

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ESTRUTURAS TUBULARES DE EDIFÍCIOS ALTOS
SUBMETIDAS À TORÇÃO

ENG. JOÃO CELSO MARTINS MARQUES

ORIENTADOR : PROF. DR. EDDIE MANCINI

SÃO CARLOS , ABRIL DE 1983

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ESTRUTURAS TUBULARES DE EDIFÍCIOS ALTOS SUBMETIDAS A TORÇÃO

Trabalho apresentado para completar os requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

ENG. JOÃO CELSO MARTINS MARQUES

Orientador:

PROF. DR. EDDIE MANCINI

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Eddie Mancini

Prof. Dr. Walter Savassi

Prof. Dr. Tioeturo Yagui

Suplentes:

Profa. Dra. Helena M.C. Carmo Antunes

Prof. Dr. João Lirani

São Carlos, abril de 1983

À

Ivana, Leonardo,
meus pais e irmãos

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Eddie Mancini, que com sua dedicação e zelo, orientou este trabalho de forma segura e capaz.

À Profa. Dra. Helena M. C. Carmo Antunes, que gentilmente permitiu a utilização do seu programa de computador, (Ref. - 12), para a comparação dos resultados obtidos pelo método proposto neste trabalho, com o método discreto.

Aos funcionários do Departamento de Estruturas, em especial a Rui Roberto Casale e João Paulo Moretti, pela qualidade e presteza com que prepararam os trabalhos de dactilografia e desenhos.

Ao C.P.D. da Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, pela utilização de seu equipamento.

À Centrais Elétricas do Maranhão S.A. - CEMAR, pela concessão de bolsa de aperfeiçoamento, que me proporcionou condições de estudo e pesquisa em nível de pós-graduação.

E a todos os colegas e amigos, que encontrei durante este período de trabalho junto ao Departamento de Estruturas da EESC-USP.

RESUMO

Estuda-se neste trabalho, através da técnica do meio contínuo, o comportamento estrutural do sistema tubular, quando solicitado por um carregamento de momento torçor, proveniente da ação do vento.

Além da estrutura tubular básica, serão também analisadas algumas variações desta, tais como a inclusão de núcleos estruturais e painéis paredes.

Os casos aqui abordados recaem em sistemas de equações diferenciais não homogêneas de terceira ordem. E a solução escolhida foi por meio do uso de diferenças finitas com uso de programas para computadores em linguagens FORTRAN.

ABSTRACT

The work concerns the use of continuous idealization for the analysis of torsion in framed tube structures for high buildings subjected to the wind action.

The study of the basic type of frame tube configuration allows one to extend the techniques to deal with others situations. In particular the addition of core walls and shear walls in the main structure is discussed in this work.

All the structures herein described lead to a differential system of homogeneous equations which is solved by applying the technique of finite differences.

Í N D I C E

1. INTRODUÇÃO	
1.1 - ESTRUTURAS TUBULARES.....	1
1.1.1 - Comportamento básico do sistema tubular	3
1.1.2 - Considerações gerais quanto a forma básica do sistema tubular e seus componentes	4
1.2 - TORÇÃO EM ESTRUTURAS TUBULARES	5
1.3 - TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO	6
2. ESTRUTURAS TUBULARES SUBMETIDAS À TORÇÃO	
2.1 - GENERALIDADES	8
2.2 - ESTRUTURAS TUBULARES FORMADAS POR PAINÉIS PÓRTICOS SUBMETIDAS À TORÇÃO	9
2.2.1 - Estudo do painel de direção Y	12
2.2.2 - Estudo do painel de direção X	19
2.2.3 - Interação entre os painéis X e Y	25
2.2.4 - Equilíbrio à força normal nos pilares. .	29
2.2.5 - Equação de equilíbrio à torção	35
2.2.6 - Equação diferencial da estrutura tubular constituída somente de pórticos ..	40
2.2.7 - Condições de contorno e balanceamento das equações	43
2.3 - ESTRUTURAS FORMADAS POR PAINÉIS PÓRTICOS E PAINÉIS PAREDES, SUBMETIDAS À TORÇÃO	47
2.3.1 - Estudo do painel parede	50
2.3.2 - Estudo do painel pórtico de direção X. .	54
2.3.3 - Equilíbrio à força normal nos pilares. .	64
2.3.4 - Equação de equilíbrio à torção	66
2.3.5 - Equação diferencial da estrutura formada por painéis paredes e pórticos ..	68
2.3.6 - Condições de contorno e balanceamento das equações	70

3. ESTRUTURAS TUBULARES COM NÚCLEO INTERNO, E ESTRUTURAS FORMADAS POR PAINÉIS PAREDES E PÓRTICOS COM NÚCLEO INTERNO	
3.1 - INTRODUÇÃO	73
3.2 - NÚCLEO ESTRUTURAL SUBMETIDO À TORÇÃO	74
3.2.1 - Análise de núcleos submetidos a torção	74
3.2.2 - Determinação dos esforços no núcleo ..	90
3.3 - ESTRUTURAS TUBULARES COM NÚCLEO INTERNO	100
3.4 - ESTRUTURA CONSTITUÍDA POR PAINÉIS PAREDES E PÓRTICOS COM NÚCLEO INTERNO	103
4. PROGRAMAS, EXEMPLOS E CONCLUSÃO	
4.1 - INTRODUÇÃO	106
4.2 - PROGRAMA 1 E EXEMPLOS	107
4.3 - PROGRAMA 2 E EXEMPLOS	146
4.4 - CONCLUSÃO	211
APÊNDICE I - APLICAÇÃO DAS DIFERENÇAS FINITAS	
I.1 - INTRODUÇÃO	213
I.2 - OPERADORES	214
APÊNDICE II - RESUMO DA TEORIA DE FLEXO-TORÇÃO	
II.1 - INTRODUÇÃO	217
II.2 - CENTRO DE TORÇÃO OU CISALHAMENTO	218
II.3 - FÓRMULAS PARA AS COORDENADAS DO CENTRO DE TORÇÃO	223
II.4 - TORÇÃO UNIFORME OU TORÇÃO LIVRE DE SAINT-VENANT.	226
II.4.1 - Observação sobre o centro de torção ...	226
II.4.2 - Condições para a torção livre	227
II.4.3 - Deslocamentos	228

II.5 - TORÇÃO NÃO UNIFORME OU FLEXO-TORÇÃO	232
II.5.1 - Hipóteses de cálculo	232
II.5.2 - Tensão normal de flexo-torção	233
II.5.3 - Tensão tangencial de flexo-torção	233
II.5.4 - Momento de flexo-torção	235
II.5.5 - Equação diferencial do problema	238
II.6 - INTRODUÇÃO DO BIMOMENTO	238
II.6.1 - Considerações finais e condições de contorno	243
II.7 - ÁREA SETORIAL E MOMENTO SETORIAL DE INÉRCIA	244
BIBLIOGRAFIA	248

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - ESTRUTURAS TUBULARES

A verticalização das construções de forma economicamente viável e segura continua sendo um desafio e tema permanente de pesquisas entre engenheiros e arquitetos envolvidos nesta especialidade. Vê-se um desenvolvimento cada vez maior nas qualidades dos materiais de construção, bem como nos sistemas estruturais.

No decorrer dos anos 50, o painel parede e suas variadas formas foram introduzidos viabilizando assim a construção de edifícios acima de 30 pavimentos. No entanto para edifícios mais altos, as paredes, geralmente usadas para formarem núcleos, tinham dimensões em planta relativamente pequenas em comparação com a altura. Isto devido certas imposições funcionais e arquitetônicas. E em decorrência de tal situação continuava a existir o problema de excessiva deflexão do conjunto.

A tendência natural foi então idealizar um novo sistema estrutural, que utilizasse uma configuração perimetral ao invés de núcleos centrais. Surgiu assim o sistema tubular e suas variações. E são hoje soluções econômicas e técnicas amplamente usadas para edifícios altos.

A estrutura tubular na sua forma mais simples, constitui-se de painéis periféricos, (conforme mostra a Fig. 1), formados de pilares pouco espaçados, conectados entre si ao nível de cada andar por vigas de grande altura quando comparadas aos vãos; criando assim o efeito semelhante a um tubo oco com perfurações em sua superfície.

Este sistema estrutural foi pela primeira vez aplicado no dimensionamento e construção de um edifício de apartamentos com 43 pavimentos em Chicago. - O "De.Witt Chesnut Apart. Build." em 1963, ref. [9] .

A partir de então o sistema tubular tem se expandido, tanto em sua forma básica, quanto em suas aplicações. A título de ilustração, citam-se alguns edifícios notáveis por suas alturas, que foram construídos no sistema estrutural tubular: World Trade Center, New-York, 110 Pav.; John Hancock Building, Chicago, 110 Pav.; Sears Tower, Chicago, 110 Pav.; One Shell Plaza Building, Houston, 52 Pav. Este último destaca-se por ser hoje o mais alto no mundo em concreto.

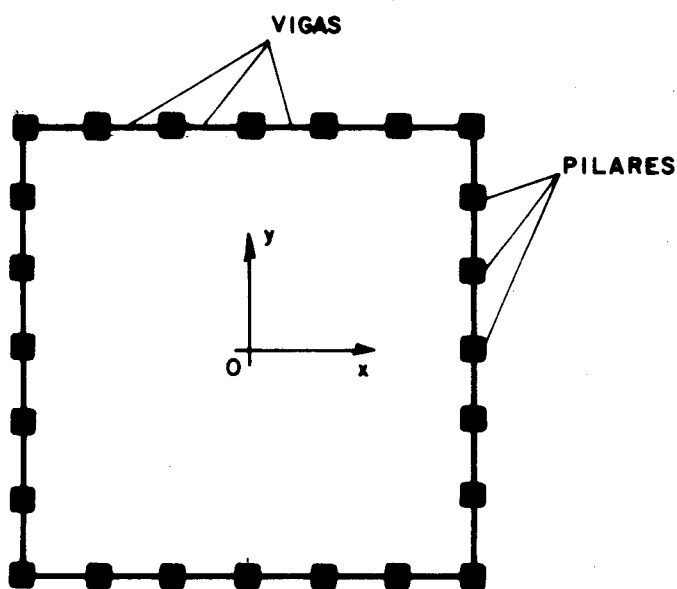


FIG. 1 - ESTRUTURA TUBULAR
PLANTA BAIXA.

1.1.1 - Comportamento básico do sistema tubular

As estruturas tubulares, constituídas de painéis pòrticos, comportam-se tanto como um painel parede, ou como o próprio painel pòrtico, isto é, assumindo uma posição intermediária. O momento proveniente do carregamento horizontal (lateral) é resistido pela "forma tubular", causando tração e compressão nos pilares; enquanto que o esforço cortante, também proveniente do carregamento lateral é basicamente absorvido por flexão nos pilares e vigas que compõem os painéis paralelos à direção do carregamento. Aqui também, para fins práticos é possível impor a condição de momento nulo nos pontos médios dos pilares e vigas ao longo de toda altura. Na Fig. 2 mostra-se a distribuição de tensões que normalmente ocorrem para o sistema tubular básico, quando submetido a um carregamento lateral centrado.

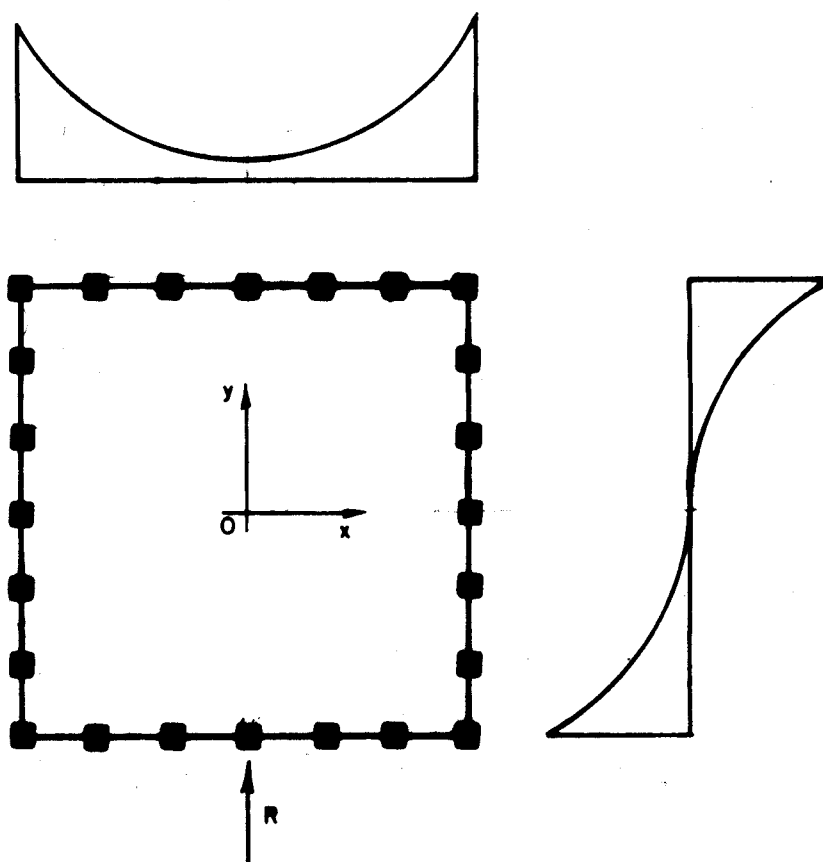


FIG 2- DIAGRAMA DE DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NORMAIS

1.1.2 - Considerações gerais quanto a forma básica do sistema tubular e seus componentes

Deve haver um certo balanceamento entre rigidezes das vigas e pilares, de tal forma que estes dois elementos não apresentem ineficiência de trabalho, em termos de rigidez da estrutura contra deslocamentos laterais. Tal balanceamento é feito em função de relações entre vãos de vigas e alturas dos pilares, além de suas respectivas características elásticas e geométricas; procurando-se assim chegar ao máximo do funcionamento estrutural semelhante ao tubo ideal.

A seguir apresentam-se algumas relações de ordem prática, e seus limites aceitáveis, para que o sistema tubular básico funcione o mais próximo possível do tubo ideal. Lembrando apenas que tais relações foram obtidas por KHAN [9], não como regra básica, mas como um ponto de partida no que se refere ao pré-dimensionamento de tais estruturas.

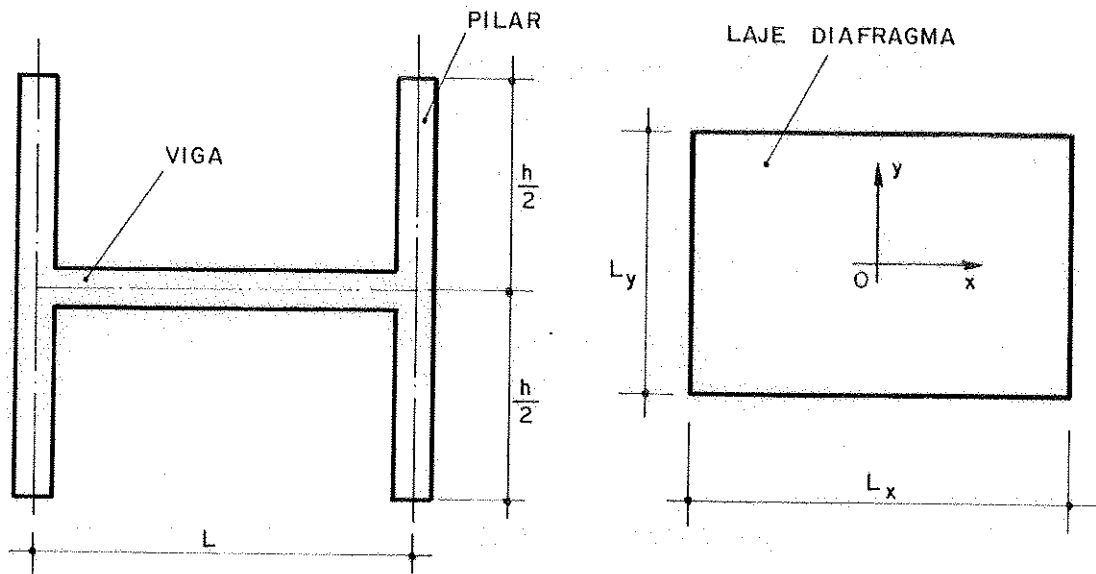


FIG. 3 - MODELO PARA OTIMIZAÇÃO DO SISTEMA TUBULAR

J_p = Momento de inércia do pilar

J_v = Momento de inércia da viga

A_p = Área da secção transversal do pilar

E = Módulo de elasticidade

$$K_p = \frac{J_p}{h}$$

$$S_p = \frac{A_p \cdot E}{h}$$

$$K_v = \frac{J_v}{L}$$

$$S_v = \frac{12 \cdot E \cdot J_v}{L^3} \quad L \leq 3,50\text{m}$$

$$S_r = \frac{K_p}{K_v}$$

$$0,40 < S_r < 0,95$$

$$S_f = \frac{S_v}{S_p}$$

$$0,45 < S_f < 0,90$$

$$S_a = \frac{L_x}{L_y}$$

$$0,50 < S_a < 1,50$$

1.2 - TORÇÃO EM ESTRUTURAS TUBULARES

Será analisado neste trabalho, através da técnica do meio contínuo, o comportamento estrutural do sistema tubular, quando solicitado por um carregamento de momento torçor. Tal situação é suscetível de acontecer em qualquer estrutura, quando a resultante do carregamento lateral, proveniente da ação do vento, agir sobre a mesma, de forma excêntrica em relação ao seu centro elástico.

O estudo que segue inicia-se a partir do estudo do sistema tubular básico, já analisado para carregamento centrado por MANCINI [1]. Em seguida serão acrescentadas algumas variações, tais como núcleos estruturais, formando assim o sistema "Tube-in-Tube", adição de painéis paredes ba-

seado no estudo de MANCINI [2], e outras combinações que poderão ser vistas no decorrer deste trabalho.

É importante adiantar, que todas as estruturas a qui analisadas possuem dupla simetria quando observadas em planta. Sendo assim os seus respectivos centros elásticos coincidem com os centros geométricos. Os resultados computados das análises aqui desenvolvidas, são provenientes somente do efeito da torção, conforme mostra a Fig. 4(c). Isto é, não está se levando em conta a superposição de efeitos, mas apenas o efeito isolado do momento torçor.

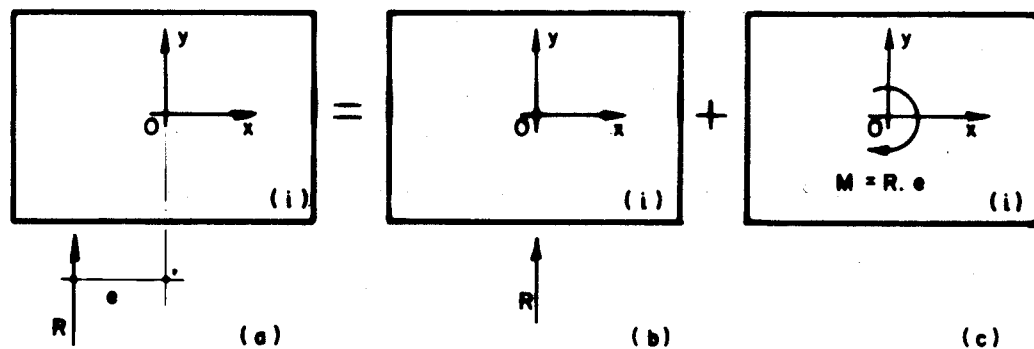


FIG 4 - EFEITOS DO CARREGAMENTO LATERAL, NO DIAFRAGMA GÊNÉRICO SITUADO NO ANDAR i.

1.3 - TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO

A técnica do meio contínuo, consiste em substituir-se o sistema discreto de conexões horizontais ao nível dos andares, formado pelas lajes e lintéis, por um meio contínuo de rigidez equivalente, uniformemente distribuída ao longo da altura. As lajes serão consideradas equivalentes a diafragmas horizontais rígidos, com rigidez infinita no seu plano, mas sem nenhuma rigidez transversal. Com este comportamento as lajes garantem um movimento de corpo rígido no plano horizontal de todos elementos verticais, e só transmitem esforços horizontais a estes elementos, e além disto

em nada restringem os seus empenamentos. Os lintéis serão considerados como vigas engastadas em ambas extremidades, com capacidade de resistir a momento fletor e força cortante. É importante observar que nos lintéis não aparecerão esforços normais, devido ao comportamento das lajes como diafragmas.

Com as hipóteses anteriores, a técnica do meio contínuo expressa o comportamento do modelo estrutural através de uma equação diferencial ou um sistema de equações diferenciais, que após serem resolvidas por integração direta, ou por um processo numérico, fornecem os deslocamentos e os esforços em toda a estrutura.

CAPÍTULO 2

ESTRUTURAS TUBULARES SUBMETIDAS À TORÇÃO

2.1 - GENERALIDADES

Neste capítulo, serão analisados dois tipos de estruturas de edifícios altos, submetidas à torção. Ambas são estudadas baseando-se nos estudos de MANCINI [1], [2], que foram feitos para carregamento centrado.

Em primeiro lugar, será analisada a estrutura tubular definida como básica no Cap. 1. Em seguida uma variante de tal situação, que consiste na adoção de painéis paredes paralelos entre si, e normais aos painéis pórticos; sendo todos os painéis posicionados na periferia do sistema estrutural.

As lajes serão consideradas como diafragmas rígidos no seu plano horizontal, porém extremamente flexíveis no seu plano transversal. Os pontos médios dos vãos dos pilares e dos lintéis serão considerados pontos de momento nu

10. As forças cortantes nas vigas, concentradas ao nível de cada andar, serão substituídas por esforços cortantes distribuídos ao longo de toda a altura.

A estrutura será referida a um sistema de eixos coordenados $OXYZ$. A origem O é tomada na base da estrutura e coincidente com seu centro de torção. O sentido positivo de OZ , vertical, da base para o topo.

A estrutura está submetida a um carregamento de momento torçor $M_t(z)$, cujo sentido positivo é horário em torno de OZ , para um observador olhando para OZ , em seu sentido negativo.

As estruturas aqui consideradas, serão simétricas em relação aos eixos OX e OY , e serão analisadas pela técnica do meio contínuo.

2.2 - ESTRUTURA TUBULAR FORMADAS POR PAINÉIS PÓRTICOS SUBMETIDA A TORÇÃO

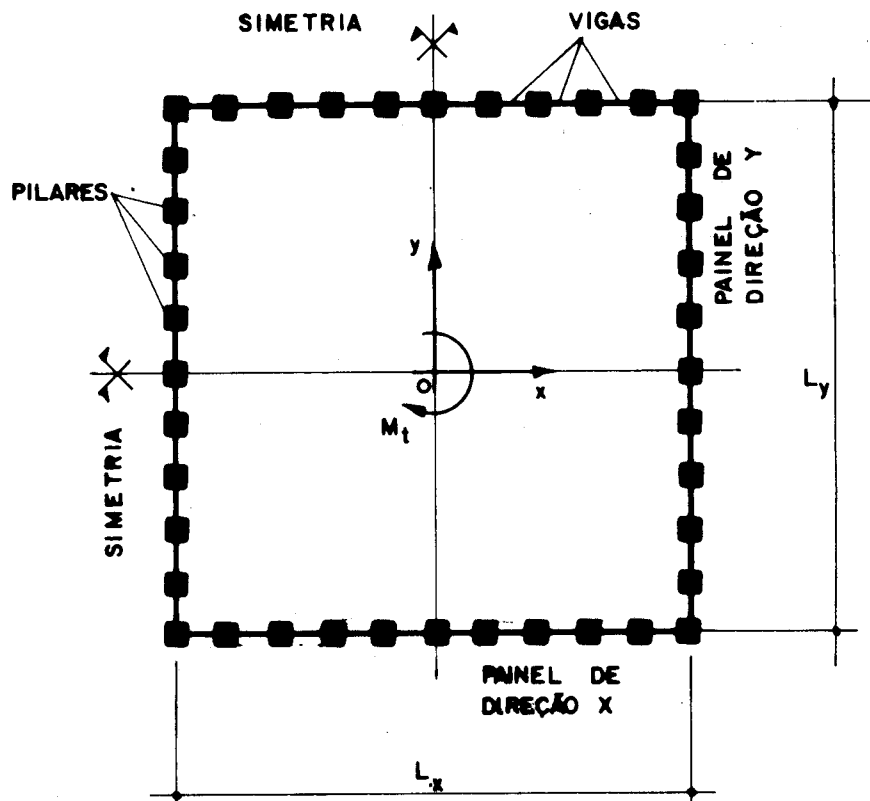


FIG.5 - ESTRUTURA TUBULAR - PLANTA BAIXA.

Na Fig. 5, está representada em planta baixa, uma estrutura tubular básica, (ou seja aquela constituída de painéis pòrticos) submetida a um carregamento de torção, $M_t(z)$.

Será definido painel de direção X, aquele cujo alinhamento dos pilares seja paralelo ao eixo OX. O painel de direção Y será aquele cujo alinhamento dos pilares seja paralelo ao eixo OY.

L_x e L_y , são dimensões da estrutura conforme indicado na Fig. 5, e h será a altura dos andares (pê direito), constante ao longo de toda altura. O é a origem do sistema de eixos OXYZ, e também a projeção vertical do centro de torção da estrutura.

Como a estrutura possui dupla simetria em relação aos eixos OX e OY, tomar-se-á para análise, apenas um quarto da mesma conforme mostrado na Fig. 6.

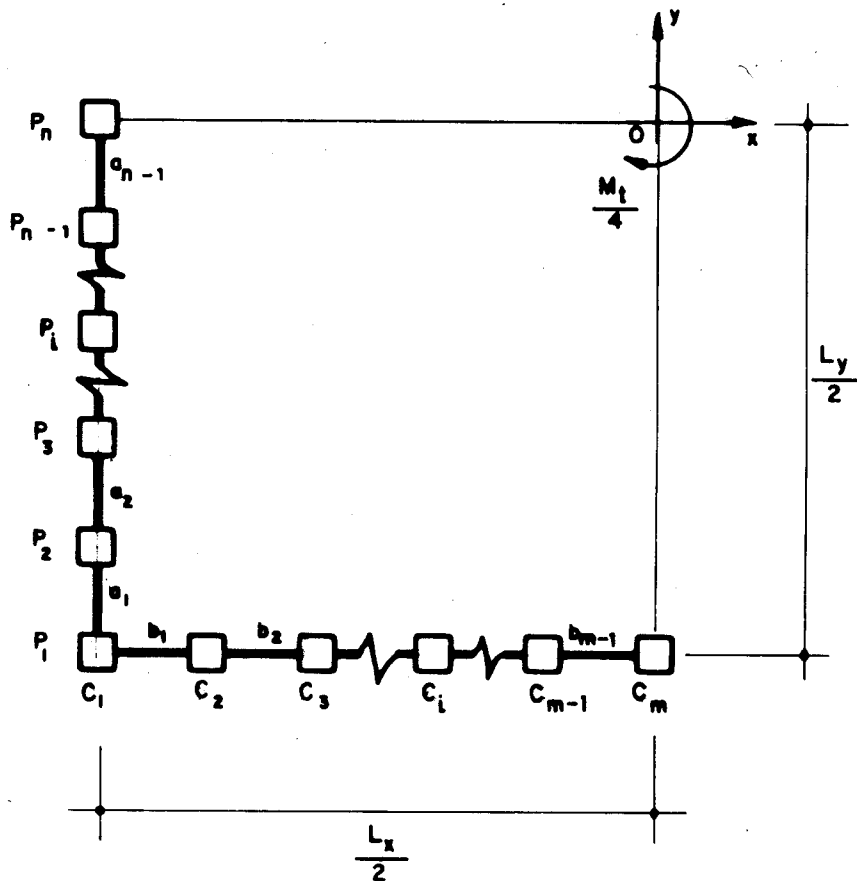


FIG. 6- QUARTA PARTE DA ESTRUTURA TUBULAR BÁSICA.
PLANTA BAIXA.

Sejam:

- a) $P_1 \dots P_i \dots P_n$ pilares do painel de direção Y
- b) $C_1 \dots C_i \dots C_m$ pilares do painel de direção X
- c) $a_1 \dots a_i \dots a_{n-1}$ vãos das vigas (lintéis) entre os pilares P_i e P_{i+1}
- d) $b_1 \dots b_i \dots b_{m-1}$ vãos das vigas (lintéis) entre os pilares C_i e C_{i+1}
- e) n = quantidade de pilares de direção Y
- f) m = quantidade de pilares de direção X

Na Fig. 7, está mostrado um diafragma genérico da estrutura, e as forças cortantes atuando nos painéis, provenientes do carregamento de momento torçor.

Sejam:

- Q_x = A força cortante resultante, atuante nos painéis de direção X.
- Q_y = A força cortante resultante, atuante nos painéis de direção Y.

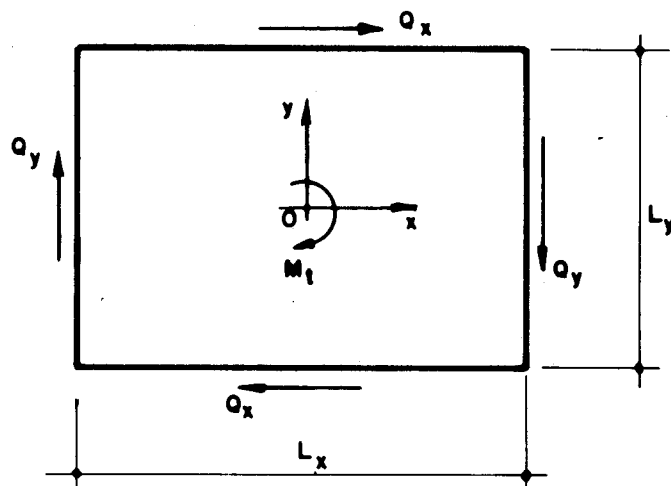


FIG 7 - DIAFRAGMA GENÉRICO

Através da Fig. 7, escreve-se a equação de equilíbrio à torção da estrutura, a saber:

$$M_t = Q_x \cdot L_y + Q_y \cdot L_x \quad (1)$$

Em consequência da dupla simetria e carregamento de torção, destaca-se na Fig. 8, a parte da estrutura que será analisada.

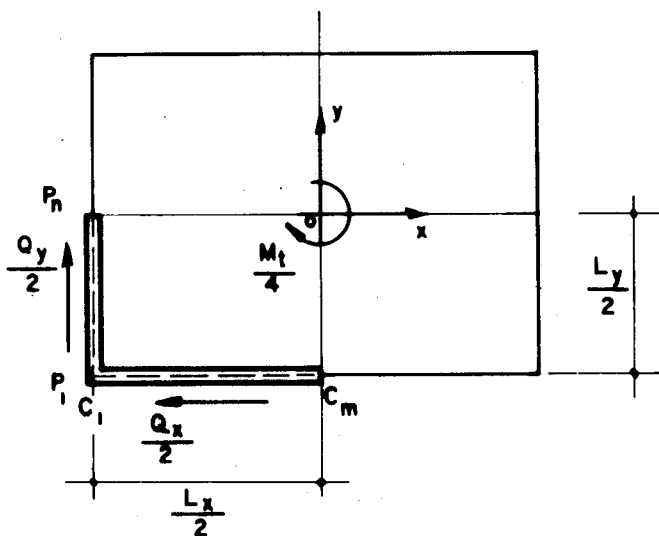


FIG. 8 - PARTE DA ESTRUTURA A SER ANALISADA

Sendo assim, basta que se divida por 4 a eq.(1), obtendo-se a equação de equilíbrio à torção para um quarto da estrutura mostrada na Fig. 8.

$$\frac{M_t}{4} = \frac{Q_x \cdot L_y}{4} + \frac{Q_y \cdot L_x}{4} \quad (2)$$

2.2.1 - Estudo do painel de direção Y

Estuda-se a seguir a deformação no painel de direção Y devida a Q_y . Tal análise abrange somente metade do painel, por motivos já especificados. Inicia-se este estudo a partir do primeiro tramo indicado na Fig. 9.

Destaca-se também que, o trecho a ser estudado neste painel será do pilar P_1 ao pilar P_n .

Ainda com relação a Fig. 9, mostra-se a deformação do andar genérico do pórtico.

Utiliza-se a seguinte notação:

- δ_i - Deslocamento axial do pilar P_i , positivo da base para o topo.
- θ_i - Rotação do nó do pilar P_i
- v' - Distorção do painel
- a_i - Vão da viga i
- J_i - Momento de inércia da viga i
- J_{pi} - Momento de inércia do pilar P_i
- h - Altura dos andares
- q_i - Força cortante distribuída ao longo de toda a altura do edifício no meio do vão da viga i
- E - Módulo de elasticidade longitudinal

Será definida a rigidez do pilar P_i com o parâmetro

$$K_i = \frac{J_{pi}}{h} \quad (3)$$

A equação de compatibilidade do deslocamento vertical do ponto central da viga 1 do painel Y, permite escrever:

$$\delta_1 - \theta_1 \cdot \frac{a_1}{2} + q_1 \cdot h \left(\frac{a_1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot J_1} = \delta_2 + \theta_2 \cdot \frac{a_1}{2} - q_1 \cdot h \left(\frac{a_1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot J_1} \quad (4)$$

Sejam M_{as} e M_{a1} , momentos no nó A do pilar P_1 , devido a distorção v' , sofrida pelo mesmo, conforme mostra a Fig. 10(a). Com o auxílio da Fig. 10(b), determina-se M_{as}

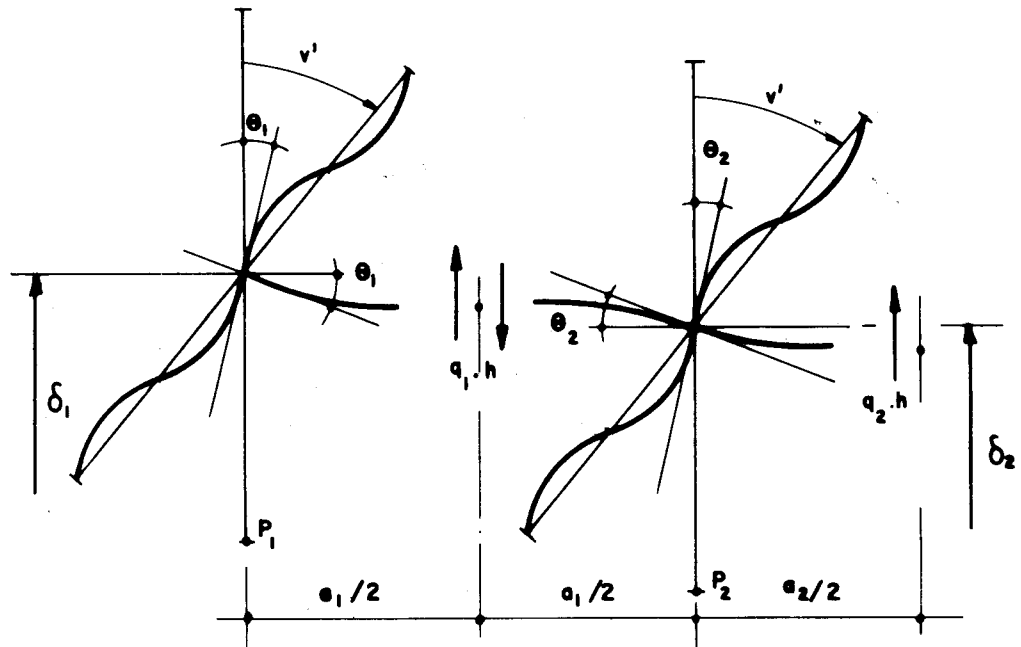


FIG. 9 - PAINEL DE DIREÇÃO Y : Primeiro tramo.

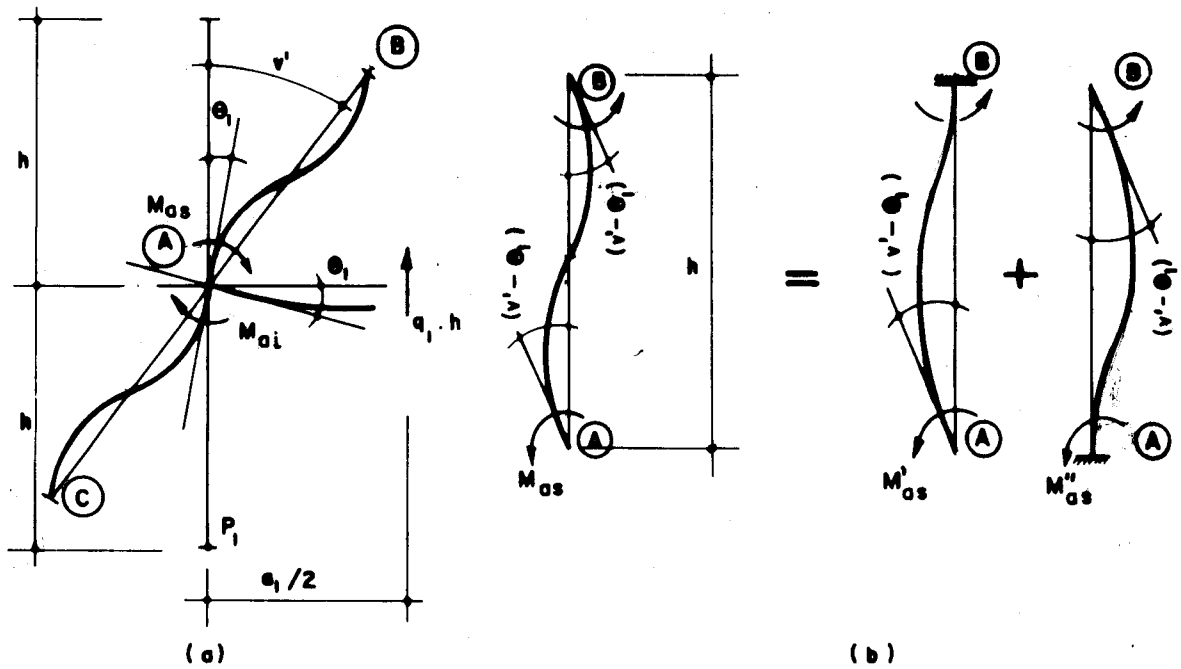


FIG. 10 - DEFORMAÇÃO NO PILAR " P₁ " DEVIDO À DISTORÇÃO.

Assim para M'_{as} e M''_{as} , tem-se

$$M'_{as} = \frac{4.E.J}{h} p_1 . (v' - \theta_1)$$

$$M''_{as} = \frac{2.E.J}{h} p_1 . (v' - \theta_1)$$

como

$$M_{as} = M'_{as} + M''_{as} \therefore M_{as} = \frac{6.E.J}{h} p_1 . (v' - \theta_1)$$

Admite-se ainda que

$$M_{ai} = M_{as} \text{ , por considerar-se pequenas as rotações dos nós dos pilares}$$

Assim M_a , momento no nó A do pilar P_1 , devido a influência dos vãos imediatamente acima e abaixo, é definido por

$$M_a = M_{as} + M_{ai}$$

Logo

$$M_a = \frac{12.E.J}{h} p_1 . (v' - \theta_1) \tag{5}$$

Determinando-se também o momento no nó A, do pilar P_1 , proveniente da ação do esforço cortante na viga l , tem-se:

$$M_a = q_1 . h . \frac{a_1}{2} \tag{6}$$

Igualando-se as equações (5) e (6), obtem-se a equação de equilíbrio a rotação do nó do pilar P_1

$$\frac{12.E.J_{p1}}{h} \cdot (v' - \theta_1) = q_1 \cdot h \cdot \frac{a_1}{2}$$

E por (3), vem:

$$12.E.K_1 \cdot (v' - \theta_1) = q_1 \cdot h \cdot \frac{a_1}{2} \quad (7)$$

De modo análogo obtem-se também, a equação de equilíbrio à rotação do nó do pilar P_2

$$12.E.K_2 \cdot (v' - \theta_2) = q_1 \cdot h \cdot \frac{a_1}{2} + q_2 \cdot h \cdot \frac{a_2}{2} \quad (8)$$

Substituindo-se (7) e (8) em (4), obtem-se

$$\delta_1 - v' \cdot \frac{a_1}{2} + \frac{q_1 \cdot h \cdot (a_1)^2}{48.E.K_1} + \frac{q_1 \cdot h \cdot (a_1)^3}{24.E.J_1} = \delta_2 + v' \cdot \frac{a_1}{2} - \frac{q_1 \cdot h \cdot (a_1)^2}{48.E.K_2} - \frac{q_2 \cdot h \cdot a_1 \cdot a_2}{48.E.K_2} - \frac{q_1 \cdot h \cdot (a_1)^3}{24.E.J_1}$$

E simplificando vem:

$$q_1 \cdot \left[\frac{h \cdot (a_1)^3}{12.E.J_1} + \frac{h \cdot (a_1)^2}{48.E.K_1} + \frac{h \cdot (a_1)^2}{48.E.K_2} \right] + q_2 \cdot \left[\frac{h \cdot a_1 \cdot a_2}{48.E.K_2} \right] = v' \cdot a_1 - \delta_1 + \delta_2 \quad (9)$$

Continuando o estudo do painel Y, analisa-se agora a deformação do painel, ao nível da viga i , conforme indicado na Fig. 11

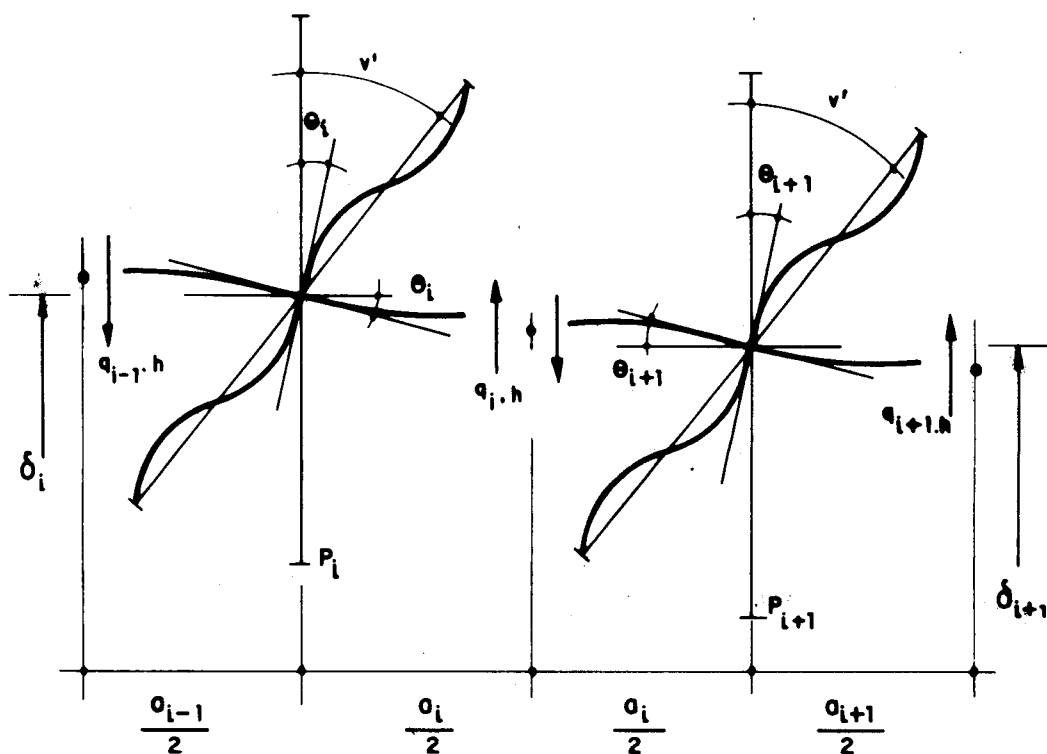


FIG. 11 - PAINEL DE DIREÇÃO Y : TRAMO " i "

Com a notação já introduzida, a equação de compatibilidade do deslocamento do ponto central da viga i escreve-se:

$$\delta_i - \theta_i \cdot \frac{a_i}{2} + q_i \cdot h \cdot \left(\frac{a_i}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot J_i} = \delta_{i+1} + \theta_{i+1} \cdot \frac{a_i}{2} -$$

$$q_i \cdot h \cdot \left(\frac{a_i}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot J_i} \tag{10}$$

De maneira análoga, como foi feito para o primeiro tramo do painel Y, tem-se a seguir as equações de equilíbrio à rotação dos nós dos pilares P_i e P_{i+1} .

$$12 \cdot E \cdot K_i \cdot (v' - \theta_i) = q_{i-1} \cdot h \cdot \frac{a_{i-1}}{2} + q_i \cdot h \cdot \frac{a_i}{2} \tag{11}$$

$$12.E.K_{i+1} \cdot (v' - \theta_{i+1}) = q_i \cdot \frac{a_i}{2} \cdot h + q_{i+1} \cdot \frac{a_{i+1}}{2} \cdot h \quad (12)$$

Substituindo-se (11) e (12) em (10), pode-se escrever

$$q_{i-1} \left[\frac{h \cdot a_{i-1} \cdot a_i}{48 \cdot E \cdot K_i} \right] + q_i \left[\frac{h \cdot a_i^3}{12 \cdot E \cdot J_i} + \frac{h \cdot a_i^2}{48 \cdot E \cdot K_i} + \frac{h \cdot a_i^2}{48 \cdot E \cdot K_{i+1}} \right] + q_{i+1} \left[\frac{h \cdot a_{i+1} \cdot a_i}{48 \cdot E \cdot K_{i+1}} \right] = v' \cdot a_i - \delta_i + \delta_{i+1} \quad (13)$$

Analisando-se ainda a deformação do painel de direção Y, estuda-se a deformação da viga próxima ao eixo de simetria, atribuindo-se a esta viga o número n-1 e ao pilar sobre o eixo de simetria o número n, conforme indicado na Fig. 12

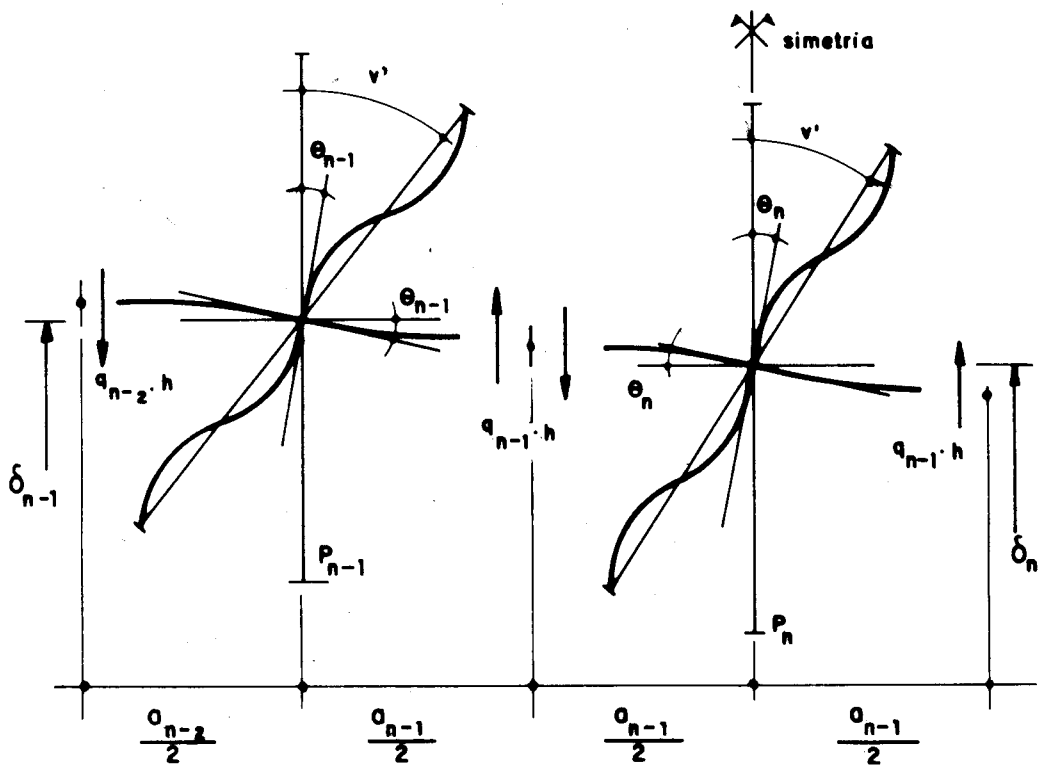


FIG. 12 - PAINEL DE DIREÇÃO Y : TRAMO n-1

A equação de compatibilidade de deslocamento, para o ponto central da viga $n-1$, permite escrever.

$$\delta_{n-1} - \theta_{n-1} \cdot \frac{a_{n-1}}{2} + q_{n-1} \cdot h \cdot \left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot J_{n-1}} = \theta_n \cdot \frac{a_{n-1}}{2} - q_{n-1} \cdot h \cdot \left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot J_{n-1}} \quad (14)$$

Na equação (14), o termo δ_n é nulo em vista da simetria e do carregamento de torção e por antimetria dos esforços cortantes nas vigas.

As equações de equilíbrio à rotação dos nós dos pilares P_{n-1} e P_n , para este caso são:

$$12 \cdot E \cdot K_{n-1} \cdot (v' - \theta_{n-1}) = q_{n-2} \cdot h \cdot \frac{a_{n-2}}{2} + q_{n-1} \cdot h \cdot \frac{a_{n-1}}{2} \quad (15)$$

$$12 \cdot E \cdot K_n \cdot (v' - \theta_n) = q_{n-1} \cdot h \cdot a_{n-1} \quad (16)$$

E substituindo (15) e (16) em (14), chega-se a:

$$q_{n-2} \cdot \left[\frac{h \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1}}{48 \cdot E \cdot K_{n-1}} \right] + q_{n-1} \cdot \left[\frac{h \cdot a_{n-1}^3}{12 \cdot E \cdot J_{n-1}} + \frac{h \cdot a_{n-1}^2}{48 \cdot E \cdot K_{n-1}} + \frac{h \cdot a_{n-1}^2}{24 \cdot E \cdot K_n} \right] = v' \cdot a_{n-1} - \delta_{n-1} \quad (17)$$

2.2.2 - Estudo do painel de direção X

Estuda-se a seguir a deformação do painel de direção X, proveniente da ação da força cortante Q_x . Inicia-se este estudo a partir do primeiro tramo do painel X, indicado na Fig. 13.

Devido à simetria da estrutura e do carregamento de torção, o trecho do painel a ser estudado é aquele compreendido entre os pilares C_1 e C_m .

A seguir utiliza-se a seguinte notação

- γ_i - Deslocamento axial do pilar C_i positivo da base para o topo
- ψ_i - Rotação do nó do pilar C_i
- u' - Distorção do painel
- b_i - Vão da viga i
- \bar{J}_i - Momento de inércia da viga i
- \bar{J}_{ci} - Momento de inércia do pilar C_i
- h - Altura dos andares
- P_i - Força cortante distribuída ao longo de toda a altura do edifício no meio do vão da viga i
- E - Módulo de elasticidade longitudinal

Será definida a rigidez do pilar C_i com o parâmetro

$$\bar{K}_i = \frac{\bar{J}_{ci}}{h} \quad (18)$$

O procedimento para análise do painel de direção X, obedecerá as mesmas condições e hipóteses feitas para o painel de direção Y. É importante lembrar que o pilar C_1 coincide com o pilar P_1 , ou seja é o pilar do canto situado na intersecção de ambos os painéis.

A equação de compatibilidade de deslocamento para o ponto central da viga l do painel de direção X, escreve-se:

$$\gamma_1 + \psi_1 \cdot \frac{b_1}{2} - P_1 \cdot h \cdot \left(\frac{b_1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_1} = \gamma_2 - \psi_2 \cdot \frac{b_1}{2} + P_1 \cdot h \cdot \left(\frac{b_1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_1} \quad (19)$$

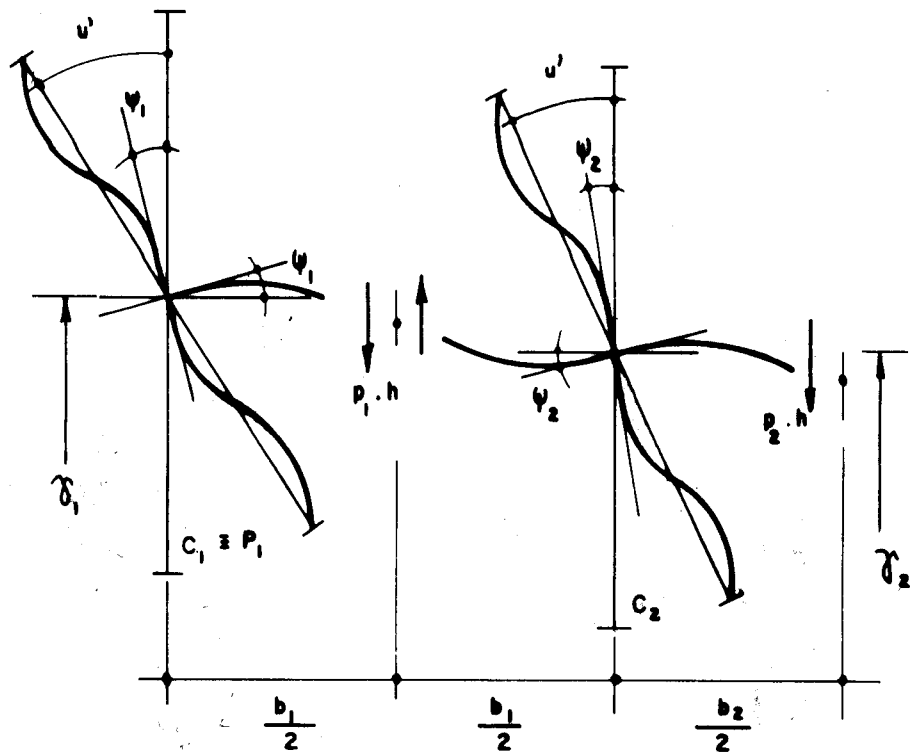


FIG. 13 - PAINEL DE DIREÇÃO X : Primeiro tramo .

De maneira análoga ao caso anterior e por (18) obtem-se também, as equações de equilíbrio à rotação dos nós do pilares C_1 e C_2 , respectivamente:

$$12.E.\bar{K}_1.(u' - \psi_1) = p_1 \cdot \frac{b_1}{2} \cdot h \quad (20)$$

$$12.E.\bar{K}_2.(u' - \psi_2) = p_1 \cdot \frac{b_1}{2} \cdot h + p_2 \cdot \frac{b_2}{2} \cdot h \quad (21)$$

Tem-se também

$$\gamma_1 = \delta_1 \quad (22)$$

pois o pilar C_1 é coincidente com o pilar P_1 .

Assim, substituindo-se (20), (21) e (22) em (19), chega-se a:

$$P_1 \cdot \left[\frac{h \cdot b_1^3}{12 \cdot E \cdot \bar{J}_1} + \frac{h \cdot b_1^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_1} + \frac{h \cdot b_1^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_2} \right] + P_2 \cdot \left[\frac{h \cdot b_1 \cdot b_2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_2} \right] =$$

$$= u' \cdot b_1 + \delta_1 - \gamma_2 \tag{23}$$

A seguir escrevem-se a equação de compatibilidade do deslocamento vertical do ponto central da viga i , e as equações de equilíbrio à rotação dos nós dos pilares C_i e C_{i+1} .

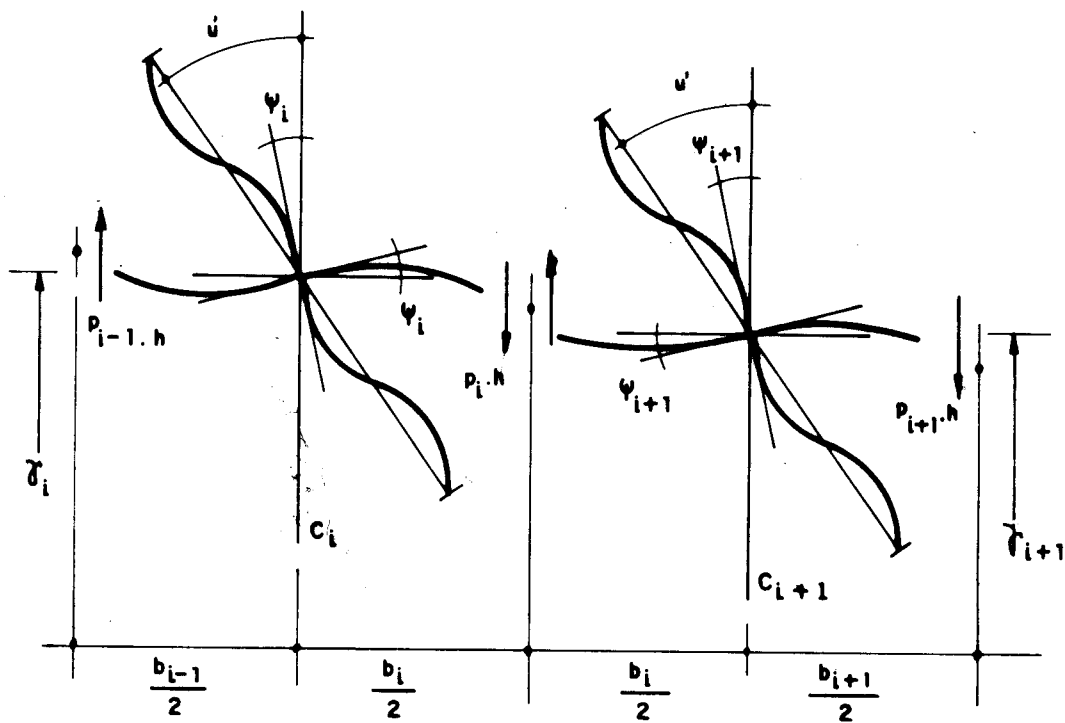


FIG. 14 - PAINEL DE DIREÇÃO X : Tramo i

A equação de compatibilidade do deslocamento do ponto central da viga i é

$$\begin{aligned} \gamma_i + \psi_i \cdot \frac{b_i}{2} - p_i \cdot h \cdot \left(\frac{b_i}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_i} &= \gamma_{i+1} - \psi_{i+1} \cdot \frac{b_i}{2} + \\ &+ p_i \cdot h \cdot \left(\frac{b_i}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_i} \end{aligned} \quad (24)$$

As equações de equilíbrio à rotação dos nós dos pilares C_i e C_{i+1} são:

$$12 \cdot E \cdot \bar{K}_i \cdot (u' - \psi_i) = p_i \cdot h \cdot \frac{b_i}{2} + p_{i-1} \cdot h \cdot \frac{b_{i-1}}{2} \quad (25)$$

$$12 \cdot E \cdot \bar{K}_{i+1} \cdot (u' - \psi_{i+1}) = p_i \cdot h \cdot \frac{b_i}{2} + p_{i+1} \cdot h \cdot \frac{b_{i+1}}{2} \quad (26)$$

Substituindo-se (25) e (26) em (24), tem-se:

$$\begin{aligned} p_{i-1} \cdot \left[\frac{h \cdot b_i \cdot b_{i-1}}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_i} \right] + p_i \cdot \left[\frac{h \cdot b_i^3}{12 \cdot E \cdot \bar{J}_i} + \frac{h \cdot b_i^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_i} + \frac{h \cdot b_i^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{i+1}} \right] + \\ + p_{i+1} \cdot \left[\frac{h \cdot b_i \cdot b_{i+1}}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{i+1}} \right] = u' \cdot b_i + \gamma_i - \gamma_{i+1} \end{aligned} \quad (27)$$

Finalmente representa-se na Fig. 15, a deformação do tramo $m-1$ do painel de direção X .

Por simetria e carregamento de torção, tem-se

$$\gamma_m = 0 \quad (28)$$

isto é, o deslocamento vertical do pilar central C_m , do painel X é nulo.

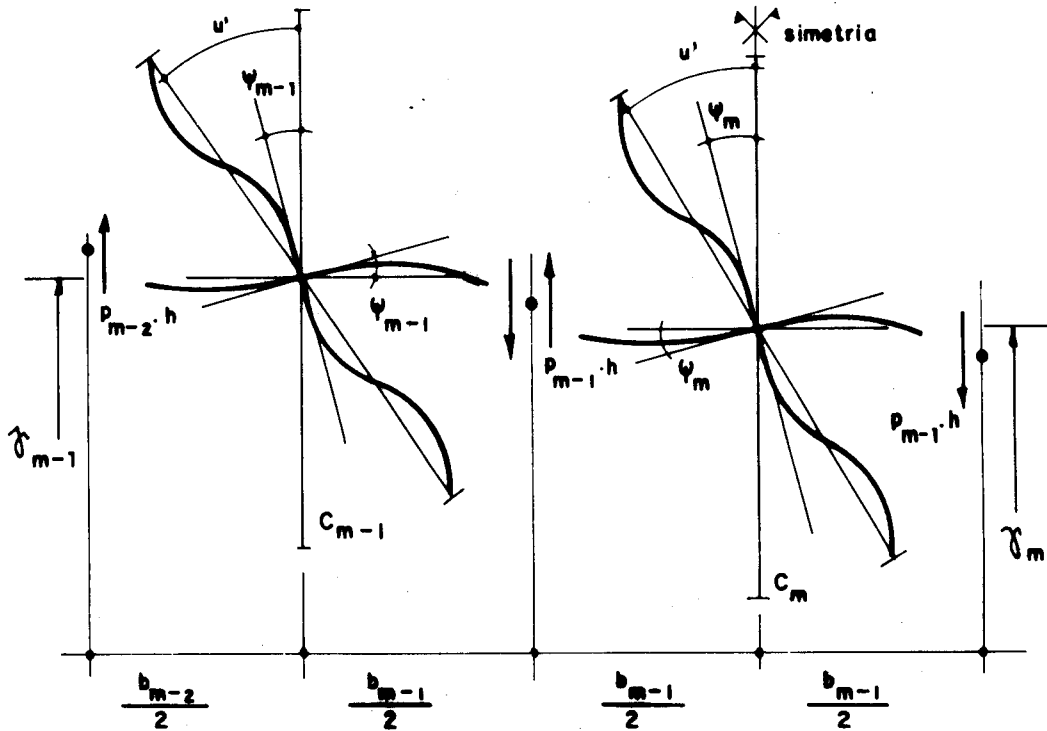


FIG.15 - PAINEL DE DIREÇÃO X : Tramo $m-1$

A equação de compatibilidade do deslocamento vertical do ponto central da viga $m-1$, escreve-se:

$$\begin{aligned} \gamma_{m-1} + \psi_{m-1} \cdot \frac{b_{m-1}}{2} - p_{m-1} \cdot h \cdot \left(\frac{b_{m-1}}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_{m-1}} = -\psi_m \cdot \frac{b_{m-1}}{2} + \\ + p_{m-1} \cdot h \cdot \left(\frac{b_{m-1}}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_{m-1}} \end{aligned} \quad (29)$$

As equações de equilíbrio à rotação dos nós dos pilares C_{m-1} e C_m são:

$$12 \cdot E \cdot \bar{K}_{m-1} \cdot (u' - \psi_{m-1}) = p_{m-1} \cdot h \cdot \frac{b_{m-1}}{2} + p_{m-2} \cdot h \cdot \frac{b_{m-2}}{2} \quad (30)$$

$$12 \cdot E \cdot \bar{K}_m \cdot (u' - \psi_m) = p_{m-1} \cdot h \cdot b_{m-1} \quad (31)$$

Substituindo-se (30) e (31) em (29) e por (28),
vem

$$\begin{aligned}
 & p_{m-2} \cdot \left[\frac{h \cdot b_{m-1} \cdot b_{m-2}}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{m-1}} \right] + p_{m-1} \cdot \left[\frac{h \cdot b_{m-1}^3}{12 \cdot E \cdot \bar{J}_{m-1}} + \frac{h \cdot b_{m-1}^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{m-1}} + \frac{h \cdot b_{m-1}^2}{24 \cdot E \cdot \bar{K}_m} \right] = \\
 & = u' \cdot b_{m-1} + \gamma_{m-1} \tag{32}
 \end{aligned}$$

2.2.3 - Interação entre os painéis X e Y

Com as equações (9), (13), (17), (23), (24), (32),
tem-se o seguinte sistema.

$$\left\{ \begin{aligned}
 & q_1 \cdot \left[\frac{h \cdot a_1^3}{12 \cdot E \cdot J_1} + \frac{h \cdot a_1^2}{48 \cdot E \cdot K_1} + \frac{h \cdot a_1^2}{48 \cdot E \cdot K_2} \right] + q_2 \cdot \left[\frac{h \cdot a_1 \cdot a_2}{48 \cdot E \cdot K_2} \right] = v' \cdot a_1 - \delta_1 + \delta_2 \\
 & q_{i-1} \cdot \left[\frac{h \cdot a_{i-1} \cdot a_i}{48 \cdot E \cdot K_i} \right] + q_i \cdot \left[\frac{h \cdot a_i^3}{12 \cdot E \cdot J_i} + \frac{h \cdot a_i^2}{48 \cdot E \cdot K_i} + \frac{h \cdot a_i^2}{48 \cdot E \cdot K_{i+1}} \right] + \\
 & \quad + q_{i+1} \cdot \left[\frac{h \cdot a_i \cdot a_{i+1}}{48 \cdot E \cdot K_{i+1}} \right] = v' \cdot a_i - \delta_i + \delta_{i+1} \\
 & q_{n-2} \cdot \left[\frac{h \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1}}{48 \cdot E \cdot K_{n-1}} \right] + q_{n-1} \cdot \left[\frac{h \cdot a_{n-1}^3}{12 \cdot E \cdot J_{n-1}} + \frac{h \cdot a_{n-1}^2}{48 \cdot E \cdot K_{n-1}} + \frac{h \cdot a_{n-1}^2}{24 \cdot E \cdot K_n} \right] = \\
 & \quad = v' \cdot a_{n-1} - \delta_{n-1} \\
 & p_1 \cdot \left[\frac{h \cdot b_1^3}{12 \cdot E \cdot \bar{J}_1} + \frac{h \cdot b_1^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_1} + \frac{h \cdot b_1^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_2} \right] + p_2 \cdot \left[\frac{h \cdot b_1 \cdot b_2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_2} \right] = u' \cdot b_1 + \delta_1 - \gamma_2
 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & P_{i-1} \cdot \left[\frac{h \cdot b_{i-1} \cdot b_i}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_i} \right] + P_i \cdot \left[\frac{h \cdot b_i^3}{12 \cdot E \cdot \bar{J}_i} + \frac{h \cdot b_i^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_i} + \frac{h \cdot b_i^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{i+1}} \right] + \\
 & + P_{i+1} \cdot \left[\frac{h \cdot b_i \cdot b_{i+1}}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{i+1}} \right] = u' \cdot b_i + \gamma_i - \gamma_{i+1} \\
 \\
 & P_{m-2} \cdot \left[\frac{h \cdot b_{m-1} \cdot b_{m-2}}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{m-1}} \right] + P_{m-1} \cdot \left[\frac{h \cdot b_{m-1}^3}{12 \cdot E \cdot \bar{J}_{m-1}} + \frac{h \cdot b_{m-1}^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{m-1}} + \frac{h \cdot b_{m-1}^2}{24 \cdot E \cdot \bar{K}_m} \right] = \\
 & = u' \cdot b_{m-1} + \gamma_{m-1}
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Seja a seguir um diafragma genérico da estrutura, indicado na Fig. 16, ao qual está aplicado o carregamento de momento torçor M_t , e que sofre uma rotação ϕ em torno de OZ.

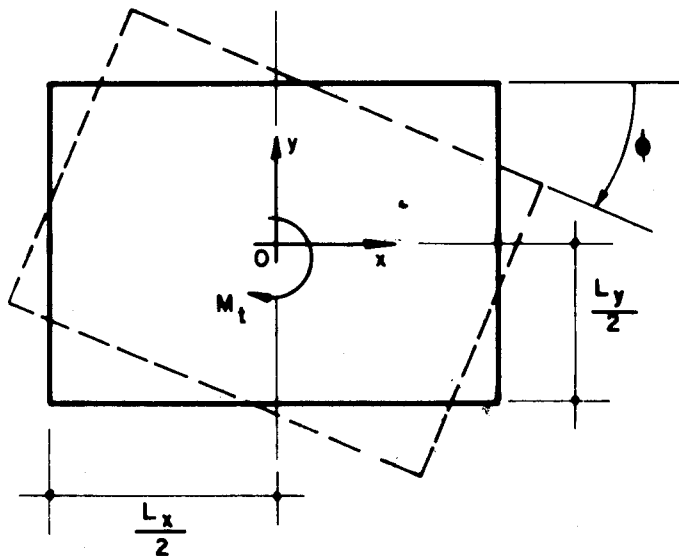


FIG.16 - DIAFRAGMA GENÉRICO AO NÍVEL DO ANDAR g.

Sendo ϕ o ângulo de giro do diafragma, vem

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{L}{2} \frac{x}{y} \cdot \phi & e & & v' &= \frac{L}{2} \frac{x}{y} \cdot \phi' \\ u &= \frac{L}{2} \frac{y}{x} \cdot \phi & e & & u' &= \frac{L}{2} \frac{y}{x} \cdot \phi' \end{aligned} \right\} \text{----- (34)}$$

E substituindo as expressões (34) nas equações do sistema (33), e escrevendo-o sob forma matricial, com v e u em função de ϕ , tem-se

$$[R] \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{Bmatrix} = [S] \cdot \begin{Bmatrix} \phi' \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_i \\ \vdots \\ \gamma_{m-1} \end{Bmatrix} \text{----- (35)}$$

A seguir mostra-se a formação das matrizes $[R]$ e $[S]$. Porém antes, com o intuito de simplificar a notação, define-se os seguintes coeficientes da matriz $[R]$.

$$\left. \begin{aligned} R_k &= \frac{h \cdot (a_i)^3}{12 \cdot E \cdot J_i} + \frac{h \cdot (a_i)^2}{48 \cdot E \cdot K_i} + \frac{h \cdot (a_i)^2}{48 \cdot E \cdot K_{i+1}} \\ R_m &= \frac{h \cdot (a_i) \cdot (a_{i+1})}{48 \cdot E \cdot K_{i+1}} \\ R_n &= \frac{h \cdot (a_i) \cdot (a_{i-1})}{48 \cdot E \cdot K_i} \end{aligned} \right\} \text{com } i = 1, 2, 3, \dots, n-2$$

$$R_\ell = \frac{h \cdot (a_{n-1})^3}{12 \cdot E \cdot J_{n-1}} + \frac{h \cdot (a_{n-1})^2}{48 \cdot E \cdot K_{n-1}} + \frac{h \cdot (a_{n-1})^2}{24 \cdot E \cdot K_n}$$

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{h \cdot (b_i)^2}{12 \cdot E \cdot \bar{J}_i} + \frac{h \cdot (b_i)^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_i} + \frac{h \cdot (b_i)^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{i+1}} \\ R_s &= \frac{h \cdot (b_i) \cdot (b_{i+1})}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{i+1}} \\ R_t &= \frac{h \cdot (b_1) \cdot (b_{i-1})}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_i} \end{aligned} \right\} \text{com } i = 1, 2, 3, \dots, m-2$$

$$R_u = \frac{h \cdot (b_{m-1})^3}{12 \cdot E \cdot \bar{J}_{m-1}} + \frac{h \cdot (b_{m-1})^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{m-1}} + \frac{h \cdot (b_{m-1})^2}{24 \cdot E \cdot \bar{K}_m}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_k, R_m, 0, 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0, 0 \\ R_n, R_k, R_m, 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0, 0 \\ 0, R_n, R_k, R_m, 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0, 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0, \dots, 0, R_n, R_k, R_m & 0, \dots, 0, 0 \\ 0, \dots, 0, 0, R_m, R_k & 0, \dots, 0, 0 \\ \hline 0, \dots, 0, 0 & R_r, R_s, 0, \dots, 0, 0 \\ 0, 0, \dots, 0 & R_t, R_r, R_s, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, \dots, 0 & 0, R_t, R_r, R_s, 0, \dots, 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0, 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0, R_t, R_r, R_s \\ 0, 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0, R_s, R_u \end{bmatrix}$$

[R] é uma matriz quadrada de ordem (n+m-2)

$$s = \begin{array}{c|c}
 \begin{array}{l}
 \frac{a_1 \cdot L_x}{2}, -1, 1, 0, \dots, 0 \\
 \frac{a_2 \cdot L_x}{2}, 0, -1, 1, 0, \dots, 0 \\
 \vdots \\
 \frac{a_i \cdot L_x}{2}, 0, \dots, 0, -1, 1, 0, \dots, 0 \\
 \vdots \\
 \frac{a_{n-2} \cdot L_x}{2}, 0, \dots, 0, -1, 1 \\
 \frac{a_{n-1} \cdot L_x}{2}, 0, \dots, 0, -1
 \end{array} & \begin{array}{l}
 0, \dots, 0 \\
 0, \dots, 0 \\
 \vdots \\
 0, \dots, 0 \\
 0, \dots, 0 \\
 0, \dots, 0
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{l}
 \frac{b_1 \cdot L_y}{2}, 1, 0, \dots, 0 \\
 \frac{b_2 \cdot L_y}{2}, 0, 0, \dots, 0 \\
 \vdots \\
 \frac{b_i \cdot L_y}{2}, 0, 0, \dots, 0 \\
 \vdots \\
 \frac{b_{n-2} \cdot L_y}{2}, 0, 0, \dots, 0 \\
 \frac{b_{m-1} \cdot L_y}{2}, 0, 0, \dots, 0
 \end{array} & \begin{array}{l}
 -1, 0, \dots, 0 \\
 1, -1, 0, \dots, 0 \\
 \vdots \\
 0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0 \\
 \vdots \\
 0, \dots, 0, 0, 1, -1 \\
 0, \dots, 0, 0, 1
 \end{array}
 \end{array}$$

[S] é uma matriz quadrada de ordem (n+m-2)

2.2.4 - Equilíbrio à força normal nos pilares

Deve-se agora proceder à imposição de equilíbrio à força normal em todos os pilares; lembrando que os deslocamentos positivos são no sentido da base para o topo, e a força normal positiva é a de tração

Inicia-se esta análise pelo pilar que está na intersecção dos painéis de direção X com Y, conforme mostra a Fig. 17.

Além da notação já definida, utilizam-se as seguintes definições.

N_i - Força normal no pilar P_i , com $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$

F_i - Força normal no pilar C_i , com $i = 2, 3, 4, \dots, m-1$

A_{pi} - Área da secção transversal do pilar P_i ($i=1,2,\dots,n-1$)

A_{ci} - Área da secção transversal do pilar C_i ($i=2,3,\dots,m-1$)

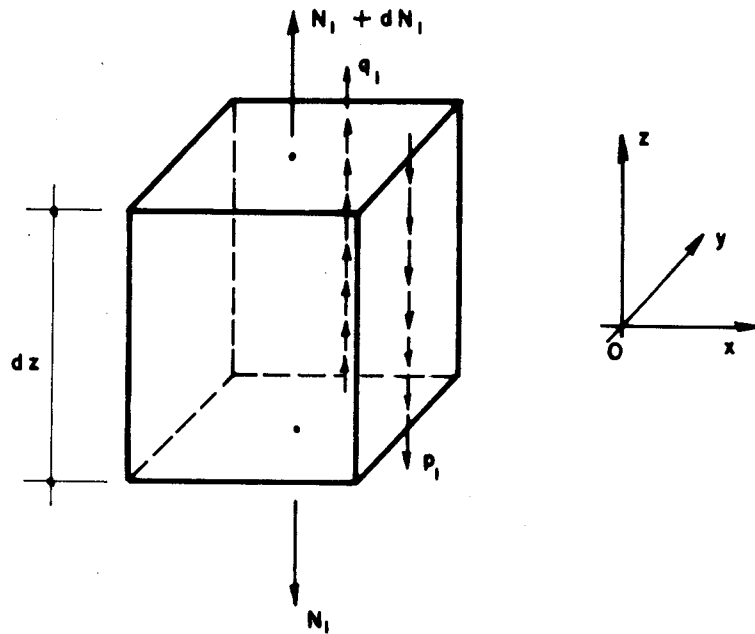


FIG. 17 - PILAR $P_i \equiv C_i$

Para o primeiro pilar, ou seja o que está na intersecção, tem-se

$$A_{p1} = A_{c1}$$

$$N_1 = F_1$$

$$\delta_1 = \gamma_1$$

Assim, o equilíbrio à força normal pode ser expresso por:

$$N_1 + dN_1 - N_1 + q_1 \cdot dz - p_1 \cdot dz = 0$$

ou

$$\frac{dN_1}{dz} = p_1 - q_1 \quad (36)$$

Pela Lei de Hooke, sabe-se que:

$$\sigma_i = \epsilon_i \cdot E \quad \therefore \quad \epsilon_i = \frac{\sigma_i}{E} = \frac{N_i}{E \cdot A_{pi}}$$

$$N_i = E \cdot A_{pi} \cdot \epsilon_i \quad \text{e} \quad \epsilon_i = \frac{d\delta_i}{dz} = \delta'_i$$

Logo a força normal no pilar P_i , vale

$$N_i = E \cdot A_{pi} \cdot \delta'_i \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (37)$$

Derivando (37) uma vez vem:

$$\frac{dN_i}{dz} = E \cdot A_{pi} \cdot \delta''_i \quad (38)$$

Substituindo-se (38) em (36) com $i = 1$, tem-se:

$$E \cdot A_{p1} \cdot \delta''_1 = p_1 - q_1 \quad (39)$$

Procedendo-se a seguir, de forma análoga ao pilar P_1 , para o pilar genérico P_i , no painel de direção Y, indicado na Fig. 18, chega-se a:

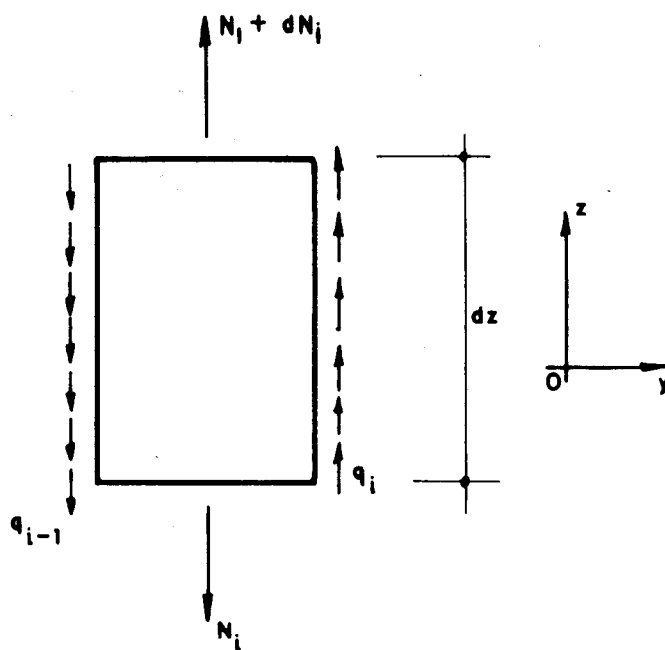


FIG. 18 - PILAR P_i

$$E \cdot A_{pi} \cdot \delta_i'' = q_{i-1} - q_i \quad (40)$$

com $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$

Finalmente pelo equilíbrio à força normal do pilar genérico C_i , do painel de direção X , mostrado na Fig. 19

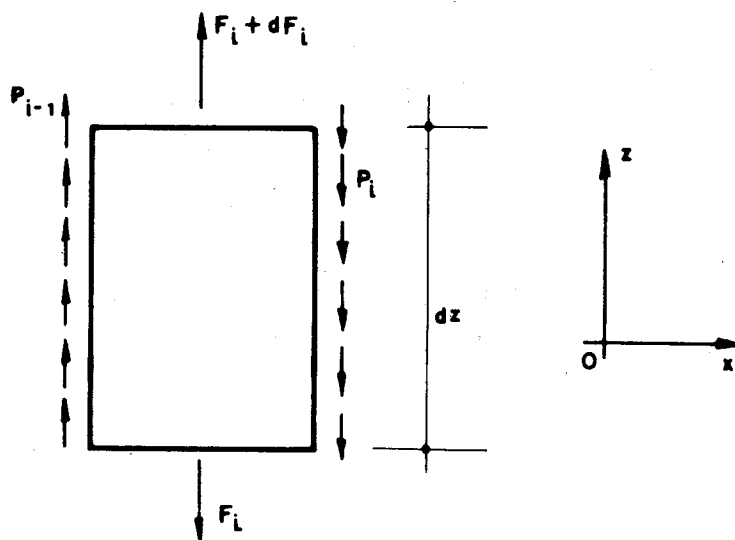


FIG. 19 - PILAR C_i

De forma análoga em relação aos casos anteriores chega-se a:

$$E.A_{ci} \cdot \gamma_i'' = -p_{i-1} + p_i \quad (41)$$

Determina-se também a força normal no pilar C_i , conforme demonstrado em (37), chegando-se a:

$$F_i = E.A_{ci} \cdot \gamma_i' \quad (42)$$

com $i = 2, 3, \dots, m-1$

Sejam as equações (39), (40) e (41). As quais podem ser escritas como:

$$\delta_1'' - \frac{p_1}{E.A_{p1}} + \frac{q_1}{E.A_{p1}} = 0 \quad (39)$$

$$\delta_i'' - \frac{q_{i-1}}{E.A_{pi}} + \frac{q_i}{E.A_{pi}} = 0 \quad (40)$$

com $i = 2, 3, \dots, n-1$

$$\gamma_i'' + \frac{p_{i-1}}{E.A_{ci}} - \frac{p_i}{E.A_{ci}} = 0 \quad (41)$$

com $i = 2, 3, \dots, m-1$

Escrevendo-se as expressões (39), (40) e (41), sob forma matricial, tem-se:

$$[I] \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1'' \\ \delta_2'' \\ \vdots \\ \delta_i'' \\ \vdots \\ \delta_{n-1}'' \\ \gamma_2'' \\ \gamma_3'' \\ \vdots \\ \gamma_i'' \\ \vdots \\ \gamma_{m-1}'' \end{Bmatrix} + [K] \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

[I] é uma matriz identidade de ordem (n+m-3).

A seguir mostra-se a Lei de formação da matriz

[K]

$$[K] = \frac{1}{E} \cdot \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{A_{p1}}, 0, \dots, 0, & -\frac{1}{A_{p1}}, 0, \dots, 0 \\ \frac{-1}{A_{p2}}, \frac{1}{A_{p2}}, 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0 \\ 0, \frac{-1}{A_{p3}}, \frac{1}{A_{p3}}, 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0, \dots, 0, \frac{-1}{A_{pn-2}}, \frac{1}{A_{pn-2}}, 0 & 0, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0, \frac{-1}{A_{pn-1}}, \frac{1}{A_{pn-1}} & 0, \dots, 0 \\ \hline 0, \dots, 0 & \frac{1}{A_{c2}}, \frac{-1}{A_{c2}}, 0, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0 & 0, \frac{1}{A_{c3}}, \frac{-1}{A_{c3}}, 0, \dots, 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0, \frac{1}{A_{cm-2}}, \frac{-1}{A_{cm-2}}, 0 \\ 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0, \frac{1}{A_{cm-1}}, \frac{-1}{A_{cm-1}} \end{array} \right]$$

[K], é uma matriz de ordem (n+m-3)x(n+m-2)

2.2.5 - Equação de equilíbrio à torção

Determina-se a seguir a equação de equilíbrio à torção da estrutura.

Q_x e Q_y , são forças cortantes agindo respectivamente nos painéis de direção X e Y, ao nível do diafragma genérico, como mostra a Fig. 20.

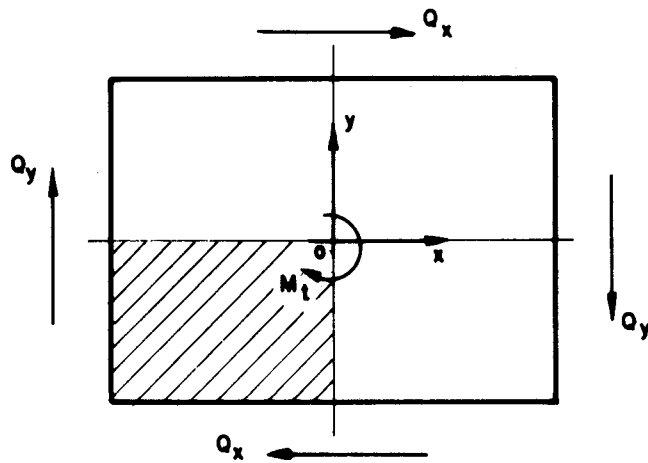


FIG. 20 - DIAFRAGMA GENÉRICO

Devido à dupla simetria em relação aos eixos OX e OY, e ao carregamento de torção, está se tomando para análise apenas um quarto da estrutura.

Assim a área achuriada da Fig. 20, está sendo mostrada de forma detalhada na Fig. 21, e na qual destacam-se as componentes das forças cortantes Q_{xi} e Q_{yi} , agindo respectivamente nos pilares C_i e P_i .

$\frac{Q_x}{2}$ e $\frac{Q_y}{2}$ são resultantes dos esforços cortantes agindo para cada metade dos painéis de direção X e Y respectivamente. Q_{xi} e Q_{yi} , agindo diretamente nos pilares C_i e P_i são as respectivas componentes dos esforços cortantes $\frac{Q_x}{2}$ e $\frac{Q_y}{2}$. Então pode-se escrever:

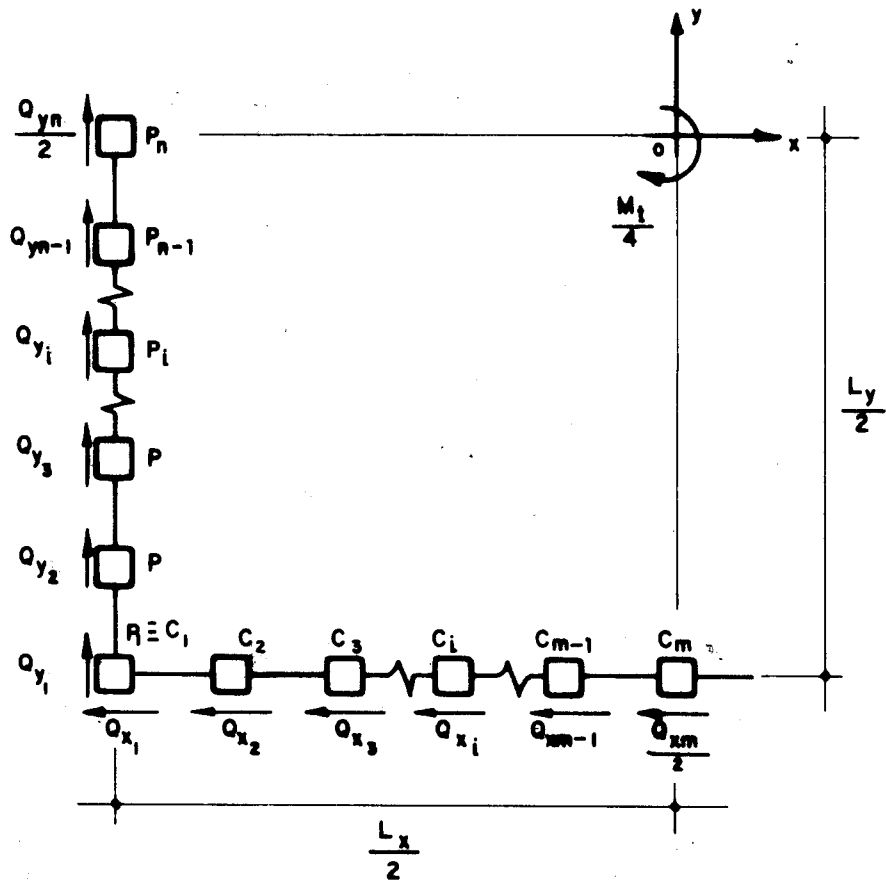


FIG. 21- COMPONENTES DE Q_x E Q_y PARA 1/4 DA ESTRUTURA

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q_x}{2} &= Q_{x1} + Q_{x2} + \dots + Q_{xi} + \dots + \frac{Q_{xm}}{2} \\ \frac{Q_y}{2} &= Q_{y1} + Q_{y2} + \dots + Q_{yi} + \dots + \frac{Q_{yn}}{2} \end{aligned} \right\} \text{-----(44)}$$

Seja a seguir a eq.(2)

$$\frac{M_t}{4} = \frac{Q_x}{2} \cdot \frac{L_y}{2} + \frac{Q_y}{2} \cdot \frac{L_x}{2} \dots\dots\dots (2)$$

Substituindo-se (44) em (2) chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{M_t}{4} = & (Q_{x1} + Q_{x2} + \dots + Q_{xi} + \dots + \frac{Q_{xm}}{2}) \cdot \frac{L_y}{2} + \\ & + (Q_{y1} + Q_{y2} + \dots + Q_{yi} + \dots + \frac{Q_{yn}}{2}) \cdot \frac{L_x}{2} \end{aligned} \quad (45)$$

Devido à hipótese de momento nulo no centro dos vãos dos pilares e chamando Q_i a força cortante no pilar i , o momento no nó M_{si} pode ser escrito:

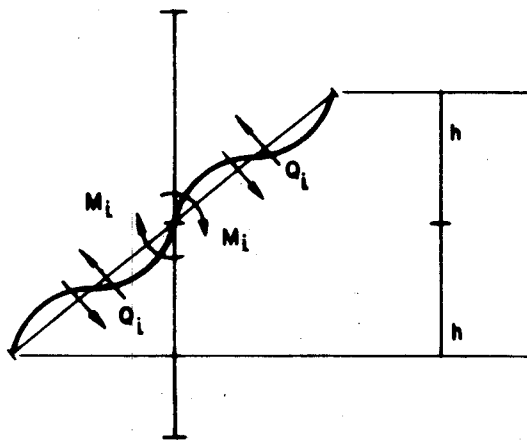


FIG. 22- DEFORMAÇÃO EM UM PILAR GENÉRICO

$$M_i = Q_i \cdot \frac{h}{2}$$

ou

$$Q_i = \frac{2 \cdot M_i}{h} \quad (46)$$

Pelo equilíbrio a momento fletor dos nós de quaisquer pilares e supondo nuloss momentos nos pontos médios das vigas, vem:

$$\begin{aligned}
 M_{x1} &= \frac{1}{2} (p_1 \cdot h \cdot \frac{b_1}{2}) \\
 M_{y1} &= \frac{1}{2} (q_1 \cdot h \cdot \frac{a_1}{2}) \\
 M_{xi} &= \frac{1}{2} (p_{i-1} \cdot h \cdot \frac{b_{i-1}}{2} + p_i \cdot h \cdot \frac{b_i}{2}) \\
 M_{yi} &= \frac{1}{2} (q_{i-1} \cdot h \cdot \frac{a_{i-1}}{2} + q_i \cdot h \cdot \frac{a_i}{2}) \\
 M_{xm} &= \frac{1}{2} (2 \cdot p_{m-1} \cdot h \cdot \frac{b_{m-1}}{2}) \\
 M_{yn-1} &= \frac{1}{2} (2 \cdot q_{n-1} \cdot h \cdot \frac{a_{n-1}}{2})
 \end{aligned}
 \tag{47}$$

Onde M_{xi} M_{yi} são os momentos fletores que os pilares aplicam nos nós dos painéis de direção X e de direção Y, respectivamente.

Com as expressões (47) e (46), substituídas em (45), tem-se a equação de equilíbrio à torção devido às forças cortantes $\frac{Q_x}{2}$ e $\frac{Q_y}{2}$ para um quarto da estrutura.

$$\begin{aligned}
 \frac{M_t}{4} &= (q_1 \cdot a_1 + \dots + q_i \cdot a_i + \dots + q_{n-1} \cdot a_{n-1}) \cdot \frac{L_x}{2} + \\
 &+ (p_1 \cdot b_1 + \dots + p_i \cdot b_i + \dots + p_{m-1} \cdot b_{m-1}) \cdot \frac{L_y}{2}
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

Escrevendo-se a eq.(48) sob forma matricial, vem

$$\frac{M_t}{4} = \left[\frac{a_1 L_x}{2}, \dots, \frac{a_i L_x}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} L_x}{2}, \frac{b_1 L_y}{2}, \dots, \frac{b_i L_y}{2}, \dots, \frac{b_{m-1} L_y}{2} \right] \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{Bmatrix} \quad (49)$$

Em forma resumida a equação (49) pode ser expressa como:

$$\frac{M_t}{4} = [J] \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

onde [J] é uma matriz linha de ordem $1 \times (n+m-2)$.

2.2.6 - Equação diferencial da estrutura tubular constituída somente de pórticos

Com as equações (39), (40), (41) e (49), chega-se a um sistema de equações, que em notação matricial escreve-se:

$$[G] \cdot \begin{Bmatrix} \phi''' \\ \delta_1'' \\ \delta_2'' \\ \vdots \\ \delta_i'' \\ \vdots \\ \delta_{n-1}'' \\ \gamma_2'' \\ \gamma_3'' \\ \vdots \\ \gamma_i'' \\ \vdots \\ \gamma_{m-1}'' \end{Bmatrix} + [H] \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{M_t}{4} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (51)$$

As matrizes [G] e [H], podem ser facilmente obtidas com auxílio das expressões (43) e (49); conforme mostra-se a seguir

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Mostra-se a seguir a formação das matrizes [G] e [H].

Formação da matriz $[G]$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0, & \dots, & \dots, & 0 \\ 0 & 1 & 0, & \dots, & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & 0, & \dots, & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots, & \dots, & 0 & 1 & 0, & \dots, & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots, & \dots, & \dots, & 0, & \dots, & 1 \end{bmatrix}$$

$[G]$ é uma matriz quadrada de ordem $(n+m-2)$; onde todos os elementos da diagonal principal, a menos de $G(1,1)$ são iguais a 1, ou seja

$$G(j;k) = 1 \text{ para } j = k \text{ e } 2 \leq j \leq (n+m-2)$$

O restante dos elementos da matriz $[G]$ são nulos.

A matriz $[H]$, é formada simplesmente com a junção da matriz $[J]$ e da matriz $[K]$. Isto é $[J]$ passa a ser a primeira linha de $[H]$.

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{a_1 \cdot L_x}{E \cdot A_{p1}}, \frac{a_2 \cdot L_x}{E \cdot A_{p2}}, \dots, \frac{a_{n-1} \cdot L_x}{E \cdot A_{pn-1}} & \frac{b_1 \cdot L_y}{E \cdot A_{c1}}, \frac{b_2 \cdot L_y}{E \cdot A_{c2}}, \dots, \frac{b_{m-1} \cdot L_y}{E \cdot A_{cm-1}} \\ \frac{1}{E \cdot A_{p1}}, 0, \dots, 0 & \frac{-1}{E \cdot A_{c1}}, 0, \dots, 0 \\ \frac{-1}{E \cdot A_{p2}}, \frac{1}{E \cdot A_{p2}}, 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0 \\ \vdots, \frac{-1}{E \cdot A_{p3}}, \frac{1}{E \cdot A_{p3}}, 0, \dots, 0 & \vdots, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0, \frac{-1}{E \cdot A_{pn-2}}, \frac{1}{E \cdot A_{pn-2}}, 0 & 0, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0, \frac{-1}{E \cdot A_{pn-1}}, \frac{1}{E \cdot A_{pn-1}} & 0, \dots, 0 \\ \hline 0, \dots, 0 & \frac{1}{E \cdot A_{c2}}, \frac{-1}{E \cdot A_{c2}}, 0, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0 & 0, \frac{1}{E \cdot A_{c3}}, \frac{-1}{E \cdot A_{c3}}, 0, \dots, 0 \\ \vdots, \dots, 0 & \vdots, \dots, 0, \frac{1}{E \cdot A_{cm-2}}, \frac{-1}{E \cdot A_{cm-2}}, 0 \\ 0, \dots, 0 & 0, \dots, 0, \frac{1}{E \cdot A_{cm-1}}, \frac{-1}{E \cdot A_{cm-1}} \end{bmatrix}$$

$[H]$ é uma matriz quadrada de ordem $(n+m-2)$

Sejam então os vetores $\{U\}$ e $\{C\}$, definidos como:

$$U = \begin{Bmatrix} \phi' \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_i \\ \vdots \\ \gamma_{m-1} \end{Bmatrix} \quad C = \begin{Bmatrix} \frac{M_t}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Por (35) e $\{U\}$, conforme definido em (52), chega-se a

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{Bmatrix} = [R]^{-1} \cdot [S] \cdot \{U\} \quad (53)$$

A eq.(53) define os esforços cortantes distribuídos nos pontos médios das vigas, ao longo de toda altura.

Substituindo-se a expressão matricial definida em (53), juntamente com os vetores $\{U\}$ e $\{C\}$ definidos em(52), no sistema de equações (51) obtem-se:

$$[G] \cdot \{U''\} + [H] \cdot [R]^{-1} \cdot [S] \cdot \{U\} = \{C\} \quad (54)$$

Fazendo-se

$$[T] = [H] \cdot [R]^{-1} \cdot [S] \quad (55)$$

E substituindo-se (55) em (54), chega-se a um sistema de equações diferenciais, que resolvido permite determinar todos os deslocamentos incógnitos da estrutura, consequentemente os esforços definidos por (37) e (42), que são forças normais nos pilares, e por (53) que são as forças cortantes distribuídas nas vigas.

Assim o sistema de equações diferenciais da estrutura escreve-se:

$$[G] \cdot \{U''\} + [T] \cdot \{U\} = \{C\} \quad (56)$$

O sistema (56), será resolvido numericamente por intermédio do método das "diferenças finitas", cujo resumo encontra-se no Apêndice I.

2.2.7 - Condições de contorno e balanceamento das equações

As condições de contorno da estrutura tubular básica, submetida a um carregamento de torção $M_t(z)$, são:

$$\left. \begin{aligned}
 \phi(o) &= 0 \\
 \delta_i(o) &= 0 & \delta_i'(H) &= 0 \\
 \gamma_i(o) &= 0 & \gamma_i'(H) &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{--- (57)}$$

Na solução do problema serão utilizados operadores de diferenças finitas com cinco pontos, aplicados ao nível de cada andar necessitando-se porém a inclusão de dois pontos fictícios; um no topo e outro na base como mostra a Fig. 23

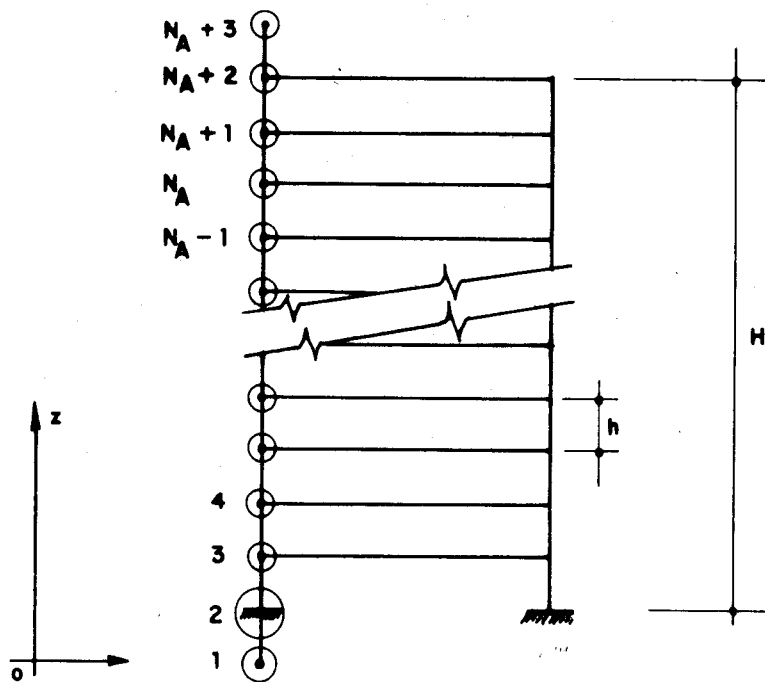


FIG. 23 - DISPOSIÇÃO DOS PONTOS PARA APLICAÇÃO DOS OPERADORES.

Sejam

NA - Número de andares

n - Número de pilares de direção Y

m - Número de pilares de direção X

H - Altura total do prédio

Logo o número de incógnitas será definido por:

para δ (NA+3).(n-1)

para γ (NA+3).(m-2)

para ϕ (NA+3)

daí

$$N^{\circ} \text{ INC.} = (NA+3).(n+m-2) \quad (58)$$

Número de equações por estação

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } \delta \text{ (n-1)} \\ \text{para } \gamma \text{ (m-2)} \\ \text{para } \phi \text{ (1)} \end{array} \right\} \text{ aplicados (NA+1) vezes.}$$

Assim

$$N.EQ = (NA+1).(n+m-2)+CC \quad (59)$$

Sendo

CC - O número de condições de contorno

Por (57) sabe-se que

$$\delta(o) = 0 \quad (n-1) \quad \delta'(H) = 0 \quad (n-1)$$

$$\gamma(o) = 0 \quad (m-2) \quad \gamma'(H) = 0 \quad (m-2)$$

$$\phi(o) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Logo} \quad CC = (2n+2m-5) \quad (60)$$

Substituindo-se (60) em (59), vem

$$N^{\circ} \text{ EQ} = NA.(n+m-2)+3.(n+m)-7 \quad (61)$$

Para que o problema esteja equilibrado é necessário que

$$N^{\circ} \text{ INC.} - N^{\circ} \text{ EQ.} = 0 \quad (62)$$

Substituindo-se então (58) e (61) em (62) vem

$$NA.(n+m-2)+3.(n+m)-6-NA.(n+m-2)-3.(n+m)+7 = 1$$

Ou seja existe uma incôgnita a mais, necessitando portanto de uma equação suplementar, para que sua solução seja possível.

A seguir determina-se a equação suplementar, necessária para o equilíbrio e solução do sistema (56).

Equação suplementar

Seja o sistema de equações definido em (56).

$$[G] \cdot \{U''\} + [T] \cdot \{U\} = \{C\} \quad (56)$$

A primeira equação do sistema (56), escreve-se:

$$\sum_{j=1}^r G(1,j) \cdot \{U''\} + \sum_{j=1}^r T(1,j) \cdot \{U\} = \frac{M_t}{4} \quad (63)$$

onde $r = (n+m-2)$ e $\frac{M_t}{4} = f(z)$

Derivando-se uma vez a eq.(63), vem:

$$\sum_{j=1}^r G(1,j) \{U'''\} + \sum_{j=1}^r T(1,j) \{U'\} = \frac{d}{dz} \left(\frac{M_t}{4} \right) \quad (64)$$

Sabe-se porém que a primeira linha da matriz $[G]$ é nula, ou seja

$$[G(1,j)] = 0 \quad \text{para } (j=1,2,\dots,r) \quad (65)$$

por (57), tem-se

$$\left. \frac{d}{dz} \cdot \delta_i \right|_H = \left. \frac{d}{dz} \cdot \gamma_i \right|_H = 0 \quad (66)$$

Assim, substituindo-se (66) e (65) em (64), chega-se finalmente à equação suplementar procurada para a solução do sistema (56), a qual escreve-se:

$$T(1,1) \cdot \phi''(H) = \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{M_t}{4} \right) \right] (H) \quad (67)$$

2.3 - ESTRUTURAS FORMADAS POR PAINÉIS PÓRTICOS E PAINÉIS PAREDES, SUBMETIDA À TORÇÃO

Mostra-se na Fig. 24, a configuração básica da estrutura a ser analisada neste item (2.3). Aqui serão mantidos o mesmo sistema de eixos de referência e carregamento de torção $M_t(z)$ do item (2.2).

L_x e L_y são também dimensões da estrutura, indicadas na Fig. 24 e h é a altura dos andares (pé direito), constante ao longo de toda altura.

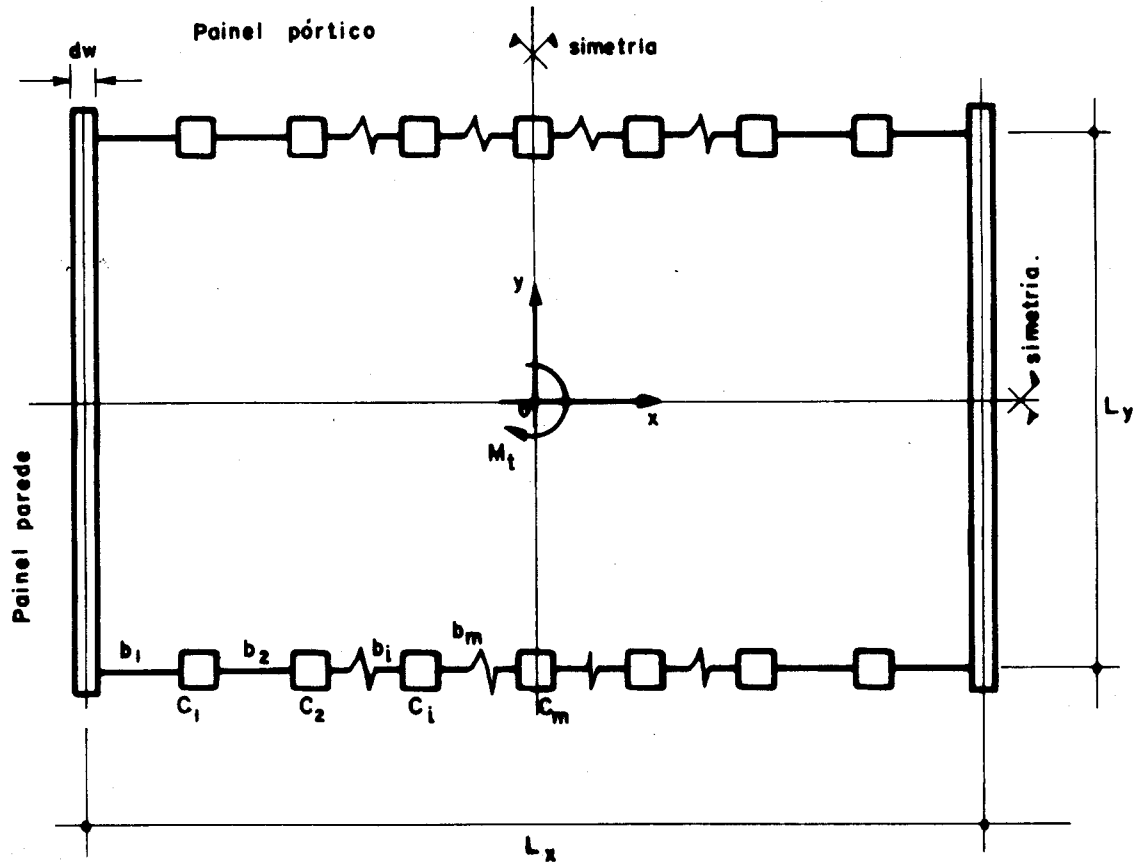


FIG. 24— ESTRUTURA FORMADA POR PAINÉIS PÓRTICOS E PAINÉIS PAREDES

Como a estrutura também possui dupla simetria em relação aos eixos OX e OY , e por carregamento de torção, tomou-se para análise apenas um quarto da mesma conforme mostra a Fig. 25

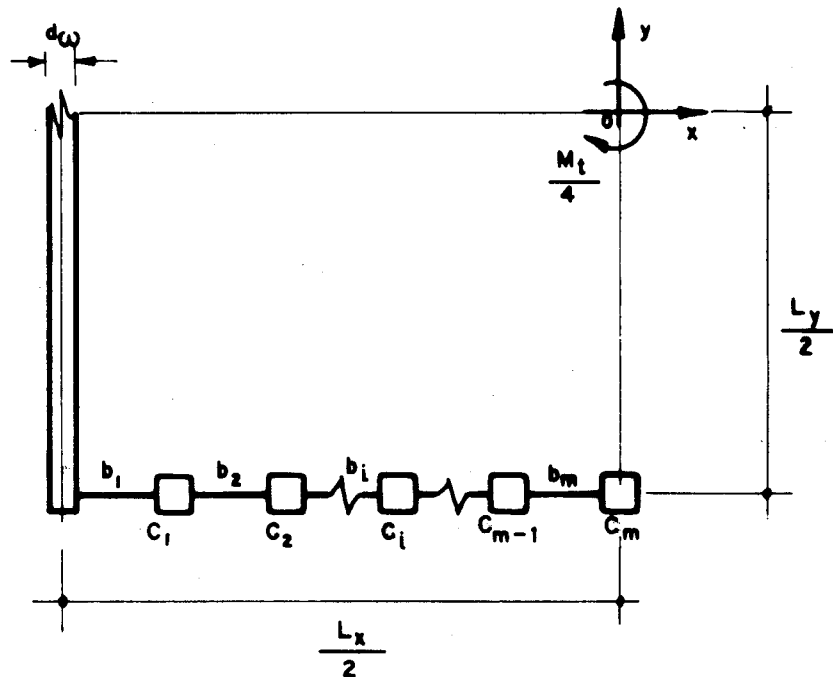


FIG. 25 - QUARTA PARTE DA ESTRUTURA FORMADA POR PAINÉIS PÓRTICOS E PAINÉIS PAREDES. PLANTA BAIXA.

Designa-se

d_w - Espessura da parede

C_i - Pilares do painel pórtico da direção X. ($i=1,2,\dots,m$)

b_i - Vãos das vigas (lintéis) ($i=1,2,\dots,m$)

m - Quantidade de pilares da direção X, conforme Fig. 25

Na Fig. 26, está mostrado um diafragma genérico da estrutura em questão, e as forças cortantes atuando em sua periferia, ou seja nos painéis, provenientes do carregamento de momento torçor.

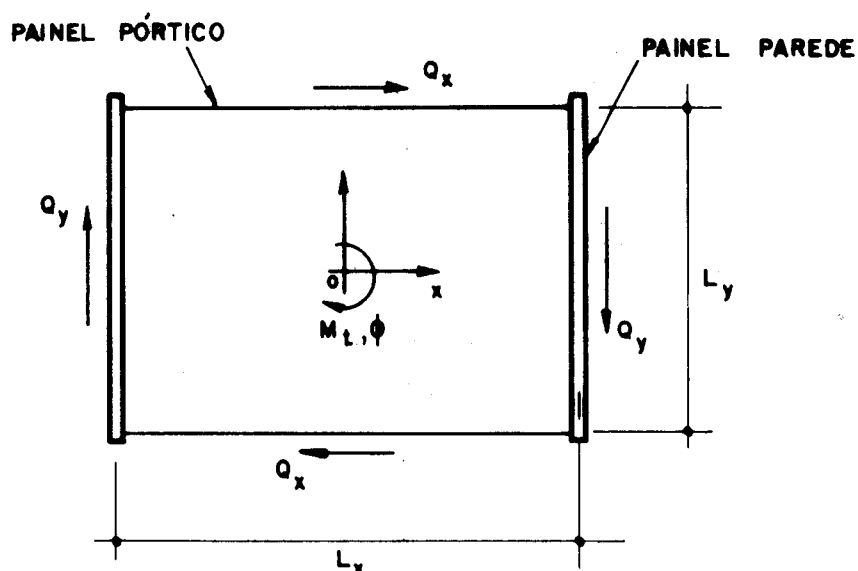


FIG. 26 - DIAFRAGMA GENÉRICO.

Q_x - Força cortante resultante atuante nos painéis pórticos da direção X.

Q_y - Força cortante resultante atuante nos painéis paredes da direção Y.

Aqui também continua válida a Eq.(2)

$$\frac{M_t}{4} = \frac{Q_x \cdot L_y}{4} + \frac{Q_y \cdot L_x}{4} \quad (2)$$

2.3.1 - Estudo do painel parede

Com o nome "parede" convencionou-se chamar os painéis planos, supostos sem rigidez transversal, deformáveis por momento fletor e extremamente rígidos à força cortante. As paredes aqui estudadas serão supostas de seção constante em toda a sua altura.

A Fig. 27 mostra o painel parede a ser analisado, acompanhado do carregamento: p_1 que é o esforço cortante proveniente da viga b_1 , e o esforço cortante Q_y , devido ao momento torçor.

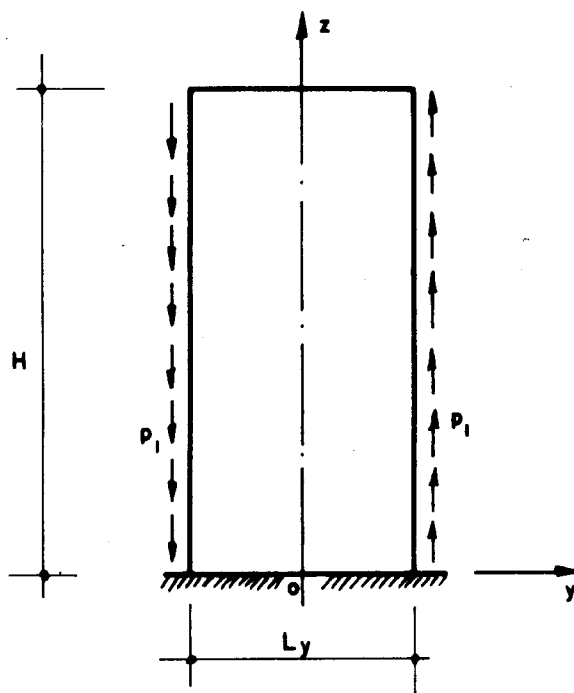


FIG. 27 - PAINEL PAREDE

O equilíbrio do elemento de altura dz do painel parede, cuja convenção para esforços positivos é o da Fig. 28, permite escrever.

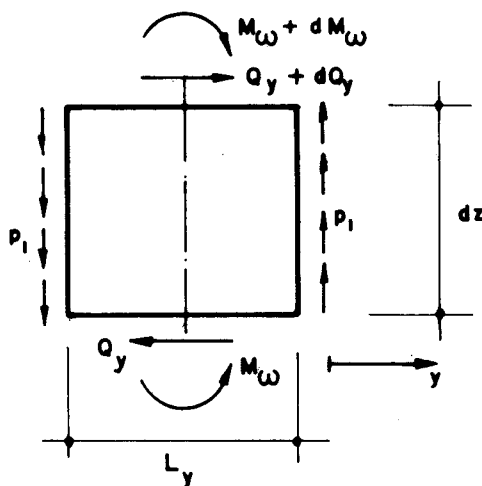


FIG. 28 - ELEMENTO DE PAREDE

$$M_{\omega} + dM_{\omega} - M_{\omega} + Q_y \cdot \frac{dz}{2} + dQ_y \cdot \frac{dz}{2} + Q_y \cdot \frac{dz}{2} - p_1 dz \cdot \frac{L_y}{2} - p_1 \cdot dz \cdot \frac{L_y}{2} = 0$$

Desprezando-se os infinitésimos de segunda ordem chega-se a:

$$dM_{\omega} + Q_y \cdot dz - p_1 \cdot L_y \cdot dz = 0$$

$$Q_y = - \frac{d \cdot M_{\omega}}{dz} + p_1 \cdot L_y \quad (68)$$

A equação da elástica da parede escreve-se

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{M_{\omega}}{E \cdot J} \quad (69)$$

onde

M_{ω} é o momento fletor na parede

E é o módulo de elasticidade longitudinal

J é o momento de inércia da parede

Fazendo-se

$$E \cdot J = j_{\omega} \quad (70)$$

e substituindo-se (70) em (69), vem

$$M_{\omega} = j_{\omega} \cdot v'' \quad (71)$$

Derivando-se (71) uma vez, e substituindo-se em seguida em (68) chega-se a:

$$Q_y = -j_{\omega} \cdot v''' + p_1 \cdot L_y \quad (72)$$

Os deslocamentos u e v , podem ser expressos em função da rotação ϕ , provocada pelo momento torçor $M_t(z)$. Assim substituindo-se as expressões de (34) em (71) e (72), tem-se

$$\left. \begin{aligned} M_\omega &= j_\omega \cdot \frac{L_x}{2} \cdot \phi'' \\ Q_y &= -j_\omega \cdot \frac{L_x}{2} \cdot \phi''' + p_1 \cdot L_y \end{aligned} \right\} \text{--- (73)}$$

Determina-se também o deslocamento vertical da parede junto à intersecção com o painel pòrtico de direção X , normal à parede.

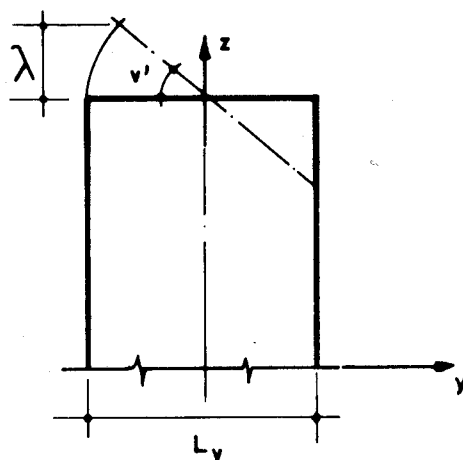


FIG.29 - DESLOCAMENTO VERTICAL DA BORDA DA PAREDE.

Seja λ o deslocamento vertical da borda da parede.

$$\lambda = \frac{v' \cdot L_y}{2} \quad (74)$$

Substituindo-se a expressão de $v=f(\phi)$ definida por (34) em (74) vem:

$$\lambda = \frac{L_x \cdot L_y}{4} \cdot \phi' \quad (75)$$

2.3.2 - Estudo do painel pórtico de direção X

Estuda-se a seguir a deformação no painel de direção X, devido a Q_x . Tal análise abrange somente metade do painel, por razões de simetria. Inicia-se este estudo a partir do primeiro tramo indicado na Fig. 30.

O trecho a ser estudado neste painel compreende do pilar C_1 ao pilar C_m .

Ainda com relação a Fig. 30, mostra-se a deformação do andar genérico do pórtico, quando sujeito aos deslocamentos u , devidos às forças cortante Q_x .

Utiliza-se a seguinte notação:

- λ Deslocamento da extremidade da viga b_1 , junto à parede
- γ_i Deslocamento axial do pilar C_i positivo da base para o topo
- ψ_i Rotação do nó do pilar C_i
- u' Distorção do painel
- b_i Vão da viga i
- \bar{J}_i Momento de inércia da viga i
- \bar{J}_{ci} Momento de inércia do pilar C_i
- h Altura dos andares
- p_i Força cortante distribuída no vão da viga i
- E Módulo de elasticidade longitudinal

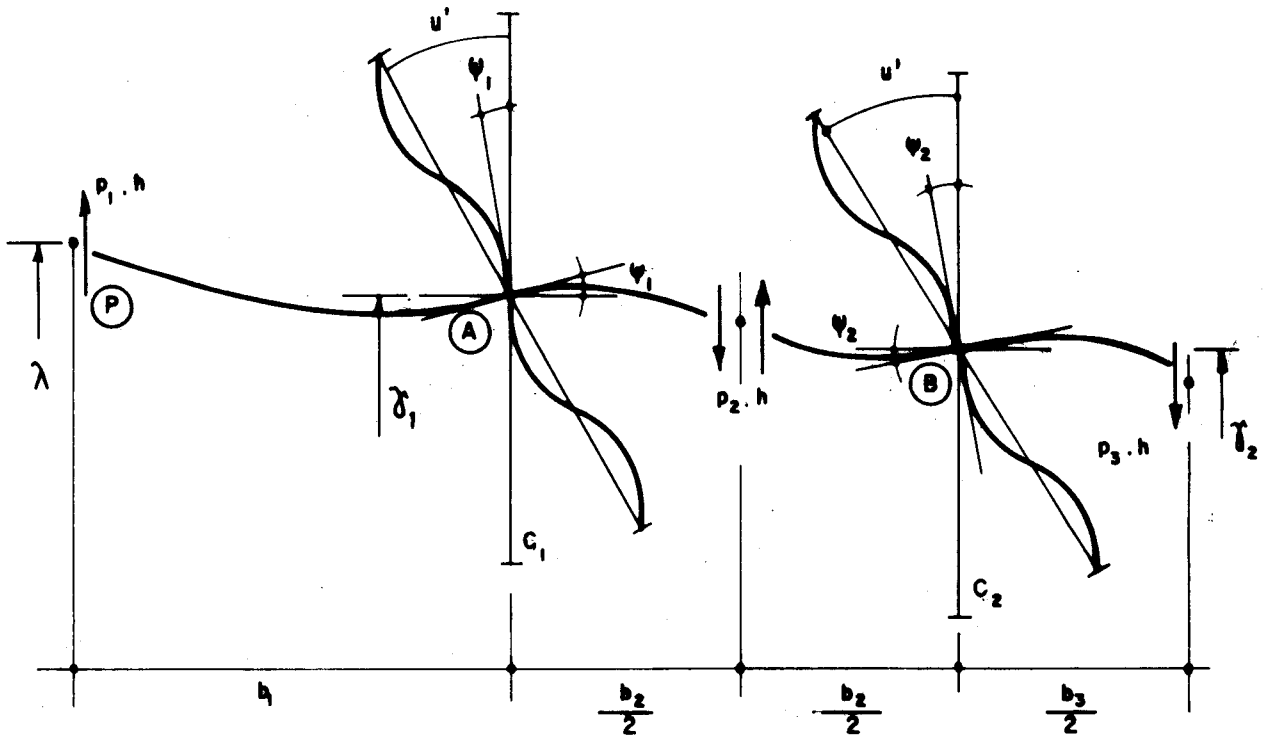


FIG. 30 - PAINEL DE DIREÇÃO X : TRAMOS 1, 2 e 3

Considere-se inicialmente o trecho \overline{PA} do pórtico, que corresponde ao vão b_1 , conforme mostra a Fig. 31

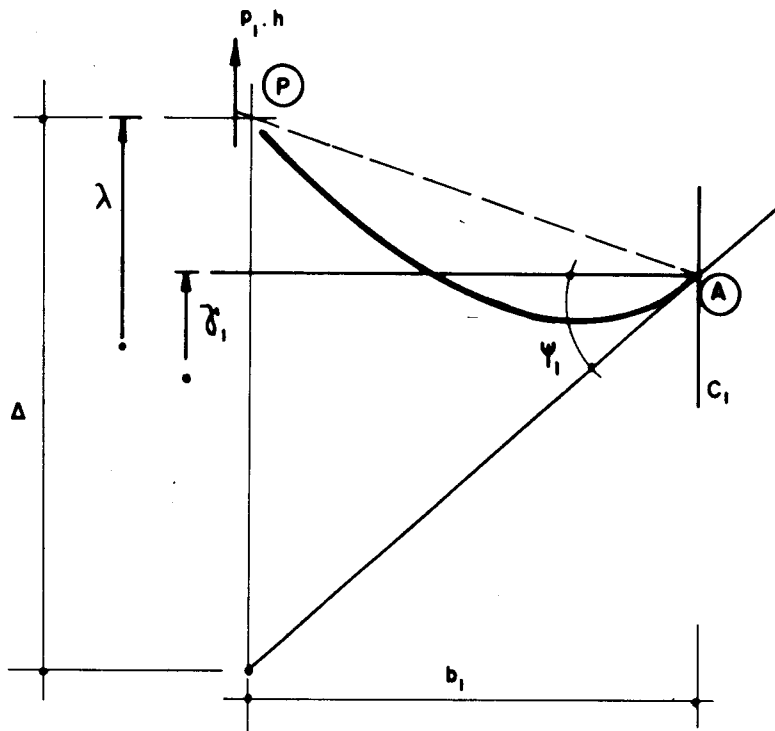


FIG. 31 - PAINEL PÓRTICO: VÃO b_1

Seja Δ definido por

$$\Delta = \lambda - \gamma_1 + b_1 \cdot \psi_1 \quad (76)$$

mas

$$\Delta = \frac{\bar{F} \cdot b_1^3}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_1} \quad (77)$$

onde $\bar{F} = p_1 \cdot h$

Assim, o momento em A devido ao deslocamento vertical Δ , vale

$$M_{ap} = \bar{F} \cdot b_1 \quad (78)$$

Substituindo-se (77) em (78), chega-se a

$$M_{ap} = \frac{3 \cdot E \cdot \bar{J}_1}{b_1^2} \cdot \Delta \quad (79)$$

por (76) em (79), vem

$$\begin{aligned} M_{ap} &= \frac{3 \cdot E \cdot \bar{J}_1}{b_1^2} \cdot (\lambda - \gamma_1 + \psi_1 \cdot b_1) \\ M_{ap} &= \frac{3 \cdot E \cdot \bar{J}_1}{b_1} \cdot \left(\frac{\lambda - \gamma_1}{b_1} + \psi_1 \right) \end{aligned} \quad (80)$$

Tem-se também o momento em A devido ao esforço cortante $p_1 \cdot h$, na extremidade da viga b_1

$$M_{ap} = p_1 \cdot h \cdot b_1 \quad (81)$$

Igualando-se (80) a (81), obtem-se a equação de compatibilidade do deslocamento vertical do ponto P; ou seja o ponto situado na intersecção do pórtico com a parede. Então, tem-se:

$$\frac{p_1 \cdot h \cdot b_1^2}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_1} = \left(\frac{\lambda - \gamma_1}{b_1} + \psi_1 \right) \quad (82)$$

Pelo equilíbrio à rotação do nó do pilar C_1 e por (18), vem

$$12 \cdot E \cdot \bar{K}_1 \cdot (u' - \psi_1) = p_1 \cdot h \cdot b_1 + p_2 \cdot h \cdot \frac{b_2}{2} \quad (83)$$

por (34) em (83), tem-se:

$$\psi_1 = \frac{L}{2} \cdot y \cdot \phi' - \frac{p_1 \cdot h \cdot b_1}{12 \cdot E \cdot \bar{K}_1} - \frac{p_2 \cdot h \cdot b_2}{24 \cdot E \cdot \bar{K}_1} \quad (84)$$

Substituindo-se (84) em (82) e por (75) chega-se a:

$$p_1 \left[\frac{h \cdot b_1^2}{12 \cdot E \cdot \bar{K}_1} + \frac{h \cdot b_1^3}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_1} \right] + p_2 \cdot \left[\frac{h \cdot b_1 \cdot b_2}{24 \cdot E \cdot \bar{K}_1} \right] = \frac{L}{4} (L_x + 2 \cdot b_1) \cdot \phi' - \gamma_1 \quad (85)$$

Ainda com relação a Fig. 30, determina-se também, a equação de compatibilidade para o deslocamento vertical do ponto central da viga AB de vão b_2 .

$$\gamma_1 + \psi_1 \cdot \frac{b_2}{2} - p_2 \cdot h \cdot \left(\frac{b_2}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_2} = \gamma_2 - \psi_2 \cdot \frac{b_2}{2} + p_2 \cdot h \cdot \left(\frac{b_2}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_2} \quad (86)$$

A equação de equilíbrio à rotação do nó do pilar C_2 , permite escrever:

$$12.E.\bar{K}_2(u' - \psi_2) = p_2 \cdot h \cdot \frac{b_2}{2} + p_3 \cdot h \cdot \frac{b_3}{2} \quad (87)$$

Substituindo-se (34) em (87) vem

$$\psi_2 = \frac{L}{2} \cdot y \cdot \phi' - \frac{p_2 \cdot h \cdot b_2}{24.E.\bar{K}_2} - \frac{p_3 \cdot h \cdot b_3}{24.E.\bar{K}_2} \quad (88)$$

E finalmente substituindo-se (84) e (88) em (86) obtem-se:

$$p_1 \cdot \left[\frac{h \cdot b_1 \cdot b_2}{24.E.\bar{K}_1} \right] + p_2 \cdot \left[\frac{h \cdot b_2^3}{12.E.\bar{J}_2} + \frac{h \cdot b_2^2}{48.E.\bar{K}_1} + \frac{h \cdot b_2^2}{48.E.\bar{K}_2} \right] +$$

$$+ p_3 \cdot \left[\frac{h \cdot b_2 \cdot b_3}{48.E.\bar{K}_2} \right] = \frac{L}{2} \cdot y \cdot b_2 \cdot \phi' + \gamma_1 - \gamma_2 \quad (89)$$

Estuda-se a seguir a deformação do painel pòrtico, ao nível da viga i , conforme mostra a Fig. 32

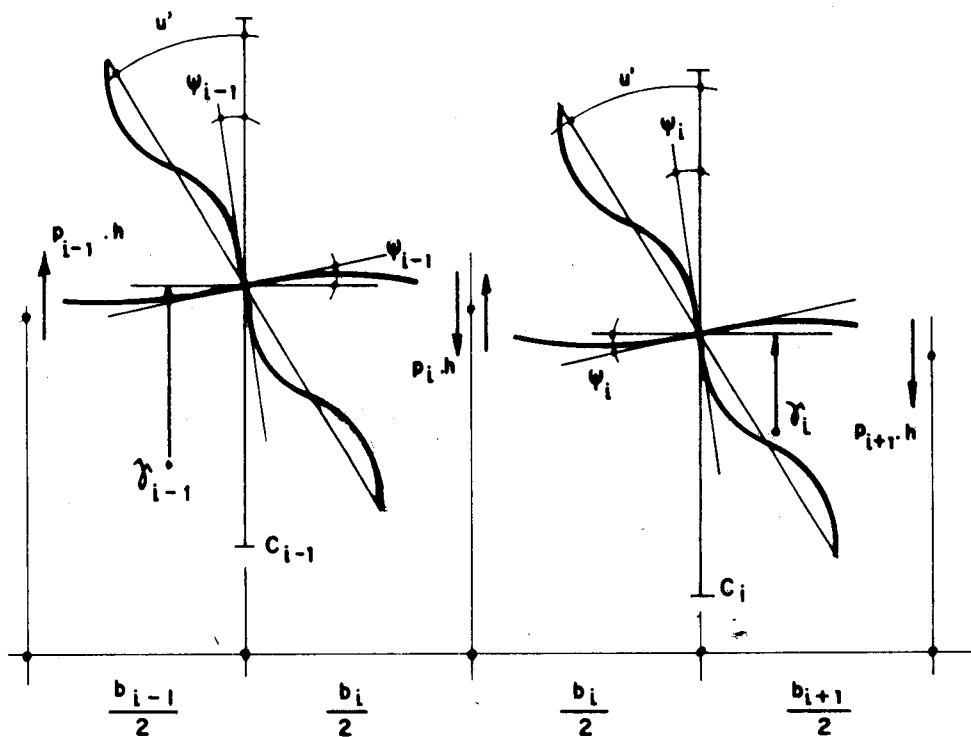


FIG. 32 - PAINEL PÓRTICO: Tramo i

Com a notação já introduzida a equação de compatibilidade do deslocamento do ponto central da viga i escreve-se:

$$\gamma_{i-1} + \psi_{i-1} \cdot \frac{b_i}{2} - p_i \cdot \left(\frac{b_i}{2}\right)^3 \cdot \frac{h}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_i} = \gamma_i - \psi_i \cdot \frac{b_i}{2} + p_i \cdot \left(\frac{b_i}{2}\right)^3 \cdot \frac{h}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_i} \quad (90)$$

As equações de equilíbrio à rotação dos nós dos pilares C_{i-1} e C_i são:

$$12 \cdot E \cdot \bar{K}_{i-1} \cdot (u' - \psi_{i-1}) = \frac{p_{i-1} \cdot b_{i-1} \cdot h}{2} + \frac{p_i \cdot b_i \cdot h}{2} \quad (91)$$

$$12 \cdot E \cdot \bar{K}_i \cdot (u' - \psi_i) = \frac{p_i \cdot b_i \cdot h}{2} + \frac{p_{i+1} \cdot b_{i+1} \cdot h}{2} \quad (92)$$

Substituindo-se (91) e (92) em (90) e por (34), chega-se a:

$$p_{i-1} \cdot \left[\frac{h \cdot b_{i-1} \cdot b_i}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{i-1}} \right] + p_i \cdot \left[\frac{h \cdot b_i^3}{12 \cdot E \cdot \bar{J}_i} + \frac{h \cdot b_i^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{i-1}} + \frac{h \cdot b_i^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_i} \right] + p_{i+1} \cdot \left[\frac{h \cdot b_i \cdot b_{i+1}}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_i} \right] = \frac{L \cdot y \cdot b_i}{2} \cdot \phi' + \gamma_{i-1} - \gamma_i \quad (93)$$

Analisando-se ainda a deformação do painel p \bar{o} r \tilde{t} ico de direção X , estuda-se a deformação da viga p \bar{o} x \tilde{i} ma ao eixo de simetria, atribuindo-se a esta viga o n \bar{u} mero m , o mesmo do pilar que est \tilde{a} sobre o eixo de simetria, mos \tilde{t} rado na Fig. 33.

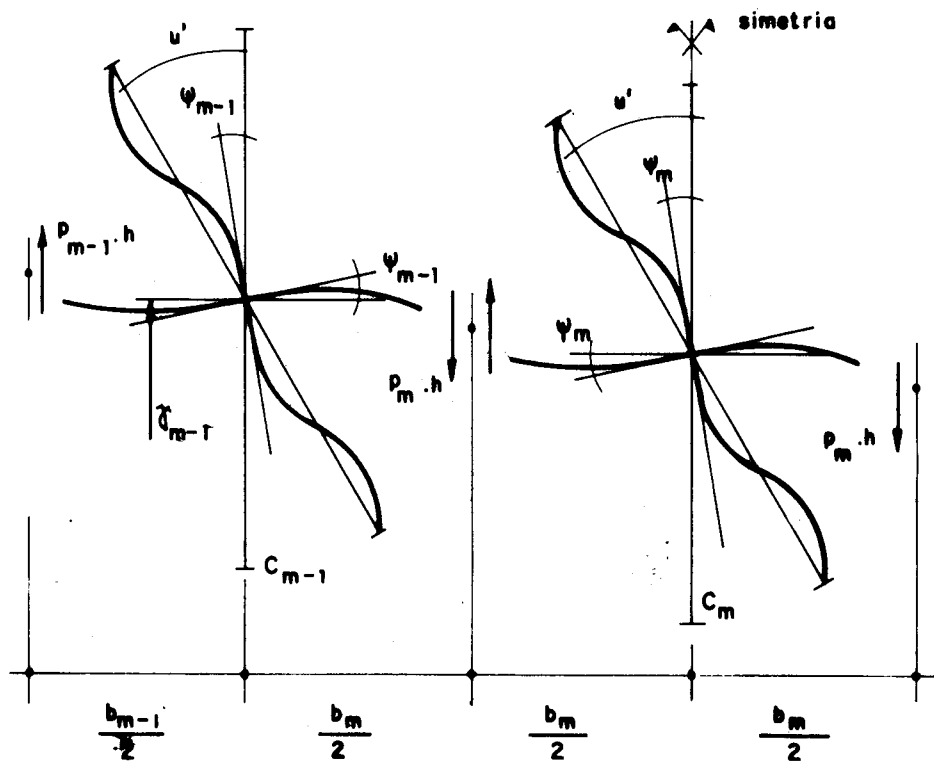


FIG. 33 - PAINEL PÓRTICO : Tramo m

A equação de compatibilidade de deslocamento do ponto central da viga m, permite escrever:

$$\gamma_{m-1} + \psi_{m-1} \cdot \frac{b_m}{2} - p_m \cdot \left(\frac{b_m}{2}\right)^3 \cdot \frac{h}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_m} = 0 - \psi_m \cdot \frac{b_m}{2} + p_m \cdot \left(\frac{b_m}{2}\right)^3 \cdot \frac{h}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_m} \quad (94)$$

Na eq.(33) tem-se $\gamma_m = 0$ devido à simetria e ao carregamento de torção.

As equações de equilíbrio à rotação dos nós dos pilares C_{m-1} e C_m , são:

$$12 \cdot E \cdot \bar{K}_{m-1} \cdot (u' - \psi_{m-1}) = \frac{p_m \cdot h \cdot b_m}{2} + \frac{p_{m-1} \cdot h \cdot b_{m-1}}{2} \quad (95)$$

$$12 \cdot E \cdot \bar{K}_m \cdot (u' - \psi_m) = p_m \cdot h \cdot b_m \quad (96)$$

Substituindo-se (95) e (96) em (94) e por (34),
chega-se a:

$$\begin{aligned}
 & P_{m-1} \cdot \left[\frac{h \cdot b_{m-1} \cdot b_m}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{m-1}} \right] + P_m \cdot \left[\frac{h \cdot b_m^3}{12 \cdot E \cdot \bar{J}_m} + \frac{h \cdot b_m^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{m-1}} + \frac{h \cdot b_m^2}{24 \cdot E \cdot \bar{K}_m} \right] = \\
 & = \frac{L \cdot b_m}{2} \cdot \phi' + \gamma_{m-1} \quad (97)
 \end{aligned}$$

De posse das equações (85), (89), (93) e (97),
tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & P_1 \cdot \left[\frac{h \cdot b_1^2}{12 \cdot E \cdot \bar{K}_1} + \frac{h \cdot b_1^3}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_1} \right] + P_2 \cdot \left[\frac{h \cdot b_1 \cdot b_2}{24 \cdot E \cdot \bar{K}_1} \right] = \frac{L}{4} (L_x + 2 \cdot b_1) \cdot \phi' - \gamma_1 \\
 & P_1 \cdot \left[\frac{h \cdot b_1 \cdot b_2}{24 \cdot E \cdot \bar{K}_1} \right] + P_2 \cdot \left[\frac{h \cdot b_2^2}{12 \cdot E \cdot \bar{J}_2} + \frac{h \cdot b_2^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_1} + \frac{h \cdot b_2^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_2} \right] + \\
 & + P_3 \cdot \left[\frac{h \cdot b_2 \cdot b_3}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_2} \right] = \frac{L \cdot b_2}{2} \cdot \phi' + \gamma_1 - \gamma_2 \\
 & P_{i-1} \cdot \left[\frac{h \cdot b_{i-1} \cdot b_i}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{i-1}} \right] + P_i \cdot \left[\frac{h \cdot b_i^3}{12 \cdot E \cdot \bar{J}_i} + \frac{h \cdot b_i^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{i-1}} + \frac{h \cdot b_i^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_i} \right] + \\
 & + P_{i+1} \cdot \left[\frac{h \cdot b_i \cdot b_{i+1}}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_i} \right] = \frac{L \cdot b_i}{2} \cdot \phi' + \gamma_{i-1} - \gamma_i \\
 & P_{m-1} \cdot \left[\frac{h \cdot b_{m-1} \cdot b_m}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{m-1}} \right] + P_m \cdot \left[\frac{h \cdot b_m^3}{12 \cdot E \cdot \bar{J}_m} + \frac{h \cdot b_m^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{m-1}} + \frac{h \cdot b_m^2}{24 \cdot E \cdot \bar{K}_m} \right] = \\
 & = \frac{L \cdot b_m}{2} \cdot \phi' + \gamma_{m-1} \quad (98)
 \end{aligned} \right.$$

E a seguir, pode-se então escrever o sistema (98) em forma matricial a saber:

$$[R_\omega] \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_m \end{Bmatrix} = [S_\omega] \cdot \begin{Bmatrix} \phi' \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{m-1} \end{Bmatrix} \quad (99)$$

Mostra-se a seguir a formação das Matrizes $[R_\omega]$ e $[S_\omega]$. Porém antes, com o intuito de facilitar a notação definem-se os seguintes elementos que formarão a matriz $[R_\omega]$.

$$R_a = \left[\frac{h \cdot b_1^3}{3 \cdot E \cdot \bar{J}_1} + \frac{h \cdot b_1^2}{12 \cdot E \cdot \bar{K}_1} \right]$$

$$R_b = \left[\frac{h \cdot b_1 \cdot b_2}{24 \cdot E \cdot \bar{K}_1} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \left[\frac{h \cdot b_i^3}{12 \cdot E \cdot \bar{K}_1} + \frac{h \cdot b_i^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{i-1}} + \frac{h \cdot b_i^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_i} \right] \\ R_t &= \left[\frac{h \cdot b_{i-1} \cdot b_i}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{i-1}} \right] \\ R_s &= \left[\frac{h \cdot b_i \cdot b_{i+1}}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_i} \right] \end{aligned} \right\} i=2, 3, \dots, m-1$$

$$R_u = \left[\frac{h \cdot b_m^3}{12 \cdot E \cdot \bar{J}_m} + \frac{h \cdot b_m^2}{48 \cdot E \cdot \bar{K}_{m-1}} + \frac{h \cdot b_m^2}{24 \cdot E \cdot \bar{K}_m} \right]$$

Formação da matriz $[R_\omega]$

$$R_\omega = \begin{bmatrix} R_a, R_b, 0, \dots, \dots, 0 \\ R_b, R_r, R_s, 0, \dots, \dots, 0 \\ 0, R_t, R_r, R_s, 0, \dots, \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, \dots, 0, R_t, R_r, R_s, 0, \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, \dots, \dots, 0, R_t, R_r, R_s \\ 0, \dots, \dots, 0, R_s, R_u \end{bmatrix}$$

$[R_\omega]$ é uma matriz quadrada de ordem m

Formação da matriz $[S_\omega]$

$$S_\omega = \begin{bmatrix} \frac{L_y}{4} \cdot (L_x + 2 \cdot b_1), -1, 0, \dots, \dots, 0 \\ \frac{L_y \cdot b_2}{2}, 1, -1, 0, \dots, \dots, 0 \\ \vdots \\ \frac{L_y \cdot b_i}{2}, 0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0 \\ \vdots \\ \frac{L_y \cdot b_m}{2}, 0, \dots, \dots, 0, 1 \end{bmatrix}$$

$[S_\omega]$ é uma matriz quadrada de ordem m

2.3.3 - Equilíbrio à força normal nos pilares

De forma análoga ao item (2.2.4), deve-se agora proceder à imposição de equilíbrio à força normal em todos os pilares.

Os deslocamentos positivos são no sentido da base para o topo, e a força normal positiva é de tração.

A Fig. 34, mostra o pilar genérico C_i do painel pórtico de direção X.

Além da notação já definida, utiliza-se a seguinte:

F_i = Força normal no pilar C_i com $i=1,2,\dots, m-1$

A_{ci} = Área da secção transversal do pilar C_i

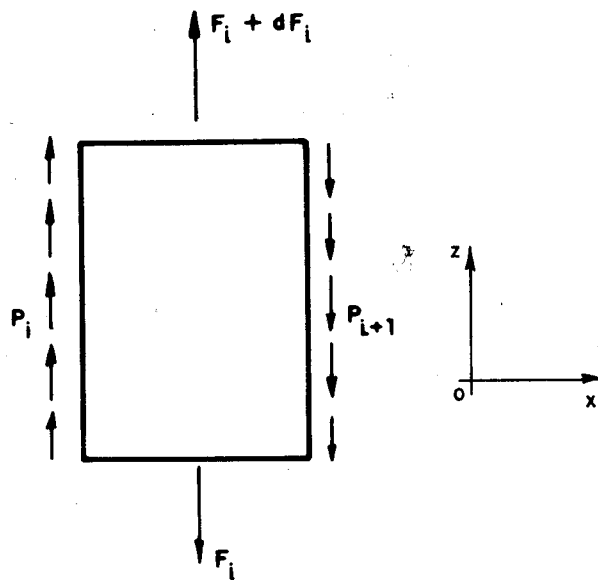


FIG. 34 - PILAR C_i

Pelo equilíbrio, chega-se a:

$$E \cdot A_{ci} \cdot \gamma_i'' = P_{i+1} - P_i \quad (100)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$

e também de modo análogo ao item (2.2.4), tem-se

$$F_i = E \cdot A_{ci} \cdot \gamma_i' \quad (101)$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$

onde (101) é a expressão que define a força normal no pilar C_i .

Escrevendo-se ainda (100), sob a forma mostrada a seguir, vem

$$\gamma_i'' - \frac{P_{i+1}}{E \cdot A_{ci}} + \frac{P_i}{E \cdot A_{ci}} = 0 \quad (100)$$

e passando (100) para forma matricial chega-se a:

$$[I] \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_1'' \\ \gamma_2'' \\ \vdots \\ \gamma_i'' \\ \vdots \\ \gamma_{m-1}'' \end{Bmatrix} + [K_\omega] \cdot \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (102)$$

[I] é uma matriz identidade de ordem (m-1).

A seguir mostra-se a formação da matriz $[K_\omega]$ de ordem (m-1) x (m).

$$K_{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E.A_{c1}}, & \frac{-1}{E.A_{c1}}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \frac{1}{E.A_{c2}}, & \frac{-1}{E.A_{c2}}, & 0, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, & \dots, & 0, & \frac{1}{E.A_{ci}}, & \frac{-1}{E.A_{ci}}, & 0, & \dots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, & \dots, & 0, & \frac{1}{E.A_{cm-1}}, & \frac{-1}{E.A_{cm-1}}, & \dots, & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.4 - Equação de equilíbrio à torção

Determina-se a seguir a equação de equilíbrio à torção da estrutura.

Q_y e Q_x , são forças cortantes agindo respectivamente na parede e no pórtico de direção X, ao nível do diafragma genérico, como mostra a Fig. 25.

Baseado nas mesmas considerações já demonstradas no item (2.2.5), tem-se:

$$\frac{Q_x}{2} = Q_{x1} + Q_{x2} + \dots + Q_{xi} + \dots + \frac{Q_{xm}}{2} \tag{103}$$

Onde $\frac{Q_x}{2}$ é a resultante dos esforços cortante agindo na metade do painel pórtico. E Q_{xi} agindo diretamente nos pilares C_i , são as componentes do esforço cortante $\frac{Q_x}{2}$.

Ainda fundamentado nas mesmas considerações do item (2.2.5), tem-se as seguintes expressões:

$$Q_i = 2 \cdot \frac{M_{si}}{h} \tag{104}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{x1} &= \frac{1}{2} (p_1 \cdot h \cdot b_1 + p_2 \cdot h \cdot \frac{b_2}{2}) \\ M_{xi} &= \frac{1}{2} (p_i \cdot h \cdot \frac{b_i}{2} + p_{i+1} \cdot h \cdot \frac{b_{i+1}}{2}) \\ M_{xm} &= \frac{1}{2} (p_m \cdot h \cdot b_m) \end{aligned} \right\} \text{com } i = 2, 3, \dots, m-1 \tag{105}$$

Substituindo-se (105) em (104) e em seguida em (103), chega-se a:

$$\frac{Q_x}{2} = (p_1 \cdot b_1 + p_2 \cdot b_2 + \dots + p_i \cdot b_i + \dots + p_m \cdot b_m) \quad (106)$$

e por (73), tem-se

$$\frac{Q_y}{2} = (-j_\omega \cdot \frac{L_x}{4} \cdot \phi''' + \frac{p_1 \cdot L_y}{2}) \quad (107)$$

Finalmente, substituindo (106) e (107) em (2), chega-se à equação de equilíbrio à torção dada por:

$$\frac{M_t}{4} = (-j_\omega \cdot \frac{L_x}{4} \cdot \phi''' + \frac{p_1 \cdot L_y}{2}) \cdot \frac{L_x}{2} + (p_1 \cdot b_1 + \dots + p_i \cdot b_i + \dots + p_m \cdot b_m) \cdot \frac{L_y}{2} \quad (108)$$

escrevendo-se (108) em forma matricial vem

$$\frac{M_t}{4} = \left[-j_\omega \cdot \frac{L_x^2}{8}, 0, \dots, 0 \right] \cdot \begin{Bmatrix} \phi''' \\ \gamma_1'' \\ \gamma_2'' \\ \vdots \\ \gamma_i'' \\ \vdots \\ \gamma_{m-1}'' \end{Bmatrix} + \left[\left(\frac{b_1 \cdot L_y}{2} + \frac{L_x \cdot L_y}{4} \right), \frac{b_2 \cdot L_y}{2}, \dots, \frac{b_i \cdot L_y}{2}, \dots, \frac{b_m \cdot L_y}{2} \right] \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_m \end{Bmatrix} \quad (109)$$

Ou ainda em forma abreviada, escreve-se (109) a seguir

$$[L] \cdot \begin{Bmatrix} \phi''' \\ \gamma_1'' \\ \gamma_2'' \\ \vdots \\ \gamma_{m-1}'' \end{Bmatrix} + [M] \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_m \end{Bmatrix} = \frac{M_t}{4} \quad (110)$$

onde [L] e [M], são matrizes de ordem lxm.

2.3.5 - Equação diferencial da estrutura formada por painéis paredes e pórticos

Com as equações (100) e (109), chega-se a um sistema de equações, que em notação matricial escreve-se:

$$[G_\omega] \cdot \begin{Bmatrix} \phi'' \\ \gamma_1'' \\ \gamma_2'' \\ \vdots \\ \gamma_i'' \\ \vdots \\ \gamma_{m-1}'' \end{Bmatrix} + [H_\omega] \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{M_t}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (111)$$

As matrizes $[G_\omega]$ e $[H_\omega]$, podem ser facilmente obtidas com o auxílio das expressões (102) e (110), de maneira idêntica vista no item (2.2.6), conforme mostra-se a seguir:

$$G_\omega = \begin{bmatrix} [L] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \quad e \quad H_\omega = \begin{bmatrix} [M] \\ [K_\omega] \end{bmatrix}$$

Tem-se então a formação das matrizes $[G_\omega]$ e $[H_\omega]$

$$G_\omega = \begin{bmatrix} -j_\omega \frac{L^2}{8}, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, 1, 0, \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, \dots, 0, 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $[G_\omega]$ é de ordem $m \times m$.

$$H_{\omega} = \begin{bmatrix} \left(\frac{b_1 \cdot L_y}{2} + \frac{L_x \cdot L_y}{4}\right), \frac{b_2 \cdot L_y}{2}, \dots, \frac{b_i \cdot L_y}{2}, \dots, \frac{b_m \cdot L_y}{2} \\ \frac{1}{E \cdot A_{c1}}, \frac{-1}{E \cdot A_{c1}}, 0, \dots, 0 \\ 0, \frac{1}{E \cdot A_{c2}}, \frac{-1}{E \cdot A_{c2}}, 0, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0, \frac{1}{E \cdot A_{ci}}, \frac{-1}{E \cdot A_{ci}}, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, \dots, 0, \frac{1}{E \cdot A_{cm-1}}, \frac{-1}{E \cdot A_{cm-1}} \end{bmatrix}$$

$[H_{\omega}]$ é uma matriz quadrada de ordem m

Sejam então os vetores $\{U_{\omega}\}$ e $\{C_{\omega}\}$, definidos como:

$$U_{\omega} = \begin{Bmatrix} \phi' \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_i \\ \vdots \\ \gamma_{m-1} \end{Bmatrix} \quad e \quad C_{\omega} = \begin{Bmatrix} \frac{M_t}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}_{m \times 1} \quad (112)$$

Por (99) e $\{U_{\omega}\}$ definido em (112), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_m \end{Bmatrix} = [R_{\omega}]^{-1} \cdot [S_{\omega}] \cdot \{U_{\omega}\} \quad (113)$$

A equação matricial (113), define os esforços constantes distribuídas nas vigas b_i , ao longo de toda a altura.

Substituindo-se (113) em (111) e por (112) obtêm-se

$$[G_{\omega}] \cdot \{U''\} + [H_{\omega}] \cdot [R_{\omega}]^{-1} \cdot [S_{\omega}] \cdot \{U_{\omega}\} = \{C_{\omega}\} \quad (114)$$

Fazendo-se

$$[T_{\omega}] = [H_{\omega}] \cdot [R_{\omega}]^{-1} \cdot [S_{\omega}] \quad (115)$$

E substituindo-se (115) em (114), chega-se a um sistema de equações diferenciais que resolvido permite determinar todos os deslocamentos incôgnitas da estrutura e consequentemente os esforços definidos em (73), (101) e (113).

$$[G_{\omega}] \cdot \{U''\} + [T_{\omega}] \cdot \{U_{\omega}\} = \{C_{\omega}\} \quad (116)$$

O sistema (116) será também resolvido numericamente por intermédio do método das "diferenças finitas", cujo resumo encontra-se no Apêndice I, conforme já mencionado no item (2.2.6).

2.3.6 - Condições de contorno e balanceamento das equações

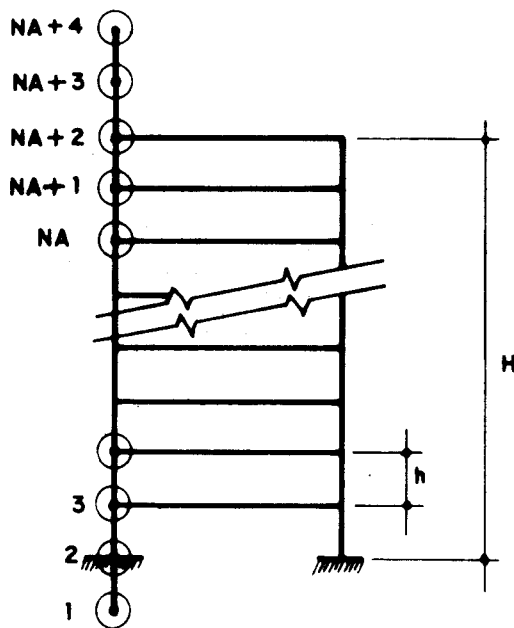
Através do sistema definido em (116), tem-se o comportamento da estrutura formada por painéis pòrticos e painéis paredes, perpendiculares entre si, e dispostos de forma periférica. Para a solução do sistema de equações (116), serão necessárias as seguintes condições de contorno inerentes ao comportamento básico da estrutura, que são definidos a seguir:

$$\left. \begin{array}{l} \phi(0) = 0 \quad \phi'(0) = 0 \quad \phi''(H) = 0 \\ \gamma_i(0) = 0 \quad \gamma_i'(H) = 0 \end{array} \right\} \text{-----} (117)$$

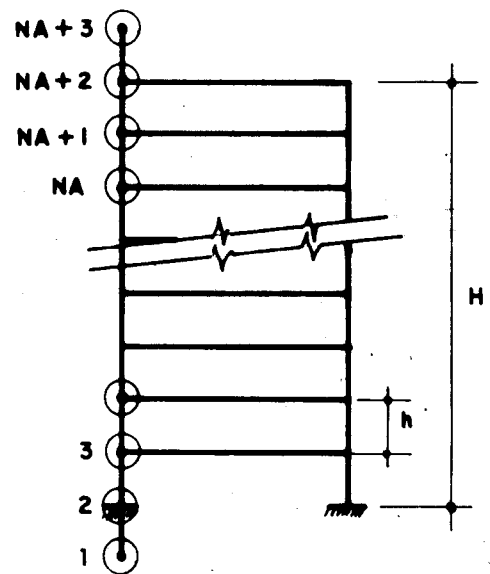
Para a solução do sistema de equações definido em (116), serão utilizados operadores de "diferenças finitas", com cinco pontos, aplicados ao nível de cada andar, espaçados de h . Necessita-se porém a inclusão de dois pontos fictícios no topo e um na base para a aplicação da função $\phi(z)$ conforme mostra a Fig. 35(a); e um ponto fictício no topo e um na base para as funções $\gamma_i(z)$, como indica a Fig. 35(b).

Sejam

- m - número de pilares C_i
- NA - número de andares
- H - altura total do edifício
- h - altura dos andares



a) DISPOSIÇÃO DOS PONTOS DE APLICAÇÃO DOS OPERADORES PARA $\phi(z)$



b) DISPOSIÇÃO DOS PONTOS DE APLICAÇÃO DOS OPERADORES PARA $\gamma_i(z)$

FIG. 35

O número de incógnitas para este caso será

para γ_i $(NA+3).(m-1)$

para ϕ $(NA+4)$

$$\therefore n^{\circ} \text{ INC} = (NA.m+3.m+1) \quad (118)$$

O número de equações, tem-se

para ϕ 1	} aplicados $(NA+1)$ vezes
para γ_i $(m-1)$	

$$\therefore n^{\circ} \text{ Eq.} = (NA.m+m)+CC \quad (119)$$

Sendo CC o número de condições de contorno do problema.

por (117) tem-se que

$$CC = (2m+1) \quad (120)$$

Substituindo-se (120) em (119), vem:

$$N^{\circ} \text{ Eq.} = (NA+3.m+1) \quad (121)$$

igualando-se (121) a (118), tem-se que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Assim o problema, está em condições de ser resolvido, sem necessitar de nenhuma equação ou incógnita adicionais.

CAPÍTULO 3

ESTRUTURAS TUBULARES COM NÚCLEO INTERNO E ESTRUTURAS FORMADA POR PAINÉIS PAREDES E PÓRTICOS COM NÚCLEO INTERNO.

3.1 - INTRODUÇÃO

Para as estruturas já estudadas no Cap. 2, itens (2.2) e (2.3), serão acrescentados núcleos estruturais internos. A combinação desses elementos estruturais definem o tipo de estruturas "tube-in-tube".

Todas as hipóteses e considerações feitas no Cap. 2, permanecerão válidas neste estudo.

A fim de evitar repetições, e tornar este assunto uma leitura menos exaustiva, serão resumidos a seguir, apenas alguns tópicos básicos necessários.

a) As estruturas aqui analisadas, serão referenciadas a um sistema de eixos coordenados OXYZ. A origem O do sistema é tomada na base da estrutura e coincidente com o seu centro de torção.

b) O carregamento será de torção em torno de OZ, positivo quando no sentido horário, para um observador olhando-o no sentido negativo.

c) As lajes serão consideradas diafragmas infinitamente rígidos no seu plano horizontal e extremamente flexíveis no plano transversal.

d) As estruturas também serão simétricas em relação aos eixos OX e OY. Quanto aos núcleos os mesmos poderão estar ou não contraventados por lintéis.

3.2 - NÚCLEO ESTRUTURAL SUBMETIDO A TORÇÃO

Chamar-se-á de "núcleo estrutural" ou simplesmente "núcleo" de um edifício, a qualquer combinação tri-dimensional de paredes com espessuras muito menores do que as outras dimensões, formando uma secção aberta, geralmente de concreto armado. É cada vez mais frequente o uso de núcleos em estruturas de edifícios altos, devido a sua grande capacidade de absorver esforços.

3.2.1 - Análise de núcleos submetidos a torção

A análise aqui desenvolvida será válida somente para núcleos com dupla simetria em relação aos eixos OX e OY. As paredes que formam o núcleo, serão analisadas baseada na teoria de flexo-torção de Vlassov, para peças de secção delgada. Os esforços concentrados nos lintéis ao nível de cada andar serão substituídos por um esforço cortante distribuído ao longo da altura. As lajes obedecerão às condições explícitas em 3.1(c). Permanecendo válidos também os itens 3.1(a), 3.1(b).

Com o auxílio da Fig. 36, define-se a seguir as características geométricas do núcleo.

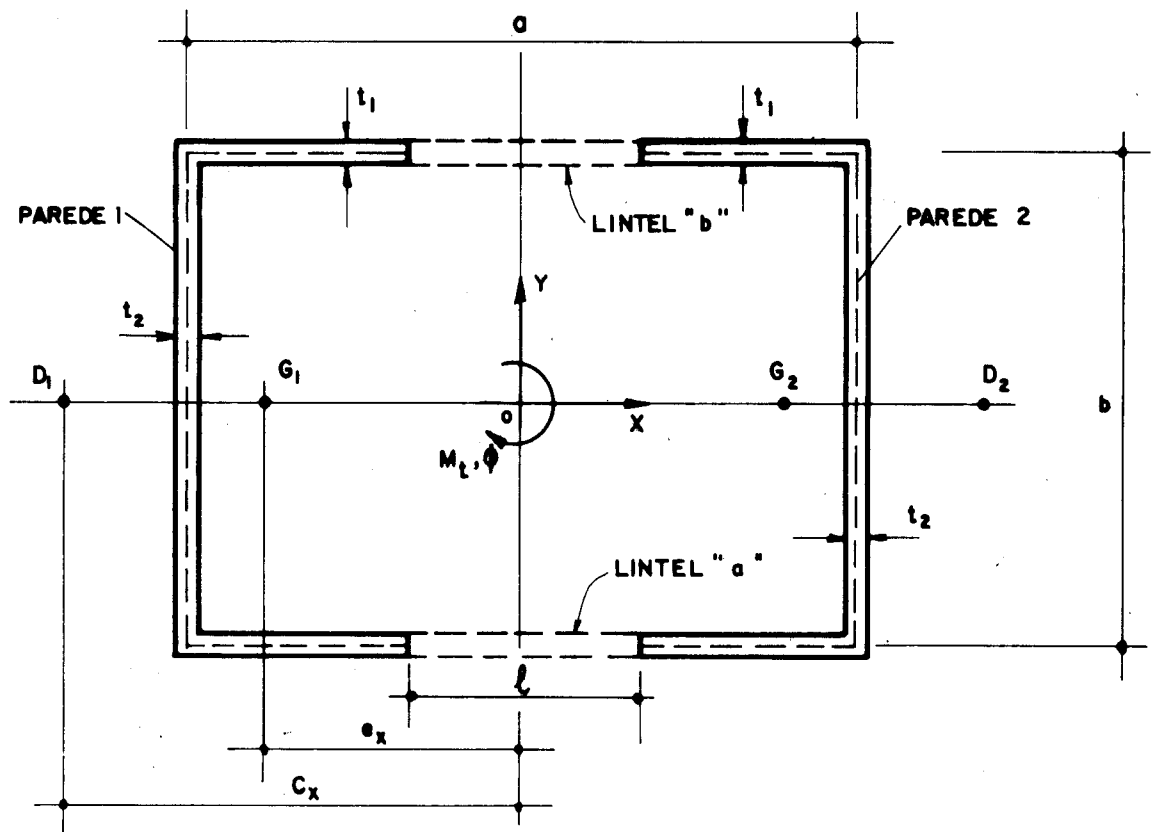


FIG. 36 - NÚCLEO ESTRUTURAL - PLANTA BAIXA

- G_i - Centro de gravidade da parede i , quando considerada isolada do núcleo.
- D_i - Centro de torção da parede i , quando considerada isolada do núcleo.
- O - Origem do sistema OXYZ, e também centro de torção do núcleo.
- C_x - Distância do centro de torção de uma parede i até a origem O .
- e_x - Distância do centro de gravidade de uma parede i até a origem O .
- a, b - Dimensões do núcleo
- l - Vão do lintel
- t_1, t_2 - Espessura das paredes do núcleo

Seja p_i um ponto genérico do diafragma, o qual sofre um movimento de corpo rígido, ou seja uma translação e rotação no seu plano, passando a ocupar a posição p_i'' , conforme mostra a Fig. 37.

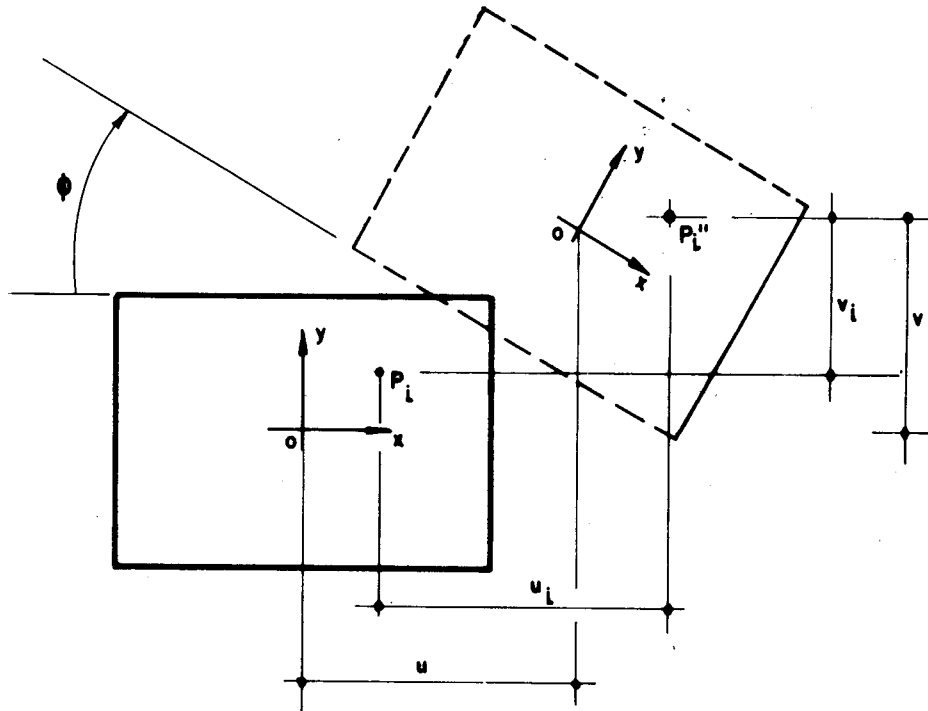


FIG. 37- MOVIMENTO DE CORPO RÍGIDO DO DIAFRAGMA

Sejam

- u - Deslocamento horizontal de O , segundo OX
- v - Deslocamento horizontal de O , segundo OY
- ϕ - Rotação do diafragma em torno de OZ
- u_i e v_i , são os deslocamentos do ponto p_i , que serão definidos a partir da Fig. 37.

Quanto ao sentido positivo de ϕ , u , v , são os indicados na Fig. 37:

- ϕ positivo quando horário em torno de OZ
- u positivo direção coincidente a OX
- v positivo direção coincidente com OY

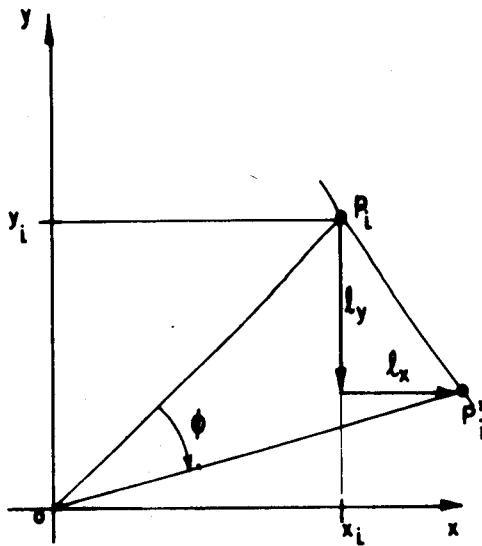


FIG. 38 - DESLOCAMENTO DO PONTO P_i

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u + l_x \\ v_i &= v - l_y \end{aligned} \right\} \text{----- (122)}$$

onde $l_x = y_i \cdot \phi$ e $l_y = x_i \cdot \phi$, que substituindo-se nas expressões (122), levamos

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u + y_i \cdot \phi \\ v_i &= v - x_i \cdot \phi \end{aligned} \right\} \text{----- (123)}$$

Impondo-se giros ϕ_1 e ϕ_2 , nas paredes 1 e 2 respectivamente, elas girarão em torno de seus respectivos centros de torção D_1 e D_2 , cujas coordenadas são:

$$D_1(-C_x; 0)$$

$$D_2(C_x; 0)$$

Por condição do problema tem-se $\phi_1 = \phi_2 = \phi$.
Substituindo-se as coordenadas de D_1 e D_2 nas expressões (123), chega-se assim aos deslocamentos dos pontos D_1 e D_2 , conforme definidos nas expressões abaixo:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_2 = u \\ v_1 &= v + C_x \cdot \phi \\ v_2 &= v - C_x \cdot \phi \end{aligned} \right\} \text{----- (124)}$$

Sejam então as paredes 1 e 2 do núcleo, não conectadas por lintéis, e consideradas independentes uma da outra.

Pela Eq.(33) da teoria de flexo-torção cujo resumo encontra-se no Apêndice II, tem-se:

$$\begin{aligned} M_t &= M_\ell + M_{ft} \\ M_\ell &= G \cdot J_T \cdot \phi' \\ M_{ft} &= -E \cdot J_\omega \cdot \phi'' \end{aligned}$$

onde

M_t - Momento torçor total

M_ℓ - Momento de torção livre

M_{ft} - Momento de flexo-torção

E - Módulo de elasticidade longitudinal

G - Módulo de elasticidade transversal

J_t - Momento de inércia a torção

J_ω - Momento setorial de inércia

Sejam J_x e J_y , momentos de inércia de cada uma das paredes do núcleo, tomados em relação aos seus respec-

tivos centros de gravidade G_1 e G_2 . Por simetria tem-se: $J_{x1} = J_{x2} = J_x$ e $J_{y1} = J_{y2} = J_y$. E as expressões dos esforços cortantes Q_x e Q_y nas paredes, em função dos deslocamentos u e v , definidos como:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \frac{d}{du}(E \cdot J_y \cdot u'') \quad \therefore \quad Q_x = E \cdot J_y \cdot u''' \\ Q_y &= \frac{d}{dv}(E \cdot J_x \cdot v'') \quad \therefore \quad Q_y = E \cdot J_x \cdot v''' \end{aligned} \right\} \text{---(125)}$$

Assim para as paredes 1 e 2, chega-se às seguintes expressões, a partir de (33) do apêndice II e (125):

Parede 1

$$\left. \begin{aligned} M_{t1} &= G \cdot J_t \cdot \phi_1' - E \cdot J_\omega \cdot \phi_1'' \\ Q_{x1} &= E \cdot J_y \cdot u_1''' \\ Q_{y1} &= E \cdot J_x \cdot v_1''' \end{aligned} \right\} \text{---(126)}$$

Parede 2

$$\left. \begin{aligned} M_{t2} &= G \cdot J_t \cdot \phi_2' - E \cdot J_\omega \cdot \phi_2'' \\ Q_{x2} &= E \cdot J_y \cdot u_2''' \\ Q_{y2} &= E \cdot J_x \cdot v_2''' \end{aligned} \right\} \text{---(127)}$$

M_{t1} e M_{t2} são momentos torçores nas paredes 1 e 2 do núcleo, atuando respectivamente em D_1 e D_2 .

O momento torçor atuante no núcleo, é então dado por

$$M_t = M_{t1} + M_{t2} + M_z \quad (128)$$

onde M_z é o momento proveniente da influência dos esforços cortantes Q_{y1} e Q_{y2} , em torno do eixo OZ , que facilmente pode ser obtido, observando a Fig. 39. Assim pode-se escrever

$$M_z = -Q_{y1} \cdot C_x + Q_{y2} \cdot C_x \quad (129)$$

E ainda na Fig. 39, mostra-se os esforços definidos pelas expressões (126) e (127).

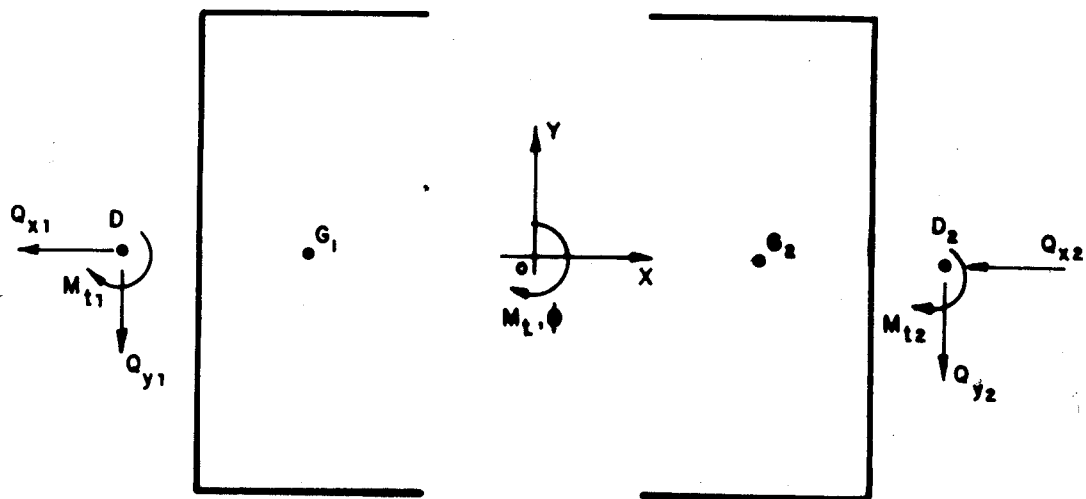


FIG. 39 - ESFORÇOS NAS PAREDES DO NUCLEO QUANDO CONSIDERADAS ISOLADAS.

Substituindo-se (126), (127) e (129) em (128)

vem:

$$M_t = G \cdot J_t \cdot (\phi_1' + \phi_2') - E \cdot J_\omega \cdot (\phi_1'' + \phi_2'') + C_x (Q_{y2} - Q_{y1})$$

desenvolvendo a expressão acima, lembrando que $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ e por (124), chega-se a

$$M_t = 2 \cdot G \cdot J_t \cdot \phi' - 2 \cdot E \cdot \phi'' \cdot (J_\omega + J_x \cdot C_x^2) \quad (130)$$

Tomando-se a seguir a Eq.(4.7), do resumo da teoria de flexo-torção, encontrada no Apêndice II deste trabalho, tem-se

$$J_{\omega}^* = J_{\omega} + J_y \cdot C_y^2 + J_x \cdot C_x^2 \quad (4.7) \quad \text{Apêndice II}$$

Como a situação estudada refere-se a núcleos com dupla simetria; $C_y = 0$, assim a expressão (45) acima fica reduzida a:

$$J_{\omega}^* = J_{\omega} + J_x \cdot C_x^2 \quad (131)$$

Onde J_{ω}^* é o momento setorial de inércia para u ma parede em relação ao ponto 0, origem do sistema OXYZ, e centro de torção do núcleo.

Substituindo-se (131) em (130), chega-se a expressão do momento torçor, atuante no núcleo, sem levar em consideração à ação dos lintéis conforme já mencionado.

$$M_t = -2 \cdot E \cdot J_{\omega}^* \cdot \phi'' + 2 \cdot G \cdot J_t \cdot \phi' \quad (132)$$

A seguir estuda-se a situação em que as paredes 1 e 2 que compõem o núcleo, são conectadas por lintéis, ao nível de cada andar. Os lintéis são engastados nas paredes, com pontos de momento nulo nos centros dos seus vãos, e serão substituídos por um meio contínuo de rigidez equivalente ao longo da altura, conforme mostra a Fig. 40.

Sejam f_a e f_b força cortante distribuída nos lintéis e T força normal nas paredes 1 e 2.

Pelo equilíbrio das forças verticais para uma das paredes, escreve-se:

$$\Sigma \vec{F}(z) = 0$$

$$T + dT - T + f_a \cdot dz + f_b \cdot dz = 0$$

$$dT = -(f_a + f_b) dz$$

$$\frac{dT}{dz} = -(f_a + f_b) \quad (133)$$

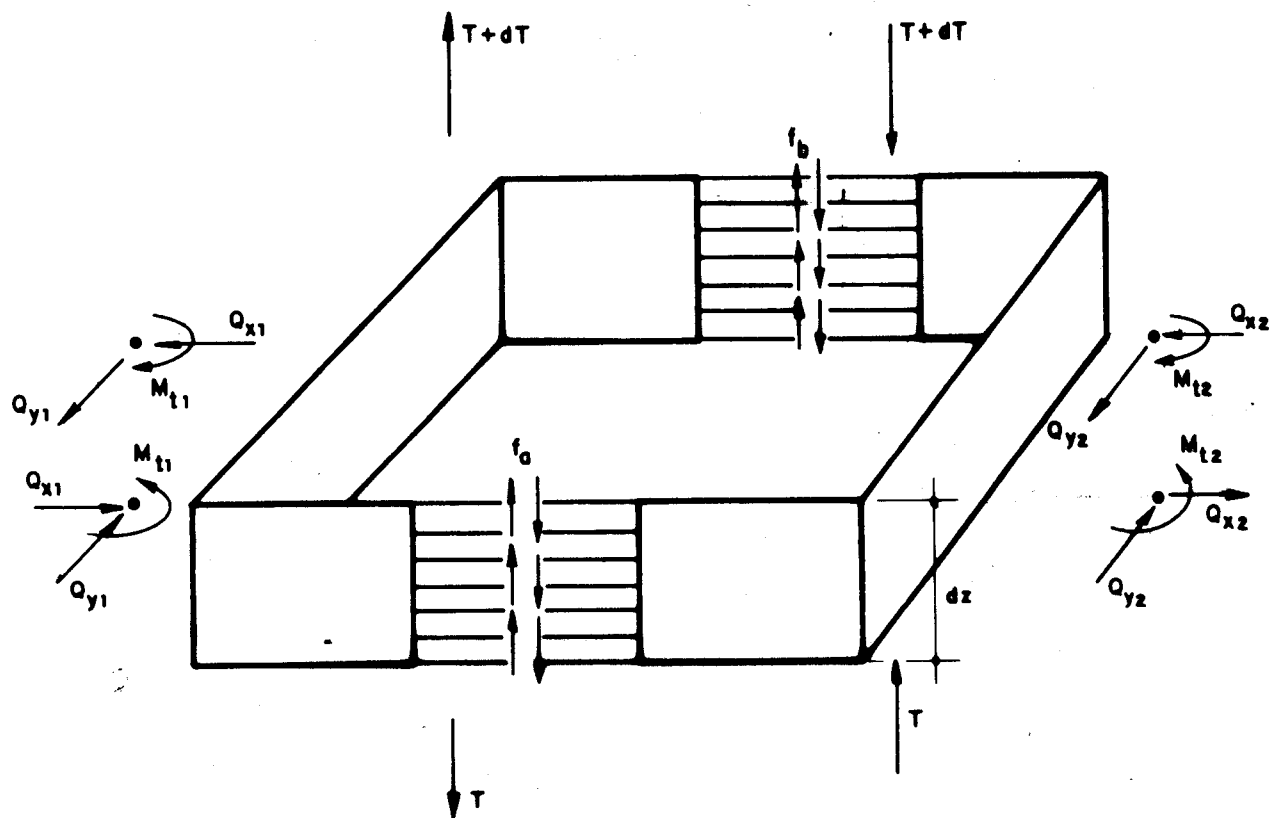


FIG. 40 - ESFORÇOS CORTANTES E MOMENTOS TORÇORES NAS PAREDES DO NÚCLEO, DEVIDO AO ESFORÇO CORTANTE DISTRIBUÍDO PROVENIENTE DOS LINTÉIS.

A simetria de forma e o carregamento de torção, implica em $f_a = -f_b$.

Logo

$$\frac{dT}{dz} = 0 \quad (134)$$

Pelo equilíbrio a momento para as paredes 1 e 2 em torno dos eixos paralelos a OX e OY com origem no centro de gravidade de cada parede, tem-se:

Para a parede 1

$$f_a \cdot dz \cdot \frac{b}{2} - f_b \cdot dz \cdot \frac{b}{2} - Q_{y1} \cdot dz = 0 \quad \therefore \quad Q_{y1} = (f_a - f_b) \cdot \frac{b}{2}$$

$$f_a \cdot dz \cdot e_x + f_b \cdot dz \cdot e_x + Q_{x1} \cdot dz = 0 \quad \therefore \quad Q_{x1} = -(f_a + f_b) \cdot e_x$$

Para a parede 2

$$-f_a \cdot dz \cdot \frac{b}{2} + f_b \cdot dz \cdot \frac{b}{2} - Q_{y2} \cdot dz = 0 \quad \therefore \quad Q_{y2} = -(f_a - f_b) \cdot \frac{b}{2}$$

$$f_a \cdot dz \cdot e_x + f_b \cdot dz \cdot e_x + Q_{x2} \cdot dz = 0 \quad \therefore \quad Q_{x2} = -(f_a + f_b) \cdot e_x$$

Assim sendo

$$\left. \begin{aligned} Q_{x1} &= Q_{x2} = -(f_a + f_b) \cdot e_x = 0 \\ Q_{y1} &= -Q_{y2} = (f_a - f_b) \cdot \frac{b}{2} \end{aligned} \right\} \text{----- (135)}$$

Seja a seguir o esqueleto da parede 1 do núcleo, mostrado na Fig. 41. Os pontos 1 e 2 são pontos médios dos lintéis.

Ainda com relação à Fig. 41, sejam W_1 e W_2 , áreas setoriais nos pontos 1 e 2, com polo em D_1 . Por condição do problema

$$W_1 = -W_2 = W \quad (136)$$

onde

$$W = -C_x \cdot \frac{b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} \quad (137)$$

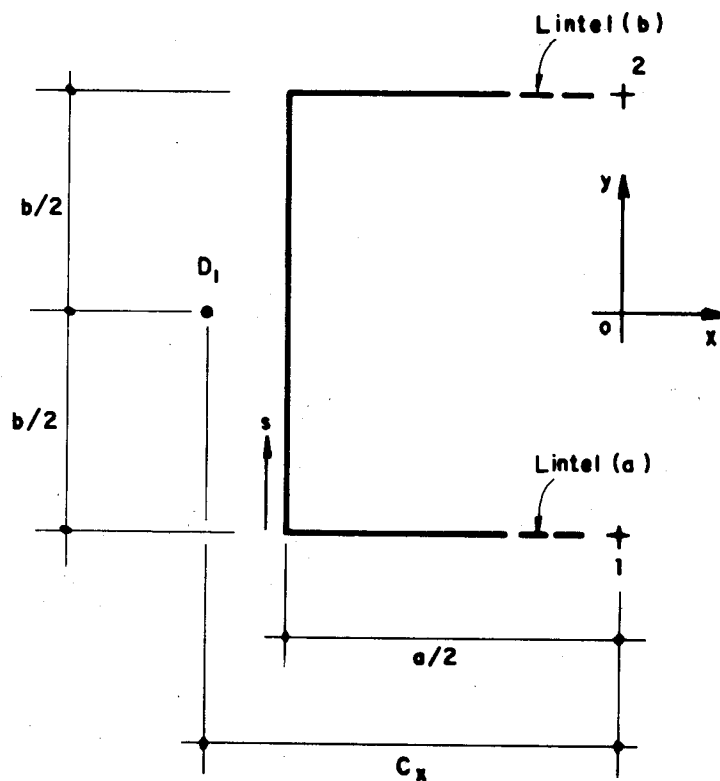


FIG. 41 - ESQUELETO DA PAREDE 1 DO NÚCLEO

O bimomento produzido pelas forças cortantes nos lintéis em um elemento da parede (1) é definido pela teoria de flexo-torção como sendo

$$dB_{\ell} = f_a \cdot dz \cdot W_1 + f_b \cdot dz \cdot W_2$$

por (136), chega-se a

$$dB_{\ell} = (f_a - f_b) \cdot W \cdot dz \quad (138)$$

Como o momento de flexo-torção M_{ft} é dado por

$$M_{ft} = - \frac{dB_{\ell}}{dz} \quad (139)$$

Por (138) e (139), tem-se para a parede (1)

$$M_{ft_1} = (f_b - f_a) \cdot W \quad (140)$$

Analogamente, para a parede (2), encontra-se tam
bẽm

$$M_{ft_2} = (f_b - f_a) \cdot W \quad (141)$$

Seja entãõ M_λ o momento em torno de OZ devido à influência dos lintõis. Daí segue-se

$$M_\lambda = M_{ft_1} + M_{ft_2} - Q_{y1} \cdot C_x + Q_{y2} \cdot C_x \quad (142)$$

Substituindo-se as expressões de Q_{y1} e Q_{y2} definidas por (135), (140) e (141) em (142) vem:

$$M_\lambda = 2 \cdot (f_b - f_a) \cdot W - (f_a - f_b) \cdot \frac{b}{2} \cdot C_x - (f_a - f_b) \cdot \frac{b}{2} \cdot C_x$$

desenvolvendo-se chega-se a

$$M_\lambda = (2 \cdot W + b \cdot C_x) \cdot (f_b - f_a) \quad (143)$$

Fazendo-se

$$K = (2 \cdot W + b \cdot C_x) \quad (144)$$

e substituindo-se em (143), vem

$$M_\lambda = K \cdot (f_b - f_a) \quad (145)$$

Seja a equaçãõ (137)

$$W = -C_x \cdot \frac{b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} \quad (137)$$

$$2W = -C_x \cdot b + a \cdot b$$

$$a \cdot b = 2 \cdot W + C_x \cdot b \quad (146)$$

Comparando-se (146) com (144), vem

$$K = a \cdot b \quad (147)$$

Isto é K é igual a área líquida interna ao esqueleto que forma o núcleo.

Substituindo-se (147) em (145), chega-se a expressão do momento M_ℓ em torno de OZ, devido a influência dos lintéis.

$$M_\ell = (f_b - f_a) \cdot a \cdot b \quad (148)$$

Então para o caso mais geral, em que as paredes que formam o núcleo estejam contraventadas por lintéis, a expressão (132) deverá ser acrescida de (148), chegando-se assim a

$$M_t = -2 \cdot E \cdot J_\omega^* \cdot \phi'' + 2 \cdot G \cdot J_t \cdot \phi' + M_\ell$$

$$M_t = -2 \cdot E \cdot J_\omega^* \cdot \phi'' + 2 \cdot G \cdot J_t \cdot \phi' + K \cdot (f_b - f_a) \quad (149)$$

Levando-se agora em consideração a compatibilidade de deslocamentos verticais para o ponto central dos lintéis, tem-se o seguinte desenvolvimento a partir da Fig. 42.

Seccionando os lintéis em seus pontos médios, seja δ_ℓ o deslocamento relativo vertical nestes pontos devido à flexão e torção nas paredes.

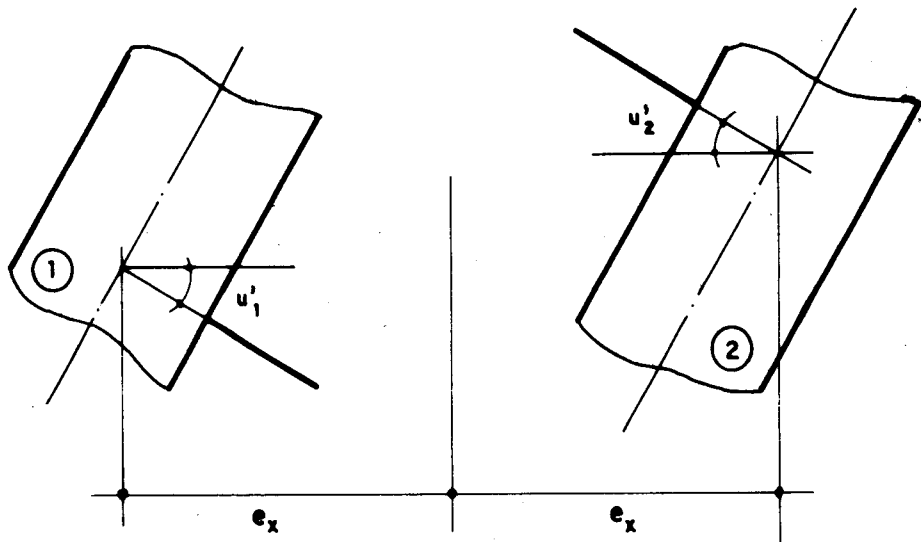


FIG. 42 - DESLOCAMENTO DO LINTEL SECCIONADO

Com as convenções para os sentidos positivos de esforços e deslocamentos das Figs. (40), (42) e (43), vem

$$\delta_{\ell} = \delta_{\omega} + \delta_{c} \quad (150)$$

onde

δ_{ω} - Deslocamento relativo na vertical entre as duas paredes, devido a deformação axial produzida por T em G_1 e G_2 .

δ_{c} - Deslocamento relativo na vertical devido ao esforço cortante nos lintéis.

Analisando-se inicialmente o lintel (a) tem-se

$$\delta_{\ell(a)} = (u'_2 + u'_1) \cdot e_x + (v'_2 - v'_1) \cdot \frac{b}{2} - (\phi'_2 + \phi'_1) \cdot W$$

Por (124) e (144), a expressão acima fica

$$\delta_{\ell(a)} = 2 \cdot u' \cdot e_x - (2 \cdot W + C_x \cdot b) \cdot \phi'$$

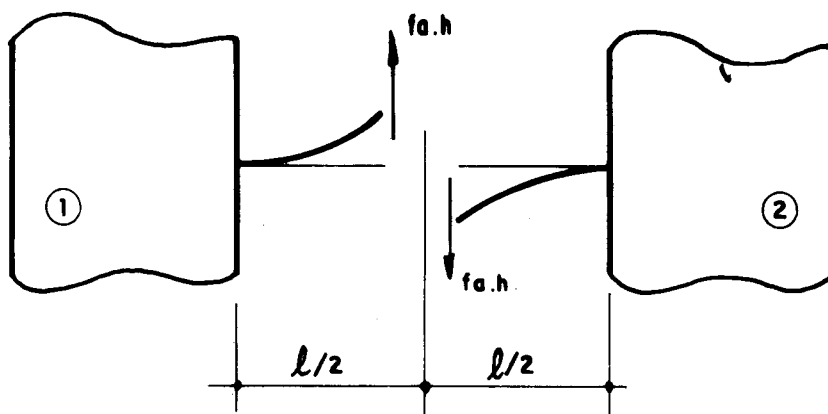


FIG. 43 - ESFORÇO CORTANTE NO LINTEL (a)

$$\delta_{\ell}(a) = 2 \cdot u' \cdot e_x - K \cdot \phi' \quad (151)$$

$$\delta_{\omega}(a) = \int_0^z \frac{2 \cdot T}{E \cdot A_{\omega}} \cdot dz \quad (152)$$

onde A_{ω} é a área da secção transversal de uma parede.

Com o auxílio da Fig. 43 tem-se:

$$\delta_c(a) = 2 \cdot f_a \cdot h \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3 \cdot E \cdot J_{\ell}} \quad (153)$$

onde J_{ℓ} é o momento de inércia do lintel.

Desenvolvendo-se (153), vem

$$\delta_c(a) = \frac{f_a \cdot h \cdot \ell^3}{12 \cdot E \cdot J_{\ell}} \quad (154)$$

Chamando-se

$$\beta = \frac{12.E.J_\ell}{\ell^3.h} \quad (155)$$

E substituindo-se em (154), vem

$$\delta_c = \frac{f_a}{\beta} \quad (156)$$

Logo por condição de compatibilidade expressa por (150), e substituindo-a por (151), (152) e (156) chega-se a:

$$2.u'.e_x^{-K.\phi'} = \int_0^z \frac{2.T}{E.A_\omega}.dz + \frac{f_a}{\beta} \quad (157)$$

De modo análogo, impõem-se as mesmas condições para o lintel b, obtendo-se assim:

$$2.u'.e_x^{+K.\phi'} = \int_0^z \frac{2.T}{E.A_\omega}.dz + \frac{f_b}{\beta} \quad (158)$$

Subtraindo-se, estas duas últimas expressões, ou seja (157) e (158) tem-se

$$-2.K.\phi' = \frac{1}{\beta} (f_a - f_b)$$

ou ainda

$$2.K.\beta.\phi' = (f_b - f_a) \quad (159)$$

Substituindo-se (159) em (149), obtem-se então a expressão final do momento torçor atuante no núcleo, quando este estiver contraventado por lintéis.

$$M_t = 2.G.J_t.\phi' - 2.J_\omega^*.E.\phi''' + 2.\beta.K^2.\phi'$$
$$M_t = (2.G.J_t + 2.\beta.K^2).\phi' - 2.E.J_\omega^*.\phi''' \quad (160)$$

A solução da equação diferencial (160), fornece as rotações das secções do núcleo ao longo de toda a altura. E em (160), quando $\beta = 0$, tem-se o caso em que o núcleo não está contraventado por lintéis.

3.2.2 - Determinação dos esforços no núcleo

Com a solução da Eq.(160), pode-se então determinar os esforços nas paredes e lintéis que formam o núcleo.

A Fig. 44 fornece a perspectiva do núcleo e o sentido positivo dos deslocamentos, nas secções do núcleo ao longo da altura.

Discretizando-se o núcleo da Fig. 44, obtem-se as várias partes que o compõem, bem como seus respectivos esforços de interação conforme mostra a Fig. 45.

O núcleo que está sendo analisado é constituído de duas paredes (1) e (2), as quais podem ser subdivididas em (1-A), (1-B) e (2-A) e (2-B). Devido a simetria de forma e carregamento de torção, pode-se considerar apenas as paredes (1-A) e (1-B) mostradas na Fig. 45.

Sejam f_a e f_b , forças cortantes distribuídas nos lintéis (a) e (b). Devido as condições do problema acima citadas, vem

$$f_b = -f_a = f \quad (161)$$

por (159), tem-se

$$2.K.\beta.\phi' = f_b - f_a$$

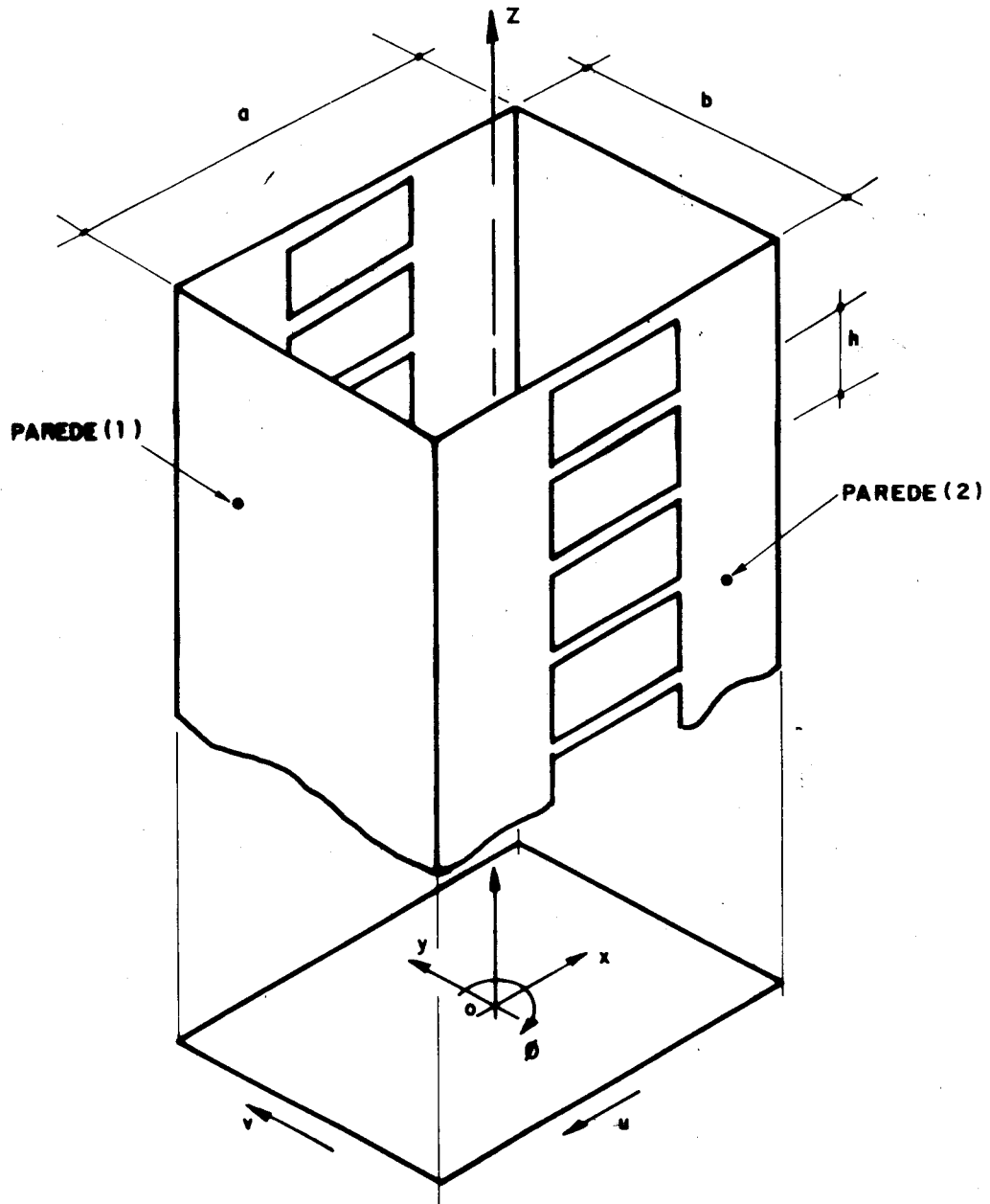


FIG. 44 - PERSPECTIVA DO NÚCLEO

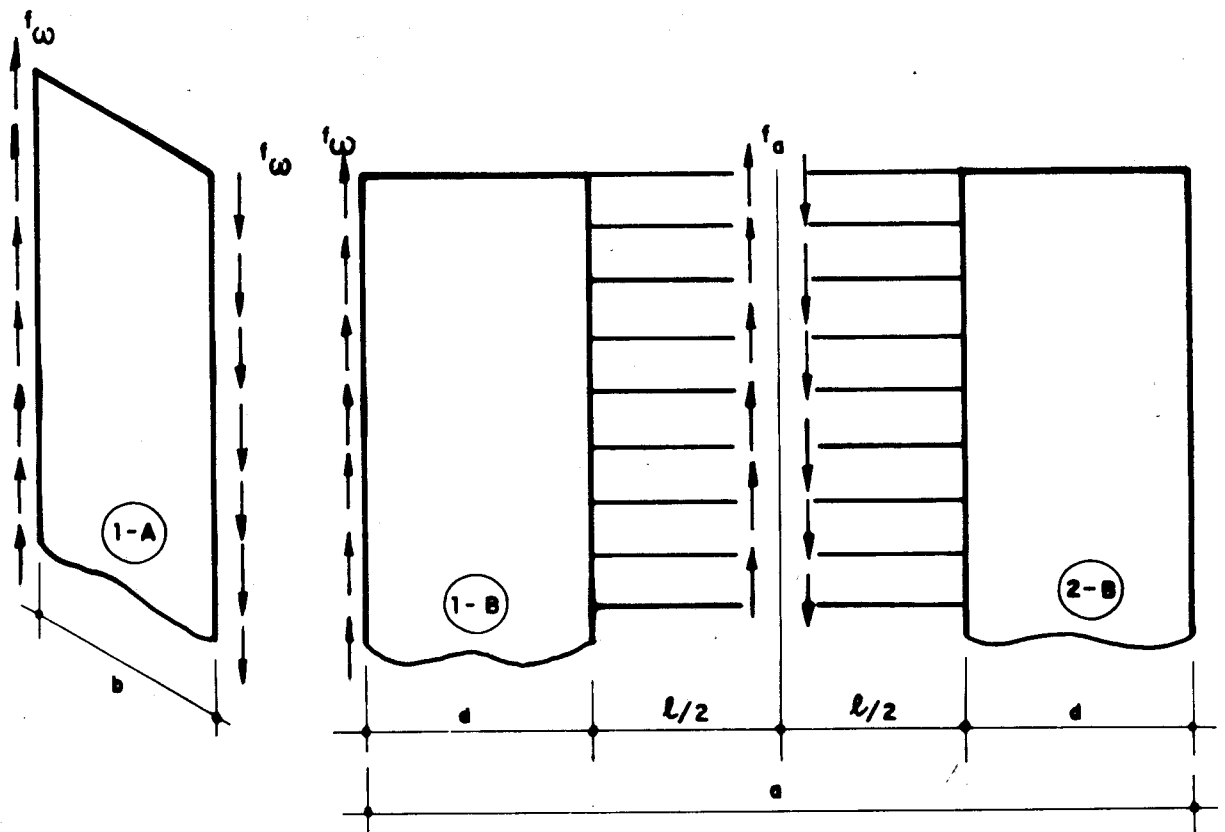


FIG. 45 - NÚCLEO DISCRETIZADO

Logo, pode-se escrever

$$f = K \cdot \beta \cdot \phi' \quad (162)$$

Seja a seguir, o elemento genérico da parede (1-A), conforme indicado na Fig. 46.

Usa-se a seguinte notação:

f_ω - é a força cortante distribuída, nas intersecções das paredes (1-A) e (1-B).

Q_a - é a força cortante na parede (1-A)

M_a - é o momento fletor na parede (1-A)

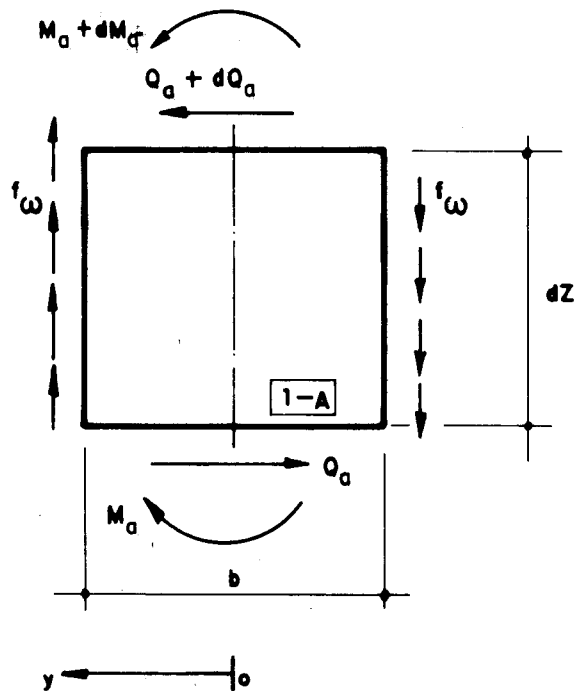


FIG. 46 - ELEMENTO GENÉRICO DA PAREDE (1-A).

Pelo equilíbrio à rotação do elemento infinitesimal da Fig. 46, vem

$$Q_a \cdot \frac{dz}{2} + Q_a \cdot \frac{dz}{2} + dQ_a \cdot \frac{dz}{2} + M_a + dM_a - M_a - f_\omega \cdot b \cdot dz = 0$$

Desprezando-se o infinitésimo de ordem superior, vem

$$Q_a = - \frac{d}{dz} \cdot M_a + f_\omega \cdot b \quad (163)$$

Baseado no estudo de uma parede, quando considerada isolada, STAMATO [8], tem-se

$$M_a = E \cdot J_a \cdot v_\omega'' \quad (164)$$

porém

$$v''_{\omega} = \frac{a}{2} \cdot \phi'', \text{ logo}$$

$$M_a = E \cdot J_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \phi'' \quad (165)$$

Seja J_a o momento de inércia da parede (1-A), em relação ao eixo OX, passando pelo seu centro de gravidade.

Substituindo-se (165) em (163), vem

$$Q_a = -E \cdot J_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \phi''' + f_{\omega} \cdot b \quad (166)$$

Seja também o elemento genérico da parede (1-B), indicado na Fig. 47

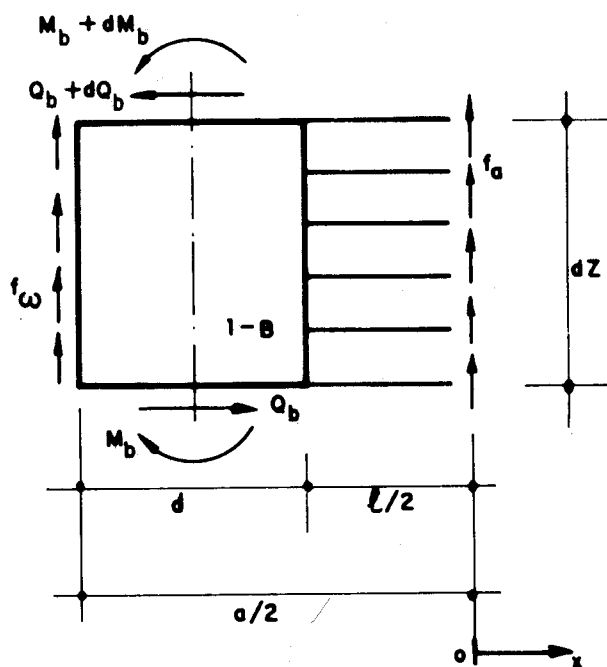


FIG. 47 - ELEMENTO GENÉRICO - PAREDE 1-B

Sejam

Q_b - a força cortante na parede (1-B)

M_b - o momento fletor na parede (1-B)

J_b - o momento de inércia na parede (1-B), em relação a um eixo paralelo a OY, passando pelo seu centro de gravidade.

Pelo equilíbrio à rotação do elemento infinitesimal da Fig. 47, vem:

$$Q_b \cdot dz + M_b + d \cdot M_b - M_b + f_a \left(\frac{d+l}{2} \right) \cdot dz - f_\omega \cdot \frac{d}{2} \cdot dz = 0$$

$$Q_b = \frac{-d}{dz} \cdot M_b + f_\omega \cdot \frac{d}{2} - f_a \cdot \left(\frac{d+l}{2} \right) \quad (167)$$

Procedendo-se para a parede (1-B), de forma análoga à parede (1-A), tem-se

$$M_b = E \cdot J_b \cdot \frac{b}{2} \cdot \phi'' \quad (168)$$

Substituindo-se (168) em (167), vem

$$Q_b = -E \cdot J_b \cdot \frac{b}{2} \cdot \phi''' + f_\omega \cdot \frac{d}{2} - f_a \cdot \left(\frac{d+l}{2} \right) \quad (169)$$

Por equilíbrio direto, conclui-se que o esforço normal na parede (1-A) é nulo. Procedendo-se em tal análise para a parede (1-B) a partir da Fig. 48, tem-se

Seja N_b a força normal na parede (1-B).

Pelo equilíbrio das forças verticais, vem:

$$N_b + d \cdot N_b - N_b + f_\omega \cdot dz + f_a \cdot dz = 0$$

$$\frac{d}{dz} \cdot N_b + f_\omega + f_a = 0 \quad (170)$$

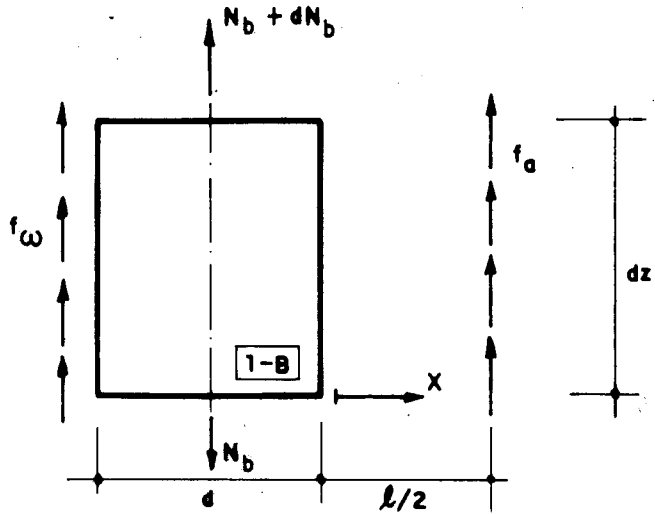


FIG. 48 - ESFORÇOS NORMAIS NA PAREDE (1-B)

Usando-se também a compatibilidade de deslocamentos nas arestas das paredes (1-A) e (1-B), conforme a Fig. 49 e designando-se

δ_a - o deslocamento axial da parede (1-A)

δ_b - o deslocamento axial da parede (1-B)

$$\delta_a - v'_\omega \cdot \frac{b}{2} = \delta_b + u'_\omega \cdot \frac{d}{2}$$

$$\delta_a - \frac{a \cdot b}{4} \cdot \phi' = \delta_b + \frac{b \cdot d}{4} \cdot \phi'$$

derivando uma vez

$$\frac{-a \cdot b}{4} \cdot \phi'' = \frac{b \cdot d}{4} \cdot \phi'' + \frac{d \cdot \delta_b}{dz} \quad (171)$$

$$\frac{d \cdot \delta_a}{dz} = 0, \text{ pois a força normal na parede (1-A) é nula}$$

$$\frac{d \cdot \delta_b}{dz} = \frac{-N_b}{E \cdot A_b} \quad (172)$$

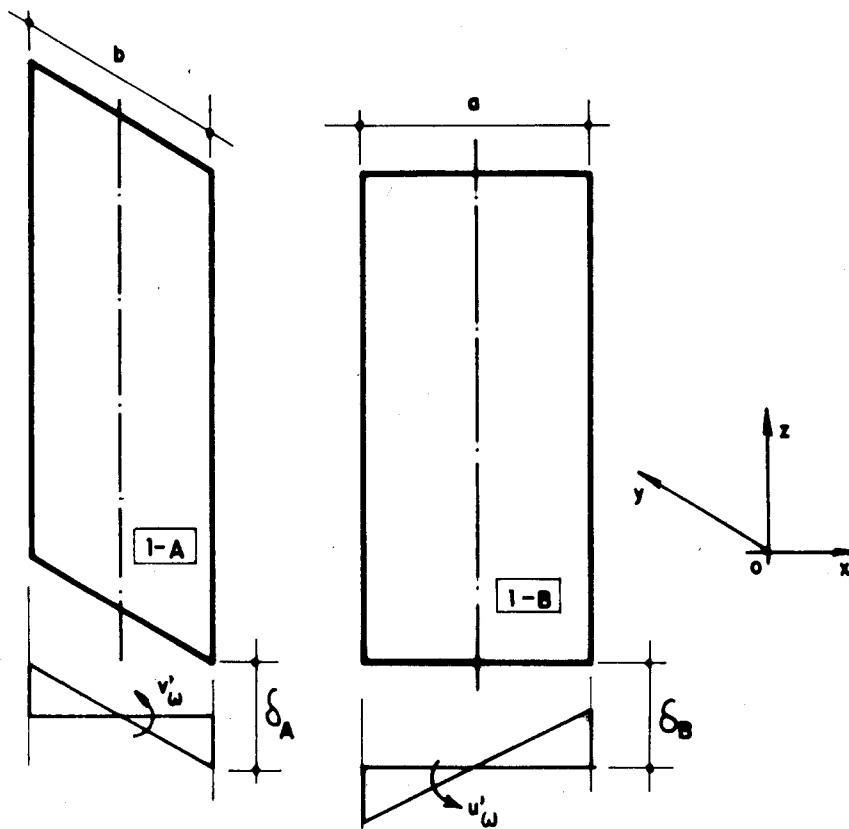


FIG. 49 - COMPATIBILIDADE NAS ARESTAS DAS PAREDES (1-A) E (1-B).

O sinal negativo em (172) é decorrente do deslocamento δ_b não concordar com o sentido de tração adotado para N_b . Ainda em (172) A_b é a área da secção transversal da parede (1-B).

Substituindo-se (172) em (171) vem

$$-\frac{a \cdot b}{4} \cdot \phi'' = \frac{b \cdot d}{4} \cdot \phi'' - \frac{N_b}{E \cdot A_b}$$

Dai tem-se

$$N_b = \frac{E \cdot A_b \cdot b}{4} \cdot (a+d) \cdot \phi'' \quad (173)$$

Derivando (173) uma vez, vem

$$\frac{d.N_b}{dz} = \frac{E.A_b.b}{4} \cdot (a+d) \cdot \phi''' \quad (174)$$

E substituindo-se (174) e (162) em (170), vem

$$\begin{aligned} \frac{E.A_b.b}{4} \cdot (a+d) \cdot \phi''' + f_\omega - K \cdot \beta \cdot \phi' &= 0 \\ f_\omega &= K \cdot \beta \cdot \phi' - \frac{E.A_b.b}{4} \cdot (a+d) \cdot \phi''' \end{aligned} \quad (175)$$

Substituindo-se (175) em (166), vem

$$\begin{aligned} Q_a &= -E.J_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \phi''' + \left[K \cdot \beta \cdot \phi' - \frac{E.A_b.b}{4} \cdot (a+d) \cdot \phi''' \right] \cdot b \\ Q_a &= -E.J_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \phi''' - \frac{E.A_b.b^2}{4} \cdot (a+d) \cdot \phi''' + K \cdot \beta \cdot b \cdot \phi' \end{aligned} \quad (176)$$

E substituindo-se também (175) e (162) em (169), vem

$$\begin{aligned} Q_b &= -E.J_b \cdot \frac{b}{2} \cdot \phi''' + \left[K \cdot \beta \cdot \phi' - \frac{E.A_b.b}{4} \cdot (a+d) \cdot \phi''' \right] \cdot \frac{d}{2} + \\ &+ K \cdot \beta \cdot \phi' \cdot \left(\frac{d+l}{2} \right) \end{aligned}$$

$$Q_b = \left(-\frac{E.J_b.b}{2} - \frac{E.A_b.d}{8} \cdot [a+d] \right) \cdot \phi''' + K \cdot \beta \cdot \left(\frac{2d+l}{2} \right) \cdot \phi'$$

Lembrando que

$$\left(\frac{2d+l}{2} \right) = \frac{a}{2}$$

$$Q_b = \frac{-E}{2} \cdot (J_b \cdot b + \frac{A_b \cdot b \cdot d}{4} \cdot [a+d]) \cdot \phi''' + \frac{K \cdot \beta \cdot a}{2} \cdot \phi' \quad (177)$$

E assim, tem-se determinado os esforços nas paredes do núcleo, quando este estiver solicitado por um carregamento de momento torçor. Os esforços estão explicitados em função da rotação ϕ sofrida pelo núcleo ao longo de toda a altura.

E para simplificar o uso de tais equações que traduzem os esforços aqui estudadas, as mesmas estão listadas a seguir, acrescidas das simplificações definidas por (178) e (179).

Sejam

$$\xi = \frac{A_b \cdot b}{4} \cdot (a+d) \quad (178)$$

$$d = \left(\frac{a-l}{2} \right) \quad (179)$$

então

$$f_b = -f_a = f \quad (161)$$

$$f = K \cdot \beta \cdot \phi' \quad (162)$$

$$f_\omega = K \cdot \beta \cdot \phi' - E \cdot \xi \cdot \phi''' \quad (175)$$

$$N_b = E \cdot \xi \cdot \phi'' \quad (173)$$

$$M_a = E \cdot J_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \phi'' \quad (165)$$

$$M_b = E \cdot J_b \cdot \frac{b}{2} \cdot \phi'' \quad (168)$$

$$Q_a = -(E \cdot J_a \cdot \frac{a}{2} + E \cdot \xi \cdot b) \cdot \phi''' + K \cdot \beta \cdot b \cdot \phi' \quad (176)$$

$$Q_b = -\frac{1}{2} (E \cdot J_b \cdot b + E \cdot \xi \cdot \left[\frac{a-l}{2} \right]) \cdot \phi''' + K \cdot \beta \cdot \frac{a}{2} \cdot \phi' \quad (177)$$

onde

f - é a força cortante distribuída nos lintéis

N_b - é a força normal na parede B

M_a - é o momento fletor na parede A

M_b - é o momento fletor na parede B

Q_a - é a força cortante na parede A

Q_b - é a força cortante na parede B

Para localizar as paredes A e B, basta portanto consultar a Fig. 45.

3.3 - ESTRUTURAS TUBULARES COM NÚCLEO INTERNO

Na Fig. 50 tem-se a combinação da estrutura do item (2.2), com um núcleo central e simétrico, estudado no item (3.2).

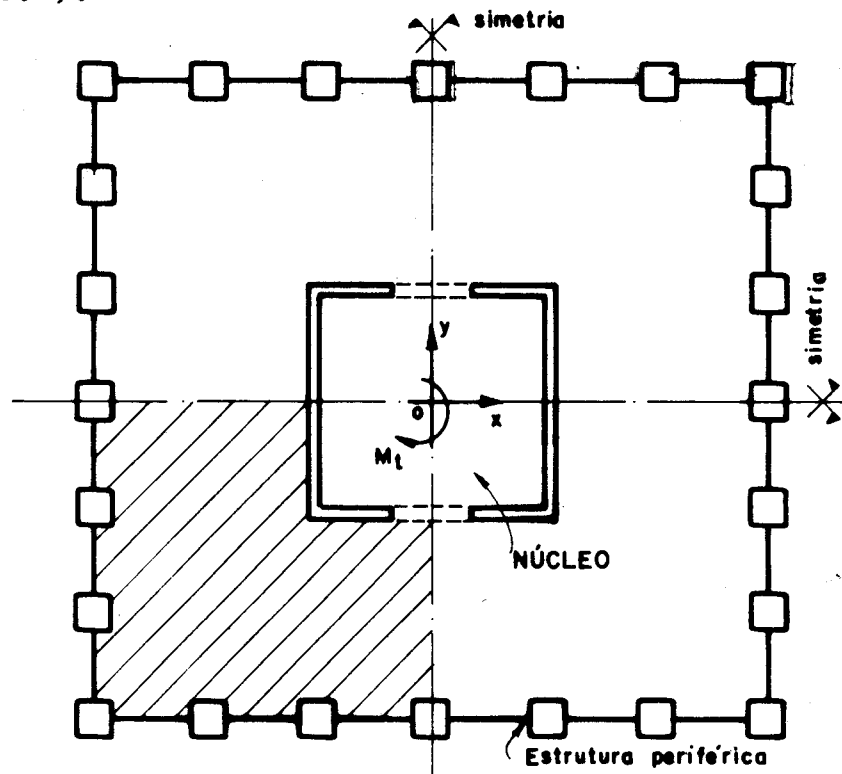


FIG. 50 - ESTRUTURA TUBULAR COM NÚCLEO INTERNO

Aqui também a análise será feita apenas para um quarto da estrutura, como indica a parte achuriada da Fig. 50.

Seja então a equação (160), que define o comportamento do núcleo estudado no item (3.2).

$$M_t = -2.E.J_{\omega}^*.\phi''' + 2.(G.J_t + \beta.K^2).\phi' \quad (160)$$

Devido à dupla simetria de forma e carregamento de torção, a Eq.(160) tomada para um quarto da estrutura, vem:

$$\frac{M_t}{4} = -\frac{E.J_{\omega}^*.\phi'''}{2} + \frac{1}{2}.(G.J_t + \beta.K^2).\phi' \quad (180)$$

Seja também o sistema de equações (56), que define o comportamento da estrutura periférica. Isto é a estrutura tubular formada por painéis p \acute{o} rticos, já estudada no item (2.2)

$$[G] . \{U''\} + [T] . \{U\} = \{C\} \quad (56)$$

O momento torçor que atua na estrutura tubular, combinada com o núcleo central como indica a Fig. 50, é definido por

$$M_t = M_{tp} + M_{tn} \quad (181)$$

onde

M_{tp} - é a parcela do momento torçor absorvida pela estrutura periférica.

M_{tn} - é a parcela do momento torçor absorvida pelo núcleo.

Assim, baseando-se em (181), basta adicionar a Eq.(180) ao sistema (56), chegando-se a:

$$[G_n] \cdot \{U''\} + [T_n] \cdot \{U\} = \{C\} \quad (182)$$

A obtenção das matrizes $[G_n]$ e $[T_n]$ é bastante simples, pois as únicas alterações que ocorrem são nos elementos $G(1,1)$ e $T(1,1)$; permanecendo os demais elementos inalteráveis, inclusive é claro, a ordem das matrizes. Tais alterações, em função da adição de (181) à primeira linha de (56) são as seguintes:

$$G_n(1,1) = G(1,1) - \frac{1}{2} \cdot E \cdot J_\omega^* \quad (183)$$

$$T_n(1,1) = T(1,1) + \frac{1}{2} \cdot (G \cdot J_t + \beta \cdot K^2)$$

A solução de (182) permite determinar todos os deslocamentos incógnitos da estrutura e conseqüentemente os esforços.

Para a solução de (182) será utilizado o método das "diferenças finitas" com operadores de cinco pontos, porém na mesma disposição usada para o item (2.3.6).

As condições de contorno neste problema são as seguintes:

$$\left. \begin{array}{lll} \phi(0) = 0 & \phi'(0) = 0 & \phi''(H) = 0 \\ \delta_i(0) = 0 & \delta_i'(H) = 0 & \\ \gamma_i(0) = 0 & \gamma_i'(H) = 0 & \end{array} \right\} \quad (184)$$

Dispensando-se as demonstrações, que são idênticas às anteriores, o sistema definido em (182) está totalmente balanceado com as condições de (184), e os operado-

res de diferenças finitas dispostos na mesma configuração ao do item (2.3.6). Ou seja, nestas condições tem-se para este problema o número de incógnitas igual ao número de equações, não necessitando assim nenhuma equação ou incógnita suplementar para a sua solução.

3.4 - ESTRUTURA CONSTITUÍDA POR PAINÉIS PAREDES E PÓRTICOS, COM NÚCLEO INTERNO

O estudo a seguir será idêntico ao item (3.3). No entanto a estrutura a ser analisada será uma variante da estrutura do item (2.3), acrescida de um núcleo interno, como mostra a Fig. 51

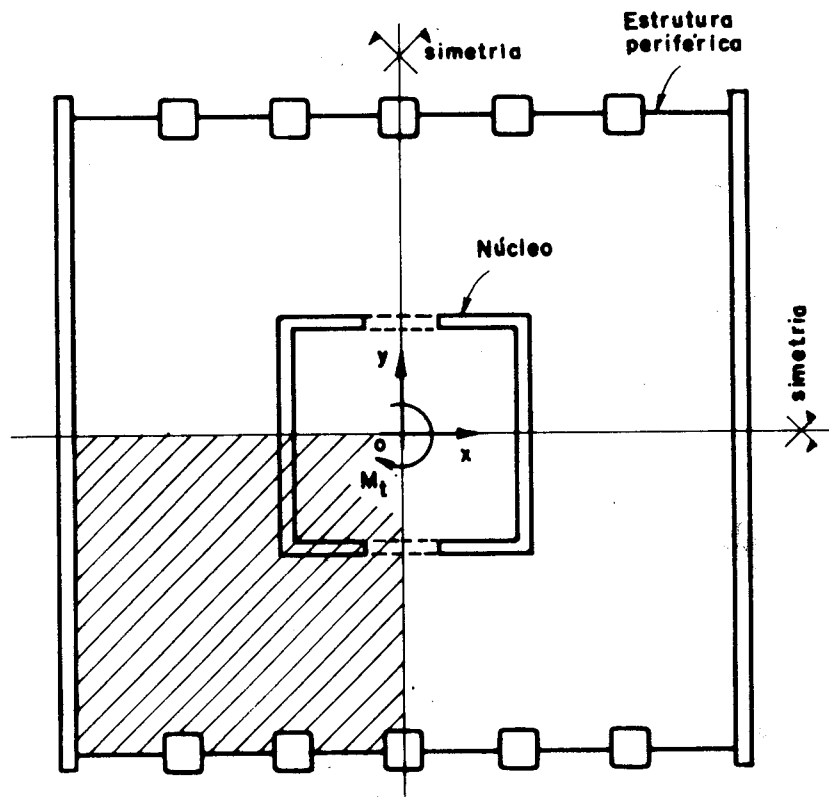


FIG. 51 - ESTRUTURA CONSTITUÍDA POR PAINÉIS PAREDES E PAINÉIS PÓRTICOS COM NÚCLEO INTERNO.

Devido a dupla simetria e ao carregamento de torção, a estrutura considerada neste item será tomada para análise em apenas um quarto de sua configuração como mostra a área achuriada da Fig. 51.

De modo análogo ao item (3.3), a equação (181) aqui também continua válida

$$M_t = M_{tp} + M_{tn} \quad (181) \text{ repetida}$$

Devido às mesmas condições de simetria de forma e carregamento de torção do item (3.3), neste item também permanece válida a Eq.(180), que define o comportamento do núcleo.

$$\frac{M_t}{4} = - \frac{E \cdot J_{\omega}^*}{2} \cdot \phi''' + \frac{1}{2} \cdot (G \cdot J_t + \beta \cdot K^2) \cdot \phi' \quad (180) \text{ repetida}$$

Seja também o sistema de equações (116), que define o comportamento da estrutura periférica. No caso a estrutura analisada no item (2.3).

$$[G_{\omega}] \cdot \{U''\} + [T_{\omega}] \cdot \{U\} = \{C_{\omega}\} \quad (116) \text{ repetida}$$

Com base em (181), basta adicionar (180) ao sistema (116), chegando-se à equação do problema definida como:

$$[G_{\omega n}] \cdot \{U''\} + [T_{\omega n}] \cdot \{U\} = \{C_{\omega}\} \quad (185)$$

Quanto as matrizes $[G_{\omega n}]$ e $[T_{\omega n}]$, são obtidas de forma bem simples como mostra-se a seguir

$$\left. \begin{aligned} G_{\omega n} \cdot (1,1) &= G_{\omega} \cdot (1,1) - \frac{1}{2} \cdot E \cdot J_{\omega}^* \\ T_{\omega n} \cdot (1,1) &= T_{\omega} \cdot (1,1) + \frac{1}{2} \cdot (G \cdot J_t + \beta \cdot K^2) \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

Quanto aos demais elementos de $[G_{\omega n}]$ e $[T_{\omega n}]$, permanecem iguais às matrizes $[G_{\omega}]$ e $[T_{\omega}]$ respectivamente.

Para a solução de (185) será utilizado o método das "diferenças finitas" com os mesmos operadores dispostos na mesma situação ao do item anterior, (3.3).

As condições de contorno neste problema são as seguintes

$$\left. \begin{array}{l} \phi(o) = 0 \quad \phi'(o) = 0 \quad \phi''(H) = 0 \\ \gamma_i(o) = 0 \quad \gamma_i'(H) = 0 \end{array} \right\} \quad (187)$$

Dispensando-se as demonstrações, que são idênticas às anteriores, o sistema definido em (185) está totalmente balanceado com as condições de (187), e os operadores de diferenças finitas nas mesmas condições acima citadas.

CAPÍTULO 4

PROGRAMAS, EXEMPLOS E CONCLUSÃO

4.1 - INTRODUÇÃO

Pelo simples fato da estrutura analisada no item (2.2) apresentar uma condição de contorno diferente das outras estruturas analisadas neste trabalho; foi conveniente então, a elaboração de dois programas, pois caso fosse apresentado um programa único, este ficaria com uma infinidade de comandos para adequar bem a aplicação dos operadores de diferenças finitas que no fim resultaria em um programa único, porém contendo dois programas implícitos. Assim resolveu-se por bem separá-los e apresentá-los distintamente, facilitando assim o acesso a qualquer usuário.

O programa 1 é exclusivamente reservado para a análise da estrutura definida no item (2.2), ou seja a estrutura tubular básica. Quanto ao programa 2, este é utilizado para os demais casos abordados neste trabalho.

Ambos os programas foram escritos em linguagem FORTRAN, para o computador IBM-370/148 com a finalidade de resolver por diferenças finitas os sistemas de equações diferenciais apresentados neste trabalho.

4.2 - PROGRAMA 1 e EXEMPLOS

O programa principal faz uso de oito subrotinas:

RESOL - Resolução de sistemas de equações lineares
MTXM - Multiplicação de matriz por matriz
ZINV - Inversão de matrizes
GERAG - Geração da matriz G
GERAH - Geração da matriz H
GERAR - Geração da matriz R
GERAS - Geração da matriz S
FUNCTION CARGA - Define o carregamento externo em função de Z.

Os cartões de dados para o programa 1 devem ser fornecidos na forma e na ordem a seguir:

O carregamento externo, no caso momento torçor, é definido em função de Z, através da subrotina FUNCTION CARGA.

Todos os demais dados da estrutura, são fornecidos através do programa principal nos seguintes cartões:

Primeiro Cartão - Fornece qualquer comentário desejado aos resultados. Por exemplo; as unidades de comprimento e força que estão sendo utilizadas. FORMAT(20A4).

Segundo Cartão - Fornece ao programa dados da estrutura, os quais deverão obedecer a ordem mostrada a seguir e cujo FORMAT é(3I4,5F10.3).

NA - Número de andares
N - Número de pilares de direção Y
M - Número de pilares de direção X
HA - Altura dos andares
LX - Dimensão direção X
LY - Dimensão direção Y
E - Módulo de elasticidade longitudinal
DERIV - Derivada de $M_t = M'_t(H)$

O número de cartões a seguir depende da quantidade de pilares em ambas as direções. E os dados devem ser fornecidos no FORMAT.(11F7.2), na seguinte ordem tantas vezes quantas forem suas respectivas quantidades.

A(I) - Vão das vigas de direção Y I = 1, ..., N-1
B(J) - Vão das vigas de direção X J = 1, ..., M-1
HPY(I)- Altura em planta dos pilares de direção Y. I=1, ..., N
DPY(I)- Largura em planta dos pilares de direção Y. I=1, ..., N
HPX(J)- Altura em planta dos pilares de direção X. J=1, ..., M
DPX(J)- Largura em planta dos pilares de direção X. J=1, ..., M
HVY(I)- Altura das vigas de direção Y I = 1, ..., N-1
DVY(I)- Largura das vigas de direção Y I = 1, ..., N-1
HVX(J)- Altura das vigas de direção X J = 1, ..., M-1
DVX(J)- Largura das vigas de direção X J=1, ..., M-1

Os resultados impressos na saída do programa 1 são os seguintes: rotações dos diafragmas, esforços normais nos pilares e esforços cortantes nas vigas.

A seguir apresenta-se a listagem do programa 1.

LISTAGEM DO PROGRAMA 1

CC

SUBROTINA ZINV CALCULO DA MATRIZ INVERSA J.CELSO

```

SUBROUTINE ZINV(RM,I)
DIMENSION RM(30,30),RMAUX(30,30)
ERR0=0.0001
DO 1 L=1,I
DO 2 K=1,I
IF(L-K)3,4,3
4 RMAUX(L,K)=1.
GO TO 2
3 RMAUX(L,K)=0.
2 CONTINUE
1 CONTINUE
DO 5 L=1,I
IF(ABS(RM(L,L))-ERR0)6,6,7
6 DO 8 LP=L,I
IF(ALS(RM(LP,L))-ERR0)8,8,10
8 CONTINUE
10 DO 11 KV=1,I
VAUX=RM(LP,KV)
RM(LP,KV)=RM(L,KV)
RM(L,KV)=VAUX
11 CONTINUE
DO 12 KV=1,I
VAUX=RMAUX(LP,KV)
RMAUX(LP,KV)=RMAUX(L,KV)
RMAUX(L,KV)=VAUX
12 CONTINUE
7 A=RM(L,L)
WRITE(5,21)A
21 FORMAT(/,40X,'A=',F13.2)
DO 13 KV=1,I
RM(L,KV)=RM(L,KV)/A
13 CONTINUE
DO 14 KV=1,I
RMAUX(L,KV)=RMAUX(L,KV)/A
14 CONTINUE
DO 15 J=1,I
IF(J-L)16,15,16
16 B=RM(J,L)
DO 17 K=1,I
RM(J,K)=RM(J,K)-B*RM(L,K)
RMAUX(J,K)=RMAUX(J,K)-B*RMAUX(L,K)
17 CONTINUE
15 CONTINUE
5 CONTINUE
DO 18 L=1,I
DO 18 K=1,I
RM(L,K)=RMAUX(L,K)
18 CONTINUE
RETURN
END

```

CC

FUNCAO CARGA MONMENTO TOP-COR DISTRIBUIDO J.CELSO

```

FUNCTION CARGA(IC,HA) .
Z=IC*HA
CARGA=2.16*(6000.-Z)
RETURN
END

```

C
C
C
C

J. CELSO
SUBROTINA GERAH GERACAO DA MATRIZ (H)

```

SUBROUTINE GERAH(H,M,N,LX,LY,HA,A,B,SP,SC,E,NW)
REAL H(30,30),A(20),B(20),SP(20),SC(20),LX,LY
II=N-1
JJ=M-1
NL=M+N-2
DO 3 L=1,NL
DO 3 K=1,NL
H(L,K)=0.
3 CONTINUE
DO 4 K=1,II
H(1,K)=A(K)*LX/2
4 CONTINUE
IM=II+1
DO 5 K=IM,NL
JN=K-II
H(1,K)=B(JN)*LY/2
5 CONTINUE
H(2,1)=1/(E*SP(1))
H(2,IM)=-1/(E*SC(1))
DO 6 L=3,IM
H(L,L-2)=-1/(E*SP(L-1))
H(L,L-1)=1/(E*SP(L-1))
6 CONTINUE
IA=IM+1
DO 7 L=IA,NL
J=L-II
H(L,L-1)=1/(E*SC(J))
H(L,L)=-1/(E*SC(J))
7 CONTINUE
RETURN
END

```

C
C
C
C

J. CELSO
SUBROTINA GERAS GERACAO DA MATRIZ (S)

```

SUBROUTINE GERAS(S,M,N,LX,LY,A,B,NW)
REAL S(30,30),A(20),B(20),LX,LY
II=N-1
JJ=M-1
K=N+M-2
DO 3 LI=1,K
DO 3 KC=1,K
S(LI,KC)=0.
3 CONTINUE
DO 4 LI=1,II
S(LI,1)=A(LI)*LX/2
4 CONTINUE
IM=II+1
DO 5 LI=IM,K
JN=LI-II
S(LI,1)=B(JN)*LY/2
5 CONTINUE
DO 6 LI=1,II
S(LI,LI+1)=-1.
S(LI,LI+2)=1.
6 CONTINUE
IA=IM+1
S(II,IA)=0.
S(IM,2)=1.
S(IM,IA)=-1.
KK=K-1
DO 7 LI=IA,KK
S(LI,LI)=1.
S(LI,LI+1)=-1.
7 CONTINUE
S(K,K)=1.
RETURN
END

```


C
C
C
C

J. CELSO
SUBROTINA GERAR GERACAO DA MATRIZ (R)

```

SUBROUTINE GERAR(R,M,N,HA,E,A,B,JPY,JPX,JVY,JVX,NW)
DIMENSION R(30,30),RK(20),RM(20),RN(20),RL(20),RR(20),RS(20),RT(20
*),RU(20),A(20),B(20)
REAL MK(20),NK(20),JPY(20),JPX(20),JVY(20),JVX(20)
II=N-1
JJ=M-1
NL=M+N-2
DO 3 I=1,N
NK(I)=JPY(I)/HA
CONTINUE
DO 4 J=1,M
MK(J)=JPX(J)/HA
CONTINUE
IB=II-1
DO 5 I=1,IB
RK(I)=HA*A(I)**3/(12*F*JVY(I))+HA*A(I)**2/(48*E*NK(I))+HA*A(I)**2/
*(48*E*NK(I+1))
RM(I)=HA*A(I)*A(I+1)/(48*E*NK(I+1))
RN(I)=HA*A(I+1)*A(I)/(48*E*NK(I))
CONTINUE
RL(II)=HA*A(II)**3/(12*E*JVY(II))+HA*A(II)**2/(48*E*NK(II))+HA*A(I
*I)**2/(24*E*NK(N))
IC=JJ-1
DO 6 J=1,IC
KR(J)=HA*B(J)**3/(12*F*JVX(J))+HA*B(J)**2/(48*E*MK(J))+HA*B(J)**2/
*(48*E*MK(J+1))
RS(J)=HA*B(J)*B(J+1)/(48*E*MK(J+1))
RT(J)=HA*B(J+1)*B(J)/(48*E*MK(J))
CONTINUE
RU(JJ)=HA*B(JJ)**3/(12*E*JVX(JJ))+HA*B(JJ)**2/(48*F*MK(JJ))+HA*B(J
*J)**2/(24*E*MK(M))
DO 7 L=1,NL
DO 7 K=1,NL
R(L,K)=0.
CONTINUE
DO 8 L=1,IB
R(L,L)=RK(L)
R(L,L+1)=RM(L)
CONTINUE
DO 9 L=2,IB
R(L,L-1)=RN(L-1)
CONTINUE
R(II,IB)=RM(IB)
R(II,II)=RL(II)
IA=II+1
DO 10 L=IA,NL
JN=L-1I
R(L,L)=RR(JN)
R(L,L+1)=RS(JN)
CONTINUE
ID=IA+1
DO 11 L=ID,NL
R(L,L-1)=RT(L-4)
CONTINUE
R(NI,NL-1)=RS(IC)
R(NL,NL)=RU(JJ)
RETURN
END

```

C
C
C
C
C
C
C
C

J. CELSO

SUBRTINA GERAG GERACAO DA MATRIZ (G)

SUBROUTINE GERAG(G,E,N,M,NW)
DIMENSION G(30,30)
NT=N+M-2
DO 1 L=1,NT
DO 1 K=1,NT
G(L,K)=0.
1 CONTINUE
DO 2 L=2,NT
G(L,L)=1.
2 CONTINUE
RETURN
END

C
C
C
C
C

J.CELSO

PROGRAMA PRINCIPAL

```

DIMENSION AA(200,200),A(20),B(20),SC(20),SP(20),S(30,30),
*G(30,30),R(30,30),T(30,30),KK(20),RM(20),RN(20),RL(20),RR(20),
*RS(20),RT(20),RU(20),SS(200),HPY(10),DPY(10),HVV(10),DVY(10),
*HPX(10),DPX(10),HVX(10),DVX(10),CRP(20),FNP(30,30),U(30,30)
REAL JVV(20),JVX(20),JPY(20),JPX(20),NK(20),MK(20),LX,LY
NR=1
NW=3

```

100

```

READ(NR,100)(CRP(I),I=1,20)
FORMAT(20A4)

```

C
C
C
C
C

```

-----
-----
DADOS DA ESTRUTURA

```

1

```

READ(NR,1)NA,N,M,HA,LX,LY,E,DERIV
FORMAT(3I4,5F10.3)
II=N-1
JJ=M-1

```

2

```

READ(NR,2)(A(I),I=1,II),(B(J),J=1,JJ),(HPY(I),I=1,N),(DPY(I),I=1,N
*),(HVV(I),I=1,II),(DVY(I),I=1,II),(HPX(J),J=1,M),(DPX(J),J=1,M),
*(HVX(J),J=1,JJ),(DVX(J),J=1,JJ)
FORMAT(11F7.2)

```

C
C
C

```

-----
-----

```

3

```

DO 3 I=1,N
SP(I)=HPY(I)*DPY(I)
JPY(I)=(DPY(I)*HPY(I)**3)/12
CONTINUE
DO 301 J=1,M
SC(J)=HPX(J)*DPX(J)
JPX(J)=(DPX(J)*HPX(J)**3)/12
CONTINUE

```

301

302

```

DO 302 I=1,II
JVV(I)=(DVY(I)*HVV(I)**3)/12
CONTINUE
DO 303 J=1,JJ
JVX(J)=(DVX(J)*HVX(J)**3)/12
CONTINUE

```

303

```

NT=N+M-2
ND=II
NG=M-2
NFI=NA+3
NDT=ND*(NA+3)
NGT=NG*(NA+3)
NIC=NFI+NDT+NGT
NICC=NIC+1
NNA=I.A+1
NNB=NA+2

```

```

CALL GERAG(G,E,N,M,NW)
CALL GEKAS(S,M,N,LX,LY,A,B,NW)
CALL GERAH(T,M,N,LX,LY,HA,A,B,SP,SC,E,NW)
CALL GERAR(R,M,N,HA,E,A,B,JPY,JPX,JVY,JVX,NW)
CALL ZINV(R,NI)
CALL MIXM(K,NT,NT,S,NT)
CALL MIXM(I,NT,NT,R,NT)
CFG=2*HA**3
CDG=12*HA**2
CFT=12*HA

```

C
C
C

```

-----
DO 4 L=1,NIC
DO 4 K=1,NICC
AA(L,K)=0.
CONTINUE
DO 5 I=1,NT
IN=I-1
LI=IN*(NA+1)+1
LS=IN*(NA+1)+NA+1

```

4

C
C
C
C

OPERADOR DIF. FINITAS NAO CENTRADO
ASCENDENTE APLICADO NA BASE P./ FI

```

AA(LI,1)=-3*G(I,1)/CFG-3*T(I,1)/CFT
AA(LI,2)=10*G(I,1)/CFG-10*T(I,1)/CFT
AA(LI,3)=-12*G(I,1)/CFG+18*T(I,1)/CFT
AA(LI,4)=6*G(I,1)/CFG-6*T(I,1)/CFT
AA(LI,5)=-G(I,1)/CFG+T(I,1)/CFT

```

C
C
C
C
C
C
C

OPERADOR DIF. FINITAS NAO CENTRADO
DESCENDENTE APLICADO NO TOPO P./ FI

```

AA(LS,NA-1)=G(I,1)/CFG-T(I,1)/CFT
AA(LS,NA)=-6*G(I,1)/CFG+6*T(I,1)/CFT
AA(LS,NA+1)=12*G(I,1)/CFG-18*T(I,1)/CFT
AA(LS,NA+2)=-10*G(I,1)/CFG+10*T(I,1)/CFT
AA(LS,NA+3)=3*G(I,1)/CFG+3*T(I,1)/CFT

```

C
C

```

DO 6 J=2,NT
KI=(J-1)*(NA+3)+2
KS=KI+NA

```

C
C
C
C
C

OPERADOR DIF. FINITAS NAO CENTRADO
ASCENDENTE APLICADO NA BASE P./ DELTAS E GAMAS

```

AA(LI,KI-1)=11*G(I,J)/CDG
AA(LI,KI)=-20*G(I,J)/CDG+T(I,J)
AA(LI,KI+1)=6*G(I,J)/CDG
AA(LI,KI+2)=4*G(I,J)/CDG
AA(LI,KI+3)=-6*G(I,J)/CDG

```

C
C

```

C -----
C OPERADOR DIF. FINITAS NAO CENTRADO
C DESCENDENTE APLICADO NO TOPO P./ DELTAS E GAMAS
C
AA(LS,KS-3)=-G(I,J)/CDG
AA(LS,KS-2)=4*G(I,J)/CDG
AA(LS,KS-1)=6*G(I,J)/CDG
AA(LS,KS)=-20*G(I,J)/CDG+T(I,J)
AA(LS,KS+1)=11*G(I,J)/CDG

```

```

C -----
C
C CONTINUE
6 CONTINUE
5 DO 7 IL=1,NT
  LM=(IL-1)*(NA+1)+1
  JNA=NA-1
  DO 8 KK=1,JNA
    LM=LM+1
    DO 9 J=2,NT
      KM=(J-1)*(NA+3)+2+KK

```

```

C -----
C OPERADOR DIF. FINITAS CENTRADO
C APLICADO DE '3 ATE NA+1' P./ DELTAS E GAMAS
C
AA(LM,KM-2)=-G(IL,J)/CDG
AA(LM,KM-1)=16*G(IL,J)/CDG
AA(LM,KM)=-30*G(IL,J)/CDG+T(IL,J)
AA(LM,KM+1)=16*G(IL,J)/CDG
AA(LM,KM+2)=-G(IL,J)/CDG

```

```

C -----
C
C CONTINUE
9 K=2+KK

```

```

C -----
C OPERADOR DIF. FINITAS CENTRADO
C APLICADO DE '3 ATE NA+1' P./ FI
C
AA(LM,K-2)=G(IL,1)/CFG+T(IL,1)/CFT
AA(LM,K-1)=2*G(IL,1)/CFG-8*T(IL,1)/CFT
AA(LM,K)=0.
AA(LM,K+1)=-2*G(IL,1)/CFG+8*T(IL,1)/CFT
AA(LM,K+2)=G(IL,1)/CFG-T(IL,1)/CFT

```

```

C -----
C
C CONTINUE
8 CONTINUE
7
C
C
C

```

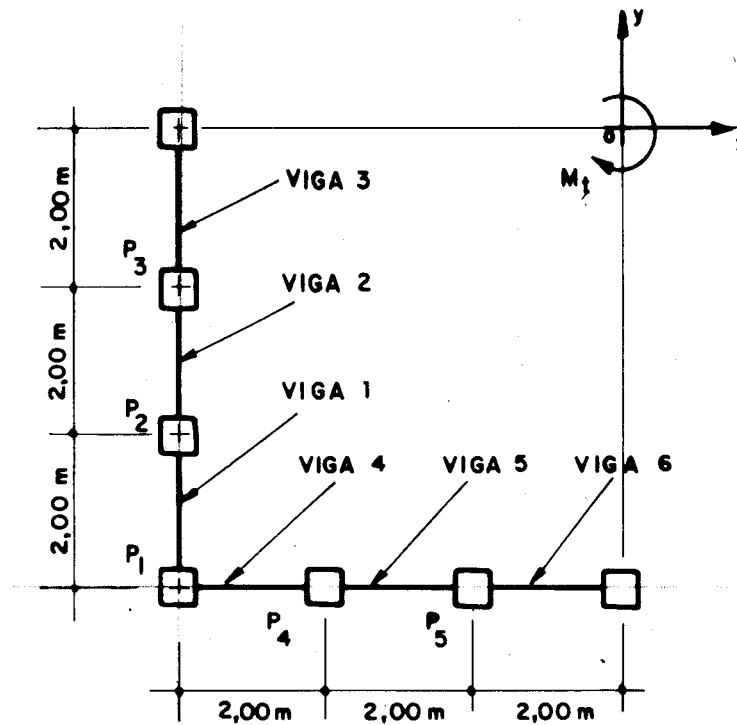
```
C
C
C -----
C -----
C CONDICAOES DE CONTORNO
C
C DELTA(O)=0      DELTA*(H)=0
C GAMA(O)=0      GAMA*(H)=0
C FI(O)=0
C
C LL=NT*(NA+1)
C DO 12 I=2,NT
C LI=LL+I
C KI=(NA+3)*(I-1)+2
C AA(LL+1,2)=1.
C AA(LI,KI)=1.
C LS=LI+NT-1
C KS=KI+NA
C AA(LS,KS-3)=-1/CFT
C AA(LS,KS-2)=6/CFT
C AA(LS,KS-1)=-18/CFT
C AA(LS,KS)=10/CFT
C AA(LS,KS+1)=3/CFT
12 CONTINUE
C
C -----
C -----
C
C EQUACAO SUPLEMENTAR
C FI''*T(1,1)=Q'(Z) P./ Z=H
C
C LI=LS+1
C AA(LI,NA-1)=-1/CDG
C AA(LI,NA)=4/CDG
C AA(LI,NA+1)=6/CDG
C AA(LI,NA+2)=-20/CDG
C AA(LI,NA+3)=11/CDG
C AA(LI,NICC)=DERIV/T(1,1)
C
C -----
C -----
C
13 DO 13 L=1,NNA
C IC=L-1
C AA(L,NICC)=CARGA(IC,HA)
13 CONTINUE
C CALL RESOL(AA,SS,NIC)
14 WRITE(Nk,14)(SS(I),I=1,NIC)
14 FORMAT(//,10X,'DEBLOCCAMENTO S',12(//,5X,8E13.5))
```



```
46  WRITE(NW,46)(K,K=1,NDG)
    FORMAT('1',//,10X,'ESFORÇOS NORMAIS NOS PILARES',/,10X,28('-'),//
*  ,10X,'COTA',9(4X,'PILAR',I2))
    DO 47 J=1,NNA
      L=J-1
47  WRITE(NW,48)L,(FNP(K,J),K=1,NDG)
48  FORMAT(/,10X,I3,1X,10F11.3)
    WRITE(NW,49)(K,K=1,NT)
49  FORMAT('1',//,10X,'ESFORÇOS CORTANTE NAS VIGAS',/,10X,27('-'),//
*  ,10X,'ANDAR',9(5X,'VIGA',I2))
    DO 50 I=1,NA
50  WRITE(NW,51)I,(R(K,I),K=1,NT)
51  FORMAT(/,10X,I3,2X,10F11.3)
    C
    C
-----
CALL EXIT
END
```


EXEMPLO 1

Como exemplo de cálculo foi utilizada a estrutura tubular representada parcialmente na figura abaixo.



PLANTA BAIXA

Carregamento.- Momento torçor Uniformemente
Distribuído $M_t = 8,64t.m/m$
Dimensão de todos os pilares 30cm x 30cm
Dimensão das vigas 20cm x 40cm
Altura dos andares $h = 3,00m$
Número de andares $N = 9$
Módulo de elasticidade $E = 200.000kgf/cm^2$

Seguido dos resultados fornecidos pelo programa, encontram-se seus respectivos gráficos.

RESULTADOS FORNECIDOS PELO PROGRAMA - 1

UNIDADES FORÇA EM (T.) COMPRIMENTO EM (CM.)

NUMERO DE ANDARES= 9

ALTURA DOS ANDARES= 300.00

COMP. DIRECAO-X= 1200.00

COMP. DIRECAO-Y= 1200.00

MODULO DE ELASTICIDADE= 0.2000E 03

ESTRUTURA PERIFERICA

-DIRECAO X-

PILAR	ALTURA	LARGURA
1	30.00	30.00
2	30.00	30.00
3	30.00	30.00
4	30.00	30.00

VIGA	VAO	ALTURA	LARGURA
1	200.00	40.00	20.00
2	200.00	40.00	20.00
3	200.00	40.00	20.00

-DIRECAO Y-

PILAR	ALTURA	LARGURA
1	30.00	30.00
2	30.00	30.00
3	30.00	30.00
4	30.00	30.00

VIGA	VAO	ALTURA	LARGURA
1	200.00	40.00	20.00
2	200.00	40.00	20.00
3	200.00	40.00	20.00

ROTACOES DOS DIAFRAGMAS

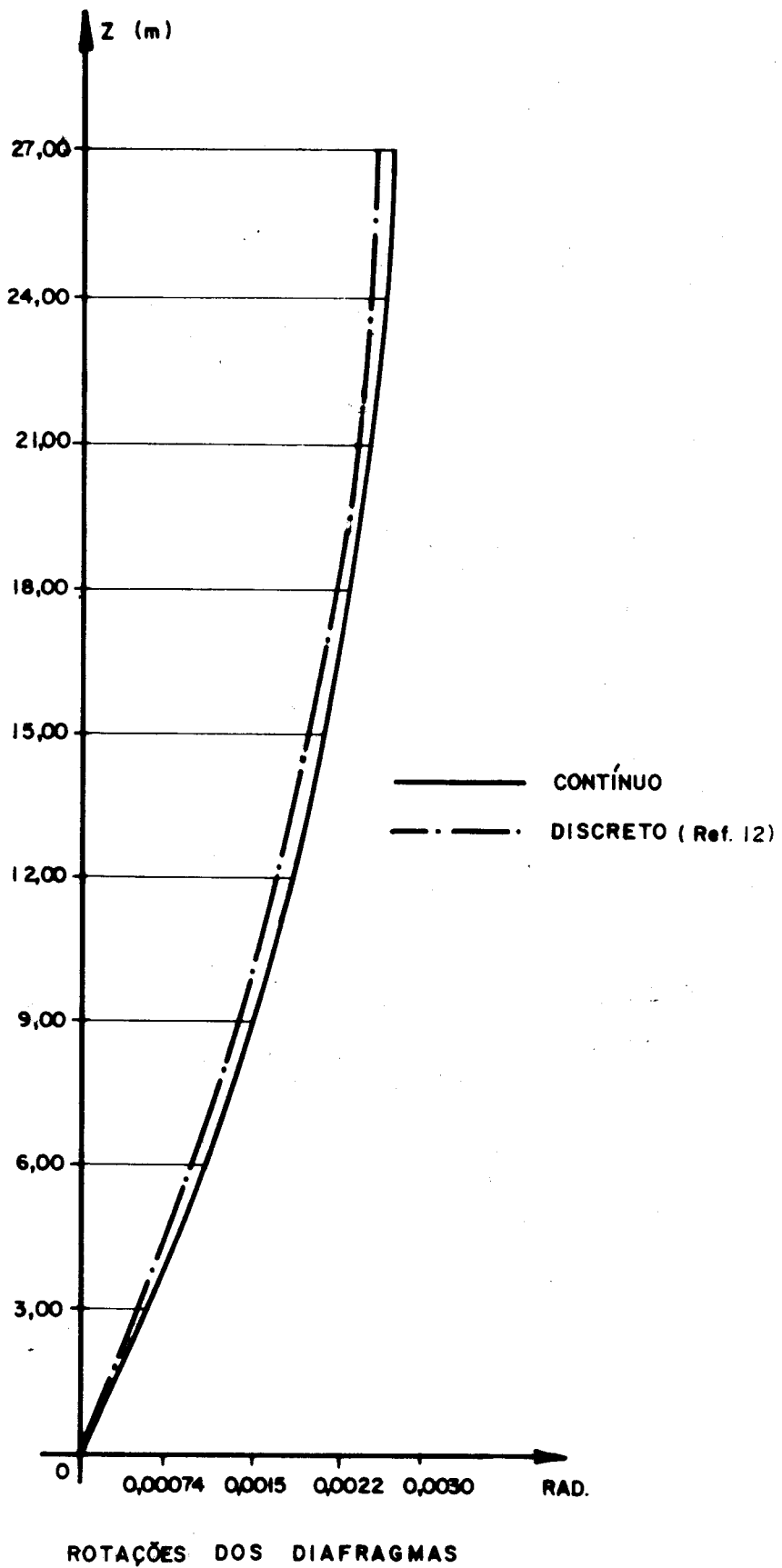
COTA	ROTACOES
0	-0.18558E-07
1	0.56214E-03
2	0.10589E-02
3	0.14900E-02
4	0.18551E-02
5	0.21543E-02
6	0.23873E-02
7	0.25541E-02
8	0.26548E-02
9	0.26893E-02

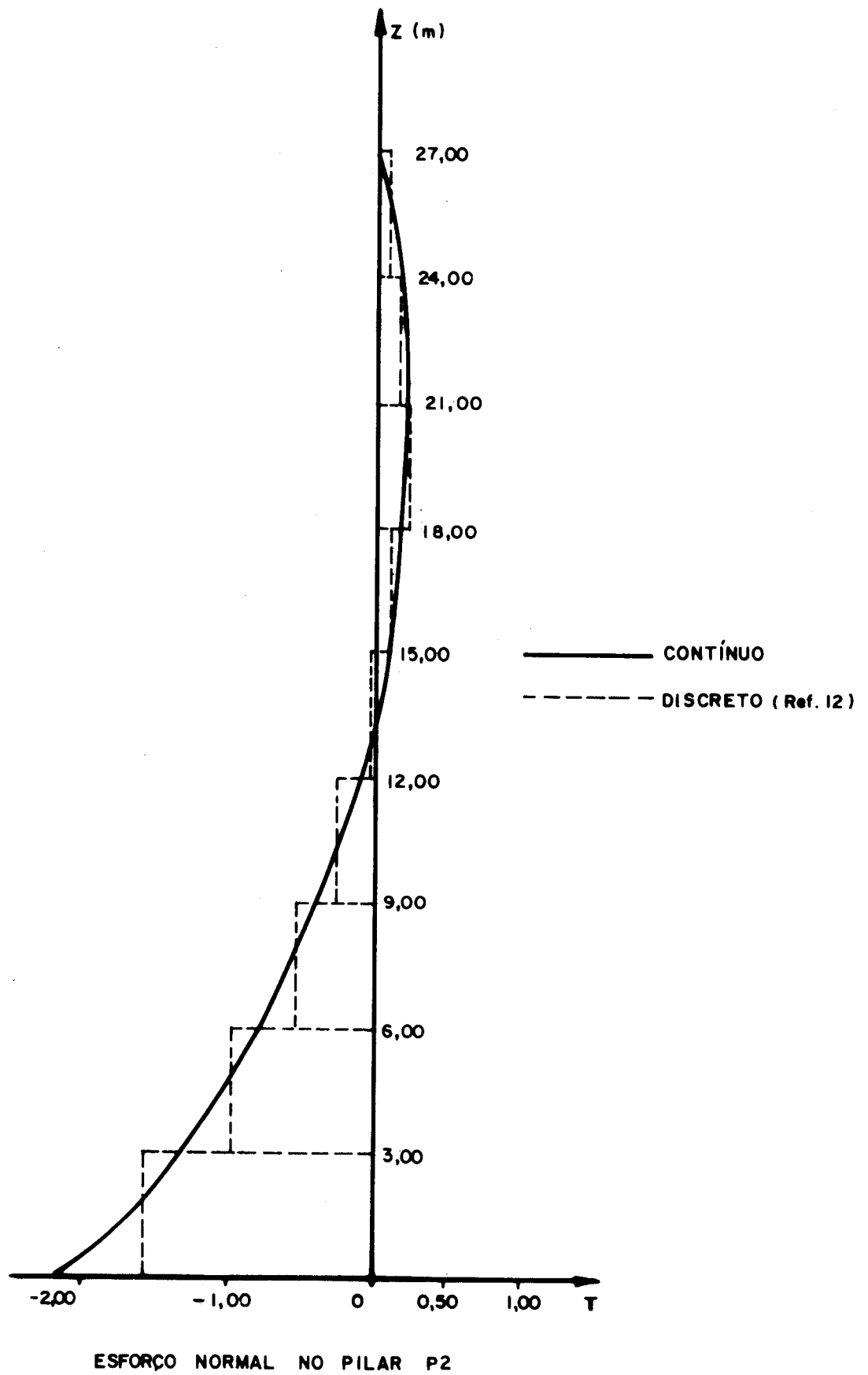
ESFORÇOS NORMAIS NOS PILARES

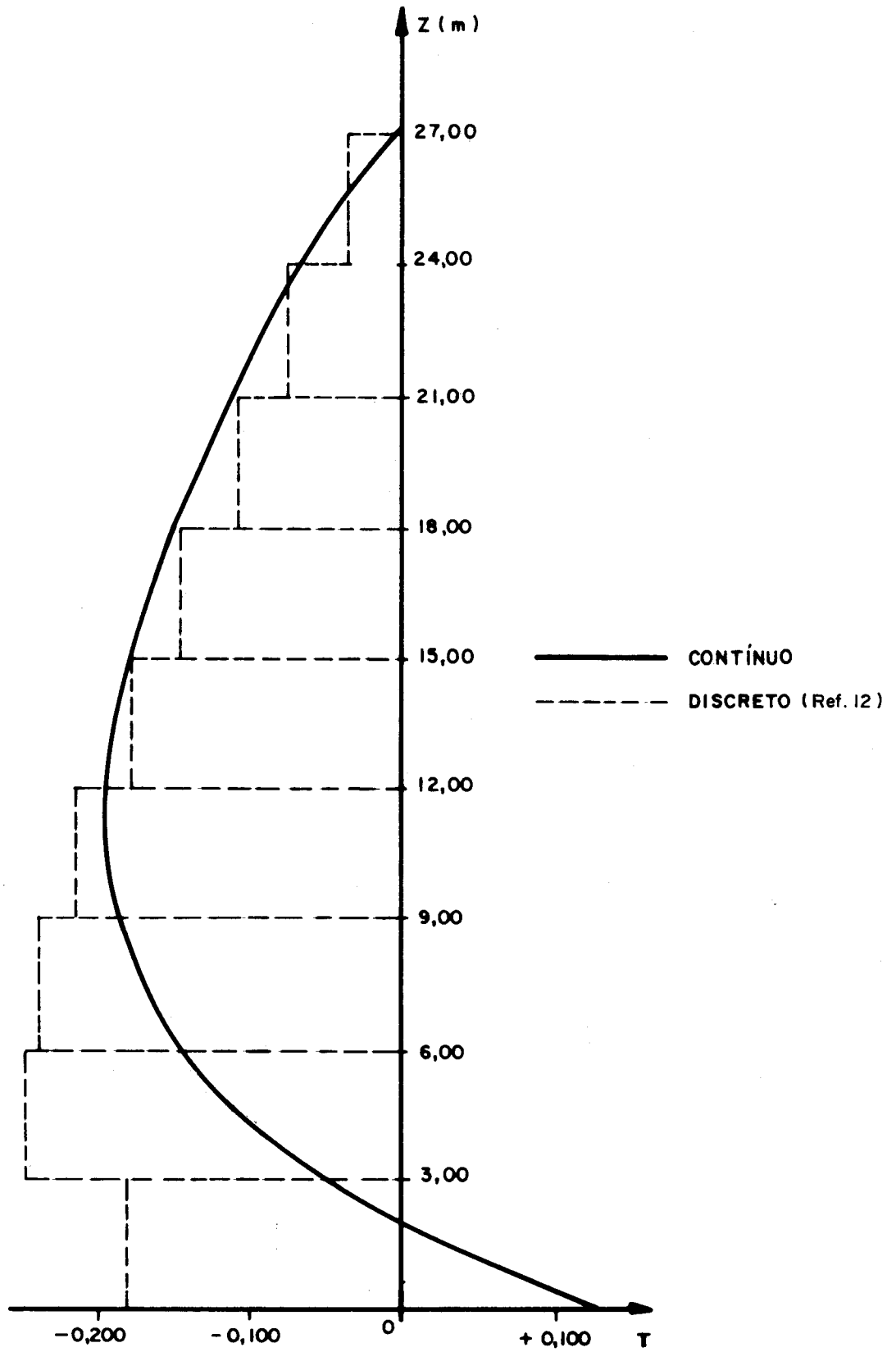
COTA	PILAR 1	PILAR 2	PILAR 3	PILAR 4	PILAR 5
0	0.000	-2.129	0.125	2.129	-0.125
1	0.000	-1.386	-0.053	1.386	0.053
2	0.000	-0.833	-0.147	0.833	0.147
3	0.000	-0.428	-0.187	0.428	0.187
4	0.000	-0.141	-0.193	0.141	0.193
5	0.000	0.050	-0.179	-0.050	0.179
6	0.000	0.156	-0.152	-0.156	0.152
7	0.000	0.184	-0.114	-0.184	0.114
8	0.000	0.134	-0.065	-0.134	0.065
9	-0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000

ESFORÇOS CORTANTE NAS VIGAS

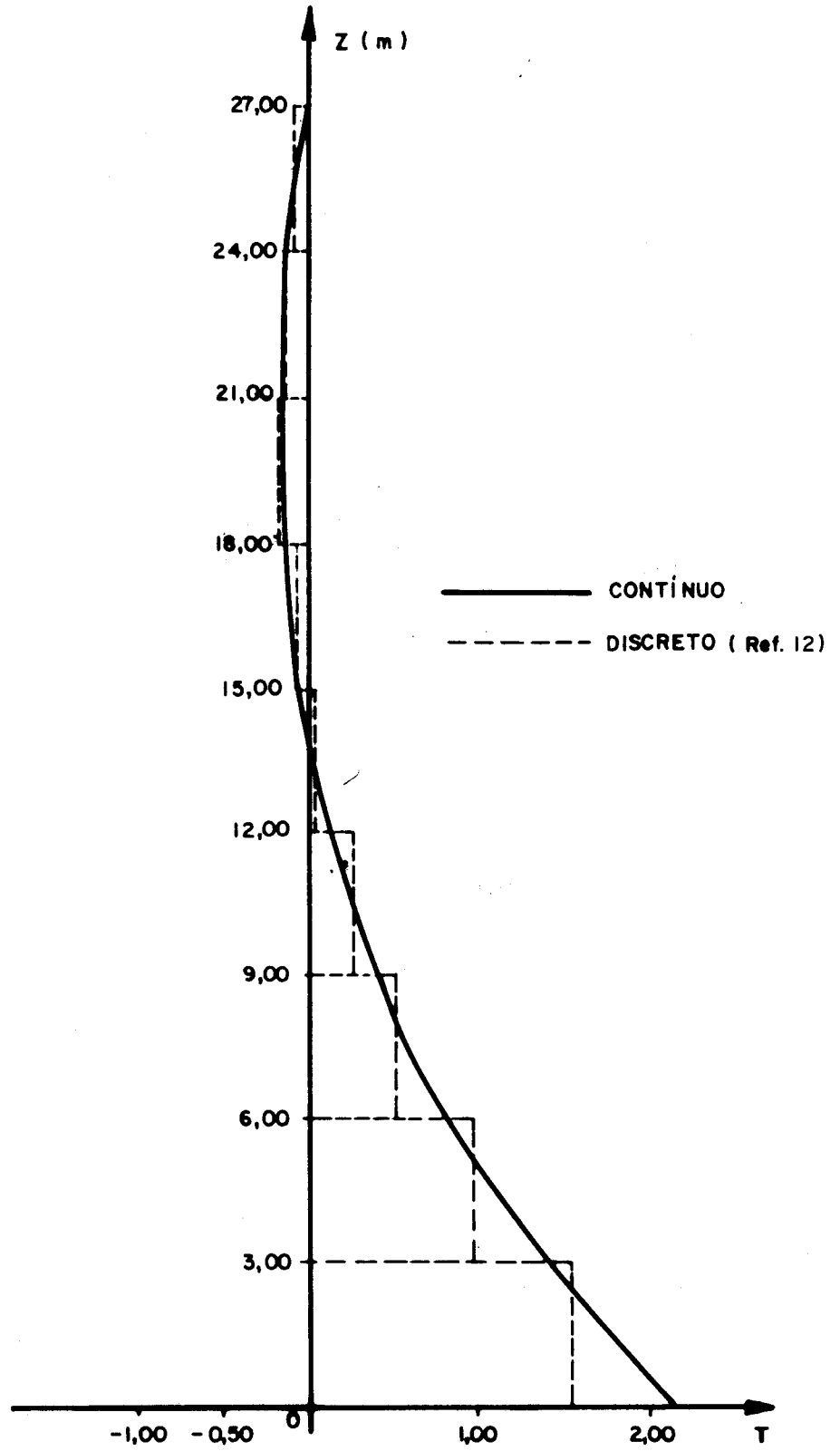
ANDAR	VIGA 1	VIGA 2	VIGA 3	VIGA 4	VIGA 5	VIGA 6
1	2.543	1.904	2.033	2.543	1.904	2.033
2	2.184	1.711	1.774	2.184	1.711	1.774
3	1.841	1.499	1.520	1.841	1.499	1.520
4	1.509	1.273	1.268	1.509	1.273	1.268
5	1.185	1.038	1.017	1.185	1.038	1.017
6	0.865	0.799	0.766	0.865	0.799	0.766
7	0.547	0.558	0.515	0.547	0.558	0.515
8	0.228	0.319	0.263	0.228	0.319	0.263
9	-0.094	0.085	0.009	-0.094	0.085	0.009



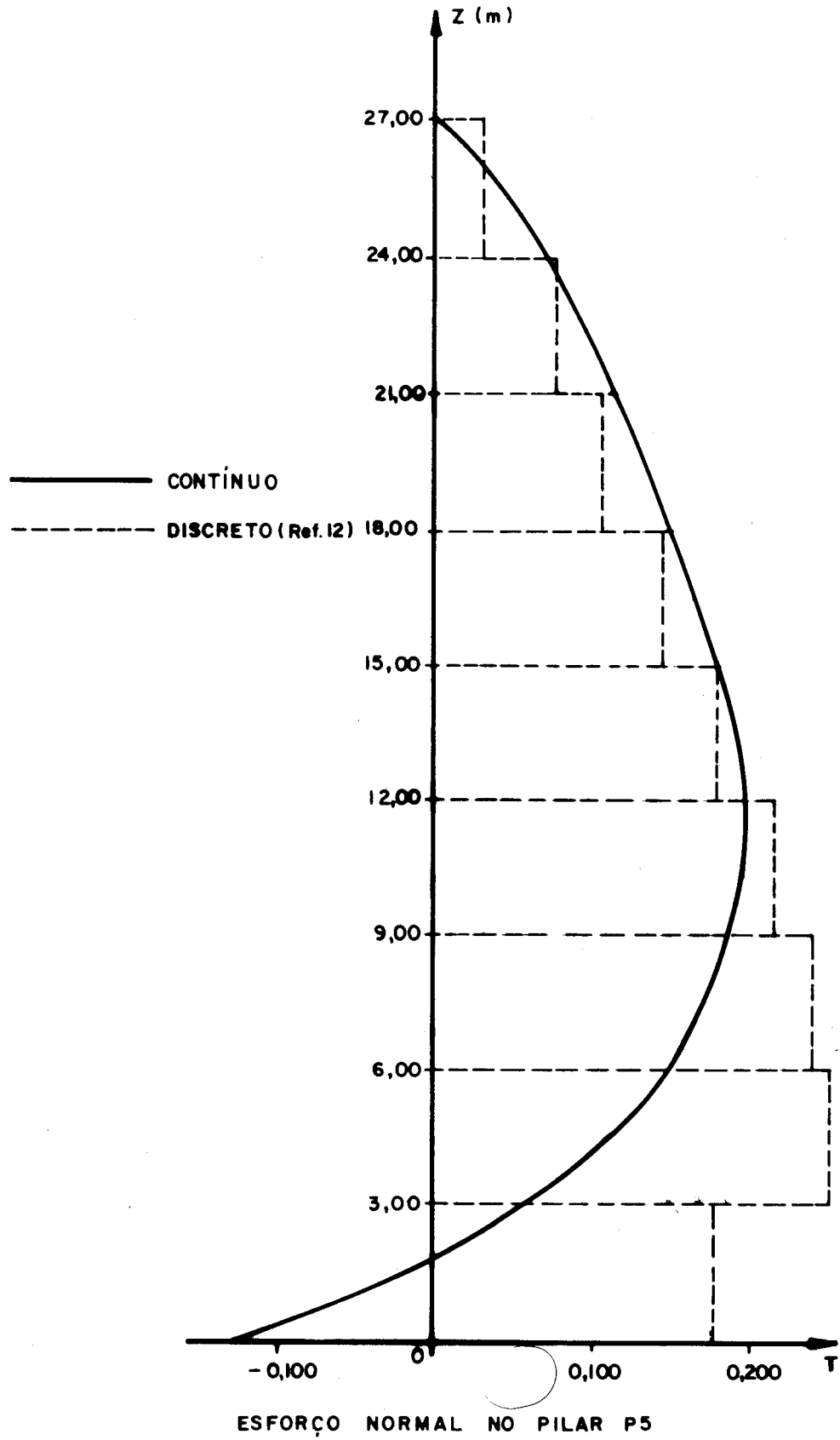


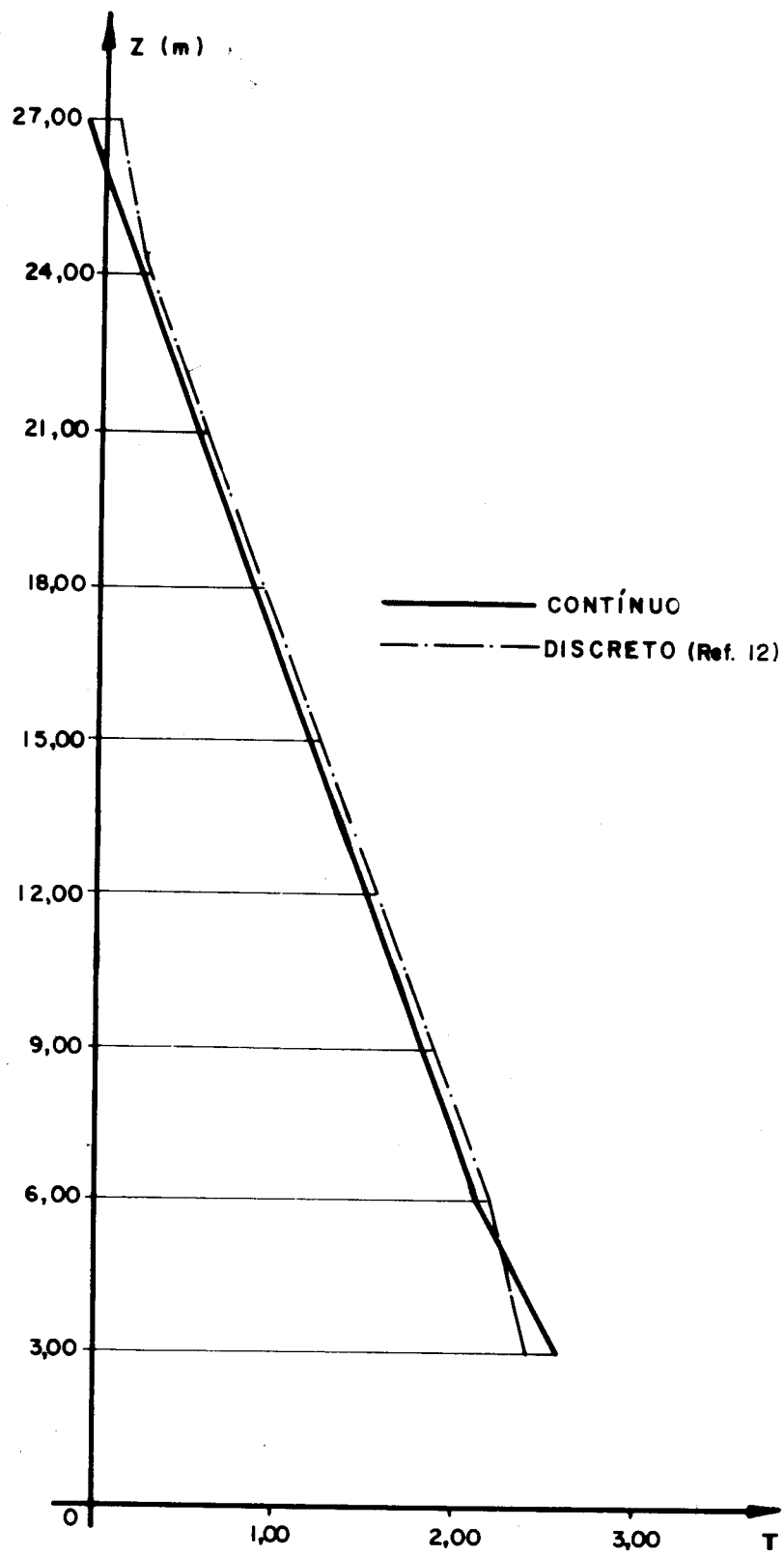


ESFORÇO NORMAL NO PILAR P3

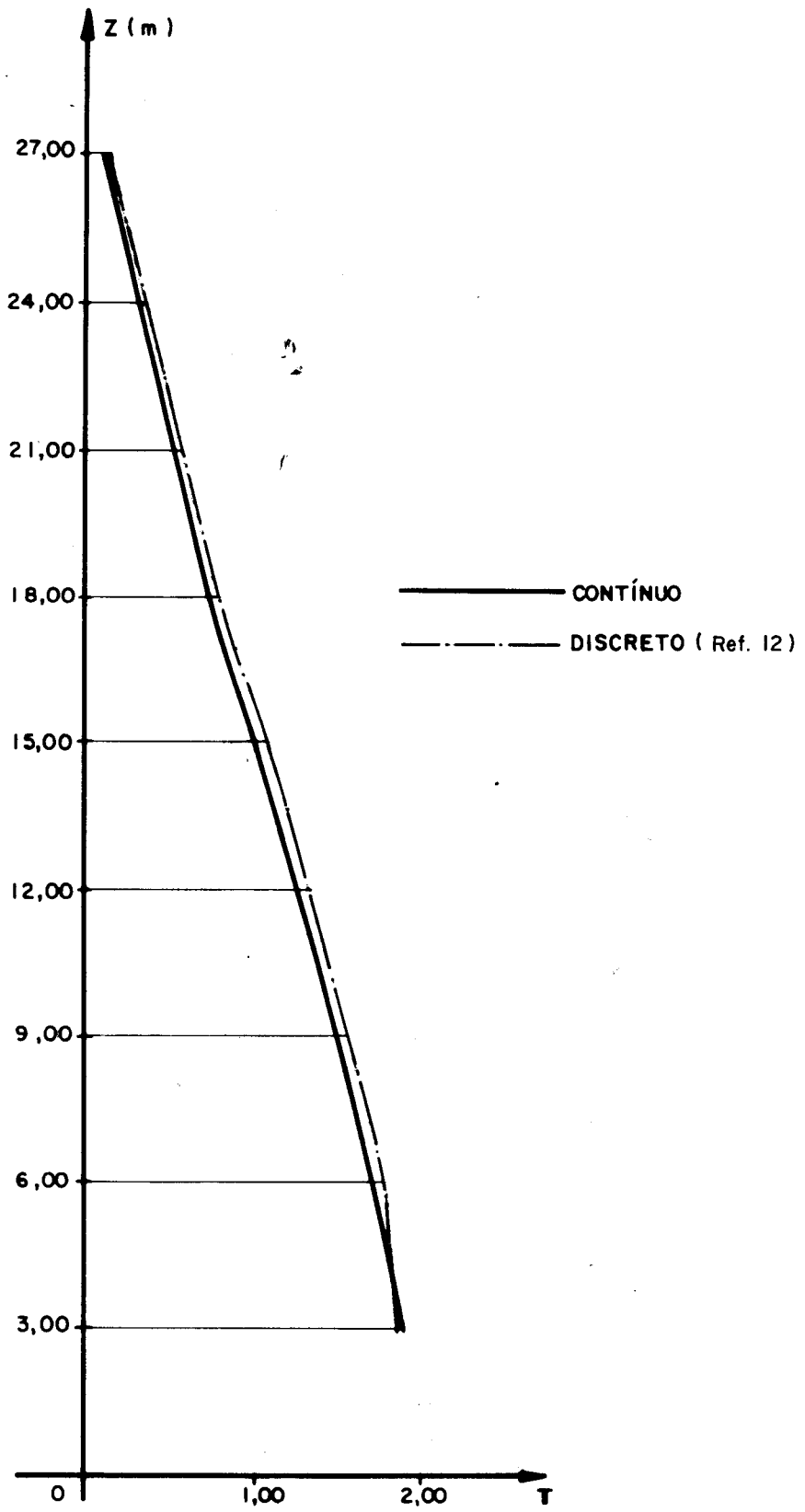


ESFORÇO NORMAL NO PILAR P4

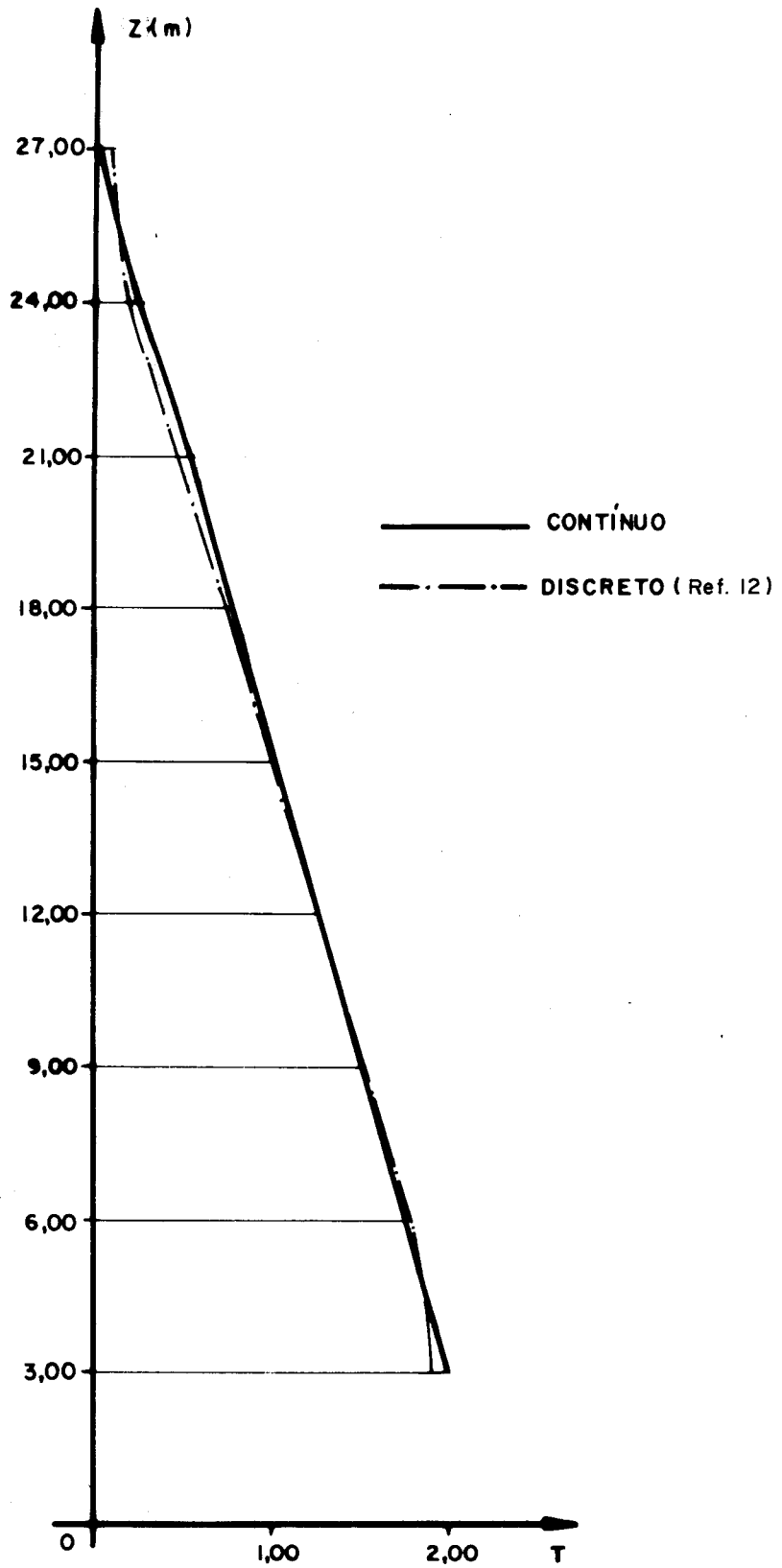




ESFORÇOS CORTANTES - VIGAS V1 E V4



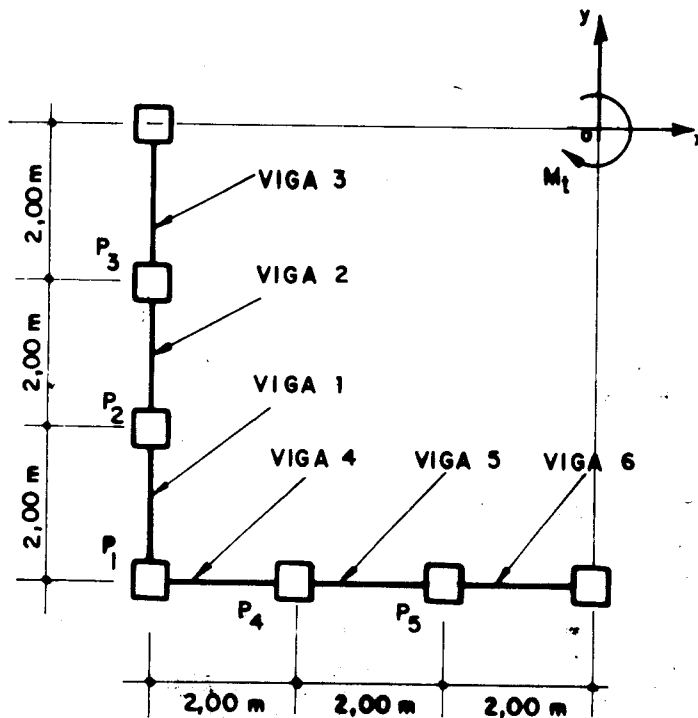
ESFORÇOS CORTANTES VIGAS V2 E V5



ESFORÇOS CORTANTES - VIGAS V3 E V6

EXEMPLO 2

O exemplo 2 consiste da mesma estrutura já analisada no exemplo 1, porém, desta vez com 20 pavimentos.



PLANTA BAIXA

Carregamento - Momento torçor Uniformemente
Distribuído $M_t = 8,64t.m/m$
Dimensão de todos os pilares 30cm x 30cm
Dimensão das vigas 20cm x 40cm
Altura dos andares $h = 3,00m$
Número de andares $N = 20$
Módulo de elasticidade $E = 200.000kgf/cm^2$

Seguido dos resultados fornecidos pelo programa, encontram-se seus respectivos gráficos.

RESULTADOS FORNECIDOS PELO PROGRAMA - 1

UNIDADES FORÇA EM (T.) COMPRIMENTO EM (CM.)
NUMERO DE ANDARES= 20
ALTURA DOS ANDARES= 300.00
COMP. DIRECAO-X= 1200.00 COMP. DIRECAO-Y= 1200.00
MODULO DE ELASTICIDADE= 0.2000E C3

ESTRUTURA PERIFERICA

-DIRECAO X-

PILAR	ALTURA	LARGURA
1	30.00	30.00
2	30.00	30.00
3	30.00	30.00
4	30.00	30.00

VIGA	VAG	ALTURA	LARGURA
1	200.00	40.00	20.00
2	200.00	40.00	20.00
3	200.00	40.00	20.00

-DIRECAO Y-

PILAR	ALTURA	LARGURA
1	30.00	30.00
2	30.00	30.00
3	30.00	30.00
4	30.00	30.00

VIGA	VAG	ALTURA	LARGURA
1	200.00	40.00	20.00
2	200.00	40.00	20.00
3	200.00	40.00	20.00

ROTACOES DOS DIAFRAGMAS

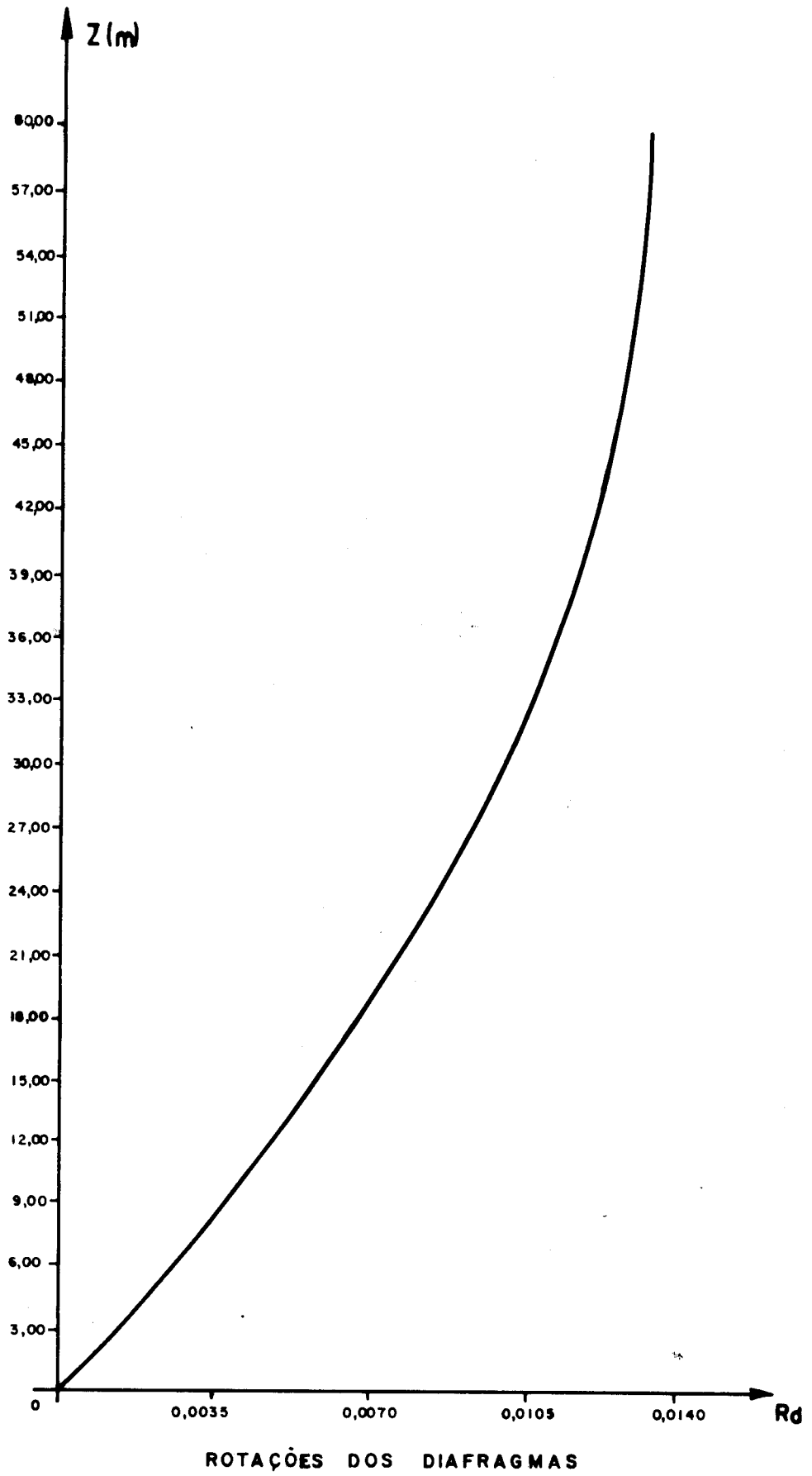
COTA	ROTACOES
0	-0.67401E-06
1	0.12892E-02
2	0.25153E-02
3	0.36767E-02
4	0.47732E-02
5	0.58041E-02
6	0.67694E-02
7	0.76686E-02
8	0.85018E-02
9	0.92687E-02
10	0.99694E-02
11	0.10604E-01
12	0.11172E-01
13	0.11673E-01
14	0.12108E-01
15	0.12476E-01
16	0.12778E-01
17	0.13013E-01
18	0.13182E-01
19	0.13285E-01
20	0.13321E-01

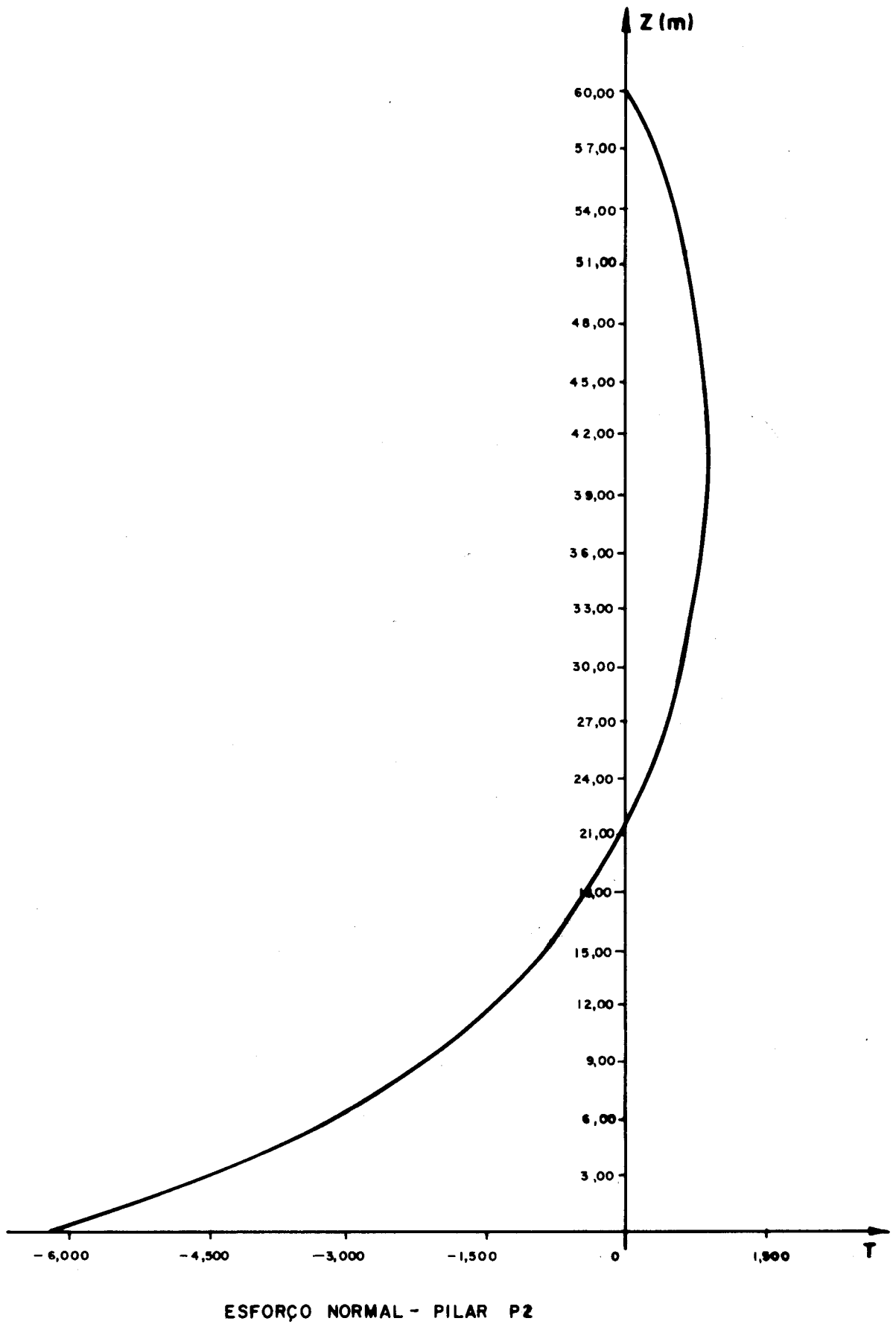
ESFORÇOS NURMAIS NOS PILARES

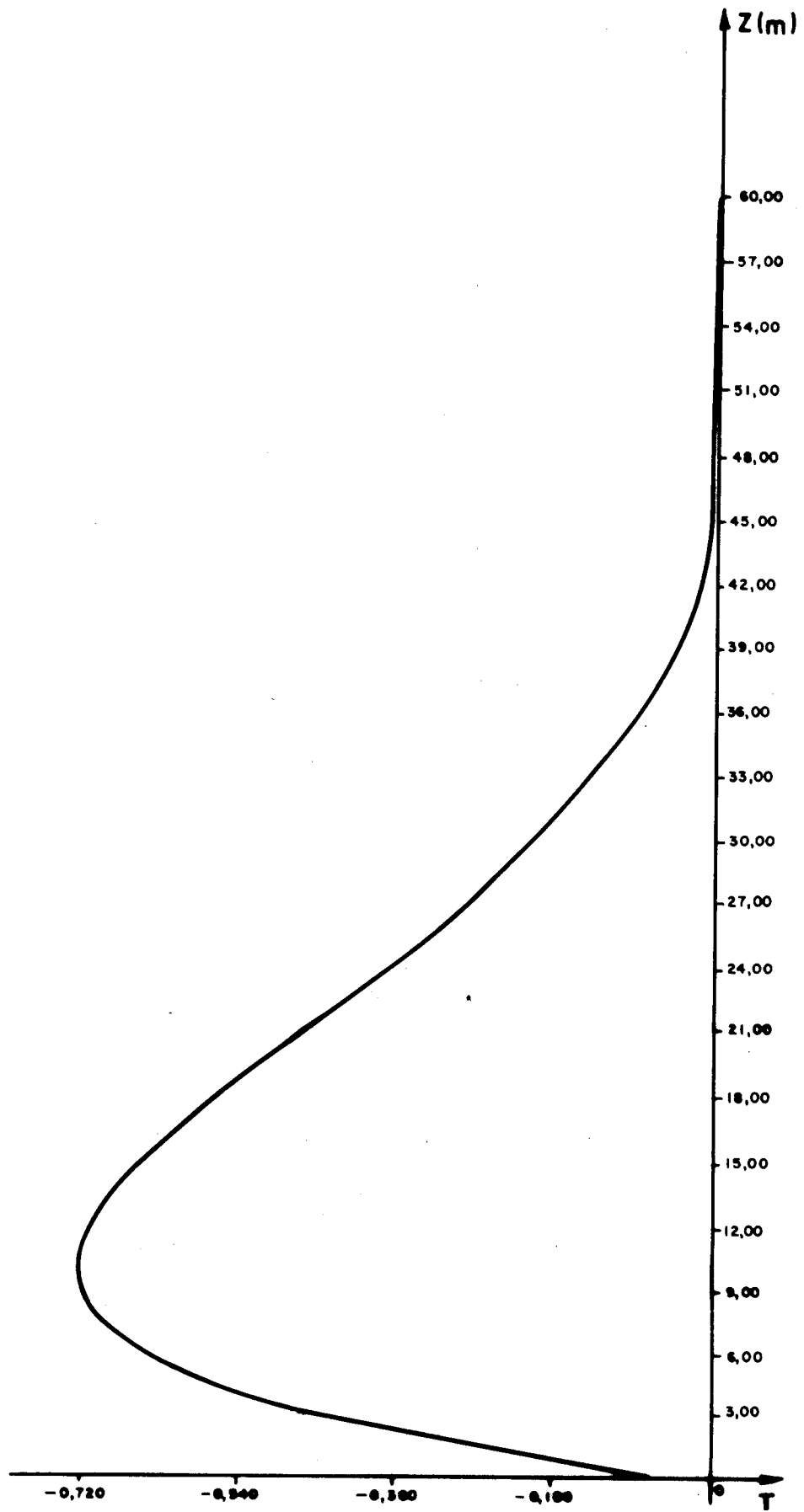
COTA	PILAR 1	PILAR 2	PILAR 3	PILAR 4	PILAR 5
0	0.001	-6.182	-0.079	6.184	0.080
1	0.001	-4.514	-0.469	4.516	0.470
2	0.001	-3.238	-0.664	3.240	0.665
3	0.001	-2.255	-0.731	2.257	0.732
4	0.001	-1.493	-0.718	1.494	0.719
5	0.001	-0.899	-0.658	0.900	0.659
6	0.001	-0.434	-0.572	0.436	0.573
7	0.001	-0.071	-0.476	0.072	0.477
8	0.000	0.212	-0.379	-0.211	0.380
9	0.000	0.431	-0.289	-0.430	0.289
10	0.000	0.597	-0.209	-0.596	0.209
11	0.000	0.718	-0.141	-0.717	0.141
12	0.000	0.799	-0.087	-0.799	0.087
13	0.000	0.844	-0.047	-0.844	0.047
14	0.000	0.854	-0.020	-0.854	0.020
15	0.000	0.829	-0.005	-0.829	0.005
16	0.000	0.766	-0.001	-0.766	0.001
17	0.000	0.660	-0.004	-0.660	0.004
18	0.000	0.505	-0.009	-0.505	0.009
19	0.000	0.290	-0.011	-0.290	0.011
20	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000

ESFORÇOS CORTANTE NAS VIGAS

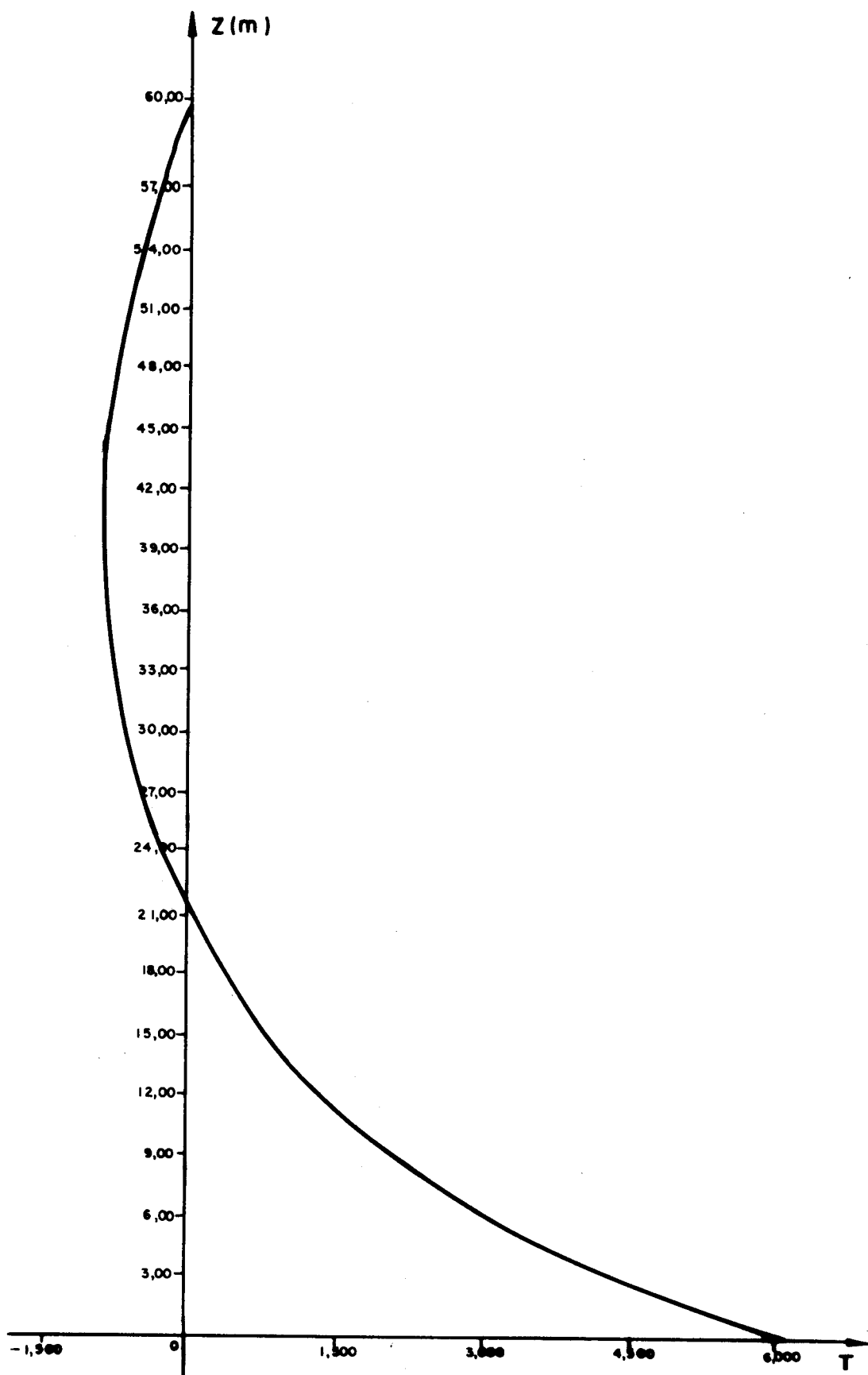
ANDAR	VIGA 1	VIGA 2	VIGA 3	VIGA 4	VIGA 5	VIGA 6
1	6.005	4.553	4.832	6.005	4.553	4.832
2	5.563	4.448	4.569	5.563	4.448	4.569
3	5.158	4.295	4.316	5.158	4.296	4.316
4	4.781	4.110	4.069	4.781	4.110	4.069
5	4.424	3.901	3.825	4.424	3.901	3.825
6	4.084	3.674	3.582	4.084	3.675	3.582
7	3.750	3.436	3.338	3.750	3.436	3.338
8	3.437	3.188	3.094	3.437	3.189	3.094
9	3.126	2.935	2.849	3.126	2.935	2.849
10	2.820	2.678	2.603	2.820	2.678	2.604
11	2.517	2.417	2.356	2.517	2.417	2.356
12	2.218	2.155	2.108	2.218	2.155	2.108
13	1.920	1.892	1.859	1.920	1.892	1.859
14	1.622	1.629	1.609	1.622	1.630	1.609
15	1.324	1.368	1.359	1.324	1.368	1.359
16	1.025	1.108	1.108	1.025	1.108	1.108
17	0.723	0.851	0.857	0.723	0.851	0.857
18	0.417	0.599	0.605	0.417	0.600	0.605
19	0.105	0.354	0.352	0.105	0.354	0.352
20	-0.216	0.118	0.097	-0.216	0.119	0.097



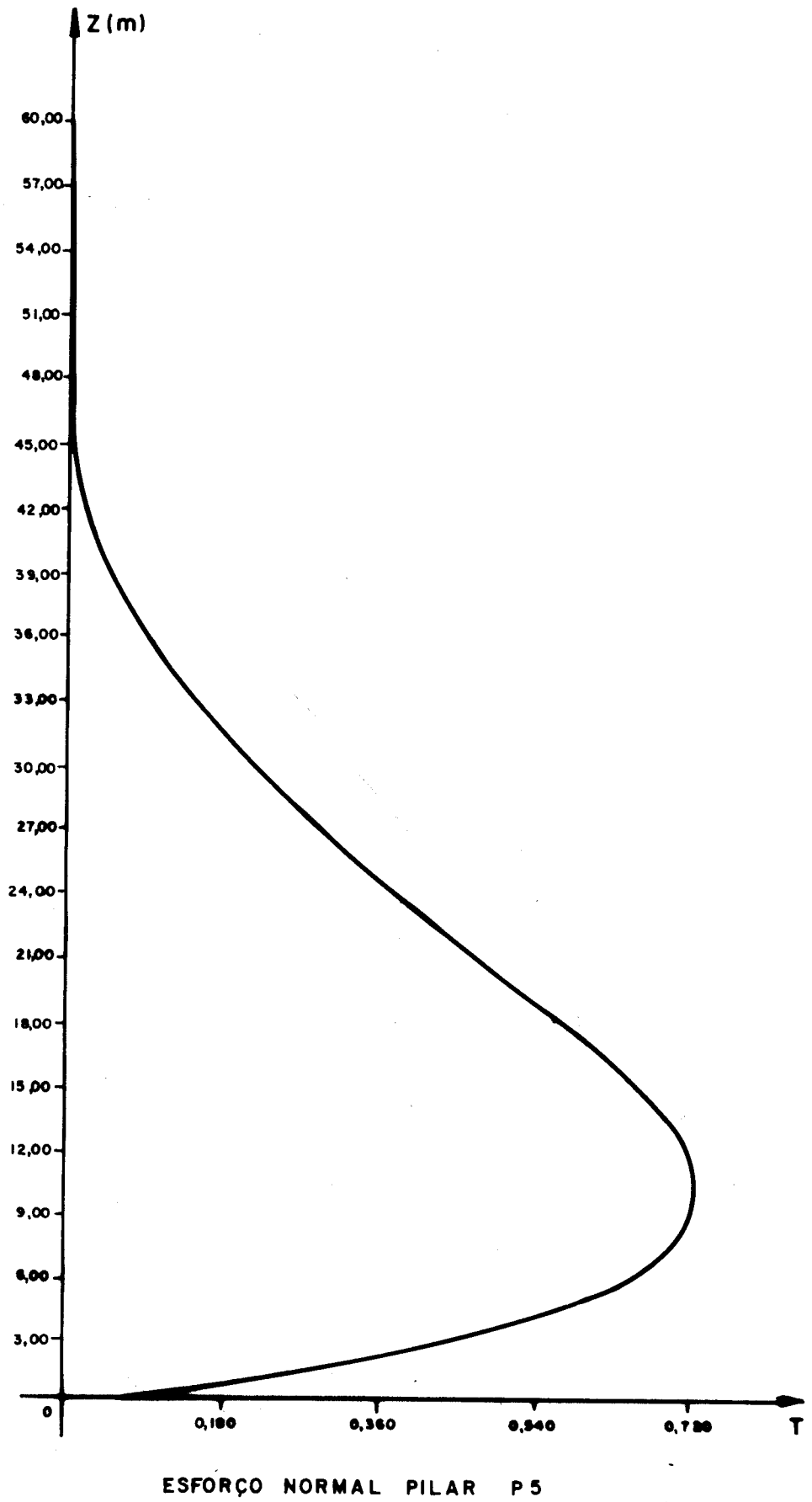


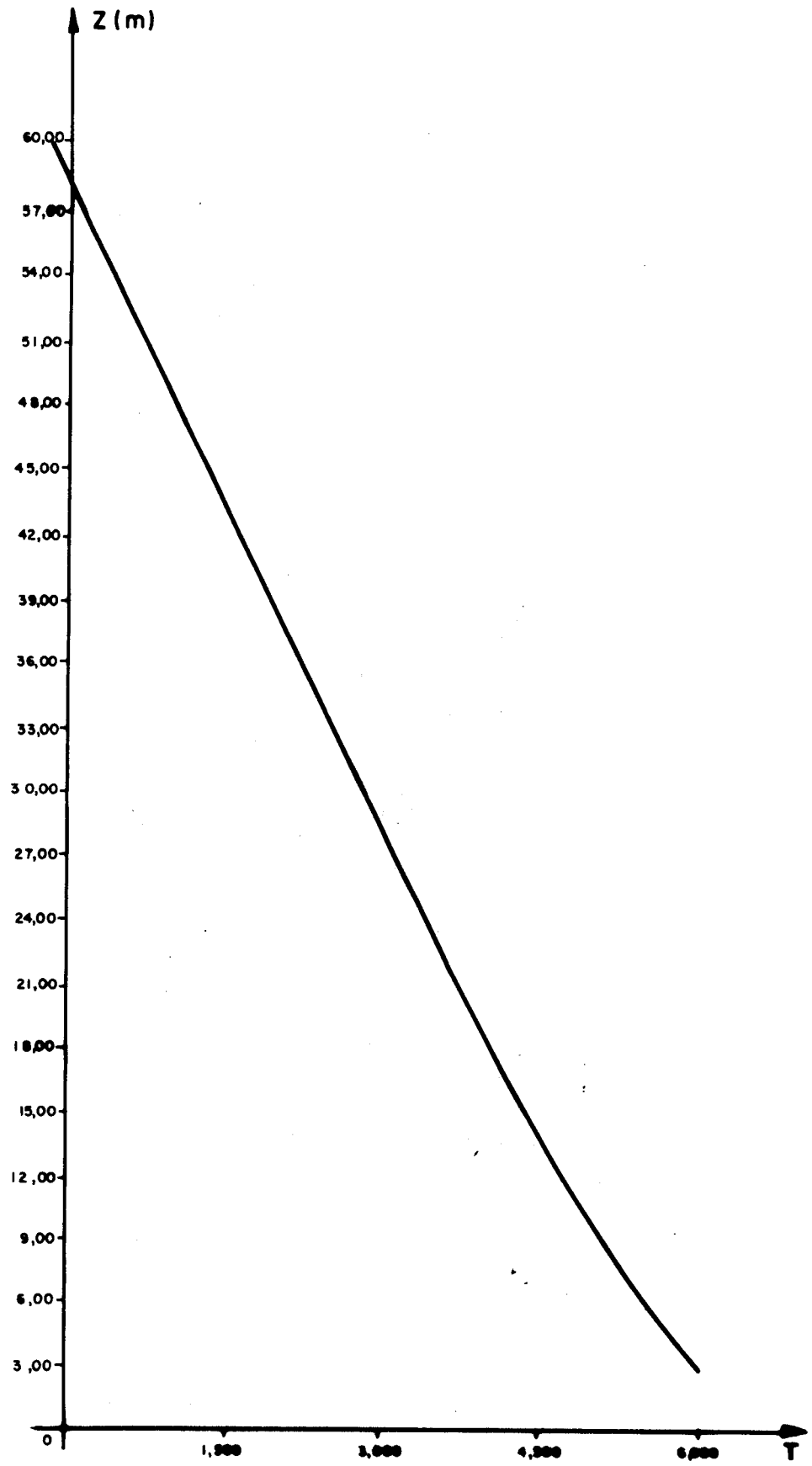


ESFORÇO NORMAL NO PILAR P3

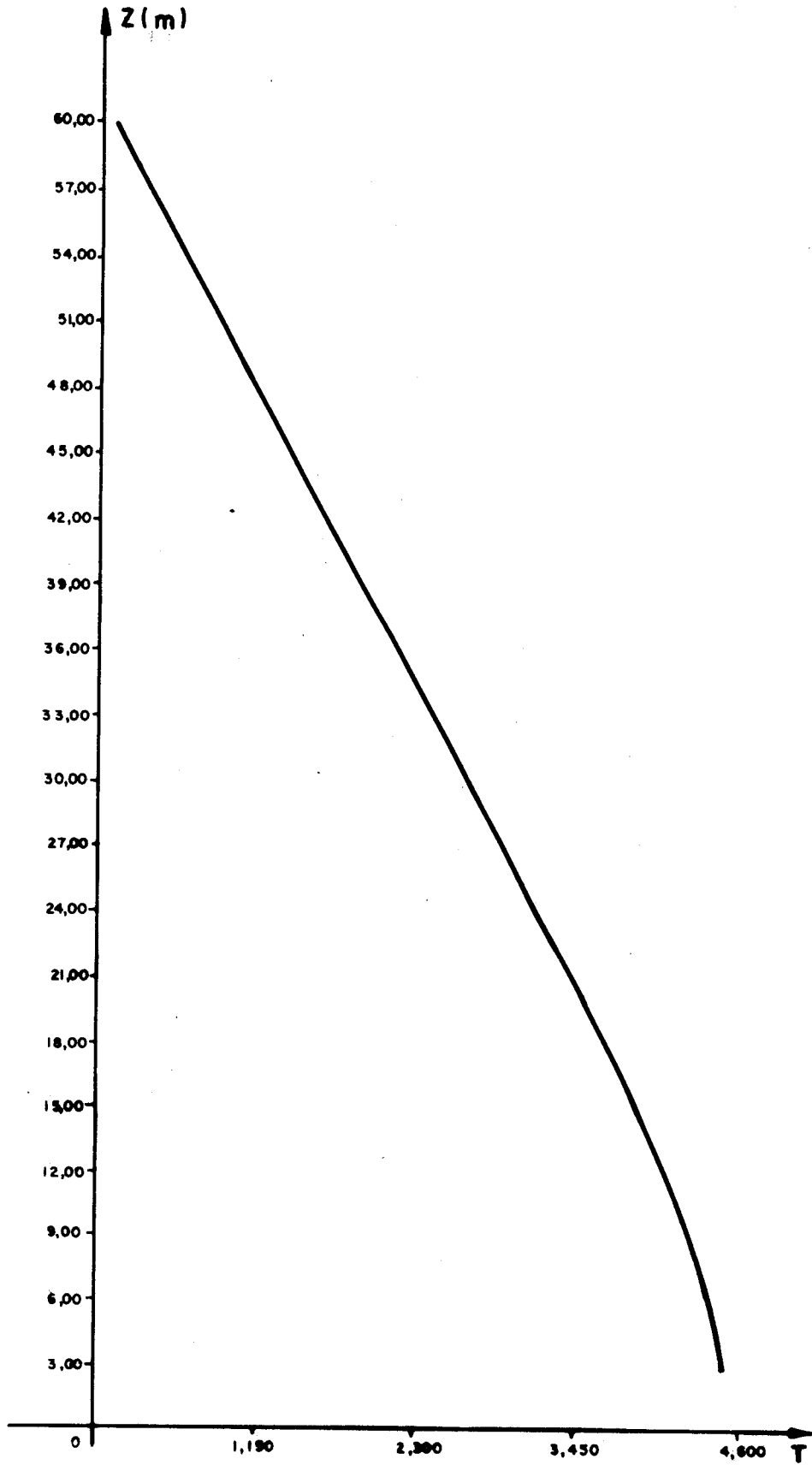


ESFORÇO NORMAL - PILAR P4

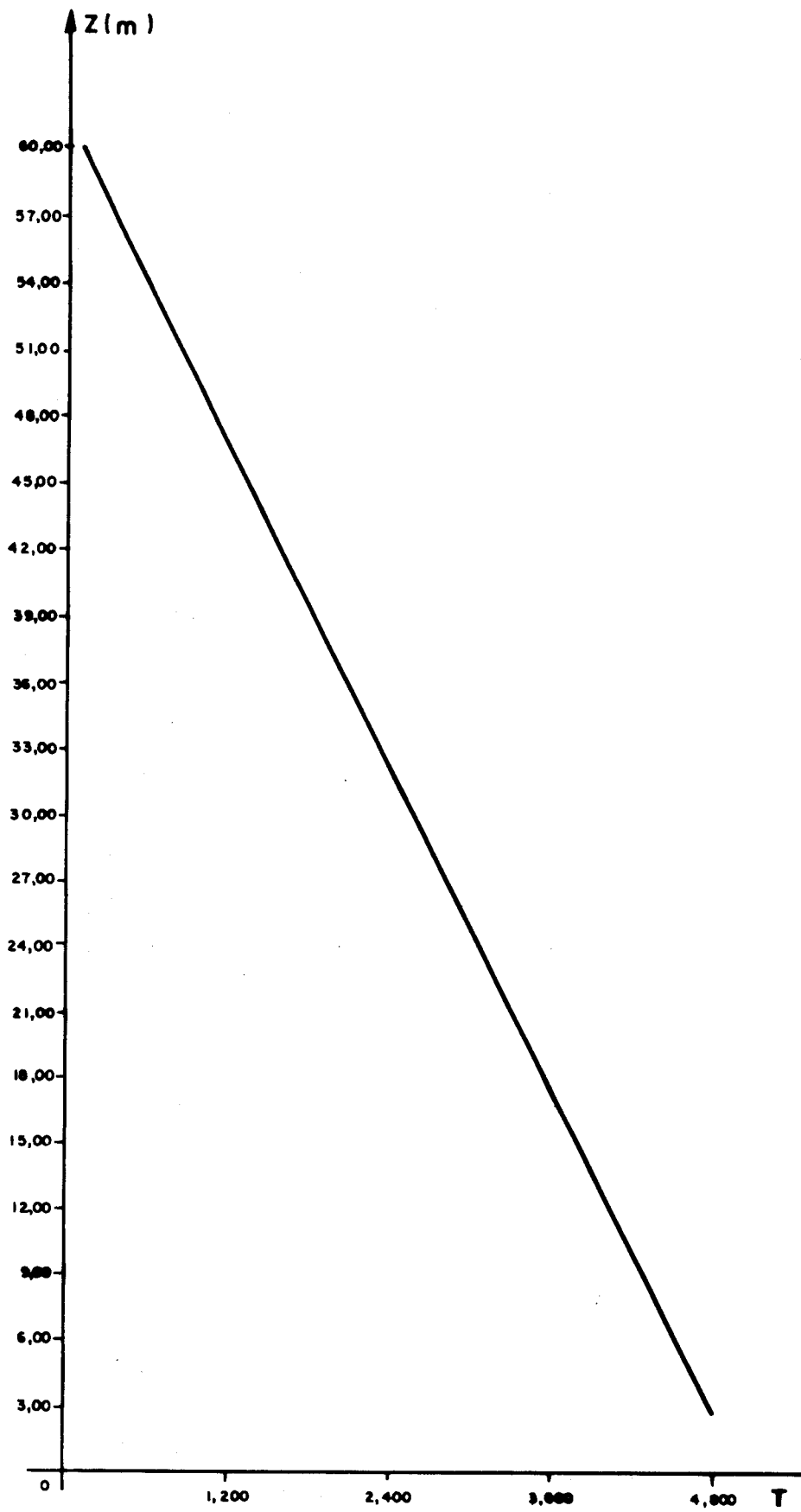




ESFORÇOS CORTANTES VIGAS V1 E V4



ESFORÇOS CORTANTES - VIGAS V2 E V5



ESFORÇOS CORTANTES VIGAS V3 E V6

4.3 - PROGRAMA 2 E EXEMPLOS

O programa principal faz uso de onze subrotinas:

- RESOL - Resolução de sistemas de equações lineares
- MTXM - Multiplicação de matriz por matriz
- ZJNV - Inversão de matrizes
- GERAG - Geração da matriz G e G_{ω}
- GERAH - Geração da matriz H
- GERAR - Geração da matriz R
- GERAS - Geração da matriz S
- GRAHW - Geração da matriz H_{ω}
- GRASW - Geração da matriz S_{ω}
- GRARW - Geração da matriz R_{ω}
- FUNCTION CARGA - Define o carregamento externo em função de Z .

Com auxílio das figuras 52(a) e 52(b) define-se um dado de entrada do programa, no que se refere ao tipo de estrutura que se deseja analisar.

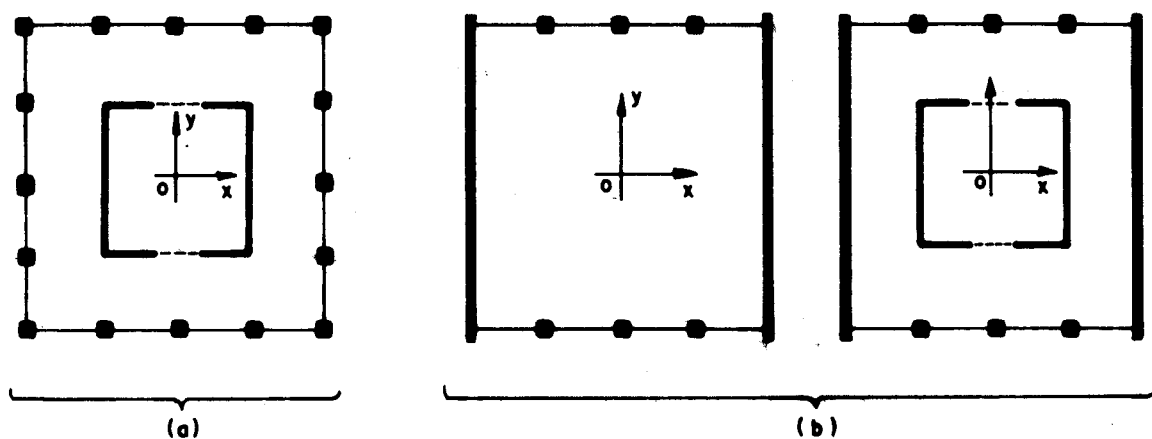


FIG.52 - TIPOS DE ESTRUTURAS

Para estruturas na configuração da Fig.52(a), tem-se ITIPO=1
Para estruturas na configuração da Fig.52(b), tem-se ITIPO=2

O carregamento externo, no caso momento torçor, é definido em função de Z, através da subrotina FUNCTION CAR-GA.

Todos os demais dados da estrutura são fornecidos através do programa principal na forma e na ordem a seguir.

Primeiro Cartão - Fornece qualquer comentário desejado aos resultados. Ídem ao caso anterior FORMAT (20A4).

Grupo 1 de Cartões - Possuindo uma quantidade de dois Cartões, fornece dados referente ao núcleo. No tocante a ordem dos cartões; serão respectivamente o segundo e o terceiro cartão.

Segundo Cartão - FORMAT(3I4,4F10.3) na seguinte ordem:

ITIPO - Tipo da estrutura (ver Figs. 52(a) e 52(b))
AL - Dimensão (a) do núcleo
BL - Dimensão (b) do núcleo
ESPA - Espessura da parede A do núcleo
ESPB - Espessura da parede B do núcleo
ABCN - Abertura central do núcleo (vão do lintel)
HLIN - Altura do lintel. (No caso do núcleo não ser contra-ventado por lintel HLIN = 0.0).

Terceiro Cartão - FORMAT(E13.5,F12.3), na seguinte ordem:

JJW - Momento setorial de inércia para uma parede do núcleo, com polo em 0 (J_{ω}^*).
JT - Momento de inércia à torção para uma parede do núcleo.

Grupo 2 de Cartões - Referem-se às estruturas Tipo (1).

Quarto Cartão - FORMAT(3I4,4F10.3), na seguinte ordem:

- NA - Número de andares
- M - Número de pilares da direção X
- N - Número de pilares da direção Y
- HA - Altura dos andares
- LX - Dimensão direção X
- LY - Dimensão direção Y
- E - Módulo de elasticidade longitudinal

O número de cartões a seguir depende da quantidade de pilares em ambas as direções. E os dados devem ser fornecidos no FORMAT(11.F7.2), na seguinte ordem tantas vezes quantas forem suas respectivas quantidades.

- A(I) - Vãos das vigas de direção Y I = 1, ..., N-1
- B(J) - Vãos das vigas de direção X J = 1, ..., M-1
- HPY(I) - Altura em planta dos pilares de direção Y
I = 1, ..., N
- DPY(I) - Largura em planta dos pilares de direção Y
I = 1, ..., N
- HVY(I) - Altura das vigas de direção Y I = 1, ..., N-1
- DVY(I) - Largura das vigas de direção Y I = 1, ..., N-1
- HPX(J) - Altura em planta dos pilares de direção X
J = 1, ..., M
- DPX(J) - Largura em planta dos pilares de direção X
J = 1, ..., M
- HVX(J) - Altura das vigas de direção X J = 1, ..., M-1
- DVX(J) - Largura das vigas de direção X J = 1, ..., M-1

Grupo 3 de Cartões - Referem-se as estruturas tipo(2). É evidente que o Grupo 3 de cartões será inserido aos dados do programa, somente quando ITIPO=2. O mesmo será válido para o Grupo 2, que somente será inserido aos dados do programa quando ITIPO=1. É importante observar também, que

no caso de ITIPO=2 e a estrutura não possuir núcleo interno, todos os dados do Grupo 1 de cartões a menos de ITIPO serão nulos. Então para ITIPO=2, tem-se para o quarto cartão o seguinte.

Quarto Cartão - FORMAT(2I4,5F10.3)

NA - Número de andares
M - Número de pilares da direção X
HA - Altura dos andares
LX - Dimensão direção X
LY - Dimensão direção Y
E - Módulo de elasticidade longitudinal
DW - Espessura da parede externa

O número de cartões a seguir depende da quantidade de pilares. E os dados devem ser fornecidos no FORMAT(11F7.2), na seguinte ordem tantas vezes quantas forem suas respectivas quantidades.

B(J) - Vão das vigas de direção X J = 1, ..., M
HPX(J) - Altura em planta dos pilares de direção X
J = 1, ..., M
DPX(J) - Largura em planta dos pilares de direção X
J = 1, ..., M
HVX(J) - Altura das vigas de direção X J = 1, ..., M
DVX(J) - Largura das vigas de direção X J = 1, ..., M

Quanto ao módulo de elasticidade transversal G, o mesmo está implícito no programa em função de (E) módulo de elasticidade longitudinal e do coeficiente de Poisson ν . Como, para todos os exemplos aqui apresentados são para concreto armado, tomou-se então $\nu = 0,20$.

Os resultados impressos na saída do programa 2 são os seguintes:

Para ITIPO=1

Rotações dos diafragmas, esforços normais nos pilares, esforços cortantes nas vigas. Esforços normais, esforços cortantes e momentos fletores nas paredes A e B do núcleo. Esforço cortante distribuído nas intersecções das paredes A e B do núcleo, e esforço cortante nos lintéis quando for o caso.

Para ITIPO=2

Rotações dos diafragmas, esforços cortantes e Momentos fletores na parede externa. Esforços normais nos pilares e esforços cortantes nas vigas. No caso de haver núcleo tem-se ainda os seus respectivos esforços, análogo ao caso precedente.

A seguir apresenta-se a listagem do programa 2.

LISTAGEM DO PROGRAMA 2

C
C
C
C
C
C
C
C
C

EDIFICIO DE ESTRUTURA TUBULAR
SUBMETIDO A TORCAO

SUBROTINA RESOL RESOLUCAO DO SISTEMA J. CELSO

```

SUBROUTINE RESOL(A,S,N)
DIMENSION A(200,200),S(200)
NI=N-1
NS=N+1
DO 10 L=1,N
PIVO=0.
DO 20 I=L,N
IF(ABS(A(I,L))-ABS(PIVO))20,20,2
PIVO=A(I,L)
2 J=I
20 CONTINUE
IF(ABS(PIVO))11,11,13
11 WRITE(3,12)
12 FORMAT(//,5X,'SISTEMA SINGULAR')
RETURN
13 IF(J-L)3,1,3
3 DO 30 LI=L,NS
GAV=A(L,LI)
A(L,LI)=A(J,LI)
30 A(J,LI)=GAV
1 K=L+1
4 IF(L-N)4,5,5
DO 10 J=K,N
FAT=-A(J,L)/A(L,L)
DO 10 LI=K,NS
10 A(J,LI)=A(J,LI)+FAT*A(L,LI)
5 S(N)=A(N,NS)/A(N,N)
DO 40 J=1,NI
K=N-J
S0=0.
L=K+1
DO 50 M=L,N
50 S0=S0+S(M)*A(K,M)
40 S(K)=(A(K,NS)-S0)/A(K,K)
RETURN
END

```

C
C
C
C

SUBROTINA MIXM MULTIPLICACAO DE MATRIZ PC J. CELSO

```

SUBROUTINE MIXM(A,LA,KA,B,KB)
DIMENSION A(30,30),B(30,30),C(30,30)
DO 1 NLA=1,LA
DO 2 NCB=1,KB
C(NLA,NCB)=0.0
DO 3 NCA=1,KA
3 C(NLA,NCB)=C(NLA,NCB)+A(NLA,NCA)*B(NCA,NCB)
2 CONTINUE
1 CONTINUE
DO 4 J=1,LA
DO 5 I=1,KB
5 A(J,I)=C(J,I)
4 CONTINUE
3 CONTINUE
2 RETURN
1 END

```


J.CELSO
SUBROUTINA ZINV CALCULO DA MATRIZ INVERSA

```

SUBROUTINE ZINV(RM,I)
DIMENSION KM(30,30),RMAUX(30,30)
ERRO=0.0001
DO 1 L=1,I
DO 2 K=1,I
IF(L-K)3,4,3
4 KMAUX(L,K)=1.
GO TO 2
3 RMAUX(L,K)=0.
2 CONTINUE
1 CONTINUE
DO 5 L=1,I
IF(ABS(RM(L,L))-ERRO)6,6,7
6 DO 8 LP=L,I
IF(ABS(RM(LP,L))-ERRO)8,8,10
8 CONTINUE
10 DO 11 KV=1,I
VAUX=RM(LP,KV)
RM(LP,KV)=KM(L,KV)
RM(L,KV)=VAUX
11 CONTINUE
DO 12 KV=1,I
VAUX=RMAUX(LP,KV)
RMAUX(LP,KV)=RMAUX(L,KV)
RMAUX(L,KV)=VAUX
12 CONTINUE
7 A=KM(L,L)
WRITE(5,21)A
21 FORMAT(/,40X,'A=',F13.2)
DO 13 KV=1,I
RM(L,KV)=RM(L,KV)/A
13 CONTINUE
DO 14 KV=1,I
RMAUX(L,KV)=RMAUX(L,KV)/A
14 CONTINUE
DO 15 J=1,I
IF(J-L)16,15,16
16 B=RM(J,L)
DO 17 K=1,I
RM(J,K)=RM(J,K)-B*RM(L,K)
RMAUX(J,K)=RMAUX(J,K)-B*RMAUX(L,K)
17 CONTINUE
15 CONTINUE
5 CONTINUE
DO 18 L=1,I
DO 18 K=1,I
RM(L,K)=RMAUX(L,K)
18 CONTINUE
RETURN
END

```

J.CELSO
FUNCAO CARGA MONMENTO TORCOR DISTRIBUIDO

```

FUNCTION CARGA(IC,HA)
Z=IC*HA
CARGA=2.16*(6000.-Z)
RETURN
END

```

C
C
C
C

J.CELSO
SUBROTINA GERAH GERACAO DA MATRIZ (H)

```

SUBROUTINE GERAH(H,M,N,LX,LY,HA,A,B,SP,SC,E,NH)
REAL H(30,30),A(20),B(20),SP(20),SC(20),LX,LY
II=N-1
JJ=M-1
NL=M+N-2
DO 3 L=1,NL
DO 3 K=1,NL
H(L,K)=0.
3 CONTINUE
DO 4 K=1,II
H(1,K)=A(K)*LX/2
4 CONTINUE
IM=II+1
DO 5 K=IM,NL
JN=K-II
H(1,K)=B(JN)*LY/2
5 CONTINUE
H(2,1)=1/(E*SP(1))
H(2,IM)=-1/(E*SC(1))
DO 6 L=3,IM
H(L,L-2)=-1/(E*SP(L-1))
H(L,L-1)=1/(E*SP(L-1))
6 CONTINUE
IA=IM+1
DO 7 L=IA,NL
J=L-1
H(L,L-1)=1/(E*SC(J))
H(L,L)=-1/(E*SC(J))
7 CONTINUE
RETURN
END
```

C
C
C
C
C

J.CELSO
SUBROTINA GERAS GERACAO DA MATRIS (S)

```

SUBROUTINE GERAS(S,M,N,LX,LY,A,B,NH)
REAL S(30,30),A(20),B(20),LX,LY
II=N-1
JJ=M-1
K=N+M-2
DO 3 LI=1,K
DO 3 KO=1,K
S(LI,KO)=0.
3 CONTINUE
DO 4 LI=1,II
S(LI,1)=A(LI)*LX/2
4 CONTINUE
IM=II+1
DO 5 LI=IM,K
JN=LI-II
S(LI,1)=B(JN)*LY/2
5 CONTINUE
DO 6 LI=1,II
S(LI,LI+1)=-1.
S(LI,LI+2)=1.
6 CONTINUE
IA=IM+1
S(II,IA)=0.
S(IM,2)=1.
S(IM,IA)=-1.
KK=K-1
DO 7 LI=IA,KK
S(LI,LI)=1.
S(LI,LI+1)=-1.
7 CONTINUE
S(K,K)=1.
RETURN
END
```

C
C
C
C

J. CELSO
SUBROTINA GERAR GERACAO DA MATRIZ (R)

```

SUBROUTINE GERAR(R,M,N,HA,E,A,B,JPY,JPX,JVY,JVX,NW)
DIMENSION R(30,30),RK(20),RM(20),RN(20),RL(20),RR(20),RS(20),RT(20
*),RU(20),A(20),B(20)
REAL MK(20),NK(20),JPY(20),JPX(20),JVY(20),JVX(20)
II=N-1
JJ=M-1
NL=M+N-2
DO 3 I=1,N
NK(I)=JPY(I)/HA
CONTINUE
DO 4 J=1,M
MK(J)=JPX(J)/HA
CONTINUE
IB=II-1
DO 5 I=1,IB
RK(I)=HA*A(I)**3/(12*F*JVY(I))+HA*A(I)**2/(48*E*NK(I))+HA*A(I)**2/
*(48*E*NK(I+1))
RM(I)=HA*A(I)*A(I+1)/(48*E*NK(I+1))
RN(I)=HA*A(I+1)*A(I)/(48*E*NK(I))
CONTINUE
RL(II)=HA*A(II)**3/(12*E*JVY(II))+HA*A(II)**2/(48*E*NK(II))+HA*A(I
*I)**2/(24*E*NK(N))
IC=JJ-1
DO 6 J=1,IC
RR(J)=HA*B(J)**3/(12*F*JVX(J))+HA*B(J)**2/(48*E*MK(J))+HA*B(J)**2/
*(48*E*MK(J+1))
RS(J)=HA*B(J)*B(J+1)/(48*E*MK(J+1))
RT(J)=HA*B(J+1)*B(J)/(48*E*MK(J))
CONTINUE
RU(JJ)=HA*B(JJ)**3/(12*E*JVX(JJ))+HA*B(JJ)**2/(48*F*MK(JJ))+HA*B(J
*J)**2/(24*E*MK(M))
DO 7 L=1,NL
DO 7 K=1,NL
R(L,K)=0.
CONTINUE
DO 8 L=1,IB
R(L,L)=RK(L)
R(L,L+1)=RM(L)
CONTINUE
DO 9 L=2,IB
R(L,L-1)=RN(L-1)
CONTINUE
R(II,IB)=RM(IB)
R(II,II)=RL(II)
IA=II+1
DO 10 L=IA,NL
JN=L-1
R(L,L)=RR(JN)
R(L,L+1)=RS(JN)
CONTINUE
ID=IA+1
DO 11 L=ID,NL
R(L,L-1)=RT(L-4)
CONTINUE
R(NL,NL-1)=RS(IC)
R(NL,NL)=RU(JJ)
RETURN
END

```

3

4

5

6

7

8

9

10

11

C
C
C
C

SUBROTINA GERAG GERACAO DA MATRIZ (G) E (GW)

10
20
30

```

SUBROUTINE GERAG(G,E,JPW,JJW,N,M,LX,ITIPO,NW)
REAL JJW,JPW,LX
DIMENSION G(30,30)
IF( ITIPO-1)10,10,20
NT=N+M-2
GO TO 30
NT=M
GN=-E*JJW/2
GM=-E*(JPW*LX**2)/8
GNM=GN+GM
DO 1 L=1,NT
DO 1 K=1,NT
G(L,K)=0.
CONTINUE
G(1,1)=GNM
DO 2 L=2,NT
G(L,L)=1.
CONTINUE
RETURN
END

```

1
2

C
C
C
C

SUBROTINA GRAHW GERACAO DA MATRIZ (HW) J. CELSO

3
4

```

SUBROUTINE GRAHW(HW,M,LX,LY,SC,B,E,NW)
REAL HW(30,30),B(20),SC(20),LX,LY
DO 3 L=1,M
DO 3 K=1,M
HW(L,K)=0.
CONTINUE
DO 4 L=2,M
HW(1,L)=LY*B(L)/2
HW(L,L-1)=1/(E*SC(L-1))
HW(L,L)=-1/(E*SC(L-1))
CONTINUE
HW(1,1)=(B(1)*LY/2+LY*LX/4)
RETURN
END

```

C
C
C
C

SUBROTINA GARSW GERACAO DA MATRIZ (SW) J. CELSO

3
4

```

SUBROUTINE GRASW(SW,M,LX,LY,B,NW)
REAL SW(30,30),B(20),LX,LY
DO 3 L=1,M
DO 3 K=1,M
SW(L,K)=0.
CONTINUE
SW(1,1)=LY*(LX+2*B(1))/4
SW(1,2)=-1.
IM=M-1
DO 4 L=2,IM
SW(L,1)=(LY*B(L))/2
SW(L,L)=1.
SW(L,L+1)=-1.
CONTINUE
SW(M,1)=(LY*B(M))/2
SW(M,M)=1.
RETURN
END

```

C
C
C
C

SUBROTINA GRARW GERACAO DA MATRIZ (RW) J. CELSO

```

SUBROUTINE GRARW(RW,M,HA,F,B,JPX,JVX,NW)
REAL RW(30,30),B(20),JPX(20),JVX(20),MK(20),RR(20),RS(20),RT(20)
JJ=M-1
DO 3 J=1,M
MK(J)=JPX(J)/HA
CONTINUE
RA=HA*B(1)**3/(3*E*JVX(1))+HA*B(1)**2/(12*E*MK(1))
RB=HA*B(1)*B(2)/(24*E*MK(1))
RU=HA*B(M)**3/(12*E*JVX(M))+HA*B(M)**2/(48*E*MK(M-1))+HA*B(M)**2/(
*24*E*MK(M))
DO 4 J=2,JJ
RR(J)=HA*B(J)**3/(12*E*JVX(J))+HA*B(J)**2/(48*E*MK(J-1))+HA*B(J)**
*2/(48*E*MK(J))
RS(J)=HA*B(J)*B(J+1)/(48*E*MK(J))
RT(J+1)=HA*B(J+1)*B(J)/(48*E*MK(J))
CONTINUE
DO 5 L=1,M
DO 5 K=1,M
RW(L,K)=0.
CONTINUE
DO 6 L=2,JJ
RW(L,L)=RR(L)
KW(L,L+1)=RS(L)
CONTINUE
DO 7 L=3,JJ
RW(L,L-1)=RT(L)
CONTINUE
RW(1,1)=RA
RW(1,2)=RB
RW(2,1)=RB
RW(M,M-1)=RS(JJ)
RW(M,M)=RU
RETURN
END

```

3

4

5

6

7

C
C
C
C

PROGRAMA PRINCIPAL

J. CELSO

```

DIMENSION AA(200,200),A(20),B(20),SP(30),SC(30),S(30,30),
*G(30,30),R(30,30),I(30,30),FK(20),FM(20),KN(20),RL(20),RR(20),RS(2
*0),RT(20),RU(20),SS(200),CRP(30),FNP(30,30),QW(30)
*,HPY(10),DPY(10),HVV(10),DVY(10),HPX(10),DPX(10),HVX(10),DVX(10)
*,U(30,30),UN(30),UU(30),UUU(30),F(30),FV(30),QA(30),QB(30)
REAL JVV(20),JVX(20),JPY(20),JPX(20),K(20),MK(20),JT,JL,JJW,
*JPW,LX,LY,KKN,KBN,MW(30),MA(30),MB(30),NB(30),JA,JB
NR=1
NR=3
READ(NR,100)(CRP(I),I=1,20)
FORMAT(20A4)

```

100

C
C
C
C

DADOS DO NUCLEO

```

READ(NR,1)ITIPG,AL,BL,ESPA,FSPB,ABCN,HLIN
FORMAT(13,6F10.3)
READ(NR,2)JJW,JT
FORMAT(E13.5,F12.3)
JL=(ESPB*HLIN**3)/12
IF(ABCN=0)130,140,130
140 ABCN=1
130 VL=ALCN
-----

```

140

130

C

```

C
C
C
C
C
3
5
IF(ITIPO-1)3,3,4
-----
DADOS DA ESTRUTURA TIPO-1
READ(NR,5)NA,M,N,HA,LX,LY,E
FORMAT(2I4,4F10.3)
II=N-1
JJ=M-1
READ(NR,6)(A(I),I=1,II),(B(J),J=1,JJ),(HPY(I),I=1,N),(DPY(I),I=1,N
*), (HVY(I),I=1,II), (DVY(I),I=1,II), (HPX(J),J=1,M), (DPX(J),J=1,M),
* (HVX(J),J=1,JJ), (DVX(J),J=1,JJ)
FORMAT(11F7.2)
-----
C
C
C
7
8
9
10
C
DO 7 I=1,N
SP(I)=HPY(I)*DPY(I)
JPY(I)=(DPY(I)*HPY(I)**3)/12
CONTINUE
DO 8 J=1,M
SC(J)=HPX(J)*DPX(J)
JPX(J)=(DPX(J)*HPX(J)**3)/12
CONTINUE
DO 9 I=1,II
JVY(I)=(DVY(I)*HVY(I)**3)/12
CONTINUE
DO 10 J=1,JJ
JVX(J)=(DVX(J)*HVX(J)**3)/12
CONTINUE

KKN=AL*BL
GN=E/2.4
KBN=12*E*JL/(HA*VL**3)
CCN=(GN*JT+KBN*KKN**2)/2
NT=N+M-2
ND=II
NG=M-2
NFI=NA+4
NDT=ND*(NA+3)
NGT=NG*(NA+3)
NIC=NFI+NDT+NGT
NICC=NIC+1
CALL GERAS(S,M,N,LX,LY,A,B,NW)
CALL GERAH(T,M,N,LX,LY,HA,A,B,SP,SC,F,NW)
CALL GERAR(R,M,N,HA,E,A,B,JPY,JPX,JVY,JVX,NW)

CALL GERAG(G,E,O.,JJJ,N,M,O.,ITIPO,N..)
GO TO 11
-----
C
C
C
C
C
4
12
13
C
C
DADOS DA ESTRUTURA TIPO-2
READ(NR,12)NA,M,HA,LX,LY,F,DK
FORMAT(2I4,5F10.3)
READ(NR,13)(B(J),J=1,M),(HPX(J),J=1,M),(DPX(J),J=1,M),(HVX(J),J=1,
*M),(DVX(J),J=1,M)
FORMAT(11F7.2)
-----

```

```
DO 14 J=1,M
SC(J)=HPX(J)*DPX(J)
JPX(J)=(DPX(J)*HPX(J)**3)/12
JVX(J)=(DVX(J)*HVX(J)**3)/12
CONTINUE
14 JPW=(DP*LY**3)/12
KKN=AL*BL
GV=E/2.4
KBN=12*E*JL/(HA*VL**3)
CCN=(GN*JT+KBN*KKN**2)/2
NG=M-1
NT=NG+1
NFI=NA+4
NGT=NG*(NA+3)
NIC=NFI+NGT
NICC=NIC+1
CALL GRAHW(T,M,LX,LY,SC,B,E,NW)
CALL GRASW(S,M,LX,LY,B,NW)
CALL GFARW(R,M,HA,E,B,JPX,JVX,NW)
N=0.
CALL GFPAW(G,E,JPW,JJW,N,M,LX,ITIPO,NW)
-----
C
C
C
11 CALL ZINV(R,NT)
CALL MTXM(R,NT,NT,S,NT)
CALL MTXM(T,NT,NT,R,NT)
T(1,1)=T(1,1)+CCN
NNA=NA+1
MNA=NA+2
CFG=2*FA**3
CDG=12*HA**2
CFT=12*HA
DO 16 I=1,NIC
DO 16 K=1,NICC
AA(I,K)=0.
16 CONTINUE
DO 17 I=1,NT
IN=I-1
LI=IN*(NA+1)+1
LS=IN*(NA+1)+NA+1
-----
C
C
C
C
OPERADOR DIF. FINITAS NAO CENTRADO
ASCENDENTE APLICADO NA BASE P./ FI
AA(LI,1)=-3*G(I,1)/CFG-3*T(I,1)/CFT
AA(LI,2)=10*G(I,1)/CFG-10*T(I,1)/CFT
AA(LI,3)=-12*G(I,1)/CFG+18*T(I,1)/CFT
AA(LI,4)=6*G(I,1)/CFG-6*T(I,1)/CFT
AA(LI,5)=-G(I,1)/CFG+T(I,1)/CFT
-----
C
C
C
C
OPERADOR DIF. FINITAS CENTRADO
APLICADO NO TOPO P./ FI
AA(LS,NA)=-G(I,1)/CFG+T(I,1)/CFT
AA(LS,NA+1)=2*G(I,1)/CFG-8*T(I,1)/CFT
AA(LS,NA+2)=0.
AA(LS,NA+3)=-2*G(I,1)/CFG+8*T(I,1)/CFT
AA(LS,NA+4)=G(I,1)/CFG-T(I,1)/CFT
-----
C
DO 18 J=2,NT
KI=(J-1)*(NA+3)+3
KS=KI+NA
```

C
C
C
C

OPERADOR DIF. FINITAS NAO CENTRADO
ASCENDENTE APLICADO NA BASE P./ DELTAS E GAMAS

AA(LI, KI-1)=11*G(I, J)/CDG
AA(LI, KI)=-20*G(I, J)/CDG+T(I, J)
AA(LI, KI+1)=6*G(I, J)/CDG
AA(LI, KI+2)=4*G(I, J)/CDG
AA(LI, KI+3)=-G(I, J)/CDG

C
C
C
C
C
C

OPERADOR DIF FINITAS NAO CENTRADO
DESCENDENTE APLICADO NO TOPO P./ DELTAS E GAMAS

AA(LS, KS-3)=-G(I, J)/CDG
AA(LS, KS-2)=4*G(I, J)/CDG
AA(LS, KS-1)=6*G(I, J)/CDG
AA(LS, KS)=-20*G(I, J)/CDG+T(I, J)
AA(LS, KS+1)=11*G(I, J)/CDG

C
C
18
17

CONTINUE
CONTINUE
DO 19 IL=1, NI
LM=(IL-1)*(NA+1)+1
JNA=NA-1
DO 20 KK=1, JNA
LM=LM+1
DO 21 J=2, NT
KM=(J-1)*(NA+3)+3+KK

C
C
C
C
C
C

OPERADOR DIF. FINITAS CENTRADO
APLICADO DO PAV.-1 ATE NA-1 P./ DELTAS ET GAMAS

AA(LM, KM-2)=-G(IL, J)/CDG
AA(LM, KM-1)=16*G(IL, J)/CDG
AA(LM, KM)=-30*G(IL, J)/CDG+T(IL, J)
AA(LM, KM+1)=16*G(IL, J)/CDG
AA(LM, KM+2)=-G(IL, J)/CDG

C
C
21

CONTINUE
K=2+KK

C
C
C
C
C
C

OPERADOR DIF. FINITAS CENTRADO
APLICADO DO PAV.-1 ATE NA-1 P./ FI

AA(LM, K-2)=-G(IL, 1)/CFG+T(IL, 1)/CFT
AA(LM, K-1)=2*G(IL, 1)/CFG-8*1(IL, 1)/CFT
AA(LM, K)=0.
AA(LM, K+1)=-2*G(IL, 1)/CFG+8*1(IL, 1)/CFT
AA(LM, K+2)=G(IL, 1)/CFG-T(IL, 1)/CFT

C
C
C
20
19
C

CONTINUE
CONTINUE

CONDICIONES DE CONTORNO

```

C      DELTA(0)=0          DELTA'(H)=0
C      GAMA(0)=0          GAMA'(H)=0
C      FI(0)=C            FI'(0)=0          FI''(H)=0
C

```

```

C      LL=NT*(NA+1)
C      DO 22 I=2,NT
C      LI=LI+1
C      KI=(NA+3)*(I-1)+3
C      AA(LI+1,2)=1.
C      AA(LI,KI)=1.
C      LS=LI+NT
C      KS=KI+NA
C      LA=LI+NT+1
C      AA(LA,NA)=-1/CDG
C      AA(LA,NA+1)=16/CDG
C      AA(LA,NA+2)=-30/CDG
C      AA(LA,NA+3)=16/CDG
C      AA(LA,NA+4)=-1/CDG
C      AA(LS,KS-3)=-1/CFT
C      AA(LS,KS-2)=6/CFT
C      AA(LS,KS-1)=-18/CFT
C      AA(LS,KS)=10/CFT
22    AA(LS,KS+1)=3/CFT
C      CONTINUE
C      LI=LS+1
C      AA(LI,1)=-3/CFT
C      AA(LI,2)=-10/CFT
C      AA(LI,3)=18/CFT
C      AA(LI,4)=-6/CFT
C      AA(LI,5)=1/CFT

```

```

C
C
C      DO 25 I=1,NNA
C      IC=I-1
25    AA(I,NICC)=CARGA(IC,HA)
C      CONTINUE
C      CALL RESOL(AA,SS,NIC)
26    WRITE(NW,26)(SS(I),I=1,NIC)
C      FORMAT(//,10X,'DESLOCAMENTOS',12(//,5X,8F13.5))
101   WRITE(NW,101)(CRP(I),I=1,20)
C      FORMAT('1',///,10X,20A4)
102   WRITE(NW,102)NA,HA,LX,LY,E
C      FORMAT(/,10X,'NUMERO DE ANDARES=',I3,///,10X,'ALTURA DOS ANDARES='
*F7.2,///,10X,'COMP. DIRECAO-X=',F8.2,///,10X,'COMP. DIRECAO-Y=',F8.
*2,///,10X,'MODULO DE ELASTICIDADE=',E11.4)
103   WRITE(NW,103)AL,BL,ESPA,ESPL,ABCN,HLIN,JJW,JI
C      FORMAT(///,10X,'DADOS DO NUCLEO',/,10X,15('-'),///,10X,'COMP.-X=',
*F8.2,///,10X,'COMP.-Y=',F8.2,///,10X,'ESP. DA PAREDE A=',F6.2,///,10X
*,'ESP. DA PAREDE B=',F6.2,///,10X,'ABERTURA CENTRAL=',F6.2,///,10X,
*,'ALTURA DO LINTEL=',F6.2,///,10X,'MOMENTO SET. DE INERCIA=',E11.4)
*///,10X,'MOMENTO DE INERCIA A TORCAO=',E11.4)
104   WRITE(NW,104)(I,HPX(I),DPX(I),I=1,M)
C      FORMAT(///,10X,'ESTRUTURA PERIFERICA',/,10X,20('-'),///,10X,'-DIREC
*AO X-',///,10X,'PILAR',8X,'ALTURA',8X,'LARGURA',20(//,10X,I3,F16.2,
*F15.2))
105   FORMAT(//,10X,'VIGA',11X,'VAG',8X,'ALTURA',8X,'LARGURA',20(//,10X,
*13,F15.2,F14.2,F15.2))
C      IF(ITIPO-1)106,106,108
106   WRITE(NW,105)(I,B(I),HVX(I),DVX(I),I=1,JJ)
C      WRITE(NW,107)(I,HPY(I),DPY(I),I=1,N)
107   FORMAT(/,10X,'-DIRECAO Y-',///,10X,'PILAR',8X,'ALTURA',8X,'LARGURA'
* ,20(//,10X,I3,F16.2,F15.2))
C      WRITE(NW,105)(I,A(I),HVV(I),DVY(I),I=1,II)

```

```
GO TO 110
108 WRITE(NW,105)(I,B(I),HVX(I),DVX(I),I=1,M)
WRITE(NW,109)DW
109 FORMAT(/,10X,'-DIRECAO Y-',//,10X,'PAREDE PERIFERICA COM ESP. DE'
*,f6.2)
110 WRITE(NW,123)
123 FORMAT('1',//,10X,'ROTACOES DOS DIAFRAGMAS',/,10X,23('-',)//,10X,
*'COTA',8X,'ROTACOES')
DO 111 I=2,MNA
IJ=I-2,
111 WRITE(NW,112)IJ,SS(I)
112 FORMAT(/,10X,I3,E18.5)
C
C
-----
C
C
-----
C
C
CALCULO DOS ESFORÇOS NA ESTRUTURA PERIFERICA
C
IF(ITIPO-2)28,29,28
29 ND=0.
28 NDG=ND+NG
DO 30 J=1,NDG
DO 31 K=2,NA
KI=J*(NA+3)+3
KM=J*(NA+3)+K+2
KS=J*(NA+3)+NA+3
IF(ITIPO-1)32,32,33
32 IF(J-ND)34,34,35
34 CRP(J)=E*SP(J)
GO TO 36
35 CRP(J)=E*SC(J-NG)
36 FNP(J,1)=CRP(J)*(-3*SS(KI-1)-10*SS(KI)+18*SS(KI+1)-6*SS(KI+2)+
*SS(KI+3))/CFT
FNP(J,K)=CRP(J)*(SS(KM-2)-8*SS(KM-1)+8*SS(KM+1)-SS(KM+2))/CFT
FNP(J,MNA)=CRP(J)*(-SS(KS-3)+6*SS(KS-2)-13*SS(KS-1)+10*SS(KS)+
*3*SS(KS+1))/CFT
GO TO 31
33 CRP(J)=E*SC(J)
FNP(J,1)=CRP(J)*(-3*SS(KI-1)-10*SS(KI)+18*SS(KI+1)-6*SS(KI+2)+
*SS(KI+3))/CFT
FNP(J,K)=CRP(J)*(SS(KM-2)-8*SS(KM-1)+8*SS(KM+1)-SS(KM+2))/CFT
FNP(J,MNA)=CRP(J)*(-SS(KS-3)+6*SS(KS-2)-13*SS(KS-1)+10*SS(KS)+
*3*SS(KS+1))/CFT
31 CONTINUE
30 CONTINUE
C
-----
C
DO 38 K=3,MNA
U(1,K-2)=(SS(K-2)-8*SS(K-1)+8*SS(K+1)-SS(K+2))/CFT
38 CONTINUE
DO 39 L=2,NT
DO 40 K=1,NA
LU=L-1
IS=LU*(NA+3)+K+3
U(L,K)=SS(IS)
40 CONTINUE
39 CONTINUE
41 CALL MTX4(R,NT,NT+J,NA)
DO 43 I=1,NT
DO 44 J=1,NA
R(I,J)=HA*R(I,J)
44 CONTINUE
43 CONTINUE
C
-----
```

```

-----
C
DO 50 K=2,NNA
UN(1)=(-3*SS(1)-10*SS(2)+18*SS(3)-6*SS(4)+SS(5))/CFT
UU(1)=(11*SS(1)-20*SS(2)+6*SS(3)+4*SS(4)-SS(5))/CDG
UUU(1)=(-3*SS(1)+10*SS(2)-12*SS(3)+6*SS(4)-SS(5))/CFG
UN(K)=(SS(K-1)-8*SS(K)+8*SS(K+2)-SS(K+3))/CFT
UU(K)=(-SS(K-1)+16*SS(K)-30*SS(K+1)+16*SS(K+2)-SS(K+3))/CDG
UUU(K)=(-SS(K-1)+2*SS(K)-2*SS(K+2)+SS(K+3))/CFG
50 CONTINUE
IF (ITIPQ-2) 51, 52, 51
52 C=E*JPW*LX/2
DO 53 I=1,NNA
MW(I)=C*UU(I)
53 CONTINUE
DO 54 I=2,NNA
QW(I)=- (E*JPW*LX*UUU(I))/2+(LY*R(1,I-1))/HA
54 CONTINUE
QW(1)=- (E*JPW*LX*UUU(1))/2
WRITE(NW,119)
119 FORMAT('1',///,10X,'PAREDE PERIFERICA',/,10X,17('-'),/,10X,'COTA'
*,8X,'E. CORTANTE',8X,'M. FLETOR')
DO 150 I=1,NNA
L=I-1
150 WRITE(NW,190)(L,QW(I),MW(I))
190 FORMAT(/,10X,I3,E20.4,E17.4)
-----
C
C
C
C
C
C
C
C
CALCULO DOS ESFORÇOS NO NUCLEO
51 D=(AL-VL)/2
PSI=ESPB*D*BL*(AL+D)/4
JA=(ESPA*BL**3)/12
JB=(ESPB*D**3)/12
DO 55 I=2,NNA
F(I)=KKN*KBN*UN(I)*HA
55 CONTINUE
DO 57 I=1,NNA
FW(I)=KKN*KBN*UN(I)-PSI*UUU(I)*E
NB(I)=PSI*UU(I)
MA(I)=E*JA*AL/2*UU(I)
MB(I)=E*JB*BL/2*UU(I)
QA(I)=-E*(JA*AL/2+PSI*BL)*UUU(I)+KKN*KBN*BL*UN(I)
QB(I)=-E*(JB*BL+PSI*D)/2*UUU(I)+(KKN*KBN*AL/2)*UN(I)
57 CONTINUE
-----
C
WRITE(NW,113)(K,K=1,NDG)
113 FORMAT('1',///,10X,'ESFORÇOS NORMAIS NOS PILARES',/,10X,28('-'),//
*,10X,'COTA',9(4X,'PILAR',I2))
DO 114 J=1,NNA
L=J-1
114 WRITE(NW,115)L,(FNP(K,J),K=1,NDG)
115 FORMAT(/,10X,I3,1X,1CF11.3)
WRITE(NW,116)(K,K=1,NT)
116 FORMAT('1',///,10X,'ESFORÇOS CORTANTE NAS VIGAS',/,10X,27('-'),//
*,10X,'ANDAR',9(5X,'VIGA',I2))
DO 117 I=1,NA
117 WRITE(NW,118)I,(R(K,I),K=1,NT)
118 FORMAT(/,10X,I3,2X,1CF11.3)
WRITE(NW,120)
120 FORMAT('1',///,10X,'PAREDE B DO NUCLEO',/,10X,18('-'),//,10X,'COTA'
*,8X,'E. NORMAL',8X,'E. CORTANTE',8X,'M. FLETOR')

```

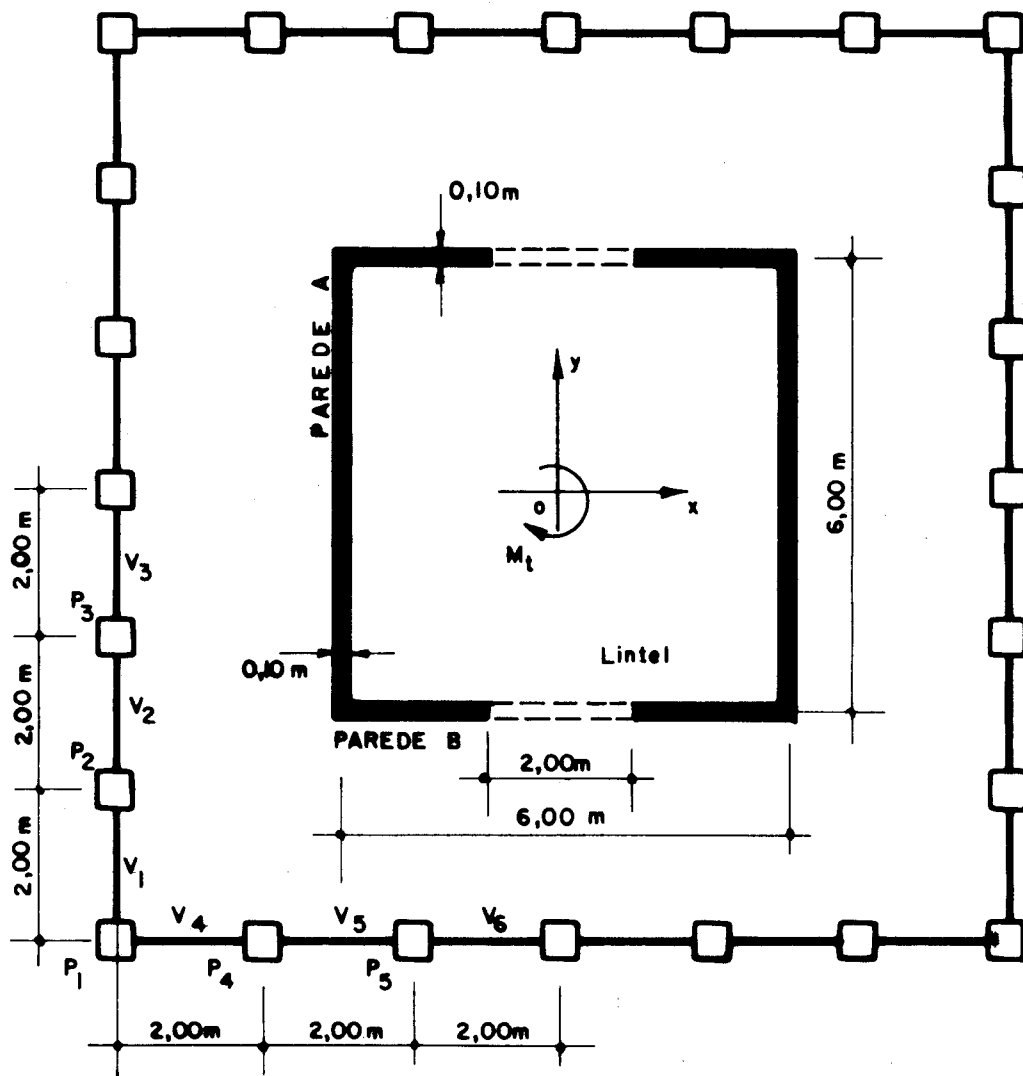
```
DO 151 I=1,NNA
  L=I-1
151  WRITE(NW,160)(L,NB(I),QB(I),MB(I))
160  FORMAT(/,10X,I3,E18.4,E19.4,E17.4)
  WRITE(NW,121)
121  FORMAT('1',///,10X,'PAREDE A DO NUCLEO',/,10X,18('-'),/,10X,'COTA
* ',8X,'E. CORTANTE',8X,'M. FLETOR')
  DO 152 I=1,NNA
  L=I-1
152  WRITE(NW,170)(L,QA(I),MA(I))
170  FORMAT(/,10X,I3,E20.4,E17.4)
  WRITE(NW,122)
122  FORMAT('1',///,10X,'FORÇAS CORTANTE NOS LINTEIS E DISTRIBUIDAS NAS
* INTERSECCOES PAREDES A-B',/,10X,71('-'),/,10X,'COTA',
*8X,'Q. (LINTEIS)',8X,'DIST. INTERSECCAO')
  F(I)=0.
  DO 153 I=1,NNA
  L=I-1
153  WRITE(NW,180)(L,F(I),Fh(I))
180  FORMAT(/,10X,I3,E20.4,E25.4)
C -----
C
```

EXEMPLO 3

O exemplo 3, consiste da estrutura analisada no exemplo 1, acrescida de um núcleo interno.

Neste exemplo existirá uma análise dupla:

- a) Estrutura tubular com núcleo interno não contraventado por lintéis.
- b) Estrutura tubular com núcleo interno contraventado por lintéis.



PLANTA BAIXA

Carregamento - Momento torçor, Uniformemente
Distribuído $M_t = 8,64t.m/m$
Dimensão de todos os pilares 30cm x 30cm
Dimensão das vigas 20cm x 40cm
Dimensão de todos os lintéis 10cm x 30cm
Altura dos andares $h = 3,00m$
Número de andares $N = 20$
Módulo de elasticidade $E = 200.000kgf/cm^2$

Seguidos dos resultados fornecidos pelo programa encontram-se seus respectivos gráficos.

Observe-se que o primeiro grupo de resultados refere-se ao caso em que o núcleo não está contraventado por lintéis, ou seja condição (a) do exemplo.

RESULTADOS FORNECIDOS PELO PROGRAMA - 2 REFERENTES AO
ITEM (a)

UNIDADES FORÇA LM (T.) COMPRIMENTO EM (CM.)

NUMERO DE ANDARES= 20

ALTURA DOS ANDARES= 300.00

COMP. DIRECAO-X= 1200.00

COMP. DIRECAO-Y= 1200.00

MODULO DE ELASTICIDADE= 0.2000E 03

DADOS DO NUCLEO

COMP.-X= 600.00

COMP.-Y= 600.00

ESP. DA PAREDE A= 10.00

ESP. DA PAREDE B= 10.00

ABERTURA CENTRAL= 200.00

ALTURA DO LINTEL= 0.0

MOMENTO SET. DE INERCIA= 0.7500E 14

MOMENTO DE INERCIA A TORCAO= 0.3333E 06

ESTRUTURA PERIFERICA

-DIRECAO X-

PILAR	ALTURA	LARGURA
1	30.00	30.00
2	30.00	30.00
3	30.00	30.00
4	30.00	30.00

VIGA	VAD	ALTURA	LARGURA
1	200.00	40.00	20.00
2	200.00	40.00	20.00
3	200.00	40.00	20.00

-DIRECAO Y-

PILAR	ALTURA	LARGURA
1	30.00	30.00
2	30.00	30.00
3	30.00	30.00
4	30.00	30.00

VIGA	VAD	ALTURA	LARGURA
1	200.00	40.00	20.00
2	200.00	40.00	20.00
3	200.00	40.00	20.00

ROTACOES DOS DIAFRAGMAS

COTA	ROTACOES
0	-0.63281E-04
1	0.32558E-04
2	0.26903E-03
3	0.61189E-03
4	0.10322E-02
5	0.15068E-02
6	0.20159E-02
7	0.25442E-02
8	0.30784E-02
9	0.36086E-02
10	0.41263E-02
11	0.46255E-02
12	0.51013E-02
13	0.55510E-02
14	0.59724E-02
15	0.63656E-02
16	0.67311E-02
17	0.70717E-02
18	0.73906E-02
19	0.76936E-02
20	0.79873E-02

ESFORÇOS NORMAIS NOS PILARES

COTA	PILAR 1	PILAR 2	PILAR 3	PILAR 4	PILAR 5
0	0.001	-1.987	-0.454	1.988	0.455
1	0.001	-1.925	-0.458	1.926	0.459
2	0.001	-1.772	-0.463	1.773	0.464
3	0.001	-1.566	-0.462	1.567	0.462
4	0.000	-1.336	-0.450	1.337	0.451
5	0.000	-1.101	-0.430	1.101	0.431
6	0.000	-0.872	-0.402	0.872	0.402
7	0.000	-0.657	-0.368	0.658	0.368
8	0.000	-0.464	-0.330	0.465	0.330
9	0.000	-0.294	-0.291	0.295	0.291
10	0.000	-0.149	-0.251	0.150	0.252
11	0.000	-0.031	-0.214	0.031	0.214
12	0.000	0.062	-0.178	-0.062	0.179
13	0.000	0.129	-0.146	-0.128	0.147
14	0.000	0.171	-0.118	-0.171	0.118
15	0.000	0.189	-0.093	-0.189	0.093
16	0.000	0.185	-0.071	-0.185	0.071
17	0.000	0.160	-0.052	-0.160	0.052
18	0.000	0.118	-0.034	-0.118	0.034
19	-0.000	0.063	-0.017	-0.063	0.017
20	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000

ESFORÇOS CORTANTE NAS VIGAS

ANDAR	VIGA 1	VIGA 2	VIGA 3	VIGA 4	VIGA 5	VIGA 6
1	0.785	0.654	0.664	0.785	0.654	0.664
2	1.328	1.130	1.135	1.328	1.130	1.136
3	1.722	1.491	1.487	1.722	1.491	1.487
4	1.997	1.753	1.740	1.997	1.753	1.740
5	2.175	1.934	1.911	2.175	1.934	1.911
6	2.274	2.046	2.016	2.274	2.046	2.017
7	2.311	2.102	2.067	2.311	2.102	2.068
8	2.298	2.112	2.075	2.298	2.112	2.075
9	2.246	2.085	2.047	2.246	2.085	2.047
10	2.163	2.029	1.991	2.163	2.029	1.991
11	2.058	1.951	1.915	2.058	1.951	1.915
12	1.938	1.856	1.823	1.938	1.856	1.823
13	1.808	1.752	1.722	1.808	1.752	1.722
14	1.674	1.643	1.617	1.674	1.643	1.617
15	1.543	1.535	1.512	1.543	1.535	1.512
16	1.420	1.433	1.413	1.420	1.433	1.413
17	1.310	1.343	1.325	1.310	1.343	1.325
18	1.222	1.270	1.253	1.222	1.271	1.254
19	1.162	1.221	1.205	1.162	1.221	1.205
20	1.139	1.203	1.186	1.139	1.203	1.186

PAREDE B DO NUCLEO

COTA	E. NORMAL	E. CCRTANTE	M. FLETOR
0	0.4859E 00	0.8903E 01	0.8098E 03
1	0.3732E 00	0.7364E 01	0.6221E 03
2	0.2825E 00	0.6084E 01	0.4709E 03
3	0.2053E 00	0.5019E 01	0.3421E 03
4	0.1440E 00	0.4129E 01	0.2399E 03
5	0.9123E-01	0.3384E 01	0.1521E 03
6	0.5052E-01	0.2758E 01	0.8419E 02
7	0.1506E-01	0.2229E 01	0.2511E 02
8	-0.1102E-01	0.1778E 01	-0.1836E 02
9	-0.3403E-01	0.1388E 01	-0.5672E 02
10	-0.4935E-01	0.1047E 01	-0.8224E 02
11	-0.6292E-01	0.7422E 00	-0.1049E 03
12	-0.6984E-01	0.4642E 00	-0.1164E 03
13	-0.7575E-01	0.2012E 00	-0.1262E 03
14	-0.7540E-01	-0.5453E-01	-0.1257E 03
15	-0.7426E-01	-0.3125E 00	-0.1238E 03
16	-0.6675E-01	-0.5808E 00	-0.1113E 03
17	-0.5821E-01	-0.8703E 00	-0.9702E 02
18	-0.4273E-01	-0.1191E 01	-0.7122E 02
19	-0.2533E-01	-0.1551E 01	-0.4222E 02
20	0.8113E-04	-0.1971E 01	0.1352E 00

PAREDE A DO NUCLEO

COTA	E. CORTANTE	M. FLETOR
0	0.6780E 02	0.2186E 05
1	0.5608E 02	0.1680E 05
2	0.4633E 02	0.1271E 05
3	0.3822E 02	0.9236E 04
4	0.3145E 02	0.6478E 04
5	0.2577E 02	0.4105E 04
6	0.2101E 02	0.2273E 04
7	0.1697E 02	0.6778E 03
8	0.1354E 02	-0.4957E 03
9	0.1057E 02	-0.1531E 04
10	0.7974E 01	-0.2221E 04
11	0.5652E 01	-0.2832E 04
12	0.3535E 01	-0.3143E 04
13	0.1533E 01	-0.3409E 04
14	-0.4152E 00	-0.3393E 04
15	-0.2379E 01	-0.3342E 04
16	-0.4423E 01	-0.3004E 04
17	-0.6628E 01	-0.2619E 04
18	-0.9070E 01	-0.1923E 04
19	-0.1181E 02	-0.1140E 04
20	-0.1501E 02	0.3651E 01

FORÇAS CORTANTE NOS LINTEIS E DISTRIBUIDAS NAS INTERSECÇÕES PAREDES A-B

COTA	Q.(LINTEIS)	DIST. INTERSECÇÃO
0	0.0	0.8218E-01
1	0.0	0.6798E-01
2	0.0	0.5616E-01
3	0.0	0.4633E-01
4	0.0	0.3812E-01
5	0.0	0.3124E-01
6	0.0	0.2546E-01
7	0.0	0.2057E-01
8	0.0	0.1641E-01
9	0.0	0.1281E-01
10	0.0	0.9666E-02
11	0.0	0.6851E-02
12	0.0	0.4285E-02
13	0.0	0.1858E-02
14	0.0	-0.5033E-03
15	0.0	-0.2884E-02
16	0.0	-0.5361E-02
17	0.0	-0.8033E-02
18	0.0	-0.1099E-01
19	0.0	-0.1432E-01
20	0.0	-0.1820E-01

RESULTADOS FORNECIDOS PELO PROGRAMA - 2 REFERENTES AO
ITEM (b)

UNIDADES FORÇA EM (T.) COMPRIMENTO EM (CM.)

NUMERO DE ANDARES= 20

ALTURA DOS ANDARES= 300.00

CCMP. DIRECAO-X= 1200.00

CCMP. DIRECAO-Y= 1200.00

MODULO DE ELASTICIDADE= 0.2000E C3

DADOS DO NUCLEO

CCMP.-X= 600.00

CCMP.-Y= 600.00

ESP. DA PAREDE A= 10.00

ESP. DA PAREDE B= 10.00

ABERTURA CENTRAL= 200.00

ALTURA DO LINTEL= 30.00

MOMENTO SET. DE INERCIA= 0.7500E 14

MOMENTO DE INERCIA A TORCAO= 0.3333E 06

ESTRUTURA PERIFERICA

-DIRECAO X-

PILAR	ALTURA	LARGURA
1	30.00	30.00
2	30.00	30.00
3	30.00	30.00
4	30.00	30.00

VIGA	VAU	ALTURA	LARGURA
1	200.00	40.00	20.00
2	200.00	40.00	20.00
3	200.00	40.00	20.00

-DIKREAO Y-

PILAR	ALTURA	LARGURA
1	30.00	30.00
2	30.00	30.00
3	30.00	30.00
4	30.00	30.00

VIGA	VAU	ALTURA	LARGURA
1	200.00	40.00	20.00
2	200.00	40.00	20.00
3	200.00	40.00	20.00

ROTACOES DOS DIAFRAGMAS

COTA	ROTACOES
0	-0.65392E-04
1	0.21722E-04
2	0.22358E-03
3	0.50851E-03
4	0.85040E-03
5	0.12295E-02
6	0.16292E-02
7	0.20375E-02
8	0.24439E-02
9	0.28413E-02
10	0.32232E-02
11	0.35858E-02
12	0.39256E-02
13	0.42412E-02
14	0.45310E-02
15	0.47958E-02
16	0.50361E-02
17	0.52545E-02
18	0.54536E-02
19	0.56388E-02
20	0.58155E-02

ESFORÇOS NORMAIS NOS PILARES

COTA	PILAR 1	PILAR 2	PILAR 3	PILAR 4	PILAR 5
0	0.000	-1.552	-0.321	1.553	0.321
1	0.000	-1.495	-0.325	1.496	0.325
2	0.000	-1.357	-0.331	1.358	0.331
3	0.000	-1.178	-0.332	1.179	0.332
4	0.000	-0.981	-0.324	0.982	0.325
5	0.000	-0.782	-0.309	0.783	0.310
6	0.000	-0.593	-0.287	0.594	0.288
7	0.000	-0.420	-0.261	0.421	0.261
8	0.000	-0.267	-0.231	0.268	0.231
9	0.000	-0.135	-0.200	0.136	0.201
10	0.000	-0.025	-0.170	0.025	0.170
11	0.000	0.063	-0.141	-0.062	0.141
12	0.000	0.129	-0.115	-0.129	0.115
13	0.000	0.174	-0.092	-0.174	0.092
14	0.000	0.199	-0.072	-0.199	0.072
15	0.000	0.204	-0.056	-0.204	0.056
16	0.000	0.191	-0.042	-0.191	0.042
17	0.000	0.162	-0.030	-0.162	0.030
18	0.000	0.118	-0.019	-0.118	0.019
19	0.000	0.062	-0.010	-0.062	0.010
20	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000

ESFORÇOS CORTANTE NAS VIGAS

ANDAR	VIGA 1	VIGA 2	VIGA 3	VIGA 4	VIGA 5	VIGA 6
1	0.691	0.567	0.579	0.691	0.567	0.579
2	1.125	0.946	0.954	1.125	0.946	0.954
3	1.424	1.220	1.220	1.424	1.220	1.220
4	1.618	1.409	1.400	1.618	1.409	1.400
5	1.730	1.528	1.511	1.730	1.528	1.511
6	1.778	1.591	1.568	1.778	1.591	1.568
7	1.778	1.610	1.583	1.778	1.610	1.583
8	1.740	1.593	1.564	1.740	1.594	1.564
9	1.673	1.550	1.520	1.673	1.550	1.520
10	1.586	1.485	1.456	1.586	1.485	1.456
11	1.484	1.405	1.378	1.484	1.405	1.378
12	1.372	1.315	1.291	1.372	1.315	1.291
13	1.254	1.218	1.197	1.254	1.219	1.197
14	1.136	1.120	1.102	1.136	1.120	1.102
15	1.021	1.024	1.009	1.021	1.024	1.009
16	0.913	0.934	0.921	0.913	0.934	0.921
17	0.817	0.854	0.843	0.817	0.854	0.843
18	0.740	0.790	0.780	0.740	0.790	0.780
19	0.686	0.746	0.736	0.686	0.746	0.736
20	0.665	0.729	0.719	0.665	0.729	0.719

PAREDE B DO NUCLEO

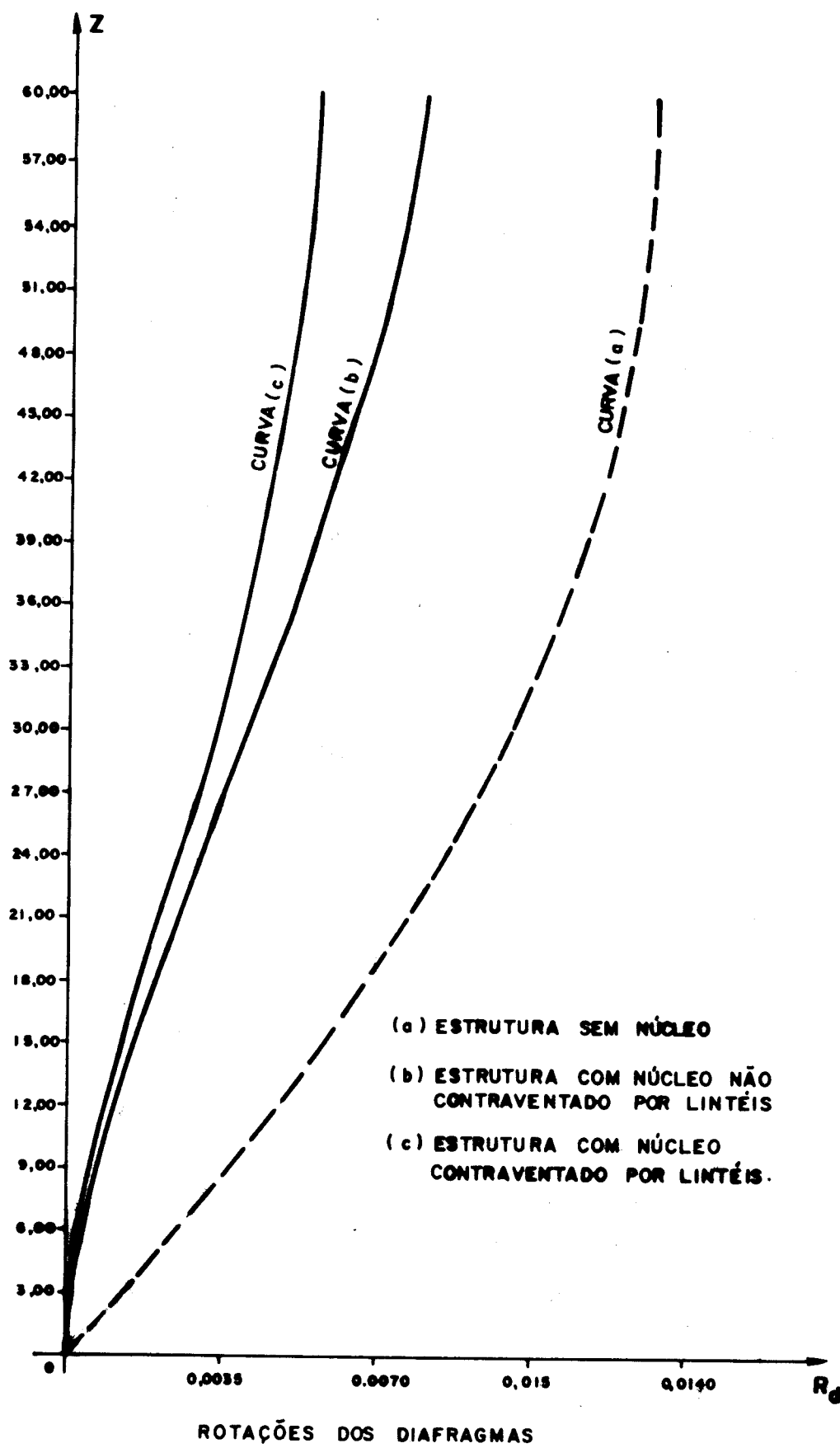
COTA	E. NORMAL	E. CORTANTE	M. FLETOR
0	0.4134E 00	0.8950E 01	0.6890E 03
1	0.3039E 00	0.8225E 01	0.5065E 03
2	0.2203E 00	0.7575E 01	0.3671E 03
3	0.1505E 00	0.6985E 01	0.2508E 03
4	0.9854E-01	0.6442E 01	0.1642E 03
5	0.5406E-01	0.5935E 01	0.9009E 02
6	0.2239E-01	0.5458E 01	0.3732E 02
7	-0.5785E-02	0.5004E 01	-0.9641E 01
8	-0.2428E-01	0.4568E 01	-0.4047E 02
9	-0.4174E-01	0.4146E 01	-0.6956E 02
10	-0.5139E-01	0.3734E 01	-0.8565E 02
11	-0.6141E-01	0.3329E 01	-0.1024E 03
12	-0.6465E-01	0.2929E 01	-0.1078E 03
13	-0.6893E-01	0.2532E 01	-0.1149E 03
14	-0.6683E-01	0.2135E 01	-0.1114E 03
15	-0.6589E-01	0.1738E 01	-0.1098E 03
16	-0.5841E-01	0.1338E 01	-0.9736E 02
17	-0.5166E-01	0.9307E 00	-0.8610E 02
18	-0.3758E-01	0.5172E 00	-0.6264E 02
19	-0.2321E-01	0.9045E-01	-0.3869E 02
20	0.4719E-04	-0.3515E 00	0.7864E-01

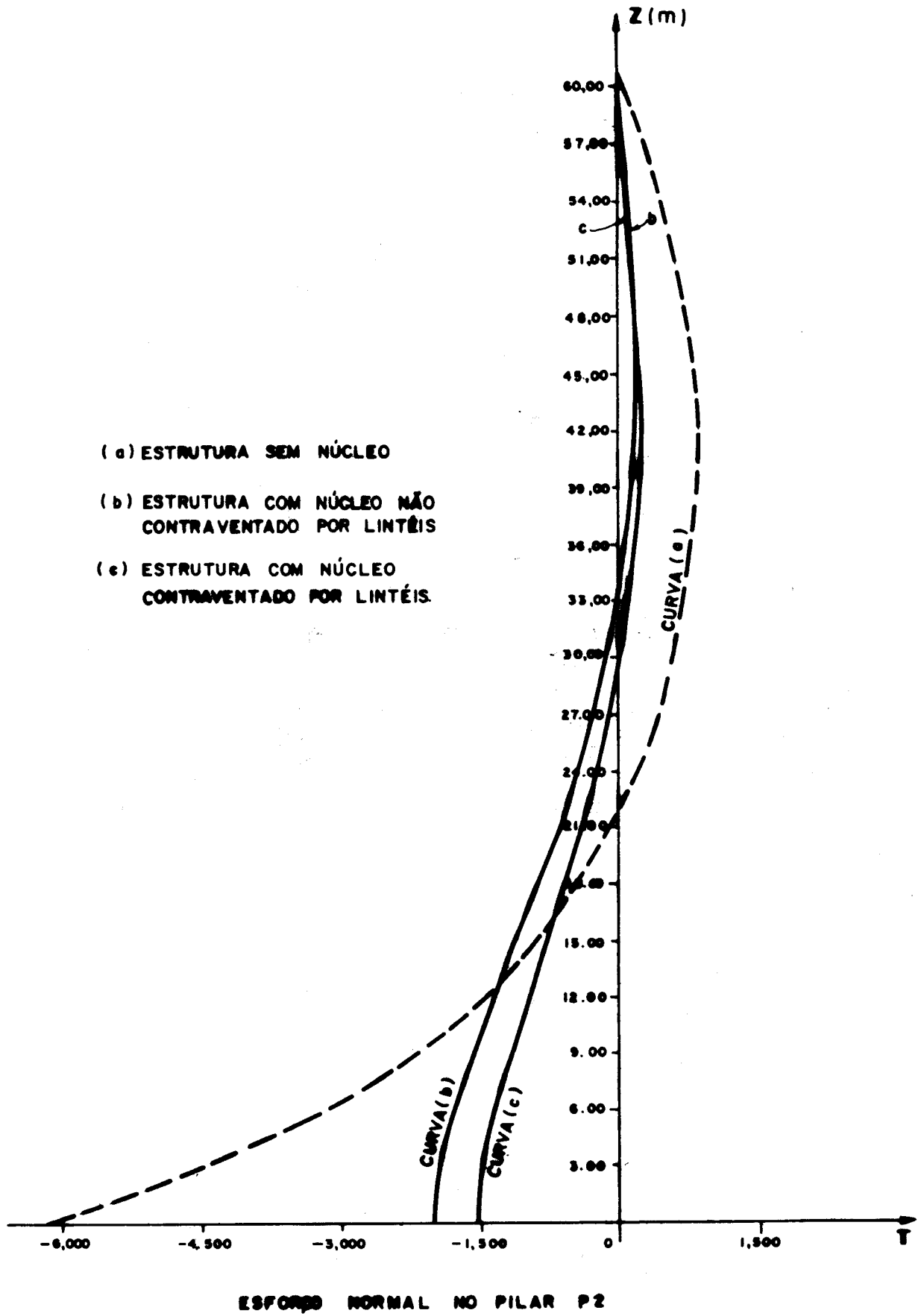
PAREDE A DO NUCLEO

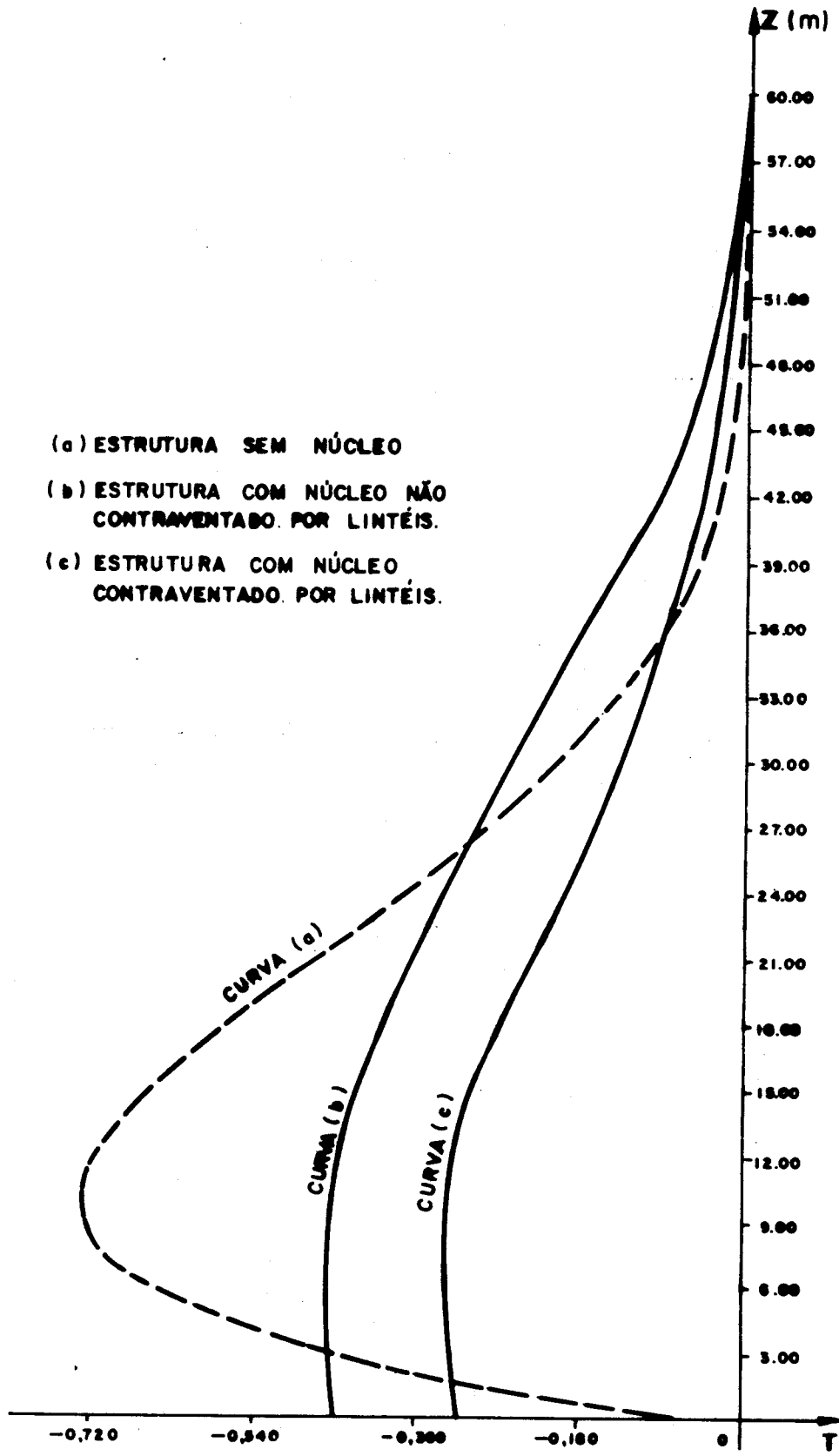
COTA	E. CORTANTE	M. FLETOR
0	0.6739E 02	0.1860E 05
1	0.5579E 02	0.1368E 05
2	0.4640E 02	0.9912E 04
3	0.3876E 02	0.6772E 04
4	0.3252E 02	0.4434E 04
5	0.2738E 02	0.2433E 04
6	0.2310E 02	0.1008E 04
7	0.1952E 02	-0.2603E 03
8	0.1646E 02	-0.1093E 04
9	0.1381E 02	-0.1878E 04
10	0.1147E 02	-0.2313E 04
11	0.9357E 01	-0.2764E 04
12	0.7391E 01	-0.2909E 04
13	0.5509E 01	-0.3102E 04
14	0.3650E 01	-0.3007E 04
15	0.1759E 01	-0.2965E 04
16	-0.2235E 00	-0.2629E 04
17	-0.2379E 01	-0.2325E 04
18	-0.4761E 01	-0.1691E 04
19	-0.7486E 01	-0.1045E 04
20	-0.1065E 02	0.2123E 01

FORÇAS CORTANTE NOS LINTEIS E DISTRIBUIDAS NAS INTERSECCOES PAREDES A-B⁵

COTA	Q.(LINTEIS)	DIST. INTERSECCAO
0	0.0	0.8181E-01
1	0.1219E 01	0.6873E-01
2	0.2010E 01	0.5807E-01
3	0.2570E 01	0.4932E-01
4	0.2945E 01	0.4210E-01
5	0.3174E 01	0.3607E-01
6	0.3288E 01	0.3099E-01
7	0.3311E 01	0.2667E-01
8	0.3264E 01	0.2292E-01
9	0.3163E 01	0.1962E-01
10	0.3020E 01	0.1665E-01
11	0.2848E 01	0.1393E-01
12	0.2656E 01	0.1137E-01
13	0.2453E 01	0.8907E-02
14	0.2246E 01	0.6465E-02
15	0.2043E 01	0.3990E-02
16	0.1854E 01	0.1414E-02
17	0.1686E 01	-0.1351E-02
18	0.1549E 01	-0.4363E-02
19	0.1456E 01	-0.7750E-02
20	0.1419E 01	-0.1161E-01

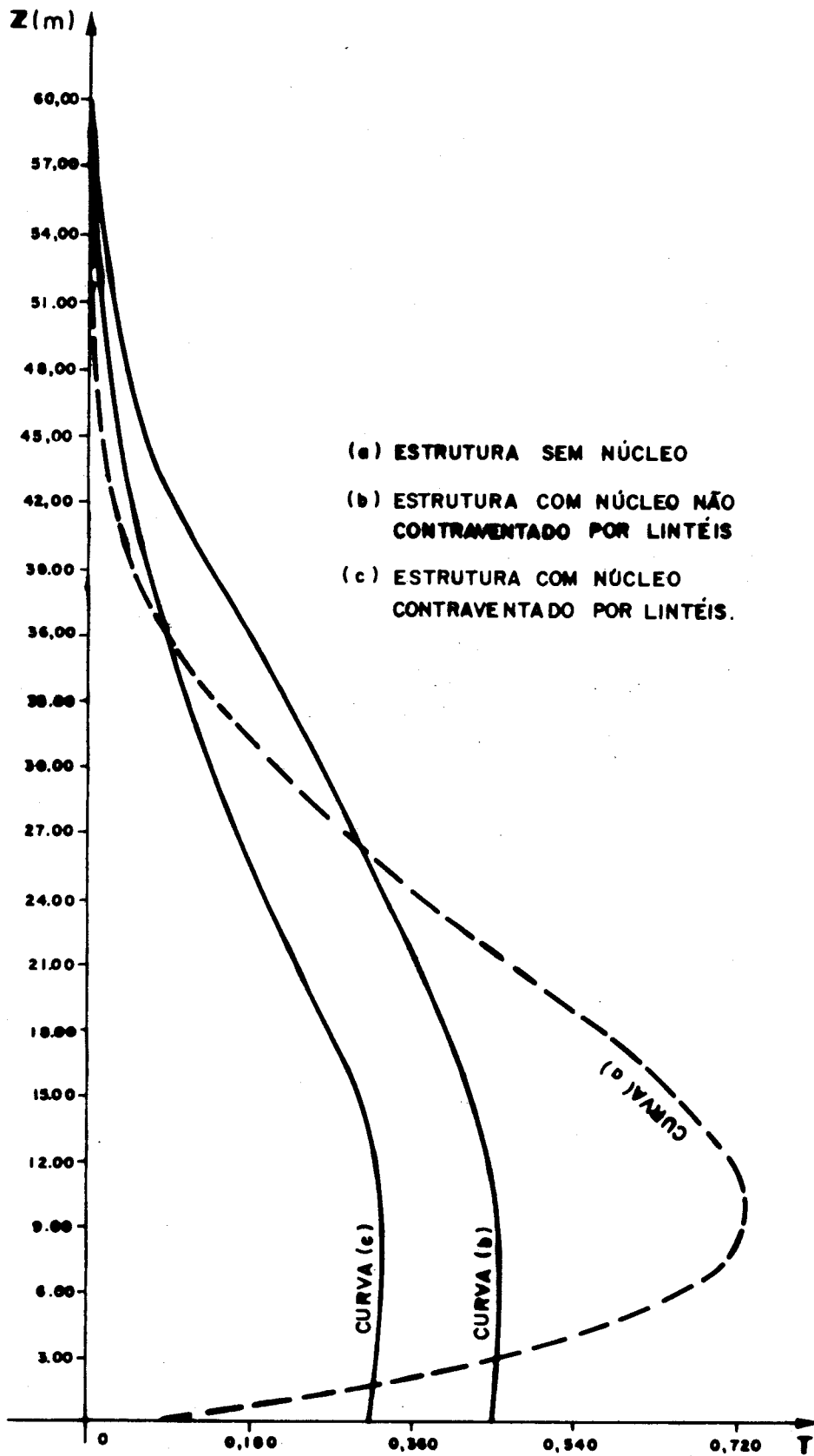




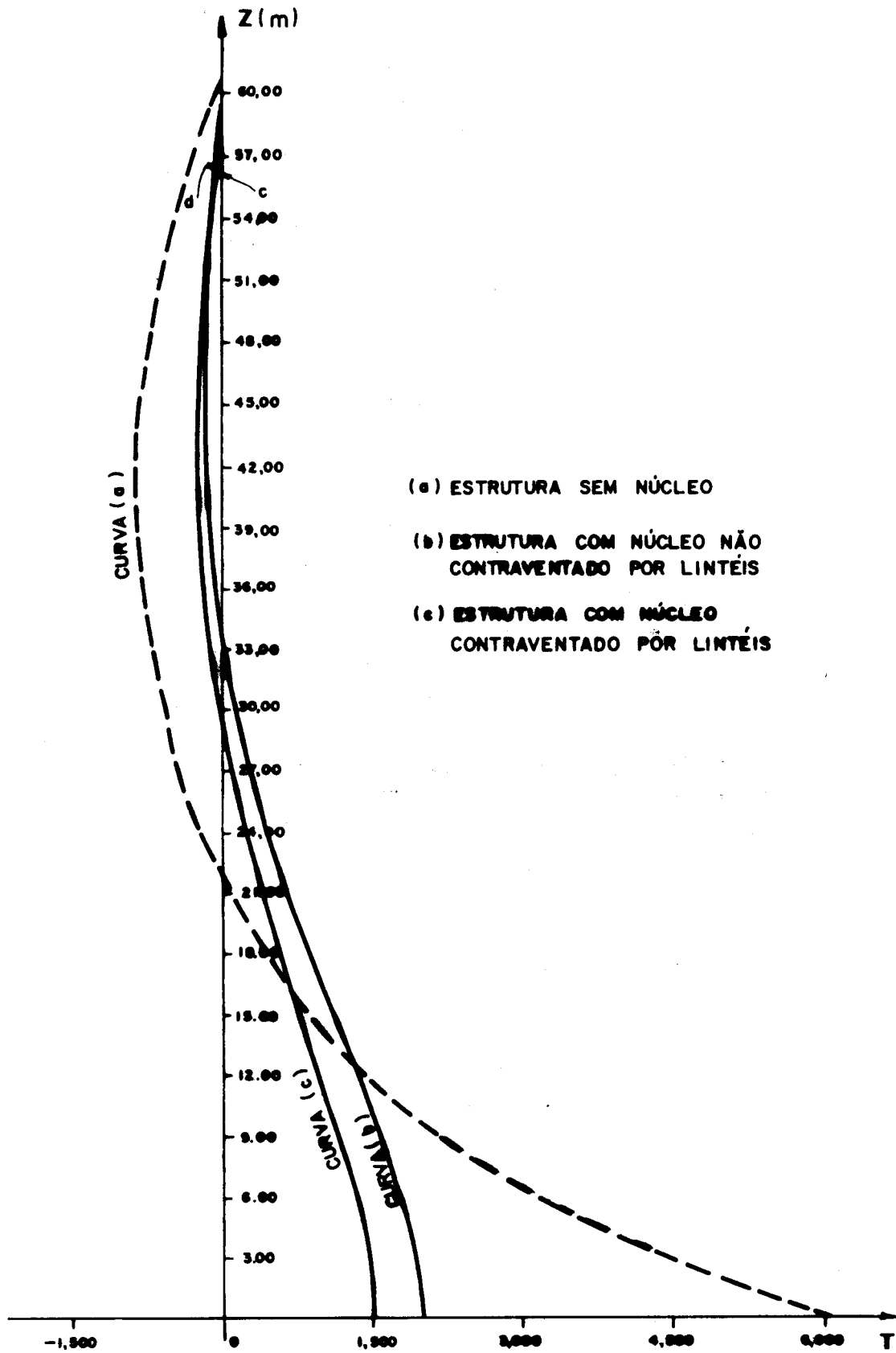


- (a) ESTRUTURA SEM NÚCLEO
- (b) ESTRUTURA COM NÚCLEO NÃO CONTRAVENTADO POR LINTÉIS.
- (c) ESTRUTURA COM NÚCLEO CONTRAVENTADO POR LINTÉIS.

ESFORÇO NORMAL NO PILAR P3

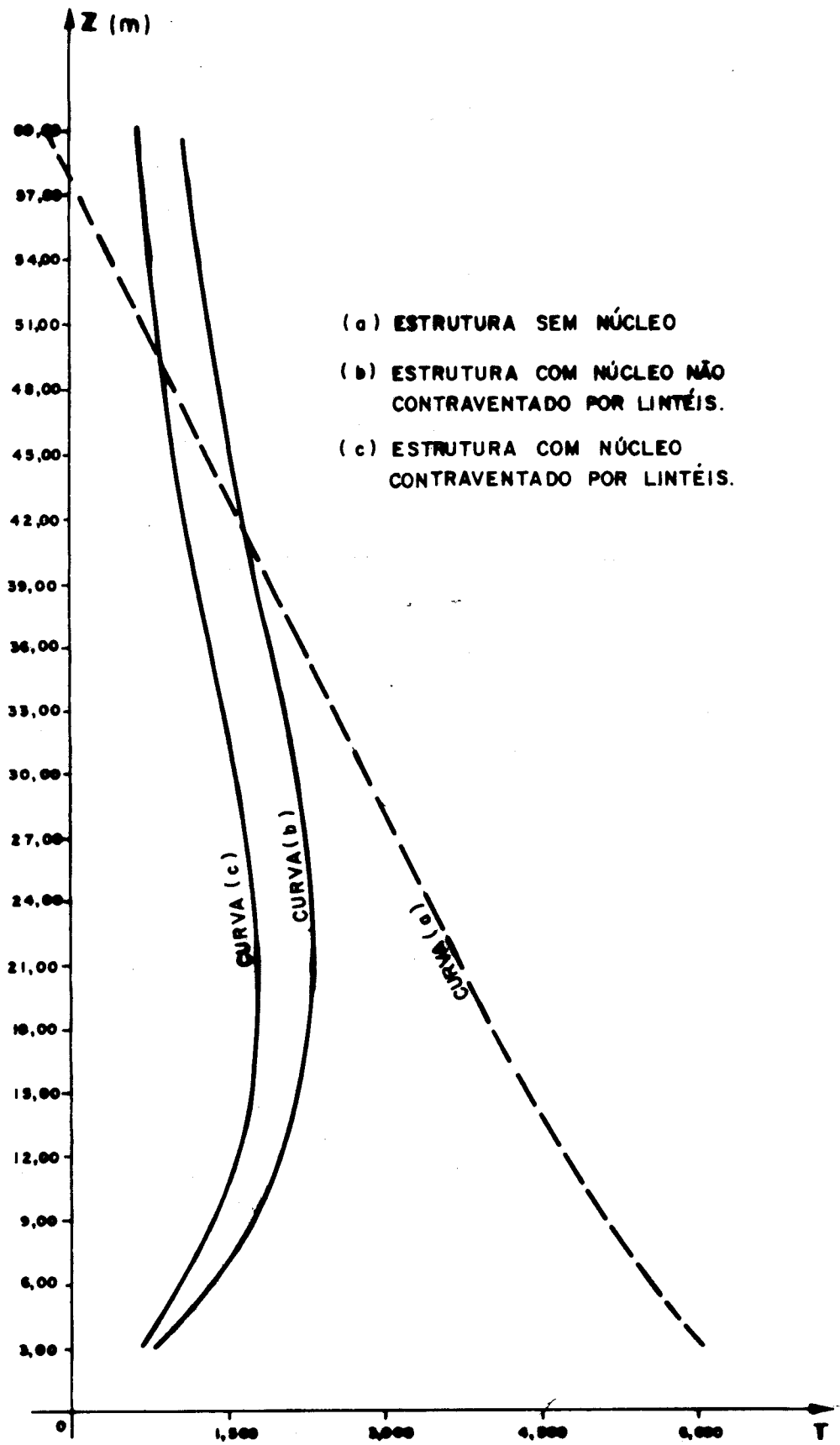


ESFORÇO NORMAL NO PILAR P5



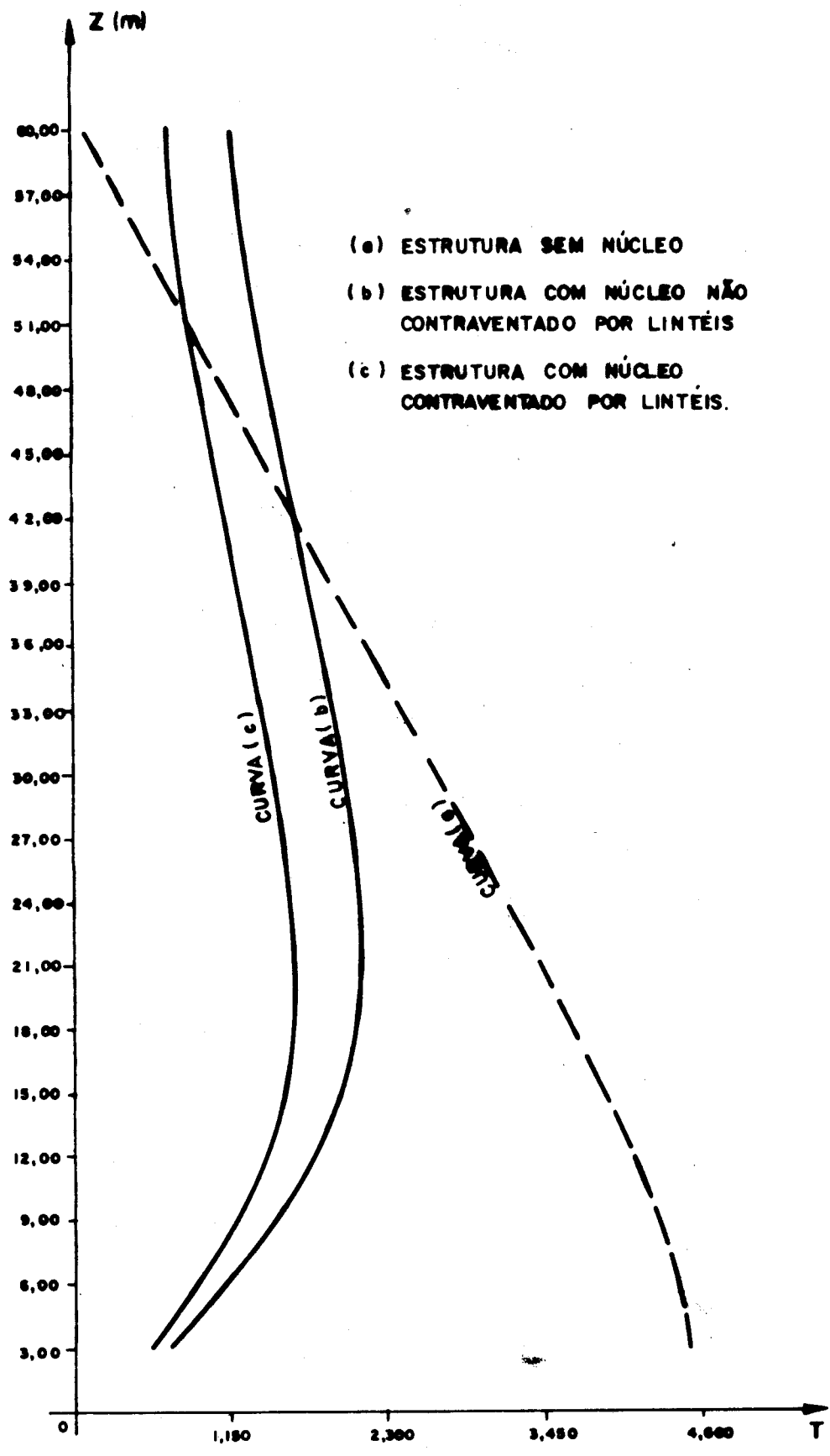
- (a) ESTRUTURA SEM NÚCLEO
- (b) ESTRUTURA COM NÚCLEO NÃO CONTRAVENTADO POR LINTÉIS
- (c) ESTRUTURA COM NÚCLEO CONTRAVENTADO POR LINTÉIS

ESFORÇO NORMAL NO PILAR P4



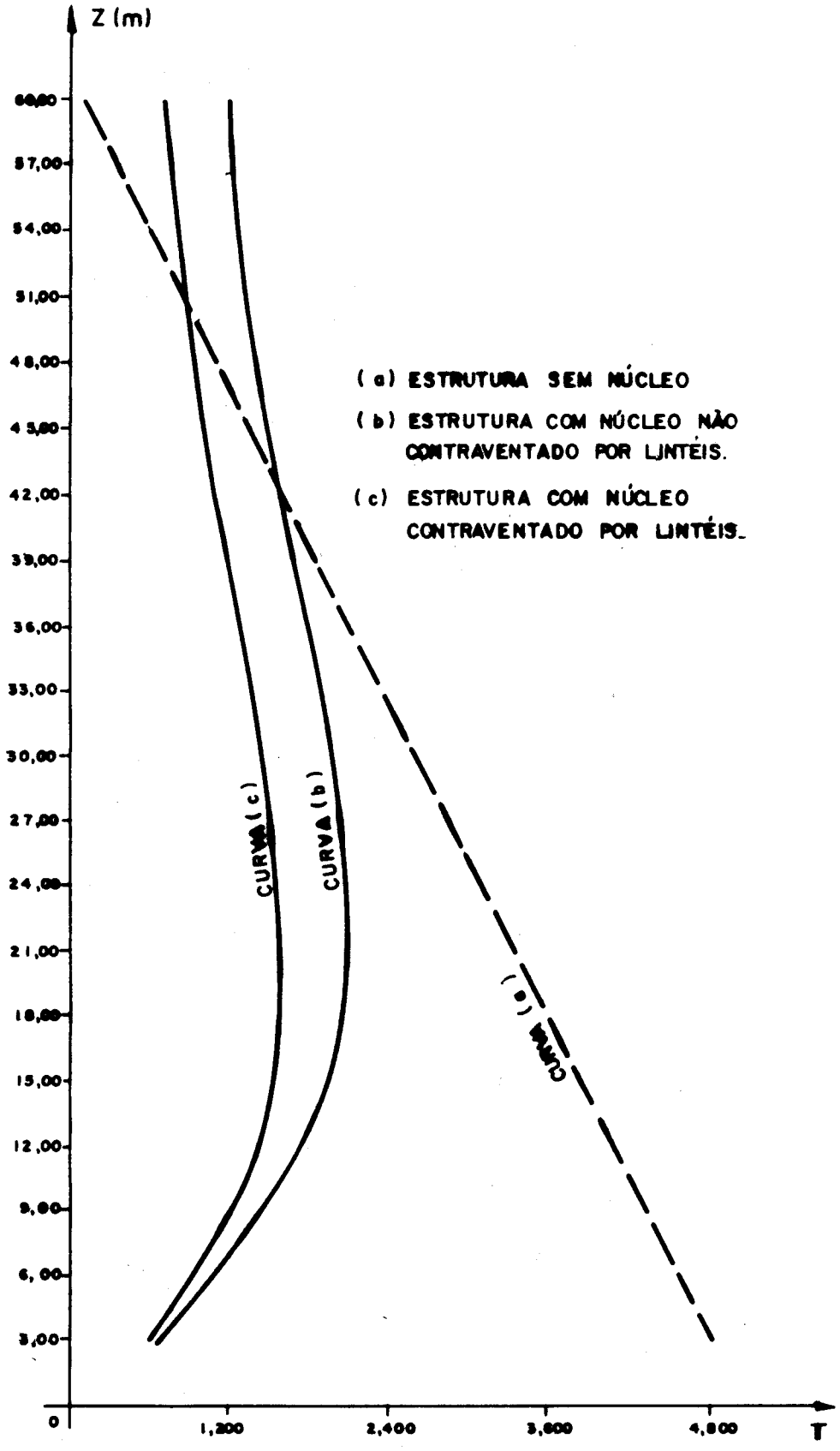
- (a) ESTRUTURA SEM NÚCLEO
- (b) ESTRUTURA COM NÚCLEO NÃO CONTRAVENTADO POR LINTÉIS.
- (c) ESTRUTURA COM NÚCLEO CONTRAVENTADO POR LINTÉIS.

ESFORÇOS CORTANTES VIGAS V1 E V4



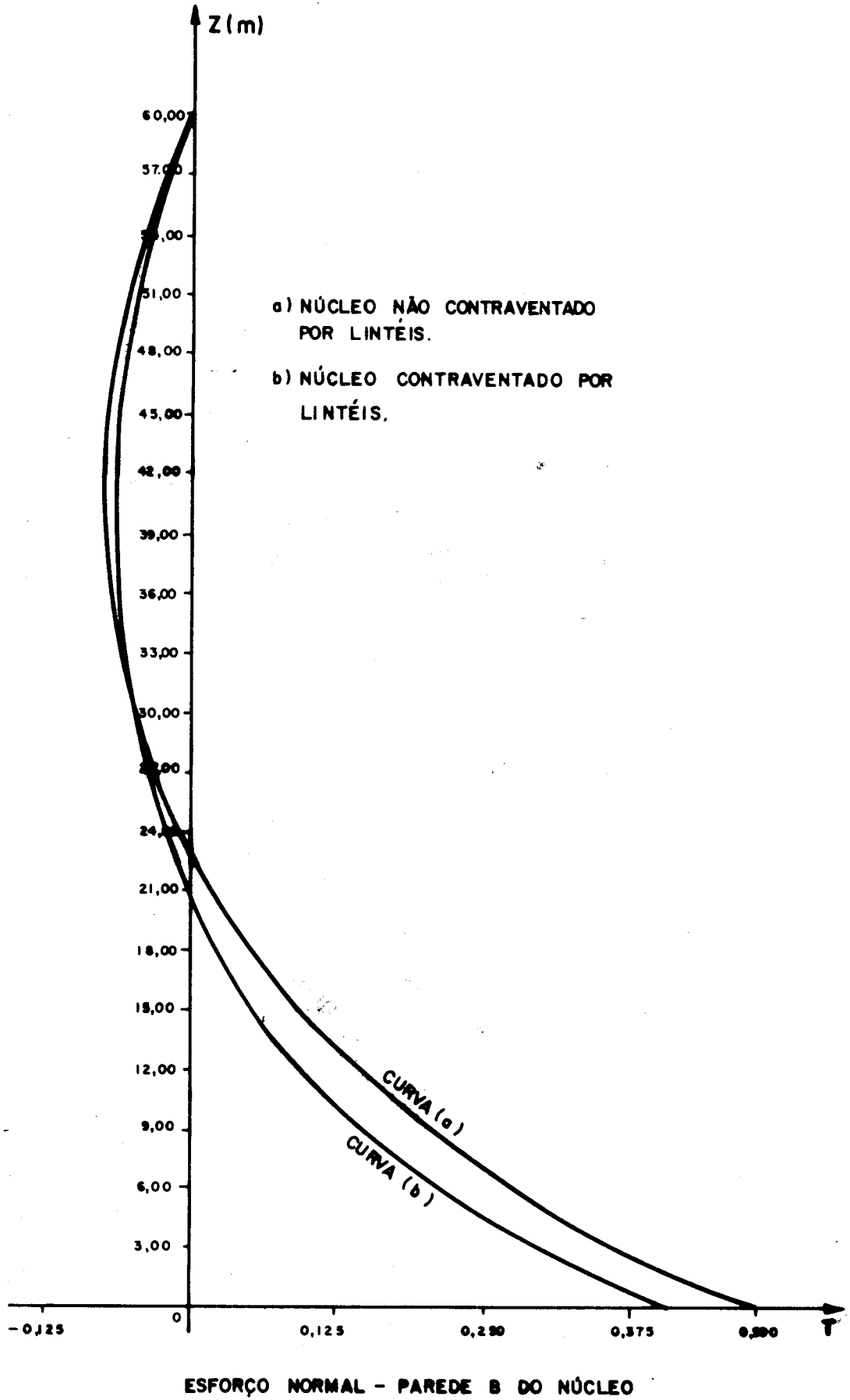
- (a) ESTRUTURA SEM NÚCLEO
- (b) ESTRUTURA COM NÚCLEO NÃO CONTRAVENTADO POR LINTÉIS
- (c) ESTRUTURA COM NÚCLEO CONTRAVENTADO POR LINTÉIS.

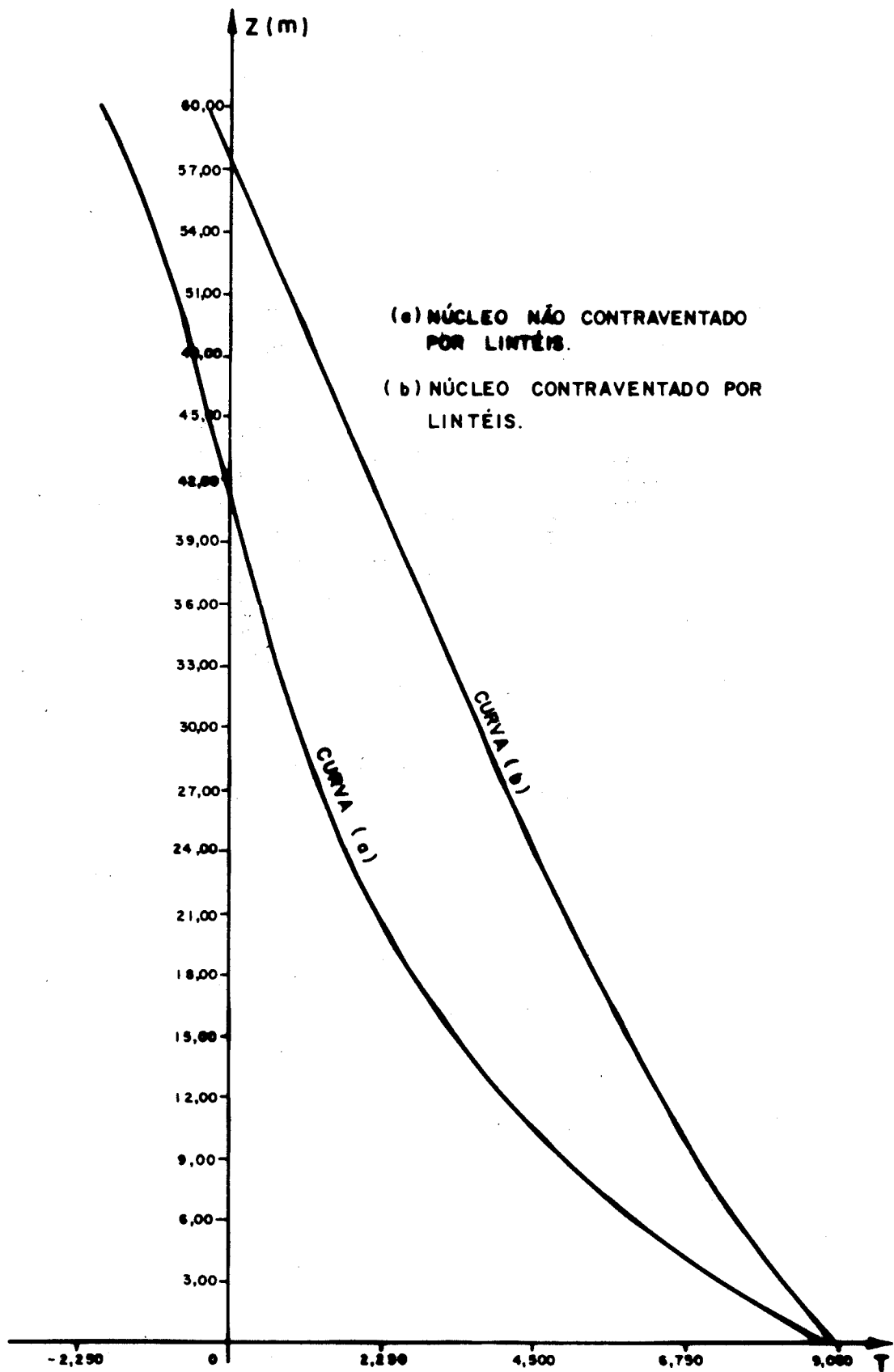
ESFORÇOS CORTANTES - VIGAS V2 E V5



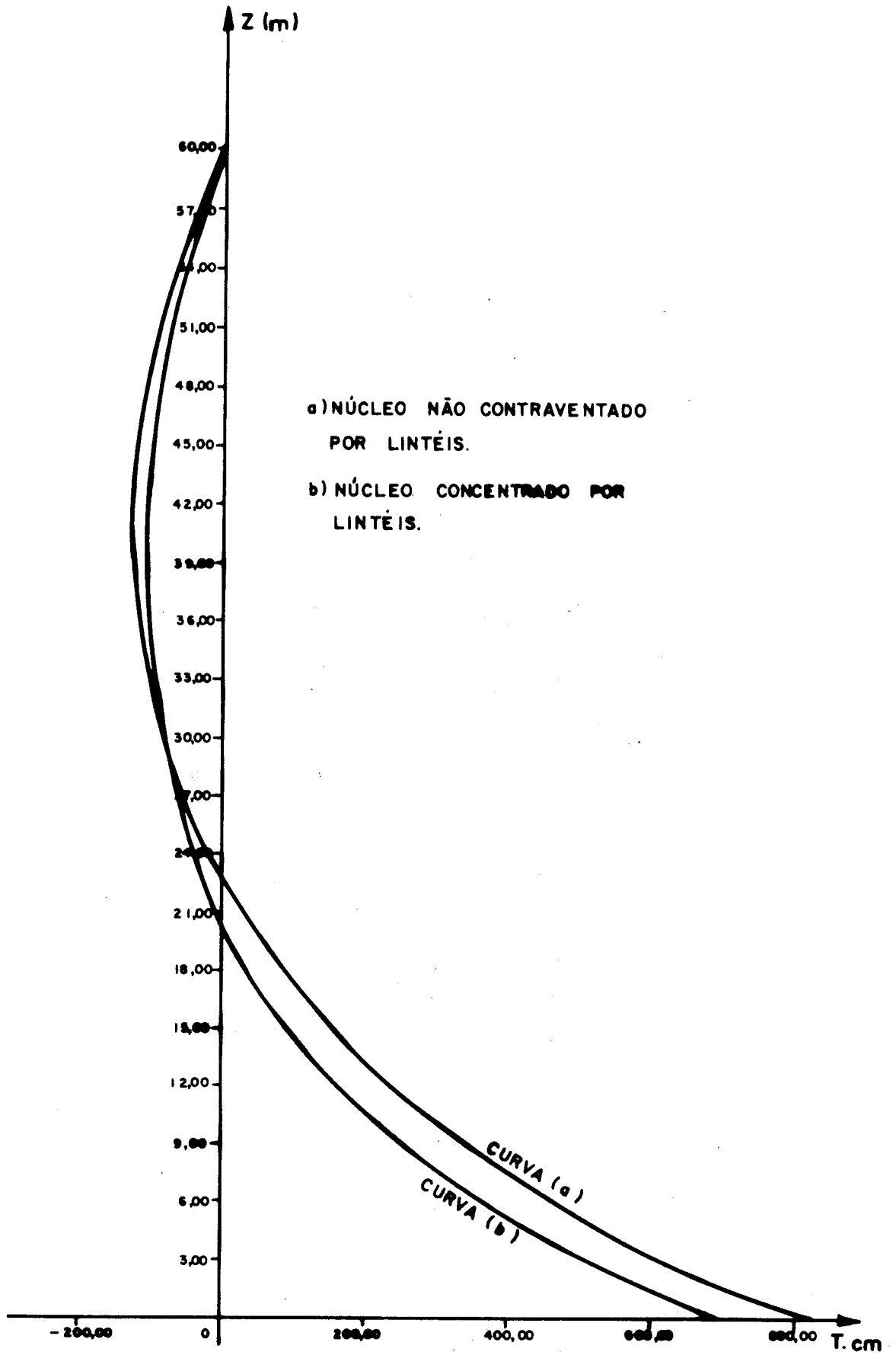
- (a) ESTRUTURA SEM NÚCLEO
- (b) ESTRUTURA COM NÚCLEO NÃO CONTRAVENTADO POR LINTÉIS.
- (c) ESTRUTURA COM NÚCLEO CONTRAVENTADO POR LINTÉIS.

ESFORÇOS CORTANTES - VIGAS V3 E V6

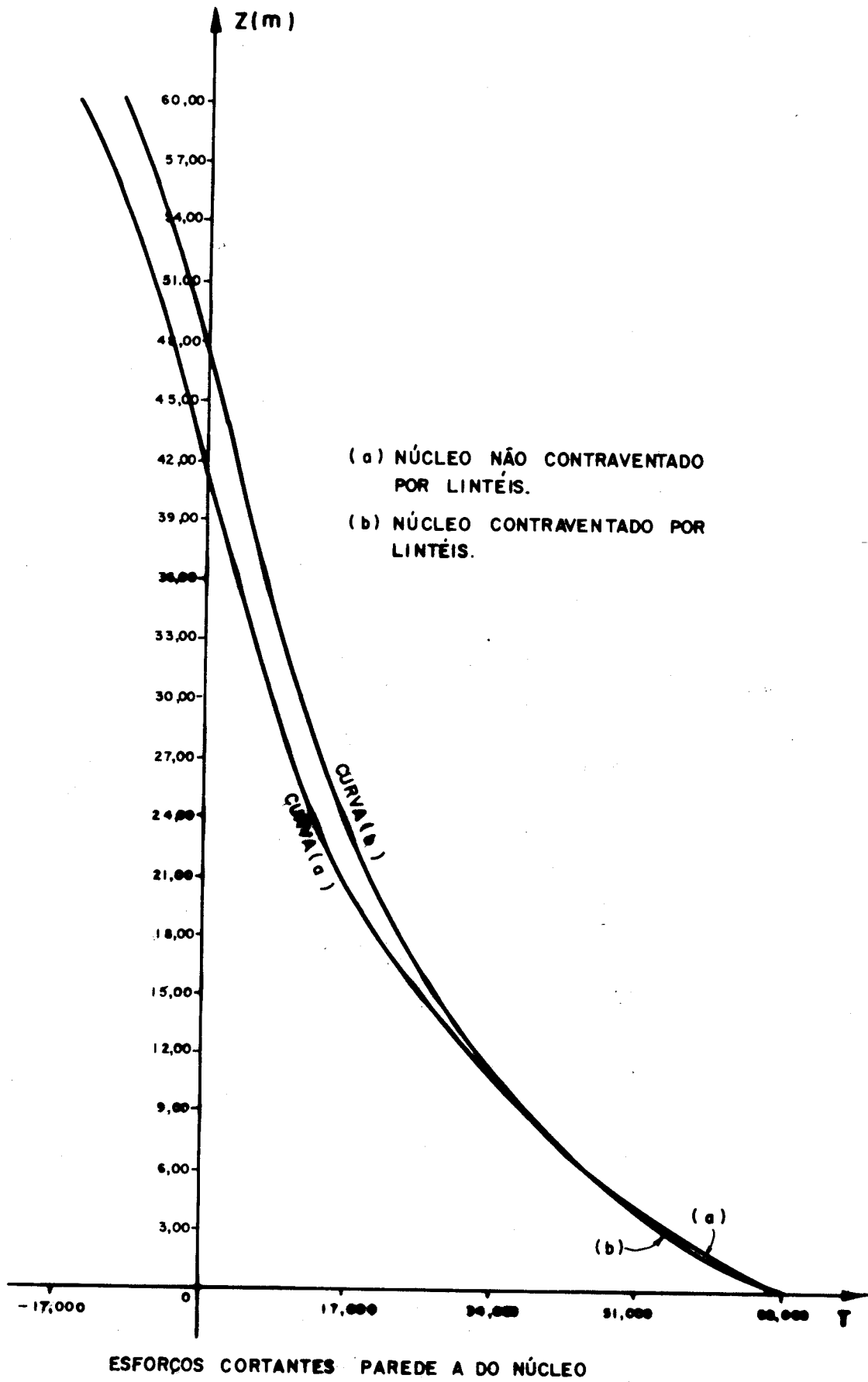


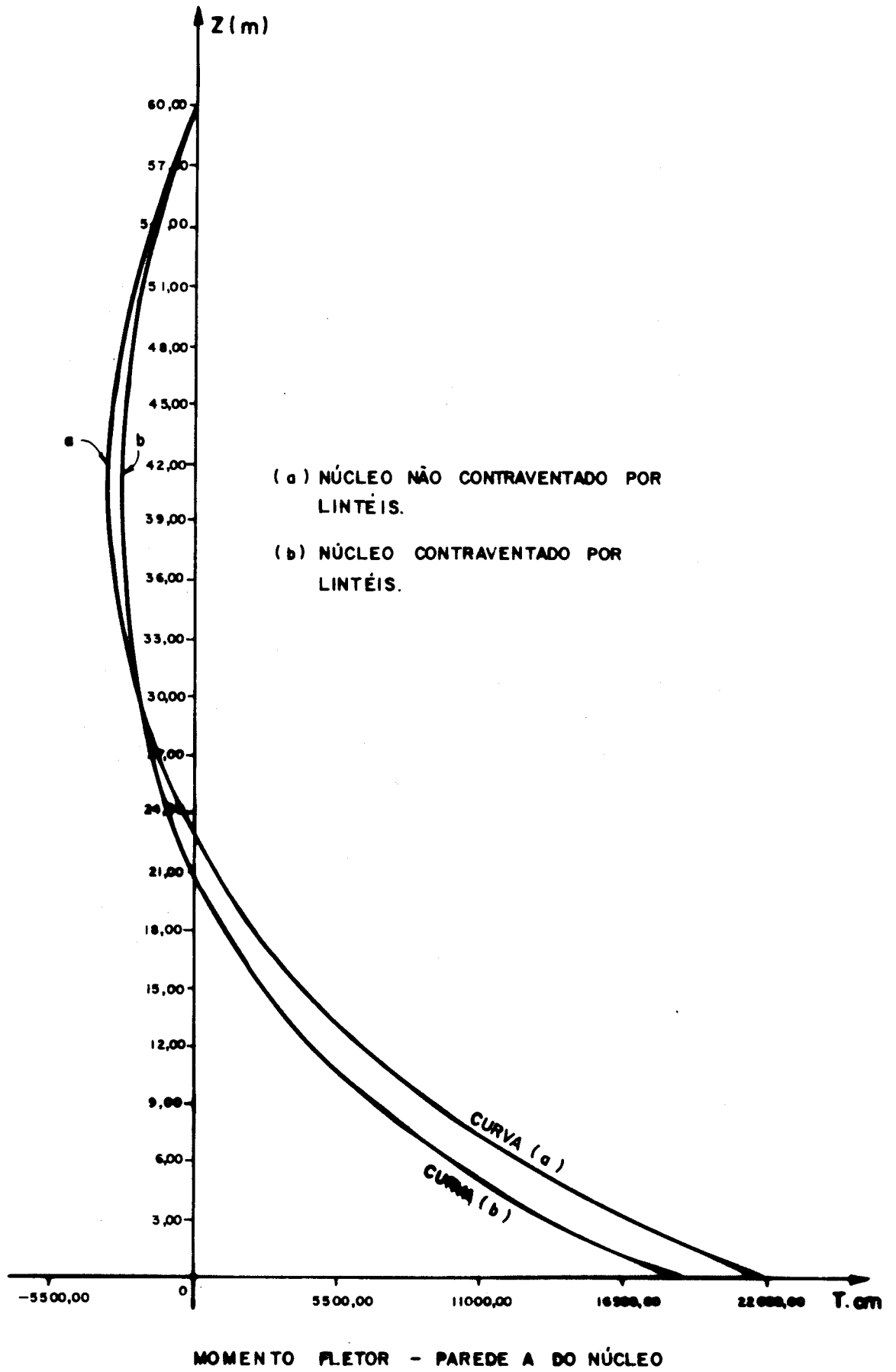


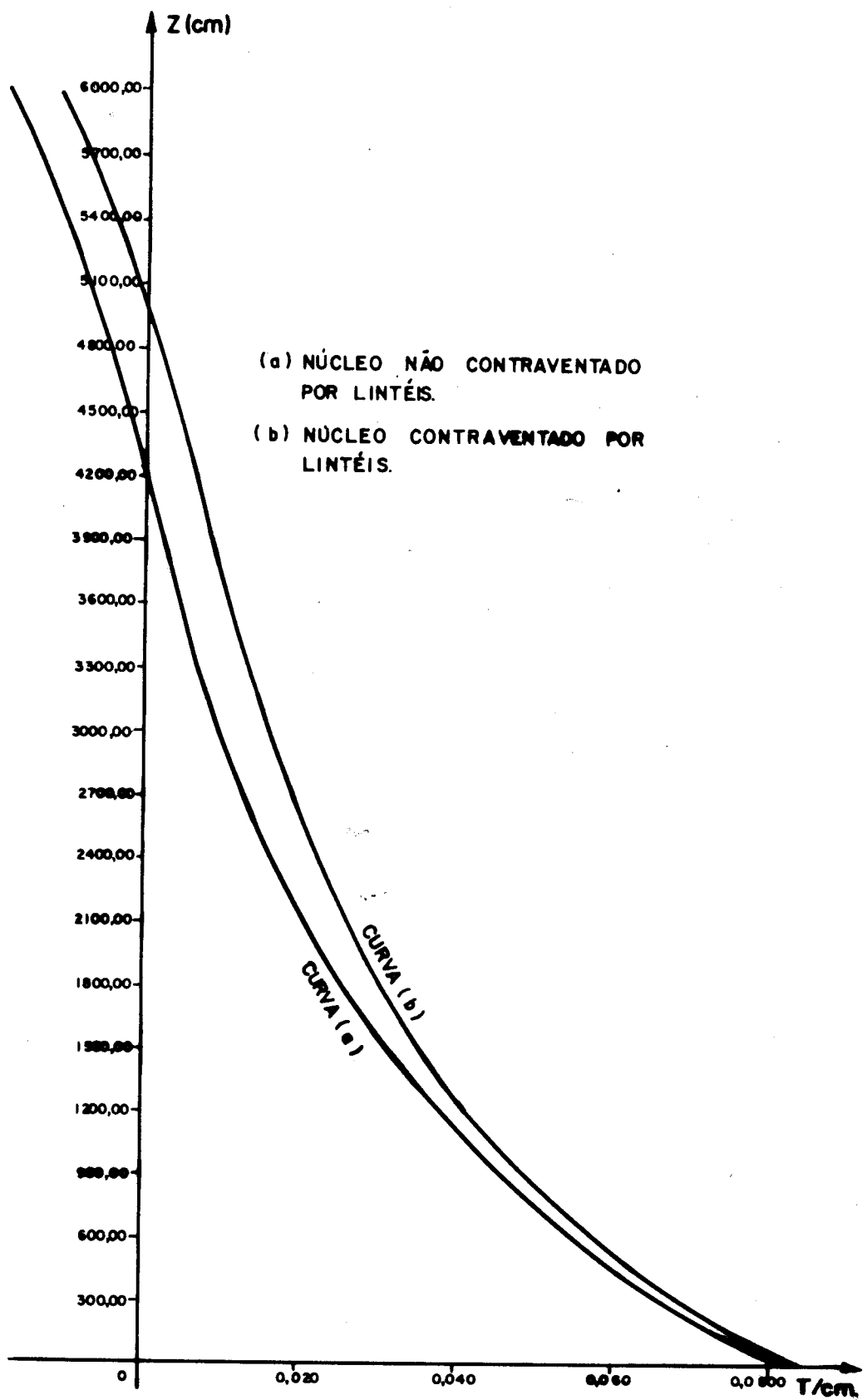
ESFORÇOS CORTANTES - PAREDE B DO NÚCLEO



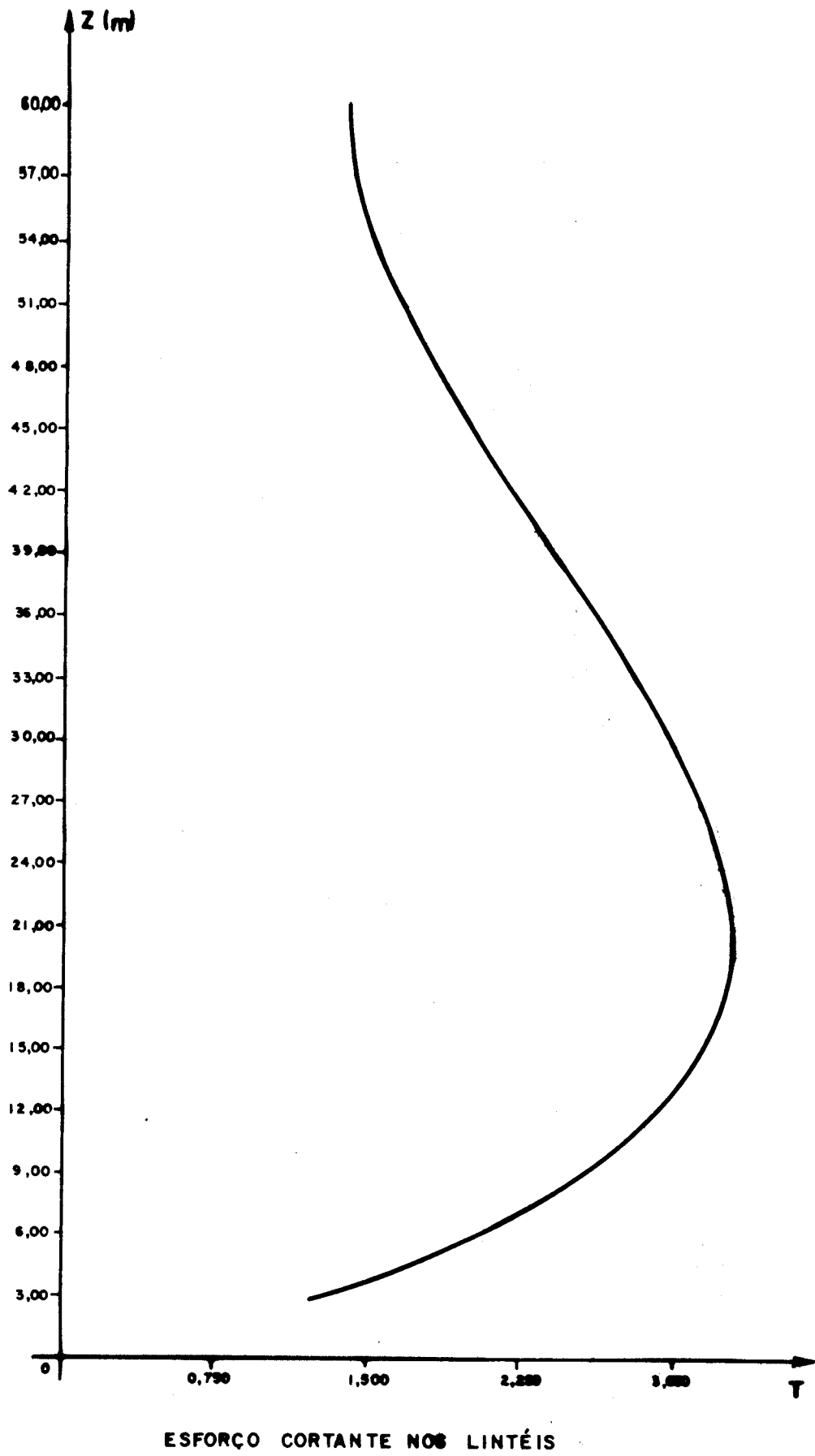
MOMENTO FLETOR - PAREDE B DO NÚCLEO



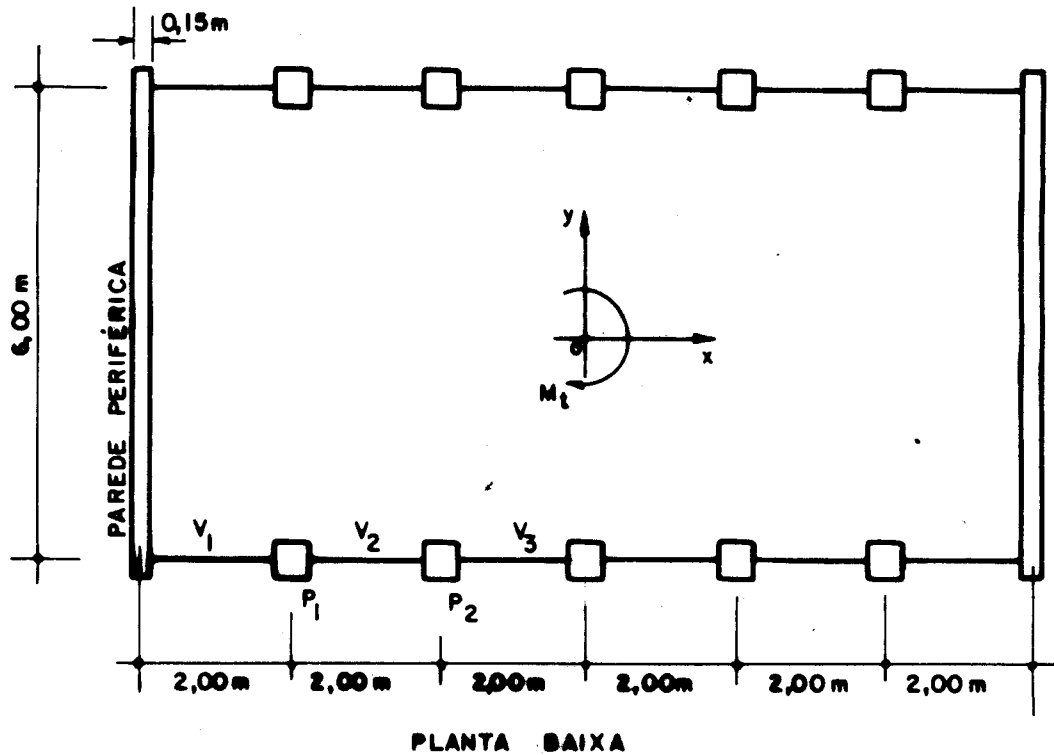




ESFORÇO CORTANTE DISTRIBUÍDO NAS INTERSECÇÕES DAS PAREDES A E B DO NÚCLEO.



EXEMPLO 4



Carregamento - Momento torçor uniformemente distribuído

$$M_t = 8,64 \text{ t.m/m}$$

Dimensão de todos os pilares $30 \times 30 \text{ cm}^2$

Dimensão das vigas $20 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$

Altura dos andares $h = 3,00 \text{ m}$

Número de andares $NA = 20$

Módulo de elasticidade $E = 200.000 \text{ kgf/cm}^2$

RESULTADOS FORNECIDOS PELO PROGRAMA - 2

UNIDADES FORÇA EM (T.) · COMPRIMENTO EM (CM.)

NUMERO DE ANDARES= 20

ALTURA DOS ANDARES= 300.00

CCMP. DIRECAO-X= 1200.00

CCMP. DIRECAO-Y= 600.00

MODULO DE ELASTICIDADE= 0.2000E 03

DADOS DO NUCLEO

CCMP.-X= 0.0

CCMP.-Y= 0.0

ESP. DA PAREDE A= 0.0

ESP. DA PAREDE B= 0.0

ABERTURA CENTRAL=

ALTURA DO LINTEL= 0.0

MOMENTO SET. DE INERCIA= 0.0

MOMENTO DE INERCIA A TORCAO= 0.0

ESTRUTURA PERIFERICA

-DIRECAO X-

PILAR	ALTURA	LARGURA
1	30.00	30.00
2	30.00	30.00
3	30.00	30.00

VIGA	VAO	ALTURA	LARGURA
1	200.00	40.00	20.00
2	200.00	40.00	20.00
3	200.00	40.00	20.00

-DIRECAO Y-

PAREDE PERIFERICA COM ESP. DE 15.00

ROTACOES DOS DIAFRAGMAS

COTA	ROTACOES
0	-0.64690E-04
1	0.47013E-04
2	0.34509E-03
3	0.79916E-03
4	0.13819E-02
5	0.20692E-02
6	0.28393E-02
7	0.36735E-02
8	0.45548E-02
9	0.54690E-02
10	0.64035E-02
11	0.73480E-02
12	0.82938E-02
13	0.92341E-02
14	0.10164E-01
15	0.11079E-01
16	0.11979E-01
17	0.12863E-01
18	0.13732E-01
19	0.14590E-01
20	0.15441E-01

PAREDE PERIFERICA

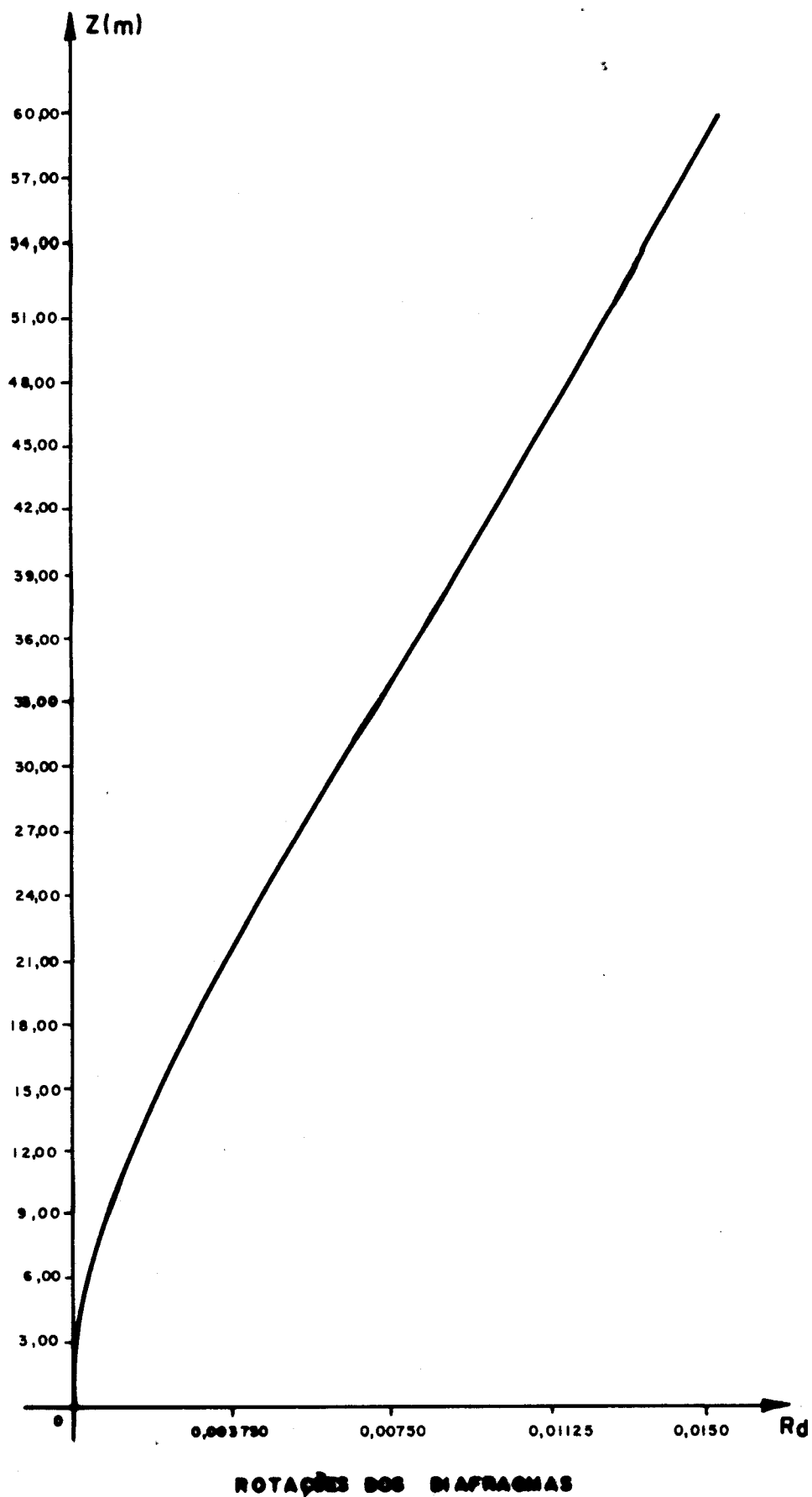
COTA	E. CORTANTE	M. FLETOR
0	0.4311E 02	C.7925E 05
1	0.4006E 02	C.6698E 05
2	0.3709E 02	C.5607E 05
3	0.3425E 02	C.4623E 05
4	0.3152E 02	C.3755E 05
5	0.2890E 02	C.2976E 05
6	0.2638E 02	C.2296E 05
7	0.2393E 02	C.1693E 05
8	0.2156E 02	C.1177E 05
9	0.1925E 02	C.7265E 04
10	0.1703E 02	C.3545E 04
11	0.1479E 02	C.3838E 03
12	0.1262E 02	-C.2002E 04
13	0.1048E 02	-0.3910E 04
14	0.8361E 01	-0.5078E 04
15	0.6259E 01	-0.5791E 04
16	0.4173E 01	-0.5784E 04
17	0.2065E 01	-0.5332E 04
18	-0.3573E-01	-0.4139E 04
19	-0.2164E 01	-0.2495E 04
20	-0.4429E 01	-0.7577E 02

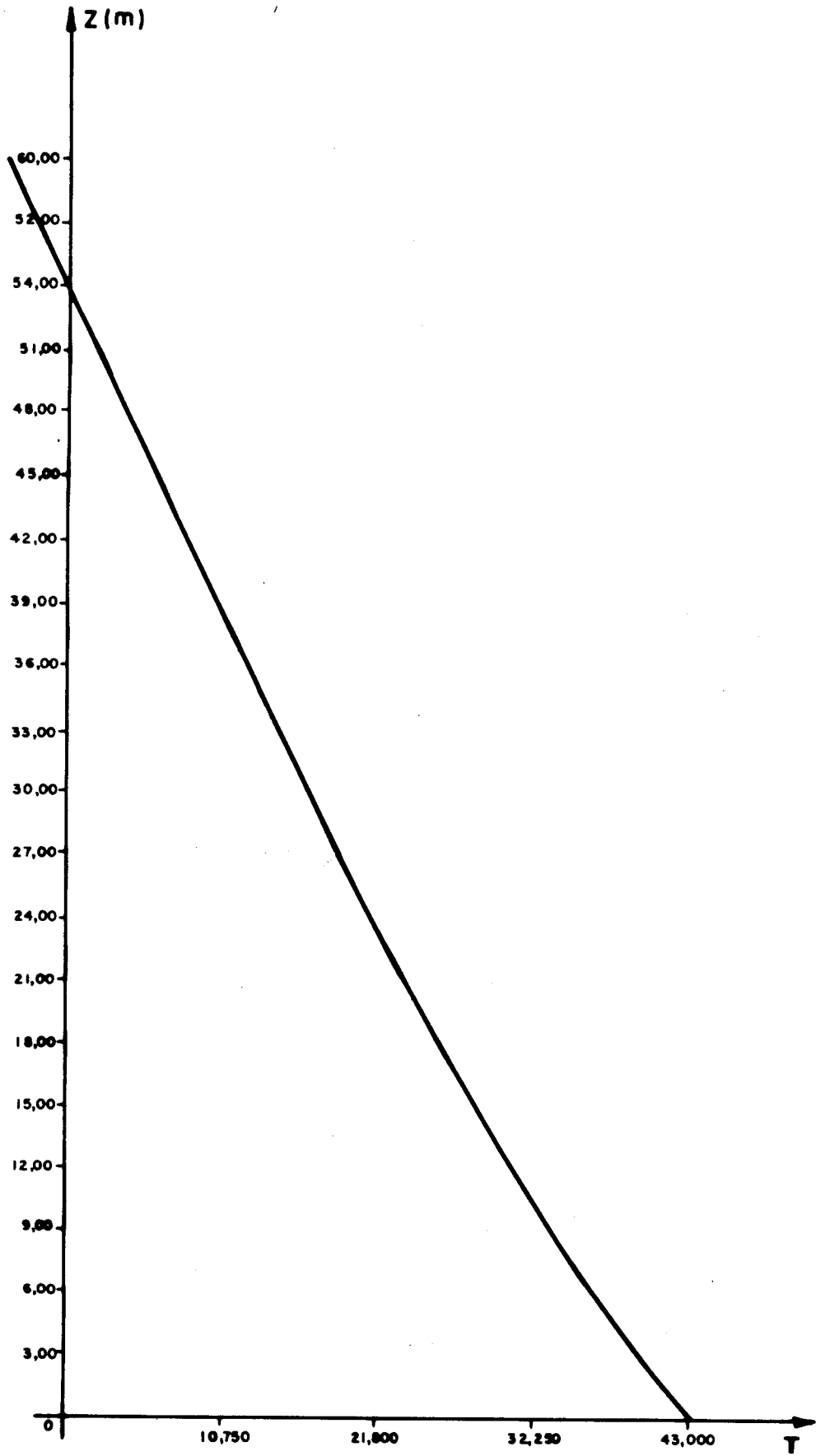
ESFORÇOS NORMAIS NOS PILARES

COTA	PILAR 1	PILAR 2
0	10.249	1.212
1	10.082	1.256
2	9.635	1.357
3	9.004	1.473
4	8.251	1.580
5	7.433	1.663
6	6.592	1.715
7	5.756	1.736
8	4.948	1.724
9	4.184	1.683
10	3.475	1.615
11	2.830	1.524
12	2.256	1.412
13	1.753	1.282
14	1.323	1.136
15	0.964	0.976
16	0.673	0.802
17	0.442	0.616
18	0.261	0.418
19	0.119	0.212
20	-0.000	-0.000

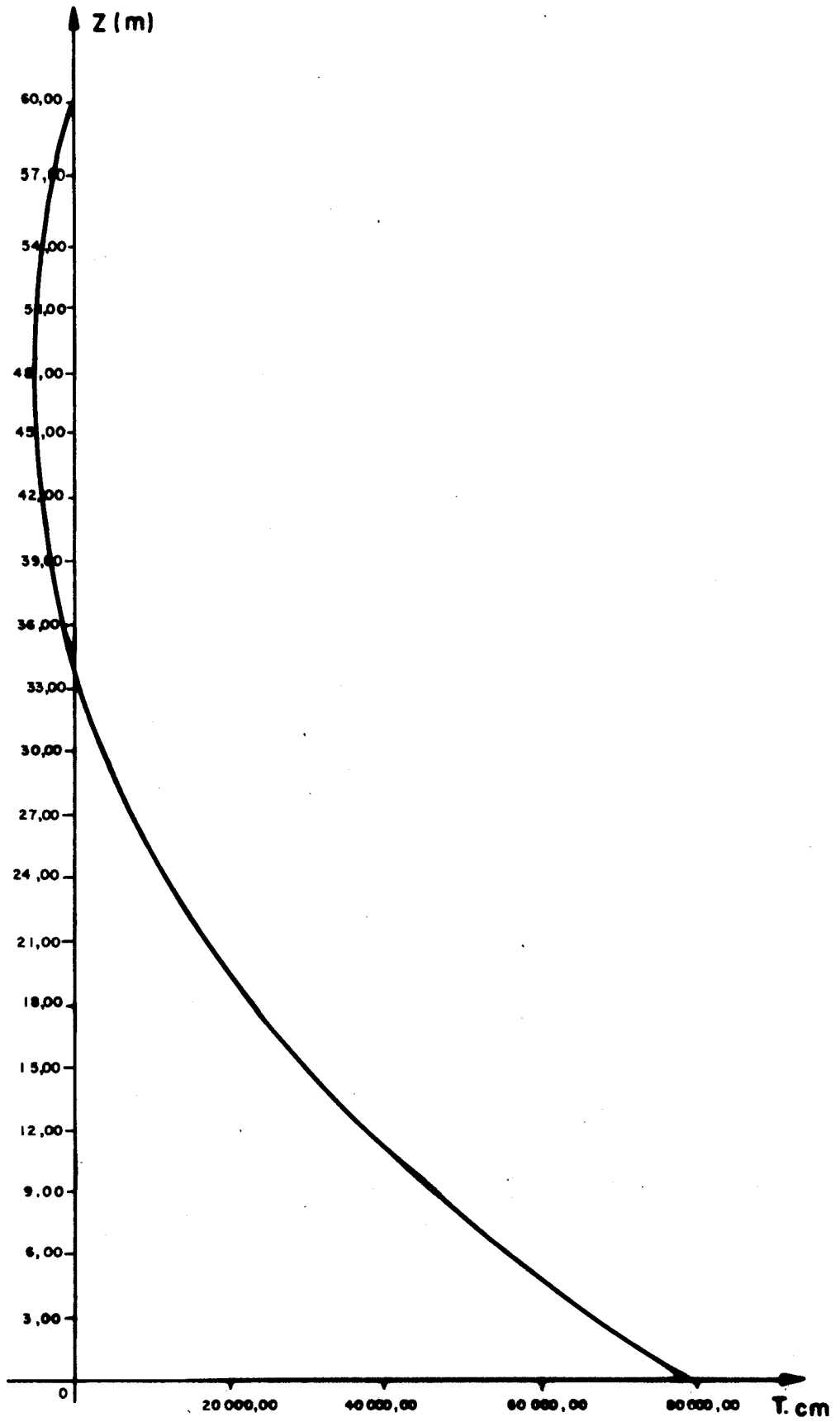
ESFORÇOS CORTANTE NAS VIGAS

ANDAR	VIGA 1	VIGA 2	VIGA 3
1	0.697	0.339	0.436
2	1.240	0.658	0.786
3	1.678	0.950	1.077
4	2.024	1.211	1.319
5	2.290	1.437	1.516
6	2.489	1.630	1.676
7	2.630	1.789	1.802
8	2.721	1.918	1.900
9	2.769	2.019	1.971
10	2.783	2.095	2.021
11	2.768	2.149	2.052
12	2.730	2.184	2.067
13	2.676	2.204	2.070
14	2.611	2.212	2.062
15	2.541	2.212	2.047
16	2.470	2.206	2.028
17	2.404	2.198	2.008
18	2.349	2.190	1.989
19	2.311	2.183	1.975
20	2.296	2.181	1.969

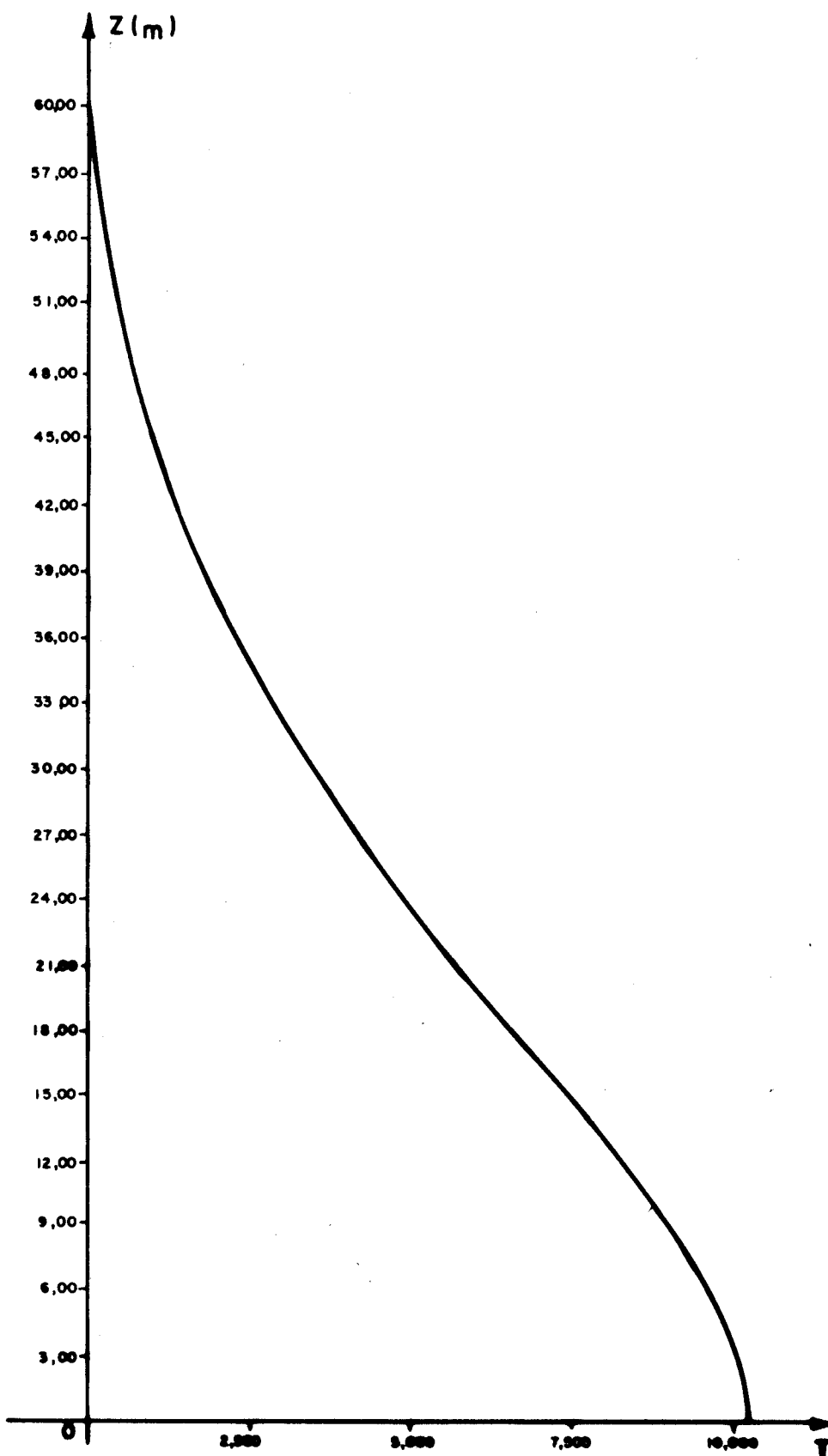




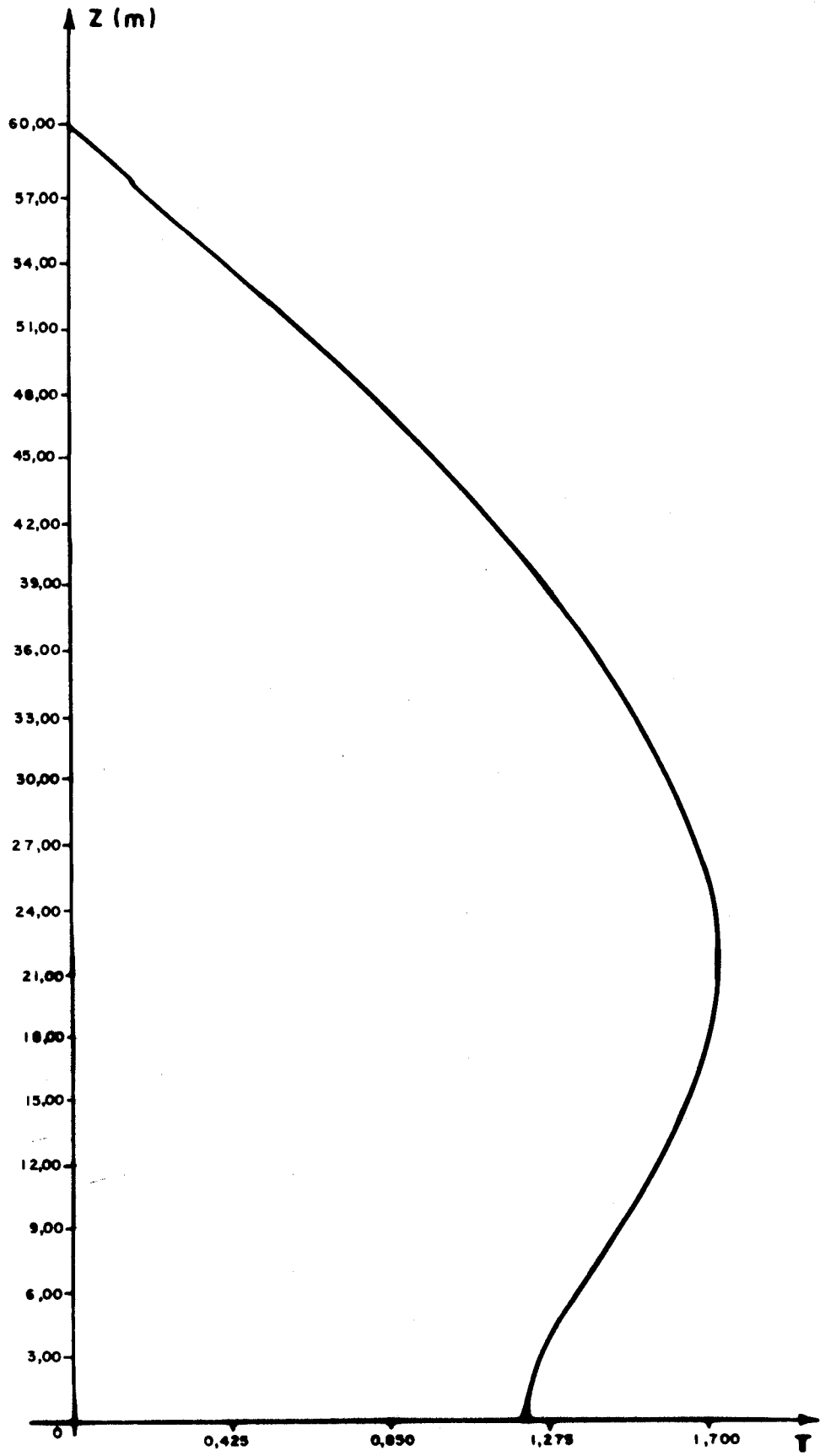
ESFORÇOS CORTANTES- PAREDE PERIFÉRICA



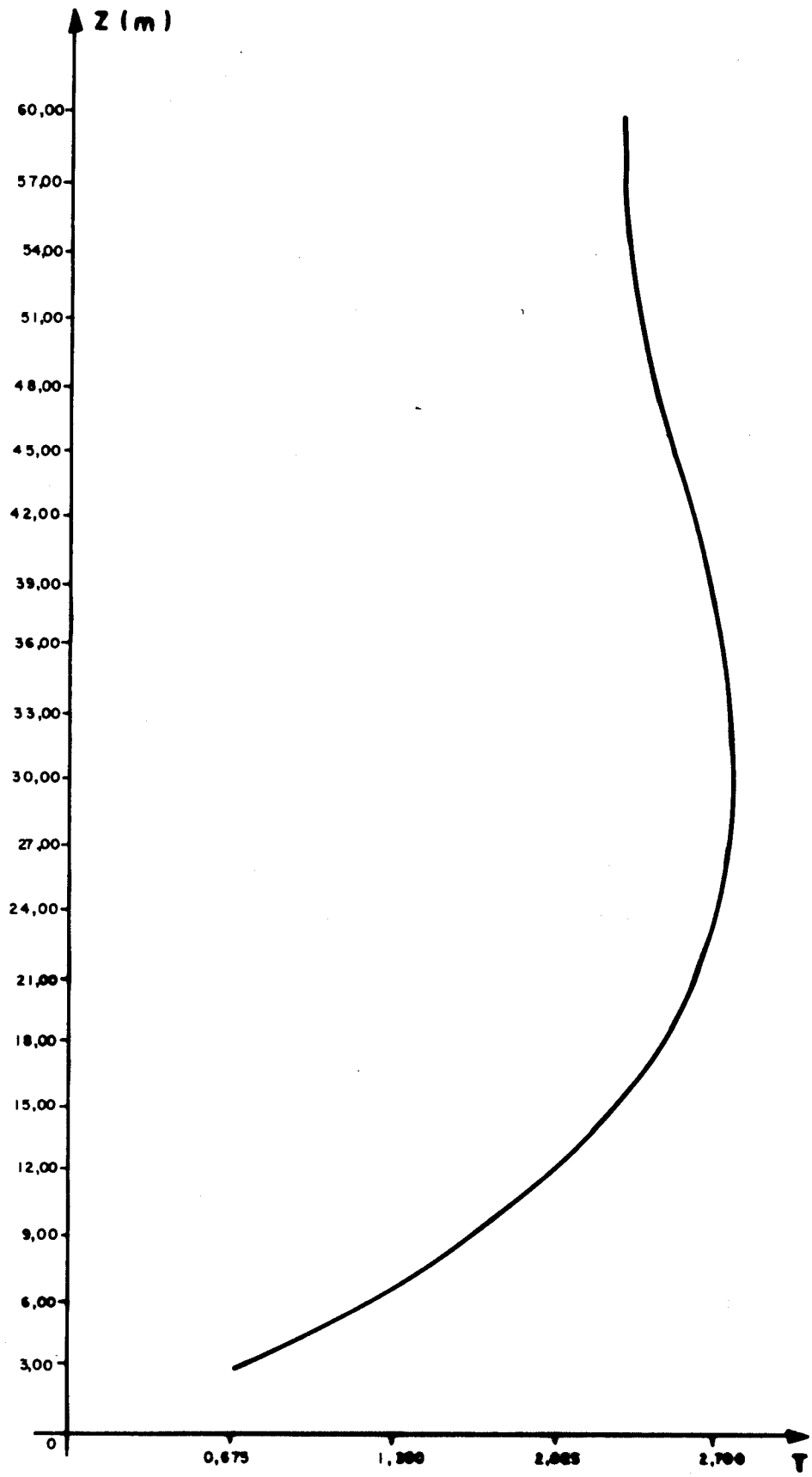
MOMENTO FLETOR - PAREDE PERIFÉRICA



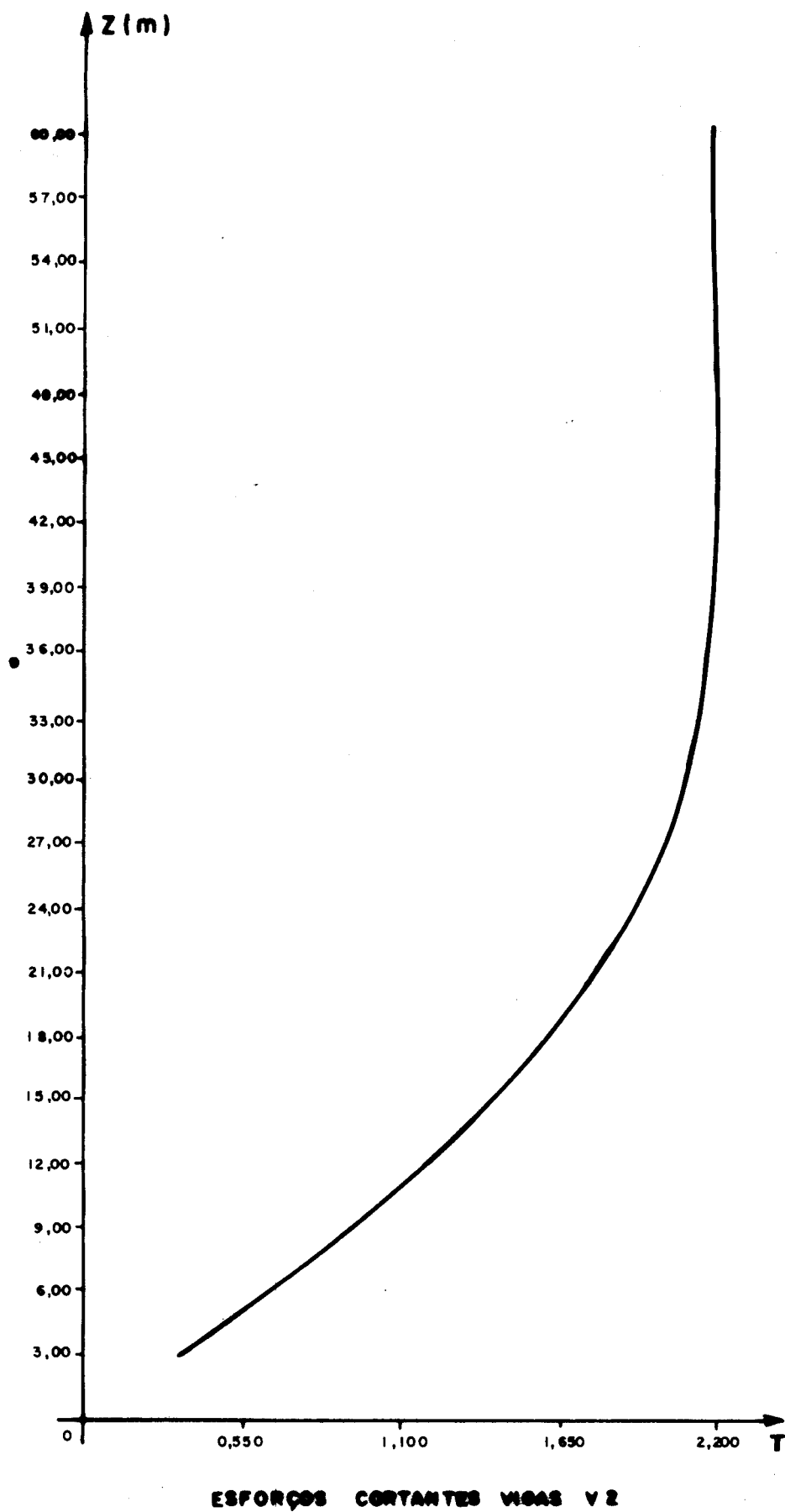
ESFORÇO NORMAL - PILAR P1

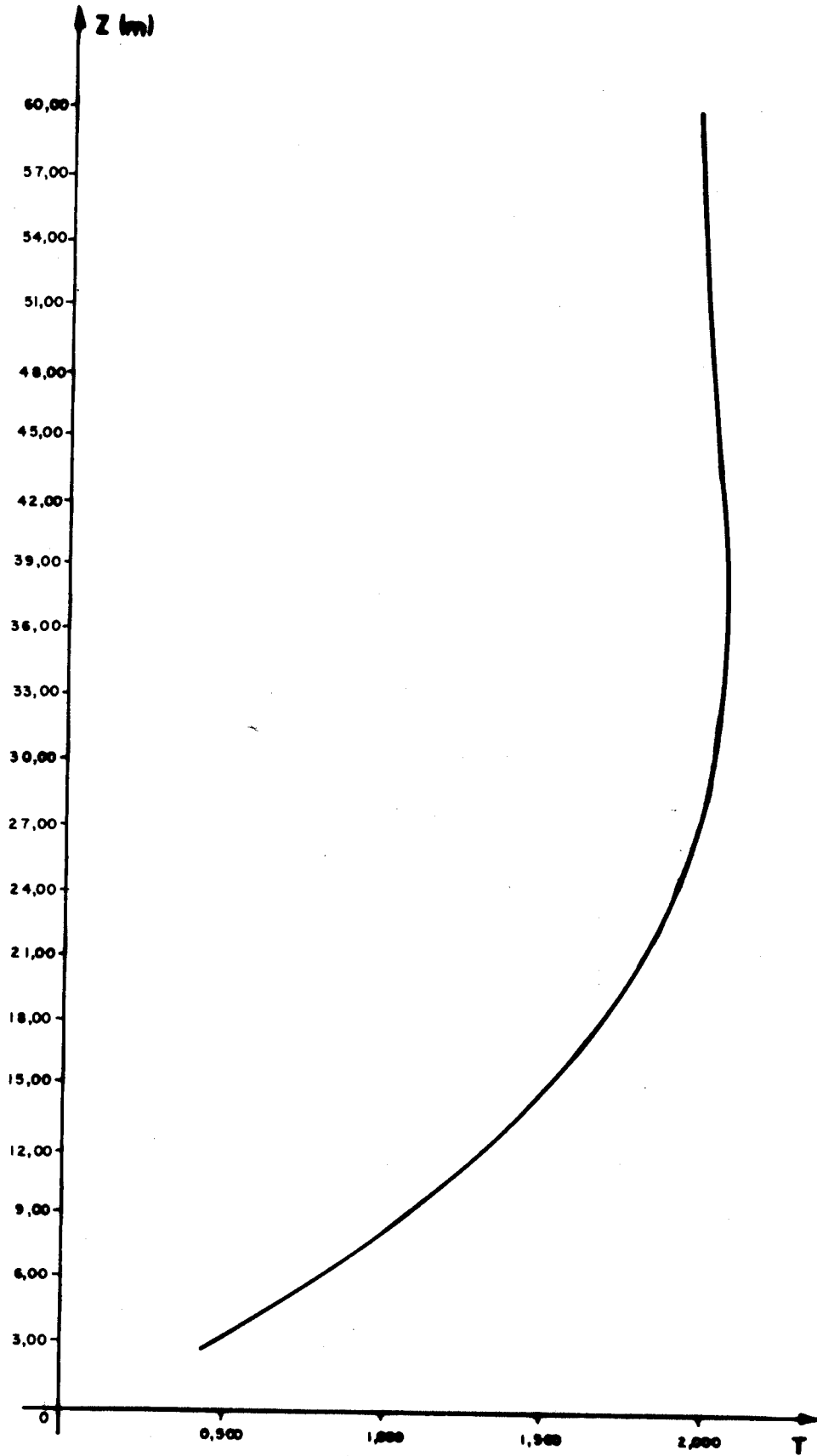


ESFORÇO NORMAL - PILAR P2



ESFORÇOS CORTANTES NAS VIGAS V.1.





ESFORÇOS CORTANTES - VIGA V3

4.4 - CONCLUSÃO

As estruturas tubulares de edifícios altos por serem bastante rígidas quando comparadas às outras de mesma finalidade, constituem soluções simples e econômicas para a edificação de prédios esbeltos. Os esforços causados pela ação de um carregamento de momento torçor, são por estas estruturas absorvidas de forma eficiente.

Observa-se nos exemplos 1, 2 e 3, que os esforços normais são praticamente absorvidos pelos pilares próximos do canto que formam os painéis. Essa situação decorre do fato de que os pórticos não são painéis verdadeiramente rígidos, ou sejam, são painéis constituídos de vigas e pilares, existindo assim nos mesmos certa flexibilidade, o que ocasiona essa tendência de concentração dos esforços normais nos pilares próximo do canto.

Em vista do que foi exposto é que justifica-se a forma pela qual tais estruturas foram analisadas neste trabalho, não procurando adaptá-las a um modelo de uma viga de secção vazada.

Os esforços normais nos pilares podem ser obtidas a partir dos esforços nas vigas sem precisar calcular as expressões (37), (42) e (101). Desta maneira os esforços normais nos pilares P_3 e P_5 do exemplo 1 podem ser obtidas a partir dos esforços cortantes nas vigas V_2 e V_3 e depois V_5 e V_6 respectivamente. O erro apresentado na comparação entre o processo proposto e o processo discreto nos pilares P_3 e P_5 deve-se ao fato de uma pequena diferença entre os esforços cortantes nas vigas adjacentes a estes pilares. Quando determinam-se os esforços normais nos pilares P_3 ou P_5 através dos esforços cortantes nas vigas V_2 e V_3 ou V_5 e V_6 , respectivamente, tal operação constitui uma somatória no sentido do topo para a base do pilar. Assim os pequenos erros nas forças cortantes nas vigas acumulam-se nos tramos inferiores dos pilares.

Deve-se notar também que nos exemplos 1, 2 e 3, que os esforços normais nos pilares P_1 são nulos. Esta situação ocorre em tais estruturas, quando submetidas a um carregamento de momento torçor, quando os painéis que as compõem apresentarem igualdade de rigidez. No instante em que os painéis forem diferentes pelo aspecto de rigidez, embora mantendo o mesmo carregamento, essa situação deixará de existir.

Os esforços cortantes absorvidos pelas vigas, são da mesma ordem de grandeza ao nível de cada andar.

Nos exemplos 1 e 2 observa-se que as forças cortantes nas vigas aumentam do topo para a base devido ao carregamento de momento torçor adotado.

A inclusão de núcleos nestas estruturas as tornam menos solicitadas. O núcleo absorve parte considerável dos esforços que ocorreriam na estrutura periférica.

Comparando-se os exemplos 2 com 3, nota-se uma redução de quase metade nas rotações dos diafragmas.

Os esforços de maiores intensidades nas paredes do núcleo são momentos fletores e cortantes. Embora existam esforços normais nas paredes B do núcleo, estes são insignificantes em face das dimensões da referida parede.

Observa-se nos exemplos 3 e 4, que a força cortante nas vigas diminuem a medida que se aproxima da base. Isto deve-se a grande rigidez da parede e do núcleo respectivamente, devido as suas condições de apoio engastado na base.

A presença dos lintéis para contraventamento do núcleo influencia bastante a redistribuição dos esforços; principalmente os esforços normais nos pilares e esforços cortantes nas vigas.

Nota-se no exemplo 3 que é maior a influencia dos lintéis nos esforços normais e cortantes na parede B que na parede A. Isto deve-se ao fato dos lintéis estarem bi-engastado na parede B, e a parede A não receber carga nenhuma diretamente dos lintéis. Esta influência dos lintéis não se observa nos momentos fletores.

A estrutura do exemplo 4, ou seja o tipo de estrutura definida no item 2.3 deste trabalho, possui uma grande rigidez à torção, ficando seu comportamento em grande parte definido pelo painel parede; quanto ao comportamento básico dos demais membros, é praticamente análogo aos casos anteriores.

A inclusão de núcleo a esta forma estrutural não chega a exercer uma influência preponderante como nos casos anteriores. Nota-se uma certa variação nos esforços e nas rotações dos diafragmas, somente quando o núcleo passa a ser contraventado pelos lintéis.

Justifica-se o uso do painel parede na estrutura periférica em situações em que a relação L_y/L_x for em torno de 0,5, pois o mesmo é mais rígido que os pórticos. Ou seja em casos que L_y/L_x for próximo de 1,0 e forem usados painéis paredes os pórticos ficam praticamente inoperantes.

Em todos os exemplos foram verificadas as condições de equilíbrio a momento torçor. A ordem de diferença entre o momento externo e aquele produzido pelas forças cortantes dos pilares e paredes nunca chegou a ultrapassar um erro de 1%.

APÊNDICE I

APLICAÇÃO DAS DIFERENÇAS FINITAS

I.1 - INTRODUÇÃO

A aplicação da técnica do meio contínuo à problemas de ação do vento em edifícios altos, descreve o comportamento da estrutura por uma equação diferencial ou por um sistema de equações diferenciais. A vantagem principal da técnica do meio contínuo em relação a processos discretos consiste na redução do número de parâmetros necessários à definição do comportamento de cada painel resistente. Neste trabalho, as soluções dos sistemas de equações diferenciais, foram obtidas através da aplicação das diferenças finitas.

O método a ser apresentado consiste em substituir-se uma função $f(x)$ cujos valores são conhecidos em um conjunto de pontos sobre o eixo x , por um polinômio $P(x)$, tomando as derivadas deste como valores aproximados

das derivadas da função. Serão utilizados aqui as diferenças finitas Lagrangenas, com os pontos da malha igualmente espaçados de δ . Diferenças finitas Lagrangeanas são aquelas cujo polinômio interpolador é definido somente por valores da função.

I.2 - OPERADORES

O método das diferenças finitas será aqui aplicado à solução de sistemas de equações diferenciais nos quais a ordem mais alta é a terceira. Deve-se por isso, para obter as expressões em diferenças finitas das derivadas, usar polinômio de interpolação de grau igual ou superior a três. Preferiu-se usar polinômio de interpolação do quarto grau para trabalhar com operadores com número simétrico de pontos.

Seja o polinômio interpolador

$$P(x) = a.x^4 + b.x^3 + c.x^2 + d.x + e$$

Cujos valores na sequência de pontos utilizados $(-2\delta, -\delta, 0, \delta, 2\delta)$ devem coincidir com os valores da função $f(x)$.

Com a notação da Fig. 1, tem-se:

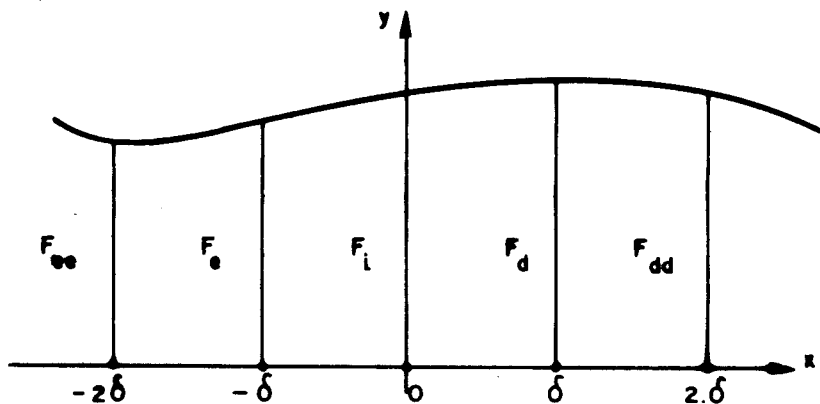


FIG. 1 - VALORES DA FUNÇÃO

$$\left. \begin{aligned} f(-2\delta) &= F_{ee} \\ f(-\delta) &= F_e \\ f(0) &= F_i \\ f(\delta) &= F_d \\ f(2\delta) &= F_{dd} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Aplicando-se as condições (1) ao polinômio interpolador chega-se a

$$\begin{bmatrix} (2\delta)^4 & -(2\delta)^3 & (2\delta)^3 & -2\delta & 1 \\ \delta^4 & -\delta^3 & \delta^2 & -\delta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \delta^4 & \delta^3 & \delta^2 & \delta & 1 \\ (2\delta)^4 & (2\delta)^3 & (2\delta)^3 & \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ee} \\ F_e \\ F_i \\ F_d \\ F_{dd} \end{bmatrix} \quad (118)$$

A resolução do sistema de equações lineares dado por (2) fornece.

$$a = \frac{1}{24 \cdot \delta^4} \left[F_{ee} - 4 \cdot F_e + 6 \cdot F_i - 4 \cdot F_d + F_{dd} \right]$$

$$b = \frac{1}{12 \cdot \delta^3} \left[-F_{ee} + 2 \cdot F_e - 2 \cdot F_d + F_{dd} \right]$$

$$c = \frac{1}{24 \cdot \delta^2} \left[-F_{ee} + 16 \cdot F_e - 30 \cdot F_i + 16 \cdot F_d - F_{dd} \right]$$

$$d = \frac{1}{12 \cdot \delta} \left[F_{ee} - 8 \cdot F_e + 8 \cdot F_d - F_{dd} \right]$$

$$e = F_i \quad (3)$$

A função $f(x)$ sendo aproximada pelo polinômio $P(x)$ no intervalo $(-2\delta, +2\delta)$, pode-se daí obter os valores das derivadas de $f(x)$ neste intervalo ou mais precisamente nos pontos deste intervalo conforme mostrado na Fig.(1).

Por (4) e (3) chega-se então aos operadores de diferenças finitas, definidas a seguir:

$$f_e''' = \frac{1}{2.\delta^3} \left[-3.F_{ee} + 10.F_e - 12.F_i + 6.F_d - F_{dd} \right]$$

$$f_i''' = \frac{1}{2.\delta^3} \left[-F_{ee} + 2.F_e - 2.F_d + F_{dd} \right]$$

$$f_d''' = \frac{1}{2.\delta^3} \left[F_{ee} - 6.F_e + 12.F_i - 10.F_d + 3.F_{dd} \right]$$

$$f_e'' = \frac{1}{12.\delta^2} \left[11.F_{ee} - 20.F_e + 6.F_i + 4.F_d - F_{dd} \right]$$

$$f_i'' = \frac{1}{12.\delta^2} \left[-F_{ee} + 16.F_e - 30.F_i + 16.F_d - F_{dd} \right]$$

$$f_d'' = \frac{1}{12.\delta^2} \left[-F_{ee} + 4.F_e + 6.F_i - 20.F_d + 11.F_{dd} \right]$$

$$f_e' = \frac{1}{12.\delta} \left[-3.F_{ee} - 10.F_e + 18.F_i - 6.F_d + F_{dd} \right]$$

$$f_i' = \frac{1}{12.\delta} \left[F_{ee} - 8.F_e + 8.F_d - F_{dd} \right]$$

$$f_d' = \frac{1}{12.\delta} \left[-F_{ee} + 6.F_e - 18.F_i + 10.F_d + 3.F_{dd} \right]$$

(4)

As expressões das derivadas no ponto i , ponto médio da sequência de pontos utilizados na interpolação, são chamadas diferenças finitas centradas ou simétricas e as nos demais pontos diferenças finitas assimétricas.

APÊNDICE II

RESUMO DA TEORIA DE FLEXO-TORÇÃO

II.1 - INTRODUÇÃO

Considere-se uma barra de secção aberta de parede finas, como representada na Fig. 1. Essa barra será referenciada ao sistema de eixos XYZ indicado na Figura, sendo X e Y eixos principais de inércia e Z um eixo longitudinal passando pelos centros de gravidade das secções.

Na Fig. 1 também é representada a linha esqueleto, ou simplesmente esqueleto da secção, que é a linha que divide a espessura t ao meio. No esqueleto é adotada uma ordenada s com origem O_s a ser estabelecida convenientemente; $s = s_1$ e $s = s_2$ são as ordenadas de s das respectivas extremidades do esqueleto.

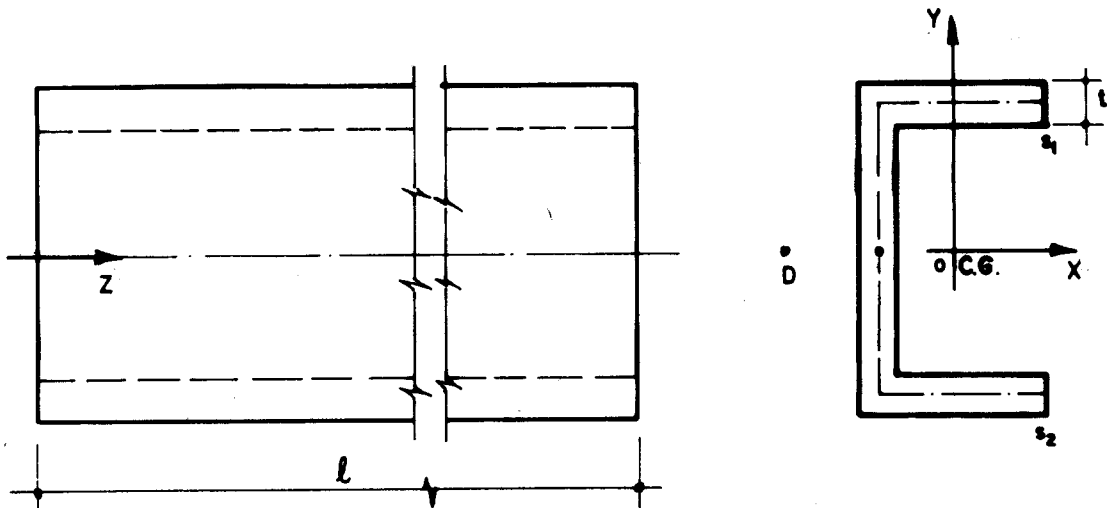


FIG.1 - SISTEMA DE ENÇOS EM UMA BARRA DE SEÇÃO ABERTA E PAREDES FINAS.

A espessura t pode variar com s e o elemento de área da secção é dado por:

$$dS = t \cdot ds \quad (1)$$

São feitas as seguintes suposições:

- a) As dimensões da secção não variam com a coordenada Z .
- b) A barra é de paredes finas, ou seja a espessura t é bem menor que as dimensões características do esqueleto e essas são bem menores que o comprimento l da barra.
- c) A secção é indeformável em seu plano, portanto, o seu deslocamento nesse plano será um deslocamento de corpo rígido.

II.2 - CENTRO DE TORÇÃO OU DE CISALHAMENTO

É o ponto $D(x_d; y_d)$ indicado na Fig. 1, do plano de uma secção por onde deve passar a linha de ação do car-

regamento transversal para que a barra fique submetida somente à flexão e não a torção.

Para achar a posição do centro de torção, considere-se a expressão das tensões de cisalhamento provocada pela força cortante Q , como

$$\tau = \frac{Q \cdot M_s}{t \cdot J} \quad (2)$$

Onde M_s é o momento estático da secção e J o momento de inércia.

Seja suposto inicialmente um carregamento paralelo ao eixo y . Em (2) deve então ser feito.

$$Q = Q_y$$

$$J = J_x$$

$$M_s = \int_{s_1}^{s_2} y \cdot dS$$

A condição que fornece a localização de D é que a resultante dos momentos das tensões τ em relação ao centro de torção seja nula.

$$\int_{s_1}^s \tau \cdot dS \cdot n = 0 \quad (3)$$

Sendo n a distância do centro de torção à tangente ao esqueleto conforme indicado na Fig. 2(a).

por (2) tem-se

$$\tau = \frac{Q_y \cdot \int_{s_1}^s y \cdot dS}{t \cdot J_x}$$

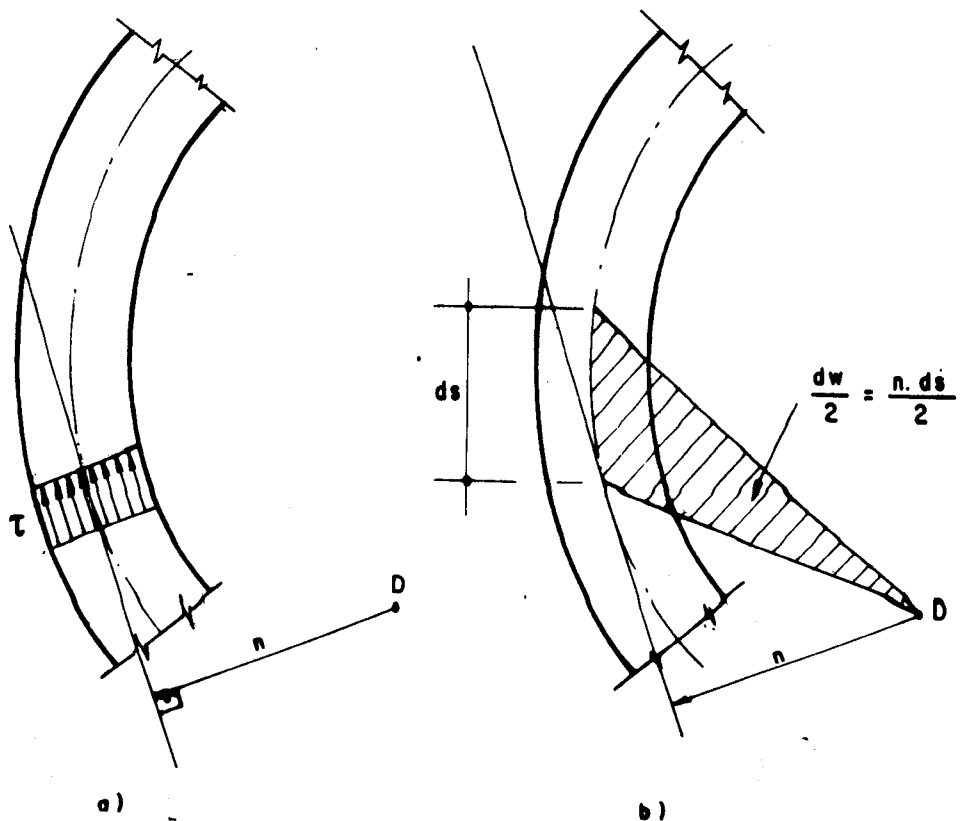


FIG. 2 - CENTRO DE TORÇÃO E ÁREA SETORIAL

e substituindo-se em (3) vem

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{Q_y}{t \cdot J_x} \int_{s_1}^s y \cdot t \cdot ds \cdot n \cdot ds = 0$$

simplificando chega-se a

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{Q_y}{J_x} \int_{s_1}^s y \cdot dS \cdot n \cdot ds = 0$$

ou ainda

$$\frac{Q_y}{J_x} \int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{s_1}^s y \cdot dS \right) n \cdot ds = 0 \quad (4)$$

Fazendo a integração por partes, vem:

$$\int a.db = a.b - \int b.da$$

$$a = \int_{s_1}^s y.dS \quad da = \int_{s_1}^{s_2} n.ds$$

$$\int a.db = \int_{s_1}^s y.dS \cdot \int_{s_1}^{s_2} n.ds - \int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{s_1}^s n.ds \right) y.dS = 0$$

Sabe-se porém, que $\int_{s_1}^s y.dS = 0$, então,

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{s_1}^s n.ds \right) . y . dS = 0 \quad (5)$$

De modo análogo acontece agora para um carregamento no plano XZ; que procedendo-se da mesma forma chega-se a:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{s_1}^s n.ds \right) . x . dS = 0 \quad (6)$$

Será definida como área setorial a seguinte característica geométrica.

$$W = \int_{s_1}^s n.ds \quad (7)$$

A área setorial W é uma função da ordenada s e a razão de seu nome provém da propriedade esquematizada na Fig. 2b. O elemento da área setorial dW é o dobro da

área do setor elementar com polo D e que compreende o arco elementar ds .

Assim com a utilização de (7) as expressões (5) e (6) podem ser escritas como:

$$\left. \begin{aligned} \int_S W \cdot y \cdot dS &= 0 \\ \int_S W \cdot x \cdot dS &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

A posição da origem O_s da coordenada s não influi nas condições (8), pois uma translação na origem provoca o acréscimo de uma constante na área setorial, cuja contribuição para as integrais de (8) são nulas, por ser nulo o momento estático quando se considera a secção inteira.

Para simplificações futuras, a origem O_s será escolhida de tal forma a satisfazer a seguinte condição:

$$\int_S W \cdot dS = 0 \quad (9)$$

Caso se tenha a área setorial \bar{W} com origem arbitrária e se queira a área setorial W , satisfazendo (9) se faz.

$$W = \bar{W} + C \quad (10)$$

A aplicação de (9) fornece o valor da constante C de (10)

$$C = -\frac{1}{S} \int_S \bar{W} \cdot dS \quad (11)$$

II.3 - FÓRMULAS PARA AS COORDENADAS DO CENTRO DE TORÇÃO

As condições (8) que definem a posição do centro de torção precisam ser transformadas de modo a fornecer expressões explícitas nas coordenadas de $D.(x_D; y_D)$.

Isso é conseguido por meio da interpretação da área setorial esquematizada na Fig. 3. Nessa figura $Q(x;y)$ representa um ponto genérico do esqueleto e $O_s.(x_o, y_o)$ a origem da coordenada s .

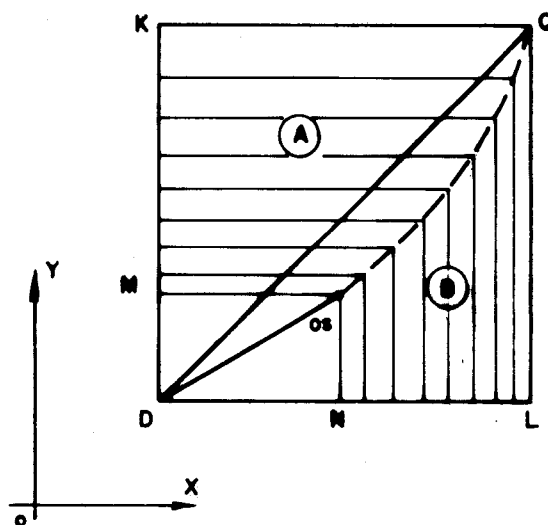


FIG. 3 - PROPRIEDADES DA ÁREA SETORIAL

Seja então:

$$A = \text{área } (M, O_s, Q, K)$$

$$B = \text{área } (N, O_s, Q, L)$$

$$\Delta = \text{área do triângulo } (D, N, O_s) = (D, M, O_s)$$

$$\text{Área } (D, Q, L) = \frac{1}{2} \text{Área } (D, K, Q, L)$$

$$\text{Área } (D, Q, L) = \frac{W}{2} + \Delta + B$$

$$\frac{W}{2} + \Delta + B = \frac{1}{2} (A+B+2\Delta)$$

$$W = A - B \tag{12}$$

O sinal da função W será convencionalmente positivo quando o raio vetor traçado de D , partindo da origem O_s para o ponto genérico Q , girar no sentido anti-horário para um observador colocado sobre o eixo OZ e olhando-o no sentido negativo.

Considere-se agora a Fig. 4 onde além do centro de torção, é adotado um polo $P.(x_p; y_p)$, arbitrariamente escolhido, que servirá como polo provisório para a área setorial. Indicando como W_p a área setorial com polo provisório P , pode-se escrever considerando a propriedade (12) da área setorial aplicada à disposição indicada na Fig. 4

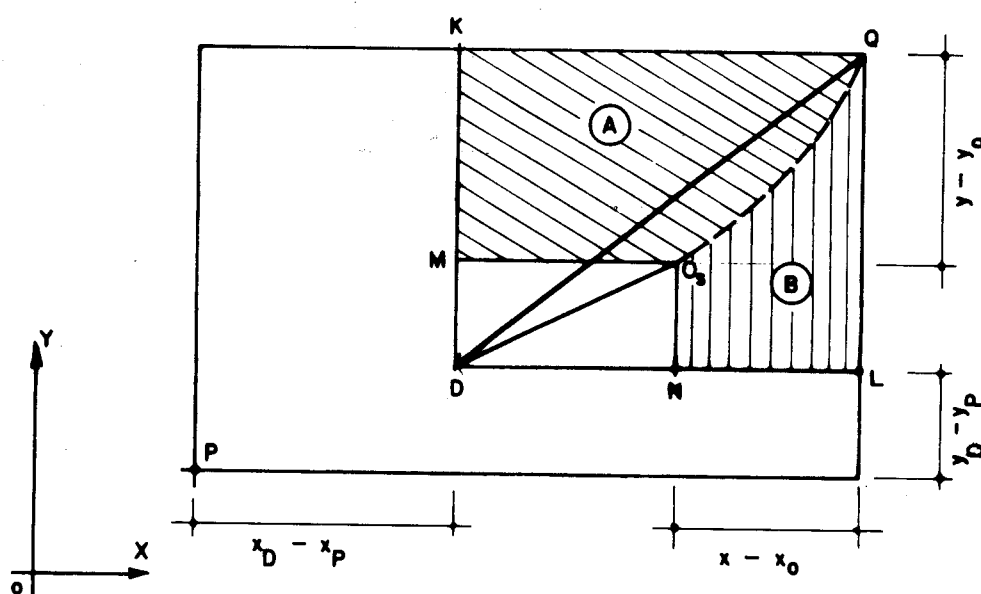


FIG. 4 - ÁREA SETORIAL COM PÓLO ARBITRÁRIO

$$W_p = A_p - B_p$$

$$A_p = A + (y-y_0) \cdot (x_D - x_p)$$

$$B_p = B + (x-x_0) \cdot (y_D - y_p)$$

$$W_p = A + (y-y_0) \cdot (x_D - x_p) - B \cdot (x-x_0) \cdot (y_D - y_p)$$

por (12) vem

$$W = W_p - (y-y_0) \cdot (x_D - x_p) + (x-x_0) \cdot (y_D - y_p) \quad (13)$$

Substituindo a expressão de em (13) nas integrais de (8), vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_s W \cdot y \cdot dS = \int_s W_p \cdot y \cdot dS - \int_s (y-y_0) \cdot (x_D - x_p) \cdot y \cdot dS + \\ \int_s (x-x_0) \cdot (y_D - y_p) \cdot y \cdot dS \\ \int_s W \cdot x \cdot dS = \int_s W_p \cdot x \cdot dS - \int_s (y-y_0) \cdot (x_D - x_p) \cdot x \cdot dS + \\ \int_s (x-x_0) \cdot (y_D - y_p) \cdot x \cdot dS \end{array} \right. \quad (14)$$

Como os eixos OX e OY são eixos principais de inércia valem as equações

$$\left. \begin{aligned}
 \int_S x^2 \cdot dS &= J_y \\
 \int_S y^2 \cdot dS &= J_x \\
 \int_S x \cdot dS &= 0 \\
 \int_S y \cdot dS &= 0 \\
 \int_S x \cdot y \cdot dS &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{----- (15)}$$

Desenvolvendo-se (14) e usando-se (15), chega-se

a

$$\left. \begin{aligned}
 x_D &= x_p + \frac{1}{J_x} \cdot \int_S W \cdot y \cdot dS \\
 y_D &= y_p - \frac{1}{J_y} \cdot \int_S W \cdot x \cdot dS
 \end{aligned} \right\} \text{----- (16)}$$

As expressões (16) definem assim as coordenadas do centro de torção D.

II.4 - TORÇÃO UNIFORME OU TORÇÃO LIVRE OU DE SAINT-VENANT

II.4.1 - Observação sobre o centro de torção

Cumprindo inicialmente fazer uma observação sobre o centro de torção. Na teoria de 1ª ordem, o trabalho do momento torçor em um deslocamento de flexão é nulo. Pode-se concluir, portanto, pelo teorema de Maxwell, que o trabalho do carregamento que provoca só flexão é nulo no deslocamento de torção. Isso só é possível se o centro de tor-

ção não se deslocar durante a torção: donde se conclui que o centro de torção é o centro de rotação no deslocamento de torção. Essa propriedade será usada no que segue.

II.4.2 - Condições para torção livre

Ocorre a torção livre ou uniforme quando são satisfeitas as seguintes condições:

- a) O momento torçor M_t é constante com Z
- b) A secção é constante com Z
- c) Não há vínculos que impeçam deslocamentos longitudinais.

A resistência dos materiais fornece os resultados da torção livre. Assim, a tensão tangencial é linearmente distribuída na espessura, sendo nula no esqueleto e tendo seus valores máximos nas bordas dado por

$$\tau = \frac{M_t}{J_t} \cdot t \quad (17)$$

A derivada do ângulo de giro é dado por

$$\phi' = \frac{M_t}{G \cdot J_t} \quad (18)$$

onde

G - é o módulo de elasticidade transversal

J_t - momento de inércia à torção, definido como

$$J_t = \frac{1}{3} \int_{s_1}^{s_2} t^3 \cdot ds \quad (19)$$

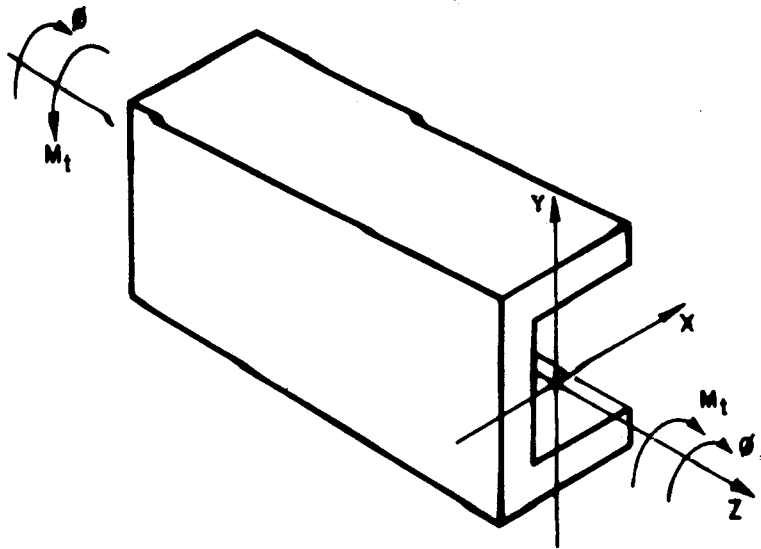


FIG.5 - CONVENÇÃO DE M_t E ϕ POSITIVO

Convenciona-se neste estudo que o momento torçor e a rotação, são positivas quando horários, para um observador colocado sobre o eixo OZ e olhando-o no seu sentido negativo.

II.4.3 - Deslocamentos

Serão considerados os seguintes deslocamentos de um ponto do esqueleto.

u - deslocamento na direção z

v - deslocamento na direção s

Quando a secção sofre uma rotação ϕ , em torno do seu centro de torção, um ponto genérico Q de seu esqueleto tem um deslocamento QQ' indicado na Fig. 6

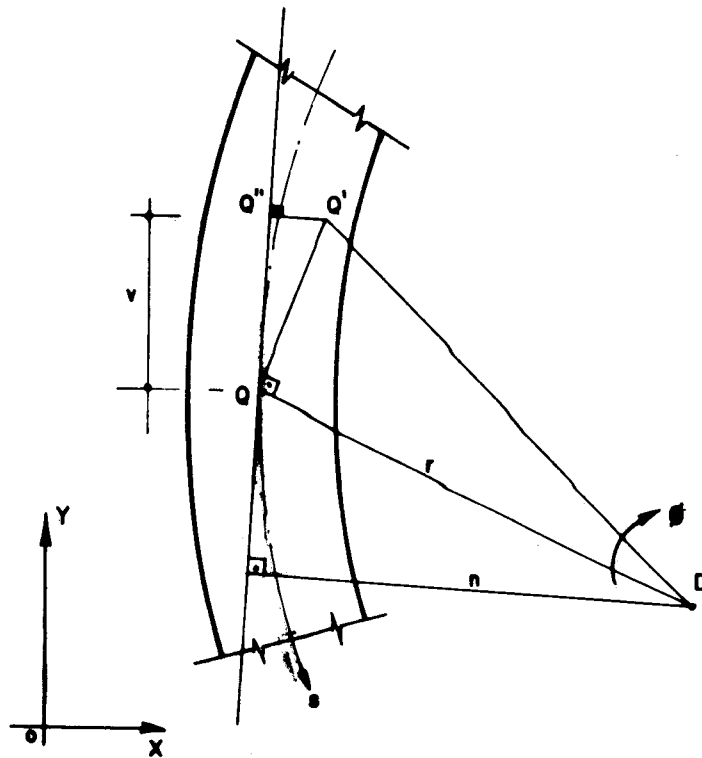


FIG. 6 - DESLOCAMENTO DE UM PONTO DO ESQUELETO

Para ângulos pequenos pode-se fazer

$$QQ' = r \cdot \phi$$

Onde r é o comprimento do raio vetor que une o centro de torção com o ponto genérico do esqueleto.

Seja QQ'' a projeção do deslocamento na direção da tangente ao esqueleto. Essa projeção é negativa por causa da convenção já mencionada.

$\Delta DAQ \approx \Delta QQ'Q''$, isto é, o triângulo DAQ é proporcional ao triângulo $QQ'Q''$.

$$\frac{v}{-QQ'} = \frac{n}{r} \quad v = \frac{-QQ' \cdot n}{r}$$

$\therefore v = -n \cdot \phi$, que derivando em relação a Z , vem

$$v' = -n \cdot \phi' \quad (20)$$

Seja γ a distorção de um elemento $ds \cdot dz$ situado no esqueleto, mostrado na Fig. 7

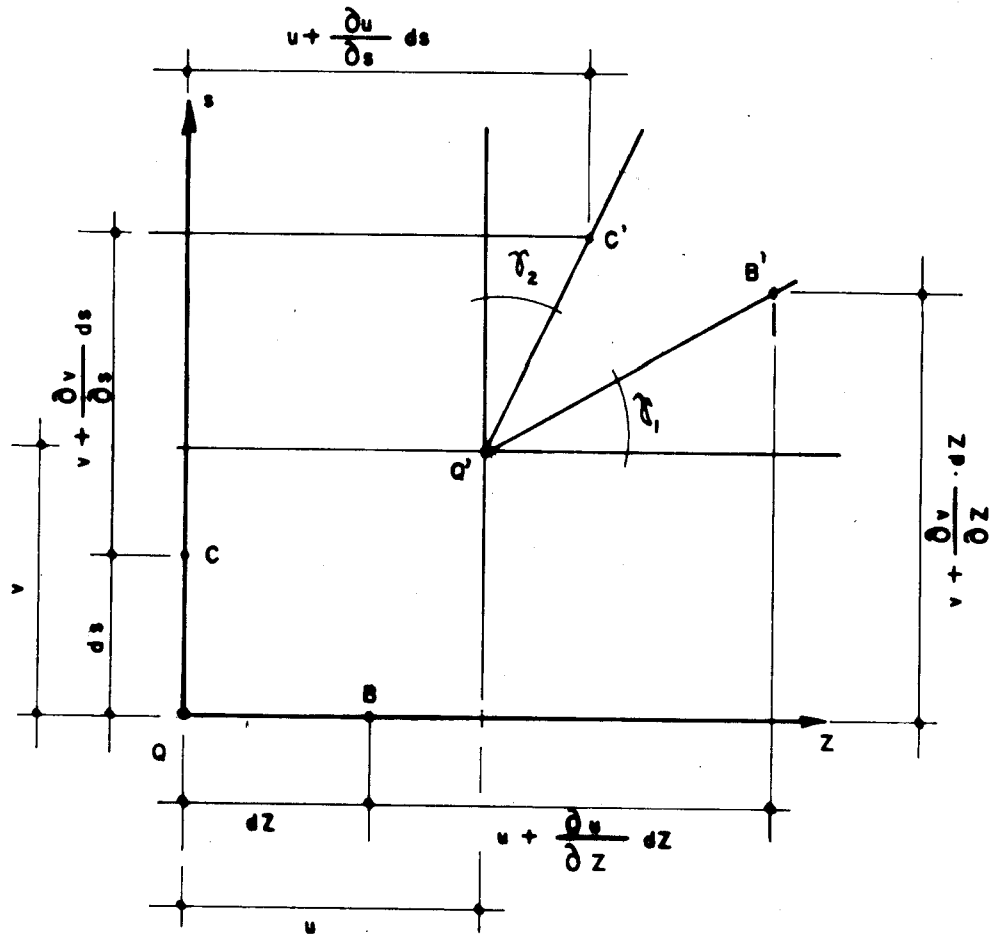


FIG. 7 - DESLOCAMENTO DE UM ELEMENTO $ds \cdot dz$ DO ESQUELETO

Da teoria da elasticidade tem-se

$$Q'.B' = \sqrt{\left[dz \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]^2 + \left[dz \left(1 + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]^2}$$

$$Q'.B' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot dz$$

$$\epsilon_z = \frac{Q'B' - QB}{QB} = \frac{(1 + \frac{\partial u}{\partial z}) \cdot dz - dz}{dz}$$

logo

$$\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (21)$$

Lembrando que os deslocamentos são muito pequenos e que $\text{tg}\gamma_1 \equiv \gamma_1$, $\text{tg}\gamma_2 \equiv \gamma_2$ tem-se:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\text{tg}\gamma_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial z} \cdot dz}{(1 + \frac{\partial u}{\partial z}) \cdot dz} = \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\text{tg}\gamma_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial s} \cdot ds}{(1 + \frac{\partial v}{\partial s}) \cdot ds} = \frac{\partial u}{\partial s}$$

e assim chega-se a

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial s} \quad (22)$$

Como a tensão tangencial \tilde{e} nula no esqueleto, pela lei de Hooke se conclui que a distorção também o será. Ou seja $\gamma = 0$; assim sendo por (22) e (20) chega-se a:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = n \cdot \phi' \quad (23)$$

Na torção livre o deslocamento longitudinal não é função de z , então pode-se fazer

$$\frac{du}{ds} = n \cdot \phi'$$

Será feita a seguir a integração em s desde a origem O_s , até o ponto genérico Q , obtendo-se assim

$$u = \phi' \cdot \int_{O_s}^s n \cdot ds$$

Que usando a definição de área setorial (7) chega-se a

$$u = W \cdot \phi' \tag{24}$$

Aos deslocamentos definido por (24) dá-se o nome de "empenamentos". São contados a partir da origem O_s e são positivos, quando concordantes com o sentido positivo de Z .

Como por hipótese a secção transversal é indeformável em seu plano, o empenamento é a única deformação admitida na secção.

II.5 - TORÇÃO NÃO UNIFORME OU FLEXO-TORÇÃO

II.5.1 - Hipóteses de cálculo

Neste estudo serão consideradas somente as barras de secção transversal constante. A ocorrência de flexo-torção ou torção não uniforme ficará limitada apenas aos casos em que o momento torçor não seja constante, ou aqueles que haja vínculos que impeçam os deslocamentos longitudinais.

A suposição básica para enfrentar o problema de flexo-torção é que a equação (24) continua válida, porém com a particularidade de que a derivada do ângulo de giro não é mais constante.

II.5.2 - Tensão normal de flexo-torção

Serão desprezadas as tensões normais com exceção daquelas em cortes transversais. Então sendo σ_z e ϵ_z respectivamente, a tensão e a deformação longitudinais, pode-se escrever a lei de Hooke como:

$$\sigma_z = E \cdot \epsilon_z \quad (25)$$

Tem-se que

$$\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{e} \quad \text{usando (24)} \quad \epsilon_z = W \cdot \phi''$$

Substituindo em (25), obtém-se a tensão normal de flexo-torção

$$\sigma_z = E \cdot W \cdot \phi'' \quad (26)$$

Deve ser observado que as tensões σ_z não tem força nem momento resultante na secção devido às condições (8) e (9). Sua resultante será um novo esforço solicitante; o "bimomento", que será introduzido mais a frente.

II.5.3 - Tensão tangencial de flexo-torção

Pelo equilíbrio longitudinal do elemento de comprimento dz limitado pelas coordenadas s_1 e s_2 , mostrado na Fig. 8, conclui-se que devido a variação das tensões σ_z com Z , o equilíbrio só será possível com a existência de tensões de cisalhamento. Essas tensões são chamadas tensões tangenciais de flexo-torção.

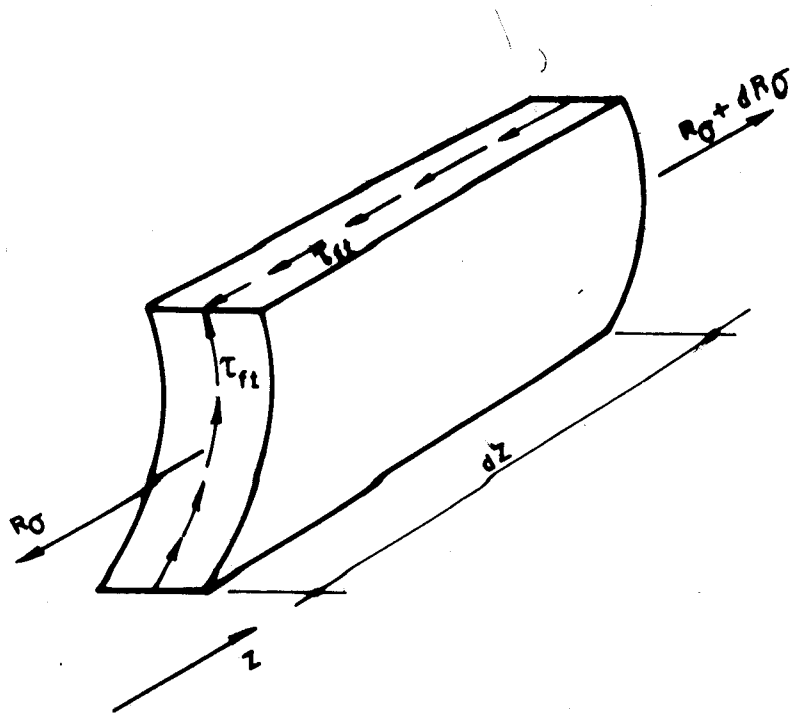


FIG.8- TENSÕES TANGENCIAIS DE FLEXO-TORÇÃO

Seja R_{σ} a resultante das tensões σ_z , na parte considerada da secção. Então tem-se:

$$R_{\sigma} = \int_{s_1}^s \sigma_z \cdot dS$$

ou usando a expressão (26)

$$R_{\sigma} = \int_{s_1}^s E \cdot \phi'' W \cdot dS$$

Derivando uma vez, obtêm-se

$$\frac{d}{dz} R_{\sigma} = E \cdot \phi''' \int_{s_1}^s W \cdot dS$$

Fazendo o equilíbrio do elemento na direção longitudinal.

$$\Sigma \vec{f}(z) = 0$$

$$- R_{\sigma} + (R_{\sigma} + dR_{\sigma}) - \tau_{ft} \cdot t \cdot dz = 0$$

$$d \cdot R_{\sigma} - \tau_{ft} \cdot t \cdot dz = 0$$

$$\tau_{ft} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dR_{\sigma}}{dz}$$

Que substituindo-se pela expressão de $\frac{d}{dz} R_{\sigma}$, chega-se a:

$$\tau_{ft} = \frac{E \cdot \phi'''}{t} \cdot \int_{s_1}^s W \cdot dS \quad (27)$$

II.5.4 - Momento de flexo-torção

As tensões τ_{ft} são suficientemente pequenas para não ameaçar a base de cálculo da teoria de flexo-torção: distorção nula no esqueleto. Entretanto, sua contribuição para o momento torçor pode ser apreciável porque as tensões tangenciais provenientes da torção livre, sendo linearmente distribuídas na espessura, trabalham com braços menores.

Então pode-se considerar o momento torçor M_t como a soma de duas parcelas:

$$M_t = M_{\ell} + M_{ft}$$

onde M_{ℓ} é o momento de torção livre

M_{ft} é o momento de flexo-torção

Para calcular M_{ft} , considere-se a Fig. 9 onde está indicado o braço n das tensões τ_{ft} em relação ao centro de torção.

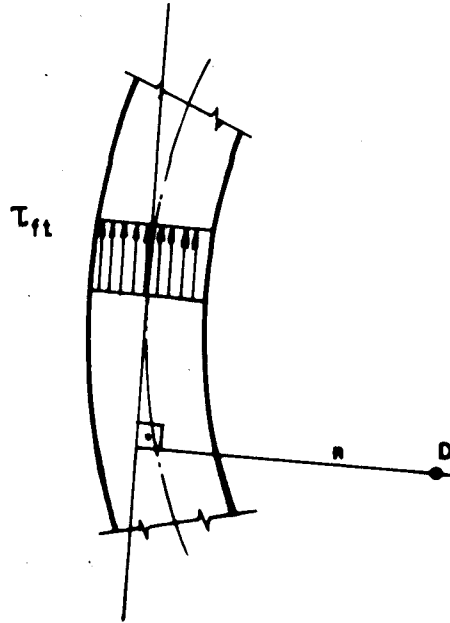


FIG. 9 - CENTRO DE TORÇÃO E BRAÇO

Pode-se então escrever

$$M_{ft} = \int_{s_1}^{s_2} \tau_{ft} \cdot dS \cdot n$$

Usando (27) vem

$$M_{ft} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{E \cdot \phi'''}{t} \left(\int_{s_1}^s W \cdot dS \right) \cdot n \cdot t \cdot ds$$

$$M_{ft} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{E \cdot \phi'''}{t} \left(\int_{s_1}^s W \cdot dS \right) n \cdot ds$$

Que integrando por partes, conforme segue, vem

$$\int a \cdot db = ab - \int b \cdot da$$

$$a = \int_{s_1}^s W \cdot dS \quad \therefore \quad da = W \cdot dS$$

$$db = n \cdot ds \quad \therefore \quad b = \int n \cdot ds = W$$

logo

$$M_{ft} = E \cdot \phi''' \cdot \left[\left(\int_{s_1}^s W \cdot dS \right) W \Big|_{s_1}^s - \int_{s_1}^{s_2} W^2 \cdot dS \right]$$

porém $\int_S W \cdot dS = 0$

assim, chega-se a

$$M_{ft} = -E \cdot \phi''' \cdot \int_{s_1}^{s_2} W^2 \cdot dS \quad (28)$$

Usando denominação análogas às da resistência dos materiais as seguintes características de secção serão definidas

a) Momento setorial de inércia

$$J_\omega = \int_S W^2 \cdot dS \quad (29)$$

b) Momento estático setorial

$$S_\omega = \int_{s_1}^s W \cdot dS \quad (30)$$

Que substituindo (29) em (28) obtêm-se

$$M_{ft} = -E \cdot J_\omega \cdot \phi''' \quad (31)$$

Ou ainda substituindo-se (30) e (31) em (27) for
nece

$$\tau_{ft} = - \frac{M_{ft} \cdot S_{\omega}}{t \cdot J_{\omega}} \quad (32)$$

II.5.5 - Equação diferencial do problema

Devido ao aparecimento do momento de flexo-torção o momento torçor, que solicita uma secção de uma barra de secção aberta e paredes finas, será equilibrada por duas parcelas de momentos resistentes.

$$M_t = M_{\ell} + M_{ft} \quad (33)$$

por (18) tem-se

$$M_{\ell} = G \cdot J_t \cdot \phi'$$

por (31) tem-se

$$M_{ft} = -E \cdot J_{\omega} \cdot \phi'''$$

logo

$$M_{ft} = G \cdot J_t \cdot \phi' - E \cdot J_{\omega} \cdot \phi''' \quad (34)$$

A resolução de (34), representa a solução do problema da flexo-torção, pois as grandezas envolvidas são determinadas diretamente a partir de ϕ .

II.6 - INTRODUÇÃO DO BIMOMENTO

Introduzido por Vlassov, o conceito de bimomento, visa uma ampliação nos tipos de problemas tratados com o uso da equação (34).

Define-se bimomento B por

$$B = \int_S \sigma_z \cdot W \cdot dS \quad (35)$$

Pela utilização de (26) obtem-se assim

$$B = E \cdot \phi'' \cdot \int_S W^2 \cdot dS$$

Ou usando (29)

$$B = E \cdot J_\omega \cdot \phi'' \quad (36)$$

Pela substituição de (36) em (26) obtem-se a expressão da tensão normal de flexo-torção em função do bimomento, ou seja

$$\sigma_z = \frac{B \cdot W}{J_\omega} \quad (37)$$

que é análoga à expressão da tensão normal no caso de flexão simples.

A analogia se completa com a nova expressão da tensão tangencial de flexo-torção. De fato, derivando (36) e comparando com (31) tem-se:

$$\begin{aligned} B' &= E \cdot J_\omega \cdot \phi''' \\ &\dots \\ M_{ft} &= -B' \end{aligned} \quad (38)$$

A substituição de (38) em (32) fornece então

$$\tau_{ft} = \frac{B' \cdot S_\omega}{t \cdot J_\omega} \quad (39)$$

Esta analogia se completa ao lembrar-se que a força cortante é derivada do momento fletor.

Transformando a Eq.(34) em termos do bimomento vem

$$M_t = G.J_t \cdot \phi' - B'$$

Que derivando uma vez

$$M_t' = G.J_t \cdot \phi'' - B''$$

mas

$$\phi'' = \frac{B}{E.J_\omega}$$

logo

$$M_t' = \frac{G.J_t}{E.J_\omega} \cdot B - B'' \quad (40)$$

fazendo

$$r = \sqrt{\frac{E.J_\omega}{G.J_t}}$$

E seja m o momento torçor distribuído conforme indicado na Fig. 10.

então tem-se

$$-M_t + (M_t + dM_t) + m \cdot dz = 0$$

$$m = -M_t'$$

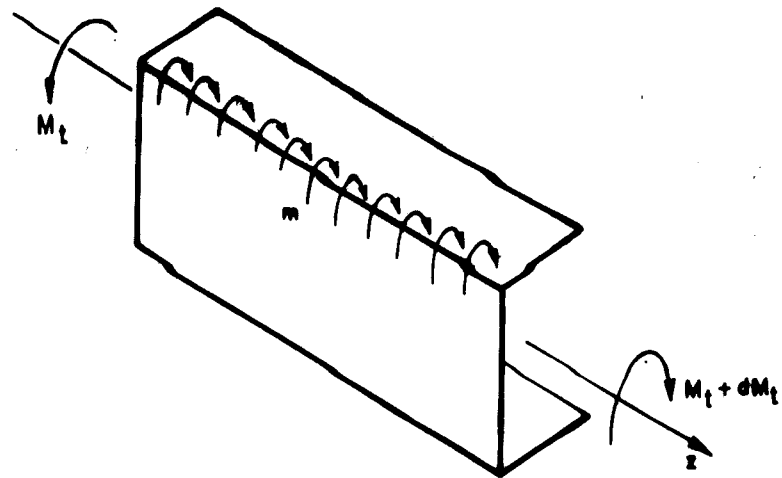


FIG.10 - MOMENTO TORÇOR DISTRIBUÍDO

Que substituindo em (40), juntamente com a expressão de r , chega-se a:

$$-m \cdot r^2 = B - r^2 \cdot B'' \quad (41)$$

Solução da equação homogênea

$$r^2 B'' - B = 0$$

Solução do tipo

$$B_h = e^{\lambda z}$$

$$B'_h = \lambda \cdot e^{\lambda z}$$

$$B''_h = \lambda^2 \cdot e^{\lambda z}$$

Substituindo na homogênea, vem

$$r^2 \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda z} - e^{\lambda z} = 0$$

Equação característica

$$r^2 \cdot \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{r^2}$$

logo tem-se

$$\lambda_1 = \frac{1}{r} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{-1}{r}$$

soluções

$$(e)^{\frac{z}{r}} \quad e \quad (e)^{\frac{-z}{r}}$$

mas

$$\frac{(e)^{\frac{z}{r}} + (e)^{\frac{-z}{r}}}{2} = \text{Ch.}\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\frac{(e)^{\frac{z}{r}} - (e)^{\frac{-z}{r}}}{2} = \text{Sh.}\left(\frac{z}{r}\right)$$

Tem-se então como solução geral da homogênea

$$B_h = C_1 \cdot \text{Sh.}\left(\frac{z}{r}\right) + C_2 \cdot \text{Ch.}\left(\frac{z}{r}\right) \quad (42)$$

Solução particular da não homogênea

$$r^2 \cdot B'' - B = -r^2 \cdot m$$

Resolvendo para m constante, vem

$$B = B_h + B_p$$

$$B_p = -r^2 \cdot m$$

$$B = C_1 \cdot \text{Sh.} \left(\frac{z}{r} \right) + C_2 \cdot \text{Ch.} \left(\frac{z}{r} \right) + r^2 \cdot m \quad (43)$$

II.6.1 - Considerações finais e condições de contorno

Entre as diversas condições de carregamento ou vinculação, às que normalmente é submetida a extremidade de uma barra são:

a) Extremidade livre

$$\sigma_z = 0 \quad \text{de (35) vem que}$$

$$B = 0$$

$$\phi'' = 0$$

b) Extremidade engastada

Sendo o deslocamento longitudinal (u) nulo para qualquer ponto do esqueleto, então por (24) vem

$$u = 0$$

$$\phi' = 0$$

$$M_\ell = 0$$

$$M_t = M_{ft} \quad \text{ou} \quad M_t = -B'$$

c) Extremidade com distribuição dada de tensão

Nesse caso se utiliza a própria definição (35) para conhecer B, ou seja

$$B = \int_S \sigma_z \cdot W \cdot dS$$

d) Extremidade com carga axial concentrada

Caso na extremidade sejam aplicadas cargas axiais P_i concentradas em pontos de área setorial W_i , o bimomento pode ser calculado como

$$B = \sum_i P_i \cdot W_i$$

II.7 - ÁREA SETORIAL E MOMENTO SETORIAL DE INÉRCIA

Considere-se um trecho do esqueleto da seção transversal de uma barra com origem $O_s(x_o; y_o)$ e centro de torção $D(x_D; y_D)$, mostrado na Fig. 11.

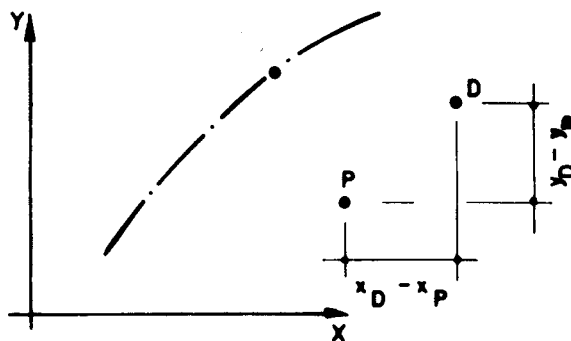


FIG.11 - TRECHO DO ESQUELETO DA SEÇÃO TRANSVERSAL DE UMA BARRA.

Usando convenientemente a Eq.(13), as áreas setoriais; W com polo D e W_p com polo P e mesma origem O_s , podem ser relacionadas pela expressão seguinte

$$W = W_p - (y-y_o).(x_D-x_p) + (x-x_o).(y_D-y_p) \quad (13)$$

fazendo

$$(x_D-x_p) = C_x$$

$$(y_D-y_p) = C_y$$

$$W = W_p - (y-y_o).C_x + (x-x_o).C_y \quad (44)$$

Considere-se agora que W e O_s satisfazem a condição $\int_S W.dS = 0$ e que \bar{W}_p seja área setorial com polo P e origem \bar{O}_s , tal que a expressão seguinte seja verificada

$$\int_S \bar{W}_p .dS = 0 \quad (45)$$

$$\bar{W}_p = W_p + C$$

$$\bar{W}_p = W_p + (y-y_o).C_x - (x-x_o).C_y + C$$

Substituindo-se em (45) e usando

$$\int_S W.dS = 0$$

$$\int_S x^2 .dS = J_y$$

$$\int_S x .dS = 0$$

$$\int_S x.y .dS = 0$$

$$\int_S y^2 \cdot dS = J_x \quad \int_S y \cdot dS = 0$$

$$\int_S W \cdot dS + \int_S (y-y_0) \cdot C_x \cdot dS - \int_S (x-x_0) \cdot C_y \cdot dS + \int_S C \cdot dS = 0$$

$$C = C_x \cdot y_0 - C_y \cdot x_0$$

que substituindo em \bar{W}_p vem

$$\bar{W}_p = W - C_y \cdot x + C_x \cdot y \quad (46)$$

O momento setorial de inércia para a área setorial com polo em P e origem \bar{O}_s , J_ω^* pode ser determinado em função de J_ω através da definição de momento setorial de inércia dada pela equação.

$$J_\omega = \int_S W^2 \cdot dS$$

Substituindo (46) vem

$$J_\omega^* = \int_S (W - C_y \cdot x + C_x \cdot y)^2 \cdot dS$$

$$J_\omega^* = J_\omega + J_y \cdot C_y^2 + J_x \cdot C_x^2 \quad (47)$$

BIBLIOGRAFIA

- 1 - MANCINI, E. - Estrutura tubular de edifícios altos, São Carlos, EESC-USP, 1980, 29p.
- 2 - MANCINI, E. - Efeito dos pórticos normais às paredes, São Carlos, EESC-USP, 1980, 22p.
- 3 - MANCINI, E. - Análise contínua de estruturas de edifícios elevados sujeitas à ação do vento, São Carlos, EESC-USP, 1973, 140p.
- 4 - TSO, W.K. and BISWAS, J.K. - Analysis of core wall structures subject to applied torque, Build. Sci., 1973, Vol. 8, p.251-257.
- 5 - RACHID, M. - Instabilidade de barras de secção delgada, São Carlos, EESC-USP, 1975, 119p.
- 6 - VLASOV, V.Z. - Thin walled elastic beams, Israel, Israel program for scientific translation, 1961.
- 7 - MANCINI, E. - Núcleo estrutural sobre fundação flexível, São Carlos, EESC-USP, 1980, 24p.
- 8 - STAMATO, M.C. - Associação contínua de painéis de contraventamento, São Carlos, EESC-USP, 1980, 72p.
- 9 - KHAN, F.R. and AMIN, N.R. - Analysis and design of framed tube structures for concrete buildings, The Structural Engineer, 1973, Vol. 51, nº 3, p. 85-91.
- 10 - COULL, A. and SUBEDI, N.K. - Framed tube for high-rise buildings, Journal of the Structural Div., ASCE, 1971, Vol. 96, ST nº 8, p. 2097-2105.
- 11 - SALVADORI, M.G. y BARON, M.L. - Métodos numéricos en ingenieria, México, C.E.C.S.A., 1971, 260p.
- 12 - ANTUNES, H.M.C.C. - Carregamento crítico de instabilidade geral para estruturas tridimensionais de edifícios altos, São Carlos, EESC-USP, 1978.