

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

EFEITO DO VENTO EM EDIFÍCIOS ALTOS -  
- PÓRTICOS NORMAIS ÀS PAREDES  
(Método da Energia)

*Trabalho apresentado para completar os requisitos necessários à obtenção do Título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".*

Eng.<sup>a</sup> IRAÍDES MARIA DO PRADO DIAS BAFFA

*Orientador : EDDIE MANCINI*

*São Carlos, 18 de junho de 1982*

*À Lina, Augusto e Baffa.*

## AGRADECIMENTOS

*Ao prof. Eddie Mancini pela sua orientação, ao Conselho Nacional de Pesquisas-CNPq pelo auxílio financeiro durante os anos mais / críticos do curso de pós-graduação (1977-1978), aos amigos e colegas do Departamento de Estruturas da EESC pelo apoio dado, à Instituição Moura Lacerda por ceder sua máquina de escrever, e a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a execução deste trabalho, meus sinceros agradecimentos.*

## RESUMO

Este trabalho analisa edifícios altos de pórticos normais às paredes sob a carga do vento, por meio do cálculo variacional no método da energia, seguindo desenvolvimento semelhante ao de CHAN, TSO e HEIDE BRECHT [1].

A análise se baseia na determinação da energia potencial acumulada na estrutura deformada pelo carregamento horizontal do vento. Sendo uma função dos deslocamentos, o método da energia permite adotar aproximações nestes deslocamentos (processo de Ritz) dos pórticos, a partir do comportamento geral da estrutura.

O equacionamento da energia potencial é desenvolvido de duas formas, uma mais exata através da montagem do funcional da energia para cada possível deslocamento nos elementos da estrutura, considerada um meio contínuo, o qual exige para sua solução um certo refinamento matemático; e outra com aproximações determinadas pelo comportamento geral da estrutura deformada, que reduz consideravelmente os cálculos, permitindo obter os deslocamentos e esforços até manualmente depois de encontradas as soluções das equações diferenciais.

Apresenta-se um exemplo numérico com os respectivos gráficos do processo mais exato, que foi previamente comparado com o método do equilíbrio desenvolvido por MANCINI [6], e do processo aproximado desenvolvido por função parabólica e cosseno-hiperbólica. A comparação dos deslocamentos e esforços obtidos por cada processo de cálculo mostra a precisão e validade destas aproximações.

## ABSTRACT

*This work analyze wind forces acting on the high buildings frames normal to the walls using variational calculus with Energy Method (EM) following CHAN, TSO and HEIDEBRECHT's development.*

*The analysis is based on the determination of the potential energy stored in the structure under wind force. Since the energy is a function of the displacements the EM allows simplified assumptions on the frame displacements based on the general deformation of the structure.*

*The determination of the potential energy is made in two ways, the more exact one consists in calculating the energy functional for each possible deformation in the structural element, the structure here is considered a continuum. The other one assumes a simplified functional based on the general deformation of the structure. The displacements and stresses can be calculated by hand after the solutions of the differential equations derived from the simplified functional.*

*A numerical example of the simplified solution together with the design curves is shown. The exact solution analysed previously by MANCINI [6] with the Equilibrium Method is compared with the present method. The results obtained in the present work shows the accuracy and validity of these method.*

## SÍMBOLOS UTILIZADOS

$A_i$  = área da seção transversal da coluna  $i$

$a_i$  = distância entre os eixos das colunas  $(i-1)$  e  $i$

$B$  = comprimento da estrutura (distância entre as paredes do edifício)

$c_i$  = comprimento da viga  $i$

$D$  = largura da estrutura (distância entre os pórticos)

$E$  = módulo de elasticidade longitudinal

$G$  = módulo de elasticidade transversal

$H$  = altura total do edifício

$h$  = altura do andar

$I_\ell$  = momento de inércia das paredes laterais em relação ao eixo  $z$

$I_i, I'_i$  = momento de inércia da coluna  $i$  segundo o seu eixo de simetria, respectivamente, paralelo ao eixo  $z$  e paralelo ao eixo  $y$

$I_{vi}$  = momento de inércia da viga  $i$  em relação ao eixo horizontal de sua seção transversal na direção do eixo  $y$

$M(x)$  = momento fletor aplicado externamente

$M_\ell(x)$  = momento fletor nas paredes laterais

$n$  = nº de colunas da metade simétrica dos pórticos

$p(x)$  = carga distribuída aplicada externamente

$Q_{vi}(x)$  = esforço cortante na viga  $i$

$q_i(x)$  = força cortante na viga  $i$

$R(x)$  = parâmetro medidor do efeito de retardamento na cortante do centro dos pórticos

$T_i(x)$  = força vertical na coluna  $i$  (normal nos pilares)

$u_i(x)$  = deslocamento vertical da coluna  $i$

$U(x)$  = energia potencial acumulada na estrutura

$v(x)$  = deslocamento horizontal da estrutura na direção do carregamento

$x, y, z$  = eixos de referência global da estrutura

$z_i$  = distância da coluna  $i$  ao centro do pórtico

$u_l$  = deslocamento vertical na borda da parede lateral

$\theta_i(x)$  = rotação do nó viga-coluna  $\bar{i}$  dos pórticos

$\xi_i$  = deslocamento vertical de corpo rígido do nó viga-coluna  $i$

$\mu_i, \lambda_i$  = constantes geométrica do elemento  $i$

$F(x)$  = matriz do carregamento externo

$\Phi(x)$  = vetor dos deslocamentos da estrutura

$[k_i], [c_i], [m_i], [b_i]$  = matrizes de constantes geométricas

$w_i$  = parâmetro dependente da aproximação adotada para a deformação axial nas colunas dos pórticos

$A_e, A_e^*$  = constantes no andar referente a aproximação adotada  $w_i$  e as características geométricas dos elementos dos pórticos

$I_e$  = constantes de rigidez da estrutura

$I^*, \alpha^2, \beta_1, \beta_2$  = idem, constantes de rigidez da estrutura

## INDICE

	pág.
1. Introdução.....	1
2. Modelo Estrutural .....	4
3. Energia Potencial da Estrutura .....	6
3.1. Energia Potencial do Carregamento .....	6
3.2. Energia de Deformação das Paredes .....	6
3.3. Energia de Deformação dos Pórticos .....	7
3.3.1. Equações de Compatibilidade .....	12
4. Minimização da Energia .....	21
4.1. Primeira Equação de Euler-Poisson .....	22
4.2. J-ésima Equação de Euler-Poisson .....	24
5. Solução Aproximada .....	28
5.1. Energia Potencial da Estrutura .....	29
5.2. Minimização da Energia .....	32
5.3. Solução do Sistema de Equações .....	35
5.3.1. Solução da Equação do Deslocamento $V(X)$ .....	37
5.3.2. Solução da Equação do Parâmetro $R(X)$ .....	40
6. Cálculo dos Esforços .....	42
6.1. Momento Fletor na Parede .....	42
6.2. Força Cortante nas Vigas .....	42
6.3. Força Normal nos Pilares .....	43
7. Outras Considerações .....	44
8. Exemplo Numérico .....	46
8.1. Solução Aproximada .....	47
8.2. Comentários dos Resultados .....	48
8.3. Gráficos .....	49
9. Apêndice .....	54
10. Bibliografia .....	59



## 1. INTRODUÇÃO

Os estudos desenvolvidos para analisar o comportamento de edifícios altos, com pórticos normais às paredes, sob a carga do vento, conduziram à constatação de redução da força cortante na parte central do pórtico (normal à direção do vento) devido à rigidez da parede lateral em contraste com a flexibilidade do pórtico (fig.1). Considerando este efeito e a distribuição da deformação axial ao longo das colunas, adota-se aproximações que virão a simplificar o processo sem prejudicar sua precisão, seguindo a análise feita por CHAN, TSO e HEIDEBRECHT [1].

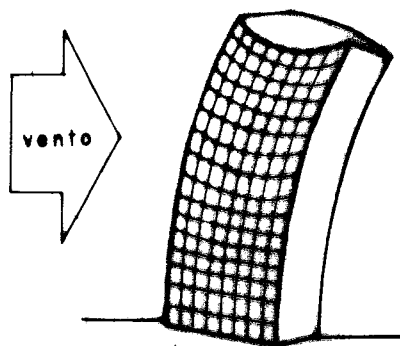


FIG.(1) - Comportamento geral da estrutura sob a carga do vento.

Apresenta-se uma análise pela energia de deformação desta estrutura de edifício tubular de pórticos frontais e paredes laterais, a qual devido a sua simetria e rigidez nos permite idealizá-la de maneira global reduzindo o número de parâmetros.

A estrutura consiste basicamente de quatro painéis periféricos unidos ortogonalmente, os quais são duas paredes laterais e dois pórticos normais ao carregamento, travados horizontalmente em cada andar por lajes. O comportamento da estrutura tridimensional é equacionado considerando seu caráter dominante e, conseqüentemente, reduzindo o sistema à bi dimensional. O carregamento lateral produz esforços verticais de tração e compressão respectivamente nos painéis normais frontal anterior e posterior ao eixo vertical,  $x$ ; e esforços cortantes horizontais nos painéis laterais (paredes). Como os painéis normais ao carregamento são pórticos, a flexibilidade de suas vigas permite a redução da tensão axial nas colunas internas. Por sua vez, esta variação da tensão axial induzirá um arqueamento das bordas de canto das lajes que será impedido pela rigidez das pa

redes.

O teorema da mínima energia potencial pode ser utilizado para analisar as deformações e esforços solicitantes da estrutura tanto por meio do funcional de deslocamentos como de tensões, porém a análise feita pelos deslocamentos nos leva a soluções mais gerais e simples. A análise feita por COULL [2] para um edifício tubular composto de somente pórticos foi estendida para edifícios com paredes laterais e constatou-se grandes distorções nos resultados utilizando hipóteses equivalentes, mostrando que o funcional montado a partir das tensões não é tão bom quanto pelos deslocamentos, aqui desenvolvido.

Para o caso de edifícios altos sob carregamento lateral pode-se fazer uma equivalência, fig.2, com uma viga-caixão de paredes delgadas sob o mesmo carregamento lateral  $p(x)$ , generalizando sua equação diferencial de deflexão, ao longo de seu eixo longitudinal,

$$v''(x) = - \frac{M(x)}{EI} \quad \dots \quad (1.1)$$

e aplicando esta função deslocamento no funcional da energia potencial,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^H EI [v''(x)]^2 dx \quad \dots \quad (1.2)$$

onde  $v(x)$  é o deslocamento da direção do carregamento,  $M(x)$  é o momento fletor,  $E$  é o módulo de elasticidade e  $I$  o momento de inércia da seção transversal da viga. Como tem-se uma certa flexibilidade no painel normal pórtico, este se deformará axialmente pelas colunas dando contribuição ao funcional da energia de deformação com o deslocamento  $u(x)$  ao longo da altura do edifício. É fácil visualizar esta deformação se compararmos a viga de seção maciça com a de paredes delgadas conforme a figura (2).

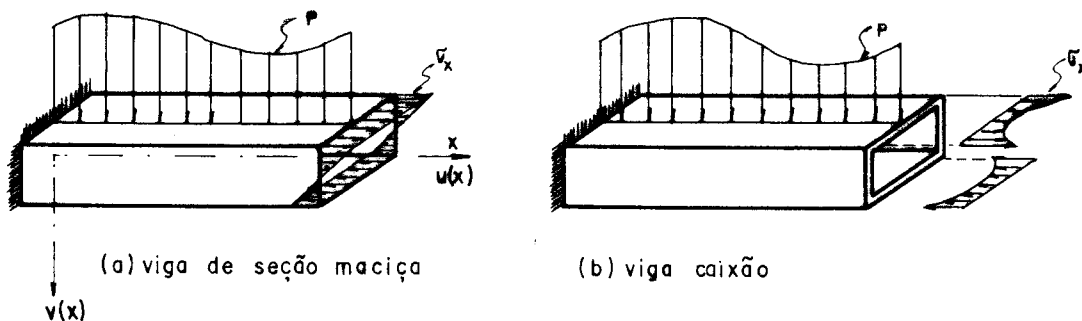


FIG.(2) - Distribuição da tensão normal em vigas sob carga transversal.

O cálculo variacional conduz a um sistema de equações diferenciais conforme os deslocamentos axiais de cada coluna dos pórticos normais e a deflexão da parede lateral, que é resolvido simplificando o sistema por meio de teoremas da Álgebra Linear. Essa nos permite com redução ortogonal de matrizes simétricas reais e de relações de semelhança dessas matrizes com matrizes diagonais (vide Apêndice) chegar a solução do sistema em forma matricial, analogamente a solução de uma equação diferencial linear de 2.<sup>a</sup> ordem, onde

$$c_1 u''(x) + c_2 u(x) = f(x) \quad \dots \quad (1.3)$$

se torna,

$$u''(x) + (c_2/c_1)u(x) = \frac{1}{c_1} f(x) \quad \dots \quad (1.4)$$

Uma análise simplificada também é apresentada (processo de Ritz), introduzindo no funcional da energia de deformação os deslocamentos axiais variando segundo uma função aproximadamente igual ao que realmente ocorre com estes deslocamentos: uma função parabólica ou cosseno-hiperbólica. Segue-se o mesmo roteiro de cálculo da análise mais exata com a vantagem da redução do número de incógnitas no sistema de equações.

Apresenta-se, ainda, os gráficos dos deslocamentos e esforços da estrutura calculados pelo processo aproximado no método da energia desenvolvido no presente trabalho e pelo método do equilíbrio desenvolvido por MANCINI [6]. Compara-se os dois resultados com o terceiro, que é o processo exato do método da energia também desenvolvido mas não calculado numericamente neste trabalho e conclui-se com a validade de utilização de um ou outro processo.

## 2. MODELO ESTRUTURAL

A estrutura estudada possui planta retangular com p $\ddot{o}$ rticos normais  $\tilde{a}$ s paredes. Todos os andares possuem as mesmas caracter $\acute{e}$ sticas elasto-geom $\acute{e}$ tricas permitindo um tratamento cont $\acute{i}$ nuo nos deslocamentos ao longo da altura do edif $\acute{i}$ cio.

O carregamento externo  $\tilde{e}$  considerado horizontal, est $\acute{a}$ tico e com dire $\tilde{c}$ o $\tilde{a}$  normal aos p $\ddot{o}$ rticos, sendo distribu $\acute{i}$ do ao longo da altura e igual a  $p(x)$ .

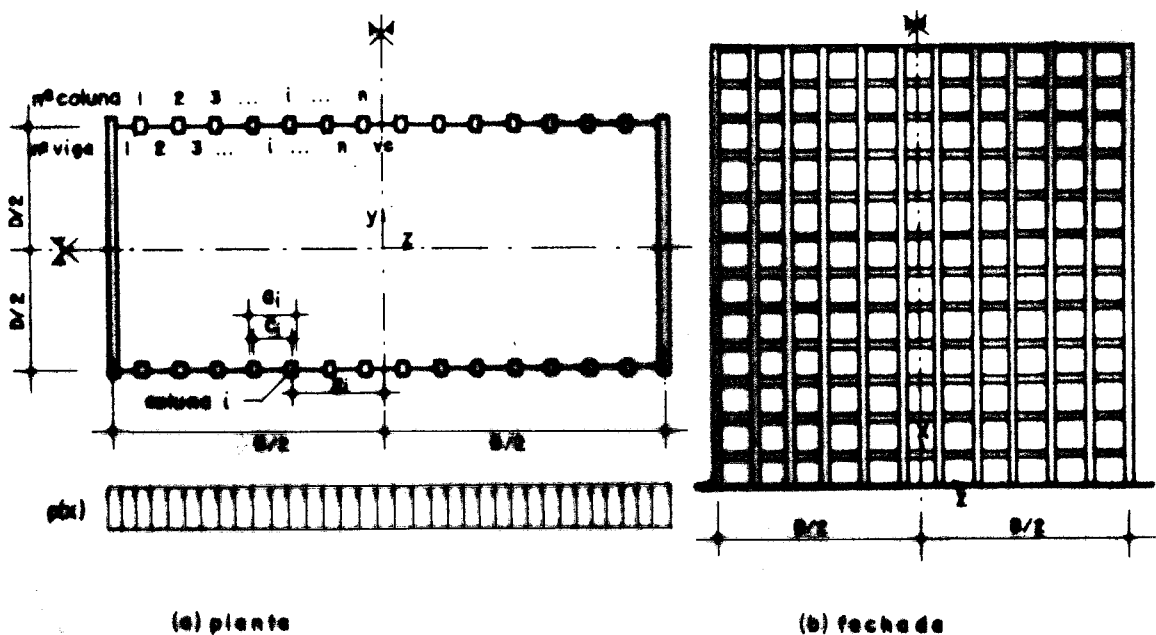


FIG. (3) - Edif $\acute{i}$ cio - tipo : dimens $\ddot{o}$ es, sistema de refer $\acute{e}$ ncia, enumera $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$  dos elementos

A simetria da planta permite um sistema de tens $\ddot{o}$ es e deslocamentos id $\tilde{e}$ nticos nos pain $\tilde{e}$ is parede laterais e de intensidade igual e sinais contr $\acute{a}$ rios nos pain $\tilde{e}$ is p $\ddot{o}$ rticos normais anterior e posterior, respectivamente.

O sistema de refer $\acute{e}$ ncia da estrutura  $\tilde{e}$  representado na fig.3. Os deslocamentos segundo os eixos de refer $\acute{e}$ ncia acompanham a continuidade da estrutura ao longo da altura, sendo computados conforme a deforma $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$  predominante na estrutura total. Na vertical tem-se  $u(x)$  e na horizontal segundo a dire $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$  do carregamento tem-se  $v(x)$ .

As paredes tem largura constante  $D$ . Os p $\ddot{o}$ rticos possuem  $2n$

colunas dando uma largura total no pórtico de  $B$ , fig.3. Cada coluna pode ter seção transversal e espaçamento distintos desde que mantenha a simetria da estrutura em relação aos eixos de referência. Sendo uma análise contínua toma-se uma altura de andar genérica  $h$  e altura total do edifício  $H$ . As vigas tem altura  $d$  mas de dimensão não predominante na determinação da rigidez dos pórticos. A viga central é seccionada ao meio pelo eixo de simetria vertical do pórtico. As vigas e colunas são numeradas da extremidade para o centro do painel, somando  $2n$  vigas por painel pórtico mais uma viga central com situação particular pela simetria.

O módulo de elasticidade  $E$  é o mesmo para todo o edifício.

As paredes permanecem com as seções planas após a deformação lateral. Os pórticos sob o efeito da redução do esforço cortante nas vigas centrais, tem deslocamentos axiais também menores nas colunas centrais. Assim, a deformação dos painéis parede laterais será uma função linearmente distribuída e nos pórticos uma função aproximadamente parabólica ou cosseno-hiperbólica.

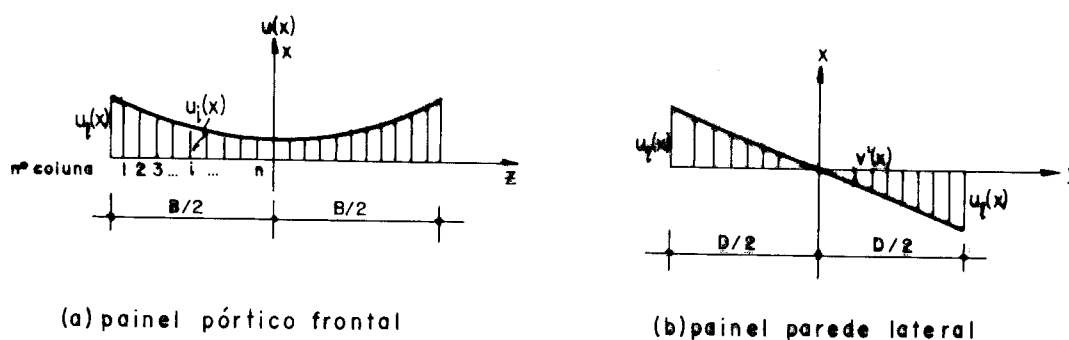


FIG.(4) - Deslocamentos nos painéis sob a carga do vento, num andar  $x$ .

A deformação no plano do pórtico por flexão, devido à rigidez dos nós viga-coluna e também pela continuidade das propriedades elasto-geométricas ao longo da altura, é analisada considerando-se nos pontos médios de vigas e colunas a ocorrência de momentos nulos.

### 3. ENERGIA POTENCIAL

A energia potencial acumulada na estrutura pela sua deformação sob o carregamento lateral  $\bar{e}$  é computada pelo efeito da carga externa, da flexão das paredes e da deformação dos pórticos por deslocamentos verticais, flexão na direção do carregamento e flexão no seu próprio plano.

#### 3.1. ENERGIA POTENCIAL DO CARREGAMENTO

A energia potencial do carregamento externo do sistema estrutural  $\bar{e}$  é dada pela correspondente distribuição de seu momento fletor,  $M(x)$ , ao longo da altura e pela deflexão lateral provocada,  $v''(x)$ . Esta  $\bar{e}$  é de valor negativo para indicar perda de energia que será transformada em energia de deformação na estrutura.

$$U_1 = - \int_0^H M(x) v''(x) dx \quad \dots \quad (3.1)$$

#### 3.2. ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DAS PAREDES

Os esforços e deslocamentos que surgem nas paredes sob o carregamento dado podem ser analisados por condições de equilíbrio. Tomando-se um elemento da parede de altura  $dx$ , fig.5, e fazendo o equilíbrio de forças na vertical,

$$N - (N + dN) = 0 \quad \dots \quad (3.2)$$

conclui-se que a variação da força normal  $\bar{e}$  é nula e, conseqüentemente, o deslocamento vertical na parede será devido somente à flexão simples.

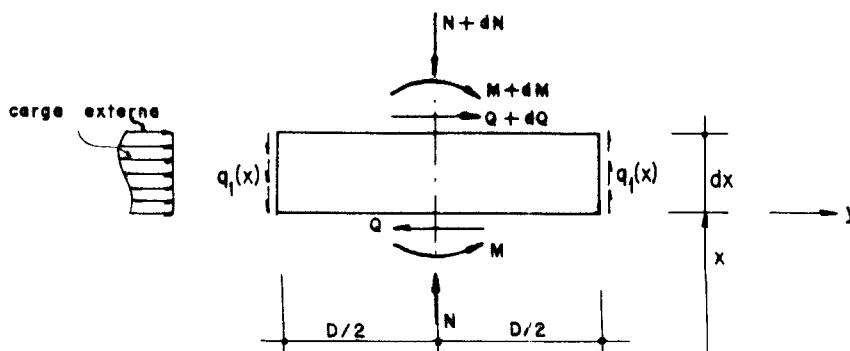


FIG.(5) - Esforços num elemento do painel parede

Para as duas paredes de momento de inércia  $I_p$  em relação ao eixo  $z$ , normal ao carregamento, a energia de deformação será

$$u_2 = 2 \left\{ \frac{EI_p}{2} \int_0^H [v''(x)]^2 dx \right\} \quad (3.3)$$

### 3.3. ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DOS PÓRTICOS

A deformação dos pórticos se manifesta axialmente em cada coluna tracionando-as no pórtico frontal anterior ao eixo  $z$  da estrutura e comprimindo-as no pórtico frontal posterior.

Esta deformação é variável, sendo que os deslocamentos axiais das colunas decrescem da interseção do pórtico com a parede até o eixo central de simetria. Portanto, tem-se  $n$  deslocamentos distintos  $u_i$  que provocam uma energia de deformação para os dois pórticos de  $2n$  colunas, igual a

$$u_3 = 2 \left\{ 2 \sum_{i=1}^n \frac{EA_i}{2} \int_0^H [u_i'(x)]^2 dx \right\} \quad (3.4)$$

onde  $A_i$  é a seção transversal da coluna  $i$ .

A flexão das paredes travadas em cada andar por lajes rígidas no plano horizontal induz uma flexão nas colunas na mesma direção fornecendo a seguinte energia de deformação para os dois pórticos,

$$u_4 = 2 \left\{ 2 \sum_{i=1}^n \frac{EI_i}{2} \int_0^H [v''(x)]^2 dx \right\} \quad (3.5)$$

onde  $I_i$  é o momento de inércia da coluna  $i$  segundo o seu eixo de simetria na direção do plano do pórtico, paralelo ao eixo  $z$ .

E no plano do pórtico tem-se uma flexão que afeta vigas e colunas, podendo ser equacionada pelas considerações de equilíbrio de esforços e compatibilidade de deslocamentos entre estes elementos da estrutura.

A força cortante  $q_1$  que surge ao longo da borda da parede fletida sob o carregamento lateral, fig.6, é transmitida ao pórtico pelas vigas, concentrando-se ao nível de cada andar, portanto,  $q_1 h$ .

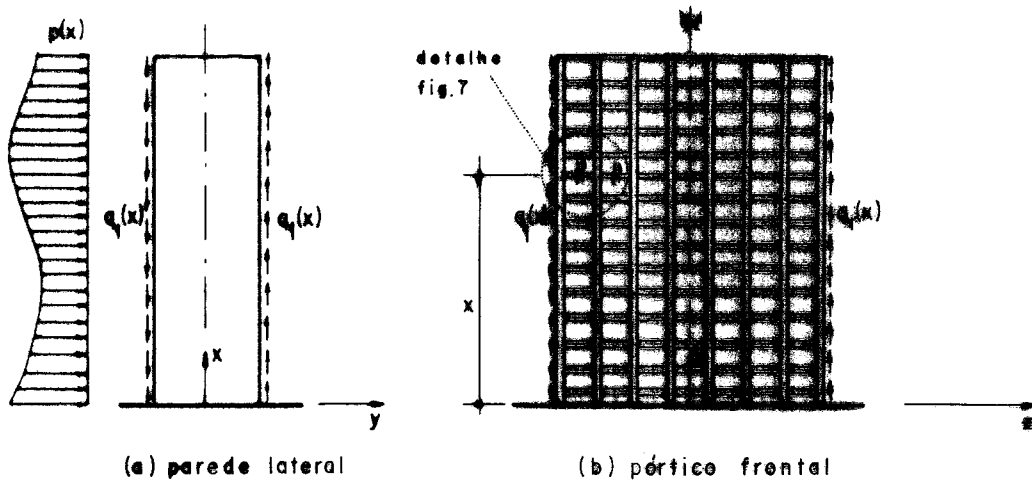


FIG.(6) - Esforços nas interseções dos painéis.

Conforme o deslocamento axial observado nas colunas e mantendo a rigidez do nó viga-coluna tem-se o seguinte esquema de deformação do pórtico na fig.7 abaixo.

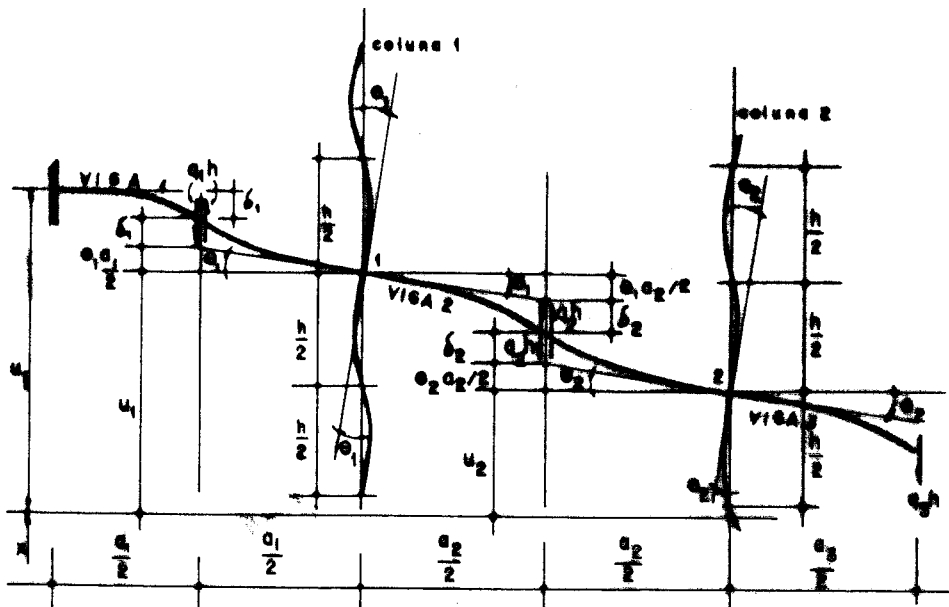


FIG.(7) - Detalhe : deslocamentos e esforços na região dos nós 1 e 2 sob deformação, do pórtico frontal, numa cota  $x$ .

Computando na energia de deformação por flexão no seu plano, primeiramente, a contribuição das vigas, esta se manifesta para cada viga  $i$  através de sua força cortante e momento fletor, fig.8, tal que,



$$U_{vi} = \frac{1}{2} \int_0^H \frac{Q_i^2}{GA_{vi}} dx + \frac{1}{2} \int_0^H \frac{m_i^2}{EI_{vi}} dx \quad \dots (3.6)$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal;

$A_{vi}$  é a área da seção transversal;

$I_{vi}$  é o momento de inércia da viga  $i$  em relação ao eixo horizontal da seção transversal (mesma direção de  $y$ )

$$Q_i(x) = \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} q_i(\xi) d\xi = h q_i(x) \quad \dots (3.7)$$

Obtêm-se  $Q_i^2$  combinando os diagramas de função constante ao longo da viga (fig.8c) que a expressão (3.7) fornece; e  $m_i^2$  também é obtido da combinação dos diagramas de função linear ao longo da viga (fig.8b) que a força cortante  $h q_i(x)$  no meio do vão provoca.

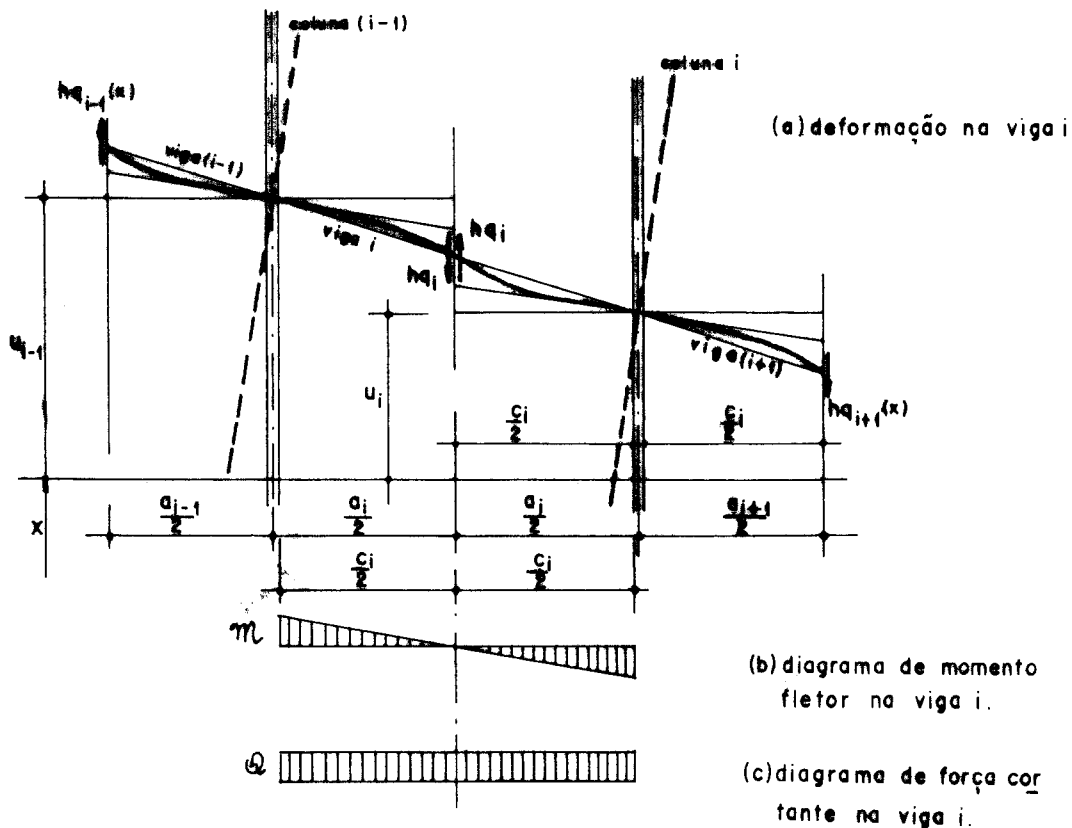


FIG.(8) - Flexão observada apenas nas vigas (esquema genérico)

Logo,

$$u_{vi} = \frac{1}{2} \int_0^H \frac{[hq_i(x)]^2}{GA_{vi}} \cdot \frac{c_i}{h} dx + \frac{1}{2} \int_0^H \frac{1}{3} \frac{c_i}{2} \left[ \frac{c_i}{2} hq_i(x) \right]^2 \frac{2}{hEI_{vi}} dx \dots (3.8)$$

onde  $c_i$  é o comprimento da viga  $i$  a partir da extremidade da coluna. Os termos dentro das integrais estão divididos por  $h$  para distribuir as funções ao longo da altura do andar e poder-se operar a integral continuamente em toda a altura do edifício.

Unindo as duas integrais da expressão anterior (3.8) esta toma a seguinte forma

$$u_{vi} = \int_0^H \frac{hc_i^3}{24E} \left( \frac{1}{I_{vi}} + \frac{12E}{GA_{vi}c_i^2} \right) q_i^2(x) dx \dots (3.9)$$

e chamando,

$$I_{vi}^* = \frac{I_{vi}}{1 + \frac{12EI_{vi}}{GA_{vi}c_i^2}} \dots (3.10)$$

ao somar-se a contribuição das  $2n$  vigas de cada pórtico, a parcela da energia de deformação devido à flexão das vigas do pórtico no plano do pórtico será

$$u_v = 2 \left[ 2 \sum_{i=1}^n \int_0^H \frac{hc_i^3}{24EI_{vi}^*} \cdot q_i^2(x) dx \right] \dots (3.11)$$

Resta lembrar que a viga central deve ter força cortante nula ( $q_c=0$ ), devido à simetria do pórtico e portanto não é computada. Vide fig.10.

A contribuição das colunas nesta parcela da energia de deformação pode ser determinada fazendo o equilíbrio de momentos na junta coluna-viga  $i$  num andar qualquer, levando em consideração os momentos nulos nos pontos médios dos elementos, fig.9a.

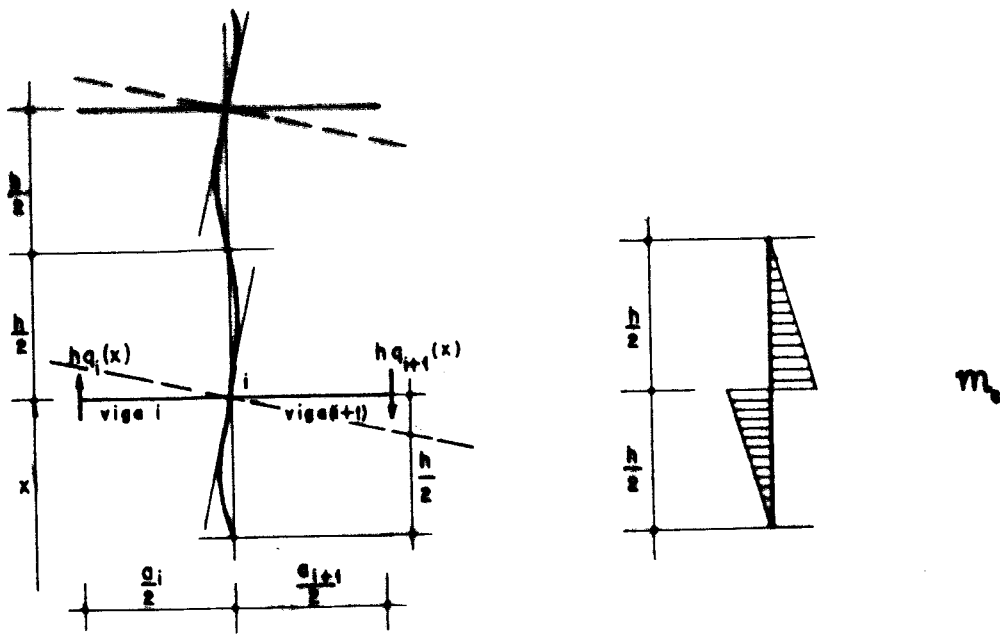
$$u_{ci} = \frac{1}{2} \int_0^H \frac{m_c^2}{EI_c'} dx \dots (3.12)$$

onde  $I'_i$  é o momento de inércia da coluna  $i$  segundo o eixo de sua seção transversal na direção do carregamento; e  $m_c^2$  sai da combinação dos diagramas de momento fletor, fig.9b, que é uma função linear ao longo da altura do andar. Os momentos no tramo superior e inferior da coluna na altura  $x$  são iguais e obtidos pelo equilíbrio do nó.

$$m_c = \frac{1}{2} \left( h q_i(x) \frac{a_i}{2} + h q_{i+1}(x) \frac{a_{i+1}}{2} \right) \dots (3.13)$$

Onde  $a_i$  é o comprimento da viga  $i$  de eixo a eixo das colunas. Dessa forma, a expressão (3.12) se torna

$$u_{ci} = \frac{1}{2} \int_0^H \frac{1}{3} \frac{h}{2} \cdot 2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{a_i}{2} h q_i(x) + \frac{a_{i+1}}{2} h q_{i+1}(x) \right) \right]^2 \frac{1}{h E I'_i} dx \dots (3.14)$$



(a) deformação da coluna i

(b) diagrama de momento fletor

FIG.(9) - Flexão observada apenas nas colunas (esquema genérico)

Na  $n$ -ésima coluna tem-se na expressão anterior (3.14) que  $q_{n+1} = q_c = 0$ , restando,

$$u_{cn} = \frac{1}{2} \int_0^H \frac{1}{3} \frac{h}{2} 2 \left[ \frac{1}{2} \frac{a_n}{2} h q_n(x) \right]^2 \frac{1}{hEI'_n} dx \quad \dots \quad (3.15)$$

Somando a contribuição das 2n colunas de cada pórtico,

$$u_c = 4 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{96} \int_0^H [a_i q_i(x) + a_{i+1} q_{i+1}(x)]^2 \frac{h^2}{EI'_i} dx + \int_0^H \frac{1}{96} [a_n q_n(x)]^2 \frac{h^2}{EI'_n} dx \right. \quad \dots \quad (3.16)$$

Pode-se agora reunir a contribuição total por flexão dos pórticos em seu próprio plano na energia de deformação da estrutura somando as expressões (3.11) e (3.16),

$$u_5 = \sum_{i=1}^n \int_0^H \frac{hc_i^3}{6EI_{vi}^*} [q_i(x)]^2 dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^H \frac{h^2}{24EI'_i} [a_i q_i(x) + a_{i+1} q_{i+1}(x)]^2 dx + \int_0^H \frac{h^2}{24EI'_n} [a_n q_n(x)]^2 dx \quad \dots \quad (3.17)$$

### 3.3.1. EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

Pretende-se aplicar o cálculo variacional sobre um funcional de deslocamentos, e como esta última parcela da energia de deformação está em função dos esforços cortantes  $q_i(x)$  desenvolve-se as equações de compatibilidade de deslocamentos dos elementos do pórtico para equacionar o funcional convenientemente.

O deslocamento na borda da parede é compatibilizado com o do pórtico ao nível de cada andar, conforme se observa na fig.4, onde para a parede,

$$u_p(x) = \frac{D}{2} v'(x) \quad \dots \quad (3.18)$$

e  $u_p(x)$  é o deslocamento na borda da parede lateral; e para o pórtico, conforme se observa na fig.7,

$$u_p(x) = u_j(x) + \frac{a_1}{2} \theta_j(x) + 2\delta_j(x) \quad \dots \quad (3.19)$$

onde  $u_1(x)$  e  $\theta_1(x)$  são deslocamentos do n $\bar{o}$  1, respectivamente, uma translação vertical e uma rotação, num andar genérico  $x$ ; e  $\delta_1(x)$  é o deslocamento da viga 1 considerada bi-engastada.

O equilíbrio de momentos do n $\bar{o}$  viga-coluna 1 nos leva à determinação da rotação  $\theta_1(x)$ . Os momentos correspondentes à esta rotação são iguais nos dois tramos de coluna, tanto do andar superior como do inferior, devido a hipótese de continuidade nas propriedades elasto-geométricas da coluna ao longo de toda a altura do edifício, e vale

$$\frac{6EI_1'}{h} \theta_1(x) \quad . . . \quad (3.20)$$

Estes são equilibrados pelos momentos provocados pelas forças cortantes do meio do vão das vigas concorrentes ao n $\bar{o}$ . Tais esforços somados

$$2 \left[ \frac{6EI_1'}{h} \theta_1(x) \right] = \frac{a_1}{2} hq_1(x) + \frac{a_2}{2} hq_2(x) \quad . . . \quad (3.21)$$

fornece,

$$\theta_1(x) = \frac{h^2}{24EI_1'} \left[ a_1 q_1(x) + a_2 q_2(x) \right] \quad . . . \quad (3.22)$$

O deslocamento  $\delta_1$  é determinado pelas condições de engastamento perfeito da viga 1 com a parede. Adotar engastamento perfeito também na interseção do pórtico com a parede é uma conveniência de cálculo que pretende-se automatizar e será mostrado mais adiante, quando os deslocamentos equivalentes nas demais vigas forem determinados, e chegar-se a um sistema de equações diferenciais em forma matricial.

O efeito da força cortante e do momento fletor neste deslocamento será

$$\delta_1 = hq_1(x) \left[ \frac{(c_1/2)^3}{3EI_{v1}} + \frac{c_1/2}{GA_{v1}} \right] \quad . . . \quad (3.23)$$

e rearranjada, a expressão (3.23) pode ser apresentada como

$$\delta_1 = \frac{hc_1^3}{24E} \left[ \frac{1}{I_{v1}} + \frac{12E}{GA_{v1}c_1^2} \right] q_1(x) \quad \dots \quad (3.24)$$

Observar que dentro do colchete, a expressão é igual a  $1/I_{v1}^*$  definido em (3.10).

Assim, a primeira equação de compatibilidade fica em função dos deslocamentos  $v$  e  $u_1$ , e das forças cortantes  $q_1$  e  $q_2$  ao substituir-se as expressões (3.18), (3.22) e (3.23) em (3.19):

$$\begin{aligned} \frac{D}{2} v'(x) - u_1(x) &= \left[ \frac{a_1^2 h^2}{48EI_1'} + \frac{c_1^3 h}{12EI_{v1}} + \frac{c_1 h}{GA_{v1}} \right] q_1(x) + \\ &+ \left[ \frac{a_1 a_2 h^2}{48EI_1'} \right] q_2(x) \quad \dots \quad (3.25) \end{aligned}$$

Para estilizar a expressão acima facilitando o cálculo automatizado do sistema de equações de compatibilidade que se formará, toma-se a expressão (3.10) para  $i=1$ ,

$$I_{v1}^* = \frac{I_{v1}}{1 + \frac{12EI_{v1}}{GA_{v1}c_1^2}}$$

e define-se,

$$\mu_1 = \frac{c_1^3 h}{12EI_{v1}^*} \quad \dots \quad (3.26)$$

$$\lambda_1 = \left( \frac{a_1}{c_1} \right)^3 \frac{I_{v1}^*/a_1}{I_1'/h}$$

A expressão final da 1ª equação de compatibilidade então se rá,

$$\begin{aligned} \frac{D}{2} v'(x) - u_1(x) &= \left[ \mu_1 \left( 1 + \frac{\lambda_1}{4} \right) \right] q_1(x) + \\ &+ \left[ \left( \frac{a_2}{a_1} \right) \frac{\mu_1 \lambda_1}{4} \right] q_2(x) \quad \dots \quad (3.27) \end{aligned}$$

A segunda equação de compatibilidade  $\bar{e}$  obtida no ponto de in flexão da viga 2, ou seja, onde há momento nulo e mudança de curvatura do tramo de viga. Este ponto pelas hipóteses admitidas continua no meio do vão. Assim, conforme se observa ainda na fig.7 num andar genérico de altura  $x$ ,

$$u_1(x) - \frac{a_2}{2} \theta_1(x) - \delta_2(x) = u_2(x) + \frac{a_2}{2} \theta_2(x) + \delta_2(x) \dots \quad (3.28)$$

onde  $\theta_1$  foi determinado equilibrando o n.º viga-coluna 1, expressão (3.22),  $\theta_2$  sai do equilíbrio do n.º viga-coluna 2,

$$\theta_2(x) = \frac{h^2}{24EI'_2} [a_2 q_2(x) + a_3 q_3(x)] \dots \quad (3.29)$$

e

$$\delta_2(x) = \left[ \frac{c_2^3}{24EI_{v2}} + \frac{c_2}{GA_{v2}} \right] \cdot h q_2(x) \dots \quad (3.30)$$

que substituídas em (3.28) tornam a 2.ª equação de compatibilidade em função dos deslocamentos  $\underline{u}$  e dos esforços  $\underline{q}$  do segundo tramo de viga, tal que,

$$u_1(x) - u_2(x) = \left[ \frac{a_1 a_2 h^2}{48EI'_1} \right] q_1(x) + \left[ \left( \frac{c_2^3 h}{12EI_{v2}} + \frac{c_2 h}{GA_{v2}} \right) + \frac{a_2 h^2}{48EI'_1} + \frac{a_2 h^2}{48EI'_2} \right] q_2(x) + \left[ \frac{a_2 a_3 h^2}{48EI'_2} \right] q_3(x) \dots \quad (3.31)$$

e estilizada pelas expressões

$$I_{v2}^* = \frac{I_{v2}}{1 + \frac{12EI_{v2}}{GA_{v2}c_2^2}}$$

$$\mu_2 = \frac{hc_2^3}{12EI_{v2}^*} \dots \quad (3.32)$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{a_2}{c_2}\right)^3 \cdot \frac{I_{v2}^*/a_2}{I_2'/h}$$

a 2.<sup>a</sup> equação de compatibilidade se torna

$$\begin{aligned} u_1(x) - u_2(x) &= \left[ \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \frac{\mu_1 \lambda_1}{4} \right] q_1(x) + \\ &+ \mu_2 \left[ 1 + \left(1 + \frac{I_2'}{I_1'}\right) \frac{\lambda_2}{4} \right] q_2(x) + \\ &+ \left[ \left(\frac{a_3}{a_2}\right) \frac{\mu_2 \lambda_2}{4} \right] q_3(x) \dots \quad (3.33) \end{aligned}$$

Esta equação pode ser generalizada para os demais pontos de compatibilidade do pórtico com exceção da região central onde, pela simetria, ocorre uma deformação diferente e a força cortante deve ser nula na viga central, fig.10. Portanto, na compatibilidade de deslocamentos no meio da viga n tem-se

$$\begin{aligned} u_{n-1}(x) - \frac{a_n}{2} \cdot \theta_{n-1}(x) - \delta_n(x) &= u_n(x) + \frac{a_n}{2} \cdot \theta_n(x) + \delta_n(x) \\ &\dots \quad (3.34) \end{aligned}$$

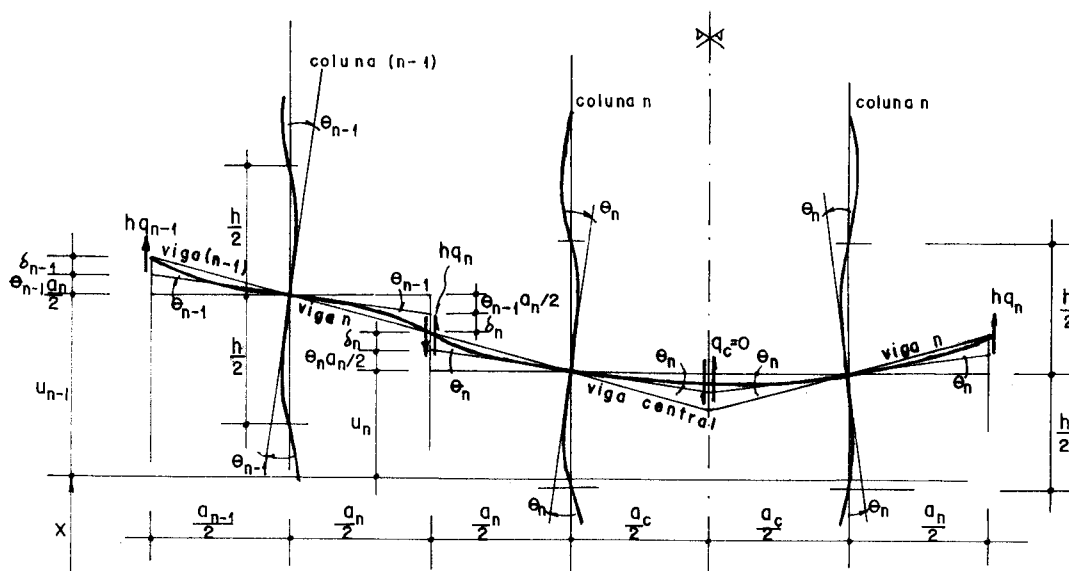


FIG.(10) - Comportamento da parte central do pórtico (esquema genérico).



Analogamente a determinação de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  em (3.22) e (3.29) pode-se encontrar

$$\theta_{n-1}(x) = \frac{h^2}{24EI'_{n-1}} [a_{n-1}q_{n-1}(x) + a_n q_n(x)] \quad (3.35)$$

$$\theta_n(x) = \frac{h^2}{24EI'_n} [a_n q_n(x)] \quad (3.36)$$

observando que  $q_{n+1} = q_c = 0$ ; e da mesma forma que se obteve  $\delta_2$  em (3.30) faz-se com

$$\delta_n(x) = \left[ \frac{c_n^3}{24EI_{vn}} + \frac{c_n}{GA_{vn}} \right] h q_n(x) \quad (3.37)$$

Assim, a  $n$ -ésima equação de compatibilidade se reduz de (3.34) para

$$\begin{aligned} u_{n-1}(x) - u_n(x) &= \left[ \frac{a_{n-1} a_n h^2}{48EI'_{n-1}} \right] q_{n-1}(x) + \\ &+ \left[ \left( \frac{c_n^3 h}{12EI_{vn}} + \frac{c_n}{GA_{vn}} \right) + \frac{a_n^2 h^2}{48EI'_{n-1}} + \frac{a_n^2 h^2}{48EI'_n} \right] q_n(x) \\ &\dots \quad (3.38) \end{aligned}$$

Note na equação acima que esta difere das demais para  $i=2,3,\dots,n-1$  no último termo pois  $q_{n+1}=q_c=0$ , conforme eq.(3.37). (\*)

Substituindo

$$\begin{aligned} I_{vn}^* &= \frac{I_{vn}}{1 + \frac{12EI_{vn}}{GA_{vn}c_n^2}} \\ \mu_n &= \frac{c_n^3 h}{12EI_{vn}^*} \quad \dots \quad (3.39) \\ \lambda_n &= \left( \frac{a_n}{c_n} \right)^3 \frac{I_{vn}^*/a_n}{I'_n/h} \end{aligned}$$

em (3.38), a última equação de compatibilidade se transforma em

$$u_{n-1}(x) - u_n(x) = \left[ \left( \frac{a_n}{a_{n-1}} \right) \frac{\mu_{n-1} \lambda_{n-1}}{4} \right] q_{n-1}(x) + \\ + \mu_n \left[ 1 + \left( 1 + \frac{I'_n}{I'_{n-1}} \right) \frac{\lambda_n}{4} \right] q_n(x) \quad (3.40)$$

Com estas equações de compatibilidade (3.27), (3.33) e (3.40) procede-se à montagem do sistema de equações em forma matricial onde a equação genérica é

$$u_{i-1}(x) - u_i(x) = \left[ \left( \frac{a_i}{a_{i-1}} \right) \frac{\mu_{i-1} \lambda_{i-1}}{4} \right] q_{i-1}(x) + \\ + \mu_i \left[ 1 + \left( 1 + \frac{I'_i}{I'_{i-1}} \right) \frac{\lambda_i}{4} \right] q_i(x) + \\ + \left[ \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) \frac{\mu_i \lambda_i}{4} \right] q_{i+1}(x) \quad \dots \quad (3.41)$$

observando que  $u_0 = \frac{D}{2} v'$  ;  $I'_0 = \infty$  ;  $a_0 = 0$  e  $a_{n+1} = 0$ .

Dã para ver agora que as equações de compatibilidade formam um sistema em que as incógnitas são as forças cortantes  $q_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) nas vigas do pórtico e são funções de seus respectivos deslocamentos  $v'$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ , ...  $u_n$ .

A forma deduzida

$$\begin{bmatrix} \xi \end{bmatrix}_{n \times n} \{q(x)\}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \zeta \end{bmatrix}_{n \times (n+1)} \{\phi(x)\}_{(n+1) \times 1} \quad (3.42)$$

pode ser rearranjada convenientemente para separar o vetor das forças cortantes  $\{q(x)\}$  em,

$$\{q(x)\}_{n \times 1} = [\Psi]_{n \times (n+1)} \{\phi(x)\}_{(n+1) \times 1} \quad (3.43)$$

$$\text{onde } \{q(x)\} = \{q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x)\}^T \quad (3.44)$$

$$\{\phi(x)\} = \{v'(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}^T \quad (3.45)$$

$$[\Psi] = [\xi]^{-1} [\zeta] \quad (3.46)$$

$[K]$  = matriz tri-diagonal simétrica com

$$K_{ii} = \mu_i \left[ 1 + \left( 1 + \frac{I'_i}{I'_{i-1}} \right) \frac{\lambda_i}{4} \right] \quad (3.47)$$

$$K_{i(i+1)} = \frac{a_{i+1}}{a_i} \frac{\mu_i \lambda_i}{4} \quad (3.48)$$

$$K_{i(i-1)} = \frac{a_i}{a_{i-1}} \frac{\mu_{i-1} \lambda_{i-1}}{4} \quad (3.49)$$

$$I_{vi}^* = \frac{I_{vi}}{1 + \frac{12EI_{vi}}{GA_{vi}c_i^2}} \quad (3.50)$$

$$\mu_i = \frac{hc_i^3}{12EI_{vi}^*} \quad (3.51)$$

$$\lambda_i = \left( \frac{a_i}{c_i} \right)^3 \cdot \frac{I_{vi}^*/a_i}{I'_i/h} \quad (3.52)$$

$$I'_0 = \infty, \quad a_0 = 0, \quad a_{n+1} = 0 \quad (3.53)$$

$[C]$  = matriz retangular  $n \times (n+1)$  com

$$C_{11} = \frac{1}{2} D \quad (3.54)$$

$$C_{ii} = 1 \quad (i=2,3,\dots,n) \quad (3.55)$$

$$C_{i(i+1)} = -1 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.56)$$

e os demais elementos nulos.

Armado este sistema pode-se aplicar a expressão (3.43) da força cortante, que possui a seguinte forma genérica por extenso,

$$\begin{aligned} q_i(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \Psi_{ik} \phi_k(x) \\ &= \Psi_{i1} v'(x) + \sum_{k=1}^n \Psi_{i(k+1)} u_k(x) \end{aligned} \quad (3.57)$$

na parcela da energia de deformação devido à flexão do pórtico em seu plano, eq.(3.17), juntamente com o produto das constantes (3.51), (3.52)

$$\frac{\mu_i \lambda_i}{2a_i^2} = \frac{h^2}{24EI_i} \dots \dots \dots (3.58)$$

e tem-se

$$\begin{aligned} U_5 &= \sum_{i=1}^n \left[ \int_0^H 2\mu_i \left( \psi_{i1}^r v'(x) + \sum_{k=1}^n \psi_{i,k+1}^r u_k(x) \right)^2 dx \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \int_0^H \frac{\mu_i \lambda_i}{2a_i^2} \left[ \left( \psi_{i1}^r a_i + \psi_{i+1,1}^r a_{i+1} \right) v'(x) + \sum_{k=1}^n \left( \psi_{i,k+1}^r a_i + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \psi_{i+1,k+1}^r a_{i+1} \right) u_k(x) \right]^2 dx \right\} + \\ &+ \int_0^H \frac{\mu_n \lambda_n}{2a_n^2} a_n^2 \left( \psi_{n1}^r v'(x) + \sum_{k=1}^n \psi_{n,k+1}^r u_k(x) \right)^2 dx \dots \dots \dots (3.59) \end{aligned}$$

Finalmente, pode-se reunir todas as parcelas da energia potencial acumulada na estrutura como um funcional de deslocamentos. As equações  $U_i$  ( $i=1,2,\dots,5$ ) de (3.1), (3.3), (3.4), (3.5) e (3.59) quando somadas podem formar um integral da soma, tal que,

$$\begin{aligned} U_T &= \int_0^H \left\{ -M(x) v''(x) + EI_\ell [v''(x)]^2 + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^n 2EA_i [u_i'(x)]^2 + \sum_{i=1}^n 2EI_i [v''(x)]^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^n 2\mu_i \left[ \psi_{i1}^r v'(x) + \sum_{k=1}^n \psi_{i,k+1}^r u_k(x) \right]^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_i \lambda_i}{2a_i^2} \left[ \left( \psi_{i1}^r a_i + \psi_{i+1,1}^r a_{i+1} \right) v'(x) + \sum_{k=1}^n \left( \psi_{i,k+1}^r a_i + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \psi_{i+1,k+1}^r a_{i+1} \right) u_k(x) \right]^2 + \\ &+ \left. \frac{\mu_n \lambda_n}{2} \left[ \psi_{n1}^r v'(x) + \sum_{k=1}^n \psi_{n,k+1}^r u_k(x) \right]^2 \right\} dx \dots \dots \dots (3.60) \end{aligned}$$

#### 4. MINIMIZAÇÃO DA ENERGIA

Por meio do cálculo variacional, o princípio da mínima energia potencial requer que

$$\delta U_T = 0 \quad (4.1)$$

Como o funcional da energia potencial está totalmente em função dos deslocamentos  $v(x)$  e  $u_i(x)$  para  $i=1,2,\dots,n$ , ou seja,

$$U_T = \int_0^H F(x, v', v'', u_1, u_2, \dots, u_n, u_1', u_2', \dots, u_n') dx \quad (4.2)$$

e é um funcional de várias funções, chega-se ao seu mínimo quando satisfaz o sistema de equações diferenciais, obtidas pela variação isolada de cada função deslocamento  $v, u_1, u_2, \dots, u_n$ , que são as equações de Euler-Poisson.

Separadamente, estas equações diferenciais são:

$$\begin{aligned} F_v - \frac{d}{dx} F_{v'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{v''} &= 0 \\ F_{u_1} - \frac{d}{dx} F_{u_1'} &= 0 \\ F_{u_2} - \frac{d}{dx} F_{u_2'} &= 0 \quad \dots \dots \dots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ F_{u_n} - \frac{d}{dx} F_{u_n'} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

as quais sendo satisfeitas conduzem  $\delta U_T = 0$ .

A primeira equação de Euler-Poisson em (4.3) possui uma condição de contorno quando se abaixa sua ordem de derivação,

$$\delta v \left( F_{v'} - \frac{d}{dx} F_{v''} \right) \Big|_0^H = 0 \quad (4.4)$$

tal que, em  $x=0$ ,  $\delta v=0$ , podendo o outro termo do produto ser qualquer;

em  $x=H$ ,  $\delta v \neq 0$ , então dá-se uma condição natural

$$F_{v'} - \frac{d}{dx} F_{v''} \Big|_H = 0 \quad \dots \quad (4.5)$$

#### 4.1. PRIMEIRA EQUAÇÃO DE EULER-POISSON

Desenvolve-se cada equação de (4.3), separadamente, sendo que para a primeira procura-se na expressão da energia potencial da estrutura  $U_T$ , em (3.60), todos os termos em  $v(x)$  e determina-se que

$$F_v = 0 \quad \dots \quad (4.6)$$

Procuram-se todos os termos em  $v'(x)$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n 2\mu_i \left\{ \left[ \psi_{i1}^- v'(x) \right]^2 + 2 \psi_{i1}^- v'(x) \sum_{k=1}^n \psi_{i,k+1}^- u_k(x) \right\} + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_i \lambda_i}{2a_i^2} \left\{ \left[ \psi_{i1}^- a_i + \psi_{i+1,1}^- a_{i+1} \right]^2 \left[ v'(x) \right]^2 + \right. \\ & + 2 \left[ \psi_{i1}^- a_i + \psi_{i+1,1}^- a_{i+1} \right] v'(x) \cdot \sum_{k=1}^n \left[ \psi_{i,k+1}^- a_i + \psi_{i+1,k+1}^- a_{i+1} \right] u_k(x) \left. \right\} + \\ & + \frac{\mu_n \lambda_n}{2} \left\{ \left[ \psi_{n1}^- v'(x) \right]^2 + 2 \psi_{n1}^- v'(x) \sum_{k=1}^n \psi_{n,k+1}^- u_k(x) \right\} \quad \dots \quad (4.7) \end{aligned}$$

e deriva-os em relação a  $v'(x)$ , para se ter

$$\begin{aligned} F_{v'} &= \sum_{i=1}^n 4\mu_i \psi_{i1}^- \left[ \psi_{i1}^- v'(x) + \sum_{k=1}^n \psi_{i,k+1}^- u_k(x) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_i \lambda_i}{a_i^2} \left( \psi_{i1}^- a_i + \psi_{i+1,1}^- a_{i+1} \right) \cdot \left[ \left( \psi_{i1}^- a_i + \psi_{i+1,1}^- a_{i+1} \right) v'(x) + \right. \\ & + \sum_{k=1}^n \left( \psi_{i,k+1}^- a_i + \psi_{i+1,k+1}^- a_{i+1} \right) \cdot u_k(x) \left. \right] + \\ & + \mu_n \lambda_n \psi_{n1}^- \left[ \psi_{n1}^- v'(x) + \sum_{k=1}^n \psi_{n,k+1}^- u_k(x) \right] \quad \dots \quad (4.8) \end{aligned}$$

que depois deve ser derivada em relação a  $x$ ,

$$\frac{d}{dx} F_{v'} = \sum_{i=1}^n 4\mu_i \psi_{i1}^- \left[ \psi_{i1}^- v''(x) + \sum_{k=1}^n \psi_{i,k+1}^- u'_k(x) \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_i \lambda_i}{a_i^2} (\psi_{i1}^- a_i + \psi_{i+1,1}^- a_{i+1}) \left[ (\psi_{i1}^- a_i + \psi_{i+1,1}^- a_{i+1}) v''(x) + \right. \\
 & + \left. \sum_{k=1}^n (\psi_{i,k+1}^- a_i + \psi_{i+1,k+1}^- a_{i+1}) u_k'(x) \right] + \\
 & + \mu_n \lambda_n \psi_{n1}^- \left[ \psi_{n1}^- v''(x) + \sum_{k=1}^n \psi_{n,k+1}^- u_k'(x) \right] \quad \dots \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Na mesma equação de  $U_T$  (3.66), ainda se separa os termos em  $v''(x)$ ,

$$- M(x)v''(x) + EI_\ell [v''(x)]^2 + \sum_{i=1}^n 2EI_i [v''(x)]^2 \quad (4.10)$$

que derivada em relação a  $v''(x)$  dá

$$F_{v''} = - M(x) + 2EI_\ell v''(x) + \sum_{i=1}^n 4EI_i v''(x) \quad (4.11)$$

mas se definirmos

$$I = I_\ell + 2 \sum_{i=1}^n I_i \quad (4.12)$$

pode-se reduzir (4.11) em

$$F_{v''} = - M(x) + 2EIv''(x) \quad (4.13)$$

da qual toma-se a derivada segunda em  $x$ ,

$$\frac{d^2}{dx^2} F_{v''} = - M''(x) + 2EIV''''(x) \quad (4.14)$$

Assim, forma-se a primeira equação de Euler-Poisson: subtrai-se (4.9) de (4.6) e soma com (4.14); põe-se em evidência os deslocamentos  $\{\phi(x)\}$  e simplifica-se  $a_i^2$ ,

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \sum_{i=1}^n 4\mu_i (\psi_{i1}^-)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \lambda_i \left( \psi_{i1}^- + \psi_{i+1,1}^- \frac{a_{i+1}}{a_i} \right)^2 + \mu_n \lambda_n \psi_{n1}^-^2 \right] v''(x) - \\
 & - \left[ \sum_{i=1}^n 4\mu_i \psi_{i1}^- \psi_{i2}^- + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \lambda_i \left( \psi_{i1}^- + \psi_{i+1,1}^- \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) \left( \psi_{i2}^- + \psi_{i+1,2}^- \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) + \right. \\
 & + \left. \mu_n \lambda_n \psi_{n1}^- \psi_{n2}^- \right] \cdot \{u_k\}(x) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \sum_{i=1}^{n-1} 4 \mu_i \varphi_{i1}^{\bar{}} \varphi_{i3}^{\bar{}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_i \lambda_i}{2a_i^2} (\varphi_{i1}^{\bar{}} + \varphi_{i+1,1}^{\bar{}} \frac{a_{i+1}}{a_i}) (\varphi_{i3}^{\bar{}} + \varphi_{i+1,3}^{\bar{}} \frac{a_{i+1}}{a_i}) + \right. \\
 & \left. + \frac{\mu_n \lambda_n}{2} \varphi_{n1}^{\bar{}} \varphi_{n3}^{\bar{}} \right] \cdot u_2'(x) \quad \dots \\
 & \dots - \left[ \sum_{i=1}^n 4 \mu_i \varphi_{i1}^{\bar{}} \varphi_{i,n+1}^{\bar{}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_i \lambda_i}{2a_i^2} (\varphi_{i1}^{\bar{}} + \varphi_{i+1,1}^{\bar{}} \frac{a_{i+1}}{a_i}) (\varphi_{i,n+1}^{\bar{}} + \varphi_{i+1,n+1}^{\bar{}} \frac{a_{i+1}}{a_i}) + \right. \\
 & \left. + \frac{\mu_n \lambda_n}{2} \varphi_{n1}^{\bar{}} \varphi_{n,n+1}^{\bar{}} \right] \cdot u_n'(x) + 2EI v^{iv}(x) = M''(x) \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

É interessante abaixar a ordem de derivação quando possível. Na primeira equação de Euler-Poisson ocorre uma condição natural de contorno (4.5) que nos permite integrá-la e ter uma constante de integração nula. Assim a equação (4.15) integrada e posta em forma estilizada fica sendo,

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \beta_{11}' v'(x) + \beta_{12}' u_1(x) + \beta_{13}' u_2(x) + \dots + \beta_{1,n+1}' u_n(x) \right] + \beta_{11} v'''(x) = \\
 & = M'(x) \quad \dots \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

e procurando uma forma matricial faz-se

$$\beta_{11} v''(x) - \left[ \beta_{11}' \quad \beta_{12}' \quad \dots \quad \beta_{1,n+1}' \right] \{ \phi(x) \} = M'(x) \quad \dots \quad (4.17)$$

#### 4.2. J-ÉSIMA EQUAÇÃO DE EULER-POISSON

A segunda equação ao ser formada dá subsídios para se determinar a genérica  $j$ , onde  $j=2,3,\dots,n+1$ .

Os termos em  $u_j(x)$  da equação (3.69)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n 2 \mu_i \left\{ 2 \varphi_{i1}^{\bar{}} \varphi_{i2}^{\bar{}} v'(x) u_j(x) + (\varphi_{i2}^{\bar{}})^2 [u_j(x)]^2 + 2 \varphi_{i2}^{\bar{}} u_j(x) \sum_{k=2}^n \varphi_{i,k+1}^{\bar{}} u_k(x) \right\} + \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_i \lambda_i}{2a_i^2} \left\{ 2 (\varphi_{i1}^{\bar{}} a_i + \varphi_{i+1,1}^{\bar{}} a_{i+1}) (\varphi_{i2}^{\bar{}} a_i + \varphi_{i+1,2}^{\bar{}} a_{i+1}) v'(x) u_j(x) + \right. \\
 & + (\varphi_{i2}^{\bar{}} a_i + \varphi_{i+1,2}^{\bar{}} a_{i+1})^2 [u_j(x)]^2 + 2 (\varphi_{i2}^{\bar{}} a_i + \varphi_{i+1,2}^{\bar{}} a_{i+1}) u_j(x) \sum_{k=2}^n \left[ (\varphi_{i,k+1}^{\bar{}} a_i + \right. \\
 & \left. + \varphi_{i+1,k+1}^{\bar{}} a_{i+1}) u_k(x) \right] \left. \right\} + \frac{\mu_n \lambda_n}{2} \left\{ 2 \varphi_{n1}^{\bar{}} \varphi_{n2}^{\bar{}} v'(x) u_j(x) + (\varphi_{n2}^{\bar{}})^2 [u_j(x)]^2 + \right.
 \end{aligned}$$



$$+ 2 \psi_{n,2}^+ u_1(x) \left[ \sum_{k=2}^n \psi_{n,k+1}^+ u_k(x) \right] \} \dots \quad (4.18)$$

derivados por  $u_j(x)$  cuidando em evidenciar  $a_i^2$  e os deslocamentos, faz-se

$$\begin{aligned} F_{u_1} = & \left[ \sum_{i=1}^n 4 \mu_i \psi_{i1}^+ \psi_{i2}^+ + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \lambda_i \left( \psi_{i1}^+ + \psi_{i+1,1}^+ \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) \left( \psi_{i2}^+ + \psi_{i+1,2}^+ \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) + \right. \\ & \left. + \mu_n \lambda_n \psi_{n1}^+ \psi_{n2}^+ \right] \cdot v'(x) + \\ & + \left[ \sum_{i=1}^n 4 \mu_i (\psi_{i2}^+)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \lambda_i \left( \psi_{i2}^+ + \psi_{i+1,2}^+ \frac{a_{i+1}}{a_i} \right)^2 + \mu_n \lambda_n (\psi_{n2}^+)^2 \right] u_1(x) + \\ & + \left[ \sum_{i=1}^n 4 \mu_i \psi_{i2}^+ \psi_{i3}^+ + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \lambda_i \left( \psi_{i2}^+ + \psi_{i+1,2}^+ \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) \left( \psi_{i3}^+ + \psi_{i+1,3}^+ \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) + \right. \\ & \left. + \mu_n \lambda_n \psi_{n2}^+ \psi_{n3}^+ \right] \cdot u_2(x) + \dots \\ & \dots + \left[ \sum_{i=1}^n 4 \mu_i \psi_{i2}^+ \psi_{i,n+1}^+ + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \lambda_i \left( \psi_{i2}^+ + \psi_{i+1,2}^+ \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) \left( \psi_{i,n+1}^+ + \psi_{i+1,n+1}^+ \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) + \right. \\ & \left. + \mu_n \lambda_n \psi_{n2}^+ \psi_{n,n+1}^+ \right] \cdot u_n(x) \quad (4.19) \end{aligned}$$

O termo em  $u_j'(x)$  derivado por  $u_j'(x)$

$$F_{u_j'} = 4EA_j u_j'(x) \dots \quad (4.20)$$

e depois derivado por  $x$

$$\frac{d}{dx} F_{u_j'} = 4EA_j u_j''(x) \dots \quad (4.21)$$

juntamente com (4.19) formarão a 2ª equaçãp de Euler-Poisson (4.3), que se tentarmos associar a forma matricial (4.17) terá grande valia na soluçãp do sistema. Portanto,

$$\mathcal{S}_{22} u_j''(x) - \left[ \delta'_{21} \quad \delta'_{22} \quad \delta'_{23} \quad \dots \quad \delta'_{2,n+1} \right] \{ \mathcal{D}(x) \} = 0 \quad (4.22)$$

A  $j$ -ésima equaçãp para  $j=2,3,\dots,n$  pode ser obtida facilmente agora por analogia. A  $F_{u_j}$  é equivalente a expressãp (4.19), e a  $\frac{d}{dx} F_{u_j'}$

equivalente à expressão (4.21) que subtraídas uma da outra dão

$$\begin{aligned}
 4EA_{j-1}u''_{j-1}(x) & - \left[ \sum_{i=1}^n 4u_i \psi_{i1}^+ \psi_{ij}^- + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \lambda_i (\psi_{i1}^+ + \psi_{i+1,1}^- \frac{a_{i+1}}{a_i}) (\psi_{ij}^- + \right. \\
 & + \left. \psi_{i+1,j}^- \frac{a_{i+1}}{a_i}) + \mu_n \lambda_n \psi_{n1}^+ \psi_{nj}^- \right] \cdot v'(x) \\
 & - \left[ \sum_{i=1}^n 4u_i \psi_{i2}^+ \psi_{ij}^- + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \lambda_i (\psi_{i2}^+ + \psi_{i+1,2}^- \frac{a_{i+1}}{a_i}) (\psi_{ij}^- + \psi_{i+1,j}^- \frac{a_{i+1}}{a_i}) + \right. \\
 & + \left. \mu_n \lambda_n \psi_{n2}^+ \psi_{nj}^- \right] \cdot u_1(x) \quad \dots \\
 & - \left[ \sum_{i=1}^n 4u_i (\psi_{ij}^-)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \lambda_i (\psi_{ij}^- + \psi_{i+1,j}^- \frac{a_{i+1}}{a_i})^2 + \mu_n \lambda_n (\psi_{nj}^-)^2 \right] \cdot u_{j-1}(x) \\
 & \dots - \left[ \sum_{i=1}^n 4\mu_i \psi_{ij}^+ \psi_{i,n+1}^- + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \lambda_i (\psi_{ij}^+ + \psi_{i+1,j}^- \frac{a_{i+1}}{a_i}) (\psi_{i,n+1}^- + \right. \\
 & + \left. \psi_{i+1,n+1}^- \frac{a_{i+1}}{a_i}) + \mu_n \lambda_n \psi_{nj}^+ \psi_{n,n+1}^- \right] \cdot u_n(x) \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

E em forma matricial estilizada

$$\beta_{j,j} u''_{j-1}(x) = [\delta_{j,1}^1 \dots \delta_{j,j}^1 \dots \delta_{j,n+1}^1] \begin{Bmatrix} v'(x) \\ \vdots \\ u_{j-1}(x) \\ \vdots \\ u_{n+1}(x) \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.24)$$

Percebe-se agora que o sistema de (n+1) equações é fácil de ser montado, pois os termos em  $\beta$  são elementos de uma matriz diagonal de ordem (n+1)x(n+1) que faz produto com a matriz dos deslocamentos derivados de 2ª ordem,  $\{\phi(x)\}''$ . Os demais termos do sistema podem ser postos num produto de matrizes:  $[\gamma']$  com  $\{\phi(x)\}$ , tal que

$$[\beta] \{\phi(x)\}'' - [\gamma'] \{\phi(x)\} = \{F(x)\} \quad \dots \quad (4.25)$$

onde  $\{\delta(x)\} = \{v'(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$  (4.26)

$[\beta]$  = matriz diagonal com

$$\beta_{11} = 2EI \quad (4.27)$$

$$\beta_{jj} = 4EA_{j-1} \quad \text{para } j=2,3,\dots,n+1 \quad (4.28)$$

$[\gamma]$  = matriz simétrica com

$$\begin{aligned} \gamma_{jk} = \sum_{i=1}^n 4\mu_i \left[ \psi_{ij}^T \psi_{ik}^T + \frac{\lambda_i}{4} \left( \psi_{ij}^T + \frac{a_{i+1}}{a_i} \psi_{i+1,j}^T \right) \left( \psi_{ik}^T + \frac{a_{i+1}}{a_i} \psi_{i+1,k}^T \right) \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Lembrar sempre que  $a_{n+1}=0$ ; e por último,

$$\{F(x)\} = \{M'(x) \ 0 \ \dots \ 0\}^T \quad (4.30)$$

As condições de contorno das equações de Euler-Poisson representadas pelo sistema (4.25) referem-se ao engastamento da base do edifício ( $x=0$ ),

$$v(0) = v'(0) = u_1(0) = u_2(0) = \dots u_n(0) = 0 \quad (4.31)$$

e devido à extremidade superior livre ( $x=H$ ), onde o momento fletor da estrutura total é nulo e o deslocamento longitudinal que se distribui nas colunas tem seu valor máximo, tal que,

$$v''(H) = u_1'(H) = u_2'(H) = \dots u_n'(H) = 0 \quad (4.32)$$

Estes deslocamentos podem ser reunidos no vetor  $\{\delta(x)\}$ , e as condições de contorno (4.31) e (4.32) serão

$$v(0) = 0; \quad \{\delta(0)\} = 0; \quad \{\delta(H)\}' = 0; \quad (4.33)$$

### 5. SOLUÇÃO APROXIMADA

A parede lateral  $\bar{e}$  o painel de maior rigidez para suportar a carga horizontal do vento. Seu deslocamento predominante segue a direção do carregamento,  $v'(x)$ . Com a flexão devida ao carregamento surge um deslocamento vertical que  $\bar{e}$  uma simples função linear de  $v'(x)$ .

No pórtico, os deslocamentos predominantes decorrem da deformação axial das colunas que conforme modelos estudados têm uma função aproximadamente parabólica ao longo do andar passando por todas as colunas. Se esta função  $\bar{e}$  condicionada na interseção com a parede onde o deslocamento vertical  $\bar{e}$   $(D/2) \cdot v'(x)$  e acompanha a redução do deslocamento até o centro do pórtico, pode-se usá-la na simplificação do cálculo da energia de deformação. Pois, ao invés de ter-se  $n$  incógnitas deslocamentos no pórtico ter-se-á apenas uma. Vide fig.4.

Assim, a aproximação na solução dos deslocamentos da estrutura seria feita nos pórticos normais, sendo razoável os resultados obtidos para

$$u_i(x) = \frac{D}{2} [v'(x) - w_i R(x)] \quad (5.1)$$

onde o primeiro termo  $\bar{e}$  direita  $\bar{e}$  o deslocamento da interseção com as paredes  $u_i(x)$  e no segundo termo  $R(x)$   $\bar{e}$  um parâmetro incógnito medidor da magnitude do retardamento na transmissão do cortante que provoca deslocamentos menores no centro dos pórticos normais;  $w_i$   $\bar{e}$  um parâmetro dependente da aproximação na deformação axial das colunas.

Considera-se duas variações para  $w_i$ , uma parabólica,

$$w_i = f(z) = 1 - \left(\frac{z_i}{B/2}\right)^2 \quad \dots \quad (5.2)$$

e outra cosseno-hiperbólica,

$$w_i = f(z) = 1 - \cosh\left[\frac{z_i^2}{(B/2)^2}\right] / \cosh(1.0) \quad \dots \quad (5.3)$$

Com estas aproximações volta-se a calcular a energia potencial da estrutura seguindo os mesmos passos anteriores, mas com a vantagem de haver menor número de incógnitas deslocamentos.

#### 4.1. ENERGIA POTENCIAL

Onde houver deslocamentos  $u_i(x)$  substituí-se pela aproximação (5.1). No funcional da energia potencial  $U_T$  as seguintes parcelas permanecem as mesmas:  $U_1$  em (3.1),  $U_2$  em (3.3), e  $U_4$  em (3.5). As demais se alteram; como em (3.4) para

$$U_3 = 2 \sum_{i=1}^n EA_i \int_0^H \left[ \frac{D}{2} [v''(x) - w_i R'(x)] \right]^2 dx \quad (5.4)$$

e em (3.17) que  $\bar{e}$  função de  $q_i(x)$  toma-se mais uma aproximação; supõe-se que em cada tramo de viga estas forças cortantes decresçam de 1/2 da anterior conforme se aproximando centro do pórtico,

$$\frac{q_{i-1}}{2} = q_i; \quad \frac{q_i}{2} = q_{i+1} \quad (5.5)$$

De (3.57) sob a condição (5.1),

$$q_i(x) = \Psi_{i1}^- v'(x) + \sum_{j=1}^n \Psi_{i,j+1}^- \frac{D}{2} [v'(x) - w_j R(x)] \quad (5.6)$$

mas ao substituir-se os termos de  $\Psi_{ij}^-$  conforme definido em (3.46) a partir da forma deduzida (3.42), tem-se

$$\begin{aligned} \xi_{11} q_1 + \xi_{12} q_2 &= \zeta_{11} v' + \zeta_{12} \left[ \frac{D}{2} (v' - w_1 R) \right] \\ \xi_{21} q_1 + \xi_{22} q_2 + \xi_{23} q_3 &= \zeta_{22} \left[ \frac{D}{2} (v' - w_1 R) \right] + \zeta_{23} \frac{D}{2} (v' - w_2 R) \\ &\vdots \\ \xi_{i(i-1)} q_{i-1} + \xi_{ii} q_i + \xi_{i(i+1)} q_{i+1} &= \zeta_{ii} \frac{D}{2} (v' - w_{i-1} R) + \zeta_{i(i+1)} \frac{D}{2} (v' - w_i R) \\ &\vdots \\ \xi_{n(n-1)} q_{n-1} + \xi_{nn} q_n &= \zeta_{nn} \frac{D}{2} (v' - w_{n-1} R) + \zeta_{n(n+1)} \frac{D}{2} (v' - w_n R) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde  $\xi_{11} = \frac{D}{2}$  ;

$$\xi_{22} = \xi_{33} = \dots \xi_{ii} = \dots \xi_{nn} = 1 ;$$

$$\xi_{12} = \xi_{23} = \dots \xi_{i(i+1)} = \dots \xi_{n(n+1)} = -1 ;$$

percebe-se que (5.7) será simplificada para

$$\begin{aligned} \xi_{11}q_1 + \xi_{12}q_2 &= \frac{D}{2} w_1 R \\ \xi_{21}q_1 + \xi_{22}q_2 + \xi_{23}q_3 &= \frac{D}{2} (w_2 - w_1) R \\ &\vdots \\ \xi_{i(i-1)}q_{i-1} + \xi_{ii}q_i + \xi_{i(i+1)}q_{i+1} &= \frac{D}{2} (w_i - w_{i-1}) R \quad \dots (5.8) \\ &\vdots \\ \xi_{n(n-1)}q_{n-1} + \xi_{nn}q_n &= \frac{D}{2} (w_n - w_{n-1}) R \end{aligned}$$

e usando a condição (5.5) na equação genérica de (5.8) tem-se

$$q_i(x) = \frac{D}{2} \frac{(w_i - w_{i-1}) R(x)}{\xi_{ii} + \frac{\xi_{i(i+1)}}{2} + 2\xi_{i(i-1)}} \quad (5.9)$$

para  $i=1, 2, \dots, n$ ;  $w_0 = 0$  e  $\xi_{n(n+1)} = 0$

Resta substituir [5.9] em  $q_i(x)$

$$q_i(x) = \frac{D}{2} \frac{(w_i - w_{i-1}) R(x)}{\mu_i \left\{ 1 + \lambda_i \left[ \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{I'_i}{I'_{i-1}} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{4} \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) + 2 \frac{1}{4} \left( \frac{a_i}{a_{i-1}} \right) \frac{\mu_{i-1} \lambda_{i-1}}{\mu_i \lambda_i} \right] \right\}} \quad (5.10)$$

porém, o último termo do denominador desenvolvido

$$\left( \frac{a_i}{a_{i-1}} \right) \left( \frac{\mu_{i-1}}{\mu_i} \right) \left( \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \right) = \left( \frac{a_i}{a_{i-1}} \right) \frac{hc_i^3}{hc_i^3} \frac{12EI_{vi}^*}{12EI_{v(i-1)}^*} \frac{a_{i-1}^3}{c_{i-1}^3} \frac{I_{v(i-1)}^* h}{I'_{i-1} a_{i-1}} \frac{c_i^3 I'_i a_i}{a_i^3 I'_{vi} h} \quad \dots (5.11)$$

será igual a

$$\frac{a_{i-1}}{a_i} \frac{I'_i}{I'_{i-1}} \quad \dots (5.12)$$

portanto,

$$q_i(x) = \frac{D}{2} \frac{(w_i - w_{i-1}) R(x)}{\frac{hc_i^3}{12EI_{vi}^*} \left\{ 1 + \frac{\lambda_i}{4} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) + \frac{I'_i}{I'_{i-1}} \left( 1 + \frac{2a_{i-1}}{a_i} \right) \right] \right\}} \quad (5.13)$$

Para estilizar define-se

$$\bar{\varphi}_i^- = \frac{6EI_{vi}^*}{hc_i^3} \frac{w_i - w_{i-1}}{1 + \frac{1}{4} \lambda_i \frac{a_{i+1}}{a_i}} \quad (5.14)$$

$$\lambda_i = 1 + \frac{1}{2} \frac{a_{i+1}}{a_i} + \frac{I_i'}{I_{i-1}'} \left( 1 + \frac{2a_{i-1}}{a_i} \right) \quad (5.15)$$

e tem-se finalmente

$$q_i(x) = \bar{\varphi}_i^- R(x) \quad (5.16)$$

Ao se aplicar  $q_i(x)$  de (5.16) em (3.17) tem-se a última parcela da energia de deformação total sob a aproximação feita nos deslocamentos e esforços seguindo o caráter dominante de deformação da estrutura.

$$U_5 = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^H \left[ \frac{hc_i^3}{6EI_{vi}^*} \bar{\varphi}_i^{-2} + \frac{h^2}{24EI_i'} \left( \bar{\varphi}_i^- \frac{a_{i+1}}{a_i} + \bar{\varphi}_{i+1}^- \frac{a_{i+1}}{a_i} \right)^2 \right] R^2(x) dx \right\} \quad (5.17)$$

onde  $\bar{\varphi}_{n+1}^- = 0$

Para agrupar as constantes procede-se em evidenciar  $a_i$  e  $\bar{\varphi}_i^-$ ; lembrando que em (3.52),

$$\lambda_i = \frac{(a_i)^3}{(c_i)^3} \frac{I_{vi}^*/a_i}{I_i'/h}$$

logo,

$$U_5 = \sum_{i=1}^n \frac{hc_i^3}{6EI_{vi}^*} \bar{\varphi}_i^{-2} \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{hI_{vi}^*}{I_i' a_i} \frac{a_{i+1}}{c_i^3} \left( 1 + \frac{\bar{\varphi}_{i+1}^-}{\bar{\varphi}_i^-} \frac{a_{i+1}}{a_i} \right)^2 \right] \int_0^H R^2(x) dx \quad (5.18)$$

podendo-se definir a constante

$$\mu_e^2 = \sum_{i=1}^n \frac{hc_i^3}{3EI_{vi}^*} \bar{\varphi}_i^{-2} \left[ 1 + \frac{\lambda_i}{4} \left( 1 + \frac{\bar{\varphi}_{i+1}^-}{\bar{\varphi}_i^-} \frac{a_{i+1}}{a_i} \right)^2 \right] \quad (5.19)$$

(lembrando que  $\bar{\varphi}_{n+1}^- = 0$ ) para que (5.18) se torne

$$U_5 = \frac{1}{2} \mu_e^2 \int_0^H R^2(x) dx \quad (5.20)$$

A energia potencial da estrutura será então obtida pela soma das integrais (3.1), (3.3), (3.5), (4.4) e (5.20) reunidas numa integral da soma,

$$U_T = \int_0^H \left\{ -M(x) \cdot v''(x) + EI_\ell [v''(x)]^2 + 2 \sum_{i=1}^n EI_i [v''(x)]^2 + \sum_{i=1}^n EA_i \frac{D^2}{2} [v''(x) - w_i R'(x)]^2 + \frac{U_e}{2} R^2(x) \right\} dx \quad (5.21)$$

### 5.2 MINIMIZAÇÃO DA ENERGIA APROXIMADA

As funções incôgnitas se reduziram à duas:  $v(x)$  e  $R(x)$ . Quando o variacional tende a zero,  $\delta U_T = 0$ , as equações de Euler-Poisson tiradas desta operação nos fornecerão a solução das funções incôgnitas. Para cada função tem-se uma equação de Euler-Poisson

$$F_v - \frac{d}{dx} F_{v'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{v''} = 0 \quad \dots \quad (5.22)$$

$$F_R - \frac{d}{dx} F_{R'} = 0$$

Na primeira equação do sistema (5.22) tem-se que de  $U_T$  em (5.21)

$$F_v = F_{v'} = 0 \quad (5.23)$$

$$F_{v''} = -M(x) + 2EI_\ell v''(x) + \sum_{i=1}^n 4EI_i v''(x) + \sum_{i=1}^n EA_i D^2 [v''(x) - w_i R'(x)] \quad \dots \quad (5.24)$$

e,

$$\frac{d^2}{dx^2} F_{v''} = -M''(x) + \left( 2EI_\ell + 4 \sum_{i=1}^n EI_i + \sum_{i=1}^n EA_i D^2 \right) v'''(x) - \sum_{i=1}^n EA_i D^2 w_i R'''(x) \quad \dots \quad (5.25)$$

Para operar esta equação define-se

$$I_e = 2I_\ell + 4 \sum_{i=1}^n I_i + D^2 \sum_{i=1}^n A_i \quad (5.26)$$



e

$$A_e = D^2 \sum_{i=1}^n A_i w_i \quad \dots \quad (5.27)$$

tal que, a primeira equação de Euler-Poisson da solução aproximada  $\bar{e}$

$$EI_e v^{IV}(x) - EA_e R'''(x) = M''(x) \quad \dots \quad (5.28)$$

Para a segunda equação, tira-se de  $U_T$  em (5.21) que

$$F_R = \mu_e^2 R(x) \quad \dots \quad (5.29)$$

$$F_{R'} = \sum_{i=1}^n EA_i D^2 [-w_i v''(x) + w_i^2 R'(x)] \quad \dots \quad (5.30)$$

Usando a constante definida em (5.27),  $A_e$ , e definindo mais uma constante

$$A_e^* = D^2 \sum_{i=1}^n A_i w_i^2 \quad \dots \quad (5.31)$$

na equação (5.30), chega-se na seguinte forma para a segunda equação de Euler-Poisson depois de derivar em  $x$  a equação (5.30):

$$\mu_e^2 R(x) - EA_e^* R''(x) + EA_e v'''(x) = 0 \quad \dots \quad (5.32)$$

Ficou-se então com o sistema de equações

$$EI_e v^{IV}(x) - EA_e R'''(x) = M''(x) \quad \dots \quad (5.33)$$

$$EA_e v'''(x) - EA_e^* R''(x) + \mu_e^2 R(x) = 0$$

que estão sob as condições de contorno impostas à estrutura estudada,

$$v(0) = 0; \quad v'(0) = 0; \quad v''(H) = 0; \quad R(0) = 0 \quad \dots \quad (5.34)$$

e as condições naturais de contorno tiradas das equações de Euler-Poisson (5.22) quando se abaixa sua ordem de derivação em  $x$ , isto é,

$$\left[ F_{v'} - \frac{d}{dx} F_{v''} \right] \cdot \delta v \Big|_0^H = 0 \quad \dots \quad (5.35)$$

$$\left[ F_{v''} \right] \cdot \delta v' \Big|_0^H = 0 \quad \dots \quad (5.36)$$

$$\left[ F_{R'} \right] \cdot \delta R \Big|_0^H = 0 \quad \dots \quad (5.37)$$

que analisadas e sujeitas as condições de (5.34), darão as condições de contorno naturais. Na primeira, (5.35), para  $x=0$ ,  $\delta v=0$ , e o outro termo do produto é arbitrário; para  $x=H$ ,  $\delta v \neq 0$ , implicando em que tenha-se uma condição natural de contorno,

$$F_{v'} - \frac{d}{dx} F_{v''} \Big|_H = 0 \quad \dots \quad (5.38)$$

como  $F_{v'}=0$ , conforme (5.23), usa-se somente a derivada da expressão (5.24) em  $x=H$ ; tal que

$$EI_e v'''(H) - EA_e R''(H) = M'(H) \quad \dots \quad (5.39)$$

onde  $I_e$  e  $A_e$  são definidos em (5.26) e (5.27), respectivamente. Na segunda, (5.36),

para  $x=0$ ,  $\delta v'=0$ , logo o outro termo é qualquer;

para  $x=H$ ,  $\delta v' \neq 0$ , portanto para que o produto seja nulo,  $F_{v''}=0$  e da equação (5.24) tem-se outra condição natural de contorno,

$$EI_e v''(H) - EA_e R'(H) = M(H) \quad \dots \quad (5.40)$$

A expressão (5.37) em  $x=H$ ,  $R \neq H$  leva à terceira condição natural de contorno com  $F_{R'}=0$ , ou seja, de (5.30)

$$EA_e v''(H) - EA_e^* R'(H) = 0 \quad \dots \quad (5.41)$$

O sistema de equações (5.33) a ser resolvido tem uma função de 4.<sup>a</sup> ordem de derivação e outra de 3.<sup>a</sup> ordem necessitando, então, para sua solução de sete condições de contorno das quais quatro estão em (5.34) devido aos apoios, e três são as naturais de contorno (5.39), (5.40) e (5.41).

### 5.3. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Para solucionar o sistema (5.33) separam-se as funções incógnitas  $v(x)$  e  $R(x)$ , mudando-se adequadamente as condições de contorno.

A separação de  $v(x)$  na primeira equação do sistema é feita derivando a segunda equação do sistema para se ter o termo  $R'''(x)$ ,

$$EA_e v^{IV}(x) - EA_e^* R'''(x) + \mu_e^2 R'(x) = 0 \quad \dots \quad (5.42)$$

Multiplica-se essa por  $A_e$  e troca-se de sinal,

$$-EA_e^2 v^{IV}(x) + EA_e^* A_e R'''(x) - \mu_e^2 A_e R'(x) = 0 \quad (5.43)$$

O termo em  $R'''(x)$  é zerado, quando se multiplica a primeira equação do sistema (5.33) por  $A_e^*$  e soma-se essa com a equação acima (5.43).

$$(EI_e A_e^* - EA_e^2) \cdot v^{IV}(x) - A_e^* M''(x) - \mu_e^2 A_e R'(x) = 0 \quad (5.44)$$

Ainda falta eliminar  $R'(x)$ . Se integrarmos duas vezes a primeira equação do sistema (5.33), surgem duas constantes de integração,

$$EI_e v''(x) - EA_e R'(x) = M(x) + b_1 x + b_2 \quad \dots \quad (5.45)$$

que podem ser determinadas pelas condições naturais de contorno (5.39) na primeira integração dando  $b_1=0$ , e na segunda integração comparada com a equação (5.40) dando  $b_2=0$ . Isso permite tirar de (5.45)

$$R'(x) = \frac{I_e}{A_e} v''(x) - \frac{1}{EA_e} M(x) \quad \dots \quad (5.46)$$

que substituída em (5.44) formará uma equação diferencial em função de apenas uma incógnita  $v(x)$  que ao ser dividida por  $EI_e^* A_e$  vai se tornar

$$v^{IV}(x) - \frac{\mu_e^2 I_e}{EI_e^* A_e} v''(x) - \frac{A_e^*}{EI_e^* A_e} M''(x) + \frac{\mu_e^2}{E^2 I_e^* A_e} M(x) = 0 \quad (5.47)$$

donde se pode definir as seguintes constantes,

$$I^* = (I_e A_e^* - A_e^2) \cdot \frac{1}{A_e} \quad \dots \quad (5.48)$$

$$\alpha^2 = \frac{\mu_e^2 I_e}{I^* E A_e} \quad \dots \quad (5.49)$$

$$\delta_1' = \frac{A_e^*}{E I^* A_e} \quad \dots \quad (5.50)$$

$$\delta_2' = \frac{\mu_e^2}{E^2 I^* A_e} \quad \dots \quad (5.51)$$

e reduzir finalmente a expressão para

$$v^{IV}(x) - \alpha^2 v'''(x) = \delta_1' M''(x) - \delta_2' M(x) \quad \dots \quad (5.52)$$

Nesse caso as condições de contorno deverão ser quatro: as de apoio da estrutura,

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0 \quad \text{e} \quad v''(H) = 0 \quad \dots \quad (5.53)$$

e ao substituir-se a condição  $R(0) = 0$  juntamente com a derivada da equação (5.46) também para o ponto  $x=0$ , lembrando que essa última equação foi obtida através das condições naturais de contorno (5.39) e (5.40)

$$R''(0) = \frac{I_e}{A_e} v'''(0) - \frac{1}{E A_e} M'(0) \quad \dots \quad (5.54)$$

na segunda equação do sistema (5.33),

$$E A_e v'''(0) - E A_e^* \left[ \frac{I_e}{A_e} v'''(0) - \frac{1}{E A_e} M'(0) \right] + \mu_e^2 \cdot 0 = 0 \quad (5.55)$$

ter-se-á mais uma condição de contorno (através das naturais),

$$v'''(0) = + \delta_1' M'(0) \quad \dots \quad (5.56)$$

onde  $\delta_1'$  é definido em (5.50).

Analogamente, a outra função  $R(x)$  para ser equacionada isoladamente, segue as operações: Integra-se a primeira equação do sistema (5.33)

lembrando que sua constante de integração é nula conforme a condição natural de contorno (5.39), faz-se seu produto por  $A_e$  e subtrai-se a segunda equação do sistema pré-multiplicada por  $I_e$ . Tal que,

$$E[A_e^* I_e - A_e^2] R''(x) - \mu_e^2 I_e R(x) = A_e M'(x) \quad (5.57)$$

mas dividindo toda a expressão acima por  $EI^* A_e$  e conforme definido nas expressões (5.48) e (5.49), pode-se tê-la na forma,

$$R''(x) - \alpha^2 R(x) = \frac{M'(x)}{EI^*} \quad \dots \quad (5.58)$$

Essa equação está sujeita as seguintes condições de contorno,

$$R(0) = 0 \quad e \quad R'(H) = 0 \quad \dots \quad (5.59)$$

onde a segunda condição advém da natural (5.41) e de  $v''(H)=0$ .

### 5.3.1. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO DESLOCAMENTO $V(X)$

A equação diferencial do deslocamento  $v(x)$  formulada pela expressão (5.52),

$$v^{IV}(x) - \alpha^2 v''(x) = \gamma_1'' M''(x) - \gamma_2' M'(x)$$

tem uma solução da parte homogênea,  $D^2(D^2 - \alpha^2)v_h = 0$ , igual a

$$v_h = B_1 + B_2 x + B_3 \cosh \alpha x + B_4 \sinh \alpha x \quad (5.60)$$

e em função do carregamento representado pelo momento fletor  $M(x)$ , o qual para um carregamento uniformemente distribuído  $p(x)$  é

$$M(x) = \frac{\hat{p}}{2} (H-x)^2 \quad \dots \quad (5.61)$$

tira-se então a solução particular. Aplica-se o operador da equação geral num polinômio de 4º grau, pois a expressão do momento é uma equação de 2º grau.

$$D^2(D^2 - \alpha^2)(b_1x^4 + b_2x^3 + b_3x^2) = F(x) \quad \dots \quad (5.62)$$

mas,

$$F(x) = \delta_1' M''(x) - \delta_2' M(x) \quad \dots \quad (5.63)$$

onde  $M(x)$  é a equação (5.61) e sua derivada de 2.<sup>a</sup> ordem é

$$M''(x) = p \quad \dots \quad (5.64)$$

Quando substituí-se as expressões acima (5.63), (5.61) e (5.64) em (5.62)

$$24b_1 - \alpha^2(12b_1x^2 + 6b_2x + 2b_3) = \delta_1' p - \delta_2' \frac{p}{2} (H-x)^2 \quad (5.65)$$

pode-se determinar as constantes do polinômio na solução particular  $v_p$ ,

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\delta_2'}{24\alpha^2} p \\ b_2 &= -\frac{\delta_2'}{6\alpha^2} pH \quad \dots \quad (5.66) \end{aligned}$$

$$b_3 = \left( \frac{\delta_2'}{2} H^2 + \frac{\delta_2'}{\alpha^2} - \delta_1' \right) \frac{p}{2\alpha^2}$$

tal que,

$$v_p = \frac{\delta_2'}{\alpha^2} \left[ \frac{x^2}{24} - \frac{Hx}{6} + \frac{H^2}{4} + \left( \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\delta_1'}{2\delta_2'} \right) \right] px^2 \quad (5.67)$$

Observando as expressões de  $\alpha^2$  e  $\delta_2'$  em (5.49) e (5.51) percebe-se que,

$$\frac{\delta_2'}{\alpha^2} = \frac{1}{EI_e} \quad \dots \quad (5.68)$$

e da expressão de  $\delta_1'$  em (5.50) que

$$\frac{\delta_1'}{\delta_2'} = \frac{A_e^* E}{\mu_e^2} \quad \dots \quad (5.69)$$

Se evidenciar-se  $\alpha^2$  na expressão acima

$$\frac{\delta_1'}{\delta_2'} = \frac{A_e^* I_e}{\alpha^2 A_e I^*} \dots (5.70)$$

pode-se subtraí-la facilmente do inverso de  $\alpha^2$  e separar essas constantes na expressão (5.67), tal que

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\delta_1'}{\delta_2'} = \frac{I^* A_e - I_e A_e^*}{I^* A_e} \dots (5.71)$$

da definição da constante  $I^*$  em (5.48)

$$I^* A_e = I_e A_e^* - A_e^2$$

tem-se então que

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\delta_1'}{\delta_2'} = -\frac{A_e}{\alpha^2 I^*} \dots (5.72)$$

a qual sendo aplicada na solução particular (5.67) juntamente com a expressão (5.68) e procurando evidenciar a parte numérica da expressão, vamos obter a solução geral quando esta for somada com a parte homogênea da solução, (5.60). Logo, a solução geral é

$$v(x) = B_1 + B_2 x + B_3 \cosh \alpha x + B_4 \sinh \alpha x + \left( x^2 - 4Hx + 6H^2 - \frac{12A_e}{\alpha^2 I^*} \right) \frac{px^2}{24EI_e} \dots (5.73)$$

Resta agora determinar as constantes  $B_i$  que são obtidas pelas condições de contorno (5.53) e (5.56). Dessa forma estas são

$$\begin{aligned} B_1 &= -B_3 \\ B_2 &= -B_4 \alpha \\ B_3 &= -B_4 \operatorname{tanh} \alpha H + \frac{A_e}{I^*} \frac{p}{\alpha^4 EI_e \cosh \alpha H} \\ B_4 &= \frac{1 - EI_e \delta_1'}{\alpha^3 EI_e} pH \end{aligned} \dots (5.74)$$

### 5.3.2. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO PARÂMETRO $R(x)$

O parâmetro redutor da força cortante na parte central do pórtico normal,  $R(x)$ , tem solução geral da equação (5.58) a partir da homogênea no operador  $(D^2 - \alpha^2)R = 0$ , que é

$$R_h = B_5 \cosh \alpha x + B_6 \sinh \alpha x \quad \dots \quad (5.75)$$

e da solução particular, quando se aplica o mesmo operador num polinômio de 1º grau,

$$(D^2 - \alpha^2)(b_1 x + b_2) = F(x) \quad \dots \quad (5.76)$$

onde

$$F(x) = \frac{M'(x)}{EI^*} \quad \dots \quad (5.77)$$

e

$$M'(x) = -p(H-x) \quad \dots \quad (5.78)$$

Portanto, as constantes do polinômio serão

$$b_1 = -\frac{p}{\alpha^2 EI^*} \quad \dots \quad (5.79)$$

$$b_2 = \frac{pH}{\alpha^2 EI^*}$$

e a solução particular de  $R(x)$  fica sendo,

$$R_p = \frac{p}{\alpha^2 EI^*} (H-x) \quad \dots \quad (5.80)$$

Unindo as duas soluções tem-se a geral:

$$R(x) = B_5 \cosh \alpha x + B_6 \sinh \alpha x + \frac{p}{\alpha^2 EI^*} (H-x) \quad (5.81)$$

Das condições de contorno (5.59) tira-se as constantes



$$B_5 = - \frac{pH}{\alpha^2 EI^*} \dots (5.82)$$

$$B_6 = - B_5 \operatorname{tanh} \alpha H + \frac{p}{\alpha^3 EI^* \cosh \alpha H}$$

Assim, para se ter os deslocamentos axiais nas colunas com resultados aproximados, aplica-se na expressão (5.1), a derivada primeira da equação do deslocamento  $v(x)$ , (5.73), e a função  $R(x)$  da expressão (5.81). Ou seja, toma-se

$$v'(x) = B_2 + B_3 \alpha \operatorname{senh} \alpha x + B_4 \alpha \operatorname{cosh} \alpha x + \left[ x^2 - 3Hx + 3H^2 - \frac{A_e}{\alpha^2 I^*} - \frac{px}{6EI_e} \right] \dots (5.83)$$

onde as constantes  $B_2$ ,  $B_3$  e  $B_4$  estão definidas em (5.74); e o deslocamento axial na coluna  $i$  se torna,

$$u_i(x) = \frac{D}{2} \left\{ \left[ B_2 - \frac{pHw_i}{\alpha^2 EI^*} \right] + \left( B_3 \alpha - B_6 w_i \right) \operatorname{senh} \alpha x + \left( B_4 \alpha - B_5 w_i \right) \operatorname{cosh} \alpha x + \left[ x^2 - 3Hx + \left( \frac{6w_i I_e - A_e}{\alpha^2 I^*} + 3H^2 \right) \right] \frac{px}{6EI_e} \right\} \dots (5.84)$$

onde as constantes  $B_5$  e  $B_6$  estão definidas em (5.82).

Os esforços podem agora ser obtidos como no capítulo seguinte, onde se usa apenas as equações aproximadas dos deslocamentos.

## 6. CÁLCULO DOS ESFORÇOS

Os esforços solicitantes ao longo da altura do edifício tais como o momento fletor na parede lateral, a força cortante nas vigas, e a força normal (ou axial) em cada coluna, podem ser obtidos utilizando-se as expressões dos deslocamentos desenvolvidas no capítulo anterior.

### 6.1. MOMENTO FLETOR NA PAREDE

O momento fletor na parede lateral é

$$M_{\ell}(x) = EI_{\ell} v''(x) \quad \dots \quad (6.1)$$

bastando calcular a segunda derivada da equação (5.73) para se ter

$$M_{\ell}(x) = EI_{\ell} \left\{ x^2 B_3 \cosh \alpha x + x^2 B_4 \sinh \alpha x + \frac{p}{24EI} \left[ 12x^2 - 24Hx + 2 \left( 6H^2 - \frac{12A_0}{2I^*} \right) \right] \right\} \quad \dots \quad (6.2)$$

### 6.2. FORÇA CORTANTE NAS VIGAS

A força cortante nas vigas do andar na altura  $x$ ,

$$Q_{vi}(x) = h q_i(x) \quad \dots \quad (6.3)$$

tem solução aproximada pela equação (5.16)

$$q_i(x) = \bar{q}_i R(x)$$

onde  $\bar{q}_i$  é definido em (5.14) e  $R(x)$  determinado pela equação (5.81).

Portanto,

$$Q_{vi}(x) = h \left[ B_5 \cosh \alpha x + B_6 \sinh \alpha x + \frac{p}{2EI^*} (H - x) \right] \quad (6.4)$$

### 6.3. FORÇA NORMAL NOS PILARES

A força normal no pilar  $j$  (ou coluna) do andar na altura  $x$ ,

$$T_j(x) = EA_j u'_j(x) \quad . . . \quad (6.5)$$

vai precisar da primeira derivada da equação (5.84), tal que

$$T_j(x) = EA_j \frac{D}{2} \left\{ B_3 - B_6 w_i \right\} \cosh \lambda x + \left\{ B_4 - B_5 w_i \right\} \sinh \lambda x + 3x^2 - 6Hx + \frac{6w_i I_e - A_e}{2 I^*} + 3H^2 \frac{p}{6EI_e} \quad (6.6)$$

## 7. OUTRAS CONSIDERAÇÕES DE CÁLCULO

No processo de cálculo apresentado nesse trabalho procurou-se sempre optar pelo caminho que mais adequace à sua automatização por computador na solução exata. Como por exemplo, desprezando o fator  $(1 - \frac{d}{h})$  utilizado por CHAN, TSO e HEIDEBRECHT [1] que consideraram a influência da altura das vigas periféricas  $d$  em relação a altura de cada andar  $h$ , afetando a rigidez dos pórticos.

Entretanto, uma das considerações de cálculo que podem ser reavaliadas, também, são a do engastamento da primeira viga do pórtico normal com a parede e da deformação ocorrida na viga central desse mesmo pórtico.

Assim sendo, ao considerar-se a deformação da viga central teríamos uma rotação na coluna  $n$  diferente da equacionada em (3.36). Observando como essa foi obtida, a partir do equilíbrio de momentos do nó viga-coluna, vamos encontrar que no  $n$ -ésimo nó este equilíbrio se faz com (semelhante a eq.(3.21)),

$$2 \left( \frac{6EI'_n}{h} \right) \bar{\theta}_n(x) + \left( \frac{2EI_{vc}}{a_c} \right) \bar{\theta}_n(x) = \frac{a_n}{2} \cdot h \cdot q_n(x) \quad \dots (7.1)$$

onde  $a_c$  e  $I_{vc}$  são o comprimento e o momento de inércia da viga central.

Logo,

$$\bar{\theta}_n = \frac{a_n}{2} h q_n(x) / \left( \frac{2EI_{vc}}{a_c} + \frac{12EI'_n}{h} \right) \quad \dots (7.2)$$

que comparada com a expressão (3.36) anteriormente deduzida, possui um termo adicional,

$$\bar{\theta}_n(x) = \theta_n(x) - \frac{a_c h}{4EI_{vc}} a_n q_n(x) \quad \dots (7.3)$$

Nota-se que este termo adicional alteraria todo o sistema de equações (3.42).

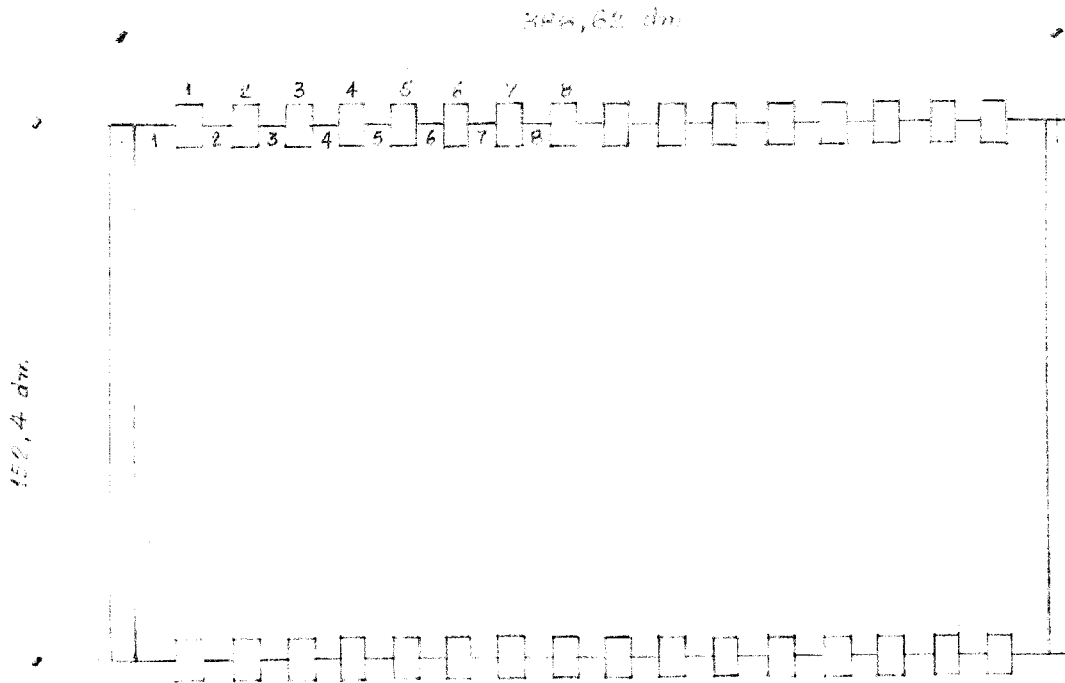
MANCINI [6] fez o cálculo deste mesmo edifício por meio de equações de equilíbrio sem usar o princípio da mínima energia potencial, mas por processo também aproximado. Considerou este termo adicional na rotação do nó viga-coluna  $n$  e seus resultados mostram que nas vigas próximas à parede, ou seja, distantes da viga central, este termo não in-

fluência. A alteração nos deslocamentos da viga central, apesar de serem significativas, ainda são de pequena importância nos esforços, pois estes já são relativamente bem menores que os encontrados nas vigas extremas.

No caso de não se considerar o engastamento da primeira viga do pórtico com a parede, mas como uma articulação teríamos uma pequena alteração nas constantes do primeiro termo de  $[k]$  em (3.47) mas não afetaria a forma total do sistema (3.42).

### 8. EXEMPLO NUMÉRICO

Toma-se como exemplo de cálculo um edifício com as seguintes características e planta desenhada abaixo



número de pilares por pórtico: 16, ou  $n=8$

comprimento da estrutura:  $B=388,62$  dm

largura da estrutura:  $D=152,4$  dm

comprimento das vigas:  $a_i=22,86$  dm ;  $c_i=19,81$  dm

tamanho dos pilares (colunas):  $3,05$  dm x  $4,57$  dm

área da seção transversal:  $A_{c_i}=13,94$  dm<sup>2</sup>;

momento de inércia:  $I_{c_i}=24,26$  dm<sup>4</sup>;  $I'_{c_i}=10,80$  dm<sup>4</sup>;

dimensões das vigas:  $1,524$  dm x  $6,096$  dm;

área da seção transversal:  $A_{v_i}=9,29$  dm<sup>2</sup> ;

momento de inércia:  $I_{v_i}=28,77$  dm<sup>4</sup>;

dimensões da parede:  $3,048$  dm x  $156,972$  dm

momento de inércia:  $I_{\ell} = 982\,426,91$  dm<sup>4</sup>

módulo de elasticidade:  $E= 21\,093$  t/dm<sup>2</sup>

módulo de elasticidade transversal:  $G= 8\,437,2$  t/dm<sup>2</sup>

carga lateral:  $p = 0,76375$  t/dm

altura do andar:  $h = 36,576$  dm

altura do edifício: 30 andares;  $H=1097,28$  dm

$$I_{vi}^* = 23,263 \text{ dm}^4 ; \quad I_e = 4\,555\,488,124 \text{ dm}^4$$

$$\lambda_i = 5,293 \quad \mu_i = 0,0483 \text{ dm}^2/t$$

## 8.1. SOLUÇÃO APROXIMADA

### 8.1.1. FUNÇÃO PARABÓLICA:

$$w_i = 1 - \left(\frac{z_i}{B/2}\right)^2 ; \quad \sum_{i=1}^n w_i = 5,6686 ; \quad \sum_{i=1}^n w_i^2 = 4,5333;$$

$$A_e = 1\,840\,608,293 ; \quad A_e^* = 1\,467\,571,416$$

$$r_1 = 3/2 ; \quad r_2=r_3=\dots=r_7 = 9/2 ; \quad r_8 = 4$$

$$w_0 = 0 ; \quad a_9 = 0 ; \quad I_0 = \infty ; \quad \bar{y}_9 = 0$$

$$\mu_e^2 = 14\,939,940 ; \quad \alpha^2 = 0,97845 \times 10^{-6} ; \quad \alpha = 0,98917 \times 10^{-3}$$

$$r_1 = 2,10986 \times 10^{-11} ; \quad r_2 = 1,87526 \times 10^{-20}$$

$$B_1 = -12,5335 ; \quad B_2 = 9,1574 \times 10^{-3} ; \quad B_3 = 12,5335 ; \quad B_4 = -9,2577$$

$$B_5 = -0,022665 ; \quad B_6 = 0,030684$$

### 8.1.2. FUNÇÃO COSSENO-HIPERBÓLICA

$$w_i = 1 - \cosh\left(\frac{z_i}{B/2}\right) / \cosh(1,0) ; \quad \sum_{i=1}^n w_i = 2,3997 ; \quad \sum_{i=1}^n w_i^2 = 0,7579;$$

$$A_e = 776\,860,709 ; \quad A_e^* = 245\,364,329$$

$$\mu_e^2 = 4\,264,5499 ; \quad \alpha^2 = 1,791 \times 10^{-6} ; \quad \alpha = 1,3383 \times 10^{-3}$$

$$r_1 = 2,26207 \times 10^{-11} ;$$

$$B_1 = -6,23975 ; \quad B_2 = 7,39308 \times 10^{-3} ; \quad B_3 = 6,23975 ; \quad B_4 = -5,5242$$

$$B_5 = -0,03351 ; \quad B_6 = 0,04012$$

Os deslocamentos e esforços calculados pelos dois processos são apresentados nos gráficos das figuras (8.1) a (8.13) onde são também comparados com os resultados do cálculo desenvolvido por Mancini, ref.(10.6).

## 8.2. COMENTÁRIOS DOS RESULTADOS

A fig.(8.1) mostra os deslocamentos horizontais na direção da carga do vento,  $v(x)$ , variando ao longo da altura do edifício. Nota-se uma identificação de resultados pelas duas aproximações no método da energia desenvolvido no presente trabalho e também com o método da energia desenvolvido por MANCINI [6], até um terço da altura do edifício, ou seja,  $x/H=1/3$ . No topo do edifício, em  $x=H$  temos ainda uma variação muito pequena com um erro de 4%.

A fig.(8.2) onde mostra-se a variação dos momentos fletores ao longo da altura das paredes laterais,  $M_p(x)$ , também permite notar a precisão razoável que os dois processos aproximados dão nos resultados.

As fig.(8.3) a (8.10) evidenciam a redução da força cortante distribuída nas vigas desde a interseção com a parede até a região central. Na primeira viga devido à influência da parede os processos tem funções de comportamento variado ao longo da altura do edifício, sendo que até um sexto da altura (5º andar) a função cosseno-hiperbólica tem os melhores resultados mas na faixa média da altura a função parabólica é mais satisfatória. Nas outras vigas a força cortante distribuída calculada pelas duas aproximações tem valores que se aproximam da solução exata mas com diferença considerável na parte central do pórtico. Lembrando que na parte central a força cortante distribuída nas vigas é relativamente pequena em relação a força cortante nas primeiras vigas do pórtico, esta diferença de resultados é desprezível.

As fig.(8.11) a (8.13) comparam a força normal nos pilares em três níveis da altura do edifício, obtida pelas duas aproximações utilizadas. A função cosseno-hiperbólica dá uma boa precisão nos resultados do andar térreo ( $x=0$ ) em todas as colunas, fig.(8.11), podendo ainda ser utilizada até um terço da altura do edifício satisfatoriamente. Nos últimos andares as funções aproximadoras deixam a desejar, mas vale notar que nesta região os esforços axiais nas colunas são relativamente pequenos.



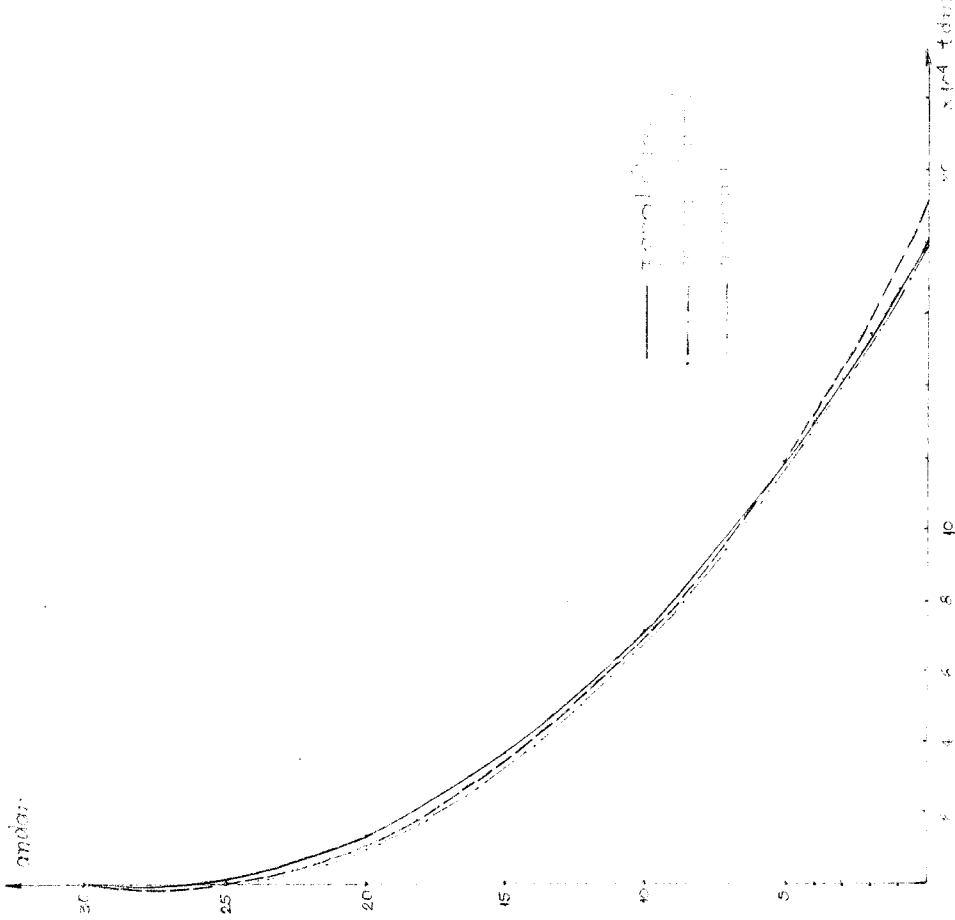


fig (B.2) - momento fletente no travessa  $M_1(x)$ .

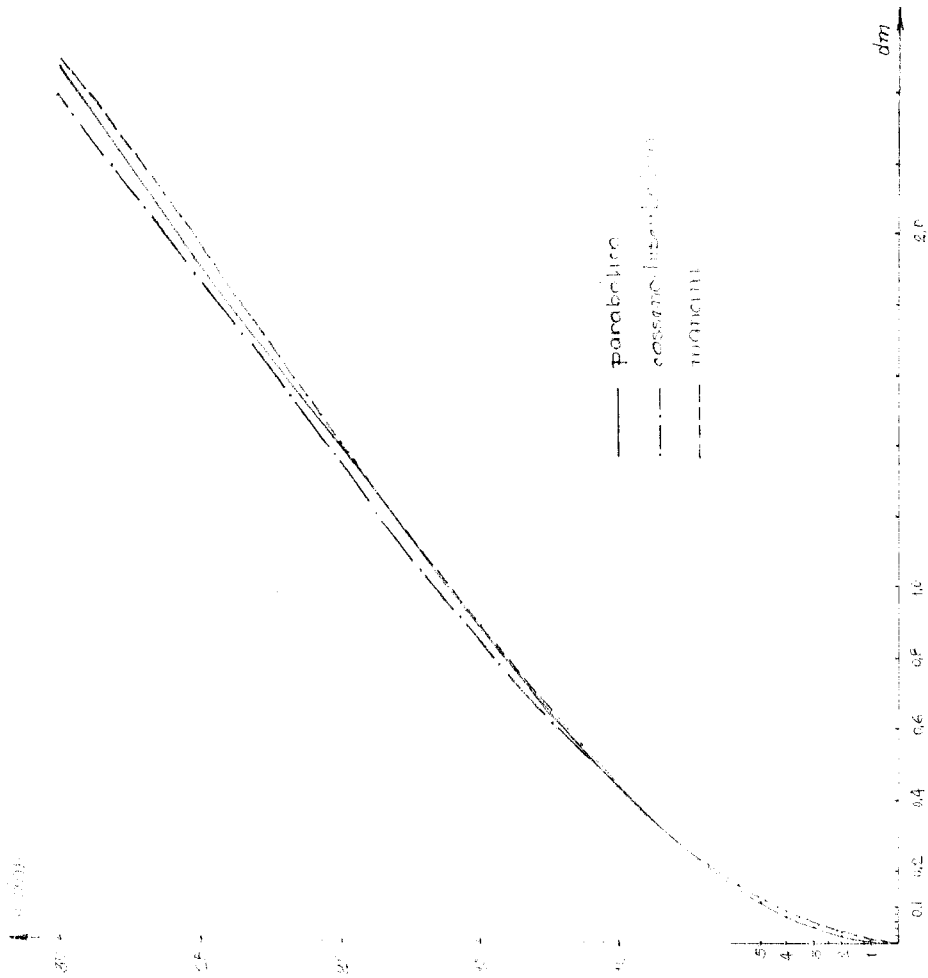


fig (B.1) - deslocamento transversal,  $v(x)$ .

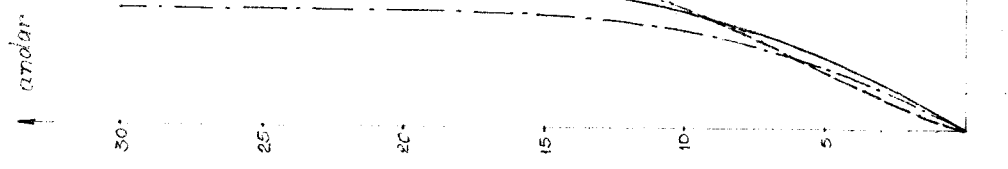


fig.(8.5) - força cortante distribuída na viga 3.

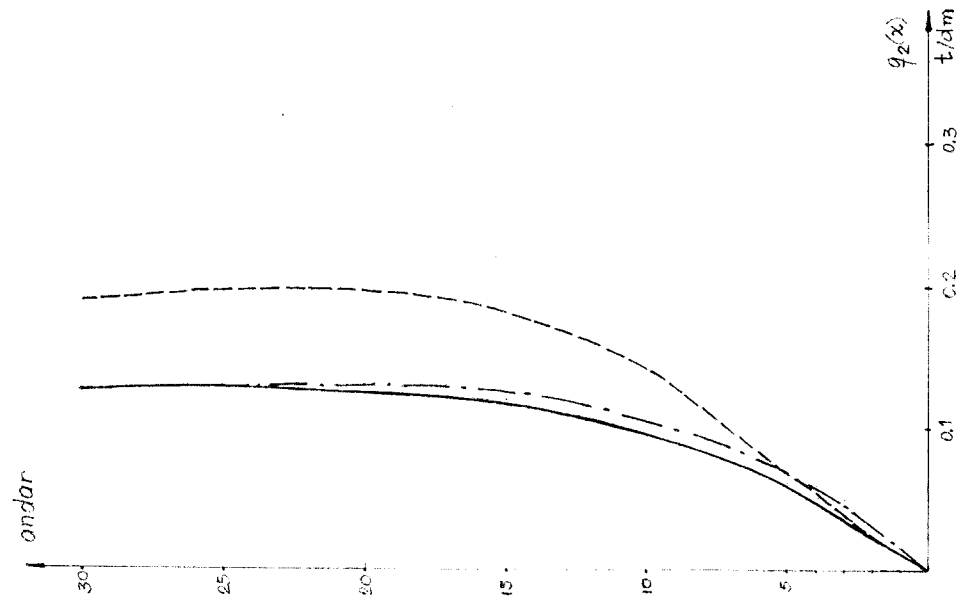


fig.(8.4) - força cortante distribuída na viga 2.

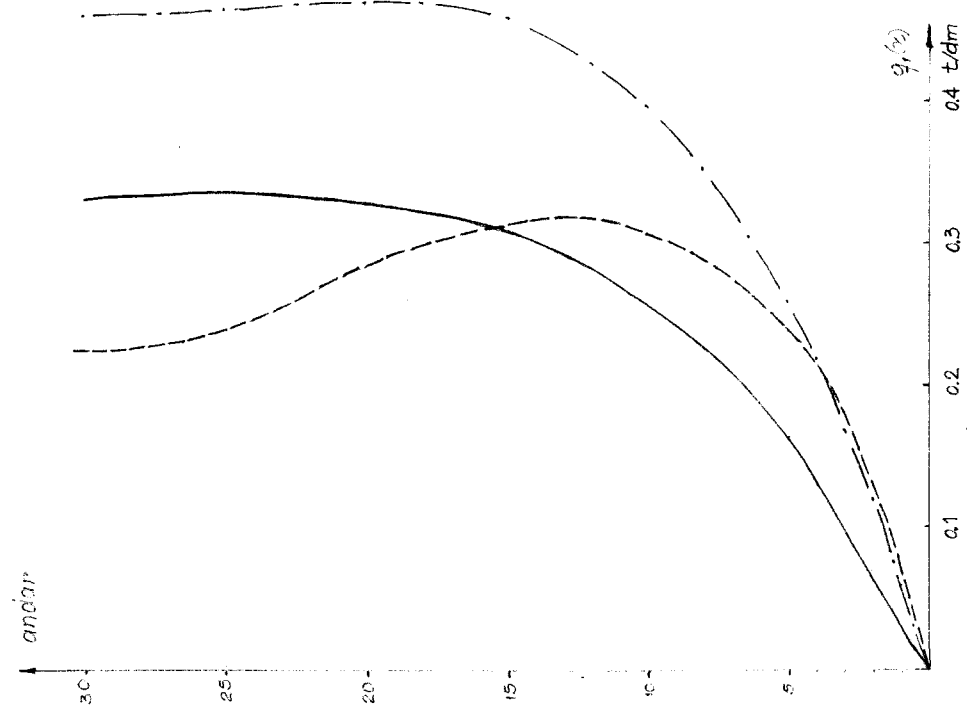


fig.(8.3) - força cortante distribuída na viga 1.  $q_1(x)$ .

— parabólica  
 - · - cosseno-hiperbólica  
 --- monotônica

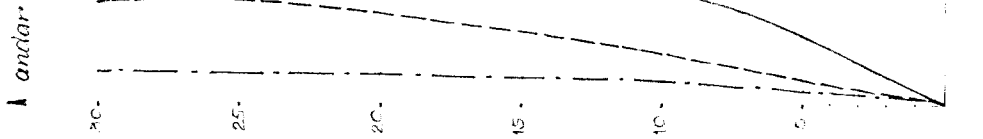


fig (8.8) - forq cortante distribuida  
na viga 6.  $q_6(x)$ .

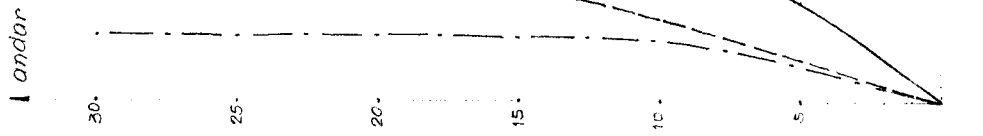
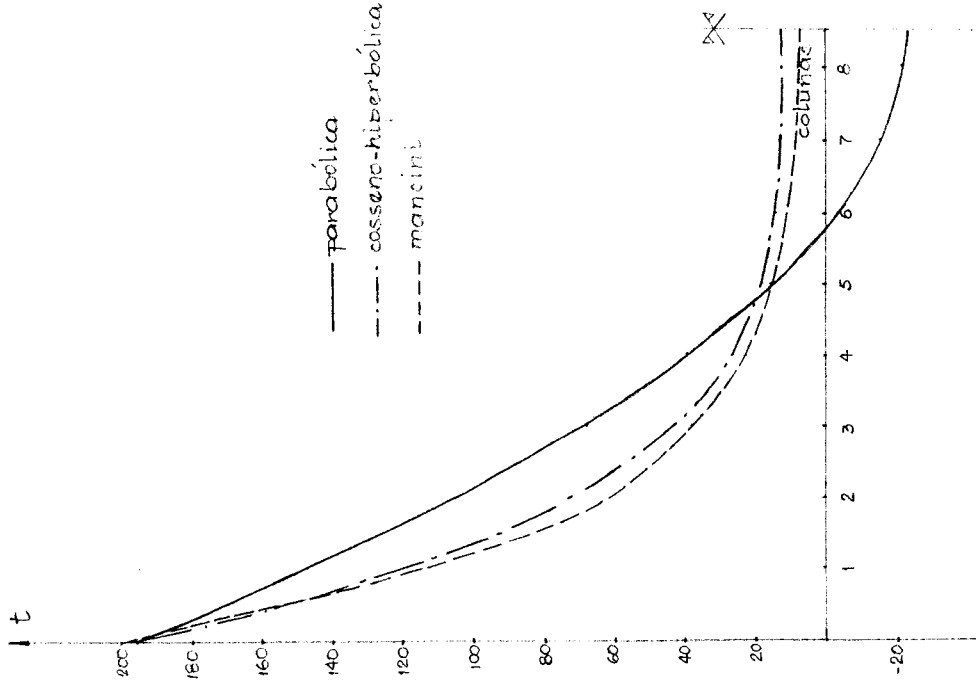
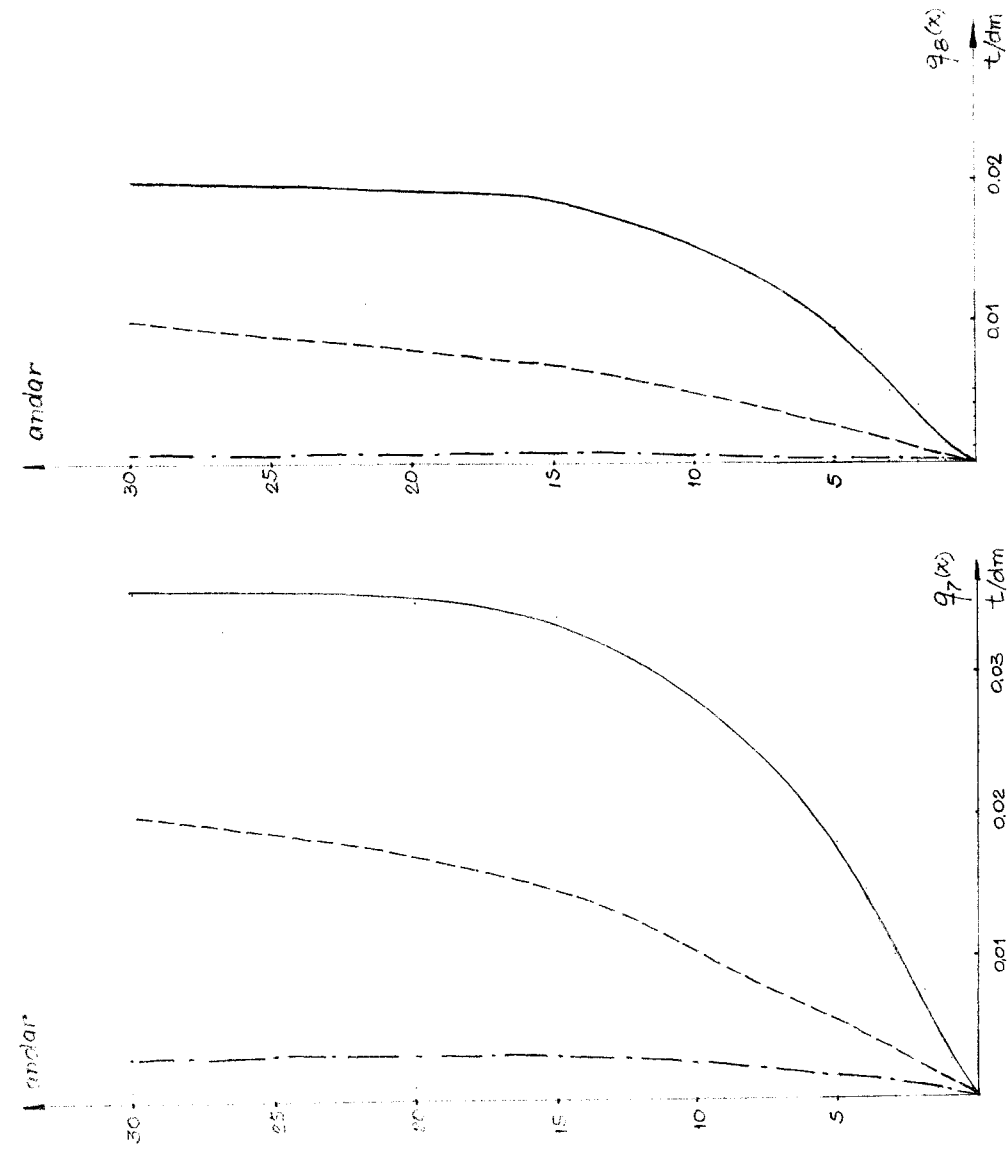


fig (8.7) - forq cortante distribuida  
na viga 5.  $q_5(x)$ .



fig (8.6) - forq cortante distribuida  
na viga 4.  $q_4(x)$ .

— parabolica  
- - - cosserot  
- · - manerini



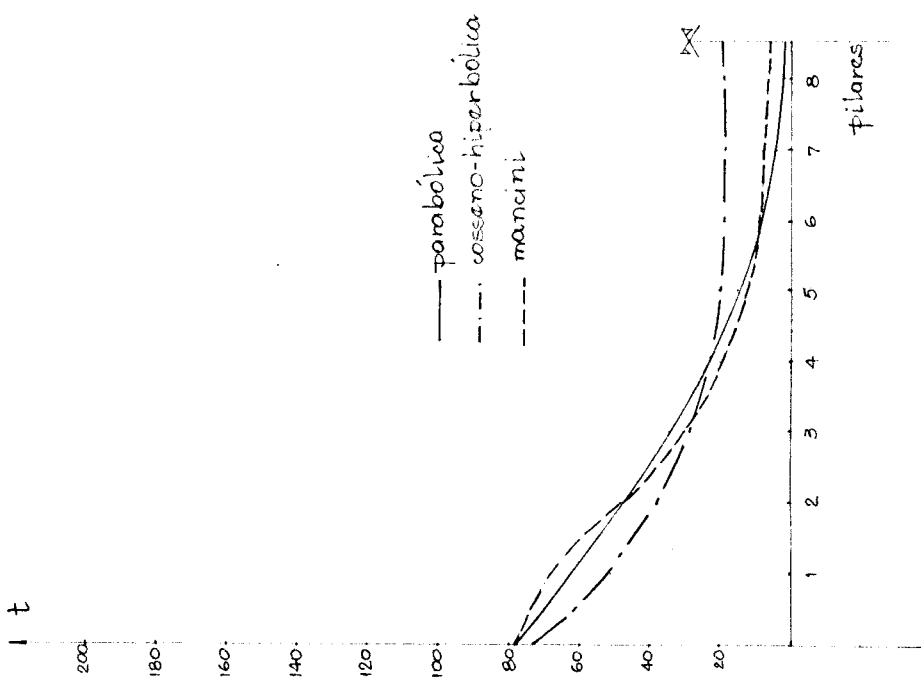


fig. (8.13) - força normal nos pilares em  $\frac{x}{H} = \frac{1}{3}$ , (10º andar).

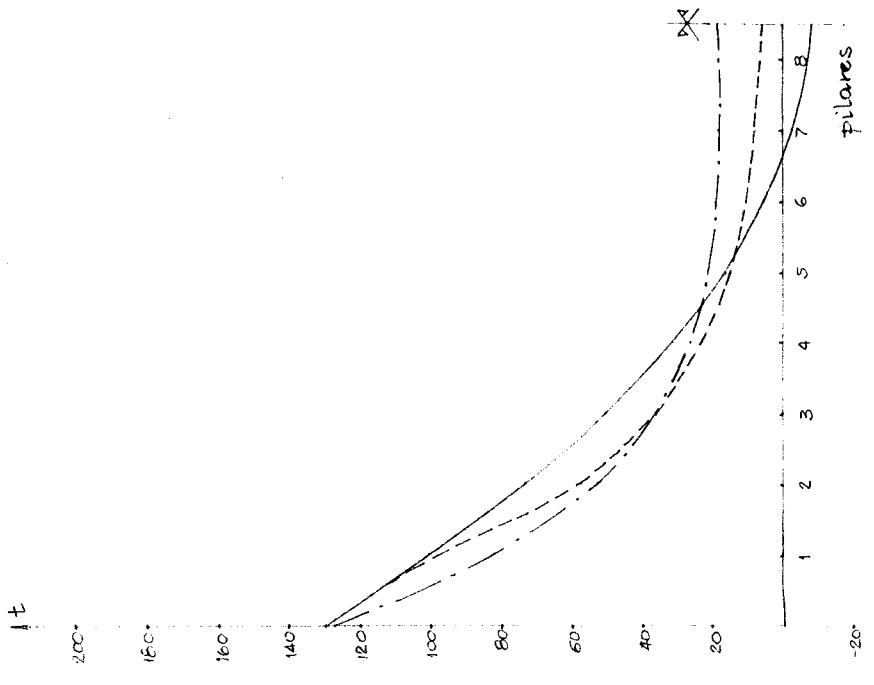


fig. (8.12) - força normal nos pilares em  $\frac{x}{H} = \frac{1}{6}$ , (5º andar).

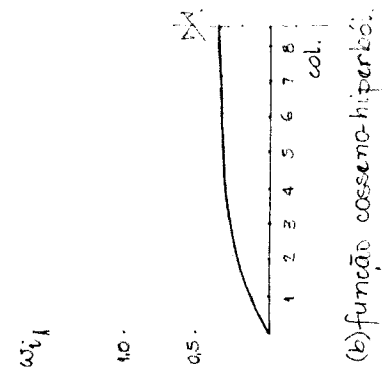
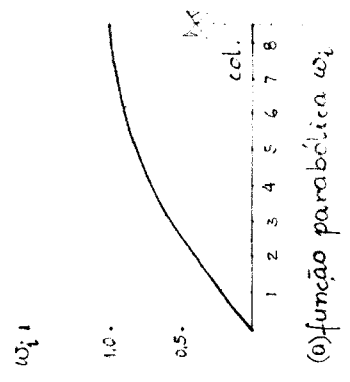


fig. (8.14) - funções aproximadas do deslocamento axial das colunas

9. APÊNDICE

A solução exata dos deslocamentos da estrutura estudada vem do sistema de equações diferenciais (4.25). A resolução desse sistema exige o conhecimento de teoremas e relações de semelhança de matrizes da álgebra linear, para que se possa reduzir o sistema a uma forma mais simples.

Interessa-nos encontrar uma matriz ortogonal  $[E]$  que possa ser aplicada em (4.25) obedecendo as transformações lineares,

$$[E]^T [\gamma] [E] = [\alpha^2] \quad \dots \quad (9.1)$$

$$[E]^T [\beta] [E] = [I] \quad \dots \quad (9.2)$$

onde  $[\alpha^2]$  é uma matriz diagonal com elementos  $\alpha_i^2$ ; e assim poder-se definir,

$$\{\phi(x)\} = [E] \{\eta(x)\} \quad \dots \quad (9.3)$$

que ao ser substituída em (4.25),

$$[\beta][E]\{\eta(x)\}'' - [\gamma][E]\{\eta(x)\} = \{F(x)\} \quad \dots \quad (9.4)$$

permita que o produto de toda a expressão acima por  $[E]^T$

$$[E]^T[\beta][E]\{\eta(x)\}'' - [E]^T[\gamma][E]\{\eta(x)\} = [E]^T\{F(x)\} \quad (9.5)$$

simplifique a expressão original do sistema de equações diferenciais (4.25), a partir das relações de semelhança de matrizes por transformações ortogonais, (9.1) e (9.2), na seguinte expressão:

$$\{\eta(x)\}'' - [\alpha^2]\{\eta(x)\} = M'(x)\{E_1\} \quad \dots \quad (9.6)$$

onde  $\{E_1\} = 1^a$  linha da matriz  $[E]$ .

A equação matricial (9.6) terá as mesmas condições de contorno de (4.33) com apenas uma alteração nominal,

$$\{\eta(0)\} = 0 \quad ; \quad \{\eta(H)\}' = 0 \quad \dots \quad (9.7)$$

A composição das matrizes  $[\alpha^2]$  e  $[E]$  segue as relações de semelhança de matrizes por transformações lineares sucessivas. A teoria de redução de matrizes simétricas reais em matrizes diagonais, usando a equivalência ortogonal numa relação de semelhança, mostra que as raízes características de uma matriz simétrica real  $[\gamma]$  são reais, e para essa matriz existe uma matriz ortogonal  $[E]$  que a reduz a uma matriz diagonal  $[D]$ , pela transformação linear,

$$[E]^T[\gamma][E] = [D] \quad \dots \quad (9.8)$$

onde os elementos de  $[D]$  são as raízes características (auto-valores) da matriz  $[\gamma]$ . A matriz  $[E]$  que satisfaz a transformação (9.8) é uma matriz de autovetores obtida a partir dos auto-valores da matriz  $[\gamma]$ , pela equação característica  $|xI - \gamma| = 0$ .

Porém, como a matriz  $[E]$  também tem que satisfazer a condição (9.2), isto é, transformar uma matriz diagonal em uma matriz identidade, teremos que esta será um produto de matrizes por transformações lineares sucessivas.

Deve-se, portanto, primeiramente encontrar uma matriz  $[\bar{E}]$  que satisfaça a transformação (9.2),

$$[\bar{E}]^T[\beta][\bar{E}] = [I] \quad \dots \quad (9.9)$$

ou seja, uma matriz que pelos teoremas de álgebra linear sabe-se que é diagonal com elementos iguais a

$$\bar{E}_{ii} = \frac{1}{\sqrt{\beta_{ii}}} \quad \dots \quad (9.10)$$

Ao aplicarmos esta matriz  $[\bar{E}]$  em (9.1),

$$[\bar{E}]^T[\gamma][\bar{E}] = [\Delta] \quad \dots \quad (9.11)$$

vamos obter uma matriz  $[\Delta]$  da qual se tira os auto-valores pela equação característica  $|xI - \Delta| = 0$ , e a matriz de seus auto-vetores quando normalizada, ou seja, transformada em ortonormal  $[K]$ , possa ser aplicada em (9.11), diagonalizando  $[\gamma]$ ,

$$[K]^T [\bar{E}]^T [\beta] [\bar{E}] [K] = [K]^T [\Delta] [K] = [\alpha^2] \quad \dots \quad (9.12)$$

para se chegar em  $[\alpha^2]$ . Portanto, as matrizes procuradas  $[E]$  e  $[\alpha^2]$  são iguais a

$$[E] = [\bar{E}] [K] \quad \dots \quad (9.13)$$

e

$$[\alpha^2] = [K]^T [\Delta] [K] \quad \dots \quad (9.14)$$

Atente para o fato de que esta matriz  $[\bar{E}]$  também satisfaz a expressão (9.2),

$$[K]^T ([\bar{E}]^T [\beta] [\bar{E}]) [K] = [I] \quad \dots \quad (9.15)$$

pois se o produto entre parenteses já satisfaz a identidade em (9.9), por maior razão, sendo  $[K]$  uma matriz ortonormal, por definição,

$$[K]^T [K] = [I] \quad \dots \quad (9.16)$$

teremos que (9.15) também é satisfeita.

Procede-se agora a solução do sistema (9.6) sob as condições de contorno (9.7): Uma equação genérica da forma

$$\eta_i''(x) - \alpha_i^2 \eta_i(x) = E_{1i} M'(x) \quad \dots \quad (9.17)$$

tem a seguinte solução para a homogênea, pelo operador  $(D^2 - \alpha_i^2) \eta_i = 0$ ,

$$\left( \eta_i(x) \right)_h = A_{1i} \cosh \alpha_i x + A_{2i} \sinh \alpha_i x \quad \dots \quad (9.18)$$

A derivada primeira do momento fletor da carga externa,  $M'(x)$ , é dada pela expressão (5.78), e fornece a seguinte solução particular para (9.17),

$$\left( \eta_i(x) \right)_p = A_{3i} M'(x) + A_{4i} \quad \dots \quad (9.19)$$



Soma-se as duas soluções (9.18) e (9.19) para se ter a solução geral:

$$\eta_i(x) = A_{1i} \cosh \alpha_i x + A_{2i} \sinh \alpha_i x + A_{3i} M'(x) + A_{4i} \quad (9.20)$$

que substituída na equação do sistema (9.17), juntamente com a sua 2.<sup>a</sup> derivada,

$$\eta_i''(x) = \alpha_i^2 (A_{1i} \cosh \alpha_i x + A_{2i} \sinh \alpha_i x) \quad \dots \quad (9.21)$$

e tem-se

$$\begin{aligned} & \alpha_i^2 (A_{1i} \cosh \alpha_i x + A_{2i} \sinh \alpha_i x) - \alpha_i^2 (A_{1i} \cosh \alpha_i x + \\ & + A_{2i} \sinh \alpha_i x + A_{3i} M'(x) + A_{4i}) = \epsilon_{1i} M'(x) \end{aligned} \quad (9.22)$$

Obtêm-se então,

$$A_{3i} = - \frac{\epsilon_{1i}}{\alpha_i^2} \quad ; \quad A_{4i} = 0 \quad \dots \quad (9.23)$$

Das condições de contorno em (5.26)

$$\eta_i(0) = A_{1i} + \frac{\epsilon_{1i}}{\alpha_i^2} p H = 0 \quad \dots \quad (9.24)$$

$$\eta_i'(H) = A_{1i} \alpha_i \sinh \alpha_i H + A_{2i} \alpha_i \cosh \alpha_i H - \frac{\epsilon_{1i}}{\alpha_i^2} p = 0$$

tem as outras constantes,

$$A_{1i} = - \frac{\epsilon_{1i}}{\alpha_i^2} p H \quad ; \quad \dots \quad (9.25)$$

$$A_{2i} = \left( - A_{1i} \alpha_i \sinh \alpha_i H + \frac{\epsilon_{1i}}{\alpha_i^2} p \right) \frac{1}{\alpha_i \cosh \alpha_i H}$$

A solução do sistema de equações diferenciais será dada por

$$\begin{aligned}
 \eta_i(x) = & - \left( \frac{\epsilon_{1i}}{\alpha_i^2} pH \right) \cdot \cosh \alpha_i x + \\
 & + \left( \frac{\epsilon_{1i}}{\alpha_i^2} pH \operatorname{tanh} \alpha_i H + \frac{\epsilon_{1i}}{\alpha_i^3} \frac{p}{\cosh \alpha_i H} \right) \sinh \alpha_i x + \\
 & + \frac{\epsilon_{1i}}{\alpha_i^2} p(H-x) \quad \dots \quad (9.26)
 \end{aligned}$$

onde foram usadas as expressões (5.78), (9.23), (9.25) em (9.20), permitindo determinar os deslocamentos  $v'$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ , ...  $u_n$  através da expressão (9.3),

$$\{\delta(x)\} = [E] \{\eta(x)\}$$

os quais são,

$$v'(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_{1i} \eta_i(x) ; \quad u_j(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_{j+1,i} \eta_i(x) \quad (9.27)$$

para  $j=1, 2, \dots, n$ .

BIBLIOGRAFIA

- [1] CHAN, P.C.K.; TSO, W.K. e HEIDEBRECHT, A.C. - *Effect of Normal Frames on Shear Walls*, Building Science, Pergamon Press, 1974, Great Britain, vol.9, pp 197-209.
- [2] COULL, A. e BOSE, B. - *Simplified Analysis of Frame-Tube Structures*, Journal of the Structural Division, ASCE, nov/1975, pp 2223-2241.
- [3] STAMATO, M.C. - *Introdução ao Processo de Cross*, Escola de Engenharia de São Carlos - USP; 4.<sup>a</sup> edição, set/1974, S.Carlos-SP, pp 4-19.
- [4] ELSGOLTS, L. - *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, Editorial MIR, 1969, Moscou.
- [5] BEAUMONT, R.A. - *Álgebra Linear*, Editora Polígono - USP, 1970, São Paulo-SP, pp 72-86, 122-146, 165-206, 215-226.
- [6] MANCINI, E. *Efeito dos Pórticos Normais às Paredes*, EESC-USP, 1980, São Carlos, SP.
- [7] REISNER, E. - *Analysis of Shear Lag in Box Beams by the Principle of Minimum Potential Energy*, MIT, Applied Mathematics, vol.IV, nº3, pp 268-278.
- [8] ODEN, J.T. - *Mechanics of Elastic Structures*, pp 107-114.