

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS FAIXAS FINITAS
NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS PRISMÁTICAS

ENG. MÁRCIO ROBERTO SILVA CORRÊA

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

COMISSÃO EXAMINADORA:

PROF. DR. JOÃO LIRANI
(SUPLENTE)

PROF. DR. DANTE GUELPA

PROF. DR. WILSON SÉRGIO VENTURINI
(SUPLENTE)

PROF. DR. WALTER SAVASSI

PROF. DR. ILIO MONTANARI
(ORIENTADOR)

SÃO CARLOS, DEZEMBRO DE 1983

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS FAIXAS FINITAS
NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS PRISMÁTICAS

MÁRCIO ROBERTO SILVA CORREA

"Se a conquista progressiva do conhecimento nos faz compreender sempre melhor a modéstia da nossa atual condição evolutiva e a extensão do quanto ainda ignoramos, compelindo-nos à humildade diante da sabedoria e do poder de Deus, dá-nos também uma crescente noção de auto-respeito, em face da excelsa nobreza da Vida".

Aureo

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela bolsa concedida durante o ano de 1980, quando foi iniciado o presente trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ilio Montanari, por ter oferecido sempre possibilidade de diálogo aberto e franco, e liberdade para definição de caminhos da pesquisa.

Aos colegas do Departamento de Estruturas pelo apoio constante.

Aos professores e amigos João Carlos Barreiro e João Batista de Paiva, pelo incentivo e pelas sugestões durante o desenvolvimento do trabalho.

À Sra. Wilma Provinciali Vall e Sr. João Paulo Moretti pelo dedicado e paciente trabalho de datilografia e desenho, respectivamente.

Finalmente, aos amigos e familiares por sua contribuição em todos os níveis.

ABSTRACT

The Finite Strip Method is used for the linear elastic analysis of right prismatic structures, with special attention dedicated to bridge deck problems. In this method harmonic functions (Fourier Series) which fitted the boundary conditions (bending and in-plane) in the longitudinal direction are used in conjunction with simple polynomials for the transverse direction. Stiffness matrices for both bending and in-plane analysis have been developed for a strip with an orthotropic property. By dividing the structure into a finite number of strips any combination of loadings can be dealt with. After solving for the joint displacements, stresses and other values can be calculated at any point of a strip. It is introduced a flexibility approach to extend the method to the analysis of indeterminated structures. Typical examples are carried out for comparisons of results with those obtained by other authors, and the convergence of the solutions is briefly verified. Conclusions about the applicability of the method are presented herein with respect to the range of the geometric, mechanic and loading parameters of the structure, specially bridge decks.

RESUMO

O Método das Faixas Finitas é utilizado para a análise elástica linear de estruturas retas prismáticas, com ênfase nos tabuleiros de pontes. Neste método são utilizadas em conjunto funções harmônicas (desenvolvimento de Fourier), que atendem a priori às condições de contorno na direção longitudinal e funções polinomiais simples na direção transversal. São desenvolvidas matrizes de rigidez para faixa de comportamento misto (chapa e placa), com propriedades ortotrópicas. O acoplamento de um certo número finito de faixas simula a estrutura global, sendo possível combinar vários tipos de carregamentos. Após a resolução do sistema de equações lineares nos deslocamentos nodais, tensões, deformações, esforços e deslocamentos podem ser calculados em qualquer ponto de cada faixa. É introduzida uma aproximação, via processo dos esforços, para a análise de tabuleiros com apoios e diafragmas intermediários. Alguns exemplos clássicos são desenvolvidos, comparando-se resultados com os disponíveis nas referências consultadas, analisando-se a convergência das soluções e reunindo indicações gerais para a utilização do Método das Faixas Finitas no cálculo de estruturas retas prismáticas, em especial tabuleiros de pontes, de acordo com as variações geométricas e físicas.

APRESENTAÇÃO

O Capítulo 1 apresenta um panorama geral dos processos de cálculo de tabuleiros de pontes e, dentre eles, o espaço ocupado pelo Método das Faixas Finitas, incluindo uma visão histórica de seu desenvolvimento e uma breve comparação do mesmo com o Método dos Elementos Finitos.

No Capítulo 2 expõe-se a filosofia do método e a sua conceituação geral via formulação energética, dentro de um tratamento elástico-linear, mostrando suas possibilidades e os cuidados para a garantia de convergência das soluções.

Os Capítulos 3 e 4 estudam as placas e as chapas retangulares, respectivamente, apresentando o tipo de faixa utilizada neste trabalho e desenvolvendo as características relativas à mesma, seguindo o modelo proposto no Capítulo 2.

No Capítulo 5 são combinados os efeitos de placa e chapa, constituindo-se uma faixa de comportamento misto (casca), visando a análise estática de folhas poliédricas prismáticas, simples e múltiplas. São apresentados os procedimentos necessários para a conexão de várias faixas contíguas na montagem da estrutura total a se analisar.

O Capítulo 6 desenvolve um estudo específico para as pontes retas de tabuleiro em laje e em seção celular, sendo estas últimas encaradas como folhas poliédricas prismáticas múltiplas. É desenvolvido um procedimento para a-

tender a presença de apoios intermediários discretos ou contínuos e de diafragmas transversais, considerados rígidos no presente trabalho.

Os programas de computador, desenvolvidos no Capítulo 7, MEFAF e MEFAC, automatizam o cálculo estático de estruturas prismáticas, biapoiadas nos extremos dos vãos e contínuas, respectivamente. São apresentadas explicações detalhadas das unidades de programação componentes de MEFAF e MEFAC, da preparação de dados de entrada e interpretação de resultados. Fiquem aqui, antecipadamente, registrados agradecimentos pelas sugestões e modificações realizadas nos programas, que melhorem a sua eficiência.

No Capítulo 8 são utilizados os programas MEFAF e MEFAC no cálculo de uma folha poliédrica prismática simples biapoiada nos extremos, uma ponte em laje com três pilares intermediários, uma ponte de tabuleiro celular biapoiada nos extremos do vão e uma ponte contínua de tabuleiro celular, todos exemplos clássicos da bibliografia examinada. Em todos os casos são feitas comparações de resultados com os disponíveis nos trabalhos consultados. Nos quatro exemplos são estudadas alternativas de discretizações e de número de harmônicos utilizados, procurando indicações gerais para a utilização do método de acordo com o tipo da estrutura, seção transversal, carregamentos presentes, etc.

O Capítulo 9 reúne apontamentos extraídos da experiência desenvolvida neste e em outros trabalhos, analisando brevemente a questão das cargas concentradas, as descontinuidades longitudinais nas formulações em série de Fourier e o problema da simulação de diafragmas. Encerrando o trabalho são anotadas conclusões, onde se apresenta um roteiro para a utilização do Método das Faixas Finitas na análise elástica linear de estruturas prismáticas não esconsas, com ênfase nas pontes retas de tabuleiro celular.

NOTAÇÃO

a, b, c	comprimento, largura e espessura de faixa
x, y, z	coordenadas cartesianas
d	função deslocamento
$f(x)$	função polinomial
$Y(y)$	série trigonométrica (Fourier)
m	harmônico genérico (m-ésimo da série)
r	número de harmônicos em que se trunca a série
s	número de linhas nodais de cada faixa
C	funções polinomiais de forma
N	funções de forma
$\{\delta\}$	vetor dos parâmetros nodais de deslocamento
u, v, w	deslocamentos nas direções x, y, z
θ	rotação em torno do eixo y
i, j	índices referentes às linhas nodais periféricas de uma faixa
Π	energia potencial total
U_d	energia de deformação
U_p	potencial das cargas
$\{q\}$	vetor das cargas superficiais atuantes em uma faixa

$\{\epsilon\}$	vetor das deformações
$[B]$	matriz de deformação
$[B^*]$	matriz de deformação modificada
$\{\sigma\}$	vetor das tensões
$[E]$	matriz elasticidade
$[R]$	matriz de rigidez
$\{F\}$	vetor das cargas nodais equivalentes
U_k, V_k, W_k, M_k	componentes do vetor $\{F\}$ correspondentes à linha nodal k .
E, E_x, E_y	módulos de elasticidade longitudinais
G	módulo de elasticidade transversal
ν, ν_x, ν_y	coeficientes de Poisson
$[D]$	matriz de rigidez de placa
D_x, D_y, D_1, D_{xy}	parâmetro de rigidez de placa
$\{\chi\}$	vetor das curvaturas
$\{M\}$	vetor dos momentos
M_x, M_y	momentos fletores por unidade de comprimento
M_{xy}	momento torçor por unidade de comprimento
$\{V\}$	vetor das cortantes
V_x, V_y	cortantes por unidade de comprimento
q^x, q^y, q^z	cargas superficialmente distribuídas
Q^x, Q^y, Q^z	cargas linearmente distribuídas
U_c, V_c, W_c	cargas concentradas nas direções x, y e z
M^θ	momento distribuído em torno de y
c, p	índices identificadores de chapa e placa, respectivamente
$[SM]$	submatriz de rigidez

e	Índice identificador de linhas nodais periféricas da faixa
i	Índice identificador de linha nodal interna (auxiliar) de faixa
$[R^*]$	matriz de rigidez condensada
$\{F_e^*\}$	vetor de cargas nodais equivalentes condensado
x', y', z'	coordenadas cartesianas locais
$[T]$	matriz de transformação de coordenadas
$[t]$	submatriz de T
Δ_{io}	deslocamento em i provocado pelo carregamento externo
$\{\Delta_o\}$	vetor dos deslocamentos Δ_{io}
Δ_{ij}	coeficiente de flexibilidade
Δ'_i	deslocamento em i, devido à deformação elástica de apoio e acomodação de sua fundação
$[FL]$	matriz de flexibilidade
$\{RA\}$	vetor das interações (reações em apoio de diafragma intermediário)
$\{\Delta\}$	vetor dos deslocamentos das partes de conexão correspondentes a $\{RA\}$
$[FL^*]$	matriz de flexibilidade referida ao conjunto de interações linearmente independentes
$\{RA^*\}$	vetor das interações linearmente independentes
$\{\Delta^*\}$	vetor dos deslocamentos relativos dos pontos de conexão correspondentes a $\{RA^*\}$
$\{\Delta_o^*\}$	vetor dos deslocamentos relativos dos pontos de conexão correspondentes ao carregamento externo

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 - GENERALIDADES	1.1
1.2 - RESUMO DOS PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO	1.2
1.3 - BREVES NOTÍCIAS HISTÓRICAS SOBRE O MÉTODO DAS FAIXAS FINITAS	1.5
1.4 - O MÉTODO DAS FAIXAS FINITAS E OS BRASILEIROS .	1.9
1.5 - QUADRO COMPARATIVO	1.9
1.6 - COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DAS FAIXAS FINITAS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	1.11
1.6.1 - Desvantagens do M.F.F. em relação ao M.E.F.	1.11
1.6.2 - Vantagens do M.F.F. sobre o M.E.F. ...	1.11

CAPÍTULO 2 - CONCEITUAÇÃO GERAL DO MÉTODO DAS FAIXAS FINITAS

2.1 - FILOSOFIA DO MÉTODO	2.1
2.2 - CAMPO DE DESLOCAMENTOS E CONVERGÊNCIA	2.5
2.2.1 - Convergência	2.5
2.2.2 - Campo de deslocamentos	2.5
2.3 - FAIXAS UTILIZADAS	2.7
2.4 - FUNÇÕES DESLOCAMENTOS TÍPICAS	2.11
2.5 - O PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL	2.12
2.6 - FORMULAÇÃO ENERGÉTICA DAS CARACTERÍSTICAS DAS FAIXAS	2.13
2.6.1 - Funções deslocamento	2.13

2.6.2 - Deformações	2.13
2.6.3 - Tensões	2.14
2.6.4 - Energia de deformação	2.14
2.6.5 - Potencial das cargas	2.15
2.6.6 - Energia potencial total	2.15

CAPÍTULO 3 - FLEXÃO DE PLACAS RETANGULARES

3.1 - INTRODUÇÃO	3.1
3.2 - FAIXAS USUAIS	3.1
3.3 - ESCOLHA DA FAIXA	3.4
3.3.1 - Continuidade	3.4
3.3.2 - Contorno	3.5
3.4 - FAIXA AO3 RETANGULAR, SIMPLEMENTES APOIADA ..	3.6
3.4.1 - Função deslocamento	3.6
3.4.2 - Deformações	3.8
3.4.3 - Tensões	3.10
3.4.4 - Matriz de rigidez	3.11
3.4.5 - Curvaturas e momentos	3.14
3.4.6 - Forças cortantes	3.15
3.4.7 - Vetor das cargas nodais	3.16

CAPÍTULO 4 - ESTUDO DE CHAPAS RETANGULARES

4.1 - INTRODUÇÃO	4.1
4.2 - FAIXAS USUAIS	4.2
4.3 - ESCOLHA DAS FAIXAS	4.3
4.4 - FAIXA AO3 RETANGULAR, SIMPLEMENTE APOIADA ...	4.4
4.4.1 - Função deslocamento	4.4
4.4.2 - Deformações	4.5
4.4.3 - Tensões	4.6
4.4.4 - Matriz de rigidez	4.6
4.4.5 - Vetor das cargas nodais	4.9

CAPÍTULO 5 - EFEITOS COMBINADOS: PLACA E CHAPA - FOLHA PRISMÁTICA

5.1 - INTRODUÇÃO	5.1
5.2 - COMBINAÇÃO DE EFEITOS	5.2
5.3 - FAIXA ADOTADA	5.3
5.4 - CONDENSAÇÃO ESTÁTICA	5.6
5.4.1 - Generalidades	5.6
5.4.2 - Fundamentos teóricos	5.7
5.4.3 - Deduções particularizadas	5.9
5.5 - TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS - SISTEMA GLOBAL ..	5.13
5.6 - MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL	5.15
5.7 - MONTAGEM DO VETOR DAS CARGAS NODAIS	5.19
5.8 - CÁLCULO DOS ESFORÇOS INTERNOS, DAS DEFORMAÇÕES E TENSÕES	5.20

CAPÍTULO 6 - PONTES RETAS

6.1 - PONTES RETAS EM LAJES	6.1
6.2 - APOIOS INTERMEDIÁRIOS DISCRETOS	6.2
6.3 - PONTES RETAS DE SEÇÃO CELULAR E DE TABULEIRO DO TIPO LAJE SOBRE VIGA	6.5
6.3.1 - Introdução	6.5
6.3.2 - Particularidades das pontes	6.6
6.3.3 - Pontes com diafragmas internos	6.7
6.3.4 - Diafragmas internos fixos	6.9
6.3.5 - Diafragmas internos móveis	6.9
6.4 - A NUMERAÇÃO DE LINHAS NODAIS	6.13

CAPÍTULO 7 - AUTOMATIZAÇÃO DO MÉTODO

7.1 - GENERALIDADES	7.1
7.2 - PROGRAMA MEFAF	7.2
7.2.1 - Campo de aplicação	7.2
7.2.2 - Organização do programa MEFAF	7.3
7.2.3 - Sistemas de coordenadas	7.8

7.2.4 - Entrada de dados	7.10
7.2.5 - Saída de resultados	7.16
7.3 - PROGRAMA MEFAC	7.17
7.3.1 - Campo de aplicação	7.17
7.3.2 - Organização do programa MEFAC	7.17
7.3.3 - Sistemas de coordenadas	7.22
7.3.4 - Entrada de dados	7.22
7.3.5 - Saída de resultados	7.24

CAPÍTULO 8 - APLICAÇÕES

8.1 - 1º EXEMPLO - FOLHA POLIÉDRICA PRISMÁTICA	8.1
8.1.1 - Apresentação	8.1
8.1.2 - 1ª discretização - cargas linearmente distribuídas	8.2
8.1.3 - 1ª discretização - cargas superficial- mente distribuídas	8.3
8.1.4 - Estabilização de resultados	8.6
8.2 - 2º EXEMPLO - PONTE EM LAJE COM TRÊS PILARES INTERMEDIÁRIOS	8.8
8.2.1 - Apresentação	8.8
8.2.2 - 1ª discretização - 8 faixas iguais	8.9
8.2.3 - 2ª discretização - 16 faixas iguais ...	8.14
8.3 - 3º EXEMPLO - PONTE BIAPOIADA DE TABULEIRO CE- LULAR	8.19
8.3.1 - Apresentação	8.19
8.3.2 - 1º carregamento - 1 faixa por lâmina ..	8.21
8.3.3 - 2º carregamento - 12 cargas concentradas simétricas	8.22
8.3.4 - 3º carregamento - 12 cargas concentradas assimétricas	8.31
8.4 - 4º EXEMPLO - PONTE CONTÍNUA DE TABULEIRO CELULAR	8.35
8.4.1 - Apresentação	8.35
8.4.2 - 1ª discretização - 1ª e 2ª simulações do diafragma interno	8.37
8.4.3 - 1ª discretização - 3ª simulação do dia- fragma interno	8.53

CAPÍTULO 1

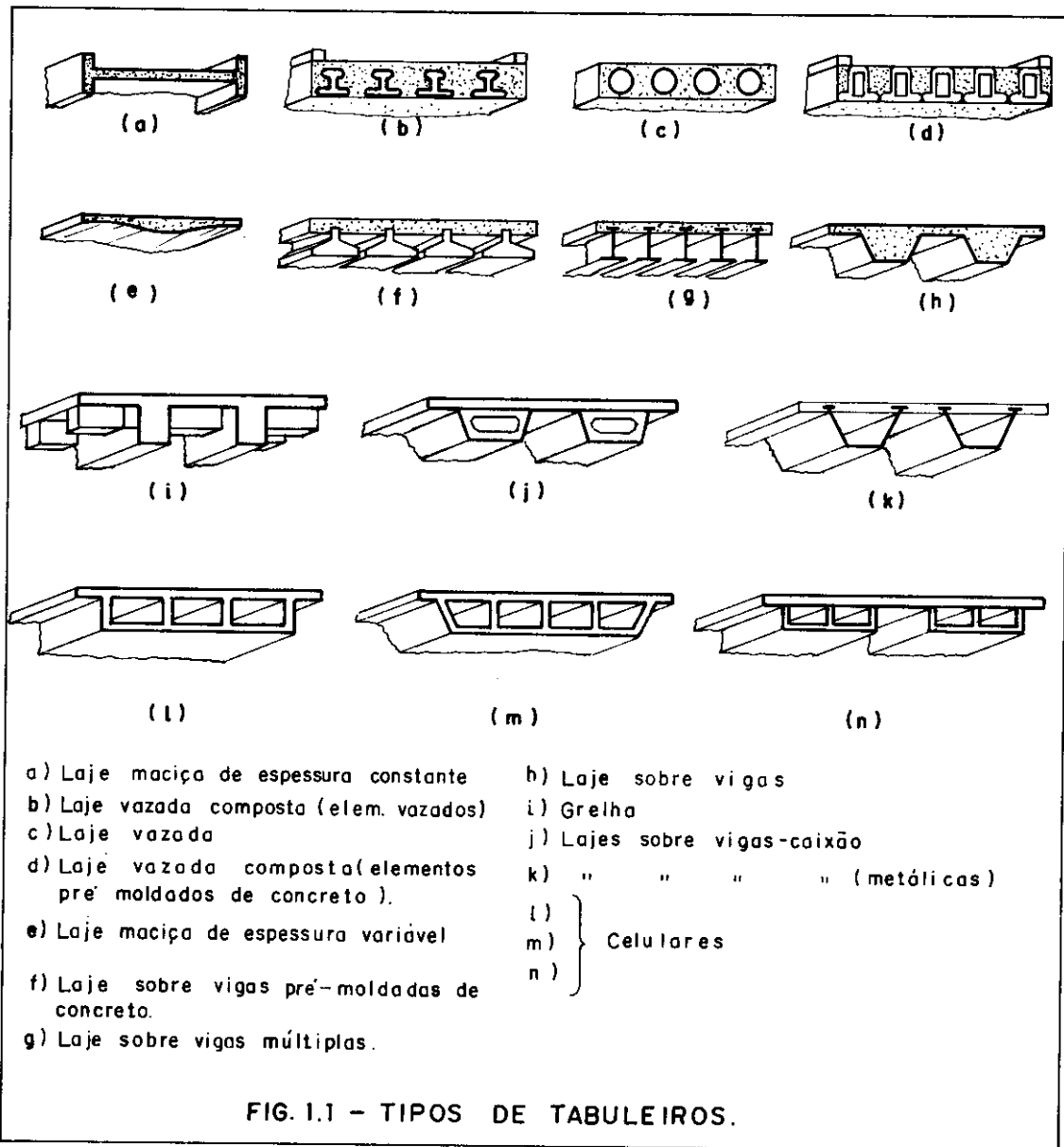
INTRODUÇÃO

1.1 - GENERALIDADES [1] [2]

A partir da Revolução Industrial a engenharia de construção de pontes tem se desenvolvido de maneira acelerada. Tabuleiros de formas variadas, cada vez mais complexas e ousadas têm sido utilizadas, permitindo a manipulação mais abrangente da grande quantidade de dados envolvidos no projeto, tais como: obstáculos a serem transpostos, largura de faixas de tráfego, condições das fundações, características ambientais, estéticas, etc.

Muitos pesquisadores têm empregado seu tempo no desenvolvimento de processos construtivos mais arrojados e também no desenvolvimento de métodos de análise estrutural das pontes. Com a implementação do uso dos computadores, muitos métodos numéricos se viabilizaram e permitiram ao engenheiro de estruturas a utilização de modelos matemáticos mais sofisticados e representativos da realidade traduzida no comportamento das estruturas, em geral, e das pontes, em particular.

Dentre os diversos tipos de tabuleiros, a figura 1.1 exhibe alguns, para que seja possível a apresentação de um panorama geral dos métodos de cálculo e os seus respectivos campos de ação.



1.2 - RESUMO DOS PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO [1] [3] [4] [5] [6]

Fazendo uso de uma visão bastante concisa, pode-se reunir os tabuleiros das pontes em dois grandes grupos: a) tabuleiros em laje ou pseudo-laje e b) tabuleiros celulares, sendo que em alguns casos os limites entre os dois grupos não podem ser bem determinados, como por exemplo o da figura 1.1.j, em que se pode classificar o tabuleiro no grupo a) ou b), de acordo com as particularidades geométricas

cas da ponte. Não há aqui interesse em apresentar tal demarcação mas, apenas, agrupar os tabuleiros de tal modo a sumarizar os procedimentos de cálculo mais importantes para cada um deles.

a) Tabuleiro em laje e pseudo-laje

Um dos métodos mais populares para a análise de pontes de tabuleiros retos, simplesmente apoiados, é o de solução de uma placa ortótropa em série harmônica, desenvolvido por Guyon (1946) e Massonet (1950), com a utilização do 1º harmônico da série para a geração do campo de deslocamentos perpendiculares ao plano da placa. Vários pesquisadores continuaram a estudar o método concebendo a técnica das curvas de variação do coeficiente de distribuição transversal - "design curves" (Morice e Little (1950) e Rowe (1962)). Cusens e Parma (1969) propuseram uma extensão da teoria, para tabuleiros sem rigidez à torção e, em 1975 apresentaram o estudo baseado nos nove primeiros harmônicos da série.

Troitsky e Azad (1973) desenvolveram, a partir do Processo da Rigidez, um procedimento para a análise de tabuleiros metálicos com transversinas extremas rígidas e transversinas internas flexíveis, através da resolução de uma equação diferencial de 8ª ordem deduzida para a solução de uma placa equivalente ao tabuleiro real.

Indubitavelmente o Método dos Elementos Finitos é a ferramenta mais versátil de todas. Utilizado de forma pioneira por Turner, Clough e outros, na década de 50, desenvolveu-se rapidamente, recebendo importantes contribuições de Zienkiewicz e Cheung, que introduziram o método na Inglaterra em 1964, e muitos outros pesquisadores. Apesar de constituir-se na técnica mais poderosa, não se tem mostrado de utilização econômica, tornando-se inviável na análise de pontes de tabuleiros de forma regular, especialmente aqueles que apresentam, nos seus extremos, apoios transversais simples. Apresenta como subproduto importan-

te o Método das Faixas Finitas, proposto por Cheung em 1968 e que será analisado em item posterior.

A técnica aproximada das grelhas, utilizada pela primeira vez por Lightfoot e Sawko (1959) em computadores eletrônicos, serviu como base para o estabelecimento, por Pucher (1964) das superfícies de influência para placas elásticas e em 1973 ganhou contribuição de West que estudou a analogia das grelhas para a análise de tabuleiros de pontes em laje e pseudo-laje.

A resolução da equação geral das placas ortótropas através da técnica das diferenças finitas foi utilizada pioneiramente por Nielsen (1918), posteriormente por Westergaard (1926) e recentemente por muitos outros pesquisadores, com a vantagem de possibilitar o tratamento de condições de contorno mais complexas do que as que podem ser tratadas com a solução por séries de Fourier.

Coull e Rao (1966), e posteriormente Tottenham (1971), aliaram o método da progressão matricial à técnica das soluções em linha ("line solutions"), que reduz uma equação diferencial parcial a um sistema de equações diferenciais ordinárias simultâneas, resolvidas através da aplicação de diferenças finitas.

b) Tabuleiros celulares

Em 1957 Goldberg e Leve apresentaram o método elástico rigoroso para a análise de folhas poliédricas prismáticas múltiplas bi-apoiadas nos extremos. A utilização em pontes retas de tabuleiro celular foi feita por Scordelis (1966) e Chu e Dudnik (1967) dentre outros, a partir de formulação matricial e utilização de computadores. A incorporação de diafragmas internos foi demonstrada por Scordelis (1967, 1971) que ampliou consideravelmente o campo de aplicação das folhas poliédricas prismáticas no cálculo de pontes celulares, desde que a seção transversal fosse constante.

Vários programas de computador foram desenvolvidos para o cálculo de tabuleiros com a aplicação do Método dos Elementos Finitos, que pode ser aplicado às estruturas de qualquer forma ou complexidade. Vários "pacotes" de análise estrutural podem ser utilizados, bem como programas específicos para pontes, como os desenvolvidos, a partir de 1971, pelo grupo liderado por Scordelis. Apesar de sua versatilidade o esforço computacional envolvido pode ser dispendioso de tal forma a inviabilizar a sua utilização para estruturas que possam ser analisadas, com performance apurada, por outros processos mais simplificados.

Algumas aproximações, como as de Sawko e Cope (1969) e Crisfield (1971), foram feitas com o Método dos Elementos Finitos, na tentativa de redução do tempo de computação, mas, em geral, com perda da versatilidade original e restrição do campo de aplicação.

A análise de tabuleiros celulares tem sido feita também através da sua simulação por pórticos espaciais, não sendo, neste caso, capaz de prever efeitos locais e constituindo programas dispendiosos de análise geral do comportamento da estrutura do tabuleiro.

O método das Faixas Finitas, tem-se mostrado eficiente e acurado na análise de tabuleiros apoiados nos extremos, que apresentem ou não apoios intermediários e diafragmas internos. É para ele que se desloca a atenção, na tentativa de fixação de breve histórico.

1.3 - BREVES NOTÍCIAS HISTÓRICAS SOBRE O MÉTODO DAS

FAIXAS FINITAS [4] [5] [6]

A idéia de discretizar estruturas laminares (basicamente placas) em faixas finitas adjacentes é mais antiga do que tem sido apontado pelos estudiosos do Método das Faixas Finitas (M.F.F.). Assim é que o escandinavo Kárrholm [7] na década de 1950 já utilizava tal conceito,

com a preocupação fundamental de resolver, através das diferenças finitas, a equação geral das placas para cada uma das faixas, individualmente e compatibilizar flechas nas fronteiras comuns de faixas contíguas. Embora já tivesse utilizado séries trigonométricas, não houve a tendência de automatização do método, provavelmente devido ao pouco desenvolvimento dos computadores àquela época.

Em 1963 outro escandinavo, Hellan [8] apresentou suas idéias sobre a aplicação de um procedimento numérico para a análise de placas retangulares isotrópicas, baseado nas condições de equilíbrio e compatibilidade de deslocamentos nas fronteiras comuns de faixas vizinhas. Paralelamente, desenvolvia-se o Método dos Elementos Finitos (após a introdução da terminologia por Clough), com o grande impulso fornecido pela utilização crescente dos computadores e implementação das técnicas de programação.

Cheung, envolvido com o estudo do M.E.F. junto ao professor Zienkiewicz, propôs em 1968 [9] uma variante do M.E.F., para a análise de placas ortótropas retangulares simplesmente apoiadas em seus extremos, à qual chamou Método das Faixas Finitas. Independentemente Powell e Ogden sugeriram em 1969 [10] a mesma solução e desenvolveram um programa de computador para a análise de tabuleiros de pontes metálicas em lajes ortótropas retangulares simplesmente apoiadas em seus extremos.

Após os primeiros passos, inúmeros estudos foram feitos com o intuito de generalizar a aplicação do método. Tal desenvolvimento tem-se dado, no exterior, em três grandes centros científicos: no Canadá por Cheung e colaboradores; nos Estados Unidos por Scordelis, William, Meyer e outros e, na Inglaterra por Loo e Cusens liderando um grupo de pesquisadores.

Tais estudos, que vêm abrindo horizontes novos e variados, serão sumarizados a seguir, nos aspectos mais importantes extraídos da bibliografia disponível.

- 1968 - Cheung propõe o estudo da flexão de placas retangulares com outras condições de contorno: um extremo apoiado e o outro engastado, dois extremos engastados.
- 1969 - Cheung estende o M.F.F. para o cálculo de pontes em lajes curvas com ortotropia cilíndrica.
- Cheung analisa folhas poliédricas prismáticas, com a incorporação de faixas que tenham comportamento de chapa, além do de placa previamente deduzido e acena para a utilização nas pontes retas de seção celular constante e nas cascas cilíndricas.
- 1970 - Cheung, Cheung e Ghali estudam pontes retas de tabuleiro em laje, incorporando vigas longitudinais e com a possibilidade de existência de pilares deformáveis.
- Meyer e Scordelis apresentam soluções de pontes curvas de seção celular.
- 1971 - Cheung adapta a faixa típica de placa para compatibilização de curvaturas (faixa de alta ordem).
- Loo e Cusens propõem uma faixa de alta ordem para placas, sem compatibilização de curvaturas, através da técnica da linha nodal auxiliar (L.N.A.).
 - Cheung e Cheung incorporam condições de contorno gerais e promovem a análise dinâmica de placas retangulares.
 - Loo e Cusens utilizam a técnica da L.N.A. no cálculo de folhas poliédricas prismáticas e pontes retas de seção celular.
 - Cheung e Cheung analisam pontes curvas de seção celular.
 - Too concebe o Método dos Prismas Finitos (uma variante do M.F.F.).
- 1972 - Yoshida e Oka empregam vários tipos de faixas de alta ordem no estudo do estado plano de tensões em chapas retangulares.

- Cheung e Cheung utilizam faixas de alta ordem (com patibilidade de curvatura) para análise dinâmica de placas.
- Brown e Ghali estudam placas esconsas paralelogramáticas.
- Ghali e Tadros analisam placas contínuas, tomando como redundâncias os momentos sobre apoios intermediários.
- Chan e Cheung concebem o Método das Camadas Finitas (variante do M.F.F.) e o empregam na análise dinâmica de painéis "sandwich" de camadas múltiplas.
- Zienkiewicz e Too, utilizando o Método dos Prismas Finitos, analisam vigas-caixão espessas simplesmente apoiadas.
- 1973 - Smith analisa a resposta dinâmica de pontes através do M.F.F.
- Przemieniecki analisa a flambagem inicial de estruturas do tipo caixão.
- 1974 - Wittrick e Plank utilizam um M.F.F. complexo para o estudo da flambagem de estruturas em chapas delgadas sob carregamento combinado.
- Dei Poli e Rampi promovem a análise visco-elástica de tensões em estruturas do tipo caixão.
- 1975 - Cheung, Cheung e Hutton analisam frequências de vibração de paredes acopladas.
- Brown e Ghali estudam pontes celulares esconsas.
- 1976 - Cheung lança o primeiro livro específico sobre o M.F.F.
- Thorpe desenvolve a técnica da L.N.A. para utilização nas pontes curvas de seção celular.
- 1978 - Loo e Cusens lançam livro sobre a aplicação do M.F.F. à engenharia de pontes.
- Delcourt e Cheung generalizam o M.F.F. para o estudo de folhas poliédricas prismáticas contínuas, de

qualquer número de vãos, com várias condições de contorno.

Indubitavelmente muito mais se fez em relação ao M.F.F.; o presente resumo tem como objetivo maior tão somente um breve delineamento histórico que permita ao leitor absorver a espinha dorsal do andamento das pesquisas ao longo do tempo.

1.4 - O MÉTODO DAS FAIXAS FINITAS E OS BRASILEIROS

Dois centros de pesquisa têm se dedicado ao estudo do M.F.F. e variantes, no Brasil: a PUC-RJ e a COPPE-UFRJ. De acordo com a bibliografia que foi possível consultar constatou-se que as utilizações pioneiras do referido método se deram na década de 1970, destacando-se trabalhos sobre o M.F.F. aplicado a vigas-caixão retas e curvas, biapoiadas; placas retangulares com várias condições de contorno; estruturas esconsas; estruturas tridimensionais com propriedades mecânicas representadas por séries harmônicas; etc.

Em Lisboa, no LNEC (Laboratório Nacional de Engenharia Civil) o M.F.F. foi utilizado pelo professor Azevedo (PUC-RJ) para a confecção de programas de cálculo automático de cascas prismáticas de eixo reto ou circular.

Outros trabalhos foram e têm sido desenvolvidos e espera-se que este, em especial, inicie investigações sobre o M.F.F. no Departamento de Estruturas da EESC-USP.

1.5 - QUADRO COMPARATIVO

Aproveitando as idéias apresentadas por Cusens e Pama [3] é possível a montagem de um quadro que sumarie a aplicabilidade dos vários procedimentos de cálculo de tabuleiros de ponte, tendo em vista o seu tipo, a geometria de sua planta baixa e as condições de contorno. É o que se apresenta a seguir.

A. TIPO DE TABULEIRO	TEORIA DAS PLACAS ORTÓTOPAS	TEORIA DAS PLACAS ORTÓTOPAS ("Design Curves")	FOLHAS POLIÉDRICAS PRISMÁTICAS	CRELHA	PÓRTICO ESPACIAL	DIFERENÇAS FINITAS	TÉCNICA DA SOLUÇÃO EM LINHA	ELEMENTOS FINITOS	FAIXAS FINITAS
LAJE	X	X		X		X	X	X	X
PSEUDO-LAJE	X	X		X		X	X	X	X
LAJE SOBRE VIGA	*	*	X	X		X	*	X	X
CELULAR	*	*	X	*	X			X	X
COMPOSTO	X	X		X		X	X	X	X
B. GEOMETRIA DA PLANTA BAIXA									
RETA	X	X	X	X		X	X	X	X
ESCONSA (> 45°)				X		X	X	X	
CURVA	X			X		X	X	X	X
ARBITRÁRIA				X		X	X	X	
C. CONDIÇÕES DE CONTORNO									
SIMPLESMENTE APOIADA	X	X	X	X	X	X	X	X	X
SIMPLESMENTE APOIADA COM SUPORTES INTERMEDIÁRIOS	X		X	X	X	X	X	X	X
ARBITRÁRIAS				X	X	X	X	X	*

(*) Aplicação restrita

1.6 - COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DAS FAIXAS FINITAS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Dentro de seu campo de aplicação o M.F.F. tem se apresentado como alternativa importante em comparação com o M.E.F., pois permite a redução de esforço computacional e de ocupação de memória, com a manutenção de versatibilidade e de precisão dos resultados. Baseado nas referências [6] e [11] e, de um modo geral, nas observações realizadas ao longo do desenvolvimento do trabalho, pode-se promover a confrontação dos métodos a partir do relacionamento de vantagens e desvantagens de um sobre outro.

1.6.1 - Desvantagens do M.F.F. em relação ao M.E.F.

Enquanto o M.E.F. se aplica a estruturas de qualquer geometria, condições de borda e variação de material, o M.F.F. é mais utilizado, no caso de análise estática, para estruturas com apoios simples nos extremos, que apresentam ou não apoios elásticos intermediários.

1.6.2 - Vantagens do M.F.F. sobre o M.E.F.

O número de equações envolvidas na análise é bem menor, especialmente para estruturas bi-apoiadas, podendo a mesma ser processada em computadores de pequeno porte.

A largura da banda da matriz do sistema de equações é significativamente menor, o que, em conjunto com a citação do parágrafo anterior, faz com que o tempo de processamento seja bastante reduzido. A proporção para o tempo consumido, quando de utilização do M.E.F., para uma solução de acuidade equivalente, varia no intervalo de 2% a 40% [12].

O M.F.F. requer uma ocupação de memória consideravelmente reduzida em relação ao M.E.F., tendo inclusive

a vantagem de ser de programação bem mais simplificada, permitindo a utilização de técnicas matriciais de uso corrente, evitando a recorrência a técnicas avançadas e sofisticadas que visam a diminuição de área de memória ocupada.

A quantidade de dados de entrada é muito pequena, diminuindo a possibilidade de erros e não requerendo a geração automática de redes e esquemas de carregamento.

A manipulação dos dados de saída no M.F.F. é bem mais simples e menos trabalhosa do que no M.E.F., onde a sua quantidade é, via de regra, muito grande.

No caso de se trabalhar com elementos de comportamento misto (placa + chapa), como é comum nas pontes de tabuleiro celular e folhas poliédricas prismáticas, nenhum problema ocorre durante a transformação de coordenadas no M.F.F., desde que se escolham adequadamente as funções geradoras dos campos de deslocamentos. Já no M.E.F., ao se utilizar elementos de casca, ocorre, com frequência, a perda de compatibilidade de alguns deslocamentos, devido à escolha de polinômios de ordens diferentes na direção longitudinal e, também, em alguns casos, há necessidade de inserção de um grau de liberdade artificial para que a análise se torne possível.

CAPÍTULO 2

CONCEITUAÇÃO GERAL DO MÉTODO DAS FAIXAS FINITAS

2.1 - FILOSOFIA DO MÉTODO

O M.F.F. apresenta-se como um procedimento híbrido. Associa algumas vantagens da solução de estruturas em séries trigonométricas ao Método dos Elementos Finitos.

Sua filosofia é semelhante ao Método de Kantorovich [12], uma generalização do Método de Ritz, que reduz a solução de uma equação diferencial parcial à solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias, adotando funções contínuas que satisfazem às condições de contorno em uma dada direção. Tal adoção guarda semelhanças com os procedimentos adotados por Matier e por Levy [13] no cálculo de chapas e placas, respectivamente.

O M.F.F. pode ser encarado como um subproduto do Método dos Elementos Finitos, com a diferença básica residente na discretização do contínuo que se faz através de faixas longitudinais (para trechos laminares do mesmo) ao invés de elementos finitos bidimensionais, sendo que na direção longitudinal são previamente incluídas as condições de contorno na aproximação do campo de deslocamentos.

O resumo a seguir apresenta, em rápidas pinceladas, o procedimento adotado no M.F.F., utilizando o Processo dos Deslocamentos. Os comentários intercalados visam a explicação de cada um dos passos apontados.

(1) Divisão da estrutura em faixas longitudinais através das linhas fictícias.

As linhas divisórias são chamadas linhas nodais, sendo que nas extremidades laterais da estrutura elas se confundem com as fronteiras físicas da mesma.

As propriedades geométricas e elásticas de cada faixa são consideradas constantes mas podem diferir entre faixas adjacentes, permitindo a simulação de situações em que as propriedades variem transversalmente.

(2) Conexão das faixas através das linhas nodais comuns (fronteiras longitudinais).

A conexão é feita de maneira semelhante à que se produz na junção de barras de estruturas reticulares planas, bastando fazer analogia entre linhas nodais e nós.

(3) Fixação de parâmetros nodais de deslocamento em cada linha nodal.

Tais parâmetros são, em geral, deslocamentos (u , v , w) e suas derivadas até uma ordem previamente escolhida, permitindo incluir, na análise, deformações axiais, transversais, curvaturas de flexão e torção, etc.

(4) Escolha de funções-deslocamento, em termos dos parâmetros nodais, que representem o campo de deslocamentos em cada faixa.

Essas funções representam o campo de deslocamentos e conseqüentemente os campos de deformações e tensões em cada faixa.

(5) Geração da matriz de rigidez e dos ve
tores de cargas nodais para cada faixa.

Adota-se o procedimento clássico do Processo dos Deslocamentos, utilizando-se o princípio da mínima energia potencial através da abordagem matemática de Rayleigh-Ritz. A matriz de rigidez e os vetores de cargas são gerados, para cada faixa, em relação a um sistema local de coordenadas.

(6) Montagem da matriz de rigidez e do
vetor de cargas nodais para toda a
estrutura.

Levando-se em conta a contribuição de cada uma das faixas e promovendo-se as necessárias transformações de coordenadas, monta-se a matriz de rigidez e o vetor de cargas em relação a um sistema global de referência. Cabe observar que a matriz de rigidez (em banda) possui ordem e semi-largura da banda, em geral, bem menores do que as presentes na solução do mesmo problema através do Método dos Elementos Finitos, com precisão semelhante.

(7) Solução do sistema de equações li
neares, determinando-se os parâme
tros nodais incógnitos.

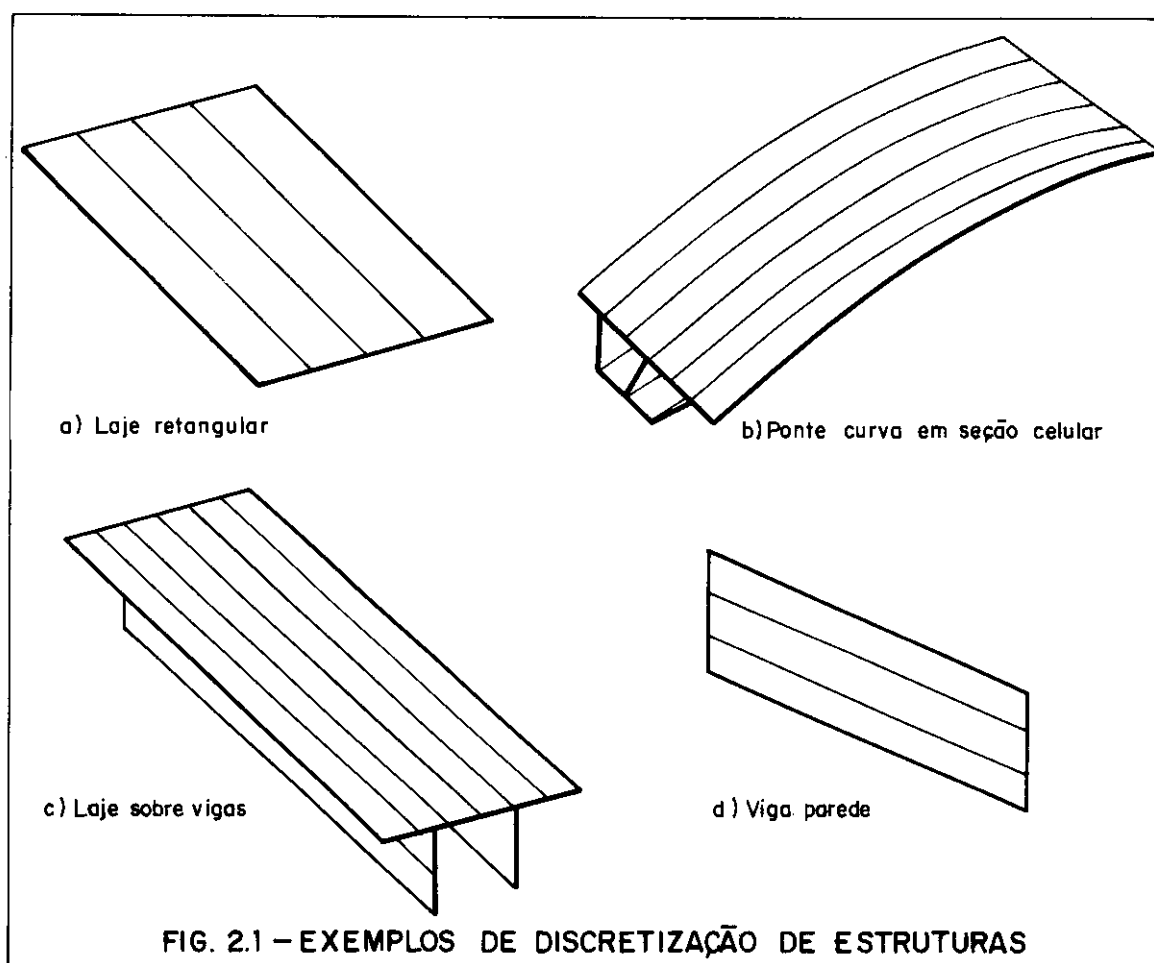
Ao se resolver o sistema de equações lineares, por uma técnica padrão convencionalmente escolhida, determinam-se os parâmetros nodais referidos ao sistema global de coordenadas.

(8) Retorno aos sistemas locais de co
ordenadas e cálculo das incógnitas
procuradas (esforços, tensões, desloc
amentos, etc.).

Retorna-se a cada um dos sistemas locais encontrando os parâmetros nodais para cada faixa, o que possibilita a determinação de tensões, deformações, deslocamentos, etc., em qualquer ponto da estrutura.

Cheung [6] apresenta analogias que facilitam o entendimento do presente método. A partir do instante em que se obtêm as matrizes de rigidez e os vetores de cargas para todas as faixas, o estudo da flexão de uma placa se torna semelhante ao de uma viga, na direção transversal, enquanto a análise de uma ponte reta em seção celular corresponde ao estudo de um pórtico plano.

A seguir são apresentadas algumas formas de discretização de estruturas, para que se note que a geometria do problema em si orienta, de modo espontâneo, o lançamento das linhas nodais.



2.2 - CAMPO DE DESLOCAMENTOS E CONVERGÊNCIA

2.2.1 - Convergência

Ao se adotar o Processo da Rigidez é necessário admitir um campo de deslocamentos virtuais que possibilite a análise da estrutura através do estabelecimento da energia potencial e sua conseqüente minimização. A escolha de tal campo de deslocamentos é de extrema importância, pois feita de maneira descuidada pode levar às seguintes situações desastrosas: respostas estranhas que não refletem os deslocamentos possíveis dos pontos que constituem a estrutura; convergência muito lenta, tornando a aplicação do M.F.F. inviável em termos de esforço computacional mobilizado e, até mesmo, a não convergência.

Àquele que ensaia os primeiros passos na investigação do método aqui estudado, essas considerações sobre a convergência podem assustar. Tal receio pode ser descartado, pois as pesquisas que se encontram em andamento, no Brasil e no exterior, fornecem elementos teóricos e práticos seguros que funcionam como tutores zelosos a vigiarem as caminhadas primeiras.

2.2.2 - Campo de deslocamentos

A Fig. 2.2 apresenta as dimensões e o sistema de coordenadas correspondentes a uma faixa retangular plana.

A forma geral da função deslocamento é dada por um produto de polinômios e séries trigonométricas. Polinômios que dependem de uma coordenada ao longo da direção transversal (x) e séries que dependem de uma coordenada ao longo da direção longitudinal (y). O problema bidimensional a ser resolvido $d = d(x,y)$ é concebido como o produto

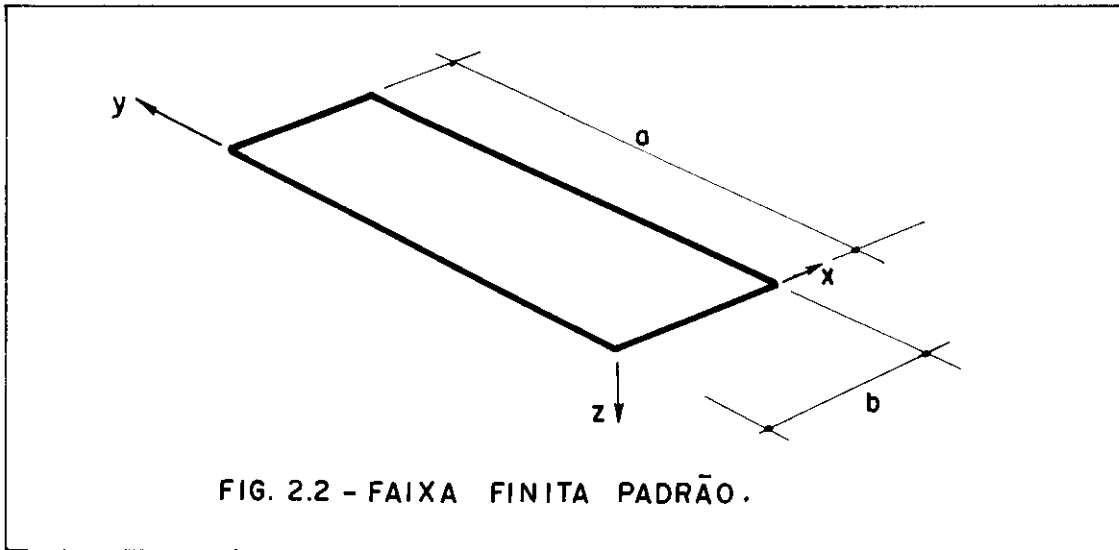


FIG. 2.2 - FAIXA FINITA PADRÃO.

de dois problemas unidimensionais $d = \sum_{m=1}^r f_m(x) \cdot Y_m$. Conceitualmente corresponde a admitir-se uma solução da equação diferencial básica (seja para placas, chapas, etc.) tendo uma forma particular $d(x,y) = f(x) \cdot Y(y)$, onde $f(x)$ e $Y(y)$ são funções apenas de x e y , respectivamente. Esta separação de variáveis traz consequências apreciáveis na resolução do problema, conforme se mostrará no desenvolvimento teórico que segue.

Com o objetivo de garantir a convergência a resultados corretos, algumas recomendações simples encontram-se nos parágrafos seguintes.

Condições de contorno longitudinais.

para $y=0$ $w=0$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$

para $y=a$ $w=0$ e $\frac{\partial w}{\partial y}=0$

$w =$ deslocamento ao longo do eixo z

FIG. 2.3 - EXEMPLO DE FLEXÃO DE FAIXA FINITA RETANGULAR.

A parte em série (Y_m) da função deslocamento, além de ser regular, deve satisfazer "a priori" às condições de contorno nas extremidades das faixas.

A parte polinomial da função deslocamento ($f_m(x)$) deve ser tal que possa representar um estado de constante deformação na direção transversal (x). Se isto não for estabelecido, não há nenhuma garantia de que a discretização da estrutura em um número cada vez maior de subdomínios levará ao verdadeiro estado de deformações e ao conseqüente estado de tensões.

Ao longo de fronteiras longitudinais comuns às faixas vizinhas a função $d(x,y)$ deve satisfazer à compatibilidade de deslocamentos (incluindo continuidade de primeiras derivadas parciais, além dos deslocamentos em si). Isto se faz necessário para que as deformações requeridas nas formulações energéticas permaneçam finitas nas interfaces das faixas.

Uma discussão detalhada do problema da convergência pode ser encontrada na ampla literatura a respeito do Método dos Elementos Finitos.

A idéia geral que se deve ter em mente é a de possibilitar o aparecimento dos deslocamentos e deformações típicos do problema analisado, bem como garantir que a soma das energias potenciais das várias faixas constitua uma aproximação da energia potencial total, aproximação essa crescente ao se aumentar o número de divisões da estrutura e o número de harmônicos da série.

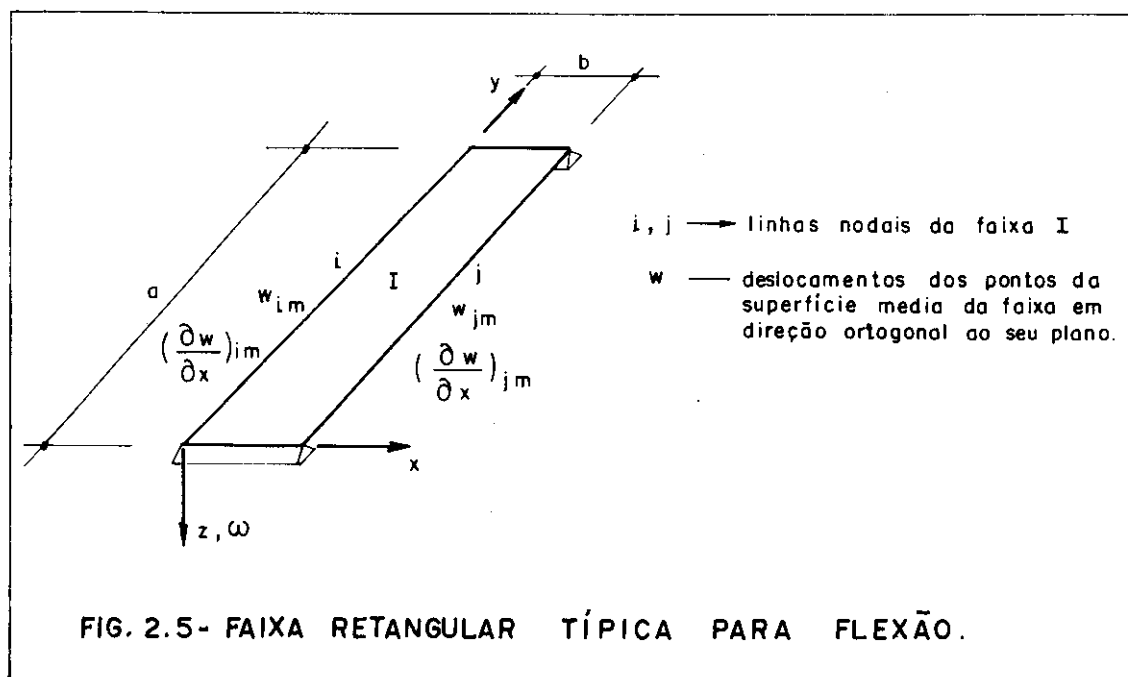
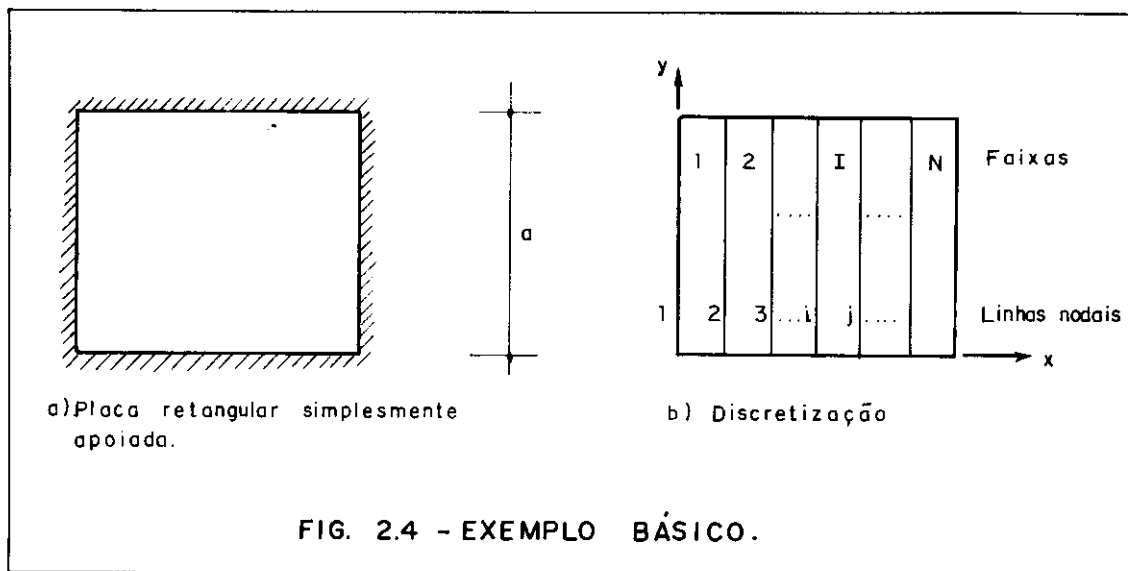
2.3 - FAIXAS UTILIZADAS

Cada problema a ser analisado contém, em si mesmo, propriedades que lhe são peculiares. Portanto, o tipo da faixa a ser utilizada, bem como a função descritora do

campo de deslocamentos, dependem da estrutura a ser estudada e do tipo de análise que se deseja fazer (estática ou dinâmica).

Admita-se que o problema a ser analisado seja o da flexão de uma placa retangular simplesmente apoiada nos quatro lados (Fig. 2.4.a)

Uma possível discretização seria a indicada na Fig. 2.4.b, o que leva naturalmente a se conceber cada faixa como simplesmente apoiada nos dois extremos (Fig. 2.5).



Uma vez que a função deslocamento $d = \sum_{m=1}^r f_m(x) \cdot Y_m$ é constituída de duas partes, uma polinomial, $f_m(x)$, e outra em série, Y_m , cabe determiná-las com o intuito de encontrar as primeiras pistas para a resolução genérica do problema.

A função de forma $f_m(x)$ é um polinômio associado com os parâmetros nodais de deslocamento que podem ser, neste caso, a flecha w e a rotação elástica $\theta = \partial w / \partial x$ em cada uma das linhas nodais (LN), perfazendo um total de quatro graus de liberdade por faixa: dois na LN_i e dois na LN_j (vide Fig. 2.5).

A parte em série $Y_m(y)$ deve satisfazer às condições de contorno nos extremos $y = 0$ e $y = a$.

Uma possível adoção para a função deslocamento é:

$$d = \sum_{m=1}^r \left[\left(1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3} \right) w_{im} + \left(x - \frac{2x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2} \right) \theta_{im} + \left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3} \right) w_{jm} + \left(\frac{x^3}{b^2} - \frac{x^2}{b} \right) \theta_{jm} \right] \cdot \text{sen} \left(\frac{m\pi y}{a} \right)$$

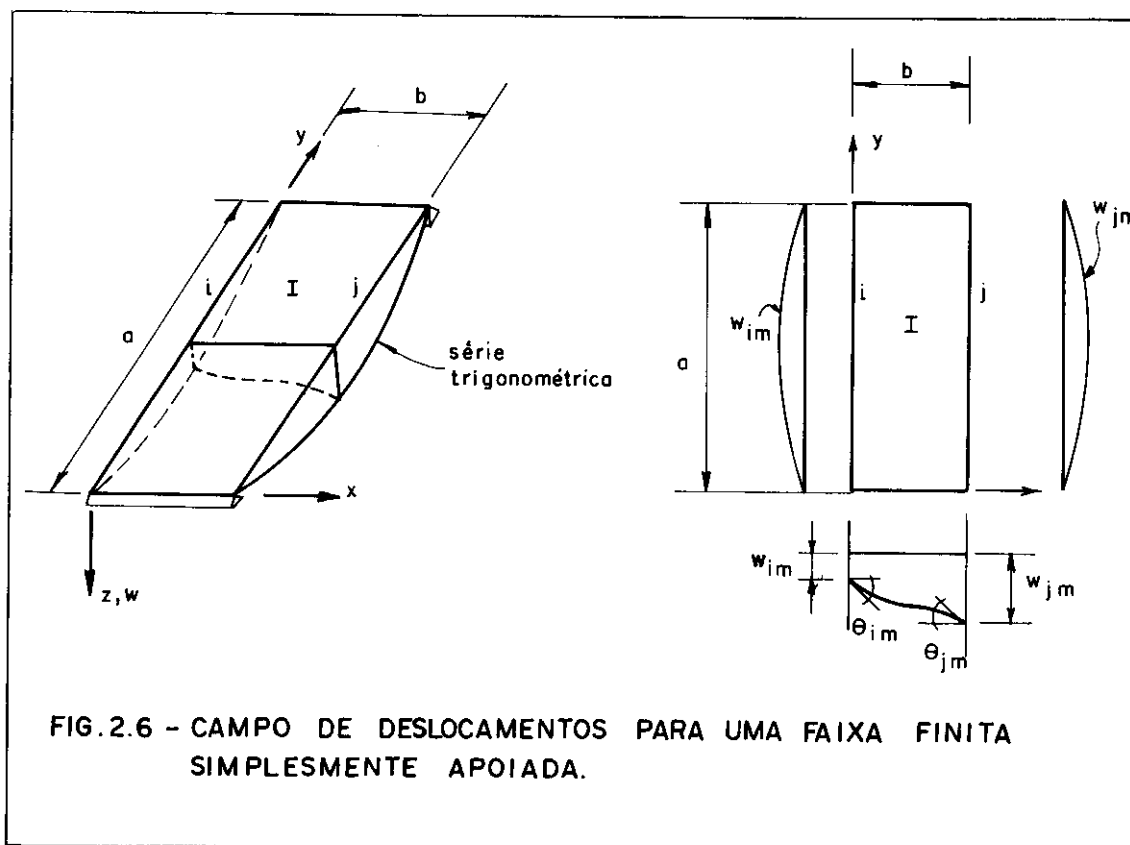
Note-se que para $x = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} f_m = w_{im} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_m = \theta_{im} \end{array} \right.$

e $x = b$ $\left\{ \begin{array}{l} f_m = w_{jm} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_m = \theta_{jm} \end{array} \right.$

e ainda que para $y = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} Y_m = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)_m = 0 \end{array} \right.$

e $y = a$ $\left\{ \begin{array}{l} Y_m = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)_m = 0 \end{array} \right.$

o que garante a compatibilidade até às rotações elásticas (na direção transversal x) e o atendimento às condições de contorno nos extremos longitudinais (direção y).



A tendência atual das pesquisas em andamento é a de admitir procedimentos bastante gerais em relação à escolha da função deslocamento, variando-se o número de linhas nodais por faixa, os parâmetros de deslocamento em cada linha nodal, as condições de contorno nos extremos longitudinais e a forma da faixa, visando a adequação geométrica e física da faixa utilizada ao problema a ser estudado.

Tem-se trabalhado não apenas com faixas retangulares, mas também com as paralelogramáticas e circulares.

A partir do problema inicialmente analisado (flexão de placas retangulares) a pesquisa evoluiu para a análise dinâmica de placas, para o estudo de chapas e estruturas outras que passaram a exigir a adoção de faixas de comportamento misto e propriedades geométricas cada vez mais complexas.

2.4 - FUNÇÕES DESLOCAMENTO TÍPICAS

A função deslocamento pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$d = \sum_{m=1}^r \left[\begin{matrix} [C_1] & [C_2] \end{matrix} \right] \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \end{Bmatrix} Y_m = \sum_{m=1}^r Y_m \sum_{k=1}^s [C_k] \{\delta_k\}_m$$

$i = 1, j = 2$ (2.1)

onde

$\{\delta_k\}_m$ é o vetor dos parâmetros de deslocamento da LN_k , correspondentes ao m-ésimo termo da série.

$[C_k]$ funções de forma associadas com $\{\delta_k\}$.

s é o número de linhas nodais da faixa (no exemplo da figura 2.6, $s = 2$)

Os vetores $[C_k]$ dependem dos parâmetros nodais adotados e da utilização de uma ou mais linhas nodais auxiliares entre as linhas nodais que delimitam a faixa (técnica LNA).

Y_m é a parte em série, normalmente uma das soluções da equação diferencial da vibração de vigas, cuja forma geral é

$$Y(y) = S_1 \text{sen}\left(\frac{\mu y}{a}\right) + S_2 \text{cos}\left(\frac{\mu y}{a}\right) + S_3 \text{senh}\left(\frac{\mu y}{a}\right) + S_4 \text{cosh}\left(\frac{\mu y}{a}\right)$$

..... (2.2)

com os coeficientes S_1, S_2, S_3 e S_4 a serem determinados a partir das condições de contorno longitudinais.

Apenas como ilustração são apresentadas as funções polinomiais correspondentes ao exemplo utilizado no item 2.4.

$$[C_1] = \left[\left(1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3}\right), \left(x - \frac{2x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2}\right) \right]$$
$$[C_2] = \left[\left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3}\right), \left(\frac{x^3}{b^2} - \frac{x^2}{b}\right) \right]$$

..... (2.3)

$$Y_m(y) = \text{sen}\left(\frac{Hy}{a}\right) \quad \text{com } S_1 = 1 \quad \text{e} \quad S_2 = S_3 = S_4 = 0$$

(Vide Apêndice I) (2.4)

2.5 - O PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL

A energia potencial total de um corpo elástico é definida como

$$\Pi = U_d + U_p \quad \text{..... (2.5)}$$

onde U_d é a energia de deformação e U_p é o potencial das cargas aplicadas.

O princípio da mínima energia potencial reza que: "De todos os campos de deslocamentos contínuos que satisfazem às condições de contorno geométricas, aqueles que também geram tensões em equilíbrio são distinguidos por tornarem mínima a energia potencial total" [13].

O problema variacional, a que se chega impondo-se $\delta\Pi = 0$, também admite soluções numéricas aproximadas através da técnica de Rayleigh-Ritz aplicada à análise elástica da maneira como se sintetiza a seguir.

A energia potencial total é calculada como uma função dos parâmetros nodais, somando-se a contribuição de cada uma das faixas constituintes da estrutura.

Aplica-se, então, o princípio supra citado, cuja formulação matemática admite a forma

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta\}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta\}_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta\}_2} \\ \vdots \end{array} \right\} = \{0\} \quad \text{..... (2.6)}$$

onde $\{\delta\}_m$ é um vetor dos parâmetros nodais em todas as linhas nodais para o m-ésimo termo da série.

(Vide Apêndice II)

2.6 - FORMULAÇÃO ENERGÉTICA DAS CARACTERÍSTICAS DAS FAIXAS

2.6.1 - Função deslocamento

A função deslocamento, de uma forma geral, pode ser escrita

$$\begin{aligned} d &= \sum_{m=1}^r \left[[C_1] \ [C_2] \ \dots \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \vdots \end{array} \right\}_m \cdot Y_m = \\ &= \sum_{m=1}^r Y_m \cdot \sum_{k=1}^s [C_k] \{\delta_k\}_m \quad \dots \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$d = \sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^s [N_k]_m \{\delta_k\}_m = \sum_{m=1}^r [N]_m \{\delta\}_m \quad \dots \quad (2.8)$$

$$= [N] \cdot \{\delta\} \quad \dots \quad (2.9)$$

2.6.2 - Deformações

Conhecidos os deslocamentos em todos os pontos da faixa, é possível determinar-se as deformações. Chamando de B a matriz de deformação, escreve-se:

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= [B] \{\delta\} \\ &= \sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^s [B_k]_m \cdot \{\delta_k\}_m \quad \dots \quad (2.10) \end{aligned}$$

2.6.3 - Tensões

O relacionamento entre tensões e deformações é dado pela matriz elasticidade [E]:

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} \quad \dots (2.11)$$

Levando-se em conta que $\{\epsilon\} = [B] \{\delta\}$ pode-se reescrever a equação (2.11) do seguinte modo:

$$\{\sigma\} = [E] [B] \{\delta\} = [E] \sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^s [B_k]_m \{\delta_k\}_m \dots (2.12)$$

2.6.4 - Energia de deformação

Para um corpo elástico a energia de deformação é dada pela integral volumétrica:

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad \dots (2.13)$$

Da equação (2.10) retira-se que $\{\epsilon\}^T = \{\delta\}^T [B]^T$ que, em conjunto com as equações (2.11) e (2.13), fornece, para U_d , a expressão:

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint_V \{\delta\}^T [B]^T [E] [B] \{\delta\} dV \quad \dots (2.14)$$

Merece realce o fato da integral volumétrica de gerar em uma integral de superfície já que se estará trabalhando com faixas bidimensionais, de espessura h constante.

2.6.5 - Potencial das cargas

O potencial correspondente às cargas superficiais externas $\{q\}$ é dado pela integral de superfície:

$$U_p = - \iint_A \{d\}^T \{q\} dA \quad \dots (2.15);$$

a partir da equação (2.9) retira-se que $\{d\}^T = \{\delta\}^T [N]^T$, que substituindo na equação (2.15) fornece:

$$U_p = - \iint_A \{\delta\}^T [N]^T \{q\} dA \quad \dots (2.16)$$

2.6.6 - Energia potencial total

Como a energia potencial total Π é a soma da energia de deformação acumulada na estrutura e do potencial das cargas nele aplicadas ($\Pi = U_d + U_p$), tem-se para ela a expressão a seguir:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \{\delta\}^T [B]^T [E] [B] \{\delta\} dV - \iint_A \{\delta\}^T [N]^T \{q\} dA \quad \dots (2.17)$$

2.6.7 - Minimização

Combinando as equações (2.17) e (2.6) encontra-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta\}} = \iiint_V [B]^T [E] [B] \{\delta\} dV - \iint_A [N]^T \{q\} dA = \{0\} \quad \dots (2.18)$$

ou ainda

$$[R] \{\delta\} - \{F\} = \{0\} \quad \dots (2.19)$$

onde
$$[R] = \iiint_V [B]^T [E] [B] dV \quad \dots (2.20)$$

e
$$\{F\} = \iint_A [N]^T \{q\} dA \quad \dots (2.21)$$

$[R]$ é a matriz de rigidez e $\{F\}$ é o vetor de cargas nodais.

A equação (2.19) representa um sistema de equações lineares cujas incógnitas são os parâmetros nodais $\{\delta\}$.

Cheung [7] detalha a matriz $[R]$ mostrando que, devido ao desenvolvimento em série (Y_m), ela tem uma apresentação um pouco diferente das matrizes de rigidez conseguidas com a aplicação dos elementos finitos.

$$[R] = \begin{bmatrix} [R]_{11} & [R]_{12} & \dots & [R]_{1r} \\ [R]_{21} & [R]_{22} & \dots & [R]_{2r} \\ \vdots & & & \\ [R]_{r1} & [R]_{r2} & \dots & [R]_{rr} \end{bmatrix} \quad \dots (2.22)$$

com

$$[R]_{mn} = \iiint_V [B]_m^T [E] [B]_n dV \quad \dots (2.23)$$

e cada uma das submatrizes $[R]_{mn}$, que depende dos harmônicos de ordem m e n da série, se escreve:

$$[R]_{mn} = \begin{bmatrix} [R_{11}] & [R_{12}] \dots [R_{1s}] \\ [R_{21}] & [R_{22}] \dots [R_{2s}] \\ \vdots & \\ [R_{s1}] & [R_{s2}] \dots [R_{ss}] \end{bmatrix}_{mn} \quad \dots (2.24)$$

$$\text{onde } [R_{ij}]_{mn} = \iiint_V [B_i]_m^T [E] [B_j]_n dV \quad \dots (2.25)$$

$i, j \rightarrow$ índices que referenciam as linhas nodais i e j .

No posterior desenvolvimento teórico mostrar-se-á que a complexidade da matriz $[R]$ diminuirá à medida em que algumas particularidades físicas e matemáticas forem introduzidas.

De modo semelhante, quanto ao vetor das cargas, tem-se para o m -ésimo harmônico da série

$$[F]_m = \iint_A [N]_m^T \{q\} dA \quad \dots (2.26)$$

Importante observar que a precisão da matriz $[R]$ e do vetor $\{F\}$ cresce com o número de harmônicos r que se adota para a série e que a matriz $[R]$, em geral, não é singular devido ao atendimento prévio de condições de contorno, com impedimento dos movimentos de corpo rígido.

CAPÍTULO 3

FLEXÃO DE PLACAS RETANGULARES

3.1- INTRODUÇÃO

Dentro do escopo deste trabalho são adotadas as mesmas aproximações da teoria clássica das placas finas que permitem simplificar o problema, tornando-o bidimensional [12].

O estado de deformação pode ser inteiramente descrito pelos deslocamentos w dos pontos pertencentes ao plano médio da placa na direção ortogonal a esse plano.

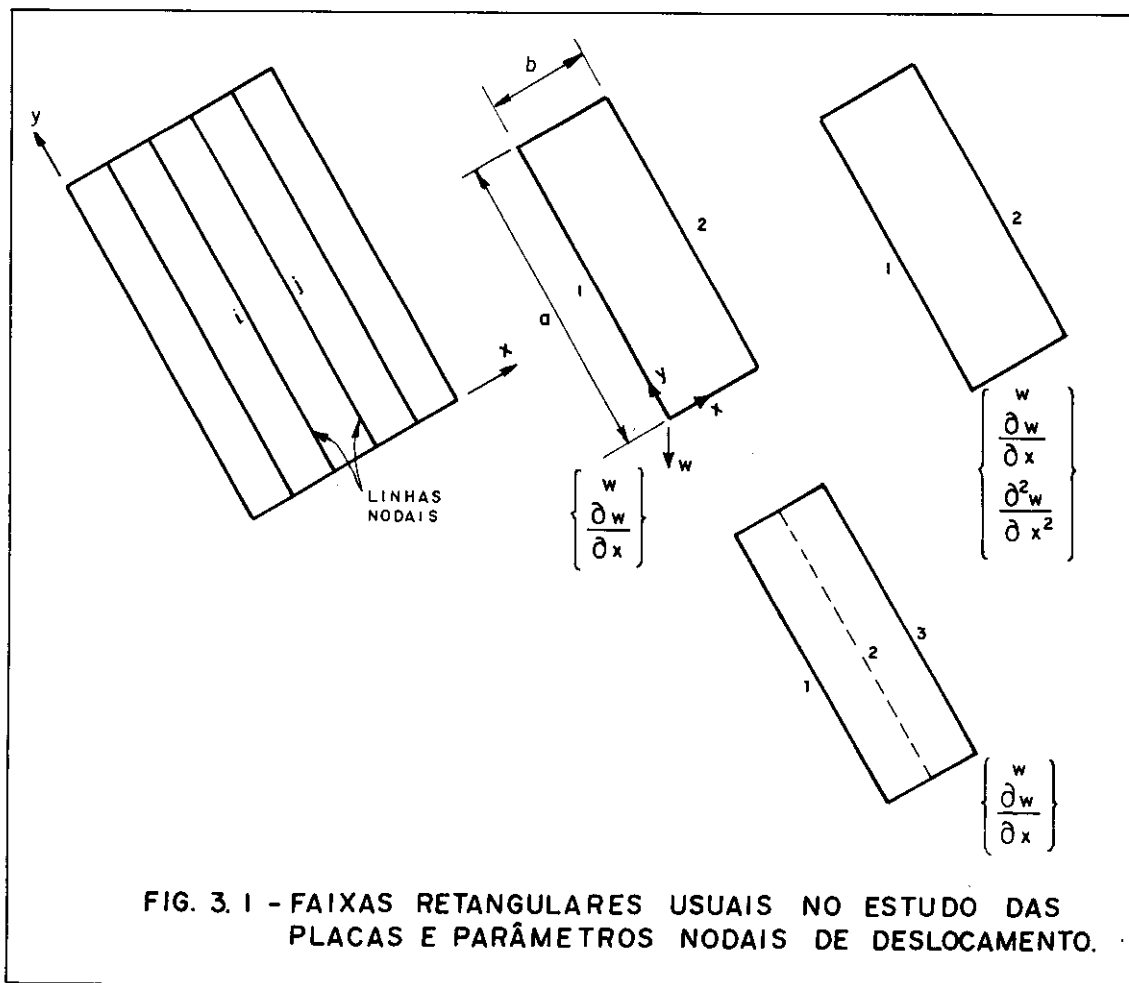
Condições de continuidade entre as faixas são impostas não apenas nos deslocamentos w mas também nas suas derivadas em relação à coordenada transversal x .

Escolhida a função deslocamento, são estabelecidas as características da faixa utilizada de acordo com o procedimento apresentado no capítulo 2.

São estudadas apenas as placas retangulares ortotropas, sendo os resultados confirmados por comparação com os encontrados via outros métodos de cálculo.

3.2 - FAIXAS USUAIS

Vários tipos de faixas têm sido utilizados no estudo da flexão de placas retangulares (Fig. 3.1).



Basicamente as faixas podem ser diferenciadas com relação ao número de linhas nodais, número de graus de liberdade por linha nodal e às condições de contorno longitudinais.

A Tabela 3.1 apresenta as seções transversais das faixas, caracterizando-as em três tipos, de acordo com o número de linhas nodais e os parâmetros nodais de deslocamento em cada linha nodal.

Notar que a faixa B02 é dita de baixa ordem por incorporar um total de 4 graus de liberdade, enquanto as demais, A02 e A03, agrupam um total de 6 graus de liberdade.

A Tabela 3.2 apresenta as seções longitudinais das faixas, fixando os vários tipos a partir das condições de contorno nos extremos longitudinais, a saber, apoio (A), engaste (E), extremo livre (L).

TABELA 3.1 - SEÇÕES TRANSVERSAIS DAS FAIXAS

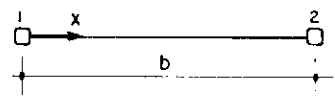
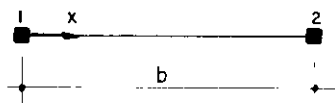
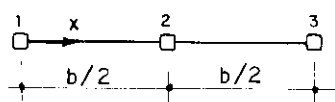
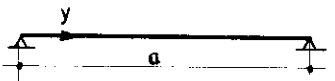
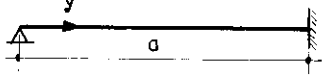
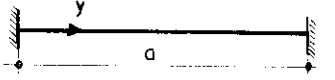
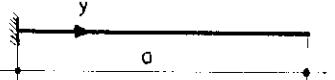
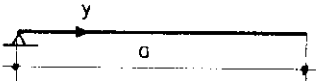
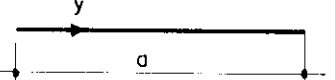
IDENTIF.	Nº DE LINHAS NODAIS	GRAUS DE LIBERDADE POR L.N.	CONTINUIDADE	REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA
B02	2	2 $\left\{ \begin{array}{l} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{array} \right\}$	Baixa Ordem	
A02	2	3 $\left\{ \begin{array}{l} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{array} \right\}$	Alta Ordem	
A03	3	2 $\left\{ \begin{array}{l} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{array} \right\}$	Alta Ordem	

TABELA 3.2 - SEÇÕES LONGITUDINAIS DAS FAIXAS
Parte em série da função deslocamento.

$$Y(y) = S_1 \text{sen}\left(\frac{\mu y}{a}\right) + S_2 \text{cos}\left(\frac{\mu y}{a}\right) + S_3 \text{sh}\left(\frac{\mu y}{a}\right) + S_4 \text{ch}\left(\frac{\mu y}{a}\right)$$

IDENTIFICAÇÃO	CONDIÇÕES DE CONTORNO		REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA
	y = 0	y = a	
A-A	Y = 0 $\partial^2 Y / \partial y^2 = 0$	Y = 0 $\partial^2 Y / \partial y^2 = 0$	
A-E	Y = 0 $\partial^2 Y / \partial y^2 = 0$	Y = 0 $\partial Y / \partial y = 0$	
E-E	Y = 0 $\partial Y / \partial y = 0$	Y = 0 $\partial Y / \partial y = 0$	
E-L	Y = 0 $\partial Y / \partial y = 0$	$\partial^2 Y / \partial y^2 = 0$ $\partial^3 Y / \partial y^3 = 0$	
A-L	Y = 0 $\partial^2 Y / \partial y^2 = 0$	$\partial^2 Y / \partial y^2 = 0$ $\partial^3 Y / \partial y^3 = 0$	
L-L	$\partial^2 Y / \partial y^2 = 0$ $\partial^3 Y / \partial y^3 = 0$	$\partial^2 Y / \partial y^2 = 0$ $\partial^3 Y / \partial y^3 = 0$	

3.3 - ESCOLHA DA FAIXA

O problema da escolha da faixa a ser utilizada liga-se a dois aspectos básicos: continuidade e contorno, que serão analisados separadamente.

3.3.1 - Continuidade

Dentre as faixas apresentadas na Tabela 3.1, a primeira delas (B02) admite a continuidade de deslocamentos w e rotação elástica transversal $\partial w / \partial x$ em cada linha nodal. Os resultados alcançados na análise de placas, ao se utilizar tal faixa, têm apresentado as seguintes características [6], [16], [17]: valores precisos para os deslocamentos w , descontinuidade de momento fletor M_x nas fronteiras comuns de faixas adjacentes por causa da dependência em relação às curvaturas e resíduos de momentos fletores M_x em bordas livres. Os problemas citados (descontinuidades e resíduos) diminuem ao se aumentar gradativamente o número de faixas em que se discretiza a placa.

As outras duas faixas, mostradas na Tabela 3.1, incorporam técnicas que permitem obter soluções mais eficientes para o problema da flexão de placas [6], [3], [11].

Para a faixa A02 há o estabelecimento de continuidade de alta ordem nas fronteiras da faixa - em particular, curvatura, além de deslocamento e rotação na direção transversal. Este procedimento conduz a soluções mais acuradas do problema e, apesar da introdução de mais um grau de liberdade por linha nodal (em comparação com B02), a mesma precisão de resultados pode ser alcançada com um menor esforço computacional, por ser possível a redução do número de faixas utilizadas, o que conduz a um sistema de equações lineares de menor ordem [18] [11]. Entretanto a imposição de curvaturas iguais nas linhas nodais comuns a faixas contíguas é inconveniente para as placas em que ocorre variação brusca de rigidez na direção transversal.

A faixa A03 apresenta uma linha nodal auxiliar (técnica LNA) entre as duas periféricas. Esta técnica também possibilita uma solução refinada de aplicação geral e sem o inconveniente de introduzir condições de compatibilidade estranhas ao problema considerado, nas linhas nodais pertencentes a duas faixas vizinhas, no caso de bruscas variações transversais de rigidez. A introdução de dois parâmetros adicionais (em relação a B02) é contornada eliminando-os, por condensação estática, antes da montagem das equações de rigidez para a estrutura global, o que reduz sobremaneira, a ordem do sistema de equações lineares.

3.3.2 - Contorno

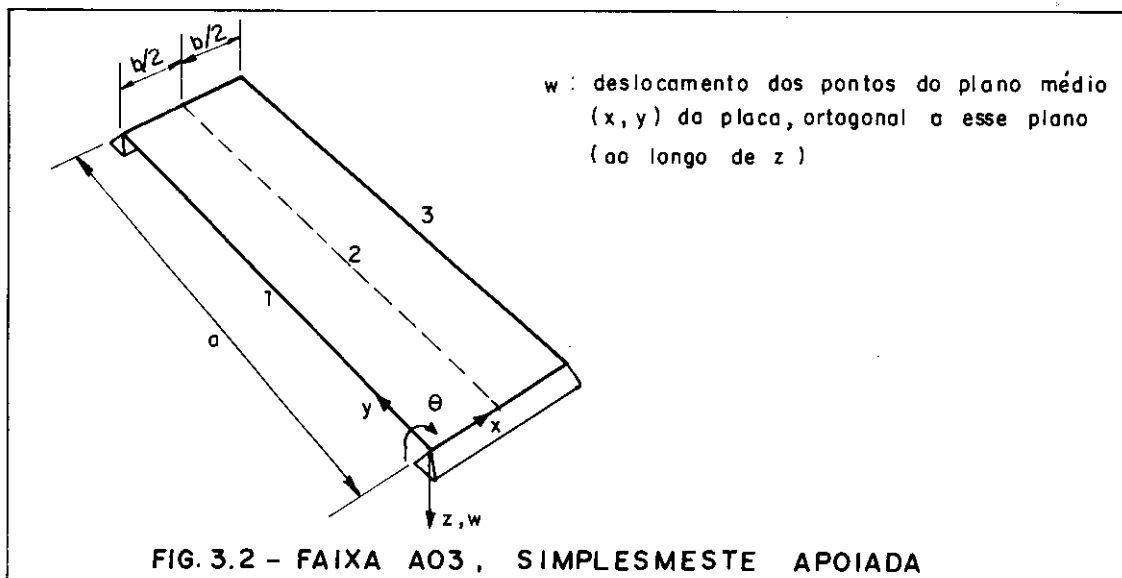
Dentre as faixas cujas seções longitudinais estão representadas na Tabela 3.2, as três primeiras (A-A, A-E, E-E) têm sido utilizadas para a análise estática, destacando-se a faixa A-A por possibilitar o tratamento individual de cada harmônico da série (conforme explicação a ser dada no item 3.4). Na análise dinâmica todos os seis tipos têm sido utilizados pelos diversos pesquisadores do Método das Faixas Finitas.

Optou-se, neste trabalho, pela faixa A03 na condição de apoio simples nos dois extremos longitudinais (A-A) pelos motivos relacionados a seguir.

Seção transversal A03 porque produz soluções mais acuradas do que B02, sem os inconvenientes relacionados no item 3.3.1 e devido à vantagem de que A03 acopla duas faixas B02, sem o incômodo de dobrar o número de parâmetros nodais a serem utilizados nas equações de rigidez da estrutura global.

Seção longitudinal A-A por causa da vantagem da análise individual para cada harmônico da série e a opção de simular a continuidade da estrutura através de um procedimento simples, exposto no capítulo 6.

3.4 - FAIXA A03 RETANGULAR, SIMPLEMENTE APOIADA



3.4.1 - Função deslocamento

A faixa considerada (Fig. 3.2) apresenta dois graus de liberdade (GL = 2) em cada linha nodal, que pode mover-se na direção do eixo z (deslocamento w) e girar em torno do eixo y (rotação θ), perfazendo um total de seis graus de liberdade para toda a faixa.

A função deslocamento pode ser escrita (vide equação 2.1):

$$d = w = [N] \{ \delta \} = \sum_{m=1}^r [N]_m \{ \delta \}_m = \sum_{m=1}^r Y_m \sum_{k=1}^3 [C_k] \{ \delta \}_{k m} \dots (3.1)$$

onde

$$[C_1] = \left[\left(1 - 23 \frac{x^2}{b^2} + 66 \frac{x^3}{b^3} - 68 \frac{x^4}{b^4} + 24 \frac{x^5}{b^5} \right), \right. \\ \left. \left(x - 6 \frac{x^2}{b} + 13 \frac{x^3}{b^2} - 12 \frac{x^4}{b^3} + 4 \frac{x^5}{b^4} \right) \right]$$

$$[C_2] = \left[\begin{array}{l} \left(16 \frac{x^2}{b^2} - 32 \frac{x^3}{b^3} + 16 \frac{x^4}{b^4} \right) , \\ \left(-8 \frac{x^2}{b} + 32 \frac{x^3}{b^2} - 40 \frac{x^4}{b^3} + 16 \frac{x^5}{b^4} \right) \end{array} \right]$$

$$[C_3] = \left[\begin{array}{l} \left(7 \frac{x^2}{b^2} - 34 \frac{x^3}{b^3} + 52 \frac{x^4}{b^4} - 24 \frac{x^5}{b^5} \right) , \\ \left(- \frac{x^2}{b} + 5 \frac{x^3}{b^2} - 8 \frac{x^4}{b^3} + 4 \frac{x^5}{b^4} \right) \end{array} \right]$$

$$\{\delta\}_m = \left\{ \begin{array}{l} \{\delta_1\}_m \\ \{\delta_2\}_m \\ \{\delta_3\}_m \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{array} \right\}_m$$

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$Y_m(y) = \text{sen}(\alpha_m y) \quad \alpha_m = \frac{\pi}{a} , \frac{2\pi}{a} , \frac{3\pi}{a} , \dots , \frac{m\pi}{a}$$

.... (3.2)

Com a utilização desta função deslocamento fica garantida a compatibilidade de deslocamentos w e suas primeiras derivadas $\partial w / \partial x = 0$. A superfície deformada apresenta primeiras e segundas derivadas contínuas ao longo do domínio de cada faixa. A espera de uma solução convergente é confirmada pelos exemplos numéricos extraídos da bibliografia consultada e os exemplos processados durante o desenvolvimento deste trabalho.

3.4.2 - Deformações

De acordo com a teoria clássica das placas [13] a relação entre deformações e deslocamentos é dada por:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \dots (3.3)$$

Combinando as equações (3.1) e (3.2) encontra-se:

$$\{\epsilon\} = \sum_{m=1}^r z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 [N]_m}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 [N]_m}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 [N]_m}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \{\delta\}_m = \sum_{m=1}^r [B]_m \{\delta\}_m \dots (3.4)$$

Determina-se $[B]_m$ fazendo as derivações apropriadas em relação a x e y, apresentadas na equação (3.3).

$$\text{Adotando } [B]_m = z [B^*]_m \dots (3.5)$$

é possível escrever:

$$[B^*]_m = \begin{bmatrix} -[c_1''] Y_m & -[c_2''] Y_m & -[c_3''] Y_m \\ -[c_1'] Y_m'' & -[c_2'] Y_m'' & -[c_3'] Y_m'' \\ 2 [c_1'] Y_m' & 2 [c_2'] Y_m' & 2 [c_3'] Y_m' \end{bmatrix} \dots (3.6)$$

onde $Y_m = \text{sen}(\alpha_m y)$

$$Y'_m = \frac{\partial Y_m}{\partial y} = \alpha_m \cdot \cos(\alpha_m y)$$

$$Y''_m = \frac{\partial^2 Y_m}{\partial y^2} = -\alpha_m^2 \cdot \text{sen}(\alpha_m y)$$

$$[C'_1] = \frac{\partial [C_1]}{\partial x} = \left[\left(-46 \frac{x}{b^2} + 198 \frac{x^2}{b^3} - 272 \frac{x^3}{b^4} + 120 \frac{x^4}{b^5} \right), \right. \\ \left. \left(1 - 12 \frac{x}{b} + 39 \frac{x^2}{b^2} - 48 \frac{x^3}{b^3} + 20 \frac{x^4}{b^4} \right) \right]$$

$$[C'_2] = \frac{\partial [C_2]}{\partial x} = \left[\left(32 \frac{x}{b^2} - 96 \frac{x^2}{b^3} + 64 \frac{x^3}{b^4} \right), \right. \\ \left. \left(-16 \frac{x}{b} + 96 \frac{x^2}{b^2} - 160 \frac{x^3}{b^3} + 80 \frac{x^4}{b^4} \right) \right]$$

$$[C'_3] = \frac{\partial [C_3]}{\partial x} = \left[\left(14 \frac{x}{b^2} - 102 \frac{x^2}{b^3} + 208 \frac{x^3}{b^4} - 120 \frac{x^4}{b^5} \right), \right. \\ \left. \left(-2 \frac{x}{b} + 15 \frac{x^2}{b^2} - 32 \frac{x^3}{b^3} + 20 \frac{x^4}{b^4} \right) \right]$$

$$[C''_1] = \frac{\partial^2 [C_1]}{\partial x^2} = \left[\left(-\frac{46}{b^2} + 396 \frac{x}{b^3} - 816 \frac{x^2}{b^4} + 480 \frac{x^3}{b^5} \right), \right. \\ \left. \left(-\frac{12}{b} + 78 \frac{x}{b^2} - 144 \frac{x^2}{b^3} + 80 \frac{x^3}{b^4} \right) \right]$$

$$[C''_2] = \frac{\partial^2 [C_2]}{\partial x^2} = \left[\left(\frac{32}{b^2} - 192 \frac{x}{b^3} + 192 \frac{x^2}{b^4} \right), \right. \\ \left. \left(-\frac{16}{b} + 192 \frac{x}{b^2} - 480 \frac{x^2}{b^3} + 320 \frac{x^3}{b^4} \right) \right]$$

$$[C_3''] = \frac{\partial^2 [C_3]}{\partial x^2} = \left[\left(\frac{14}{b^2} - 204 \frac{x}{b^3} + 624 \frac{x^2}{b^4} - 480 \frac{x^3}{b^5} \right), \right. \\ \left. \left(-\frac{2}{b} + 30 \frac{x}{b^2} - 96 \frac{x^2}{b^3} - 80 \frac{x^3}{b^4} \right) \right] \dots (3.7)$$

3.4.3 - Tensões

O relacionamento entre tensões e deformações depende das propriedades do material que constitui a faixa. Para faixa ortótropa pode-se escrever [12]:

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_x \cdot \nu_y} & \frac{E_x \cdot \nu_y}{1-\nu_x \cdot \nu_y} & 0 \\ \frac{E_y \cdot \nu_x}{1-\nu_x \cdot \nu_y} & \frac{E_y}{1-\nu_x \cdot \nu_y} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \dots (3.8)$$

onde:

E_x, E_y são os módulos de elasticidade longitudinais nas direções x e y

G é o módulo de elasticidade transversal

ν_x, ν_y são os coeficientes de Poisson associados às direções x e y

No caso de isotropia basta fazer $E_x = E_y = E$,
 $\nu_x = \nu_y = \nu$ e $G = E/2(1+\nu)$

3.4.4 - Matriz de rigidez

A matriz de rigidez pode ser, agora, deduzida combinando-se as equações (2.23), (3.4), (3.6) e (3.8).

$$\begin{aligned}
 [R]_{mn} &= \iiint_V z [B^*]_m^T [E] z [B^*]_n dV = \\
 &= \iint_A \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=+\frac{h}{2}} [B^*]_m^T [E] [B^*]_n z^2 dz dA = \\
 &= \iint_A [B^*]_m^T [E] [B^*]_n \left(\int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=+\frac{h}{2}} z^2 dz \right) dA \quad \text{pois } [B^*]_m^T
 \end{aligned}$$

e $[B^*]_n$ não são funções de z .

$$\begin{aligned}
 [R]_{mn} &= \iint_A [B^*]_m^T [E] [B^*]_n \frac{h^3}{12} dA = \iint_A [B^*]_m^T \frac{h^3}{12} [E] [B^*]_n dA = \\
 &= \iint_A [B^*]_m^T [D] [B^*]_n dA \quad \dots (3.9)
 \end{aligned}$$

onde:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \quad \dots (3.10)$$

$$e \quad D_x = \frac{E_x \cdot h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} \quad D_1 = \frac{\nu_y E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} = \frac{\nu_x E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}$$

$$D_y = \frac{E_y \cdot h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} \quad D_{xy} = \frac{G \cdot h^3}{12} \quad \dots (3.11)$$

Quatro tipos de integrais em y aparecem na equação (3.9), e elas são compostas por produtos de funções ortogonais no domínio de integração:

$$\int_0^a Y_m Y_n dy = \int_0^a \text{sen}(\alpha_m y) \text{sen}(\alpha_n y) dy = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ \frac{a}{2} & \text{para } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^a Y_m'' Y_n'' dy = \int_0^a (-\alpha_m^2) \text{sen}(\alpha_m y) (-\alpha_n^2) \text{sen}(\alpha_n y) dy = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ \frac{\alpha_m^4 a}{2} & \text{para } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^a Y_m' Y_n' dy = \int_0^a \alpha_m \cos(\alpha_m y) \alpha_n \cos(\alpha_n y) dy = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ \frac{\alpha_m^2 a}{2} & \text{para } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^a Y_m Y_n'' dy = \int_0^a \text{sen}(\alpha_m y) (-\alpha_n^2) \text{sen}(\alpha_n y) dy = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ -\frac{\alpha_n^2 a}{2} & \text{para } m = n \end{cases}$$

Constitui uma particularidade notável o fato de as integrais que dependem simultaneamente de harmônicos diferentes da série se anularem, pois, dessa forma, torna-se possível resolver individualmente o problema para cada um dos harmônicos e depois promover a soma total que fornecerá a solução final. Além disso, ao invés de se resolver um sistema de $r \times N$ equações lineares, onde r é o número de harmônicos e N o número de parâmetros nodais envolvidos nas equações de rigidez para toda a estrutura, o problema reclama a solução de r sistemas de N equações lineares, o que significa redução expressiva no tempo de processamento e na utilização de memória do equipamento eletrônico empregado. Computacionalmente, o que se faz é resolver, sucessi

$$\begin{aligned}
 R_3 &= -\frac{512B}{5b^3} - \frac{256C}{105b} + \frac{4bD}{63} - \frac{256E}{105b} & R_9 &= \frac{64B}{7b} - \frac{4bC}{315} - \frac{b^3D}{1155} - \frac{4bE}{315} \\
 R_4 &= \frac{384B}{7b^2} + \frac{8C}{21} - \frac{8b^2D}{693} + \frac{8E}{21} & R_{10} &= \frac{38B}{35b} - \frac{bC}{126} - \frac{b^3d}{4620} - \frac{bE}{126} \\
 R_5 &= -\frac{1508B}{35b^3} - \frac{22C}{105b} + \frac{131bD}{6930} - \frac{22E}{105b} & R_{11} &= \frac{1024B}{5b^3} + \frac{512C}{105b} + \frac{128bD}{315} + \frac{518E}{105b} \\
 R_6 &= \frac{242B}{35b^2} - \frac{C}{70} - \frac{29b^2D}{13860} - \frac{E}{70} & R_{12} &= \frac{256B}{7b} + \frac{128bC}{315} + \frac{32b^3D}{3465} + \frac{128bE}{315}
 \end{aligned}$$

em que,

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{a D_x}{2} & D &= \frac{a \alpha_m^4 D_y}{2} \\
 C &= a \alpha_m^2 D_1 & E &= 2a \alpha_m^2 D_{xy} \\
 \alpha_m &= \frac{m \pi}{a}
 \end{aligned}$$

3.4.5 - Curvaturas e momentos

Para se determinar o vetor de curvaturas $\{\chi\}$ em cada ponto da faixa basta fazer uso de sua definição [13]:

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} -\chi_x \\ -\chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \dots (3.13)$$

Analisando as equações (3.3), (3.4) e (3.5), conclui-se que:

$$\{\chi\} = \sum_{m=1}^r [B^*]_m \{\delta\}_m \dots (3.14)$$

A matriz $[D]$ (eq. (3.10)) multiplicada pelo vetor das curvaturas $\{\chi\}$ fornece o vetor dos momentos $\{M\}$ [12]. Esta operação desenvolvida fornece a equação que permite determinar $\{M\}$:

$$\{M\} = [D] \{\chi\} = [D] \sum_{m=1}^r [B^*]_m \{\delta\}_m \quad \dots (3.15)$$

3.4.6 - Forças cortantes

Partindo-se das expressões da teoria clássica das placas [12] escreve-se:

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_x & 0 & H_{xy} & 0 \\ 0 & D_y & 0 & H_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \end{bmatrix} \quad \dots (3.16)$$

onde V_x e V_y são as forças cortantes por unidade de comprimento ao longo de x e y , respectivamente, e $H_{xy} = 2D_{xy} + D_1$.

Levando-se em conta que

$$\{w\} = \sum_{m=1}^r Y_m \sum_{k=1}^3 [C_k] \{\delta_k\}_m$$

pode-se reescrever a equação (3.16) da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_x & 0 & H_{xy} & 0 \\ 0 & D_y & 0 & H_{xy} \end{bmatrix} \sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} Y_m [C_k'''] \\ Y_m''' [C_k] \\ Y_m'' [C_k'] \\ Y_m' [C_k''] \end{bmatrix} \{\delta_k\}_m \dots (3.17)$$

onde Y_m , Y_m' , Y_m'' , Y_m''' , $[C_k]$, $[C_k']$, $[C_k'']$ já foram apresentados em itens anteriores e

$$Y_m''' = -\alpha_m^3 \cos(\alpha_m y)$$

$$[C_1'''] = \left[\left(\frac{396}{b^3} - 1632 \frac{x}{b^4} + 1440 \frac{x^2}{b^5} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{78}{b^2} - 288 \frac{x}{b^3} + 240 \frac{x^2}{b^4} \right) \right]$$

$$[C_2'''] = \left[\left(-\frac{192}{b^3} + 384 \frac{x}{b^4} \right), \left(\frac{192}{b^2} - 960 \frac{x}{b^3} + 960 \frac{x^2}{b^4} \right) \right]$$

$$[C_3'''] = \left[\left(-\frac{204}{b^3} + 1248 \frac{x}{b^4} - 1440 \frac{x^2}{b^5} \right), \right. \\ \left. \left(+\frac{30}{b^2} - 192 \frac{x}{b^3} + 240 \frac{x^2}{b^4} \right) \right]$$

3.4.7 - Vetor das cargas nodais (Ações nodais equivalentes)

Para o cálculo do vetor das cargas é aqui utilizado o procedimento direto sugerido por Loo e Cusens [4], que considera o carregamento superficial $\{q\}$ real, sem desenvolvê-lo em série de Fourier, integrando-o sobre a região em que ele atua. Tal procedimento pode ser considerado como a representação "exata" das cargas aplicadas na faixa, fornecendo base para o tratamento de todas as formas de carregamento.

O cálculo é feito a partir da equação (2.26) que pode ser organizada da maneira como se segue:

$$\{F\}_m = \iint_A \begin{Bmatrix} [N_1]_m^T \\ [N_2]_m^T \\ [N_3]_m^T \end{Bmatrix} \{q\} dA = \int_{y=0}^{y=a} \int_{x=0}^{x=b} \begin{Bmatrix} [C_1]_m^T \\ [C_2]_m^T \\ [C_3]_m^T \end{Bmatrix} Y_m \{q\} dx dy \quad \dots (3.18)$$

Cinco situações são aqui analisadas.

a) Carga parcialmente distribuída em um retângulo

Substituindo-se em (3.18) os vetores $[C_k]^T$ a parte em série Y_m da função deslocamento e lembrando-se que, neste caso, $q(x,y) = q^z$, constante no seu domínio de integração ($x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$), chega-se a

$$\{F\}_m = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \begin{array}{l} 1 - 23 \frac{x^2}{b^2} + 66 \frac{x^3}{b^3} - 68 \frac{x^4}{b^4} + 24 \frac{x^5}{b^5} \\ x - 6 \frac{x^2}{b} + 13 \frac{x^3}{b^2} - 12 \frac{x^4}{b^3} + 4 \frac{x^5}{b^4} \\ 16 \frac{x^2}{b^2} - 32 \frac{x^3}{b^3} + 16 \frac{x^4}{b^4} \\ - 8 \frac{x^2}{b} + 32 \frac{x^3}{b^2} - 40 \frac{x^4}{b^3} + 16 \frac{x^5}{b^4} \\ 7 \frac{x^2}{b^2} - 34 \frac{x^3}{b^3} + 52 \frac{x^4}{b^4} - 24 \frac{x^5}{b^5} \\ - \frac{x^2}{b} + 5 \frac{x^3}{b^2} - 8 \frac{x^4}{b^3} + 4 \frac{x^5}{b^4} \end{array} \right\} q^z \cdot \text{sen}(\alpha_m y) \cdot dx dy$$

$$= q^z \cdot \int_{x_1}^{x_2} \{ \dots \} dx \cdot \int_{y_1}^{y_2} \text{sen}(\alpha_m y) dy \quad \dots (3.19)$$

que integrada fornece a seguinte expressão para o vetor das cargas nodais:

$$\{F\}_m = q^z \int_{x_1}^{x_2} \begin{Bmatrix} [C_1]^T \\ [C_2]^T \\ [C_3]^T \end{Bmatrix} dx \int_{y_1}^{y_2} Y_m dy$$

$$\{F\}_m = \left\{ \begin{array}{l} x_o - \frac{23x_o^3}{3b^2} + \frac{33x_o^4}{2b^3} - \frac{68x_o^5}{5b^4} + \frac{4x_o^6}{b^5} \\ \frac{x_o^2}{2} - \frac{2x_o^3}{b} + \frac{13x_o^4}{4b^2} - \frac{12x_o^5}{5b^2} + \frac{2x_o^6}{3b^4} \\ \frac{16x_o^3}{3b^2} - \frac{8x_o^4}{b^3} + \frac{16x_o^5}{5b^4} \\ -\frac{8x_o^3}{3b} + \frac{8x_o^4}{b^2} - \frac{8x_o^5}{b^3} + \frac{8x_o^6}{3b^4} \\ \frac{7x_o^3}{3b^2} - \frac{17x_o^4}{2b^3} + \frac{52x_o^5}{5b^4} - \frac{4x_o^6}{b^5} \\ -\frac{x_o^3}{3b} + \frac{5x_o^4}{4b^2} - \frac{8x_o^5}{5b^3} + \frac{2x_o^6}{3b^4} \end{array} \right\} \cdot q^z \cdot C_m \dots (3.20)$$

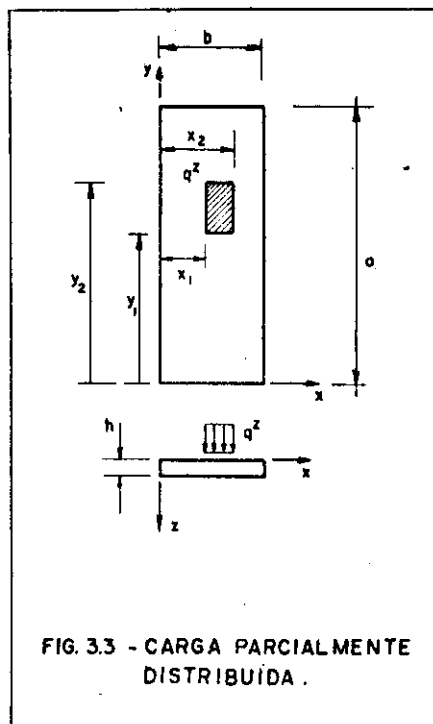


FIG. 3.3 - CARGA PARCIALMENTE DISTRIBUÍDA.

onde $C_m = [\cos(\alpha_m y_1) - \cos(\alpha_m y_2)] / \alpha_m$ e $x_o^n = x_2^n - x_1^n$

b) Carga uniformemente distribuída em toda a faixa

Basta fazer no caso anterior $x_1 = 0$, $x_2 = b$, $y_1 = 0$ e $y_2 = a$

$$\{F\}_m = \left\{ \begin{array}{l} 7b/30 \\ b^2/60 \\ 8b/15 \\ 0 \\ 7b/30 \\ -b^2/60 \end{array} \right\} \frac{q^z}{\alpha_m} [1 - (-1)^m] \dots (3.21)$$

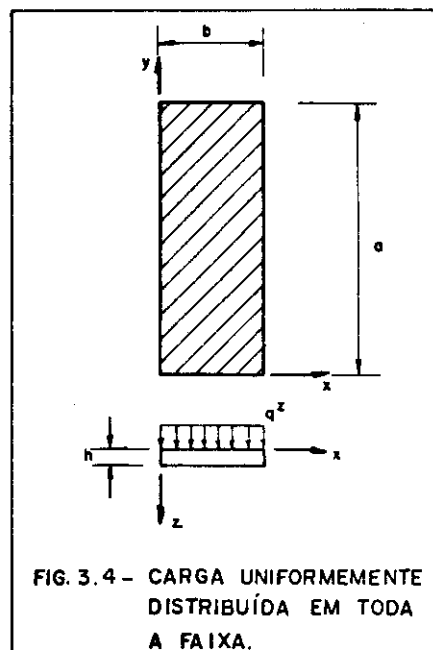


FIG. 3.4 - CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA EM TODA A FAIXA.

c) Carga linearmente distribuída

c.1) Distribuição ao longo de um segmento de reta paralelo ao eixo x

Também é possível de se deduzir a partir do caso (a) fazendo-se

$$Q^z = q^z (y_2 - y_1) ,$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y$$

$$e \quad \{F\}_m = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \{F\}_m^{(a)}$$

Resolvendo-se o limite proposto chega-se a

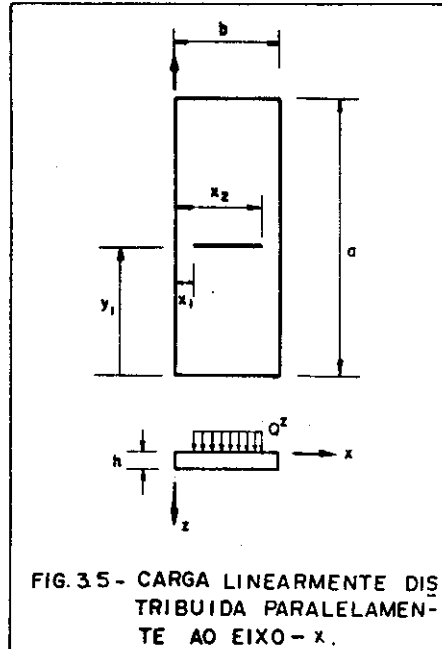


FIG. 3.5 - CARGA LINEARMENTE DISTRIBUIDA PARALELAMENTE AO EIXO - x.

$$\{F\}_m = \left\{ \begin{array}{l} x_o - \frac{23x_o^3}{3b^2} + \frac{33x_o^4}{2b^3} - \frac{68x_o^5}{5b^4} + \frac{4x_o^6}{b^5} \\ \frac{x_o^2}{2} - \frac{2x_o^3}{b} + \frac{13x_o^4}{4b^2} - \frac{12x_o^5}{5b^3} + \frac{2x_o^6}{3b^4} \\ \frac{16x_o^3}{3b^2} - \frac{8x_o^4}{b^3} + \frac{16x_o^5}{5b^4} \\ - \frac{8x_o^3}{3b} + \frac{8x_o^4}{b^2} - \frac{8x_o^5}{b^3} + \frac{8x_o^6}{3b^4} \\ \frac{7x_o^3}{3b^2} - \frac{17x_o^4}{2b^3} + \frac{52x_o^5}{5b^4} - \frac{4x_o^6}{b^5} \\ - \frac{x_o^3}{3b} + \frac{5x_o^4}{4b^2} - \frac{8x_o^5}{5b^3} + \frac{2x_o^6}{3b^4} \end{array} \right\} Q^z \cdot \text{sen}(\alpha_m y_1) \dots (3.22)$$

c.2) Distribuição ao longo de um segmento de reta paralelo ao eixo y

Partindo-se do caso (a) basta fazer

$$Q^z = q^z (x_2 - x_1) \quad , \quad x_2 = x_1 + \Delta x$$

e tomar o limite $\{F\}_m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{F\}_m^{(a)}$

Resolvendo-se o limite proposto encontra-se

$$\{F\}_m = \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{23x_1^2}{b^2} + \frac{66x_1^3}{b^3} - \frac{68x_1^4}{b^4} + \frac{24x_1^5}{b^5} \\ x_1 - \frac{6x_1^2}{b} + \frac{13x_1^3}{b^2} - \frac{12x_1^4}{b^3} + \frac{4x_1^5}{b^4} \\ \frac{16x_1^2}{b^2} - \frac{32x_1^3}{b^3} + \frac{16x_1^4}{b^4} \\ - \frac{8x_1^2}{b} + \frac{32x_1^3}{b^2} - \frac{40x_1^4}{b^3} + \frac{16x_1^5}{b^4} \\ \frac{7x_1^2}{b^2} - \frac{34x_1^3}{b^3} + \frac{52x_1^4}{b^4} - \frac{24x_1^5}{b^5} \\ - \frac{x_1^2}{b} + \frac{5x_1^3}{b^2} - \frac{8x_1^4}{b^3} + \frac{4x_1^5}{b^4} \end{array} \right\} \cdot Q^z \cdot C_m \quad \dots (3.23)$$

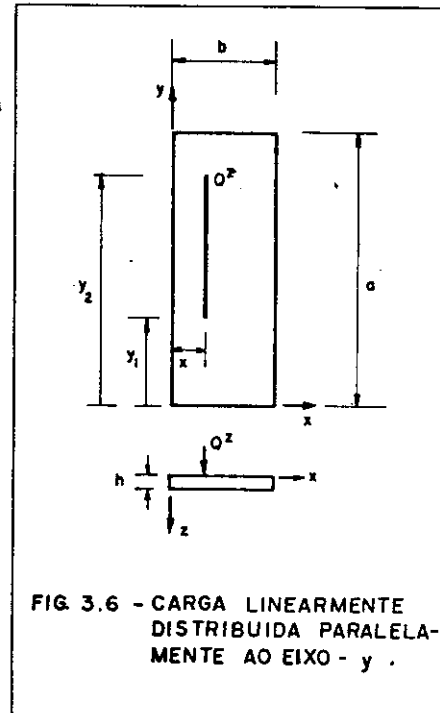


FIG. 3.6 - CARGA LINEARMENTE DISTRIBUIDA PARALELAMENTE AO EIXO - y .

onde $C_m = [\cos(\alpha_m y_1) - \cos(\alpha_m y_2)]/\alpha_m$

d) Carga concentrada

Utilizando procedimento semelhante aos apresentados em c) deduz-se o vetor de cargas para esta situação de carregamento.

$$\{F\}_m = \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{23x_1^2}{b^2} + \frac{66x_1^3}{b^3} - \frac{68x_1^4}{b^4} + \frac{24x_1^5}{b^5} \\ x_1 - \frac{6x_1^2}{b} + \frac{13x_1^3}{b^2} - \frac{12x_1^4}{b^3} + \frac{4x_1^5}{b^4} \\ \frac{16x_1^2}{b^2} - \frac{32x_1^3}{b^3} + \frac{16x_1^4}{b^4} \\ -\frac{8x_1^2}{b} + \frac{32x_1^3}{b^2} - \frac{40x_1^4}{b^3} + \frac{16x_1^5}{b^4} \\ \frac{7x_1^2}{b^2} - \frac{34x_1^3}{b^3} + \frac{52x_1^4}{b^4} - \frac{24x_1^5}{b^5} \\ -\frac{x_1^2}{b} + \frac{5x_1^3}{b^2} - \frac{8x_1^4}{b^3} + \frac{4x_1^5}{b^4} \end{array} \right\} w_c \cdot \text{sen}(\alpha_m y_1) \dots (3.24)$$

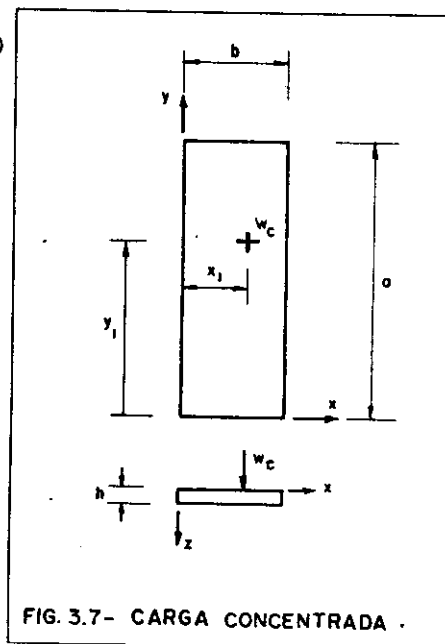


FIG. 3.7- CARGA CONCENTRADA .

e) Momento distribuído nas linhas nodais

Neste caso a expressão (3.18) deve ser reescrita do seguinte modo:

$$\{F\}_m = \int_{y=0}^{y=a} \int_{x=0}^{x=b} \left\{ \begin{array}{l} [C'_1]^T \\ [C'_2]^T \\ [C'_3]^T \end{array} \right\} Y_m \{M^\theta\} dx \cdot dy \dots (3.25)$$

porque o carregamento agora é um momento $\{M^\theta\}$ e, portanto, para o cálculo do potencial das cargas é necessário multiplicar cada momento pela rotação $\theta = \partial w / \partial x$, donde o aparecimento das derivadas primeiras $[C'_k]^T$.

Realizando as derivações expressas em (3.25), chega-se a:

$$\{F\}_m = \int_{y=0}^{y=a} \int_{x=0}^{x=b} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{46x}{b^2} + \frac{198x^2}{b^3} - \frac{272x^3}{b^4} + \frac{120x^4}{b^5} \\ & 1 - \frac{12x}{b} + \frac{39x^2}{b^2} - \frac{48x^3}{b^3} + \frac{20x^4}{b^4} \\ & \frac{32x}{b^2} - \frac{96x^2}{b^3} + \frac{64x^3}{b^4} \\ & -\frac{16x}{b} + \frac{96x^2}{b^2} - \frac{160x^3}{b^3} + \frac{80x^4}{b^4} \\ & \frac{14x}{b^2} - \frac{102x^2}{b^3} + \frac{208x^3}{b^4} - \frac{120x^4}{b^5} \\ & -\frac{2x}{b} + \frac{15x^2}{b^2} - \frac{32x^3}{b^3} + \frac{20x^4}{b^4} \end{aligned} \right\} \cdot \text{sen}(\alpha_m y) \cdot \{M^\theta\} dx dy \quad \dots (3.26)$$

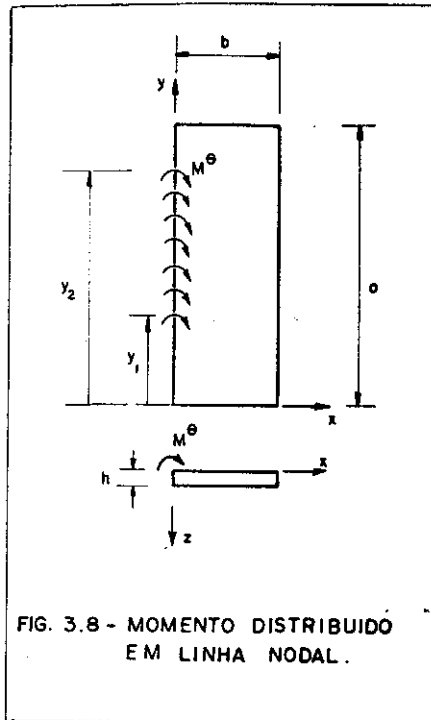
Com o momento distribuído na linha nodal 1 ($x=0$) da faixa, com taxa constante M^θ , a integral dupla degenera em integral simples e o vetor de cargas \vec{e} :

$$\{F\}_m = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot M^\theta \cdot C_m$$

onde $C_m = [\cos(\alpha_m y_1) - \cos(\alpha_m y_2)]/\alpha_m$

No caso de se ter distribuição ao longo de toda a linha nodal basta fazer $y_1=0$ e $y_2=a$ e, então, pode-se escrever:

$$\{F\}_m = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{M^\theta}{\alpha_m} [1 - (-1)^m] \dots (3.28)$$



CAPITULO 4

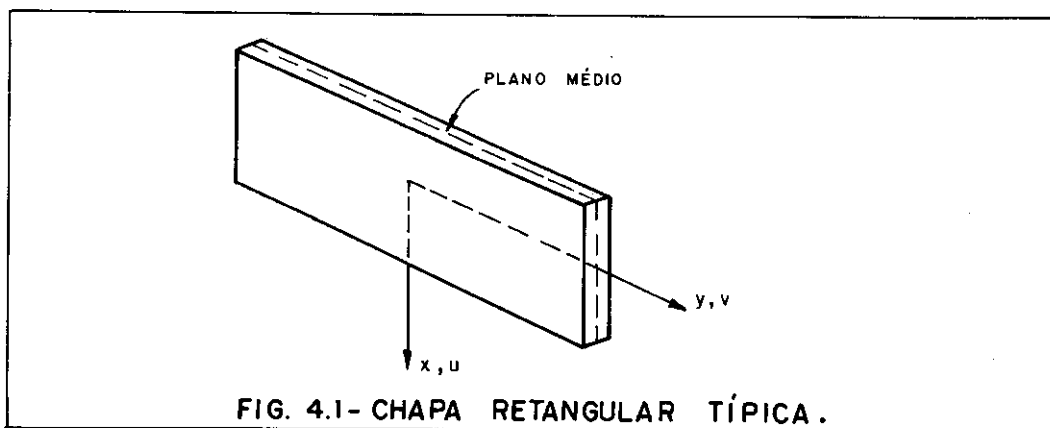
ESTUDO DE CHAPAS RETANGULARES

4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são estudadas as chapas retangulares dentro das aproximações comumente adotadas nos problemas da elasticidade bidimensional [20].

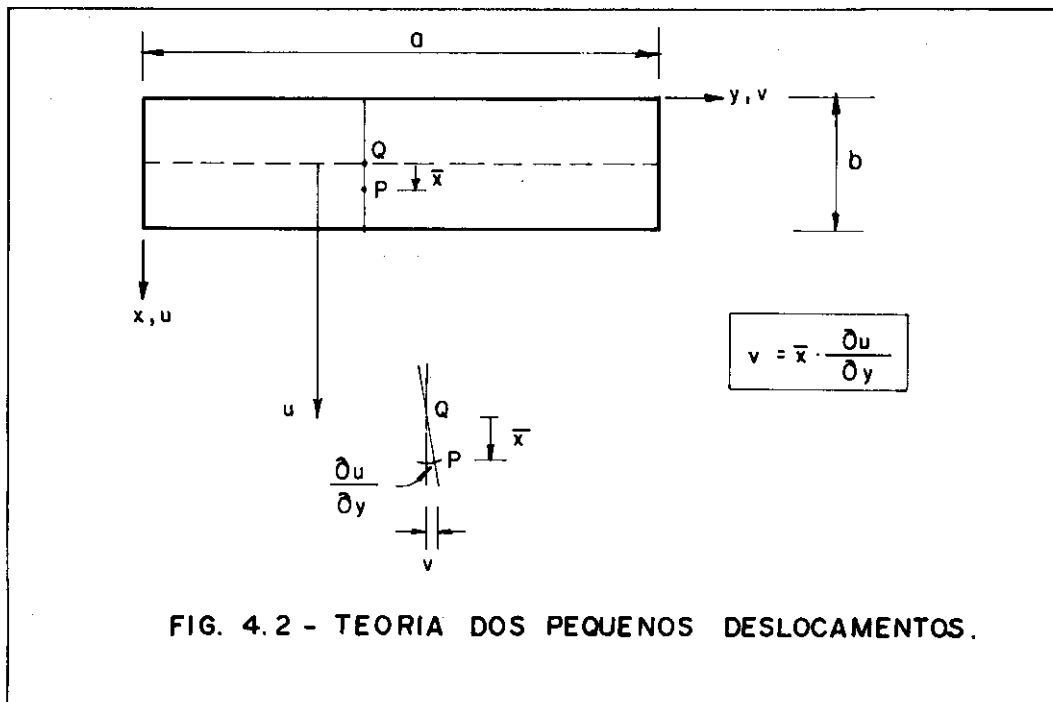
Basicamente o estudo se desenvolve para o estado plano de tensões, sendo possível a passagem ao estado plano de deformações através de alguns artifícios simples na manipulação dos parâmetros elásticos do material constituinte da chapa.

O campo de deslocamentos fica definido por u e v , deslocamentos nas direções dos eixos cartesianos ortogonais x e y , respectivamente (Fig. 4.1).



São consideradas apenas três componentes de tensão e deformação, no plano xy .

Na parte em série do campo de deslocamentos utiliza-se, no atual trabalho, Y_m e a sua primeira derivada em relação a y , Y'_m . Isto é feito baseado na teoria dos pequenos deslocamentos para as vigas em que subsiste a relação $v = \bar{x} \cdot (\partial u / \partial y)$ (Fig. 4.2).



Fica evidente que, ao se discretizar uma chapa em um número cada vez maior de faixas, o modelo se torna mais representativo devido à redução da razão b/a .

4.2 - FAIXAS USUAIS

De modo semelhante às placas, no estudo das chapas várias faixas têm sido utilizadas, sendo que a diferenciação entre elas também se faz através do número de linhas nodais por faixa, número de graus de liberdade por linha nodal e condições de contorno longitudinais.

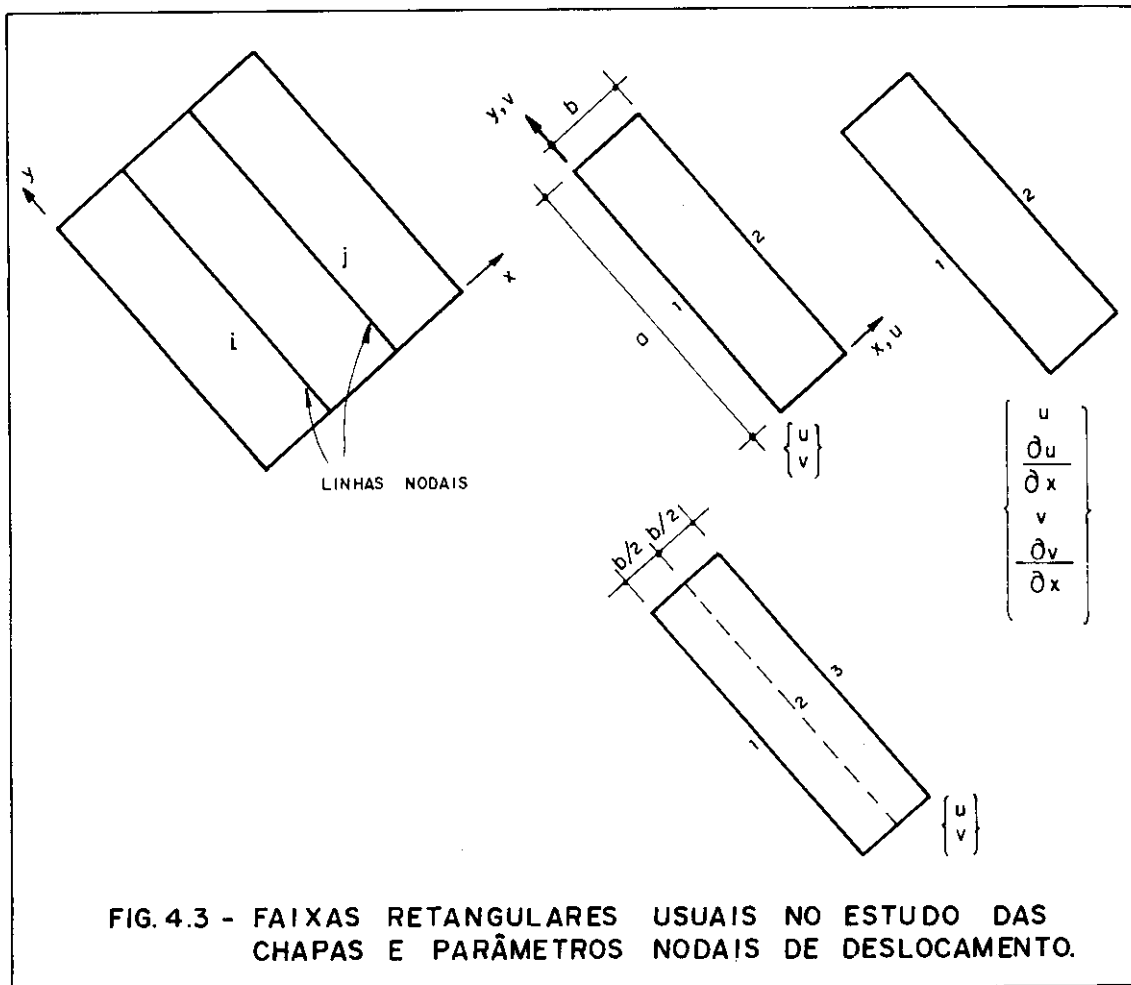


FIG. 4.3 - FAIXAS RETANGULARES USUAIS NO ESTUDO DAS CHAPAS E PARÂMETROS NODAIS DE DESLOCAMENTO.

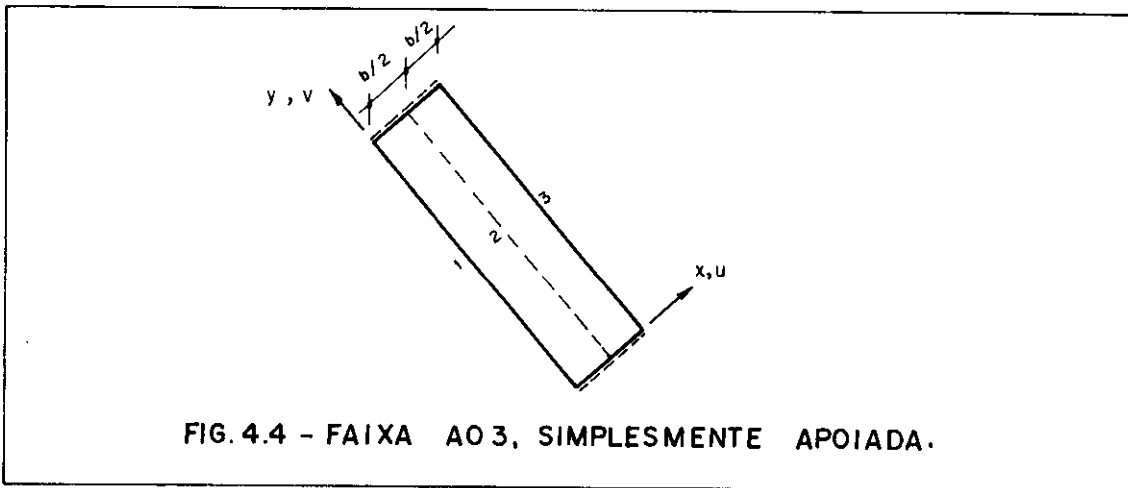
4.3 - ESCOLHA DAS FAIXAS

O problema relativo à escolha da faixa não será desenvolvido com detalhes, como se fez para as placas (item 3.3), pelas razões que se apresentam a seguir: as considerações sobre a escolha da faixa são análogas às apresentadas naquele item; como o produto final do presente trabalho é o estudo das pontes de seção celular, algumas faixas devem ser capazes de refletir comportamento misto (placa e chapa), o que leva à escolha daquela que incorpora a técnica LNA (linha nodal auxiliar), na condição de apoio simples nos extremos do vão.

Portanto, a faixa escolhida é de 3 linhas no-

dais, com dois parâmetros nodais de deslocamento (u e v) cada uma, que se passa a chamar A03, A-A para que se mantenha a mesma nomenclatura do capítulo anterior.

4.4 - FAIXA A03 RETANGULAR, SIMPLEMENTE APOIADA



4.4.1 - Função deslocamento

A faixa adotada (Fig. 4.4) apresenta dois graus de liberdade em cada linha nodal, que pode mover-se na direção do eixo x (deslocamento u) e na direção do eixo y (deslocamento v), perfazendo um total de seis graus de liberdade para toda a faixa.

Escreve-se a função deslocamento nas formas seguintes (vide equações (2.7), (2.8) e (2.9)):

$$\begin{aligned} \{d\} &= \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\} = \sum_{m=1}^r [N]_m \{\delta\}_m = \\ &= \sum_{m=1}^r \begin{bmatrix} C_1 \text{sen}(\alpha_m y) & 0 & C_2 \text{sen}(\alpha_m y) & 0 & C_3 \text{sen}(\alpha_m y) & 0 \\ 0 & C_1 \text{cos}(\alpha_m y) & 0 & C_2 \text{cos}(\alpha_m y) & 0 & C_3 \text{cos}(\alpha_m y) \\ \dots & & & & & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots(4.1)$$

onde

$$C_1 = 1 - \frac{3x}{b} + \frac{2x^2}{b^2}$$

$$C_2 = \frac{4x}{b} - \frac{4x^2}{b^2}$$

$$C_3 = -\frac{x}{b} + \frac{2x^2}{b^2}$$

$$\{\delta\}_m = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\}_m \\ \{\delta_2\}_m \\ \{\delta_3\}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}_m$$

$$\alpha_m = \frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{3\pi}{a} \dots, \frac{m\pi}{a} \dots (4.2)$$

Os exemplos numéricos apresentados na bibliografia consultada, bem como os processados pelo autor durante o desenvolvimento deste trabalho, têm apresentado soluções que convergem rapidamente, avalizando a utilização da faixa em questão.

4.4.2 - Deformações

O relacionamento entre deformações e deslocamentos [20] é dado por

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r [B]_m \{\delta\}_m \dots (4.3)$$

Promovendo-se as derivações apropriadas em relação a x e y determina-se $[B]_m$.

$$[B]_m = \begin{bmatrix} C_1' \text{sen}(\alpha_m y) & 0 & C_2' \text{sen}(\alpha_m y) & 0 & C_3' \text{sen}(\alpha_m y) & 0 \\ 0 & -C_1' \alpha_m \text{sen}(\alpha_m y) & 0 & -C_2' \alpha_m \text{sen}(\alpha_m y) & 0 & -C_3' \alpha_m \text{sen}(\alpha_m y) \\ C_1' \alpha_m \text{cos}(\alpha_m y) & C_1' \text{cos}(\alpha_m y) & C_2' \alpha_m \text{cos}(\alpha_m y) & C_2' \text{cos}(\alpha_m y) & C_3' \alpha_m \text{cos}(\alpha_m y) & C_3' \text{cos}(\alpha_m y) \end{bmatrix} \dots (4.4)$$

onde

$$C_1' = \frac{\partial C_1}{\partial x} = -\frac{3}{b} + \frac{4x}{b^2}$$

$$C_2' = \frac{\partial C_2}{\partial x} = \frac{4}{b} - \frac{8x}{b^2}$$

$$C_3' = \frac{\partial C_3}{\partial x} = -\frac{1}{b} + \frac{4x}{b^2}$$

4.4.3 - Tensões

A matriz $[E]$ que relaciona tensões e deformações depende das propriedades elásticas do material constitutivo da faixa.

Para uma faixa ortótropa [20] a matriz $[E]$ é a mesma apresentada no item 3.4.3.

Assim:

$$\{\sigma\} = [E] \cdot \{\epsilon\} = [E] \sum_{m=1}^r [B]_m \{\delta\}_m \dots (4.5)$$

4.4.4 - Matriz de rigidez

Deduz-se a matriz de rigidez a partir das equações (2.22), (4.3) e (4.5).

$$[R]_{mn} = \iiint_V [B]_m^T [E] [B]_n dV = \iint_A \int_{z=-h/2}^{z=+h/2} [B]_m^T [E] [B]_n dA$$

Como $[B]_m^T$ e $[B]_n$ não são funções de z , a expressão da matriz de rigidez pode ser reescrita do seguinte modo:

$$[R]_{mn} = \iint_A [B]_m^T [E] [B]_n \int_{z=-h/2}^{z=+h/2} dz \, dA$$

$$[R]_{mn} = h \iint_A [B]_m^T [E] [B]_n \, dA \quad \dots (4.6)$$

Três tipos de integrais em y aparecem em (4.6), com integrandos constituídos por produtos de funções ortogonais no domínio de integração:

$$\int_0^a \text{sen}(\alpha_m y) \text{sen}(\alpha_n y) \, dy = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ \frac{a}{2} & \text{para } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^a \cos(\alpha_m y) \cos(\alpha_n y) \, dy = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ \frac{a}{2} & \text{para } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^a \cos(\alpha_m y) \text{sen}(\alpha_n y) \, dy = 0$$

Cabem aqui considerações semelhantes às que foram feitas no item 3.4.4, sobre a possibilidade de resolver individualmente o problema para cada um dos harmônicos da série e depois promover a soma total.

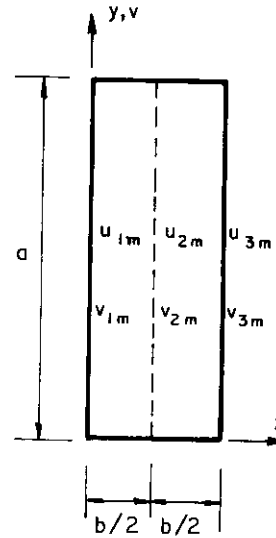
A matriz de rigidez adquire a seguinte forma

$$[R] = \begin{bmatrix} [R]_{11} & & [0] \\ & [R]_{22} & \\ [0] & & [R]_{rr} \end{bmatrix} \quad \dots (4.7)$$

Cada uma das submatrizes $[R]_{mn}$, correspondente a uma determinada faixa, deduzida a partir da equação (4.6) é apresentada na tabela 4.1 [5] [6].

TABELA 4.1 - Matriz de rigidez para a faixa A03, simplesmente apoiada

$$[R]_{mn} = \begin{bmatrix} R_1 & & & & & & \\ & R_2 & R_7 & & & & \\ & R_3 & R_8 & R_{11} & & & \\ & R_4 & R_9 & 0 & R_{12} & & \\ & R_5 & -R_6 & R_3 & -R_4 & R_1 & \\ & R_6 & R_{10} & -R_8 & R_9 & -R_2 & R_7 \end{bmatrix} \quad \text{simétrica}$$



onde

$$R_1 = \frac{7a}{6b} A + \frac{ab \alpha_m^2}{15} D$$

$$R_2 = \frac{a \alpha_m}{4} C - \frac{a \alpha_m}{4} D$$

$$R_3 = -\frac{4a}{3b} A + \frac{ab \alpha_m^2}{30} D$$

$$R_4 = \frac{a \alpha_m}{3} C + \frac{a \alpha_m}{3} D$$

$$R_5 = \frac{a}{6b} A - ab \alpha_m^2 D$$

$$R_6 = -\frac{a \alpha_m}{12} C - \frac{a \alpha_m}{12} D$$

$$R_7 = \frac{ab \alpha_m^2}{15} B + \frac{7a}{6b} D$$

$$R_8 = -R_4$$

$$R_9 = \frac{ab \alpha_m^2}{30} B - \frac{4a}{3b} D$$

$$R_{10} = \frac{ab \alpha_m^2}{60} B + \frac{a}{6b} D$$

$$R_{11} = \frac{8a}{3b} A + \frac{4ab \alpha_m^2}{15} D$$

$$R_{12} = \frac{4ab \alpha_m^2}{15} B + \frac{8a}{3b} D$$

em que,

$$\begin{aligned} A &= \frac{h \cdot E_x}{1 - \nu_x \cdot \nu_y} & C &= \nu_x \cdot A = \nu_y \cdot B \\ B &= \frac{h \cdot E_y}{1 - \nu_x \cdot \nu_y} & D &= h \cdot G \\ \alpha_m &= \frac{m \cdot \pi}{a} \end{aligned}$$

4.4.5 - Vetor das cargas nodais (Ações nodais equivalentes)

Calculado de maneira análoga à apresentada no item 3.4.7, a partir da equação (2.26), que pode ser reescrita da maneira como se segue:

$$\{F\}_m = \iint_A \left\{ \begin{array}{c} [N_1]_m^T \\ [N_2]_m^T \\ [N_3]_m^T \end{array} \right\} \{q\} dA \quad \dots (4.8)$$

Devido à grande semelhança nas integrações da equação (4.8) em relação às desenvolvidas no item 3.4.7, para as placas, são apresentados, a seguir, apenas os resultados obtidos para vários tipos de carregamentos.

a) Carga parcialmente distribuída em um retângulo

a.1) Direção do carregamento paralelo ao eixo x

$$\{F\}_m = \begin{Bmatrix} x_o^2 - \frac{3x_o^2}{2b} + \frac{2x_o^3}{3b^2} \\ 0 \\ \frac{2x_o^2}{b} - \frac{4x_o^3}{3b^2} \\ 0 \\ -\frac{x_o^2}{2b} + \frac{2x_o^3}{3b^2} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot q^x \cdot C_m \quad \dots (4.9)$$

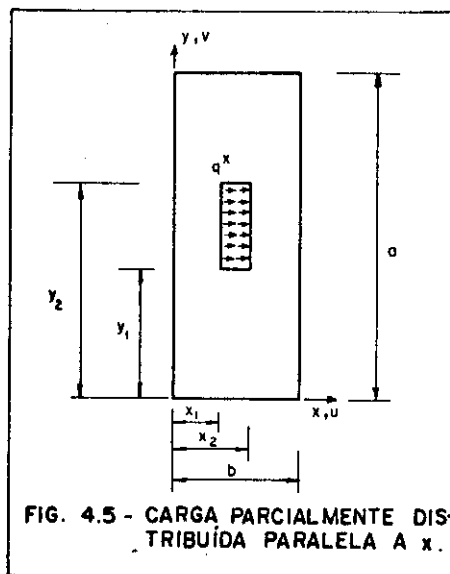


FIG. 4.5 - CARGA PARCIALMENTE DISTRIBUÍDA PARALELA A x.

onde $C_m = [\cos(\alpha_m y_1) - \cos(\alpha_m y_2)] / \alpha_m$ e $x_o^n = x_2^n - x_1^n$

a.2) Direção do carregamento paralelo ao eixo y

$$\{F\}_m = \begin{Bmatrix} 0 \\ x_o^2 - \frac{3x_o^2}{2b} + \frac{2x_o^3}{3b^2} \\ 0 \\ \frac{2x_o^2}{b} - \frac{4x_o^3}{3b^2} \\ 0 \\ -\frac{x_o^2}{2b} + \frac{2x_o^3}{3b^2} \end{Bmatrix} \cdot q^y \cdot S_m \quad \dots (4.10)$$

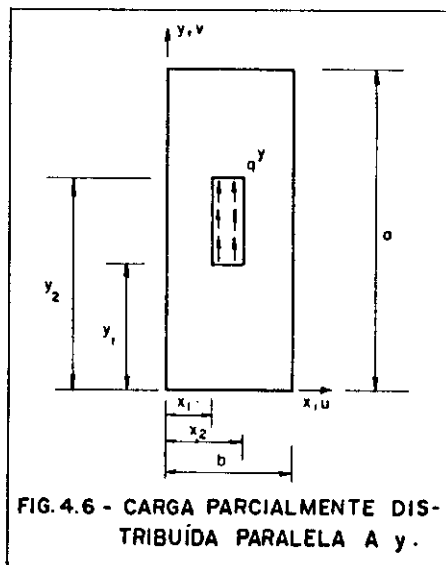


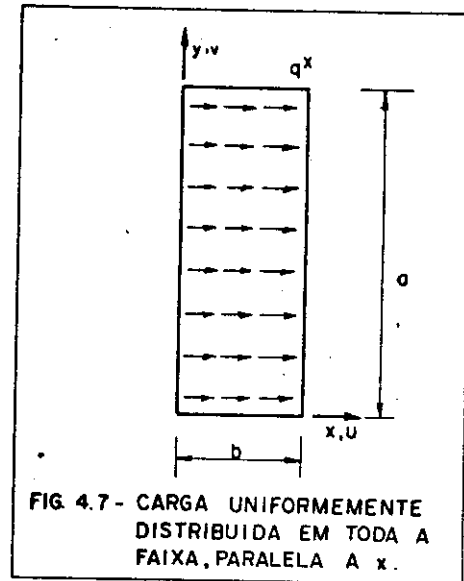
FIG. 4.6 - CARGA PARCIALMENTE DISTRIBUÍDA PARALELA A y.

onde $S_m = [\sin(\alpha_m y_2) - \sin(\alpha_m y_1)] / \alpha_m$ e $x_o^n = x_2^n - x_1^n$

b) Carga uniformemente distribuída em toda a faixa

Neste caso apenas interessa a direção de carregamento paralelo ao eixo x, pois sendo paralelo ao eixo y, o vetor das cargas torna-se identicamente nulo.

$$\{F\}_m = \begin{Bmatrix} \frac{b}{6} \\ 0 \\ \frac{2b}{3} \\ 0 \\ \frac{b}{6} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot q^x \cdot \frac{[1 - (-1)^m]}{\alpha_m} \dots (4.11)$$

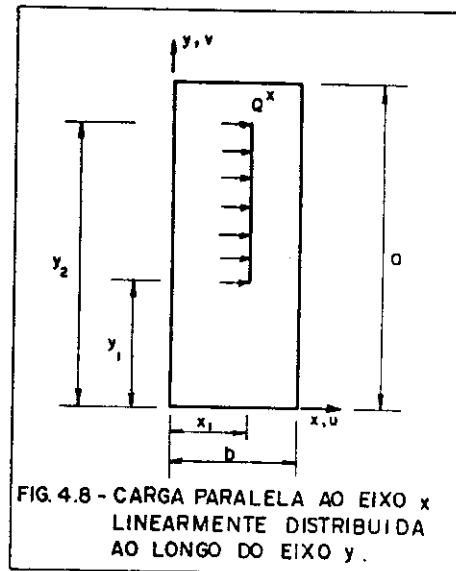


c) Carga linearmente distribuída

c.1) Distribuição ao longo de um segmento de reta paralelo ao eixo y

Carregamento paralelo ao eixo x

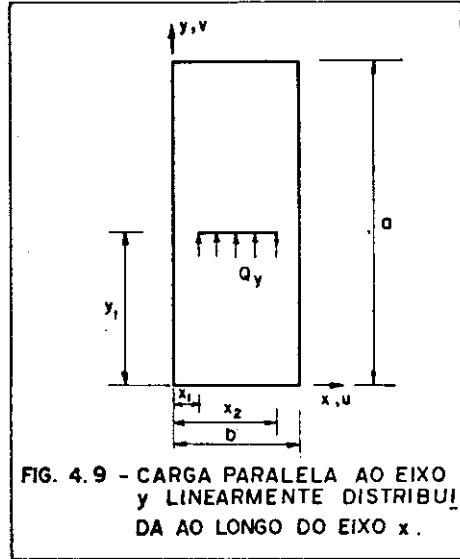
$$\{F\}_m = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{3x_1}{b} + \frac{2x_1^2}{b^2} \\ 0 \\ \frac{4x_1}{b} - \frac{4x_1^2}{b^2} \\ 0 \\ -\frac{x_1}{b} + \frac{2x_1^2}{b^2} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot Q^x \cdot C_m \dots (4.12)$$



c.2) Distribuição ao longo de um segmento de reta paralelo ao eixo x

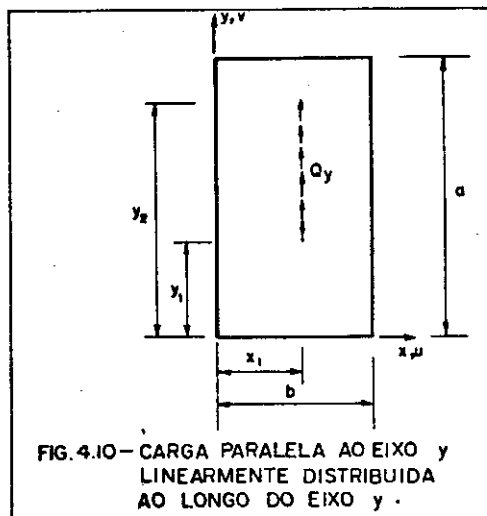
Carregamento paralelo ao eixo y

$$\{F\}_m = \begin{Bmatrix} 0 \\ x_o^2 - \frac{3x_o^2}{2b} + \frac{2x_o^3}{3b^2} \\ 0 \\ \frac{2x_o^2}{b} - \frac{4x_o^3}{3b^2} \\ 0 \\ -\frac{x_o^2}{2b} + \frac{2x_o^3}{3b^2} \end{Bmatrix} \cdot Q^y \cdot \cos(\alpha_m y_1) \dots (4.13)$$



c.3) Distribuição ao longo de um segmento de reta paralelo ao eixo y
 Carregamento paralelo ao eixo y

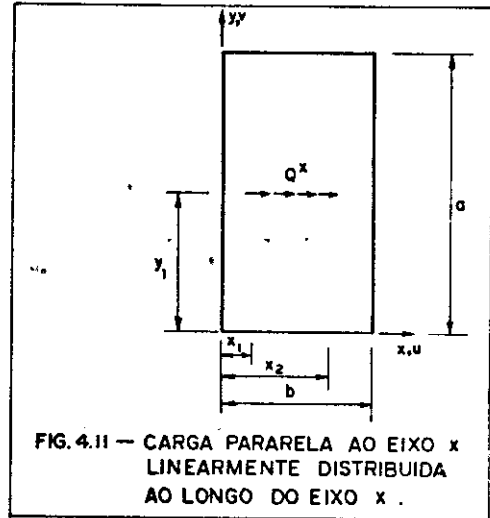
$$\{F\}_m = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{3x_1}{b} + \frac{2x_1^2}{b^2} \\ 0 \\ \frac{4x_1}{b} - \frac{4x_1^2}{b^2} \\ 0 \\ -\frac{x_1}{b} + \frac{2x_1^2}{b^2} \end{Bmatrix} \cdot Q^y \cdot S_m \dots (4.14)$$



c.4) Distribuição ao longo de um segmento de reta paralelo ao eixo x

Carregamento paralelo ao eixo x

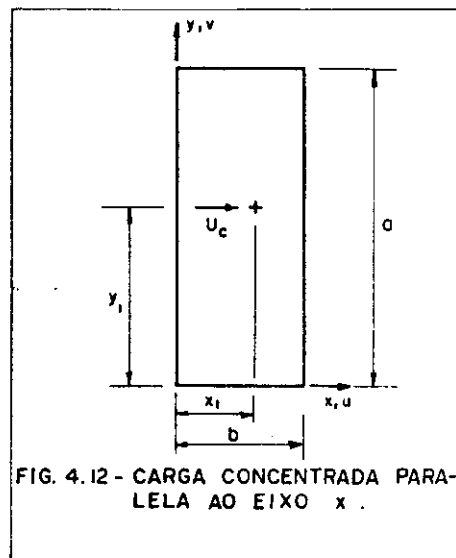
$$\{F\}_m = \begin{Bmatrix} x_o - \frac{3x_o^2}{2b} + \frac{2x_o^3}{3b^2} \\ 0 \\ \frac{2x_o^2}{b} - \frac{4x_o^3}{3b^2} \\ 0 \\ -\frac{x_o^2}{2b} + \frac{2x_o^3}{3b^2} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot Q^x \cdot \text{sen}(\alpha_m y_1) \quad \dots (4.15)$$



d) Carga concentrada

d.1) Paralela ao eixo x

$$\{F\}_m = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{3x_1}{b} + \frac{2x_1^2}{b^2} \\ 0 \\ \frac{4x_1}{b} - \frac{4x_1^2}{b^2} \\ 0 \\ -\frac{x_1}{b} + \frac{2x_1^2}{b^2} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot U_c \cdot \text{sen}(\alpha_m y_1) \quad \dots (4.16)$$



d.2) Paralela ao eixo y

$$\{F\}_m = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 - \frac{3x_1}{b} + \frac{2x_1^2}{b^2} \\ 0 \\ \frac{4x_1}{b} - \frac{4x_1^2}{b^2} \\ 0 \\ -\frac{x_1}{b} + \frac{2x_1^2}{b^2} \end{array} \right\} \cdot V_c \cdot \cos(\alpha_m y_1)$$

.... (4.17)

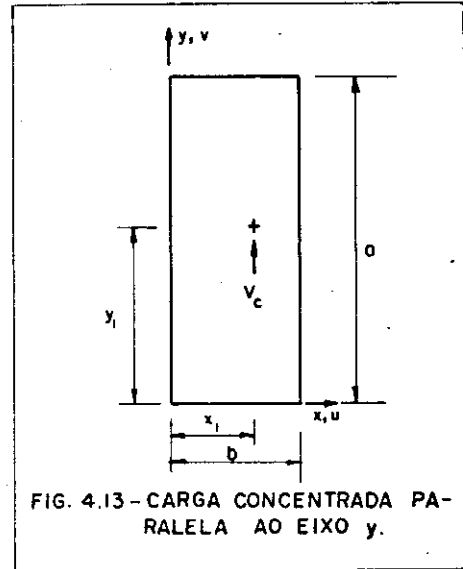


FIG. 4.13 - CARGA CONCENTRADA PARALELA AO EIXO y.

ANEXO

```

* ** JOB JNM=ETCA1FF,CLASS=4,PRI=9,USER=MARCIO CORREA
// JOB CURREA
// OPTION LINK,LOG
// ASSGN SYSCLB,DISK,PERM,VOL=AREAF4,SHR
// EXEC FFORTRAN
C-----PROGRAMA PRINCIPAL
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
PROGRAMA MEFAF PARA O CALCULO DE ESTRUTURAS RETAS
PRISMA* TICAS, PELO ME* TUDO DAS FAIXAS FINITAS.
A ESTRUTURA DEVE SER APUIADA EM SEUS EXTREMOS.

ANEXO *A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
MA*RCIO ROBERTO SILVA CORREIA
DEPTO DE ESTRUTURAS DA E.E.S.C.-U.S.P.
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
IMPLICIT REAL*8 A-H,O-Z)
REAL*8 MTEIA
COMMON A,EX,EY,G,PX,PY,GAMA,E1,E2,PI,EMEP1,ALFAM,ALFAM2,ALFAM3,ALF
*AM4,SM,CM,ESP,B,C,S,BB,UBB,AX,BY,CX,DX,DY,DXY,J1,HXY,NHARM,NFAIXA
*,NLN,NSAIDA,NHARSA,LBANDA,N,M,N1,N2,IMP,LEK
COMMON/B/X(4),Z(40),H(40),YSAIDA(10),LNI(40),LNF(40)
COMMON/C/GFAIXA(150),UC(16),VC(16),YC(16),WC(16),XC(16),QX(12),QZ(
*12),Y1(12),Y2(12),MTEIA(5),YMI(5),YM2(5),ICTDIS(40),NCPDIS(40),NCC
*ONC(40),NCLDIS(40),NCLLN,NCLLN,NMDLN,LNCARC(12),LNCARD(12),LYMOMD(
*5)
COMMON/D/RIGLO(160,16),VEGLO(160)
COMMON/E/DA(40,10),DB(40,10),DC(40,10),DD(40,10)
DEFINE FILE 5(12*0,416,L,JJAG)
DEFINE FILE 6(100,1920,L,IDAG)
LEK=1
IMP=3
*WRITE(IMP,1000)
1000 FORMAT(' DADOS DO PROBLEMA')
READ(LEK,2000) NHARM,NFAIXA,NLN,NSAIDA,NHARSA,LBANDA,A,IHARM
*WRITE(IMP,1001)NHARM,NFAIXA,NLN,NSAIDA,NHARSA,LBANDA,A,IHARM
2000 FORMAT(6G10,G10.5,G2)
1001 FORMAT(' HARMONICOS =',G3,' FAIXAS =',G3,' LINHAS NODAIS =',G
*3,' SAIDAS =',G3,' HARM. DE SAIDA =',G3,' BANDA =',G3,
*/' COMPRIMENTO DA ESTRUTURA =',G10.5,' IHARM =',G3)
READ(LEK,2002) (YSAIDA(I),I=1,NSAIDA)
WRITE(IMP,1002) (YSAIDA(I),I=1,NSAIDA)
2002 FORMAT(8G10.5)
1002 FORMAT(' ORDENADAS DAS SAIDAS '/1X,8G10.5)
*WRITE(IMP,1003)
1003 FORMAT(' ORDENADAS DAS LINHAS NODAIS '/' I',5X,'X(I)',8X,
*2 I)')
DO 500 I=1,NLN
READ(LEK,2003) X(I),Z(I)
2003 FORMAT(2G10.5)
500 *WRITE(IMP,1004)I,X(I),Z(I)
1004 FORMAT /G3,5X,2G12.5)
*WRITE(IMP,1005)
1005 FORMAT(' FAIXA',5X,' L N INICIAL',9X,' L N FINAL',9X,' ESPESSURA'
*)
DO 501 I=1,NFAIXA
READ(LEK,2004)LNI(I),LNF(I),H(I)
2004 FORMAT(2G10,G10.5)
501 *WRITE(IMP,1006)I,LNI(I),LNF(I),H(I)
1006 FORMAT(/G4,10X,G4,16X,G4,10X,G10.5)
READ(LEK,2005) EX,EY,G,PX,PY,GAMA
WRITE(IMP,1007) EX,EY,G,PX,PY,GAMA
2005 FORMAT(3G15.7,3G10.7)
1007 FORMAT(' EX =',G15.7,' EY =',G15.7,' G =',G15.7/' PX =',
*G15.7,' PY =',G15.7,' GAMA =',G15.7)
IAUX=1
DO 502 I=1,NFAIXA
READ(LEK,2005) ICTDIS(I),NCPDIS(I),NCLDIS(I),NCCONC(I)
2006 FORMAT(8G10)
*WRITE(IMP,1008)I
1008 FORMAT(' FAIXA',G4)
WRITE(IMP,1009) ICTDIS(I),NCPDIS(I),NCLDIS(I),NCCONC(I)
1009 FORMAT(' IND. CARGA DIST. =',G3,
* NUM. CARGAS PARC. DIST. =',G4/' NUM. CARGAS LIN. DIST. =',G3,
* NUM. CARGAS CONC. =',G3)

```

```
J AUX=IAUX+1
IF (ICDIS(I).GT.0) GOTO 1
JFAIXA(IAUX)=0.
JFAIXA IAUX)=0.
GOTO 2
1 READ(LER,2007) JFAIXA(IAUX),QFAIXA J AUX)
2007 FORMAT(2G10.5)
WRITE(IMP,1010) JFAIXA(IAUX),QFAIXA(JAUX)
1010 FORMAT(//' JX =' ,G10.5,' QZ =' ,G10.5)
2 IAUX=JAUX+1
IF (NCPDIS(I).LE.0) GOTO 3
JAUX1=NCPDIS(I)
DO 503 J=1,JAUX1
JAUX=IAUX+6
READ(LER,2008) (QFAIXA(K),K=IAUX,JAUX)
2008 FORMAT(8G10.5)
WRITE(IMP,1011) (QFAIXA(K),K=IAUX,JAUX)
1011 FORMAT(//' JPX =' ,G10.5,' QPY =' ,G10.5,' QPZ =' ,G10.5/' X1 ='
*,G10.5,' X2 =' ,G10.5,' Y1 =' ,G10.5,' Y2 =' ,G10.5)
503 IAUX=JAUX+1
3 CONTINUE
IF (NCLDIS(I).LE.0) GOTO 4
JAUX1=NCLDIS(I)
DO 504 J=1,JAUX1
JAUX=IAUX+7
READ(LER,2009) (QFAIXA(K),K=IAUX,JAUX)
2009 FORMAT(8G10.5)
WRITE(IMP,1012) (QFAIXA(K),K=IAUX,JAUX)
1012 FORMAT(//' J LX =' ,G10.5,' QLY =' ,G10.5,' QLZ =' ,G10.5/' X1 =' ,
*,G10.5,' X2 =' ,G10.5,' Y1 =' ,G10.5,' Y2 =' ,G10.5,' IND =' ,G10.5
*)
504 IAUX=JAUX+1
4 CONTINUE
IF (NCCONC(I).LE.0) GOTO 502
JAUX1=NCCONC(I)
DO 505 J=1,JAUX1
JAUX=IAUX+4
READ(LER,2010) (QFAIXA(K),K=IAUX,JAUX)
WRITE(IMP,1013) (QFAIXA(K),K=IAUX,JAUX)
2010 FORMAT(8G10.5)
1013 FORMAT(//' J CX =' ,G10.5,' QCY =' ,G10.5,' QCZ =' ,G10.5/' X =' ,
*,G10.5,' Y =' ,G10.5)
505 IAUX=JAUX+1
502 CONTINUE
READ(LER,2011) NCCLN,NCDLN,NMDLN
WRITE(IMP,1014) NCCLN,NCDLN,NMDLN
2011 FORMAT(8G10.5)
1014 FORMAT(//' CARGAS NAS LINHAS NODAIS/' CONCENTRADAS =' ,G3,' DIS
*TRIBUIDAS =' ,G3,' MOMENTOS DISTRIBUIDOS =' ,G3)
IF (NCCLN.LE.0) GOTO 5
C-----CARGAS NAS LINHAS NODAIS REFERIDAS AO SISTEMA GLOBAL
DO 506 J=1,NCCLN
READ(LER,2012) LNCARC(J),UC(J),VC(J),WC(J),YC(J)
506 WRITE(IMP,1015) LNCARC(J),UC(J),VC(J),WC(J),YC(J)
2012 FORMAT(G10.5,G10.5)
1015 FORMAT(//' LN =' ,G3,' UC =' ,G10.5,' VC =' ,G10.5,' WC =' ,G10.5
*,YC =' ,G10.5)
5 CONTINUE
IF (NCDLN.LE.0) GOTO 6
DO 507 J=1,NCDLN
READ(LER,2012) LNCARD(J),QX(J),QZ(J),Y1(J),Y2(J)
507 WRITE(IMP,1016) LNCARD(J),QX(J),QZ(J),Y1(J),Y2(J)
1016 FORMAT(//' LN =' ,G3,' QX =' ,G10.5,' QZ =' ,G10.5,' Y1 =' ,G10.5,
*,Y2 =' ,G10.5)
6 CONTINUE
IF (NMDLN.LE.0) GOTO 7
DO 508 J=1,NMDLN
READ(LER,2012) LNMOMD(J),MTETA(J),YM1(J),YM2(J)
508 WRITE(IMP,1017) LNMOMD(J),MTETA(J),YM1(J),YM2(J)
1017 FORMAT(//' LN =' ,G3,' M =' ,G10.5,' Y1 =' ,G10.5,' Y2 =' ,G10.5)
7 CONTINUE
C-----FIM DA ENTRADA DE DADOS
8 E1=EX/(1-PX*PY)
E2=E1*EY/EX
PI=3.141592654
N=4*NLN
```

```
1020 WRITE(IMP,1)20)
C-----FORMAT(/////2DX,'RESULTADOS DO PROBLEMA')
LACO EM NUMERO DE HARMONICOS
IHARM=1;IHARM=1
DO 510 M=1,NHARM,IHARM
  EMEPI=M*PI
  ALFAM=EMEP/ZA
  ALFAM2=ALFAM *ALFAM
  ALFAM3=ALFAM2*ALFAM
  ALFAM4=ALFAM2*ALFAM2
  SM=DSIN(EMEP)
  CM=DCOS(EMEP)
  DO 511 I=1,N
    VEGLO(I)=0.
  DO 511 J=1,LBANDA
    511 RIGLO(I,J)=0.
  IAUX=1
C-----LACO EM NUMERO DE FAIXAS
DO 512 I=1,NFAIXA
  N1=LN1(I)
  N2=LN2(I)
  ESP=H(I)
  XF=X(N2)-X(N1)
  ZF=Z(N2)-Z(N1)
  B=DSQRT(XF*XF+ZF*ZF)
  C=XF/B
  S=ZF/B
  BB=B*B
  BUB=BB*B
  AX=E1*ESP
  BY=E2*ESP
  CX=PX*AX*ESP
  DX=AX*ESP*ESP/12.
  DY=DX*EY/EX
  DXY=G*ESP*ESP*ESP/12.
  DI=PX*DX*EY/EX
  HXY=D1+2.*DXY
  CALL MONTA(IAUX,I)
  CALL ESFIN(I)
  512 CONTINUE
C-----LACO EM NUMERO DE CARGAS CONCENTRADAS NAS LINHAS NODAIS
DO 513 J=1,NCCLN
  JM=LNCARC(J)*4-3
  AUX=ALFAM*YC(J)
  AUX1=DSIN(AJX)
  VEGLO(JM)=VEGLO(JM)+UC(J)*AUX1
  VEGLO(JM+1)=VEGLO(JM+1)+VC(J)*DCOS(AUX)
  513 VEGLO(JM+2)=VEGLO(JM+2)+WC(J)*AUX1
C-----LACO EM NUMERO DE CARGAS DISTRIBUIDAS NAS LINHAS NODAIS
DO 514 J=1,NCCLN
  JM=LNCARD(J)*4-3
  AUX1=ALFAM*Y1(J)
  AUX2=ALFAM*Y2(J)
  AUX=(DCOS(AJX1)-DCOS(AUX2))/ALFAM
  VEGLO(JM)=VEGLO(JM)+QX(J)*AUX
  514 VEGLO(JM+2)=VEGLO(JM+2)+QZ(J)*AUX
C-----LACO EM NUMERO DE MOMENTOS DISTRIBUIDOS NAS LINHAS NODAIS
DO 515 J=1,NMDLN
  JM=LNMOMD(J)*4
  AUX1=ALFAM*YM1(J)
  AUX2=ALFAM*YM2(J)
  AUX=(DCOS(AJX1)-DCOS(AUX2))/ALFAM
  515 VEGLO(JM)=VEGLO(JM)+MTETA(J)*AUX
  CALL DECOM(RIGLO,N,LBANDA)
  CALL SOLVE(RIGLO,VEGLO,N,LBANDA)
  15 CONTINUE
  CALL RESULT
  510 CONTINUE
  CALL EXIT
  END
C-----SUBROUTINE RESULT
CALCULA E IMPRIME ESFORÇOS INTERNOS E DESLOCAMENTOS
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 MOM(3,6),MX(10,3),MY(10,3),MXY(10,3)
REAL*8 VX(10,3),VY(10,3),TX(10,3),TY(10,3),TXY(10,3)
```

```
COMMON A,EX,EY,G,PX,PY,GAMA,E1,E2,PI,EMEP1,ALFAM,ALFAM2,ALFAM3,ALF
*AM4,SM,CM,ESP,B,C,S,BB,BBB,AX,BY,CX,DX,DY,UXY,J1,HXY,NHARM,NFAIXA
*,NLN,NSAIDA,NHARSA,LBANDA,N,M,N1,N2,IMP,LER
COMMON/B/X(40),Z(40),H(40),YSAIDA(10),LNI(40),LNF(40)
COMMON/D/RIGLU(160,16),VEGLU(160)
COMMON/E/DA(40,10),DB(40,10),DC(40,10),DD(40,10)
DIMENSION R2(12),RP(12),T(4,4),DELTAC(6),DELTAP(6),TEN(3,6),COR(2,
*6),D(4,4),FC(6),FP(6),TD(4,1)
MAUX=NHARSA-M+1
IF(MAUX.GE.0) GO TO 2999
WRITE IMP,1321)M
1021 FORMAT(///10X,'**** HARMONICO DA SERIE =',G3,'****')
2999 GO 5 LK=1,NFAIXA
IDAG=LK
IF(MAUX.GE.0) GO TO 3000
WRITE IMP,1322)LK
1022 FURMAT(//5X,'*FAIXA',G4,'*')
3000 CONTINUE
JDAG=LK+(LK-1)*3*NSAIDA
READ(5*JDAG)RC,RP,T,FC,FP
T(3,1)=-1/3,1)
T(1,3)=-T(1,3)
IF(M.LE.1) GO TO 10
READ(6*IDAG)((4X(II,JJ),MY(II,JJ),MXY(II,JJ),VX(II,JJ),VY(II,JJ)
*,TX(II,JJ),TY(II,JJ),TXY(II,JJ)),II=1,NSAIDA),JJ=1,3)
IDAG=LK
10 CONTINUE
C-----CALCULO DOS PARAMETROS DE DESLOCAMENTOS REFERIDOS AO SISTEMA L3CAL
DO 2 LL=1,2
I=4*(LNI(LK)*(2-LL)+LNF(LK)*(LL-1))-4
DO 3 J=1,4
K=1+J
3 D(J,1)=VEGLJ(K)
CALL TXDET,D,TD,4,4,1)
JAUX=4*LL-3
JAUX1=JAUX+1
DELTAC(JAUX1)=TD(1,1)
DELTAC(JAUX1)=TD(2,1)
DELTAP(JAUX1)=TD(3,1)
DELTAP(JAUX1)=TD(4,1)
2 CONTINUE
DELTAC(3)=(FC(3)-RC(3)*DELTAC(1)-RC(8)*DELTAC(2)-RC(3)*DELTAC(5)
*+RC(8)*DELTAC(6))/RC(11)
DELTAC(4)=(FC(4)-RC(4)*DELTAC(1)-RC(9)*DELTAC(2)+RC(4)*DELTAC(5)
*-RC(9)*DELTAC(6))/RC(12)
DELTAP(3)=(FP(3)-RP(3)*DELTAP(1)-RP(8)*DELTAP(2)-RP(3)*DELTAP(5)
*+RP(8)*DELTAP(6))/RP(11)
DELTAP(4)=(FP(4)-RP(4)*DELTAP(1)-RP(9)*DELTAP(2)+RP(4)*DELTAP(5)
*-RP(9)*DELTAP(6))/RP(12)
DO 1 MM=1,NSAIDA
IF MAUX.GE.0) GO TO 3001
WRITE(IMP,1323)MM
1023 FORMAT(/' SAIDA',G4)
3001 CONTINUE
DO 1 LL=1,3
IF MAUX.GE.0) GO TO 3002
WRITE(IMP,1324)LL
1024 FURMAT(/' LINHA NODAL',G2)
3002 CONTINUE
JDAG=LK+(LK-1)*3*NSAIDA+(MM-1)*3+LL
READ 5*JDAG)MOM,COR,TEN
IF(M.GT.1) GO TO 4
MX(MM,LL)=0.
MY(MM,LL)=0.
MXY(MM,LL)=0.
VX(MM,LL)=0.
VY(MM,LL)=0.
TX(MM,LL)=0.
TY(MM,LL)=0.
TXY(MM,LL)=0.
4 CONTINUE
DO 6 J=1,6
MX(MM,LL)=MOM(1,J)*DELTAP(J)+MX(MM,LL)
MY(MM,LL)=MOM(2,J)*DELTAP(J)+MY(MM,LL)
MXY(MM,LL)=MOM(3,J)*DELTAP(J)+MXY(MM,LL)
VX(MM,LL)=COR(1,J)*DELTAP(J)+VX(MM,LL)
```

```
VY(MM,LL)=COR(2,J)*DELTAP(J)+VY(MM,LL)
TX(MM,LL)=TEN(1,J)*DELTAC(J)+TX(MM,LL)
TY(MM,LL)=TEN(2,J)*DELTAC(J)+TY(MM,LL)
TXY(MM,LL)=TEN(3,J)*DELTAC(J)+TXY(MM,LL)
6 CONTINUE
IF(MAUX.GE.J) GO TO 1
WRITE IMP,1325)MX(MM,LL),MY(MM,LL),MXY(MM,LL),VX(MM,LL),VY(MM,LL),
*TX(MM,LL),TY(MM,LL),IXY(MM,LL)
1025 FORMAT(/' MX=',G15.5,' MY=',G15.5,' MXY=',G15.5,' VX=',G15.5,
*' VY=',G15.5//' TX=',G15.5,' TY=',G15.5,' TXY=',G15.5)
1 CONTINUE
WRITE 6'DAG) MX(II,JJ),MY(II,JJ),MXY(II,JJ),VX(II,JJ),VY(II,JJ)
*,TX(II,JJ),TY(II,JJ),IXY(II,JJ)),II=1,NSAIDA),JJ=1,3)
5 CONTINUE
DO 7 MM=1,NSAIDA
IF(MAUX.GE.J) GO TO 3003
WRITE IMP,1326)MM
1026 FORMAT(/' DESLOCAMENTOS NA SAIDA',G3)
3003 CONTINUE
DO 7 J=1,NLV
IAUX=4*(J-1)
AUX=ALFAM*YSAIDA(MM)
AUX1=DSIN(AUX)
AUX2=DCOS(AUX)
IF(M.GT.1) GOTO 8
DA(J,MM)=0.
DB(J,MM)=0.
DC(J,MM)=0.
DD(J,MM)=0.
8 DA(J,MM)=DA(J,MM)+VEGLO(IAUX+1)*AUX1
DB(J,MM)=DB(J,MM)+VEGLO(IAUX+2)*AUX2
DC(J,MM)=DC(J,MM)+VEGLO(IAUX+3)*AUX1
DD(J,MM)=DD(J,MM)+VEGLO(IAUX+4)*AUX1
IF(MAUX.GE.Q) GO TO 7
WRITE(IMP,1207)J,DA(J,MM),DB(J,MM),DC(J,MM),DD(J,MM)
1207 FORMAT(/' LINHA NODAL',G3,' U=',G20.7,' V=',G20.7/18X,' W =
*' ,G20.7,' TETA =',G20.7)
*7 CONTINUE
GOTO 20
6000 WRITE(IMP,5017)
5017 FORMAT(/' PROBLEMA NA LEITURA DO ARQ-6')
STOP
20 CONTINUE
RETURN
END
```

```
C----- SUBROUTINE ESFIN(JF)
CALCULA AS MATRIZES DOS ESFORÇOS INTERNOS
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON A,EX,EY,G,PX,PY,GAMA,E1,E2,PI,EMEP1,ALFAM,ALFAM2,ALFAM3,ALF
*AM4,SM,CM,E3P,B,,S,BB,BBB,AX,BY,CX,DX,DY,DXY,J1,HXY,NHARM,NFAIXA
*,NLN,NSAIDA,NHAKSA,LBANDA,N,M,N1,N2,IMP,LER
COMMON/8/X(40),Z(40),H(40),YSAIDA(10),LNI(40),LNF(40)
DIMENSION D(3,6),EC(4,6),BM(3,6)
REAL*8 MUM(3,6),COR(2,6),TEN(3,6)
DO 1 I=1,NSAIDA
AUX=YSAIDA(I)*ALFAM
Y=DSIN(AUX)
YL=ALFAM*DCOS(AUX)
YLL=-ALFAM2*Y
YLLL=-ALFAM2*YL
YLC=-ALFAM*Y
YCC=DCOS(AUX)
DO 1 LL=1,3
X1=.5*(LL-1.)
X2=X1*X1
X3=X2*X1
X4=X2*X2
X5=X4*X1
D(1,1)=-(-46.+396.*X1-816.*X2+480.*X3)/BB*Y
D(1,2)=-(-12.+78.*X1-144.*X2+80.*X3)/B*Y
D(1,3)=-32.-192.*X1+192.*X2)/BB*Y
D(1,4)=-(-16.+192.*X1-480.*X2+320.*X3)/B*Y
J(1,5)=-(-14.-204.*X1+624.*X2-480.*X3)/BB*Y
J(1,6)=-(-2.+30.*X1-96.*X2+80.*X3)/B*Y
D(2,1)=-(-1.-23.*X2+66.*X3-68.*X4+24.*X5)*YLL
```

```
D(2,2)=- (X1-0.*X2+13.*X3-12.*X4+4.*X5)*B*YLL
D(2,3)=- (16.*X2-32.*X3+16.*X4)*YLL
D(2,4)=- (-8.*X2+32.*X3-40.*X4+16.*X5)*B*YLL
D(2,5)=- (-7.*X2-34.*X3+52.*X4-24.*X5)*YLL
D(2,6)=- (-X2+5.*X3-8.*X4+4.*X5)*B*YLL
D(3,1)=2.*(-46.*X1+198.*X2-272.*X3+120.*X4)/B*YL
D(3,2)=2.*(1.-12.*X1+39.*X2-48.*X3+20.*X4)*YL
D(3,3)=2.*32.*X1-96.*X2+64.*X3)/B*YL
D(3,4)=2.*(-16.*X1+96.*X2-160.*X3+80.*X4)*YL
D(3,5)=2.*(14.*X1-102.*X2+208.*X3-120.*X4)/B*YL
D(3,6)=2.*(-2.*X1+15.*X2-32.*X3+20.*X4)*YL
EC(1,1)=(396.-1632.*X1+1440.*X2)/BBB*Y
EC(1,2)=78.-288.*X1+240.*X2)/BB*Y
EC(1,3)=(-192.+384.*X1)/BBB*Y
EC(1,4)=(-192.-960.*X1+960.*X2)/BB*Y
EC(1,5)=(-204.+1248.*X1-1440.*X2)/BBB*Y
EC(1,6)=(30.-192.*X1+240.*X2)/BB*Y
EC(2,1)=1.-23.*X2+66.*X3-68.*X4+24.*X5)*YLLL
EC(2,2)=(X1-6.*X2+13.*X3-12.*X4+4.*X5)*B*YLLL
EC(2,3)=(15.*X2-32.*X3+16.*X4)*YLLL
EC(2,4)=(-8.*X2+32.*X3-40.*X4+16.*X5)*B*YLLL
EC(2,5)=(7.*X2-34.*X3+52.*X4-24.*X5)*YLLL
EC(2,6)=(-X2+5.*X3-8.*X4+4.*X5)*B*YLLL
EC(3,1)=(-46.*X1+198.*X2-272.*X3+120.*X4)/B*YLL
EC(3,2)=(1.-12.*X1+39.*X2-48.*X3+20.*X4)*YLL
EC(3,3)=(32.*X1-96.*X2+64.*X3)/B*YLL
EC(3,4)=(-16.*X1+96.*X2-160.*X3+80.*X4)*YLL
EC(3,5)=(14.*X1-102.*X2+208.*X3-120.*X4)/B*YLL
EC(3,6)=(-2.*X1+15.*X2-32.*X3+20.*X4)*YLL
EC(4,1)=(-46.+396.*X1-816.*X2+480.*X3)/BB*YL
EC(4,2)=(-12.+78.*X1-144.*X2+80.*X3)/B*YL
EC(4,3)=(32.-192.*X1+192.*X2)/BB*YL
EC(4,4)=(-16.+192.*X1-480.*X2+320.*X3)/B*YL
EC(4,5)=(16.-204.*X1+624.*X2-480.*X3)/BB*YL
EC(4,6)=(-2.+30.*X1-96.*X2+80.*X3)/B*YL
BM(1,1)=(-3.+4.*X1)/B*Y
BM(1,2)=0.
BM(1,3)=4.-8.*X1)/B*Y
BM(1,4)=0.
BM(1,5)=(-1.+4.*X1)/B*Y
BM(1,6)=0.
BM(2,1)=0.
BM(2,2)=1.-3.*X1+2.*X2)*YLC
BM(2,3)=0.
BM(2,4)=(4.*X1-4.*X2)*YLC
BM(2,5)=0.
BM(2,6)=(-X1+2.*X2)*YLC
BM(3,1)=1.-3.*X1+2.*X2)*YL
BM(3,2)=(-3.+4.*X1)/B*YC
BM(3,3)=(4.*X1-4.*X2)*YL
BM(3,4)=(4.-8.*X1)/B*YC
BM(3,5)=(-X1+2.*X2)*YL
BM(3,6)=(-1.+4.*X1)/B*YC
DO 2 J=1,6
MOM(1,J)=DX*D(1,J)+D1*D(2,J)
MOM(2,J)=D1*U(1,J)+DY*D(2,J)
MOM(3,J)=DXY*D(3,J)
COR(1,J)=-DX*EC(1,J)-HXY*EC(3,J)
COR(2,J)=-DY*EC(2,J)-HXY*EC(4,J)
TEN(1,J)=E1*BM(1,J)+PY*E1*BM(2,J)
TEN(2,J)=PX*E2*BM(1,J)+E2*BM(2,J)
TEN(3,J)=G*BM(3,J)
2 CONTINUE
JDAG=JF+(JF-1)*3*NSAIDA+(1-1)*3+LL
WRITE(5,'JDA',MOM,COR,TEN)
1 CONTINUE
KLTUKN
END
```

```
C-----SUBROUTINE VETCAR (FC,FP,IAUX,I)
CALCULO DO VETOR DE CARGAS NODAIS
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 MTEIA
COMMON A,EX,EY,G,PX,PY,GAMA,E1,E2,PI,EMEP1,ALFAM,ALFAM2,ALFAM3,ALF
*AM4,SM,CM,ESP,B,C,S,BB,BBB,AX,BY,CX,DY,DXY,D1,HXY,NHARM,NFAIXA
*,NLN,NSAIDA,NHARSA,LBANDA,N,M,N1,N2,IMP,LER
```

```
COMMON/C/QFAIXA(150),UC(16),VC(16),YC(16),WC(16),XC(16),QX(12),QZ
*12),Y1(12),Y2(12),MTEIA(5),YMI(5),YM2(5),ICTDIS(40),NCPDIS(40),NCC
*NCLN(40),NCLDIS(40),NCLLN,NCLDN,NMCLN,LNCLARC(12),LNCLARD(12),LNMMOMI
*5)
COMMON/D/RIGLO(160,16),VEGLO(160)
DIMENSION FC(6),FP(6)
C-----CARGA TOTALMENTE DISTRIBUIDA
J AUX=IAUX+1
AUX=B* 1.-CM)/ALFAM/60.
AUXC=AUX*(QFAIXA(IAUX)+GAMA*ESP*S)
AUXP=AUX*(QFAIXA(IAUX)+GAMA*ESP*C)
FC(1)=10.*AUXC
FC(2)=0.
FC(3)=40.*AUXC
FC(4)=0.
FC(5)=FC(1)
FC(6)=0.
FP(1)=14.*AUXP
FP(2)=B*AUXP
FP(3)=32.*AUXP
FP(4)=0.
FP(5)=FP(1)
FP(6)=-FP(2)
IAUX=J AUX+1
IF(NCPDIS(1).LE.0) GO TO 2
C-----CARGA PARCIALMENTE DISTRIBUIDA
J AUX1=NCPDIS(1)
DO 1 J=1,JAUX1
AUX1=ALFAM*QFAIXA(IAUX+5)
AUX2=ALFAM*QFAIXA(IAUX+6)
CM1=DCOS(AUX1)/ALFAM
CM2=DCOS(AUX2)/ALFAM
SM1=DSIN(AUX1)/ALFAM
SM2=DSIN(AUX2)/ALFAM
XB1=QFAIXA(IAUX+3)/B
XB2=QFAIXA(IAUX+4)/B
X01=XB2-XB1
X02=XB2*XB2-XB1*XB1
X03=XB2*XB2*XB2-XB1*XB1*XB1
X04=XB2*XB2*XB2*XB2-XB1*XB1*XB1*XB1
X05=XB2*XB2*XB2*XB2*XB2-XB1*XB1*XB1*XB1*XB1
X06=XB2*XB2*XB2*XB2*XB2*XB2-XB1*XB1*XB1*XB1*XB1*XB1
AUXC1=(CM1-CM2)*QFAIXA(IAUX)
AUXC2=SM2-SM1)*QFAIXA(IAUX+1)
AUXP=(CM1-CM2)*QFAIXA(IAUX+2)
AUX=(6.*X01-9.*X02+4.*X03)*B/6.
FC(1)=FC(1)+AUXC1*AUX
FC(2)=FC(2)+AUXC2*AUX
AUX=6.*X02-4.*X03)*B/3.
FC(3)=FC(3)+AUXC1*AUX
FC(4)=FC(4)+AUXC2*AUX
AUX=(3.*X02+4.*X03)*B/6.
FC(5)=FC(5)+AUXC1*AUX
FC(6)=FC(6)+AUXC2*AUX
FP(1)=FP(1)+AUXP*(X01-23.*X03/3.+33.*X04/2.-68.*X05/5.+4.*X06)*3
FP(2)=FP(2)+AUXP*(X02/2.-2.*X03+13.*X04/4.-12.*X05/5.+2.*X06/3.)*3
*B
FP(3)=FP(3)+AUXP*(16.*X03/3.-8.*X04+16.*X05/5.)*3
FP(4)=FP(4)+AUXP*8.*-X03/3.+X04-X05+X06/3.)*3
FP(5)=FP(5)+AUXP*(7.*X03/3.-17.*X04/2.+52.*X05/5.-4.*X06)*3
FP(6)=FP(6)+AUXP*(-X03/3.+5.*X04/4.-8.*X05/5.+2.*X06/3.)*3
IAUX=IAUX+7
1 CONTINUE
2 CONTINUE
C-----CARGA LINEARMENTE DISTRIBUIDA
IF(NCLDIS(1).LE.0) GO TO 3
J AUX1=NCLDIS(1)
DO 4 J=1,JAUX1
INDIC=QFAIXA(IAUX+7)+0.001
IF(INDIC.LE.0) GO TO 5
C-----LINHA DE DISTRIBUICAO PARALELA A Y INDIC=1)
AUX1=ALFAM*QFAIXA(IAUX+5)
AUX2=ALFAM*QFAIXA(IAUX+6)
CM1=DCOS(AUX1)/ALFAM
CM2=DCOS(AUX2)/ALFAM
XB1=QFAIXA(IAUX+3)/B
```



```
XB2=XB1*XB1
XB3=XB1*XB1*XB1
XB4=XB2*XB2
XB5=XB4*XB1
AUXC=(CM1-CM2)*QFAIXA(IAUX)
AUXP=(CM1-CM2)*QFAIXA(IAUX+2)
FC(1)=FC(1)+AJXC*(1.-3.*XB1+2.*XB2)
FC(3)=FC(3)+AJXC*4.*(XB1-XB2)
FC(5)=FC(5)+AJXC*(-XB1+2.*XB2)
FP(1)=FP(1)+AUXP*1.-23.*XB2+66.*XB3-68.*XB4+24.*XB5)
FP(2)=FP(2)+AUXP*(XB1-6.*XB2+13.*XB3-12.*XB4+4.*XB5)*B
FP(3)=FP(3)+AUXP*(16.*XB2-32.*XB3+16.*XB4)
FP(4)=FP(4)+AUXP*(-8.*XB2+32.*XB3-40.*XB4+16.*XB5)*B
FP(5)=FP(5)+AUXP*(7.*XB2-34.*XB3+52.*XB4-24.*XB5)
FP(6)=FP(6)+AUXP*(-XB2+5.*XB3-8.*XB4+4.*XB5)*B
GOTO 6
C-----LINHA DE DISTRIBUICAO PARALELA A X INDI=0)
5 AUX1=ALFAM*QFAIXA(IAUX+5)
AUXC=DCUS(AJX1)*QFAIXA(IAUX+1)*B
AUXP=DSIN(AJX1)*QFAIXA(IAUX+2)
XB1=QFAIXA(IAUX+3)/B
XB2=QFAIXA(IAUX+4)/B
X01=XB2-XB1
X02=XB2*XB2-X01*XB1
X03=XB2*XB2*X02-X01*XB1*XB1
X04=XB2*XB2*XB2*XB2-X01*XB1*XB1*XB1
X05=XB2*XB2*XB2*XB2*XB2-X01*XB1*XB1*XB1*XB1
X06=XB2*XB2*XB2*XB2*XB2*XB2-X01*XB1*XB1*XB1*XB1*XB1
FC(2)=FC(2)+AJXC*(X01-1.5*X02+2.*X03/3.)
FC(4)=FC(4)+AJXC*2.*X02-4.*X03/3.)
FC(6)=FC(6)+AJXC*(-X02/2.+2.*X03/3.)
FP(1)=FP(1)+AUXP*(X01-23.*X03/3.+33.*X04/2.-68.*X05/5.+4.*X06)*B
FP(2)=FP(2)+AUXP*(X02/2.-2.*X03+13.*X04/4.-12.*X05/5.+2.*X06/3.)*B
*B
FP(3)=FP(3)+AUXP*16.*X03/3.-8.*X04+16.*X05/5.)*B
FP(4)=FP(4)+AJXP*8.*(-X03/3.+X04-X05+X06/3.)*B
FP(5)=FP(5)+AUXP*(7.*X03/3.-17.*X04/2.+52.*X05/5.-4.*X06)*B
FP(6)=FP(6)+AUXP*(-X03/3.+5.*X04/4.-8.*X05/5.+2.*X06/3.)*B
6 IAUX=IAUX+8
4 CONTINUE
3 CONTINUE
C-----CARGA CONCENTRADA
IF(NLCONC(1).LE.0) GOTO 7
JAUX1=NLCONC(1)
DO 8 J=1,JAUX1
AUX1=ALFAM*QFAIXA(IAUX+4)
AUXP=QFAIXA(IAUX+2)*DSIN(AUX1)
AUXC2=QFAIXA(IAUX+1)*DCUS(AUX1)
AUXC1=QFAIXA(IAUX)*DSIN(AUX1)
XB1=QFAIXA(IAUX+3)/B
XB2=XB1*XB1
XB3=XB2*XB1
XB4=XB2*XB2
XB5=XB4*XB1
AUX=1.-3.*XB1+2.*XB2
FC(1)=FC(1)+AJX*AUXC1
FC(2)=FC(2)+AUX*AUXC2
AUX=4.*XB1-4.*XB2
FC(3)=FC(3)+AJX*AUXC1
FC(4)=FC(4)+AJX*AUXC2
AUX=-XB1+2.*XB2
FC(5)=FC(5)+AUX*AUXC1
FC(6)=FC(6)+AUX*AUXC2
FP(1)=FP(1)+AJXP*(1.-23.*XB2+66.*XB3-68.*XB4+24.*XB5)
FP(2)=FP(2)+AJXP*(XB1-6.*XB2+13.*XB3-12.*XB4+4.*XB5)*B
FP(3)=FP(3)+AUXP*(16.*XB2-32.*XB3+16.*XB4)
FP(4)=FP(4)+AUXP*(-8.*XB2+32.*XB3-40.*XB4+16.*XB5)*B
FP(5)=FP(5)+AUXP*(7.*XB2-34.*XB3+52.*XB4-24.*XB5)
FP(6)=FP(6)+AJXP*(-XB2+5.*XB3-8.*XB4+4.*XB5)*B
8 IAUX=IAUX+5
CONTINUE
7 CONTINUE
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE MONTA(IAUX,I)
C-----MONTA A MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL E OS VETORES DE CARGA PARA CADA
C-----JMA DAS FAIXAS QUE CONSTITUEM A ESTRUTURA
IMPLICIT REAL*8 (A-H,D-Z)
COMMON A,E,EX,EY,G,PX,PY,GAMA,E1,E2,PI,EMEP1,ALFAM,ALFAM2,ALFAM3,ALF
*AM4,SM,CM,EP,B,S,BB,BBB,AX,BY,CX,DX,DY,DXY,J1,HXY,NHARM,NFAIXA
*,NLN,NSAIDA,NHAKSA,LBANDA,N,M,N1,N2,IMP,LER
COMMON/D/RIGLO(160,16),VEGL(160)
DIMENSION RC(12),RP(12),CHAPA(4,4),PLACA(4,4),DF(4,1),D(4,4),T(4,4
*),TD(4,4),FC(6),FP(6)
E3=PX*E1
E4=A/B*ESP
E5=A*B*ALFAM2*ESP
E6=A*ALFAM*ESP
RC(1)=7.*E4*E1/6.+E5*G/15.
RC(2)=(E3-G)*E6/4.
RC(3)=-4.*E4*E1/3.+E5*G/30.
RC(4)=(E3+G)*E6/3.
RC(5)=E4*E1/6.-E5*G/60.
RC(6)=(-E3-G)*E6/12.
RC(7)=L5*E2/15.+7.*E4/6.*G
RC(8)=-RC(4)
RC(9)=E5*E2/30.-4.*E4*G/3.
RC(10)=-E5*E2/60.+E4*G/6.
RC(11)=8.*E4*E1/3.+4.*E5*G/15.
RC(12)=4.*E5*E2/15.+8.*E4*G/3.
CALL DENSA RC,CHAPA)
E3=A*DX/12.*BBB)
E4=A*ALFAM2*DI1/B
E5=A*ALFAM4*DY*B/2.
E6=2.*A*ALFAM2*DX/B
RP(1)=5092.*E3/35.+278.*E4/105.+523.*E5/3465.+278.*E6/105.
RP(2)=1138.*E3*BB/35.+59.*E4*BB/105.+19.*E5*BB/2310.+13.*E6*BB/210.
RP(3)=-512.*E3/5.-256.*E4/105.+4.*E5/63.-256.*E6/105.
RP(4)=384.*E3*B/7.+8.*E4*BB/21.-8.*E5*BB/693.+8.*E6*BB/21.
RP(5)=-1508.*E3/35.-22.*E4/105.+131.*E5/6930.-22.*E6/105.
RP(6)=242.*E3*BB/35.-1.*E4*BB/70.-29.*E5*BB/13860.-E6*BB/70.
RP(7)=332.*E3*BB/35.+2.*E4*BB/45.+2.*E5*BB/3465.+2.*E6*BB/45.
RP(8)=-128.*E3*BB/5.-8.*E4*BB/105.+2.*E5*BB/315.-8.*E6*BB/105.
RP(9)=64.*E3*BB/7.-4.*E4*BB/315.-E5*BB/1155.-4.*E6*BB/315.
RP(10)=38.*E3*BB/35.-E4*BB/126.-E5*BB/4620.-E6*BB/126.
RP(11)=1024.*E3/5.+512.*E4/105.+128.*E5/315.+512.*E6/105.
RP(12)=256.*E3*BB/7.+128.*E4*BB/315.+32.*E5*BB/3465.+128.*E6*BB/31
*5.
CALL DENSA(RP,PLACA)
CALL MATRA(T,C,S)
CALL VETCAR FC,FP,IAUX,I)
JDAG=1+(1-11)*3*NSAIDA
WRITE(5,JDAG)RC,RP,T,FC,FP
CALL FDENSA(FC,RC)
CALL FDENSA(FP,RP)
DO 1 LL=1,2
J1=2*LL-1
J2=J1+1
JJ=N1*(2-LL)+N2*(LL-1)-1
DO 2 KK=1,2
I1=2*KK-1
I2=I1+1
II=N1*(2-KK)+N2*(KK-1)-1
DO 3 K=1,4
DF(K,I)=0.
DO 3 L=1,4
3 D(K,L)=0.
D(1,1)=CHAPA(I1,J1)
D(2,1)=CHAPA(I2,J1)
D(1,2)=CHAPA(I1,J2)
D(2,2)=CHAPA(I2,J2)
D(3,3)=PLACA(I1,J1)
D(4,3)=PLACA(I2,J1)
D(3,4)=PLACA(I1,J2)
D(4,4)=PLACA(I2,J2)
CALL TXD T,D,TD,4,4,4)
CALL DXTT(TD,T,D,4,4,4)
DO 2 IL=1,4
IM=4*IL+1
DO 2 J=1,4
JM=4*JJ+J
```

```

IF(JM.LT.IM) GOTO 2
JAX=JM-IM+1
RIGLO(IM,JAX)=D(IL,J)+RIGLO(IM,JAX)
2 CONTINUE
DF(1,1)=FC(J1)
DF(2,1)=FC(J2)
DF(3,1)=FP(J1)
DF(4,1)=FP(J2)
CALL TXD(T,DF,TD,4,4,1)
DO 4 J=1,4
JM=4*JJ+J
4 VEGLO(JM)=TD(J,1)+VEGLO(JM)
1 CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE TXD(T,D,TD,M,N,P)
C-----PRDUTO MATRICIAL TD(M,P) = T(M,N) X D(N,P)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INTEGER P
DIMENSION T(4,4),D(4,4),TD(4,4)
DO 1 J=1,P
DO 1 I=1,M
TD(I,J)=0.
DO 1 K=1,N
1 TD(I,J)=TD(I,J)+T(I,K)*D(K,J)
RETURN
END

SUBROUTINE DXTI(D,T,DTT,M,N,P)
C-----PRDUTO MATRICIAL COM TRANSPUSICAO DTT(M,P) = D(M,N) X TT(N,P)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INTEGER P
DIMENSION D(4,4),T(4,4),DTT(4,4)
DO 1 J=1,P
DO 1 I=1,M
DTT(I,J)=0.
DO 1 K=1,N
1 DTT(I,J)=DTT(I,J)+D(I,K)*T(J,K)
RETURN
END

SUBROUTINE DENSAIR,RDENSA)
C-----CONDENSA A MATRIZ DE RIGIDEZ DE CADA FAIXA
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION R(12),RDENSA(4,4)
RDENSA(1,1)=R(1)-R(3)*R(3)/R(11)-R(4)*R(4)/R(12)
RDENSA(1,2)=R(2)-R(3)*R(8)/R(11)-R(4)*R(9)/R(12)
RDENSA(1,3)=R(5)-R(3)*R(3)/R(11)+R(4)*R(4)/R(12)
RDENSA(1,4)=R(6)+R(3)*R(8)/R(11)-R(4)*R(9)/R(12)
RDENSA(2,2)=R(7)-R(8)*R(8)/R(11)-R(9)*R(9)/R(12)
RDENSA(2,3)=-R(6)-R(8)*R(3)/R(11)+R(9)*R(4)/R(12)
RDENSA(2,4)=R(10)+R(8)*R(8)/R(11)-R(9)*R(9)/R(12)
RDENSA(3,3)=RDENSA(1,1)
RDENSA(3,4)=-RDENSA(1,2)
RDENSA(4,4)=RDENSA(2,2)
DO 1 I=2,4
JAX=I-1
DO 1 J=1,JAX
1 RDENSA(I,J)=RDENSA(J,I)
RETURN
END

SUBROUTINE MATRA(T,C,S)
C-----CALCULA A MATRIZ DE ROTACAO
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION T(4,4)
DO 1 I=1,4
DO 1 J=1,4
1 T(I,J)=0.
T(1,1)=C
T(2,2)=1.
T(3,1)=S
T(1,3)=-S
T(3,3)=C
T(4,4)=1.

RETURN
END

```

```
C-----SUBROUTINE FDENSA(F,R)
CONDENSA O VETOR DE CARGAS PARA CADA FAIXA
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION F(6),R(12)
AUX1=F(3)/R(11)
AUX2=F(4)/R(12)
F(1)=F(1)-R(3)*AUX1-R(4)*AUX2
F(2)=F(2)-R(8)*AUX1-R(9)*AUX2
F(3)=F(5)-R(3)*AUX1+R(4)*AUX2
F(4)=F(6)+R(8)*AUX1-R(9)*AUX2
RETURN
END
```

```
C-----AS DUAS SUBROTINAS SEGUINTE ( SOLVE E DECOM ) RESOLVEM UM SISTEMA
C-----DE EQUACOES LINEARES PELO METODO DE CHOLESKY. A MATRIZ DO SISTEMA
C-----DEVE SER SIMETRICA,POSITIVA DEFINIDA E TER APENAS A PARTE SUPERIOR
C-----DA BANDA ARMAZENADA COMO MATRIZ RETANGULAR-ACHATAMENTO)
```

```
SUBROUTINE SOLVE(U,B,N,LB)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION B(160),U(160,16)
DO 2 I=1,N
AUX=B(I)
NP=I-LB+1
NQ=I-1
IF (NP-1)1,3,3
1 NP=1
3 IF (NP-NQ)5,5,2
5 DO 4 J=NP,NQ
K=I-J+1
4 AUX=AUX-U(J,K)*B(J)
2 B(I)=AUX*U(I,1)
DO 6 L=1,N
I=N-L+1
AUX=B(I)
NP=I+LB-1
NQ=I+1
IF (NP-N)7,7,9
9 NP=N
7 IF (NQ-NP)11,11,6
11 DO 8 J=NQ,NP
K=J-1+1
8 AUX=AUX-U(I,K)*B(J)
6 B(I)=AUX*U(I,1)
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE DECOM(A,N,LB)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 A,AUX
DIMENSION A(160,16)
DO 2 I=1,N
NP=N-I+1
IF (LB-NP)1,3,3
1 NP=LB
3 DO 2 J=1,NP
AUX=A(I,J)
NQ=LB-J
IF (NQ-I+1)5,5,7
7 NQ=I-1
5 IF (NQ)9,9,12
11 DO 4 K=1,NQ
IK=I-K
JK=J+K
K1=K+1
4 AUX=AUX-A(IK,K1)*A(IK,JK)
9 IF (J-1)13,13,15
13 IF (AUX)17,17,19
19 TEMP=1.0/DSRT(AUX)
A(I,J)=TEMP
GO TO 2
15 A(I,J)=AUX*TEMP
2 CONTINUE
GO TO 6
17 WRITE(3,5020)
5020 FORMAT(//' PROBLEMA NA DECOMPOSICAO DA MATRIZ')
6 RETURN
END
```

```
/*
// ASSGN SYS002,DISK,VOL=AREAF4,SHR
// DLBL UUUT,'ARQ-5',0
// EXTENT SYS002,AREAF4,,,237,97
// EXEC CLKDK
// UCL B=(K=0,D=416),X'00',E=(2314)
// END
// ASSGN SYS003,DISK,VOL=AREAF4,SHR
// DLBL UUUT,'ARQ-6',0
// EXTENT SYS003,AREAF4,,,200,36
// EXEC CLKDK
// UCL B=(K=0,D=1920),X'00',E=(2314)
// END
// EXEC LNKEDT
// DLBL IJSYS02,'ARQ-5',0,SD
// EXTENT SYS002,AREAF4,,,237,97
// DLBL IJSYS03,'ARQ-6',0,SD
// EXTENT SYS003,AREAF4,,,200,36
// EXEC
// INCLUDE DATAF1
/*
/*
/*      EDJ
*END PRINT          864 RECORDS
```

CAPÍTULO 5

EFEITOS COMBINADOS: PLACA E CHAPA - FOLHA PRISMÁTICA

5.1- INTRODUÇÃO

Algumas coberturas são constituídas por um conjunto de lâminas planas adjacentes, conectadas ao longo de suas bordas comuns (arestas). Tais elementos estruturais, denominados folhas poliédricas, são o centro de interesse neste capítulo; com a particularidade geométrica de possuírem as arestas paralelas (estendidas longitudinalmente), passam a se identificar pelo nome de folhas prismáticas. Quando mais de duas lâminas se encontram em bordas comuns, as folhas prismáticas são ditas múltiplas e, caso contrário, simples.

A folha prismática, na grande maioria das vezes, é fechada nos dois extremos longitudinais por diafragmas (ou tímpanos) que lhe servem de suporte, sendo uma aproximação razoável considerá-los infinitamente rígidos em seus próprios planos e perfeitamente flexíveis na direção normal aos mesmos.

Segundo a referência [22] há duas razões importantes para a freqüente utilização das folhas prismáticas: primeiro, elas podem vencer grandes vãos com dispêndio reduzido de material e com trabalho de formas relativamente simples e, segundo, elas têm uma aparência impressionante que freqüentemente atrai o arquiteto.

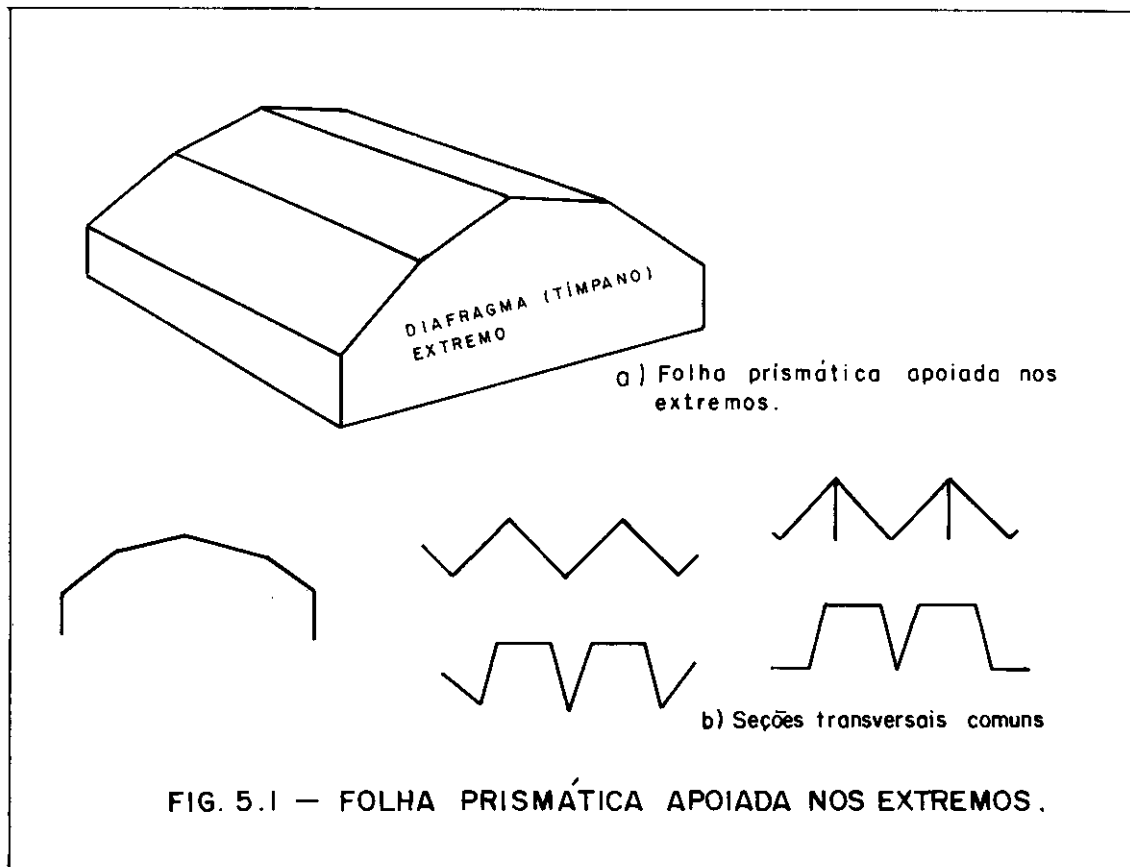


FIG. 5.1 — FOLHA PRISMÁTICA APOIADA NOS EXTREMOS.

5.2 - COMBINAÇÃO DE EFEITOS

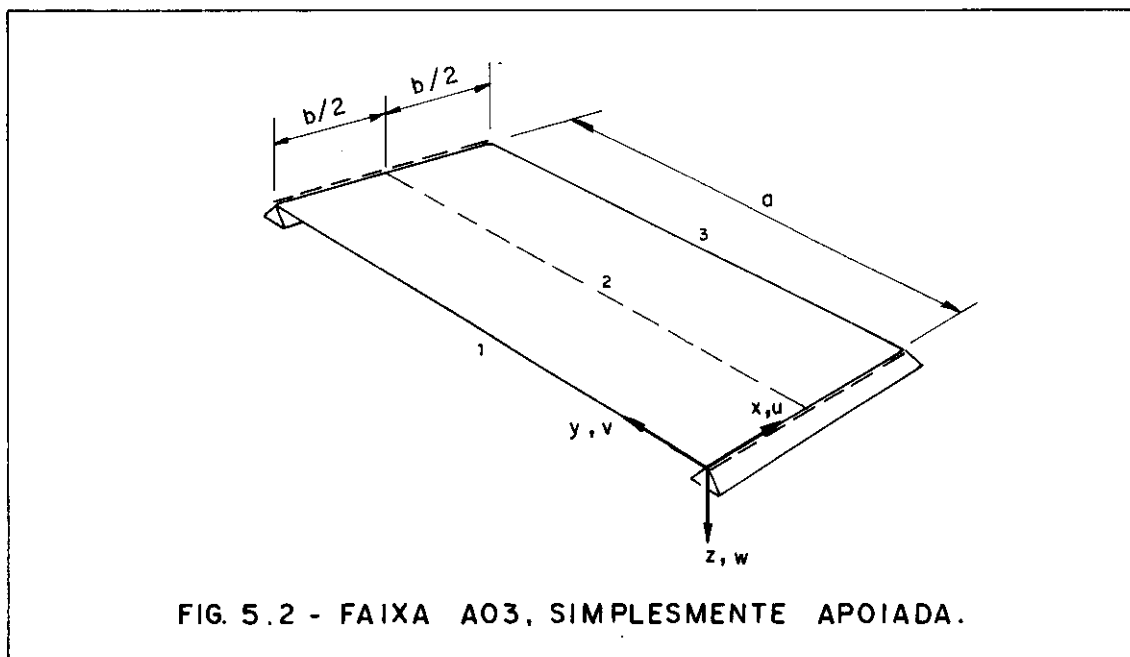
A folha prismática discretizada segundo o esquema apresentado na Fig. 5.1 contém faixas finitas longitudinais que podem ter um comportamento misto, caracterizado pelo funcionamento como placa e chapa. Para pequenos deslocamentos os efeitos de placa e chapa podem ser considerados independentes [23]. Recomenda-se que os ângulos formados por lâminas adjacentes sejam maiores que 15° e menores que 165° , o que evita flechas laterais excessivas, não invalidando assim a possibilidade de superposição [22].

Na análise da estrutura como um todo, tenha-se em mente que deslocamentos nodais que correspondem a efeitos de placa (ou chapa) em uma faixa, podem corresponder a efeitos de chapa (ou placa) em faixa adjacente. A independência realçada no parágrafo anterior, que possibilita a superposição de efeitos em cada faixa, constitui vantagem

apreciável, pois evita todo um novo desenvolvimento de características de uma faixa mista, bastando recolher as considerações apresentadas para os funcionamentos isolados como placa e como chapa (dentro das hipóteses adotadas nos dois últimos capítulos) e promover a combinação adequada.

5.3 - FAIXA ADOTADA

Levando-se em conta o que se apresentou nos itens 5.1 e 5.2, pode-se esquematizar a faixa típica para folhas prismáticas, combinando-se as figuras 3.2 e 4.4.



Esta faixa apresenta quatro graus de liberdade ($GL = 4$) em cada linha nodal que pode, assim, mover-se na direção dos eixos x , y e z (deslocamentos u , v e w , respectivamente) e girar em torno do eixo y (giro θ), perfazendo um total de $12GL$ por faixa.

O vetor dos parâmetros nodais de deslocamento pode ser escrito (para cada harmônico m da série):

$$\{\delta\}_m = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\}_m \\ \{\delta_2\}_m \\ \{\delta_3\}_m \end{Bmatrix} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_2 \ u_3 \ v_3 \ w_3 \ \theta_3\}_m^T \quad \dots (5.1)$$

Em cada um dos vetores $\{\delta_i\}_m$ identificam-se duas partes: uma correspondente à chapa (c) e outra à placa (p). Assim:

$$\{\delta_i\}_m = \begin{Bmatrix} \{\delta_i\}_m^c \\ \{\delta_i\}_m^p \end{Bmatrix} \quad \dots (5.2)$$

onde

$$\{\delta_i\}_m^c = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}_m \quad \text{e} \quad \{\delta_i\}_m^p = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}_m$$

De maneira análoga é possível organizar o vetor das cargas para o harmônico m.

$$\{F\}_m = \begin{Bmatrix} \{F_1\}_m \\ \{F_2\}_m \\ \{F_3\}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ M_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ M_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ W_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned} \{F_i\}_m &= \begin{Bmatrix} \{F_i\}_m^c \\ \{F_i\}_m^p \end{Bmatrix} \\ \{F_i\}_m^c &= \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}_m \\ \{F_i\}_m^p &= \begin{Bmatrix} W_i \\ M_i \end{Bmatrix}_m \end{aligned} \quad \dots (5.3)$$

Os vetores dos deslocamentos e das cargas podem ser relacionados através da matriz de rigidez da faixa, conforme se anota a seguir:

$$\begin{bmatrix} [R_{11}] & [R_{12}] & [R_{13}] \\ [R_{21}] & [R_{22}] & [R_{23}] \\ [R_{31}] & [R_{32}] & [R_{33}] \end{bmatrix}_{mm} \cdot \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \end{Bmatrix}_m = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \end{Bmatrix}_m \dots (5.4)$$

ou ainda, em resumo:

$$[R]_{mm} \{\delta\}_m = \{F\}_m \dots (5.4.a)$$

Cada submatriz $[R_{ij}]_{mm}$ é construída a partir da combinação adequada de submatrizes das matrizes de rigidez da placa $[R]_{mm}^P$ e da chapa $[R]_{mm}^C$, conforme esquema apresentado abaixo

$$[R_{ij}]_{mm} = \begin{bmatrix} [R_{ij}]_{mm}^C & [0] \\ [0] & [R_{ij}]_{mm}^P \end{bmatrix} \dots (5.5)$$

(4 x 4) (2x2)

E, ter-se-ia, então, para a matriz de rigidez da faixa mista a seguinte representação:

$$[R]_{mm} = \begin{bmatrix} [R_{11}]^C & [0] & [R_{12}]^C & [0] & [R_{13}]^C & [0] \\ [0] & [R_{11}]^P & [0] & [R_{12}]^P & [0] & [R_{13}]^P \\ [R_{21}]^C & [0] & [R_{22}]^C & [0] & [R_{23}]^C & [0] \\ [0] & [R_{21}]^P & [0] & [R_{22}]^P & [0] & [R_{23}]^P \\ [R_{31}]^C & [0] & [R_{32}]^C & [0] & [R_{33}]^C & [0] \\ [0] & [R_{31}]^P & [0] & [R_{32}]^P & [0] & [R_{33}]^P \end{bmatrix}_{mm} \dots (5.6)$$

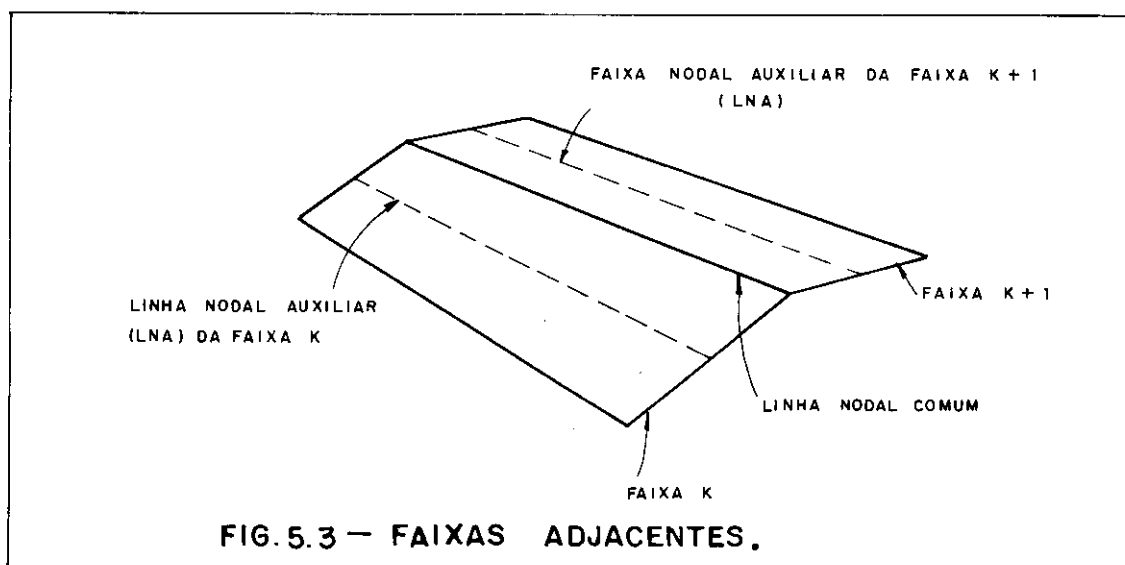
(12x12)

Como será mostrado no próximo item, é possível reduzir a ordem da matriz de rigidez da faixa mista de 12 para 8, através de um processo de condensação estática, antes da montagem da matriz de rigidez geral da estrutura completa.

5.4 - CONDENSAÇÃO ESTÁTICA

5.4.1 - Generalidades

O estudo particular de cada faixa só faz sentido na medida em que é possível o acoplamento de várias faixas na constituição de uma estrutura tal como chapa, placa, folha prismática, etc. Ou, raciocinando-se no sentido inverso, cada estrutura será analisada, discretizando-a em um determinado número finito de faixas que justapor-se-ão através de linhas nodais comuns.



As linhas nodais comuns a faixas contíguas serão sempre periféricas. Assim, os parâmetros nodais correspondentes à linha nodal auxiliar de uma faixa nunca se-

rão compartilhados por outras faixas. Portanto, na montagem das equações de equilíbrio para a estrutura completa, através da conexão das faixas que a constituem, as incógnitas deslocamentos de cada LNA podem ser eliminadas, com a utilização de um processo de condensação estática que a seguir se desenvolve.

5.4.2 - Fundamentos teóricos

O problema é aqui retomado antes da composição da matriz de rigidez da faixa de comportamento misto.

Chamando de $[SM]$ cada submatriz da matriz de rigidez da faixa de comportamento único (chapa ou placa), para cada harmônico m , a equação de relacionamento entre o vetor dos parâmetros nodais de deslocamento e o vetor das cargas pode ser reescrita, mediante o rearranjo das equações de equilíbrio visando agrupar as linhas nodais externas num bloco único. Assim, tem-se:

- equação original

$$\begin{bmatrix} [SM_{11}] & [SM_{12}] & [SM_{13}] \\ [SM_{21}] & [SM_{22}] & [SM_{23}] \\ [SM_{31}] & [SM_{32}] & [SM_{33}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \end{Bmatrix} \dots (5.7)$$

- equação rearranjada

$$\begin{bmatrix} [SM_{11}] & [SM_{13}] & [SM_{12}] \\ [SM_{31}] & [SM_{33}] & [SM_{32}] \\ \hline [SM_{21}] & [SM_{23}] & [SM_{22}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_3\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} \dots (5.8)$$

Depois do rearranjo, reescreve-se a submatriz $[SM]$ e os vetores dos parâmetros nodais e das cargas, conforme esquema seguinte:

$$\begin{bmatrix} [SM_{ee}] & [SM_{ei}] \\ [SM_{ei}] & [SM_{ii}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\delta_e\} \\ \{\delta_i\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_e\} \\ \{F_i\} \end{Bmatrix} \quad \dots (5.8.a)$$

onde os índices e e i representam as linhas nodais externas (1 e 3) e interna (2), respectivamente.

Baseado nas propriedades do cálculo matricial é possível desdobrar a equação matricial (5.8.a) em duas outras:

$$[SM_{ee}] \{\delta_e\} + [SM_{ei}] \{\delta_i\} = \{F_e\} \quad \dots (5.9)$$

$$[SM_{ei}] \{\delta_e\} + [SM_{ii}] \{\delta_i\} = \{F_i\} \quad \dots (5.10)$$

Da equação (5.10) retira-se que

$$[SM_{ii}] \cdot \{\delta_i\} = \{F_i\} - [SM_{ei}]^T \cdot \{\delta_e\}$$

ou ainda:

$$\{\delta_i\} = [SM_{ii}]^{-1} (\{F_i\} - [SM_{ei}]^T \{\delta_e\}) \quad \dots (5.11)$$

A equação (5.11) combinada com (5.9), fornece:

$$[SM_{ee}] \cdot \{\delta_e\} + [SM_{ei}] \cdot [SM_{ii}]^{-1} (\{F_i\} - [SM_{ei}]^T \{\delta_e\}) = \{F_e\}$$

donde se extrai

$$\begin{aligned} & ([SM_{ee}] - [SM_{ei}] [SM_{ii}]^{-1} [SM_{ei}]^T) \{\delta_e\} = \\ & = (\{F_e\} - [SM_{ei}] [SM_{ii}]^{-1} \cdot \{F_i\}) \quad \dots (5.12) \end{aligned}$$

ou de maneira resumida

$$[R^*] \{\delta_e\} = \{F_e^*\} \quad \dots (5.13)$$

onde

$$[R^*] = [SM_{ee}] - [SM_{ei}] [SM_{ii}]^{-1} [SM_{ei}]^T \quad \dots (5.14)$$

$$\{F_e^*\} = \{F_e\} - [SM_{ei}] [SM_{ii}]^{-1} \{F_i\}$$

Resolvendo-se a equação matricial (5.13) determina-se o vetor $\{\delta_e\}$, a partir do qual encontra-se o vetor $\{\delta_i\}$ através da equação (5.11).

5.4.3 - Deduções particularizadas

Nas tabelas (3.3) e (4.1) encontram-se as matrizes de rigidez correspondentes ao funcionamento como placa ou como chapa, respectivamente. As duas têm a mesma composição e, portanto, as deduções seguintes, apesar de realizadas para o caso de placa, são de caráter comum.

O equacionamento para as placas é feito do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 \\ R_2 & R_7 & R_8 & R_9 & -R_6 & R_{10} \\ R_3 & R_8 & R_{11} & 0 & R_3 & -R_8 \\ R_4 & R_9 & 0 & R_{12} & -R_4 & R_9 \\ R_5 & -R_6 & R_3 & -R_4 & R_1 & -R_2 \\ R_6 & R_{10} & -R_8 & R_9 & R_2 & R_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ M_1 \\ W_2 \\ M_2 \\ W_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} \quad \dots (5.15)$$

Assim

$$[SM_{ee}] = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_5 & R_6 \\ R_2 & R_7 & -R_6 & R_{10} \\ R_5 & -R_6 & R_1 & -R_2 \\ R_6 & R_{10} & -R_2 & R_7 \end{bmatrix} \quad [SM_{ei}] = \begin{bmatrix} R_3 & R_4 \\ R_8 & R_9 \\ R_3 & -R_4 \\ -R_8 & R_9 \end{bmatrix} \quad [SM_{ii}] = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{12} \end{bmatrix}$$

$$[SM_{ei}]^T = \begin{bmatrix} R_3 & R_8 & R_3 & -R_8 \\ R_4 & R_9 & -R_4 & R_9 \end{bmatrix} \quad [SM_{ii}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{12}} \end{bmatrix}$$

$$[SM_{ei}] [SM_{ii}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{R_3}{R_{11}} & \frac{R_4}{R_{12}} \\ \frac{R_8}{R_{11}} & \frac{R_9}{R_{12}} \\ \frac{R_3}{R_{11}} & -\frac{R_4}{R_{12}} \\ -\frac{R_8}{R_{11}} & \frac{R_9}{R_{12}} \end{bmatrix}$$

$$[SM_{ii}]^{-1} [SM_{ei}]^T = \begin{bmatrix} \frac{R_3}{R_{11}} & \frac{R_8}{R_{11}} & \frac{R_3}{R_{11}} & \frac{-R_8}{R_{11}} \\ \frac{R_4}{R_{12}} & \frac{R_9}{R_{12}} & \frac{-R_4}{R_{12}} & \frac{R_9}{R_{12}} \end{bmatrix}$$

.... (5.16)

Assim, é possível escrever:

O sistema de equações lineares é montado (ver i tem seguinte), tendo como incógnitas apenas os parâmetros nodais de deslocamento correspondentes às linhas nodais periféricas das faixas. Depois de serem encontrados os seus valores é possível determinar os parâmetros de deslocamento das linhas nodais internas (auxiliares) em cada faixa através da equação (5.11), que pode ser reescrita levando-se em conta os produtos matriciais apontados.

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{R_{11}}(W_3 - R_3 \cdot w_1 - R_8 \cdot \theta_1 - R_3 \cdot w_2 + R_8 \cdot \theta_2) \\ \frac{1}{R_{12}}(M_3 - R_4 \cdot w_1 - R_9 \cdot \theta_1 + R_4 \cdot w_2 - R_9 \cdot \theta_2) \end{Bmatrix} \dots (5.17)$$

A nova matriz de rigidez para a faixa tem a sua ordem reduzida e toma o aspecto apresentado no esquema a seguir

$$\begin{matrix} [R_{mm}^*] \\ (8 \times 8) \end{matrix} = \begin{bmatrix} [R_{11}^*]^c & [0] & [R_{12}^*]^c & [0] \\ [0] & [R_{11}^*]^p & [0] & [R_{12}^*]^p \\ [R_{21}^*]^c & [0] & [R_{22}^*]^c & [0] \\ [0] & [R_{21}^*]^p & [0] & [R_{31}^*]^p \end{bmatrix}_{mm} \dots (5.18)$$

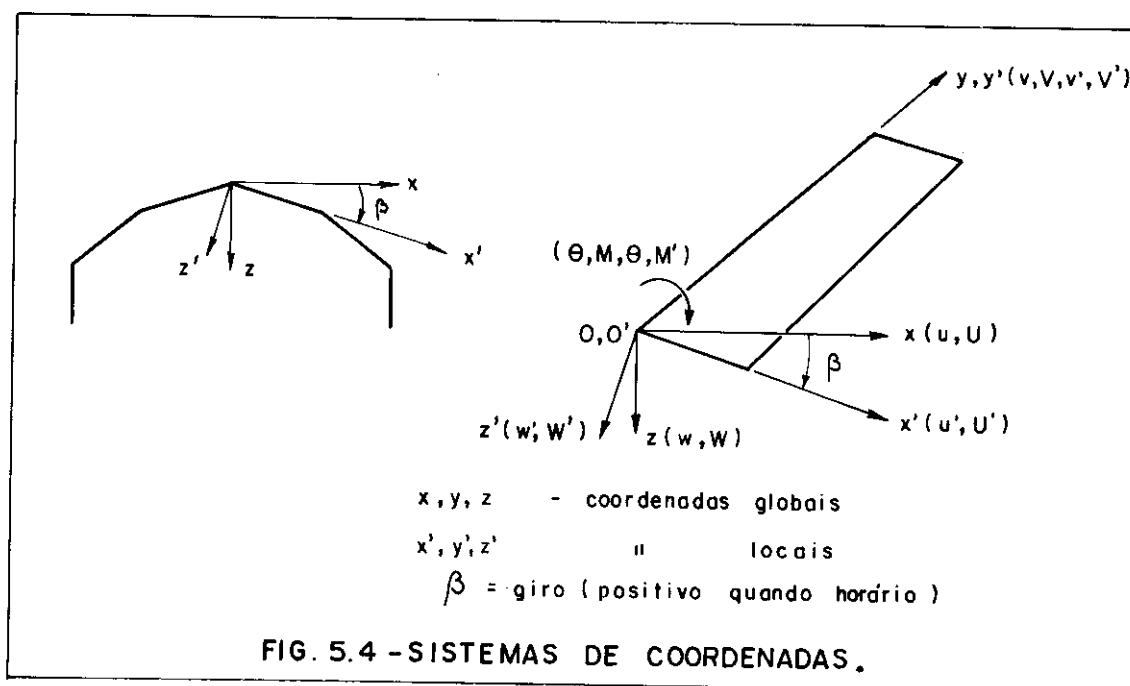
Onde $[R_{ij}^*]$ é uma submatriz de $[R^*]$ correspondente ao funcionamento da faixa como chapa (índice c) ou como placa (índice p).

A título de ilustração e como recurso adicional de entendimento para o leitor apresenta-se uma dessas submatrizes.

$$[R_{31}^*] = \begin{bmatrix} R_5 - \frac{R_3^2}{R_{11}} + \frac{R_4^2}{R_{12}} & -R_6 - \frac{R_3 R_8}{R_{11}} + \frac{R_4 R_9}{R_{12}} \\ R_6 + \frac{R_8 R_3}{R_{11}} - \frac{R_9 R_4}{R_{12}} & R_{10} + \frac{R_8^2}{R_{11}} - \frac{R_9^2}{R_{12}} \end{bmatrix}$$

5.5 - TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS - SISTEMA GLOBAL

Nas folhas poliédricas prismáticas as faixas não têm todas as suas superfícies médias alojadas no mesmo plano (vide Fig. 5.1). As características das faixas foram estudadas a partir de um sistema local de referências em que dois dos seus eixos coordenados jazem no plano médio da faixa. Na montagem das equações de rigidez da estrutura como um todo, para a determinação dos parâmetros nodais de deslocamento elege-se um sistema global de coordenadas e promove-se a devida ligação de cada sistema local a ele, através da transformação de coordenadas.



Sufrerão modificações, durante tal transformação, a matriz de rigidez $[R]_{mm}$, o vetor das cargas $\{F\}_m$ e o vetor dos parâmetros nodais de deslocamento $\{\delta\}_m$.

Tomando-se Ox, y, z como sistema global e $O'x', y', z'$ como sistema local (y e y' coincidentes), pode-se escrever

$$\{F\}_m = [T] \{F'\}_m \quad \dots (5.19)$$

$$\{\delta'\}_m = [T]^T \{\delta\}_m \quad \dots (5.20)$$

onde $[T]$ é a matriz de transformação (no caso matriz de rotação).

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix}$$

$$\text{em que } [t] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\text{sen}\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sen}\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots (5.21)$$

$[0]$ é a matriz nula e β é o ângulo formado pelos eixos Ox e $O'x'$, marcado a partir de Ox e considerado positivo quando horário ao se olhar no sentido positivo do eixo Oy .

Como $\{F\}_m = [T] \cdot \{F'\}_m$ e $\{F'\}_m = [R']_{mm} \{\delta'\}_m$ tem-se que:

$$\{F\}_m = [T] [R']_{mm} \{\delta'\}_m \quad \dots (5.22)$$

Mas $\{\delta'\}_m = [T]^T \{\delta\}_m$, então

$$\{F\}_m = [T] [R']_{mm} [T]^T \{\delta\}_m$$

e como $\{F\}_m = [R]_{mm} \cdot \{\delta\}_m$ conclui-se que

$$\begin{matrix} [R]_{mm} & = & [T] & [R']_{mm} & [T]^T & & \dots & (5.23) \\ (8 \times 8) & & (8 \times 8) & (8 \times 8) & (8 \times 8) & & & \end{matrix}$$

Pode-se reescrever a equação (5.23), particionando cada uma das três matrizes fator em quatro submatrizes de dimensão (4×4) , como se mostra a seguir.

$$\begin{aligned}
 [R]_{mm} &= \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R'_{11}]_{mm} & [R'_{12}]_{mm} \\ [R'_{21}]_{mm} & [R'_{22}]_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [t]^T & [0] \\ [0] & [t]^T \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} [t] \cdot [R'_{11}]_{mm} \cdot [t]^T & [t] \cdot [R'_{12}]_{mm} \cdot [t]^T \\ [t] \cdot [R'_{21}]_{mm} \cdot [t]^T & [t] \cdot [R'_{22}]_{mm} \cdot [t]^T \end{bmatrix} \dots (5.24)
 \end{aligned}$$

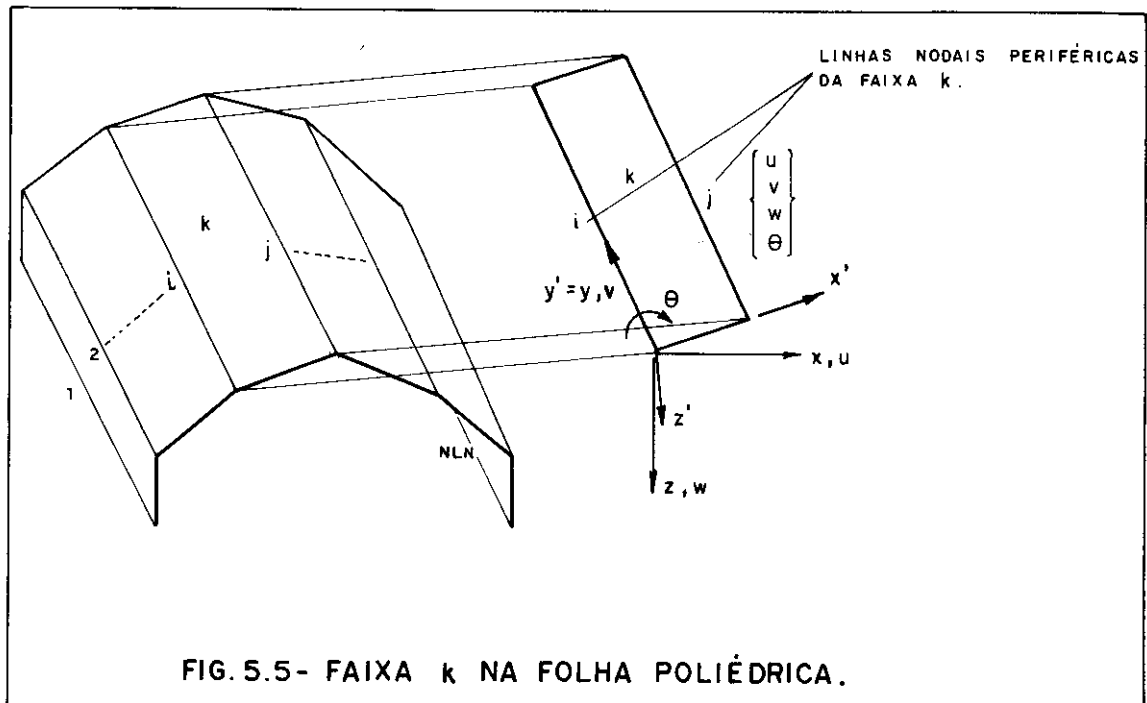
Importante notar que o esforço computacional requerido na transformação da matriz de rigidez da faixa na forma apresentada na equação (5.24) é a metade que o exigido na transformação formalizada na equação (5.23).

Conforme anotação feita na referência [24], durante o processo de transformação, aparecem dois pontos que favorecem o Método das Faixas Finitas sobre o dos Elementos Finitos. Primeiro: o fato de que apenas as componentes de deslocamento u e w são afetadas, e já que ambas têm a mesma variação ao longo do eixo longitudinal Oy , fica garantida a compatibilidade de deslocamentos nas linhas nodais durante a rotação dos eixos. Segundo: a retenção, em cada faixa, dos seus quatro graus de liberdade por linha nodal, requerendo apenas a transformação padrão de coordenadas, diferentemente da análise de cascas pela técnica dos Elementos Finitos em que usualmente ocorrem complicações durante a transformação e a necessidade de inserção de um grau de liberdade fictício ou um conjunto de coordenadas superficiais que variam de ponto a ponto.

5.6 - MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

A montagem da matriz de rigidez global é feita independentemente para cada harmônico m e de maneira simples, bastando organizar as contribuições de cada uma das faixas em que se subdivide a estrutura. Tal matriz é sem

pre do tipo banda, de pequena semi-largura (ℓb). Para as folhas prismáticas simples é possível, através de uma numeração conveniente obter-se uma banda de semi-largura igual a 8, o que permite a ocupação de pequena área de memória para o armazenamento da matriz de rigidez, através do achatamento da mesma em u'a matriz retangular de ordem $N \times \ell b$, onde N é o número total de incógnitas para cada harmônico, após a condensação (N é igual ao quádruplo do número de linhas nodais da estrutura que sejam periféricas das faixas).



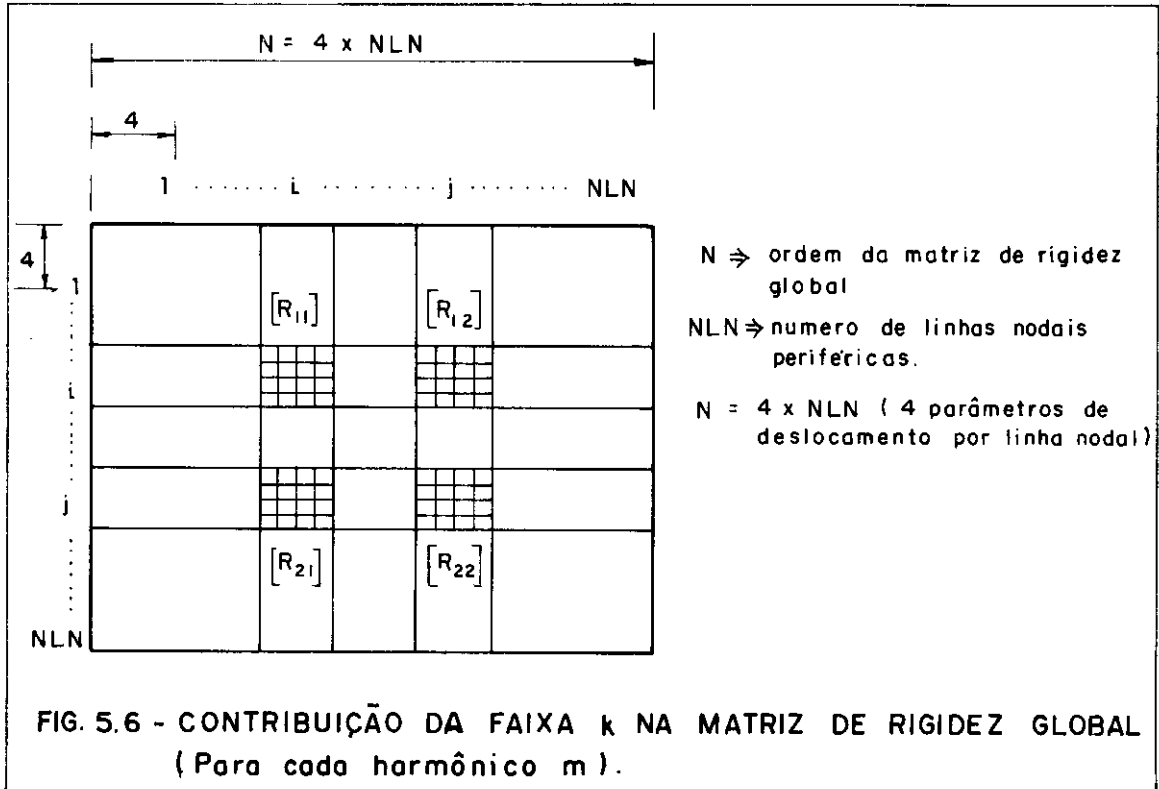
Considerando-se a faixa k, cuja matriz de rigidez condensada e transformada para o sistema global é

$$[R]_{mm} = \begin{bmatrix} [R_{11}] & [R_{12}] \\ [R_{21}] & [R_{22}] \end{bmatrix}_{mm}$$

(8x8) (4x4) (4x4) (4x4) (4x4)

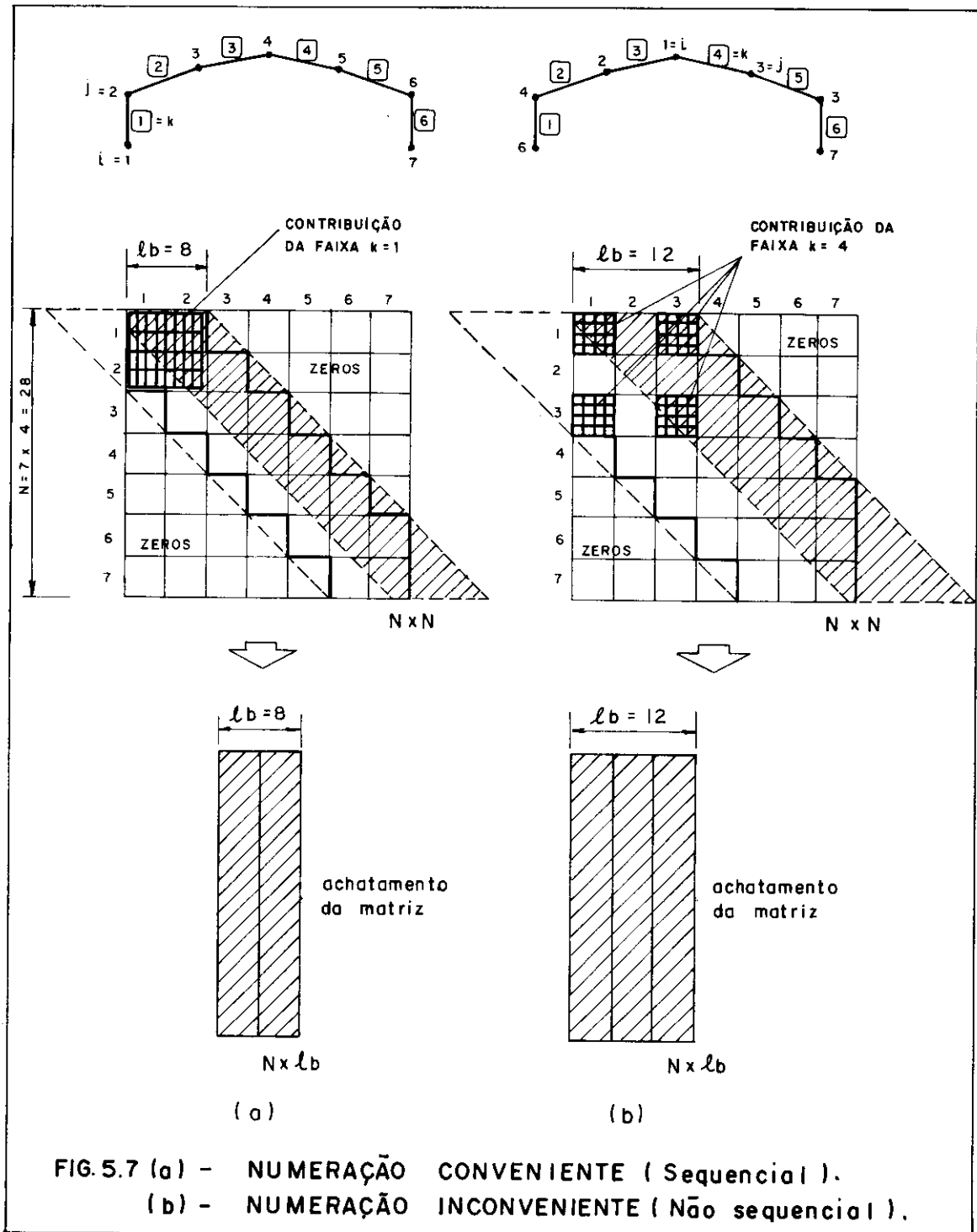
e cujas linhas nodais periféricas recebem a numeração i e

j na estrutura total, é possível montar o seguinte quadro explicativo da sua contribuição na matriz de rigidez global:



Para uma folha prismática como a indicada na Fig. 5.5, é aconselhável uma numeração seqüencial para possibilitar que se tenha a semi-largura da banda igual a 8. Uma numeração inadequada pode levar ao crescimento de lb e conseqüente aumento no tempo despendido na resolução do problema (UCP) e na área de memória ocupada no computador. O comprimento da semi-largura da banda pode ser determinado através da expressão $lb = (|i-j|_{\text{máx}} + 1) \cdot 4$, o que nos leva à seguinte regra prática: manter a menor diferença possível entre os números das linhas nodais periféricas de uma faixa. A numeração seqüencial permite a redução da diferença $|i-j|$ à unidade e a obtenção de lb igual a 8, que é o mínimo alcançável para o tipo de faixa adotada no desenvolvimento deste trabalho.

A seguir, a título de ilustração, são apresentadas duas numerações distintas para uma única discretização de uma folha prismática simples.



É imediata a analogia que pode ser feita entre a análise de uma folha prismática e um pórtico plano, a menos da componente de deslocamento v , (bem como entre uma laje e uma viga), utilizando-se o processo dos deslocamentos.

5.7 - MONTAGEM DO VETOR DAS CARGAS NODAIS

O acoplamento dos vetores das cargas de todas as faixas é feito após a condensação e a transformação de coordenadas. Referidos os vetores ao sistema global de coordenadas, eles são associados, levando-se a contribuição de cada um nas linhas nodais da periferia de cada faixa. Assim, para a situação geral apresentada na Fig. 5.5 tem-se, para o vetor das cargas, o seguinte esquema de montagem:

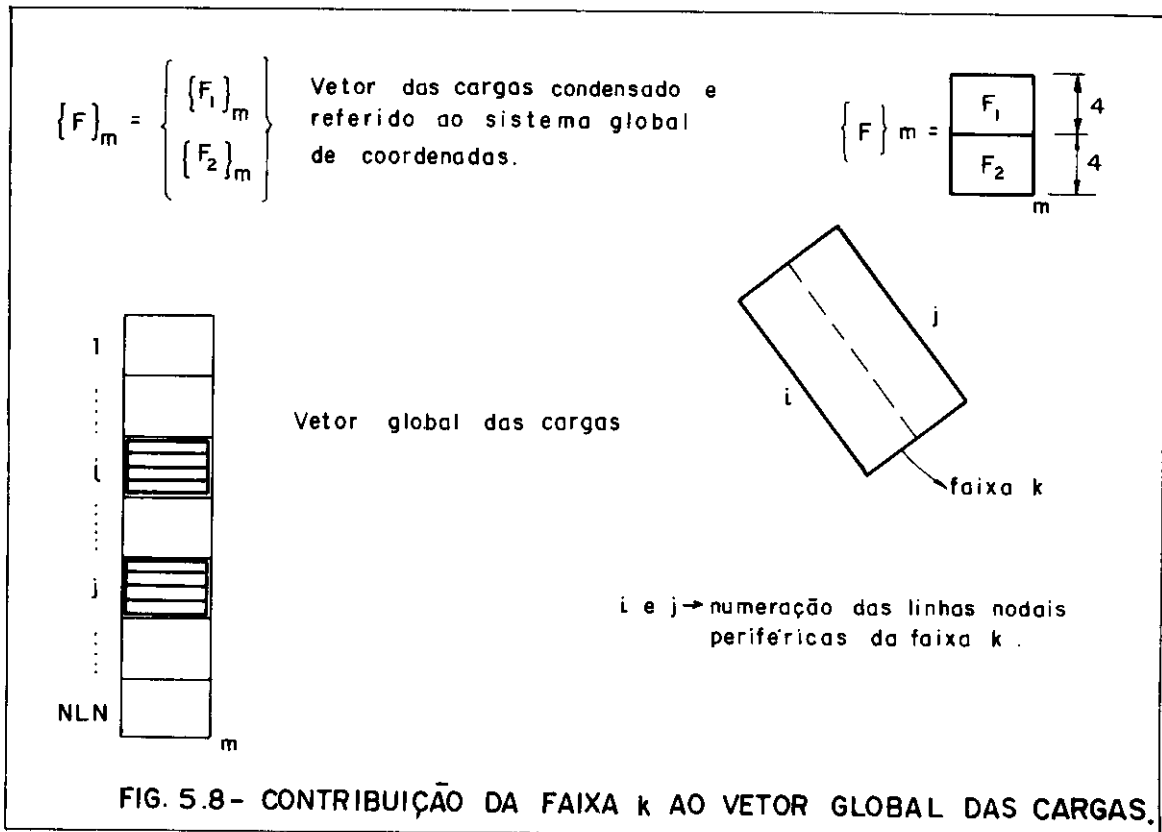


FIG. 5.8- CONTRIBUIÇÃO DA FAIXA k AO VETOR GLOBAL DAS CARGAS.

Em correspondência à montagem da matriz de rigidez figurada em 5.7(a), o vetor global das cargas é o resultado exibido na figura 5.9.

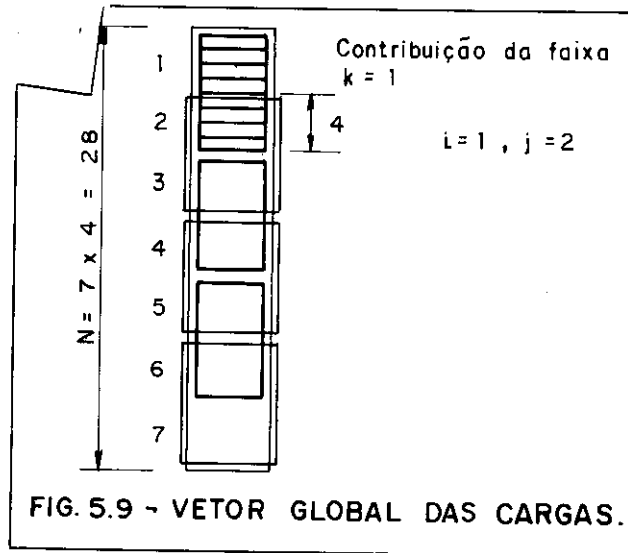


FIG. 5.9 - VETOR GLOBAL DAS CARGAS.

Notar que para cada linha nodal em que confluem duas faixas, ocorre uma superposição de valores em U , V , W e M .

5.8 - CÁLCULO DOS ESFORÇOS INTERNOS, DAS DEFORMAÇÕES E TENSÕES

Após a resolução do sistema de equações lineares, com a utilização de uma entre muitas técnicas específicas para matriz em banda, tem-se os parâmetros nodais de deslocamento referidos ao sistema global de coordenadas.

Os esforços internos, bem como as tensões e deformações são computados em relação ao sistema local de coordenadas, donde a necessidade de adotar-se o seguinte procedimento:

- a) promover a transformação dos parâmetros nodais ao sistema local;

- b) determinar os parâmetros nodais internos (correspondentes à linha nodal auxiliar);
- c) multiplicar as matrizes dos esforços, das tensões e deformações pelo vetor local dos parâmetros nodais.

Tenha-se em mente que a obtenção de resultados ocorre para cada um dos harmônicos da série e que devem ser acumulados com o fito de determinarem-se os resultados finais. Insiste-se aqui na vantagem do tratamento independente para cada harmônico da série que permite:

- a) resolução de r sistemas de N incógnitas (onde r é o número de harmônicos adotados e N o quádruplo do número de linhas nodais periféricas) ao invés de um sistema de $r \times N$ equações, reduzindo por um fator r a largura da banda, o que é bastante significativo, já que em determinados casos o número de harmônicos necessários pode chegar a perto de uma centena;
- b) o acompanhamento paulatino da convergência.

CAPÍTULO 6

PONTES RETAS

6.1 - PONTES RETAS EM LAJE

A utilização de tabuleiro em laje (placa de material litóide) é corrente na construção de pontes rodoviárias e ferroviárias de vãos pequenos e médios. Algumas pontes de tabuleiro em vigas múltiplas, sob determinadas condições, podem ser consideradas como lajes pela substituição adequada das vigas por laje de rigidez total à flexão e à torção equivalente ao tabuleiro original.

O cálculo das pontes com tabuleiro do tipo aqui caracterizado é feito através da Teoria Clássica das Placas. Para a utilização do Método das Faixas Finitas, segundo o modelo teórico apresentado no Capítulo 3, é necessário que as pontes analisadas se enquadrem dentro das características abaixo discriminadas:

- a) a ponte dever ser reta;
- b) a seção transversal deve se manter constante ao longo do vão;
- c) o tabuleiro deve ser constituído por laje isótropa ou ortótropa ou ainda por vigas múltiplas arranjadas ortogonalmente, de tal modo a permitir o tratamento como placa ortótropa;
- d) a ponte deve ser biapoiada nas extremidades;

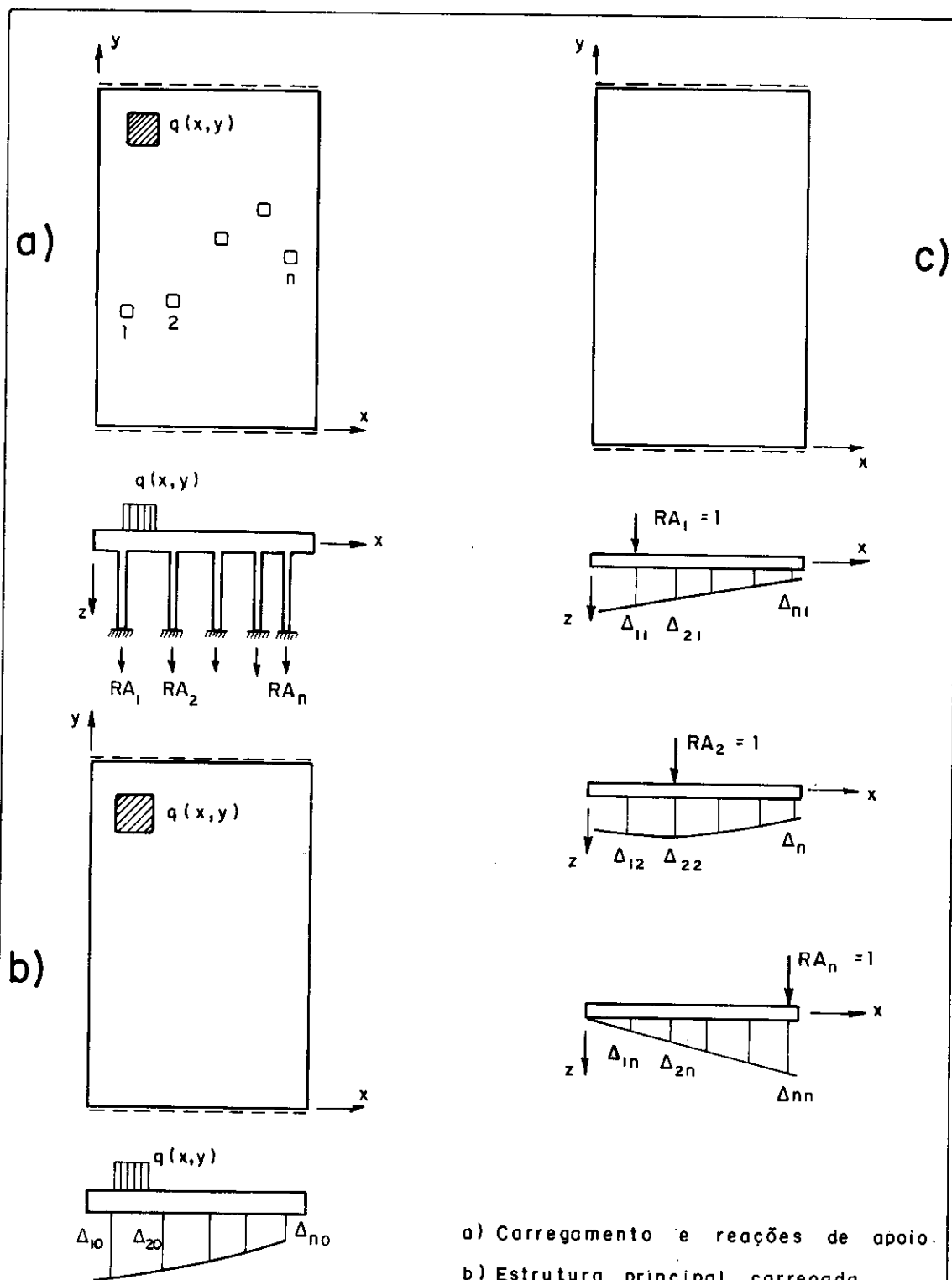
- e) o tabuleiro pode ou não apresentar variações transversais de espessura.

6.2 - APOIOS INTERMEDIÁRIOS DISCRETOS

O projetista de estruturas de pontes, algumas vezes opta pela disposição de apoios intermediários por imposições topográficas, limitações de vãos, etc. Constitui, portanto, fato de grande importância a introdução de uma técnica que permita dominar tal situação. Isto é possível a partir do Método das Faixas Finitas padrão, desde que se incorpore alguns conceitos do processo dos esforços.

O procedimento, que já havia sido utilizado com sucesso na teoria das placas ortótropas [3] foi adotado também no Método das Faixas Finitas [3] [25] [26] produzindo resultados satisfatórios. Este procedimento, de caráter geral, é aqui resumido na situação em que se tem como apoios intermediários apenas os pilares.

- a) para uma ponte biapoiada nas extremidades o número de redundâncias é determinado pelo número de interações do tabuleiro com os pilares; para simplificação do resumo considerem-se apenas reações ao longo do eixo longitudinal dos pilares.
- b) retiram-se os pilares e consegue-se, assim, a estrutura principal que é analisada sob o efeito exclusivo do carregamento que atua sobre o tabuleiro da ponte, através do M.F.F.
- c) obtêm-se, então, o vetor dos deslocamentos $\{\Delta_o\} = \{\Delta_{1o} \cdot \Delta_{2o} \dots \Delta_{no}\}^T$ nos pontos 1, 2, ..., n (vide Fig. 6.1):
- d) aplica-se separadamente cada uma das reações unitárias dos pilares e calculam-se os deslocamentos nos pontos 1, 2, ..., i, ..., j, ..., n que, organizados, compõem a matriz de flexibilidade $[FL]_{n \times n}$;



a) Carregamento e reações de apoio.
 b) Estrutura principal carregada.
 c) Estrutura principal submetida às reações de apoio unitárias. [6]

FIG. 6.1 - TABULEIRO SIMPLEMENTE APOIADO COM PILARES INTERMEDIÁRIOS E ESTRUTURA PRINCIPAL.

$$[FL] = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & & & \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \quad \dots (6.1)$$

onde Δ_{ij} é o deslocamento em i provocado pela reação unitária em j ;

- e) os efeitos devidos à deformabilidade dos pilares bem como os decorrentes da acomodação elástica de suas fundações podem ser incluídos e a matriz de flexibilidade se transforma em:

$$[FL] = \begin{bmatrix} \Delta_{11} + \Delta'_1 & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} + \Delta'_2 & \cdots & \Delta_{2n} \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} + \Delta'_n \end{bmatrix} \quad \dots (6.2)$$

onde Δ'_i é o deslocamento total do topo do pilar i para a reação unitária, considerando-se a deformação elástica do pilar mais a acomodação de sua fundação;

- f) pela consideração da compatibilidade de deslocamentos requerida no conjunto de pontos que localizam os pilares, pode-se estabelecer a equação matricial

$$[FL] \{RA\} + \{\Delta_o\} = \{0\} \quad \dots (6.3)$$

onde $\{RA\} = \{RA_1, RA_2, \dots, RA_n\}^T$ é o vetor das reações nos pilares, que é determinado resolvendo-se a equação anterior, ou seja

$$\{RA\} = -[FL]^{-1} \{\Delta_o\} \quad \dots (6.4)$$

g) A solução final do problema (deslocamentos, deformações, momentos, tensões, etc) é alcançada superpondo-se os efeitos do carregamento atuante e das reações calculadas sobre a estrutura principal.

Cabe observar que o procedimento que se acaba de descrever, ilustrado na situação em que tabuleiro e pilares trocam apenas forças nas direções dos eixos destes, é genérico e pode incorporar também trocas de forças em qualquer outra direção, bem como momento, bastando, neste caso liberarem-se as vinculações correspondentes, considerando tais reações como redundâncias adicionais.

6.3 - PONTES RETAS DE SEÇÃO CELULAR E DE TABULEIRO DO TIPO LAJE SOBRE VIGA

6.3.1 - Introdução

As pontes retas de seção celular e as de tabuleiro do tipo laje sobre vigas, podem ser consideradas folhas poliédricas múltiplas, isto é, aquelas em que mais de duas lâminas se encontram em bordas comuns.

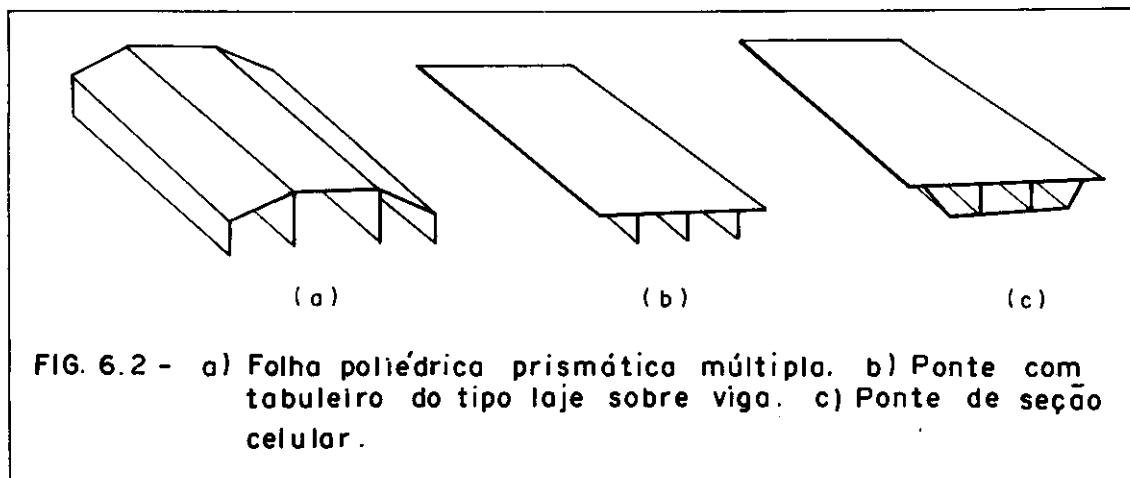


FIG. 6.2 - a) Folha poliédrica prismática múltipla. b) Ponte com tabuleiro do tipo laje sobre viga. c) Ponte de seção celular.

6.3.2 - Particularidades das pontes

Algumas características das pontes não se associam às das coberturas em folhas prismáticas, tais como as que se relacionam a seguir.

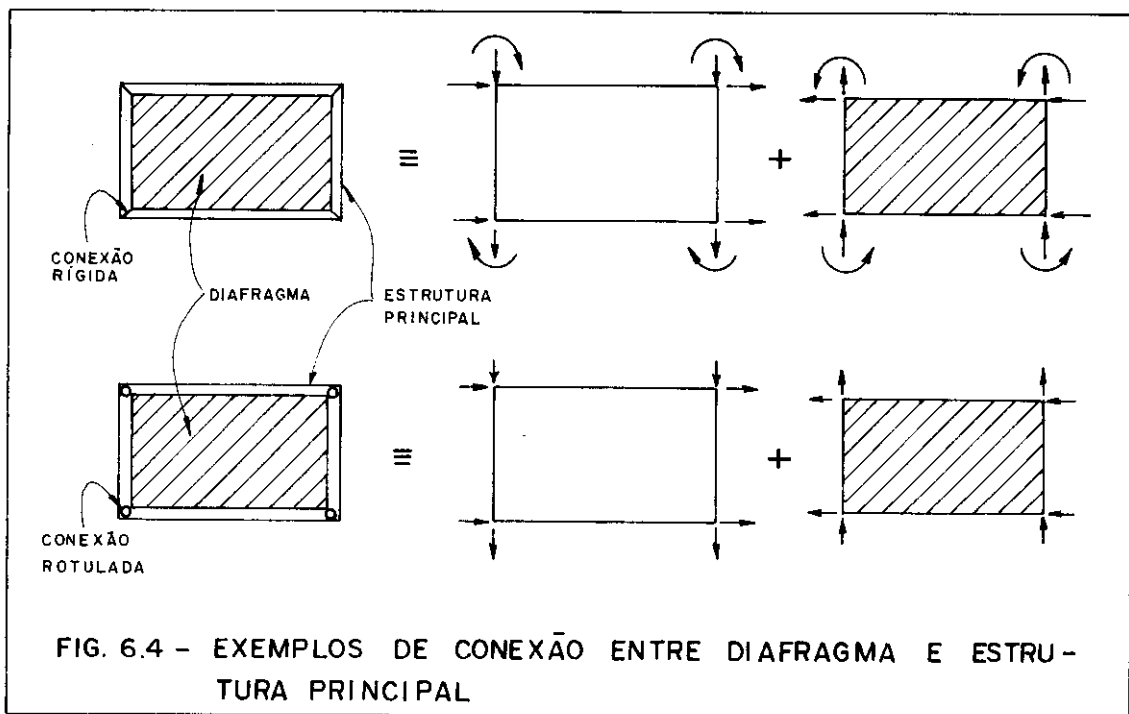
Devido à sua função viária, ou seja, dar continuidade à estrada de que faz parte, na transposição de um obstáculo, a sua laje superior recebe diretamente grupos de cargas concentradas ou parcialmente distribuídas em pequenas áreas, correspondentes ao contato das rodas do veículo tipo. Como a análise via Método das Faixas Finitas utiliza uma parte da função deslocamento em série de Fourier, a solução é obtida pela superposição dos resultados relativos aos seus vários harmônicos. Na vizinhança imediata de uma carga concentrada, tensões e momentos convergem muito vagorosamente e, na maioria das vezes, um excessivo número de harmônicos deve ser utilizado [6]. Por outro lado observa-se que ao se afastar ligeiramente dos pontos de concentração de carga a convergência é atingida com um número significativamente menor de harmônicos da série. Sob carga concentrada tensões e momentos são matematicamente infinitos, não sendo, pois, aconselhável o consumo excessivo de tempo de processamento na tentativa de se obterem valores estabilizados em tal local.

Frequentemente as pontes de grandes vãos são providas de apoios intermediários. Com o objetivo de se garantir estabilidade (especialmente nas pontes metálicas de seção celular) e de serem reduzidos os efeitos de concentrações de tensões, são usualmente providos diafragmas nas seções dos apoios.

Podem, também, estar presentes diafragmas internos em seções transversais nos vãos, especialmente nas pontes metálicas de seção celular, nas quais a estabilidade se apresenta como fator determinante no projeto. Para as pontes de concreto armado e protendido a tendência atual é

chando vinculados a apoios internos, têm impedidos os deslocamentos nos seus planos. E móveis são os que, conectados apenas ao tabuleiro da ponte, podem se mover.

Cada um dos diafragmas é conectado ao tabuleiro ao longo de suas bordas. Em termos rigorosos há um número infinito de pontos de conexão. A possibilidade de tratamento do problema depende da escolha de um número finito desses pontos. Tal escolha tem-se diferenciado. Scordelis assume pontos de conexão nos cantos das células e nos terços de cada lâmina; Meyer [6] propõe como pontos de conexão apenas os cantos das células; Loo e Cusens [4], dentro de uma postura mais apurada, sugerem que a escolha desses pontos deve ser feita, não apenas de acordo com aspectos geométricos, mas, também, na dependência do carregamento que atua na estrutura, conforme se comentará no Capítulo 8.



6.3.4 - Diafragmas internos fixos

A solução apresentada no item 6.2 pode ser aplicada diretamente à presente situação desde que adequadamente adaptada. Em resumo, as adaptações podem ser assim relacionadas:

- a) definição dos pontos de conexão entre a estrutura principal e o diafragma;
- b) escolha do tipo de conexão de acordo com as interações desejadas;
- c) consideração, neste caso, das forças e momentos de interação como sendo as incógnitas hiperestáticas que constituirão o vetor $\{RA\}$;
- d) observação de que os efeitos de deformabilidade de pilares e acomodação elástica de suas fundações não são aqui consideradas, uma vez que os diafragmas são rígidos e imóveis; equivale a se ter todos os $\Delta_i^!$ nulos.

6.3.5 - Diafragmas internos móveis

Neste caso o diafragma não se apoia externamente e sim na estrutura principal. Resulta desse fato que o conjunto de hiperestáticos $\{RA\}$ atuando em um mesmo diafragma, considerado como corpo livre isolado, deve ser autoequilibrado. O vetor $\{RA\}$ — reação ao anteriormente referido — atuando sobre a estrutura principal, desligada do diafragma, provoca deslocamentos absolutos nos pontos de conexão; tais deslocamentos se organizam no vetor $\{\Delta\}$.

Devido ao fato de o vetor $\{RA\}$ ser auto-equilibrado, dentre as suas N componentes (hiperestáticas), $N-3$ são linearmente independentes e, estas, agrupadas, geram um novo vetor $\{RA^*\}$. O relacionamento entre vetores $\{RA\}$ e $\{RA^*\}$, con

seguidos mediante a imposição de 3 equações de equilíbrio independentes no plano do diafragma, pode ser expresso através da equação matricial:

$$\{RA\}_N = [EQ]_{N \times (N-3)} \times \{RA^*\}_{(N-3)} \quad \dots (6.5)$$

A transposta da matriz $[EQ]$ também relaciona os $N-3$ deslocamentos relativos Δ^* entre o diafragma móvel e a estrutura principal aos N deslocamentos absolutos Δ da estrutura principal, como poderia ser demonstrado pela aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais [6]. Assim, persistem as equações:

- para os hiperestáticos

$$\{\Delta^*\}_{(N-3)} = [EQ]_{(N-3) \times N}^T \times \{\Delta\} \quad \dots (6.6)$$

- para o carregamento externo

$$\{\Delta_o^*\}_{(N-3)} = [EQ]_{(N-3) \times N}^T \times \{\Delta_o\} \quad \dots (6.7)$$

Da análise da estrutura principal resulta que:

$$\{\Delta\}_N = [FL]_{N \times N} \times \{RA\}_N \quad \dots (6.8)$$

Substituindo-se (6.6) e (6.5) em (6.3) chega-se

a:

$$\begin{aligned} \{\Delta^*\}_{(N-3)} &= [EQ]_{(N-3) \times N}^T \times [FL]_{N \times N} \times \{RA\}_N \\ &= [EQ]_{(N-3) \times N}^T \times [FL]_{N \times N} \times [EQ]_{N \times (N-3)} \times \{RA^*\}_{(N-3)} \\ &= [FL^*]_{(N-3) \times (N-3)} \times \{RA^*\}_{(N-3)} \quad \dots (6.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{em que } [FL^*]_{(N-3) \times (N-3)} &= [EQ]_{(N-3) \times N}^T \times [FL]_{N \times N} \times [EQ]_{N \times (N-3)} \\ &\dots (6.10) \end{aligned}$$

$[FL^*]$ é a matriz de flexibilidade referente ao conjunto de hiperestáticos independentes que compõem o vetor $\{RA^*\}$. Este vetor que agrupa (N-3) incógnitas do problema pode ser encontrado pela imposição de que os deslocamentos relativos nos pontos de aplicação dos hiperestáticos $\{RA^*\}$, entre o diafragma e a estrutura principal, são iguais a zero. Assim

$$\{\Delta_o^*\}_{(N-3)} + \{\Delta^*\}_{(N-3)} = \{0\}_{(N-3)} \dots (6.11)$$

Substituindo-se (6.9) em (6.10) resulta:

$$\{\Delta_o^*\}_{(N-3)} + [FL^*]_{(N-3) \times (N-3)} \times \{RA^*\}_{(N-3)} = \{0\}_{(N-3)} \dots (6.12)$$

donde

$$\{RA^*\}_{(N-3)} = - [FL^*]_{(N-3) \times (N-3)}^{-1} \times \{\Delta_o^*\}_{(N-3)} \dots (6.13)$$

Obtido o vetor $\{RA^*\}$ determina-se o vetor $\{RA\}$ com o auxílio da equação (6.5):

A título de ilustração apresenta-se um exemplo de estabelecimento da matriz $[EQ]$ para uma ponte em viga de seção constituída por uma célula retangular e provida de um diafragma interno no centro do vão (Fig. 6.5).

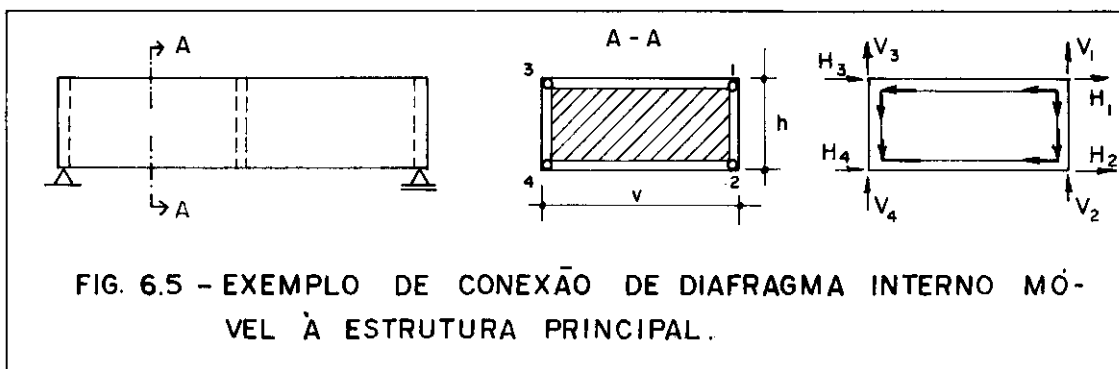


FIG. 6.5 - EXEMPLO DE CONEXÃO DE DIAFRAGMA INTERNO MÓVEL À ESTRUTURA PRINCIPAL.

Assumem-se quatro pontos de conexão rotulada nos cantos da célula e, assim, obtêm-se, em cada um deles, a interação representada por duas trocas de forças H e V, per fazendo um total de oito hiperestáticos agrupados no vetor $\{RA\} = \{H_1 H_2 H_3 H_4 V_1 V_2 V_3 V_4\}^T$.

Dentre os hiperestáticos apenas cinco são linearmente independentes; para a composição do vetor $\{RA^*\}$ basta o estabelecimento de três equações de equilíbrio do diafragma rígido como, por exemplo, somatórias de momentos em torno dos pontos (2) e (1) iguais a zero e somatória de forças verticais nulas, exprimindo-se H_1 , H_2 e V_1 em função dos demais hiperestáticos.

$$H_1 = -H_3 - \frac{v}{h} \cdot V_3 - \frac{v}{h} \cdot V_4$$

$$H_2 = -H_4 + \frac{v}{h} \cdot V_3 + \frac{v}{h} \cdot V_4$$

$$V_1 = -V_2 - V_3 - V_4$$

É possível, então, montar-se a matriz [EQ]

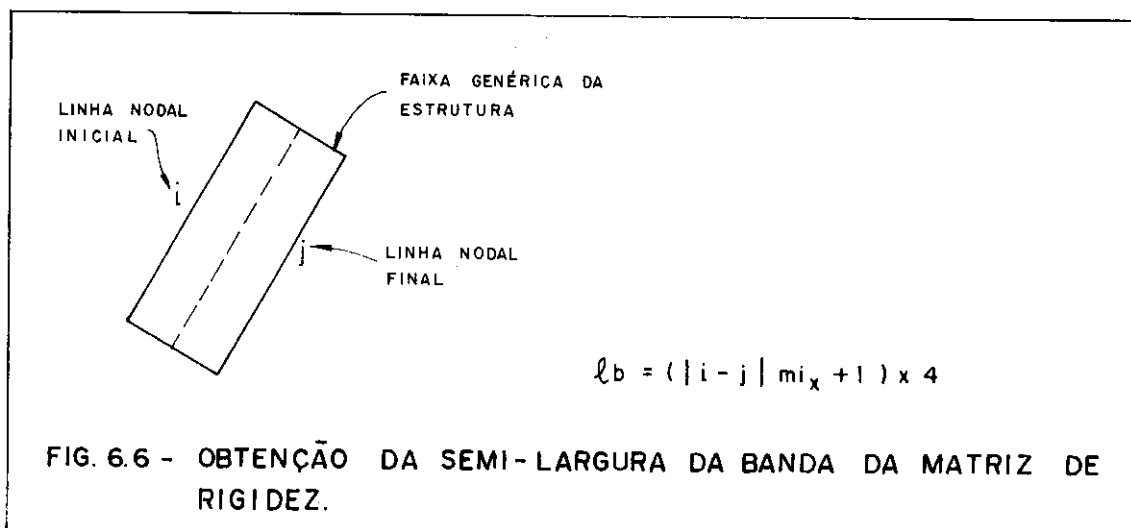
$$[EQ] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -v/h & -v/h \\ 0 & -1 & 0 & +v/h & +v/h \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: Os diafragmas deformáveis não serão, neste trabalho, estudados. Caso o leitor tenha interesse no assunto recomenda-se as referências [6] e [4].

6.4 - A NUMERAÇÃO DE LINHAS NODAIS

No capítulo anterior discorreu-se sobre a aplicação do Método das Faixas Finitas ao cálculo das folhas poliédricas prismáticas, e estas podem ser enxergadas como pontes retas de seção celular ou vice-versa. Por essa razão as considerações adicionais, cabíveis no presente capítulo, referem-se tão somente ao cuidado a ser tomado no momento da numeração das linhas nodais em que se discretiza a estrutura.

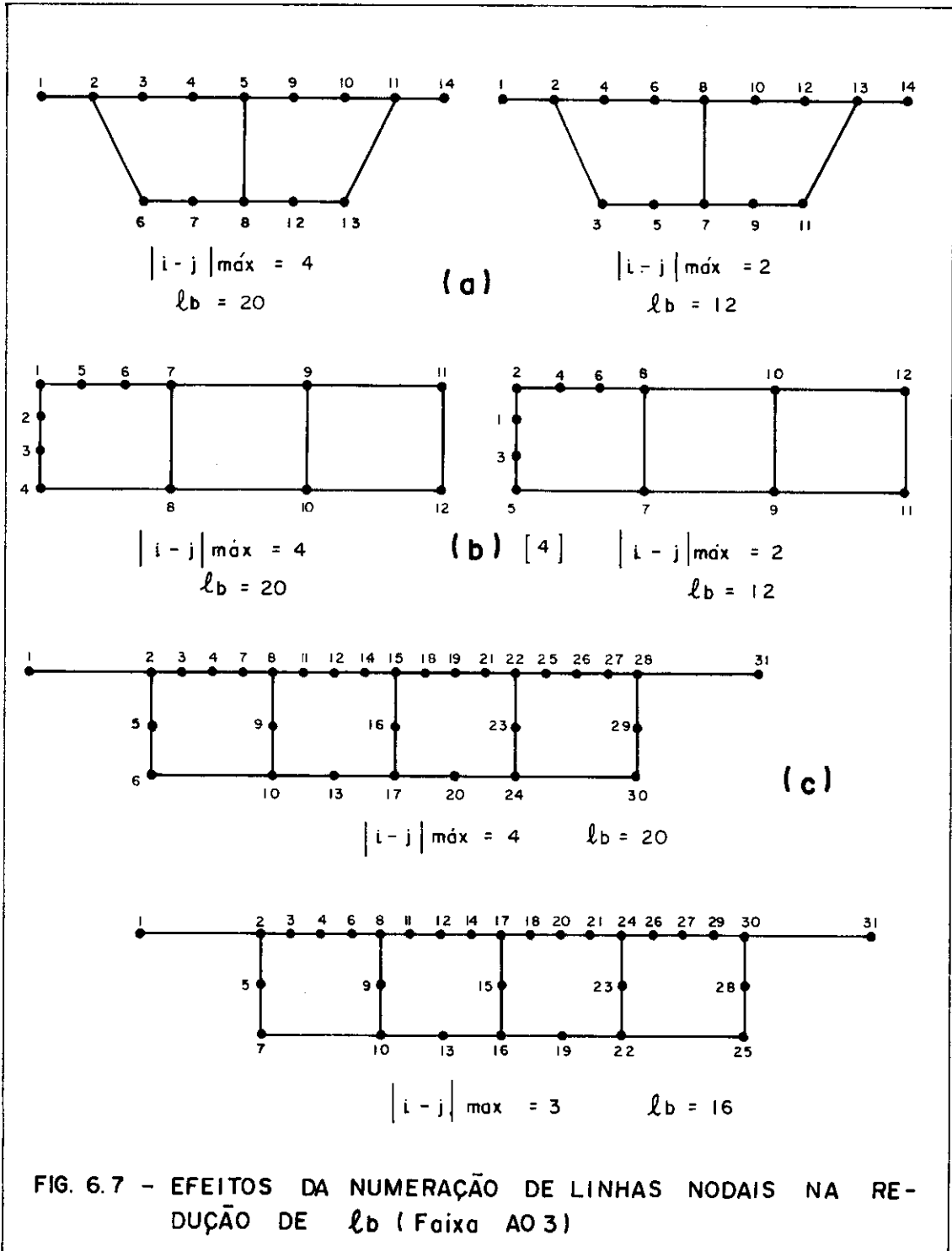
No item 5.6, ao se apresentar a montagem da matriz de rigidez global foi mostrado que, para as folhas poliédricas simples, é aconselhável a numeração seqüencial das linhas nodais, que faz com que essa matriz tenha uma semi-largura de banda (lb) mínima e igual a 8. A preocupação em torno de lb justifica-se uma vez que o tempo consumido na resolução do sistema de equações é proporcional ao seu quadrado [4].



A regra prática (vide Fig. 6.6) para a redução de lb ao mínimo é, conforme item 5.6, a manutenção da menor diferença possível entre os números das linhas nodais periféricas de todas as faixas constituintes da estrutura.

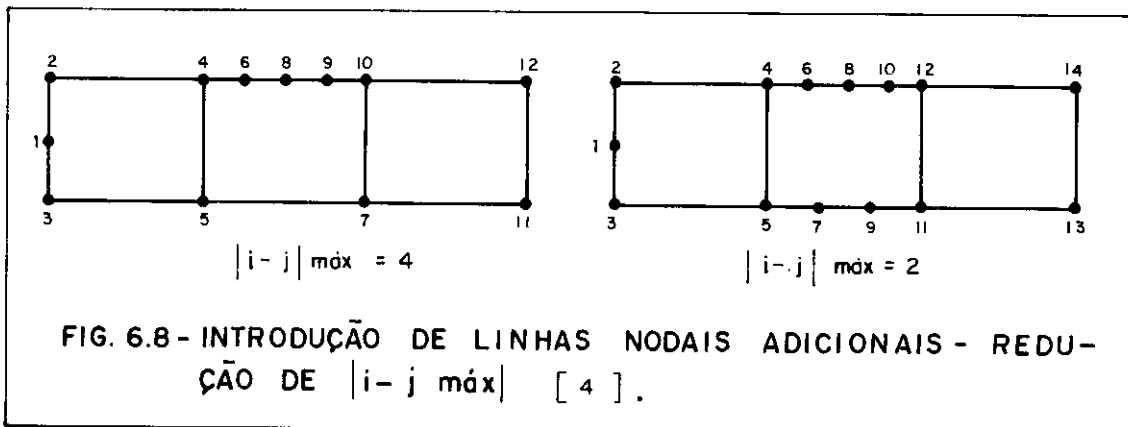
No caso das pontes de seção celular (e também o

das folhas prismáticas múltiplas) não é possível adotar-se uma numeração sequencial padrão e, de um modo geral, para cada discretização de seção transversal, o projetista deve ensaiar algumas numerações até encontrar a mais adequada.



Na Figura 6.7 são apresentados alguns exemplos de discretização de seções celulares diversas e numerações diferentes com o respectivo valor de $|i-j|_{\text{máx}}$. Aconselha-se ao leitor não preocupar-se, durante o exame da figura, com o posicionamento das linhas nodais, cuja orientação será dada em capítulo posterior, mas apenas com a numeração em si, e a sua influência na semi-largura da banda da matriz de rigidez.

A Figura 6.8 ilustra a situação em que linhas nodais adicionais (mesmo não sendo necessárias para a melhoria da precisão, convergência, etc) são introduzidas unicamente com o objetivo de reduzir o valor da diferença $|i-j|_{\text{máx}}$.



CAPÍTULO 7

AUTOMATIZAÇÃO DO MÉTODO

7.1 - GENERALIDADES

Tendo como base os fundamentos teóricos apresentados nos capítulos anteriores, foram elaborados dois programas em linguagem FORTRAN IV, denominados MEFAF e MEFAC, para serem utilizados no sistema IBM/370-148, instalado na EESC-USP. Ambos os programas perfazem a análise estática de pontes retas de seção celular constante, biapoiadas nas seções extremas, sendo que o segundo admite a existência de apoios intermediários discretos.

Não se tem a pretensão de que os programas sejam modelos acabados de aplicação imediata nos escritórios de cálculo estrutural mas, apenas, ferramentas eficientes que permitam colimar os objetivos desta pesquisa. Assim, durante a programação do método, não houve preocupação excessiva em relação às técnicas de otimização quanto aos aspectos de velocidade de processamento e ocupação de área de memória.

Neste capítulo são apresentadas as estruturas dos programas, atentando-se, inclusive, para detalhes de funcionamento de alguns subprogramas cuja compreensão não seja imediata.

7.2 - PROGRAMA MEFAF

7.2.1 - Campo de aplicação

Basicamente o programa MEFAF foi elaborado para fazer a análise estática de pontes retas de seção celular constante, biapoiada nas seções extremas, mas pode também ser utilizado no cálculo de outras estruturas biapoiadas tais como: chapas retangulares, placas retangulares, folhas prismáticas simples ou múltiplas, pontes retas de tabuleiro em laje sobre vigas longitudinais, etc.

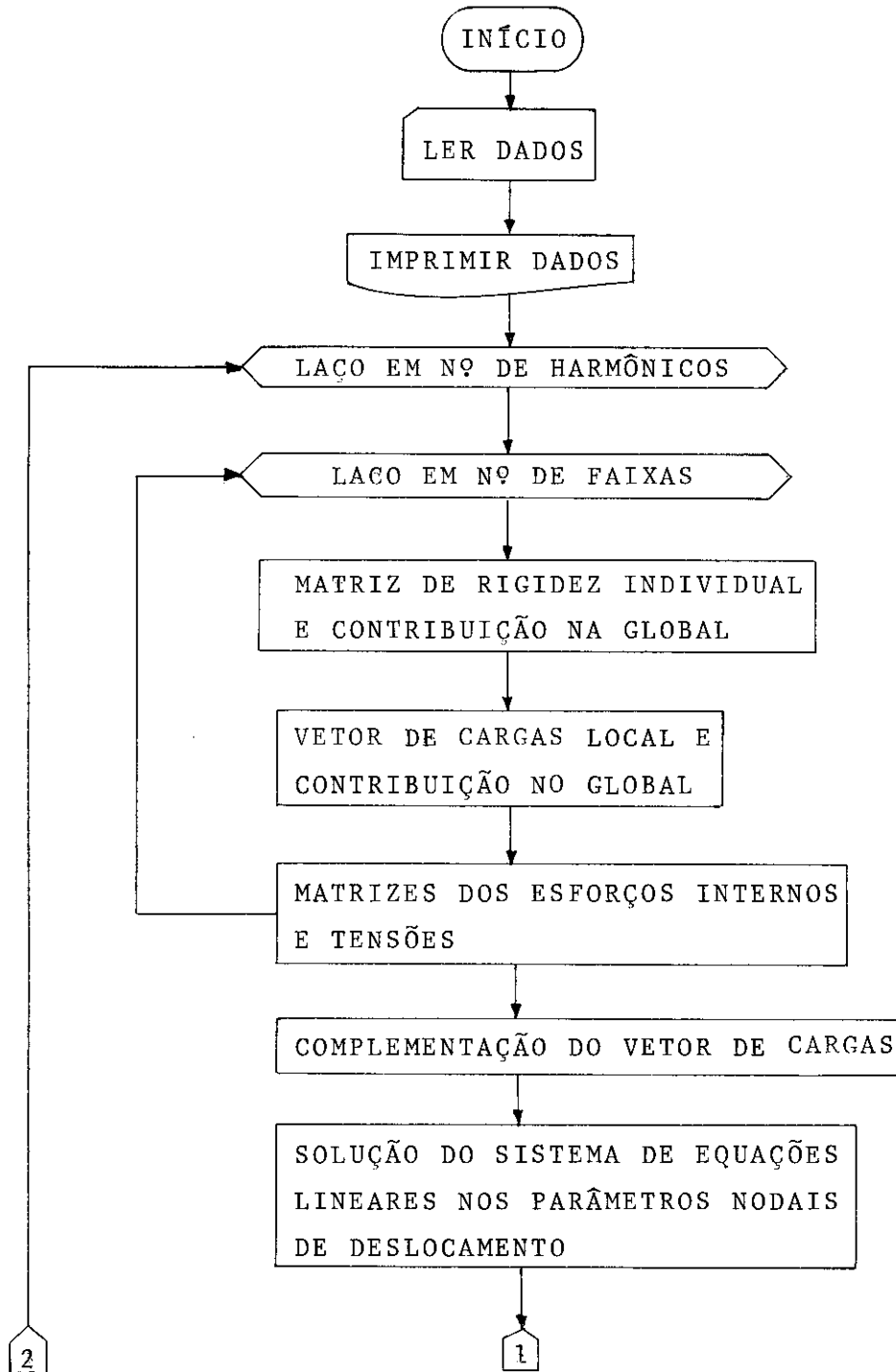
Em todos os casos as estruturas devem ser providas, nas seções transversais extremas, de diafragmas rígidos (em seus planos) e podem ser discretizadas em faixas verticais, horizontais ou inclinadas, desde que as suas características elásticas não se alterem longitudinalmente.

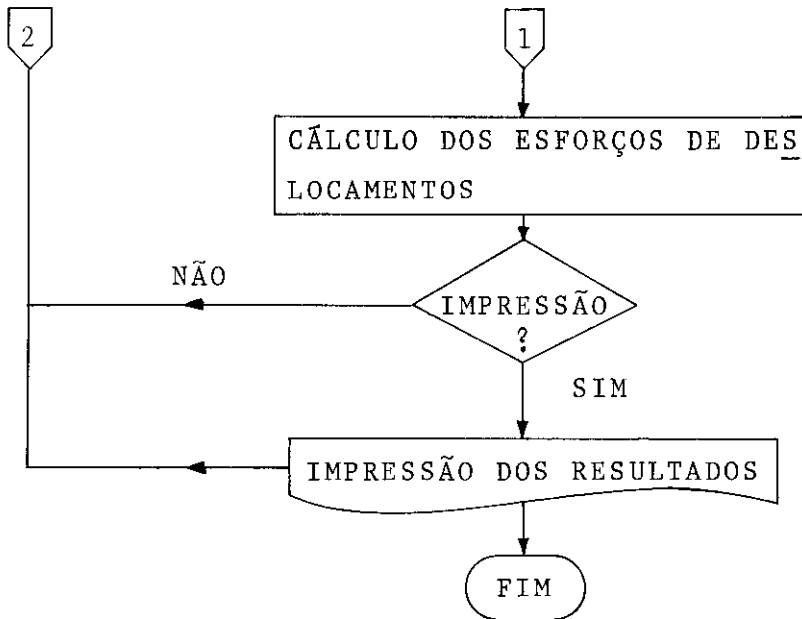
A seguir anotam-se algumas observações relativas às estruturas passíveis de cálculo estático pelo programa MEFAF.

- Características elásticas e geométricas: seção transversal constante, ligação monolítica das faixas, ortotropia plana de cada faixa, comportamento elástico-linear.
- Ações: peso próprio da estrutura, cargas linearmente distribuídas (desde que a linha de distribuição seja paralela ou perpendicular às linhas nodais) cargas superficialmente distribuídas, cargas concentradas.
- Resultados: momentos fletores e torçores e forças cortantes por unidade de comprimento da faixa (funcionamento como placa), tensões normais e de cisalhamento (funcionamento como chapa), deslocamentos nas linhas nodais.

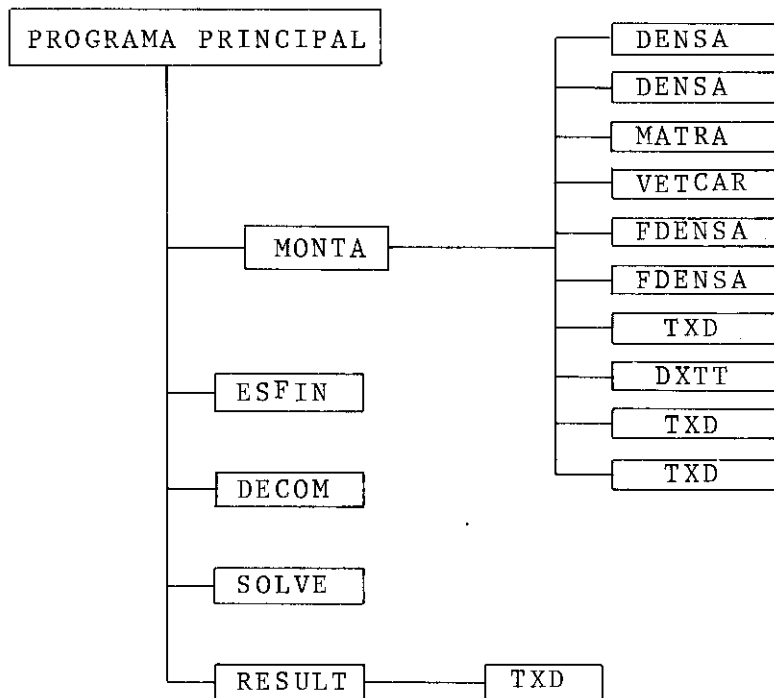
7.2.2 - Organização do programa MEFAF

FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO





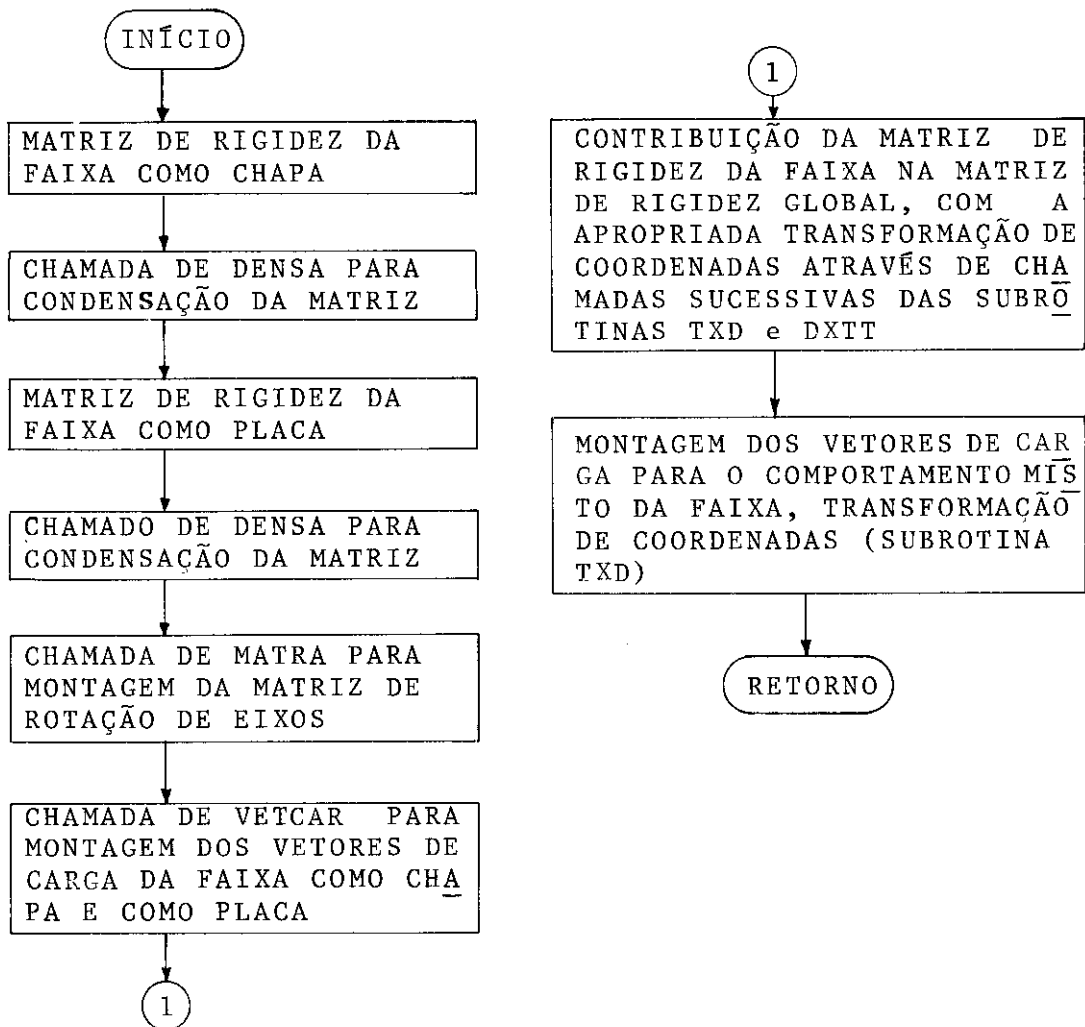
ORGANOGRAMA



EXPLICAÇÃO DAS SUBROTINAS

MONTA

Promove a montagem da matriz de rigidez e do vetor de cargas da estrutura coordenando a chamada de outras subrotinas auxiliares. Funciona de acordo com o fluxograma apresentado a seguir.



DECOM SOLVE

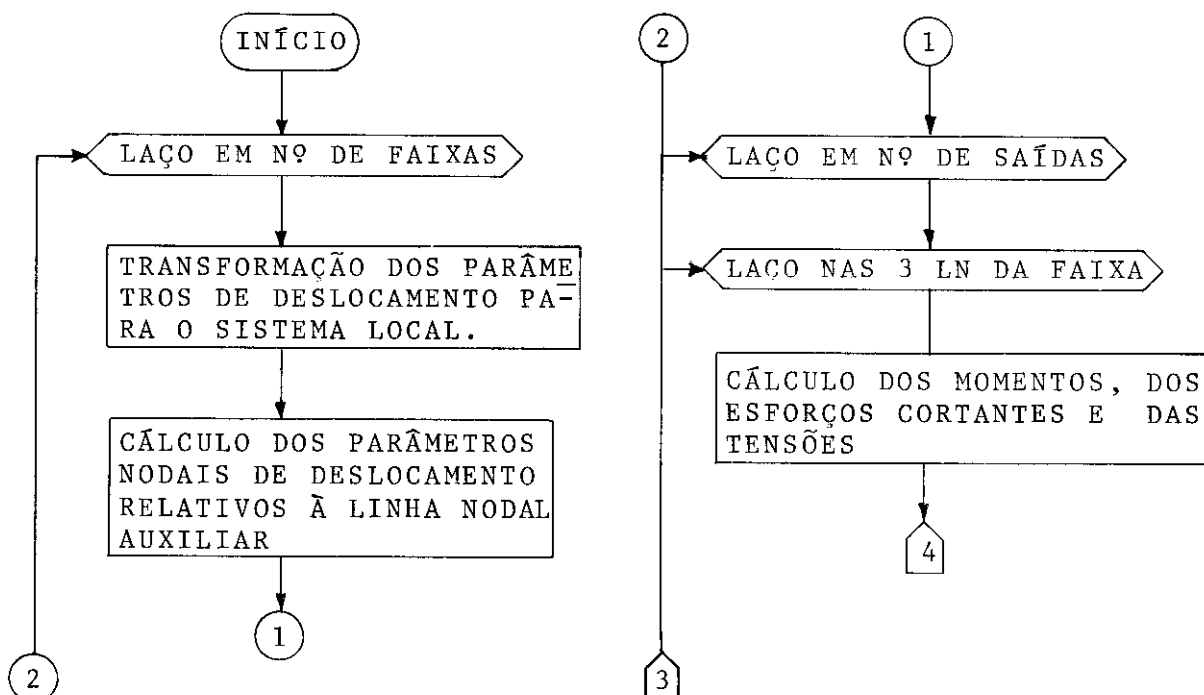
Resolvem um sistema de equações lineares, desde que a matriz do mesmo seja simétrica, em banda e definida positiva, através do método da raiz quadrada (Cholesky). A razão de ter sido escolhido tal método deve-se à citação encontrada na referência [30], em que os autores o recomendam como um dos mais adequados para a resolução de sistemas simétricos.

Tais subrotinas operam apenas com a diagonal principal mais a parte superior da banda da matriz, achando tal região em u'a matriz retangular de dimensões $N \times LB$ onde N é o número total de graus de liberdade e LB a semi-largura da banda da matriz do sistema (vide Fig. 5.8).

RESULT

Calcula para as seções de saída os deslocamentos nas linhas nodais, referidas ao sistema global e os esforços internos e tensões referidos a cada sistema local de faixa.

O seu funcionamento pode ser entendido a partir do fluxograma a seguir.



DENSA

Realiza a condensação estática da matriz de rigidez da faixa no seu funcionamento como placa ou como chapa, através da eliminação dos parâmetros de deslocamento correspondentes à linha nodal auxiliar. As dimensões das matrizes de rigidez da faixa são reduzidas de 6x6 a 4x4.

FDENSA

Promove a condensação estática do vetor de cargas da faixa no seu funcionamento como placa ou como chapa, através de eliminação dos parâmetros correspondentes à linha nodal auxiliar.

MATRA

Estabelece a matriz de transformação de coordenadas que permite a rotação de eixos cartesianos, relacionando o sistema local ao sistema global de referência.

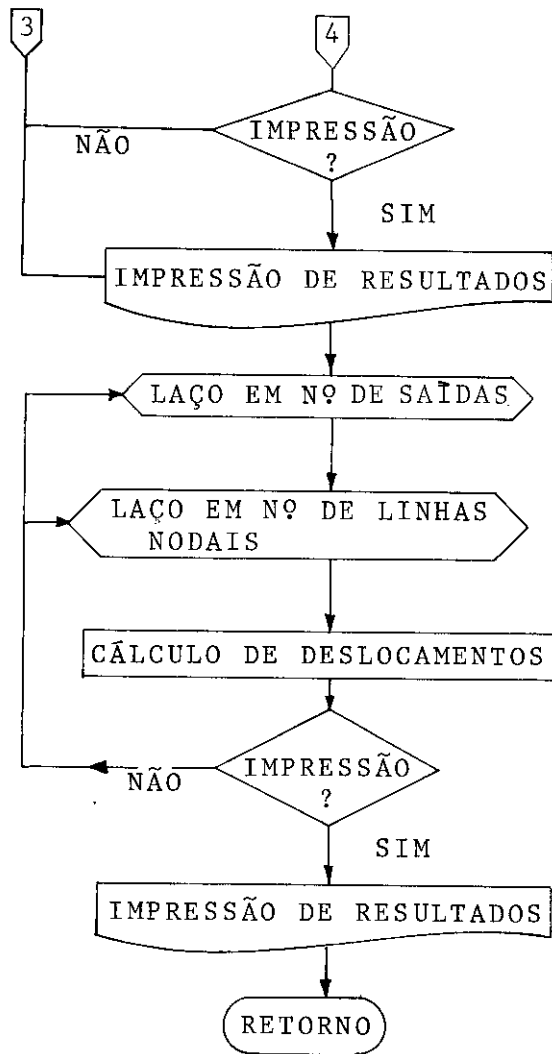
VETCAR

Calcula os vetores de carga para ações em cada faixa no seu comportamento como placa ou chapa.

Acumula as cargas nodais equivalentes na seguinte ordem: cargas totalmente distribuídas (inclusive peso próprio), cargas parcialmente distribuídas, cargas linearmente distribuídas, cargas concentradas.

ESFIN

Calcula para as três linhas nodais de cada faixa e em todas as seções de saída de resultados, a matriz dos momentos, a matriz dos esforços cortantes e a matriz das tensões. Essas matrizes multiplicadas pelos parâmetros nodais de deslocamento referidos ao sistema local de coordenadas da faixa fornecem os valores dos referidos esforços e tensões.



7.2.3 - Sistemas de coordenadas

São utilizados eixos coordenados cartesianos ortogonais agrupados de tal modo a formarem um sistema global de referência e tantos sistemas locais quantas forem as faixas em que se discretiza a estrutura.

SISTEMA GLOBAL

A escolha do mesmo é feita observando-se os seguintes requisitos:

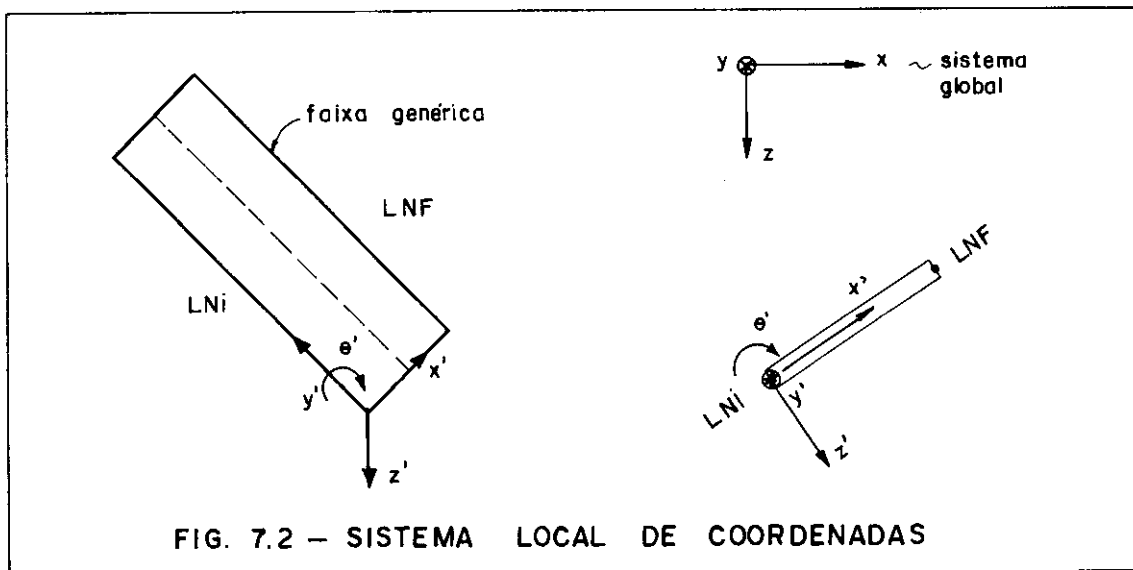
- origem em um dos apoios extremos da estrutura, para possibilitar o atendimento, a priori, das condições de contorno longitudinais (vide 2º e 3º capítulos).

- eixo y na direção do eixo longitudinal da estrutura
- eixos x e z preferencialmente (mas não obrigatoriamente) as direções preponderantes na estrutura, em geral a vertical e a horizontal; ambos os eixos ortogonais a y e entre si.

SISTEMA LOCAL

Definido a partir do instante em que se fixa a incidência das faixas; adotadas as seguintes características:

- origem no mesmo apoio que contém a origem do sistema global, no plano médio da faixa e sobre sua linha nodal inicial (LNI).
- eixo y' paralelo e de mesmo sentido do correspondente eixo global e contido no plano médio da faixa.
- eixo x' no plano médio da faixa, dirigido da linha nodal inicial (LNI) para a linha nodal final (LNF).
- eixo z' conseqüentemente perpendicular ao plano médio da faixa.



O programa MEFAF já incorporou em suas rotinas de cálculo a fixação de cada sistema local de coordenadas e a respectiva ligação do mesmo ao sistema global a partir da definição da LNI e da LNF por suas coordenadas globais x e z.

7.2.4 - Entrada de dados

PREPARO DOS DADOS

Durante esta fase não se deve fazer economia em cuidado e organização. Como orientação segue um roteiro básico para a utilização do programa MEFAF.

- discretização da estrutura
- numeração das faixas e suas linhas nodais periféricas
- fixação do sistema global de referência
- coordenadas dos nós
- incidências das faixas nas linhas nodais (que impõem os sistemas locais de referência) e suas espessuras
- indicadores de número de harmônicos, número de saídas, etc.
- ordenadas das saídas
- fixação das propriedades físicas da estrutura

- detalhes relativos às cargas, separando as que são aplicadas nas faixas daquelas que são aplicadas diretamente nas linhas nodais.

LIMITAÇÕES

O programa MEFAF tem sua aplicação delimitada por:

- número máximo da faixas = 40
- número máximo de linhas nodais = 40
- número máximo de seções de saída = 10
- máximo módulo da diferença entre número das linhas nodais de uma faixa = 3 ($|i-j| \leq 3$)

- números máximos de cargas em linhas nodais (concentradas = 16, linearmente distribuídas = 16, momentos distribuídos = 5)
- quanto às aplicadas nas faixas deve-se respeitar o limite de 150 para a soma das seguintes parcelas: 2 vezes o número de cargas totalmente distribuídas, 7 vezes o número de cargas parcialmente distribuídas, 8 vezes o número de cargas linearmente distribuídas e 5 vezes o número de cargas concentradas.

MANUAL DE ENTRADA DE DADOS

ORDEM	Nº DE REGISTROS DE ENTRADA	VARIÁVEIS	FORMATO
I	1	NHARM, NFAIXA, NLN, NSAIDA, NAPOIO, LBANDA, A, THAR	6G10, G10.0, G10
II	NSAIDA ÷ 8	YSAIDA(I)	8G10
III	NLN	X(I), Z(I)	2G10
IV	NFAIXA	LNI(I), LNF(I), H(I)	2G10, G10.0
V	1	EX, EY, C, PX, PY, GAMA	3G15.0, 3G10.0
VI	1'	ICTDIS(I), NCPDIS(I), NCLDIS(I) NCCONC(I)	8G10
VII	ICTDIS(I)	QFAIXA(IAUX), QFAIXA(JAUX)	2G10.0
VIII	NCPDIS(I)	QFAIXA(K), K=IAUX, JAUX QPX, QPY, QPZ, X1, X2, Y1, Y2	8G10.0
IX	NCLDIS(I)	QFAIXA(K), K=IAUX, JAUX QLX, QLY, X1, X2, Y1, Y2, IND	8G10.0
X	NCCONC(I)	QFAIXA(K), K=IAUX, JAUX QCX, QCY, QCZ, X, Y	8G10.0
XI	1	NCCLN, NCDLN, NMDLN	3G10
XII	NCCLN	LNCARC(J), UC(J), VC(J), WC(J), YC(J)	G10, 5 G10.0
XIII	NCDLN	LNCARD(J), QX(J), QZ(J), Yc(J), Y2(J)	G10, 5 G10.0
XIV	NMDLN	LNMOND(J), MTETA(J), YN1(J), YN2(J)	G10, 5 G10.0

SIGNIFICADO DAS VARIÁVEIS E COMENTÁRIOS

I. Informações Gerais

- NHAR → número total de harmônicos da série
- NFAIXA → número total de faixas
- NLN → número total de linhas nodais (excluídas as au
xiliares)
- NSAIDA → número total de saída de resultados
- NHARSA → número do harmônico a partir do qual são im-
pressos resultados
- LBANDA → semi-largura de banda da matriz de rigidez glo
bal
- A → comprimento da estrutura
- IHAR → índice de incremento de harmônicos
IHAR=0 quando não houver simetria de carga
mento em relação à seção central
IHAR=1 quando houver

II. Ordenadas das Saídas

YSAIDA(I) → ordenada da saída I

III. Coordenadas das linhas nodais

X(I) , Z(I) → respectivamente abscissa e cota da li
nha nodal I, referidas ao sistema glo
bal de coordenadas

IV. Incidência e espessura das faixas

LNI(I),LNF(I),H(I) → linha nodal inicial, linha nodal
final e espessura da faixa I, res
pectivamente.

V. Características do material constituinte da estrutura

EX, EY → módulos de elasticidade longitudinais de todas as faixas nas direções x e y respectivamente.

G → módulo de elasticidade transversal

PX, PY → coeficientes de Poisson correspondentes às direções x e y, respectivamente

GAMA → peso específico

VI. Informações sobre as ações na faixa I

ICTDIS(I) → índice de carga totalmente distribuída (ICTDIS = 0, quando inexiste tal força e ICTDIS = 1, quando existe)

NCPDIS(I), NCLDIS(I), NCCONC(I) → número de cargas parcialmente distribuídas, linearmente distribuídas e concentradas, respectivamente.

VII. Carga totalmente distribuída

QFAIXA(IAUX), QFAIXA(JAUX) → taxas de distribuição de carga nas direções dos eixos locais x' e z', respectivamente

VIII. Carga parcialmente distribuída

QFAIXA(K), K=IAUX,JAUX → podem ser melhor compreendidas chamando-se QFAIXA(K) respectivamente de QPX, QPY, QPZ, X1,X2, Y1,Y2, para K variando de IAUX a JAUX.

QPX, QPY, QPZ → taxas de distribuição da carga nas direções das linhas locais x', y' e z', nesta ordem.

X1, X2 → abscissas inicial e final do retângulo de distribuição, respectivamente.

Y1, Y2 → o mesmo para ordenadas.

IX. Carga linearmente distribuída

QFAIXA(K), K=IAUX,JAUX → podem ser melhor compreendidas nomeando-se QFAIXA(K) respectivamente de QLX, QLY, QLZ, X1,X2,Y1,Y2,IND, para K variando de IAUX a JAUX.

QLX, QLY, QLZ → taxas de distribuição de carga nas direções dos eixos locais x', y' e z', nesta ordem

X1, X2 → abscissas inicial e final da distribuição, respectivamente (quando distribuição paralela ao eixo local x')

Y1, Y2 → ordenadas inicial e final da distribuição, respectivamente (quando distribuição paralela ao eixo local y')

IND → indicador de direção da linha de distribuição da carga (IND=0, quando paralela ao eixo x' e IND=1, quando paralela ao eixo y')

X. Carga concentrada

QFAIXA(K), K =IAUX,JAUX → melhor compreendidas desde que, para K variando de IAUX a JAUX, chame-se QFAIXA(K) respectivamente de QCX, QCY, QCZ, X, Y

QCX,QCY,QCZ → componentes da carga segundo os eixos locais x', y' e z', nesta ordem

X, Y → abscissa e ordenada locais do ponto de aplicação da carga

XI. Informações sobre as cargas aplicadas nas linhas nodais

NCCLN, NCDLN, NMDLN → números totais de cargas concentradas, cargas linearmente distribuídas e momentos linearmente distribuídos nas linhas nodais, respectivamente.

XII. Carga concentrada J

LNCARC(J) → linha nodal onde atua a carga concentrada J

UC(J), VC(J), WC(J) → componentes da carga J, segundo os eixos globais x, y e z, respectivamente

YC(J) → ordenada global do ponto de aplicação da carga J

XIII. Carga linearmente distribuída J

LNCARD(J) → linha nodal onde atua a carga distribuída J

QX(J), QZ(J) → taxas de distribuição linear de carga J nas direções dos eixos globais x e z, respectivamente

Y1(J), Y2(J) → ordenadas inicial e final da distribuição de carga J

XIV. Momentos linearmente distribuídos J

LNMOND(J) → linha nodal onde atua o momento distribuído J

MTETA(J) → taxa de distribuição do momento J em torno do eixo global y (segundo θ)

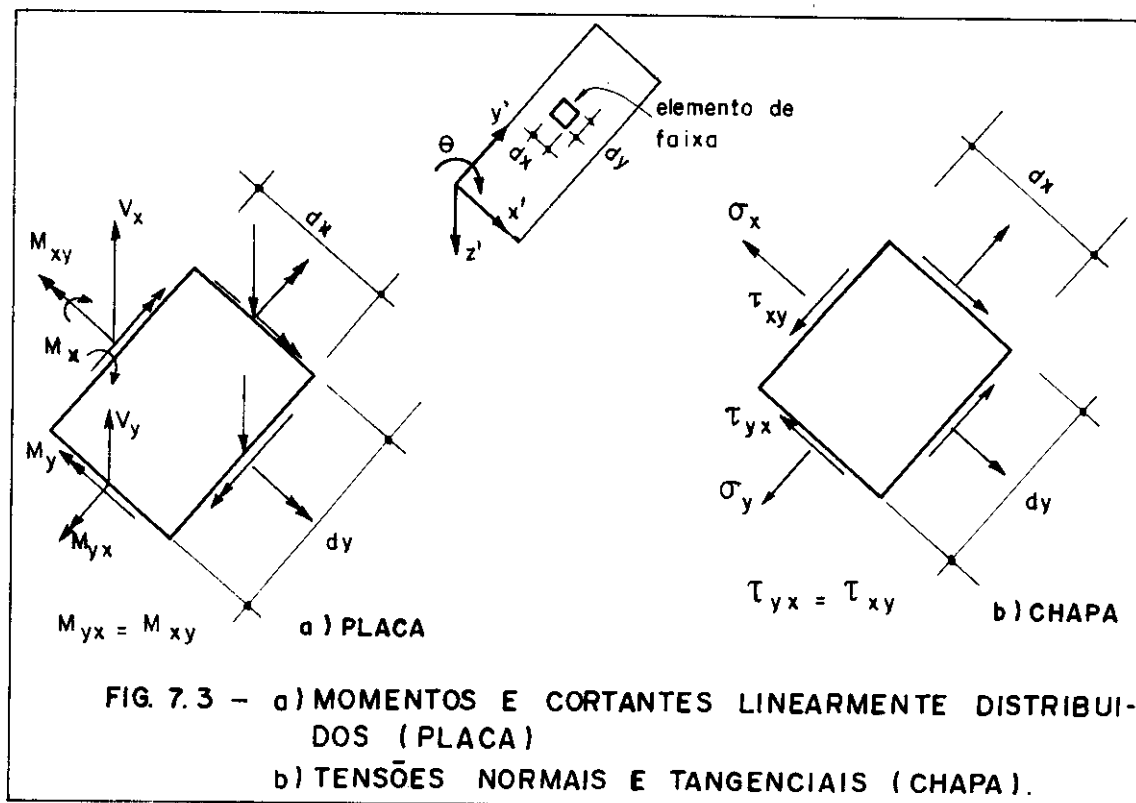
YM1(J), YM2(J) → ordenadas do início e do fim da distribuição do momento J.

Para os registros de entrada cujos números de ordem são VII, VIII, IX e X, e que correspondem às ações sobre as faixas, deve-se lembrar que os sistemas de referência são locais.

7.2.5 - Saída de resultados

O conjunto de resultados é apresentado com diferenciação do sistema de eixos cartesianos a que se ligam os mesmos, esforços internos e tensões referidas aos sistemas locais e deslocamentos ao sistema global.

Em cada uma das seções de saída, nas três linhas nodais de todas as faixas tem-se, para o seu funcionamento como placa, a apresentação dos momentos fletores M_x e M_y , momento torçor ou volvente M_{xy} , esforços cortantes V_x e V_y , todos linearmente distribuídos na unidade de comprimento e obedientes às convenções apresentadas na Figura 7.3.a. E, para o funcionamento como chapa, as tensões normais σ_x , σ_y e tensão de cisalhamento τ_{xy} , conforme Figura 7.3.b.



Já os deslocamentos u , v , w e θ para as linhas nodais externas, isto é, excetuadas as auxiliares de cada faixa, são exibidos, em cada seção de saída, referidos ao sistema global e obedientes aos sentidos por ele determinados.

7.3 - PROGRAMA MEFAC

7.3.1 - Campo de aplicação

O programa MEFAC incorpora a técnica apresentada no capítulo 6, possibilitando a análise de pontes retas de seção celular constante, biapoiada nas seções extremas, que tenham apoios intermediários discretos rígidos ou diafragmas fixos.

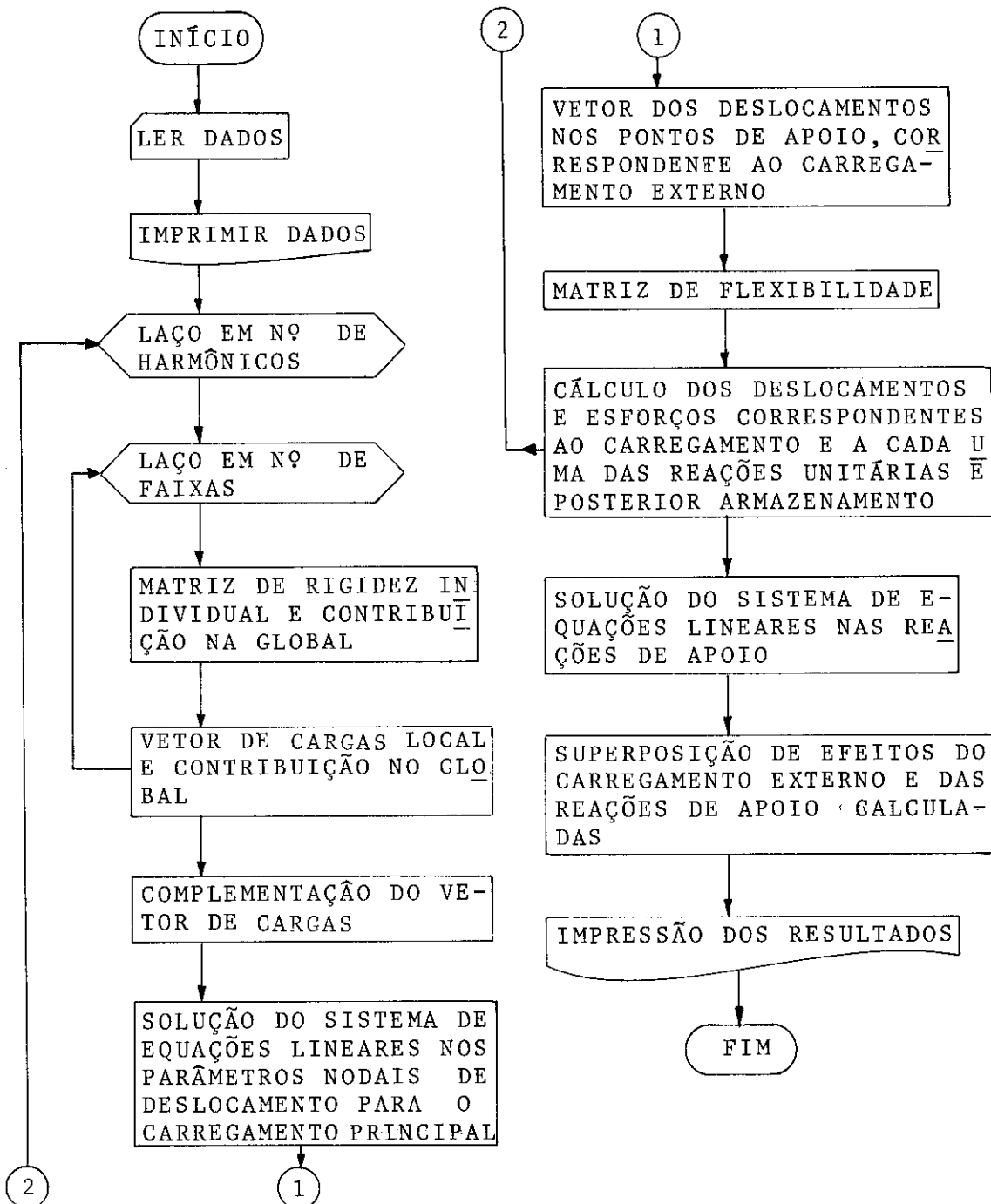
Quanto ao apresentado no item 7.2.1 (programa MEFAP) acrescenta-se aqui a continuidade das estruturas relacionadas e nos resultados as reações de apoio nos pilares ou as interações nos pontos de conexão diafragma-estrutura principal, que, a partir deste item, passam a ser chamadas também reações de apoio, para simplificação dos textos posteriores.

7.3.2 - Organização do programa MEFAC

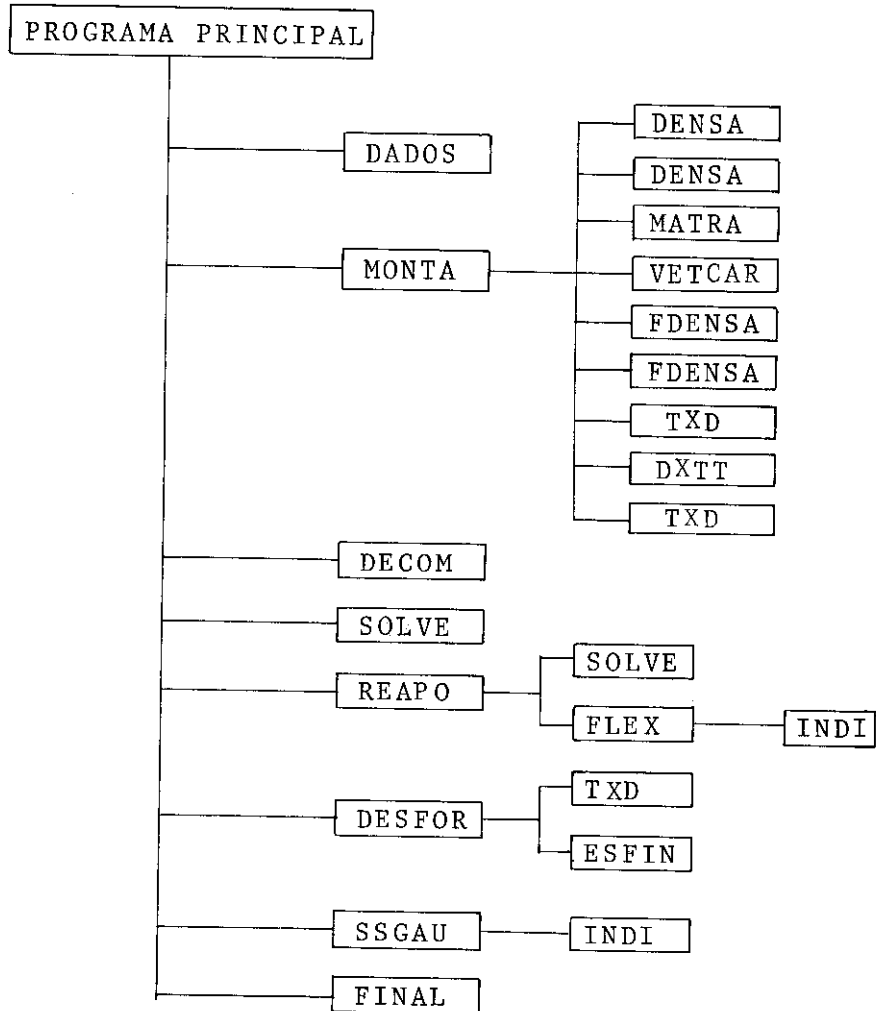
O programa MEFAC guarda vários pontos de semelhança com o programa MEFAP. Enquanto neste a estrutura biapoiada é resolvida para o carregamento externo apenas, naquele, a mesma (no caso estrutura principal), é resolvida para o carregamento externo e para cada um dos carregamentos constituídos pela reação unitária colocada em um ponto de apoio, na direção em que se impõe deslocamento nulo. As soluções para os diversos carregamentos, processadas harmô

nico a harmônico da série, são individualmente armazenadas e acumuladas de tal forma que, ao se atingir um determinado número de harmônico pré-fixado, são calculadas as reações de apoio (através do processo dos esforços) e é, então, promovida a superposição de efeitos para chegar-se à solução final.

FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO



ORGANOGRAMA



EXPLICAÇÃO DOS SUBPROGRAMAS

Não serão apresentados os subprogramas de compreensão imediata e nem aqueles que se assemelham aos homônimos utilizados no programa MEFAF

ESFIN

É chamada em MEFAF durante outra fase do programa, no momento do cálculo dos esforços internos e tensões, evitando armazenamento periférico.

Basicamente é a mesma subrotina com pequenas alterações.

REAPO

Calcula deslocamentos nos pontos de apoio devidos ao carregamento externo e os parâmetros nodais de deslocamento correspondentes às reações de apoio unitárias.

É feito o aproveitamento da decomposição da matriz de rigidez operada antes de se chamar REAPO.

Através da chamada de FLEX são estabelecidos os coeficientes de flexibilidade.

FLEX

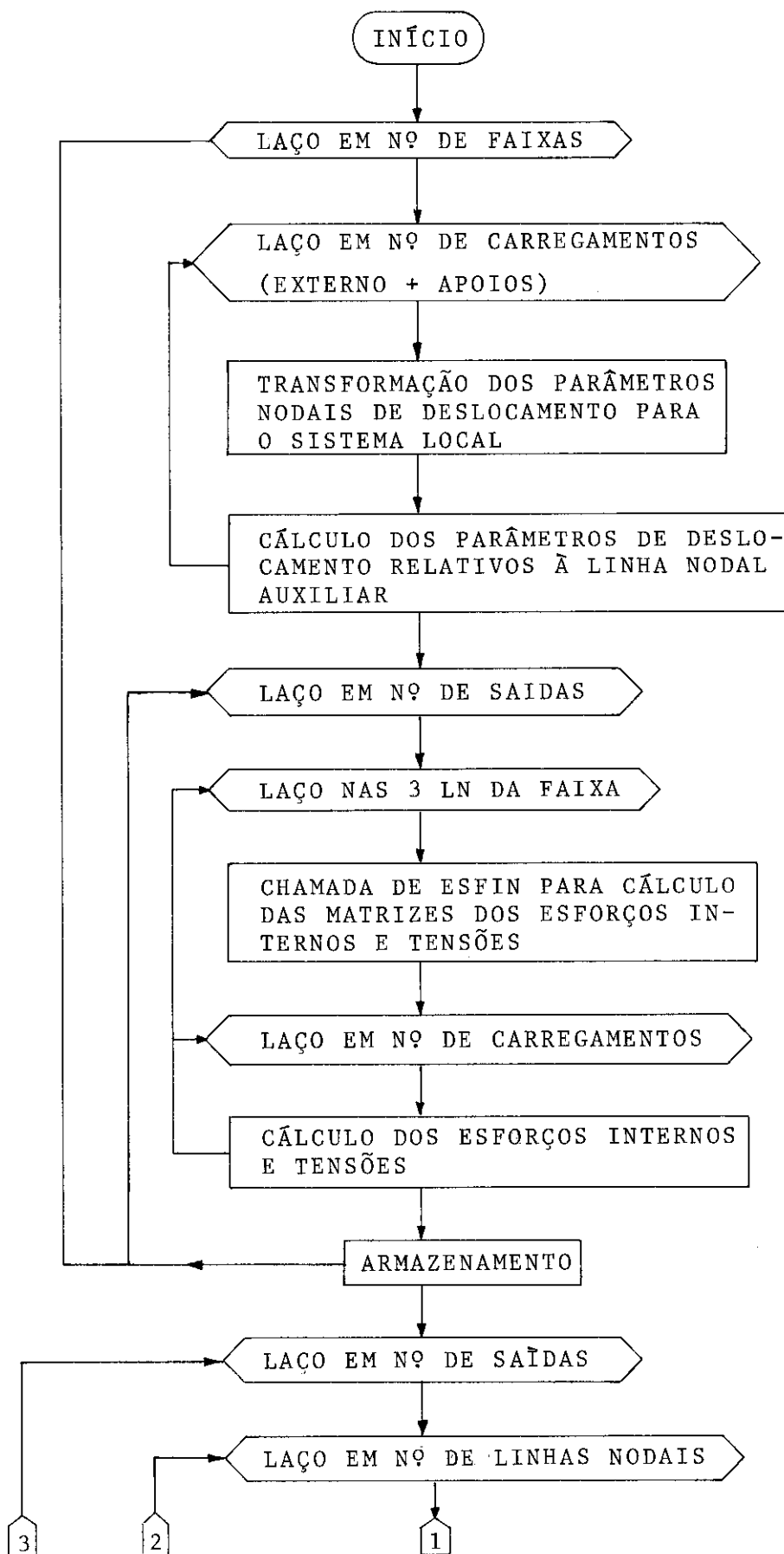
Calcula os coeficientes de flexibilidade e organiza a matriz de flexibilidade como um vetor, armazenando apenas os elementos acima da diagonal principal (inclusive), uma vez que tal matriz é simétrica.

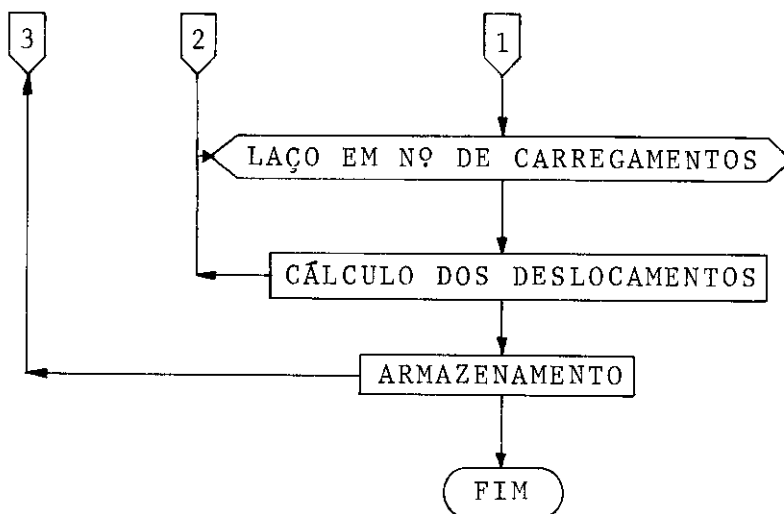
INDI

Função que calcula a posição do elemento (i,j), da matriz bidimensional simétrica de ordem N, que se encontra acima da diagonal principal (inclusive), ou seja, os elementos (i,j), com $j \geq i$.

DESFOR

Calcula, para as várias seções de saída, os deslocamentos nas linhas nodais referidas ao sistema global e os esforços internos e tensões referidos ao sistema local de cada faixa. Isso é feito para o carregamento externo e também para cada um dos carregamentos correspondentes às reações unitárias, sendo os resultados armazenados para posterior superposição. O fluxograma a seguir procura esclarecer o seu funcionamento.





SSGAU

Subrotina para resolução de sistema de equações lineares pelo método de Gauss simples.

FINAL

Subrotina que processa a superposição de efeitos dos vários carregamentos e imprime os resultados finais.

7.3.3 - Sistemas de Coordenadas

(Vide item 7.2.3)

7.3.4 - Entrada de Dados

PREPARO DOS DADOS

O roteiro a ser seguido é o mesmo do programa MEFAF, acrescentando-se, apenas, a fixação dos pontos de a poio, que necessariamente pertencerão a linhas nodais pre viamente adotadas.

LIMITAÇÕES

As diferenças em relação ao programa MEFAF são as seguintes:

- número máximo de seções de saída = 5
- número máximo de cargas em linhas nodais (linearmente distribuídas = 10, momentos distribuídos = 2)
- para as cargas aplicadas nas faixas, tem-se como limite da soma referida no item 7.2.4 o valor 90 ao invés de 150
- número máximo de pontos de apoio = 30 (específico de MEFAC)

MANUAL DE ENTRADA DE DADOS

As modificações necessárias em relação ao programa MEFAF são anotadas a seguir.

Nº DE ORDEM	Nº DE REGISTROS DE ENTRADA	VARIÁVEIS	FORMATO
I	1	NHAR, NFAIXA, NLN, NSAIDA, NAPOIO, LBANDA, A, IHAR	6G10, G10.0, G10
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
XV	NAPOIO	LNODAL(J), YAPOIO(J), IMPEDI(J)	G10, G10.0, G10

SIGNIFICADO DAS VARIÁVEIS E COMENTÁRIOS

I. Informações Gerais

⋮
⋮
⋮

NAPOIO número total de pontos de apoio

⋮
As demais variáveis com mesmo significado apresentado no programa MEFAF

⋮
⋮

⋮
XV. Pontos de apoio

LNODAL(J) → linha nodal onde se encontra o ponto de apoio J

YAPOIO(J) → ordenada do ponto de apoio J

IMPEDI(J) → indicador da direção de restrição de deslocamento

IMPEDI	}	= 0	restrição paralela ao eixo global z
		= 1	restrição paralela ao eixo global x
		= 2	restrição em torno do eixo global y (direção de θ)

7.3.5 - Saída de resultados

Além dos apresentados pelo programa MEFAF, são também impressas as reações de apoio relacionadas ao sistema global de referências.

CAPÍTULO 9

CONSIDERAÇÕES FINAIS - CONCLUSÕES

9.1 - CARGA CONCENTRADA - O PROBLEMA DO EFEITO LOCALIZADO

Teoricamente as tensões em um ponto sob carga concentrada são infinitas. Assim a teoria das placas delgadas não pode fornecer, por exemplo, os momentos máximos sob ponto de concentração de carga. Não compensa, pois, em tais pontos tentar atingir a "convergência" da solução.

A carga concentrada em um ponto só existe no plano das cogitações abstratas pois, na prática, qualquer carga se distribui sobre uma área finita. Assim, o pico teórico de resultados sob cargas concentradas é de interesse puramente acadêmico. No caso específico das pontes, motivo maior deste trabalho, as próprias normas técnicas prevêm cargas de rodas dos veículos-tipo distribuídas em pequenos retângulos e ainda o espraiamento a 45° até o plano médio da laje superior. Além disso as armaduras, dispostas nos tabuleiros das pontes de concreto armado, são calculadas para resistirem às cargas totais integradas em determinadas porções de cada seção e não em atendimento a valores isolados das tensões teóricas.

Enquanto na vizinhança de cargas concentradas tensões e esforços tendem a se estabilizar vagarosamente, requerendo cerca de 100 harmônicos, quase nenhuma mudança ocorre em regiões pouco distanciadas a partir dos primeiros 25 ou 30 harmônicos.

Nos locais de concentração de carga , mesmo os valores que alcançam certa estabilidade têm uma confiabilidade que só pode ser garantida quando respeitados parâmetros empíricos, fixados a partir da instrumentação de modelos e comparação de resultados experimentais.

Quando da colocação de extensômetros, com o objetivo de medir deformações, tenha-se em mente o seu comprimento finito, o que faz com que na realidade sejam avaliadas medidas de deformação em pequenas distâncias finitas, enquanto a teoria fornece picos de valores em distâncias infinitamente pequenas.

Loo e Cusens [4] apresentam as conclusões de um trabalho minucioso em que foram feitas comparações entre os resultados teóricos provenientes da análise por faixas finitas e as medidas realizadas em modelos de pontes, instrumentados com uma alta densidade de extensômetros. Essas conclusões encontram-se resumidas no parágrafo seguinte.

A consideração de um número de harmônicos em torno de 100 faz com que o Método das Faixas Finitas forneça os valores próximos dos experimentais (faixa A03-1LNA) para as deformações nas regiões críticas, desde que se utilize duas ou mais faixas estreitas na vizinhança das cargas concentradas. Tais valores têm se apresentado a favor da segurança e independentes da posição da carga no tabuleiro. Assim, para regiões entre duas seções apoiadas os efeitos locais podem ser determinados analisando-se uma estrutura auxiliar, biapoiada, com um vão igual à distância dos apoios citados; na vizinhança de suporte intermediário os efeitos locais podem ser encontrados a partir da análise de estrutura auxiliar contínua, de dois vãos, retendo apenas os apoios adjacentes, que são assumidos simples.

9.2 - DESCONTINUIDADES LONGITUDINAIS

Nas seções imediatamente sobre eixos de veículos-tipo e seções intermediárias apoiadas ocorrem descontinuidades longitudinais em alguns esforços e tensões (força cor

tante longitudinal V_y de placa, tensão de cisalhamento τ_{xy} de chapa).

As simulações em série de Fourier, por sua própria natureza, não podem produzir descontinuidade e os resultados convergirão para a média dos valores dos dois de graus adjacentes à seção de descontinuidade. Os dois valores corretos, serão produzidos a pequenas distâncias da referida seção.

Constitui boa norma de utilização do Método das Faixas Finitas a obtenção de saídas em seções próximas à região crítica para se alcançar os maiores valores dos resultados analisados. De um modo geral a consideração de um número de harmônicos em torno de 100 resolve bem o problema.

9.3 - SIMULAÇÃO DE DIAFRAGMAS - PONTOS DE CONEXÃO

Havendo monolitismo na ligação estrutura principal e diafragma, o contato é contínuo e, à primeira vista, a aproximação se tornaria teoricamente melhor quanto maior fosse o número de pontos de conexão adotados.

Numa análise mais cuidadosa pode-se perceber a inconveniência da consideração de número elevado desses pontos. Em primeiro lugar porque implica na adoção de uma grande quantidade de cargas concentradas que têm dois efeitos danosos: a necessidade de discretizações mais refinadas devida ao aumento do número de linhas nodais adicionais para gerar faixas estreitas nos locais de pico de valores e o acréscimo do tempo de processamento requerido por causa do crescimento do número de incógnitas-força de interação e das equações de rigidez por causa do refinamento da discretização. Em segundo lugar, o efeito desastroso de tornar a matriz de flexibilidade mal condicionada. Se duas forças de interação fossem aplicadas no mesmo ponto da célula e na mesma direção, os dois conjuntos de coefi

cientes de flexibilidade seriam idênticos ou proporcionais, isto implicaria em u'a matriz singular (e, portanto, não inversível). Logo, a consideração de pontos de interação muito próximos prejudica o condicionamento da matriz de flexibilidade.

Nas seções de restrição, onde interessa ao projetista a investigação de resultados, os diafragmas devem ser considerados em conexão com a estrutura principal nos cantos das células. No caso específico de se ter cargas externas concentradas ou distribuídas em pequenas superfícies próximas à seção de restrição, pontos de conexão intermediários devem ser considerados na célula onde tais cargas aparecem [4].

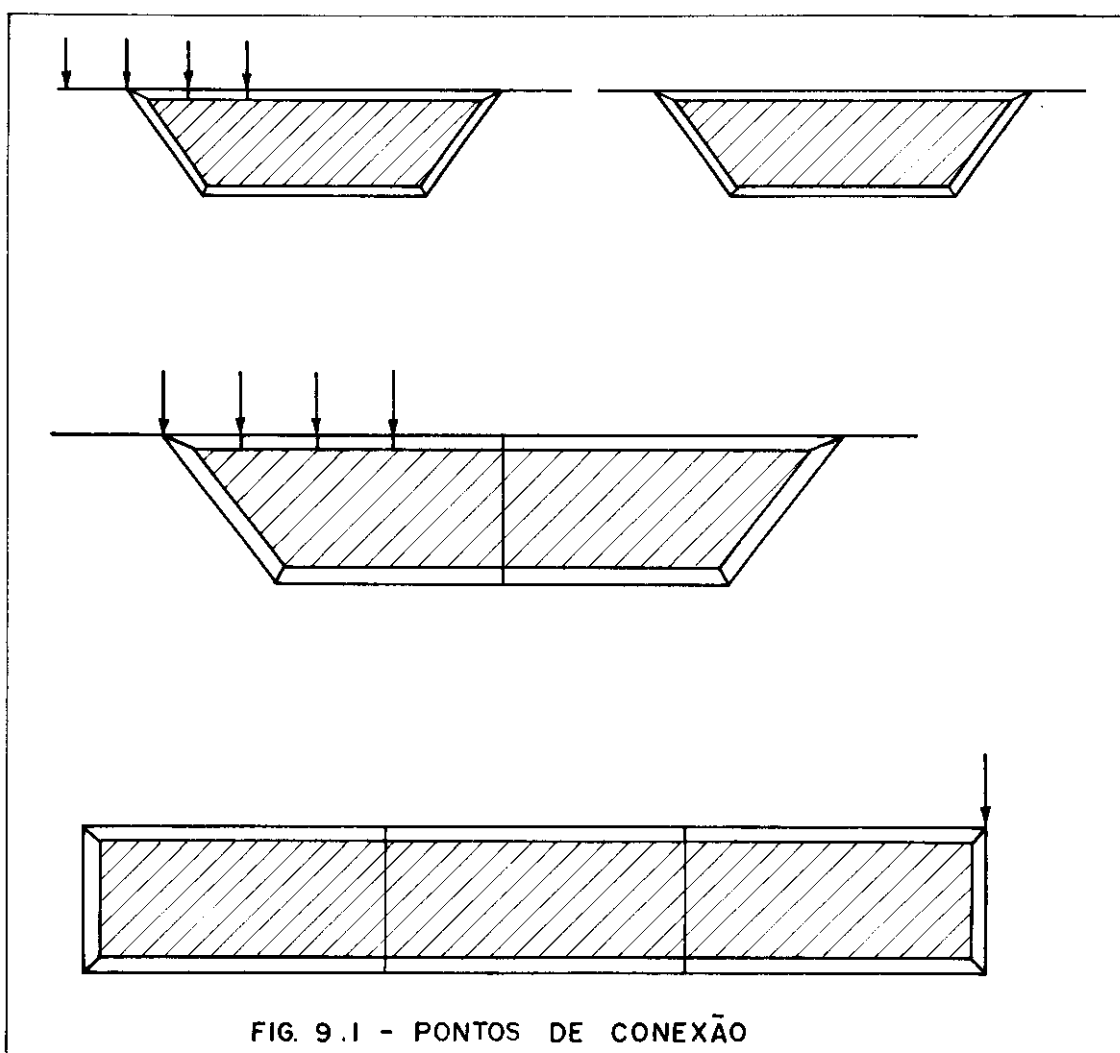


FIG. 9.1 - PONTOS DE CONEXÃO

9.4 - CONCLUSÕES

O Método das Faixas Finitas constitui ferramenta simples e acurada para a análise de folhas poliédricas prismáticas, pontes de tabuleiro em laje e em seção celular, etc., permitindo a fácil consideração da ortotropia. Além das condições de contorno consideradas neste trabalho outras podem ser também incorporadas. Podem ser consideradas vantagens devidas à simetria da estrutura.

O M.F.F. é relativamente simples de se programar, manipula poucos dados de entrada, ocupa reduzida área de memória do equipamento eletrônico utilizado e consome pequeno tempo de computação, sendo adequado para computadores de pequeno porte.

Com a utilização do M.F.F. são alcançados resultados satisfatórios com um número de equações bem menor que no Método dos Elementos Finitos, nas situações em que se aplica, sendo a diferença, em geral, significativa.

Os resultados para deslocamentos convergem rapidamente, o mesmo acontecendo com as reações em apoios intermediários e pontos de interação estrutura principal-diafragmas.

De um modo geral é rápida a convergência ao se afastar dos pontos de concentração de carga, bastando considerar em torno de vinte e cinco harmônicos para as estruturas apoiadas nas extremidades e cinquenta para as contínuas. A consideração de um número de harmônicos perto de uma centena resolve o problema de efeitos localizados junto a cargas concentradas ativas ou reativas e a favor da segurança conforme comprovação experimental [4].

A simulação da continuidade do tabuleiro é eficiente e de fácil tratamento teórico. Quando da existência de cargas concentradas ou seções com restrições de deslocamentos (diafragmas fixos, pilares intermediários, etc) é aconselhável a aproximação de resultados obtidos em seções vizinhas, caso esses tenham interesse na análise.

É boa norma a utilização de duas ou mais faixas estreitas na vizinhança de carga concentrada.

A aproximação para as cortantes merece maior estudo. Parece ser necessária a consideração de um número elevado de faixas e harmônicos ou a adoção de faixa de ordem mais alta. Pesquisas posteriores serão desenvolvidas com o objetivo de estudar tal problema.

Para as pontes de tabuleiro em seção celular é recomendável a utilização de pelo menos vinte e cinco harmônicos quando a mesma for desprovida de apoios intermediários e não havendo interesse a análise de efeitos localizados sob carga concentrada. Caso contrário um número de harmônicos em torno de uma centena deve ser considerado. Nos locais de variações bruscas de tensões, em geral, bastam duas ou três faixas por lâmina constituinte e nos locais distanciados de cargas concentradas e apoios intermediários, uma faixa por lâmina é suficiente para a simulação de seu comportamento. Quando no dimensionamento são preponderantes as tensões de cisalhamento e as tensões normais transversais nas lâminas que apresentam comportamento predominante de chapa, a utilização de duas ou três faixas é adequada. Os pontos de conexão entre diafragma e estrutura principal devem ser considerados nos cantos das células e, se interessarem as saídas de resultados junto à seção de restrição de deslocamentos e se existirem cargas próximas à mesma, devem ser considerados, além dos cantos, pontos intermediários como sendo de interação.

O modelo proposto é bastante seguro quanto à metodologia e a comparação de resultados confirma o tratamento híbrido realizado (polinômios transversais-séries de Fourier longitudinais) e constitui uma garantia dos programas MEFAF e MEFAC, que, provavelmente, se encontram livres de erros.

APÊNDICE I

OBTENÇÃO DA PARTE POLINOMIAL DA FUNÇÃO DESLOCAMENTO

Como exemplo de obtenção de $f_m(x)$ é adotada a faixa finita exposta na Fig. 2.6, com duas linhas nodais i e j e dois graus de liberdade por linha nodal, a amplitude de deslocamento w e a rotação elástica $\theta = \partial w / \partial x$. Há, portanto, um total de quatro parâmetros a determinar (w_{im} , θ_{im} , w_{jm} e θ_{jm}) para cada harmônico m da série. É necessário, então, utilizar um polinômio de terceira ordem

$$f_m(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \quad \dots (I.1)$$

As constantes arbitrárias A_0 , A_1 , A_2 e A_3 podem ser escritas em termos dos parâmetros nodais incógnitos aplicando-se as condições de compatibilidade.

$$\begin{aligned} \text{Em } x = 0 \quad f_m(0) &= w_{im}, & \frac{\partial f_m(0)}{\partial x} &= \theta_{im} \\ \text{Em } x = b \quad f_m(b) &= w_{jm}, & \frac{\partial f_m(b)}{\partial x} &= \theta_{jm} \end{aligned} \quad \dots (I.2)$$

Utilizando a equação (I.1) e impondo-se as condições (I.2) pode-se escrever o seguinte produto matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 0 & 1 & 2b & 3b^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{im} \\ \theta_{im} \\ w_{jm} \\ \theta_{jm} \end{Bmatrix} \quad \dots (I.3)$$

Resolvendo o sistema de equações lineares em A_0 , A_1 , A_2 e A_3 , determinam-se os seus valores:

$$\begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/b^2 & -2/b & 3/b^2 & -1/b \\ 2b^3 & 1/b^2 & -2/b^3 & 1/b \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_{im} \\ \theta_{im} \\ w_{jm} \\ \theta_{jm} \\ \dots \end{Bmatrix} \quad \dots \quad (I.4)$$

Assim é possível reescrever $f_m(x)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_m(x) = & \left(1 - \frac{3x^3}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3}\right) w_{im} + \left(x - \frac{2x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2}\right) \theta_{im} + \left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3}\right) w_{jm} + \\ & + \left(\frac{x^3}{b^2} - \frac{x^2}{b}\right) \theta_{jm} \quad \dots \quad (I.5) \end{aligned}$$

que ainda pode ser organizada matricialmente assim:

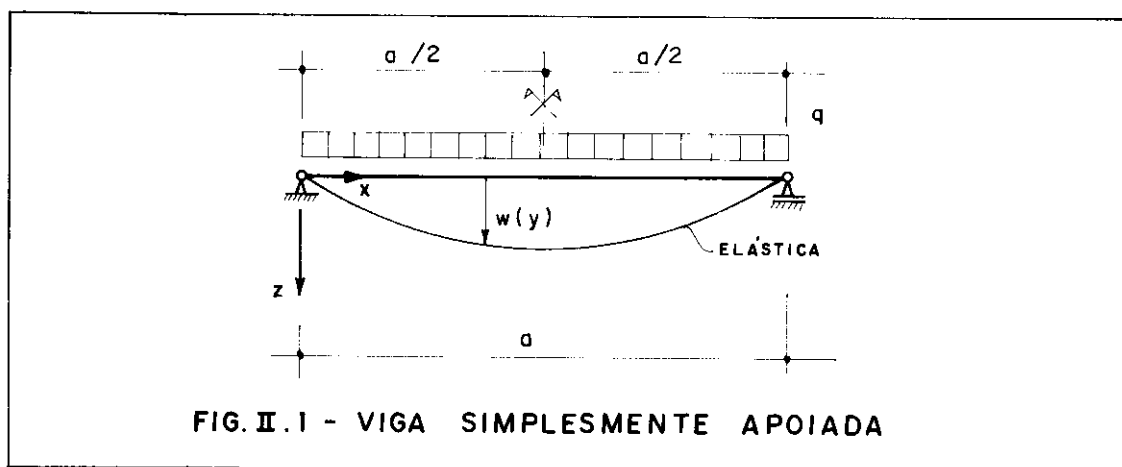
$$f_m(x) = \left\{ \left(1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3}\right) \left(x - \frac{2x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2}\right) \left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^2}{b^3}\right) \left(\frac{x^3}{b^2} - \frac{x^2}{b}\right) \right\} \begin{Bmatrix} w_{im} \\ \theta_{im} \\ w_{jm} \\ \theta_{jm} \end{Bmatrix} \quad \dots \quad (I.6)$$

Além do procedimento supra desenvolvido é também utilizável uma formulação direta em que se usa polinômios de Lagrange e Hermite para a criação de famílias especiais de funções de forma. Para maiores detalhes vide a referência [19].

APÊNDICE II

EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL

O problema de uma viga simplesmente apoiada, submetida ao carregamento indicado na Fig. II.1 é resolvido, como ilustração, para que o leitor possa fazer analogia entre este e os desenvolvidos ao longo do trabalho, na utilização do princípio da mínima energia potencial.



Por definição as condições de contorno são, em $y = 0$ e $y = a$:

$$w(y) = 0$$

$$M(y) = -EI \frac{d^2 w}{dy^2} = 0$$

onde w e M representam o deslocamento vertical dos pontos do eixo da viga e o momento fletor respectivamente; EI é o módulo de rigidez à flexão da viga. Sob a influência de

uma carga uniformemente distribuída, a elástica da viga é uma curva regular e simétrica em relação ao centro do vão, cuja representação é assumida na forma de uma função seno como se apresenta abaixo.

$$d = w(y) = \delta \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

onde δ é o parâmetro de deslocamento; no caso, δ é igual ao deslocamento w no meio do vão $\delta = w(a/2)$.

Se a função $d = w(y)$ representa a elástica verdadeira, a energia potencial total desenvolvida no sistema deve ser mínima. A energia potencial total da viga é dada por:

$$\Pi = U_d + U_p = \frac{EI}{2} \int_0^a \left(\frac{d^2 w}{dy^2}\right)^2 dy - \int_0^a q \cdot w \cdot dy$$

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^a \left[-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \delta \text{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)\right]^2 dy - \int_0^a q \delta \text{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right) dy$$

$$\Pi = \frac{\pi^4 EI \delta^2}{4a^3} - \delta q \frac{2a}{\pi}$$

Para que Π seja mínimo

$$\frac{d\Pi}{d\delta} = 0$$

então

$$\frac{\pi^4 EI}{2a^3} - q \frac{2a}{\pi} = 0 \quad \therefore \quad \delta = \frac{4a^4 q}{\pi^5 EI}$$

Pode-se escrever por fim:

$$w(y) = \frac{4a^4 q}{\pi^5 EI} \text{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

$$M(y) = -EI \frac{d^2 w}{dy^2} = \frac{4a^2 q}{\pi^3} \text{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

$$V(y) = -EI \frac{d^3 w}{dy^3} = \frac{4aq}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

onde V representa o esforço cortante.

A tabela a seguir compara valores de w e M em $y = a/2$ e V em $y = 0$, provenientes da análise anterior, com os resultados exatos. Pode-se notar que existe boa correlação de valores para o deslocamento w, e um crescimento do erro à medida em que as derivadas da função $w(y)$ crescem de ordem. Este aspecto é de capital interesse na formulação desenvolvida neste trabalho com base no processo dos deslocamentos.

	y = a/2		y = 0
	w . $\frac{qa^4}{EI}$	$\frac{M}{qa^2}$	$\frac{V}{qa}$
Aproximado	0,01307	0,12901	0,40528
Exato	0,01302	0,12500	0,50000
Erro	0,4%	3,2%	-18,9%

TABELA II.1 - Comparação entre a solução aproximada e exata para a viga biapoiada

A melhoria dos resultados pode ser alcançada utilizando-se Série de Fourier, com a qual é possível tornar o campo de deslocamentos mais sofisticado do que a metade de uma onda de seno. Uma série possível para o problema em análise é a que se apresenta em seguida.

$$w(y) = \sum_{m=1}^r \delta_m \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$$

onde δ_m é o parâmetro de deslocamento associado ao m-ésimo harmônico da série

r é o número de harmônicos em que se trunca a série.

Aplicando procedimento semelhante ao anterior, ob-
têm-se

$$\Pi = \sum_{m=1}^r \frac{m^4 \pi^4 EI \delta_m^2}{4a^3} - \delta_m \cdot q \cdot \frac{a}{m\pi} \left[1 - \cos m\pi \right]$$

$$w(y) = \sum_{m=1}^r \frac{2a^2 q}{m^5 \pi^5 EI} \left[1 - \cos m\pi \right] \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$$

$$M(y) = \sum_{m=1}^r \frac{2a^2 q}{m^3 \pi^3} \left[1 - \cos m\pi \right] \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$$

$$V(y) = \sum_{m=1}^r \frac{2aq}{m^2 \pi^2} \left[1 - \cos m\pi \right] \cdot \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$$

A partir dessas funções é possível construir a ta-
bela seguinte.

m	y = a/2		y = 0
	w · $\frac{qa^4}{EI}$	$\frac{M}{qa^2}$	$\frac{V}{qa}$
1	0,01307	0,12901	0,40528
3	-0,00005	-0,00478	0,02252
5	0,00000	0,00103	0,01621
7	0,00000	-0,00038	0,00827
9	0,00000	0,00018	0,00500
∑	0,01302	0,12506	0,45728
Exato	0,01302	0,12500	0,50000
Erro	0,0%	0,0%	-8,5%

TABELA II.2 - Influência do número de harmônicos na solução
aproximada da viga biapoada.

Os valores de w , M e V , correspondentes aos harmônicos pares, se anulam devido à simetria do carregamento em relação ao centro do vão da viga. É possível observar que a convergência da série para os deslocamentos w é excepcionalmente rápida, sendo que a rapidez da convergência diminui no sentido crescente da ordem de derivação de w .

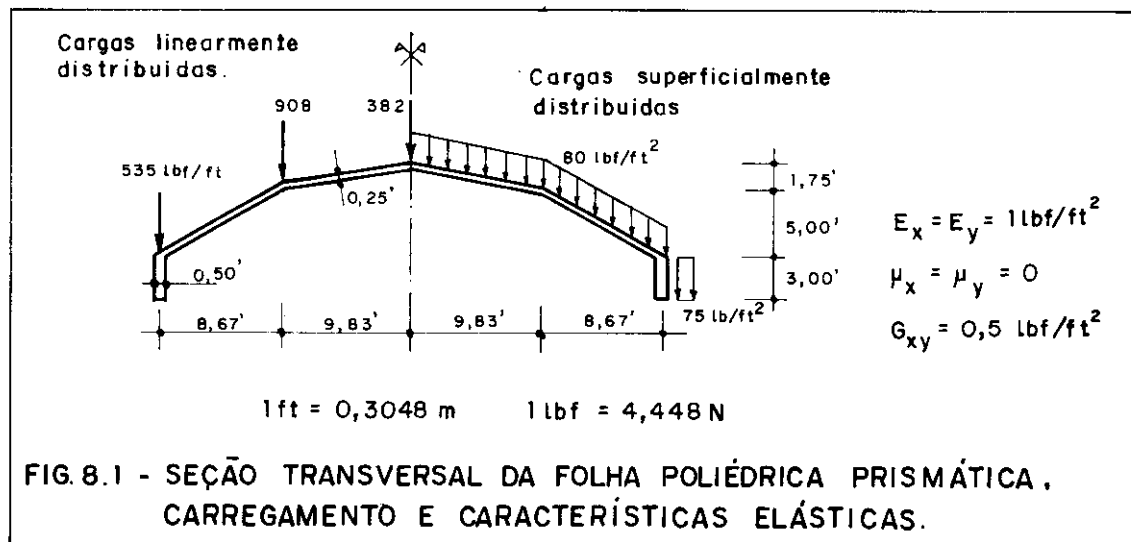
CAPÍTULO 8

APLICAÇÕES

8.1 - 1º EXEMPLO - FOLHA POLIÉDRICA PRISMÁTICA

8.1.1 - Apresentação

Com a utilização do programa MEFAF foi analisada uma folha poliédrica prismática simples biapoiada em diafragmas rígidos dispostos transversalmente nos extremos do vão. Cheung [23], utilizando faixas de baixa ordem do tipo B02, analisou a estrutura, com a utilização do Método das Faixas Finitas (M.F.F.), adotando quatro diferentes comprimentos de vão (10ft, 30ft, 70ft e 100ft), com o objetivo de comparar os resultados com os obtidos por De Fries-Skene e Scordelis [30] que resolveram o problema com a utilização da teoria das folhas poliédricas prismáticas (método elástico).



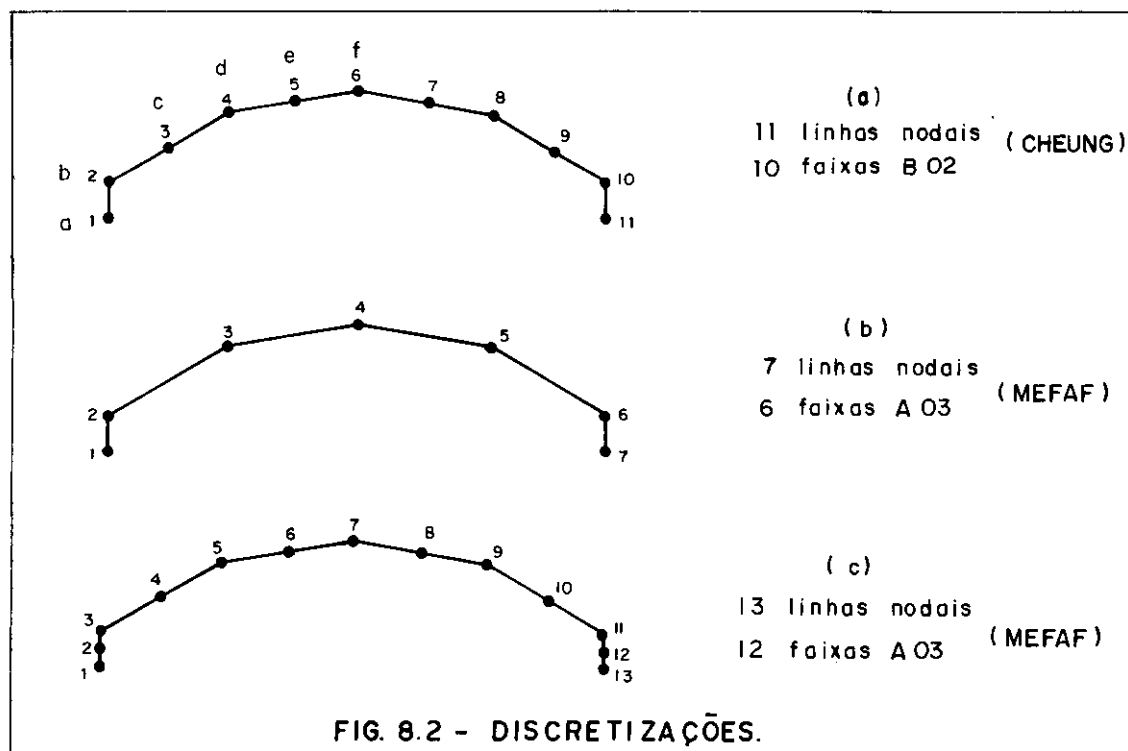
Como a aplicabilidade do M.F.F. foi demonstrada por Cheung [23] para folhas longas ou curtas, no presente trabalho optou-se por estudar apenas a situação em que o vão tem valor igual a 70ft (21,336m).

As dimensões da seção transversal da folha, bem como as suas características elásticas e de carregamento são apresentadas na figura 8.1.

O carregamento real é o apresentado do lado direito do eixo de simetria (cargas superficialmente distribuídas). Do lado esquerdo do mesmo encontram-se as cargas linearmente distribuídas nas arestas da folha, obtidas a partir da análise elementar convencional (lajes armadas na única direção) utilizadas nos artigos supra-citados. Cheung reanalisa o problema como carregamento real mas não apresenta resultados suficientes para as comparações feitas neste trabalho.

8.1.2 - 1ª discretização - cargas linearmente distribuídas

Primeiramente utilizou-se o programa MEFAF no cálculo da folha com a discretização apresentada na Fig. 8.2(b) para efeito de comparação com os resultados apresentados por Cheung, segundo a discretização (a) da mesma figura. Foram consideradas cargas linearmente distribuídas em ambos.



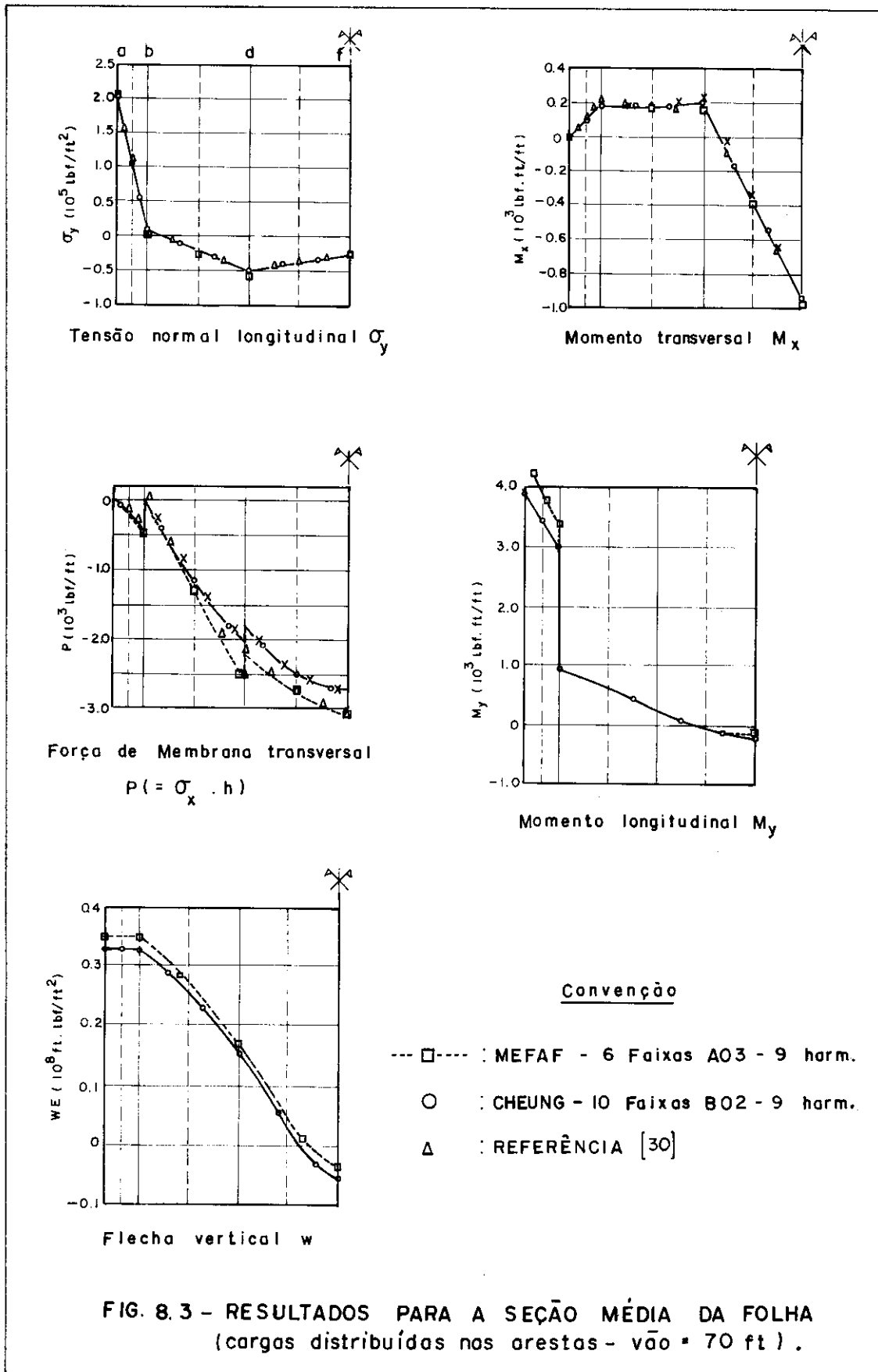
Na figura 8.3 são apresentados resultados para a seção do centro do vão da folha.

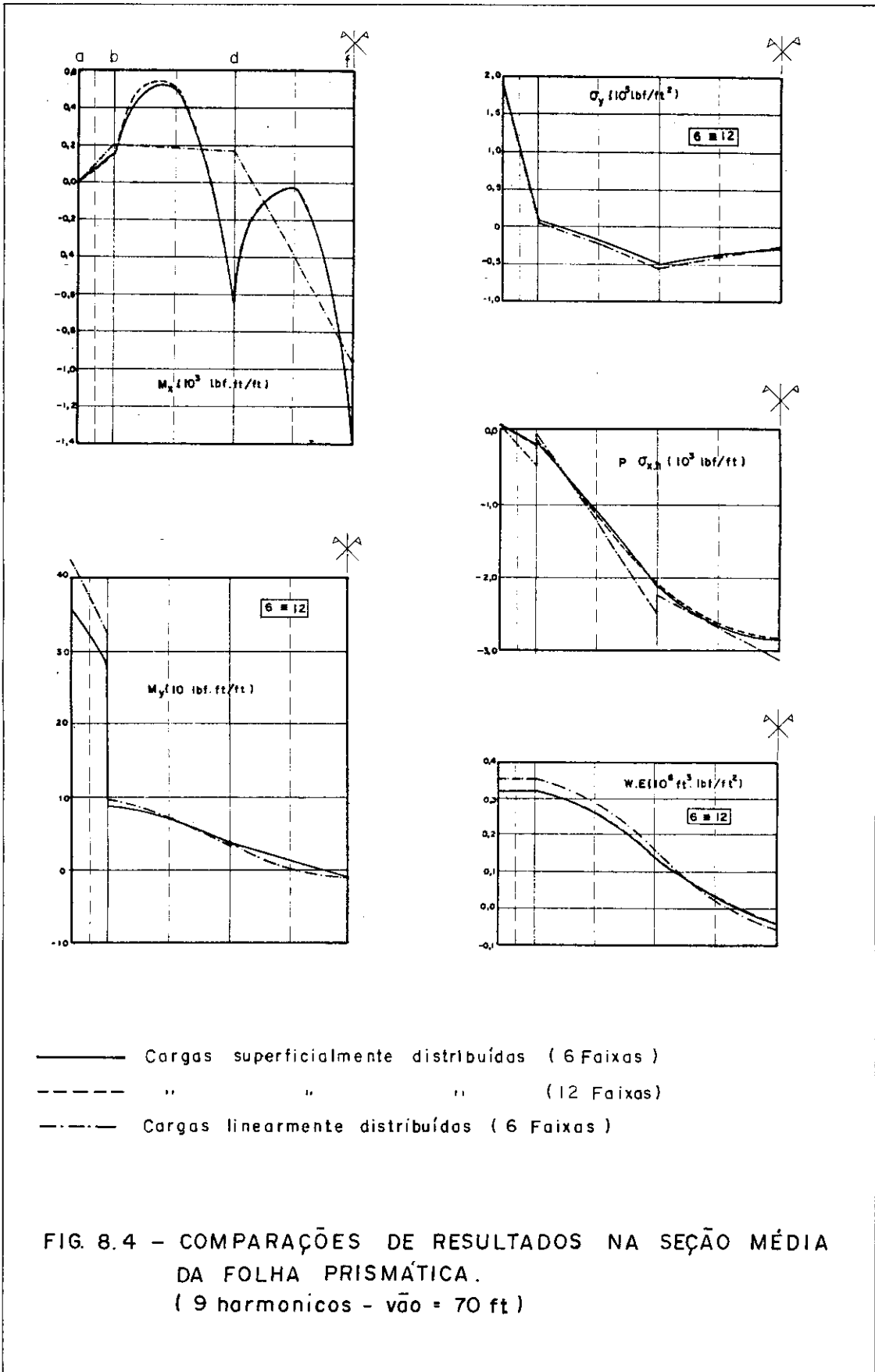
Analisando os resultados observa-se que σ_y , M_x , M_y e w são praticamente os mesmos que os encontrados por Cheung. As diferenças encontradas em P , vão se tornando significativas ao se aproximar da aresta mais interna, sendo que os valores conseguidos via programa MEFAF se avizinham mais dos da referência [30] do que os encontrados por Cheung. De um modo geral, conclui-se que cada faixa A03 pode substituir, neste caso, duas faixas B02. A comparação das flechas w com as da referência [30] não teria significado uma vez que o artigo não apresenta o valor do módulo de elasticidade E utilizado.

8.1.3 - 1ª discretização - cargas superficialmente distribuídas

Da maneira como foi feito o programa MEFAF, nenhuma dificuldade adicional existe em se considerar as cargas distribuídas superficialmente. Tal consideração foi adotada para a mesma discretização anterior (figura 8.2(b)) e com igual número de harmônicos, sendo os resultados apresentados na figura 8.4. Comparando-os com os correspondentes à consideração das cargas linearmente distribuídas nas arestas percebe-se que as diferenças são insignificantes para σ_y , significativas para M_y apenas nas lâminas verticais, consideráveis para P junto às arestas, muito grandes para M_x e tem-se, para as cargas nas arestas, valores maiores das flechas w sobre elas, como era de se esperar.

Na figura 8.4 são também apresentados os resultados referentes à discretização (c) da figura 8.2, em que é dobrado o número de faixas, mantendo-se cargas superficialmente distribuídas e nove harmônicos. Percebe-se, ao se analisar a figura 8.4 que o aumento do número de faixas para doze não é necessário no presente caso, ou seja, cada lâmina da folha é bem representada por uma única faixa.





8.1.4 - Estabilização de resultados

Em seguida, para que se possa perceber a tendência de estabilização de resultados, são montadas tabelas em que se anotam valores de M_x , M_y , σ_y , w e P , ao longo do crescimento do número de harmônicos, para alguns pontos da seção média da folha poliédrica. Tais pontos estão definidos na figura 8.2(a). Foi utilizada a discretização (b) da figura 8.2, com cargas linearmente distribuídas nas arestas. Para facilitar a análise foi empregado um parâmetro K , definido do seguinte modo:

$$K = \frac{V_A - V_B}{V_A} \times 100\% \quad \dots(8.1)$$

onde V_A é o valor correspondente ao harmônico considerado e V_B o correspondente ao harmônico de ordem imediatamente inferior. Tal parâmetro serve, a grosso modo, como um indicador da tendência de estabilização de resultados, sendo que esta é tão mais acentuada quanto menor for o valor absoluto de K . Alternâncias no sinal de K sugerem provável oscilação em torno do valor estável final.

HARMÔNICOS	M_x (lb·ft/ft)	K
1	-1007,4	
3	-972,7	-3,6%
5	-976,9	-0,4%
7	-977,9	0,1%
9	-975,1	-0,3%

TAB. 8.1 - Momentos Transversais M_x - Ponto f

HARMÔNICOS	M_y (lb·ft/ft)	K
1	421,3	
3	426,5	1,2%
5	424,1	-0,6%
7	424,2	0,0%
9	425,2	0,3%

TAB. 8.2 - Momentos Longitudinais M_y - Ponto a

HARMÔNICOS	σ_y (10^3 lbf/ft^2)	K
1	218,0	
3	209,5	-4,1%
5	211,5	0,9%
7	210,6	-0,1%
9	211,2	0,3%

TAB.8.3 - Tensões Normais Longitudinais σ_y - Ponto a

HARMÔNICOS	P (lbf/ft)	K
1	-3691,8	
3	-2682,5	37,6%
5	-3245,5	-17,4%
7	-2886,0	12,5%
9	-3120,5	-7,5%

TAB.8.4 - Forças de Membrana Transversais P = $\sigma_x \cdot h$ - Ponto f

HARMÔNICOS	W.E ($10^8 \text{ ft} \cdot \text{lbf/ft}^2$)	K
1	3558,4	
3	3542,1	0,5%
5	3543,9	-0,1%
7	3543,4	0,0%
9	3543,6	0,0%

TAB.8.5 - Flechas Verticais w Ponto a

$$1 \text{ lbf} = 4,448 \text{ N}$$

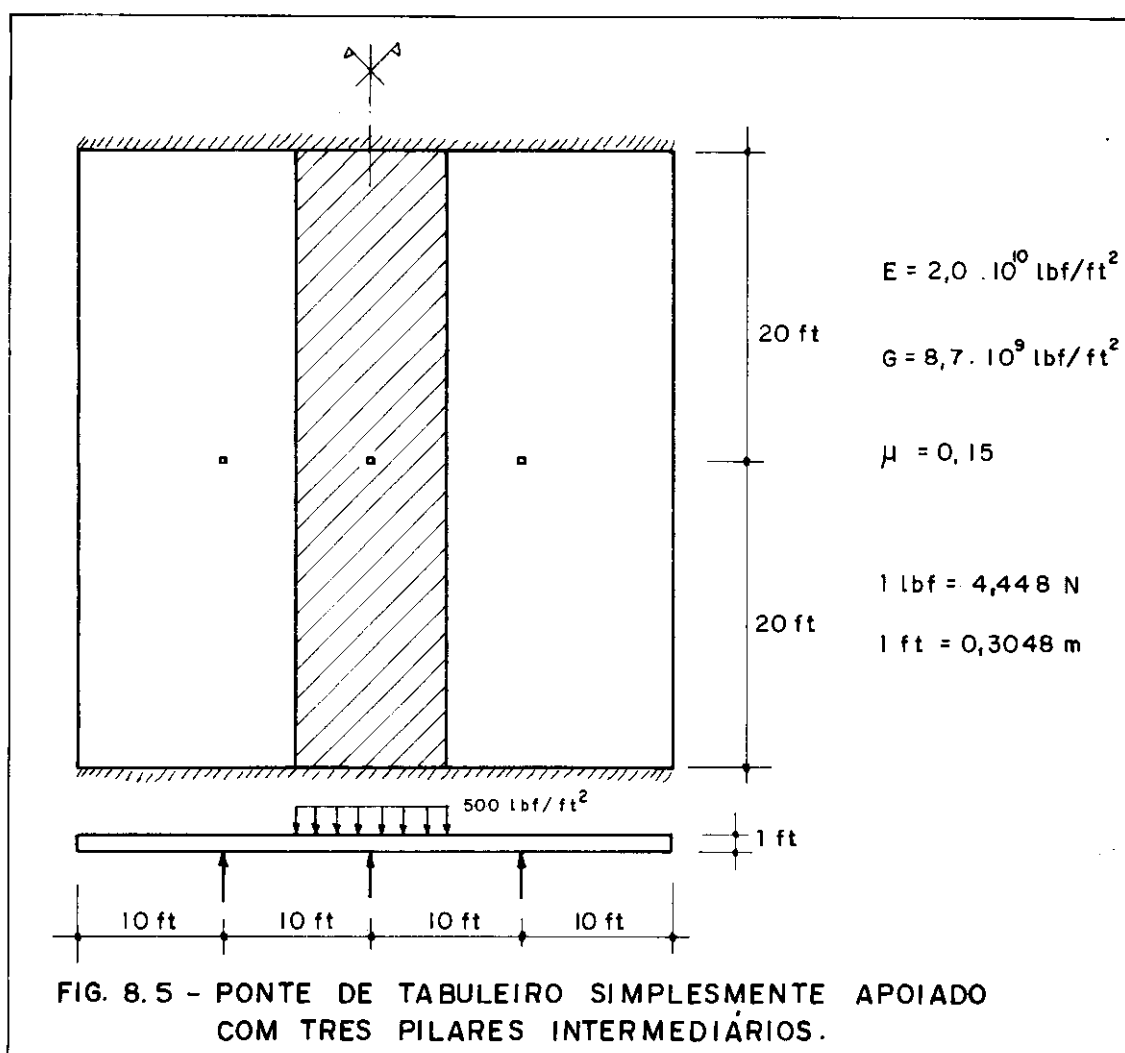
$$1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ m}$$

Quanto à estabilização de resultados, observa-se que a mais rápida estabilização ocorre para a flecha w, como era de se esperar pois é utilizado o processo dos deslocamentos; a pior situação ocorre para a força de membrana P; em função das pequenas variações percentuais para m = 9, admite-se tal número de harmônicos suficiente no presente caso.

8.2 - 2º EXEMPLO - PONTE EM LAJE COM TRÊS PILARES INTERMEDIÁRIOS

8.2.1 - Apresentação

A figura 8.5 apresenta uma ponte de tabuleiro em laje quadrada isótropa, com três pilares intermediários rígidos, sob carregamento uniformemente distribuído em região central de 10ft de largura.

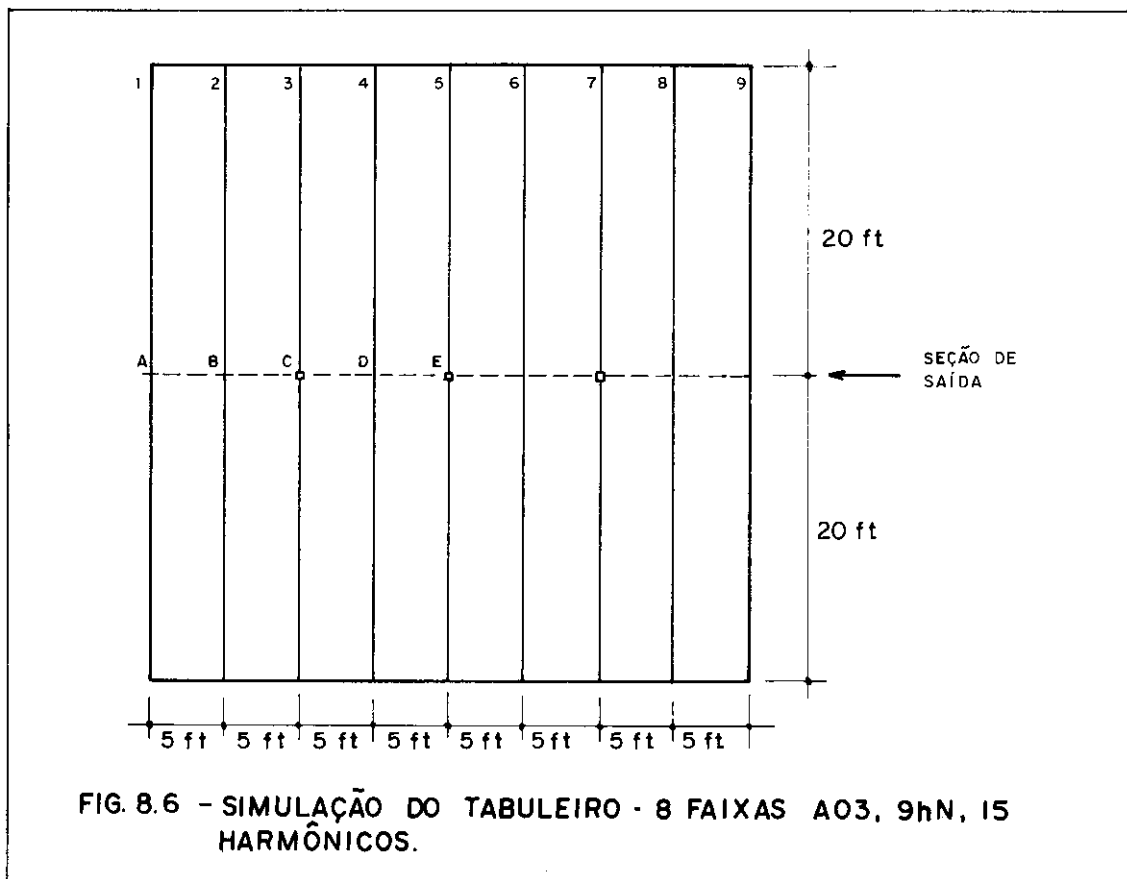


Loo e Cusens [5] analisaram a ponte utilizando o programa COSPEQ, que faz uso de faixas do tipo A02 (faixa de alta ordem, com continuidade de flecha, rotação e curvatura em cada linha nodal). Para a análise do tabuleiro da

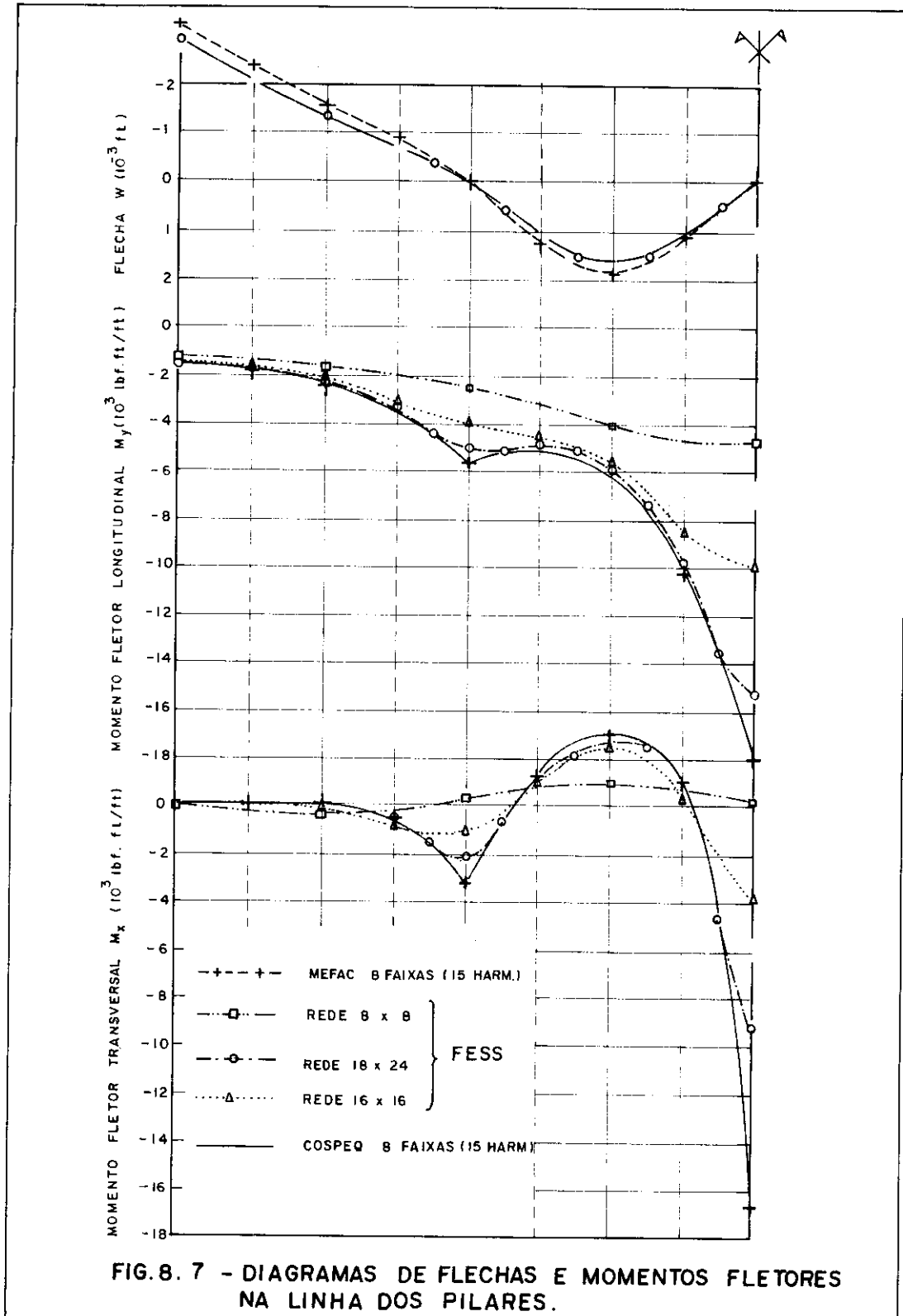
ponte foram adotadas 8 faixas de igual largura e 15 harmônicos da série (8 com resultados não nulos). Paralelamente foram feitas comparações com as soluções fornecidas pelo "pacote" FESS, que é um conjunto de programas para computador, desenvolvido por Zienkiewicz e colaboradores, baseado no Método dos Elementos Finitos e utilizando elementos de placa triangulares (3ª ordem) e elementos de barra. Redes de 8 x 8 (128 elementos iguais), 16 x 16 (512 elementos iguais) e 18 x 24 (864 elementos diferenciados em 6 tipos nas dimensões de seus lados e com maior concentração dos elementos menores junto aos pilares intermediários).

8.2.2 - 1ª discretização - 8 faixas iguais

Para efeito de comparação e teste foi utilizado o programa MEFAC que trabalha com faixa do tipo A03 (faixa de alta ordem, mas sem continuidade de curvatura), com discretização do tabuleiro em 8 faixas iguais (figura 8.6) e



preliminarmente com harmônicos em número de 15. Em todos os casos as reações nos pilares foram consideradas forças concentradas. As comparações de flechas, momentos fletores transversais e longitudinais na linha dos pilares são mostradas na figura 8.7.



É preciso que aqui se ressalte que nas referências consultadas não foi possível encontrar o valor da espessura da laje, a qual foi fixada em 1ft, e demais cálculos preliminares foram realizados com o objetivo de manter as características elásticas próximas das utilizadas por Loo e Cusens (D_x , D_y , D_{xy} e D_1).

Digno de nota é o fato de em determinadas linhas nodais (2 e 4) terem sido encontrados saltos nos valores do momento transversal M_x , quando da utilização do programa MEFAF o que não assusta pois, para a faixa A03 não há continuidade de curvaturas. Tais descontinuidades, no caso desprezíveis, podem ser tratadas como em qualquer solução por elementos finitos: encontrando-se a média dos valores correspondentes a faixas contíguas ou escolhendo-se resultados no centro da faixa como representativos e inferindo os da periferia. Foi aqui adotado o primeiro procedimento.

Acompanhando os diagramas figurados observa-se que: os momentos encontrados utilizando-se MEFAF e COSPEQ são concordantes; os momentos dados por FESS apenas convergem gradualmente para a solução em faixas finitas quando a rede se torna muito fina; a aparente dissociação entre flechas resultantes de MEFAF e COSPEQ deve-se à nebulosidade na determinação da espessura da laje, ficando a solução via MEFAF garantida pelas coincidências em M_x e M_y e também pelo aspecto da distribuição das flechas (inclusive valores desprezíveis nos pontos de apoio) bem como a constatação, em qualquer exemplo, da melhor aproximação para deslocamentos.

Parece ser bastante ilustrativo reproduzir a tabela de consumo de tempo de computação, apresentada por Loo e Cusens, que permite concluir que dentro de seu campo de aplicação, o Método das Faixas Finitas representado por COSPEQ, mantém nítidas vantagens sobre o Método dos Elementos Finitos representado por FESS.

DETALHES	COSPEQ		FESS					
	8 Faixas		rede 8 x 8		rede 16 x 16		rede 18 x 24	
	min.	seg.	min.	seg.	min.	seg.	min.	seg.
Consistência de Dados	--	--	--	10	--	12	--	20
Geração de Dados	--	--	1	43	5	38	9	34
Análise	--	48+	5	6	25	26	47	09
TOTAL	--	48+	6	59	31	16	57	3

+ 2 casos de carregamento e 15 harmônicos

TAB. 8.6 - Tempo de computação usado por COSPEQ e FESS para a análise de uma placa isotrópica quadrada - Computador ICL 4130 - Sistema T30C [6].

Os tempos consumidos por MEFAC são apresentados na Tabela 8.16.

Com o objetivo de se analisar a convergência da solução, são apresentados os diagramas de w , M_x e M_y na figura 8.8, para a mesma discretização em 8 faixas iguais, via programa MEFAC, para o número de harmônicos assumindo os valores 11, 31, 51 e 71.

Analisando-se os resultados percebe-se que a estabilização de valores para as flechas w é muito rápida. A seguir, na Tabela 8.7, são apresentadas as flechas máximas da seção de saída, que ocorrem nos pontos A e D, com os correspondentes parâmetros K.

HARMÔNICOS	PONTO A		PONTO D	
	$w(10^{-3}ft)$	K	$w(10^{-3}ft)$	K
11	-3,38		1,78	
31	-3,43	1,5%	1,91	6,9%
51	-3,44	0,3%	1,92	0,5%
71	-3,44	0,0%	1,92	0,0%

TAB. 8.7 - Flechas verticais - Seção do meio do vão - 1ª Discretização.

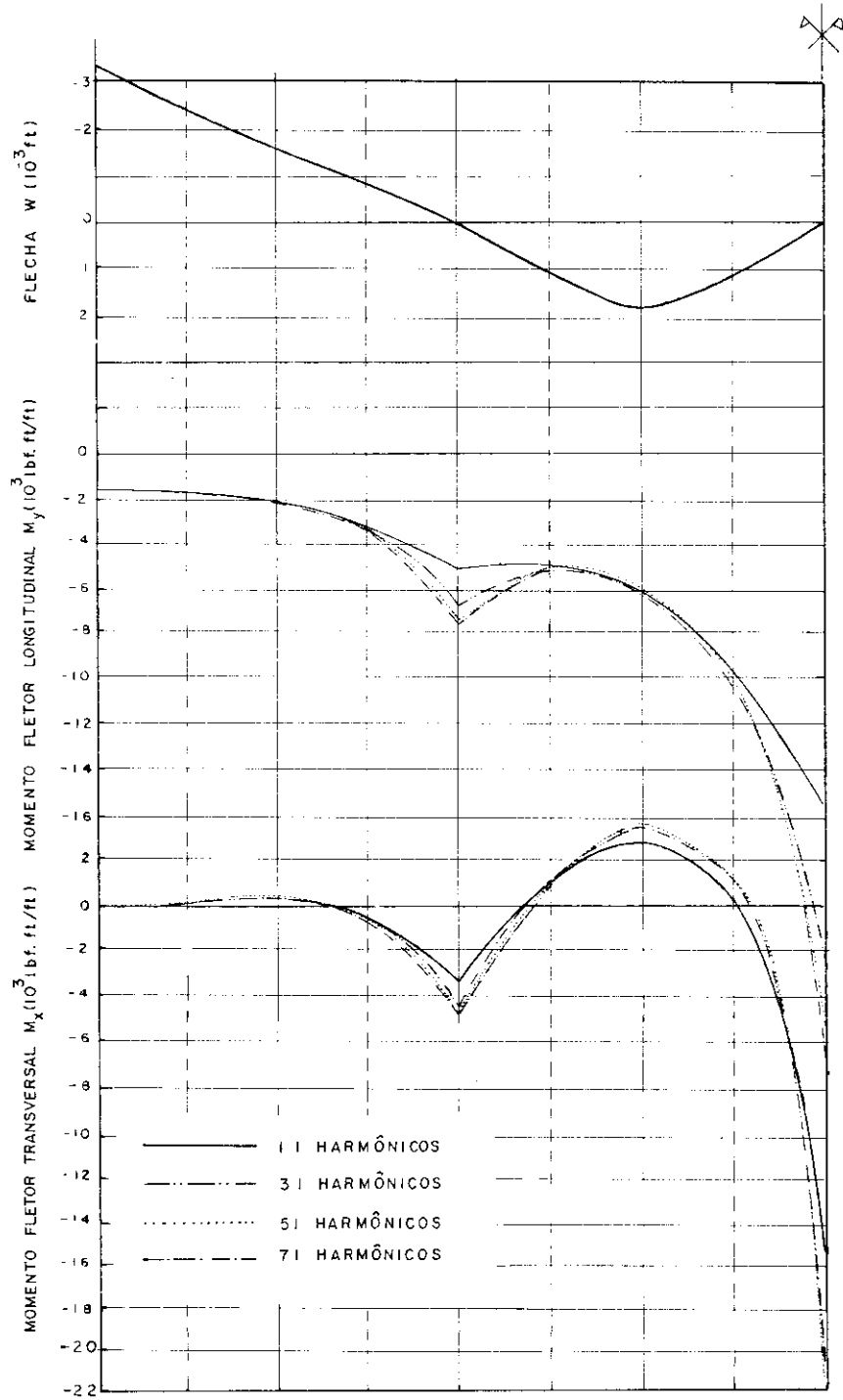


FIG. 8.8 - COMPARAÇÕES DE RESULTADOS NA LINHA DOS PILARES.

A estabilização no ponto B é mais lenta que no ponto A, isto se deve à maior proximidade do ponto B às reações concentradas.

Quanto aos momentos M_x e M_y percebem-se alterações significativas de valores na vizinhança dos pontos de concentração de cargas e, em especial, no ponto central, onde a reação é maior, conforme se mostrará em seguida. As tabelas subsequentes apresentam valores de M_x e M_y nos pontos críticos da seção de saída para a análise da tendência de estabilização.

HARMÔNICOS	PONTO C		PONTO E	
	M_x ($10^3 \text{ lbf} \cdot \text{ft}/\text{ft}$)	K	M_x ($10^3 \text{ lbf} \cdot \text{ft}/\text{ft}$)	K
11	-3,3		-15,0	
31	-4,3	23,3%	-19,7	23,2%
51	-4,6	6,5%	-20,8	5,3%
71	-4,6	0,0%	-21,1	1,4%

TAB. 8.8 - Momentos Fletores Transversais - Seção do meio do vão - 1ª Discretização

HARMÔNICOS	PONTO C		PONTO E	
	M_y ($10^3 \text{ lbf} \cdot \text{ft}/\text{ft}$)	K	M_y ($10^3 \text{ lbf} \cdot \text{ft}/\text{ft}$)	K
11	-5,2		-15,7	
31	-6,7	22,4%	-22,7	30,8%
51	-7,3	8,2%	-25,3	10,3%
71	-7,6	3,9%	-26,7	5,2%

TAB. 8.9 - Momentos Fletores Longitudinais - Seção do meio do vão - 1ª Discretização

Percebe-se o efeito eminentemente localizado das alterações significativas de valores junto às cargas concentradas (reações).

Quanto às reações nos pilares a tabela 8.10 permite acompanhar a rápida tendência de estabilização dos resultados. Essa rapidez se deve ao fato de serem as reações calculadas a partir dos deslocamentos que, por sua vez, estabilizam-se rapidamente.

HARMÔNICOS	PONTO C		PONTO E	
	REAÇÃO (10 ³ lbf)	K	REAÇÃO (10 ³ lbf)	K
11	-18,2		-88,4	
31	-18,4	1,1%	-88,0	0,5%
51	-18,5	0,5%	-87,9	0,1%
71	-18,5	0,0%	-87,9	0,0%

TAB. 8.10 - Reações nos Pilares - 1ª Discretização

8.2.3 - 2ª discretização - 16 faixas iguais

Foi dobrado o número de faixas iguais para 16 e novamente variado o número de harmônicos, com o objetivo de observar a sua influência nos resultados. Os diagramas alcançados apresentam os mesmos aspectos dos relativos à discretização anterior, sendo que os resultados, em alguns casos, sofreram alterações dignas de nota. A seguir são apresentadas tabelas análogas às anteriores, aproveitando-se os mesmos pontos do tabuleiro, com o objetivo de possibilitar a comparação.

Observa-se que nas flechas e reações praticamente nenhuma alteração ocorreu. Quanto ao momento, percebe-se, nos pontos críticos, modificações pequenas em M_y e um pouco mais acentuadas em M_x , o que é compreensível, já que na definição de M_x participa, com maior peso, a derivada segunda de w em relação à abscissa transversal x , portanto ao se aumentar o número de faixas, melhora-se a aproximação de $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, que é a curvatura transversal.

HARMÔNICOS	PONTO A		PONTO B	
	w (10 ⁻³ ft)	K	w (10 ⁻³ ft)	K
11	-3,38		1,78	
31	-3,44	1,7%	1,91	6,8%
51	-3,44	0,0%	1,92	0,5%
71	-3,44	0,0%	1,93	0,5%

TAB. 8.11 - Flechas Verticais - Seção do meio do vão - 2^a Discretização

HARMÔNICOS	PONTO C		PONTO E	
	M _x (10 ³ lb·ft/ft)	K	M _x (10 ³ lb·ft/ft)	K
11	-3,3		-15,4	
31	-4,9	32,7%	-22,3	30,9%
51	-5,4	9,3%	-24,6	9,3%
71	-5,6	3,6%	-25,6	3,9%

TAB. 8.12 - Momentos Fletores Transversais - Seção do meio do vão - 2^a Discretização

HARMÔNICOS	PONTO C		PONTO E	
	M _y (10 ³ lb·ft/ft)	K	M _y (10 ³ lb·ft/ft)	K
11	-5,2		-15,7	
31	-6,9	24,6%	-23,3	32,6%
51	-7,6	9,2%	-26,8	13,1%
71	-8,0	5,0%	-28,9	7,3%

TAB. 8.13 - Momentos Fletores Longitudinais - Seção do meio do vão - 2^a Discretização

HARMÔNICOS	PONTO C		PONTO E	
	Reação (10 ³ lbf)	K	Reação (10 ³ lbf)	K
11	-18,2		-88,4	
31	-18,4	1,1%	-87,9	0,6%
51	-18,5	0,5%	-87,9	0,0%
71	-18,5	0,0%	-87,9	0,0%

TAB. 8.14 - Reações nos Pilares - 2^a Discretização

As cortantes transversais V_x , não apresentadas em diagrama, sofrem modificações muito fortes na vizinhança das regiões de reações concentradas, o que é explicado de maneira análoga (vide Tab. 8.15).

DISCRETI- ZAÇÃO	PONTO D				PONTO MÉDIO DE \bar{CD}	
	M_x^{esq}	M_x^{dir}	V_x^{esq}	V_x^{dir}	M_x	V_x
1 ^a	2,912	3,344	-0,028	-2,153	1,107	0,822
2 ^a	2,805	2,822	-0,423	-0,481	1,034(*)	0,907(*)

TAB. 8.15 - Momentos Transversais M_x (10³ bf·ft/ft) e Cortantes Transversais V_x (10³ bf/ft) - 15 harmônicos - (*) média dos valores à esquerda e à direita.

Mesmo em pontos não situados junto aos pilares observaram-se, na 1^a discretização (8 faixas), descontinuidades em M_x e V_x , que reduziram-se sensivelmente na segunda discretização (16 faixas), o que é explicado pelo fato de as variações transversais dos resultados serem melhor expressas em regiões onde as faixas são mais estreitas. Cabe ressaltar que os valores encontrados nas linhas nodais auxiliares da 1^a discretização aproximam-se dos alcançados em linhas nodais periféricas na 2^a discretização (vide Tabela 8.15). De um modo geral não se percebeu forte tendência de estabilização das cortantes transver-

sais, o que induz a se pensar que, nos dimensionamentos em que elas são preponderantes deve-se considerar um número elevado de faixas (especialmente junto às cargas concentradas) ou adotar faixas de ordem superior e ainda utilizar um número alto de harmônicos.

Os tempos de processamento consumidos em cada um dos casos analisados, via programa MEFAC, são apresentados em seguida. Na tabela 8.16 são exibidos apenas os tempos na Unidade Central de Processamento do Computador.

HARMÔNICOS	TEMPO DE UCP EM SEGUNDOS	
	8 Faixas	16 Faixas
11	11,93	23,14
15	15,42	29,44
31	30,27	57,50
51	47,25	91,59
71	64,78	126,32

TAB. 8.16 - Tempo de UCP - Programa MEFAC
IBM 370/148 - Sistema DOS

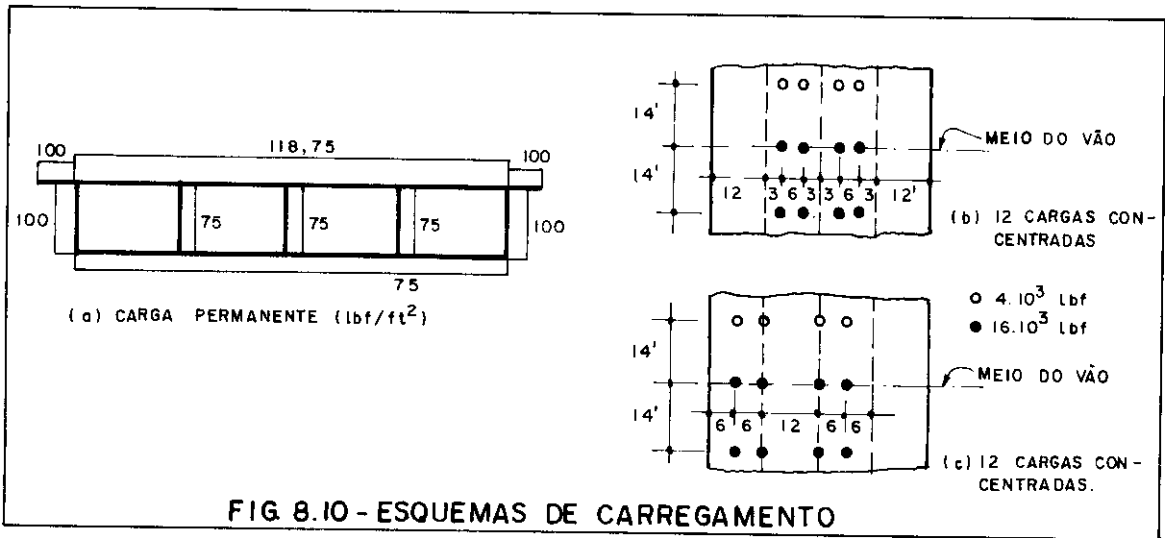


FIG 8.10 - ESQUEMAS DE CARREGAMENTO

a 11, sendo que para as cargas permanentes apenas os harmônicos ímpares são utilizados, pois em razão da simetria relativa ao centro do vão, os harmônicos pares produzem respostas nulas.

Com o objetivo de comparação de resultados utilizou-se o programa MEFAP com as discretizações indicadas na figura 8.11.

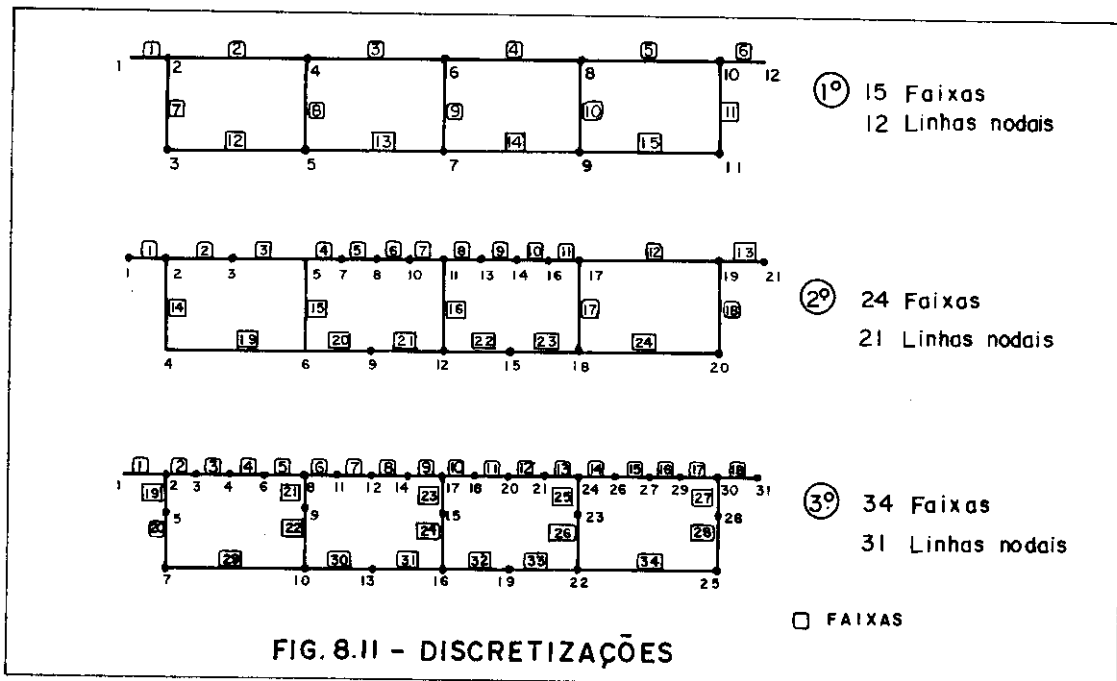
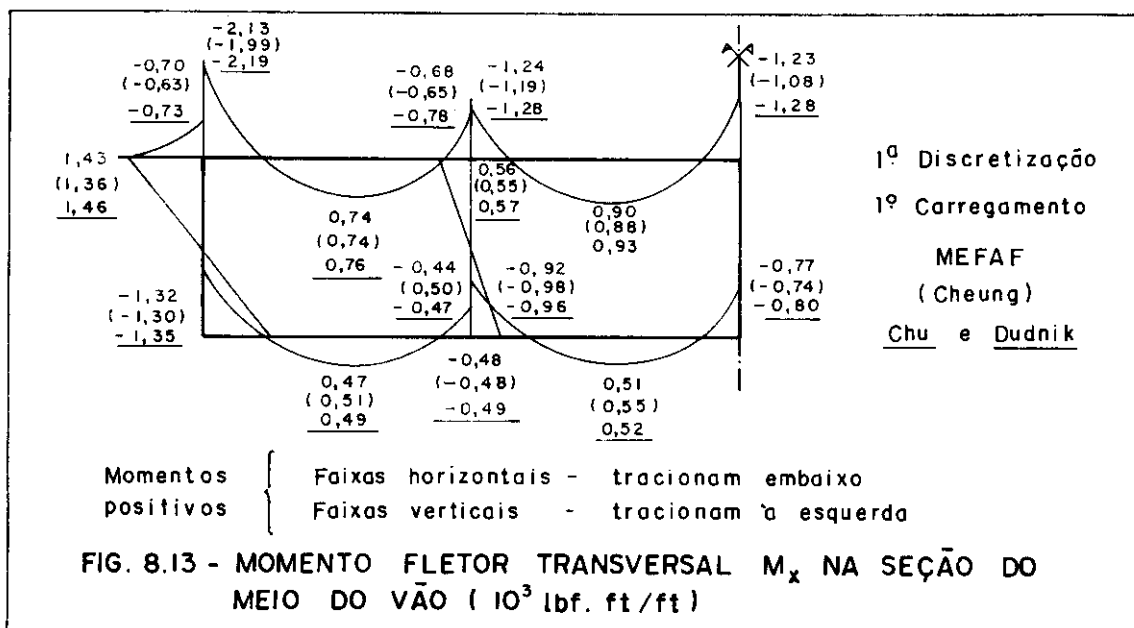
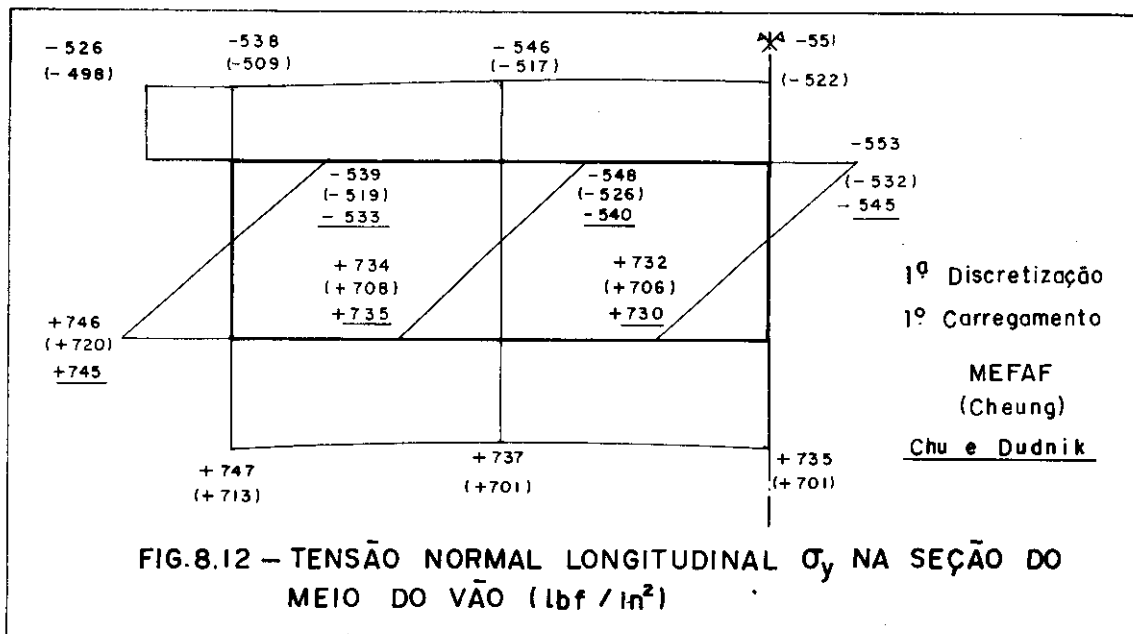
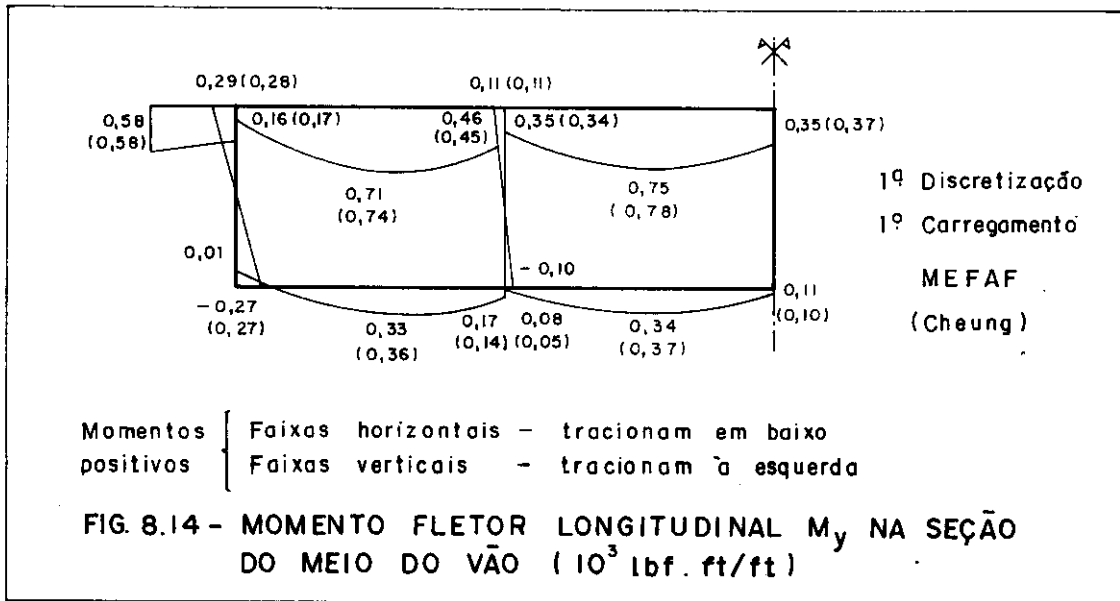


FIG. 8.11 - DISCRETIZAÇÕES

8.3.2 - 1º carregamento - 1 faixa por lâmina

Os diagramas das tensões normais longitudinais σ_y e dos momentos fletores transversais M_x e longitudinais M_y na seção do centro do vão são "plotados" nas figuras 8.12, 8.13 e 8.14, sendo que as faixas horizontais têm seus eixos x' locais dirigidos para a direita e as verticais para baixo, Chu e Dudnik não apresentam valores para os momentos fletores longitudinais M_y . Outros esforços e tensões não constam das referências consultadas.





Em relação à tensão σ_y percebe-se que os valores se aproximam mais daqueles encontrados por Chu e Dudnik. O momento fletor que solicita a seção do meio do vão da ponte (teoria de viga) difere apenas de 1% do valor do momento resistente calculado a partir das tensões σ_y (MEFAF) o que constitui uma verificação importante da solução. Quanto aos resultados obtidos para o momento M_x observa-se que os nós estão equilibrados, os valores encontrados não diferem significativamente dos das referências [32] [33]. Os momentos M_y concordam com os apresentados por Cheung. Observa-se aqui a grande economia no número de faixas em relação a Cheung.

8.3.3 - 2º carregamento - 12 cargas concentradas simétricas (b)

- 1ª Discretização - 1 Faixa por Lâmina

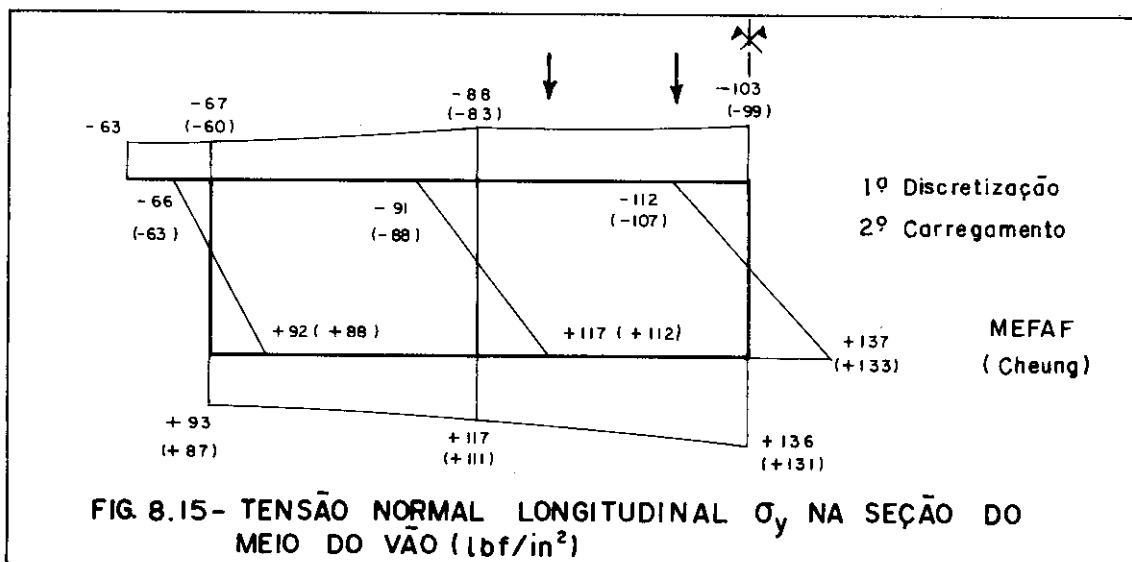
Quanto aos resultados para σ_y , M_x e M_y , não apresentados aqui, observou-se, em resumo, que para o momento M_x os nós se encontram desequilibrados e que, apenas em pontos distantes daqueles em que as cargas se aplicam, os va-

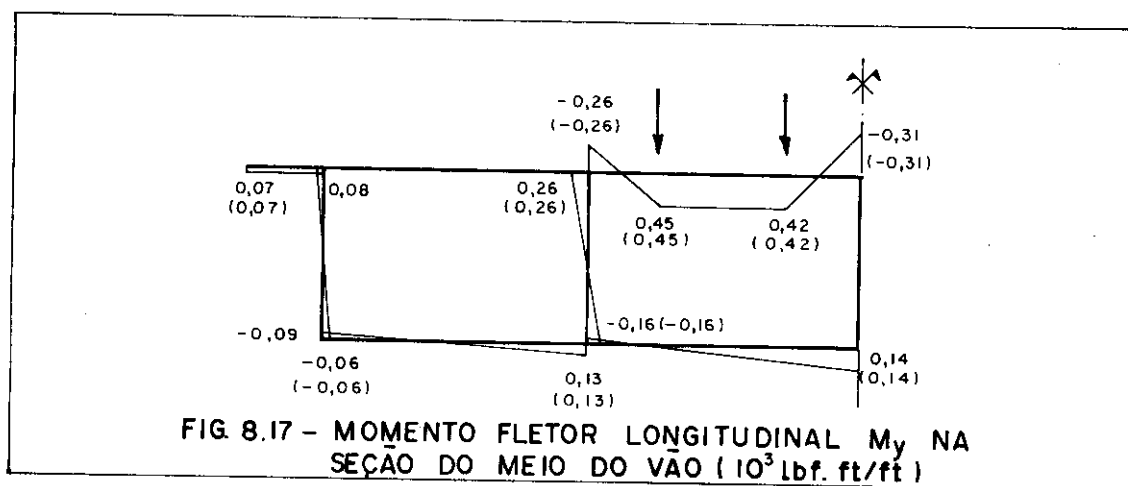
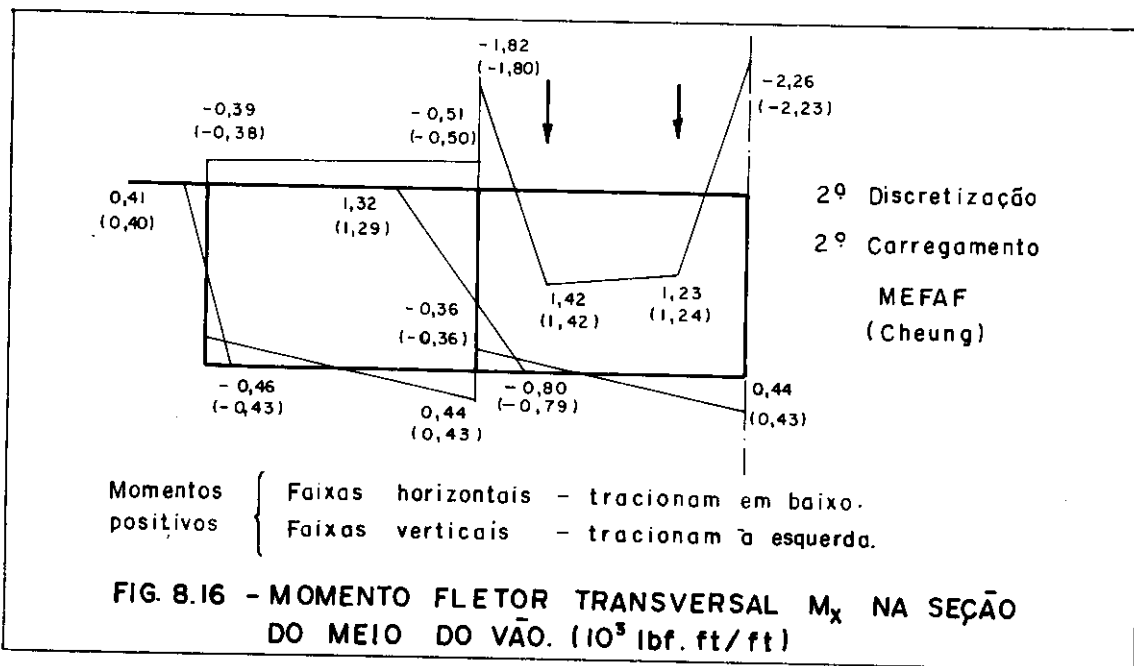
lores se abeiram dos expostos nas referências [31] [32]; mesmo ao se aumentar gradativamente o número de harmônicos, o problema do desequilíbrio dos nós permaneceu, mostrando a inadequação de tal discretização com número restrito de faixas. Cheung [6] aconselha que se disponham linhas nodais sob cargas concentradas. Observações semelhantes cabem em relação ao momento M_y junto às cargas concentradas, embora com menos severidade. As tensões σ_y encontradas são próximas das registradas por Cheung e por Chu e Dudnik.

- 2ª Discretização - 24 Faixas

Os diagramas de σ_y , M_x e M_y são apresentados nas figuras 8.15, 8.16 e 8.17 para um número de harmônicos igual a 11.

Percebe-se, neste caso, que em relação a M_x tem-se nós equilibrados e valores praticamente iguais aos de Cheung, mesmo junto às cargas concentradas. Os valores de σ_y são bem próximos e os de M_y praticamente os mesmos.





Cheung [6] utiliza 11 harmônicos não nulos da série e comenta que tal número poderia ser desfavorável para representar o efeito de uma carga concentrada única mas que afortunadamente a severidade de concentração de tensões é aliviada quando está presente um grupo de cargas concentradas próximas umas das outras. A influência do número de harmônicos foi estudada, aumentando-se o seu valor de 11 para 21, 31, 41 e 51. Resumem-se abaixo as observações recolhidas para a seção do meio do vão.

Com relação ao momento fletor M_x percebe-se grande influência junto às cargas concentradas, com variações

significativas nas lajes superiores das células centrais e rápida estabilização de valores ao se afastar das mesmas. Para que se acompanhe a progressão dos valores a tabela abaixo exhibe o momento M_x nas linhas nodais 3 e 10, onde se percebe, com clareza, a influência significativa do número de harmônicos apenas nos contornos dos pontos de aplicação de carga.

HARMÔNICOS	M_x (10^3 lbf.ft/ft)	
	LN3	LN10
11	-0,40	1,24
21	-0,41	2,52
31	-0,39	2,72
41	-0,38	3,30
51	-0,38	3,56

TAB. 8.17 - Momentos Fletores Transversais M_x
2ª Discretização - Seção Central

As considerações relativas ao momento fletor M_y são semelhantes às de M_x .

Quanto à força cortante transversal V_x é igualmente grande a influência junto às cargas concentradas, onde ocorrem expressivas variações de resultados, sem tendência de estabilização até o harmônico 51 (vide Tab. 8.18).

Para as tensões normais longitudinais σ_y percebe-se rápida estabilização de resultados mesmo junto às cargas concentradas; como ilustração são apresentados os valores de σ_y na laje superior (linha nodal 11), que sofrem uma variação percentual em torno de 7% apenas, entre 11 e 51 harmônicos.

HARMÔNICOS	$V_x (10^3 \text{ lbf/ft})$	
	LN 5 (dir)	LN 10 (dir)
11	1,10	-1,17
21	2,21	-2,65
31	2,33	-2,90
41	2,65	-3,71
51	2,79	-4,16

TAB. 8.18 - Cortantes Transversais V_x
 2^a Discretização - Seção Central

HARMÔNICOS	$\sigma_y (\text{lbf/in}^2)$
	LN 11
11	-103,4
21	-109,9
31	-110,3
41	-111,2
51	-111,4

TAB. 8.19 - Tensões Normais Longitudinais σ_y
 2^a Discretização - Seção Central

Os resultados da tensão de cisalhamento τ_{xy} apresentam-se com tendência de estabilização rápida, mesmo nos pontos críticos; a tabela a seguir exhibe os valores de τ_{xy} que ocorrem na faixa 16 (vide Fig. 8.11), junto às linhas nodais 11 e 12.

HARMÔNICOS	τ_{xy} (lbf/in ²)	
	LN 11	LN 12
11	19,6	19,2
21	16,0	16,6
31	16,5	16,8
41	17,0	16,9
51	16,5	16,8

TAB. 8.20 - Tensões de Cisalhamento τ_{xy}
2ª Discretização - Seção Central

Com relação à tensão normal transversal σ_x , a menos dos pontos críticos (junto às cargas concentradas), percebe-se rápida estabilização de resultados. São apresentados os valores de σ_x , nas porções superiores das faixas 15 e 16, que são as mais solicitadas.

HARMÔNICOS	σ_x (lbf/in ²)	
	Porção Superior Faixa 15	Porção Superior Faixa 16
11	-15,5	-32,8
21	-33,3	-68,8
31	-34,7	-71,5
41	-37,6	-77,3
51	-38,1	-78,3

TAB. 8.21 - Tensões Normais Transversais σ_x
2ª Discretização - Seção Central

Quanto aos deslocamentos observa-se uma tendência muito rápida de estabilização. Assim é que no maior va

lor de flecha vertical $w(LN11)$ tem-se um acréscimo percentual de 0,4% (vide Tab. 8.22), ao se passar de 11 a 51 harmônicos.

HARMÔNICOS	$w(10^{-3} \text{ ft})$ LN 11
11	14,94
21	14,99
31	15,00
41	15,00
51	15,00

TAB. 8.22 - Deslocamentos Verticais w
2ª Discretização - Seção Central

Para o maior deslocamento horizontal transversal $u(LN4)$ o acréscimo percentual correspondente é de 0,5% (Tab. 8.23).

HARMÔNICOS	$u(10^{-3} \text{ ft})$ LN 4
11	0,192
21	0,192
31	0,193
41	0,193
51	0,193

TAB. 8.23 - Deslocamentos Horizontais Transversais u - 2ª Discretização - Seção Central

Em resumo: nas regiões afastadas dos pontos de concentração de carga os resultados tendem a se estabilizar rapidamente; nas regiões críticas a tendência de estabilização é lenta, exceto para as tensões σ_y , τ_{xy} e todos os deslocamentos.

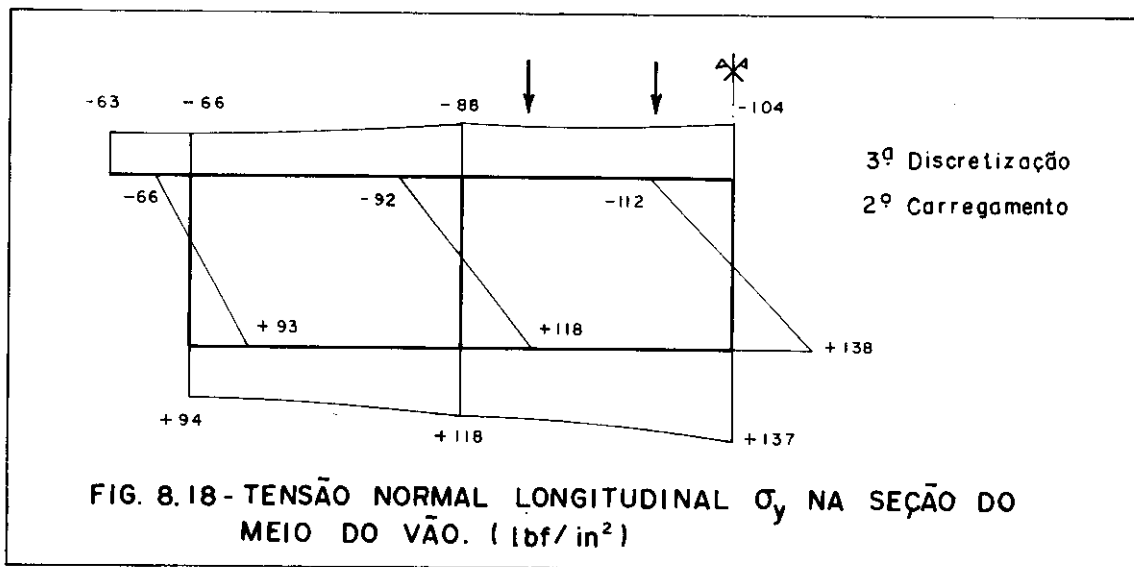
Nos casos em que não interessam os efeitos localizados nas regiões críticas, um número de harmônicos entre 20 e 30 é adequado.

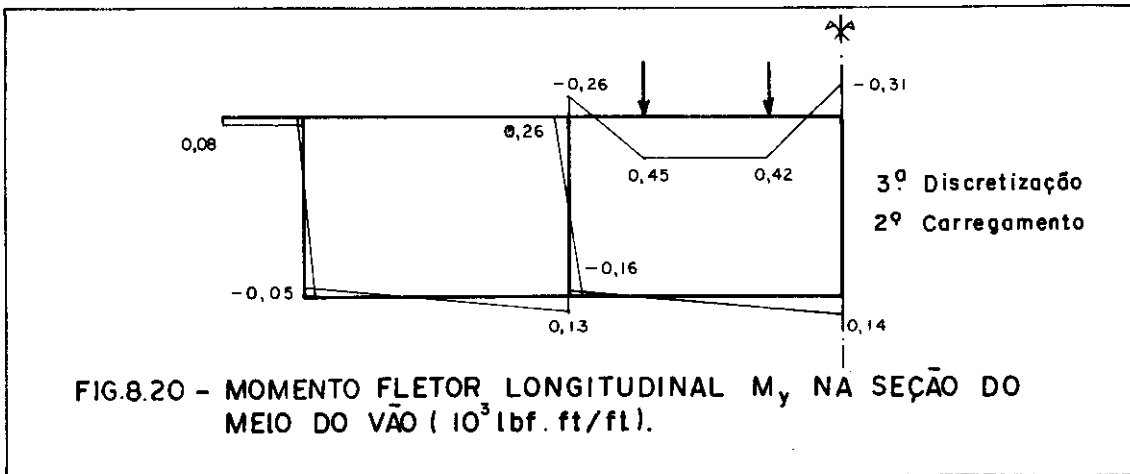
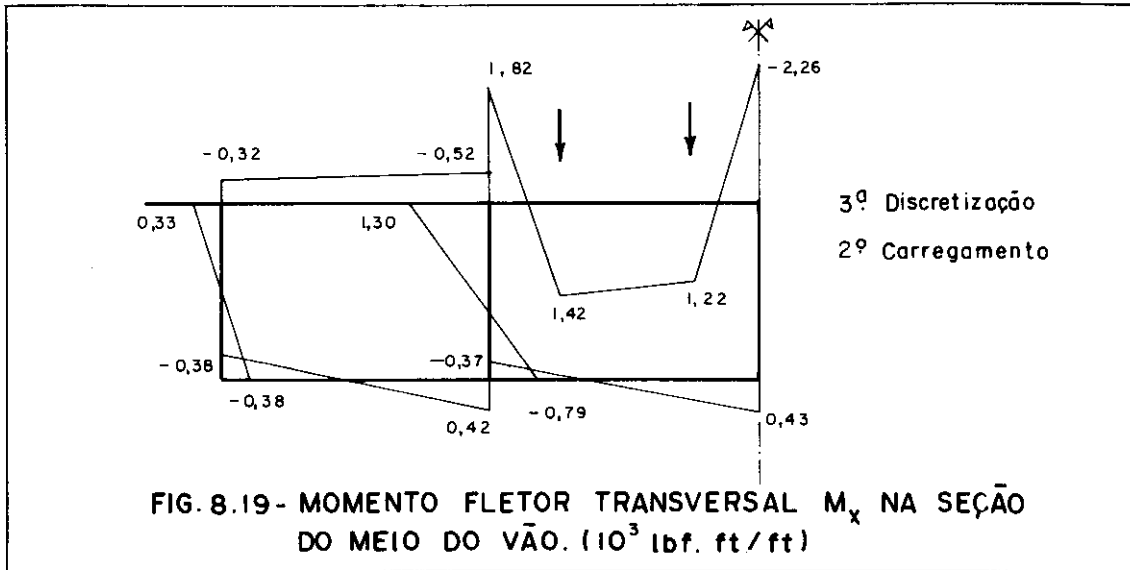
- 3ª Discretização - 34 Faixas

As figuras 8.18, 8.19 e 8.20 retratam os diagramas de σ_y , M_x e M_y para a seção do meio do vão, encontrados ao se utilizar o programa MEFAP, com 11 harmônicos da série e a 3ª discretização da figura 8.11.

Comparando-se os diagramas de σ_y , M_x e M_y com os correspondentes à 2ª discretização percebe-se o acordo entre eles.

Quanto à tensão normal σ_x , tensão tangencial τ_{xy} , deslocamentos w e u e força cortante V_x , a tabela 8.24 apresenta em paralelo valores referentes às duas discretizações, nos pontos críticos, sempre com o mesmo número de





harmônicos (igual a 11) para a confrontação dos mesmos. Para outros pontos os resultados são, de modo geral, mais próximos.

A 3ª discretização parece ser, no presente caso, desnecessária uma vez que não ocorreram mudanças significativas em relação à anterior. Cheung [32] observa que estudos subsequentes mostraram que apenas uma faixa B02 basta para representar adequadamente cada lâmina vertical. Loo e Cusens [4] aconselham a utilização de pelo menos duas faixas A03, em especial nos problemas em que há interesse em encontrar com precisão os valores de τ_{xy} em seção carregada. Para a laje superior, enquanto Cheung recomenda que sob carga concentrada deve existir linha nodal, Loo e Cu-

VALOR COMPARADO	LOCAL REFERENCIADO À 2ª DISCRETIZAÇÃO	RESULTADOS	
		2ª DISCRETIZAÇÃO	3ª DISCRETIZAÇÃO
σ_x (lb f/in^2)	FAIXA 15 (Porção Superior)	-15,5	-15,8
	FAIXA 16 (Porção Superior)	-32,8	-32,9
τ_{xy} (lb f/in^2)	FAIXA 16 (Porção Superior)	19,6	17,7
	FAIXA 16 (Porção Inferior)	19,2	18,3
V_x (10^3 lb f/ft)	À Direita da LN 10	-1,17	-1,18
$w(10^{-3} \text{ ft})$	LN 8	14,9	15,0
$u(10^{-3} \text{ ft})$	LN 4	0,19	0,20

TAB. 8.24 - Paralelo - 2ª e 3ª Discretizações - 11 harmônicos
Seção Central

sens propoem, também, a utilização de pelo menos uma linha nodal de cada lado do ponto de aplicação da carga, definindo faixas estreitas adicionais, sendo este último critério mais aconselhável.

8.3.4 - 3º carregamento - 12 cargas concentradas assimétricas (c)

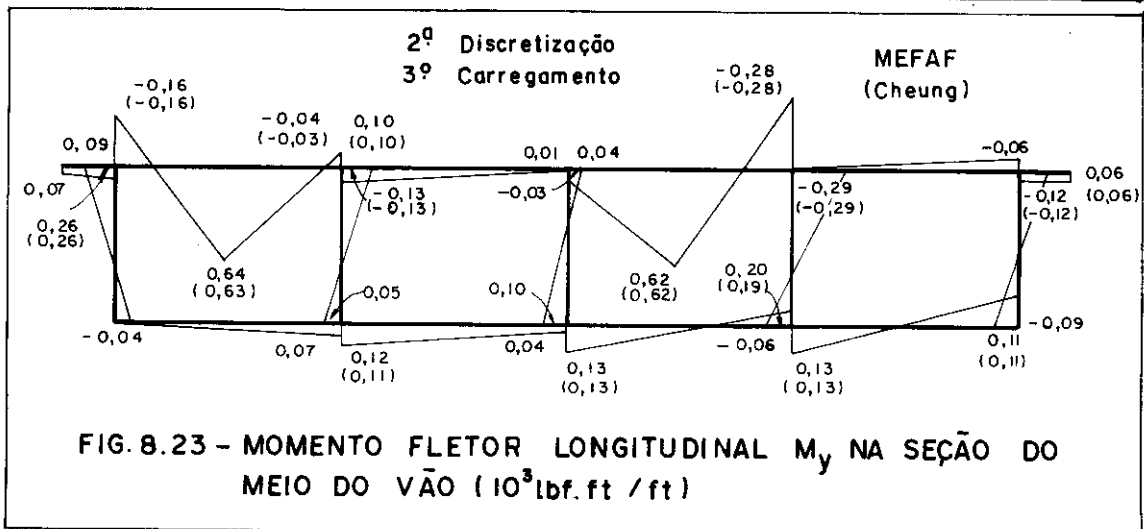
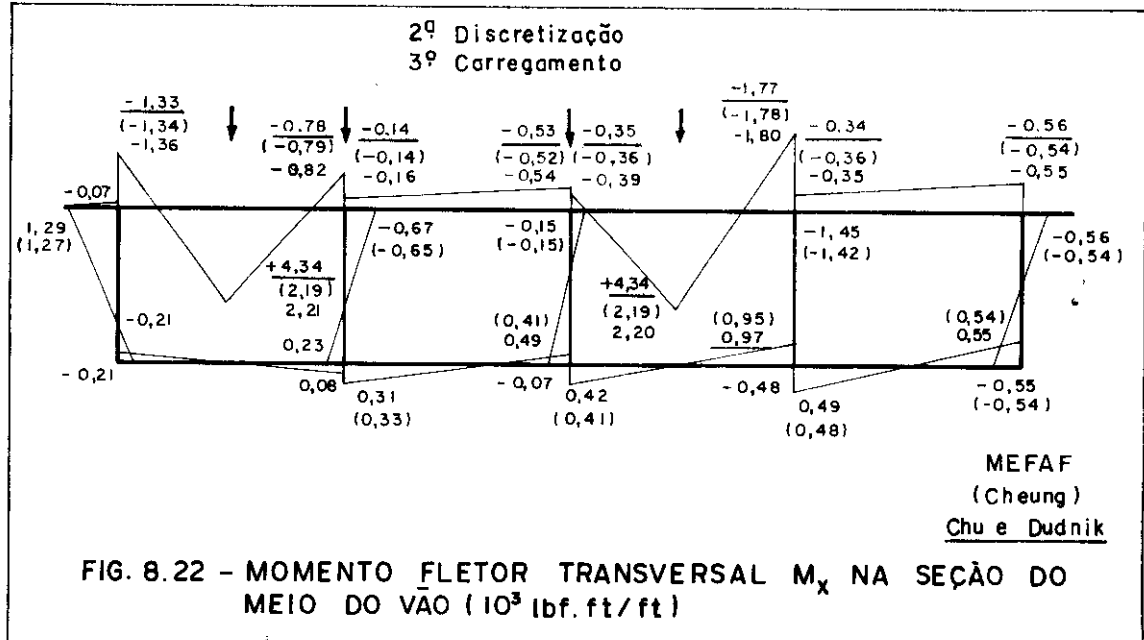
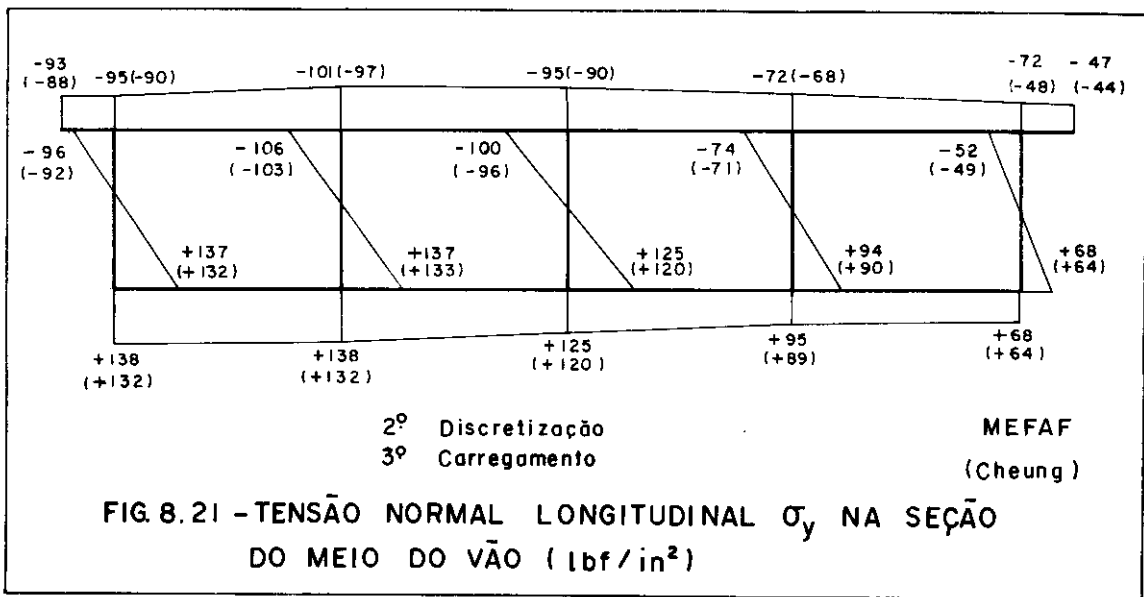
- 1ª Discretização - 1 Faixa por Lâmina

Inadequada por razões análogas àquelas já expostas no item 8.3.3.

- 2ª Discretização - 24 Faixas

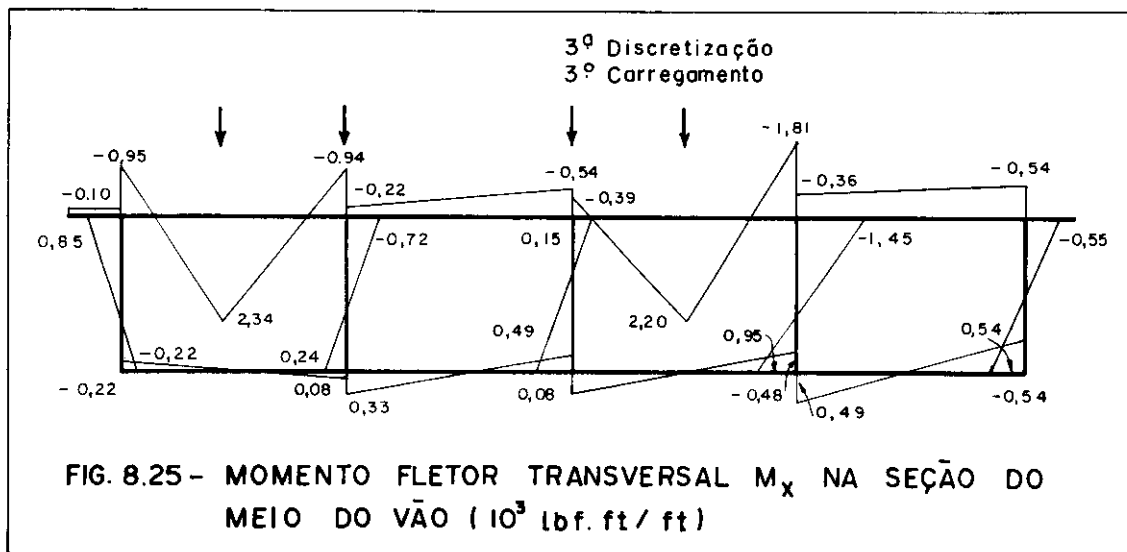
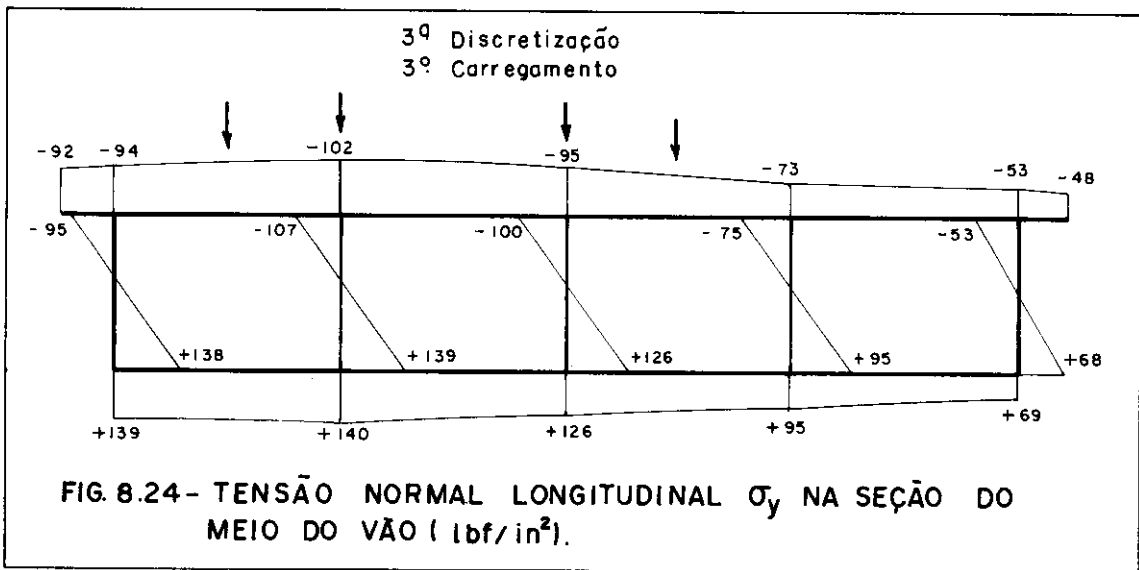
Os diagramas de σ_y , M_x e M_y para a seção do meio do vão são exibidos nas figuras 8.21, 8.22 e 8.23.

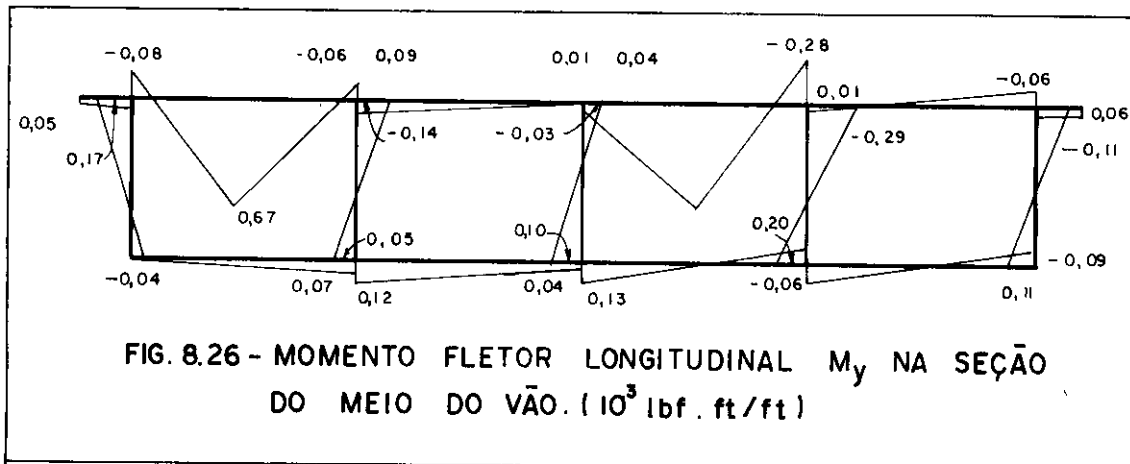
Tem-se para M_x nós equilibrados e valores praticamente iguais aos apresentados por Cheung. A proximidade se mantém nos casos de σ_y e M_y . Foram evitadas outras análises (como a influência do número de harmônicos) por causa de analogia com a efetuada anteriormente (item 8.3.3).



- 3ª Discretização - 34 Faixas

Os diagramas apresentados nas figuras 8.25 e 8.26 permitem verificar (em comparação com a 2ª discretização) alterações em M_x e M_y na laje superior da 1ª célula à esquerda. Para σ_y nenhuma significativa modificação (Fig. 8.24).





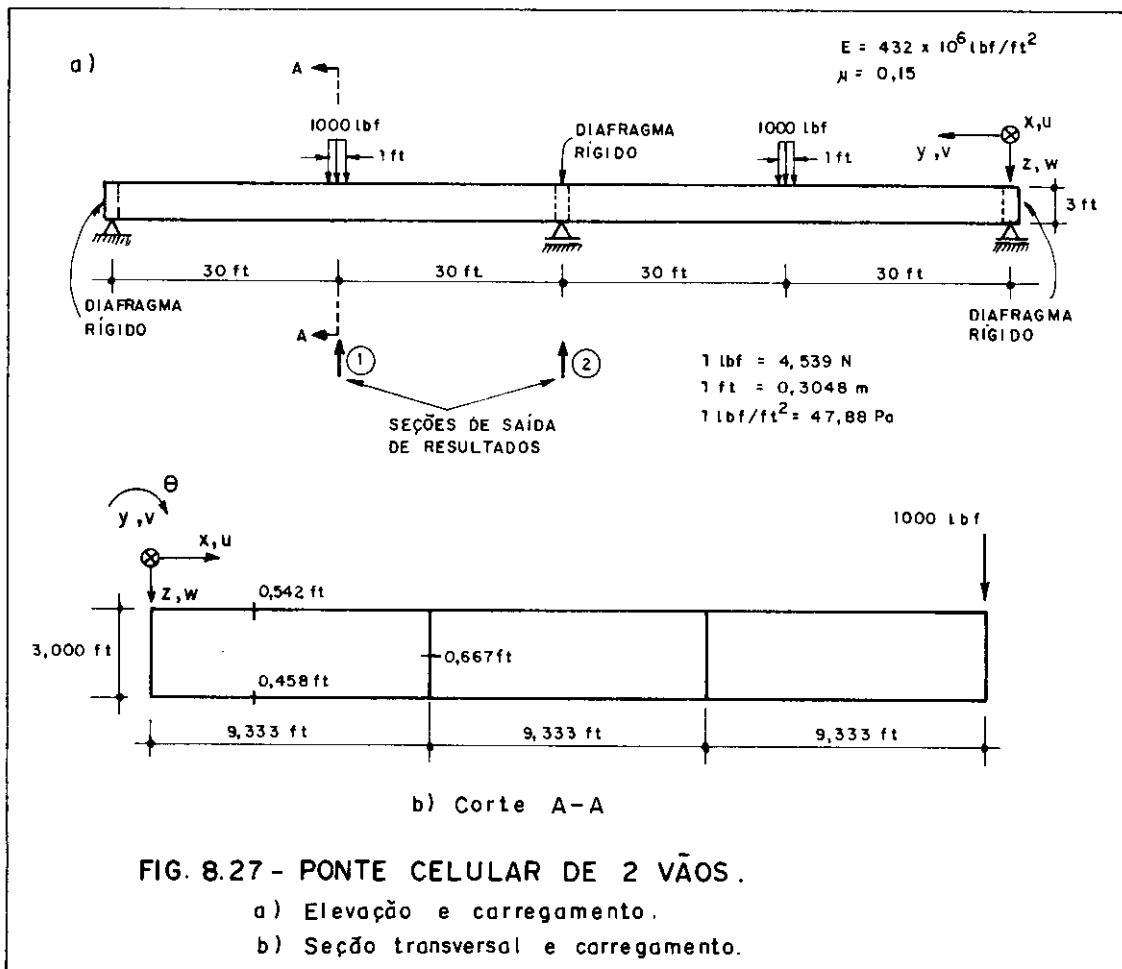
Confirma-se, com este exemplo, que a presença de carga concentrada requer linhas nodais próximas do ponto de aplicação. Isto se deve ao fato de que sendo a variação transversal mais acentuada, há necessidade de se colocar um maior número de faixas estreitas, nessa região, para que a aproximação se torne melhor.

Parece desnecessária a presença de quatro faixas na laje superior da célula direita, uma vez que não ocorreram as alterações significativas nos resultados. E de forma semelhante a representação das lâminas verticais por duas faixas A03 não gerou alterações que justifiquem a sua utilização.

8.4 - 4º EXEMPLO - PONTE CONTÍNUA DE TABULEIRO CELULAR

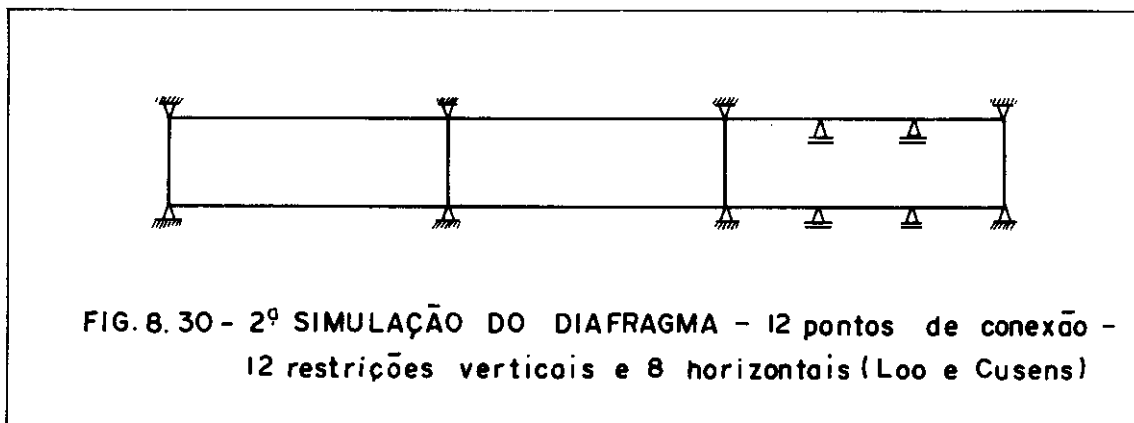
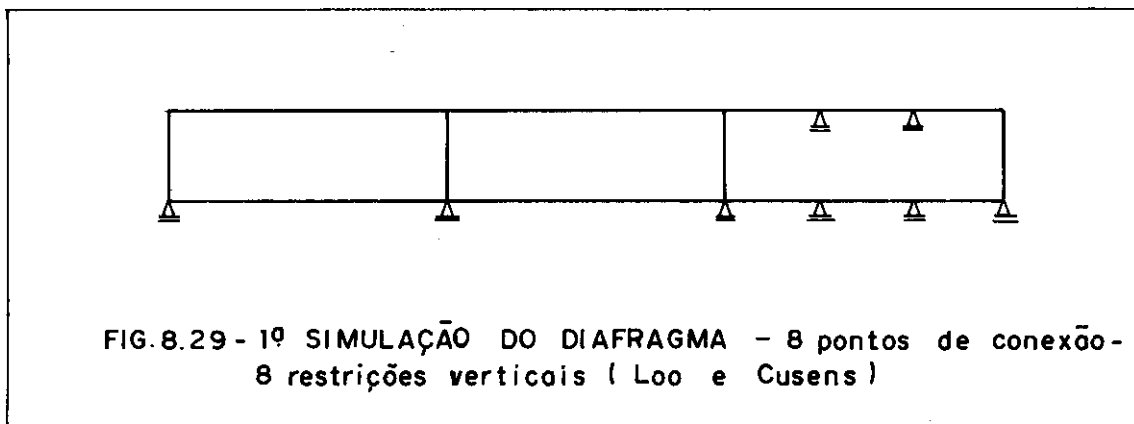
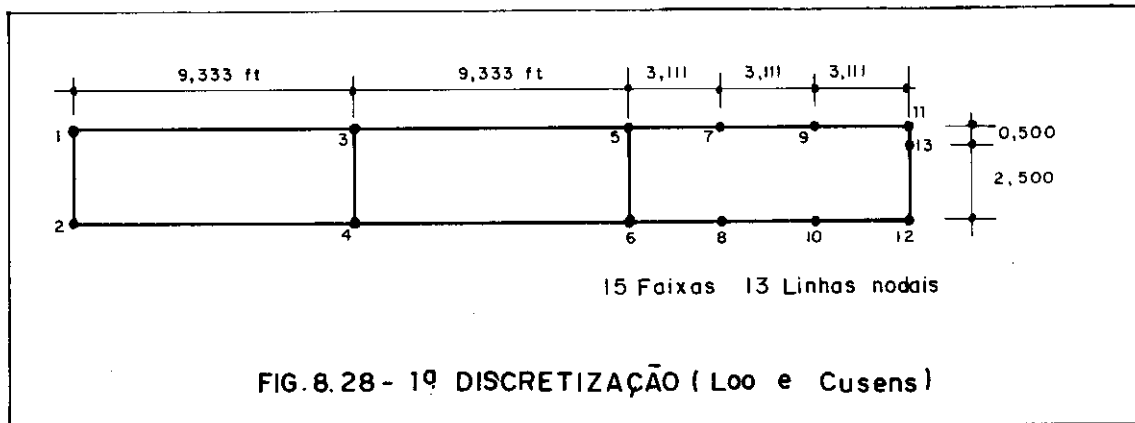
8.4.1 - Apresentação

A figura 8.27 apresenta uma ponte contínua de dois tramos, de tabuleiro com seção transversal constituída por três células, sem balanço e com diafragmas rígidos nas três seções apoiadas.



A ponte foi primeiramente analisada por Scordelis [5] para estudar a eficiência de programas de computador que utilizam a teoria elástica das folhas poliédricas, elementos finitos, etc. O mesmo exemplo foi retomado por Loo e Cusens [5] que o estudaram utilizando como ferramenta o

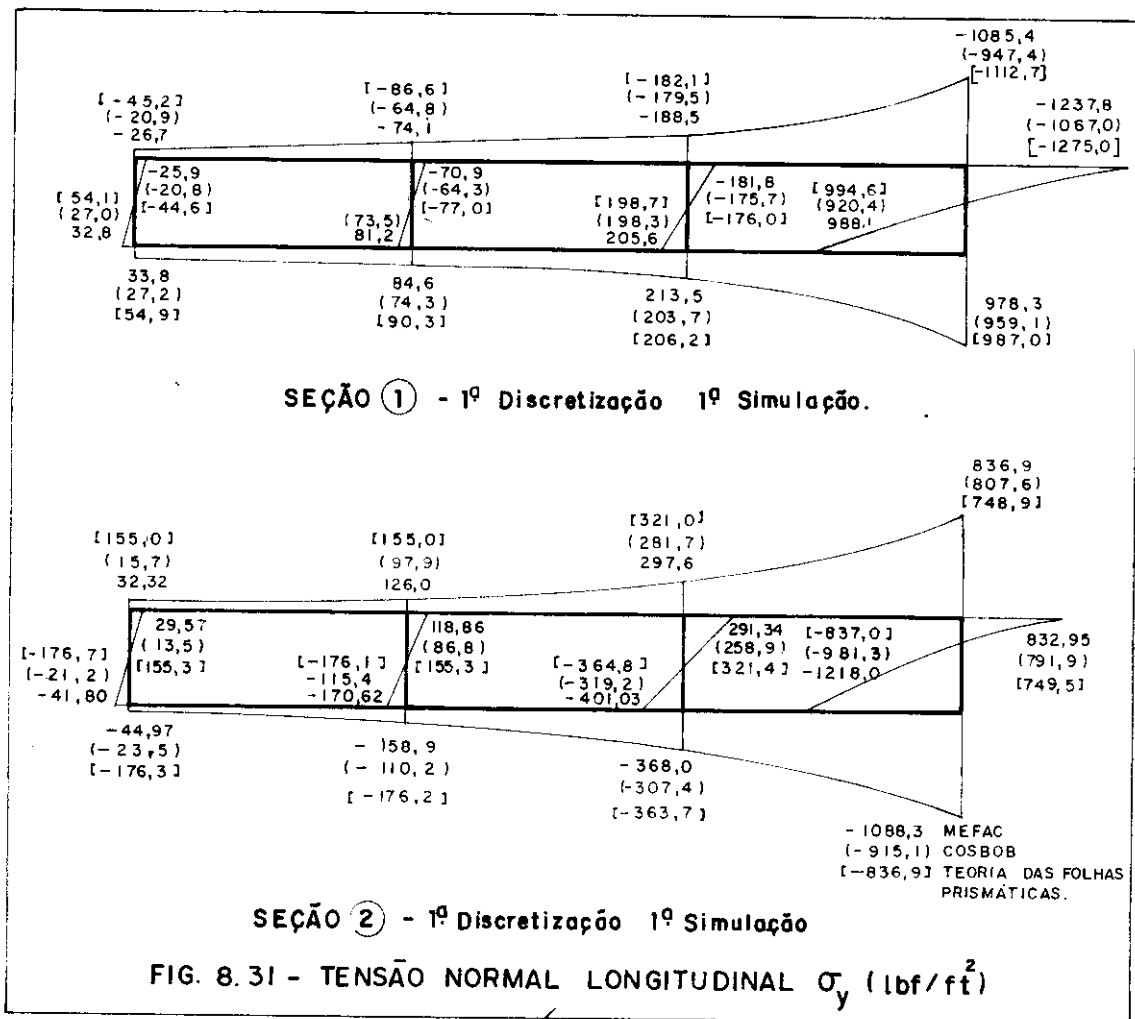
programa COSBOB que emprega faixas finitas do tipo B02 (vide capítulo 2), num total de 99 harmônicos da série, sendo que apenas os ímpares produzem resultados não nulos devido à simetria longitudinal em relação à seção intermediária. A discretização da ponte, bem como as simulações adotadas para o diafragma intermediário são apresentadas nas figuras seguintes.

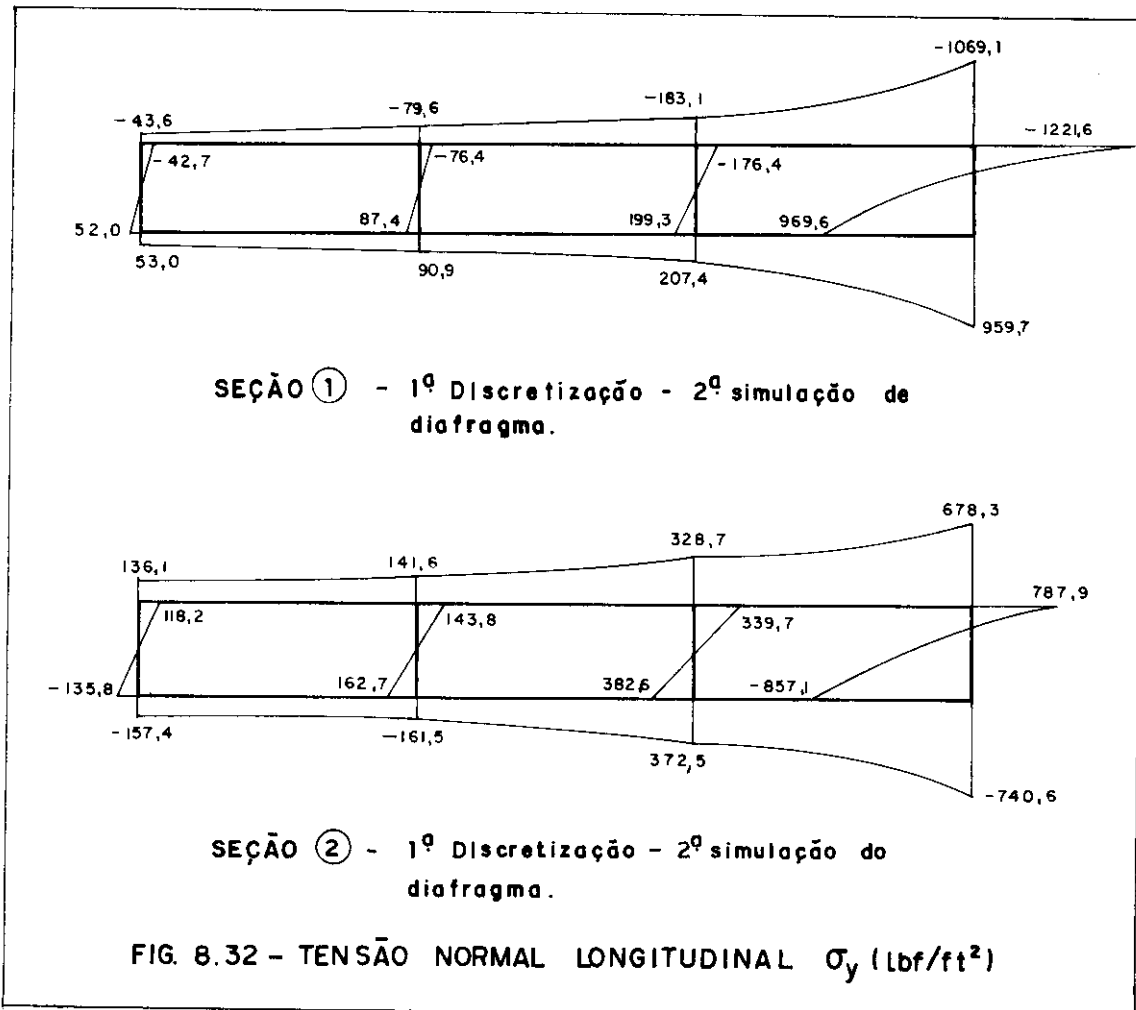


8.4.2 - 1ª discretização - 1ª e 2ª simulações do diafragma interno

Foi utilizado, neste trabalho, o programa MEFAC (faixa finita A03) adotando-se, inicialmente, as propostas de Loo e Cusens. Quanto ao número de harmônicos foram adotados os valores 51, 75 e 99, para uma primeira análise da evolução dos resultados ao se implementar a solução em série. Nos diagramas apenas os resultados correspondentes a 99 harmônicos estarão figurados.

Primeiramente são analisadas as tensões normais longitudinais σ_y nas seções de saída 1 e 2 (vide figura 8.27), sendo que os diagramas são exibidos nas figuras 8.31 e 8.32.





Pode-se notar que a 1ª simulação do diafragma, com oito pontos de conexão, alcança excelentes resultados para a tensão σ_y ; isto é explicado por terem muito pequena influência, na distribuição de tal tensão, os deslocamentos horizontais e os resultados das rotações transversais locais na seção intermediária.

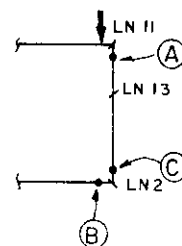
De um modo geral os resultados oriundos da utilização de MEFAC se aproximam mais dos relativos à teoria das folhas poliédricas do que os provenientes do uso de COSBOB, em especial junto às cargas atuantes no tabuleiro da ponte.

Observa-se, também, que os resultados de σ_y referentes à 2ª simulação se avizinham mais das de Scordelis, especialmente na seção do diafragma, isto porque essa simu

lação é mais parecida com a do referido autor que, no plano do diafragma, impede rotações e translações nos cantos das células e translações nos terços de cada lâmina.

As tabelas a seguir apresentam valores de σ_y para alguns pontos das seções 1 e 2.

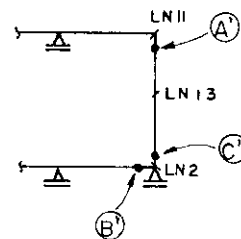
	HARMÔNICO	PONTO A		PONTO B		PONTO C	
		σ_y	K	σ_y	K	σ_y	K
1ª SIMULAÇÃO	51	-1039,6		976,7		980,8	
	75	-1155,4	10,0%	981,1	0,4%	988,1	0,7%
	99	-1237,8	6,7%	978,3	0,3%	988,1	0,0%
2ª SIMULAÇÃO	51	-1022,9		957,6		961,7	
	75	-1139,0	10,2%	962,4	0,5%	969,1	0,8%
	99	-1221,6	6,8%	989,7	-0,3%	969,6	0,0%



$$1 \text{ lbf/ft}^2 = 47,88 \text{ Pa}$$

TAB. 8.25 - Tensões Normais σ_y (lbf/ft²)
Seção ① 1ª Discretização

	HARMÔNICO	PONTO A'		PONTO B'		PONTO C'	
		σ_y	K	σ_y	K	σ_y	K
1ª SIMULAÇÃO	51	831,4		-974,07		-1053,9	
	75	835,0	0,5%	-1043,2	6,6%	-1150,9	8,4%
	99	833,0	-0,2%	-1088,3	4,1%	-1218,0	5,5%
2ª SIMULAÇÃO	51	722,1		-726,03		-800,3	
	75	758,1	4,8%	-735,18	1,2%	-833,6	4,0%
	99	787,9	3,8%	-740,56	0,7%	-857,1	2,7%



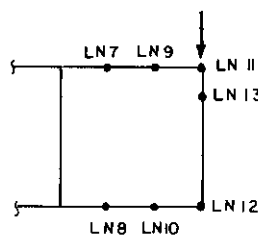
TAB. 8.26 - Tensões Normais σ_y (lbf/ft²)
Seção ② 1ª Discretização

Observa-se que ocorrem pequenas variações nos valores de σ_y ao se aumentar o número de harmônicos de 51 a 99, sendo que as mais significativas se dão junto a regiões carregadas (ponto A da seção 1 e ponto C' da seção 2), sendo o efeito localizado. Para a seção 1 os valores apresentados nas duas simulações são próximos e ocorre diminuição da proximidade na seção 2, devida à influência exercida pelas interações com o diafragma.

Para a análise dos deslocamentos são apresentados valores de w e u em apenas alguns pontos das seções de saída; w e

u são o deslocamento vertical e o deslocamento horizontal transversal, respectivamente. A tabela 8.27 exhibe valores de w em pontos da seção de saída 1, próximos à região da aplicação de carga, correspondentes a 99 harmônicos.

LINHA NODAL	$w(10^{-6} \text{ ft})$	
	1ª SIMULAÇÃO	2ª SIMULAÇÃO
9	181,0	173,0
10	181,4	173,4
11	219,0	203,3
12	216,2	205,4
13	218,2	207,4



TAB. 8.27 - Deslocamentos Verticais w
Seção ① 1ª Discretização - 99 harmônicos

Percebe-se a proximidade de resultados ao se confrontar as duas simulações do diafragma intermediário.

A variação de w com o número de harmônicos é pouco acentuada. Cabe observar que os deslocamentos são os resultados que apresentam maior rapidez na tendência de estabilização e maior precisão, uma vez que é utilizado o processo dos deslocamentos. Esforços e tensões são determinados a partir desses deslocamentos, perfazendo-se as derivações apropriadas (vide capítulos 2, 3 e 4). Em geral, quanto mais alta a ordem da derivação, deve-se esperar aproximações menos acuradas e menor rapidez na tendência de estabilização de resultados.

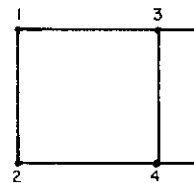
A tabela 8.28 mostra a variação das maiores flechas w na seção carregada ao se aumentar o número de harmônicos. Percebe-se, com clareza, o que se expôs para os deslocamentos. A constatação da alternância do sinal do parâmetro K , observada na 2ª coluna da tabela, indica provável oscilação em torno do valor estável de w na linha nodal 12, 1ª simulação.

HARMÔNICO	1ª SIMULAÇÃO		2ª SIMULAÇÃO	
	LN 12		LN 12	
	w (10 ⁻⁶ ft)	K	w (10 ⁻⁶ ft)	K
51	216,0		204,8	
75	215,7	-0,1%	205,2	-0,2%
99	216,2	+0,2%	205,4	+0,1%

TAB. 8.28 - Deslocamentos Verticais w - Seção ①
1ª Discretização

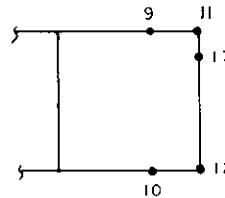
Em relação aos deslocamentos u observa-se, na seção carregada, significativas diferenças ao se confrontar resultados para as duas simulações do diafragma intermediário (Tab. 8.29). A razão de tais diferenças se deve ao fato de que na 2ª simulação são impedidos os deslocamentos horizontais u nos cantos das células, enquanto que na 1ª simulação nenhuma restrição horizontal transversal é imposta. Cabe observar que esses valores são muito pequenos.

LINHA NODAL	u(10 ⁻⁶ ft)	
	1ª SIMULAÇÃO	2ª SIMULAÇÃO
1	0,850	-0,492
2	-1,280	0,168
3	-0,811	-0,503
4	-1,248	0,168



TAB. 8.29 - Deslocamentos Horizontais Transversais u - Seção ①
1ª Discretização - 99 harmônicos

LINHA NODAL	u (10 ⁻⁶ ft)	
	1 ^a SIMULAÇÃO	2 ^a SIMULAÇÃO
9	7,58	1,41
10	-8,53	-1,62
11	7,33	0
12	-8,27	0



TAB. 8.30 - Deslocamentos Horizontais Transversais u
Seção ② - 1^a Discretização
99 Harmônicos

Observa-se também para o deslocamento u uma rápida tendência de estabilização de resultados conforme se mostra na tabela a seguir.

HARMÔNICO	1 ^a SIMULAÇÃO		2 ^a SIMULAÇÃO	
	LN 1		LN 1	
	u (10 ⁻⁶ ft)	K	u (10 ⁻⁶ ft)	K
51	0,833		-0,542	
75	0,844	-1,3%	-0,510	-6,3%
99	0,850	-0,7%	-0,492	-3,7%

TAB. 8.31 - Deslocamentos Horizontais Transversais
Seção ① - 1^a Discretização - 99 Harmônicos

Nas tabelas 8.32, 8.33 e 8.34 são anotados os valores das reações na seção 2, correspondentes a 99 harmônicos, que têm os seus sinais fixados de acordo com os sentidos dos eixos correspondentes ao sistema global de coordenadas (vide Fig. 8.27).

LN	REAÇÕES (lbf)
2	-4,2
4	-160,9
6	-320,3
7	-64,8
8	-49,5
9	-39,0
10	35,0
12	-843,2
\sum	-1368,0

TAB. 8.32 - Reações de Apoio Verticais - 1ª simulação - 99 harmônicos

LN	REAÇÕES VERTICAIS (lbf)
1	-28,8
2	-29,5
3	-86,2
4	-82,6
5	-179,9
6	-173,4
7	-9,6
8	-7,0
9	-7,7
10	-4,2
11	-376,6
12	-382,1
\sum	-1367,6

TAB-8.33 - 2ª Simulação 99 harmônicos

LN	REAÇÕES HORIZONTAIS (lbf)
1	-155,7
2	-159,5
3	-390,9
4	393,9
5	-570,6
6	566,0
11	-314,4
12	310,1
\sum	-2,1

TAB. 8.34 - 2ª Simulação - 99 harmônicos

Se o tabuleiro da ponte for considerado uma viga contínua a reação no apoio central tem o valor 1375 lbf. As somas das reações nas duas simulações se aproximam desse valor, o que constitui importante verificação da análise via Método das Faixas Finitas, assim como da aproximação incluída através do Processo dos Esforços que permite o cálculo das interações tabuleiro-diafragma intermediário. Outra verificação importante é que a soma das reações horizontais (2ª simulação) se aproxima de zero, como era de se esperar. Cabe observar que, como as forças trocadas nos pontos internos à célula direita são pequenas conclui-se sobre a dispensabilidade da adoção desses pontos de interação.

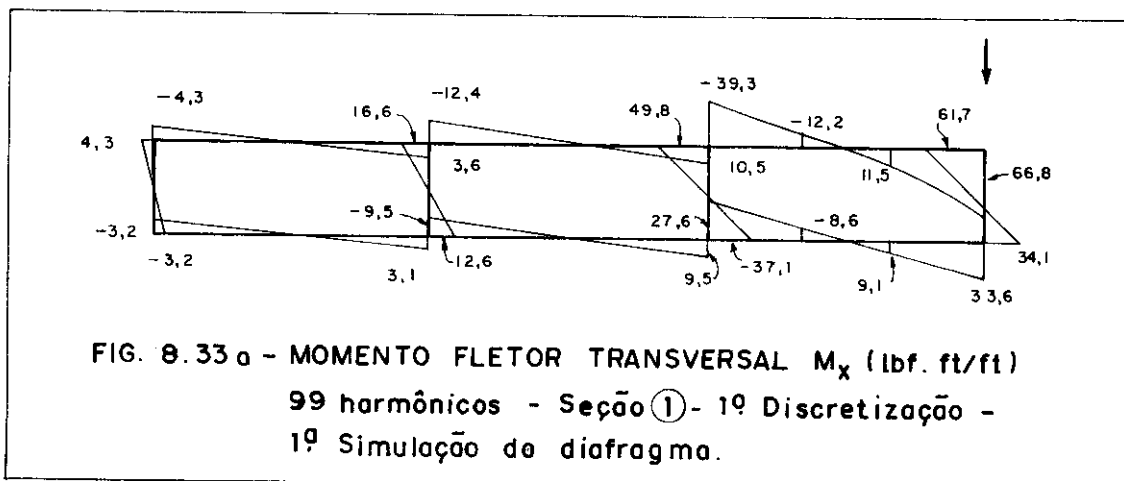
A estabilização de resultados das reações é bastante rápida, pois, como já foi mostrado, o cálculo das reações depende dos deslocamentos que, por sua vez, estabilizam-se velozmente. A tabela 8.35 apresenta a evolução de resultados em alguns pontos de interação para as duas simulações, onde tal fato fica patente.

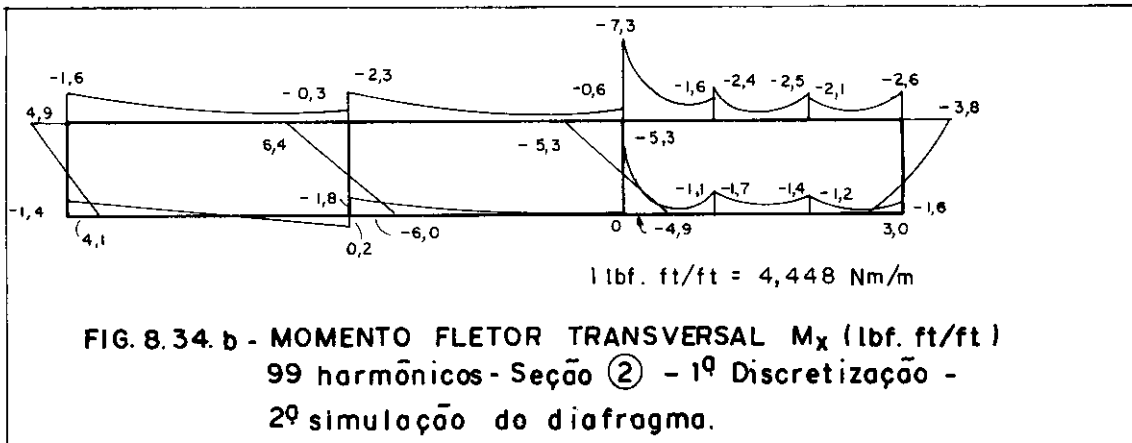
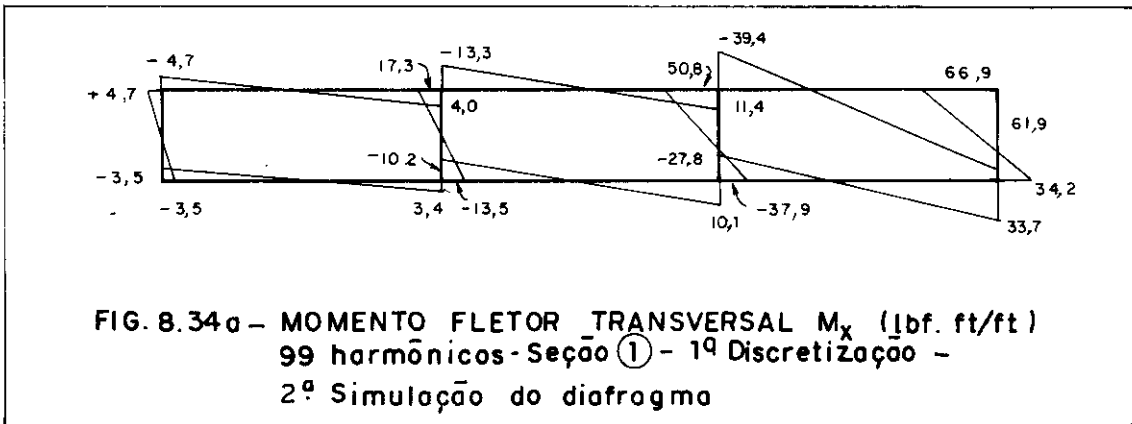
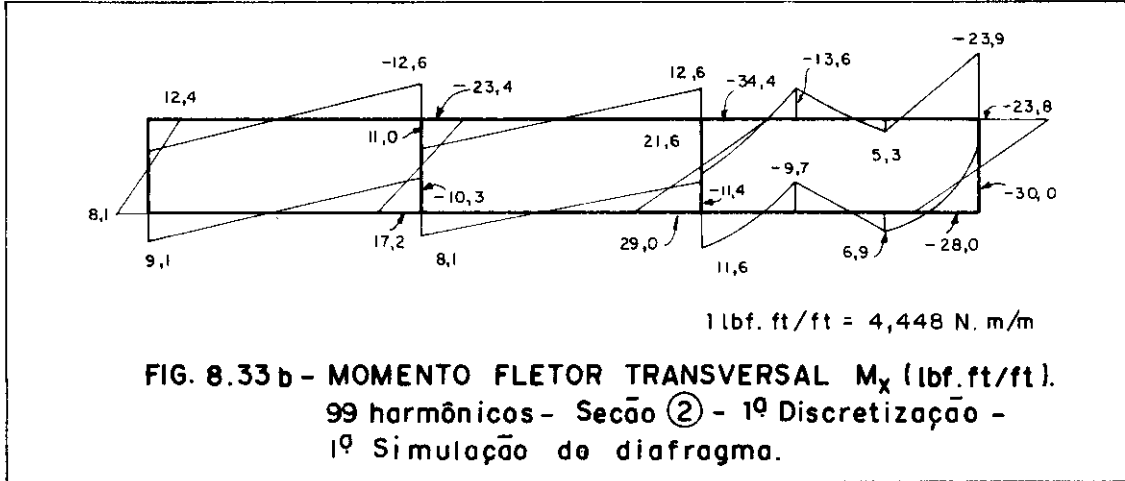
Os diagramas de momento fletor transversal M_x são apresentados nas figuras 8.33 e 8.34. Ressalta da análise dos mesmos que, para a seção carregada, existe boa correlação de valores e que os nós da seção se encontram e

quilibrados a menos do canto superior direito onde aparece desequilíbrio em torno de 10% do valor do momento, sendo este efeito localizado na região de aplicação de carga. Quanto à seção apoiada, percebe-se a presença de desequilíbrios significativos e discordância de resultados correspondentes às distintas simulações do diafragma intermediário. Isso se deve à presença de várias cargas concentradas (interações com o diafragma).

HARMÔNICO	1ª SIMULAÇÃO		2ª SIMULAÇÃO			
	LN 12		LN 12		LN 5	
	REAÇÃO VERTICAL	K	REAÇÃO VERTICAL	K	REAÇÃO HORIZONTAL	K
51	-857,1		-385,3		-600,0	
75	-848,2	1,0%	-383,3	-0,5%	-580,9	-3,3%
99	-843,2	0,6%	-382,1	-0,3%	-570,6	-1,8%

TAB. 8.35 - Reações de Apoio (lbf) - Seção ②
1ª Discretização - 99 harmônicos





A tabela subsequente exhibe valores de M_x em alguns pontos da seção carregada, para um número de harmônicos crescente até 99.

HARMÔNICO		PONTO A		PONTO C	
		M_x	K	M_x	K
1ª SIMULAÇÃO	51	52,4		33,4	
	75	59,4	11,8%	33,8	1,2%
	99	66,8	11,1%	34,1	0,9%
2ª SIMULAÇÃO	51	52,6		33,5	
	75	59,5	11,6%	34,0	1,5%
	99	66,9	11,1%	34,2	0,6%

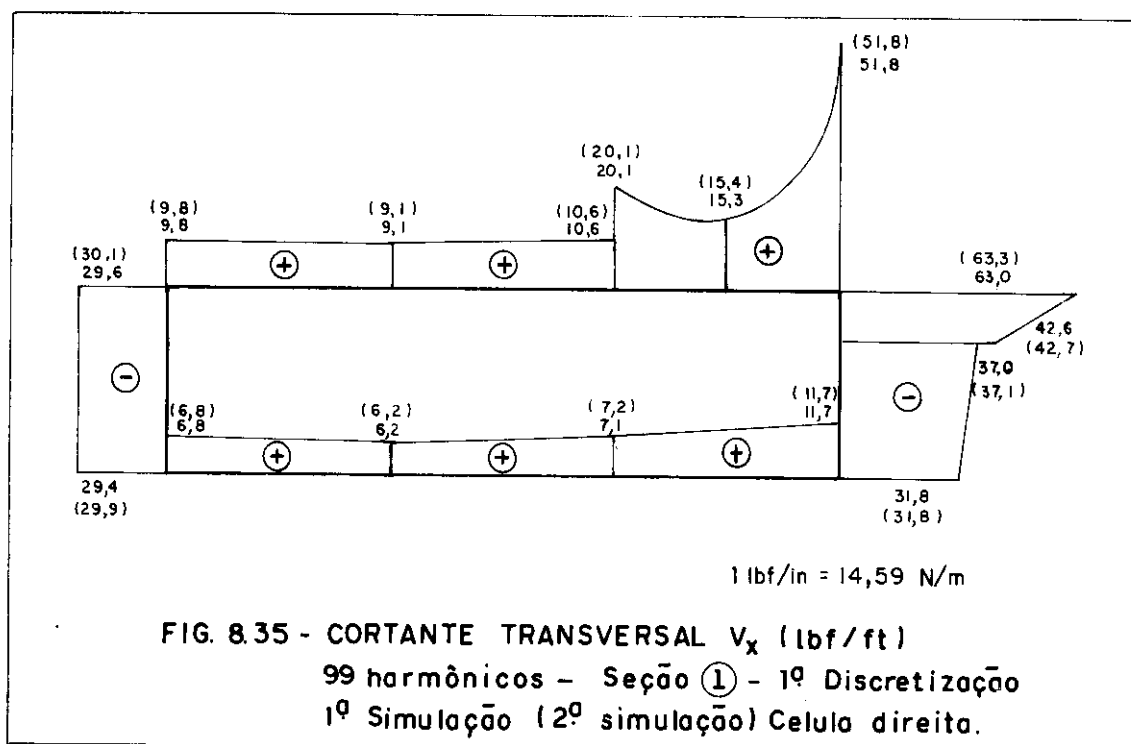
TAB. 8.36 - Momentos Fletores Transversais M_x (lbf/ft)

Seção ① - 1ª Discretização

Não são apresentados valores relativos à seção intermediária porque observou-se que os nós próximos às maiores interações com o diafragma apresentam-se desequilibrados e sem a tendência de se equilibrarem com o aumento do número de harmônicos. Tal discretização não é conveniente no caso de o interesse do projetista recair sobre os momentos localizados nessa seção. Solução alternativa será mostrada posteriormente bem como comentários sobre a questão de cargas concentradas.

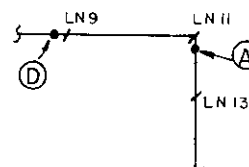
O diagrama de forças cortantes transversais V_x (Fig. 8.35) apresenta, para a seção carregada, os valores correspondentes às duas simulações do diafragma, sendo que os mesmos são bastante próximos, chegando, em determinados pontos, a serem iguais. Para a seção apoiada, cujos diagramas não são aqui figurados, observou-se, à semelhança de M_x , discordância de valores para as duas simulações além de descontinuidades junto à LN11 onde não há carga aplicada.

Quanto à tendência de estabilização de valores, para as forças cortantes a situação é bem mais desfavorável do que para os momentos fletores, por causa das deriva



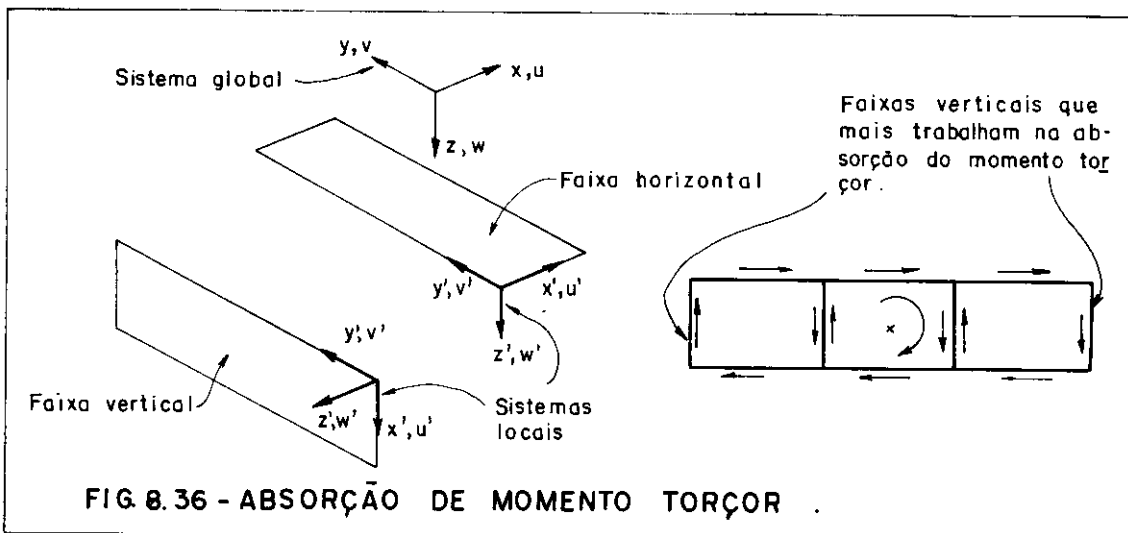
ções de ordem mais alta. A tabela 8.37 mostra, em determinados pontos da seção 1, a evolução dos valores, ao se variar o número de harmônicos. As maiores variações ocorrem junto à região de aplicação de carga. Para pontos afastados dessa região, percebe-se rápida estabilização (comparar resultados referentes aos pontos A e D). Para a seção intermediária ocorrem variações muito acentuadas em V_x , especialmente na 2ª simulação devidas à presença de um maior número de cargas concentradas.

HARMÔNICO		PONTO A		PONTO D	
		V_x	K	V_x	K
1ª SIMULAÇÃO	51	35,4		10,4	
	75	47,3	25,2%	10,6	1,9%
	99	63,0	24,9%	10,6	0,0%
2ª SIMULAÇÃO	51	35,7		10,4	
	75	47,6	25,0%	10,6	1,9%
	99	63,3	24,8%	10,6	0,0%



TAB. 8.37 - Cortantes Transversais V_x (lbf/ft)
 Seção carregada - 1ª Discretização

As tensões de cisalhamento τ_{xy} na seção carregada são apresentadas na Fig. 8.37. Observa-se, neste caso, que a proximidade de resultados referentes às duas simulações do diafragma intermediário ocorre apenas nas faixas verticais internas. Quanto às demais tensões de chapa (σ_y já analisada e σ_x não apresentada, mas cuja análise assemelha-se à apresentada para σ_y) tem-se boa correlação dos valores encontrados, para as duas simulações, na seção 1, com pequenas discrepâncias junto à região de carregamento, portanto o motivo das diferenças em τ_{xy} não se encontra nas derivadas $\frac{\partial u'}{\partial x}$ e $\frac{\partial v'}{\partial y}$, recaindo sobre $\frac{\partial v'}{\partial x}$ ou $\frac{\partial u'}{\partial y}$ (vide Fig. 8.36).

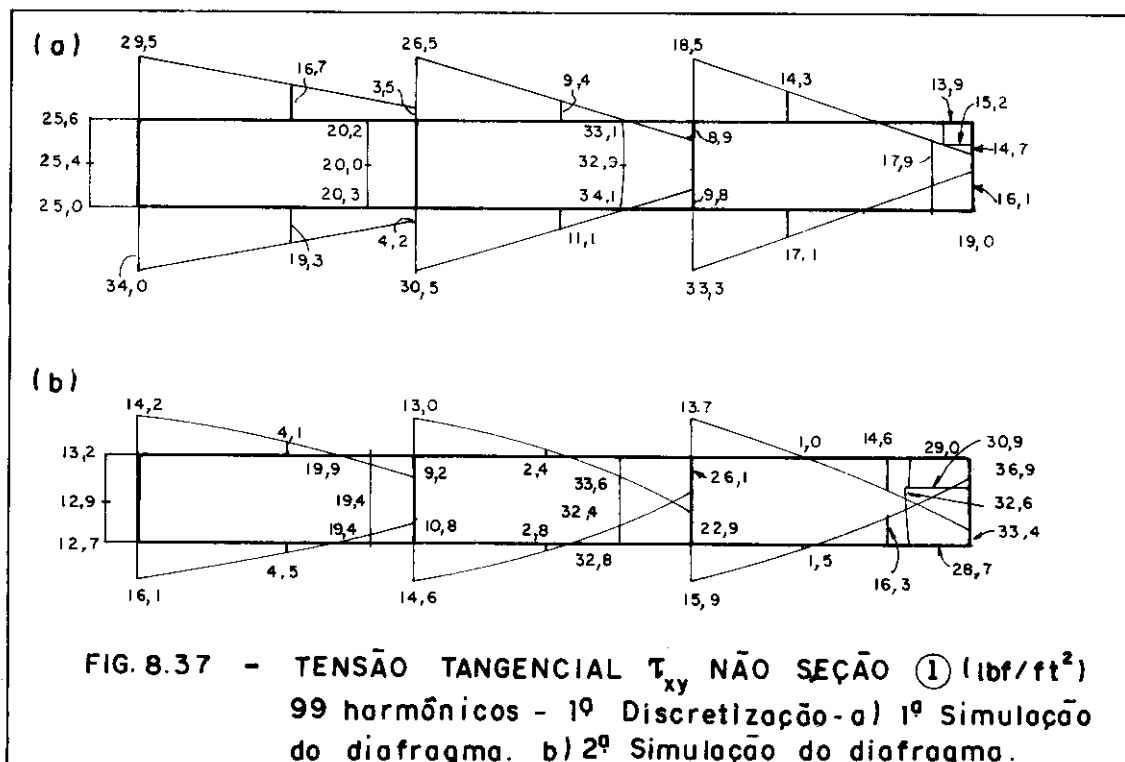


Como nas duas simulações não se faz nenhuma restrição longitudinal de translação (v') o que faz que tais deslocamentos sejam concordantes nas duas seções de saída, conclui-se que a derivada causadora das diferenças citadas é $\frac{\partial u'}{\partial y}$. Nas faixas verticais o parâmetro u' local se confunde com a flecha vertical global w , cujos resultados são concordantes e que foi restringida em alguns pontos da seção apoiada intermediária, nas duas simulações.

Nas faixas horizontais o parâmetro u' se confunde com o deslocamento global u que foi restringido apenas na 2ª simulação gerando, ao longo do eixo longitudinal, di

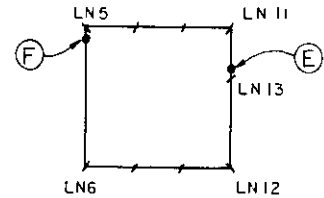
ferentes variações de valores, o que leva a $\frac{\partial u'}{\partial y}$ distintos. As faixas horizontais absorvem, então, diferentemente a torção do tabuleiro. Ocorrem diferenças na distribuição de τ_{xy} nas faixas horizontais e, por equivalência estática, conclui-se que tais diferenças impõem distribuições distintas de τ_{xy} nas faixas verticais que mais trabalham na resistência à torção, ou seja, as externas.

Nas faixas verticais internas, a maior influência em τ_{xy} se deve ao efeito das cortantes que solicitam a seção, considerado o tabuleiro como viga, e elas não se diferenciam muito uma vez que em ambas as simulações aparecem reações verticais (de somatórias próximas) que influenciam essas cortantes.



A tendência de estabilização de resultados para τ_{xy} é rápida em pontos não muito próximos dos de aplicação de carga e lenta nas proximidades de tais regiões. A tabela 8.38 permite a constatação desse fato.

HARMÔNICO		PONTO E		PONTO F	
		τ_{xy}	K	τ_{xy}	K
1ª SIMULAÇÃO	51	-18,8		-33,7	
	75	-16,5	-13,9%	-33,3	-1,2%
	99	-15,2	-8,6%	-33,1	-0,6%
2ª SIMULAÇÃO	51	-34,5		-34,3	
	75	-32,5	-6,2%	-33,8	-1,5%
	99	-30,3	-5,2%	-33,6	-0,6%



TAB. 8.38 - Tensões de cisalhamento τ_{xy} (lbf/ft²)
Seção Carregada - 1ª Discretização

Com o objetivo de não se estender muito a análise dos resultados, são apresentadas a seguir, em resumo, as observações relativas aos demais deslocamentos, tensões e esforços.

Confrontando-se as duas simulações do diafragma percebe-se, para os deslocamentos horizontais longitudinais v , grande proximidade de valores nas duas seções de saída e diferenças significativas nas rotações transversais θ , mesmo na seção carregada, fato este com explicação análoga à apresentada na análise de u . Os valores de M_y são concordantes na seção 1 e discrepantes na seção 2 (seção apoiada). M_{xy} apresenta valores discordantes para as duas simulações, na seção 1 (seção carregada); a imposição de $u = 0$ em alguns pontos da seção 2 na 2ª simulação altera consideravelmente $\theta = \frac{\partial w'}{\partial x}$, reduzindo-a bastante em tal seção; assim a variação de θ na direção longitudinal y se dá de forma distinta nas duas simulações, gerando diferentes valores para $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ e, portanto, em $M_{xy} = 2 D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$. Para a cortante V_y observam-se diferenças significativas na seção 1, sendo os valores muito pequenos; como há boa correlação de valores dos momentos fletores na

seção 1 para as duas simulações e diferenças significativas na seção 2, conclui-se que ocorrem variações distintas das curvaturas ao longo da direção y; assim, reescrevendo a expressão de

$$V_y = -D_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - H_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

entende-se a razão das diferenças anteriormente citadas na seção 1, que não ocorrem na cortante V_x , em cuja expressão aparecem as derivadas das curvaturas em relação a x,

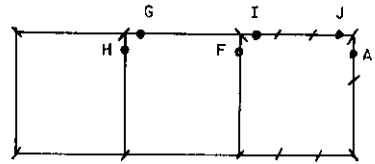
$$V_x = -D_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - H_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

As tensões normais transversais σ_x apresentam-se em excelente conformidade na seção 1, mesmo junto à região carregada e muito distintas na seção 2 em função da grande diferença no número e tipo de interações consideradas nas duas simulações do diafragma. As tabelas a seguir apresentam resultados referentes aos esforços e tensões que não tiveram seus diagramas exibidos para que se possa constatar as informações relatadas nos últimos parágrafos; foram escolhidos alguns pontos das seções de saída que retratam as situações postas em relevo.

LN \ SIMUL.	v - SEÇÃO 1		θ - SEÇÃO 1		θ - SEÇÃO 2	
	1ª	2ª	1ª	2ª	1ª	2ª
1	-0,550	-0,560	0,053	0,048	3,421	0,073
8	1,396	1,435	17,466	16,650	-0,985	-0,132
12	1,995	2,127	1,198	0,262	4,245	-0,302

TAB. 8.39 - Deslocamentos Horizontais Longitudinais v (10^{-6} ft)
Rotações Transversais θ (10^{-6} rad) - 99 harmônicos

		M_y - SEÇÃO 1		M_y - SEÇÃO 2	
		1ª	2ª	1ª	2ª
PONTO	SIMUL.				
	G		2,577	2,738	-3,785
I		-4,016	-4,087	-1,2061	-9,353
J		46,055	45,925	-15,300	-21,085



TAB. 8.40 - Momentos Fletores Longitudinais M_y (lbf.ft/ft) - 99 harmônicos

		V_y - SEÇÃO 1		M_{xy} - SEÇÃO 1	
		1ª	2ª	1ª	2ª
PONTO	SIMUL.				
	I		0,211	-0,440	0,188
J		-1,636	-2,195	0,135	-0,192
A		-1,008	-0,214	0,252	-0,357

TAB. 8.41 - Cortantes longitudinais V_y (lbf/ft)
Momentos Torçores M_{xy} (lbf.ft/ft) - 99 harmônicos

		σ_x - SEÇÃO 1		σ_x - SEÇÃO 2	
		1ª	2ª	1ª	2ª
PONTO	SIMUL.				
	H		-34,359	-35,280	74,785
F		-10,857	-10,602	25,405	160,76
A		-1006,7	-1006,8	-23,389	424,92

TAB. 8.42 - Tensões Normais Transversais σ_x (lbf/ft²)
99 harmônicos

Quanto à tendência de estabilização de resultados observou-se que para os deslocamentos v e θ é análoga à de w , para os momentos M_y e M_{xy} é semelhante à de M_x ,

para a cortante V_y é similar à de V_x e para a tensão normal σ_x assemelha-se à de σ_y .

8.4.3 - 1ª discretização - 3ª simulação do diafragma interno

Mantendo-se a 1ª Discretização foi feita uma 3ª simulação do diafragma intermediário acrescentando-se, em relação à segunda, o impedimento das rotações transversais de todos os cantos das células (Fig. 8.38). O número de harmônicos foi adotado igual a 99, sendo feitas comparações com os resultados correspondentes à 2ª simulação.

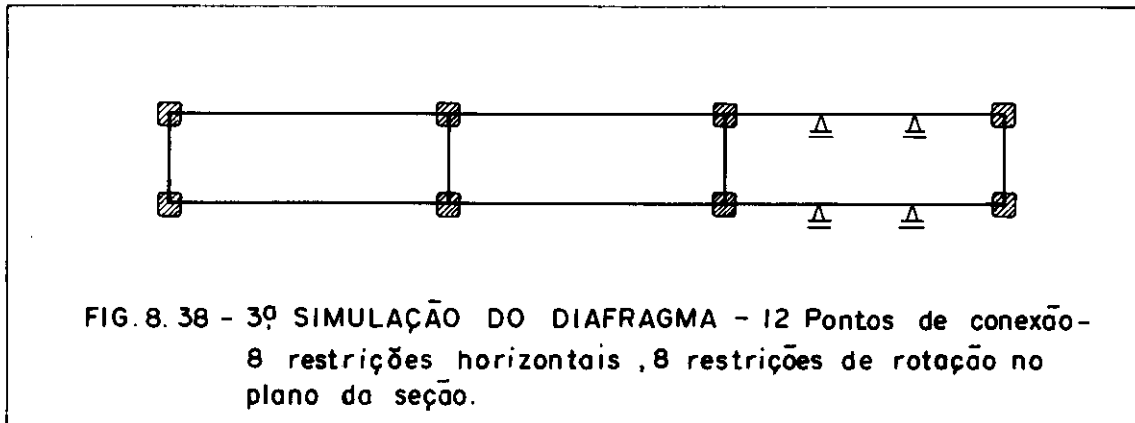


FIG. 8.38 - 3ª SIMULAÇÃO DO DIAFRAGMA - 12 Pontos de conexão - 8 restrições horizontais, 8 restrições de rotação no plano da seção.

Primeiramente são analisadas as tensões normais longitudinais σ_y nas seções de saída 1 e 2, sendo que o diagrama para a última seção é exibido na Fig. 8.39. Para a seção 1 o diagrama não é apresentado por ser idêntico ao da 2ª simulação.

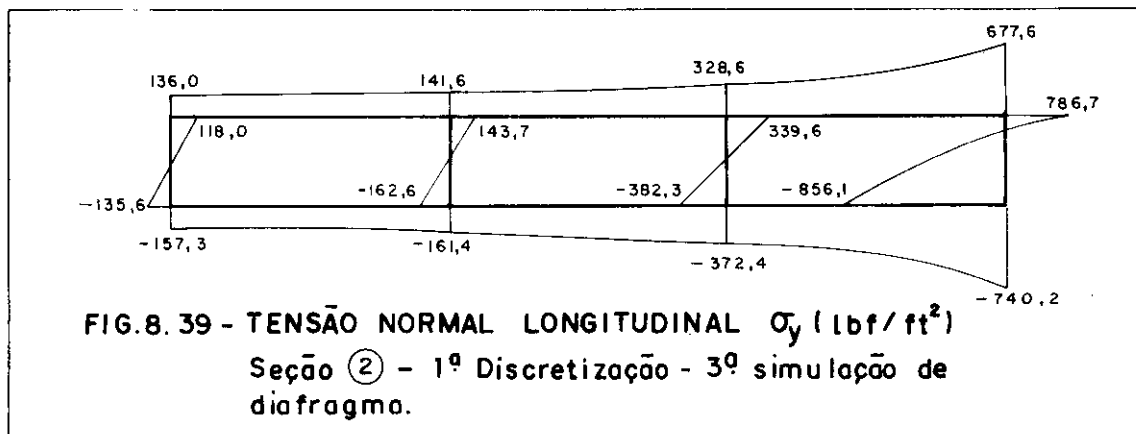


FIG. 8.39 - TENSÃO NORMAL LONGITUDINAL σ_y (lbf/ft²)
Seção ② - 1ª Discretização - 3ª simulação de diafragma.

Observa-se que mesmo na seção 2 as diferenças são insignificantes.

Para a comparação de deslocamentos são apresentados, nas tabelas a seguir, valores de w e u nos mesmos pontos adotados na 2ª simulação.

w (10^{-6} ft)	
LINHA NODAL	3ª SIMULAÇÃO
9	173,0
10	173,3
11	208,3
12	205,4
13	207,4

TAB. 8.44 - Deslocamentos Verticais w
Seção ① - 1ª Discretização
99 harmônicos

u (10^{-8} ft)	
LINHA NODAL	1ª SIMULAÇÃO
1	-49,2
2	16,8
3	-50,3
4	16,8

TAB. 8.45 - Deslocamentos Horizontais
Transversais u - Seção ①
1ª Discretização -
99 Harmônicos

u (10^{-8} ft)	
LINHA NODAL	2ª SIMULAÇÃO
9	140,4
10	-161,6
11	0,0
12	0,0

TAB. 8.46 - Deslocamentos hori-
zontais transversais u
Seção ② - 1ª Discreti-
zação - 99 Harmônicos

Em resumo faz-se, para os deslocamentos, as seguintes observações. Na seção 1 tem-se boa aproximação de valores para w , u , v e θ . Na seção 2 a aproximação se mantém nos valores de w , u e v e ocorre uma redução dos módulos das rotações transversais θ nos cantos das células para a 3ª simulação, que se avizinham mais de zero. Na 2ª simulação os resultados para θ não são ruins pois o impedimento de translações horizontais e verticais no plano do diafragma já havia reduzido os seus valores, aproximando-os de zero.

Nas tabelas 8.47, 8.48 e 8.49 são anotadas as reações correspondentes à 3ª simulação. Percebe-se a con-

cordância de valores das reações verticais e horizontais com as da 2ª simulação e, além disso, a manutenção da somatória das verticais e o reduzido valor da somatória das horizontais.

LINHA NODAL	REAÇÕES VERTICAIS (lbf)
1	-29,3
2	-29,2
3	-86,1
4	-82,4
5	-179,6
6	-173,1
7	-10,5
8	-7,5
9	-5,7
10	-3,2
11	-378,6
12	-382,6
Σ	-1367,8

TAB. 8.47 - 3ª Simulação
99 Harmônicos

LINHA NODAL	REAÇÕES HORIZONTAIS (lbf)
1	-154,4
2	158,4
3	-389,4
4	392,3
5	-572,6
6	568,0
11	-323,6
12	319,2
Σ	-2,1

TAB. 8.48 - 3ª Simulação
99 Harmônicos

LINHA NODAL	REAÇÕES MOMENTO (lbf·ft)
1	-3,4
2	-0,9
3	-3,9
4	-2,0
5	4,9
6	4,8
11	17,3
12	14,6

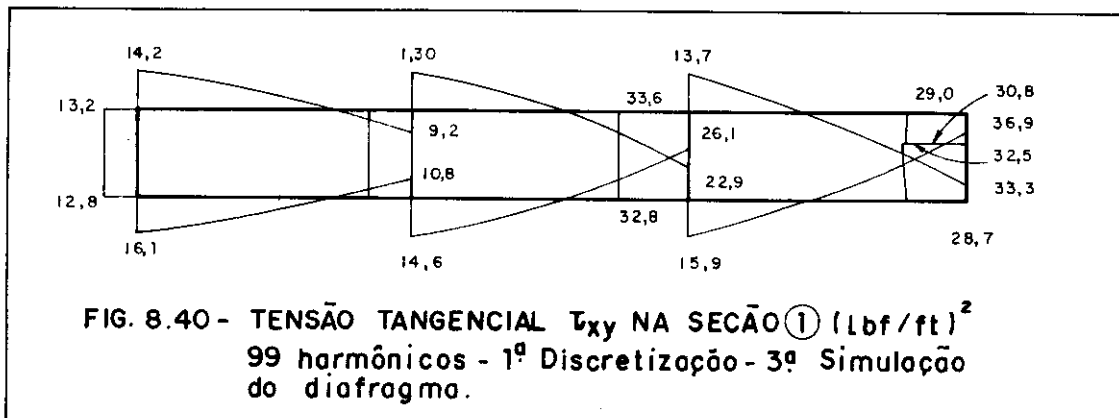
TAB. 8.49 - 3ª Simulação
99 Harmônicos

Os resultados para o momento fletor transversal M_x são idênticos aos da 2ª simulação na saída 1 e discordantes na saída 2. Na saída 2 ocorre até mesmo mudança de lado onde o momento provoca tração, com aumento dos desequilíbrios dos nós 11 e 12 (canto superior e inferior direitos), onde as trocas de momento entre o sistema princi

pal e o diafragma são maiores (vide tabela 8.49). Tais desequilíbrios são esperados uma vez que as rotações transversais dos nós são impedidas.

O diagrama de forças cortantes transversais V_x é idêntico ao da 2ª simulação para a seção carregada. Na seção 2 os resultados não são concordantes, apresentando-se com acentuadas discrepâncias.

As tensões de cisalhamento τ_{xy} na seção carregada são apresentadas na figura 8.40. Observa-se, neste caso, a proximidade de resultados em relação à 2ª simulação.



Quanto aos demais resultados as observações realizadas são as que se seguem. O momento fletor longitudinal M_y apresenta-se concordante nas duas seções de saída. O momento torçor M_{xy} apresenta-se com pequenas variações na seção 1, junto à região de aplicação de carga, sendo o efeito eminentemente localizado. A força cortante longitudinal V_y apresenta algumas discordâncias de valores ao se confrontar a 2ª e a 3ª simulações, em pontos da seção 1 próximos à região de aplicação de carga e concordância nos

demais pontos. Finalmente as tensões normais σ_x concordam muito bem em ambas as seções e mesmo junto às cargas concentradas.

8.4.4 - 2ª discretização - 1ª simulação do diafragma

Mantendo-se a 1ª simulação do diafragma intermediário (8 restrições de translações verticais no seu plano) foi adotada uma 2ª discretização do tabuleiro da ponte conforme esquema apresentado na Fig. 8.41.

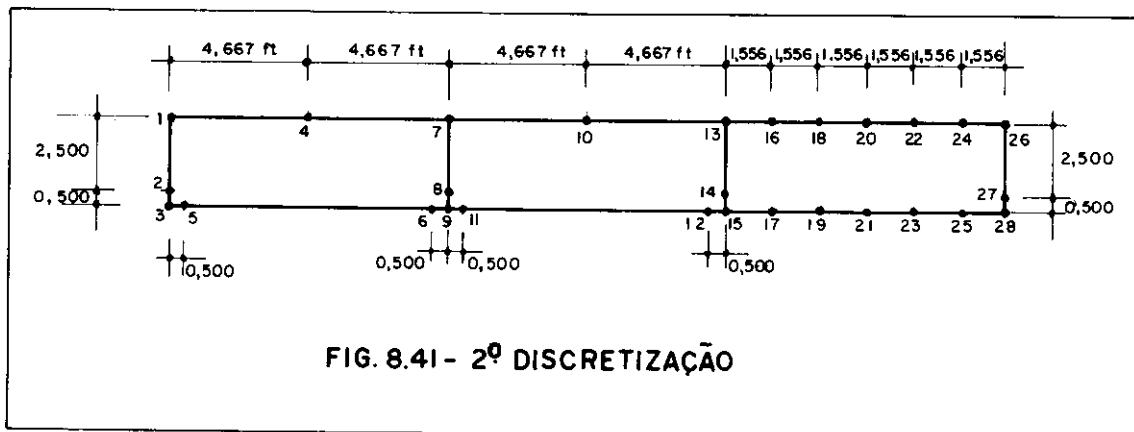
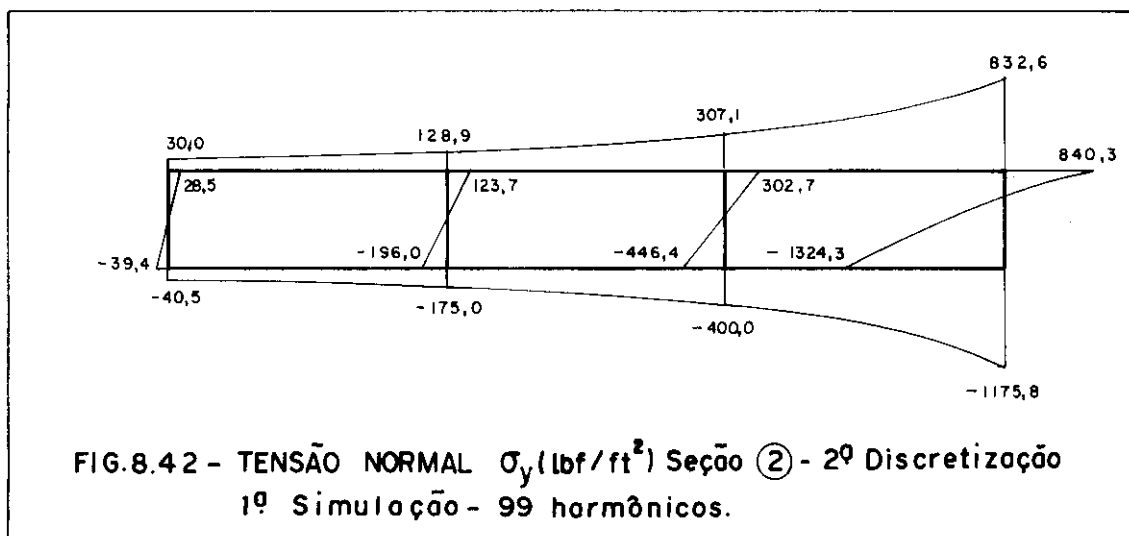


FIG. 8.41- 2ª DISCRETIZAÇÃO

O objetivo de tal discretização foi o de, através da colocação de faixas estreitas junto aos pontos de interação, fazer com que os efeitos das forças concentradas na seção apoiada intermediária fossem melhor expressos, além de se verificar todo o conjunto de resultados nesta seção. Foi adotado um total de 99 harmônicos.

A seguir é apresentado o diagrama das tensões normais longitudinais σ_y (Fig. 8.42) que, observado, permite concluir sobre a concordância de resultados com os da 1ª discretização.

Confrontando-se a tabela 8.50 com a tabela 8.51, percebe-se a proximidade das reações, bem como o valor da somatória das mesmas, com diferença em relação à da 1ª discretização em torno de 0,01%.

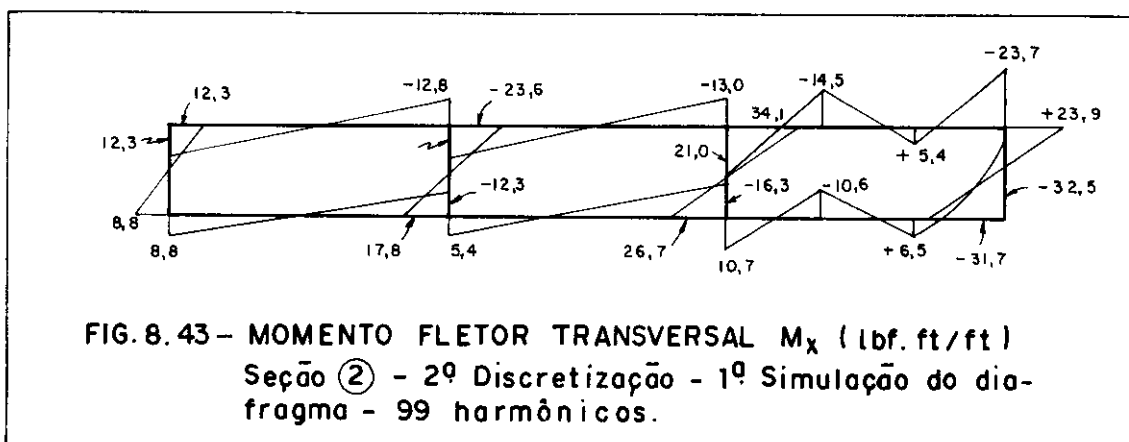


REAÇÕES - LN	3 ^a DISCRETIZAÇÃO (lbf)
3	-4,5
9	-160,7
15	-319,4
18	-65,1
19	-49,7
22	+38,3
23	+35,5
28	-842,3
Σ	1367,9

TAB. 8.50 - Reações Verticais - 2^a Discretização
1^a Simulação - 99 harmônicos

Quanto ao momento fletor transversal M_x o diagrama exposto na figura 8.43 possibilita a constatação de que ocorrem alterações que se tornam maiores junto aos pontos de apoio onde as interações são de maior intensidade e sempre com a tendência de reduzir os desequilíbrios existentes. Só este fato permite concluir sobre a importância da colocação de faixas estreitas junto a pontos de aplicação de cargas.

Para a cortante transversal V_x (cujo diagrama não é aqui figurado) observaram-se diferenças significativas junto às regiões onde se concentram reações e pequenas discrepâncias em pontos delas afastados.



Quanto ao momento fletor longitudinal M_y observou-se a concordância dos resultados, sendo que, nos pontos que pertencem a apenas duas faixas contíguas de planos médios coincidentes, a continuidade ficou melhor representada na 2ª discretização.

Grandes diferenças foram anotadas para as tensões normais transversais σ_x , exceto nas regiões em que a 1ª discretização adota faixas mais estreitas (trechos horizontais pertencentes à célula direita). Tal fato mostra que os resultados de σ_x são muito influenciados pelo número de faixas adotadas por uma determinada discretização, o que é também um indicador da necessidade de se aumentar o número de faixas junto aos pontos de aplicação de carga, caso essas tensões sejam preponderantes no projeto da ponte em estudo.

Quanto aos deslocamentos u , θ e w foi observada a semelhança de resultados correspondentes às duas discretizações.

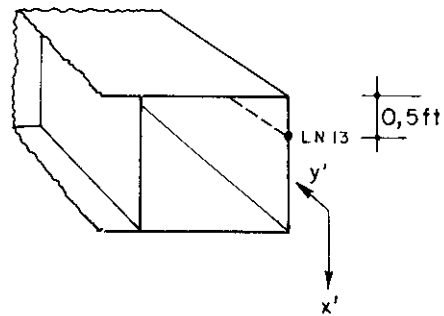
Os deslocamentos v , os momentos M_{xy} , as cortantes V_y e as tensões τ_{xy} se apresentaram com valores muito reduzidos, podendo ser, de maneira semelhante à 1ª discretização, considerados nulos.

8.4.5 - Descontinuidades

Os valores nulos encontrados na seção 2 para M_{xy} e v se devem à simetria em relação a essa seção. Já a nulidade dos valores de τ_{xy} e V_y constituem defeitos da simulação longitudinal em série de Fourier que não pode produzir descontinuidade, sendo que os resultados convergem para a média dos valores adjacentes à seção de descontinuidade. Os valores corretos, entretanto, serão produzidos a pequenas distâncias da região de descontinuidade. É prudente obter saídas em algumas seções, junto à região crítica, para que se tenha acesso aos máximos valores de τ_{xy} e V_y , caso eles tenham interesse ao projetista da estrutura em análise.

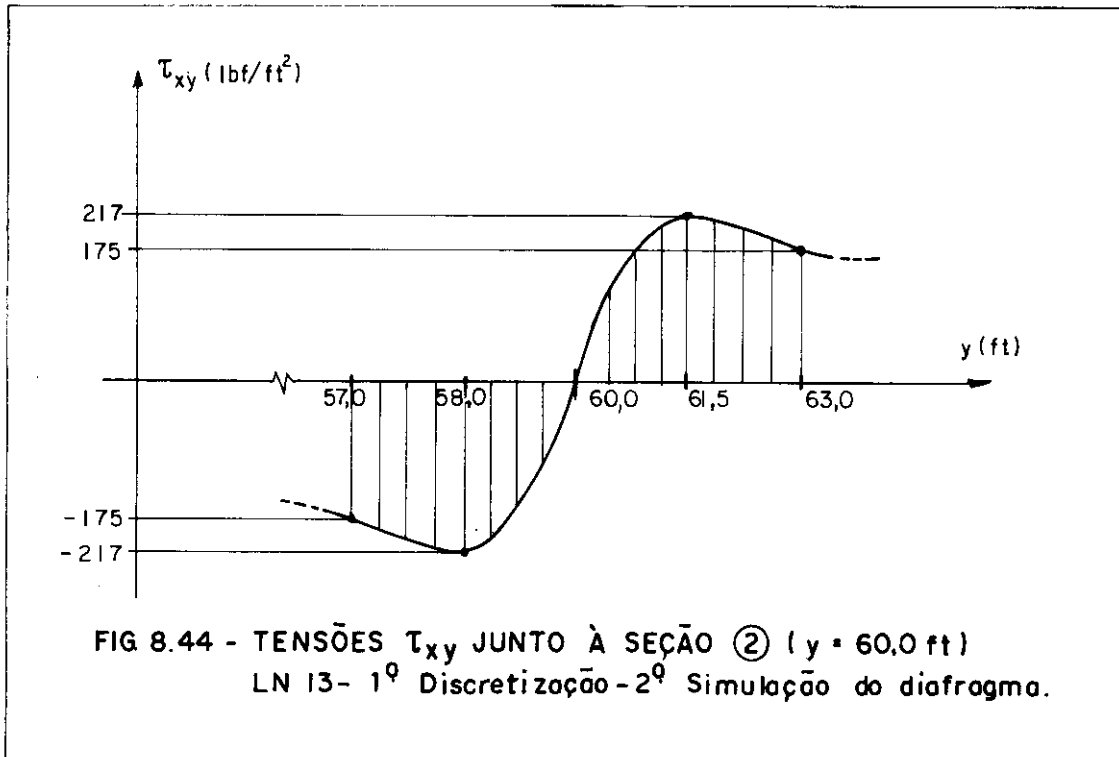
Como ilustração são apresentados na tabela 8.51 valores da tensão de cisalhamento, obtidas junto à LN 13 da primeira discretização, com a simulação do diafragma com 20 pontos de apoio.

ORDENADA DA SAÍDA y(ft)	τ_{xy} (lbf/ft ²) - LN 13
57,0	-175
58,5	-217
60,0	0
61,5	217
63,0	175



TAB. 8.51 - Tensões τ_{xy} junto à seção 2
(y = 60,0 ft)

OBS.: - O sinal menos indica tensão tangencial dirigida para cima por causa da orientação dos eixos locais x' e y' das faixas verticais (vide esquema anterior).



BIBLIOGRAFIA

1. HAMBLY, E.C. - Bridge Deck Behaviour - New York, 1976 (John Wiley).
2. LEONHARDT, F. e MÖNNIG, E. - Construções de Concreto, Vol. 6, Rio de Janeiro, 1977 (Livraria Interciência).
3. CUSENS, A.R. e PAMA, R.P. - Bridge Deck Analysis - London, 1975 (John Wiley).
4. LOO, Y.C. e CUSENS, A.R. - The Finite Strip Method in Bridge Engineering - London, 1978 (Viewpoint Publications).
5. LOO, Y.C. e CUSENS, A.R. - Developments of the Finite Strip Method in the Analysis of Bridge Decks - Proc. Confce. on Developments in Bridge Design and Construction, Cardiff, March-April 1971, pp. 53-72 (Crossby Lockwood).
6. CHEUNG, Y.K. - The Finite Strip Method in Structural Analysis - New York, 1976. (Pergamon)
7. KÄRRHOLM, G. - Parallelogram Plates Analysed by Strip Method - Göteborg, 1956 (s.c.p.)
8. HELLAN, K. - Application of a Numerical Procedure to the Analysis of Thin Rectangular Plates of Variable Thickness - Acta Polytech. Scand. Civil Engineering and building construction series, Ci 16, 1963.

9. CHEUNG, Y.K. - The Finite Strip Method in the Analysis of Elastic Plates with two Opposite Simply Supported Ends - Proc. Instn. Civ. Engrs, Vol. 40, nº 1, May 1968, pp. 1-7.
10. POWELL, G.H. e OGDEN, D.W. - Analysis of Orthotropic Steel Plate Bridge Decks - J. Struct. Div. Am. Soc. Civ. Engrs, Vol. 95, ST5, May 1969, pp. 909-922.
11. FORRAY, M.J. - Variational Calculus in Science and Engineering - New York, 1968 (McGraw-Hill Book Company).
12. TIMOSHENKO, S.P.; WOINOWSKI-KRIEGER, S. - Theory of Plates and Shells - New York, 1959 (McGraw-Hill Book Company).
13. SEGENREICH, S.A. - Introdução aos Princípios Variacionais em Mecânica das Estruturas - Rio de Janeiro, Agosto 1972 (COPPE/UFRJ).
14. CHEUNG, Y.K. - Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs - J. Struct. Div. Am. Soc. Civ. Engrs., Vol. 94, EM6, Dec. 1968, pp. 1365-1378.
15. LOO, Y.C. e CUSENS, A.R. - A Refined Finite Strip Method for the Analysis of Orthotropic Plates - Proc. Instn. Civ. Engrs., Paper 7340, Vol. 48, Jan, 1971, pp. 85-91.
16. CHEUNG, M.S. e CHEUNG, Y.K. - Static and Dynamic Behaviour of Rectangular Plates Using Higher Order Finite Strips - Building Science, Vol. 7, 1972, pp. 151-158.
17. CHEUNG, Y.K. - Orthotropic Right Bridges by the Finite Strip Method - Concrete Bridge Design, ACI Publications SP 26-8, 1971, pp. 182-205.
18. BREBBIA, C.A. e CONNOR, J.J. - Métodos de los Elementos Finitos en la Ingenieria Civil - Madrid, 1975 (Colegio Oficial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos).

19. ZIENKIEWICZ, O.C. - The Finite Element Method in Engineering Science - New York, 1971 (McGraw-Hill Book Company).
20. TIMOSHENKO, S.P. e GOODIER, J.N. - Teoria de Elasticidade - Rio de Janeiro, 1980 (Guanabara Dois S.A.).
21. BILLINGTON, D.P. - Thin Shell Concrete Structures - New York, 1965 (McGraw-Hill).
22. CECCON, J.L. - Aplicação do Método das Faixas Finitas a Estruturas Esconsas - Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, 1980 (PUC/RJ).
23. CHEUNG, Y.K. - Folded Plate Structures by Finite Strip Method - J. Struct. Div. Am. Soc. Civ. Engrs., Vol. 95, ST 12, Dec. 1969, pp. 2963-2979.
24. CHEUNG, M.S.; CHEUNG, Y.K. e GHALI, A. - Analysis of Slab and Girder Bridges by the Finite Strip Method - Building Science, Vol. 5, 1970, pp. 95-104.
25. PAMA, R.P. e CUSENS, A.R. - A Load Distribution Method of Analusing Statically Indeterminate Concrete Bridge Decks - Concrete Bridge Design, ACI Publications, SP-26, 1971, pp. 599-633.
26. CAMPBELL- ALLEN, D. e WEDGWOOD, R.J.L. - Need for Diaphragms in Concrete Box Girders - J. Struc. Div. Am. Soc. Civ. Engrs., Vol. 97, ST3, Mar. 1971, pp. 825-842.
27. MASON, J. - Pontes em Concreto Armado e Protendido - Rio de Janeiro, 1977 (Livros Técnicos e Científicos).
28. SISODIYA, R.G.; GHALI, A. e CHEUNG, Y.K. - Diaphragms in Single - and Double-Cell Box Girder Bridges with Varying Angle of Skew - ACI Journal, Title nº 69-37, Jul. 1972, pp. 415-419.
29. FADEEV, D.K. e FADEEVA, V.N. - Computational Methods in Linear Algebra - S.Francisco, 1963 (W.H. Freeman and Company).

30. DE FRIES-SKENE, A. e SCORDELIS, A.C. - Direct Stiffness Solution for Folded Plates - J.Struct. Div. Am. Soc. Civ. Engrs., Vol. 90, ST4, Aug. 1964, pp. 15-47.
31. CHU, K.H. e DUDNIK, E. - Concrete Box Girder Bridges Analyzed as Folded Plates - Concrete Bridge Design, ACI Publications SP-23, 1969, pp. 221-246.
32. CHEUNG, Y.K. - Analysis of Box Girder by Finite Strip Method - Concrete Bridge Design, ACI Publications SP.26, 1971, pp. 357-378.
33. CHEUNG, Y.K.- The Analysis of Cylindrical Orthotropic Curved Bridge Decks - IABSE Publications, Vol. 29-II 1969, pp. 41-52.
34. CHEUNG, Y.K. e CHEUNG, M.S. - Analysis of Curved Box Girder Bridges by Finite Strip Method - IABSE Publications, Vol. 31-I, 1971, pp. 1-19.
35. DELCOURT, C. e CHEUNG, Y.K. - Finite Strip Analysis of Continuous Folded Plates - IABSE Publications, Vol. P-14, 1978, pp. 1-16.
36. ZIENKIEWICZ, O.C. e TOO, J.J.M. - The Finite Prism in Analysis of Thick Simply Supported Bridge Boxes-Proc. ICE Part II, Vol. 53, Sep. 1972, pp. 147-172.
37. LOO, Y.C. e CUSENS, A.R. - Discussion on "Folded Plate Structures by Finite Strip Method" - J. Struct. Div. Am. Soc. Civ. Engrs., Vol. 96, ST8, Aug. 1970, pp. 1848-1851.
38. LENGYEL, P. e CUSENS, A.R. - A Finite Strip Method for the Geometrically Nonlinear Analysis of Plate Structures - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, 1983, pp. 331-340.
39. SCORDELIS, A.C.; DAVIS, R.E. e LO, K.S. - Load Distribution in Concrete Box Girder Bridges - Concrete Bridge Design, ACI Publications SP-23, 1969, pp. 117-136.

40. EINSFELD, R.A. - Cálculo de Placas Retangulares, Isótropas, com Várias Condições de Apoio, pelo Método das Faixas Finitas - Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, 1979 (PUC/RJ).
41. BARRETO Jr., Método das Estruturas Laminares Aplicado às Vigas Caixão Curvas, Bi-apoiadas e Contínuas - Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro (PUC/RJ).
42. FELZENBURG, E.L. - Método das Faixas Finitas Aplicado a Viga Caixão Curva Bi-apoiada, Aplicação a Computadores Digitais - Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, 1974 (PUC/RJ).
43. BATISTA, R.C. - Estruturas Tridimensionais com Propriedades Mecânicas dos Materiais Representadas Matematicamente por Séries - Aplicação à Análise de Pontes - Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, 1974 (COPPE/UFRJ).
44. EBECKEN, N.F.F. - Processo Semi-Analítico para Análise de Estruturas pelo Método dos Elementos Finitos - Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, 1973 (COPPE/UFRJ).

8.4.4 - 2 ^a discretização - 1 ^a simulação do diafragma	8.57
8.4.5 - Descontinuidades	8.60

CAPÍTULO 9 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

9.1 - CARGA CONCENTRADA - O PROBLEMA DO EFEITO LOCALIZADO	9.1
9.2 - DESCONTINUIDADES LONGITUDINAIS	9.2
9.3 - SIMULAÇÃO DE DIAFRAGMAS - PONTOS DE CONEXÃO ..	9.3
9.4 - CONCLUSÕES	9.5
APÊNDICE I	I.1
APÊNDICE II	II.1
ANEXO	A.1
BIBLIOGRAFIA	B.1