

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DAS
ESTRUTURAS EM FOLHAS PRISMÁTICAS

ENG. ARQUIMEDES DIÓGENES CILONI

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Orientador: Helena M.C. Carmo Antunes

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Lafael Petroni

Prof. Dr. Walter A. Nimir

Profa. Dra. Helena M.C. Carmo Antunes

Suplentes:

Prof. Dr. Tioeturo Yagui

Prof. Dr. Regis L.R. Lima

São Carlos, maio de 1984

À minha família.

AGRADECIMENTOS

À Professora Helena M.C. Carmo Antunes, pela orientação e acolhida que permitiram a conclusão deste trabalho.

Ao Eng^o João Carlos Barreiro, pela amizade e pelos valiosos comentários e sugestões dados ao trabalho.

Ao Professor Ulisses dos Santos Ribeiro, pessoa modelar na vida profissional do Autor, aos amigos Eng^{os} Marco Antonio Dentillo e João Sergio Cordeiro, todos responsáveis pelo ingresso do autor na carreira docente.

Aos professores Fernando Antonio Jorge, José Samuel Giongo, Marcos Francisco Pereira e Maurício Pereira, pelo incentivo e amizade, principalmente em horas difíceis.

Aos amigos de todas as instituições de ensino por onde o Autor tem passado, como aluno e professor, nas cidades de Araraquara, São Carlos, Alfenas, Passos e Uberlândia.

À Sra. Wilma Provinciali Vall, pelo carinho e dedicação nos trabalhos de datilografia; a João Paulo Moretti e Sylvia Helena Morette, pela cuidadosa elaboração dos desenhos; à Sra. Fátima Gonçalves Ciapina e à Neide Goi, pela minuciosa pesquisa bibliográfica.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

A todos, enfim, que, de alguma forma, tenham contribuído para a elaboração deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho tem por principal objetivo servir como fonte de consulta bibliográfica aos interessados nas estruturas formadas por chapas dobradas. Pretende, também, apresentar os principais métodos contínuos de análise das folhas prismáticas simples, curtas e contínuas.

No primeiro capítulo, é apresentada uma extensa análise bibliográfica, procurando fornecer indicações sobre as diversas possibilidades de aplicação e análise dessas estruturas. Descreve-se também os resultados experimentais obtidos por diversos pesquisadores, visando dar sustentação às conclusões apresentadas.

No segundo capítulo, é apresentado o equacionamento, o qual foi feito de maneira a englobar todos os principais métodos de análise das folhas simples, visando facilitar a compreensão e resolução dos exemplos apresentados no terceiro capítulo.

No terceiro capítulo, através de exemplos, descrevem-se os métodos de Whitney, Simpson, Yitzhaky e aquele recomendado pela A.S.C.E., para análise das folhas simples. Examina-se também a extensão do método de Yitzhaky para folhas contínuas.

No quarto capítulo, descreve-se um método de análise das folhas curtas. Foi examinado o método de Reiss e Yitzhaky.

Finalmente, no quinto capítulo, examina-se um método de análise das folhas contínuas, mediante o uso de séries de Fourier. Procura-se descrever o método de Mousa, Parmelee e Lee, bem como comparar os resultados obtidos com aqueles fornecidos por Beufait, o qual utilizou um processo discreto de análise.

ABSTRACT

The main purpose of this work is to be useful as a reference source for folded plate structures. The work also presents the mainly processes for the analysis of simple, short and continuous folded plates.

Chapter one introduces a extensive bibliography review, trying to provide some indications about the various possibilities of application and analysis of such structures. It also shows experimental values taken from other authors, wich give support to the conclusions.

In chapter two equations comprising all mainly methods to solve the simplest folded plates are presented, to improve the comprehension of the exercises solved in chapter three.

Chapter three introduces: Whitney, Simpson, Yitzhaky and A.S.C.E's methods of analysis for simplest folded plates; it also shows how to extend the Yitzhaky's method to continuous folded plates.

Chapter four shows the analysis of short folded plates, using Reiss and Yitzhaky's method.

Finally, chapter five is concerned with analysis of continuous folded plates, using Fourier's Series. The results obtained with this technique are compared with values given by Beaufait.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - CONSIDERAÇÕES GERAIS - ESTUDO BIBLIOGRÁFICO

I.1 - INTRODUÇÃO	1
I.2 - HISTÓRICO E APLICAÇÕES DAS ESTRUTURAS EM FOLHA POLIÉDRICA	3
I.3 - TIPOS DE ESTRUTURAS	5
I.4 - CONSIDERAÇÕES SOBRE O COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DAS FOLHAS PRISMÁTICAS	10
I.4.1 - Ação de Placa e Ação de Chapa	10
I.4.2 - Comentários Sobre as Formas Prismáticas Usuais e Sua Influência na Distribuição dos Esforços	12
I.4.3 - Força Cortante Longitudinal nos Bordos das Chapas	20
I.4.4 - Deflexões das Arestas	21
I.4.5 - Condições de Apoio	24
I.5 - CONSIDERAÇÕES SOBRE OS MÉTODOS DE ANÁLISE	26
I.5.1 - Classificação Baseada na Comissão da A.S.C.E.	26
I.5.2 - Classificação Baseada em Powell e Ampliada por Iffland	29
I.6 - A INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL DAS ESTRUTURAS EM FOLHAS POLIÉDRICAS	32

I.6.1 - Folhas Simples - Comparação Entre os Métodos Teóricos e a Experimentação	33
I.6.2 - A Investigação em Modelos de Concreto Armado	53
I.6.3 - Influência das Nervuras de Enrijecimento	58
I.6.4 - A Investigação em Estruturas Contínuas .	67

CAPÍTULO II - MÉTODOS SIMPLES DE ANÁLISE DAS FOLHAS PRISMÁTICAS

II.1 - HIPÓTESES BÁSICAS	76
II.2 - CONVENÇÃO DE SINAIS	77
II.3 - ESTRUTURA EM PLACA CONTÍNUA	78
II.3.1 - Cargas e Reações de Apoio	78
II.3.2 - Deslocamentos das Arestas e Giro das Placas	79
II.3.3 - As Soluções Para a Estrutura Contínua Transversal	82
II.3.4 - Curvas Normais	87
II.4 - ESTRUTURA EM CHAPA	92
II.4.1 - Cargas	92
II.4.2 - Forças Cortantes de Bordo. Tensões Normais nas Chapas	97
II.4.3 - Distribuição das Tensões Normais	102
II.4.4 - Variação das Tensões Cisalhantes . Tensões Principais	104
II.4.5 - Deslocamentos das Arestas e Rotações das Chapas	109

IV.2 - MÉTODO DE REISS E YITZHAKY	223
IV.2.1 - Ação de Placa Contínua Apoiada em Duas Direções	225
IV.2.2 - Ação de Chapa	229
IV.2.3 - Deslocamentos das Arestas	233
IV.3 - TABELAS	235
IV.4 - EXEMPLO	242

CAPÍTULO V - ANÁLISE APROXIMADA DAS FOLHAS PRISMÁTICAS
CONTÍNUAS PELO MÉTODO DE MOUSA, PARMELLE
E LEE

V.1 - INTRODUÇÃO	257
V.2 - HIPÓTESES BÁSICAS	257
V.3 - DESCRIÇÃO DO MÉTODO DE ANÁLISE	258
V.3.1 - Análise de vigas Contínuas por Séries de Fourier	258
V.3.2 - Distribuição de Tensões e Cálculo de Flechas nos Planos das Chapas	263
V.3.3 - Procedimento	264
V.4 - EXEMPLOS	266
V.4.1 - Exemplo 1	266
V.4.2 - Exemplo 2	291

CAPÍTULO VI - COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÕES
 314 |

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS
 316 |

BIBLIOGRAFIA
 330 |

II.5 - ALGUNS MÉTODOS DE ANÁLISE DAS FOLHAS SIMPLES ..	116
II.5.1 - O Método de Whitney	116
II.5.2 - O Método de Simpson	122
II.5.3 - O Método de Yitzhaky	126
II.5.4 - Método Recomendado pela A.S.C.E.	129
II.5.5 - Comparação entre os Diversos Métodos Analisados	131
II.5.6 - O Uso das Séries de Fourier e das Curvas Normais	133
II.6 - COMENTÁRIOS SOBRE OUTROS MÉTODOS DE ANÁLISE DAS FOLHAS PRISMÁTICAS	135
II.6.1 - Métodos de Análise das Folhas Simples .	135
II.6.2 - Métodos de Análise das Folhas Contínuas	136
II.6.3 - Métodos de Análise das Folhas Múltiplas	138
II.6.4 - Métodos de Análise das Folhas Não-Prismáticas	138
II.7 - A ARMAÇÃO DAS FOLHAS PRISMÁTICAS	139

CAPÍTULO III - EXEMPLOS

III.1 - MÉTODO DE WHITNEY	141
III.2 - MÉTODO DE SYMPSON	159
III.3 - MÉTODO DE YITZHAKY	179
III.4 - MÉTODO RECOMENDADO PELA A.S.C.E.	196
III.5 - MÉTODO DE YITZHAKY - FOLHAS CONTÍNUAS	217

CAPÍTULO IV - ANÁLISE DAS FOLHAS CURTAS

IV.1 - INTRODUÇÃO	223
-------------------------	-----

CAPÍTULO I

CONSIDERAÇÕES GERAIS - ESTUDO BIBLIOGRÁFICO

I.1 - INTRODUÇÃO

A estrutura em folha poliédrica ("folded plate" ou "hipped plate" nos países de língua inglesa e "faltwerke" nos de língua alemã) pode ser definida como um sistema de chapas finas dobradas longitudinalmente, conectadas monoliticamente pelas arestas formadas nas dobras, constituindo uma estrutura resistente espacial. A Fig. I-1 define os elementos típicos de tal estrutura.

O sistema estrutural assim formado aproveita a rigidez tanto dentro do plano das chapas ("ação de chapa") como perpendicularmente a eles ("ação de placa") para absorver o carregamento, aparecendo aqui uma das vantagens desse esquema em relação à construção convencional: pensando em cobrir a mesma área com uma estrutura comum, teríamos apenas a ação de laje, além da necessária colocação de vigas na junção de duas lajes adjacentes.

No sistema estrutural em chapa dobrada, as lajes se apoiam mutuamente pelas arestas e originam carregamentos no plano das chapas. Assim, o efeito portante da estrutura em folha poliédrica se baseia nesse efeito recíproco de placas "flexíveis" e de chapas "rígidas", onde as arestas desempenham papel fundamental: cada aresta substitui a viga que normalmente seria colocada na junção de duas la

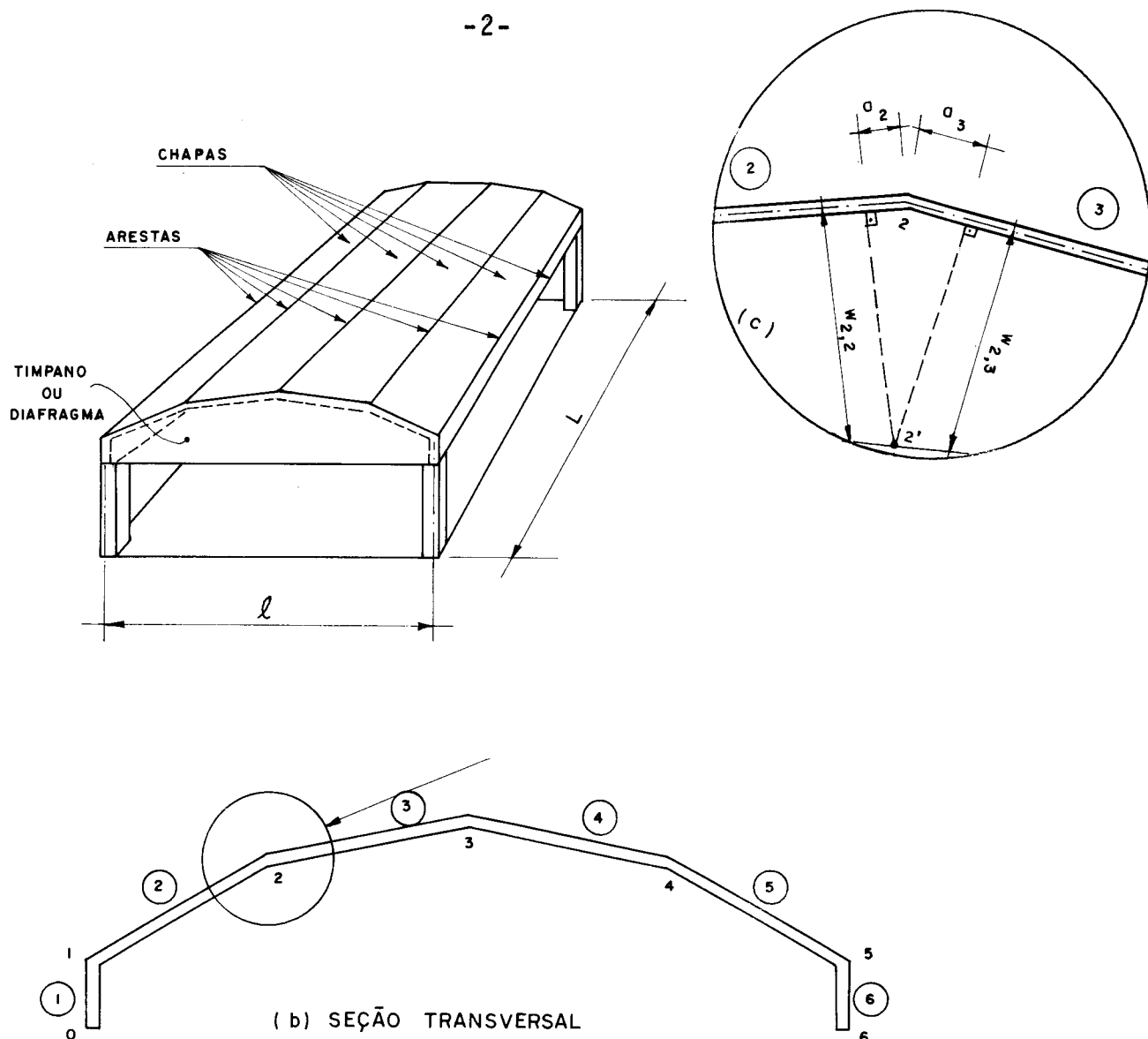


Figura I-1

jes, constituindo assim verdadeiras "linhas de apoio" embu-
tidas na estrutura.

É fácil verificar que a colocação de vigas seria
ineficiente, do ponto de vista do comportamento estrutural,
desde que o ângulo formado por duas lajes adjacentes não
esteja próximo de 180° .

O deslocamento 2-2' de qualquer aresta (Fig.
I.1.c) pode ser decomposto nas flechas a_2 no plano da cha-
pa 2 e $w_{2,2}$ perpendicular a ele, ou alternativamente, pa-
ra chapa 3, pode ser decomposto em a_3 e $w_{2,3}$.

As flechas a_2 , a_3 das chapas 2 e 3, produzi-
das pelo carregamento nos planos dessas chapas, serão rela-

tivamente pequenas, já que elas se comportam como vigas de grande rigidez, pela sua considerável "altura" (distância entre duas arestas consecutivas).

Por outro lado, a resistência das chapas contra cargas perpendiculares ao seu plano é pequena, pela sua baixa rigidez (efeito de laje), e um carregamento relativamente pequeno produzirá as flechas $w_{2,3}$ e $w_{2,2}$. Assim, um eventual carregamento concentrado sobre a aresta 2 será resistido em sua maior parte pela "ação de chapa", demonstrando assim a rigidez da estrutura, pelo pequeno deslocamento da aresta. Portanto, como as deformações relativamente pequenas das chapas nos seus planos limitam o deslocamento da aresta, este terá a magnitude daquelas e qualquer viga colocada nas junções resultaria ineficiente, por ser muito mais flexível (pela sua menor altura) do que as chapas.

Assim, o consumo de material é muito menor que nos sistemas convencionais de construção. Quando comparado com o sistema em casca cilíndrica, o consumo de material requerido para o sistema em folha poliédrica é um pouco maior, mas este, como um todo, acaba sendo mais econômico que aquele, devido a ausência de curvatura, o que simplifica e diminui o gasto com formas, além de facilitar a concretagem e o descimbramento.

Além da economia, é de bom alvitre salientar a vantagem "arquitetônica", já que as folhas poliédricas oferecem uma gama enorme de aplicações, com formas agradáveis do ponto de vista dos arquitetos.

I.2 - HISTÓRICO E APLICAÇÕES DAS ESTRUTURAS EM FOLHA POLIÉDRICA

Um histórico do desenvolvimento das folhas poliédricas e de suas aplicações pode ser encontrado em várias publicações, como por exemplo a que foi preparada pela

comissão da Sociedade Americana de Engenheiros Civis (ASCE)^{1*}, em 1963, ou mais recentemente, no trabalho de Iffland², em 1979, ambos trazendo grande bibliografia sobre o assunto. Além desses, como histórico, pode-se consultar os trabalhos de Ramaswamy³, Winter e Pei⁴, Craemer⁵, etc.

A primeira utilização desse tipo de estrutura o correu na Alemanha, em 1924, tendo sido empregada por Ehlers para a fabricação de grandes silos de carvão. Ehlers publicou um artigo sobre a análise estrutural em 1930^{2,3,4}. Seguiram-se contribuições dadas por Craemer, Gruber⁶, Grue ning⁶, Petry, Goldenblatt e Ratz, Flugge, Ohlig⁶, Vlassow e Girkmann⁶.

Os trabalhos iniciais de Ehlers e Craemer supu nham as chapas rotuladas nas arestas e desprezavam os mo mentos transversais. Gruber, em 1932, apresentou uma teo ria rigorosa que levava em conta a rigidez das arestas e os deslocamentos relativos entre elas, estabelecendo que grandes erros podiam ocorrer se tal rigidez fosse despreza da.

A primeira publicação em inglês sobre a análise das folhas poliédricas surgiu em 1947, por Winter e Pei⁴, análise esta em que eram desprezados os deslocamentos rela tivos das arestas. Em 1954, Gaafar⁷ mostrou que o erro co metido ao se desprezar esses deslocamentos era, em média, de 200% nos valores das tensões e, em alguns pontos, os si nais das tensões eram opostos aos obtidos pela experimen ta ção (destaque-se aqui o fato de que o trabalho de Gaafar foi o primeiro a apresentar uma análise teórica sustentada por uma análise experimental).

Desde então, proliferaram os métodos de análise, os quais serão discutidos em item posterior. Uma classifi cação de parte desses métodos e a comparação entre eles foi apresentada por Powell⁸.

Usada principalmente em coberturas, as folhas po liédricas têm sido empregadas para a construção de silos, auditórios, ginásios de esportes, edifícios industriais,

* Os números indicam referências bibliográficas, encontradas a partir da página 319.

armazens e até mesmo fundações⁹, escadas⁶, pontes^{6,10,11} e pilares^{12,13}. Embora o maior interesse na sua aplicação tenha se voltado para o concreto armado, pela sua melhor trabalhabilidade, o uso das folhas poliédricas se estendeu às construções metálicas e de madeira.

Várias publicações já são encontradas sobre a aplicação das folhas poliédricas em estruturas metálicas², como os artigos de Nilson^{2,14,15}, Baer¹⁶, Davies^{2,17}, Krause¹⁸, Lawson¹⁹, Lundgren² e Shogren²⁰, existindo escassa bibliografia sobre a aplicação em madeiras^{1,21}.

I.3 - TIPOS DE ESTRUTURA

As folhas poliédricas podem ser desenvolvidas juntando-se chapas individuais através de muitas combinações; as primeiras folhas foram usadas para construir silos de carvão, semelhante ao mostrado na Fig. I.2.

Quando as chapas individuais são juntadas de maneira que toda a seção transversal seja constante ao longo do comprimento da estrutura, esta é denominada folha prismática (ou casca prismática); a Fig. I.3 mostra algumas seções transversais desse tipo de folha poliédrica.

Se toda a seção transversal varia ao longo do comprimento, têm-se uma folha não-prismática, como as mostradas na Fig. I.4. Deve-se notar aqui que o termo não-prismática, refere-se à estrutura como um todo, podendo as chapas individuais serem prismáticas ou não-prismáticas.

Quando mais de duas chapas se juntam numa aresta, a estrutura é denominada folha poliédrica múltipla. A Fig. I.5 apresenta várias seções desse tipo estrutural, nas quais se incluem as pontes (casos d, e, f).

A Fig. I.6 apresenta outros casos, como a folha prismática contínua, escadas e a cobertura em guarda-chuva²².

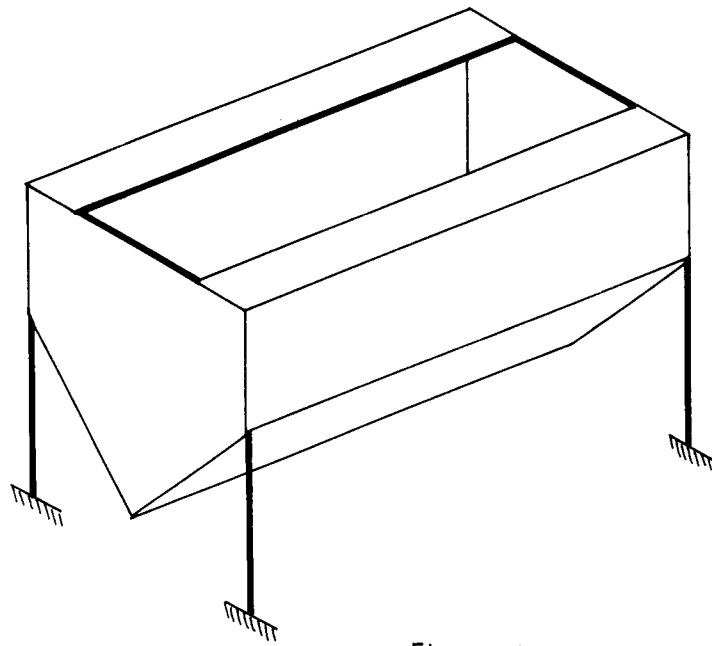


Figura I.2 - SILO

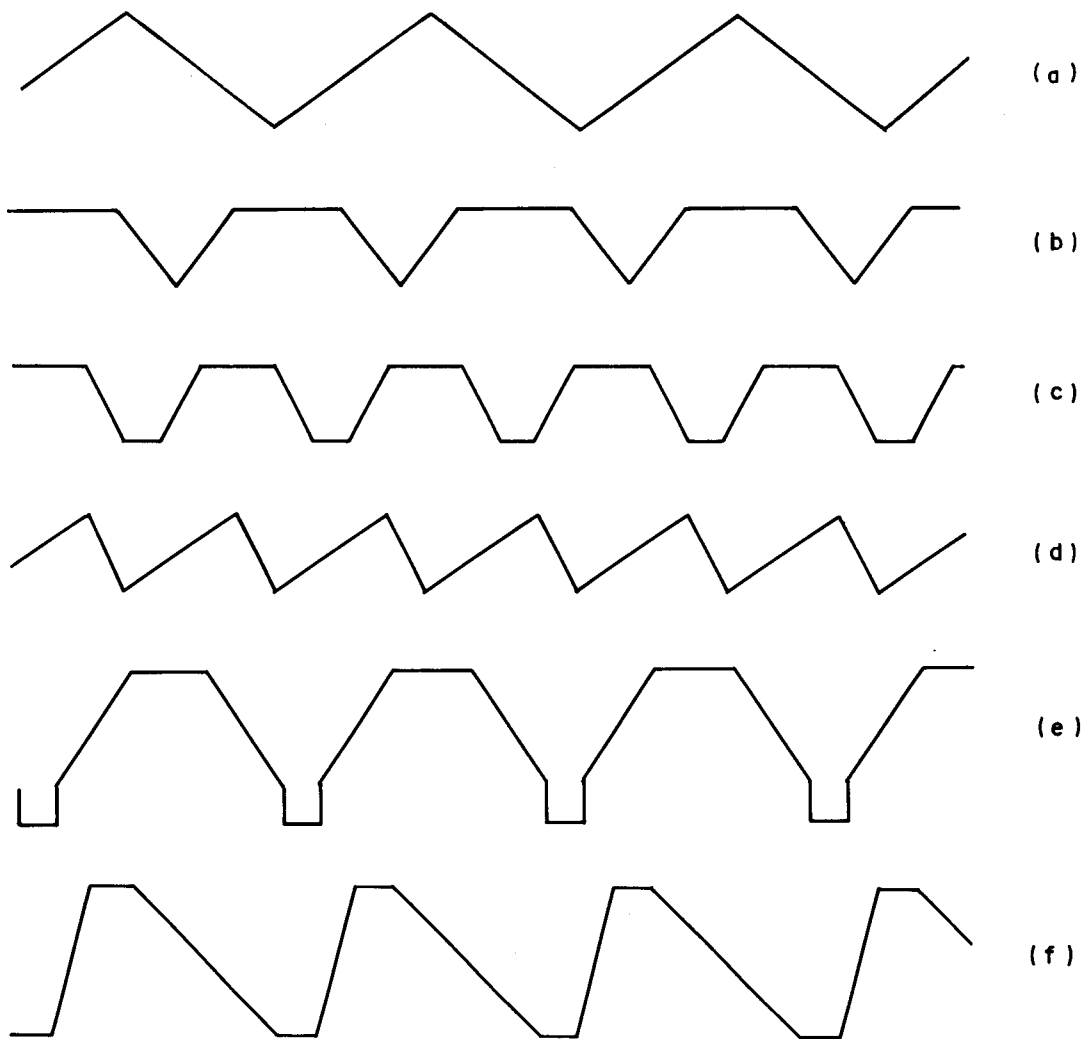


Figura I.3 - Seções transversais típicas de fôlhas prismáticas (ver também figura I.1)

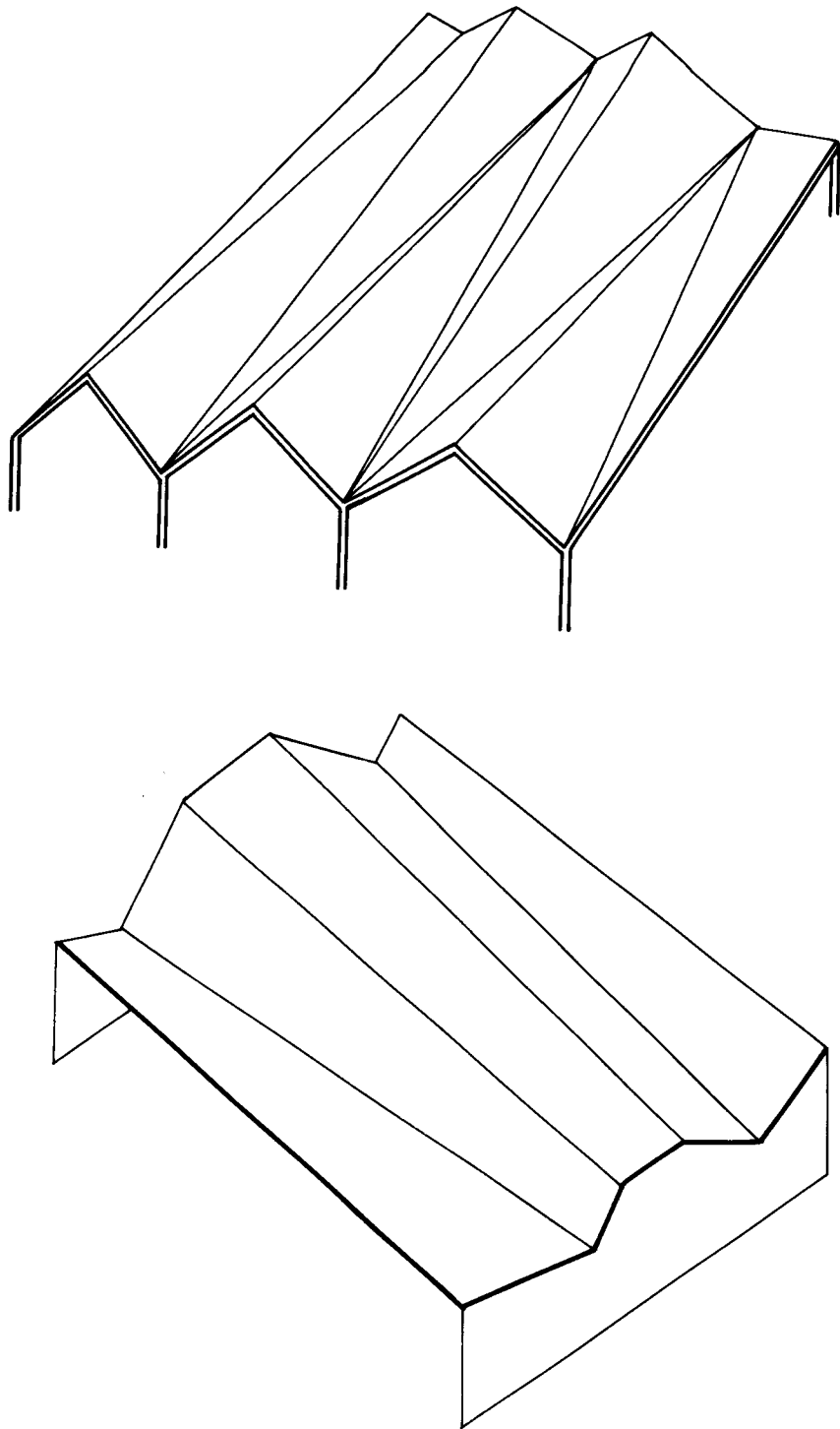


Fig. I. 4 — Folhas não prismáticas

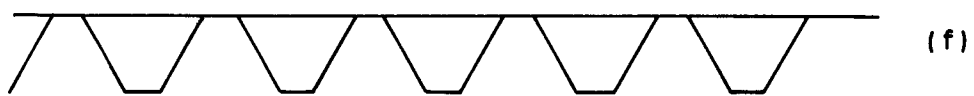
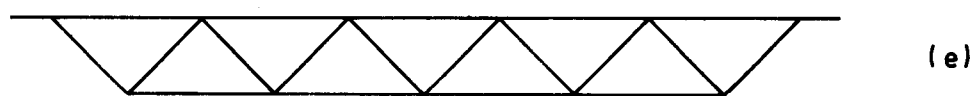
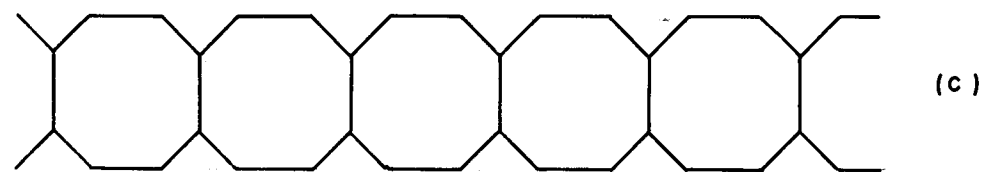
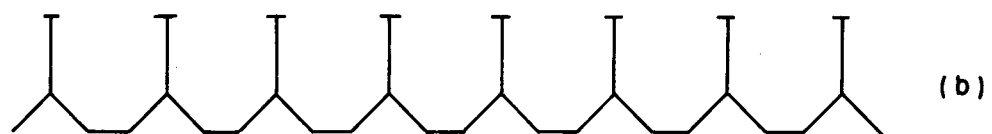
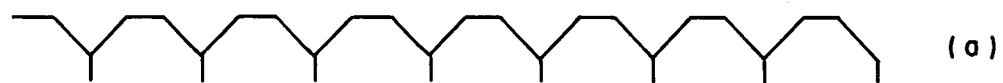
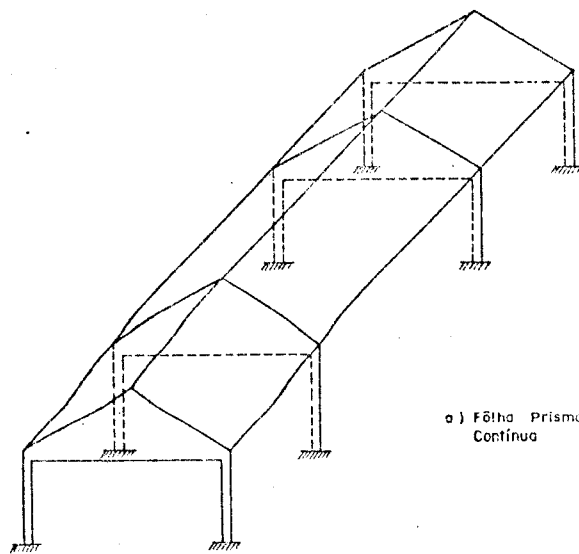
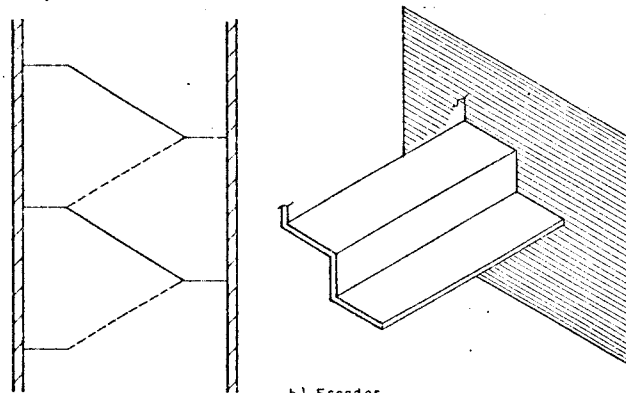


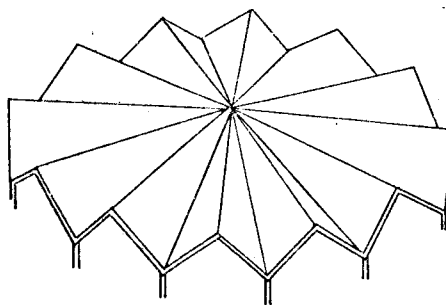
FIG. I-5 - FOLHAS MÚLTIPLAS - ALGUMAS SEÇÕES TÍPICAS.



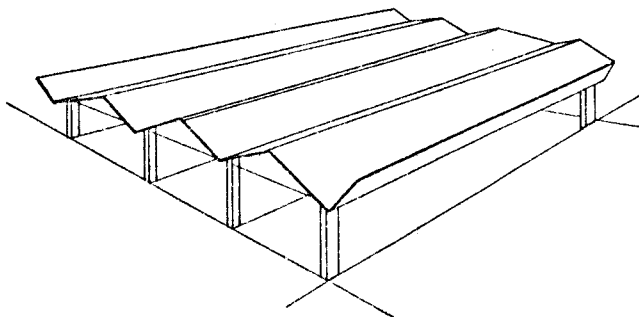
a) Fôlha Prismática Contínua



b) Escadas



c) Cobertura em guarda-chuva



d) Folha prismática simples, de múltiplas batalas

Figura I-6

I.4 - CONSIDERAÇÕES SOBRE O COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DAS FOLHAS PRISMÁTICAS

I.4.1 - Ação de placa e ação de chapa

A Fig. I.7 mostra o conceito básico da ação estrutural das folhas prismáticas: as cargas aplicadas podem ser decompostas em duas componentes - uma perpendicular e outra paralela à superfície da chapa.

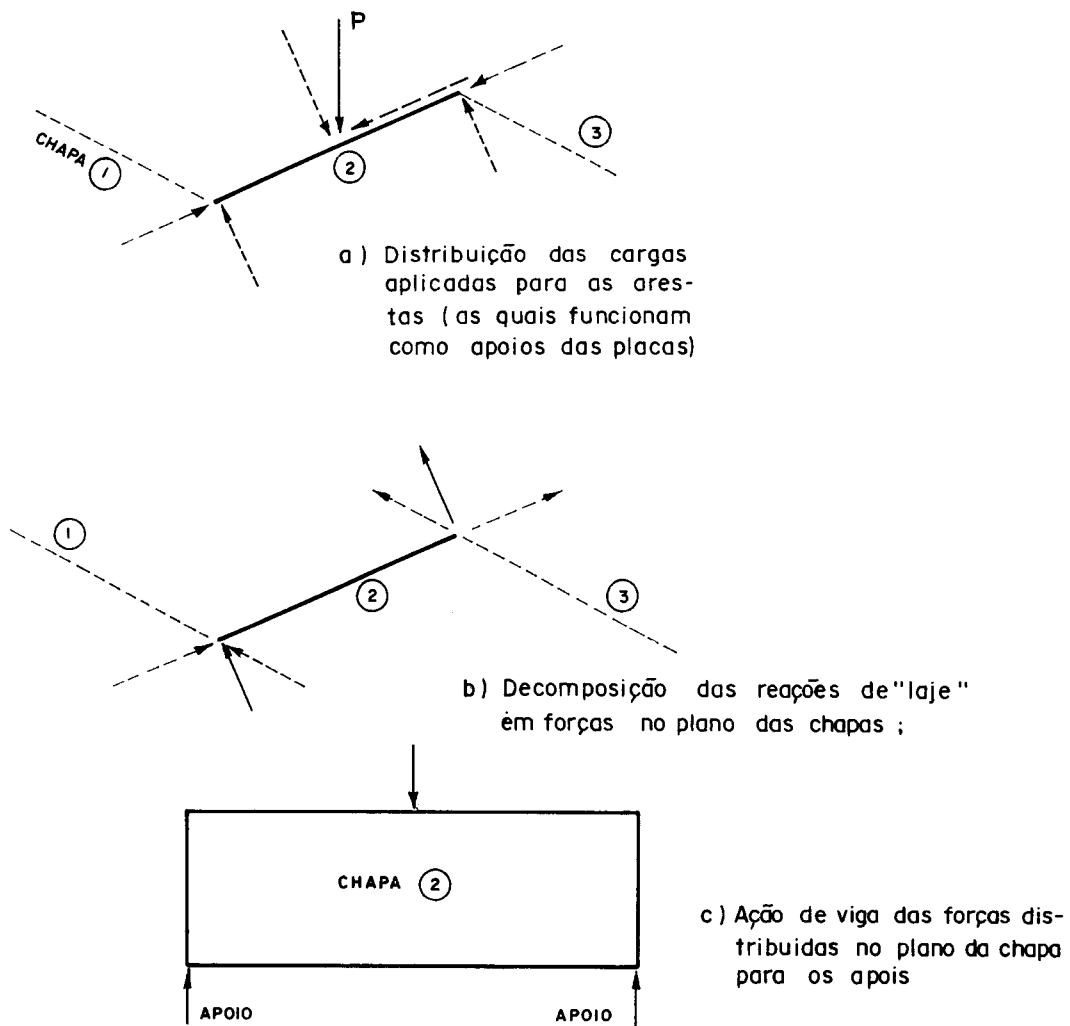


Figura I-7

As cargas perpendiculares à superfície da chapa provocam flexão (ação de placa) e esta transmite tais cargas para as arestas (reações de apoio das placas). Estas reações podem então ser transformadas em cargas paralelas ao plano das chapas e somadas com a componente das cargas aplicadas, ocorrendo então a "ação de chapa", com tais cargas sendo transmitidas aos apoios de extremidade. Considere-se então que as cargas distribuídas sobre a estrutura sejam resistidas primeiro pela ação transversal de laje e depois pela ação longitudinal de viga. É evidente que, para ocorrer essa distribuição de forças, é necessário haver um ângulo razoável entre as chapas adjacentes (o que será comentado adiante).

Na ação de placa, deve-se notar que cada laje pode ser apoiada diferentemente em todos os seus bordos, e que esses apoios podem ter graus variáveis de rigidez, devendo essas possibilidades serem consideradas na análise.

A ação de chapa também é afetada pelas condições de apoio. Além disso, a distribuição de tensões sobre a seção transversal da chapa pode não ser linear, caso em que uma das hipóteses de cálculo, hipóteses estas discutidas no capítulo seguinte ("as seções permanecem planas, após a deformação") não seria válida. Isto ocorre, por exemplo, quando a chapa funciona como viga-parede, isto é, quando a relação vão-altura da chapa for pequena.

Sob certas condições, algumas simplificações podem ser adotadas. Assim, por exemplo, a maioria dos métodos simples de cálculo têm em comum a adoção de uma relação vão-altura grande (normalmente, adota-se $L/h > 3$), permitindo a hipótese da linearidade de tensões e o tratamento da estrutura, quando da ação de placa, como laje contínua apoiada em uma só direção, ou seja, desprezam-se os momentos longitudinais nas lajes.

Deve-se considerar também na análise, o efeito sobre as ações de placa e chapa da compatibilização de tensões e deformações nas arestas.

I.4.2 - Comentários sobre as formas prismáticas usuais e sua influência na distribuição dos esforços

Como foi visto, a estrutura em folha prismática é composta, basicamente, por chapas inclinadas juntadas pelas arestas. O ângulo de inclinação das chapas não deve ser maior que 45° com a horizontal, para evitar o uso de formas duplas. Normalmente, procura-se usar um ângulo em torno de 30° , para facilitar a concretagem.

A forma mais simples de uma folha prismática consiste de duas chapas inclinadas em forma de V. Nesse caso, transversalmente, as chapas funcionam como duas lajes em balanço engastadas na aresta, resultando em grande momento fletor. A desvantagem desse tipo de seção transversal (bem como de sua extensão, isto é, várias chapas inclinadas em forma de V) é que a área de concreto junto às arestas pode não ser suficiente para resistir aos esforços de compressão causados pela flexão e nem para permitir a colocação da armadura necessária (além, evidentemente, do grande momento fletor que aparece nas arestas de extremidade, o qual, no caso de uso de chapas de mesma dimensão, colocadas com a mesma inclinação, é seis vezes maior que os momentos das arestas internas - ver Fig. 1.8.b).

Para diminuir os esforços e permitir a adoção desse tipo de seção transversal, recomenda-se²³ a colocação de vigas de enrijecimento horizontais, as quais irão impedir a deformação do bordo livre (desaparece, portanto, o balanço de extremidade), tornando, com isso, a seção transversal aceitável do ponto de vista estático (ver Fig. I.8.d). A vantagem dessa seção é apresentar menores esforços, embora com maior consumo de material, do que, por exemplo, uma seção como a da Fig. I.1, a qual, por ser mais flexível transversalmente, apresenta maiores momentos transversais.

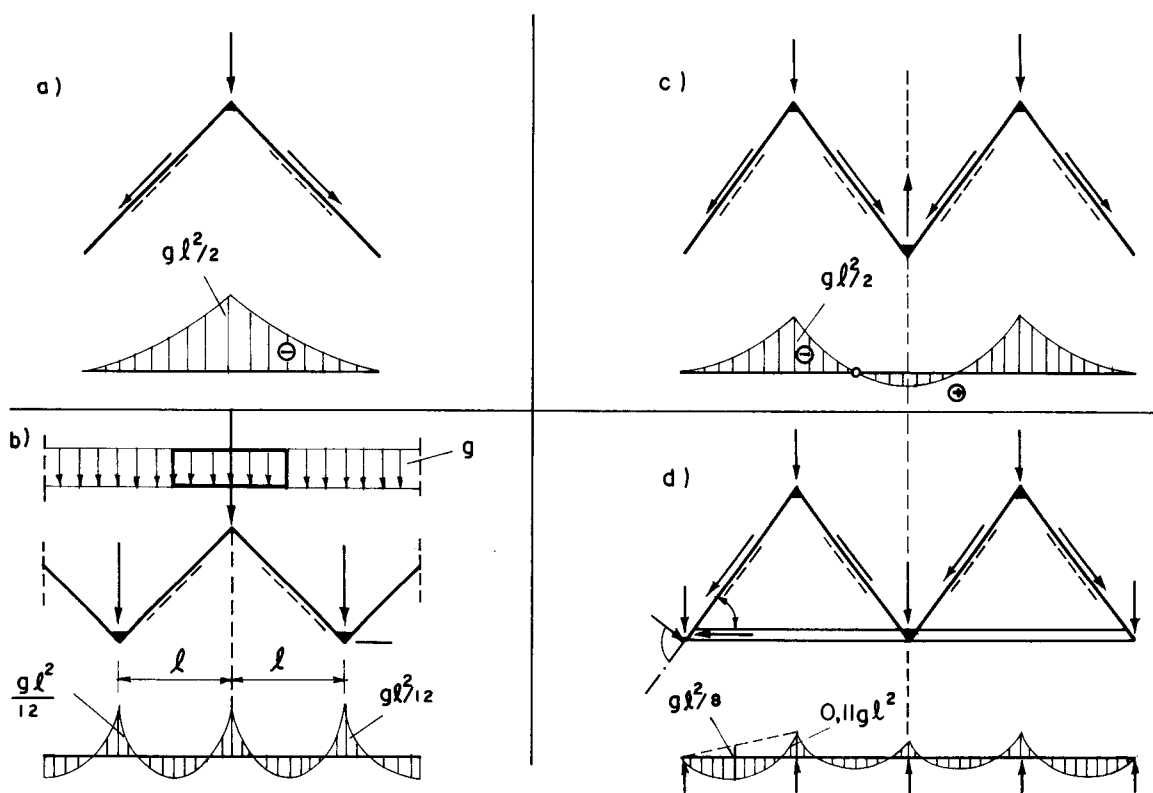


Figura I-8

Os momentos e as forças cortantes na seção transversal dependerão do número e do espaçamento das arestas, bem como da disposição das chapas. Voltando ao caso da estrutura formada apenas por duas chapas (Fig. I.8.a), se adicionarmos a ela mais duas pequenas chapas (Figs. I.9.a e I.9.b), a estrutura, na direção transversal, passa a funcionar como laje sobre três apoios, reduzindo os esforços. A colocação de uma placa horizontal (Fig. I.9.c) também reduz os momentos negativos nas lajes e permite cobrir um vão maior, aumentando o espaçamento transversal de pilares.

Uma forma mais prática (reduz substancialmente os esforços) é obtida pela colocação de placas horizontais junto às arestas superior e inferior das chapas inclinadas (ver Figs. I.3.c e I.3.f) com largura suficiente para limitar as tensões de compressão no concreto e permitir a colocação da armadura necessária.

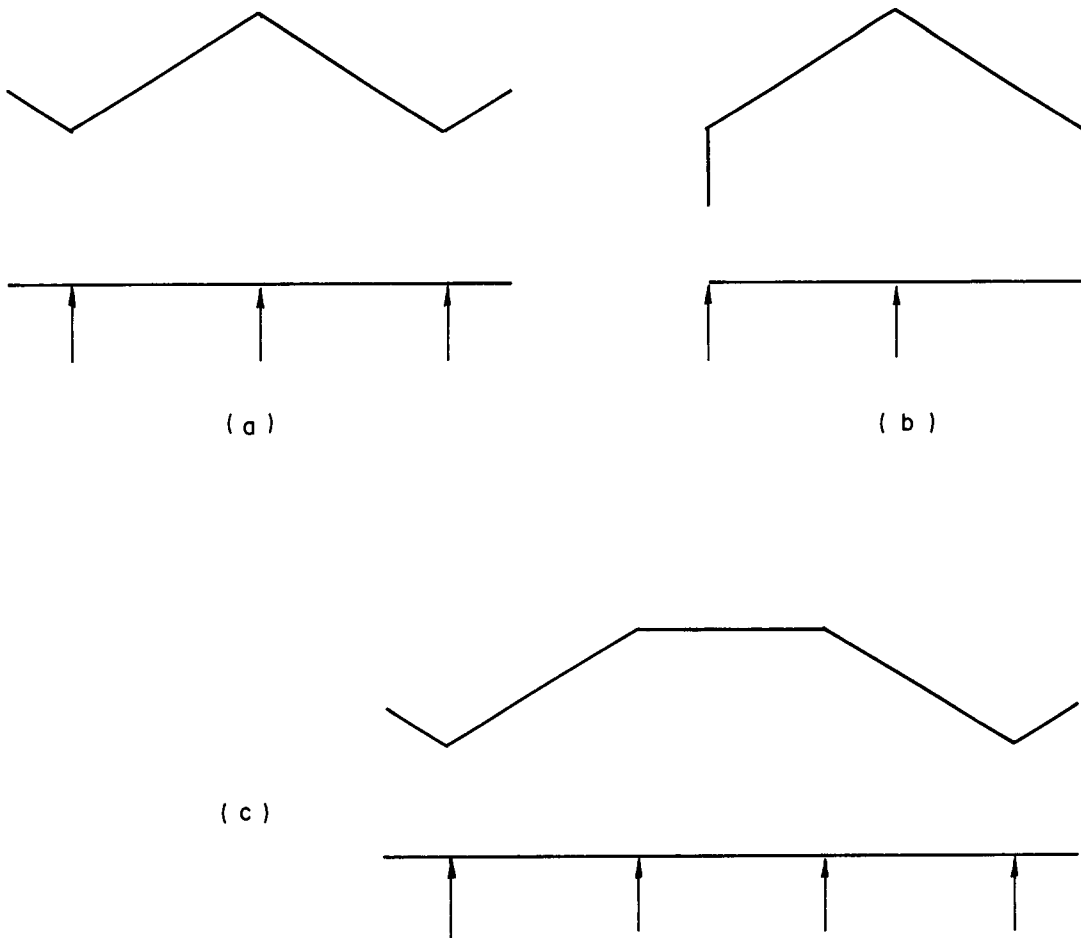


Figura I.9

O uso de chapas inclinadas se estendendo em uma única linha reta resulta geralmente numa seção transversal mais econômica do que aquela obtida com formas mais complicadas (com arestas intermediárias entre as superiores e inferiores).

A inclinação entre as chapas também desempenha papel importante na distribuição dos esforços, pois quanto menor for o ângulo α entre chapas adjacentes, menores serão os esforços de chapa que surgirão. Isso será facilmente verificado se examinarmos as expressões analíticas desses esforços, deduzidas no capítulo seguinte (ver equações (II.14) e (II.16), item II.4.1).

Os exemplos seguintes, encontrados em Franz²³, ilustram bem o que ocorre, pois nota-se que, diminuindo a inclinação entre as chapas, aumenta a flexão transversal e, em consequência, cresce a flecha do bordo livre (ver Fig. I.11), a qual pode chegar a valores inadmissíveis. Além disso, se a configuração deslocada da estrutura for tal que altere a forma da seção transversal, poder-se-á ter que reescrever as equações de equilíbrio, principalmente se lembrarmos que os métodos simples de cálculo não levam em conta a resistência das chapas à distorção originada pelas deformações diferenciais das duas arestas de uma chapa (ver Fig. I.10).

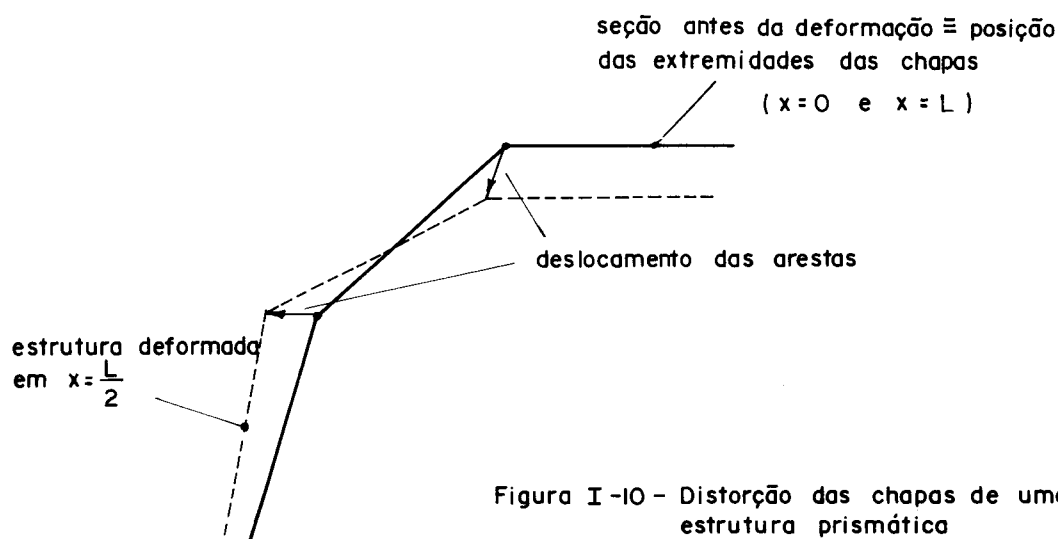


Figura I-10 - Distorção das chapas de uma estrutura prismática

Recomenda-se¹ então, para minimizar os efeitos da distorção, usar um ângulo entre chapas adjacentes não menor que 15° nem maior que 165° ($15^{\circ} < \alpha < 165^{\circ}$).

Tendo em vista a Fig. I.11, observa-se que as deformações das arestas (cuja importância para os valores dos esforços será melhor destacada em item posterior - ver item I.4.4) são tanto maiores quanto mais rebaixada for a estrutura, conforme já salientado.

Comparando-se os diagramas de esforços, verifica-se que, quanto mais rebaixada for a estrutura, maiores

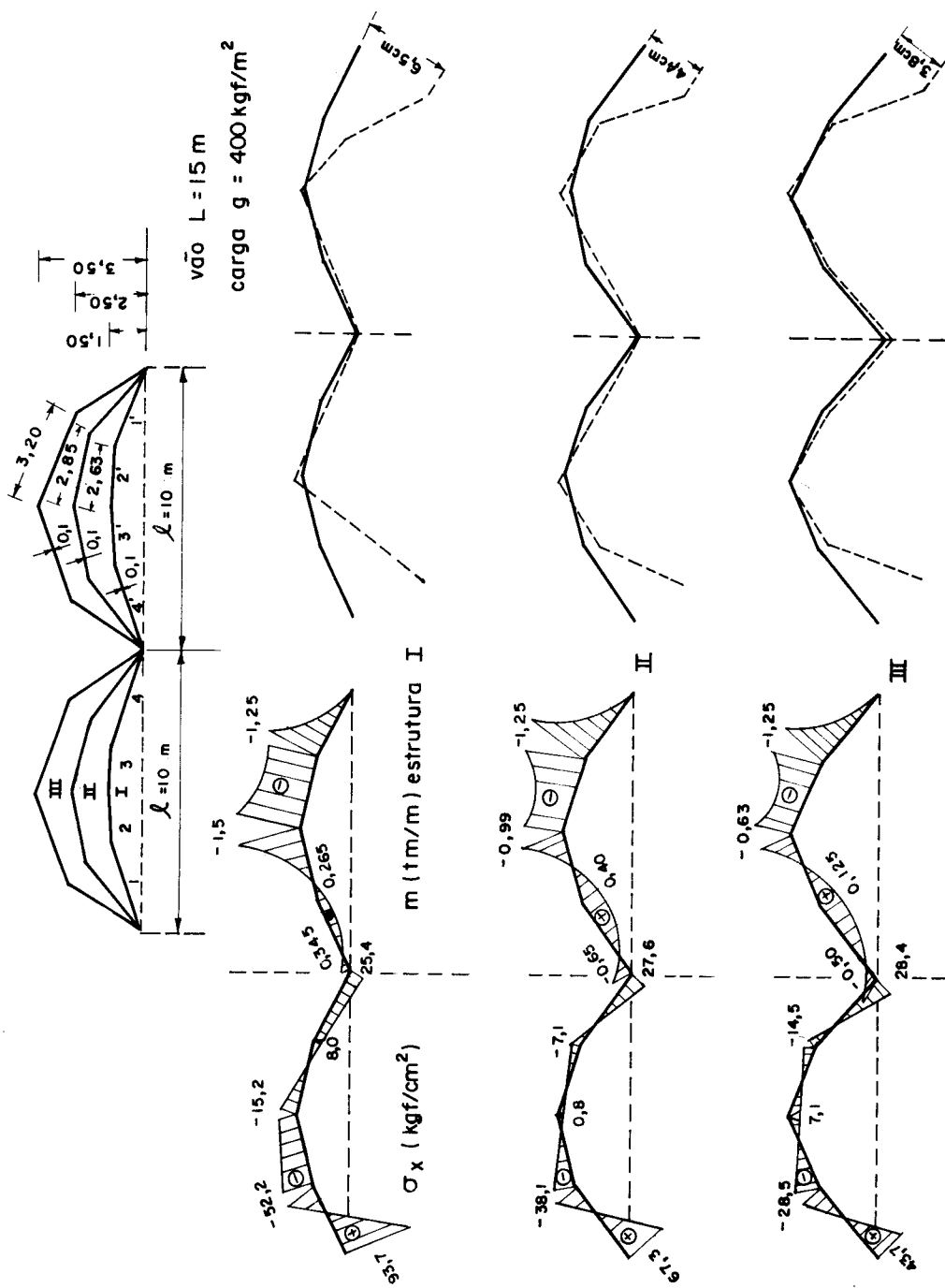
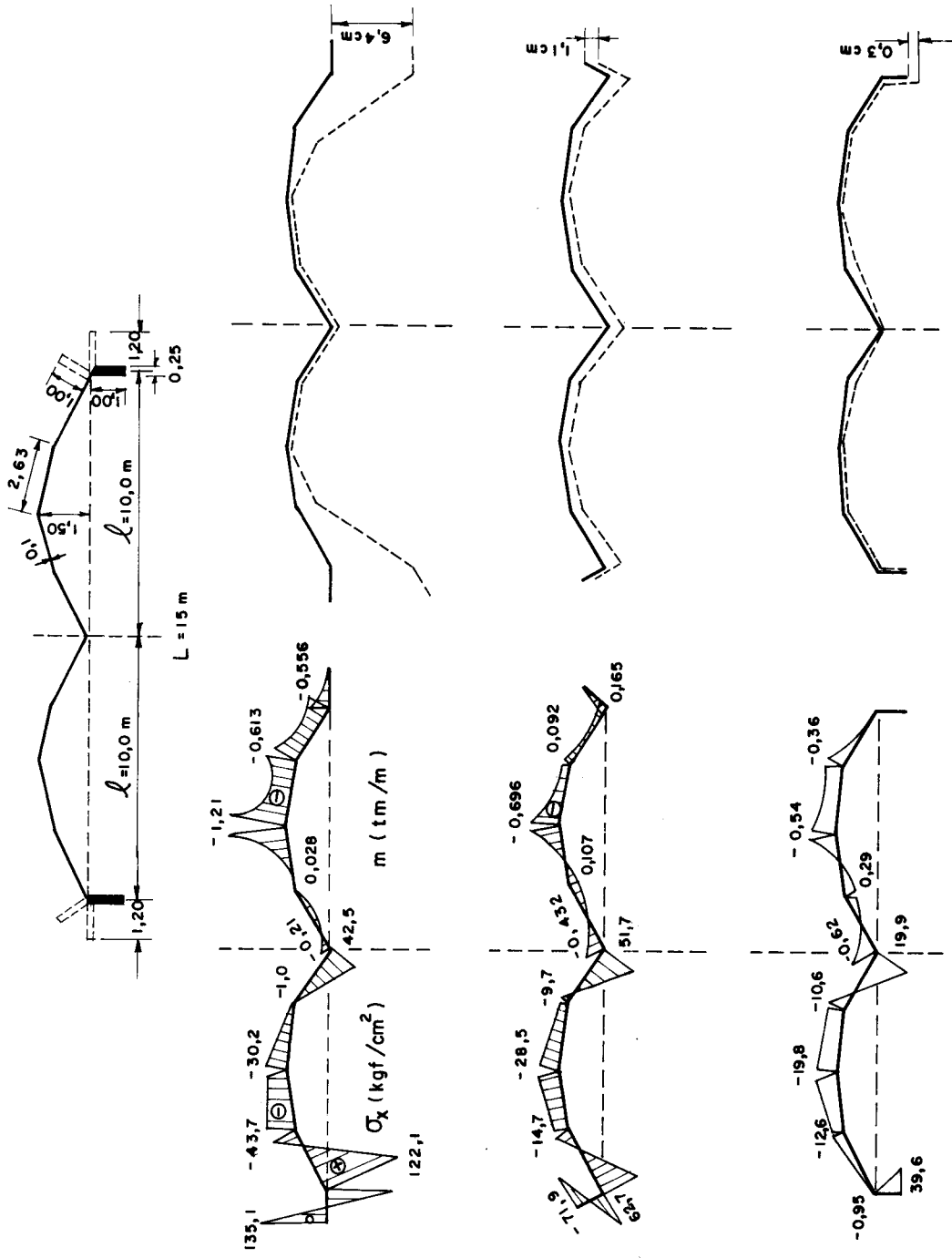


FIG. I - 11

serão os momentos transversais nas arestas (como consequência do aumento de deformação) e maiores serão as diferenças de tensões longitudinais nos bordos externo e interno.

É de se salientar também que as forças longitudinais nas estruturas prismáticas se aproximam tanto mais da distribuição linear (efeito de viga) e, conseqüentemente, das hipóteses de cálculo, quanto menor for a distorção, ou seja, quanto melhor se conserve a forma da seção transversal. Assim, as tensões de flexão, no caso das chapas internas, se aproximam das tensões de viga, mas podem ser muito diferentes destas no caso das chapas de extremidade, por causa da grande deformação dos bordos livres (efeito de balanço). Pode ser necessário, então, enrijecer esses bordos, o que pode ser feito através do uso, por exemplo, de vigas de bordo (ver Fig. I.12) ou de vigas intermediárias ou nervuras (ver Fig. I.13 e também item I.6.3).

A Fig. I.12 traz um estudo comparativo²³ entre vigas de bordo de diferente inclinação. Resulta que a colocação de uma viga horizontal é inconveniente pois, embora reduza os momentos transversais, as tensões longitudinais serão ainda maiores que as obtidas sem o uso de elementos de borda (ver Fig. I.11), além de praticamente não reduzir a flecha. A distribuição de tensões e momentos resultará muito mais conveniente com as disposições b ou c, pois nesses casos, os elementos de borda servem de apoio às chapas adjacentes, reduzindo assim as flechas, já que têm aproximadamente a mesma direção.



b) Deslocamentos das arestas

a) Tensões longitudinais σ_x e momentos transversais m

Figura I-12

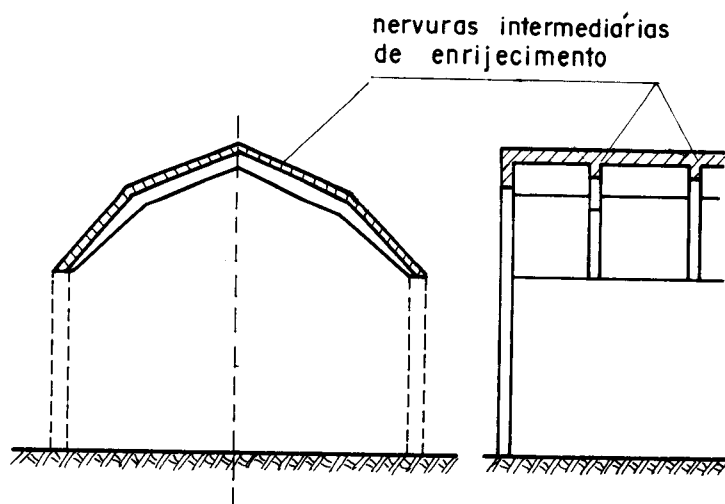


Figura I-13 — Enrijecimento das bordas

Os esforços de chapa de uma estrutura prismática, com pequenas diferenças de inclinação, à medida que se diminui a largura das chapas, aumentando, conseqüentemente o seu número, tendem ao valor limite $S = g \cdot r$, correspondente à casca cilíndrica de diretriz circular (ver Fig. I.14). Com efeito, estudos comparativos^{23, 24, 40} demonstram a grande semelhança de comportamento estrutural entre as cascas cilíndricas e as folhas prismáticas, principalmente quanto às tensões longitudinais, havendo uma diferença quanto aos momentos fletores transversais, devido à descontinuidade nas arestas das folhas prismáticas (ver final do item I.6.1).

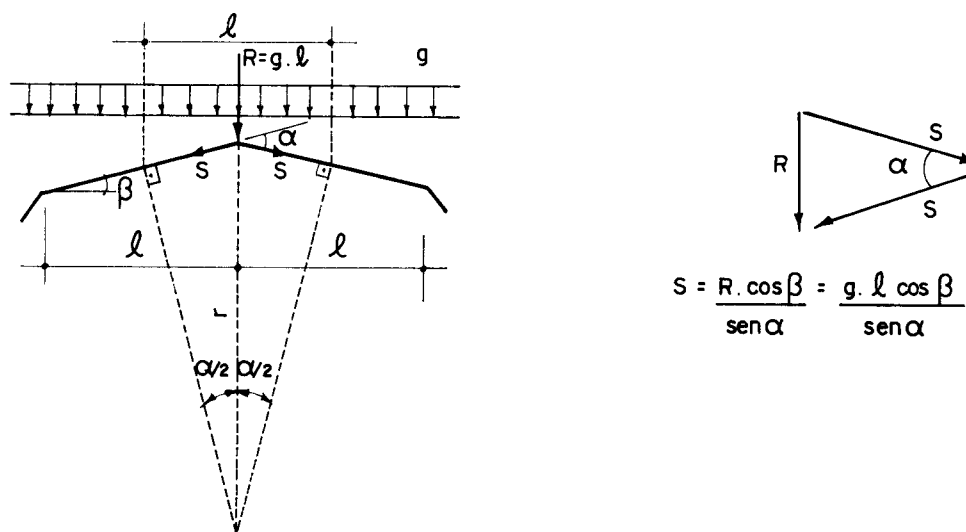


Figura I.14 — Cargas de chapas S, no caso de pequenos ângulos α entre as chapas (ver capítulo II, item II.4.1, fig II.10, equações 16)

I.4.3 - Força cortante longitudinal nos bordos das chapas

Como visto (Fig. I.7), quando duas chapas adjacentes são contínuas sobre uma aresta, as cargas nela aplicadas, que são as reações de apoio da placa contínua transversal, são decompostas em duas componentes, cada uma atuando no plano de uma chapa. Esses esforços de chapa, somados com aqueles provocados nas arestas vizinhas, irão causar flexão (efeito de viga) e provocar o aparecimento de tensões normais (ver Fig. I.15.a). A menos que a aresta comum às duas chapas esteja contida num plano vertical de simetria (tanto da estrutura quanto do carregamento), as tensões normais calculadas para o mesmo ponto, ao longo da aresta comum, serão diferentes para as duas chapas adjacentes (Fig. I.15.a), ou seja, haveria um "deslizamento" entre as superfícies em contato (Fig. I.15.b), causado pela flexão independente de cada viga.

Evidentemente, as chapas não atuam independentemente, e as tensões nos bordos adjacentes precisam ter o mesmo valor (não ocorre o "deslizamento"), já que ambas são juntadas monoliticamente pela aresta (Fig. I.15.c). Portanto, deve haver tensões cisalhantes horizontais atuando ao longo da aresta, de maneira a igualar as tensões e as deformações nos bordos das chapas adjacentes a ela, e corrigir a diferença que aparece numa primeira análise. A resultante dessas tensões será a força cortante longitudinal na aresta, e cujo valor pode ser obtido pela "equação das três cortantes", deduzida no capítulo seguinte (ver equação (II.24), item II.4.2).

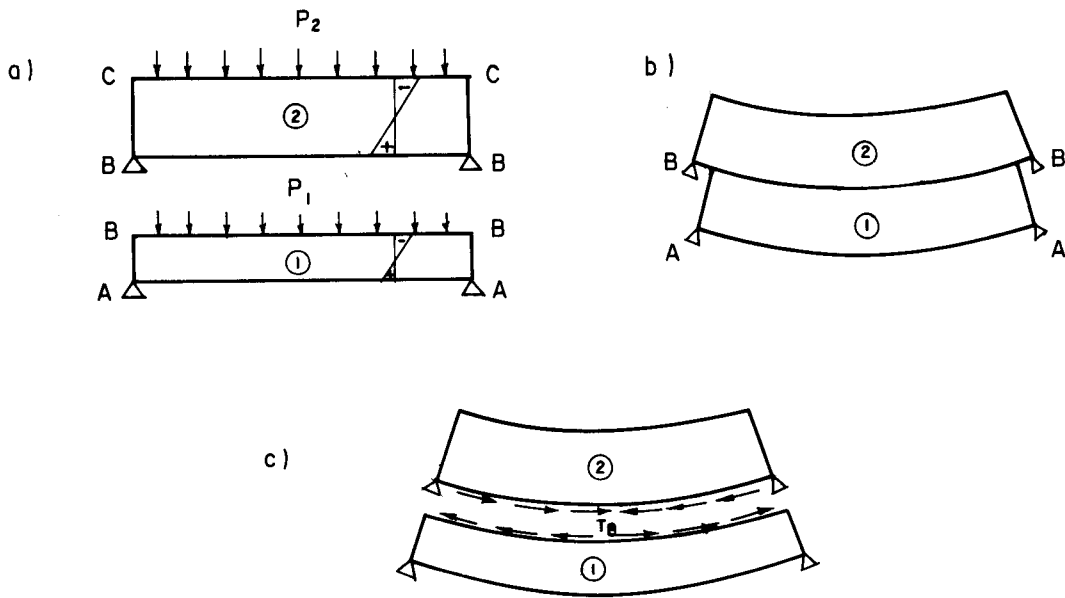


Figura I - 15

I.4.4 - Deflexões das arestas

Como visto, quando as cargas são transmitidas às arestas, originam-se momentos transversais iguais aos de uma laje contínua rigidamente apoiada, quando a seção transversal conserva sua forma. Mas essa hipótese de conservação da forma da seção transversal só é válida se se puder considerar as chapas rígidas em seu plano, o que é admissível no caso de dimensões reduzidas, com as arestas representando linhas de apoio indeslocáveis (sem variação de comprimento).

Porém, se as dimensões das chapas forem tais que sua esbelteza seja grande ($L/h \geq 3$, por exemplo), têm-se que levar em consideração as deformações no plano da chapa, pois a ação de viga causada pelo carregamento e as tensões cisalhantes corretivas que aparecem nos bordos (ver item I.4.3) provocam flexão das chapas em seu próprio plano e, conseqüentemente, deformam a seção transversal (ver Fig. I.16.d).

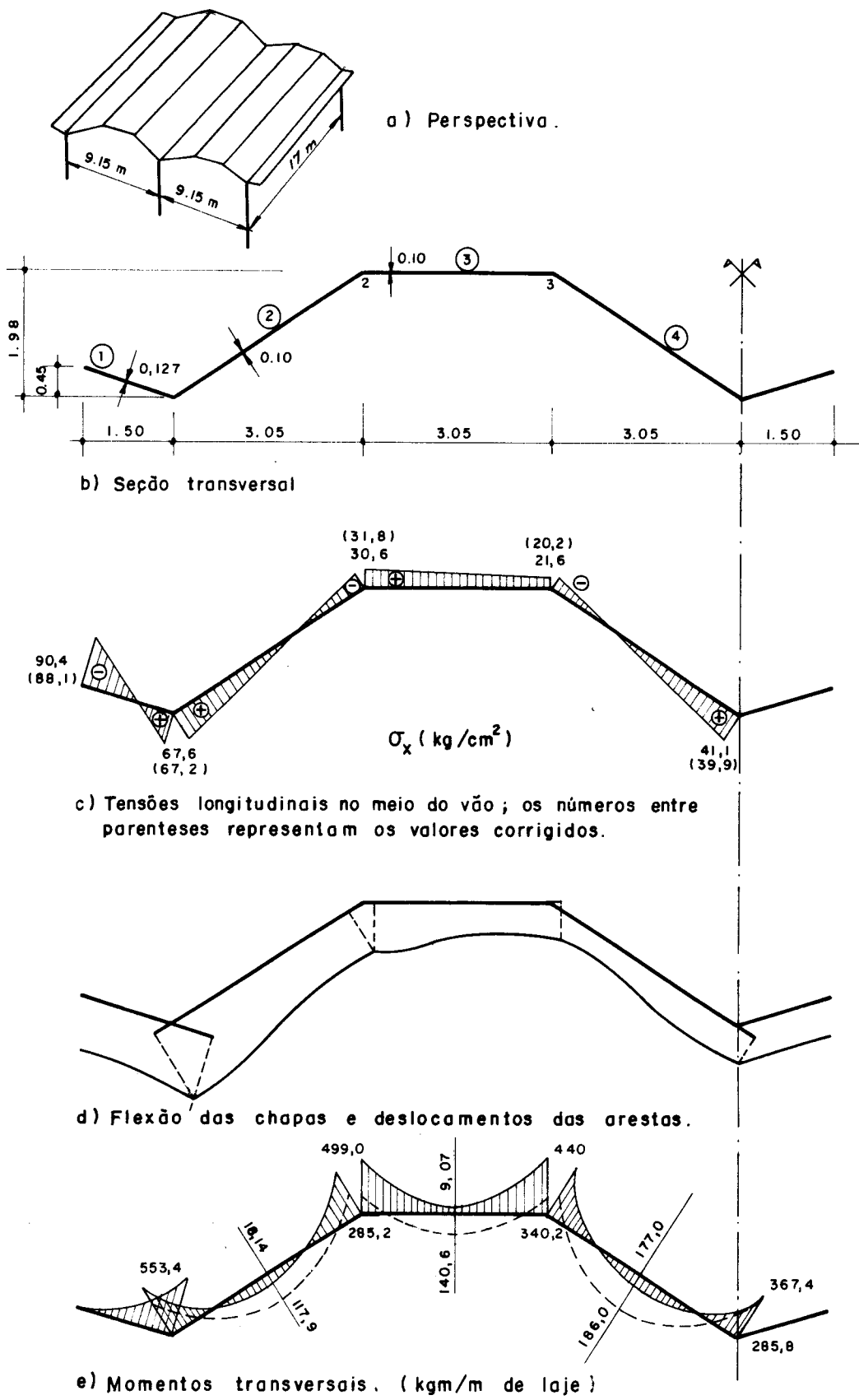


FIGURA I - 16

Essa flexão das chapas, quando se considera o seu conjunto, irá alterar a posição das arestas, e essa modificação terá, sobre os momentos transversais, o mesmo efeito que recalques de apoio teriam nos momentos da laje contínua idealizada, como demonstra o exemplo seguinte, dado por Brielmaier²⁵ (ver Fig. I.16), aqui colocado com fins ilustrativos, bem como demonstrarão os exemplos resolvidos em capítulo posterior. Na Fig. I.16.e, a linha tracejada representa a variação dos momentos calculados sem levar em conta a translação das arestas, e a linha cheia representa os momentos já corrigidos, isto é, levando em conta o efeito dessa translação.

Para carregamento simétrico, como as deflexões das chapas variam de zero nos apoios até um máximo no meio do vão, a correção dos momentos variará de modo semelhante. A curva cheia, portanto, dá os momentos no meio do vão, mas, à medida que a seção considerada se aproxima do apoio, os momentos transversais se aproximarão daqueles assinalados pela linha tracejada.

A variação dos momentos transversais produzida pelas deflexões das arestas pode ser grande e deve sempre ser considerada, pois a variação das cargas nas chapas assim produzida será apreciável, havendo conseqüentemente a variação também das tensões cisalhantes nas arestas. Isso tudo irá produzir uma variação também das deflexões nas arestas, caminhando então para uma solução por séries de aproximações ou correções sucessivas, cada passo começando com as deflexões das arestas obtidas no passo anterior. Em muitos casos, a primeira correção devido às deflexões é suficiente. Em alguns casos, são necessárias várias correções e, em outros, as correções são muitas e oscilantes, convergindo lentamente. Esta é a grande desvantagem do método iterativo^{3,25,30}, sendo preferível fazer a correção dos esforços através de equações que permitam a solução direta para os valores finais das translações das arestas (como é feito nos métodos propostos, por exemplo, por Simpson^{26,3}, Whitney^{3,27}, Yitzhaky^{24,28,29,30,31}, etc...

I.4.5 - Condições de apoio

Foi visto que as chapas se comportam como vigas, transmitindo o carregamento no seu plano aos apoios de extremidade. Tal transmissão não deve ser feita unicamente pelo apoio do canto inferior da chapa, como carga concentrada, sendo de bom alvitre apoiar a chapa tangencialmente ao longo do seu bordo menor (ver Fig. I.17.a).

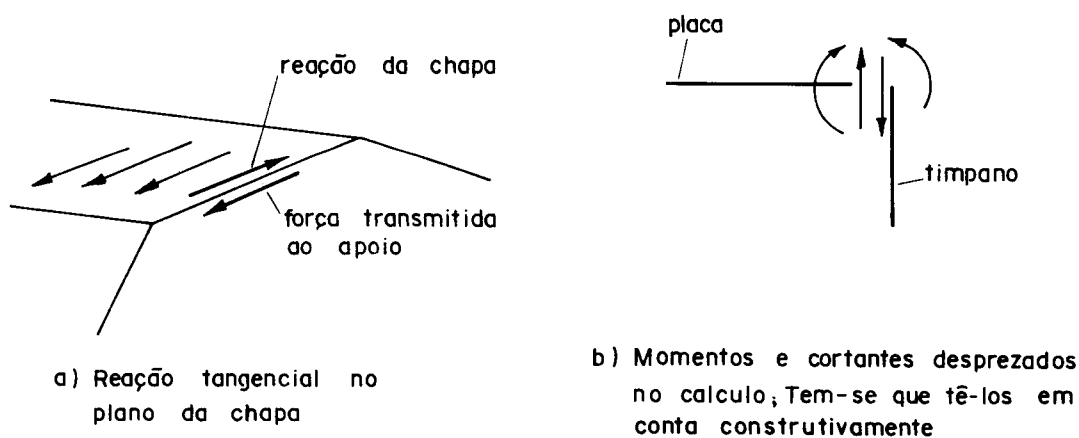


Figura I-17

Esse apoio pode então ser feito de diversas maneiras (ver Fig. I.18), com os tímpanos podendo ter forma de paredes ou de pórtilcos. Pode-se também apoiar as chapas direto nos pilares (ver Fig. I.18.c). Os apoios transversais, além das extremidades, também podem ser colocados ao longo da estrutura, caso em que as chapas funcionariam como vigas contínuas.

O tipo de apoio deve ser considerado na análise da estrutura, pois as restrições quanto à sua deformação, ou a ausência delas, pode modificar a distribuição de tensões em toda a estrutura. Os métodos clássicos de análise, para simplificar os cálculos, supõem que os tímpanos são rígidos em seu plano e flexíveis perpendicularmente a eles, bem como desprezam a rigidez à flexão das placas no senti

do longitudinal (isto é, supõem-se laje contínua apoiada em uma só direção), o que justifica a suposição de tangenciais às cargas das chapas. Todavia, devido às flechas das arestas, no apoio ocorrem também forças transversais perpendiculares ao plano das chapas (reações longitudinais de apoio das lajes), bem como momentos de engastamento, os quais, embora desprezados para facilitar os cálculos, devem ser considerados construtivamente (ver Fig. I.17.b), com adoção de armaduras de engastamento, assunto esse melhor discutido em capítulo posterior. Não há, evidentemente, maiores problemas em se considerar tais efeitos nos cálculos, quando se usa técnicas como a dos elementos finitos para a solução dessas estruturas (ver item I.6.1).

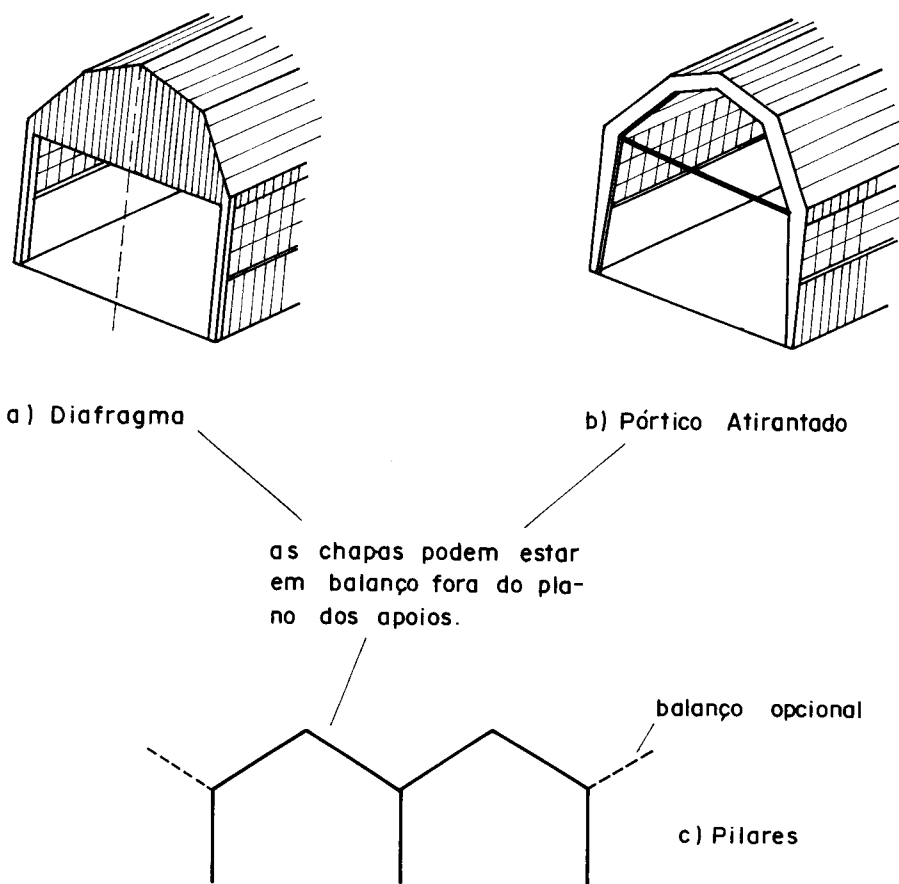


Figura I.18 - Apoios das chapas

I.5 - CONSIDERAÇÕES SOBRE OS MÉTODOS DE ANÁLISE

Os métodos de análise das estruturas em folhas poliédricas foram classificados de duas maneiras: a primeira classificação foi feita pela comissão da A.S.C.E.¹; a segunda foi feita por Powell⁶ e ampliada por Iffland².

Procurar-se-á aqui dar uma idéia geral das duas classificações mencionadas e dos trabalhos nelas envolvidos, bem como ampliá-las com novos artigos. Além disso, no item seguinte, incluir-se-á um novo estudo bibliográfico sobre a investigação experimental dessas estruturas, bem como procurar-se-á analisar os principais resultados obtidos nessas investigações, tentando dar o necessário suporte às hipóteses, equacionamento (que serão discutidos no capítulo seguinte) e comportamento dessas estruturas (já discutido nos itens anteriores).

I.5.1 - Classificação baseada na comissão da A.S.C.E.

Na classificação apresentada¹, consideraram-se apenas as estruturas prismáticas. Os métodos de análise recaem em quatro principais categorias:

a) Método de vigas:

Consiste na aplicação da teoria geral de vigas às estruturas em folhas prismáticas. A principal hipótese adotada é que a estrutura deslocada mantenha a sua forma original, isto é, todos os pontos de uma dada seção transversal sofrem o mesmo deslocamento. Essa hipótese, em geral é falha, porque a espessura b de cada chapa é relativamente pequena, quando comparada com as outras dimensões da seção transversal e, sob carregamento, a seção muda de forma. A teoria de viga pode ser aplicada às folhas nas quais nervuras intermediárias tenham sido previstas, espaçadas de maneira a conservar a forma da seção transversal (V.Fig. I.13).

Vários autores discutem essa teoria. Citar-se-ão aqui: Brielmaier²⁵, Craemer⁵, Gaafar⁷, Scordelis, Croy e Stubbs³², Whitney, Anderson e Birnbaum²⁷, Yitzhaky²⁸. Brielmaier²⁵ faz um estudo comparativo através de um exemplo resolvido pelos métodos iterativos e de viga. Craemer^{5,27} estuda uma seção particular, aproximando-a da casca cilíndrica, visando especificar a gama de valores das espessuras, vãos e alturas das chapas para os quais os resultados fornecidos pelo método de vigas sejam suficientemente precisos.

Todavia, como os resultados obtidos através de análise mais rigorosa geralmente diferem totalmente dos fornecidos pela teoria de viga, a comissão da A.S.C.E. desaconselha o uso do método como caso geral. Também a experimentação^{7,32} (ver item I.6.1) desaconselha o seu uso, porque o método geralmente subestima os valores dos esforços. Alguns autores, como Chacos e Scalzi³³, consideram o método aplicável, mas apenas para a estrutura particular por eles examinada. Gaafar⁷ e Yitzhaky²⁸ sugerem uma modificação do método pela correção dos valores fornecidos, de maneira a obter resultados suficientemente precisos (ver item I.6.1).

b) Folhas prismáticas - método aproximado

Despreza-se a influência dos deslocamentos relativos das arestas. A análise por este método é bem descrita por Winter e Pei⁴; os quais consideram que os esforços provocados por esses deslocamentos são desprezíveis, comparados com os valores obtidos pela consideração de arestas ind deslocáveis (sô efeito do carregamento).

Todavia, a prática demonstra que esses esforços não são desprezíveis (veja-se item I.4.4, Fig. I.16.d). Também a experimentação demonstra isso (ver item I.6.1, Tabela I.1). A comissão considerou esse método como insatisfatório, no caso geral, podendo-se utilizá-lo quando análi

ses prévias demonstrarem que os deslocamentos das arestas são desprezíveis.

c) Folhas prismáticas - métodos simples

Levam em conta os efeitos dos deslocamentos das arestas. A grande maioria dos métodos recai nesta categoria, como os de Vlassow²⁷, Simpson^{3,26}, Gaafar⁷, Yitzhaky^{28 29 30}, Yitzhaky e Reiss²⁹, etc.. A experimentação demonstra que elas são perfeitamente aplicáveis (ver item I.6.1), embora possam resultar em dimensionamento antieconômico, pois uma das hipóteses clássicas não se verifica na realidade: os diafragmas, pela hipótese, deveriam ser perfeitamente flexíveis perpendicularmente ao seu plano (as chapas funcionariam como neles articuladas), mas isso não ocorre (ver também item I.4.5).

Como alguns desses métodos serão melhor analisados no capítulo seguinte (ver item II.5), não mais nos estenderemos, mas é útil lembrar que a comissão da A.S.C.E. aceita os métodos e recomenda uma modificação do proposto por Gaafar, como será visto adiante (ver item II.5.4).

d) Método baseado na Teoria Linear da Elasticidade

Uma grande variedade de métodos simples de análise (os quais, como hipótese simplificadora, desprezam os momentos longitudinais nas placas, assumindo-as como contínuas, apoiadas em uma única direção) é encontrada na literatura, mas são poucos os trabalhos disponíveis que façam uma análise mais rigorosa, baseada em hipóteses mais exatas, como as da Teoria da Elasticidade. Podem ser citados: Goldberg e Leve³⁴, Rudiger³⁵, Werfel³⁶, entre esses, os quais propõem soluções para as folhas prismáticas combinando as equações da teoria das placas para cargas perpendiculares aos seus planos e as equações da elasticidade definindo o estado plano de tensões, para cargas no plano das chapas.

Como demonstra a experimentação (ver item I.6.1), esse método não deve ser aplicado para resolver estruturas que cubram grandes vãos, mas é indicado para pequenos vãos, por melhor traduzir o comportamento da estrutura nessas condições, já que não ocorrerá o uso inconveniente, no caso, da hipótese simplificadora citada.

Os três métodos acima citados requerem que se desenvolva a carga em séries de Fourier. Cargas não uniformes requerem grande número de termos, para que se atinja a necessária precisão. Em vista do grande trabalho de cálculo requerido, os métodos se tornam praticáveis apenas com o auxílio do computador. De Fries-Skene e Scordelis³⁷ apresentam um programa em que o método desenvolvido por Goldberg e Leve³⁴ é analisado dessa forma.

Mast³⁸ propôs um método iterativo baseado nas mesmas hipóteses dos métodos acima citados. A vantagem apresentada é que o método de Mast pode ser utilizado para cálculos manuais (pois reduz o número de equações, em relação aos outros), podendo também ser estendido para o computador. Além disso, Powell⁸ observa que o método iterativo proposto por Mast é melhor que os métodos iterativos propriamente ditos, os quais apresentam várias restrições, como veremos no capítulo seguinte (ver item II.6.1).

I.5.2 - Classificação baseada em Powell⁸ e ampliada por Iffland²

Powell⁸ apresentou a seguinte classificação (procurou-se colocar novos itens e respeitar a classificação, bem como utilizar apenas as referências encontradas na pesquisa bibliográfica).

a) Soluções exatas para folhas poliédricas prismáticas simplesmente apoiadas:

Born⁶; De Fries-Skene e Scordelis³⁷; Gibson^{39,40}; Goldberg e Leve³⁴; Rudiger³⁵; Scordelis, Croy e Stubbs³²; Werfel³⁶;

b) Soluções diretas

Barker⁴¹; Holand³; Meek⁴²; Parme⁴³; Scordelis⁴⁴; Traum^{30, 31}; Whitney^{3, 27};

c) Métodos para cálculos manuais - Métodos de membrana

Brielmaier²⁵; Mast³⁸; Reiss e Yitzhak⁴⁵; Seetha ramulu e Kulkarni⁴⁶; Winter e Pei⁴;

d) Métodos de coeficientes de influência

Gaafar^{1, 7}; Simpson^{3, 26, 30}; Traum^{30, 31}; Yitzhaky^{28, 30}; Yitzhaky e Reiss²⁹;

e) Método de coeficiente duplo de influência

Goble⁴⁷.

Embora alguns dos métodos citados acima não tenham esta limitação, a maioria se limita ao caso de folhas biapoiadas. Tendo isso em vista, Iffland² procurou ampliar a classificação, agrupando soluções para outros tipos de estruturas, como segue:

f) Folhas contínuas

Beaufait^{48, 49, 50}; Born⁶; Faria⁵¹; Goldberg, Gutzwiller e Lee⁵²; Lee, Pulmano e Lin⁵³; Mousa, Parmelee e Lee⁵⁴; Muhlbauer e Beaufait⁵⁵; Pulmano e Lee⁵⁶; Pultar, Billington e Riera⁵⁷; Ramaswamy³; Sharma e Goyal⁵⁸; Wahab e Mousa⁵⁹; Vakil⁶⁰; Yithaky e Reiss²⁹;

g) Folhas múltiplas

Born⁶; Chu e Pinjarkar⁶⁷; Chu e Dudnik¹¹; Gibson e Gardner⁶²; Lee e Vos⁶³; Lo e Scordelis⁶⁴; Paulson⁶⁵; Yitzhaky²⁸;

h) Folhas não prismáticas

Beavers e Beaufait⁸⁶; Franz²³; Johnson⁶⁶; Johnson e Lee^{67, 68, 69}; Welch⁷⁰; Whitney⁷¹;

Procura-se agora apresentar uma complementação dessa classificação.

i) Folhas protendidas

Billington²⁴; Brough e Stephens⁷²; Driskell⁷³; Goble⁴⁷; Govindaswamy e Swartz⁷⁴; Klaiber, Gutzwiller e Lee⁷⁵; Ramaswamy³; Yitzhaky e Reiss²⁹;

j) Pontes de seção celular resolvidas como folhas poliédricas

Buragohain e Agrawal⁷⁶; Chu e Dudnik¹¹; Chu e Pinjarkar⁷⁷; Davis, Scheffey, Castleton e Evans⁷⁸; Meyer e Scordelis¹⁰;

k) Folhas poliédricas resolvidas mediante o uso de diferenças finitas

Conrado⁷⁹; Farmer e Breen⁸⁰; Ghazaleh⁸¹; Shanmugasundaram⁸²; Goldberg, Gutzwiller e Lee⁵²;

l) Folhas poliédricas resolvidas mediante o uso de faixas finitas

Chung⁸³; Ibrahim e Monforton⁸⁴; Victor e Elyin⁸⁵;

m) Elementos finitos

Beavers e Beaufait⁸⁶; Fazio e Ha⁸⁷; Rockey e Evans⁸⁸;

Iffland sugere ainda outra classificação, por problemas especiais, como os que se referem à estabilidade:

n) Instabilidade das folhas poliédricas

Avent e Bounin⁸⁹; Lind⁹⁰; Mikhail⁹¹; Mikhail e Guralnick⁹²; Swartz⁹³; Swartz e Guralnick⁹⁴; Swartz, Rosebraugh e Fanjiang⁹⁵; Swartz e Rosebraugh⁹⁶.

o) Métodos de energia

Fialkow⁹⁷; Swartz⁹³;

p) Cálculo das folhas em regime plástico

Fialkow^{98,99,100}; Gardner¹⁰¹.

No item II.6, procurar-se-ã discutir alguns dos trabalhos aqui citados.

I.6 - A INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL DAS ESTRUTURAS EM FOLHAS POLIÉDRICAS

Numerosos trabalhos envolvendo experimentação das estruturas em folhas poliédricas se encontram à disposição dos engenheiros. Procurou-se, de maneira semelhante à feita no item anterior, dividir os artigos e referências encontrados por assuntos. Assim, têm-se:

a) Folhas simples

Aldridge¹⁰²; Billington e Mark¹⁰³; Chacos e Scalzi³³; Dykes¹⁰⁴; Farmer e Breen⁸⁰; Fazio¹⁰⁵; Gaafar⁷; Gibson⁴⁰; Grahan¹⁰⁶; Rockey e Evans¹⁰⁷; Scordelis, Croy e Stubbs³²; Scordelis e Gerasimenko¹⁰⁸; Swartz e Rosebraugh¹⁰⁹; Yang¹¹⁰;

b) Folhas contínuas

Beaufait e Gray¹¹¹; Fazio e Kennedy¹¹²; Goldberg, Gutzwiller e Lee⁵²; Lee¹¹³; Muhlbauer e Beaufait⁵⁵; Seetharamulu e Sinha¹¹⁴;

c) Folhas não-prismáticas

Candeva¹¹⁵; Del Pozo, Torroya e Palanco¹¹⁶; Johnson e Lee⁶⁷;

d) Folhas protendidas

Klaiber, Gutzwiller e Lee⁷⁵; Glanville¹¹⁷; Martin¹¹⁸; Röntsch¹¹⁹; Schwaighofer e Seethaler¹²⁰;

e) Folhas prē-moldadas

Rontsch¹¹⁹; Schwaighofer e Seethaler¹²⁰; Vishwanath, Mhatre e Seetharamulu¹²¹;

f) Folhas oblīquas

Siddall, Dokainish e Win¹²²;

g) Análise em modelos fotoelásticos

Billington e Mark¹⁰³; Mark e Riera¹²³;

h) Seção celular

Davis, Scheffey, Castleton e Evans⁷⁸;

I.6.1 - Folhas simples - Comparação entre os métodos teóricos e a experimentação

Gaafar⁷ foi o primeiro a se preocupar em dar suporte experimental às hipóteses adotadas para o método de cálculo por ele proposto. Em seu trabalho, Gaafar resolveu dois exemplos (ver Fig. I.19), o primeiro com carga uniformemente distribuída e o segundo com cargas concentradas, e comparou os resultados do segundo com aqueles obtidos pela experimentação. A intenção de Gaafar era demonstrar a validade de seu método, o qual era uma modificação daqueles propostos originalmente por Winter e Pei⁴, Craemer⁵, etc., os quais desprezam a influência dos deslocamentos nas arestas. Segundo Gaafar, o erro assim cometido na avaliação das tensões longitudinais é de 200%, em média, e na avaliação das tensões transversais seriam ainda maiores, e sempre contra a segurança (quando comparados com os valores experimentais). O método proposto por Gaafar, em relação aos valores experimentais, diminui as médias citadas acima para 40% e 20%, a favor da segurança.

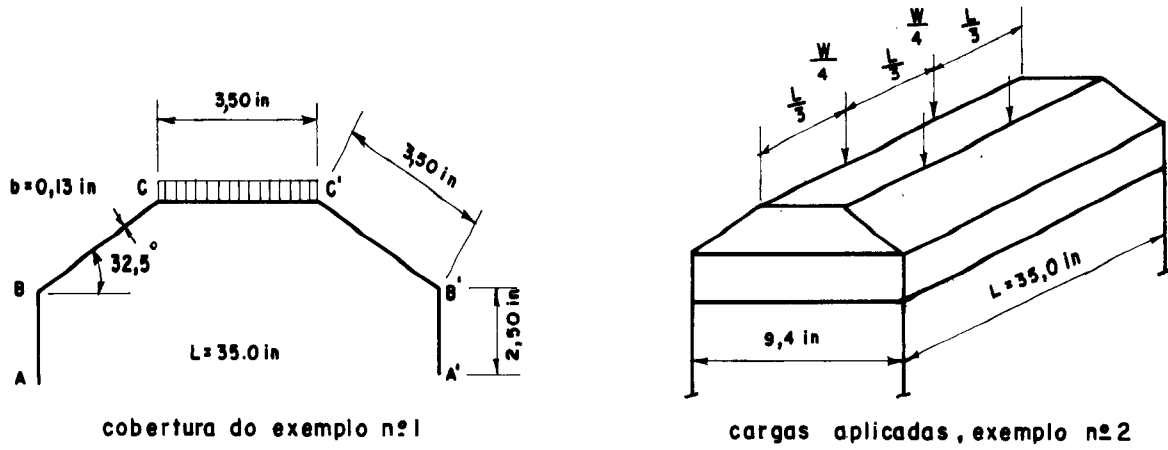


Figura I.19 - Exemplos

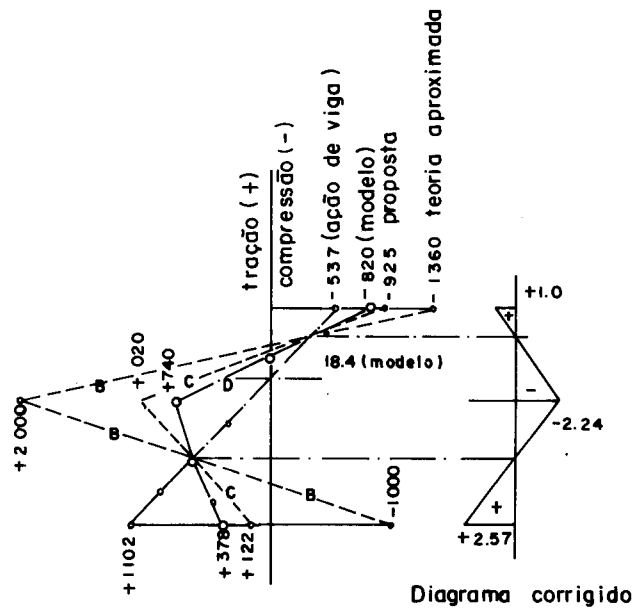


Figura I.20 - Tensões longitudinais σ_x para o exemplo 2

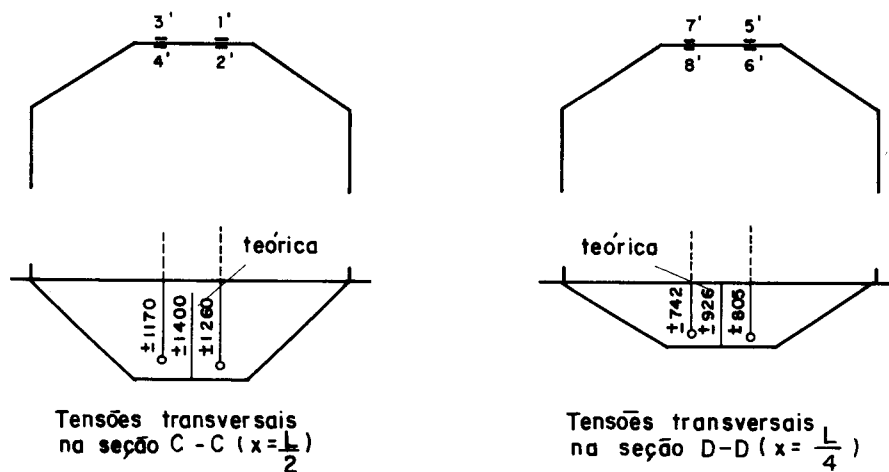


Figura I.21 - Comparação entre as tensões transversais experimentais e teóricas nos modelos examinados (p.s.i.)

TABELA I.1 - Tensões longitudinais máximas - exemplo nº 2

Tração = +

Aresta	Tensões σ_x (P_{S_j})				Erro (porcentagem)		σ_x , método de viga (P_{S_j})
	Teoria "aproximada"	Deslocamento arestas	Teoria proposta	Experimental	Aproximada	Proposta	
C	-1360	+435	-925	-820	+66	+13	-537
B	-2000	-980	+1020	+740	+170	+38	+166
A	-1000	+1122	+122	+378	-365	-68	+1102

As tensões longitudinais σ_x para o exemplo 2 determinadas pelas várias teorias e pela experimentação estão listadas na Tabela I.1 e representadas graficamente na Figura I.20. A Tabela anterior denota claramente a importância que os deslocamentos relativos nas arestas exercem sobre os esforços (veja-se também o item I.4.4, Figura I.16.d), e o erro cometido ao desprezã-los. Observe-se que, inclusive, a teoria "aproximada" prediz erradamente o sinal das tensões na aresta A.

A Figura I.21 apresenta as tensões transversais obtidas experimentalmente (assinaladas pelos círculos) e pelo método proposto, o qual, como se vê, apresenta boa concordância com a experimentação.

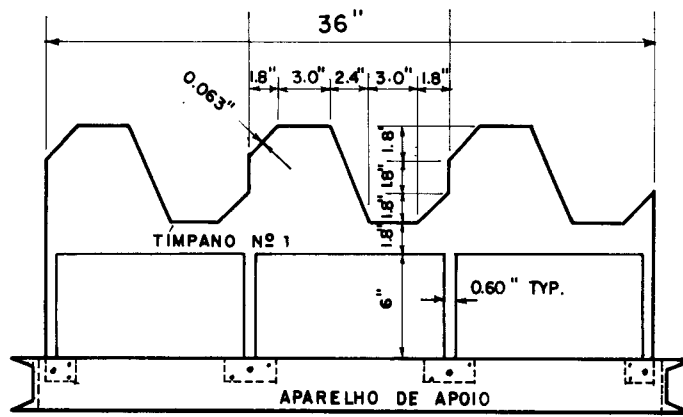
Outra conclusão importante: a estrutura não se comporta segundo o método de viga (ver item I.5.1.a) como se vê pelo exame da Tabela e da Figura I.20: a distribuição das tensões longitudinais é aproximadamente linear para cada chapa, mas as tensões não são proporcionais à distância até o centro de gravidade da seção transversal, como deveria ocorrer pela hipótese de comportamento de viga. A condição "as seções planas permanecem planas após a deformação" não se verifica para a seção transversal como um todo, mas se aceita para cada chapa, especialmente para seções distantes dos tímpanos de apoio.

Um fato interessante observado por Gaafar (Figura I.20), é que os diferentes diagramas de tensões passam através de dois pontos comuns (pontos nulos no diagrama corretivo). Essa condição indica que, se as ordenadas do diagrama corretivo são multiplicadas por uma constante apropriada e subtraída algebricamente dos valores obtidos pela teoria de viga, os resultados concordarão com os valores obtidos experimentalmente. Em outras palavras, Gaafar sõ recomenda a utilização do método de viga, na solução das folhas prismáticas, desde que devidamente corrigido.

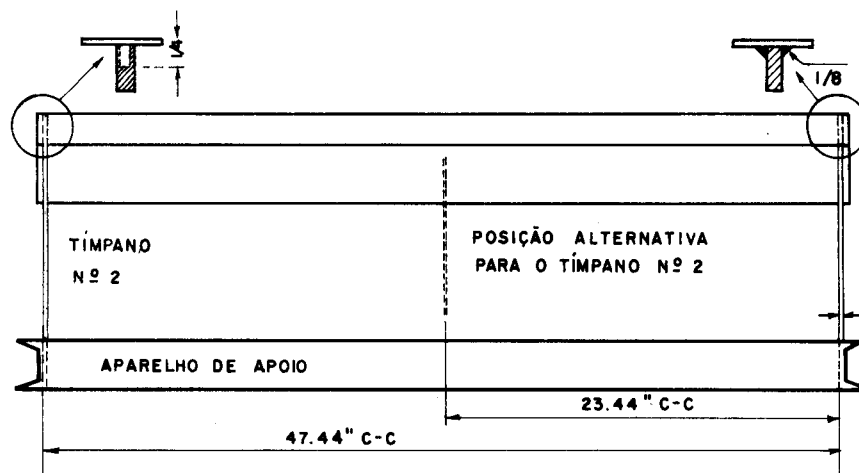
Chacos e Scalzi³³ demonstram a validade do método de viga no cálculo do momento último suportado por uma folha; não se pode generalizar o resultado, como assinalam, pois ele sõ é válido para a estrutura particular por eles examinada.

Scordelis, Croy e Stubbs³² realizaram experiências em um modelo de alumínio (ver Fig. I.22), biapoiado, e determinaram, experimental e analiticamente, valores de momentos transversais m , tensões longitudinais σ_x e deslocamentos verticais δ . O objetivo do trabalho foi comparar resultados experimentais e analíticos, estes obtidos pelos métodos de viga, simples e de elasticidade (ver item I.5.1), visando determinar a validade das hipóteses usadas nesses métodos. O modelo por eles testado tinha um comprimento total de 4 pés, com 3 pés de altura, e era formado por 3 elementos, cada um com 5 chapas. A estrutura foi soldada num dos diafrágm^as e apoiada em outro, móvel, e o modelo foi assim testado para dois vãos: um de 4 pés e outro de 2 pés.

Os valores analíticos para o método simples foram obtidos através do processo descrito por Scordelis⁴⁴e, para o método da elasticidade através de Goldberge e Leve³⁴. Com fins comparativos, os valores experimentais e analíticos estão tabelados a seguir e representados nas Figs. I.23 a I.27, para ambas as extremidades examinadas. Em ambas, o carregamento é o mesmo.



Vista da seção transversal



Corte

Figura I - 22 - Dimensões do modelo em alumínio

TABELA I.2 - Resultados para o vão de 4 pés (L = 47,44 in)

Aresta	a	b	c	d	e	f
Tensões longitudinais σ_x (ps _i) Tração = +						
Experimen- tal	2500	-1500	-550	600	1500	-2700*
	1620	-900	-300	700	950	-1380**
	510	-380	-350	450	100	-150***
Simples	3370	-1907	-524	524	1907	-3370
	2611	-1507	-343	343	1507	-2611
	1580	-927	-162	162	927	-1580
Elasticidade	3102	-1674	-681	681	1674	-3102
	2415	-1336	-457	457	1336	-2415
	1472	-833	-230	230	833	-1472
Viga	1640	-380	-1530	1530	380	-1640
	1230	-285	-1150	1150	285	-1230
	720	-166	-670	670	166	-720
Momentos Transversais m (p.i/i)						
Experimen- tal	0	0,42	-1,19	-1,19	-0,50	0
	0	0,18	-0,88	-0,80	0,22	0
	0	0,10	-0,42	-0,35	0,20	0
Simples	0	0	-1,448	-1,448	0	0
	0	0	-1,038	-1,038	0	0
	0	0	-0,569	-0,569	0	0
Elasticidade	0	0,086	-1,434	-1,434	0,086	0
	0	0,070	-1,038	-1,038	0,070	0
	0	0,046	-0,574	-0,574	0,046	0
Deslocamentos Verticais δ (in)						
Experim.	-	0,0543	0,0001	-0,0006	0,0544	-
Simples	-	0,0770	-0,0008	-0,0008	0,0770	-
Elastic.	0,1136	0,0691	0,0023	-0,0023	0,0691	0,1136

* - x = L/2

** - x = L/4

*** - x = L/8

TABELA I.3 - Resultados para o vão de 2 pés (L = 23,44 in)						
Aresta	a	b	c	d	e	f
Método	Tensões longitudinais σ_x (ps _i)(Tração = +)					
Experimental	950	-530	80	30	480	-900*
	620	-340	-20	20	380	-500**
Simples	1263	-850	131	-131	850	-1263
	947	-638	100	-100	638	-947
Elasticidade	1214	-807	103	-103	807	-1214
	914	-607	79	-79	607	-914
Viga	402	-93	-375	375	93	-402
	302	-70	-282	282	70	-302
	Momentos Transversais m (p·i/i)					
Experimental	0	0,11	-0,21	-0,11	0,05	0
	0	0,06	-0,15	-0,07	0,10	0
Simples	0	0	-0,171	-0,171	0	0
	0	0	-0,122	-0,122	0	0
Elasticidade	0	0,048	-0,208	-0,208	0,048	0
	0	0,036	-0,150	-0,15	0,036	0
	Deslocamentos Verticais δ (in)					
Experim.	-	0,0058	0,0013	-0,0012	0,0063	-
Simples	-	0,0081	-0,0011	-0,0011	0,0081	-
Elastic.	0,0136	0,0080	-0,0008	-0,0008	0,0080	0,0136

* - x = L/2

** - x = L/4

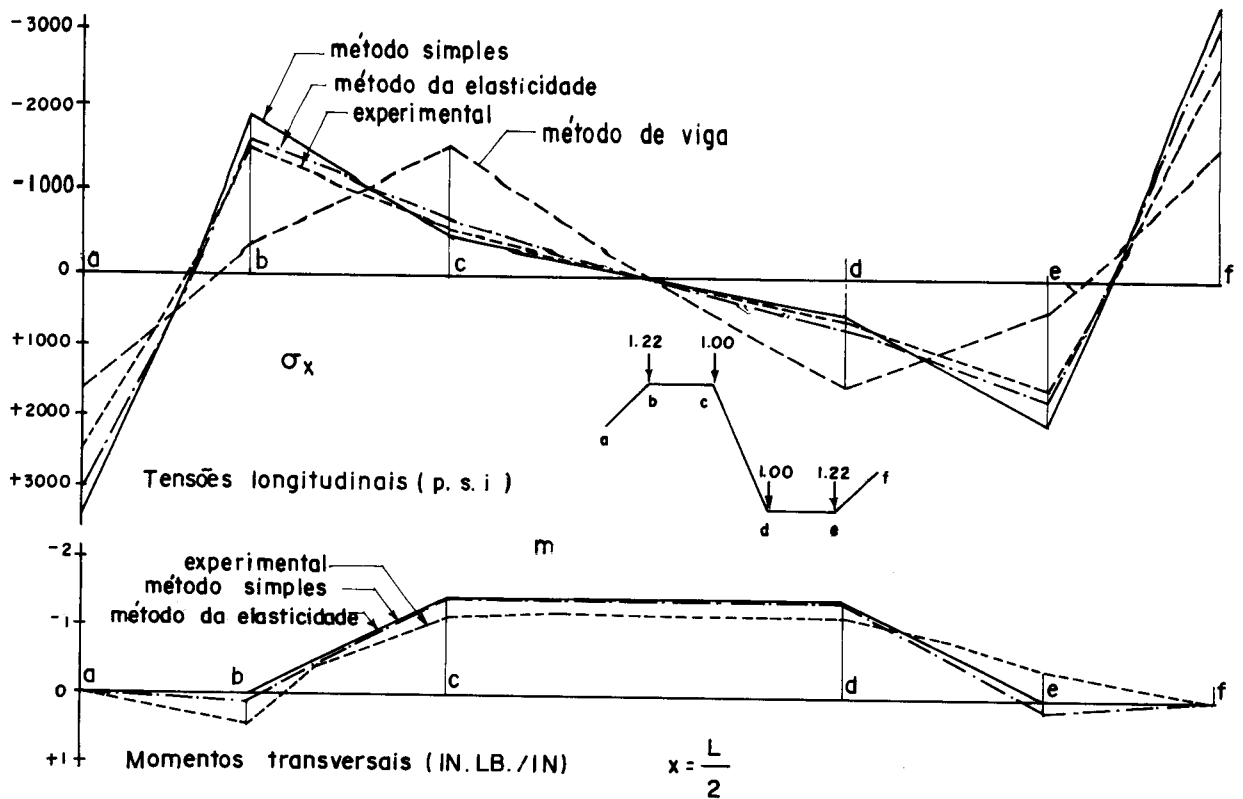


Figura I.23 — Modelo com vão de 4 pés — Valores das tensões e momentos no meio do vão

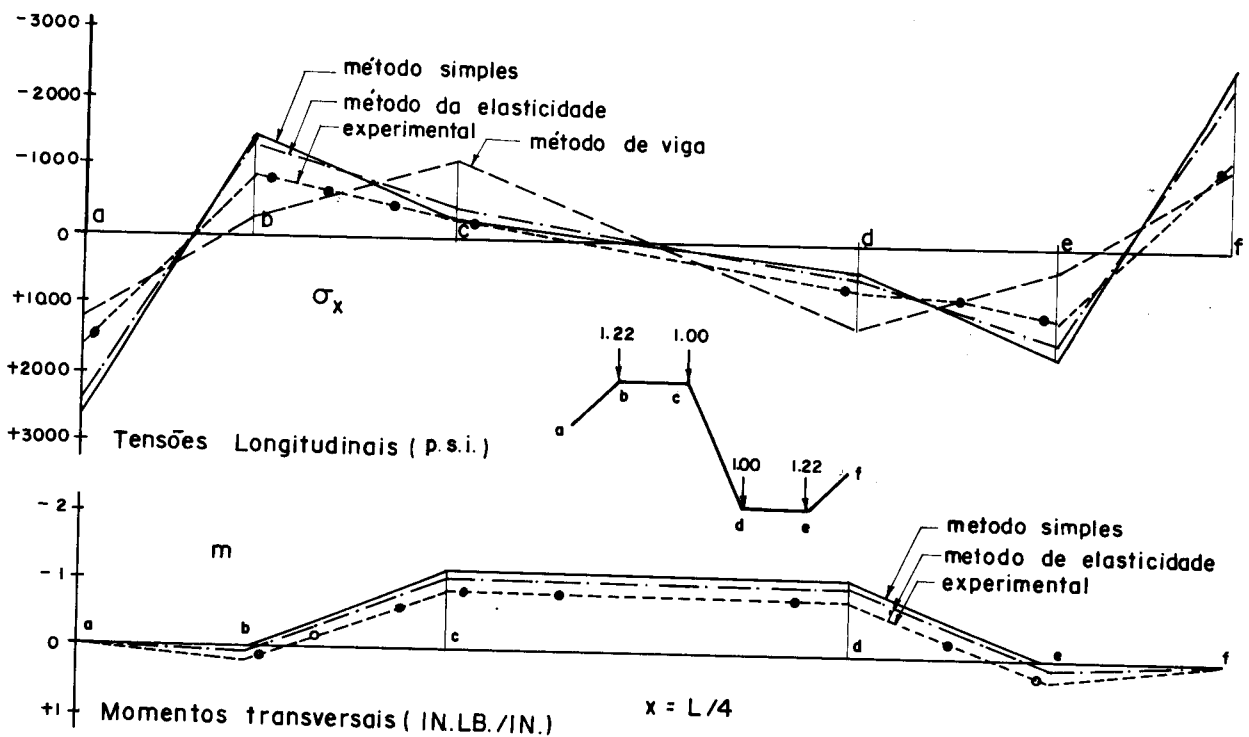


Figura I.24 — Modelo com vão de 4 pés — Valores das tensões e momentos nos quartos de vão

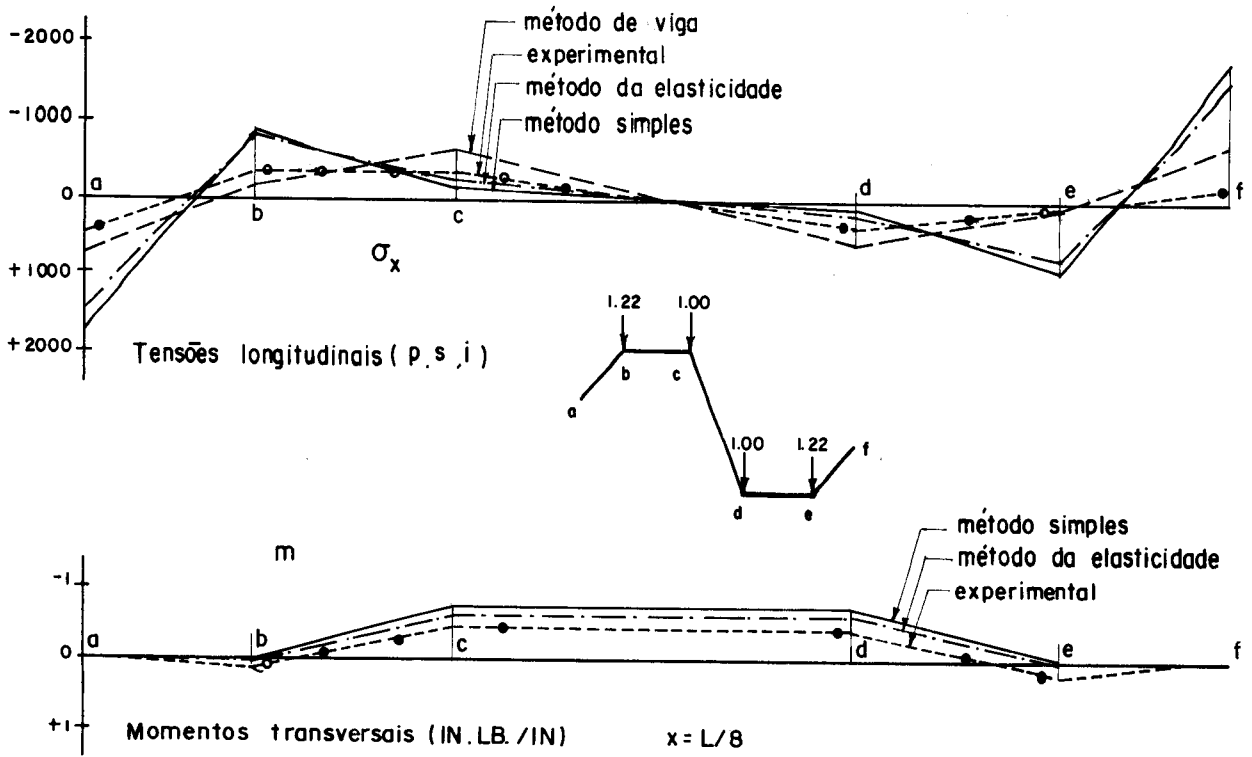


Figura I.25 - Modelo com vão de 4 pés - Valores das tensões e momentos nos oitavos de vão

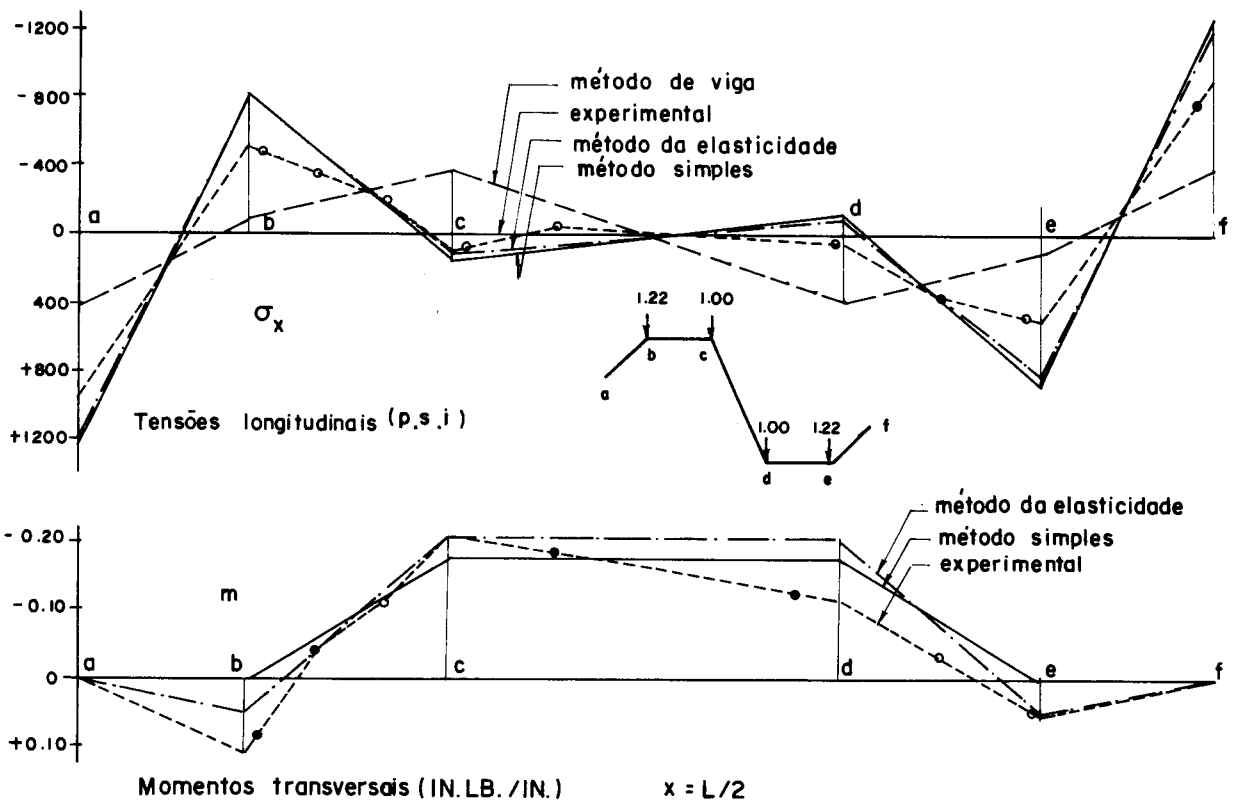


Figura I.26 - Modelo com vão de 2 pés - Valores das tensões e momentos no meio do vão

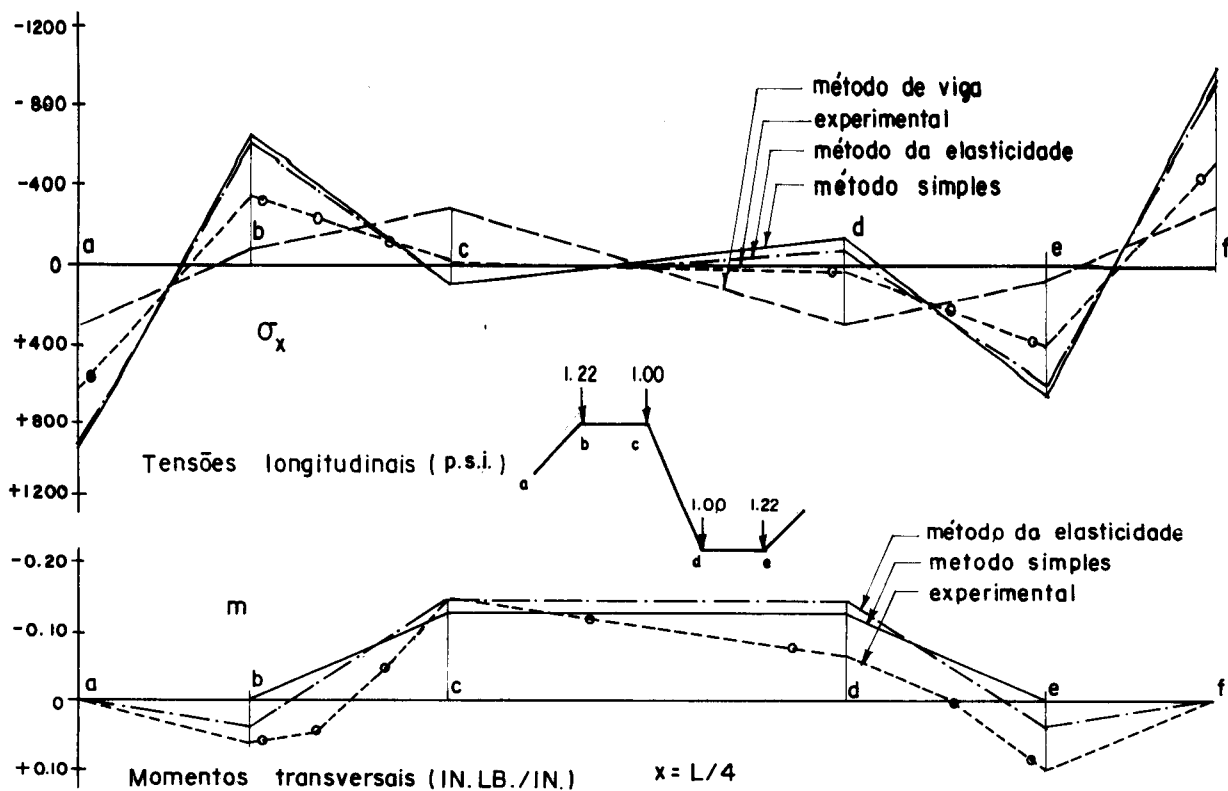


Figura I.27 - Modelo com vão de 2 pés - Valores das tensões e momentos nos quartos de vão

Uma comparação dos resultados analíticos obtidos pelo método simples e aqueles obtidos pelo método da elasticidade mostra uma concordância boa. As tensões longitudinais σ_x obtidas pelo primeiro são ligeiramente maiores que as obtidas pelo segundo. À medida que o vão longitudinal diminui, diminuem as diferenças de tensões longitudinais e deslocamentos verticais encontrados por ambos os métodos.

Os momentos transversais m encontrados pelos dois métodos são praticamente os mesmos para o vão maior, enquanto que para o vão de 2 pés o método da elasticidade conduz a valores bem maiores, o que é razoável pois, à medida que o vão longitudinal diminui, o método da elasticidade descreve melhor o comportamento como placa da estrutura (reCORDE-se aqui que, como hipótese de cálculo, os métodos simples adotam a estrutura como placa contínua apoiada em uma direção, o que perde a sua validade para pequenas relações vão/altura), assumindo-a apoiada em duas direções.

Os resultados experimentais obtidos são, em geral, bem menores que aqueles calculados com os dois métodos acima citados, mas o simples exame das Figuras I-23 a I-27 mostra que o padrão de distribuição dos esforços ao longo da seção transversal são semelhantes para os três. Também dos diagramas se conclui que o método de viga, para estruturas sem simetria, fornece valores consideravelmente menores que os obtidos experimentalmente, induzindo erros sérios e, portanto, não devendo ser utilizado.

Scordelis, Croy e Stubbs³² observam também que, embora os métodos simples e da elasticidade pareçam predir corretamente o padrão de distribuição das tensões, momentos e deslocamentos, os valores encontrados são sensivelmente diferentes dos obtidos experimentalmente, o que atribuem a erros nas hipóteses adotadas, principalmente a que reza "os tímpanos ou diafragmas de apoio são infinitamente rígidos paralelamente ao seu plano e perfeitamente flexíveis perpendicularmente a ele". A segunda parte dessa hipótese parece não ser totalmente certa, como já comenta

do (ver item I.4.5), pois os apoios afetam significativamente os valores dos esforços e dos deslocamentos.

Baseados nisso, Rockey e Evans¹⁰⁷ realizaram experiências em várias estruturas, visando investigar quais os erros que a adoção dessa hipótese introduz nos cálculos. Os valores experimentais obtidos foram comparados com os valores analíticos obtidos através do método da elasticidade e do método dos elementos finitos, este último por eles desenvolvido.

As seções transversais dos modelos ensaiados são mostradas na Figura I-28. Para obter uma indicação do efeito de mudanças de carregamento sobre a precisão das teorias, o primeiro dos modelos foi carregado com cargas simétricas e sem simetria. Também procurou-se examinar a maneira pela qual a mudança de seção transversal afeta a validade das teorias, o que foi feito através do segundo tipo, carregado simetricamente, com chapas de mesma espessura e mesmas relações vão/altura que o primeiro tipo.

Foram ensaiados 4 modelos do tipo 1 e um modelo do tipo 2. Os quatro modelos do tipo 1 tinham vãos de $71 \frac{1}{4}$, 54, 36 e 18 polegadas, todas as chapas desses modelos com mesmas alturas h e espessuras b . O modelo 2 tinha vão de $71 \frac{1}{4}$ polegadas.

Na Figura I-29, estão representados os momentos transversais m e as tensões longitudinais σ_x na seção $x = 3L/8$, para o maior dos modelos tipo 1 (vão de $71 \frac{1}{4}$ polegadas), sob carregamento simétrico e sem simetria.

Na Figura I-30, estão representados os movimentos dos diafragmas de apoio, para os tipos 1 e 2, vão de $71 \frac{1}{4}$ polegadas, sob carregamento simétrico.

Os deslocamentos verticais e horizontais do bordo livre (aresta 7) dos modelos 1, na seção do meio do vão, sob carregamento simétrico, estão representados na Figura I-31. Analogamente, na Figura I-32, estão representados os deslocamentos verticais da aresta central 4.

A Figura I-33 apresenta os momentos transversais

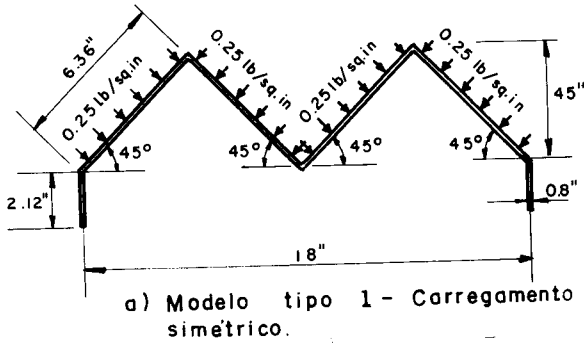
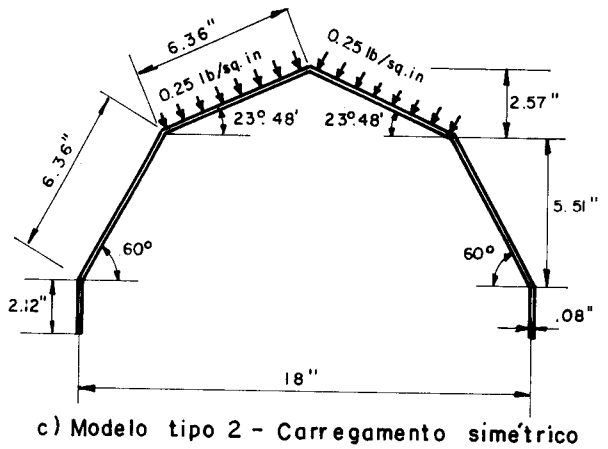
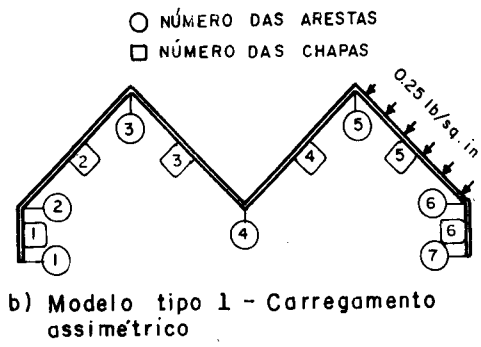
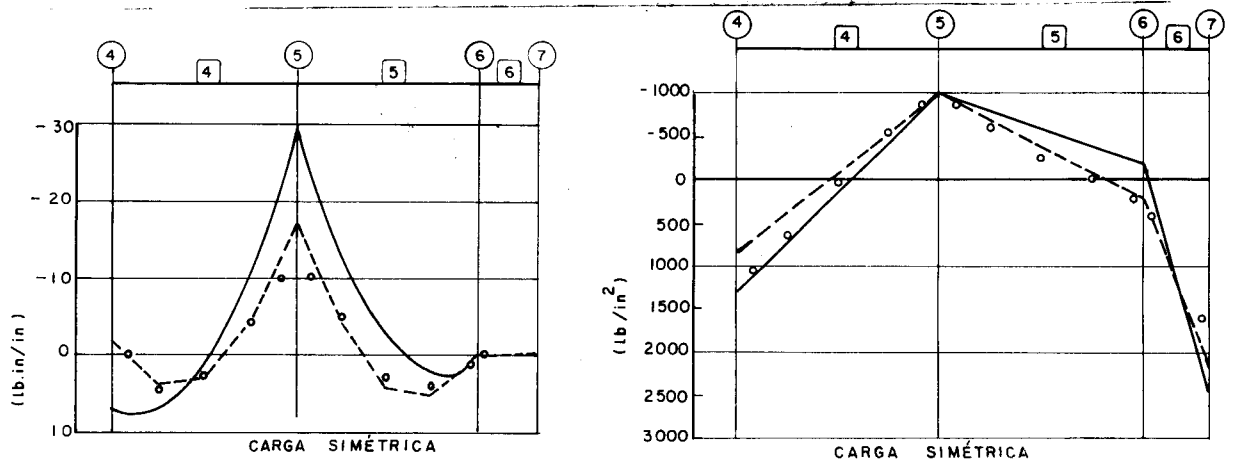


FIG.I- 28 - DETALHES DOS
MODELOS TESTADOS



— : VALORES FORNECIDOS PELO MÉTODO DA ELASTICIDADE
- - - : VALORES FORNECIDOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
○ : VALORES EXPERIMENTAIS

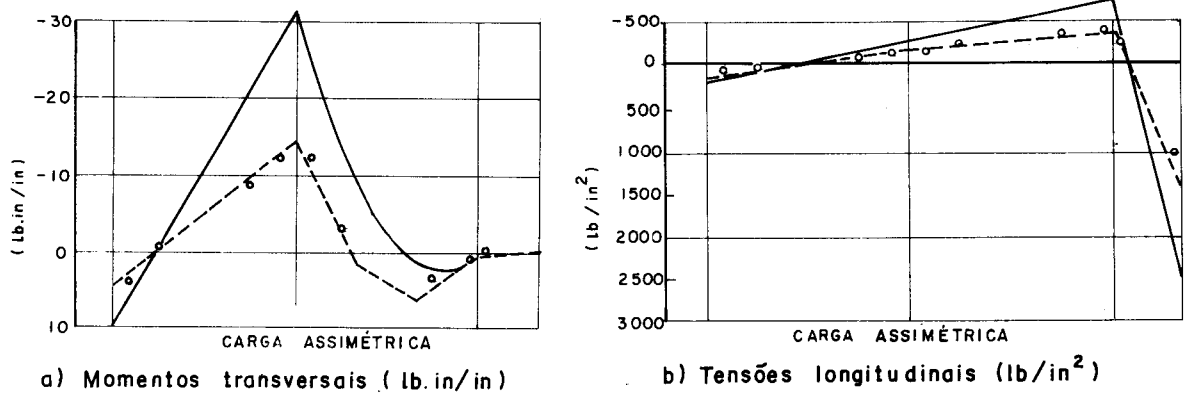
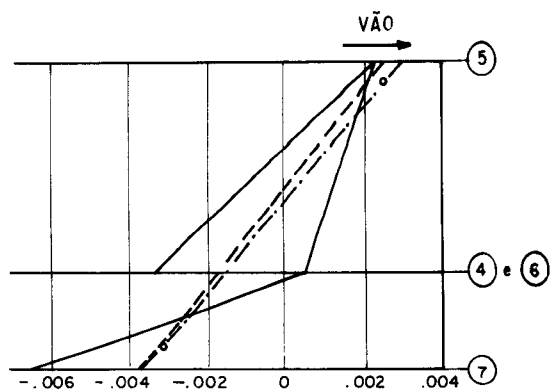


FIG.I- 29 - VARIAÇÃO DOS MOMENTOS TRANSVERSAIS m E DAS TENSÕES LONGITUDINAIS σ_x NA SEÇÃO $\frac{3L}{8}$ DO MODELO TIPO 1, VÃO DE $7\frac{1}{4}$ "



— : VALORES FORNECIDOS PELO MÉTODO DA ELASTICIDADE
 - - - : VALORES FORNECIDOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.
 o : VALORES EXPERIMENTAIS

FIG. I- 30 - MOVIMENTOS DOS DIAFRAGMAS DE APOIO DOS MODELOS TIPOS 1 E 2, VÃO DE 7 1/4", SOB CARREGAMENTO SIMÉTRICO.

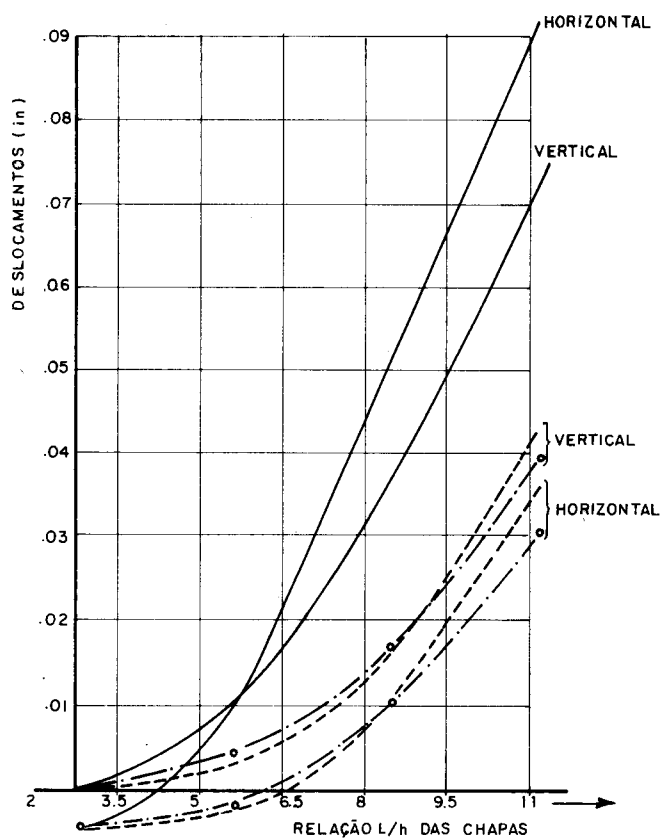


FIG. I- 31 - DESLOCAMENTOS (in) DO BORDO LIVRE (7) NO MEIO DO VÃO DOS MODÉLOS TIPO 1, SOB CARREGAM. SIMÉTRICO.

nos 3 modelos menores do tipo 1, sob carregamento simétrico.

Dos gráficos apresentados, nota-se que os valores teóricos das tensões, momentos e deslocamentos obtidos com o método dos elementos finitos concordam melhor com os valores experimentais do que aqueles obtidos com o método da elasticidade, que são significativamente diferentes dos experimentais.

Para os maiores modelos do tipo 1, o método da elasticidade superestima os deslocamentos horizontal e vertical dos bordos livres (Fig. I-31), bem como os valores das tensões longitudinais nesses locais (Fig. I-29). Já nas regiões centrais, o método da elasticidade fornece valores de deslocamentos e tensões bem próximos dos experimentais. Também os momentos transversais são superestimados pelo método da elasticidade, na maior parte da seção transversal (Figura I-29).

A precisão do método da elasticidade melhora, à medida que se diminui o vão da estrutura. Ficando apenas com o caso dos momentos fletores, isso é evidente ao se examinar a Fig. I-33. Rockey e Evans observaram adicionalmente que resultados semelhantes são obtidos sob carregamento não simétrico. Essas observações feitas por Rockey e Evans¹⁰⁷ sobre o método da elasticidade são análogas às feitas por Scordelis, Croy e Stubbs³² (basta examinar as Tabelas I-2 e I-3, ou as Figuras I-23 a I-27).

Em contraste com os grandes erros observados nos valores dados pelo método da elasticidade para grandes vãos, os valores obtidos pelo método dos elementos finitos mostram boa concordância com os valores experimentais, concordância esta que se mantém, independentemente da variação do vão da estrutura, o que indica claramente o simples exame das Figuras I-31 e I-32, onde as curvas dadas pelo método dos elementos finitos acompanham aquelas obtidas experimentalmente. As curvas nas Figuras I-29 e I-33 mostram que os momentos transversais obtidos pelo método dos elementos finitos são coerentes com os experimentais.

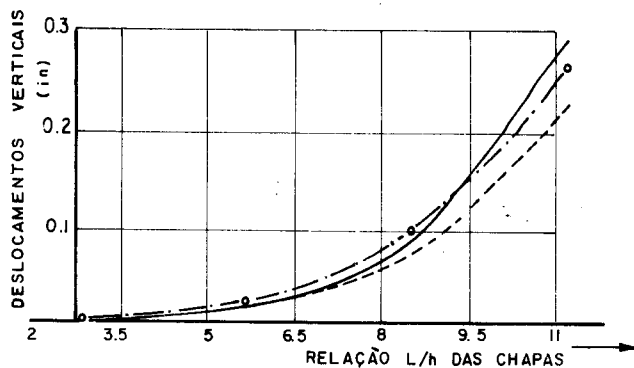


FIG. I-32 - DESLOCAMENTOS VERTICAIS (in) DA ARESTA CENTRAL (4) NO MEIO DO VÃO DOS MODELOS TIPO 1, SOB CARREGAMENTO SIMÉTRICO.

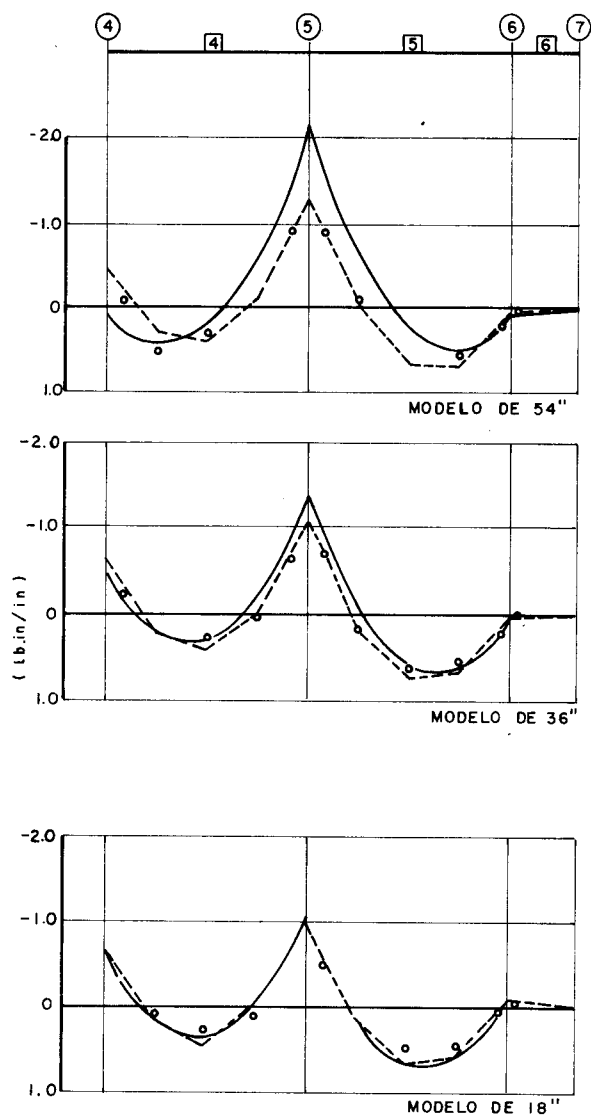


FIG. I-33 - MOMENTOS TRANSVERSAIS m (lb.in/in) NA SEÇÃO 3L/8 PARA TRÊS MODELOS DO TIPO 1.

As razões para a grande imprecisão nos valores teóricos dados pelo método da elasticidade são claramente percebidas ao se examinar a Fig. I-30. Todos os movimentos medidos na experiência indicaram que o comportamento real dos diafragmas é muito diferente daquele assumido pelo método da elasticidade, mas é bem descrito pelo método dos elementos finitos.

Nota-se que o método da elasticidade superestima os movimentos nas extremidades de cada chapa, as quais se assume que girem livremente, já que a hipótese adotada diz que o diafragma é perfeitamente flexível perpendicularmente ao seu plano. Os diagramas da Fig. I-30 mostram que os movimentos na extremidade das chapas são, em parte, restringidos pelos diafragmas.

O método da elasticidade, então, acaba também superestimando os deslocamentos das arestas na região central, como decorrência do giro livre que se assume existir nas extremidades. Os momentos transversais são, em parte, produzidos pelos deslocamentos relativos das arestas e são, conseqüentemente, também superestimados, como demonstram os resultados obtidos por Rockey e Evans¹⁰⁷ e por Scordelis, Croy e Stubbs³².

Para se ter uma idéia melhor dos efeitos provocados pelas restrições aos movimentos das extremidades, Rockey e Evans realizaram um teste adicional, libertando a estrutura dos diafragmas, pela retirada dos parafusos que os uniam, transformando a ligação em apoio móvel. Os deslocamentos foram, então, novamente medidos e verificou-se que se aproximavam daqueles preditos pelo método da elasticidade.

De todo o exposto, conclui-se que:

- O método de vigas, em geral, **subestima** os esforços e não deve ser utilizado, a não ser que se façam as correções indicadas por Gaafar ou que se tenha certeza sobre o comportamento da estrutura, como ocorre no caso citado por Chacos e Scalzi (ver item I.5.1.a);

- como a hipótese assumida nos métodos simples e da elasticidade ocasiona superestimação dos esforços (ou, em outras palavras, subestima a verdadeira rigidez global da estrutura), a favor da segurança, eles podem ser utilizados, feita a ressalva de resultarem, possivelmente, anti-econômicos. Não se deve utilizar o método da elasticidade para grandes vãos, para os quais pode-se dispor dos métodos simples. Para pequenos vãos, o procedimento é o inverso.
- o método dos elementos finitos pode ser usado com menores restrições quanto à forma e vinculação na discussão sobre o comportamento das folhas prismáticas; lidando facilmente com condições específicas de apoio é o mais recomendado, quando se dispõe de programas.

Ainda no setor de experimentação visando a demonstração e comparação de teorias, Gibson⁴⁰ demonstra a validade do método analítico por ele desenvolvido³⁹, através do qual as tensões numa folha prismática são calculadas usando a teoria das cascas cilíndricas. Em seu artigo, Gibson⁴⁰ também demonstrou a validade do seu método pela comparação com os resultados obtidos por Scordelis, Croy e Stubbs³² (Figura I-34), para a estrutura da Figura I-22, vão de 4 pés. Nota-se que o método de Gibson fornece os resultados bastante próximos daqueles dados pelo método da elasticidade, e também que a concordância com a evidência experimental é boa. Os gráficos das figuras I-35 e I-36, segundo Gibson, mostram que um mínimo de oito chapas devem ser usadas para aproximar os esforços entre a casca cilíndrica e a folha poliédrica, já que, com apenas quatro chapas, nota-se uma discrepância muito grande, principalmente quanto aos momentos transversais, como já havia sido comentado (ver final do item I.4.2).

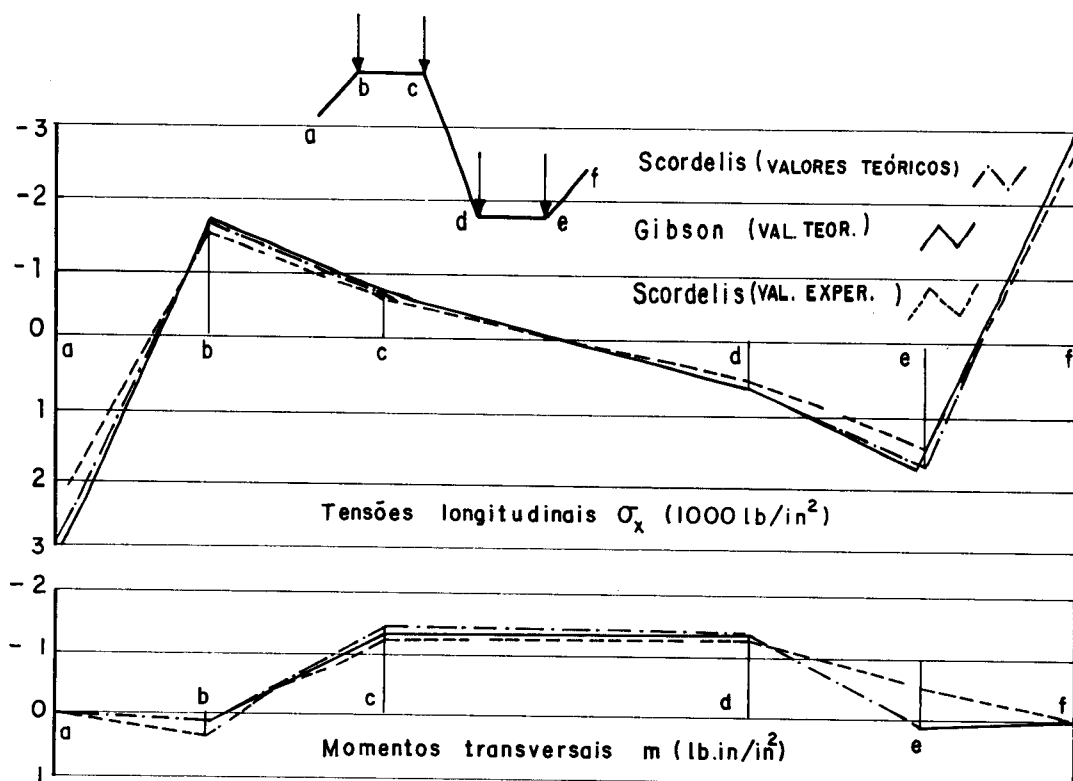


FIG. I-34 - TENSÕES LONGITUDINAIS σ_x E MOMENTOS TRANSVERSAIS m NO MEIO DO VÃO (mesma estrutura da fig. I.22 - vão de 4 pés)

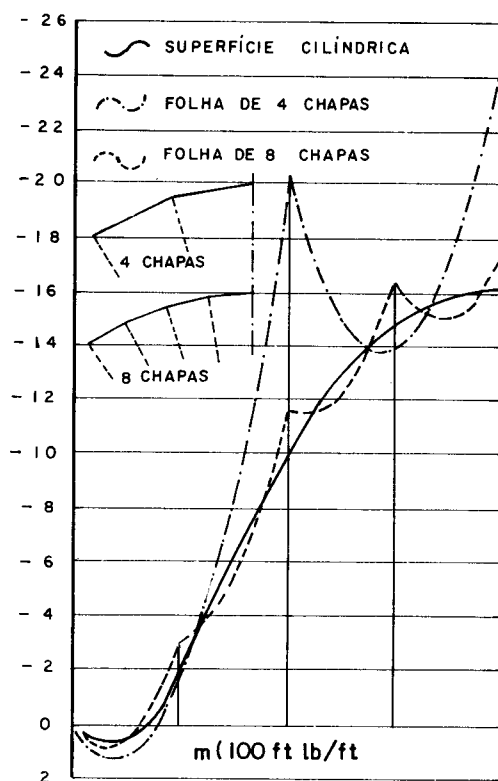


FIG. I-35 - MOMENTOS TRANSVERSAIS RESULTANTES DA APROXIMAÇÃO ENTRE CASCA CILÍNDRICA E FOLHA POLIÉDRICA.

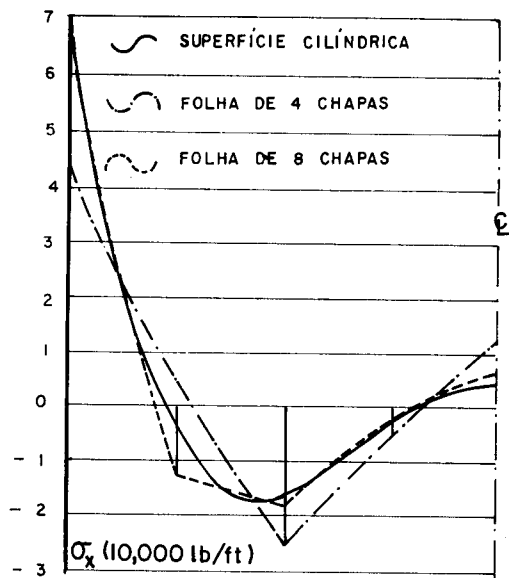


FIG. I-36 - TENSÕES LONGITUDINAIS RESULTANTES DA APROXIMAÇÃO ENTRE CASCA CILÍNDRICA E FOLHA POLIÉDRICA.

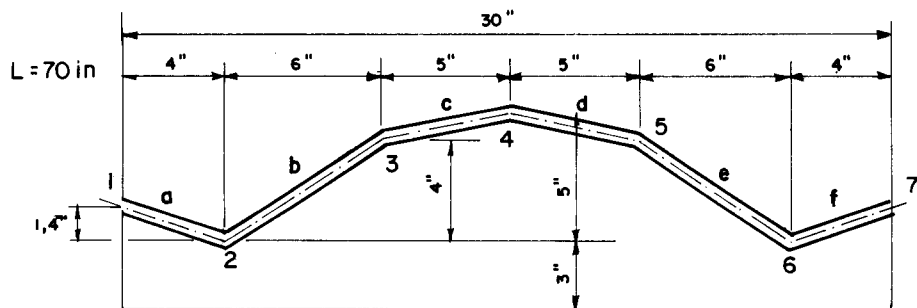
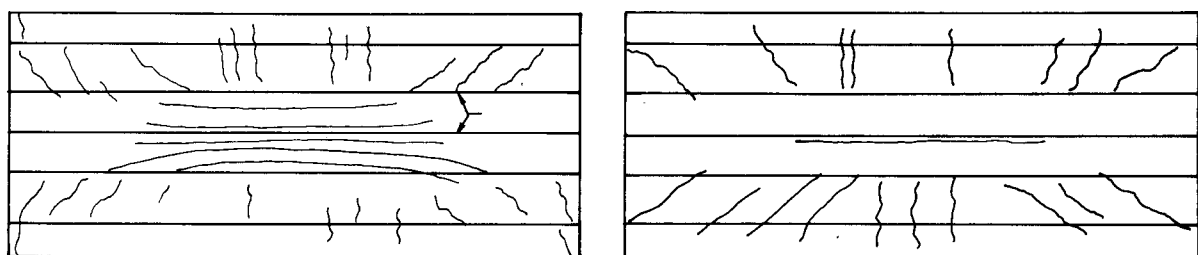


Figura I. 37 - SEÇÃO TRANSVERSAL DOS MODELOS A e B.



a) fissuração inicial do modelo A (superfície superior e diafragmas)

b) fissuração inicial do modelo B (superfície superior e diafragmas)

FIG. I-39 - FISSURAÇÃO DOS MODELOS

I.6.2 - A investigação em modelos de concreto armado

A experimentação de estruturas em folhas poliédricas, na grande maioria dos casos, foi feita em modelos de aço, alumínio ou plástico, mas a maioria das estruturas foi construída em concreto armado, o que evidencia uma maior necessidade de experimentação em modelos de concreto. Têm-se notícia, porém, de poucas experiências nesse campo, podendo-se citar trabalhos como: Dykes¹⁰⁴, Chacos e Scalzi³³, Scordelis e Gerasimenko¹⁰⁸. Estes últimos citam ainda trabalhos realizados por Enami e pela Syracuse University, N.Y.

Scordelis e Gerasimenko¹⁰⁸ fizeram um estudo comparativo do comportamento de dois modelos idênticos de folhas prismáticas, construídas em concreto armado, cujas dimensões estão mostradas na Fig. I-37. As únicas diferenças nesses modelos estão na quantidade de armadura e na maneira com que foram determinadas: para o modelo A, a armadura foi calculada com base no diagrama de momentos transversais e tensões longitudinais determinadas através do método da elasticidade, como apresentado por DeFries-Skene e Scordelis³⁷, e para o modelo B, segundo o método de viga (evidentemente, para o modelo B, determinaram-se apenas as tensões longitudinais, já que o método de viga, como foi visto, pressupõe a inexistência de momentos transversais, pois assume que todos os pontos da seção transversal se deslocam igualmente).

A carga total utilizada para o cálculo foi de 57,5 psf (peso próprio do modelo mais 20 psf de sobrecarga), resultando as cargas nas arestas mostradas na Fig. I-38.

Embora a distribuição de tensões longitudinais obtidas pelos dois métodos (Figs. I-38.b e d) seja consideravelmente diferente, as armaduras longitudinais obtidas foram quase idênticas (com a armadura do modelo A ligeiramente maior). Já a armadura transversal, devido aos momentos m (desprezados no modelo B), foi muito maior no modelo

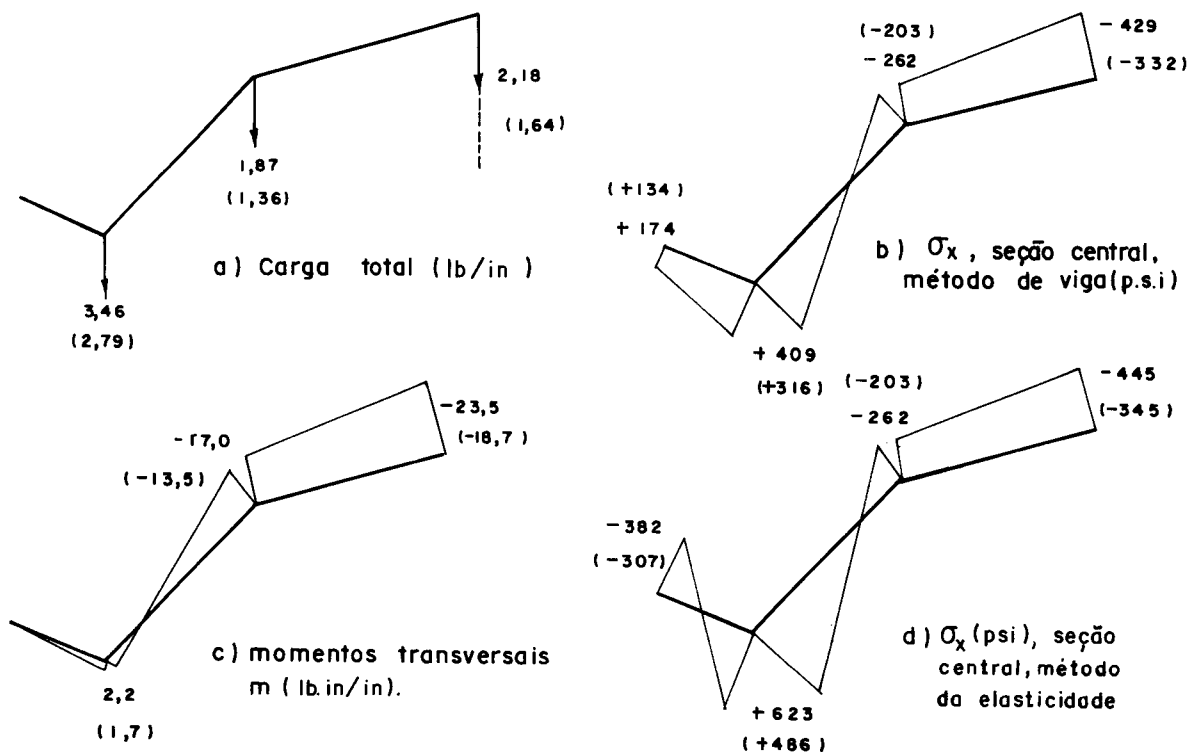


Figura I. 38 — Cargas e esforços em ambos os métodos (os números entre parenteses representam o efeito do carregamento aplicado)

A, sendo que no modelo B apenas uma pequena quantidade de armadura foi colocada, para prevenir os efeitos de retração e variação de temperatura.

A análise, para cada modelo, foi feita em duas fases distintas de carregamento. A primeira fase constituiu-se de uma série de sete (7) ciclos de carregamento (de zero até a carga aplicada) e a segunda fase até a ruptura da peça, a partir da sequência final de carga.

Durante o transcorrer da primeira fase, nenhum dos modelos apresentou sinais visíveis de fissuração. Os deslocamentos experimentais (Tabela I-3) indicam que ambos os modelos sofreram deslocamentos relativos das arestas, como previsto pela teoria das folhas (isto é, falha a teoria de viga). A média experimental para o modelo A é marcadamente próxima da teoria prevista pelo método da elasticidade. Para o modelo B, os valores experimentais para o 1º ciclo de carregamento são próximos dos teóricos (elasticidade), mas a média é consideravelmente menor.

TABELA I-3 - Deslocamentos verticais δ (in), seção central ($x = L/2$)

Aresta	Modelo A				Modelo B			
	Experimental		Teórico		Experimental		Teórico	
	1º ciclo	média 7 ciclos	elasticidade	viga	1º ciclo	média 7 ciclos	elasticidade	viga
1	0,0806	0,0640	0,0640	0,0203	0,0566	0,0475	0,0582	0,0186
2	0,0604	0,0499	0,0496	0,0203	0,0427	0,0342	0,0451	0,0186
3	0,0365	0,0304	0,0300	0,0203	0,0282	0,0194	0,0273	0,0186
4	0,0302	0,0231	0,0241	0,0203	0,0202	0,0119	0,0218	0,0186
5	0,0382	0,0301	0,0300	0,0203	0,0264	0,0179	0,0273	0,0186
6	0,0513	0,0491	0,0496	0,0203	0,0404	0,0301	0,0451	0,0186
7	0,0783	0,0525	0,0640	0,0203	0,0537	0,0421	0,0582	0,0186

- modelo A
- modelo B

(ps²)

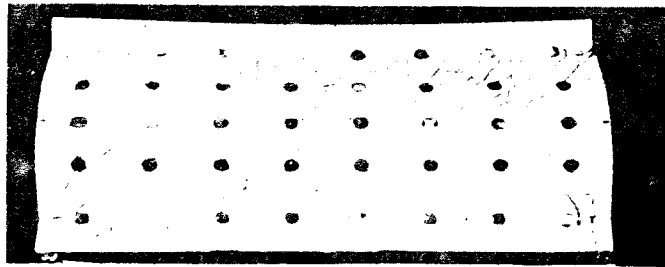
$3,3 \times 10^6$
 $3,63 \times 10^6$

F =

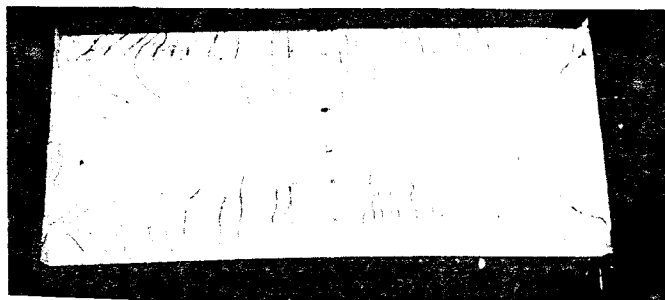
Na segunda fase de carregamento, o modelo A apresentou fissuras visíveis sob uma carga de $2 \frac{1}{4}$ vezes a carga total (é bom assinalar que os incrementos eram de $1/4$ da carga total durante o carregamento). Essas fissuras (Fig. I.39.a) eram de três tipos: fissuras transversais normais ao eixo longitudinal (efeito das tensões longitudinais); fissuras diagonais próximas aos apoios e fissuras nos diafragmas de apoio causadas por flexão como resultado do empenamento induzido pelas deformações longitudinais das chapas (isso mostra mais uma vez a falha da hipótese adotada, segundo a qual os diafragmas seriam perfeitamente flexíveis normalmente ao seu plano). Com um carregamento de $2 \frac{3}{4}$ vezes a carga total, fissuras longitudinais causadas pelos momentos transversais m apareceram na superfície do modelo A. Sob carregamento adicional, essas fissuras se estenderam e tornaram mais numerosas, sem contudo aumentar ("abrir") significativamente. Nenhuma fissura transversal de flexão apareceu na superfície inferior do modelo, confirmando assim o sentido dos momentos transversais previsto pela teoria das folhas, como representado na Fig. I.38.c (veja-se também o exemplo III.4, Fig. III.20, que apresenta as trajetórias das tensões principais num modelo semelhante, e compare com a Fig. I.39.a).

O modo de ruptura se tornou evidente com um carregamento de $4 \frac{1}{4}$ vezes a carga total, quando as fissuras diagonais "abriram" significativamente. A ruína ocorreu com um carregamento de $4 \frac{1}{2}$ vezes a carga total, após as fissuras diagonais e nos diafrãgmas se tornarem excessivas.

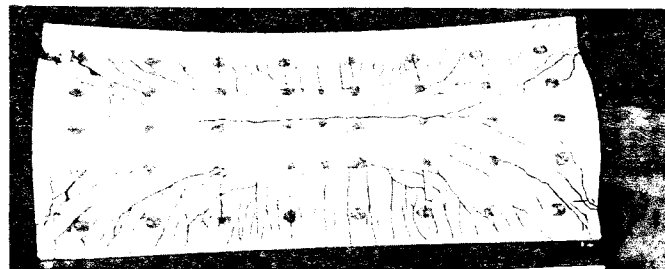
O comportamento global do modelo B (calculado como viga) foi semelhante ao A. Na segunda fase de carregamento, a primeira fissura ocorreu um pouco mais cedo que no modelo A, com um carregamento de $1 \frac{3}{4}$ vezes a carga total. As fissuras subsequentes pareceram ser mais pronunciadas que no modelo A (ver Fig. I.39.b). A fissuração longitudinal como resultado dos momentos transversais concentrou-se ao longo de uma linha maior próxima ao eixo de si



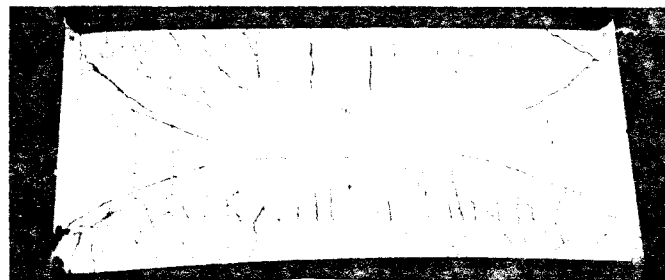
Superfície Superior - modelo A



Superfície Inferior - modelo A



Superfície Superior - modelo B



Superfície Inferior - modelo B

Fig. I_39: Fissuração dos modelos

tria, ao contrário do modelo A, com várias linhas. Sob carregamento adicional, esta fissura aumentou e, diferentemente do modelo A, se estendeu até a superfície inferior, sem dúvida como consequência da falta de armadura transversal. A ruína ocorreu de maneira idêntica ao modelo A, sob um carregamento de 4 1/2 vezes a carga total (veja-se as fotos da Fig. I.39.c e d).

Na Fig. I.40 estão apresentados os gráficos de carga versus deslocamentos na seção central, para ambos os modelos. A comparação dos gráficos indica que os deslocamentos do modelo B foram maiores que os do A, provavelmente como resultado da falta de armadura transversal. Nota-se ainda, que o modelo B exibiu incrível "dutilidade", com deslocamentos máximos de aproximadamente 3 in (no modelo A, 1,6 in) antes da ruína.

Scordelis e Gerasimenko¹⁰⁸ destacam ainda que sua investigação mostrou que os diafragmas devem ser armados contra a flexão normal ao seu plano (como já fora possível perceber na análise feita no item anterior).

I.6.3 - Influência das nervuras de enrijecimento

Swartz e Rosebraugh¹⁰⁹ realizaram investigações sobre vários modelos (cujas seções transversais e demais dimensões são mostradas na Fig. I.41) visando determinar a influência das nervuras intermediárias de enrijecimento nas folhas prismáticas simples, bem como o efeito nestas de cargas simétricas e não simétricas. Foram realizados testes sobre três tipos de seção transversal, em modelos construídos em alumínio. A seguinte notação é usada para identificação (ver Fig. I.41):

- 1 - primeiro símbolo (I, II, III): tipo do modelo;
- 2 - segundo símbolo (0, 1, 2, 3): número de nervuras intermediárias ou de apoios;

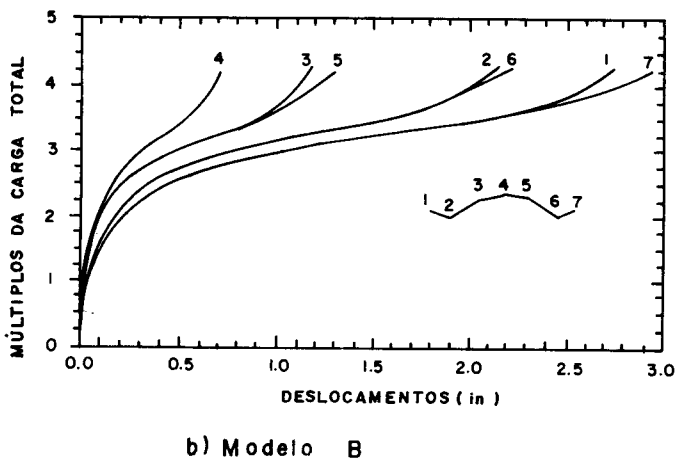
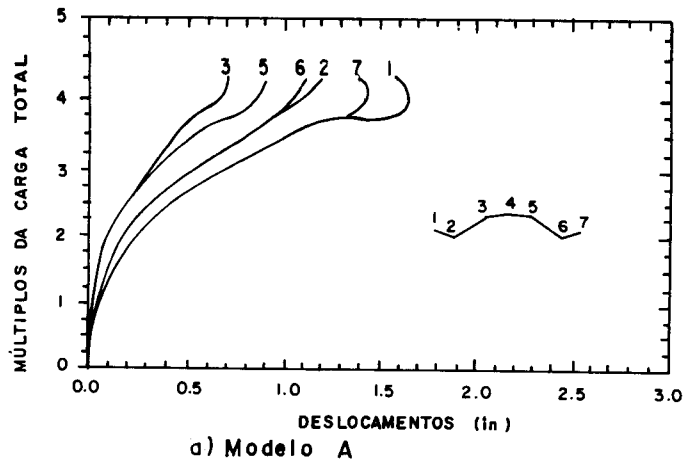


FIG. I- 40 - DIAGRAMAS DE CARGA VERSUS DESLOCAMENTOS NA SEÇÃO CENTRAL .

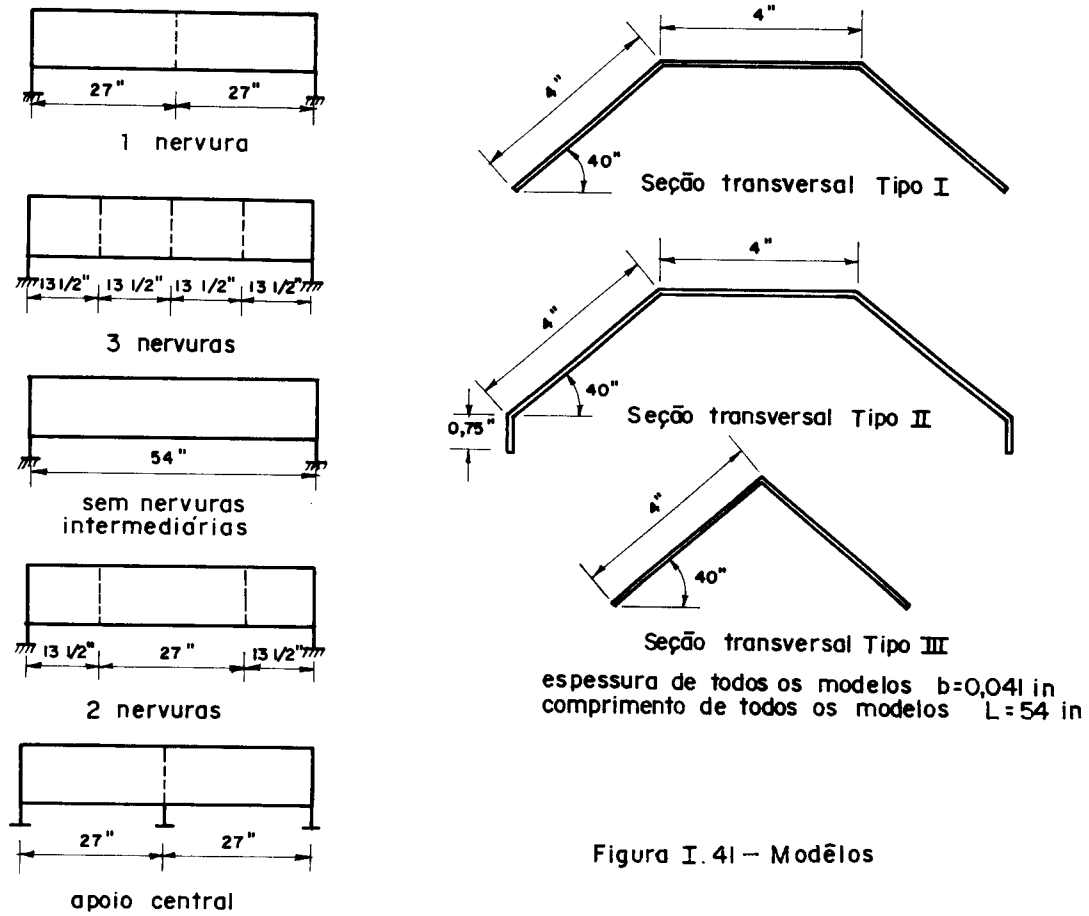


Figura I. 41 - Modêlos

- 3 - terceiro símbolo (S, C): S = stiffener = nervura intermediária e C = apoio central;
- 4 - quarto símbolo: se ausente, carga uniforme simétrica é aplicada na estrutura; U = carga uniforme apenas sobre a projeção horizontal de uma chapa inclinada.

Assim, um modelo designado como I-1S apresenta uma seção transversal do tipo I, com uma nervura localizada na seção central, sob carga simétrica. I-1SU é a designação para o mesmo modelo sob carga assimétrica. I-1C é um modelo do tipo I com apoio central (folha contínua) submetido a carregamento simétrico.

Para cargas simétricas (ver Fig. I-42), as tensões longitudinais σ_x , nas proximidades da seção central do modelo I, foram medidas no bordo livre, na aresta e no centro da chapa de topo. Vê-se pela figura que o efeito das nervuras sobre as tensões de bordo livre é pequeno. As tensões σ_x na chapa superior são aproximadamente as mesmas, para a aresta e para a seção central, antes do início do empenamento ("flambagem") da chapa, após o qual as tensões diminuem no centro e aumentam nas arestas.

Como se vê na Fig. I-43, as nervuras também afetam (diminuem) os deslocamentos do bordo livre do modelo I, o que já era esperado (ver Fig. I-13, item I.4.2).

Nas Figuras I-44.a e I.45.a estão representadas as variações das tensões longitudinais e dos momentos transversais na aresta de topo (verifica-se que as nervuras afetam muito pouco as tensões, mas reduzem significativamente os momentos transversais m ; além disso, a colocação de mais uma chapa no modelo II, em relação ao I, comparando as duas figuras, mostra que reduzem-se tensões e momentos, como já fora assinalado no início do item I.4.2, figura I.9) e, para efeito comparativo, nas Figuras I.44.b e I.45.b estão representadas a variação das tensões longitudinais para o mesmo ponto, sob carregamento assimétrico. Verifica-se que

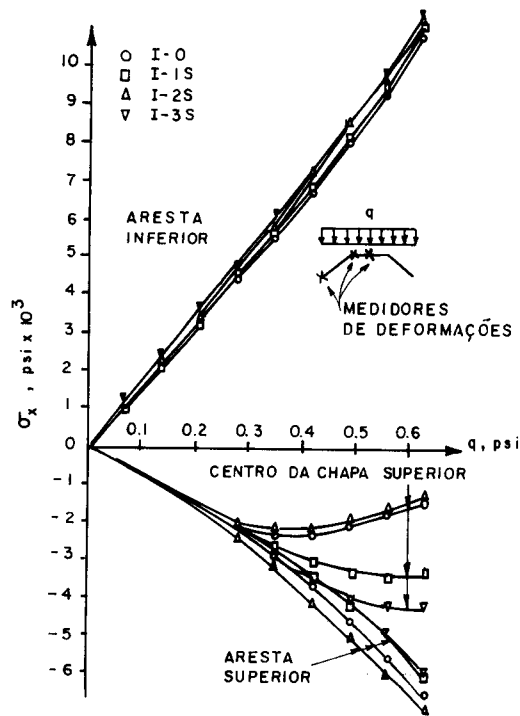


FIG.I-42 - TENSÕES LONGITUDINAIS NA SEÇÃO A 25,375 in DO APOIO, MODELO I.

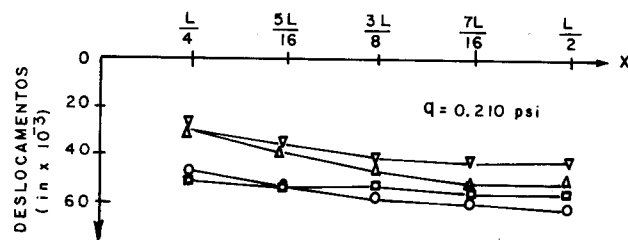
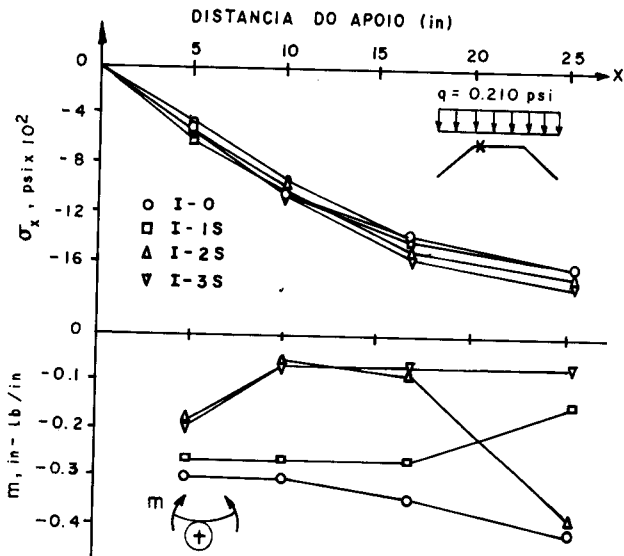
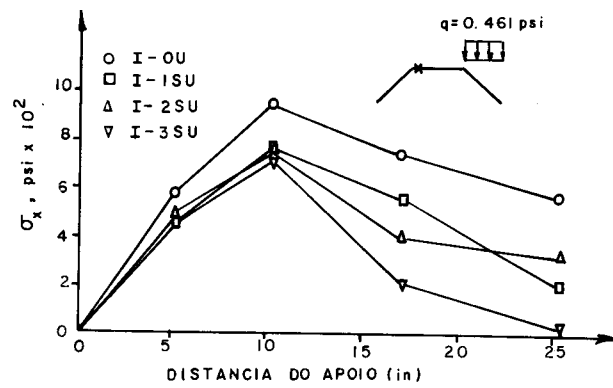


FIG. I - 43 - DESLOCAMENTOS DO BORDO LIVRE, MODELO I.

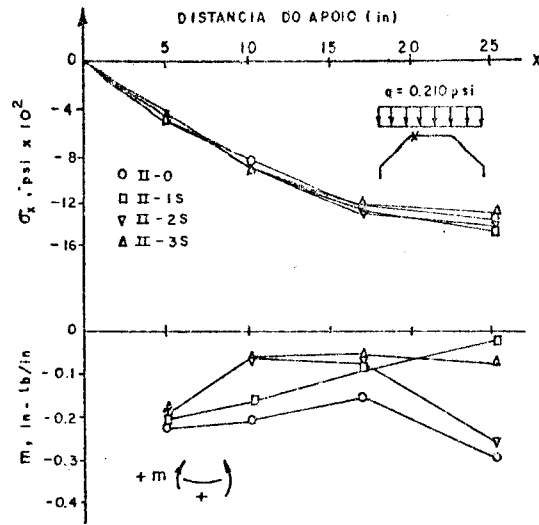


a) Tensões longitudinais e momentos transversais na aresta superior do modelo I.

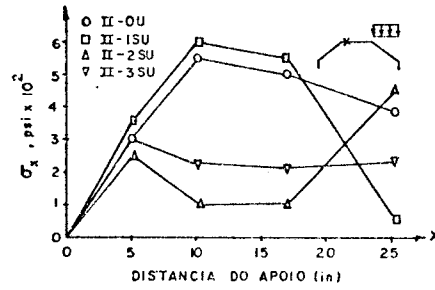


b) Tensões longitudinais na aresta superior do modelo I.

FIG. I- 44 - COMPARAÇÃO ENTRE CARGAS SIMÉTRICAS E ASSIMÉTRICAS PARA O MODELO I.

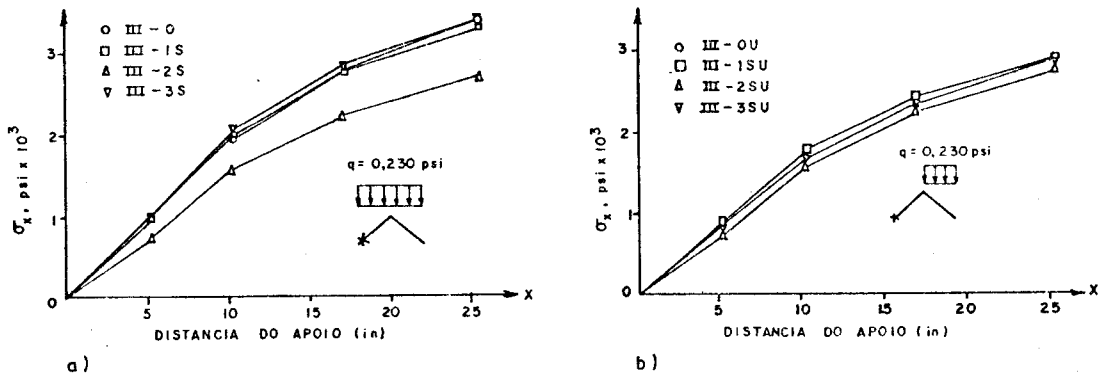


a) Tensões longitudinais e momentos transversais na aresta superior do modelo II.



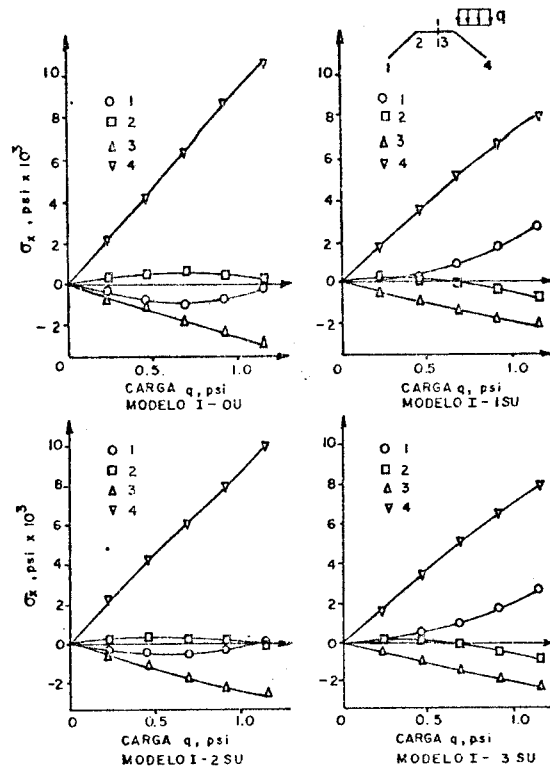
b) Tensões longitudinais na aresta superior do modelo II.

FIG.I-45- COMPARAÇÃO DO EFEITO DA MUDANÇA DE CARGA PARA O MODELO II.

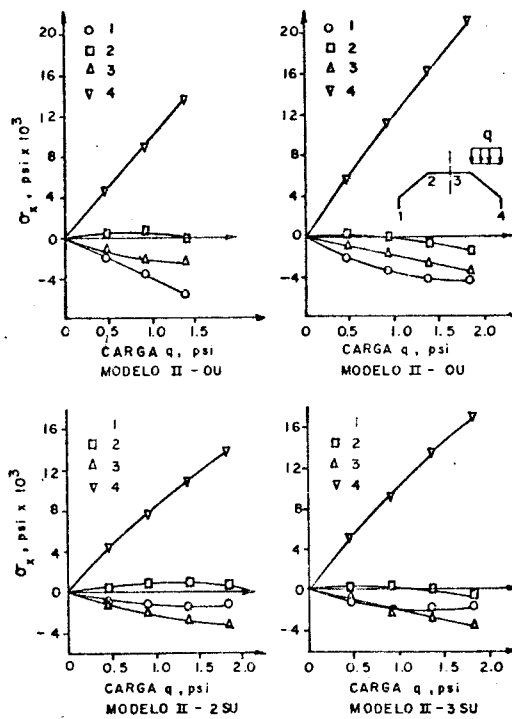


Tensões longitudinais na aresta inferior do modelo III.

FIG.I-46 - TENSÕES LONGITUDINAIS NA ARESTA INFERIOR DO MODELO III.



a) Tensões longitudinais no meio do vão, modelo I.



b) Tensões longitudinais no meio do vão, modelo II.

FIG.I-47 - INFLUÊNCIA DAS NERVURAS NAS TENSÕES LONGITUDINAIS σ_x , SOB CARGA ASSIMÉTRICA.

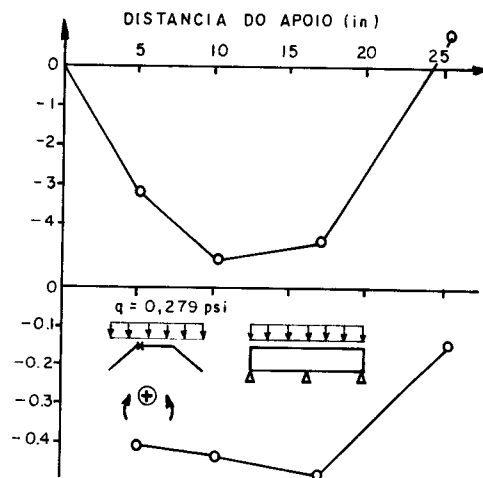
nervuras tendem a reduzir as tensões, para carga assimétrica, o que se pode notar mais claramente se examinarmos a figura I-47, onde se vê que todas as tensões são consideravelmente afetadas pelas nervuras.

A Fig. I.46 demonstra que as nervuras afetam muito pouco as tensões longitudinais no bordo livre do modelo III, para qualquer tipo de carregamento. Isso já era esperado pela pequena distorção que se observa nesse tipo de seção transversal. Contudo, é bom lembrar que o conveniente, para enrijecer esse tipo de seção, é o uso de escoras, como assinalado por Franz²³ e já comentado no item I.4.2 (ver Fig. I.8).

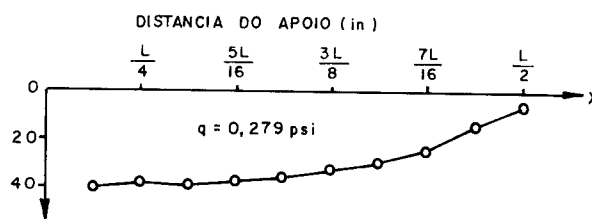
Os resultados obtidos por Swartz e Rosebraugh¹⁰⁹ para considerar os efeitos das nervuras intermediárias de enrijecimento podem, então, ser resumidos:

- a) as nervuras intermediárias afetam muito pouco as tensões longitudinais σ_x nas folhas prismáticas carregadas simetricamente, mas podem alterar essas tensões no caso de cargas assimétricas;
- b) as nervuras, em geral, reduzem os momentos transversais m ;
- c) nervuras espaçadas de um valor próximo da altura da maior chapa aumentarão o valor da carga de início do empenamento; para um espaçamento maior, as nervuras não influirão na carga de flambagem; em qualquer caso, o comportamento pós-empenamento da estrutura é melhorado pela presença das nervuras;
- d) as nervuras reduzem a distorção da seção transversal e assim sua influência é melhor aproveitada naquelas estruturas em que a distorção cria tensões secundárias significativas.

Para os modelos de folha contínua, os resultados são mostrados nas Figuras I.48, I.49 e I.50, apenas para



a) TENSÕES LONGITUDINAIS E MOMENTOS TRANSVERSAIS NA ARESTA SUPERIOR DO MODELO I-1C.



b) DESLOCAMENTOS NORMAIS DO BORDO LIVRE DO MODELO I-1C.

FIG. I-48 - RESULTADOS DOS MODÉLOS EM FOLHA CONTÍNUA.

carga simétrica. Infelizmente ocorreu, durante os ensaios, um pequeno recalque de apoio central, o que deve ter diminuído o valor das tensões (veja Fig. I.48.b), particularmente no meio do vão. A distribuição de tensões indica um comportamento aproximadamente igual ao que se esperaria de uma viga contínua simétrica. A variação dos momentos transversais é interessante, porque indica ser aproximadamente do mesmo tipo (embora com valores maiores) daquela obtida para o modelo com uma nervura central (ver Figuras I.44 e I.45).

Embora as seções transversais sejam um pouco diferentes, é interessante comparar os momentos e tensões obtidos experimentalmente com os teóricos obtidos no exemplo III.5 (veja-se os gráficos de momentos e tensões, Figura III.22).

I.6.4 - A investigação em estruturas contínuas

Vários pesquisadores investigaram as estruturas em folhas contínuas. Beaufait e Gray¹¹¹ realizaram experiências em três modelos de alumínio com o intuito principal de verificar a validade do método proposto por Beaufait⁴⁸ para o cálculo das folhas contínuas e simples (ver Figura I.5.1). Um exame dos resultados obtidos experimentalmente mostra uma diferença média de 15% com os obtidos pelo método por ele proposto (o qual é criticado por Lee⁴⁹, Scordelis e Lo⁵⁰ e Mousa, Pamelee e Lee⁵⁴).

Outra conclusão importante feita por Beaufait e Gray: desenvolvem-se momentos longitudinais desprezados na consideração da ação de placa nas proximidades dos apoios (como já assinalado no item I.6.1), incluindo-se agora o apoio interno (ver Figura I.52). Os valores teóricos dos momentos transversais foram determinados considerando-se placas contínuas apoiadas em uma direção, desprezando-se assim a influência dos apoios na distribuição longitudinal

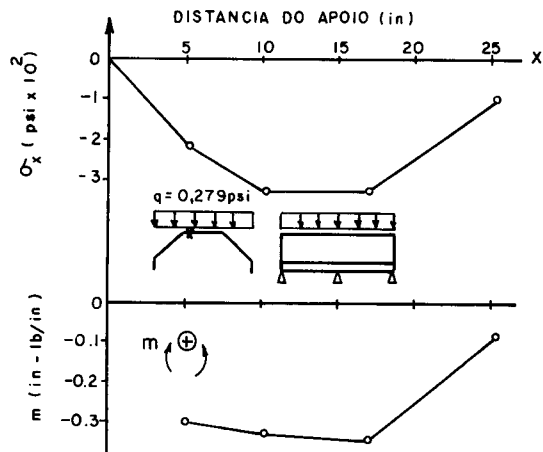


FIG. I-49 - TENSÕES LONGITUDINAIS E MOMENTOS TRANSVERSAIS NA ARESTA SUPERIOR DO MODELO II-1C

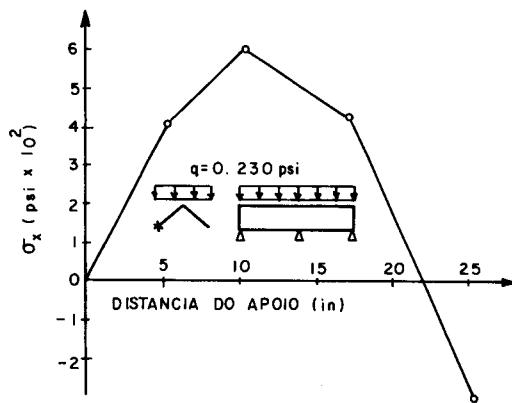


FIG. I-50 - TENSÕES LONGITUDINAIS NA ARESTA SUPERIOR DO MODELO III-1C

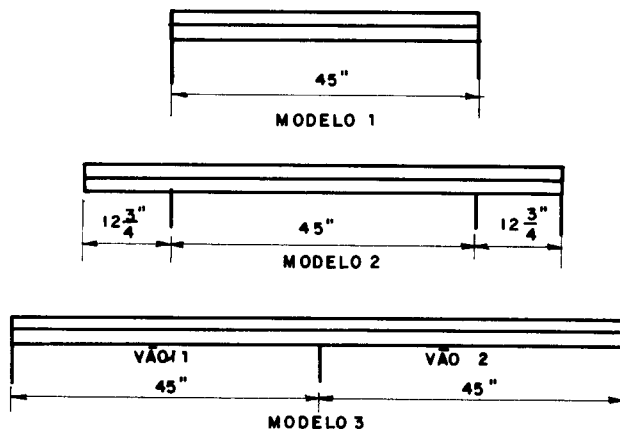
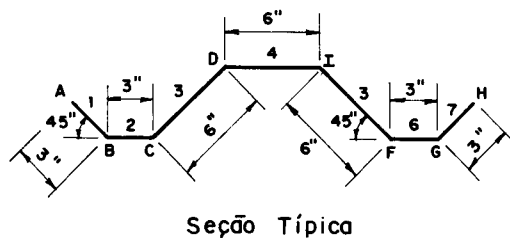


Figura I-51 - Detalhes dos modelos

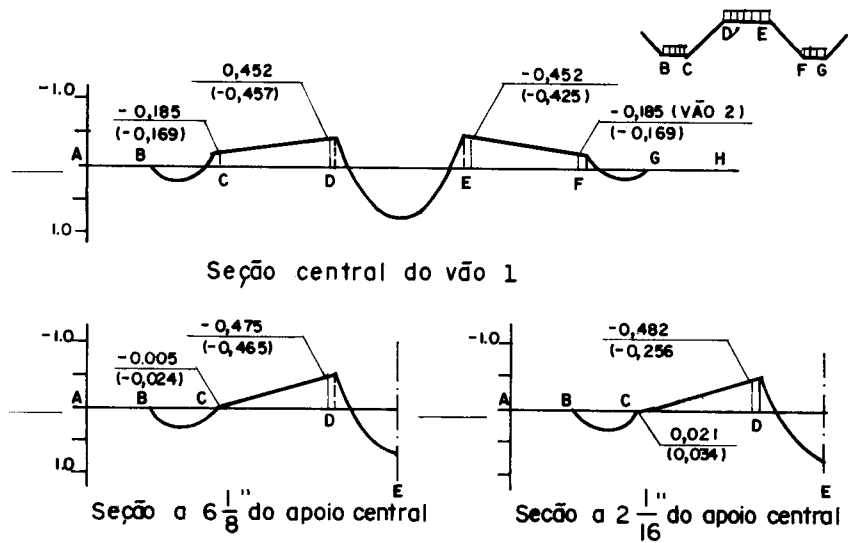


Figura I.52 — Modelo 3 : Valores dos momentos transversais (entre parênteses, os valores experimentais)

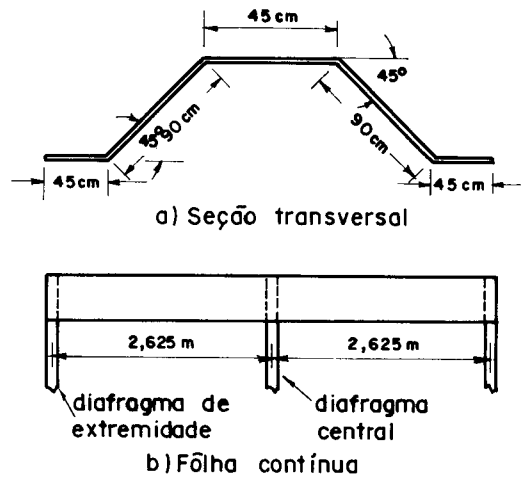


Figura I-53 — Detalhes dos modelos

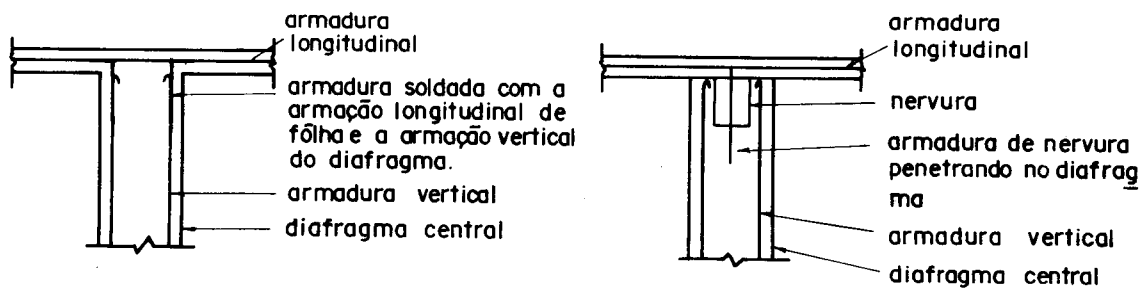


FIG. I-54 - LIGAÇÃO DAS CHAPAS COM O DIAFRAGMA CENTRAL.

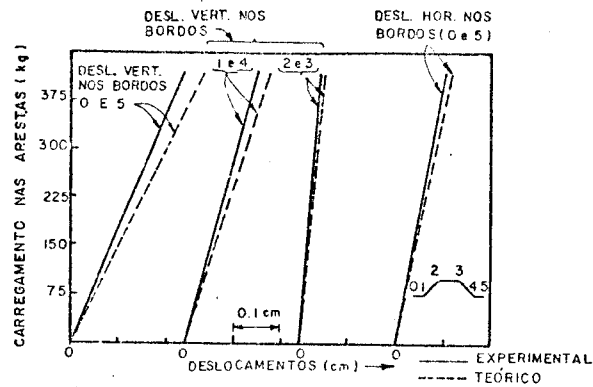
dos momentos transversais. Na vizinhança dos apoios, devido à ação de placa apoiada em duas direções, diminuem os valores dos momentos transversais. Uma seção mais distante do apoio mostra melhor concordância entre os valores teóricos e experimentais.

A ação de placa apoiada em duas direções na região dos apoios também é destacada nos trabalhos de Mulhauer e Beaufait⁵⁵ e Seetharamulu e Sinha¹¹⁴. Estes últimos realizaram ensaios em dois modelos de concreto (Figura I.53), e conduziram a experiência em dois estágios: no primeiro, ambos os modelos foram testados como simplesmente apoiados, com carregamento no regime elástico; no segundo, foram adicionados apoios internos e ambos os modelos testados até a ruína.

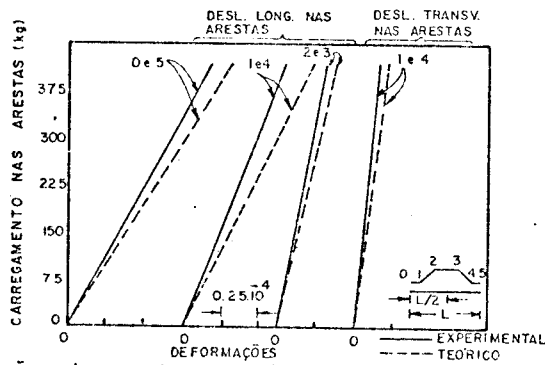
A diferença entre os dois modelos está na maneira de conexão com o apoio interno: no modelo 1, através de barras soldadas na armadura longitudinal da folha e na armadura vertical do apoio (Figura I.54.a); no modelo 2, moldou-se uma nervura de seção (10x10)cm juntada monoliticamente com o modelo no meio do vão, com armadura penetrando no apoio (Fig. I.54.b).

A comparação de deslocamentos e deformações experimentais foi feita com resultados analíticos obtidos pelo método da matriz de transferência (ver método de Ivar Holland, descrito em Ramaswamy³). Os resultados experimentais apresentam boa concordância com os teóricos para as folhas simplesmente apoiadas (Fig. I.55), para as quais as cargas estavam dentro do campo elástico. Para as contínuas (Fig. I.56), não se esperava boa concordância devido ao comportamento não linear dessas estruturas sob carregamento mais forte.

Durante o primeiro estágio de testes (sem apoio interno), não houve fissuração visível em nenhum dos modelos. Durante o 2º estágio, as primeiras fissuras diagonais apareceram próximas aos apoios externos, nas chapas inclinadas, com carregamento próximo da metade da carga de ruína.

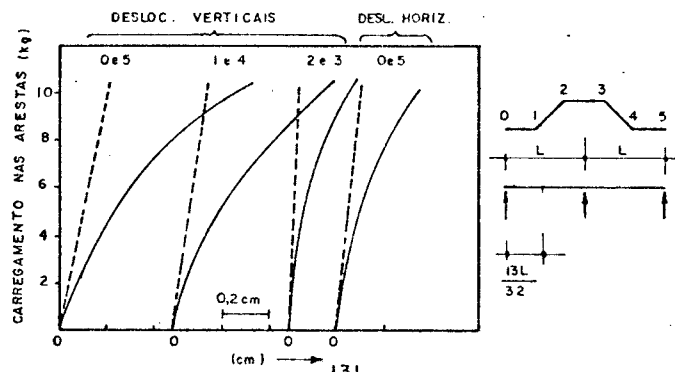


a) Deslocamentos das arestas no meio do vão, modelo 1 (simplesmente apoiado).

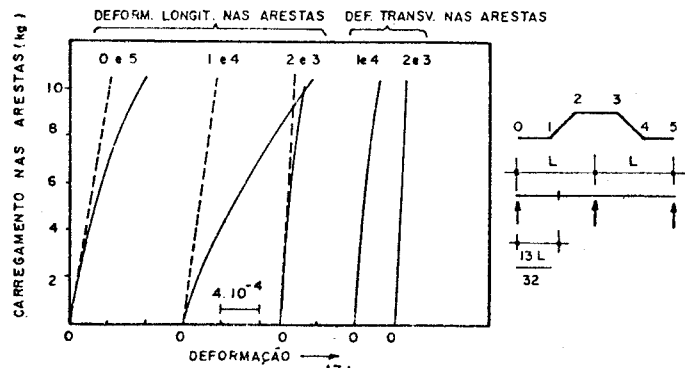


b) Deformações das arestas no meio do vão, modelo 1 (simplesmente apoiado).

FIG. I-55 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS EXPERIMENTAIS E TEÓRICOS.



a) Deslocamentos das arestas na seção $\frac{13L}{32}$ modelo 1 (folha contínua)



b) Deformação das arestas na seção $\frac{13L}{32}$, modelo 1 (folha contínua)

FIG. I - 56 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS EXPERIMENTAIS E TEÓRICOS

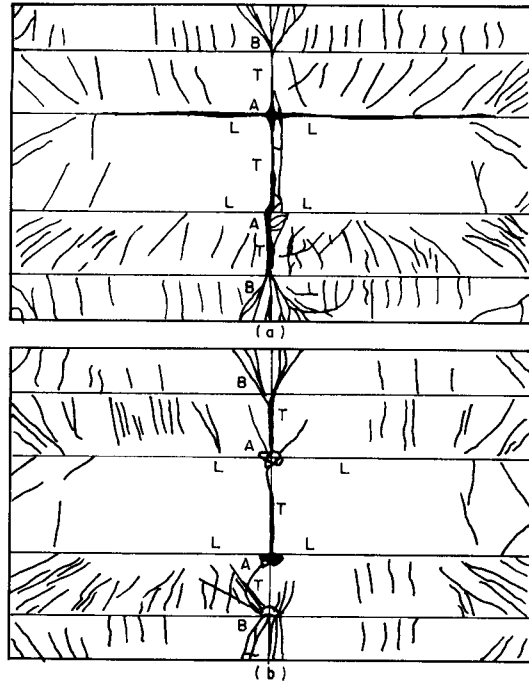


FIG.I- 57- ESQUEMA DE FISSURAÇÃO NA SUPERFÍCIE SUPERIOR: a) Modelo 1
b) Modelo 2

na. Em seguida, observou-se fissuras verticais nas chapas inclinadas e de extremidade, entre os apoios (Fig. I.57) e próximos ao apoio interno. Numerosas fissuras diagonais foram também observadas próximas ao apoio interno. As fissuras eram mais pronunciadas nas chapas inclinadas.

Algumas trincas foram também observadas nas arestas superiores, na direção longitudinal (efeito dos momentos transversais), chamadas de L (Figura I.57), bem como sobre o apoio, na direção transversal (efeito de placa apoiada sobre duas direções), chamadas T. A ruína do modelo 1 caracterizou-se pelo aumento da abertura dessas trincas, bem como de outras (assinaladas A e B) localizadas próximas às arestas superiores e inferiores, e foi atingida com uma carga de 10,25t por aresta.

A ruína do modelo 2 se deu de modo semelhante, com carga de 10,75t por aresta, embora as trincas deste não fossem tão pronunciadas quanto às do modelo 1 (isso devido à melhor conexão entre a estrutura e o apoio interno no modelo 2, o que deu maior monoliticidade ao conjunto).

Fazio e Kennedy¹¹² apresentam um estudo visando comparar resultados experimentais com os teóricos obtidos segundo o método por eles propostos para a solução de folhas contínuas, baseado no método de viga. Assim, testaram dois modelos, um de concreto (Fig. I.58) e outro de alumínio, com a finalidade de verificar a diferença de comportamento.

Na Figura I.59 estão os valores experimentais e teóricos das tensões obtidas para os dois modelos, na seção central de cada vão, havendo maior concordância para o modelo em alumínio (segundo eles, devido à sua maior elasticidade, quando comparado com o concreto). Nota-se que as maiores tensões de tração ocorrem na aresta, que une as chapas vertical e inclinada, o que será causa da fissura número 10, assinalada na Figura I.60.

Segundo Fazio e Kennedy, as trincas próximas aos apoios foram a causa da ruína dos modelos, bem como as fis

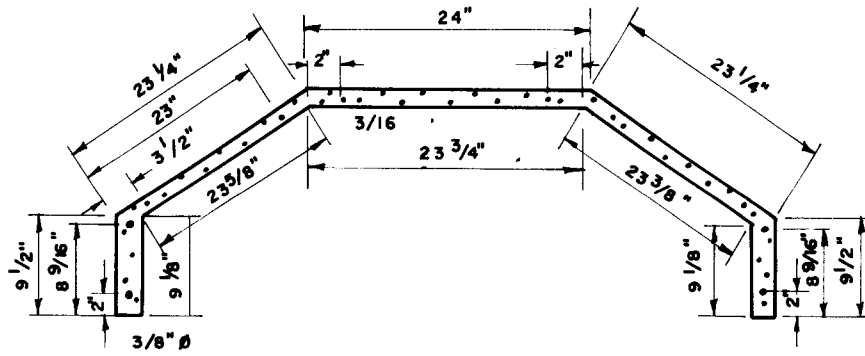


Figura I.58 - Seção transversal do modelo em concreto

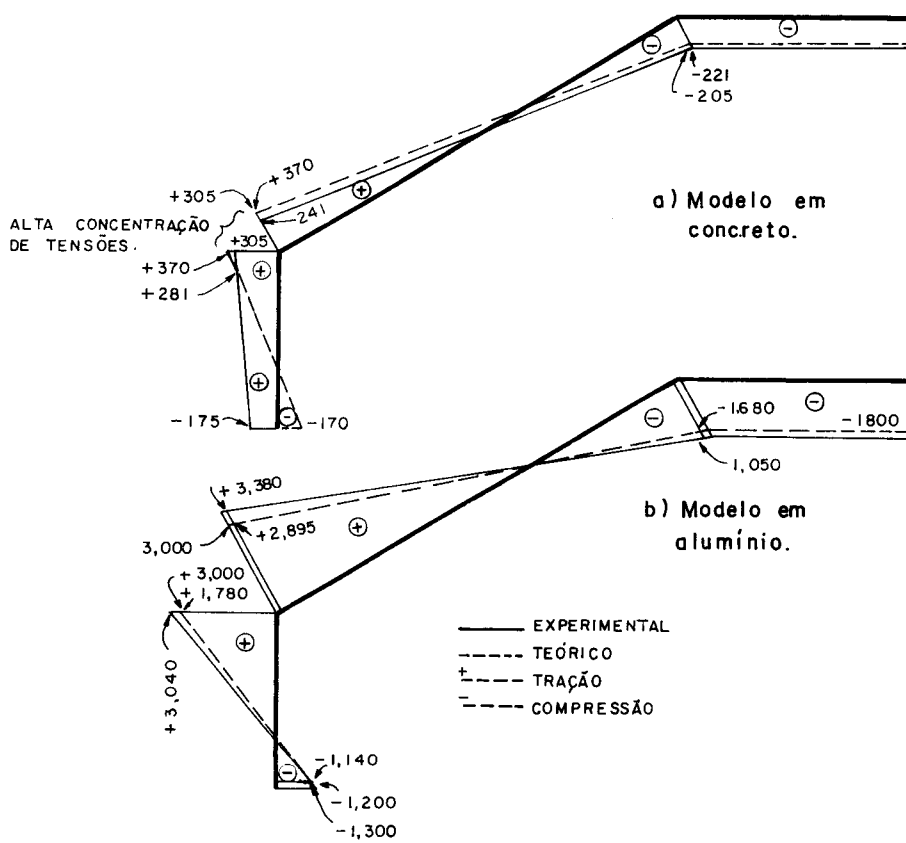


FIG. I-59 - TENSÕES LONGITUDINAIS NO MEIO DO VÃO (psi): VALORES TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS.

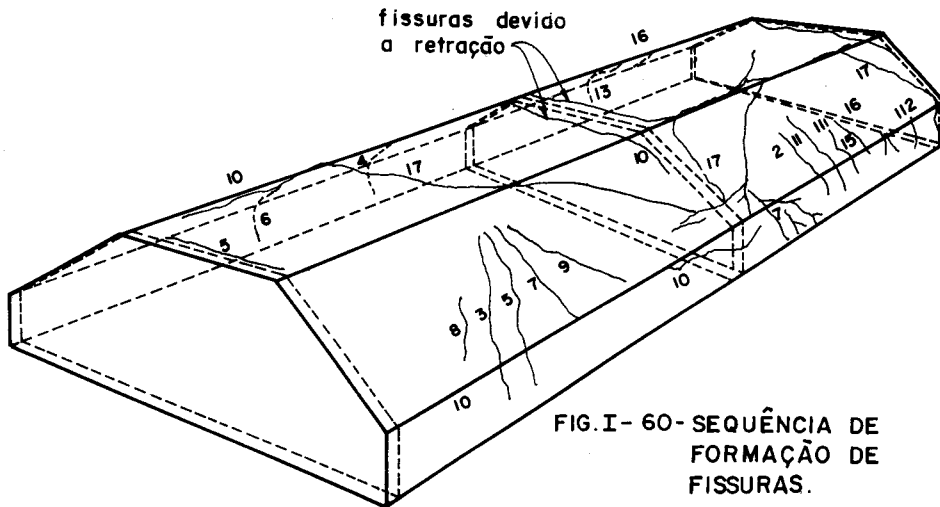


FIG. I-60 - SEQUÊNCIA DE FORMAÇÃO DE FISSURAS.

suras longitudinais nas arestas superiores, causadas pelos momentos transversais, momentos estes desprezados na analise.

CAPÍTULO II

MÉTODOS SIMPLES DE ANÁLISE DAS FOLHAS PRISMÁTICAS

II.1 - HIPÓTESES BÁSICAS

As seguintes hipóteses básicas são adotadas em todos os métodos descritos neste capítulo:

- a) a estrutura é monolítica e as arestas são rígidas;
- b) o material é elástico, homogêneo e isotrópico;
- c) a distribuição longitudinal das cargas é igual em todas as chapas;
- d) as chapas, transversalmente, suportam cargas apenas por flexão normal aos seus planos (ação transversal de placa apoiada em uma direção); supõe-se, portanto, grande relação L/h , para que esta hipótese seja verdadeira;
- e) as chapas suportam cargas longitudinalmente apenas por flexão nos seus próprios planos (ação longitudinal de viga);
- f) em todas as chapas, as seções planas permanecem planas após a deformação, isto é, as tensões e deformações longitudinais variam linearmente sobre a altura de cada chapa; (deve-se observar, porém, que a seção transversal, como um todo, não permanece necessariamente plana após a deformação);

- g) despreza-se a rigidez à torção das chapas;
- h) considera-se apenas os deslocamentos provocados por momentos fletores, desprezando a contribuição dos demais esforços;
- i) a seção transversal é constante ao longo do comprimento, isto é, a estrutura é prismática;
- j) o apoio das extremidades das chapas (tímpanos, vigas, pórticos) é infinitamente rígido no seu próprio plano e completamente flexível normalmente a ele;
- k) o coeficiente de Poisson é zero.

II.2 - CONVENÇÃO DE SINAIS

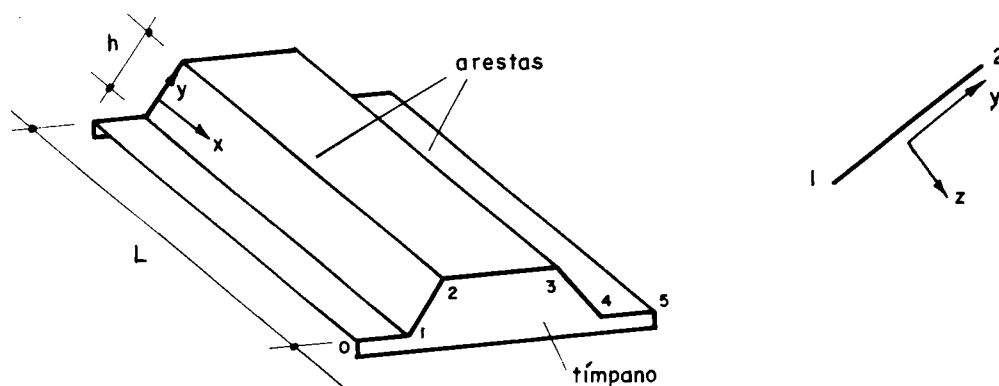


Figura II.1 - Folha prismática simplesmente apoiada

É essencial que se observe uma rígida convenção de sinais, principalmente se se recorrer a uma sistematização dos cálculos. Procurar-se-á observar os eixos coordenados como mostrado na Fig. II.1. As convenções para cada i tem serão definidas conforme forem introduzidas. Procurar-se-á, também, respeitar as convenções usuais normalmente adotadas para os esforços solicitantes.

II.3 - ESTRUTURA EM PLACA CONTÍNUA

II.3.1 - Cargas e reações de apoio

Considere-se uma estrutura em casca prismática com arestas $i, j, k, \text{etc...}$ e considere-se sobre a placa uma faixa de largura unitária. Apenas a componente normal do carregamento, g^n , pode ser suportada pela ação de laje contínua. Devido às hipóteses adotadas, apenas podem ocorrer os esforços solicitantes m e v . Têm-se (Fig. II.2):

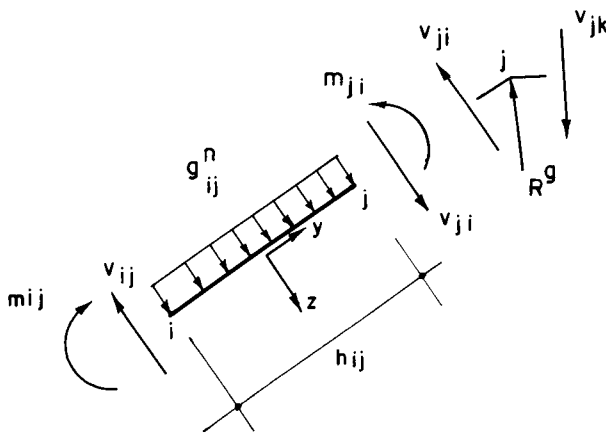


Figura II.2 - Faixa unitária da placa transversal

$$v_{ij} = \frac{g_{ij}^n \cdot h_{ij}}{2} + \frac{m_{ji} - m_{ij}}{h_{ij}} \quad \dots (II.1)$$

$$v_{ji} = \frac{-g_{ij}^n \cdot h_{ij}}{2} + \frac{m_{ji} - m_{ij}}{h_{ij}}$$

Para carga não uniforme, equações semelhantes são facilmente obtidas.

Numa aresta j , a reação R^g de apoio da laje contínua precisa equilibrar as cortantes v_{ji} e v_{jk} (Fig. II.2). A direção dessa reação geralmente só será conhecida após

completar a análise. Normalmente, no cálculo das cascas prismáticas sob carregamento vertical, assume-se que a faixa de laje suporte todo o carregamento vertical, e não apenas a sua componente normal, e as reações R^g assim obtidas serão verticais.

II.3.2 - Deslocamentos das arestas e giro das placas

Considere-se uma chapa ij da faixa de placa contínua que, sob o carregamento, se desloca para $i'j'$ (Fig.II.3). Os deslocamentos das arestas i e j normais ao plano da chapa serão ω_{ij} e ω_{ji} , com os deslocamentos verticais sendo δ_i e δ_j . Como se verá adiante (ver eq. II.51 e II.52), os deslocamentos ω , sendo função das flechas no plano das chapas, serão diferentes entre si, pois aquelas são diferentes, isto é, variam de chapa para chapa (consequência da variação de carregamento no plano das chapas).

A consequência dessa diferença, combinada com o efeito de flexão do carregamento, será a ocorrência dos giros de nó θ_{ij} e θ_{ji} (Fig. II.3), as quais, então, consistem de duas partes:

- a) rotação θ' da placa causada pela diferença de deslocamentos das arestas (giro de corda);
- b) giros elásticos θ'' causados pelos momentos transversais;

Pode-se então definir o deslocamento relativo entre as arestas i e j através do giro de corda:

$$\theta'_{ij} = \frac{\omega_{ji} - \omega_{ij}}{h_{ij}} \quad \dots (II.2)$$

ou

$$\theta'_{ij} = \frac{\delta_j - \delta_i}{l_{ij}} \quad \dots (II.2')$$

onde l_{ij} = projeção horizontal da altura h_{ij} da chapa.

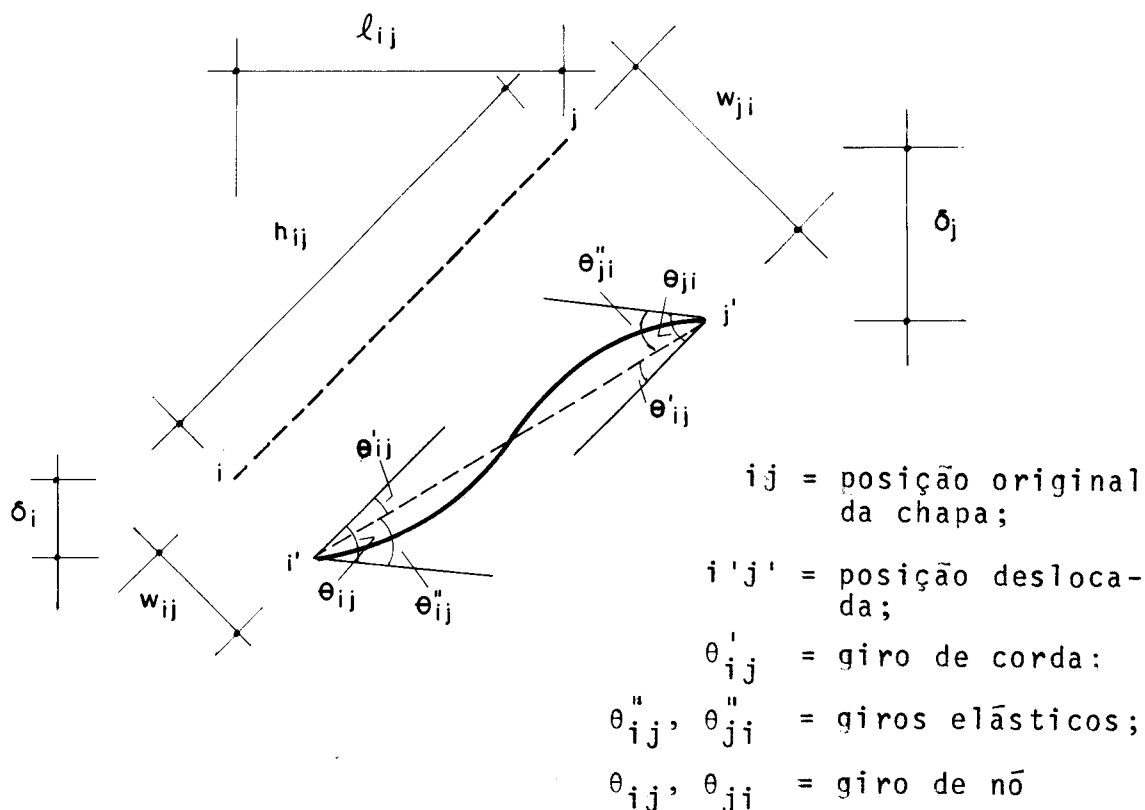


Figura II.3 - Deslocamentos das arestas e giros de nó

Observe-se aqui a preferência pelo uso da fórmula (II.2) como caso geral para definir o giro de corda, pois no caso de placa vertical, ter-se-ia $l_{ij} = 0$, $\delta_i = \delta_j$, e a fórmula (II.2') perderia seu significado.

Sejam m_{ji}^e e m_{ij}^e os momentos de engastamento perfeito para o vão ij da placa contínua, sob carregamento g_{ij} . Os momentos de engastamento podem ser facilmente encontrados para qualquer variação da carga g_{ij} . Exemplo: se g_{ij} é uniforme:

$$m_{ij}^e = m_{ji}^e = - \frac{g_{ij}^n \cdot h_{ij}^2}{12} \quad \dots \text{(II.3)}$$

O sinal na fórmula acima se deve ao fato de respeitar-se aqui a convenção usual, pela qual são positivos

os momentos fletores que produzem tração nas fibras inferiores.

Seja b_{ij} a espessura da chapa ij e E o módulo de elasticidade do material; adote-se:

$$K_{ij} = \frac{E \cdot b_{ij}^3}{12 h_{ij}} \quad \dots (II.4)$$

onde $l \cdot b_{ij}^3 / 12 = I_{pij}$ é o momento de inércia da chapa ij para a ação de placa, para faixa de largura lm . K será chamado de coeficiente de rigidez.

Pode-se então escrever as equações para o vão ij :

$$m_{ij} = m_{ij}^e + 2 K_{ij} \cdot (2\theta_{ij} + \theta_{ji} - 3\theta'_{ij}) \quad \dots (II.5)$$

$$m_{ji} = m_{ji}^e + 2 K_{ij} \cdot (2\theta_{ji} + \theta_{ij} - 3\theta'_{ij})$$

Os momentos m também podem ser obtidos apenas em função dos giros elásticos θ'' , bastando lembrar que a rotação tangencial total θ contém o giro de corda θ' , isto é:

$$\theta = \theta' + \theta''$$

$$m_{ij} = m_{ij}^e + 2K_{ij} \cdot (2\theta''_{ij} + \theta''_{ji}) \quad \dots (II.5')$$

$$m_{ji} = m_{ji}^e + 2K_{ij} \cdot (2\theta''_{ji} + \theta''_{ij})$$

As equações (II.5) podem ser escritas alternativamente como:

$$\theta_{ij} = \theta''_{ij} + \theta'_{ij} = \frac{1}{6K_{ij}} (2m_{ij} + m_{ji} - 2m_{ij}^e - m_{ji}^e) + \theta'_{ij} \quad \dots (II.6)$$

$$\theta_{ji} = \theta''_{ji} + \theta'_{ij} = - \frac{1}{6K_{ij}} (2m_{ji} + m_{ij} - 2m_{ji}^e - m_{ij}^e) + \theta'_{ij}$$

II.3.3 - As soluções para a estrutura contínua transversal

Conforme visto (ver item I.4.1), o comportamento estrutural das cascas prismáticas assemelha-se a uma estrutura mista de placas e chapas, e considera-se que as cargas sobre a estrutura sejam resistidas primeiro pela ação transversal de placa, e depois pela ação longitudinal de chapa. Com as hipóteses simplificadoras adotadas, na direção transversal a estrutura se comporta como uma placa contínua apoiada em uma direção sobre as arestas, constituindo-se assim, uma estrutura hiperestática. Para solucioná-la, normalmente será utilizado o Processo de Cross (ver exemplos), podendo-se recorrer a outras soluções, como a utilização da equação dos três momentos⁸ ou do processo dos esforços, conforme sugerido por Yitzhaky^{28,29} (este último para levar em conta apenas os momentos provocados pelos deslocamentos das arestas).

II.3.3.1 - A equação dos três momentos

Numa aresta j , a condição de continuidade da placa é mantida se se verificar a igualdade de momentos das lajes adjacentes e não houver rotação relativa das chapas, isto é:

$$m_{ji} = m_{jk} = m_j \quad \dots \quad (II.7)$$

$$\theta_{ji} = \theta_{jk} = \theta_j$$

Combinando as equações (II.6) e (II.7), pode-se obter uma forma da equação dos três momentos:

$$\frac{m_i}{6 K_{ij}} + m_j \left(\frac{1}{3 K_{ij}} + \frac{1}{3 K_{jk}} \right) + \frac{m_k}{6 K_{jk}} = \frac{1}{6 K_{ij}} (2 m_{ji}^e + m_{ij}^e) +$$

$$+ \frac{1}{6 K_{jk}} (2 m_{jk}^e + m_{kj}^e) + \theta'_{ij} - \theta'_{jk} \quad \dots \text{ (II.8)}$$

O número de equações dos três momentos que se pode escrever será sempre igual ao número de incógnitas (momentos nas arestas).

II.3.3.2 - O Processo dos Esforços

Adota-se como sistema isostático fundamental a estrutura articulada nas arestas, com os momentos devidos aos deslocamentos das arestas como incógnitas hiperestáticas (redundantes), as quais serão determinadas através das equações de compatibilidade de deslocamentos (giros dos nós). Pelo princípio de superposição de efeitos, a estrutura isostática é carregada primeiro unicamente com as cargas externas [problema (0)], e depois através de momentos unitários aplicados nas arestas, atuando separadamente (problemas (1),(2),... etc.). A continuidade da placa numa aresta é mantida se não houver giro relativo entre as chapas adjacentes a ela.

Numa casca prismática, os giros de nó variam longitudinalmente ao longo das arestas, podendo-se fazê-los variar de modo semelhante ao longo de toda a estrutura, isto é, o giro de nó correspondente em cada faixa transversal será proporcional à máxima ordenada. Nesse caso, assegurando-se a continuidade transversal da estrutura ao longo de qualquer faixa, estará assegurada a continuidade em todas as faixas, ou seja, na estrutura toda.

A variação do giro de nó ao longo da aresta pode ser expressa por $\theta \cdot f(x)$, onde θ é o giro de nó máximo e $f(x)$ é a função que define a curva de variação na direção longitudinal. A variação dos momentos transversais nas arestas deve ser feita da mesma forma através da função $f(x)$, isto é, $m' \cdot f(x)$. Isto porque a variação dos momentos

são ocorre devido aos giros relativos das chapas, devendo portanto obedecer à mesma equação. As equações de compatibilidade serão escritas para a faixa transversal da placa a uma distância x do apoio das chapas, onde os valores θ sejam máximos e $f(x) = 1$.

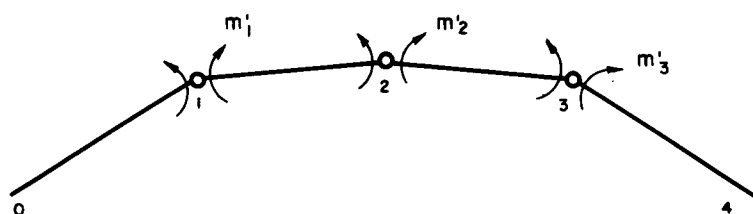


Figura II.4 — Estrutura isostática fundamental

Como exemplo, seja a seção transversal da figura II.4, cujas equações de compatibilidade de deslocamentos serão:

$$\theta_1 = \theta_{10} + \theta_{11}m_1' + \theta_{12}m_2' + \theta_{13}m_3' = 0$$

$$\theta_2 = \theta_{20} + \theta_{21}m_1' + \theta_{22}m_2' + \theta_{23}m_3' = 0 \quad \dots \text{ (II.9)}$$

$$\theta_3 = \theta_{30} + \theta_{31}m_1' + \theta_{32}m_2' + \theta_{33}m_3' = 0$$

O termo θ_{ij} representa o giro que ocorre no nó i quando a estrutura estiver sob a ação da carga do problema j . Por exemplo:

θ_{12} = giro de nó sobre a aresta 1 com a carga do problema (2), a qual pode ser representada por $m_2' = 1 \cdot f(x)$.

Yitzhaky observa²⁹ que adotando-se variação semelhante para os giros de nó elimina-se a necessidade de exprimir a carga externa variando senoidalmente (séries de

Fourier), como sugerido nos métodos clássicos de análise (ver item II.5.6), e torna possível analisar cascas prismáticas sob qualquer tipo de carregamento e com diferentes condições de apoio.

O giro de \bar{n} numa aresta, como já mencionado, consiste de duas partes (ver Fig. II.5):

- a) rotação θ' das chapas adjacentes causada pela diferença de deslocamentos das arestas (giro de corda):

$$\theta'_j = \theta'_{ij} + \theta'_{jk} = \frac{\delta_i - \delta_j}{l_{ij}} - \frac{\delta_j - \delta_k}{l_{jk}} \quad \dots \quad (II.10)$$

cuja variação longitudinal é definida adequadamente pela função $f(x)$ da curva normal (a ser definida no item seguinte), independente da variação da carga;

- b) os giros elásticos θ'' causados pela carga ou momentos atuando nas placas;

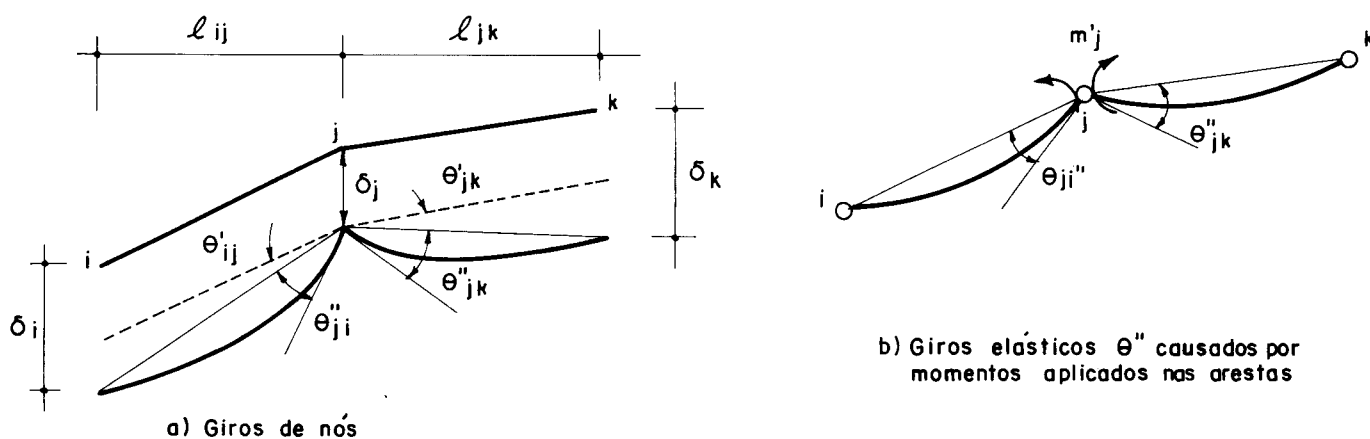


Figura II - 5

Os giros elásticos θ'' provocados por momentos podem ser calculados com o auxílio das equações (II.6), das quais se tem:

$$\theta''_{ij} = \frac{1}{6} \frac{1}{K_{ij}} \cdot m'_j = \frac{h_{ij}}{6 E I_{pij}} \cdot m'_j$$

$$\theta''_j = \theta''_{ji} + \theta''_{jk} = \left(\frac{h_{ji}}{3 E I_{pij}} + \frac{h_{jk}}{3 E I_{pjk}} \right) \cdot m'_j$$

$$\theta''_{jk} = \frac{h_{jk}}{6 E I_{pjk}} \cdot m'_j$$

.... (II.11)

Para fazer com que os valores θ'' variem também com a função $f(x)$, far-se-á:

1. a curva de variação das cargas momentos nos problemas (1),(2) etc., será escolhida de maneira a variar com $f(x)$. Com isso, as reações de apoio das placas (cargas nas arestas) também, variarão com $f(x)$ e, em consequência, as cargas, momentos e flechas da estrutura em chapa também variarão com $f(x)$.
2. a parte do giro elástico θ'' causado por flexão das placas devido ao carregamento externo [problema (0)] será eliminada da análise. A estrutura (ver figura II.6) será resolvida de maneira que a placa contínua transversal seja suportada por apoios indeformáveis (supõe-se inicialmente arestas indeslocáveis), aparecendo reações R_0 de apoio. Essas reações R_0 serão então consideradas cargas nas arestas da estrutura em folha prismática, as quais são supostas articuladas, como já se disse. Essas cargas R_0 não produzirão flexão das placas, isto é, $\theta'' = 0$; o giro de nó θ será função apenas do giro de corda θ' , isto é, $\theta_0 = \theta'_0$, ou, em última análise, como θ' varia com $f(x)$, então θ_0 variará também com $f(x)$.

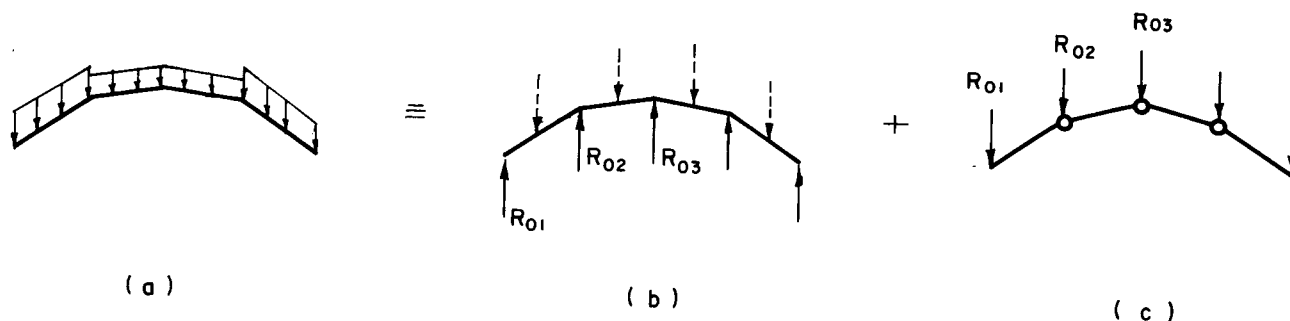


Figura II.6 — Estrutura resolvida em placa sôbre apoios indeformáveis somada com estrutura carregada nas arestas pelas reações de apoio da placa contínua

II.3.4 - Curvas normais

Alguns dos métodos de análise a serem aqui discutidos (Gaafar⁷, Simpson^{3,26}, A.S.C.E,¹) adotam o deslocamento relativo transversal w entre duas arestas consecutivas como incôgnita e tratam-no como uma carga adicional na estrutura. Esses deslocamentos afetarão os momentos transversais de laje, as reações de apoio e, conseqüentemente, as cargas p e as flechas a nas chapas.

Se o deslocamento relativo máximo entre duas arestas consecutivas for chamado de Δ , ter-se-ão três pontos dados para traçar a curva de deslocamentos relativos, já que, nas extremidades das arestas (apoios) o deslocamento é nulo. Assim, a forma geral da curva é conhecida, mas não se conhece sua equação. A melhor aproximação para tal curva pode ser a linha elástica de uma viga carregada de maneira semelhante. Os momentos transversais devido aos deslocamentos das arestas devem, então, ter variação longitudinal igual à variação dos deslocamentos que os provocaram, isto é, devem variar aproximadamente como a elástica de uma viga.

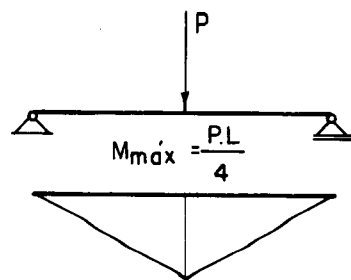
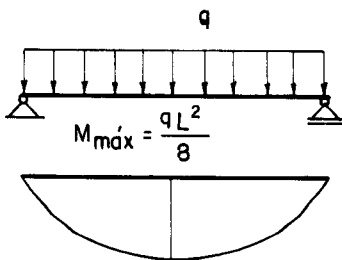
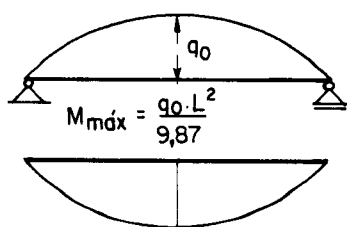
A forma da elástica de uma folha prismática de

pende principalmente das suas condições de apoio, como o corre no caso das vigas, onde elásticas de estruturas igualmente apoiadas são semelhantes, independentemente da variação longitudinal da carga. A elástica de uma viga biapoiada, por exemplo, é semelhante à senóide. A elástica causada por um carregamento senoidal é também uma senóide. Toda viga com condições de apoio definida tem uma curva específica de carregamento que produz uma elástica semelhante. Essas curvas, que são semelhantes na forma a curvas causadas por outros tipos de cargas, são conhecidas como curvas normais. O uso das curvas normais permite fazer com que todos os giros de $n\theta$ das equações (II.9) variem de modo semelhante, independentemente do tipo de carregamento externo.

O carregamento em curva normal e os momentos e flechas por ele produzido são apresentados na Fig. II.7 para três tipos de viga; para efeito de comparação, reproduz-se ali também os casos de carga uniformemente distribuída e carga concentrada no meio do vão.

Gaafar⁷ demonstrou a semelhança na forma de várias elásticas no caso de vigas biapoiadas e sugeriu a adoção de variação senoidal como caso geral. Yitzhaky²⁸ e Yitzhaky e Reis²⁹ demonstraram também essa semelhança no caso de vigas biengastadas, engastada-apoiada e em balanço. A Tabela II.2 representa essa demonstração, comparando-se as ordenadas de várias elásticas, ordenadas essas medidas em intervalos de $h/10$. Observa-se que a discrepância nas ordenadas é muito pequena em todos os casos, e assim o erro introduzido na análise pela substituição da linha elástica por uma curva normal é desprezível.

Um estudo mais aprofundado, com as equações e comparação dos diversos diagramas da figura II.7 pode ser encontrado em Yitzhaky²⁸.

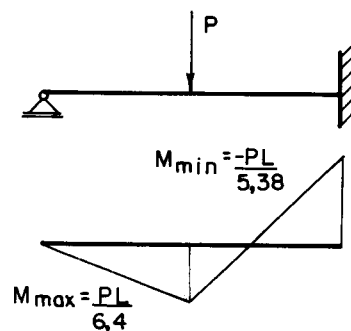
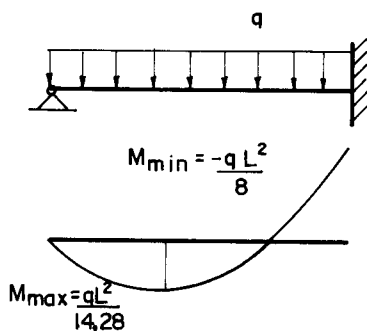
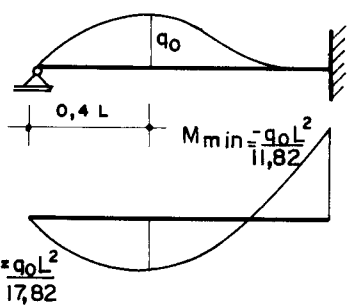


$$\delta_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot L^2}{9,87 EI}$$

$$\delta_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot L^2}{9,6 EI}$$

$$\delta_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot L^2}{12 EI}$$

a) Viga simplesmente apoiada



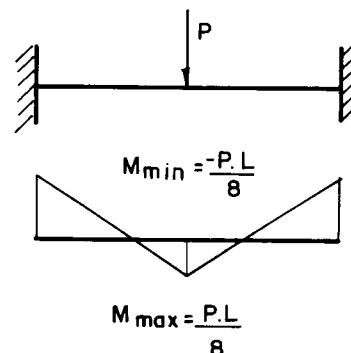
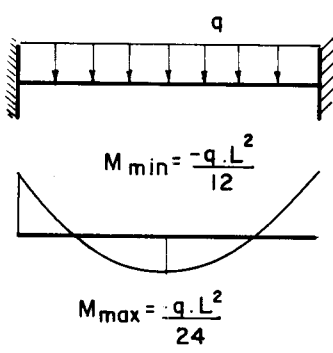
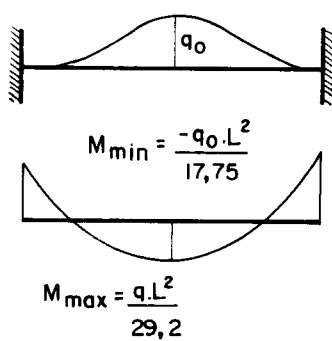
$$M_{\max} = \frac{q_0 L^2}{17,82}$$

$$\delta_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot L^2}{13,33 EI}$$

$$\delta_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot L^2}{12,99 EI}$$

$$\delta_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot L^2}{17,14 EI}$$

b) Viga apoiada engastada



$$\delta_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot L^2}{17,1 EI}$$

$$\delta_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot L^2}{16 EI}$$

$$\delta_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot L^2}{24 EI}$$

c) Viga biengastada

Figura II.7 — Flechas e momentos para vários tipos de carregamento; a 1ª coluna apresenta o caso de carregamento por curvas normais

TABELA II.1 - COEFICIENTES DE FLECHA E DE MOMENTOS

VIGA CARREGAMENTO	Biapoiada			Apoiada engastada			Biengastada		
	C_M	C_{-M}	C_f	C_M	C_{-M}	C_f	C_M	C_{-M}	C_f
Curva Normal	9,87	0	9,87	17,82	-11,82	13,33	29,2	-17,75	17,1
Uniforme	8	0	9,6	14,28	-8	12,99	24	-12	16
Concentrada no meio do vão	4	0	12	6,4	-5,38	17,14	8	-8	24

TABELA II.2 - COMPARAÇÃO DAS LINHAS ELÁSTICAS PRODUZIDAS POR DIFERENTES TIPOS DE CARGAS

Valores de δ/δ_{\max}			
$\frac{x}{L}$	Curva Normal	Uniforme	Concentrada $x = L/2$
a) Viga simplesmente apoiada			
0,00	0	0	0
0,10	0,309	0,314	0,296
0,20	0,588	0,593	0,568
0,30	0,809	0,812	0,792
0,40	0,957	0,952	0,945
0,50	1,000	1,000	1,000
0,60	0,957	0,992	0,945
0,70	0,809	0,812	0,792
0,80	0,588	0,593	0,568
0,90	0,309	0,314	0,296
1,00	0	0	0
b) Viga apoiada engastada			
0,00	0	0	0
0,10	0,370	0,376	0,335
0,20	0,687	0,692	0,636
0,30	0,906	0,908	0,870
0,40	1,000	1,000	1,000
0,50	0,970	0,964	0,992
0,60	0,803	0,812	0,835
0,70	0,536	0,583	0,583
0,80	0,301	0,320	0,312
0,90	0,084	0,089	0,085
1,00	0	0	0
c) Viga biengastada			
0,00	0	0	0
0,10	0,119	0,129	0,104
0,20	0,390	0,410	0,352
0,30	0,690	0,706	0,648
0,40	0,917	0,922	0,896
0,50	1,000	1,000	1,000
0,60	0,917	0,922	0,896
0,70	0,690	0,706	0,648
0,80	0,390	0,410	0,352
0,90	0,119	0,129	0,104
1,00	0	0	0

II.4 - ESTRUTURA EM CHAPA

II.4.1 - Cargas

Considere-se a estrutura em chapa com arestas i , j , k , etc., a qual suporta a componente tangencial do carregamento, g^t e as cargas R nas arestas, como na Fig. II.8.

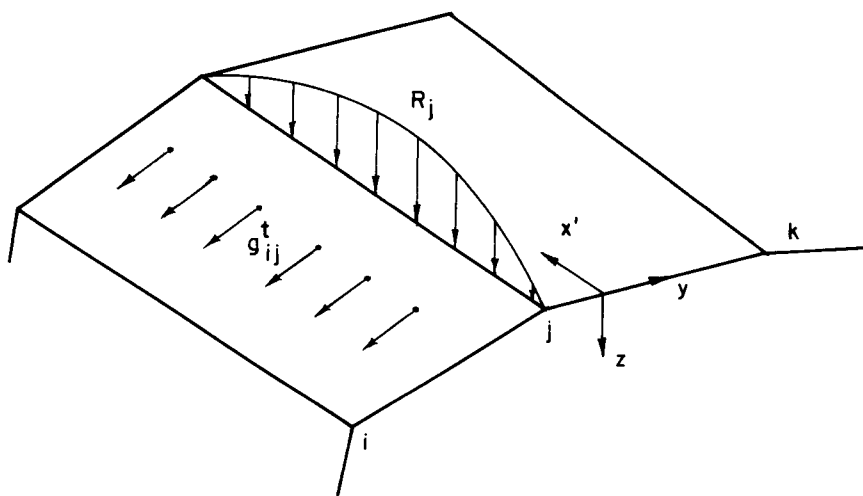


Figura II.8 — Carregamento tangencial e cargas nas arestas

A componente de carga tangencial g^t é considerada positiva quando no sentido negativo do eixo y .

As cargas R nas arestas podem ser subdivididas em duas partes. A primeira parte, R^g , é igual e oposta às reações de apoio da estrutura em placa (ver Fig. II.2). Assim, o carregamento R_j^g numa aresta j , tem componentes R_{ij}^g normal à placa ij e R_{jk}^g normal à placa jk , sendo:

$$\begin{aligned} R_{ji}^g &= -v_{ji} \\ R_{jk}^g &= -v_{jk} \end{aligned} \quad \dots \text{ (II.12)}$$

R^g é considerada positiva quando atua no sentido positivo do eixo z .

A segunda parte, R^d , consiste de carga externa distribuída aplicada diretamente nas arestas da estrutura, distintas da carga distribuída sobre sua superfície. O carregamento R^d é suposto como atuando diretamente na estrutura em chapa. Contudo, mesmo quando forem as únicas cargas atuando na estrutura, R^d não é suportado inteiramente pela estrutura em chapa, pois ocorrerão flechas nestas arestas, induzindo assim momentos transversais na estrutura em placa, e R^g não será então necessariamente nulo.

Qualquer carga R_j^d na aresta j será decomposta convenientemente em R_{ji} e R_{jk} , componentes normais às placas ij e jk , com as componentes de carga total sendo então:

$$\begin{aligned} R_{ji} &= R_{ji}^g + R_{ji}^d \\ R_{jk} &= R_{jk}^g + R_{jk}^d \end{aligned} \quad \dots \text{ (II.13)}$$

As chapas individuais podem resistir apenas a cargas em seus próprios planos, sendo necessário portanto decompor as cargas R em S_{ji} e S_{jk} na direção desses planos, como na Fig. II.9. As cargas S serão consideradas positivas quando resultarem "saindo" das arestas, como na figura, e serão dadas por:

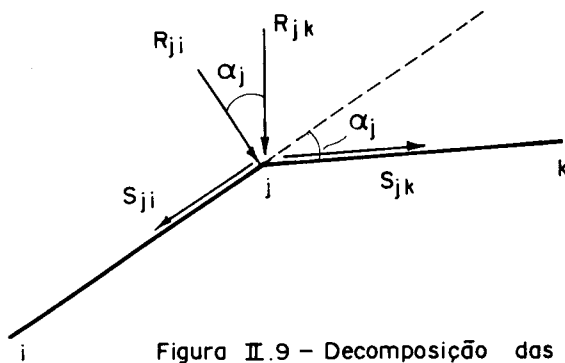


Figura II.9 - Decomposição das cargas nas arestas

$$S_{ji} = \frac{R_{ji} \cdot \cos \alpha_j + R_{jk}}{\operatorname{sen} \alpha_j} \quad \dots (II.14)$$

$$S_{jk} = \frac{R_{ji} + R_{jk} \cdot \cos \alpha_j}{\operatorname{sen} \alpha_j}$$

onde α_j = ângulo entre as chapas adjacentes à aresta (ver Fig. II.12).

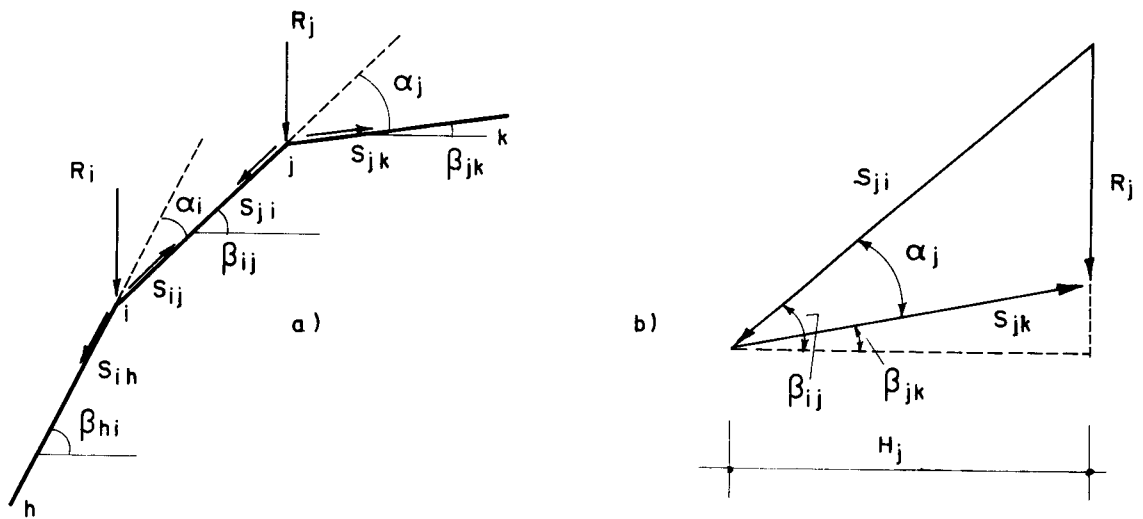


Figura II.10 — Decomposição das cargas nas arestas em cargas nos planos das chapas, no caso de cargas verticais.

Caso considerem-se os carregamentos g e R^d verticais, as reações R serão também verticais, e as equações (II.14) podem ser reescritas (ver Fig. II-10). Do triângulo de forças na aresta j , têm-se:

$$H_j = \frac{R_j}{\operatorname{tg} \beta_{ij} - \operatorname{tg} \beta_{jk}} \quad \dots (II.15)$$

Lembrando que $\operatorname{sen} \alpha_j = \operatorname{sen}(\beta_{ij} - \beta_{jk})$ e que $\operatorname{tg} \beta_{ij} + \operatorname{tg} \beta_{jk} = \operatorname{sen}(\beta_{ij} - \beta_{jk}) / (\cos \beta_{ij} \cdot \cos \beta_{jk})$, pode-se então escrever, com o auxílio da (II.15):

$$S_{ji} = \frac{H_j}{\cos\beta_{ij}} = \frac{R_j \cdot \cos\beta_{jk}}{\text{sen}\alpha_j} \quad \dots (II.16)$$

$$S_{jk} = \frac{H_j}{\cos\beta_{jk}} = \frac{R_j \cdot \cos\beta_{ij}}{\text{sen}\alpha_j}$$

Da mesma maneira, para a aresta i têm-se (Fig. II.10a):

$$S_{ih} = \frac{H_i}{\cos\beta_{hi}} = \frac{R_i \cdot \cos\beta_{ij}}{\text{sen}\alpha_i} \quad \dots (II.16')$$

$$S_{ij} = \frac{H_i}{\cos\beta_{ij}} = \frac{R_i \cdot \cos\beta_{hi}}{\text{sen}\alpha_i}$$

A chapa ij estará então submetida, no caso geral, a um carregamento total:

$$p = S_{ji} - S_{ij} + g_{ij}^t \quad \dots (II.17)$$

O carregamento p será considerado positivo quando no sentido negativo do eixo y (vale lembrar que o eixo y é considerado positivo quando no sentido crescente da numeração das arestas), ou seja, quando resultar "de cima para baixo" na chapa (ver Fig. II.11), analogamente ao caso de carregamento em vigas biapoiadas:

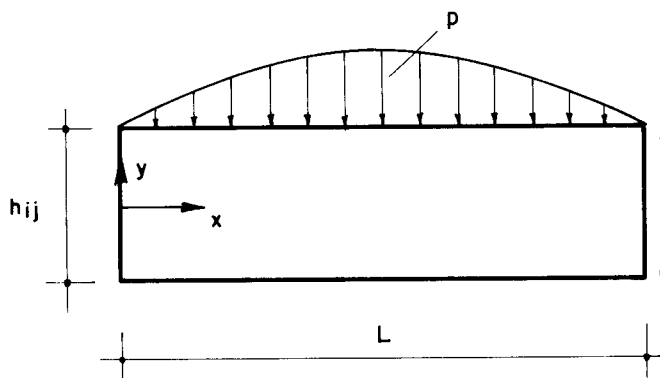


Figura II.11 — Carregamento de viga

No caso particular de carregamento vertical, a (II.17) pode ser reescrita:

$$p = S_{ji} - S_{ij} = \frac{1}{\cos \beta_{ij}} (H_j - H_i) \quad \dots (II.18)$$

O carregamento p , cuja variação é semelhante ao das cargas R , flexiona a chapa no seu próprio plano (comportamento de viga biapoiada)(ver item I.4.5).

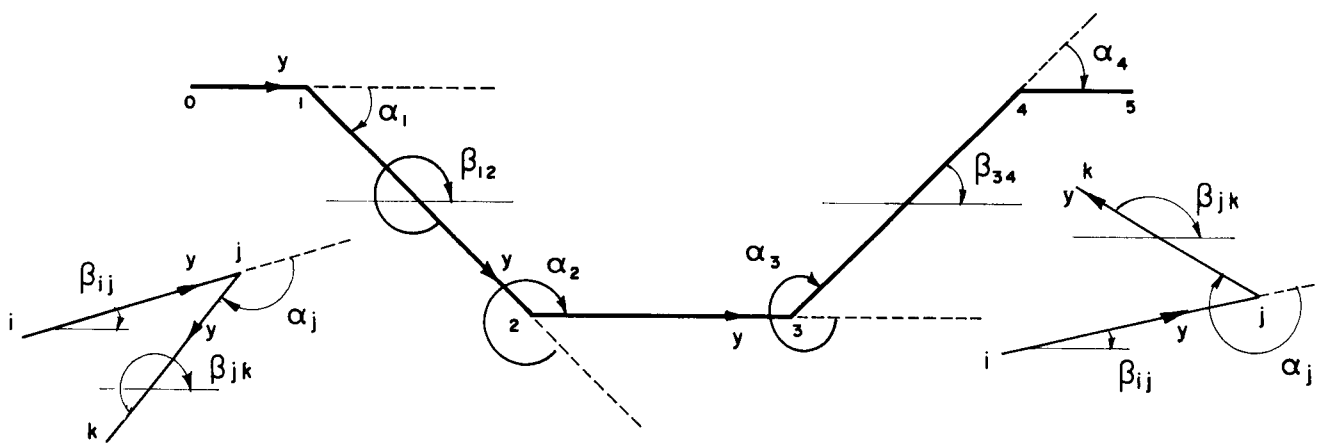


Figura II.12— Angulos entre chapas adjacentes e inclinação das chapas

As seguintes regras devem ser observadas ao definir os ângulos: a inclinação β deve ser medida a partir de cada chapa, tomando por base a aresta de número maior (sentido positivo do eixo y) e girando no sentido horário até encontrar o eixo de referência horizontal (suposto à direita da seção transversal da chapa considerada), e o ângulo α entre chapas adjacentes deve ser medido no sentido horário, partindo-se da projeção da direção da chapa anterior até encontrar o eixo da chapa seguinte, como indicam os casos representados na Fig. II.12.

II.4.2 - Forças cortantes de bordo. Tensões normais nas chapas

Considere-se duas chapas adjacentes ij e jk da estrutura em casca prismática (Fig. II.13). Nelas atuam forças cortantes V e momentos fletores M provocados pelo carregamento p de chapa (analogamente ao que ocorre no caso de vigas), além de forças de bordo T , resultante das tensões cisalhantes que se desenvolvem ao longo da aresta de união de duas chapas adjacentes, em decorrência da continuidade da estrutura (ver item I.4.3), e cuja função, como já visto, é igualar as tensões normais nos bordos das chapas adjacentes.

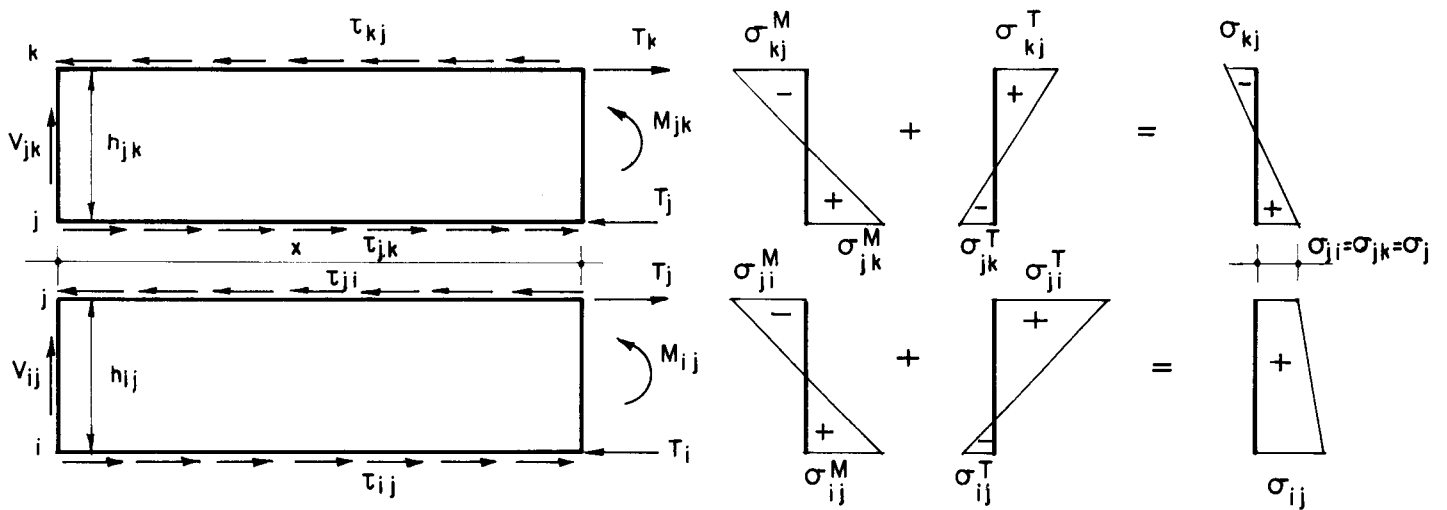


Figura II.13 - Tensões normais nas chapas.

A variação de V e M, como no caso de vigas, depende do tipo de carregamento e das condições de apoio das chapas. A variação das tensões normais σ e das tensões cisalhantes τ sobre a seção transversal da chapa, também como no caso de vigas, será respectivamente linear e parabólica. As forças cortantes longitudinais podem ser obtidas em função das correspondentes tensões cisalhantes de bordo, fazendo-se:

$$\begin{aligned} T_i &= \int_0^x \tau_{ij} \cdot b_{ij} \cdot dx \\ T_j &= \int_0^x \tau_{ji} \cdot b_{ij} \cdot dx = \int_0^x \tau_{jk} \cdot b_{jk} \cdot dx \\ T_k &= \int_0^x \tau_{kj} \cdot b_{jk} \cdot dx \end{aligned} \quad \dots (II.19)$$

onde b = espessura da chapa considerada.

Como se verá adiante (ver eq. (II.24), bem como a (II.19)), as forças T têm a mesma variação longitudinal dos momentos fletores M , provocados pelas cargas p . As tensões normais em qualquer seção transversal da chapa, são determinadas em função de M e T . Portanto, a variação longitudinal de σ é semelhante à variação de M , e calculando-se σ em qualquer seção, as tensões em toda a estrutura estarão definidas.

Os momentos fletores M provocam tensões normais σ^M (que aqui serão chamadas tensões de bordo livre), as quais podem ser calculadas por:

$$\sigma^M = \pm \frac{M}{Z} = \pm \frac{C_s \cdot p \cdot 6}{b \cdot h^2} \quad \dots (II.20)$$

onde Z = módulo de resistência da seção e as tensões de tração são tomadas como positivas. O valor C_s é uma cons

tante que depende do vão e do carregamento da chapa. No caso de carga uniformemente distribuída, $C_s = L^2/8$; para uma distribuição de carga senoidal, $C_s = L^2/\pi^2 = L^2/9,87$; para carga concentrada no meio do vão, $C_s = L/4$.

Em geral, como visto, as tensões de bordo livre σ_{ji}^M e σ_{jk}^M numa aresta j serão diferentes, mas a continuidade exige que elas sejam iguais, pois as deformações longitudinais deverão ser iguais (as tensões sō seriam diferentes se houvesse variação de E entre as chapas adjacentes). Assim, na aresta j devem se desenvolver também as tensões adicionais σ_{ji}^T e σ_{jk}^T de maneira a igualar as tensões (Fig. II.13):

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ji}^M + \sigma_{ji}^T = \sigma_{jk}^M + \sigma_{jk}^T = \sigma_{jk} = \sigma_j \quad \dots (II.21)$$

Reescrevendo a equação (II.21)

$$\Delta\sigma_j = \sigma_{ji}^M - \sigma_{jk}^M = \sigma_{jk}^T - \sigma_{ji}^T \quad \dots (II.21')$$

nota-se, como já fora dito, que a diferença de tensões normais $\Delta\sigma_j$ na aresta j é eliminada pelas forças cortantes de bordo T .

Considere-se sobre as chapas adjacentes apenas o efeito de T_j , inicialmente. Em qualquer ponto x do vão, T_j atua como uma carga excêntrica sobre a seção (Fig. II.14). As tensões normais na chapa ij devido a T_j serão:

$$\sigma_{ji}^{T_j} = \frac{T_j}{b_{ij} \cdot h_{ij}} + \frac{T_j \cdot h_{ij} \cdot 6}{2 \cdot b_{ij} \cdot h_{ij}^2} = + \frac{4 T_j}{A_{ij}} \quad \dots (II.22)$$

$$\sigma_{ij}^{T_j} = \frac{T_j}{A_{ij}} - \frac{3 T_j}{A_{ij}} = - \frac{2 T_j}{A_{ij}}$$

onde $A_{ij} = b_{ij} \cdot h_{ij} = \text{área da seção transversal da chapa } ij$. A segunda parcela nas expressões acima representa o e

feito de momento fletor que aparece devido à excentricidade da força T_j (Fig. II.14). Considerando-se agora a atuação conjunta das forças T_i , T_j e T_k sobre a aresta j , obtêm-se:

$$\sigma_{ji}^T = + \frac{4T_j}{A_{ij}} + \frac{2T_i}{A_{ij}} \quad \dots (II.23)$$

$$\sigma_{jk}^T = - \frac{4T_j}{A_{jk}} - \frac{2T_k}{A_{jk}}$$

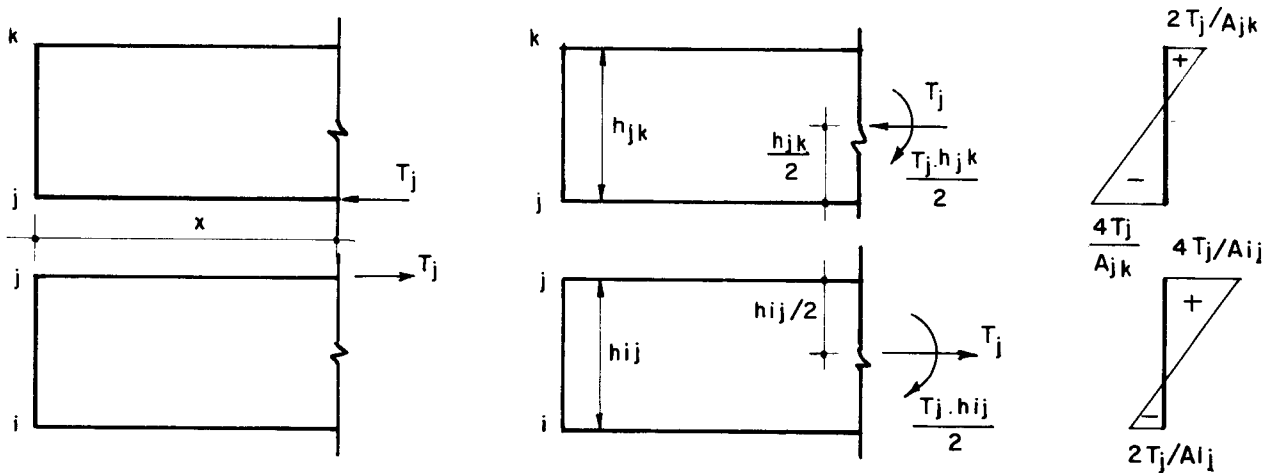


Fig. II.14 — Efeito de uma força longitudinal sobre as chapas adjacentes

Substituindo agora as expressões 20 e 23 em 21', a diferença de tensões normais será (ver Fig. II.13):

$$\Delta\sigma_j = - \frac{M_{ij}}{Z_{ij}} - \frac{M_{jk}}{Z_{jk}} = - \frac{4T_j}{A_{jk}} - \frac{2T_k}{A_{jk}} - \frac{4T_j}{A_{ij}} - \frac{2T_i}{A_{ij}}$$

e, melhorando essa relação, obtêm-se a expressão geral da equação das três cortantes (analogia com a equação dos três momentos da estática):

$$\frac{T_i}{A_{ij}} + 2T_j \left(\frac{1}{A_{ij}} + \frac{1}{A_{jk}} \right) + \frac{T_k}{A_{jk}} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_{ij}}{Z_{ij}} + \frac{M_{jk}}{Z_{jk}} \right)$$

.... (II.24)

Com o auxílio das equações (II.20) e (II.23), e tendo em vista a Fig. II.13, pode-se escrever as expressões gerais de tensões normais nos bordos da chapa ij:

$$\sigma_{ij} = + \frac{M_{ij}}{Z_{ij}} - \frac{2T_j + 4T_i}{A_{ij}}$$

.... (II.25)

$$\sigma_{ji} = - \frac{M_{ij}}{Z_{ij}} + \frac{4T_j + 2T_i}{A_{ij}}$$

As equações (II.25) podem ser reescritas em função das forças T:

$$T_i = - \frac{A_{ij}}{6} (2\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) + \frac{M_{ij}}{h_{ij}}$$

.... (II.26)

$$T_j = \frac{A_{ij}}{6} (\sigma_{ij} + 2\sigma_{ji}) + \frac{M_{ij}}{h_{ij}}$$

Escrevendo a expressão de T_j para a chapa jk e igualando-se a expressão de T_j das equações acima, tendo em vista a continuidade da estrutura nas arestas ($\sigma_{ji} = \sigma_{jk} = \sigma_j$), pode-se escrever a equação das três tensões:

$$\sigma_i \cdot A_{ij} + 2\sigma_j (A_{ij} + A_{jk}) + \sigma_k \cdot A_{jk} = \frac{6M_{jk}}{h_{jk}} - \frac{6M_{ij}}{h_{ij}}$$

.... (II.27)

Tanto a equação (II.24) como a (II.27) podem ser usadas para resolver a estrutura em chapa. Como ocorre com a equação dos três momentos (ver item II.3.3.1), haverá tantas equações quantos forem as incógnitas (tensões normais ou forças cortantes nos bordos), mas o número real de

equações dependerã das condições de contorno dos bordos das chapas. Mas, para resolver a estrutura em chapa, não é necessário resolver as equações citadas acima, podendo-se corrigir as diferenças de tensões de bordo livre nas arestas através de um processo de distribuição de tensões, semelhante ao processo de distribuição de momentos (Cross) aplicado em vigas contínuas, como será visto no item seguinte.

II.4.3 - Distribuição das tensões normais

Pode-se aplicar um processo de distribuição de tensões para igualar as tensões de bordo livre nas arestas das chapas adjacentes, semelhante ao processo de Cross para distribuição de momentos. De fato, examinando-se as equações (II.22) (Fig. II.14), observa-se que:

- 1) o efeito de uma força T_j nas tensões normais nos bordos adjacentes à aresta j é proporcional a $4/A$, analogamente ao coeficiente de rigidez do processo de Cross;
- 2) o efeito da força T_j nas tensões normais nas arestas vizinhas i e k é proporcional a $(-2/A)$, ou seja, metade do valor da tensão na aresta j , com sinal trocado, evidenciando assim um coeficiente de propagação igual a $-1/2$, análogo ao coeficiente $1/2$ do processo de Cross;
- 3) as tensões de bordo livre são análogas aos momentos de engastamento perfeito do processo de Cross.

Encontrar-se-ão agora as expressões que fornecerão os coeficientes de distribuição de tensões. Como visto, as forças T devem produzir tensões normais que, somadas com aquelas produzidas pelo carregamento (tensões de bordo livre), igualem as tensões nos bordos das chapas adjacentes (ver eq. (II.21)). Ou seja, as forças T são corretivas, isto é, devem corrigir o desequilíbrio existente entre as tensões de bordo livre...

Considere-se inicialmente apenas o efeito da força T_j sobre a aresta j (Fig. II.14), a qual imediatamente iguala as tensões normais de bordo livre na aresta j , pois produz tensões adicionais $(4T_j/A_{ij})$ na aresta j da chapa ij e $(-4T_j/A_{jk})$ na chapa jk ; com o auxílio da equação (II.21), pode-se escrever:

$$\sigma_j = \sigma_{ji}^M + \frac{4T_j}{A_{ij}} = \sigma_{jk}^M - \frac{4T_j}{A_{jk}} \quad \dots (II.28)$$

O valor de T_j pode ser determinado em função da equação (II.28) por:

$$T_j = (\sigma_{jk}^M - \sigma_{ji}^M) \cdot \frac{A_{ij} \cdot A_{jk}}{4(A_{ij} + A_{jk})} \quad \dots (II.29)$$

Substituindo-se a equação (II.29) em (II.28), pode-se obter a expressão final (numa primeira compensação) da tensão σ_j , sem usar o valor de T_j :

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \sigma_{ji}^M + (\sigma_{jk}^M - \sigma_{ji}^M) \cdot \frac{A_{jk}}{A_{ij} + A_{jk}} = \sigma_{jk}^M - (\sigma_{jk}^M - \sigma_{ji}^M) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{A_{ij}}{A_{ij} + A_{jk}} \quad \dots (II.30) \end{aligned}$$

Ou, lembrando que $\sigma_{jk}^M - \sigma_{ji}^M = \Delta\sigma_j$

$$\sigma_j = \sigma_{ji}^M + \Delta\sigma_j \cdot r_{ji} = \sigma_{jk}^M - \Delta\sigma_j \cdot r_{jk} \dots (II.30')$$

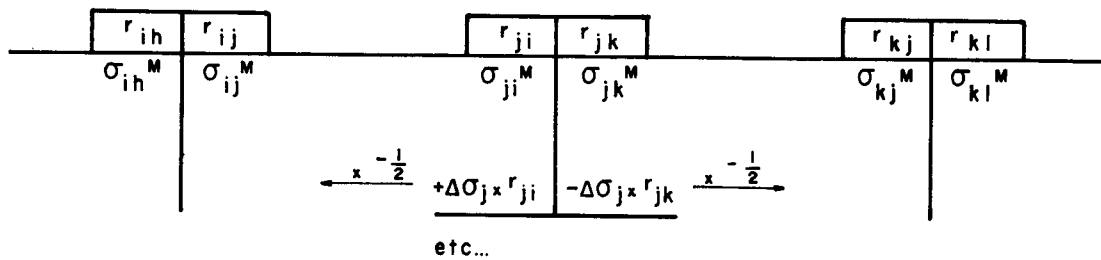
onde :

$$\begin{aligned} r_{ji} &= \frac{A_{jk}}{A_{ij} + A_{jk}} \\ r_{jk} &= \frac{A_{ij}}{A_{ij} + A_{jk}} \quad \dots (II.31) \end{aligned}$$

são os coeficientes de distribuição de tensões procurados.

Equilibrada a aresta j , propaga-se as correções de tensões encontradas para as arestas vizinhas i e k , a través do valor $(-1/2)$. Compensa-se então outra aresta, etc. Passo a passo, como no processo de Cross, as tensões são distribuídas, até que se atinja boa precisão. Valem aqui também os mesmos princípios que norteiam o processo de Cross, como por exemplo: começa-se a compensação pela aresta mais desequilibrada e caminha-se para a que tem menor desequilíbrio, visando acelerar a convergência, etc.

- Esquema do processo:



II.4.4 - Variação das tensões cisalhantes. Tensões principais

Após completar a análise da estrutura, os resultados significativos a serem obtidos serão: os momentos fletores transversais (placa contínua), os quais servirão para determinar a armadura transversal de placa, e as tensões longitudinais principais, as quais servirão para determinar a armadura longitudinal de chapa. As tensões principais são obtidas combinando-se as tensões longitudinais normais σ com as tensões cisalhantes τ (ver fórmula II.45).

Para obter as tensões cisalhantes em qualquer ponto da estrutura, é necessário primeiro derivar expressões gerais para as forças cortantes longitudinais de bor

do, as quais podem ser calculadas por equilíbrio de forças horizontais ($\Sigma X = 0$):

$$T = \int \sigma \cdot dA \quad \dots (II.32)$$

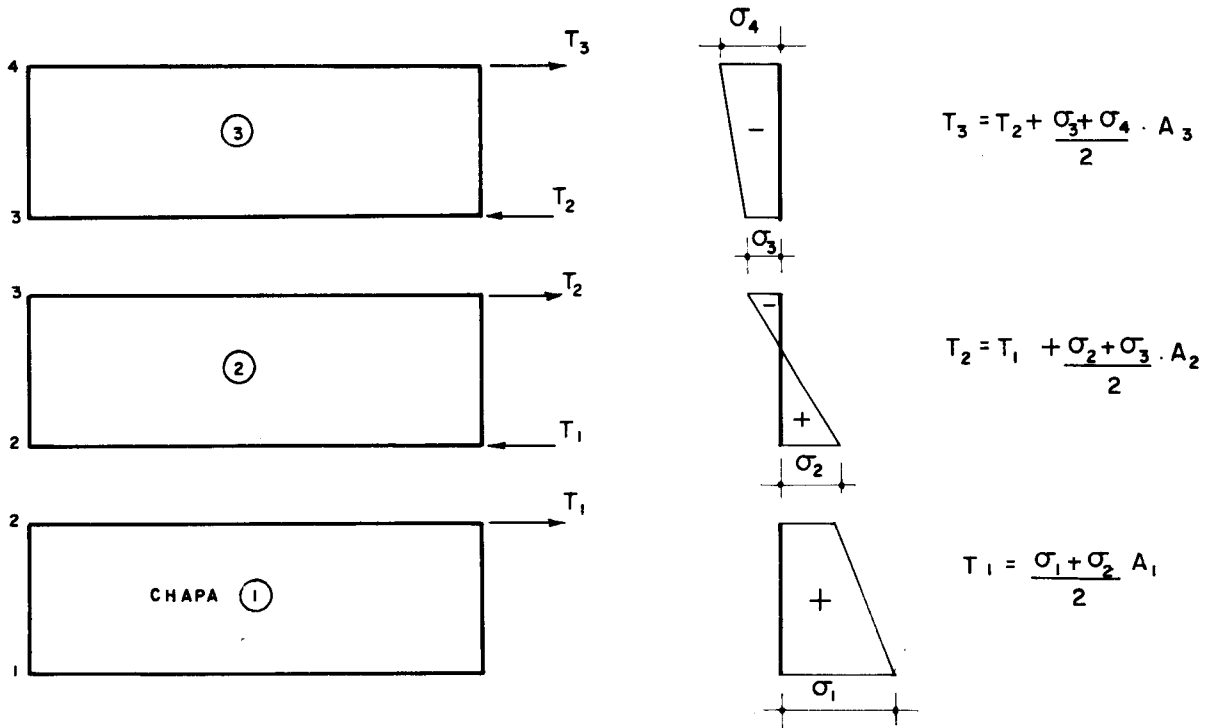


Fig. II.15 — Equilíbrio de forças horizontais

Os valores de T podem ser obtidos sucessivamente por semi-integração gráfica (Fig. II.15). O equilíbrio estático para uma aresta qualquer j fornece:

$$T_j = T_i + \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \cdot A_{ij} \quad \dots (II.33)$$

A força cortante longitudinal T_y em qualquer ponto entre arestas é dada por (Fig. II.16):

$$T_y = T_i + \frac{1}{2} \cdot b_{ij} \cdot y (\sigma_i + \sigma_y) \quad \dots (II.34)$$

ou, substituindo σ_y em função das tensões nos bordos σ_i e σ_j :

$$T_y = T_i + \frac{1}{2} \cdot b_{ij} \cdot y \cdot (\sigma_i + \sigma_i \cdot \frac{h_{ij} - y}{h_{ij}}) + \frac{1}{2} \cdot b_{ij} \cdot y \cdot \sigma_j \cdot \frac{y}{h_{ij}} \quad \dots (II.34')$$

expressão que, para $y = h_{ij}$, fornece a equação (II.33), e para $y = h/2$, resulta:

$$T_y = \frac{T_i + T_j}{2} + \frac{A_{ij}}{8}(\sigma_i - \sigma_j) \quad \dots (II.35)$$

T_{\max} aparecerá onde σ muda de sinal, o que pode se perceber da (II.32):

$$\sigma = \frac{dT}{dS} = 0$$

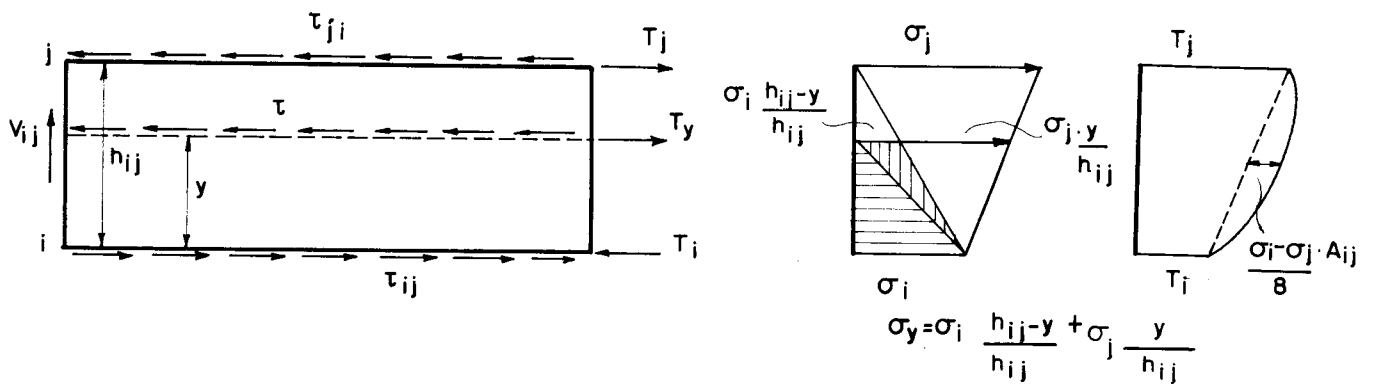


Fig. II.16 — Força longitudinal qualquer T_y numa seção da chapa ij

Em qualquer ponto x do vão, T_y representa a soma de todas as tensões cisalhantes τ , para aquele ponto e a aquela fibra de altura y . Com o auxílio das (II.19), pode-se escrever:

$$T_y = \int_0^x \tau \cdot b \cdot dx \quad \dots (II.36)$$

ou, de uma maneira geral, para qualquer fibra na seção x :

$$\tau = \frac{1}{b} \cdot \frac{dT_y}{dx} \quad \dots (II.37)$$

Para resolver a equação (II.37), é necessário conhecer a variação longitudinal de T_y . Da equação (II.24) conclui-se que as forças T têm a mesma variação dos momentos longitudinais devidos ao carregamento p .

Assim, para carga uniformemente distribuída sobre a chapa, têm-se:

$$M = M_{\text{m}\bar{a}x} \left(\frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \right) \quad \dots \text{ (II.38)}$$

e, portanto:

$$T_y = T_{\text{m}\bar{a}x} \left(\frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \right) \quad \dots \text{ (II.39)}$$

expressão esta que, quando diferenciada e substituída na (II.37) fornece:

$$\tau = \frac{4T_{\text{m}\bar{a}x}}{b \cdot L} \cdot \left(1 - \frac{2x}{L} \right) \quad \dots \text{ (II.40)}$$

Notar que a expressão entre parenteses é a mesma que descreve a variação da força cortante no sentido longitudinal, pois é 1ª derivada da expressão entre parenteses na equação (II.38) (basta lembrar da relação diferencial $dM/dx = V$). Assim, a equação (II.40) é linear e $T_{\text{m}\bar{a}x}$ representa a força cortante longitudinal no meio do vão, obtida da equação (II.34').

No caso de carregamento senoidal, têm-se:

$$M = M_{\text{m}\bar{a}x} \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad \dots \text{ (II.41)}$$

e, portanto:

$$T_y = T_{\text{m}\bar{a}x} \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad \dots \text{ (II.42)}$$

Derivando e substituindo na (II.37):

$$\tau = \frac{\pi \cdot T_{\text{m\`a}x}}{b \cdot L} \cdot \cos \frac{\pi x}{L} \quad \dots \text{ (II.43)}$$

A tens\~ao cisalhante m\~axima ocorre nas regi\~oes de m\~axima for\~ca cortante e, no caso de chapas biapoiadas, tem-se:

- Para carga uniformemente distribu\~da: com $x = 0$ e $x = L$, obt\~m-se; a menos do sinal:

$$\tau_{\text{m\`a}x} = \frac{4T_{\text{m\`a}x}}{b \cdot L} \quad \dots \text{ (II.40')}$$

- para carga senoidal: analogamente ao anterior:

$$\tau_{\text{m\`a}x} = \frac{\pi \cdot T_{\text{m\`a}x}}{b \cdot L} \quad \dots \text{ (II.43')}$$

A maioria dos m\~etodos cl\~assicos de an\~alise trata separadamente o efeito da carga externa (normalmente uniformemente distribu\~da) e o efeito dos deslocamentos das arestas (que se adota resultar em carregamento senoidal), somando os resultados no final. Assim, a tens\~ao cisalhante τ em qualquer ponto \~e dada pela soma das equa\~oes (II.40) e (II.43):

$$\tau = \frac{4T_{\text{m\`a}x}^1}{b \cdot L} \left(1 - \frac{2x}{L}\right) + \frac{\pi \cdot T_{\text{m\`a}x}^2}{b \cdot L} \cdot \cos \frac{\pi x}{L} \quad \dots \text{ (II.44)}$$

onde $T_{\text{m\`a}x}^1$ e $T_{\text{m\`a}x}^2$ s\~ao as for\~cas cortantes longitudinais de vido \~a carga externa e aos deslocamentos das arestas, respectivamente.

Normalmente a for\~ca cortante longitudinal devida aos deslocamentos nas arestas produz pequena tens\~ao cisalhante, quando comparada com aquela produzida pelo carregamento e, em tais casos, recomenda-se²⁸ calcular τ unicamen

te com a equação (II.40), isto é, assume-se variação parabólica para ambas as forças $T_{m\bar{x}}^1$ e $T_{m\bar{x}}^2$ (na equação (II.40) teríamos então $T_{m\bar{x}} = T_{m\bar{x}}^1 + T_{m\bar{x}}^2$).

Deve-se salientar porém que, quando os deslocamentos das arestas produzem grandes tensões cisalhantes, essa aproximação pode conduzir a erros graves.

As tensões principais são calculadas através da fórmula usual:

$$\sigma_{II}^I = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \dots \text{ (II.45)}$$

onde σ_I = tensão principal de tração, σ_{II} = tensão principal de compressão e σ_x = tensão longitudinal no ponto considerado.

II.4.5 - Deslocamentos das arestas e rotação das chapas

Os deslocamentos das arestas são determinados pelas flechas a nos planos das chapas adjacentes a elas. Portanto, inicialmente é necessário calcular as flechas a, as quais, de maneira geral, podem ser obtidas para uma chapa ij por:

$$a_{ij} = \frac{M_{ij} \cdot L^2}{C_f \cdot E \cdot I_{ij}} \quad \dots \text{ (II.46)}$$

onde I_{ij} = momento de inércia da chapa ij, C_f é uma constante que depende da distribuição da carga (ver Fig. II.7, Tabela II.1, no item II.3.4) e M_{ij} é o momento no meio do vão, englobando a soma dos momentos devido ao carregamento com aqueles provocados pelas forças cortantes longitudinais T de bordo. Procurando aproveitar resultados conhecidos, é conveniente expressar M_{ij} na fórmula acima, em função da diferença de tensões normais nos bordos ($\sigma_{ij} - \sigma_{ji}$),

as quais englobam os efeitos de M e T. Para isso (Fig. II.17):

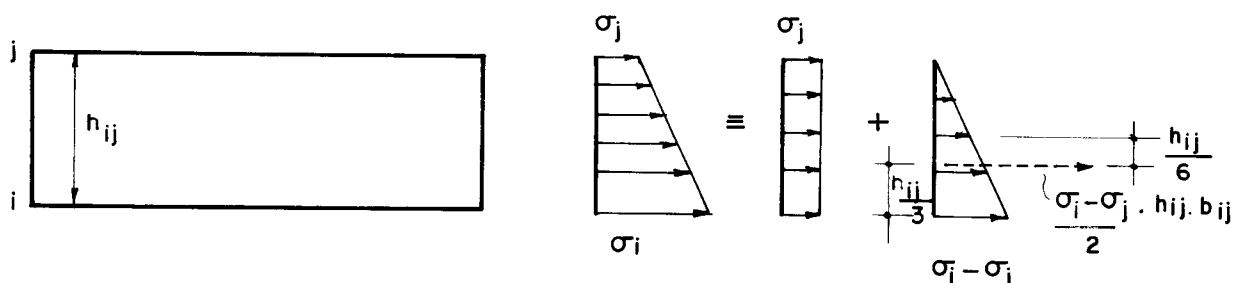


Fig. II.17 — Momento interno resistente

$$M_{ij} = \frac{\sigma_i - \sigma_j}{2} \cdot h_{ij} \cdot b_{ij} \cdot \frac{h_{ij}}{6} = \frac{\sigma_i - \sigma_j}{2} \cdot Z_{ij} \quad \dots (II.47)$$

a qual, substituída na anterior, fornece:

$$a_{ij} = \frac{(\sigma_i - \sigma_j) \cdot Z_{ij} \cdot L^2}{2 C_f \cdot E \cdot I_{ij}} \quad \dots (II.48)$$

a qual, no caso particular de seção retangular, pode ser escrita:

$$a_{ij} = \frac{(\sigma_i - \sigma_j) \cdot L^2}{C_f \cdot E \cdot h_{ij}} \quad \dots (II.48')$$

a é positiva quando no sentido positivo do carregamento de chapa (no sentido negativo de y, portanto). A diferença de tensões de bordo $(\sigma_i - \sigma_j)$ é medida na distância x, onde os momentos de chapa são máximos. Alguns métodos de análise porém, tratam inicialmente a estrutura como articulada nas arestas, impondo o efeito da continuidade como carga adicional nas estruturas (método de Whitney^{3,27}, por exemplo).

Isso significa que, numa análise inicial, como não se conhece o valor final dos momentos, não se pode englobar o efeito conjunto de ambos, M e T, sobre as flechas, como feito nas fórmulas anteriores. É necessário encontrar a expressão que mostre o efeito das forças longitudinais de bordo T sobre as flechas. Para isto (Fig. II.18):

$$M_{ij}^T = \frac{T_i + T_j}{2} \cdot h_{ij} \quad \dots (II.49)$$

onde M_{ij}^T = momento fletor causado pelas forças T.

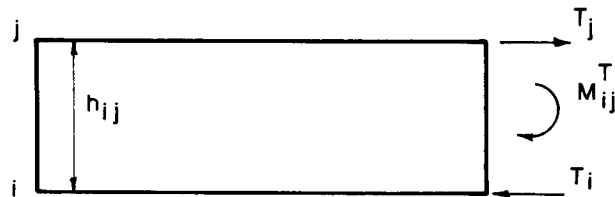


Fig. II.18— Efeito das forças longitudinais de bordo sobre as flechas

A parcela de flecha a' causada por esse momento adicional pode então ser escrito pela substituição da (II.49) em (II.46):

$$a'_{ij} = \frac{(T_i + T_j) \cdot h_{ij} \cdot L^2}{2 C_f \cdot E \cdot I_{ij}} \quad \dots (II.50)$$

devendo ser somada com a parcela provocada pelo momento fletor do carregamento de chapa p, obtendo-se então a flecha total.

As flechas a_{ij} e a_{jk} nas chapas adjacentes, devido à continuidade, provocam deslocamentos ω_{ij} , ω_{ji} e ω_{jk} na aresta j (Fig. II.19), os quais são diferentes entre si (basta verificar que as flechas variam de chapa para chapa), provocando então giros de corda θ' nas chapas.

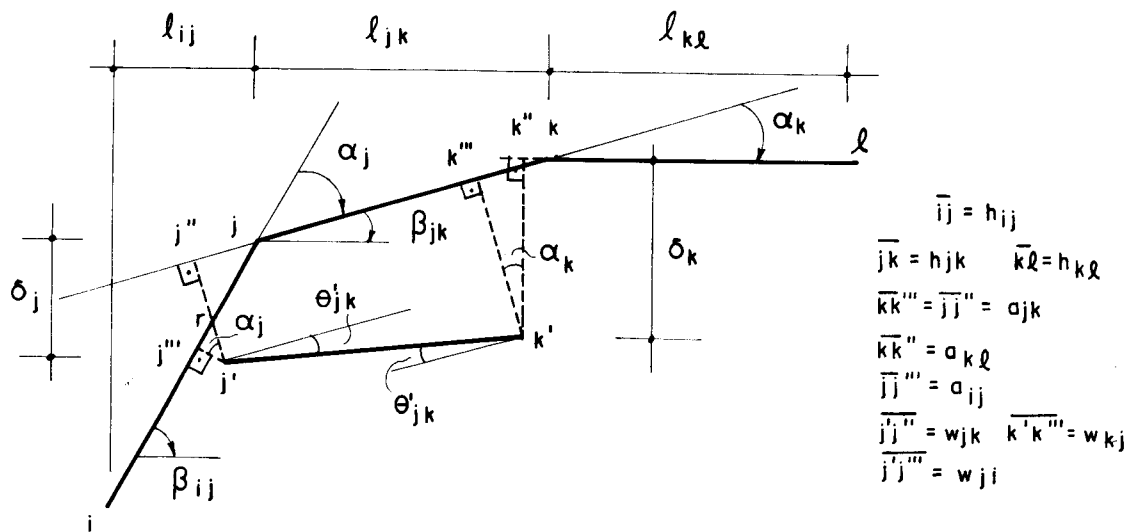


Fig. II.19 — Rotações das chapas e deslocamentos das arestas

Da Fig. II.19, tem-se:

$$\bar{j}j'''' = \bar{j}r + rj''' = \frac{\bar{j}j''}{\cos\alpha_j} + \bar{j}'j''' \cdot \operatorname{tg}\alpha_j$$

ou

$$a_{ij} = \frac{a_{jk}}{\cos\alpha_j} + w_{ji} \cdot \operatorname{tg}\alpha_j$$

de onde:

$$w_{ji} = a_{ij} \cdot \operatorname{cotg}\alpha_j - \frac{a_{jk}}{\operatorname{sen}\alpha_j} = \frac{a_{ij} \cdot \cos\alpha_j - a_{jk}}{\operatorname{sen}\alpha_j} \quad \dots (II.51)$$

$$\begin{aligned} \bar{j}'j'' &= \bar{j}'r + rj'' = \frac{\bar{r}j''''}{\operatorname{sen}\alpha_j} + \bar{j}j'' \cdot \operatorname{tg}\alpha_j = \\ &= (a_{ij} - \frac{\bar{j}j''}{\cos\alpha_j}) \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha_j} + \bar{j}j'' \operatorname{tg}\alpha_j \end{aligned}$$

$$w_{jk} = (a_{ij} - \frac{a_{jk}}{\cos\alpha_j}) \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha_j} + a_{jk} \cdot \operatorname{tg}\alpha_j$$

ou

$$\omega_{jk} = \frac{a_{ij}}{\text{sen}\alpha_j} - a_{jk} \cdot \text{cotg}\alpha_j = \frac{a_{ij} - a_{jk} \cdot \text{cos}\alpha_j}{\text{sen}\alpha_j} \dots (II.52)$$

Da figura, tem-se:

$$\delta_j = \overline{j'r} \cdot \text{sen}\beta_{ij} + \overline{j''r} \cdot \text{sen}(90 - \beta_{jk})$$

ou seja:

$$\delta_j = \frac{\overline{jj''}}{\text{cos}\alpha_j} \cdot \text{sen}\beta_{ij} + \frac{\overline{rj''}}{\text{sen}\alpha_j} \cdot \text{cos}\beta_{jk}$$

a qual, resolvida, fornece:

$$\delta_j = \frac{a_{ij} \cdot \text{cos}\beta_{jk} - a_{jk} \cdot \text{cos}\beta_{ij}}{\text{sen}\alpha_j} \dots (II.53)$$

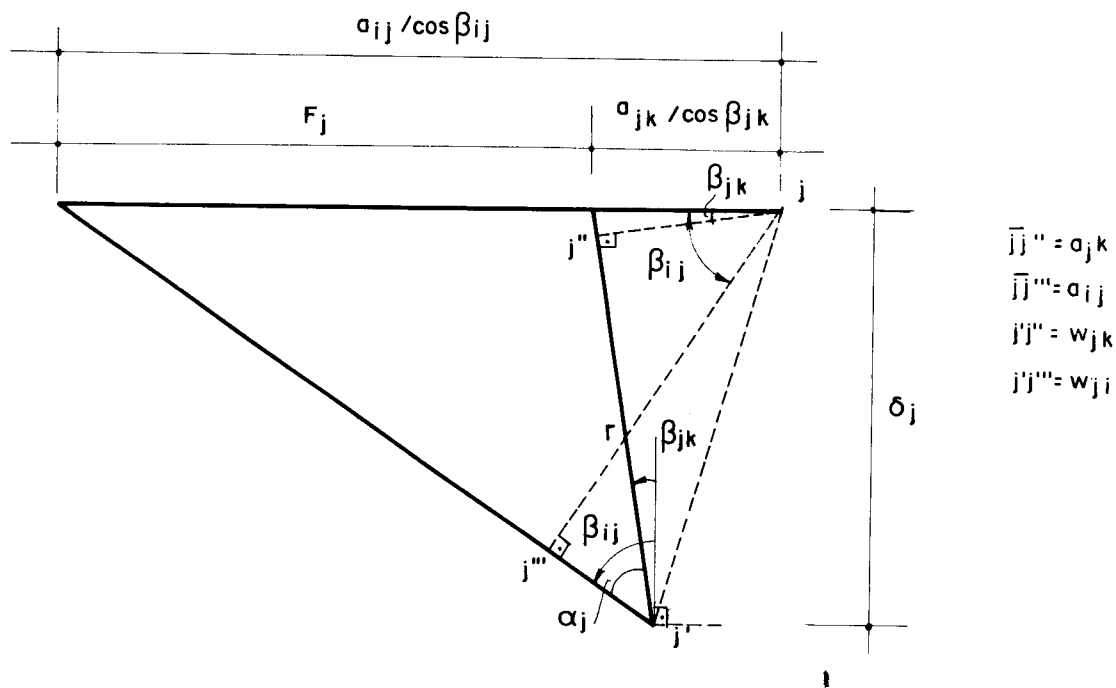


Fig. II. 20 — Deslocamento da aresta j

O deslocamento de uma aresta j (ampliado na figura II.20 para maior clareza), pode ser visto como formado pelas flechas da chapa ij (a_{ij} no plano da chapa e ω_{ji} perpendicular a ele). A intersecção das normais define o deslocamento $\overline{jj'}$ do ponto j , cuja componente vertical é δ_j .

As linhas $\overline{j'j''}$ definem sobre a horizontal a partir de j o segmento F_j , o qual pode ser calculado (Fig. II.20):

$$F_j = \frac{a_{ij}}{\cos\beta_{ij}} - \frac{a_{jk}}{\cos\beta_{jk}} \quad \dots \text{ (II.54)}$$

Colocando-se as flechas a em função das diferenças de tensões nos bordos, com o auxílio da equação (II.48') pode-se escrever:

$$F_j = \frac{L^2}{C_f \cdot E} \left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{l_{ij}} - \frac{\sigma_j - \sigma_k}{l_{jk}} \right) \quad \dots \text{ (II.54')}$$

Yitzhaky e Reiss²⁹ utilizaram o segmento F_j para calcular o deslocamento vertical da aresta j (δ_j): pode-se então, reescrever a equação (II.53):

$$\delta_j = \frac{F_j}{\operatorname{tg}\beta_{ij} - \operatorname{tg}\beta_{jk}} \quad \dots \text{ (II.53')}$$

Os deslocamentos δ_j , ω_{ji} e ω_{jk} da aresta j , na estrutura em chapa precisam ser iguais aos seus correspondentes na estrutura em placa contínua.

As equações acima permitem calcular as rotações das chapas ij e jk . Para essa última, por exemplo, tem-se:

$$\theta'_{jk} = \frac{\omega_{kj} - \omega_{jk}}{h_{jk}} = \frac{\delta_j - \delta_k}{l_{jk}} \quad \dots \text{ (II.55)}$$

Calculando os valores com o auxílio das equações (II.51) e (II.52), pode-se escrever:

$$\theta'_{jk} = \frac{1}{h_{jk}} \left[a_{jk} \cdot (\cotg\alpha_k + \cotg\alpha_j) - \frac{a_{k\ell}}{\text{sen}\alpha_k} - \frac{a_{ij}}{\text{sen}\alpha_j} \right]$$

.... (II.56)

Analogamente, para a chapa ij, tem-se:

$$\theta'_{ij} = \frac{1}{h_{ij}} \left[a_{ij} \cdot (\cotg\alpha_j + \cotg\alpha_i) - \frac{a_{jk}}{\text{sen}\alpha_j} - \frac{a_{hi}}{\text{sen}\alpha_i} \right]$$

.... (II.56')

O giro de corda total na aresta j (θ'_j) pode ser calculado com o auxílio da (II.10). (ver Fig. II.5.a). A redução do ângulo interno na aresta, como consequência dos giros das chapas adjacentes, pode ser escrita ($\theta'_{jk} - \theta'_{ij}$).

II.5 - ALGUNS MÉTODOS DE ANÁLISE DAS FOLHAS SIMPLES

II.5.1 - O Método de Whitney

O método apresentado por Whitney²⁷ e discutido em Ramaswamy³ é, segundo este observa, uma modificação do proposto por Girkmann⁶. A única diferença entre ambos é o tratamento dado às placas de extremidade. Girkmann trata-a como apoiada em três lados e livre num quarto, isto é, supõe-se apoiada nas extremidades (tímpanos) e engastada, por continuidade, na primeira aresta interna, tratamento esse muito rigoroso. Whitney simplificou o tratamento acima, supondo as placas de extremidade como balanços de uma laje contínua apoiada em uma só direção, isto é, as placas de extremidade funcionam engastadas na primeira aresta interna adjacente a elas.

O método de Whitney, como apresentado inicialmente, é aplicável a estruturas de apenas um tramo, com diafragmas intermediários. Sharma e Goyal⁵⁸ apresentaram uma extensão do método de Whitney, por eles aplicado para a solução de estruturas contínuas.

Powell⁸ observa que a principal desvantagem deste método (o qual ele afirma ser devido a Vlasov) está no grande trabalho que se tem em resolver as equações em sua forma algébrica.

A seguir, apresenta-se a análise, como proposta por Whitney, passo a passo (ver exemplo III.1, capítulo seguinte):

- 1) Se a altura e a espessura das placas e a intensidade da carga não variarem com x, substitui-se o carregamento uniforme \bar{g} pelo seu correspondente 1º termo das séries de Fourier e calcula-se as cargas R correspondentes nas arestas:

$$\bar{R}_i = R_i \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \rightarrow R_i = \bar{R}_i \cdot \frac{4}{\pi}$$

R é a soma das reações de apoio das placas biapoia das (pois supõe-se inicialmente arestas articuladas).

Quando isso é feito, todas as tensões, deformações e momentos variam senoidalmente, tendo máximos valores no meio do vão ($x = L/2$).

2) Resolve-se as cargas nas arestas e acha-se as cargas nas chapas usando as equações (II.16).

$$S_{ih} = \frac{R_i \cdot \cos \beta_{ij}}{\text{sen } \alpha_i} \quad S_{ij} = \frac{R_i \cdot \cos \beta_{hi}}{\text{sen } \alpha_i}$$

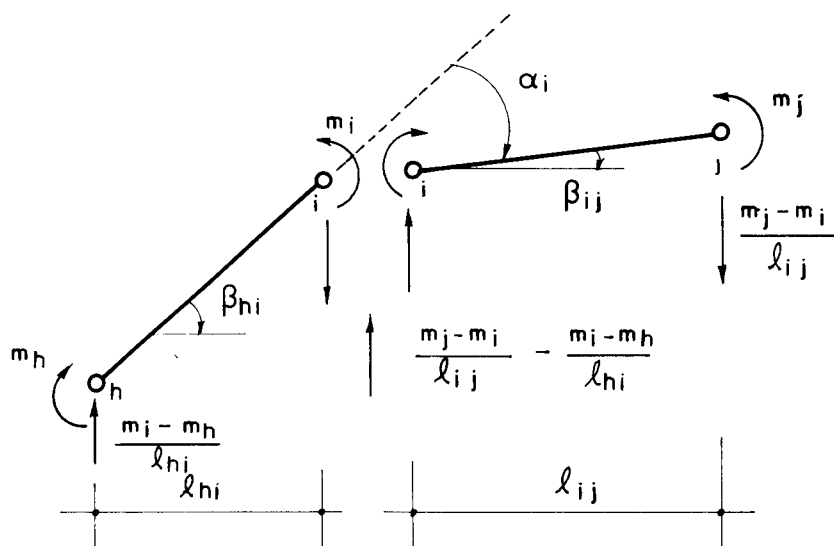


Fig. II. 21 — Efeito dos momentos transversais nas arestas

Aplica-se cargas adicionais nas arestas ΔR_i para levar em conta o efeito da continuidade (momentos transversais de placa, que são as incógnitas do problema) e resolve-se de maneira análoga ao do item anterior:

$$\Delta R_i = \frac{m_j - m_i}{l_{ij}} - \frac{m_i - m_h}{l_{hi}}$$

$$\Delta S_{ih} = \frac{\Delta R_i \cdot \cos \beta_{ij}}{\text{sen} \alpha_i} \quad \Delta S_{ij} = \frac{\Delta R_i \cdot \cos \beta_{hi}}{\text{sen} \alpha_i}$$

- 4) Calcula-se as cargas p nas chapas, com o auxílio da equação (II.18):

$$p_{ij} = (S_{ji} - S_{ij}) + (\Delta S_{ji} - \Delta S_{ij})$$

Essa expressão, por decorrer das anteriores, também envolve as incógnitas m do problema.

- 5) Utilizando a equação das três cortantes (ver equação II.24), escreve-se as equações das cortantes longitudinais de bordo e obtêm-se as forças T em função dos momentos m .
- 6) Calcula-se as flechas no plano das chapas; para isso, soma-se as equações (II.46) e (II.50) anteriores, levando em conta o efeito conjunto das cargas na chapa e das cortantes no bordo. Têm-se:

$$a_{ij} = \frac{M_{ij} \cdot L^2}{C_f \cdot E \cdot I_{ij}} \quad a'_{ij} = \frac{(T_i + T_j) \cdot h_{ij} \cdot L^2}{2C_f \cdot E \cdot I_{ij}}$$

No caso, por ser variação senoidal, têm-se $C_f = \pi^2 = 9,87$ (ver Tab. II.1). O momento M_{ij} pode ser escrito em função da carga com o auxílio da equação (II.20):

$$M_{ij} = C_s \cdot p_{ij} = \frac{p_{ij} \cdot L^2}{\pi^2}$$

Substituindo nas expressões acima e levando em conta que as forças T são consideradas positivas quando produzem momento fletor negativo nas chapas, isto é, momento com sentido contrário àquele produzido pelas cargas nas chapas, têm-se:

$$a_{ij} = \frac{1}{E \cdot I_{ij}} \left(\frac{L}{\pi} \right)^4 \left[p_{ij} - \frac{(T_i + T_j)}{2} \cdot h_{ij} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right]$$

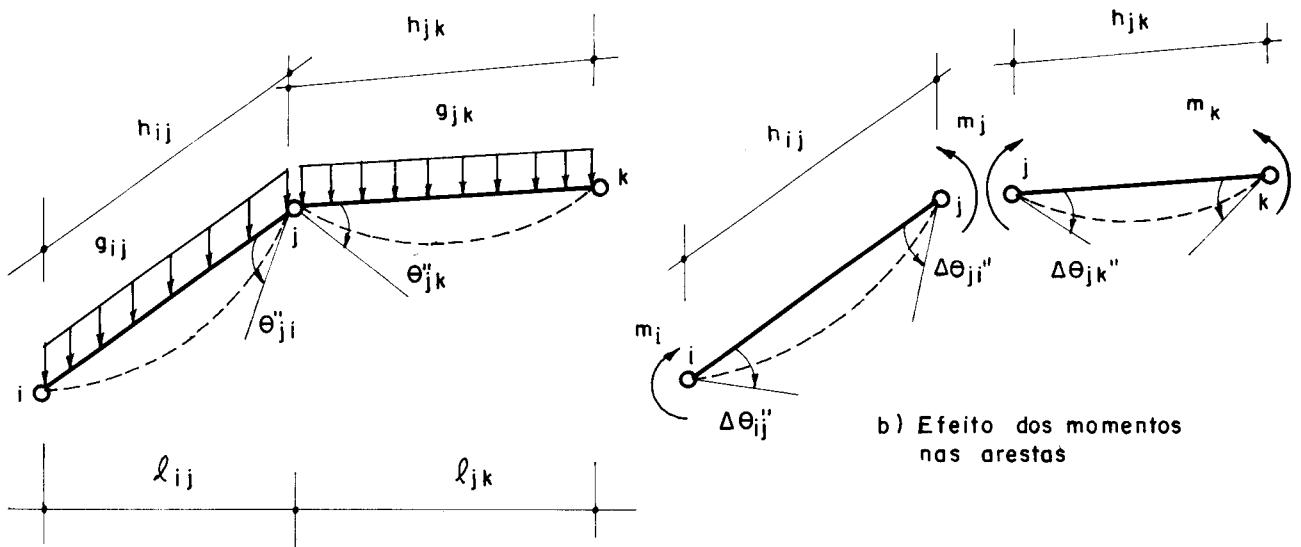
7) Com os valores das flechas a , calcula-se os giros de corda θ' com o auxílio das equações (II.56).

8) Calcula-se os giros elásticos θ'' causados pelos momentos transversais (ação de laje), com o auxílio das equações (II.6), as quais, para uma aresta j , fornecem (ver Fig. II.22):

$$\theta''_{ji} = - \frac{1}{6K_{ij}} (2m_j + m_i - 2m_{ji}^e - m_{ij}^e)$$

$$\theta''_{jk} = \frac{1}{6K_{jk}} (2m_j + m_k - 2m_{jk}^e - m_{kj}^e)$$

O sinal negativo na primeira dessas fórmulas não mais se justifica (ver Fig. II-3) porque agora os giros θ'' concordam com o sentido suposto positivo para os momentos fletores; como Whitney trata separadamente as cargas e os momentos nas arestas, reescrevendo as fórmulas:



a) Efeito do carregamento

b) Efeito dos momentos nas arestas

Fig. II. 22— Giros elásticos θ''

a) - Efeito do carregamento (Fig. II.22.a):

$$\theta_{ji}'' = \frac{1}{6K_{ij}}(-2m_{ji}^e - m_{ij}^e) \quad K_{ij} = \frac{E \cdot I_{pij}}{h_{ij}} \quad I_{pij} = \frac{b_{ij}^3}{12}$$

$$\theta_{jk}'' = \frac{1}{6K_{jk}}(-2m_{jk}^e - m_{kj}^e) \quad K_{jk} = \frac{E \cdot I_{pjk}}{h_{jk}} \quad I_{pjk} = \frac{b_{jk}^3}{12}$$

I_p = momento de inércia da placa

$$m_{ji}^e = m_{ij}^e = -\frac{g_{ij}^n \cdot h_{ij}^2}{12} \quad (\text{fórmula II.3})$$

g_{ij}^n = componente do carregamento normal ao plano da placa

$$g_{ij}^n = g_{ij} \cdot \cos \beta_{ij}$$

$$\theta_{ji}'' = \frac{1}{6K_{ij}} \left(-3 \cdot -\frac{g_{ij}^n h_{ij}^2}{12} \right) = + \frac{g_{ij}^n h_{ij}^3}{24EI_{pij}} = \frac{g_{ij} \cdot \cos \beta_{ij} h_{ij}^3}{24 E I_{pij}}$$

Lembrando que $h_{ij} \cdot \cos \beta_{ij} = l_{ij}$ e substituindo o valor de I_{pij} , tem-se, finalmente:

$$\theta_{ji}'' = \frac{g_{ij} \cdot l_{ij} \cdot h_{ij}^2}{2 E b_{ij}^3}$$

$$\text{Analogamente: } \theta_{jk}'' = \frac{g_{jk} \cdot l_{jk} \cdot h_{jk}^2}{2 E b_{jk}^3}$$

Assim o giro elástico total, devido ao carregamento, na aresta j (tendendo a reduzir o ângulo interno $(180-\alpha_j)$ entre as placas), será:

$$\theta_j'' = \theta_{ji}'' + \theta_{jk}'' = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\bar{g}_{ji} \ell_{ij} h_{ij}^2}{2 E b_{ij}^3} + \frac{\bar{g}_{jk} \ell_{jk} h_{jk}^2}{2 E b_{jk}^3} \right)$$

pois $g = \frac{4}{\pi} \cdot \bar{g} = 1^\circ$ termo das séries de Fourier, onde \bar{g} = carga uniformemente distribuída.

Assim:
$$\theta_j'' = \frac{2}{E \pi} \left(\frac{\bar{g}_{ij} \ell_{ij} h_{ij}^2}{b_{ij}^3} + \frac{\bar{g}_{jk} \ell_{jk} h_{jk}^2}{b_{jk}^3} \right)$$

b) Efeito dos momentos nas arestas (Fig. II.22.b)

$$\Delta \theta_{ji}'' = \frac{1}{6K_{ij}} (2m_j + m_i) = \frac{h_{ij}}{6EI_{pij}} (2m_j + m_i)$$

$$\Delta \theta_{jk}'' = \frac{1}{6K_{jk}} (2m_j + m_k) = \frac{h_{jk}}{6EI_{pjk}} (2m_j + m_k)$$

O acréscimo de giro elástico $\Delta \theta''$ (também tendendo a reduzir o ângulo interno) será:

$$\theta_j'' = \theta_{ji}'' + \theta_{jk}'' = \frac{2}{E} \left[\frac{h_{ij}}{b_{ij}^3} (2m_j + m_i) + \frac{h_{jk}}{b_{jk}^3} (2m_j + m_k) \right]$$

9) Calcula-se a redução do ângulo interno devido aos giros de corda das placas adjacentes à aresta j por:

$$(\theta'_{jk} - \theta'_{ij})$$

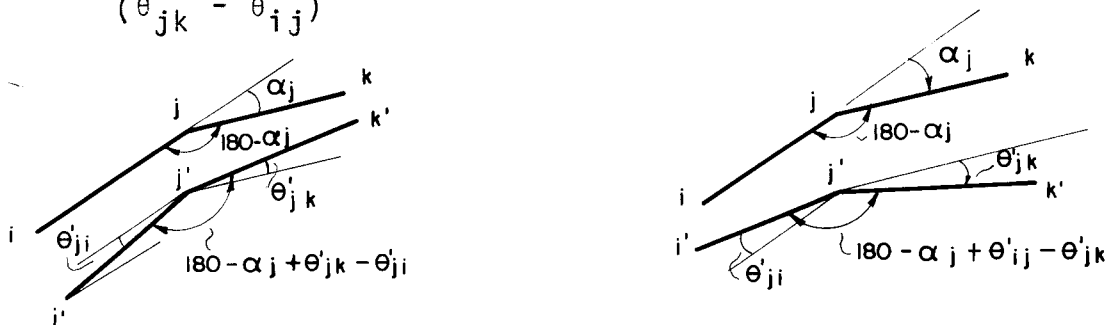


Fig. II. 23 - Redução do ângulo interno devido aos giros de corda θ'

- 10) Impõe-se a condição de continuidade nas arestas, pois, pela sua monoliticidade, não ocorre variação do giro entre as placas adjacentes (as arestas são rígidas), isto é, a soma das reduções dos ângulos internos encontrados nos passos 8 e 9 é, portanto, nula.

$$\theta_j'' + \Delta\theta_j'' + (\theta_{jk}' - \theta_{ij}') = 0$$

ou

$$(\theta_{ji}'' + \theta_{jk}'') + (\Delta\theta_{ji}'' + \Delta\theta_{jk}'') + (\theta_{jk}' - \theta_{ij}') = 0$$

- 11) Resolvendo-se as equações assim formadas, encontram-se as incógnitas m (momentos transversais nas arestas).
- 12) Faz-se a superposição de efeitos, encontrando-se os valores dos momentos M e das cortantes longitudinais T nas chapas. Com M e T , calcula-se as tensões normais nas fibras das chapas, para a seção central. Com os valores de σ , chega-se às tensões para qualquer outra seção, pois a distribuição das tensões ao longo do vão é senoidal. Deve-se corrigir os valores das tensões, multiplicando-as por $\pi^3/32$, para levar em conta que apenas o 1º termo das séries de Fourier foi usado.

II.5.2 - O método de Simpson^{3,26}

Segundo observa Ramaswamy³, o método de Simpson²⁶ é uma modificação do proposto inicialmente por Gagar⁷, sendo diferentes apenas quanto à escolha das incógnitas. Ambos, ao contrário de Whitney, supõem arestas rígidas.

das desde o início da análise, assumindo que elas sejam, inicialmente, indeslocáveis, levando em conta, posteriormente, o efeito dos deslocamentos nas arestas. No método de Simpson, o deslocamento das arestas é levado em conta, arbitrando-se, para cada chapa (uma por vez), uma rotação no meio do vão; Gaafar adota como incôgnita o deslocamento relativo transversal entre duas arestas consecutivas.

Em ambos os métodos, a análise é reduzida a uma série de distribuições simples de momentos transversais e de tensões longitudinais.

Caso a estrutura a ser analisada seja simétrica, tratam-se duas chapas (simétricas entre si, evidentemente) por vez, para aproveitar a vantagem da simetria.

Deve-se salientar também que ambos os métodos são decorrência daquele apresentado por Winter e Pei⁴, com a diferença que Winter e Pei ignoravam os deslocamentos das arestas.

A análise, passo a passo, deve ser feita (ver exemplo III.2, capítulo seguinte):

1) Assumindo que as arestas sejam indeslocáveis, toma-se uma faixa de largura unitária na seção transversal; resolvendo a estrutura em placa contínua assim formada (processo de Cross), acha-se as reações R_i de apoio das placas e aplica-se forças iguais e opostas como cargas R_i nas arestas da estrutura em chapa; decompõe-se esse carregamento em forças no plano das chapas e, supondo cada chapa atuando independentemente, calculam-se os momentos fletores e as tensões longitudinais normais de bordo livre; a seguir, compatibiliza-se as tensões normais nas arestas comuns às chapas adjacentes, pela distribuição de tensões, conforme processo descrito no item II.4.3. As tensões resultantes são aquelas que ocorreriam se as arestas não se deslocassem (até aqui, portanto, a solução é idêntica àquela dada por Winter e Pei⁴). A solução da placa contínua será chamada de problema (o).

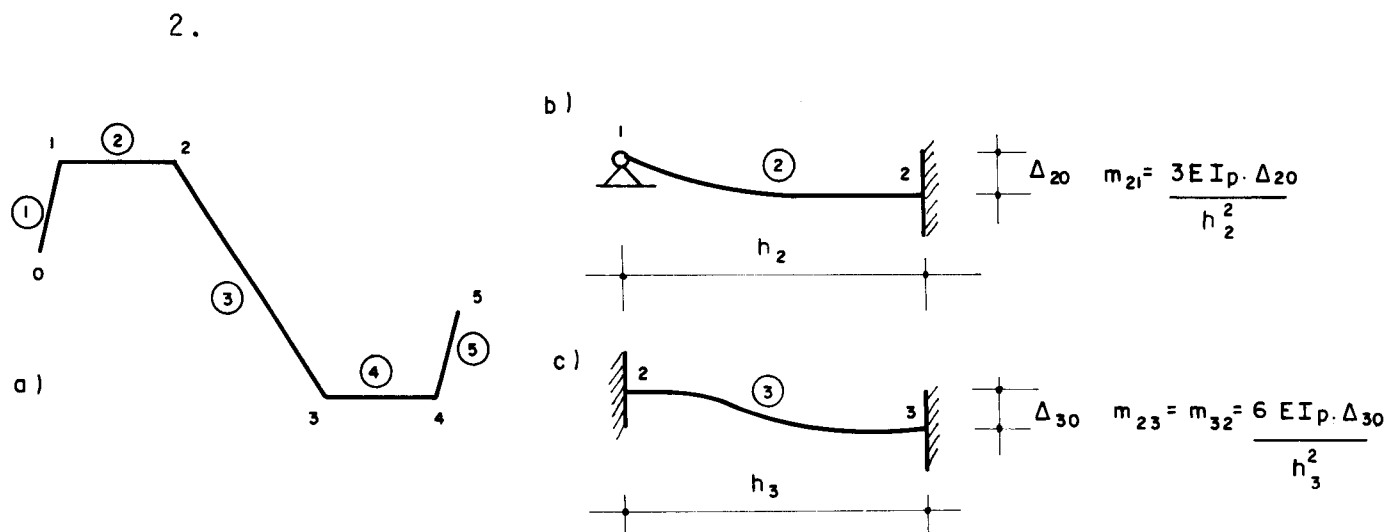


Fig. II. 24 — Rotações arbitrárias das chapas.

Considere-se, para exemplificar, a estrutura da Figura II.24.a, onde as chapas 1 e 5 são consideradas em balanço. É necessário levar em conta os deslocamentos das arestas, o que será feito adotando-se giros nas placas 2, 3 e 4. Começando pela 2, adota-se um deslocamento Δ_{20} da aresta 2, o qual provoca momento de engastamento perfeito (Figura II.24.b):

$$m_{21} = \frac{3EI_p \Delta_{20}}{h_2^2} = \frac{3 \cdot E \cdot I_p \cdot \theta'_{20}}{h_2}, \quad \text{onde } \theta'_{20} = \frac{\Delta_{20}}{h_2}$$

Fazendo $\theta'_{20} = \frac{h_2}{E I_p} \therefore m_{21} = 3$

O giro arbitrário θ'_{20} e o giro θ'_2 estarão relacionados por uma constante k_2 (uma das incógnitas do problema), através de:

$$\theta'_2 = k_2 \cdot \theta'_{20}$$

O momento arbitrado 3 na aresta 2 é agora distribuído pelo processo de Cross, e daí encontram-se as cargas

nas arestas, carregamento nas chapas, momentos e tensões longitudinais, analogamente ao feito no passo anterior. Esse passo será chamado de problema (1).

3. Em seguida considerar-se-á o efeito de uma rotação arbitrária na placa 3 (Fig. II.24.c), através de um deslocamento transversal Δ_{30} da aresta 3 em relação a 2, induzindo assim um momento:

$$m_{23} = m_{32} = \frac{6EI_p \Delta_{30}}{h_3^2} = \frac{6EI_p \theta'_{30}}{h_3}, \text{ onde } \theta'_{30} = \frac{\Delta_{30}}{h_3}$$

Fazendo: $\theta'_{30} = \frac{h_3}{EI_p} \cdot \cdot \cdot \quad m_{32} = m_{23} = 6$

O giro real será: $\theta'_3 = k_3 \cdot \theta'_{30}$, onde $k_3 =$ constante é outra incógnita do problema.

O momento 6 é agora distribuído, etc.. Resolvem-se, assim, sucessivamente, os problemas 1, 2, 3, etc.

4. Calcula-se agora as flechas a nas chapas, através das equações (II.48):

$$a_{ij} = \frac{(\sigma_i - \sigma_j) \cdot L^2}{C_f \cdot E \cdot h_{ij}}, \text{ para cada problema.}$$

A flecha total será:

$$a_{ij} = (a_{ij})_0 + k_2 \cdot (a_{ij})_1 + k_3 \cdot (a_{ij})_2 + \dots$$

5. Com as flechas a , calculam-se os giros de corda θ' , através das equações (II.56):

$$\theta'_{ij} = \frac{1}{h_{ij}} \left[a_{ij} (\cotg \alpha_j + \cotg \alpha_i) - \frac{a_{jk}}{\sen \alpha_j} - \frac{a_{hi}}{\sen \alpha_i} \right]$$

giros esses que contêm as incógnitas $k_2, k_3, \text{ etc...}$

6. Iguale-se os giros obtidos no passo 5 com os anteriores:

$$\theta_2' = k_2 \cdot \theta_{20}' \quad \theta_3' = k_3 \cdot \theta_{30}' \quad \text{etc...}$$

Obtêm-se assim um sistema de equações lineares que, resolvido, fornece os valores das constantes k.

7. Fazendo-se a superposição de efeitos, obtêm-se os esforços finais na estrutura (momentos transversais e tensões longitudinais).

II.5.3 - O método de Yitzhaky^{8, 24, 28, 29}

Na literatura, encontram-se referências a dois métodos devidos a Yitzhaky: o método da carga particular e o método dos giros de nã. Somente este último será aqui analisado. O primeiro método de Yitzhaky é discutido em seu livro²⁸ e nos artigos de Trawn^{30, 31} e de Powell⁸.

O método dos giros de nã nada mais é do que uma variação do Processo dos Esforços, aplicado às cascas prismáticas (ver item II.3.3.2). A análise é feita em duas partes: primeiramente, analisa-se a estrutura em placa contínua, apoiada em uma direção (considera-se apoios indeformáveis), sob o efeito de carga externa, e as reações R_i de apoio da placa serão as cargas nas arestas da estrutura em casca prismática, que será analisada em seguida.

Assim, na primeira parte da análise elimina-se os giros de nã da placa contínua (pela consideração de apoios indeformáveis) e todos os giros de nã da estrutura, na segunda parte, variarão de modo semelhante.

Os momentos transversais nas arestas produzidos pelo carregamento R serão somados com os momentos de placa contínua no final da análise. Conforme visto (item II.3.3.2), na segunda parte da análise, adota-se como sistema isostá

tico principal a estrutura rotulada nas arestas, com os momentos transversais como incógnitas hiperestáticas. Todos os passos de cálculo são registrados numa tabela, o que permite fácil verificação em todos os estágios.

A análise, passo a passo, é feita como segue (ver exemplo III.3, capítulo seguinte):

1) Assumindo que as arestas sejam indeslocáveis, toma-se uma faixa de largura unitária na seção transversal; resolvendo a estrutura em placa contínua assim formada (processo de Cross), acha-se as reações R de apoio e aplica-se forças iguais e opostas como cargas na estrutura em chapa; decompõe-se esse carregamento em forças no plano das chapas e, supondo cada chapa atuando independentemente, calculam-se os momentos fletores e as tensões longitudinais normais de bordo livre; a seguir, compatibiliza-se as tensões normais nas arestas comuns às chapas adjacentes pela distribuição de tensões (ver item II.4.3). Até aqui, a análise é idêntica àquela feita por Simpson. Denomina-se esta fase de problema (o).

2) Calcula-se os giros de corda θ' , os quais podem ser obtidos com o auxílio das equações (II.55) e (II.54), respectivamente (ver item II.4.5):

$$\theta'_{jk} = \frac{\delta_j - \delta_k}{l_{jk}} \quad \delta_j = \frac{F_j}{\text{tg } \beta_{ij} - \text{tg } \beta_{jk}}$$

$$F_j = \frac{L^2}{C_f \cdot E} \left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{l_{ij}} - \frac{\sigma_j - \sigma_k}{l_{jk}} \right)$$

Fazendo-se $C = (C_f \cdot E) / L^2$, pode-se escrever:

$$C \cdot F_j = \frac{\sigma_i - \sigma_j}{l_{ij}} - \frac{\sigma_j - \sigma_k}{l_{jk}} \quad C \cdot \delta_j = \frac{C \cdot F_j}{\text{tg } \beta_{ij} - \text{tg } \beta_{jk}}$$

$$C \cdot F_j = \frac{(\Delta\sigma)_j}{l_{ij}} - \frac{(\Delta\sigma)_k}{l_{jk}} = \Delta\left(\frac{\Delta\sigma}{l}\right)$$

$$\therefore C \cdot \theta'_{jk} = \frac{C \cdot (\delta_j - \delta_k)}{l_{jk}} = \frac{C \cdot \Delta\delta}{l}$$

O giro total numa aresta j pode ser calculado com o auxílio da (II.10):

$$C \cdot \theta'_j = C \cdot (\theta'_{ij} + \theta'_{jk}) = \frac{C \cdot (\Delta\delta)_j}{l_{ij}} - \frac{C \cdot (\Delta\delta)_k}{l_{jk}}$$

Os giros elásticos θ'' , como já se disse, serão nulos, e, com isso, os giros de n.º iniciais serão:

$$C\theta = C \theta' \quad , \quad \text{para cada aresta.}$$

Com isso, está resolvido o problema (o).

3) Impõe-se a continuidade das arestas na estrutura em chapa, supostas articuladas inicialmente, através de momentos unitários m' , aplicados um de cada vez (ou aos pares, caso a estrutura seja simétrica). Com esses momentos, calculam-se as reações de apoio da estrutura em placa contínua, as quais serão as cargas sobre as arestas da estrutura em chapa. Com essas cargas, determinam-se, analogamente ao problema (o), os momentos, tensões longitudinais e os giros de corda θ' , para cada problema.

4) Calculam-se os giros elásticos θ'' provocados pelos momentos transversais m' , através das equações (II.11). Com isso, calculam-se os giros de n.º θ nos problemas (1), (2), etc...

5) Com o auxílio das equações (II.9), compatibilizam-se os deslocamentos, lembrando que a continuidade da placa numa aresta é garantida se for nulo o giro relativo en

tre as chapas adjacentes a ela, isto é, $\theta_j = 0$. Com as equações assim obtidas, determinam-se os momentos m' .

6) Faz-se a superposição de efeitos, determinando-se então os momentos, tensões e deslocamentos finais na estrutura.

II.5.4 - Método recomendado pela A.S.C.E.¹

O método recomendado pelo A.S.C.E. é uma versão modificada daquele proposto por Gaafar⁷. A análise é dividida em três partes (ver exemplo III.4):

1. Análise elementar: consiste de dois passos:

- a) Análise transversal de placa: é feita considerando todas as cargas externas como suportadas transversalmente pelas placas, as quais atuam como estrutura contínua apoiada numa só direção sobre as arestas (consideradas como apoios indeslocáveis);
- b) Análise longitudinal de chapa: todas as cargas suportadas transversalmente pelas arestas (reações de apoio da placa contínua) são transferidas longitudinalmente aos apoios de extremidade das chapas, as quais atuam então como vigas biapoiadas inclinadas; as flechas dessas vigas mostrarão que ocorrem deslocamentos relativos entre arestas sucessivas, violando assim a hipótese básica de apoios indeslocáveis, adotada na análise da estrutura em placa; essa incompatibilidade força a introdução de uma correção; a análise elementar será chamada de problema (o).

2. Análise corretiva: consiste em determinar as correções, devido aos deslocamentos relativos das arestas, em am

bas as estruturas (placa contínua transversal e chapa biapoiada longitudinal), o que é feito da seguinte maneira:

- Para cada aresta é aplicado um deslocamento relativo unitário, enquanto as arestas restantes são mantidas indesejadas; esse deslocamento produz momentos fletores transversais m , os quais por sua vez produzirão as cargas R (reações de apoio) sobre as arestas da estrutura em chapa; resultarão, então, novas flechas e, conseqüentemente, novos deslocamentos relativos.
 - Os deslocamentos relativos obtidos com a correção são relacionados matematicamente com os determinados inicialmente no 2º passo da análise elementar, resultando um sistema de equações com o qual são calculados os deslocamentos relativos Δ reais;
 - Calculados Δ reais, obtêm-se as correções nos esforços, momentos e tensões, multiplicando-se os valores obtidos na análise corretiva (problemas 1, 2, etc) pelos valores dos deslocamentos relativos reais.
3. Superposição de efeitos: na qual se combina os resultados das duas fases anteriores, para se obter os valores finais dos esforços, momentos, tensões e deslocamentos, através da equação geral de superposição:

$$(r) = (o) + \Delta_2(1) + \Delta_3(2) + \dots$$

onde Δ_i = deslocamento relativo real entre as arestas da chapa i etc...

II.5.5 - Comparação entre os diversos métodos analisados

Powell⁸ observa que, numa estrutura em folha poliédrica, é necessário satisfazer seis condições (três de equilíbrio e três de continuidade).

As condições de equilíbrio são:

- I) As reações R da estrutura transversal em placa precisam ser iguais e opostas às cargas nas arestas da estrutura longitudinal em chapa;
- II) as forças cortantes longitudinais de bordo T_{ji} e T_{jk} , numa aresta j da estrutura em chapa, precisam ser iguais e opostas;
- III) os momentos fletores transversais m_{ji} e m_{jk} numa aresta j da estrutura em placa precisam ser iguais e opostos.

As condições de continuidade são:

- IV) Os deslocamentos das arestas na estrutura em placa precisam ser iguais aos seus correspondentes na estrutura em chapa;
- V) as tensões normais longitudinais σ_{ji} e σ_{jk} numa aresta j da estrutura em chapa precisam ser idênticas;
- VI) os giros de nó θ_{ji} e θ_{jk} numa aresta da estrutura em placa precisam ser idênticos.

As folhas podem ser analisadas por métodos nos quais se satisfaçam cinco das condições acima em todas as fases de cálculo, violando-se a sexta condição; pode-se então montar um número relativamente pequeno de equações, tendo em vista que, após a superposição dos efeitos nas diferentes fases, a sexta condição esteja satisfeita. A violação de uma condição de equilíbrio fornecerá um método de rigidez, e a de uma condição de continuidade, um método de

flexibilidade. Tendo em vista o exposto nos itens anteriores, os métodos examinados podem ser classificados em:

- a) Métodos de flexibilidade, baseado em combinação linear, com a condição IV violada: Gaafar, Simpson, A.S.C.E.;
- b) Métodos de flexibilidade, baseado no processo dos Esforços com a condição VI violada: método dos giros de n \bar{o} , devido a Yitzhaky, método de Whitney;

O método das cargas particulares, de Yitzhaky, citado no item II.5.3, é classificado por Powell como um método de rigidez, baseado em combinação linear.

Com base nos exemplos resolvidos no capítulo seguinte, pode-se concordar com Powell em sua afirmação: o método dos giros de n \bar{o} , de Yitzhaky, é o melhor dos métodos de cálculo manuais, por ser de simples aplicação e fácil entendimento. Outra grande vantagem desse método é o fato dele ser tabelado, o que facilita a verificação em qualquer fase do cálculo.

Além disso, o tabelamento permite que a análise de uma folha possa ser usada na análise de qualquer outra folha com idêntica seção transversal, com diferentes comprimentos e condições de apoio, bastando que se conservem as relações entre as alturas e as relações entre as espessuras das chapas adjacentes (estas exigências, evidentemente, são feitas para manter os mesmos coeficientes de distribuição de momentos transversais m e tensões normais longitudinais σ). Pode-se então preparar tabelas para seções transversais típicas, o que irá reduzir o trabalho de cálculo. Examine-se os exemplos III.3 e III.5, no capítulo seguinte: a tabela III.9 foi usada para a análise de uma estrutura semelhante, de mesma seção transversal, no exemplo III.5. A tabela III.9 ainda pode ser usada no projeto de qualquer outra folha, de seção transversal semelhante, respeitadas as condições citadas acima.

II.5.6 - O uso das séries de Fourier e das curvas normais

Examine-se o método de Whitney (ver item II.5.1 e III.1). Ele apresenta uma grande desvantagem, que é a seguinte: resolvida a estrutura, obtêm-se os momentos transversais m nas arestas, os quais englobam efeito de carga externa e efeito dos deslocamentos das arestas. Como a primeira parte varia ao longo da estrutura proporcionalmente à distribuição da carga externa (para carga uniformemente distribuída, esses momentos são constantes) enquanto a segunda varia proporcionalmente a linha elástica (ver item II.3.4), a distribuição dos momentos totais nas arestas ao longo da estrutura não é conhecida, mas adotada, já que, no primeiro passo da análise, assumiu-se variação da carga externa, ao longo da estrutura, idêntica à linha elástica (adotou-se exatamente a senóide).

Os outros métodos aqui analisados eliminam essa desvantagem, pois tratam separadamente o efeito das cargas externas (as quais podem ser analisadas então com sua variação real) e o efeito dos deslocamentos das arestas, obtendo no final da análise dois "tipos" de momentos, portanto, e isso permite a determinação exata de todas as tensões e momentos em qualquer ponto da estrutura. Para considerar esse último efeito, como já foi dito, (ver item II.3.4), Gaafar⁷ sugeriu a adoção da senóide como caso geral, isto é, deve-se adotar os deslocamentos das arestas variando senoidalmente através, por exemplo, da fórmula:

$$\bar{\delta}_j = \delta_j \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L}, \text{ onde } \delta_j = \text{deslocamento máximo (} x = \frac{L}{2} \text{)}$$

Essa aproximação apresenta como grande vantagem o fato que todos os esforços por ela produzidos (momentos transversais m , cargas R nas arestas e p nas chapas, momentos M e flechas a nas chapas) variarão também senoidal

mente. É necessário apenas definir o valor de x , o qual se aplica às equações e, em todos os demais valores de x as equações estarão satisfeitas e os valores dos esforços, deslocamentos, etc, em qualquer seção são facilmente determinados. Evidentemente, esse valor de x é escolhido no meio do vão ($x = L/2$), onde a variação senoidal atinge valor máximo. Poder-se-ia aumentar a precisão adotando termos adicionais das séries de Fourier, mas isso é desnecessário.

No final da análise, teremos, portanto, duas variações de momentos, os quais, somados, darão o momento total em qualquer seção. Suponhamos, por exemplo, que a carga externa seja uniformemente distribuída. Vamos chamar os momentos devidos à carga externa de m_0 (o qual, nesse caso, será constante para todas as seções) e os momentos máximos devidos aos deslocamentos das arestas de m_d . Teremos:

$$m = m_0 + m_d \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \quad , \text{ onde } m = \text{momento total.}$$

A variação longitudinal das tensões normais σ é proporcional à variação dos momentos M das chapas. Esses, por sua vez, variam de duas maneiras: a primeira, parabolicamente (continuamos supondo, para exemplificar, carga externa uniformemente distribuída) e a segunda senoidalmente (deslocamentos das arestas). Analogamente ao dito acima, para qualquer seção, teremos:

$$\sigma = \bar{\sigma}_0 \cdot \frac{4x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \bar{\sigma}_d \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L}$$

onde $\bar{\sigma}_0$ e $\bar{\sigma}_d$ são os valores máximos das tensões, em cada caso. Por exemplo, nos quartos de vão:

$$\sigma = 0,75 \bar{\sigma}_0 + 0,707 \cdot \bar{\sigma}_d$$

II.6 - COMENTÁRIOS SOBRE OUTROS MÉTODOS DE ANÁLISE DAS FOLHAS PRISMÁTICAS

Como visto no item I.5, os métodos de análise das folhas podem ser classificados de duas maneiras, a lí deta lhadas. O que se segue é uma complementação daquele item.

II.6.1 - Métodos de análise das folhas simples

Como visto, Iffland² e Powell⁸ classificam esses métodos de cinco maneiras: soluções exatas, diretas, manuais, coeficientes de influência e coeficientes duplos de influência.

As soluções exatas, baseadas no método da elasi cidade, já foram discutidas no item I.5.1.d; alguns dos métodos usando coeficientes de influência foram discutidos no item II.5, no qual também se discutiu um dos métodos dire tos (Whitney).

A respeito das soluções diretas, a sua principal desvantagem, como se nota no método de Whitney (ver exemplo III.1), é que as equações a serem resolvidas são trabalho sas. Powell⁸ **comenta que**, todavia, Parme⁴³ mostrou que os cálculos podem ser feitos numa forma tabelada simples. Bar ker⁴⁴ programou o método para computador.

A análise matricial da solução direta, baseada no Processo dos Esforços e extensível ao computador, foi feita por Scordelis⁴⁴; Meck⁴² apresenta um método parecido, basea do no Processo dos Deslocamentos.

A respeito dos métodos manuais, cabe aqui um comentário a respeito dos método iterativo descrito por Brielmaier²⁵ e comentado em Ramaswamy³, Traum³⁰, Franz²³ e no relatório da comissão da A.S.C.E. (ver também o item I.4.4). A comissão da A.S.C.E. não recomenda o seu uso, co mo método geral, pois não é aplicável a todos os tipos de

seções prismáticas. Embora de fácil entendimento, o método às vezes converge vagarosamente ou diverge, como no caso de estruturas com pequenos ângulos entre as chapas adjacentes (as quais, por serem mais flexíveis, apresentam maior sensibilidade aos deslocamentos das arestas). Powell⁸ comenta sobre o método iterativo melhorado, apresentado por Mast^{3,8}, mas conclui, como a comissão da A.S.C.E., pelo uso de métodos manuais baseados no uso dos coeficientes de influência (Gaafar, Simpson, Yitzhaky, etc.).

A respeito do método desenvolvido por Goble^{4,7} (coeficiente duplo de influência), Powell⁸ comenta ser este mais indicado para computador, pois é necessário resolver um grande número de equações.

II.6.2 - Métodos de análise das folhas contínuas

a) Extensão dos métodos examinados no item II.5

Vários autores tratam das estruturas contínuas com soluções baseadas nos métodos examinados. Sharma e Goyal^{5,8} examinam as folhas contínuas através de uma extensão do método de Whitney. Ramaswamy³ propõe uma solução baseado no método de Simpson e Yitzhaky^{2,8} e Yitzhaky e Reiss^{2,9} propõe soluções baseadas em ambos os métodos de Yitzhaky.

Porém, todos tratam o problema considerando cada vão individualmente, com as condições de apoio idealizadas como engastado, livre ou simplesmente apoiado, sendo os métodos aplicáveis apenas quando houver simetria (de carga e geométrica).

De todos, o de mais simples aplicação é o de Yitzhaky, pela forma tabelada (ver exemplo III.5).

b) Outros métodos

Lee, Pulmano e Lin⁵³ apresentam uma solução para o painel interno de uma folha contínua de múltiplas baias apoiadas diretamente em pilares.

Beaufait⁴⁸ apresentou um método de análise de folhas simples e contínua que requer o uso de computador, ao qual procurou dar sustentação experimental¹¹¹; mas o método sofreu algumas restrições, feitas por Lee⁴⁹, Scordelis e Lo⁵⁰ e Mousa, Parmelee e Lee⁵⁴.

Uma solução mais rigorosa, baseada no método da elasticidade, proposto por Godberg e Leve³⁴ para folhas simples, foi proposto por Pulmano e Lee⁵⁶ para folhas contínuas sobre pilares internos.

Também baseados em Goldberg e Leve³⁴, Pultar, Billington e Riera⁵⁷ propõe um método para a solução de folhas contínuas sobre apoios flexíveis, baseado no Processo dos Esforços.

Goldberg, Gutzwiller e Lee⁵² propõe um método baseado em Goldberg e Leve³⁴ mediante o uso de diferenças finitas.

Mousa, Parmelee e Lee⁵⁴ propõe um método baseado no de Simpson (folhas simples) para solução da estrutura transversal (ação de placa contínua) e no método desenvolvido por Lee¹²⁵ para solução da estrutura longitudinal contínua (ação de chapa). Segundo eles, o método fornece resultados mais precisos que o proposto por Beaufait⁴⁸. A grande vantagem deste método é a possibilidade de se resolver manualmente a estrutura, podendo-se também programá-lo. Além disso, não há necessidade da simetria, como acontecia com os métodos analíticos idealizados de Sharma e Goyal⁵⁸, Simpson³ e Yitzhaky^{28,29}. A estrutura pode ter também qualquer número de apoios internos. Pareceu-nos ser um método indicado para calculadoras programáveis, pois, embora fácil, a parte analítica é bastante trabalhosa.

Faria⁵¹ propõe um método em que a estrutura contínua é substituída por uma estrutura discreta equivalente, tridimensional, e analisada matricialmente pelo processo dos deslocamentos.

Muhlbauer e Beaufait⁵⁵ propõe uma extensão do método de Beaufait⁴⁸, baseados no método iterativo proposto por Mast³⁸, com a utilização de computador. O método resolve estruturas simples e contínuas, admitindo balanços inclusive.

Wahab e Mousa⁵⁹ propõe um método baseado em Goldberg e Leve³⁴ para solução de estruturas contínuas sobre apoios intermediários flexíveis, considerando rígidos os apoios externos.

II.6.3 - Métodos de análise das folhas múltiplas

Chu e Pinjarkar⁶¹ propõe um método para análise das folhas múltiplas simplesmente apoiadas, baseados no método da elasticidade, como desenvolvido por De Fries-Skene e Scordelis³⁷.

Lee e Vos⁶³ propõe um método para análise de folhas múltiplas simplesmente apoiadas, com várias condições de apoio, baseado nos métodos simples de análise e naquele proposto por Beaufait⁴⁸.

Ambos os métodos acima são indicados para computador.

Atualmente há uma tendência a se resolver as estruturas de pontes de seção celular como folhas múltiplas (veja-se as referências bibliográficas, item I.5.2.j).

II.6.4 - Métodos de análise das folhas não-prismáticas

Em seu livro, datado de 1969, Franz²³ afirma que "a teoria das folhas não-prismáticas ainda não está desenvolvida" e sugere um método aproximado. Também Candrevas¹¹⁵, em

sua tese de doutoramento (1970), afirmava não haver encontrado, na bibliografia que pesquisou, a solução teórica do problema que lhe foi dado solucionar (Ginásio de Esportes de Araraquara, S.P., Brasil). Assim, encontrou-se na pesquisa bibliográfica casos de projetos de folhas não-prismáticas construídos com base no estudo de modelos, como o caso já citado de Candrevas¹¹⁵ ou do estádio citado em Del Pozo, Torroya e Palanco¹¹⁶.

Atualmente, já se dispõe de alguns métodos de análise, como o proposto por Johnson e Lee⁶⁸ (1968), baseados numa extensão dos métodos simples de análise, e semelhante a outro, devido a Yamahara, por eles citado. Mais recentemente (1977), Beavers e Beaufait⁸⁶ propuseram um processo baseado no método dos elementos finitos para a solução dessas estruturas.

II.7 - A ARMAÇÃO DAS FOLHAS PRISMÁTICAS

Encontram-se indicações sobre a maneira de armar as folhas prismáticas em Billington²⁴, Franz²³, Guralnick e Swartz¹²⁴, Ramaswamy³, etc.

Como se verifica pelo exame dos exemplos e da descrição dos métodos de análise, os resultados a serem obtidos são os momentos transversais m e as cortantes na estrutura em placa, e as tensões longitudinais σ e cisalhantes τ na estrutura em chapa, podendo-se também obter deslocamentos verticais δ . As tensões σ e τ podem ser combinadas através da equação (II.45) para fornecer as tensões principais σ_I de tração e σ_{II} de compressão (ver exemplo (III.4)).

Os momentos transversais e cortantes na estrutura em placa determinam as armaduras superior e inferior a serem colocadas na direção transversal. As tensões principais (efeito de membrana) determinarão a armadura longitudinal a ser colocada, o que pode ser feito usando-se uma

única camada que acompanha as trajetórias das tensões principais, ou duas camadas em malha ortogonal. A armadura longitudinal pode ser colocada no plano médio das chapas; pode-se, então, ter até três camadas de armadura na estrutura.

O cálculo e colocação dessas armaduras devem seguir alguns princípios básicos, recomendados pelo "A.C.I. Committee 334 on Concrete Shell Structures".

Como já foi salientado (ver itens I.4.5, I.6.1, I.6.2 e I.6.4), embora desprezados no cálculo, ocorrem momentos longitudinais de engastamento na região de ligação das chapas com os tímpanos de apoio, sendo as regiões de apoio zonas prováveis de ruína da estrutura. Tais momentos devem então ser cobertos, ao menos construtivamente, com armaduras de engastamento; Franz²³ estima grosseiramente essas armaduras, recomendando que se use aproximadamente 1/3 da armadura de flexão que se coloca nas arestas da estrutura (ver Fig. II.25).

Recomenda-se²³ verificar as tensões principais de tração nas extremidades das chapas, já que ali as cortantes são máximas. Franz²³ sugere que a armadura para essas cortantes seja composta da seguinte maneira (ver Fig. II.25): metade com malhas e metade com barras oblíquas bem distribuídas na superfície média da chapa (armadura segundo as isostáticas); essa disposição é denominada "armadura em três camadas".

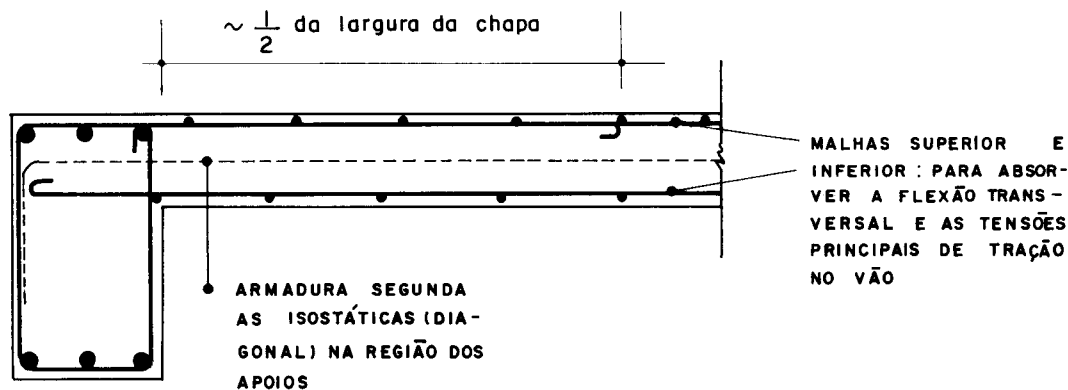


Fig. II. 25 — Armadura de engastamento para os momentos longitudinais desprezados no cálculo

CAPÍTULO III

EXEMPLOS

III.1 - MÉTODO DE WHITNEY^{3, 27}

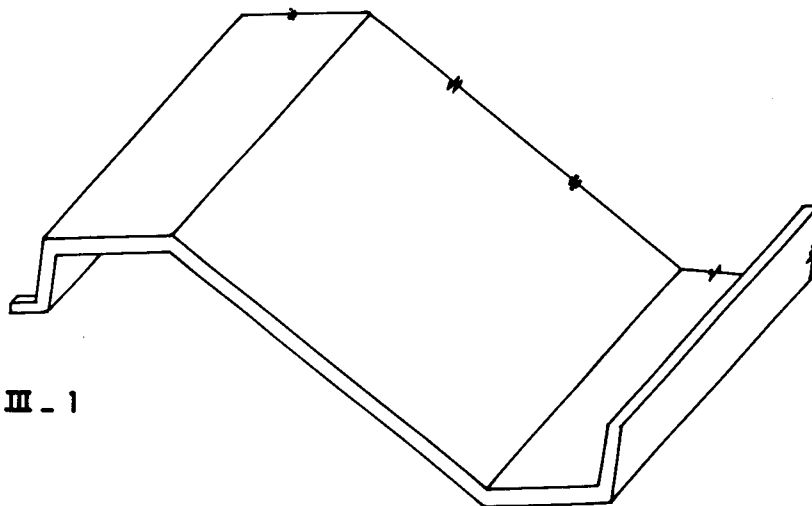


Fig. III - 1

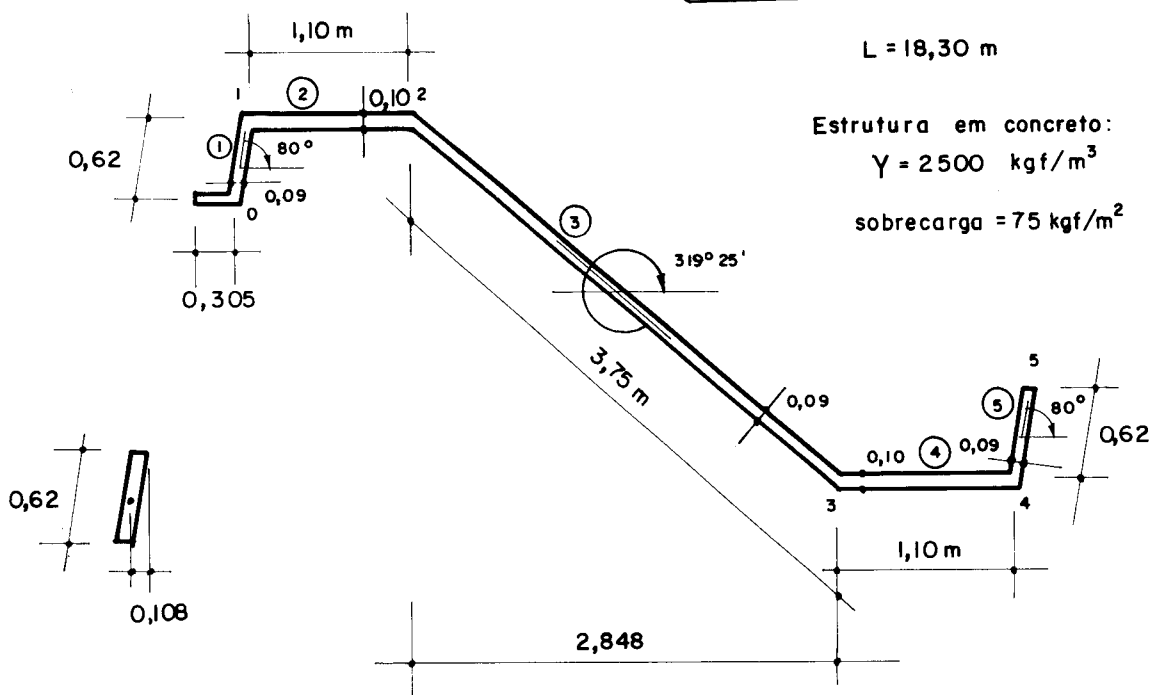


Fig. III. 2 — Características da seção transversal

1 - Propriedades geométricas

TABELA III-1

Chapa	A_i (m ²)	I_i (m ⁴)	Z_i (m ³)	I_{p_i} (m ⁴)
1	0,0558	0,001787	0,005766	0,00006075
2	0,1100	0,011092	0,020167	0,00008334
3	0,3375	0,395508	0,210938	0,00006075
4	0,1100	0,011092	0,020167	0,00008334
5	0,0558	0,001787	0,005766	0,00006075

A_i = área da seção transversal da chapa $i = b_i \cdot h_i$

I_i = momento de inércia da chapa $i = b_i \cdot h_i^3 / 12$

I_{p_i} = momento de inércia da placa $i = l \cdot b_i^3 / 12$

Z_i = módulo de resistência da chapa $i = b_i \cdot h_i^2 / 6$

2. Cálculo das cargas

2.1 - Cargas nas arestas R_i

Supõe-se inicialmente todas as arestas internas como articuladas. As placas 1 e 5 de extremidade são supostas em balanço, engastadas nas arestas 1 e 4, respectivamente. Têm-se:

- placas 1, 3, 5 : $2500 \times 0,09 = 225$

$$\bar{g} = \frac{225 + 75}{3} = 300 \text{ kgf/m}^2$$

$$\begin{aligned} \text{- placas 2 , 4 :} \quad & 2500 \times 0,10 = 250 \\ & \quad \quad \quad +75 \\ & \bar{q} = 325 \text{ kgf/m}^2 \end{aligned}$$

Com isso, o peso total de cada placa será:

$$\text{- placas 1 , 5 :} \quad 300 \times 0,62 \times 1 \cong 190 \text{ kg/m placa}$$

$$\text{- placas 2 , 4 :} \quad 325 \times 1,10 \cong 360 \text{ kg/m}$$

$$\text{- placa 3 :} \quad 300 \times 3,75 = 1125 \text{ kg/m}$$

Considera-se cargas adicionais nas arestas 0 e 5, devido ao guarda-sol e ao vidro:

$$\text{aresta 0} \rightarrow 60 \text{ kg/m}$$

$$\text{aresta 5} \rightarrow 45 \text{ kg/m}$$

Pode-se agora calcular as cargas nas arestas R_i . Considerar-se-ã apenas o 1º termo das séries de Fourier. Sabe-se que, se R_i é a carga uniformemente distribuída, têm-se:

$$\bar{R}_i = R_i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{ou} \quad R_i = \bar{R}_i \cdot \frac{4}{\pi}$$

onde R_i = valor da carga senoidal no meio do vão ($x = \frac{L}{2}$)

Assim, tem-se:

$$R_1 = \left(60 + 190 + \frac{360}{2}\right) \cdot \frac{4}{\pi} = 548 \text{ kgf/m}$$

$$R_2 = R_3 = \left(\frac{360 + 1125}{2}\right) \cdot \frac{4}{\pi} = 945 \text{ kgf/m}$$

$$R_4 = (45 + 190 + 180) \cdot \frac{4}{\pi} = 528 \text{ kgf/m}$$

2.2 - Cargas nas chapas devido a R_i

Essas cargas serão calculadas através das equações II.16':

$$S_{ih} = \frac{R_i \cdot \cos \beta_{ij}}{\operatorname{sen} \alpha_j} \quad S_{ij} = \frac{R_i \cdot \cos \beta_{hi}}{\operatorname{sen} \alpha_j} \quad (\text{Fig. II.10})$$

Têm-se:

Fig. II.12 - item II.4.1

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 80^\circ & \alpha_2 &= 40^\circ 35' \\ \alpha_3 &= 319^\circ 25' & \alpha_4 &= 280^\circ \end{aligned}$$

(Fig. III.3):

$$S_{10} = \frac{R_1 \cdot \cos 0}{\operatorname{sen} 80^\circ} = 560 \text{ kgf/m}$$

$$S_{12} = \frac{R_1 \cdot \cos 80^\circ}{\operatorname{sen} 80^\circ} = 548 \times 0,1763 \cong 100 \text{ kgf/m}$$

$$S_{21} = \frac{R_2 \cdot \cos 319^\circ 25'}{\operatorname{sen} 40^\circ 35'} = R_2 \cdot \operatorname{cotg} 40^\circ 35' \cong 1100 \text{ kgf/m}$$

$$S_{23} = \frac{R_2 \cdot \cos 0^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ 35'} = \frac{945}{0,6506} \cong 1450 \text{ kgf/m}$$

$$S_{32} = \frac{R_3 \cdot \cos 0^\circ}{\operatorname{sen} 319^\circ 25'} = -1450 \text{ kgf/m}$$

$$S_{34} = \frac{R_3 \cdot \cos 319^\circ 25'}{\operatorname{sen} 319^\circ 25'} = -R_3 \cdot \operatorname{cotg} 40^\circ 35' \cong 1100 \text{ kgf/m}$$

$$S_{43} = \frac{R_4 \cdot \cos 80^\circ}{\sin 280^\circ} = -R_4 \cdot \cot 80^\circ = -95 \text{ kgf/m}$$

$$S_{45} = \frac{R_4 \cdot \cos 0^\circ}{\sin 280^\circ} = -\frac{523}{\sin 80^\circ} = -535 \text{ kgf/m}$$

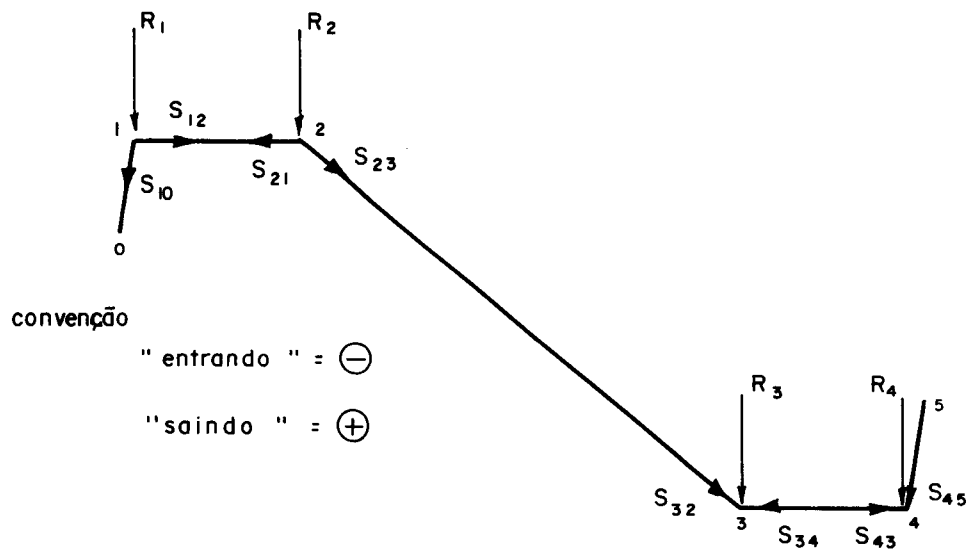


Fig. III. 3 — Cargas S nas chapas devido as cargas R_i nas arestas

2.3 - Cargas adicionais nas arestas ΔR_i devido aos momentos transversais

Considera-se agora a continuidade da estrutura em placa, devido ao fato das arestas serem monolíticas, através dos momentos m_i . Considerar-se-ão positivos os momentos que tracionam as fibras inferiores. As placas externas, como já se disse, são consideradas em balanço e, portanto, os momentos m_1 e m_4 são conhecidos (restam, pois, duas incógnitas: m_2 e m_3):

$$m_1 = - \left[60 \times \left(\frac{0,305}{2} + 0,108 \right) + 190 \cdot \frac{0,108}{2} \right] \cong -(25,9) \cdot \frac{4}{\pi} \text{ kgfm/m}$$

$$m_4 = - \left[45 \times 0,108 + 190 \times \frac{0,108}{2} \right] = -(15,1) \times \frac{4}{\pi} \text{ kgfm/m}$$

OBS.: $m_1 \neq m_4 \rightarrow$ sendo pequena a diferença, desprezar-se-á a torção na análise.

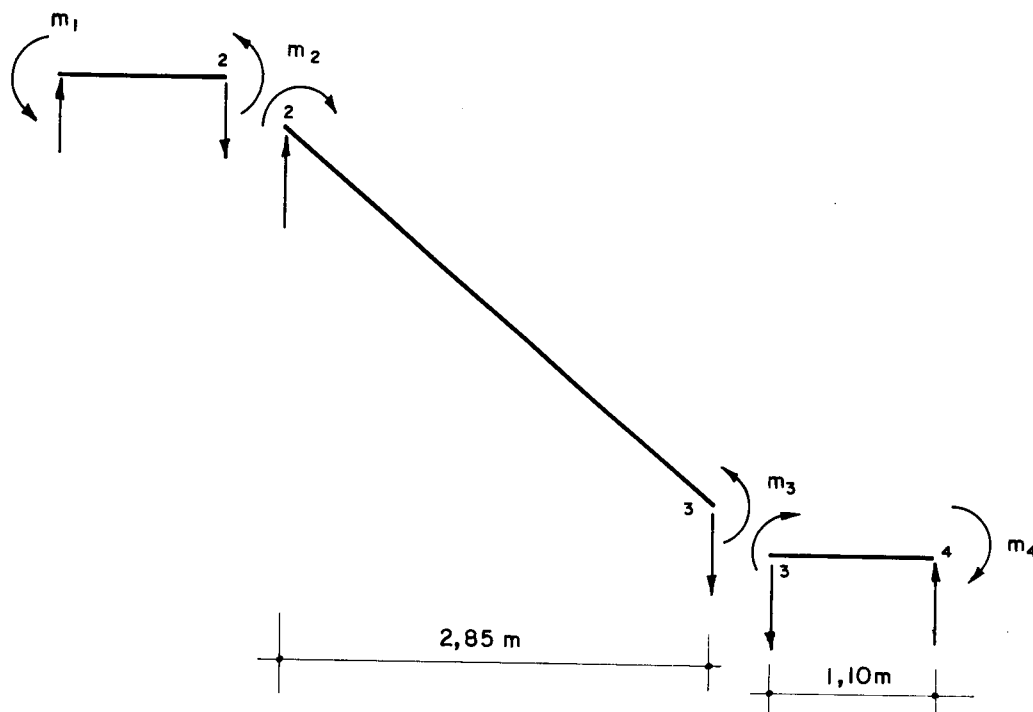


Fig. III.4 — Cargas adicionais nas arestas devido aos momentos transversais

Com isso, tem-se (Fig. III.4):

$$\Delta R_1 = \frac{m_2 + m_1}{1,10} = 0,909 m_2 + 29,979$$

$$\Delta R_2 = -(0,902 m_2 + 29,979) + \frac{m_3 - m_2}{2,85} = -1,256 m_2 + 0,35 m_3 - 29,979$$

$$\Delta R_3 = -0,35 m_3 + 0,35 m_2 - \frac{m_3 + m_4}{1,10} = -1,259 m_3 + 0,35 m_2 - 17,478$$

$$\Delta R_4 = \frac{m_3 + m_4}{1,10} = 0,909 m_3 + 17,478$$

$$\Delta S_{34} = -\Delta R_3 \cdot \cotg 40^{\circ}35' = 1,47 m_3 - 0,408 m_2 + 29,258$$

$$\Delta S_{43} = -\Delta R_4 \cdot \cotg 80^\circ = -0,16m_3 - 3,08$$

$$\Delta S_{45} = \frac{-\Delta R_4}{\text{sen } 80^\circ} = -0,923m_3 - 17,748$$

2.5 - Cargas resultantes nas chapas p_i

$$p_i = (S_{ih} - S_{hi}) + (\Delta S_{ih} - \Delta S_{hi})$$

Superpondo os esforços (Figs. III.3 e III.5):

$$p_1 = (560-0) + (0,923m_2+30,442-0)$$

$$\therefore p_1 = 590,442 + 0,923 m_2$$

$$p_2 = (1100-100) + (-1,466 m_2+0,409m_3-35-0,16m_2-5,285)$$

$$\therefore p_2 = 959,715 + 0,409 m_3 - 1,626 m_2$$

e, analogamente:

$$p_3 = -2827,06 + 1,397 m_3 + 1,397 m_2$$

$$p_4 = 972,66 + 0,409 m_2 - 1,626 m_3$$

$$p_5 = 552,748 + 0,923 m_3$$

3. Momentos nas chapas M_i

Considerando as cargas p distribuídas senoidalmente, tem-se:

$$M_i = p_i \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \cong 33,93 p_i \quad L = 18,30 \text{ m}$$

$$\therefore M_1 = 20033,7 + 31,32 m_2$$

$$M_2 = 32563,13 + 13,87 m_3 - 55,17 m_2$$

$$M_3 = -95922,146 + 47,4 m_2 + 47,4 m_3$$

$$M_4 = 33002,35 + 13,87 m_2 - 55,17 m_3$$

$$M_5 = 18754,74 + 31,32 m_3$$

4. Equações das cortantes nos bordos

Usa-se a "equação das três cortantes" (ver fórmula II-24, item II.4.2) para levar-se em conta as forças T_i corretivas nos bordos das chapas:

$$\frac{T_i}{A_{ij}} + 2 T_j \left(\frac{1}{A_{ij}} + \frac{1}{A_{jk}} \right) + \frac{T_k}{A_{jk}} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_{ij}}{Z_{ij}} + \frac{M_{jk}}{Z_{jk}} \right)$$

Assim, tem-se:

- Aresta 1:

$$2 T_1 \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) + \frac{T_2}{A_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_1}{Z_1} + \frac{M_2}{Z_2} \right)$$

Substituindo os valores A e Z (Tabela III.1):

$$2T_1 \left(\frac{1}{0,0558} + \frac{1}{0,11} \right) + \frac{T_2}{0,11} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{M_1}{0,005766} + \frac{M_2}{0,020167} \right)$$

$$108 T_1 + 18,18 T_2 = 5089250,21 + 2695,95 m_2 + 687,81 m_3 \dots (4.1)$$

- Aresta 2:

$$\frac{T_1}{A_2} + 2T_2 \left(\frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} \right) + \frac{T_3}{A_3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{M_3}{Z_3} + \frac{M_2}{Z_2} \right)$$

$$18,18T_1 + 48,22T_2 + 5,93T_3 = +1160134,65 - 2511,20m_2 + 912,49m_3 \dots (4.2)$$

- Aresta 3:

$$\frac{T_2}{A_3} + 2T_3 \left(\frac{1}{A_3} + \frac{1}{A_4} \right) + \frac{T_4}{A_4} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_3}{Z_3} + \frac{M_4}{Z_4} \right)$$

$$5,93T_2 + 48,22T_3 + 18,18T_4 = 1181915,56 + 912,49m_2 - 2511,2m_3 \dots (4.3)$$

- Aresta 4:

$$\frac{T_3}{A_4} + 2T_4 \left(\frac{1}{A_4} + \frac{1}{A_5} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{M_4}{Z_4} + \frac{M_5}{Z_5} \right)$$

$$18,18T_3 + 108T_4 = 4889221,1 + 687,81m_2 + 2695,95m_3 \dots (4.4)$$

Resolvendo essas quatro equações, obtem-se:

$$T_1 = 46077,1 + 36,62 m_2 + 1,317 m_3$$

$$T_2 = 5662,74 - 69,14 m_2 + 26,8 m_3$$

$$T_3 = 7078,23 + 26,8 m_2 - 69,14 m_3$$

$$T_4 = 43983,15 + 1,817 m_2 + 36,62 m_3$$

$$T_1 + T_2 = 51739,84 - 32,52 m_2 + 28,62 m_3$$

$$T_2 + T_3 = 12741,02 - 42,34 m_2 - 42,34 m_3$$

$$T_3 + T_4 = 51061,43 + 28,62 m_2 - 32,52 m_3$$

5. Flechas nas chapas:

Serão calculadas com a expressão:

$$a_i = \frac{1}{E I_i} \cdot \left(\frac{L}{\pi}\right)^4 \left[p_i - (T_h + T_i) \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot \frac{h_i}{2} \right] \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$a_1 = \frac{10^3 \cdot 1,151}{E \cdot 0,00179} \cdot \left[590,442 + 0,923 m_2 - (T_0 + T_1) \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot \frac{0,62}{2} \right]$$

$$\therefore a_1 = \frac{10^3}{E} \cdot (109628,5 + 373,9 m_2 - 10,65 m_3) \quad \dots (5.1)$$

$$a_2 = \frac{10^3}{E} \cdot (12879,28 - 115,11 m_2 - 5,628 m_3) \quad \dots (5.2)$$

$$a_3 = \frac{10^3}{E} \cdot (-10284,43 + 10,87 m_2 + 10,37 m_3) \quad \dots (5.3)$$

$$a_4 = \frac{10^3}{E} \cdot (15381,2 - 5,628 m_2 - 115,11 m_3) \quad \dots (5.4)$$

$$a_4 = \frac{10^3}{E} \cdot (97664,97 - 10,65 m_2 + 373,9 m_3) \quad \dots (5.5)$$

6. CÁLCULO DOS GIROS NAS ARESTAS

III.6.1 - Giros devido às flechas das chapas (ação de viga)

Fórmula geral (ver eq. (II.56'), item II.4.5):

$$\theta'_{ij} = \frac{1}{h_{ij}} \left[a_{ij} (\cotg\alpha_j + \cotg\alpha_i) - \frac{a_{jk}}{\text{sen}\alpha_j} - \frac{a_{hi}}{\text{sen}\alpha_i} \right]$$

(ver Fig. II.19)

Assim, tem-se:

- Aresta 2

$$\theta'_{12} = \frac{1}{h_2} \left[a_2 \cdot (\cotg\alpha_1 + \cotg\alpha_2) - \frac{a_3}{\text{sen}\alpha_2} - \frac{a_1}{\text{sen}\alpha_1} \right]$$

$$\theta'_{23} = \frac{1}{h_3} \left[a_3 \cdot (\cotg\alpha_2 + \cotg\alpha_3) - \frac{a_4}{\text{sen}\alpha_3} - \frac{a_2}{\text{sen}\alpha_2} \right]$$

No caso, tem-se:

$$h_2 = 1,10\text{m} \quad h_3 = 3,75\text{m} \quad \alpha_1 = 90^\circ$$

$$\alpha_2 = 40^\circ 35' \quad \alpha_3 = 319^\circ 25'$$

$$\therefore \theta'_{12} = \frac{10^3}{E} (-71053,85 - 505,43\text{m}_2 - 12,24\text{m}_3) \quad \dots (6.1)$$

$$\theta'_{23} = \frac{10^3}{E} (1025,79 + 44,89\text{m}_2 - 44,89\text{m}_3) \quad \dots (6.2)$$

- Aresta 3:

$$\theta'_{32} = \theta'_{23}$$

$$\theta'_{34} = \frac{1}{h_4} \left[a_4 \cdot (\cotg\alpha_3 + \cotg\alpha_4) - \frac{a_5}{\text{sen}\alpha_4} - \frac{a_3}{\text{sen}\alpha_3} \right]$$

$$h_4 = 1,10 \text{ m} \quad \alpha_4 = 280^\circ \quad \alpha_3 = 319^\circ 25'$$

$$\therefore \theta'_{34} = \frac{10^3}{E} (56957,16 + 12,24m_2 + 505,43m_3) \quad \dots (6.3)$$

6.2 - Giros devido ao efeito de placa (ação de laje)

1. Giros elásticos θ'' devido ao carregamento:

Supõe-se lajes simplesmente apoiadas nas arestas.

$$\theta''_j = \theta''_{ji} + \theta''_{jk} = \frac{2}{E\pi} \left(\frac{\bar{g}_{ij} \cdot l_{ij} \cdot h_{ij}^2}{b_{ij}^3} + \frac{\bar{g}_{jk} \cdot l_{jk} \cdot h_{jk}^2}{b_{jk}^3} \right)$$

Assim, com os valores de \bar{g} (ver item 2.1), tem-se:

- Aresta 2:

$$\theta''_2 = \theta''_{21} + \theta''_{23} = \frac{2}{\pi E} \cdot \left(\frac{325 \times 1,10^3}{0,10^3} + \frac{300 \times 3,75^2 \times 2,85}{0,09^3} \right)$$

$$\theta''_2 = \frac{10^3}{E} \times 10777,12$$

- Aresta 3:

$$\theta''_3 = \theta''_{32} + \theta''_{34} = \theta''_2 = \frac{10^3}{E} \cdot 10777,12$$

2. Acrēscimos de giros elásticos $\Delta\theta''$ devido aos momentos transversais

$$\Delta\theta_j'' = \Delta\theta_{ji}'' + \Delta\theta_{jk}'' = \frac{2}{E} \left[\frac{h_{ij}}{b_{ij}^3} (2m_j + m_i) + \frac{h_{jk}}{b_{jk}^3} (2m_j + m_k) \right]$$

- Aresta 2

$$\Delta\theta_2'' = \Delta\theta_{21}'' + \Delta\theta_{23}'' = \frac{2}{E} \left[\frac{1,10}{0,10^3} (2m_2 + m_1) + \frac{3,75}{0,09^3} (2m_2 + m_3) \right]$$

Lembrando que $m_1 = -25,9 \cdot \frac{4}{\pi} = -32,976 \text{ kgm/m}$, vem:

$$\Delta\theta_2'' = \frac{10^3}{E} (24,976m_2 + 10,288m_3 - 72,556)$$

- Aresta 3

$$\Delta\theta_3'' = \frac{2}{E} \left[\frac{3,75}{0,09^3} (2m_3 + m_2) + \frac{1,10}{0,10^3} (2m_3 + m_4) \right]$$

Com $m_4 = -19,226 \text{ kgm/m}$, vem:

$$\Delta\theta_3'' = \frac{10^3}{E} (24,976m_3 + 10,288m_2 - 42,30)$$

6.3 - Compatibilização

Pelo princípio de superposição dos efeitos, deve-se ter:

$$\theta_j'' + \Delta\theta_j'' + (\theta_{jk}' - \theta_{ji}') = 0$$

- Aresta 2

$$\frac{10^3}{E} (\theta_2'' + \Delta\theta_2'' + \theta_{23}' - \theta_{12}') = 0$$

$$82734,20 + 575,296m_2 - 22,362m_3 = 0 \quad \dots (I)$$

- Aresta 3

$$\frac{10^3}{E} (\theta_3'' + \Delta\theta_3'' + \theta_{34}' - \theta_{32}') = 0$$

$$66666,19 - 22,362m_2 + 575,296m_3 = 0 \quad \dots (II)$$

sistema que, resolvido, fornece:

$$m_2 \cong -148,6 \text{ kgm/m chapa}$$

$$m_3 \cong -121,7 \text{ kgm/m chapa}$$

7. Cálculo dos esforços finais

Com os valores de m_2 e m_3 , substituindo, encontram-se:

$$M_1 \cong 15380 \text{ kgfm}$$

$$M_2 \cong 39070 \text{ kgfm}$$

$$M_3 \cong -108730 \text{ kgfm}$$

$$M_4 \cong 37655 \text{ kgfm}$$

$$M_5 \cong 14945 \text{ kgfm}$$

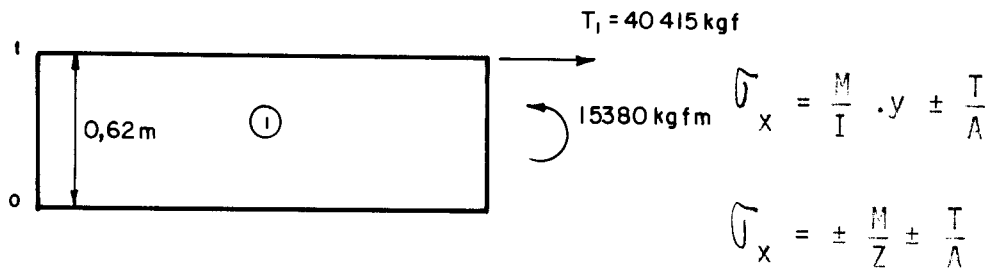
$$T_1 \cong + 40415 \text{ kgf}$$

$$T_2 \cong + 12675 \text{ kgf}$$

$$T_3 \cong + 11510 \text{ kgf}$$

$$T_4 \cong + 39255 \text{ kgf}$$

- Chapa 1 :



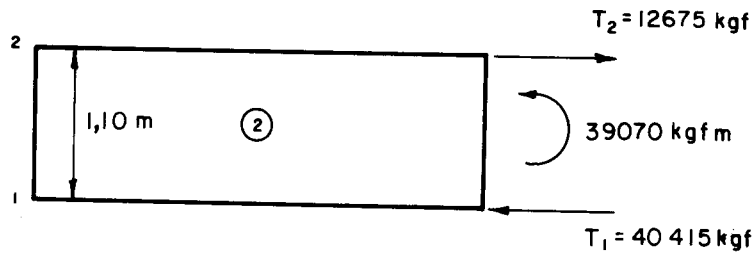
M_1^F = momento final da chapa 1

$$M_1^F = 15380 - 40415 \times \frac{0,62}{2} = 2851,35 \text{ kgfm}$$

$$\sigma_0 = \frac{2851,35}{0,005766} + \frac{40415}{0,0553} \cong + 122 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_1 = - \frac{2851,35}{0,005766} + \frac{40415}{0,0553} \cong + 23 \text{ kgf/cm}^2$$

- Chapa 2:



$$M_2^F = 39070 - \frac{40415 \times 12675}{2} \times 1,10 \therefore M_2^F \cong 9870 \text{ kgfm}$$

$$\sigma_1 = \frac{9870}{0,020167} - \frac{27740}{0,11} \cong +23,7 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_2 = -43,94 - 25,22 \cong -74 \text{ kgf/cm}^2$$

- Chapa 3:

$$M_5^F = 14945 - 39255 \times 0,31 = 2776 \text{ kgf}$$

$$\sigma_4 = \frac{2776}{0,005766} - \frac{39255}{0,0558} \cong -22,2 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_5 = -48,14 - 70,35 \cong -118,5 \text{ kgf/cm}^2$$

- Momentos reais:

$$\frac{\pi}{4} \cdot \begin{pmatrix} m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -116,7 \\ -95,6 \end{pmatrix} \text{ kgfm}$$

- Tensões longitudinais

$$\frac{\pi^3}{32} \times \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} +118,2 \\ +23 \\ -72,7 \\ +71 \\ -22,3 \\ -114,7 \end{pmatrix} \text{ kgf/cm}^2$$

O fator $\pi^3/32$, acima, aparece devido ao fato de foi usado apenas o 1º termo das séries de Fourier, além da suposição de que as tensões variam parabolicamente ao longo do vão (mesma variação do momento fletor das chapas). Assim, para transformar a variação senoidal em variação parabólica, faz-se:

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^3}{32}$$

III.2 - MÉTODO DE SIMPSON^{3, 26}

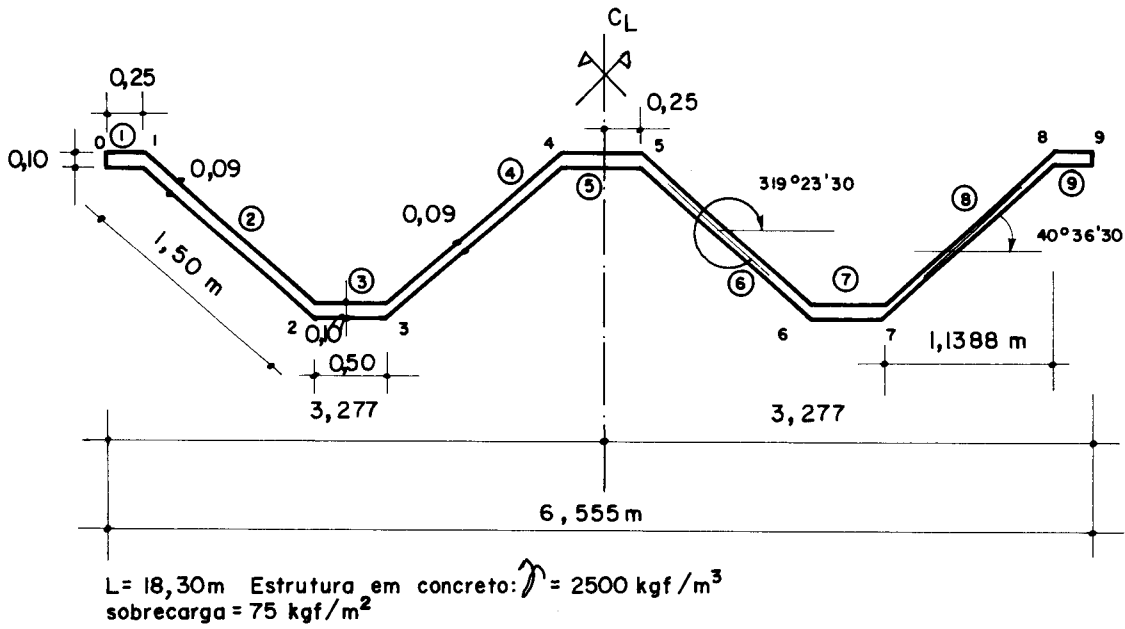


Fig. III - 6 — Características da seção transversal

1. Propriedades geométricas

TABELA III-2

Chapa	A_i (m^2)	Z_i (m^3)
1	0,025	0,00104
2	0,135	0,03375
3	0,05	0,00416
4	0,135	0,03375
5	0,05	0,00416

2. Cargas e momentos de engastamento perfeito na seção transversal

- Placas 1, 3, 5 :

$$2500 \times 0,10 = 250 \text{ kgf/m}^2$$

$$\text{Sobrecarga} = \frac{75}{}$$

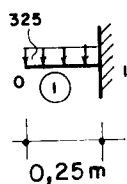
$$\bar{g} = 325 \text{ kgf/m}^2$$

- Placas 2, 4

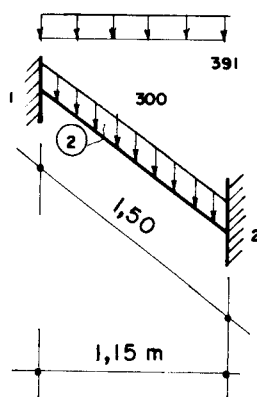
$$2500 \times 0,09 = 225$$

$$\frac{75}{}$$

$$\bar{g} = 300 \text{ kgf/m}^2$$

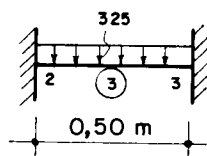


$$m_{10} = \frac{\bar{g} \cdot l^2}{2} = 10 \text{ kgfm/m}$$



$$300 \times \frac{h}{l} = 391 \text{ kgf/m}$$

$$m_{12} = -m_{21} = \frac{391 \cdot 1,15^2}{12} = 43 \text{ kgfm/m}$$

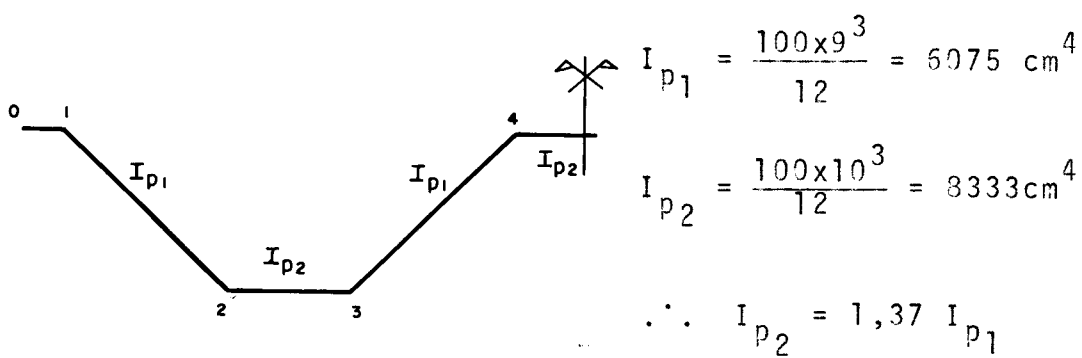


$$m_{23} = -m_{32} = \frac{325 \cdot 0,5^2}{12} = 7 \text{ kgfm/m chapa}$$

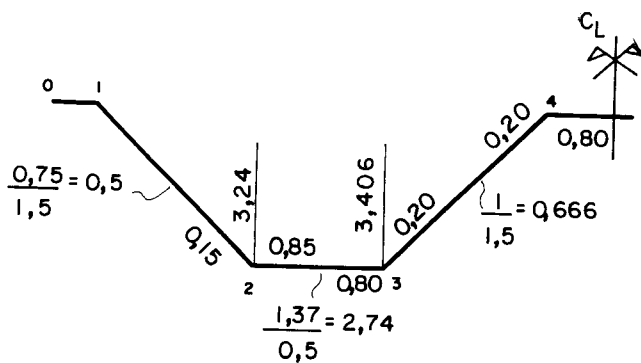
TABELA III-3

Placa	Carga (kgf/m)	M.E.P. (kgfm/m)
1	80	10
2	450	43
3	165	7
4	450	43
5	165	7

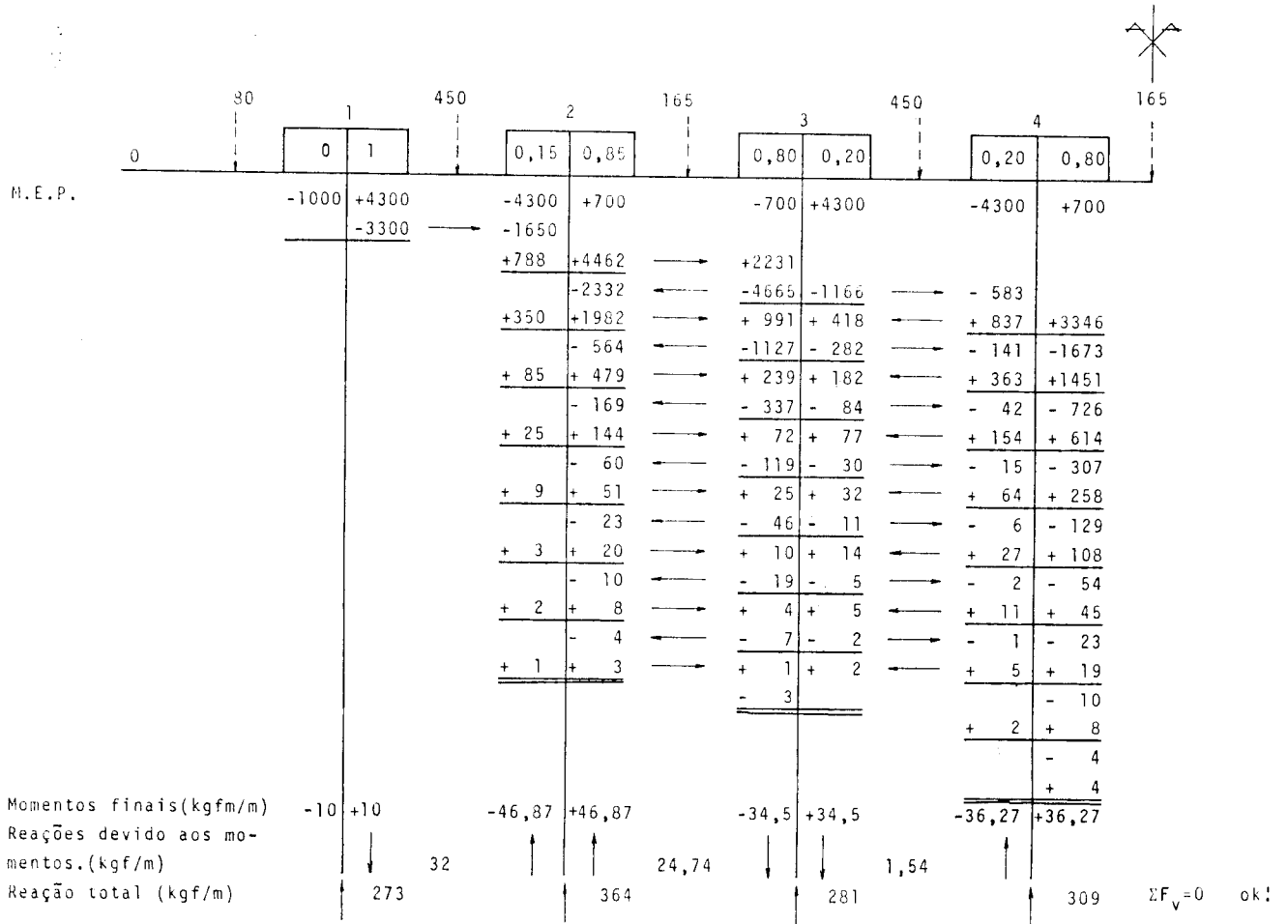
3. Efeito de placa contínua [Problema (o)]:



3.1 - Coefficientes de distribui o



3.2 - Compensação de momentos (kgfcm) e cálculo das cargas R_i nas arestas



3.3 - Cargas nas chapas devido a R_i (chapa biapoiada)

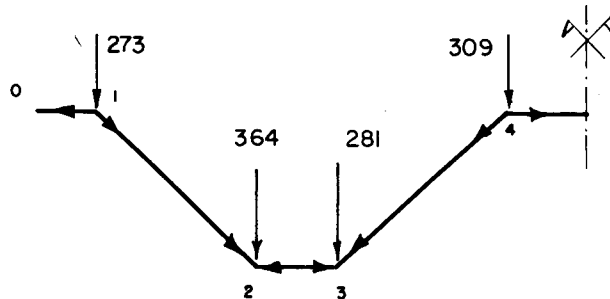


Fig. III. 7 — Cargas S nas chapas devido às cargas R_i nas arestas

Essas cargas serão calculadas através das equações II.16':

$$S_{ih} = \frac{R_i \cdot \cos \beta_{ij}}{\text{sen} \alpha_i} \qquad S_{ij} = \frac{R_i \cdot \cos \beta_{hi}}{\text{sen} \alpha_i}$$

Medição dos ângulos: ver item II.4.1, Fig. II.12.

$$\alpha_1 = 40^{\circ}36'30'' = \alpha_4 \qquad \alpha_2 = 319^{\circ}23'30'' = \alpha_3$$

$$S_{10} = \frac{R_1 \cdot \cos 319^{\circ}23'30''}{\text{sen} 40^{\circ}36'30''} = 273 \times 1,166 \cong 318,3 \text{ kgf/m}$$

$$S_{12} = \frac{273 \cdot \cos 0}{\text{sen} 40^{\circ}36'30''} \cong 419,5 \text{ kgf/m}$$

$$S_{21} = \frac{R_2 \cdot \cos 0}{\text{sen} 319^{\circ}23'30''} = \frac{364}{-0,6508} = -559,3 \text{ kgf/m}$$

$$S_{23} = 364 \cdot (-1,166) = -424,4 \text{ kgf/m}$$

$$S_{32} = 281 \cdot (-1,166) = -327,7 \text{ kgf/m}$$

$$S_{34} = \frac{281}{-0,6508} = -431,8 \text{ kgf/m}$$

$$S_{43} = \frac{309}{0,6508} = 474,8 \text{ kgf/m}$$

$$S_{45} = 309 \times 1,166 = 360,3 \text{ kgf/m}$$

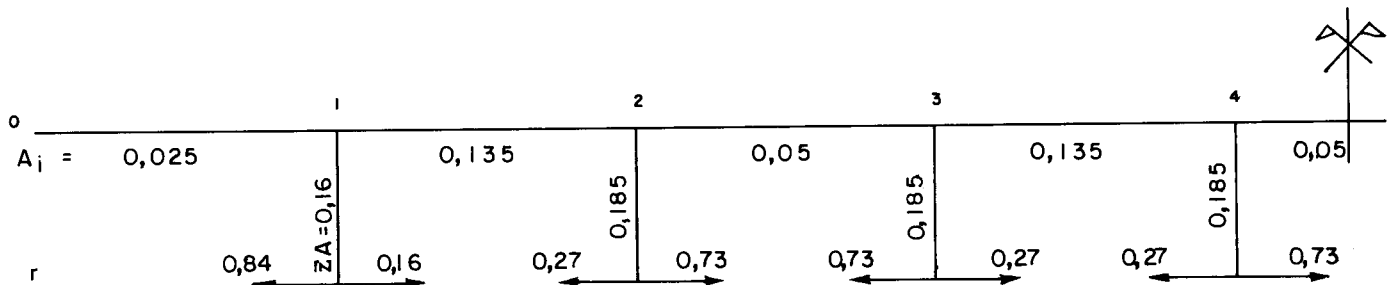
$$p_i = (S_i h - S h_i) \quad \therefore \quad p_1 = 318,3 \text{ kgf/m} \quad p_5 = 0$$

$$p_2 = -978,3 \text{ kgf/m} \quad p_3 = 96,7 \text{ kgf/m} \quad p_4 = 906,6 \text{ kgf/m}$$

3.4 - Tensões longitudinais devido às cargas nas chapas

O cálculo dos coeficientes de distribuição de tensões será feito através das fórmulas II.31, item II.4.3:

$$r_{ji} = \frac{A_{jk}}{A_{ij} + A_{jk}} \quad r_{jk} = \frac{A_{ij}}{A_{ij} + A_{jk}}$$



$$r_{10} = \frac{0,135}{0,16} \cong 0,84 \quad r_{12} = \frac{0,025}{0,16} = 0,16 \quad \text{etc..}$$

Convenção : tração = +

esforços nas chapas	$M \rightarrow \text{kgfm/m}$ $Z \rightarrow \text{m}^3$ $\sigma \rightarrow \text{kgf/cm}^2$	Tensões de bordo livre (kgf/cm^2)	Tensões após distribuição (kgf/cm^2)
<p>906,6 kgf/m</p>	$M = \frac{p \cdot L^2}{8} = 37951,4$ $Z = 0,03375$ $\sigma = \frac{M}{Z} = 112,45$		
<p>96,7 kgf/m</p>	$M = 4048$ $Z = 0,00416$ $\sigma = 97,30$		
<p>978,8 kgf/m</p>	$M = 40973,8$ $Z = 0,03375$ $\sigma = 121,4$		
<p>318,3 kgf/m</p>	$M = 13324,4$ $Z = 0,00104$ $\sigma = 1281,2$		

- Compensação

$$\left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \times 10 = \text{tf/m}^2\right)$$

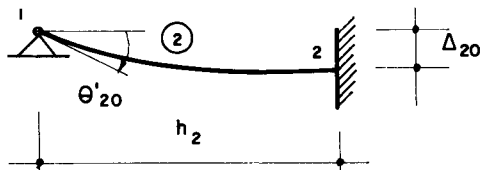
Ver item II.4.3: o coeficiente de propagação é $-1/2$.

0	1		2		3		4	
	0,84	0,16	0,27	0,73	0,73	0,27	0,27	0,73
+12812	-12812	-1214	+1214	+973	-973	+1125	-1125	
-4871 ←	+9742	-1856	+928					
		+158	-316	+853 →	-426			
-67 ←	+133	-25	+13	-922 ←	+1843	-681	+340	
		+126	-252	+683 →	-341	-106	+212	-573
-53 ←	+106	-20	+10	-86 ←	+172	-63	+32	+286
		+13	-26	+70 →	-35	-34	+69	-185
-6 ←	+11	-2	+1	0 ←	+1	0	0	+93
			0	+1 →	0	-13	+25	-68
+7815	-2820	-2820		+4 ←	-9	+4	-2	+34
			+1	-3 →	+2	-5	+10	-26
				+2 ←	-5	+2	-1	+13
				-2 →	+1	-2	+4	-10
			+1573	+1573	-2	+1	0	+5
					+228	+228	+1	-4
								+2
							0	-2
							-435	-435
+781,5	-282,0		+157,3		+22,8		-43,5	

4. Efeito dos deslocamentos das arestas. Rotação arbitrária das placas

4.1 - Rotação arbitrária da placa 2 [Problema (1)]

$$m_{21} = \frac{3 E I_{p1} \cdot \Delta_{20}}{2 h_2}$$

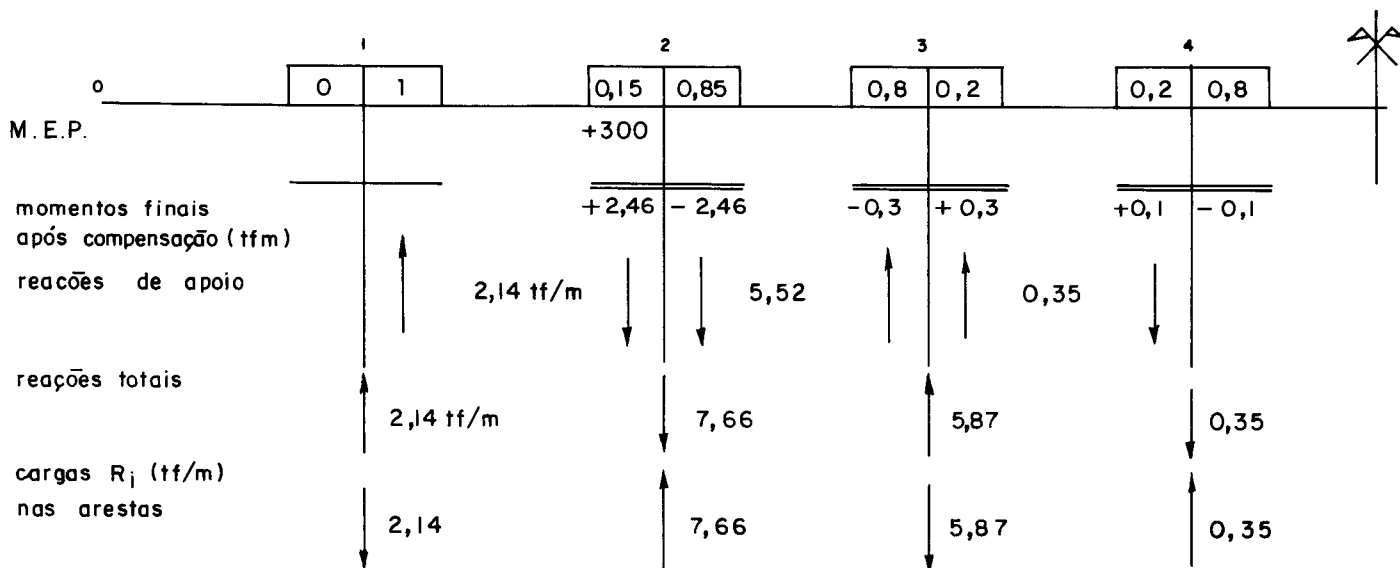


Δ_{20} = arbitrado

O giro real será dado por: $\theta_2' = k_2 \cdot \theta_{20}'$

O momento 3, acima, é adimensional. Adote-se:
 $m_{21} = 3$ tfm, ou seja, introduziu-se um multiplicador 1 tfm.

- Compensação de momentos (tfm) e cálculo das cargas R_i nas arestas



- Cargas nas chapas p , devido às cargas nas arestas R

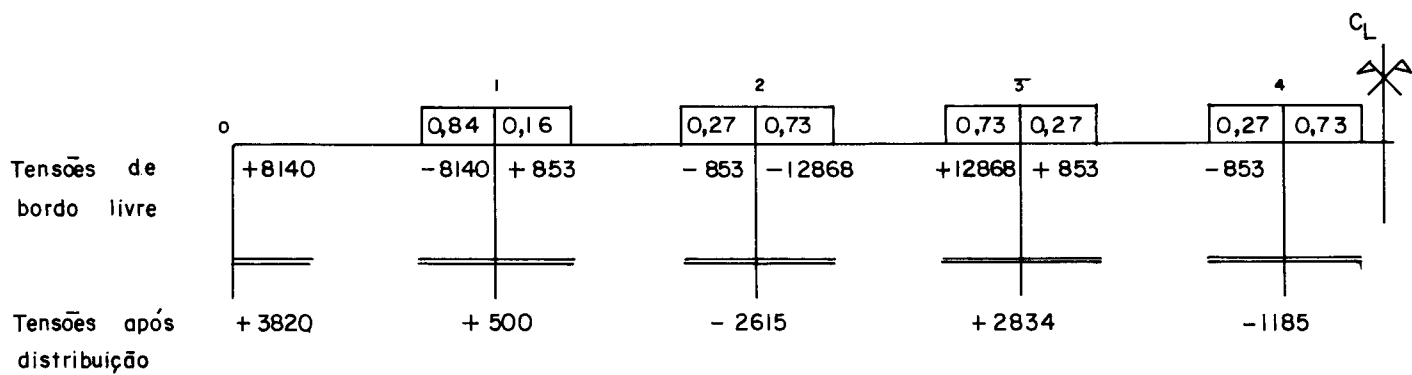
Obtêm-se (ver item 3.3):

$$p_1 = 2,495 \text{ tf/m} \quad p_2 = 8,482 \text{ tf/m} \quad p_3 = -15,776 \text{ tf/m}$$

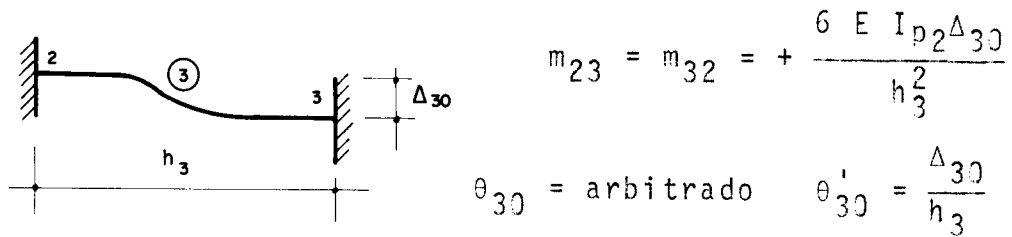
$$p_4 = 8,482 \text{ tf/m} \quad p_5 = 0$$

- Tensões longitudinais

Esforços nas chapas	$M = p \cdot L / \pi^2$ (tf/m) Z - (m ³) $\sigma = \pm M/Z$ (kgf/cm ²)	Tensões de bordo livre (kgf/cm ²)	Tensões após distribuição (kgf/cm ²)
	$M = 287,81$ $Z = 0,03375$ $\sigma = 853,0$		
	$M = 535,3$ $Z = 0,00416$ $\sigma = 12868$		
	$M = 287,81$ $Z = 0,03375$ $\sigma = 853,0$		
	$M = 84,66$ $Z = 0,00104$ $\sigma = 8140$		



4.2 - Rotação arbitrária da placa 3 [problema (2)]

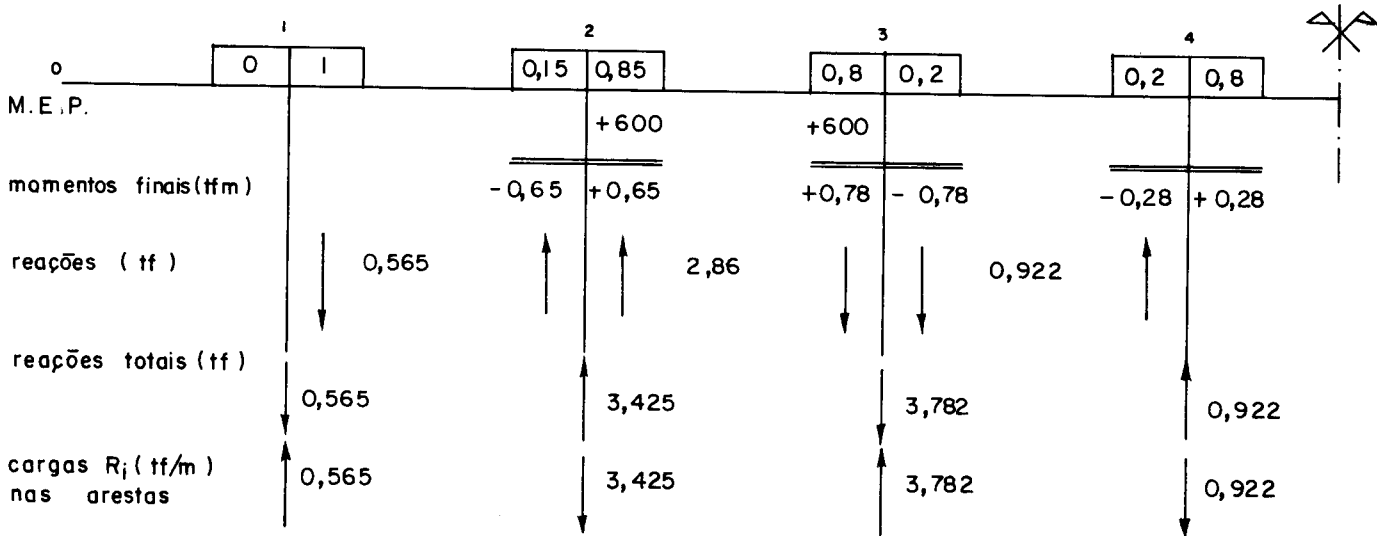


Fazendo-se $\theta'_{30} = \frac{h_3}{E I_{p2}}$, tem-se: $m_{23} = m_{32} = +6$

Adota-se: $m_{23} = m_{32} = + 6 \text{ tfm}$

giro real : $\theta'_3 = k_3 \cdot \theta'_{30}$

- Compensação de momentos (tfcm) e cálculo das cargas nas arestas



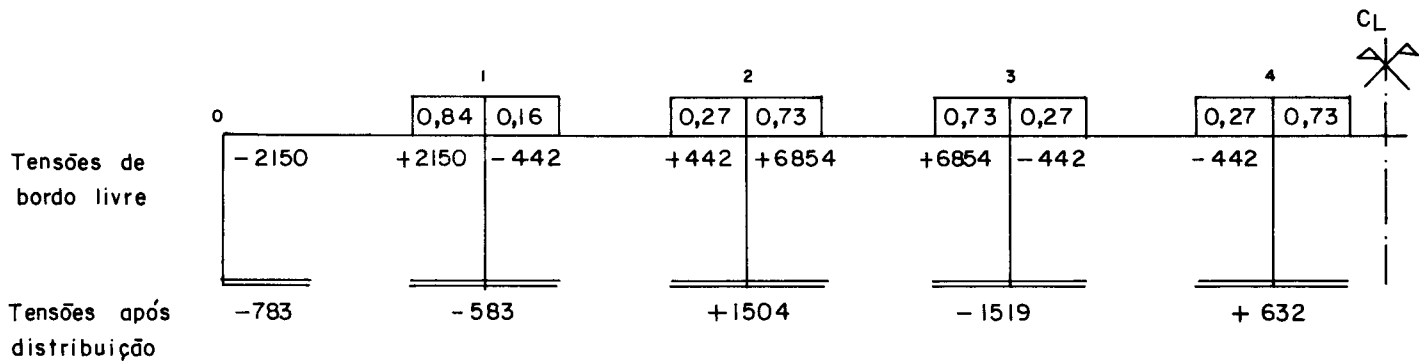
- Cargas p nas chapas, devido a R_i

Obtêm-se: $p_1 \cong -0,659 \text{ tf/m}$ $p_2 \cong -4,395 \text{ tf/m}$

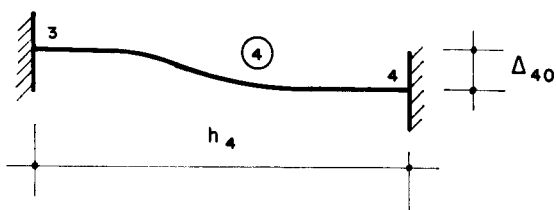
$p_3 \cong +8,403 \text{ tf/m}$ $p_4 = -4,395 \text{ tf/m}$ $p_5 = 0$

- Tensões longitudinais

Esforços nas chapas	$M = p.L / \pi^2$ (tf/m) Z - (m ³) $\sigma = \pm M/Z$ (kgf/cm ²)	Tensões de bordo livre (kgf/cm ²)	Tensões após distribuição (kgf/cm ²)
	$M = 149,13$ $Z = 0,03375$ $\sigma = 442$		
	$M = 285,13$ $Z = 0,00416$ $\sigma = 6854$		
	$M = 149,13$ $Z = 0,03375$ $\sigma = 442$		
	$M = 22,36$ $Z = 0,00104$ $\sigma = 2150$		



4.3 - Rotação arbitrária da placa 4 [problema (3)]



Analogamente ao anterior:

$$m_{34} = m_{43} = + 6 \text{ tfm}$$

Giro real = $\theta'_4 = k_4 \cdot \theta'_{40}$ onde $\theta'_{40} = \frac{h_4}{E I_{p1}}$

- Compensação de momentos (tfcm) e cálculo das cargas nas arestas

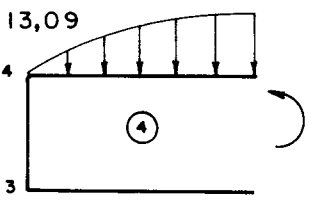
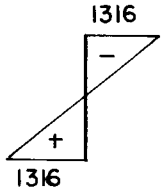
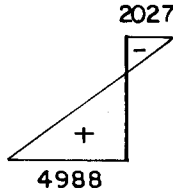
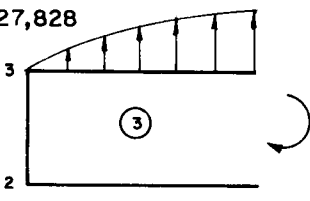
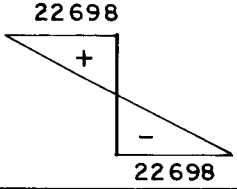
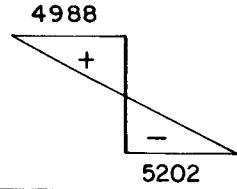
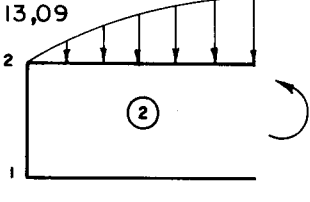
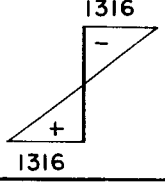
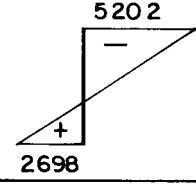
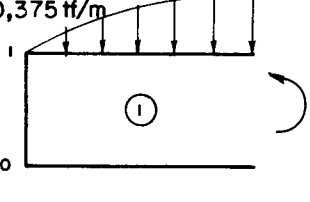
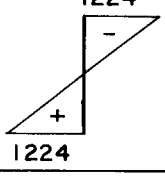
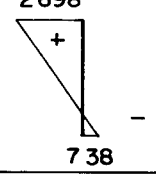
	1		2		3		4	
o	0	1	0,15	0,85	0,8	0,2	0,2	0,8
M. E. P.						+600	+600	
momentos finais (tfcm)			+0,37	-0,37	-3,89	+3,89	+3,59	-3,59
reações (tf/m)		0,322		8,52		6,504		
total (tf/m)		0,322		8,842		15,024		6,504
cargas R _i nas arestas (tf/m)		0,322		8,842		15,024		6,504

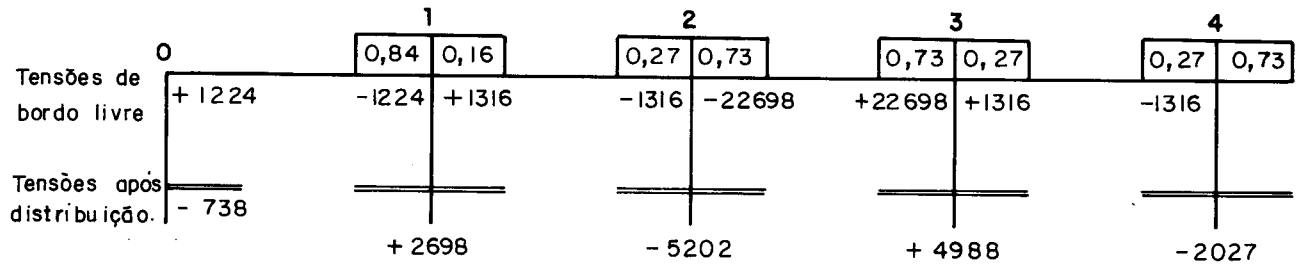
- Cargas nas chapas p_i, devido a R_i

$$p_1 = +0,375 \text{ tf/m} \quad p_2 \cong +13,09 \text{ tf/m} \quad p_3 = -27,823 \text{ tf/m}$$

$$p_4 \cong +13,09 \text{ tf/m} \quad p_5 = 0$$

- Tensões longitudinais

Esforços nas chapas	$M = p.L / \pi^2$ (tf/m) Z - (m ³) $\sigma = \pm M/Z$ (kgf/cm ²)	Tensões de bordo livre (kgf/cm ²)	Tensões após distribuição (kgf/cm ²)
 <p>13,09</p> <p>4</p> <p>3</p> <p>④</p>	<p>$M = 444,2$</p> <p>$Z = 0,03375$</p> <p>$\sigma = 1316$</p>	 <p>1316</p> <p>1316</p>	 <p>2027</p> <p>4988</p>
 <p>27,828</p> <p>3</p> <p>2</p> <p>③</p>	<p>$M = 944,2$</p> <p>$Z = 0,00416$</p> <p>$\sigma = 22698$</p>	 <p>22698</p> <p>22698</p>	 <p>4988</p> <p>5202</p>
 <p>13,09</p> <p>2</p> <p>1</p> <p>②</p>	<p>$M = 444,2$</p> <p>$Z = 0,03375$</p> <p>$\sigma = 1316$</p>	 <p>1316</p> <p>1316</p>	 <p>5202</p> <p>2698</p>
 <p>0,375 tf/m</p> <p>1</p> <p>0</p> <p>①</p>	<p>$M = 12,72$</p> <p>$Z = 0,00104$</p> <p>$\sigma = 1224$</p>	 <p>1224</p> <p>1224</p>	 <p>2698</p> <p>738</p>



5. Flechas nas chapas a_{ij} (cm)

As flechas serão calculadas com: $a_{ij} = \frac{(\sigma_i - \sigma_j) \cdot L^2}{C_f \cdot E \cdot h_{ij}}$

$$C_f = \begin{cases} 9,6 & \text{problema (0)} \\ \pi^2 = 9,87 & \text{problemas (1),(2),(3)}. \end{cases}$$

Problema	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
(0)	$\frac{+14839813,13}{E}$	$\frac{-1021647,0}{E}$	$\frac{+938389,7}{E}$	$\frac{+154189,0}{E}$	0
(1)	$\frac{+45060967,2}{E}$	$\frac{+7046431,4}{E}$	$\frac{-36978495,5}{E}$	$\frac{+9091366,8}{E}$	0
(2)	$\frac{-2714516,1}{E}$	$\frac{-4720995,9}{E}$	$\frac{+20514955,4}{E}$	$\frac{-4865770,1}{E}$	0
(3)	$\frac{-46635386,5}{E}$	$\frac{+17870564,3}{E}$	$\frac{-69152297,5}{E}$	$\frac{+15868608,7}{E}$	0

por superposição de efeitos:

$$a_{ij} = (a_{ij})_0 + k_2 \cdot (a_{ij})_1 + k_3 \cdot (a_{ij})_2 + k_4 \cdot (a_{ij})_3$$

exemplo:

$$(a_1)_0 = \frac{[781,5 - (-282,0)] \cdot 1830^2}{9,6 \cdot E \cdot 25} = \frac{14839813,13}{E}$$

6. Rotação nas placas θ'

$$\theta'_{ij} = \frac{1}{h_{ij}} \left[a_{ij} \cdot (\cotg\alpha_i + \cotg\alpha_j) - \frac{a_{jk}}{\text{sen}\alpha_j} - \frac{a_{hi}}{\text{sen}\alpha_i} \right]$$

- Placa 2

$$\begin{aligned} \theta'_2 &= \frac{1}{h_2} \left[a_2 \cdot (\cotg\alpha_1 + \cotg\alpha_2) - \frac{a_3}{\text{sen}\alpha_2} - \frac{a_1}{\text{sen}\alpha_1} \right] \\ &= \frac{1}{150} \left[a_2 \cdot 0 - \frac{a_3}{0,6508} - \frac{a_1}{0,6508} \right] \quad \therefore \theta'_2 = \frac{a_3 - a_1}{97,62} \quad (6.1) \end{aligned}$$

- Placa 3

$$\begin{aligned} \theta'_3 &= \frac{1}{h_3} \left[a_3 (\cotg\alpha_3 + \cotg\alpha_2) - \frac{a_4}{\text{sen}\alpha_3} - \frac{a_2}{\text{sen}\alpha_2} \right] \\ &= \frac{1}{50} \left[a_3 (-2,332) + \frac{a_2 + a_4}{0,6508} \right] \\ \therefore \theta'_3 &= -0,0466 \cdot a_3 + \frac{a_2 + a_4}{32,54} \quad \dots (6.2) \end{aligned}$$

- Placa 4

$$\begin{aligned} \theta'_4 &= \frac{1}{h_4} \left[a_4 \cdot (\cotg\alpha_3 + \cotg\alpha_4) - \frac{a_5}{\text{sen}\alpha_4} - \frac{a_3}{\text{sen}\alpha_3} \right] \\ \therefore \theta'_4 &= \frac{a_3}{97,62} \quad \dots (6.3) \end{aligned}$$

Anteriormente, fora adotado:

$$\theta'_{20} = \frac{h_2}{E I_{p1}} = \frac{150}{E \cdot 6075} \cong \frac{0,0247}{E} = \theta'_{40}$$

$$\theta'_{30} = \frac{h_3}{E I_{p_2}} = \frac{50}{E \cdot 8333} = \frac{0,006}{E}$$

$$\theta'_2 = k_2 \cdot \theta'_{20} = 10^5 \cdot k_2 \cdot \frac{0,0247}{E} \quad \dots (6.4)$$

$$\theta'_3 = k_3 \cdot \theta'_{30} = 10^5 \cdot k_3 \cdot \frac{0,006}{E} \quad \dots (6.5)$$

$$\theta'_4 = k_4 \cdot \theta'_{40} = 10^5 \cdot k_4 \cdot \frac{0,0247}{E} \quad \dots (6.6)$$

O coeficiente 10^5 nas expressões acima se deve ao fato de se ter utilizado multiplicador tf.m nos problemas (1), (2) e (3).

Igualando as rotações, tem-se:

$$k_2 \cdot \frac{0,0247 \cdot 10^5}{E} = \frac{a_3 - a_1}{97,62}$$

Com as expressões de a (item 5):

$$k_2 \cdot \frac{0,0247 \cdot 10^5}{E} = \frac{1}{E} \left[-142403,44 - 840396 k_2 + 237958,12 k_3 + \right. \\ \left. - 230658,79 k_4 \right]$$

$$\therefore -842865,19 k_2 + 237958,12 k_3 - 230658,79 k_4 = \\ = 142403,44 \quad \dots (I)$$

$$10^5 \cdot k_3 \cdot \frac{0,006}{E} = -0,0466 a_3 + \frac{a_2 + a_4}{32,54}$$

$$2219135,15 k_2 - 1251211,7 k_3 + 4259349,4 k_4 = + 70387,17 \quad \dots (II)$$

$$10^5 \cdot k_4 \cdot \frac{0,0247}{E} = \frac{a_3}{97,62}$$

$$-373800,4 k_2 + 210151,15 k_3 - 719851,614 k_4 = -9612,68$$

.... (III)

Resolvendo essas três equações, obtêm-se:

$$k_2 = -0,35549 \quad k_3 = -0,650372 \quad k_4 = +0,010685$$

7. Superposição de efeitos

7.1 - Cálculo das tensões longitudinais e dos momentos transversais no meio do vão (x = L/2)

TABELA III-4 - Tensões longitudinais σ_x

Aresta	Problema (o)	(1) · k ₂	(2) · k ₃	(3) · k ₄	Total (kgf/cm ²)
0	+731,5	-1357,92	+509,24	- 7,89	-75,12
1	-282,0	- 177,75	+379,17	+28,823	-51,75
2	+157,3	+ 929,61	-978,16	-55,583	+53,16
3	+ 22,8	-1007,46	+987,92	+53,296	+56,55
4	- 43,5	+ 421,26	-411,04	-21,66	-54,94

TABELA III-5 - Momentos transversais m

Aresta	Problema (o)	(1) · k ₂	(2) · k ₃	(3) · k ₄	Total (kgfm)
0	0	0	0	0	0
1	-10,0	0	0	0	-10,0
2	-46,9	-874,505	-422,74	+ 3,953	-494,7
3	-34,5	+106,647	-507,29	-41,565	-476,7
4	-36,3	-35,549	+182,10	+38,359	+148,6

- Diagramas:

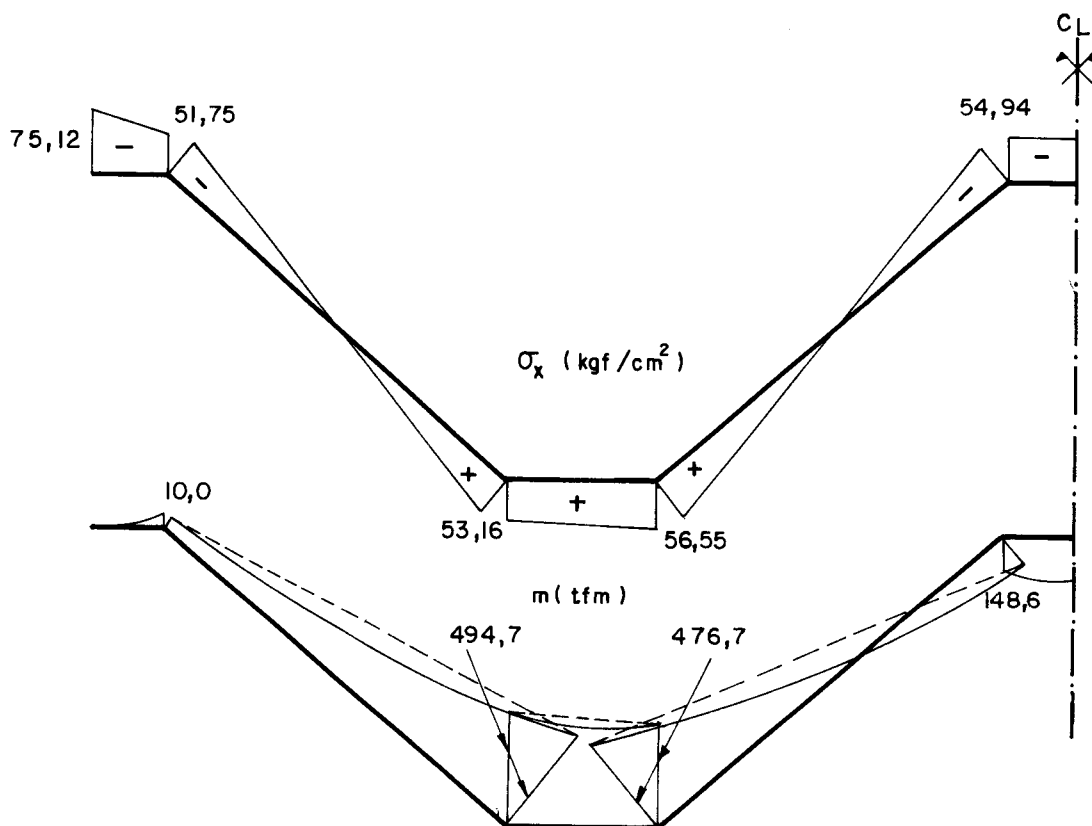


FIG III-8 - ESFORÇOS NO MEIO DO VÃO

7.2 - Cálculo das tensões longitudinais e dos momentos transversais nos quartos de vão ($x = L/4$ e $3L/4$)

Lembrando que:

- para as tensões longitudinais:
 - . no problema (o): variação parabólica;
 - . nos demais : variação senoidal;
- para os momentos transversais:
 - . no problema (o): constante em todas as seções;
 - . nos demais : variação senoidal;

tem-se:

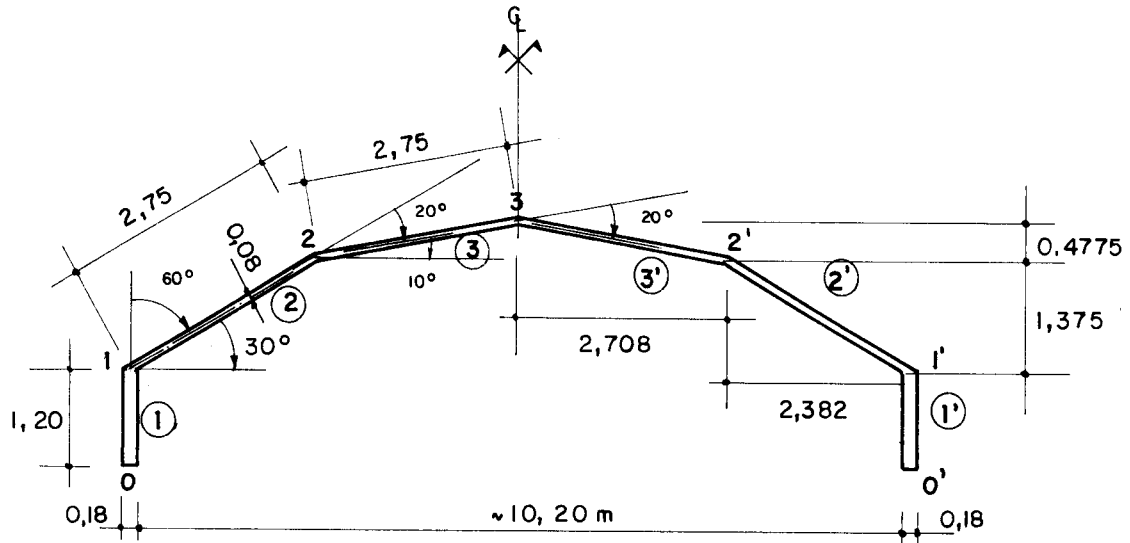
TABELA III.6 - Tensões longitudinais σ_x

Aresta	Problema (o)	(1)	(2)	(3)	Total (kgf/cm ²)
0	+586,0	-960,0	+360,0	-6,0	-20,0
1	-212,0	-126,0	+268,0	+20,0	-50,0
2	+118,0	+657,0	-692,0	-39,0	+44,0
3	+ 17,0	-712,0	+699,0	+38,0	+42,0
4	- 33,0	+298,0	-291,0	-15,0	-41,0

TABELA III.7 - Momentos Transversais m

Aresta	Problema (o)	(1)	(2)	(3)	Total (kgf/m)
0	0	0	0	0	0
1	-10,0	0	0	0	-10,0
2	-46,9	-618,0	+298,0	+2,8	-363,6
3	-34,5	+ 75,4	-358,7	-29,4	-347,2
4	-36,3	- 25,1	-128,8	-27,1	+ 94,5

III.3 - MÉTODO DE YITZHAKY²⁹



L = 19,80 m estrutura em concreto = $\gamma = 2500 \text{ kgf/m}^3$

FIG. III-9 - CARACTERÍSTICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL

1. Propriedades geométricas

$$Z_i = \frac{b_i \cdot h_i^2}{6} \quad A_i = b_i \cdot h_i$$

TABELA III.8

Chapa	A_i (m^2)	Z_i (m^3)
1	0,216	0,0432
2	0,22	0,10083
3	0,22	0,10083
4	0,22	0,10083

ângulos: ver item II.4.1
Fig. II-12

$$\alpha_1 = 60^\circ \quad \alpha_2 = 20^\circ$$

$$\alpha_3 = 20^\circ$$

$$\beta_{01} = 90^\circ \quad \beta_{12} = 30^\circ$$

$$\beta_{23} = 10^\circ$$

$$\beta_{32'} = 350^\circ = -10^\circ$$

2. Cálculo das cargas: (supor-se apenas atuação do peso próprio)

- Placa 1 : vigas de bordo

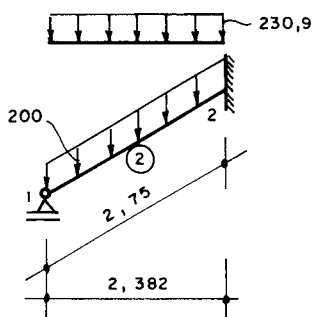
$$2500 \times 0,18 \times 1,20 = 540 \text{ kgf/m}$$

- Placas 2 , 3 :

$$2500 \times 0,08 = 200 \text{ kgf/m}^2$$

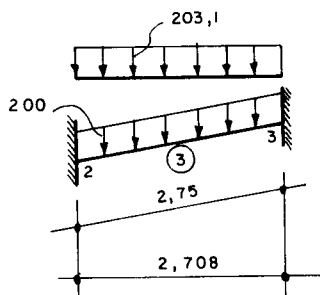
2.1 - Momentos de engastamento perfeito:

Considera-se a placa 2 apoiada na aresta 1 (despreza-se a rigidez à torsão das vigas de bordo)



$$200 \times \frac{h}{l} = 230,9$$

$$m_{21} = - \frac{g \cdot l^2}{8} = 165 \text{ kgfm/m chapa}$$

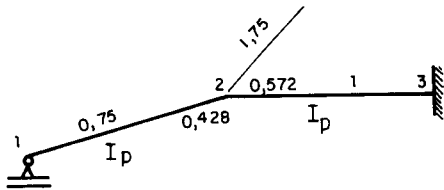


$$200 \times \frac{h}{l} = 203,1$$

$$m_{23} = -m_{32} = \frac{g \cdot l^2}{12} = 125 \text{ kgfm/m chapa}$$

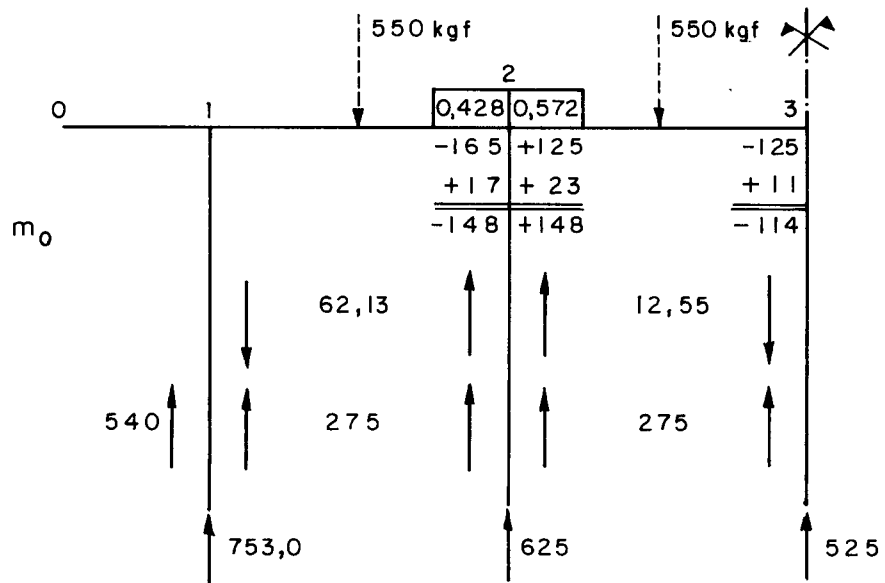
3. Efeito de placa contínua (Problema (o))

3.1 - Coeficientes de distribuição:



$$I_p = \frac{100 \cdot 8^3}{12} \approx 4267 \text{ cm}^4$$

3.2 - Compensação de momentos (kgf/m), cálculo das cargas R_i nas arestas e cálculo das cargas p nas chapas:



$$\Sigma F_v = 0$$

$$\text{carga} = 540 + 2550 = 1640 \text{ kgf}$$

$$1640 - \frac{525}{2} - 625 - 753 = 0$$

OK!

Os valores de R são então colocados na coluna 1 da Tabela III.9. Calcula-se então o esforço H (coluna 2), através da equação II.15 (ver item II.4.1):

$$H_j = \frac{R_j}{\operatorname{tg}\beta_{ij} - \operatorname{tg}\beta_{jk}} \quad \text{As cargas } p \text{ nas chapas podem ser calculadas com a II.18:}$$

$$p = S_{ji} - S_{ij} = \frac{l}{\cos\beta_{ij}} \cdot (H_j - H_i) = \frac{\Delta H}{\cos\beta_{ij}}$$

Assim, tem-se:

- para a viga de bordo:

$$H_1 = \frac{R_1}{\operatorname{tg}90^\circ - \operatorname{tg}30^\circ} = \frac{R_1}{\infty - \operatorname{tg}30^\circ} = 0$$

Os esforços na viga de bordo podem ser calculados com a II.16:

$$S_{ji} = \frac{H_j}{\cos\beta_{ij}} = \frac{R_j \cdot \cos\beta_{jk}}{\operatorname{sen}\alpha_j}$$

$$\therefore S_{10} = \frac{R_1 \cdot \cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ} = R_1 \quad \therefore p_1 = S_{10} = 753 \text{ kgf/m}$$

- para as chapas:

$$H_2 = \frac{R_2}{\operatorname{tg}30^\circ - \operatorname{tg}10^\circ} = \frac{625}{0,5773 - 0,1763} = 1558,5 \text{ kgf/m}$$

$$H_3 = \frac{R_3}{\operatorname{tg}10^\circ - \operatorname{tg}35^\circ} = \frac{525}{2 \cdot \operatorname{tg} 10^\circ} = 1488,7 \text{ kgf/m}$$

$$p_2 = \frac{1558,5 - 0}{\cos 30^\circ} = +1799,60 \text{ kgf/m}$$

$$p_3 = \frac{1488,7 - 1558,5}{\cos 10^\circ} = -70,9 \text{ kgf/m}$$

Coloca-se esses valores na coluna 3 da Tabela.

Tabela III - 9

CARREGAMENTO	ARESTA	CHAPA	R	H	$p = \frac{AH}{\cos \beta}$	TENSÕES DE	TENSÕES APTS	$\frac{A^2}{r}$	$C = \frac{A^2}{r^3}$	$C \cdot \delta$	$\frac{C \cdot \Delta \delta}{r}$	$C \cdot \theta'$	$C \cdot \theta''$	$C \cdot \theta'''$	
			(kgf/m) (1)	(kgf/m) (2)	(kgf/m) (3)	(kgf/cm ²) (4)	(kgf/cm ²) (5)	(kgf/cm ³) (6)	(kgf/cm ³) (7)	(kgf/cm ⁴) (8)	(kgf/cm ⁴) (9)	(kgf/cm ⁴) (10)			
Problema (0) sobre carga externa m' = 0	0	①			753,0	±85,42	+44,5	48,1	+0,401	+0,401					
	1	②	753,0	0	1799,6	±87,5	-3,6	21,9	+0,239	-0,195					
	2	③	625,0	1558,5	-70,9	±3,45	-25,5	238,2	+0,239	+0,596	238,2	-0,00611	0	-0,00611	
	3	④	525,0	1488,7	+70,9	±3,45	+14,4	270,8	-0,239	-0,837	270,8	+0,0106	0	+0,0106	
	2'	⑤	625,0	1558,5			-25,5	270,8	+0,239	+0,596	270,8				
	C = 9,6E/L ²														
	0					-419,82	±38,6	-57,2	-133	-1,1083	-1,1083				
	1	①				2272,32	±89,51	+75,8	192,7	-1,1083	-1,1083	-5,786			
	2	②	+739,1	1967,33	-4124,30	±162,47	-116,9	-266,5	238,2	+1,756	+4,378	238,2	-0,05904	-0,01082	-0,06936
	3	③	-738,56	-2094,61	+4124,30	±162,47	+139,6	270,8	-1,894	-5,372	-5,372	-9,75	-0,00541	+0,03659	
2'	④	+789,1				-116,9	270,8	+1,756	+4,378	270,8					
C = 9,87E/L ²															
Problema (2) m ₃ ' = 1000kgfm m ₃ ' = 190,6 kgfm	0				0	0	+16,5	49,6	+0,413	+0,413					
	1	①		0	-1063,13	±41,88	-33,1	-106,4	-1,075	+3,093					
	2	②	-369,28	-920,67	3061,21	±120,59	+73,3	170,2	-1,075	-2,680	238,2	+0,03605	-0,002704	+0,03335	
	3	③	+738,56	+2094,61	-3061,21	±120,59	-96,9	270,8	+1,257	+3,565	270,8	-0,04612	-0,01082	-0,03659	
	2'	④	-369,28				+73,3	270,8	-1,075	-2,680	270,8				
	C = 9,87E/L ²														
Carregamento real	0						+47,5								
	1						-9,7			+0,467					
	2						-11,91			+0,1162				0	
	3						-3,62			-0,1985				0	
2'							-11,91								

3.3 - Tensões longitudinais devido às cargas nas chapas:

As tensões de bordo livre são calculadas com a equação II.20:

$$\sigma_x = \frac{M}{Z} = \pm \frac{C_s \cdot p \cdot 6}{b \cdot h^2} \quad \text{Tração} = (+)$$

$L^2/8$, no problema (o)

$$C_s = \begin{cases} L^2/8 & L = 19,80\text{m} \\ L^2/\pi^2 = L^2/9,87 & \text{nos demais;} \end{cases}$$

- exemplo: chapa (1)

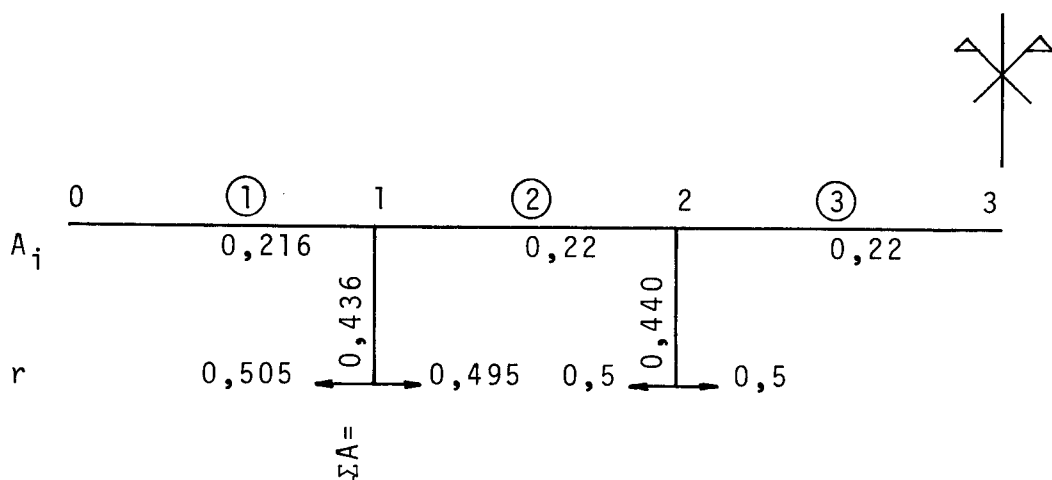
$$\sigma_x = \frac{753 \times 19,8^2}{8 \times 0,0432} = 854184,4 \text{ kgf/m}^2 = 85,42 \text{ kgf/cm}^2$$

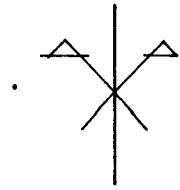
Na coluna (4):

$$\sigma_x = \begin{matrix} \text{aresta 0} \\ \pm 85,42 \text{ kgf/cm}^2 \\ \text{aresta 1} \end{matrix}$$

O cálculo dos coeficientes de distribuição de tensões será feito através das equações II.31, item II.4.3:

$$r_{ji} = \frac{A_{jk}}{A_{ij} + A_{jk}} \quad r_{jk} = \frac{A_{ij}}{A_{ij} + A_{jk}}$$





- compensação (tf/m²) 1

0	1		2		3
	0,505	0,495	0,5	0,5	
+854	-854	+875	-875	- 35	+ 35 *
-437 ←	+873	-856 →	+428		
		-103 ←	+206	-206 →	+103
+ 26 ←	- 52	+ 51 →	- 26		
		- 6 ←	+ 13	- 13 →	+ 6
+ 2 ←	- 3	+ 3 →	- 2		
			+ 1	- 1	
<u>+44,5</u>	<u>-3,6</u>	<u>-3,6</u>	<u>-25,5</u>	<u>-25,5</u>	<u>+14,4</u> **

* Tensões de bordo livre

** Tensões após distribuição (kgf/cm²)

Colocam-se os valores finais na coluna (5).

3.4 - Cálculo dos giros de corda θ' :

Os giros θ' podem ser obtidos com o auxílio das equações II.55, II.53' e II.54':

$$\theta'_{jk} = \frac{\delta_k - \delta_j}{l_{jk}}$$

$$CF_j = \frac{\sigma_i - \sigma_j}{l_{ij}} - \frac{\sigma_j - \sigma_k}{l_{jk}}, \text{ onde } C = \frac{C_f \cdot E}{L^2}$$

Assim, tem-se:

$$CF_1 = \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{h_j \cos 90^\circ} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{l_2} = \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{h_1} - \cos 90^\circ \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{l_2} = \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{h_1}$$

$$\therefore CF_1 = \frac{44,5 + 3,6}{120} = +0,401 \text{ kgf/cm}^2$$

$$CF_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{l^2} - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{l^3} = \frac{21,9}{238,2} - \frac{(-39,9)}{270,8} = +0,239 \text{ kgf/cm}^3$$

$$CF_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{l^3} - \frac{\sigma_3 - \sigma_{3'}}{l_{3'}} = \frac{-39,9}{270,8} - \frac{39,9}{270,8} = -0,295 \text{ kgf/cm}^3$$

Esses valores são colocados na coluna (6).

$$C \cdot \delta_j = \frac{C \cdot F_j}{\text{tg} \beta_{ij} - \text{tg} \beta_{jk}}$$

- aresta 1:

Com o auxílio das (II.53) e (II.48')

$$C \cdot \delta_j = C \cdot \frac{a_{ij} \cdot \cos \beta_{jk} - a_{jk} \cdot \cos \beta_{ij}}{\text{sen} \alpha_j} = C \cdot \frac{a_{ij} \cdot \cos 30^\circ}{\text{sen} 60^\circ} = C \cdot a_{ij}$$

$$C \cdot a_{ij} = C \cdot a_1 = \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{h_1} = CF_1 \quad \therefore C \cdot \delta_1 = CF_1 = +0,401$$

- aresta 2:

$$C \cdot \delta_2 = \frac{+0,239}{\text{tg} 30^\circ - \text{tg} 10^\circ} = 0,596$$

- aresta 3:

$$C \cdot \delta_3 = \frac{-0,295}{2 \times 0,1763} = -0,837$$

Os valores $C\delta$ são colocados na coluna 7 .

Calculam-se então os giros de corda, para cada chapa:

- Chapa 2 :

$$C \cdot \theta'_{12} = \frac{C \cdot (\delta_1 - \delta_2)}{l_{12}} = \frac{(0,401 - 0,596)}{238,2} = - \frac{0,195}{238,2}$$

- Chapa 3 :

$$C \cdot \theta'_{23} = \frac{C \cdot (\delta_2 - \delta_3)}{l_{23}} = \frac{(0,596 + 0,837)}{270,8} = \frac{+1,433}{270,8}$$

- Chapa 3' :

$$C \cdot \theta'_{32'} = \frac{C \cdot (\delta_3 - \delta_{2'})}{l_{32'}} = \frac{-1,433}{270,8}$$

Os giros de corda totais nas arestas serão:

- aresta 2:

$$C \cdot \theta'_2 = C \cdot (\theta'_{12} + \theta'_{23}) = \frac{C \cdot \Delta\delta_2}{l_2} - C \cdot \frac{\Delta\delta_3}{l_3}$$

$$\therefore C \cdot \theta'_2 = \frac{-0,195}{238,2} - \frac{1,433}{270,8} = -0,00611$$

- aresta 3 :

$$C \cdot \theta'_3 = C \cdot (\theta'_{23} - \theta'_{32'}) = \frac{C \cdot \Delta\delta_3}{l_3} - \frac{C \cdot \Delta\delta_{3'}}{l_{3'}}$$

$$C \cdot \theta'_3 = \frac{1,433}{270,8} - \frac{(-1,433)}{270,8} = + 0,0106$$

Esses valores são colocados na coluna 8 .

Lembrando que, no problema (o), os giros elásticos θ'' são nulos (ver itens II.3.3.2 e II.5.3), os giros de nã serão:

$$C \cdot \theta = C \cdot \theta' \quad , \text{ problema (o)}$$

$$C \cdot \theta = C \cdot \theta' + C \cdot \theta'' \quad , \text{ nos demais}$$

Os giros $C \cdot \theta''$ e $C \cdot \theta$ são colocados respectivamente nas colunas 9 e 10 .

4. Efeito da continuidade

4.1 - Problema (1): momento unitário nas arestas 2 e 2'

$$m'_2 = m'_{2'} = 1 \text{ tfm} = 1000 \text{ kgfm}$$

- variação senoidal:

$$m'_2 = m'_{2'} = 1000 \text{ sen } \pi x/L$$

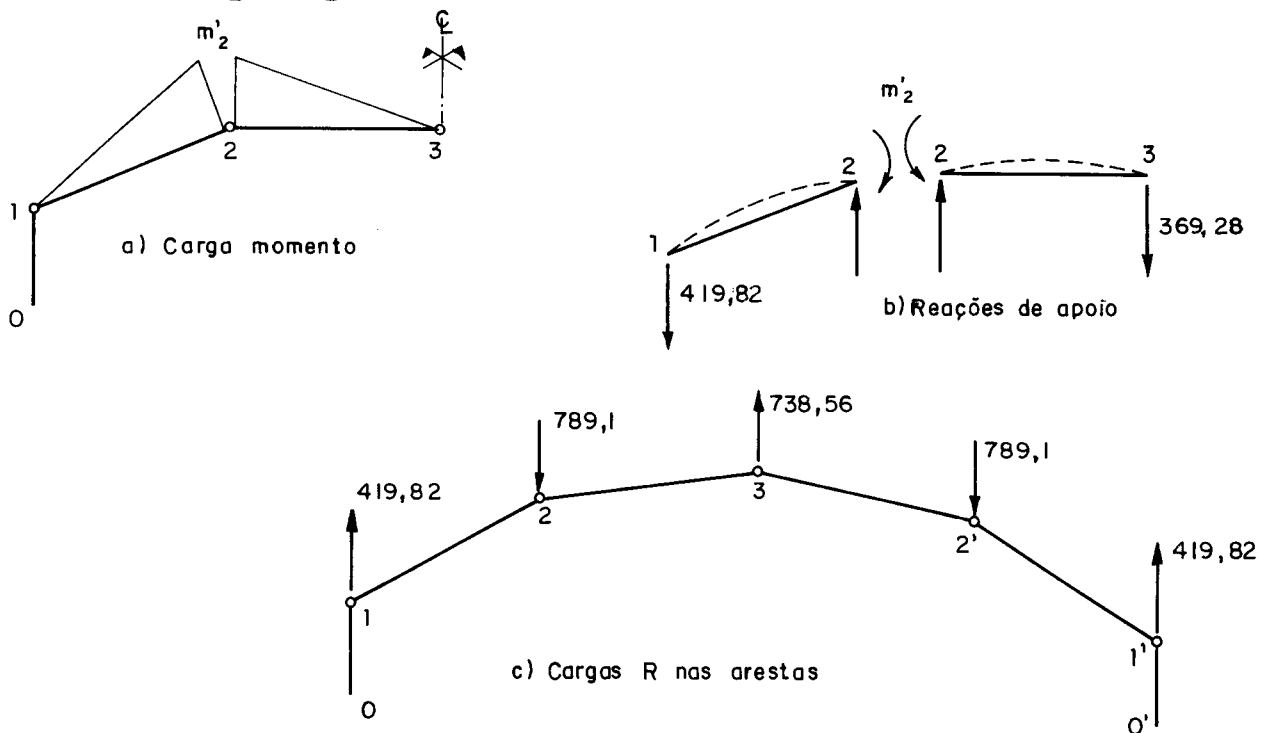


FIG. III-10 - PROBLEMA (1)

- reações de apoio das placas biapoiadas (cargas nas arestas):

Têm-se (Fig. III-10):

$$R_1 = \frac{m_2'}{l_2} = \frac{1000}{2,382} = 369,28 \text{ kgf/m chapa}$$

$$R_2 = R_1 + R_3 \approx 789,1 \text{ kgf/m chapa}$$

$$R_3 = 2 \times 369,28 = 738,56 \text{ kgf/m chapa}$$

(atuação simultânea de m_2' e $m_{2,1}'$).

Repete-se agora, na própria Tabela os cálculos feitos no problema (o), até encontrar-se os valores θ' . As tensões no problema (1) foram encontradas após distribuição (coluna (5)):

0	1		2		3	
	0,505	0,495	0,5	0,5		
-386	+386	+895	-895	-1625	+1625	Tensões de bordo livre ($C_S = \frac{L^2}{9,87}$)
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	
-57,2	+75,8	+75,8	-116,9	-116,9	+139,6	Tensões finais (kgf/cm ²)

4.1.1 - Cálculo dos giros elásticos θ''

$$(\theta_2'')_1 = (\theta_{2,1}'')_1 = \left(\frac{h_2}{3EI_{p2}} + \frac{h_3}{3EI_{p3}} \right) \cdot m_2'$$

$$I_{p2} = I_{p3} = I_p = 4267 \text{ cm}^4 \quad h_2 = h_3 = 275 \text{ cm}$$

$$C = \frac{C_f \cdot E}{L^2}$$

$$m_2' = 1000 \text{ kgfm} = 100.000 \text{ kgfcm}$$

$$\begin{aligned} \therefore C \cdot (\theta_2'')_1 &= C \cdot (\theta_2'')_1 = C \cdot \left(\frac{h_2}{3EI_p} + \frac{h_3}{3EI_p} \right) \cdot 100.000 = \\ &= \frac{C_f}{L^2} \cdot \frac{2h}{3I_p} \cdot 100.000 \\ &= \frac{9,87}{1980^2} \times \frac{2 \times 275}{3 \times 4267} \times 100.000 = -0,01082 \end{aligned}$$

$$C \cdot (\theta_3'')_1 = \frac{2 \times C_f \times h \times 100.000}{6 \times L^2 \times I_p} = -0,00541$$

O sinal (-) é colocado porque os giros θ'' ocorrem em sentido contrário àquele arbitrado para os momentos positivos.

4.2 - Problema (2):

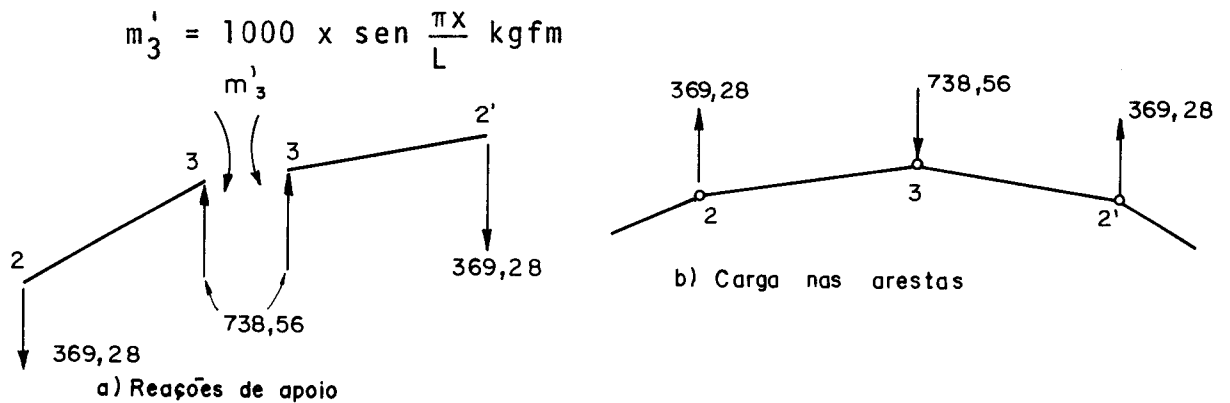


FIG. III - II - PROBLEMA (2)

Distribuição das tensões (tf/m^2)

	1		2		3	
	0,505	0,495	0,5	0,5		
Tensões de bordo livre	0	-419	+419	+1206	-1206	
Tensões finais (kgf/cm^2)	+16,5	-33,1	-33,1	+73,3	+73,3	-96,9

4.2.1 - Cálculo dos giros elásticos θ''

$$C \cdot (\theta_2'')_2 = \frac{C_f \cdot h \cdot 100000}{6 L^2 I_p} = - 0,002704$$

$$C \cdot (\theta_3'')_2 = - 0,01082$$

5. Equações de compatibilidade de deslocamentos. Cálculo de m_2' e m_3'

Das equações (II.9), tem-se:

$$\theta_2 = 0 = \theta_{20} + \theta_{21} \cdot m_2' + \theta_{22} \cdot m_3'$$

$$\theta_3 = 0 = \theta_{30} + \theta_{31} \cdot m_2' + \theta_{32} \cdot m_3'$$

$$C_1 \cdot \theta_{20} + C_2 \cdot \theta_{21} \cdot m_2' + C_2 \cdot \theta_{22} \cdot m_3' = 0 \quad (1) \quad C_1 = 9,6$$

$$C_1 \cdot \theta_{30} + C_2 \cdot \theta_{31} \cdot m_2' + C_2 \cdot \theta_{32} \cdot m_3' = 0 \quad (2) \quad C_2 = 9,87$$

onde θ_{ij} = giro de nó i, devido à carga do problema j.

Com os valores da coluna 10, Tabela III.9:

$$\frac{9,87}{9,6} \cdot (-0,00611) + \frac{(-0,06986)}{1000} \cdot m_2' + \frac{0,03335}{1000} m_3' = 0 \quad (1)$$

$$\frac{9,87}{9,6} \cdot (+0,0106) + \frac{0,06659}{1000} m_2' + \frac{(-0,05694)}{1000} \cdot m_3' = 0 \quad (2)$$

Resolvendo, obtêm-se:

$$m_2' = m_2' = + 3,2 \text{ kgfm}$$

$$m_3' = + 190,6 \text{ kgfm}$$

6. Superposição de efeitos:

$$(r) \equiv (o) + m_2' \cdot (1) + m_3' \cdot (2)$$

$$m_2 = (m_2)_o + m_2' = 148 + 3,2 \approx 151,2 \text{ kgfm}$$

$$m_3 = (m_3)_o + m_3' = 114 + 190,6 = 304,6 \text{ kgfm}$$

$$R = (R)_o + \frac{m_2'}{1000} \cdot (R)_1 + \frac{m_3'}{1000} \cdot (R)_2$$

$$\sigma = (\sigma)_o + \frac{m_2'}{1000} \cdot (\sigma)_1 + \frac{m_3'}{1000} \cdot (\sigma)_2$$

$$\delta = (\delta)_o + \frac{m_2'}{1000} \cdot (\delta)_1 + \frac{m_3'}{1000} \cdot (\delta)_2$$

- Exemplo - aresta 1

$$C \cdot \delta_1 = \frac{9,87}{9,6} \cdot 0,401 + \frac{3,2}{1000} \cdot (-1,1083) + \frac{190,6}{1000} \cdot (+0,413) =$$

$$C \cdot \delta_1 = +0,487, \text{ onde } C = \frac{9,87 E}{L^2}$$

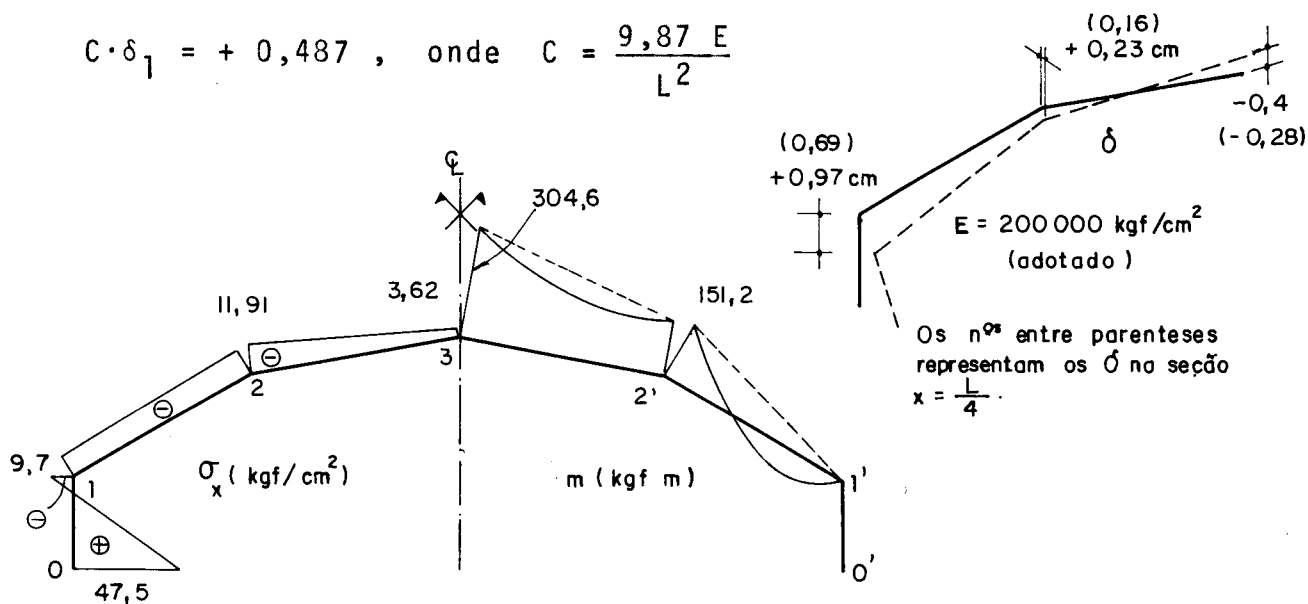


FIG. III-12 - TENSÕES LONGITUDINAIS σ , MOMENTOS TRANSVERSAIS m E DESLOCAMENTOS δ NA SEÇÃO CENTRAL ($x = \frac{L}{2}$).

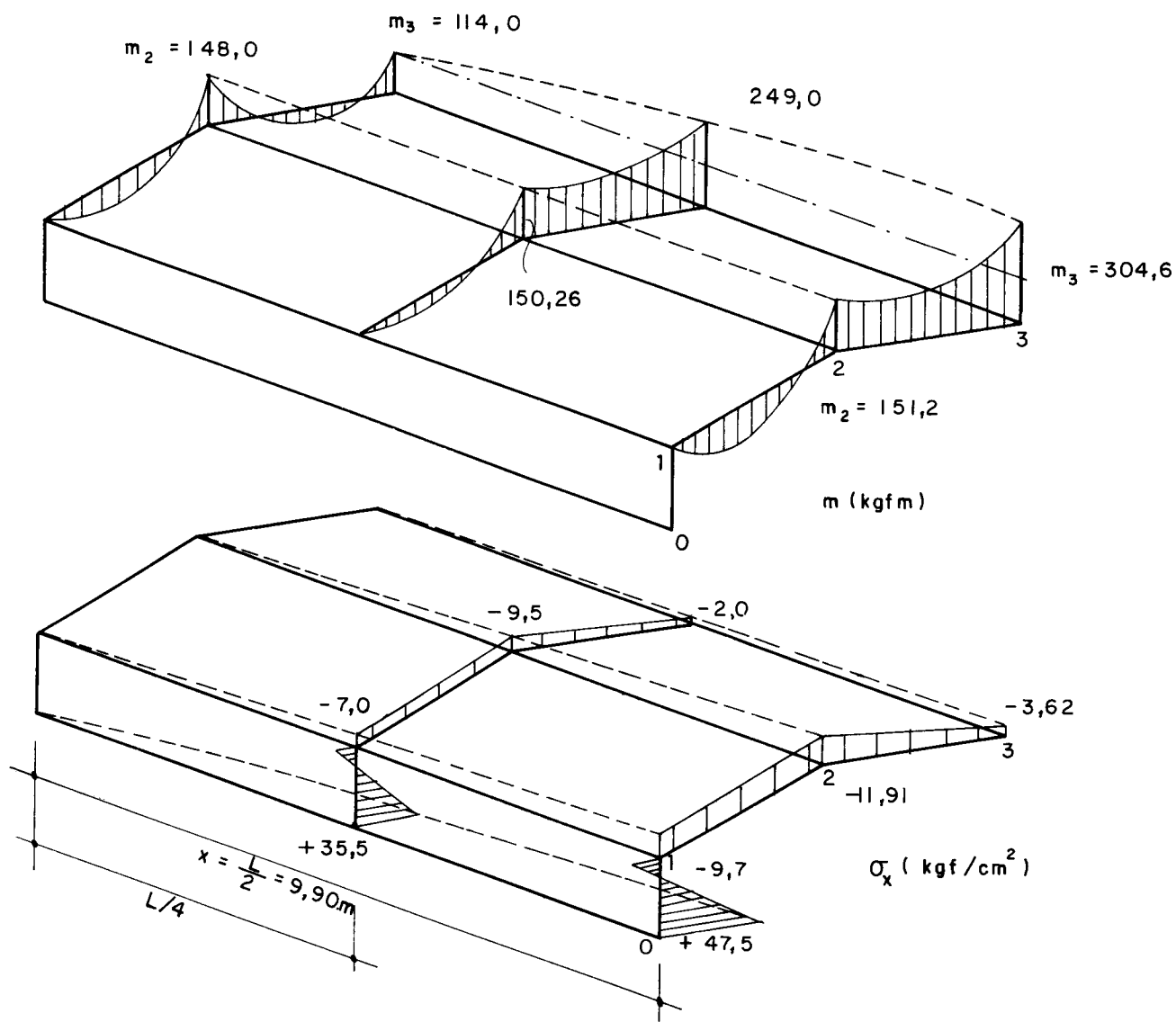


FIG. III-13- VARIAÇÃO LONGITUDINAL DOS MOMENTOS TRANSVERSAIS m E DAS TENSÕES LONGITUDINAIS σ .

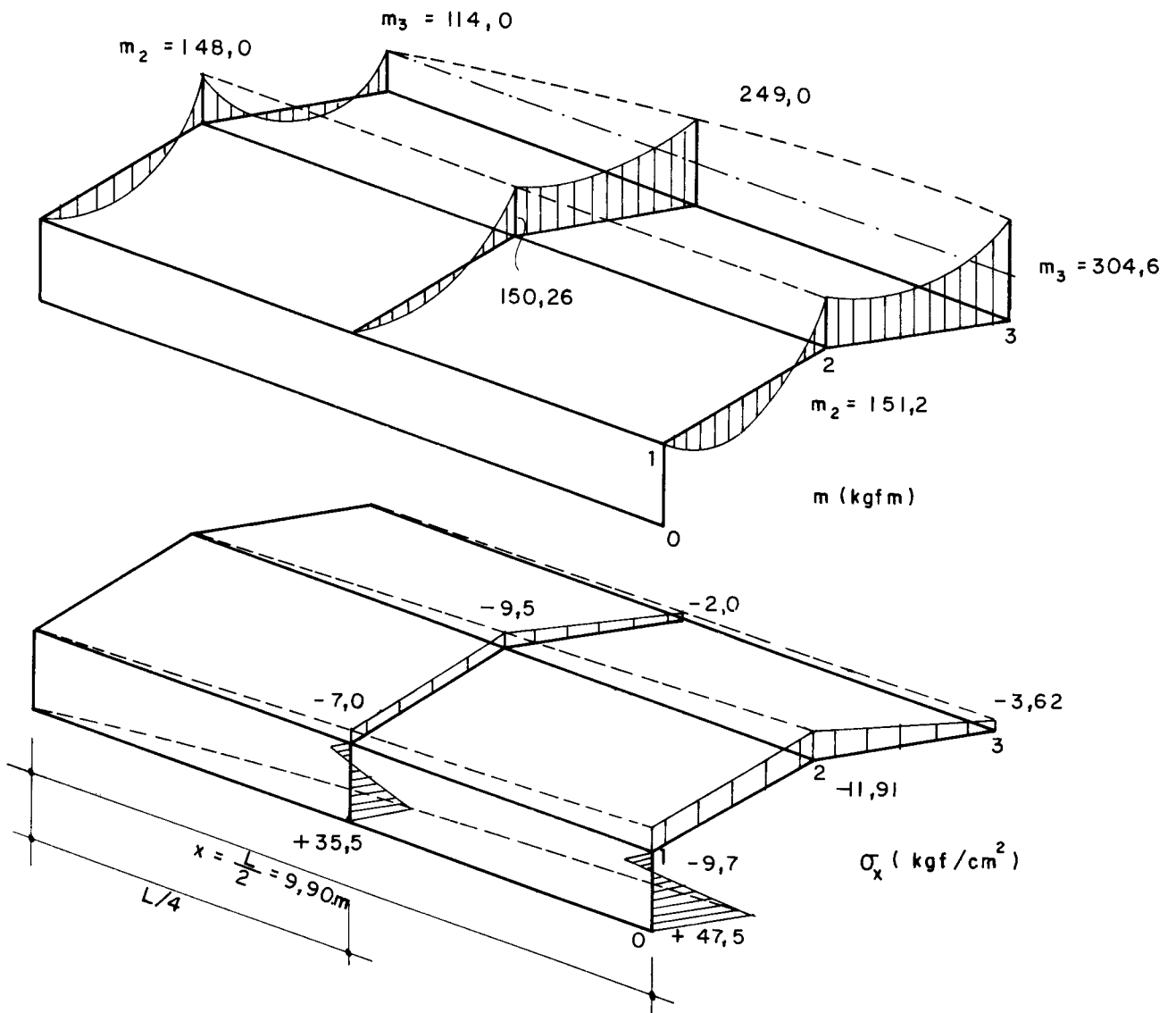


FIG. III-13- VARIAÇÃO LONGITUDINAL DOS MOMENTOS TRANSVERSAIS m E DAS TENSÕES LONGITUDINAIS σ .

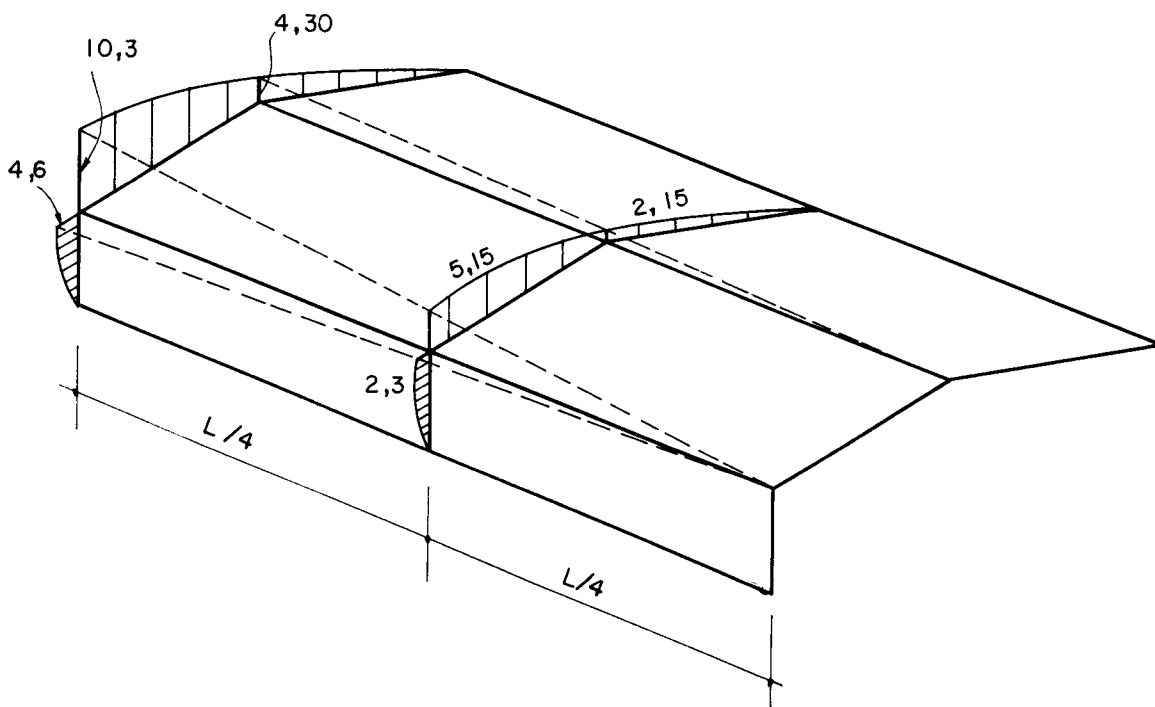


FIG. III-14 - TENSÕES CISALHANTES τ (kgf/cm²)

- Variação longitudinal: (Fig. III-13):

- Momentos fletores: variação senoidal

exemplo: aresta 3, para $x = \frac{L}{4}$

$$m_3' = 190,6 \cdot \text{sen } 45^\circ \cong 134,75 \text{ kgfm}$$

$$\therefore m_3 = 114 + 134,75 = 248,75 \cong 249 \text{ kgfm}$$

- Tensões longitudinais

- Problema (o): variação parabólica

- demais problemas: variação senoidal

$$\therefore \sigma_{x=L/4} = 0,75(\sigma)_o + 0,707 \left[\frac{m_2'}{1000}(\sigma)_1 + \frac{m_3'}{1000}(\sigma)_2 \right]$$

exemplo: aresta 1

$$\sigma_{x=L/4} = 0,75 \cdot (+44,5) + 0,707 \cdot \left[-0,1830 + 3,145 \right] = 35,469 \cong 36,5$$

8. Forças longitudinais de bordo e tensões cisalhantes

Os valores de T podem ser obtidos com as equações (II.33):

$$T_j = T_i + \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \cdot A_{ij}$$

Assim, têm-se:

$$T_1 = \frac{47,5 - 9,7}{2} \cdot 10^4 \cdot 0,216 = 40824 \text{ kgf}$$

$$T_2 = 40824 + \frac{-9,7 - 11,91}{2} \cdot 2200 = 17053 \text{ kgf}$$

$$T_3 = 17053 + \frac{-11,91 - 3,62}{2} \cdot 2200 = 0$$

Esses valores de T englobam o efeito das cargas externas somado com o efeito dos deslocamentos das arestas. Poder-se-ia calcular T_1 e T_2 (ver item II.4.4, equação (II.44)), mas, para simplificar, calculam-se as tensões cisalhantes através da (II.40'):

$$\tau_{\max} = \frac{4 T_{\max}}{b \cdot L}$$

Assim, tem-se:

- aresta 1, Chapa 1 :

$$\tau_{\max} = \frac{4 \cdot 40824}{18 \cdot 1980} \cong 4,60 \text{ kgf/cm}^2$$

- aresta 1, Chapa 2 :

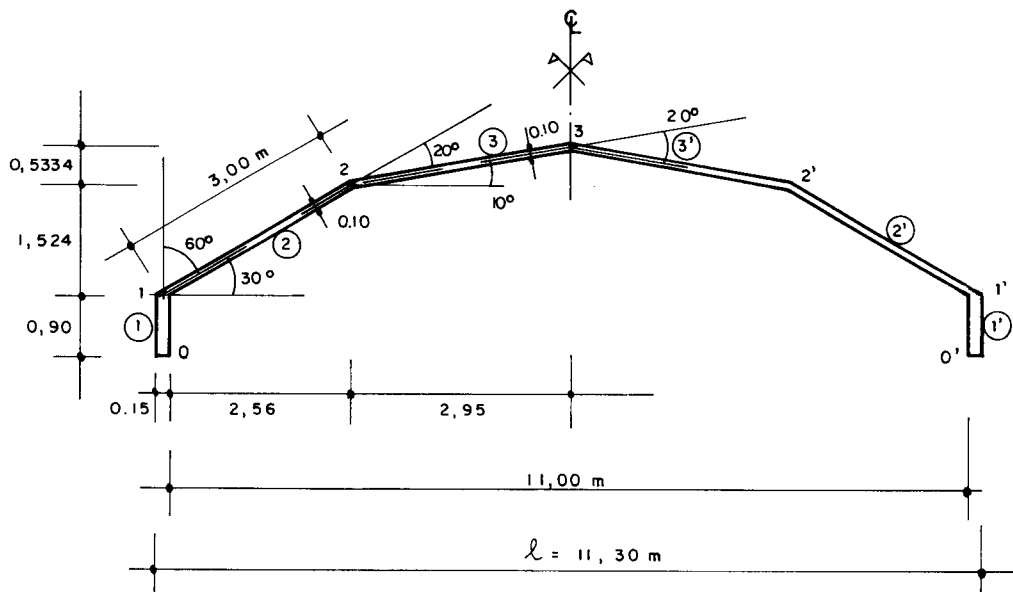
$$\tau_{\max} = \frac{4 \cdot 40824}{8 \cdot 1980} \cong 10,3 \text{ kgf/cm}^2$$

- aresta 2, Chapas 2 e 3 :

$$\tau_{\max} = \frac{4 \cdot 17053}{8 \cdot 1980} \cong 4,30 \text{ kgf/cm}^2$$

Lembrando que τ varia linearmente na direção longitudinal, tem-se o diagrama da Fig. III-14.

III.4 - MÉTODO RECOMENDADO PELA A.S.C.E.



L = 21,5 m estrutura em concreto : $\gamma = 2500 \text{ kgf/m}^3$

E = 200 000 psi =
140 600 kgf/cm²

Cargas: carga permanente = 100 kgf/m²
sobrecarga = 50 kgf/m²

FIG. III-15 - CARACTERÍSTICAS DA ESTRUTURA.

1. Características geométricas:

TABELA III.10

Chapa	Z_i (m ³)	A_i (m ²)
1	0,02025	0,135
2	0,1500	0,300
3	0,1500	0,300
3'	0,1500	0,300

$$Z_i = \frac{b_i \cdot h_i^2}{6} \quad A_i = b_i \cdot h_i$$

Ângulos: ver item II.4.1, Fig. II-12

$$\alpha_1 = 60^\circ \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 20^\circ$$

$$\beta_{01} = 90^\circ \quad \beta_{12} = 30^\circ$$

$$\beta_{23} = 10^\circ \quad \beta_{32'} = -10^\circ = 350^\circ$$

2. Cálculo das cargas:

- placa 1 : vigas de bordo

$$\text{peso próprio} = 2500 \times 0,15 \times 0,9 \cong 338 \text{ kgf/m}$$

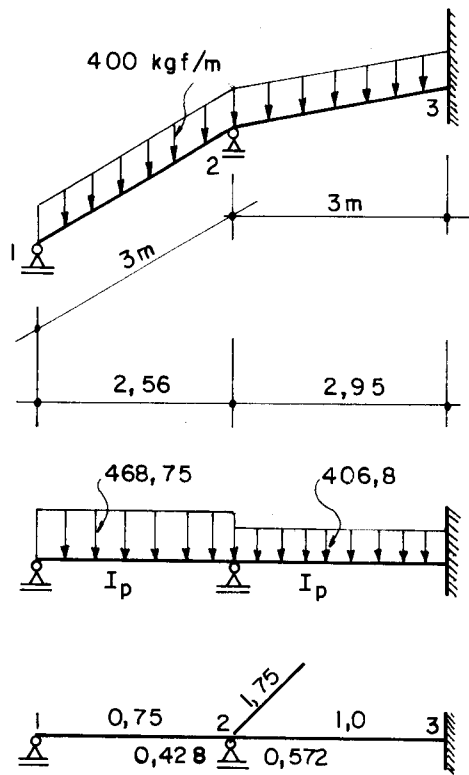
- placas 2 , 3

$$\begin{aligned} \text{peso próprio} &= 2500 \times 0,1 = 250 \text{ kgf/m}^2 \\ \text{carga permanente} &= 100 \text{ kgf/m}^2 \\ \text{sobrecarga} &= 50 \text{ kgf/m}^2 \\ \hline g &= 400 \text{ kgf/m}^2 \end{aligned}$$

3. Efeito de placa contínua (Problema (o)): Análise elementar

3.1 - Momentos de engastamento perfeito:

Considera-se a chapa 2 apoiada na aresta 1 (despreza-se a rigidez à torção das vigas de bordo).



$$m_{21} = -468,75 \cdot \frac{2,56^2}{8} \approx$$

$$\approx -385 \text{ kgfm/m chapa}$$

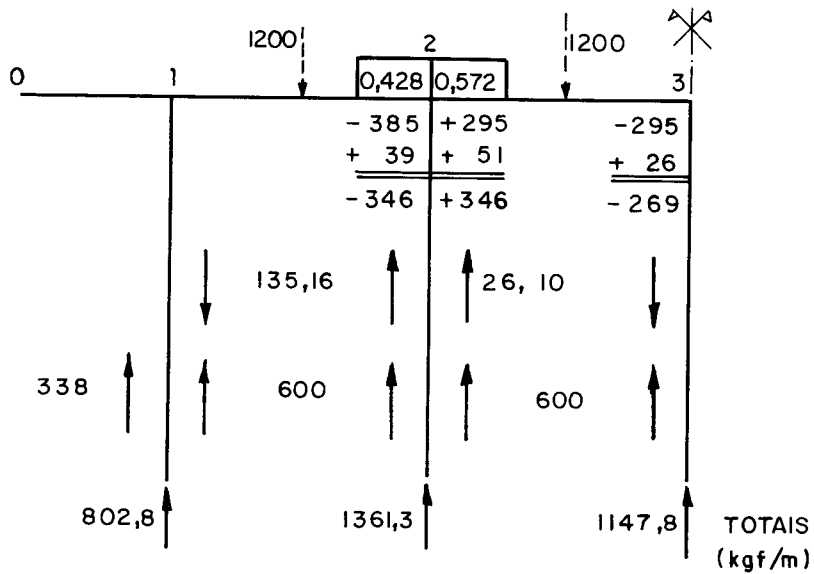
$$m_{23} = -m_{32} = 406,8 \cdot \frac{2,95^2}{8} \approx$$

$$\approx 295 \text{ kgfm/m chapa}$$

$$I_p = \frac{100 \cdot 10^3}{12} \approx 8333 \text{ cm}^4$$

3.2 - Compensação de momentos (kgfm) e cálculo das cargas

R_i nas arestas



$$\text{Carga} = 338 + 2 \cdot 1200 = 2738 \text{ kgf}$$

$$2738 - 802,8 - 1361,3 - \frac{1147,8}{2} = 0$$

$$\Sigma F_v = 0$$

OK!

3.3 - Cálculo do carregamento de chapa

As cargas nas chapas serão obtidas com o auxílio das (II.16) e (II.18):

$$p_j = S_{ji} - S_{ij} = \frac{R_j \cdot \cos \beta_{jk}}{\text{sen} \alpha_j} - \frac{R_i \cdot \cos \beta_{hi}}{\text{sen} \alpha_i}$$

$$p_1 = \frac{R_i \cdot \cos 30^\circ}{\text{sen} 60^\circ} = R_1 = 802,8 \text{ kgf/m de chapa}$$

$$p_2 = \frac{R_2 \cdot \cos 10^\circ}{\text{sen} 20^\circ} - \frac{R_1 \cdot \cos 90^\circ}{\text{sen} 60^\circ} \cong 3919,71 \text{ kgf/m}$$

$$p_3 = \frac{1147,8 \cdot \cos 350^\circ}{\text{sen} 20^\circ} - \frac{1361,3 \cdot \cos 30^\circ}{\text{sen} 20^\circ} = -141,97 \text{ kgf/m}$$

3.4 - Cálculo das tensões normais:

- Tensões normais de bordo livre: equação (II.20)

$$\sigma = \pm \frac{M}{Z} = \pm \frac{C_s \cdot p}{Z} \quad \text{Tração} = (+)$$

$$C_s = \begin{cases} L^2/8, & \text{no problema (o)} \\ L^2/\pi^2, & \text{nos demais} \end{cases} \quad L = 21,5 \text{ m}$$

- Chapa 1 : $\sigma = \frac{802,8 \cdot 21,5^2}{8 \cdot 0,02025} \cong \pm \frac{0}{1} 229 \text{ kgf/cm}^2$

- Chapa 2 : $\sigma = \frac{3919,7 \cdot 21,5^2}{8 \cdot 0,15} \cong \pm \frac{1}{2} 151 \text{ kgf/cm}^2$

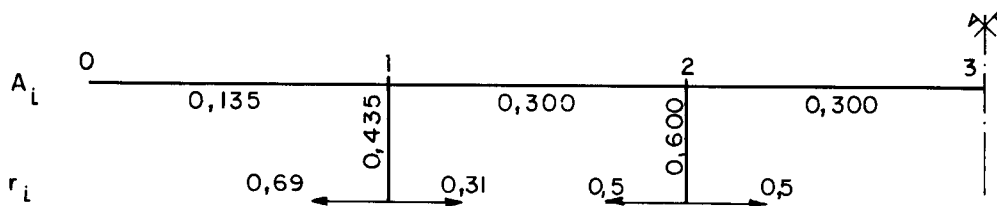
- Chapa 3 : $\sigma = - \frac{142 \cdot 21,5^2}{8 \cdot 0,15} \cong \pm \frac{2}{3} 5,5 \text{ kgf/cm}^2$

os números junto aos sinais se referem às arestas

- Distribuição de tensões:

Calcula-se os coeficientes através das equações (II.31), item II.4.3:

$$r_{ji} = \frac{A_{jk}}{A_{ij}+A_{jk}} \qquad r_{jk} = \frac{A_{ij}}{A_{ij}+A_{jk}}$$



	1		2		3	
0	0,69	0,31	0,5	0,5		
+229	-229	+151	-151	-5	+5	Tensões de bordo livre
-131 ←	+262	-118	+59	-43	+22	
+7 ←	-15	+7	-4	-2	+1	
		-1	+2	-2		
		-1				
+105	+17	+17	-50	-50	+28	Tensões após distribuição

3.5 - Cálculo das flechas das chapas:

Da equação (II.48'), tem-se:

$$a_{ij} = \frac{(\sigma_i - \sigma_j) \cdot L^2}{C_f \cdot E \cdot h_{ij}} \qquad C_f = \begin{cases} 9,6 & \text{, problema (o)} \\ \pi^2 = 9,87 & \text{, nos demais} \end{cases} \quad (\text{Tab. II.1})$$

$$h_1 = 0,90\text{m} ; \quad h_2 = h_3 = 3\text{m} \qquad E = 2.000.000 \text{ psi} \cong$$

$$\cong 140.600 \text{ kgf/cm}^2$$

Assim, tem-se:

$$a_1 = \frac{(105-17) \cdot 2150^2}{9,6 \cdot E \cdot 90} = \frac{470810,185}{E} = 3,3486 \text{ cm}$$

$$a_2 = \frac{(17+50) \cdot 2150^2}{9,6 \cdot E \cdot 300} = \frac{107537,3}{E} = 0,7648 \text{ cm}$$

$$a_3 = \frac{(50-28) \cdot 2150^2}{9,6 \cdot E \cdot 300} = - \frac{125192,71}{E} = -0,8904 \text{ cm} = -a_4$$

3.6 - Cálculo dos deslocamentos relativos das arestas:

Da equação (II.56'), tem-se:

$$\Delta_j = h_{ij} \cdot \theta'_{ij} = a_{ij} (\cotg \alpha_j + \cotg \alpha_i) - \frac{a_{jk}}{\text{sen} \alpha_j} - \frac{a_{hi}}{\text{sen} \alpha_i}$$

$$\Delta_2 = a_2 \cdot (\cotg \alpha_1 + \cotg \alpha_2) - \frac{a_3}{\text{sen} \alpha_2} - \frac{a_1}{\text{sen} \alpha_1}$$

$$\alpha_1 = 60^\circ \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 20^\circ$$

$$\Delta_2 = 3,32 a_2 - 2,924 a_3 - 1,155 a_1 \quad (1)$$

$$\Delta_3 = a_3 \cdot (\cotg \alpha_2 + \cotg \alpha_3) - \frac{a_4}{\text{sen} \alpha_3} - \frac{a_2}{\text{sen} \alpha_2}$$

$$\Delta_3 = 5,4948 a_3 - 2,924 a_4 - 2,924 a_2 \quad (2)$$

Portanto, para o problema (o), tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta_{20} &= 3,32 \cdot 0,7648 - 2,924 \cdot (-0,8904) - 1,155 \cdot 3,3486 = \\ &= +1,275 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\Delta_{30} = 5,4948 \cdot (-0,8904) - 2,924(0,8904 + 0,7648) = -9,732 \text{ cm}$$

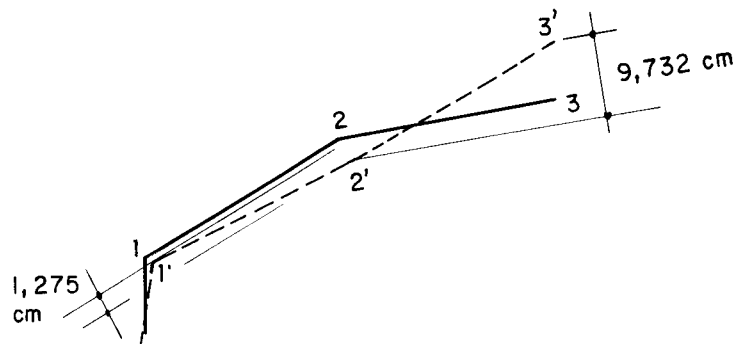


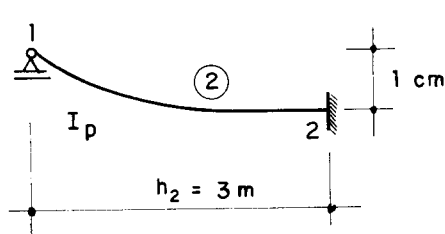
FIG. III-16 - DISTORÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL NO PROB.(O)

Esses deslocamentos Δ_0 mostram uma distorção da seção transversal (Fig. III-16), contrariando assim a hipótese de que, no problema (o), todas as arestas sofrem um mesmo deslocamento. Assim, embora a análise inicial satisfaça estaticamente, há uma incompatibilidade entre os deslocamentos encontrados na análise da estrutura em chapa e aqueles assumidos na análise da estrutura em placa. Deve-se então corrigir a análise inicial.

4. Análise corretiva:

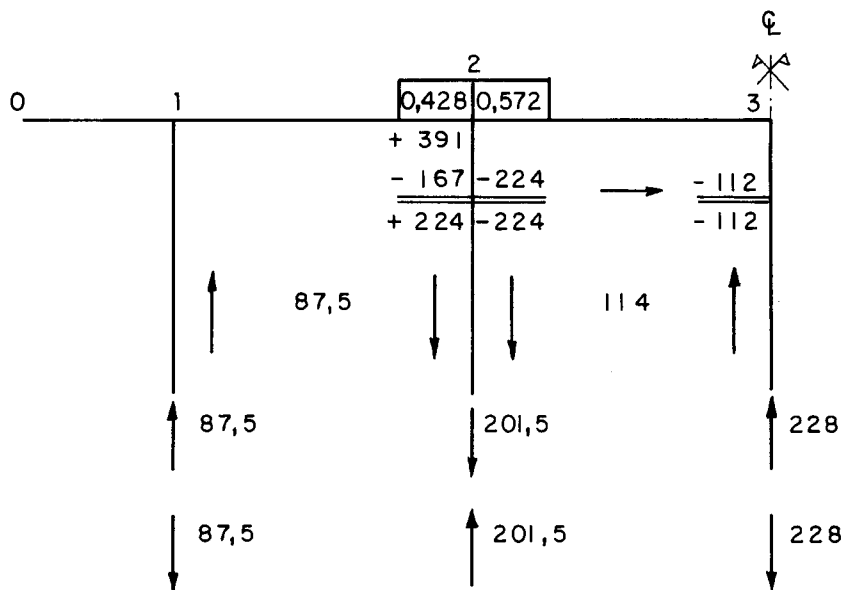
4.1 - (Problema (1)):

4.1.1 - Deslocamento arbitrário da placa 2 :



$$m_{21} = + \frac{3 E I_p \Delta}{h_2^2} \cong$$

$$\cong + 39058,7 \text{ kgfcm/m chapa}$$



4.1.2 - Cálculo do carregamento de chapa:

$$p_1 = +87,5 \text{ kgf/m} \quad p_2 = -580,2 \text{ kgf/m} \quad p_3 = +1166,7 \text{ kgf/m}$$

4.1.3 - Cálculo das tensões normais:

As cargas nas chapas variam longitudinalmente com os deslocamentos das arestas. Mostrou⁷-se que, para vigas simplesmente apoiadas, os deslocamentos das arestas podem ser assemelhados a senóide e, com isto, o momento no meio do vão será:

$$M = \frac{pL^2}{\pi^2} \quad \therefore \quad \sigma = \pm \frac{pL^2}{\pi^2 Z}$$

- Chapa 1 : $\sigma = \pm 20,24 \text{ kgf/cm}^2$

- Chapa 2 : $\sigma = \mp 18,12 \text{ kgf/cm}^2$

- Chapa 3 : $\sigma = \pm 36,43 \text{ kgf/cm}^2$

	1		2		3	
0	0,69	0,31	0,5	0,5		ϕ
+ 202	- 202	- 181	+ 181	+ 364	- 364	Tensões de bordo livre
<u>+ 21,1</u>	<u>- 22,0</u>	<u>- 22,0</u>	<u>+ 27,0</u>	<u>+ 27,0</u>	<u>- 31,7</u>	Após distribuição (kgf/cm ²)

4.1.4 - Cálculo das flechas das chapas e dos deslocamentos relativos das arestas

$$a_{ij} = \frac{(\sigma_i - \sigma_j) \cdot L^2}{9,87 \cdot E \cdot h_{ij}}$$

$$a_1 = \frac{(21,1 + 22) \cdot 2150^2}{9,87 \cdot 140600 \cdot 90} = +1,595 \text{ cm}$$

$$a_2 = -0,544 \text{ cm}$$

$$a_3 = +0,6518 \text{ cm} = - a_4$$

Com as equações 1 e 2 :

$$\Delta_{21} = \Delta_2 \cdot (3,32 a_2 - 2,924 a_3 - 1,155 a_1)$$

$$\Delta_{31} = \Delta_2 \cdot (5,4948 a_3 - 2,924 a_4 - 2,924 a_2)$$

onde Δ_2 = deslocamento relativo real da chapa 2 .

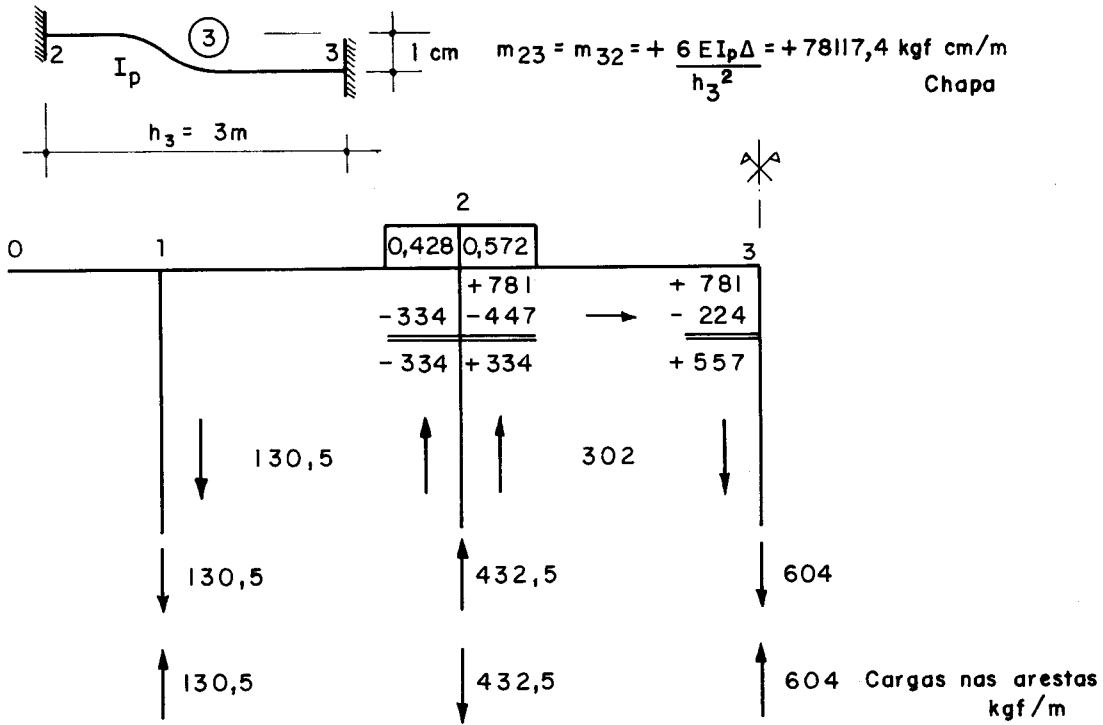
Com isso, têm-se;

$$\Delta_{21} = -5,554 \Delta_2$$

$$\Delta_{31} = +7,078 \Delta_2$$

4.2 - (Problema (2))

4.2.1 - Deslocamento unitário da placa 3 :



4.2.2 - Cálculo do carregamento de chapa:

$$p_1 = -130,5 \text{ kgf/m} \quad p_2 = +1245,33 \text{ kgf/m}$$

$$p_3 = -2834,25 \text{ kgf/m}$$

4.2.3 - Cálculo das tensões normais:

- Chapa 1 : $\sigma = \mp 30,18 \text{ kgf/cm}^2$

- Chapa 2 : $\sigma = \pm 38,88 \text{ kgf/cm}^2$

- Chapa 3 : $\sigma = \mp 88,49 \text{ kgf/cm}^2$

	1		2		3	
0	0,69	0,31	0,5	0,5		
-302	+ 302	+ 389	- 389	- 885	+ 885	Tensões bordo livre
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	
-37,8	+ 45,4	+ 45,4	- 62,0	- 62,0	+ 75,3	Após distribuição (kgf/cm ²)

4.2.4 - Cálculo das flechas das chapas e dos deslocamentos relativos das arestas:

$$a_1 = -3,0794 \text{ cm} \qquad a_2 = +1,1925 \text{ cm}$$

$$a_3 = -1,5245 \text{ cm}$$

Com esses valores nas equações 1 e 2 :

$$\Delta_{22} = 11,9734 \Delta_3$$

$$\Delta_{32} = -16,3213 \Delta_3$$

5. Cálculo de Δ_2 e Δ_3

$$\Delta_2 = \Delta_{20} + \Delta_{21} + \Delta_{22} = +1,275 - 5,554 \Delta_2 + 11,9734 \Delta_3$$

$$\Delta_3 = \Delta_{30} + \Delta_{31} + \Delta_{32} = -9,732 + 7,078 \Delta_2 - 16,3213 \Delta_3$$

sistema que, resolvido, fornece:

$$\Delta_2 = -3,2819 \text{ cm}$$

$$\Delta_3 = -1,90293 \text{ cm}$$

6. Superposição de efeitos:

$$(r) = (0) + \Delta_2(1) + \Delta_3(2) = (0) - 3,2819(1) - 1,90293(2)$$

$$m_2 = -346 - 3,2819(+224) - 1,90293(-334) \cong -446 \text{ kgfm}$$

$$m_3 = -269 - 3,2819(-112) - 1,90293(+557) \cong -961 \text{ kgfm}$$

para a seção central da placa.

$$\sigma_r = \sigma_0 - 3,2819 \sigma_1 - 1,90293 \sigma_2$$

E conveniente separar os resultados das duas análises (elementar e corretiva). Assim, tem-se:

TABELA III.11

Elementar	Corretiva	Total
$m_2 = -346$	-100	-446 kgfm
$m_3 = -269$	-692	-961 kgfm
$\sigma_0 = +105$	+2,7	+107,7 kgf/cm ²
$\sigma_1 = +17$	-14,19	+2,81 kgf/cm ²
$\sigma_2 = -50$	+29,4	-20,6 kgf/cm ²
$\sigma_3 = +28$	-39,3	-11,3 kgf/cm ²

- Exemplo: aresta 0, análise corretiva:

$$-3,2819(+21,1) - 1,90293(-37,8) = +2,7 \text{ kgf/cm}^2$$

Com isso é fácil constituir os diagramas para qualquer seção, pois a variação dos esforços é conhecida:

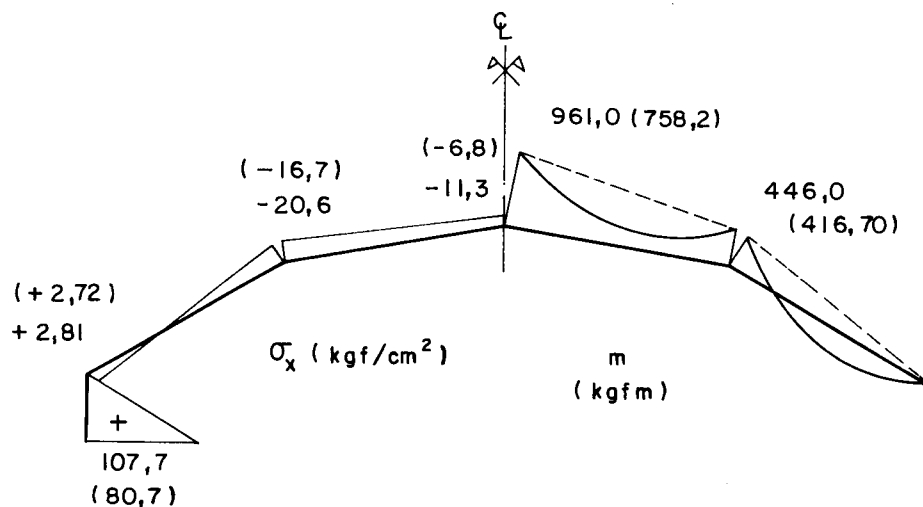
- momentos transversais:
 - . elementar → constante
 - . corretiva → variação senoidal;
- tensões normais longitudinais:
 - . elementar → variação parabólica;
 - . corretiva → variação senoidal;

Assim, tem-se (Fig. III-17):

exemplo: seção $x = L/4$

$$m_2 = -346 - 100 \times 0,707 = - 416,70 \text{ kgfm}$$

$$\sigma_0 = 0,75 \cdot (+105) + 0,707 \cdot (+2,7) \cong +80,7 \text{ kgf/cm}^2$$



* Os números entre os parenteses se referem aos valores dos esforços nos quartos de vão ($x = \frac{L}{4}$ e $\frac{3L}{4}$)

FIG. III-17 - TENSÕES LONGITUDINAIS E MOMENTOS TRANSVERSAIS NA SEÇÃO CENTRAL ($x = \frac{L}{2}$).

7. Forças cortantes longitudinais de bordo e tensões cisalhantes

Os valores de T podem ser obtidos com as equações (II.33):

$$T_j = T_i + \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \cdot A_{ij}$$

Assim, têm-se:

$$T_0 = 0$$

$$T_1 = \frac{107,7 + 2,81}{2} \times 10^4 \times 0,135 \cong 74594 \text{ kgf}$$

$$T_2 = 74594 + \frac{2,81 - 20,6}{2} \times 3000 = 47909 \text{ kgf}$$

$$T_3 = 47909 + - \frac{20,6 - 11,3}{2} \times 3000 \cong 0 \quad \text{OK!}$$

Analogamente ao que foi feito para momentos e tensões, podem-se encontrar os valores de T correspondentes às análises elementar e corretiva. Assim:

- Análise elementar:

$$T_1^1 = \frac{105 + 17}{2} \times 1350 = 82350 \text{ kgf}$$

$$T_2^1 = 82350 + \frac{17 - 50}{2} \times 3000 = 32850 \text{ kgf}$$

$$T_3^1 \cong 0$$

- Análise corretiva:

$$T_1^2 = \frac{2,7 - 14,19}{2} \times 1350 = -7755,75 \text{ kgf} \cong -7756 \text{ kgf}$$

$$T_2^2 = -7756 + \frac{-14,19 + 29,4}{2} \times 3000 = +15059 \text{ kgf}$$

$$T_3^2 \cong 0$$

As tensões cisalhantes máximas podem ser calculadas, então, através da equação (II.44):

$$\tau_{\text{m}\bar{x}} = \frac{4 T_{\text{m}\bar{x}}^1}{b \cdot L} + \frac{\pi T_{\text{m}\bar{x}}^2}{b \cdot L}$$

Exemplo: aresta 1, chapa 2:

$$\tau_{\text{m}\bar{x}} = \frac{4 \times 82350}{10 \times 2150} + \frac{\pi \cdot (-7756)}{10 \times 2150} \cong +14,2 \text{ kgf/cm}^2$$

Assumindo-se que as tensões cisalhantes devido a T_2^2 também variem parabolicamente, pode-se calcular $\tau_{\text{m}\bar{x}}$ unicamente com a equação (II.40):

$$\tau_{\text{m}\bar{x}} = \frac{4 \times 74594}{10 \times 2150} \cong 13,9 \text{ kgf/cm}^2$$

Como se vê, a diferença é pequena. Então, calculando os $T_{\text{m}\bar{x}}$ através da maneira simples, tem-se:

- aresta 1, chapa 1 :

$$\tau_{\text{m}\bar{x}} = \frac{4 \times 74594}{15 \times 2150} \cong 9,25 \text{ kgf/cm}^2$$

- aresta 1, chapa 2 :

$$\tau_{\text{m}\bar{x}} = 13,9 \text{ kgf/cm}^2$$

- aresta 2, chapas 2 e 3 :

$$\tau_{\text{m}\bar{x}} = \frac{4 \times 47909}{10 \times 2150} = 8,91 \text{ kgf/cm}^2$$

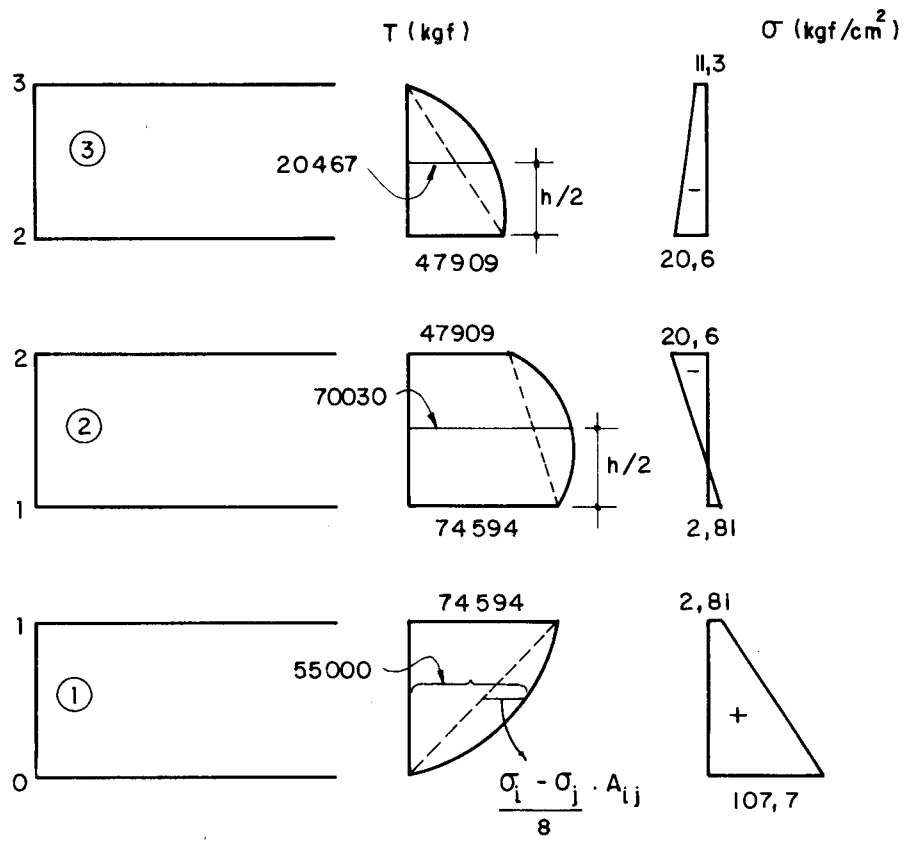


FIG. III-18 - CÁLCULO DAS FORÇAS T NAS SEÇÕES CENTRAIS DAS CHAPAS.

Obter-se-ão agora os valores de τ entre as arestas, a meia altura das chapas (visando o cálculo das tensões principais). Para isso é necessário achar $T_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}}$ nessas posições ($T_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}}$ sempre ocorre nas seções de máximo momento, isto é, no meio do vão, para este tipo de estrutura). Com o auxílio da equação (II.35):

$$T_y = \frac{T_i + T_j}{2} + \frac{A_{ij}}{8} \cdot (\sigma_i - \sigma_j)$$

- Chapa 1 :

$$T_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}} = \frac{74594}{2} + \frac{1350}{8} \cdot (107,7 - 2,81) \cong 55000 \text{ kgf}$$

- Chapa 2 :

$$T_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}} = \frac{74594 + 47909}{2} + \frac{2,81 - (-20,6)}{8} \cdot 3000 \cong \\ \cong 70030 \text{ kgf}$$

- Chapa 3 :

$$T_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}} = \frac{47909}{2} + \frac{3000}{8} \left[-20,6 - (-11,3) \right] = 20467 \text{ kgf}$$

Com isso, as tensões cisalhantes máximas nesses pontos serão:

- Chapa 1 :

$$\tau_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}} = \frac{4 \times 55000}{15 \times 2150} \cong 6,82 \text{ kgf/cm}^2$$

- Chapa 2 :

$$\tau_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}} = \frac{4 \times 70030}{10 \times 2150} \cong 13 \text{ kgf/cm}^2$$

- Chapa 3 :

$$\tau_{\text{m\`ax}} = \frac{4 \times 20467}{10 \times 2150} \approx 3,80 \text{ kgf/cm}^2$$

Com os valores de τ assim obtidos, e lembrando que, na direç~ao longitudinal, τ varia linearmente, tem-se (Fig. III-19):

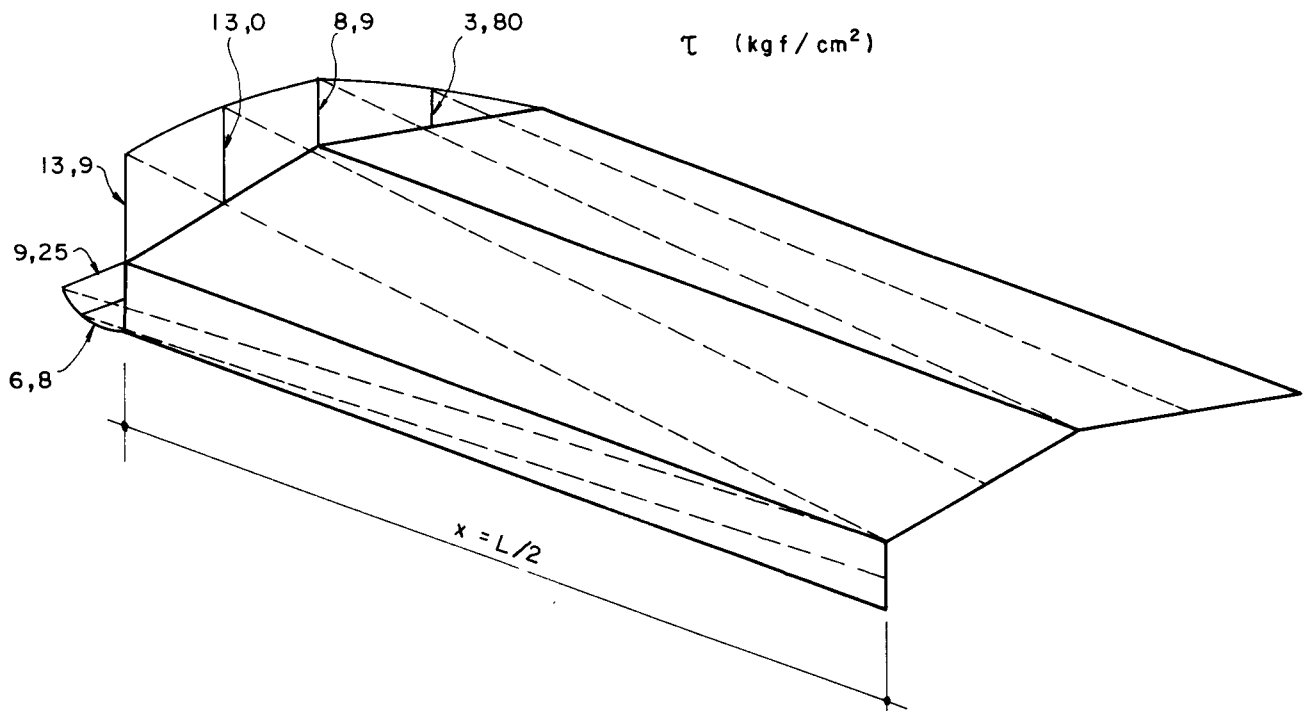


FIG. III-19 - VARIAÇ~AO LONGITUDINAL DAS TENS~OES CISALHANTES τ .

Conhecidas as variaç~oes das tens~oes normais σ e das tens~oes cisalhantes τ , pode-se calcular as tens~oes principais σ_I e σ_{II} com o auxilio da (II.45):

$$\sigma_{\text{I, II}} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Para se ter uma id~eia do desenvolvimento das tens~oes principais, elas ser~ao calculadas em todos os oitavos de v~ao, para todas as arestas e centros de chapas. Assim (Tabela III.12):

Tabela III - 12 - Tensões normais σ , Tensões cisalhantes τ ,
Tensões principais σ_I e σ_{II}

Chapa	seção		x = 0	x = $\frac{L}{8}$	x = $\frac{L}{4}$	x = $\frac{3L}{8}$	x = $\frac{L}{2}$
	local						
③	3	σ_x	0	-2,80	-6,8	-10,1	-11,3
		τ	0	0	0	0	0
		σ_I	0	0	0	0	0
		σ_{II}	0	-2,80	-6,8	-10,1	-11,3
	centro	σ_x	0	-6,70	-11,75	-14,90	-15,95
		τ	3,80	2,85	1,90	0,95	0
		σ_I	+3,80	+1,0	+0,3	+0,1	0
		σ_{II}	-3,80	-7,8	-12,0	-14,90	-15,95
	2	σ_x	0	-10,6	-16,7	-19,7	-20,6
		τ	8,9	6,675	4,45	2,225	0
		σ_I	+8,9	+3,2	+1,1	+0,2	0
		σ_{II}	-8,9	-13,8	-17,8	-20,0	-20,6
②	2	σ_x	0	-10,6	-16,7	-19,7	-20,6
		τ	8,9	6,675	4,45	2,225	0
		σ_I	+8,9	+3,2	+1,1	+0,2	0
		σ_{II}	-8,9	-13,8	-17,8	-20,0	-20,6
	centro	σ_x	0	-4,30	-7,0	-8,40	-8,90
		τ	13,0	9,75	6,5	3,25	0
		σ_I	+13,0	+7,8	+3,9	+1,1	0
		σ_{II}	-13,0	-12,1	-10,9	-9,5	-8,90
	1	σ_x	0	+2,0	+2,72	+2,80	+2,81
		τ	13,9	10,425	6,95	3,475	0
		σ_I	+13,9	+11,5	+8,4	+5,2	+2,81
		σ_{II}	-13,9	-9,5	-5,7	-2,3	0
①	1	σ_x	0	+2,0	+2,72	+2,80	+2,81
		τ	9,25	6,935	4,625	2,31	0
		σ_I	+9,25	+8,0	+6,2	+4,1	+2,81
		σ_{II}	-9,25	-6,0	-3,5	-1,3	0
	centro	σ_x	0	+24,5	+41,70	+51,9	+55,25
		τ	6,8	5,1	3,4	1,7	0
		σ_I	+6,8	+25,5	+42,0	51,9	+55,25
		σ_{II}	-6,8	-1,0	-0,3	-0,1	0
	0	σ_x	0	+47,0	+80,7	+100,9	+107,7
		τ	0	0	0	0	0
		σ_I	0	+47,0	+80,7	+100,9	+107,7
		σ_{II}	0	0	0	0	0

σ_I = tensão principal de tração (= 0, se não houver tração)

σ_{II} = tensão principal de compressão (= 0, se não houver compressão)

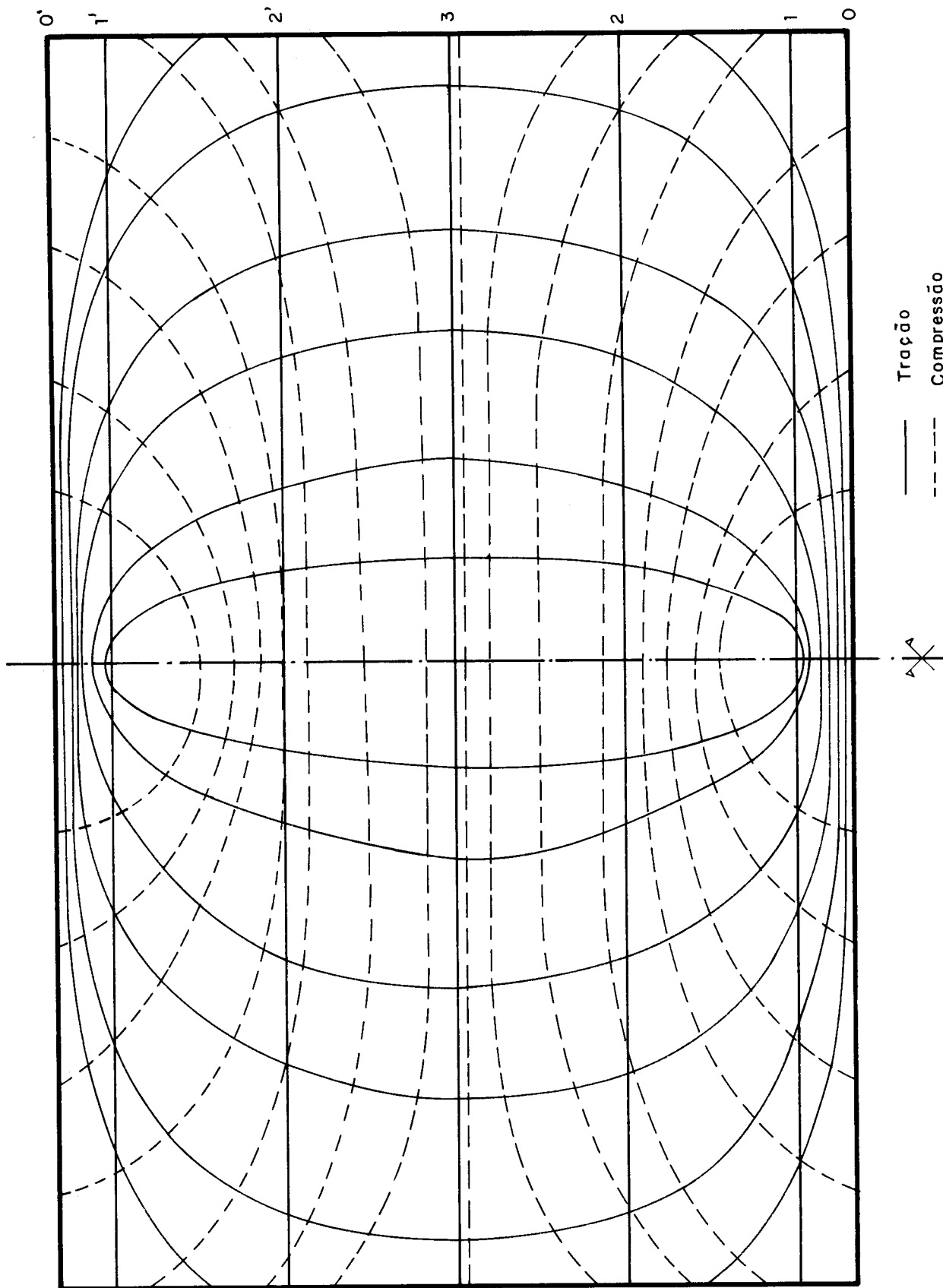


FIG III - 20 - TRAJETÓRIAS DAS TENSÕES PRINCIPAIS NA ESTRUTURA EM PLANTA

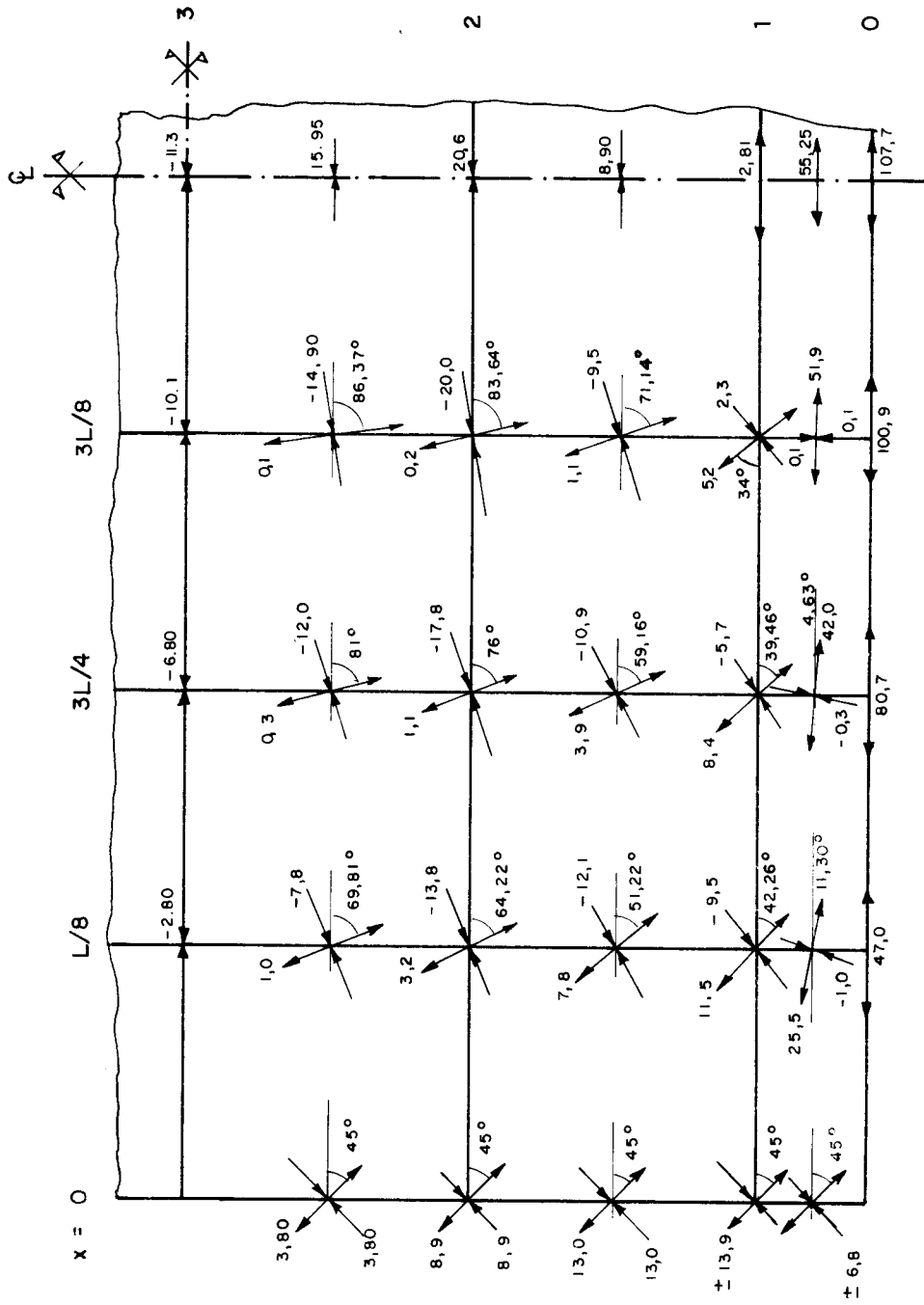


FIG. III - 21 - TENSÕES PRINCIPAIS - ÂNGULOS

A figura III.20 apresenta o desenvolvimento das trajetórias das tensões principais na estrutura em planta. Na figura III.21 estão representadas essas tensões e seus ângulos, os quais foram calculados através da fórmula:

$$\operatorname{tg} 2 \epsilon = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \approx \frac{2\tau}{\sigma_x}$$

já que σ_y é desprezado. ϵ é o ângulo entre a direção x e a direção de σ_I (tensão principal de tração).

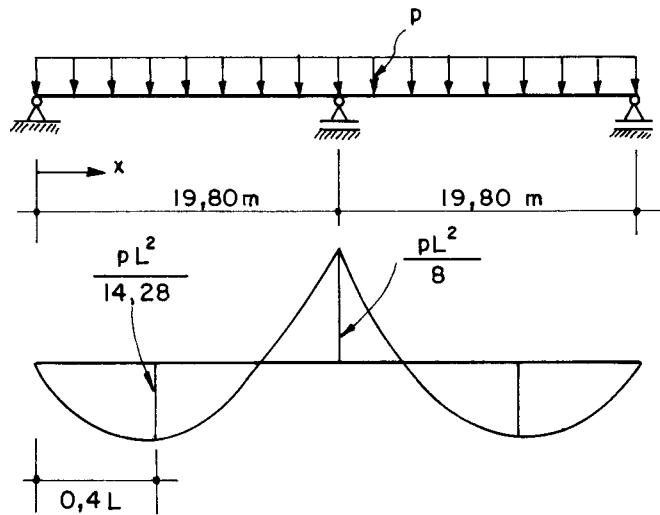
Guralnick e Swartz¹²⁴ utilizam a equação (II.44) para o cálculo das tensões cisalhantes τ e levam em conta as tensões σ_y no cálculo das tensões principais σ_I e σ_{II} e do ângulo ϵ .

III.5 - MÉTODO DE YITZHAKY - Folhas Contínuas

- Seção transversal: a mesma do exemplo III-3 (Fig. III.9)
- estrutura contínua, com dois vãos de $L = 19,80$ m
- as tensões e as flechas serão calculadas na posição $x = 0,4L$ (seção aproximada onde ocorrem os máximos momentos positivos).

Da tabela II.1 (Fig. II.7), tem-se:

Exemplo III.3		III.5
carga uniforme	$C_M = 8$	$C_M = 14,28$
	$C_f = 9,6$	$C_f = 12,99$
	$\underline{C}_M = 0$	$\underline{C}_M = -8$
curva normal	$C_M = \pi^2 = 9,87$	$C_M = 17,82$
	$C_f = 9,87$	$C_f = 13,33$
	$\underline{C}_M = 0$	$\underline{C}_M = -11,82$



Como comentado no item II.5.5, pode-se utilizar os valores da folha biapoiada resolvida no item III.3, desde que devidamente corrigidos.

TABELA III-13

Carregamento	Aresta	R (kgf/m) (1)	$\sigma_x \approx 0,4L$ (kgf/cm ²) (5)	$\sigma_x = L$ (kgf/cm ²) (5a)	C· δ (kgf/cm ³) (7)	C· θ' (kgf/cm ⁴) (8)	C· θ'' (kgf/cm ⁴) (9)	C· θ (kgf/cm ⁴) (10)
Problema (0) somente carga externa	0		+24,93	-44,5	C = 12,99 E/L ²			
	1	753,0	-2,02	+3,61	0,22465			
	2	625,0	-14,3	+25,50	0,3339	-0,003423	0	-0,003423
	3	525,0	+8,1	-14,46	-0,4689	0,005938	0	0,005938
Problema (1) $m_1 = m_2 =$ 1000 kgfm	0		-31,7	+47,82	C = 13,33 E/L ²			
	1	-419,82	+41,96	-63,3	-0,6135			
	2	+789,1	-64,7	+97,6	+2,4235	-0,03268	-0,01461	-0,04729
	3	-738,56	+77,3	-116,6	-2,9737	+0,03986	-0,007307	+0,03255
Problema (2) $m_3 = 1000$ kgfm	0		+9,13	-13,8	C = 13,33 E/L ²			
	1		-18,32	+27,3	+0,2286			
	2	-369,28	+40,58	-61,2	-1,4835	+0,01996	-0,003653	+0,01631
	3	+738,56	-53,64	+80,9	+1,9734	-0,02553	-0,01461	-0,04014
Carregamento real	0		+27,05	-47,71	C = 13,33 E/L ²			
	1	765,8	-5,63	+9,04	0,2783			
	2	554,05	-7,17	+14,80	0,0803			0
	3	641,4	-1,10	-0,63	-0,1398			0

As cargas R (reações de apoio da placa contínua apoiada em uma direção) são as mesmas e conduzem às mesmas cargas p nas chapas (ver Tab. III.9).

- Colunas (5), (7), (8):

Para obtê-las, basta multiplicar a coluna respectiva anterior por:

- Problema (0): : 8/14,28 basta observar as relações entre os momentos anteriores e atuais.
- Problema (1) e (2): 9,87/17,82

Exemplo: aresta 3, problema (0); coluna (5):

$$+14,4 \cdot \frac{8}{14,28} = +8,07 \cong 8,1$$

- Coluna (5a): Tensões sobre a seção do apoio central

- Problema (0) : $\frac{-14,28}{8} \times (\text{coluna (5)})$
- Problemas (1),(2) : $\frac{-17,82}{11,82} \times (\text{coluna (5)})$

Exemplo: aresta 3, problema (0):

$$+8,1 \cdot \frac{-14,28}{8} = -14,46$$

- Coluna (9): exemplo:

$$C \left(\frac{\theta''}{2} \right)_1 = \frac{2C_f \cdot h \cdot 100000}{3 I_p \cdot L^2} \quad C_f = 13,33 \text{ (antes, } C_f = 9,87)$$

$$\therefore \frac{13,33}{9,87} \times (\text{coluna (9) anterior})$$

- Cálculo de m_2' e m_3' :

$$\frac{-13,33}{12,99} \times 0,003423 - \frac{0,04729}{1000} m_2' + \frac{0,01631}{1000} m_3' = 0 \quad (1)$$

$$\frac{13,33}{12,99} \times 0,005983 + \frac{0,03255}{1000} m_2' - \frac{0,04014}{1000} m_3' = 0 \quad (2)$$

$$m_2' = -30,425 \text{ kgfm}$$

Resolvendo, obtêm-se:

$$m_3' = +127,128 \text{ kgfm}$$

- Superposição de efeitos: idem exercício anterior (III.3).

Exemplo: aresta 1:

$$\begin{aligned} c \cdot \delta &= \frac{13,33}{12,99} \cdot 0,22465 - \frac{30,425}{1000} \cdot (-0,6135) + \\ &+ \frac{127,128}{1000} \cdot 0,2286 = + 0,2783 \quad \text{etc...} \end{aligned}$$

$$m_2 = (m_2)_0 + m_2' = 148 - 30,425 = 117,575 \text{ kgfm}$$

$$m_3 = (m_3)_0 + m_3' = 114 + 127,128 = 241,128 \text{ kgfm}$$

- Cálculo das tensões cisalhantes τ :

$$T_1 = \frac{27,05-5,63}{2} \cdot 2160 \cong 23134 \text{ kgf}$$

$$T_2 = 23134 + \frac{-5,63-7,17}{2} \cdot 2200 = 9054 \text{ kgf}$$

$$T_3 = 0 \quad \text{OK!}$$

Calcular-se-á τ através da fórmula simplificada:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{5 T_{\text{máx}}}{b \cdot L}, \text{ já que é descrito por:}$$

$$\tau = \frac{5 T_{\text{máx}}}{b \cdot L} \left(1 - \frac{2,5x}{L}\right) \text{ - fórmula aproximada}$$

- aresta 1, chapa 1 :

$$\tau = \frac{5 \times 23134}{18 \times 1980} \cong 3,25 \text{ kgf/cm}^2$$

- aresta 1, chapa 2 :

$$\tau = \frac{5 \times 23134}{8 \times 1980} \cong 7,30 \text{ kgf/cm}^2$$

- aresta 2, chapa 2 e 3 :

$$\tau = \frac{5 \times 9054}{8 \times 1980} \cong 2,85 \text{ kgf/cm}^2$$

Na Fig. III.22 estão representadas as variações dos esforços.

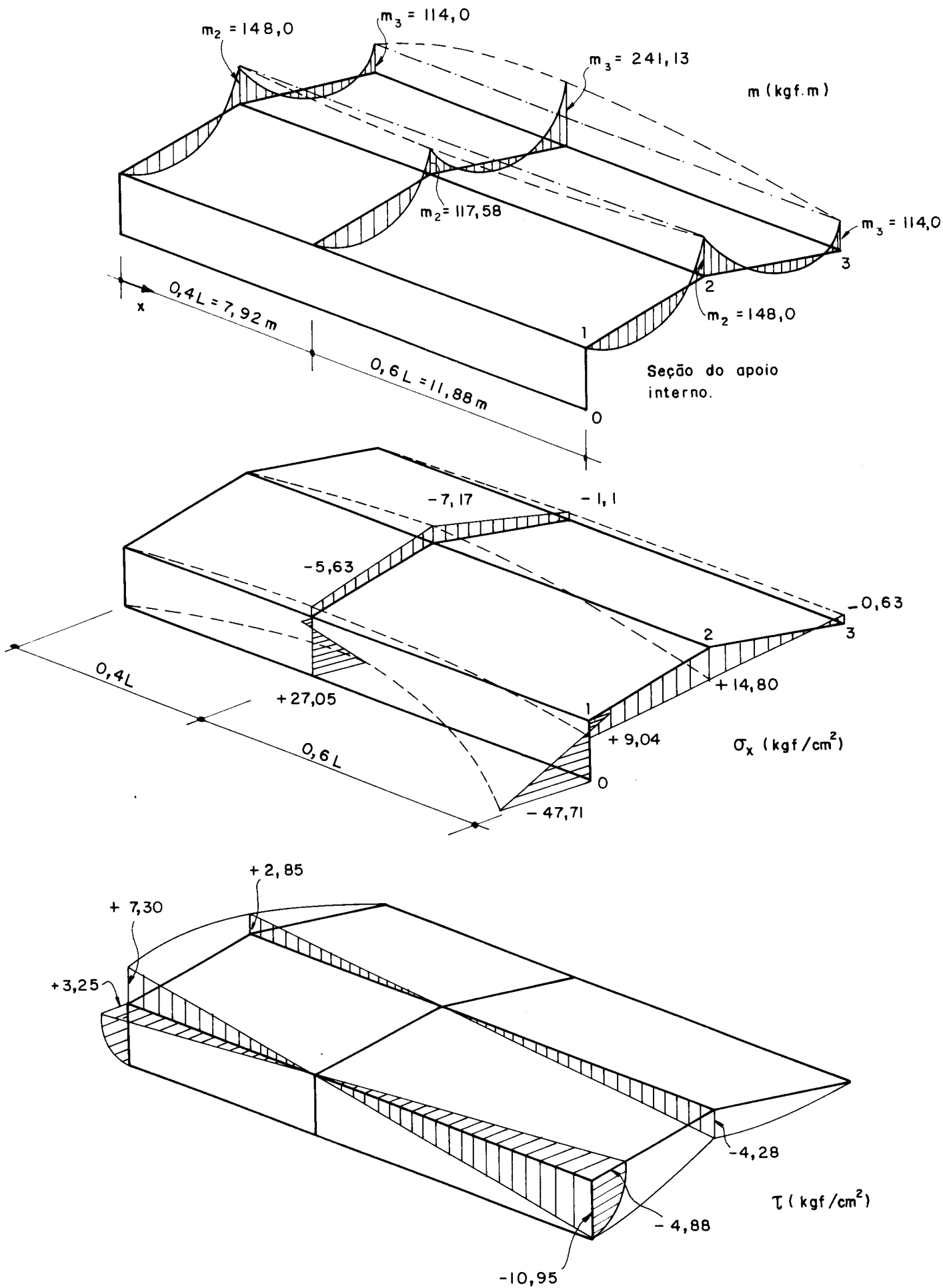


FIG. III-22 - VARIAÇÃO LONGITUDINAL DOS MOMENTOS TRANSVERSAIS m ,
TENSÕES LONGITUDINAIS σ E TENSÕES CISALHANTES τ .

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DAS FOLHAS CURTAS

IV.1 - INTRODUÇÃO

As estruturas em folhas poliédricas com chapas "curtas" – isto é, chapas cuja dimensão longitudinal (subentenda-se distância entre os tímpanos de apoio) é pequena em relação à dimensão transversal – são comuns, especialmente para a construção de silos.

Dos métodos já analisados nos capítulos anteriores, poucos admitem o tratamento dessas estruturas, aqui chamadas de folhas curtas. Entre esses, pode-se citar Goldberg e Leve³⁴, Rudiger³⁵ e Werfel³⁶, De Fries-Skene e Scordelis³⁷, isto é, métodos baseados na Teoria da Elasticidade, ou o método iterativo proposto por Mast³⁸. Outros autores fornecem métodos criados especialmente para o tratamento dessas estruturas, podendo-se citar: Born⁶, Reiss e Yitzhak⁴⁵, Seetharamulu e Kulkarni⁴⁶.

Os dois últimos métodos citados^{45,46} consideram ação de placa contínua apoiada em duas direções e ação de chapa de grande altura biapoiada (efeito de viga-parede). O método proposto por Seetharamulu e Kulkarni⁴⁶ é baseado nos métodos de elasticidade já citados, com a diferença que eles desprezam a contribuição dos deslocamentos das arestas, o que, segundo eles, reduz consideravelmente o trabalho de cálculo e dá uma precisão razoável. Devido à rigi

dez da chapa (viga-parede), as deformações realmente são pequenas e, portanto, muito menos importantes que nas folhas "longas".

Já o método de Reiss e Yitzhak ^{4 5} considera o efeito desses deslocamentos, embora também salientando a sua menor importância, em relação às estruturas examinadas anteriormente. O método por eles proposto é uma extensão daquele de Yitzhaky e, por ser mais completo e de fácil entendimento, pela sua forma tabelada, será aqui examinado.

IV.2 - MÉTODO DE REISS E YITZHAK ^{4 5}

Uma folha poliédrica prismática curta será definida aqui como uma estrutura consistindo de um número de chapas interconectadas, com relação $L/h < 2$, apoiada em tímpanos ou diafragmas de extremidade (Fig. IV-1).

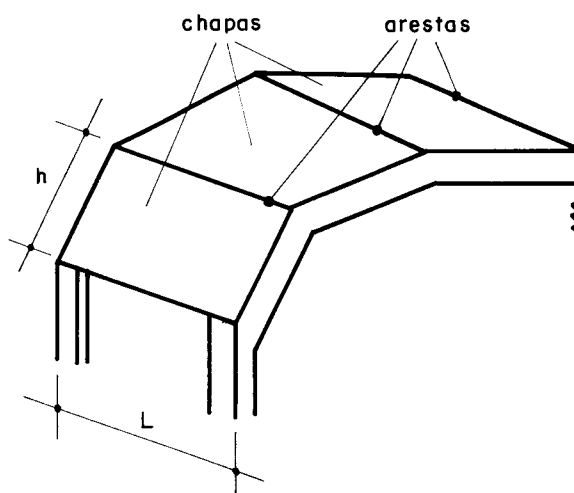


Figura IV.1- Folha curta prismática

Adotam-se as seguintes hipóteses de cálculo:

- a) a estrutura é monolítica;
- b) os tímpanos de apoio são perfeitamente rígidos no seu plano e totalmente flexíveis normalmente a ele;

- c) o material é elástico, isotrópico e homogêneo;
- d) despreza-se o coeficiente de Poisson;
- e) as deformações são pequenas, comparadas com a espessura das chapas.

As cargas externas atuando na estrutura serão resolvidas, por superposição, como sendo suportadas em uma estrutura em placa contínua, apoiada em duas direções e uma estrutura biapoiada em chapa (supõe-se, analogamente ao caso das estruturas longas, que a estrutura em placa "descarregue" sobre a estrutura em chapa, com as reações de apoio da primeira sendo as cargas nas arestas da segunda — ver item I.4.1).

IV.2.1 - Ação de placa contínua apoiada em duas direções

A folha curta, apoiada ao longo das arestas, consiste de placas suportadas por dois tímpanos numa direção e contínuas na outra (Fig. IV.2). Segue-se aqui o mesmo sistema de referências adotado no capítulo II (ver item II.1).

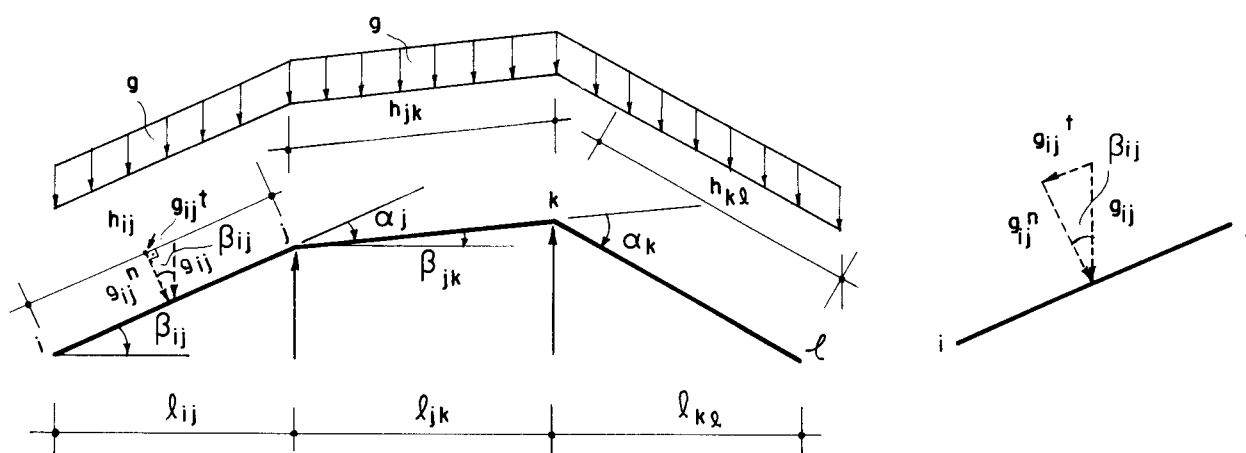


Figura IV. 2 — Placa contínua

A carga externa g é resolvida numa componente tangencial $g^t = g \cdot \text{sen} \beta$ (que não tem influência na placa, mas será considerada posteriormente na ação de chapa), e uma componente normal $g^n = g \cdot \text{cos} \beta$ atuando sobre a placa contínua.

Resolve-se então a estrutura em placa através do processo de Cross aplicado às lajes contínuas: primeiro, cada laje é considerada separadamente como engastada nas arestas internas, obtendo-se daí os momentos de engastamento perfeito; faz-se a distribuição de momentos, isto é, da diferença de momentos em cada aresta, propaga-se, etc.

- Momentos de engastamento perfeito:

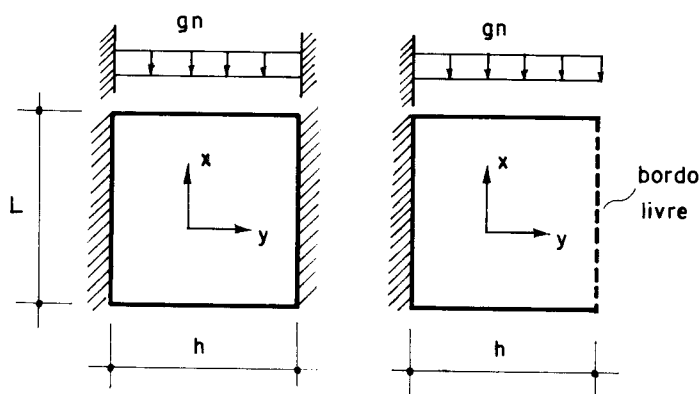


Figura IV.3 — Placas isoladas

O elemento básico no método de Cross consiste de uma laje simplesmente apoiada na direção do seu comprimento sobre os diafragmas e biengastada nas arestas internas ou, no caso da placa de extremidade, engastada na aresta interna e livre no outro bordo (Fig. IV-3).

A equação diferencial que rege a flexão das placas é:

$$\nabla^4 \omega = \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = - \frac{g^n}{D} \quad \dots (IV.1)$$

onde ω = deslocamento normal ao plano da placa e $D = EI_p$ a

rigidez da placa (recorde-se que I_p = momento de inércia de placa).

As Tabelas IV-1 e IV.2 (ver final do capítulo, item 3) apresentam a solução dessas placas numa forma diferente, dando o primeiro termo das séries de Fourier para os momentos de engastamento perfeito e reações de apoio, e a soma das séries para os outros momentos. O momento de engastamento exato máximo e a força cortante no bordo engastado, segundo Reiss e Yitzhaky, podem ser expressidos pelas fórmulas:

$$m_{yi} = m_{yi}^* + 0,004 g^n \cdot L^2 \quad \dots (IV.2)$$

$$v_i = v_i^* - 0,0681 g^n \cdot L \quad \dots (IV.3)$$

onde m_{yi}^* , v_i^* são os primeiros termos das respectivas séries e m_{yi} , v_i a soma das séries.

- rigidez da placa:

Visando o cálculo dos coeficientes de distribuição de momentos, a rigidez da placa pode ser definida da mesma maneira que para vigas prismáticas (Fig. IV.4.a). Tomando o caso de uma placa biengastada em dois bordos opostos, um momento \bar{m}_i é aplicado no bordo i, resultando num giro elástico θ_i'' do mesmo bordo.

Tomando \bar{m} na forma de séries de Fourier:

$$\bar{m} = \sum_{n=1}^{\infty} m_i \cdot \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} m_i \cdot \text{sen} \eta_i x \quad \dots (IV.4)$$

o que leva a

$$\bar{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_i'' \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_i'' \cdot \text{sen} \eta_i x \quad \dots (IV.5)$$

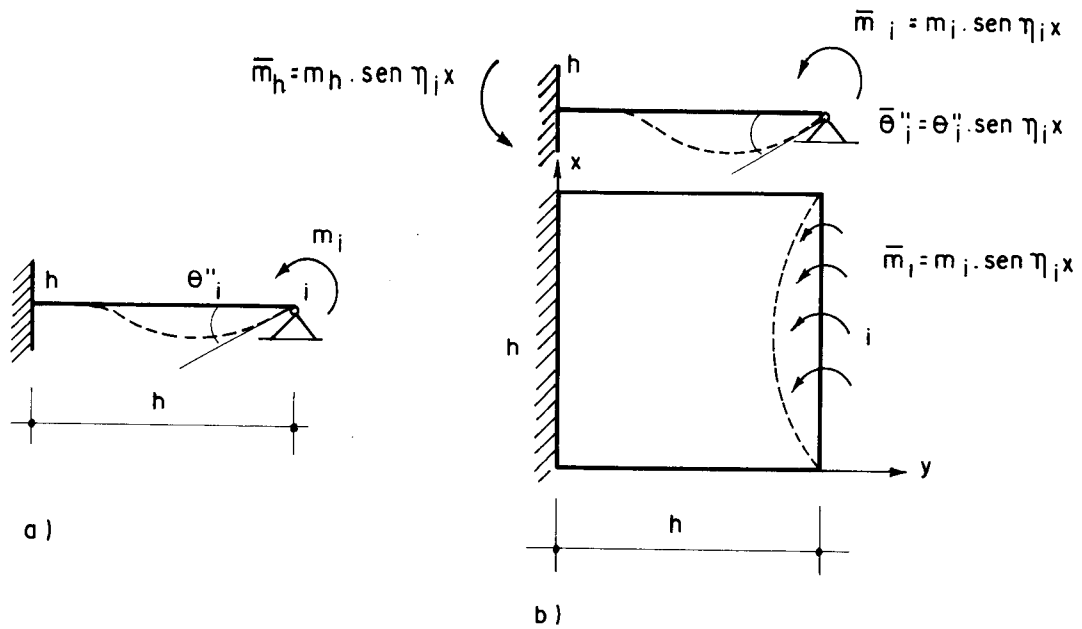


Figura IV. 4 – Rígidez da placa

A rigidez pode ser definida como a relação entre o momento aplicado e o giro produzido:

$$K_i = \frac{m_i \cdot \text{sen } \eta_i x}{\theta_i'' \cdot \text{sen } \eta_i x} = \frac{m_i}{\theta_i''} \quad \dots \text{ (IV.6)}$$

Como se pode notar, a rigidez para cada termo das séries será uma constante diferente. A solução é encontrada através da equação diferencial homogênea:

$$\nabla^4 \omega = 0 \quad \dots \text{ (IV.7)}$$

A rigidez do primeiro termo depende da relação entre as dimensões da laje h/L (Tabelas IV.3 e IV.4). Para termos superiores, é proporcional a rigidez da placa D .

- coeficiente de propagação:

O coeficiente de propagação ρ é definido como a relação entre o momento m_h produzido no bordo oposto h , e o momento m_i aplicado no bordo i (Fig. IV.4):

$$\rho = \frac{\bar{m}_h}{\bar{m}_i} = \frac{m_h \cdot \text{sen } \eta_i x}{m_i \cdot \text{sen } \eta_i x} = \frac{m_h}{m_i} \quad \dots (IV.8)$$

Como todos os momentos foram expandidos em séries de senos, ρ será uma constante para todos os termos; para o primeiro termo, será novamente função de h/L (Tabela IV.3), diminuindo com o aumento da relação h/L , pelo que será desprezado para os termos superiores.

- Reações e momentos nas placas:

Com os momentos compensados para todas as arestas, as reações v e os momentos positivos em todas as placas podem ser encontrados por superposição; para cada placa, as reações e momentos serão dados pela soma daqueles correspondentes aos momentos de engastamento perfeito (já leva em conta a soma dos outros termos) com as correspondentes à soma dos momentos distribuídos.

IV.2.2 - Ação de chapa (efeito de viga-parede)

As reações v das placas variam senoidalmente e são decompostas em cargas no plano das chapas (Fig. IV.5), analogamente ao caso das folhas longas (veja-se o item II.4.1, Fig. II.9, equações II.14). Além das cargas nas arestas, sobre as chapas atuam também as cargas distribuídas tangenciais g^t , calculadas anteriormente.

Conforme a Fig. IV-5, as forças numa aresta i serão dadas por:

$$S_{ih} = \frac{v_{ih} \cdot \cos \alpha_i + v_{ij}}{\text{sen} \alpha_i} \quad \dots (IV.9)$$
$$S_{ij} = \frac{v_{ih} + v_{ij} \cdot \cos \alpha_i}{\text{sen} \alpha_i}$$

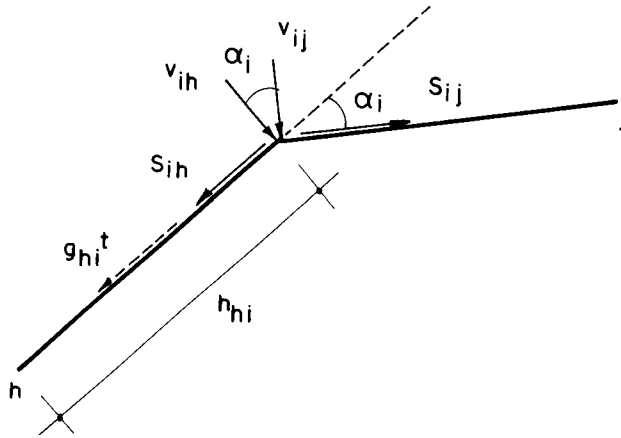


Figura IV.5 — Cargas nas arestas.

Caso haja cargas aplicadas diretamente nas arestas, nas expressões acima deve-se usar o valor R , em lugar de v , calculado segundo as equações II.13 (veja-se o item II.4.1).

Assume-se que as cargas tangenciais g^t variem senoidalmente e se distribuam para as arestas, de maneira que uma chapa genérica h_i suporte o carregamento (supondo S positivo "saindo" da aresta)(Fig. IV.6):

$$P_{ih} = S_{ih} + \frac{g_{hi}^t \cdot h_{hi}}{2}$$

$$P_{hi} = S_{hi} - \frac{g_{hi}^t \cdot h_{hi}}{2} \quad \dots (IV.10)$$

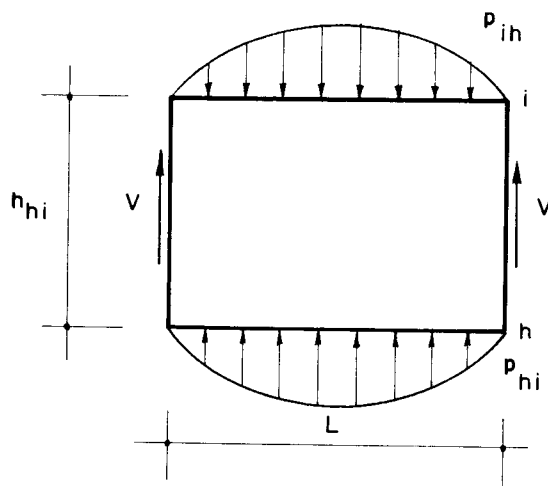


Fig IV.6 — Carregamento de chapa

A equação diferencial que rege a flexão das vigas-parede \bar{e} :

$$\nabla^4 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad \dots (IV.11)$$

onde ϕ \bar{e} a função de Airy. As tensões e deslocamentos provocados numa viga-parede sob carregamento senoidal p_{jh} são dados na Tabela IV.5. A contribuição da carga p_{hi} \bar{e} somada por superposição.

- Forças cortantes longitudinais de bordo

Analogamente ao caso das folhas longas, para assegurar a continuidade nas arestas, forças cortantes T devem se desenvolver em cada aresta, com a função de igualar as tensões normais nos bordos das chapas adjacentes (Fig.IV.7).

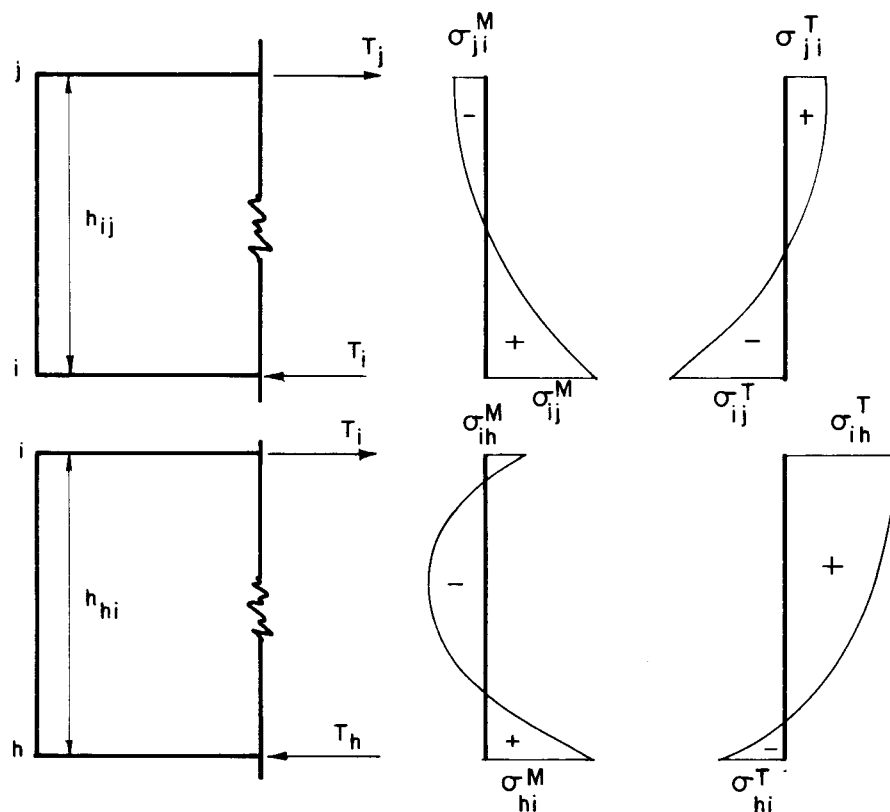


Figura IV.7 — Tensões normais nas chapas

Tomando um par de chapas adjacentes, T_i pode ser calculada com a condição de igualdade das tensões na aresta i (veja-se o item II.4.2, equações II.21):

$$\sigma_{ih} = \sigma_{ih}^M + \sigma_{ih}^T = \sigma_{ij}^M + \sigma_{ij}^T = \sigma_{ij} = \sigma_i \dots (IV.12)$$

onde σ^M denota as tensões de bordo livre e σ^T as tensões devidas à continuidade. Reescrevendo-se a equação acima:

$$\Delta\sigma_i = \sigma_{ih}^M - \sigma_{ij}^M = \sigma_{ij}^T - \sigma_{ih}^T \dots (IV.12')$$

nota-se, como já fora dito, que a diferença de tensões normais de bordo livre é eliminada pela força cortante T_i .

- Distribuição de tensões:

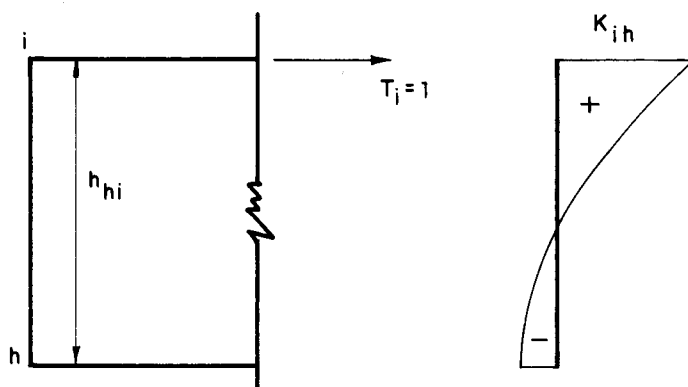


Figura IV. 8 — Tensões longitudinais provocadas por força T unitária

Considere-se uma chapa isolada sob a ação de uma força cortante $T = 1$ (Fig. IV.8). As tensões assim produzidas variam não linearmente ao longo da altura da chapa. A tensão K_{ih} em i depende, obviamente, da área A_{ih} da seção transversal da chapa e da relação h/L . A aplicação de uma força T_i resultará em:

$$\sigma_{ih}^T = T_i \cdot K_{ih} \dots (IV.13)$$

Tomando um par de chapas adjacentes, T_i pode ser calculada com a condição de igualdade das tensões na aresta i (veja-se o item II.4.2, equações II.21):

$$\sigma_{ih}^M = \sigma_{ih}^M + \sigma_{ih}^T = \sigma_{ij}^M + \sigma_{ij}^T = \sigma_{ij} = \sigma_i \dots (IV.12)$$

onde σ^M denota as tensões de bordo livre e σ^T as tensões devidas à continuidade. Reescrevendo-se a equação acima:

$$\Delta\sigma_i = \sigma_{ih}^M - \sigma_{ij}^M = \sigma_{ij}^T - \sigma_{ih}^T \dots (IV.12')$$

nota-se, como já fora dito, que a diferença de tensões normais de bordo livre é eliminada pela força cortante T_i .

- Distribuição de tensões:

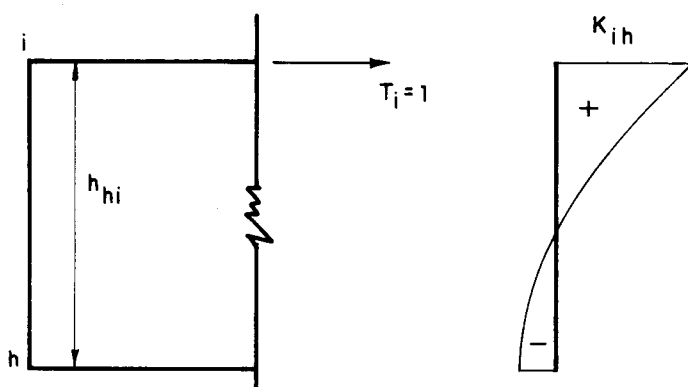


Figura IV. 8 — Tensões longitudinais provocadas por força T unitária

Considere-se uma chapa isolada sob a ação de uma força cortante $T = 1$ (Fig. IV.8). As tensões assim produzidas variam não linearmente ao longo da altura da chapa. A tensão K_{ih} em i depende, obviamente, da área A_{ih} da seção transversal da chapa e da relação h/L . A aplicação de uma força T_i resultará em:

$$\sigma_{ih}^T = T_i \cdot K_{ih} \dots (IV.13)$$

Expressando as tensões na chapa ij da mesma maneira, e formando a relação:

$$\frac{\sigma_{ih}^T}{\sigma_{ij}^T} = \frac{K_{ih}}{K_{ij}} = \text{constante} \quad \dots \text{ (IV.14)}$$

vê-se que a razão entre as tensões produzidas por T_i nas chapas adjacentes é constante e independente de T_i . Combinando as equações (IV.12') e (IV.14), as incógnitas σ^T podem ser obtidas por:

$$\sigma_{ih}^T = \frac{K_{ih}}{K_{ih}+K_{ij}} \cdot \Delta\sigma_i$$
$$\sigma_{ij}^T = \frac{K_{ij}}{K_{ih}+K_{ij}} \cdot \Delta\sigma_i \quad \dots \text{ (IV.15)}$$

Com isso, a diferença de tensões numa aresta pode ser distribuída de um modo semelhante ao processo de Cross, analogamente ao feito para folhas longas (ver item II.4.3).

Vê-se da equação (IV.15) que os K são análogos à rigidez no processo de Cross. A rigidez da chapa será portanto definida aqui como a tensão produzida num bordo i pela aplicação de uma força T unitária em i; os valores de K são dados na Tabela IV.6.

IV.2.3 - Deslocamentos das arestas

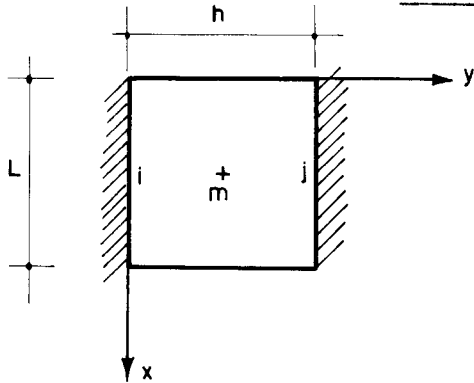
As flechas "a" nos planos das chapas podem ser calculadas por superposição dos efeitos de p e T. Os deslocamentos w das arestas normais aos planos das chapas serão dados por (ver equações II.51 e II.52, Fig. II.19):

$$\omega_{ji} = \frac{a_{ij} \cdot \cos\alpha_j - a_{jk}}{\text{sen}\alpha_j} \quad \dots \text{ (IV.16)}$$
$$\omega_{jk} = \frac{a_{ij} - a_{jk} \cdot \cos\alpha_j}{\text{sen}\alpha_j}$$

Os deslocamentos ω resultarão em flexão adicional nas placas. Os momentos produzidos por ω serão calculados com o auxílio da Tabela IV.7 e serão distribuídos pelo processo de Cross, analogamente ao feito para os momentos produzidos por carga externa.

IV.3 - TABELAS

TABELA IV.1



Placa retangular sob carga dis_ tribuıda. Dois bordos opostos engastados e dois simplesmente apoiados.

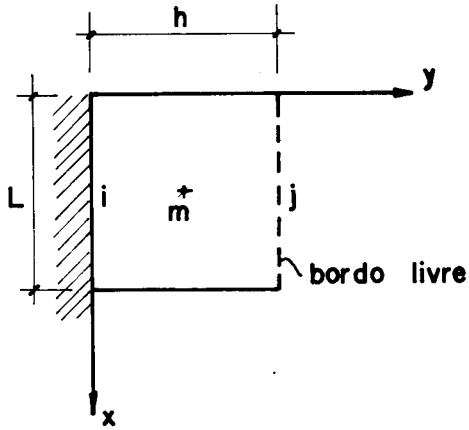
$$m_{yi} = m_{yi}^* + 0,004 g^n \cdot L^2$$

$$v_i = v_i^* - 0,0681 g^n \cdot L$$

h/L	m_{yi}^*	m_{xm}	m_{ym}	m_x^{\max}	v_i^*
0,5	0,0243	0,0004	0,0104	0,0033	0,316
0,6	0,0337	0,0015	0,0145	0,0051	0,376
0,7	0,0436	0,0035	0,0186	0,0068	0,434
0,8	0,0540	0,0067	0,0224	0,0088	0,489
0,9	0,0642	0,0112	0,0260	0,0123	0,539
1,0	0,0738	0,0158	0,0285	0,0162	0,584
1,1	0,0828	0,0217	0,0304	0,0214	0,624
1,2	0,0908	0,0282	0,0316	0,0280	0,659
1,3	0,0978	0,0351	0,0321	0,0349	0,689
1,4	0,1038	0,0421	0,0319	0,0420	0,714
1,5	0,1089	0,0491	0,0312	0,0491	0,734
1,6	0,1130	0,0559	0,0301	0,0559	0,750
1,7	0,1164	0,0625	0,0287	0,0625	0,764
1,8	0,1192	0,0687	0,0270	0,0687	0,774
1,9	0,1214	0,0745	0,0253	0,0745	0,782
2,0	0,1231	0,0798	0,0234	0,0798	0,789
multipl_i_ cador	$-g^n \cdot L^2$	$g^n \cdot L^2$	$g^n \cdot L^2$	$g^n \cdot L^2$	$g^n \cdot L$

* primeiro termo das sēries de Fourier

TABELA IV.2



Placa retangular sob carga dis_tribuída. Dois bordos simples_mente apoiados, um bordo engas_tado e um bordo livre.

$$m_{yi} = m_{yi}^* + 0,004 g^n \cdot L^2$$

$$v_i = v_i^* - 0,0681 g^n \cdot L$$

h/L	m_{yi}^*	m_{xm}	m_{ym}	$m_{x,j}$	v_i^*
0,5	0,0774	0,0104	0,0001	0,0257	0,5712
0,6	0,0919	0,0174	0,0044	0,0396	0,6432
0,7	0,1032	0,0256	0,0087	0,0536	0,6972
0,8	0,1116	0,0341	0,0124	0,0667	0,7359
0,9	0,1175	0,0427	0,0151	0,0782	0,7625
1,0	0,1216	0,0508	0,0169	0,0879	0,7802
1,1	0,1243	0,0585	0,0179	0,0959	0,7917
1,2	0,1261	0,0655	0,0183	0,1024	0,7989
1,3	0,1272	0,0718	0,0183	0,1075	0,8035
1,4	0,1279	0,0776	0,0178	0,1115	0,8063
1,5	0,1283	0,0828	0,0170	0,1146	0,8080
1,6	0,1286	0,0874	0,0162	0,1171	0,8090
1,7	0,1288	0,0916	0,0157	0,1189	0,8097
1,8	0,1289	0,0954	0,0141	0,1204	0,8100
1,9	0,1289	0,0987	0,0131	0,1215	0,8103
2,0	0,1290	0,1017	0,0120	0,1223	0,8104
multipli_cador	$-g \cdot L^2$	$g \cdot L^2$	$g \cdot L^2$	$g \cdot L^2$	$g \cdot L$

* primeiro t rmo das séries de Fourier

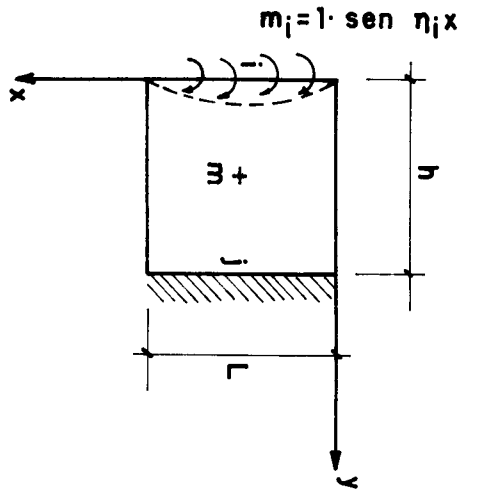


TABELA IV.3

Placa com um bordo engastado e os outros simplesmente apoiados, submetida a momento senoidal.

h/L	$K_f = \frac{1}{\alpha^4}$	$m_y (x = L/2) y = \dots$										ρ	m_{xm}	V_i	V_j
		0,1h	0,2h	0,3h	0,4h	0,5h	0,6h	0,7h	0,8h	0,9h	1h				
0,5	4,67	0,772	0,584	0,425	0,290	0,170	0,062	-0,043	-0,150	-0,260	-0,390	0,058	0,728	0,501	
0,6	4,97	0,743	0,541	0,381	0,252	0,144	0,048	-0,042	-0,133	-0,233	-0,350	0,075	0,854	0,465	
0,7	5,32	0,713	0,498	0,336	0,213	0,116	0,035	-0,040	-0,116	-0,202	-0,308	0,093	1,001	0,419	
0,8	5,72	0,681	0,454	0,292	0,176	0,090	0,022	-0,038	-0,099	-0,172	-0,266	0,103	1,165	0,366	
0,9	6,16	0,649	0,411	0,245	0,141	0,066	0,011	-0,036	-0,085	-0,145	-0,227	0,111	1,335	0,309	
1,0	6,65	0,618	0,370	0,211	0,110	0,045	0,001	-0,034	-0,071	-0,119	-0,190	0,117	1,507	0,258	
1,1	7,17	0,588	0,332	0,176	0,083	0,027	-0,007	-0,033	-0,059	-0,097	-0,157	0,118	1,680	0,211	
1,2	7,72	0,558	0,297	0,145	0,060	0,013	-0,013	-0,031	-0,049	-0,078	-0,129	0,116	1,846	0,171	
1,3	8,29	0,530	0,264	0,118	0,040	0,002	-0,018	-0,029	-0,041	-0,062	-0,104	0,113	2,016	0,137	
1,4	8,88	0,504	0,235	0,094	0,024	-0,007	-0,020	-0,027	-0,034	-0,050	-0,084	0,108	2,181	0,108	
1,5	8,97	0,478	0,208	0,074	0,012	-0,014	-0,022	-0,024	-0,028	-0,039	-0,067	0,102	2,344	0,084	
1,6	10,09	0,453	0,183	0,056	0,001	-0,018	-0,023	-0,022	-0,023	-0,031	-0,053	0,095	2,507	0,065	
1,7	10,70	0,430	0,161	0,041	-0,007	-0,021	-0,022	-0,020	-0,019	-0,024	-0,042	0,087	2,665	0,050	
1,8	11,32	0,408	0,141	0,029	-0,013	-0,023	-0,022	-0,018	-0,016	-0,019	-0,033	0,081	2,824	0,038	
1,9	11,95	0,386	0,123	0,018	-0,017	-0,024	-0,021	-0,016	-0,013	-0,014	-0,025	0,073	2,982	0,030	
2,0	12,57	0,366	0,106	0,009	-0,020	-0,024	-0,020	-0,014	-0,011	-0,011	-0,020	0,067	3,140	0,023	

K_f = rigidez $\rho = m_y, j =$ Coeficiente de distribuição $D = E \cdot I_p$

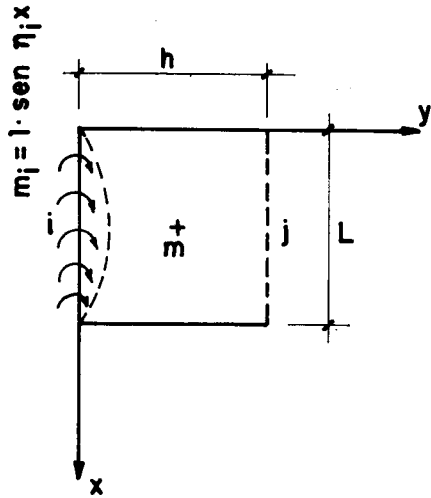


TABELA IV.4

Placa apoiada em três bordos e livre no outro, submetida a momento senoidal.

h/L	$K_i = 1/\theta_i$	m_{yi}	m_{xm}	m_{xj}	v_i
0,5	2,655	0,248	0,254	0,330	0,558
0,6	3,360	0,188	0,244	0,278	0,753
0,7	4,066	0,138	0,231	0,229	0,951
0,8	4,769	0,097	0,216	0,186	1,146
0,9	5,462	0,064	0,200	0,149	1,334
1,0	6,143	0,039	0,184	0,119	1,514
1,1	6,813	0,020	0,167	0,093	1,689
1,2	7,472	0,005	0,154	0,073	1,859
1,3	8,122	-0,006	0,140	0,057	2,025
1,4	8,766	-0,013	0,128	0,044	2,188
1,5	9,405	-0,019	0,116	0,034	2,349
1,6	10,040	-0,022	0,105	0,026	2,509
1,7	10,763	-0,024	0,094	0,020	2,667
1,8	11,304	-0,025	0,085	0,016	2,826
1,9	11,935	-0,025	0,076	0,012	2,983
2,0	12,564	-0,025	0,069	0,009	3,141
multiplificador	D/h				$-\frac{1}{h}$

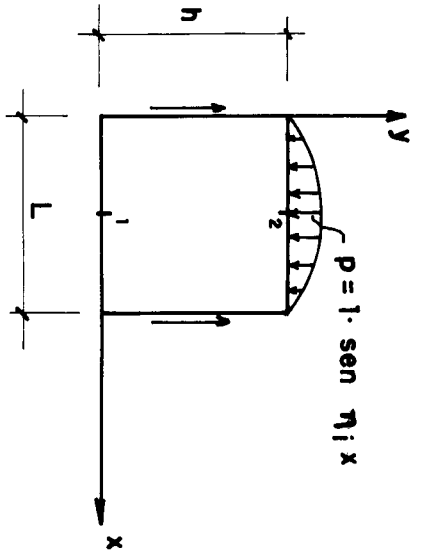
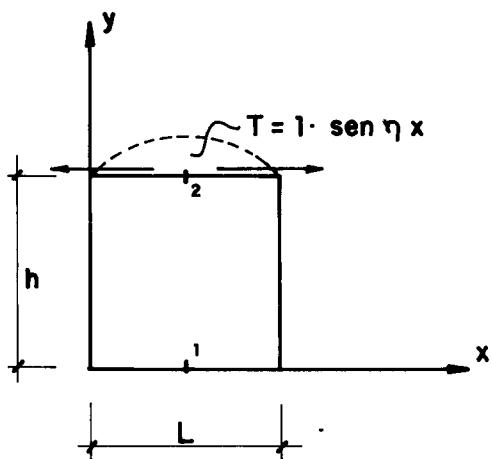


TABELA IV.5

Chapa apoiada ao longo de dois bordos, submetida a carregamento senoidal.
Tensões e deformações no meio do vão.

h/L	$\sigma_{x,y} =$										σ_y		a ₁	a ₂
	0,0h	0,1h	0,2h	0,3h	0,4h	0,5h	0,6h	0,7h	0,8h	0,9h	1,0h	y = h/2		
0,5	2,556	1,921	1,379	0,903	0,466	0,044	-0,388	-0,855	-1,383	-2,002	-2,745	0,493	2,810	3,306
0,6	1,784	1,311	0,930	0,612	0,330	0,060	-0,224	-0,546	-0,935	-1,422	-2,046	0,486	1,494	1,986
0,7	1,306	0,938	0,659	0,440	0,253	0,075	-0,119	-0,356	-0,663	-1,078	-1,645	0,476	0,879	1,366
0,8	0,985	0,691	0,483	0,331	0,207	0,089	-0,047	-0,227	-0,485	-0,859	-1,404	0,463	0,553	1,032
0,9	0,757	0,519	0,363	0,257	0,178	0,102	0,006	-0,136	-0,360	-0,711	-1,254	0,446	0,364	0,835
1,0	0,588	0,394	0,277	0,206	0,158	0,112	0,045	-0,069	-0,268	-0,606	-1,160	0,425	0,247	0,706
1,1	0,459	0,301	0,214	0,169	0,143	0,119	0,074	-0,018	-0,198	-0,528	-1,100	0,402	0,171	0,617
1,2	0,359	0,231	0,167	0,141	0,132	0,123	0,096	0,021	-0,143	-0,467	-1,062	0,376	0,120	0,550
1,3	0,280	0,178	0,132	0,119	0,121	0,125	0,111	0,052	-0,098	-0,417	-1,039	0,349	0,086	0,502
1,4	0,219	0,136	0,104	0,101	0,112	0,124	0,121	0,076	-0,061	-0,375	-1,024	0,322	0,061	0,461
1,5	0,171	0,105	0,083	0,086	0,103	0,121	0,127	0,094	-0,029	-0,339	-1,014	0,294	0,044	0,428
1,6	0,133	0,080	0,066	0,074	0,094	0,117	0,130	0,108	-0,002	-0,306	-1,009	0,268	0,032	0,400
1,7	0,103	0,062	0,053	0,064	0,085	0,111	0,130	0,118	0,021	-0,276	-1,005	0,242	0,023	0,376
1,8	0,079	0,047	0,043	0,055	0,077	0,105	0,129	0,127	0,041	-0,249	-1,003	0,218	0,017	0,354
1,9	0,061	0,036	0,035	0,047	0,069	0,098	0,126	0,130	0,058	-0,223	-1,002	0,196	0,012	0,335
2,0	0,047	0,028	0,028	0,040	0,062	0,091	0,121	0,133	0,072	-0,199	-1,001	0,175	0,009	0,319
mult. plic. dor.	$\frac{p}{b}$											$\frac{p}{b}$	$\frac{p \cdot h}{b \cdot E}$	

TABELA IV.6



Chapa apoiada ao longo de dois bordos, submetida a força cortante longitudinal de bordo, distribuída senoidalmente.

Rigidez, coeficientes de distribuição e deformações.

h/L	$K = \frac{\sigma_{x2}}{\sigma_{x1}}$	$\rho = \frac{\sigma_{x1}}{\sigma_{x2}}$	a_1	a_2
0,5	4,67	0,390	2,556	2,745
0,6	4,97	0,350	1,784	2,046
0,7	5,32	0,308	1,306	1,645
0,8	5,72	0,266	0,985	1,404
0,9	6,16	0,227	0,757	1,254
1,0	6,65	0,190	0,588	1,160
1,1	7,17	0,157	0,459	1,100
1,2	7,72	0,129	0,359	1,062
1,3	8,29	0,104	0,280	1,039
1,4	8,88	0,084	0,219	1,024
1,5	8,97	0,067	0,171	1,014
1,6	10,09	0,053	0,133	1,009
1,7	10,70	0,042	0,103	1,005
1,8	11,32	0,033	0,079	1,003
1,9	11,95	0,025	0,061	1,001
2,0	12,57	0,020	0,047	1,001
multiplificador.	$\frac{1}{b \cdot h}$	-1	$\frac{1}{bE}$	

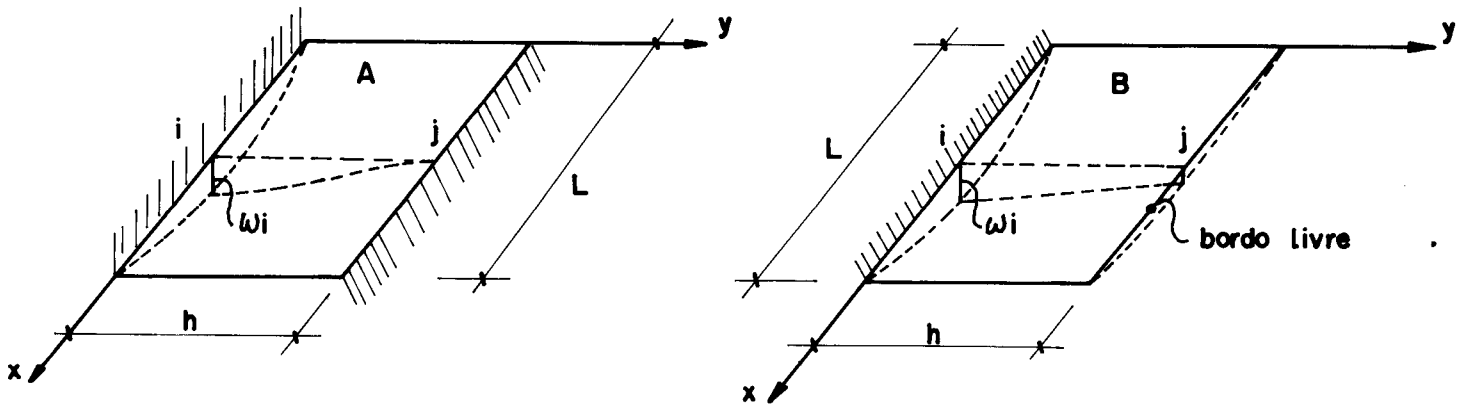
TABELA IV.7

Influência dos recalques de apoio sobre os momentos de placa.

$$\omega(y=0) = \omega_i \cdot \text{sen } \eta x$$

$$m_i = m_i \cdot \text{sen } \eta x$$

$$m_j = m_j \cdot \text{sen } \eta x$$



h/L	c a s o A		c a s o B
	\overline{m}_i	\overline{m}_j	\overline{m}_i
0,5	22,17	12,62	5,93
0,6	17,73	10,58	7,03
0,7	15,05	9,03	7,90
0,8	13,33	7,78	8,54
0,9	12,21	6,72	8,99
1,0	11,45	5,80	9,30
1,1	10,93	4,98	9,51
1,2	10,58	4,25	9,65
1,3	10,34	3,60	9,73
1,4	10,18	3,03	9,79
1,5	10,06	2,39	9,82
1,6	10,00	2,09	9,84
1,7	9,95	1,72	9,85
1,8	9,92	1,41	9,86
1,9	9,90	1,15	9,86
2,0	9,89	0,93	9,87
multiplificador.	$\frac{D \cdot \omega_i}{L^2}$	$-\frac{D \cdot \omega_i}{L^2}$	$\frac{D \cdot \omega_i}{L^2}$

IV.4 - EXEMPLO

- Estrutura em concreto:

$$\gamma = 2500 \text{ kgf/m}^3$$

$$g = 245 \text{ kgf/m}^2$$

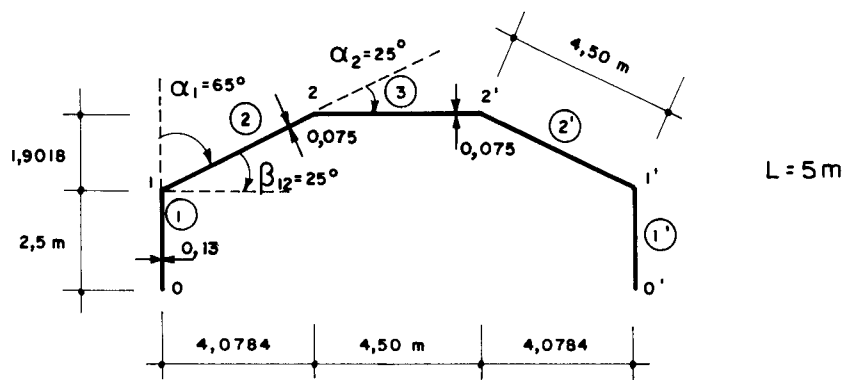


Figura IV-9 - Características da seção transversal

1. Cargas e propriedades geométricas:

- Placa 1 : $g_1^t = 370 \text{ kgf/m}^2$ $g_1^n = 0$

- Placa 2 : $g_2^t = 245 \cdot \text{sen } 25 \approx 105 \text{ kgf/m}^2$

$$g_2^n = 245 \cdot \text{cos } 25 \approx 225 \text{ kgf/m}^2$$

- Placa 3 : $g_3^t = 0$ $g_3^n = 245 \text{ kgf/m}^2$

TABELA IV.8				
Chapa	A_i (m ²)	I_i (m ⁴)	I_{pi} (m ⁴)	Z_i (m ³)
1	0,325	0,16927	0,000183	0,13542
2	0,3375	0,56953	0,000035	0,2531
3	0,3375	0,56953	0,000035	0,2531

$$A_i = \text{área da seção transversal} = b_i \cdot h_i$$

$$Z_i = \text{módulo de resistência da chapa } i = (b_i \cdot h_i^2) / 6$$

$$I_i = \text{momento de inércia da chapa } i = (b_i \cdot h_i^3) / 12$$

$$I_{pi} = \text{momento de inércia da placa } i = (1 \cdot b_i^3) / 12$$

2. Ação de placa contínua apoiada em duas direções

2.1 - Momentos de engastamento perfeito

Podem ser calculados pela equação (IV.2):

$$m_{yi} = m_{yi}^* + 0,004 g^n \cdot L^2 ,$$

e com o auxílio da Tabela IV.1, tem-se:

$$m_{12} = m_{21} = -0,0642 g_2^n \cdot L^2 + 0,004 g_2^n \cdot L^2 \rightarrow \frac{h}{L} = \frac{4,50}{5} = 0,9$$

$$\begin{aligned} \therefore m_{12} = m_{21} &= -0,0642 \cdot 225 \cdot 5^2 + 0,004 \cdot 225 \cdot 5^2 \\ &= (-361 + 22,5) \text{ kgf} \end{aligned}$$

A primeira parte representa o primeiro termo das séries de senos e a segunda representa a soma dos outros termos.

Analogamente, para a placa 3 :

$$\begin{aligned} m_{22'} = m_{2'2} &= -0,0642 \cdot 245 \cdot 5^2 + 0,004 \cdot 245 \cdot 5^2 = \\ &= (-393 + 24,5) \text{ kgf} \end{aligned}$$

2.2 - Distribuição de momentos

Para o cálculo dos coeficientes de distribuição, a rigidez para o primeiro termo das séries é fornecida pelas Tabelas IV.3 e IV.4, bem como os coeficientes de propagação ρ ; para os outros termos, segundo Reiss e Yitzhaky, a rigidez é proporcional ao momento de inércia da placa e o coeficiente de propagação é desprezível.

Assim, tem-se:

- Placa 1 :

$$\frac{h}{L} = \frac{2,5}{5} = 0,5 \rightarrow K_1 = 2,655 \cdot \frac{D}{h}, \text{ Tabela IV.4}$$

- Placas 2 e 3 :

$$\frac{h}{L} = 0,9 \rightarrow K_2 = K_3 = 6,16 \frac{D}{h}, \text{ Tabela IV.3}$$

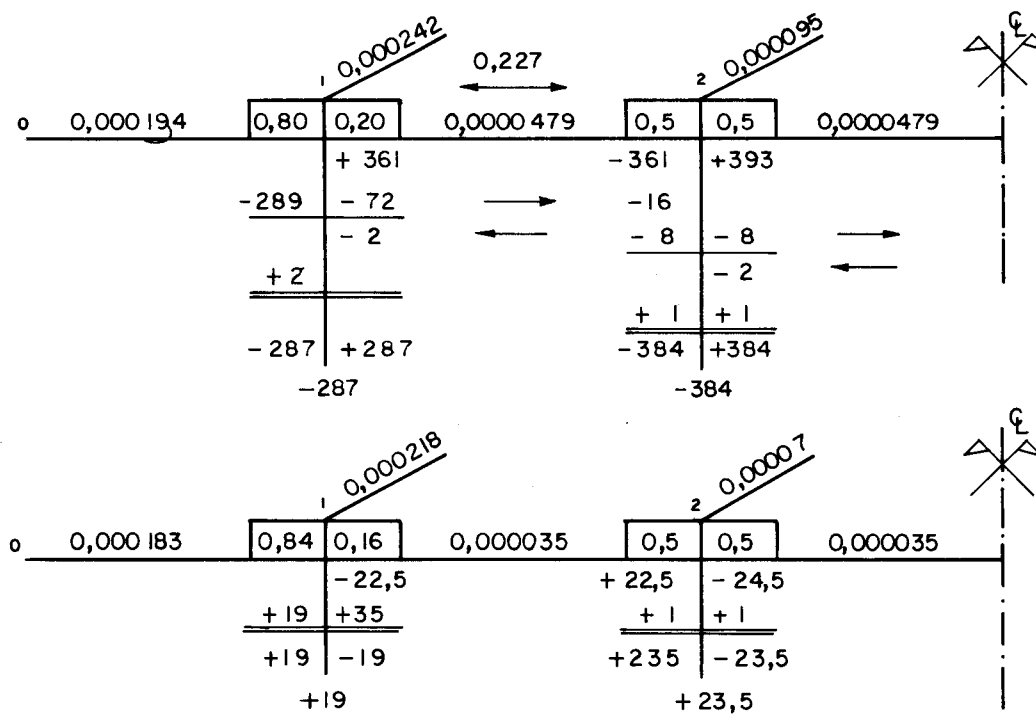
$$\rho = -0,227$$

$$D_i = E \cdot I_{pi} \quad I_{p1} = 0,000183 \text{ m}^4 \quad I_{p2} = 0,000035 \text{ m}^4$$

$$K_1 = 2,655 \cdot \frac{0,000183}{2,5} = 0,000194$$

$$K_2 = K_3 = 6,16 \cdot \frac{0,000035}{4,5} = 0,0000479$$

Colocando os momentos fletores na convenção de Grinter, tendo em vista o exposto acima e lembrando que a compensação é feita separadamente para as duas parcelas de momentos, tem-se:



Resulta, portanto:

$$m_1 = -268 \text{ kgf}$$

$$m_2 = -360,5 \text{ kgf}$$

2.3 - Reações de apoio das lajes

As reações v , normais ao plano das placas, são obtidas por superposição daquelas do primeiro estado (en-gastamento perfeito) com as provocadas pelos momentos já compensados (apenas aqueles correspondentes ao primeiro termo das séries).

Tem-se:

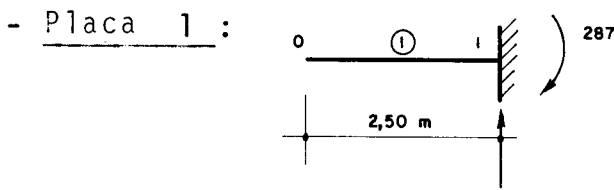
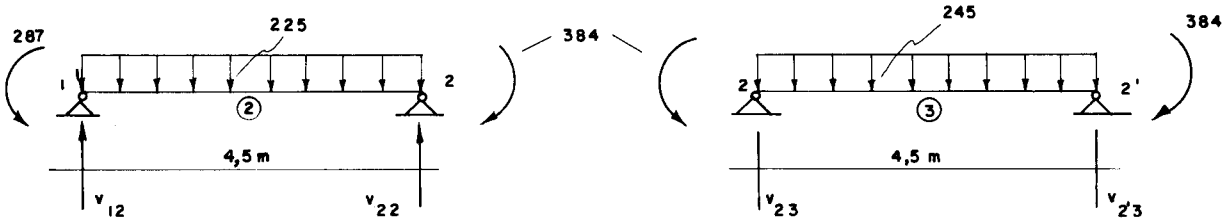


Tabela IV.4, $\frac{h}{L} = 0,5$:

$$v_i = 0,558 \cdot \frac{1}{h}, m = 1$$

$$\therefore v_{1,1} = 287 \cdot \frac{0,558}{2,5} \cong 64 \text{ kgf/m}$$

- Placa 2 e 3 :



As reações de apoio, provocadas por momentos, são dadas pela Tabela IV.3:

$$\begin{aligned} \frac{h}{L} = +0,9 \quad v_i &= -1,335/h \\ v_j &= 0,309/h \end{aligned} \quad \text{para } m = 1$$

As provenientes do carregamento podem ser calculadas com a equação IV.3:

$$v_i = v_i^* - 0,0681 g^n \cdot L$$

O primeiro membro dessa equação é dado pela Tabela IV.1, de onde tem-se:

$$v_i^* = 0,539 g^n \cdot L$$

Portanto:

$$v_i = (0,539 - 0,0681)g^n \cdot L = 0,4709 g^n \cdot L$$

Importante: a expressão de v_i acima, já engloba o valor dos outros termos das séries de Fourier; esse o motivo pelo qual consideram-se apenas os momentos correspondentes ao primeiro termo das séries.

Portanto:

- Placa 2 :

$$v_{12} = 0,4709 \cdot 225 \cdot 5 + \frac{1,335}{4,5} \cdot 287 - \frac{0,309}{4,5} \cdot 384 \cong \\ \cong 588,5 \cong 590 \text{ kgf/m}$$

$$v_{22} = 529,8 - \frac{0,309}{4,5} \cdot 287 + \frac{1,335}{4,5} \cdot 384 \cong 625 \text{ kgf/m}$$

- Placa 3 :

$$v_{23} = 0,4709 \cdot 245 \cdot 5 + \left(\frac{1,335}{4,5} - \frac{0,309}{4,5} \right) \cdot 384 \cong 665 \text{ kgf/m}$$

$$v_{2'3} = v_{23}$$

3. Ação de chapa:

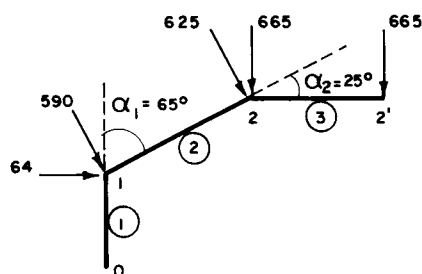
3.1 - Cálculo das cargas nas chapas

As reações v das placas são aplicadas às arestas da estrutura em chapa e resolvidas em forças no plano das chapas, com o auxílio das equações (IV.9) (Fig. IV.5):

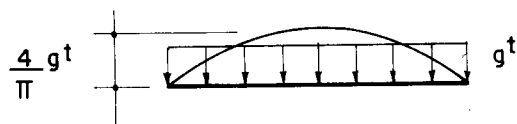
$$S_{ih} = \frac{v_{ih} \cdot \cos \alpha_i + v_{ij}}{\operatorname{sen} \alpha_i} \qquad S_{ij} = \frac{v_{ih} + v_{ij} \cdot \cos \alpha_i}{\operatorname{sen} \alpha_i}$$

Tem-se:

- Chapa 1 : $v_{01} = 0$ $v_{11} = 64 \text{ kgf/m}$



Lembrando que deve ser levada em conta, na ação de chapa, a componente tangencial g^t do carregamento, e que a variação das reações é senoidal, tem-se:



$$\therefore P_{01} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{g_1^t \cdot h_1}{2} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{370 \cdot 2,5}{2} \approx +590 \text{ kgf/m}$$

$$P_{11} = \frac{64 \cdot \cos 65^\circ + 590}{\operatorname{sen} 69} + 590 \approx +1271 \text{ kgf/m}$$

Portanto, a primeira chapa (viga-parede) suporta o carregamento:

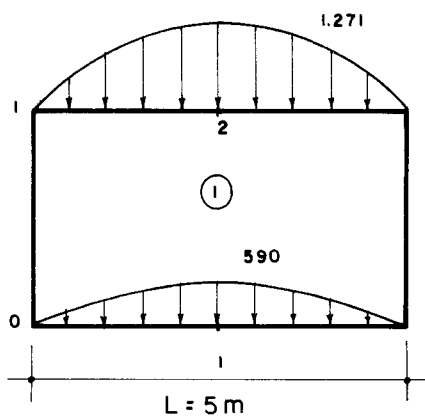


TABELA IV.5, $\frac{h}{L} = 0,5$

$h = 2,50m$

$b = 13 \text{ cm}$

$\sigma_{01} = 2,556 \cdot \frac{p}{b}$

$\sigma_{11} = -2,745 \cdot \frac{p}{b}$

Os números 1 e 2 das Tabelas serão sempre referenciais da fibra mais inferior e da mais superior, respectivamente, em relação à carga (v. Tabelas)

Analogamente:

$p_{12} = - \frac{(64+590 \cdot \cos 65)}{\text{sen } 65} + \frac{4}{2} \cdot \frac{105 \cdot 4,5}{2} \approx -45 \text{ kgf/m}$

$p_{22} = \frac{625 \cdot \cos 25 + 665}{\text{sen } 25} + 301 \approx +3215 \text{ kgf/m}$

$p_{23} = \frac{625 + 665 \cdot \cos 25}{\text{sen } 25} \approx -2905 \text{ kgf/m}$

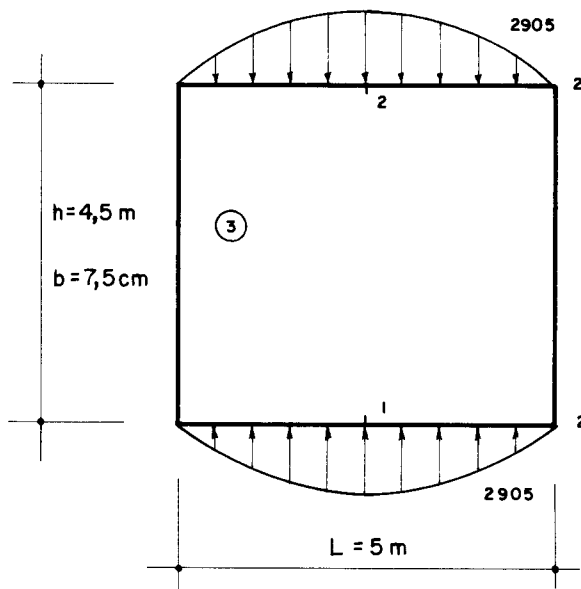
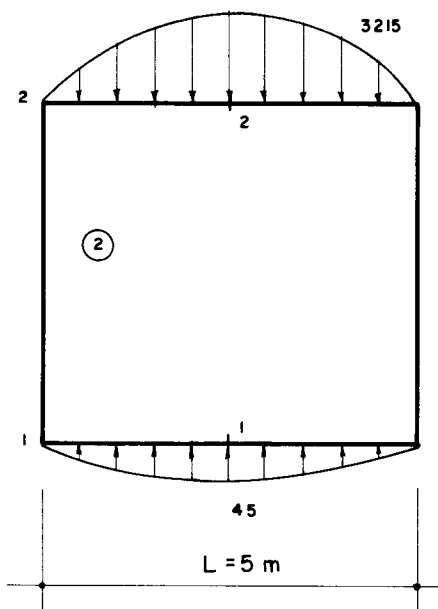


TABELA IV.5 , $\frac{h}{L} = 0,9$

$$\sigma_{x1} = \sigma_{12} = 0,757 p/b$$

$$\sigma_{x2} = \sigma_{22} = -1,254 p/b$$

3.2 - Tensões longitudinais

3.2.1 - Tensões de bordo livre

(Tração = +)

$$\sigma_{01} = 2,556 \cdot \frac{1861}{0,13} \cong 36590 \text{ kgf/m}^2 \cong 3,66 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{11} = -2,745 \cdot \frac{1861}{0,13} = -3926 \text{ kgf/m}^2 = -3,93 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= 0,757 \cdot \frac{3215}{0,075} - 1,254 \cdot \frac{45}{0,075} = 31698 \text{ kgf/m}^2 \cong \\ &\cong 3,17 \text{ kgf/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= -1,254 \cdot \frac{3215}{0,075} + 0,757 \cdot \frac{45}{0,075} \cong -5330 \text{ kgf/m}^2 \cong \\ &\cong -5,33 \text{ kgf/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{23} &= 0,757 \cdot \frac{2905}{0,075} - 1,254 \cdot \frac{2905}{0,075} = -19250 \text{ kgf/m}^2 \cong \\ &\cong -1,92 \text{ kgf/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_{2'3} = \sigma_{23} = -1,92 \text{ kgf/cm}^2$$

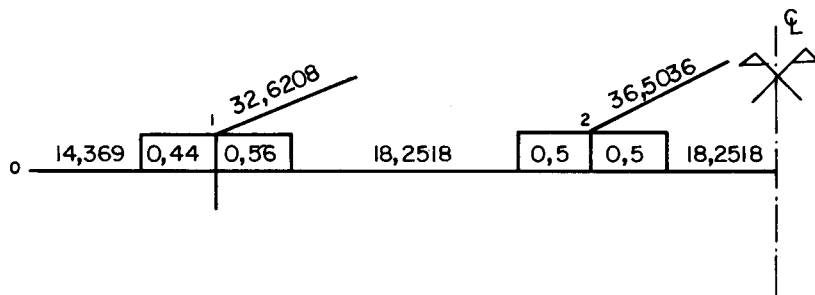
3.2.2 - Coeficientes de distribuição de tensões

Os coeficientes de rigidez K são dados na Tabela Iv.6, de onde:

$$\frac{h}{L} = 0,5 \rightarrow K_1 = \frac{4,67}{A_1} \qquad \frac{h}{L} = 0,9 \rightarrow K_2 = K_3 = \frac{6,16}{A_2}$$

$$\therefore K_1 = \frac{4,67}{0,325} = 14,369 \qquad K_2 = K_3 = \frac{6,16}{0,3375} = 18,2518$$

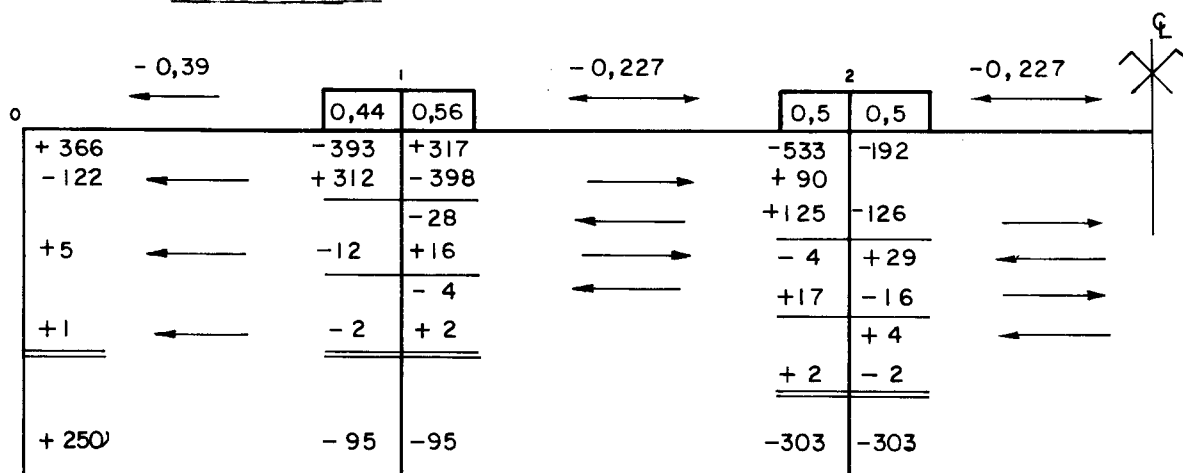
e, com o auxílio das IV.15:



Também da Tabela IV.6 saem os coeficientes de propagação:

$$\frac{h}{L} = 0,5 \rightarrow \rho = -0,39 \qquad \frac{h}{L} = 0,9 \rightarrow \rho = -0,227$$

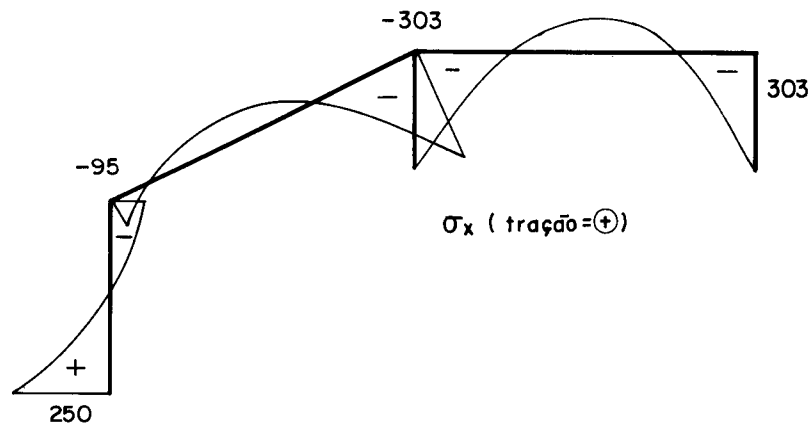
3.2.3 - Compensação (kgf/cm²)x100)



Da compensação sai:

$$\sigma_{11}^T = +298 = +29800 \text{ kgf/m}^2 \quad \sigma_{12}^T = -38000 \text{ kgf/m}^2$$

$$\sigma_{22}^T = +14400 \text{ kgf/m}^2 \quad \sigma_{23}^T = -14400 \text{ kgf/m}^2$$



4. Efeito dos deslocamentos das arestas

4.1 - Flechas das chapas

As flechas "a" no plano de cada chapa, causadas pelas cargas p e pelas forças cortantes T longitudinais de bordo serão agora calculadas; antes, é necessário conhecer os valores de T . Da equação IV.13:

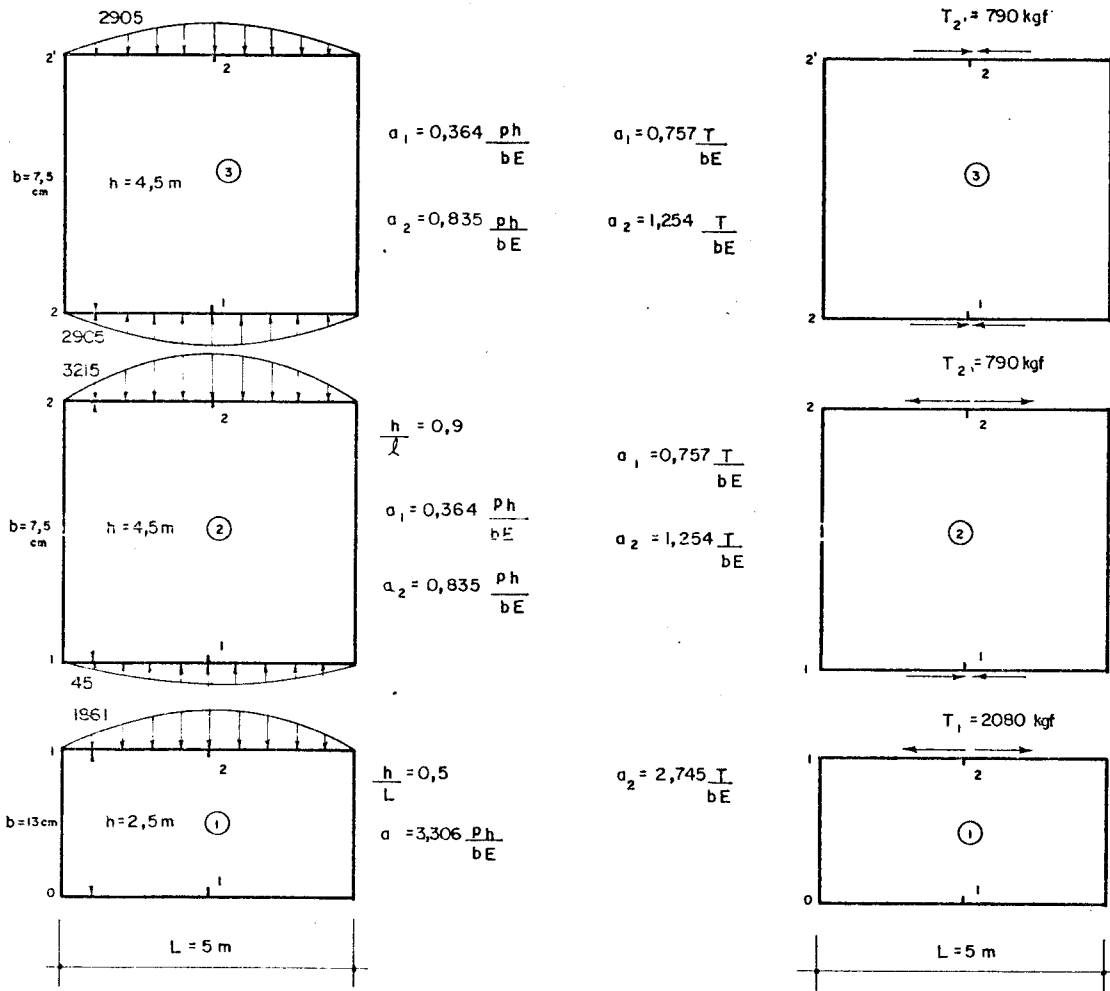
$$\sigma_{ih}^T = T_i \cdot K_{ih} \rightarrow T_i = \frac{\sigma_{ih}^T}{K_{ih}}$$

Os valores de σ^T são obtidos facilmente da compensação feita anteriormente. Assim:

$$T_1 = \frac{+29800}{14,369} = \frac{-38000}{18,2518} \approx 2080 \text{ kgf}$$

$$T_2 = \frac{14400}{18,2518} = 790 \text{ kgf}$$

Os valores de a_1 e a_2 , para cada carregamento, são dados nas Tabelas IV.5 e IV.6; os valores finais de c_a da flecha são, então, obtidos por superposição.



Por superposição, tem-se (lembrar que a flecha \bar{e} positiva no sentido decrescente da numeração das arestas):

$$E a_{11} = 3,306 \cdot 1861 \cdot \frac{2,5}{0,13} - 2,745 \cdot \frac{2080}{0,13} = +74396,65$$

$$E a_{12} = 0,364 \cdot 3215 \cdot \frac{4,5}{0,075} - 0,835 \cdot 45 \cdot \frac{4,5}{0,075} - 790 \cdot \frac{0,757}{0,075} + \\ - 1,254 \cdot \frac{2080}{0,075} = + 25209,766$$

$$E a_{22} = 0,835 \cdot 3215 \cdot \frac{4,5}{0,075} - 0,364 \cdot 45 \cdot \frac{4,5}{0,075} - 1,254 \cdot \frac{790}{0,075} + \\ - 0,757 \cdot \frac{2080}{0,075} = + 125885,766$$

$$E a_{23} = (0,364 - 0,835) \cdot \frac{2905 \cdot 4,5}{0,075} + (0,757 - 1,254) \cdot \frac{790}{0,075} = \\ = - 87330,366$$

Com as flechas nos planos das chapas, os deslocamentos das arestas normais aos planos podem ser obtidos através das (IV.16):

$$\omega_{ji} = \frac{a_{ij} \cdot \cos \alpha_j - a_{jk}}{\text{sen} \alpha_j} \quad \omega_{jk} = \frac{a_{ij} - a_{jk} \cdot \cos \alpha_j}{\text{sen} \alpha_j}$$

Assim:

$$E \omega_{11} = \frac{E(a_{11} \cdot \cos \alpha_1 - a_{12})}{\text{sen} \alpha_1} = \frac{74396,65 \cdot \cos 65 - 25209,766}{\text{sen} 65} = \\ = + 6875,8$$

Analogamente:

$$E \omega_{12} = \frac{74396,65 - 25209,766 \cdot \cos 65}{\text{sen} 65} \cong +70332,1$$

$$E\omega_{22} \cong + 476604,15$$

$$E\omega_{23} \cong + 485151,7$$

Lembrando que os deslocamentos ω são positivos quando concordam com o sentido das cargas nas arestas, pode-se calcular os momentos provocados por ω com o auxílio da Tabela IV.7. Têm-se:

- Placa 1 :

$$\frac{h}{L} = 0,5 \rightarrow \bar{m}_i = 5,93 \cdot \frac{D \cdot \omega_i}{L^2} = 5,93 \cdot \frac{E \cdot I_{pi} \cdot \omega_i}{L^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore m_{11} &= 5,93 \cdot \frac{I_{pi} \cdot E\omega_{11}}{L^2} = 5,93 \cdot \frac{0,000183 \cdot 6875,8}{5^2} = \\ &= 0,298 \cong 0,3 \text{ kgf} \end{aligned}$$

- Placas 2 e 3 :

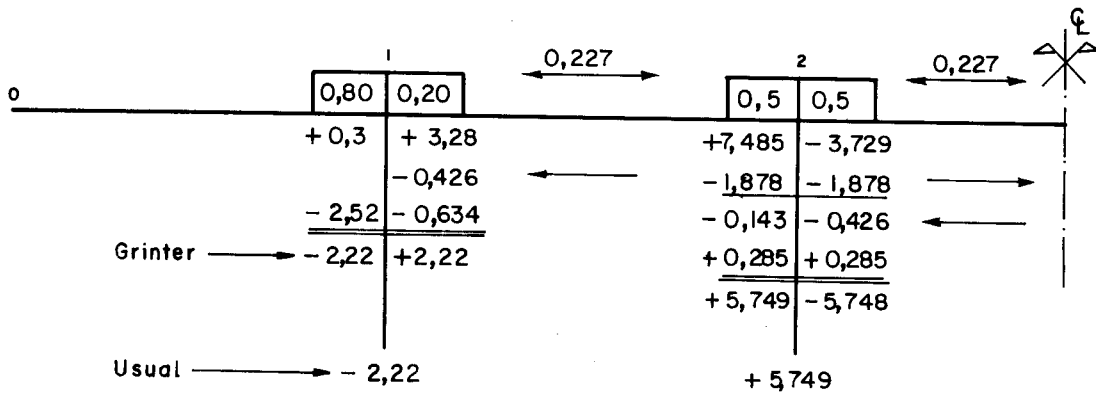
$$\begin{aligned} \frac{h}{L} = 0,9 \rightarrow \bar{m}_i &= 12,21 \frac{EI_{pi} \cdot \omega_i}{L^2} \\ \bar{m}_j &= -6,72 \frac{EI_{pi} \cdot \omega_i}{L^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore m_{12} &= 12,21 \cdot 0,000035 \cdot \frac{70332,1}{5^2} - 6,72 \cdot 0,000035 \cdot \frac{476604,15}{5^2} = \\ &= -3,28 \text{ kgf} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{22} &= 12,21 \cdot 0,000035 \cdot \frac{476604,15}{5^2} - 6,72 \cdot 0,000035 \cdot \frac{70332,1}{5^2} = \\ &= +7,485 \text{ kgf} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{23} &= 12,21 \cdot \frac{485151,7}{5^2} \cdot 0,000035 - 6,72 \cdot \frac{485151,7}{5^2} \cdot 0,000035 = \\ &= +3,729 \text{ kgf} \end{aligned}$$

Os momentos acima são positivos quando produzem tração nas fibras inferiores das placas. Colocando-os na convenção de Grinter e compensando da mesma forma feita anteriormente, têm-se os momentos finais produzidos pelos deslocamentos das arestas:

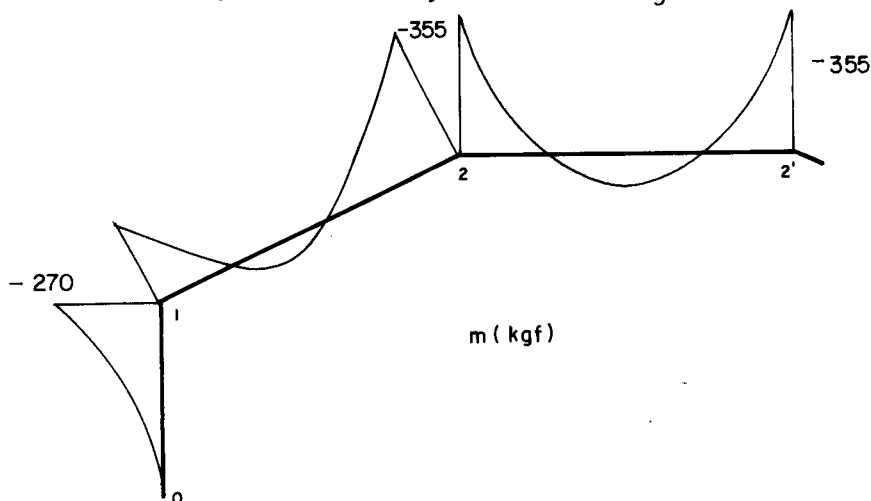


Como fora salientado desde o início, os momentos provocados pelos deslocamentos das arestas são pequenos quando comparados com aqueles provocados pelas cargas. A sua importância é, assim, menor que nos casos de folhas longas.

Os momentos finais serão portanto:

$$m_1 = -268 - 2,22 = -270,22 \approx -270 \text{ kgf}$$

$$m_2 = -360,5 + 5,749 = -354,75 \approx -355 \text{ kgf}$$



CAPÍTULO V

ANÁLISE APROXIMADA DAS FOLHAS PRISMÁTICAS CONTÍNUAS PELO MÉTODO DE MOUSA, PARMELEE E LEE⁵⁴

V.1 - INTRODUÇÃO

Como visto anteriormente (item II.6.2), dentre os vários métodos "manuais" de análise das folhas contínuas destaca-se o de Mousa, Parmelee e Lee⁵⁴, por ser o único a não exigir simetria na direção longitudinal da estrutura. O método apresenta uma análise aproximada de folhas prismáticas contínuas sobre o diafragmas transversais intermediários e simplesmente apoiadas nos diafragmas de extremidade.

A análise é baseada nos métodos simples (Simpson^{3,26}) para a direção transversal (ação de placa contínua) e longitudinal (ação de chapa contínua), formulando-se as elásticas das chapas individuais em termos de séries trigonométricas infinitas, conforme sugerido por Lee¹²⁵.

V.2 - HIPÓTESES BÁSICAS

- a) cada chapa é retangular e de espessura constante;
- b) o material é elástico, homogêneo e isotrópico;
- c) as deformações longitudinais variam linearmente ao

- longo da altura de cada chapa;
- d) as arestas são contínuas e monolíticas ao longo do seu comprimento;
 - e) as chapas são longas, relativamente à sua altura ($L/h > 3$)
 - f) os diafragmas de apoio são infinitamente rígidos nos seus planos e perfeitamente flexíveis normalmente a eles.

Deve-se observar também que as convenções aqui utilizadas são as mesmas anteriormente descritas (Capítulo II).

V.3 - DESCRIÇÃO DO MÉTODO DE ANÁLISE

V.3.1 - Análise de vigas contínuas por séries de Fourier^{1 2 5}

A equação diferencial que governa o deslocamento de uma viga prismática submetida a um carregamento arbitrário de intensidade $q(x)$ é dada por:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q(x)}{E I} \quad \dots (V.1)$$

onde E é o módulo de elasticidade e I o momento de inércia da viga. A solução geral da (V.1) é:

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + y_p(x) \quad \dots (V.2)$$

onde $y_p(x)$ é solução particular da primeira equação e c_1 a c_4 são constante de integração.

Uma viga, simplesmente apoiada nas extremidades, contínua sob t apoios intermediários e submetida a carga

aplicada $p(x)$ (Fig. V.1), pode ser analisada¹²⁵ como sendo biapoiada, sob o efeito do carregamento aplicado $p(x)$ e dos hiperestáticos V_1, V_2, \dots, V_t . A carga aplicada e as reações hiperestáticas são aproximadas por séries de Fourier nas formas:

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad \dots (V.3)$$

$$V_k = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^k \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (k=1,2,\dots,t)$$

onde os coeficientes de Fourier F são dados por:

$$F_n = \frac{2}{L} \int_0^L p(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad \dots (V.4)$$

$$F_n^k = \frac{2V_k}{L} \text{sen} n \pi e_k$$

sendo L = vão longitudinal e e_k a relação entre a distância do apoio de extremidade até o apoio k e o vão total, como mostra a Fig. V.1. Observe-se que, nas fórmulas (V.4), a segunda é decorrência da primeira (particularizada para carga concentrada).

É interessante salientar-se o significado dos coeficientes F_n de Fourier. Para exemplificar, examine-se o caso de carga uniformemente distribuída ($p(x)=\text{constante}$). A primeira das (V.4) fornece:

$$F_n = \frac{4p}{n\pi} \quad (n = 1,3,5,\dots)$$

Ou seja, tendo em vista a primeira das (V.3), pode-se substituir a carga uniformemente distribuída por (Fig. V.2):

$$p(x) = \frac{4p}{\pi} \left(\text{sen} \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \text{sen} \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \text{sen} \frac{5\pi x}{L} + \dots \right)$$

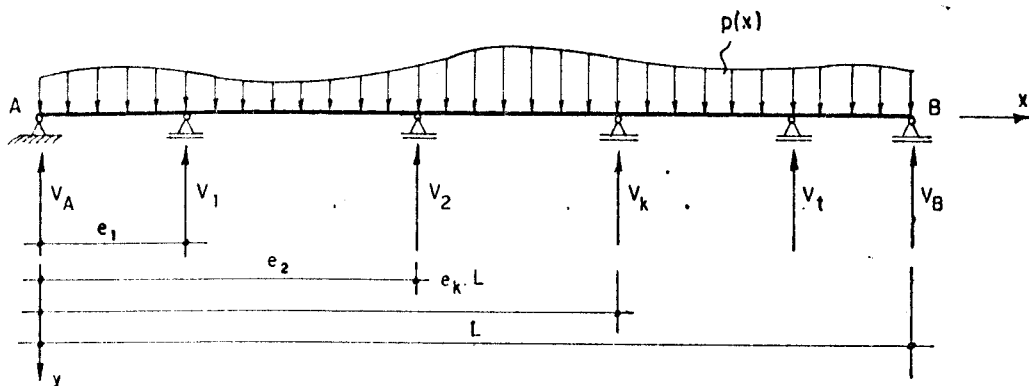


Figura V-1 — Viga contínua sobre t apoios intermediários submetida a carga transversal

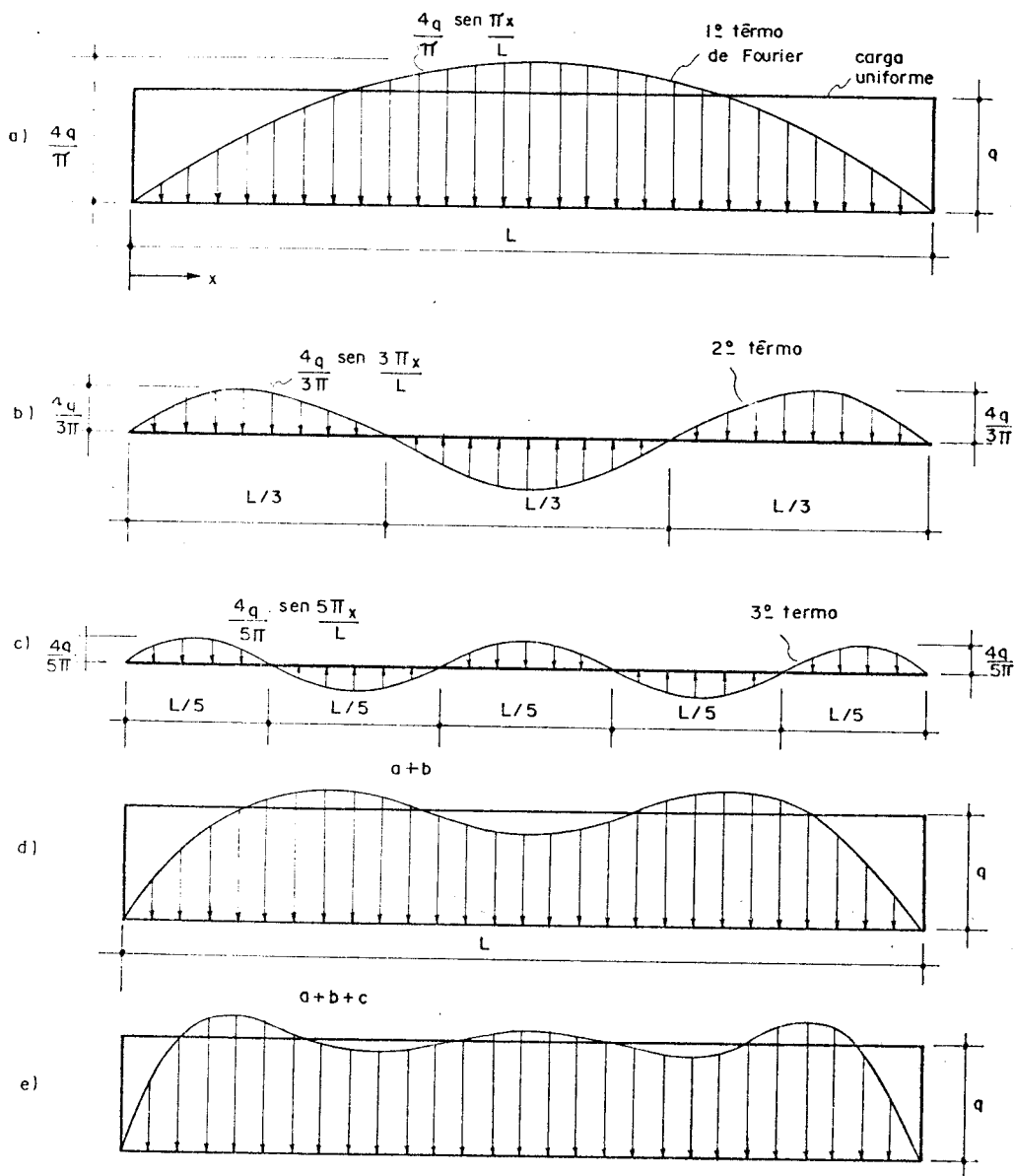


Figura V-2 — Carga uniformemente distribuída transformada em séries de Fourier

As condições de contorno são dadas por:

$$y(0) = y''(0) = y(L) = y''(L) = 0 \quad \dots (V.5)$$

Em vista da equação (V.5), $y_p(x)$ pode ser tomada na forma:

$$y_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad \dots (V.6)$$

Tendo em vista as equações (V.3), a carga total $q(x)$ atuando na viga pode ser escrita:

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (F_n - \sum_{k=1}^t F_n^k) \cdot \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad \dots (V.7)$$

Substituindo as equações (V.6) e (V.7) em (V.1), tem-se:

$$B_n = \frac{L^4}{E I \pi^4 n^4} (F_n - \sum_{k=1}^t F_n^k) \quad \dots (V.8)$$

e substituindo as equações (V.2) e (V.6) na (V.5):

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0 \quad \dots (V.9)$$

Portanto, a equação (V.2) pode ser escrita:

$$y(x) = y_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad \dots (V.10)$$

Substituindo a equação (V.8) em (V.10), tendo em vista a segunda das (V.4), obter-se-á a expressão geral da elástica:

$$y(x) = \frac{L^4}{E I \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} (F_n - \frac{2}{L} \sum_{k=1}^t V_k \cdot \text{sen} n\pi e_k) \cdot \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad \dots (V.11)$$

Exemplificando, para viga biapoiada, sob carga u niformemente distribuída, a (V.11) fornece:

$$y(x) = \frac{4 q L^4}{E I \pi^5} \cdot \left(\text{sen } \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^5} \cdot \text{sen } \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^5} \text{sen } \frac{5\pi x}{L} + \dots \right)$$

No meio do vão, usando apenas o primeiro termo das séries, a flecha obtida é $0,01307 qL^4/EI$ (o valor exato da Estática é $0,01302 qL^4/EI$). Vê-se então que, embora a componente de carregamento dado pelo primeiro termo das séries de Fourier seja muito diferente da distribuição real uniforme (Fig. V.2.a), ela fornece um resultado preciso para a elástica, no caso de viga biapoiada. Isso explica porque, no caso das folhas simples (ver item II.5.6), pode-se considerar apenas um termo das séries.

Para os apoios intermediários, supostos indeformáveis, os deslocamentos são nulos, isto é:

$$y(x_j) = 0 \quad (j=1,2,\dots,t) \quad \dots (V.12)$$

Substituindo as (V.12) na (V.11), tem-se:

$$\sum_{k=1}^t V_k \cdot D_{jk} = \frac{L}{2} \cdot D_j \quad (j=1,2,\dots,t) \quad \dots (V.13)$$

onde:

$$D_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n^4} \text{sen } n\pi e_j \quad \dots (V.14)$$

$$D_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \text{sen } n\pi e_j \cdot \text{sen } n\pi e_k$$

A equação (V.13) fornece um sistema de t equações, o qual, resolvido, fornece os valores das reações V_1, V_2, \dots, V_t . Exemplificando, no caso de uma viga contínua sobre três apoios internos, a (V.13) forneceria:

$$R_1 D_{11} + R_2 D_{12} + R_3 D_{13} = \frac{L}{2} D_1$$

$$R_1 D_{21} + R_2 D_{22} + R_3 D_{23} = \frac{L}{2} D_2$$

$$R_1 D_{31} + R_2 D_{32} + R_3 D_{33} = \frac{L}{2} D_3$$

sendo:

$$D_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F}{n^4} \operatorname{sen} n\pi e_1 \quad D_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F}{n^4} \operatorname{sen} n\pi e_2$$

$$D_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \operatorname{sen}^2 n\pi e_1$$

$$D_{12} = D_{21} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \operatorname{sen} n\pi e_1 \cdot \operatorname{sen} n\pi e_2$$

etc

sendo e_1 , e_2 , e_3 definidos conforme a Fig. V.1.

Substituindo as reações V e os coeficientes F na equação (V.11), obtêm-se as elásticas de cada chapa.

V.3.2 - Distribuição de tensões e cálculo das flechas nos planos das chapas

Como visto anteriormente (ver itens I.4.3 e II.4.2), as tensões longitudinais normais provocadas pelo efeito de viga (tensões de bordo livre) são diferentes para uma mesma aresta j , mas a continuidade exige que elas sejam iguais, aparecendo então tensões tangenciais que se desenvolvem ao longo da aresta de união de duas chapas adjacentes, igualando as tensões normais. Aplicar-se-á aqui o mesmo processo de distribuição das tensões normais visto no item II.4.3.

Corrigidas e igualadas as tensões, calcula-se as flechas nos planos das chapas através da fórmula:

$$a_{ij} = \frac{y_{ij} \cdot I_{ij} \cdot (\sigma_i - \sigma_j)}{M_{ij} \cdot h_{ij}} \quad \dots (V.15)$$

fórmula análoga ã dada pela equação (II.48), sendo:

- h_{ij} = altura da chapa ij ;
- I_{ij} = momento de inércia;
- M_{ij} = momento fletor longitudinal;
- y_{ij} = elástica no plano da chapa;
- σ_i, σ_j = tensões normais corrigidas nas arestas i e j , respectivamente.

Deve-se observar que, na fórmula, M e y são tomados como valores não corrigidos, isto é, antes da aplicação das tensões τ .

V.3.3 - Procedimento

A análise, passo a passo, deve ser feita como segue (ver item II.5.2, método de Simpson):

- a) assumindo que as arestas sejam indeslocáveis, toma-se uma faixa de largura unitária na seção transversal, a qual é analisada como placa contínua, determinando-se as reações R_i de apoio das placas (cargas nas arestas da estrutura em chapa); decompõe-se esse carregamento determinando-se então as cargas nos planos das chapas;
- b) o carregamento no plano das chapas, as reações V_k dos apoios intermediários e a elástica são expandidas em séries trigonométricas infinitas, como visto no item V.3.1. As equações (V.3) são usadas para calcular os coeficientes

tes de Fourier F_n para a carga aplicada, as reações são determinadas pelas (V.13) e a elástica \bar{e} definida pela (V.11).

- c) para satisfazer a continuidade nas arestas, as tensões longitudinais normais são igualadas através do processo de distribuição descrito em II.4.3; calcula-se então as flechas finais no plano de cada chapa através da equação (V.15), para uma seção qualquer, chamada seção de referência (arbitrada).
- d) aplica-se uma rotação arbitrária (θ'_{i0}) para cada placa na seção transversal de referência, como já visto (item II.5.2); as rotações, os momentos transversais m correspondentes e as reações R_i nas arestas são assumidos variar ao longo do vão da mesma maneira que a elástica provocada pelo carregamento, obtida no passo b; determina-se as flechas nos planos das chapas, na seção de referência, como discutido nos passos a a c; obtêm-se as flechas totais por:

$$a_{ij} = (a_{ij})_0 + k_2 \cdot (a_{ij})_1 + k_3 (a_{ij})_2 + \dots$$

- e) com as flechas a, calculam-se os giros de corda θ' através das equações (II.56):

$$\theta'_{ij} = \frac{1}{h_{ij}} \left[a_{ij} (\cotg \alpha_j + \cotg \alpha_i) - \frac{a_{jk}}{\text{sen} \alpha_j} - \frac{a_{hi}}{\text{sen} \alpha_i} \right]$$

- f) iguala-se os giros assim obtidos com aqueles obtidos no passo d:

$$\theta'_2 = k_2 \cdot \theta'_{20} \quad \theta'_3 = k_3 \cdot \theta'_{30} \quad \text{etc...}$$

Obtêm-se, assim, um sistema de equações lineares que, resolvido, fornece os valores das constantes k de correção;

- g) superposição de efeitos, após correção dos valores arbitrados;
- h) os passos c a g são repetidos para cada termo das séries de Fourier; o número de termos necessários para a solução depende do grau de precisão desejado, o que será melhor discutido nos exemplos.

V.4 - EXEMPLOS

V.4.1 - Exemplo 1

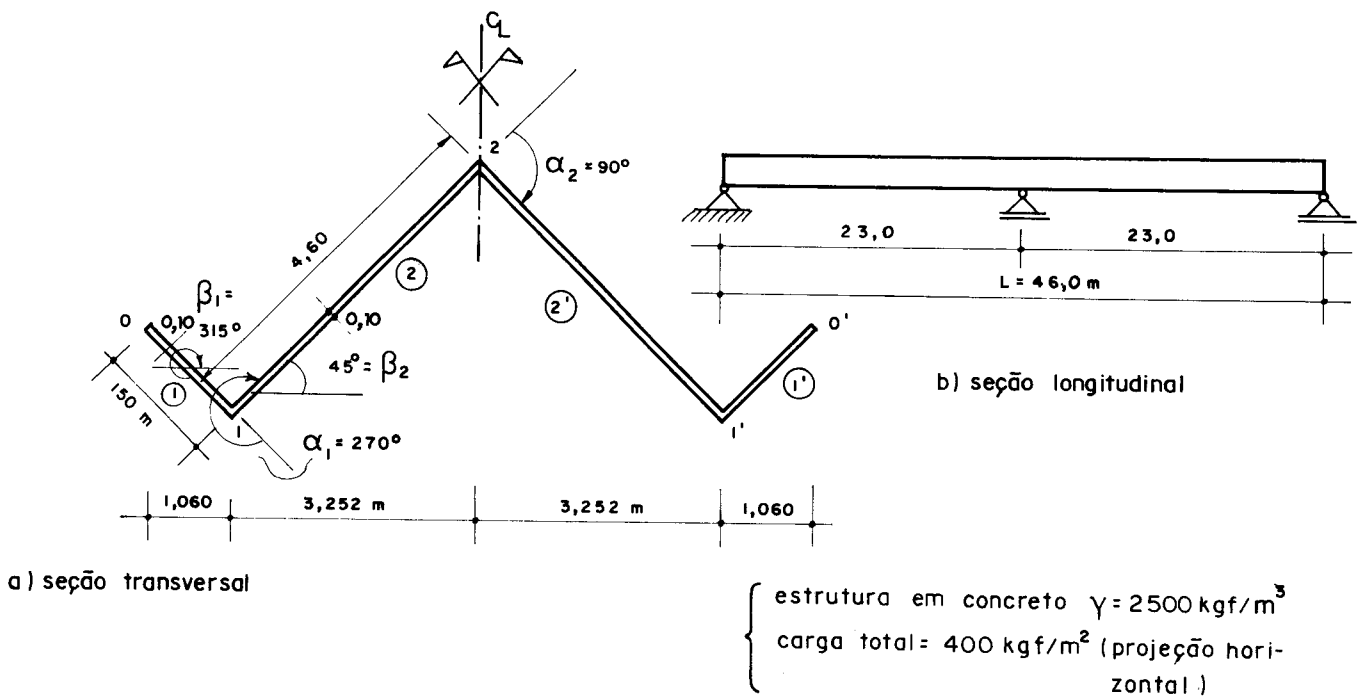


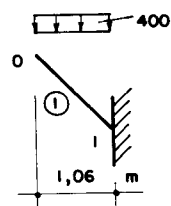
Figura V.3 — Dimensões e carregamento da estrutura

1. Propriedades geométricas

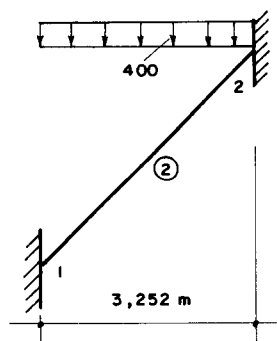
TABELA V.1

Placa	A_i (m ²)	Z_i (m ³)	I_{pi} (m ⁴)	I_i
1	0,15	0,03750	0,0000833	0,028125
2	0,46	0,35266	0,0000833	0,81113

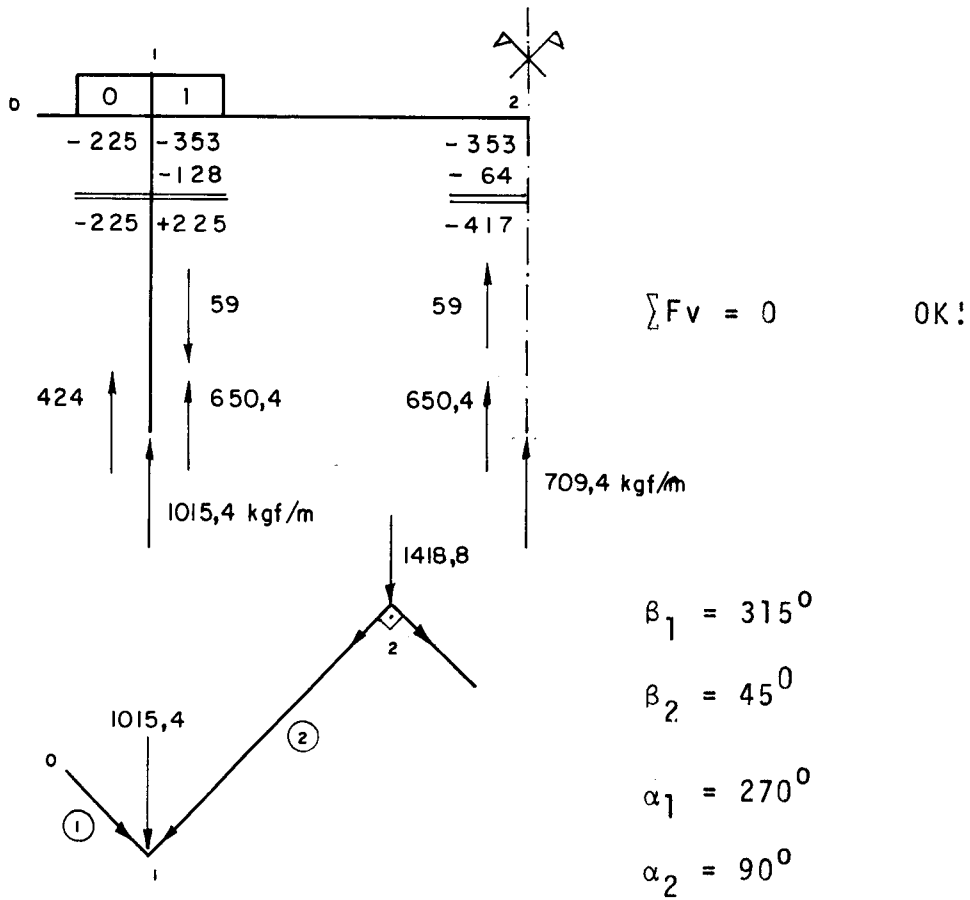
2. Momentos de engastamento, cargas R_i nas arestas e cargas p no plano das chapas



$$m_{10} = \frac{pl^2}{2} \cong 225 \text{ kgfm/m}$$



$$m_{12} = -m_{21} = \frac{400 \cdot 3,252^2}{12} = 353 \text{ kgfm/m}$$



As cargas nas chapas serão calculadas através das equações II.16' (ver item II.4.1):

$$S_{ih} = \frac{R_i \cdot \cos \beta_{ij}}{\text{sen} \alpha_j} \quad S_{ij} = \frac{R_i \cdot \cos \beta_{hi}}{\text{sen} \alpha_j}$$

$$S_{10} = \frac{1015,4 \cdot \cos 45^\circ}{\text{sen} 270^\circ} = -718 \text{ kgf/m}$$

$$S_{12} = \frac{1015,4 \cdot \cos 315^\circ}{\text{sen} 270^\circ} = -718 \text{ kgf/m}$$

$$S_{21} = \frac{1418,8 \cdot \cos 315^\circ}{\text{sen} 90^\circ} = 1003 \text{ kgf/m}$$

$$p_i = (S_{ih} - S_{hi}) \quad p_1 = -720 \text{ kgf/m} \quad p_2 = \bar{=} 1720 \text{ kgf/m}$$

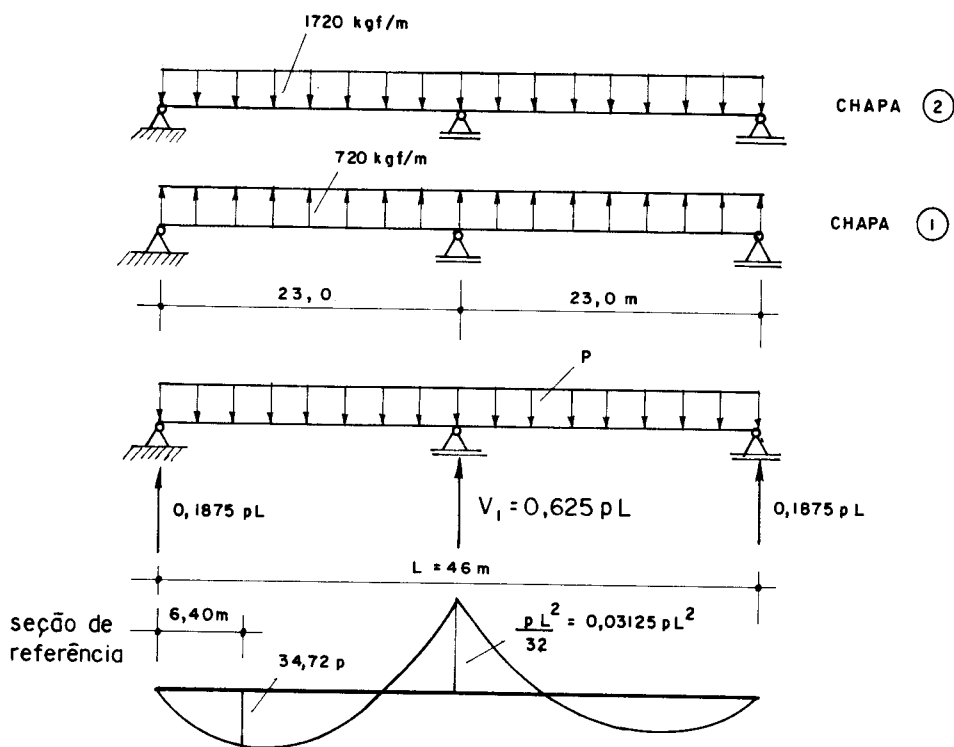


Figura V.4 — Cargas nos planos das chapas ;
solução exata da viga contínua

3. Solução da viga contínua mediante séries de Fourier

Substituindo o carregamento uniforme p (Fig. V.4) na primeira das equações (V.4):

$$F_n = \frac{2}{L} \int_0^L p(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{4p}{n\pi} \quad (n=1,3,5,\dots)$$

ou seja, o carregamento uniforme \bar{s} admite termos ímpares das séries de Fourier.

O método consiste em, inicialmente, retirar todos os vínculos intermediários (a chapa se torna isostática); as cargas nas chapas, as reações hiperestáticas V intermediárias e a elástica de cada chapa são expandidas em séries de Fourier satisfazendo as condições de contorno nos dois diafragmas de extremidade; tomando $y = 0$ nos apoios intermediários, ter-se-ão os hiperestáticos. No caso, é necessário encontrar o valor de V_1 (Fig. V.4).

Pela equação (V.13):

$$\sum_{k=1}^t V_k \cdot D_{jk} = \frac{L}{2} D_j \quad (j = 1, 2, \dots, t)$$

onde

$$D_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n^4} \text{sen } n\pi e_j \quad \text{e} \quad D_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \text{sen } n\pi e_j \cdot \text{sen } n\pi e_k$$

sendo j = número de apoios intermediários (ver Fig. V.1).

No caso, as equações acima podem ser escritas (já que $e_j = e_1 = 1/2$):

$$D_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n^4} \cdot \text{sen } \frac{n\pi}{2}$$

$$D_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \text{sen}^2 \frac{n\pi}{2}$$

$$V_1 = \frac{L}{2} \cdot \frac{D_1}{D_{11}} = \frac{L}{2} \cdot \frac{4p}{\pi} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \cdot \text{sen } \frac{n\pi}{2}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \text{sen}^2 \frac{n\pi}{2}}$$

Usando apenas os três primeiros termos ($n=1,3,5$), obtêm-se:

$$V_1 = \frac{2pL}{\pi} \cdot 0,9825 = 0,62548 pL = 0,6255 pL,$$

muito próximo do valor exato $V_1 = 0,625 pL$ (Fig. V.4).

Substituindo os valores F_n e V_1 na equação (V.11), obtêm-se a expressão geral da elástica:

$$y_i(x) = \frac{pL^4}{EI \pi^4} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left(\frac{4}{n\pi} - 1,25 \right) \text{sen } \frac{n\pi}{2} \cdot \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \quad (I)$$

Derivando duas vezes (tendo em vista a relação diferencial $d^2y/dx^2 = -M/EI$), obtêm-se a expressão geral dos momentos:

$$M_i(x) = \frac{pL^2}{2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{4}{n\pi} - 1,251 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (\text{II})$$

Para se ter uma idéia, examina-se os resultados fornecidos por essas equações. Assim:

- para n=1

$$y_i(x) = 0,02224 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \cdot \frac{pL^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = 0,02224 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \cdot \frac{pL^2}{\pi^2}$$

Na posição do apoio central essas fórmulas fornecem (entre parênteses, o valor exato, Fig. V.4):

$$\begin{aligned} y &= 0,02224 \frac{pL^4}{EI \pi^4} \quad (0) & M &= 0,0022 pL^2 \quad (-0,03125 pL^2) \\ &= 1022,27 \frac{p}{EI} & \text{ou} & M = +4,655 p \quad (-66,25 p) \end{aligned}$$

Na seção de referência, arbitrada a 6,40m do apoio na extremidade esquerda:

$$y = 432,728 p/EI \quad M = 2,02 p \quad (34,72 p)$$

- para n = 1,3

$$y_i(x) = \left(0,02224 \frac{\operatorname{sen} \pi x}{L} + 0,02068 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} \right) \frac{pL^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = \left(0,02224 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + 0,186157 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} \right) \frac{pL^2}{\pi^2}$$

. apoio central: $y = 0,00156 \frac{pL^4}{EI \pi^4} = 71,7 p/EI$

$$M = -0,0166 pL^2 = -35,126 p$$

. seção de referência:

$$y = 1351,462 p/EI$$

$$M = 40,593 p$$

- para n = 1,3,5

$$y_i(x) = (0,02224 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + 0,02068 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} + 0,00159 \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{L}) \frac{pL^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = (0,02224 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + 0,186157 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} + 0,03985 \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{L}) \frac{pL^2}{\pi^2}$$

. apoio central: $y = -0,00003 \frac{pL^4}{EI \pi^4} = -1,379 p/EI$

$$M = -0,02065 pL^2 = -43,695 p$$

. seção de referência:

$$y = 1291,753 p/EI$$

$$M = 33,613 p$$

- para n = 1,3,5,7

$$y_i(x) = (0,02224 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + 0,02068 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} + 0,00159 \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{L} + 0,000596 \operatorname{sen} \frac{7\pi x}{L}) \frac{pL^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = \left(0,02224 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + 0,186157 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} + \right. \\ \left. - 0,03985 \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{L} + 0,02924 \operatorname{sen} \frac{7\pi x}{L} \right) \frac{pL^2}{\pi^2}$$

. apoio central: $y = -0,000626 \frac{pL^4}{EI \pi^4} = -28,77 p/EI$

$$M = -0,0236 pL^2 = -49,938 p$$

. seção de referência:

$$y = 1294 p/EI$$

$$M = 34,126 p$$

Nota-se que y converge mais rapidamente que M . Segundo Lee¹²⁵, isso acontece porque a convergência diminui a cada diferenciação.

4. Solução da estrutura para $n = 1$

4.1 - Efeito de placa contínua (Problema (o))

$$M = 2,02 p = \begin{cases} \text{chapa (1)} \rightarrow M = -1454,4 \text{ kgfm} \\ \text{chapa (2)} \rightarrow M = +3474,4 \text{ kgfm} \end{cases}$$

momentos estes calculados para a seção de referência. O sinal nas equações acima obedece à convenção usual, conforme estabelecido no item II.4.1 (Fig. II.11).

Lembrando que $\sigma = \pm M/Z$ (tração = (+)), com o auxílio da Tabela V.1, tem-se:

$$\sigma_1^0 = \mp 3,8784 \text{ kgf/cm}^2 \quad \sigma_2^1 = \pm 0,9852 \text{ kgf/cm}^2$$

Precisa-se distribuir essas tensões (itens II.4.3 e V.3.2). Para isso, calcular-se-ão os coeficientes de distribuição através das equações (II.31):

$$r_{ji} = \frac{A_{jk}}{A_{ji} + A_{jk}} \quad r_{jk} = \frac{A_{ji}}{A_{ji} + A_{jk}}$$

Assim,

$$r_{10} = \frac{0,46}{0,46 + 0,15} = 0,754$$

$$r_{12} = \frac{0,15}{0,61} = 0,246$$

Compensando:

		0,754	0,246				
-3878	←	+ 3878	+ 985	→	- 985		
+1091		- 2181	+ 712		- 356		
-2787		+1697	+1697		-1341		

Com o auxílio da equação (V.15), pode-se calcular a flecha no plano das chapas, na seção de referência:

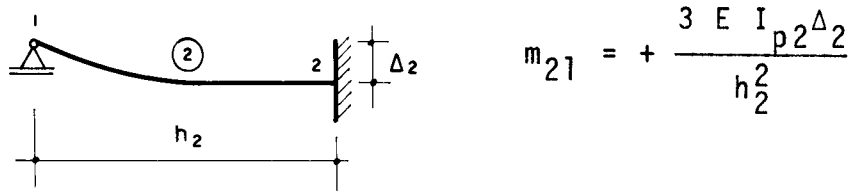
$$a_{ij} = \frac{y_{ij} \cdot I_{ij} \cdot (\sigma_i - \sigma_j)}{M_{ij} \cdot h_{ij}}$$

tem-se:

$$(a_1)_0 = \frac{432,728 \cdot (-27870 - 16970)}{2,02 E \cdot 1,50} = - 6403,8 \cdot \frac{10^3}{E}$$

$$(a_2)_0 \cong + 1414,8 \cdot \frac{10^3}{E}$$

4.2 - Efeito dos deslocamentos das arestas. Rotação arbitrária da chapa (2) (Problema (1))

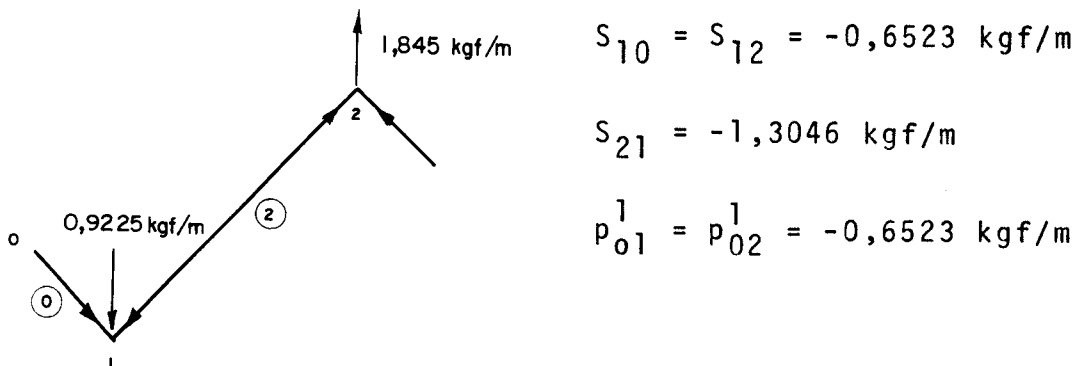


Fazendo-se $\theta'_{20} = h_2/E I_{p2}$, têm-se, na seção de referência:

$$m_{21} = +3 \text{ kgfm/m}$$

O giro real será dado por $\theta'_2 = k_2 \cdot \theta'_{20}$

Com isso, o carregamento em ambas as chapas será:



Essas cargas, aqui chamadas de $p_0(x)$, sendo provocadas pela rotação das chapas, são assumidas variar ao longo do vão com a elástica da carga aplicada.

Assim:

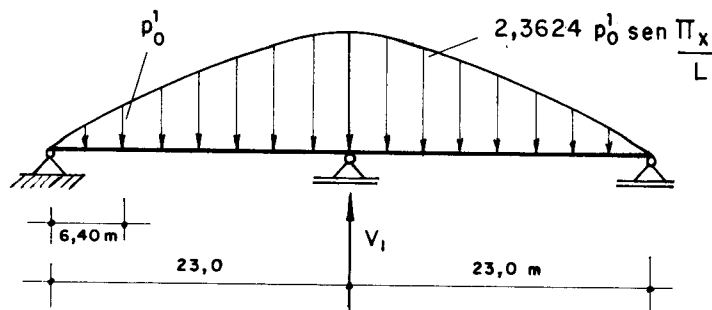
$$p_0(x) = \frac{p_{0i}^1}{y_i^1} \cdot y_i(x)$$

sendo p_{0i}^1 e y_i^1 , respectivamente, valores da carga e da elástica na seção de referência. Viu-se que, para $n = 1$, a elástica devido à carga aplicada é dada por:

$$y_i(x) = 0,02224 \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \cdot \frac{pL^4}{EI \pi^4}$$

Portanto:

$$p_o(x) = 2,3624 p_{oi}^1 \text{sen} \frac{\pi x}{L}$$



É necessário obter as expressões que descrevem a elástica e os momentos fletores provocados por esse carregamento; para isso, será necessário determinar-se o valor de V_1 , o qual será calculado de maneira análoga ao anterior.

Temos: $F_1 = 2,3624 p_o^1$ $F_2 = F_3 = \dots F_n = 0$

$$D_1 = F_1 = 2,3624 p_o^1$$

$$D_{11} = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \text{sen}^2 \frac{n\pi}{2} = 1,01394 \quad (3 \text{ termos})$$

$$V_1 = \frac{L}{2} \cdot \frac{D_1}{D_{11}} = 1,16496 p_o^1 L$$

Tendo em vista as equações (V.6) e (V.8), a equação (V.11) deve ser escrita:

$$y_i(x) = \frac{p_o^1 L^4}{EI \pi^4} \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \cdot \left[\frac{2,3624}{1^4} + \right. \\ \left. - 2 \cdot 1,16496 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \text{sen} \frac{n\pi}{2} \right]$$

Com isso, obtem-se, usando três termos:

$$y_i(x) = 0,057526 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \cdot \frac{p_0^1 \cdot L^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = 0,057526 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \cdot \frac{p_0^1 \cdot L^2}{\pi^2}$$

Para a seção de referência, obtem-se:

$$y = 1119,294 p_0^1 / EI$$

$$M = 5,22 p_0^1 \left\{ \begin{array}{l} (1) M = -3,405 \text{ kgfm} \\ (2) M = -3,405 \text{ kgfm} \end{array} \right.$$

Como $p_0^1 = -0,6523$, obtem-se: $\sigma_1^0 = \mp 90,80 \text{ kgf/m}^2$

$$\sigma_2^1 = \mp 9,655 \text{ kgf/m}^2$$

	1		
0	0,754	0,246	2
-90,8	+90,8	-9,7	+9,7
+37,9 ←	-75,8	+24,7 →	-12,4
-52,9	+15,0	+15,0	-2,7

$$(a_1)_1 = -9,706 \cdot 10^3 / E \cdot k_2$$

$$(a_2)_1 = +0,825 \cdot 10^3 / E \cdot k_2$$

Com isso, as flechas totais (efeitos do carregamento mais deslocamento das arestas) nos planos das chapas serão:

$$a_1 = -(6403,8 + 9,706 k_2) \cdot 10^3/E$$

$$a_2 = (1414,8 + 0,825 k_2) \cdot 10^3/E$$

O giro real em função das flechas acima pode então ser calculado com o auxílio da equação (II.56):

$$\theta'_{ij} = \frac{1}{h_{ij}} \left[a_{ij}(\cotg\alpha_j + \cotg\alpha_i) - \frac{a_{jk}}{\text{sen}\alpha_j} - \frac{a_{hi}}{\text{sen}\alpha_i} \right]$$

$$\theta'_2 = k_2 \theta'_{20} = \frac{1}{h_2} \left[a_2(\cotg\alpha_2 + \cotg\alpha_1) - \frac{a_3}{\text{sen}\alpha_2} - \frac{a_1}{\text{sen}\alpha_1} \right]$$

$$\alpha_1 = 270^\circ \quad \alpha_2 = 90^\circ \quad a_3 = -a_2, \text{ por simetria.}$$

Assim,

$$k_2 \cdot \theta'_{20} = \frac{a_1 + a_2}{h_2} \quad (\text{III})$$

Anteriormente, fora adotado:

$$\theta'_{20} = \frac{h_2}{E I_{p2}} = \frac{4,60}{E \cdot 0,0000833} = 55,222 \cdot 10^3/E$$

Resolvendo, obtemos:

$$k_2 \cong -19,0$$

Com o valor de k_2 , corrige-se as tensões e momentos do problema (1). Para melhor acompanhamento, os resultados podem ser tabelados, como segue:

TABELA V.2 - Momentos transversais m na seção de referência
($x = 6,40$ m)

Rotação da placa (2)	n	k_2	Aresta	
			1	2
	1	-19,0	0	- 57,0
	3	-40,29	0	-120,9
	5	+ 2,71	0	+ 8,1
	7	- 0,1017	0	- 0,3
Carga aplicada			-225	-417
Total (kgfm/m)			-225	-587,1

TABELA V.3 - Tensões normais longitudinais σ_x (kgf/cm²) na seção de referência ($x = 6,40$ m)

n	k_2	0	Aresta	
			1	2
1	-19,0	- 2,787 + 0,100	+ 1,697 - 0,028	- 1,341* + 0,005**
3	-40,29	-53,233 + 1,925	+32,404 - 0,548	-25,609 + 0,100
5	+ 2,71	+ 9,600 + 0,000	- 5,900 - 0,000	+ 4,600 + 0,000
7	- 0,1017	- 0,708 + 0,000	+ 0,431 - 0,000	- 0,340 + 0,000
	\sum	-45,103	+28,056	-22,585

* carga aplicada

** rotação da placa (2)

Os fatores de correção k_2 têm o mesmo valor ao longo do vão para cada termo das séries de Fourier; assim, as tensões ao longo do vão podem ser facilmente obtidas.

Lembrando que as tensões longitudinais σ variam ao longo do vão de modo semelhante ao momento fletor M , para a arresta 0 ($n=1$), por exemplo, a equação que descreve essa variação é:

$$\sigma_0 = -6,3476 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L},$$

que é a equação que fornece, na seção de referência,

$$\sigma = -2,687 \text{ kgf/cm}^2$$

As tensões finais serão obtidas pela soma de todas as tensões devidas a todos os termos das séries de Fourier.

A elástica e os momentos longitudinais dados, respectivamente, pelas equações (I) e (II), serão agora desenvolvidos para outros termos das séries. O número de termos usados depende da precisão desejada. Mousa, Parmelee e Lee⁵⁴ recomendam parar quando o valor do último termo obtido seja menor que 1% da soma parcial dos termos precedentes. Conclui-se (item 3 do exercício) que serão necessários, no mínimo, 4 termos das séries para se obter convergência.

5. Solução da estrutura para $n = 3$

5.1 - Efeito de placa contínua (Problema (o))

$$\left. \begin{aligned} y_i(x) &= 0,02068 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} \frac{pL^4}{EI \pi^4} \\ M_i(x) &= 0,186157 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} \frac{pL^2}{\pi^2} \end{aligned} \right\} x=6,40\text{m} \left\{ \begin{aligned} y &= 918,734 p/EI \\ M &= 38,574 p \end{aligned} \right.$$

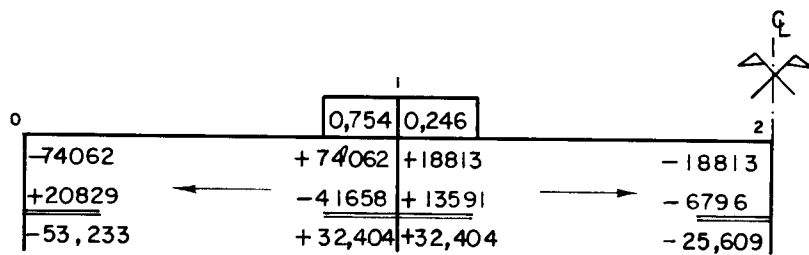
- Chapa 1 :

$$M = - 27773,28 \text{ kgfm/m} \quad \rightarrow \quad \sigma = \mp 74,062 \text{ kgf/cm}^2$$

- Chapa 2 :

$$M = +66347,28 \text{ kgfm} \quad \rightarrow \quad \sigma = \pm 18,813 \text{ kgf/cm}^2$$

Compensando:



Com isso, as flechas serão:

$$(a_1)_0 = \frac{918,734}{38,574 E} \cdot \frac{(-53,233 - 32,404)}{1,5} \cdot 10^4 =$$

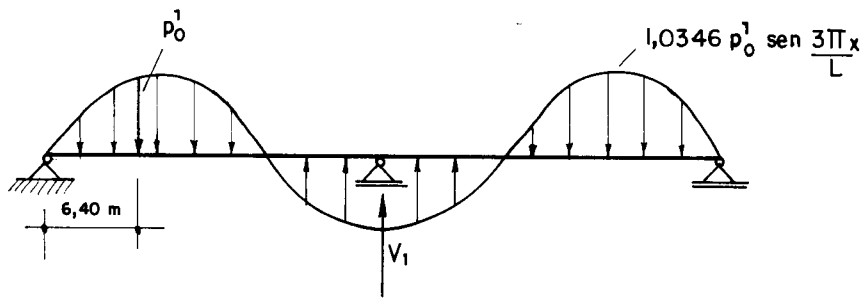
$$= -13597,7 \cdot 10^3 / E$$

$$(a_2)_0 = + 3003,7 \cdot 10^3 / E$$

5.2 - Rotação arbitrária da chapa 2 (Problema (1))

A carga gerada pelos deslocamentos das arestas se rã:

$$p_0(x) = \frac{p_{0i}^1}{y_i} \cdot y_i(x) = 1,0346 p_{0i}^1 \text{ sen } \frac{3\pi x}{L}$$



$$F_1 = 0 \quad F_3 = 1,0346 p_0^1 \quad F_2 = F_4 = F_5 = \dots = 0$$

$$D_1 = \frac{1,0346 p_0^1}{3^4} \cdot \text{sen} \frac{3\pi}{2} = -0,0127728 p_0^1$$

$$D_{11} = 1,01394 \quad (3 \text{ termos})$$

Daí:

$$V_1 = \frac{L}{2} \cdot \frac{D_1}{D_{11}} = -0,0063 \cdot p_0^1 \cdot L$$

Com isso, obtêm-se:

$$y_i(x) = 0,025237 \text{ sen} \frac{3\pi x}{L} \cdot \frac{p_0^1 \cdot L^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = 0,22714 \text{ sen} \frac{3\pi x}{L} \cdot \frac{p_0^1 \cdot L^2}{\pi^2}$$

Para a seção de referência ($x = 6,40\text{m}$), essas equações fornecem:

$$y = 1121,18 \frac{p_0^1}{EI} \quad M = 47,07 p_0^1$$

Como $p_0^1 = -0,6523$, obtêm-se:

- Chapa 1 :

$$M = -30,703 \text{ kgfm} \quad \rightarrow \quad \sigma = \mp 818,8 \text{ kgf/m}^2$$

- Chapa 2 :

$$M = - 30,703 \text{ kgfm} \quad \rightarrow \quad \sigma = \bar{\mp} 87,06 \text{ kgf/m}^2$$

0	1	2
- 819	+ 819	+ 87
+ 341	- 87	- 112
- 478	- 683	- 25
	+ 136	
	+ 136	

$$(a_1)_1 = -9,75 \cdot 10^3/E$$

$$(a_2)_1 = +0,834 \cdot 10^3/E$$

Com isso, as flechas totais serão:

$$a_1 = -(13597,7 + 9,75 \cdot k_2) \cdot 10^3/E$$

$$a_2 = (3003,7 + 0,834 k_2) \cdot 10^3/E$$

Substituindo na equação (III), obtem-se:

$$k_2 = - 40,29$$

Com k_2 , corrigem-se os momentos transversais m e as tensões longitudinais σ , os quais são então colocados, respectivamente, nas Tabelas V.2 e V.3.

6. Solução da estrutura para n = 5

6.1 - Efeito de placa contínua (Problema (o))

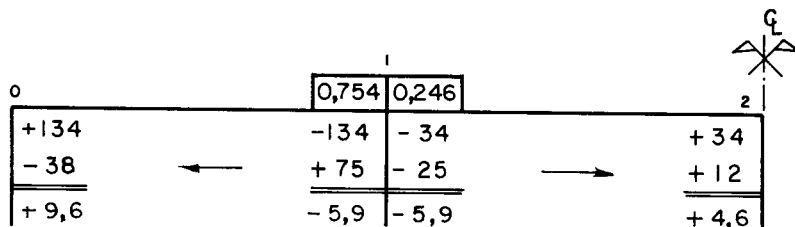
$$\left. \begin{aligned} y_i(x) &= -0,00159 \text{sen} \frac{5\pi x}{L} \frac{pL^4}{EI \pi^4} \\ M_i(x) &= -0,03985 \text{sen} \frac{5\pi x}{L} \frac{pL^2}{\pi^2} \end{aligned} \right\} x=6,40\text{m} \left\{ \begin{aligned} y &= -59,708 \text{ p/EI} \\ M &= -6,98 \text{ p} \end{aligned} \right.$$

- Chapa 1 :

$$M = +5025,6 \text{ kgfm} \quad \rightarrow \quad \sigma = \pm 13,402 \text{ kgf/cm}^2$$

- Chapa 2 :

$$M = - 12005,6 \text{ kgfm} \quad \rightarrow \quad \sigma = \mp 3,404 \text{ kgf/cm}^2$$



$$(a_1)_0 = + 883,9 \cdot 10^3 / E$$

$$(a_2)_0 = - 195,3 \cdot 10^3 / E$$

6.2 - Rotação arbitrária da chapa 2 (Problema (1))

$$p_0(x) = - 1,224 p_{oi}^1 \text{sen} \frac{5\pi x}{L} \quad F_5 = - 1,224 p_{oi}^1$$

$$D_1 = \frac{-1,224 p_{oi}^1}{5^4} \cdot \text{sen} \frac{5\pi}{2} = -0,0019584$$

$$\therefore V_1 = \frac{L}{2} \cdot \frac{D_1}{D_{11}} = -0,00096 p_0^1 L$$

Com isso, obtêm-se:

$$y_i(x) = -0,00006 \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{L} \frac{p_0^1 L^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = -0,001476 \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{L} \frac{p_0^1 L^2}{\pi^2}$$

Para a seção de referência ($x = 6,40 \text{ m}$):

$$y = -2,253 p_0^1 / EI \quad M = -0,258 p_0^1$$

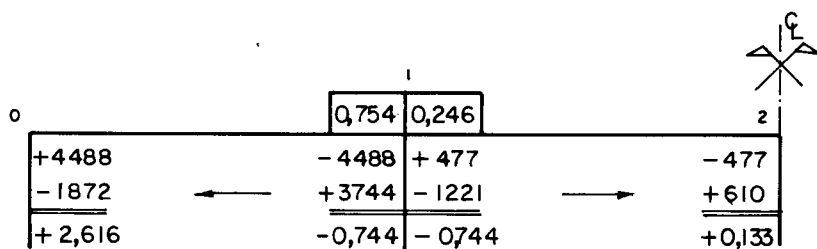
$$\text{Com } p_0^1 = -0,6523, \text{ têm-se}$$

- Chapa 1

$$M = + 0,1683 \text{ kgfm} \quad \rightarrow \quad \sigma = \pm 4,488 \text{ kgf/m}^2$$

- Chapa 2

$$M = + 0,1683 \text{ kgfm} \quad \sigma = \pm 0,477 \text{ kgf/m}^2$$



$$(a_1)_1 = + 0,0196 \cdot 10^3 / E$$

$$(a_2)_1 = - 0,0017 \cdot 10^3 / E$$

Com isso, as flechas totais serão:

$$a_1 = (883,9 + 0,0196 k_2) \cdot 10^3/E$$

$$a_2 = -(195,3 + 0,0017 k_2) \cdot 10^3/E$$

Resultará $k_2 = + 2,71$

7. Solução da estrutura para n = 7

7.1 - Efeito de placa contínua (problema (o))

$$\left. \begin{aligned} y_i(x) &= +0,000596 \operatorname{sen} \frac{7\pi x}{L} \frac{pL^4}{EI \pi^4} \\ M_i(x) &= +0,02924 \operatorname{sen} \frac{7\pi x}{L} \frac{pL^2}{\pi^2} \end{aligned} \right\} x=6,40m \left\{ \begin{aligned} y &= 2,242 p/EI \\ M &= 0,513 p \end{aligned} \right.$$

- Chapa 1

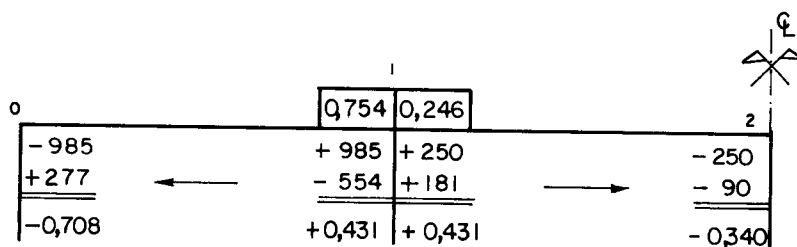
$$M = -369,36 \text{ kgfm}$$

$$\sigma = \mp 0,985 \text{ kgf/cm}^2$$

- Chapa 2

$$M = + 882,36 \text{ kgfm}$$

$$\sigma = \pm -0,250 \text{ kgf/cm}^2$$



$$(a_1)_0 = - 33,186 \cdot 10^3/E$$

$$(a_2)_0 = + 7,325 \cdot 10^3/E$$

7.2 - Rotação arbitrária da chapa 2 (problema (1))

$$p_0(x) = 12,215 p_{oi}^1 \operatorname{sen} \frac{7\pi x}{L} \quad F_7 = 12,215 p_{oi}^1$$

$$D_1 = \frac{12,215}{7^4} p_{oi}^1 \operatorname{sen} \frac{7\pi}{2} = -0,00508 p_o^1 \quad \therefore V_1 = -0,0025 p_o^1 L$$

Com isso, obtêm-se:

$$y_i(x) = 0,0100 \operatorname{sen} \frac{7\pi x}{L} \frac{p_o^1 L^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = 0,4925 \operatorname{sen} \frac{7\pi x}{L} \frac{p_o^1 L^2}{\pi^2}$$

Para a seção de referência ($x = 6,40 \text{ m}$):

$$y = 37,62 p_o^1/EI \quad M = 8,644 p_o^1$$

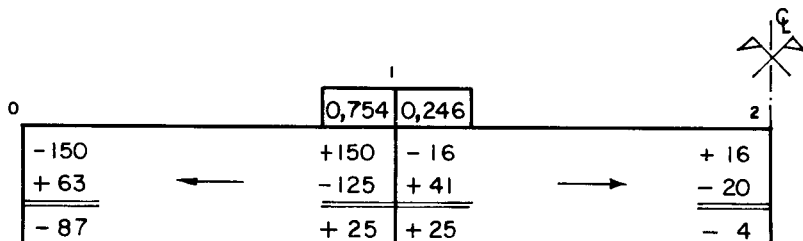
Com $p_o^1 = -0,6523$, têm-se:

- Chapa 1

$$M = -5,638 \text{ kgfm} \quad \sigma = \mp 150,4 \text{ kgf/m}^2$$

- Chapa 2

$$M = -5,638 \text{ kgfm} \quad \sigma = \mp 16,00 \text{ kgf/m}^2$$



$$(a_1)_1 = -0,325 \cdot 10^3/E$$

$$(a_2)_1 = +0,027 \cdot 10^3/E$$

As flechas totais serão:

$$a_1 = -(33,186 + 0,325 k_2) \cdot 10^3/E$$

$$a_2 = (7,325 + 0,027 k_2) \cdot 10^3/E$$

Resultará: $k_2 = -0,1017$

Obteve-se, então, para a seção de referência:

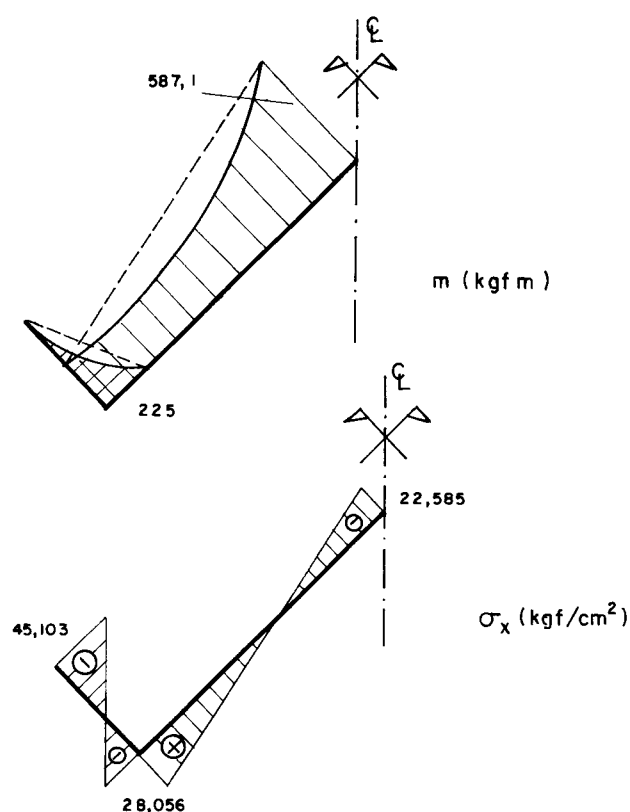


Figura V.5 — Esforços finais na seção de referência ($x=6,40$ m)

Como visto, pode-se estender os resultados obtidos na seção de referência para toda a estrutura. Por exemplo, a equação geral que descreve a variação das tensões normais na aresta 0 é:

$$\sigma_0 = -6,3476 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} - 53,0857 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} + 11,7507 \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{L} - 8,6486 \frac{7\pi x}{L}$$

Os momentos transversais m , por sua vez, variam com uma função proporcional à equação da elástica total, a qual, como visto, é dada por:

$$y_i(x) = \left(0,02224 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + 0,02068 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} - 0,00159 \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{L} + \right. \\ \left. + 0,000596 \operatorname{sen} \frac{7\pi x}{L} \right) \cdot \frac{p L^4}{EI\pi^4}$$

ou seja:

$$y_i(x) = \frac{p L^4}{EI\pi^4} \cdot \sum_{n=1,3,5}^{\infty} C_n \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

A variação de m pode então ser descrita por:

$$m = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} G_n \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Colocando $\frac{G_n}{C_n} = K = \text{constante}$, pode-se reescrever:

$$m = K \cdot \sum_{n=1,3,5}^{\infty} C_n \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Na aresta 2, o efeito das rotações das placas produz, como visto (Tabela V.2), na seção de referência:

$$m_3 = -170,1 \text{ kgfm/m}$$

Na seção de referência, obtivera-se:

$$y = 1294 \frac{p}{EI} = 0,028152 \frac{p L^4}{EI\pi^4}$$

Ou seja:

$$m = K \cdot 0,028152 = -170,1 \rightarrow K = -6042,2$$

Assim, a expressão que descreve a variação dos

momentos transversais m na aresta 2 (como efeito das rotações das placas), será:

$$m = -134,378 \operatorname{sen} \frac{\pi X}{L} - 124,953 \operatorname{sen} \frac{3\pi X}{L} + 9,607 \operatorname{sen} \frac{5\pi X}{L} - 3,601 \operatorname{sen} \frac{7\pi X}{L}$$

Evidentemente, o valor de m provocado pelas rotações das placas tende a zero sobre o apoio interno.

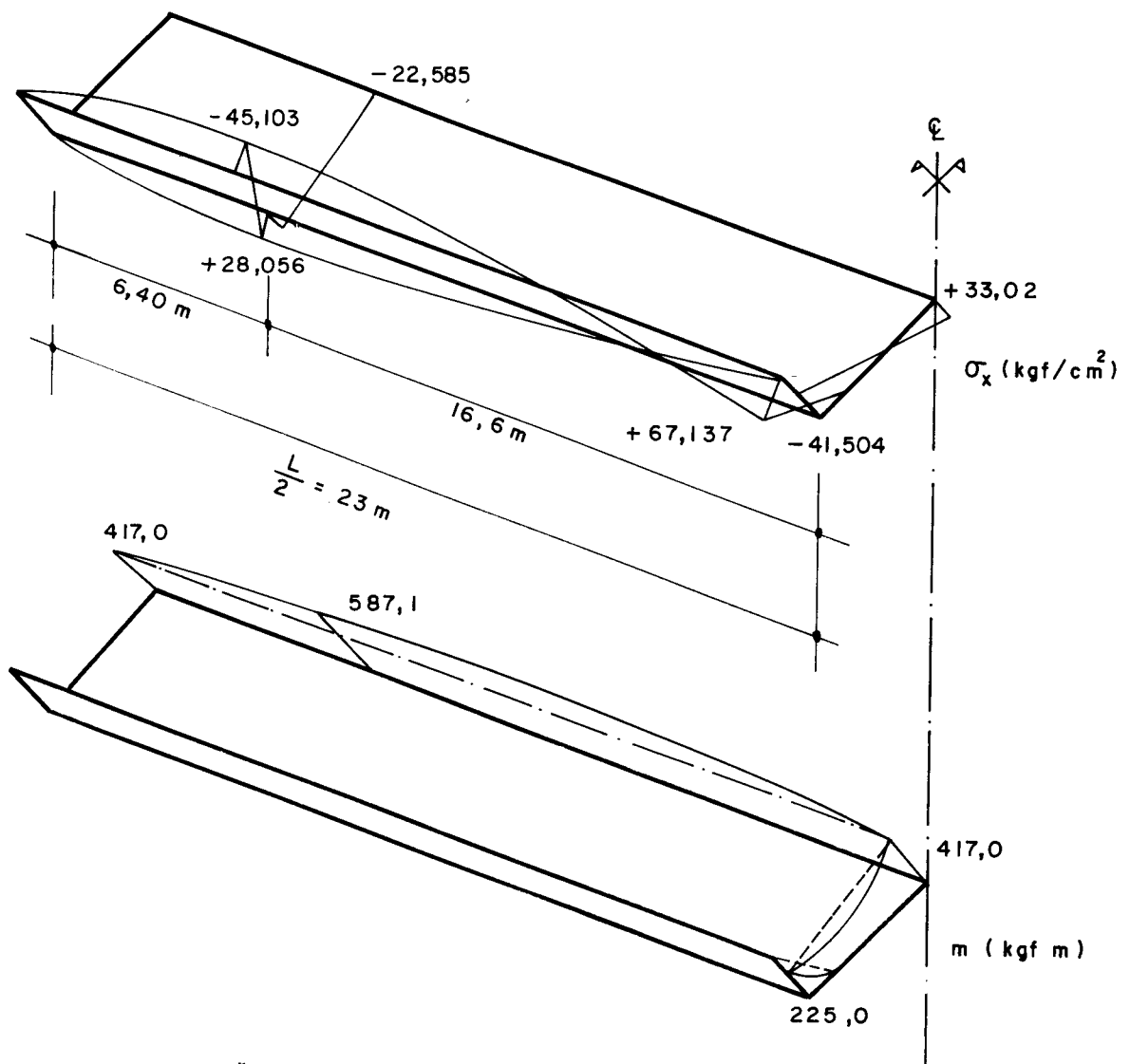
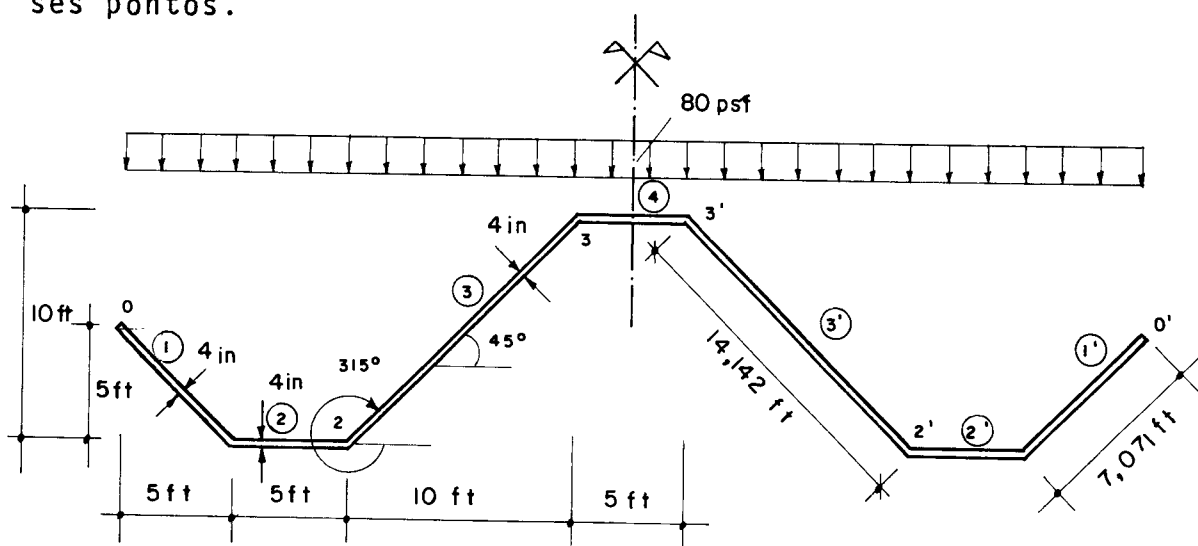


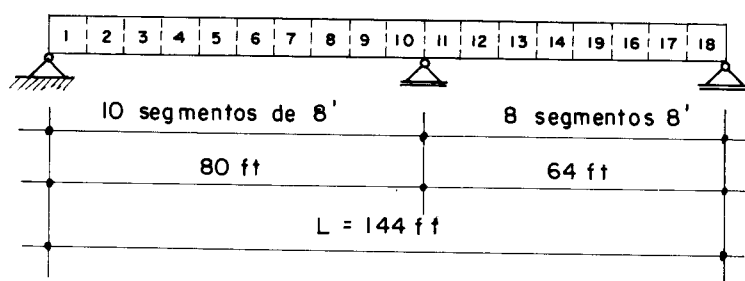
FIG. V.6 - VARIACÃO LONGITUDINAL DOS MOMENTOS TRANSVERSAIS m E DAS TENSÕES NORMAIS σ .

V.4.2 - Exemplo 2

Este exemplo será resolvido com a finalidade de comparar os resultados obtidos pelo método de Mousa, Parmelee e Lee⁵⁴ com aqueles obtidos por Beaufait⁴⁸. O método de Beaufait é também baseado na teoria simples das folhas prismáticas; a condição de continuidade nas arestas é satisfeita no centro de cada segmento e a curva elástica é obtida a partir dos momentos longitudinais corrigidos nesses pontos.



a) seção transversal



b) seção longitudinal

Fig. V.7 — Dimensões da estrutura ;

1. Propriedades geométricas

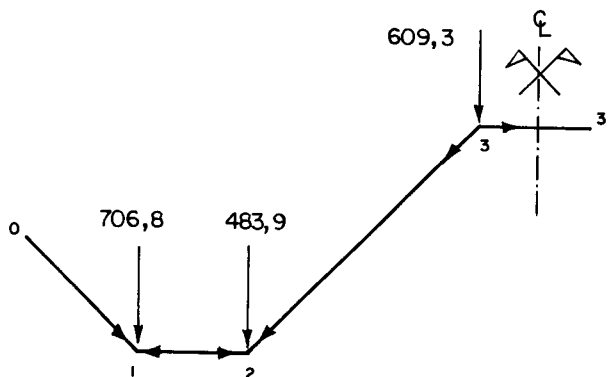
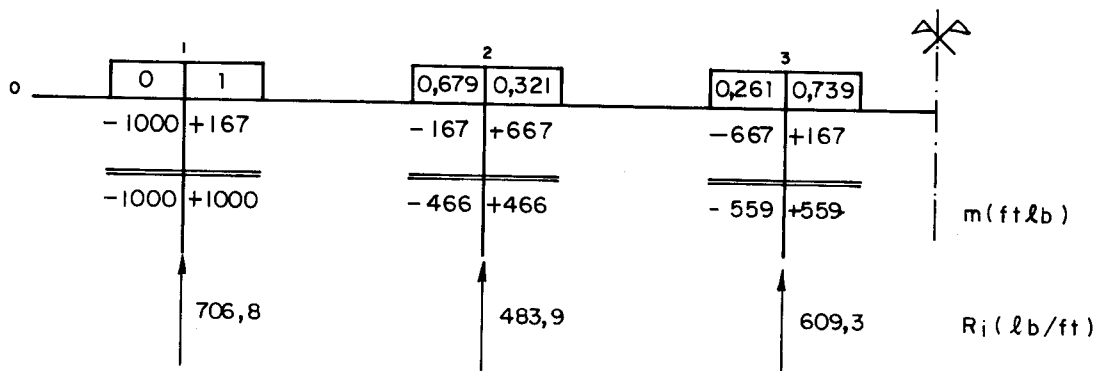
TABELA V.4

Placa	A_i (ft ²)	Z_i (ft ³)	I_{pi} (ft ⁴)	I_i (ft ⁴)
1	2,357	2,777	0,0030864	9,821
2	1,667	1,388	0,0030864	3,472
3	4,714	11,111	0,0030864	78,5674
4	1,667	1,388	0,0030864	3,472

$$A_i = b_i h_i \quad Z_i = \frac{b_i h_i^2}{6} \quad I_{pi} = \frac{1 \cdot b_i^3}{12} \quad I_i = \frac{b_i h_i^3}{12}$$

2. Momentos de engastamento, cargas R_i nas arestas e cargas p no plano das chapas

Calculando os momentos de engastamento perfeito e compensando, tem-se:



As cargas nas chapas, calculadas através das equações (II.16') (item II.4.1), serão

$$S_{10} = -1000 \text{ lb/ft} \quad S_{12} = -706,8 \text{ lb/ft} \quad S_{21} = -483,9 \text{ lb/ft}$$

$$S_{23} = -684,3 \text{ lb/ft} \quad S_{32} = +861,7 \text{ lb/ft} \quad S_{33} = +609,3 \text{ lb/ft}$$

Com isso, as cargas p serão:

$$p_1 = -1000 \text{ lb/ft} \quad p_2 = +223 \text{ lb/ft} \quad p_3 = +1546 \text{ lb/ft}$$

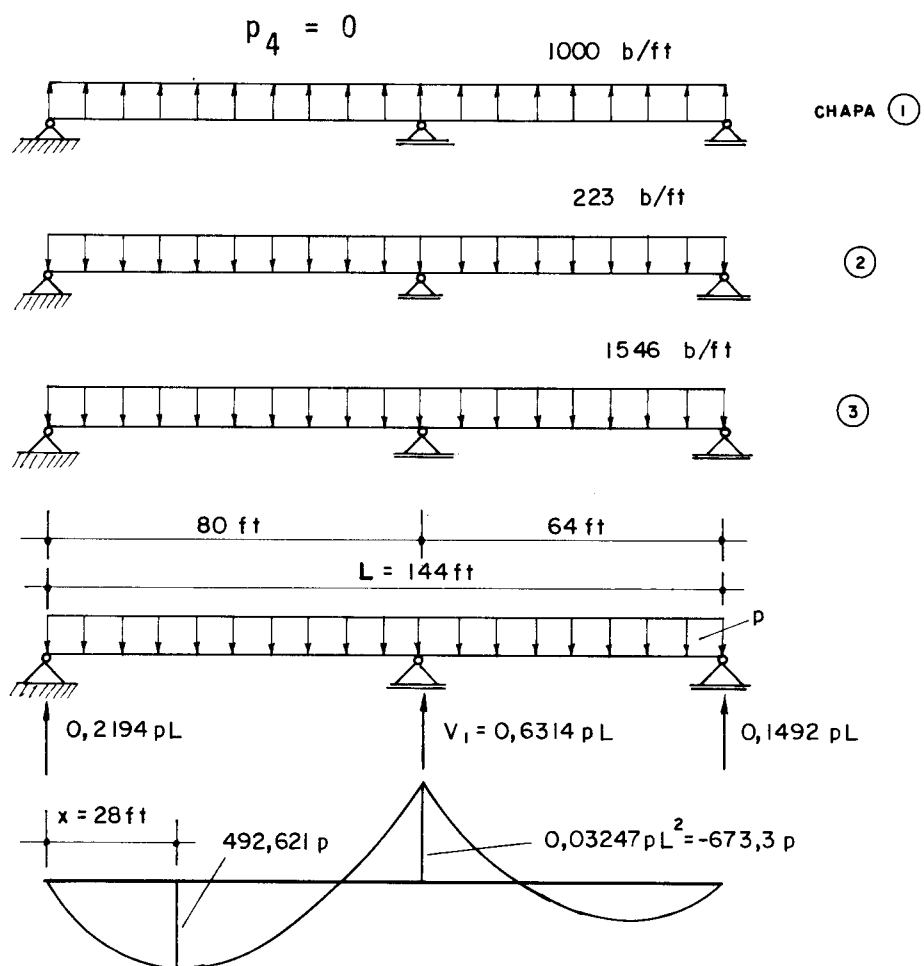


Figura V.8 — Cargas nos planos das chapas, solução exata da viga contínua

Como seção de referência, foi escolhida a posição $x = 28 \text{ ft}$, isto é, no centro do segmento número 4.

3. Solução da viga cont ınua mediante s eries de Fourier

Substituindo o carregamento uniforme p (Fig. V.7) na primeira das equa es (V.4):

$F_n = \frac{4p}{n\pi}$, ($n=1,3,5\dots$), isto  , o carregamento uniforme s  admite termos ímpares das s eries de Fourier.

Pela equa o (V.13):

$$\sum_{k=1}^t V_k \cdot D_{jk} = \frac{L}{2} \cdot D_j \quad (j = 1,2,\dots t)$$

onde

$$D_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n^4} \text{sen } n\pi e_j$$

$$\text{e } D_{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \text{sen } n\pi e_j \cdot \text{sen } n\pi e_k ,$$

sendo j = número de apoios intermediários (ver Fig. V.1).

No caso,   necessário calcular o valor de V_1 , e as expressões acima podem ser escritas (já que $e_j=e_1=\frac{1}{1,80}$):

$$D_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n^4} \text{sen } \frac{n\pi}{1,8} \quad D_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \text{sen}^2 \frac{n\pi}{1,8}$$

Observe-se que, enquanto D_1 , sendo fun o de F_n , só admite termos ímpares, D_{11} admite também os pares, isto  , a rea o V_1 admite também os termos pares das s eries de Fourier. Isto n  acontecia no primeiro exemplo, pois o apoio intermediário estava colocado no eixo de simetria da estrutura.

$$V_1 = \frac{L}{2} \cdot \frac{D_1}{D_{11}} = \frac{L}{2} \cdot \frac{4p}{\pi} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{1,8}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{1,8}}$$

Usando 7 termos, obtêm-se:

$$V_1 = \frac{2pL}{\pi} \cdot 0,9920248 = 0,6315 pL \quad (\text{exato} = 0,6314pL, \text{ Fig. V.7})$$

Substituindo os valores F_n e V_1 na equação (V.11), obtêm-se a expressão geral da elástica:

$$y_i(x) = \frac{pL^4}{EI \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left(\frac{4}{n\pi} - 1,263 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{1,8} \right) \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Derivando duas vezes:

$$M_i(x) = \frac{pL^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{4}{n\pi} - 1,263 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{1,8} \right) \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Para se ter uma idéia do número de termos a serem utilizados para se obter a necessária precisão, examinem-se os resultados fornecidos por essas equações.

- para $n = 1$:

$$y_i(x) = 0,029427 \frac{pL^4}{EI \pi^4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

$$M_i(x) = 0,029427 \frac{pL^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

Na posição do apoio intermediário, essas fórmulas fornecem (entre parênteses, o valor exato, Fig. V.7):

$$y = 0,02898 \frac{pL^4}{EI \pi^4} = 127923,1 p/EI$$

$$M = +0,002936 pL^2 \quad (-0,03247 pL^2) \quad \text{ou}$$

$$M = +60,88 p \quad (-673,30 p)$$

Na seção de referência ($x = 28 \text{ ft}$):

$$y = 74505,35 p/EI$$

$$M = +35,462 p \quad (+492,621 p)$$

- Para $n = 1,2$:

$$y_i(x) = (0,029427 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + 0,026998 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L}) \frac{pL^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = (0,029427 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + 0,107992 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L}) \frac{pL^2}{\pi^2}$$

- apoio:

$$y = 0,019746 \frac{pL^4}{EI \pi^4} = 87162,49 p/EI$$

$$M = -0,000806 pL^2 = -16,713 p$$

- seção de referência:

$$y = 186492,11 p/EI$$

$$M = 248,669 p$$

- Para $n = 1,2,3$:

$$y_i(x) = (0,029427 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + 0,026998 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} + \\ + 0,018743 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L}) \frac{pL^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = (0,029427 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + 0,107992 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} + \\ + 0,16869 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L}) \frac{pL^2}{\pi^2}$$

- apoio:

$$y = 0,003514 \frac{pL^4}{EI \pi^4} = 15511,44 \text{ p/EI}$$

$$M = -0,0156 pL^2 = - 323,48 \text{ p}$$

- seção de referência:

$$y = 266408,05 \text{ p/EI}$$

$$M = 591,01 \text{ p}$$

- Para n = 1,2,3,4:

$$y_i(x) = (\text{expressão anterior, } -0,0031712 \text{ sen } \frac{4\pi x}{L}) \frac{pL^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = (\text{expressão anterior, } -0,05074 \text{ sen } \frac{4\pi x}{L}) \frac{pL^2}{\pi^2}$$

- apoio:

$$y = 0,001475 \frac{pL^4}{EI \pi^4} = 6510,92 \text{ p/EI}$$

$$M = -0,0189 pL^2 = - 391,9 \text{ p}$$

- seção de referência:

$$y = 257410,15 \text{ p/EI}$$

$$M = 522,486 \text{ p}$$

- Para n = 1,2,3,4,5

$$y_i(x) = (\text{expressão anterior, } -0,0008915 \text{ sen } \frac{5\pi x}{L}) \frac{pL^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = (\text{expressão anterior, } -0,02228 \text{ sen } \frac{5\pi x}{L}) \frac{pL^2}{\pi^2}$$

- apoio:

$$y = 0,0009 \frac{pL^4}{EI \pi^4} = 3972,8 \text{ p/EI}$$

$$M = -0,02035 pL^2 = -422,0 \text{ p}$$

- seção de referência:

$$y = 257067,17 \text{ p/EI}$$

$$M = 518,406 \text{ p}$$

- para n = 1,2,3,4,5,6:

$$y_i(x) = (\text{expressão anterior, } +0,0008439 \text{ sen } \frac{6\pi x}{L}) \frac{pL^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = (\text{expressão anterior, } +0,030383 \text{ sen } \frac{6\pi x}{L}) \frac{pL^2}{\pi^2}$$

- apoio:

$$y = 0,00017 \frac{pL^4}{EI \pi^4} = 750,41 \text{ p/EI}$$

$$M = -0,023 pL^2 = -476,9 \text{ p}$$

- seção de referência:

$$y = 255204,61 \text{ p/EI}$$

$$M = 486,489 \text{ p}$$

- Para n = 1,2,3,4,5,6,7:

$$y_i(x) = (\text{expressão anterior, } +0,0002556 \text{ sen } \frac{7\pi x}{L}) \frac{pL^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = (\text{expressão anterior, } +0,0125278 \text{ sen } \frac{7\pi x}{L}) \frac{pL^2}{\pi^2}$$

- apoio:

$$y = 0,000082 \frac{pL^4}{EI \pi^4} = 362 p/EI$$

$$M = -0,0234 pL^2 = -485,2 p$$

- seção de referência:

$$y = 254182,05 p/EI$$

$$M = 462,634 p$$

- Para n = 1,2,3,4,5,6,7,8:

$$y_i(x) = (\text{expressão anterior, } -0,0003036 \text{ sen } \frac{8\pi x}{L}) \frac{pL^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = (\text{expressão anterior, } -0,019434 \text{ sen } \frac{8\pi x}{L}) \frac{pL^2}{\pi^2}$$

- apoio:

$$y = -0,000217 \frac{pL^4}{EI \pi^4} = -957,82 p/EI$$

$$M = -0,0253 pL^2 = -525,4 p$$

- seção de referência:

$$y = 255501,84 p/EI$$

$$M = 502,84 p$$

- Para n = 1,2,3,4,5,6,7,8,9:

$$y_i(x) = (\text{expressão anterior, } +0,0000215 \text{ sen } \frac{9\pi x}{L}) \frac{pL^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = (\text{expressão anterior, } +0,001746 \text{ sen } \frac{9\pi x}{L}) \frac{pL^2}{\pi^2}$$

- apoio:

$$y = -0,000217 \frac{pL^4}{EI \pi^4} = -957,82 \text{ p/EI}$$

$$M = -0,0253 pL^2 = -525,4 \text{ p}$$

- seção de referência:

$$y = 255434,7 \text{ p/EI}$$

$$M = 500,25 \text{ p}$$

Como visto no exemplo anterior, pode-se truncar as séries quando o valor do último termo obtido for menor que 1% da soma dos termos precedentes, e desde que a necessária precisão tenha sido atingida. Isto significa que, nesse caso, serão necessários pelo menos 8 termos das séries, para que isso se verifique. O que autoriza essa conclusão? Examinem-se os valores de M na seção de referência, para cada termo isolado, e compare-se com a soma dos anteriores. Por exemplo:

- para $m = 9$, $M = -2,594 \text{ p}$, contra a soma $M = 502,84 \text{ p}$ dos 8 termos anteriores. Com isso, obteve-se $M = 500,25 \text{ p}$, próximo do exato $M = 492,621 \text{ p}$.

Se se desejasse melhorar a precisão, poder-se-ia utilizar 11 termos, sendo então obtido $M = 493,4 \text{ p}$.

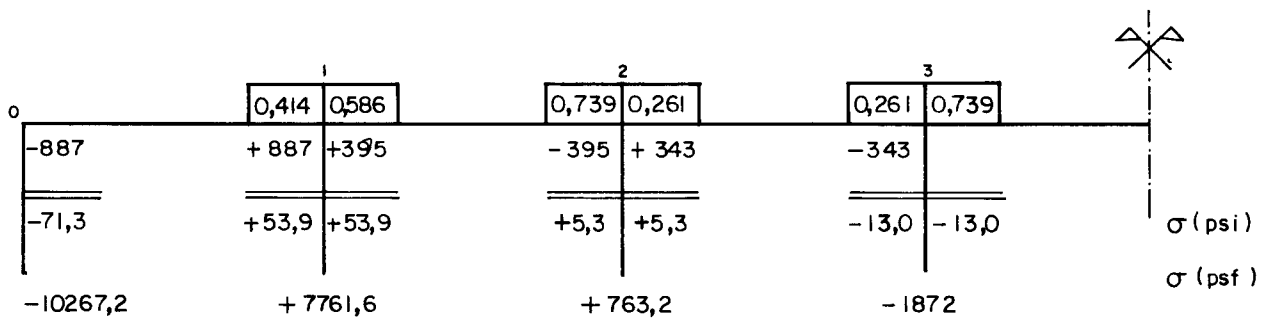
4. Solução da estrutura para n = 1

4.1 - Efeito de placa contínua (Problema (o))

$$M = 35,462 p = \left\{ \begin{array}{l} \text{Chapa 1 : } p = -1000 \text{ lb/ft} \rightarrow \\ \qquad \qquad \qquad M = -35462 \text{ ftlb} \\ \\ \text{Chapa 2 : } p = 223 \text{ lb/ft} \rightarrow \\ \qquad \qquad \qquad M = +7908,03 \text{ ftlb} \\ \\ \text{Chapa 3 : } p = 1546 \text{ lb/ft} \rightarrow \\ \qquad \qquad \qquad M = +54824,25 \text{ ftlb} \end{array} \right.$$

- Chapa 1 $\Rightarrow \sigma = \mp 12769,0 \text{ psf} = \mp 88,7 \text{ psi}$
- Chapa 2 $\Rightarrow \sigma = \pm 5694,14 \text{ psf} = \pm 39,5 \text{ psi}$
- Chapa 3 $\Rightarrow \sigma = \pm 4934,23 \text{ psf} = \pm 34,3 \text{ psi}$

Calculando os coeficientes de distribuição de tensões através das equações (II.31) e compensando, tem-se:



Com o auxílio da (V.15), pode-se calcular as flechas nos planos das chapas, na seção de referência:

$$a_{ij} = \frac{y_{ij} \cdot I_{ij} \cdot (\sigma_i - \sigma_j)}{M_{ij} \cdot h_{ij}}$$

têm-se:

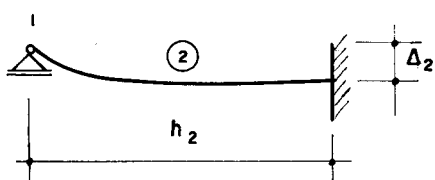
$$(a_1)_0 = \frac{74505,35 \cdot (-10267,2 - 7761,6)}{35,462 E \cdot 7,071} = -5356,86 \cdot \frac{10^3}{E}$$

$$(a_2)_0 = +2940,7 \cdot \frac{10^3}{E}$$

$$(a_3)_0 = +391,5 \cdot \frac{10^3}{E}$$

4.2 - Efeito dos deslocamentos das arestas

4.2.1 - Rotação arbitrária da chapa 2 (Problema (1))



$$m_{21} = + \frac{3 E I_{p2} \Delta_2}{h_2^2}$$

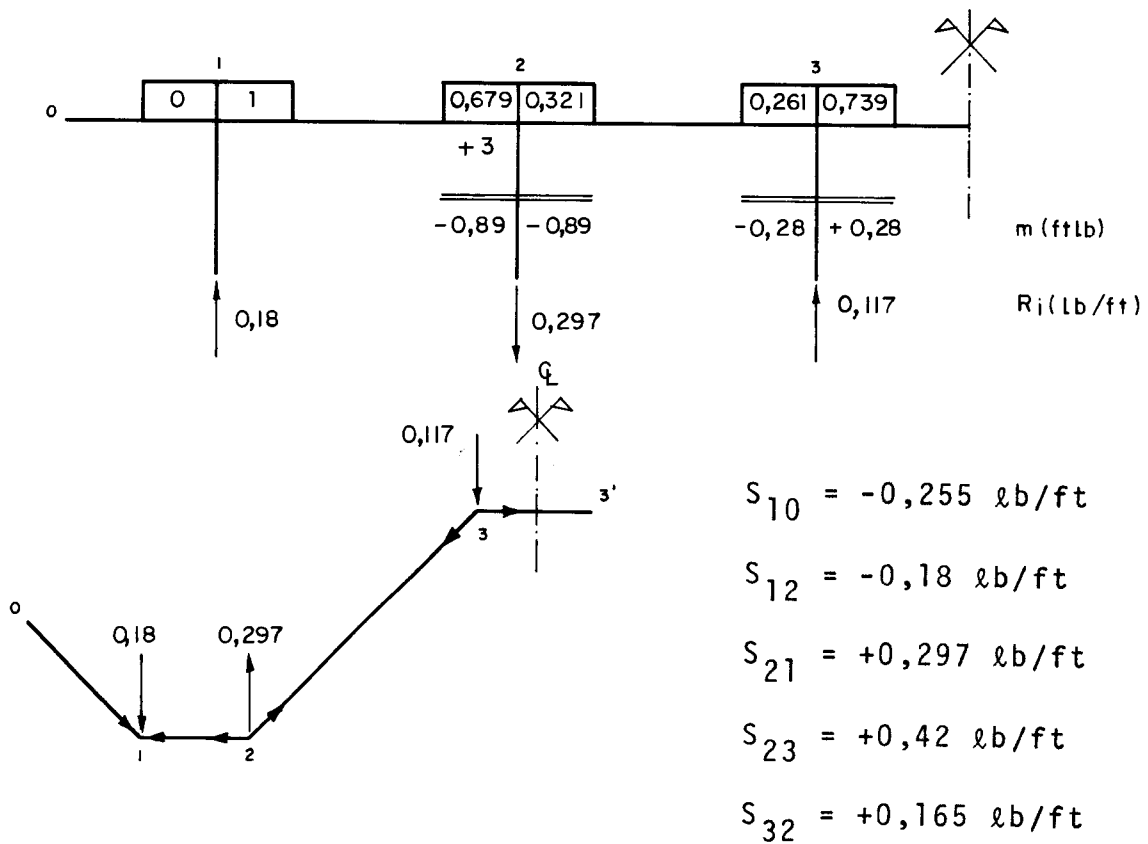
Fazendo-se $\theta'_{20} = \frac{h_2}{E I_{p2}}$, têm-se, na seção de refe_

rência:

$$m_{21} = +3 \text{ ftlb}$$

O giro real será dado por: $\theta'_2 = k_2 \cdot \theta'_{20}$

Compensando:



Com isso, as cargas nas chapas, na seção de referência, serão:

$$p_{01}^1 = -0,255 \text{ lb/ft} = p_{03}^1$$

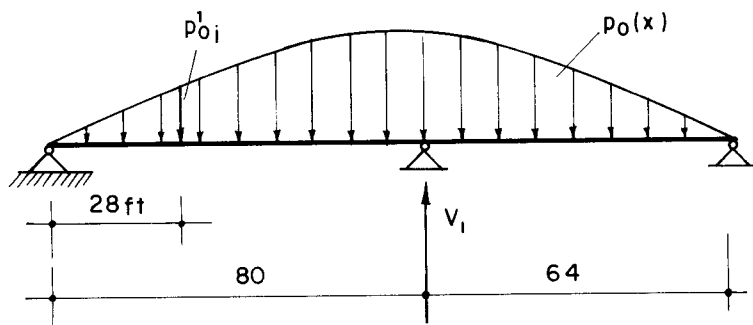
$$p_{02}^1 = +0,477 \text{ lb/ft}$$

$$p_0(x) = \frac{p_{0i}^1}{y_i^1} \cdot y_i(x)$$

sendo p_{0i}^1 e y_i^1 , respectivamente, valores da carga e da elástica na seção de referência. Para $n = 1$:

$$y_i(x) = 0,029427 \text{ sen } \frac{\pi x}{L} \frac{p \ell^4}{EI \pi^4}$$

Portanto: $p_0(x) = 1,7434 p_{0i}^1 \text{ sen } \frac{\pi x}{L}$



Têm-se $F_1 = 1,7434 p_{0i}^1$ $F_2 = F_3 = \dots F_n = 0$

$$D_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n^4} \cdot \text{sen} \frac{n\pi}{1,8} = 1,7169 p_{0i}^1$$

$$D_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \text{sen}^2 \frac{n\pi}{1,8} = 0,98932$$

$$V_1 = \frac{L}{2} \cdot \frac{D_1}{D_{11}} = 0,8677 p_{0i}^1 \cdot L$$

Com V_1 e F_1 pode-se escrever:

$$y_i(x) = \frac{p_{0i}^1 L^4}{EI \pi^4} \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{L} \left[\frac{F_1}{1^4} - 2 V_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \text{sen} \frac{n\pi}{1,8} \right]$$

Usando 7 termos, têm-se:

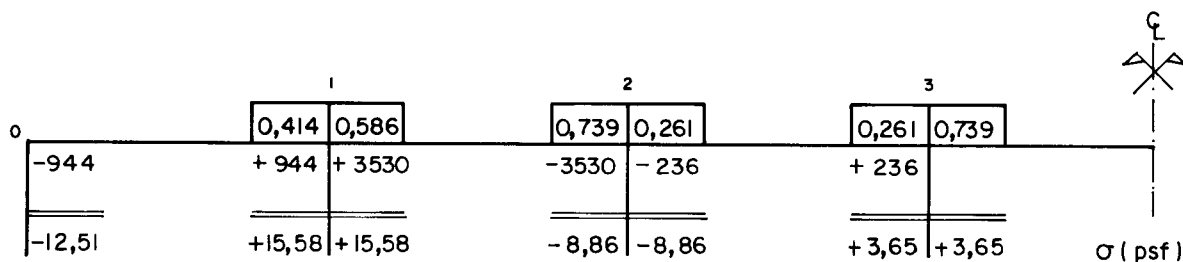
$$y_i(x) = 0,08528 \text{ sen} \frac{\pi x}{L} \cdot \frac{p_{0i}^1 L^4}{EI \pi^4}$$

$$M_i(x) = 0,08528 \text{ sen} \frac{\pi x}{L} \cdot \frac{p_{0i}^1 L^2}{\pi^2}$$

Para a seção de referência, essas fórmulas fornecem:

$$y = 215920,17 \frac{p_{oi}^1}{EI} \qquad M = 102,77 p_{oi}^1$$

- Chapa 1 → $M = -26,206 \text{ ft} \cdot \text{b}$ $\sigma = \mp 9,437 \text{ psf}$
- Chapa 2 → $M = +49,021 \text{ ft} \cdot \text{b}$ $\sigma = \pm 35,297 \text{ psf}$
- Chapa 3 → $M = -26,206 \text{ ft} \cdot \text{b}$ $\sigma = \mp 2,359 \text{ psf}$



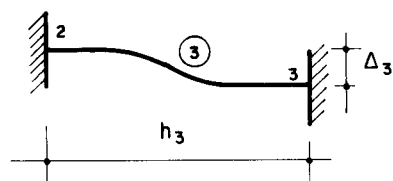
Com isso, as flechas serão:

$$(a_1)_1 = -8,346 \cdot 10^3 / E$$

$$(a_2)_1 = +10,27 \cdot 10^3 / E$$

$$(a_3)_1 = -1,858 \cdot 10^3 / E$$

4.2.2 - Rotação arbitrária da chapa 3 (Problema (2))



$$m_{23} = m_{32} = + \frac{6 E I_{p3} \Delta_3}{h_2^2}$$

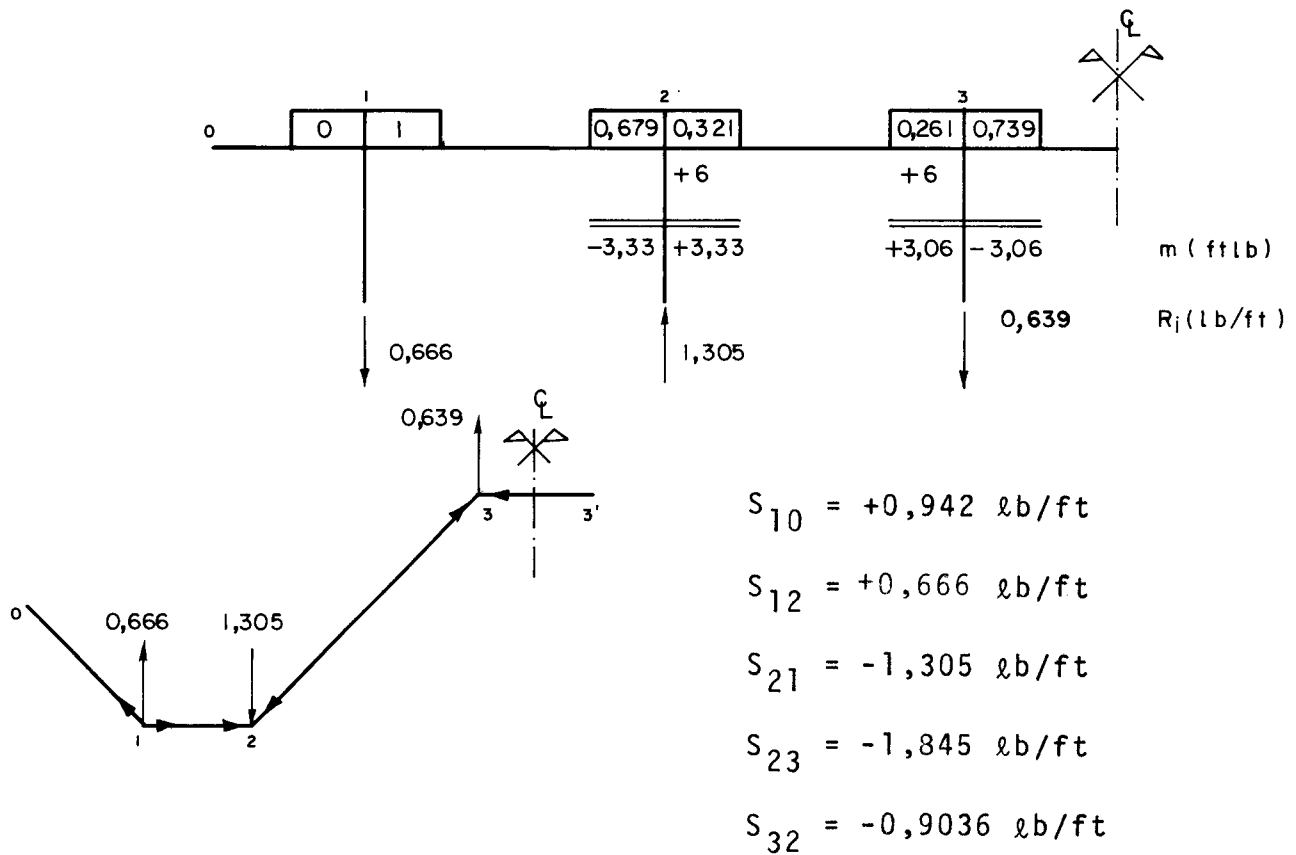
Fazendo $\theta'_{30} = \frac{h_3}{E I_{p3}}$,

têm-se, na seção de referência:

$$m_{23} = m_{32} = +6 \text{ ft}\ell\text{b}$$

$$\text{O giro real será dado por: } \theta'_3 = k_3 \cdot \theta'_{30}$$

Compensando:



Com isso, as cargas serão:

$$p_{01}^1 = p_{03}^1 = +0,942 \text{ lb/ft}$$

$$p_{02}^1 = -1,971 \text{ lb/ft}$$

Obtivera-se (item anterior):

$$y = 215920,17 \frac{p_{oi}^1}{EI}$$

$$M = 102,77 p_{oi}^1$$

Chapa 1 → $M = +96,808 \text{ ft}\ell\text{b}$

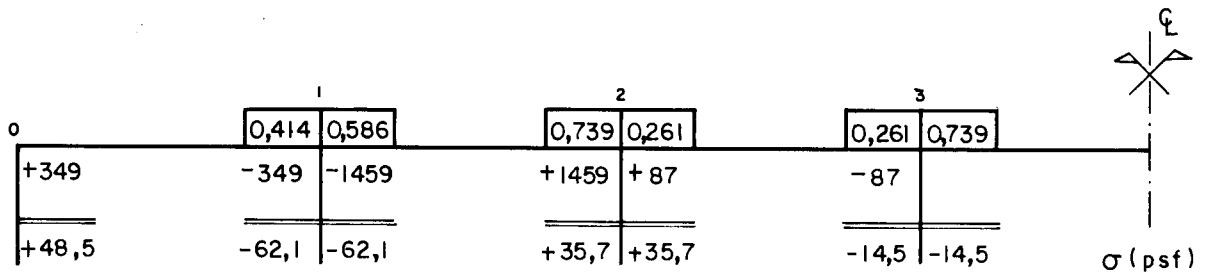
$$\sigma = \pm 34,86 \text{ psf}$$

Chapa 2 → $M = -202,558 \text{ ft}\ell\text{b}$

$$\sigma = \mp 145,85 \text{ psf}$$

Chapa 3 → M = +96,808 ftlb

σ = ± 8,71 psf



As flechas serão:

$$(a_1)_2 = +32,862 \cdot 10^3/E$$

$$(a_2)_2 = -41,096 \cdot 10^3/E$$

$$(a_3)_2 = +7,458 \cdot 10^3/E$$

Com isso, as flechas totais para cada chapa, para $n = 1$, serão dadas por:

$$a_1 = (-5356,86 - 8,346 k_2 + 32,862 k_3) \cdot 10^3/E$$

$$a_2 = (+2940,7 + 10,27 k_2 - 41,096 k_3) \cdot 10^3/E$$

$$a_3 = (+391,5 - 1,858 k_2 + 7,458 k_3) \cdot 10^3/E$$

4.3 - Cálculo dos coeficientes de correção k_2 e k_3

O giro real em função das flechas será calculado com o auxílio da equação (II.56):

$$\theta'_{ij} = \frac{1}{h_{ij}} \left[a_{ij} (\cotg \alpha_j + \cotg \alpha_i) - \frac{a_{jk}}{\text{sen} \alpha_j} - \frac{a_{hi}}{\text{sen} \alpha_i} \right]$$

Assim tem-se:

- Chapa 2

$$\theta'_2 = k_2 \cdot \theta'_{20} = \frac{1}{h_2} \left[a_2 (\cot \alpha_1 + \cot \alpha_2) - \frac{a_3}{\text{sen} \alpha_2} - \frac{a_1}{\text{sen} \alpha_1} \right]$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 315^\circ$$

$$\theta'_{20} = \text{adotado} = \frac{h_2}{E I_{p2}} = \frac{5}{E \cdot 0,0030864} = 1,62 \cdot 10^3 / E$$

Obtêm-se

$$1,62 \cdot k_2 \cdot \frac{10^3}{E} = 0,2828 (a_1 + a_3) - 0,4 a_2$$

- Chapa 3

$$\theta'_3 = k_3 \cdot \theta'_{30} = \frac{1}{h_3} \left[a_3 \cdot (\cot \alpha_2 + \cot \alpha_3) - \frac{a_4}{\text{sen} \alpha_3} - \frac{a_2}{\text{sen} \alpha_2} \right]$$

$$\alpha_3 = 45^\circ \quad \theta'_{30} = \text{adotado} = \frac{14,142}{E \cdot 0,0030864} = 4,582 \frac{10^3}{E}$$

Obtêm-se:

$$4,582 \cdot k_3 \cdot \frac{10^3}{E} = 0,1 a_2$$

Substituindo nessas duas equações os valores de a e resolvendo, obter-se-á, para $n = 1$:

$$k_2 = -307,76$$

$$k_3 = -2,5312$$

Com k_2 e k_3 , corrigem-se os valores dos momentos e tensões dos problemas (1) e (2), os quais, após a correção, são somados àqueles devidos ao problema (0); obtêm-se assim os esforços finais na estrutura, para $n = 1$. Para facilidade de acompanhamento, esses valores serão tabelados (ver Tabelas V.5 e V.6).

5. Comparação dos resultados

Resolvendo a estrutura para outros 7 termos, de maneira idêntica ao que foi feito no item anterior, obtêm-se os esforços finais na estrutura, conforme reproduzidos nas Tabelas V.5 e V.6.

TABELA V.5 - Momentos transversais m na seção de referência (x = 28 ft)

n	k ₂ k ₃	Aresta		
		1	2	3
1	-307,76 - 2,531	0	-265,5	+ 78,44
2	-324,982 - 10,851	0	-253,1	+ 57,8
3	-547,189 + 8,549	0	-515,5	+179,4
4	+226,295 - 9,548	0	+233,2	- 92,6
5	+ 7,828 - 0,321	0	+ 8,0	- 3,2
6	+ 34,914 - 1,349	0	+ 35,6	- 13,9
7	+ 20,614 - 0,815	0	+ 21,1	- 8,3
8	- 28,239 + 1,137	0	- 28,9	+ 11,4
Carga aplicada		-1000	-466	-559
Total (ftlb)		-1000	-1231	-350
Beaufait ^{4 8} (ftlb)		-1000	-1258	-329

TABELA V.6 - Tensões normais longitudinais σ_x na seção de referência (x = 28 ft)

M	k ₂ k ₃	Aresta			
		0	1	2	3
1	-307,76	- 71,3	+ 53,9	+ 5,3	- 13,0*
	- 2,531	+ 25,9	- 32,2	+ 18,3	- 7,5**
2	-324,982	-429,0	+325,0	+ 32,0	- 79,0
	- 10,851	+167,3	-207,7	+118,2	- 49,0
3	-547,189	-688,0	+521,0	+ 51,0	-125,0
	+ 8,549	+210,3	-262,3	+149,4	- 62,1
4	+226,295	+137,0	-104,0	- 10,0	+ 26,0
	- 9,548	+ 11,1	- 13,9	+ 7,9	- 3,3
5	+ 7,828	+ 8,2	- 6,2	- 0,6	+ 1,5
	- 0,321	+ 0,2	- 0,3	+ 0,2	- 0,1
6	+ 34,914	+ 64,2	- 48,6	- 4,7	+ 11,5
	- 1,349	- 3,6	+ 4,5	- 2,6	+ 1,1
7	+ 20,614	+ 48,0	- 36,0	- 3,5	+ 8,7
	- 0,815	- 1,1	+ 1,4	- 0,8	+ 0,3
8	- 28,239	- 81,0	+ 61,2	+ 6,0	- 14,6
	+ 1,137	+ 0,0	- 0,0	+ 0,0	- 0,0
Total (psi)		- 602	+ 256	+ 366	- 305
Beaufait (psi)		- 657	+ 328	+ 319	- 283

* carga aplicada

** deslocamentos das arestas

Obtidos os resultados para a seção de referência, pode-se estendê-los para toda a estrutura. Para isso, é necessário encontrar as equações que descrevem a variação de cada esforço. No caso das tensões normais, para a aresta 0 obtêm-se:

$$\sigma_0 = -79,152 \operatorname{sen} \frac{\pi X}{L} - 278,495 \operatorname{sen} \frac{2\pi X}{L} - 494,55 \operatorname{sen} \frac{3\pi X}{L} + 230,4 \operatorname{sen} \frac{4\pi X}{L} + \\ + 96,38 \operatorname{sen} \frac{5\pi X}{L} - 121,2 \operatorname{sen} \frac{6\pi X}{L} - 51,75 \operatorname{sen} \frac{7\pi X}{L} + 82,25 \operatorname{sen} \frac{8\pi X}{L}$$

Jã os momentos transversais m , produzidos pelas rotações das placas, para a aresta 2, serão dados por:

$$m_2 = -388,974 \operatorname{sen} \frac{\pi X}{L} - 356,867 \operatorname{sen} \frac{2\pi X}{L} - 247,75 \operatorname{sen} \frac{3\pi X}{L} + 41,917 \operatorname{sen} \frac{4\pi X}{L} + \\ + 11,784 \operatorname{sen} \frac{5\pi X}{L} - 11,155 \operatorname{sen} \frac{6\pi X}{L} - 3,378 \operatorname{sen} \frac{7\pi X}{L} + 4,013 \operatorname{sen} \frac{8\pi X}{L}$$

e na aresta 3:

$$m_3 = +106,306 \operatorname{sen} \frac{\pi X}{L} + 97,531 \operatorname{sen} \frac{2\pi X}{L} + 67,709 \operatorname{sen} \frac{3\pi X}{L} - 11,456 \operatorname{sen} \frac{4\pi X}{L} + \\ - 3,22 \operatorname{sen} \frac{5\pi X}{L} + 3,05 \operatorname{sen} \frac{6\pi X}{L} + 0,923 \operatorname{sen} \frac{7\pi X}{L} - 1,097 \operatorname{sen} \frac{8\pi X}{L}$$

A variação desses esforços e a comparação com os resultados obtidos por Beaufait⁴⁸ estão na Tabela V.7.

Observe-se a concordância entre os valores dos momentos transversais, a qual é melhor que a apresentada entre os valores das tensões longitudinais.

É importante salientar aqui que os valores apresentados na Tabela V.7 para os momentos transversais m (obtidos pelo método de Mousa, Parmelee e Lee⁵⁴) não condizem com aqueles registrados graficamente, apresentados no artigo, mas, todavia, são mais próximos daqueles obtidos por Beaufait⁴⁸, o que comprova a finalidade a que o método se propõe.

Essa diferença se deve basicamente à maneira como foram aqui calculados esses valores (ver processo de

TABELA V.7 - Variação dos momentos transversais m e das tensões normais σ ao longo da estrutura.

SEGMENTO	MOMENTO TRANSV. m		TENSÕES NORMAIS σ			
	ARESTAS		ARESTAS			
	2	3	0	1	2	3
1	-612	-519	-101	+26	+88	-67 *
	-620	-514	-187	+109	+66	-65 **
2	-884	-445	-317	+102	+244	-190
	-901	-432	-443	+243	+181	-170
3	-1099	-386	-512	+197	+343	-277
	-1121	-369	-595	+310	+268	-244
4	-1231	-350	-602	+256	+366	-305
	-1258	-329	-657	+328	+319	-283
5	-1268	-340	-595	+279	+321	-278
	-1298	-318	-637	+307	+328	-286
6	-1215	-354	-579	+321	+233	-223
	-1242	-334	-538	+249	+292	-251
7	-1083	-390	-523	+345	+122	-148
	-1104	-374	-355	+151	+215	-179
8	-894	-442	-246	+201	-4	-33
	-909	-430	-81	+2	+101	-72
9	-685	-499	+288	-152	-127	+116
	-697	-492	+294	-211	-41	+64
10	-516	-545	+769	-488	-208	+232
	-518	-544	+784	-504	-202	+230
APOIO INTERNO	-463	-560	+860	-554	-219	+252
			+1093	-697	-288	+324
11	-435	-568	+816	-526	-210	+241
	-434	-568	+773	-466	-247	+255
12	-446	-565	+422	-253	-140	+145
	-450	-564	+264	-104	-173	+141
13	-515	-546	-43	-1	-45	+24
	-513	-545	-115	+160	-108	+50
14	-577	-529	-280	+205	+30	-56
	-582	-525	-369	+330	-54	-17
15	-618	-518	-334	+223	+73	-90
	-626	-512	-500	+411	-15	-59
16	-621	-517	-362	+237	+86	-103
	-631	-511	-513	+406	+9	-75
17	-584	-527	-337	+226	+71	-91
	-590	-523	-406	+315	+16	-65
18	-510	-547	-147	+100	+28	-37
	-514	-545	-177	+136	+9	-30

* Mousa, Parmelee e Lee⁵⁴

** Beaufait⁴⁸

cálculo no final do primeiro exemplo), a qual apresenta u ma pequena mudança em relação ao processo provavelmente se guido por Mousa, Parmelee e Lee, os quais devem ter obtido a variação de m com uma equação geral proveniente de cada termo isolado da elástica (lembrar que aqui a equação que descreve a variação de m foi obtida a partir da equação ge ral da elástica).

CAPÍTULO VI

COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÕES

Ao final deste trabalho sobre estruturas em folhas prismáticas, é de suma importância fazer-se um balanço geral, bem como tecer comentários ou sugestões que possibilitem encaminhar o prosseguimento dos estudos.

Os objetivos iniciais do trabalho eram dois: fazer-se um amplo estudo bibliográfico e, depois, estudar, comparando-os, os principais métodos de análise das folhas simples.

Assim é que no primeiro capítulo, procurou-se dar uma visão geral do funcionamento das estruturas prismáticas, a título de introdução, bem como, além do estudo bibliográfico extenso, procurou-se contribuir descrevendo os principais estudos experimentais realizados por diversos pesquisadores.

Aqui, pode ser feita uma primeira sugestão para continuar o trabalho: atualizar a bibliografia, pois, no presente caso, a pesquisa bibliográfica foi encerrada com artigos de 1981.

Tendo em vista os resultados experimentais, concluiu-se pela validade da utilização dos métodos comuns ("manuais") de análise das folhas simples, embora com a ressalva de resultarem estruturas anti-econômicas dessa análise, pela superestimação dos esforços.

Isso posto, no segundo capítulo procurou-se apresentar o equacionamento dos principais métodos simples de análise, bem como descrevê-los sucintamente. Após isso, foi feita uma complementação do estudo bibliográfico iniciado no primeiro capítulo.

Tendo em vista também os exemplos (apresentados no terceiro capítulo), foi feito um estudo comparativo entre os diversos métodos analisados. Concluiu-se que o método de Yitzhaky é o melhor dos métodos "manuais" de cálculo, por ser de simples aplicação e fácil entendimento. Além disso, o fato de ser tabelado facilita a verificação em qualquer fase do cálculo bem como, sob certas condições, permite que a análise de uma estrutura seja utilizada na análise de qualquer outra de mesma seção transversal, com diferentes comprimentos e condições de apoio.

Dos métodos analisados nos três primeiros capítulos, poucos admitiam o tratamento das estruturas prismáticas curtas, comuns na construção de silos. Tendo isso em vista, procurou-se apresentar, no quarto capítulo, um método simples de análise dessas estruturas. Optou-se pelo método de Reiss e Yitzhak, por ser mais completo e de fácil entendimento, pela sua forma tabelada.

No quinto capítulo procurou-se apresentar a análise aproximada das folhas prismáticas contínuas mediante o uso de séries de Fourier. Optou-se pelo método de Mousa, Parmelee e Lee, por ser o único método manual a não exigir simetria na direção longitudinal da estrutura.

Uma pequena modificação na maneira de obtenção das equações que descrevem a variação dos momentos transversais ao longo da estrutura permitiu melhorar os resultados obtidos pelo método, como apresentado.

Como sugestões para a continuação do trabalho, podem ser feitas, a respeito do método de Mousa, Parmelee e Lee:

- discretização do método;
- extensão do método, possibilitando, por exemplo, o uso de balanços nos diafragmas de extremidade.

NOTAÇÃO

Os seguintes símbolos foram utilizados neste trabalho:

a) letras maiúsculas:

A = área da seção transversal das placas;

C = coeficiente de flechas e momentos;

D = produto de inércia da placa = $E.I_p$;

E = módulo de elasticidade;

F = coeficiente de Fourier; segmento horizontal do deslocamento de uma aresta;

G = módulo de elasticidade transversal;

H = projeção horizontal das forças S no plano das chapas;

I = momento de inércia de uma chapa;

I_p = momento de inércia de uma placa;

K = coeficiente de rigidez;

L = vão das chapas;

M = momento fletor longitudinal (ação de chapa);

P = carga concentrada;

R = reação de apoio resultante numa aresta, como efeito da consideração de placa contínua; carga atuante sobre as arestas, na consideração do efeito de chapa;

S = componente da resultante de carga R na direção do plano da chapa;

T = fôrça cortante transversal;

V = fôrça cortante longitudinal (ação de chapa);

Z = mōdulo de resistēncia;

b) letras minūsculas;

a = flecha no plano da chapa;

b = espessura de uma placa;

e_k = relação, numa chapa contīnua, entre a distância do apoio de extremidade até o apoio k e o vão total;

g^n = componente normal do carregamento de placa;

g^t = componente tangencial do carregamento de placa;

h = ĩndice; designação de aresta; altura de uma placa (distância entre duas arestas consecutivas);

i = ĩndice; designação de aresta;

j = ĩndice; designação de aresta;

k = ĩndice; designação de aresta; coeficiente de correção;

l = ĩndice; designação de aresta; projeção horizontal da altura h das placas;

m = momento fletor transversal (ação de placa contīnua);

m^e = momento fletor transversal de engastamento perfeito;

p = carga distribuída total no plano da chapa;

q = carga distribuída; carregamento total de chapa contīnua;

r = coeficiente de distribuição de tensões;

v = força cortante transversal (ação de placa contínua); reação de apoio das placas;

x = índice; eixo coordenado das abcissas;

y = índice; eixo coordenado das ordenadas; altura de uma fibra qualquer da chapa; elástica no plano da chapa;

z = índice; eixo coordenado;

c) letras do alfabeto grego;

α = ângulo entre duas chapas adjacentes a uma aresta;

β = ângulo de inclinação das placas em relação a horizontal;

Δ = deslocamento relativo máximo entre duas arestas consecutivas; acréscimo;

δ = deslocamento vertical de uma aresta;

θ = giros de nó;

θ' = giros de corda, causado pela diferença de deslocamentos das arestas;

θ'' = giros elásticos, causados pela flexão transversal;

ρ = coeficiente de propagação;

σ = tensão normal longitudinal (ação de chapa);

σ_I = tensão principal de tração;

σ_{II} = tensão principal de compressão;

τ = tensão cisalhante longitudinal (ação de chapa);

ω = deslocamento da aresta normal ao plano da placa;

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- 1 - TASK COMMITTEE ON FOLDED PLATE CONSTRUCTION - Phase I Report on folded plate construction. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 89 (6) : 365 - 406, Dec. 1963.
- 2 - IFFLAND, J.S.B. - Folded plate structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 105 (1): 111 - 123, Jan. 1979.
- 3 - RAMASWAMY, G.S. - Design and construction of concrete shell roofs. New Delhi, Tata McGraw-Hill, 1978.
- 4 - WINTER, G. & PEI, M. - Hipped plate construction. In : Journal of the American Concrete Institute, 18 (5) : 505 - 532, Jan. 1947.
- 5 - CRAEMER, H. - Design of prismatic shells. In : Journal of the American Concrete Institute, 49 : 549 - 563, Feb. 1953.
- 6 - BORN, J. - Hipped-plate structures: their theory and analysis. London, Crosby Lockwood & Son, 1962.
- 7 - GAAFAR, I. - Hipped plate analysis : considering joint displacements. In : Transactions, ASCE, 119 : 743 - 784, 1954.
- 8 - POWELL, G.H. - Comparison of simplified theories for folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 91 (6) : 1 - 31, Dec. 1965.

- 9 - MARTIN, I. & RUIZ, S. - Folded plate raft foundation for 24 - story building. In : Journal of the American Concrete Institute, 31 (2) : 121 - 126, Aug. 1959.
- 10 - MEYER, C. & SCORDELIS, A.C. - Analysis of curved folded plate structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 97 (10) : 2459 - 2480, Oct. 1941.
- 11 - CHU, K. & DUDNIK, E. - Concrete box-girder bridges analyzed as folded plates. In : ACI FIRST INT'L SYMP. On CONCRETE BRIDGE DESIGN, ACI Publ. SP - 23, 1969, p. 221 - 246.
- 12 - AVENT, R.R. & ROBINSON, JR. J.H. - Elastic stability of polygon folded plate columns. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 102 (5) : 1015 - 1029, May, 1976.
- 13 - STRINGER, D. - Elastic stability of polygon folded plate columns : discussion. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 103 (6) : 1310 - 1313, June, 1977.
- 14 - NILSON, A.H. - Folded plate structures of light gage steel. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 87 (7) : 215 - 237, Oct. 1961.
- 15 - NILSON, A.H. - Steel shell roof structures. In : Engineering Journal, AISC, 3 (1) : 2 - 9, Jan. 1966.
- 16 - BAER, O.A. - Steel frames folded plate roof. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 87 (5) : 35 - 47, June, 1961.
- 17 - DAVIES, J.M. & THOMPSON, F. - Light gage steel folded plate construction. In : MEMOIRES INT'L ASSOC. for BRIDGE STRUCT. ENGRG, 36 (2) - 49 - 64, 1976.

- 18 - KRAUSE, H. - A new steel - plate construction specially designed for automatic welding. In : A-cier Stahl-Steel, 35 (10) : 419 - 424, Oct. 1970.
- 19 - LAWSON, R.M. - Design formulas for steel folded plate roofs. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 104 (10) : 1647 - 1655, Oct. 1978.
- 20 - SHOGREN, V.E. - Folded steel plate roof for a suburban Branch Bank. In : Engineering Journal, AISC, 1 (1) : 28 - 31, Jan. 1964.
- 21 - NEW BUILDINGS USE PLYWOOD IN CURVES AND FOLDED PLATE DESIGN. In : Engineering News - Record, N.Y., 160 (18) : 34 - 36, May. 1958.
- 22 - KIM, D. - Analysis of triangularly folded plate roofs of umbrella type. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 27 (2) : 296 p., Purdue Univ., 1965, Tese de doctoramento.
- 23 - FRANZ, G. - Tratado del hormigón armado : estructuras, Barcelona, Ed. Gustavo Gili, 1971.
- 24 - BILLINGTON, D.P. - Thin shell concrete structures. London, McGraw-Hill, 1965.
- 25 - BRIELMAIER, A.A. - Prismatic folded plates. In : Journal of the American Concrete Institute. 34 : 407 - 426, Mar. 1962.
- 26 - SIMPSON, H. - Design of folded plate roofs. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 84 (1) : 1 - 21, Jan. 1958.
- 27 - WHITNEY, C.S. ; ANDERSON, B.G. ; BIRNBAUM, H. - Reinforced concrete folded plate construction. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 85 (8) : 15 - 43, Oct. 1959.
- 28 - YITZHAKI, D. - The design of prismatic and cylindrical shell roofs. Israel, Haifa Science Publishers, 1958.

- 29 - YITZHAKI, D. & REISS, M. - Analysis of folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 88 (5) : 107 - 141, Oct. 1962.
- 30 - TRAUM, E. - The design of folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 85 (8) : 103 - 123, Oct., 1959.
- 31 - TRAUM, E. - Prismatic folded plates : a simplified procedure of analysis. In : Journal of the American Concrete Institute, 36 : 1285 - 1303, Oct. 1964.
- 32 - SCORDELIS, A.C. ; CROY, E.L. ; STUBBS, I.R. - Experimental and analytical study of a folded plate. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 87 (8) : 139 - 160, Dec. 1961.
- 33 - CHACOS, G.P. & SCALZI, J.B. - Ultimate strength of a folded plate structure. In : Journal of the American Concrete Institute, 33 : 965 - 971, Feb. 1961.
- 34 - GOLDBERG, J.E. & LEVE, H.L. - Theory of prismatic folded plate structures. In : PUBL. INT. ASSOC. BRIDGE & STRUCT. ENGR., 17 : 59 - 86, 1957.
- 35 - RUDIGER, D. - Die Strenge Theorie Anisotropischer Prismatischer Faltwerke. In : Ingenieur Archiv. Berlin, 23 , 1955.
- 36 - WERFEL, A. - Die Genaue Theorie der Prismatischer Faltwerke und ihre Praktische Anwendung. In : MEMOIRS, INT'L. ASSOC. BRIDGE & STRUCT. ENGRG. , 14 , 1954.
- 37 - De FRIES-SKENE, A. & SCORDELIS, A.C. - Direct stiffness solution for folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 90 (4) : 15 - 47, Aug., 1964.

- 38 - MAST, P E. - New method for exact analysis of folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 93 (2) _ 453 - 476, Apr. 1967.
- 39 - GIBSON, J.E. - Design of cylindrical shell roofs. 2nd Ed., London, E. & F.N. Spon Ltd , 1961.
- 40 - GIBSON, J.E. - An investigation of folded plate structures. In : The Structural Engineer, 42 (9) : 299 - 304, Sept. 1964.
- 41 - BARKER, R.M. - Folded plate analysis using a digital computer and experimental model studies. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 23 (8) : 136, 1962. Tese de doutoramento.
- 42 - MEEK, J.L. - Matrix derivation of the folded plate equations. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 89 (3) : 77 - 105, June, 1963.
- 43 - PARME, A.L.L. - Direct solution of folded plate concrete roofs. In : BULLETIN, INT'L. ASSOC. SHELL STRUCTURES, 6, 1960.
- 44 - SCORDELIS, A.C. A matrix formulation of the folded plate equations. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 86 (10) : 1 - 22 , Oct. 1960.
- 45 - REISS, M. & YITZHAK, M. - Analysis of short folded plate. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 91 (5) : 233 - 254, Oct. 1965.
- 46 - SEETHARAMULU, K. & KULKARNI, M.G. - Analysis of short span folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 90 (3) : 165 - 178, June, 1964.
- 47 - GOBLE, G.F. - Analysis of folded plate structures. In : Journal of the structural Division, ASCE, 90 (1) : 93 - 124, Feb. 1964.
- 48 - BEAUFIT, F.W. - Analysis of continuous folded plates surface. In : Journal of the Structural Di-

- vision, ASCE, 91 (6) : 117 - 140, Dec. 1965.
- 49 - LEE, Ti-ta - Analysis of continuous folded plate surface. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 92 (2) : 447, Apr. 1966.
- 50 - SCORDELIS, A.C. & LO, K.S. - Analysis of continuous folded plate surface. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 92 (3) : 281 - 286, June, 1966.
- 51 - FARIA, A.M. - Processo discreto de análise de estruturas constituídas de chapas. São Carlos, EESC-USP, 1976. Tese de mestrado.
- 52 - GOLDBERG, J.E. ; GUTZWILLER, M.J. ; LEE, R.H. - Analytical and model studies of continuous folded plates. In : Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE; 94 (5) : 1127 - 1158, Oct. 1968.
- 53 - LEE, S.L. ; PULMANO, V.A. ; LIN, T.J. - Ribless folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 91(1): 253-276, Feb. 1965.
- 54 - MOUSA, A.M. ; PARMELEE, R.A. ; LEE, S.L. - Approximate analysis of continuous prismatic shells. In : PUBL. S. INT. ASSOC. BRIDGE & STRUC. ENGRG., 28 (1) : 103 - 119, 1968.
- 55 - MUHLBAUER, K.C. & BEAUFAIT, F.W. - Behaviour of unsymmetrical - continuous folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 95 (12): 2783 - 2796, Dec. 1969.
- 56 - PULMANO, V.A. & LEE, S.L. - Prismatic shells with intermediate columns. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 91 (6) : 215 - 137, Dec. 1965.
- 57 - PULTAR, M. ; BILLINGTON, D.P. ; RIERA, J.D. - **Folded** plates continuous over flexible supports. In :

- Journal of the Structural Division, ASCE, 93 (5) :
253 - 277, Oct. 1967.
- 58 - SHARMA, S.P. & GOYAL, B.K. - The analysis of conti-
nuous folded plates. In : Indian Concrete Jour-
nal, 37 (12):: 448 - 453, Dec. 1963.
- 59 - WAHAB, A.A. & MOUSA, A.M. - Folded plates with inter-
mediate flexible supports. In : Journal of the
Structural Division, ASCE, 105 (10) : 2091 - 2109,
Oct. 1979.
- 60 - VAKIL, R.N. - Continuous folded plates. In : BULL.
INT. ASSOC. for SHELL STRUCTURES, 40 : 43 - 56,
Dec. 1969.
- 61 - CHU, K.H. & PINJARKAR, S.G. - Multiple folded plate
structures. In : Journal of the Structural Di-
vision, ASCE, 92 (2) : 297 - 321, Apr. 1966.
- 62 - GIBSON, J.E. & GARDNER, N.J. - Investigation of mult
ti-folded plate structures. In : PROC. INST. CI
VIL ENGR., London, 31 : 57 - 69, May, 1965.
- 63 - LEE, Ti-ta & VOS, R.G. - Multiple folded plates with
various end conditions. In : Journal of the
Structural Division, ASCE, 94 (7) : 1761 - 1786,
July, 1968.
- 64 - LO, K.S. & SCORDELIS, A.C. - Finite segment analysis
of folded plates. In Journal of the Structu-
ral Division, ASCE, 95 (5) : 831 - 852, May 1969.
- 65 - PAULSON, J.M. - The analysis of multiple and conti-
nuous folded plate structures. In : DISSERTATION
ABSTRACTS, 19 (6) : 165,-1958. Tese de doutora-
mento.
- 66 - JOHNSON, C.D. - Simply supported non-prismatic fold
ed plates. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 27 (9-
B) : 194, 1966. Tese de doutoramento.
- 67 - JOHNSON, C.D. & LEE, T.T. - Experimental study of

- non prismatic folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 94 (6) : 1441 - 1455, June, 1968.
- 68 - JOHNSON, C.D. & LEE, T.T. - Long nonprismatic folded plate structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 94 (6) : 1457 - 1484, June, 1968.
- 69 - JOHNSON, C.D. & LEE, T.T. - (errata to "Long non prismatic folded plates") In : Journal of the Structural Division, ASCE, 95 (5) : 1106,-1969.
- 70 - WELCH, L. - Folded plate dome ideal for auditorium. In : Proceedings, ACI, 55 (4) : 441 - 446, Oct. 1958.
- 71 - WHITNEY, C.S. - Cantilever folded plate. In : Proceedings, ACI, 55 (4) : 417 - 430, Oct. 1958.
- 72 - BROUGH, J.C. & STEPHENS, B.H. - Long span prestressed concrete folded plate roofs. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 86 (10) : 87 - 108, Oct. 1960.
- 73 - DRISKELL, J.J. - Multsplan prestressed folded plate roof for langendorf Bakery. In : Journal af American Concrete Institute, 29 (2) : 115 - 126, Aug. 1957.
- 74 - GOVINDASWAMY, R. & SWARTS, S.G. - End - supported folded plates optimally prestressed. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 105 (1) : 251 - 256, Jan. 1979.
- 75 - KLAIBER, F.W. ; GUTZWILLER, M.J. ; LEE, R.H. - Analytical and model studies of prestressed folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 99 (6) ; 1287 - 1307, June, 1973.
- 76 - BURAGOHAİN, D.N. & AGRAWAL, B.L. - Analysis of curved box girder bridges. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 99 (5) : 799 - 818, May, 1973.

- 77 - CHU, K.H. & PINJARKAR, S.G. - Analysis of horizontally curved box girder bridges. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 97 (10) : 2481 - 2501, Oct. 1971.
- 78 - DAVIS, R.E. et alii - Model and prototype studies of box girder bridge. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 98 (1) : 165 - 183, Jan. 1972.
- 79 - CONRADO, A.R. - Discrete analysis of continuous folded plates. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 25 (9-B) : 101, 1967, Tese de doutoramento.
- 80 - FARMER, L.E. & BREEN, J.E. - Nonlinear solutions for folded plate structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 92 (2) : 229 - 252, a Apr. 1966.
- 81 - GHAZALEH, B.N.A. - Analysis of plate type prismatic structures. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 27 (3) : 184, 1966. Tese de doutoramento.
- 82 - SHANMUGHASUNDARAM, N. - Ultimate load analysis of single unit reinforced concrete prismatic folded plate structures. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 28 (2-B), 187, 1967. Tese de doutoramento.
- 83 - CHEUNG, Y.K. - Folded plate structures by finite strip method. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 95 (12) : 2963 - 2979, Dec. 1969.
- 84 - IBRAHIM, I.M. & MONFORTON, G.R. - Finite strip laminated sandwich roof analysis. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 105 (5) : 905 - 919, May, 1979.
- 85 - VICTOR, F.H. & ELLYIN, F. - Assemblage method for folded plate analysis. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 105 (7) : 1509 - 1524, July, 1979.

- 86 - BEAVERS, J.E. & BEAUFIT, F.W. - Higher-order finite element for complex plate structures. In : Journal of the Strucutral Division, ASCE, 103 (1) : 51 - 69, Jan. 1977.
- 87 - FAZIO, P.P. & HA, K.H. - Sandwich plate structure a nalysis by finite element. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 100 (6) : 1243 - 1262, June, 1974.
- 88 - ROCKEY, K.C. & EVANS, H.R. - A finite element solu tion for folded plate structures. In : SPACE STRUCTURES, THE INT. CONFERENCE ON SPACE STRUCTURES, Blackwell Scientific Publications, Oxford, En gland, 1967, p. 165 - 188.
- 89 - AVENT, R.R. & BOUNIN, D. - Discrete field stability a nalysis of ribbed plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 102 (9) : 1917 - 1938, Sept. 1976.
- 90 - LIND, N.C. - Numerical buckling analysis of plate as semblies. In : Journal of the Structural Divi- sion, ASCE, 104 (2) : 329 - 339, Feb. 1978.
- 91 - MIKHAIL, M.L. - Energy methods for stress and buckling analysis of folded plates. In : DISSERTATION ABS TRACTS, 30 (5-B) : 25, 1969. Tese de doutoramen- to.
- 92 - MIKHAIL, M.L. & GURALNICK, S.A. - Buckling of simply supported folded plates. In : Journal of the En- gineering Mechanics Division, ASCE, 97 (5) : 1363-1380, Oct. 1971.
- 93 - SWARTZ, S.E. - Buckling of folded plates. In : DIS- SERTATION ABSTRACTS, 28 (8-B) : 173, 1968, Tese de doutoramento.
- 94 - SWARTZ, S.E. & GURALNICK, S.A. - Approximate analysis of the stability of single-cell folded plate struc

- tures. In : PUBIL'S INT'L ASSOC. for BRIDGE & STRUCT. ENGRG., 29 (2) : 217 - 236, 1969.
- 95 - SWARTZ, S.E. ; ROSEBRAUGH, V.H. ; FANJIANG, G.N. - Local Buckling of long-span folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 101 (5): 1097 - 1109, May, 1975.
- 96 - SWARTZ, S.E. & ROSEBRAUGH, V.H. - Local buckling of long-span concrete folded plate. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 102 (10) : 1981-1988, Oct. 1976.
- 97 - FIALKOW, M.N. - Folded plate analysis by minimum energy principle. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 88 (3) : 1 - 34, June, 1962.
- 98 - FIALKOW, M.N. - Yield line analysis of folded plate structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 94 (12) : 2935 - 2962, Dec. 1968.
- 99 - FIALKOW, M.N. - Safe limit loading of folded plate Structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 98 (10) : 2181 -
- 100 - FIALKOW, M.N. - Plastic collapse of folded plate Structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 101 (7) : 1559 - 1584, July, 1975.
- 101 - GARDNER, N.J. - Limit design of folded plate roofs. In : Civil Engr. & Publ. Works Rev., London, 60 (708) : 1036 - 1038, July, 1965.
- 102 - ALDRIDGE, W.W. - Ultimate strength tests of model reinforced concrete folded plate structures. In: DISSERTATION ABSTRACTS, 27 (7-B) : 279 , 1966. Tese de doutorado.
- 103 - BILLINGTON, D.P. & MARK, R. - Small scale model analysis of thin shells. In : Journal of the American Concrete Institute, 37 : 673 - 687, June, 1965.

- 104 - DYKES, A.R. - Folded plate construction: an investigation of collapse conditions. In : Structural Engineer, London, 38 (2) : 60 - 67, Feb. 1960.
- 105 - FAZIO, P.P. - Failure models of folded sandwich panel roofs. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 98 (5) : 1085 - 1104, May, 1972.
- 106 - GRAHAM, F.M. - The behaviour of a folded plate roof system. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 27 (4) : 144, 1966. Tese de doutoramento.
- 107 - ROCKEY, K.C. & EVANS, H.R. - A study of the behaviour of folded plate structures. In : The Structural Engineer, 49 (4) : 189 - 197, Apr. 1971.
- 108 - SCORDELIS, A.C. & GERASIMENKO, P.V. - Strength of reinforced concrete folded plate models. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 92 (1) : 351 - 363, Feb. 1966.
- 109 - SWARTZ, S.E. & ROSEBRAUGH, V.H. - Experiments with elastic folded plate models. In : Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 98 (3) : 711 - 729, June, 1972.
- 110 - YANG, T.S. - Effects of geometric parameters on the ultimate strength behaviour of model reinforced concrete folded plate structures. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 29 (8-B) : 199, 1968. Tese de doutoramento.
- 111 - BEAUFAIT, F.W. & GRAY, G.A. - Experimental analysis of continuous folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 92 (1) : 11 - 19, Feb. 1966.
- 112 - FAZIO, P. & KENNEDY, J.B. - Experimental study of a continuous two-span folded plate structure. In : Concrete and Constructional Engineering, 61 (12) : 431 - 439, Dec. 1966.

- 113 - LEE, R.H. - An analytical and experimental study of continuous folded-plates. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 26 (5) : 202, 1965. Tese de doutoramento.
- 114 - SEETHARAMULU, K. & SACHCHIDANAND, N. - Tests on microconcrete continuous folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 105 (7) : 1457 - 1470, July, 1979.
- 115 - CANDREVA, P. - Estrutura em folha poliédrica : com provação experimental. São Paulo, Escola politécnica - USP, 1970. Tese de doutoramento.
- 116 - DEL POZO, F. ; TORROJA, J.A ; PALANCO, R.L. - Tribune for the dog racing stadium of Madrid. In : PROC. WORLD CONF. ON SHELL STRUCTURES, San Francisco, 1962, p. 379 - 382.
- 117 - GLANVILLE, J.I. - Full-scale pretensioned folded plates test-loaded to failure. In : Journal of the American Concrete Institute, 60 (3) : 355 - 370, Mar. 1963.
- 118 - MARTIN, I. - Full scale load test of a prestressed folded plate unit. In : Journal of the American Concrete Institute, 68 (12) : 9937 - 944, Dec. 1971.
- 119 - RONTSCH, G. - Model tests for investigating the stability of folded-plate structures. In : BULLETIN, INT. ASSOC. for SHELL STRUCTURES, 25 : 29 - 38, mar. 1965.
- 120 - SCHWAIGHOFER, J. & SEETHALER, N. - Experimental study of folded plates. In : Journal of the American Concrete Institute, 35 : 101 - 111, Jan. 1963.
- 121 - VISHWANATH, T. ; MHATRE, R.P. ; SEETHARAMULU, K. - Test of a ferro-cemento precast folded plate.

- In : Journal of the Structural Division, ASCE, 91
(6) : 239 - 249, Dec. 1965.
- 122 - SIDDALL, J.N. ; DOKAINISH, M.A. ; WIN, M.M. - Model
test and analysis of oblique folded palte struc
ture. In : Journal of the Structural Division,
ASCE, 99 (6) : 1043 - 1049, June, 1973.
- 123 - MARK, R. & RIERA, J.D. - Photoelastic analysis of
folded-plate structures. In : Journal of the
Engineering Mechanics Division, ASCE, 93 (4) :
79 - 93, Aug. 1967.
- 124 - GURALNICK, S.A. & SWARTZ, S.E. - Reinforcement of folde
d plates. In: Journal of the American Concrete
Institute, 37: 587-604, May, 1965
- 125 - LEE, S.L. - Analysis of continuous beams by Fourier
series. In : Journal Engineering Mechanics Di-
vision, ASCE, 83 (4) : 1 - 13, Oct. 1957.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - ALDRIDGE, W.W. - Ultimate strength tests of model reinforced plate roofs. In : Civil Engr. & Publ. Works Rev., London, 60 (708) : 1036 - 1038, July, 1965.
- 2 - AVENT, R.R. & BOUNIN, D. - Discrete field stability analysis of ribbed plates. In : Journal of the Structural Division, -ASCE, 102 (9) : 1917 - 1938, Sep. 1976.
- 3 - AVENT, R.R. & ROBINSON, Jr J.H. - Elastic stability of polygon folded plate columns. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 102 (5) : 1015 - 1029, May, 1976.
- 4 - BAER, O.A. - Steel frames folded plate roof. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 87 (5): 35 -47, June, 1961.
- 5 - BARKER, R.M. - Folded plate analysis using a digital computer and experimental model studies. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 23 (8) : 136, 1962.
- 6 - BEAUFIT, F.W. - Analysis of continuous folded plates surface. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 91 (6) : 117 - 140, Dec. 1965.
- 7 - BEAUFIT, F.W. & GRAY, G.A. - Experimental analysis of continuous folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 92 (1) : 11 - 19, Feb. 1966.

- 8 - BEAVERS, J.E. & BEAUFAIT, F.W. - Higher-order finite element for complex plate structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 103 (1) : 51 - 69, Jan. 1977.
- 9 - BILLINGTON, D.P. - Thin shell concrete structures. London, McGraw-Hill, 1965.
- 10 - BILLINGTON, D.P. & MARK, R. - Small scale model analysis of thin shells. In : Journal of the American Concrete Institute, 37 : 673 - 687, June, 1965.
- 11 - BORN, J. - Hipped-plate structures : their theory and analysis. London, Crosby Lockwood & Son, 1962.
- 12 - BRIELMAIER, A.A. - Prismatic folded plates. In : Journal of the American Concrete Institute, 34 : 407 - 426, Mar. 1962.
- 13 - BROUGH, J.C. & STEPHENS, B.H. - Long span prestressed concrete folded plate roofs. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 86 (10) : 87 - 108, Oct. 1960.
- 14 - BURAGOHAJIN, D.N. & AGRAWAL, B.L. - Analysis of curved box girder bridges. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 99 (5) : 799 - 818, May, 1973.
- 15 - CANDREVA, P. - Estrutura em folha poliédrica : com provação experimental. São Paulo, Escola Politécnica - USP, 1970. Tese de doutoramento.
- 16 - CHACOS, G.P. & SCALZI, J.B. - Ultimate strength of a folded plate structure. In : Journal of the American Concrete Institute, 33 : 965 - 971, Feb. 1961.
- 17 - CHEUNG, Y.K. - Folded plate structures by finite strip method. In : Journal of the Structural

Division, ASCE, 95 (12) : 2963 - 2979, Dec. 1969.

- 18 - CHU, K & DUDNIK, E. - Concrete box-girder bridges analyzed as folded plates. In : ACI FINST INT'L SYMP. ON CONCRETE BRIDGE DESIGN, ACI Publ. SP-23, 1969, p. 221 - 246.
- 19 - CHU, K.H. & PINJARKAR, S.G. - Analysis of horizontally curved box girder bridges. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 97 (10) : 2481-2501, Oct. 1971.
- 20 - CHU, K.H. & PINJARKAR, S.G. - Multiple folded plate structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 92 (2) : 297 - 321. Apr. 1966.
- 21 - CONRADO, A.K. - Discrete analysis of continuous folded plates. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 25 (9-B) : 101, 1967. Tese de doutoramento.
- 22 - CRAEMER, H. - Design of prismatic shells. In : Journal of the American Concrete Institute, 49 : 549 - 563, Feb. 1953.
- 23 - DAVIES, J.M. & THOMPSON, F. - Light gange steel folded plate construction. In : MEMOIRES INT'L ASSOC. FOR BRIDGE STRUCT. ENGRG., 36 (2) : 49 - 64, 1976.
- 24 - DAVIS, R.E. et alii - Model and prototype studies of box girder bridge. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 98 (1) : 165 - 183, Jan. 1972.
- 25 - DEFRIES-SKENE, A. & SCORDELIS, A. C. - Direct stiffness solution for folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 90 (4) : 15 - 47, Aug. 1964.
- 26 - DEL POZO, F. ; TORROTA, J.A. ; PALANCO, R.L. - Tribune for the slog raung stadium of Madrid. In: PORC. WORLD CONF: ON SHELL STRUCTURES, San Francisco, 1962. p. 379 - 382.

- 27 - DRISKELL, J.J. - Multisplan prestressed folded plate roof for langendorf Bakery. In : Journal of American Concrete Institute, 29 (2) : 115 - 126, Aug. 1957.
- 28 - DYKES, A.R. - Folded plate construction : an investigation of collapse conditions. In : Structural Engineer, London, 38 (2) : 60 - 67, Feb. 1960.
- 29 - FARIA, A.M. - Processo discreto de análise de estruturas constituídas de chapas. São Carlos, EESC-USP, 1976. Tese de mestrado.
- 30 - FARMER L.E. & BREEN, J.E. - Nonlinear solution for folded plate structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 92 (2) : 229 - 252, Apr, 1966.
- 31 - FAZIO, P.P. - Failure models of folded sandwich panel roofs. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 98 (5) : 1085 - 1104, May, 1972.
- 32 - FAZIO, P.P. & HA, K.H. - Sandwich plate structure analysis by finite element. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 100 (6) : 1243 - 1262, June, 1974.
- 33 - FAZIO, P.P. & KENNEDY, J.B. - Experimental study of a continuous two-span folded-plate structure. In : Concrete and Constructional Engineering, 61 (12) : 431 - 439, Dec. 1966.
- 34 - FIALKOW, M.N. - Folded plate analysis by minimum energy principle. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 88 (3) : 1 - 34, June, 1962.
- 35 - FIALKOW, M.N. - Plastic collapse of folded plate structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 101 (7) : 1559 - 1584, July, 1975.
- 36 - FIALKOW, M.N. - Safe limit loading of folded plate structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 98 (10) : 2181 - 2206, Oct. 1972.

- 37 - FIALKOW, M.N. - Yield line analysis of folded plate structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 94 (12) : 2935 - 2962, Dec. 1968.
- 38 - FRANZ, G. - Tratado del hõrmigon armado : estructuras. Barcelona, Ed. Gustavo Gili, 1971.
- 39 - GAAFAR, I.,- Hipped plate analysis : considering joint displacements. In : Transactions, ASCE, 119 : 743 - 784, 1954.
- 40 - GARDNER, N.J. - Limit design of folded plate roofs. In : Civil Engr. & Publ. Works Rev., London, 60 (708) : 1036 - 1038, July, 1965.
- 41 - GHAZALEH, B.N.A. - Analysis of plate type prismatic structures. In : DISSERTAÇÃO ABSTRACTS. 27 (3): 184, 1966. Tese de doutoramento.
- 42 - GIBSON, J.E. - An investigati-n of folded plate structures. In : The Structural Engineer, 42 (9) : 299 - 304, Sept. 1964.
- 43 - GIBSON, J.E. - Design of cylindrical shell roofs. 2nd ed., London, E. & F.N. Spon Ltd., 1961.
- 44 - GIBSON, J.E. & GARDNER, N.J. - Investigation of multi-folded plate structures. In : PROC. INST. CIVIL ENGR., London, 31 : 57 - 69, May, 1965.
- 45 - GLANVILLE, J.I. - Full-scale pretensioned folded plates test-loaded to failure. In : Journal of the American Concrete Institute, 60 (3) : 355 - 370, Mar. 1963.
- 46 - GOBLE, G.G. - Analysis of folded plate Structures. In : Journal of the Strucutral Division, ASCE, 90 (1) : 93 - 124, Feb. 1964.
- 47 - GOLDBERG, J.E. ; GUTZWILLER, M.J. ; LEE, R.H. - Analytical and model studies of continuous folded plates. In : Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 94 (5) : 1127 - 1158, Oct. 1968.

- 48 - GOLDBERG, J.E. & LEVE, H.L. - Theory of prismatic folded plate structures. In : PUBL. INT. ASSOC. BRIDGE & STRUCT. ENGR., 17 : 59 - 86, 1957.
- 49 - GOVINDASWAMY, R. & SWARTZ, S.E. - End-supported folded plates optimally prestressed. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 105 (1) : 251 - 256, Jan. 1979.
- 50 - GRAHAM, F.M. - The behaviour of a folded plate roof system. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 27 (4) : 144, 1966. Tese de doutoramento.
- 51 - GURALNICK, S.A & SWARTZ, S.E. - Reinforcement of folded plates. In : Journal of the American Concrete Institute, 37 : 587 - 604, May, 1965.
- 52 - IBRAHIM, I.M. & MONFORTON, G.R. - Finite strip laminated sandwich roof analysis. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 105 (5) : 905 - 919, May, 1979.
- 53 - IFFLAND, J.S.B. - Folded plate structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 105 (1) : 111 - 123, Jan. 1979.
- 54 - JOHNSON, C.D. - Simply supported non-prismatic folded plates. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 27 (9-B) ; 194, 1966. Tese de doutoramento.
- 55 - JOHNSON, C.D. & LEE, T.T. - Experimental study of non-prismatic folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 94 (6) : 1441 - 1455, June, 1968.
- 56 - JOHNSON, C.D. & LEE, T.T. - Long nonprismatic folded plate structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 94 (6) : 1457 - 1484, June, 1968.
- 57 - JOHNSON, C.D. & LEE, T.T. - errata to "Long nonprismatic folded plates. In : Journal of the Struc-

- tural Division, ASCE, 95 (4) : 441 - 446, Oct. 1958.
- 58 - KIM, D. - Analysis of triangularly folded plate roofs of umbrella type. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 27 (2) : 296 p., Purdue Univ., 1965. Tese de doutoramento.
- 59 - KLAIBER, F.W. ; GUTZWILLER, M.J. ; LEE, R.H. - Analytical and model studies of prestressed folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 99 (6) : 1287 - 1307, June, 1973.
- 60 - KRAUSE, H. - A new steel-plate construction specially designed for automatic welding. In : Acier-Stahl-Steel, 35 (10) : 419 - 424, Oct. 1970.
- 61 - LAWSON, R.M. - Design formulas for steel folded plate roofs. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 104 (10) : 1647 - 1655, Oct. 1978.
- 62 - LEE, R.H. - An analytical and experimental study of continuous folded-plates. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 26 (5) : 202, 1965. Tese de Doutoramento.
- 63 - LEE, S.L. - Analysis of continuous beams by fourier series. In : Journal Engineering Mechanics Division, ASCE, 83 (4) : 1 - 13, Oct. 1957.
- 64 - LEE, S.L. ; PULMANO, V.A. ; LIN, T.J. - Ribless folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 91 (1) : 253 - 276, Feb. 1965.
- 65 - LEE, Ti-ta - Analysis of continuous folded plate surface. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 92 (2) : 447, Apr. 1966.
- 66 - LEE, Ti-ta & VOS, R.G. - Multiple folded plates with various and conditions. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 94 (7) : 1761 - 1786, July, 1968.

- 67 - LIND, N.C. - Numerical buckling analysis of plate assemblies. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 104 (2) : 329 - 339, Feb. 1978.
- 68 - LO, K.S. & SCORDELIS, A.C. - Finite segment analysis of folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 95 (5) : 831 - 852, May, 1969.
- 69 - MARK, R. & RIERA, J.D. - Photoelastic analysis of folded-plate structures. In : Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 93 (4) : 79 - 93, Aug. 1967.
- 70 - MARTIN, I. - Full scale load test of a prestressed folded plate unit. In : Journal of the American Concrete Institute, 68 (12) : 937 - 944, Dec. 1971.
- 71 - MARTIN, I. & RUIZ, S. - Folded plate raft foundation for 24-story building. In : Journal of the American Concrete Institute, 31 (2) : 121 - 126, Aug. 1959.
- 72 - MAST, P.E. - New method for exact analysis of folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 93 (2) : 453 - 476, Apr. 1967.
- 73 - MEEK, J.L. - Matrix derivation of the folded plate equations. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 89 (3) : 77 - 105, June, 1963.
- 74 - MEYER, C. & SCORDELIS, A.C. - Analysis of curved folded plate structures. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 97 (10) : 2459 - 2480, Oct. 1971.
- 75 - MIKHAIL, M.L. - Energy methods for stress and buckling analysis of folded plates. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 30 (5-B) : 25, 1969. Tese de doutoramento.
- 76 - MIKHAIL, M.L. & GURALNICK, S.S. - Buckling of sim

- ply supported folded plates. In : Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 97 (5) : 1363 - 1380, Oct. 1971.
- 77 - MOUSA, A.M. ; PARMELEE, R.A. ; LEE, S.L. - Approximate analysis of continuous prismatic shells. In : PUBLIS. INT. ASSOC. BRIDGE & STRUCT. ENGRG., 28 (1) : 103 - 119, 1968.
- 78 - MUHLBAUER, K.C. & BEAUFIT, F.W. - Behaviour of unsymmetrical-continuous folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 95 (12) : 2783 - 2796. Dec. 1969.
- 79 - NEW BUILDING USE PLYWOOD IN CURVES AND FOLDED PLATE DESIGN. In : Engineering News-Record, N.Y. 160 (18) : 34 - 36, May, 1958.
- 80 - NILSON, A.H. Folded plate structures of light gage steel. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 87 (7) : 215 - 237, Oct. 1961.
- 81 - NILSON, A.H. - Steel shell roof structures. In : Engineering Journal, AISC, 3 (1) : 2 - 9, Jan. 1966.
- 82 - PARME, A.L.L. - Direct solution of folded plate concrete roofs. In : BULLETIN, INT'L. ASSOC. SHELL STRUCTURES, 6, 1960.
- 83 - PAULSON, J.M. - The analysis of multiple and continuous folded plate structures. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 19 (6) : 165, 1958. Tese de doutoramento.
- 84 - POWELL, G.H. - Comparison of simplified theories for folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 91 (6) : 1 - 31, Dec. 1965.
- 85 - PULMANO, V.A. & LEE, S.L. Prismatic shell with intermediate columns. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 91 (6) : 215 - 237, Dec. 1965.

- 86 - PULTAR, M. ; BILLINGTON, D.P. ; RIERA, J.D. - Folded plates continuous over flexible supports. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 93 (5) : 253 - 277, Oct. 1967.
- 87 - RAMASWAMY, G.S. - Design and construction of concrete shell roofs. New Delhi, Tata McGraw-Hill, 1978.
- 88 - REISS, M. & YITZHAK, M. - Analysis of short folded plate. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 91 (5) : 233 - 254, Oct. 1965.
- 89 - ROCKEY, K.C. & EVANS, H.R. - A finite element solution for folded plate structures. In : SPACE STRUCTURES, THE INT. CONFERENCE ON SPACE STRUCTURES, Blackwell Scientific Publications, Oxford, England, 1967, p. 165,- 188.
- 90 - ROCKEY, K.C. & EVANS, H.R. - A study of the behaviour of folded plate structures. In : The Structural Engineer, 49 (4) : 189 - 197, Apr. 1971.
- 91 - RONTSCH, G. - Model tests for investigating the stability of folded-plate structures. In : BULLETIN, INT. ASSOC. FOR SHELL STRUCTURES. 25 : 29 - 38, Mar. 1965.
- 92 - RUDIGER, D. - Die Strenge Theorie Anisotropischer Prismatischer Faltwerke. In : Ingenieur Archiv., Berlin, 23, 1955.
- 93 - SCHWAIGHOFER, J. & SEETHALER, N. - Experimental study of folded plates. In : Journal of the American Concrete Institute, 35 : 101 - 111, Jan. 1963.
- 94 - SCORDELIS, A.C. - A matrix formulation of the folded plate equations. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 86 (10) : 1 - 22, Oct. 1960.
- 95 - SCORDELIS, A.C. ; CROY, E.L. ; STUBBS, I.R. - Experimental and analytical study of a folded plate. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 87 (8) : 139 - 160, Dec. 1961.

- 96 - SCORDELIS, A.C. & GERASIMENKO, P.V. - Strength of reinforced concrete folded plate models. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 92 (1) : 351 - 363, Feb. 1966.
- 97 - SCORDELIS, A.C. & LO, K.S. - Analysis of continuous folded plate surface. In : Journal of the structural Division, ASCE, 92 (3) : 281 - 286, June, 1966.
- 98 - SEETHARAMULU, K. & KULKARNO, M.G. - Analysis of short span folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 90 (3) : 165 - 178, June, 1964
- 99 - SEETHARAMULU, K. & SACHCHIDANAND, N. - Tests on microconcrete continuous folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 105 (7) : 1457 - 1470, July, 1979.
- 100 - SHANMUGHASUNDARAM, N. - Ultimate load analysis of single unit reinforced concrete prismatic folded plate structures. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 28 (2-B), 187, 1967.
- 101 - SHARMA, S.P. & GOYAL, B.K. - The analysis of continuous folded plates. In : Indian Concrete Journal, 37 (12) : 448 - 453, Dec. 1963.
- 102 - SHOGREN, V.E. - Folded steel plate roof for a suburban Branch Bank. In : Engineering Journal, AISC, 1 (1) : 28 - 31, Jan. 1964.
- 103 - SIDDALL, J.N. ; DOKAINISH, M.A. ; WIN, M.M. - Model test and analysis of oblique folded plate structure. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 99 (6) : 1043 - 1049, June, 1973.
- 104 - SIMPSON, H. - Design of folded plate roofs. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 84 (1) : 1 - 21, Jan. 1958.

- 105 - STRINGER D. - Elastic stability of polygon plate columns : discussion. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 103 (6) : 1310 - 1313, June, 1977.
- 106 - SWARTZ, S.E. - Buckling of folded plates. In : DISERTATION ASBATRACTS, 28 (8 - B) : 173, 1968.
Tese de doutoramento.
- 107 - SWARTZ, S.E. & GURALNICK, S.A. - Approximate analysis of the stability of single-cell folded plate structures. In : PUBL'S. INT'L. ASSOC. FOR BRIDGE & STRUCT. ENGRG., 29 (2) : 217 - 136, 1969.
- 108 - SWARTZ, S.E. & ROSEBRAUGH, V.H. - Experiments with elastic folded plate models. In : Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 98 (3) : 711 - 729, June, 1972.
- 109 - SWARTZ, S.E. & ROSEBRAUGH, V.H. - Local buckling of long-span concrete folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 102 (10) : 1981 - 1988, Oct. 1976.
- 110 - SWARTZ, S.E. ; ROSEBRAUGH, V.H. ; FRANJIANG, G.N. - Local Buckling of long-span folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 101 (5) : 1097 - 1109, May, 1975.
- 111 - TASK COMMITTEE ON FOLDED PLATE CONSTRUCTION - Phase I Report on folded plate construction. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 89 (6) : 365 - 406, Dec. 1963.
- 112 - TRAUM, E. - The design of folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 85 (8) : 103 - 123, Oct. 1959.
- 113 - TRAUM, E. - Prismatic folded plates : a simplified procedure of analysis. In : Journal of the American Concrete Institute, 36 : 1285 - 1303, Oct. 1964.

- 114 - VAKIL, R.N. - Continuous folded plates. In : BULL. INT. ASSOC. FOR SHELL STRUCTURES, 40 : 43 - 56, Dec. 1969.
- 115 - VICTOR; F.H. & ELLYIN, F. - Assemblage method for folded-plate analysis. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 105 (7) : 1509 - 1524, July, 1979.
- 116 - VISHWANATH, T. ; MHATRE, R.P. ; SEETHARAMULU, K. - Test of a ferro-cemento precast folded plate. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 91 (6) : 239 - 249, Dec. 1965.
- 117 - WAHAB, A.A. & MOUSA, A.M. - Folded plates with intermediate flexible supports. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 105 (10) : 2091 - 2109, Oct. 1979.
- 118 - WELCH, L. - Folded plate dome ideal for auditorium. In : Proceedings, ACI, 55 (4) : 441 - 446, Oct. 1958.
- 119 - WERFEL, A. - Die Genaue Theorie der Prismatischer Faltwerke und ihre Praktische Anwendung. In : MEMOIRS, INT'L. ASSOC. BRIDGE & STRUCT. ENGRG., 14, 1954.
- 120 - WHITNEY, C.S. - Cantilever folded plate. In : Proceedings, ACI, 55 (4) : 417 - 430, Oct. 1958.
- 121 - WITHNEY, C.S. ; ANDERSON, B.G. ; BIRNBAUM, H. - Reinforced concrete folded plate construction. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 85 (8) : 15 - 43, Oct. 1959.
- 122 - WINTER, G. & PEI, M. - Hipped plate construction. In : Journal of the American Concrete Institute, 18 (5) : 505 - 532, Jan. 1947.
- 123 - YANG, T.S. - Effects of geometric parameters on the

ultimate strength behaviour of model reinforced concrete folded plate structures. In : DISSERTATION ABSTRACTS, 29 (8 - B) : 199, 1968. Tese de doutoramento.

- 124 - YITZHAKI, D. - The design of prismatic and cylindrical shell roofs. Israel, Haifa Science Publishers, 1958.
- 125 - YITZHAKI, D. & REISS, M. - Analysis of folded plates. In : Journal of the Structural Division, ASCE, 88 (5) : 107 - 141, Oct. 1962.