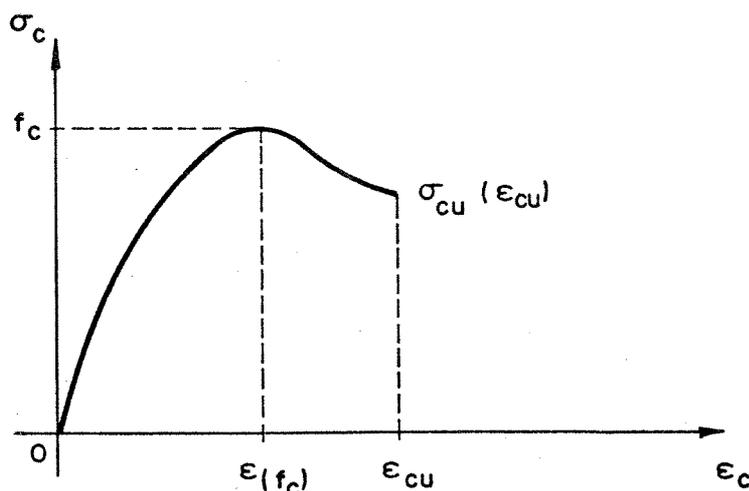


Fig. 3.2.1 - Diagrama tensão-deformação à compressão do concreto.

Muitos parâmetros influem nesta forma curva do diagrama, e os principais são: a resistência do concreto, idade do concreto na época do carregamento, geometria da seção transversal, modo de se carregar, duração do carregamento e posição da linha neutra.

São muitos os tipos de concreto, portanto existe uma certa flutuação nas suas propriedades e particularmente nos seus diagramas tensão-deformação.

Neste sentido, foram realizados muitos ensaios com resistências à compressão do concreto diferentes, cargas de curta duração, velocidade constante de deformação, e concluiu-se que para as resistências dos concretos mais usuais, a tensão máxima ocorre com uma deformação da ordem de 2%, atingindo-se a ruptura com uma deformação em média igual a 3,5%.

A NB-1/78 utiliza o diagrama tensão-deformação à compressão do concreto da Fig. 3.2.2.

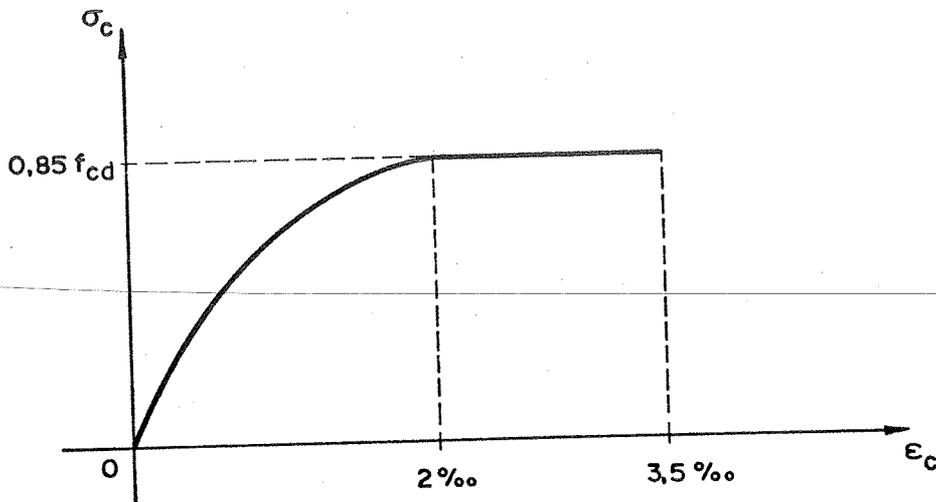


Fig. 3.2.2 - Diagrama tensão-deformação à compressão do concreto

Este diagrama simplificado apresenta um trecho inicial parábólico, da origem até a deformação de 2%, com tensão máxima de  $0,85 f_{cd}$ . A tensão neste intervalo é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma_c = 0,85f_{cd} \left[ 1 - \left( \frac{\epsilon_c}{0,002} \right)^2 \right]$$

O trecho final do diagrama é uma reta entre as deformações 2% e 3,5%, tangente à parábola e paralela ao eixo das abcissas.

Para o cálculo da tensão de tração do concreto, na falta de determinação experimental, a NB-1/78 adota as relações:

$$f_{tk} = \frac{f_{ck}}{10} \quad \text{para } f_{ck} \leq 18\text{MPa}$$

e

$$f_{tk} = 0,06f_{ck} + 0,7 \quad \text{para } f_{ck} > 18\text{MPa}$$

Quando uma peça de concreto é solicitada por uma força normal de compressão ocorre um encurtamento na direção desta força. Para carregamentos repetitivos tem-se o diagrama tensão-deformação à compressão da Fig. 3.2.3.

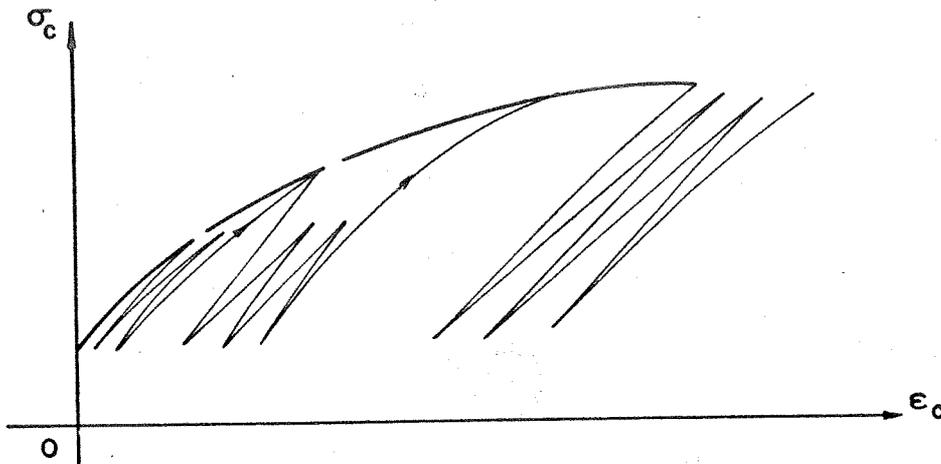


Fig. 3.2.3 - Diagrama tensão-deformação à compressão.

Após o primeiro carregamento, observa-se que as deformações são praticamente proporcionais às tensões para

valores não atingidos no primeiro carregamento. Para tensões com valores que se atingem pela primeira vez, as deformações crescem mais rapidamente que as tensões, e depois da descarga nota-se uma deformação residual significativa. Nas repetições de carga e nas descargas subsequentes, o aumento da deformação residual vai-se tornando cada vez menor, passando a predominar a deformação elástica. Estas considerações se referem às deformações que ocorrem no instante da aplicação das cargas.

Para carregamentos que atuam por algum tempo sobre a peça, ocorre a deformação lenta, que é explicada de maneira geral por Freyssinet, partindo-se do fato de que o concreto não é um corpo sólido perfeito, mas sim um pseudo-sólido, como são chamados os corpos que, embora tendo a aparência exterior dos sólidos, possuem uma rede de poros muito finos contendo água ou ar. Estes poros possuem propriedades de deformação diferentes das dos sólidos, por causa da existência de tensões capilares da água no interior dos poros.

Em peças de concreto carregadas com esforços de compressão, estes esforços fazem diminuir o tamanho dos poros do concreto. A água dentro deles não pode escoar-se rapidamente, por isso vai encher os poros de maior dimensão, que estavam vazios, aumentando a umidade relativa do concreto e em consequência tem-se tensões capilares menores. Ocorre então a deformação imediata.

Com o tempo, evapora-se a água em excesso e as tensões capilares tornam a aumentar, originando esforços equivalentes a uma pressão aplicada de fora para dentro, sobre o esqueleto sólido de concreto, dando origem à deformação lenta, que cresce mais rapidamente no início e diminui com o tempo, de modo a tender assintoticamente para um limite de duas a três vezes maior do que a deformação imediata, dependendo da idade do concreto na data de aplicação da carga.

### 3.3 - A teoria elastoplástica

Com a hipótese simplificada de um corpo elasto-plástico perfeito, admite-se a relação tensão-deformação bilinear, que é suficiente para o comportamento de materiais dúcteis, Fig. 3.3.1.

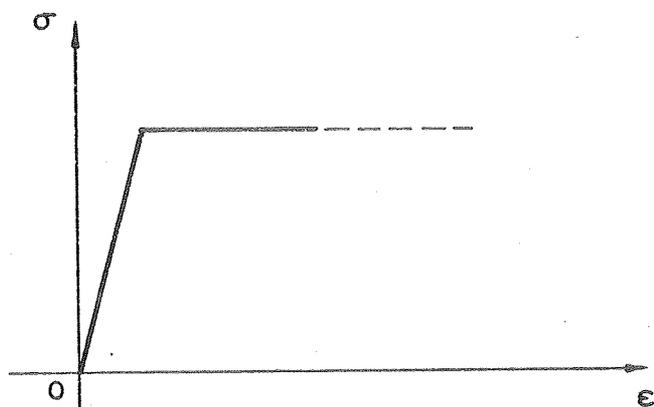


Fig. 3.3.1 - Diagrama tensão-deformação bilinear

Considera-se a reta horizontal sem limite e admite-se a deformação sob tensão máxima suficientemente grande para excluir a possibilidade de se atingir a deformação limite numa fibra ou elemento, antes de uma completa redistribuição de momentos fletores na estrutura.

Na flexão pura, estas hipóteses conduzem a um diagrama momento fletor-curvatura idêntico ao diagrama tensão-deformação, exceto na parte curva entre as retas, Fig. 3.3.2.

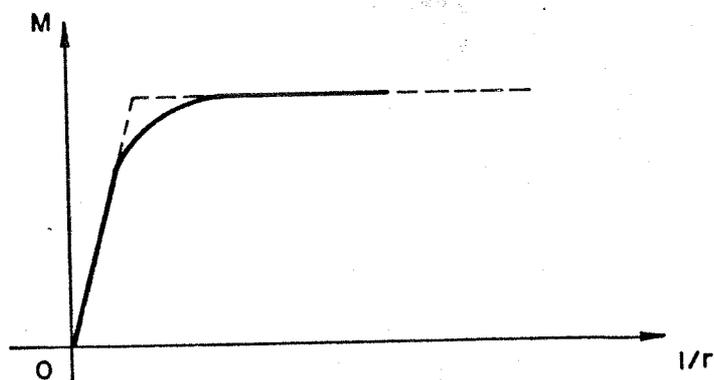


Fig. 3.3.2 - Diagrama momento fletor-curvatura bilinear

Ao se aplicar estas hipóteses em uma estrutura  $n$  vezes estaticamente indeterminada, a falta de uma curvatura limite permite a formação sucessiva de  $(n+1)$  rótulas plásticas, seguido pelo colapso da estrutura como um mecanismo.

Nas estruturas simples, geralmente se conhece a posição das rótulas plásticas e a análise se reduz a um problema estaticamente determinado. Em casos mais complexos, conforme os teoremas demonstrados por Greenberg e Prager é possível encontrar a configuração crítica, que é aquela de carga limite mínima entre todas as configurações cinematicamente possíveis ou de carga limite máxima entre as configurações estaticamente possíveis. Da mesma forma, os métodos propostos por Heyman, Symonds e Neal, permitem resolver casos relativamente complexos.

Para aplicar a teoria elastoplástica em estruturas de materiais dúcteis, admitem-se as seguintes hipóteses:

- a) Comportamento elástico entre as rótulas
- b) Diagrama tensão-deformação do material com um extenso limite horizontal.

Obs.: Em serviço, apresenta menos problema quando comparado com o concreto estrutural. Somente limites de deformação e nenhum limite de fissuração.

Existem algumas dificuldades na aplicação prática desta teoria em estruturas de materiais dúcteis. O comportamento real é um tanto diferente da teoria na presença de tensões residuais em seções laminadas. Observa-se algumas vezes que não se alcança a carga limite devido a deformações excessivas local ou total. Podem ocorrer problemas anteriores por flambagem local ou total e por fragilidade de costuras soldadas.

As dificuldades são ainda maiores quando se aplica a teoria elastoplástica ao concreto estrutural. Durante os anos de 1952 a 1956, pesquisadores de muitos países se

esforçaram na pesquisa experimental para estudarem a validade desta teoria aplicada em estruturas estaticamente indeterminadas.

Os resultados foram surpreendentes pois, de um lado os testes feitos por Guyon e por Morice e Lewis provaram a validade de conclusões elastoplásticas dentro de uma ampla região de variações da distribuição de resistência ao longo das estruturas, por outro lado os testes de Magnel, Lin, Tichy e outros mostraram ao contrário, que a capacidade limitada das deformações de estruturas de concreto pode conduzir à ruptura antes de se formar um mecanismo.

Uma análise teórica permite concluir que no primeiro grupo de testes, as condições foram particularmente favoráveis a uma completa redistribuição de momentos fletores nas estruturas e no segundo grupo de testes, as condições foram sistematicamente menos favoráveis. Deve-se este fato à tendência natural dos pesquisadores testarem estruturas muito simples: vigas contínuas de dois ou três tramos. (Macchi, 1973)

Uma análise teórica posterior juntamente com os primeiros testes sistemáticos sobre rotações limites de elementos lineares submetidos à flexão e carga axial mostraram que mesmo em condições mais favoráveis, ocorre na prática, a falta de uma completa redistribuição de momentos fletores quando existem elementos muito deformáveis e elementos frágeis em uma mesma estrutura.

### 3.4 - Método das rotações impostas

#### 3.4.1 - Considerações gerais

Em estruturas estaticamente indeterminadas de concreto armado, quando solicitadas por um dado carregamento, ocorrem redistribuições de momentos fletores, contribuindo assim, para que a abertura das fissuras permaneça com valores que não excedam os limites admissíveis.

Desta forma, é possível analisar qualquer configuração inelástica, de uma dada estrutura, através de uma generalização dos métodos elásticos usuais, (em particular, a configuração última e as outras configurações limites).

Com a equação de Müller-Breslau, pode-se impor ao mesmo tempo, o equilíbrio e a compatibilidade da deformação total, e escrever para cada rótula plástica  $i$  introduzida na estrutura para torná-la estaticamente determinada, a seguinte expressão:

$$\int \frac{M_i M}{EI} dx + X_i \int \frac{M_i M_i}{EI} dx + \sum X_k \int \frac{M_i M_k}{EI} dx + M_i \theta_i + \sum M_i \psi_n = 0 \quad (3.4.1)$$

onde:

- $X_i$  - momento fletor incôgnito que atua na rótula plástica  $i$ .
- $X_k$  - momentos fletores que atuam nas outras rótulas plásticas.
- $M_i$  - momentos fletores devidos a  $X_i = 1$  atuando na rótula plástica  $i$ .
- $M_k$  - momentos fletores devidos a  $X_k = 1$  atuando na rótula plástica  $k$ .
- $M$  - momentos fletores elásticos devidos ao carregamento externo.
- $\theta_i$  - rotação inelástica considerada só na  $i$ -ésima rótula plástica.
- $\psi_n$  - rotações inelásticas que se produzem entre as rótulas plásticas introduzidas.
- $EI$  - rigidez à flexão do trecho não fissurado.
- $n$  - número de rótulas plásticas introduzidas para tornar a estrutura estaticamente determinada.

O princípio do método das rotações impostas consiste em determinar a configuração real em regime inelás-

tico, da mesma forma como é definido teoricamente pela expressão (3.4.1), sem perder a sua generalidade. Admitem-se as rotações inelásticas como rotações impostas nas seções críticas da estrutura ainda elástica. É possível subdividir a expressão (3.4.1) em duas outras, da seguinte forma:

a) Efeito do carregamento externo

$$\int \frac{M_i M_i}{EI} dx + X_i \int \frac{M_i M_i}{EI} dx + \sum X_k \int \frac{M_i M_k}{EI} dx = 0$$

b) Efeito de uma rotação inelástica unitária

$$X_i \int \frac{M_i M_i}{EI} dx + \sum X_k \int \frac{M_i M_k}{EI} dx + 1 = 0$$

Estas duas expressões podem ser resolvidas utilizando-se as tabelas existentes para o cálculo elástico de estruturas estaticamente indeterminadas.

O objetivo do método das rotações impostas, é a verificação de uma dada estrutura estaticamente indeterminada, no estado limite último, de fissuração e deformação.

O dimensionamento é feito, geralmente, através de cálculos aproximados. Para estruturas com nós deslocáveis, impõe-se a utilização de um cálculo mais rigoroso, pois as simplificações podem conduzir a erros muito grosseiros. Em estruturas comuns de edifícios, por exemplo, pode-se adotar a simplificação que consiste em calcular cada pavimento isoladamente, supondo as bases dos pilares inferiores e os topos dos pilares superiores engastados. O calculista deve sempre avaliar os erros provenientes das aproximações.

Na prática, o método das rotações impostas é aplicado a estruturas com baixo grau de hiperestaticidade.

No entanto, pode-se aplicar também a estruturas mais complexas, precisando para isto, subdividi-las em partes simples e independentes. Dentro do que se propõe, admite-se que as ações tangenciais e os efeitos de flambagem não modificam sensivelmente a configuração de colapso.

A primeira fase do método consiste em construir os diagramas de momentos fletores, devido ao efeito elástico do carregamento externo. Na segunda fase, considera-se o efeito elástico das rotações inelásticas unitárias impostas a cada uma das seções onde se admitem a formação de rótulas plásticas, e constroem-se os diagramas de momentos fletores para toda a estrutura. A terceira fase consiste no cálculo inelástico real, onde se faz a superposição dos diagramas de momentos fletores, devido ao carregamento externo e devido às rotações impostas, considerando em cada caso, um coeficiente de majoração, respeitando-se os diagramas reais de momento fletor-rotação.

Neste trabalho, aplica-se o método das rotações impostas em vigas contínuas de concreto armado, verificando-se apenas o estado limite último.

### 3.4.2 - Seções críticas

Consideram-se como seções críticas, as seções mais solicitadas de cada região submetida a um momento fletor de mesmo sinal. Admite-se que, em regime inelástico, concentram-se nestas seções uma parcela significativa da rotação inelástica.

O número de seções críticas é, em geral, diferente do número de rótulas plásticas necessárias para conduzir uma estrutura estaticamente indeterminada em estrutura estaticamente determinada.

Para uma mesma estrutura, o número de seções críticas pode variar conforme a condição de carregamento. No caso da viga contínua de dois tramos, da Fig. 3.4.1, exis-

tem três seções críticas (D,B,E), quando se considera a sobre carga em toda sua extensão, e duas seções críticas (B,E'), quando se considera a sobrecarga em apenas um tra-  
mo.

As posições das seções críticas D e E podem ser determinadas de forma aproximada, admitindo-se o carregamento total e uma adaptação completa.

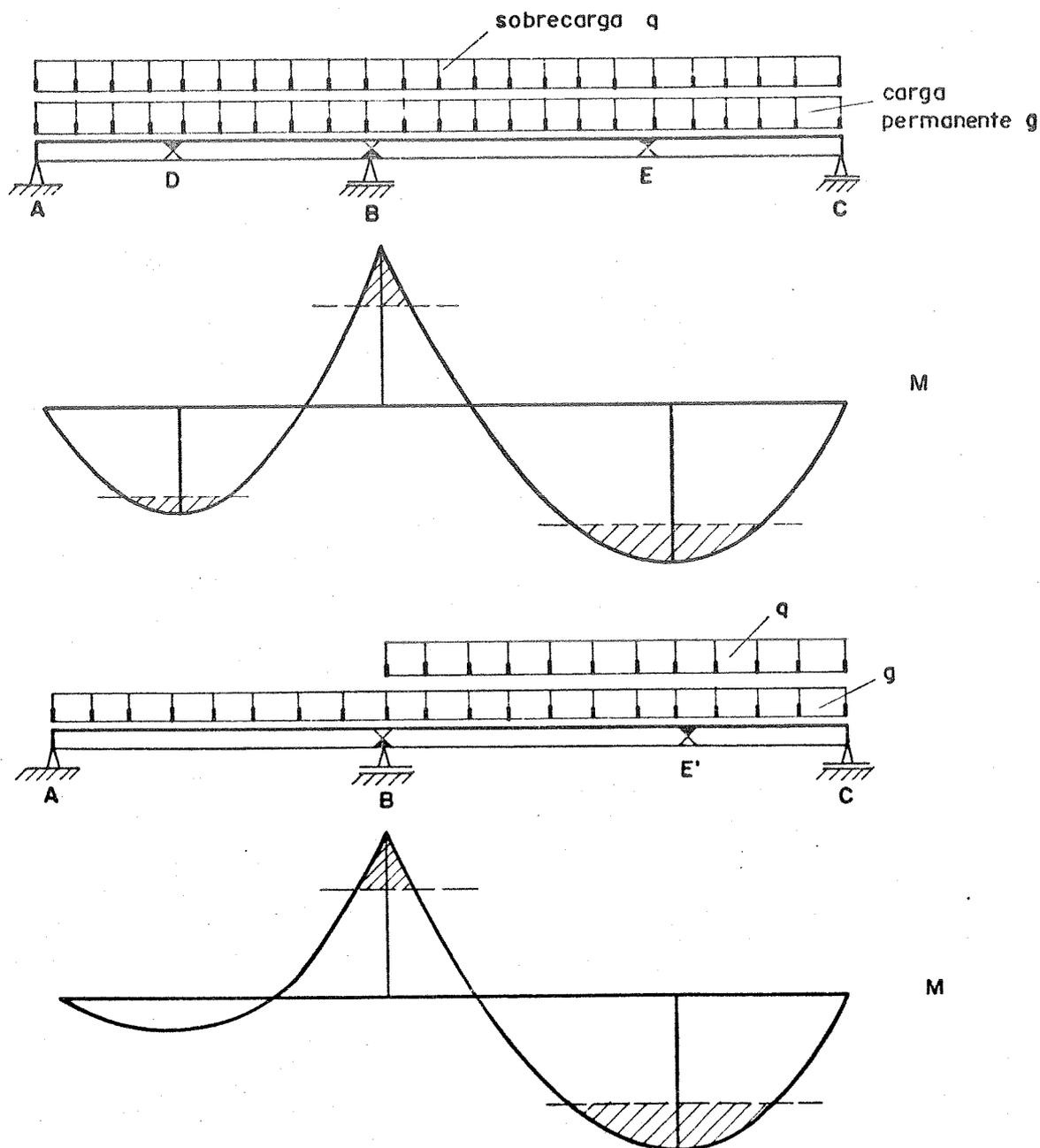


Fig. 3.4.1

A diferença de posições das seções críticas  $E$  e  $E'$ , não influi de forma significativa no cálculo das armaduras. Porém, é necessário considerar a posição correta da seção crítica, quando se faz a disposição das armaduras.

Em uma estrutura  $n$  vezes estaticamente indeterminada, escolhem-se  $n$  seções de momentos fletores máximos onde se formarão as  $n$  primeiras rótulas plásticas que precedem o colapso da estrutura. Nestas seções são feitas as reduções dos momentos fletores, e deve-se atingir o momento de plastificação total antes das demais seções de momentos fletores máximos. No caso de uma viga contínua, essas  $n$  seções são, normalmente, as seções dos apoios intermediários, onde os momentos fletores negativos são reduzidos, baixando as "linhas de fechamento", e aumentando os momentos fletores positivos.

#### 3.4.3 - Cálculo do efeito elástico do carregamento externo

Para cada configuração de cargas prevista é feito um diagrama de momentos fletores, Fig. 3.4.2.

Qualquer método de cálculo pode ser utilizado. Nas estruturas simples, estes diagramas são obtidos manualmente. Os momentos fletores de engastamento perfeito de algumas estruturas com os carregamentos mais comuns estão no anexo I.

#### 3.4.4 - Cálculo do efeito das rotações unitárias

Em cada seção crítica é feito um corte, aplicando-se uma rotação relativa unitária imposta, nas faces do corte.

Desta forma, para cada seção crítica obtém-se um diagrama de momentos fletores em regime elástico, onde se permite utilizar qualquer método de cálculo, Fig. 3.4.3.

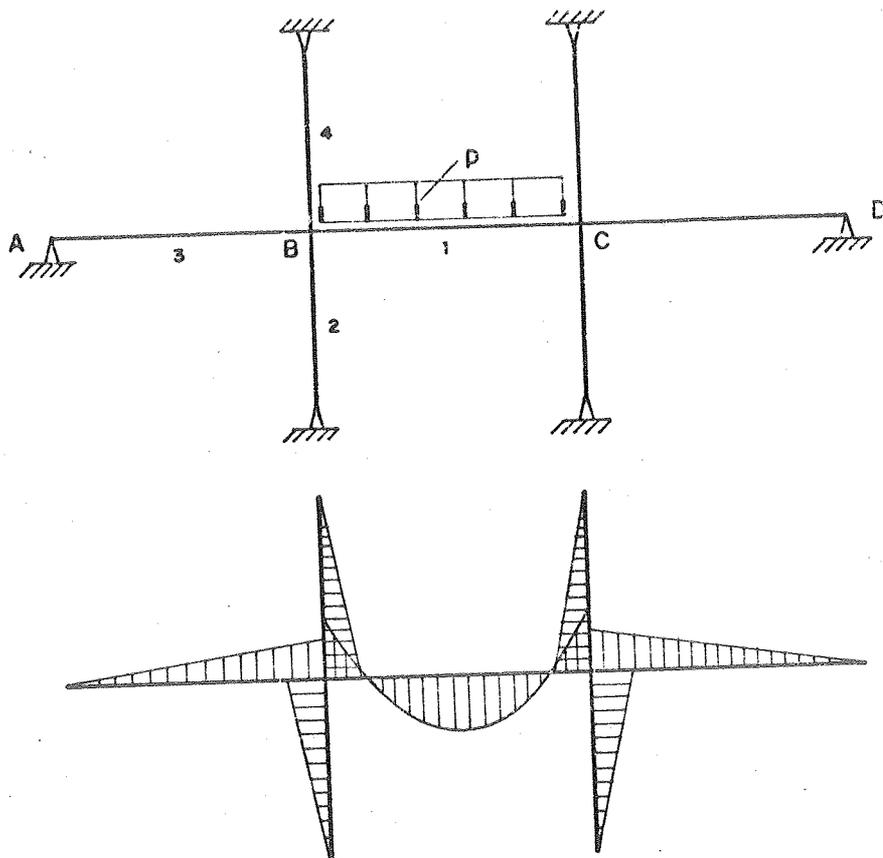


Fig. 3.4.2 - Primeira fase do método das rotações impostas

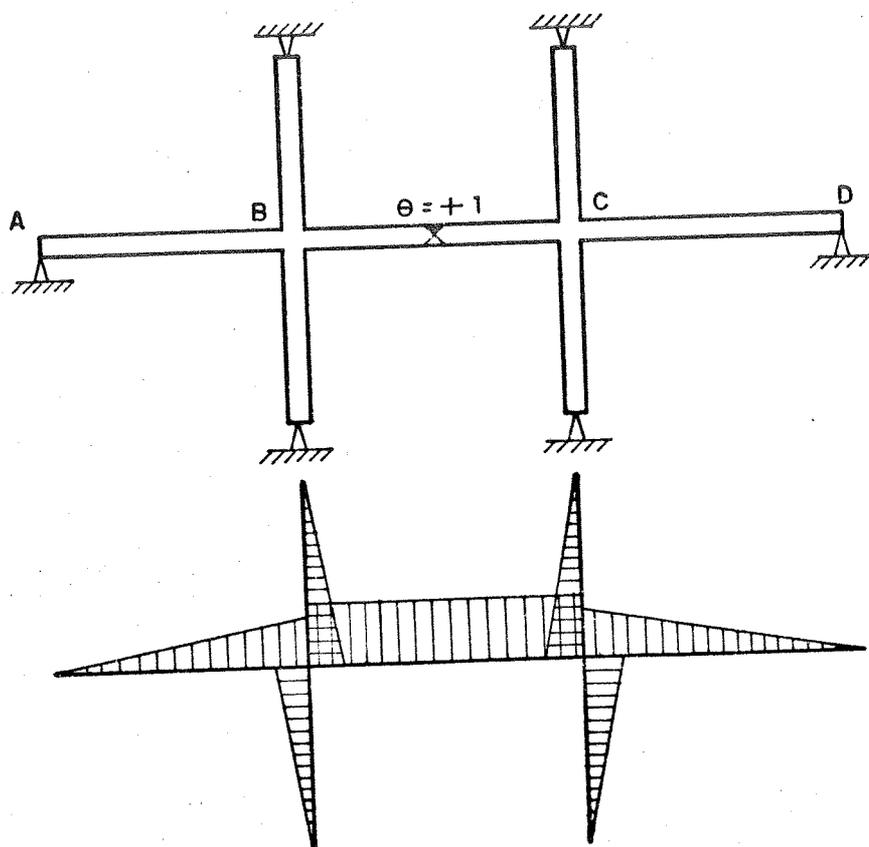


Fig. 3.4.3 - Segunda fase do método das rotações impostas

No anexo II, encontram-se os diagramas de momentos fletores devido às rotações impostas para diversos tipos de estruturas.

### 3.4.5 - Cálculo dos momentos resistentes últimos das seções críticas

Em uma estrutura  $n$  vezes estaticamente indeterminada, obtêm-se as armaduras das seções críticas através de um cálculo prévio. Adota-se arbitrariamente a porcentagem de redução dos momentos fletores máximos das  $n$  seções onde se admitem as  $n$  rótulas plásticas que tornam a estrutura estaticamente determinada.

Utilizam-se as resistências de cálculo do concreto e aço, sendo:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad e \quad f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

A determinação do momento resistente último, para cada seção crítica, é feita segundo o cálculo do estado limite último.

### 3.4.6 - Diagramas momento fletor-curvatura e momento fletor-rotação

Seja uma viga biapoiada, solicitada por um carregamento  $F$ , no meio do vão, conforme Fig. 3.4.4

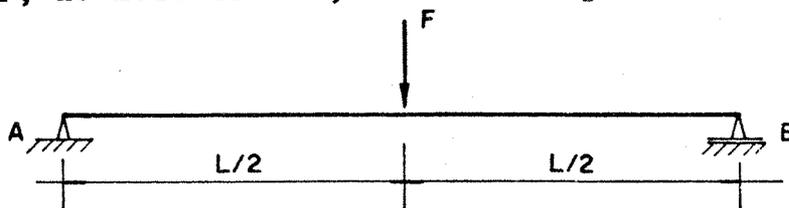


Fig. 3.4.4

Para um determinado valor do carregamento  $F$ , é possível obter nesta viga, os estados de tensões e deformações indicados na Fig. 3.4.5.

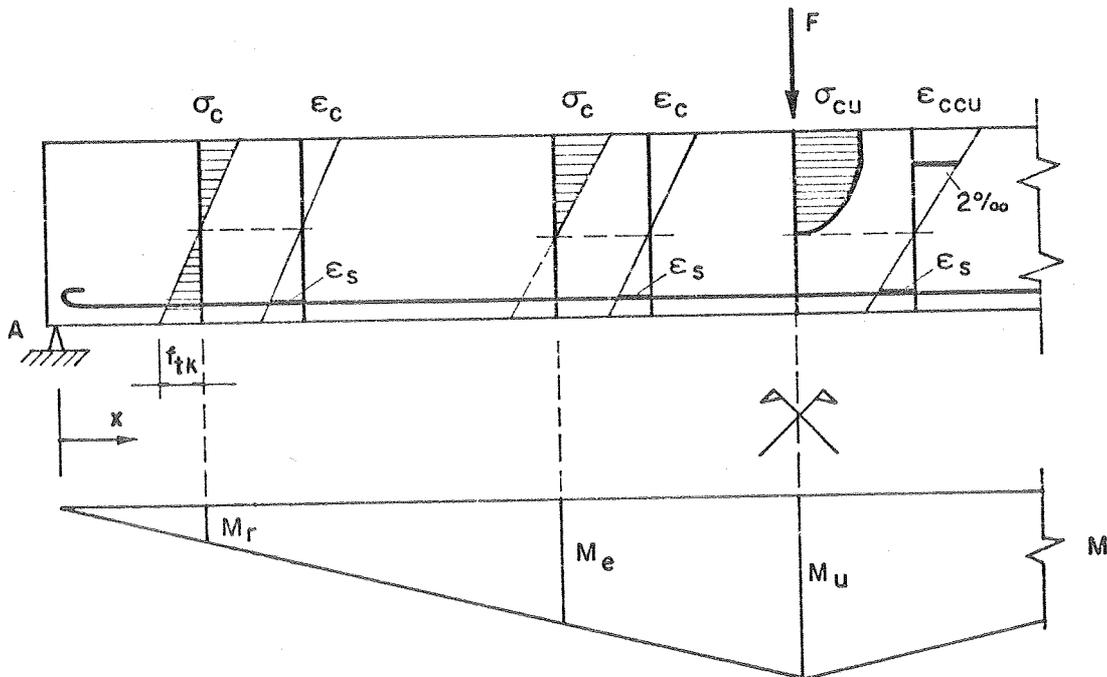


Fig. 3.4.5

Com o momento fletor  $M_r$  tem início a fissuração, com o momento fletor  $M_e$  começa a plastificação, e com o momento fletor  $M_u$ , chega-se ao máximo momento fletor que a seção pode resistir.

Para momentos fletores menores que o momento fletor de fissuração, tem-se a integridade da zona tracionada da peça. Com a hipótese de um comportamento elástico linear, calculam-se os efeitos estruturais através das teorias usuais da resistência dos materiais, considerando a influência da resistência à tração do concreto. No trecho de momentos fletores entre  $M_r$  e  $M_e$ , esta influência é desprezada. Para o trecho de momentos fletores entre  $M_e$  e  $M_u$ , admite-se o diagrama triangular de tensões até que ocorra a plastificação das fibras extremas da seção transversal, e posteriormente, se estenda para as fibras internas, até à ruptura.

No cálculo de estruturas de concreto, em regime elastoplástico, é fundamental o conhecimento dos diagramas, momento fletor-curvatura e momento fletor-rotação, dos elementos solicitados à flexão. Existem algumas idealizações destas curvas, além da possibilidade de se obtê-las experimentalmente.

a) Diagrama momento fletor-curvatura

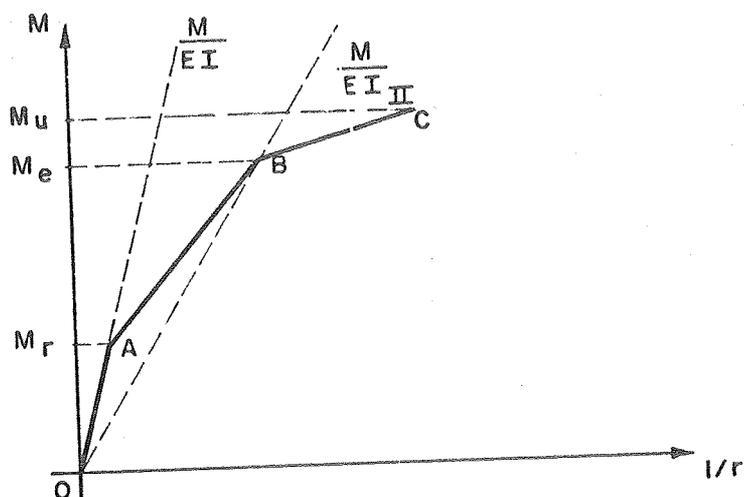


Fig. 3.4.6 - Diagrama momento fletor-curvatura bilinear

Inicialmente, as deformações são elásticas e a curvatura em qualquer seção se relaciona com o momento fletor, através da conhecida expressão da resistência dos materiais,

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E_c \cdot I}$$

onde  $I$  é o momento de inércia da seção de concreto não fissurado.

Neste trecho, admite-se constante a rigidez à flexão  $E_c I$ . O ponto A, corresponde ao início da fissuração e sua ordenada, no caso de flexão simples, vale:

$$M_r = \frac{f_{tk} \cdot I}{y}$$

onde se considera a influência da resistência à tração do concreto.

No trecho AB, considera-se apenas uma parte da seção, devido à fissuração. A plastificação começa no ponto B, quando a deformação na armadura corresponde à do escoamento, ou a deformação no concreto comprimido atinge 2‰.

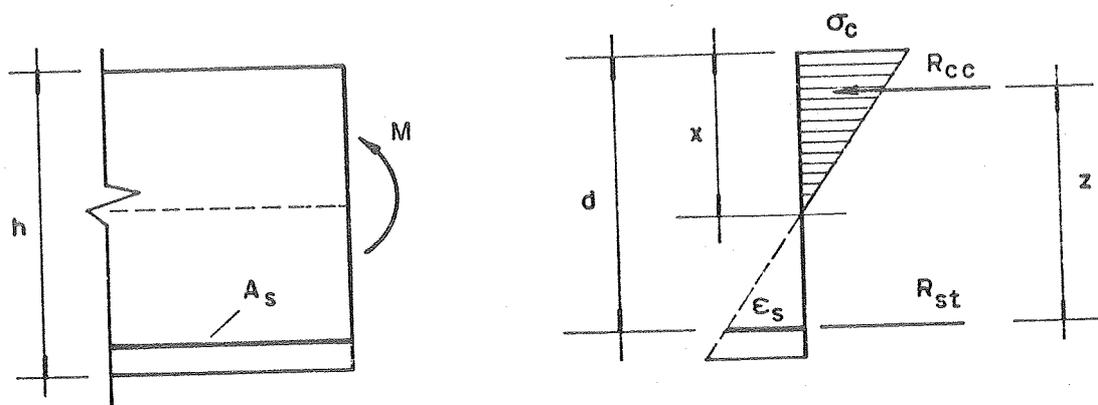


Fig. 3.4.7 - Tensões na fase fissurada

$$R_{st} = A_s \cdot \sigma_{st} = A_s \cdot E_s \cdot \epsilon_s$$

$$M = R_{st} \cdot z = A_s \cdot E_s \cdot \epsilon_s \cdot z$$

Como,

$$\frac{1}{r} = \frac{\epsilon_s}{y} \quad \text{e} \quad y = d - x$$

tem-se que:

$$\epsilon_s = \frac{(d-x)}{r}$$

Portanto,

$$M = A_s \cdot E_s \frac{(d-x)}{r} \cdot z$$

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E_s \cdot A_s \cdot (d-x) \cdot z}$$

Pode-se determinar, de forma aproximada, a variação de curvatura, da seguinte maneira:

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{dM}{E_s \cdot A_s \cdot z \cdot (d-x)}$$

Nesta expressão não se leva em conta o efeito do concreto tracionado entre as fissuras.

No caso de flexão simples, a curvatura inelástica pode ser determinada pela seguinte expressão:

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta M}{E_s \cdot I_{II}} - \frac{\Delta M}{E_c \cdot I}$$

onde,

$$\Delta M = M - M_r$$

$$I_{II} = A_s \cdot z \cdot (d-x)$$

Através do cálculo usual do concreto armado, a ordenada do ponto B, é determinada por:

$$M_e = A_s \cdot f_{yd} \cdot z \quad (\text{desde que } \sigma_{sd} \text{ possa chegar a } f_{yd} ).$$

É importante observar que neste trecho ocorre praticamente, um comportamento inelástico, devido à mudança

que a fissuração provoca na distribuição de tensões (da seção) e na distribuição de momentos fletores (ao longo da estrutura), embora não se tenha nem a armadura e nem o concreto no regime plástico.

b) Diagrama momento fletor-rotação

Calcula-se o diagrama momento fletor-rotação trilinear, conforme Fig. 3.4.8.

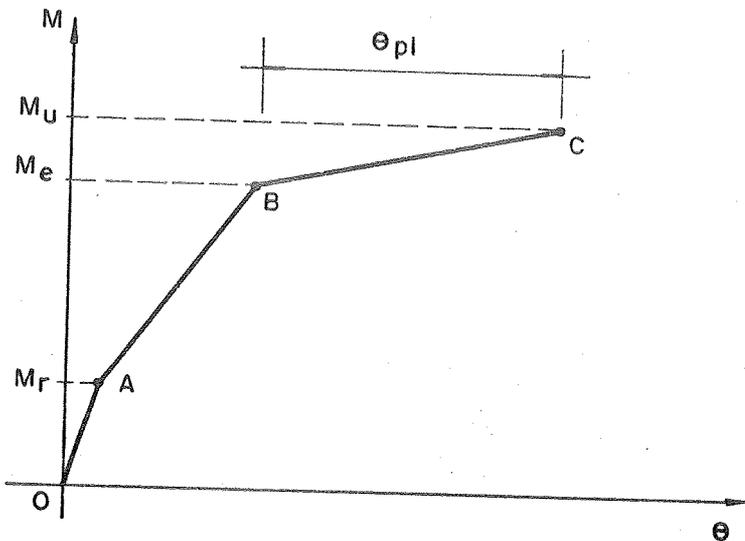


Fig. 3.4.8 - Diagrama momento fletor-rotação

Nos trechos OA e AB, pode-se obter a rotação relativa de duas seções de abscissas  $x_1$  e  $x_2$ , através do diagrama momento fletor-curvatura, da seguinte forma:

$$\theta = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{r} \cdot dx \quad (x = \text{abscissa ao longo da barra}).$$

No trecho BC, tem-se um comportamento plástico da armadura e do concreto, ou de apenas um deles, onde a deformação na armadura atinge 10%, ou a deformação no concreto comprimido chega a 3,5%. A reta BC é obtida, definindo-se o ponto C, cuja ordenada é o momento resistente último e na

abscissa acrescenta-se a rotação plástica  $\theta_{pl}$  à rotação do ponto B. Conforme a Fig. 3.4.9, pode-se obter a rotação plástica  $\theta_{pl}$  em função de  $\xi = \frac{x}{d}$ .

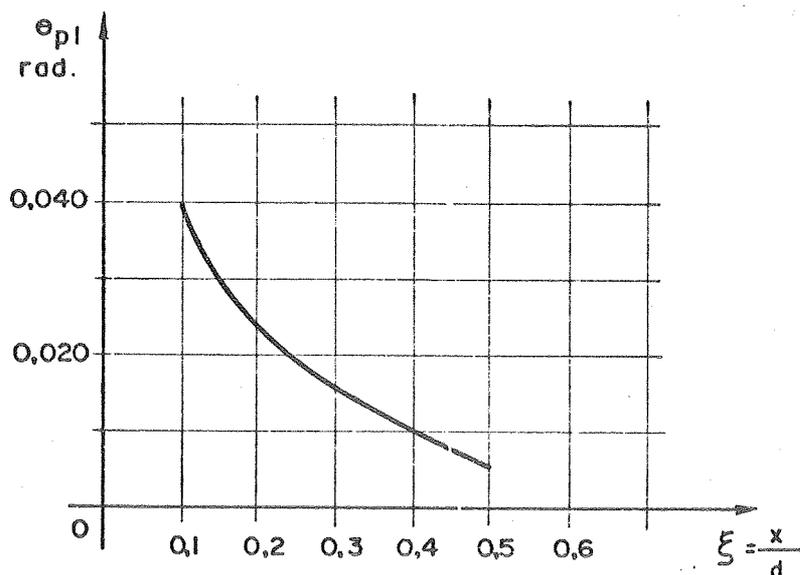


Fig. 3.4.9 - Rotação plástica

Este gráfico foi obtido de resultados experimentais, admitindo-se as rotações plásticas concentradas nas seções críticas e desprezando-se o efeito favorável das armaduras transversais. Foi proposto pela XI Comissão do CEB e introduzido no Código Modelo para estruturas de concreto.

O Prof. Giorgio Macchi, admite o diagrama momento fletor-rotação inelástica, da Fig. 3.4.10.

Tem-se neste diagrama, duas curvas:  $OABC_s$  e  $OABC_i$ . Com o limite inferior  $\theta_{min.}$ , obtêm-se a reta superior  $BC_s$  e com o limite superior  $\theta_{max.}$ , obtêm-se a reta inferior  $BC_i$ .

Conforme a Fig. 3.4.10, a abscissa do ponto A é nula, pois no trecho OA, ainda não existe rotação inelástica.

Para cada seção crítica considerada, a abscissa do ponto B da Fig. 3.4.10, pode ser determinada, integrando-se a curvatura correspondente, no trecho da viga onde o momento fletor de fissuração é ultrapassado.

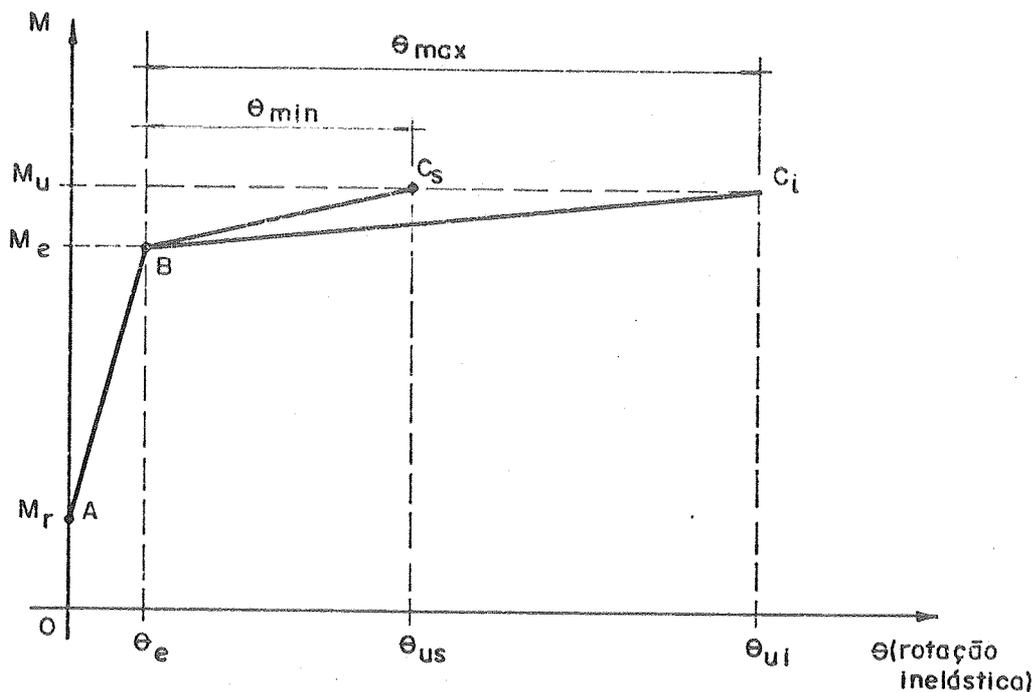


Fig. 3.4.10 - Diagrama momento fletor-rotação inelástica

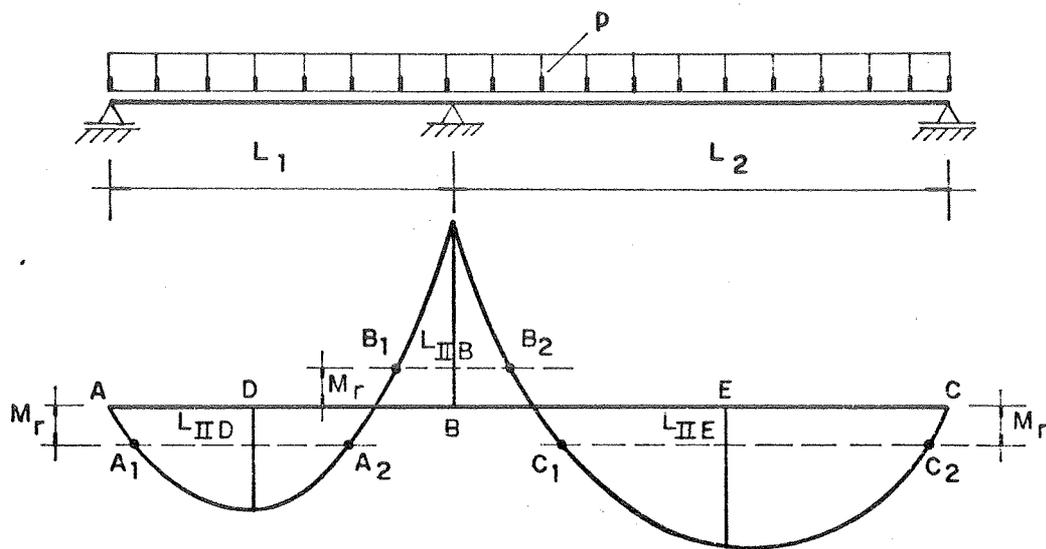


Fig. 3.4.11

Nos casos usuais de cargas distribuídas, pode-se considerar com suficiente aproximação, que os diagramas das curvaturas inelásticas são parabólicas nos tramos e triangulares nos apoios.

Nos casos em que os efeitos das forças concentradas são muito preponderantes aos das forças distribuídas,

pode-se considerar os diagramas triangulares de curvaturas inelásticas, tanto nos tramos como nos apoios.

Para o cálculo das rotações inelásticas, do trecho AB da Fig. 3.4.10, no caso da viga apresentada na Fig. 3.4.11, aplicando-se os teoremas de Mohr, chega-se às seguintes conclusões:

a) Na seção D

Considera-se o trecho da viga, de comprimento  $L_{IID}$ , solicitado por um carregamento igual ao do diagrama de momento fletor reduzido da rigidez  $EI$ , conforme Fig. 3.4.12a).

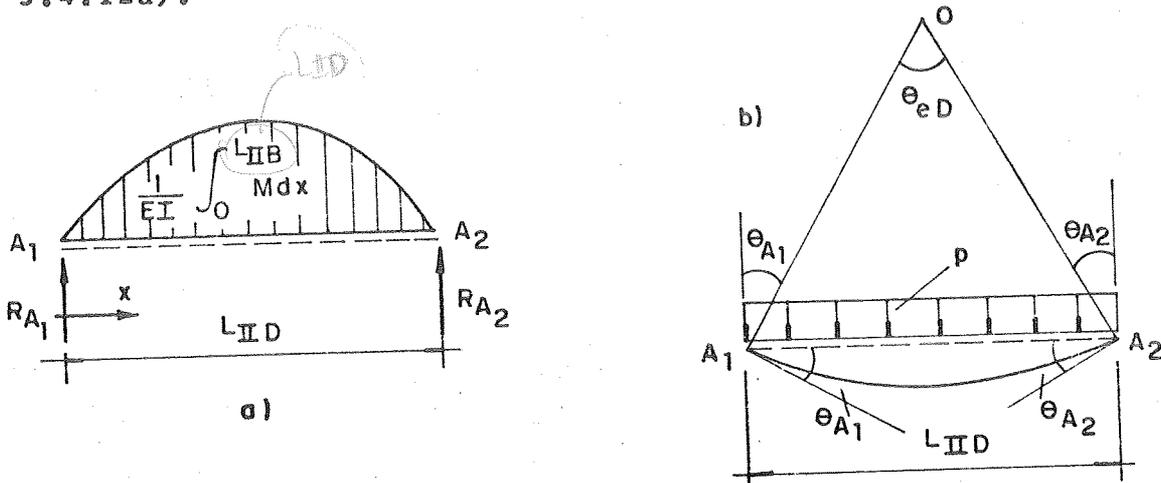


Fig. 3.4.12

Nestas condições de carga, a viga  $A_1A_2$  é denominada de viga conjugada da viga inicial, solicitada pelo carregamento uniformemente distribuído  $p$ .

Com os teoremas de Mohr, pode-se mostrar que a rotação da seção nos apoios, é numericamente igual à reação dos apoios à viga conjugada, isto é, da mesma viga carregada, porém, com o diagrama de momentos fletores reduzidos da rigidez  $EI$ .

Conforme Fig. 3.4.12a e b, tem-se que:

$$\theta_{A1} = R_{A1} = \theta_{A2} = R_{A2} = \frac{1}{2} (\text{área da parábola})$$

Portanto, a rotação inelástica concentrada na seção D, correspondente ao trecho de comprimento  $L_{IID}$ , tem o valor igual ao da área da parábola do carregamento da viga conjugada. Logo,

$$\theta_{eD} = \theta_{A1} + \theta_{A2} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_D \cdot L_{IID}$$

b) Na seção B

Obtém-se a rotação inelástica desta seção, de maneira idêntica ao caso anterior, modificando apenas o carregamento da viga conjugada.

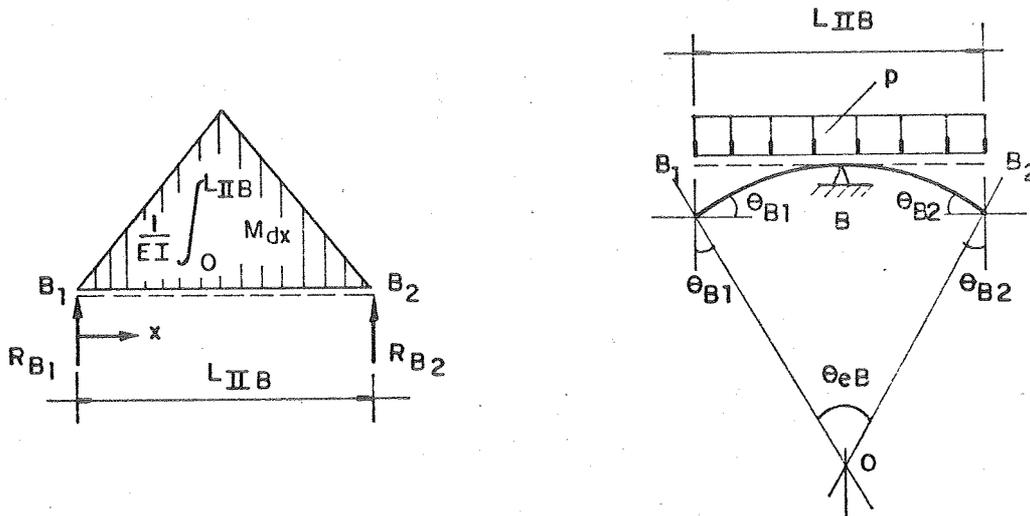


Fig. 3.4.13

Conforme Fig. 3.4.13a e b, tem-se que:

$$\theta_{B1} = R_{B1} = \theta_{B2} = R_{B2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r}\right)_B \cdot L_{IIB} \quad (\text{área do triângulo})$$

Portanto, a rotação inelástica concentrada na seção B, correspondente ao trecho de comprimento  $L_{IIB}$ , tem o valor igual ao da área do triângulo do carregamento da viga conjugada. Logo,

$$\theta_{eB} = \theta_{B1} + \theta_{B2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)_B \cdot L_{IIB}$$

As abscissas dos pontos  $C_s$  e  $C_i$  são obtidas acrescentando-se à abscissa do ponto B, os valores de  $\theta_{min}$  e  $\theta_{max}$ , respectivamente.

Portanto,

$$\theta_{us} = \theta_e + \theta_{min}$$

$$\theta_{ui} = \theta_e + \theta_{max}$$

Para se obter os valores de  $\theta_{min}$  e  $\theta_{max}$ , o Prof. Giorgio Macchi utiliza as curvas da Fig. 3.4.14.

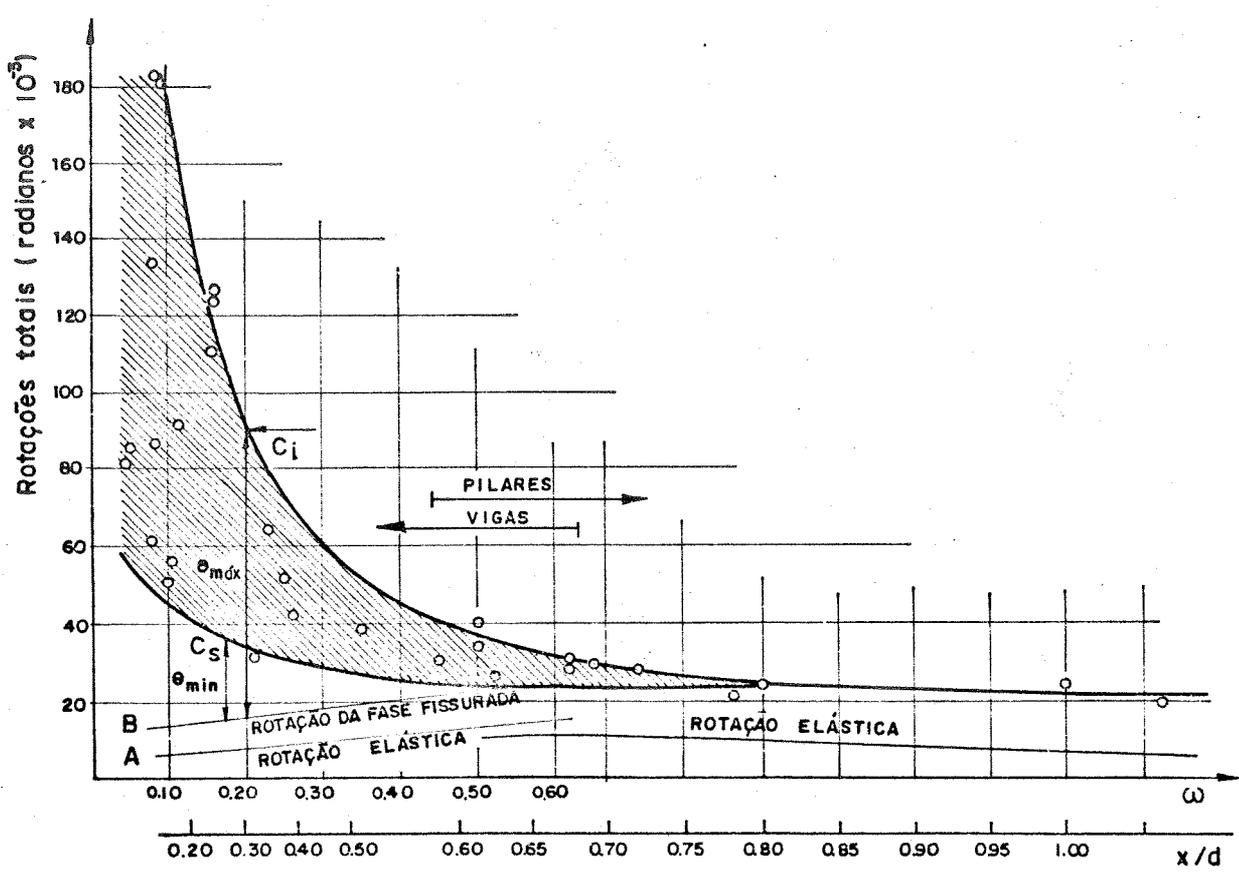


Fig. 3.4.14 - Rotações totais

Estas curvas foram construídas através de resultados experimentais obtidos de pesquisas coordenadas pelo CEB, levando-se em conta apenas as armaduras longitudinais.

No caso de flexão simples, determinam-se os valores de  $\theta_{\min.}$  e  $\theta_{\max.}$ , em função da taxa mecânica de armadura, e no caso de flexão composta, em função da posição da linha neutra, através da relação  $x/d$ . Pode-se obter curvas que representam um comportamento mais próximo da realidade, considerando a influência das armaduras transversais, que também influem na capacidade de rotação das rótulas plásticas. No entanto, as curvas da Fig. 3.4.14, servem para se calcular uma estrutura em regime elastoplástico, com uma certa prudência.

A ordenada dos pontos  $C_s$  e  $C_i$ , correspondem ao momento fletor máximo que pode ser desenvolvido em uma seção crítica.

Na situação atual do método, não é considerada a possibilidade de se ter no diagrama momento fletor-rotação inelástica, os trechos  $BC_s$  e  $BC_i$  descendentes.

### 3.4.7 - Verificação do estado limite último

Os diagramas de momentos fletores calculados em regime elástico correspondentes às cargas permanentes são majorados com o coeficiente  $\gamma_g$  e os das cargas acidentais com o coeficiente  $\gamma_q$ , Fig. 3.4.15a e b.

Para cada uma das configurações mais desfavoráveis das sobrecargas, verifica-se que os coeficientes  $\gamma_q$  das cargas acidentais que conduzem ao estado limite são pelo menos iguais aos coeficientes  $\gamma_g$  das cargas permanentes.

Procura-se através de várias tentativas, qual o menor coeficiente de majoração  $\gamma_q$  que conduz o diagrama de momentos fletores da Fig. 3.4.15c ao estado limite último.

Observa-se que para o diagrama de momentos fletores da Fig. 3.4.15c existem duas possibilidades, ou o diagrama não é estaticamente admissível, ou então ele é estaticamente admissível.

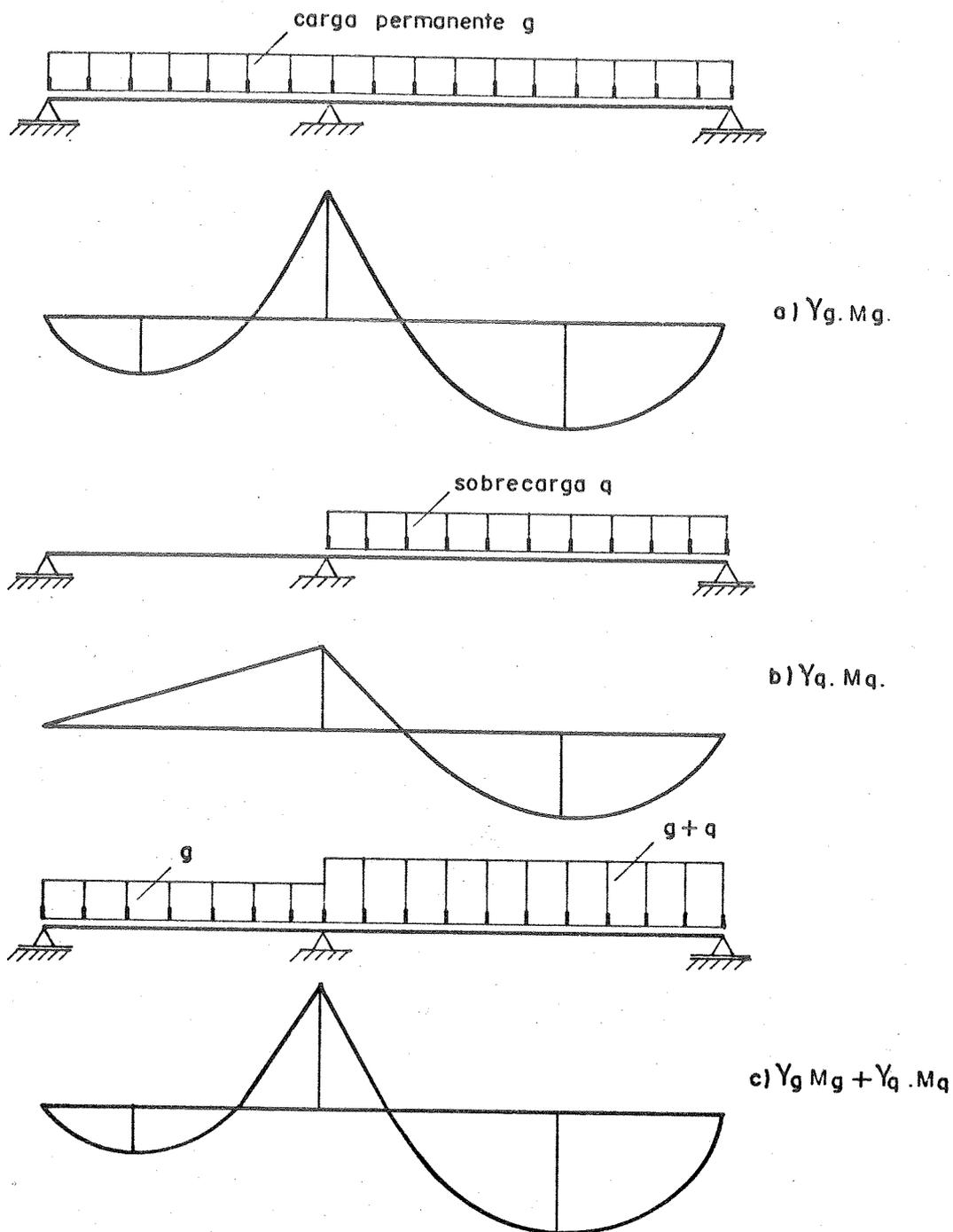


Fig. 3.4.15 - Diagramas de momentos fletores

a). Caso em que o diagrama de momentos fletores não é estaticamente admissível

Na Fig. 3.4.16, o diagrama de momentos fletores não é estaticamente admissível, pois o momento fletor da seção E é maior do que o momento atuante último.

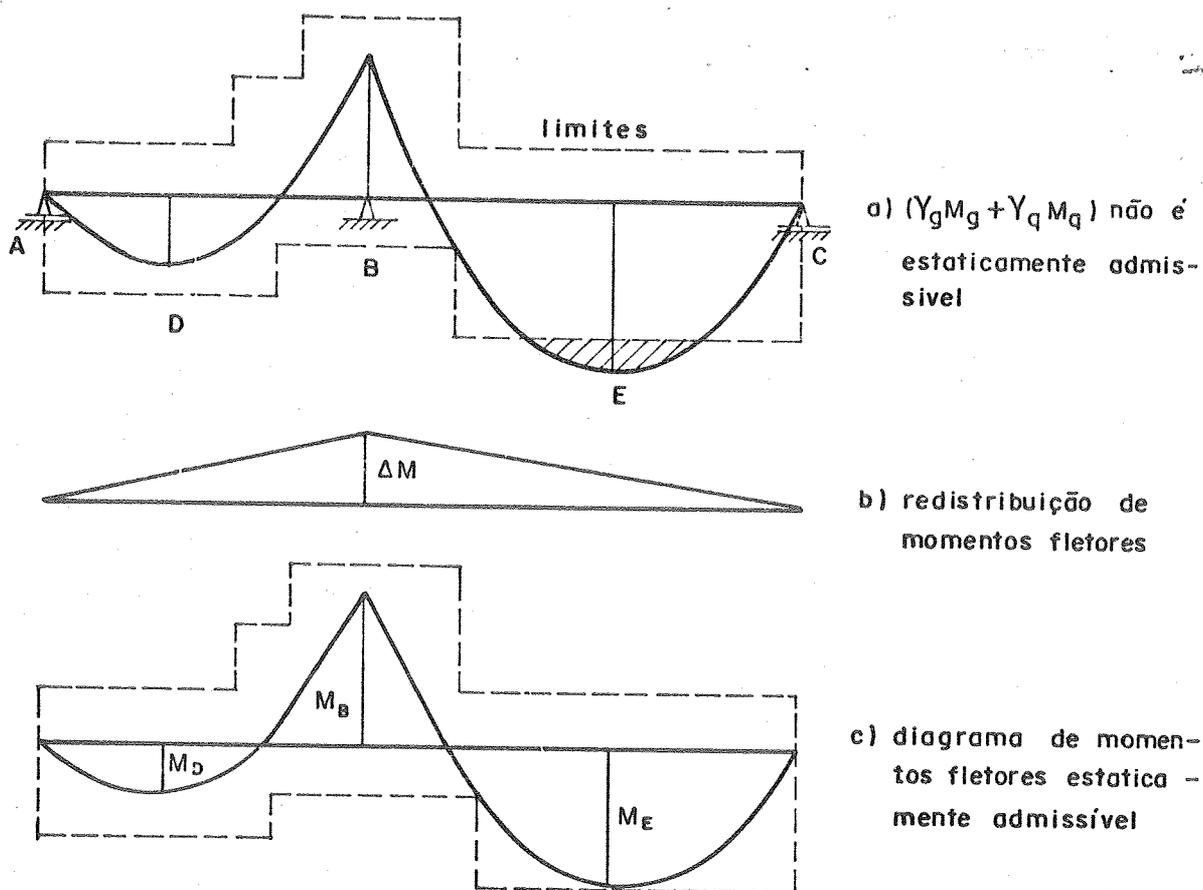


Fig. 3.4.16 - Diagramas de momentos fletores

Admitindo-se uma redistribuição de momentos fletores, é possível superpor os diagramas de momentos fletores da Fig. 3.4.16a e b, e obter o diagrama da Fig. 3.4.16c que é estaticamente admissível. Para saber se ele é o diagrama real, é necessário verificar a compatibilidade das deformações. Sabe-se que os diagramas da Fig. 3.4.15a e b são compatíveis com as condições de contorno. Falta verificar se o diagrama de redistribuição de momentos fletores da Fig. 3.4.16b é consequência das rotações inelásticas que ocorrem nas seções críticas D, B e E, devido aos momentos fletores  $M_D$ ,  $M_B$  e  $M_E$  da Fig. 3.4.16c.

A ordenada  $\Delta M$  que caracteriza o diagrama de redistribuição de momentos fletores no caso da viga apresentada na Fig. 3.4.16, está na seção do apoio B, e vale:

$$\Delta M_B = E_c I (k_{BB} \cdot \theta_B + k_{BD} \cdot \theta_D + k_{BE} \theta_E) \quad (3.4.2)$$

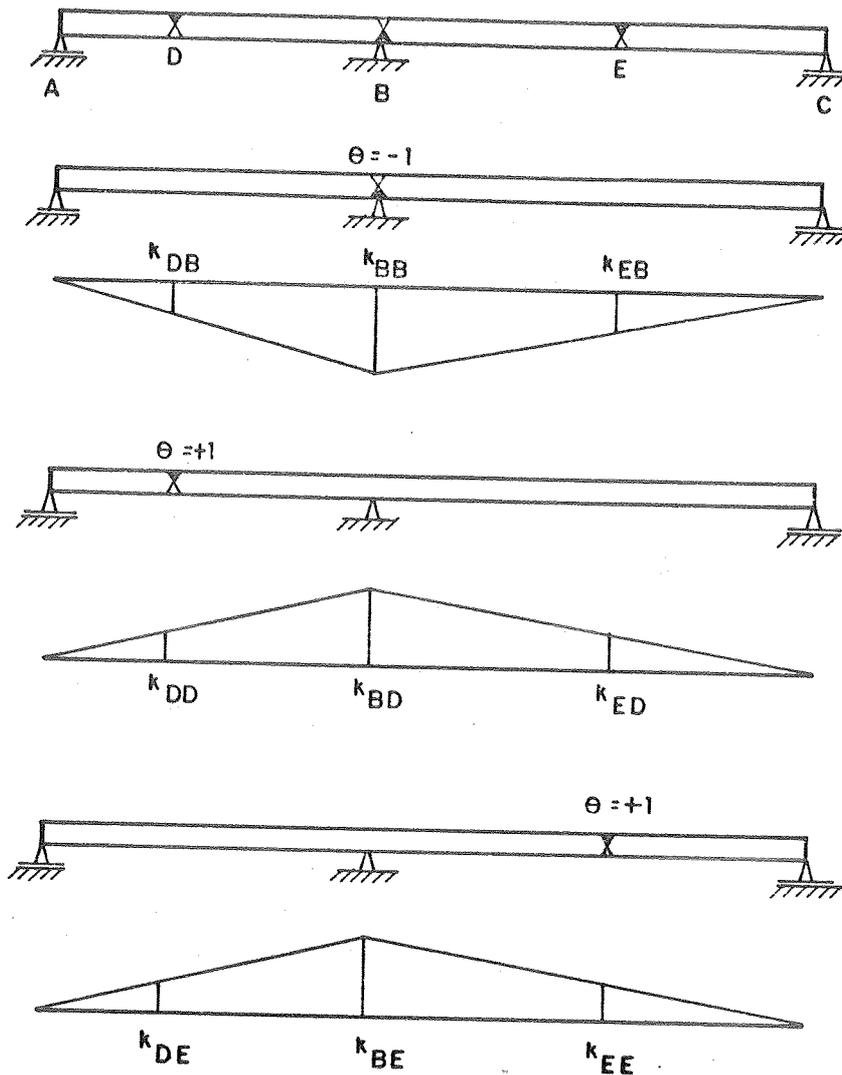


Fig. 3.4.17 - Diagramas de momentos fletores devido à rotações unitárias impostas, em cada uma das seções críticas da viga.

Os coeficientes  $k$  são provenientes dos diagramas de momentos fletores devido às rotações unitárias impostas nas seções críticas consideradas da viga, conforme Fig. 3.4.17. Os valores das rotações inelásticas  $\theta_B$ ,  $\theta_D$  e  $\theta_E$  que correspondem respectivamente aos momentos fletores  $M_B$ ,  $M_D$  e  $M_E$  da Fig. 3.4.16c, são obtidas dos diagramas momento fletor-rotação das seções críticas B, D e E.

O diagrama momento fletor-rotação proposto pelo Prof. Giorgio Macchi não é unívoco, portanto, para valores de momentos fletores maiores que  $M_e$ , obtém-se  $\theta_{us}$  e  $\theta_{ui}$ .

Com estes dois valores, determinam-se  $\Delta M_{\min.}$  e  $\Delta M_{\max.}$ , através da expressão (3.4.2).

A compatibilidade das deformações pode ser obtida por tentativas, variando-se gradualmente o coeficiente  $\gamma_q$ . A situação ideal é aquela em que  $\Delta M$  é igual a  $\Delta M_{\min.}$ .

Comparando-se os valores de  $\Delta M$ ,  $\Delta M_{\min.}$  e  $\Delta M_{\max.}$ , é possível ocorrer uma das três possibilidades, descritas a seguir:

a1)  $\Delta M_{\min.}$  e  $\Delta M_{\max.}$  são de mesmo sinais e maiores que  $\Delta M$  necessário, conforme Fig. 3.4.15b.

Isto significa que mesmo com a combinação mais desfavorável das rotações, pode-se obter uma configuração estaticamente admissível e compatível, com o momento resistente último na seção crítica E, sob uma sobrecarga maior do que a suposta inicialmente com  $\gamma_q = \gamma_g$ . Logo, conclui-se que o coeficiente  $\gamma_q$  é maior do que o coeficiente  $\gamma_g$ .

a2)  $\Delta M$  está entre  $\Delta M_{\min.}$  e  $\Delta M_{\max.}$ .

Isto indica que entre as combinações extremas de deformações consideradas, existe uma configuração na qual ocorre a compatibilidade com a ruptura na seção crítica E.

No entanto, é possível ocorrer uma ruptura prematura na seção crítica E com o coeficiente  $\gamma_q$  menor do que o coeficiente  $\gamma_g$ . Neste caso, deve-se modificar a estrutura, e mais especificamente aumentar a resistência ou a deformabilidade da seção crítica E.

O diagrama de momentos fletores que proporciona maior economia para a estrutura é aquele no qual se obtém o valor de  $\Delta M$  mais próximo do valor de  $\Delta M_{\min.}$ .

a3)  $\Delta M_{\min.}$  e  $\Delta M_{\max.}$  são menores que  $\Delta M$ , ou mesmo de sinais contrários.

Neste caso não se consegue obter a compatibilidade de deformações. É necessário modificar a estrutura na seção E, que neste caso é frágil.

b) Caso em que o diagrama de momentos fletores é estaticamente admissível.

Neste caso, nenhuma seção crítica apresenta momento fletor maior do que o momento atuante último. Todavia, a configuração elástica pode não ser compatível com as condições de contorno.

É possível efetuar um controle da compatibilidade das deformações, através dos sinais de  $\Delta M_{\min.}$  e  $\Delta M_{\max.}$  que geralmente, são diferentes de zero.

Os sinais destas redistribuições de momentos fletores, indicam a seção crítica que está sobrecarregada pelo efeito das deformações inelásticas. Admite-se que nesta seção crítica é atingido o momento resistente último e utiliza-se o procedimento do item a).

Para estes dois casos a) e b) apresentados, a verificação do estado limite último é feita controlando-se a desigualdade  $\gamma_q \geq \gamma_g$ . No entanto, o cálculo do verdadeiro coeficiente de majoração  $\gamma_{q\min.}$  das sobrecargas, que sob as combinações mais desfavoráveis, levam a estrutura ao estado limite último, é importante para se analisar os reais limites de segurança, e eventualmente, diminuir as seções superdimensionadas.

Portanto, para a verificação do estado limite último, admite-se  $\gamma_q = \gamma_g$ , e por tentativas, altera-se o coeficiente  $\gamma_q$  de forma gradual e crescente, até que ocorra a compatibilidade das deformações. Ao menor valor de  $\gamma_q$  para o qual se obtém  $\Delta M = \Delta M_{\min.}$ , é o coeficiente  $\gamma_{q\min.}$  procurado.

### 3.5 - Método aproximado para análise limite de estruturas simples de concreto armado

Os elementos frágeis, frequentemente presentes nas estruturas de concreto armado, influem de forma significativa na determinação da configuração de colapso. Eles atingem a ruptura com uma deformação pequena e provocam u-

ma ruptura local. Assim, os elementos dúcteis ficam limitados a deformações igualmente pequenas e desenvolvem apenas uma parte de sua capacidade resistente.

Esta limitação das seções dúcteis, causada pela falta de deformabilidade das seções frágeis é um fenômeno muito importante no comportamento último das estruturas estaticamente indeterminadas. Normalmente, em vários métodos de cálculo existe a possibilidade de seções frágeis permanecerem despercebidas.

Um procedimento preliminar a cálculos mais exatos, permite analisar este fenômeno com maior clareza, de modo a se tornar não somente um método de análise, mas também e principalmente uma diretriz na concepção das estruturas.

Consideremos uma viga biengastada, vão  $L$  e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído (Fig. 3.5.1).

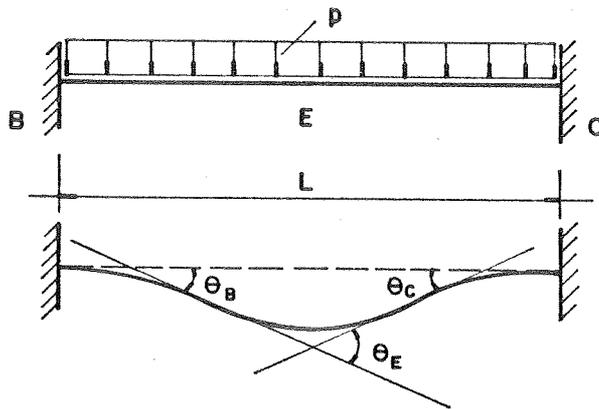


Fig. 3.5.1

Chamando de  $\theta_E$  a rotação total positiva da viga e  $\theta_B = \theta_C$  as rotações negativas, a condição de compatibilidade é dada por:

$$\theta_B = -\frac{\theta_E}{2}$$

Se os diagramas momento fletor-rotação das duas seções críticas B e E são obtidos experimentalmente ou calculados conforme as propriedades já expostas, a maneira mais simples de se impor a condição de compatibilidade é representar graficamente como mostra a Fig. 3.5.2.

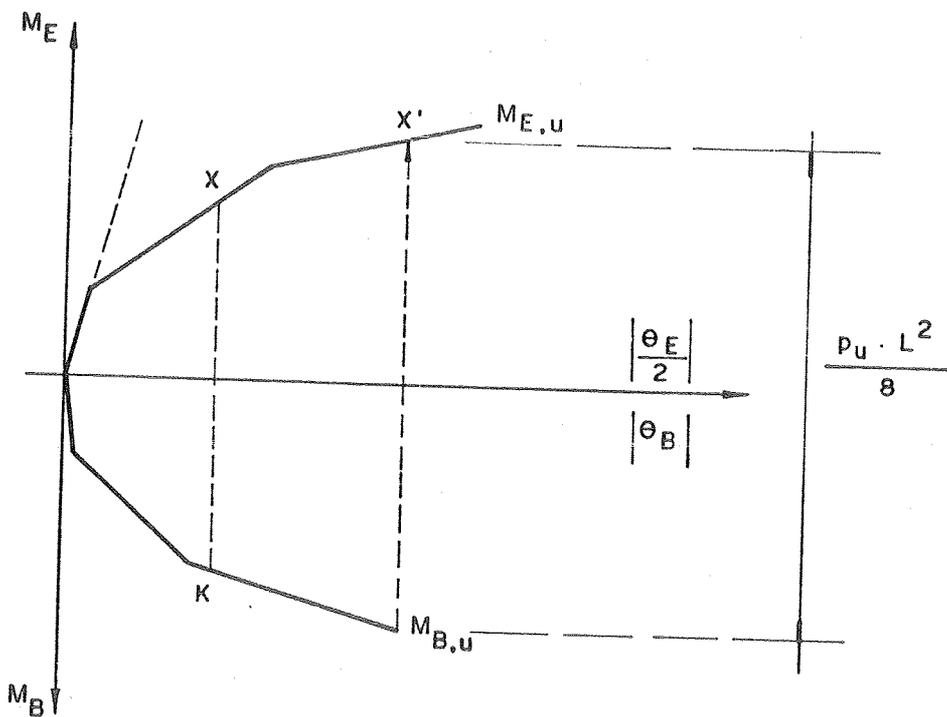


Fig. 3.5.2

A compatibilidade das deformações é satisfeita quando os pontos X e K que representam os momentos fletores das duas seções críticas estão na mesma reta vertical.

Cada configuração possível é representada por uma reta vertical e o segmento  $\overline{XK} = \frac{pL^2}{8}$ , dá o valor da carga "p" correspondente. Em particular, a configuração última é definida pela reta vertical  $X'M_{B,u}$  que passa pelo ponto de ruptura  $M_{B,u}$  da seção crítica B, no caso a mais frágil.

Considerando-se a viga como uma parte da estrutura, Fig. 3.5.3, na condição de compatibilidade deve-se levar em conta a rotação  $\theta_j$  do nó, resultando:

$$\theta_B + \theta_j = -\frac{\theta_E}{2}.$$

À esquerda dos diagramas anteriores acrescentam-se os diagramas momento fletor-rotação dos elementos 2, 3 e 4:  $M_2 - \theta_2$ ;  $M_3 - \theta_3$  e  $M_4 - \theta_4$ , onde  $M_i$  são os momentos fletores e  $\theta_i$  as rotações do nó B, comum a todos os elementos.

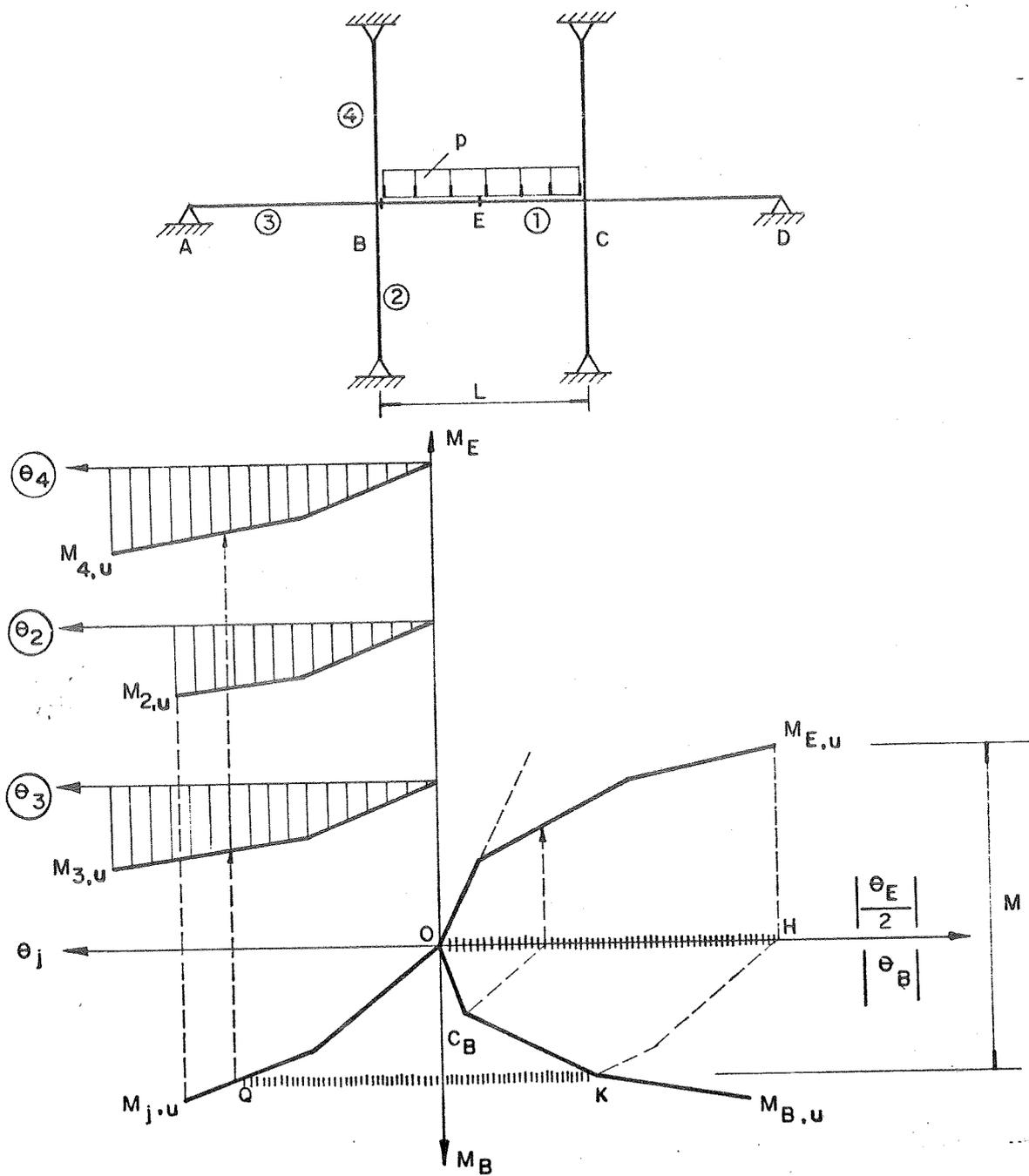


Fig. 3.5.3

Obtêm-se os diagramas momento fletor-rotação do nó ( $M_B - \theta_j$ ), somando-se graficamente as ordenadas dos três diagramas à esquerda da figura base, empregando-se a mesma origem 0.

Agora, o objetivo é definir a configuração última. Para isto, supõe-se por exemplo, que a seção crítica E, do meio do vão, é a mais frágil, onde deve ocorrer a ruptura.

Em seguida, traça-se a reta vertical  $M_{E,u}^H$  a partir do ponto de ruptura  $M_{E,u}$  encontrando  $\overline{OH} = \frac{\theta_{E,u}}{2}$ .

Se o diagrama momento fletor-rotação do nó ( $M_B - \theta_j$ ) é transladado horizontalmente até que sua origem coincida com H, encontra-se um ponto K na interseção com o diagrama  $M_B - \theta_B$  da seção crítica B. No ponto K a condição de compatibilidade  $\theta_B + \theta_j = -\frac{\theta_e}{2}$  está satisfeita, pois os segmentos  $\overline{OH}$  e  $\overline{QK}$  são iguais.

A seção crítica B é dita limitada, pois a ruptura ocorre em E, e o ponto K de seu diagrama está bem distante do ponto de ruptura  $M_{B,u}$ . Se o nó for menos rígido, o ponto de interseção K deve ficar mais à esquerda, e a limitação torna-se ainda mais acentuada.

A reta vertical traçada a partir do ponto Q determina os momentos fletores dos elementos 2, 3 e 4, que também são limitados. O momento fletor M é obtido somando-se as ordenadas dos pontos  $M_{E,u}$  e K, e pode ser medido diretamente na figura. Da condição de equilíbrio resulta a carga última:  $p_u = \frac{8M}{L}$ .

A seção frágil que determina a seção última pode ser qualquer uma das seções críticas, mesmo em elementos não carregados. A seção de ruptura pode ser encontrada através dos diagramas momento fletor-rotação, se estes são preparados como mostra a Fig. 3.5.3.

Nestes diagramas, a trajetória que dá a condição de compatibilidade começa sempre do ponto de ruptura da seção mais frágil, na qual se considera ter sido atingida a ruptura.

Pode-se aplicar este procedimento em qualquer fase de carregamento, desde o regime elástico até a ruptura. É possível então, utilizá-lo para verificar a estrutura nos estados limites de fissuração e deformação.

No caso da Fig. 3.5.3, se a trajetória de compatibilidade começa no ponto de início de fissuração  $C_B$  da seção B, o diagrama ( $M_E - \frac{\theta_E}{2}$ ) é interceptado num ponto da segunda fase (fissurada). Isto significa que se tem uma

transferência de momento fletor da seção E para a seção B, e a proporção entre os momentos fletores nas duas seções é bem diferente da proporção quando os momentos fletores estão no regime elástico.

A fissuração pode ser verificada determinando-se o ponto de fissuração admissível em cada diagrama momento fletor-rotação. Começando destes pontos, ao invés dos pontos de ruptura, a trajetória de compatibilidade permite de terminar a carga correspondente à fissuração admissível.

### 3.6 - Análise experimental e instrumentação

#### 3.6.1 - Generalidades

O intercâmbio entre a análise teórica e a análise experimental é imprescindível ao desenvolvimento tecnológico. Na análise teórica são utilizados modelos matemáticos e várias hipóteses que consideram as propriedades dos materiais, as características e o comportamento das estruturas. Na análise experimental tenta-se reproduzir através de um modelo físico o estado real das estruturas.

Pode-se analisar o comportamento de uma determinada estrutura, desde a fase elástica até a ruptura.

Geralmente, quando se faz uma pesquisa experimental, observam-se os deslocamentos, as deformações, as tensões e os esforços na estrutura, que podem ser provocados por solicitações estáticas ou dinâmicas. Para que esta pesquisa experimental seja confiável e alcance o seu objetivo é necessário um planejamento cuidadoso e uma execução rigorosa.

De uma maneira geral, no planejamento de uma pesquisa experimental, é importante definir:

- a) Objetivos da pesquisa
- b) O problema a ser estudado

- c) A literatura disponível sobre o assunto em estudo
- d) Prazos a serem cumpridos
- e) Verba necessária
- f) Equipe de trabalho
- g) Recursos disponíveis para a realização do ensaio, tais como: local de ensaio, oficinas de apoio, dispositivos de carregamento, instrumentos de medição e materiais para a confecção dos modelos.
- h) Escala e quantidade dos modelos
- i) Método de análise a ser utilizado: direto ou indireto
- j) Técnica de ensaio
- k) Detalhes de montagem
- l) Segurança do pessoal e do instrumental
- m) Verificação prévia dos instrumentos de medição
- n) Controle dos fatores que podem influir nos resultados do ensaio.
- o) Controle tecnológico. Corpos de prova
- p) Preparação de tabelas e folhas de anotações
- q) Documentação da pesquisa. Documentação fotográfica
- r) Utilização dos resultados experimentais
- s) Relatório final

Pode-se acrescentar ou retirar itens deste planejamento, conforme as particularidades específicas, em estudo, de cada pesquisa experimental.

A precipitação no planejamento e na execução de uma pesquisa experimental pode prejudicar, ou até mesmo invalidar todo este trabalho, que na maioria das vezes é lento e dispendioso, acarretando sérios prejuízos.

### 3.6.2 - Instrumentação

Para se determinar o estado de tensão em um elemento, normalmente se utilizam as deformações. O problema que se coloca ao pesquisador experimental, consiste em avaliar o estado de tensão a partir do estado de deformação que ocorre no elemento.

Aceitam-se as hipóteses da teoria da elasticidade para determinar o estado de tensão a partir do estado de deformação em um elemento homogêneo e isotrópico.

No entanto, observa-se que para caracterizar o comportamento mecânico-resistente de um elemento, pode ser suficiente conhecer apenas o estado de deformação. Para isto, é preciso se fixar extensão limite ao invés de tensão limite.

A tradição dos cálculos estruturais da resistência dos materiais, baseados no equilíbrio entre forças atuantes e estado de tensão interna, faz com que os pesquisadores experimentais apresentem os resultados em forma de tensões.

Na determinação experimental do estado de deformação, as grandezas que se medem, geralmente são os deslocamentos lineares e angulares, deformações específicas, temperatura e abertura de fissuras.

#### a) Medição de deslocamentos lineares

Utilizam-se para este efeito, os defletômetros. Eles se baseiam em vários princípios, sendo alguns deles estudados para determinadas utilizações especiais.

##### al) Defletômetros mecânicos

Quase sempre, se tem deslocamentos muito pequenos e um dos princípios que surgiu primeiro, foi o da ampliação dos pequenos deslocamentos que se pretendem medir através de alavancas ou engrenagens.

O defletômetro mecânico consiste em uma escala graduada, onde um ponteiro se desloca quando a ele se transmite, mecanicamente, um deslocamento linear. Eles podem ser de haste, tambor ou registradores.

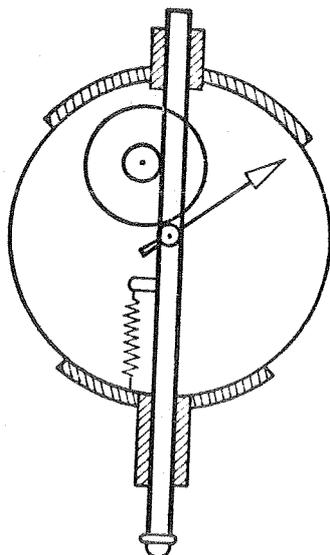


Fig. 3.6.1

Na Fig. 3.6.1, tem-se um defletômetro de haste, onde o movimento retilíneo da haste é transformado e ampliado através de cremalheira e engrenagens, no movimento circular do ponteiro.

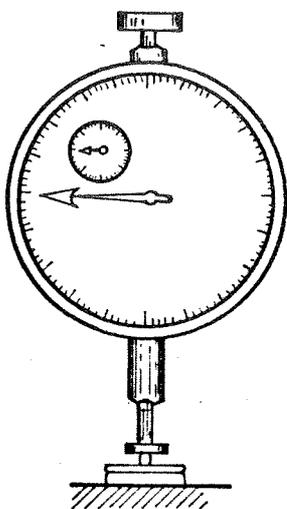


Fig. 3.6.2

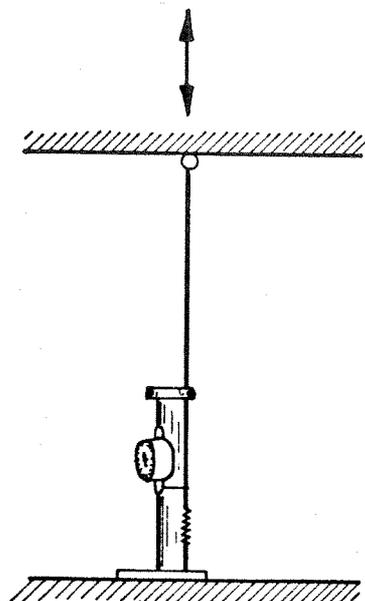


Fig. 3.6.3

Na Fig. 3.6.2, a haste está em contato direto com a estrutura e na Fig. 3.6.3, a haste se encontra em contato direto com um fio sob tensão ligado à estrutura.

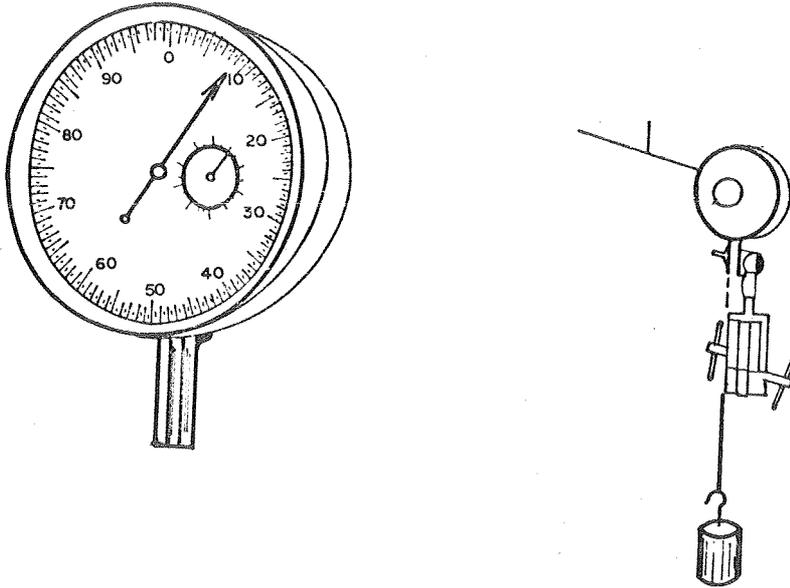


Fig. 3.6.4

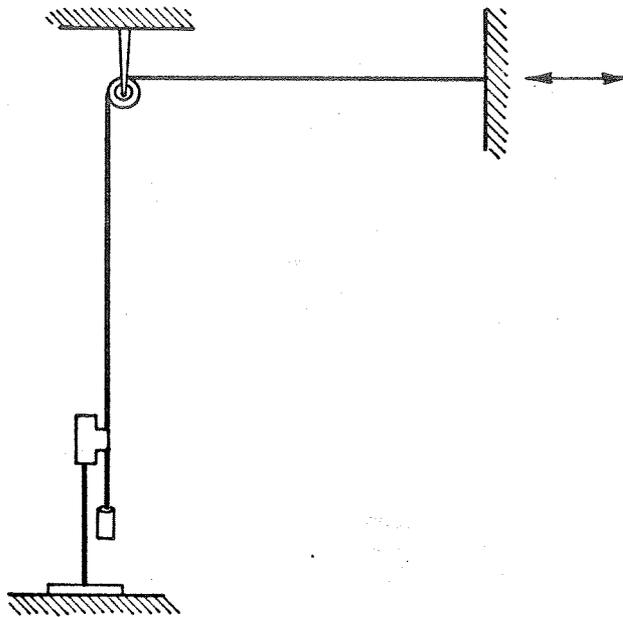


Fig. 3.6.5

Os defletômetros de tambor, Fig. 3.6.4 e Fig. 3.6.5, consistem de um fio que sob tensão é ligado à estrutura e en

rolado no tambor. O movimento do fio é transmitido ao tambor, por atrito, e ampliado através de engrenagens.

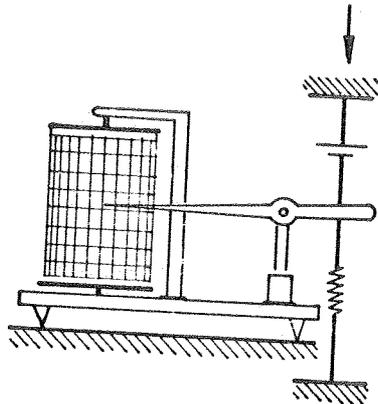


Fig. 3.6.6

No defletômetro registrador da Fig. 3.6.6, os deslocamentos que são transmitidos ao aparelho por um fio, são ampliados através de um sistema de alavanca e continuamente registrados.

#### a2) Defletômetros elétricos

Consiste em uma grandeza elétrica que varia proporcionalmente aos deslocamentos lineares, que são transmitidos ao defletômetro. Possibilitam a leitura à distância, e podem ser acoplados a registradores.

Na Fig. 3.6.7, tem-se o defletômetro elétrico de indutância e na Fig. 3.6.8, de resistência.

#### a3) Defletômetros eletromecânicos

Obtêm-se os deslocamentos lineares diretamente, ou através de um sinal elétrico.

#### a4) Nível Líquido (Fig. 3.6.9)

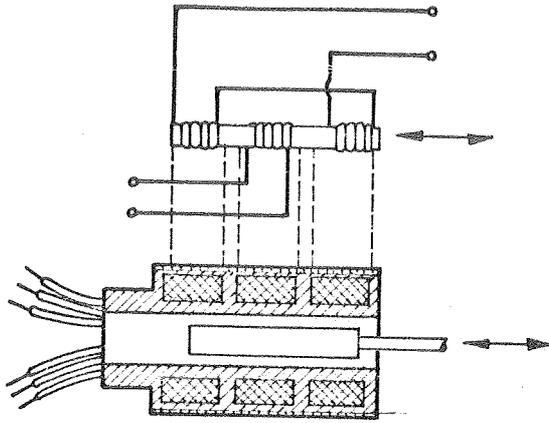


Fig. 3.6.7

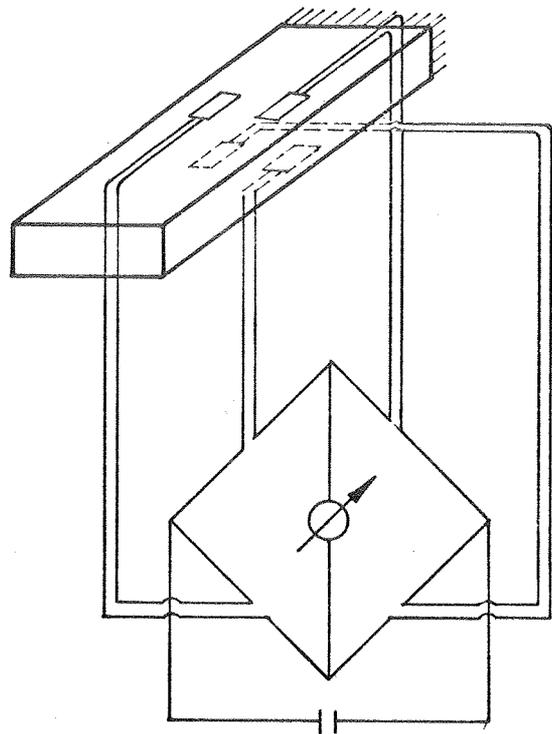
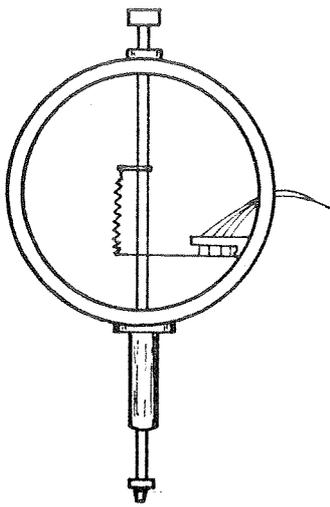


Fig. 3.6.8

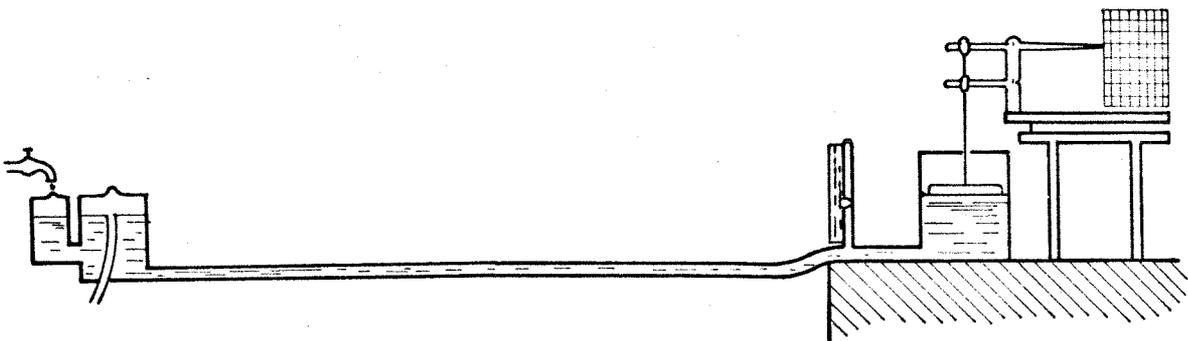


Fig. 3.6.9

a5) Nível óptico com mira de precisão

a6) Catetômetro

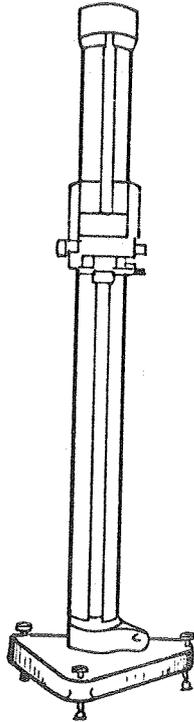


Fig. 3.6.10

a7) Fios de prumo associados a coordenômetros

a8) Processos geodésicos

b) Medição de deslocamentos angulares

Utilizam-se para este efeito os clinômetros. A maioria dos clinômetros de precisão que existem atualmente, utilizam como elemento fundamental, o nível de bolha de ar.

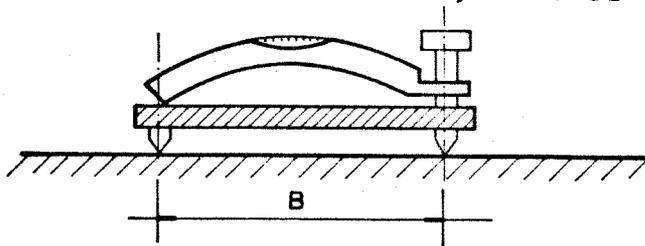


Fig. 3.6.11

A distância B entre os dois pontos do clinômetro, conforme Fig. 3.6.11, em relação aos quais se mede a rotação angular ocorrida, denomina-se base do clinômetro.

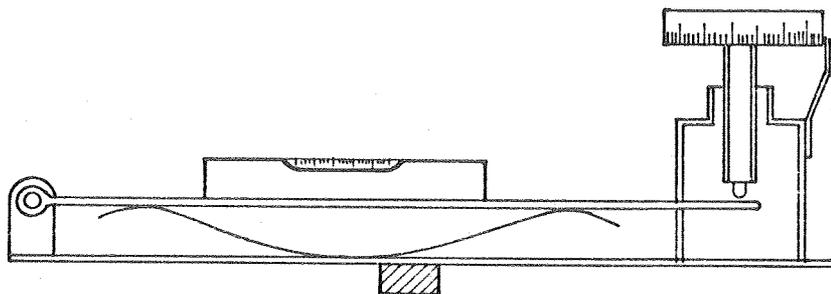


Fig. 3.6.12

Na Fig. 3.6.12, tem-se um clinômetro com um nível de bolha muito sensível sobre uma base inclinável, no plano vertical, que é nivelado antes e depois da rotação através de um parafuso micrométrico que pode estar graduado em unidades de rotação angular.

Para se medir os deslocamentos angulares podem ser utilizados também os clinômetros de cordas vibrantes.

### c) Medição de deformações

Utilizam-se os extensômetros. Na realidade, os extensômetros medem a variação de comprimento  $\Delta L$  entre dois pontos distantes inicialmente de um comprimento  $L$ , chamado base de medida.

A deformação específica ou relativa  $\epsilon = \Delta L/L$ , pode ser lida diretamente na escala do aparelho ou facilmente calculável com o conhecimento da base e do valor da variação de comprimento  $\Delta L$ , correspondente à menor divisão da escala (constante do extensômetro).

A ampliação da variação de comprimento  $\Delta L$  é feita através de sistemas mecânicos, ópticos ou elétricos.

c1) Extensômetros mecânicos

Medem a variação de comprimento  $\Delta L$ , que é ampliado através de um dispositivo de alavancas ou de engrenagens ligadas a dois cutelos, que definem a base de medida.

c2) Extensômetros acústicos ou de corda vibrante

A deformação é medida através da auscultação do período de vibração de um fio de aço esticado entre dois pontos ligados à base de medida. Utiliza-se um eletroimã para a auscultação e para a excitação da corda vibrante.

c3) Extensômetros elétricos de resistência

As deformações são medidas a partir da variação da resistência de uma grade ligada à base de medida.

c4) Extensômetros elétricos de indução

A medição das deformações é feita através das correntes induzidas em um eletroimã, através das variações de campo magnético introduzidas pela deformação.

c5) Extensômetros ópticos

Obtém-se a ampliação da variação de comprimento  $\Delta L$ , através de um sistema de espelhos ligados por alavancas ou engrenagens à base de medida.

Existem outros tipos de extensômetros, que se baseiam em outros princípios, por exemplo, os extensômetros fotoelásticos. Porém, a utilização destes extensômetros é mais restrita.

Os extensômetros são indicadores quando o valor das deformações é obtido por leitura direta da posição da a

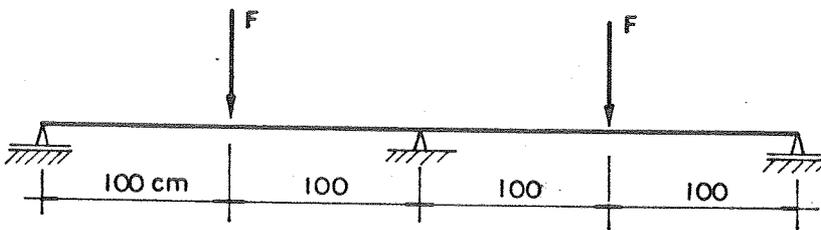
gulha em uma escala do aparelho, e são registradores quando se obtêm o valor das deformações indiretamente, através do registro efetuado pela equipagem móvel que amplia as deformações ocorridas.

3.6.3 - Plano de ensaio de uma viga contínua de dois tramos

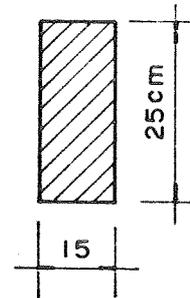
a) Dados:

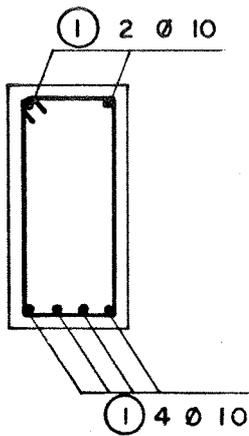
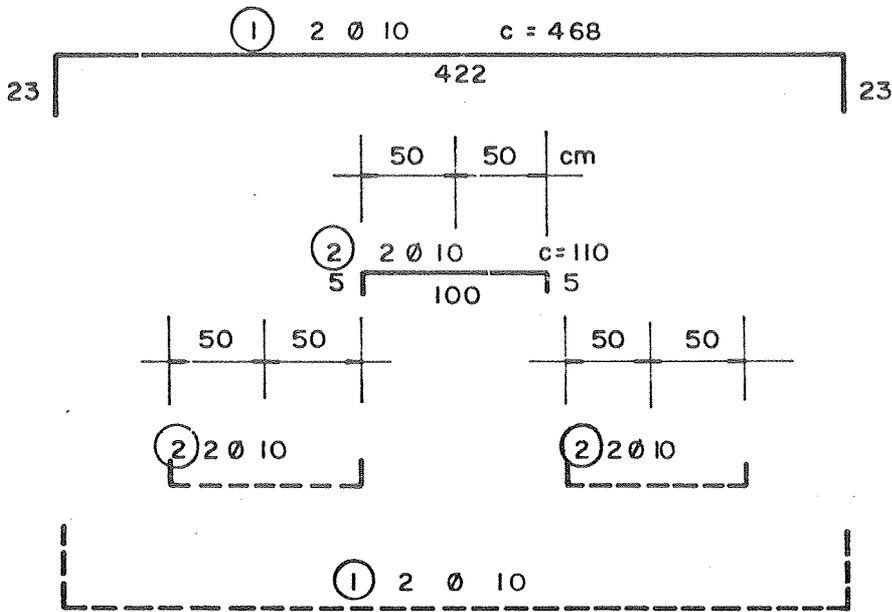
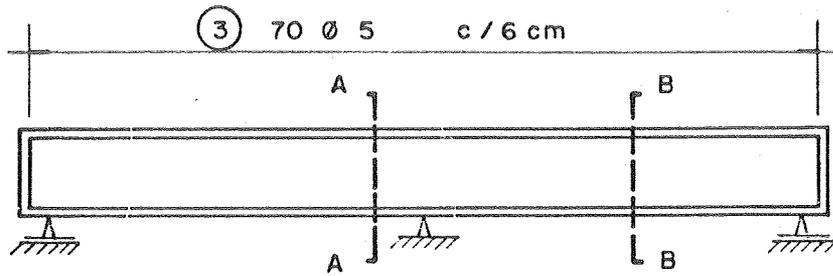
$$f_{ck} = 25\text{MPa}$$

Aço CA-50A

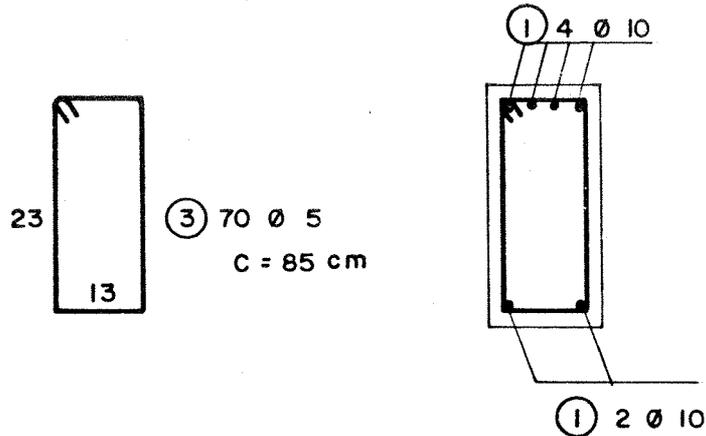


SEÇÃO  
TRANSVERSAL





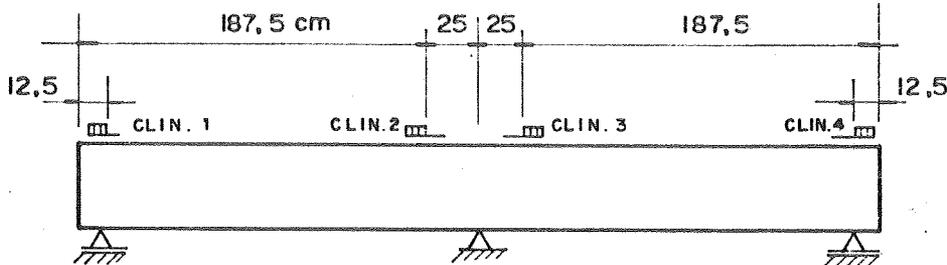
**CORTE B-B**



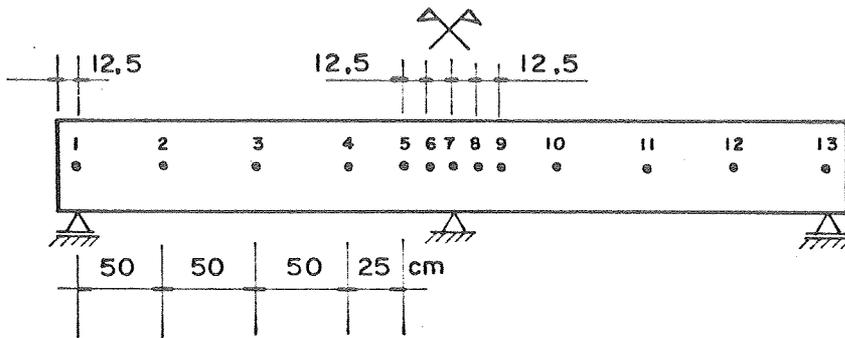
**CORTE A-A**

b) Medições e instrumentação

b1) Rotações - (posição dos clinômetros)



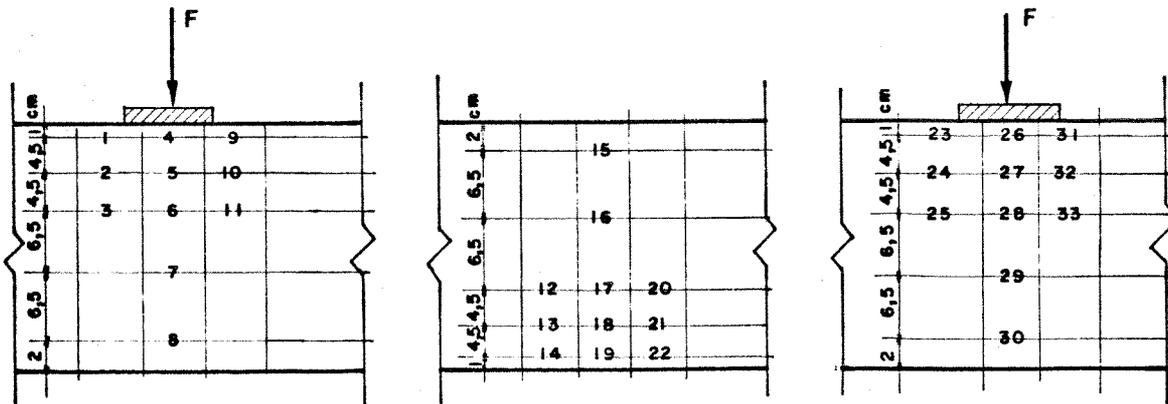
b2) Deslocamentos verticais - (posição dos catetômetros)



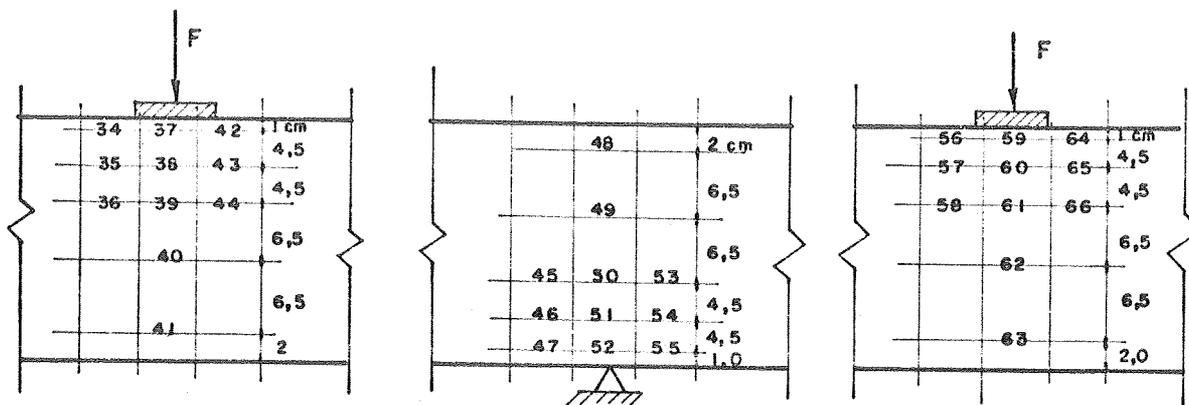
b3) Deformações no concreto

Utilizam-se para medir este efeito, os tensotast com base de 10cm, nas regiões do apoio central e de carregamento.

BASES DE MEDIÇÃO DA DEFORMAÇÃO DO CONCRETO



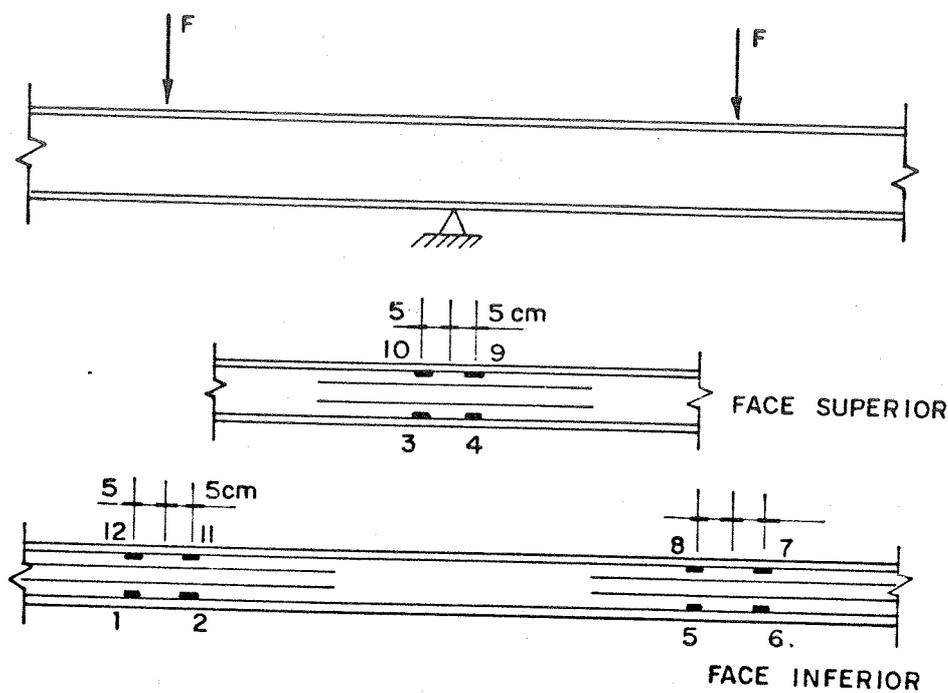
Vista da lateral direita



Vista da lateral esquerda

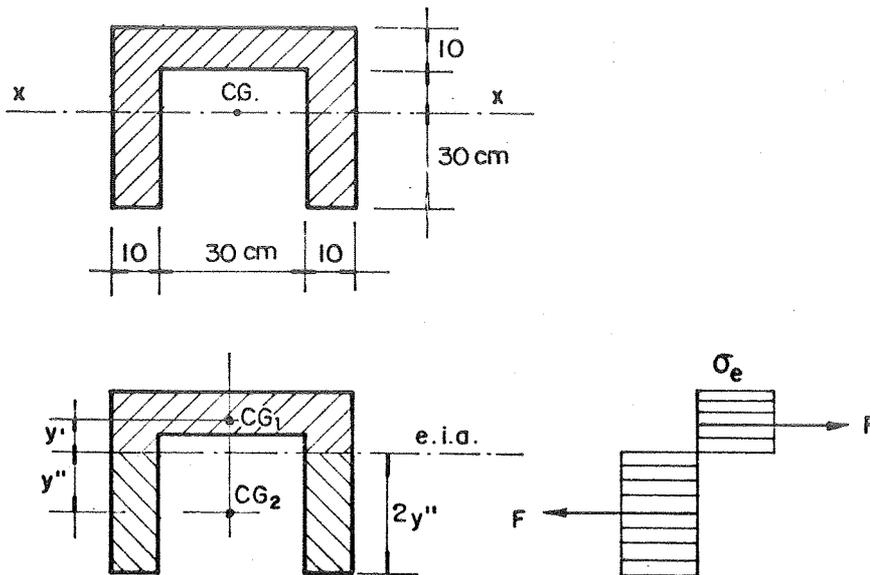
b4) Deformações no aço

Para medir este efeito são utilizados extensômetros elétricos de resistência, com base de 5mm, colados nas barras longitudinais.



#### 4. APLICAÇÃO

4.1 - Para a seção transversal apresentada na figura abaixo, determinar o módulo de resistência à plastificação, em torno do eixo paralelo ao eixo x-x.



$$z = \frac{A}{2} (y' + y'')$$

$$A = 2 \cdot 10 \cdot 30 + 10 \cdot 50 = 1100 \text{ cm}^2$$

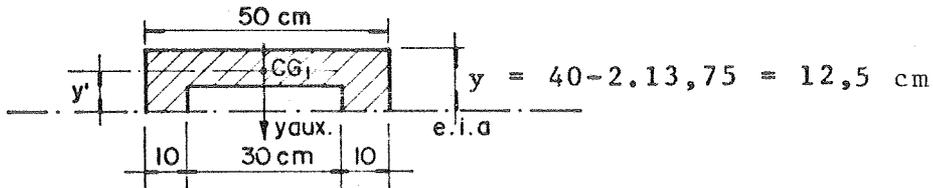
$$\frac{A}{2} = \frac{1100}{2} = 550 \text{ cm}^2$$

Portanto;

$$2 \cdot (10 \cdot 2y'') = 550$$

$$y'' = 13,75 \text{ cm}$$

Para calcular  $y_1$ , é preciso saber a posição do CG2.



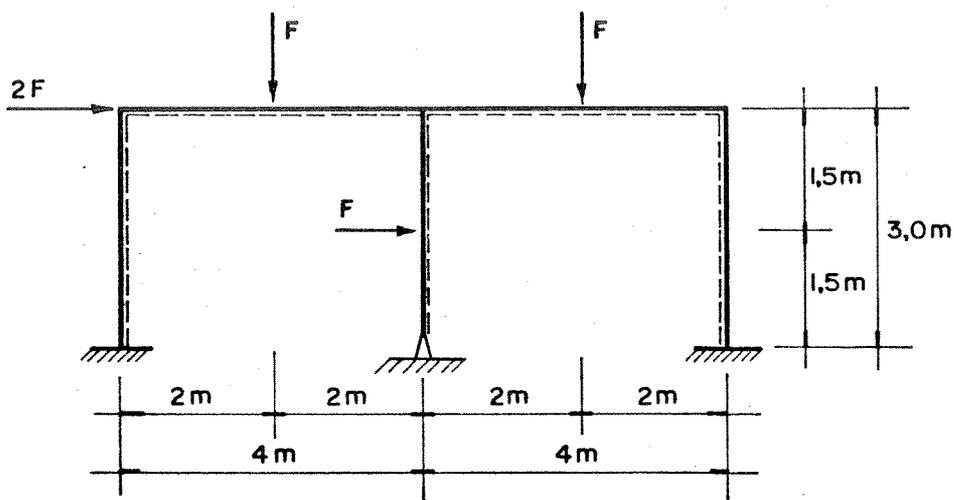
$$y_{CG} = \frac{50 \cdot 10 \cdot 5 + 2 \cdot 10 \cdot 2,5 \cdot 11,25}{50 \cdot 10 + 2 \cdot 10 \cdot 2,5} = 5,57 \text{ cm}$$

Logo,

$$y^0 = 12,50 - 5,57 = 6,93 \text{ cm}$$

$$Z = 550 \cdot (6,93 + 13,75) = 11374 \text{ cm}^3$$

4.2 - Determinar o mecanismo de colapso e a carga última (de colapso), para a estrutura abaixo.

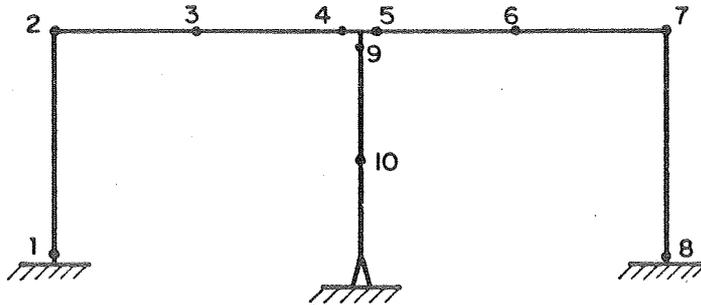


$$M_p = \text{constante} = 10 \text{ kNm}$$

Convenções:

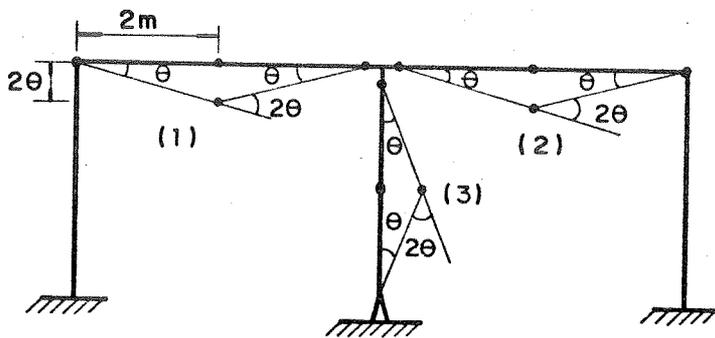
$M > 0$  quando provoca tração no lado tracejado  
 $\theta > 0$  quando provoca extensão no lado tracejado

Admite-se a formação de rótulas plásticas nas seguintes seções:

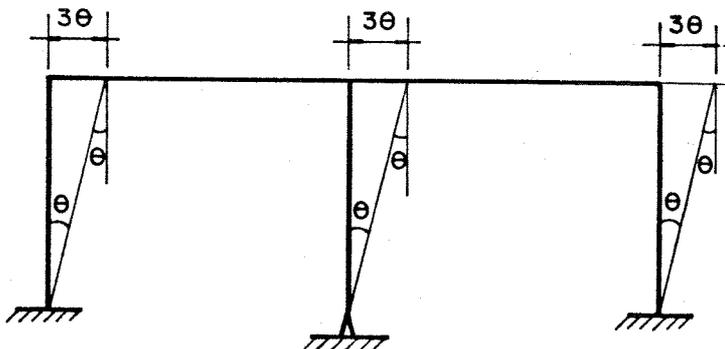


A estrutura apresentada é cinco vezes hiperestática, onde se admite a possibilidade de se formar 10 rótulas plásticas. Portanto, existem 5 mecanismos independentes, que estão relacionados a seguir:

a) Mecanismos de viga

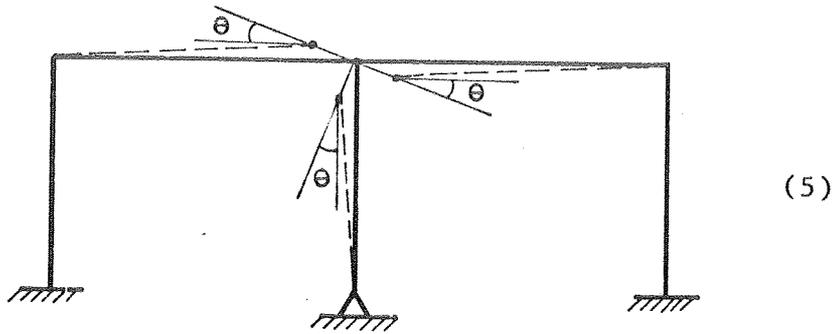


b) Mecanismo lateral



(4)

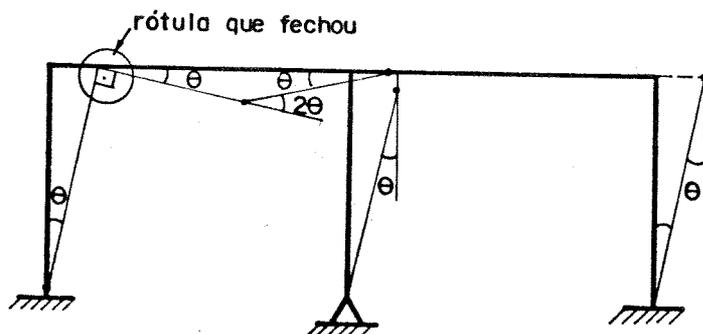
c) Mecanismo de n $\bar{o}$



Mecanismo n $\bar{o}$	Equações de trabalho	F (kN)	Relações de equilíbrio
1	$F \cdot 2\theta = 4M_p \theta$	20,00	$2F = -M_2 + 2M_3 - M_4$
2	$F \cdot 2\theta = 4M_p \theta$	20,00	$2F = -M_5 + 2M_6 - M_7$
3	$F \cdot 1,5\theta = 3M_p \theta$	20,00	$1,5F = -M_9 + 2M_{10}$
4	$2F \cdot 3\theta + F \cdot 1,5\theta = 5M_p \theta$	6,67	$7,5F = -M_1 + M_2 + M_9 - M_7 + M_8$
5	$0 \cdot F = 3M_p \theta$	$\infty$	$0 = -M_4 - M_9 + M_5$

Através da combinação de mecanismos, tenta-se chegar ao mecanismo de colapso. Analisando-se os mecanismos independentes, deve-se começar com os que apresentam menores valores de F, isto é, os maiores  $M_p$ , procurando fechar o maior número de rótulas plásticas.

Mecanismos (1) + (4):



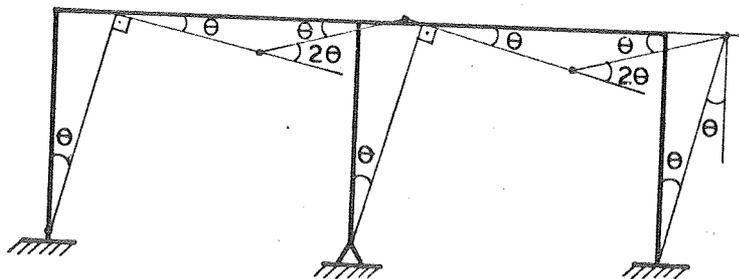
$$F \cdot 2\theta + 2F \cdot 3\theta + F \cdot 1,5\theta = 4M_p \theta + 5M_p \theta - 2M_p \theta$$

$$9,5F = 7M_p$$

$$F = 0,737M_p = 7,37\text{kN}$$

devido à rótula que fechou.

Mecanismos (1) + (4) + (2):



$$9,5F\theta + F \cdot 2\theta = 9M_p \theta + 4M_p \theta - 2 \cdot 2M_p \theta$$

$$11,5F = 9M_p$$

$$F = 0,783M_p = 7,83\text{kN}$$

Neste caso, os mecanismos combinados apresentam valores de F maior do que o mecanismo independente (4).

Portanto, parece que o mecanismo (4) é de colapso. Para ter certeza, é necessário uma verificação estática. Este mecanismo determina apenas 5 dos 10 momentos flectores.

$$M_1 = -M_p = -10\text{kNm}$$

$$M_2 = M_p = 10\text{kNm}$$

$$M_9 = M_p = 10\text{kNm}$$

$$M_7 = -M_p = -10\text{kNm}$$

$$M_8 = M_p = 10\text{kNm}$$

Verificando-se a relação de equilíbrio correspondente, com  $F = 6,67\text{kN}$ , tem-se:

$$7,5.6,67 = 10+10+10+10+10$$

$$50 = 50 \quad (\text{satisfeita identicamente})$$

Ainda restam 4 equações com 5 incógnitas. Pode-se adotar uma incógnita e determinar as outras.

Adotando  $M_4 = -M_p = -10\text{kNm}$ , e substituindo nas outras relações de equilíbrio, tem-se:

do mecanismo (1) :  $2.6,7 = -10+2M_3+10$

$$M_3 = 6,7\text{kNm} < M_p = 10\text{kNm}$$

do mecanismo (3) :  $1,5.6,7 = -10+2M_{10}$

$$M_{10} = 10\text{kNm} = M_p$$

do mecanismo (5) :  $0 = -10+10+M_5$

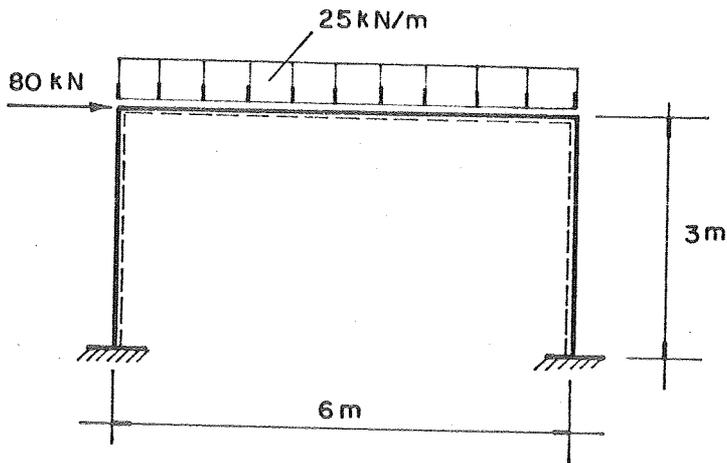
$$M_5 = 0 < M_p$$

do mecanismo (2) :  $2.6,7 = -0+2M_6+10$

$$M_6 = 1,7 < M_p$$

Portanto, esta distribuição adotada é estaticamente admissível. Pelo teorema da unicidade, o mecanismo de colapso é o mecanismo (4). A carga última é  $F_u = 6,67\text{kN}$ .

4.3 - Para a estrutura apresentada na figura abaixo, pede-se determinar o momento de plastificação total  $M_p$



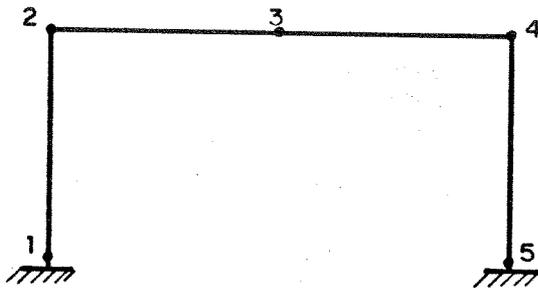
$M_p = \text{constante}$

Convenções:

$M > 0$  quando provoca tração no lado tracejado

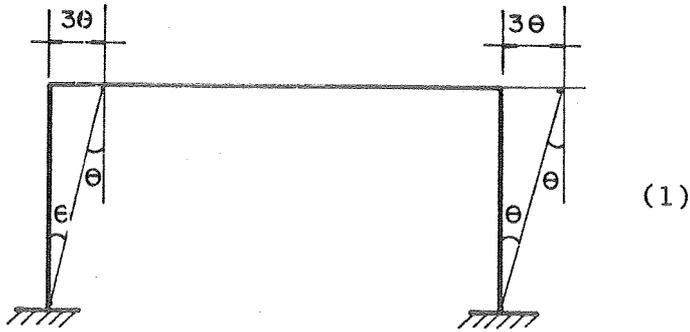
$\theta > 0$  quando provoca extensão no lado tracejado

No caso de carga distribuída, não se tem um número finito de rótulas plásticas possíveis. Admite-se a posição da rótula plástica em qualquer seção e por iteração determina-se a posição correta. Normalmente, com a rótula na seção do meio do vão carregado, chega-se a bons resultados.

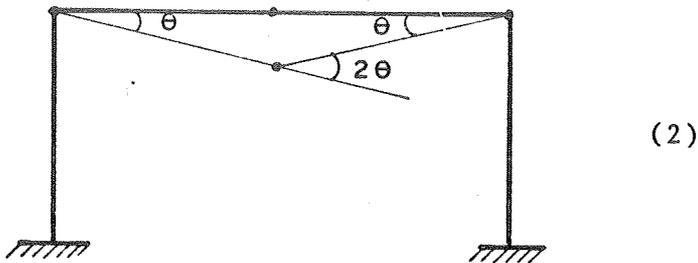


Nesta estrutura 3 vezes hiperestática, tem-se 5 rótulas plásticas possíveis, e portanto 2 mecanismos independentes.

a) Mecanismo lateral

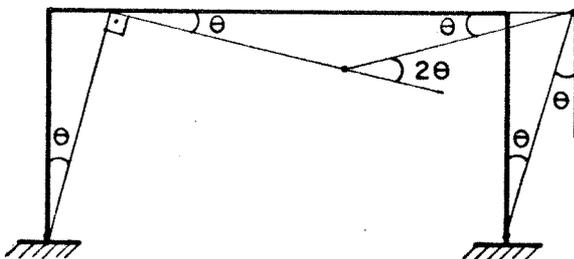


b) Mecanismo de viga



Mecanismo nº	Equações de trabalho	$M_p$ (kNm)	Relações de equilíbrio
1	$80 \cdot 3\theta = 4M_p \theta$	60,00	$240 = -M_1 + M_2 - M_4 + M_5$
2	$25 \cdot \frac{6}{2} \cdot 3\theta = 4M_p \theta$	56,25	$225 = -M_2 + 2M_3 - M_4$

Mecanismo combinado (1) + (2)



$$240.\theta + 225.\theta = 8M_p \theta - 2M_p \theta$$

$$465 = 6M_p$$

$$M_p = 77,50\text{kNm}$$

O mecanismo combinado apresenta  $M_p$  maior do que os mecanismos independentes. Portanto, parece que é de colapso.

Verificação estática para o mecanismo combinado

$$M_1 = -M_p$$

$$M_3 = M_p$$

$$M_4 = -M_p$$

$$M_5 = M_p$$

$$\text{Com } M_p = 77,50\text{kNm}$$

Substituindo estes valores nas relações de equilíbrio, tem-se:

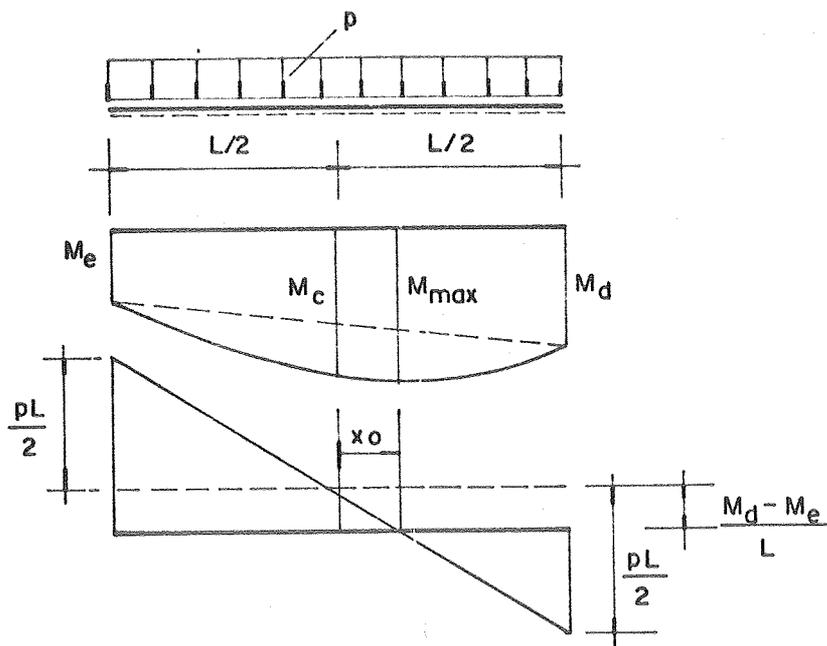
$$\text{mecanismo (1) : } 240 = 77,50 + M_2 + 77,50 + 77,50$$

$$M_2 = 7,50\text{kNm}$$

$$\text{mecanismo (2) : } 225 = -M_2 + 2 \cdot 77,50 + 77,50$$

$$M_2 = 7,5\text{kNm}$$

Portanto, a distribuição de momentos fletores é estatisticamente admissível para as rótulas plásticas nas posições adotadas. É necessário verificar nas posições fora das rótulas plásticas.

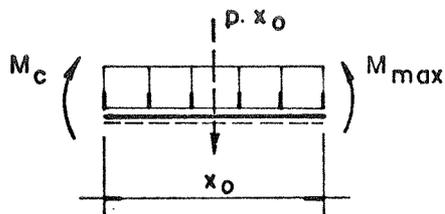


Por semelhança de triângulos

$$x_0 = \frac{M_d - M_e}{pL}$$

Considerando apenas o trecho de comprimento  $x_0$ ,

tem-se:



$$M_c + p \cdot x_0 \cdot \frac{x_0}{2} - M_{\max.} = 0$$

$$M_{\max.} = M_c + p \cdot \frac{x_0^2}{2}$$

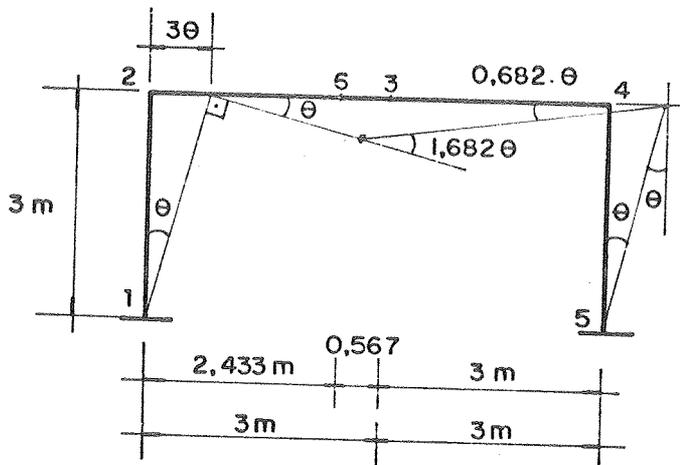
Portanto,

$$x_0 = \frac{-77,50 - 7,5}{25,6} = -0,567\text{m}$$

$$M_{\max.} = 77,50 + \frac{25 \cdot 0,567^2}{2} = 81,5 \text{ kNm} > M_p = 77,5 \text{ kNm}$$

Logo, esta distribuição de momentos fletores não é estaticamente admissível.

Para se obter melhores resultados, é feita uma verificação com a rótula plástica na seção do máximo momento fletor.



$$80 \cdot 3\theta + \frac{25 \cdot 6}{2} \cdot 2,433\theta = M_p \theta + M_p \cdot 1,682\theta + M_p \cdot 1,682\theta + M_p \theta$$

$$M_p = 78,76 \text{ kNm}$$

Verificação estática:

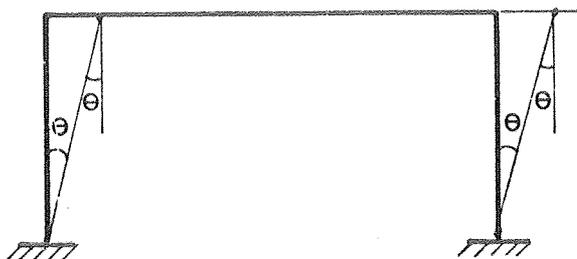
$$M_1 = -78,76 \text{ kNm}$$

$$M_6 = 78,76 \text{ kNm}$$

$$M_4 = -78,76 \text{ kNm}$$

$$M_5 = 78,76 \text{ kNm}$$

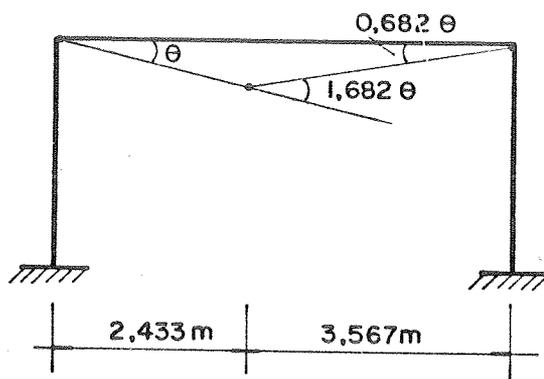
a) Mecanismo lateral



$$80.3\theta = (-M_1 + M_2 - M_4 + M_5) \cdot \theta$$

$$M_2 = +3,72 \text{ kNm}$$

b) Mecanismo de viga



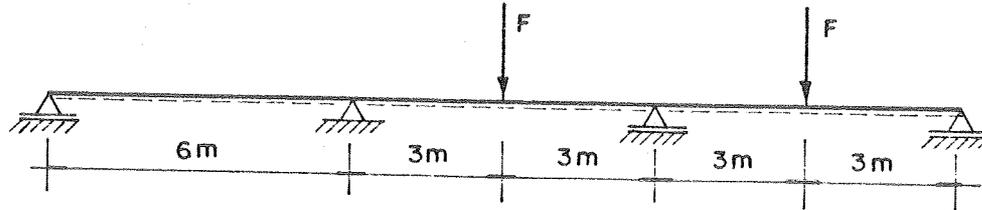
$$\frac{P \cdot L}{2} \cdot 2,433\theta = -M_2 \cdot \theta + M_6 \cdot 1,682\theta - M_4 \cdot 0,682\theta$$

$$\frac{25.6}{2} \cdot 2,433\theta = (-M_2 + 1,682 \cdot 78,76 + 0,682 \cdot 78,76) \cdot \theta$$

$$M_2 = 3,71 \text{ kNm}$$

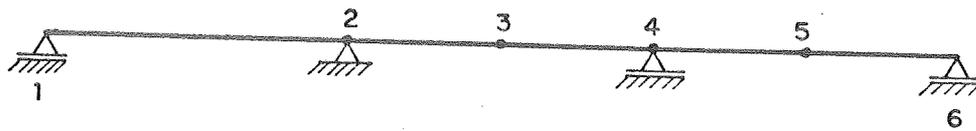
Desta forma, pode-se dizer que os resultados obtidos com a rótula plástica na seção do meio do vão, são satisfatórios. Quando se considera a rótula plástica na seção de máximo momento fletor, praticamente chega-se ao resultado exato.

4.4 - Determinar o mecanismo de colapso e a carga última para a viga da figura.

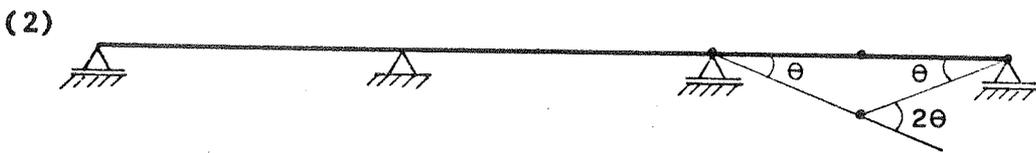
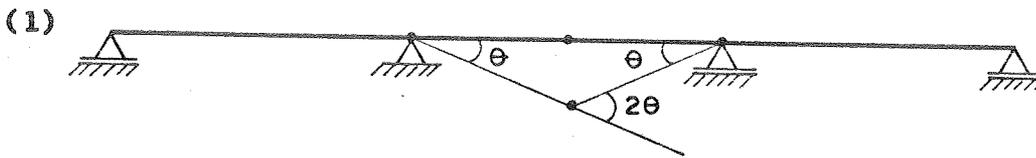


$M_p = 20\text{kNm}$  (constante)

Admite-se para esta viga, a possibilidade de se formar rótulas plásticas nas seções 2, 3, 4 e 5.



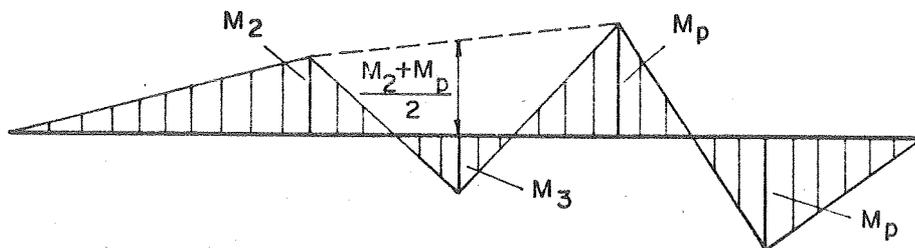
Com isto, são possíveis os seguintes mecanismos:



Mecanismo nº	Equações de trabalho	F (kN)	Relações de equilíbrio
(1)	$F \cdot 3\theta = 4M_p \cdot \theta$	26,67	$3F = -M_2 + 2M_3 - M_4$
(2)	$F \cdot 3\theta = 3M_p \cdot \theta$	20,00	$3F = -M_4 + 2M_5$

Através do teorema cinemático, tem-se que o mecanismo (2) é o de colapso, e a carga última é  $F_u = 20\text{kN}$ .

A viga apresentada é duas vezes hiperestática, e o mecanismo de colapso determina apenas 2 dos 4 momentos fletores. A distribuição de momentos fletores não é estaticamente determinada, portanto, o colapso é parcial.



$$\frac{M_2 + M_p}{2} + M_3 = \frac{F \cdot L}{4}$$

$$\frac{M_2 + 20}{2} + M_3 = \frac{20 \cdot 6}{4}$$

$$0,5M_2 + 10 + M_3 = 30$$

$$0,5M_2 + M_3 = 20 \quad (I)$$

Obtêm-se distribuições de momentos fletores estaticamente admissíveis que obedecem as relações de equilíbrio para valores de  $M_2$  e  $M_3$  menores que  $M_p$  e satisfazendo a expressão (I):

Por exemplo, admitindo-se valores extremos para  $M_2$ , resultam distribuições de momentos fletores estaticamente admissíveis.

a)  $M_2 = M_p = 20 \text{ kNm}$

Logo;  $0,5 \cdot 20 + M_3 = 20$

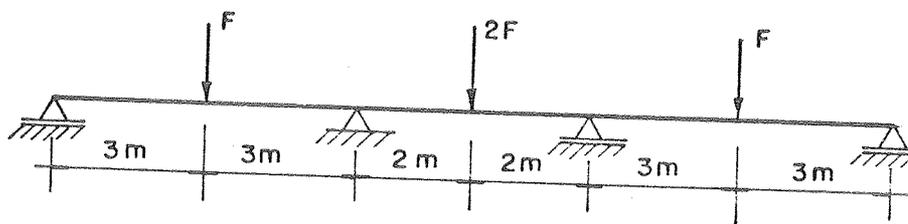
$$M_3 = 10 \text{ kNm} < M_p$$

b)  $M_2 = 0$

$$0,5 \cdot 0 + M_3 = 20$$

$$M_3 = 20 \text{ kNm} = M_p$$

4.5 - Determinar o mecanismo de colapso e a carga última para a viga da figura.

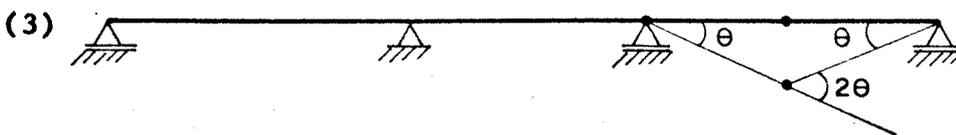
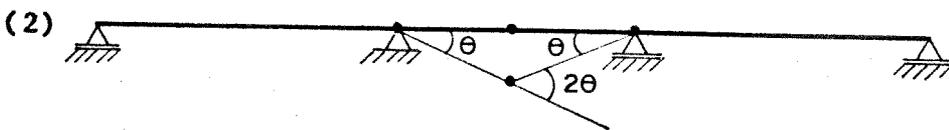
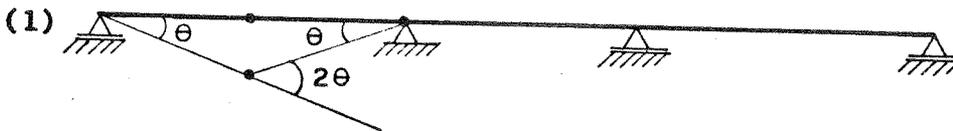


$$M_p = 10 \text{ kNm (constante)}$$

Admite-se a formação de rótulas plásticas nas seções 2, 3, 4, 5 e 6.



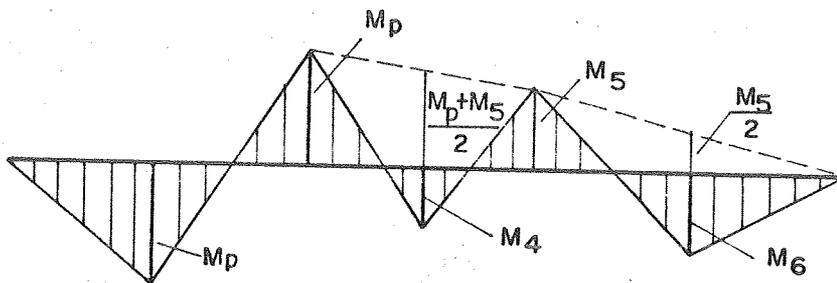
Mecanismos possíveis:



Mecanismo nº	Equações de trabalho	F (kN)	Relações de equilíbrio
(1)	$F \cdot 3\theta = 3M_p \theta$	10,0	$3F = 2M_2 - M_3$
(2)	$2F \cdot 2\theta = 4M_p \theta$	10,0	$4F = -M_3 + 2M_4 - M_5$
(3)	$F \cdot 3\theta = 3M_p \theta$	10,0	$3F = -M_5 + 2M_6$

Pelo teorema cinemático, tem-se que os mecanismos (1), (2) e (3) são de colapso, com a carga última  $F_u = 10\text{kN}$ .

Mecanismo (1)



$$a) \quad \frac{M_p + M_5}{2} + M_4 = \frac{2FL}{4}$$

$$\frac{10 + M_5}{2} + M_4 = \frac{2 \cdot 10 \cdot 4}{4}$$

$$0,5M_5 + M_4 = 15 \quad (I)$$

$$b) \quad \frac{M_5}{2} + M_6 = \frac{FL}{4}$$

$$\frac{M_5}{2} + M_6 = \frac{10 \cdot 6}{4}$$

$$0,5M_5 + M_6 = 15 \quad (II)$$

Adotando  $M_5$ , obtêm-se  $M_4$  e  $M_6$  das expressões (I) e (II).

Por exemplo, com  $M_5 = M_p = 10\text{kNm}$ , tem-se:

de (I):  $0,5 \cdot 10 + M_4 = 15$

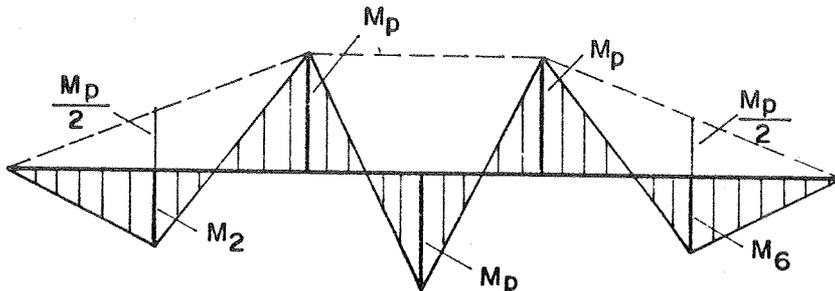
$$M_4 = 10\text{kNm} = M_p$$

de (II):  $0,5 \cdot 10 + M_6 = 15$

$$M_6 = 10\text{kNm} = M_p$$

Esta distribuição de momentos fletores é estaticamente admissível e obedece as relações de equilíbrio.

Mecanismo (2)



a)  $\frac{M_p}{2} + M_2 = \frac{FL}{4}$

$$\frac{10}{2} + M_2 = \frac{10 \cdot 6}{4}$$

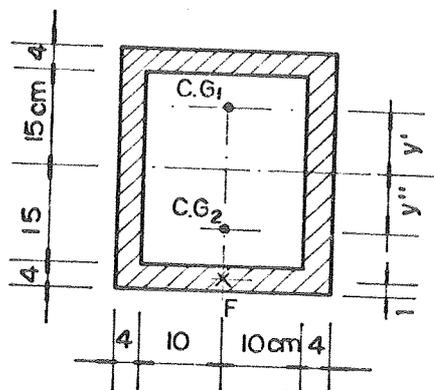
$$M_2 = 15 - 5 = 10\text{kNm} = M_p$$

b) Analogamente,  $M_6 = M_p$

Esta distribuição de momentos fletores é estaticamente admissível e obedece as relações de equilíbrio.

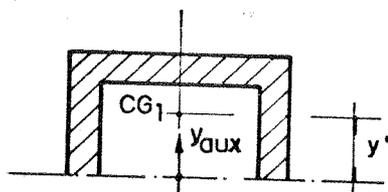
Portanto, para esta viga o colapso ocorre em mais de um mecanismo, caracterizando o colapso redundante.

4.6 - Determinar o máximo valor da carga  $F$  em regime elástico plástico. A tensão de escoamento do aço é  $\sigma_e = 25 \text{ kN/cm}^2$ .



$$A = 38.28 - 30.20 = 464 \text{ cm}^2$$

$$Z = \frac{A}{2} (y' + y'')$$



$$y_{CG1} = \frac{2.4.19.9.5 + 20.4.17}{2.4.19 + 20.4} = 12.09 \text{ cm}$$

$$y' = y'' = y_{CG1} = 12.09 \text{ cm}$$

$$Z = \frac{464}{2} (12.09 + 12.09) = 5610 \text{ cm}^3$$

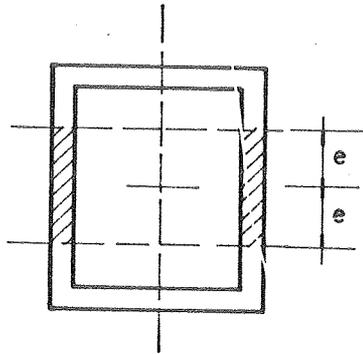
$$N_p = A \cdot \sigma_e = 464 \cdot 25 = 11600 \text{ kN}$$

$$M_N = F \cdot 17$$

$$N = F$$

$$M_p = Z \cdot \sigma_e = 5610 \cdot 25 = 140245 \text{ kNcm}$$

1<sup>a</sup> hipótese:  $e \leq 15 \text{ cm}$



$$A_e = 2 \cdot 4 \cdot 2e = 16e$$

$$Z_e = \frac{16 \cdot e}{2} \left( 2 \cdot \frac{e}{2} \right) = 8e^2$$

$$\frac{M_N}{M_p} = 1 - \frac{Z_e}{Z}$$

$$\frac{17F}{140245} = 1 - \frac{8e^2}{5610}$$

$$\frac{N}{N_p} = \frac{A_e}{A}$$

$$\frac{F}{11600} = \frac{16e}{464}$$

$$e = 0,0025F$$

$$F = 8250 - 11,765 (0,0025F)^2$$

$$F^2 + 13600F - 1,122 \cdot 10^8 = 0$$

$$F = \frac{-13600 \pm 25174}{2}$$

$$F_1 = 5787 \text{ kN}$$

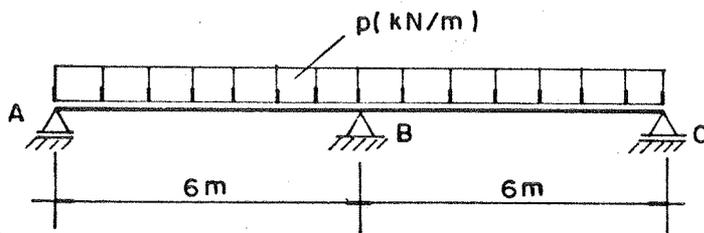
$$F_2 = -19387 \text{ kN}$$

$$\therefore e = 0,0025 \cdot 5787 = 14,47 \text{ cm} < 15 \text{ cm}$$

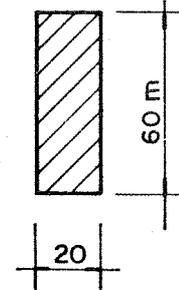
Portanto,

$$F = 5787 \text{ kN}$$

4.7 - Verificar a segurança da estrutura apresentada na figura abaixo, pelo método das rotações impostas.



seção transversal



Dados:

$$\text{Aço CA-50A} \quad \gamma_s = 1,15$$

$$f_{ck} = 18 \text{ MPa} \quad \gamma_c = 1,4$$

$$E_s = 210000 \text{ MPa}$$

Carga permanente  $g_k = 15 \text{ kN/m}$

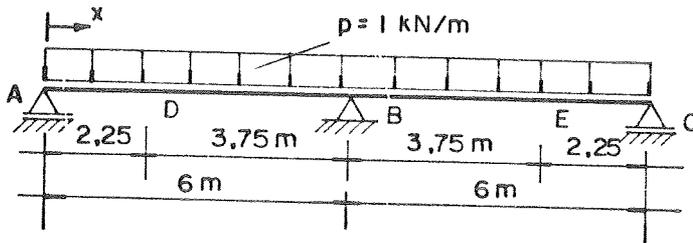
Carga acidental  $q_k = 10 \text{ kN/m}$

Armaduras:

no apoio  $A_s = 5 \text{ cm}^2$  ( $4\phi 12,5$ )

nos tramos  $A_s = 6 \text{ cm}^2$  ( $3\phi 16$ )

Cálculo do efeito elástico de um carregamento unitário



Das tabelas do anexo I, tem-se:

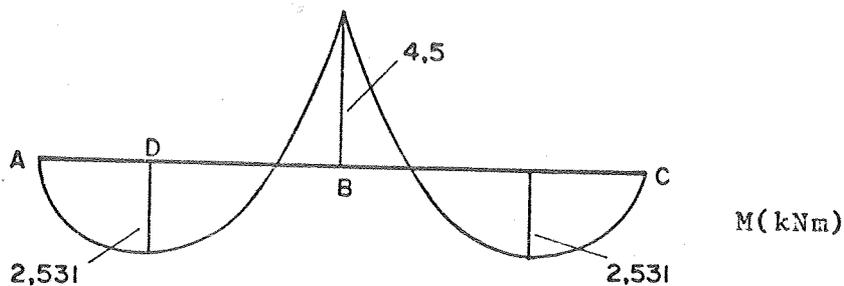
$$M_{BC} = -M_{BA} = \frac{1,6^2}{8} = 4,5 \text{ kNm}$$

$$R_A = R_C = 1,3 - \frac{4,5}{6} = 2,25 \text{ kN}$$

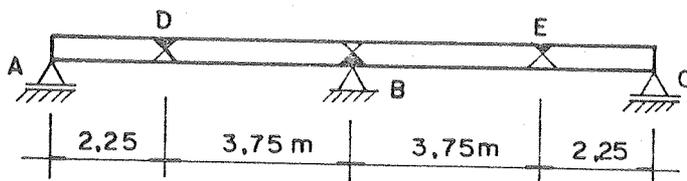
$$V(x) = R_A - p \cdot x = 0$$

$$x = \frac{R_A}{p} = \frac{2,25}{1,0} = 2,25 \text{ m}$$

$$M_D = M_E = 2,25 \cdot 2,25 - 1,0 \cdot \frac{2,25^2}{2} = 2,531 \text{ kNm}$$



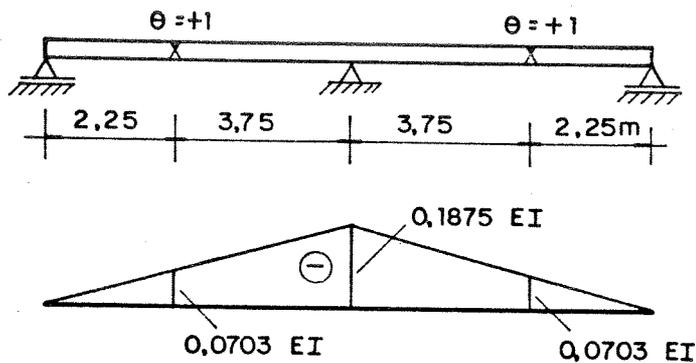
Admitem-se as seções críticas nas seguintes posições:



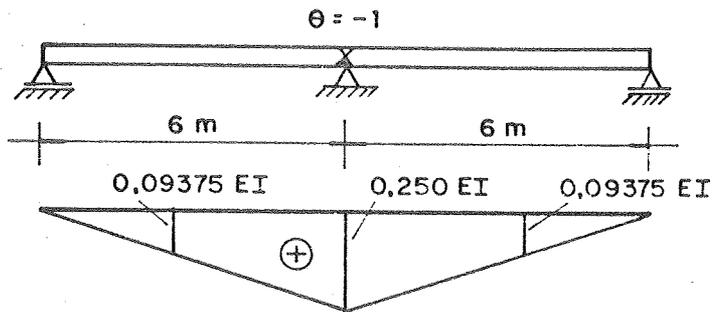
Cálculo do efeito das rotações unitárias nas seções críticas.

Utilizando as tabelas do anexo II, tem-se os diagramas de momentos fletores:

a) Rotação unitária positiva nas seções D e E



b) Rotação unitária negativa na seção B

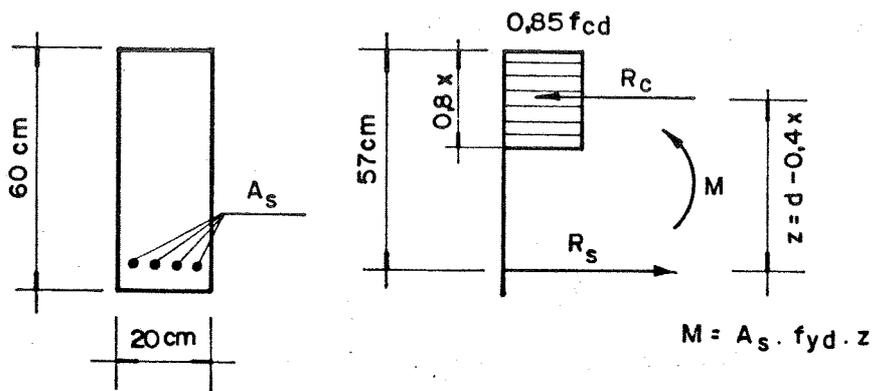


Cálculo dos momentos resistentes últimos

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{1,8}{1,4} = 1,29 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{50}{1,15} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

a) Seções D e E :  $A_s = 5,0 \text{ cm}^2$  ( $4\phi 12,5$ )



$$0,85 f_{cd} \cdot 0,8x \cdot b = A_s \cdot f_{yd}$$

$$0,85 \cdot 1,29 \cdot 0,8x \cdot 20 = 5,0 \cdot 43,5$$

$$x = 12,4 \text{ cm}$$

$$z = 57 - 0,4 \cdot 12,4 = 52,0 \text{ cm}$$

$$M_{uD} = M_{uE} = 5,0 \cdot 43,5 \cdot 52,0 = 11319 \text{ kNcm} = 113,2 \text{ kNm}$$

b) Seção B :  $A_s = 6,0 \text{ cm}^2$  (3 $\phi$ 16)

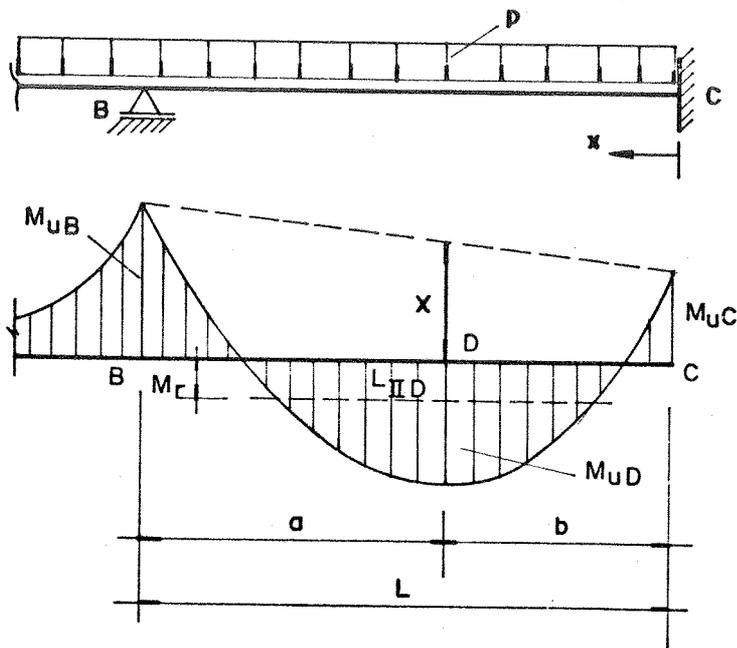
$$0,85 \cdot 1,29 \cdot 0,8 \times 20 = 6,43,5$$

$$x = 14,9 \text{ cm}$$

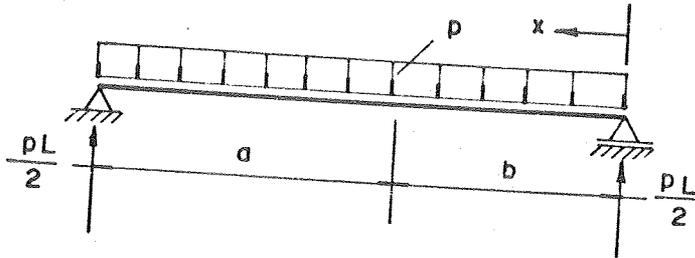
$$z = 57 - 0,4 \cdot 14,9 = 51,0 \text{ cm}$$

$$M_{uB} = 6,43,5 \cdot 51,0 = 13311 \text{ kNcm} = 133,1 \text{ kNm}$$

Observação: Ao se traçar o diagrama de momento atuante último, respeitando-se os momentos fletores das seções críticas, pode-se considerar a carga  $p$ , da seguinte maneira:



$$x = \frac{M_{uB}}{L} \cdot a + M_{uC} \left(1 - \frac{b}{L}\right)$$



$$M_{(x=b)} = \frac{pL}{2} \cdot b - p \cdot b \cdot \frac{b}{2} = \frac{pb}{2}(L-b) = \frac{pb \cdot a}{2}$$

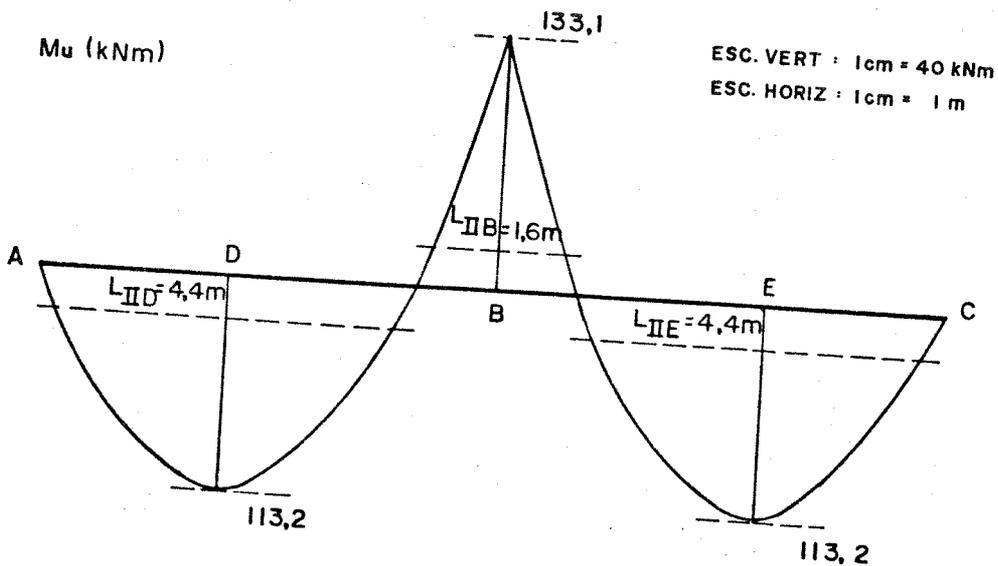
$$M_{(x=b)} - X = M_{uD}$$

$$\frac{p \cdot ba}{2} - \left[ \frac{M_{uB}}{L} + M_{uC} \left( 1 - \frac{b}{L} \right) \right] = M_{uD}$$

$$p = \frac{2}{ba} \cdot \left[ M_{uD} + \frac{M_{uB}}{L} + M_{uC} \left( 1 - \frac{b}{L} \right) \right]$$

Observe-se que pequenas diferenças no comprimento  $L_{II}$ ,  
influi muito pouco no cálculo das rotações.

DIAGRAMA DO MOMENTO ATUANTE ÚLTIMO



Cálculo da rigidez à flexão

$$E_c = 6600 \sqrt{f_{cj}} \text{ (MPa)}$$

$$f_{cj} = f_{ck} + 3,5 \text{ (MPa)}$$

$$E_c = 6600 \sqrt{18+3,5} = 30603 \text{ MPa} = 3060 \text{ kN/cm}^2$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 60^3}{12} = 360000 \text{ cm}^4$$

$$E_c \cdot I = 1,1016 \cdot 10^9 \text{ kNcm}^2 = 1,1016 \cdot 10^5 \text{ kNm}^2$$

Construção dos diagramas momento fletor-rotação inelástica

Primeiro trecho

$$f_{tk} = \frac{f_{ck}}{10} = \frac{1,8}{10} = 0,18 \text{ kN/cm}^2$$

$$M_r = \frac{f_{tk} \cdot I}{y} = \frac{0,18 \cdot 360000}{30} = 2160 \text{ kNcm} = 21,6 \text{ kNm}$$

Segundo trecho

$$x = \frac{\alpha_e \cdot A_s}{b} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2bd}{\alpha_e A_s}} \right)$$

Considera-se  $\alpha_e = 15$

a) Seções D e E

$$x = \frac{15 \cdot 5,0}{20} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20 \cdot 57}{15 \cdot 5}} \right) = 17,3 \text{ cm}$$

$$z = d - \frac{x}{3} = 57 - \frac{17,3}{3} = 51,2 \text{ cm}$$

$$M_e = A_s \cdot f_{yd} \cdot z = 5,0 \cdot 43,5 \cdot 51,2 = 11136 \text{ kNcm} = 111,4 \text{ kNm}$$

$$\Delta M = M_e - M_r = 11136 - 2160 = 8976 \text{ kNcm}$$

$$I_{II} = A_s \cdot z(d-x) = 5,0 \cdot 51,2(57-17,3) = 10163 \text{ cm}^4$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta M}{E_s I_{II}} - \frac{\Delta M}{E_c I} = \frac{8976}{21000 \cdot 10163} - \frac{8976}{1,1016 \cdot 10^9} = 3,34 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

$$\theta_1 = \frac{2}{3} \cdot L_{II} \cdot \frac{1}{r} = \frac{2}{3} \cdot 440 \cdot 3,34 \cdot 10^{-5} = 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

b) Seção B

$$x = \frac{15,6,0}{20} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20 \cdot 57}{15,6}} \right) = 18,6 \text{ cm}$$

$$z = 57 - \frac{18,6}{3} = 50,8 \text{ cm}$$

$$M_e = 6,0 \cdot 43,5 \cdot 50,8 = 13259 \text{ kNcm} = 132,6 \text{ kNm}$$

$$\Delta M = 13259 - 2160 = 11099 \text{ kNcm}$$

$$I_{II} = 6,0 \cdot 50,8(57-18,6) = 11704 \text{ cm}^4$$

$$\frac{1}{r} = \frac{11099}{21000 \cdot 11704} - \frac{11099}{1,1016 \cdot 10^9} = 3,51 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 3,51 \cdot 10^{-5} = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

Terceiro trecho

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yk}}{b \cdot d \cdot f_{ck}}$$

Com o valor de  $\omega$  na Fig. 3.4.14, determinam-se  $\theta_{\min.}$  e  $\theta_{\max.}$

a) Seções D e E

$$\omega = \frac{5,0 \cdot 50}{20 \cdot 57 \cdot 1,8} = 0,12$$

$$\theta_{\min.} = 27 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{\max.} = 140 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

Logo,

$$\theta_{us} = \theta_1 + \theta_{\min.} = 9,8 \cdot 10^{-3} + 27 \cdot 10^{-3} = 36,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{ui} = \theta_1 + \theta_{\max.} = 9,8 \cdot 10^{-3} + 140 \cdot 10^{-3} = 149,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

b) Seção B

$$\omega = \frac{6,0 \cdot 50}{20 \cdot 57 \cdot 1,8} = 0,15$$

$$\theta_{\min.} = 24 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{\max.} = 115 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

Logo,

$$\theta_{us} = 2,8 \cdot 10^{-3} + 24 \cdot 10^{-3} = 26,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{ui} = 2,8 \cdot 10^{-3} + 115 \cdot 10^{-3} = 117,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

Diagrama momento fletor-rotação inelástica das seções D e E

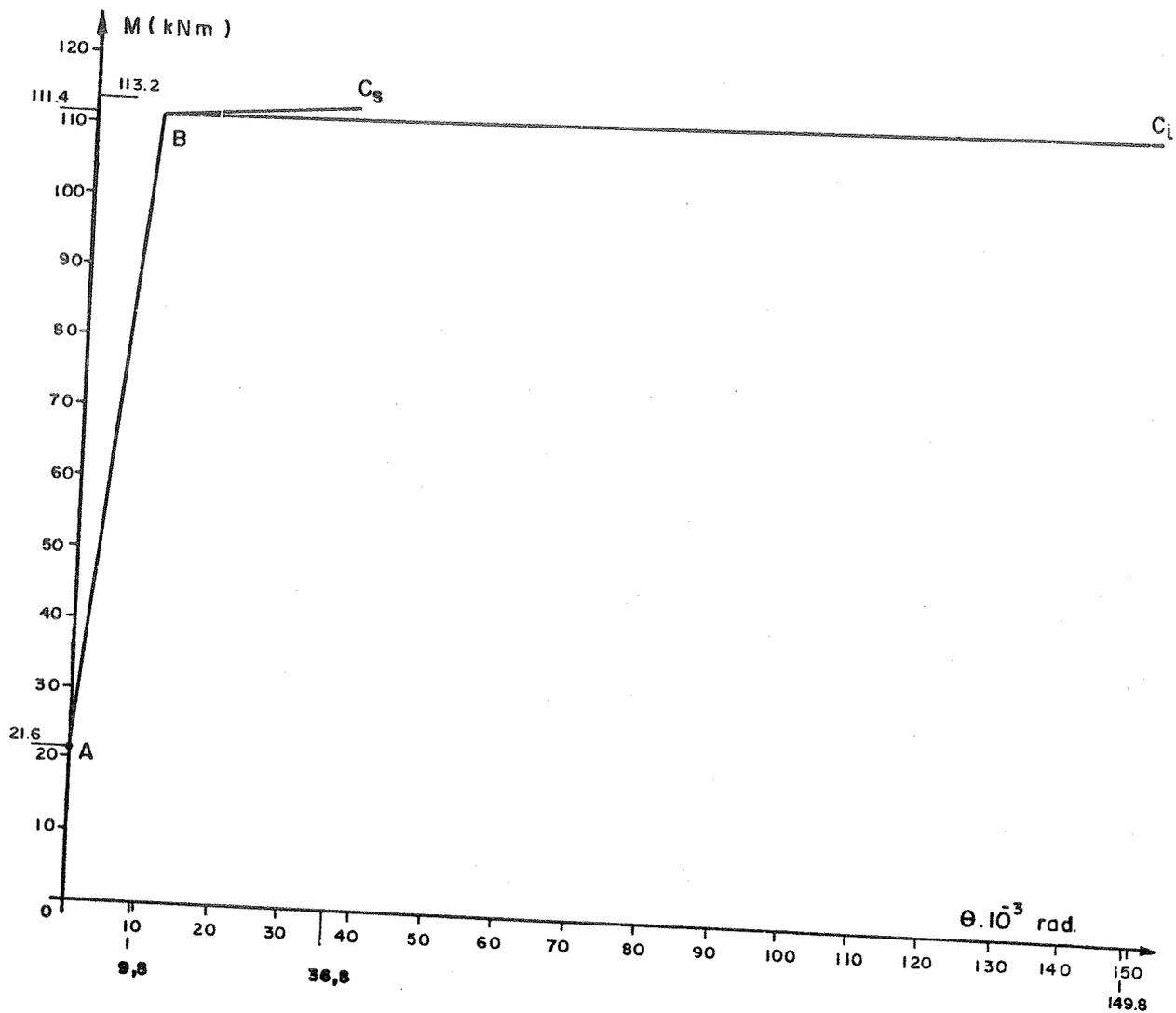
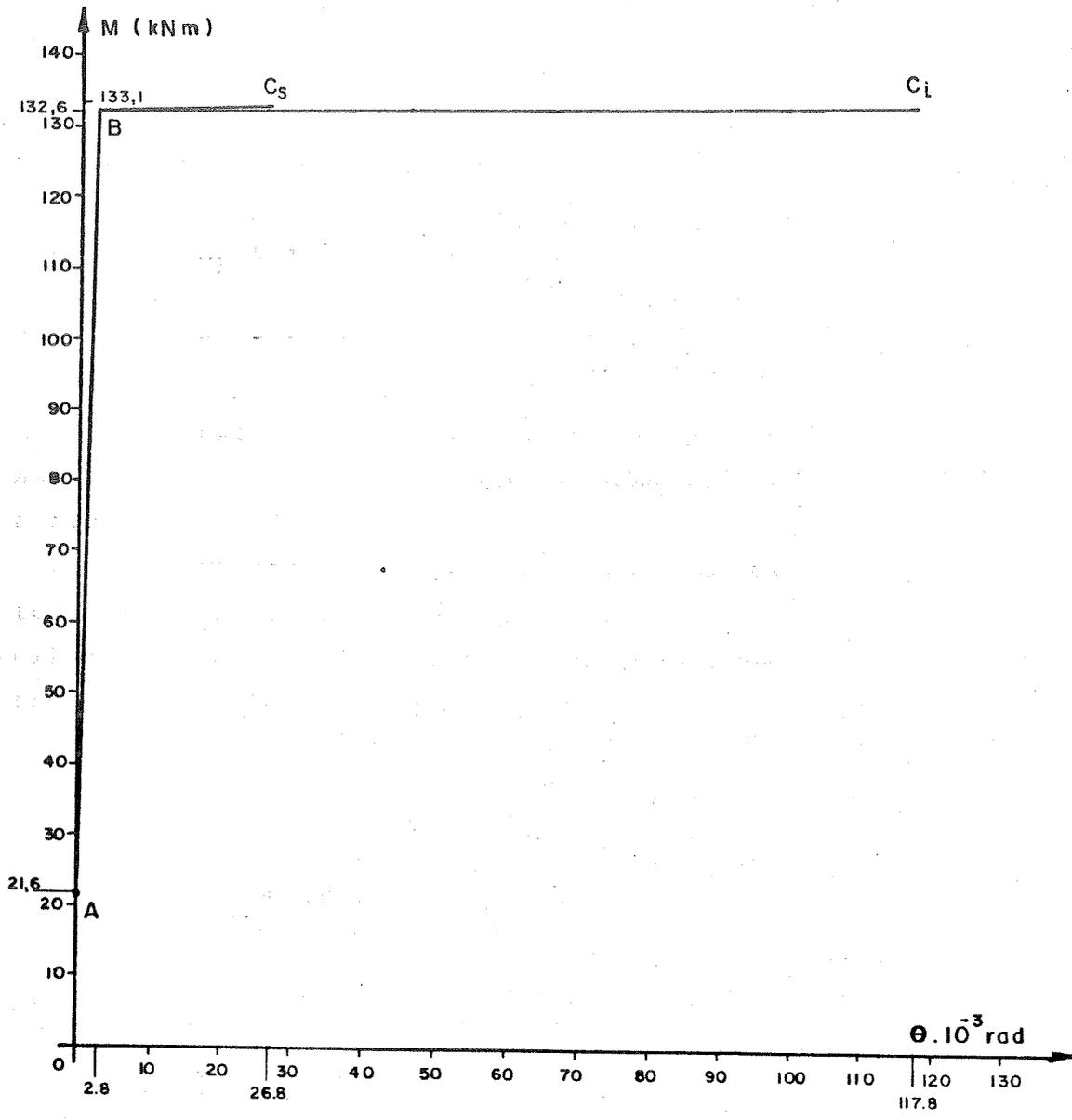


Diagrama momento fletor-rotação inelástica da seção B



VERIFICAÇÃO DO ESTADO LIMITE ÚLTIMO

Carga permanente -  $\gamma_g = 1,40$

$$g = \gamma_g \cdot g_k = 1,40 \cdot 15 = 21 \text{ kN/m}$$

Carga acidental - admite-se inicialmente  $\gamma_q = \gamma_g = 1,4$

$$q = \gamma_q \cdot q_k = 1,40 \cdot 10 = 14 \text{ kN/m}$$

Momentos fletores nas seções críticas:

$$M_B = -4,5(21+14) = -157,5 \text{ kNm}$$

$$M_D = M_E = 2,531(21+14) = 88,6 \text{ kNm}$$

Excede-se o momento resistente último na seção B. Admite-se uma redistribuição de momentos fletores, conforme a figura seguinte.

As rotações inelásticas correspondentes aos momentos fletores totais das seções críticas, são obtidas dos diagramas momentos fletores - rotações inelásticas, já construídos.

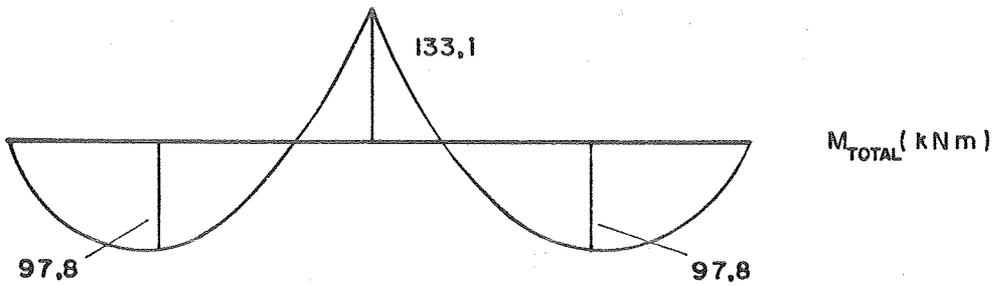
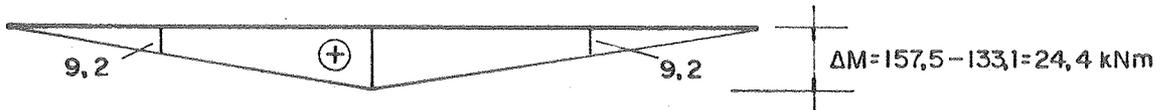
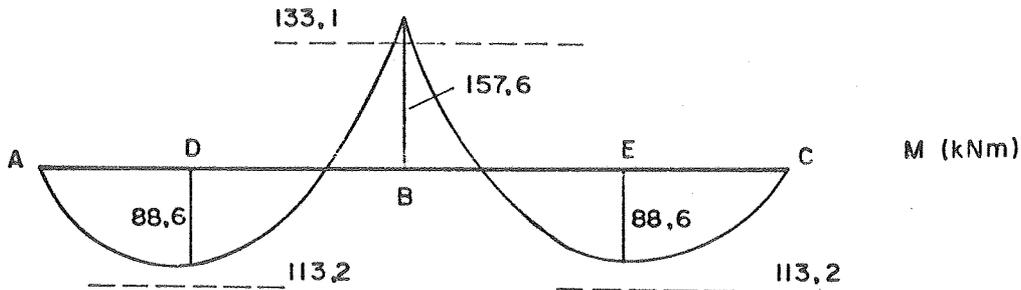
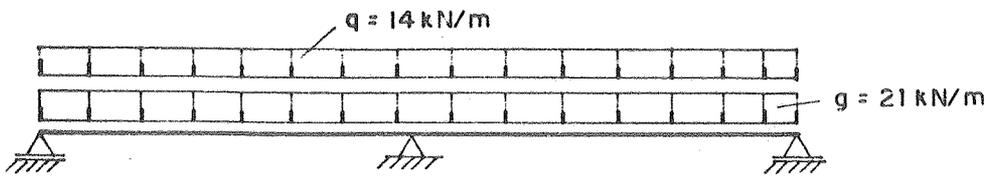
$$M_B = 133,1 \text{ kNm}$$

$$\theta_{us} = 26,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{ui} = 117,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$M_D = M_E = 97,8 \text{ kNm}$$

$$\theta_{us} = \theta_{ui} = 8,0 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$



$$\Delta M_{\min.} = 1,1016 \cdot 10^5 (-0,1875 \cdot 8, 0 + 0,250 \cdot 26,8) \cdot 10^{-3} = 573 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_{\max.} = 1,1016 \cdot 10^5 (-0,1875 \cdot 8, 0 + 0,250 \cdot 117,8) \cdot 10^{-3} = 3079 \text{ kNm}$$

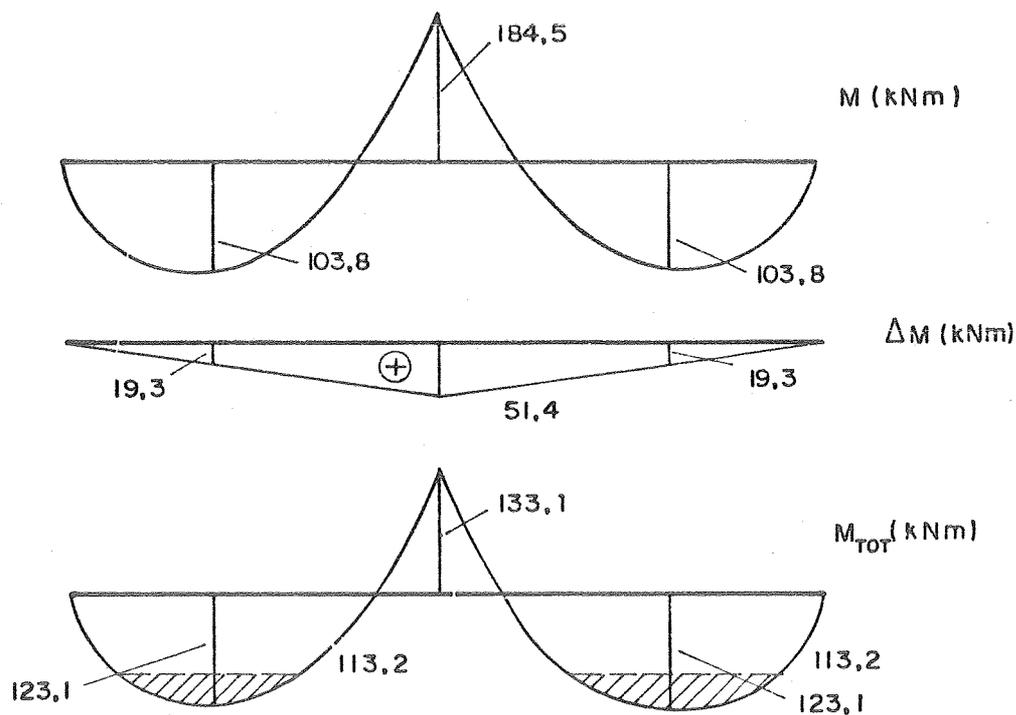
$\Delta M_{\min.}$  e  $\Delta M_{\max.}$  são de mesmo sinais e maiores que  $\Delta M$ . Isto significa que é possível obter uma configuração estaticamente admissível e compatível, com um coeficiente  $\gamma_q > \gamma_g$ .

Adotando  $\gamma_q = 2,0$ ; tem-se:

$$p = 21 + 2,0 \cdot 10 = 41 \text{ kN/m}$$

$$M_B = -4,5 \cdot 41 = 184,5 \text{ kNm}$$

$$M_D = M_E = 2,531 \cdot 41 = 103,8 \text{ kNm}$$



O coeficiente  $\gamma_q$  deve ser menor que 2,0, pois  $M_D$  e  $M_E$  excederam os valores limites, e o momento fletor em B é o máximo que a seção pode resistir.

Por tentativas, com  $\gamma_q = 1,732$ , tem-se:

$$p = 21 + 1,732 \cdot 10 = 38,32 \text{ kN/m}$$

$$M_B = -4,5 \cdot 38,32 = -172,4 \text{ kNm}$$

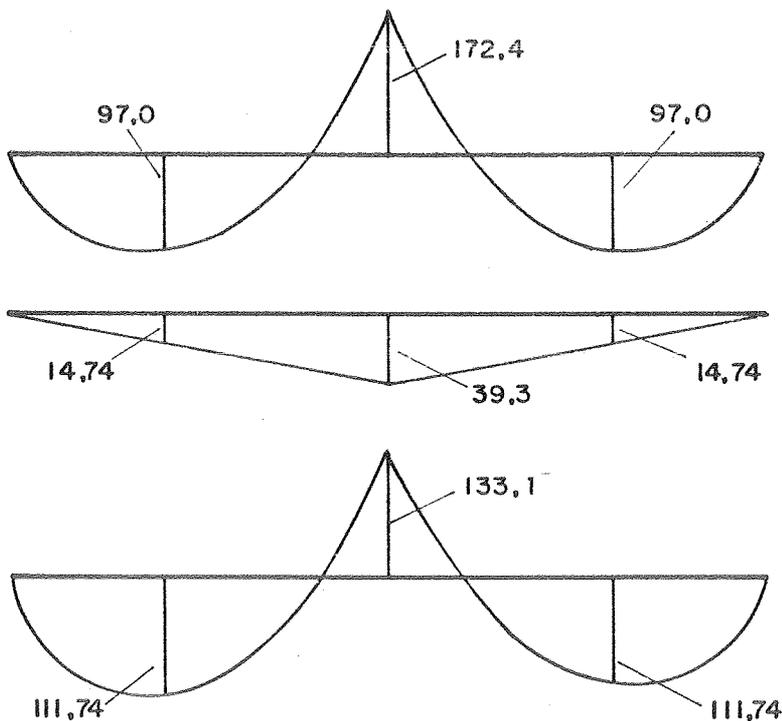
$$M_D = M_E = 2,531 \cdot 38,32 = 97,0 \text{ kNm}$$

Conforme o diagrama de momentos fletores totais, da figura seguinte, tem-se:

$$M_D = M_E = 111,74 \text{ kNm}$$

$$\theta_{us} = 14 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{ui} = 34 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

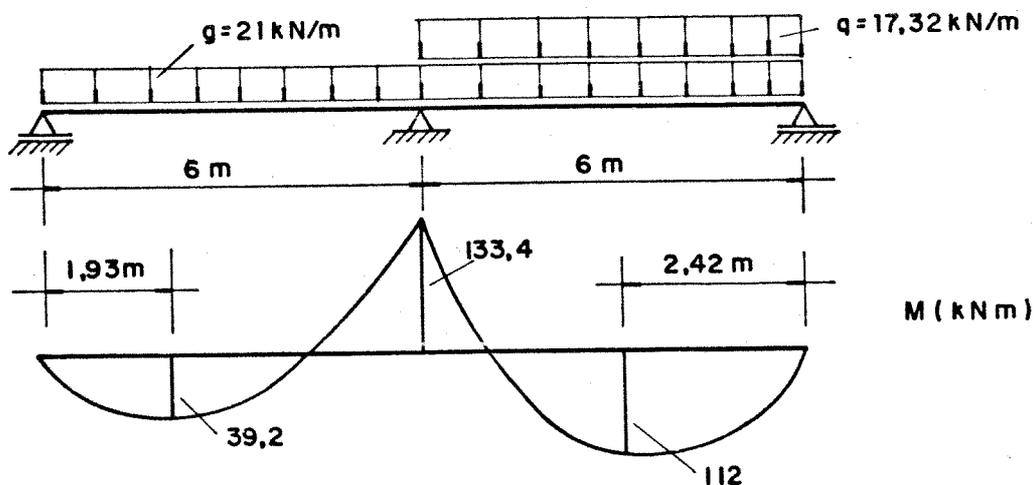


$$\Delta M_{\min.} = 1,1016 \cdot 10^{+5} (-0,1875 \cdot 34 + 0,250 \cdot 26,8) \cdot 10^{-3} = 35,8 \text{ kNm}$$

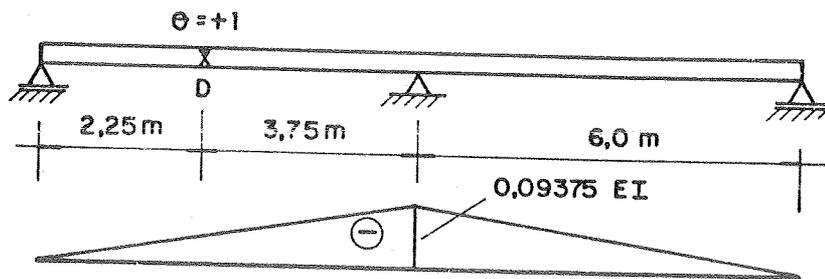
$$\Delta M_{\max.} = 1,1016 \cdot 10^{+5} (-0,1875 \cdot 13 + 0,250 \cdot 117,8) \cdot 10^{-3} = 2975,7 \text{ kNm}$$

Esta configuração de momentos fletores é estaticamente admissível e compatível, pois  $\Delta M = 39,3 \text{ kNm}$  é maior que  $\Delta M_{\min.}$  e menor do que  $\Delta M_{\max.}$ . O valor de  $\Delta M$  é aproximadamente igual a  $\Delta M_{\min.}$ , o que proporciona maior economia para a estrutura.

É feita uma verificação do estado limite último, para a sobrecarga atuando apenas em um dos tramos da viga, e com o coeficiente  $\gamma_q = 1,732$ .



Admitindo-se, de forma aproximada, as seções críticas em D, B e E, tem-se o diagrama de momentos fletores para as rotações em D e E, através da equação dos 3 momentos.



Portanto,

$$M_B = 133,4 \text{ kNm} \approx M_{uB} = 133,1 \text{ kNm}$$

$$\theta_{us} = 26,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{ui} = 117,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$M_E = 112 \text{ kNm}$$

$$\theta_{us} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{ui} = 69,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$M_D = 39,2 \text{ kNm}$$

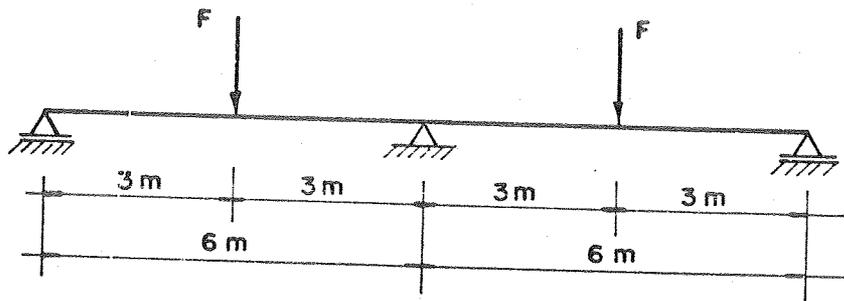
$$\theta_{us} = \theta_{ui} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{\min.} &= 1,1016 \cdot 10^{+5} (0,25 \cdot 26,8 - 0,09375 \cdot 1,8 - 0,09375 \cdot 69,5) \cdot 10^{-3} = \\ &= 1,7 \text{ kNm} \approx 0 \end{aligned}$$

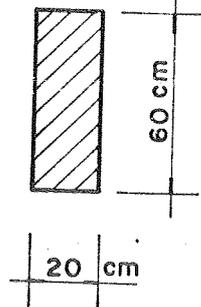
$$\begin{aligned} \Delta M_{\max.} &= 1,1016 \cdot 10^{+5} (0,25 \cdot 117,8 - 0,09375 \cdot 1,8 - 0,09375 \cdot 20) \cdot 10^{-3} = \\ &= 3019 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Logo, existe a compatibilidade das deformações.

4.7 - Verificar a segurança da viga da figura pelo método das rotações impostas.



seção transversal



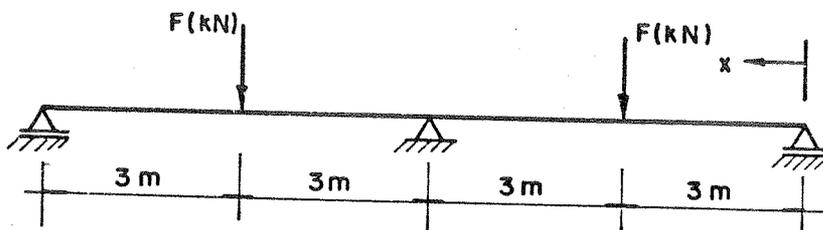
Dados:

$$\text{Aço CA-50A} \quad \gamma_s = 1,15$$

$$f_{ck} = 18\text{MPa} \quad \gamma_c = 1,4$$

$$E_s = 210000\text{MPa}$$

Cálculo do efeito elástico de um carregamento F

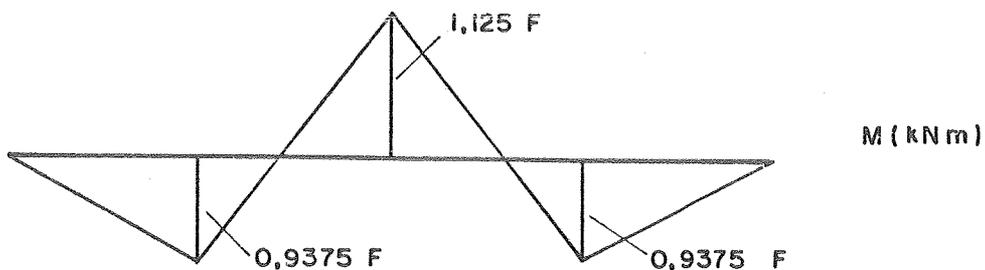


Das tabelas do anexo I, tem-se:

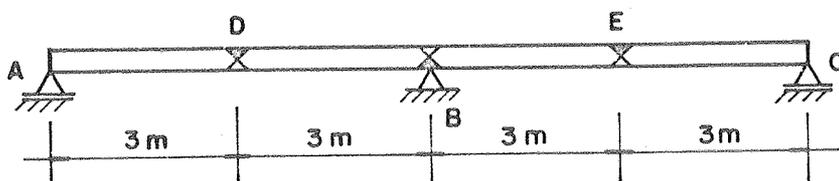
$$M_{BC} = -M_{BA} = \frac{F \cdot 3 \cdot 3}{2} \left( \frac{6+3}{6} \right) = 1,125F$$

$$V(x) = \frac{F}{2} - \frac{1,125F}{6} = 0,3125F \quad (\text{para } x \leq 3\text{m})$$

$$M_{(x=3\text{m})} = 0,3125 \cdot 3 \cdot F = 0,9375F$$



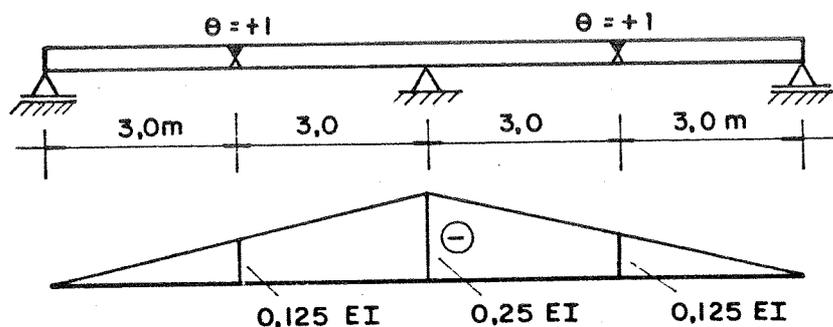
Admitem-se as seções críticas nas seguintes posições:



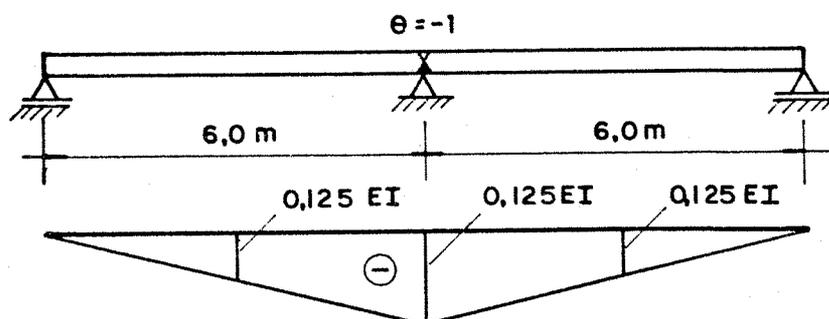
Cálculo do efeito das rotações unitárias nas seções críticas.

Utilizando as tabelas do anexo II, tem-se os diagramas de momentos fletores:

a) Rotação unitária positiva nas seções D e E



b) Rotação unitária negativa na seção B



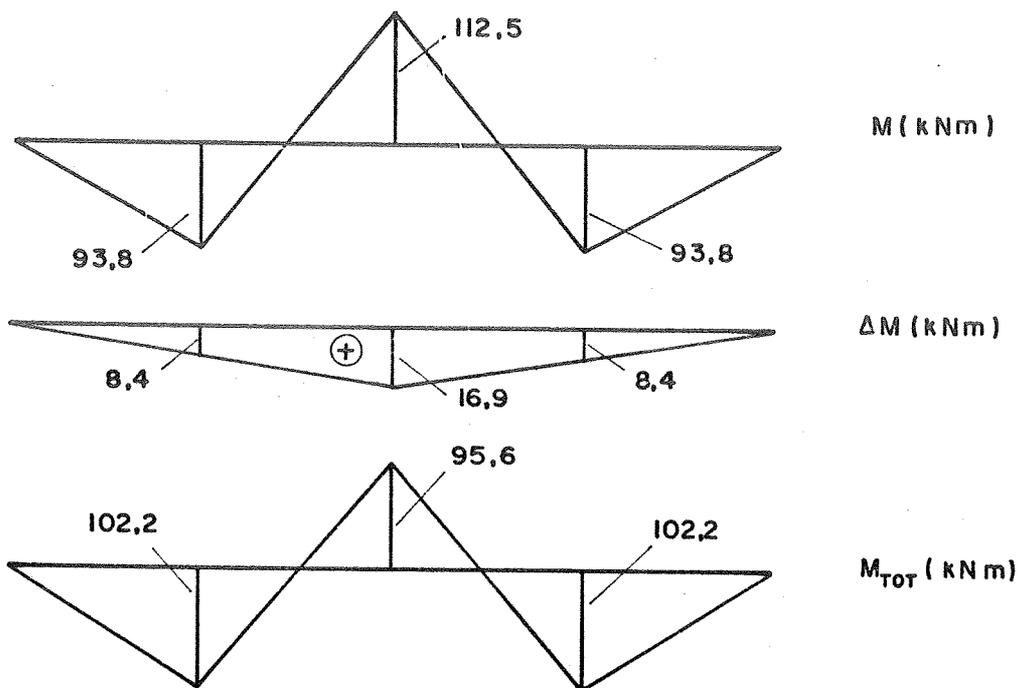
Cálculo da rigidez à flexão:

$$E_c = 6600 \sqrt{18+3,5} = 30603 \text{ MPa} = 3060 \text{ kN/cm}^2$$

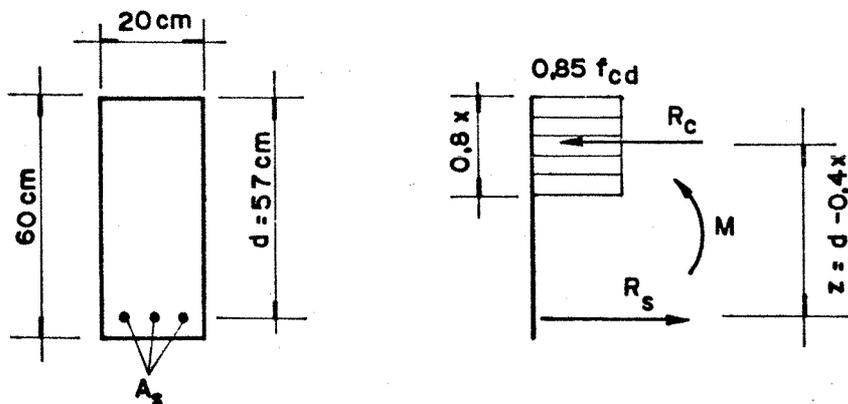
$$I = \frac{20 \cdot 60^3}{12} = 360000 \text{ cm}^4$$

$$E_c \cdot I = 1,1016 \cdot 10^9 \text{ kNcm}^2 = 1,1016 \cdot 10^5 \text{ kNm}^2$$

Adotando  $F = 100 \text{ kN}$ , e admitindo uma redução de 15% no momento fletor do apoio B, tem-se:



Pré-dimensionamento das armaduras:



$$0,85f_{cd} \cdot 0,8x \cdot b = A_s \cdot f_{yd} \quad (I)$$

$$M = R_c \cdot z = R_s \cdot z$$

$$M = A_s \cdot f_{yd} (d - 0,4x)$$

$$A_s = \frac{M}{f_{yd} (d - 0,4x)} \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I):

$$0,85f_{cd} \cdot 0,8x \cdot b = \frac{M}{d - 0,4x}$$

$$0,68b \cdot d \cdot f_{cd} \cdot x - 0,272b \cdot f_{cd} \cdot x^2 = M$$

$$x^2 - 2,5dx + \frac{M}{0,272bf_{cd}} = 0$$

$$x = \frac{2,5d \pm \sqrt{(2,5d)^2 - 4 \cdot \left(\frac{M}{0,272bf_{cd}}\right)}}{2}$$

$$A_s = \frac{M}{f_{yd} (d - 0,4x)}$$

$$f_{cd} = \frac{1,8}{1,4} = 1,29 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{50}{1,15} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

Para  $b = 20 \text{ cm}$  e  $d = 57 \text{ cm}$ , tem-se:

$$x = \frac{2,5 \cdot 57 \pm \sqrt{(2,5 \cdot 57)^2 - 4 \cdot \left(\frac{M}{0,272 \cdot 20 \cdot 1,29}\right)}}{2}$$

$$x = \frac{142,5 \pm \sqrt{20306,25 - 0,57 \cdot M}}{2}$$

Portanto,

Seções D e E

$$M_D = M_E = 102,2 \text{ kNm} = 10220 \text{ kNcm}$$

$$x = 11,1 \text{ cm}$$

$$A_s = \frac{10220}{43,5(57 - 0,4 \cdot 11,1)} = 4,47 \text{ cm}^2$$

Seção B

$$M_B = 95,6 \text{ kNm} = 9560 \text{ kNcm}$$

$$x = 10,3 \text{ cm}$$

$$A_s = 4,16 \text{ cm}^2$$

Armaduras adotadas:

$$\text{no apoio: } A_s = 4,2 \text{ cm}^2 \quad (4\phi 10 + 2\phi 8)$$

$$\text{nos tramos: } A_s = 4,5 \text{ cm}^2 \quad (2\phi 12,5 + 2\phi 16)$$

Cálculo dos momentos resistentes últimos.

$$\text{a) Seções D e E : } A_s = 4,5 \text{ cm}^2$$

$$0,85 \cdot 1,29 \cdot 0,8x \cdot 20 = 4,5 \cdot 43,5$$

$$x = 11,1 \text{ cm}$$

$$M_{uD} = M_{uE} = 4,5 \cdot 43,5(57 - 0,4 \cdot 11,1) = 10289 \text{ kNcm} = 103 \text{ kNm}$$

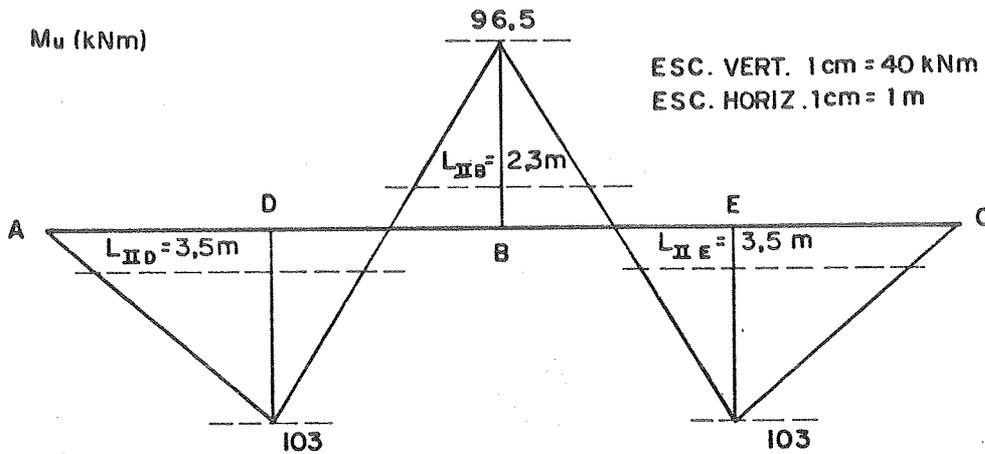
b) Seção B :  $A_s = 4,2\text{cm}^2$

$$0,85 \cdot 1,29 \cdot 0,8 \times 20 = 4,2 \cdot 43,5$$

$$x = 10,4\text{cm}$$

$$M_{uB} = 4,2 \cdot 43,5 (57 - 0,4 \cdot 10,4) = 9654\text{kNcm} = 96,5\text{kNm}$$

DIAGRAMA DO MOMENTO ATUANTE ÚLTIMO



Construção dos diagramas momento fletor-rotação inelástica.

Primeiro trecho:

$$f_{tk} = \frac{1,8}{10} = 0,18\text{kN/cm}^2$$

$$M_r = \frac{0,18 \cdot 360000}{30} = 2160\text{kNcm} = 21,6\text{kNm}$$

Segundo trecho:

a) Seções D e E

$$x = \frac{15,4,5}{20} \cdot (-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20 \cdot 57}{15,4,5}}) = 16,5\text{cm}$$

$$z = 57 - \frac{16,5}{3} = 51,5 \text{ cm}$$

$$M_e = 4,5 \cdot 43,5 \cdot 51,5 = 10081 \text{ kNcm} = 101 \text{ kNm}$$

$$\Delta M = 10081 - 2160 = 7921 \text{ kNcm}$$

$$I_{II} = 4,5 \cdot 51,5 (57 - 16,5) = 9386 \text{ cm}^4$$

$$\frac{1}{r} = \frac{7921}{21000 \cdot 9386} - \frac{7921}{1,1016 \cdot 10^9} = 3,3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \cdot 350 \cdot 3,3 \cdot 10^{-5} = 5,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

b) Seção B

$$x = \frac{15 \cdot 4,2}{20} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20 \cdot 57}{15 \cdot 4,2}} \right) = 16 \text{ cm}$$

$$z = 57 - \frac{16,0}{3} = 51,7 \text{ cm}$$

$$M_e = 4,2 \cdot 43,5 \cdot 51,7 = 9445 \text{ kNcm} = 94,4 \text{ kNm}$$

$$\Delta M = 9445 - 2160 = 7285 \text{ kNcm}$$

$$I_{II} = 4,2 \cdot 51,7 (57 - 16,0) = 8903 \text{ cm}^4$$

$$\frac{1}{r} = \frac{7285}{21000 \cdot 8903} - \frac{7285}{1,1016 \cdot 10^9} = 3,24 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \cdot 230 \cdot 3,24 \cdot 10^{-5} = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

Terceiro trecho

a) Seções D e E

$$\omega = \frac{4,5 \cdot 50}{20 \cdot 57 \cdot 1,8} = 0,11$$

$$\theta_{\min.} = 29 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{\max.} = 147 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

Logo,

$$\theta_{us} = 5,8 \cdot 10^{-3} + 29 \cdot 10^{-3} = 34,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{ui} = 5,8 \cdot 10^{-3} + 147 \cdot 10^{-3} = 152,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

b) Seção B

$$\omega = \frac{4,2 \cdot 50}{20 \cdot 57 \cdot 1,8} = 0,10$$

$$\theta_{\min.} = 31 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{\max.} = 157 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

Logo,

$$\theta_{us} = 3,7 \cdot 10^{-3} + 31 \cdot 10^{-3} = 34,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{ui} = 3,7 \cdot 10^{-3} + 157 \cdot 10^{-3} = 160,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

Diagrama momento fletor-rotação inelástica das seções D e E

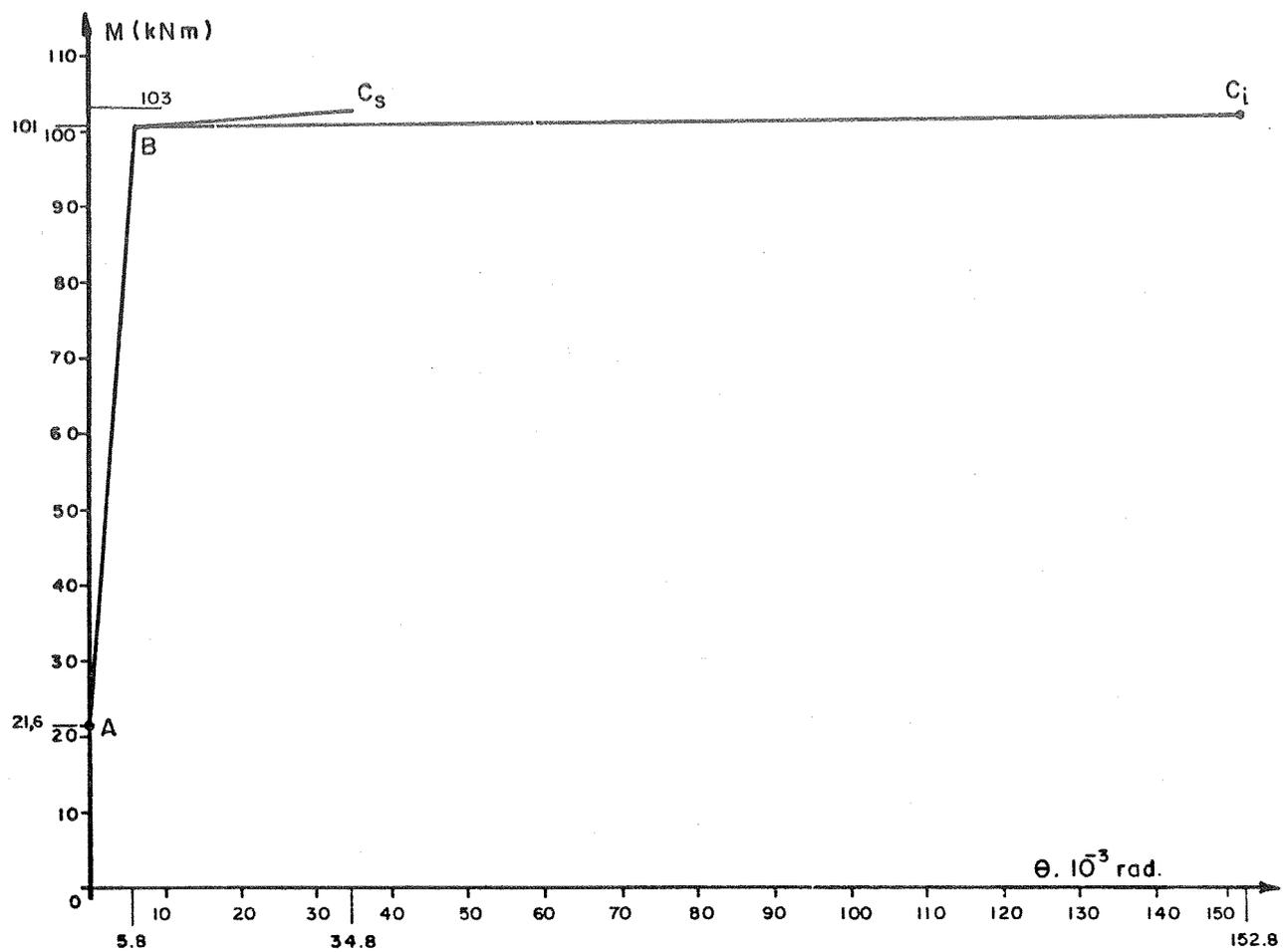
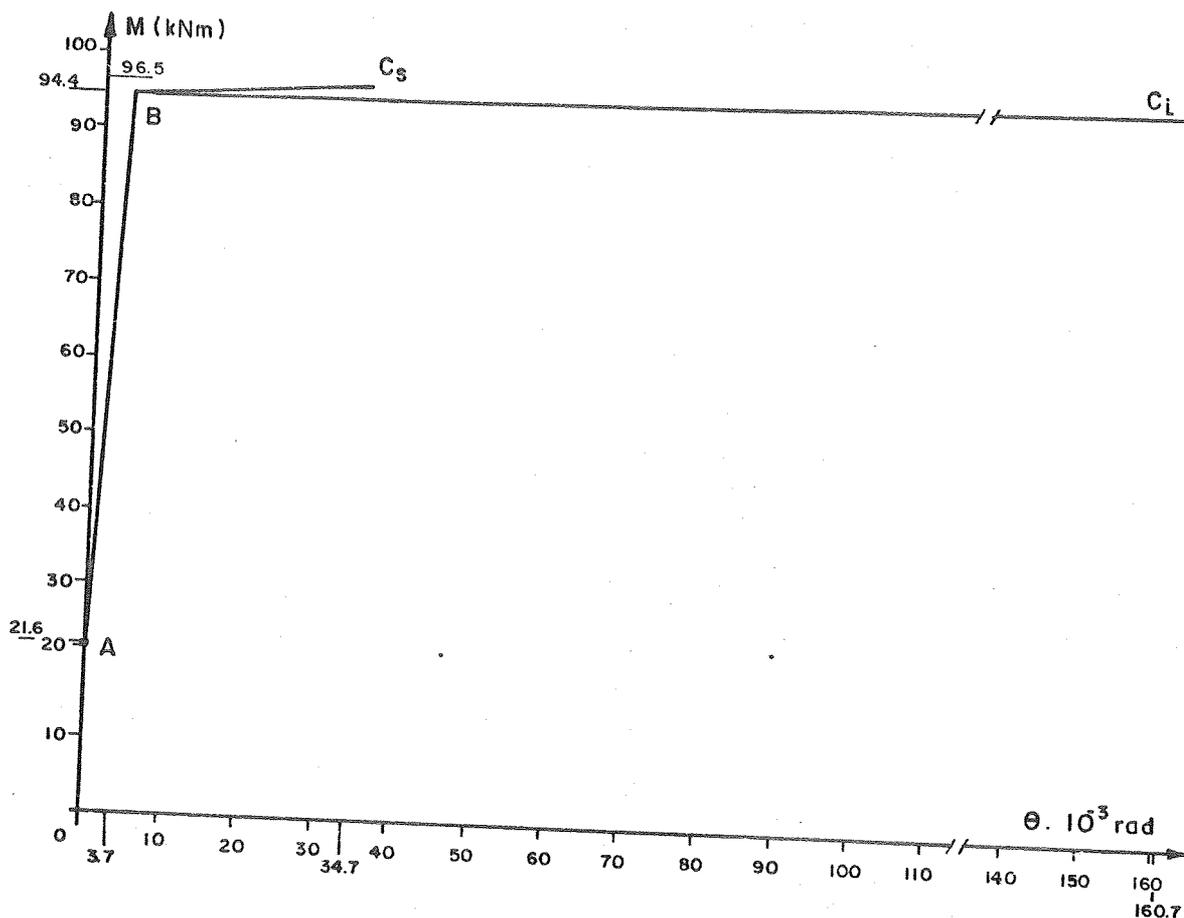


Diagrama momento fletor-rotação inelástica da seção B



VERIFICAÇÃO DO ESTADO LIMITE ÚLTIMO

Momentos fletores nas seções críticas e correspondentes rotações inelásticas.

$$M_B = 95,6 \text{ kNm}$$

$$\theta_{us} = 22 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{ui} = 95 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$M_D = M_E = 102,2 \text{ kNm}$$

$$\theta_{us} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

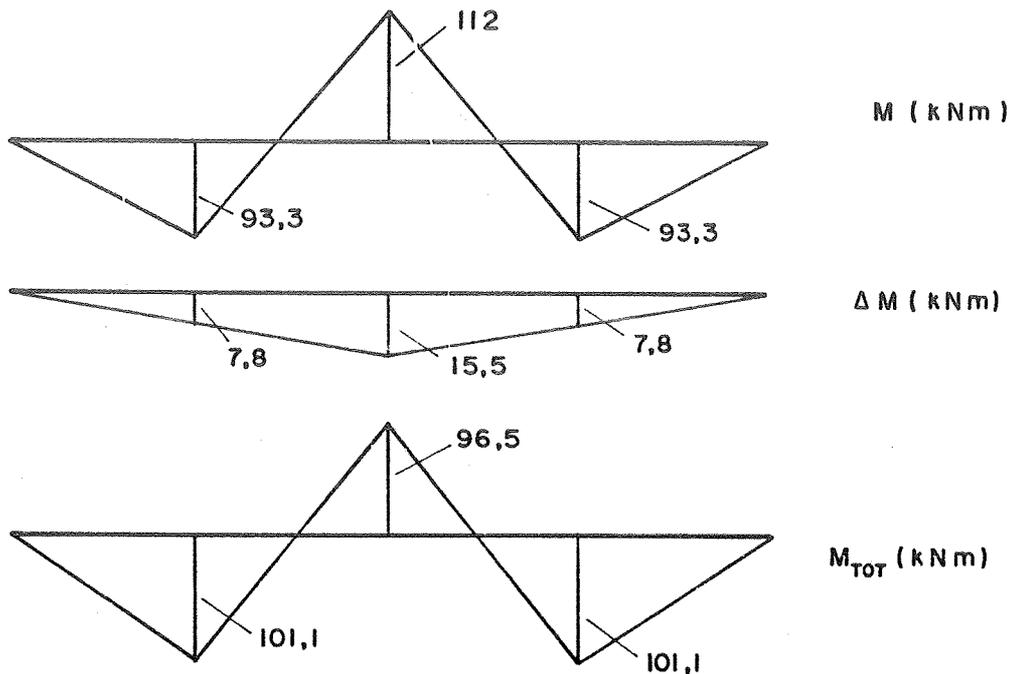
$$\theta_{ui} = 110 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\Delta M_{\min.} = 1,1016 \cdot 10^{+5} (0,25 \cdot 22,0 - 0,25 \cdot 110) \cdot 10^{-3} = -2423 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_{\max.} = 1,1016 \cdot 10^{+5} (0,25 \cdot 95,0 - 0,25 \cdot 25) \cdot 10^{-3} = +1928 \text{ kNm}$$

Não se consegue obter a compatibilidade das deformações.

Considerando o carregamento  $F = 99,6 \text{ kN}$ , tem-se:



O diagrama de momento atuante último praticamente não se altera, logo:

$$M_B = 96,5 \text{ kNm}$$

$$\theta_{us} = 34,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{ui} = 160,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$M_D = M_E = 101,1 \text{ kNm}$$

$$\theta_{us} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

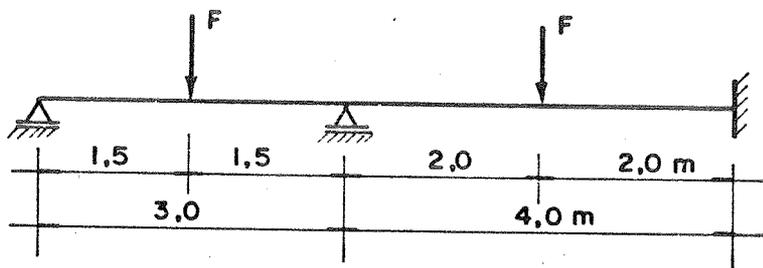
$$\theta_{ui} = 34,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\Delta M_{\min.} = 1,016 \cdot 10^5 (0,25 \cdot 34,7 - 0,25 \cdot 34,2) \cdot 10^{-3} = 13,8 \text{ kNm}$$

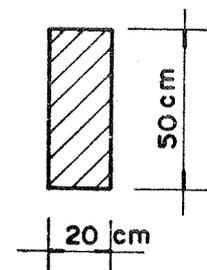
$$\Delta M_{\max.} = 1,016 \cdot 10^5 (0,25 \cdot 160,7 - 0,25 \cdot 8,0) \cdot 10^{-3} = 4205 \text{ kNm}$$

Portanto, para  $F = 99,6 \text{ kN}$  com uma redução de 13,8% no momento fletor da seção B, consegue-se uma configuração de momentos fletores estaticamente admissível e compatível.

4.8 - Verificar a segurança da viga da figura, pelo método das rotações impostas.



seção transversal



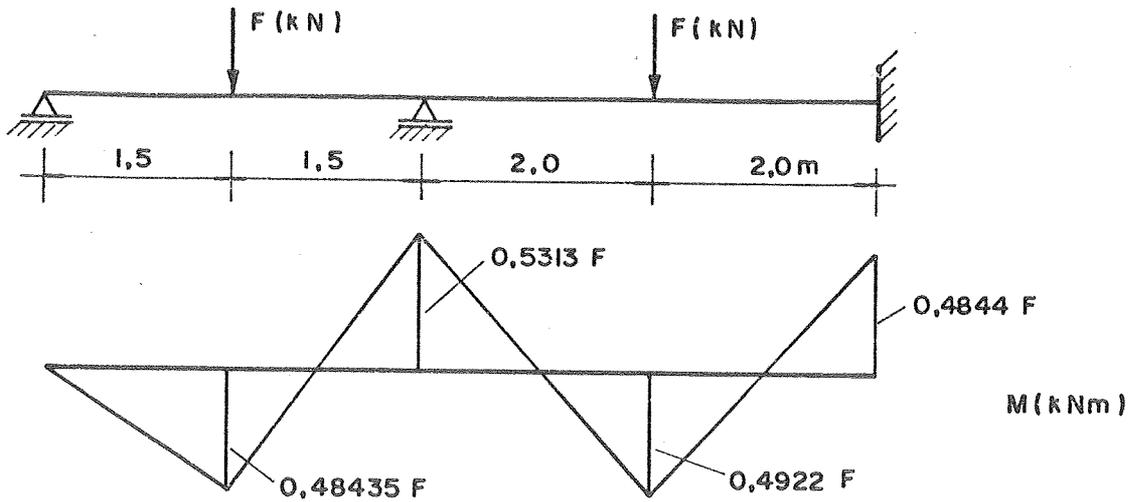
Dados:

$$\text{Aço CA-50A} \quad \gamma_s = 1,15$$

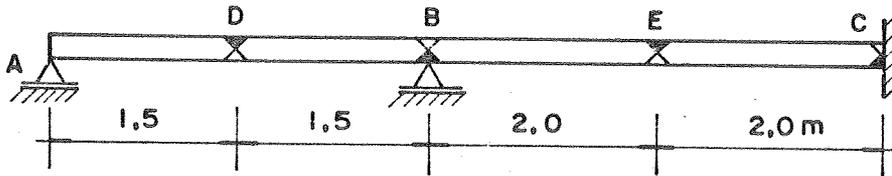
$$f_{ck} = 18 \text{ MPa} \quad \gamma_c = 1,4$$

$$E_s = 210000 \text{ MPa} \quad F = 150 \text{ kN}$$

Cálculo do efeito elástico de um carregamento F

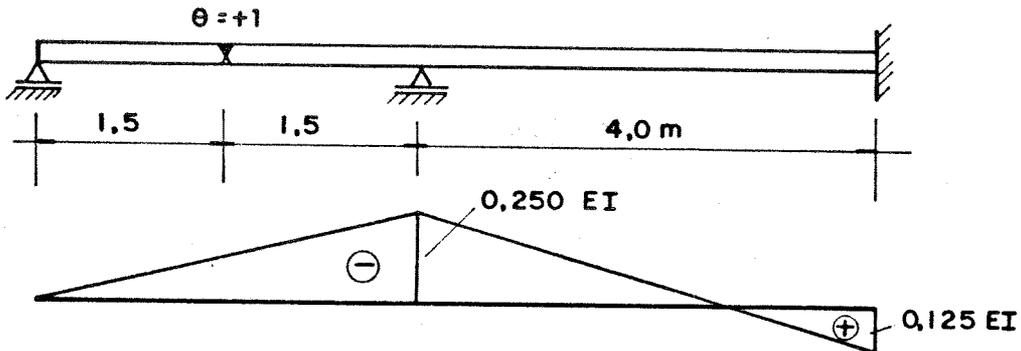


Admitem-se as seções críticas nas seguintes posições:

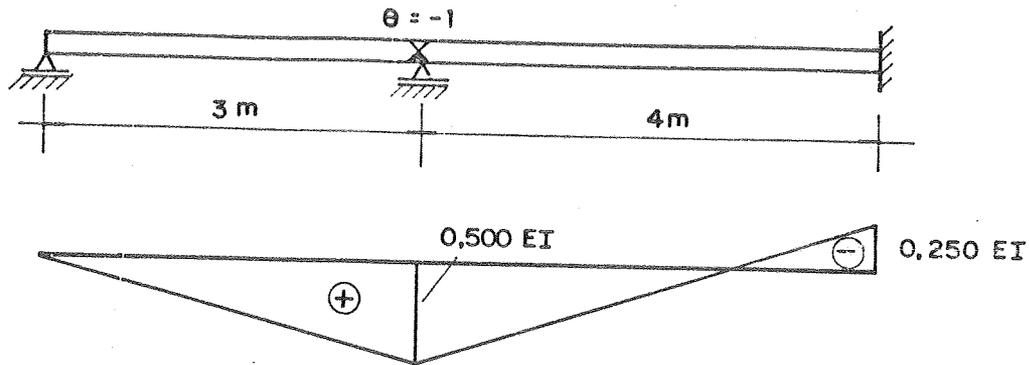


Cálculo do efeito das rotações unitárias nas seções críticas.

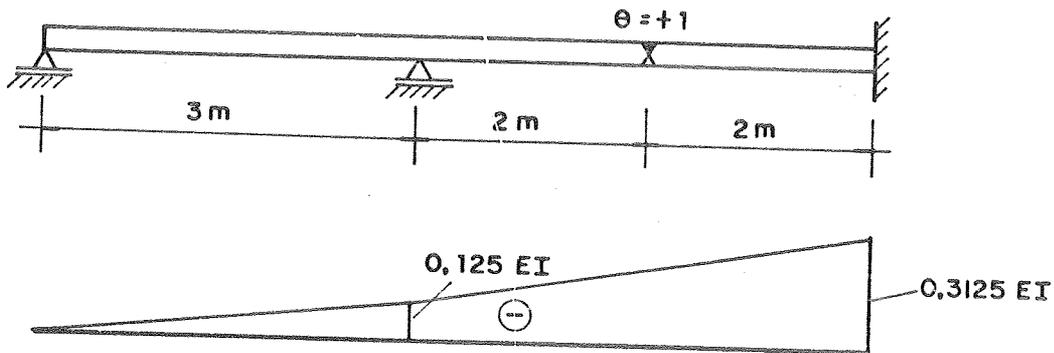
a) Rotação unitária positiva na seção D



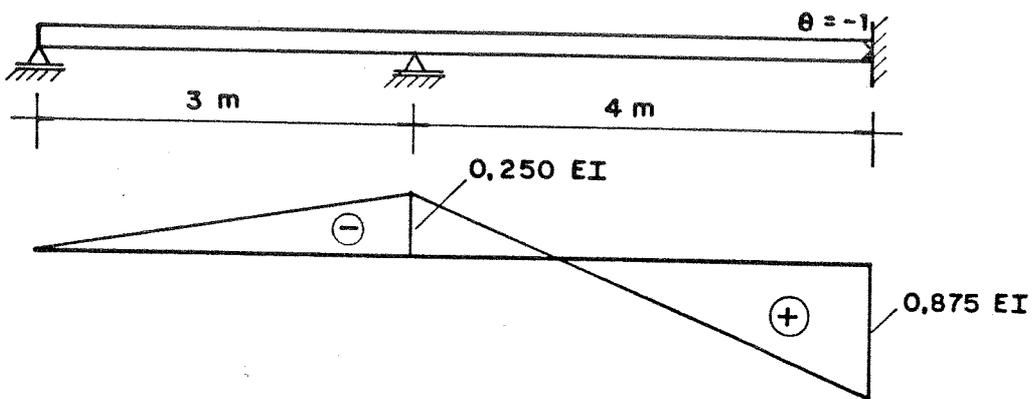
b) Rotação unitária negativa na seção B



c) Rotação unitária positiva na seção E



d) Rotação unitária negativa na seção C



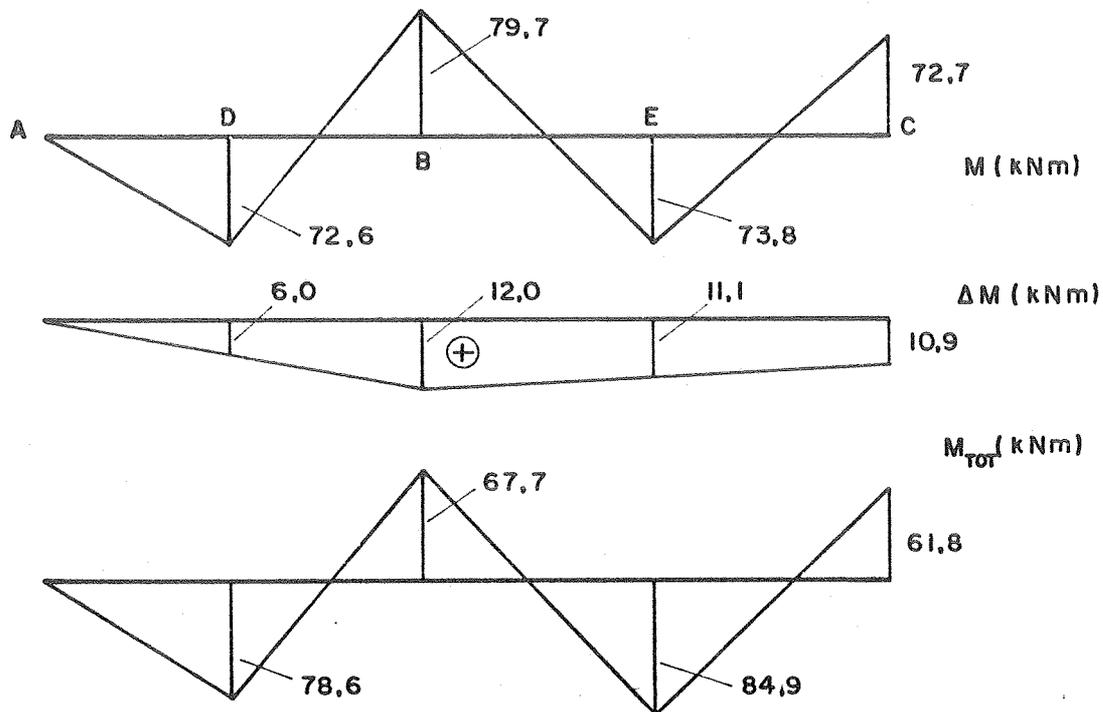
Cálculo da rigidez à flexão

$$E_c = 6600 \sqrt{18+3,5} = 30603 \text{MPa} = 3060 \text{kN/cm}^2$$

$$I = \frac{20 \cdot 50^3}{12} = 208333 \text{ cm}^4$$

$$E_c \cdot I = 6,375 \cdot 10^8 \text{ kNcm}^2 = 6,375 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

Admitindo uma redução de 15% nos momentos fletores dos apoios B e C, tem-se:



Com os momentos fletores totais das seções críticas, através do pré-dimensionamento, obtêm-se as seguintes armaduras:

$$\text{Seção B: } A_s = 3,58 \text{ cm}^2$$

$$\text{Seção C: } A_s = 3,24 \text{ cm}^2$$

$$\text{Seção D: } A_s = 4,22 \text{ cm}^2$$

$$\text{Seção E: } A_s = 4,60 \text{ cm}^2$$

Foram adotadas as seguintes armaduras:

Seção B:  $A_s = 3,60 \text{ cm}^2$  ( $2\phi 10 + 1\phi 16$ )

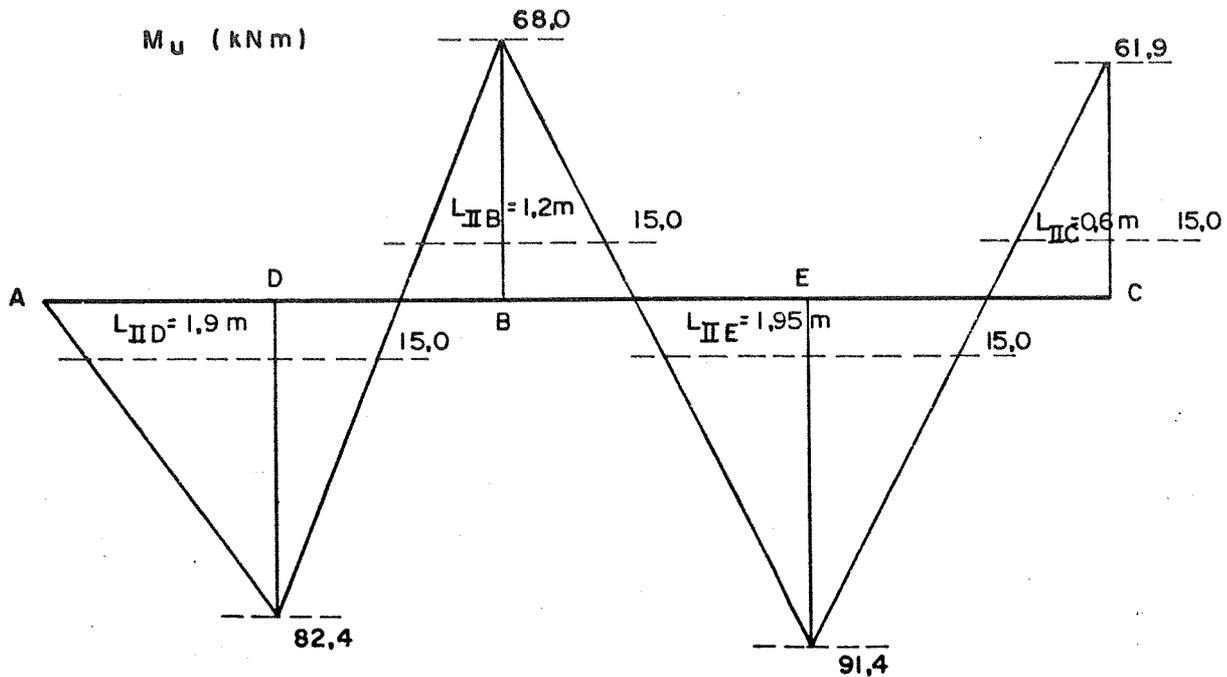
Seção C:  $A_s = 3,25 \text{ cm}^2$  ( $4\phi 8 + 1\phi 12,5$ )

Seção D:  $A_s = 4,50 \text{ cm}^2$  ( $2\phi 12,5 + 1\phi 16$ )

Seção E:  $A_s = 5,00 \text{ cm}^2$  ( $4\phi 12,5$ )

Seção	$A_s$ ( $\text{cm}^2$ )	x (cm)	z (cm)	$M_u$ (kNm)	$x_e$ (cm)	$z_e$ (cm)	$M_e$ (cm)
B	3,60	8,9	43,4	67,7	13,5	42,5	66,6
C	3,25	8,0	43,8	61,9	12,9	42,7	60,4
D	4,50	11,2	42,5	83,2	14,8	42,1	82,4
E	5,00	12,4	42,0	91,4	15,4	41,9	91,1

Diagrama do momento atuante último

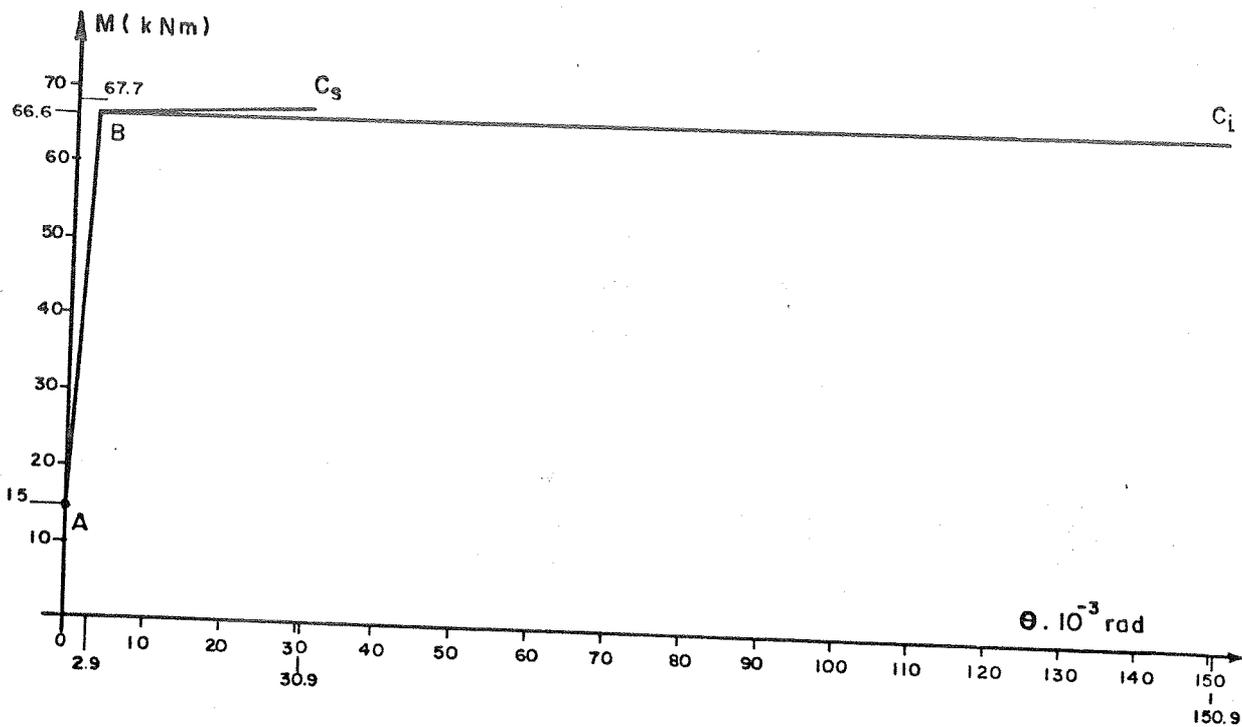


Seção	$M_e - M_r$ (kNm)	$I_{III}$ (cm <sup>4</sup> )	$\frac{1}{r} \cdot 10^{-5}$ (cm <sup>-1</sup> )	$L_{III}$ (cm)	$\theta_1 \cdot 10^{-3}$ (rad.)	$\omega$	$\theta_{min} \cdot 10^{-3}$ (rad.)	$\theta_{max} \cdot 10^{-3}$ (rad.)	$\theta_{us} \cdot 10^{-3}$ (rad.)	$\theta_{ui} \cdot 10^{-3}$ (rad.)
B	51,6	5126	4,7935	120	2,9	0,11	28	148	30,9	150,9
C	45,4	4732	3,8565	60	1,2	0,10	30	160	31,2	161,2
D	67,4	6100	4,2043	190	4,0	0,13	26	128	30,0	132,0
E	76,1	6620	4,2803	195	4,2	0,15	24	106	28,2	110,2

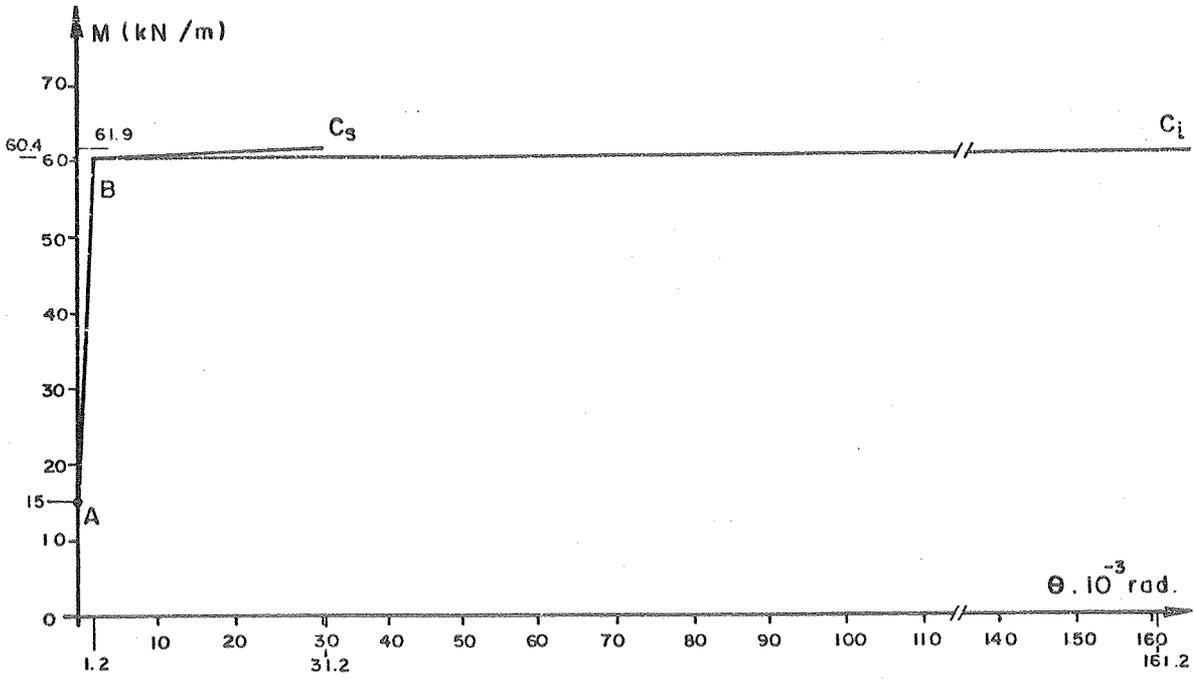
$M_r = 15 \text{ kNm}$  para todas as seções críticas.

Diagramas momento fletor-rotação inelástica

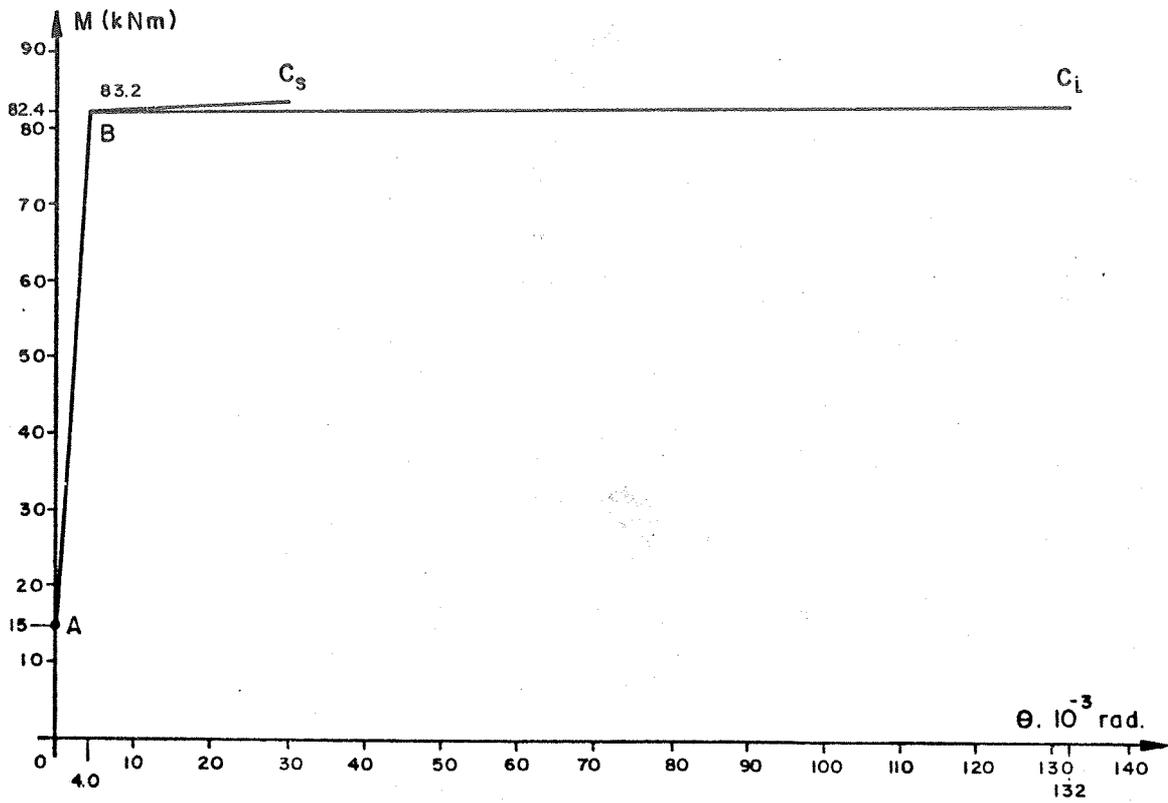
a) Seção B



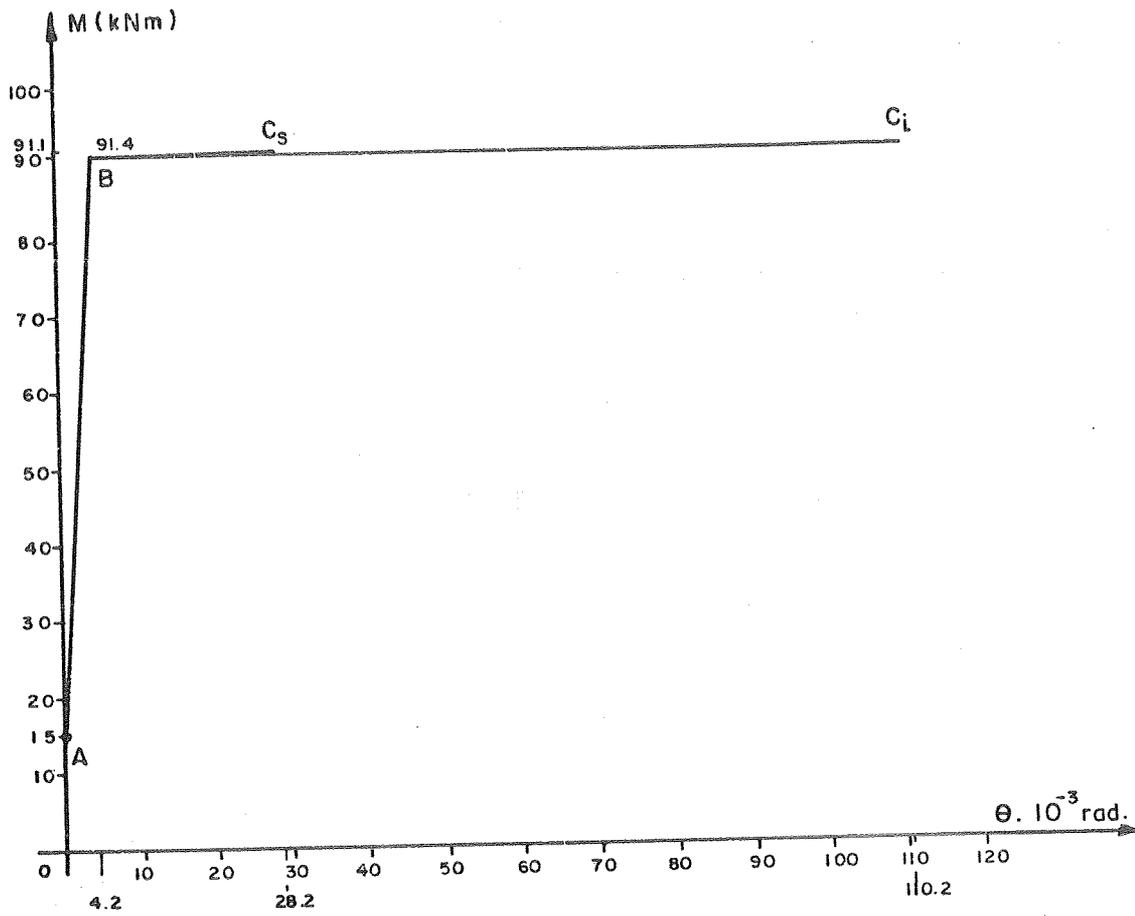
b) Seção C



c) Seção D



d) Seção E



VERIFICAÇÃO DO ESTADO LIMITE ÚLTIMO

Momentos fletores nas seções críticas e correspondentes rotações inelásticas.

$$M_B = 67,8 \text{ kNm}$$

$$\theta_{us} = 30,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{ui} = 150,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$M_C = 61,8 \text{ kNm}$$

$$\theta_{us} = 31,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{ui} = 161,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$M_D = 78,6 \text{ kNm}$$

$$\theta_{us} = 4,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{ui} = 4,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$M_E = 84,9 \text{ kNm}$$

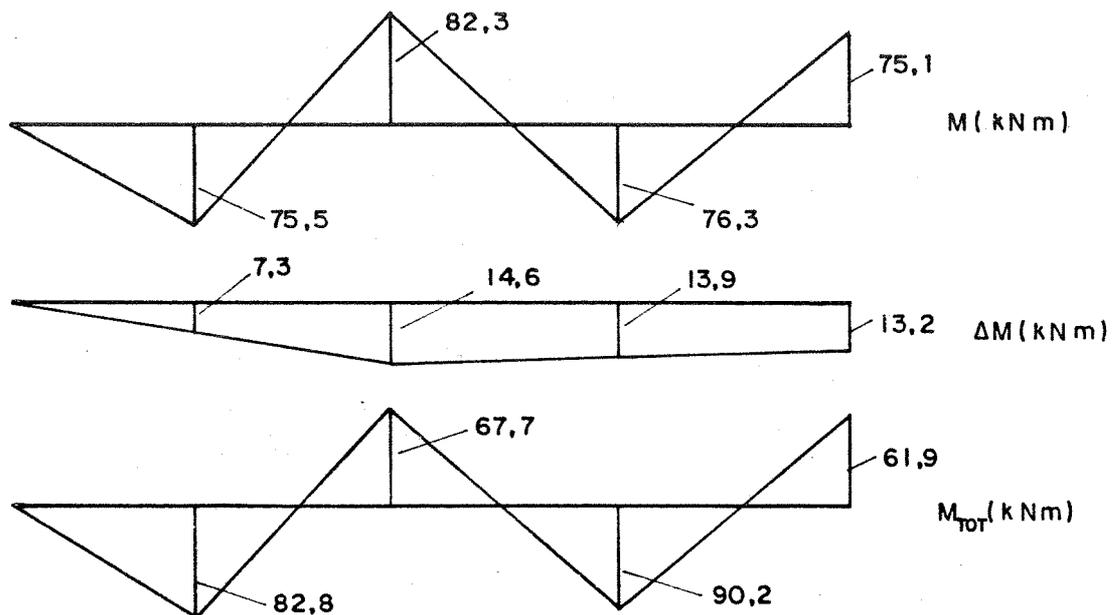
$$\theta_{us} = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{ui} = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{\min.} &= 6,375 \cdot 10^4 (0,50 \cdot 30,9 - 0,25 \cdot 31,2 - 0,25 \cdot 4,9 - 0,125 \cdot 4) \cdot 10^{-3} = \\ &= 378 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{\max.} &= 6,375 \cdot 10^4 (0,50 \cdot 150,9 - 0,25 \cdot 161,2 - 0,25 \cdot 4,9 - 0,125 \cdot 4) \cdot 10^{-3} = \\ &= 6941 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Considerando um carregamento  $F = 155 \text{ kN}$ , tem-se:



$$M_D = 82,8 \text{ kNm}$$

$$\theta_{us} = 7,0 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\theta_{ui} = 28,0 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$M_E = 90,2 \text{ kNm}$$

$$\theta_{us} = \theta_{ui} = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{\min.} &= 6,375 \cdot 10^4 (0,50 \cdot 30,9 - 0,25 \cdot 31,2 - 0,25 \cdot 28 - 0,125 \cdot 4,1) \cdot 10^{-3} = \\ &= 8,8 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{\max.} &= 6,375 \cdot 10^4 (0,50 \cdot 150,9 - 0,25 \cdot 161,2 - 0,25 \cdot 7 - 0,125 \cdot 4,1) \cdot 10^{-3} = \\ &= 2096 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Portanto, para  $F = 155 \text{ kN}$  com uma redução de 17,7% no momento fletor da seção B, é possível obter uma configuração de momentos fletores estaticamente admissível e compatível.

Observação: Estes exemplos apresentados têm como objetivo principal mostrar que o método das rótulas plásticas e o método das rotações impostas são exequíveis, e podem ser aplicados, respectivamente, às estruturas lineares e estaticamente indeterminadas, de materiais dúcteis e de concreto armado.

No caso do método das rotações impostas, os exemplos foram escolhidos, de forma a se ter uma variedade de carregamentos e vinculações para as vigas. As taxas de armaduras nas seções foram adotadas para que se obtivessem diagramas momentos fletores - rotações inelásticas, da Fig. 3.4.10, com as retas dos trechos B-Cs e B-Ci ascendentes.

## 5. CONCLUSÕES

Com o propósito de se aproveitar o máximo possível da capacidade resistente de uma determinada estrutura, foram desenvolvidos métodos de cálculo em regime elasto-plástico, que analisam a estrutura na iminência de colapso.

Em estruturas de materiais dúcteis compostas por elementos lineares, é possível a formação do mecanismo de colapso, pois se consegue obter a deformabilidade necessária. O Método das Rótulas Plásticas apresenta resultados satisfatórios quando aplicados a estas estruturas.

Dos métodos existentes para o cálculo de estruturas estaticamente indeterminadas de concreto, em regime elastoplástico, apresenta-se nesta dissertação o Método das Rotações Impostas, desenvolvido pelo Prof. Giorgio Macchi. Este método ainda pode ser melhorado, embora, da forma como se apresenta, seja exequível e se constitua em um instrumento significativo para o cálculo em regime elastoplástico.

Conforme o item 3.2.2.3C, da NBl-78, tem-se: "Permite-se, observado o disposto nos itens 3.2.2.3A e 3.2.2.3B calcular as vigas contínuas em edifícios por processo simplificado, em regime elastoplástico, unicamente alterando-se a posição da linha de fecho determinada no regime elástico de modo a reduzir os momentos sobre os apoios no máximo de 15%".

O método das Rotações Impostas, permite analisar melhor a redistribuição de momentos fletores, e respeitando as suas limitações, podem-se obter reduções inferiores ou superiores a 15%.

Observa-se na Fig. 3.4.10, o diagrama momento fle<sub>tor</sub>-rotação inelástica, apresentado pelo Prof. Giorgio Macchi. A situação atual do Método das Rotações Impostas não considera o caso em que o momento resistente último seja menor do que o momento de início de plastificação. Desta forma, o método limita a máxima taxa de armadura que pode ser utilizada. Por outro lado, nas curvas das rotações totais da Fig. 3.4.14, os valores de  $\theta_{\min.}$  e  $\theta_{\max.}$  não são bem definidos para taxas mecânicas da armadura inferiores a 0,09, e foi desprezada a influência das armaduras transversais.

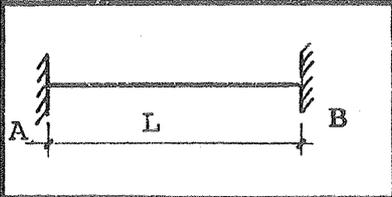
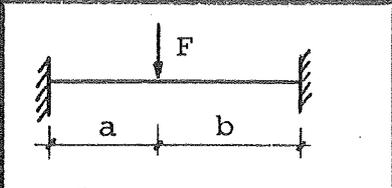
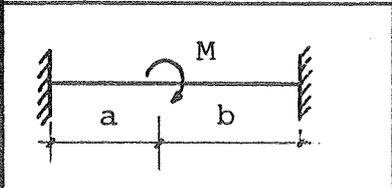
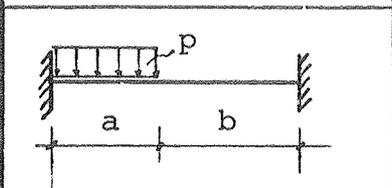
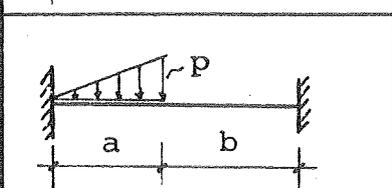
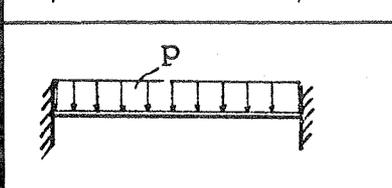
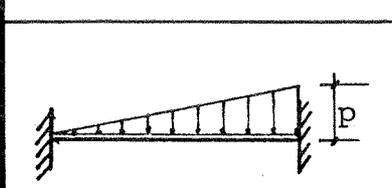
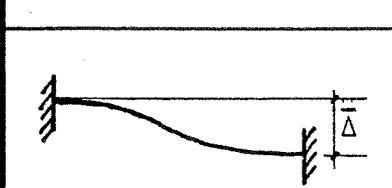
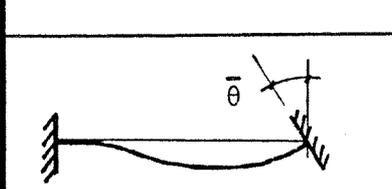
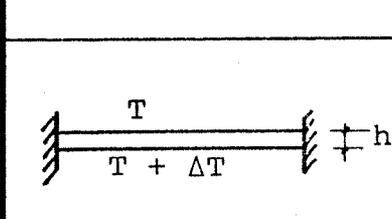
Atualmente, com o progresso dos computadores de todos os portes, das calculadoras programáveis, e das técnicas computacionais, é possível automatizar o Método das Rotações Impostas, tornando a sua utilização mais prática. A aplicação de outros métodos de cálculo em regime de ruptura necessita da investigação experimental das curvaturas últimas das peças de concreto armado.

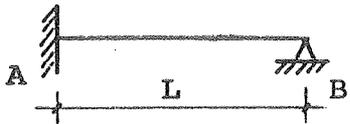
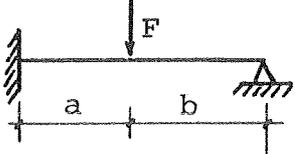
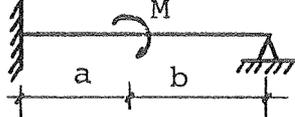
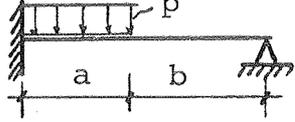
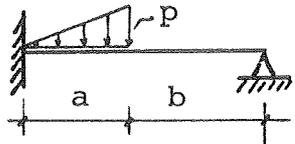
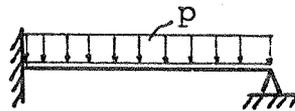
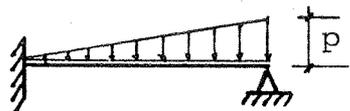
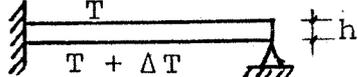
No item 3.6, é apresentado um breve comentário a respeito da pesquisa experimental, que é indispensável para que os métodos de cálculo em regime elastoplástico se desenvolvam, e possam levar em conta todas as peculiaridades das estruturas de concreto estrutural.

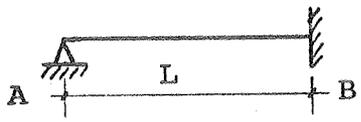
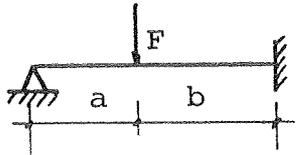
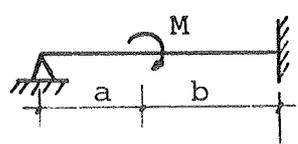
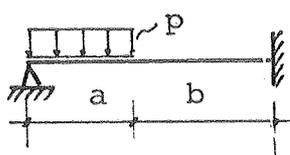
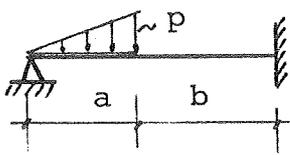
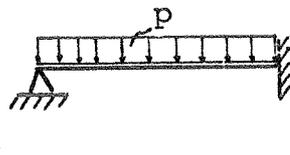
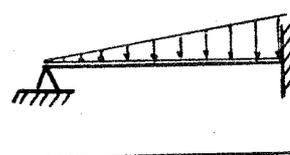
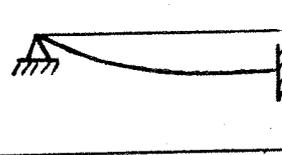
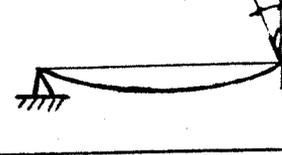
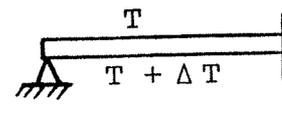
6. ANEXOS

6.1 - Anexo I

Tabelas de momentos de engastamento perfeito em barras prismáticas ( $I = \text{constante}$ ) - Convenção de Grinter.

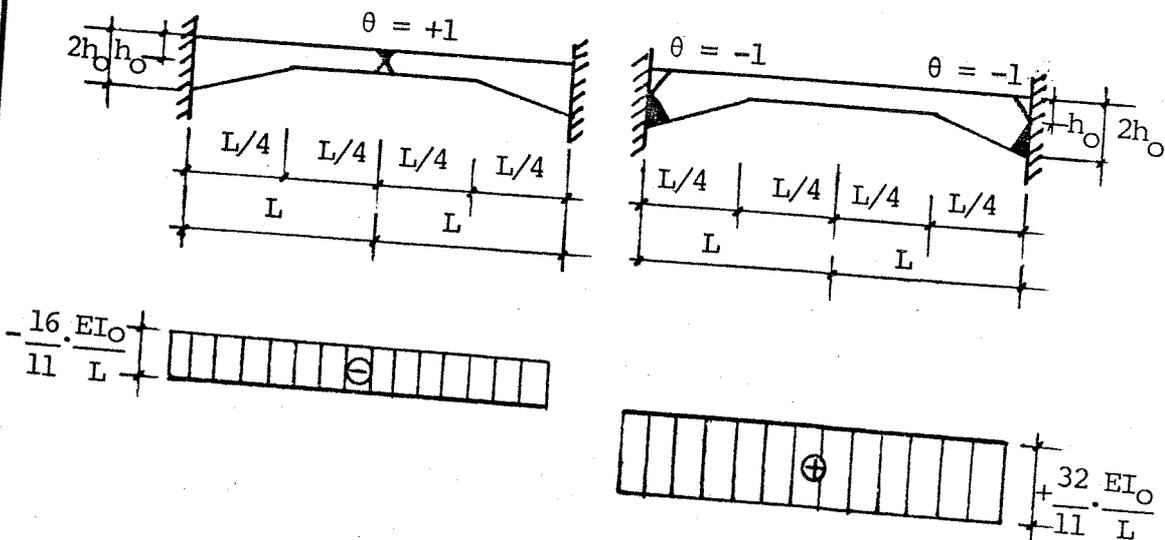
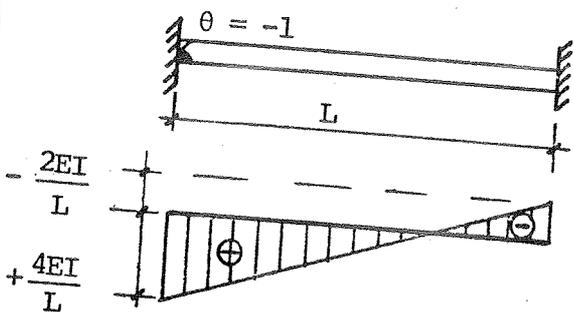
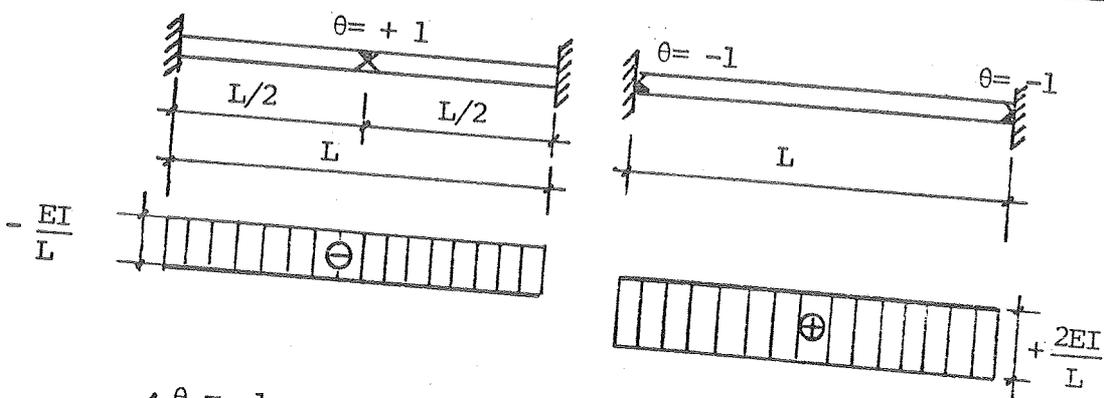
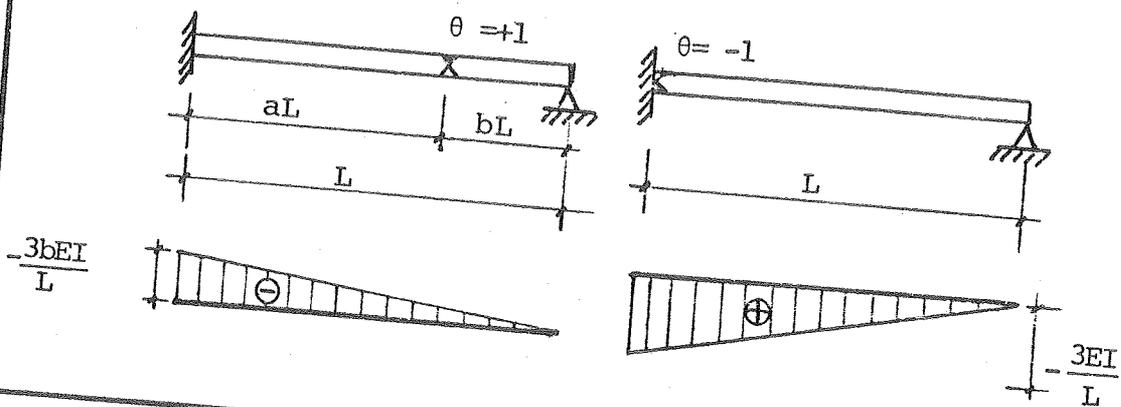
	$M_{AB}$	$M_{BA}$
	$\frac{Fab^2}{L^2}$	$-\frac{Fa^2b}{L^2}$
	$\frac{Mb}{L^2} \cdot (3b-2L)$	$-\frac{Ma}{L^2} \cdot (2L-3a)$
	$\frac{pa^2}{12L^2} \cdot (6L^2-8La+3a^2)$	$-\frac{pa^3}{12L^2} \cdot (4L-3a)$
	$\frac{pa^2}{30L^2} \cdot (10L^2-15La+6a^2)$	$-\frac{pa^3}{20L^2} \cdot (5L-4a)$
	$+\frac{pL^2}{12}$	$-\frac{pL^2}{12}$
	$+\frac{pL^2}{30}$	$-\frac{pL^2}{20}$
	$+\frac{6EI}{L^2} \bar{\Delta}$	$+\frac{6EI}{L^2} \bar{\Delta}$
	$+\frac{2EI}{L} \bar{\theta}$	$+\frac{4EI}{L} \bar{\theta}$
	$+\frac{EI}{h} \cdot \alpha_T \Delta T$	$-\frac{EI}{h} \cdot \alpha_T \Delta T$

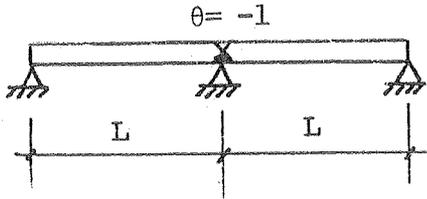
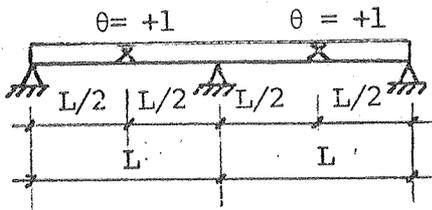
	$M'_{AB}$
	$\frac{Fab}{L^2} \cdot \frac{L+b}{L^2}$
	$\frac{M}{2L^2} \cdot (3b^2 - L^2)$
	$\frac{p \cdot a^2}{8L^2} \cdot (2L - a)^2$
	$\frac{p \cdot a^2}{120L^2} \cdot (40L^2 - 45La + 12a^2)$
	$+\frac{pL^2}{8}$
	$+\frac{7pL^2}{120}$
	$+\frac{3EI\bar{\Delta}}{L^2}$
	$-\frac{3EI\bar{\theta}}{L}$
	$\frac{3EI}{2h} \cdot \alpha_T \cdot \Delta T$

	$M'_{BA}$
	$-\frac{Fab}{2} \cdot \frac{L+a}{L^2}$
	$-\frac{M}{2L^2} \cdot (L - 3a)^2$
	$-\frac{pa}{8L^2} \cdot (2L^2 - a^2)$
	$-\frac{pa^2}{30L^2} \cdot (5L^2 - 3a^2)$
	$-\frac{pL^2}{8}$
	$-\frac{pL^2}{15}$
	$+\frac{3EI\bar{\Delta}}{L^2}$
	$+\frac{3EI\bar{\theta}}{L}$
	$-\frac{3EI}{2h} \cdot \alpha_T \cdot \Delta T$

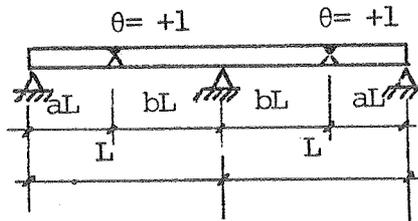
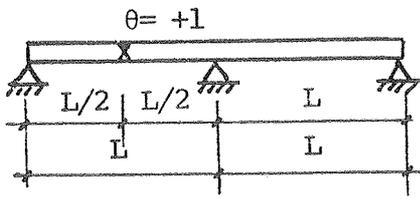
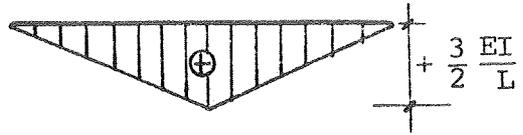
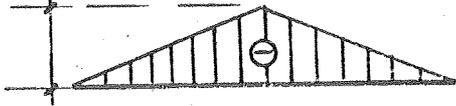
6.2 - Anexo II

Diagramas de momentos fletores devido às rotações unitárias impostas.

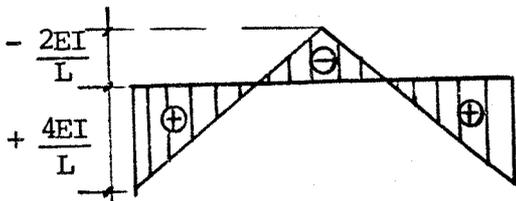
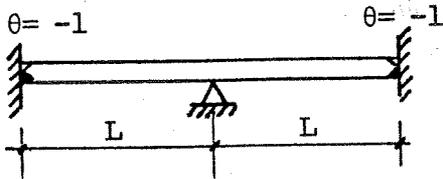
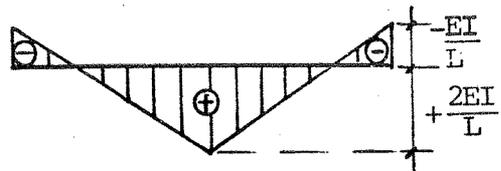
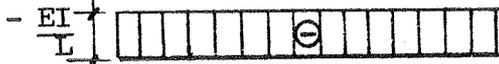
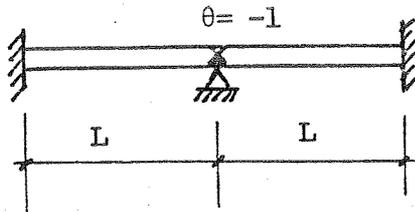
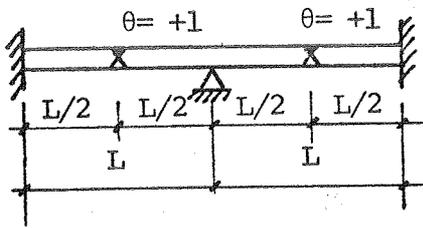
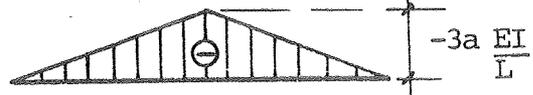


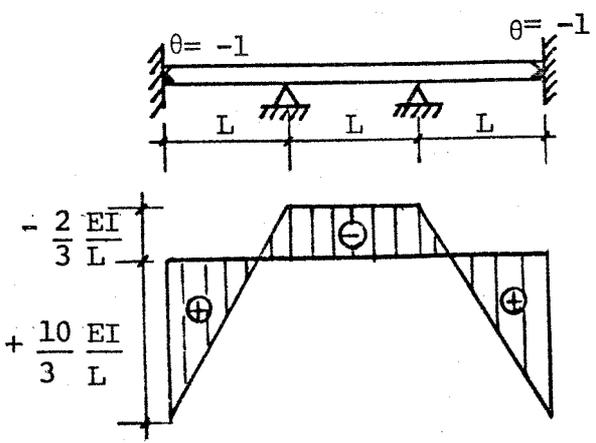
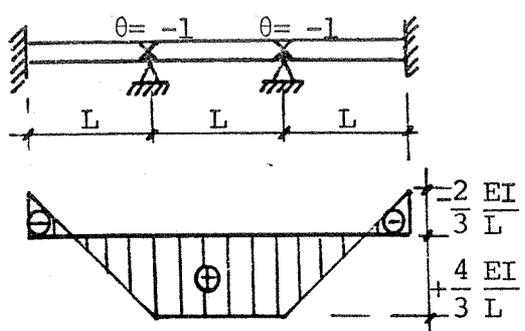
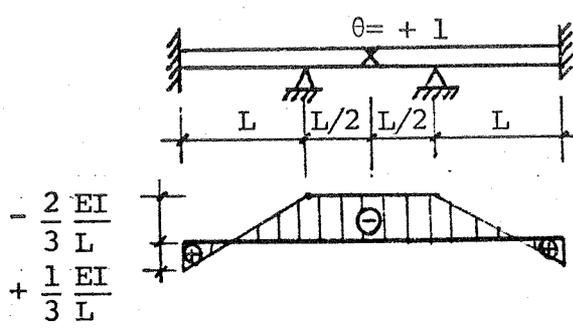
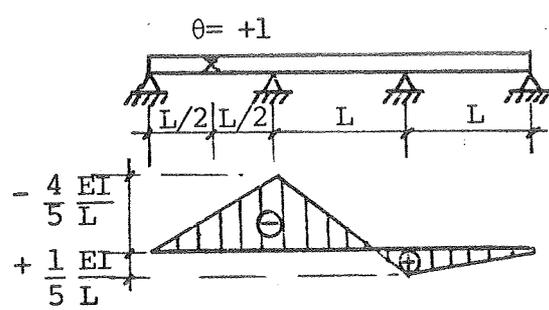
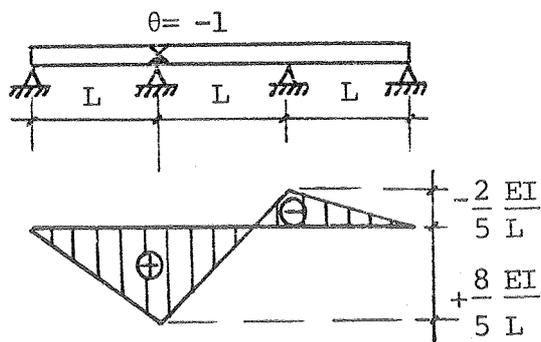
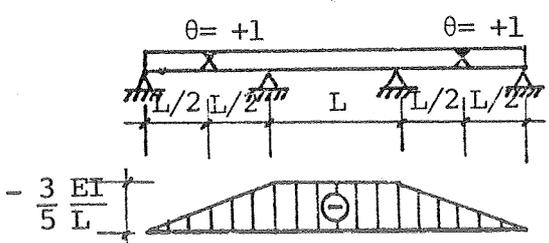
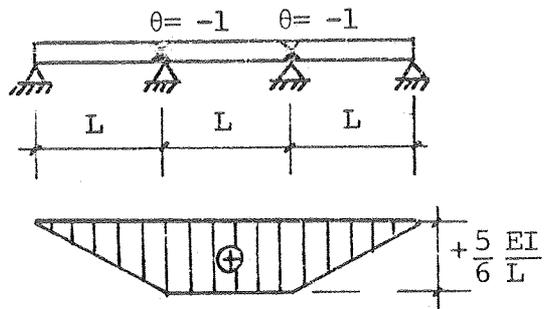
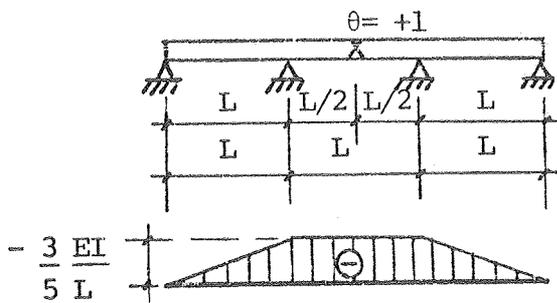


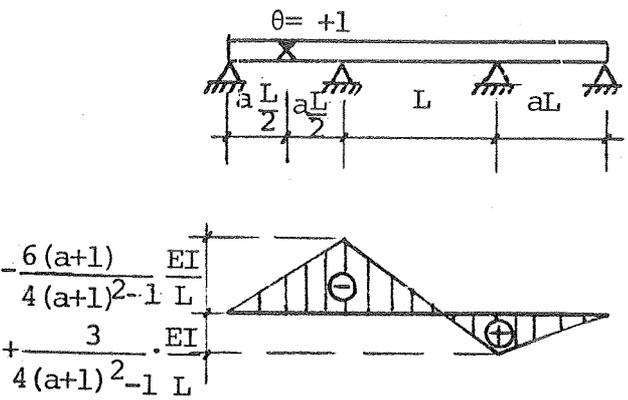
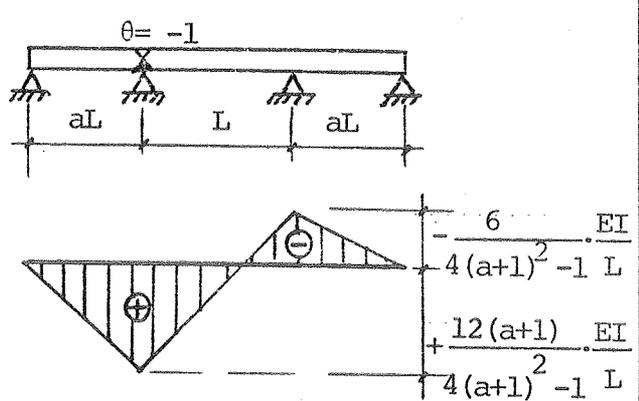
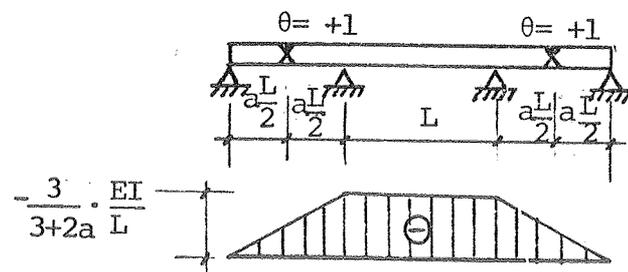
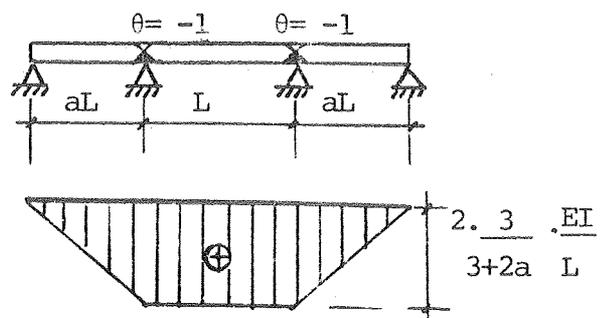
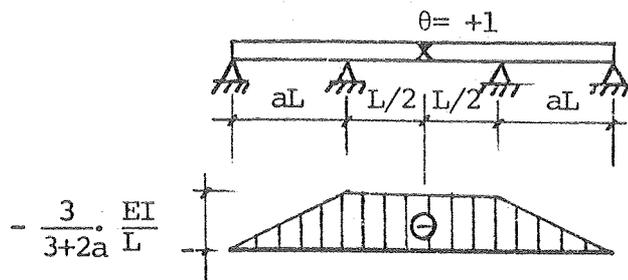
$$-\frac{3EI}{2L}$$



$$-\frac{3EI}{4L}$$







7. BIBLIOGRAFIAS

- 1 - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND - Vocabulário de teoria das estruturas. São Paulo, ABCP, 1967. (Boletim Técnico).
- 2 - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - Procedimento para projeto e execução de obras de concreto armado. NB-1/78. São Paulo, ABNT, 1978.
- 3 - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - Símbolos gráficos para projetos de estruturas: simbologia. São Paulo, ABNT, 1981.
- 4 - BAKER, J.F. & HEYMAN, J. - Plastic design of frames: fundamentals. Cambridge, University Press, 1971. V. 2.
- 5 - BEEDLE, L.S. - Diseño plástico de marcos de acero. México, Cia Ed. Continental, 1970.
- 6 - CARNEIRO, F.L.L. - Cálculo plástico de estruturas hiperestáticas de concreto armado. Rio de Janeiro, Inst. Nacional de Tecnologia, 1961.
- 7 - CARNEIRO, F.L.L. - Norme pour le calcul des structures hyperstatiques en béton armé. Revista Tecnologia, 2(5), 1961.
- 8 - COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON - Code modèle CEB-FIP pour les structures en béton. Paris, CEB, 1977. (CEB Bulletin d'Information n° 124/125).
- 9 - COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON - Non linear analysis of concrete structures. Paris, CEB, 1979. (CEB Bulletin d'Information n° 134).
- 10- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON - Structural analysis. Paris, CEB, 1982. (CEB Bulletin d'Information n° 153).
- 11- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON - Structures hypers-tatiques. Paris, CEB, 1976. (CEB Bulletin d'Information n° 105).

- 12 - DI BLASI, C.G. - Resistência dos materiais. Rio de Janeiro, Ed. Interamericana, 1982.
- 13 - DISQUE, R.O. - Applied plastic design in steel. Huntington, Robert E. Krieger Publ., 1978.
- 14 - FIALHO, J.L. - Análise experimental de tensões. Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1969. V. I.
- 15 - FUSCO, P.B. - Estruturas de concreto: fundamentos do projeto estrutural. São Paulo, McGraw Hill do Brasil e Ed. da Univ. São Paulo, 1976.
- 16 - FUSCO, P.B. - Estruturas de concreto: solicitações normais. Rio de Janeiro, Ed. Guanabara Dois, 1981.
- 17 - HEYMAN, J. - Plastic design of frames: applications. Cambridge, the University Press, 1971.
- 18 - HORNE, M.R. - Plastic theory of structures. London, Nelson Ed., 1971.
- 19 - LEONHARDT, F. - Construções de concreto: verificação da capacidade de utilização. Rio de Janeiro, Interciência, 1979. V. 4.
- 20 - LIMA, V.M.S. - Vigas contínuas. São Paulo, Escola Politécnica da Univ. de São Paulo, Departamento de Estruturas e Fundações, s.d.
- 21 - MACCHI, G. - Limit-states design of statically indeterminate structures composed of linear members. Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1973. (CEB International Course on structural Concrete C10-1).
- 22 - MACCHI, G. - Calcul des structures hyperstatiques par la méthode des rotations imposées. In: COMITÉ EUROPEEN DU BETON - Annexes aux recommandations internationales pour le calcul et l'execution des ouvrages en beton. Roma, AITEC, 1972. V. 3. p. 313-368.

- 23 - MASSONNET, C.H. & SAVE, M. - Cálculo plástico de las construcciones: estructuras planas. Barcelona, Montaner y Simon, 1966. V. I.
- 24 - NEAL, E.G. - The plastic methods of structural analysis. 3.ed. London, Chapman & Hall, 1971.
- 25 - RICARDO, O.G.S. - Teoria das estruturas. São Paulo, Ed. Univ. São Paulo e McGraw-Hill do Brasil, 1978.
- 26 - SANTOS, L.M. - Cálculo de concreto armado: segundo a nova NB-1 e o CEB. São Paulo, Ed. LMS, 1983.