

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

NÚCLEOS ESTRUTURAIS SOBRE FUNDAÇÕES FLEXÍVEIS

ENG. JORGE LIMA COSTA

Dissertação apresentada a Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

ORIENTADOR

PROF. DR. EDDIE MANCINI

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eddie Mancini  
Prof. Dr. Tioeturo Yagui  
Profa. Dra. Helena M.C. Carmo Antunes

SUPLENTES

Prof. Dr. José Elias Laier  
Prof. Dr. João Lirani

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Eddie Mancini que, com confiança, abnegação, experiência e capacidade, orientou este trabalho fornecendo valiosas sugestões no seu desenvolvimento.

À Universidade Federal de Sergipe que me proporcionou condições de estudo e pesquisa em nível de pós-graduação.

Aos funcionários do Departamento de Estruturas, especialmente a Rui Roberto Casale e Sylvia Helena Moretti, pela presteza com que executaram os trabalhos de datilografia e desenho.

Ao CPD da Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, pelo uso do seu equipamento.

Aos colegas amigos e incentivadores.

Aos meus pais, irmãos e avós

À Luzia

## R E S U M O

O presente trabalho estuda, através dos tratamentos contínuo e discreto, a determinação dos esforços nas paredes constituintes de núcleos estruturais de edifícios, contraventados por lintéis, sobre fundação flexível.

O tratamento contínuo baseia-se na teoria de flexo-torção, considerando-se que os núcleos se comportam como as barras de secção aberta de paredes delgadas, quando submetidos a um carregamento constituído por momento torçor. As lajes e os lintéis são supostos uniformemente distribuídos ao longo da altura e como cargas consideram-se apenas os momentos torçores.

O tratamento discreto analisa a estrutura através do método dos deslocamentos, utilizando-se de técnicas matriciais. As paredes são substituídas por painéis planos formados por vigas horizontais rígidas engastadas aos meios dos vãos aos pilares. São consideradas as cargas laterais e verticais.

São analisadas estruturas constituídas por um e dois núcleos. Através de resultados obtidos em exemplos, faz-se uma comparação da precisão entre os dois tratamentos.

## ABSTRACT

This work studies the determination of the actions in the structures cores of buildings constrained by horizontal beams on flexible foundations. Continuous and discret treatment are used for the study.

The Vlasov theory is used in the continuous treatment. It assumes that the structural cores to behave like thin-walled beams of open sections. The horizontal connection elements are supposed uniformly distributed along the height of the building. The considered loads are the applied torques.

The discret treatment uses the Displacement Method through utilization of matrices techniques. The plain walls are replaced by equivalent plain frames formed by horizontal beams encastered at the middle of the spans at the columns. Lateral and vertical loads are considered.

Structures formed by one or two cores are analysed and the accuracy of each treatment is estimated by comparison of the results obtained in examples.

## Í N D I C E

I. INTRODUÇÃO .....	1
II. TRATAMENTO CONTÍNUO .....	4
II.1 - Considerações e hipóteses .....	4
II.2 - Formulação do processo .....	4
II.3 - Edifícios com um núcleo estrutural .....	5
II.3.1 - Núcleo sem contraventamento .....	5
II.3.2 - Núcleo contraventado por lintéis ...	13
II.3.3 - Exemplo II.1 .....	20
II.4 - Edifício constituído por dois núcleos iguais.	30
II.4.1 - Núcleos sem contraventamento .....	30
II.4.2 - Núcleos contraventados por lintéis..	37
II.4.3 - Exemplo II.2 .....	41
II.5 - Influência da flexibilidade nos esforços das paredes .....	47
II.5.1 - Determinação dos esforços .....	49
II.5.2 - Esforços da fundação em sapatas apli cados nas bases das paredes .....	52
II.5.3 - Esforços concentrados nas bases das paredes .....	53
II.5.4 - Esforços nas paredes do exemplo II.1	58
II.5.5 - Esforços nas paredes do exemplo II.2	65
III. TRATAMENTO DISCRETO .....	70
III.1 - Considerações e hipóteses .....	70
III.2 - Formulação do processo .....	70
III.3 - Estrutura tridimensional equivalente .....	73
III.4 - Descrição da estrutura .....	75
III.5 - Deslocamentos .....	78
III.5.1 - Sistema .....	78
III.5.2 - Pilares .....	80
III.5.3 - Lintéis .....	82

III.6 - Matrizes de rigidez .....	83
III.6.1 - Matriz de rigidez dos pilares..	83
III.6.2 - Matriz de rigidez dos lintéis..	88
III.6.3 - Matriz de rigidez do sistema ..	90
III.6.4 - Particularidades da matriz S ..	98
III.7 - Deslocamentos e esforços nos pilares e lintéis .....	99
III.7.1 - Esforços nos pilares .....	100
III.7.2 - Esforços nos lintéis .....	100
III.8 - Programa para o cálculo automático .....	100
III.8.1 - Fluxo de processamento .....	100
III.8.2 - Divisão do programa .....	102
III.8.3 - Entrada de dados .....	103
III.8.4 - Listagem e exemplo de impressão de resultados .....	105
III.9 - Comparação dos resultados obtidos pelos processos apresentados .....	130
III.9.1 - Edifício constituído por apenas um núcleo .....	131
III.9.2 - Edifício constituído por dois núcleos .....	145
IV - CONCLUSÕES .....	154
APÊNDICE 1 - Resumo da teoria de flexo-torção .....	156
APÊNDICE 2 - Demonstrações de formulações usadas .....	178
BIBLIOGRAFIA .....	186

## I. INTRODUÇÃO

Ao longo deste trabalho, chamar-se-á de "Núcleo Estrutural" ou simplesmente "Núcleo" de um edifício, a qualquer combinação tri-dimensional de paredes com espessuras muito menores do que as outras dimensões, formando uma seção aberta, geralmente de concreto armado.

Devido a grande capacidade de absorver esforços, é cada vez mais frequente o uso de núcleos estruturais em edifícios altos sujeitos à carga lateral, admitindo que esta seja integralmente absorvida por eles. Outras estruturas de edifícios têm sido projetadas tendo o núcleo como o elemento estrutural que recebe tanto as cargas laterais como as verticais, como por exemplo o edifício sede do BNH no Rio de Janeiro.

Usualmente a abertura da seção é parcialmente fechada por vigas (lintéis) aos níveis de cada laje, obtendo-se assim os "Núcleos Estruturais Contraventados por Lintéis".

Assimilando as lajes a diafragmas horizontais de rigidez infinita em seus planos e nula transversalmente, os núcleos de edifícios podem ser analisados tanto pelo "Tratamento Contínuo" como pelo "Tratamento Discreto".

No tratamento contínuo, as rigidezes das lajes e lintéis são uniformemente distribuídas ao longo da altura do edifício; os esforços transmitidos aos elementos, ficam assim, continuamente distribuídos. O comportamento desse modelo estrutural, é traduzido por uma equação diferencial ou por um sistema de equações diferenciais, nos deslocamentos livres da estrutura, cuja solução por um processo matemático qualquer, fornece os deslocamentos e esforços em toda a estrutura.

O tratamento discreto analisa a estrutura por técnicas matriciais através do método dos esforços ou dos deslocamentos, obtendo-se um sistema de equações lineares, que no caso geral é de grande porte, cuja solução fornece os deslocamentos e esforços em toda a estrutura.



Neste trabalho, pretende-se estudar o efeito da flexibilidade da fundação do núcleo, efeito esse raramente considerado na vasta bibliografia encontrada sobre o assunto.

COULL<sup>(4)</sup>, através de técnicas introduzidas por MANCINI<sup>(2)</sup>, que consiste em subdividir a estrutura em seus painéis paredes e aplicar as equações de equilíbrio e compatibilidade de deslocamentos, estuda o efeito do engastamento elástico em estruturas formada por dois núcleos iguais e dispostos como mostra a figura I-1. Ocorre, entretanto, que tal estudo apresenta incorreções em diversas de suas considerações

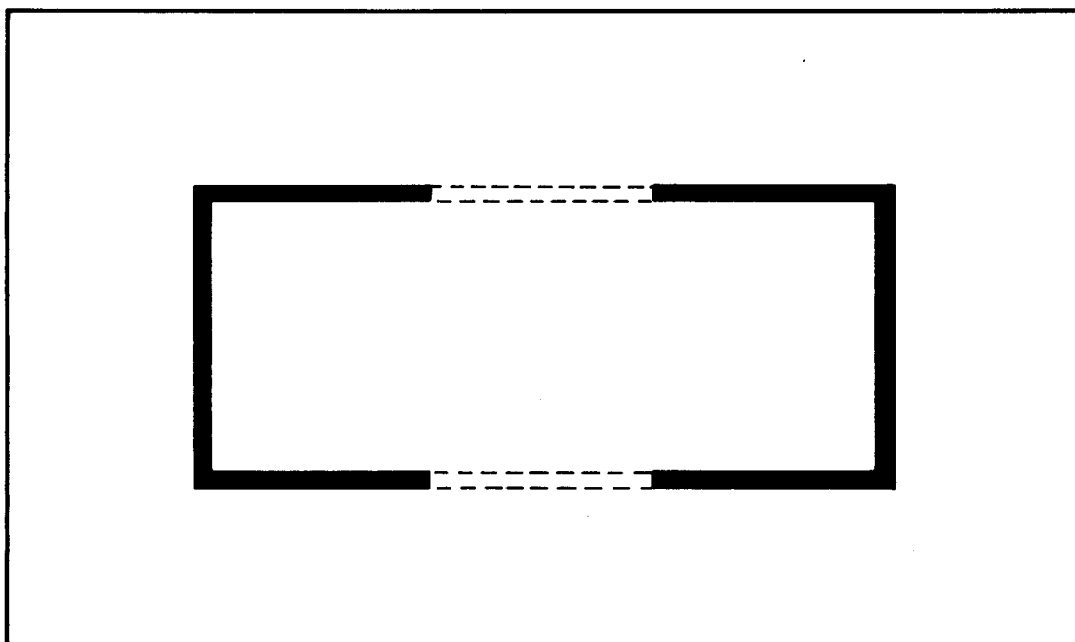


FIG. I-1 - EDIFÍCIO CONTENDO DOIS NÚCLEOS

MANCINI<sup>(1)</sup>, através do mesmo processo, estuda a mesma estrutura superando aquelas incorreções e apresentando idéias preliminares, um tanto contestativas, sem propor uma solução conclusiva para o problema.

No segundo capítulo deste trabalho, estuda-se os "núcleos sobre fundações flexíveis" através do "tratamento

contínuo", sob um ângulo diferente daquele usado por MANCINI<sup>(1)</sup>. Baseado nos trabalhos de TSO e BISWAS<sup>(3)</sup> e BARBO-SA<sup>(9)</sup>, que admitem fundação rígida, considera-se os núcleos como "barras de secção aberta de paredes delgadas", e daí analisa-os pela teoria de flexo-torção introduzida por VLA-SOV<sup>(13)</sup>. Apresentam-se dois exemplos de estruturas constituída por núcleos: no primeiro, estuda-se um edifício contendo um núcleo e no segundo o edifício analisado por MANCINI<sup>(1)</sup> e COULL<sup>(4)</sup>.

Ainda nesse capítulo, faz-se um estudo dos esforços simples que atuam em cada parede isoladamente, e analisa-se o efeito de uma fundação em sapata sobre solo flexível nesses esforços.

No terceiro capítulo, apresenta-se o "tratamento discreto" com a formulação do método dos deslocamentos para a análise desse tipo de estrutura, baseando-se nos trabalhos de STAMATO<sup>(5)</sup> e YAGUI<sup>(6)</sup>. A listagem do programa elaborado, que prevê vínculos elásticos, é apresentada com um exemplo de impressão de resultados.

Ainda nesse capítulo, faz-se a comparação dos resultados obtidos pelos dois tratamentos em dois exemplos de núcleos estruturais, considerando os casos de fundações rígidas e flexíveis.

Nos apêndices encontram-se um resumo da teoria de flexo-torção, utilizada no tratamento contínuo, e também as demonstrações de formulações usadas no tratamento discreto.

## II. TRATAMENTO CONTÍNUO

### II.1 - Considerações e hipóteses

O tratamento contínuo ou técnica do meio contínuo, em análises de edifícios, consiste basicamente em substituir o número discreto de lajes e lintéis, por um meio contínuo de rigidez equivalente distribuída uniformemente ao longo da altura.

"As lajes são consideradas equivalentes à diafragmas horizontais", de rigidez infinita no seu plano mas sem nenhuma rigidez transversal. Com esse comportamento, e las garantem um movimento de corpo rígido, no plano horizontal, dos elementos verticais sem influenciar os empenamentos.

Os lintéis são considerados como vigas engastadas nas duas extremidades, com capacidade de reduzir os deslocamentos verticais relativos entre as paredes. Os esforços normais nos lintéis serão nulos, devido ao comportamento das lajes.

O tratamento contínuo, como exposto, aplicado nas estruturas de edifícios com núcleos estruturais estudados nesse trabalho, expressará o comportamento do modelo estrutural, submetido a momento torçor, através de uma equação diferencial cuja solução fornecerá os deslocamentos e esforços na estrutura.

Apesar da vantagem de analisar estruturas com arranjos estruturais complexos, o tratamento contínuo, aplicado em estruturas com características elásticas ou geométricas variáveis ao longo da altura, torna-se praticamente inaplicável devido à grande manipulação matemática envolvida.

### II.2 - Formulação do processo

Os "núcleos estruturais sobre fundações flexíveis,

objeto de estudo neste trabalho, podem ser analisados através do tratamento contínuo, pelo processo introduzido por MANCINI<sup>(2)</sup>, que consiste basicamente em subdividir a estrutura em painéis paredes, e aplicar as equações de equilíbrio e compatibilidades dos deslocamentos, como utilizado por MANCINI<sup>(1)</sup> e COULLL<sup>(4)</sup>.

Um outro processo do tratamento contínuo, utiliza a teoria de flexo-torção, introduzida por VLASOV<sup>(13)</sup>, como feita por TSO e BISWAS<sup>(3)</sup> e BARBOSA<sup>(9)</sup>.

Neste trabalho, será utilizada a teoria de flexo-torção, por permitir uma análise simples em edifícios com núcleos estruturais sobre fundação flexível submetidos à torção, através de uma condição de contorno simples que se baseia na continuidade do esforço bimomento.

O processo consiste, em considerar o núcleo como uma barra de secção aberta de paredes finas, e estudá-lo através da teoria de flexo-torção, utilizando as mesmas formulações e convenções usadas no Apêndice 1.

A hipótese básica da teoria de flexo-torção, de que as secções transversais são indeformáveis em seus planos, é garantida pelo comportamento considerado para as lajes continuamente distribuídas ao longo da altura.

## II.3 - Edifícios com um núcleo estrutural

### II.3.1 - Núcleo sem contraventamento

A estrutura será referida a um sistema de eixos coordenados  $oxyz$ , mostrado na Figura II-1. A origem  $o$  é tomada na base da estrutura e coincidente com o centro de torção da secção transversal; os eixos  $ox$  e  $oy$ , são os eixos principais de inércia da secção e o eixo longitudinal  $oz$  é orientado da base do edifício para o topo.

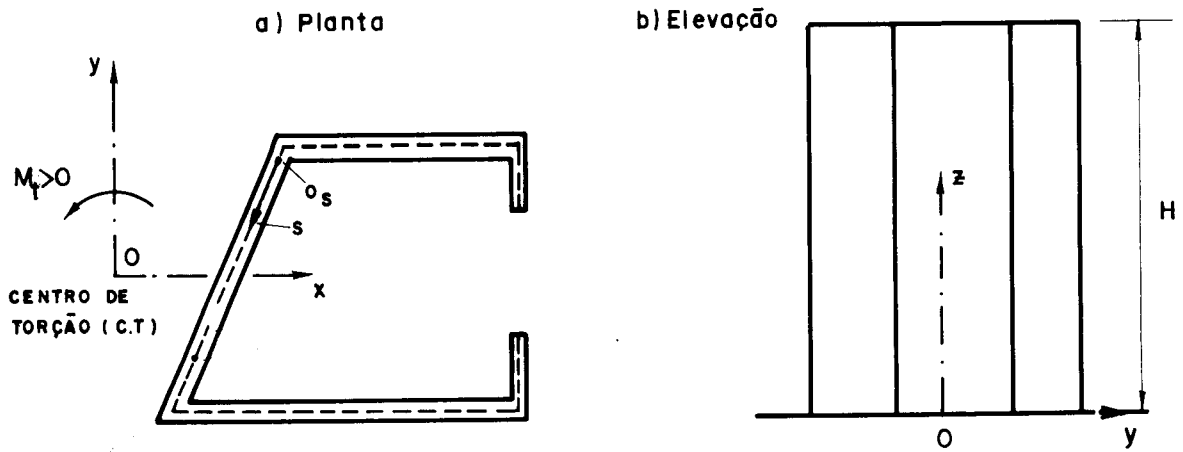


FIG. II-1 - NÚCLEO DE EDIFÍCIO SEM CONTRAVENTAMENTO

Além dos eixos mencionados, faz-se uso também de uma coordenada  $s$ , medida ao longo do esqueleto, com origem  $o_s$  convenientemente escolhida, de modo a facilitar o uso das formulações da teoria de flexo-torção.

A equação que expressa o comportamento de uma barra de secção aberta de paredes finas, aqui representada pelo núcleo, solicitada a torção, é dada, de acordo com a teoria de flexo-torção, por:

$$M_t = M_\ell + M_{ft} \quad (II-1)$$

onde  $M_t$  é o momento torçor solicitante,  $M_\ell$  é o momento de torção livre e  $M_{ft}$  é o momento de flexo-torção, dados pela teoria de flexo-torção:

$$M_\ell = GJ_t \phi' \quad (II-2)$$

$$M_{ft} = -EJ_\omega \phi'' \quad (II-3)$$

onde,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $J_t$  é o momento de Inércia à torção da secção transversal,  $J_\omega$  é o momento setorial de inércia com polo no centro de torção,  $\phi$  é a rotação da sec

ção transversal em torno de  $oz$  e ' significa derivada em relação à coordenada  $z$ .

As substituições das equações (II-2) e (II-3) na equação (II-1), fornece:

$$M_t = GJ_t \phi' - EJ_\omega \phi'' \quad (II-4)$$

A equação diferencial na rotação da secção, (II-4), expressa o comportamento do núcleo estrutural sem contravtamento.

De maneira geral, para a equação diferencial (II-4), necessitam-se de três condições de contorno na sua solução.

Considerando-se que não haja bimomento aplicado no topo (ausência de força e momentos fletores), as duas condições seguintes são imediatas:

$$\left. \begin{array}{l} \phi(0) = 0 \\ \phi''(H) = 0 \end{array} \right\} \quad (II-5)$$

onde  $H$  é a altura do edifício

A terceira condição, envolve a flexibilidade na base do núcleo.

Para base rígida, tem-se que o empenamento é nulo:

$$\phi'(0) = 0 \quad (II-6)$$

No caso de fundação flexível com rigidez conhecida, pode-se relacionar a tensão normal  $\sigma_o$ , aplicada pela fundação na estrutura, com o empenamento  $w$  dos pontos do esqueleto, na forma

$$\sigma_o = \sigma_o(w) \quad (II-7)$$

A teoria de flexo-torção, fornece as expressões do empenamento e do bimomento, B:

$$\left. \begin{aligned} w &= \phi' \omega \\ B &= EJ_{\omega} \phi'' \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-8})$$

onde  $\omega$  é a área setorial.

Sabe-se também, que o bimomento produzido por uma dada distribuição  $\underline{\sigma}$  de tensão ao longo de toda a secção transversal, é dado por

$$B = \int_S \sigma \omega \, dS \quad (\text{II-9})$$

Substituindo-se as equações (II-8) aplicadas na base, e a equação (II-7) em (II-9), obtém-se a condição de contorno procurada.

$$EJ_{\omega} \phi''(o) = \int_S \sigma_o \omega \, dS \quad (\text{II-10})$$

onde  $\sigma_o$  passa a ser uma função da área setorial:

$$\sigma_o = \sigma_o [\phi'(o) \omega]$$

Da teoria de flexo-torção, sabe-se ainda que o bimomento produzido por uma carga concentrada P, é dado pelo produto de P com a área setorial no ponto de aplicação da mesma.

Logo, para o caso em que o núcleo seja apoiado em pilares de rigidezes axiais  $k_i$  em pontos de áreas setoriais  $\omega_i$ , o bimomento na base será obtido por

$$B = \sum_i k_i w_i(o) \omega_i$$

ou, usando (II-8)

$$EJ_{\omega} \phi''(o) = \phi'(o) \sum_i k_i \omega_i^2 \quad (II-11)$$

Aplicando-se convenientemente as equações (II-10) e (II-11), isoladas ou combinadas, pode-se resolver diversas situações de flexibilidade na fundação de edifícios formados por núcleos estruturais.

Considere-se, por exemplo, que a fundação do núcleo da figura II-1, seja em sapata apoiada em solo flexível.

Para simplificações nas formulações que se segue, são feitas as seguintes hipóteses:

a) o solo possui o mesmo comportamento a tração e à compressão.

b) a pressão aplicada pelo solo é constante na largura da sapata.

c) não há interação entre sapatas de duas paredes.

d) a sapata não sofre deformação segundo sua espessura.

Na figura II-2, está representada a fundação do núcleo em estudo.

Admite-se válida a relação:

$$\sigma_o = C_{\phi} w \quad (II-12)$$

onde,  $\sigma_o$  é a pressão aplicada pela fundação,  $w$  é o afundamento do ponto da sapata (igual ao correspondente na parede) e  $C_{\phi}$  é uma constante que expressa a rigidez do solo.



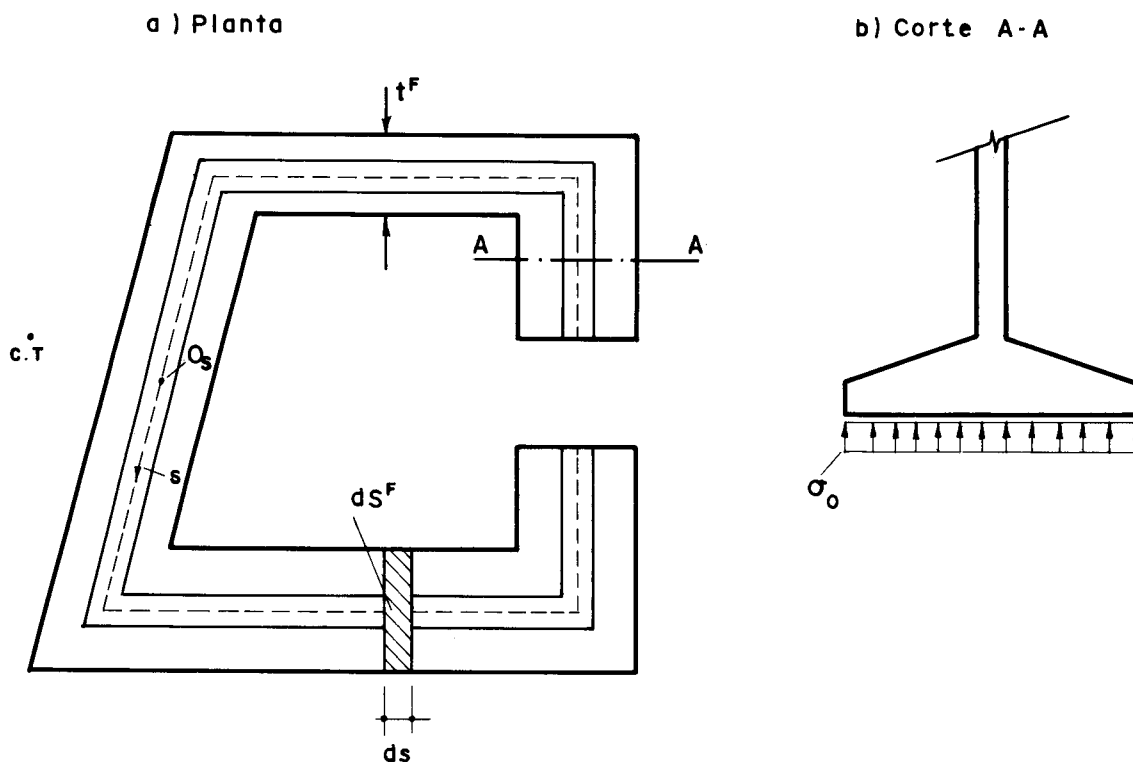


FIG.II- 2- NÚCLEO COM FUNDAÇÃO EM SAPATA

O bimomento aplicado pelo solo na fundação, pode ser determinado com o uso de (II-9), como sendo:

$$B_o = \int_{S^F} \sigma_o \omega \, dS^F \quad (II-13)$$

onde,  $B_o$  é o bimomento aplicado e  $dS^F$  é o elemento de área dado por (II-14), sendo  $t^F$  a largura da base da sapata.

$$dS^F = t^F ds \quad (II-14)$$

Admitindo-se  $C_\phi$  constante com  $\underline{s}$ , e substituindo-se (II-12) em (II-13), obtêm-se:

$$B_o = C_\phi \int_{S^F} w \omega \, dS^F$$

Pela continuidade de esforço na estrutura e, substituindo-se as equações (II-8) aplicadas na base, na equação anterior, chega-se a:

$$EJ_{\omega} \phi''(o) = C_{\phi} \phi'(o) \int_{S^F} \omega^2 dS^F \quad (\text{II-15})$$

Definindo-se o momento setorial de inércia da fundação  $J_{\omega}^F$ , por:

$$J_{\omega}^F = \int_{S^F} \omega^2 dS^F \quad (\text{II-16})$$

A equação (II-15) pode ser escrita na forma:

$$EJ_{\omega} \phi''(o) = C_{\phi} J_{\omega}^F \phi'(o)$$

ou, ainda

$$\phi'(o) = \frac{EJ_{\omega}}{C_{\phi} J_{\omega}^F} \phi''(o) \quad (\text{II-17})$$

A equação anterior, representa a terceira condição de contorno para edifícios formados por um núcleo estrutural com fundação em sapata sobre solo flexível.

Para os casos mais frequentes, a tensão aplicada pela fundação na estrutura é proporcional ao afundamento dos pontos de apoio.

Nesses casos, uma análise nas equações (II-10) e (II-11), mostra que a terceira condição de contorno envolvendo a flexibilidade da fundação, pode ser escrita na forma:

$$\phi'(o) = K \phi''(o) \quad (\text{II-18})$$

onde  $K$  é uma constante que depende das condições de vinculação da base.

Uma comparação de (II-18) com (II-17), mostra por exemplo, que para fundação em sapata sobre solo flexível, tem-se que:

$$K = \frac{EJ \omega}{C_{\phi} J^F \omega} \quad (\text{II-19})$$

Com essa formulação, a equação (II-8) e as equações (II-5) combinadas, fornecem as três condições de contorno necessárias à resolução da equação diferencial (II-4).

$$\left. \begin{aligned} \phi(0) &= 0 \\ \phi''(H) &= 0 \\ \phi'(0) &= K \phi''(0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-20})$$

Nos casos em que o carregamento consiste de um momento torçor uniformemente distribuído  $m$ , e um momento torçor  $T$ , concentrado no topo, a solução geral da equação (II-4) é:

$$\phi = C_1 + C_2 e^{az} + C_3 e^{-az} - \frac{m}{2a^2 EJ \omega} z^2 + \frac{T+mH}{a^2 EJ \omega} z \quad (\text{II-21})$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são constantes determinadas pelas condições de contorno e  $a$  é a relação definida como

$$a^2 = \frac{GJ t}{EJ \omega} \quad (\text{II-22})$$

Com as condições de contorno definidas em (II-20) e com a equação (II-21), chega-se às seguintes expressões para as constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ :

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \frac{mK(e^{Ha}-1)+me^{Ha}/a-T-mH}{a^3 EJ \omega [Ka(e^{2Ha}-1)+1+e^{2Ha}]} \\ C_3 &= \frac{me^{Ha}}{a^4 EJ \omega} - e^{2Ha} C_2 \\ C_1 &= -C_2 - C_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-23})$$

Obtida a rotação  $\phi$  ao longo da coordenada  $z$ , o problema fica então resolvido.

### II.3.2 - Núcleo contraventado por lintéis

O contraventamento, que consiste na introdução de lintéis aos níveis dos andares, modifica consideravelmente a rigidez à torção da estrutura. Essa modificação, deve-se ao fato da ação de flexão dos lintéis reduzir os deslocamentos axiais, ou empenamentos, relativos entre as paredes às quais estão ligados.

Para simplificar os cálculos, neste trabalho, serão considerados apenas os lintéis em que as tangentes ao esqueleto nos seus pontos extremos coincidam com o eixo longitudinal dos mesmos.

Será admitido também, que os lintéis não fazem parte da secção transversal do núcleo. Eles serão tratados como elementos isolados que não alteram as características geométricas da secção.

Considere-se o núcleo estrutural da Figura II.3, definido geometricamente através do sistema de eixos  $oxyz$  e da coordenada  $s$  para o esqueleto, com orientações e direções idênticas às do item anterior.

Admite-se que os lintéis são engastados nas paredes, e que seus pontos médios, são pontos de momento nulo. Portanto, o seccionamento de um lintel, no referido ponto, acarreta a presença de forças concentradas correspondentes ao vínculo rompido.

Estas forças cortantes incógnitas, por serem de mesmo módulo e sentidos contrários, não produzem momentos fletores nem força resultante na estrutura, mas produzem bi momento cujo efeito é reduzir o empenamento da secção transversal.

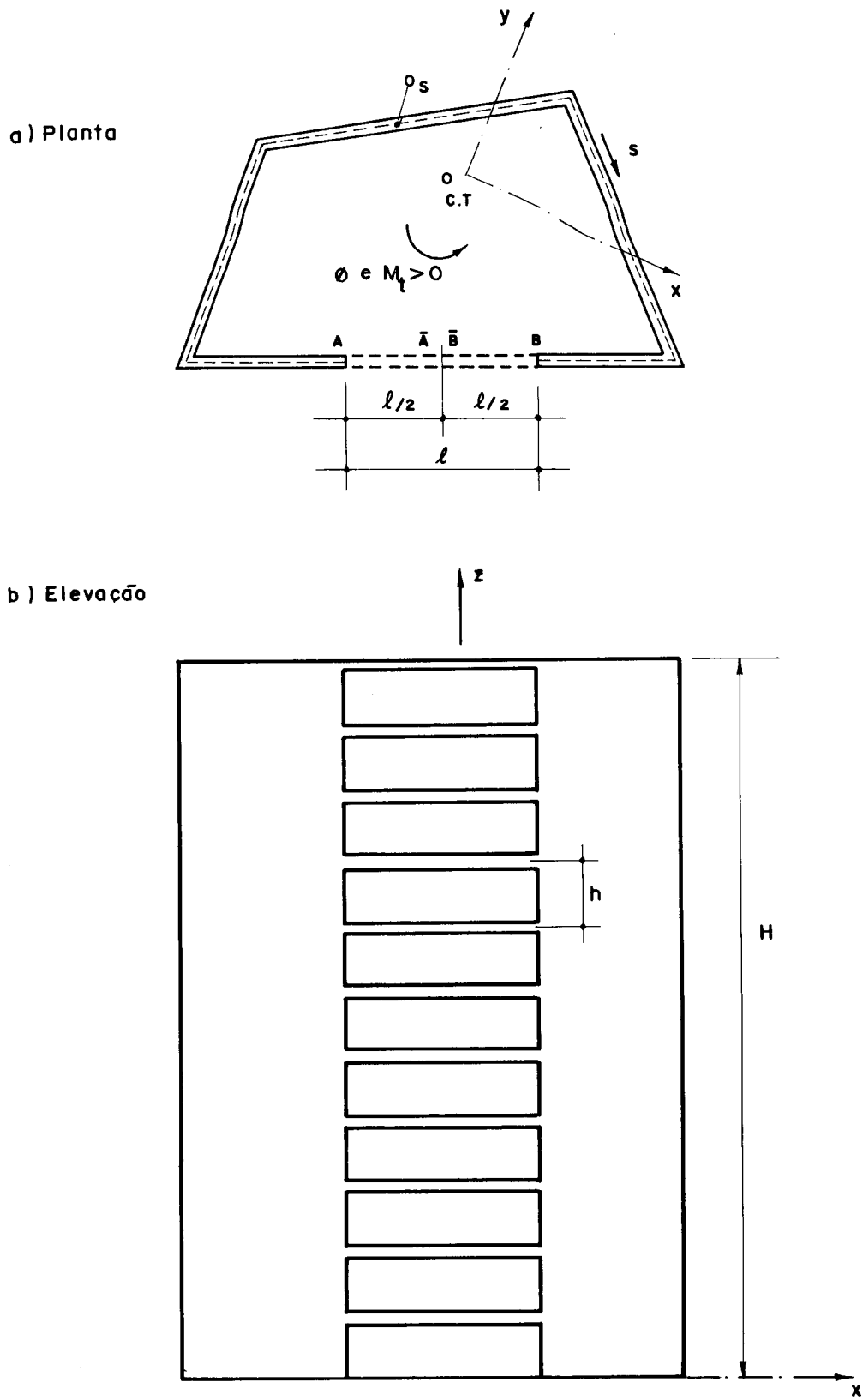


FIG.II-3 - NÚCLEO DE EDIFÍCIO CONTRAVENTADO  
POR LINTÉIS

Seja a configuração de deslocamento positivo do lintel seccionado, para um carregamento de torção na estrutura, mostrada na figura II-4.

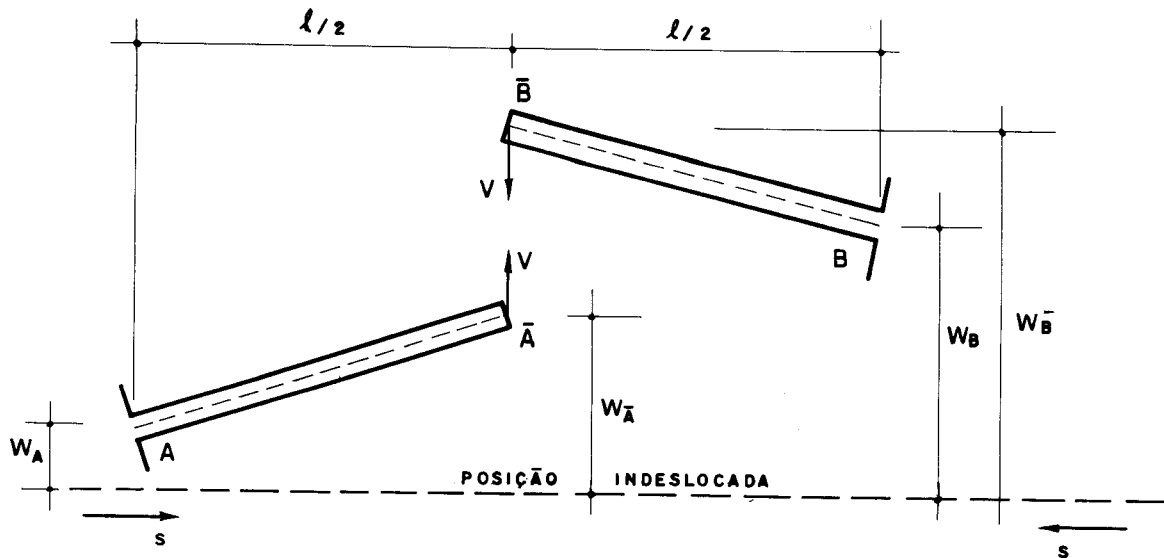


FIG. II - 4 - DESLOCAMENTO DO LINTEL NA ROTAÇÃO DA SECÇÃO

O sentido da coordenada  $s$  é o mostrado, por ser o compatível com as inclinações tomadas para os segmentos do lintel.

O deslocamento axial de um ponto do esqueleto é dado por:

$$w = \phi' \omega \quad (\text{II-24})$$

Devido ao eixo do lintel ser tangente ao esqueleto, pode-se escrever:

$$\left. \begin{aligned} w_{\bar{A}} &= w_A + \frac{l}{2} \cdot \frac{dw}{ds} \Big|_A \\ w_{\bar{B}} &= w_B + \frac{l}{2} \cdot \frac{dw}{ds} \Big|_B \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-25})$$

onde  $\underline{\ell}$  é o comprimento do lintel e,  $\left. \frac{dw}{ds} \right|_A$  e  $\left. \frac{dw}{ds} \right|_B$  são respectivamente, as derivadas do empenamento com relação à coordenada do esqueleto,  $\underline{s}$ , nos pontos A e B mostrados na Figura II-3.

Substituindo-se (II-24) em (II-25), escrevem-se:

$$w_{\bar{A}} = \phi' \omega_A + \frac{\ell}{2} \left. \frac{d}{ds} (\phi' \omega) \right|_A$$

$$w_{\bar{B}} = \phi' \omega_B + \frac{\ell}{2} \left. \frac{d}{ds} (\phi' \omega) \right|_B$$

ou, arrumando-se convenientemente

$$\left. \begin{aligned} w_{\bar{A}} &= \phi' \left( \omega_A + \frac{\ell}{2} \left. \frac{d\omega}{ds} \right|_A \right) \\ w_{\bar{B}} &= \phi' \left( \omega_B + \frac{\ell}{2} \left. \frac{d\omega}{ds} \right|_B \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{(II-26)}$$

Para os lintéis considerados nesse trabalho, os termos entre parênteses nas equações (II-26), representam as áreas setoriais nos pontos  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  respectivamente, imaginando-se a secção do núcleo fechada com um seccionamento nos pontos mencionados:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\bar{A}} &= \omega_A + \frac{\ell}{2} \left. \frac{d\omega}{ds} \right|_A \\ \omega_{\bar{B}} &= \omega_B + \frac{\ell}{2} \left. \frac{d\omega}{ds} \right|_B \end{aligned} \right\} \quad \text{(II-27)}$$

Observe-se que essa definição, não implica em alterações geométricas da secção transversal, devido a presença de lintéis, pois trata-se apenas de consequências de formulações matemáticas.

Utilizando-se as equações (II-27), as equações (II-26) podem ser escritas:

$$w_{\bar{A}} = \phi' \omega_{\bar{A}}$$

(II-28)

$$w_{\bar{B}} = \phi' \omega_{\bar{B}}$$

As equações anteriores fornecem os deslocamentos verticais do ponto médio do lintel, sem a ação da força cortante-incôgnita cujo sentido positivo está indicado na figura II-4.

Os deslocamentos dos pontos  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  (positivos para cima)  $\delta_{\bar{A}}$  e  $\delta_{\bar{B}}$ , respectivamente, produzidos pela força cortante são dados por

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\bar{A}} &= \frac{V(\ell/2)^3}{3EJ_L} \\ \delta_{\bar{B}} &= \frac{-V(\ell/2)^3}{3EJ_L} \end{aligned} \right\} \quad \text{(II-29)}$$

onde,  $J_L$  é o momento de inércia da secção transversal do lintel em relação ao eixo principal horizontal e, estão sendo desprezadas as deformações por força cortante nos mesmos.

Como na estrutura real os pontos  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  coincidem, pode-se escrever a seguinte equação de compatibilidade:

$$w_{\bar{A}} + \delta_{\bar{A}} = w_{\bar{B}} + \delta_{\bar{B}}$$

A substituição das equações (II-28) e (II-29) na equação anterior, fornece:

$$\phi' \omega_{\bar{A}} + \frac{V\ell^3}{24EJ_L} = \phi' \omega_{\bar{B}} - \frac{V\ell^3}{24EJ_L}$$

ou, arrumando-se convenientemente



$$V = \frac{12EJ_L}{\ell^3} \phi'(\omega_B^- - \omega_A^-) \quad (\text{II-30})$$

Como a análise aqui desenvolvida baseia-se no tratamento contínuo, os lintéis concentrados aos níveis dos andares, serão substituídos por um meio contínuo equivalente. Portanto, o efeito de um lintel na estrutura será distribuído continuamente ao longo da altura.

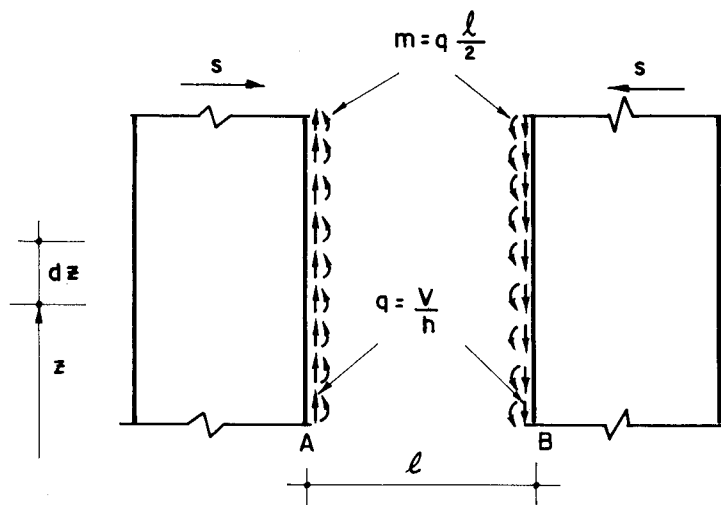


FIG.II-5 - AÇÕES DO LINTEL NO NÚCLEO

As ações introduzidas pelo lintel na estrutura contínua, equivalentes à força concentrada  $V$ , serão o momento distribuído  $\underline{m}$  e a força cortante distribuída  $\underline{q}$ , mostrados na Figura II-5 e dados por:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{V}{h} \\ m &= \frac{q\ell}{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-31})$$

Passa-se, a seguir, a determinação do acréscimo de bimomento  $dB$  em um elemento longitudinal  $dz$ , produzido pelas ações referidas acima.

O acréscimo produzido pela força distribuída, segundo a teoria de flexo-torção, é dado por:

$$dB_1 = qdz\omega_A - qdz\omega_B$$

onde, a diferença nos sinais é devida ao fato de que a força distribuída é de tração em A e de compressão em B.

Observando-se o sentido do momento concentrado adotado no Apêndice 1, o acréscimo de bimomento produzido pelo momento distribuído é dado por:

$$dB_2 = mdz \left. \frac{d\omega}{ds} \right|_A - mdz \left. \frac{d\omega}{ds} \right|_B$$

Superpondo-se os efeitos de  $\underline{m}$  e  $\underline{q}$ ; usando-se as equações (II-31) e agrupando-se convenientemente os termos, obtém-se

$$dB = \left[ \frac{V}{h} \left( \omega_A + \frac{\ell}{2} \left. \frac{d\omega}{ds} \right|_A \right) - \frac{V}{h} \left( \omega_B + \frac{\ell}{2} \left. \frac{d\omega}{ds} \right|_B \right) \right] dz$$

que com o uso de (II-27) escreve-se

$$dB = \left[ \frac{V}{h} (\omega_{\bar{A}} - \omega_{\bar{B}}) \right] dz$$

De acordo com a teoria de flexo-torção, o momento de flexo-torção é igual a derivada do bimomento com relação a  $\underline{z}$ , com o sinal trocado. Portanto, da equação anterior, o momento de flexo-torção proveniente da ação do lintel, denominado  $M_{ft}^L$ , é dado por:

$$M_{ft}^L = \frac{V}{h} (\omega_{\bar{B}} - \omega_{\bar{A}})$$

Substituindo-se a equação (II-30) na equação anterior, chega-se a seguinte expressão de  $M_{ft}^L$ :

$$M_{ft}^L = \frac{12EJ_L}{h\ell^3} (\omega_{\bar{B}} - \omega_{\bar{A}})^2 \phi, \quad (II-32)$$

Fazendo-se,

$$K_L = \frac{12EJ_L}{h\lambda^3} (\omega_B^- - \omega_A^-)^2 \quad (\text{II-33})$$

A equação (II-32) toma a forma:

$$M_{ft}^L = K_L \phi' \quad (\text{II-34})$$

Adicionando-se o efeito introduzido pelo lintel, traduzido pela equação anterior, na equação (II-4), chega-se finalmente na equação diferencial, na rotação da secção, que expressa o comportamento do edifício que contém um núcleo contraventado por lintéis

$$M_t = (GJ_t + K_L) \phi' - EJ_\omega \phi'' \quad (\text{II-35})$$

Observe-se que, a equação diferencial que expressa o comportamento dos núcleos estruturais com contraventamento é semelhante a dos núcleos estruturais sem contraventamento.

Logo, todas as formulações e considerações sobre as condições de contorno, usadas na solução da equação (II-4), permanecem válidas para a solução de (II-35), bastando apenas definir o parâmetro  $a$  da seguinte forma:

$$a^2 = \frac{GJ_t + K_L}{EJ_\omega} \quad (\text{II-36})$$

### II.3.3 - Exemplo II-1

A Figura II-6, mostra a secção transversal, uniforme ao longo da altura, do núcleo de um edifício de vinte andares com 2,80m de pé direito.

O núcleo é constituído por paredes, com a mesma espessura de 0,35m, e contraventado por lintéis ao nível dos andares, com a mesma espessura das paredes e 0,45m de altura.

Serão apresentadas duas análises dessa estrutura: a primeira considerando a base rígida e a segunda com fundação em sapatas indicadas na Figura II-7, apoiada em solo flexível de rigidez  $8 \times 10^6 \text{ kg/m}^2/\text{m}$ .

As cargas externas serão um momento torçor distribuído de  $1136,50 \text{ kg.m/m}$  e um momento torçor concentrado no topo de  $2165,00 \text{ kg.m}$ , ambos positivos.

Adota-se para o módulo de elasticidade longitudinal o valor  $2,83 \times 10^9 \text{ kg/m}^2$  e, para o coeficiente de POISSON o valor de 0,15.

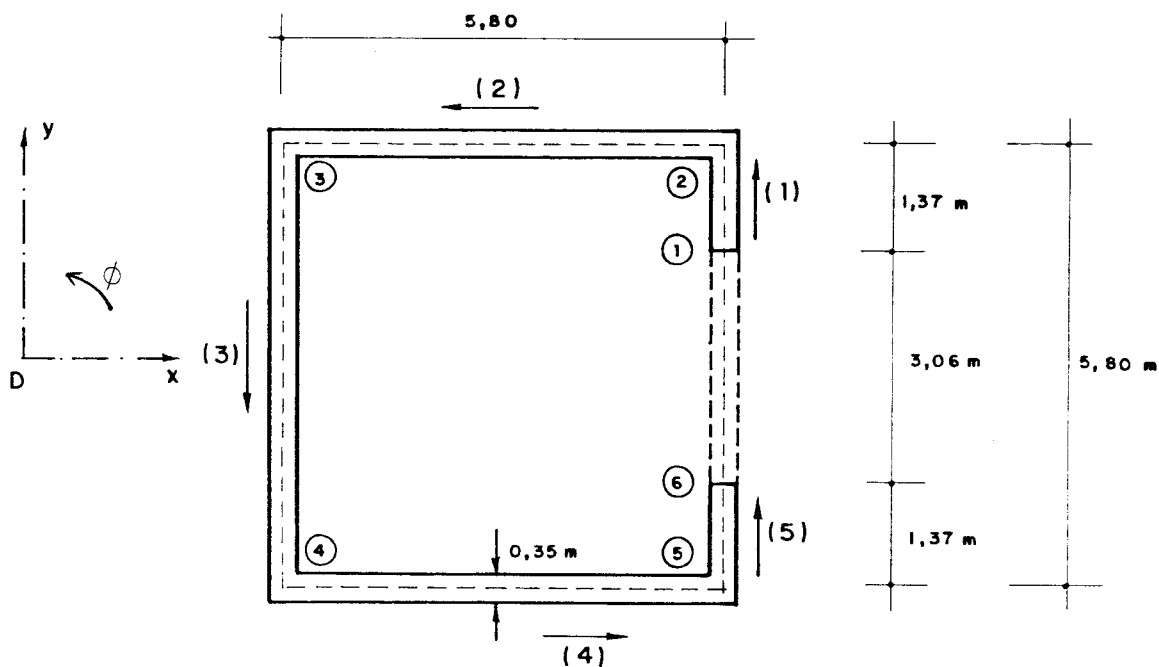


FIG. II- 6 - NÚCLEO DE SECÇÃO UNIFORME

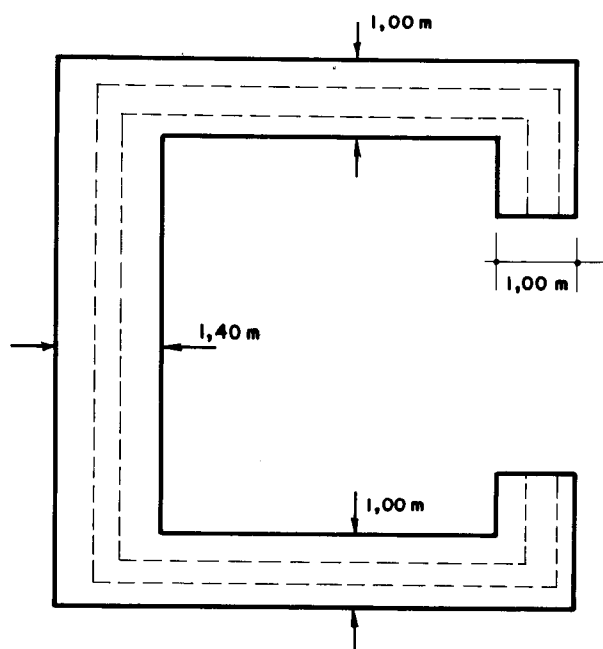


FIG. II- 7 - SAPATAS DA FUNDAÇÃO

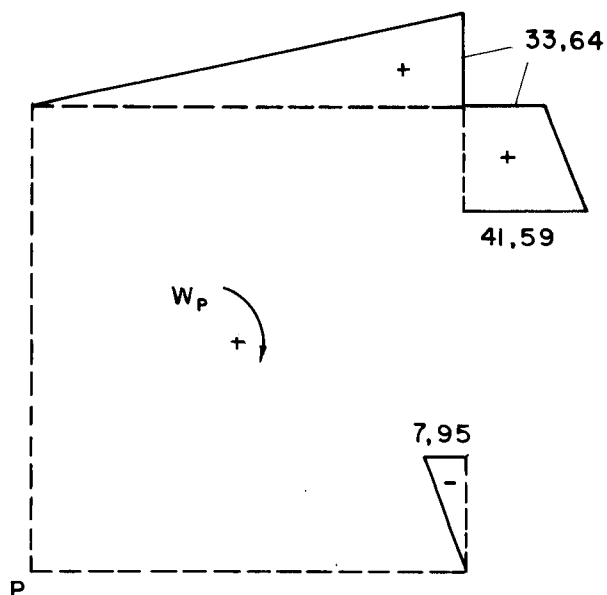
Os números inscritos em círculo na Figura II-6, indicam os pontos para os quais serão calculados os deslocamentos e tensões axiais ao nível das lajes.

A seguir passa-se a determinar as características geométricas da secção, que possui o eixo  $\underline{x}$  como de simetria.

a) Centro de torção

$$J_x = \frac{0,35 \times 5,80^3}{12} + 2 \times 5,80 \times 0,35 \times 2,9^2 + 2 \left( \frac{0,35 \times 1,37^3}{12} + 0,35 \times 1,37 \times 2,22^2 \right) = 44,71 \text{ m}^4$$

Para uso direto das fórmulas do Apêndice 1, adota-se inicialmente um polo provisório no ponto P. Com a convenção adotada para área setorial, obtém-se o seguinte diagrama de área setorial com esse polo provisório.



$$\begin{aligned}
 x_D - x_P &= \frac{-0,35}{44,71} \left\{ \frac{2,90 \times 5,80 \times 33,64}{2} + \frac{1,37}{6} \left[ 33,64 (2 \times 2,90 + 1,53) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 41,59 (2,90 + 2 \times 1,53) \right] + \frac{1,37}{6} \left[ (-7,95) (-2 \times 1,53 - 2,9) \right] \right\} = \\
 &= -3,18\text{m}
 \end{aligned}$$

b) Diagrama de área setorial

Devido a simetria da secção em relação ao eixo  $ox$ , a origem da coordenada  $\underline{s}$  do esqueleto, será o ponto de intersecção desse eixo com o esqueleto, fornecendo assim um diagrama de área setorial antimétrico.

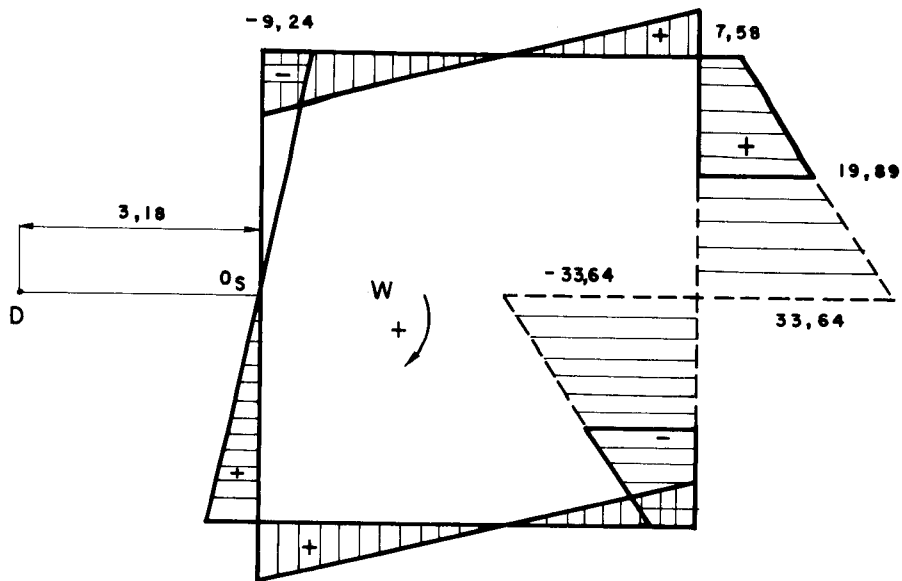


FIG.II-8 - DIAGRAMA DE ÁREA SETORIAL (m<sup>2</sup>)

c) Momento setorial de inércia da secção

$$J_{\omega} = 0,35 \times 2 \times \left\{ \frac{2,90}{3} \times 9,24^2 + \frac{5,80}{6} \left[ 9,24(2 \times 9,24 - 7,58) - 7,58(-2 \times 7,58 + 9,24) \right] + \frac{1,37}{6} \left[ 7,58(2 \times 7,58 + 19,89) + 19,89(2 \times 19,89 + 7,58) \right] \right\} = 349,33 \text{ m}^6$$

d) Momento de inércia a torção

$$J_t = \frac{1}{3} \times 0,35^3 (3 \times 5,8 + 2 \times 1,37) = 0,2878 \text{ m}^4$$

e) Momento setorial de inércia da fundação

Aplicando-se a equação (II-16), tem-se

$$J_{\omega}^F = 2 \left\{ 1,40 \times \frac{2,90}{3} \times 9,24^2 + 1,0 \frac{5,80}{6} \left[ 9,24(2 \times 9,24 - 7,58) - \right. \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & -7,58(-2 \times 7,58 + 9,24) \Big] + 1,0 \frac{1,37}{6} \Big[ 19,89(2 \times 19,89 + 7,58) + \\ & + 7,58(2 \times 7,58 + 19,89) \Big] \Big\} = 1064,042 \text{m}^6 \end{aligned} \right.$$

### II.3.3.1 - Núcleo sobre base rígida

Da equação (II-33), tem-se:

$$K_L = \frac{12 \times 2,83 \times 10^9}{2,80 \times 3,06^3} \frac{0,35 \times 0,45^3}{12} (33,64 + 33,64)^2 = 5,09262 \times 10^9 \text{kg/m}^2$$

Usando a equação (II-36), obtêm-se:

$$a^2 = \frac{1,21 \times 10^9 \times 0,2878 + 5,09262 \times 10^9}{2,83 \times 10^9 \times 349,33} = 5,5043 \times 10^{-3}$$

ou,  $a = 0,07419 \text{m}^{-1}$

A altura do edifício é:

$$H = 20 \times 2,8 = 56,0 \text{m}$$

Para base rígida tem-se:

$$K = 0$$

As constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são calculadas pelas equações (II-23)

$$C_1 = -1,64118 \times 10^{-4}$$

$$C_2 = 5,55078 \times 10^{-7}$$

$$C_3 = 1,63563 \times 10^{-4}$$



que substituídas na equação (II-21), fornece a rotação da secção e suas derivadas com relação a  $z$ .

Nas tabelas a seguir, apresentam-se os valores obtidos:

Tabela II-1 - Rotações e derivadas

$z$ (m)	$\phi$ ( $\times 10^{-4}$ rad)	$\phi'$ ( $\times 10^{-6}$ rad/m)	$\phi''$ ( $\times 10^{-7}$ rad/m <sup>2</sup> )
0	0,000	0,000	6,945
2,8	0,025	1,701	5,263
5,6	0,091	2,977	3,900
8,4	0,188	3,909	2,796
11,2	0,308	4,563	1,904
14,0	0,442	4,991	1,184
16,8	0,585	5,239	0,606
19,6	0,734	5,342	0,145
22,4	0,883	5,329	-0,219
25,2	1,031	5,227	-0,502
28,0	1,176	5,055	-0,717
30,8	1,314	4,831	-0,872
33,6	1,446	4,571	-0,975
36,4	1,570	4,289	-1,029
39,2	1,686	4,000	-1,037
42,0	1,794	3,713	-1,000
44,8	1,894	3,443	-0,916
47,6	1,987	3,205	-0,781
50,4	2,074	3,011	-0,589
53,2	2,156	2,881	-0,333
56,0	2,236	2,832	-0,000

Com os valores da tabela anterior e das áreas se-  
toriais da Figura (II-8), encontram-se os deslocamentos a-  
xiais dos pontos da secção transversal, usando-se diretamen-  
te a equação (II-24).

As tensões longitudinais  $\sigma$ , positivas de tração,  
são obtidas através da seguinte expressão:

$$\sigma = E\omega\phi'' \quad (II-37)$$

Devido a simetria, serão calculados os valores  
dos deslocamentos e tensões longitudinais apenas para os  
pontos 1, 2 e 3.

Tabela II-2 - Deslocamentos e tensões longitudinais

z (m)	Deslocamentos ( $\times 10^{-5}$ m)			Tensões ( $t/m^2$ )		
	Ponto 1	Ponto 2	Ponto 3	Ponto 1	Ponto 2	Ponto 3
0	0,000	0,000	0,000	39,093	14,898	-18,161
2,80	3,383	1,289	-1,572	29,627	11,291	-13,763
5,60	5,921	2,257	-2,751	21,953	8,366	-10,198
8,40	7,775	2,963	-3,612	15,739	5,998	- 7,312
11,20	9,075	3,458	-4,216	10,716	4,084	- 4,978
14,00	9,927	3,783	-4,612	6,666	2,540	- 3,097
16,80	10,420	3,971	-4,841	3,413	1,301	- 1,586
19,60	10,625	4,049	-4,936	0,818	0,312	- 0,380
22,40	10,600	4,040	-4,924	-1,232	-0,470	0,572
25,20	10,396	3,962	-4,829	-2,827	-1,077	1,313
28,00	10,053	3,831	-4,670	-4,035	-1,538	1,875
30,80	9,608	3,662	-4,464	-4,909	-1,871	2,280
33,60	9,092	3,465	-4,224	-5,486	-2,091	2,549
36,40	8,532	3,251	-3,963	-5,792	-2,207	2,690
39,20	7,954	3,031	-3,695	-5,839	-2,226	2,712
42,00	7,385	2,814	-3,431	-5,630	-2,146	2,615
44,80	6,849	2,610	-3,182	-5,156	-1,965	2,395
47,60	6,374	2,429	-2,961	-4,396	-1,675	2,042
50,40	5,989	2,283	-2,782	-3,317	-1,264	1,541
53,20	5,730	2,183	-2,662	-1,872	-0,714	0,870
56,00	5,633	2,147	-2,617	0,000	0,000	0,000

II.3.3.1 - Núcleo sobre fundação flexível

Com alteração apenas na constante K, dada por (II-19), faz-se as determinações das rotações, dos deslocamentos e das tensões com procedimento análogo ao anterior.

$$K = \frac{2,8 \times 10^9 \times 349,33}{8 \times 10^6 \times 1064,04} = 116,138$$

Tabela II-3 - Rotações e derivadas

z ( m )	$\phi$ ( $\times 10^{-4}$ rad)	$\phi'$ ( $\times 10^{-6}$ rad/m)	$\phi''$ ( $\times 10^{-7}$ rad/m <sup>2</sup> )
0	0,000	8,391	0,723
2,80	0,237	8,519	0,209
5,60	0,476	8,317	-0,206
8,40	0,713	8,411	-0,539
11,20	0,946	8,222	-0,804
14,00	1,173	7,966	-1,014
16,80	1,392	7,658	-1,178
19,60	1,601	7,310	-1,302
22,40	1,800	6,932	-1,392
25,20	1,989	6,533	-1,452
28,00	2,167	6,122	-1,484
30,80	2,332	5,705	-1,490
33,60	2,486	5,290	-1,471
36,40	2,629	4,884	-1,424
39,20	2,760	4,494	-1,349
42,00	2,880	4,131	-1,242
44,80	2,991	3,803	-1,098
47,60	3,094	3,521	-0,911
50,40	3,189	3,298	-0,673
53,20	3,279	3,150	-0,374
56,00	3,366	3,095	0,000

Tabela II-4 - Deslocamentos e tensões longitudinais

z (m)	Deslocamentos ( $\times 10^{-5}$ m)			Tensões ( $t/m^2$ )		
	Ponto 1	Ponto 2	Ponto 3	Ponto 1	Ponto 2	Ponto 3
0	16,690	6,360	-7,753	4,067	1,550	-1,889
2,80	16,944	6,457	-7,871	1,175	0,477	-0,546
5,60	16,941	6,456	-7,870	-1,158	-0,441	0,538
8,40	16,730	6,376	-7,772	-3,031	-1,155	1,408
11,20	16,354	6,232	-7,597	-4,527	-1,725	2,103
14,00	15,845	6,038	-7,361	-5,709	-2,176	2,652
16,80	15,232	5,805	-7,076	-6,630	-2,527	3,080
19,60	14,540	5,541	-6,755	-7,329	-2,793	3,405
22,40	13,788	5,255	-6,405	-7,836	-2,986	3,640
25,20	12,995	4,952	-6,037	-8,173	-3,114	3,797
28,00	12,176	4,640	-5,657	-8,355	-3,184	3,881
30,80	11,347	4,324	-5,271	-8,389	-3,197	3,897
33,60	10,521	4,010	-4,888	-8,278	-3,155	3,846
36,40	9,714	3,702	-4,513	-8,017	-3,055	3,724
39,20	8,940	3,407	-4,153	-7,593	-2,894	3,527
42,00	8,217	3,131	-3,817	-6,989	-2,663	3,247
44,80	7,564	2,883	-3,513	-6,178	-2,355	2,870
47,60	7,002	2,669	-3,253	-5,126	-1,954	2,381
50,40	6,559	2,500	-3,047	-3,787	-1,443	1,759
53,20	6,264	2,387	-2,910	-2,102	-0,801	0,977
56,00	6,157	2,346	-2,860	0,000	0,000	0,000

## II.4 - Edifício constituído por dois núcleos iguais

### II.4.1 - Núcleos sem contraventamento

Na Figura II-9, representa-se a estrutura a ser analisada, submetida ao carregamento constituído de momento torçor uniformemente distribuído e, ou concentrado no topo.

É feita a particularização de carga e geometria, porque no caso geral o problema é solucionado através de um sistema de equações diferenciais que, além dos deslocamentos e rotações das lajes, contém como incógnitas os deslocamentos verticais dos centros de gravidade dos núcleos, envolvendo assim, uma manipulação matemática muito trabalhosa.

A definição geométrica da estrutura será feita através dos seguintes sistemas de coordenadas:

a) Sistema global de coordenadas, através dos eixos  $OX$ ,  $OY$  e  $OZ$ , sendo os eixos  $OX$  e  $OY$  coincidentes com os eixos de simetria da estrutura e, o eixo  $OZ$  vertical com origem na base. Os sentidos positivos estão indicados na Figura II-9.

b) Sistema local de eixos  $o_i x_i y_i z_i$  para cada núcleo, sendo  $o_i x_i$  e  $o_i y_i$  os eixos principais de sua secção com origem no centro de torção  $D_i$ . Os eixos  $o_i z_i$  são verticais com origens na base da estrutura. Os sentidos positivos estão indicados na Figura II-9.

Será adotado também uma coordenada  $s_i$ , medida ao longo do esqueleto de cada núcleo, com origem na intersecção de  $o_i x_i$  com o esqueleto.

Além da rotação  $\phi$ , serão definidos os deslocamentos  $u_i$  e  $v_i$  do centro de torção  $D_i$ , de cada núcleo, nas direções  $x_i$  e  $y_i$ , respectivamente.

Chamar-se-á de  $c_x$ , a distância entre os centros de torção dos núcleos e a origem do sistema global  $O$ , ao longo de  $OX$ .

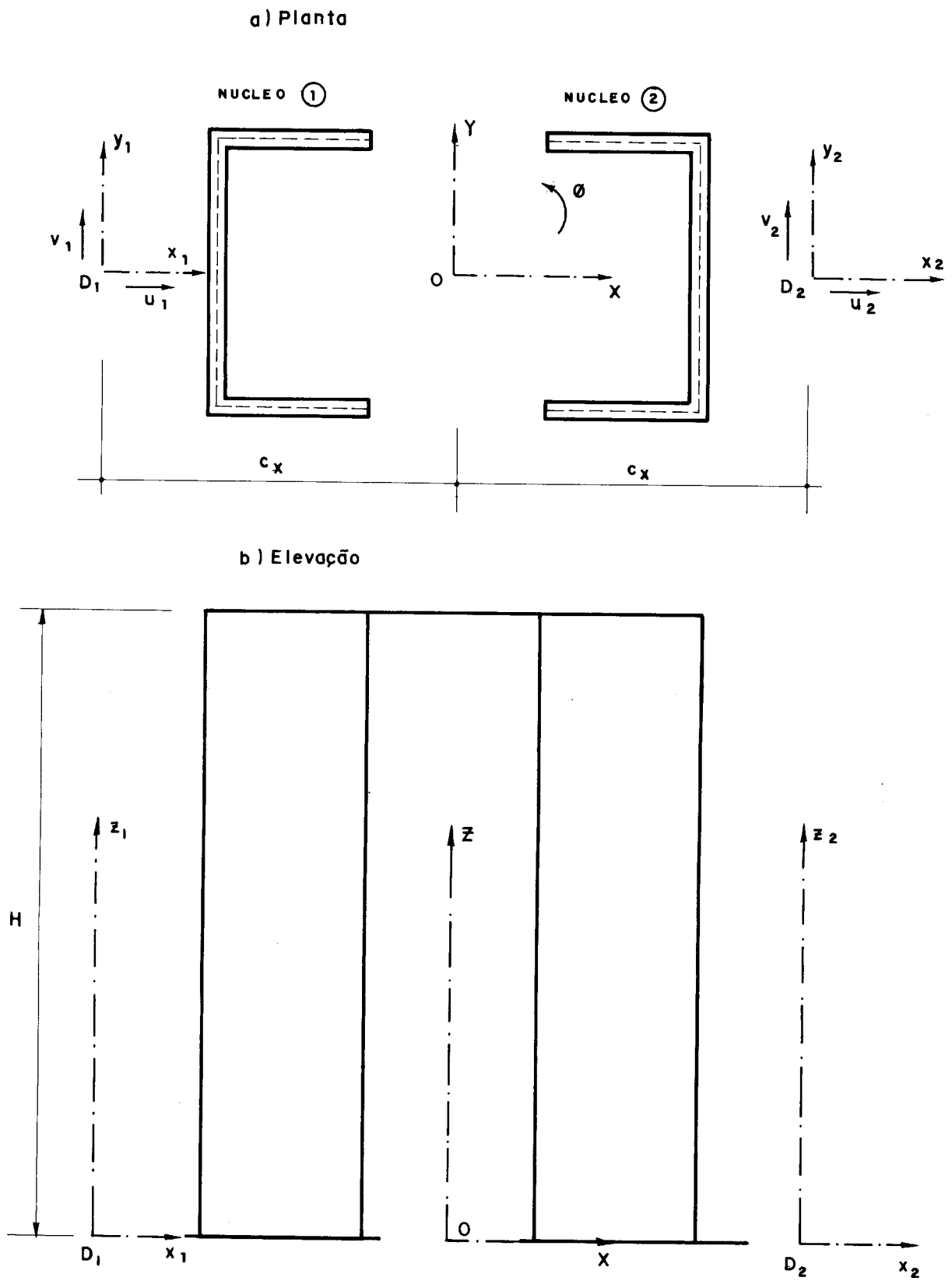


FIG. II-9 - EDIFÍCIO COM DOIS NÚCLEOS

Como as lajes, continuamente distribuídas, são rígidas em seus planos, e como o carregamento consta apenas de momento torçor, escreve-se:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= 0 \\ v_1 &= -c_x \phi \\ v_2 &= c_x \phi \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-38})$$

Considerando-se que os núcleos comportam-se, ã fleção simples, como uma parede plana<sup>(2)</sup> e, desprezando-se as deformações por força cortante, escrevem-se:

$$\left. \begin{aligned} Q_{xi} &= -EJ_{yi} u_i''' \\ Q_{yi} &= -EJ_{xi} v_i''' \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-39})$$

onde,  $Q_{xi}$  e  $Q_{yi}$  são as forças cortantes nas direções  $x_i$  e  $y_i$ , respectivamente, aplicadas no centro de torção do núcleo;  $J_{yi}$  e  $J_{xi}$  são os momentos de inércia do núcleo em relação aos eixos  $o_i y_i$  e  $o_i x_i$ , respectivamente.

A substituição de (II-38) em (II-39), fornece:

$$\left. \begin{aligned} Q_{x1} &= 0, \quad Q_{x2} = 0 \\ Q_{y1} &= EJ_{x1} c_x \phi''' \\ Q_{y2} &= -EJ_{x2} c_x \phi''' \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-40})$$

As equações (II-40) mostram que além de momento torçor, as rotações das secções transversais da estrutura, introduzem esforço cortante na direção  $y_i$  de cada núcleo.

Na Figura II-10 indicam-se os sentidos positivos dos esforços que atuam nos núcleos e que contribuem para o equilíbrio a rotação da estrutura.

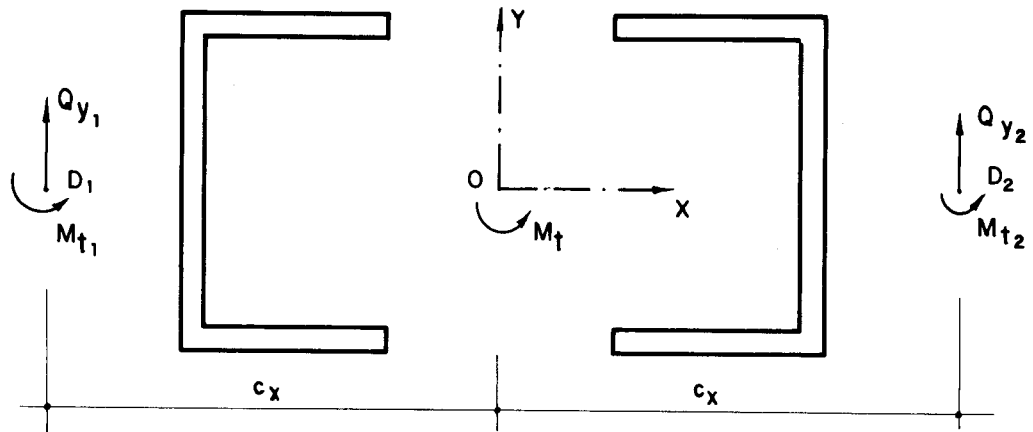


FIG. II-10 ESFORÇOS NOS NÚCLEOS

O comportamento dos núcleos isoladamente, submetidos a momento torçor, expressa-se pelas equações:

$$\left. \begin{aligned} M_{t1} &= GJ_{t1}\phi' - EJ_{\omega 1}\phi''' \\ M_{t2} &= GJ_{t2}\phi' - EJ_{\omega 2}\phi''' \end{aligned} \right\} \quad \text{(II-41)}$$

onde,  $M_{ti}$ ,  $J_{\omega i}$  e  $J_{ti}$  são respectivamente, momento torçor solicitante, momento setorial de inércia e momento de inércia a torção do núcleo  $i$ .  $E$  e  $G$  são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, respectivamente.

Fazendo-se o equilíbrio da estrutura à rotação em torno do eixo  $OZ$ , quando solicitada por um momento torçor  $M_t$ , obtém-se:

$$M_t = M_{t1} - Q_{y1}c_x + M_{t2} + Q_{y2}c_x$$

Substituindo-se na equação anterior, os valores dados por (II-40) e (II-41), tem-se:

$$M_t = GJ_{t1}\phi' - (EJ_{\omega 1} + J_{x1}c_x^2)\phi''' + GJ_{t2}\phi' - (EJ_{\omega 2} + J_{x2}c_x^2)\phi'''$$



ou, agrupando-se os termos convenientemente:

$$M_t = G(J_{t1} + J_{t2})\phi' - E(J_{\omega 1} + J_{x1}c_x^2 + J_{\omega 2} + J_{x2}c_x^2)\phi'' \quad (\text{II-42})$$

definindo-se:

$$J_t^* = J_{t1} + J_{t2} \quad (\text{II-43})$$

$$\left. \begin{aligned} J_{\omega 1}^* &= J_{\omega 1} + J_{x1}c_x^2 \\ J_{\omega 2}^* &= J_{\omega 2} + J_{x2}c_x^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-44})$$

$$J_{\omega}^* = J_{\omega 1}^* + J_{\omega 2}^* \quad (\text{II-45})$$

a equação (II-42), pode ser escrita na forma:

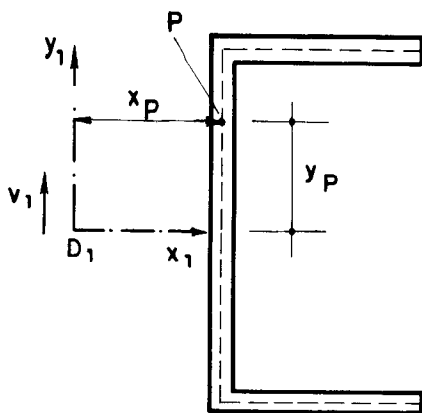
$$M_t = GJ_t^*\phi' - EJ_{\omega}^*\phi'' \quad (\text{II-46})$$

A semelhança entre as equações (II-4) e (II-42), induz a uma análise nos coeficientes definidos em (II-43), (II-44) e (II-45):

- a) O termo  $J_t^*$ , como definido em (II-43), equivale ao momento de inércia a torção da secção transversal da estrutura.
- b) Os termos  $J_{\omega 1}^*$  e  $J_{\omega 2}^*$ , como definidos em (II-44), são respectivamente, os momentos setoriais de inércia para as áreas setoriais dos núcleos 1 e 2 com polo no ponto 0 (vide equação 48 do Apêndice 1).
- c) Logo,  $J_{\omega}^*$  como definido em (II-45), equivale ao momento setorial de inércia da secção transversal da estrutura para as áreas setoriais dos núcleos com polo no ponto 0.

Para completar a análise, considere-se o deslocamento vertical de um ponto genérico P do núcleo 1, com coordenadas  $x_P$  e  $y_P$  em relação aos eixos  $o_1x_1$  e  $o_1y_1$ , como mostra a Figura II-11

a) Ponto Genérico em Planta



b) Rotação de Flexão em torno de  $x_1$

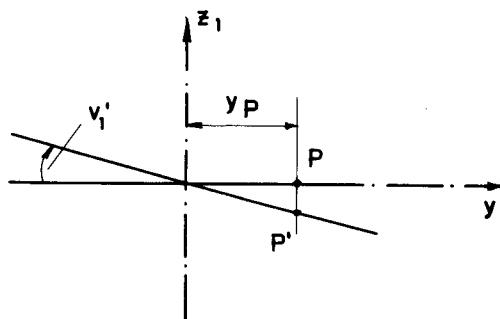


FIG. II- 11 - DESLOCAMENTO VERTICAL DO PONTO DEVIDO À FLEXÃO DO NÚCLEO.

O deslocamento total, do ponto P na direção vertical será:

$$w = \omega_P \phi' - y_P v_1'$$

Usando-se (II-38), na equação anterior, obtém-se:

$$w = (\omega_P + y_P c_x) \phi'$$

ou,

$$w = \omega_P^* \phi' \tag{II-47}$$

onde

$$\omega_P^* = \omega_P + y_P c_x \tag{II-48}$$

- d) O termo  $\omega_P^*$ , como definido na equação anterior, equivale a área setorial no ponto P, tendo como polo o ponto O. (vide equação 47 do Apêndice 1).

Procedimento análogo, mostra que a equação (II-47) é válida para pontos do núcleo 2. Portanto, conclue-se que os edifícios constituídos por dois núcleos iguais, dispostos como mostra a Figura II-9, têm comportamentos como se fossem constituídos por apenas um núcleo com centro de torção no ponto O.

Logo, todas as formulações e considerações usadas para a solução da equação (II-4), permanecem válidas para o estudo dos edifícios constituídos por dois núcleos, estudados nesse item, bastando apenas que se use o diagrama de área setorial mostrado a seguir:

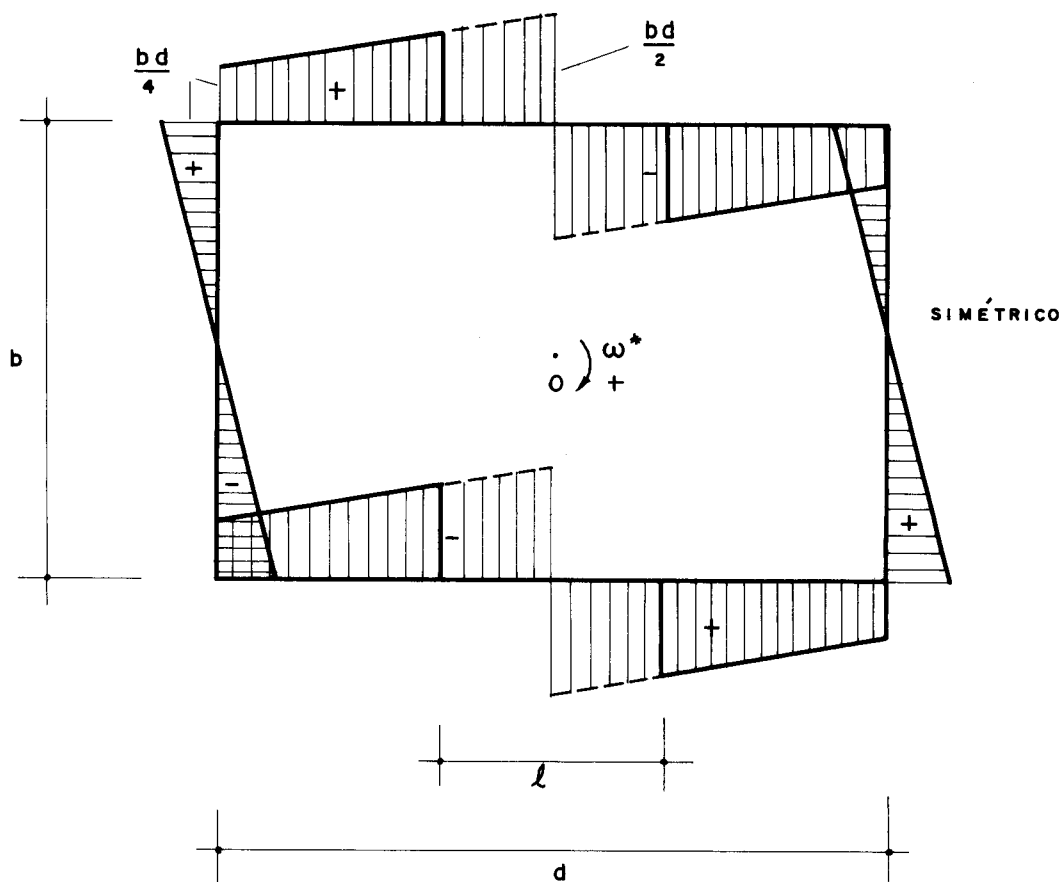


FIG. II-12 - DIAGRAMA DE ÁREA SETORIAL  $\omega^*$

II.4.2 - Núcleos contraventados por lintéis

A Figura II-13 representa um edifício formado por dois núcleos iguais, com disposição simétrica, contraventados por lintéis aos níveis dos andares, submetido a momento torçor.

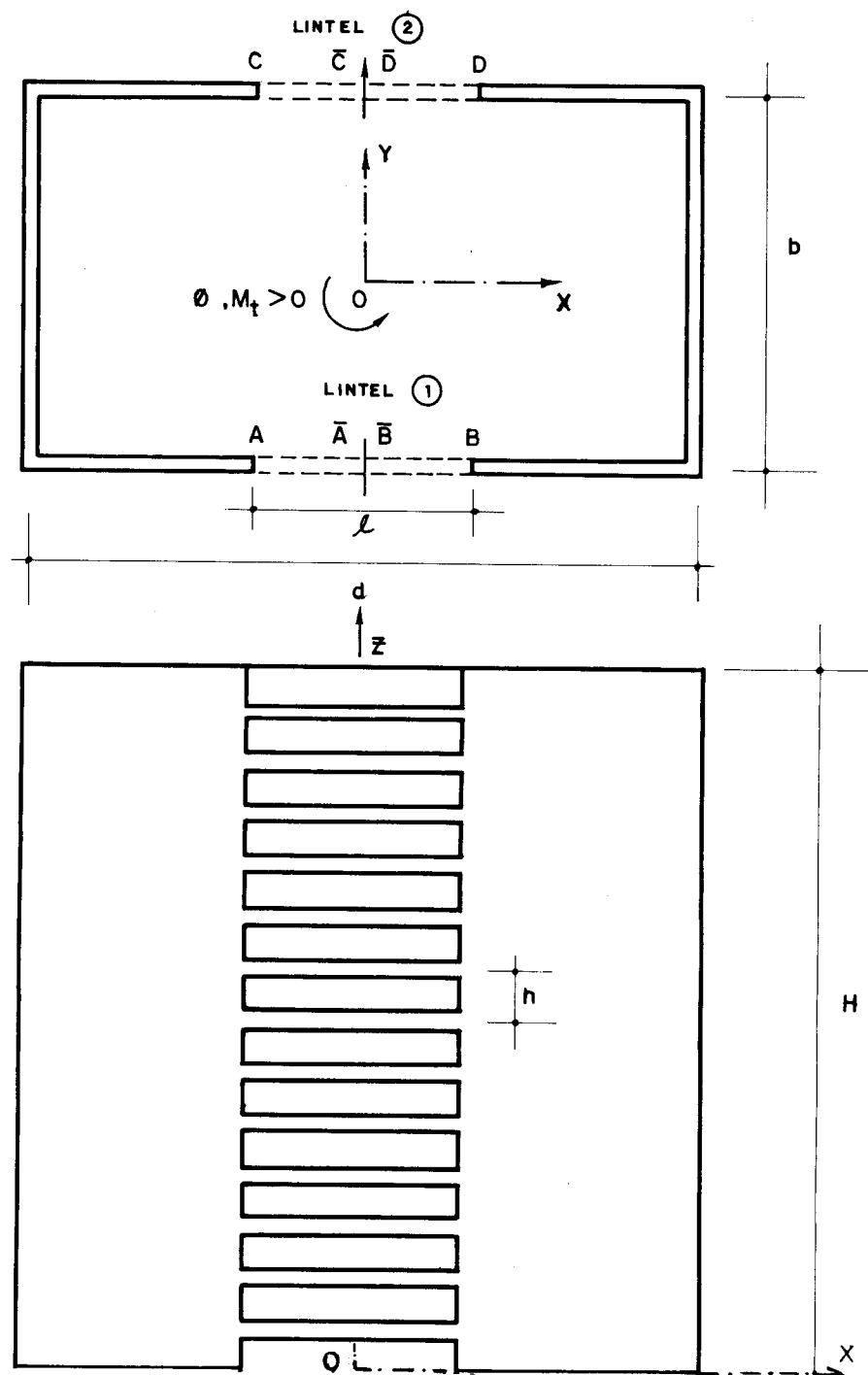


FIG.II-13 - NÚCLEOS CONTRAVENTADOS POR LINTÉIS

A estrutura será referenciada ao sistema de eixos OXYZ, sendo OX e OY os eixos de simetria da secção transversal e, o eixo OZ vertical, com origem O na base da estrutura e orientado para o topo.

A hipótese de que os pontos médios dos lintéis são pontos de momento nulo, será, não somente adotada, como verificada, por razões evidentes de simetria.

A conclusão, do item anterior, de que o ponto O é o centro de torção da secção transversal da estrutura que se comporta como constituída por apenas um núcleo, é usada no que se segue.

Na Figura II-14 estão representados os sentidos positivos das forças cortantes distribuídas nos lintéis,  $q_1$  e  $q_2$ .

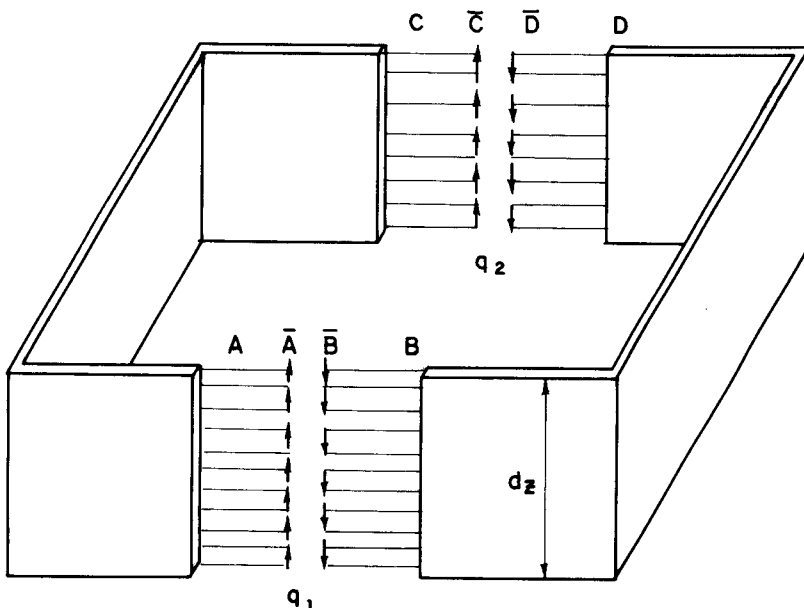


FIG. II-14 FORÇAS CORTANTES POSITIVAS NOS LINTÉIS

A notação  $\omega_p^*$  referir-se-á a área setorial no ponto P, dada pelo diagrama mostrado na Figura II-12, sendo que, quando referida aos pontos  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  e  $\bar{D}$ , representará a área setorial nos prolongamentos da secção.

Do diagrama da Figura II-12, tira-se facilmente que:

$$\omega_{\bar{A}}^* = -\omega_{\bar{B}}^* = -\omega_{\bar{C}}^* = \omega_{\bar{D}}^* = -\frac{bd}{2} \quad (\text{II-49})$$

onde  $\underline{b}$  e  $\underline{d}$  são as dimensões da secção mostradas na Figura II-12.

Procedendo-se de modo análogo ao do item II-3.2, obtêm-se as expressões dos momentos de flexo-torção, introduzidos na estrutura devido às presenças dos lintéis 1 e 2 indicados na Figura II-13.

$$M_{ft}^1 = q_1 (\omega_B^* - \omega_A^*)$$

$$M_{ft}^2 = q_2 (\omega_D^* - \omega_C^*)$$

Somando-se as duas equações anteriores, obtêm-se o momento de flexo-torção  $M_{ft}^L$ , introduzido pelos dois lintéis.

$$M_{ft}^L = q_1 (\omega_B^* - \omega_A^*) + q_2 (\omega_D^* - \omega_C^*) \quad (II-50)$$

Considerando-se a simetria da estrutura, é evidente que:

$$q_1 = -q_2 \quad (II-51)$$

Devido a equação (II-51) e, lembrando-se que neste estudo o carregamento consta apenas de momento torçor, as forças normais que solicitam os núcleos serão nulas ao longo de toda a altura.

Portanto as formulações e considerações usadas no item II-3.2, são aplicadas para a estrutura em estudo.

Aplicando-se as equações (II-30) e (II-31), na estrutura em estudo, tem-se:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{12EJ_L}{h\ell^3} \phi' (\omega_B^* - \omega_A^*) \\ q_2 &= \frac{12EJ_L}{h\ell^3} \phi' (\omega_D^* - \omega_C^*) \end{aligned} \right\} \quad (II-52)$$

onde,  $J_L$  e  $\underline{\ell}$  são respectivamente o momento de inércia e o comprimento dos lintéis, e  $\underline{h}$  é o pé-direito dos andares.

Substituindo-se as equações (II-52) em (II-50), obtêm-se:

$$M_{ft}^L = \frac{12EJ_L}{h\ell^3} \left[ (\omega_B^* - \omega_A^*)^2 + (\omega_D^* - \omega_C^*)^2 \right] \phi'$$

A substituição de (II-49) na equação anterior, fornece:

$$M_{ft}^L = 2 \frac{12EJ_L}{h\ell^3} b^2 d^2 \phi' \quad (II-53)$$

ou, finalmente

$$M_{ft}^L = K_L^* \phi' \quad (II-54)$$

onde

$$K_L^* = 2 \frac{12EJ_L}{h\ell^3} b^2 d^2 \quad (II-55)$$

Adicionando-se o efeito introduzido pelos lintéis, dado pela equação (II-54), à equação (II-46), obtém-se finalmente a equação diferencial na rotação da secção que soluciona o problema:

$$M_t = (GJ_t^* + K_L^*) \phi' - EJ_\omega^* \phi''' \quad (II-56)$$

As considerações e formulações usadas na solução da equação (II-4), continuam válidas para a (II-56) bastando definir-se o parâmetro  $\underline{a}$  por:

$$a^2 = \frac{GJ_t^* + K_L^*}{EJ_\omega^*} \quad (II-57)$$

II.4.3 - Exemplo II-2

A Figura II-15 representa a secção transversal de uma estrutura de dez andares com pé direito de 3,00m, submetida a um momento torçor concentrado no topo de 10t.m no sentido positivo.

Todas as paredes têm espessura de 0,15m e os lintéis possuem altura de 0,30m com a mesma espessura das paredes.

Para o módulo de elasticidade longitudinal adota-se  $2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$  e para o coeficiente de Poisson o valor 0,167.

Apresentam-se duas análises para a estrutura: a primeira considera fundação rígida e na segunda considera-se fundação em sapatas apoiadas em solo flexível com rigidez de  $8 \times 10^4 \text{ t/m}^3$ .

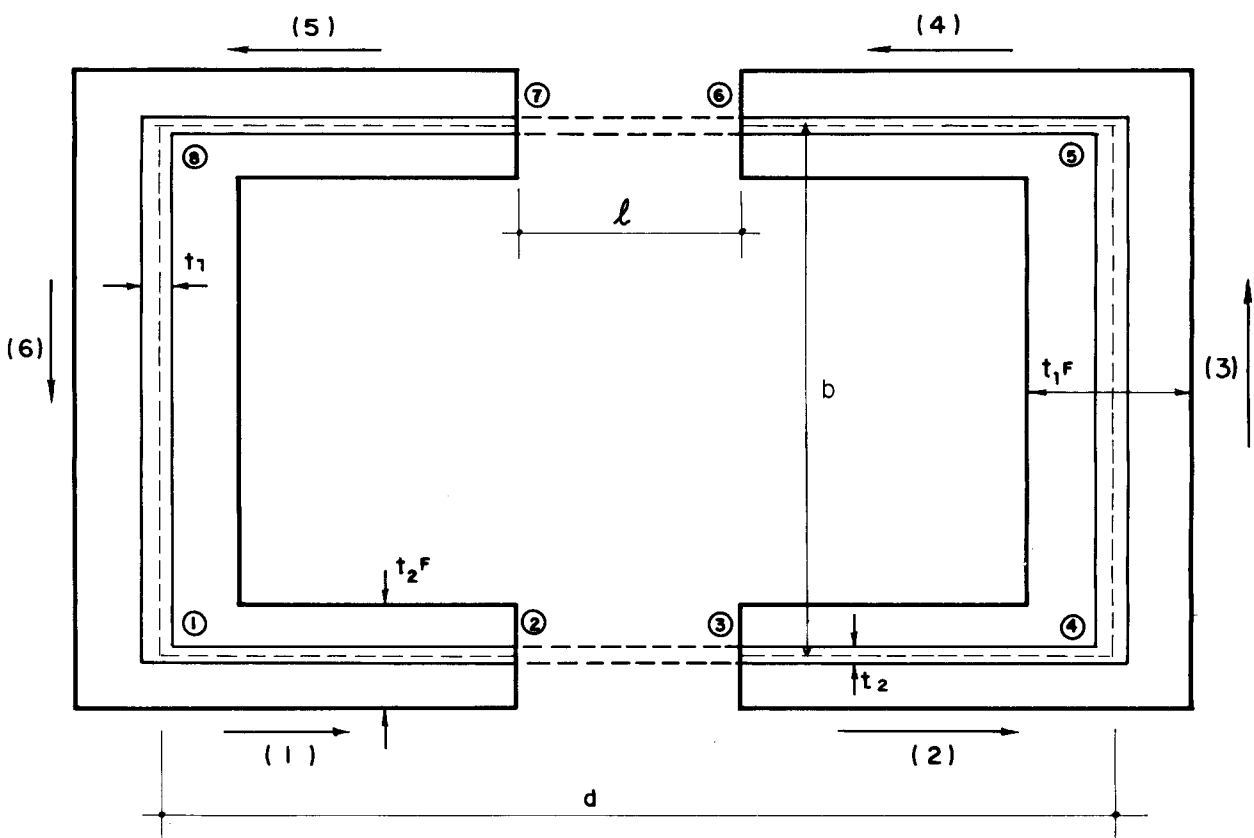


FIG. II-15 - NÚCLEOS COM FUNDAÇÃO EM SAPATA



Para o exemplo tem-se:

$$t_1 = t_2 = 0,15\text{m} ; b = 1,0\text{m} ; d = 3,0\text{m} ; \ell = 1,0\text{m} ; t_1^F = 0,50\text{m}$$

$$\text{e } t_2^F = 0,30\text{m}$$

Devido a simetria da estrutura, apresentam-se apenas os resultados obtidos para os pontos 1 e 2 mostrados na Figura II-15.

A altura do edifício é:

$$H = 10 \times 3,00 = 30\text{m}$$

As características da secção transversal são:

a) Diagrama de área setorial

Da Figura II-12, obtém-se o seguinte diagrama para a área setorial.

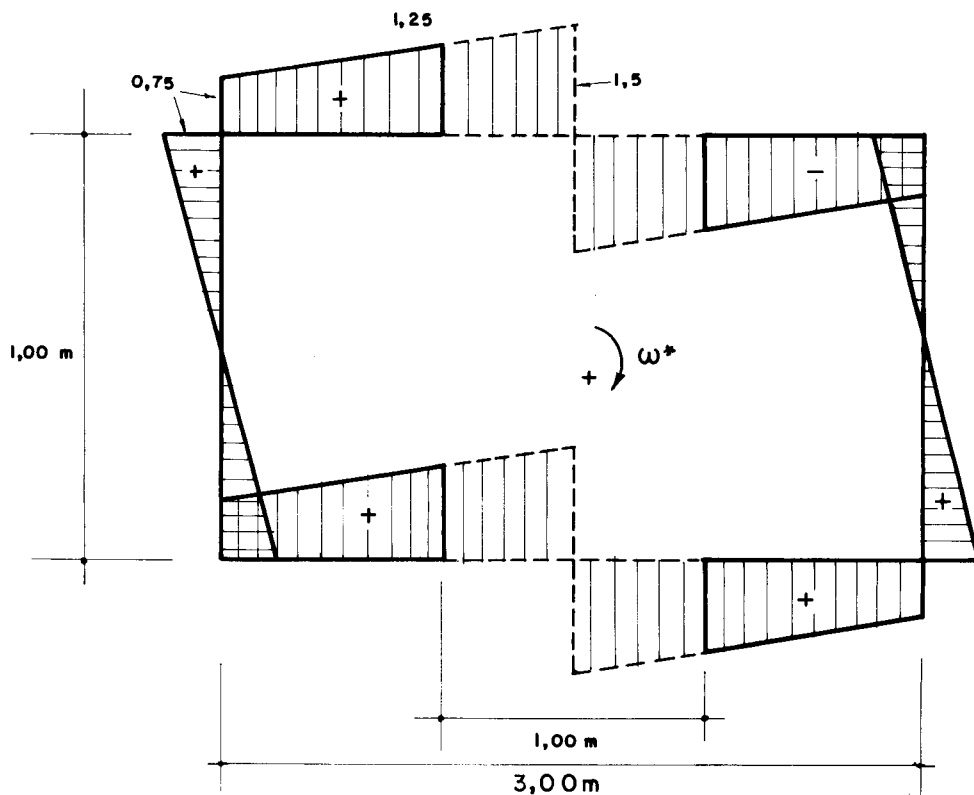


FIG. II-16 - DIAGRAMA DE ÁREA SETORIAL (m<sup>2</sup>)

b) Momento setorial de inércia da secção

$$J_{\omega}^* = \frac{1}{24} \left\{ t_1 b^3 d^2 + t_2 b^2 (d-l) \left[ (d-l)^2 + 3d(2d-l) \right] \right\} \quad (\text{II-58})$$

$$J_{\omega}^* = 0,66875m^6$$

c) Momento setorial de inércia da fundação

$$J_{\omega}^{*F} = \frac{1}{24} \left\{ t_1^F b^3 d^2 + t_2^F b^2 (d-l) \left[ (d-l)^2 + 3d(2d-l) \right] \right\} \quad (\text{II-59})$$

$$J_{\omega}^{*F} = 1,4125m^6$$

d) Momento de inércia a torção

$$J_t^* = \frac{2}{3} \left[ t_1^3 b + t_2^3 (d-l) \right] \quad (\text{II-60})$$

$$J_t^* = 6,75 \times 10^{-3} m^4$$

#### II.4.3.1 - Fundação rígida

Da equação (II-55), tem-se:

$$K_L^* = 2 \frac{12 \times 2 \times 10^6}{3 \times 1^3} \frac{0,15 \times 0,30^3}{12} 1^2 \times 3^2 = 4,86 \times 10^4 \text{ t/m}^2$$

Da equação (II-57), obtém-se:

$$a^2 = \frac{(2 \times 10^6 / 2,334) 6,75 \times 10^{-3} + 4,86 \times 10^4}{2 \times 10^6 \times 0,66875}$$

$$a = 0,201646m^{-1}$$

Substituindo-se os valores obtidos e fazendo  $K = 0$  (fundação rígida), as equações (II-23) fornecem as constantes de integração de (II-4).

$$C_1 = -0,91187 \times 10^{-3}$$

$$C_2 = -0,50759 \times 10^{-8}$$

$$C_3 = 0,911875 \times 10^{-3}$$

Os resultados obtidos são mostrados a seguir:

Tabela II-5 - Rotações e derivadas

Z (m)	$\phi$ ( $\times 10^{-3}$ rad)	$\phi'$ ( $\times 10^{-3}$ rad)	$\phi''$ ( $\times 10^{-5}$ rad/m <sup>2</sup> )
0	0,000	0,000	3,708
3	0,138	0,835	2,025
6	0,463	1,290	1,106
9	0,892	1,539	0,604
12	1,376	1,675	0,330
15	1,891	1,749	0,180
18	2,422	1,790	0,098
21	2,962	1,811	0,052
24	3,508	1,823	0,027
27	4,056	1,829	0,011
30	4,604	1,830	0,000

Tabela II-6 - Deslocamentos e tensões longitudinais

Z (m)	Deslocamentos ( $\times 10^{-4}$ m)		Tensões ( $t/m^2$ )	
	Ponto 1	Ponto 2	Ponto 1	Ponto 2
0	0,000	0,000	-55,617	-92,695
3	-0,626	-1,043	-30,372	-50,620
6	-0,968	-1,613	-16,586	-27,643
9	-1,154	-1,924	- 9,056	-15,094
12	-1,256	-2,094	- 4,943	- 8,239
15	-1,312	-2,186	- 2,695	- 4,492
18	-1,342	-2,237	- 1,464	- 2,439
21	-1,359	-2,264	- 0,784	- 1,307
24	-1,367	-2,279	- 0,401	- 0,668
27	-1,371	-2,285	- 0,169	- 0,281
30	-1,373	-2,288	0,000	0,000

II.4.32 - Fundação flexível

Usando-se a equação (II-19), obtém-se

$$K = \frac{2 \times 10^6 \times 0,66875}{8 \times 10^4 \times 1,4125} = 11,83623m$$

De modo análogo ao exemplo 1, encontra-se a solução da equação diferencial.

Tabela II-7 - Rotações e derivadas

Z	$\phi$	$\phi'$	$\phi''$
(m)	( $\times 10^{-3}$ rad)	( $\times 10^{-4}$ rad/m)	( $\times 10^{-5}$ rad/m <sup>2</sup> )
0	0,000	1,296	1,095
3	0,429	1,543	0,598
6	0,914	1,677	0,326
9	1,430	1,750	0,178
12	1,961	1,790	0,097
15	2,502	1,812	0,053
18	3,048	1,824	0,029
21	3,596	1,831	0,015
24	4,146	1,834	0,008
27	4,700	1,836	0,003
30	5,247	1,836	0,000

Tabela II-8 - Deslocamentos e tensões longitudinais

Z	Deslocamentos ( $\times 10^{-4}$ m)		Tensões (t/m <sup>2</sup> )	
(m)	Ponto 1	Ponto 2	Ponto 1	Ponto 2
0	-0,972	-1,620	-16,422	-27,370
3	-1,157	-1,928	- 8,968	-14,947
6	-1,258	-2,096	- 4,897	- 8,162
9	-1,313	-2,188	- 2,674	- 4,457
12	-1,343	-2,238	- 1,460	- 2,433
15	-1,359	-2,265	- 0,796	- 1,326
18	-1,368	-2,280	- 0,432	- 0,720
21	-1,373	-2,288	- 0,232	- 0,386
24	-1,376	-2,293	- 0,118	- 0,197
27	-1,377	-2,295	- 0,050	- 0,083
30	-1,377	-2,295	- 0,000	- 0,000

II-5 - Influência da flexibilidade nos esforços das paredes

Considere-se, inicialmente, os esforços atuantes em uma parede genérica, pertencente a um núcleo com centro de torção D, mostrada na Figura II-17.

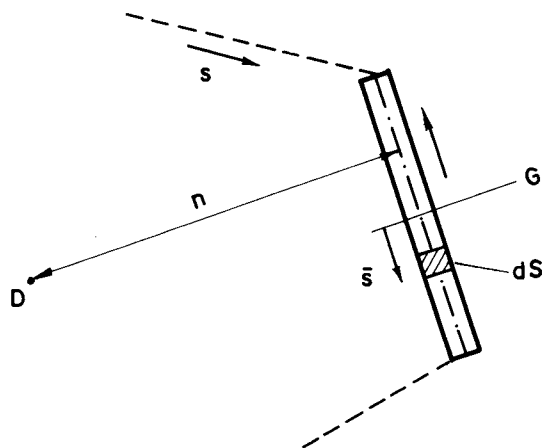


FIG. II - 17 - PAREDE GENÉRICA DE UM NÚCLEO

Chamando-se de  $\bar{\omega}$  a área setorial no centro de gravidade da parede, a seguinte expressão é válida:

$$\omega = \bar{\omega} + \bar{s}n \quad (\text{II-61})$$

onde,  $\omega$  é a área setorial de um ponto qualquer da parede,  $\bar{s}$  é uma coordenada local do esqueleto com origem no centro de gravidade G da parede e medido no mesmo sentido da coordenada geral  $s$  (horário) e,  $n$  é a distância do plano da parede ao centro de torção (positiva quando a seta que orienta a parede, produzir momento anti-horário em relação ao ponto D).

De uma maneira geral, as paredes que constituem um núcleo genérico de secção aberta contraventado por lin-téis, podem localizar-se em duas posições distintas: paredes com extremidade na abertura e paredes ligadas a duas ou tras.

Como a interação existente entre paredes que se interceptam é apenas uma força distribuída ao longo da aresta de intersecção, os esforços atuantes em um elemento longitudinal  $dZ$ , das paredes nas posições mencionadas acima, são os mostrados na Figura II-18.

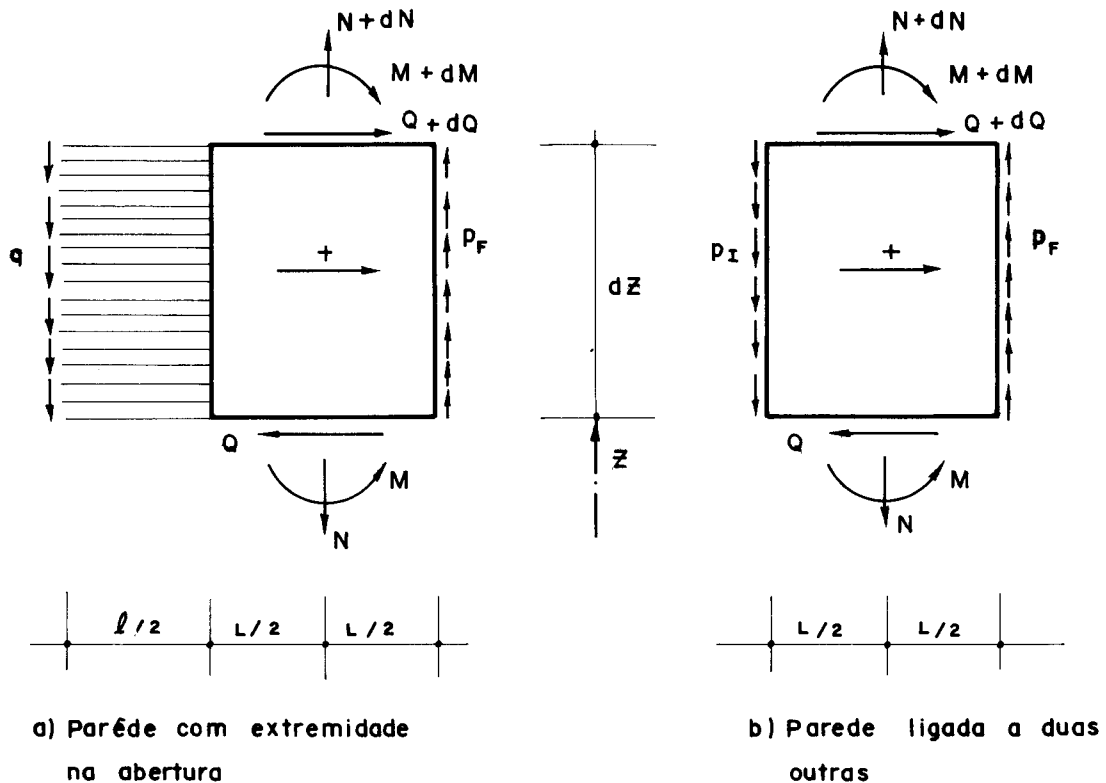


FIG. II-18 ESFORÇOS POSITIVOS NAS PAREDES

onde adota-se a seguinte notação para os esforços atuantes em uma cota genérica  $Z$ :

- $N$  - Esforço normal
- $M$  - Momento fletor
- $Q$  - Esforço cortante
- $p_I$  - Força distribuída (positiva para baixo) que atua ao longo da extremidade origem da seta que orienta a parede.
- $p_F$  - Força distribuída (positiva para cima) que atua na outra extremidade da parede.
- $q$  - Força distribuída nos lintéis.

### II.5.1 - Determinação dos esforços

#### a) Força normal

Sendo  $\sigma$  a tensão normal (positiva de tração) em um ponto qualquer do esqueleto, o esforço normal atuante na parede é dado por:

$$N = \int_A \sigma dS$$

onde  $dS$  é o elemento de área da secção transversal e  $\int_A$  refere-se a integração em toda a secção da parede.

Substituindo-se as equações (II-37) e (II-61) na expressão anterior, chega-se a:

$$N = E\phi'' \int_A (n\bar{s} + \bar{\omega}) dS$$

Como  $\bar{s}$  tem origem no centro de gravidade da parede, o desenvolvimento da expressão anterior fornece:

$$N = E \bar{\omega} A \phi'' \quad (\text{II-62})$$

onde  $A$  é a área da secção transversal da parede

#### b) Momento fletor

Com a convenção adotada, o momento fletor é dado por:

$$M = \int_A \sigma dS \bar{s}$$

Substituindo-se as equações (II-37) e (II-61) na expressão anterior obtém-se:



$$M = E\phi'' \int_A (n\bar{s} + \bar{\omega}) \bar{s} dS$$

que desenvolvida fornece

$$M = EJ n\phi'' \quad (\text{II-63})$$

onde  $J$  é o momento de inércia da parede dado por:

$$J = \int_A \bar{s}^2 dS$$

c) Forças distribuídas ao longo das intersecções

As forças distribuídas nas arestas de intersecções são calculadas determinando-se inicialmente a força na intersecção de paredes que tenham extremidade na abertura do núcleo.

Considere-se por exemplo, a parede com extremidade na abertura, mostrada na Figura II-18.a).

O equilíbrio na direção longitudinal, fornece a seguinte relação:

$$\frac{dN}{dZ} = q - p_F$$

Usando-se (II-62) e arrumando-se convenientemente, tem-se:

$$p_F = - E\bar{\omega}A\phi'' + q \quad (\text{II-64})$$

Lembrando-se que a força cortante distribuída nos lintéis é conhecida através das equações (II-30) e (II-31) com sentido pré-estabelecido na Figura II-4, a equação (II-64) fornece então, a força distribuída na outra extremidade da parede da abertura.

Como a força distribuída  $p_F$ , calculada através da equação (II-64), atuante na extremidade da parede da abertura é igual à da parede subsequente (ação e reação), o equilíbrio de um elemento desta na direção longitudinal, fornece a força distribuída na intersecção seguinte.

O equilíbrio na direção longitudinal da parede mostrada na Figura II-18.b) fornece:

$$\frac{dN}{dZ} = p_I - p_F$$

ou, usando-se (II-62) obtém-se:

$$E\bar{\omega}A\phi''' = p_I - p_F \quad (\text{II-65})$$

Portanto, aplicando-se a equação (II-64) em uma parede com extremidade na abertura, e depois a equação (II-65) nas paredes consecutivas, as forças distribuídas ao longo da altura em todas as intersecções, são consecutivamente determinadas.

d) Força cortante

Conhecendo-se as forças distribuídas ao longo de todas as arestas de intersecções, a força cortante de cada parede é determinada através do equilíbrio a rotação do elemento longitudinal.

Para as paredes com extremidade na abertura, Figura II-18, obtém-se:

$$Q = -\frac{dM}{dZ} + q \frac{L+\ell}{2} + p_F \frac{L}{2}$$

onde  $\ell$  é o comprimento do lintel e  $L$  é a largura da parede.

Usando-se a equação (II-63), tem-se:

$$Q = -EJn\phi''' + q \frac{L+l}{2} + p_F \frac{L}{2} \quad (\text{II-66})$$

Para paredes ligadas a duas outras, Figura II-18.b, o equilíbrio a rotação do elemento fornece:

$$Q = -EJn\phi''' + (p_F + p_I) \frac{L}{2} \quad (\text{II-67})$$

O conhecimento das forças de interação entre paredes nas intersecções, permite o conhecimento dos esforços cortantes em todas as paredes através de aplicações da equação (II-67) ou (II-66), conforme a posição da parede no núcleo.

#### II.5.2 - Esforços da fundação em sapatas aplicados nas bases das paredes

Admitindo-se todas as hipóteses e formulações usadas no item II-3, para as fundações em sapatas sobre solo flexível, tem-se que a tensão  $\sigma_o$  aplicada pelo solo em um ponto qualquer da sapata é dada por:

$$\sigma_o = C_\phi \omega \phi'(o) \quad (\text{II-68})$$

onde  $C_\phi$  é a rigidez do solo.

O esforço normal  $N^F$  e o momento fletor  $M^F$  aplicados pela fundação em cada parede, serão dados por:

$$N^F = \int_{A^F} \sigma_o dS^F$$

$$M^F = \int_{A^F} \sigma_o dS^F \bar{s}$$

onde  $dS^F$  é o elemento de área da fundação e as integrais são feitas em toda a área da sapata.

Substituindo-se as equações (II-68) e (II-61) nas expressões anteriores e definindo-se as características geométricas da sapata, chega-se a:

$$N^F = C_{\phi} A^F \bar{\omega} \phi'(o) \quad (\text{II-69})$$

$$M^F = C_{\phi} J^F n \phi'(o) \quad (\text{II-70})$$

onde  $A^F$  é a área e  $J^F$  é o momento de inércia da sapata.

### II.5.3 - Esforços concentrados nas bases das paredes

Considere-se inicialmente o equilíbrio na direção axial na base de uma parede. A seguinte expressão é obtida.

$$N^F = N(o)$$

Usando-se (II-69) e (II-62), na expressão anterior, obtêm-se:

$$C_{\phi} A^F \bar{\omega} \phi'(o) = EA \bar{\omega} \phi''(o)$$

ou,

$$\frac{\phi'(o)}{\phi''(o)} = \frac{EA}{C_{\phi} A^F}$$

A equação anterior, aplicada em todas as paredes que constituem o núcleo, fornece as seguintes igualdades:

$$\frac{\phi'(o)}{\phi''(o)} = \frac{EA_1}{C_{\phi} A_1^F} = \frac{EA_2}{C_{\phi} A_2^F} = \dots$$

No caso geral, entretanto, não ocorre a validade da equação anterior. Para que possa haver o equilíbrio nas bases das paredes admite-se uma troca de forças concentradas nas bases das intersecções entre paredes como mostra a Figura II-19<sup>(1)</sup>.

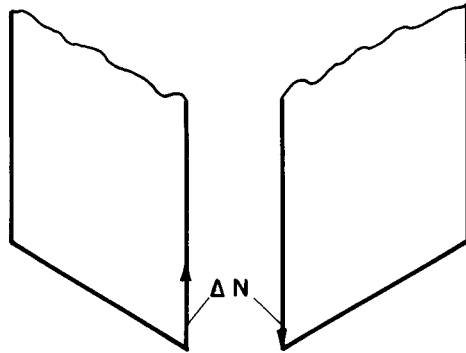


FIG. II-19 FORÇA CONCENTRADA  $\Delta N$  NA BASE DA INTERSECÇÃO ENTRE PAREDES

Considere-se agora, o equilíbrio a rotação na base de uma parede. Admitindo-se válida a relação:

$$M^F = M(o)$$

ou, usando (II-63) e (II-70)

$$C_{\phi} J_{\phi}^F n \phi'(o) = EJ n \phi''(o)$$

ou ainda

$$\frac{\phi'(o)}{\phi''(o)} = \frac{EJ}{C_{\phi} J_{\phi}^F}$$

Para que o equilíbrio a rotação na base de todas as paredes seja verificado é necessário que:

$$\frac{\phi'(o)}{\phi''(o)} = \frac{EJ_1}{C_{\phi} J_{\phi 1}^F} = \frac{EJ_2}{C_{\phi} J_{\phi 2}^F} = \dots$$

Como no caso geral, as igualdades acima não se verificam simultaneamente, admite-se que as paredes estejam sujeitas a momentos concentrados adicionais  $\Delta M$ , aplicados em suas bases.

A existência desses momentos concentrados,  $\Delta M$ , é justificada admitindo-se que as primeiras lajes exerçam forças concentradas, nas bases das paredes, equivalentes a binários resultantes, como indicado na Figura II-20.

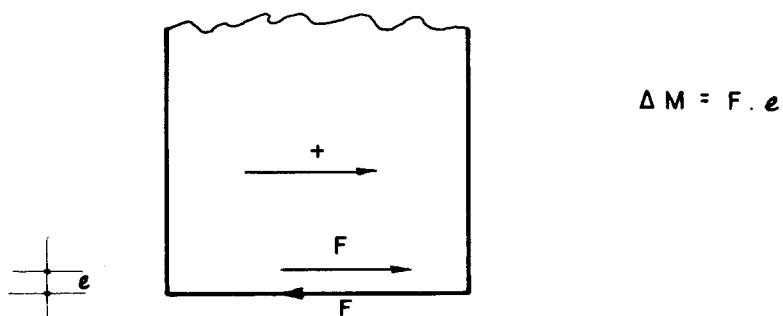


FIG. II - 20 - MOMENTO CONCENTRADO  $\Delta M$

Admitida a existência dessas forças concentradas  $\Delta N$  e dos momentos concentrados  $\Delta M$ , e usando-se a notação:

$\Delta N_I$  - Força concentrada (positiva para baixo) que atua na base da extremidade origem da seta que orienta a parede.

$\Delta N_F$  - Força concentrada (positiva para cima) que atua na base da outra extremidade da parede.

os esforços que atuam em um elemento da base da parede com extremidade na abertura do núcleo e da parede ligada a outras duas, serão respectivamente os mostrados nas Figuras II-21.a) e (II-21.b).

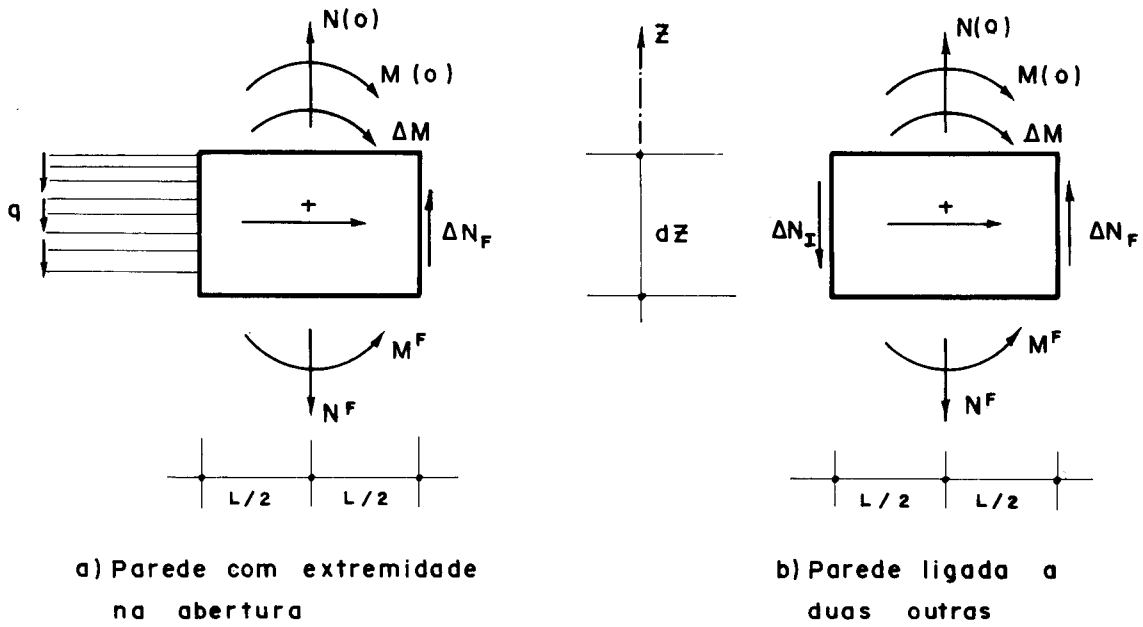


FIG. II- 21 ESFORÇOS NA BASE DAS PAREDES

Considerando-se o equilíbrio da parede com extremidade na abertura, na direção longitudinal, obtêm-se:

$$\Delta N_F = N^F - N(o)$$

ou usando (II-69) e (II-62)

$$\Delta N_F = C_\phi A^F \bar{\omega} \phi'(o) - EA \bar{\omega} \phi''(o)$$

Substituindo-se a equação (II-17), que fornece a condição de contorno para fundação em sapata, obtêm-se:

$$\Delta N_F = E \bar{\omega} \phi''(o) \left( \frac{J_\omega}{J^F} A^F - A \right) \quad (II-71)$$

Para as paredes ligadas a duas outras, o equilíbrio na direção longitudinal fornece:

$$\Delta N_F + N(o) = \Delta N_I + N^F$$

usando-se (II-62) e (II-69)

$$\Delta N_F + E\bar{\omega}A\phi''(o) = \Delta N_I + C_\phi \bar{\omega} A^F \phi'(o)$$

Arrumando-se convenientemente, e usando (II-17), obtêm-se:

$$\Delta N_F = \Delta N_I + E\bar{\omega}\phi''(o) \left( \frac{J_\omega}{J_F} A^F - A \right) \quad (\text{II-72})$$

As equações (II-71) e (II-72) permitem a determinação das forças concentradas em todas as intersecções bastando apenas que se inicie pela parede com extremidade na abertura.

O conhecimento da força concentrada na intersecção da parede com extremidade na abertura com a parede seguinte através de (II-71), permite o conhecimento da força concentrada em uma extremidade desta.

Aplicando-se agora, a equação (II-72) nas paredes consecutivas, as forças em todas as intersecções são determinadas.

Conhecendo-se as forças concentradas nas intersecções das paredes, o momento fletor concentrado na base de cada parede, é determinado aplicando-se a equação de equilíbrio à rotação na base da parede.

Para a parede com extremidade na abertura, tem-se:

$$\Delta M + M(o) = M^F + \Delta N_F \frac{L}{2}$$

Substituindo-se (II-63), (II-70) e (II-17), chega-se a:

$$\Delta M = \Delta N_F \frac{L}{2} + E n \phi''(o) \left( \frac{J_\omega}{J_F} J^F - J \right)$$



Para as paredes ligadas a duas outras, procedimento análogo fornece:

$$\Delta M = (\Delta N_I + \Delta N_F) \frac{L}{2} + E n \phi''(0) \left( \frac{J}{J_F} \frac{\omega}{J} J^F - J \right) \quad (\text{II-73})$$

#### II.5.4 - Esforços nas paredes do Exemplo II-1

Para comparações futuras, serão determinados, os esforços do núcleo do Exemplo 1, mostrado na Figura II-6, com a numeração das paredes indicadas ao lado das setas que definem seus sentidos positivos.

Devido a simetria serão apresentados os esforços apenas nas paredes 1, 2 e 3.

Das características geométricas e, do diagrama de área setorial da Figura II-8, tem-se:

$$\begin{aligned} J_1 &= 0,075 \text{m}^4 \\ A_1 &= 0,4795 \text{m}^2 \\ J_1^F &= 0,21428 \text{m}^4 \\ A_1^F &= 1,37 \text{m}^2 \\ \bar{\omega}_1 &= 13,7393 \text{m}^2 \\ n_1 &= 8,98452 \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= 5,69077 \text{m}^4 \\ A_2 &= 2,03 \text{m}^2 \\ J_2^F &= 16,25933 \text{m}^4 \\ A_2^F &= 5,8 \text{m}^2 \\ \bar{\omega}_2 &= -0,82511 \text{m}^2 \\ n_2 &= 2,9 \text{m} \end{aligned}$$

$$J_3 = 5,69077m^4$$

$$A_3 = 2,03m^2$$

$$J_3^F = 22,76307m^4$$

$$A_3^F = 8,12m^2$$

$$\bar{\omega}_3 = 0$$

$$n_3 = -3,185m$$

Os esforços normais  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  são obtidos da fórmula (II-62):

$$N_1 = 1,8644024 \times 10^{10} \phi''$$

$$N_2 = -4,7401744 \times 10^9 \phi''$$

$$N_3 = 0$$

Da expressão (II-63) os momentos fletores  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  são determinados:

$$M_1 = 1,9069644 \times 10^9 \phi''$$

$$M_2 = 4,670415 \times 10^{10} \phi''$$

$$M_3 = -5,129404 \times 10^{10} \phi''$$

As forças distribuídas ao longo da altura nas arestas 2 e 3,  $p_2$  e  $p_3$  respectivamente, são obtidos da equação (II-65), sendo a força cortante distribuída nos lintéis, dada por (II-30) e (II-31).

$$q = 7,5693 \times 10^7 \phi'$$

$$p_2 = 7,5693 \times 10^7 \phi' - 1,8644 \times 10^{10} \phi''$$

$$p_3 = 7,5693 \times 10^7 \phi' - 1,390385 \times 10^{10} \phi''$$

Das expressões (II-66) e (II-67), obtêm-se os esforços cortantes  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ .

$$Q_1 = -1,467812 \times 10^{10} \phi''' + 2,1951 \times 10^8 \phi'$$

$$Q_2 = -1,41093 \times 10^{11} \phi''' + 4,39019 \times 10^8 \phi'$$

$$Q_3 = -2,93483 \times 10^{10} \phi''' + 4,39019 \times 10^8 \phi'$$

De (II-72) as forças concentradas  $\Delta N_2$  e  $\Delta N_3$  nas arestas 2 e 3 respectivamente, são determinadas:

$$\Delta N_2 = -1,155645 \times 10^9 \phi''(o)$$

$$\Delta N_3 = -8,61827 \times 10^8 \phi''(o)$$

Da equação (II-73), obtêm-se os momentos concentrados:

$$\Delta M_1 = -9,0987 \times 10^8 \phi''(o)$$

$$\Delta M_2 = -8,74576 \times 10^9 \phi''(o)$$

$$\Delta M_3 = -2,1065 \times 10^{10} \phi''(o)$$

Os valores determinados, encontram-se nas tabelas seguintes:

Tabela II-9 - Esforços na parede 1

z (m)	ESFORÇO NORMAL (t)		M FLETOR (t.m)		ESFORÇO CORTANTE (t)	
	RÍGIDO	FLEXÍVEL	RÍGIDO	FLEXÍVEL	RÍGIDO	FLEXÍVEL
0	12,948	1,347	1,324	0,138	0,977	2,141
2,8	9,813	0,389	1,004	0,040	1,166	2,112
5,6	7,271	-0,383	0,744	-0,039	1,296	2,064
8,4	5,213	-1,004	0,533	-0,103	1,378	2,002
11,2	3,549	-1,499	0,363	-0,153	1,421	1,929
14,0	2,208	-1,891	0,226	-0,193	1,433	1,846
16,8	1,131	-2,196	0,116	-0,225	1,420	1,756
19,6	0,271	-2,427	0,028	-0,248	1,387	1,660
22,4	-0,408	-2,595	-0,042	-0,265	1,338	1,561
25,2	-0,936	-2,707	-0,096	-0,277	1,277	1,458
28,0	-1,337	-2,767	-0,137	-0,283	1,206	1,354
30,8	-1,626	-2,779	-0,166	-0,284	1,127	1,249
33,6	-1,817	-2,742	-0,186	-0,280	1,044	1,144
36,4	-1,918	-2,655	-0,196	-0,272	0,958	1,040
39,2	-1,934	-2,514	-0,198	-0,257	0,870	0,939
42,0	-1,864	-2,314	-0,190	-0,237	0,783	0,841
44,8	-1,708	-2,046	-0,175	-0,209	0,699	0,749
47,6	-1,456	-1,698	-0,149	-0,174	0,618	0,662
50,4	-1,099	-1,254	-0,112	-0,128	0,544	0,584
53,2	-0,620	-0,696	-0,063	-0,071	0,479	0,516
56,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,425	0,461

Tabela II-10 - Esforços na parede 2

z (m)	ESFORÇO NORMAL (t)		M. FLETOR (t.m)		ESFORÇO CORTANTE (t)	
	RÍGIDO	FLEXÍVEL	RÍGIDO	FLEXÍVEL	RÍGIDO	FLEXÍVEL
0	-3,292	-0,343	32,440	3,375	9,392	6,559
2,8	-2,495	-0,099	24,580	0,975	8,364	6,062
5,6	-1,849	0,098	18,210	-0,961	7,479	5,608
8,4	-1,325	0,255	13,060	-2,515	6,710	5,190
11,2	-0,902	0,381	8,891	-3,756	6,035	4,800
14,0	-0,561	0,481	5,531	-4,737	5,436	4,432
16,8	-0,287	0,558	2,832	-5,501	4,899	4,082
19,6	-0,069	0,617	0,679	-6,081	4,410	3,745
22,4	0,104	0,660	-1,022	-6,501	3,960	3,419
25,2	0,238	0,688	-2,346	-6,781	3,540	3,099
28,0	0,340	0,704	-3,348	-6,932	3,144	2,784
30,8	0,413	0,707	-4,073	-6,961	2,766	2,470
33,6	0,462	0,697	-4,552	-6,869	2,399	2,156
36,4	0,488	0,675	-4,806	-6,652	2,040	1,839
39,2	0,492	0,639	-4,845	-6,300	1,684	1,517
42,0	0,474	0,589	-4,671	-5,799	1,326	1,185
44,8	0,434	0,520	-4,278	-5,126	0,963	0,842
47,6	0,370	0,432	-3,647	-4,253	0,590	0,483
50,4	0,279	0,320	-2,752	-3,142	0,201	0,104
53,2	0,158	0,177	-1,554	-1,744	-0,209	-0,300
56,0	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,647	-0,736

Tabela II-11 - Esforços na parede 3

z (m)	M. FLETOR(t.m)		ESFORÇO CORTANTE(t)	
	RÍGIDO	FLEXÍVEL	RÍGIDO	FLEXÍVEL
0	-35,620	-3,706	1,954	4,282
2,8	-27,000	-1,071	2,331	4,223
5,6	-20,000	1,055	2,591	4,128
8,4	-14,340	2,762	2,755	4,004
11,2	- 9,765	4,125	2,842	3,857
14,0	- 6,074	5,203	2,866	3,692
16,8	- 3,111	6,042	2,841	3,512
19,6	- 0,746	6,678	2,775	3,321
22,4	1,123	7,140	2,677	3,121
25,2	2,576	7,448	2,554	2,916
28,0	3,677	7,613	2,411	2,708
30,8	4,473	7,645	2,225	2,497
33,6	4,999	7,544	2,088	2,288
36,4	5,278	7,305	1,916	2,081
39,2	5,321	6,919	1,741	1,878
42,0	5,131	6,369	1,567	1,683
44,8	4,698	5,630	1,398	1,497
47,6	4,006	4,671	1,237	1,325
50,4	3,023	3,451	1,089	1,168
53,2	1,706	1,916	0,958	1,033
56,0	0,000	0,000	0,850	0,923

O esforço normal é nulo ao longo da altura.

Tabela II-12 - Forças distribuídas, nos lintéis, na aresta 2 e na aresta 3

z (m)	LINTÉIS (t/m)		ARESTA 2 (t/m)		ARESTA 3 (t/m)	
	RÍGIDO	FLEXÍVEL	RÍGIDO	FLEXÍVEL	RÍGIDO	FLEXÍVEL
0	0,000	0,635	1,241	1,015	0,926	0,918
2,8	0,129	0,645	1,135	0,952	0,879	0,874
5,6	0,225	0,645	1,041	0,892	0,834	0,829
8,4	0,296	0,637	0,956	0,834	0,788	0,784
11,2	0,345	0,622	0,878	0,780	0,743	0,740
14,0	0,378	0,603	0,807	0,726	0,698	0,695
16,8	0,397	0,580	0,740	0,675	0,653	0,651
19,6	0,404	0,553	0,677	0,624	0,608	0,606
22,4	0,403	0,525	0,617	0,574	0,563	0,562
25,2	0,396	0,495	0,560	0,525	0,518	0,517
28,0	0,383	0,463	0,505	0,476	0,474	0,473
30,8	0,366	0,432	0,451	0,427	0,429	0,428
33,6	0,346	0,400	0,398	0,378	0,385	0,384
36,4	0,325	0,370	0,345	0,329	0,340	0,340
39,2	0,303	0,340	0,293	0,280	0,296	0,295
42,0	0,281	0,313	0,241	0,230	0,251	0,251
44,8	0,261	0,288	0,188	0,178	0,207	0,206
47,6	0,243	0,266	0,135	0,126	0,162	0,162
50,4	0,228	0,250	0,080	0,072	0,117	0,117
53,2	0,218	0,238	0,023	0,016	0,073	0,073
56,0	0,214	0,234	-0,035	-0,043	0,028	0,028

Para as forças concentradas e os momentos concentrados foram obtidos os seguintes valores:

$$\Delta N_2 = -83,5 \text{kg}$$

$$\Delta N_3 = -62,3 \text{kg}$$

$$\Delta M_1 = -65,7 \text{kg.m}$$

$$\Delta M_2 = -632,0 \text{kg.m}$$

$$\Delta M_3 = -1522,1 \text{kg.m}$$

#### II.5.5 - Esforços nas paredes do Exemplo II-2

Considere-se a estrutura formada por dois núcleos contraventados por lintéis da Figura II-15.

As setas definem as orientações das paredes e os números aos lados referem-se a numeração destas.

MANCINI<sup>(1)</sup>, analisou essa estrutura, considerando as paredes como painéis. Apresentam-se os resultados obtidos, usando-se a condição de contorno proposta e faz-se algumas comparações com MANCINI<sup>(1)</sup>.

Devido a simetria, são apresentados, apenas os esforços nas paredes 2 e 3.

Com o diagrama de área setorial da Figura II-12 e, para as dimensões do exemplo, tem-se:

$$A_2 = 0,15 \text{m}^2$$

$$J_2 = 0,0125 \text{m}^4$$

$$A_2^F = 0,30 \text{m}^2$$

$$J_2^F = 0,025 \text{m}^4$$

$$\bar{\omega}_2 = 1,0 \text{m}^2$$

$$n_2 = 0,5 \text{m}$$



$$\begin{aligned}A_3 &= 0,15\text{m}^2 \\J_3 &= 0,0125\text{m}^4 \\A_3^F &= 0,5\text{m}^2 \\J_3^F &= 0,0416667\text{m}^4 \\\bar{\omega}_3 &= 0 \\n_3 &= 1,5\text{m}\end{aligned}$$

Reescreve-se os seguintes valores:

$$\begin{aligned}J_{\omega}^* &= 0,66875\text{m}^6 \\J_{\omega}^{*F} &= 1,4125\text{m}^6 \\C_{\phi} &= 8 \times 10^4 \text{t/m}^2/\text{m} \\E &= 2 \times 10^6 \text{t/m}^2\end{aligned}$$

Da expressão (II-62), os esforços normais  $N_2$  e  $N_3$ , nas paredes 2 e 3 respectivamente, são dados por:

$$N_2 = 3,0 \times 10^5 \phi''$$

$$N_3 = 0$$

Os momentos fletores  $M_2$  e  $M_3$  são obtidos de (II-63):

$$M_2 = 1,25 \times 10^4 \phi''$$

$$M_3 = 3,75 \times 10^4 \phi''$$

A força cortante distribuída nos lintéis é obtida das expressões (II-52) e (II-49).

$$q_1 = 8100 \phi'$$

A equação (II-64), fornece a força distribuída  $p_4$ , ao longo da aresta 4 .

$$p_4 = 8100\phi' - 3,0 \times 10^5 \phi'''$$

As forças cortantes  $Q_2$  e  $Q_3$  são obtidas das equações (II-66) e (II-67).

$$Q_2 = -1,625 \times 10^5 \phi''' + 1,215 \times 10^4 \phi'$$

$$Q_3 = -3,375 \times 10^5 \phi''' + 8100\phi'$$

A força  $\Delta N_4$  concentrada na base, da intersecção entre as paredes é obtida da equação (II-72).

$$\Delta N_4 = -1,59292 \times 10^4 \phi''(o)$$

Da equação (II-73), são obtidos os momentos concentrados nas paredes:

$$\Delta M_2 = -8,62832 \times 10^3 \phi''(o)$$

$$\Delta M_3 = 5,75222 \times 10^3 \phi''(o)$$

As Tabelas seguintes apresentam os resultados:

Tabela II-13 - Esforços na parede 2

z (m)	ESFORÇO NORMAL (t)		M. FLETOR (t.m)		ESFORÇO CORTANTE (t)	
	RÍGIDO	FLEXÍVEL	RÍGIDO	FLEXÍVEL	RÍGIDO	FLEXÍVEL
0	11,123	3,284	0,463	0,137	1,215	1,933
3	6,074	1,794	0,253	0,075	1,678	2,070
6	3,317	0,979	0,138	0,041	1,930	2,144
9	1,811	0,535	0,075	0,022	2,068	2,185
12	0,989	0,292	0,041	0,012	2,143	2,207
15	0,539	0,159	0,022	0,007	2,184	2,219
18	0,293	0,086	0,012	0,004	2,207	2,226
21	0,157	0,046	0,007	0,002	2,219	2,230
24	0,080	0,024	0,003	0,001	2,225	2,232
27	0,034	0,010	0,001	0,000	2,228	2,232
30	0,000	0,000	0,000	0,000	2,229	2,233

Tabela II-14 - Esforços na parede 3

z (m)	M. FLETOR (t.m)		ESFORÇO CORTANTE (t)	
	RÍGIDO	FLEXÍVEL	RÍGIDO	FLEXÍVEL
0	1,390	0,411	2,523	1,795
3	0,759	0,224	2,054	1,656
6	0,415	0,122	1,798	1,580
9	0,226	0,067	1,658	1,539
12	0,124	0,036	1,581	1,517
15	0,067	0,020	1,540	1,504
18	0,037	0,011	1,517	1,498
21	0,020	0,006	1,505	1,494
24	0,010	0,003	1,498	1,492
27	0,004	0,001	1,495	1,491
30	0,000	0,000	1,494	1,491

O esforço normal é nulo ao longo da altura.

Tabela II-15 - Forças distribuídas nos lintéis e na intersecção entre as paredes.

z (m)	LINTÉIS (t/m)		ARESTA 4 (t/m)	
	RÍGIDO	FLEXÍVEL	RÍGIDO	FLEXÍVEL
0	0,000	1,050	2,243	1,712
3	0,676	1,249	1,901	1,611
6	1,045	1,358	1,714	1,556
9	1,247	1,418	1,612	1,526
12	1,357	1,450	1,556	1,509
15	1,417	1,468	1,526	1,500
18	1,450	1,478	1,510	1,495
21	1,467	1,483	1,501	1,493
24	1,477	1,486	1,496	1,491
27	1,481	1,487	1,494	1,491
30	1,482	1,487	1,493	1,490

A força concentrada na base da intersecção e os momentos concentrados nas bases das paredes são:

$$\Delta N_4 = -174,393 \text{kg}$$

$$\Delta M_2 = -9446,3 \text{kg.cm}$$

$$\Delta M_3 = 6297,5 \text{kg.cm}$$

Observe-se que a relação, usada por MANCINI<sup>(1)</sup>, entre os momentos concentrados é verificada:

$$\frac{\Delta M_3}{\Delta M_2} = -\frac{2}{3} = -2 \frac{b}{d}$$

### III. TRATAMENTO DISCRETO

#### III.1 - Considerações e hipóteses

O tratamento discreto consiste basicamente em analisar a estrutura como formada por subestruturas ou elementos bases de comportamento estrutural conhecido (vigas, pilares, pórticos, etc.), e considerar as interdependências entre elementos como as incógnitas do problema.

A estrutura assim discretizada, é resolvida por técnicas matriciais, utilizando-se o método dos esforços ou dos deslocamentos, sendo o último de maior uso por ser mais fácil a sua automatização de cálculo.

Nas aplicações do tratamento discreto às estruturas de edifícios altos, a presença das lajes é considerada admitindo que elas se comportam como diafragmas rígidos (com rigidez infinita em seu plano e nula transversalmente), só transmitindo forças horizontais e momentos torçores aos elementos verticais da estrutura.

STAMATO<sup>(5)</sup>, através do tratamento discreto, analisa estruturas de edifícios altos, assimilando-as a um conjunto de subestruturas planas verticais bi-dimensionais (pórticos, treliças, pilares-parede, etc.) denominadas painéis, e considera como interdependências, as forças verticais em suas intersecções, além das forças transmitidas pelas lajes.

Apesar do grande número de incógnitas envolvidas na solução de uma estrutura, o tratamento discreto não altera-se quando há variações geométricas da estrutura ao longo da altura, o que, ao contrário deste, torna os processos contínuos inadequados.

#### III.2 - Formulação do processo

Dois caminhos diferentes têm sido seguidos na análise de estruturas de edifícios altos constituídos por núcleos estruturais:

a) o primeiro, utilizado por TARANATH<sup>(8)</sup>, consiste em tomar os núcleos como elementos lineares com sete deslocamentos por extremidade, sendo os seis normalmente considerados no tratamento espacial e, mais um para o empenamento, correspondendo ao esforço bimomento introduzido por VLASOV<sup>(13)</sup>.

b) o segundo, utilizado por YAGUI<sup>(7)</sup>, considera as paredes planas contidas em um mesmo plano vertical, como painéis pórticos, e depois analisa a estrutura através do processo desenvolvido por STAMATO<sup>(5)</sup>.

O processo apresentado a seguir, baseado nos trabalhos de YAGUI<sup>(6,7)</sup> e STAMATO<sup>(5)</sup>, consiste em substituir cada parede componente dos núcleos, por um painel-pórtico, e tomar os segmentos compreendidos entre lajes (pilares) como os elementos bases da estrutura.

Esses painéis planos que substituem as paredes, serão formados por vigas rígidas horizontais engastadas aos meios aos pilares, como indica a Figura III-1.

As incógnitas-deslocamentos consideradas, serão os deslocamentos verticais nas extremidades das paredes e os deslocamentos de corpo rígido das lajes em seus planos (dois horizontais e um de rotação).

Os lintéis de contraventamento, são tratados como elementos prismáticos que restringem parcialmente os deslocamentos axiais relativos entre paredes.

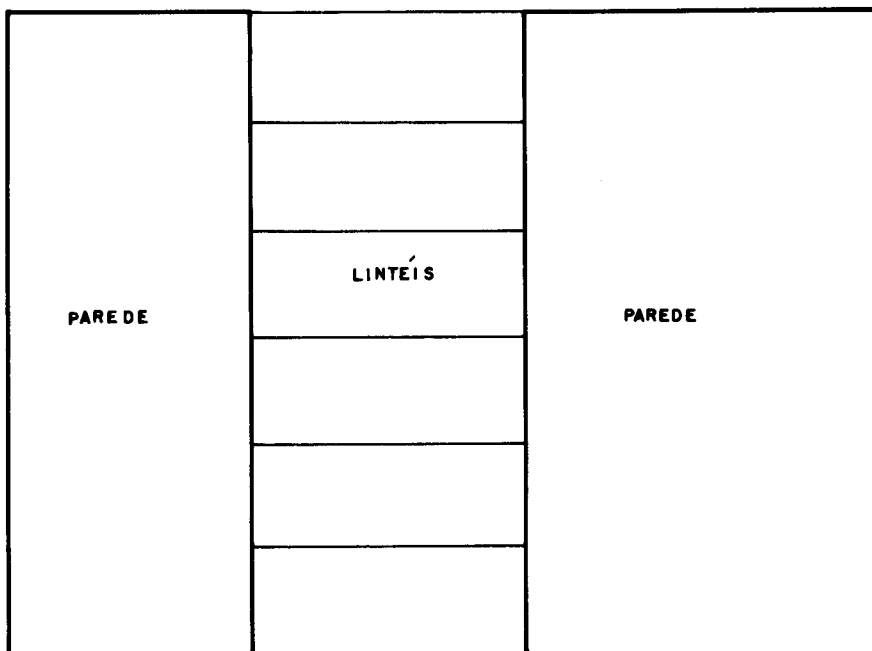
Serão consideradas: as variações na altura dos andares, a flexibilidade dos vínculos externos na base, a variação na espessura das paredes ao longo da altura, ou mesmo a interrupção de algumas delas, e as deformações por força cortante.

As cargas admitidas, serão aquelas atuantes nos planos das lajes e as verticais atuantes nas extremidades das paredes.

É utilizado o processo dos deslocamentos, obtendo-se uma matriz de rigidez do sistema em banda diagonal simétrica com largura facilmente conhecida, simplificando

assim a programação para estudo de estruturas maiores em computadores de pequeno porte.

a) Painel Real



b) Painel Equivalente

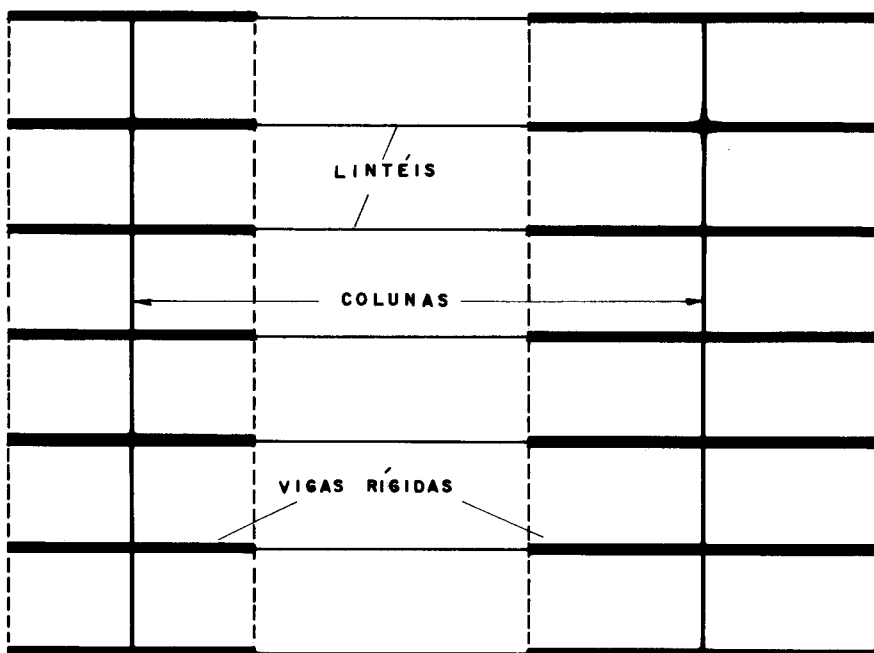


FIG. III- 1 - EQUIVALÊNCIA DA ESTRUTURA

### III.3 - Estrutura tridimensional equivalente

#### a) Diafragmas

As lajes serão consideradas diafragmas rígidos, admitidos como existentes na base, ao nível dos andares e onde ocorrer variação brusca na espessura de alguma parede.

Elas garantem um movimento de corpo rígido, na horizontal, para as secções transversais, sem impedir os seus deslocamentos axiais. Portanto os elementos verticais só receberão delas, forças horizontais e momentos torçores concentrados.

#### b) Painéis

Será chamado de painel, a cada pórtico plano que substitue uma parede plana delgada admitida sem rigidez transversal.

O painel será formado por uma coluna localizada no eixo médio longitudinal da parede e, por vigas horizontais, engastadas nas colunas, com rigidez infinita a flexão, pois elas representam as secções transversais das paredes que admitem-se permanecerem planas após as deformações.

Estas vigas horizontais serão admitidas como existentes ao nível dos diafragmas.

Na Figura III-1, está representada a equivalência.

#### c) Interação entre painéis

As interações consideradas entre painéis serão apenas as forças de cisalhamento. Estas forças, distribuídas ao longo das intersecções das paredes, serão equivalentes à forças concentradas verticais atuando nas vigas hori



zontais concorrentes dos painéis correspondentes.

Portanto a vinculação entre vigas horizontais rígidas será uma rôtula.

Se dois painéis interagem em um andar, admite-se que interagem nos demais andares. A não existência desta interação em um determinado andar, devido a interrupção de uma parede, será considerada tomando-se como nulas as rigidezes da parede faltante.

d) Pilares

Será chamado de pilar, ao segmento do painel compreendido entre dois diafragmas sucessivos. Ele representa o segmento da parede substituída pelo respectivo painel.

O pilar, será então constituído por uma coluna com duas vigas rígidas engastadas aos meios em suas extremidades, como mostra a Figura III-2.

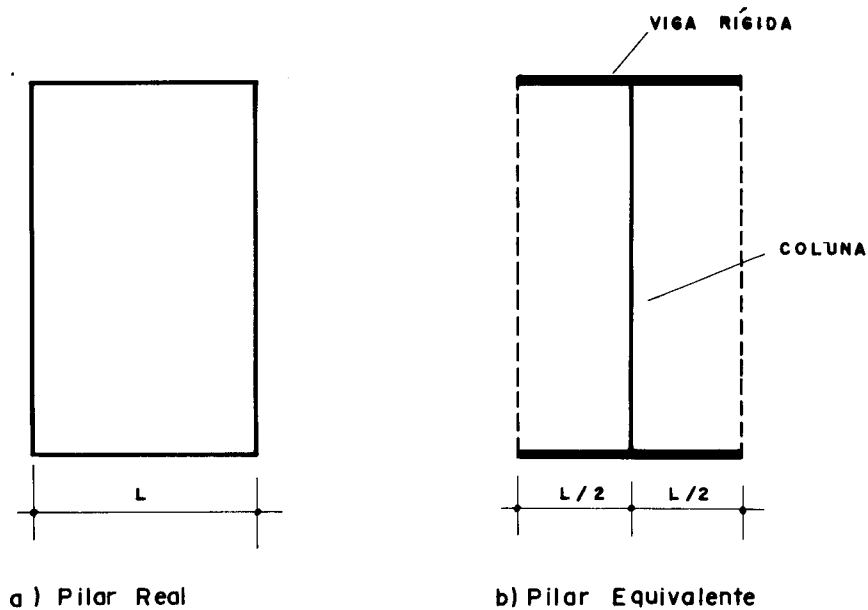


FIG. III- 2 - EQUIVALÊNCIA DOS PILARES

As rigidezes da coluna à flexão, à força normal, à torção e à força cortante, serão equivalentes às do correspondente segmento da parede.

A largura da parede será considerada, tomando-se as vigas rígidas com comprimento equivalente, suposto constante ao longo da altura.

e) Lintéis

Os lintéis serão tratados como vigas bi-engastadas nas paredes complanares às quais estão ligados. Na estrutura equivalente eles serão engastados nas vigas horizontais dos painéis.

f) Vínculos externos

Os vínculos das bases das paredes, serão considerados como elementos que possuem rigidez axial e a flexão.

e) Cargas

As cargas consideradas, serão aquelas transmitidas pelas lajes nos seus próprios planos (horizontais e momento torçores) e cargas verticais nas extremidades das paredes.

Observe-se que um momento fletor atuante em uma parede é facilmente considerado; bastando apenas substituí-lo por um binário equivalente atuando nas extremidades correspondentes.

#### III.4 - Descrição da estrutura

Para simplificações na exposição que se segue, considere-se a estrutura em planta da Figura III-3.

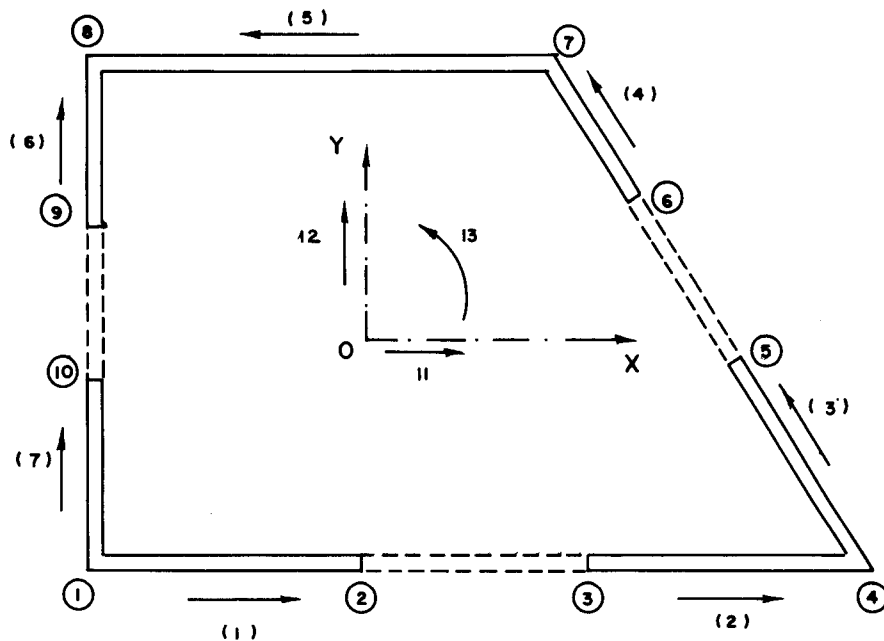


FIG. III - 3 DEFINIÇÃO DA ESTRUTURA EM PLANTA

A definição geométrica da estrutura será feita através do sistema de eixos tri-ortogonais OXYZ sendo OX e OY, eixos horizontais e OZ um eixo vertical com origem O na base da estrutura e orientado para o topo.

Apesar de serem permitidas variações geométricas da secção da estrutura ao longo da altura, é importante frisar que uma escolha da origem O e dos eixos OX e OY os mais próximos possíveis do centro de torção e dos eixos principais de inércia, respectivamente, conduzirá a um bom condicionamento do sistema de equações, o que é de importância para a precisão dos resultados.

A numeração das paredes é arbitrária e através de uma seta define-se os sentidos positivos para os seus deslocamentos. Elas serão vistas de modo que as setas estejam orientadas da esquerda para a direita.

Chamar-se-á de nó a todo ponto que seja extremidade de parede. Sua numeração é arbitrária (números em círculos na Figura III-3) e ficarão definidos através de suas coordenadas (x,y) com relação aos eixos OX e OY.

Os diafragmas serão numerados de baixo para cima, sendo que o de número 1 referir-se-á ao suposto existente na base.

O vetor posição de cada painel<sup>(5)</sup>, ficará definido através das coordenadas dos nós extremidades da parede que ele representa, como mostra a Figura III-4.

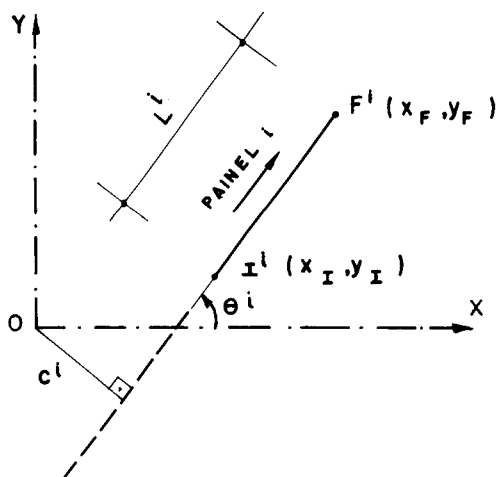


FIG. III-4- VETOR POSIÇÃO DO PAINEL

Chamando-se de  $I^i$  e  $F^i$  os nós de início e de fim, respectivamente, de um painel genérico  $i$ , a largura  $L^i$  da parede é dada por:

$$L^i = \sqrt{(x_F - x_I)^2 + (y_F - y_I)^2}$$

Os elementos do vetor posição serão:

$$\left. \begin{aligned} a^i &= \cos \theta^i = \frac{x_F - x_I}{L^i} \\ b^i &= \sin \theta^i = \frac{y_F - y_I}{L^i} \\ c^i &= x_I b^i - y_I a^i \end{aligned} \right\} \quad \text{(III-1)}$$

onde  $\theta^i$  é o ângulo formado entre o plano do painel e o eixo OX, medido a partir de OX no sentido anti-horário.

A numeração dos lintéis é arbitrária e, serão definidos geometricamente pelos seus nós extremos. Eles serão vistos de modo que o nó tomado como início fique à esquerda e o seu nó fim à direita.

### III.5 - Deslocamentos

#### III.5.1 - Sistema

Chamando-se de  $O_j$  o ponto de intersecção do eixo OZ com o diafragma  $j$ , as  $n$  coordenadas do sistema, nessa laje, são:

$v_{j1}, v_{j2}, \dots, v_{jN_{\text{nós}}}$  - Deslocamentos verticais dos  $N_{\text{nós}}$  nós da estrutura ao nível do diafragma  $j$  (positivos para cima).

$v_{jn}$  - Rotação do diafragma  $j$  em torno do eixo OZ (positivo se anti-horário).

$v_{jn-1}$  - Deslocamento de  $O_j$  na direção do eixo OY.

$v_{jn-2}$  - Deslocamento de  $O_j$  na direção do eixo OX.

onde,  $N_{\text{nós}}$  é o número de nós da estrutura em planta e  $n$  é o número de coordenadas do sistema ao nível de cada diafragma.

Definindo-se o vetor deslocamento do sistema ao nível do diafragma  $j$ ,  $V_j$ , tem-se:

$$V_j = \begin{bmatrix} v_{j1} \\ v_{j2} \\ \dots \\ v_{jn} \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (\text{III-2})$$

onde, na ordenação dos elementos adota-se o seguinte critério.

a) Para  $k \leq N_{\text{nós}}$ , o elemento  $v_{jk}$  representa o deslocamento vertical do nó  $k$ .

b) Os elementos  $v_{jn-2}$ ,  $v_{jn-1}$  e  $v_{jn}$  representam os deslocamentos segundo OX, segundo OY e a rotação em torno do eixo OZ, respectivamente.

Para uma estrutura com  $n_a$  andares, o vetor deslocamento do sistema V, será:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_f \end{bmatrix}_{n \cdot f \times 1} \quad (\text{III-3})$$

onde  $f$  é o número de diafragmas que, se igual ao de lajes, será o número de andares mais um:

$$f = n_a + 1 \quad (\text{III-4})$$

Adotando-se essas coordenadas, tem-se:

$$n = N_{\text{nós}} + 3 \quad (\text{III-5})$$

Com os vetores  $V_j$ , ordenadamente dispostos na equação (III-3), as  $n$  coordenadas do sistema ficam ordenadamente numeradas de tal modo que, em uma laje  $j$ , os elementos de  $V$  terão as seguintes correspondências:

- a) Elemento  $(j-1)n+k$  - corresponde ao deslocamento vertical do nó  $k$  ao nível do andar  $j$ .
- b) Elemento  $jn$  - rotação do diafragma  $j$  em torno de  $OZ$ .
- c) Elemento  $jn-1$  - deslocamento de  $O_j$  na direção  $OY$ .
- d) Elemento  $jn-2$  - deslocamento de  $O_j$  na direção  $OX$ .

Para a estrutura da Figura III-3, por exemplo,  $N_{\text{nós}} = 10$ ,  $n = 13$  e, o elemento da  $60^{\text{a}}$  ordem, representa o deslocamento vertical do nó 8 ao nível do diafragma 5.

### III.5.2 - Pilares

Na Figura III-5 indicam-se as incógnitas-deslocamentos consideradas para os pilares:

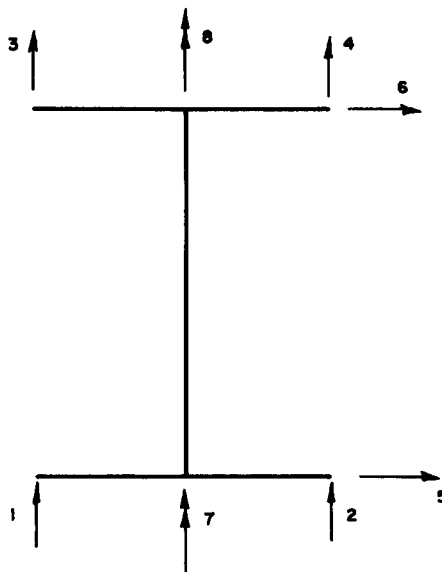


FIG. III - 5 DESLOCAMENTOS DOS PILARES

Referido a essas coordenadas, o vetor de carga do pilar será dado por:

$$F_p = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad (\text{III-6})$$

onde  $f_i$  representa a carga atuante no pilar segundo a coordenada  $i$  da Figura III-5.

O vetor deslocamento correspondente será:

$$D_p = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad (\text{III-7})$$

onde,  $d_i$  é o deslocamento do pilar segundo a coordenada  $i$  da Figura III-5.



### III.5.3 - Lintéis

Para os lintéis, as incógnitas-deslocamentos serão os deslocamentos verticais das extremidades das vigas rígidas às quais estão engastados.

Na Figura III-6 indicam-se as coordenadas para um lintel engastado nos painéis k e m.

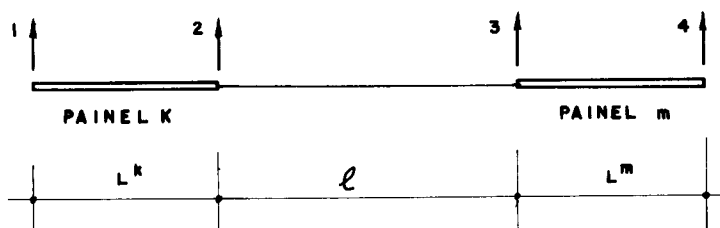


FIG. III- 6 DESLOCAMENTOS DOS LINTÉIS

O vetor de carga do lintel, referido a essas coordenadas será dado por:

$$F_L = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad (\text{III-8})$$

onde  $f_i$  representa a carga atuante segundo a coordenada i da Figura III-6.

O vetor deslocamento correspondente será:

$$D_L = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad (\text{III-9})$$

onde  $d_i$  representa o deslocamento segundo a coordenada i da Figura III-6.

III.6 - Matrizes de rigidez

III.6.1 - Matriz de rigidez dos pilares

Considere-se inicialmente as coordenadas  $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{8}$  da Figura III-7.

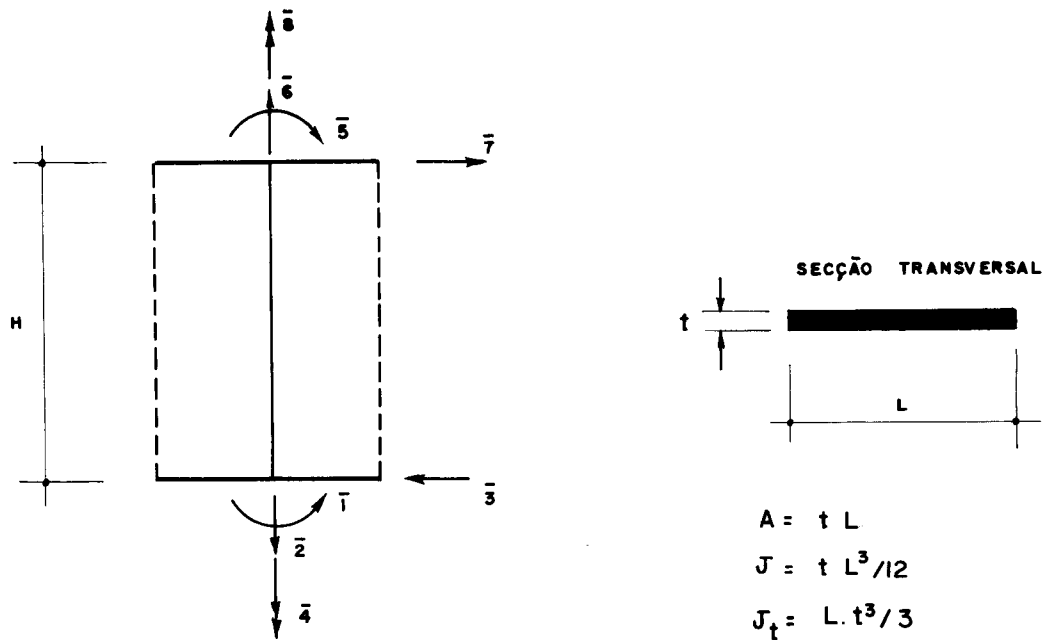


FIG. III - 7 - ESFORÇOS NOS PILARES

O vetor de carga (esforços) para essas coordenadas é dado por:

$$\bar{F}_P = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 \\ \bar{F}_5 \\ \bar{F}_6 \\ \bar{F}_7 \\ \bar{F}_8 \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad (III-10)$$

onde,  $\bar{f}_1$  e  $\bar{f}_5$  são os momentos fletores,  $\bar{f}_2$  e  $\bar{f}_6$  são os esforços normais,  $\bar{f}_3$  e  $\bar{f}_7$  são os esforços cortantes,  $\bar{f}_4$  e  $\bar{f}_8$  são os momentos torçores, na base e no topo do pilar, respectivamente.

O vetor deslocamento correspondente será:

$$\bar{D}_p = \begin{bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \\ \bar{d}_4 \\ \bar{d}_5 \\ \bar{d}_6 \\ \bar{d}_7 \\ \bar{d}_8 \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad \text{(III-11)}$$

onde  $\bar{d}_i$  é o deslocamento do pilar segundo a coordenada  $\bar{i}$  da Figura III-7.

Na determinação dos coeficientes de rigidez, no que se segue, serão consideradas as deformações por força cortante e momento fletor, desprezando-se as deformações por força normal nos deslocamentos de rotação e transversais à parede.

Da Resistência dos Materiais, sabe-se que:

$$\begin{aligned} \bar{f}_2 &= \bar{f}_6 = (\bar{d}_2 + \bar{d}_6)EA/H \\ \bar{f}_4 &= \bar{f}_8 = (\bar{d}_4 + \bar{d}_8)GJ_t/H \end{aligned} \quad \text{(III-12)}$$

onde, E e G são respectivamente, os módulos de elasticidade longitudinal e transversal; H é a altura do pilar; A é a área da secção transversal e  $J_t$  é o momento de inércia a torção.

Com as formulações obtidas por YAGUI<sup>(7)</sup> e mostradas no Apêndice 2, tem-se:

$$\bar{f}_1 = \frac{6EJ}{H^2} \frac{\bar{d}_3 + \bar{d}_7}{1+12\mu} + \frac{4EJ}{H} \frac{1+3\mu}{1+12\mu} \bar{d}_1 - \frac{2EJ}{H} \frac{1-6\mu}{1+12\mu} \bar{d}_5$$

$$\bar{f}_5 = -\frac{6EJ}{H^2} \frac{\bar{d}_3 + \bar{d}_7}{1+12\mu} - \frac{2EJ}{H} \frac{1-6\mu}{1+12\mu} \bar{d}_1 + \frac{4EJ}{H} \frac{1+3\mu}{1+12\mu} \bar{d}_5$$

$$\bar{f}_7 = \bar{f}_3 = (\bar{f}_1 - \bar{f}_5)/H \tag{III-13}$$

onde,  $J$  é o momento de inércia e  $\mu$  um coeficiente dado por:

$$\mu = \frac{cEJ}{AGH^2} \tag{III-14}$$

sendo  $c$  o coeficiente de correção da tensão de cisalhamento, que depende do coeficiente de POISSON e da geometria da secção transversal.

Para secções retangulares, tem-se:<sup>(14)</sup>

$$c = \frac{12+11\delta}{10+10\delta}$$

onde  $\delta$  é o coeficiente de Poisson.

As equações (III-12) e (III-13) podem ser escritas em forma matricial por:

$$\bar{F}_P = \bar{R}_P D_P \tag{III-15}$$

onde  $\bar{R}_P$  é a matriz de rigidez do pilar nas coordenadas da Figura III-7.

Os elementos da matriz  $\bar{R}_P$  são obtidos através das equações (III-12) e (III-13), lembrando-se que o elemento da linha  $\underline{i}$  e coluna  $\underline{j}$  ( $i, j=1, 2, \dots, 8$ ) representa o esforço segundo a coordenada  $\bar{i}$ , da Figura III-7, quando imprime-se um deslocamento unitário segundo a coordenada  $\bar{j}$ , mantendo-se nulos os deslocamentos nas demais coordenadas.

$$\bar{R}_P = \frac{EJ}{H} \begin{bmatrix} 4c_2 & 0 & \frac{6c_1}{H} & 0 & -2c_3 & 0 & \frac{6c_1}{H} & 0 \\ & \frac{A}{J} & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{J} & 0 & 0 \\ & & \frac{12c_1}{H^2} & 0 & \frac{-6c_1}{H} & 0 & \frac{12c_1}{H^2} & 0 \\ & & & \frac{GJ_t}{EJ} & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{EJ} \\ & & & & 4c_2 & 0 & \frac{-6c_1}{H} & 0 \\ & & & & & \frac{A}{J} & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{12c_1}{H^2} & 0 \\ & & & & & & & \frac{GJ_t}{EJ} \end{bmatrix}_{8 \times 8}$$

SIMÉTRICO

(III-16)

Aqui são definidas as seguintes constantes:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{1+12\mu} \\ c_2 &= \frac{1+3\mu}{1+12\mu} \\ c_3 &= \frac{1-6\mu}{1+12\mu} \end{aligned} \right\} \quad \text{(III-17)}$$

Os vetores  $D_P$  e  $\bar{D}_P$  definidos em (III-7) e (III-11) respectivamente, são relacionados por:

$$\bar{D}_P = T_P D_P \quad \text{(III-18)}$$

onde  $T_P$  é a matriz de transformação, dada por:

$$T_P = \begin{bmatrix} -1/L & 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/L & -1/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{8 \times 8} \quad \text{(III-19)}$$

sendo  $L$  a largura da parede substituída.

A matriz de rigidez do pilar para as coordenadas da Figura III-5, que relaciona os vetores  $F_P$  e  $D_P$ , definidos em (III-6) e (III-7), através da expressão:

$$F_P = R_P D_P \quad \text{(III-20)}$$

é obtida, como mostrado no Apêndice 2, pela equação:

$$R_P = T_P^t \bar{R}_P T_P \quad (\text{III-21})$$

onde,  $T_P$  é dada por (III-19),  $\bar{R}_P$  é dada por (III-16) e  $T_P^t$  é a matriz transposta de  $T_P$ .

### III-6.2 - Matriz de rigidez dos lintéis

Preliminarmente, considere-se as coordenadas para esforços dos lintéis mostrados na Figura III-8.

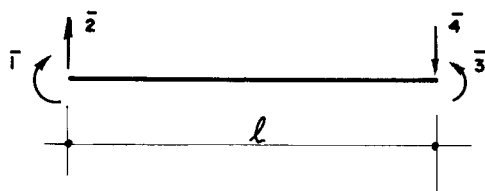


FIG. III- 8 - ESFORÇOS POSITIVOS NOS LINTÉIS

O vetor de carga (esforços) que atua no lintel se gundo as coordenadas da Figura III-8, é dado por:

$$\bar{F}_L = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad (\text{III-22})$$

onde,  $\bar{f}_1$  e  $\bar{f}_3$  são os momentos fletores,  $\bar{f}_2$  e  $\bar{f}_4$  são os esforços cortantes, à esquerda e direita do lintel respectivamente.

O vetor deslocamento correspondente, será:

$$\bar{D}_L = \begin{bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \\ \bar{d}_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad (\text{III-23})$$

onde  $\bar{d}_1$  é a deformação da extremidade do lintel, segundo a coordenada  $\bar{i}$  da Figura III-8.

A matriz de rigidez  $\bar{R}_L$ , que relaciona os vetores  $\bar{D}_L$  e  $\bar{F}_L$ , através da expressão:

$$\bar{F}_L = \bar{R}_L \bar{D}_L \quad (\text{III-24})$$

é obtida com procedimento análogo ao usado na determinação de  $\bar{R}_P$ .

$$\bar{R}_L = \frac{EJ_L}{\ell} \begin{bmatrix} 4c_2 & -\frac{6c_1}{\ell} & -2c_3 & -\frac{6c_1}{\ell} \\ & \frac{12c_1}{\ell^2} & \frac{6c_2}{\ell} & \frac{12c_1}{\ell^2} \\ & & 4c_2 & \frac{6c_1}{\ell} \\ & & & \frac{12c_1}{\ell^2} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (\text{III-25})$$

SIMÉTRICO

onde  $J_L$  é o momento de inércia do lintel,  $\ell$  é o seu comprimento e as constantes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são dadas pelas equações (III-17) e (III-14), usando-se os termos correspondentes da secção transversal do lintel.

A matriz de transformação  $T_L$ , que relaciona os vetores deslocamentos  $D_L$  e  $\bar{D}_L$  definidos em (III-9) e (III-23) respectivamente, através da equação:



$$\bar{D}_L = T_L D_L \quad (\text{III-26})$$

é dada por:

$$T_L = \begin{bmatrix} 1/L^k & -1/L^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/L^m & 1/L^m \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (\text{III-27})$$

onde  $L^k$  e  $L^m$  são, respectivamente, as larguras das paredes nas quais as extremidades esquerda e direita do lintel estão engastadas.

A matriz de rigidez do lintel nas coordenadas da Figura III-6, que relaciona os vetores  $D_L$  e  $F_L$ .

$$F_L = R_L D_L \quad (\text{III-28})$$

é obtida por:

$$R_L = T_L^t \bar{R}_L T_L \quad (\text{III-29})$$

onde  $\bar{R}_L$  é dada por (III-25),  $T_L$  é dada por (III-27) e  $T_L^t$  é a matriz transposta de  $T_L$ .

### III.6.3 - Matriz de rigidez do sistema

A matriz de rigidez do sistema,  $S$ , relaciona o vetor deslocamento,  $V$ , com o vetor de cargas externas,  $P$ , nas coordenadas do sistema.

$$P = S.V \quad (\text{III-30})$$

A matriz de rigidez  $S$ , é obtida somando-se as contribuições dos pilares e lintéis.

### III.6.3.1 - Contribuições dos pilares

Chamando de  $R_{Pj}^i$ , a matriz de rigidez do pilar do painel  $i$  e do andar  $j$ , a matriz de rigidez do sistema,  $S_P$ , com as contribuições apenas dos pilares, é obtida, como mostrado no Apêndice 2, pela conhecida expressão:

$$S_P = \sum_{i=1}^{n_P} \sum_{j=1}^{n_a} B_{Pj}^{ti} R_{Pj}^i B_{Pj}^i \quad (\text{III-31})$$

onde:

$n_P$  - Número de painéis da estrutura

$B_{Pj}^i$  - Matriz de transformação, que relaciona os deslocamentos do pilar do painel  $i$  e do andar  $j$ ,  $D_{Pj}^i$ , com os deslocamentos do sistema  $V$ , através da seguinte expressão:

$$D_{Pj}^i = B_{Pj}^i V \quad (\text{III-32})$$

$B_{Pj}^{ti}$  - Matriz transposta de  $B_{Pj}^i$

Com as coordenadas adotadas para o sistema, conclue-se que:

- a) Um deslocamento do sistema, produzido apenas em uma coordenada do diafragma  $j$ , só causa deslocamento nos pilares dos andares  $j$  e  $j+1$ .

- b) Um deslocamento no sistema, produzido apenas na coordenada vertical correspondente a um nó, só causa deslocamento nos pilares pertencentes aos painéis que têm o referido nó como extremidade.

Portanto, as colunas não nulas da matriz  $B_{p_j^i}$ , serão apenas aquelas correspondentes aos deslocamentos  $j$  verticais das extremidades do pilar ao nível dos diafragmas  $j$  e  $j+1$ , além dos três deslocamentos de corpo rígido dos referidos diafragmas.

Sendo  $I^i$  e  $F^i$  os nós inicial e final, respectivamente, do painel  $i$  ao qual o pilar pertence e, usando a notação:

J1 e J2 - coordenadas do sistema que contém os deslocamentos verticais do nó  $I^i$  nos diafragmas  $j$  e  $j+1$ , respectivamente.

K1 e K2 - coordenadas do sistema que contém os deslocamentos verticais do nó  $F^i$  nos diafragmas  $j$  e  $j+1$ , respectivamente.

M1 e M2 - coordenadas do sistema que contém os deslocamentos dos diafragmas  $j$  e  $j+1$  respectivamente, segundo OX.

N1 e N2 - coordenadas do sistema que contém os deslocamentos dos diafragmas  $j$  e  $j+1$  respectivamente, segundo OY.

I1 e I2 - coordenadas do sistema que contém as rotações dos diafragmas  $j$  e  $j+1$ , respectivamente.

A matriz  $B_{p_j^i}$  será dada por:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & \dots & J1 & \dots & K1 & \dots & M1 & N1 & I1 & \dots & J2 & \dots & K2 & \dots & M2 & N2 & I2 & \dots \\
 B_{pji} = & \left[ \begin{array}{cccccccccccc}
 \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a^i & b^i & c^i & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a^i & b^i & c^i & \dots & \dots \\
 \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \tag{III-33}$$

8 x fn

Com a numeração usada para as coordenadas do sistema, exposta no item III.5.1, obtém-se:

$$\left. \begin{array}{l}
 J1 = (j-1)n + I^i \\
 J2 = J1+n \\
 K1 = (j-1)n + F^i \\
 K2 = K1+n \\
 M1 = jn - 2 \\
 M2 = M1+n \\
 N1 = M1+1 \\
 N2 = N1+n \\
 I1 = N1+1 \\
 I2 = I1+n
 \end{array} \right\}
 \tag{III-34}$$

### III.6.3.2 - Contribuições dos lintéis

As contribuições dos lintéis na matriz de rigidez do sistema,  $S_L$ , é determinada de maneira semelhante a do item anterior.

$$S_L = \sum_{i=1}^{n_\ell} \sum_{j=1}^f B_{Lj}^{t.i} R_{Lj}^{i} B_{Lj}^{i} \quad (\text{III-35})$$

onde:

$n_\ell$  - número de lintéis da estrutura em planta.

$S_L$  - matriz de rigidez do sistema devido apenas às contribuições dos lintéis.

$R_{Lj}^{i}$  - matriz de rigidez do lintel  $i$  ao nível do diafragma  $j$ .

$B_{Lj}^{i}$  - matriz de transformação que relaciona os deslocamentos do lintel  $i$  no diafragma  $j$ ,  $D_{Lj}^{i}$ , com os deslocamentos do sistema,  $V$ , através da relação seguinte.

$$D_{Lj}^{i} = B_{Lj}^{i} V \quad (\text{III-36})$$

$B_{Lj}^{t.i}$  - Matriz transposta de  $B_{Lj}^{i}$

Chamando-se de  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  e  $n_4$  os nós correspondentes as coordenadas 1, 2, 3 e 4 respectivamente, usadas para os lintéis, como mostra a Figura III-6, as colunas não nulas da matriz  $B_{Lj}^{i}$  são:

$$\begin{array}{c}
 L1 \dots L2 \dots L3 \dots L4 \\
 \\
 B_{L_j}^i = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \tag{III-37}$$

$4 \times n.f$

onde L1, L2, L3 e L4 são respectivamente as coordenadas do sistema que contêm os deslocamentos verticais de n1, n2, n3 e n4 ao nível do diafragma j.

Para a numeração das coordenadas do sistema, expostas no item III.5.1, tem-se:

$$\left. \begin{array}{l}
 L1 = (j-1)n + n1 \\
 L2 = (j-1)n + n2 \\
 L3 = (j-1)n + n3 \\
 L4 = (j-1)n + n4
 \end{array} \right\}
 \tag{III-38}$$

### III.6.3.3 - Contribuições dos vínculos externos

A matriz de rigidez do sistema S, obtida pela soma das matrizes determinadas nos itens anteriores:

$$S = S_p + S_L
 \tag{III-39}$$

é singular.

A singularidade é levantada, com alterações nas coordenadas correspondentes aos vínculos nos casos de serem rígidos ou flexíveis:

a) Se o vínculo em uma coordenada  $\underline{i}$  é rígido, levanta-se a singularidade por eliminação da linha e coluna  $\underline{n}$  da matriz  $S$ .

Uma outra maneira de se levantar a singularidade do caso de uma coordenada  $\underline{i}$  ser rígida é a seguinte:

- Anulam-se os elementos  $S(i,k)$  para  $k \neq i$ , eliminando-se assim a influência da coordenada  $\underline{n}$  nas demais.

- Faz-se  $S(i,i) = 1$  e  $P(i) = 0$  o que anula o deslocamento segundo a coordenada  $\underline{i}$ .

Resumindo, para uma coordenada  $\underline{i}$ , rígida, faz-se:

$$\left. \begin{aligned} S(i,k) &= 0 && \text{para } k \neq i \\ S(i,i) &= 1 \\ P(i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{(III-40)}$$

b) Para os vínculos com rigidez  $K_v$  na direção de uma coordenada  $\underline{i}$ , a singularidade é levantada adicionando-se a rigidez  $K_v$  ao elemento da diagonal principal da matriz  $S$  na coordenada  $\underline{i}$ .

Nos casos em que sejam conhecidas as rigidezes a rotação e axial da fundação de uma parede, Figura III.9.a, faz-se a transformação para as coordenadas da Figura III.9b, através da matriz  $T_v$  como indicado no que se segue.

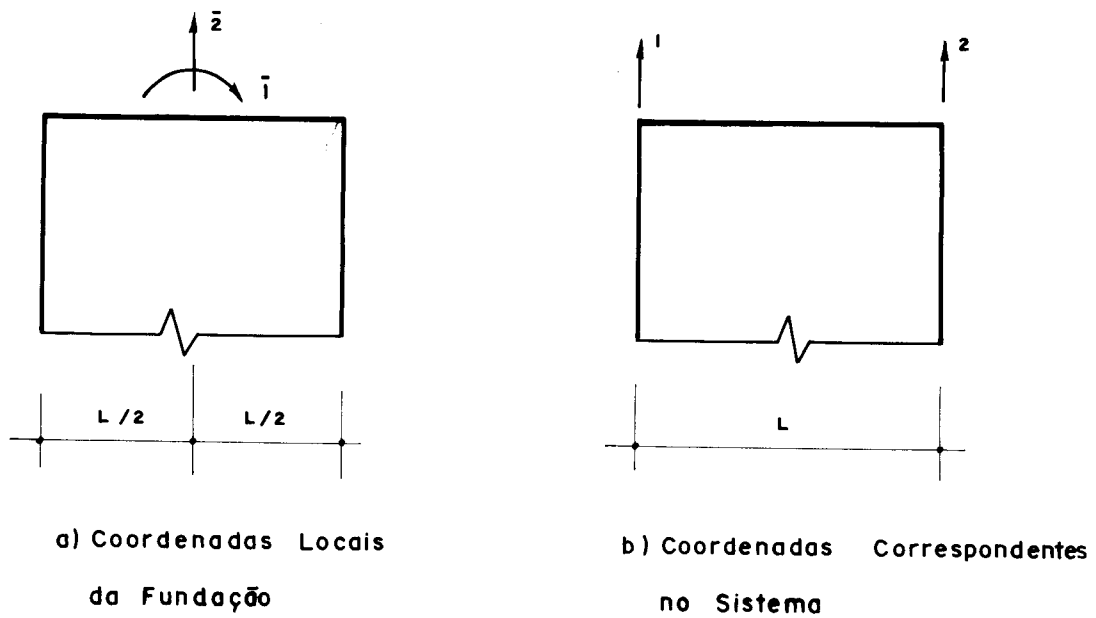


FIG. III - 9 VÍNCULOS FLEXÍVEIS

Seja  $\bar{R}_V$  a matriz de rigidez da base nas coordenadas  $\bar{1}$  e  $\bar{2}$ :

$$\bar{R}_V = \begin{bmatrix} r_\theta & 0 \\ 0 & r_V \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (\text{III-41})$$

onde,  $r_\theta$  e  $r_V$  são respectivamente, as rigidezes à rotação e axial da base da parede.

A matriz  $T_V$  que transforma os deslocamentos nas coordenadas 1 e 2 para as coordenadas  $\bar{1}$  e  $\bar{2}$  é:

$$T_V = \begin{bmatrix} 1/L & -1/L \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (\text{III-42})$$

A matriz de rigidez nas coordenadas 1 e 2, é dada por:



$$R_V = T_V^t \bar{R}_V T_V \quad (\text{III-43})$$

onde  $T_V^t$  é a matriz transposta de  $T_V$

A influência da base da parede na matriz de rigidez do sistema, pode agora ser adicionada diretamente usando-se a matriz  $R_V$ .

#### II.6.4 - Particularidades da matriz S

Considere-se a equação III-21, que define a matriz de rigidez do sistema:

$$P = S.V$$

Como P e V estão ordenados segundo os diafragmas, com f subvetores (ver equação III-3) de n elementos, a matriz de rigidez S também ficará ordenada por diafragma, com f<sup>2</sup> submatrizes quadradas de ordem nxn.

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1f} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2f} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{f1} & S_{f2} & & S_{ff} \end{bmatrix}_{f.n \times f.n} \quad (\text{III-44})$$

onde,  $S_{ij}$  contém os esforços nas coordenadas do diafragma i, quando se imprime deslocamentos apenas nas coordenadas do diafragma j.

Observando-se que:

- a) Os pilares do andar  $\underline{j}$  s $\tilde{o}$  contribuem na forma $\tilde{c}$ o dos elementos das submatrizes:

$$S_{jj}, S_{jj+1}, S_{j+1j} \text{ e } S_{j+1j+1}$$

- b) Os lint $\tilde{e}$ is do diafragma  $\underline{j}$  s $\tilde{o}$  contribuem na forma $\tilde{c}$ o da submatriz  $S_{jj}$
- c) Os v $\tilde{i}$ nculos s $\tilde{o}$  contribuem para a forma $\tilde{c}$ o de  $S_{11}$ .

conclue-se que, a matriz de rigidez  $S$   $\tilde{e}$  em banda diagonal sim $\tilde{e}$ trica, tendo apenas como submatrizes  $S_{ij}$  n $\tilde{a}$ o nulas aquelas para as quais  $|i-j| \leq 1$ .

Essas particularidades da matriz  $S$ , podem ser ob $\tilde{e}$ rvadas e utilizadas na sua forma $\tilde{c}$ o:

As matrizes obtidas pelos diversos duplos produtos matriciais indicados na equa $\tilde{c}$ o (III-31), podem ser particionadas em quatro submatrizes que permitem relacionar as contribu $\tilde{i}$ o $\tilde{e}$ s dos pilares do andar  $\underline{j}$  com as quatro submatrizes do sistema:  $S_{jj}$ ,  $S_{jj+1}$ ,  $S_{j+1j}$  e  $S_{j+1j+1}$ .

De modo an $\tilde{a}$ logo, pode-se particionar as matrizes obtidas dos duplos produtos matriciais indicados na equa $\tilde{c}$ o (III-35), permitindo assim relacionar diretamente as contribu $\tilde{i}$ o $\tilde{e}$ s dos lint $\tilde{e}$ is ao n $\tilde{i}$ vel do diafragma  $\underline{j}$  com a submatriz  $S_{jj}$ .

### III.7 - Deslocamentos e esfor $\tilde{c}$ os nos pilares e lint $\tilde{e}$ is

Conhecidos o vetor de carga  $P$  do sistema e a ma $\tilde{t}$ riz de rigidez  $S$ , o vetor deslocamento  $V$ ,  $\tilde{e}$  determinado atrav $\tilde{e}$ s da resolu $\tilde{c}$ o do sistema de equa $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s lineares dado pela equa $\tilde{c}$ o (III-45).

$$V = S^{-1} \cdot P \quad \text{(III-45)}$$

### III.7.1 - Esforços nos pilares

Substituindo-se o vetor  $V$  na equação (III.32), encontram-se os deslocamentos dos pilares nas coordenadas da Figura III.5.

As substituições sucessivas em (III.18) e (III.15) fornecem os deslocamentos e esforços nos pilares, para as coordenadas locais mostradas na Figura III.7.

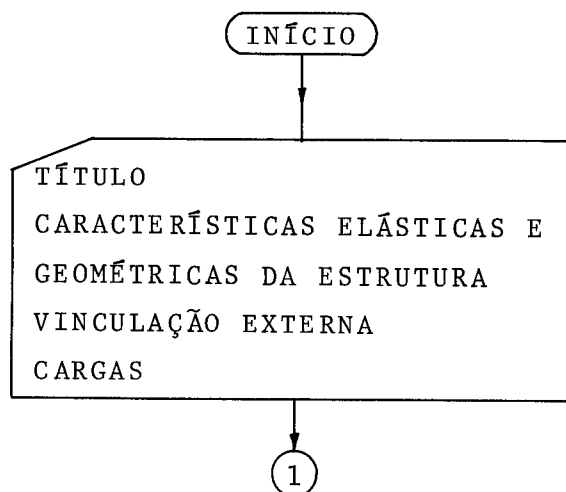
### III.7.2 - Esforços nos lintéis

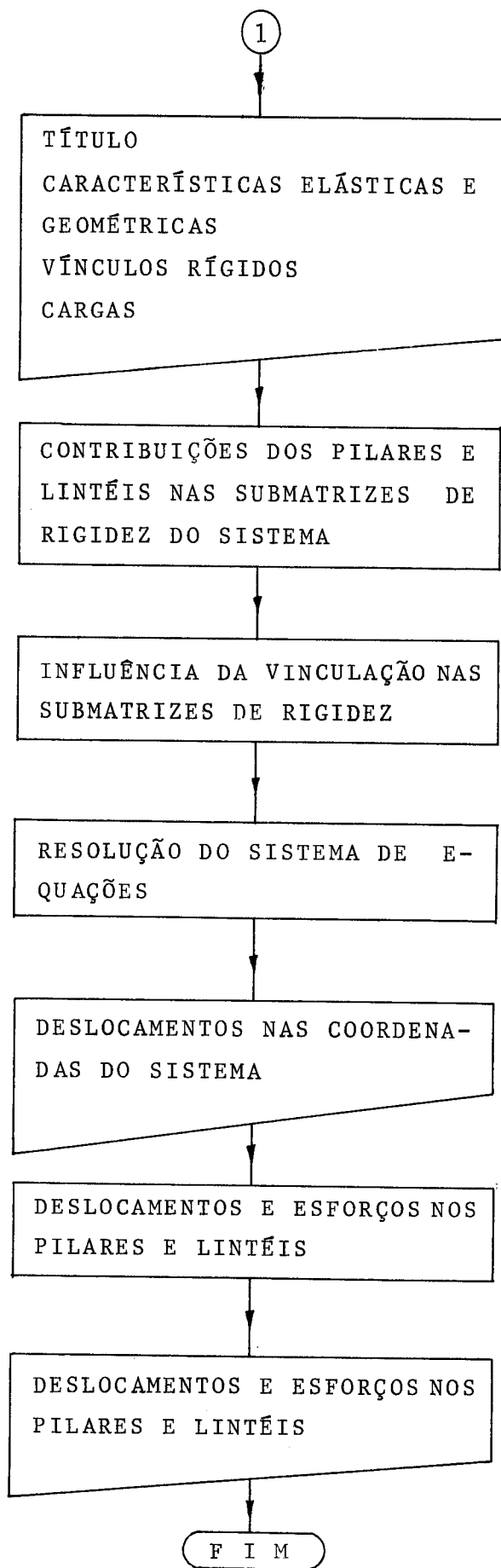
Usando-se sequencialmente as equações (III.36), (III.26) e (III.24), os esforços e deslocamentos dos lintéis são determinados.

### III.8 - Programa para o cálculo automático

Com base no exposto, foi escrito um programa em linguagem FORTRAN para o cálculo de edifícios constituídos por paredes planas de secção delgada.

#### III.8.1 - Fluxo de processamento





### III.8.2 - Divisão do programa

Devido a necessidade de utilização em computadores de pequeno porte, o programa foi dividido em quatro outros, que são ligados através da declaração CALL LINK.

Os programas e sub-programas escritos foram os seguintes:

- DADOS - Programa para ler, imprimir e arquivar em disco: as características geométricas da estrutura em planta e elevação; características elásticas e geométricas das paredes e lintéis; vinculação externa, carregamento nas lajes e formação do vetor carregamento do sistema.
- RIGDZ - Programa para formar e arquivar em disco, as submatrizes de rigidez do sistema a partir das contribuições dos pilares, lintéis e elementos da fundação.
- RESOL - Programa para resolver o sistema de equações lineares pelo método de GAUSS, com formação sucessiva da matriz principal.
- ESFOR - Programa para determinar os deslocamentos e esforços nos pilares e lintéis.
- ESFL - Subprograma para cálculo dos esforços nos lintéis a partir dos deslocamentos.
- RIGL - Subprograma para formação da matriz de rigidez dos lintéis.
- ESFP - Subprograma para cálculo dos esforços nos pilares a partir dos seus deslocamentos.
- RIGP - Subprograma para formação da matriz de rigidez dos pilares.
- ZERO - Subprograma para zerar uma matriz quadrada.

### III.8.3 - Entrada de dados

Os dados são fornecidos através de grupos de cartões, perfurados na ordem especificada a seguir:

#### Grupo 1 - Comentários

Três cartões para indicações sobre a estrutura: título, unidades usadas, etc. Formato 20A4.

#### Grupo 2 - Estrutura em planta

Um cartão contendo: número de nós, número de andares, número de paredes, número de lintéis e o número de nós rígidos. Formato 5I3.

#### Grupo 3 - Vinculação externa

Cartões com os números dos nós que são rígidos na base. Caso não exista nós rígidos ou todos sejam rígidos, esses cartões não devem ser fornecidos. Formato 26I3.

#### Grupo 4 - Alturas dos andares

São fornecidas as alturas dos andares sucessivos a partir do andar da base. Formato 13F6.2.

#### Grupo 5 - Coordenadas dos nós em planta

Cada cartão deve conter: o número do nó, a coordenada X e a coordenada Y. Formato I3, 2F8.2.

#### Grupo 6 - Características das paredes

Um cartão contendo: número da parede, nó inicial, nó final (definindo o sentido dos esforços), módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson para consideração das deformações por força cortante (nulo se não consideradas), coeficiente de Poisson para rigidez à torção (nulo se despreza

da), rigidez a rotação da base e rigidez axial da base (arbitrários quando a base for rígida). Formato 3I3, 5E10.2.

Cartões com a espessura da parede nos diversos andares. Formato 13F6.2.

Obs.: Nessa ordem são fornecidas as características de cada parede.

#### Grupo 7 - Características dos lintéis

Um cartão contendo: número do lintel, nó inicial, nó final, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson para consideração das deformações por força cortante (nulo se desprezadas). Formato 3I3, 2E10.2.

Cartões com as dimensões da secção transversal do lintel, espessura e altura, perfurados por pares para cada nível de laje (incluindo a da base). Uma dimensão nula equivale a não existência do lintel naquele nível. Formato 13F6.2.

Obs.: Nessa ordem são fornecidos os dados para cada lintel.

#### Grupo 8 - Cargas horizontais

Um cartão contendo o número de andares carregados com cargas horizontais. Formato I3.

Cartões contendo: o número do andar, força segundo OX, força segundo OY e momento torçor. Formato I3, 3F8.2.

#### Grupo 9 - Cargas verticais

Um cartão contendo o número de cargas verticais. Formato I3.

Cartões com: número do andar, nó (em planta) em que atua a carga e o valor da carga. Formato 2I3, F8.2.

O programa está dimensionado para: 12 nós em planta, 20 andares e 6 paredes. Estruturas maiores podem ser re

solvidas, bastando apenas alterar as dimensões das matrizes e vetores. O limite dependerá tão somente da capacidade do computador a ser usado.

### III.8.4 - Listagem e exemplo de impressão de resultados

Neste item é apresentada uma listagem do programa, com os resultados obtidos no cálculo do edifício constituído por dois núcleos contraventados por lintéis, mostrado em planta na Figura III.10.

O edifício possui dez andares com pé-direito de 3,0m, e é submetido a um momento torçor uniformemente distribuído de 3,0t.m/m e um momento torçor concentrado no topo de 10,0t.m, ambos positivos.

A fundação é rígida, as paredes têm a mesma espessura de 0,15m e os lintéis têm espessura igual à das paredes e altura de 0,30m.

Para o módulo de elasticidade adota-se o valor de  $2,0 \times 10^6 \text{ t/m}^2$  e o coeficiente de Poisson o valor 0,167.

As deformações por força cortante foram desprezadas nas paredes e nos lintéis:

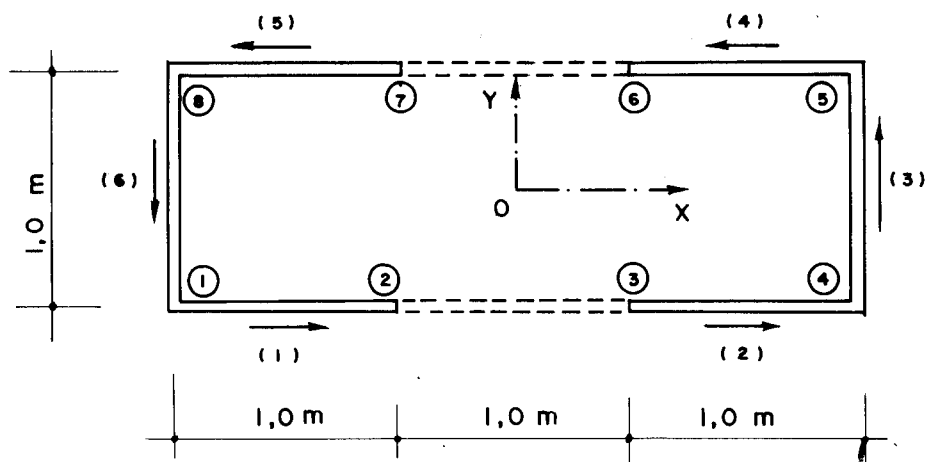


FIG. III-10 - EDIFÍCIO COM DOIS NÚCLEOS



PAGE 1 JCRGE

// JOB T

JORGE

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0016	0016	0000
		0048	0001

V2 M10 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

\*ONE WORD INTEGERS

\*EXTENDED PRECISICN

\*LIST SCURCE PROGRAM

```

C      SUBRCTINA ESFORCOS DO LINTEL
C      NCVEMBR / 1981 - DISSERTACAO DE MESTRADO
C      J C R G E L I M A C O S T A
      SUBRCUTINE ESFL(L,J,A,E,MI,BL,BR,D,ME,MD,Q)
      REAL L,J,ME,MD,MI,D(6)
      IF(MI)5,5,10
5      F=0.
      GC TC 15
10     F=(2.4+2.2*MI)*J/(A*L*L)
15     FF=E*J/(L*(0.5+6.*F))
      AA=2.+6.*F
      BB=3.-AA
      CC=3.*(D(2)-D(3))/L
      DD=(D(2)-D(1))/BL
      EE=(D(4)-D(3))/BR
      ME=-FF*(CC+AA*DD+BB*EE)
      MD=FF*(CC+AA*EE+BB*DD)
      Q=(MD-ME)/L
      RETURN
      END

```

FEATURES SUPPCRTED  
 ONE WORD INTEGERS  
 EXTENDED PRECISICN

CCRE REQUIREMENTS FOR ESFL  
 CCMMCN 0 VARIABLES 32 PROGRAM 212

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0035 (HEX)

END OF CCMPILATION

// DUP

```

*STORE      WS UA ESFL
CART ID 0016  DE ADDR 496E  DB CNT 0011

```

// FOR

\*EXTENDED PRECISICN

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SCURCE PROGRAM

```

C      SUBRCTINA RIGIDEZ DO LINTEL
C      NCVEMBR/1981-DISSERTACAO DE MESTRADO
C      J C R G E L I M A C O S T A
      SUBRCUTINE RIGL(C,J,A,E,MI,BL,BR,R)
      REAL C,J,MI,D(6),R(6,6)
      DC 10 L=1,4
      DC 5 K=1,4

```

PAGE 2 JCRGE

```

5      D(K)=0.
      D(L)=1.
      CALL ESFL(C,J,A,E,MI,BL,BR,D,FE,FD,Q)
      R(1,L)=FE/BL
      R(2,L)=C-R(1,L)
      R(3,L)=-C-FD/BR
10     R(4,L)=FD/BR
      RETURN
      END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR RIGL  
COMMON 0 VARIABLES 36 PROGRAM 148

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 002C (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE WS UA RIGL  
CARD ID 0016 DB ADDR 497F DB CNT 0008

// FOR

```

*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
C      SUBRTINA ESFORCOS DO PILAR
C      NCVEMBR/1981-DISSERTACAO DE MESTRADO
C      JCRGE LIMA COSTA
      SUBROUTINE ESFP(H,J,A,E,MI,C,D,ME,MD,Q,N)
      REAL J,MI,ME,MD,Q,N,D(6)
      DD=D(1)
      D(1)=(D(2)-DD)/C
      D(2)=- (DD+D(2))*0.5
      DD=D(3)
      D(3)=-D(5)
      D(5)=(DD+D(4))*0.5
      D(4)=(DD-D(4))/C
      IF(MI)5,5,10
5      F=0.
      GCTC 15
10     F=(2.4+2.2*MI)*J/(A*H*H)
15     FF=E*J/(H*(1.+12.*F))
      AA=(D(6)+D(3))*6.*FF/H
      BB=4.*FF*(1.+3.*F)
      CC=2.*FF*(1.-6.*F)
      N=(D(5)+D(2))*E*A/H
      ME=AA+BB*D(1)-D(4)*CC
      MD=-AA-CC*D(1)+BB*D(4)
      G=(ME-MD)/H
      RETURN
      END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

PAGE 2 JCRGE

```
5      D(K)=0.
      D(L)=1.
      CALL ESFL(C,J,A,E,MI,BL,BR,D,FE,FD,Q)
      R(1,L)=FE/BL
      R(2,L)=C-R(1,L)
      R(3,L)=-C-FD/BR
10     R(4,L)=FD/BR
      RETURN
      END
```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR RIGL  
COMMON 0 VARIABLES 36 PROGRAM 148

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 002C (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

```
*STORE      WS UA RIGL
CART ID 0016 DB ADDR 497F DB CNT 0008
```

// FOR

```
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
C      SUBRTINA ESFORCOS DO PILAR
C      NOVEMBRC/1981-DISSERTACAO DE MESTRADO
C      J C R G E L I M A C O S T A
      SUBROUTINE ESFP(H,J,A,E,MI,C,D,ME,MD,Q,N)
      REAL J,MI,ME,MD,Q,N,D(6)
      DD=C(1)
      D(1)=(D(2)-DD)/C
      D(2)=- (DD+D(2))*0.5
      DD=D(3)
      D(3)=-D(5)
      D(5)=(DD+D(4))*0.5
      D(4)=(DD-D(4))/C
      IF(MI)5,5,10
5      F=0.
      GCTC 15
10     F=(2.4+2.2*MI)*J/(A*H*H)
15     FF=E*J/(H*(1.+12.*F))
      AA=(D(6)+D(3))*6.*FF/H
      BB=4.*FF*(1.+3.*F)
      CC=2.*FF*(1.-6.*F)
      N=(D(5)+D(2))*E*A/H
      ME=AA+BB*D(1)-D(4)*CC
      MD=-AA-CC*D(1)+BB*D(4)
      G=(ME-MD)/H
      RETURN
      END
```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

PAGE 3 JCRGE

CORE REQUIREMENTS FOR ESFP  
COMMON 0 VARIABLES 30 PROGRAM 320

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 003C (HEX)

END OF COMPIATION

// DUP

\*STORE WS UA ESFP  
CART ID 0016 DB ADDR 498A DB CNT 0019

// FOR

\*EXTENDED PRECISION

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

C SUBRTINA RIGIDEZ DE PILAR  
C NOVEMBRO/1981-DISSERTACAO DE MESTRADO  
C J C R G E L I M A C O S T A

SUBROUTINE RIGP(H,J,A,E,MI,C,R)

REAL D(6),J,MI,N,R(6,6)

DC 10 L=1,6

DC 5 K=1,6

5 D(K)=0.

D(L)=1.

CALL ESFP(H,J,A,E,MI,C,D,FE,FD,Q,N)

N=N\*0.5

R(1,L)=-FE/C-N

R(2,L)=FE/C-N

R(3,L)=FD/C+N

R(4,L)=-FD/C+N

R(5,L)=-C

10 R(6,L)=C

RETURN

END

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR RIGP  
COMMON 0 VARIABLES 38 PROGRAM 174

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0031 (HEX)

END OF COMPIATION

// DUP

\*STORE WS UA RIGP  
CART ID 0016 DB ADDR 49A3 DB CNT 0000

// FOR

\*EXTENDED PRECISION

\*ONE WORD INTEGERS

\*LIST SOURCE PROGRAM

SUBROUTINE ZERO(A,N)

DIMENSION A(15,15)

DC 5 L=1,N

PAGE 4 JCRGE

5 DC 5 K=1,N  
A(L,K)=0.  
RETURN  
END

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR ZERO  
COMMON 0 VARIABLES 4 PROGRAM 52

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0008 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE WS UA ZERC  
CART ID 0016 DB ADDR 4980 DB CNT 0004

// FOR

\*EXTENDED PRECISION  
\*ONE WORD INTEGERS  
\*ICCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)  
\*LIST SOURCE PROGRAM

C SUBMATRIZES DE RIGIDEZ DO SISTEMA  
C NOVEMBRC/1981-DISSERTACAO DE MESTRADO  
C J C R G E L I M A C O S T A  
REAL MI,V(3),H(21),ESP(21),RSI(15,15),A(15,15)  
DIMENSION IV(2),NL(4),R(6,6)  
COMMON NE,NS,NA,NNCS,NPAR,NLIN,NNRI,NI(6),NF(6),COM(6),NORI(12)  
\*,P(315)  
DEFINE FILE 8(60,300,U,L8),9(42,250,U,L9)  
DEFINE FILE 11(1,90,U,L11),6(6,120,U,L6),7(5,200,U,L7)  
READ(11\*1)H  
NC=NNCS+3

C-----

C CONTRIBUICAO DCS PILARES  
DC 60 NP=1,NPAR  
CALL ZERC(A,NC)  
READ(6\*NP)V,E,MI,T,RR,RV,ESP  
T=E/(6.\*(1.+T))  
IV(1)=NI(NP)  
IV(2)=NF(NP)  
AX=CCM(NP)  
DC 55 I=1,NA  
IF(ESP(I))55,55,3  
3 AP=AX\*ESP(I)  
TT=AP\*ESP(I)\*ESP(I)\*T/H(I)  
XJ=AP/12.\*AX\*AX  
CALL RIGP(H(I),XJ,AP,E,MI,AX,R)  
IF(NP-1)5,5,10  
5 CALL ZERO(RSI,NC)  
GC TC 15  
10 READ(8\*3\*I-2)RSI  
15 DC 25 L=1,3  
LL=NNCS+L  
DC 20 K=1,3  
KK=NNCS+K

PAGE 5 JCRGE

```
RSI(KK,LL)=RSI(KK,LL)+R(6,5)*V(L)*V(K)
20 A(KK,LL)=R(5,5)*V(L)*V(K)
DC 25 K=1,2
KK=IV(K)
RSI(KK,LL)=RSI(KK,LL)+R(K+2,5)*V(L)
25 A(KK,LL)=R(K,5)*V(L)
DC 35 L=1,2
LL=IV(L)
DC 30 K=1,3
KK=NNCS+K
RSI(KK,LL)=RSI(KK,LL)+R(6,L)*V(K)
30 A(KK,LL)=R(5,L)*V(K)
DC 35 K=1,2
KK=IV(K)
RSI(KK,LL)=RSI(KK,LL)+R(K+2,L)
35 A(KK,LL)=R(K,L)
RSI(NC,NC)=RSI(NC,NC)-TT
A(NC,NC)=A(NC,NC)+TT
WRITE(8*3*I-2)RSI
IF(NP-1)41,37,41
37 IF(I-1)41,39,41
39 WRITE(9*2*I-1)((A(L,K),K=1,L),L=1,NC)
GC TC 45
41 READ(9*2*I-1)((RSI(L,K),K=1,L),L=1,NC)
DC 43 L=1,NC
DC 43 K=1,L
43 RSI(L,K)=RSI(L,K)+A(L,K)
WRITE(9*2*I-1)((RSI(L,K),K=1,L),L=1,NC)
45 DC 47 L=1,2
LL=IV(L)
DC 47 K=1,3
KK=NNCS+K
47 A(KK,LL)=-A(KK,LL)
IF(NP-1)51,49,51
49 WRITE(9*2*I+1)((A(L,K),K=1,L),L=1,NC)
GC TC 55
51 READ(9*2*I+1)((RSI(L,K),K=1,L),L=1,NC)
DC 53 L=1,NC
DC 53 K=1,L
53 RSI(L,K)=RSI(L,K)+A(L,K)
WRITE(9*2*I+1)((RSI(L,K),K=1,L),L=1,NC)
55 CCNTINUE
```

C-----

```
C          CCNTRIBUICAO DA FUNDACAO
IF(RR+RV)60,60,57
57 READ(9*1)((A(L,K),K=1,L),L=1,NC)
RR=RR/(AX*AX)
RV=RV*0.25
LL=IV(1)
KK=IV(2)
A(LL,LL)=A(LL,LL)+RV+RR
A(LL,KK)=A(LL,KK)+RV-RR
A(KK,LL)=A(LL,KK)
A(KK,KK)=A(KK,KK)+RV+RR
WRITE(9*1)((A(L,K),K=1,L),L=1,NC)
60 CCNTINUE
```

C-----

```
C          CCNTRIBUICAO DOS LITEIS
IF(NLIN)82,82,65
65 NAF=NA+1
```

PAGE 6 JCRGE

```

DC 80 I=1,NLIN
READ(7'I)E,MI,BL,BR,NL,C,(ESP(K),H(K),K=1,NAF)
DC 75 L=1,NAF
AP=ESP(L)*H(L)
IF(AP)75,75,67
67 XJ=AP/12.*H(L)*H(L)
READ(9'2*L-1)((A(J,K),K=1,J),J=1,NC)
CALL RIGL(C,XJ,AP,E,MI,BL,BR,R)
DC 70 K=1,4
KK=NL(K)
DC 70 J=1,4
JJ=NL(J)
70 A(JJ,KK)=A(JJ,KK)+R(J,K)
WRITE(9'2*L-1)((A(J,K),K=1,J),J=1,NC)
75 CCNTINUE
80 CCNTINUE

```

C-----

C INFLUENCIA DOS VINCULOS

```

82 READ(8'1)RSI
READ(9'1)((A(L,K),K=1,L),L=1,NC)
IF(NNRI-NNCS)95,85,85
85 CALL ZERC(RSI,NC)
CALL ZERC(A,NC)
DC 90 I=1,NC
90 A(I,I)=1.
GC TC 130
95 DC 110 L=1,3
LL=NNCS+L
DC 100 J=1,NC
A(LL,J)=0.
A(J,LL)=0.
100 RSI(J,LL)=0.
110 A(LL,LL)=1.
IF(NNRI)130,130,115
115 DC 125 L=1,NNRI
LL=NCRI(L)
DC 120 J=1,NC
A(LL,J)=0.
A(J,LL)=0.
120 RSI(J,LL)=0.
125 A(LL,LL)=1.
130 WRITE(8'1)RSI
WRITE(9'1)((A(L,K),K=1,L),L=1,NC)

```

C-----

```

CALL LINK(RESCL)
END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION  
ICCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON 994 VARIABLES 1696 PROGRAM 1726

END OF COMPIATION

// DUP

\*STORE WS UA RIGCZ

PAGE 7 JCRGE

CART ID 0016 DB ACDR 49B4 DB CNT 0073

```
// FCR
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
*ICCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)
*LIST SOURCE PROGRAM
      DIMENSICN A(15,30),RII(15,15),RSI(15,15)
      CCMCN NE,NS,NA,NNOS,NPAR,NLIN,NNRI,NI(6),NF(6),COM(6),NORI(12),P(
*315)
C      RESCLUCAC DO SISTEMA DE EQUACOES SUCESSIVAS
C      NCVEMBR/1981-DISSERTACAO DE MESTRADO
C      J C R G E L I M A C O S T A
      DEFINE FILE 8(60,300,U,L8),9(42,250,U,L9)
      DEFINE FILE 11(1,90,U,L11),6(6,120,U,L6),7(5,200,U,L7)
      NC=NNCS+3
      NAF=NA+1
      NCA=NC+1
      NCB=NC+NC
      NCC=NCB
      NCI=NC-1
      NCT=NC*NAF
C-----
C      LEITURA DA SUBMATRIZ NO DISCO
      READ(9*1)((RII(L,K),K=1,L),L=1,NC)
      DC 2 L=1,NC
      DC 2 K=1,L
      2      RII(K,L)=RII(L,K)
      DC 115 I=1,NAF
      II=NC*(I-1)
      DC 5 L=1,NC
      DC 5 K=1,NC
      5      A(L,K)=RII(L,K)
      IF(I-NAF)10,25,25
      10     READ(8*3*I-2)RSI
      READ(9*2*I+1)((RII(L,K),K=1,L),L=1,NC)
      DC 20 L=1,NC
      DC 15 K=1,L
      15     RII(K,L)=RII(L,K)
      DC 20 K=1,NC
      KK=K+NC
      20     A(L,KK)=RSI(K,L)
      GC TO 30
      25     NCC=NC
C-----
C      ANULACAC DA BANCA DA SUBMATRIZ
      30     DC 112 L=1,NC
      JJ=II+L
      PI=0.
      DC 40 LL=L,NC
      IF(ABS(A(LL,L))-PI)40,40,35
      35     LP=LL
      PI=ABS(A(LL,L))
      40     CONTINUE
      IF(PI)55,45,55
      45     WRITE(NS,50)
      50     FCRMAT(//,10X,'SISTEMA SINGULAR')
      CALL EXIT
      55     IF(LP=L)60,70,60
      60     IL=II+LP
```



PAGE 8 JCRGE

DC 65 LL=L,NCC  
G=A(L,LL)  
A(L,LL)=A(LP,LL)  
65 A(LP,LL)=G  
G=P(IL)  
P(IL)=P(JJ)  
P(JJ)=G  
70 IL=L+1  
IF(L-NC)72,87,87

C-----

C ELIMINACAC GAUSSIANA

72 DC 85 LL=IL,NC  
IF(A(LL,L))75,85,75  
75 CC=A(LL,L)/A(L,L)  
DC 80 K=IL,NCC  
80 A(LL,K)=A(LL,K)-CC\*A(L,K)  
LP=LL+II  
P(LP)=P(LP)-CC\*P(JJ)  
85 CCNTINUE  
IF(I-NAF)90,112,112  
87 IF(I-NAF)90,125,125  
90 DC 110 LL=1,NC  
IF(RSI(LL,L))95,110,95  
95 CC=RSI(LL,L)/A(L,L)  
DC 100 K=L,NC  
100 RSI(LL,K)=RSI(LL,K)-CC\*A(L,K)  
DC 105 K=1,NC  
KK=NC+K  
105 RII(LL,K)=RII(LL,K)-CC\*A(L,KK)  
LP=II+NC+LL  
P(LP)=P(LP)-CC\*P(JJ)  
110 CCNTINUE  
112 CCNTINUE  
WRITE(9\*2\*I-1)((A(L,K),K=L,NC),L=1,NC)  
WRITE(8\*3\*I-2)((A(L,K),K=NCA,NCB),L=1,NC)  
115 CCNTINUE

C-----

C DETERMINACAC SUSCESSIVA DOS DESLOCAMENTOS

125 P(NCT)=P(NCT)/A(NC,NC)  
DC 135 L=1,NCI  
NCT=NCT-1  
PI=0.  
LL=NC-L  
KK=LL+1  
IL=NCT  
DC 130 K=KK,NC  
IL=IL+1  
130 PI=PI+A(LL,K)\*P(IL)  
135 P(NCT)=(P(NCT)-PI)/A(LL,LL)  
DC 145 I=1,NA  
II=NAF-I  
READ(8\*3\*II-2)((A(L,K),K=NCA,NCB),L=1,NC)  
READ(9\*2\*II-1)((A(L,K),K=L,NC),L=1,NC)  
DC 145 L=1,NC  
LL=NC-L+1  
NCT=NCT-1  
IL=NCT  
PI=0.  
KK=LL+1  
DC 140 K=KK,NCB

PAGE 9 JCRGE

```

      IL=IL+1
140  PI=PI+A(LL,K)*P(IL)
      P(NCT)=(P(NCT)-PI)/A(LL,LL)
145  CCCONTINUE
      WRITE(NS,170)

```

C-----

```

C      DESLCCAMENTOS DAS LAJES
      DC 150 I=1,NAF
      K=NC*I
      PI=P(K)
      G=P(K-1)
      CC=P(K-2)
150  WRITE(NS,175)I,CC,G,PI
      WRITE(NS,180)(I,I=1,NNOS)

```

C-----

```

C      DESLCCAMENTOS VERTICAIS DOS NOS
      DC 155 I=1,NAF
      K=(I-1)*NC+1
      KK=K+NNCS-1
155  WRITE(NS,185)I,(P(J),J=K,KK)
170  FCRMAT('I',////,20X,'DESLOCAMENTOS DAS LAJES',/,20X,23('-'),//,10X
*,'LAJE',8X,'DESLOC. X',6X,'DESLOC. Y',8X,'ROTACAO')
175  FCRMAT(/,10X,I3,1X,E17.5,2E15.5)
180  FCRMAT('I',////,20X,'DESLOCAMENTO VERTICAL DOS NOS (+PARA CIMA)',/
*,20X,42('-'),//,10X,'LAJE',6X,8(4X,'NO',I2,4X)/8(4X,'NO',I2,4X))
185  FCRMAT(/,10X,I3,6X,8E12.3,/,8E14.3)

```

C-----

```

      CALL LINK(ESFCR)
      END

```

FEATURES SUPPORTED  
 ONE WORD INTEGERS  
 EXTENDED PRECISION  
 ICCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
 COMMON 994 VARIABLES 2772 PROGRAM 1554

END OF COMPIATION

// DUP

```

*STORE      WS UA RESOL
CART ID 0016  DB ADDR 4A27  DB CNT 0065

```

// FOR

```

*ICCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
C      ESFCRCCS NCS ELEMENTOS
C      NOVEMBRO / 1981- DISSERTACAO DE MESTRADO
C      J C R G E L I M A C O S T A
      REAL NI,NC,H(21),C(6)
      DIMENSION ESP(21),NL(4)
      COMMON NE,NS,NA,NNOS,NPAR,NLIN,NNRI,NI(6),NF(6),COM(6),NORI(12),P(
*315)
      DEFINE FILE 8(60,300,U,L8),9(42,250,U,L9)
      DEFINE FILE 11(1,90,U,L11),6(6,120,U,L6),7(5,200,U,L7)
      READ(11'1)H

```

PAGE 10 JCRGE

NC=NNCS+3

```

C -----
C      ESFCRCCS NCS PILARES
      DC 10 NP=1,NPAR
      CC=CCM(NP)
      READ(6*NP)A,B,C,E,MI,T,RR,RV,ESP
      WRITE(NS,34)NP
      DC 10 I=1,NA
      IF(ESP(I))10,10,3
3      AP=CC*ESP(I)
      XJ=AP*CC*CC/12.
      KA=NC*(I-1)
      DC 5 K=1,2
      KB=(K-1)*NC+KA
      II=KB+NI(NP)
      JJ=KB+NF(NP)
      LL=KB+1+NNCS
      D(2*K-1)=P(II)
      D(2*K)=P(JJ)
5      D(K+4)=P(LL)*A+P(LL+1)*B+P(LL+2)*C
      CALL ESFP(H(I),XJ,AP,E,MI,CO,D,F1,F2,Q,NO)

      WRITE(NS,32)I,Q,NC,F1,F2
10     CCNTINUE
C -----

```

```

C      ESFCRCCS NCS LINTEIS
      IF(NLIN)40,40,15
15     NAF=NA+1
      DC 25 L=1,NLIN
      READ(7*L)E,MI,BL,BR,NL,C,(ESP(K),H(K),K=1,NAF)
      WRITE(NS,36)L
      DC 25 I=1,NAF
      CC=H(I)
      AP=CC*ESP(I)
      IF(AP)25,25,17
17     XJ=AP*CC*CC/12.
      KA=NC*(I-1)
      DC 20 K=1,4
      LL=KA+NL(K)
20     D(K)=P(LL)
      CALL ESFL(C,XJ,AP,E,MI,BL,BR,D,F1,F2,Q)
      WRITE(NS,30)I,Q,F1,F2
25     CCNTINUE
C -----

```

```

30     FCRMAT(/,10X,I3,F17.3,F16.3,F15.3)
32     FCRMAT(/,10X,I3,F18.3,1X,3F13.3)
34     FCRMAT('1',////,20X,'ESFORCOS NA PAREDE-',I2,/,20X,21(' - '),///,10X
*,'ANDAR',5X,'F. CORTANTE',5X,'F. NORMAL',6X,'M. BASE',6X,'M. TOPO'
*)
36     FCRMAT('1',////,20X,'ESFORCOS NO LINTEL-',I2/20X,21(' - '),///,10X,'
*LAJE',5X,'F. CORTANTE',5X,'M. ESQUERDA',5X,'M. DIREITA')
40     CALL EXIT
      END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION  
ICCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON 994 VARIABLES 268 PROGRAM 650

PAGE 11 JCRGE

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE WS UA ESFCR  
CART ID 0016 DB ACDR 4ABC DB CNT 002F

// FCR

\*EXTENDED PRECISION  
\*ONE WORD INTEGERS  
\*ICCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)  
\*LIST SOURCE PROGRAM  
C LEITURAS E ARQUIVAMENTO EM DISCOS  
C NOVEMBRO / 1981 - DISSERTACAO DE MESTRADO  
C J C R G E L I M A C O S T A  
REAL MI,X(12),Y(12),H(21),ESP(21)  
DIMENSION NL(4),CC(2)  
COMMON NE,NS,NA,NNCS,NPAR,NLIM,NNRI,NI(6),NF(6),COM(6),NORI(12),P(  
\*315)  
DEFINE FILE 8(60,300,U,L8),9(42,250,U,L9)  
DEFINE FILE 11(1,90,U,L11),6(6,120,U,L6),7(5,200,U,L7)  
NE=2  
NS=5

C-----

C ESTRUTURA EM PLANTA E ELEVACAO  
READ(NE,95)(P(I),I=1,60)  
WRITE(NS,97)(P(I),I=1,60)  
READ(NE,99)NNCS,NA,NPAR,NLIM,NNRI  
WRITE(NS,101)NNCS,NA,NPAR,NLIM,NNRI  
NAF=NA+1  
IF(NNRI)30,30,5  
5 IF(NNRI-NNCS)10,15,15  
10 READ(NE,99)(NCRI(I),I=1,NNRI)  
GC TC 25  
15 DC 20 I=1,NNCS  
20 NCRI(I)=I  
25 WRITE(NS,103)(NCRI(I),I=1,NNRI)  
30 READ(NE,105)(H(I),I=1,NA)  
WRITE(NS,107)(I,H(I),I=1,NA)  
READ(NE,135)(K,X(K),Y(K),I=1,NNOS)  
WRITE(NS,113)(K,X(K),Y(K),K=1,NNOS)

C-----

C CARACTERISTICAS DAS PAREDES  
DC 35 I=1,NPAR  
READ(NE,111)K,N,NN,E,T,MI,RR,RV  
READ(NE,105)(ESP(J),J=1,NA)  
WRITE(NS,115)K,N,NN,E,T,RR,RV  
WRITE(NS,117)(J,ESP(J),J=1,NA)  
 $CCM(K) = \sqrt{(X(NN) - X(N))^2 + (Y(NN) - Y(N))^2}$   
A = (X(NN) - X(N)) / CCM(K)  
B = (Y(NN) - Y(N)) / CCM(K)  
C = B \* X(N) - A \* Y(N)  
NI(K) = N  
NF(K) = NN  
35 WRITE(6\*K)A,B,C,E,MI,T,RR,RV,ESP  
WRITE(11\*1)H

C-----

C CARACTERISTICAS DOS LINTEIS - NOS DE LIGACAO  
IF(NLIM)70,70,40  
40 DC 65 I=1,NLIM

PAGE 12 JCRGE

```
      READ(NE,111)N,NL(1),NL(2),E,MI
      WRITE(NS,121)N,NL(1),NL(2),E,MI
      DC 62 K=1,2
      DC 60 NP=1,NPAR
      IF(NL(K)-NI(NP))50,45,50
45     NL(K+2)=NF(NP)
      CC(K)=CCM(NP)
      GC TC 62
50     IF(NL(K)-NF(NP))60,55,60
55     NL(K+2)=NI(NP)
      CC(K)=CCM(NP)
      GC TC 62
60     CCNTINUE
62     CCNTINUE
      II=NL(1)
      LL=NL(2)
      C=SQRT((X(LL)-X(II))**2+(Y(LL)-Y(II))**2)
      READ(NE,105)(ESP(L),H(L),L=1,NAF)
      WRITE(NS,123)(L,ESP(L),H(L),L=1,NAF)
65     WRITE(7'N)E,MI,CO,NL(3),II,LL,NL(4),C,(ESP(K),H(K),K=1,NAF)
C-----
70     NC=(NNGS+3)*NAF
      DC 75 I=1,NC
75     P(I)=0.
C-----
C      CARGAS NAS LAJES
      READ(NE,99)NAC
      IF(NAC)80,90,80
80     WRITE(NS,125)
      DC 85 I=1,NAC
      READ(NE,109)N,A,B,C
      WRITE(NS,127)N,A,B,C
      NC=(NNGS+3)*N+NNGS+1
      P(NC)=A
      P(NC+1)=B
85     P(NC+2)=C
C-----
C      CARGAS VERTICAIS NOS NOS
90     READ(NE,99)NAC
      IF(NAC)94,94,92
92     WRITE(NS,129)
      DC 93 I=1,NAC
      READ(NE,133)N,NN,A
      NC=(NNGS+3)*N+NN
      P(NC)=A
93     WRITE(NS,131)N,NN,A
C-----
94     CALL LINK(RIGCZ)
95     FCRMAT(20A4)
97     FCRMAT('1',4(//),3(//,10X,20A4))
99     FCRMAT(26I3)
101    FCRMAT(///,20X,'DADOS DA ESTRUTURA'/20X,18(' '),////,10X,'NUMERO D
      *E NCS-',I2//10X,'NUMERO DE ANDARES-',I3//10X,'NUMERO DE PAREDES-',
      *I2//10X,'NUMERO DE LINTEIS-',I2//10X,'NUMERO DE NOS RIGIDOS-',I2)
103    FCRMAT(///,10X,'NCS RIGIDOS',26I3)
105    FCRMAT(13F6.2)
107    FCRMAT(///,10X,'ALTURA DOS ANDARES-',5X,'ANDAR',5X,'ALTURA',20(//,
      *34X,I3,7X,F6.2))
109    FCRMAT(I3,3F8.2)
111    FCRMAT(3I3,5E10.2)
```

PAGE 13 JCRGE

```

113 FCRMAT(///,10X,'NCS EM PLANTA-',5X,'NO',5X,'COORD. X',5X,'COORD. Y
* ',20(//,29X,I2,2F13.2))
115 FCRMAT(///10X,'PAREDE-'I2/10X,9('-'')///10X,'NO INICIAL-'I2//10X,
*'NC FINAL-',I2//10X,'MOD. ELASTICIDADE-',E11.3//10X,'COEF. POISSON
*-',F6.3//10X,'RIG. ROTACAO DA FUNDACAO-',E11.3//10X,'RIG. AXIAL DA
* FUNDACAC-',E11.3)
117 FCRMAT(/,10X,'ESPESSURAS-',5X,'ANDAR',5X,'ESPESSURA',20(//,25X,I3,
*7X,F9.2))
121 FCRMAT(///10X,'LINTEL-'I2/10X,9('-'')///10X,'NO INICIAL-'I2//10X,
*'NC FINAL-',I2//10X,'MOD. ELASTICIDADE-',E11.3//10X,'COEF. POISSON
*-',F6.3)
123 FCRMAT(/,10X,'DIMENSÕES-',5X,'LAJE',5X,'DIMENSÕES (B*H)',21(//,25X
*,I3,6X,F6.2,' * ',F6.2))
125 FCRMAT(///,10X,'CARGA LATERAL-',5X,'LAJE',5X,'FORÇA OX',5X,'FORÇA
* CY',5X,'M. TORÇOR',/,10X,13('-''))
127 FCRMAT(/,29X,I3,F14.2,F13.2,F14.2)
129 FCRMAT(///10X,'CARGA VERTICAL-',5X,'ANDAR',5X,'NO',5X,'P(+PARA CIM
*A)')
131 FCRMAT(/,20X,I3,7X,I2,5X,F13.3)
133 FCRMAT(2I3,F8.2)
135 FCRMAT(I3,2F8.2)
END

```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION  
ICCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON 994 VARIABLES 300 PROGRAM 1620

END OF COMPIATION

// DUP

\*STORE WS UA DADCS  
CART ID 0016 DE ACCR 4ABB DB CNT 006D

// XEQ DADCS

EXEMPLO 3 - EDIFICIO COM DOIS NUCLEOS  
FORÇA CORTANTE DESPREZADA NAS DEF.  
UNIDADES - TCN. , METRO

        DADOS DA ESTRUTURA        

NUMERO DE NOS- 8  
NUMERO DE ANDARES- 10  
NUMERO DE PAREDES- 6  
NUMERO DE LINTEIS- 2  
NUMERO DE NOS RIGIDOS- 8

NOS RIGIDOS 1 2 3 4 5 6 7 8

ALTURA DOS ANDARES-	ANDAR	ALTURA
	1	3.00
	2	3.00
	3	3.00
	4	3.00
	5	3.00
	6	3.00
	7	3.00
	8	3.00
	9	3.00
	10	3.00

NOS EM PLANTA-	NO	COORD. X	COORD. Y
	1	-1.50	-0.50
	2	-0.50	-0.50
	3	0.50	-0.50
	4	1.50	-0.50
	5	1.50	0.50
	6	0.50	0.50
	7	-0.50	0.50
	8	-1.50	0.50

PAREDE- 1  
-----

NO INICIAL- 1

NO FINAL- 2

MOD. ELASTICIDADE- 0.200E 07

COEF. POISSON- 0.167

RIG. ROTACAO DA FUNDACAO- 0.200E 04

RIG. AXIAL DA FUNDACAO- 0.240E 05

ESPESSURAS-	ANDAR	ESPESSURA
	1	0.15
	2	0.15
	3	0.15
	4	0.15
	5	0.15
	6	0.15
	7	0.15
	8	0.15
	9	0.15
	10	0.15

PAREDE- 2  
-----

NO INICIAL- 3

NO FINAL- 4

MOD. ELASTICIDADE- 0.200E 07

COEF. POISSON- 0.167

RIG. ROTACAO DA FUNDACAO- 0.200E 04

RIG. AXIAL DA FUNDACAO- 0.240E 05

ESPESSURAS-	ANDAR	ESPESSURA
	1	0.15
	2	0.15
	3	0.15
	4	0.15
	5	0.15
	6	0.15
	7	0.15
	8	0.15
	9	0.15
	10	0.15



PAREDE- 3

NO INICIAL- 4

NO FINAL- 5

MOD. ELASTICIDADE- 0.200E 07

COEF. POISSON- 0.167

RIG. ROTACAO DA FUNDACAO- 0.333E 04

RIG. AXIAL DA FUNDACAO- 0.400E 05

ESPESSURAS-	ANDAR	ESPESSURA
	1	0.15
	2	0.15
	3	0.15
	4	0.15
	5	0.15
	6	0.15
	7	0.15
	8	0.15
	9	0.15
	10	0.15

PAREDE- 4

NO INICIAL- 5

NO FINAL- 6

MOD. ELASTICIDADE- 0.200E 07

COEF. POISSON- 0.167

RIG. ROTACAO DA FUNDACAO- 0.200E 04

RIG. AXIAL DA FUNDACAO- 0.240E 05

ESPESSURAS-	ANDAR	ESPESSURA
	1	0.15
	2	0.15
	3	0.15
	4	0.15
	5	0.15
	6	0.15
	7	0.15
	8	0.15
	9	0.15
	10	0.15

PAREDE- 5

NO INICIAL- 7

NO FINAL- 8

MOD. ELASTICIDADE- 0.200E 07

CCEF. POISSON- 0.167

RIG. ROTACAO DA FUNDACAO- 0.200E 04

RIG. AXIAL DA FUNDACAO- 0.240E 05

ESPESSURAS-	ANDAR	ESPESSURA
	1	0.15
	2	0.15
	3	0.15
	4	0.15
	5	0.15
	6	0.15
	7	0.15
	8	0.15
	9	0.15
	10	0.15

PAREDE- 6

NO INICIAL- 8

NO FINAL- 1

MOD. ELASTICIDADE- 0.200E 07

CCEF. POISSON- 0.167

RIG. ROTACAO DA FUNDACAO- 0.333E 04

RIG. AXIAL DA FUNDACAO- 0.400E 05

ESPESSURAS-	ANDAR	ESPESSURA
	1	0.15
	2	0.15
	3	0.15
	4	0.15
	5	0.15
	6	0.15
	7	0.15
	8	0.15
	9	0.15
	10	0.15

LINTEL- 1

NO INICIAL- 2

NO FINAL- 3

MOD. ELASTICIDADE- 0.200E 07

COEF. POISSON- 0.000

DIMENSÕES-	LAJE	DIMENSÕES (B*H)	
	1	0.15 *	0.30
	2	0.15 *	0.30
	3	0.15 *	0.30
	4	0.15 *	0.30
	5	0.15 *	0.30
	6	0.15 *	0.30
	7	0.15 *	0.30
	8	0.15 *	0.30
	9	0.15 *	0.30
	10	0.15 *	0.30
	11	0.15 *	0.30

LINTEL- 2

NO INICIAL- 6

NO FINAL- 7

MOD. ELASTICIDADE- 0.200E 07

COEF. POISSON- 0.000

DIMENSÕES-	LAJE	DIMENSÕES (B*H)	
	1	0.15 *	0.30
	2	0.15 *	0.30
	3	0.15 *	0.30
	4	0.15 *	0.30
	5	0.15 *	0.30
	6	0.15 *	0.30
	7	0.15 *	0.30
	8	0.15 *	0.30
	9	0.15 *	0.30
	10	0.15 *	0.30
	11	0.15 *	0.30

<u>CARGA LATERAL-</u>	LAJE	FORCA DX	FORCA DY	M. TORCOR
	1	0.00	0.00	9.00
	2	0.00	0.00	9.00
	3	0.00	0.00	9.00
	4	0.00	0.00	9.00
	5	0.00	0.00	9.00
	6	0.00	0.00	9.00
	7	0.00	0.00	9.00
	8	0.00	0.00	9.00
	9	0.00	0.00	9.00
	10	0.00	0.00	14.50

DESLOCAMENTOS DAS LAJES

LAJE	DESLOC. X	DESLOC. Y	ROTACAO
1	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
2	0.81012E-11	-0.76570E-09	0.25786E-02
3	0.16873E-10	-0.26884E-08	0.65369E-02
4	0.15657E-10	-0.55390E-08	0.10958E-01
5	0.41705E-11	-0.91191E-08	0.15352E-01
6	-0.18514E-10	-0.13257E-07	0.19440E-01
7	-0.54131E-10	-0.17775E-07	0.23074E-01
8	-0.10644E-09	-0.22498E-07	0.26181E-01
9	-0.16824E-09	-0.27325E-07	0.28746E-01
10	-0.23616E-09	-0.32180E-07	0.30792E-01
11	-0.29436E-09	-0.37057E-07	0.32435E-01

DESLOCAMENTO VERTICAL DJS NOS (+PARA CIMA)

LAGE	NO 1	NO 2	NO 3	NO 4	NO 5	NO 5	NO 7	NO 8
1	0.000E 00	0.000E 00	0.000E 00	0.000E 00	0.000E 00	0.000E 00	0.000E 00	0.000E 00
2	-0.620E-03	-0.770E-03	0.770E-03	0.620E-03	-0.620E-03	-0.770E-03	0.770E-03	0.620E-03
3	-0.862E-03	-0.115E-02	0.115E-02	0.862E-03	-0.862E-03	-0.115E-02	0.115E-02	0.862E-03
4	-0.942E-03	-0.127E-02	0.127E-02	0.942E-03	-0.942E-03	-0.127E-02	0.127E-02	0.942E-03
5	-0.921E-03	-0.125E-02	0.125E-02	0.921E-03	-0.921E-03	-0.125E-02	0.125E-02	0.921E-03
6	-0.846E-03	-0.115E-02	0.115E-02	0.846E-03	-0.846E-03	-0.115E-02	0.115E-02	0.846E-03
7	-0.744E-03	-0.101E-02	0.101E-02	0.744E-03	-0.744E-03	-0.101E-02	0.101E-02	0.744E-03
8	-0.629E-03	-0.865E-03	0.865E-03	0.629E-03	-0.629E-03	-0.865E-03	0.865E-03	0.629E-03
9	-0.519E-03	-0.711E-03	0.711E-03	0.519E-03	-0.519E-03	-0.711E-03	0.711E-03	0.519E-03
10	-0.411E-03	-0.591E-03	0.591E-03	0.411E-03	-0.411E-03	-0.591E-03	0.591E-03	0.411E-03
11	-0.396E-03	-0.463E-03	0.463E-03	0.396E-03	-0.396E-03	-0.463E-03	0.463E-03	0.396E-03

ESFORCOS NA PAREDE- 1

ANDAR	F. CORTANTE	F. NORMAL	M. BASE	M. TOPO
1	11.837	-69.542	19.000	-16.512
2	14.622	-31.312	23.129	-20.736
3	14.167	-9.946	21.569	-20.931
4	13.344	2.036	20.031	-20.001
5	11.999	8.614	17.806	-18.191
6	10.445	12.016	15.374	-15.962
7	8.758	13.390	12.813	-13.462
8	7.126	13.187	10.323	-11.055
9	5.174	11.393	7.664	-7.859
10	5.023	7.153	6.585	-8.483

ESFORCOS NA PAREDE- 2

ANDAR	F. CORTANTE	F. NORMAL	M. BASE	M. TOPO
1	11.837	69.542	19.000	-16.512
2	14.622	31.312	23.129	-20.736
3	14.167	9.946	21.569	-20.931
4	13.344	-2.036	20.031	-20.001
5	11.999	-8.614	17.806	-18.191
6	10.445	-12.016	15.374	-15.962
7	8.758	-13.390	12.813	-13.462
8	7.126	-13.187	10.323	-11.055
9	5.174	-11.393	7.664	-7.859
10	5.023	-7.153	6.585	-8.483

ESFORÇOS NA PAREDE- 3

ANDAR	F. CORTANTE	F. NORMAL	M. BASE	M. TOPO
1	22.284	0.000	43.772	-23.080
2	16.541	0.000	28.834	-20.789
3	13.546	0.000	21.658	-18.981
4	11.113	0.000	16.315	-17.023
5	9.206	0.000	12.566	-15.053
6	7.534	0.000	9.592	-13.010
7	5.997	0.000	7.088	-10.902
8	4.434	0.000	4.819	-8.483
9	3.068	0.000	2.800	-6.404
10	0.428	-0.000	0.399	-0.886

ESFORÇOS NA PAREDE- 4

ANDAR	F. CORTANTE	F. NORMAL	M. BASE	M. TOPO
1	11.837	-69.542	19.000	-16.512
2	14.622	-31.312	23.129	-20.736
3	14.167	-9.946	21.569	-20.931
4	13.344	2.036	20.031	-20.001
5	11.999	8.614	17.806	-18.191
6	10.445	12.016	15.374	-15.962
7	8.758	13.390	12.813	-13.462
8	7.126	13.187	10.323	-11.055
9	5.174	11.393	7.664	-7.859
10	5.023	7.153	6.585	-8.483

ESFORÇOS NA PAREDE- 5

ANDAR	F. CORTANTE	F. NORMAL	M. BASE	M. TOPO
1	11.837	69.542	19.000	-16.512
2	14.622	31.312	23.129	-20.736
3	14.167	9.946	21.569	-20.931
4	13.344	-2.036	20.031	-20.001
5	11.999	-8.614	17.806	-18.191
6	10.445	-12.016	15.374	-15.962
7	8.758	-13.390	12.813	-13.462
8	7.126	-13.187	10.323	-11.055
9	5.174	-11.393	7.664	-7.859
10	5.023	-7.153	6.585	-8.483

ESFORÇOS NA PAREDE- 6

ANDAR	F. CORTANTE	F. NORMAL	M. BASE	M. TOPO
1	22.284	0.000	43.772	-23.080
2	16.541	0.000	28.834	-20.789
3	13.546	0.000	21.658	-18.981
4	11.113	0.000	16.315	-17.023
5	9.206	0.000	12.566	-15.053
6	7.534	0.000	9.592	-13.010
7	5.997	-0.000	7.088	-10.902
8	4.434	-0.000	4.819	-8.483
9	3.068	-0.000	2.800	-6.404
10	0.428	-0.000	0.399	-0.886



ESFORCOS NO LINTEL- 1

LAJE	F. CORTANTE	M. ESQUERDA	M. DIREITA
1	0.000	0.000	0.000
2	-13.684	6.842	-6.842
3	-21.082	10.541	-10.541
4	-23.314	11.657	-11.657
5	-23.012	11.506	-11.506
6	-21.243	10.621	-10.621
7	-18.725	9.362	-9.362
8	-15.925	7.962	-7.962
9	-13.077	6.538	-6.538
10	-11.043	5.521	-5.521
11	-8.040	4.020	-4.020

ESFORCOS NO LINTEL- 2

LAJE	F. CORTANTE	M. ESQUERDA	M. DIREITA
1	0.000	0.000	0.000
2	-13.684	6.842	-6.842
3	-21.082	10.541	-10.541
4	-23.314	11.657	-11.657
5	-23.012	11.506	-11.506
6	-21.243	10.621	-10.621
7	-18.725	9.362	-9.362
8	-15.925	7.962	-7.962
9	-13.077	6.538	-6.538
10	-11.043	5.521	-5.521
11	-8.040	4.020	-4.020

### III.9 - Comparação dos resultados obtidos pelos dois processos apresentados

Neste ítem apresentam-se os resultados, obtidos pelos dois processos apresentados neste trabalho, para análise de estruturas de edifícios constituídas por núcleos estruturais sobre fundação flexível.

São analisados os edifícios constituído por apenas um núcleo contraventado por lintéis, e edifício constituído por dois núcleos contraventados por lintéis.

Para observar-se a influência da flexibilidade da fundação, são feitas duas análises para cada estrutura: a primeira considera fundação rígida e na segunda é admitida fundação em sapata sobre solo flexível.

O solo é considerado como um meio elástico, com o mesmo comportamento à tração e à compressão.

Considera-se também que a sapata de uma parede, não transmite esforço para as demais.

As estruturas analisadas são submetidas apenas à momento torçor, com a seguinte convenção:

a) A rotação será positiva se anti-horária para um observador colocado sobre o eixo vertical e olhando para a base da estrutura.

b) O momento torçor é positivo se anti-horário para o observador na mesma posição.

c) O esforço normal, nas paredes é positivo se de tração.

d) O momento fletor nas paredes é positivo se traçiona as fibras de início das setas que as orientam.

e) O esforço cortante nas paredes é positivo quando produz momento horário em um seu elemento.

f) Nos lintéis o esforço cortante é positivo se produz momento anti-horário em um seu elemento.

g) As forças nas intersecções das paredes são positivas quando produzem momentos anti-horários.

As deformações por força cortante são desprezadas tanto nas paredes como nos lintéis.

### III.9.1 - Edifício constituído por apenas um núcleo

A estrutura a ser analisada, é um edifício de vinte andares com 2,80m de pé direito, cuja secção transversal é a mostrada na Figura III.11.

O carregamento consta, de um momento torçor distribuído de 1.136,5kg.m/m e de um momento torçor concentrado no topo de 2.165kg.m ambos positivos.

As paredes têm a mesma espessura de 0,35m, e os lintéis com mesma espessura das paredes e altura de 0,45m, são localizados ao nível dos andares e admite-se a existência de um na base da estrutura.

A numeração dos nós é indicada pelos números em círculos e as setas indicam os sentidos positivos tomados para as paredes.

O módulo de elasticidade é tomado como  $2,83 \times 10^9 \text{ kg/m}^2$  e o coeficiente de Poisson 0,15, para toda a estrutura.

A análise para fundação flexível é feita considerando-se um solo de rigidez  $8 \times 10^6 \text{ kg/m}^2/\text{m}$ , e para as sapatas as seguintes dimensões:

Paredes 1 e 5 - Sapatas de 1,0 x 1,37m

Paredes 2 e 4 - Sapatas de 1,0 x 5,80m

Parede 3 - Sapata de 1,40x 5,80m

Devido à simetria são apresentados os esforços, apenas nas paredes 1, 2 e 3 e, as forças distribuídas nas arestas dos pontos 2 e 3.

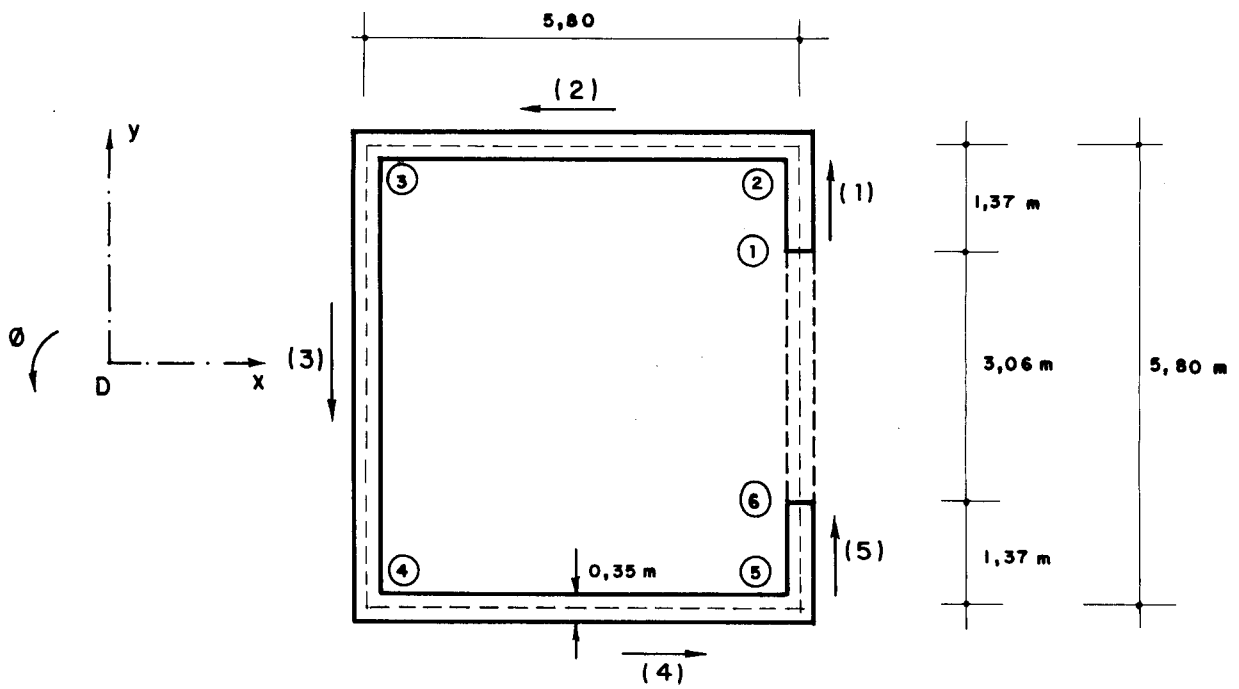


FIG. III-11 - NÚCLEO DE SECÇÃO UNIFORME

As linhas contínuas referem-se aos resultados obtidos pelo tratamento contínuo e as tracejadas correspondem ao tratamento discreto.

Os resultados do tratamento discreto foram obtidos pelo programa apresentado no item III.8, no computador IBM 1130 da Escola de Engenharia de São Carlos.

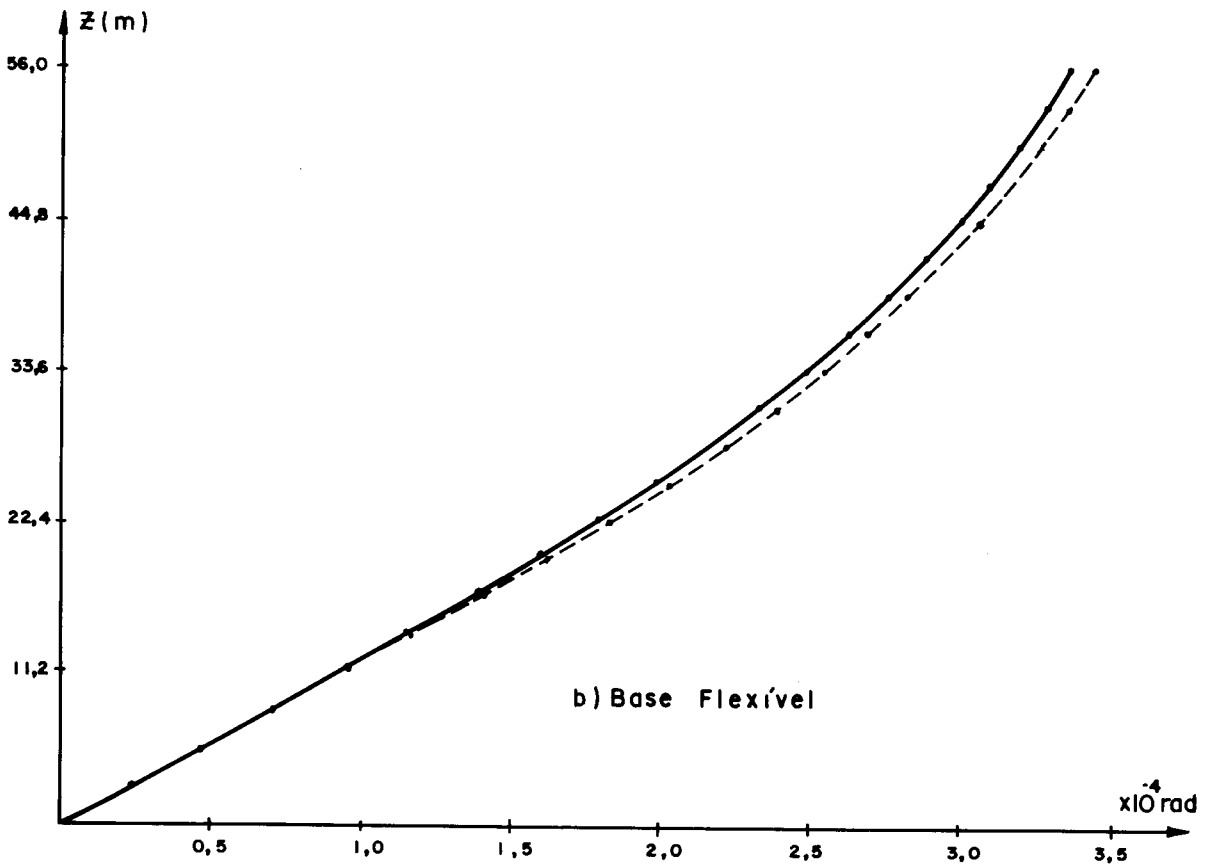
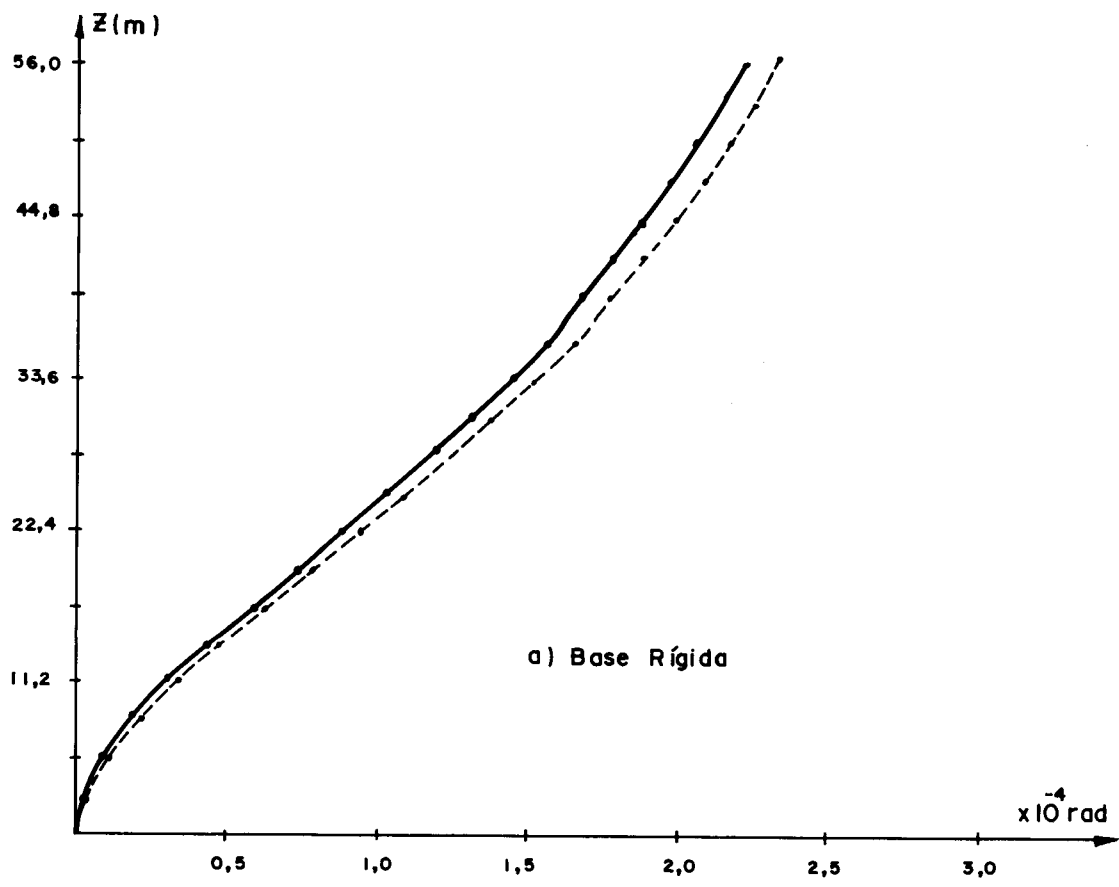


FIG. III - 12 ROTAÇÃO DO DIAFRÁGMA GENÉRICO

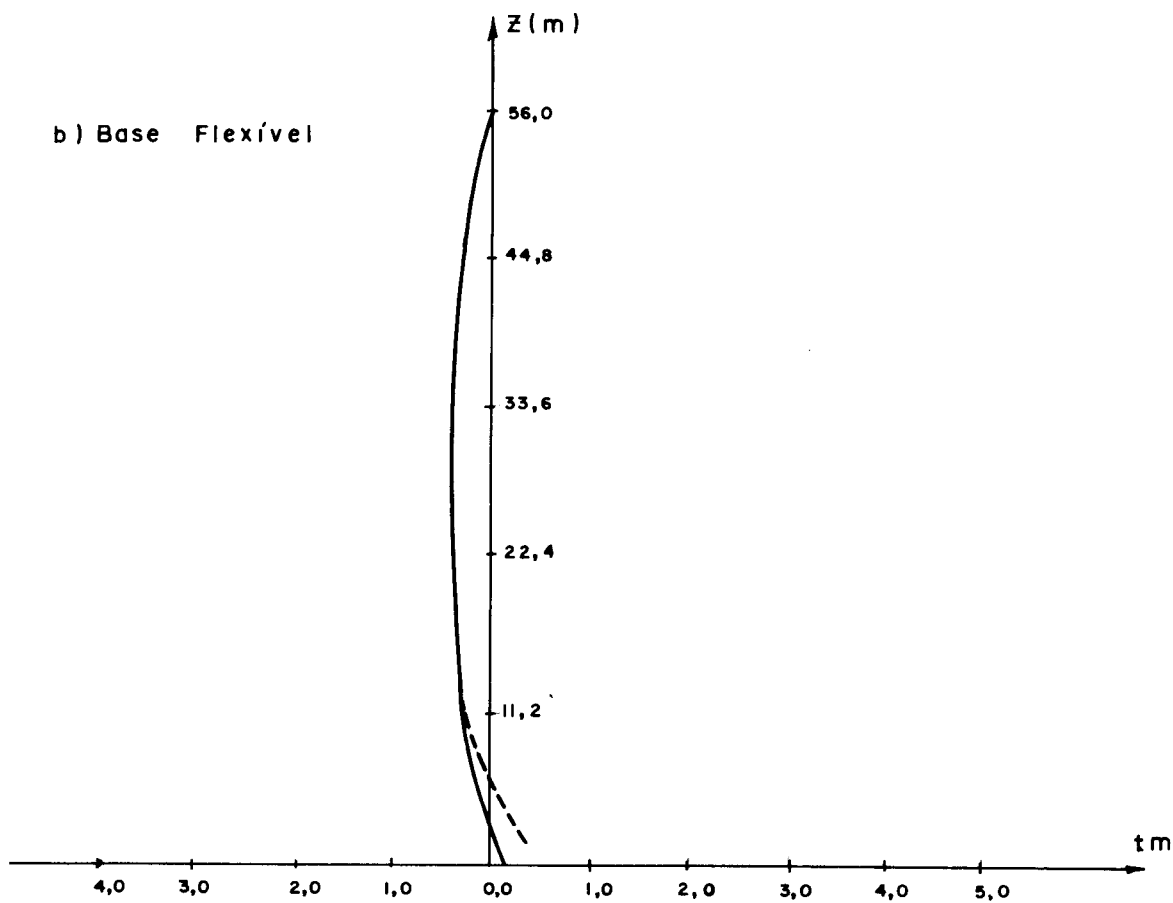
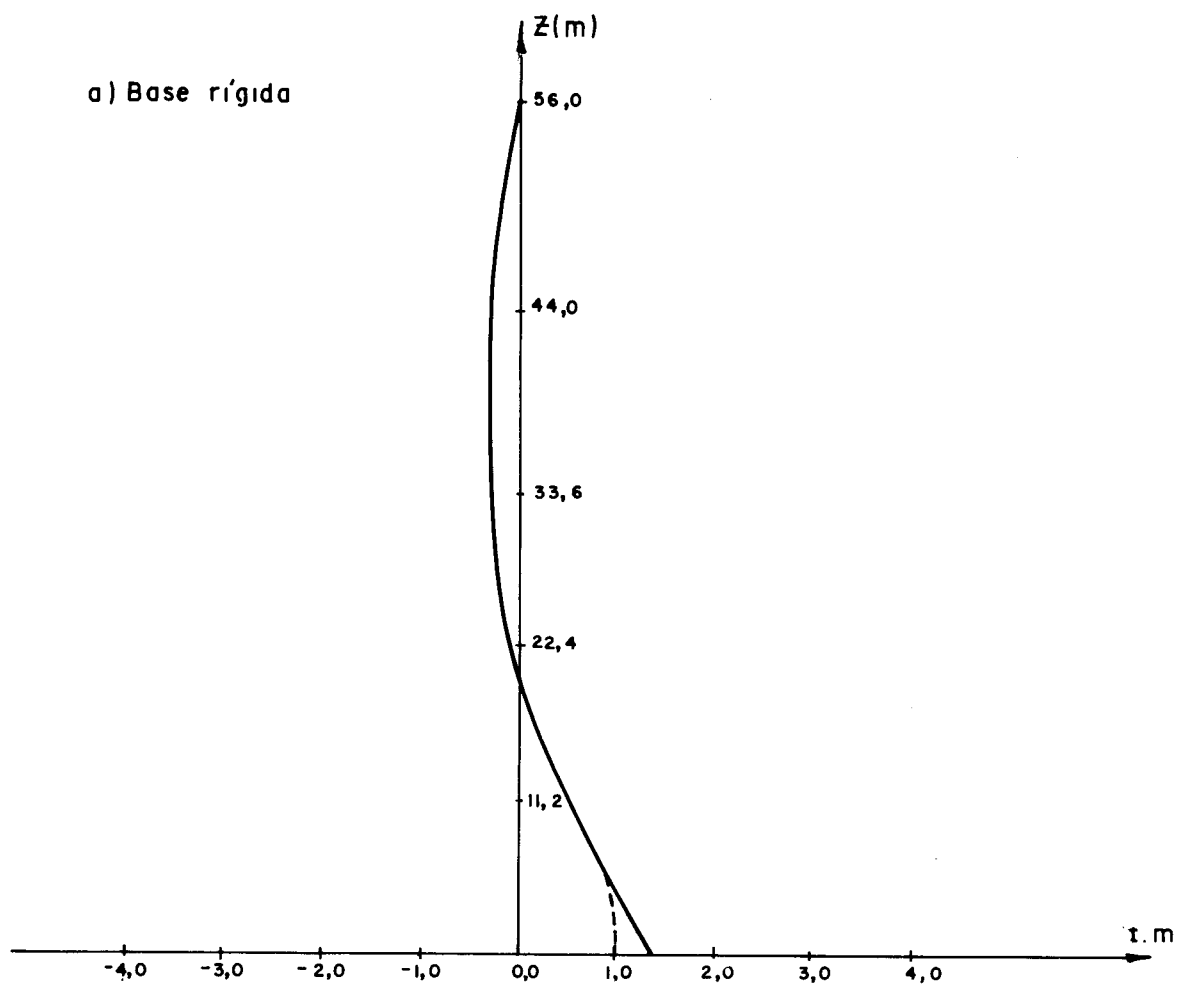


FIG. III-13 - MOMENTO FLETOR NA PAREDE (I)

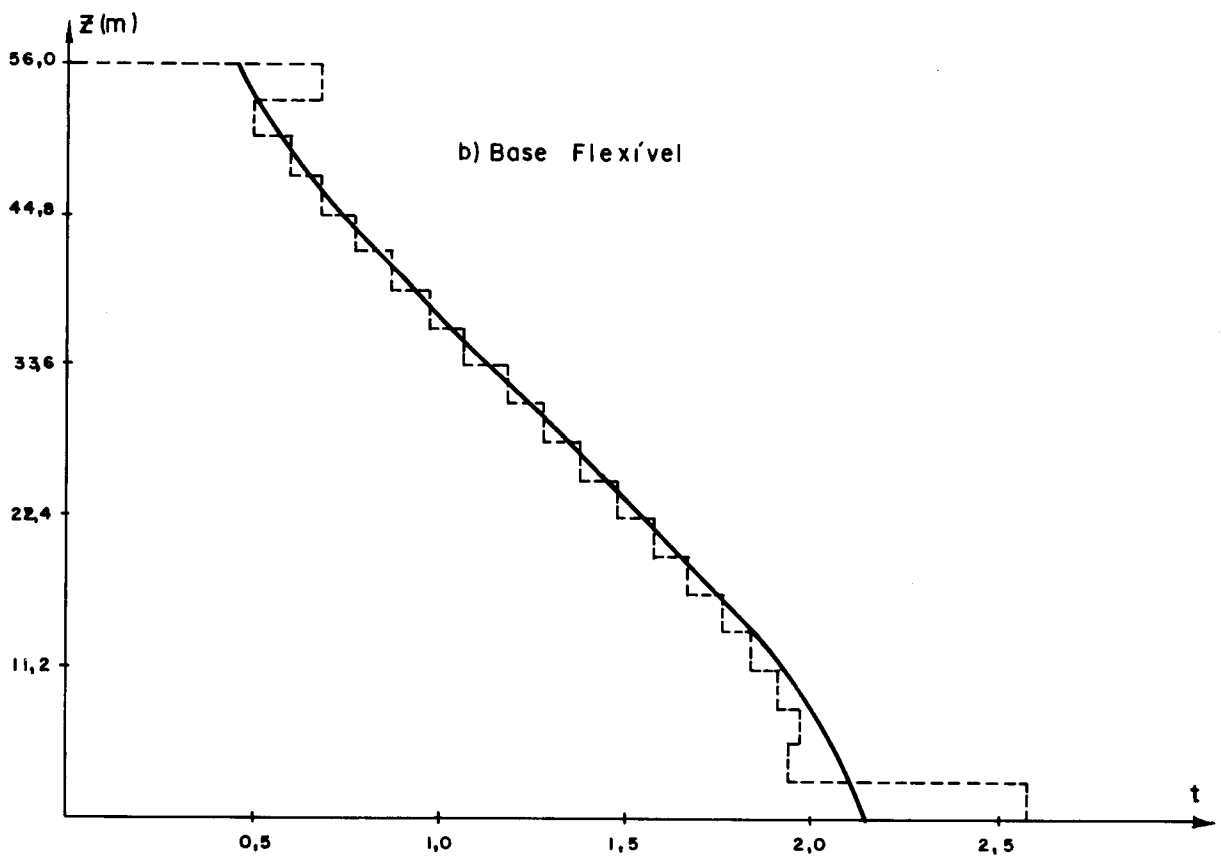
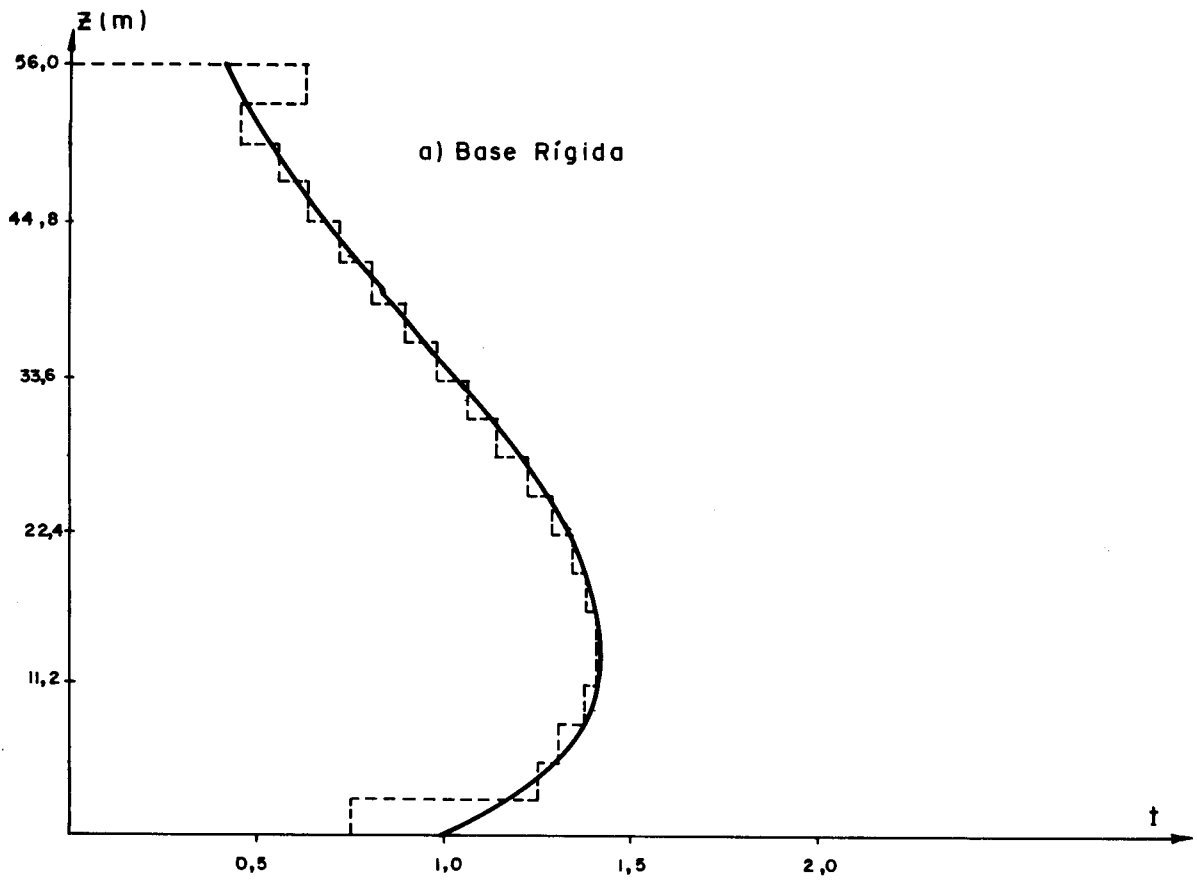


FIG. III - 14 - ESFORÇO CORTANTE NA PAREDE (1)

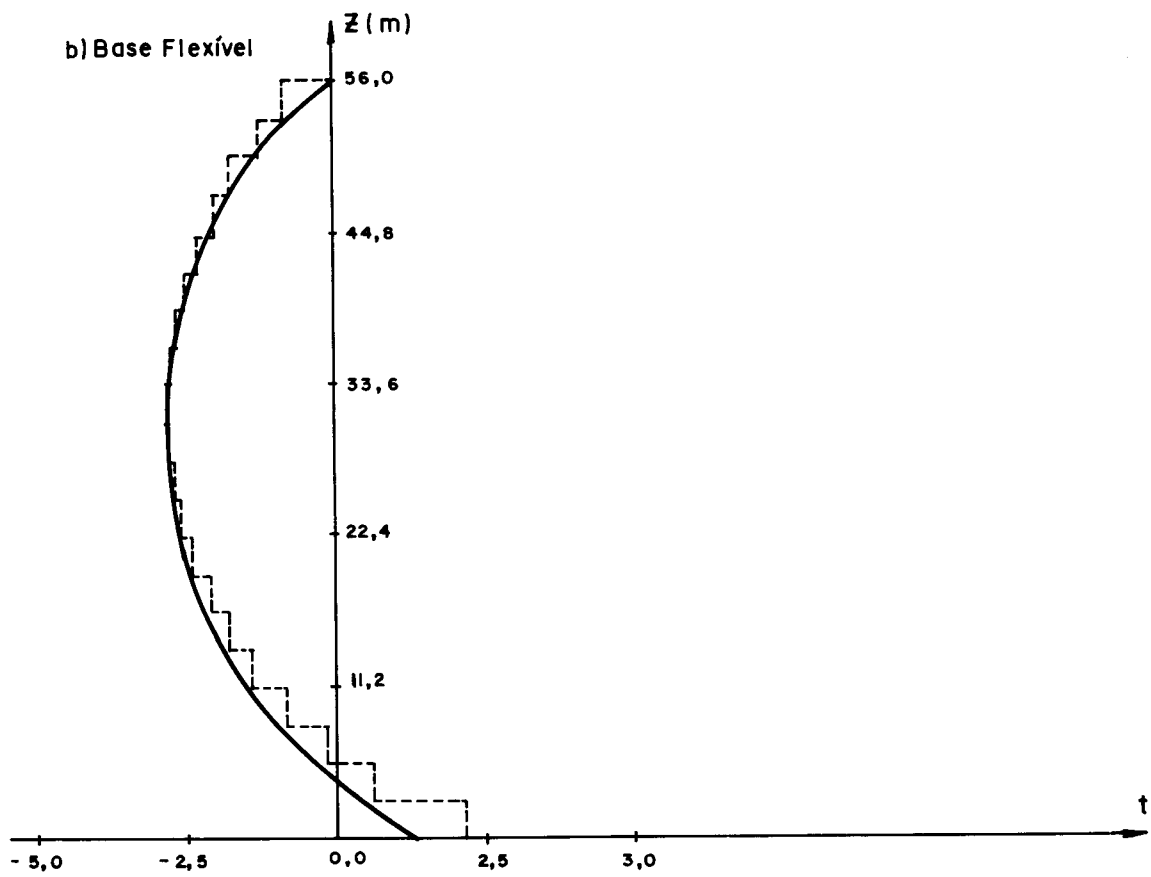
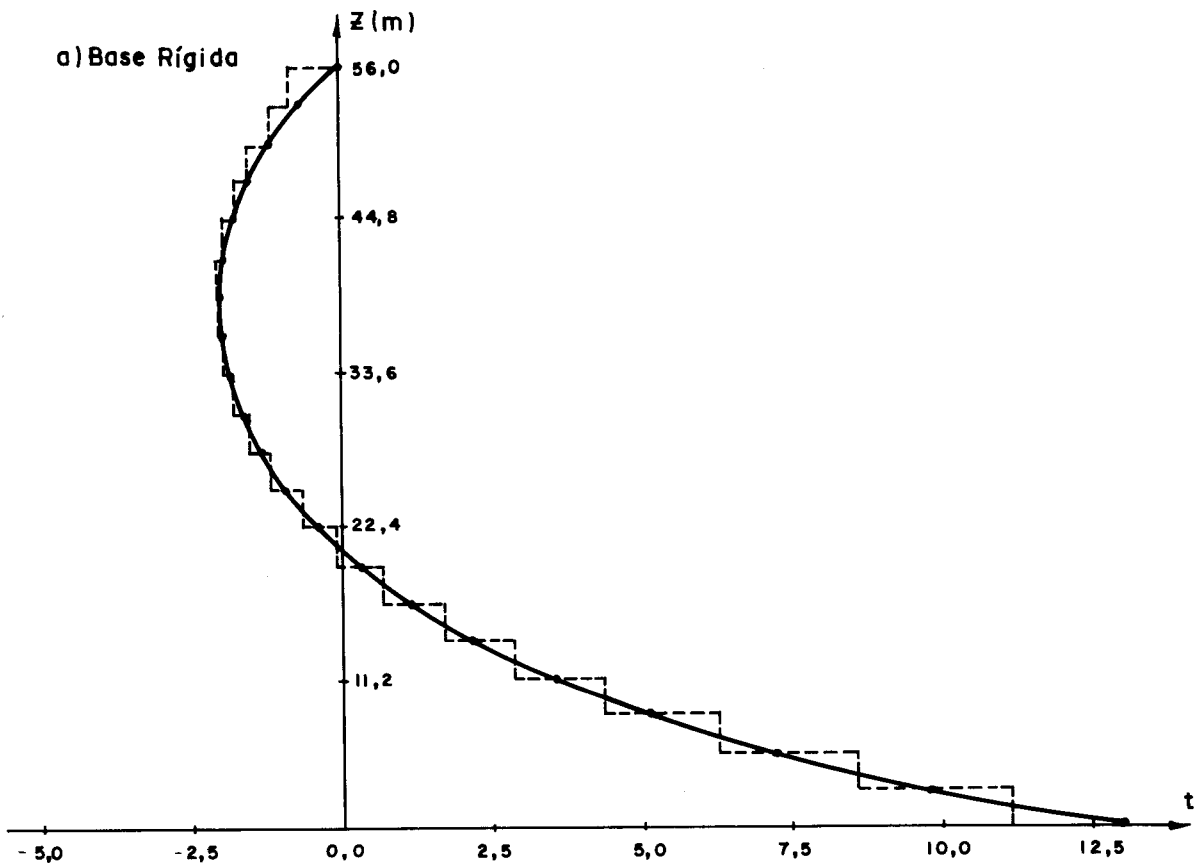


FIG. III - 15 - ESFORÇO NORMAL NA PAREDE ①



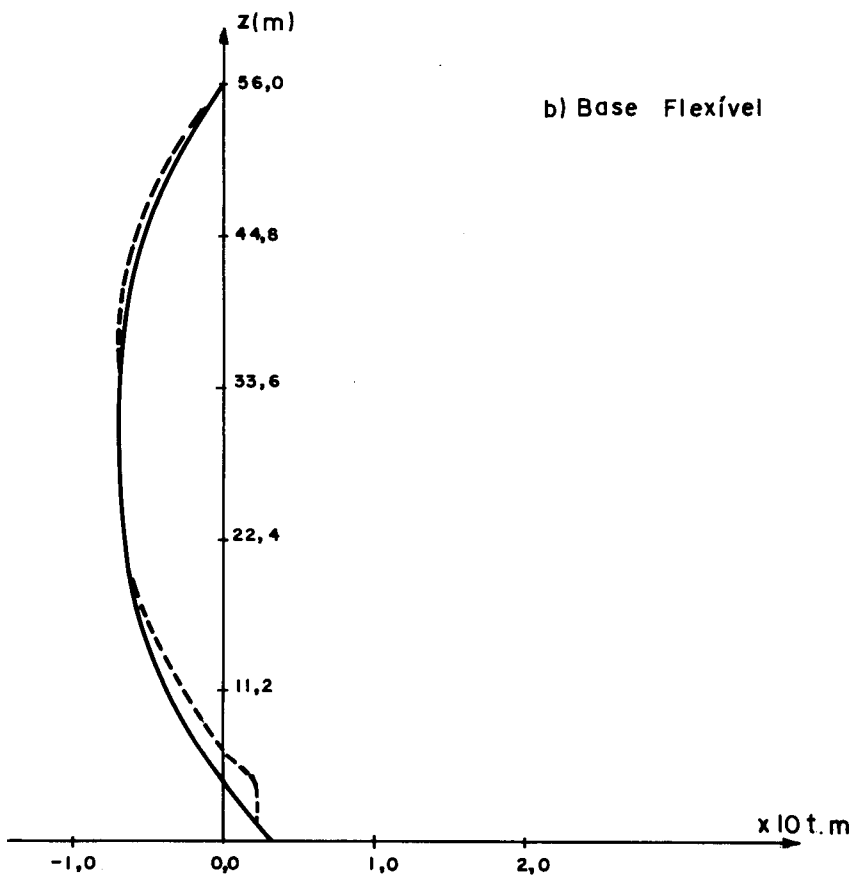
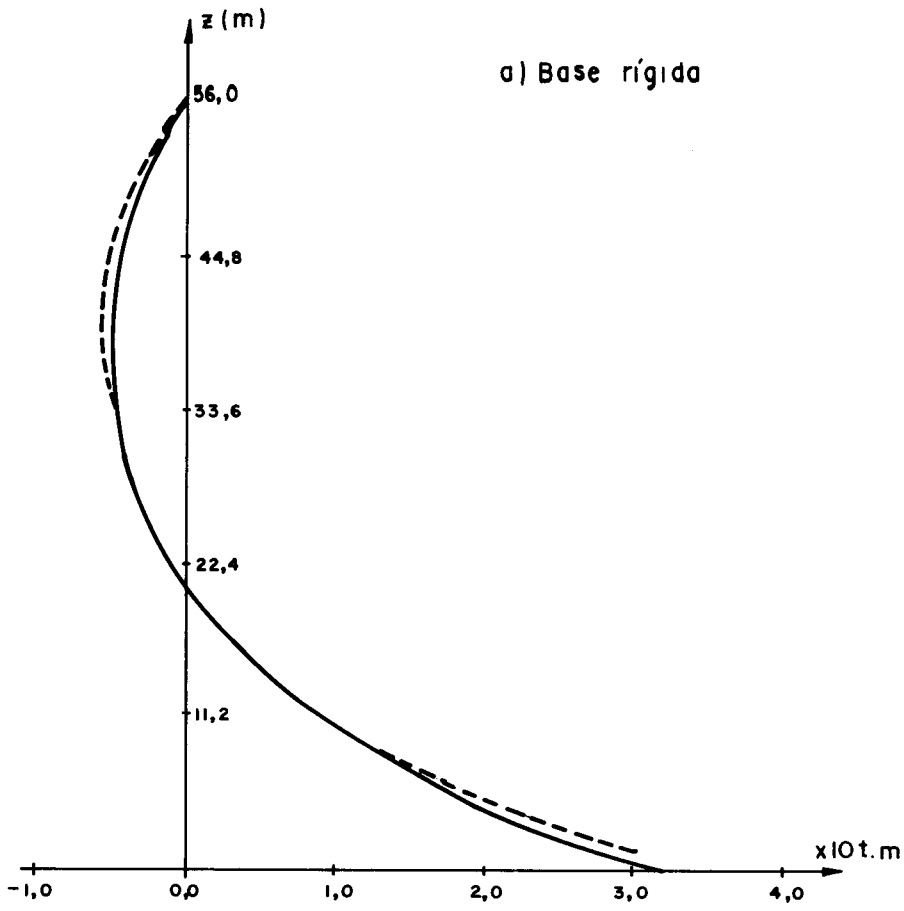


FIG. III - 16 - MOMENTO FLETOR NA PAREDE 2

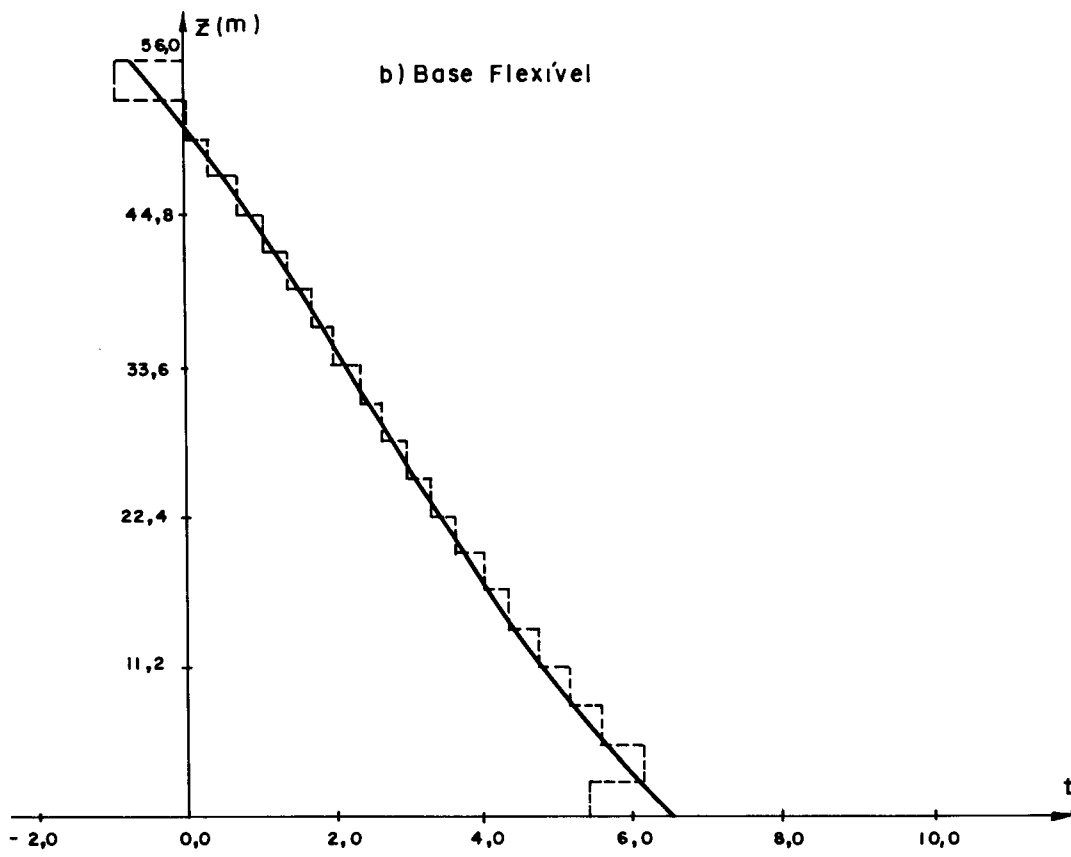
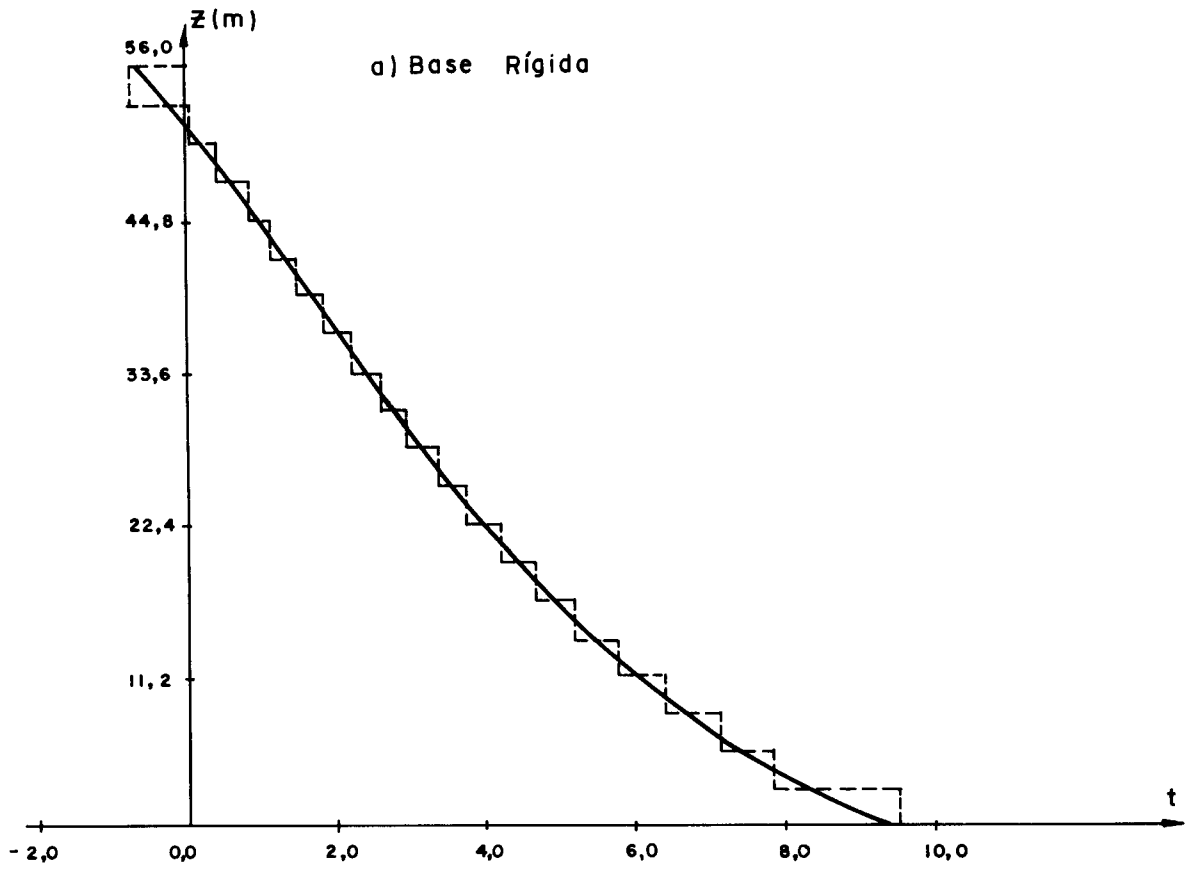
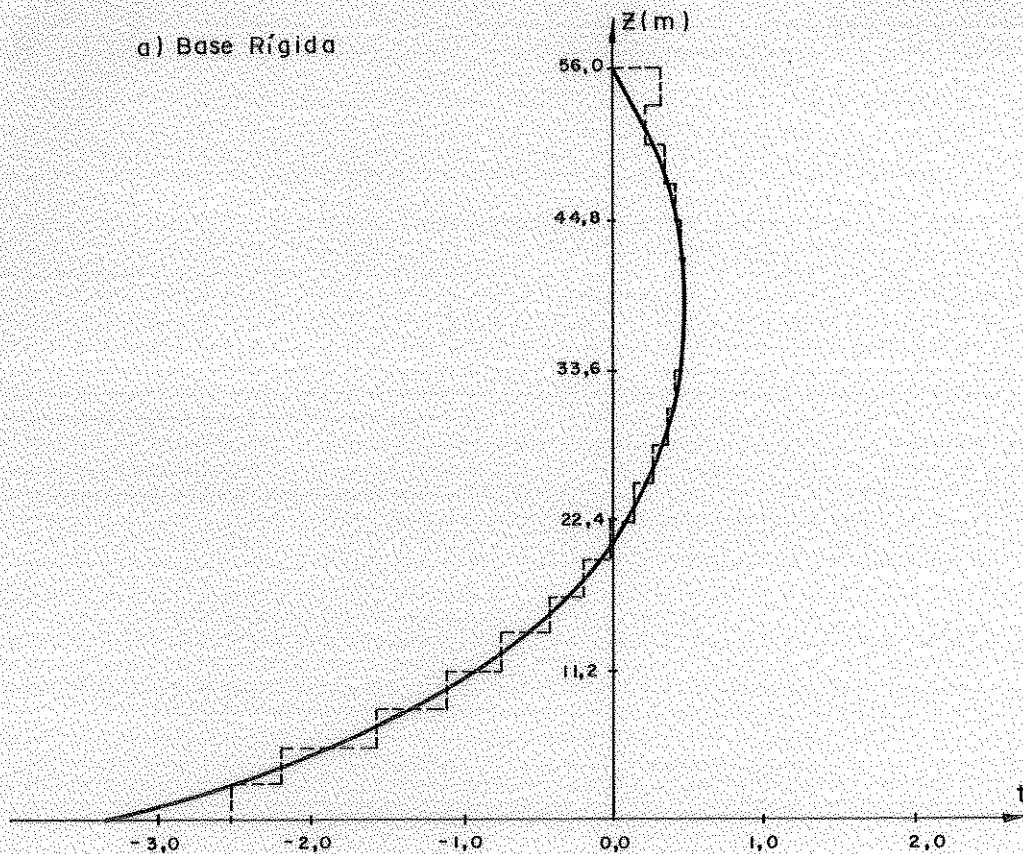


FIG. III - 17 ESFORÇO CORTANTE NA PAREDE (2)



b) Base Flexível

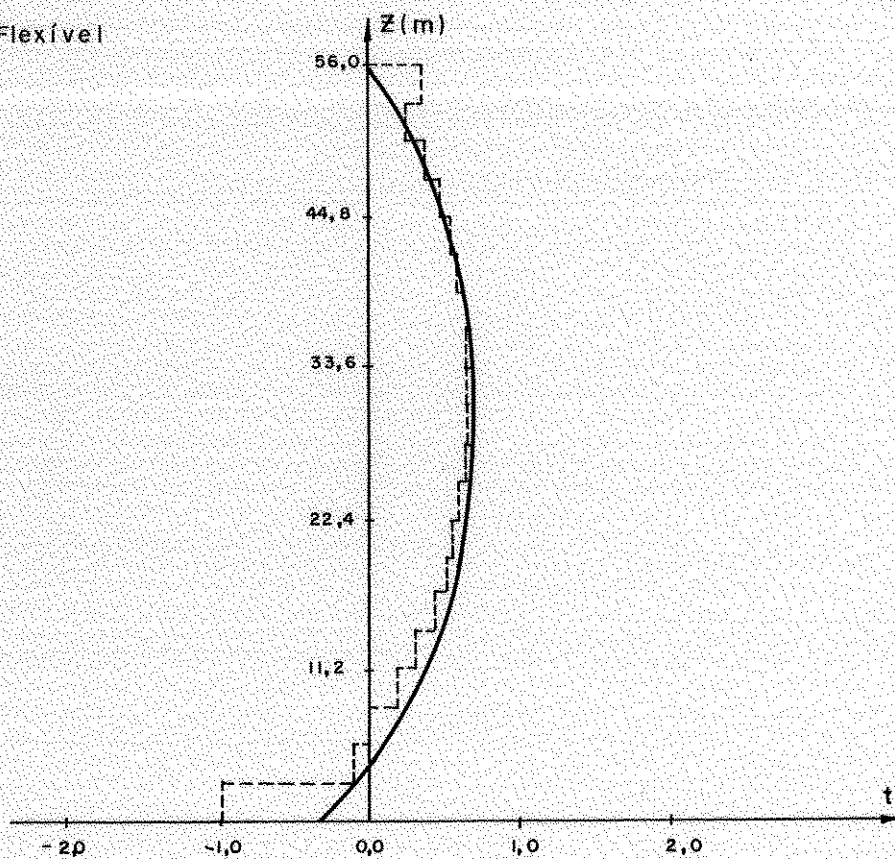


FIG. III-18 ESFORÇO NORMAL NA PAREDE (2)

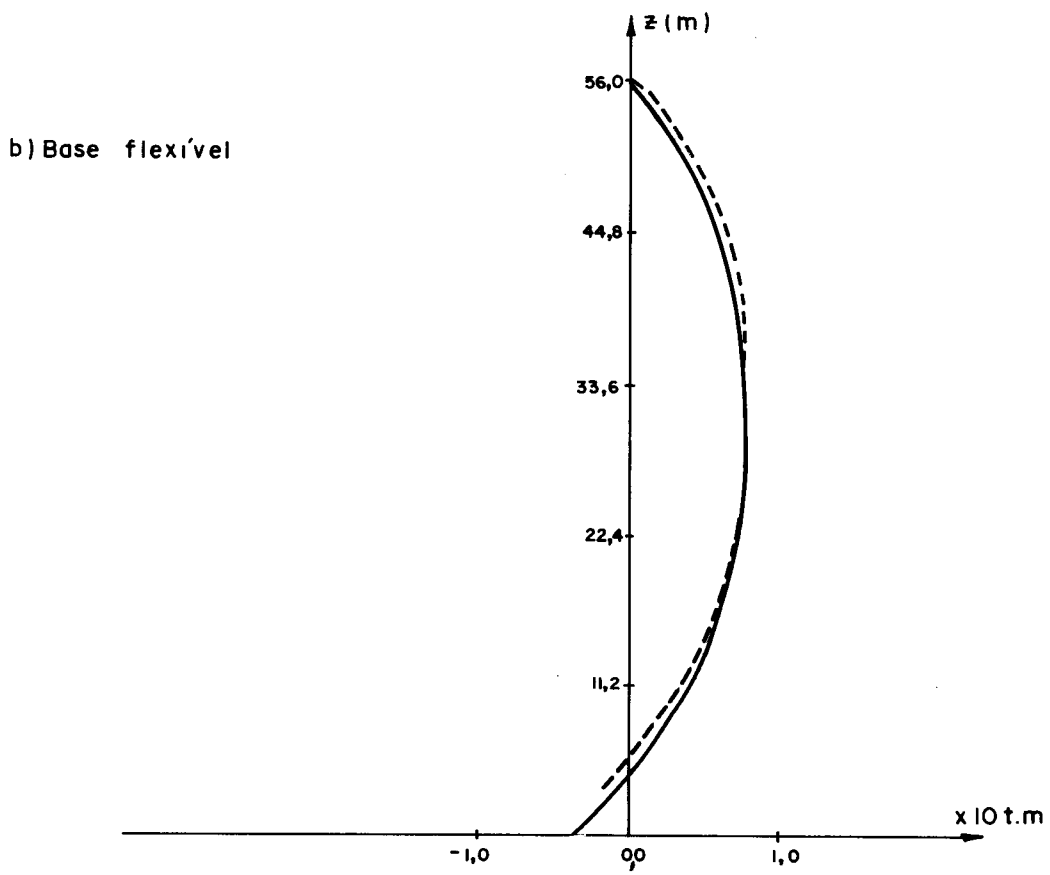
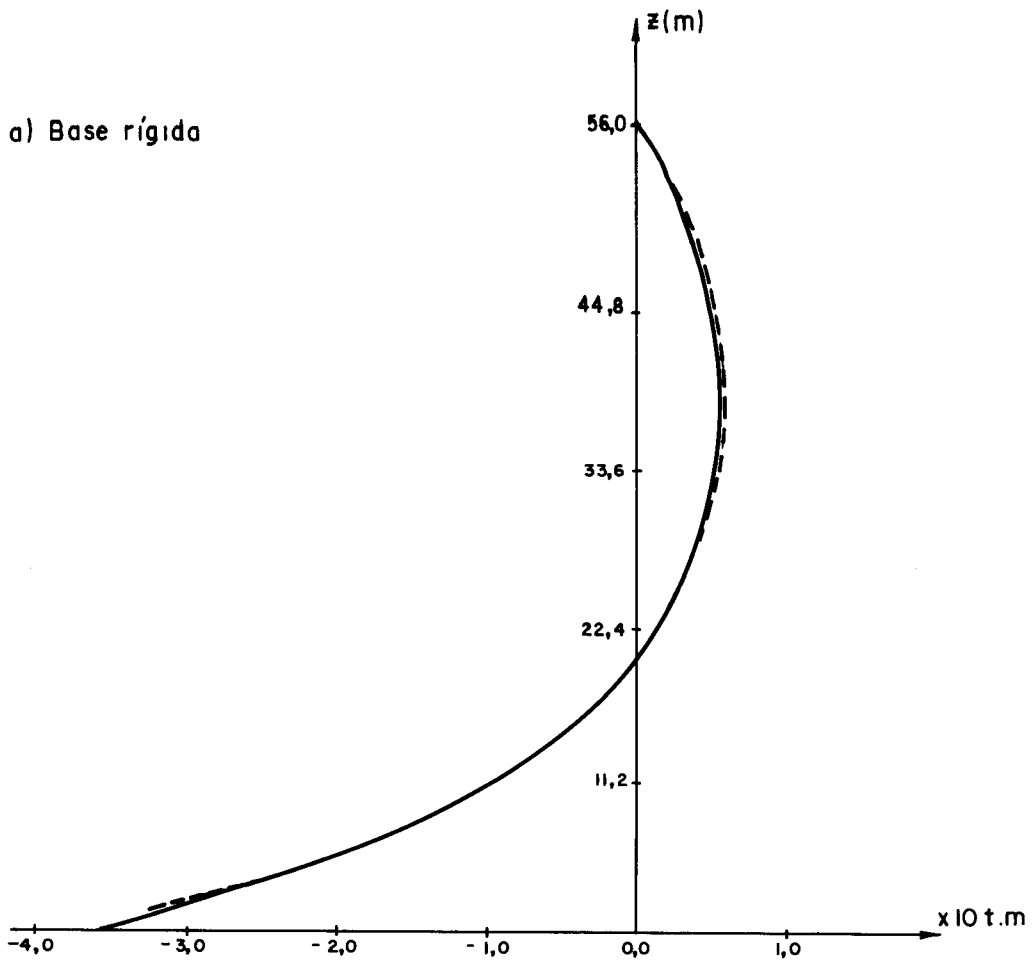


FIG. 19 - MOMENTO FLETOR NA PAREDE 3

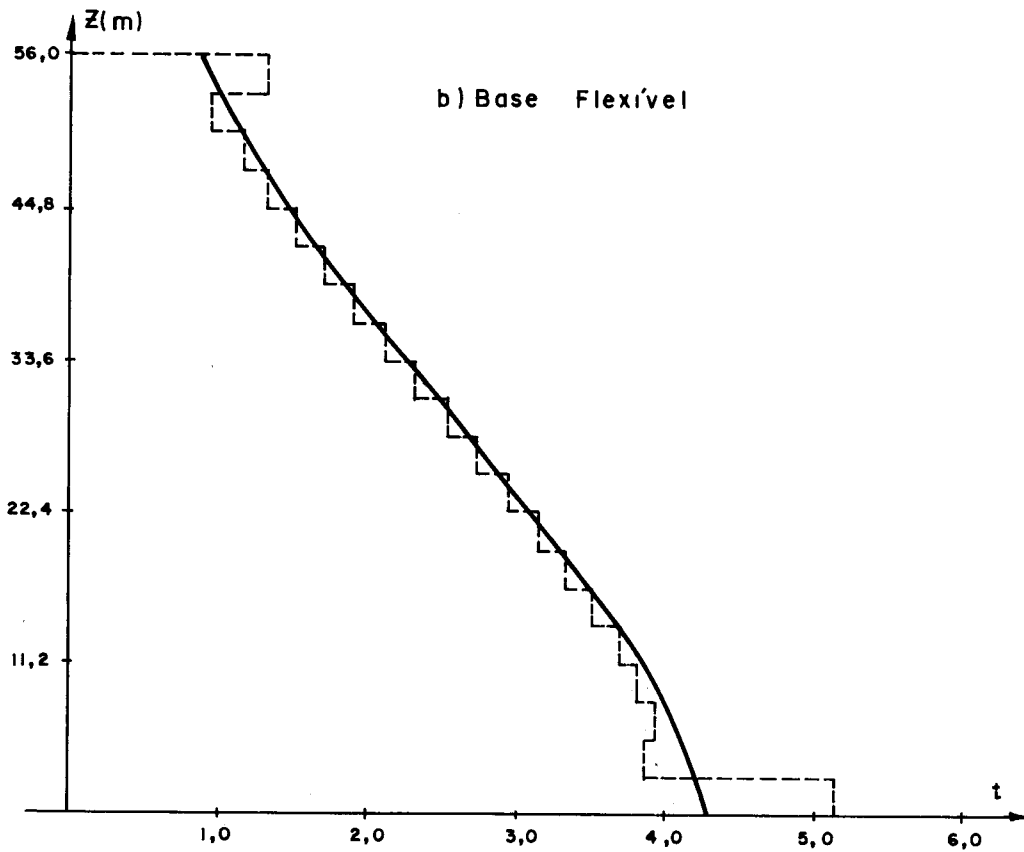
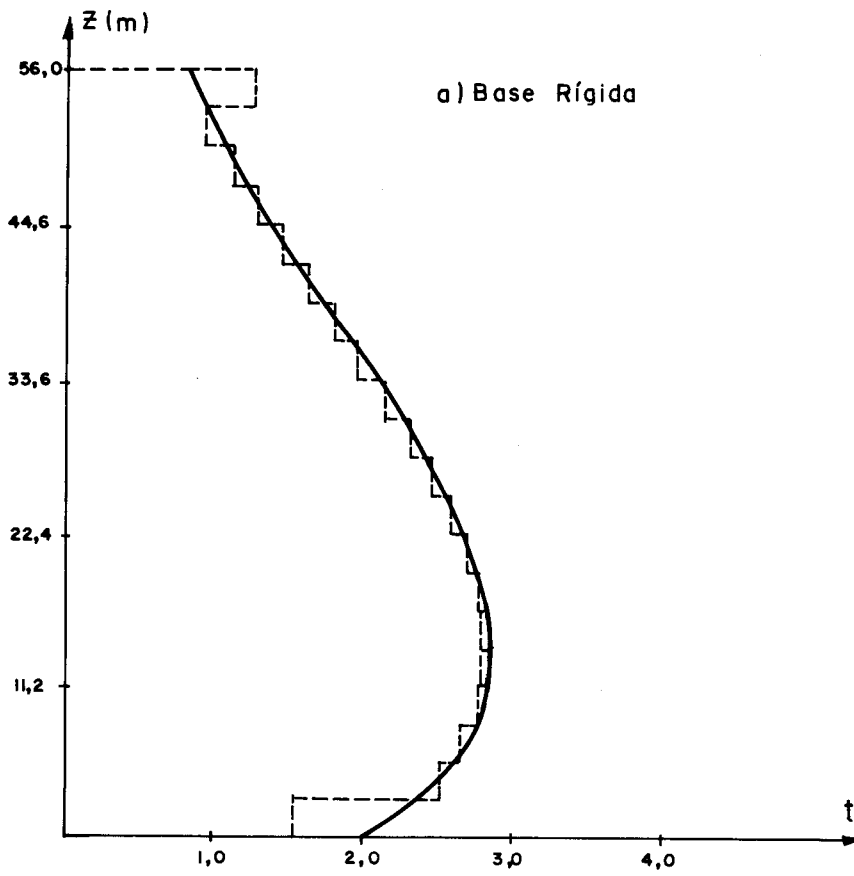


FIG. III- 20 ESFORÇO CORTANTE NA PAREDE (3)

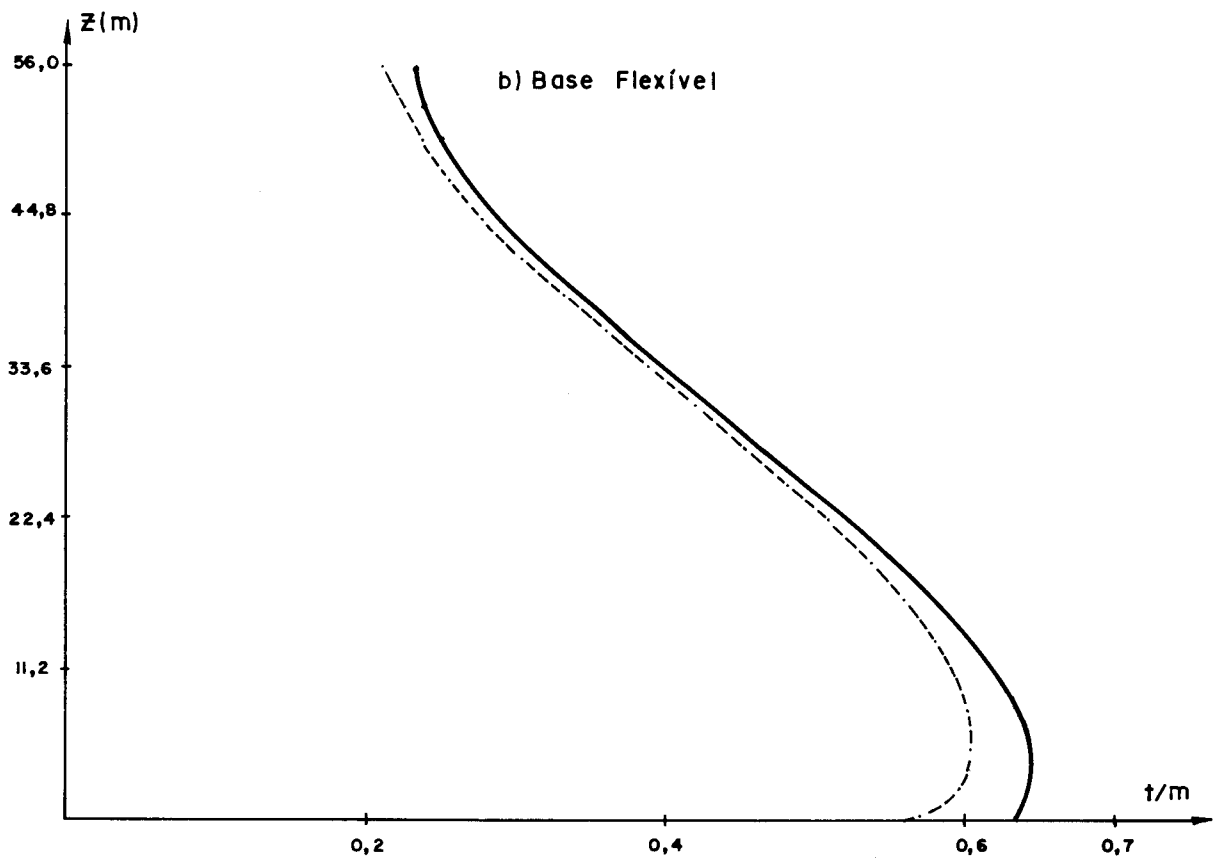
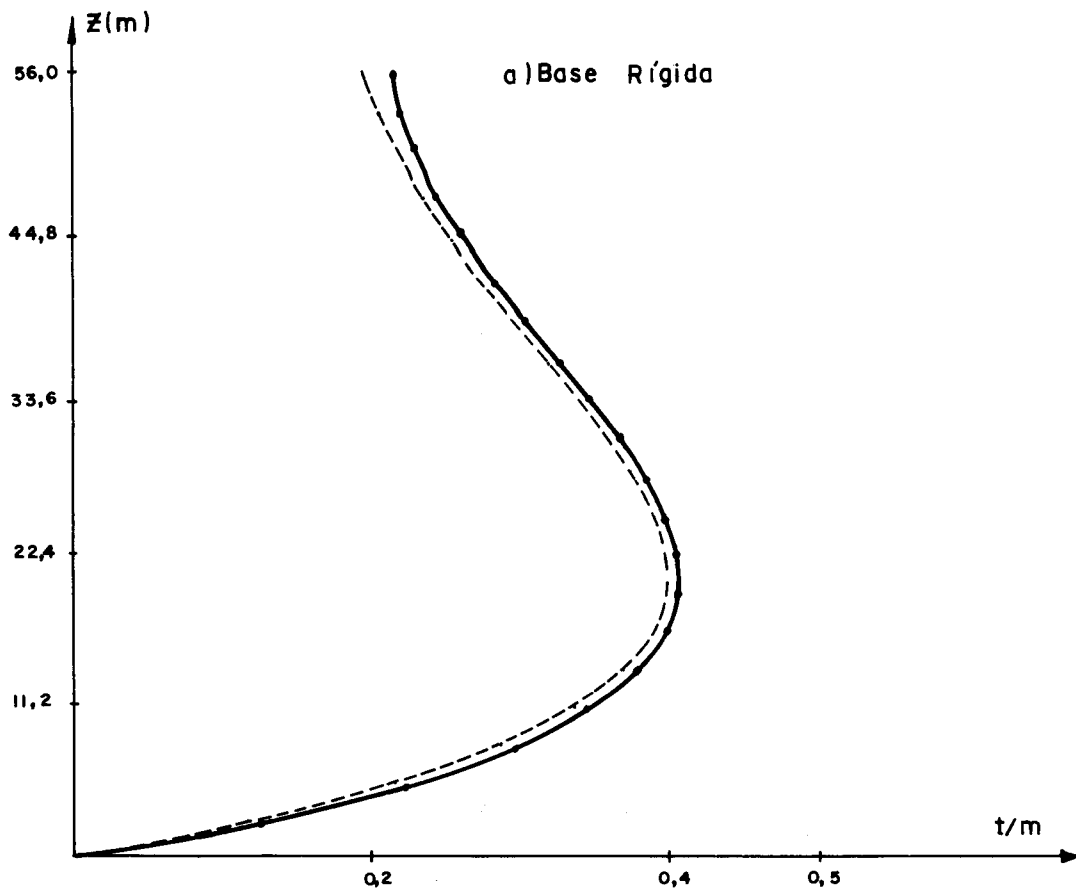


FIG. III- 21 FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDA NOS LINTÉIS

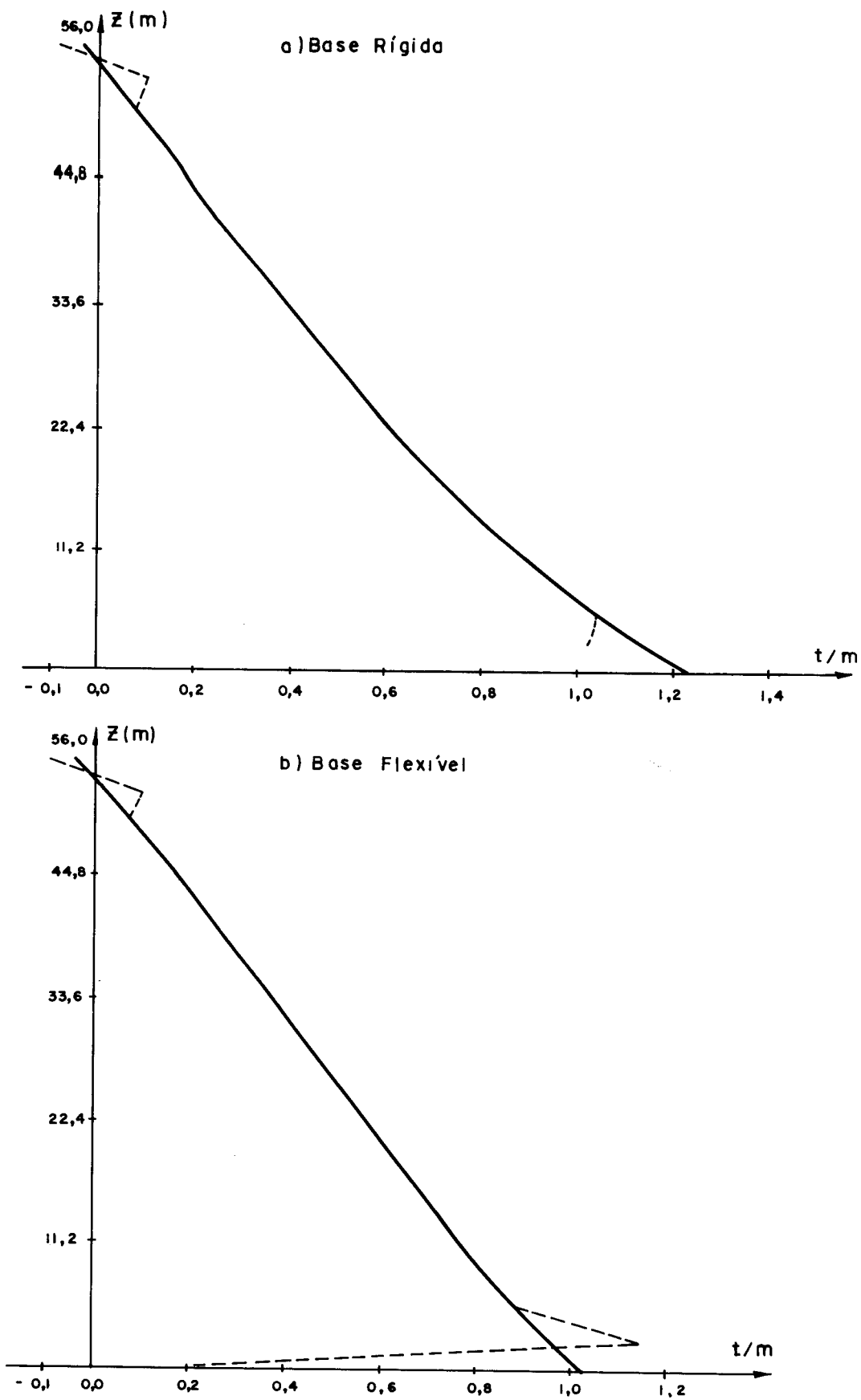


FIG. III-22 FORÇA DISTRIBUÍDA NA ARESTA ②

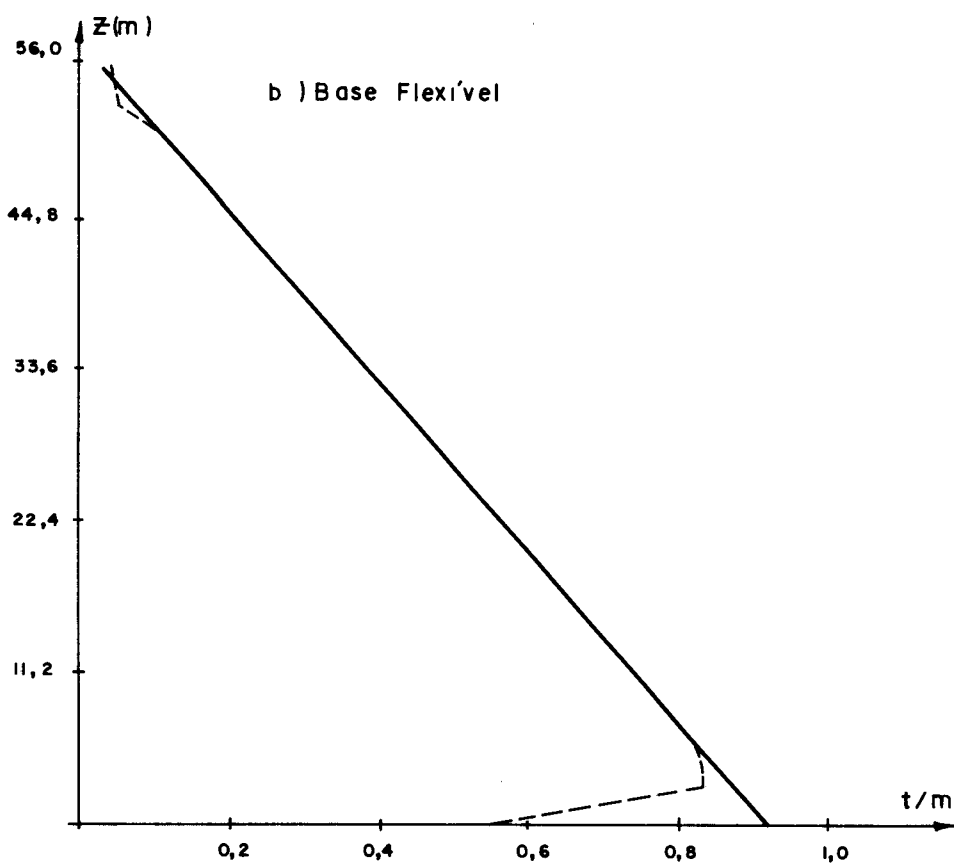
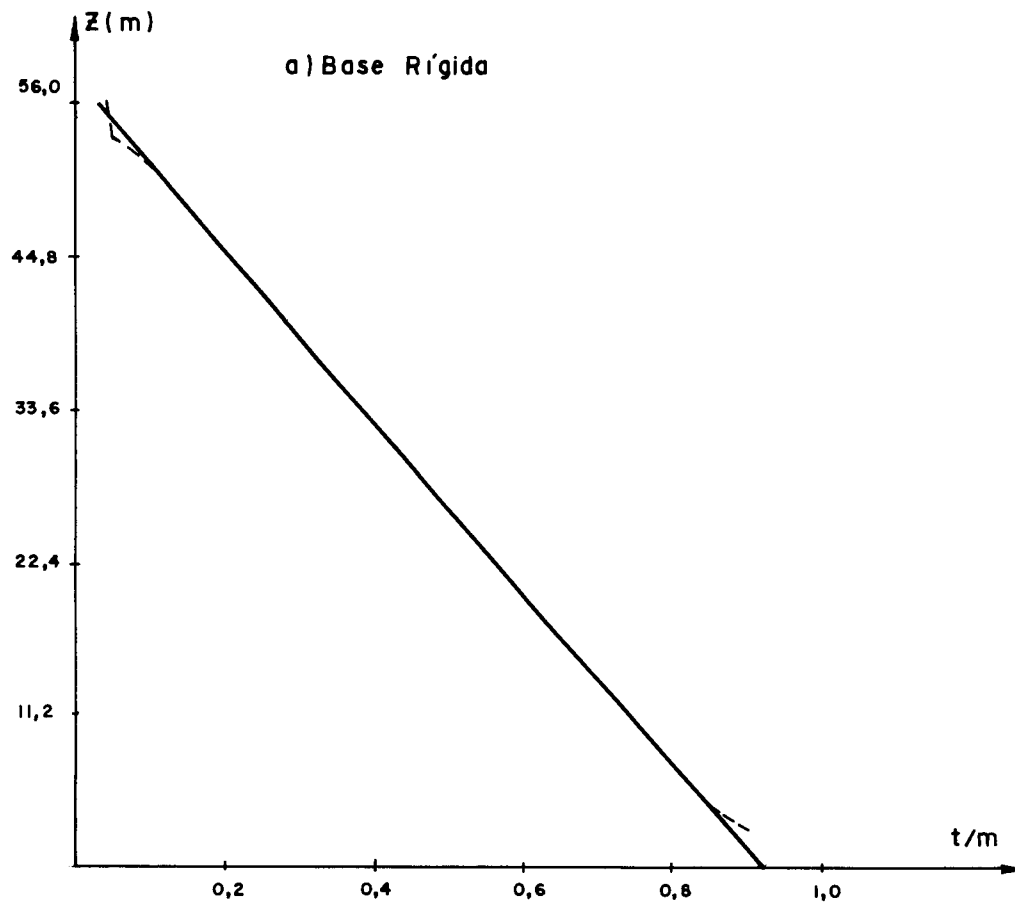


FIG. III- 23 FORÇA DISTRIBUÍDA NA ARESTA (3)



### III.9.2 - Edifício constituído por dois núcleos

A análise é feita em um edifício de dez andares com pé-direito de 3,0m, submetido a um momento torçor concentrado no topo de 10t.m.

A Figura III.24 mostra a secção transversal, com paredes de mesma espessura de 0,15m e lintéis ao nível dos andares com a mesma espessura das paredes e com altura de 0,30m.

O módulo de elasticidade é adotado como sendo  $2,0 \times 10^6 \text{ t/m}^2$  e o coeficiente de Poisson o valor 0,167.

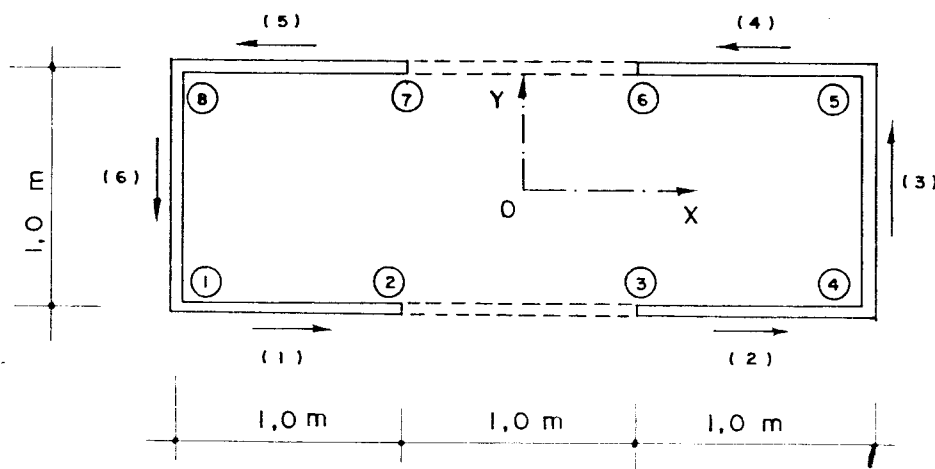


FIG. III-24 - EDIFÍCIO COM DOIS NÚCLEOS

Os números em círculo corresponde à numeração dos nós e as setas representam os sentidos positivos adotados para as paredes.

Para a análise de base flexível, considera-se um solo com rigidez de  $8 \times 10^4 \text{ t/m}^2$  e sapatas com as seguintes dimensões:

- Paredes 1, 2, 4 e 5 - Sapatas de 0,30x1,0m
- Paredes 3 e 6 - Sapatas de 0,50x1,0m

Devido a simetria são apresentados os resultados apenas nas paredes 2 e 3, e a força distribuída na aresta do nó 4 .

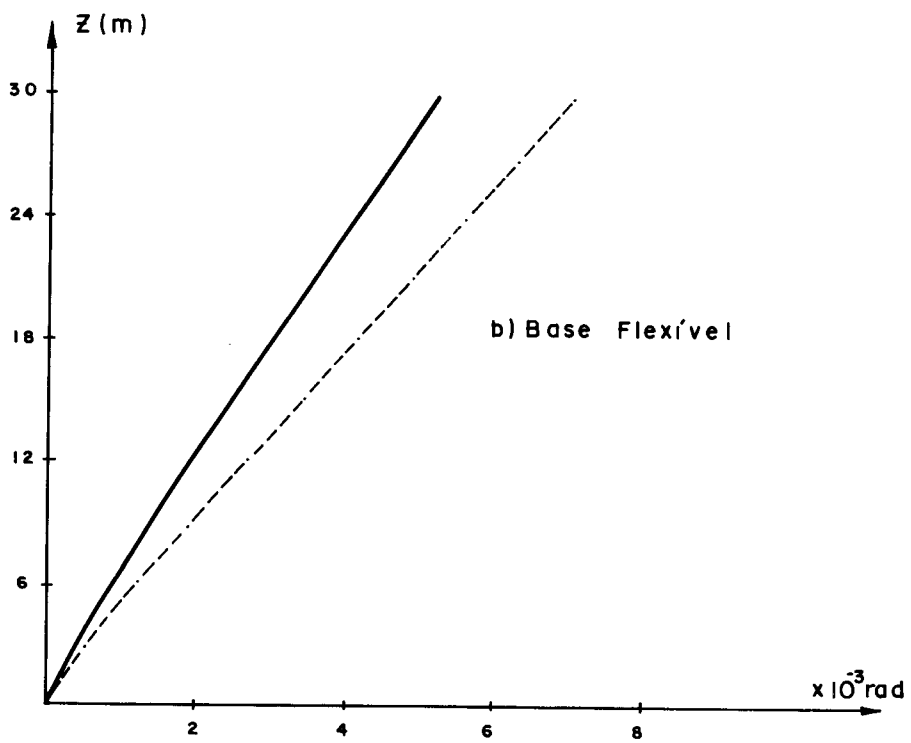
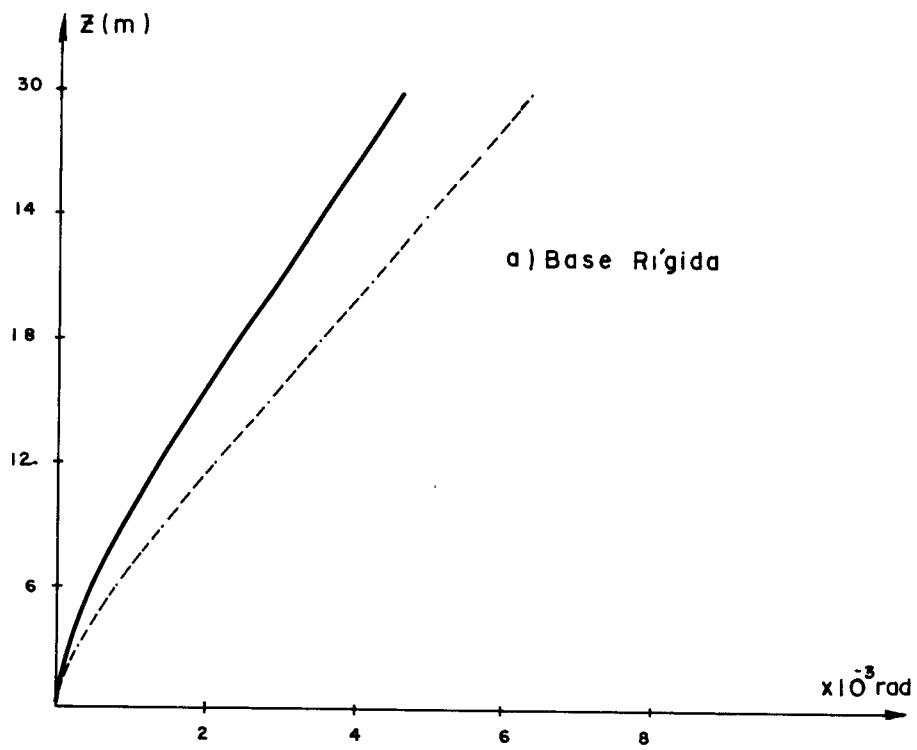
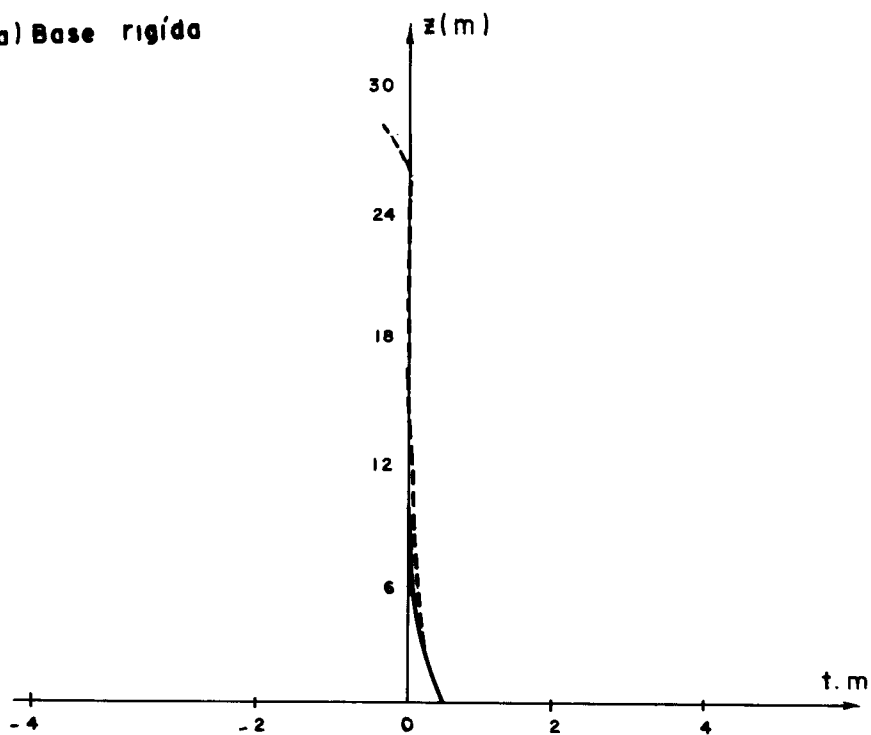


FIG-III- 25 - ROTAÇÃO DO DIAFRÁGMA GENÉRICO

a) Base rígida



b) Base flexível

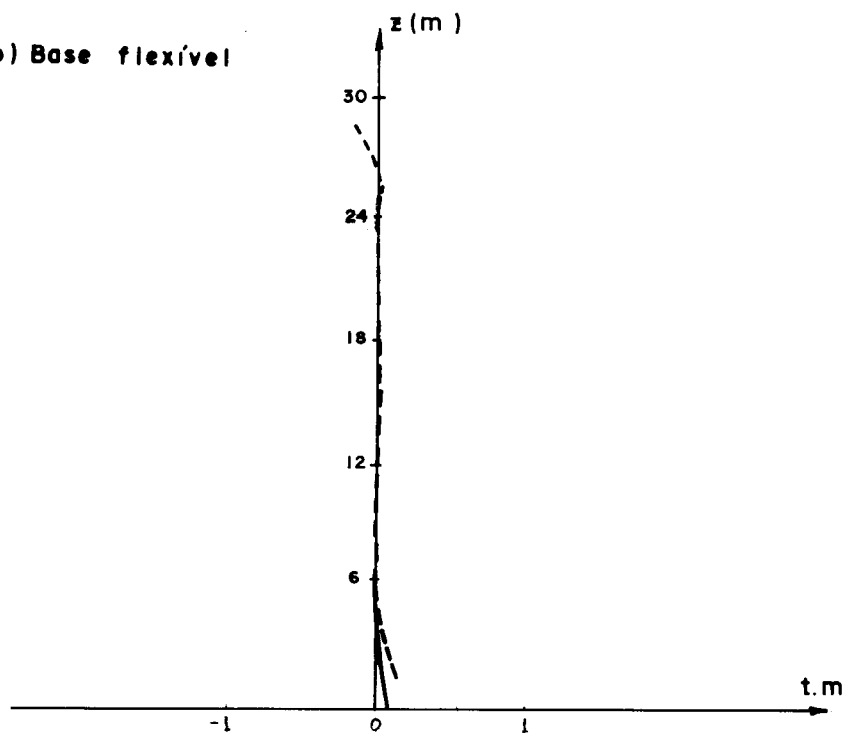


FIG. III- 26 - MOMENTO FLETOR NA PAREDE 2

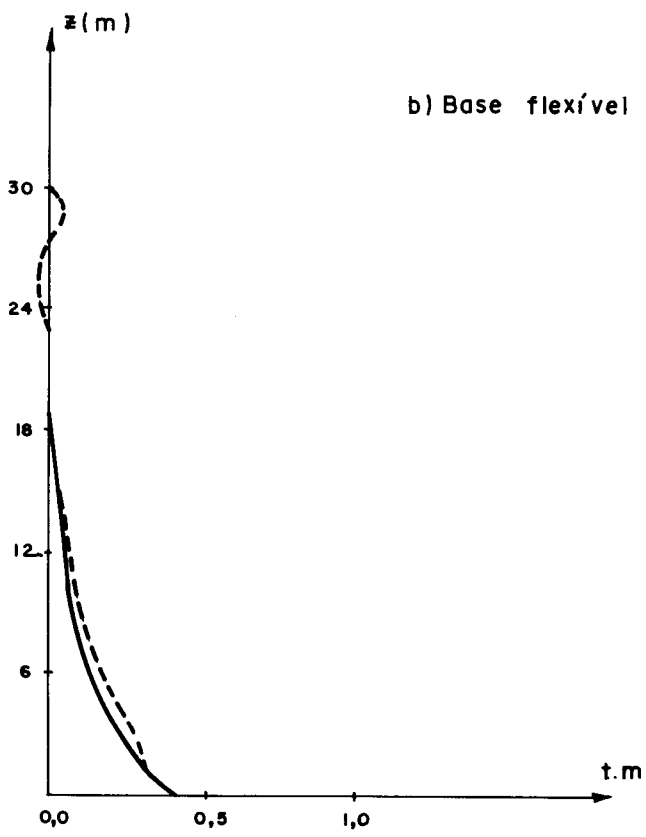
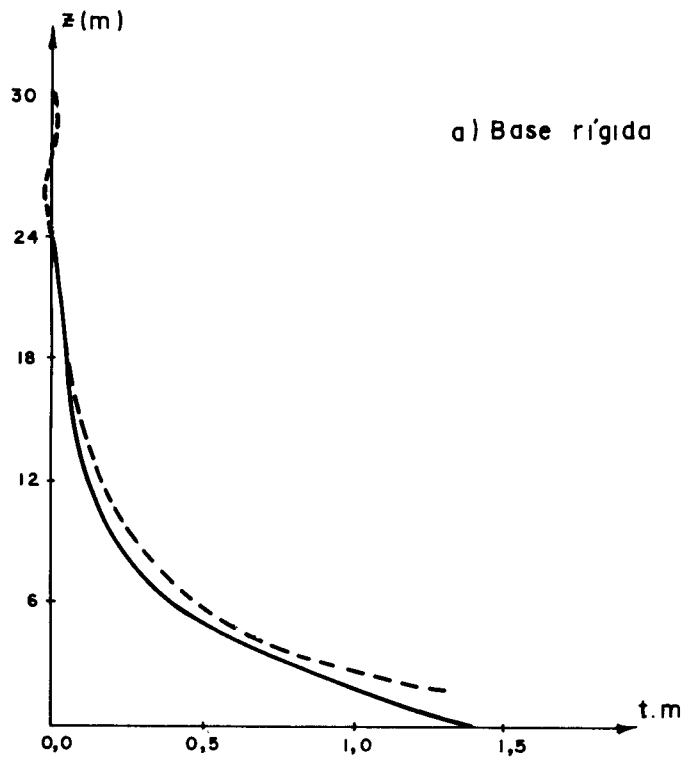


FIG. III - 27 - MOMENTO FLETOR NA PAREDE 3

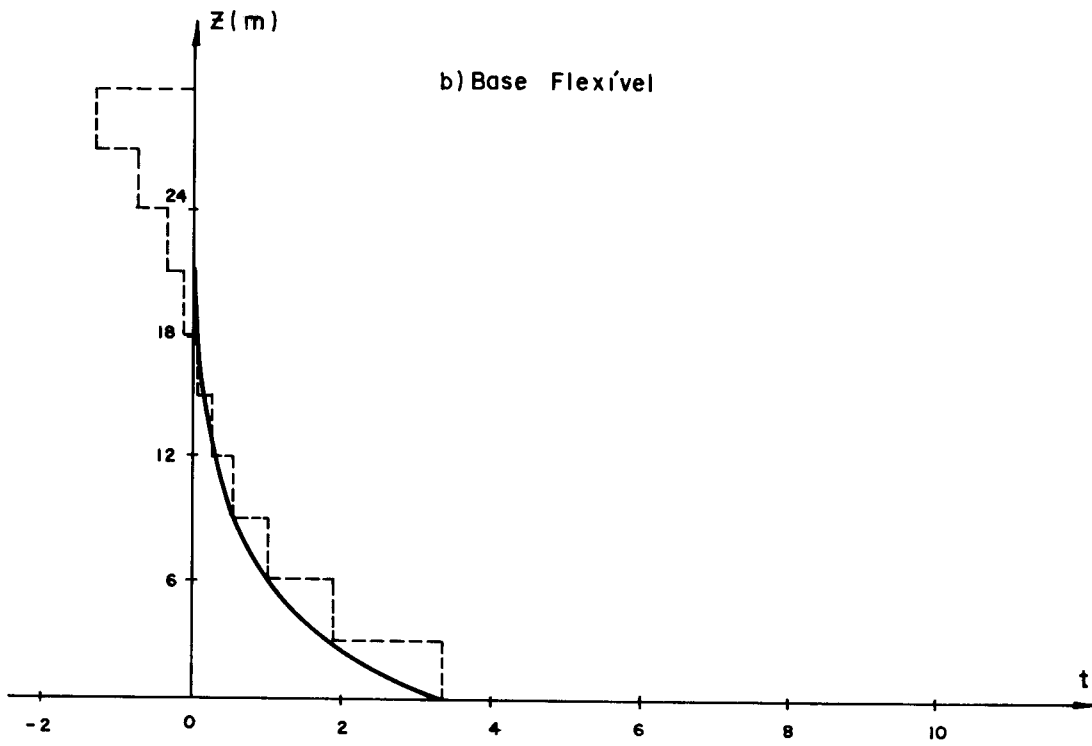
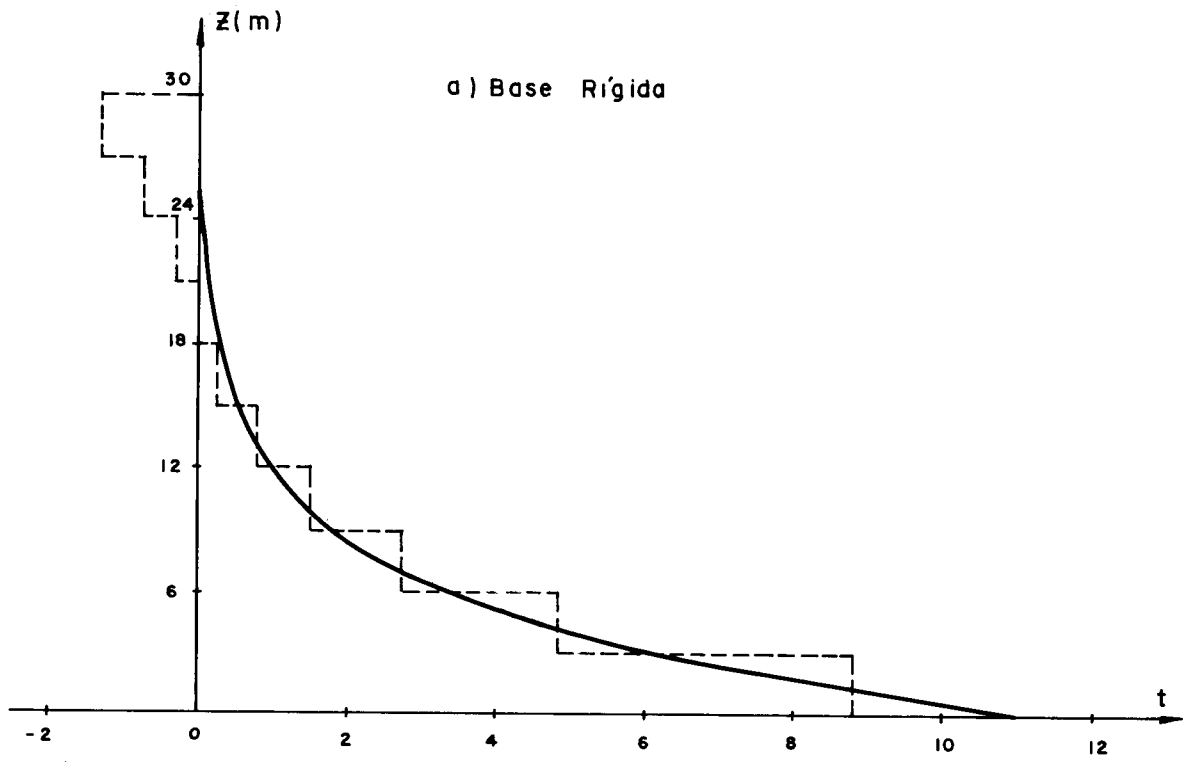


FIG. 28 - FORÇA NORMAL NA PAREDE (2)

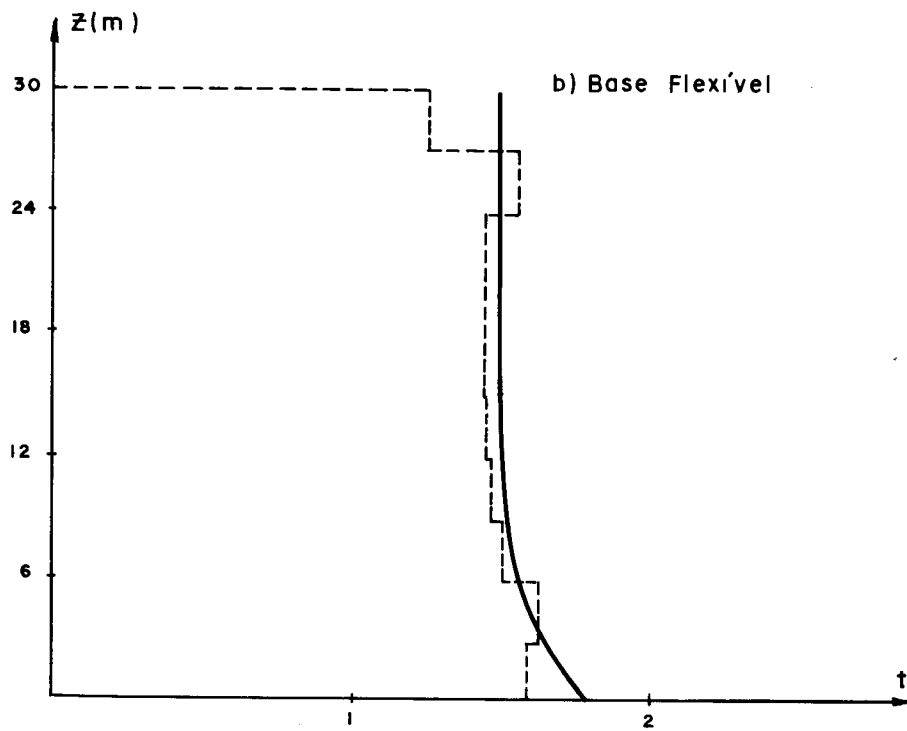
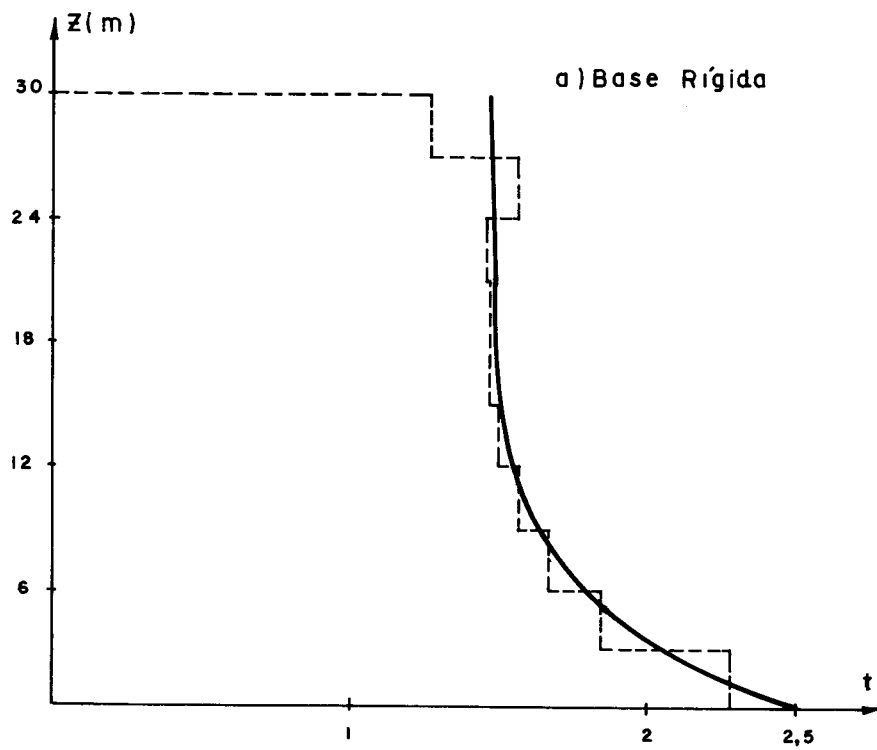


FIG. 29 - FORÇA CORTANTE NA PAREDE (3)

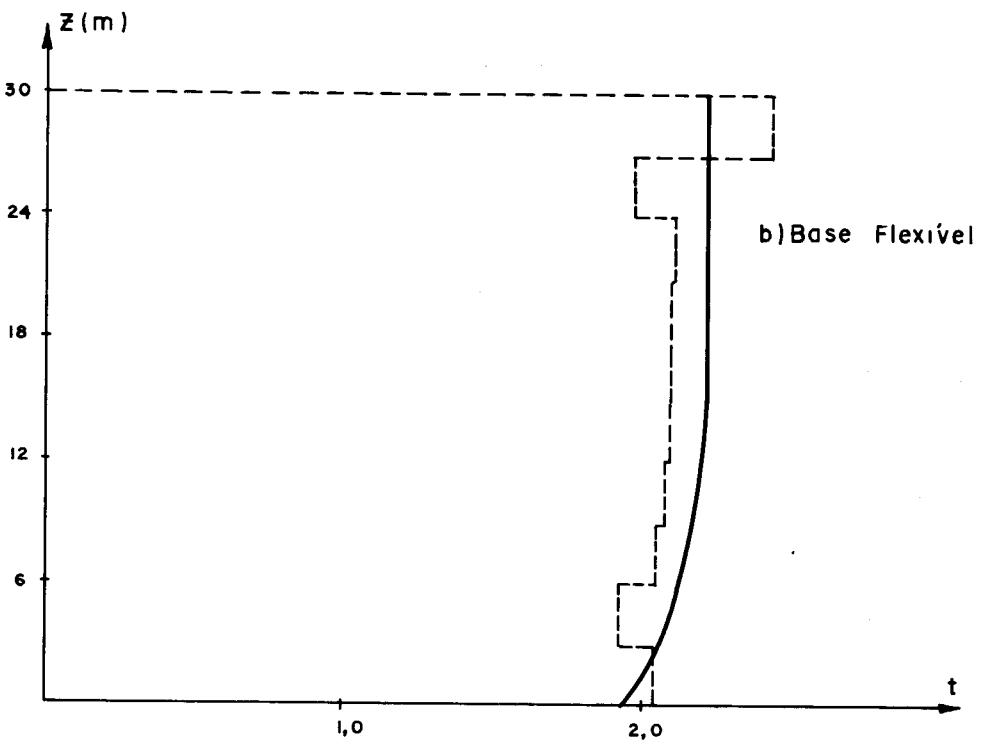
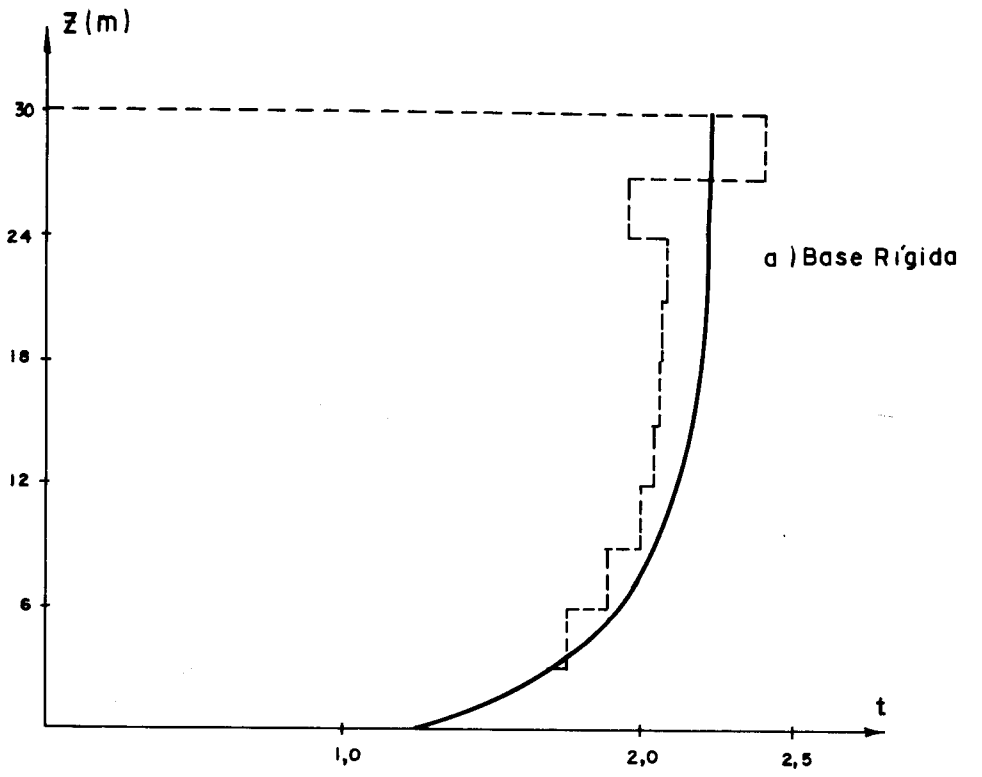


FIG. 30- FORÇA CORTANTE NA PAREDE (2)

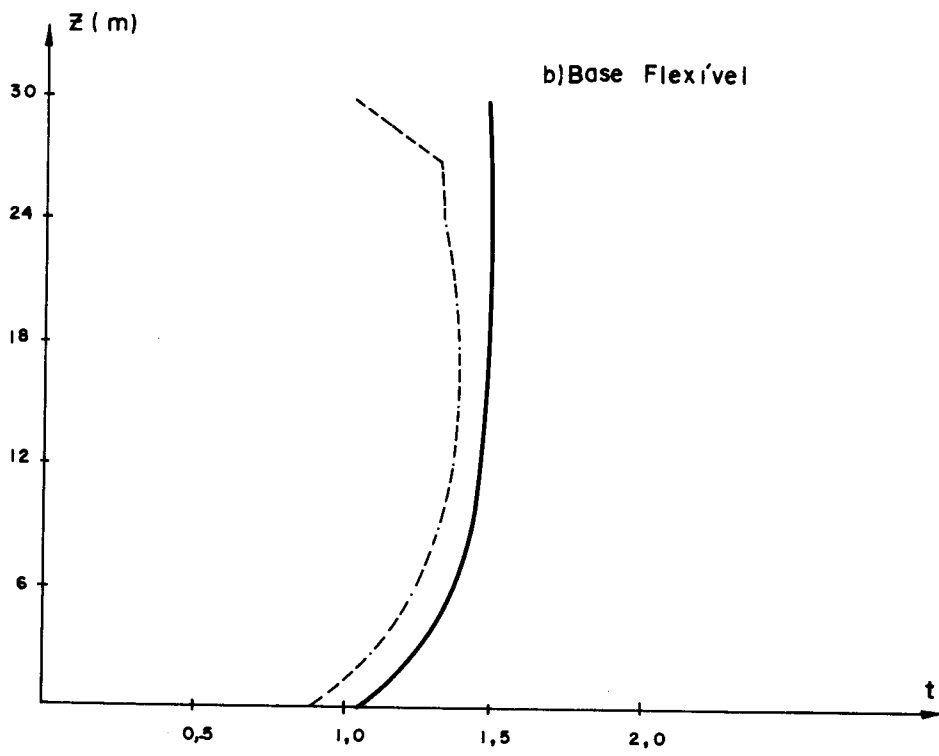
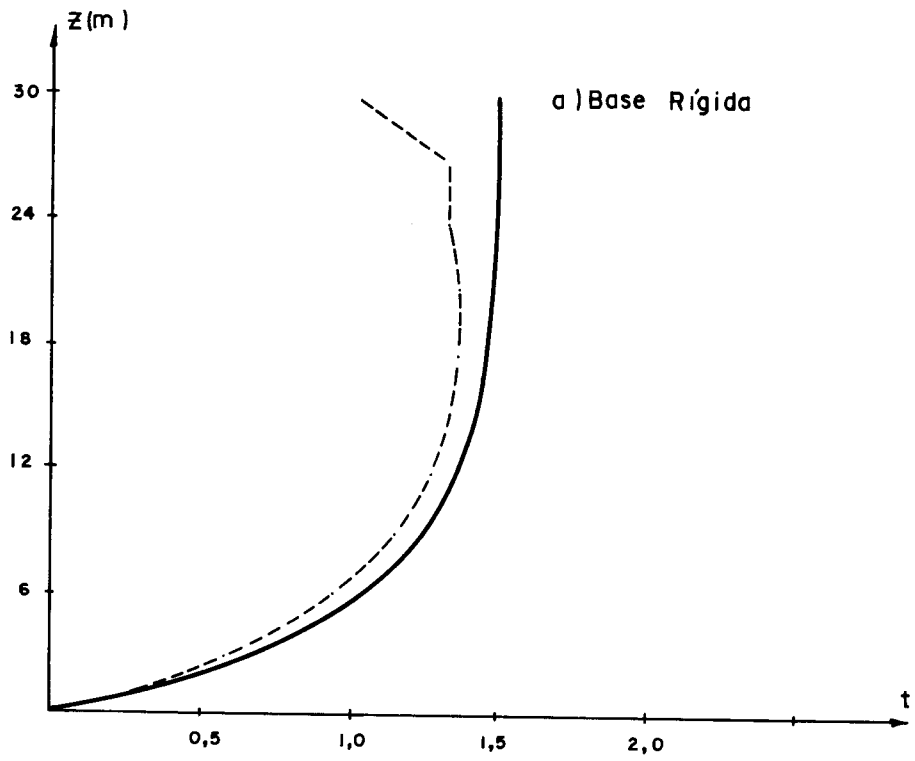
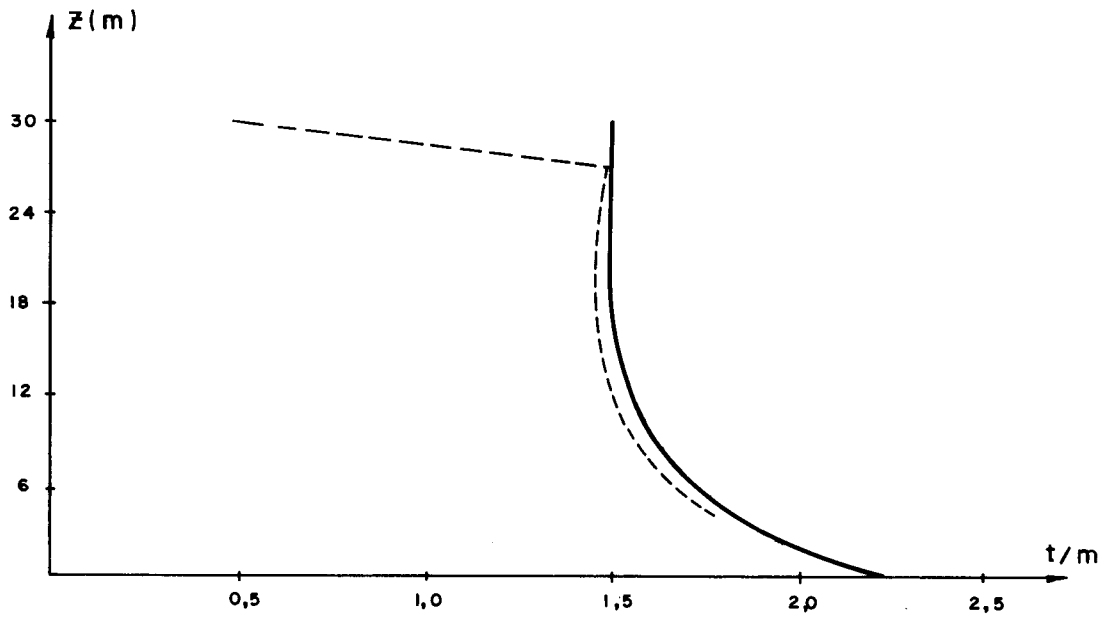


FIG. □ - 31 - FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDA NOS LINTÉIS



a) Base Rígida



b) Base Flexível

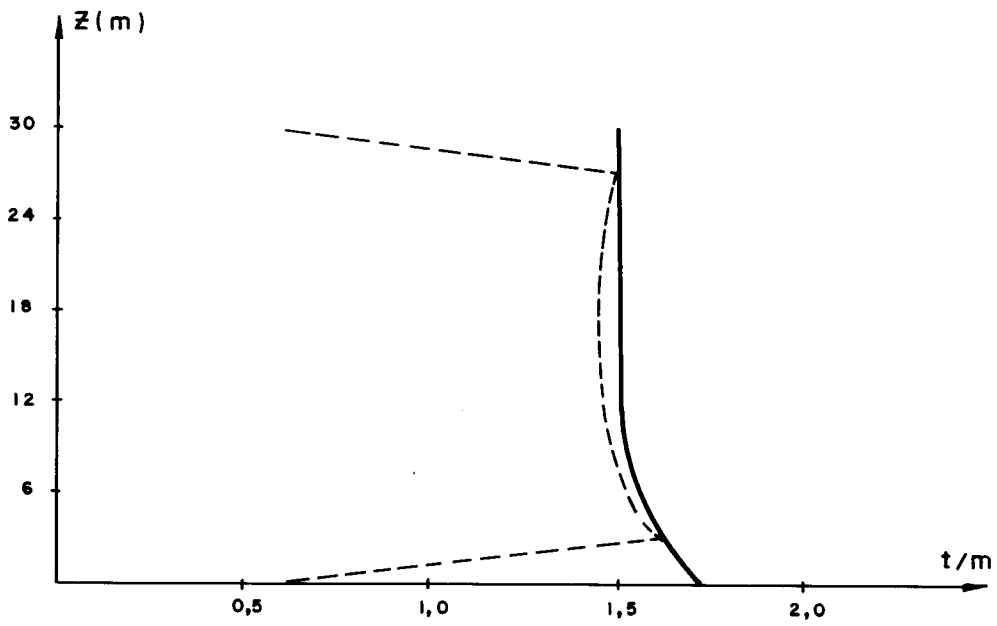


FIG. III- 32 FORÇA DISTRIBUÍDA NA INTERSECÇÃO DAS PAREDES

#### IV. CONCLUSÕES

Inicialmente, é importante frisar que a terceira condição de contorno usada na solução da equação diferencial do tratamento contínuo, aplicada ao exemplo do item II.5.6 coincide com a usada por MANCINI<sup>(1)</sup>. Como os coeficientes e as condições de contorno da equação diferencial são os mesmos, a solução aqui obtida é igual à obtida por MANCINI<sup>(1)</sup>.

O tratamento contínuo, desenvolvido no segundo capítulo, para solução de estruturas constituídas por núcleos sobre base flexível, apesar de exigir o conhecimento da Teoria de Flexo-Torção, que não é familiar ao engenheiro, é aqui justificável pelo fato de que, através da condição de contorno mostrada no item II.3.1, pode-se analisar um número maior de arranjos estruturais desse tipo de estrutura, o que, ao contrário deste, torna o processo introduzido por MANCINI<sup>(2)</sup> de trabalhosa aplicação.

Como se pode observar, através das Figuras mostradas no item III.9 ou nas tabelas do capítulo I, a flexibilidade da fundação aumenta as deformações de rotação das secções, sendo que seu efeito é sentido com maior intensidade na mudança do comportamento da função rotação (derivadas) nas proximidades da base da estrutura.

Como consequência, nota-se que de um modo geral, ocorre uma acentuada diminuição na intensidade dos momentos fletores e forças normais que solicitam as paredes em secções próximas à base da estrutura; aumenta consideravelmente o esforço cortante nos lintéis próximos a base e não há alterações notáveis em secções próximas ao topo.

Os gráficos apresentados no item III.9, mostram também uma boa concordância entre os resultados obtidos pelos dois tratamentos apresentados nesse trabalho. Observe-se que a concordância é melhor para a estrutura do item III.9.1. Isto deve-se ao fato de que ela possui vinte andares e está submetida a momento torçor concentrado de mesma

ordem de grandeza que o distribuído, enquanto que, a do item III.9.2, possui dez andares e está solicitada apenas por momento torçor concentrado no topo.

Observe-se ainda que, para os casos de fundações flexíveis, os valores das forças distribuídas nas bases das intersecções entre paredes obtidas pelo tratamento discreto, apresentam acentuadas descontinuidades. A concordância dessa descontinuidade e os sinais encontrados para as forças concentradas, trocadas entre paredes, admitidas por MANCINI<sup>(1)</sup> e referidas no item II.5, conduz à confirmação de suas existências.

Sugere-se, como trabalho que dê prosseguimento ao apresentado, o aprimoramento do tratamento contínuo, de maneira a permitir o estudo de estruturas de edifícios altos constituídos por quaisquer combinações de núcleos estruturais sobre base flexível, como também outros tipos de carregamentos.

APÊNDICE 1 - Resumo da teoria de flexo-torção

1. INTRODUÇÃO

Neste Apêndice, é apresentado um resumo da teoria de flexo-torção, ou teoria das barras de secção delgada, tendo como base os trabalhos de RACHID<sup>(10)</sup> e SCHIEL<sup>(11)</sup>. Esta teoria é usada na análise de estruturas de edifícios altos, contendo núcleos resistentes, que são analisados como barras de secção aberta de paredes delgadas.

Considere-se a barra de secção aberta de paredes delgadas, apresentada na Figura 1. Essa barra será referenciada ao sistema de eixos  $oxyz$ , com origem no centro de gravidade da secção transversal, sendo  $ox$  e  $oy$  eixos principais de inércia e  $oz$  um eixo longitudinal.

Na Figura 1, representa-se também uma coordenada  $s$  na linha esqueleto, ou simplesmente, esqueleto da secção, com origem  $O_s$  a ser convenientemente escolhida.

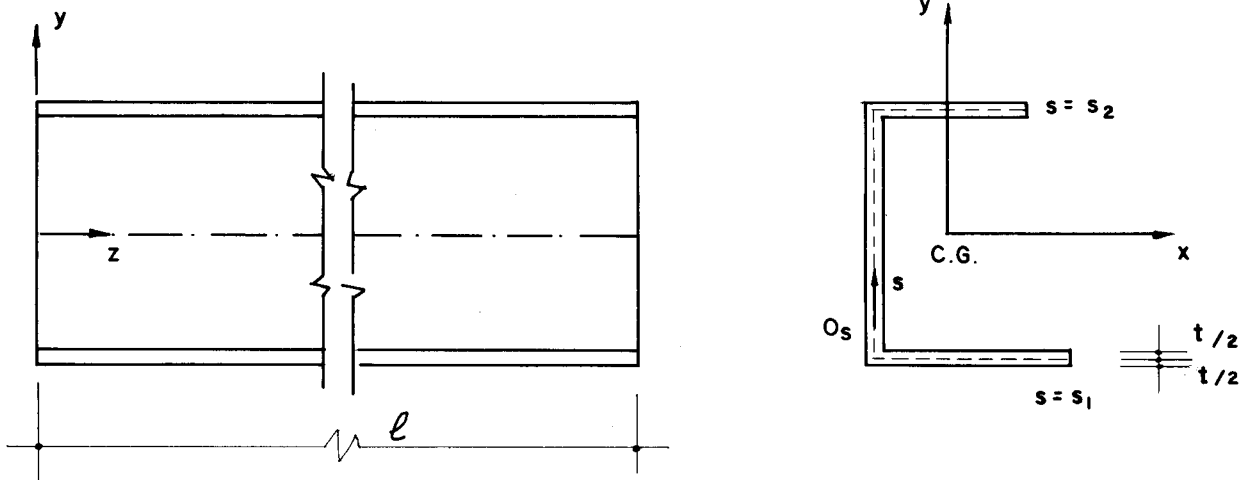


FIG. 1 - SISTEMA DE EIXOS EM UMA BARRA DE SECÇÃO ABERTA DE PAREDES DELGADAS

A espessura  $t$ , pode variar com  $s$  e o elemento de área da secção é dado por:

$$dS = t ds \tag{1}$$

São feitas as seguintes suposições:

a) As dimensões da secção não variam ao longo do eixo oz;

b) A barra é de paredes delgadas, ou seja: a espessura  $t$  é pequena comparada com as outras dimensões características do esqueleto e essas são bem menores que o comprimento  $l$  da barra;

c) A secção é indeformável em seu plano, possuindo portanto nesse plano, um movimento de corpo rígido.

## 2. CENTRO DE TORÇÃO OU DE CISALHAMENTO

Centro de torção, ou de cisalhamento, é o ponto do plano da secção transversal, por onde deve passar a linha de ação de uma carga transversal para que a peça fique submetida apenas à flexão.

Para determinar a posição do centro de torção, considere-se a expressão das tensões de cisalhamento provocadas pela força cortante Q:

$$\tau = \frac{QM_S}{tJ} \quad (2)$$

onde  $M_S$  é o momento estático e J o momento de inércia, tomados em relação ao eixo apropriado.

Supondo inicialmente um carregamento no plano yz. Na equação (2) faz-se:

$$Q = Q_y$$

$$J = J_x$$

$$M_S = \int_{s_1}^s y dS$$

A condição que fornece a localização do centro de torção  $D$ , é que a resultante dos momentos das tensões  $\tau_{Qy}$ , supostas uniformemente distribuídas na espessura  $t$  (Figura 2a), em relação ao centro de torção seja nula. Tem-se então:

$$\int_{s_1}^{s_2} \tau_{Qy} dS n = 0 \quad (3)$$

onde  $n$  representa a distância do centro de torção  $\hat{a}$  tangente ao esqueleto, conforme indicado na Figura 2.

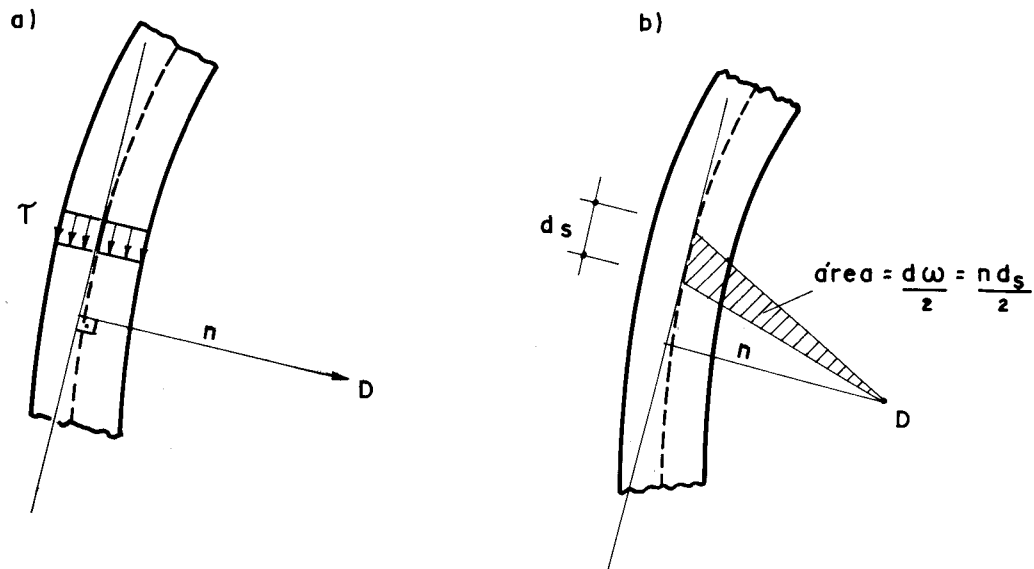


FIG. 2 — CENTRO DE TORÇÃO E ÁREA SETORIAL

A substituição de (1) e (2) em (3) fornece:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left( \int_{s_1}^s y dS \right) n ds = 0$$

Efetuando-se a integração por partes e, sendo nulo o momento estático nos pontos extremos da secção, obtém-se:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left( \int_{s_1}^s nds \right) y dS = 0 \quad (4)$$

Supondo agora, um carregamento no plano xz e procedendo-se de forma análoga, chega-se a seguinte condição para o centro de torção:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left( \int_{s_1}^s nds \right) x dS = 0 \quad (5)$$

Define-se como área setorial,  $\omega$ , a seguinte característica geométrica:

$$\omega = \int_{s_1}^s nds \quad (6)$$

A razão do nome área setorial provém da propriedade esquematizada na Figura 2-b: o elemento de área setorial  $d\omega$ , é o dobro da área do setor elementar com polo em D e que compreende o arco elementar  $ds$ .

Com a substituição de (6), as equações (4) e (5) fornecem as condições que definem a posição do centro de torção.

$$\left. \begin{aligned} \int_S \omega y dS &= 0 \\ \int_S \omega x dS &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

A posição da origem  $O_s$  da coordenada  $s$ , não influe nas condições (7), pois, uma translação na origem provoca o acréscimo de uma constante na área setorial, cuja contribuição para as integrais de (7) são nulas, por ser nulo o momento estático quando se considera a secção inteira.

Para simplificações futuras, a origem  $O_s$  será escolhida de maneira a satisfazer a seguinte condição:

$$\int_S \omega dS = 0 \quad (8)$$

Pelo exposto anteriormente, caso se tenha a área setorial  $\bar{\omega}$ , com origem arbitrária, e se queira a área setorial  $\underline{\omega}$  satisfazendo (8), basta fazer:

$$\omega = \bar{\omega} + C \quad (9)$$

que, substituindo-se em (8) fornece:

$$C = -\frac{1}{S} \int_S \bar{\omega} dS \quad (10)$$

onde  $S$  é a área da secção transversal

### 3. FÓRMULAS PARA AS COORDENADAS DO CENTRO DE TORÇÃO

As equações (7), que traduzem as condições que definem o centro de cisalhamento, não permitem aplicações diretas na determinação das suas coordenadas.

Consegue-se isto por meio da interpretação da área setorial esquematizada na Figura 3. Essa figura mostra um trecho do esqueleto com origem  $O_s(x_o, y_o)$  e um ponto genérico  $Q(x, y)$ . Pelos pontos  $D(x_D, y_D)$  (centro de cisalhamento).  $O_s$  e  $Q$ , são traçadas retas paralelas aos eixos principais de inércia  $ox$  e  $oy$ . Sendo  $\Delta$  a área do triângulo  $DMQ$  (ou do  $DNQ$ ), por geometria conclui-se que:

$$A + B + 2\Delta = 2\left(\frac{\omega}{2} + B + \Delta\right)$$

onde  $A$  e  $B$  são as áreas hachuradas e  $\underline{\omega}$  é a área setorial com polo  $D$ , na Figura 3.



Da equação acima, pode-se escrever

$$\omega = A - B \quad (11)$$

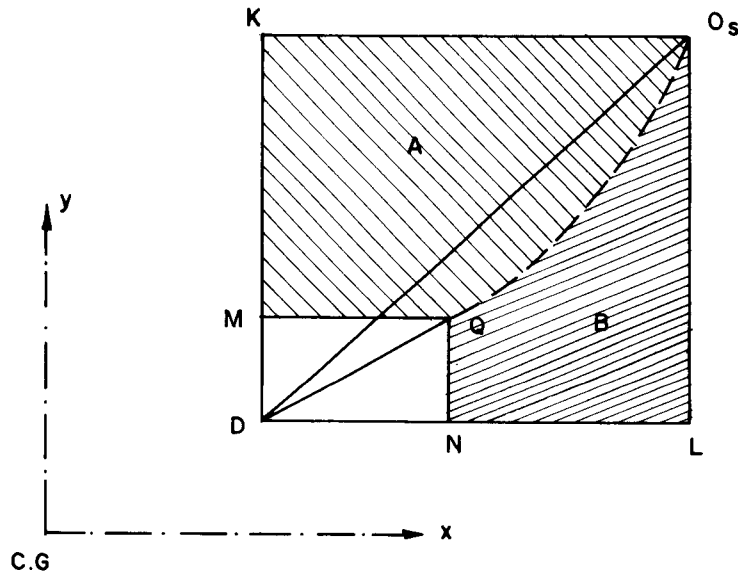


FIG. 3 - PROPRIEDADES DA ÁREA SETORIAL

O sinal da função  $\omega$  será convencionalmente positivo quando o raio vetor traçado de D, partindo da origem  $O_s$  para o ponto genérico, girar no sentido horário, para um observador colocado sobre o eixo  $oz$  e olhando no seu sentido negativo.

Adotando um ponto  $P(x_p, y_p)$ , arbitrariamente escolhido, como polo provisório para a área setorial  $\omega_p$ , e considerando a propriedade (11) da área setorial aplicada à disposição indicada na Figura 4, pode-se escrever:

$$\omega_p = A + (y_o - y)(x_D - x_p) - B - (x_o - x)(y_D - y_p)$$

que arrumada convenientemente e, utilizando (11) chega-se a:

$$\omega = \omega_p + (x_o - x)(y_D - y_p) - (y_o - y)(x_D - x_p) \quad (12)$$

Como os eixos  $ox$  e  $oy$  são eixos principais de inércia, valem as equações:

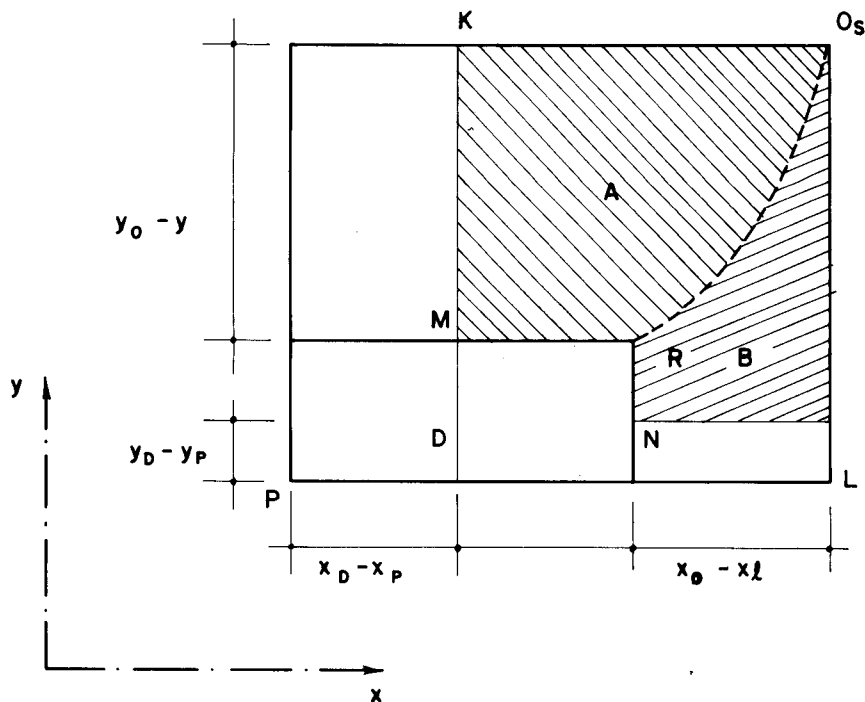


FIG. 4 - ÁREA SETORIAL NA MUDANÇA DE POLO

$$\left. \begin{aligned}
 \int_S x^2 dS &= J_y \\
 \int_S y^2 dS &= J_x \\
 \int_S x dS = 0, \int_S y dS = 0, \int_S xy dS &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Substituindo-se (12) em (7) e utilizando-se (13), obtêm-se as fórmulas para as coordenadas do centro de torção, para um sistema de eixos no centro de gravidade da seção com  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  eixos principais de inércia:

$$\left. \begin{aligned}
 x_D &= x_P - \frac{1}{J_x} \int_S \omega_P y dS \\
 y_D &= y_P + \frac{1}{J_y} \int_S \omega_P dS
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

#### 4. TORÇÃO UNIFORME OU TORÇÃO LIVRE OU TORÇÃO DE SAINT-VENANT

##### 4.1 - Observação sobre o centro de torção

Sabe-se que, na teoria de primeira ordem, o trabalho produzido pelo momento torçor, em um deslocamento de flexão é nulo. Portanto, pelo teorema de Maxwell, conclui-se que o trabalho de um carregamento que provoque apenas flexão em uma peça, é nulo no deslocamento de torção. Isso só é possível se o deslocamento do centro de torção for nulo durante a torção: concluindo-se assim, que o centro de torção é o centro de rotação da secção transversal, quando a peça sofre um deslocamento de torção. Essa propriedade é básica no estudo que se segue.

##### 4.2 - Condições para a torção livre

Uma barra estará submetida à chamada torção livre ou uniforme ou de Saint-Venant, quando estiverem satisfeitas às seguintes condições:

- a) o momento torçor solicitante  $M_t$  é constante com  $z$ .
- b) a secção transversal é constante com  $z$ .
- c) os deslocamentos longitudinais não são impedidos por vínculos.

Da Resistência dos Materiais, sabe-se que na torção livre a derivada do ângulo de rotação  $\phi'$ , é dada por:

$$\phi' = \frac{M_t}{GJ_t} \quad (15)$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal e  $J_t$  é o momento de inércia à torção.

$$J_t = \frac{1}{3} \int_{s_1}^{s_2} t^3 ds \quad (16)$$

convenciona-se nesse estudo que "o momento torçor e a rotação são positivos, quando anti-horários, para um observador colocado sobre o eixo oz e olhando no seu sentido negativo". A Figura 5, mostra essa convenção

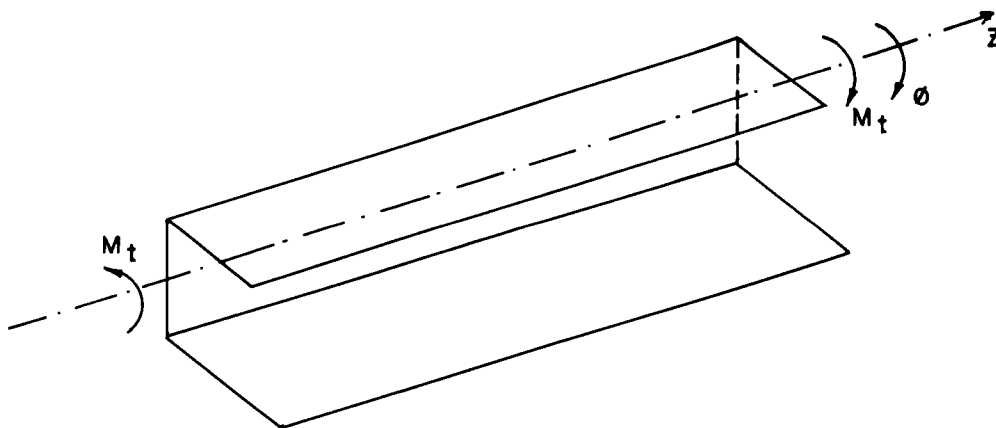


FIG. 5 - CONVENÇÃO DE \$M\_t\$ E \$\phi\$ POSITIVOS

#### 4.3 - Deslocamentos

Os deslocamentos considerados são  $\underline{w}$  na direção  $\underline{z}$  e  $\underline{v}$  na direção  $\underline{s}$ .

Quando a secção sofre uma rotação  $\phi$ , em torno do centro de torção, um ponto genérico Q do esqueleto, tem um deslocamento  $\overline{QQ'}$  indicado na Figura 6.

Para pequenas rotações pode-se escrever:

$$\overline{QQ'} = r\phi$$

onde  $\underline{r}$  é o comprimento do raio vetor traçado do centro de torção ao ponto genérico Q do esqueleto.

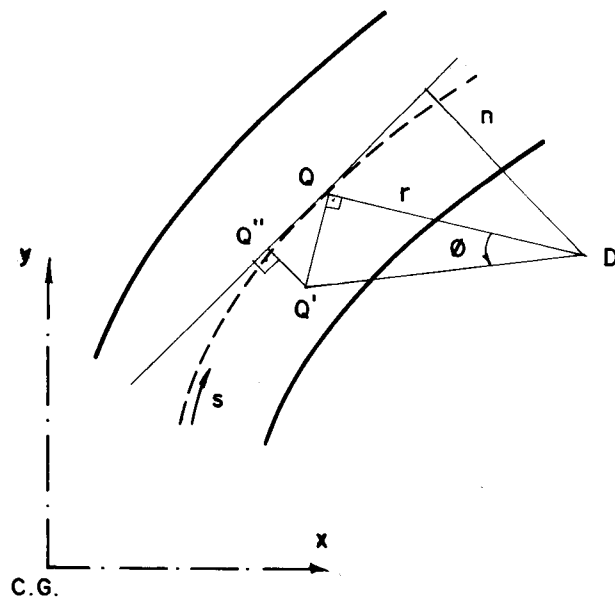


FIG. 6 - DESLOCAMENTO DE UM PONTO DO ESQUELETO

O deslocamento do ponto na direção da tangente ao esqueleto,  $v$ , é dado pela projeção de  $\overline{QQ'}$  sobre esta tangente, ou seja:

$$-v = n\phi \quad (17)$$

O sinal negativo na equação (17), provém do fato de a rotação ser positiva quando anti-horária e a coordenada  $s$  quando horária, para um observador sobre o eixo  $oz$  e olhando no seu sentido negativo.

Pela Teoria da Elasticidade, um elemento  $ds dz$  do esqueleto, sofre uma distorção  $\gamma$  dada por:

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s}$$

Como a tensão tangencial é nula no esqueleto, pela lei de Hooke, a distorção também o será. Desse modo, derivando a equação (17) em relação a  $z$  e substituindo na última equação chega-se a:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = n\phi' \quad (18)$$

Na torção livre o deslocamento longitudinal  $w$ , não é função de  $z$ , logo, a equação (18) pode ser integrada em  $s$  desde a origem  $O_s$  até o ponto genérico  $Q$ .

$$w = \phi' \int_{O_s}^s n ds$$

Usando-se a definição de área setorial, dada pela equação (6), a equação anterior fica:

$$w = \omega\phi' \quad (19)$$

Aos deslocamentos longitudinais dados pela equação (19), dar-se o nome de "empenamentos". Eles são contados a partir da origem  $O_s$  e são positivos quando concordantes com o sentido positivo de  $z$ .

Como por hipótese, a secção transversal é indefor<sub>m</sub>ável em seu plano, o empenamento é a única deformação adm<sub>i</sub>tida na secção.

## 5. TORÇÃO NÃO UNIFORME OU FLEXO-TORÇÃO

### 5.1 - Hipótese de cálculo

Neste estudo, serão consideradas somente as barras de secção transversal constante. A ocorrência de flexo-torção ou torção não uniforme, ficará limitada apenas aos casos, em que o momento torçor não seja constante, ou aqueles em que haja vínculos que impeçam os deslocamentos longitudinais (empenamentos).

A hipótese básica para resolução do problema de flexo-torção é que a equação (19) continua válida. Agora, com a particularidade que a derivada do ângulo de rotação não é mais constante com  $\underline{z}$ .

### 5.2 - Tensão normal de flexo-torção

Desprezando-se as tensões normais, com exceção daquelas em cortes transversais, a tensão normal  $\sigma_z$  e a de formação longitudinal  $\epsilon_z$ , são obtidas pela lei de Hooke e pela Teoria da Elasticidade:

$$\sigma_z = E\epsilon_z \tag{20}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal

A combinação de (20) e (19) fornece:

$$\sigma_z = E\omega\phi'' \tag{21}$$

Lembrando-se das equações (7) e (8), verifica-se que as tensões normais  $\sigma_z$ , não têm força nem momento resultante na secção. A tensão  $\sigma_z$  será positiva quando de tração, devido às convenções anteriores.

### 5.3 - Tensão tangencial de flexo-torção

Pelo equilíbrio longitudinal do elemento de comprimento  $dz$ , limitado pelas coordenadas  $s_1$  e  $\underline{s}$ , mostrado na Figura 7, conclui-se que, devido a variação das tensões  $\sigma_z$  com  $\underline{z}$ , o equilíbrio só será possível com a existência de

tensões de cisalhamento. Essas tensões são chamadas "tensões tangenciais de flexo-torção" e são indicadas por  $\tau_{ft}$ .

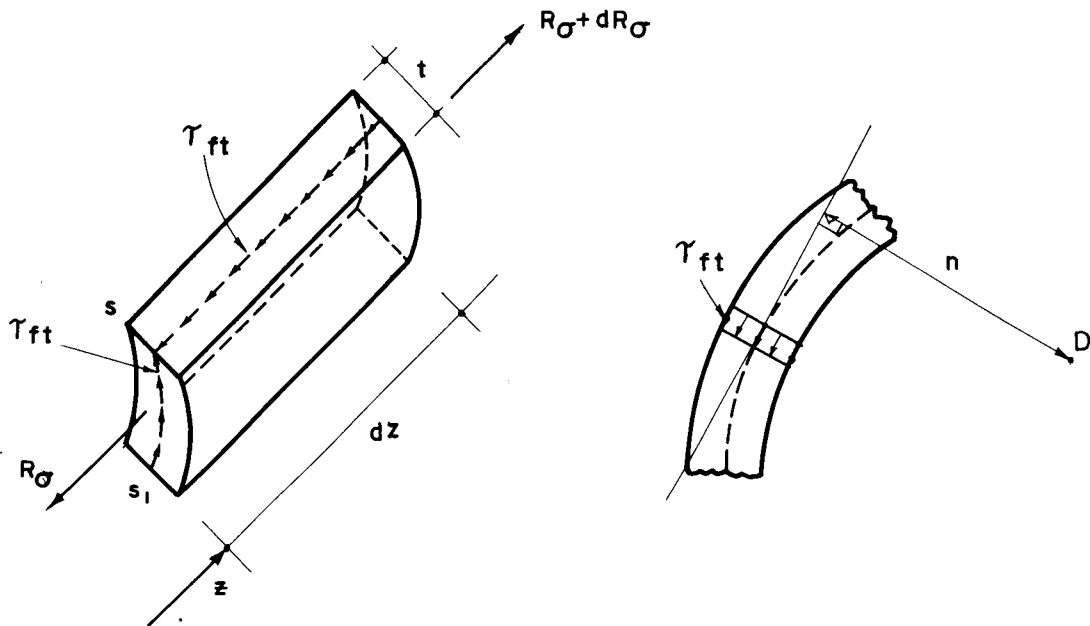


FIG. 7 - TENSÕES TANGENCIAIS DE FLEXO-TORÇÃO

Chamando de  $R_\sigma$  a resultante das tensões  $\sigma_z$  na face de coordenada  $z$ , pode-se escrever:

$$R_\sigma = \int_{s_1}^s \sigma_z dS$$

ou usando a expressão (21)

$$R_\sigma = E\phi'' \int_{s_1}^{s_2} \omega dS \quad (22)$$

Fazendo-se o equilíbrio do elemento na direção longitudinal e usando (22), obtêm-se a expressão de  $\tau_{ft}$ :

$$\tau_{ft} = \frac{E\phi'''}{t} \int_{s_1}^s \omega dS \quad (23)$$



#### 5.4 - Momento de flexo-torção

As tensões  $\tau_{ft}$ , por serem suficientemente pequenas, não ameaçam a base de cálculo da teoria de flexo-torção: distorção nula no esqueleto. Porém, sua contribuição para o momento torçor pode ser apreciável. Essa contribuição chamar-se-á de momento de flexo-torção  $M_{ft}$ .

A Figura 7, mostra o braço  $\underline{n}$  das tensões  $\tau_{ft}$  em relação ao centro de torção. Então, pode-se escrever:

$$M_{ft} = \int_{s_1}^{s_2} \tau_{ft} dS \ n$$

Usando (1) e (20) na equação anterior, chega-se a:

$$M_{ft} = E\phi''' \int_{s_1}^{s_2} \left( \int_{s_1}^s \omega dS \right) nds$$

Integrando-se por partes e, usando (6) e (8), obtem-se a expressão para o momento de flexo-torção:

$$M_{ft} = -E\phi''' \int_S \omega^2 dS \quad (24)$$

Usando-se denominações análogas às da Resistência dos Materiais, as seguintes características de secção, são definidas:

a) Momento setorial de inércia,  $J_\omega$

$$J_\omega = \int_S \omega^2 dS \quad (25)$$

b) Momento estático setorial,  $S_\omega$

$$S_\omega = \int_{s_1}^s \omega dS \quad (26)$$

que usadas em (24) fornece:

$$M_{ft} = -EJ_\omega \phi''' \quad (27)$$

Substituindo-se as equações (26) e (27) em (23), obtêm-se:

$$\tau_{ft} = - \frac{M_{ft} S_\omega}{tJ_\omega} \quad (28)$$

### 5.5 - Equação diferencial da flexo-torção

Devido ao aparecimento do momento de flexo-torção, o momento torçor que solicita uma secção, de uma barra de secção aberta e paredes finas, será equilibrado por duas parcelas de momentos resistentes:

$$M_t = M_\ell + M_{ft} \quad (29)$$

onde  $M_{ft}$  representa a parcela do momento resistente proveniente das tensões tangenciais de flexo-torção e,  $M_\ell$  é o momento de torção livre proveniente das tensões de cisalhamento da torção livre. Desse modo, a equação (15) transforma-se em:

$$M_\ell = GJ_t \phi' \quad (30)$$

Substituindo-se as equações (27) e (30) na equação de equilíbrio à rotação, (29), obtêm-se a equação diferencial da flexo-torção no ângulo de rotação:

$$-EJ_{\omega} \phi'''' + GJ_t \phi' = M_t \quad (31)$$

A resolução da equação anterior, representa a solução do problema da flexo-torção, pois todas as grandezas envolvidas são determinadas diretamente a partir de  $\phi$ .

## 6. INTRODUÇÃO DO BIMOMENTO

Introduzido por Vlassov<sup>(13)</sup>, o conceito de bimoto, visa uma ampliação nos tipos de problemas tratados com o uso da equação (31).

Define-se o bimomento B, por:

$$B = \int_S \sigma_z \omega dS \quad (32)$$

A substituição de (21) e (25) em (32) fornece:

$$B = EJ_{\omega} \phi'' \quad (33)$$

Combinando (21) e (33), obtêm-se a expressão da tensão normal  $\sigma_z$ , em função do bimomento, semelhante à da flexão simples:

$$\sigma_z = \frac{B}{J_{\omega}} \omega \quad (34)$$

Derivando-se a equação (33) e comparando com (27), chega-se a:

$$M_{ft} = -B' \quad (35)$$

Comparando (35) com (28), tem-se:

$$\tau_{ft} = \frac{B' S_{\omega}}{t J_{\omega}} \quad (36)$$

Lembrando-se que a força cortante  $\bar{e}$  a derivada do momento fletor e, comparando-se as equações (2) e (36) nota-se a analogia entre a teoria de flexo-torção e a teoria de flexão simples, estudada na Resistência dos Materiais.

Para transformar a equação diferencial (31), em termos do bimomento, faz-se inicialmente a substituição de (35) e (30) em (29) obtendo-se:

$$M_t = GJ_t \phi' - B'$$

Derivando a equação anterior e, usando (33), obtêm-se:

$$M'_t = \frac{GJ_t}{EJ_{\omega}} B - B''$$

ou, finalmente

$$r^2 B'' - B = -r^2 m \quad (37)$$

onde:

$$r = \sqrt{\frac{EJ_{\omega}}{GJ_t}} \quad (38)$$

$m = M'_t \bar{e}$  é o momento torçor distribuído.

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para finalizar esse estudo, faz-se aqui, algumas observações necessárias às aplicações da teoria da flexo-torção.

### 7.1 - Condições de contorno

Entre as diversas condições de carregamento ou vinculação, às que normalmente é submetida a extremidade de uma barra, são:

a) Extremidade livre

sendo  $\sigma_z = 0$ , de (21) vem:

$$\phi'' = 0 \quad (39)$$

b) Extremidade engastada

como  $w = 0$ , de (19) vem:

$$\phi' = 0 \quad (40)$$

c) Extremidade com distribuição dada de tensão

Nesse caso se utiliza a própria definição do bimoto.

$$B = \int_S \sigma_z \omega dS = EJ_\omega \phi'' \quad (41)$$

d) Extremidade com carga axial concentrada

Caso na extremidade sejam aplicadas cargas axiais  $P_i$ , concentradas em pontos de área setorial  $\omega_i$ , o bimoto pode ser calculado como:

$$B = \sum_i P_i \omega_i = EJ_\omega \phi'' \quad (42)$$

Obs.:  $P_i$  é positivo se de tração

e) Extremidade com momento aplicado

Considere-se um momento fletor  $M$ , aplicado em um ponto genérico  $Q$  do esqueleto com sentido mostrado na Figura 8.a). Esse momento pode ser substituído por duas cargas  $P$ , concentradas de sentidos opostos, agindo axialmente em correspondência com o plano do momento, Figura 8.b).

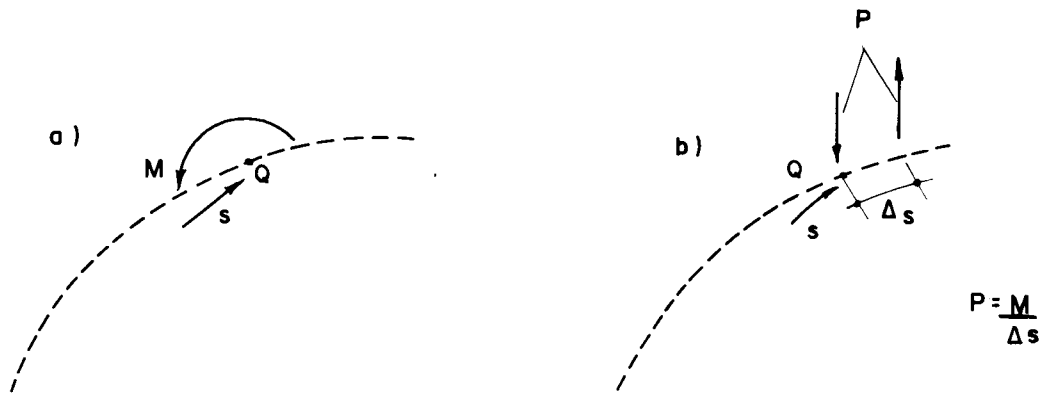


FIG. 8 - MOMENTO FLETOR CONCENTRADO

Considerando-se a condição de contorno (42) e a equivalência estática mostrada na Figura 8, o bímomento produzido pelo momento fletor, será:

$$B = P\omega(s+\Delta s) + (-P)\omega(s)$$

onde  $\omega(s)$  é a área setorial no ponto de coordenada  $s$

Rearrmando a equação anterior e lembrando que  $P = \frac{M}{\Delta s}$ , obtém-se:

$$B = M \frac{\omega(s + \Delta s) - \omega(s)}{\Delta s}$$

Para que a equivalência seja válida, pelo princípio de Saint-Venant, tem-se que levar a equação anterior ao limite:  $\Delta s \rightarrow 0$ . Lembrando-se da definição de derivada, o limite aplicado na expressão anterior fornece:

$$B = M \left. \frac{d\omega}{ds} \right|_Q \quad (43)$$

onde  $\left. \frac{d\omega}{ds} \right|_Q$  significa a derivada da área setorial em relação a coordenada do esqueleto  $\underline{s}$ , no ponto Q (ponto de aplicação do momento).

### 7.2 - Área setorial e momento setorial de inércia na mudança de polo e origem $O_s$

Considere-se um trecho do esqueleto, da secção transversal de uma barra, com origem  $O_s(x_o, y_o)$  e centro de torção  $D(x_D, y_D)$ , mostrados na Figura 9.

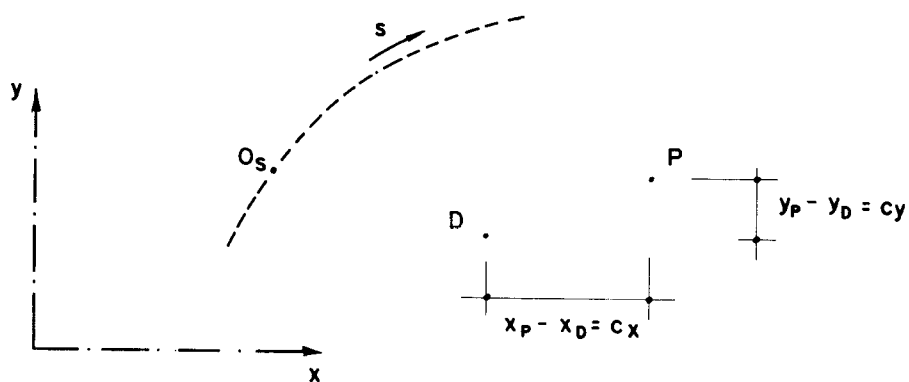


FIG. 9 - MUDANÇA DE POLO

A Figura 9 mostra também um ponto  $P(x_p, y_p)$  e os segmentos  $c_x$  e  $c_y$ .

Usando-se convenientemente a equação (12), as áreas setoriais  $\underline{\omega}$ , com polo D e  $\omega_p$ , com polo P, e mesma origem  $O_s$ , podem ser relacionadas pela expressão seguinte:

$$\omega_p = \omega + (x_o - x)(y_p - y_D) - (y_o - y)(x_p - x_D)$$

ou usando  $c_x$  e  $c_y$ :

$$\omega_P = \omega + (x_0 - x)c_y - (y_0 - y)c_x \quad (44)$$

Considere-se agora que  $\omega$  e  $O_s$ , satisfazem a equação (8), e que  $\bar{\omega}_P$  seja a área setorial com polo P e origem  $\bar{O}_s$ , tal que a expressão seguinte seja verificada:

$$\int_S \bar{\omega}_P dS = 0 \quad (45)$$

usando (9) escreve-se:

$$\omega_P = \bar{\omega}_P - C$$

Substituindo-se a equação (44) na equação anterior, obtêm-se:

$$\bar{\omega}_P = \omega + (x_0 - x)c_y - (y_0 - y)c_x + C \quad (46)$$

A constante C é determinada pela substituição de (46) em (45) e, usando (8) e (13):

$$C = y_0 c_x - x_0 c_y$$

A substituição da equação anterior na equação (46), fornece a expressão que relaciona as áreas setoriais  $\bar{\omega}_P$  e  $\omega$  com origens diferentes, satisfazendo as equações (8) e (45):

$$\bar{\omega}_P = \omega - x c_y + y c_x \quad (47)$$

O momento setorial de inércia, para a área setorial com polo em P,  $J_\omega^P$ , pode ser determinado em função de  $J_\omega$ , através da definição de momento setorial de inércia, dada pela equação (25).



A substituição da equação (47), na equação (25) para  $\bar{\omega}_p$ , fornece:

$$J_{\omega}^P = \int_S (\omega + x c_y - y c_x)^2 dS$$

Fazendo-se as operações convenientes e, usando as equações (7), (13) e (25) chega-se finalmente à expressão procurada.

$$J_{\omega}^P = J_{\omega} + J_y c_y^2 + J_x c_x^2 \quad (48)$$

APÊNDICE 2 - Demonstrações de formulações usadas neste trabalho

1. MODIFICAÇÃO NA MATRIZ DE RIGIDEZ NO CASO DE MUDANÇA DO SISTEMA DE COORDENADAS

Considere-se uma estrutura referida ao sistema de coordenadas ① genérico. Referidos a essas coordenadas, sejam  $F_1$  o vetor de cargas;  $D_1$  o vetor deslocamento e  $R_1$  a matriz de rigidez. Escreve-se:

$$F_1 = R_1 D_1 \quad (1)$$

Admita-se que se tenha feito uma mudança das coordenadas para um sistema ②, onde  $F_2$ ,  $D_2$  e  $R_2$  têm a significação acima mencionada, com referência às novas coordenadas. Escreve-se:

$$F_2 = R_2 D_2 \quad (2)$$

Seja  $T$  a matriz que transforma os deslocamentos do sistema de coordenadas ② para o sistema ①, através de:

$$D_1 = T D_2 \quad (3)$$

A formulação da matriz  $T$  é feita do seguinte modo: os elementos da coluna genérica  $i$  são os deslocamentos nas coordenadas do sistema ①, quando impõe-se um deslocamento unitário na coordenada  $i$  do sistema ②.

Admitindo-se que a estrutura trabalhe no regime elástico, sabe-se que, o trabalho realizado por um sistema de cargas  $f_i$  nos deslocamentos  $d_i$  correspondentes, é dado por:

$$\tau = \sum \frac{1}{2} f_i d_i$$

ou, sob forma matricial

$$\tau = \frac{1}{2} D^t F \quad (4)$$

onde,  $F$  é o vetor das cargas  $f_i$ ;  $D$  é o vetor dos deslocamentos  $d_i$  e  $D^t$  é o transposto de  $D$ .

Como deve ocorrer a igualdade entre os trabalhos realizados pelas cargas para os dois sistemas de coordenadas, tem-se:

$$\frac{1}{2} D_1^t F_1 = \frac{1}{2} D_2^t F_2$$

Usando-se a equação (3) na expressão anterior, tem-se:

$$D_2^t T^t F_1 = D_2^t F_2$$

onde  $T^t$  é a matriz transposta de  $T$

Substituindo-se as equações (1) e (2), na expressão anterior:

$$D_2^t T^t R_1 D_1 = D_2^t R_2 D_2$$

A substituição da equação (3) na última expressão fornece:

$$D_2^t T^t R_1 T D_2 = D_2^t R_2 D_2$$

Esta identidade, válida para todos os casos de  $D_2$ , exige que:

$$R_2 = T^t R_1 T \quad (5)$$

2. DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UMA ESTRUTURA A PARTIR DAS MATRIZES DE RIGIDEZES DOS SEUS ELEMENTOS

Considere-se uma estrutura formada por  $n$  elementos: I, II, III, ..., n. Cada um deles possui as suas próprias coordenadas.

Tome-se inicialmente, como coordenadas da estrutura, todas as coordenadas dos elementos, numeradas sequencialmente por elemento (estrutura desmembrada).

Sendo  $r_I, r_{II}, \dots, r_n$ , as matrizes de rigidezes dos  $n$  elementos nas suas coordenadas, a matriz de rigidez  $\bar{R}$  da estrutura desmembrada será em diagonal:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} r_I & & & & \\ & r_{II} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & r_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

Seja R a matriz de rigidez referida às coordenadas da estrutura integrada, e T a matriz que transforma os deslocamentos da estrutura integrada nos da desmembrada.

Pela equação (5), item anterior, tem-se:

$$R = T^t \bar{R} T \quad (7)$$

onde  $T^t$  é a matriz transposta de T

Estando as coordenadas da estrutura desmembrada, numeradas sequencialmente por elemento, a matriz T pode então, ser escrita em forma particionada:

$$T = \begin{bmatrix} T_I \\ T_{II} \\ T_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde cada submatriz  $T_i$  transforma os deslocamentos da estrutura integrada nos deslocamentos do elemento  $i$ .

Substituindo-se as equações (6) e (8) em (7) e efetuando-se o duplo produto matricial, chega-se a:

$$R = T_I^t r_I T_I + T_{II}^t r_{II} T_{II} + \dots + T_n^t r_n T_n$$

ou,

$$R = \sum_{i=1}^n T_i^t r_i T_i \quad (9)$$

### 3. ESFORÇOS EM ELEMENTOS PRISMÁTICOS, CONSIDERANDO-SE AS DEFORMAÇÕES POR FORÇA CORTANTE

Considere-se o elemento prismático, originariamente sobre o eixo OX, sofrendo deformações quando submetido a esforços como indicados na Figura 1.

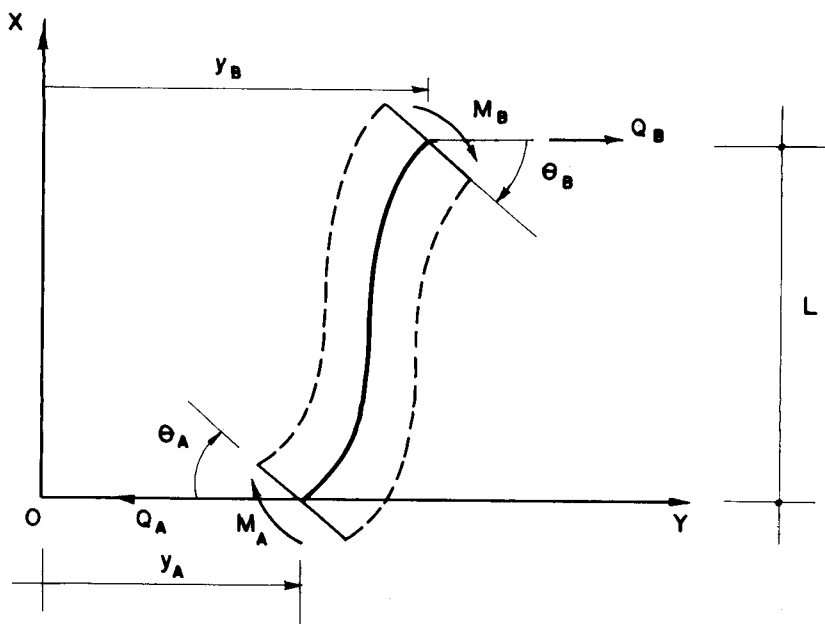


FIG. 1 - ELEMENTO NA POSIÇÃO DEFORMADA

onde as linhas tracejadas representam as bordas e a contínua o eixo neutro da seção.

Os deslocamentos  $y_1$ , devidos apenas ao momento fletor  $M$ , é dado por:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = - \frac{M}{EJ} \quad (10)$$

onde  $E$  e  $J$  são respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal e o momento de inércia da secção.

Sendo  $\tau$ , a tensão de cisalhamento no eixo neutro, pela lei de Hooke tem-se as deformações devido apenas à força cortante,  $y_2$ :

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{\tau}{G} \quad (11)$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal

Sendo  $Q$  o esforço cortante que atua em uma secção genérica de área  $A$ , a tensão média de cisalhamento que solicita a secção é  $\frac{Q}{A}$ . Considere-se o parâmetro  $c$  que relaciona a tensão média com a tensão  $\tau$  através da equação.

$$\tau = c \frac{Q}{A} \quad (12)$$

O parâmetro  $c$ , para secções retangulares, é dado por (14)

$$c = \frac{12+11\delta}{10+10\delta}$$

onde  $\delta$  é o coeficiente de Poisson

Substituindo-se a equação (12) em (11), obtêm-se:

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{cQ}{AG} \quad (13)$$

Derivando-se a equação anterior, e somando-se os efeitos da força cortante e momento fletor, tem-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} + \frac{c}{AG} \frac{dQ}{dx} \quad (14)$$

Lembrando que  $-\frac{dQ}{dx}$  e  $\frac{d^2M}{dx^2}$  são iguais à carga distribuída, nula para o caso, a equação (14) pode ser escrita na forma:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

cuja solução geral é:

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 \quad (15)$$

Usando-se os índices A e B para especificar esforços e deslocamentos nas extremidades do elemento, as duas condições de contorno são imediatas:

$$\left. \begin{array}{l} y = y_A \quad \text{em } x = 0 \\ y = y_B \quad \text{em } x = L \end{array} \right\} \quad (16)$$

onde L é o comprimento do elemento

Admitem-se conhecidas as rotações médias das seções extremas,  $\theta_A$  e  $\theta_B$ . Considerando-se o efeito da força cortante nas deformações, os elementos das extremidades do eixo, além das rotações médias  $\theta$ , sofrerão distorções provocadas pelas tensões de cisalhamento.

Observando-se os sentidos adotados para as forças cortantes nas extremidades, pelo exposto acima, tem-se:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \theta_A + \frac{cQ_A}{AG} & \text{em } x &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \theta_B + \frac{cQ_B}{AG} & \text{em } x &= L \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Substituindo as condições de contorno, (16) e (17), e lembrando-se que  $Q_A = Q_B$  (equilíbrio), obtêm-se os seguintes valores para as constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  da equação (15).

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= y_A \\ C_2 &= \theta_A + \frac{cQ_A}{AG} \\ C_3 &= -\frac{2\theta_A + \theta_B}{L} - \frac{3cQ_A}{AGL} - \frac{3(y_A - y_B)}{L^2} \\ C_4 &= \frac{\theta_A + \theta_B}{L^2} + \frac{2cQ_A}{AGL^2} + \frac{2(y_A - y_B)}{L^3} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

O equilíbrio a rotação do elemento fornece:

$$Q_A = -\frac{M_A + M_B}{L} \quad (19)$$

Utilizando-se a equação (15) na equação (14) aplicada nas extremidades, tem-se:

$$\begin{aligned} M_A &= -2EJC_3 \\ M_B &= EJ(2C_3 + 6C_4L) \end{aligned} \quad (20)$$



Substituindo-se na equação (19), chega-se a:

$$Q_A = -6EJC_4$$

Substituindo  $C_4$ , obtêm-se

$$Q_A = -\frac{6EJ}{L^2} (\theta_A + \theta_B) - \frac{12EJ}{L^3} (y_A - y_B) - \frac{12cEJ}{AGL^2} Q_A$$

ou,

$$Q_A = -\frac{6EJ}{L^2} \frac{\theta_A + \theta_B}{1+12\mu} - \frac{12EJ}{L^3} \frac{y_A - y_B}{1+12\mu} \quad (21)$$

onde

$$\mu = \frac{cEJ}{AGL^2}$$

A substituição de  $Q_A$  nas equações (18) e (20), permite obter os momentos fletores nas extremidades:

$$\left. \begin{aligned} M_A &= \frac{4EJ}{L} \frac{1-3\mu}{1+12\mu} \theta_A + \frac{2EJ}{L} \frac{1-6\mu}{1+12\mu} \theta_B + \frac{6EJ}{L^2} \frac{y_A - y_B}{1+12\mu} \\ M_B &= \frac{2EJ}{L} \frac{1-6\mu}{1+12\mu} \theta_A + \frac{4EJ}{L} \frac{1-3\mu}{1+12\mu} \theta_B + \frac{6EJ}{L^2} \frac{y_A - y_B}{1+12\mu} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

BIBLIOGRAFIA

- 1 - MANCINI, E. - Núcleo estrutural sobre fundação flexível. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, agosto 1980.
- 2 - MANCINI, E. - Análise contínua de estruturas de edifícios elevados sujeitas à ação do vento. São Carlos. Escola de Engenharia de São Carlos - USP, dez. 1973. Publ. nº 184.
- 3 - TSO, W.K., and BISWAS, J.K. - Analysis of core wall structure subjected to applied torque. Build. Sci. Vol. 8, Nº 3, Sep. 1973, pp. 251-257.
- 4 - COULL, A. - Torsion of structural on deformable foundations. Build. Sci. Vol. 10, pp. 57-64, 1975.
- 5 - STAMATO, M.C. e SMITH, B.S. - Análise aproximada de estruturas tridimensionais de edifícios elevados. São Carlos. Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1968, Publ. Nº 155.
- 6 - YAGUI, T. and WAKABAYASHI, M. - Non-symmetrical shear wall structures.
- 7 - YAGUI, T and WAKABAYASHI, M. - Núcleos resistentes de edifícios elevados. Joint committee on tall buildings. Pennsylvania, Lehigh University (Comite Técnico - Nº 21: Elastic Analysis).
- 8 - TARANATH, B.S. and STAFFORD SMITH, B. - The analysis of tall core supported structures subject to torsion. Proc. Instn. Civ. Engrs., Sep. 1972, 53, 173-187.
- 9 - BARBOSA, J.A. - Edifícios com paredes de secção aberta contraventadas por lintéis, sob carga lateral. São Carlos. Escola de Engenharia de São Carlos - USP, Agosto 1978.

- 10 - RACHID, M. - Instabilidade de barras de secção delgada. São Carlos. Escola de Engenharia de São Carlos - USP, Fev. 1975.
- 11 - SCHIEL, F. - Barras de secção delgada. São Carlos. Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1964/1965.
- 12 - WEAVER, W. and GERE, J.M. - Analysis of framed structures. New York, Van Nostrand Reinhold Company, 1965.
- 13 - VLASOV, V.Z. - Thin-walled elastic beams. Israel, Israel program for scientific translation, 1961.
- 14 - COWPER, G.R. - The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. J. Appl. Mechs., ASME, Jun/1966.