

CONTRIBUIÇÃO AO CÁLCULO DO TRAÇADO ECONÔMICO  
DE CABOS DE PROTENSÃO EM VIGAS CONTÍNUAS

ENG. FERNANDO ANTONIO JORGE

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

ORIENTADOR:

PROF. DR. ILIO MONTANARI

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

A meus pais  
e irmãos.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Ilio Montanari, pela orientação eficaz dada durante o desenvolvimento do trabalho.

À Sra. Wilma Provinciali Vall, pela eficiência e esmero no trabalho de datilografia.

Ao Sr. João Paulo Moretti, pelo capricho com que executou os desenhos.

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver uma técnica de cálculo aplicável à determinação de traça dos econômicos de cabos de protensão em vigas retas ou curvas, contínuas, sujeitas ou não à torção.

Aplicando o conceito de cabos concordantes e utilizando o processo dos esforços, obtêm-se inicialmente uma linha de pressão ou um traçado do cabo resultante no interior do fuso de passagem. Este cabo resultante único pode ser desdobrado em dois resultantes parciais.

O cabo resultante real ou os cabos parciais reais são obtidos a partir daqueles primeiros através de transformações, lineares ou senoidais, conforme se tratar de viga reta ou curva.

São estudadas três situações diferentes de posicionamento do cabo resultante total. Estas situações se denominam:

- Protensão com cabo resultante centrado;
- Protensão com cabo resultante não centrado;
- Protensão com cabos "reversos".

Em cada caso o traçado econômico é determinado levando-se em conta protensão constante e protensão variável. Seguindo essa linha de raciocínio, verificou-se no decorrer do trabalho que, em qualquer traçado econômico com protensão variável, a seção com menor protensão requer uma força menor que aquela correspondente exigida considerando-se traçado econômico com protensão constante, o que resulta portanto numa economia de protensão.

ABSTRACT

This work aims to develop a technique for choosing economic prestress cables for continuous beams with or without torsion effects.

By applying the concept of concordant cables and adopting the flexibility process, the cable location is defined by the stress resultant which is enforced to obey the kern lines. One can replace the cable by two, which are known as the partial cables able to reproduce the same effects.

The actual cables either resultant or partial are obtained by using linear and senoidal transformations respectively for straight and curved beams.

Three different alternatives for the location of the cable are analised here as follows:

- centred resultant cable;
- non centred resultant cable;
- "reverse" cables.

Taking into account constant and variable prestress forces, the economic profile is defined for each case. It is also shown that cables with variable prestresses are more economic than those using constant prestress forces.

## NOTAÇÕES

### Índice Inferior

- x, y, z - referem-se às direções dos eixos de coordenadas
- r - residual
- p - refere-se à protensão
- g - refere-se ao carregamento permanente
- q - refere-se ao carregamento acidental
- 1, 2, 3 - referem-se aos sistemas auxiliares sujeitos aos esforços unitários  $X_1, X_2 = 1, X_3 = 1, \text{ etc.}$ .
- 1, 2 - referem-se a cabos resultantes parciais
- 0 - refere-se ao cabo concordante

### Índice superior

- " - refere-se à borda superior da seção transversal. Refere-se à derivada segunda da função representativa do cabo
- ' - refere-se à borda inferior da seção transversal. Refere-se à coordenada, paralela ao eixo da viga, passando pelo ponto de aplicação de P. Refere-se à parte hiperestática dos esforços
- \* - refere-se à superfície cilíndrica concêntrica à superfície cilíndrica que contém o eixo z e o eixo reto ou curvo da viga
- o - esforços no sistema fundamental

### Características da seção transversal

- A - área da seção transversal
- I - momento de inércia à flexão
- c" - distância do C.G. à borda superior do núcleo limite

- $c'$  - distância do C.G. à borda inferior do núcleo li  
mite
- $z''$  - distância do C.G. à borda superior da seção  
transversal
- $z'$  - distância do C.G. à borda inferior da seção  
transversal
- $h$  - altura total da seção transversal
- $J_t$  - momento de inércia à torção
- $k'$  - distância do antípolo da borda inferior ao C.G.  
da seção - extremidade superior do núcleo central
- $k''$  - distância do antípolo da borda superior ao C.G.  
da seção - extremidade inferior do núcleo central
- $i$  - raio de giração.

#### Características do material

- $E$  - módulo de deformação longitudinal
- $G$  - módulo de deformação transversal

$$K = \frac{EI}{GJ_t} - \text{coeficiente}$$

#### Cargas

- $N$  - força normal ao plano  $y-z$ , positivo se de compres  
são
- $P$  - força de protensão, positivo se de compressão
- $g$  - carga permanente distribuída ao longo do eixo da  
viga
- $q$  - carga acidental distribuída verticalmente ao lon  
go do eixo da viga
- $q_y$  - carga acidental distribuída horizontalmente ao  
longo do eixo da viga
- $t$  - momento de torção distribuído ao longo do eixo  
da viga.

### Esforços

- T - momento de torção, positivo quando emergente da seção
- M - momento fletor.  $M_y$  é positivo quando provoca tração na fibra inferior.  $M_z$  é positivo quando provoca tração na fibra interna
- R - força interna de um modo geral
- V - força cortante.  $V_z$  é positivo se gira o elemento no sentido horário

### Tensões

- $\bar{\sigma}_c$  - tensão admissível no concreto na borda mais comprimida (positiva quando de compressão)
- $\bar{\sigma}'_c$  - tensão admissível no concreto na borda menos comprimida (positiva quando de compressão)
- $\sigma_{cg}$  - tensão no concreto na altura do C.G. da seção transversal (positiva quando de compressão)

### Valores lineares

- s - coordenada curvilínea medida ao longo do eixo da viga. s' coordenada curvilínea, paralela a s, passando pelo ponto de aplicação de P.
- x, y, z - coordenadas nas direções dos eixos coordenados, x' coordenada, paralela a x, passando pelo ponto de aplicação de P.
- r - raio da viga circular
- f - flecha de parábola
- e - excentricidade do cabo na direção de y
- c - cobrimento
- a - ordenada inicial de cabo em um tramo genérico
- b - ordenada final de cabo em um tramo genérico



- $l$  - vão genérico de viga
- $d$  - variação máxima de cota do cabo num apoio e tramo adjacente

Específico

- $\theta$  - ângulo central de um tramo genérico de viga curva
- $\alpha$  - ângulo genérico
- $\beta$  - coeficiente
- $k$  - valor genérico da transformação linear ou senoidal
- $\eta$  - coeficiente que representa a fração da força de protensão máxima
- $\delta$  - deslocamentos ou rotações relativas
- $\chi''$  - deslocamentos ou rotações relativas
- $\Delta''$  - valores das integrais do produto de duas funções
- $\omega''$  - valores das integrais do produto de duas funções
- $e''$  - curva limite superior do fuso de passagem do ca  
bo
- $e'$  - curva limite inferior do fuso de passagem do cabo.

Í N D I C E

1. INTRODUÇÃO

2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

2.1 - Centro de pressão - Linha de pressão .....	2.1
2.2 - Núcleo central - Núcleo limite - <u>Fu</u> so limite .....	2.4
2.3 - Localização do cabo em relação ao núcleo li mite numa viga isostática .....	2.13
2.4 - Transformações lineares .....	2.15
2.5 - Cabos concordantes .....	2.18

3. DETERMINAÇÃO DO CABO DE PROTENSÃO RESULTANTE ECONÔMICO

3.1 - Introdução .....	3.1
3.2 - Relações de concordância .....	3.2
3.3 - Análise de cabos concordantes dentro do mes mo fuso de passagem .....	3.4
3.4 - Determinação do cabo concordante econômico com força de protensão constante .....	3.14
3.5 - Determinação do cabo real econômico com for ça de protensão constante .....	3.26
3.6 - Exemplo .....	3.29

4. VIGAS RETAS CONTÍNUAS

4.1 - Generalidades .....	4.1
4.1.1 - Protensão com cabo resultante cen trado .....	4.3
4.1.2 - Protensão com cabo resultante não centrado .....	4.4
4.1.3 - Protensão com dois cabos reversos .	4.6
4.2 - Condições de concordância necessárias para a obtenção do cabo concordante .....	4.8

4.3 - Determinação dos traçados dos cabos concor-	
dantes econômicos com força de protensão	
constante .....	4.14
4.3.1 - Protensão centrada .....	4.14
4.3.2 - Protensão não centrada .....	4.14
4.3.3 - Protensão com cabos reversos .....	4.17
4.4 - Exemplos .....	4.24
4.4.1 - Protensão centrada .....	4.26
4.4.2 - Protensão não centrada .....	4.27
4.4.3 - Protensão com cabos reversos .....	4.30
4.5 - Determinação dos traçados dos cabos resul-	
tantes econômicos com força de protensão va-	
riável .....	4.34
4.5.1 - Protensão centrada .....	4.34
4.5.2 - Protensão não centrada .....	4.34
4.5.3 - Protensão com cabos reversos .....	4.40
4.6 - Exemplos .....	4.42
4.6.1 - Protensão centrada - P variável ...	4.42
4.6.2 - Protensão não centrada - P variá-	
vel .....	4.48
4.6.3 - Protensão com cabos reversos - P va-	
riável .....	4.50
5. VIGAS CURVAS	
5.1 - Generalidades .....	5.1
5.1.1 - Protensão com cabo resultante cen-	
trado .....	5.4
5.1.2 - Protensão com cabo resultante não	
centrado .....	5.5
5.1.3 - Protensão com dois cabos reversos .	5.6
5.2 - Determinação dos traçados dos cabos resul-	
tante total e cabos resultantes parciais pa-	
ra os diferentes casos de protensão .....	5.8

5.3 - Condições de concordância necessárias para a obtenção do cabo concordante .....	5.10
5.4 - Determinação dos traçados dos cabos resultantes econômicos com força de protensão constante .....	5.16
5.4.1 - Protensão centrada .....	5.16
5.4.2 - Protensão não centrada .....	5.27
5.4.3 - Protensão com cabos reversos .....	5.35
5.5 - Exemplos .....	5.41
5.5.1 - Protensão centrada - P constante ..	5.43
5.5.2 - Protensão não centrada - P constante .....	5.48
5.5.3 - Protensão com cabos reversos - P constante .....	5.53
5.6 - Determinação dos traçados econômicos dos cabos de protensão variável .....	5.57
5.6.1 - Protensão centrada .....	5.57
5.6.2 - Protensão não centrada .....	5.60
5.6.3 - Protensão com cabos reversos .....	5.63
5.7 - Exemplos .....	5.65
5.7.1 - Protensão centrada - P variável ....	5.65
5.7.2 - Protensão não centrada - P variável.	5.71
5.7.3 - Protensão com cabos reversos - P variável .....	5.76
5.8 - Determinação da linha de pressão dos cabos reais curvos .....	5.80
5.8.1 - Exemplo .....	5.91

## 6. CONCLUSÕES

## 7. BIBLIOGRAFIA

## 1. INTRODUÇÃO

Em 1980 Montanari [15] apresentou um trabalho sobre vigas protendidas submetidas à torção, no qual desenvolve um processo para determinação de cabos de protensão. Este processo consiste basicamente em determinar os traçados de cabos resultantes parciais que se desenvolvem em planos verticais paralelos e equidistantes do plano vertical que contém o eixo da viga reta, ou em superfícies cilíndricas verticais concêntricas e equidistantes da superfície cilíndrica vertical que contém o eixo da viga curva.

Foram estudadas três situações diferentes de protensão, caracterizadas pelo plano ou superfície cilíndrica vertical onde se desenvolve o cabo resultante total e pelos esforços criados pela protensão.

Considerando-se a força de protensão já conhecida foi determinado, para cada caso de protensão, o traçado do cabo resultante total e a partir deste, os traçados dos cabos resultantes parciais.

Utilizando as mesmas equações deduzidas para estes traçados, de acordo com cada caso de protensão, porém, sem adotar previamente a força de protensão, pretende-se neste trabalho desenvolver um traçado econômico de cabos de protensão, ou seja, um traçado compatível com uma força de protensão mínima em que os esforços criados pela protensão influenciem aqueles provocados pelo carregamento externo, de modo que as tensões de flexão no estado limite de utilização, em qualquer seção, não ultrapassem as tensões limites preestabelecidas. Fundamentalmente deve-se ter a linha de pressão da protensão no interior do fuso de passagem. Para tanto será suficiente determinar um cabo concordante no interior do referido fuso, uma vez que a linha dos centros de gravidade deste cabo se confunde com a linha de pressão. Através de transformações, lineares ou senoidais, o cabo concordante é alojado no interior da viga com cobrimento adequado, caracterizando o cabo resultante real.

Definido o objetivo fundamental do trabalho, passa-se agora a resumir o conteúdo específico de cada capítulo.

No capítulo dois relembram-se conceitos fundamentais necessários para uma melhor compreensão do que será tratado nos capítulos seguintes.

No capítulo três deduzem-se, para uma viga reta, as equações necessárias para a determinação do traçado econômico do cabo resultante com força de protensão constante. A dedução é feita considerando-se protensão com cabo resultante centrado que é o caso mais simples. Determina-se inicialmente um cabo concordante cuja forma adotada é afim à forma do limite superior do fuso, mais uma transformação linear que representa a adição de um cabo reto. A resolução do sistema de equações é feita através do método de eliminação de Gauss cuja solução fornece os parâmetros que definem a forma do cabo concordante, dentre os quais, a força de protensão  $P$ . Transformando linearmente este cabo e alojando-o no interior da viga obtêm-se o cabo resultante real.

O capítulo quatro trata de vigas retas contínuas. Utilizando os mesmos conceitos introduzidos no capítulo três, faz-se uma abordagem mais ampla determinando-se, para as três situações de protensão, os traçados econômicos dos cabos concordantes, primeiramente com protensão constante e em seguida com protensão variável. Sendo necessário, estes cabos são desdobrados nos resultantes parciais que, alojados no interior da viga, caracterizam os cabos parciais reais.

No capítulo cinco são estudadas as vigas curvas contínuas. A forma adotada para a equação do cabo concordante é afim à forma do limite superior do fuso de passagem, mais uma transformação senoidal que representa a adição de um cabo senoidal. Para os três casos de protensão são determinados os traçados econômicos dos cabos concordantes, primeiro com protensão constante e depois com protensão variável, obtendo-se por fim os cabos reais.

No capítulo seis são apresentadas as conclusões.

## 2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Com o objetivo de fornecer um suporte visando a um melhor entendimento do que será desenvolvido nos capítulos seguintes, relembram-se alguns conceitos fundamentais:

### 2.1 - Centro de Pressão - Linha de Pressão

Pode-se considerar uma viga protendida em seus diferentes estados de carga como uma viga submetida à flexão composta, cujo esforço de compressão  $P$  no concreto apresenta, em cada seção, excentricidade variável conforme o estado de carga. Pode-se afirmar ainda que, para se conseguir o equilíbrio de um elemento de viga protendida sob determinado estado de carga, é necessário que o momento resistente interno seja igual ao momento externo. Portanto, na seção  $A$ , a uma abscissa  $x$  do apoio, conforme mostra a Fig. 2.1, os esforços atuantes são:

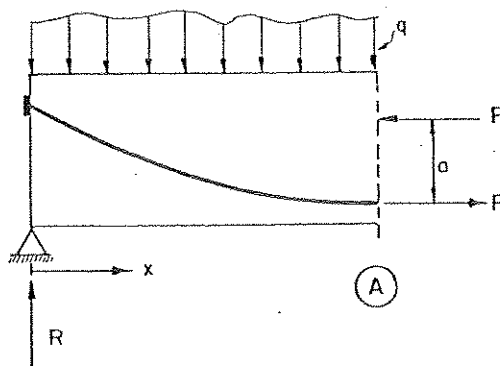


FIG. 2.1- POSIÇÃO DO CENTRO DE PRESSÃO NA SEÇÃO

$$\begin{cases} M_{\text{ext}} = M \\ M_{\text{int}} = Pa \end{cases} \quad Pa = M \rightarrow a = \frac{M}{P}$$

Observa-se que a reação  $R$  produz momentos na viga e, para resistir a eles, é necessária uma força resultante interna de compressão igual à força de protensão  $P$  aplicada a uma

distância  $a$  do centro de gravidade da armadura, criando dessa forma o momento resistente interno.

Com base nas afirmações anteriores, define-se centro de pressão numa seção o ponto de aplicação da resultante de compressão no concreto. Então, de maneira geral, em uma seção submetida à flexão composta, o centro de pressão é o ponto de passagem do esforço normal. Se a viga for protendida, o esforço normal é aquele criado pela aplicação da protensão nos cabos ou, se for o caso, um esforço normal exterior.

A seguir, define-se linha de pressão no concreto o lugar geométrico dos pontos de aplicação da resultante de compressão  $P$  ao longo da viga.

Para uma melhor conceituação dos fatores que influenciam o posicionamento do centro de pressão na seção e, conseqüentemente, o desenvolvimento das linhas de pressão, será feito um estudo comparativo entre vigas isostáticas e hiperestáticas.

Seja inicialmente, uma viga biapoiada, sem carregamento externo, submetida somente à ação da protensão (Fig. 2.2).

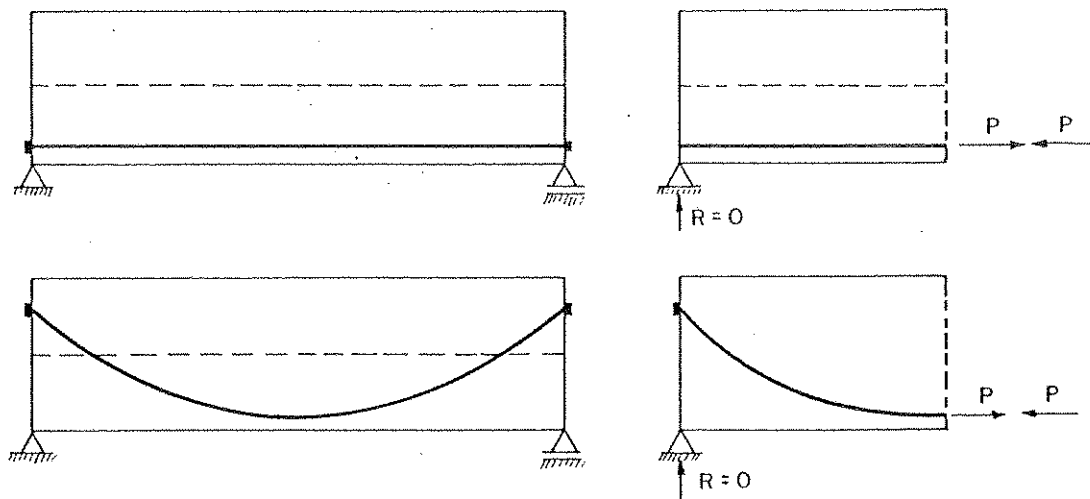


FIG. 2.2 - VIGAS ISOSTÁTICAS PROTENDIDAS



Neste caso, o ponto de aplicação da resultante de compressão no concreto, em qualquer seção transversal, coincide com o ponto de aplicação da força de protensão, o que equivale a dizer que a linha de pressão coincide com a linha dos centros de gravidade da armadura.

Ao ser protendida, a viga é submetida a deformações livres, isto é, deformações não impedidas pelos apoios, significando que a protensão não provoca reações. O momento externo é então nulo e ocorre um equilíbrio entre os esforços internos devidos à protensão.

Considere-se agora uma viga contínua, sem carregamento externo, submetida somente à ação da protensão (Fig. 2.3).

Ao ser protendida, a viga se deforma de modo que os deslocamentos verticais nas seções correspondentes aos apoios são impedidos, surgindo aí reações. Estas reações, oriundas da protensão, produzem momentos na viga e, para que haja equilíbrio entre o momento resistente interno e o momento externo, a linha de pressão no concreto é deslocada de uma distância  $a$  em relação à linha dos centros de gravidade da armadura (Fig. 2.3.d).

Estes momentos, decorrentes exclusivamente das reações para manter a viga sobre os apoios, variam linearmente entre dois apoios consecutivos e são chamados hiperestáticos de protensão ( $M_p^1$ ), porque resultam da protensão e sobretudo porque não existem numa viga isostática onde a protensão não cria reações.

Observe-se que devido à aplicação da protensão, os momentos numa viga hiperestática são diretamente influenciados pela protensão e indiretamente influenciados pelas reações necessárias para manter a viga sobre seus apoios. Logo, o momento resultante ( $M_p$ ) devido à protensão é a soma algébrica dos momentos devidos às excentricidades do cabo e dos momentos hiperestáticos de protensão (Fig. 2.4).

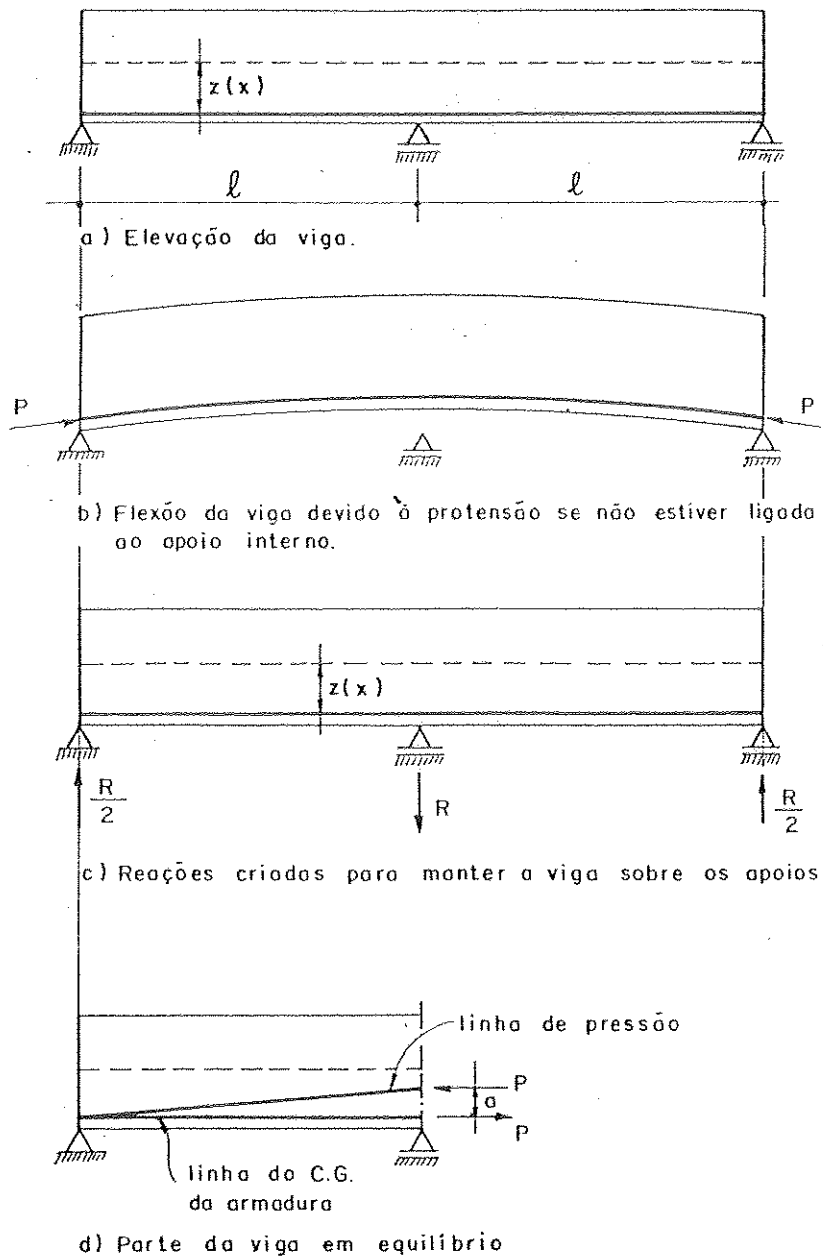


FIG. 2.3 - REAÇÕES DEVIDAS À PROTENSÃO NUMA VIGA CONTÍNUA E POSIÇÃO DA LINHA DE PRESSÃO.

Portanto,

$$M_P = M_P^0 + M_P^1$$

onde

$M_P^0$  são os momentos obtidos diretamente da posição da armadura em relação ao eixo baricêntrico da seção,

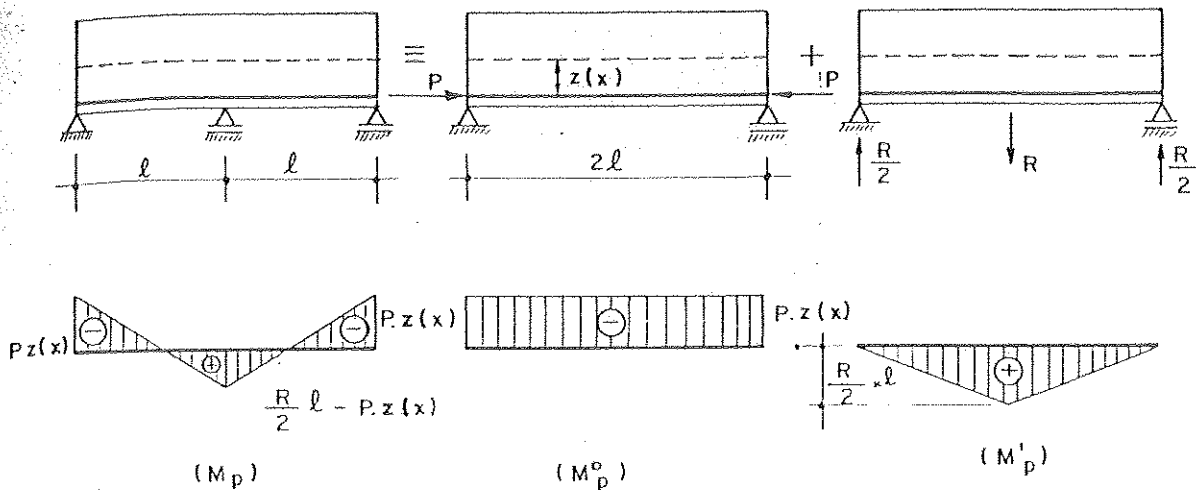


FIG. 2.4 MOMENTOS NUMA VIGA CONTÍNUA DEVIDOS  
A PROTENSÃO.

isto é, são os momentos que aparecem na viga estaticamente determinada.

$$M_p^0 = Pz(x)$$

$M_p^1$  são os momentos hiperestáticos decorrentes exclusivamente das reações para manter a viga sobre os a poios.

Ainda com relação à resultante de compressão, se a força de protensão permanecer constante entre dois a poios consecutivos, o deslocamento  $a = M/P$ , sendo direta mente proporcional ao momento hiperestático, faz com que a linha de pressão ao longo do tramo tenha variação linear, conforme mostra a Fig. 2.3.d.

Da análise das vigas, isostática e hiperestática, submetidas à ação da protensão sem carregamento externo, pode-se concluir que na viga simplesmente apoiada a resultante de compressão no concreto define a linha de pressão, coincidente com a linha dos centros de gravidade da armadura. Já na viga contínua a resultante de compressão no concreto define a linha de pressão que, de um modo geral, não coincide com a linha dos centros de gravidade.

de da armadura, porém, são linhas que têm a mesma forma intrínseca, isto é, mesmas curvaturas e dobras, conforme mostra a Fig. 2.5.

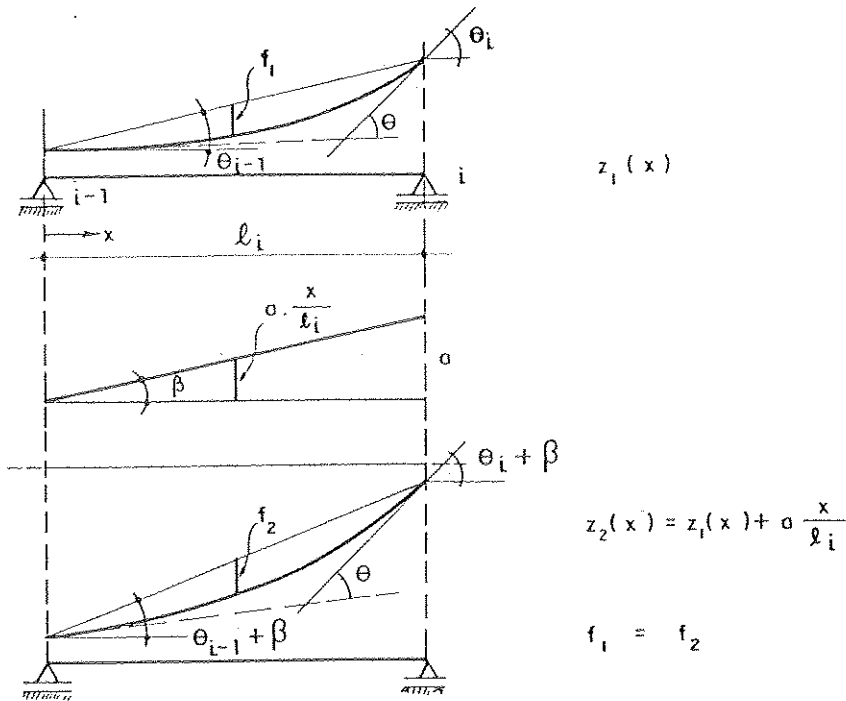


FIG. 2.5 - CURVAS DE MESMA FORMA INTRÍNSECA NO TRAMO.

Seja a função  $z_1(x)$  representativa da linha de pressão no tramo  $i$ .

Transformando  $z_1(x)$  através da função linear  $a(x/l_i)$  obtêm-se uma função  $z_2(x)$  de mesma forma que a inicial; isto é, flechas iguais  $f_1 = f_2$  e mesma variação angular  $\theta$  das tangentes às curvas ao longo do tramo.

Agora, levando em conta um carregamento externo qualquer, considere-se uma viga simplesmente apoiada protendida. Nota-se que, numa seção qualquer, quando o momento fletor externo aumenta, as grandezas das resultantes  $P$  de tração na armadura e de compressão no concreto permanecem praticamente constantes, ao mesmo tempo que a resultante de compressão se desloca em relação à resultante de tração de um valor  $a$ , criando um momento resistente interno igual ao momento externo, conforme mostra a Fig. 2.1.

Observe-se que neste caso as reações que se desenvolvem nos apoios são exclusivamente devidas às cargas externas. Conhecendo-se o ponto de aplicação de  $P$ , em correspondência obtêm-se a posição do centro de pressão. Para uma dada seção cujo momento é  $M$ , a posição da resultante de compressão pode ser facilmente obtida fazendo  $a = M/P$ , medida a partir da resultante de tração.

No caso de uma viga hiperestática protendida, (Fig. 2.6), além do momento proveniente do carregamento externo, deve-se levar em conta o momento hiperestático ( $M'_p$ ) produzido pelas reações oriundas da protensão. Portanto, aparecerá entre as resultantes de tração e compressão um braço de alavanca  $a$  igual à excentricidade  $a_1 = M'_p/P$  devida ao momento hiperestático de protensão, acrescida da excentricidade  $a_2 = M_q/P$  devida ao momento proveniente do carregamento externo (Fig. 2.6).

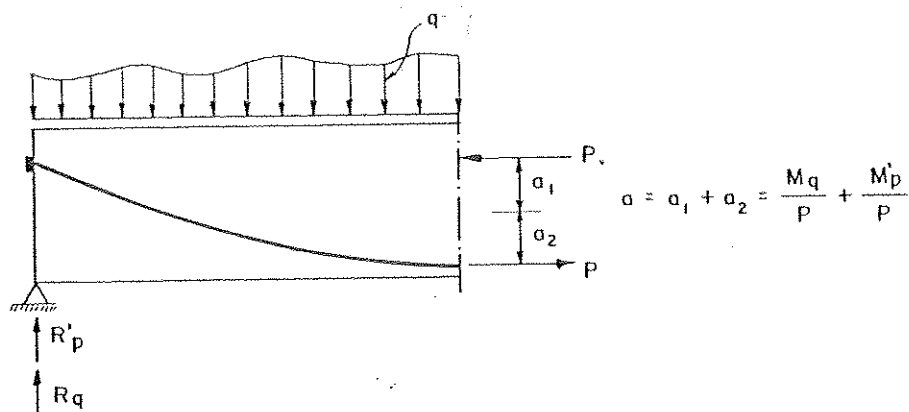


FIG. 2.6 - PARTE DE UMA VIGA CONTÍNUA PROTENDIDA

Conclui-se pois que os fatores que alteram a posição do centro de pressão numa seção e, conseqüentemente, a linha de pressão no concreto, são os seguintes:

- a) no caso de viga isostática: o carregamento externo;
- b) no caso de viga hiperestática: o carregamento externo e o momento hiperestático de protensão.

## 2.2 - Núcleo Central - Núcleo Limite - Fuso Limite

Constatou-se no parágrafo anterior que, numa seção protendida, o centro de pressão para um estado de carga qualquer tem sua posição definida pela excentricidade  $a$ .

Conhecido o momento externo  $M_q$  e, para que haja equilíbrio entre momento externo e momento resistente interno, determina-se o momento da protensão  $e$ , em correspondência, a excentricidade  $a$  necessária, medida a partir do centro de gravidade da armadura e cujo valor é:

$$\text{Viga isostática} \quad : \quad a = \frac{M_q}{P}$$

$$\text{Viga hiperestática} \quad : \quad a = \frac{M_q}{P} + \frac{M'}{P}$$

Verifica-se portanto que, com a variação do carregamento, o centro de pressão altera sua posição na seção. Entretanto, o centro de pressão deverá ficar contido entre certos limites para que as tensões admissíveis não sejam ultrapassadas. Para tanto, passa-se a estudar as propriedades do núcleo central, núcleo limite e fuso limite.

- a) Núcleo central é a região da seção no interior da qual se deve encontrar o centro de pressão a fim de que não haja mudança de sinal da tensão.

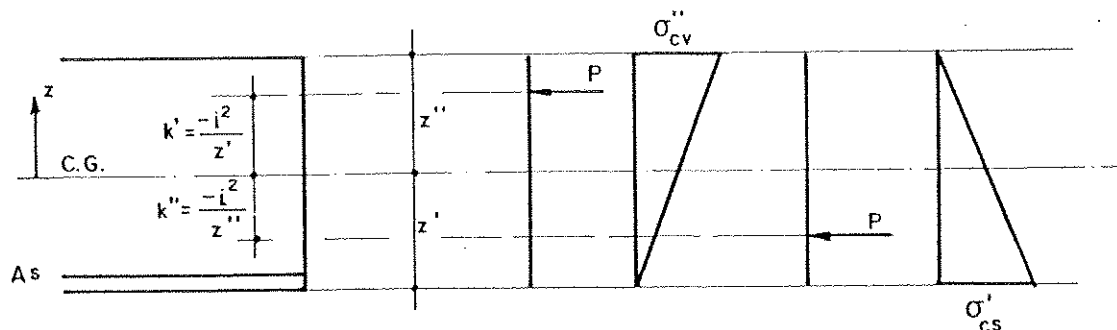


FIG.2.7 - CENTRO DE PRESSÃO NAS EXTREMIDADES DO NÚCLEO CENTRAL

Se a resultante de compressão estiver aplicada no domínio definido pelos pontos  $k'$  e  $k''$ , conforme Fig. 2.7, pode-se assegurar que as tensões, na fibra superior sob momento mínimo e na fibra inferior sob momento máximo, serão nulas ou de compressão; porém, na outra fibra, para cada estado de carga, não haverá restrições quanto às tensões máximas de compressão ( $\sigma'_{cv}$  e  $\sigma''_{cs}$ )

b) Núcleo Limite de uma seção é a região interior à seção na qual deve se encontrar o centro de pressão para que as tensões permaneçam contidas entre os limites fixados. Determinar-se-á então entre que limites da seção o centro de pressão deve se situar para que as tensões admissíveis não sejam ultrapassadas.

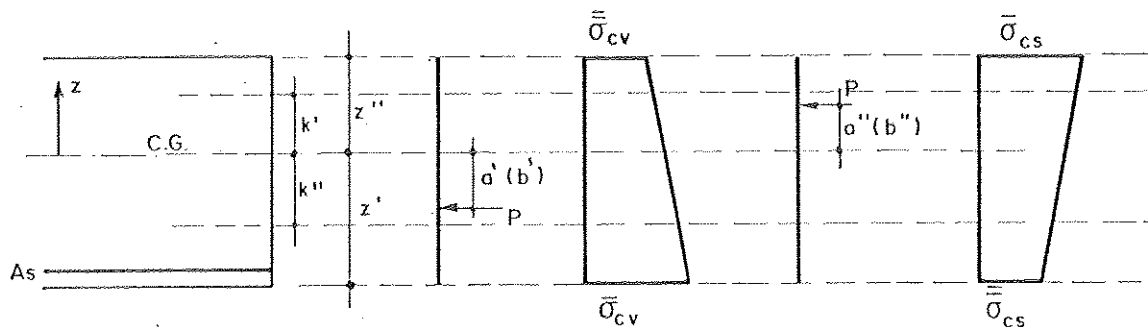


FIG. 2.8 - POSIÇÃO DO CENTRO DE PRESSÃO

A tensão máxima de compressão em vazio ou sob estado de momento mínimo vale:

$$\bar{\sigma}_{cv} = \frac{P}{A_c} + \frac{Pa'}{I} z'$$

Fazendo  $\frac{P}{A_c} = \sigma_{cg}$  tem-se

$$\bar{\sigma}_{cv} = \sigma_{cg} + \frac{Pa'}{I} z'$$

Tirando o valor de  $a'$  da expressão acima:

$$\begin{aligned}
 a' &= (\bar{\sigma}_{cv} - \sigma_{cg}) \frac{I}{Pz'} = (\bar{\sigma}_{cv} - \sigma_{cg}) \frac{IA_c}{Pz'A_c} \\
 a' &= (\bar{\sigma}_{cv} - \sigma_{cg}) \frac{i^2}{\sigma_{cg} z'} = (\bar{\sigma}_{cv} - \sigma_{cg}) \frac{k'}{\sigma_{cg}} = \\
 &= k' \left( \frac{\bar{\sigma}_{cv}}{\sigma_{cg}} - 1 \right) \\
 a' &= k' \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}_{cv}}{\sigma_{cg}} \right) \quad \dots (2.1)
 \end{aligned}$$

A tensão máxima de compressão em serviço ou sob estado de momento máximo vale:

$$\bar{\sigma}_{cs} = \frac{P}{A_c} + \frac{Pa''}{I} z''$$

Fazendo  $\sigma_{cg} = \frac{P}{A_c}$  tem-se

$$\sigma_{cs} = \sigma_{cg} + \frac{Pa''}{I} z''$$

Tirando o valor de  $a''$  da expressão anterior:

$$a'' = (\bar{\sigma}_{cs} - \sigma_{cg}) \frac{I}{Pz''} = (\bar{\sigma}_{cs} - \sigma_{cg}) \frac{IA_c}{Pz''A_c}$$

Fazendo  $-k'' = \frac{i^2}{z''}$

$$a'' = (\bar{\sigma}_{cs} - \sigma_{cg}) \frac{-k''}{\sigma_{cg}} = -k'' \left( \frac{\bar{\sigma}_{cs}}{\sigma_{cg}} - 1 \right)$$

$$a'' = k'' \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}_{cs}}{\sigma_{cg}} \right) \quad \dots (2.2)$$

Para que as tensões máximas de compressão não sejam ultrapassadas, é necessário que o centro de pressão se situe entre os pontos  $A'$  e  $A''$ , definidos por  $a'$  e  $a''$  (Fig. 2.9).



De modo análogo, a tensão mínima de compressão ou máxima de tração, sob momento mínimo, vale:

$$\bar{\sigma}_{cv} = \frac{P}{A_c} + \frac{Pb'}{I} z''$$

Seguindo o mesmo desenvolvimento anterior, chega-se ao seguinte valor de  $b'$ :

$$b' = k'' \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}_{cv}}{\bar{\sigma}_{cg}} \right) \quad \dots (2.3)$$

Por outro lado, a tensão mínima de compressão ou máxima de tração, sob momento máximo, vale:

$$\bar{\sigma}_{cs} = \frac{P}{A_c} + \frac{Pb''}{I} z'$$

Desenvolvendo a expressão acima chega-se ao seguinte valor de  $b''$ :

$$b'' = k' \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}_{cs}}{\bar{\sigma}_{cg}} \right) \quad \dots (2.4)$$

Para que as tensões máximas de tração, ou tensões mínimas de compressão não sejam ultrapassadas, é necessário que o centro de pressão se situe entre os pontos  $B'$  e  $B''$  definidos respectivamente por  $b'$  e  $b''$  (fig. 2.9).

Portanto, a fim de que todas as tensões nas fibras permaneçam dentro dos limites admissíveis, é necessário que o centro de pressão esteja localizado no interior do menor domínio definido pelos quatro pontos  $A'$ ,  $A''$ ,  $B'$  e  $B''$ . Este menor domínio chama-se núcleo limite, e é definido por  $c'$  e  $c''$ .

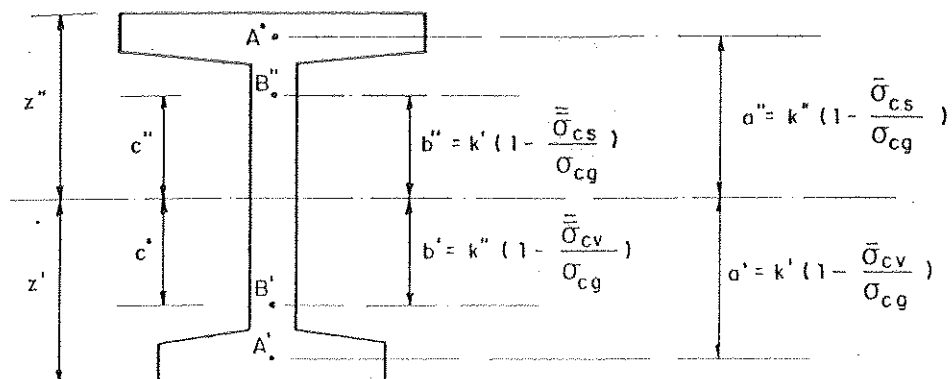


FIG. 2.9 - LIMITES PARA A LOCALIZAÇÃO DO CENTRO DE PRESSÃO.

Então, quando o centro de pressão estiver em qualquer das extremidades do núcleo limite, dir-se-á que a seção se encontra no estado limite de tensão.

O núcleo limite se deduz, portanto, do núcleo central por fatores multiplicativos  $(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{cg}})$  ou  $(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{cg}})$  conforme o estado de carga.

Observe-se que o núcleo central é um elemento geométrico ligado à seção e independente das tensões, enquanto o núcleo limite depende destas tensões.

c) Denomina-se fusão limite o domínio definido pelas linhas  $c'$  e  $c''$ , que ligam as extremidades do núcleo limite ao longo da viga (Fig. 2.10).

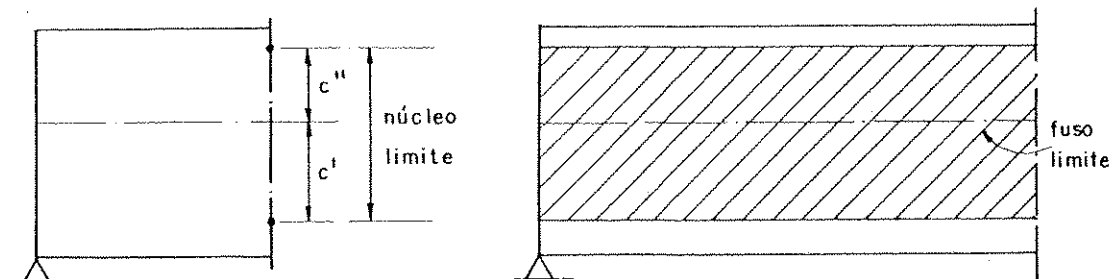
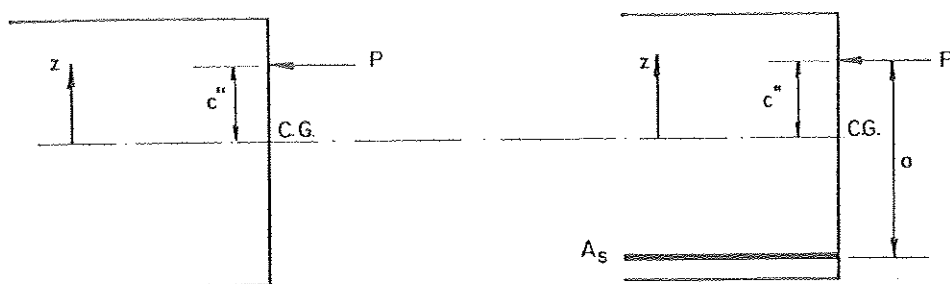


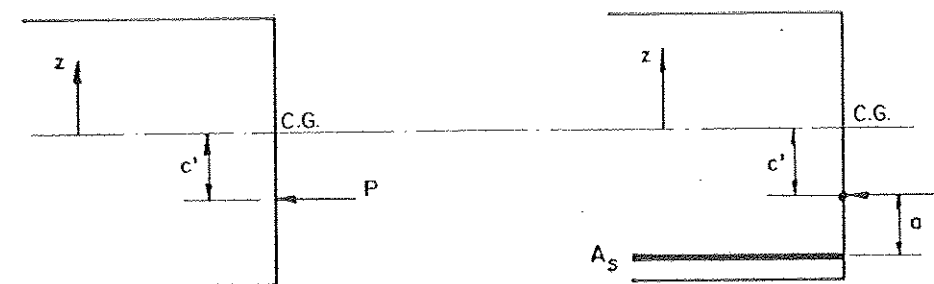
FIG. 2.10 - NÚCLEO LIMITE DA SEÇÃO DA VIGA

### 2.3 - Localização do cabo em relação ao núcleo limite numa viga isostática

Considerando-se uma viga isostática protendida que é o caso mais simples, sob um determinado estado de carga, procurar-se-á determinar a posição do centro de pressão numa seção, isto é, a posição do centro de gravidade do cabo, para que as tensões nas bordas da seção sejam iguais às tensões admissíveis.



a) Centro de pressão na extremidade superior do núcleo limite



b) Centro de pressão na extremidade inferior do núcleo limite.

FIG. 2.11 - LOCALIZAÇÃO DO CABO EM RELAÇÃO AO NÚCLEO LIMITE NUMA VIGA ISOSTÁTICA.

No estado de momento máximo, se a resultante de compressão  $P$  estiver a uma distância  $c''$  do centro de gravidade da seção, significa que a tensão em pelo menos uma das bordas é igual à tensão admissível. Para que a resultante  $P$  atue nessa posição é necessário que o centro de gravidade da armadura esteja a  $(c''-a)$  do centro da seção (Fig. 2.11), sendo:

$$a = \frac{\text{máx}M}{P}$$

Do mesmo modo, sob estado de momento mínimo, quando a resultante de compressão  $P$  estiver à distância  $c'$  do centro de gravidade da seção, significa que a tensão em pelo menos uma das bordas é igual à tensão admissível. A fim de que a resultante  $P$  atue nessa posição, é preciso que o centro de gravidade da armadura esteja situado à distância  $(c'-a)$  do centro da seção (Fig. 2.11), onde:

$$a = \frac{\text{mín}M}{P}$$

Assim, em cada seção, obtêm-se a região onde deve se situar o centro de gravidade da armadura para que as tensões admissíveis não sejam ultrapassadas.

Desenhando a seção longitudinal numa escala qualquer, marcam-se as distâncias  $c'$  e  $c''$  a partir do eixo da seção longitudinal, cujo domínio define o fuso limite.

A partir das retas  $c'$  e  $c''$  marcam-se respectivamente as ordenadas  $\text{mín}M/P$  e  $\text{máx}M/P$ , obtendo-se duas curvas limites cuja região interna denomina-se fuso de passagem (Fig. 2.12).

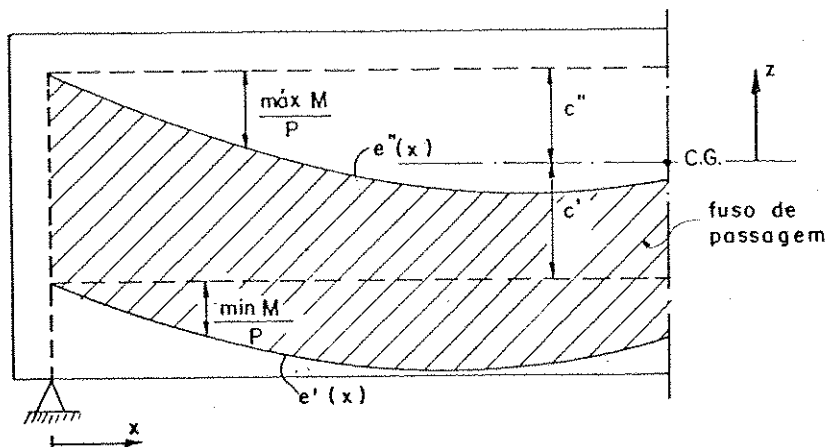


FIG. 2.12 - DETERMINAÇÃO DAS CURVAS LIMITES

Observa-se que o fuso de passagem já leva em conta a excentricidade devido ao carregamento externo; desta forma raciocinar-se-á apenas com o cabo de protensão. Assim, para que as tensões permaneçam dentro dos limites admissíveis, pode-se concluir que:

a) Nesse caso de viga isostática, a linha dos centros de gravidade da armadura de protensão, coincidente com a linha de pressão, deverá estar situada no interior do fuso de passagem.

b) Já no caso de vigas contínuas, geralmente a linha do centro de gravidade da armadura não coincide com a linha de pressão; então será necessário que esta última esteja situada no interior do fuso de passagem.

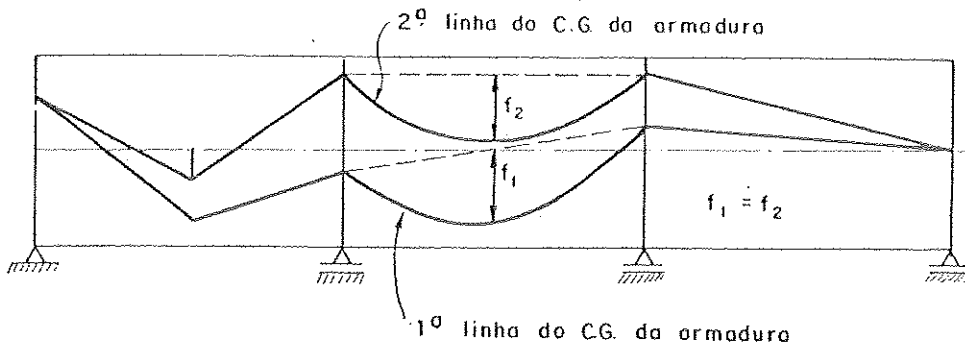
#### 2.4 - Transformações lineares

Quando se muda a posição da linha do centro de gravidade da armadura sobre os apoios interiores de uma viga contínua, sem mudar a forma intrínseca da linha, isto é, curvaturas e dobras, dentro de cada tramo, se diz que a nova linha é obtida pela transformação linear da anterior.

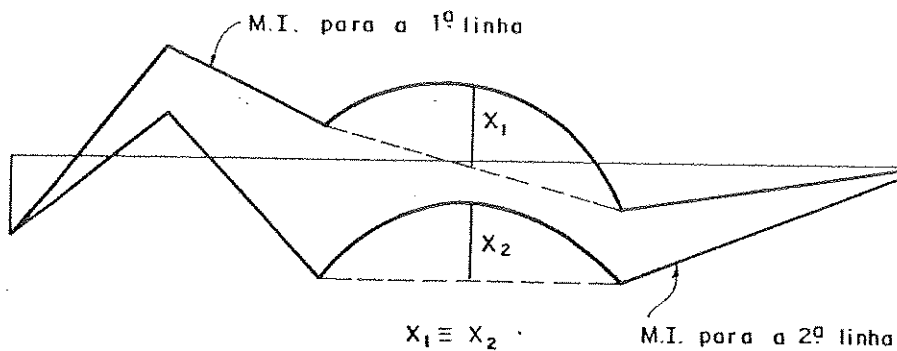
Já foi visto no parágrafo 2.1 que o lugar geométrico da resultante de compressão no concreto, em uma viga contínua, é a linha de pressão obtida a partir de deslocamentos  $a = M'_p/P$ , da linha do centro de gravidade da armadura (Fig. 2.3.d). Considerando ainda que entre dois apoios consecutivos, o momento hiperestático varia linearmente e sendo P constante, têm-se portanto deslocamentos a com variação linear, o que torna evidente que uma linha foi obtida pela transformação linear da outra.

Pode-se afirmar também que, em uma viga contínua, a linha do centro de gravidade da armadura pode ser transformada linearmente sem mudar a posição da linha de pressão no concreto.

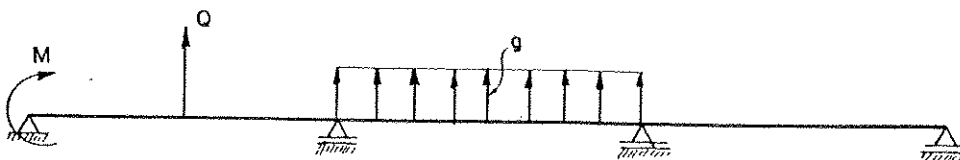
A justificativa da afirmação anterior pode ser feita através da análise de dois traçados de cabos resultantes, Fig. 2.13, onde um deles é obtido pela transformação linear do outro, de modo que apresentam a mesma forma intrínseca, isto é, traçados afins.



a) Transformação linear da linha do centro de gravidade da armadura.



b) Momentos isostáticos de protensão



c) Diagrama de cargas equivalentes para ambos os diagramas de momento isostático.

FIG. 2.13- DIAGRAMA DE CARGAS EQUIVALENTES PARA AMBOS OS DIAGRAMAS DE MOMENTO ISOSTÁTICO.

Conhecendo-se, para cada traçado, o momento resultante da protensão, deduz-se com facilidade a posição da linha de pressão. Para tanto, sabe-se que o momento resultante é a soma do momento no estado fundamental, isostático, e o momento hiperestático de protensão. Designando por  $z(x)$  e  $\bar{z}(x)$  as ordenadas dos traçados afins, medidas a partir do eixo baricêntrico da viga, tem-se:

1<sup>a</sup> linha dos centros de gravidade da armadura:  $z(x)$

2<sup>a</sup> linha dos centros de gravidade da armadura:  $\bar{z}(x) = z(x) + kx + \text{cte}$

Os momentos isostáticos de protensão são dados por:

1<sup>a</sup> linha:  $M_p^0(x) = P \cdot z(x)$

2<sup>a</sup> linha:  $M_p^0(x) = P \cdot \bar{z}(x) = P [z(x) + kx + \text{cte}]$

Assimilando a protensão a um carregamento cujo efeito é oposto ao do carregamento externo, pode-se determinar, para cada traçado, o diagrama de cargas equivalentes dado pela derivada segunda do respectivo diagrama de momento isostático de protensão. Desta forma, obtém-se  $P\bar{z}''(x) = Pz''(x)$ .

Como os carregamentos equivalentes são iguais, tem-se a igualdade dos momentos resultantes devidos à protensão e, em decorrência, a linha de pressão no concreto em ambos os traçados tem a mesma posição.

Note-se que na transformação linear, embora os momentos resultantes sejam os mesmos, devido a diferentes excentricidades dos traçados, têm-se momentos isostáticos diferentes e em consequência momentos hiperestáticos também diferentes.

Cabe salientar ainda que, quando se faz transformação linear da linha dos centros de gravidade da armadura e se altera a posição da mesma sobre os apoios extremos, verifica-se que os momentos aplicados nas extremi

dades da viga serão alterados (Fig. 2.12.c), resultando em traçados com momentos resultantes devidos à protensão diferentes e, em consequência linhas de pressão diferentes.

Conclui-se que o mais adequado é fazer transformação linear da linha dos centros de gravidade da armadura, mudando a posição da mesma somente sobre os apoios interiores da viga pois, assim, poder-se-á fazer um ajustamento adequado do traçado resultante no interior da viga, conhecendo a priori a posição da linha de pressão e mantendo-a inalterada.

## 2.5 - Cabos Concordantes

Já foi visto no parágrafo anterior que duas linhas dos centros de gravidade da armadura ou dois cabos que se deduzem um do outro por transformação linear têm a mesma linha de pressão.

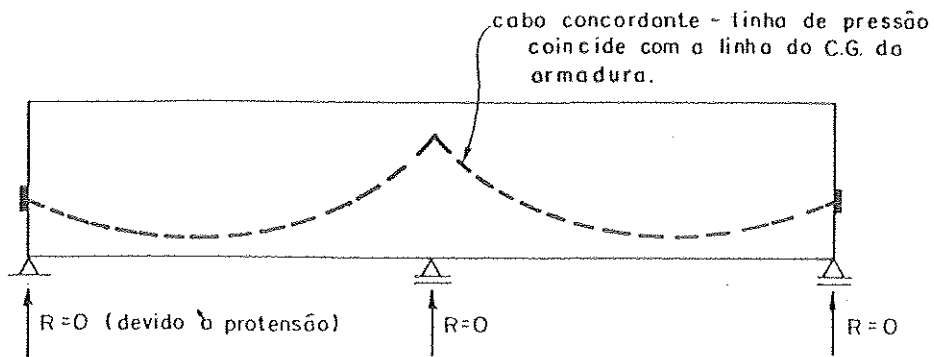
Existe portanto uma família de cabos que apresentam a mesma linha de pressão. O cabo dessa família, cuja linha dos centros de gravidade se confunde com a linha de pressão, não exerce na estrutura nenhum momento hiperestático de protensão. Trata-se de um cabo concordante.

Numa viga contínua a protensão provoca, de um modo geral, reações nos apoios. Estas reações produzem momentos hiperestáticos ( $M'_p$ ) na viga, fazendo com que a linha de pressão seja deslocada da linha dos centros de gravidade do cabo. Quando estas linhas não coincidem o cabo é denominado discordante (Fig. 2.14).

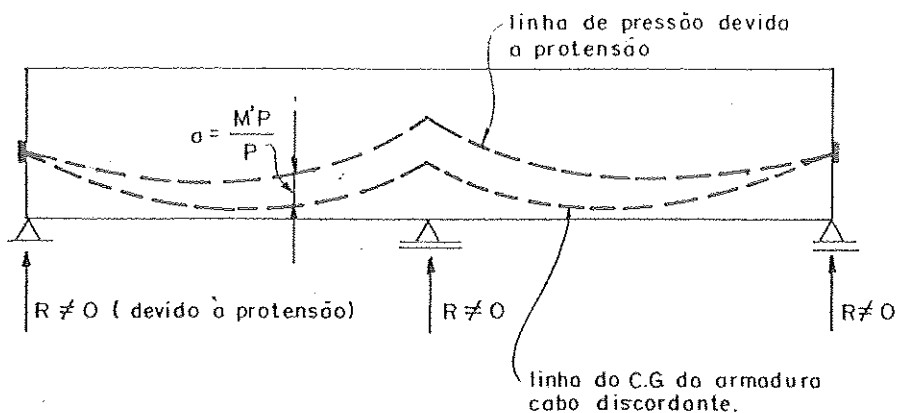
Como a linha de pressão no concreto tem a mesma forma intrínseca da linha do centro de gravidade da armadura, baseando-se no conceito de transformação linear e na definição de cabo concordante, a linha de pressão para um cabo discordante é a posição para um cabo concordante.

Embora o cabo concordante seja mais fácil de ser





a) Viga com cabo concordante



b) Viga com cabo discordante

FIG. 2.14 - PROPRIEDADES DE CABOS DISCORDANTES

obtido pois não apresenta hiperestáticos de protensão ( $M'_p$ ), raramente ele se constitui na solução ótima do problema.

Um procedimento adequado no projeto é obter cabo concordante que dê traçado da linha dos centros de gravidade da armadura de modo a criar esforços, que se opõem àqueles criados pelo carregamento externo, e de tal forma que o mesmo esteja contido no interior do fuso de passagem. Se o traçado concordante estiver fora dos limites da viga, e le pode ser linearmente transformado e alojado no interior da mesma, com cobrimento adequado, mantendo a linha de pressão inalterada.

### 3. DETERMINAÇÃO DO CABO DE PROTENSÃO RESULTANTE ECONÔMICO

#### 3.1 - Introdução

A determinação do traçado econômico do cabo de protensão resultante consiste na procura de um cabo com força de protensão mínima e cuja seção de concreto, ao longo da viga, tenha características suficientes para assegurar que as tensões limites de compressão e de tração não sejam ultrapassadas. Para tanto, é preciso que a linha de pressão esteja situada no interior do fuso de passagem.

Nas estruturas hiperestáticas, conforme visto no capítulo anterior, não é necessário que o cabo resultante passe no interior do fuso de passagem. É a linha de pressão que deve se situar no interior desse fuso. O cabo, por sua vez, deverá se localizar no interior da massa de concreto com cobrimento adequado.

Dividindo-se a expressão do momento total da protensão  $M_p(x) = M_p^0(x) + M_p^1(x)$  pela força de protensão, deduzem-se para uma viga hiperestática as ordenadas da linha de pressão dadas por:

$$z_{lp}(x) = z(x) + \frac{M_p^1}{P} \quad \dots (3.1)$$

onde:

$z(x)$  = ordenadas do cabo

$M_p^1$  = momento hiperestático de protensão

$P$  = força de protensão

Observa-se que sendo  $P$  constante a linha de pressão se deduz do cabo por uma transformação linear. Como se sabe, dois cabos que se deduzem um do outro por uma transformação linear tem a mesma linha de pressão.

Aquele cabo que não desenvolve nenhum hiperestá

Um cabo de protensão é um cabo concordante cujo traçado coincide com a linha de pressão, conforme se verifica pela equação (3.1). Portanto, o ponto de partida na procura do cabo econômico consiste em determinar inicialmente uma linha de pressão ou um cabo concordante no interior do fuso de passagem, cuja obtenção é conseguida de maneira simples além de assegurar que as tensões limites no concreto não serão ultrapassadas.

### 3.2 - Relações de Concordância

Para que um cabo de ordenadas  $z_0(x)$  seja um cabo concordante é necessário e suficiente que os momentos hiperestáticos de protensão sejam todos nulos. Isto significa que as deformações relativas nos apoios intermediários, produzidas pela protensão, devem ser nulas, o que equivale dizer que não haverá reações de apoio devidas à protensão. Com o auxílio da figura 3.1, obtém-se para cada apoio intermediário a relação de concordância dada por:

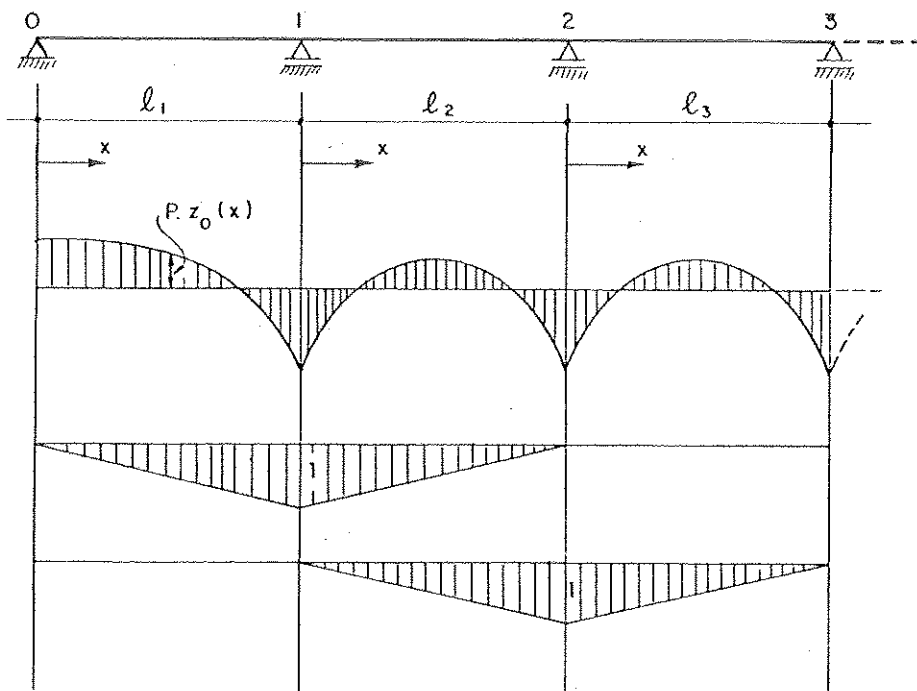


FIG. 3.1 - MOMENTOS PARA A RESOLUÇÃO DO SISTEMA REAL

$$\delta_{i,0} = \int_0^{\ell_i} P z_0(x) \frac{x}{\ell_i} \frac{dx}{EI} + \int_0^{\ell_{i+1}} P z_0(x) \left(1 - \frac{x}{\ell_{i+1}}\right) \frac{dx}{EI} = 0 \quad (3.2)$$

Para o caso geral de vigas sobre  $n$  apoios, têm-se  $(n-2)$  relações de concordância. Entretanto, para que se possa encontrar um cabo concordante no interior do fuso de passagem, é necessário que este seja aberto. A condição necessária e suficiente para que isto ocorra é que

$$e'' \geq e' + c'' - \frac{\max M}{P} \geq c' - \frac{\min M}{P}$$

ou seja,

$$P \geq \frac{\Delta M}{c'' - c'}$$

onde  $e''$  e  $e'$  são as ordenadas das curvas limites e  $c''$  e  $c'$  são as ordenadas extremas do núcleo limite.

Para que o cabo de ordenadas  $z_0(x)$  esteja no interior do fuso de passagem é preciso que

$$e''(x) \geq z_0(x) \geq e'(x)$$

e, considerando que o mesmo satisfaz a relação de concordância expressa pela equação (3.2), pode-se afirmar que nos tramos adjacentes a cada apoio intermediário deverão se verificar as seguintes condições:

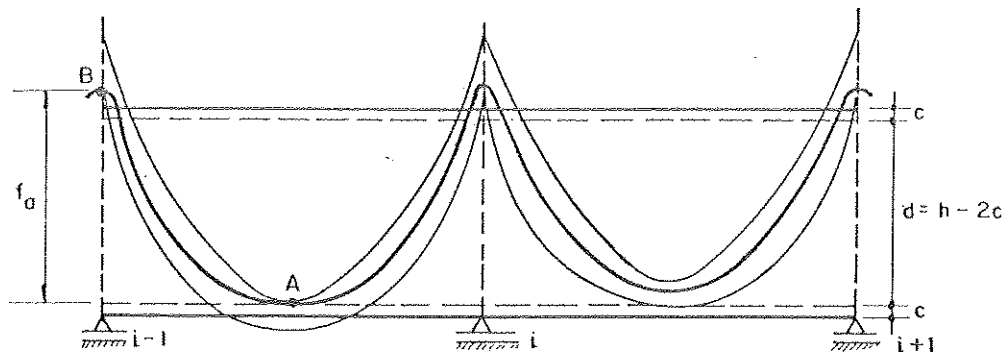
$$\delta(e'') = \int_0^{\ell_i} e''(x) \cdot \frac{x}{\ell_i} \frac{dx}{I} + \int_0^{\ell_{i+1}} e''(x) \left(1 - \frac{x}{\ell_{i+1}}\right) \frac{dx}{I} \geq 0$$

$$\delta(e') = \int_0^{\ell_i} e'(x) \cdot \frac{x}{\ell_i} \frac{dx}{I} + \int_0^{\ell_{i+1}} e'(x) \left(1 - \frac{x}{\ell_{i+1}}\right) \frac{dx}{I} \leq 0$$

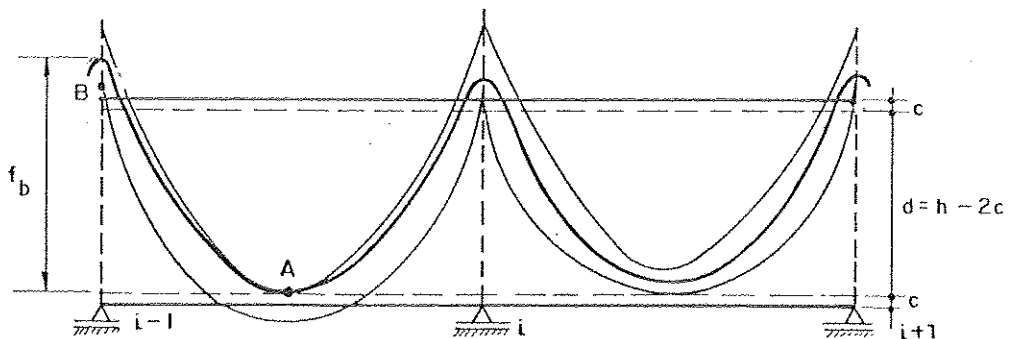
Respeitadas todas as condições anteriores, será possível obter um cabo concordante ou uma linha de pressão no interior do fuso de passagem.

### 3.3 - Análise de cabos concordantes dentro do mesmo fuso de passagem

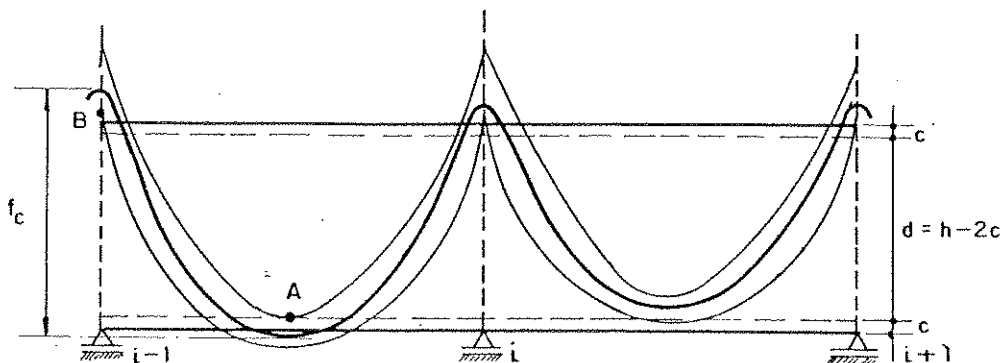
Seja uma viga reta genérica com seu respectivo fuso de passagem (Fig. 3.2). Analisar-se-ão três cabos concordantes distintos no interior do mesmo fuso, portanto, todos com a mesma força de protensão.



a) Cabo concordante tangenciando os pontos A e B



b) Cabo concordante tangenciando o ponto A e interno ao fuso.



c) Cabo concordante no interior do fuso.

FIG. 3.2 - CABOS CONCORDANTES NO INTERIOR DO MESMO FUSO DE PASSAGEM.

Nos três casos, a, b e c, para qualquer relação de concordância tem-se a integral do produto de duas funções nula.

$$\int_0^{\ell_i} Pz_0(x) \cdot M_1 dx + \int_0^{\ell_{i+1}} Pz_0(x) \cdot M_1 dx = 0$$

Vale observar que estes cabos concordantes, com forças de protensão iguais, foram obtidos no interior do fuso fixando-se diferentes pontos de passagem para os mesmos. Em consequência, obtiveram-se cabos com diferentes traçados de modo a satisfazer a relação anterior.

Para melhor entendimento do que a seguir será exposto chamar-se-á flecha do cabo a diferença entre a ordenada do cabo no apoio e a cota máxima no tramo adjacente (Fig. 3.3).

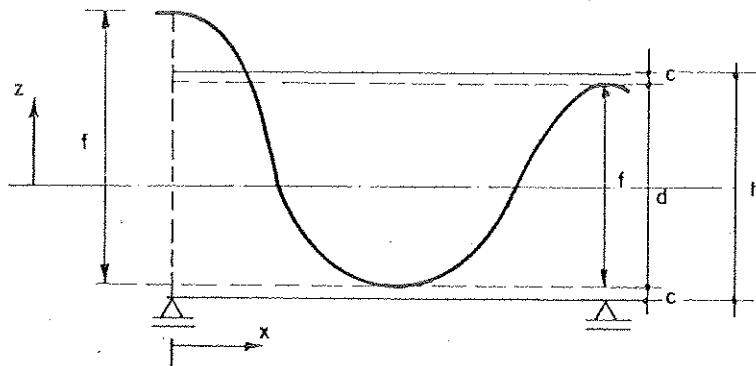


FIG. 3.3 - FLECHAS DE UM CABO CONCORDANTE

Chamar-se-á de altura útil da viga  $d = h - 2c$ , a variação máxima de ordenada do cabo de modo que o mesmo ao ser alojado na viga tenha cobertura adequada (Fig. 3.3).

Poder-se-á dizer ainda que o cabo real é obtido a partir do cabo concordante, através de transformação linear e alojado de forma conveniente no interior da viga. Exemplificando, considerar-se-á uma viga simples com cabo concordante conhecido, conforme mostra a Fig. 3.4a).

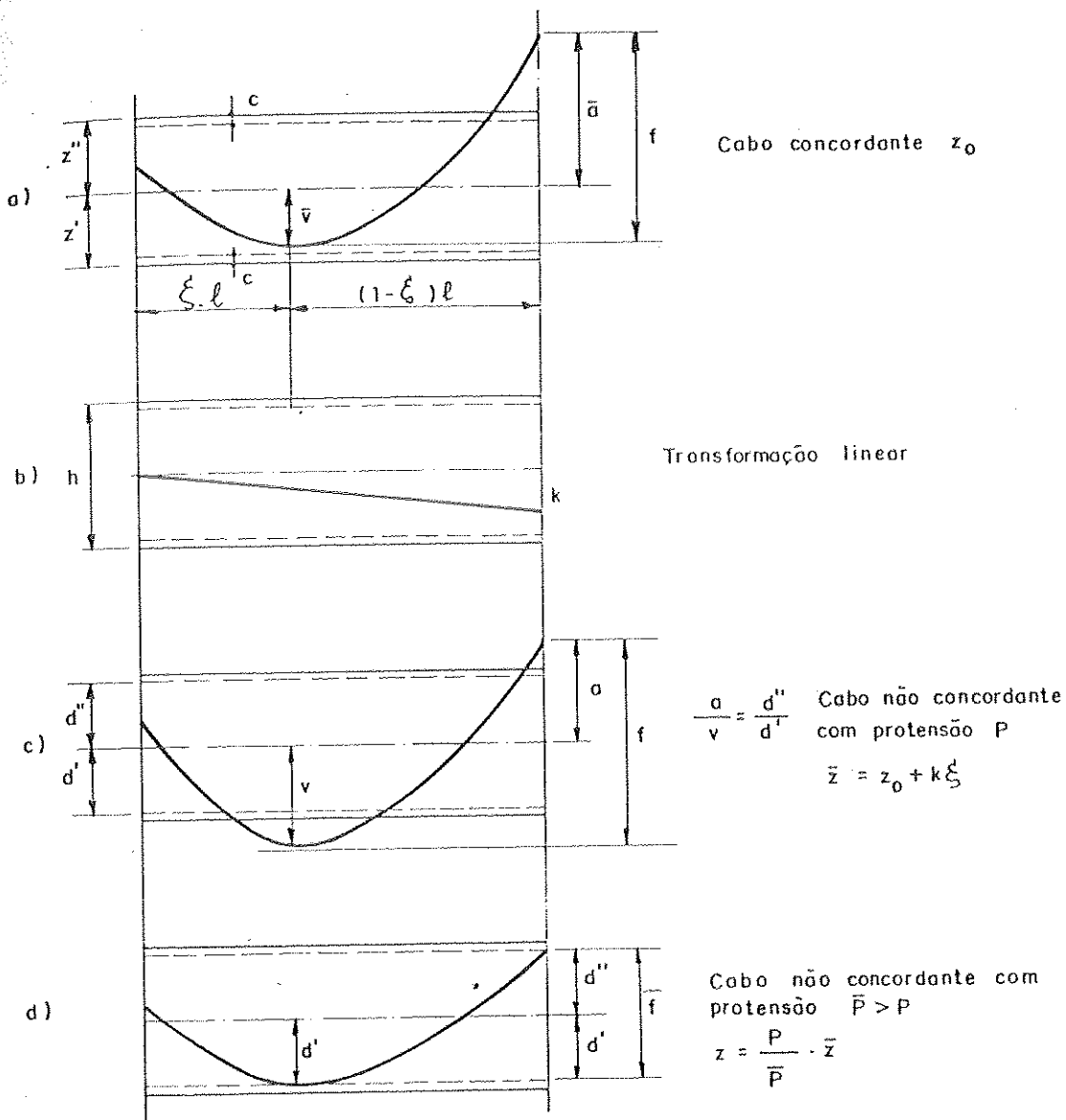


FIG. 3.4- TRANSFORMAÇÃO LINEAR E ALOJAMENTO DO CABO NO INTERIOR DA VIGA.

Introduzindo a transformação linear em a) obtém-se em c) um cabo não concordante de mesma forma intrínseca que o inicial, de modo que a ordenada  $a$  no apoio e a máxima ordenada  $v$  no tramo sejam proporcionais respectivamente às distâncias  $d''$  e  $d'$ , necessárias para que o cabo tenha cobrimento adequado. Se, após a transformação linear, o cabo permanecer fora dos limites da viga, ou no

interior desta mas com cobrimento inadequado, então como o momento total devido à protensão deve permanecer constante, para não alterar a linha de pressão, será necessário aumentar a força de protensão para um valor  $\bar{P}$  para compensar a diminuição da excentricidade do cabo em relação à linha baricêntrica da viga, conforme Fig. 3.4.d.

Feitas estas considerações necessárias e voltando à Fig. 3.2, vê-se que as flechas máximas dos cabos concordantes são maiores que a altura útil  $d$  da viga e guardam entre si a seguinte relação:

$$f_{a \max} < f_{b \max} < f_{c \max}$$

Procedendo-se à transformação linear em 3.2.a), por exemplo, como a flecha máxima do cabo é maior que a altura útil  $d$ , o cabo ainda permanece fora dos limites da viga. Então como o momento total devido à protensão deve permanecer constante de modo a não alterar a linha de pressão, será necessário aumentar a força de protensão para um valor  $\bar{P}$ , acarretando uma diminuição das excentricidades do cabo em relação à linha baricêntrica da viga, isto é, uma diminuição da flecha máxima do cabo até um valor correspondente à altura útil da viga.

$$\text{Cabo concordante} \rightarrow f_{\max} = f_a$$

$$\text{Cabo real} \rightarrow f_{\max} = \bar{f} = h - 2c = \text{cte}$$

$$\begin{cases} M = Pf \\ M = \bar{P}\bar{f} \end{cases} \rightarrow \bar{P}\bar{f} = Pf \quad \bar{P} = \frac{P}{\bar{f}} f \quad \dots (3.2)$$

Nos exemplos a, b e c da Fig. 3.2, os cabos reais depois de alojados no interior da viga com cobrimento



adequado apresentarão traçados afins aos traçados iniciais, porém, pela expressão (3.2) apresentarão forças de protensão  $\bar{P}$  diferentes. Estas forças guardarão entre si a seguinte relação:

$$\bar{P}(a) < \bar{P}(b) < \bar{P}(c)$$

Com base nestes resultados obtidos, obtêm-se as seguintes conclusões:

1) Analisando a Fig. 3.2.a) tem-se a situação ideal para o cabo concordante, isto é, no apoio o cabo passa na parte inferior do fuso (ponto B) e no tramo adjacente o cabo passa na parte superior do fuso (ponto A), correspondendo ao caso em que a flecha máxima do cabo assume o menor valor possível. Desta forma, ao ser transformado linearmente e alojado no interior da viga a força de protensão será aumentada de um valor menor que o correspondente em 3.2.b) ou 3.2.c). Entretanto, raramente um cabo concordante passa simultaneamente pelos dois pontos citados anteriormente.

2) Uma segunda situação ideal será aquela em que o cabo tangencia pelo menos um dos pontos A ou B e que tenha seu traçado no interior do fuso de passagem conforme Fig. 3.2.b). Isto é facilmente obtido, uma vez que ao resolver o sistema de equações para determinação do cabo concordante, uma das equações consistirá na fixação de um ponto de passagem para o cabo.

Neste caso, o procedimento correto será fixar um ponto de passagem para o cabo, por exemplo, o ponto A e verificar se o cabo passa pelo ponto B. Se isto ocorrer ter-se-á a melhor situação para o cabo, de acordo com a Fig. 3.2.a). Em caso contrário, a melhor situação é obtida fixan

do-se como ponto de passagem para o cabo o ponto A ou o ponto B, de modo que o seu traçado fique situado no interior do fuso de passagem, de acordo com a Fig. 3.2.b).

Tanto o caso a) como o caso b) proporcionam os traçados mais adequados para o cabo com força de protensão  $P$ . Entretanto, na transformação linear o aumento da força de protensão não altera a posição da linha de pressão, porém, acarreta uma variação do fuso de passagem, o que geralmente leva a ter a linha de pressão fora do novo fuso, conforme mostra a Fig. 3.5. Ainda que a linha de pressão permaneça dentro do fuso de passagem, devido ao aumento da força de protensão não se pode garantir que tal cabo concordante é o mais adequado.

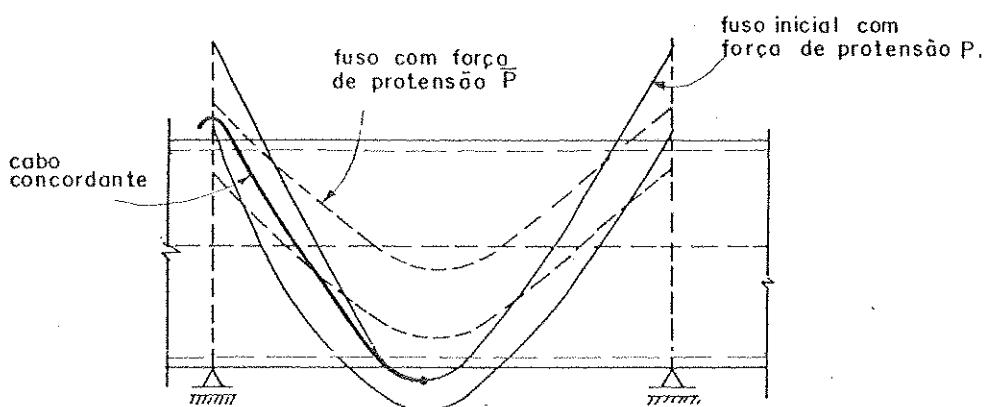


FIG. 3.5 - ALTERAÇÃO DO FUSO DE PASSAGEM DEVIDO À FORÇA DE PROTENSÃO.

3) Uma terceira possibilidade é aquela em que o cabo não tangencia nenhum dos pontos A e B, ficando, portanto, situado no interior do fuso de passagem, de acordo com a Fig. 3.2.c).

Dos três casos, este último apresenta o cabo concordante com a maior flecha máxima, pois o ponto fixado para passagem do cabo é interno ao fuso, não passando por nenhum dos pontos A ou B. Embora este seja o caso mais des

favorável, pois sempre é possível obter cabo concordante no interior do fuso passando por A ou B, sua utilização se faz necessária em alguns casos, conforme será visto no quinto capítulo.

Contudo, ao efetuar a transformação linear para alojar o cabo no interior da viga, haverá um aumento na força de protensão e conseqüente alteração do fuso de passagem, valendo as mesmas observações feitas nos casos anteriores.

4) Uma outra possibilidade seria aquela em que o cabo concordante é obtido no interior do fuso de passagem e apresenta traçado obedecendo a qualquer dos três casos anteriores, porém, com flecha máxima menor que a altura útil  $d$  da viga. Por conseguinte ao ser transformado linearmente e alojado no interior da viga, o cabo apresentará um cobrimento excessivo. Aplicando a equação (3.1) pode-se diminuir a força de protensão, o que implicará num aumento da flecha máxima do cabo até um valor  $d$ . A linha de pressão permanece inalterada, mas há alteração do fuso de passagem, o que em geral faz com que a referida linha não permaneça inteiramente contida dentro do fuso de passagem.

Analisadas estas possibilidades possíveis, observa-se que, fixando a priori a força de protensão, obtém-se um cabo concordante que, de um modo geral, ao ser transformado linearmente e alojado no interior da viga com cobrimento adequado, exigirá uma alteração da força de protensão. Em conseqüência, o fuso de passagem se altera resultando numa solução inadequada.

Nota-se que o traçado mais adequado para o cabo tem em correspondência uma força de protensão determinada, isto é, é preciso encontrar um traçado para o cabo de modo que, após a transformação linear, a força de protensão permaneça inalterada.

Seja um fuso de passagem obtido a partir de uma força de protensão  $P_1$ , dentro do qual se obtém um primeiro

cabo concordante tangenciando um dos pontos adequados  $A_1$  ou  $B_1$  do referido fuso (Fig. 3.6). Aumentando a força de protensão para um valor  $P_2$ , o novo fuso de passagem obtido é mais aberto (curvas limites mais abatidas), porém, dentro do mesmo obtêm-se um segundo cabo concordante tangenciando o fuso no mesmo ponto correspondente ao caso anterior ( $A_2$  ou  $B_2$ ). Devido ao aumento da força de protensão, aqueles pontos mais adequados para a passagem do cabo, pontos A e B, terão uma diferença de ordenadas menor, isto é,  $A_2 - B_2 < A_1 - B_1$ , o que proporcionará a obtenção do segundo cabo concordante com flechas menores que o primeiro cabo.

No exemplo ilustrado na Fig. 3.6, os cabos concordantes 1 e 2 foram obtidos no interior do fuso, fixando-se para ponto de passagem a extremidade superior dos respectivos fusos (ponto A).

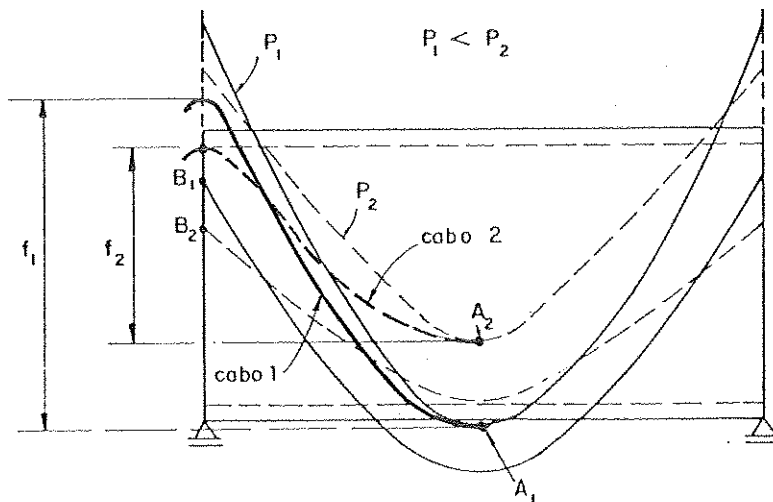


FIG. 3.6 - CABOS CONCORDANTES COM FORÇAS DE PROTENSÃO DIFERENTES

Desta análise conclui-se que pode ser obtido um cabo concordante com certa força de protensão  $P$ , de modo que a máxima flecha por ele produzida ao longo da viga coincide com a altura útil ( $h - 2c$ ) da mesma. Desta forma, ao ser transformado linearmente, ele se alojará de maneira adequada no interior da viga, aproveitando toda a altura útil em pelo menos um apoio e tramo adjacente, sem necessidade de alterar a força de protensão.

Este é o cabo concordante mais adequado, com força de protensão igual ao do cabo discordante e ambos com o mesmo fuso de passagem, portanto, com a linha de pressão no interior do referido fuso (Fig. 3.7).

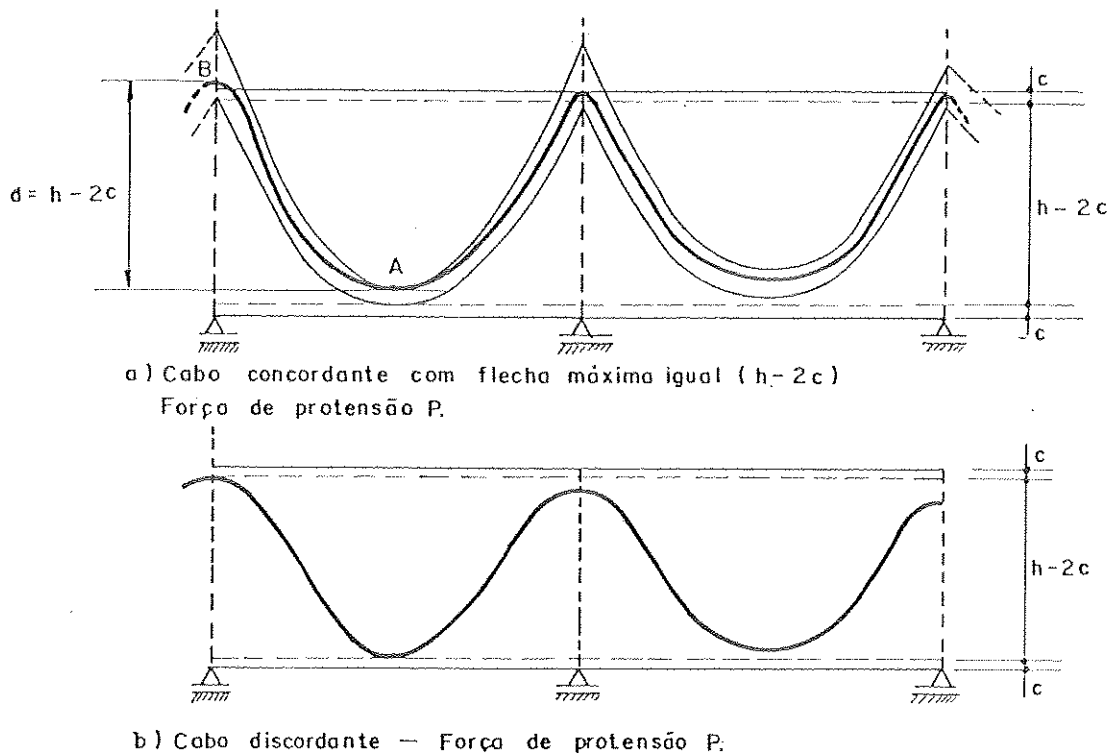


FIG. 3.7 — ALOJAMENTO DO CABO NO INTERIOR DA VIGA COM COBRIMENTO ADEQUADO.

Observe-se que a força de protensão  $P = \bar{P}$  procurada tem um valor intermediário aos valores  $P$  e  $\bar{P}$  obtidos anteriormente, ou seja, para os casos em que era necessário uma alteração da força de protensão para alojar o cabo adequadamente na viga.

Esta afirmação pode ser comprovada através da análise de fusos de passagem no mesmo tramo de uma viga submetida às mesmas ações máximas e mínimas, conforme Fig. 3.8.

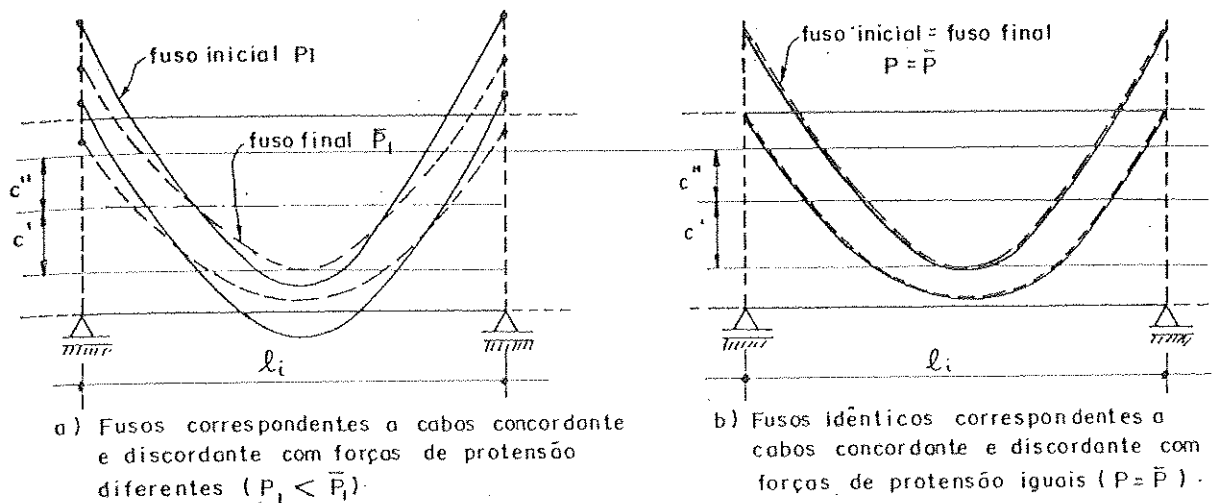


FIG. 3.8 - ANÁLISE DAS FORÇAS DE PROTENSÃO  $P$  E  $\bar{P}$  EM FUNÇÃO DO FUSO DE PASSAGEM.

Sabendo-se que as equações das curvas limites superior e inferior do fuso de passagem são respectivamente

$$e''(x) = c'' - \frac{\max M(x)}{P} \quad \text{e} \quad e'(x) = c' - \frac{\min M(x)}{P}$$

e que, em cada seção,  $c''$ ,  $c'$ ,  $\max M$  e  $\min M$  são constantes, nota-se que o único parâmetro capaz de alterar as curvas limites é a força de protensão  $P$  e que, com o aumento desta, ambas as curvas limites têm, no tramo, suas elevações diminuídas (curvas mais abatidas).

Analisando a Fig. 3.8.a, verifica-se que o cabo concordante determinado no interior do fuso inicial, com força de protensão  $P_1$ , tem flecha máxima maior que a altura útil da viga; daí a necessidade de aumentar a força de protensão para  $\bar{P}_1$  a fim de permitir o alojamento do cabo na viga. Como consequência do aumento da força de protensão, tem-se uma diminuição das elevações das curvas limites caracterizando o fuso final.

É intuitivo que, se se partir de uma força de protensão  $P$  tal que  $P_1 < P < \bar{P}_1$ , obter-se-ão curvas limites com elevações intermediárias às elevações das curvas rela

tivas a  $P_1$  e  $\bar{P}_1$ , conforme mostra a Fig. 3.8.b, o que permitirá a obtenção de cabo concordante no interior deste fuso de passagem com flecha máxima igual à altura útil  $d$ . Procedendo-se à transformação linear, o cabo se alojará de maneira adequada no interior da viga, sem a necessidade de alterar a força de protensão, portanto, com  $P = \bar{P}$  e fusos, inicial e final, iguais. Este é o procedimento correto para se obter os cabos, concordante e real, econômicos.

Da análise da Fig. 3.6, concluiu-se que para uma dada viga submetida às mesmas ações máximas e mínimas, partindo-se de forças de protensão diferentes foi possível obter traçados diferentes de cabos concordantes, enquanto que a análise da Fig. 3.7 resultou no traçado do cabo concordante econômico cuja força de protensão foi definida através da análise da Fig. 3.8.

Passa-se agora à determinação do traçado do cabo resultante econômico e da correspondente força de protensão.

### 3.4 - Determinação do cabo concordante econômico com força de protensão constante

Trata-se de determinar inicialmente uma linha de pressão ou um cabo concordante no interior do fuso de passagem, cuja máxima flecha ao longo da viga seja igual à altura útil  $d = h - 2c$ .

Considere-se uma viga reta genérica (Fig. 3.9), submetida a ações máximas e mínimas conhecidas, mas com as equações das curvas superior e inferior do fuso de passagem

$$e''(x) = c'' - \frac{\max M(x)}{P} \quad \text{e} \quad e'(x) = c' - \frac{\min M(x)}{P}$$

em função da força de protensão  $P$  não conhecida. Sabendo-se que as ordenadas extremas do núcleo limite  $c''$  e  $c'$  dependem

de  $P$ , adotar-se-ão primeiramente para seus valores as ordenadas extremas do núcleo central, ou seja,  $c'' = k'$  e  $c' = k''$ . Determinado o valor de  $P$ , calcular-se-ão as ordenadas  $c''$  e  $c'$ , confrontando-as com as adotadas inicialmente.

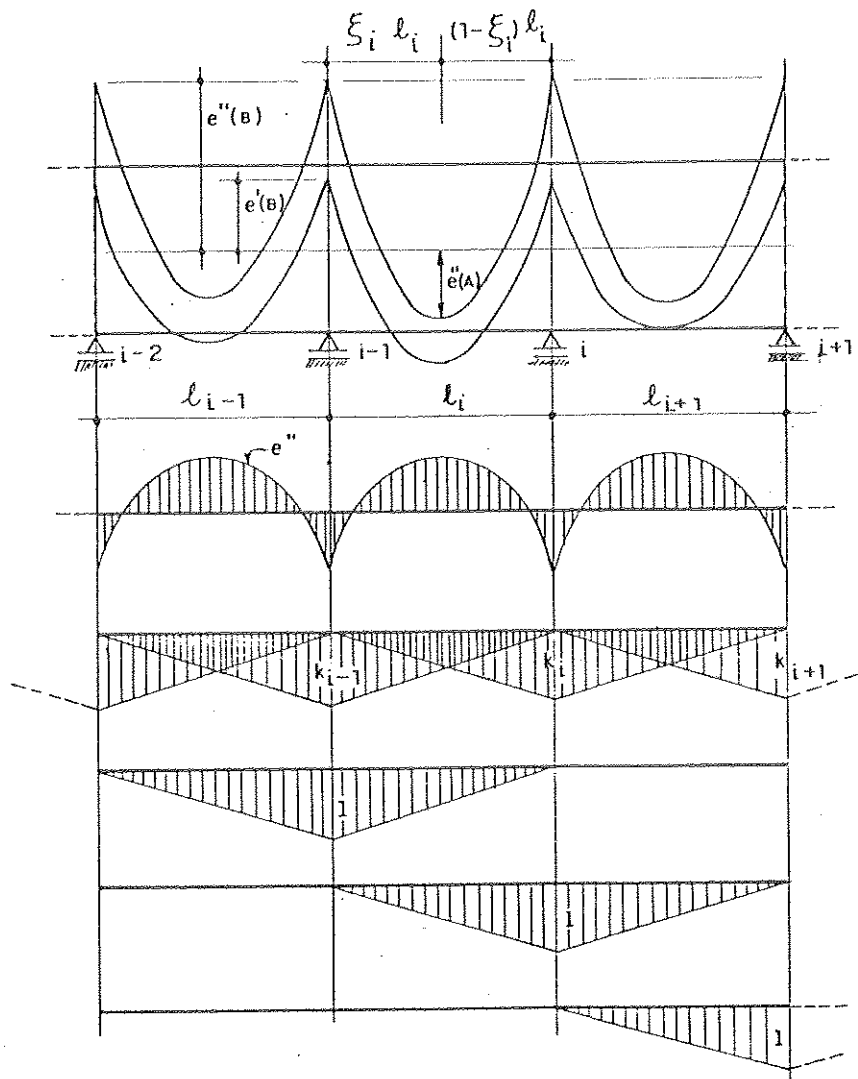


FIG. 3.9- VIGA RETA COM FUSO EM FUNÇÃO DA FORÇA DE PROTENSÃO  $P$  E MOMENTOS PARA A DETERMINAÇÃO DO CABO CONCORDANTE.



Adota-se para a equação do cabo concordante, num tramo genérico, a forma:

$$z_o(x) = \lambda e''(x) + k_i \frac{x}{\ell_i} + k_{i-1} \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right)$$

O cabo é obtido a partir da transformação da curva limite superior  $e''$  do fuso de passagem, onde  $\lambda$  é um fator de proporcionalidade,  $k_i$  e  $k_{i-1}$  são, respectivamente, os hiperestáticos de flexão à direita e à esquerda do tramo considerado.

Para uma viga com  $n$  apoios, os parâmetros que definem a forma do cabo são  $(n-2)$  hiperestáticos de flexão correspondentes aos apoios intermediários, mais o parâmetro  $\lambda$  e a força de protensão  $P$ , totalizando  $n$  incógnitas a serem determinadas. É necessário, portanto, um sistema de  $n$  equações a  $n$  incógnitas para que o problema possa ser resolvido.

O sistema de equações se escreve:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\ell_i} P \cdot z_o(x) \cdot \frac{x}{\ell_i} \frac{dx}{EI} + \int_0^{\ell_{i+1}} P \cdot z_o(x) \cdot \left(1 - \frac{x}{\ell_{i+1}}\right) \frac{dx}{EI} = 0 \quad (n-2 \text{ relações de concordância}) \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{ponto A} + k_{i-1} (1 - \xi_i) + k_i \xi_i + \lambda e''(A) = e''(A) \\ \text{ou} \\ \text{ponto B} + k_{i-1} + \lambda e''(B) = e'(B) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(uma equação que fixa um ponto} \\ \text{de passagem para o cabo)} \end{array} \\ z_o(B) - z_o(A) = d \quad \begin{array}{l} \text{(uma equação que fixa a máxima flecha} \\ \text{do cabo igual a } d = h - 2c) \end{array} \end{array} \right.$$

Cada relação de concordância pode ser escrita da seguinte forma:

$$P \int_0^{\ell_i} \left[ \lambda e^{\mu} + k_i \frac{x}{\ell_i} + k_{i-1} \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) \right] M_1 dx +$$

$$+ P \int_0^{\ell_{i+1}} \left[ \lambda e^{\mu} + k_{i+1} \frac{x}{\ell_{i+1}} + k_i \left(1 - \frac{x}{\ell_{i+1}}\right) \right] M_1 dx = 0$$

Fazendo

$$\int_0^{\ell_i} \lambda e^{\mu} \frac{x}{\ell_i} dx + \int_0^{\ell_{i+1}} \lambda e^{\mu} \left(1 - \frac{x}{\ell_{i+1}}\right) dx = \lambda \delta_{i,0}$$

$$\int_0^{\ell_i} k_i \frac{x}{\ell_i} \cdot \frac{x}{\ell_i} dx + \int_0^{\ell_{i+1}} k_i \left(1 - \frac{x}{\ell_{i+1}}\right) \left(1 - \frac{x}{\ell_{i+1}}\right) dx = k_i \delta_{i,i}$$

$$\int_0^{\ell_{i+1}} k_{i+1} \frac{x}{\ell_{i+1}} \left(1 - \frac{x}{\ell_{i+1}}\right) dx = k_{i+1} \delta_{i,i+1}$$

$$\int_0^{\ell_i} k_{i-1} \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) \frac{x}{\ell_i} dx = k_{i-1} \delta_{i,i-1}$$

e escrevendo a relação de concordância de forma simplificada obtêm-se:

$$k_{i-1} \delta_{i,i-1} + k_i \delta_{i,i} + k_{i+1} \delta_{i,i+1} + \lambda \delta_{i,0} = 0$$

Os  $\delta_{i,0}$  são calculados pela expressão

$$\delta_{i,0} = \int_0^{\ell_i} e^{\mu} M_1 dx + \int_0^{\ell_{i+1}} e^{\mu} M_1 dx$$

conforme Fig. 3.10.

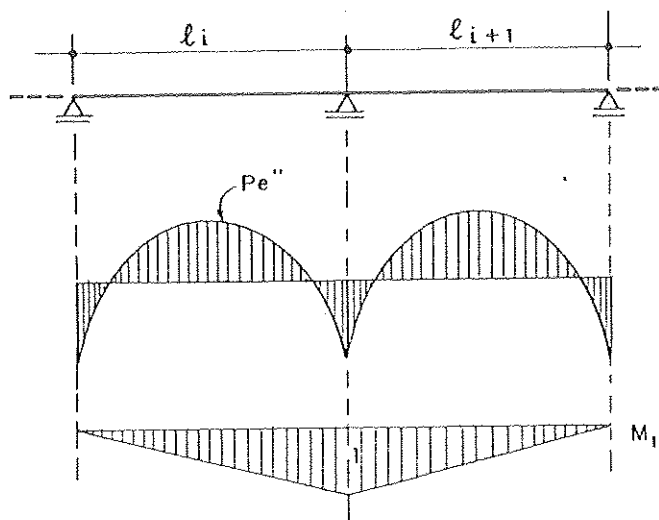


FIG. 3.10 - MOMENTOS PARA A RESOLUÇÃO  
DOS  $\delta_{i,0}$

Desenvolvendo a expressão acima em função de  $P$ ,  
tem-se

$$\delta_{i,0} = \int_0^{l_i} \left( c'' - \frac{\max M}{P} \right) M_1 dx + \int_0^{l_{i+1}} \left( c'' - \frac{\max M}{P} \right) M_1 dx$$

$$\delta_{i,0} = \int_0^{l_i} c'' M_1 dx + \int_0^{l_{i+1}} c'' M_1 dx - \frac{1}{P} \left[ \int_0^{l_i} \max M \cdot M_1 dx + \int_0^{l_{i+1}} \max M \cdot M_1 dx \right]$$

Fazendo

$$\chi_i'' = \int_0^{l_i} c'' \cdot M_1 dx + \int_0^{l_{i+1}} c'' \cdot M_1 dx = \frac{l_i + l_{i+1}}{2} c''$$

$$\Delta_i'' = \int_0^{l_i} \max M \cdot M_1 dx + \int_0^{l_{i+1}} \max M \cdot M_1 dx$$

resulta em

$$\delta_{i,0} = \chi_i'' - \frac{\Delta_i''}{P}$$

e cada relação de concordância se escreve:

$$k_{i-1} \delta_{i,i-1} + k_i \delta_{i,i} + k_{i+1} \delta_{i,i+1} + \chi_i'' \lambda - \Delta_i'' \frac{\lambda}{P} = 0$$

Fixando-se, por exemplo, a extremidade superior do fuso (ponto A) para o ponto de passagem do cabo, a equação é a seguinte:

$$k_{i-1} (1 - \xi_i) + k_i \xi_i + c'' \lambda - \max M(A) \frac{\lambda}{P} = c'' - \frac{\max M(A)}{P}$$

Desenvolvendo-se a equação que fixa a máxima flecha do cabo igual a  $d = h - 2c$ , obtêm-se:

$$z_o(B) = \lambda e''(B) + k_{i-1} = \lambda \left[ c'' - \frac{\max M(B)}{P} \right] + k_{i-1}$$

$$z_o(A) = \lambda e''(A) + k_{i-1} (1 - \xi_i) + k_i \xi_i = \lambda \left[ c'' - \frac{\max M(A)}{P} \right] + k_{i-1} (1 - \xi_i) + k_i \xi_i$$

Substituindo  $z_o(B)$  e  $z_o(A)$  na equação chega-se a:

$$\xi_i k_{i-1} - \xi_i k_i + \left[ \max M(A) - \max M(B) \right] \frac{\lambda}{P} = d$$

Assim, o sistema de  $n$  equações e  $n$  incógnitas fica:

$$\begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \dots & \delta_{1,n-2} & \chi_1'' & -\Delta_1'' \\ \delta_{2,1} & \dots & \dots & \delta_{2,n-2} & \chi_2'' & -\Delta_2'' \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{n-2,1} & \dots & \dots & \delta_{n-2,n-2} & \chi_{n-2}'' & -\Delta_{n-2}'' \\ & (1-\xi) & & \xi & c'' & -\max M(A) \\ & & & & c'' & -\max M(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-2} \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c'' - \frac{\max M(A)}{P} \\ (d+c'') - \frac{\max M(A)}{P} \end{bmatrix}$$

O sistema de equações lineares escrito na forma matricial apresenta a matriz dos coeficientes com todos os elementos conhecidos, entretanto, independente da ordem do sistema, o vetor solução apresenta elementos em função de  $P$ , cujo valor não é conhecido. A maneira adequada de resolver o sistema é através do método de eliminação de Gauss, que consiste em transformar o sistema dado num equivalente sistema triangular através de operações elementares linhas e cuja solução pode ser obtida de maneira simples, além de contornar o problema dos elementos desconhecidos do vetor independente.

Ao resolver o sistema por eliminação, a operação feita numa linha da matriz é também estendida ao correspondente elemento do vetor independente. Com o intuito de automatizar a resolução pode-se obter uma matriz retangular, agrupando à matriz dos coeficientes o vetor independente decomposto em duas colunas, uma com termos definidos e outra com termos em  $P$ , obtendo-se desta forma uma matriz

$$\left[ \begin{array}{cccccccc}
 \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \dots & \delta_{1,n-2} & X_1'' & -\Delta_1'' & 0 & 0 \\
 \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \dots & \delta_{2,n-2} & X_2'' & -\Delta_2'' & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \delta_{n-2,1} & \delta_{n-2,2} & \dots & \delta_{n-2,n-2} & X_{n-2}'' & -\Delta_{n-2}'' & 0 & 0 \\
 & & (1-\xi) & \xi & c'' & -\max M(A) & c'' & -\max M(B) \\
 & & 1 & 0 & c'' & -\max M(B) & (d+c'') & -\max M(A)
 \end{array} \right]$$

$(n, n+2)$  e nela efetuar a eliminação que resulta em:

$$\begin{bmatrix}
 1 & c_{1,2} & c_{1,3} & \dots & c_{1,n-2} & c_{1,n-1} & c_{1,n} & 0 & 0 \\
 0 & 1 & c_{2,3} & \dots & c_{2,n-2} & c_{2,n-1} & c_{2,n} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \dots & c_{2,n-2} & c_{3,n-1} & c_{3,n} & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_{n-2,n-1} & c_{n-2,n} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & c_{n-1,n} & c_{n-1,n+1} & c_{n-1,n+2} \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & c_{n,n+1} & c_{n,n+2}
 \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema equivalente triangular se escreve:

$$\begin{bmatrix}
 1 & c_{1,2} & c_{1,3} & \dots & c_{1,n-2} & c_{1,n-1} & c_{1,n} \\
 0 & 1 & c_{2,3} & \dots & c_{2,n-2} & c_{2,n-1} & c_{2,n} \\
 0 & 0 & 1 & \dots & c_{3,n-2} & c_{3,n-1} & c_{3,n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_{n-2,n-1} & c_{n-2,n} \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & c_{n-1,n} \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 k_1 \\
 k_2 \\
 k_3 \\
 \vdots \\
 k_{n-2} \\
 \lambda \\
 \frac{\lambda}{P}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 c_{n-1,n+1} + \frac{c_{n-1,n+2}}{P} \\
 c_{n,n+1} + \frac{c_{n,n+2}}{P}
 \end{bmatrix}$$

As duas últimas equações do sistema acima, podem ser isoladas do mesmo e resolvidas separadamente, pois o número de incógnitas fica reduzido a duas,  $\lambda$  e  $P$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda + c_{n-1,n} \frac{\lambda}{P} = c_{n-1,n+1} + \frac{c_{n-1,n+2}}{P} \quad (I) \\ \frac{\lambda}{P} = c_{n,n+1} + \frac{c_{n,n+2}}{P} \quad (II) \end{array} \right.$$

Isolando  $\lambda$  da equação (II) e substituindo este valor na equação (I), obtém-se uma equação do segundo grau em  $P$  que, depois de resolvida poderá fornecer os seguintes resultados:

- 1) Dois valores positivos: sendo o menor valor a solução do problema pois o maior valor conduz a um traçado não contido inteiramente dentro do fuso de passagem, com flecha máxima ocorrendo numa região diferente daquela arbitrada inicialmente e cujo valor é maior que  $d = h - 2c$ , resultando numa solução inadequada.
- 2) Um valor positivo que é a solução do problema e um valor negativo que não tem significado físico.

Obtido  $P$  e substituindo-o na equação II, determina-se o valor do parâmetro  $\lambda$  e assim o sistema triangular pode, agora, ser resolvido por retrossubstituição, ficando as demais incógnitas determinadas, definindo-se portanto a forma do cabo concordante econômico e a força de protensão correspondente.

A seguir, calculam-se as ordenadas extremas do núcleo limite e faz-se o confronto destas com aquelas adotadas inicialmente. Existem duas possibilidades:

- 1) Se os valores obtidos não coincidirem com os arbitrados inicialmente, adotar-se-ão estes últimos valores e o sistema de equações será novamente resolvido for

necendo um novo conjunto de parâmetros, entre os quais, a força  $P$ . A partir de  $P$  obtêm-se os valores  $c''$  e  $c'$  que deverão ser confrontados com aqueles últimos adotados. Procedendo-se desta forma, encontrar-se-á um valor de  $P$ , para o qual as ordenadas obtidas serão iguais às adotadas.

- 2) Se os valores  $c''$  e  $c'$  obtidos forem iguais aos arbitrados inicialmente significa que os parâmetros obtidos na resolução do sistema de equações estão corretos.

O fuso de passagem fica determinado através das curvas limites e, a seguir, verificam-se as condições de existência do cabo concordante no interior do referido fuso.

Para satisfazer a condição de fuso aberto, a força de protensão encontrada deve obedecer à condição:

$$P \geq \frac{\Delta M}{c'' - c'}$$

Do mesmo modo, nos tramos adjacentes a cada apoio intermediário, devem ser respeitadas as seguintes condições:

$$\delta(e'') \geq 0 \quad \text{e} \quad \delta(e') \leq 0$$

A integral  $\delta(e'')$  é idêntica à integral  $\delta_{i,0}$  calculada anteriormente na página 3.18. Portanto:

$$\delta(e'') = X_i'' - \frac{\Delta_i''}{P}$$

Como

$$\delta(e'') \geq 0 \quad \rightarrow \quad X_i'' - \frac{\Delta_i''}{P} \geq 0$$



Assim, a força de protensão encontrada deve satisfazer a condição:

$$P \geq \frac{\Delta_i''}{\chi_i''}$$

Analogamente, para se obter  $\delta(e')$ , faz-se (Fig. 3.11):

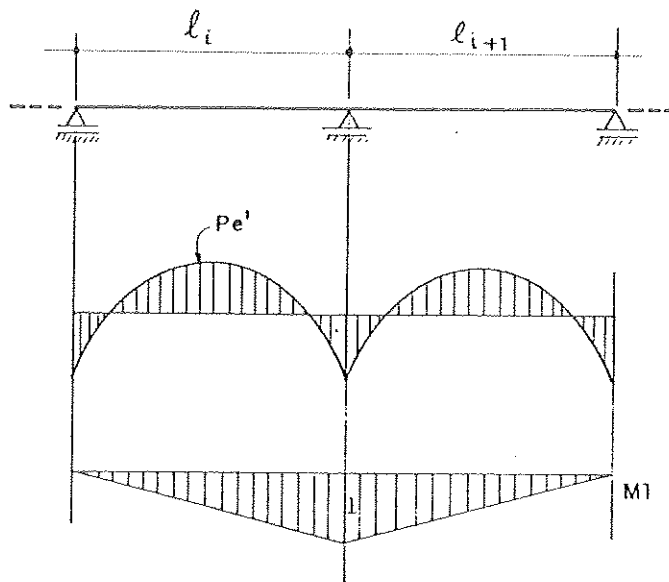


FIG. 3.11 - MOMENTOS PARA DETERMINAÇÃO DE  $\delta(e')$

$$\delta(e') = \int_0^{l_i} e' M_1 dx + \int_0^{l_{i+1}} e' M_1 dx \leq 0$$

Desenvolvendo a expressão acima chega-se a

$$\delta(e') = \chi_i' - \frac{\Delta_i'}{P} \leq 0$$

onde

$$X_i' = \int_0^{\ell_i} c' M_1 dx + \int_0^{\ell_{i+1}} c' M_1 dx = \frac{\ell_i + \ell_{i+1}}{2} c'$$

$$\Delta_i' = \int_0^{\ell_i} \min M \cdot M_1 dx + \int_0^{\ell_{i+1}} \min M \cdot M_1 dx$$

Assim, a força de protensão encontrada deve também obedecer à condição:

$$P \leq \frac{\Delta_i'}{X_i'}$$

Ainda que a força de protensão encontrada satisfaça todas as condições anteriores, não se pode garantir que o cabo concordante esteja contido no interior do fuso de passagem. Para que isto ocorra é necessário e suficiente que as ordenadas do cabo ao longo da viga obedeam à condição:

$$e''(x) \geq z_0(x) \geq e'(x)$$

Entretanto, observa-se que, se esta condição for verificada, todas as condições anteriores ficam automaticamente verificadas.

Se o cabo concordante encontrado se situar fora do fuso, um outro ponto de passagem deverá ser fixado, o sistema de equações resolvido e um novo traçado do cabo determinado, de modo a obter o mesmo no interior do fuso.

Nos apoios o cabo concordante deverá ser arredondado. Pode-se introduzir o arredondamento em  $e''(x)$ , isto é, em  $\max M(x)$ , obtendo-se cabo concordante já com essa forma.

Observe-se que o cabo concordante obtido cria, além da força de protensão  $P$ , momento de flexão e força

cortante, e se desenvolve no plano vertical que contém o eixo da viga, caracterizando a protensão com cabo resultante centrado.

Obtido o cabo concordante econômico, passa-se à determinação do cabo real econômico.

### 3.5 - Determinação do cabo real econômico com força de protensão constante

Para se obter o cabo real é necessário introduzir no cabo concordante transformações lineares de modo a alojá-lo no interior da viga com cobrimento adequado. Como se sabe, estas transformações lineares não alteram a posição da linha de pressão. Considere-se um trecho genérico de uma viga contínua (Fig. 3.11).

Designando  $d''$  a altura máxima do cabo na parte superior, para garantir o cobrimento deve-se ter  $d'' = y'' - c$  e  $d'$  a cota máxima na parte inferior, também para garantir o cobrimento deve-se ter  $d' = y' + c$ .

Determinando no apoio  $i$  e tramos adjacentes os momentos que o cabo, transformado linearmente e alojado no interior da viga, produz em relação ao centro de gravidade tem-se:

$$\begin{aligned} M_a &= Pa_i & M_v &= Pv_i \quad (Pv_{i+1}) \\ &= \bar{P}d'' & &= \bar{P}d' \end{aligned}$$

Conclui-se que:

$$\frac{P}{\bar{P}} = \frac{d''}{a_i} = \frac{d'}{v_i} \quad \text{ou} \quad \frac{a_i}{v_i} = \frac{d''}{d'}$$

Entretanto,  $a_i$  e  $v_i$  ( $v_{i+1}$ ) foram obtidos por transformação linear da seguinte forma:

$$a_i = \bar{a}_i + k_i$$

$$v_i = \bar{v}_i + k_{i-1}(1-\xi_i) + k_i \xi_i \quad p / \bar{v}_i < \bar{v}_{i+1}$$

$$v_{i+1} = \bar{v}_{i+1} + k_i \xi_{i+1} + k_{i+1}(1-\xi_{i+1}) \quad p / \bar{v}_{i+1} < \bar{v}_i$$

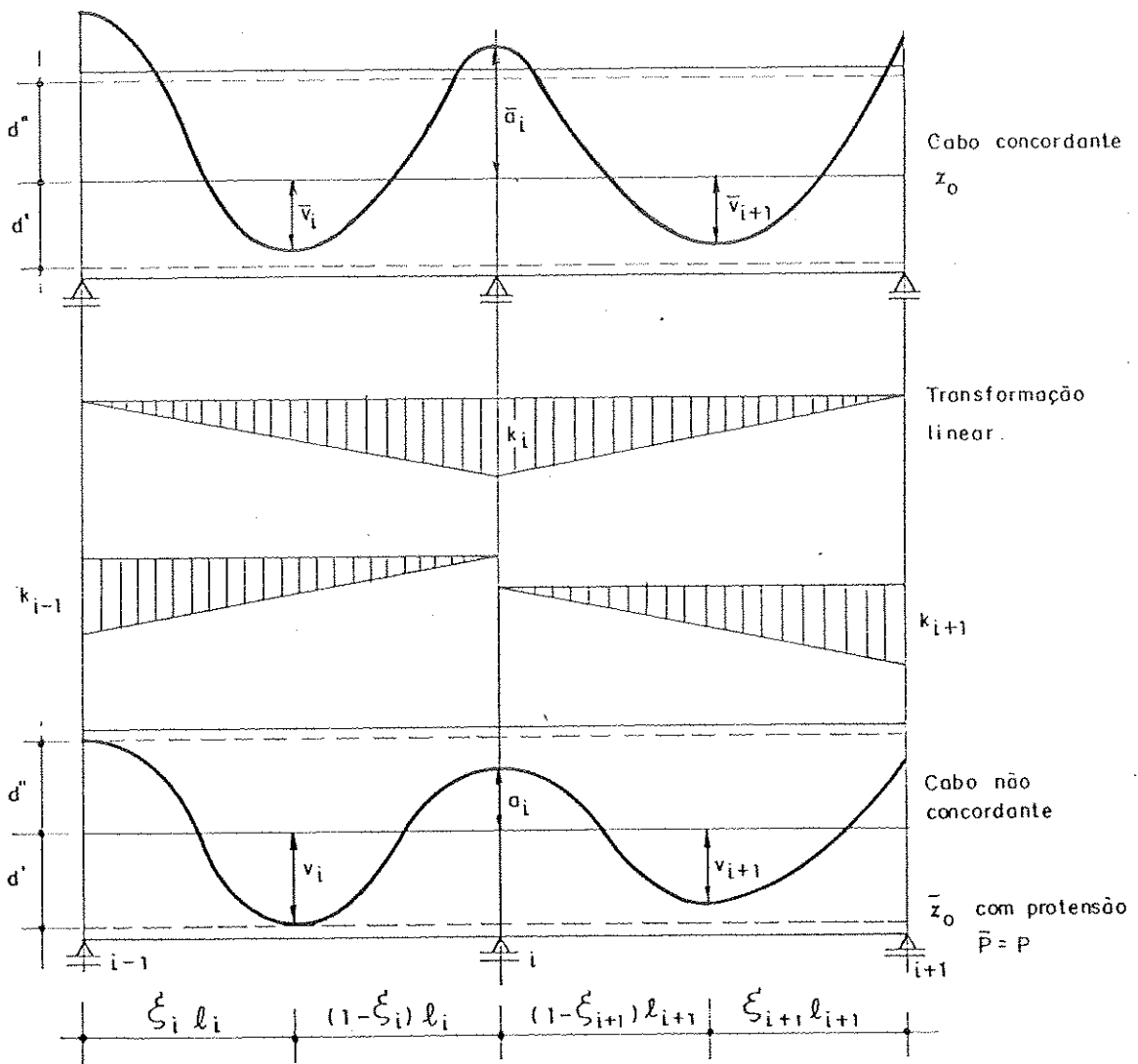


FIG. 3.12 - TRANSFORMAÇÃO LINEAR NUM TRECHO GENÉRICO.

Seja  $\bar{a}_i$  o valor da ordenada do cabo concordante no apoio,  $\bar{v}_i$  ou  $\bar{v}_{i+1}$  a maior ordenada do cabo nos tramos adjacentes ao apoio considerado.

Substituindo estas equações na equação anterior tem-se:

para  $\bar{v}_i < \bar{v}_{i+1}$

$$a_i d' = v_i d'' + d'(\bar{a}_i + k_i) = d'' \bar{v}_i + k_{i-1}(1 - \xi_i) + k_i \xi_i$$

$$k_{i-1}(1 - \xi_i) + k_i \left( \xi_i - \frac{d'}{d''} \right) + \left( \bar{v}_i - \frac{d'}{d''} \bar{a}_i \right) = 0 \quad (3.3)$$

para  $\bar{v}_{i+1} < \bar{v}_i$

$$a_i d' = v_{i+1} d'' + d'(\bar{a}_i + k_i) = d''(\bar{v}_{i+1} + k_i \xi_{i+1} + k_{i+1})(1 - \xi_{i+1})$$

$$k_i \left( \xi_{i+1} - \frac{d'}{d''} \right) + k_{i+1}(1 - \xi_{i+1}) + \left( \bar{v}_{i+1} - \frac{d'}{d''} \bar{a}_i \right) = 0 \quad (3.4)$$

Assim obtêm-se um sistema de  $(n-2)$  equações e  $(n-2)$  incógnitas que resolvido fornece as incógnitas hiperestáticas.

No tramo  $i$ , a equação do cabo real será:

$$\bar{z}_{oi} = z_{oi} + k_i \xi_i + k_{i-1}(1 - \xi_i) \quad \text{Cabo discordante com força de protensão } P.$$

Observe-se que  $P = \bar{P}$ , isto é, na transformação linear a força de protensão não é alterada, já que o cabo concordante obtido tem flecha máxima igual à altura útil  $d$  da viga.

## 3.6 - Exemplo

Considere-se uma viga contínua com seção transversal constante, conforme mostra a figura 3.13.

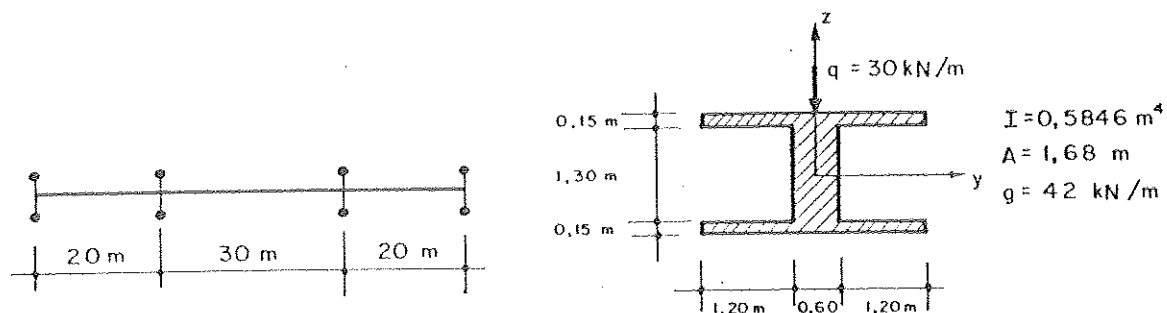


FIG. 3.13- ESQUEMA ESTÁTICO DE VIGA E CARACTERÍSTICAS DA SEÇÃO

Como não se conhece a força de protensão, não é possível calcular as ordenadas extremas do núcleo limite, por isso, adota-se inicialmente para estes valores as ordenadas extremas do núcleo central, dadas por:

$$c'' = k' = - \frac{I}{A \cdot z'} = 0,4350 \text{ m}$$

$$c' = k'' = - \frac{I}{A \cdot z''} = -0,4350 \text{ m}$$

Após a determinação da força de protensão e do cabo concordante, aquelas ordenadas serão calculadas e confrontadas com as ordenadas adotadas.

Na Tabela 3.1 são fornecidos os esforços devidos ao carregamento externo.

TABELA 3.1 - ESFORÇOS SOLICITANTES (kNm)

Equações dos momentos fletores (para carga unitária)

1º Tramo:  $M = 100 s \left(1 - \frac{s}{20}\right) - 673,077 \frac{s}{20}$

2º Tramo:  $M = 150 s \left(1 - \frac{s}{30}\right) - 673,077$

3º Tramo:  $M = 100 s \left(1 - \frac{s}{20}\right) - 673,077 \left(1 - \frac{s}{20}\right)$

Seção	S (m)	M <sub>g</sub>	M <sub>q</sub>	max M	Min M	M	max M Adotado
0	0	0	0	0	0	0	346,154
1	2	473,308	338,077	811,385	473,308	338,077	961,385
2	4	778,615	556,154	1334,769	778,615	556,154	1369,385
3	6	915,923	654,231	1570,154	915,923	654,231	1570,154
4	8	885,231	632,308	1517,539	885,231	632,308	1563,692
5	10	686,538	490,385	1176,923	686,538	490,385	1350,000
6	12	319,846	228,462	548,308	319,846	228,462	929,077
7	14	-214,846	-153,462	-214,846	-368,308	153,462	300,923
8	16	-919,538	-655,385	-917,538	-1572,923	655,385	-534,462
9	18	-1788,231	-1277,308	-1788,231	-3065,539	1277,308	-1577,077
10	20/0	-2826,923	-2019,231	-2826,923	-4846,154	2019,231	-2826,923
11	3	-1125,923	-804,231	-1125,923	-1930,154	804,231	-637,846
12	6	+197,077	+140,769	+337,846	+197,077	140,769	1064,769
13	9	1142,077	815,769	1957,846	1142,077	815,769	2280,923
14	12	1709,077	1220,769	2929,846	1709,077	1220,769	3010,615
15	15	1898,077	1355,769	3253,846	1898,077	1355,769	3253,846

Os valores de  $\max M$  não obedecem a uma função matemática definida, por isso, com o intuito de simplificar o cálculo, adota-se para  $\max M$  uma função parabólica que melhor se ajuste àqueles valores e de maneira que em cada seção se tenha  $\max M_{\text{adotado}} > \max M$ . Desta forma, a curva superior e" adotada, parabólica, representará a curva e" real e estará contida no interior do fuso de passagem.

Os valores de  $\max M_{\text{adotado}}$  são:

1º Tramo:

$$\max M_{\text{adot.}}(x) = \frac{4fx}{\ell} \left( \frac{x}{\ell} - 1 \right) + \left( \frac{b-a}{\ell} \right) x + a \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 346,154 \text{ kNm} \\ b = 2826,923 \text{ kNm} \\ f = 2590,3845 \text{ kNm} \end{array} \right.$$

2º Tramo:

$$\max M_{\text{adot.}}(x) = \frac{4fx}{\ell} \left( \frac{x}{\ell} - 1 \right) + b \quad \left\{ \begin{array}{l} b = 2826,923 \text{ kNm} \\ f = 6080,769 \text{ kNm} \end{array} \right.$$

3º Tramo

$$\max M_{\text{adot.}}(x) = \frac{4fx}{\ell} \left( \frac{x}{\ell} - 1 \right) + \left( \frac{b-a}{\ell} \right) x + a \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -2826,923 \text{ kNm} \\ b = 346,154 \text{ kNm} \\ f = 2590,3845 \text{ kNm} \end{array} \right.$$

A partir dos esforços solicitantes e das características geométricas da seção, determinam-se os coeficientes do sistema de equações, cuja solução fornece os parâmetros que definem a forma do cabo concordante econômico e sua força de protensão.

Os coeficientes das relações de concordância são:

$$\delta_{11} = \frac{1}{3} (\ell_1 + \ell_2) = \frac{50}{3}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3} (\ell_2 + \ell_3) = \frac{50}{3}$$



$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{6} \ell_2 = \frac{30}{6} = 5$$

$$\delta_{13} = \chi_1'' = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} c'' = \frac{50}{2} \times 0,435 = 10,875 \quad \chi_2'' = 10,875$$

$$\delta_{14} = \Delta_1'' = \frac{2\max M(5)\ell_1 + \max M(10)(\ell_1 + \ell_2) + 2\max M(15)\ell_2}{6}$$

$$\Delta_1'' = \Delta_2'' = 18491,78667$$

Fixando para ponto de passagem do cabo a seção de maior  $\Delta M$ , correspondente ao apoio, tem-se:

$$\lambda e''(B) + k_1 = e'(B)$$

que leva a:

$$k_1 + 0,435 \lambda + 2826,923 \frac{\lambda}{P} = -0,435 + \frac{4846,154}{P}$$

A equação que fixa a máxima flecha do cabo com cordante pode ser obtida fazendo

$$d = h - 2c = 1,60 - 2 \times 0,10 = 1,40 \text{ m}$$

que substituído na equação resulta em:

$$0,5 k_1 - 0,5 k_2 + 6080,769 \frac{\lambda}{P} = 1,40$$

Portanto, o sistema de equações se escreve:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,435 & 2826,923 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 6080,769 \\ \frac{50}{3} & 5 & 10,875 & -17980,768 \\ 5 & \frac{50}{3} & 10,875 & -17980,768 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,435 + \frac{4846,154}{P} \\ 1,40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quando se resolve o sistema por eliminação, a operação feita numa linha da matriz dos coeficientes é entendida também ao correspondente elemento do vetor independente. Então, para sistematizar a resolução, pode-se obter uma matriz retangular  $(n, n+2)$ , isto é,  $(4, 6)$  que consiste em agrupar os elementos da matriz dos coeficientes com os elementos do vetor independente e nela efetuar a eliminação de Gauss.

A matriz retangular é obtida fazendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,435 & 2826,923 & -0,435 & 4846,154 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 6080,769 & 1,40 & 0 \\ 50/3 & 5 & 10,875 & -17980,768 & 0 & 0 \\ 5 & 50/3 & 10,875 & -17980,768 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Procedendo-se à eliminação chega-se a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,435 & 2826,923 & -0,435 & 4846,154 \\ 0 & 1 & 0,435 & -9334,615 & -3,235 & 4846,154 \\ 0 & 0 & 1 & -12705,56988 & 16,15157 & -72413,79538 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,00023 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema triangular equivalente obtido se escreve:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,435 & 2826,923 \\ 0 & 1 & 0,435 & 9334,615 \\ 0 & 0 & 1 & -12705,569 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,435 + \frac{4846,154}{P} \\ -3,235 + \frac{4846,154}{P} \\ 16,155 - \frac{72413,795}{P} \\ 0,00023 \end{bmatrix}$$

As duas últimas equações do sistema, podem ser isoladas e resolvidas pois, obtêm-se um sistema de duas equações a duas incógnitas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda - 12705,569 \frac{\lambda}{P} = 16,155 - \frac{72413,795}{P} \end{array} \right. \quad \text{(I)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda}{P} = 0,00023 \end{array} \right. \quad \text{(II)}$$

Isolando  $\lambda$  da equação (II) e substituindo na equação (I), fica-se com uma equação do segundo grau em  $P$

$$P^2 - 82944,70 P + 314.842.587,00 = 0$$

cuja solução fornece:

$$P_1 = 3987 \text{ kN} \quad (\text{solução correta})$$

$$P_2 = 78957,19 \text{ kN}$$

Por se tratar de um sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes não é singular, o sistema admite solução única, portanto, para cada valor de  $P$  obtêm-se um conjunto de valores  $\lambda$ ,  $k_1$  e  $k_2$ .

O menor valor de  $P$  corresponde à solução do problema, pois o outro valor conduz a traçado do cabo concordante fora do fuso de passagem.

Substituindo  $P = 3987 \text{ kN}$  na equação (II), vem:

$$\lambda = 0,91794$$

Encontrados os valores de  $\lambda$  e  $P$ , e retornando ao sistema equivalente triangular, calculam-se, por retrossubstituição os demais parâmetros cujos valores são:

$$k_1 = k_2 = -0,26967$$

É necessário agora determinar as ordenadas do núcleo limite e confrontá-las com aquelas adotadas inicialmente. Utilizando as expressões contidas na Figura 2.9 do capítulo dois, obtêm-se:

$$a'' = k'' \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_{cs}}{\sigma_{cg}}\right) = +2,3144m \quad b'' = k' \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_{cs}}{\sigma_{cg}}\right) = 0,4350m$$

$$a' = k' \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_{cv}}{\sigma_{cg}}\right) = -2,3144m \quad b' = k'' \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_{cv}}{\sigma_{cg}}\right) = -0,4350m$$

$$\text{com } \bar{\sigma}_{cs} = \bar{\sigma}_{cv} = 15.000 \text{ kN/m}^2, \quad \bar{\sigma}_{cs} = \bar{\sigma}_{cv} = 0 \text{ e } P = 3.987\text{kN}$$

Nota-se que o menor domínio entre os quatro pontos, que caracteriza o núcleo limite, coincide com o núcleo central. Portanto,  $c'' = -c' = 0,4350m$  e os valores adotados inicialmente estão corretos.

Conhecidos todos os parâmetros, determinam-se as ordenadas das curvas limites e do cabo concordante, cujos valores são apresentados na Tabela 3.2.

Verificada a existência do cabo concordante no interior do fuso de passagem, faz-se o alojamento do mesmo no interior da viga com cobrimento adequado. Os hiperestáticos de protensão podem ser calculados utilizando-se as expressões (3.3) e (3.4) do parágrafo 3.5

$$k_1 \cdot (1-0,5) + k_2 \cdot (0,5+1) + 0,161 = 0$$

$$k_1 \cdot (0,5+1) + k_2 \cdot (1-0,5) + 0,161 = 0$$

que formam um sistema que, depois de resolvido, fornece:

$$k_1 = k_2 = - 0,0805$$

TABELA 3.2 - ORDENADAS DAS CURVAS LIMITES, DOS CABOS  
CONCORDANTE E REAL

Seção	$e''$ (m)	$z_o$ (m)	$e'$ (m)	$\bar{z}_o$ (m)
0	0,3482	0,3196	-0,4350	0,3196
1	0,1939	0,1510	-0,5537	0,1430
2	0,0915	0,0301	-0,6303	0,0140
3	0,0412	-0,0431	-0,6647	-0,0673
4	0,0428	-0,0686	-0,6570	-0,1008
5	0,0964	-0,0464	-0,6072	-0,0866
6	0,2020	0,0236	-0,5152	-0,0247
7	0,3595	0,2737	-0,3426	-0,2173
8	0,5691	0,3066	-0,0405	0,2422
9	0,8306	0,5197	0,3339	0,4473
10	1,1440	0,7805	0,7805	0,7000
11	-0,5950	0,2765	0,0491	0,1960
12	0,1679	-0,1155	-0,4844	-0,1960
13	-0,1371	-0,3955	-0,7215	-0,4760
14	-0,3201	-0,5635	-0,8637	-0,6440
15	-0,3811	-0,6195	-0,9111	-0,7000

equação do cabo concordante  $z_o$

$$1^{\circ} \text{ Tramo: } z_o(x) = 0,91794 e''(x) - 0,26967 \frac{x}{\ell_1}$$

$$2^{\circ} \text{ Tramo: } z_o(x) = 0,91794 e''(x) - 0,26967 \left(1 - \frac{x}{\ell_2}\right) + \\ - 0,26967 \frac{x}{\ell_2}$$

As ordenadas do cabo real são dadas por:

$$1^{\circ} \text{ Tramo: } \bar{z}_o(x) = z_o(x) - 0,0805 \frac{x}{l_1}$$

$$2^{\circ} \text{ Tramo: } \bar{z}_o(x) = z_o(x) - 0,0805 \frac{x}{l_2} - 0,0805 \left(1 - \frac{x}{l_2}\right)$$

cujos valores são fornecidos na Tabela 3.2.

O cabo real fica alojado no interior da viga com cobrimento adequado sem alterar a posição inicial da linha de pressão. Na Fig. 3.14 estão representados as curvas li mites, o cabo concordante e o cabo real.

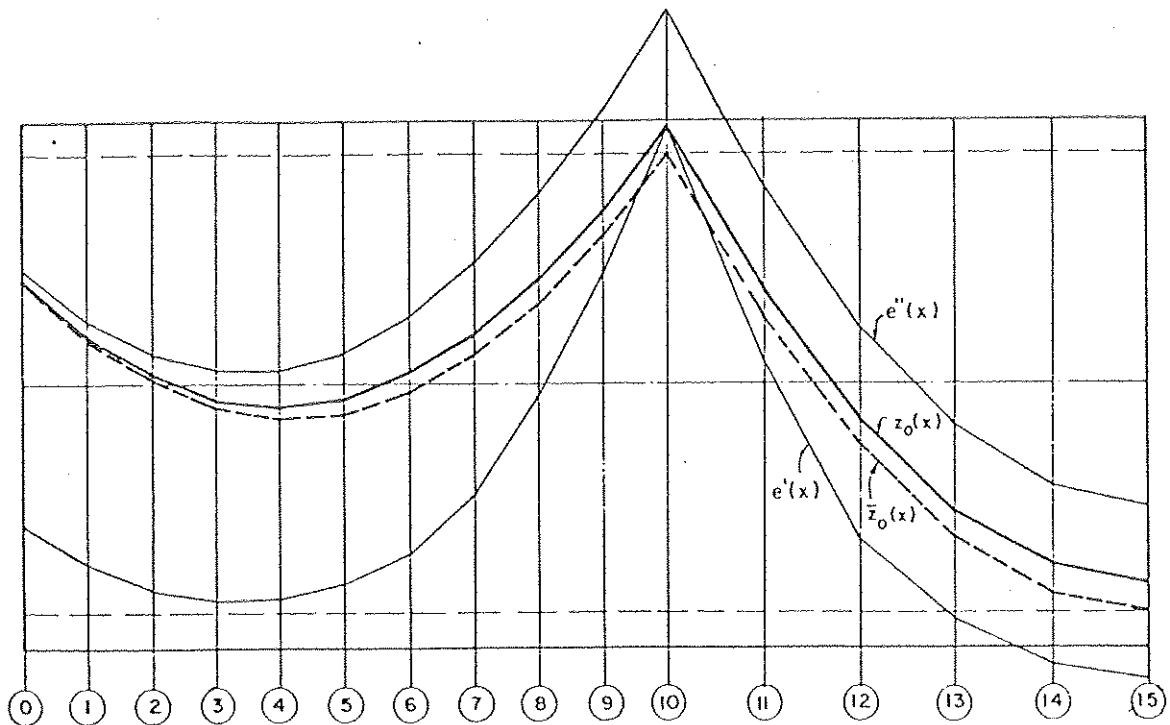


FIG. 3.14 - TRAÇADOS DAS CURVAS LIMITES, DO CABO CONCORDANTE E DO CABO REAL - PROTENSÃO CENTRADA - P CONSTANTE.

## 4. VIGAS RETAS CONTÍNUAS

### 4.1 - Generalidades

No capítulo anterior o leitor teve a oportunidade de se familiarizar com a técnica de obtenção do cabo de protensão econômico, cujo desenvolvimento ocorreu no plano vertical que contém o eixo da viga, portanto, um cabo resultante centrado que é o caso mais simples. Neste capítulo será feita uma abordagem mais ampla, isto é, estudar-se-ão situações diferentes de protensão que serão distinguidas conforme o plano de desenvolvimento do cabo resultante e dos esforços criados pela protensão. Para cada caso, e em função dos esforços externos, procurar-se-á determinar cabos resultantes econômicos, cujos esforços criados se oponham àqueles externos, e de modo que a linha de pressão da protensão esteja situada no interior do fuso de passagem.

O carregamento externo a ser considerado corresponde a uma carga vertical uniforme  $q$  atuando no plano  $x-z$ , um momento uniforme  $t$  e a força de protensão  $P$ , conforme indicados na figura 4.1 que mostra um elemento de barra reta em equilíbrio.

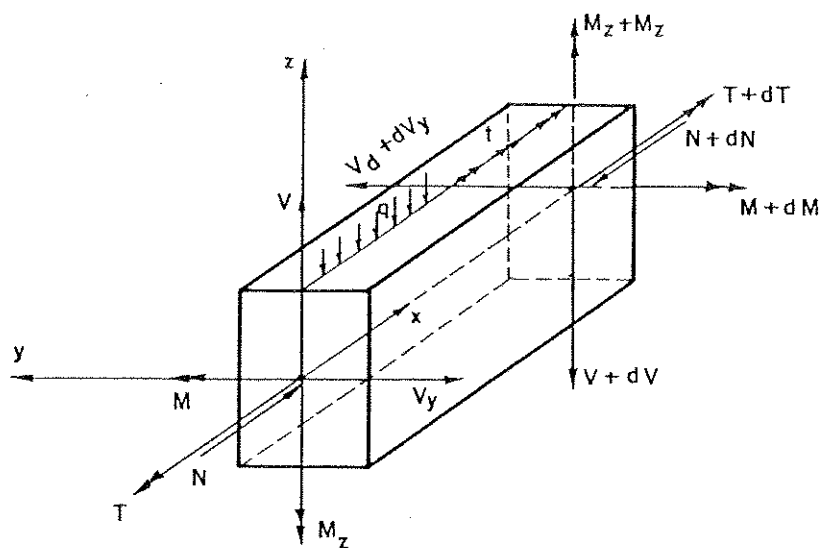


FIG. 4.1 - EQUILÍBRIO DE UM ELEMENTO DE BARRA RETA PLANA

Considere-se um cabo de protensão genérico desen<sub>v</sub>olvendo-se num plano vertical paralelo ao plano que con<sub>t</sub>ém o eixo da viga (fig. 4.2). Em sistemas estaticamente indeterminados, com protensão concordante, os esforços pro<sub>du</sub>zidos pelo cabo são obtidos da seguinte maneira:

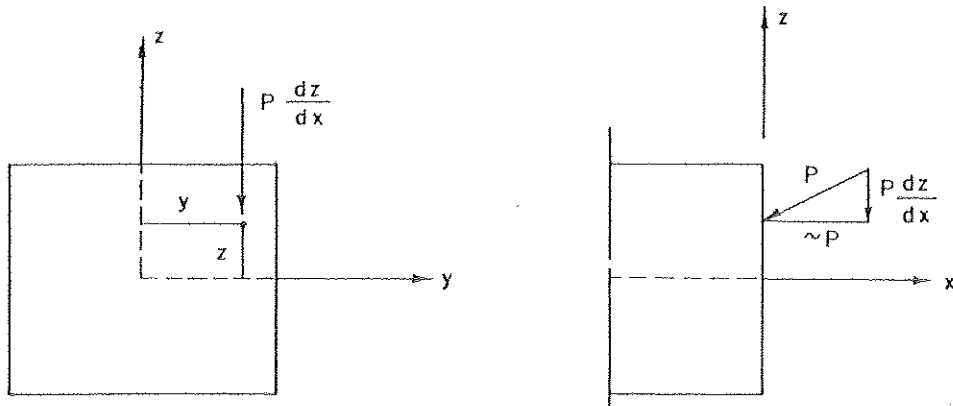


FIG. 4.2 — ESFORÇOS PROVOCADOS POR UM CABO GENÉRICO  
NUMA VIGA RETA

$$M_p = P \cdot z \quad \dots (4.1)$$

$$T_p = P y \frac{dz}{dx} \quad \dots (4.2)$$

$$V_p = P \cdot \frac{dz}{dx} \quad \dots (4.3)$$

$$M_{z,p} = P \cdot y \quad \dots (4.4)$$

Os esforços residuais são obtidos somando-se a estes últimos, aqueles correspondentes ao carregamento externo, o que leva a

$$M_r = P z + M_q \quad \dots (4.5)$$

$$T_r = -P y \frac{dz}{dx} + T_q \quad \dots (4.6)$$



$$V_r = P \frac{dz}{dx} + V_q \quad \dots (4.7)$$

$$M_{z,r} = P y \quad \dots (4.8)$$

Imaginando sempre dois cabos resultantes parciais se desenvolvendo em planos verticais paralelos ao eixo da viga, cujo traçado resultante é concordante, serão estudadas as seguintes situações:

#### 4.1.1 - Protensão com cabo resultante centrado

É o caso em que os cabos resultantes parciais se desenvolvem em planos verticais paralelos ao eixo da viga, com excentricidades  $y_1 = +e$  e  $y_2 = -e$ , e se reduzem a um único cabo resultante centrado, recaindo no caso de protensão já estudado no capítulo anterior. Neste caso, os cabos parciais apresentam, em cada seção, retas de ação dos vetores força de protensão com mesma inclinação, conforme mostra a fig. 4.3.

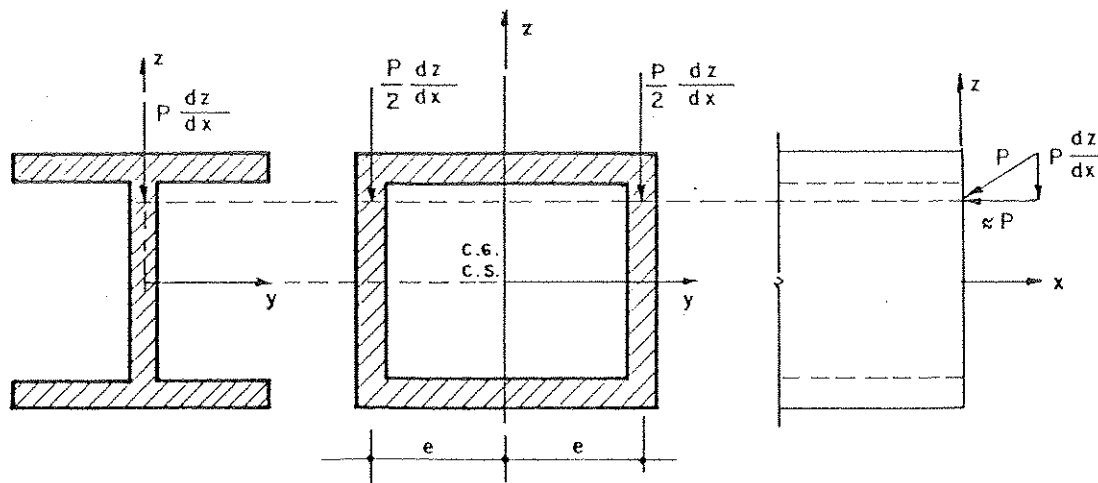


FIG. 4.3 — PROTENSÃO COM CABO RESULTANTE CENTRADO.

Os esforços criados pelo cabo resultante são:

$$M_p = P \cdot z \quad \dots (4.9)$$

$$V_p = P \cdot \frac{dz}{dx} \quad \dots (4.10)$$

Neste caso, a protensão não cria momento de torção, porém, cria momento de flexão e força cortante que somados aos correspondentes esforços produzidos pelo carregamento externo resultam em esforços residuais que, juntamente com o momento de torção externo, deverão ser resistidos pela própria viga.

As equações dos cabos resultantes parciais são iguais às do cabo resultante total. Assim,

$$z_1(x) = z_2(x) = z(x)$$

As forças de protensão são:

$$P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$$

#### 4.1.2 - Protensão com cabo resultante não centrado

É o caso em que os cabos parciais se desenvolvem em planos verticais paralelos ao eixo da viga, com excentricidades  $y_1 = +e$  e  $y_2 = -e$ , e se reduzem a um único cabo resultante com excentricidade  $y = e^*$ . Aqui os cabos parciais também apresentam, em cada seção, retas de ação dos vetores força de protensão com mesma inclinação (fig. 4.4).

Os esforços criados pela protensão se escrevem:

$$M_p = P \cdot z = P_1 \cdot z + P_2 \cdot z \quad \dots (4.11)$$

$$T_p = -P \cdot e^* \cdot \frac{dz}{dx} = -P_1 \cdot e \cdot \frac{dz}{dx} + P_2 \cdot e \cdot \frac{dz}{dx} \quad (4.12)$$

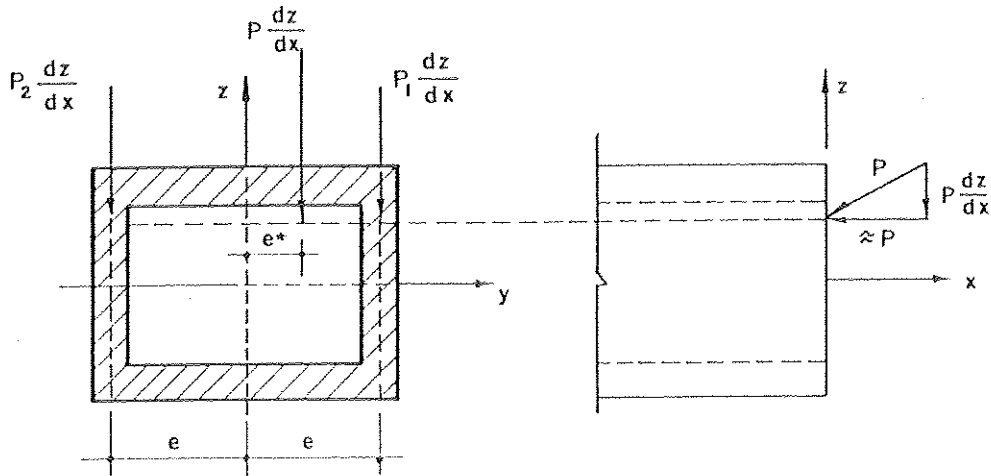


FIG. 4.4 — PROTENSÃO COM CABO RESULTANTE NÃO CENTRADO

$$V_p = P_1 \frac{dz}{dx} + P_2 \frac{dz}{dx} \quad \dots (4.13)$$

$$M_{z,p} = P \cdot e^* \quad \dots (4.14)$$

$$P = P_1 + P_2 \quad \dots (4.15)$$

Neste caso, a protensão cria momento de flexão, momento de torção e força cortante que somados a  $M_q$ ,  $T_q$  e  $V_q$ , respectivamente, resultam em esforços residuais que juntamente com o momento  $M_{z,p}$  deverão ser resistidos pela própria viga.

As equações dos cabos resultantes parciais são iguais às do cabo resultante total

$$z_1(x) = z_2(x) = z^*(x)$$

e, a partir das equações (4.12) e (4.15), determinam-se as forças de protensão dos cabos resultantes parciais, cujos valores são:

$$P_1 = \frac{P}{2} \left(1 + \frac{e^*}{e}\right) \quad P_2 = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{e^*}{e}\right)$$

## 4.1.3 - Protensão com dois cabos reversos

É o caso em que os dois cabos parciais se desenvolvem em planos verticais paralelos ao eixo da viga, com excentricidades  $y_1 = +e$  e  $y_2 = -e$ , e se reduzem a um único cabo resultante mais um vetor momento (Fig. 4.5).

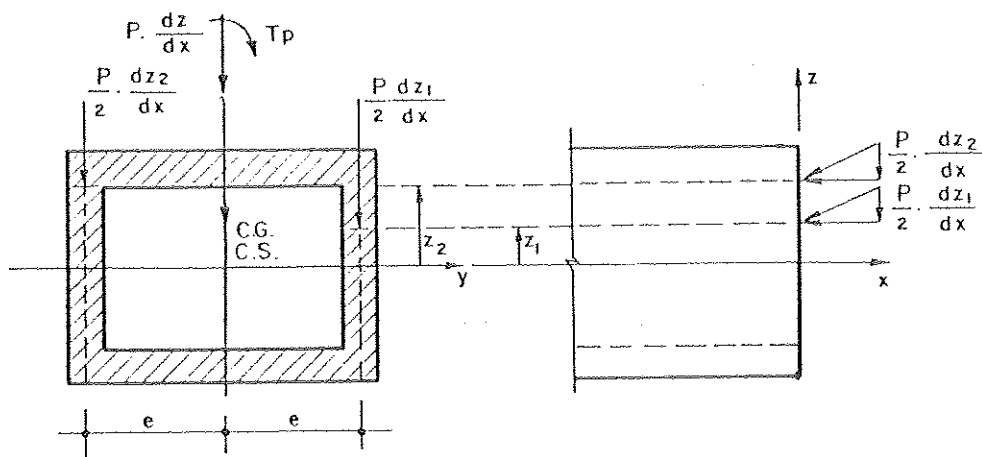


FIG.4.5- PROTENSÃO COM 2 CABOS REVERSOS.

Neste caso, os cabos apresentam em cada seção, retas de ação dos vetores força de protensão com inclinações diferentes, o que equivale dizer que os vetores não são coplanares, daí a denominação de cabos reversos. Desta forma só é possível reduzi-los a um único vetor, mais um vetor momento conforme mostra a fig. 4.6.

Fazendo  $P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$  evita-se a ocorrência de  $M_{z,p}$  e, assim é possível afirmar que o momento fletor total dos dois cabos parciais é equivalente ao momento criado por um cabo resultante centrado.

Os esforços criados pela protensão ficam:

$$M_p = P_1 z_1 + P_2 z_2 \quad \dots (4.16)$$

$$T_p = -P_1 \cdot e \cdot \frac{dz_1}{dx} + P_2 \cdot e \cdot \frac{dz_2}{dx} \quad \dots (4.17)$$

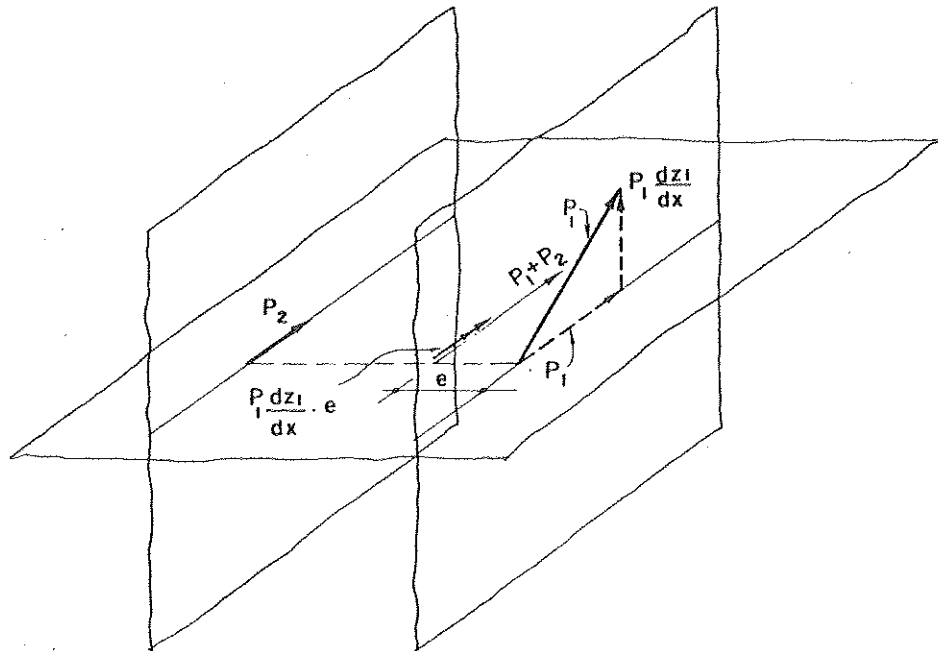


FIG. 4.6— DOIS CABOS QUE SE REDUZEM A UM ÚNICO  
MAIS UM VETOR MOMENTO

$$V_p = P_1 \frac{dz_1}{dx} + P_2 \frac{dz_2}{dx} \quad \dots (4.18)$$

A protensão cria momento de flexão, momento de torção e força cortante que somados a  $M_q$ ,  $T_q$  e  $V_q$  respectivamente, resultam nos esforços residuais a serem resistidos pela viga.

A partir das equações (4.16) e (4.17), deduzem-se as equações dos cabos resultantes parciais expressas por

$$z_1(x) = z(x) - \frac{1}{eP} \int_0^x T_p \cdot dx \quad \dots (4.19)$$

$$z_2(x) = z(x) + \frac{1}{eP} \int_0^x T_p \cdot dx \quad \dots (4.20)$$

onde  $z(x)$  é a equação do cabo resultante centrado. As equações dos cabos parciais correspondem a um caso particu

lar de uma dedução geral feita por Montanari [15] e que será apresentada no quinto capítulo, onde se tratará de vigas curvas.

#### 4.2 - Condições de Concordância necessárias para a obtenção do cabo concordante

Na resolução de vigas retas contínuas será adotado como sistema fundamental a viga com articulação à flexão nos apoios intermediários, obtendo-se um sistema constituído de vigas simplesmente apoiadas à flexão e biengastadas à torção, com  $(n-2)$  incógnitas de flexão a serem determinadas. (Fig. 4.7).

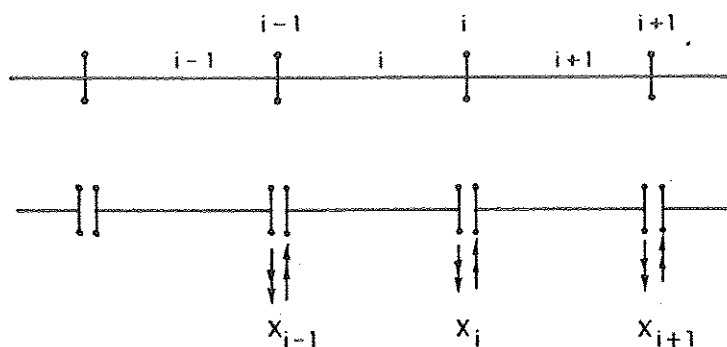


FIG. 4.7 — SISTEMA FUNDAMENTAL ADOTADO EM VIGAS CONTÍNUAS

Observa-se que a viga simples do sistema fundamental é hiperestática, portanto, para que os esforços nesta viga sejam conhecidos, a incógnita hiperestática de torção deve ser conhecida ou então, nula se se tratar de protensão concordante.

Para um melhor entendimento das condições de concordância a serem obedecidas na determinação do cabo concordante, de acordo com cada caso de protensão, será feito um breve estudo das vigas simples hiperestáticas.

Considere-se inicialmente a viga simples, biapoia da flexão e biengastada à torção (fig. 4.8).

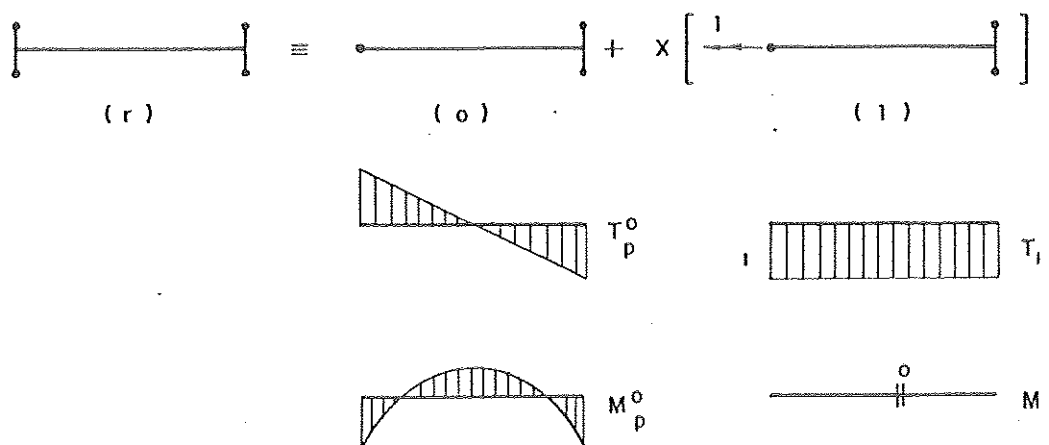


FIG. 4.8 — RESOLUÇÃO DO SISTEMA REAL

O sistema é uma vez estaticamente indeterminado e, a incógnita hiperestática adotada é o momento de torção no apoio. Qualquer que seja o momento de torção desenvolvido, este não influencia o momento de flexão. Da equação de compatibilidade de deslocamentos para a resolução do sistema real tem-se:

$$EI \delta_{11} = K \int_0^x T_1^2 \cdot dx = K \cdot l$$

$$EI \delta_{10} = K \int_0^l T_p^o T_1 \cdot dx$$

$$\rightarrow X = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

Vê-se que a incógnita hiperestática será nula somente quando  $EI \delta_{10} = 0$ .

Na protensão centrada, o cabo não cria momento de torção, portanto, a incógnita hiperestática é nula. É o caso da protensão das vigas sem torção

Na protensão não centrada, o cabo produz momento de torção  $T_p^o$  no sistema fundamental. Considere-se, por e

xemplo, um cabo resultante parabólico de corda horizontal cuja forma é:

$$z(x) = \frac{4fx}{\ell} \left( \frac{x}{\ell} - 1 \right) + a$$

O momento de torção  $T_p^0$  no sistema fundamental i sostático produzido pelos cabos parciais é

$$T_p^0 = -e(P_1 - P_2) \frac{dz}{dx} = -e(P_1 - P_2) \frac{4f}{\ell} \left( \frac{2x}{\ell} - 1 \right)$$

cujo diagrama linear é antimétrico em relação ao eixo da viga, resultando numa incôgnita hiperestática nula e consequentemente num cabo concordante. O momento de torção  $T_p^0$  na estrutura hiperestática é igual ao momento de torção  $T_p^0$  do sistema fundamental isostático, ou seja, tudo se passa como se a estrutura fosse isostática.

Se for empregado um cabo resultante reto e com inclinação diferente de zero (fig. 4.9), o momento de torção provocado pelos cabos parciais no sistema fundamental é igual a

$$T_p^0 = -e(P_1 - P_2) \frac{b-a}{\ell}$$

constante ao longo do tramo.

Da equação de compatibilidade dos deslocamentos determina-se o hiperestático de protensão

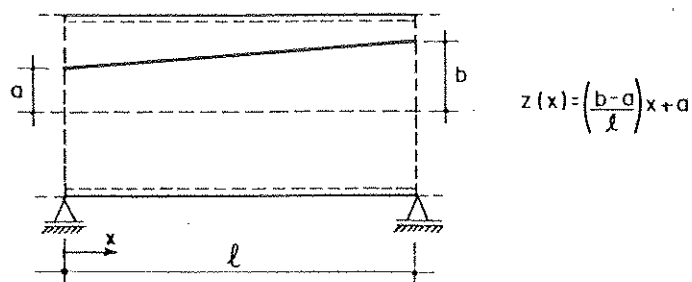


FIG. 4.9 - CABO DE PROTENSÃO RETO COM INCLINAÇÃO DIFERENTE DE ZERO



$$EI \delta_{10} = \int_0^{\ell} T_p^0 \cdot T_1 \cdot dx = -K e^{(P_1 - P_2)} \left( \frac{b-a}{\ell} \right)$$

$$EI \delta_{11} = K \int_0^{\ell} T_1^2 dx = K\ell$$

$$\rightarrow X = e^{(P_1 - P_2)} \frac{b-a}{\ell}$$

que somado ao momento de torção  $T_p^0$  fornece o momento de torção final nulo, significando que o cabo reto produz hiperestático de torção, porém, não desenvolve reações de apoio.

Feitas estas considerações pode-se concluir que a superposição do cabo parabólico de corda horizontal e do cabo reto de inclinação diferente de zero, representa um cabo parabólico genérico com momento de torção final igual ao do cabo parabólico de corda horizontal e que embora não desenvolva reações de apoio, apresenta hiperestático de protensão. O momento de torção é criado apenas pela parte curva do cabo.

Na protensão com cabos reversos, para que se possa aplicar as equações de  $z_1(x)$  e  $z_2(x)$ , é necessário determinar o cabo concordante, isto é, deve-se respeitar a condição de concordância

$$\int T_p^0 T_1 dx = 0 \quad \rightarrow \quad \int T_p^0 dx = 0$$

portanto, qualquer cabo que apresenta momento de torção no sistema fundamental, cuja integral ao longo da viga é nula, é solução para o problema.

Considere-se agora, uma viga reta engastada articulada à flexão e biengastada à torção (fig. 4.10).

O sistema é duas vezes estaticamente indeterminado. Adota-se como sistema fundamental a viga biapoiada à flexão e biengastada à torção, resultando numa incógnita hiperestática a ser determinada.

Vê-se que o sistema fundamental adotado é um sistema hiperestático, porém, cujos resultados já são conhecidos

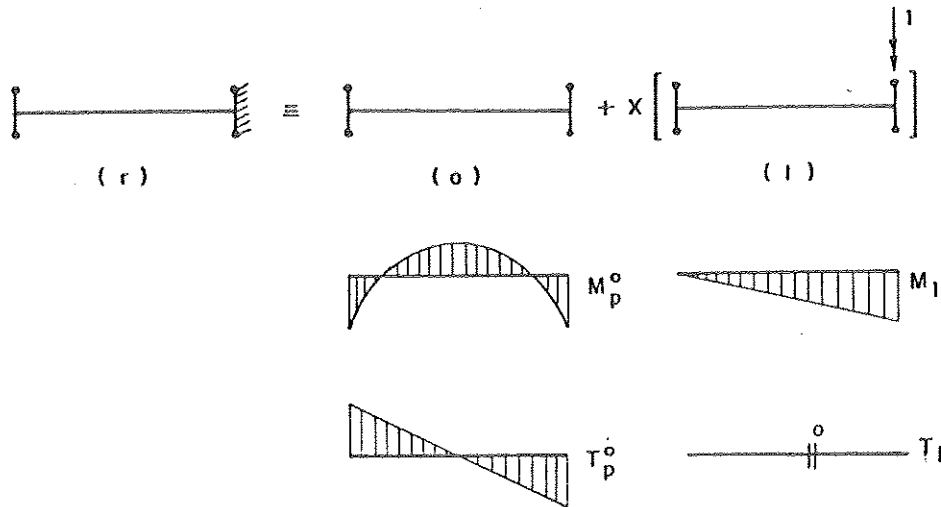


FIG. 4.10 — RESOLUÇÃO DO SISTEMA REAL

dos, no que diz respeito à torção.

Feitas estas considerações e sabendo que o momento de torção não influencia o momento de flexão, analisam-se, para os diferentes casos de protensão, os desenvolvimentos de  $T_p^o$  e  $M_p^o$  de modo que se obtenha protensão concordante, isto é, todas as incógnitas hiperestáticas nulas.

Na protensão centrada, o cabo não cria momento de torção  $T_p^o$ , recaindo no caso de vigas sem torção.

A condição de concordância a ser obedecida é

$$EI \delta_{10} = \int_0^l M_p^o M_1 dx = 0$$

e o momento de flexão final será igual ao momento  $M_p^o$  do sistema fundamental.

Na protensão não centrada, o cabo produz no sistema fundamental  $T_p^o$  e  $M_p^o$ . A condição de concordância a ser respeitada é:

$$EI \delta_{i,o} = \int_0^l M_p^o \cdot M_1 dx = 0$$

O cabo é concordante para as incógnitas hiperestática de flexão, porém, não se pode afirmar que ele também o será para as incógnitas de torção, pois conforme visto anteriormente, o desnivelamento do cabo parabólico nos apoios

provoca hiperestático de protensão quanto a momento de torção, embora o momento de torção final seja criado apenas pela parte curva do cabo concordante.

Na protensão com cabos reversos, estes criam momento de torção e momento de flexão no sistema fundamental. Para que se possa aplicar as equações dos cabos parciais as condições de concordância a serem respeitadas são:

$$EI \delta_{i,o} = \int_0^l M_p^o \cdot M_1 dx = 0$$

$$EI \delta_{i,o}^t = K \int_0^l T_p^o \cdot T_1 dx = 0 \rightarrow \int_0^l T_p^o dx = 0$$

No caso de vigas contínuas, para se obter as condições de concordância referentes a cada caso de protensão, basta generalizar o que foi desenvolvido para a viga simples apoiada engastada à flexão e biengastada à torção.

Fundamentalmente a protensão cria esforços que somados às correspondentes solicitações externas resultam em esforços que não devem necessariamente se anular.

No caso de vigas sem torção os cabos parciais devem criar um momento de flexão total  $M_p$  que somado ao momento externo  $M_q$  resulta num momento  $M_r$  suficiente para manter, ao longo da viga, as tensões dentro de limites pré-estabelecidos, o que equivale dizer que o cabo resultante total, isto é, a linha de pressão da protensão deve estar situada no interior do fuso de passagem.

No caso de vigas com torção existem duas possibilidades:

- 1) Os cabos parciais não criam momento de torção, então todo o momento de torção externo deverá ser resistido pela própria viga. O cabo resultante total deverá criar momento de flexão tal que a linha de pressão esteja situada no interior do fuso de passagem. O problema é resolvido como se a viga não tivesse torção.

- 2) Os cabos parciais criam momento de torção que vai se opor ao momento de torção externo até um certo grau desejado, podendo até resultar numa torção residual nula, enquanto que o cabo resultante total deve criar um momento de flexão tal que a linha de pressão esteja situada no interior do fuso de passagem.

Pode-se concluir que o ponto de partida para a determinação dos traçados econômicos dos cabos resultantes parciais, é a determinação do cabo concordante resultante no interior do fuso de passagem, que a seguir é desdobrado nos dois cabos parciais e, estes, através de transformações lineares são alojados no interior da viga com cobertura adequada, resultando nos traçados econômicos reais.

#### 4.3 - Determinação dos traçados dos cabos resultantes econômicos com força de protensão constante

##### 4.3.1 - Protensão centrada

O cabo concordante centrado é aquele já determinado no capítulo três.

Os cabos resultantes parciais localizados nas faces da viga podem ser obtidos desmembrando o cabo concordante centrado em dois cabos com as mesmas ordenadas daquele primeiro e com forças de protensão iguais a  $P/2$ .

##### 4.3.2 - Protensão não centrada

Este é o caso onde o cabo resultante cria momento de torção e momento de flexão no sistema fundamental (fig. 4.11).

Em cada apoio intermediário a relação de concordância a ser respeitada é:

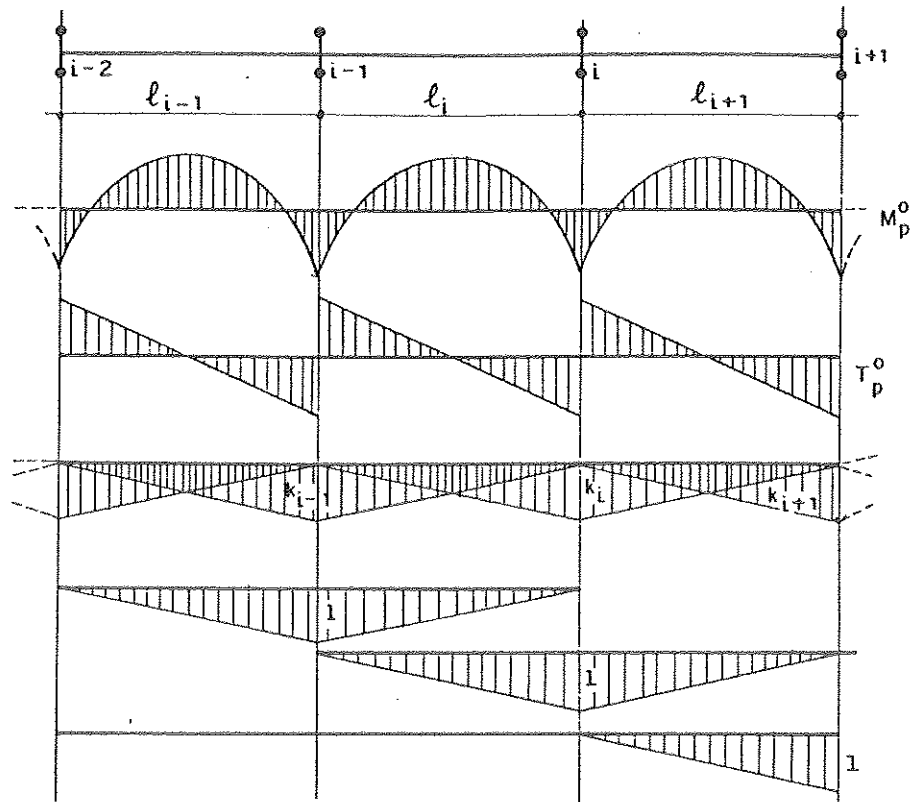


FIG. 4. II - MOMENTOS PARA A DETERMINAÇÃO DO CABO CONCORDANTE.

$$EI \delta_{i,o} = \int_0^{l_i} M_p^0 M_l dx + \int_0^{l_{i+1}} M_p^0 M_l dx = 0$$

Se se adotar para equação do cabo concordante

$$z_o^*(x) = \lambda e^n(x) + k_i \frac{x}{l_i} + k_{i-1} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right)$$

os esforços no estado fundamental ficam:

$$M_p^0 = P \cdot z_o^*(x)$$

$$T_p^0 = -P \cdot e^* \cdot \frac{dz_o^*(x)}{dx}$$

Sendo o momento de torção criado apenas pela parte curva do cabo, pode-se escrever:

$$\frac{dz^*(x)}{dx} = \lambda \frac{de''(x)}{dx}$$

Fazendo

$$e''(x) = c'' - \frac{\max M(x)}{P} \quad (c'' \text{ e } P \text{ constantes})$$

$$\frac{de''(x)}{dx} = - \frac{d \max M(x) / dx}{P} = - \frac{\max M'(x)}{P}$$

o que leva a

$$T_p^0 = e^* \cdot \lambda \cdot \max M'(x)$$

O sistema de equações para a determinação do ca  
bo concordante é idêntico ao da protensão centrada e os re  
sultados são os mesmos, ou seja, cabos concordantes com e  
quações e forças de protensão iguais, porém, aqui o ca  
bo apresenta uma excentricidade  $e^*$ .

Determinado o cabo concordante adequado para a  
flexão, isto é, no interior do fuso de passagem e com fle  
cha máxima igual à altura útil  $d$  da viga, fazem-se as  
transformações lineares necessárias para alojar o mesmo no  
interior da viga com cobrimento adequado obtendo, deste mo  
do, o cabo resultante real. Agora, em função do momento de  
torção que se deseja criar através da protensão determina  
-se a excentricidade  $e^*$  do cabo resultante e, faz-se o des  
membramento do mesmo em dois cabos parciais reais coloca  
dos nas faces da viga com forças de protensão  $P_1$  e  $P_2$  obti  
das através da resolução do sistema:

$$\begin{cases} P \cdot e^* = (-P_1 + P_2)e \\ P = P_1 + P_2 \end{cases}$$

Note-se que na transformação linear do cabo re  
sultante, embora sejam introduzidos hiperestáticos de pro

tensão, a linha de pressão não se altera e os momentos finais serão aqueles do sistema fundamental, isto é,  $M_p^0$  e  $T_p^0$ .

#### 4.3.3 - Protensão com cabos reversos

Neste caso, os cabos criam momentos de flexão e momento de torção no sistema fundamental (fig. 4.12).

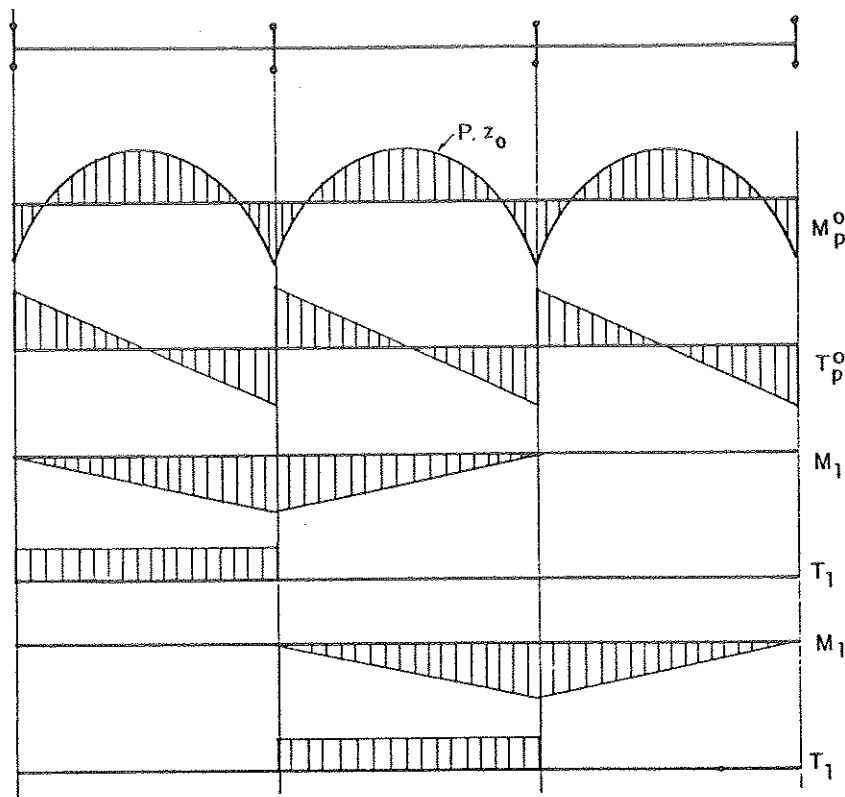


FIG.4.12 — MOMENTOS PARA A DETERMINAÇÃO DO CABO CONCORDANTE

As equações dos cabos reversos  $z_1$  e  $z_2$  se escrevem:

$$z_1(x) = z_0(x) - \frac{1}{2eP} \int_0^x T_p \cdot dx$$

$$z_2(x) = z_0(x) + \frac{1}{2eP} \int_0^x T_p \cdot dx$$

onde  $z_0(x)$  é a equação do cabo resultante centrado e  $T_p$  é a equação do momento de torção criado pelos cabos. Vê-se que as equações dos cabos  $z_1$  e  $z_2$  são obtidas a partir do cabo resultante subtraindo e somando, respectivamente, uma mesma parcela proveniente da torção.

Em cada apoio intermediário, as condições de concordância a serem obedecidas são:

$$EI \delta_{i,o}^t = K \int_0^{\ell_i} T_p^o \cdot T_l \cdot dx + K \int_0^{\ell_{i+1}} T_p^o \cdot T_l \cdot dx = 0$$

$$EI \delta_{i,o} = \int_0^{\ell_i} M_p^o \cdot M_l \cdot dx + \int_0^{\ell_{i+1}} M_p^o \cdot M_l \cdot dx = 0$$

Se se escolhe para  $T_p^o$  um diagrama antimétrico no tramo, as integrais referentes à torção serão sempre nulas. Isto pode ser conseguido fazendo  $T_p^o$  proporcional a  $T_q$ , que é linear e antimétrico no tramo. Como a protensão cria esforços que se opõem aos esforços produzidos pelo carregamento externo, o esforço residual é obtido fazendo:

$$T_r = T_p^o + T_q \quad \rightarrow \quad T_r - T_q = T_p^o = \beta T_q$$

Para  $\beta = -1$ , tem-se  $T_r = 0$ , assim todo o momento de torção devido ao carregamento externo será anulado pela protensão. Para  $\beta = 0$ , tem-se  $T_r = T_q$ , deste modo todo o momento de torção externo será resistido pela própria viga.

Procedendo-se desta maneira, pode-se através da protensão criar momento de torção até um certo grau desejado e de modo que sempre se consiga:



$$EI \delta_{i,0}^t = K \int_0^{\ell} \beta T_q \cdot T_1 \cdot dx + K \int_0^{\ell_{i+1}} \beta T_q \cdot T_1 \cdot dx = 0$$

É preciso então encontrar um cabo que satisfaça a condição de concordância

$$EI \delta_{i,0} = \int_0^{\ell_i} M_p^0 \cdot M_1 \cdot dx + \int_0^{\ell_{i+1}} M_p^0 \cdot M_1 \cdot dx = 0$$

como se a viga não tivesse torção, e depois determinar  $z_1$  e  $z_2$  através das equações já conhecidas.

A determinação do cabo concordante se faz do mesmo modo que nos dois parágrafos anteriores e, de forma que ao ser desdobrado nos cabos parciais reversos, estes resultem em traçados econômicos.

Quando o cabo concordante centrado é desdobrado nos dois cabos parciais, estes apresentam traçados com formas diferentes, sendo que um deles assume flecha máxima maior que a correspondente flecha do cabo centrado. Deve-se então, determinar um cabo concordante tal que ao ser desdobrado nos dois cabos parciais  $z_1$  e  $z_2$ , um destes tenha flecha máxima igual à altura útil da viga  $d = h - 2c$ . Resta, portanto, saber qual dos cabos terá maior flecha, para a partir do mesmo, determinar a máxima altura útil do cabo concordante centrado.

Analisando as expressões de  $z_1(x)$  e  $z_2(x)$  e com auxílio da fig. 4.13, tiram-se as seguintes conclusões:

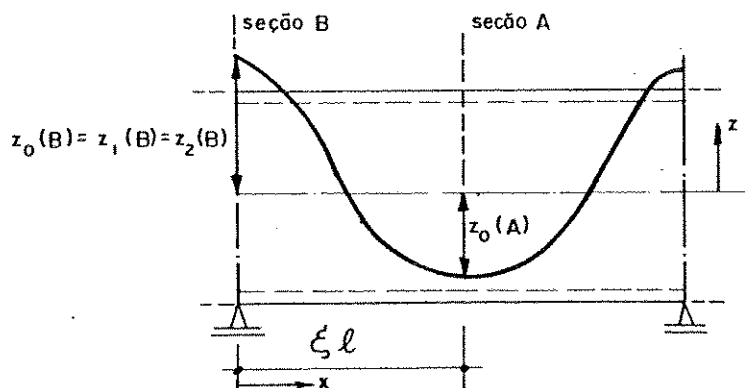


FIG. 4.13 - FLECHAS DOS CABOS, RESULTANTE E PARCIAIS.

$$z_1(x) = z_0(x) - \frac{\beta}{2eP} \int_0^x T_q \cdot dx$$

$$z_2(x) = z_0(x) + \frac{\beta}{2eP} \int_0^x T_q \cdot dx$$

Na seção do apoio, a integral

$$\int_0^x T_q \cdot dx$$

é nula, ficando as equações  $z_1(B) = z_2(B) = z_0(B)$

Na seção A, ao longo do vão, tem-se

$$z_1(A) = z_0(A) - \frac{\beta}{2eP} \int_0^x T_q \cdot dx$$

$$z_2(A) = z_0(A) + \frac{\beta}{2eP} \int_0^x T_q \cdot dx$$

Nota-se que o cabo parcial que tem maior flecha é aquele que na seção A tem ordenada menor que  $z_0(A)$ . Para isto, deve-se estudar o sinal da integral

$$\int_0^{\epsilon l} T_q \cdot dx$$

além de se considerar  $\beta$  negativo.

$$\text{Se, } \int_0^{\epsilon l} T_q dx > 0 \rightarrow \frac{\beta}{2eP} \int_0^{\epsilon l} T_q dx < 0 \rightarrow z_2(A) < z_0(A)$$

assim, o cabo  $z_2$  terá maior flecha.

$$\text{Se, } \int_0^{\epsilon l} T_q dx < 0 \rightarrow \frac{\beta}{2eP} \int_0^{\epsilon l} T_q dx > 0 \rightarrow z_1(A) < z_0(A)$$

o cabo  $z_1$  terá maior flecha.

Supondo que o cabo  $z_1(x)$  tem a máxima flecha, então é preciso que

$$z_1(B) - z_1(A) = d \quad \dots (I)$$

$$z_1(B) = z_0(B)$$

$$z_1(A) = z_0(A) - \frac{\beta}{2eP} \int_0^{\xi l} T_q \cdot dx$$

Substituindo estes valores na equação (I) tem-se

$$z_0(A) - z_0(B) + \frac{\beta}{2eP} \int_0^{\xi l} T_q \, dx = d$$

e a máxima flecha do cabo concordante centrado é:

$$z_0(B) - z_0(A) = d - \frac{\beta}{2eP} \int_0^{\xi l} T_q \, dx$$

Analogamente, supondo que o cabo  $z_2(x)$  tem a máxima flecha chega-se a:

$$z_0(B) - z_0(A) = d + \frac{\beta}{2eP} \int_0^{\xi l} T_q \, dx$$

Vê-se que independente dos cabos  $z_1$  e  $z_2$ , o cabo concordante centrado deve ter uma flecha máxima igual a

$$z_0(B) - z_0(A) = d - \left| \frac{\beta}{2eP} \int_0^{\xi l} T_q \, dx \right| = \bar{d}$$

Conclui-se que estudar o sinal de

$$\int_0^{\xi l} T_q \, dx,$$

significa fisicamente qual o posicionamento ou o plano de

de atuação do carregamento externo para que os cabos parciais sejam dispostos convenientemente, de modo a criar um momento de torção oposto ao daquele carregamento.

O sistema de equações, para a determinação do cabo concordante e da correspondente força de protensão, se escreve:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \cdots \delta_{1,n-2} & \chi_1'' & -\Delta_1'' \\ \delta_{21} & \delta_{22} \cdots \delta_{2,n-2} & \chi_2'' & -\Delta_2'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{n-2,1} \cdots \delta_{n-2,n-2} & \chi_{n-2}'' & -\Delta_{n-2}'' \\ & (1-\xi) & \xi & c'' \\ & \xi & -\xi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-2} \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c'' - \frac{\max M(A)}{P} \\ \frac{d}{P} \end{bmatrix}$$

A solução do sistema fornece a força de protensão  $P$  e a equação do cabo concordante  $z_0(x)$ . Verificada a existência deste cabo no interior do fuso de passagem, de terminam-se as equações dos cabos reversos concordantes.

A força de protensão  $P$  associada aos traçados dos cabos reversos se constitui numa solução econômica.

Para se obter os cabos reversos reais, faz-se o alojamento dos cabos reversos concordantes no interior da viga com cobrimento adequado. Isto pode ser feito de duas maneiras:

- a) Introduzir transformações lineares em um cabo sobre os apoios intermediários, de modo a alojá-lo no interior da viga. Para o outro deverão ser feitas as mesmas transformações mas em sentido contrário, isto é, se num apoio o deslocamento de um cabo é para cima, o outro cabo terá o mesmo deslocamento mas, para baixo. Estes deslocamentos iguais e de sinais contrários

rios para os dois cabos não alteram o momento final de flexão. Os deslocamentos do cabo introduzem hiperestáticos de torção que, entretanto, não alteram o momento de torção do sistema fundamental. Depois de alojados, um dos cabos aproveitará toda a altura útil da viga em pelo menos um apoio e tramo adjacente, enquanto que o outro cabo terá folga no cobrimento. Note-se que a linha de pressão permanece inalterada.

- b) O alojamento dos cabos no interior da massa de concreto se faz através de deslocamentos constantes em toda a extensão da viga, de maneira a não alterar os momentos no estado fundamental. Este fato pode ser constatado na figura 4.14.

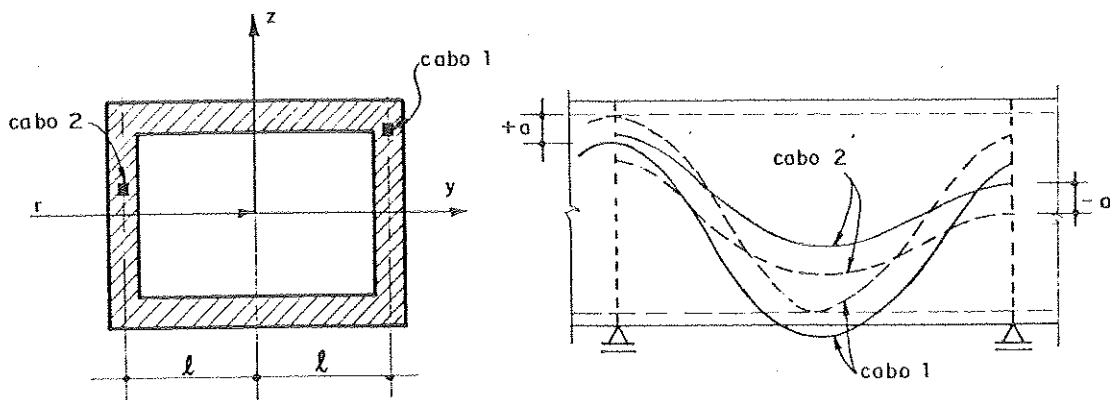


FIG. 4.14 - DESLOCAMENTOS CONSTANTES DOS CABOS EM TODA A EXTENSÃO DA VIGA.

Se se deslocar o cabo 1 de  $+a$  e o cabo 2 de  $-a$ , em toda a extensão da viga, os momentos de flexão no estado fundamental ficam:

$$M_{P_1} = \frac{P}{2} (z_1 + a)$$

$$M_{P_2} = \frac{P}{2} (z_2 - a)$$

$$\therefore M_{P_1} + M_{P_2} = P_1 z_1 + P_2 z_2 = M_P$$

O momento de flexão final não se altera e os cabos ficam alojados no interior da viga com cobrimento adequado, valendo as mesmas conclusões tiradas no item a). O momento de torção final permanece igual ao momento  $T_p^0$  do sistema fundamental.

#### 4.4 - EXEMPLOS

Considere-se uma viga contínua com seção transversal constante conforme mostra a figura 4.15.

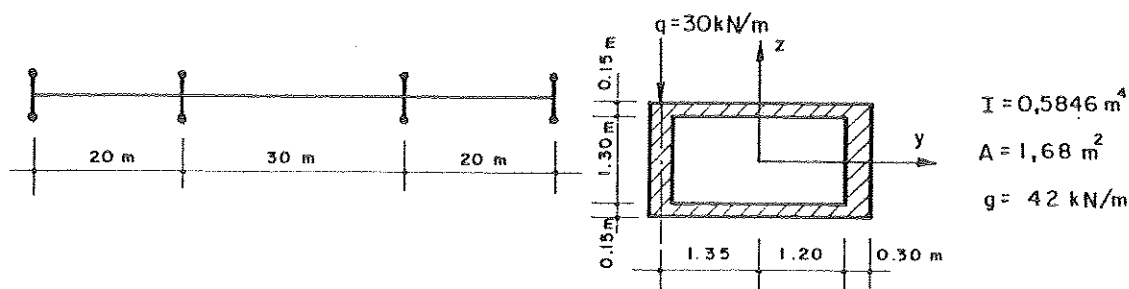


FIG. 4.15 - ESQUEMA ESTÁTICO DE VIGA E CARACTERÍSTICAS DA SEÇÃO.

Adota-se inicialmente, para as ordenadas extremas do núcleo limite, aquelas correspondentes ao núcleo central

$$c'' = k' = -\frac{i^2}{z'} = 0,4350 \text{ m}$$

$$c' = k'' = -\frac{i^2}{z''} = -0,4350 \text{ m}$$

e, após a determinação da força de protensão e do cabo concordante, será feita uma verificação dos valores adotados.

Na Tabela 4.1 são fornecidos os esforços devidos ao carregamento externo.

TABELA 4.1 - ESFORÇOS SOLICITANTES (kNm) - EQUAÇÕES DOS MOMENTOS (para carga unitária)

## MOMENTO FLETOR

## MOMENTO DE TORÇÃO

1º Tramo :  $M = 100s(1 - \frac{s}{20}) - 673,077 \frac{s}{20}$

T = 135,00 - 13,50s

2º Tramo :  $M = 150s(1 - \frac{s}{30}) - 673,077$

T = 202,50 - 13,50s

3º Tramo :  $M = 100s(1 - \frac{s}{20}) - 673,077(1 - \frac{s}{20})$

T = 135,00 - 13,50s

Seção	S (m)	M <sub>g</sub>	M <sub>q</sub>	max M	min M	ΔM	T <sub>q</sub>	max M adotado
0	0	0	0	0	0	0	+405,0	346,154
1	2	473,308	338,077	811,385	473,308	338,077	+324,0	961,385
2	4	778,615	556,154	1334,769	778,615	556,154	243,0	1369,385
3	6	915,923	654,231	1570,154	915,923	654,231	162,0	1570,154
4	8	885,231	632,308	1517,539	885,231	632,308	81,0	1563,692
5	10	686,538	490,385	1176,923	686,538	490,385	0	1350,000
6	12	319,846	228,462	548,308	319,846	228,462	-81,0	929,077
7	14	-214,846	-153,462	-214,846	-368,308	153,462	-162,0	300,923
8	16	-917,538	-655,385	-917,538	-1572,923	655,385	-243,0	-534,462
9	18	-1788,231	-1277,308	-1788,231	-3065,539	1277,308	-324,0	-1577,077
10	20	-2826,923	-2019,231	-2826,923	-4846,154	2019,231	-405,0	-2826,923
11	3	-1125,923	-804,231	-1125,923	-1930,154	804,231	+607,5	-637,846
12	6	+197,077	+140,769	+337,846	+197,077	140,769	+486,0	1064,769
13	9	1142,077	815,769	1957,846	1142,077	815,769	+364,5	2280,923
14	12	1709,077	1220,769	2929,846	1709,077	1220,769	+243,0	3010,615
15	15	1898,077	1355,769	3253,846	1898,077	1355,769	0	3253,846

Os valores de  $\max M$  não obedecem a uma função matemática definida, por isto, com o intuito de simplificar o cálculo, adota-se para  $\max M$  uma função parabólica que melhor se ajuste àqueles valores e de maneira que em cada seção se tenha  $\max M_{\text{adotado}} > \max M$ . Desta forma, a curva superior e" adotada, parabólica, representará a curva e" real e estará contida no interior do fuso de passagem.

Os valores de  $\max M_{\text{adotado}}$  são:

$$1^{\circ} \text{ Tramo: } \max M_{\text{adot.}} = \frac{4fx}{\ell} \left( \frac{x}{\ell} - 1 \right) + \left( \frac{b-a}{\ell} \right) x + a \quad \begin{cases} a = 346,154 \text{ kNm} \\ b = 2.826,923 \text{ kNm} \\ f = -2590,3845 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$2^{\circ} \text{ Tamo: } \max M_{\text{adot.}} = \frac{4fx}{\ell} \left( \frac{x}{\ell} - 1 \right) + b \quad \begin{cases} b = 2826,923 \text{ kNm} \\ f = -6080,769 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$3^{\circ} \text{ Tramo: } \max M_{\text{adot.}} = \frac{4fx}{\ell} \left( \frac{x}{\ell} - 1 \right) + \left( \frac{b-a}{\ell} \right) x + a \quad \begin{cases} a = 2826,923 \text{ kNm} \\ b = 346,154 \text{ kNm} \\ f = -2590,3845 \text{ kNm} \end{cases}$$

#### 4.4.1 - Protensão centrada

Observa-se que a viga da figura 4.15 e a viga resolvida no capítulo três têm as mesmas características geométricas, estão submetidas às mesmas ações máximas e mínimas, e os valores de  $\max M_{\text{adotado}}$  são iguais, portanto, pode-se concluir que neste caso a solução do sistema de equações será idêntica àquela anterior.

Bastará então desmembrar o cabo resultante real lá obtido, em dois cabos resultantes parciais situados nas faces da viga com equações iguais à daquele resultante e com forças de protensão cujos valores são:



$$P_1 = P_2 = \frac{P}{2} = 1993,5 \text{ kN}$$

#### 4.4.2 - Protensão não centrada

Imaginando que o cabo resultante, e concordante, da protensão centrada se desenvolve num plano vertical paralelo ao eixo da viga e com excentricidade  $e^*$ , o mesmo pode ser desdobrado em dois cabos parciais colocados nas faces da viga e de modo que tenham forças de protensão  $P_1$  e  $P_2$ . O momento de torção, em cada tramo, desenvolvido pela protensão fica:

$$T_p = -(P_1 - P_2) e \cdot \frac{dz}{dx} = -Pe^* \frac{dz}{dx}$$

onde

$$\frac{dz}{dx} = -\lambda \frac{\max M'(x)}{P}$$

portanto, a equação do momento de torção pode ser escrita:

$$T_p = e^* \cdot \lambda \cdot \max M'(x)$$

onde  $\max M'(x)$  representa a derivada da parte curva da parábola, ou seja,

$$\max M(x) = \frac{4f}{\ell} x \left( \frac{x}{\ell} - 1 \right) \rightarrow \max M'(x) = \frac{4f}{\ell} \left( \frac{2x}{\ell} - 1 \right)$$

As equações de  $\max M'(x)$  ficam:

No 1º Tramo:

$$\begin{aligned} \max M'(x) &= \frac{4(-2590,3845)}{20} \left( \frac{2x}{20} - 1 \right) = \\ &= 518,0769 - 51,80769 x \end{aligned}$$

No 2º Tramo:

$$\begin{aligned} \max M'(x) &= \frac{4(-6080,769)}{30} \left( \frac{2x}{30} - 1 \right) = \\ &= 810,7692 - 54,05128 x \end{aligned}$$

Feitas estas considerações, conclui-se que o máximo momento de torção ocorre em cada extremidade de tramo e com  $e^* = -e = -1,35$  m, isto é, com  $P_2 = P$  e  $P_1 = 0$ . Assim, os momentos máximos ficam:

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ Tramo : } \max T_p &= 1,35 \times 0,91794 \times 518,0769 = \\ &= 642,01 > 405 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ Tramo : } \max T_p &= 1,35 \times 0,91794 \times 810,7692 = \\ &= 1004,72 > 607,5 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Note-se que, em qualquer tramo, é possível a través da protensão anular o momento de torção externo mas, isto não é possível em todos os tramos simultaneamente.

Existem, portanto, duas possibilidades:

- 1) Anular o momento de torção nos tramos extremos.

Para isto faz-se:

$$-P \cdot e^* \left( \frac{dz}{dx} \right)_{x=0} = -405 + 405 = -(P_1 - P_2) e \cdot \left( \frac{dz}{dx} \right)_{x=0}$$

$$\begin{cases} P_2 - P_1 = 2515,120 \text{ kN} \\ P_1 + P_2 = 3986,998 \text{ kN} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_1 = 735,939 \text{ kN} \\ P_2 = 3251,059 \text{ kN} \end{cases}$$

Ao longo dos tramos, os momentos ficam (Fig. 4.16):

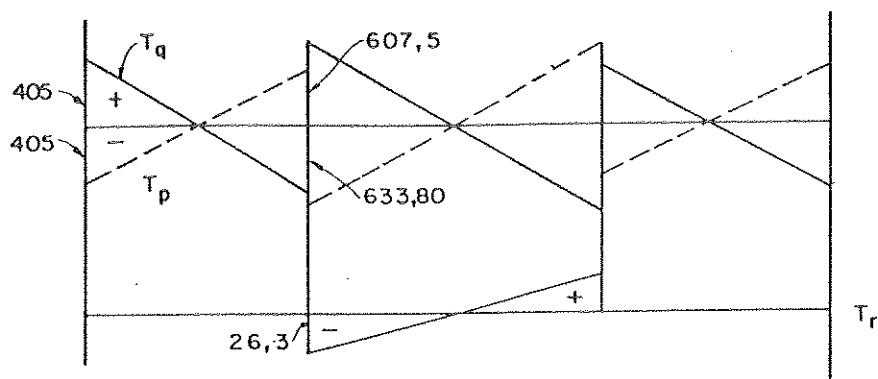


FIG. 4.16 - MOMENTOS DE TORÇÃO DA PROTENSÃO DO CARREGAMENTO EXTERNO E RESIDUAL.

- 2) Para anular o momento de torção no tramo central faz-se:

$$-Pe \left( \frac{dz}{dx} \right)_{x=0} = -607,5 \quad -607,5 = -(P_1 - P_2) e \left( \frac{dz}{dx} \right)_{x=0}$$

$$\begin{cases} P_2 - P_1 = 2410,721 \text{ kN} \\ P_1 + P_2 = 3986,998 \text{ kN} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_1 = 788,138 \text{ kN} \\ P_2 = 3198,860 \text{ kN} \end{cases}$$

Nos tramos externos haverá um momento de torção residual máximo de 16,81 kNm. (Fig. 4.17).



FIG. 4.17 - MOMENTO DE TORÇÃO RESIDUAL

Quando se anula o momento de torção nos tramos extremos cria-se um momento  $M_{z,p}$  constante ao longo da viga com valor

$$M_{z,p} = (P_1 - P_2)e = -3395,412 \text{ kNm}$$

Da mesma forma, quando se anula o momento de torção no tramo central, o momento  $M_{z,p}$  fica

$$M_{z,p} = (P_1 - P_2)e = -3254,475 \text{ kNm}$$

As ordenadas dos cabos parciais reais são iguais às obtidas no caso da protensão centrada.

#### 4.4.3 - Protensão com cabos reversos

Procurar-se-á determinar cabos reversos de modo a anular todo o momento de torção devido ao carregamento externo, o que implica em adotar  $\beta = -1$ . Inicialmente determina-se um cabo concordante centrado que depois é desdobrado nos cabos parciais reversos. O sistema a ser resolvido é idêntico ao da protensão centrada, parágrafo (4.4.1), a menos da equação que fixa a máxima flecha do cabo concordante cujo valor é:

$$\bar{d} = d - \frac{1}{P} \left| \frac{\beta}{e} \int_0^x T_p dx \right|_{15}^0 = 1,4 - \frac{3,375}{P}$$

O sistema escrito na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,435 & 2826,923 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 6080,769 \\ 50/3 & 5 & 10,875 & -17980,768 \\ 5 & 50/3 & 10,875 & -17980,768 \end{bmatrix} \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{matrix} = \begin{bmatrix} -0,435 + \frac{4846,154}{P} \\ 1,40 - \frac{3,375}{P} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que resolvido fornece os valores:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 5600,186 \text{ kN} \\ \lambda = 0,73433 \\ k_1 = k_2 = -0,25976 \end{array} \right.$$

Conhecido  $P$  e considerando  $\bar{\sigma}_{cs} = \bar{\sigma}_{cv} = 15000$   $\text{kN/m}^2$ ,  $\bar{\sigma}_{cs} = \bar{\sigma}_{cv} = 0$ , calculam-se as ordenadas

$$\begin{aligned} a'' &= k'' \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}_{cs}}{\sigma_{cg}} \right) = +1,5224 \text{ m} & b'' &= k' \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}_{cs}}{\sigma_{cg}} \right) = +0,4350 \text{ m} \\ a' &= k' \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}_{cv}}{\sigma_{cg}} \right) = -1,5244 \text{ m} & b' &= k'' \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}_{cv}}{\sigma_{cg}} \right) = -0,4350 \text{ m} \end{aligned}$$

o que leva a concluir que os valores adotados para as ordenadas extremas do núcleo limite estão corretos.

Verificada a existência do cabo concordante no interior do fuso de passagem, determinam-se as equações dos cabos parciais reversos cujas ordenadas são fornecidas na tabela 4.2.

O alojamento dos cabos parciais no interior da viga pode ser feito de duas maneiras:

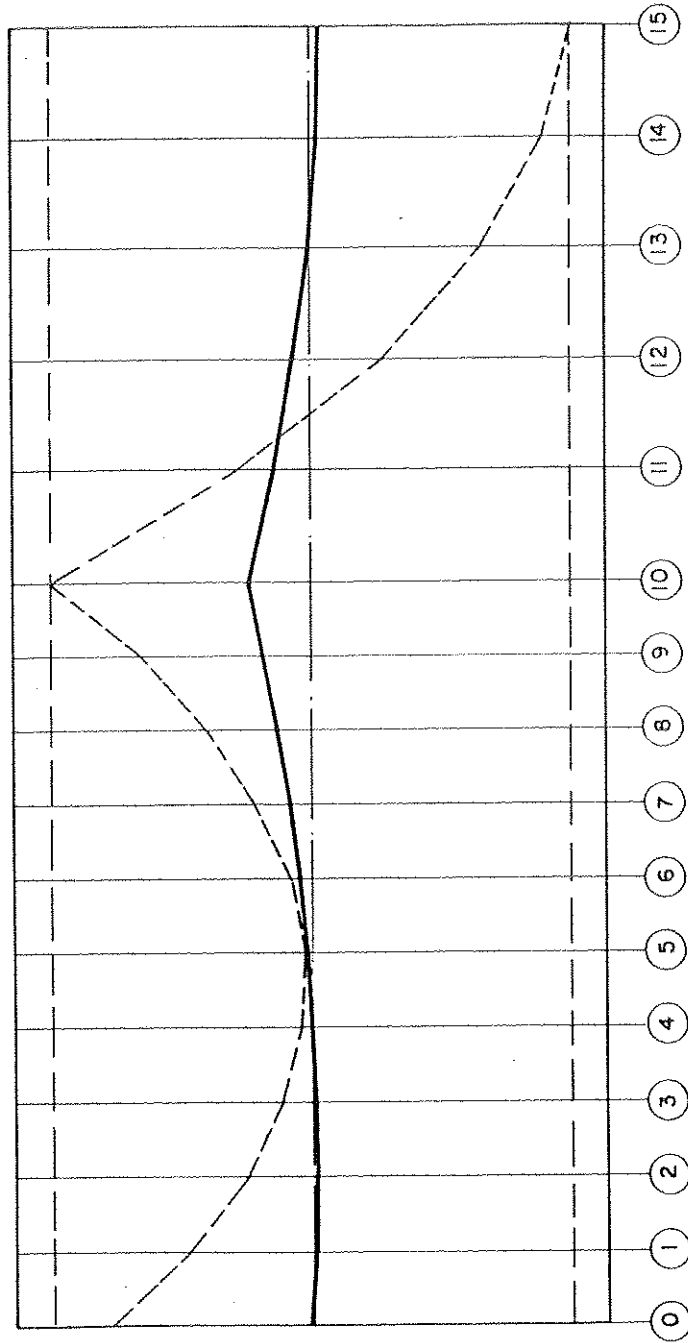
- 1) Deslocar o cabo  $z_2$  para cima de 0,2696m em toda sua extensão e, deslocar o cabo  $z_1$  para baixo da mesma quantidade.
- 2) Fazer transformações lineares no cabo  $z_2$  de 0,2696 m para cima sobre os apoios intermediários e de igual valor para baixo no cabo  $z_1$ .

Na Fig. 4.18 estão representados os cabos parciais reais obtidos de acordo com a primeira maneira.

TABELA 4.2 - PROTENSÃO COM CABOS REVERSOS - P CONSTANTE-ORDENADAS DAS CURVAS LIMITES,  
CABO CONCORDANTE E CABOS PARCIAIS.

SEÇÃO	e'' (m)	z <sub>0</sub> (m)	e' (m)	$\int_0^x T_q dx$	z <sub>1</sub> (m)	z <sub>2</sub> (m)	1ª Maneira		2ª Maneira	
							$\bar{z}_1$ (m)	$\bar{z}_2$ (m)	$\bar{z}_1$ (m)	$\bar{z}_2$ (m)
0	0,3732	0,2740	-0,435	0	0,2740	0,2740	0,0044	0,5436	0,2740	0,2740
1	0,2633	0,1674	-0,5195	729	0,2638	0,0710	-0,0058	0,3406	0,2368	0,0980
2	0,1905	0,0879	-0,5740	1296	0,2593	-0,0835	-0,0103	0,1861	0,2054	-0,0296
3	0,1546	0,0356	-0,5985	1701	0,2606	-0,1894	-0,0090	0,0802	0,1797	-0,1085
4	0,1558	0,0105	-0,5931	1944	0,2676	-0,2466	-0,0020	0,0230	0,1598	-0,1388
5	0,1939	0,0125	-0,5576	2025	0,2804	-0,2553	0,0108	0,0143	0,1456	-0,1205
6	0,2691	0,0417	-0,4921	1944	0,2989	-0,2154	0,0293	0,0542	0,1371	-0,0536
7	0,3813	0,0981	-0,3692	1701	0,3231	-0,1269	0,0535	0,1427	0,1344	0,0618
8	0,5304	0,1817	-0,1541	1296	0,3531	0,0103	0,0835	0,2799	0,1374	0,2260
9	0,7166	0,2924	0,1124	729	0,3889	0,1960	0,1193	0,4656	0,1463	0,4386
10	0,9398	0,4304	0,4304	0	0,4304	0,4304	0,1608	0,7	0,1608	0,7
11	0,5489	0,1433	-0,0903	1640,25	0,3603	-0,0736	0,0907	0,1960	0,0907	0,1960
12	0,2449	-0,0799	-0,4702	2916,00	0,3058	-0,4656	0,0362	-0,1960	0,0362	-0,1960
13	0,0277	-0,2394	-0,6389	3827,25	0,2668	-0,7456	-0,0028	-0,4760	-0,0028	-0,4760
14	-0,1026	-0,3351	-0,7402	4374,00	0,2435	-0,9136	-0,0261	-0,6440	-0,0261	-0,6440
15	-0,1460	-0,3670	-0,7739	4556,25	0,2357	-0,9696	-0,0339	-0,7	-0,0339	-0,7

FIG. 4.18 - PROTENSÃO COM CABOS REVERSOS - REPRESENTAÇÃO DOS CABOS REAIS.



#### 4.5 - Determinação dos traçados dos cabos resultantes econômicos com força de protensão variável

##### 4.5.1 - Protensão centrada

A resolução do problema consiste em determinar inicialmente uma linha de pressão ou um cabo concordante com força de protensão variável, no interior do fuso de passagem, cuja máxima flecha ao longo da viga seja igual à altura útil  $d = h - 2c$ .

Sabe-se que a força de protensão aplicada a uma estrutura é influenciada por diversos fatores que reduzem aquele valor correspondente ao ponto de aplicação da protensão. Portanto, em cada seção ao longo da viga, a força de protensão atuante poderá ser escrita em função da força de protensão máxima da seguinte forma:

$$P(x) = \eta(x) \cdot P$$

Seja uma viga reta genérica (fig. 4.19), submetida a ações máximas e mínimas conhecidas, mas com as equações das curvas superior e inferior do fuso da passagem

$$e''(x) = c'' - \frac{\max M(x)}{\eta(x) \cdot P} \quad e \quad e'(x) = c' - \frac{\min M(x)}{\eta(x) \cdot P}$$

em função de uma força de protensão  $\eta(x) \cdot P$  variável e não conhecida.

Adotando para equação do cabo resultante, num trecho genérico, a forma já conhecida

$$z_0(x) = \lambda e''(x) + k_i \frac{x}{l_i} + k_{i-1} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right)$$

e sabendo que em cada apoio intermediário deve ser respeitada a condição de concordância



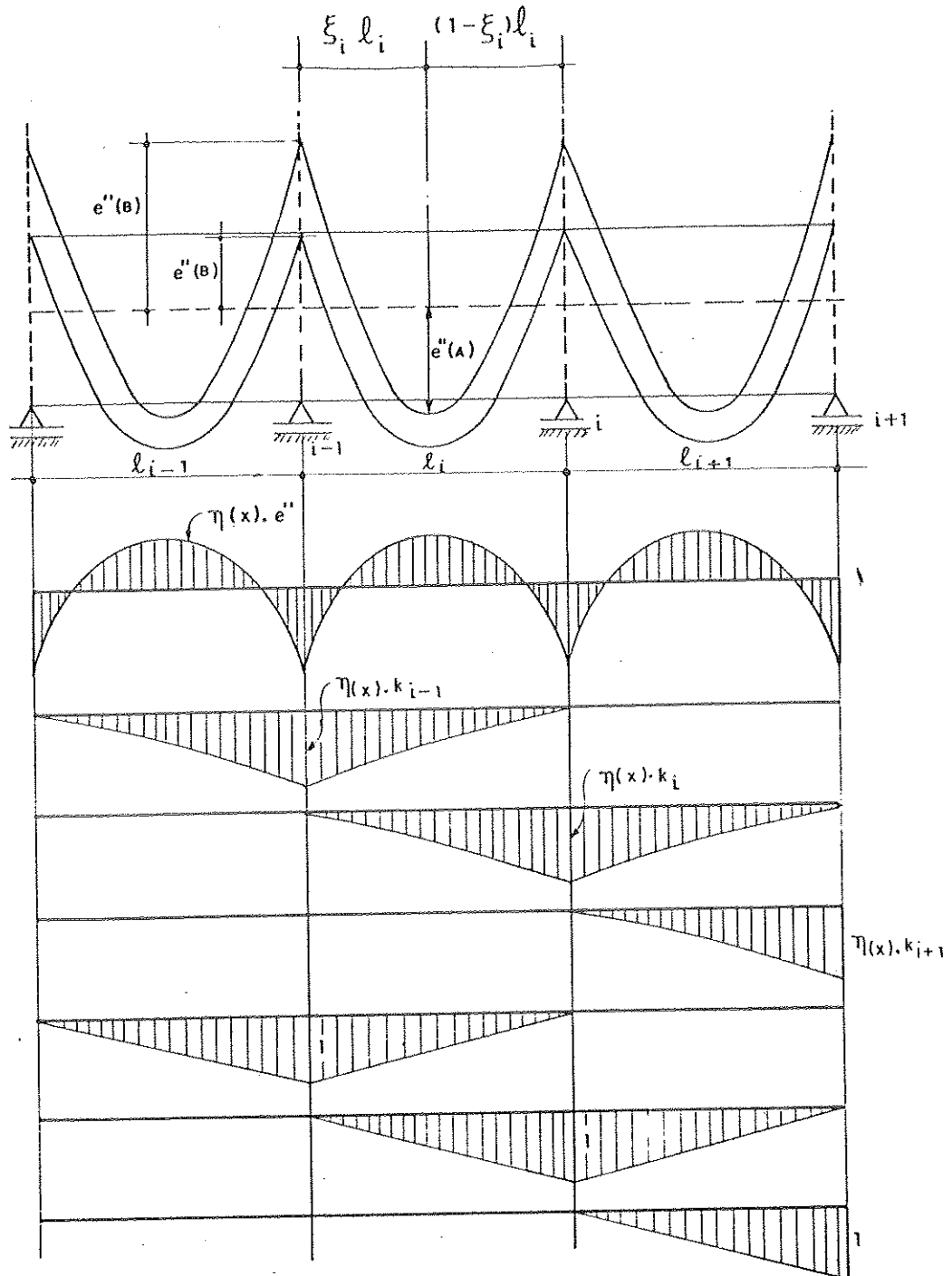


FIG. 4.19 - VIGA RETA COM CURVAS LIMITES EM FUNÇÃO DA FORÇA DE PROTENÇÃO VARIÁVEL E MOMENTOS PARA DETERMINAÇÃO DO CABO CONCORDANTE.

$$EI \delta_{i,0} = \int_0^{\ell_i} M_p^0 M_1 dx + \int_0^{\ell_{i+1}} M_p^0 M_1 dx = 0$$

pode-se substituir  $M_p^0 = \eta(x) P z_0(x)$  na equação anterior obtendo

$$EI \delta_{i,0} = P \left[ \int_0^{\ell_i} \eta(x) z_0(x) M_1 dx + \int_0^{\ell_{i+1}} \eta(x) z_0(x) M_1 dx \right] = 0$$

e ainda a expressão de  $z_0(x)$  que resulta em

$$\int_0^{\ell_i} \eta(x) \left[ \lambda e^{\mu(x)} + k_i \frac{x}{\ell_i} + k_{i-1} \left( 1 - \frac{x}{\ell_i} \right) \right] M_1 dx + \int_0^{\ell_{i+1}} \eta(x) \left[ \lambda e^{\mu(x)} + k_{i+1} \frac{x}{\ell_{i+1}} + k_i \left( 1 - \frac{x}{\ell_{i+1}} \right) \right] M_1 dx = 0$$

Na forma simplificada a relação de concordância se escreve:

$$k_{i-1} \delta_{i,i-1} + k_i \delta_{i,i} + k_{i+1} \delta_{i,i+1} + \chi_i'' \lambda - \Delta_i'' \frac{\lambda}{P} = 0$$

onde:

$$k_{i-1} \int_0^{\ell_i} \eta(x) \left( 1 - \frac{x}{\ell_i} \right) M_1 dx = k_{i-1} \delta_{i,i-1}$$

$$k_i \left[ \int_0^{\ell_i} \eta(x) \frac{x}{\ell_i} M_1 dx + \int_0^{\ell_{i+1}} \eta(x) \left( 1 - \frac{x}{\ell_{i+1}} \right) M_1 dx \right] =$$

$$= k_i \delta_{i,i}$$

$$k_{i+1} \int_0^{\ell_{i+1}} \eta(x) \frac{x}{\ell_{i+1}} M_1 dx = k_{i+1} \delta_{i,i+1}$$

$$\int_0^{\ell_i} \eta(x) M_1 dx + \int_0^{\ell_{i+1}} \eta(x) M_1 dx = X_i''$$

$$\int_0^{\ell_i} \max M \cdot M_1 dx + \int_0^{\ell_{i+1}} \max M \cdot M_1 dx = \Delta_i''$$

Fixando-se, por exemplo, o ponto A para passagem do cabo a equação obtida é:

$$k_{i-1}(1-\xi_i) + k_i \xi_i + c'' \cdot \lambda - \frac{\max M(x)}{\eta(A)} \frac{\lambda}{P} = c'' - \frac{\max M(A)}{\eta(A)P}$$

Da equação que fica a máxima flecha do cabo igual a  $d = h - 2c$ , obtém-se

$$\xi_i k_{i-1} - \xi_i k_i + 0\lambda + \left[ \frac{\max M(A)}{\eta(A)} - \frac{\max M(B)}{\eta(B)} \right] \frac{\lambda}{P} = d$$

Escrevendo o sistema de  $n$  equações na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1,n-2} & X_1'' & -\Delta_1'' \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2,n-2} & X_2'' & -\Delta_2'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{n-2,1} & \delta_{n-2,n-2} & \dots & \delta_{n-2,n-2} & X_{n-2}'' & -\Delta_{n-2}'' \\ & (1-\xi) & \xi & c'' & -\frac{\max M(A)}{\eta(A)} & \\ & \xi & -\xi & 0 & \left[ \frac{\max M(A)}{\eta(A)} - \frac{\max M(B)}{\eta(B)} \right] & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ k_{n-2} \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ c'' - \frac{\max M(A)}{\eta(A)P} \\ d \end{bmatrix}$$

Neste caso, os coeficientes  $\delta$  da matriz deverão ser calculados por integração numérica uma vez que os coeficientes  $\eta(x)$  aparecem em todos eles.

Inicialmente os coeficientes  $\eta(x)$  arbitrados serão aqueles determinados a partir do cabo concordante com força de protensão constante. Estes coeficientes serão supostos como sendo os  $\eta(x)$  do primeiro cabo concordante com força de protensão variável a ser determinado. Esta suposição inicial é razoável pois ambos os cabos apresentarão traçados com formas semelhantes e, em cada seção, os coeficientes  $\eta(x)$  dos mesmos terão valores aproximadamente iguais.

Obtido o primeiro cabo concordante, determinam-se os coeficientes  $\eta'(x)$  e faz-se o confronto destes com aqueles adotados inicialmente. Se, em cada seção, os coeficientes forem iguais, o problema estará resolvido e o cabo concordante juntamente com a força de protensão variável determinados. Mas, se  $\eta(x)$  e  $\eta'(x)$  forem diferentes, adotar-se-ão estes últimos coeficientes e um segundo cabo concordante será calculado. Procedendo-se desta forma, chegar-se-á a um cabo concordante com força de protensão variável cujo valor é conhecido em cada seção e, apresentando flecha máxima igual à altura útil da viga  $d = h - 2c$ .

Determinado o cabo concordante, será necessário alojá-lo no interior da viga com cobrimento adequado para se obter o cabo real. Isto é conseguido introduzindo transformações lineares no cabo concordante sem alterar a posição da linha de pressão.

#### 4.5.2 - Protensão não centrada

Trata-se de determinar inicialmente uma linha de pressão ou um cabo concordante com força de protensão variável, que cria momentos de flexão e de torção no sistema fundamental e cuja flecha máxima seja igual à altura útil da viga  $d = h - 2c$ .

Adotando para equação do cabo concordante a forma

$$z_o^*(x) = \lambda e''(x) + k_i \frac{x}{l_i} + k_{i-1} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right)$$

os esforços no estado fundamental são:

$$T_p^o = (P_1 - P_2) e \lambda \frac{\max M'(x)}{P} = e^* \lambda \max M'(x)$$

$$M_p^o = P(x) z_o^*(x)$$

A condição de concordância a ser obedecida em cada apoio intermediário é:

$$EI \delta_{i,0} = \int_0^{l_i} M_p^o M_1 dx + \int_0^{l_{i+1}} M_p^o M_1 dx = 0$$

O sistema de equações obtido é semelhante ao do parágrafo anterior, cuja solução fornece a equação do cabo concordante e a força de protensão máxima.

Os coeficientes  $\eta(x)$  arbitrados são aqueles de terminados a partir do cabo concordante com força de protensão constante.

Determinado o cabo concordante adequado para a flexão e com força de protensão variável, calculam-se os coeficientes  $\eta'(x)$  deste cabo e faz-se o confronto destes com os arbitrados inicialmente. A seguir introduzem-se as transformações lineares necessárias para alojar este cabo no interior da viga, com cobrimento adequado, obtendo deste modo o cabo resultante real. Agora, em função do momento de torção que se deseja criar através da protensão, determina-se a excentricidade  $e^*$  do cabo resultante e, faz-se o desmembramento do mesmo em dois cabos parciais reais colocados nas faces da viga com forças de protensão máximas

$P_1$  e  $P_2$  obtidas através da resolução do sistema

$$\begin{cases} P e^* = -P_1 e + P_2 e \\ P = P_1 + P_2 \end{cases}$$

As forças de protensão nos cabos parciais ao longo da viga são dadas por:

$$P_1(x) = \eta'(x) P_1$$

$$P_2(x) = \eta'(x) P_2$$

Os momentos finais são aqueles do sistema fundamental,  $M_p^0$  e  $T_p^0$ , e a linha de pressão permanece inalterada.

#### 4.5.3 - Protensão com cabos reversos

Neste caso, a resolução do problema consiste em determinar inicialmente um cabo concordante centrado com força de protensão variável, situado no interior do fuso de passagem, tal que ao ser desmembrado nos cabos parciais reversos, estes criam um momento de torção previamente definido e sejam concordantes.

As equações dos cabos reversos  $z_1$  e  $z_2$  se escrevem:

$$z_1(x) = z_0(x) - \frac{1}{2e\eta(x)P} \int_0^x T_p dx$$

$$z_2(x) = z_0(x) + \frac{1}{2e\eta(x)P} \int_0^x T_p dx$$

Para que as condições de concordância sejam obe

decidas  $\tilde{e}$  preciso que em qualquer apoio intermediário o corra:

$$EI \delta_{i,0}^t = K \int_0^{\ell_i} T_p^o T_l dx + K \int_0^{\ell_{i+1}} T_p^o T_l dx = 0$$

$$EI \delta_{i,0} = \int_0^{\ell_i} M_p^o M_l dx + \int_0^{\ell_{i+1}} M_p^o M_l dx = 0$$

Se se adotar para o momento de torção no sistema fundamental

$$T_p^o = \beta T_q$$

que  $\tilde{e}$  linear e antimétrico, no tramo, tem-se:

$$EI \delta_{i,0}^t = 0$$

$\tilde{E}$  preciso, portanto, determinar um cabo que sa tisfaça a condição de concordância

$$EI \delta_{i,0} = \int_0^{\ell_i} M_p^o M_l dx + \int_0^{\ell_{i+1}} M_p^o M_l dx = 0$$

como se a viga não tivesse torção e depois determinar as equações de  $z_1(x)$  e  $z_2(x)$  através das fórmulas já conhecidas.

As relações de concordância e a equação que fixa o ponto de passagem para o cabo são as mesmas obtidas no parágrafo 4.4.1.

A equação que fixa a máxima flecha do cabo cen trado  $\tilde{e}$  semelhante àquela obtida no parágrafo 4.4.3 e se escreve:

$$z_o(B) - z_o(A) = d - \left| \frac{\beta}{2e\eta(A)P} \int_0^{\ell} T_q dx \right| = \bar{d}$$

$$\xi k_{i-1} - \xi k_i + 0 \lambda + \left[ \frac{\max M(A)}{\eta(A)} - \frac{\max M(B)}{\eta(B)} \right] \frac{\lambda}{P} = \bar{d}$$

Isto significa que o cabo centrado ao ser desmembrado nos cabos reversos, um destes terá flecha máxima  $i$  igual à altura útil  $d$  da viga.

Os coeficientes  $\eta(x)$  adotados são aqueles obtidos a partir dos cabos reversos com força de protensão constante e representam a fração da força de protensão máxima atuante em cada seção.

Determinado o cabo concordante centrado, aplicam-se as equações de  $z_1$  e  $z_2$  e encontram-se os cabos reversos concordantes. A seguir, calculam-se os coeficientes  $\eta(x)$  em cada seção e faz-se o confronto destes com aqueles arbitrados inicialmente. Feita esta verificação, passa-se à determinação dos cabos reversos reais. Estes cabos podem ser obtidos de duas maneiras, as quais já foram detalhadas no parágrafo 4.4.3, valendo todas as conclusões lá tiradas e acrescentando o momento  $M_{z,p}$  criado em razão dos cabos parciais terem forças diferentes numa mesma seção:

$$M_{z,p} = P \cdot e \left[ \frac{\eta_1(x)}{2} - \frac{\eta_2(x)}{2} \right]$$

#### 4.6 - Exemplos

Considerando a viga da figura 4.14, cujas solicitações são fornecidas na Tabela 4.1, procurar-se-á determinar cabos de protensão econômicos com força de protensão variável.

##### 4.6.1 - Protensão centrada - P variável

Para determinar o cabo concordante com força de protensão variável, adota-se inicialmente os coeficientes



$\eta(x)$  correspondente ao cabo concordante com P constante e cujos valores aparecem na Tabela 4.3.

TABELA 4.3 - PROTENSÃO CENTRADA - VARIAÇÃO ANGULAR DO CABO  
VARIAÇÃO ANGULAR TOTAL ACUMULADA NA SEÇÃO E  
COEFICIENTE DE VARIAÇÃO - CABO RESULTANTE COM  
P CONSTANTE

Seção	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\eta$
0	0	0	1
1	1,3562	2,3562	0,9877
2	1,3610	4,7172	0,9756
3	1,3646	7,0818	0,9636
4	1,3663	9,4481	0,9517
5	1,3666	11,8148	0,9400
6	1,3655	14,1840	0,9284
7	1,3626	16,5430	0,9170
8	1,3583	18,9013	0,9058
9	1,3526	21,2540	0,8948
10	9,2218	31,4758	0,8480
11	12,6536	45,6295	0,7875
12	2,1029	49,2324	0,7728
13	2,1203	52,8527	0,7582
14	2,1321	56,4848	0,7439
15	2,1380	60,1229	0,7299

Estes coeficientes são obtidos através da expressão  $\eta = e^{-u\gamma}$  com  $\gamma = \theta + \beta x$  onde

$\gamma$  = variação angular total acumulada em cada seção;

$\theta$  = variação angular do cabo na seção

e

$\beta x$  = ondulações parasitas avaliadas em ( $^{\circ}/m\lambda$ )

Foram adotados os seguintes valores:  $u = 0,3$ ,  
 $\beta = 0,5$   $^{\circ}/m\lambda$ .

Os coeficientes  $\eta(x)$  correspondem, portanto, às perdas de protensão por atrito. Os coeficientes das relações de concordância calculados por integração numérica são:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = 13,80333$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 3,78122$$

$$\chi_1'' = \chi_2'' = 9,01283$$

e os coeficientes  $\Delta_i''$  que não se alteram:

$$\Delta_1'' = \Delta_2'' = 17980,768$$

A equação que fixa a extremidade interior do fuso, no apoio, para ponto de passagem do cabo é:

$$1 k_1 + 0,435 \lambda + \frac{2826,923}{0,8480} \frac{\lambda}{P} = -0,435 + \frac{4846,154}{0,8480} \frac{1}{P}$$

A equação que fixa a máxima flecha do cabo se escreve:

$$0,5 k_1 - 0,5 k_2 + \left( \frac{3253,846}{0,72993} + \frac{2826,923}{0,84805} \right) \frac{\lambda}{P} = 1,40$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,435 & 3333,43906 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 7791,18981 \\ 13,80333 & 3,78122 & 9,01283 & -17980,768 \\ 3,78122 & 13,80333 & 9,01283 & -17980,768 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,435 + \frac{5714,46731}{P} \\ 1,4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtêm-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 4976,06 \text{ kN} \\ \lambda = 0,89415 \\ k_1 = k_2 = -0,27455 \end{array} \right.$$

Conhecido o valor de P, calculam-se os valores limites  $a''$ ,  $a'$ ,  $b''$  e  $b'$  e conclui-se que as ordenadas extremas do núcleo limite são iguais às adotadas inicialmente. As equações do cabo concordante e das curvas limites ficam determinadas e seus valores são fornecidos na Tabela 4.4.

TABELA 4.4 - ORDENADAS DO CABO CONCORDANTE, DAS CURVAS LÍMITES E DO CABO REAL. COEFICIENTES DA FORÇA DE PROTENSÃO MÁXIMA EM CADA SEÇÃO

Seção	$e''$ (m)	$z_o$ (m)	$e'$ (m)	$\bar{z}_o$ (m)	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\eta$
0	0,3654	0,3268	-0,4350	0,3268	0	0	1
1	0,2394	0,1866	-0,5313	0,1853	1,0079	2,0079	0,9895
2	0,1529	0,0818	-0,5954	0,0792	1,0299	4,0378	0,9790
3	0,1075	0,0138	-0,6260	0,0098	1,0716	6,1093	0,9685
4	0,1048	-0,0161	-0,6219	-0,0215	1,1134	8,2227	0,9578
5	0,1464	-0,0064	-0,5818	-0,0131	1,1556	10,3783	0,9471
6	0,2339	0,0444	-0,5042	0,0364	1,1978	12,5761	0,9362
7	0,3691	0,1378	-0,3543	0,1284	1,2398	14,8160	0,9253
8	0,5536	0,2753	-0,0860	0,2646	1,2813	17,0972	0,9143
9	0,7892	0,4586	0,2536	0,4466	1,6646	19,7618	0,9017
10	1,1049	0,7134	0,7134	0,7000	10,2450	31,0067	0,8501
11	0,5978	0,2600	0,0576	0,2466	10,2830	42,7897	0,7992
12	0,1581	-0,1332	-0,4863	-0,1466	1,5080	45,7977	0,7867
13	-0,1695	-0,4261	-0,7377	-0,4395	1,9535	49,2512	0,7726
14	-0,3782	-0,6128	-0,8967	-0,6261	2,0839	52,8351	0,7583
15	-0,4608	-0,6866	-0,9576	-0,7000	2,4858	56,8210	0,7426

A equação do cabo concordante é dada por:

$$1^{\circ} \text{ Tramo: } z_0(x) = \lambda e''(x) + k_1 \frac{x}{\ell_1} = \lambda \left( c'' - \frac{\max M}{\eta(x)P} \right) + k_1 \frac{x}{\ell_1}$$

$$2^{\circ} \text{ Tramo: } z_0(x) = \lambda \left( c'' - \frac{\max M}{\eta(x)P} \right) + k_1 \left( 1 - \frac{x}{\ell_2} \right) + k_2 \frac{x}{\ell_2}$$

Verificada a existência do cabo concordante no interior do fuso de passagem, faz-se a transformação linear e obtêm-se os hiperestáticos de protensão  $k_1 = k_2 = -0,0134$ . As ordenadas do cabo real são obtidas fazendo:

$$1^{\circ} \text{ Tramo: } \bar{z}_0(x) = z_0(x) - 0,0134 \frac{x}{\ell_1}$$

$$2^{\circ} \text{ Tramo: } \bar{z}_0(x) = z_0(x) - 0,0134$$

A partir do cabo concordante são calculados os coeficientes  $\eta(x)$ , tabela 4.4, e fazendo o confronto destes com aqueles arbitrados inicialmente verifica-se uma pequena variação entre eles. Calculando, pois, um novo cabo concordante com os últimos coeficientes  $\eta(x)$  determinados chega-se a:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = 13,970$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 3,850$$

$$\chi_1'' = \chi_2'' = 9,12446$$

$$\Delta_1'' = \Delta_2'' = 17980,768$$

O sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,435 & 3325,244 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 7706,584 \\ 13,970 & 3,85 & 9,124 & -17980,768 \\ 3,85 & 13,970 & 9,124 & -17980,768 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,435 + \frac{5700,419}{P} \\ 1,40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que resolvido fornece:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 4943,135 \text{ kN} \\ \lambda = 0,89798 \\ k_1 = k_2 = -0,27650 \end{array} \right.$$

TABELA 4.5 - PROTENSÃO CENTRADA - P VARIÁVEL. ORDENADAS DO CABO CONCORDANTE, DAS CURVAS LIMITES E DO CABO REAL. COEFICIENTES DA FORÇA DE PROTENSÃO MÁXIMA EM CADA SEÇÃO.

Seção	$e''$ (m)	$z_0''$ (m)	$e'$ (m)	$\bar{z}_0'$ (m)	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\eta$
0	0,3650	0,3277	-0,4350	0,3277	0	0	1
1	0,2385	0,1865	-0,5318	0,1847	1,0266	2,0266	0,9894
2	0,1521	0,0812	-0,5959	0,0776	1,0452	4,0718	0,9789
3	0,1070	0,0132	-0,6263	0,0077	1,0807	6,1525	0,9682
4	0,1075	-0,0165	-0,6220	-0,0238	1,1177	8,2702	0,9576
5	0,1466	-0,0066	-0,5816	-0,0157	1,1563	10,4265	0,9468
6	0,2343	0,0445	-0,5041	0,0335	1,1963	12,6228	0,9360
7	0,3692	0,1380	-0,3545	0,1253	1,2375	14,8603	0,9251
8	0,5533	0,2756	-0,0870	0,2611	1,2881	17,1484	0,9141
9	0,7888	0,4595	0,2528	0,4431	1,7190	19,8674	0,9012
10	0,1077	0,7182	0,7182	0,7000	10,4787	31,3461	0,8486
11	0,5964	0,2591	0,0535	0,2409	10,6108	43,4569	0,7964
12	0,1612	-0,1317	-0,4857	-0,1499	1,5849	46,5418	0,7837
13	-0,1612	-0,4221	-0,7340	-0,4403	1,9475	49,9894	0,7697
14	-0,3682	-0,6071	-0,8909	-0,6253	2,0521	53,5414	0,7555
15	-0,4514	-0,6818	-0,9520	-0,7000	2,4780	57,5194	0,7399

equação do cabo concordante:

$$1^{\circ} \text{ Tramo: } z_0(x) = 0,89798 e''(x) - 0,2765 \frac{x}{\ell_1}$$

$$2^{\circ} \text{ Tramo: } z_0(x) = 0,89798 e''(x) - 0,2765$$

Examinando a Tabela 4.5 verifica-se a existência do cabo concordante no interior do fuso de passagem. Introduzindo transformações lineares no cabo sobre os apoios intermediários de  $-0,0182\text{m}$ , obtêm-se as ordenadas dos cabos reais:

$$1^{\circ} \text{ Tramo: } \bar{z}_0(x) = z_0(x) - 0,0182 \frac{x}{\ell_1}$$

$$2^{\circ} \text{ Tramo: } \bar{z}_0(x) = z_0(x) - 0,0182$$

Observa-se que os coeficientes  $\eta(x)$  obtidos (Tabela 4.5) são praticamente iguais aos coeficientes adotados (Tabela 4.4), o que leva a concluir que a solução é correta.

#### 4.6.2 - Protensão não centrada - P variável

Supondo que o cabo concordante, do parágrafo anterior, se desenvolve num plano vertical paralelo ao eixo da viga com excentricidade  $e^*$ , o momento de torção criado pela protensão é:

$$T_p = (P_1 - P_2) e \cdot \lambda \frac{\max M'(x)}{P} = e^* \cdot \lambda \cdot \max M'(x)$$

Os momentos máximos de torção que podem ser criados pela protensão são obtidos fazendo  $P_1=0$  e  $P_2=P$ .

$$1^{\circ} \text{ Tramo: } \max T_p = 1,35 \times 0,89798 \times 518,0769 = 628,05 > 405 \text{ kNm}$$

$$2^{\circ} \text{ Tramo: } \max T_p = 1,35 \times 0,89798 \times 810,7692 = 982,87 > 607 \text{ kNm}$$

Para anular o momento de torção nos tramos extremos faz-se:

$$-\eta(x) \cdot P \cdot e^* \left( \frac{dz}{dx} \right)_{x=0} = -405 \rightarrow -405 = -(P_1 - P_2) \cdot e \cdot \lambda \cdot \frac{\max M'(x)}{P}$$

$$\begin{cases} P_2 - P_1 = 3187,592 \text{ kN} & P_1 = 877,771 \text{ kN} \\ P_1 + P_2 = 4943,135 \text{ kN} & P_2 = 4065,364 \text{ kN} \end{cases}$$

$P_1$  e  $P_2$  são os valores máximos das forças aplicadas em cada cabo. O momento de torção residual no tramo central permanece igual àquele obtido no parágrafo 4.4.2 com  $P$  constante.

Para anular o momento de torção no tramo central faz-se:

$$\begin{aligned} -\eta(x) \cdot P \cdot e^* \left( \frac{dz}{dx} \right)_{x=0} &= -607,5 \rightarrow -607,5 = \\ &= -(P_1 - P_2) \cdot e \cdot \lambda \cdot \frac{\max M'(x)}{P} \end{aligned}$$

e se obtêm:

$$\begin{cases} P_1 = 943,927 \text{ kN} \\ P_2 = 3999,208 \text{ kN} \end{cases}$$

Da mesma forma, os momentos de torção residuais nos tramos extremos permanecem iguais àqueles calculados no parágrafo 4.4.2.

Quando se anula a torção nos tramos extremos cria-se  $M_{z,p}$  variável de modo que os valores máximo e mínimo são:

$$M_{z,p_{\max}} = (P_1 - P_2) \cdot e = 4303,25 \text{ kNm}$$

$$M_{z,p_{\min}} = \eta(x)(P_1 - P_2) \cdot e = 3184,19 \text{ kNm}$$

Analogamente, quando se anula a torção no tramo central  $M_{z,p}$  fica:

$$M_{z,p_{\max}} = 4124,63 \text{ kNm}$$

$$M_{z,p_{\min}} = 3052,02 \text{ kNm}$$

As ordenadas dos cabos parciais reais são iguais às aquelas obtidas na protensão centrada.

Na Fig. 4.20 estão representados os cabos reais. Pode-se concluir que na seção 15, a força de protensão necessária é menor que a correspondente força considerando-se protensão constante, isto é,  $(0,74 \times 4976) / 3977 = 0,9259$ , a força necessária corresponde a 92,59% daquela calculada considerando-se traçado econômico com protensão constante.

#### 4.6.3 - Protensão com cabos reversos - P variável

Determina-se inicialmente um cabo concordante centrado com força de protensão variável. Primeiramente, adotam-se os coeficientes de variação  $\eta(x)$  correspondentes aos cabos reversos concordantes obtidos no parágrafo 4.4.3.

$$\text{Cabo 1} \rightarrow P_1(x) = \frac{P}{2} \eta_1(x)$$

$$\text{Cabo 2} \rightarrow P_2(x) = \frac{P}{2} \eta_2(x)$$

O coeficiente  $\eta(x)$  em cada seção é

$$\eta(x)P = \frac{P}{2} \eta_1(x) + \frac{P}{2} \eta_2(x) \rightarrow \eta(x) = \frac{\eta_1(x) + \eta_2(x)}{2}$$

Os coeficientes dos cabos parciais e da seção são calculados e apresentados na Tabela 4.7.



FIG. 4.20 - PROTENSÃO CENTRADA E EXCÊNTRICA - REPRESENTAÇÃO DOS CABOS REAIS E DA FORÇA DE PROTENSÃO EM CADA SEÇÃO.

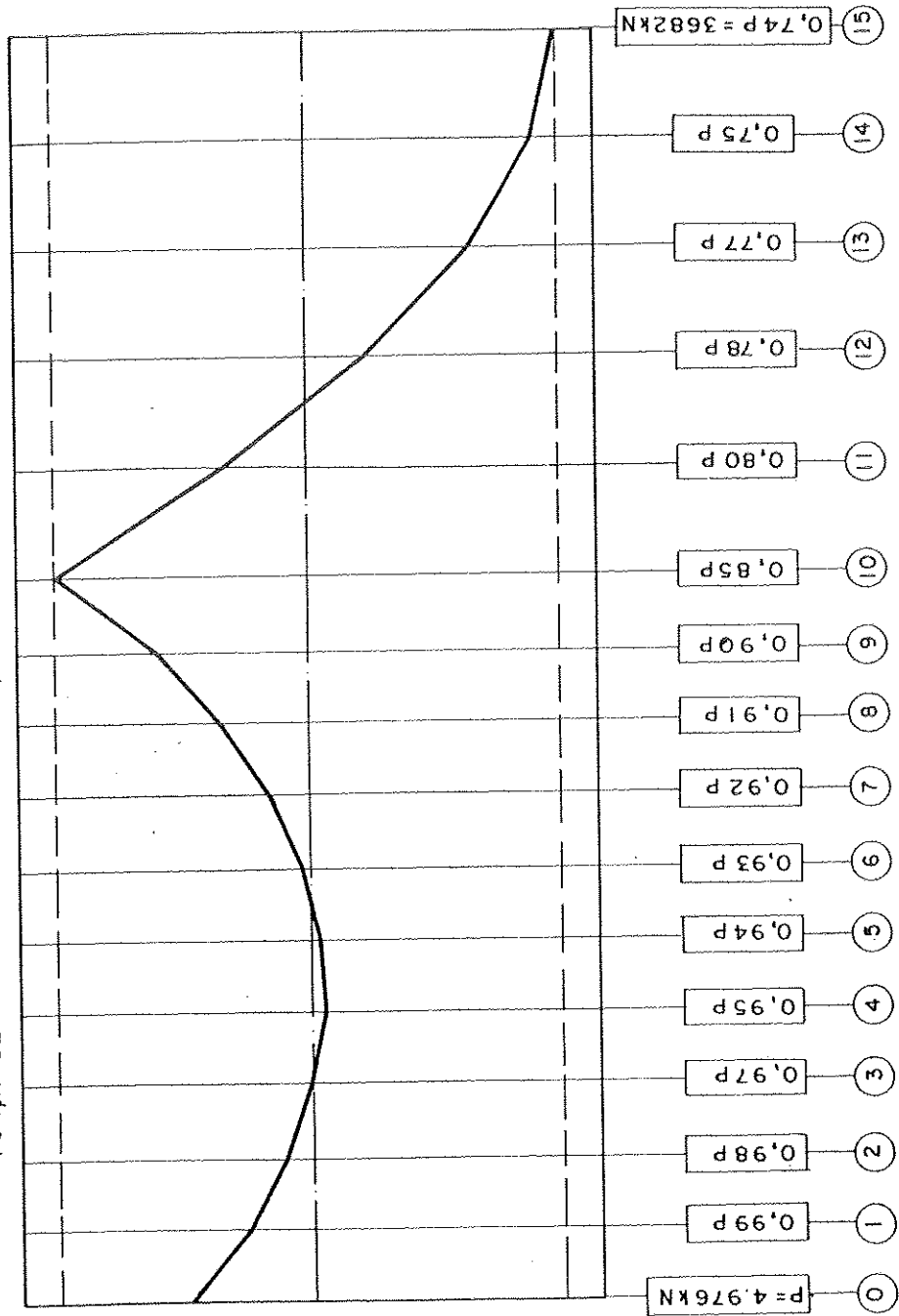


TABELA 4.7 - COEFICIENTES DE VARIAÇÃO DOS CABOS PARCIAIS E DA SEÇÃO - PROTENSÃO COM CABOS REVERSOS - P CONSTANTE

Seção	$\eta_1(x)$	$\eta_2(x)$	$\eta(x)$
0	1	1	1
1	0,9939	0,9876	0,9907
2	0,9878	0,9753	0,9816
3	0,9818	0,9632	0,9725
4	0,9759	0,9512	0,9635
5	0,9699	0,9394	0,9547
6	0,9640	0,9277	0,9459
7	0,9582	0,9162	0,9372
8	0,9523	0,9048	0,9286
9	0,9466	0,8936	0,9201
10	0,9346	0,8491	0,8918
11	0,9185	0,7885	0,8535
12	0,9100	0,7737	0,8419
13	0,9016	0,7592	0,8304
14	0,8930	0,7449	0,8190
15	0,8847	0,7309	0,8078

Os coeficientes das relações de concordância calculados por integração numérica são:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = 14,6565$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 4,1439$$

$$\chi_1'' = \chi_2'' = 9,5527$$

e os coeficientes  $\Delta_i''$  que não se alteram:

$$\Delta_1'' = \Delta_2'' = 17980,768$$

A equação que fixa o ponto de passagem para o cabo é obtida fazendo:

$$k_1 + 0,435 \lambda + \frac{2826,923}{0,8918} \frac{\lambda}{P} = -0,435 + \frac{4846,154}{0,8918} \frac{1}{P}$$

A máxima flecha do cabo concordante centrado é

$$\bar{d} = d - \frac{1}{P} \left| \frac{\beta}{\eta(A) \cdot e} \int_0^x T_p dx \right|_0^{15} = 1,4 - \frac{3,375}{0,8078} \frac{1}{P}$$

e a equação se escreve:

$$\begin{aligned} 0,5 k_1 - 0,5 k_2 + \left[ \frac{3253,846}{0,8078} + \frac{2826,923}{0,8918} \right] \frac{\lambda}{P} = \\ = 1,4 - \frac{4177,9626}{P} \end{aligned}$$

O sistema na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,435 & 3169,5870 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 7197,5714 \\ 14,6565 & 4,1439 & 9,5527 & -17980,768 \\ 4,1439 & 14,6565 & 9,5527 & -17980,768 \end{bmatrix} \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{matrix} = \begin{bmatrix} -0,435 + \frac{5433,578}{P} \\ 1,40 - \frac{4177,9626}{P} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução fornece

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 6600,132 \text{ kN} \\ \lambda = 0,70332 \\ k_1 = k_2 = -0,25545 \end{array} \right.$$

Sendo as ordenadas extremas do núcleo limite aquelas adotadas inicialmente, determinam-se as ordenadas das curvas limites e do cabo concordante centrado, valores que são apresentados na Tabela 4.8.

Verificada a existência do cabo concordante no interior do fuso de passagem, aplicam-se as fórmulas de  $z_1$  e  $z_2$  e as ordenadas dos cabos reversos ficam determinadas.

O alojamento dos cabos reversos no interior da viga pode ser feito de duas maneiras:

- 1) Deslocar o cabo 1 de 0,3117m para baixo em toda sua extensão e, deslocar o cabo 2 para cima da mesma quantidade.
- 2) Fazer transformações lineares sobre os apoios intermédios de 0,3117m para baixo no cabo 1 e de igual valor para cima no cabo 2.

Observe-se que os momentos finais ficam iguais aos momentos  $M_p^0$  e  $T_p^0$  do sistema fundamental e a linha de pressão não se altera.

Calculando os coeficientes  $\eta(x)$ , para cada seção, devidos aos cabos obtidos e apresentando-os na Tabela 4.9, verifica-se que os valores são praticamente iguais àqueles adotados inicialmente.

Na Fig. 4.21 estão representados os cabos reais obtidos através da primeira maneira. Verifica-se que na seção 15 a força de protensão necessária é igual a 95,5% da correspondente força considerando-se traçado econômico com protensão constante.

TABELA 4.8 - PROTENSÃO COM CABOS REVERSOS - P VARIÁVEL -  
ORDENADAS DAS CURVAS LIMITES, CABO CONCORDANTE E CABOS PARCIAIS

A equação do cabo concordante é:

$$1^{\circ} \text{ Tramo: } z_0(x) = \lambda e''(x) + k_1 \frac{x}{\lambda_1}$$

$$z_1(x) = z_0(x) - \frac{\beta}{\eta(x)P \cdot e} \int_0^x T_q dx$$

$$2^{\circ} \text{ Tramo: } z_0(x) = \lambda e''(x) + k_1 \left(1 - \frac{x}{\lambda_2}\right) + k_2 \frac{x}{\lambda_2}$$

$$z_2(x) = z_0(x) + \frac{\beta}{\eta(x)P \cdot e} \int_0^x T_q dx$$

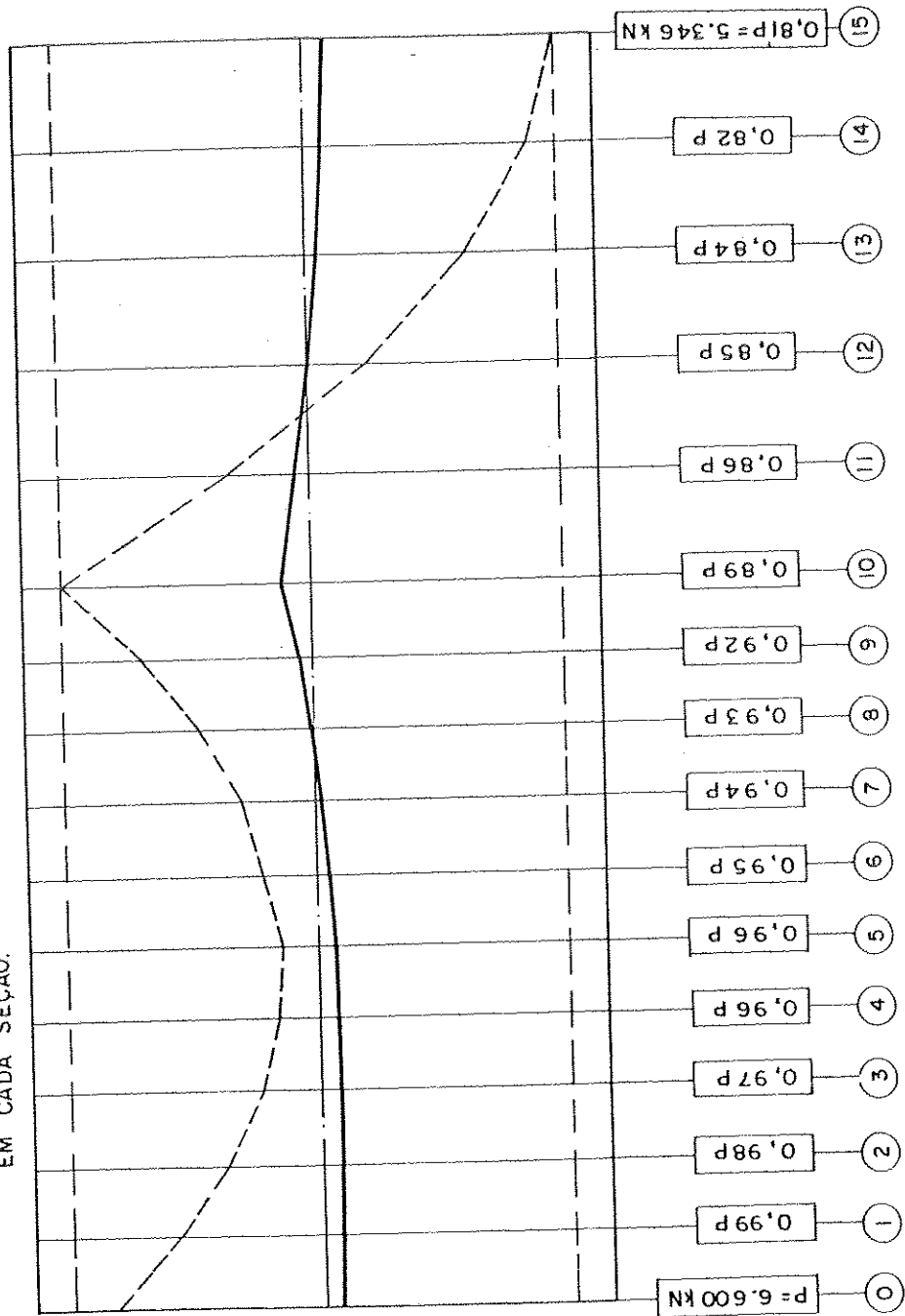
As equações dos cabos parciais ficam:

Seção	e'' (m)	z <sub>0</sub> (m)	e' (m)	z <sub>1</sub> (m)	z <sub>2</sub> (m)	1ª Maneira		2ª Maneira	
						z <sub>0</sub> (m)	z <sub>2</sub> (m)	z <sub>1</sub> (m)	z <sub>2</sub> (m)
0	0,3826	0,2691	-0,4350	0,2691	0,2691	-0,0426	0,5808	0,2691	0,2691
1	0,2880	0,1770	-0,5074	0,2596	0,0944	-0,0521	0,4061	0,2284	0,1256
2	0,2236	0,1062	-0,5552	0,2544	-0,0420	-0,0573	0,2697	0,1921	0,0203
3	0,1904	0,0573	-0,5777	0,2536	-0,1390	-0,0581	0,1727	0,1601	-0,0455
4	0,1891	0,0308	-0,5742	0,2573	-0,1956	-0,0544	0,1161	0,1326	-0,0709
5	0,2208	0,0275	-0,5440	0,2656	-0,2105	-0,0461	0,1012	0,1098	-0,0547
6	0,2862	0,0480	-0,4862	0,2787	-0,1827	-0,0330	0,1290	0,0917	0,0043
7	0,3864	0,0929	-0,3755	0,2966	-0,1108	-0,0151	0,2009	0,0784	0,1074
8	0,5222	0,1629	-0,1784	0,3196	0,0063	0,0079	0,3180	0,0702	0,2557
9	0,6947	0,2587	0,0698	0,3476	0,1698	0,0359	0,4815	0,0671	0,4503
10	0,9152	0,3883	0,3883	0,3883	0,3883	0,0766	0,7000	0,0766	0,7000
11	0,5482	0,1301	-0,0924	0,3458	-0,0855	0,0341	0,2262	0,0341	0,2262
12	0,2434	-0,0843	-0,4705	0,3044	-0,4730	-0,0073	-0,1613	-0,0073	-0,1613
13	0,0189	-0,2422	-0,6434	0,2751	-0,7594	-0,0366	-0,4477	-0,0366	-0,4477
14	-0,1219	-0,3412	-0,7512	0,2582	-0,9406	-0,0535	-0,6289	-0,0535	-0,6289
15	-0,1753	-0,3787	-0,7910	0,2543	-1,0117	-0,0574	-0,7000	-0,0574	-0,7000

TABELA 4.9 - VARIACÃO ANGULAR DOS CABOS, VARIACÃO ANGULAR TOTAL ACUMULADA NA SEÇÃO E COEFICIENTES DE VARIACÃO - PROTENSÃO COM CABOS REVERSOS - P VARIÁVEL

Seção	$\Delta\theta_1$	$\gamma_1$	$\eta_1$	$\Delta\theta_2$	$\gamma_2$	$\eta_2$	$\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}$
0	0	0	1	0	0	1	1
1	0,1223	1,1223	0,9941	1,0872	2,0872	0,9891	0,9916
2	0,1242	2,2465	0,9883	1,1063	4,1935	0,9783	0,9833
3	0,1276	3,3741	0,9824	1,1407	6,3343	0,9674	0,9749
4	0,1309	4,5050	0,9767	1,1751	8,5095	0,9564	0,9665
5	0,1342	5,6393	0,9709	1,2094	10,7189	0,9454	0,9581
6	0,1378	6,7770	0,9651	1,2430	12,9619	0,9344	0,9497
7	0,1413	7,9184	0,9593	1,2758	15,2377	0,9233	0,9413
8	0,1448	9,0632	0,9536	1,3078	17,5455	0,9122	0,9329
9	0,2534	10,3167	0,9474	1,4427	19,9883	0,9006	0,9240
10	1,7044	13,0211	0,9341	8,5681	29,5564	0,8566	0,8953
11	0,8419	15,3630	0,9227	11,3859	42,4423	0,8007	0,8617
12	0,1247	16,9877	0,9149	1,7601	45,7024	0,7872	0,8510
13	0,2336	18,7214	0,9066	1,9521	49,1545	0,7731	0,8398
14	0,2436	20,4649	0,8983	2,0482	52,7027	0,7588	0,8286
15	0,1983	22,1633	0,8904	2,4081	56,6108	0,7435	0,8169

FIG. 4.21 - PROTENSÃO COM CABOS REVERSOS - REPRESENTAÇÃO DOS CABOS REAIS E DA FORÇA DE EM CADA SEÇÃO.



## 5. VIGAS CURVAS CONTÍNUAS

### 5.1 - Generalidades

Seja um elemento de barra curva plana, em equilíbrio, submetido a um carregamento vertical uniforme  $q$  atuando na superfície cilíndrica que contém o eixo da barra, um carregamento horizontal uniforme  $q_y$  aplicado no plano  $x$ - $y$ , um momento  $t$  uniforme e, força de protensão  $P$  considerada inicialmente constante ao longo da barra (Fig. 5.1).

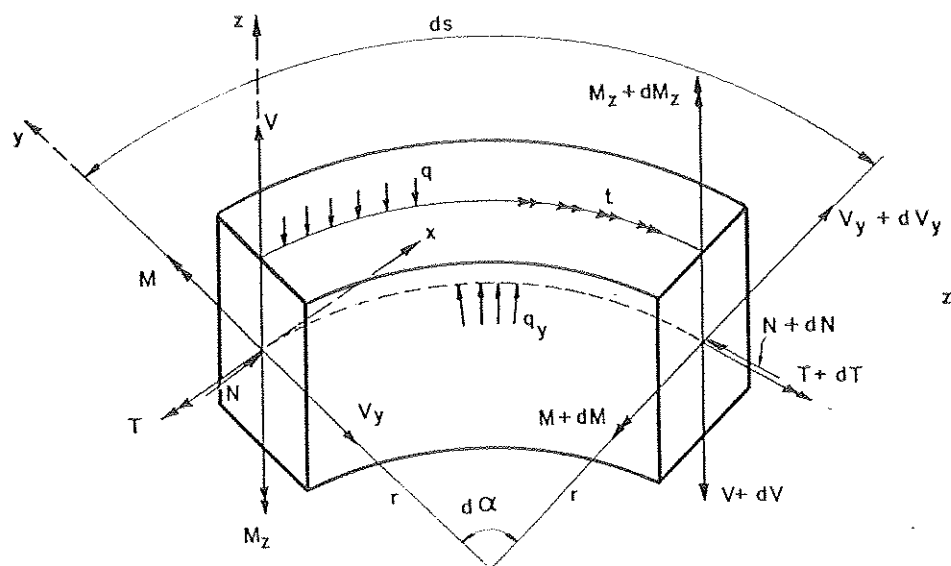


FIG. 5.1 - SISTEMA DE EIXOS COORDENADOS E EQUILÍBRIO DE UM ELEMENTO DE BARRA CURVA PLANA.

Para que o elemento permaneça em equilíbrio são necessários esforços internos aplicados nas extremidades do elemento. A partir das ações externas e dos esforços internos solicitantes supostos todos positivos, deduzem-se, em relação à origem do sistema de coordenadas, as seguintes condições de equilíbrio:



Da condição de  $\Sigma R_z = 0$ :

$$\frac{dV}{ds} = -q \quad \dots (5.1)$$

De  $\Sigma M_y = 0$ :

$$\frac{dM}{ds} + \frac{T}{r} = v \quad \dots (5.2)$$

De  $\Sigma M_x = 0$ :

$$\frac{dT}{ds} - \frac{M}{r} = -t \quad \dots (5.3)$$

De  $\Sigma R_y = 0$ :

$$\frac{dV_y}{ds} + \frac{N}{r} = -q_y \quad \dots (5.4)$$

De  $\Sigma R_x = 0$ :

$$dN = 0 ; N = \text{constante} \quad \dots (5.5)$$

De  $\Sigma M_z = 0$ :

$$\frac{dM_z}{ds} = -V_y \quad \dots (5.6)$$

Da análise destas condições conclui-se que o e quilíbrio em vigas curvas só pode ser conseguido quando a parece o momento de torção T como esforço solicitante, a têm de momento fletor, força cortante e força normal. No ta-se também que os equilíbrios de momentos de torção ( $\Sigma M_x = 0$ ) e momento de flexão ( $\Sigma M_z = 0$ ) mostram que um es forço influencia o outro.

Da mesma maneira como se procedeu no caso de vigas retas, aqui o desenvolvimento do cabo resultante se fará com a finalidade de criar esforços opostos àqueles produzidos pelo carregamento externo, portanto, em função dos esforços que se deseja criar, o cabo resultante terá posição e forma adequadas. Considere-se então um cabo genérico desenvolvendo-se numa superfície cilíndrica concêntrica à superfície que contém o eixo da viga. Este cabo cria esforços que se relacionam entre si da seguinte forma (Fig. 5.2):

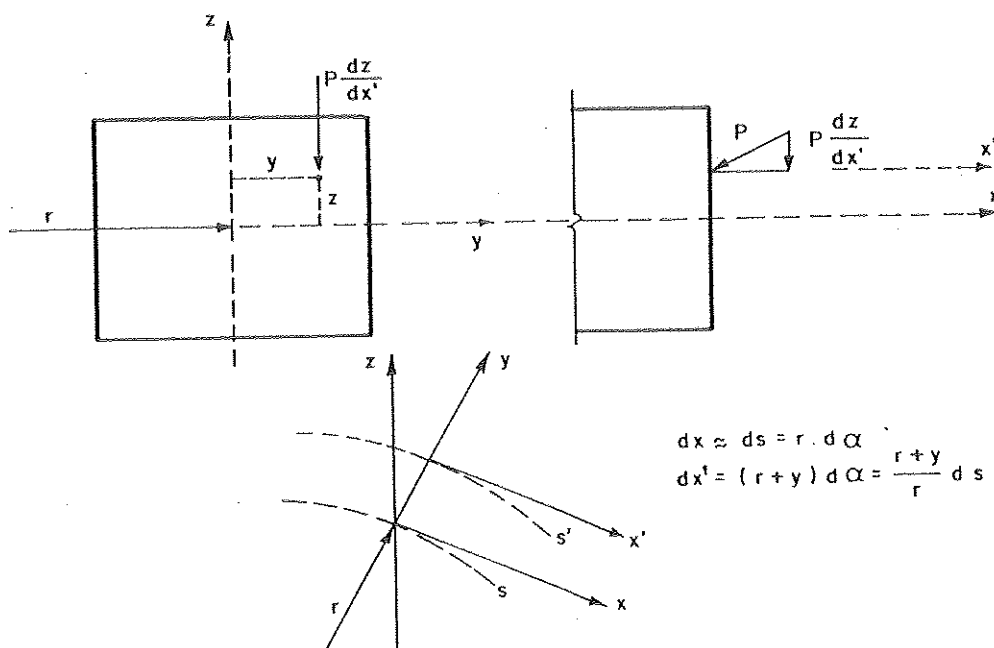


FIG. 5.2 — NOTAÇÕES E ESFORÇOS PROVOCADOS POR UM CABO GENÉRICO.

$$P \frac{dz}{dx'} = P \cdot \frac{dz}{ds} \frac{r}{r+y} = V_p \quad \dots (5.7)$$

$$P \cdot z = M_p \quad \dots (5.8)$$

$$-P \frac{dz}{dx'} y = -P \frac{dz}{ds} \frac{r \cdot y}{r+y} = T_p \quad \dots (5.9)$$

$$P \cdot y = M_{z,p} \quad \dots (5.10)$$

Como se vê pelas equações anteriores, o cabo de protensão em função de sua posição pode criar, além da força normal  $P$ , momento de flexão, força cortante e momento de torção. Os esforços residuais são obtidos somando-se a estes últimos, aqueles correspondentes ao carregamento externo, o que leva a:

$$M_r = P \cdot z + M_q \quad \dots (5.11)$$

$$T_r = -P \cdot \frac{dz}{ds} \frac{r \cdot y}{r+y} + T_q \quad \dots (5.12)$$

$$V_r = P \cdot \frac{dz}{ds} \frac{r}{r+y} + V_q \quad \dots (5.13)$$

$$M_{z,r} = P \cdot y \quad \dots (5.14)$$

Assim, os esforços provocados pelo carregamento externo podem ser influenciados ou até mesmo anulados pela protensão.

Da mesma forma que no capítulo anterior, aqui serão estudadas as seguintes situações de protensão:

#### 5.1.1 - Protensão com cabo resultante centrado

É o caso em que o cabo resultante centrado é único e se desenvolve na superfície cilíndrica vertical que contém o eixo da viga. Também existe a possibilidade de dois cabos parciais se desenvolverem em superfícies cilíndricas de raios  $r+e$  e  $r-e$ , concêntricas à superfície que contém o eixo da viga, e que se reduzem a um único cabo resultante centrado (Fig. 5.3). Neste caso os cabos parciais apresentam, em cada seção, retas de ação dos vetores força de protensão com mesma inclinação.

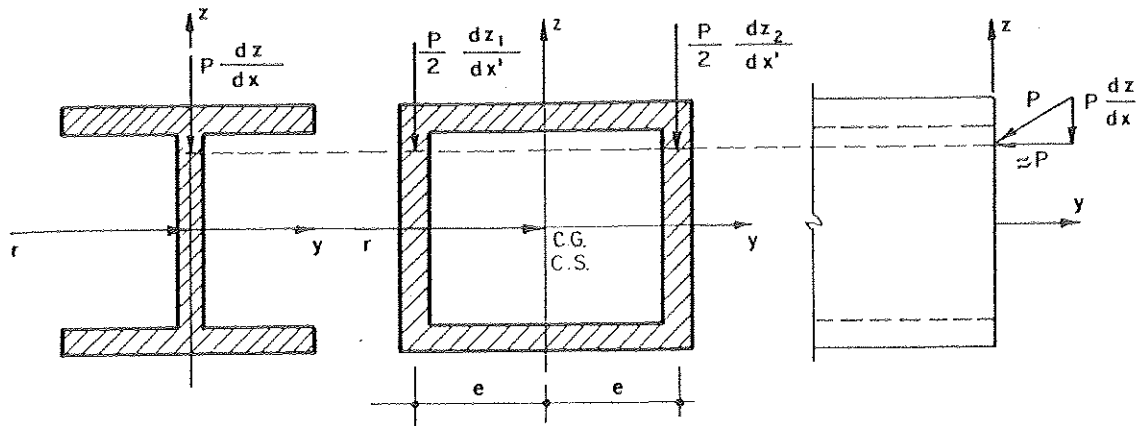


FIG. 5.3 - PROTENSÃO COM CABO RESULTANTE CENTRADO

Os esforços criados pelo cabo resultante são:

$$M_p = P \cdot z \quad \dots (5.15)$$

$$V_p = P \cdot \frac{dz}{ds} \quad \dots (5.16)$$

$$T_p = f(M_p') \rightarrow \text{se } M_p' = 0 \rightarrow T_p = 0 \quad \dots (5.17)$$

Neste caso, embora o cabo resultante seja centrado, um momento de torção  $T_p$  poderá ser criado indiretamente se o cabo desenvolver hiperestáticos de protensão ( $M_p'$ ), entretanto, em sistemas curvos estaticamente indeterminados com protensão concordante o hiperestático  $M_p'$  é nulo, o que leva a  $T_p = 0$ .

### 5.1.2 - Protensão com cabo resultante não centrado

É o caso em que os dois cabos parciais se desenvolvem em superfícies cilíndricas de raios  $r+e$  e  $r-e$ , e se reduzem a um único cabo resultante situado numa superfície cilíndrica vertical de raio  $r+e^*$  (Fig. 5.4).

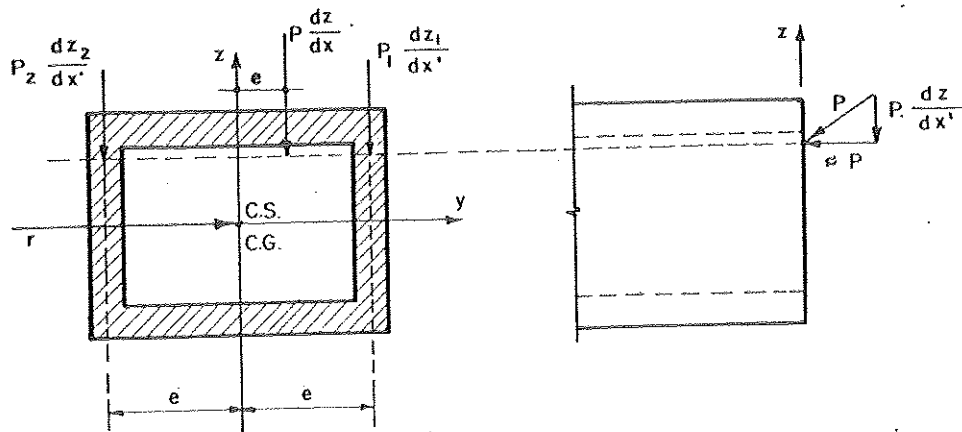


FIG. 5.4 - PROTENSÃO COM DOIS CABOS QUE SE REDUZEM A UM ÚNICO NÃO CENTRADO.

Os esforços produzidos pela protensão ficam:

$$M_p = Pz^* = P_1 z_1 + P_2 z_2 \quad \dots (5.18)$$

$$T_p = -P \cdot e^* \frac{dz}{dx'} = -P_1 e \frac{dz_1}{dx'} + P_2 e \frac{dz_2}{dx'} \quad \dots (5.19)$$

$$V_p = P_1 \frac{dz_1}{dx'} + P_2 \frac{dz_2}{dx'} \quad \dots (5.20)$$

$$M_{z,p} = -P \cdot e^* = (-P_1 + P_2) e \quad \dots (5.21)$$

$$P = P_1 + P_2 \quad \dots (5.22)$$

### 5.1.3 - Protensão com dois cabos reversos

É o caso em que os dois cabos parciais se desenvolvem em superfícies cilíndricas de raios  $r+e$  e  $r-e$ , e se reduzem a um único cabo resultante mais um vetor momento (Fig. 5.5)

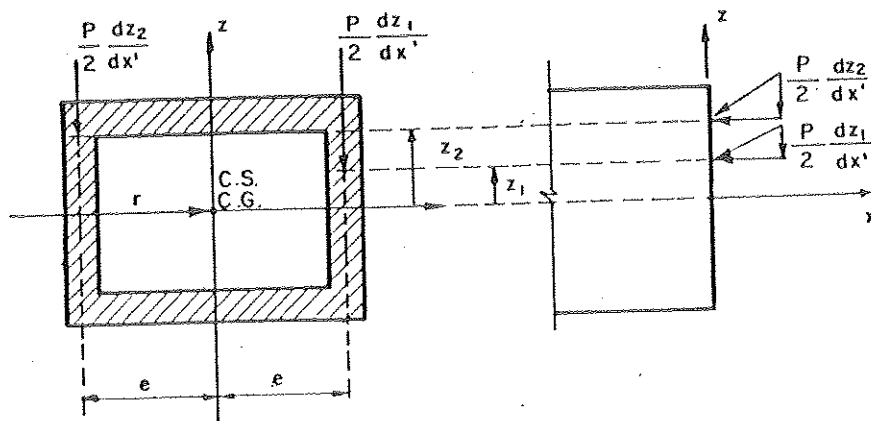


FIG. 5.5 - PROTENSÃO COM DOIS CABOS REVERSOS.

Neste caso de protensão, os cabos apresentam em cada seção, retas de ação dos vetores força de protensão com inclinações diferentes, isto é, as derivadas  $dz_1/dx'$  e  $dz_2/dx'$  diferentes significando que estes vetores podem se reduzir a um único vetor, mais um vetor momento, conforme visto no parágrafo 4.2.3.

Fazendo  $P_1 = P_2 = P/2$  evita-se a ocorrência de  $M_{z,p}$  e, deste modo pode-se afirmar que o momento fletor total dos dois cabos é equivalente ao momento criado por um cabo resultante centrado.

Os esforços criados pela protensão ficam:

$$M_p = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 \quad \dots (5.23)$$

$$T_p = -P_1 \cdot e \frac{dz_1}{dx'} + P_2 \cdot e \frac{dz_2}{dx'} \quad \dots (5.24)$$

$$V_p = P_1 \cdot \frac{dz_1}{dx'} + P_2 \frac{dz_2}{dx'} \quad \dots (5.25)$$

## 5.2 - Determinação dos Traçados do Cabo Resultante Total e Cabos Resultantes Parciais para os Diferentes Casos de Protensão

Para os mesmos casos de protensão desenvolvidos no capítulo anterior, procurar-se-á determinar os traçados do cabo resultante e dos cabos parciais.

Considere-se dois cabos resultantes parciais situados em superfícies cilíndricas verticais de raios  $r+e$  e  $r-e$ , com equações e forças de protensão genéricas, conforme mostra a Fig. 5.5. Como se trata de sistema curvo estaticamente indeterminado, a protensão será suposta concordante. Assim, os esforços produzidos pela protensão se escrevem:

$$M_p = P_1 z_1 + P_2 z_2 \quad \dots (5.26)$$

$$T_p = -P_1 e \frac{r}{r+e} \frac{dz_1}{ds} + P_2 e \frac{r}{r-e} \frac{dz_2}{ds} \quad \dots (5.27)$$

$$V_p = P_1 \frac{r}{r+e} \frac{dz_1}{ds} + P_2 \frac{r}{r-e} \frac{dz_2}{ds} \quad \dots (5.28)$$

$$M_{z,p} = P_1 e - P_2 e \quad \dots (5.29)$$

A partir destas equações, Montanari [15] deduziu as expressões que permitem determinar as equações do cabo resultante e dos cabos parciais para cada situação. Isto foi conseguido trabalhando com a equação (5.26) e a equação obtida integrando os dois membros da equação (5.27) no intervalo de zero até uma abscissa genérica  $s$ . Substituindo nesta última equação as expressões  $P_2 z_2(s)$  e  $P_1 z_1(s)$  da equação (5.26) separadamente, obtiveram-se respectivamente as seguintes expressões:

$$P_1 \left[ z_1(s) - z_1(0) \right] = \frac{r+e}{2r} P \left[ z^*(s) - z^*(0) \right] - \frac{r^2 - e^2}{2r^2 e} \int_0^s T_p ds \quad \dots (5.30)$$

e

$$P_2 \left[ z_2(s) - z_2(0) \right] = \frac{r-e}{2r} P \left[ z^*(s) - z^*(0) \right] + \frac{r^2 - e^2}{2r^2 e} \int_0^s T_P ds \quad \dots (5.31)$$

onde  $z^*(s)$  são as ordenadas de um cabo resultante total situado numa superfície cilíndrica vertical de raio  $r+e^*$ , de modo que  $Pz^*(s) = P_1 z_1(s) + P_2 z_2(s)$  em razão da protensão ter sido suposta concordante.

Assim, para os três casos de protensão estudados, as equações dos cabos resultantes parciais em função do cabo resultante total ficam:

Protensão centrada:

$$z_1(s) = \frac{r+e}{r} z^*(s) \quad \dots (5.32)$$

$$z_2(s) = \frac{r-e}{r} z^*(s) \quad \dots (5.33)$$

Protensão não centrada:

$$z_1(s) = \frac{r+e}{r+e^*} z^*(s) \quad \dots (5.34)$$

$$z_2(s) = \frac{r-e}{r+e^*} z^*(s) \quad \dots (5.35)$$

Protensão com cabos reversos:

$$z_1(s) = \frac{r+e}{r} \left[ z^*(s) - \frac{r-e}{e P} \int_0^s T_P^0 ds \right] \quad \dots (5.36)$$

$$z_2(s) = \frac{r-e}{r} \left[ z^*(s) + \frac{r+e}{e P} \int_0^s T_P^0 ds \right] \quad \dots (5.37)$$



### 5.3 - Condições de Concordância necessárias para a obtenção do Cabo Concordante

Na resolução de vigas contínuas será adotado como sistema fundamental a viga com articulação à flexão nos apoios intermediários, obtendo-se um sistema constituído de vigas simplesmente apoiadas à flexão e biengastadas à torção, com  $(n-2)$  incógnitas de flexão a serem determinadas.

Considerando-se que a viga do sistema fundamental é hiperestática e procedendo-se de maneira análoga à do capítulo anterior, verificar-se-á, para as vigas simples hiperestáticas, as condições de concordância a serem obedecidas na determinação do cabo concordante, de acordo com cada caso de protensão.

Considere-se inicialmente a viga simples, biapoitada à flexão e biengastada à torção (Fig. 5.6).

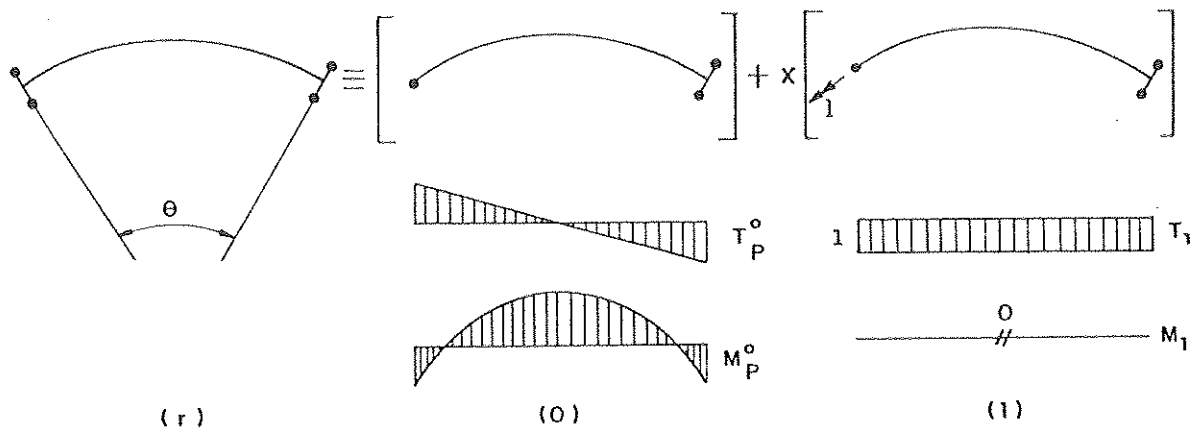


FIG. 5.6 - RESOLUÇÃO DO SISTEMA REAL

O sistema é uma vez estaticamente indeterminado e adota-se como sistema fundamental uma viga biapoitada à flexão e apoiada engastada à torção, cuja incógnita hiperestática é o momento de torção no apoio. Neste sistema, a incógnita hiperestática não provoca momentos fletores na viga.

Da equação de compatibilidade de deslocamentos para a resolução do sistema real tem-se:

$$EI\delta_{11} = \int_0^{\ell} M_1^2 ds + K \int_0^{\ell} T_1^2 ds = K \int_0^{\theta} r \cdot d\alpha = K r \theta$$

$$EI\delta_{10} = \int_0^{\ell} M_p^0 M_1 ds + K \int_0^{\ell} T_p^0 T_1 ds$$

Na protensão centrada, a equação  $EI\delta_{10}$  é nula, pois, na primeira integral tem-se  $M_1 = 0$  e na segunda integral o valor de  $T_p^0$  é nulo uma vez que o cabo resultante se desenvolve na superfície cilíndrica vertical que contém o eixo da viga.

Os momentos finais ficam:

$$T_p = T_p^0 + T_p' = 0$$

$$M_p = M_p^0 = P \cdot z$$

Conclui-se que na protensão centrada, tudo se passa como se a viga fosse isostática, ou seja, qualquer cabo centrado não cria reações de apoio e é concordante.

Na protensão não centrada, o cabo produz  $T_p^0$  no sistema fundamental e a expressão que se obtém para  $EI\delta_{10}$  é

$$EI\delta_{10} = K \int_0^{\theta} T_p^0 T_1 ds = K \int_0^{\theta} T_p^0 \cdot r \cdot d\alpha$$

O momento de torção produzido pela protensão no sistema fundamental isostático é

$$T_p^0 = (P_2 - P_1) e \frac{dz}{ds} = (P_2 - P_1) \frac{e}{r} \frac{dz}{d\alpha}$$

que substituído na expressão anterior resulta em

$$EI\delta_{10} = K \cdot e (P_2 - P_1) [z(\theta) - z(0)]$$

e a incógnita hiperestática obtida é:

$$X = -\frac{e}{r} (P_2 - P_1) \left[ \frac{z(\theta) - z(0)}{\theta} \right]$$

Se o cabo resultante tiver suas extremidades numa mesma cota, o hiperestático de protensão será nulo resultando num cabo concordante. O momento de torção final será igual ao momento de torção  $T_p^0$  do sistema fundamental, isto é, tudo se passa como se a estrutura fosse isostática.

Se o cabo resultante tiver suas extremidades em cotas diferentes, existirá hiperestático de protensão cujo valor será igual, mas de sinal contrário, ao momento de torção provocado pelo cabo reto de inclinação diferente de zero. O momento de torção final será aquele criado, no estado fundamental, apenas pela parte curva do cabo.

Na protensão com cabos reversos, estes criam momento de torção  $T_p^0$  no sistema fundamental, portanto, para se conseguir  $EI\delta_{10} = 0$ , isto é, incógnita hiperestática nula e conseqüentemente cabo concordante, é preciso que a protensão crie  $T_p^0$  que tenha integral nula ao longo do tramo, portanto:

$$\int_0^\theta T_p^0 T_1 ds = 0 \rightarrow \int_0^\theta T_p^0 ds = 0$$

Com as equações do cabo resultante e do momento de torção  $T_p^0$ , aplicam-se as fórmulas deduzidas para estes cabos e as equações ficam determinadas.

Considere-se agora uma viga simples, curva, engastada apoiada à flexão e biengastada à torção, conforme Fig. 5.7. O sistema é duas vezes estaticamente indeterminado. Adota-se como sistema fundamental a viga biapoiada à flexão e biengastada à torção, resultando numa incógnita hiperestática a ser determinada. O sistema fundamental adotado é hiperestático, porém, os resultados já são conhecidos no que diz respeito à torção. Montanari [15] deduziu para esta vi

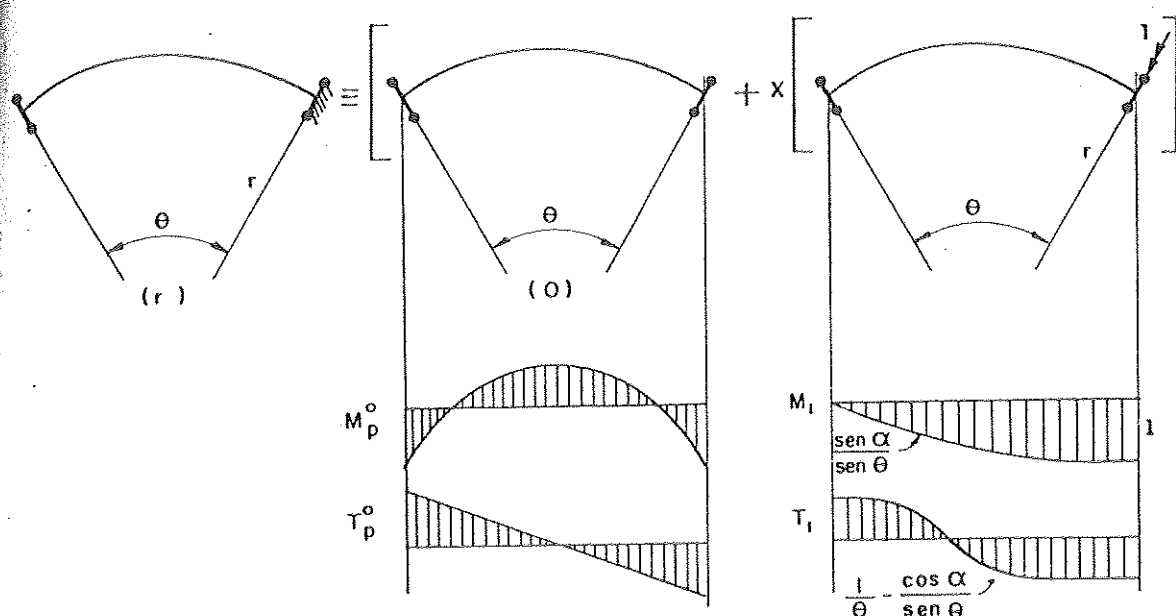


FIG.5.7 - RESOLUÇÃO DO SISTEMA REAL

ga curva hiperestática, esforços que estão reproduzidos no quadro I.

Assim, na resolução do sistema real, o momento unitário aplicado na extremidade do tramo desenvolve, ao longo do mesmo, momentos de flexão e de torção já conhecidos. Analisando a Fig. 5.7 pode-se concluir que na protensão centrada, embora  $T_p^0$  seja nulo, um momento de torção  $T_p$  poderá ser criado indiretamente se o cabo desenvolver hiperestático de flexão, cujo valor é:

$$T_p = X \left( \frac{1}{\theta} - \frac{\cos \alpha}{\text{sen} \theta} \right)$$

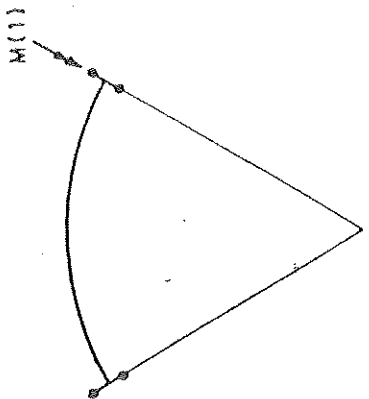
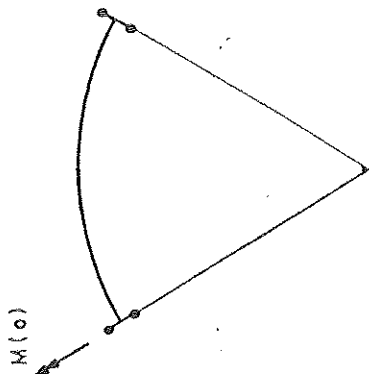
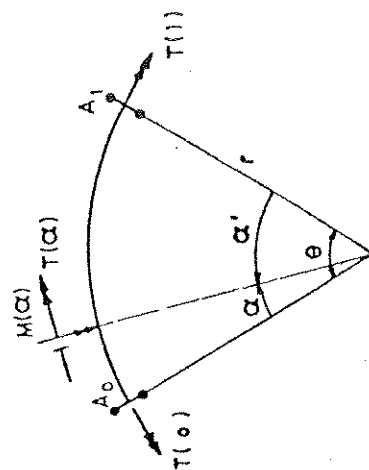
Para que se possa obter cabo concordante, é preciso obedecer à seguinte condição de concordância:

$$EI \delta_{10} = \int_0^{\theta} M_p^0 M_1 ds + K \int_0^{\theta} T_p^0 T_1 ds = 0$$

Na protensão centrada, o cabo resultante não cria momento de torção  $T_p^0$ , o que leva a concluir que para

QUADRO I : ESFORÇOS NUMA VIGA CURVA HIPERESTÁTICA

CASOS DE CARGA	REAÇÕES DE APOIO		TORÇÃO NOS APOIOS		MOMENTOS NO VÃO	
	$R_0$	$R_1$	$T(0)$	$T(1)$	$M(\alpha)$	$T(\alpha)$
PROTENSÃO NO CILINDRO DE SIMETRIA	0	0	0	0	$PZ(\alpha)$	0
MOMENTO $M(0)$	$-\frac{M(0)}{r\theta}$	$\frac{M(0)}{r\theta}$	$M(0) \left[ \cotg \theta - \frac{1}{\theta} \right]$	$M(0) \left[ \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\theta} \right]$	$M(0) \frac{\sin \alpha'}{\sin \theta}$	$M(0) \left[ \frac{\cos \alpha'}{\sin \theta} - \frac{1}{\theta} \right]$
MOMENTO $M(1)$	$\frac{M(1)}{r\theta}$	$-\frac{M(1)}{r\theta}$	$M(1) \left[ \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\sin \theta} \right]$	$M(1) \left[ \frac{1}{\theta} - \cotg \theta \right]$	$M(1) \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}$	$M(1) \left[ \frac{1}{\theta} - \frac{\cos \alpha}{\sin \theta} \right]$



satisfazer a condição de concordância é preciso que o momento fletor  $M_p^0$  criado pela protensão seja tal que:

$$\int_0^{\theta} M_p^0 \cdot M_1 ds = 0$$

O momento fletor final será igual ao momento  $M_p^0$  do sistema fundamental e momento de torção  $T_p$  será nulo.

Na protensão não centrada, o cabo resultante produz no sistema fundamental  $T_p^0$  e  $M_p^0$ . De um modo geral, para que a condição de concordância seja obedecida é preciso que:

$$\int_0^{\theta} M_p^0 M_1 ds = -K \int_0^{\theta} T_p^0 T_1 ds$$

Os momentos finais de flexão e torção serão respectivamente  $M_p^0$  e  $T_p^0$ . Vale ressaltar que  $T_p^0$  é criado apenas pela parte curva do cabo.

Na protensão com cabos reversos, estes produzem no sistema fundamental  $T_p^0$  e  $M_p^0$ . Para que as condições de concordância sejam obedecidas, os cabos devem criar um momento fletor total  $M_p^0$  tal que

$$\int_0^{\theta} M_p^0 M_1 ds = -K \int_0^{\theta} T_p^0 T_1 ds$$

Os momentos finais de flexão e torção serão respectivamente  $M_p^0$  e  $T_p^0$ . Neste caso, o momento de torção  $T_p^0$  é criado em função do momento de torção  $T_q$  devido ao carregamento externo. Conhecida a equação do cabo resultante total e do momento de torção  $T_p$  aplicam-se as fórmulas deduzidas para estes cabos e suas equações ficam determinadas.

Feitas estas considerações e, passando a vigas contínuas, pode-se obter as condições de concordância refe

rentes a cada situação de protensão, generalizando o que foi desenvolvido para a viga simples hiperestática vista anteriormente.

#### 5.4 - Determinação dos traçados dos cabos resultantes econômicos com força de protensão constante

##### 5.4.1 - Protensão centrada

Trata-se de determinar inicialmente uma linha de pressão ou um cabo concordante no interior do fuso de passagem, de modo que este cabo resultante ou os cabos parciais tenham flecha máxima igual à altura útil  $d = h - 2c$  da viga.

Considere-se uma viga curva genérica (Fig. 5.8), submetida a ações máximas e mínimas conhecidas, porém, com as equações das curvas superior e inferior do fuso de passagem

$$e''(\alpha) = c'' - \frac{\max M(\alpha)}{P} \quad \text{e} \quad e''(\alpha) = c' - \frac{\min M(\alpha)}{P}$$

em função da força de protensão  $P$  não conhecida.

Adotando para equação do cabo concordante resultante, num tramo genérico, a forma:

$$z_o(\alpha) = \lambda e''(\alpha) + k_i \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_i} + k_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha)}{\text{sen} \theta_i}$$

e lembrando que para uma viga com  $n$  apoios tem-se  $n$  incógnitas a serem determinadas, o sistema de  $n$  equações se escreve:

$$EI \delta_{i,0} = \int_0^{\theta_i} P \cdot z_o \cdot M_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} P \cdot z_o \cdot M_1 ds = 0 \quad \begin{matrix} (n-2 \text{ condições} \\ \text{de concordância}) \end{matrix}$$

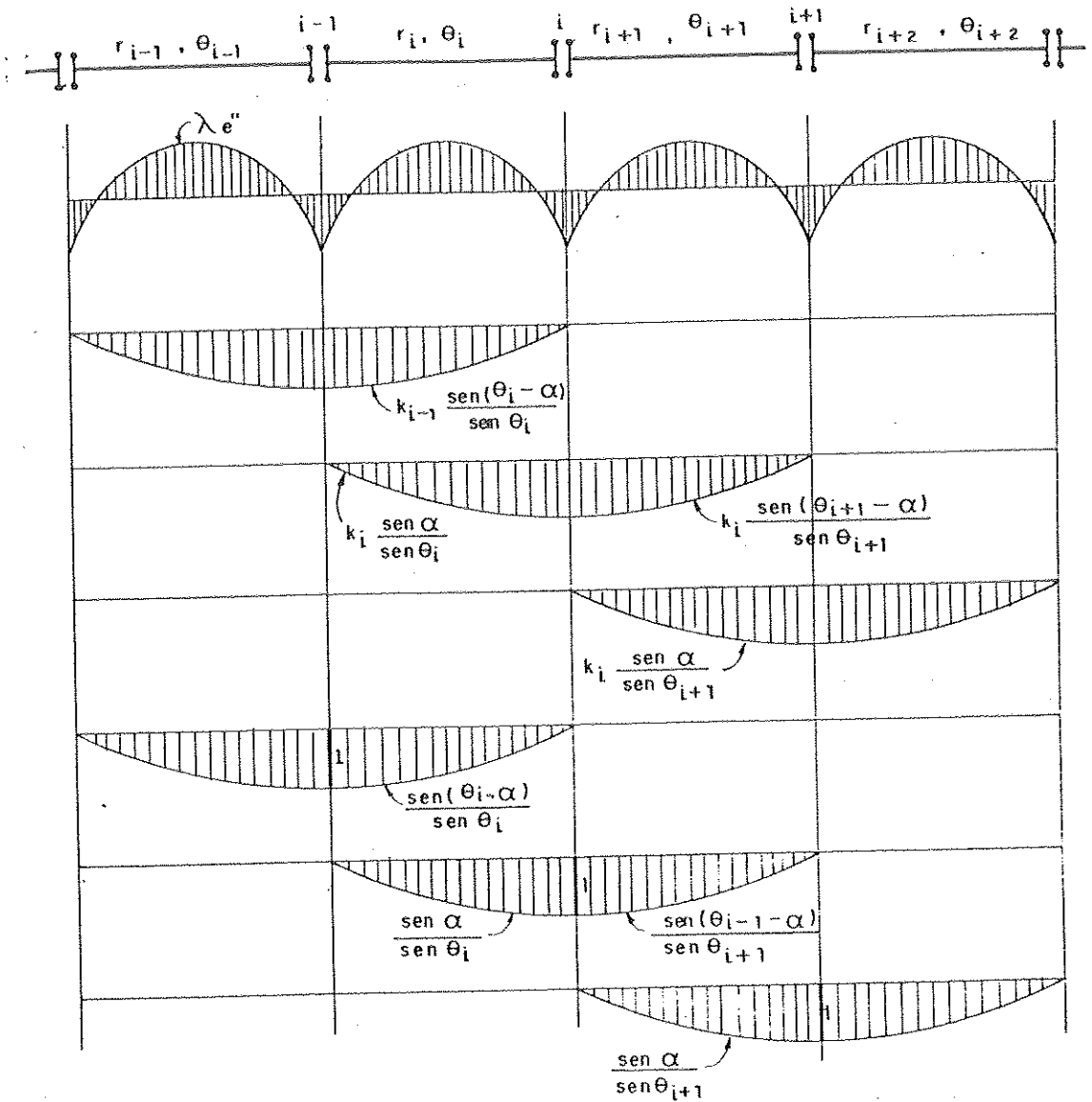


FIG. 5. B — MOMENTOS PARA A DETERMINAÇÃO DO CABO CONCORDANTE.



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ponto A} \rightarrow k_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \bar{\alpha}_i)}{\text{sen}\theta_i} + k_i \frac{\text{sen}\bar{\alpha}_i}{\text{sen}\theta_i} + \lambda e''(A) = e''(A) \\ \text{ou} \\ \text{ponto B} \rightarrow k_{i-1} + \lambda e''(B) = e'(B) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(1 equação que} \\ \text{fixa um ponto} \\ \text{de passagem} \\ \text{para o cabo)} \end{array}$$

$$z_0(B) - z_0(A) = \begin{cases} d \\ \text{ou} \\ \frac{r_i}{r_i + e} d = d_1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(1 equação que fixa a máxima flecha} \\ \text{do cabo)} \end{array}$$

Substituindo  $z_0$  e  $M_1$  na relação de concordância obtêm-se:

$$P \int_0^{\theta_i} \left[ \lambda e'' + k_i \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} + k_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i} \right] \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} ds + P \int_0^{\theta_{i+1}} \left[ \lambda e'' + k_{i+1} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_{i+1}} + k_i \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} \right] \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} ds = 0$$

Com o auxílio da Fig. 5.8, desenvolve-se a expressão da relação de concordância no apoio  $i$  e chega-se a:

$$\lambda \left[ \int_0^{\theta_i} e'' \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} ds + \int_0^{\theta_{i+1}} e'' \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} ds \right] = \lambda \delta_{i,0}$$

$$k_{i-1} \int_0^{\theta_i} \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} ds = k_{i-1} \delta_{i,i-1}$$

$$k_i \left[ \int_0^{\theta_i} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} ds + \int_0^{\theta_{i+1}} \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} ds \right] = k_i \delta_{i,i}$$

$$k_{i+1} \int_0^{\theta_{i+1}} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_{i+1}} \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} ds = k_{i+1} \delta_{i,i+1}$$

Desenvolvendo a expressão  $\delta_{i,0}$  obtêm-se

$$\delta_{i,0} = \chi_i'' - \frac{\Delta_i''}{P}$$

onde

$$\chi_i'' = \int_0^{\theta_i} c'' \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_i} ds + \int_0^{\theta_{i+1}} c'' \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen} \theta_{i+1}} ds$$

$$\Delta_i'' = \int_0^{\theta_i} \max M \cdot M_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} \max M \cdot M_1 ds$$

e a relação de concordância escrita de maneira simplificada fica:

$$k_{i-1} \delta_{i,i-1} + k_i \delta_{i,i} + k_{i+1} \delta_{i,i+1} + \chi_i'' \lambda - \Delta_i'' \frac{\lambda}{P} = 0$$

Fixando-se, por exemplo, o ponto B para passagem do cabo a equação se escreve:

$$k_{i-1} + c'' \lambda - \max M(B) \frac{\lambda}{P} = c' - \frac{\min M(B)}{P}$$

A equação que fixa a máxima flecha do cabo pode ser obtida de duas maneiras:

1) O cabo concordante  $z_0$  a ser determinado é único e se desenvolve na superfície cilíndrica vertical que contém o eixo da viga. Neste caso, o cabo concordante deve apresentar a flecha máxima igual à altura útil  $d = h - 2c$  da viga. Impondo  $z_0(B) - z_0(A) = d$ , onde:

$$z_0(B) = \lambda e''(B) + k_{i-1}$$

$$z_0(A) = \lambda e''(A) + \frac{\text{sen}\bar{\alpha}_i}{\text{sen}\theta_i} k_i + \frac{\text{sen}(\theta_i - \bar{\alpha}_i)}{\text{sen}\theta_i} k_{i-1}$$

a equação obtida é:

$$\left[ 1 - \frac{\text{sen}(\theta - \bar{\alpha}_i)}{\text{sen}\theta_i} \right] k_{i-1} + \frac{\text{sen}\bar{\alpha}_i}{\text{sen}\theta_i} k_i + \left[ \max M(A) - \max M(B) \right] \frac{\lambda}{P} = d$$

2) Se o cabo concordante for desmembrado nos dois cabos parciais situados nas faces da viga, as equações destes últimos em função daquele primeiro, se escrevem:

$$z_1(\alpha) = \frac{r+e}{r} z_0(\alpha) \quad z_2(\alpha) = \frac{r-e}{r} z_0(\alpha)$$

Inicialmente determina-se a equação do cabo concordante  $z_0(\alpha)$  no interior do fuso de passagem e depois, através dos fatores multiplicativos  $r+e/r$  e  $r-e/r$  encontram-se as equações de  $z_1$  e  $z_2$ .

Ora, se se obtiver, neste caso, cabo concordante centrado com flecha máxima igual a  $z_0(B) - z_0(A) = d$ , e imaginando que esta flecha ocorra no tramo  $i$ , o cabo parcial  $z_1$  terá, no mesmo tramo, a equação:

$$z_1(\alpha) = \frac{r_i+e}{r_i} z_0(\alpha)$$

o que leva a ter flecha máxima com valor:

$$\frac{r_i+e}{r_i} \left[ z_0(B) - z_0(A) \right] > d$$

Deste modo, ao se efetuar a transformação senoidal do cabo 1, de modo a alojá-lo no interior da viga com cobrimento adequado, seria necessário aumentar a força de protensão de forma que o valor  $(r_i+e/r_i) [z_0(B) - z_0(A)]$  diminuísse até o valor  $d$ . Observe-se que o cabo econômico é

sempre aquele que na transformação, seja linear ou senoidal, é alojado de maneira adequada no interior da viga, sem alterar a força de protensão. Desta forma, conclui-se que a solução do problema é conseguida fazendo

$$z_1(B) - z_1(A) = d$$

Substituindo as expressões de  $z_1(B)$  e  $z_1(A)$  nesta equação, chega-se a:

$$z_o(B) - z_o(A) = \frac{r_i}{r_i + e} \cdot d = d_1$$

Conclui-se então que neste caso a equação que fixa a máxima flecha do cabo concordante é:

$$\left[ 1 - \frac{\text{sen}(\theta_i - \bar{\alpha}_i)}{\text{sen}\theta_i} \right] k_{i-1} + \frac{\text{sen}\bar{\alpha}_i}{\text{sen}\theta_i} k_i + \left[ \max M(A) - \max M(B) \right] \frac{\lambda}{P} = \frac{r_i}{r_i + e} d$$

Imaginando que se pretende determinar as equações dos cabos parciais, o sistema de  $n$  equações a  $n$  incógnitas se escreve:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1,n-2} & X_1'' & -\Delta_1'' \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2,n-2} & X_2'' & -\Delta_2'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{n-2,1} & \delta_{n-2,2} & \dots & \delta_{n-2,n-2} & X_{n-2}'' & -\Delta_{n-2}'' \\ & & & & c'' & -\max M(B) \\ & & & & & \left[ \max M(A) - \max M(B) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-2} \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c'' - \frac{\min M(B)}{P} \\ \frac{r_i}{r_i + e} d \end{bmatrix}$$

Os valores de  $\delta$  e  $\chi''$  de cada relação de concordância podem ser obtidos através das tabelas de integrais do produto de duas funções deduzidas por Montanari [15]. Neste caso, os coeficientes  $\delta$  valem:

$$\delta_{i,i-1} = \frac{r_i}{2\text{sen}^2\theta_i} (\text{sen}\theta_i - \theta_i \cdot \cos\theta_i)$$

$$\delta_{i,i} = \frac{r_i}{2\text{sen}^2\theta_i} (\theta_i - \text{sen}\theta_i \cdot \cos\theta_i) + \frac{r_{i+1}}{2\text{sen}^2\theta_{i+1}} (\theta_{i+1} - \text{sen}\theta_{i+1} \cdot \cos\theta_{i+1})$$

$$\delta_{i,i+1} = \frac{r_{i+1}}{2\text{sen}^2\theta_{i+1}} (\text{sen}\theta_{i+1} - \theta_{i+1} \cdot \cos\theta_{i+1})$$

Qualquer que seja a transformação introduzida para alojar o cabo no interior da viga, nota-se que os hiperestáticos de protensão criados adicionam ao momento isostático do sistema fundamental, uma parcela senoidal, alterando a forma final do cabo e, portanto, o momento de flexão final. Em decorrência, a linha de pressão se altera não sendo mais possível afirmar que a mesma permanecerá no interior do fuso de passagem. Por isto, será necessário fazer sempre uma verificação.

Imaginando uma transformação senoidal sobre o cabo, determinam-se agora os hiperestáticos de protensão introduzidos. Considere-se um trecho genérico de uma viga curva contínua com o cabo já alojado de maneira adequada, conforme apresenta a Fig. 5.9.

Para garantir o cobrimento do cabo real é necessário que:

$$d'' = y'' - c \quad e \quad d' = y' + c$$

Fazendo:

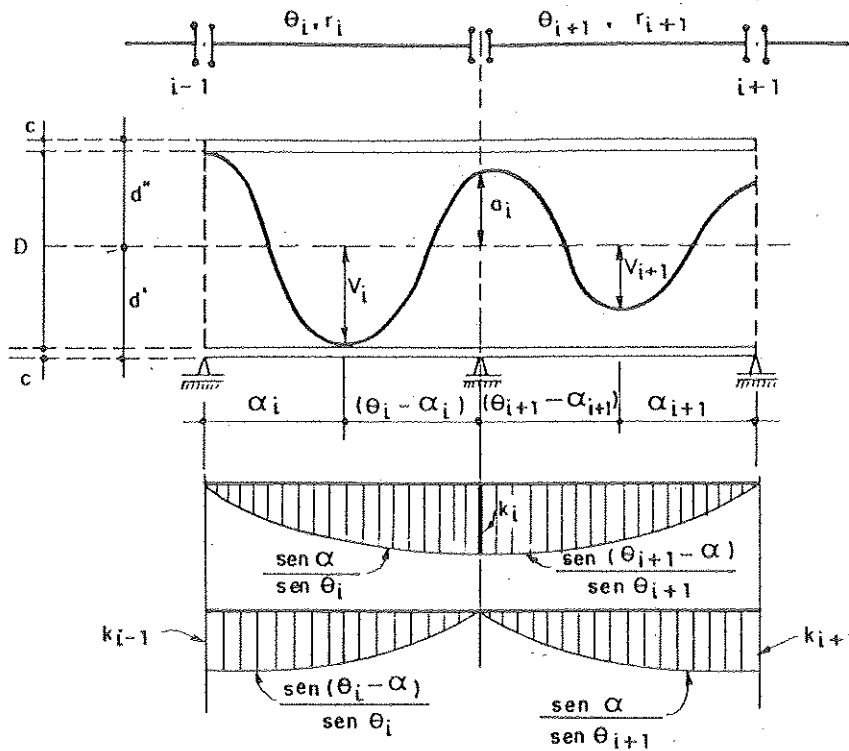


FIG. 5.9 - TRANSFORMAÇÃO SENOIDAL NUM TRECHO GENÉRICO.

$$M_a = P \cdot a_i$$

$$= \bar{P} \cdot d''$$

$$M_v = P \cdot v_i$$

$$= \bar{P} \cdot d'$$

$$\frac{a_i}{v_i} = \frac{d''}{d'} \left( p/\bar{v}_i < \bar{v}_{i+1} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{a_i}{v_{i+1}} = \frac{d''}{d'} \left( p/\bar{v}_{i+1} < \bar{v}_i \right)$$

Considerando  $\bar{a}_i$  o valor da ordenada do cabo com cordante no apoio  $i$  e,  $\bar{v}_i$  ou  $\bar{v}_{i+1}$  a maior ordenada do mesmo cabo nos tramos adjacentes, tem-se:

$$a_i = \bar{a}_i + k_i$$

$$v_i = \bar{v}_i + k_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha_i)}{\text{sen} \theta_i} + k_i \frac{\text{sen} \alpha_i}{\text{sen} \theta_i} \quad p/\bar{v}_i < \bar{v}_{i+1}$$

$$v_{i+1} = \bar{v}_{i+1} + k_i \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha_{i+1})}{\text{sen}\theta_{i+1}} + k_{i+1} \frac{\text{sen}\alpha_{i+1}}{\text{sen}\theta_{i+1}} \quad \text{p/ } \bar{v}_{i+1} < \bar{v}_i$$

Substituindo estas equações nas relações anteriores, obtêm-se:

- Para  $\bar{v}_i < \bar{v}_{i+1}$

$$a_i \cdot d' = v_i \cdot d'' + (a_i + k_i) d' = \left[ \bar{v}_i + k_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha_i)}{\text{sen}\theta_i} + k_i \frac{\text{sen}\alpha_i}{\text{sen}\theta_i} \right] d''$$

$$k_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha_i)}{\text{sen}\theta_i} + k_i \left( \frac{\text{sen}\alpha_i}{\text{sen}\theta_i} - \frac{d'}{d''} \right) + \left( \bar{v}_i - \frac{d'}{d''} \bar{a}_i \right) = 0$$

- Para  $\bar{v}_{i+1} < \bar{v}_i$

$$a_i d' = v_{i+1} \cdot d'' + (\bar{a}_i + k_i) d' = \left[ \bar{v}_{i+1} + k_i \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha_{i+1})}{\text{sen}\theta_{i+1}} + k_{i+1} \frac{\text{sen}\alpha_{i+1}}{\text{sen}\theta_{i+1}} \right] d''$$

$$k_i \left( \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha_{i+1})}{\text{sen}\theta_{i+1}} - \frac{d'}{d''} \right) + k_{i+1} \frac{\text{sen}\alpha_{i+1}}{\text{sen}\theta_{i+1}} + \left( \bar{v}_{i+1} - \frac{d'}{d''} \bar{a}_i \right) = 0$$

O número de equações obtidas é igual ao número de apoios intermediários. Determinadas as incógnitas hiperestáticas, a equação do cabo real no tramo  $i$ , a partir do cabo concordante, se escreve:

$$\bar{z}_i(\alpha) = z_{oi}(\alpha) + k_i \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} + k_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i}$$

Obtido o cabo real centrado, nota-se que a transformação senoidal, por alterar a forma do cabo, faz com que a flecha máxima do mesmo seja maior que  $(r_i/r_i + e)d = d_1$ , por isto, ao ser desdobrado nos cabos parciais, o cabo não fica mais alojado adequadamente no interior da viga.

As ordenadas do cabo transformado nas seções A e

B do tramo  $i$  ficam:

$$\bar{z}_o(B) = z_o(B) + k_{i-1}$$

$$\bar{z}_o(A) = z_o(A) + k_i \frac{\text{sen}\bar{\alpha}_i}{\text{sen}\theta_i} + k_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \bar{\alpha}_i)}{\text{sen}\theta_i}$$

Calculando a flecha máxima tem-se:

$$\bar{z}_o(B) - \bar{z}_o(A) = z_o(B) - z_o(A) + k_{i-1} \left[ 1 - \frac{\text{sen}(\theta_i - \bar{\alpha}_i)}{\text{sen}\theta_i} \right] - k_i \frac{\text{sen}\bar{\alpha}_i}{\text{sen}\theta_i} = \bar{d}_1 \geq d_1$$

Para que o cabo real tenha flecha máxima igual a  $d_1$ , é preciso diminuir proporcionalmente a correspondente flecha do cabo concordante que corrigida fica:

$$d_{1\text{ corrigida}} = d_1 \frac{d_1}{d_1}$$

Resolvendo o sistema com este valor para  $d_1$ , chegar-se-á no final a cabos parciais reais com cobrimento a dequado.

Observe-se que se fosse introduzida no cabo concordante uma transformação linear, obter-se-ia cabo real de mesma forma que o anterior e não seria preciso corrigir o valor  $d_1$ , embora o momento de flexão final se alterasse e com ele, a linha de pressão.

Ainda com relação aos cabos parciais, se os raios das curvas adjacentes a um apoio intermediário da viga forem diferentes, tais cabos, obtidos pelo desdobramento do cabo real centrado, terão naquele apoio uma descontinuidade. Nos tramos adjacentes ao apoio  $i$ , as equações dos cabos parciais ficam:



Tramo i	Tramo i+1
$\bar{z}_1 = \frac{r_i + e}{r_i} \bar{z}_o$	$\bar{z}_1 = \frac{r_{i+1} + e}{r_{i+1}} \bar{z}_o$
$\bar{z}_2 = \frac{r_i - e}{r_i} \bar{z}_o$	$\bar{z}_2 = \frac{r_{i+1} - e}{r_{i+1}} \bar{z}_o$

No apoio i a diferença de cota dos cabos entre o tramo i e o tramo i+1 será:

$$\text{Cabo 1: } \frac{r_{i+1} + e}{r_i} \bar{z}_o(\theta_i) - \frac{r_{i+1} + e}{r_{i+1}} \bar{z}_o(o) = \frac{\bar{z}_{oi}}{r_i \cdot r_{i+1}} e^{(r_{i+1} - r_i)} = h_1$$

$$\text{Cabo 2: } \frac{r_i - e}{r_i} \bar{z}_o(\theta_i) - \frac{r_{i+1} - e}{r_{i+1}} \bar{z}_o(o) = -\frac{\bar{z}_{oi}}{r_i \cdot r_{i+1}} e^{(r_{i+1} - r_i)} = -h_1$$

Para restabelecer a continuidade dos cabos parciais é necessário fazer transformações lineares nos mesmos, de modo que cada um tenha ordenadas coincidentes no apoio.

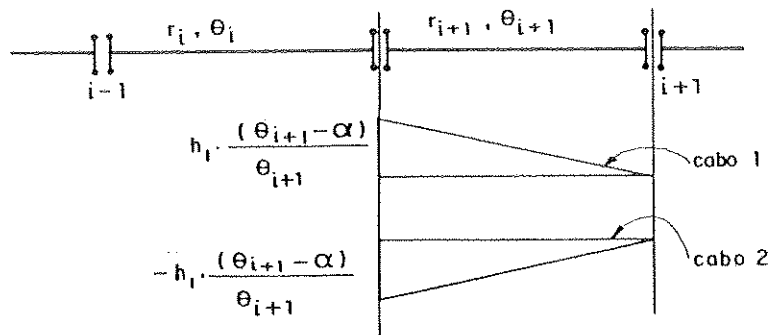


FIG. 5.10— TRANSFORMAÇÃO LINEAR DOS CABOS PARA RESTABELEÇER A CONTINUIDADE NOS APOIOS.

Isto pode ser conseguido fixando-se as ordenadas dos cabos parciais no tramo i e acrescentando-se no tramo i+1 o valor  $h_1(\theta_{i+1} - \alpha)/\theta_{i+1}$  para o cabo 1 e  $-h_1(\theta_{i+1} - \alpha)/\theta_{i+1}$  para o cabo 2, e assim sucessivamente (Fig. 5.10).

Na transformação linear os deslocamentos dos cabos parciais serão iguais e de sinais contrários, não alterando o momento de flexão final. O momento de torção final também permanece inalterado.

#### 5.4.2 - Protensão não centrada

Trata-se de determinar inicialmente uma linha de pressão ou um cabo concordante no interior do fuso de passagem, que cria momentos de flexão e de torção e, que esteja situado numa superfície cilíndrica vertical de raio  $r+e^*$ .

Como se sabe, para que a condição de concordância seja obedecida é preciso que em cada apoio intermediário ocorra:

$$EI\delta_{i,o} = \left[ \int_0^{\theta_i} M_p^o \cdot M_l \cdot ds + \int_0^{\theta_{i+1}} M_p^o \cdot M_l \cdot ds \right] + K \left[ \int_0^{\theta_i} T_p^o \cdot T_l \cdot ds + \int_0^{\theta_{i+1}} T_p^o \cdot T_l \cdot ds \right] = 0$$

No sistema fundamental, o cabo resultante com excentricidade  $e^*$  e ordenadas  $z_o^*(\alpha)$  cria os esforços:

$$M_p^o = P \cdot z_o^*$$

$$T_p^o = -P \cdot e \cdot \frac{dz_o^*}{dx'}$$

Referindo  $z_o^*$  à superfície cilíndrica vertical que contém o eixo da viga e mantendo a mesma inclinação para o cabo, tem-se:

$$z_o^*(\alpha) = \frac{r+e^*}{r} z_o(\alpha)$$

onde  $z_o(\alpha)$  são as ordenadas de um cabo centrado, e fazendo ainda:

$$dx' = \frac{r+e^*}{r} ds$$

os esforços anteriores se escrevem:

$$M_p^0 = P \cdot \frac{r+e^*}{r} z_o(\alpha) = P \cdot z_o^*(\alpha)$$

$$T_p^0 = -P \cdot e^* \frac{dz_o^*}{dx'} = -P \cdot e^* \cdot \frac{r}{r+e^*} \cdot \frac{dz_o^*}{ds} = -P \cdot \frac{e^*}{r+e^*} \frac{dz_o^*}{d\alpha}$$

Adotando para o cabo concordante excêntrico a forma

$$z_o^*(\alpha) = e''(\alpha) + k_i \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} + k_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i}$$

o momento de torção  $T_p^0$  fica:

$$T_p^0 = -P \frac{e^*}{r+e^*} \lambda \frac{de''}{d\alpha}$$

Substituindo  $M_p^0$  e  $T_p^0$  na relação de concordância

$$\begin{aligned} EI\delta_{i,0} = & \int_0^{\theta_i} \left[ \lambda e''(\alpha) + k_i \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} + k_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i} \right] \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} ds + \bar{K}_i \int_0^{\theta_i} \left\{ \lambda \frac{de''}{d\alpha} + \right. \\ & \left. + k_i \left( \frac{1}{\theta_i} - \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\theta_i} \right) + k_{i-1} \left[ \frac{\cos(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i} - \frac{1}{\theta_i} \right] \right\} \left( \frac{1}{\theta_i} - \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\theta_i} \right) ds + \\ & + \int_0^{\theta_{i+1}} \left[ \lambda e''(\alpha) + k_i \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} + k_{i+1} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_{i+1}} \right] \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} ds + \\ & + \bar{K}_{i+1} \int_0^{\theta_{i+1}} \left\{ \lambda \frac{de''}{d\alpha} + k_i \left[ \frac{\cos(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} - \frac{1}{\theta_{i+1}} \right] + k_{i+1} \left( \frac{1}{\theta_{i+1}} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\theta_{i+1}} \right) \right\} \left[ \frac{\cos(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} - \frac{1}{\theta_{i+1}} \right] ds = 0 \end{aligned}$$

onde  $K_i^* = \frac{e^*}{r_i + e^*} \cdot K$

Desenvolvendo a expressão com o auxílio da Fig. 5.11, obtêm-se:

$$\lambda \left\{ \int_0^{\theta_i} e'' M_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} e'' M_1 ds + K_i^* \left[ \int_0^{\theta_i} \frac{de''}{d\alpha} T_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} \frac{de''}{d\alpha} T_1 ds \right] \right\} = \lambda \delta_{i,0}^*$$

$$k_{i-1} \left[ \int_0^{\theta_i} \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i} M_1 ds + K_i^* \int_0^{\theta_i} \left( \frac{\cos(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i} - \frac{1}{\theta_i} \right) T_1 ds \right] = \lambda \delta_{i,i-1}^*$$

$$k_i \left\{ \int_0^{\theta_i} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} M_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} M_1 ds + K_i^* \left[ \int_0^{\theta_i} \left( \frac{1}{\theta_i} + \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\theta_i} \right) T_1 ds \right] + K_{i+1}^* \int_0^{\theta_{i+1}} \left[ \frac{\cos(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} - \frac{1}{\theta_{i+1}} \right] T_1 ds \right\} =$$

$$= k_i \delta_{i,i}^*$$

$$k_{i+1} \left[ \int_0^{\theta_{i+1}} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_{i+1}} M_1 ds + K_{i+1}^* \int_0^{\theta_{i+1}} \left( \frac{1}{\theta_{i+1}} - \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\theta_{i+1}} \right) T_1 ds \right] = k_{i+1} \delta_{i,i+1}^*$$

Sabendo que  $e''(\alpha) = c'' - \frac{\max M(\alpha)}{P}$  e  $\frac{de''}{d\alpha} = - \frac{\max M'(\alpha)}{P}$  a expressão  $\delta_{i,0}^*$  fica:

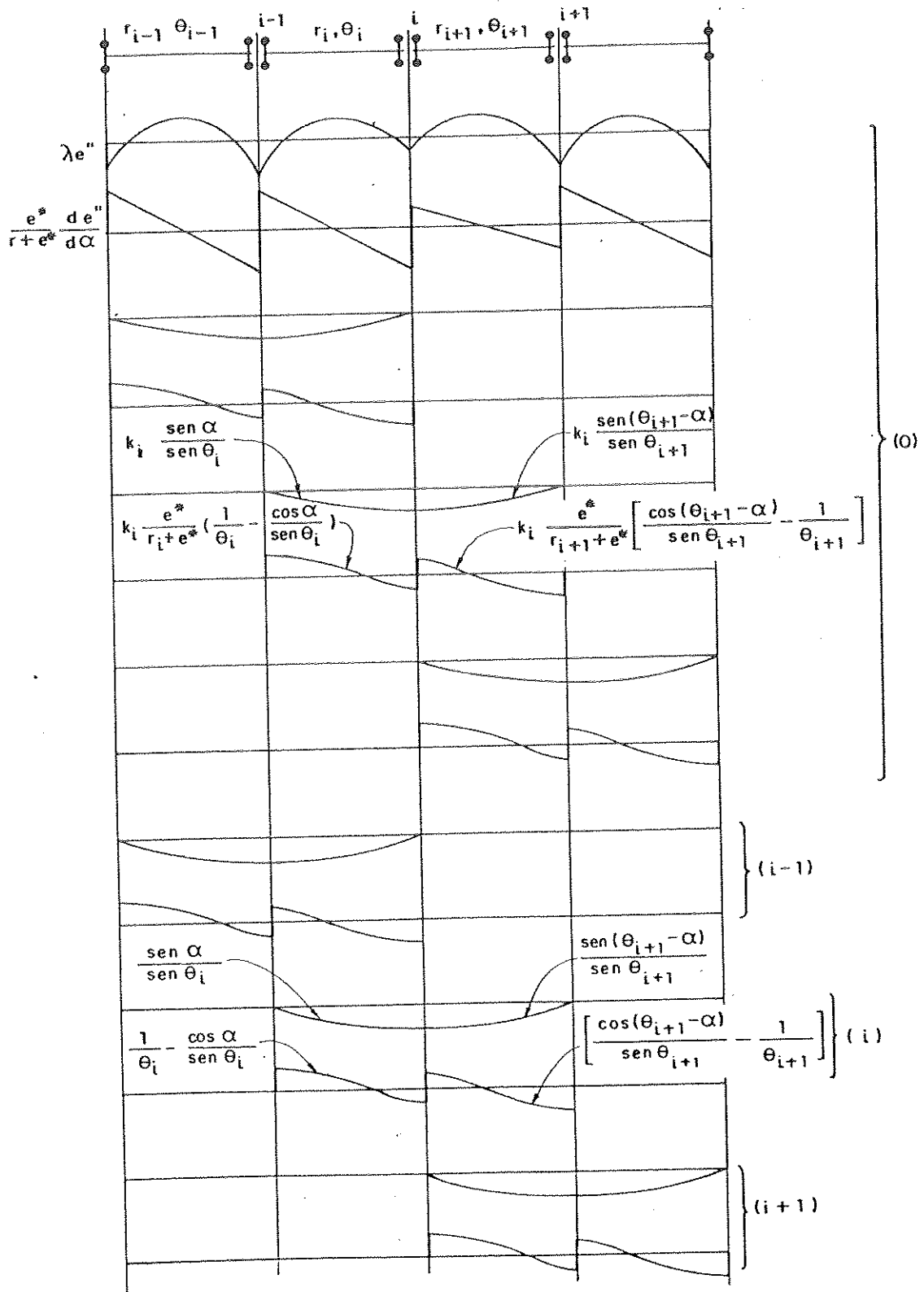


FIG. 5.11 - MOMENTOS PARA A DETERMINAÇÃO DO CABO CONCORDANTE

$$\delta_{i,0}^* = \chi_i'' - \frac{\Delta_i'' + \omega_i''}{P}$$

onde:

$$\chi_i'' = \int_0^{\theta_i} c'' M_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} c'' M_1 ds$$

$$\Delta_i'' = \int_0^{\theta_i} \max M \cdot M_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} \max M \cdot M_1 ds$$

$$\omega_i'' = K_i^* \int_0^{\theta_i} \max M' \cdot M_1 ds + K_{i+1}^* \int_0^{\theta_{i+1}} \max M' \cdot M_1 ds$$

A relação de concordância escrita de maneira simplificada fica:

$$k_{i-1} \delta_{i,i-1}^* + k_i \delta_{i,i}^* + k_{i+1} \delta_{i,i+1}^* + \chi_i'' \lambda - (\Delta_i'' + \omega_i'') \frac{\lambda}{P} = 0$$

Os coeficientes  $\delta^*$  são compostos de duas parcelas, uma devido à flexão e outra devido à torção, e podem ser calculados utilizando-se as tabelas já citadas anteriormente. Através de transformações algébricas Montanari [15] obteve fórmulas simplificadas:

$$\delta_{i,i-1}^* = \frac{r_i}{2 \operatorname{sen} \theta_i} \left[ (1 - K_i^*) - \frac{\theta_i \cos \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i} (1 + K_i^*) + \frac{2K_i^* \operatorname{sen} \theta_i}{\theta_i} \right]$$

$$\delta_{i,i}^* = \frac{r_i}{2 \operatorname{sen} \theta_i} \left[ \frac{\theta_i}{\operatorname{sen} \theta_i} (1 + K_i^*) - \cos \theta_i (1 - K_i^*) - \frac{2K_i^* \operatorname{sen} \theta_i}{\theta_i} \right] +$$

$$+ \frac{r_{i+1}}{2 \operatorname{sen} \theta_{i+1}} \left[ \frac{\theta_{i+1}}{\operatorname{sen} \theta_{i+1}} (1 + K_{i+1}^*) - \cos \theta_{i+1} (1 - K_{i+1}^*) - \frac{2K_{i+1}^* \operatorname{sen} \theta_{i+1}}{\theta_{i+1}} \right]$$



A solução do sistema fornece a equação do cabo concordante excêntrico e a força de protensão P. Verificada a existência deste cabo no interior do fuso de passagem, introduzem-se as transformações senoidais de modo a alojá-lo no interior da viga. Da mesma forma que na protensão centrada do parágrafo anterior, aqui novamente a transformação senoidal altera a forma inicial do cabo, por isto, o cabo real assim obtido apresenta flecha máxima com valor maior que  $(r_i + e)d / (r_i + e^*)$  de modo que ao ser desmembrado nos dois cabos parciais reais um destes não terá cobrimento adequado. A solução então será determinar os hiperestáticos de protensão introduzidos pela transformação senoidal e a flecha máxima do cabo  $\bar{z}_1$  transformado.

$$\bar{z}_1(B) = z_o^*(B) + k_{i-1}$$

$$\bar{z}_1(A) = z_o^*(A) + k_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \bar{\alpha}_i)}{\text{sen}\theta_i} + k_i \frac{\text{sen}\bar{\alpha}_i}{\text{sen}\theta_i}$$

A flecha máxima fica:

$$\bar{z}_1(B) - \bar{z}_1(A) = z_o^*(B) - z_o^*(A) + k_{i-1} \left[ 1 - \frac{\text{sen}(\theta_i - \bar{\alpha}_i)}{\text{sen}\theta_i} \right] - k_i \frac{\text{sen}\bar{\alpha}_i}{\text{sen}\theta_i} = d_1$$

Corrigindo a flecha máxima do cabo concordante obtém-se:

$$d_{1 \text{ corrigido}} = d_1 \frac{d_1}{\bar{d}_1}$$

Com esta flecha resolve-se novamente o sistema, e determinam-se o cabo concordante e a força de protensão P. Fazendo a transformação senoidal obtém-se o cabo real de modo que ao ser desmembrado nos cabos parciais, estes terão cobrimento adequado.

Ainda com relação à transformação senoidal, a alteração da forma inicial do cabo provoca uma mudança no momento de flexão final, o que torna necessário verificar se



a linha de pressão ainda permanece no interior do fuso de passagem.

Observe-se que para cada excentricidade  $e^*$  adota da para o cabo concordante, obtêm-se uma solução econômica para o cabo e a força de protensão.

Ainda com relação aos cabos parciais obtidos, se os raios das curvas adjacentes a um apoio interno da viga forem diferentes, estes cabos terão naquele apoio uma descontinuidade. Nos tramos adjacentes ao apoio  $i$ , as equações dos cabos parciais ficam:

Tramo $i$	Tramo $i+1$
$\bar{z}_1(\alpha) = \frac{r_i^+e}{r_i^+e^*} \bar{z}_0^*(\alpha)$	$\bar{z}_1(\alpha) = \frac{r_{i+1}^+e}{r_{i+1}^+e^*} \bar{z}_0^*(\alpha)$
$\bar{z}_2(\alpha) = \frac{r_i^+e}{r_i^+e^*} \bar{z}_0^*(\alpha)$	$\bar{z}_2 = \frac{r_{i+1}^-e}{r_{i+1}^+e^*} \bar{z}_0^*(\alpha)$

No apoio  $i$ , a diferença de cota dos cabos entre o tramo  $i$  e o tramo  $i+1$  será:

#### Cabo 1

$$\frac{r_i^+e}{r_i^+e^*} \bar{z}_0^*(\theta_i) - \frac{r_{i+1}^+e}{r_{i+1}^+e^*} \bar{z}_0^*(0) = \frac{(e-e^*)(r_{i+1}^-r_i)}{(r_i^+e^*)(r_{i+1}^+e^*)} \bar{z}_0^*(\theta_i) = h_1$$

#### Cabo 2

$$\frac{r_i^-e}{r_i^+e^*} \bar{z}_0^*(\theta_i) - \frac{r_{i+1}^-e}{r_{i+1}^+e^*} \bar{z}_0^*(0) = \frac{(e+e^*)(r_i^-r_{i+1})}{(r_i^+e^*)(r_{i+1}^+e^*)} \bar{z}_0^*(\theta_i) = h_2$$

Para restabelecer a continuidade dos cabos parciais é necessário introduzir transformações lineares nos mesmos, de modo que cada um tenha ordenadas coincidentes em qualquer apoio intermediário. Isto pode ser conseguido de maneira análoga ao parágrafo anterior, ou seja, fixando-se as ordenadas dos cabos parciais no tramo  $i$ , e acrescentando-se no tramo  $i+1$  o valor  $h_1(\theta_{i+1}-\alpha)/\theta_{i+1}$  para o cabo 1 e subtraindo  $h_2(\theta_{i+1}-\alpha)/\theta_{i+1}$  do cabo 2.

Estas transformações não alteram os momentos finais pois, a soma dos momentos fletores parciais introduzida é nula e a resultante dos momentos de torção parciais introduzidos é linear não alterando, portanto, o momento de torção final.

#### 5.4.3 - Protensão com cabos reversos

Neste caso, os cabos reversos criam momentos de flexão e de torção no sistema fundamental. No tramo  $i$ , as equações destes cabos se escrevem:

$$z_{1,i}(\alpha) = \frac{r_i^{+e}}{r_i} \left[ z_{0,i}(\alpha) - \frac{r_i^{-e}}{eP} \int_0^{\alpha_i} T_{p,i}(\alpha) d\alpha \right]$$

$$z_{2,i}(\alpha) = \frac{r_i^{-e}}{r_i} \left[ z_{0,i}(\alpha) + \frac{r_i^{+e}}{eP} \int_0^{\alpha_i} T_{p,i}(\alpha) d\alpha \right]$$

onde  $z_0(\alpha)$  é a equação do cabo resultante centrado e  $T_p(\alpha)$  é o momento de torção criado pelos cabos.

Para que as condições de concordância sejam obedecidas é preciso que em cada apoio intermediário ocorra:

$$EI\delta_{i,0} = \int_0^{\theta_i} M_p^0 M_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} M_p^0 M_1 ds + K \left[ \int_0^{\theta_i} T_p^0 T_1 ds + \right.$$

$$+ \int_0^{\theta_{i+1}} T_p^0 T_1 ds \Big] = 0$$

Se se adotar  $T_p^0$  proporcional a  $T_q$ , os momentos no sistema fundamental ficam

$$M_p^0 = P \cdot z_o(\alpha)$$

$$T_p^0 = \beta \cdot T_q(\alpha)$$

assim, o momento de torção  $T_p^0$  poderá influenciar ou até mesmo anular o momento de torção causado pelo carregamento externo.

Adotando um valor para  $\beta$ , calcula-se o valor das integrais

$$K\beta \int_0^{\theta_i} T_q T_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} T_q T_1 ds = \Omega_i$$

da relação de concordância, de maneira que se obtém:

$$\int_0^{\theta_i} M_p^0 M_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} M_p^0 M_1 ds = -\Omega_i$$

O problema consiste em determinar inicialmente um cabo resultante centrado  $z_o(\alpha)$  no interior do fuso de passagem, tal que ao ser desmembrado nos cabos reversos, estes criam um momento de torção previamente definido e sejam concordantes.

Adotando para equação do cabo centrado a forma

$$z_o(\alpha) = e''(\alpha) + k_i \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} + k_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i}$$

e substituindo  $M_p^o$  na expressão obtida a partir da relação de concordância obtêm-se

$$P \left[ \int_0^{\theta_i} z_o M_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} z_o M_1 ds \right] = -\Omega_i$$

que desenvolvida fica:

$$\int_0^{\theta_i} \left[ \lambda e''(\alpha) + k_i \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_i} + k_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha)}{\text{sen} \theta_i} \right] \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_i} ds + \int_0^{\theta_{i+1}} \left[ \lambda e''(\alpha) + \right. \\ \left. + k_{i+1} \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_{i+1}} + k_i \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen} \theta_{i+1}} \right] \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen} \theta_{i+1}} ds = -\frac{\Omega_i}{P}$$

Com o auxílio da Fig. 5.12 pode-se escrever esta expressão na forma simplificada

$$k_{i-1} \delta_{i,i-1} + k_i \delta_{i,i} + k_{i+1} \delta_{i,i+1} + \chi_i^{\lambda - \Delta_i} \frac{\lambda}{P} = -\frac{\Omega_i}{P}$$

onde os coeficientes do primeiro membro são os mesmos obtidos no parágrafo 5.4.1.

Fixando-se, por exemplo, o ponto B para passagem do cabo, obtêm-se uma outra equação.

O cabo centrado e os cabos parciais têm formas diferentes, portanto, flechas máximas diferentes. A solução econômica é aquela em que se determina o cabo centrado e ao desmembrá-lo nos cabos reversos, um destes tem flecha máxima igual à altura útil  $d$  da viga. Por isto, para se obter a equação que fixa a máxima flecha para o cabo centrado devem ser estudadas duas possibilidades:

- 1) O cabo  $z_1$  tem a maior flecha e supondo que a mesma ocorre no tramo  $i$ , as ordenadas do cabo nas seções A e B, daquele tramo, serão:

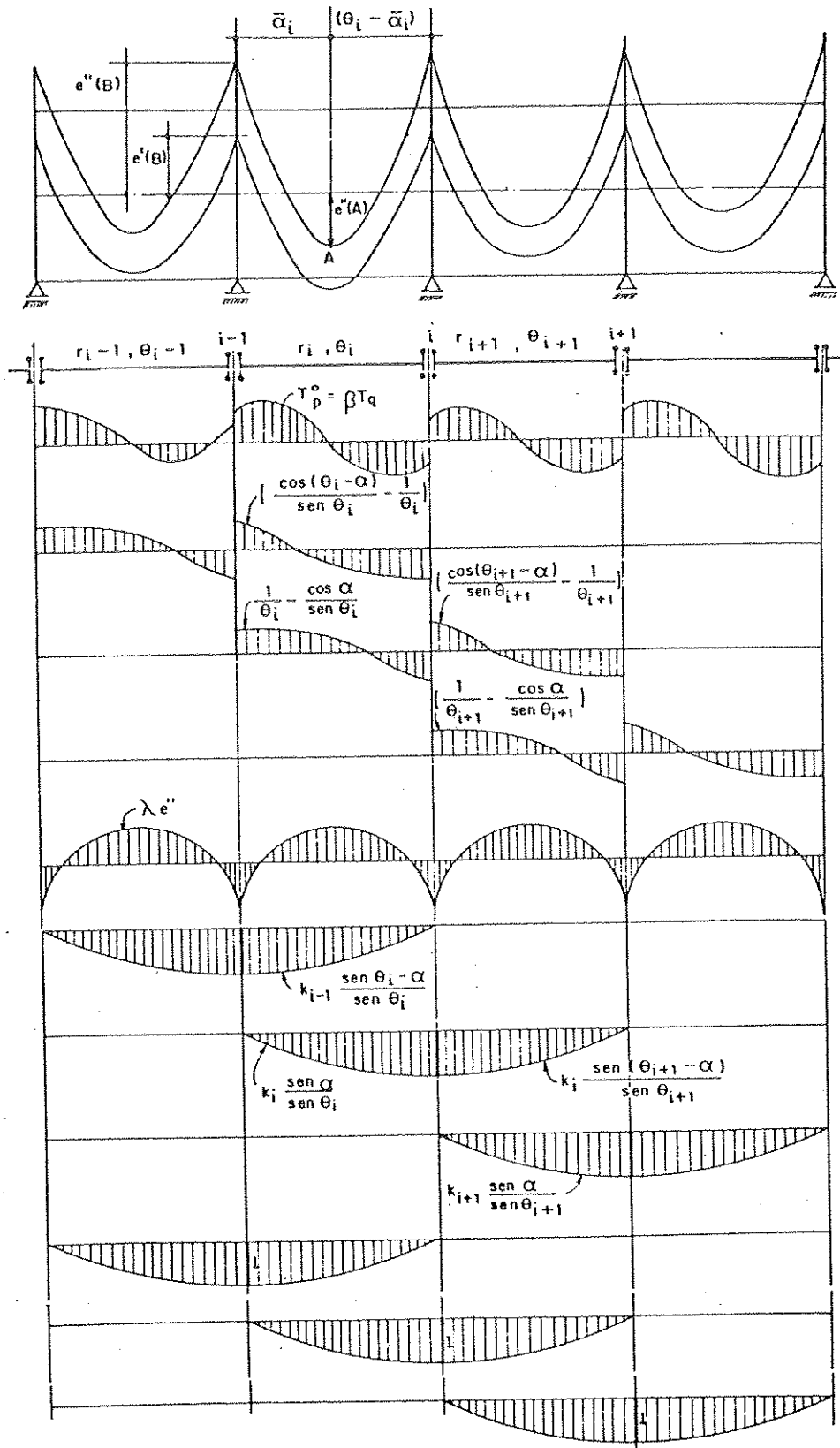


FIG. 5.12 - MOMENTOS PARA A DETERMINAÇÃO DO CABO CONCORDANTE

$$z_1(B) = \frac{r_i^{+e}}{r_i} z_0(B)$$

$$z_1(A) = \frac{r_i^{-e}}{r_i} z_0(A) - \frac{r_i^{2-e^2}}{eP} \beta \int_0^\alpha T_q d\alpha \Big|_0^{\bar{\alpha}_i}$$

Fazendo:

$$z_1(B) - z_1(A) = d$$

a máxima flecha do cabo centrado será:

$$z_0(B) - z_0(A) = \frac{r_i}{r_i^{+e}} d - \frac{r_i^{-e}}{eP} \beta \int_0^\alpha T_q d\alpha \Big|_0^{\bar{\alpha}_i} = \bar{d}$$

$$\text{Com } \beta < 0 \text{ e } \int_0^\alpha T_q d\alpha \Big|_0^{\bar{\alpha}_i} < 0 \rightarrow \bar{d} < d$$

Conclui-se que o cabo  $z_1$  terá a maior flecha somente quando o valor da integral for negativo.

2) Supondo que o cabo  $z_2$  tem a maior flecha e fazendo

$$z_2(B) - z_2(A) = d$$

a máxima flecha do cabo centrado será:

$$z_0(B) - z_0(A) = \frac{r_i}{r_i^{+e}} d + \frac{r_i^{+e}}{eP} \beta \int_0^\alpha T_q d\alpha \Big|_0^{\bar{\alpha}_i} = \bar{d}$$

$$\text{Com } \beta < 0 \text{ e } \int_0^\alpha T_q d\alpha \Big|_0^{\bar{\alpha}_i} > 0 \rightarrow \bar{d} < d$$

Analogamente, conclui-se que o cabo  $z_2$  terá a maior flecha somente quando o valor da integral for positivo.



## 5.5 - Exemplos

Considere-se uma viga curva contínua submetida a um carregamento externo conforme mostra a Fig. 5.13.

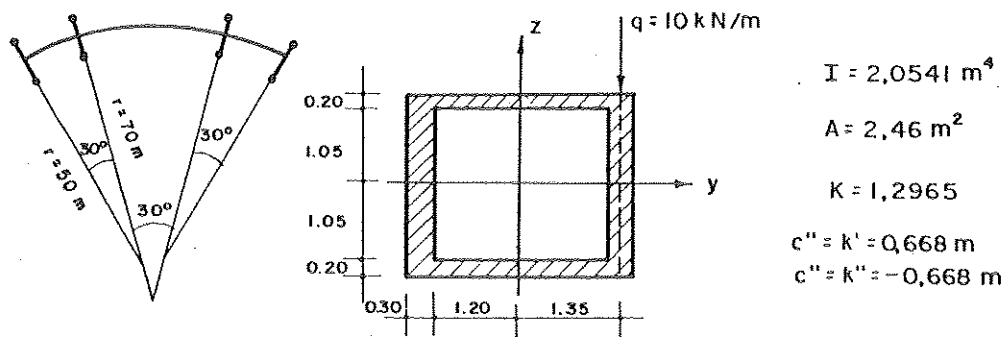


FIG. 5.13 - ESQUEMA DE VIGA E CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO

As equações dos esforços solicitantes são:

$$1^{\circ} \text{ Tramo: } M_g = gr_1^2 \text{sen}\alpha \left( \text{tg} \frac{\theta_1}{2} - \text{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - 6487,9 \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_1}$$

$$T_g = gr_1^2 \left( -\text{tg} \frac{\theta_1}{2} \text{cos}\alpha + \text{sen}\alpha - \alpha + \frac{\theta_1}{2} \right) - 6487,9 \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{\text{cos}\alpha}{\text{sen}\theta_1} \right)$$

$$M_q = q(r_1 + e)^2 \text{sen}\alpha \left( \text{tg} \frac{\theta_1}{2} - \text{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - 1128,5 \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_1}$$

$$T_q = q(r_1 + e)^2 \left[ -\text{tg} \frac{\theta_1}{2} \text{cos}\alpha + \text{sen}\alpha - \frac{r_1}{r_1 + e} \left( \alpha - \frac{\theta_1}{2} \right) \right] +$$

$$- 1128,5 \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{\text{cos}\alpha}{\text{sen}\theta_1} \right)$$

$$2^{\circ} \text{ Tramo: } M_g = gr_2^2 \text{sen}\alpha \left( \text{tg} \frac{\theta_2}{2} - \text{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - 6487,9 \left[ \frac{\text{sen}(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen}\theta_2} + \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_2} \right]$$

$$T_g = gr_2^2 \left( -\text{tg} \frac{\theta_2}{2} \text{cos}\alpha + \text{sen}\alpha - \alpha + \frac{\theta_2}{2} \right) - 6487,9 \left[ \frac{\text{cos}(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen}\theta_2} - \frac{\text{cos}\alpha}{\text{sen}\theta_2} \right]$$

$$M_q = q(r_2 + e)^2 \text{sen}\alpha \left( \text{tg} \frac{\theta_2}{2} - \text{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - 1128,5 \left[ \frac{\text{sen}(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen}\theta_2} + \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_2} \right]$$



$$T_q = q(r_2 + e)^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha - \frac{r_2}{r_2 + e} \left( \alpha - \frac{\theta_2}{2} \right) - 1128,5 \left[ \frac{\cos(\theta_2 - \alpha)}{\operatorname{sen} \theta_2} - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \theta_2} \right]$$

TABELA 5.1 - ESFORÇOS SOLICITANTES (kNm)

Seção	$\alpha$	max M	min M	$\Delta M$	T	max M adotado
0	0	0	0	0	-602,6	207,652
1	3	1481,79	1266,28	215,51	-525,4	1574,001
2	6	2465,84	2107,68	358,16	-303,5	2487,927
3	9	2949,43	2521,88	427,55	-203,3	2949,430
4	12	2931,25	2507,75	423,50	-10,8	2958,510
5	15	2411,34	2065,33	346,01	+167,5	2515,166
6	18	1391,14	1195,14	196,00	305,5	1619,399
7	21	-98,37	-126,58	28,21	377,1	271,209
8	24	-1813,17	-2137,63	324,46	356,3	-1529,404
9	27	-3945,50	-4636,52	691,02	217,3	-3782,440
10	30/0	-6487,90	-7616,40	1128,50	$\frac{-65,1}{-377,7}$	-6487,900
11	3	-2757,00	-3255,60	498,60	-607,7	-2517,424
12	6	155,00	148,40	6,60	-634,4	570,724
13	9	2586,60	2241,50	345,10	-508,1	2776,544
14	12	4052,30	3495,50	556,80	279,7	4100,036
15	15	4541,20	3913,50	627,70	0	4541,200

Os valores dos esforços solicitantes são fornecidos na Tabela 5.1. Adota-se para max M uma função parabólica de modo que em cada seção se tenha  $\max M_{\text{adotado}} > \max M$ , significando que a curva limite superior e" obtida a partir de  $\max M_{\text{adotado}}$  representa a curva e" real e está no interior do fuso de passagem. A equação adotada para max M é:

$$1^{\circ} \text{ Tramo: } \max M(\alpha) = \frac{4f}{\theta_1} \left( \frac{\alpha}{\theta_1} - 1 \right) + \left( \frac{b-a}{\theta_1} \right) \alpha + a \quad \begin{cases} a = 207,652 \text{ kNm} \\ b = -6487,900 \text{ kNm} \\ f = -5655,29 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$2^{\circ} \text{ Tramo: } \max M(\alpha) = \frac{4f}{\theta_2} \left( \frac{\alpha}{\theta_2} - 1 \right) + b \quad \begin{cases} b = 6487,9 \text{ kNm} \\ f = -11029,1 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$3^{\circ} \text{ Tramo: } \max M(\alpha) = \frac{4f}{\theta_3} \left( \frac{\alpha}{\theta_3} - 1 \right) + \left( \frac{b-a}{\theta_3} \right) \alpha + a \quad \begin{cases} a = -6487,9 \text{ kNm} \\ b = 207,652 \text{ kNm} \\ f = -5655,29 \text{ kNm} \end{cases}$$

A partir dos esforços solicitantes e das características geométricas da seção, determinar-se-ão para os três casos de protensão desenvolvidos, os traçados econômicos dos cabos e as respectivas forças de protensão.

#### 5.5.1 - Protensão centrada - P constante

Os coeficientes das relações de concordância podem ser calculados com o auxílio das tabelas fornecidas em anexo e seus valores são:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = 21,7407$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 6,5170$$

$$\chi_1'' = \chi_2'' = 21,4788$$

$$\Delta_1'' = \Delta_2'' = 10.854,5223$$

Fixando-se inicialmente para ponto de passagem do cabo a extremidade inferior do fuso na seção do apoio intermediário correspondente à seção de maior  $\Delta M$ , obtém-se a equação:

$$\lambda e''(B) + k_1 = e'(B)$$

$$k_1 + 0,668 \lambda + 6487,9 \frac{\lambda}{P} = -0,668 + \frac{7616,4}{P}$$

A equação que fixa a máxima flecha do cabo concordante é

$$\left[ 1 - \frac{\text{sen}(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen}\theta_2} \right] k_1 - \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_2} k_2 + \left[ \text{max}M(A) - \text{max}M(B) \right] \frac{\lambda}{P} = d_1$$

onde:

$$d_1 = \frac{r_2}{r_2 + e} d \quad d = h - 2c = 2,30\text{m} \quad \rightarrow \quad d_1 = 2,25648\text{m}$$

A equação obtida é

$$0,48236 k_1 - 0,51764 k_2 + 11029,1 \frac{\lambda}{P} = 2,25648$$

e o sistema na forma matricial se escreve

$$\begin{bmatrix} 21,7407 & 6,5170 & 21,4788 & -10.854,5223 \\ 6,5170 & 21,7407 & 21,4788 & -10.854,5223 \\ 1 & 0 & 0,668 & 6.487,9 \\ 0,48236 & -0,51764 & 0 & 11.029,1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,668 + \frac{7616,4}{P} \\ 2,25648 \end{bmatrix}$$

cuja solução fornece:

$$\begin{cases} P = 3825,00 \text{ kN} \\ \lambda = 0,77631 \\ k_1 = k_2 = -0,51211 \end{cases}$$

Com estes valores pode-se determinar as ordenadas do cabo concordante centrado. Para alojá-lo no interior da viga introduzem-se transformações senoidais que alteram a forma inicial e consequentemente a flecha máxima do cabo. Assim, ao desmembrar o cabo transformado nos dois cabos parciais,  $z_1$  e  $z_2$ , o primeiro deixa de ter cobrimento adequado. É preciso, portanto, corrigir a flecha máxima inicial  $d_1$  do cabo concordante. Primeiramente, com os parâmetros obtidos determinam-se as ordenadas deste cabo:

$$\text{apoio (seção B)} \quad \rightarrow \quad z_0(B) = \lambda e''(B) + k_1 = 1,32321$$

$$\begin{array}{l} \text{vão central} \\ \text{(seção A)} \end{array} \rightarrow z_o(A) = \lambda e''(A) + 2k_1 \frac{\text{sen}15^\circ}{\text{sen}30^\circ} = -0,93327$$

Como o cabo concordante é simétrico, os hiperes-táticos introduzidos na transformação senoidal são iguais e podem ser calculados fazendo:

$$\frac{z_o(B) + k_1}{z_o(A) + 2k_1 \frac{\text{sen}15^\circ}{\text{sen}30^\circ}} = \frac{d''}{d'} \rightarrow k_1 = k_2 = -0,19159$$

A flecha máxima do cabo transformado é:

$$\bar{d}_1 = d_1 + k_1 \left[ 1 - \frac{\text{sen}(\theta_2 - \bar{\alpha})}{\text{sen}\theta_2} \right] - k_2 \frac{\text{sen}\bar{\alpha}}{\text{sen}\theta_2} = 2,26324 \text{ m}$$

Diminuindo proporcionalmente a flecha inicial do cabo concordante obtém-se uma flecha máxima corrigida igual a

$$d_{1 \text{ corrigido}} = d_1 \frac{d_1}{\bar{d}_1} = 2,24974 \text{ m}$$

e resolvendo novamente o sistema, obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 3832,94 \text{ kN} \\ \lambda = 0,77558 \\ k_1 = k_2 = -0,51180 \end{array} \right.$$

Com  $P=3832,94 \text{ kN}$  e  $\bar{\sigma}_{cs} = \bar{\sigma}_{cv} = 15000 \text{ kN/m}^2$  calculam-se os valores referentes às ordenadas extremas do núcleo limite

$$a'' = +5,7628 \text{ m} \quad b'' = +0,668 \text{ m}$$

$$a' = -5,7628 \text{ m} \quad b' = -0,668 \text{ m}$$

e conclui-se que os valores adotados inicialmente estão corretos. Com os parâmetros conhecidos, determinam-se as ordenadas das curvas limites e do cabo concordante, cujos valores são apresentados na Tabela 5.2.

TABELA 5.2 - PROTENSÃO CENTRADA - P CONSTANTE - ORDENADAS DAS CURVAS LIMITES, DOS CABOS CONCORDANTE E REAL E DOS CABOS PARCIAIS.

Seção	$\alpha^0$	$e''$ (m)	$z_0$ (m)	$e'$ (m)	$\bar{z}_0$ (m)	$\bar{z}_1$ (m)	$\bar{z}_2$ (m)	Continuidade restabelecida	
								$z_1$ (m)	$z_2$ (m)
0	0	0,6138	0,4761	-0,668	0,4761	0,4889	0,4632	0,4801	0,4720
1	3	0,2574	0,1460	-0,9984	0,1261	0,1295	0,1226	0,1207	0,1314
2	6	0,0189	-0,0924	-1,2179	-0,1322	-0,1358	-0,1287	-0,1446	-0,1199
3	9	-0,1015	-0,2388	-1,3260	-0,2986	-0,3066	-0,2905	-0,3154	-0,2817
4	12	-0,1059	-0,2934	-1,3223	-0,3727	-0,3828	-0,3627	-0,3916	-0,3539
5	15	0,1180	-0,2558	-1,2068	-0,3546	-0,3641	-0,3450	-0,3729	-0,3362
6	18	0,2455	-0,1259	-0,9800	-0,2439	-0,2504	-0,2373	-0,2592	-0,2285
7	21	0,5972	0,0964	-0,6350	-0,0404	-0,0415	-0,0393	-0,0503	-0,0305
8	24	1,0670	0,4112	-0,1103	0,2560	0,2629	0,2491	0,2541	0,2579
9	27	1,6548	0,8188	0,5417	0,6455	0,6629	0,6280	0,6541	0,6368
10	00 0	2,3607	1,3191	1,3191	1,1282	$\frac{1,1588}{1,1500}$	$\frac{1,0977}{1,1065}$	1,1500	1,1065
11	3	1,3248	0,5092	0,1814	0,3159	0,3220	0,3099	0,3220	0,3099
12	6	0,5191	-0,1207	-0,7067	-0,3159	-0,3220	0,3098	-0,3220	-0,3098
13	9	-0,0564	-0,5707	-1,2528	-0,7672	-0,7820	-0,7524	-0,7820	-0,7524
14	12	-0,4017	-0,8407	-1,5800	-1,0380	-1,0580	-0,0180	-1,0580	-1,0180
15	15	-0,5168	-0,9307	-1,6890	-1,1282	-1,1500	-1,1065	-1,1500	-1,1065

$$e''(\alpha) = c'' - \frac{\max M(\alpha)}{P}$$

$$e'(\alpha) = c' - \frac{\min M(\alpha)}{P}$$

$$z_0 \begin{cases} 1^{\circ} \text{ Tramo: } z_0(\alpha) = 0,77558 e''(\alpha) - 0,51180 \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_1} \\ 2^{\circ} \text{ Tramo: } z_0(\alpha) = 0,77558 e''(\alpha) - 0,51180 \left[ \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_2} + \frac{\text{sen}(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen} \theta_2} \right] \end{cases}$$

$$\bar{z}_0 \begin{cases} 1^{\circ} \text{ Tramo: } \bar{z}_0(\alpha) = z_0(\alpha) - 0,1908 \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_1} \\ 2^{\circ} \text{ Tramo: } \bar{z}_0(\alpha) = z_0(\alpha) - 0,1908 \left[ \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_2} + \frac{\text{sen}(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen} \theta_2} \right] \end{cases}$$

$$\bar{z}_1 \begin{cases} 1^{\circ} \text{ Tramo: } \frac{r_1 + e}{r_1} \bar{z}_0 \\ 2^{\circ} \text{ Tramo: } \frac{r_2 + e}{r_2} \bar{z}_0 \end{cases} \quad \bar{z}_2 \begin{cases} 1^{\circ} \text{ Tramo: } \frac{r_1 - e}{r_1} \bar{z}_0 \\ 2^{\circ} \text{ Tramo: } \frac{r_2 - e}{r_2} \bar{z}_0 \end{cases}$$

$$z_1 \begin{cases} 1^{\circ} \text{ Tramo: } \bar{z}_1 - 0,0088 \\ 2^{\circ} \text{ Tramo: } \bar{z}_1 \end{cases} \quad z_2 \begin{cases} 1^{\circ} \text{ Tramo: } \bar{z}_2 + 0,0088 \\ 2^{\circ} \text{ Tramo: } \bar{z}_2 \end{cases}$$

Verificada a existência do cabo concordante no interior do fuso de passagem, introduzem-se transformações senoidais para baixo no cabo  $z_0$  de 0,1909m sobre os apoios intermediários obtendo desta forma o cabo discordante  $\bar{z}_0$  que, por sua vez, é desdobrado nos cabos parciais  $\bar{z}_1$  e  $\bar{z}_2$ . Para restabelecer a continuidade destes cabos, nos apoios intermediários, fixam-se as ordenadas do tramo central enquanto que nos tramos extremos subtrai-se 0,0088m do cabo 1 e soma-se ao cabo 2 a mesma quantia, obtendo desta maneira os cabos reais  $z_1$  e  $z_2$  alojados com cobrimento adequado no interior da viga.

O momento de flexão final criado pela protensão é determinado a partir do cabo resultante real e o seu valor é:

$$1^\circ \text{ Tramo: } M_p = P \bar{z}_0(\alpha) + X_1 \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_1}$$

$$2^\circ \text{ Tramo: } M_p = P \bar{z}_0(\alpha) + X_1 \frac{\text{sen}(\theta_1 - \alpha)}{\text{sen}\theta_1} + X_2 \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_1}$$

onde  $X_1$  e  $X_2$  são os hiperestáticos de flexão criados pelo cabo real.

O momento de torção final é:

$$1^\circ \text{ Tramo: } T_p = X_1 \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{\text{cos}\alpha}{\text{sen}\theta_1} \right)$$

$$2^\circ \text{ Tramo: } T_p = X_1 \left( \frac{\text{cos}\alpha}{\text{sen}\theta_2} - \frac{1}{\theta_2} \right) + X_2 \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{\text{cos}\alpha}{\text{sen}\theta_2} \right)$$

É preciso verificar ainda se a linha de pressão permanece no interior do fuso de passagem.

Na Fig. 5.14 estão representados os cabos parciais reais.

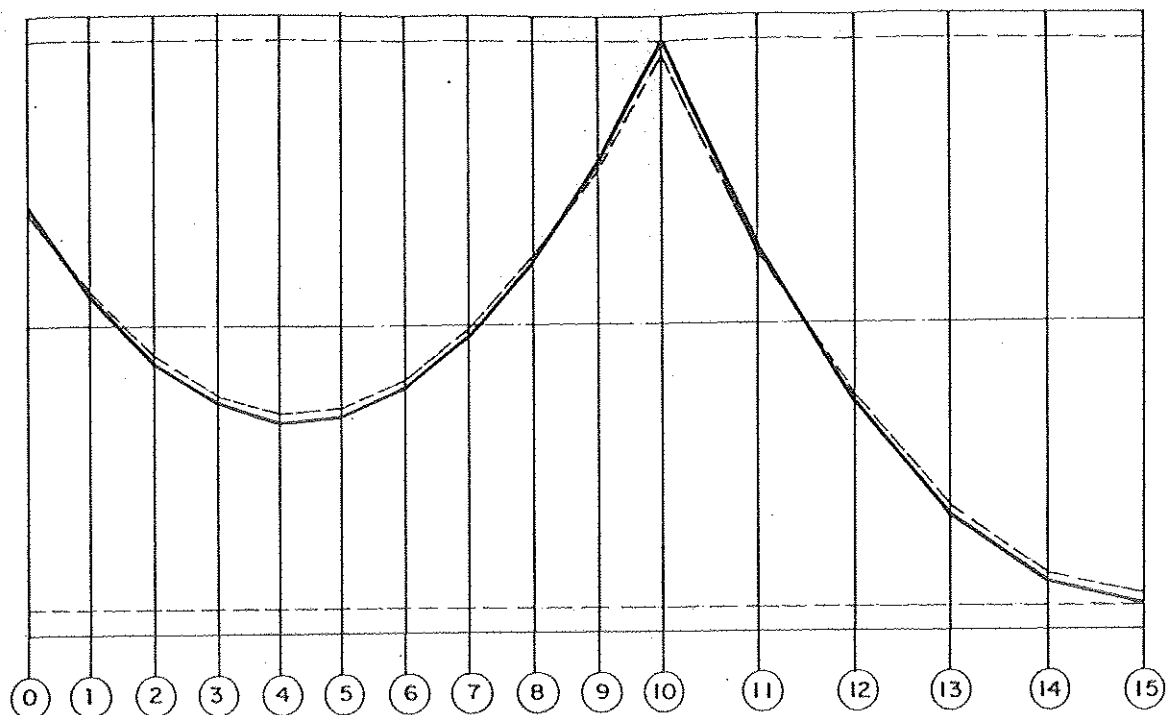


FIG. 5.14 - PROTENSÃO CENTRADA - REPRESENTAÇÃO DOS CABOS REAIS.

#### 5.5.2 - Protensão não centrada - P constante

Neste caso, procurar-se-á determinar os traçados econômicos dos cabos parciais, de modo que o cabo resultante, e concordante, esteja situado numa superfície cilíndrica vertical de raio  $r+e^*$ , onde  $e^* = 0,50\text{m}$ .

Os coeficientes das relações de concordância calculados com o auxílio das tabelas ficam:

$$\delta_{11}^* = \delta_{22}^* = 21,7450 \quad \Delta_1'' = \Delta_2'' = 10854,5223$$

$$\delta_{12}^* = \delta_{21}^* = 6,5189 \quad \omega_1'' = \omega_2'' = 1925,3036$$

$$\chi_1'' = \chi_2'' = 21,4788$$

Uma outra equação é obtida fixando para ponto de passagem do cabo a extremidade inferior do fuso de passagem, portanto:

$$k_1 + 0,668 \lambda + 6.487,9 \frac{\lambda}{P} = -0,668 + \frac{7616,4}{P}$$

Supondo que a diferença entre as ordenadas do cabo no apoio e no meio do vão central corresponde à máxima flecha, a equação fica:

$$z_o^*(B) - z_o^*(A) = d_1 \quad \text{onde } d_1 = \frac{r_2 + e^*}{r_2 + e} d = 2,27260 \text{ m}$$

$$0,48236 k_1 - 0,51764 k_2 + 11029,1 \frac{\lambda}{P} = 2,27260 \text{ m}$$

O sistema de equações se escreve:

$$\begin{bmatrix} 21,7450 & 6,5189 & 21,4788 & -12.779,8259 \\ 6,5189 & 21,7450 & 21,4788 & -12.779,8259 \\ 1 & 0 & 0,6680 & 6.487,9 \\ 0,48236 & -0,51764 & 0 & 11.029,1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,668 + \frac{7616,4}{P} \\ 2,27260 \end{bmatrix}$$

que resolvido fornece:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 3.777,911 \text{ kN} \\ \lambda = 0,77248 \\ k_1 = k_2 = -0,49458 \end{array} \right.$$

valores que definem a forma do cabo concordante excêntrico. Para alojá-lo no interior da viga introduzem-se transformações senoidais que, como se sabe, alteram a forma inicial e conseqüentemente a flecha máxima do cabo. É preciso então corrigir a flecha máxima inicial  $d_1$  do cabo concordante. Com os parâmetros obtidos determinam-se as ordenadas deste cabo:



$$\begin{array}{l} \text{apoio} \\ \text{(seção B)} \end{array} \rightarrow z_o^*(B) = \lambda e''(B) + k_1 = 1,34803$$

$$\begin{array}{l} \text{vão central} \\ \text{(seção A)} \end{array} \rightarrow z_o^*(A) = \lambda e''(A) + 2k_1 \frac{\text{sen}15^\circ}{\text{sen}30^\circ} = 0,92457$$

Como o cabo concordante é simétrico, os hiperes táticos introduzidos na transformação senoidal são iguais e podem ser obtidos fazendo:

$$\frac{z_o^*(B) + k_1}{z_o^*(A) + 2k_1 \frac{\text{sen}15^\circ}{\text{sen}30^\circ}} = \frac{d''}{d'} \rightarrow k_1 = k_2 = -0,20806$$

A flecha máxima do cabo transformado fica:

$$\bar{d}_1 = d_1 + k_1 \left[ 1 - \frac{\text{sen}(\theta_2 - \bar{\alpha})}{\text{sen}\theta_2} \right] - k_2 \frac{\text{sen}\bar{\alpha}}{\text{sen}\theta_2} = 2,27994\text{m}$$

Diminuindo proporcionalmente a flecha inicial do cabo concordante obtêm-se uma flecha máxima corrigida i gual a:

$$d_{1 \text{ corrigido}} = d_1 \frac{d_1}{\bar{d}_1} = 2,26528 \text{ m}$$

Com este valor para  $d_1$ , resolve-se novamente o sistema e obtêm-se os parâmetros:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 3.786,412 \text{ kN} \\ \lambda = 0,77171 \\ k_1 = k_2 = -0,49430 \end{array} \right.$$

Conhecido P, calculam-se as ordenadas extremas do núcleo limite, cujos valores coincidem com os adotados inicialmente. A seguir, determinam-se as ordenadas das curvas limites e do cabo concordante, apresentados na Tabela 5.3.

TABELA 5.3 - PROTENSÃO EXCÊNTRICA - P CONSTANTE - ORDENADAS DAS CURVAS LIMITES, DOS CABOS CONCORDANTE REAL E DOS CABOS PARCIAIS.

Seção	α°	e'' (m)	z <sub>o</sub> * (m)	e'	z <sub>o</sub> (m)	z <sub>1</sub> (m)	z <sub>2</sub> (m)	Continuidade restabelecida	
								z <sub>1</sub> (m)	z <sub>2</sub> (m)
0	0	0,6132	0,4732	-0,6680	0,4732	0,4812	0,4559	0,4758	0,4677
1	3	0,2523	0,1430	-1,0024	0,1218	0,1233	0,1168	0,1179	0,1286
2	6	0,0109	-0,0949	-1,2246	-0,1382	-0,1405	-0,1332	-0,1459	-0,1214
3	9	-0,1110	-0,2403	-1,3340	-0,3051	-0,3102	-0,2939	-0,3156	-0,2821
4	12	-0,1134	-0,2930	-1,3303	-0,3792	-0,3856	-0,3653	-0,3910	-0,3535
5	15	0,0037	-0,2530	-1,2135	-0,3602	-0,3663	-0,3470	-0,3717	-0,3352
6	18	0,2403	-0,1200	-0,9836	-0,2481	-0,2523	-0,2390	-0,2577	-0,2272
7	21	0,5964	0,1060	-0,6346	-0,0426	-0,0433	-0,0410	-0,0487	-0,0292
8	24	1,0719	0,4251	-0,1035	0,2566	0,2609	0,2472	0,2555	0,2590
9	27	1,6670	0,8376	0,5565	0,6495	0,6604	0,6257	0,6550	0,6375
10	30 0	2,3815	1,3435	1,3435	1,1363	$\frac{1,1554}{1,1500}$	$\frac{1,0947}{1,1065}$	1,1500	1,1065
11	3	1,3329	0,5280	0,1918	0,3182	0,3220	0,3099	0,3220	0,3099
12	6	0,5173	-0,1063	-0,7072	-0,3181	-0,3220	-0,3098	-0,3220	-0,3098
13	9	-0,0653	-0,5593	-1,2600	-0,7727	-0,7820	-0,7524	-0,7820	-0,7524
14	12	-0,4148	-0,8312	-1,5912	-1,0454	-1,0580	-1,0180	-1,0580	-1,0180
15	15	-0,5313	-0,9218	-1,7016	-1,1363	-1,1500	-1,1065	-1,1500	-1,1065

$$e''(\alpha) = c'' - \frac{\max N(\alpha)}{P} \qquad e'(\alpha) = c' - \frac{\min N(\alpha)}{P}$$

$$z_o^* \begin{cases} 1^\circ \text{ Tramo: } z_o^*(\alpha) = 0,77171 e''(\alpha) - 0,49430 \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_1} \\ 2^\circ \text{ Tramo: } z_o^*(\alpha) = 0,77171 e''(\alpha) - 0,49430 \left[ \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_2} + \frac{\text{sen}(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen} \theta_2} \right] \end{cases}$$

$$z_o^* \begin{cases} 1^\circ \text{ Tramo: } z_o^*(\alpha) = z_o^*(\alpha) - 0,2072 \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_1} \\ 2^\circ \text{ Tramo: } z_o^*(\alpha) = z_o^*(\alpha) - 0,2072 \left[ \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_2} + \frac{\text{sen}(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen} \theta_2} \right] \end{cases}$$

$$z_1 \begin{cases} 1^\circ \text{ Tramo: } \frac{r_1 + e}{r_1 + e^*} z_o^* \\ 2^\circ \text{ Tramo: } \frac{r_2 + e}{r_2 + e^*} z_o^* \end{cases} \qquad z_2 \begin{cases} 1^\circ \text{ Tramo: } \frac{r_1 - e}{r_1 + e^*} z_o^* \\ 2^\circ \text{ Tramo: } \frac{r_1 - e}{r_2 + e^*} z_o^* \end{cases}$$

$$z_1 \begin{cases} 1^\circ \text{ Tramo: } z_1 - 0,0054 \\ 2^\circ \text{ Tramo: } z_1 \end{cases} \qquad z_2 \begin{cases} 1^\circ \text{ Tramo: } z_2 + 0,0118 \\ 2^\circ \text{ Tramo: } z_2 \end{cases}$$

Verificada a existência do cabo concordante no interior do fuso de passagem, introduzem-se no mesmo transformações senoidais para baixo de 0,2072m sobre os apoios intermediários obtendo desta forma o cabo discordante  $\bar{z}_0^*$  que, por sua vez, é desdobrado nos cabos parciais  $\bar{z}_1$  e  $\bar{z}_2$ . Para restabelecer a continuidade destes cabos nos apoios intermediários, fixam-se as ordenadas no vão central, enquanto que, nos tramos extremos, subtrai-se do cabo 1 a quantia de 0,0054m e soma-se 0,0118m ao cabo 2, obtendo desta maneira os cabos reais  $z_1$  e  $z_2$  convenientemente alojados no interior da viga.

Calculando os hiperestáticos de flexão introduzidos pelo cabo resultante real, o momento de flexão final fica:

$$1^\circ \text{ Tramo: } M_p = P\bar{z}_0^*(\alpha) + X_1 \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_1}$$

$$2^\circ \text{ Tramo: } M_p = P\bar{z}_0^*(\alpha) + X_1 \frac{\text{sen}(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen}\theta_2} + X_2 \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_2}$$

O momento de torção final é

$$1^\circ \text{ Tramo: } T_p = \bar{T}_p^0 + X_1 \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\theta_1} \right)$$

$$2^\circ \text{ Tramo: } T_p = \bar{T}_p^0 + X_1 \left( \frac{\cos(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen}\theta_2} - \frac{1}{\theta_2} \right) + X_2 \left( \frac{1}{\theta_2} - \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\theta_2} \right)$$

onde  $\bar{T}_p^0$  é o momento de torção criado pelo cabo resultante real no sistema fundamental.

As forças de protensão dos cabos parciais são obtidas fazendo:

$$P_1 = \frac{3786,4}{2} \left( 1 + \frac{e^*}{e} \right) = 2594,4 \text{ kN} \quad P_2 = \frac{3786,4}{2} \left( 1 - \frac{e^*}{e} \right) = 1192 \text{ kN}$$

O momento  $M_{z,p}$ , criado pela excentricidade do cabo, é constante ao longo da viga e com valor:

$$M_{z,p} = (P_1 - P_2)e = 1893,2 \text{ kNm}$$

Na Fig. 5.15 estão representados os cabos parciais reais.

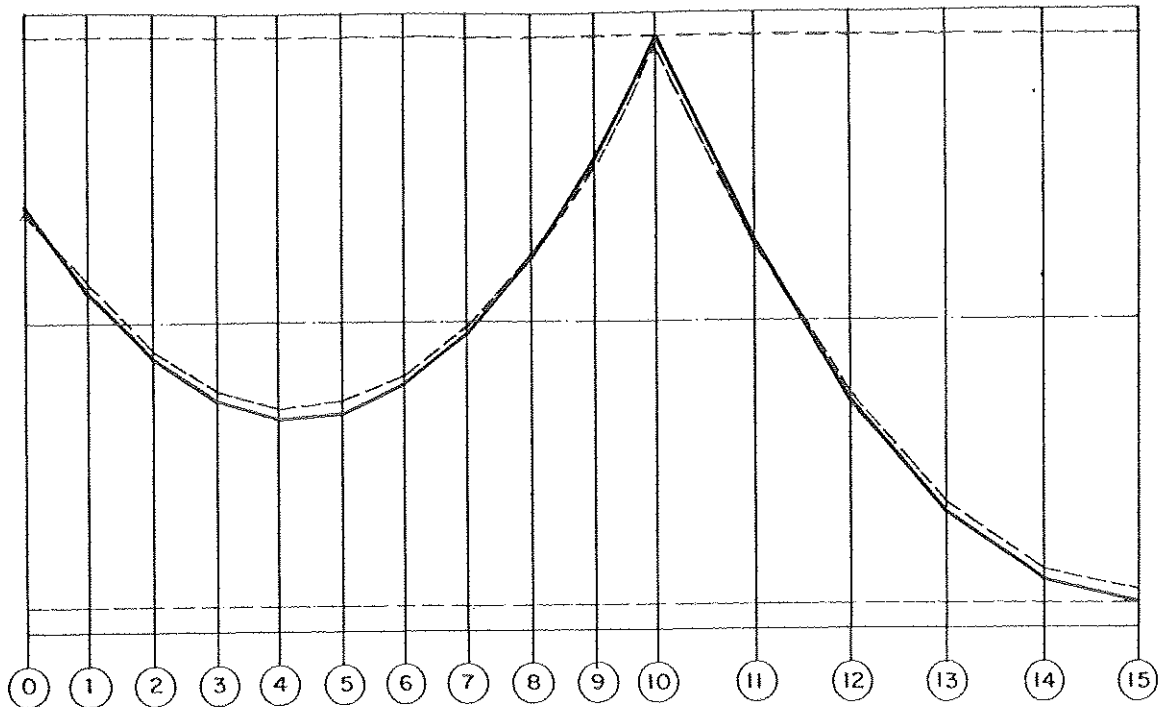


FIG. 5.15- PROTENSÃO NÃO CENTRADA - REPRESENTAÇÃO DOS CABOS REAIS.

### 5.5.3 - Protensão com cabos reversos - P constante

Sejam determinar os traçados econômicos dos cabos reversos de modo a eliminar a metade do momento de torção provocado pelo carregamento externo, portanto,  $\beta = -0,5$ . Inicialmente determina-se um cabo centrado  $z_0$ . Os coeficientes das relações de concordância são iguais aos obtidos na protensão centrada, bastando acrescentar os coeficientes:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 1176,5$$

A equação que fixa o ponto de passagem também é a mesma da protensão centrada e a equação que fixa a máxima

flecha do cabo depende do sinal da integral

$$\int_0^{\alpha} T_q d\alpha \Big|_0^{\bar{\alpha}_i}$$

$$\int_0^{\alpha} T_q d\alpha \Big|_0^{15^\circ} = -118,957 < 0 \quad + \quad \text{o cabo 1 tem a maior flecha}$$

A flecha máxima é

$$d_1 = \frac{r_2}{r_2 + e} d - \frac{r_2 - e}{eP} \beta \int_0^{\alpha} T_q d\alpha \Big|_0^{15^\circ} = 2,25648 - \frac{3024,592}{P}$$

e a equação pode ser escrita:

$$0,48236 k_1 - 0,51764 k_2 + 11029,1 \frac{\lambda}{P} = 2,25648 - \frac{3024,592}{P}$$

O sistema de equações obtido se escreve

$$\begin{bmatrix} 21,7407 & 6,5170 & 21,4788 & -10.854,5223 \\ 6,5170 & 21,7407 & 21,4788 & -10.854,5223 \\ 1 & 0 & 0,6680 & +6.487,9 \\ 0,48236 & -0,51764 & 0 & 11.029,1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1176,5}{P} \\ -\frac{1176,5}{P} \\ -0,668 + \frac{7616,4}{P} \\ 2,25648 - \frac{3024,592}{P} \end{bmatrix}$$

cuja solução fornece:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 4727,9 \text{ kN} \\ \lambda = 0,68616 \\ k_1 = k_2 = -0,45700 \end{array} \right.$$

TABELA 5.4 - PROTENSÃO COM CABOS REVERSOS - P CONSTANTE - ORDENADAS DAS CURVAS LIMITES,  
DO CABO RESULTANTE E CABOS PARCIAIS

Seção	$\alpha$	$e''$ (m)	$z_0$ (m)	$e'$ (m)	$\int_0^\alpha T_q d\alpha$	$z_1$ (m)	$z_2$ (m)	Continuidade restabelecida		Cabos reais	
								$z_1$ (m)	$z_2$ (m)	$z_1$ (m)	$z_2$ (m)
0	0	0,6241	0,4282	-0,6680	0	0,4398	0,4167	0,4398	0,4167	0,6214	0,2351
1	3	0,3351	0,1821	-0,9358	-29,870	0,0701	0,2941	0,0701	0,2941	0,2517	0,1125
2	6	0,1418	0,0018	-1,1138	-53,890	-0,2092	0,2126	-0,2092	0,2126	-0,0276	0,0310
3	9	0,0442	-0,1127	-1,2014	-69,364	-0,3872	0,1619	-0,3872	0,1619	-0,2056	-0,0197
4	12	0,0423	-0,1610	-1,1984	-74,966	-0,4588	0,1367	-0,4588	0,1367	-0,2772	-0,0449
5	15	0,1360	-0,1432	-1,1048	-70,746	-0,4240	0,1375	-0,4240	0,1375	-0,2424	-0,0441
6	18	0,3255	-0,0591	-0,9208	-58,130	-0,2882	0,1700	-0,2882	0,1700	-0,1066	-0,0116
7	21	0,6106	0,0915	-0,6412	-39,912	-0,0623	0,2452	-0,0623	0,2452	0,1193	0,0636
8	24	0,9915	0,3086	-0,2159	-20,253	0,2376	0,3795	0,2376	0,3795	0,4192	0,1979
9	27	1,4680	0,5924	0,3127	-4,666	0,5901	0,5946	0,5901	0,5946	0,7717	0,4130
10	30	2,0403	0,9429	0,9429	0	$\frac{0,9684}{0,9611}$	$\frac{0,9175}{0,9248}$	0,9684	0,9175	1,1500	0,7359
11	3	1,2005	0,3609	-0,0206	-26,794	0,2210	0,5008	0,2283	0,4935	0,4099	0,3119
12	6	0,5473	-0,0918	-0,6994	-60,092	-0,4229	0,2394	-0,4156	0,2321	-0,2340	0,0505
13	9	0,0807	-0,4151	-1,1421	-90,563	-0,9196	0,0893	-0,9123	0,0820	-0,7307	-0,0996
14	12	-0,1992	-0,6092	-1,4073	-111,524	-1,2322	0,0139	-1,2249	0,0066	-1,0433	-0,1750
15	15	-0,2925	-0,6738	-1,4957	-118,957	-1,3389	-0,0088	-1,3316	-0,0161	-1,1500	-0,1977

Com os parâmetros conhecidos, determinam-se as ordenadas das curvas limites e do cabo resultante e nota-se que pelos valores apresentados na Tabela 5.4, este cabo está no interior do fuso de passagem. Aplicando as fórmulas de  $z_1$  e  $z_2$  obtêm-se as ordenadas dos cabos reversos concordantes. Para restabelecer a continuidade destes cabos nos apoios intermediários fixam-se as ordenadas nos tramos extremos enquanto que, no tramo central, soma-se 0,0073m ao cabo 1 e subtrai-se a mesma quantidade do cabo 2. Para alojar os cabos no interior da viga faz-se deslocamentos de 0,1816m para cima em toda a extensão da viga para o cabo 1 e igual deslocamento para baixo para o cabo 2.

Os momentos finais criados pelos cabos são iguais a  $M_P^0$  e  $T_P^0$  e a linha de pressão não se altera.

Na Fig. 5.16 estão representados os cabos parciais reais.

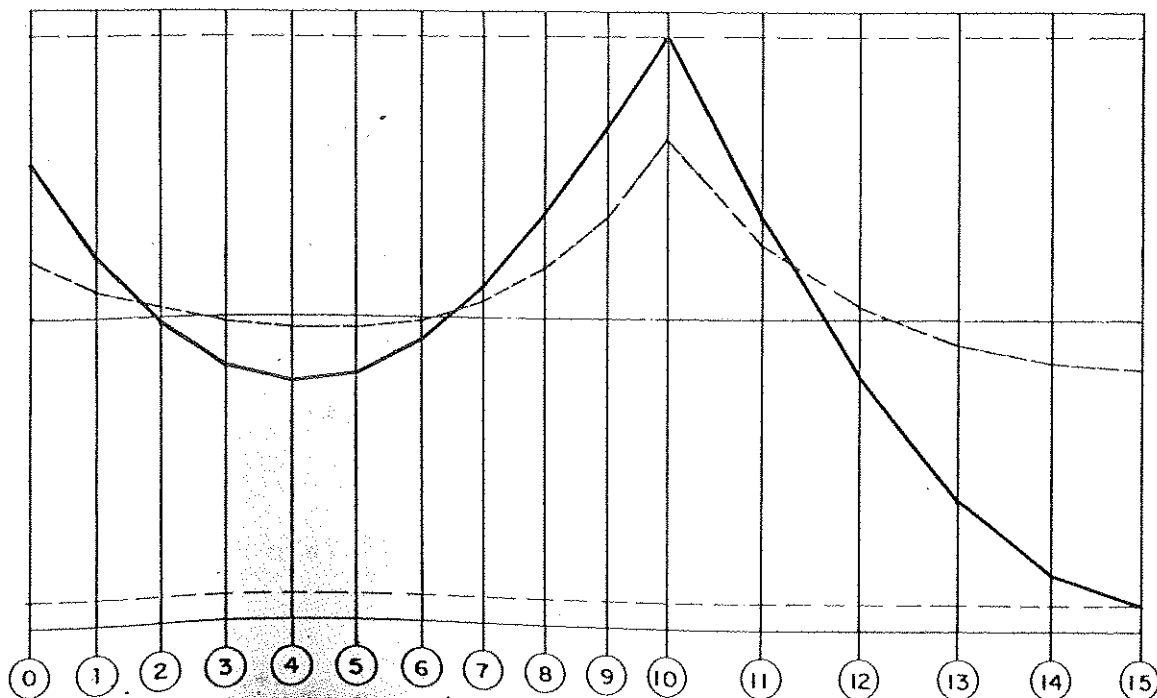


FIG. 5.16 - PROTENSÃO COM CABOS REVERSOS - REPRESENTAÇÃO DOS CABOS REAIS

5.6 - Determinação dos traçados econômicos dos cabos de protensão com força de protensão variável

5.6.1 - Protensão centrada

A resolução do problema é semelhante à do parágrafo 5.4.1, alterando apenas a força de protensão que, numa seção qualquer, é expressa em função da máxima força de protensão, ou seja,  $P(\alpha) = \eta(\alpha)P$

As curvas limites, superior e inferior, do fuso de passagem ficam:

$$e''(\alpha) = c'' - \frac{\max M(\alpha)}{\eta(\alpha) \cdot P} \quad e'(\alpha) = c' - \frac{\min M(\alpha)}{\eta(\alpha) \cdot P}$$

Substituindo  $M_p^0 = \eta(\alpha) \cdot P \cdot z_0(\alpha)$  na expressão da relação de concordância e, com o auxílio da figura 5.17, chega-se a:

$$k_{i-1} \delta_{i,i-1} + k_i \delta_{i,i} + k_{i+1} \delta_{i,i+1} + \chi_i'' \lambda - \Delta_i'' \frac{\lambda}{P} = 0$$

$$k_{i-1} \int_0^{\theta_i} \eta(s) \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} ds = k_{i-1} \delta_{i,i-1}$$

$$k_i \left[ \int_0^{\theta_i} \eta(s) \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\theta_{i+1}} \eta(s) \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} ds \right] = k_i \delta_{i,i}$$



$$k_{i+1} \int_0^{\theta_{i+1}} \eta(s) \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \theta_{i+1}} \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen } \theta_{i+1}} ds = k_{i+1} \delta_{i,i+1}$$

$$\chi_i'' = c'' \left[ \int_0^{\theta_i} \eta(s) M_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} \eta(s) M_1 ds \right]$$

$$\Delta_i'' = \int_0^{\theta_i} \max M \cdot M_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} \max M \cdot M_1 ds$$

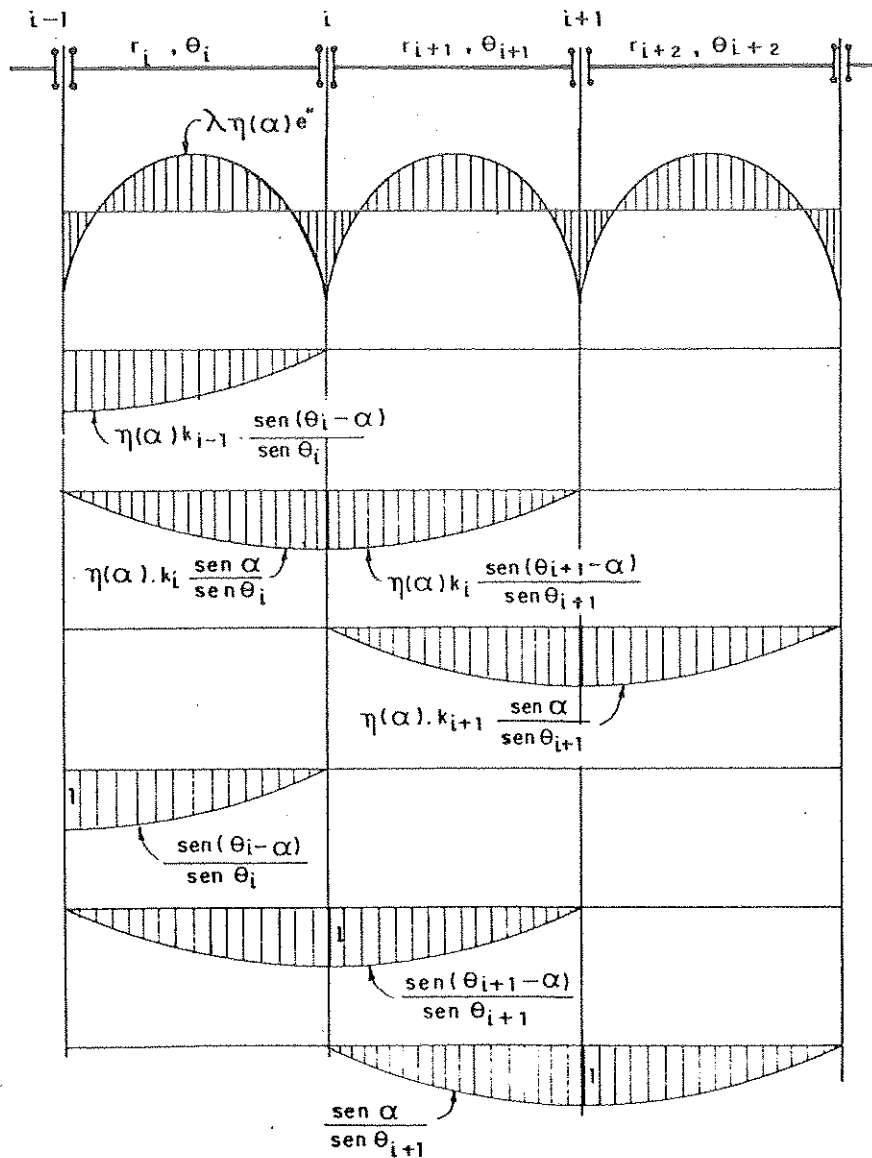


FIG. 5.17. - MOMENTOS PARA A DETERMINAÇÃO DO CABO CONCORDANTE.

De um modo geral, estes coeficientes deverão ser calculados por integração numérica.

Fixando-se um ponto para passagem do cabo, obtêm-se outra equação.

A equação que fixa a máxima flecha do cabo concordante é semelhante à obtida no parágrafo 5.4.4 e se escreve:

$$\left[ 1 - \frac{\text{sen}(\theta_i - \bar{\alpha}_i)}{\text{sen}\theta_i} \right] k_{i-1} + \frac{\text{sen}\bar{\alpha}_i}{\text{sen}\theta_i} k_i + \left[ \frac{\max M(A)}{\eta(A)} - \frac{\max M(B)}{\eta(B)} \right] \frac{\lambda}{P} =$$

$$= \frac{r_i}{r_i + e} d$$

Os coeficientes  $\eta(\alpha)$  arbitrados são aqueles determinados a partir do cabo concordante centrado com força de protensão constante.

A solução do problema fornece a equação do cabo concordante e a força de protensão  $P$  máxima. Para este cabo, calculam-se os coeficientes  $\eta_1(\alpha)$  e faz-se o confronto destes com aqueles arbitrados inicialmente. Se necessário, determina-se um novo cabo com os últimos coeficientes  $\eta_1(\alpha)$  obtidos. Procedendo-se desta maneira obter-se-á um cabo concordante com  $P$  variável e cuja máxima flecha seja igual a  $r_i \cdot d / (r_i + e) = d_1$ .

Introduzindo transformações senoidais no cabo concordante obtêm-se o cabo real e o procedimento é o mesmo adotado no parágrafo 5.4.1, onde  $P$  foi considerado constante.

Em consequência da transformação senoidal, o momento de flexão final é alterado, o que implica em verificar se a linha de pressão ainda permanece no interior do fuso de passagem, conforme orientação dada no parágrafo 5.8.

## 5.6.2 - Protensão não centrada

A resolução do problema é semelhante à do parágrafo 5.4.2. No sistema fundamental, o cabo concordante com excentricidade  $e^*$  e ordenadas  $z_o^*(\alpha)$  cria os esforços:

$$M_p^o = \eta(\alpha) \cdot P \cdot z_o^*(\alpha)$$

$$T_p^o = \eta(\alpha) \cdot P \cdot \frac{e^*}{r+e^*} \frac{dz_o^*}{d\alpha}$$

Substituindo  $M_p^o$  e  $T_p^o$  na relação de concordância e desenvolvendo-a com o auxílio da Fig. 5.18, obtém-se a expressão simplificada

$$k_{i-1} \delta_{i,i-1}^* + k_i \delta_{i,i}^* + k_{i+1} \delta_{i,i+1}^* + \chi_i'' \lambda - (\Delta_i'' + \omega_i'') \frac{\lambda}{P} = 0$$

onde:

$$k_{i-1} \left[ \int_0^{\theta_i} \eta(\alpha) \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i} M_1 ds + K_i^* \int_0^{\theta_i} \left( \frac{\cos(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i} - \frac{1}{\theta_i} \right) T_1 ds \right] = k_{i-1} \delta_{i,i-1}^*$$

$$k_i \left\{ \int_0^{\theta_i} \eta(\alpha) \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} M_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} \eta(\alpha) \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} M_1 ds + \right.$$

$$\left. + K_i^* \int_0^{\theta_i} \left( \frac{1}{\theta_i} - \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\theta_i} \right) T_1 ds + K_{i+1}^* \int_0^{\theta_i} \left[ \frac{\cos(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i} - \frac{1}{\theta_i} \right] T_1 ds \right\} = k_i \delta_{i,i}^*$$

$$k_{i+1} \left[ \int_0^{\theta_{i+1}} \eta(\alpha) \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_{i+1}} M_1 ds + K_{i+1}^* \int_0^{\theta_{i+1}} \left( \frac{1}{\theta_{i+1}} - \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\theta_{i+1}} \right) T_1 ds \right] = k_{i+1} \delta_{i,i+1}^*$$

$$\chi_i'' = \int_0^{\theta_i} \eta(\alpha) \cdot c'' \cdot M_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} \eta(\alpha) \cdot c'' \cdot M_1 ds$$

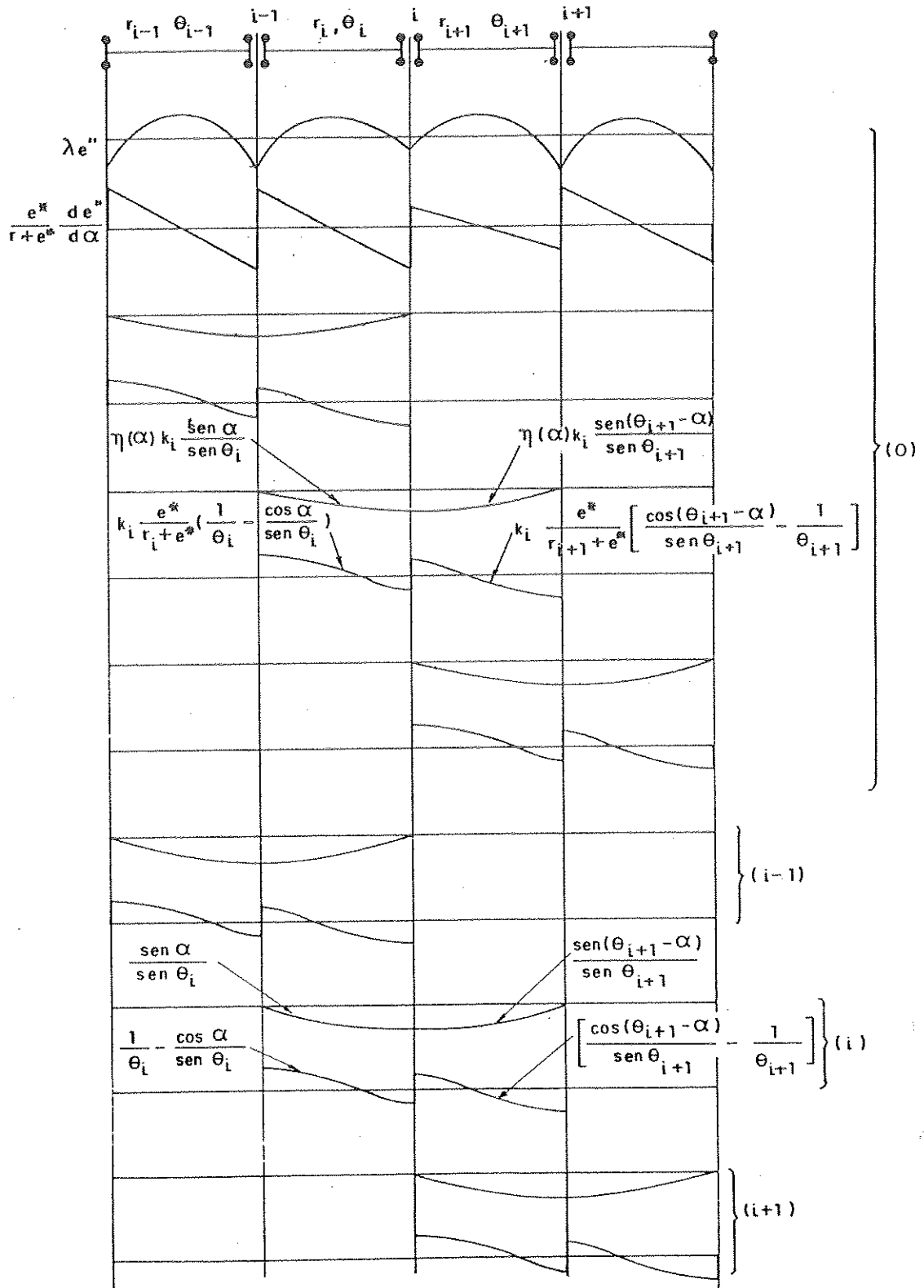


FIG. 5.18 - MOMENTOS PARA A DETERMINAÇÃO DO CABO CONCORDANTE

$$\Delta_i'' = \int_0^{\theta_i} \eta(\alpha) \max M(\alpha) M_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} \eta(\alpha) \max M(\alpha) M_1 ds$$

$$\omega_i'' = K_i^* \int_0^{\theta_i} \frac{\max M'(\alpha)}{\eta(\alpha)} M_1 ds + K_{i+1}^* \int_0^{\theta_{i+1}} \frac{\max M'(\alpha)}{\eta(\alpha)} M_1 ds$$

Fixando-se um ponto para passagem do cabo, obtêm-se uma outra equação.

A equação que fixa a máxima flecha do cabo concordante é semelhante à obtida no parágrafo 5.4.2 e se escreve:

$$\left[ 1 - \frac{\text{sen}(\theta_i - \bar{\alpha}_i)}{\text{sen}\bar{\alpha}_i} \right] k_{i-1} + \frac{\text{sen}\bar{\alpha}_i}{\text{sen}\theta_i} k_i + \left[ \frac{\max M(A)}{\eta(A)} - \frac{\max M(B)}{\eta(B)} \right] \frac{\lambda}{P} = \frac{r_i + e^*}{r_i + e} d$$

A solução do sistema de equações fornece a equação do cabo concordante excêntrico e a força de protensão máxima  $P$ . Verificada a existência do cabo no interior do fuso de passagem, faz-se a transformação senoidal de modo a alojá-lo no interior da viga, porém, aqui também a forma do cabo se altera, sendo necessário calcular novamente o cabo concordante de modo que efetuada a transformação senoidal, o mesmo se aloje de maneira adequada no interior da viga.

Os coeficientes  $\eta(\alpha)$  adotados inicialmente são aqueles obtidos a partir do cabo concordante com força de protensão constante. Se necessário for, determina-se um novo cabo concordante de forma que os coeficientes  $\eta(\alpha)$  obtidos coincidam com os arbitrados.

Obtido o cabo resultante real e desmembrando-o de acordo com o critério adotado no parágrafo 5.4.2, determinam-se os cabos parciais reais.

Finalmente, faz-se a verificação se a linha de pressão ainda permanece no interior do fuso de passagem.

## 5.6.3 - Protensão com cabos reversos

A resolução do problema é semelhante à do parágrafo 5.4.3. No tramo  $i$ , as equações dos cabos se escrevem:

$$z_1(\alpha) = \frac{r_i + e}{r_i} z_0(\alpha) - \frac{r_i - e}{\eta(\alpha) \cdot P \cdot e} \int_0^\alpha T_p ds$$

$$z_2(\alpha) = \frac{r_i - e}{r_i} z_0(\alpha) + \frac{r_i + e}{\eta(\alpha) \cdot P \cdot e} \int_0^\alpha T_p ds$$

onde  $\eta(\alpha)$  é o coeficiente que representa, em cada seção, a fração da força de protensão máxima. Considerando-se que os cabos com ordenadas  $z_1$  e  $z_2$  têm formas diferentes, as forças de protensão numa seção são

$$\text{Cabo 1} \rightarrow P_1(\alpha) = \frac{P}{2} \eta_1(\alpha)$$

$$\text{Cabo 2} \rightarrow P_2(\alpha) = \frac{P}{2} \eta_2(\alpha)$$

e o coeficiente  $\eta(\alpha)$  é:

$$\eta(\alpha)P = \frac{P}{2} \eta_1(\alpha) + \frac{P}{2} \eta_2(\alpha) \rightarrow \eta(\alpha) = \frac{\eta_1(\alpha) + \eta_2(\alpha)}{2}$$

No sistema fundamental, a protensão cria os esforços:

$$M_p^0 = \eta(\alpha) \cdot P \cdot z_0(\alpha)$$

$$T_p^0 = \beta \cdot T_q(\alpha)$$

Substituindo-os na expressão da relação de concordância e desenvolvendo-a resulta em:

$$k_{i-1} \delta_{i,i-1} + k_i \delta_{i,i} + k_{i+1} \delta_{i,i+1} + \chi_i'' \lambda - \Delta_i'' \frac{\lambda}{P} = \frac{-\Omega_i}{P}$$

onde os coeficientes do primeiro membro são iguais àqueles obtidos no parágrafo 5.6.1 e

$$\Omega_i = K \beta \left[ \int_0^{\theta_i} T_q T_l ds + \int_0^{\theta_{i+1}} T_q \cdot T_l ds \right]$$

Fixando-se um ponto para passagem do cabo obtém-se uma outra equação.

A equação que fixa a máxima flecha do cabo centrado é semelhante à obtida no parágrafo 5.4.3 e se escreve:

$$\left[ 1 - \frac{\text{sen}(\theta_i - \bar{\alpha}_i)}{\text{sen}\theta_i} \right] k_{i-1} + \frac{\text{sen}\bar{\alpha}_i}{\text{sen}\theta_i} k_i + \left[ \frac{\max M(A)}{\eta(A)} - \frac{\max M(B)}{\eta(B)} \right] \frac{\lambda}{P} = \bar{d}$$

onde  $\bar{d}$  depende do sinal de  $\int_0^{\alpha} T_q d\alpha \Big|_0^{\alpha}$

Os coeficientes  $\eta(\alpha)$  em cada seção são obtidos a partir dos cabos reversos com força de protensão constante e cujos coeficientes são  $\eta_1(\alpha)$  e  $\eta_2(\alpha)$ .

A solução do sistema de equações fornece a força de protensão máxima  $P$  e a equação do cabo resultante centrado. Aplicando as equações de  $z_1$  e  $z_2$  obtém-se os cabos reversos concordantes. Se necessário, introduzem-se transformações lineares nos cabos de modo a restabelecer a continuidade dos mesmos nos apoios intermediários.

A obtenção dos cabos reais pode ser feita da mesma forma que no parágrafo 5.4.3, ou seja, fazem-se deslocamentos constantes em toda a extensão da viga para os cabos  $z_1$  e  $z_2$  de modo a alojá-los no interior da mesma com cobertura adequado. Estes deslocamentos são iguais e de sinais

contrários, portanto, não alteram as relações de concordância e os momentos finais de flexão e de torção permanecem iguais a  $M_p^0$  e  $T_p^0$ .

### 5.7 - Exemplos

Considere-se a viga do parágrafo 5.5, para a qual determinar-se-ão os traçados econômicos dos cabos com força de protensão variável.

#### 5.7.1 - Protensão centrada - P variável

Para determinar o cabo concordante com força de protensão variável, adota-se inicialmente os coeficientes de variação  $\eta(\alpha)$  correspondentes ao cabo resultante real  $\bar{z}_0(\alpha)$  do parágrafo 5.5.1, cujos valores são calculados e apresentados na Tabela 5.5.

Para a consideração das perdas por atrito é necessário considerar o ângulo no espaço. Entretanto, adotou-se como ângulo total a soma do ângulo na projeção horizontal com o ângulo contido no cilindro vertical retificado até a seção considerada.

Os coeficientes das relações de concordância calculados por integração numérica são:

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \delta_{22} &= 14,4224 & \delta_{12} = \delta_{21} &= 3,6166 \\ \chi_1'' = \chi_2'' &= 14,3552 & \Delta_1'' = \Delta_2'' &= 10,854,5223 \end{aligned}$$

Fixando-se a extremidade inferior do fuso para ponto de passagem do cabo, obtém-se:

$$k_1 + 0,668 \lambda + 9586,141 \frac{\lambda}{P} = -0,668 + \frac{11253,546}{P}$$

A equação que fixa a máxima flecha do cabo se escreve:

$$0,48236 k_1 - 0,51764 k_2 + 18,388,6218 \frac{\lambda}{P} = 2,25648$$



TABELA 5.5 - VARIAÇÃO ANGULAR DO CABO, VARIAÇÃO ANGULAR TOTAL ACUMULADA NA SEÇÃO E COEFICIENTE DE VARIAÇÃO - PROTENSÃO CENTRADA - CABO RESULTANTE REAL COM P CONSTANTE

Seção	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\eta$
0	0	0	1
1	1,9723	6,2813	0,9676
2	1,9906	12,5809	0,9362
3	2,0062	18,8961	0,9057
4	2,0170	25,2221	0,8762
5	2,0228	31,5540	0,8477
6	2,0236	37,8866	0,8200
7	2,0192	44,2148	0,7933
8	2,0098	50,5336	0,7675
9	1,9954	56,8381	0,7426
10	13,4068	74,5539	0,6768
11	16,5227	95,9092	0,6052
12	2,7396	103,4815	0,5816
13	2,7791	111,0932	0,5589
14	2,8061	118,7319	0,5370
15	2,8198	126,3844	0,5159

O sistema de equações obtido é

$$\begin{bmatrix} 14,4224 & 3,6168 & 14,3552 & -10,824,5223 \\ 3,6168 & 14,4224 & 14,3552 & -10,824,5223 \\ 1 & 0 & 0,6680 & 9,586,141 \\ 0,48236 & -0,51764 & 0 & 18,388,6218 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,668 + \frac{11,253,546}{P} \\ 2,25648 \end{bmatrix}$$

cuja solução fornece:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 6213,29 \text{ kN} \\ \lambda = 0,75614 \\ k_1 = k_2 = -0,52850 \end{array} \right.$$

Corrigindo a flecha máxima do cabo concordante obtêm-se  $d_1 = 2,25596\text{m}$  e resolvendo novamente o sistema obtêm-se como solução:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 6214,25 \text{ kN} \\ \lambda = 0,75608 \\ k_1 = k_2 = -0,52847 \end{array} \right.$$

Com  $P = 6214,25 \text{ kN}$  e fazendo  $\bar{\sigma}_{cs} = \bar{\sigma}_{cv} = 15.000 \text{ kN/m}^2$ , calculam-se as ordenadas extremas do núcleo limite

$$a'' = +3,2986 \text{ m} \qquad b'' = 0,668 \text{ m}$$

$$a' = -3,2986 \text{ m} \qquad b' = -0,668 \text{ m}$$

o que mostra que os valores adotados inicialmente estão corretos.

As ordenadas das curvas limites e do cabo concordante são calculadas e apresentadas na Tabela 5.6.

Vê-se que o cabo concordante está no interior do fuso de passagem, e que introduzindo transformações senoidais para baixo de  $0,0147\text{m}$  nos apoios intermediários encontram-se as ordenadas do cabo discordante, o qual é desdobrado nos cabos parciais  $\bar{z}_1$  e  $\bar{z}_2$ . Para restabelecer a continuidade destes cabos, fixam-se as ordenadas do tramo central enquanto que, nos tramos extremos, subtrai-se  $0,0087\text{m}$  do cabo 1 e soma-se ao cabo 2 a mesma quantia, obtendo os cabos reais  $z_1$  e  $z_2$ .

Os coeficientes de variação  $\eta(\alpha)$  correspondentes ao cabo resultante real obtido são calculados e os valores apresentados na Tabela 5.7.

TABELA 5.6 - PROTENSÃO CENTRADA - P VARIÁVEL - ORDENADAS DAS CURVAS LIMITES, DOS CABOS CONCORDANTE E REAL E DOS CABOS PARCIAIS

Seção	α°	e'' (m)	z <sub>o</sub> (m)	e' (m)	z̄ <sub>o</sub> (m)	z̄ <sub>1</sub> (m)	z̄ <sub>2</sub> (m)	Continuidade restabelecida	
								z <sub>1</sub> (m)	z <sub>2</sub> (m)
0	0	0,6346	0,4799	-0,6680	0,4799	0,4928	0,4668	0,4841	0,4755
1	3	0,4062	0,2518	-0,8786	0,2503	0,2571	0,2435	0,2484	0,2522
2	6	0,2404	0,0713	-1,0303	0,0682	0,0700	0,0663	0,0613	0,0750
3	9	0,1440	-0,0565	-1,1161	-0,0611	-0,0627	-0,0594	-0,0714	-0,0507
4	12	0,1247	-0,1255	-1,1286	-0,1316	-0,1352	-0,1281	-0,1439	-0,1194
5	15	0,1905	-0,1295	-1,0601	-0,1371	-0,1408	-0,1334	-0,1495	-0,1247
6	18	0,3502	-0,0618	-0,9025	-0,0709	-0,0728	-0,0690	-0,0815	-0,0603
7	21	0,6130	0,0847	-0,6423	0,0742	0,0762	0,0722	0,0675	0,0809
8	24	0,9887	0,3176	-0,2198	0,3057	0,3139	0,2974	0,3052	0,3061
9	27	1,4876	0,6449	0,3367	0,6316	0,6487	0,6146	0,6400	0,6233
10	30/0	2,2106	1,1429	1,1429	1,1282	1,1587 1,1500	1,0977 1,1064	1,1500	1,1064
11	3	1,3374	0,4760	0,1977	0,4611	0,4700	0,4522	0,4700	0,4522
12	6	0,5101	-0,1547	-0,7091	-0,1697	-0,1730	-0,1665	-0,1730	-0,1665
13	9	-0,1314	-0,6435	-1,3134	-0,6586	-0,6713	-0,6459	-0,6713	-0,6459
14	12	-0,5606	-0,9703	-1,7155	-0,9854	-1,0044	-0,9664	-1,0044	-0,9664
15	15	-0,7485	-1,1130	-1,7583	-1,1282	-1,1500	-1,1065	-1,1500	-1,1065

$$e''(\alpha) = c'' \cdot \frac{\max M(\alpha)}{\eta(\alpha) \cdot P} \quad e'(\alpha) = c' \cdot \frac{\min M(\alpha)}{\eta(\alpha) \cdot P}$$

$$z_o \begin{cases} 1^{\text{a}} \text{ Tramo: } z_o(\alpha) = 0,75608 e''(\alpha) - 0,52847 \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_1} \\ 2^{\text{a}} \text{ Tramo: } z_o(\alpha) = 0,75608 e''(\alpha) - 0,52847 \left[ \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_2} + \frac{\text{sen}(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen} \theta_2} \right] \end{cases}$$

$$\bar{z}_o \begin{cases} 1^{\text{a}} \text{ Tramo: } \bar{z}_o(\alpha) = z_o(\alpha) - 0,0147 \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_1} \\ 2^{\text{a}} \text{ Tramo: } \bar{z}_o(\alpha) = z_o(\alpha) - 0,0147 \left[ \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_2} + \frac{\text{sen}(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen} \theta_2} \right] \end{cases}$$

$$\bar{z}_1 \begin{cases} 1^{\text{a}} \text{ Tramo: } \frac{r_1 + e}{r_1} \bar{z}_o \\ 2^{\text{a}} \text{ Tramo: } \frac{r_2 + e}{r_2} \bar{z}_o \end{cases} \quad \bar{z}_2 \begin{cases} 1^{\text{a}} \text{ Tramo: } \frac{r_1 - e}{r_1} \bar{z}_o \\ 2^{\text{a}} \text{ Tramo: } \frac{r_2 - e}{r_2} \bar{z}_o \end{cases}$$

$$z_1 \begin{cases} 1^{\text{a}} \text{ Tramo: } \bar{z}_1 - 0,0087 \\ 2^{\text{a}} \text{ Tramo: } \bar{z}_1 \end{cases} \quad z_2 \begin{cases} 1^{\text{a}} \text{ Tramo: } \bar{z}_2 + 0,0087 \\ 2^{\text{a}} \text{ Tramo: } \bar{z}_2 \end{cases}$$

TABELA 5.7 - PROTENSÃO CENTRADA - VARIAÇÃO ANGULAR DO CABO, VARIAÇÃO ANGULAR TOTAL ACUMULADA NA SEÇÃO E COEFICIENTE DE VARIAÇÃO DO CABO RESULTANTE REAL COM P VARIÁVEL

Seção	$\theta$	$\gamma$	$\eta$
0	0	0	1
1	1,0295	5,3385	0,9724
2	1,0921	10,7396	0,9453
3	1,2177	16,2663	0,9183
4	1,3531	21,9284	0,8915
5	1,4962	27,7336	0,8648
6	1,6463	33,6889	0,8382
7	1,8032	39,8011	0,8119
8	1,9632	46,0733	0,7856
9	2,8512	53,2335	0,7567
10	16,1385	73,6810	0,6799
11	11,1381	89,6516	0,6253
12	1,3561	95,8404	0,6054
13	2,3355	103,0084	0,5831
14	2,6838	110,5248	0,5606
15	3,6657	119,0231	0,5362

Fazendo o confronto entre os coeficientes adotados e os obtidos nota-se que, em cada seção, os valores são aproximadamente iguais. Pode-se concluir ainda que na seção 15, a força de protensão necessária é menor que a correspondente força considerando protensão constante, isto é,

$$\frac{0,5362 \times 6214,25}{3825} = 0,8711$$

aqui a força necessária corresponde a 87,11% da força se se considerasse cabo econômico com protensão constante.

Da mesma forma que no exemplo anterior, é preciso ainda calcular os hiperestáticos de flexão criados pelo cabo resultante real  $\bar{z}_0(\alpha)$ , o momento fletor final, a linha de pressão e verificar se a mesma permanece no interior do fuso de passagem.

O momento de torção final é criado apenas pelos hiperestáticos de flexão.

Na Fig. 5.19 estão representados os cabos parciais reais.

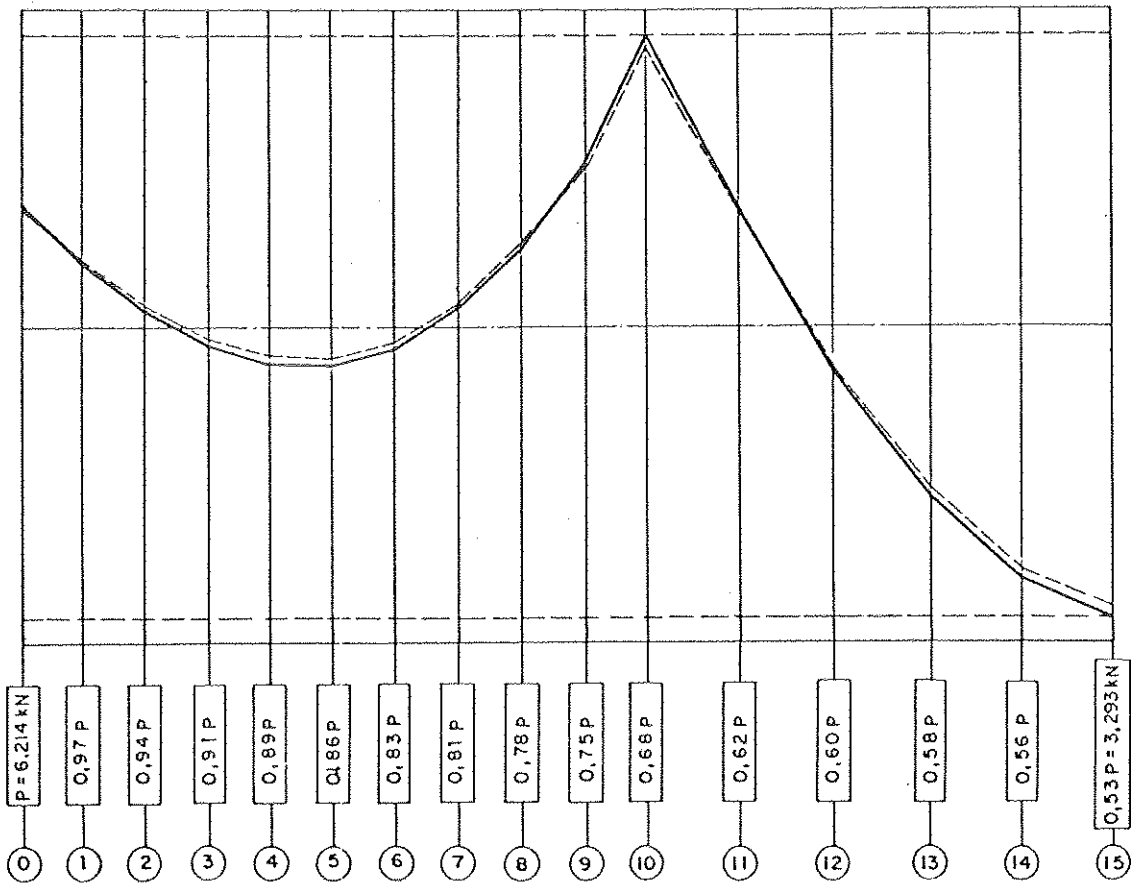


FIG. 5.19 - PROTENSÃO CENTRADA-REPRESENTAÇÃO DOS CABOS REAIS E FORÇA DE PROTENSÃO EM CADA SEÇÃO.

## 5.7.2 - Protensão não centrada - P variável

Os coeficientes de variação  $\eta(\alpha)$  inicialmente adotados são aqueles obtidos a partir do cabo resultante real  $\bar{z}_o(\alpha)$  determinado no parágrafo 5.5.2 e cujos valores são fornecidos na Tabela 5.8.

TABELA 5.8 - VARIAÇÃO ANGULAR DO CABO, VARIAÇÃO ANGULAR TOTAL ACUMULADA NA SEÇÃO E COEFICIENTE DE VARIAÇÃO - CABO RESULTANTE REAL COM P CONSTANTE - PROTENSÃO NÃO CENTRADA

Seção	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\eta$
0	0	0	1
1	1,9861	6,2951	0,9675
2	2,0047	12,6088	0,9361
3	2,0205	18,9384	0,9056
4	2,0315	25,2789	0,8760
5	2,0374	31,6194	0,8474
6	2,0378	37,9663	0,8197
7	2,0333	44,3086	0,7929
8	2,0237	50,6413	0,7670
9	2,0088	56,9591	0,7421
10	13,5121	74,7803	0,6760
11	16,6356	96,2485	0,6041
12	2,7581	103,8392	0,5806
13	2,7984	111,4702	0,5578
14	2,8259	119,1287	0,5359
15	2,8399	126,8013	0,5148

Os coeficientes das relações de concordância ficam:

$$\delta_{11}^* = \delta_{22}^* = \delta_{11}^f + \delta_{11}^t = 14,405 + 0,0043 = 14,4093$$

$$\delta_{12}^* = \delta_{21}^* = \delta_{12}^f + \delta_{12}^t = 3,6171 + 0,0019 = 3,6190$$

$$X_1'' = X_2'' = 14,3445$$

$$\Delta_1'' = \Delta_2'' = 10.854,5223$$

$$\omega_1'' = \omega_2'' = 1.925,3036$$

Fixando para ponto de passagem a extremidade inferior do fuso de passagem obtêm-se a equação

$$k_1 + 0,668 \lambda + 9597,4852 \frac{\lambda}{P} = -0,668 + \frac{11.266,8639}{P}$$

A máxima flecha do cabo é  $d_1 = \left[ \frac{(r_2 + e^*)}{(r_2 + e)} \right] d = 2,27260\text{m}$  e a equação obtida é:

$$0,48236 k_1 - 0,51764 k_2 + 18,418,7750 \frac{\lambda}{P} = 2,27260$$

O sistema de equações se escreve

$$\begin{bmatrix} 14,4093 & 3,6190 & 14,3445 & -12.779,8259 \\ 3,6190 & 14,4093 & 14,3445 & -12.779,8259 \\ 1 & 0 & 0,668 & 9.597,4852 \\ 0,48236 & -0,51764 & 0 & 18.418,7750 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,668 + \frac{11.266,8639}{P} \\ 2,27260 \end{bmatrix}$$

cuja solução fornece:

$$\begin{cases} P = 6.144,926 \text{ kN} \\ \lambda = 0,75217 \\ k_1 = k_2 = -0,51171 \end{cases}$$

Corrigindo a flecha do cabo concordante obtêm-se

$d_1 = 2,27159\text{m}$  e resolvendo novamente o sistema chega-se a:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 6.146,774 \text{ kN} \\ \lambda = 0,75206 \\ k_1 = k_2 = -0,51166 \end{array} \right.$$

Verificadas as ordenadas extremas adotadas para o núcleo limite, determinam-se as ordenadas das curvas limites e do cabo concordante, cujos valores são apresentados na Tabela 5.9.

Verificada a existência do cabo concordante no interior do fuso de passagem e introduzindo transformações senoidais para baixo no cabo de 0,0287m sobre os apoios intermediários, obtêm-se as ordenadas do cabo discordante  $\bar{z}_0(\alpha)$ , o qual é desdobrado nos cabos parciais  $\bar{z}_1$  e  $\bar{z}_2$ . Para estabelecer a continuidade destes cabos nos apoios intermediários, fixam-se as ordenadas no vão central enquanto que, nos tramos extremos, subtrai-se 0,0054m do cabo 1 e soma-se 0,0118m ao cabo 2, obtendo desta forma, cabos  $z_1$  e  $z_2$  com cobrimento adequado no interior da viga.

Os coeficientes de variação  $\eta(\alpha)$  do cabo resultante real  $\bar{z}_0(\alpha)$  são apresentados na Tabela 5.10.

Confrontando estes coeficientes com aqueles da Tabela 5.8, vê-se que em cada seção os valores são aproximadamente iguais. Na seção 15, a força de protensão necessária é igual a 86,88% da correspondente força considerando-se cabo econômico com protensão constante.

Calculando os hiperestáticos de flexão introduzidos pelo cabo resultante real, o momento final de flexão fica:

$$1^\circ \text{ Tramo: } M_p = P \cdot \bar{z}_0 + X_1 \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_1}$$

$$2^\circ \text{ Tramo: } M_p = P \cdot \bar{z}_0 + X_1 \frac{\text{sen}(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen}\theta_2} + X_2 \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_2}$$



TABELA 5.9 - PROTENSÃO NÃO CENTRADA - P VARIÁVEL - ORDENADAS DAS CURVAS LÍMITES, DOS CABOS CONCORDANTE E REAL E DOS CABOS PARCIAIS

Seção	α°	e'' (m)	z <sub>o</sub> * (m)	e' (m)	z <sub>o</sub> * (m)	z <sub>1</sub> (m)	z <sub>2</sub> (m)	Cabos	
								Real	Parciais
								z <sub>1</sub> (m)	z <sub>2</sub> (m)
0	0	0,6342	0,4770	-0,6680	0,4770	0,4850	0,4595	0,4796	0,4713
1	3	0,4033	0,2498	-0,8809	0,2468	0,2509	0,2377	0,2455	0,2495
2	6	0,2356	0,0702	-1,0343	0,0642	0,0653	0,0619	0,0599	0,0737
3	9	0,1382	-0,0562	-1,1210	-0,0652	-0,0663	-0,0628	-0,0717	-0,0510
4	12	0,1186	-0,1236	-1,1337	-0,1355	-0,1378	-0,1306	-0,1432	-0,1188
5	15	0,1851	-0,1256	-1,0645	-0,1405	-0,1428	-0,1353	-0,1482	-0,1235
6	18	0,3466	-0,0556	-0,9052	-0,0733	-0,0745	-0,0706	-0,0799	-0,0588
7	21	0,6124	0,0938	-0,6420	0,0733	0,0745	0,0706	0,0691	0,0824
8	24	0,9924	0,3501	-0,2146	0,3068	0,3120	0,2956	0,3066	0,3074
9	27	1,4972	0,6614	0,3484	0,6354	0,6461	0,6121	0,6407	0,6239
10	30 / 0	2,2294	1,1650	1,1650	1,1363	1,1554 / 1,1500	1,10947 / 1,1065	1,1500	1,1065
11	3	1,3460	0,4941	0,2086	0,4651	0,4707	0,4529	0,4707	0,4529
12	6	0,5081	-0,1411	-0,7096	-0,1704	-0,1725	-0,1660	-0,1725	-0,1660
13	9	-0,1418	-0,6335	-1,3218	-0,6630	-0,6710	-0,6456	-0,6710	-0,6456
14	12	-0,5767	-0,9624	-1,7292	-0,9923	-1,0043	-0,9663	-1,0043	-0,9663
15	15	-0,7671	-1,1066	-1,9047	-1,1363	-1,1500	-1,1065	-1,1500	-1,1065

$$e''(\alpha) = c'' \frac{\max M(\alpha)}{h(\alpha) \cdot p} \qquad e'(\alpha) = c' \frac{\min M(\alpha)}{h(\alpha) \cdot p}$$

$$z_o^* \begin{cases} 1^a \text{ Tramo: } z_o^*(\alpha) = 0,75206 e''(\alpha) - 0,51166 \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_1} \\ 2^a \text{ Tramo: } z_o^*(\alpha) = 0,75206 e''(\alpha) - 0,51166 \left[ \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_2} + \frac{\text{sen}(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen} \theta_2} \right] \end{cases}$$

$$\bar{z}_o^* \begin{cases} 1^a \text{ Tramo: } \bar{z}_o^*(\alpha) = z_o^*(\alpha) - 0,0287 \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_1} \\ 2^a \text{ Tramo: } \bar{z}_o^*(\alpha) = z_o^*(\alpha) - 0,0287 \left[ \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta_2} + \frac{\text{sen}(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen} \theta_2} \right] \end{cases}$$

$$\bar{z}_1 \begin{cases} 1^a \text{ Tramo: } \frac{r_1 + e}{r_1 + e^*} \bar{z}_o^* \\ 2^a \text{ Tramo: } \frac{r_2 + e}{r_2 + e^*} \bar{z}_o^* \end{cases} \qquad \bar{z}_2 \begin{cases} 1^a \text{ Tramo: } \frac{r_1 - e}{r_1 + e^*} \bar{z}_o^* \\ 2^a \text{ Tramo: } \frac{r_2 - e}{r_2 + e^*} \bar{z}_o^* \end{cases}$$

$$z_1 \begin{cases} 1^a \text{ Tramo: } \bar{z}_1 - 0,0054 \\ 2^a \text{ Tramo: } \bar{z}_1 \end{cases} \qquad z_2 \begin{cases} 1^a \text{ Tramo: } \bar{z}_2 + 0,0118 \\ 2^a \text{ Tramo: } \bar{z}_2 \end{cases}$$

$$P_1 = \frac{P}{2} \left( 1 + \frac{e^*}{e} \right) = 4211,678 \text{ kN}$$

$$P_2 = \frac{P}{2} \left( 1 - \frac{e^*}{e} \right) = 1935,096 \text{ kN}$$

TABELA 5.10 - VARIAÇÃO ANGULAR DO CABO, VARIAÇÃO ANGULAR TOTAL ACUMULADA NA SEÇÃO E COEFICIENTE DE VARIAÇÃO - CABO RESULTANTE REAL COM P VARIÁVEL - PROTENSÃO NÃO CENTRADA

Seção	$\Delta\theta$	$\gamma$	$\eta$
0	0	0	1
1	1,0352	5,3442	0,9724
2	1,0977	10,7509	0,9452
3	1,2244	16,2844	0,9182
4	1,3608	21,9542	0,8914
5	1,5050	27,7683	0,8646
6	1,6563	33,7336	0,8381
7	1,8144	39,8571	0,8116
8	1,9759	46,1420	0,7853
9	2,8744	53,3254	0,7563
10	16,2770	73,9114	0,6791
11	11,1892	89,9332	0,6244
12	1,3583	96,1242	0,6045
13	2,3508	103,3075	0,5822
14	2,7030	110,8432	0,5596
15	3,6945	119,3703	0,5352

O momento de torção final se obtém fazendo:

$$1^{\circ} \text{ Tramo: } T_p = \bar{T}_p^0 + X_1 \left( \frac{1}{\theta_2} - \frac{\cos \alpha}{\text{sen} \theta_1} \right)$$

$$2^{\circ} \text{ Tramo: } T_p = \bar{T}_p^0 + X_1 \left( \frac{\cos(\theta_2 - \alpha)}{\text{sen} \theta_2} - \frac{1}{\theta_2} \right) + X_2 \left( \frac{1}{\theta_2} - \frac{\cos \alpha}{\text{sen} \theta_2} \right)$$

As forças de protensão máximas aplicadas em cada cabo são

$$P_1 = \frac{6146,77}{2} \left( 1 + \frac{e^*}{e} \right) = 4211,68 \text{ kN} \quad P_2 = \frac{6146,77}{2} \left( 1 - \frac{e^*}{e} \right) = 1935,09 \text{ kN}$$

e ao longo da viga seus valores ficam:

$$P_1(\alpha) = 4211,68\eta(\alpha) \text{ kN} \quad P_2(\alpha) = 1935,09\eta(\alpha) \text{ kN}$$

O momento  $M_{z,p}$  criado em cada seção, pela excentricidade do cabo resultante, é dado por:

$$M_{z,p} = (P_1 - P_2) \cdot e \cdot \eta(\alpha) = 3,073 \eta(\alpha)$$

e cujos valores máximo e mínimo são:

$$M_{z,p_{\max}} = 3,073 \text{ kNm}$$

$$M_{z,p_{\min}} = 3,073 \times 0,5352 = 1645 \text{ kNm}$$

Na Fig. 5.20 estão representados os cabos parciais reais.

### 5.7.3 - Protensão com cabos reversos - P variável

Inicialmente adotam-se os coeficientes correspondentes aos cabos reversos com força de protensão constante obtidos no parágrafo 5.5.3 e cujos valores são apresentados na Tabela 5.11.

Os coeficientes das relações de concordância são:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = 14,5973$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 3,5781$$

$$\chi_1'' = \chi_2'' = 14,4009$$

$$\Delta_1'' = \Delta_2'' = 10.854,5223$$

$$\Omega_1'' = \Omega_2'' = 1176,5$$

FIG. 5.20 - PROTENSÃO NÃO CENTRADA - REPRESENTAÇÃO DOS CABOS REAIS E FORÇA DE PROTENSÃO EM CADA SEÇÃO.

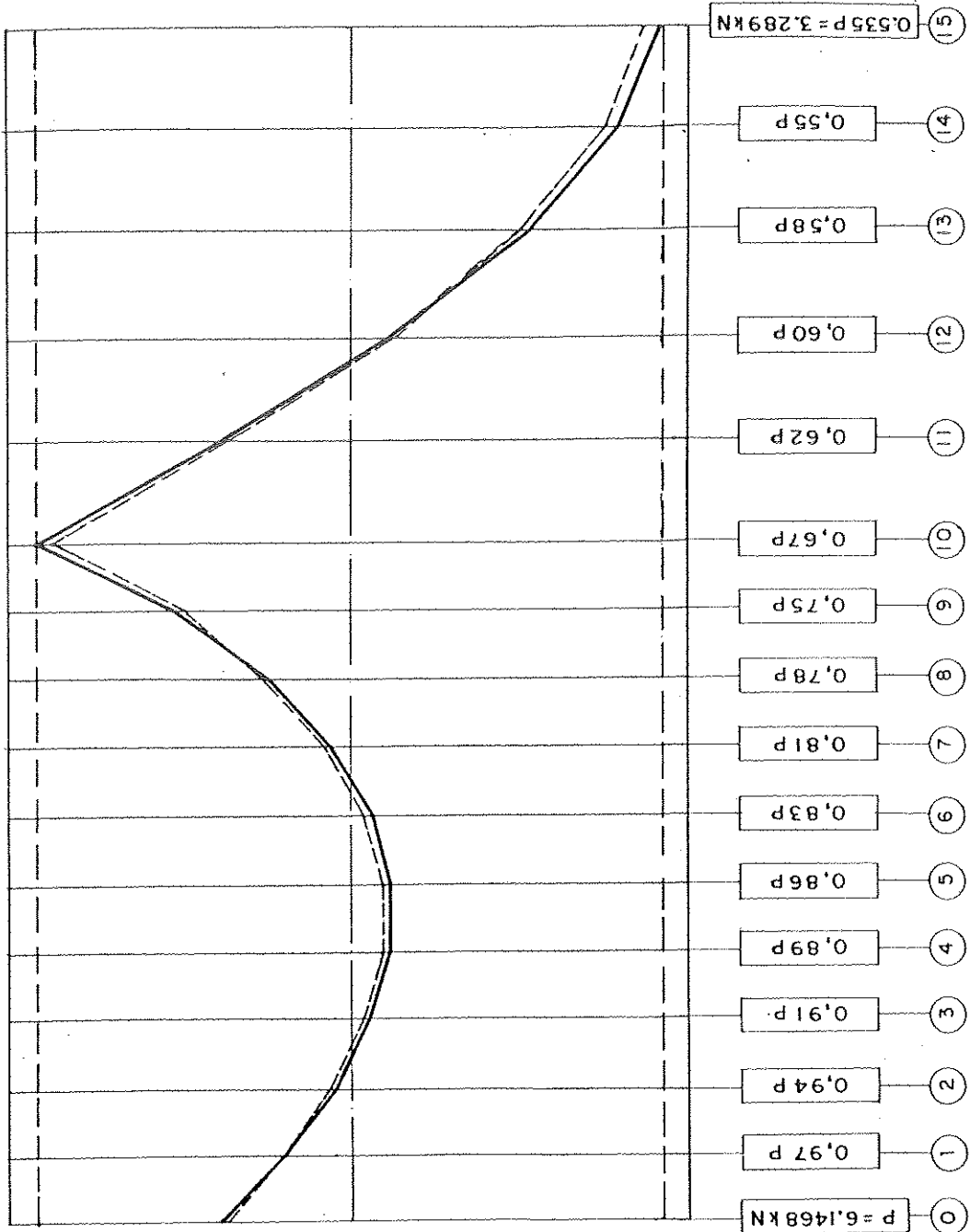


TABELA 5.11 - CABOS REVERSOS - P CONSTANTE - VARIAÇÃO ANGULAR DOS CABOS, VARIAÇÃO ANGULAR TOTAL ACUMULADA E COEFICIENTES DE VARIAÇÃO DE P.

Seção	$\Delta\theta_1$	$\gamma_1$	$\eta_1$	$\Delta\theta_2$	$\gamma_2$	$\eta_2$	$\eta = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}$
0	0	0	1	0	0	1	1
1	1,9411	6,2501	0,9678	0,8979	5,2069	0,9731	0,9704
2	2,0735	12,6325	0,9360	0,7851	10,3010	0,9475	0,9417
3	2,1613	19,2028	0,9043	0,6160	15,2261	0,9233	0,9138
4	2,3274	25,8393	0,8734	0,5644	20,0994	0,9001	0,8867
5	2,2685	32,4168	0,8438	0,6304	25,0388	0,8771	0,8605
6	2,0856	38,8114	0,8161	0,8135	30,1613	0,8539	0,8350
7	1,7833	45,9037	0,7904	1,1133	35,5837	0,8300	0,8102
8	1,3673	50,5800	0,7673	1,5269	41,4196	0,8050	0,7861
9	0,8431	55,7321	0,7469	2,0483	47,7769	0,7786	0,7628
10	9,0536	69,0947	0,6964	10,5109	62,5968	0,7205	0,7084
11	13,5810	87,5082	0,6324	10,3537	77,7831	0,6654	0,6489
12	1,8481	94,1890	0,6106	2,1281	84,7438	0,6416	0,6261
13	2,5439	101,5655	0,5875	1,4467	91,0231	0,6209	0,6042
14	3,0261	109,4242	0,5638	1,0001	96,8558	0,6022	0,5830
15	3,2739	117,5307	0,5404	0,7664	102,4548	0,5848	0,5626

A equação que fixa o ponto de passagem do cabo é:

$$k_1 + 0,668 \lambda + 9158,5263 \frac{\lambda}{P} = -0,668 + \frac{10751,5528}{P}$$

A equação que fixa a máxima flecha do cabo resultante é obtida fazendo:

$$0,48236 k_1 - 0,51764 k_2 + 17230,3357 \frac{\lambda}{P} = 2,25648 - \frac{5376,097}{P}$$

O sistema de equações se escreve .

$$\begin{bmatrix} 14,5973 & 3,5781 & 14,4009 & -10.854,5223 \\ 3,5781 & 14,5973 & 14,4009 & -10.854,5223 \\ 1 & 0 & 0,6680 & 9.158,5263 \\ 0,48236 & -0,51764 & 0 & 17.230,3357 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \lambda \\ \frac{\lambda}{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1176,5}{P} \\ -\frac{1176,5}{P} \\ -0,668 + \frac{10751,5528}{P} \\ 2,25648 - \frac{5376,097}{P} \end{bmatrix}$$

cuja solução fornece:

$$\begin{cases} P = 7399,2 \text{ kN} \\ \lambda = 0,65010 \\ k_1 = k_2 = -0,45388 \end{cases}$$

Fazendo a verificação das ordenadas extremas adotadas para o núcleo limite, determinam-se as ordenadas das curvas limites e do cabo resultante centrado e, os valores apresentados na Tabela 5.12 mostram que o cabo resultante está situado no interior do fuso de passagem.

Aplicando as fórmulas de  $z_1$  e  $z_2$  obtêm-se as ordenadas dos cabos reversos concordantes. Para restabelecer a continuidade destes cabos nos apoios intermediários, mantém-se as ordenadas nos tramos extremos enquanto que, no vão central, soma-se 0,0061m ao cabo 1 e subtrai-se a mesma

quantidade do cabo 2, o alojamento dos cabos no interior da viga se faz deslocando o cabo 1 de 0,3437m para cima em toda a extensão da viga e deslocando o cabo 2 de igual quantidade para baixo.

Os momentos finais criados pelos cabos são iguais aos momentos  $M_p^0$  e  $T_p^0$  do sistema fundamental.

Os coeficientes de variação  $\eta(\alpha)$  da força de protensão são calculados e apresentados na Tabela 5.13.

Fazendo o confronto destes coeficientes com aqueles adotados inicialmente, vê-se que os mesmos são aproximadamente iguais, significando que a força de protensão e os cabos calculados se constituem na solução do problema.

Nota-se ainda que, na seção 15, a força de protensão necessária é igual a 91,22% da correspondente força considerando-se cabo econômico com protensão constante.

Na Fig. 5.21, estão representados os cabos reversos reais.

#### 5.8 - Determinação da linha de pressão dos cabos reais curvos

Já foi visto anteriormente que, na transformação senoidal, a incógnita hiperestática adiciona ao momento  $M_p^0$  do sistema fundamental uma parcela senoidal que altera a forma inicial do cabo e, conseqüentemente, o momento fletor final devido à protensão. Isto significa que não se pode mais garantir que a linha de pressão permanecerá no interior do fuso de passagem. É preciso, portanto, fazer uma verificação. Seja, por exemplo, um cabo resultante real centrado. Sendo  $\bar{z}_0(\alpha)$  as ordenadas deste cabo, a linha de pressão é obtida fazendo:

$$z_{\ell p}(\alpha) = \bar{z}_0(\alpha) + \frac{M_p'}{P}$$

Assim, quando o cabo real é conhecido e, se deseja determi

TABELA 5.12 - PROTENSÃO COM CABOS REVERSOS - P VARIÁVEL - ORDENADAS DAS CURVAS LIMITES, DO CABO RESULTANTE E CABOS PARCIAIS.

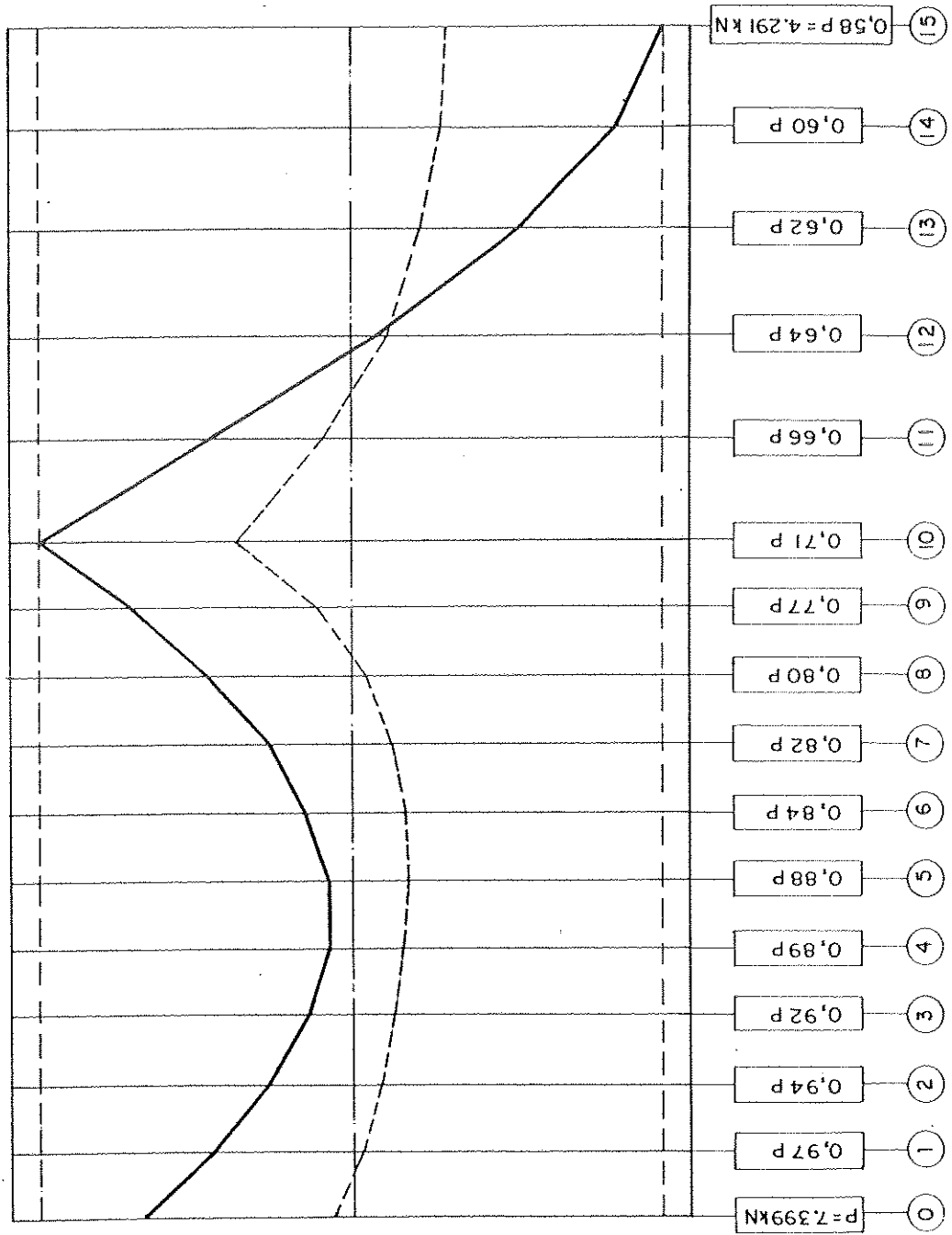
Seção	$\alpha$	$e''$ (m)	$z_0$ (m)	$e'$ (m)	$\int_0^\alpha T d\alpha$	Cabos concordantes		Continuidade restabelecida		Cabos parciais reais	
						$z_1$ (m)	$z_2$ (m)	$z_1$ (m)	$z_2$ (m)	$z_1$ (m)	$z_2$ (m)
0	0	0,6399	0,4160	-0,6680	0	0,4273	0,4048	0,4273	0,4048	0,7710	0,0611
1	3	0,4488	0,2442	-0,8444	-29,870	0,1739	0,3146	0,1739	0,3146	0,5176	-0,0291
2	6	0,3109	0,1073	-0,9705	-53,890	-0,0330	0,2475	-0,0330	0,2475	0,3107	-0,0962
3	9	0,2318	0,0087	-1,0410	-69,364	-0,1809	0,1983	-0,1809	0,1983	0,1628	-0,1454
4	12	0,2171	-0,0476	-1,0502	-74,966	-0,2604	0,1651	-0,2604	0,1651	0,0833	-0,1786
5	15	0,2730	-0,0575	-0,9924	-70,746	-0,2647	0,1497	-0,2647	0,1497	0,0790	-0,1940
6	18	0,4059	-0,0166	-0,8614	-58,130	-0,1912	0,1579	-0,1912	0,1579	0,1525	-0,1858
7	21	0,6228	0,0796	-0,6469	-39,912	-0,0415	0,2006	-0,0415	0,2006	0,3022	-0,1431
8	24	0,9310	0,2360	-0,3005	-20,253	0,1779	0,2941	0,1779	0,2941	0,5216	-0,0496
9	27	1,3382	0,4578	0,1535	-4,666	0,4549	0,4608	0,4549	0,4608	0,7986	0,1171
10	30	1,9058	0,7851	0,7851	0	0,8063	0,7639	0,8063	0,7639	1,1500	0,4202
	0					-0,8002	0,7700	-0,8002	0,7700		
11	3	1,1923	0,3155	0,0101	-26,794	0,1770	0,4541	0,1831	0,4480	0,5268	0,1043
12	6	0,5448	-0,1099	-0,7000	-60,092	-0,4482	0,2284	-0,4421	0,2223	-0,0984	-0,1214
13	9	0,0469	-0,4368	-1,1694	-90,563	-0,9702	0,0966	-0,9641	0,0905	-0,6204	-0,2532
14	12	-0,2825	-0,6529	-1,4783	-111,524	-1,3355	0,0297	-1,3294	0,0236	-0,9857	-0,3201
15	15	-0,4229	-0,7448	-1,6081	-118,957	-1,4998	0,0101	-1,4937	0,0040	-1,1500	-0,3397



TABELA 5.13 - PROTENSÃO COM CABOS REVERSOS - P VARIÁVEL - VARIAÇÃO ANGULAR DOS CABOS, VARIAÇÃO ANGULAR TOTAL ACUMULADA NA SEÇÃO E COEFICIENTES DE VARIAÇÃO DA SEÇÃO

Seção	$\Delta\theta_1$	$\gamma_1$	$\eta_1$	$\Delta\theta_2$	$\gamma_2$	$\eta_2$	$\eta = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}$
0	0	0	1	0	0	1	1
1	1,0097	5,3187	0,9725	0,5025	4,8115	0,9751	0,9738
2	1,1468	10,7727	0,9451	0,4477	9,5683	0,9511	0,9481
3	1,3898	16,4715	0,9173	0,3718	14,2491	0,9281	0,9227
4	1,5704	22,3510	0,8895	0,3694	18,9276	0,9056	0,8975
5	1,6727	28,3327	0,8621	0,4531	23,6897	0,8833	0,8827
6	1,6837	34,3255	0,8355	0,6358	28,6345	0,8607	0,8481
7	1,5922	40,2267	0,8100	0,9322	33,8758	0,8374	0,8237
8	1,3832	45,9190	0,7862	1,3552	39,5400	0,8130	0,7996
9	1,4272	51,6552	0,7630	2,2827	46,1317	0,7854	0,7742
10	10,0422	66,0064	0,7077	11,0174	61,4582	0,7248	0,7163
11	9,6653	80,5044	0,6560	7,0242	73,315	0,6812	0,6686
12	0,7707	86,1077	0,6370	1,4337	79,5813	0,6592	0,6481
13	1,9930	92,9334	0,6147	1,2394	85,6533	0,6385	0,6266
14	2,7696	100,5366	0,5907	0,8762	91,3622	0,6198	0,6052
15	4,1318	109,5001	0,5636	0,6759	96,8707	0,6021	0,5829

FIG. 5.21 - PROTENSÃO COM CABOS REVERSOS - REPRESENTAÇÃO DOS CABOS REAIS E FORÇA DE PROTENSÃO EM CADA SEÇÃO.



nar a posição da linha de pressão, basta calcular as incógnitas hiperestáticas necessárias para que, em qualquer apoio intermediário, as condições de concordância sejam satisfeitas.

No tramo  $i$ , as ordenadas da linha de pressão são:

$$z_{lp}(\alpha) = \bar{z}_{o_i}(\alpha) + \frac{M'_p}{P} = \bar{z}_{o_i}(\alpha) + x_i \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} + x_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i}$$

No apoio  $i$ , a relação de concordância se escreve:

$$\int_0^{\theta_i} P \cdot z_{lp} \cdot M_1 ds + \int_0^{\theta_{i+1}} P \cdot z_{lp} \cdot M_1 ds = 0$$

Desenvolvendo esta expressão com o auxílio da Fig. 5.22 chega-se à relação simplificada:

$$x_{i-1} \delta_{i,i-1}^* + x_i \delta_{i,i}^* + x_{i+1} \delta_{i,i+1}^* + \delta_{i,0} = 0$$

onde  $\delta_{i,i-1}^*$ ,  $\delta_{i,i}^*$  e  $\delta_{i,i+1}^*$  são os mesmos obtidos no parágrafo 5.4.2.

Se a viga tiver  $n$  apoios, o sistema terá  $(n-2)$  equações e  $(n-2)$  incógnitas. Na forma matricial, o sistema de equações se escreve:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11}^* & \delta_{12}^* & \cdots & \delta_{1,n-2}^* \\ \delta_{12}^* & \delta_{22}^* & \cdots & \delta_{2,n-2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n-2,1}^* & \delta_{n-2,2}^* \cdots & \delta_{n-2,n-2}^* \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta_{1,0} \\ -\delta_{2,0} \\ \vdots \\ -\delta_{n-2,0} \end{bmatrix}$$

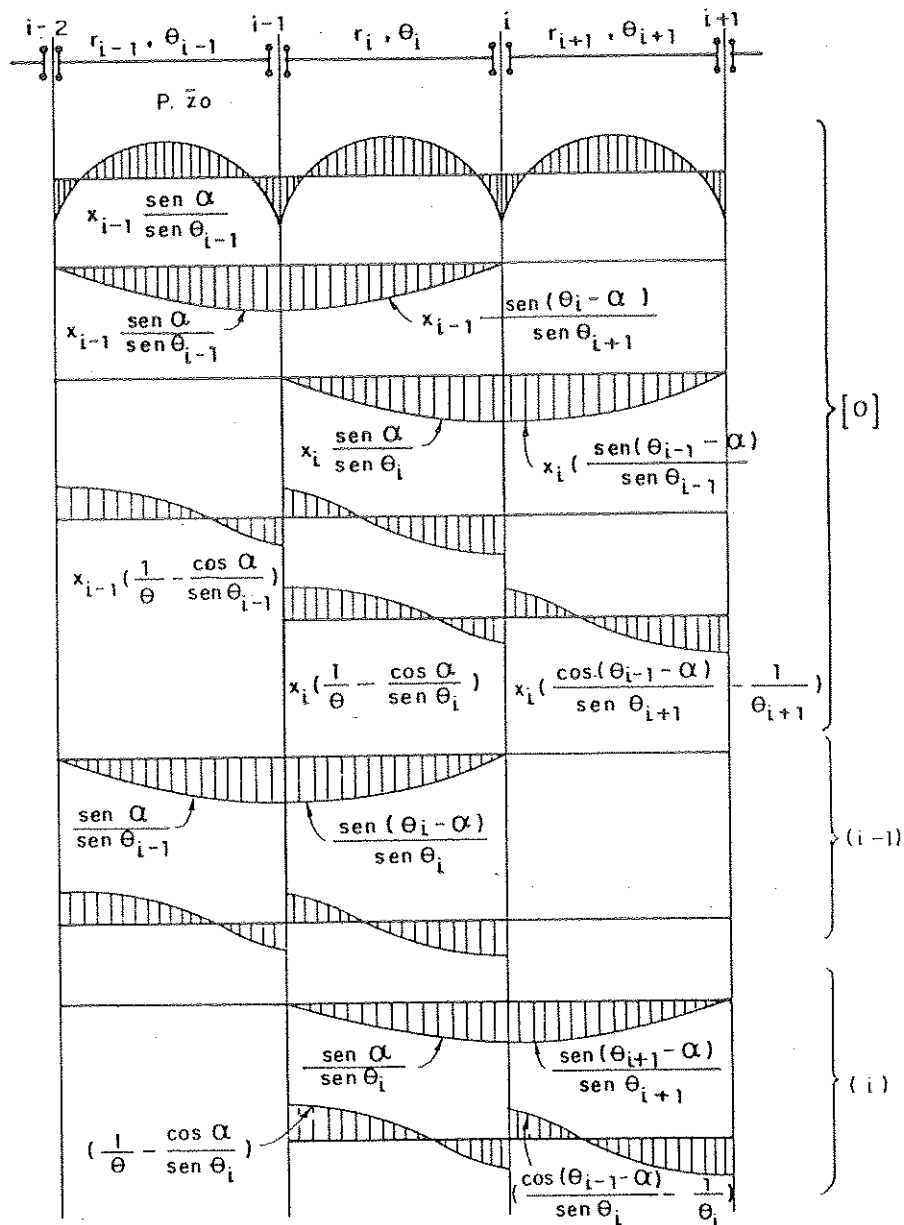


FIG. 5.22 - MOMENTOS PARA A DETERMINAÇÃO DA LINHA DE PRESSÃO DO CABO REAL - CABO CENTRADO.

Com os hiperestáticos  $x_i$  determinados, a equação da linha de protensão no tramo  $i$  será:

$$z_{lp} = \bar{z}_{o_i} + x_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i} + x_i \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i}$$

Observe-se que cada elemento da matriz de flexibilidade apresenta uma parcela devido à flexão e outra devido à torção. No parágrafo 5.3 foi visto que quando se aplica um momento fletor unitário na extremidade do tramo, desenvolve-se ao longo do mesmo momentos de flexão e de torção, portanto, na direção da incôgnita existirão deslocamentos  $\delta_{i,j}$  devidos a ambos os momentos.

Algumas conclusões podem ser tiradas a respeito do posicionamento da linha de pressão. Inicialmente determinar-se-á, para o cabo real, o valor de  $\delta_{i,0}$  no apoio  $i$ , isto é, o giro relativo produzido pelo cabo real.

$$\int_0^{\theta_i} \bar{z}_o \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} ds + \int_0^{\theta_{i+1}} \bar{z}_o \frac{\text{sen}(\theta_{i+1} - \alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} ds = \delta_{i,0}$$

Sabe-se que a equação deste cabo, no tramo  $i$ , em função do cabo concordante é:

$$\bar{z}_{o_i} = z_{o_i} + k_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i - \alpha)}{\text{sen}\theta_i} + k_i \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i}$$

Substituindo a expressão de  $\delta_{i,0}$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\delta_{i,0} &= \int_0^{\theta_i} z_{oi} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} ds + \int_0^{\theta_{i+1}} z_{oi} \frac{\text{sen}(\theta_{i+1}-\alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} ds = \\
&= \int_0^{\theta_i} (z_{oi} + k_{i-1} \frac{\text{sen}(\theta_i-\alpha)}{\text{sen}\theta_i} + k_i \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i}) \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} ds + \\
&+ \int_0^{\theta_{i+1}} (z_{oi} + k_i \frac{\text{sen}(\theta_{i+1}-\alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} + k_{i+1} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_{i+1}}) \frac{\text{sen}(\theta_{i+1}-\alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} ds = \\
&= \underbrace{\int_0^{\theta_i} z_{oi} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} ds + \int_0^{\theta_{i+1}} z_{oi} \frac{\text{sen}(\theta_{i+1}-\alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} ds}_{=0} + \\
&+ k_{i-1} \int_0^{\theta_i} \frac{\text{sen}(\theta_i-\alpha)}{\text{sen}\theta_i} ds + k_i \int_0^{\theta_i} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_i} ds + \\
&+ \int_0^{\theta_{i+1}} \frac{\text{sen}(\theta_{i+1}-\alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} \cdot \frac{\text{sen}(\theta_{i+1}-\alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} ds + \\
&+ k_{i+1} \int_0^{\theta_{i+1}} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_{i+1}} \frac{\text{sen}(\theta_{i+1}-\alpha)}{\text{sen}\theta_{i+1}} ds = \\
&= k_{i-1} \delta_{i,i-1} + k_i \delta_{i,i} + k_{i+1} \delta_{i,i+1}
\end{aligned}$$

Assim  $\delta_{i,0} = k_{i-1} \delta_{i,i-1} + k_i \delta_{i,i} + k_{i+1} \delta_{i,i+1}$

Vê-se que  $\delta_{i,0}$  é devido aos hiperestáticos  $k_{i-1}$ ,  $k_i$  e  $k_{i+1}$ , provenientes do alojamento do cabo concordante no interior da viga, dando origem ao cabo real.

Os  $\delta_{i,i-1}$ ,  $\delta_{i,i}$  e  $\delta_{i,i+1}$  são os mesmos coeficientes da matriz de flexibilidade para a determinação do cabo concordante, portanto, são devidos apenas a momentos de flexão. Conhecendo todos os  $\delta_{i,0}$ , resolve-se o sistema e determinam-se as incógnitas hiperestáticas  $x_i$  que possibilitam encontrar a posição da linha de pressão.

Por exemplo, no apoio  $i$ , a incôgnita hiperestática  $x_i$  pode ser calculada fazendo:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

onde  $\Delta$  é o determinante da matriz de flexibilidade do sistema.

$\Delta_i$  é o determinante da matriz obtida a partir da matriz de flexibilidade do sistema através da substituição da coluna  $i$  pelo vetor independente.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \delta_{11}^* & \delta_{12}^* & \dots & \delta_{10}^* & \dots & \delta_{1,n-2}^* \\ \delta_{21}^* & \delta_{22}^* & \dots & \delta_{20}^* & \dots & \delta_{2,n-2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \delta_{i,1}^* & \delta_{i,2}^* & \dots & \delta_{i,0}^* & \dots & \delta_{i,n-2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n-2,1}^* & \delta_{n-2,2}^* & \dots & \delta_{n-2,0}^* & \dots & \delta_{n-2,n-2}^* \end{vmatrix}$$

↑  
coluna  $i$

Escrevendo o determinante  $\Delta_i$  em função do hiperestático  $k_i$  tem-se:

$$\Delta_i = -k_i \begin{vmatrix} \delta_{11}^* & \delta_{12}^* & \dots & \left( \frac{k_1 \delta_{11}^* + k_2 \delta_{12}^*}{k_i} \right) & \dots & \delta_{1,n-2}^* \\ \delta_{21}^* & \delta_{22}^* & \dots & \left( \frac{k_1 \delta_{21}^* + k_2 \delta_{22}^* + k_3 \delta_{23}^*}{k_i} \right) & \dots & \delta_{2,n-2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \delta_{i,1}^* & \delta_{i,2}^* & \dots & \left( \frac{k_{i-1} \delta_{i,i-1}^* + k_i \delta_{i,i}^* + k_{i+1} \delta_{i,i+1}^*}{k_i} \right) & \dots & \delta_{i,n-2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n-2,1}^* & \delta_{n-2,2}^* & \dots & \left( \frac{k_{n-3} \delta_{n-2,n-3}^* + k_{n-2} \delta_{n-2,n-2}^*}{k_i} \right) & \dots & \delta_{n-2,n-2}^* \end{vmatrix}$$

Se os deslocamentos  $\delta_{i,i}$  do vetor independente fossem iguais aos correspondentes  $\delta_{i,i}^*$  da matriz de flexibilidade, o determinante  $\Delta_i$  seria igual a:

$$\Delta_i = -k_i \Delta \rightarrow x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = -k_i$$

Desta forma, a incógnita hiperestática seria  $x_i = -k_i$  e não haveria alteração na linha de pressão inicial.

Na realidade, os  $\delta_{i,i}$  do vetor independente são deslocamentos devidos somente à flexão enquanto que os  $\delta_{i,i}^*$  da matriz de flexibilidade são deslocamentos devidos à flexão acrescidos dos deslocamentos devidos à torção. Isto significa que  $\delta_{i,i-1} + \delta_{i,i} + \delta_{i,i+1} < \delta_{i,i-1}^* + \delta_{i,i}^* + \delta_{i,i+1}^*$ . Assim, ao calcular  $\Delta_i$  chegar-se-á a um valor  $\Delta_i < |-k_i \Delta|$ , portanto,  $x_i < |-k_i|$ . Conclui-se que a linha de pressão estará situada entre o traçado do cabo concordante e do cabo real.

De um modo geral, quando se calcula o cabo concordante econômico, nota-se que ao efetuar a transformação senoidal obtém-se um cabo real rebaixado, isto é, na transformação o cabo concordante sofre um rebaixamento. Isto significa que no apoio  $i$  o cabo deve se deslocar para baixo de um valor  $k_i$ . A linha de pressão pode ser obtida a partir do cabo real deslocando-o para cima de um valor  $x_i < -k_i$ , o que equivale dizer que a linha de pressão ficará abaixo da linha do cabo concordante (v. Fig. 5.23).

Já foi visto no capítulo três que o cabo concordante econômico deve tangenciar, no apoio, a parte inferior do fuso de passagem (ponto B) e no tramo, a parte superior do mesmo fuso (ponto A). Como isto raramente ocorre, o cabo concordante econômico considerado, deve tangenciar pelo menos um dos pontos A ou B, recaindo no cabo (b) Fig. 3.2.

Numa primeira hipótese, se o cabo concordante tangenciar o ponto (A) e no apoio passar por um ponto no interior do fuso de passagem, sabe-se que a linha de pressão do cabo discordante estará rebaixada em relação ao cabo concordante, mas com uma grande probabilidade de perma



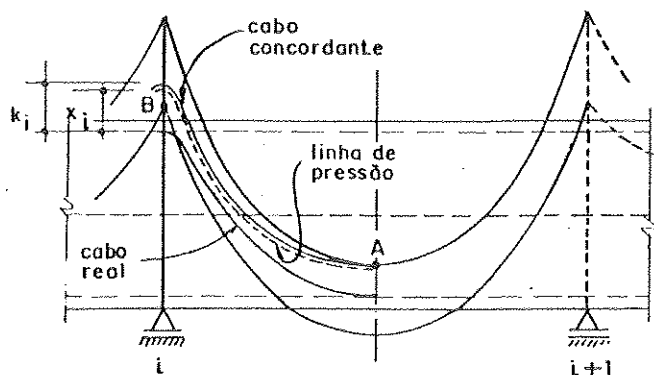


FIG. 5.23- POSIÇÃO DA LINHA DE PRESSÃO EM RELAÇÃO AOS CABOS CONCORDANTE E REAL.

necer no interior do fuso de passagem, conforme mostra a Fig. 5.23.

Numa segunda hipótese, se o cabo concordante tangenciar o ponto B, e no tramo passar por um ponto no interior do fuso de passagem, conforme mostra a Fig. 5.24, vê-se que a linha de pressão no apoio estará fora do fuso de passagem, portanto com tensões na seção ultrapassando as tensões admissíveis preestabelecidas.

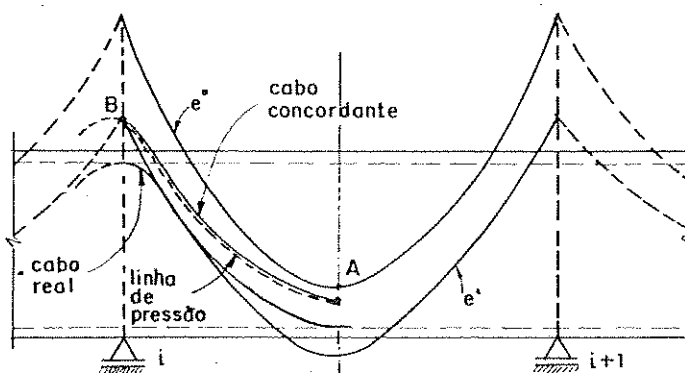


FIG. 5.24- POSICIONAMENTO DA LINHA DE PRESSÃO EM RELAÇÃO AO FUSO DE PASSAGEM.

Este problema pode ser contornado fixando-se na seção de apoio um ponto B' no interior do fuso, isto é, a cima do ponto B, recaindo no caso (c) da Fig. 3.2. Desta forma será possível obter a linha de pressão do cabo discordante ainda no interior do fuso de passagem, conforme mostra a Fig. 5.25.

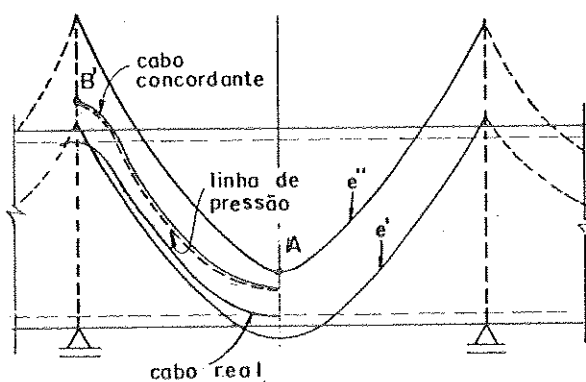


FIG. 5.25 - LINHA DE PRESSÃO DO CABO REAL NO INTERIOR DO FUSO DE PASSAGEM.

#### 5.8.1 - Exemplo

Seja determinar a linha de pressão do cabo real centrado obtido no parágrafo 5.6.1.

Os coeficientes da matriz de flexibilidade são:

$$\delta_{11}^* = \delta_{22}^* = 21,7450$$

$$\delta_{12}^* = \delta_{21}^* = 6,5189$$

Sabendo-se que:

$$\delta_{11} = \delta_{12} = 21,7407$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 6,5170$$

$$k_1 = k_2 = -0,1909$$

os elementos do vetor independente ficam:

$$\delta_{1,0} = k_1 \delta_{11} + k_2 \delta_{12} = -5,3944$$

$$\delta_{2,0} = k_1 \delta_{21} + k_2 \delta_{22} = -5,3944$$

e o sistema de equações se escreve:

$$\begin{bmatrix} 21,7450 & 6,5189 \\ 6,5189 & 21,7450 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,3944 \\ 5,3944 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_2 = +0,1908$$

As ordenadas da linha de pressão ficam:

$$1^\circ \text{ Tramo: } z_{\ell_p}(\alpha) = \bar{z}_o(\alpha) + \frac{0,5117}{\text{sen}\theta_1} \text{ sen}\alpha$$

$$2^\circ \text{ Tramo: } z_{\ell_p}(\alpha) = \bar{z}_o(\alpha) + \frac{0,5117}{\text{sen}\theta_2} \text{ sen}\alpha + \text{sen}(\theta_2 - \alpha)$$

Na Tabela 5.13 são apresentadas as ordenadas da linha de pressão.

Confrontando estas ordenadas com aquelas obtidas na Tabela 5.2, nota-se que na seção 10 a linha de pressão está 0,1mm fora do fuso de passagem, o que leva a concluir que praticamente não há alteração na posição da linha de pressão, não sendo necessário, portanto, calcular um novo cabo.

TABELA 5.14 - PROTENSÃO CENTRADA - ORDENADAS DA LINHA  
DE PRESSÃO - P CONSTANTE

Seção	$\alpha$	$z_{lp}$
0	0	0,4761
1	3	0,1460
2	6	-0,0924
3	9	-0,2389
4	12	-0,2934
5	15	-0,2558
6	18	-0,1260
7	21	0,0964
8	24	0,4112
9	27	0,8187
10	30 0	1,3190
11	3	0,5091
12	6	-0,1208
13	9	-0,5706
14	12	-0,8407
15	15	-0,9307

## 6. CONCLUSÕES

A obtenção do traçado econômico do cabo resultante real, ou dos cabos parciais reais, associados a uma força de protensão econômica são conseguidos a partir do conhecimento de um cabo concordante.

Através da protensão foi possível determinar traçados econômicos de cabos que criassem, dentre outros esforços, momentos de flexão e de torção.

Baseando-se na hipótese do cabo ser derivado do limite superior do fuso de passagem, os traçados encontrados são os mais econômicos.

Verificou-se que, na protensão centrada e na protensão não centrada, os cabos apresentam forças de protensão iguais ou aproximadamente iguais, significando que pode ser criado momento de torção praticamente sem alteração da protensão. Entretanto, com o aumento da excentricidade do cabo criam-se momentos  $M_{z,p}$  apreciáveis, que poderiam vir a ser incompatíveis com as seções adotadas.

Na protensão com cabos reversos há um gasto maior de protensão, uma vez que o cabo resultante centrado apresenta flecha máxima menor que a altura útil  $d$  da viga. Porém, só haverá ocorrência de  $M_{z,p}$ , embora com valores bem menores que aqueles normalmente obtidos na protensão não centrada, quando os traçados apresentarem protensão variável.

De um modo geral deve-se utilizar a protensão com cabos reversos, sendo que a opção pela protensão não centrada se torna viável quando o momento de torção a ser criado não leva  $M_{z,p}$  a níveis acima da capacidade da viga.

Para os casos de protensão estudados, verificou-se que em qualquer traçado econômico com protensão variável, a seção com menor protensão requer uma força menor que aquela correspondente exigida considerando-se traçado econômico com protensão constante, o que resulta portanto numa economia de protensão.

Na determinação do traçado concordante com pro tensão variável foi considerado apenas as perdas por a trito. A partir deste traçado pode ser obtido um outro, concordante, que leve em conta também outras perdas como, por exemplo, deformação lenta e retração pois, já se co nhece de maneira aproximada a relação entre as forças a tuantes nas várias seções da viga. Se o traçado obtido es tiver no interior do fuso de passagem, estará assegurado que as tensões, em qualquer seção, não ultrapassam os limi tes preestabelecidos.

## 7. BIBLIOGRAFIA

- [1] - ABNT - NORMA BRASILEIRA NB-116 - Cálculo e Execução de Obras de Concreto Protendido, 1962.
- [2] - AGOSTINI, L.R.S. - Contribuição à Otimização do Traçado de Cabos de Vigas Contínuas Protendidas, Escola de Engenharia de São Carlos, 1976.
- [3] - ASSAN, A.E. - Contribuição ao Cálculo Automático de Vigas Contínuas Protendidas, Escola de Engenharia de São Carlos, 1974.
- [4] - CASADO, C.F. - Puentes de Hormigon Armado y Pretensado, Editorial Dorsat, Madrid, 1965.
- [5] - CEB-FIP - Recommendations Internacionales pour le Calcul et L'Exécution des Ouvrages en Béton, Rédaction 1972.
- [6] - CHAUSSIN, M. - Beton Precontraint: Poutres Continues Coulees en Place a Cables Filants. Institut Technique Batiment et des Travaux. Publics.
- [7] - CONTE, S.D. - Elementos de Análise Numérica, Editora Globo, Porto Alegre, 1977.
- [8] - KENNETH HOFFMAN-RAY KUNZE - Linear Algebra - Prentice-Hall International Editions, New Jersey, 1971.
- [9] - GUYON, Y. - Constructions en Béton Précontraint, Cours Chebap, Volumes 1 e 2, Éditions Eyrolles, Paris, 1966.
- [10] - GUYON, Y. - Béton Precontraint: Étude Théorique et Experimentale, Editions Eyrolles, Paris, 1953.
- [11] - LEONHARDT, F. - Prestressed Concrete; Design and Construction, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlim, 1964.
- [12] - LIBBY, J.R. - Modern Prestressed Concrete, Van Nostrand Reinhold Company, San Diego, Califórnia, 1971.

- [13] - LYN, T.Y. - Design of Prestressed Concrete Structures, John Wiley & Sons, New York, 1963.
- [14] - MONTANARI, I. - Concreto Protendido, Notas de Aula, Escola de Engenharia de São Carlos, 1976.
- [15] - MONTANARI, I. - Protensão em Vigas com Torção, Tese de concurso à Livre-Docência, Escola de Engenharia de São Carlos, 1980.