UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

SOBRE VIGAS CURVAS HORIZONTAIS, COM TRAMOS CONSTITUIDOS POR BARRAS CIRCULARES

ENG.º FRANCISCO ANTONIO MENEZES

SÃO CARLOS, DEZEMBRO DE 1982

SOBRE VIGAS CURVAS HORIZONTAIS, COM TRAMOS CONSTITUÍDOS POR BARRAS CIRCULARES

Engº Francisco Antonio Menezes

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "MESTRE EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS".

Orientador
Prof. Dr. Ronaldo Garcia de Figueiredo

Comissão Examinadora
Prof. Dr. Ilio Montanari
Prof. Dr. Régis L. R. Lima

Suplentes
Profa. Dra. Helena Maria C. C. Antunes
Prof. Dr. Tioeturo Yagui

São Carlos, dezembro de 1982

Aos meus pais e a
minha esposa

A G R A D E C I M E N T O S

Queremos expressar o nosso reconhecimento ao Prof. Dr. Ronaldo Garcia de Figueiredo, pela constante e eficaz orientação que nos deu durante a realização deste trabalho.

Agradecemos à FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) que nos concedeu bolsa de estudos, quando da nossa inscrição no Plano de Mestrado da EESC; só não utilizada por termos sido contratado como Instrutor, pelo Departamento de Construção Civil da Faculdade de Engenharia de Limeira - UNICAMP.

Agradecemos ao Departamento de Construção Civil da Faculdade de Engenharia de Limeira que nos deu todo o apoio material e nos concedeu todas as facilidades que permitiram levar o trabalho a bom termo.

Agradecemos o C.C.U.E.C. (Centro de Computação da UNICAMP) pelo uso que fizemos dos seus recursos computacionais.

Queremos agradecer sinceramente aos funcionários do Departamento de Construção Civil da Faculdade de Engenharia de Limeira: Elisabete Miranda Gonçalves, pela datilografia; Dalva Maria Michel Ferrari e Domingos Pereira, pela confecção dos desenhos.

Finalmente queremos deixar registrada a nossa gratidão aos nossos colegas do D.C.C. da FEL-UNICAMP, que sempre nos incentivaram.

R E S U M O

O presente trabalho estuda as vigas curvas em plano horizontal, compostas de segmentos circulares, dentro do "cálculo de linha", sem considerar efeitos de flexo-torção.

É realizado um estudo analítico da barra curva horizontal, encontrando-se as equações diferenciais que regem o problema.

As linhas de influência, objetivo principal do trabalho, são obtidas para estruturas isostáticas, pelo Processo Cinemático.

Linhas de influência para vigas curvas hiperestáticas de um só tramo são determinadas analiticamente.

Finalmente, linhas de influência de vigas hiperestáticas, com número qualquer de tramos, são determinados numericamente. O desenvolvimento teórico é baseado no Processo dos Deslocamentos, em forma matricial, visando uma programação automática, apresentada no final do trabalho, para utilização em computadores.

S U M M A R Y

This text studies curved beams, in horizontal plane, consisting of circular segments, based on the "line-analysis", disregarding flexo-torsion effects.

An analytical study is made on the horizontal curved beam, deriving the governing differential equations of the problem.

The influence lines, the main purpose of this study, are obtained, for isostatic structures, by the kinematic method.

The influence lines for hiperestatic curved beams with only one span are determined analytically.

Finally, the influence lines for hiperestatic beams, with any number of spans are determined numerically. The theoretical development is based on the displacement method, in matrix form, with the purpose for automatic programming, showed at the end of the paper, for utilization in computers.

ÍNDICE

pág.

RESUMO II

1 - INTRODUÇÃO 1

2 - FORMULAÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DA BARRA CURVA CIRCULAR EM PLANO HORIZONTAL 5

2.1 - Introdução 5

2.2 - Hipóteses 6

2.3 - Convenção de Sinais 7

2.4 - Equações de Equilíbrio 10

2.5 - Equações de Compatibilidade 11

2.6 - Equações Constitutivas 15

2.7 - Equações da Elástica da Viga Curva 15

2.8 - Formulação Variacional do Problema da Viga Curva .. 18

2.9 - Viga Curva em Balanço 25

3 - LINHAS DE INFLUÊNCIA DE VIGAS CIRCULARES ISOSTÁTICAS 29

3.1 - Introdução 29

3.2 - Método Cinemático para Traçado das L.Is 30

3.3 - Exemplo 32

3.3.1 - L.I. de Q para cargas móveis P = 1 e T = 1. 33

3.3.2 - L.I. de M_F para cargas móveis P = 1 e T = 1. 35

3.3.3 - L.I. de M_T para cargas móveis P = 1 e T = 1. 37

3.3.4 - L.Is. de Reações de Apoio 39

3.3.4.a - L.I. de V_A para P = 1 e T = 1 40

3.3.4.b - L.I. de V_B para P = 1 e T = 1 40

3.3.4.c - L.I. de τ_B para P = 1 e T = 1 40

3.4 - Considerações de Simetria 41

3.5 - Breve Explanação sobre L.Is. de Vigas Circulares Hiperestáticas 44

4 - ESTUDO ANALÍTICO DA BARRA CURVA BIENGASTADA 55

4.1 - Introdução 55

4.2 - Esforços Solocitantes na Viga em Balanço com a Extremidade Esquerda Livre 57

4.3 - Matrizes de Equilíbrio de Esforços numa Barra 59

4.3.1 - Matriz de Equilíbrio que relaciona os esforços de extremidade na barra curva 59

4.3.2 - Matrizes de Equilíbrio para o Cálculo dos Esforços Solicitantes à partir das forças de extremidade..... 60
4.4 - Deslocamentos na Extremidade Livre da Viga Curva em Balanço..... 63
4.4.1 - Cálculo de δ_{11}..... 64
4.4.2 - Cálculo de δ_{22}..... 65
4.4.3 - Cálculo de δ_{33}..... 65
4.4.4 - Cálculo de δ_{12} e δ_{21}..... 66
4.4.5 - Cálculo de δ_{13} e δ_{31}..... 67
4.4.6 - Cálculo de δ_{23} e δ_{32}..... 67
4.4.7 - Cálculo de Δ_{11}..... 68
4.4.8 - Cálculo de Δ_{21}..... 69
4.4.9 - Cálculo de Δ_{31}..... 70
4.4.10 - Cálculo de Δ_{12}..... 72
4.4.11 - Cálculo de Δ_{22}..... 73
4.4.12 - Cálculo de Δ_{32}..... 73
4.5 - Matriz de Flexibilidade da Viga Curva em Balanço.. 74
4.6 - Matriz de Rigidez da Viga Curva..... 75
4.7 - Matriz de Rigidez da Viga Reta..... 77
4.8 - Esforços de Engastamento Perfeito na Viga Curva Devidos à Carga P ou T..... 78
4.9 - Esforços de Engastamento Perfeito na Barra Reta Devidos à P ou T..... 81
5 - CÁLCULO DE ORDENADAS DE LINHAS DE INFLUÊNCIA EM VIGAS CONTÍNUAS CURVAS COM APOIOS RETOS..... 83
5.1 - Introdução..... 83
5.2 - Viga Contínua - Conceitução e Convenções..... 84
5.3 - Posições das Cargas Móveis P = 1 e T = 1..... 87
5.4 - Esforços Reativos para os quais são determinadas as Linhas de Influência..... 88
5.5 - Seções da viga para as quais são determinadas as Linhas de Influência de Esforços Solicitantes..... 90
5.6 - Matriz de Rigidez da Viga Contínua..... 92
5.7 - Cálculos Efetuados com a Matriz de Rigidez Global. 94
5.8 - Procedimento para o cálculo das L.Is..... 95
5.9 - Esforços de Engastamento Perfeito e Ações Equivalentes nos nós para cargas P = 1 e T = 1 atuando

na barra j 98
5.10 - Ordenadas das Linhas de Influência para Deslocamentos nas Direções Globais da Viga Contínua Curva... 100
5.11 - Esforços nas Extremidades das Barras para cargas P = 1 e T = 1 atuando na barra j 103
5.12 - Ordenadas das Linhas de Influência para Reações de apoio na viga contínua curva 106
5.13 - Ordenadas das Linhas de Influência para Esforços Solicitantes nas Seções da Viga Contínua 108

6 - ARMAZENAMENTO DAS LINHAS DE INFLUÊNCIA DE VIGA CONTÍNUA. 113
6.1 - Introdução 113
6.2 - Armazenamento das L.Is. Deslocamentos e Reações nos Apoios 115
6.3 - Armazenamento das L.Is. de Esforços Solicitantes.. 118
6.4 - Saída de Resultados 122

7 - LINHAS DE INFLUÊNCIA EM VIGAS CONTÍNUAS CURVAS COM APOIOS INCLINADOS 125
7.1 - Introdução 125
7.2 - Sistema de Coordenadas Novo e Antigo 126
7.3 - Vetor Rotação dos Apoios 127
7.4 - Matriz de Rotação em cada nó i 127
7.5 - Matriz de Transformação na barra i 128
7.6 - Alterações necessárias no procedimento de cálculo das L.Is. (capítulos 5 e 6) quando ocorrerem apoios inclinados 128

8 - LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA DESLOCAMENTOS NOS PONTOS MÉDIOS DAS BARRAS 133
8.1 - Introdução 133
8.2 - Armazenamento das L.Is. de deslocamentos nos pontos médios 134
8.3 - Cálculo dos deslocamentos nos pontos médios para cada estado i_{pc} 135
8.4 - Sequência de cálculo das L.Is. de deslocamentos no ponto médio das barras 141
8.5 - Saída dos resultados das L.Is. Deslocamentos nos pontos médios 142

9 - EXEMPLOS 145

9.1 - Introdução..... 145
9.2 - Exemplo nº 1..... 146
9.3 - Exemplo nº 2..... 150
9.4 - Exemplo nº 3..... 155
9.5 - Exemplo nº 4..... 158
9.6 - Exemplo nº 5..... 163
9.7 - Exemplo nº 6..... 171
9.7.1 - Viga contínua de 3 tramos com apoios retos 171
9.7.2 - Viga contínua de 3 tramos sob apoios inclinados (esconsos)..... 172

10 - PROGRAMA PARA O CÁLCULO AUTOMÁTICO..... 179
10.1 - Introdução..... 179
10.2 - Limitações do Programa..... 179
10.3 - Organização do Programa..... 180
10.4 - Preparação dos dados para o programa..... 181
10.5 - Explanação para o programa de cálculo de Linhas de Influência..... 186
10.6 - Listagem do Programa FORTRAN..... 195

11 - CONCLUSÕES..... 211

12 - BIBLIOGRAFIA..... 215

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A construção de auto estradas e o surgimento de complexos entroncamentos na malha viária dos grandes centros urbanos têm aumentado a cada dia a utilização de vigas curvas como elemento estrutural capaz de satisfazer economicamente os problemas de engenharia enfrentados pelos projetistas do setor.

Fatores estéticos também, muitas vezes recomendam soluções em viga curvas.

Entre outras vantagens atribuídas ao uso de elementos estruturais curvos, DOUGLAS[3] et alii (*) apontam economia, possibilidade de aumento do comprimento dos tramos e grande continuidade.

Por outro lado, a extensão das expressões trigonométricas envolvidas no estudo de estruturas curvas tem desencorajado muitos projetistas a utilizar elementos curvos em seus trabalhos.

As dificuldades experimentadas pelos projetistas e pesquisadores que queiram se dedicar ao assunto são agravadas pela falta de um livro texto base. Muitos artigos são frequentemente publicados em revistas especializadas, porém, de forma resumida. Outros importantes trabalhos não são publicados ao todo, sendo pro-

(*) *Os números que aparecem como expoentes referem-se à bibliografia no fim do trabalho.*

priedade de universidades ou organizações. Honrosa exceção a esse estado de coisas são as publicações de VREDEN[17,18].

Um excelente levantamento bibliográfico foi feito por McMANUS[10] et alii, permitindo a publicação do trabalho "Horizontally Curved Girders State of the Art", ponto de partida para todo estudioso que se disponha a pesquisar sobre elementos curvos.

Muito já se fez sobre vigas curvas e muito ainda se faz. Diversos pesquisadores trabalham ou trabalharam com o assunto, sob os mais variados aspectos: teórico ou experimental, estático ou dinâmico. Nomes como Heins, Engel, Cristhiano, Shore, Culver, Komatsu e outros estão ligados aos mais importantes trabalhos publicados desde 1963 até a presente data. Entre nós os trabalhos mais recentes são FRANCO[7], RODRIGUES PAZOS[13], DEMARZO[4] e MONTANARI[11].

A utilização cada vez mais difundida dos computadores tem removido sérios obstáculos no tratamento teórico de vigas curvas. Entretanto, o surgimento de "programa prontos", dirigidos à resolução de estruturas reticulares retas, seguidos de suscintos manuais de instruções, têm levado à resolução mais ou menos grosseira de muitos problemas estruturais práticos envolvendo elementos curvos, muitas vezes admitidos, para efeito de cálculo, como uma sucessão de elementos retos. Estas resoluções aproximadas, sem um embasamento teórico sólido, aumentam a carência de pesquisadores brasileiros sobre o assunto.

Procurando preencher esta lacuna, escolheu-se o estudo de vigas curvas, como um dos setores de pesquisa do Departamento de Construção Civil da Faculdade de Engenharia de Limeira, UNICAMP.

Dentro deste espírito é que está inserido o presente trabalho. É o primeiro de uma série que visa o estudo de vigas contínuas curvas.

O trabalho (início de uma linha de pesquisa) adota como elemento fundamental a barra circular de eixo horizontal. Assume-se uma série de hipóteses simplificadoras. Tem como objetivo principal a elaboração de um programa automático, a ser utilizado em computadores digitais, que permite a obtenção de linhas de influência em vigas contínuas curvas, procurando deixá-las armazenadas numa forma ordenada, e de fácil acesso, que possibilitará uma posterior utilização, para o "carregamento das linhas de influência".

Procurou-se inicialmente, a exemplo do que já foi feito por CCC[2], escrever-se um programa para cálculo de linhas de influência de vigas contínuas curvas, baseado no Processo dos Esforços. Saliente-se de passagem que o dossiê fornecido pelo SETRA (Service d'Études Techiniques des Routes et autoroutes), sob o título "Calcul des efforts dans les caissons courbes continus - CCC 69", composto por uma série de volumes, deixa de apresentar o programa de cálculo. Esbarrou-se no inconveniente de se ter que escolher à priori as incógnitas hiperestáticas, diferentes para cada esquema que possa vir a ser adotado, o que faz crescer demais o número de testes a serem introduzidos no programa, até que o computador consiga escolher o esquema estático apropriado. Este encaminhamento foi deixado de lado.

Partiu-se posteriormente para a confecção do programa de cálculo de linhas de influência apresentado, baseado no Processo dos Deslocamentos.

Além da elaboração do programa automático que permite a obtenção de ordenadas das L.Is. apenas de forma numérica, procurou-se indicar uma forma analítica de resolução do problema de obtenção de linhas de influência em vigas contínuas curvas; necessitou-se por isso das equações diferenciais da elástica da barra curva.

No capítulo 2 faz-se um estudo analítico da barra curva isolada, estabelecendo-se as hipóteses básicas e as hipóteses simplificadoras para o cálculo dessa barra única; hipóteses estas válidas para a estrutura inteira, mesmo com continuidade. São encontradas aí as equações diferenciais que regem o problema da viga curva.

A solução analítica apresentada para a obtenção de linhas de influência de vigas curvas é baseada no Processo Cinemático. Enquanto se analisa estruturas isostáticas ou com grau de hiperestaticidade 1, as equações encontradas são exequíveis de serem programadas. Aumentando o grau de hiperestaticidade da estrutura as expressões trigonométricas envolvidas tornam proibitiva a solução analítica.

No capítulo 3 faz-se um estudo de linhas de influências de vigas curvas simples (de um só tramo) isostática, usando-se o Processo Cinemático. Através do exemplo de uma viga 1 vez hiperestática faz-se uma breve explanação de como deve ser conduzido

o Processo Cinemático para obtenção analítica de linhas de influência em vigas contínuas curvas.

Nos capítulos 4 a 8 apresenta-se as técnicas e procedimentos, baseados no Processo dos Deslocamentos em forma matricial, que possibilitaram a confecção de um programa automático para a obtenção e armazenamento de ordenadas de linhas de influência em vigas contínuas de eixo curvo.

No capítulo 4 faz-se a determinação da matriz de rigidez e cálculo dos esforços de engastamento perfeito na barra curva bi-engastada.

À partir daí estuda-se a viga contínua, constituída de vários tramos, sendo que cada tramo pode ser constituído por mais de uma barra circular de diferentes raios e diferentes curvaturas, bem como de diferentes características geométricas.

Nos capítulos 5 e 6 apresenta-se procedimento para cálculo e armazenamento de L.Is. de deslocamentos nos nós, reações dos apoios e esforços solicitantes em "todas" as seções de todas as barras circulares que constituem a viga contínua. Admite-se nestes capítulos que os apoios sejam todos "retos" (sem esconsidade em relação à direção radial).

No capítulo 7 o estudo de linhas de influência feito nos capítulos 4, 5 e 6 anteriores é estendido para o caso da viga contínua possuir apoios esconsos.

No capítulo 8, supondo-se que as L.Is. de deslocamentos de todos os nós já foram calculadas e se encontram armazenadas, o mesmo acontecendo com as linhas de influência de esforços solicitantes, em particular as L.Is. de esforços solicitantes relativas à seção média de cada barra circular, apresenta-se um procedimento para cálculo e armazenamento das linhas de influência para deslocamentos dos pontos médios.

No capítulo 9 apresenta-se uma série de exemplos, calculados utilizando-se o programa automático escrito, cujos resultados são comparados aos obtidos através de cálculo manual, ou com resultados obtidos por outros autores.

No capítulo 10 apresenta-se um programa de cálculo, em linguagem FORTRAN, elaborado a partir das hipóteses e procedimentos adotados nos capítulos anteriores. Indica-se a forma de entrada de dados e faz-se uma explicação suscinta dos principais passos do programa.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DA BARRA CURVA CIRCULAR EM PLANO HORIZONTAL

2.1 - INTRODUÇÃO

O objetivo do presente capítulo é estabelecer a formulação analítica do problema da barra curva circular em plano horizontal.

Serão estabelecidas aqui as hipóteses de cálculo, a convenção dos sinais, bem como a nomenclatura a ser adotada.

As relações diferenciais entre os esforços solicitantes permitirão a obtenção das equações de equilíbrio.

Serão obtidas as equações de compatibilidade entre os deslocamentos.

As equações da elástica serão encontradas à partir das equações de equilíbrio, das equações de compatibilidade e das equações constitutivas.

Será dado, neste capítulo também, uma formulação variacional ao problema da barra curva, chegando-se às mesmas equações da elástica.

2.2 - HIPÓTESES

O problema da viga plana horizontal de eixo circular, carregada verticalmente, pode ser formulado com as hipóteses simplificadoras da Resistência dos Materiais para as vigas de pequena curvatura, com pequena relação largura/vão, resultando o chamado "cálculo de linha" (O'CONNOR) [12].

Por vigas de "pequena curvatura" entende-se aquelas para as quais é pequena a relação entre a largura e o raio de curvatura.

As seguintes hipóteses são admitidas por diversos autores, como por exemplo VELUTINI[16]:

1) Existe proporcionalidade entre esforços e deformações, e consequentemente, é válido o princípio de superposição de efeitos.

2) Desprezam-se as deformações devido à força cortante.

3) A deformação elástica de flexão varia apenas com $\frac{M_F}{EJ}$, onde M_F é o momento fletor vertical e, EJ é a rigidez à flexão vertical da viga.

4) Supõe-se que a deformação elástica de torção da viga, varia apenas com $\frac{M_T}{GJ_t}$, onde M_T é momento torçor e, GJ_t é a rigidez à torção da viga curva.

Além destas, admite-se também que:

5) O eixo da viga curva contém os centros de gravidade das seções transversais. Em cada seção o centro de gravidade e o centro de cisalhamento devem estar na mesma vertical.

6) Em cada seção, um dos eixos principais de inércia é horizontal.

7) É desprezado qualquer efeito proveniente do empenamento das seções.

Admite-se ainda, como hipóteses particulares deste estudo, que o raio de curvatura R, o momento de inércia à flexão vertical J, e a constante de torção J_t, não variam ao longo da viga.

Visando obter expressões analíticas mais simples, adota-se um parâmetro λ, relação entre a rigidez à flexão vertical e a rigidez à torção, tal que:

$$\lambda = \frac{EJ}{GJ_t} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.2.1)$$

A carga torçora m, e a carga vertical p, ambas por unidade de comprimento do eixo, devem ser contínuas no intervalo de validade das equações diferenciais estabelecidas.

2.3 - CONVENÇÃO DE SINAIS

As seções consideradas na viga são intersecções do seu eixo circular com planos normais a esse eixo.

A FIG. 2.3.1 mostra a viga curva circular AB, definida pelo raio R e ângulo de abertura ϕ. É mostrado também uma seção genérica S. A viga está contida pelo plano horizontal π.

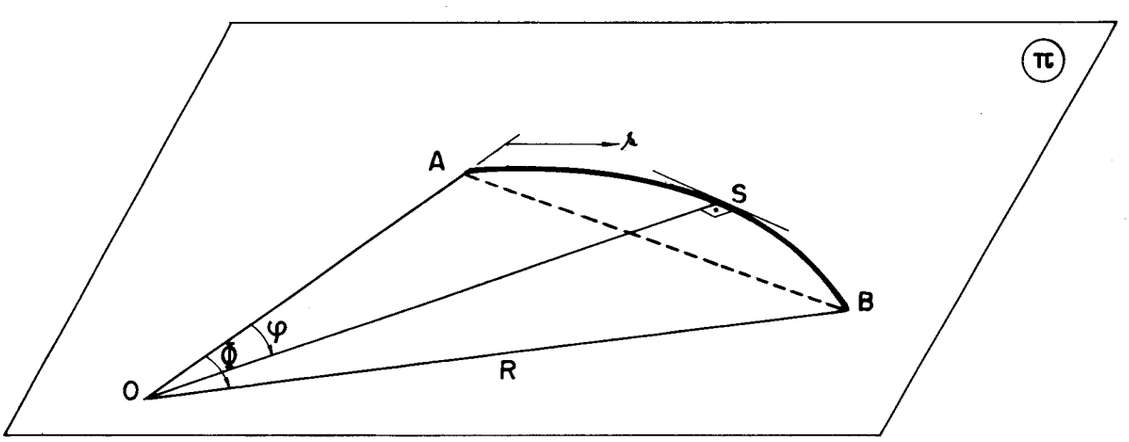


FIG. 2.3.1 - GRANDEZAS GEOMÉTRICAS QUE DEFINEM A VIGA CURVA AB E A SEÇÃO GENÉRICA S.

A posição da seção genérica S é determinada pela coordenada linear s, ou pela coordenada angular φ, relacionadas por:

$$s = R \cdot \varphi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.3.1)$$

onde R é o raio de curvatura.

O comprimento total do segmento é ℓ e o ângulo de abertura da viga é ϕ. Assim,

$$\ell = R \cdot \phi \qquad \text{.....(2.3.2)}$$

As grandezas geométricas têm sinal. Para estabelecê-los, convenciona-se que um observador em pé sobre o plano π que contém a viga, a uma certa distância da corda $\overline{AB}$, vide FIG. 2.3.1, enxerga a extremidade início A (origem das coordenadas s) à sua esquerda e a extremidade B à sua direita.

Deste modo, vigas que parecem côncavas ao observador, têm R, φ e ϕ positivos, enquanto que vigas que parecem convexas ao mesmo observador convencionado, tem R, φ e ϕ negativos.

Vigas côncavas serão ditas de curvatura positiva, enquanto as convexas de curvatura negativa.

As relações dadas em (2.3.1) e (2.3.2) valem para qualquer posição do observador. Vê-se portanto nestas equações que s e ℓ resultam sempre positivos.

A viga curva é uma estrutura plana e os carregamentos admitidos no presente trabalho são perpendiculares a esse plano.

Assim, serão apenas três os esforços solicitantes a considerar em cada seção: o momento torçor M_T, o momento fletor vertical M_F e a força cortante Q. Esses esforços são mostrados, com seu sentido positivo, na FIG. 2.3.2.

O momento torçor é positivo quando o segmento orientado, desenhado com seta dupla, que representa vetorialmente a ação sobre uma das partes seccionadas, penetra na seção.

O momento fletor vertical é considerado positivo quando produz tração nas fibras inferiores da viga.

A força cortante será positiva quando o segmento representativo da ação sobre uma das partes seccionadas, indica um percurso no sentido horário nessa parte da estrutura para o observador na posição convencionada.

São também três os deslocamentos considerados em cada seção: o ângulo de torção θ_x, o ângulo de flexão θ_y, e a flecha vertical z.

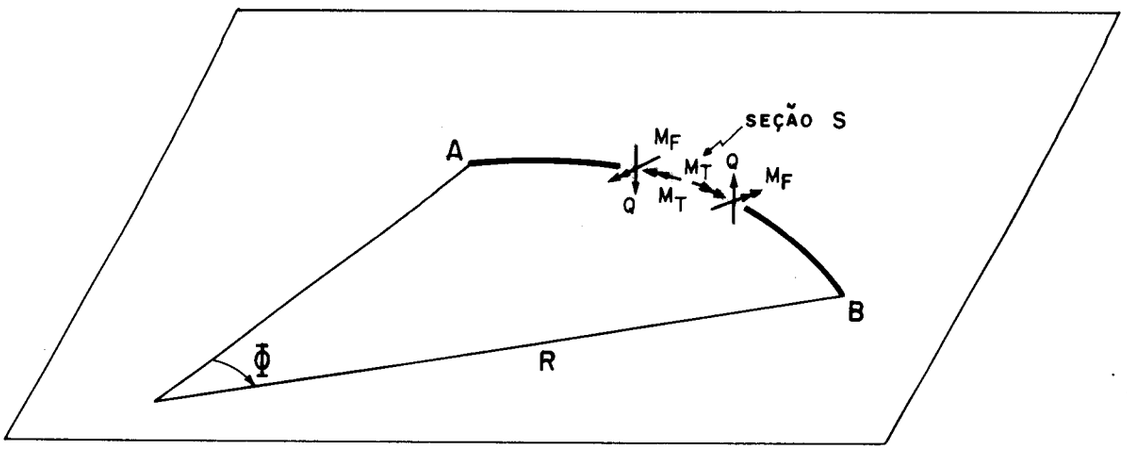


FIG. 2.3.2.- ESFORÇOS SOLICITANTES POSITIVOS NUMA SEÇÃO GENÉRICA S (DESENHADA EXPANDIDA).

O ângulo de torção θ_x da seção é considerado positivo quando um observador, lançando o seu olhar no sentido dos s crescente, vê uma rotação horária.

O ângulo de flexão θ_y é positivo quando corresponde a um declive para um observador que percorra o eixo no sentido crescente da coordenada linear s.

A flecha z é positiva quando para baixo.

Fisicamente observa-se que um momento torçor positivo produz uma deformação de torção $\frac{d\theta_x}{ds}$ negativa e que um momento fletor positivo produz uma deformação de flexão $\frac{d\theta_y}{ds}$ também negativa.

Uma relação geométrica de fácil demonstração existente entre os deslocamentos é:

$$\theta_y = \frac{dz}{ds} \qquad \text{.....(2.3.3)}$$

A carga vertical concentrada P ou distribuída p é positiva quando para baixo. A carga torçora concentrada M ou distribuída m é positiva quando atua no sentido horário para um observador que lança seu olhar no sentido crescente da coordenada s.

2.4 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Para encontrar as relações diferenciais entre os três esforços solicitantes M_T, M_F, Q e as cargas distribuídas p e m, considere-se a FIG. 2.4.1:

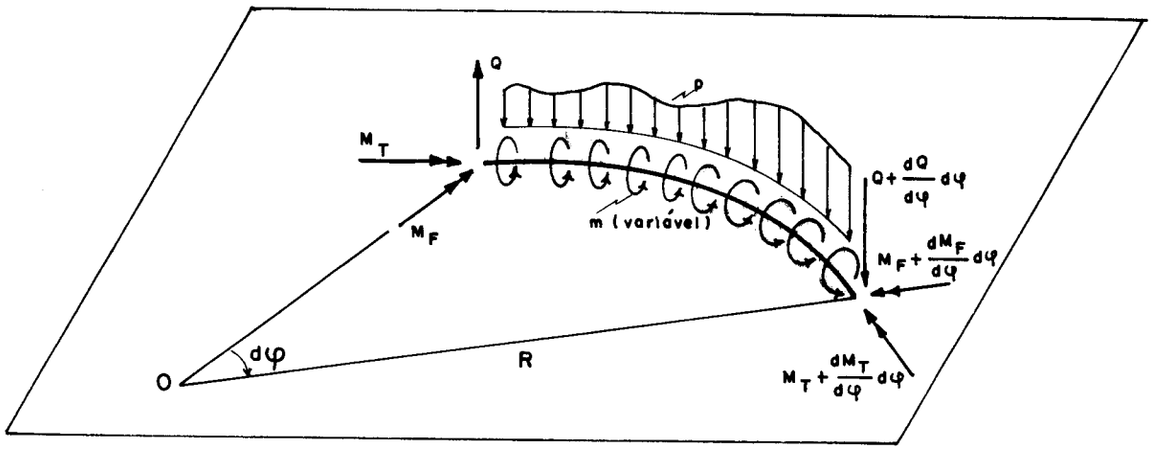


FIG. 2.4.1 - ELEMENTO DE VIGA CURVA DE COMPRIMENTO $ds = Rd\varphi$ EM EQUILÍBRIO.

Nesta figura vê-se um elemento de abertura $d\varphi$, com carga vertical distribuída p, carregamento de torção distribuído m, além dos esforços solicitantes nas duas extremidades. Pode-se escrever:

1) equilíbrio de momentos na direção radial:

$$Q \cdot R \cdot d\varphi + M_T \cdot d\varphi - \frac{dM_F}{d\varphi} d\varphi = 0 \qquad \text{.....(2.4.1)}$$

2) equilíbrio de momentos na direção tangencial:

$$m \cdot R \cdot d\varphi - \frac{dM_T}{d\varphi} d\varphi - M_F \cdot d\varphi = 0 \qquad \text{.....(2.4.2)}$$

3) equilíbrio de forças verticais:

$$p \cdot R \cdot d\varphi + \frac{dQ}{d\varphi} d\varphi = 0 \qquad \text{.....(2.4.3)}$$

As equações (2.4.1), (2.4.2) e (2.4.3) podem também ser escritas:

$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\left(\frac{dM_F}{d\varphi} - M_T\right)} \qquad \text{.....(2.4.1')}$$

$$\boxed{\frac{dM_T}{d\varphi} = m \,.\, R - M_F} \qquad \text{.....(2.4.2')}$$

$$\boxed{p = -\frac{1}{R}\,\frac{dQ}{d\varphi}} \qquad \text{.....(2.4.3')}$$

ou, usando apóstrofe para indicar a derivada em relação à coordenada angular φ:

$$Q = \frac{1}{R}\,(M_F' - M_T) \qquad \text{.....(2.4.1")}$$

$$M_T' = m \,.\, R - M_F \qquad \text{.....(2.4.2")}$$

$$p = -\frac{1}{R}\,Q' \qquad \text{.....(2.4.3")}$$

As equações (2.4.1'), (2.4.2') e (2.4.3'), ou, (2.4.1"), (2.4.2") e (2.4.3") são as equações de equilíbrio do problema da viga curva. Formam um sistema de equações diferenciais nas incógnitas M_T, M_F e Q.

2.5 - EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

As equações de compatibilidade que podem ser escritas em forma diferencial, baseadas na continuidade do eixo da viga curva após as deformações, são as seguintes:

$$d\theta_x = d\theta_x^e + d\theta_x^r \qquad \text{.....(2.5.1)}$$

$$d\theta_y = d\theta_y^e + d\theta_y^r \qquad \text{.....(2.5.2)}$$

$$dz = dz^e + dz^r \qquad \text{.....(2.5.3)}$$

$$dz^e = 0 \qquad \text{.....(2.5.4)}$$

$$d\theta_x^r = -\theta_y \cdot d\varphi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.5.5)$$

$$d\theta_y^r = \theta_x \cdot d\varphi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.5.6)$$

$$dz^r = R \cdot \theta_y \cdot d\varphi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.5.7)$$

Tem-se 7 equações nas variáveis θ_x, θ_y, z, θ_x^e, θ_y^e z^e, θ_x^r, θ_y^r, z^r; equações cujos significados serão explanados a seguir.

As equações (2.5.1), (2.5.2) e (2.5.3) exprimem a superposição de deslocamentos para um elemento de viga curva de comprimento ds, correspondente a um ângulo $d\varphi$. Essas equações dizem que os acréscimos dos deslocamentos θ_x, θ_y e z, numa seção, são compostos de duas parcelas:

1) Um primeiro acréscimo de deslocamento (índice superior e), proveniente de deformação elástica devido ao esforço solicitante respectivo.

2) Um segundo acréscimo de deslocamento (índice superior r), que corresponde a um estado idealizado nas vizinhanças da seção, imaginada sem solicitação. Este segundo acréscimo de deslocamentos está relacionado apenas com a geometria de corpo rígido, nas vizinhanças da seção.

A equação (2.5.4) exprime o fato de que são desprezadas as deformações devidas ao esforço cortante.

As equações (2.5.5), (2.5.6) e (2.5.7) são apenas as expressões dos acréscimos de deslocamentos nas vizinhanças da seção imaginada sem solicitação.

Para demonstrar a validade destas últimas equações, considere-se o elemento de viga curva, imaginado sem solicitação (corpo rígido), da FIG. 2.5.1, onde são conhecidos os deslocamentos θ_x, θ_y e z, na seção de coordenada φ.

Os valores dos deslocamentos na extremidade de coordenada $\varphi + \Delta\varphi$, pela geometria de corpo rígido, serão:

$$\theta_x + \Delta\theta_x^r = \theta_x \cdot \cos \Delta\varphi - \theta_y \cdot \operatorname{sen} \Delta\varphi \qquad \ldots\ldots (2.5.8)$$

$$\theta_y + \Delta\theta_y^r = \theta_x \cdot \operatorname{sen} \Delta\varphi + \theta_y \cdot \cos \Delta\varphi \qquad \ldots\ldots (2.5.9)$$

$$z + \Delta z^r = \theta_x \cdot R\,(1 - \cos \Delta\varphi) + \theta_y \cdot R \cdot \operatorname{sen} \Delta\varphi + z \quad \ldots(2.5.10)$$

onde o índice superior r refere-se ao estado sem solicitação imaginado na vizinhança da seção (r = rígido).

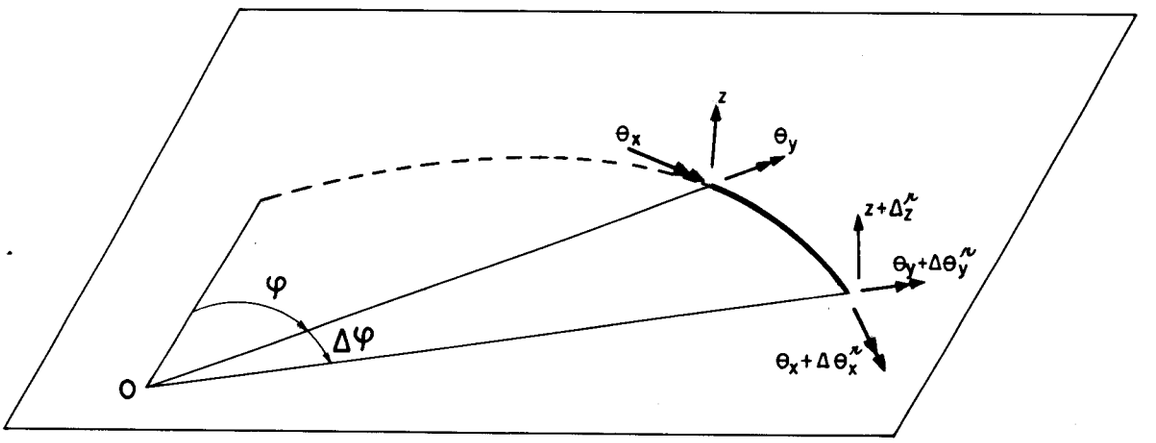


FIG. 2.5.1 - VARIAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS NUM ELEMENTO DE VIGA CURVA IMAGINADO SEM SOLICITAÇÃO.

Subtraindo-se respectivamente θ_x, θ_y e z das três últimas equações, dividindo-se por $\Delta\varphi$, e passando-se ao limite para $\Delta\varphi \to 0$, chega-se às equações (2.5.5), (2.5.6) e (2.5.7).

Nas equações de compatibilidade (2.5.1) até (2.5.7) pode-se eliminar θ_x^r, θ_y^r, z^r e z^e levando-se as 4 últimas equações nas 3 primeiras. Ter-se-á:

$$\boxed{\frac{d\theta_x^e}{d\varphi} = \frac{d\theta_x}{d\varphi} + \theta_y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.5.11)$$

$$\boxed{\frac{d\theta_y^e}{d\varphi} = \frac{d\theta_y}{d\varphi} - \theta_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.5.12)$$

$$\boxed{\frac{dz}{d\varphi} = R \cdot \theta_y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.5.13)$$

É preferível trabalhar com estas 3 últimas equações de compatibilidade, mais sintéticas, nas 5 variáveis θ_x, θ_y, z, θ_x^e e θ_y^e.

Vê-se que estas últimas equações permitem dois graus de liberdade, isto é, duas funções podem ser arbitradas sem desrespeitar as mesmas equações; as funções restantes sendo determinadas resolvendo o sistema de equações.

Esta observação da existência de dois graus de liberdade será importante na formulação variacional do problema da viga curva em plano horizontal.

Para salientar a existência desses dois graus de liberdade, considere-se os exemplos puramente geométricos (fazendo-se abstração da existência de esforços solicitantes) mostrados nas FIGS. 2.5.2.a e 2.5.2.b onde procura-se visualizar estados deformados da viga curva, correspondentes à escolha arbitrária de duas funções deslocamentos θ_x e θ_y.

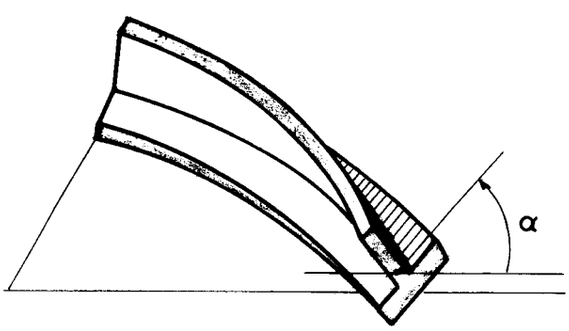


FIG. 2.5.2a - FUNÇÕES DE DESLOCAMENTO $\theta_x \neq 0$ E $\theta_y = 0$ ARBITRADAS PARA A VIGA CURVA.

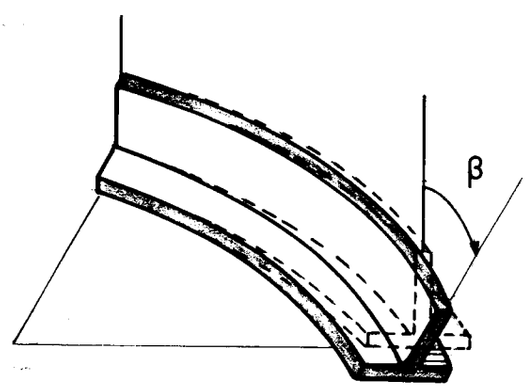


FIG. 2.5.2b - FUNÇÕES DE DESLOCAMENTO $\theta_x = 0$ E $\theta_y \neq 0$ ARBITRADAS PARA A VIGA CURVA.

Note-se na equação (2.5.13), que as funções θ_y e z (inclinação e flecha), não são independentes e por isso, não podem ser arbitradas simultaneamente.

Convém salientar que, embora nas equações (2.5.1) e (2.5.2) as <u>diferenciais</u> de θ_x^e, θ_y^e, θ_x^r e θ_y^r sejam de fácil interpre

tação física, o mesmo não acontece com estas últimas funções, as quais, sempre que possível, devem ser descartadas.

2.6 - EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Para as vigas de pequena curvatura, desprezando qualquer efeito de flexo-torção, as relações esforço x deformação são supostas idênticas às relativas à barras retas.

Assim, de acordo com as hipóteses relacionadas no parágrafo 2.2, supõe-se que a deformação elástica de flexão varia apenas com $\frac{M_F}{EJ}$ e que a deformação elástica de torção varia apenas com $\frac{M_T}{GJ_t}$

Tem-se então:

$$M_T = - GJ_t \frac{d\theta_x^e}{ds} \qquad \text{.....(2.6.1)}$$

$$M_F = - EJ \frac{d\theta_y^e}{ds} \qquad \text{.....(2.6.2)}$$

O sinal negativo nos segundo membros dessas equações estão de acordo com a hipótese de que momentos torçores e fletores positivos produzem deformações correspondentes negativas.

Sendo $ds = R \cdot d\varphi$, tem-se as equações constitutivas :

$$\boxed{M_T = - \frac{GJ_t}{R} \frac{d\theta_x^e}{d\varphi}} \qquad \text{.....(2.6.3)}$$

$$\boxed{M_F = - \frac{EJ}{R} \frac{d\theta_y^e}{d\varphi}} \qquad \text{.....(2.6.4)}$$

2.7 - EQUAÇÕES DA ELÁSTICA DA VIGA CURVA

As equações de equilíbrio (2.4.1'), (2.4.2') e (2.4.3'), juntamente com as equações de compatibilidade (2.5.11), (2.5.12) e (2.5.13), e as equações constitutivas (2.6.3) e (2.6.4) formam um sistema de oito equações nas oito incógnitas θ_x, θ_y, z, θ_x^e, θ_y^e, M_T, M_F e Q, que portanto, possue solução.

Pode-se eliminar θ_x^e, θ_y^e e θ_y, levando-se as equa-

ções de compatibilidade nas equações constitutivas, obtendo-se:

$$M_T = -\frac{GJ_t}{R}\left(\frac{d\theta_x}{d\varphi} + \frac{1}{R}\frac{dz}{d\varphi}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots(2.7.1)$$

$$M_F = -\frac{EJ}{R}\left(\frac{1}{R}\frac{d^2z}{d\varphi^2} - \theta_x\right) \qquad \ldots\ldots\ldots(2.7.2)$$

As equações (2.7.1) e (2.7.2) são as <u>equações da elástica para problemas isostáticos</u>.

Essas últimas equações representam globalmente as relações constitutivas e as equações de compatibilidade. Em problemas isostáticos, onde os esforços solicitantes M_T e M_F podem ser determinados através de equações globais de equilíbrio, essas equações (2.7.1) 2 (2.7.2) (contendo agora equilíbrio, compatibilidade e constituição) podem ser resolvidas em θ_x e z, definindo o estado deformado da estrutura. Para tanto leva-se $\frac{dz}{d\varphi}$ obtido em (2.7.1) na equação (2.7.2), resultando uma equação de segunda ordem em θ_x, envolvendo duas constantes arbitrárias. Levando essa expressão de θ_x em (2.7.1) obtem-se z, a menos de uma terceira constante arbitrária. Essas três constantes podem ser determinadas por três condições geométricas no contorno, como por exemplo, conhecendo-se na extremidade esquerda ($\varphi = 0$) as condições:

$$\theta_x(0) = \theta_{x_o} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.7.3)$$

$$z\ (0) = z_o \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.7.4)$$

$$z'(0) = z_o' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.7.5)$$

Essas são as condições geométricas para uma viga em balanço. Numa viga biapoiada, as condições podem ser:

$$\theta_x(0) = \theta_{x_o} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.7.6)$$

$$z\ (0) = z_o \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.7.7)$$

$$z\ (\phi) = z_\phi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.7.8)$$

Finalmente, para completar a solução do problema pode-se determinar θ_y na equação (2.5.13) e o esforço cortante Q na

equação (2.4.1'), sendo que essa expressão de Q deve coincidir com a expressão obtida por simples isostática.

Uma outra equação diferencial para a elástica da viga curva pode ser encontrada, sendo útil na solução de problemas hiperestáticos.

A equação de equilíbrio (2.4.2") pode ser escrita:

$$M_F + M_T' = m\,R \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.7.9)$$

enquanto que (2.4.1") e (2.4.3") permitem escrever:

$$M_F'' - M_T' = -\,p\,R^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.7.10)$$

Calculando em (2.7.1) e (2.7.2) (que contêm equações constitutivas + compatibilidade) as derivadas que aparecem em (2.7.9) e (2.7.10) e levando o resultado nessas últimas, chega-se à:

$$(1+\lambda)\,z'' + R\,.\,\theta_x'' - \lambda\,.\,R\,.\,\theta_x = -\,\lambda\,\frac{m\,R^3}{EJ} \qquad \ldots\ldots(2.7.11)$$

$$\lambda\,z^{IV} - z'' - R(1+\lambda)\,\theta_x'' = \frac{\lambda\,p\,R^4}{EJ} \qquad \ldots\ldots(2.7.12)$$

Essas equações (2.7.11) e (2.7.12), em z e θ_x, são as equações da elástica da viga curva, para problemas inclusive hiperestáticos. Essas equações podem ser resolvidas, levando em (2.7.12), a expressão de z" obtida em (2.7.11), seguindo-se uma equação de quarta ordem em θ_x, envolvendo quatro constantes arbitrárias. Levando essa expressão de θ_x em (2.7.11), resulta uma equação de segunda ordem em z, aparecendo mais duas constantes arbitrárias. Essas seis constantes arbitrárias podem ser encontradas com seis condições geométricas no contorno. Por exemplo, numa viga bi-engastada, as condições podem ser dadas na extremidade esquerda ($\varphi = 0$) e na extremidade direita ($\varphi = \phi$):

$$\theta_x(0) = \theta_{x_0} \qquad \ldots\ldots\ldots(2.7.13) \qquad\qquad \theta_x(\phi) = \theta_{x\phi} \qquad \ldots\ldots\ldots(2.7.16)$$

$$z\,(0) = z_0 \qquad \ldots\ldots\ldots(2.7.14) \qquad\qquad z\,(\phi) = z_\phi \qquad \ldots\ldots\ldots(2.7.17)$$

$$z'(0) = z_0' \qquad \ldots\ldots\ldots(2.7.15) \qquad\qquad z'(\phi) = z'_\phi \qquad \ldots\ldots\ldots(2.7.18)$$

Além disso, sabe-se que em certos problemas, outras condições de contorno (envolvendo esforços nas extremidades) podem substituir algumas das seis condições anteriores. Estas outras condições são as condições naturais, que são melhor entendidas na formulação variacional do problema.

Para completar a solução do problema, deve-se determinar M_T e M_F nas equações (2.7.1) e (2.7.2), e Q na equação (2.4.1')

Convém salientar que na maioria das vezes a resolução das equações (2.7.11) e (2.7.12) e mesmo das equações (2.7.1) e (2.7.2) é muito trabalhosa, preferindo-se usar o Princípio dos Trabalhos Virtuais e o Processo do Esforços que são mais práticos.

2.8 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO PROBLEMA DA VIGA CURVA

Na viga curva, a energia de deformação a ser considerada, é devida apenas aos momentos torçores e fletores. Assim a energia de deformação ε, em toda a viga é:

$$\varepsilon = \int_0^{\phi} \left(\frac{M_T^2}{2\,GJ_t} + \frac{M_F^2}{2\,EJ} \right) R\,d\varphi \qquad \ldots\ldots\ldots (2.8.1)$$

Usando as expressões de M_T e M_F, dadas em (2.7.1) e (2.7.2), onde já estão contidas as condições constitutivas e de compatibilidade, tem-se:

$$\varepsilon = \int_0^{\phi} \left[\frac{GJ_t}{2R} \left(\theta_x' + \frac{z'}{R}\right)^2 + \frac{EJ}{2R} \left(\frac{z''}{R} - \theta_x\right)^2 \right] d\varphi \ldots (2.8.2)$$

A energia potencial das cargas depende especificamente do carregamento atuante na estrutura, dependendo portanto, de cada caso particular a se estudar.

Apenas para fixar idéias, admita-se que a estrutura a ser analisada seja a viga em balanço, com a extremidade direita livre, onde estão aplicadas as cargas concentradas T, M e P (vide FIG. 2.8.1), além das cargas distribuídas p e m.

Este exemplo é adotado apenas porque possibilita, como se verá, a observação das possíveis condições naturais de contorno relativas a deslocamentos θ_x, z e z' livres em alguma extremidade. Não significa porém que a estrutura deva ser, obrigatoriamente, isostática.

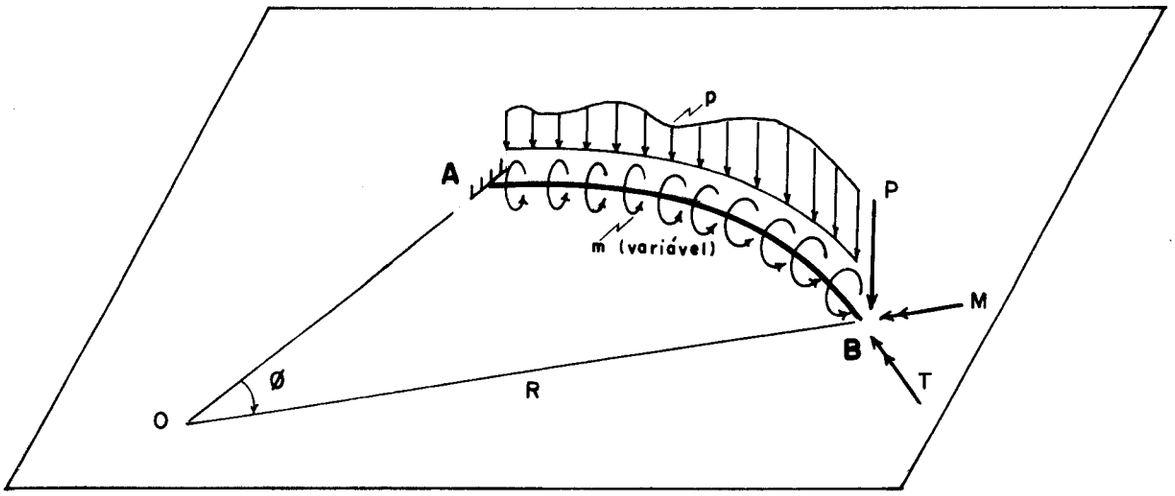


FIG. 2.8.1 - VIGA EM BALANÇO CARREGADA COM CARGAS CONCENTRADAS T, M E P NA EXTREMIDADE LIVRE E CARGA DISTRIBUIDAS EM SUA EXTENSÃO.

A energia potencial das cargas aplicadas para o exemplo vale:

$$V = -\int_0^{\phi} (p \cdot z + m \cdot \theta_x) R \, d\varphi - P \cdot z_\phi + \frac{M}{R} \cdot z'_\phi + T \cdot \theta_{x_\phi} \qquad \ldots\ldots(2.8.3)$$

onde z_ϕ, z'_ϕ e θ_{x_ϕ} são os valores das variáveis z, z' e θ_x na extremidade direita da viga curva em balanço.

Portanto a energia potencial total, $U = \varepsilon + V$, será:

$$U = \int_0^{\phi} \left\{ \frac{GJ_t}{2R} \left[(\theta_x')^2 + \frac{2}{R} \theta_x' z' + \frac{1}{R}(z')^2 \right] + \frac{EJ}{2R} \frac{1}{R^2}(z'')^2 - \frac{2}{R} z'' \theta_x + (\theta_x)^2 - \right.$$

$$\left. - R (p \cdot z + m \theta_x) \right\} d\varphi - P \cdot z_\phi + \frac{M}{R} z'_\phi + T \theta_{x_\phi} \qquad \ldots\ldots(2.8.4)$$

A expressão (2.8.4) é um funcional da forma:

$$U(\theta_x, z) = \left[\int_0^{\phi} F(\varphi, \theta_x, \theta_x', z, z', z'') \, d\varphi \right] - P \cdot z_\phi + \frac{M}{R} z'_\phi + T \cdot \theta_{x_\phi} \qquad ..(2.8.5)$$

sendo φ a variável independente, θ_x e z duas funções de φ, correspondentes aos dois graus de liberdade demonstrados no parágrafo 2.5.

O estado estacionário da estrutura corresponderá a um valor mínimo da energia potencial total U.

Para achar as funções $\theta_x(\varphi)$ e $z(\varphi)$ correspondentes a um valor mínimo do funcional U, deve-se supor as funções arbitrárias $\bar{\theta}_x(\varphi)$ e $\bar{z}(\varphi)$, próximas de $\theta_x(\varphi)$ e $z(\varphi)$, de maneira que se tenha 2 famílias de funções:

$$\theta_x(\varphi, \alpha) = \theta_x(\varphi) + \alpha\left[\bar{\theta}_x(\varphi) - \theta_x(\varphi)\right] \qquad \text{.....(2.8.6)}$$

$$z(\varphi, \alpha) = z(\varphi) + \alpha\left[\bar{z}(\varphi) - z(\varphi)\right] \qquad \text{.....(2.8.7)}$$

onde α é um parâmetro que estabelece as 2 famílias e que define também as famílias das funções derivadas.

Assim, pode-se escrever:

$$\theta_x'(\varphi, \alpha) = \theta_x'(\varphi) + \alpha\left[\bar{\theta}_x'(\varphi) - \theta_x'(\varphi)\right] \qquad \text{.....(2.8.8)}$$

$$z(\varphi, \alpha) = z'(\varphi) + \alpha\left[\bar{z}'(\varphi) - z'(\varphi)\right] \qquad \text{.....(2.8.9)}$$

$$z''(\varphi, \alpha) = z''(\varphi) + \alpha\left[\bar{z}''(\varphi) - z''(\varphi)\right] \qquad \text{.....(2.8.10)}$$

As diferenças indicadas entre colchetes, nas expressões (2.8.6) a (2.8.10), são chamadas de variações das funções, isto é:

$$\delta\theta_x = \bar{\theta}_x(\varphi) - \theta_x(\varphi) \qquad \text{.....(2.8.11)}$$

$$\delta\theta_{x'} = \bar{\theta}_x'(\varphi) - \theta_x'(\varphi) \qquad \text{.....(2.8.12)}$$

$$\delta z = \bar{z}(\varphi) - z(\varphi) \qquad \text{.....(2.8.13)}$$

$$\delta z' = \bar{z}'(\varphi) - z'(\varphi) \qquad \text{.....(2.8.14)}$$

$$\delta z'' = \bar{z}''(\varphi) - z''(\varphi) \qquad \text{.....(2.8.15)}$$

As variações $\delta\theta_x$, δz, $\delta\theta_x'$, $\delta z'$ e $\delta z''$ podem ser calculadas como sendo as derivadas das famílias de funções, dadas nas equações (2.8.6) a (2.8.10) em relação a α, para $\alpha = 0$.

$$\delta\theta_x = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\theta_x(\varphi, \alpha)\right]_{\alpha=0} \qquad \text{.....(2.8.16)}$$

$$\delta\theta_x' = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\theta_x'(\varphi, \alpha)\right]_{\alpha=0} \qquad \text{.....(2.8.17)}$$

$$\delta z = \left[\frac{\partial}{\partial_\alpha} z \quad (\varphi, \alpha)\right]_{\alpha=0} \qquad \text{.....(2.8.18)}$$

$$\delta z' = \left[\frac{\partial}{\partial_\alpha} z' \quad (\varphi, \alpha)\right]_{\alpha=0} \qquad \text{.....(2.8.19)}$$

$$\delta z'' = \left[\frac{\partial}{\partial_\alpha} z'' \quad (\varphi, \alpha)\right]_{\alpha=0} \qquad \text{.....(2.8.20)}$$

Outra propriedade relativa às funções θ_x, θ_x', z, z' e z" é que as variações das funções derivadas são iguais às derivadas das variações das funções originais, isto é:

$$(\delta\theta_x)' = \bar{\theta}_x' (\varphi) - \theta_x' (\varphi) = \delta\theta' \qquad \text{.....(2.8.21)}$$

$$(\delta z)' = \bar{z}' (\varphi) - z' (\varphi) = \delta z' \qquad \text{.....(2.8.22)}$$

$$(\delta z)'' = \bar{z}'' (\varphi) - z'' (\varphi) = \delta z'' \qquad \text{.....(2.8.23)}$$

O funcional U em termos das famílias de curvas passa a ser uma função de α e tem a forma:

$$U\left[\theta_x(\varphi, \alpha), z(\varphi, \alpha)\right] = \int_0^\phi F\left[\varphi, \theta_x(\varphi, \alpha), \theta_x'(\varphi, \alpha), z(\varphi, \alpha), z'(\varphi, \alpha), z''(\varphi, \alpha)\right] d\varphi +$$

$$+ \left[-P \cdot z(\varphi, \alpha) + \frac{M}{R} \cdot z'(\varphi, \alpha) + T \cdot \theta_x(\varphi, \alpha)\right] \quad \text{..(2.8.24)}$$

Assim como feito para as variações das funções θ_x e z, seria possível demonstrar também, que a variação do funcional U, correspondente às variações $\delta\theta_x$ e δz, pode ser calculada efetuando a derivada em relação ao parâmetro α, para $\alpha = 0$, ou seja:

$$\delta U = \left[\frac{\partial}{\partial_\alpha} U\left[\theta_x(\varphi, \alpha), z(\varphi, \alpha)\right]\right]_{\alpha=0} \qquad \text{.....(2.8.25)}$$

A condição necessária para que o valor do funcional calculado com $\theta_x(\varphi)$ e $z(\varphi)$ seja mínimo é que:

$$\delta U = 0 \qquad \text{.....(2.8.26)}$$

Efetuando para o funcional expresso em (2.8.24) a operação indicada em (2.8.25) e igualando a zero, tem-se:

$$0 = \int_0^{\phi} \left[F_{\theta_x} \delta_{\theta_x} + F_{\theta_x}' \delta_{\theta_x}' + F_z \delta z + F_z' \delta z' + F_z'' \delta z'' \right] d\varphi - \left[P\delta z \right]_{\varphi=\phi} + \left[\frac{M}{R} \delta z' \right]_{\varphi=\phi} +$$

$$+ \left[T \delta\theta_x \right]_{\varphi=\phi} \qquad \text{.....(2.8.27)}$$

onde F_k indica a derivada parcial da função F do integrando em relação à variável dependente k ($k = \theta_x, \theta_x', z, z', z''$).

Com sucessivas integrações por partes, tem-se:

$$0 = \int_0^{\phi} \left[(F_{\theta_x} - \frac{d}{d\varphi} F_{\theta_x}') \delta\theta_x + (F_z - \frac{d}{d\varphi} F_z' + \frac{d^2}{d\varphi^2} F_z'') \delta z \right] d\varphi + \left[F_{\theta_x}' \delta_{\theta_x} \right]_0^{\phi} +$$

$$+ \left[(F_z' - \frac{d}{d\varphi} F_z'') \delta z \right]_0^{\phi} + \left[F_z'' \delta z' \right]_0^{\phi} - (P\delta z)_{\varphi=\phi} + (\frac{M}{R} \delta z')_{\varphi=\phi} + (T\delta\theta_x)_{\varphi=\phi}$$

$$\text{.....(2.8.28)}$$

As funções $\bar{\theta}_x(\varphi)$ e $\bar{z}(\varphi)$ nas equações (2.8.6) e (2.8.7) são funções vizinhas de $\theta_x(\varphi)$ e $z(\varphi)$ e <u>arbitrárias</u>. Pode-se então admitir que $\delta\theta_x \equiv 0$ com $\bar{z}(\varphi)$ e $\bar{z}'(\varphi)$ mantendo em $\varphi = 0$ e $\varphi = \phi$, os mesmos valores assumidos por $z(\varphi)$ e $z'(\varphi)$. Em seguida pode-se supor $\delta z \equiv 0$, com $\bar{\theta}_x(\varphi)$ e $\bar{z}'(\varphi)$ mantendo nos extremos os mesmos valores assumidos por $\theta_x(\varphi)$ e $z'(\varphi)$. Esses fatos, observados na equação (2.8.28) levam à:

$$F_{\theta_x} - \frac{d}{d\varphi} F_{\theta_x}' = 0 \qquad \text{.....(2.8.29)}$$

$$F_z - \frac{d}{d\varphi} F_z' + \frac{d^2}{d\varphi^2} F_z'' = 0 \qquad \text{.....(2.8.30)}$$

Estas últimas equações são chamadas de <u>Equações de Euler</u> e exprimem as condições necessárias que devem ser satisfeitas pelas funções $\theta_x(\varphi)$ e $z(\varphi)$ para que o funcional U seja mínimo. São conhecidas também como <u>condições essenciais</u>, (BREBBIA e FERRANTE)[1] e independem das condições de contorno.

Na mesma equação (2.8.28), com $\delta z \equiv \delta z' \equiv 0$ e com $\delta\theta_x$ arbitrado de maneira que se anule para $\varphi = 0$, tem-se:

$$(F_{\theta_x}')_{\varphi=\phi} + T = 0 \qquad \text{.....(2.8.31)}$$

e com outras variações $\delta\theta_x$, δz e $\delta z'$ apropriadas:

$$(F_z' - \frac{d}{d\varphi} F_z'')_{\varphi=\phi} - P = 0 \qquad \text{.....(2.8.32)}$$

e

$$(F_z'')_{\varphi=\phi} + \frac{M}{R} = 0 \qquad \text{.....(2.8.33)}$$

Estas três últimas equações são chamadas <u>condições naturais</u> de contôrno (BREBBIA E FERRANTE)[1] e correspondem às condições de deslocamentos livres do problema particular a ser resolvido. No caso presente exprimem a maneira como devem variar as funções θ_x e z nos pontos extremos da viga, onde existem cargas concentradas.

Escrevendo o integrando da equação (2.8.4) de maneira explícita:

$$F = \frac{GJ_t}{2R}\left[(\theta_x')^2 + \frac{2}{R}\theta_x' z' + \frac{1}{R^2}(z')^2\right] + \frac{EJ}{2R}\left[\frac{1}{R^2}(z'')^2 - \frac{2}{R} z'' \theta_x + (\theta_x)^2\right] - R(p.z + m.\theta_x) \qquad \text{.....(2.8.34)}$$

As derivadas que interessam, obtidas em (2.8.34) são:

$$F_{\theta_x} = \frac{EJ}{R}\left(-\frac{z''}{R} + \theta_x\right) - m.R \qquad \text{.....(2.8.35)}$$

$$F_{\theta_x} = \frac{GJ_t}{R}\left(\theta_x' + \frac{z'}{R}\right) \qquad \text{.....(2.8.36)}$$

$$\frac{d}{d\varphi} F_{\theta_x}' = \frac{GJ_t}{R}\left(\theta_x'' + \frac{z''}{R}\right) \qquad \text{.....(2.8.37)}$$

$$F_z = -p.R \qquad \text{.....(2.8.38)}$$

$$F_z' = \frac{GJ_t}{R}\left(\frac{\theta_x'}{R} + \frac{z'}{R^2}\right) \qquad \text{.....(2.8.39)}$$

$$F_z'' = \frac{EJ}{R}\left(\frac{z''}{R^2} - \frac{\theta_x}{R}\right) \qquad \text{.....(2.8.40)}$$

$$\frac{d}{d\varphi} F_z' = \frac{GJ_t}{R}\left(\frac{\theta_x''}{R} + \frac{z''}{R}\right) \qquad \text{.....(2.8.41)}$$

$$\frac{d}{d\varphi} F_z'' = \frac{EJ}{R}\left(\frac{z''}{R} - \frac{\theta_x'}{R}\right) \qquad \text{.....(2.8.42)}$$

$$\frac{d^2}{d\varphi} F_z'' = \frac{EJ}{R}\left(\frac{z''}{R^2} - \frac{\theta_x'}{R}\right) \qquad \text{.....(2.8.43)}$$

Substituindo as equações (2.8.35) até (2.8.43) nas condições essenciais (2.8.29) e (2.8.30) é lembrado que $\lambda = \frac{EJ}{GJ_t}$, chega-se à:

$$\left| \begin{array}{ll} (1+\lambda)z'' + R\,\theta_x'' - \lambda R\,\theta_x = \dfrac{\lambda\, m R^3}{EJ} & \text{.....(2.8.44)} \\[2ex] \lambda z^{IV} - z'' - (1+\lambda)\theta_x'' = \dfrac{\lambda\, p R^4}{EJ} & \text{.....(2.8.45)} \end{array} \right.$$

Essas duas últimas são as mesmas equações diferenciais da elástica obtidas no parágrafo 2.7 para problemas inclusive hiperestáticos. A maneira de resolver essas equações já foi indicada no mesmo parágrafo 2.7.

Levando agora as expressões (2.8.35) até (2.8.43) nas condições naturais (2.8.31) à (2.8.33) obtém-se:

$$T = -\frac{GJ_t}{R}\left(\theta_x' + \frac{z'}{R}\right)_{\varphi=\phi} \qquad \text{.....(2.8.46)}$$

$$M = -\frac{EJ}{R}\left(\frac{z''}{R} - \theta_x\right)_{\varphi=\phi} \qquad \text{.....(2.8.47)}$$

$$P = \frac{GJt}{R}\left(\frac{-z''' + z'}{R} + 2\,\theta_x'\right)_{\varphi=\phi} \qquad \text{.....(2.8.48)}$$

Já que T e M, no problema em estudo (vide FIG.2.8.1) têm o sentido dos esforços solicitantes positivos M_T e M_F, nota-se que as condições (2.8.46) e (2.8.47) correspondem exatamente a escrever-se as equações (2.7.1) e (2.7.2) para a extremidade $\varphi = \phi$.

A equação (2.8.48) corresponde a equação de equilíbrio (2.4.1'), introduzidas as expressões (2.7.1) e (2.7.2), e escrita para P coincidindo com Q positivo, na extremidade $\varphi = \phi$.

Finalmente, deve-se lembrar que as expressões (2.8.46) à (2.8.48) são relativas ao problema particular adotado, da viga com a extremidade direita em balanço e cargas concentradas nesta extremidade. Em outros problemas podem ocorrer deslocamentos livres e cargas aplicadas também na extremidade esquerda ($\varphi = 0$). Nestes ca

sos basta escrever as mesmas equações (2.8.46) (2.8.48) para $\varphi = 0$, lembrando que T, M e P deverão corresponder nesta outra extremidade, aos sentidos positivos dos esforços solicitantes M_T, M_F e Q.

2.9 - VIGA CURVA EM BALANÇO

Julgou-se conveniente, apresentar, ainda neste capítulo, a solução de um problema simples, mas de frequente uso, qual seja o do cálculo dos esforços solicitantes para a viga curva em balanço com carga vertical $\bar{p}$ e momento $\bar{m}$, uniformemente distribuído, e ainda cargas concentradas na extremidade do balanço (vide FIG. 2.9.1).

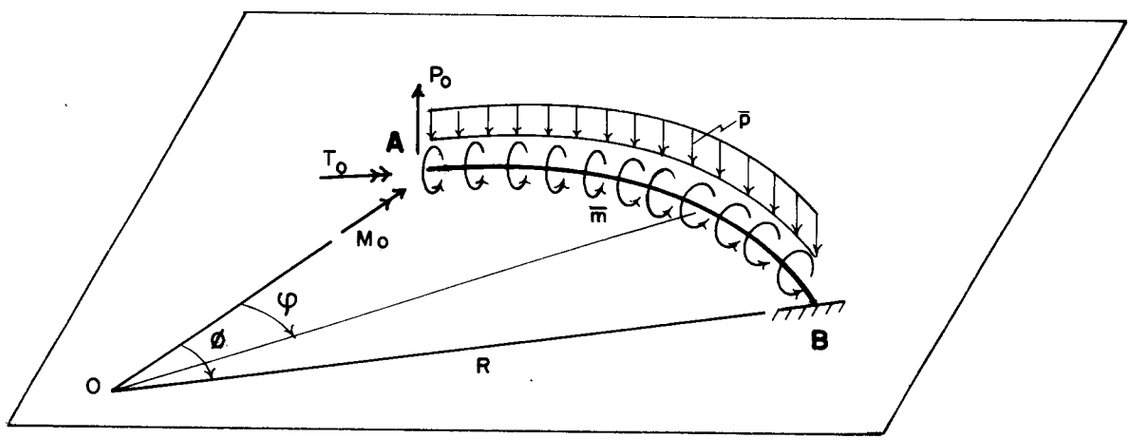


FIG. 2.9.1 - VIGA CURVA EM BALANÇO CARREGADA COM CARGAS NA EXTREMIDADE E CARGAS $\bar{p}$ E $\bar{m}$ UNIFORMES.

É claro que os esforços solicitantes poderiam ser determinados, já que a estrutura é isostática, resolvendo as equações: (2.4.1'), (2.4.2') e (2.4.3'). Os mesmos resultados serão obtidos, no entanto, se forem usadas, em cada seção, as equações globais de equilíbrio.

Tem-se então:

a) Devido a T_o:

$$M_T = T_o \cdot \cos \varphi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.9.1)$$

$$M_F = T_o \cdot \operatorname{sen} \varphi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.9.2)$$

$$Q = 0 \qquad \text{.....(2.9.3)}$$

b) Devido à M_o:

$$M_T = - M_o \cdot \text{sen}\ \varphi \qquad \text{.....(2.9.4)}$$

$$M_F = M_o \cdot \cos\ \varphi \qquad \text{.....(2.9.5)}$$

$$Q = 0 \qquad \text{.....(2.9.6)}$$

c) Devido à P :

$$M_T = - P_o\, R(1 - \cos\varphi) \qquad \text{.....(2.9.7)}$$

$$M_F = P_o\ R \cdot \text{sen}\ \varphi \qquad \text{.....(2.9.8)}$$

$$Q = P_o \qquad \text{.....(2.9.9)}$$

d) Devido à $\bar{p}$:

Convém primeiramente encontrar o C.G. (Centro de gravidade) das cargas que atuam no arco $\overline{AS}$ de ângulo genérico (vide FIG. 2.9.2).

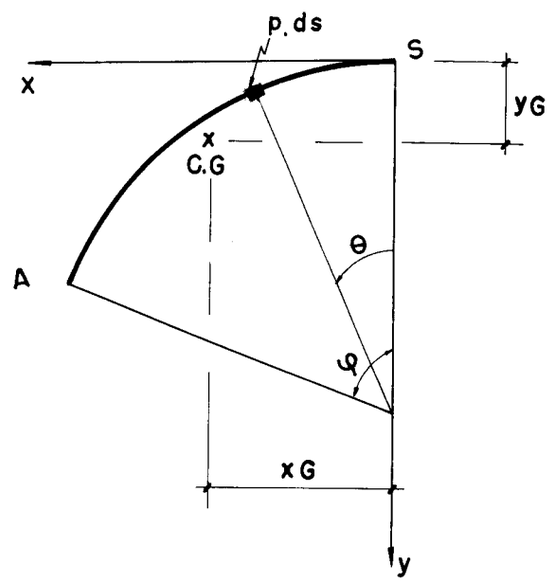


FIG. 2.9.2 - CÁLCULO DO CENTRO DE GRAVIDADE DA CARGA UNIFORME $\bar{p}$.

Usando a variável de integração θ, tem-se para a coordenada y_G do centro de gravidade:

$$y_G = \frac{\int \bar{p} \cdot y \cdot ds}{\int \bar{p} \cdot ds} = \frac{\int_0^{\varphi} R^2 (1 - \cos\theta)\, d\theta}{\int_0^{\varphi} R \cdot d\theta} = R\left(1 - \frac{\text{sen}\,\varphi}{\varphi}\right) \qquad \text{...(2.9.10)}$$

e para a coordenada x_G:

$$x_G = (R - y_G)\ tg\ \frac{\varphi}{2} = (R - y_G)\left(\frac{1 - \cos\varphi}{sen\ \varphi}\right) = R\ \frac{(1 - \cos\varphi)}{} \qquad ....(2.9.11)$$

Então os esforços solicitantes devidos à $\bar{p}$ são:

$$M_T = \bar{p}\ R^2\ (\varphi - sen\ \varphi) \qquad .....(2.9.12)$$

$$M_F = -\bar{p}R^2(1 - \cos\varphi) \qquad .....(2.9.13)$$

$$Q = -\bar{p}R\varphi \qquad .....(2.9.14)$$

e) Devido à $\bar{m}$:

Os momentos distribuídos $\bar{m}$ equivalem a um momento global cujo valor e direção pode ser encontrado supondo-se uma escala de desenho conveniente na qual cada momento elementar $\bar{m}.ds$ é representado pelo vetor ds (vide FIG. 2.9.3)

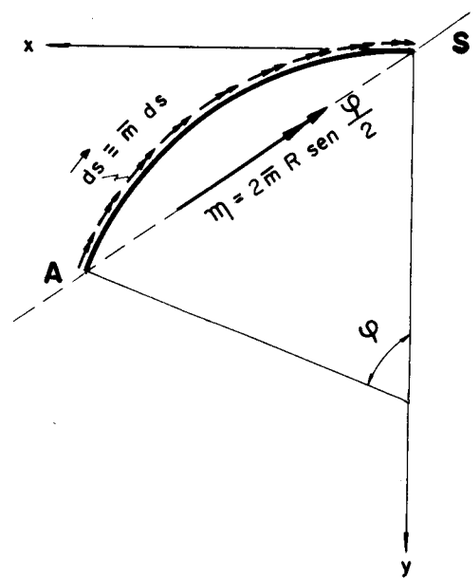


FIG. 2.9.3 - CÁLCULO DO MOMENTO GLOBAL CORRESPONDENTE AO MOMENTO UNIFORME $\bar{m}$.

A direção do momento global faz um ângulo $\frac{\varphi}{2}$ com o eixo S_x (FIG. 2.9.3) e sua intensidade será $\bar{m}$ vezes a corda correspondente ao arco, ou seja,

$$\eta = 2\,\bar{m}R\ sen\ \frac{\varphi}{2} \qquad .....(2.9.15)$$

Então, os esforços solicitantes devidos a $\overline{m}$ são:

$$M_T = \overline{m} \cdot R \cdot \text{sen}\ \varphi \qquad \text{.....(2.9.16)}$$

$$M_F = \overline{m} \cdot R\ (1 - \cos\varphi) \qquad \text{.....(2.9.17)}$$

$$Q = 0 \qquad \text{.....(2.9.18)}$$

CAPÍTULO 3

LINHAS DE INFLUÊNCIA DE VIGAS CIRCULARES ISOSTÁTICAS

3.1 - INTRODUÇÃO

O Método Cinemático, muito conhecido para obtenção de Linhas de Influência de Estruturas Isostáticas Planas com carga no próprio plano, pode, como se verá, ser estendido às estruturas isostáticas planas com cargas perpendiculares a seu plano.

O procedimento que pode ser aplicado a qualquer estrutura plana isostática com cargas perpendiculares será aqui usado apenas numa "viga simples" (só 1 tramo) isostática, obtendo-se expressões trigonométricas simples para as L.Is.

Estudar-se-ão as linhas de influência de esforços solicitantes e reações de apoio devidos a cargas móveis força vertical P = 1 e momento de torção T = 1 percorrendo o eixo da viga.

Além disso serão estabelecidas as modificações necessárias nessas expressões trigonométricas, tendo em vista cobrir os casos possíveis de simetria quando se altera a curvatura e a posição dos vínculos.

As convenções de sinais para curvatura das vigas, esforços solicitantes M_T, M_F, Q (momento torçor, momento fletor, esforço cortante), carga torçora concentrada T e carga vertical P são

as mesmas já dadas no parágrafo 2.3.

3.2 - MÉTODO CINEMÁTICO PARA TRAÇADO DAS L.Is.

O procedimento já conhecido consiste em, dada a estrutura isostática:

a) Retira-se o vínculo correspondente à incógnita esforço, transformando a estrutura em uma cadeia cinemática com 1 grau de liberdade.

b) Impõe-se na cadeia cinemática obtida um deslocamento unitário contrário à incógnita esforço, obtendo-se um estado deslocado da cadeia.

c) As componentes do deslocamento dos pontos da estrutura, onde passeia a carga concentrada móvel, na direção dessa carga, são as ordenadas da L.I. procurada, quando se aplica a geometria de pequenos deslocamentos.

Nas estruturas planas com carga perpendicular ao plano, a aplicação do procedimento acima requer outras observações:

d) Os deslocamentos e rotações no plano da estrutura (horizontal) devem ser considerados nulos, já que não correspondem a nenhuma carga ou esforço interno.

e) As "chapas" da cadeia e suas extensões imaginárias podem ser consideradas como planos inicialmente horizontais, coincidentes com o plano da estrutura (FIG. 3.2.1.a).

f) Após o deslocamento imposto na cadeia, os planos representativos das "chapas" e o plano da estrutura interceptam-se em retas que na geometria de pequenos deslocamentos são praticamente horizontais (FIG. 3.2.1.b).

g) No estado deslocado (FIG. 3.2.1.b) a interseção do plano de cada chapa com o plano da estrutura é o <u>eixo absoluto</u> de rotação da chapa. Todos os pontos do eixo absoluto tem deslocamentos verticais nulos.

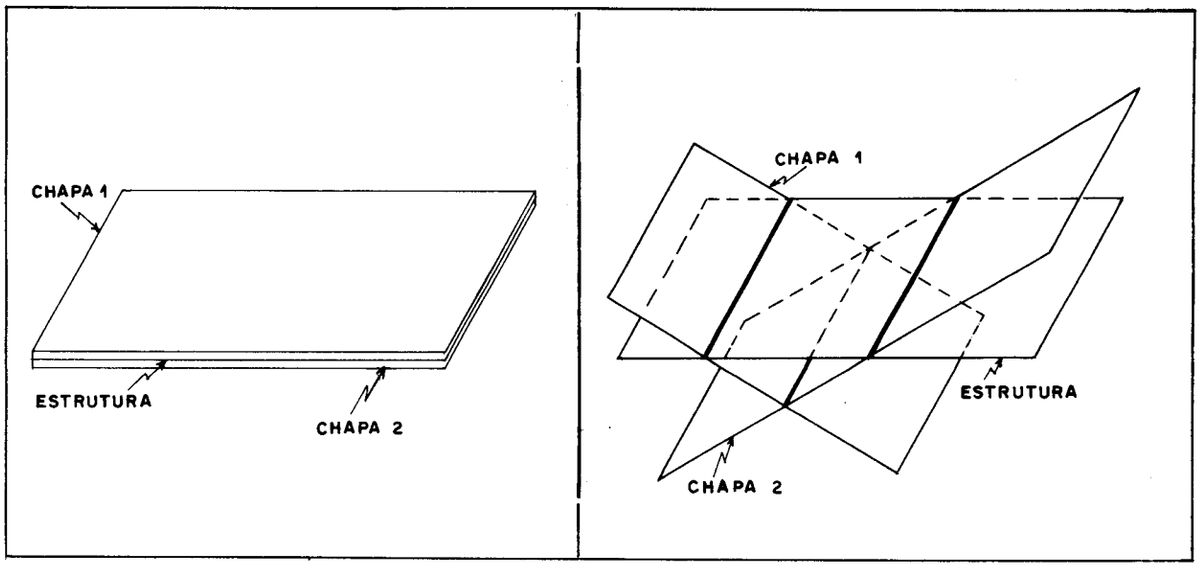


FIG. 3.2.1a - POSIÇÃO INICIAL DAS CHAPAS DA CADEIA CINEMÁTICA.

FIG. 3.2.1b - POSIÇÃO FINAL DAS CHAPAS DA CADEIA CINEMÁTICA.

h) Conhecidos dois pontos distintos de uma chapa possuindo deslocamentos verticais nulos, fica determinado o eixo absoluto da chapa.

i) No estado deslocado (FIG. 3.2.1.b) a interseção dos planos de duas chapas é o eixo relativo de rotação entre as duas chapas. O eixo relativo é o lugar dos pontos onde as duas chapas possuem os mesmos deslocamentos verticais.

j) O ponto de interseção dos eixos absolutos de duas chapas, sendo um ponto onde as duas chapas possuem o mesmo deslocamento (nulo) é um ponto do eixo relativo entre as duas chapas.

k) Conhecidos os eixos absolutos de duas chapas e um ponto, não situado sobre esses eixos, no qual as duas chapas tem o mesmo deslocamento vertical, fica determinado o eixo relativo entre as mesmas chapas.

l) Quando se estuda o movimento de duas chapas, vale a relação vetorial:

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1 \qquad \text{.....(3.2.1)}$$

onde:

ω_{21} é a rotação relativa entre as chapas 2 e 1.

ω_2 é a rotação absoluta da chapa 2.

ω_1 é a rotação absoluta da chapa 1.

sendo esses vetores aplicados no ponto de interseção dos eixos absolutos das chapas e tendo como suporte os correspondentes eixos relativos e absolutos (Vide FIG. 3.2.2)

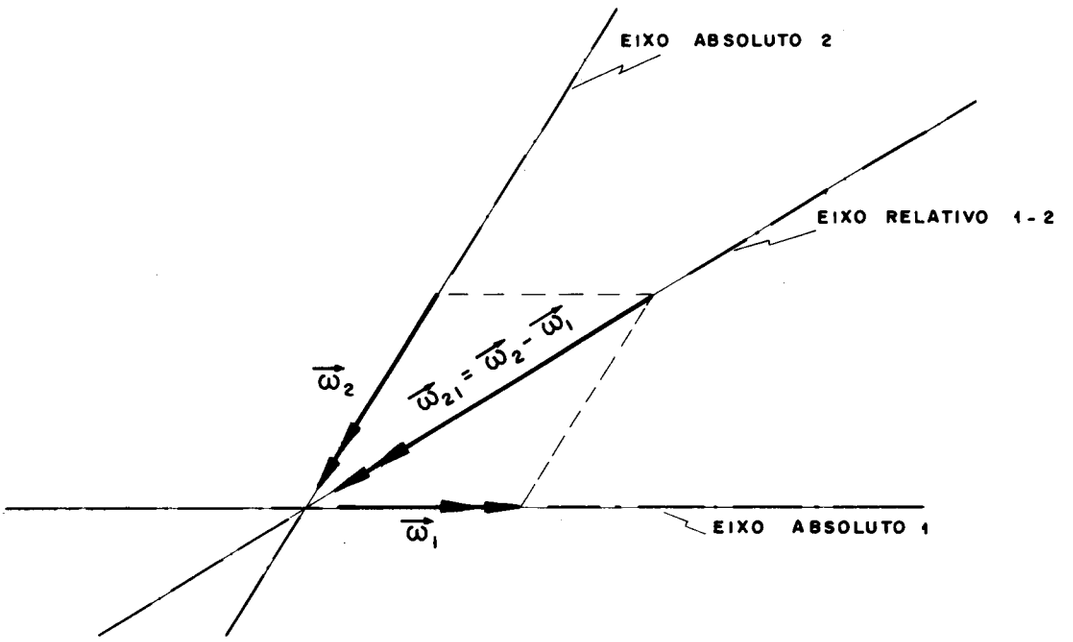


FIG. 3.2.2 - REPRESENTAÇÃO VETORIAL DAS ROTAÇÕES ABSOLUTAS E RELATIVAS SATISFAZENDO À EXPRESSÃO VETORIAL $\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$.

m) No estado deslocado da cadeia (FIG.3.2.1.b) os deslocamentos verticais dos pontos do eixo onde passeia a carga móvel vertical são as ordenadas da L.I. para essa carga móvel, enquanto as componentes de rotação na direção da tangente ao eixo são as ordenadas da L.I. para carga móvel momento de torção concentrado.

3.3 - EXEMPLO

O procedimento descrito anteriormente será aplicado à viga simples isostática de curvatura positiva com apoio esquerdo A não resistente à torção e flexão e apoio direito B não resisten-

te à flexão (FIG. 3.3.1).

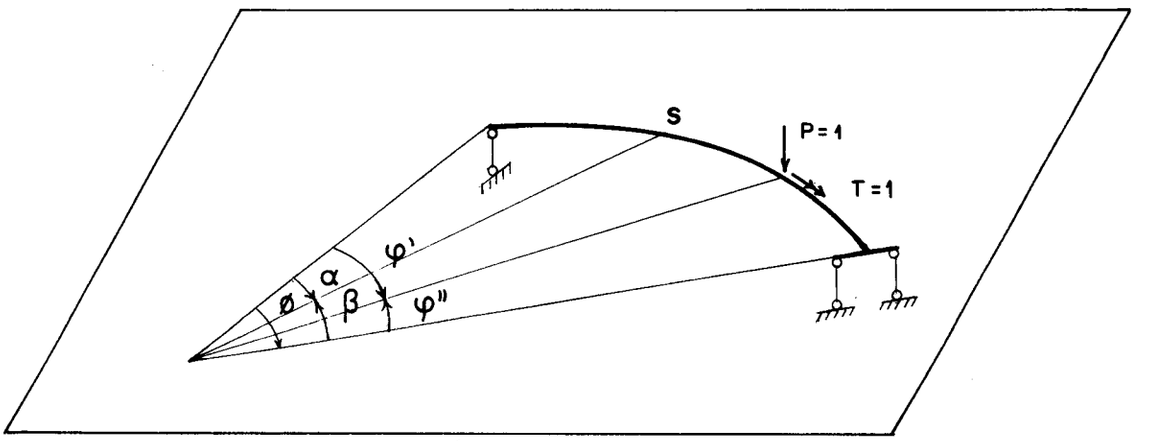


FIG. 3.3.1 - VIGA CURVA ISOSTÁTICA COM SEÇÃO S DE COORDENADAS α E β E CARGAS NA POSIÇÃO DE COORDENADAS φ' E φ''

O ângulo total de abertura da viga circular é ϕ.

A posição da seção S para a qual se calcula a L.I. de algum esforço solicitante é dada pelas coordenadas α e β com $\alpha + \beta = \phi$.

A posição da carga concentrada P = 1 ou T = 1 é dada pelas coordenadas φ' e φ'' com $\varphi' + \varphi'' = \phi$.

3.3.1 - L.I. de Q, para cargas móveis P = 1 e T = 1

O estado deslocado da cadeia está representada na FIG. 3.3.2. Na seção S, o deslocamento vertical relativo vale Δ_{21} = 1, para cima.

Para não haver rotação relativa entre as duas chapas (correspondentes a M_F e M_T), os dois eixos 1 e 2 de rotação deverão ser paralelos, com $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$.

A distância entre os dois planos paralelos representativos das duas chapas é 1.

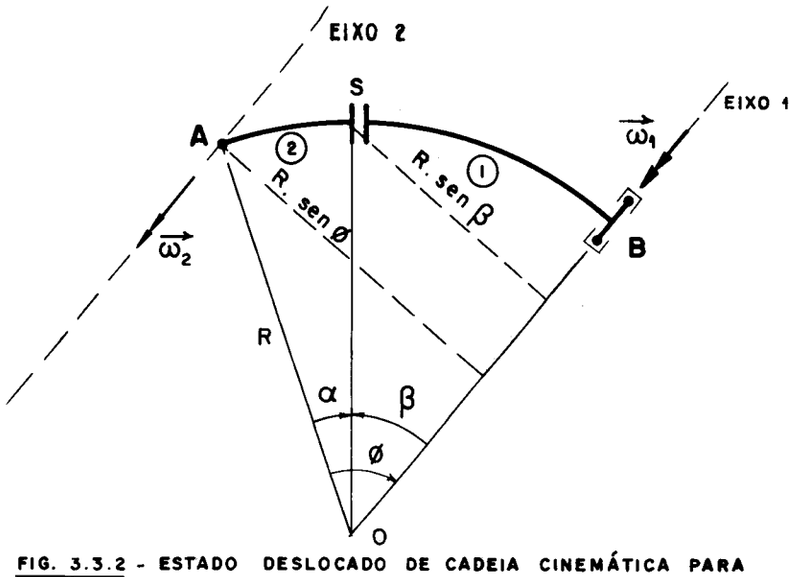


FIG. 3.3.2 - ESTADO DESLOCADO DE CADEIA CINEMÁTICA PARA L.I. DE Q.

Como o ponto A pertencente a chapa 2 tem deslocamento vertical nulo, conclue-se que:

$$\omega_2 = \omega_1 = \frac{1}{R \cdot \text{sen}\,\phi} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.1)$$

I - Carga móvel P = 1

As ordenadas η_Q^P da L. I. de Q podem ser calculadas com as distâncias dos pontos da estrutura aos eixos absolutos:

a) $\varphi < \alpha$ (carga à esquerda da seção):

$$\eta_Q^P = -\,\omega_2(R \cdot \text{sen}\,\phi - R \cdot \text{sen}\,\varphi'') \qquad \ldots\ldots\ldots(3.3.2)$$

$$\boxed{\eta_Q^P = \frac{\text{sen}\,\varphi''}{\text{sen}\,\phi} - 1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.3)$$

b) $\varphi > \alpha$ (carga à direita da seção):

$$\eta_Q^P = \omega_1 \cdot R \cdot \text{sen}\,\varphi'' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.4)$$

$$\boxed{\eta_Q^P = \frac{\text{sen } \varphi''}{\text{sen } \phi}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.3.5)$$

Convém observar que as expressões (3.3.3) e (3.3.5) tendem, no limite, para $\phi \rightarrow$ zero, às L.Is. de vigas retas.

II - Carga móvel T = 1

As ordenadas η_Q^T da L.I. de Q são nos pontos da estrutura, as componentes da rotação na direção da tangente ao eixo:

Como as rotações absolutas ω_2 e ω_1 são iguais, a expressão será única ao longo de toda estrutura.

$$\eta_Q^T = - \omega_2 \cdot \text{sen } \varphi'' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.3.6)$$

$$\boxed{\eta_Q^T = - \frac{\text{sen } \varphi''}{R \cdot \text{sen } \phi}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.3.7)$$

3.3.2 - L.I. de M_F para cargas móveis P = 1 e T = 1

O estado deslocado da cadeia está representado na FIG. 3.3.3. Na seção S, a rotação relativa indicada vale $\omega_{21} = 1$.

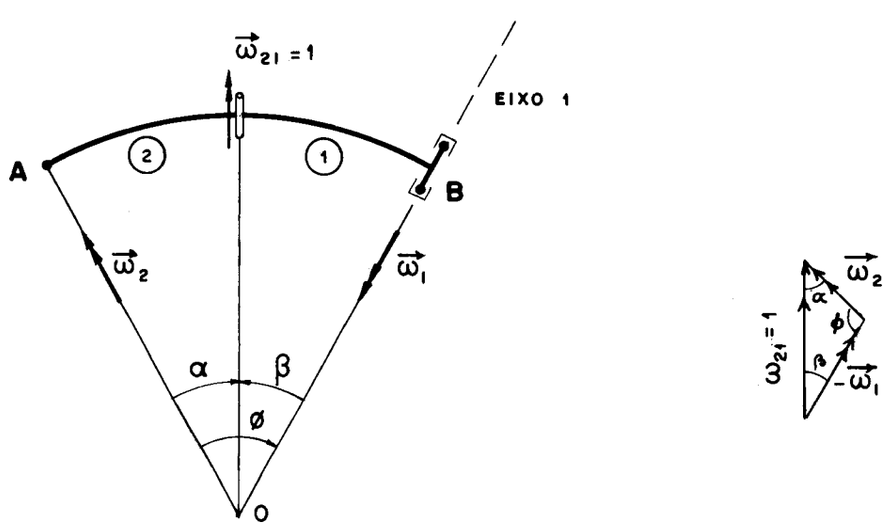


FIG. 3.3.3 - ESTADO DESLOCADO DA CADEIA CINEMÁTICA PARA L.I DE M_F

Os pontos O e A determinam o eixo 2.

O triângulo de vetores determina os módulos e sentidos de $\vec{\omega}_2$ e $\vec{\omega}_1$. Aplicando a lei dos senos:

$$\frac{1}{\text{sen } \phi} = \frac{\omega_2}{\text{sen } \beta} = \frac{\omega_1}{\text{sen } \alpha} \qquad \text{.....(3.3.8)}$$

$$\omega_1 = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \varphi} \qquad \text{.....(3.3.9)}$$

$$\omega_2 = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \varphi} \qquad \text{.....(3.3.10)}$$

I - Carga móvel P = 1

As ordenadas $\eta^P_{M_F}$ das L.I. de M_F podem ser calculadas com as distâncias dos pontos da estrutura aos eixos absolutos.

a) $\varphi' < \alpha$ (carga à esquerda da seção)

$$\eta^P_{M_F} = \omega_2 \cdot R \cdot \text{sen}\varphi' \qquad \text{.....(3.3.11)}$$

$$\boxed{\eta^P_{M_F} = R \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \phi} \cdot \text{sen}\varphi'} \qquad \text{.....(3.3.12)}$$

b) $\varphi' \geqslant \alpha$ (carga à direita da seção)

$$\eta^P_{M_F} = \omega_1 \cdot R \cdot \text{sen}\varphi'' \qquad \text{.....(3.3.13)}$$

$$\boxed{\eta^P_{M_F} = R \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi} \cdot \text{sen}\varphi''} \qquad \text{.....(3.3.14)}$$

Convém observar em todas as expressões, inclusive nas que serão obtidas mais adiante, que as mesmas, no limite para $\phi \to 0$ tendem às expressões de L.Is. de vigas retas.

II - Carga móvel T = 1

As ordenadas $\eta^T_{M_F}$ da L.I. de M_F serão, nos pontos da estrutura as componentes da rotação na direção da tangente ao eixo.

a) $\varphi' < \alpha$ (carga à esquerda da seção)

$$\eta^T_{M_F} = -\omega_2 \cdot \operatorname{sen}\varphi' \qquad \text{.....(3.3.15)}$$

$$\boxed{\eta^T_{M_F} = -\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\phi}\operatorname{sen}\varphi'} \qquad \text{.....(3.3.16)}$$

b) $\varphi' \geq \alpha$ (carga à direita da seção)

$$\eta^T_{M_F} = -\omega_1 \cdot \operatorname{sen}\varphi' \qquad \text{.....(3.3.17)}$$

$$\boxed{\eta^T_{M_F} = -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\operatorname{sen}\varphi''} \qquad \text{.....(3.3.18)}$$

3.3.3 - L.I. de M_T para cargas móveis P = 1 e T = 1

O estado deslocado da cadeia está representado na FIG. 3.3.4. Na seção S a rotação relativa indicada vale $\omega_{21} = 1$.

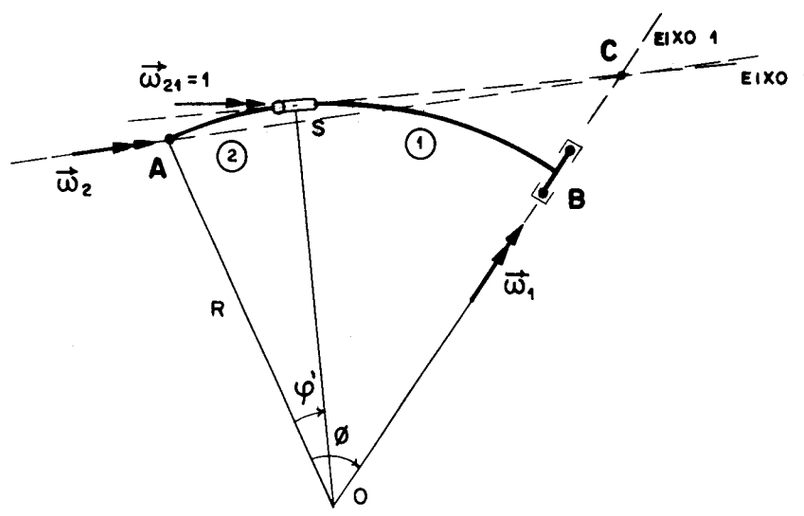


FIG. 3.3.4 - ESTADO DESLOCADO DA CADEIA CINEMÁTICA PARA L.I. DE M_T.

O valor ω_1 é encontrado exprimindo-se a translação vertical nula de A em função de ω_1 e $\omega_{21} = 1$:

$$0 = -\omega_1 . R . \text{sen}\ \phi + \omega_{21} . R(1 - \cos\alpha) \qquad ...(3.3.19)$$

$$\omega_1 = \frac{(1 - \cos\alpha)}{\text{sen}\ \phi} \qquad .....(3.3.20)$$

A intensidade de $\vec{\omega}_2$ seria encontrada efetuando-se a operação vetorial $\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$. A expressão de ω_2 seria entretanto extensa e de difícil redução. Esse cálculo é dispensável, desde que, todo o movimento da cadeia cinemática seja expresso em função de $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_{21}$.

I - Carga móvel P = 1

As ordenadas $\eta^P_{M_T}$ da L.I. de M_T podem ser calculadas com as distâncias dos pontos da estrutura ao eixo absoluto 1 e ao eixo relativo 2 - 1.

a) $\varphi' < \alpha$ (carga à esquerda da seção)

$$\eta^P_{M_T} = -\omega_1 . R . \text{sen}\ \varphi'' + \omega_{21} . R\left[1 - \cos(\alpha - \varphi')\right]$$

$$.....(3.3.21)$$

$$\boxed{\eta^P_{M_T} = -R\ \frac{(1 - \cos\alpha)}{\text{sen}\ \phi}\ \text{sen}\varphi'' + R\left[1 - \cos(\alpha - \varphi')\right]} \quad ....(3.3.22)$$

b) $\varphi' \geq \alpha$ (carga à direita da seção)

$$\eta^P_{M_T} = -\omega_1 . R . \text{sen}\varphi'' \qquad .....(3.3.23)$$

$$\boxed{\eta^P_{M_T} = -R\ \frac{(1 - \cos\alpha)}{\text{sen}\ \phi}\ \text{sen}\ \varphi''} \qquad .....(3.3.24)$$

II - Carga móvel T = 1

As ordenadas $\eta^T_{M_T}$ da L.I. de M_T serão, nos pontos da estrutura as componentes das rotações $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{21}$, na direção da tangente ao eixo.

a) $\varphi' < \alpha$ (carga à esquerda da seção)

$$\eta^T_{M_T} = \omega_1 \cdot \text{sen}\ \varphi'' + \omega_{21} \cdot \cos(\alpha - \varphi') \quad \ldots.(3.3.25)$$

$$\boxed{\eta^T_{M_T} = \frac{(1 - \cos\alpha)}{\text{sen}\ \phi}\ \text{sen}\ \varphi'' + \cos\ (\alpha - \varphi')} \quad ..(3.3.26)$$

b) $\varphi' > \alpha$ (carga à direita da seção)

$$\eta^T_{M_T} = \omega_1 \cdot \text{sen}\ \varphi'' \quad \ldots\ldots\ldots(3.3.27)$$

$$\boxed{\eta^T_{M_T} = \frac{(1 - \cos\alpha)}{\text{sen}\ \phi} \cdot \text{sen}\ \varphi''} \quad \ldots.(3.3.28)$$

3.3.4 - L.Is. de Reações de Apoio

As reações de apoio forças verticais V_A e V_B em A e B são positivas quando atuam na estrutura de baixo para cima. A reação de torção τ_B no apoio B resistente à torção é positiva quando atua na estrutura com seu vetor representativo (τ_B) no sentido crescente da coordenada s, conforme mostrado na FIG. 3.3.5.a.

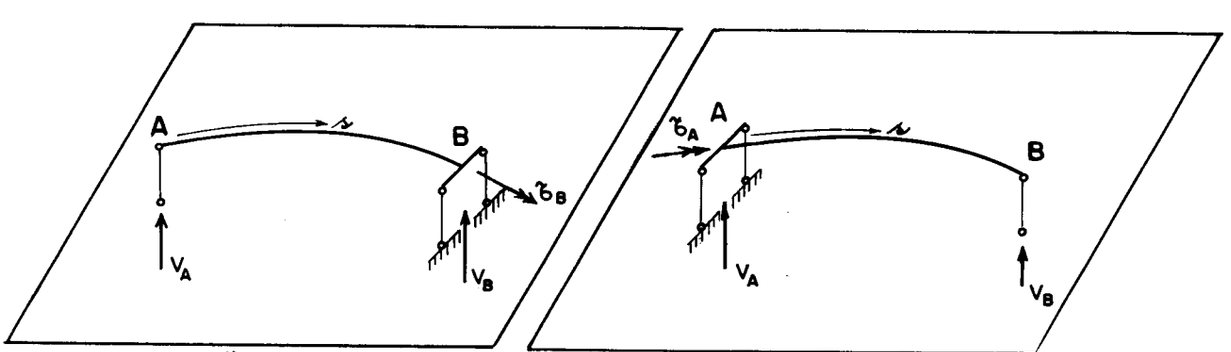


FIG. 3.3.5a.- REAÇÕES DE APOIO NUMA VIGA SIMPLES COM O APOIO DIREITO RESISTENTE A TORÇÃO

FIG. 3.3.5b.- REAÇÕES DE APOIO NUMA VIGA SIMPLES COM O APOIO ESQUERDO RESISTENTE A TORÇÃO

Para o caso de vigas simples onde o apoio resistente à torção seja o apoio esquerdo A, a reação de torção positivo também tem vetor representativo (τ_A) no sentido crescente de s. (FIG. 3.3.5.b).

3.3.4.a - L.I. de V_A para P = 1 e T = 1

Estas L.Is. reduzem-se às L.Is. de Q para $\alpha = 0$ e $\beta = \phi$, quando $\varphi' \geq \alpha$ (carga à direita da seção). Tem-se:

I - Carga móvel P = 1

$$\boxed{\eta^P_{V_A} = \frac{\text{sen } \varphi''}{\text{sen } \phi}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.3.29)$$

II - Carga móvel T = 1

$$\boxed{\eta^T_{V_A} = \frac{\text{sen } \varphi''}{R \cdot \text{sen } \phi}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.3.30)$$

3.3.4.b - L.I. de V_B para P = 1 e T = 1

Estas L.Is. reduzem-se às L.Is. de Q , com sinal trocado, para $\alpha = \phi$ e $\beta = 0$, quando $\varphi' < \alpha$ (carga à esquerda da seção). Tem-se:

I - Carga móvel P = 1

$$\boxed{\eta^P_{V_B} = 1 - \frac{\text{sen } \varphi''}{\text{sen } \phi}} \qquad \ldots\ldots\ldots (3.3.31)$$

II - Carga móvel T = 1

$$\boxed{\eta^T_{V_B} = \frac{\text{sen } \varphi''}{R \cdot \text{sen } \phi}} \qquad \ldots\ldots\ldots (3.3.32)$$

3.3.4.c - L.I. de τ_B para P = 1 e T = 1

Estas L.Is. reduzem-se às L.Is. de M_T, com o sinal trocado, para $\alpha = \phi$ e $\beta = 0$, quando $\varphi' < \alpha$ (carga à esquerda da seção).

I - Carga móvel P = 1

$$\eta^{P}_{\tau_B} = R\,\frac{(1 - \cos\phi)}{\operatorname{sen}\phi}\,.\,\operatorname{sen}\varphi'' - R\,[\,1 - \cos(\phi - \varphi')\,] \quad \ldots.(3.3.33)$$

$$\boxed{\eta^{P}_{\tau_B} = -\,R\,(\,1 - \cos\varphi'' - \tan\frac{\phi}{2}\,.\,\operatorname{sen}\varphi'')} \quad \ldots\ldots.(3.3.34)$$

II - Carga móvel T = 1

$$\eta^{T}_{\tau_B} = -\,\frac{(1 - \cos\phi)}{\operatorname{sen}\phi}\,\operatorname{sen}\varphi'' - \cos(\phi - \varphi') \quad \ldots\ldots.(3.3.35)$$

$$\eta^{T}_{\tau_B} = \tan\frac{\phi}{2}\,\operatorname{sen}\varphi'' - \cos\varphi'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.36)$$

$$\eta^{T}_{\tau_B} = -\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\,.\,\operatorname{sen}\varphi'' + \cos\varphi''\,.\,\cos\frac{\phi}{2}}{\cos(\frac{\phi}{2})} \quad \ldots\ldots(3.3.37)$$

$$\boxed{\eta^{T}_{\tau_B} = -\,\frac{\cos(\varphi'' - \frac{\phi}{2})}{\cos(\frac{\phi}{2})}} \quad \ldots\ldots.(3.3.38)$$

3.4 - CONSIDERAÇÕES DE SIMETRIA

As expressões deduzidas para L.Is. da viga simples mostrada na FIG. 3.3.1, denominado de 1º CASO na FIG. 3.4.1 podem ser estendidas para cobrir todos os casos mostrados nesta última.

Na FIG. 3.4.1 existem o eixo de simetria x - x e o eixo de simetria y - y. Notar que em qualquer CASO a extremidade esquerda é chamada A e a extremidade direita B. A coordenada s é medida sempre à partir da extremidade A.

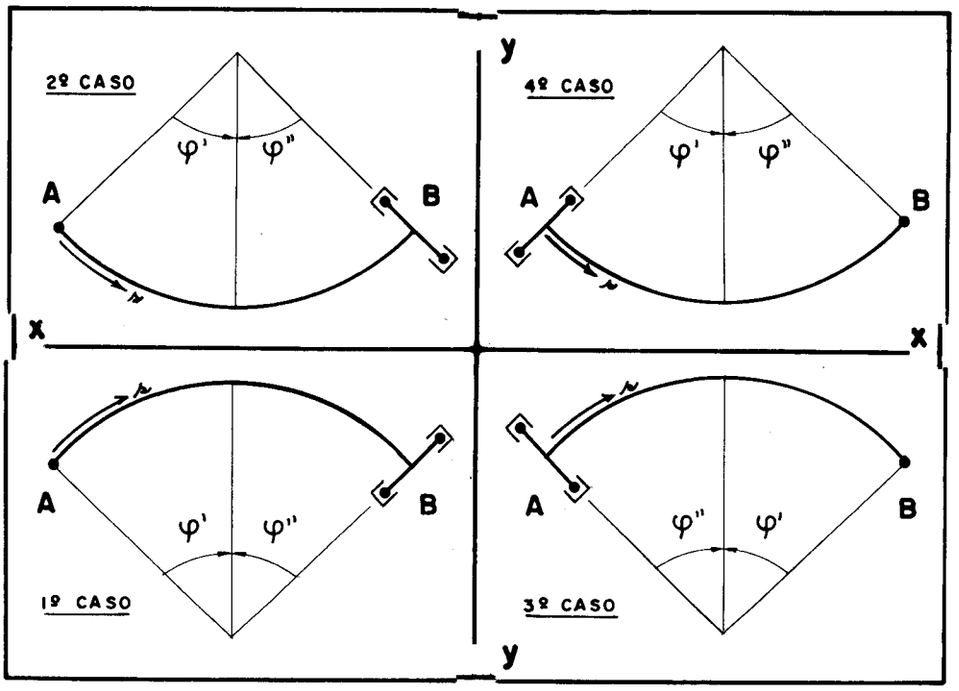


FIG. 3.4.1 - CASOS POSSIVEIS DE VIGA SIMPLES ISOSTÁTICA BIAPOIADA COM APOIO RESISTENTE À TORÇÃO.

Em problemas estruturais, as considerações de simetria, em geral, supoem de início 3 condições pré-estabelecidas:

1º - Tipo de simetria

Isto é, a posição do centro, eixo ou plano de simetria.

2º - Grandeza geométrica básica

Sendo a simetria uma correspondência geométrica, é preciso definir uma grandeza geométrica que em pontos simétricos de estados de deslocamento simétricos, possue mesmo valor e sinal.

3º - Convenção de sinais das grandezas

As demais grandezas em jogo, tem, em cada estado simétrico, suas próprias convenções de sinais, não levando em conta a simetria.

Para melhor entender esta 3ª condição, observe-se que as convenções de sinais para cargas concentradas P e T, reações V e τ, esforços solicitantes M_T, M_F e Q dependem apenas da posição do observador e da extremidade início A, tomada sempre à esquerda do observador.

Uma vez estabelecidas as três condições anteriores é preciso definir então a característica de cada grandeza em relação a uma simetria dada e às convenções de sinais:

a) - Grandeza de característica simétrica

Uma grandeza é dita de característica simétrica se em pontos simétricos de dois estados de deslocamento simétricos, possuir o mesmo valor e sinal.

b) - Grandeza de característica antimétrica

A grandeza é dita de característica antimétrica se em pontos simétricos dos dois estados de deslocamento simétricos, possuir o mesmo valor absoluto, mas sinais contrários.

Nas simetrias mostradas na FIG. 3.4.1, pode-se tomar, como grandeza geométrica básica, em qualquer caso, as translações verticais (positivas para baixo) de todos os pontos possíveis na viga.

Observa-se então a característica das grandezas:

I - Simetria em torno de x - x

Causas: P é de característica simétrica
T é de característica antimétrica

Efeitos: M_T é de característica antimétrica
M_F é de característica simétrica
Q é de característica simétrica
V é de característica simétrica
τ é de característica antimétrica

II - Simetria em torno de y - y

Causas: P é de característica simétrica
T é de característica simétrica

Efeitos: M_T é de característica antimétrica
M_F é de característica simétrica
Q é de característica antimétrica
V é de característica simétrica
τ é de característica simétrica

Observe-se que as ordenadas das L.Is. são efeitos M_T, M_F, Q, V ou τ para as causas P ou T, ou melhor, são a relação:

$$\eta = \frac{\text{efeito}}{\text{causa}} \qquad \text{.....(3.3.39)}$$

Pelas regras de sinais da divisão, nota-se que conhecidas as ordenadas de uma L.I. num certo estado, pode-se determinar as ordenadas da L.I. de mesmo tipo, na estrutura simétrica, mantendo-se nos pontos simétricos o mesmo valor absoluto e trocando sucessivamente o sinal, quantas vezes for encontrado na simetria dada, a característica antimétrica na causa e no efeito.

Convém notar ainda que na simetria y - y, precisa-se trocar, nos 1ºs e 2ºs membros das expressões de L.Is., A por B, φ' por φ'', α por β e vice-versa.

Os resultados obtidos para os 4 casos da FIG. 3.4.1 são mostrados nas Tabelas 3.4.1; 3.4.2; 3.4.3 e 3.4.4.

3.5 - BREVE EXPLANAÇÃO SOBRE L.Is. DE VIGAS CIRCULARES HIPERESTÁTICAS

A obtenção de expressões analíticas para as L.Is. de vigas curvas, simples ou contínuas, com grau de hiperestaticidade 2 ou maior, torna-se bastante trabalhosa. Seria necessário resolver sistemas de equações lineares com coeficientes expressões trigonométricas de difícil simplificação. Por isso mesmo, essas L.Is., para vigas com qualquer grau de hiperestaticidade são obtidas numericamente, nos capítulos 5, 6, 7 e 8.

Será estudado aqui, analiticamente, apenas o caso da viga com grau de hiperestaticidade 1, com os dois apoios resistentes à torção (FIG. 3.5.1).

A viga será submetida aos carregamentos móveis P = 1 e T = 1 (independentes), que percorrem o eixo da viga, de raio R, e ângulo de abertura ϕ.

A posição da carga móvel é definida pelas coordenadas angulares φ' e φ''.

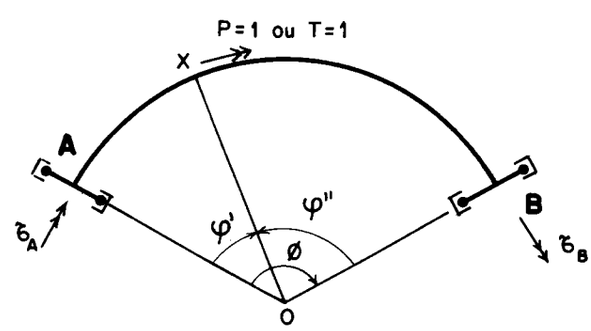


FIG. 3.5.1 - VIGA SIMPLES CIRCULAR DE GRAU DE hip = 1, COM DOIS APOIOS RESISTENTES À TORÇÃO.

Para achar a L.I. da reação momento de torção τ_A no apoio A (FIG. 3.5.1), para carga móvel P = 1, considerem-se os dois estados I e II (FIGS. 3.5.2.a e 3.5.2.b).

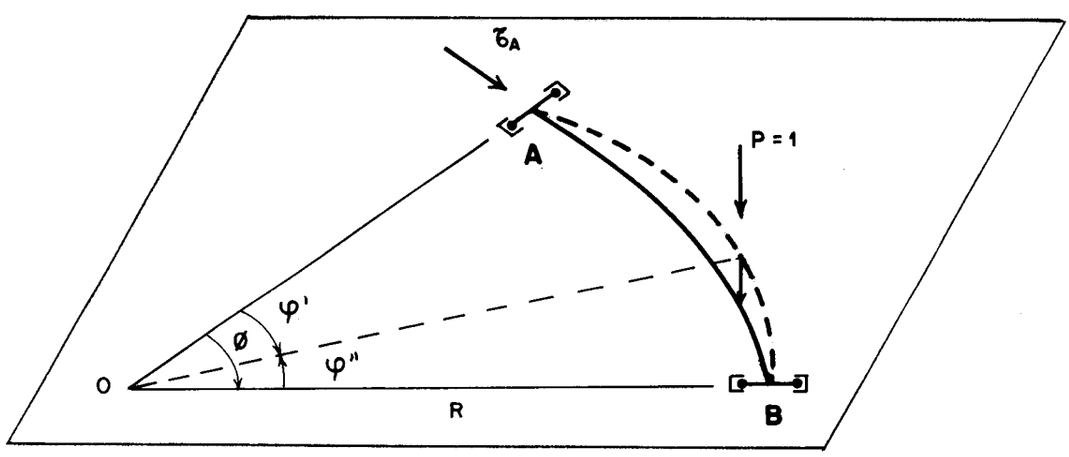


FIG. 3.5.2a - ESTADO I: VIGA HIPERESTÁTICA COM CARGA P= 1.

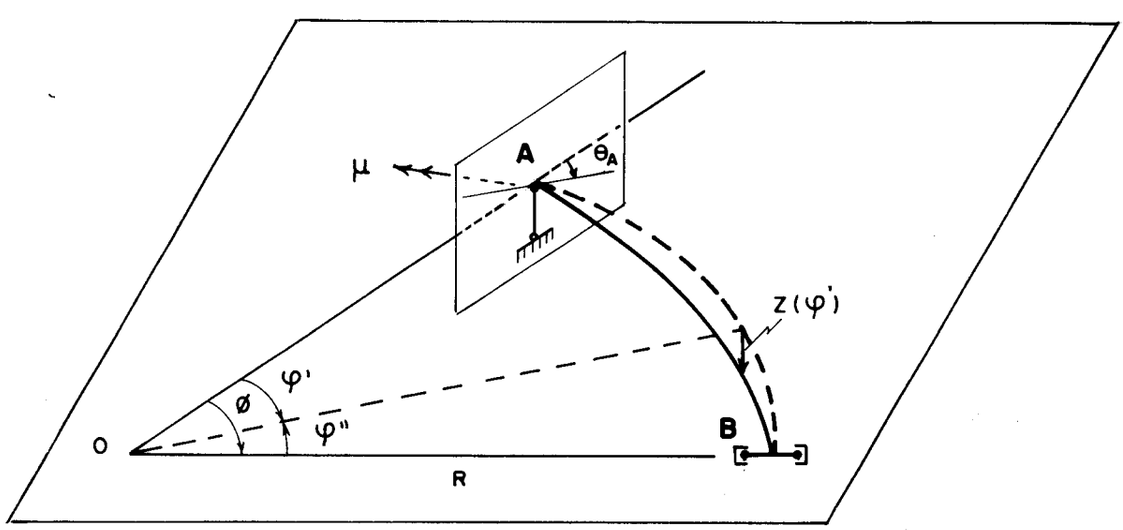


FIG. 3.5.2b - ESTADO II: VIGA ISOSTÁTICA COM MOMENTO DE TORÇÃO μ CONTRÁRIO A INCOGNITA τ_A.

O estado I, consiste da viga hiperestática dada carregada com a carga móvel P = 1 numa posição genérica.

O estado II, consiste da mesma viga, tornada isostática pela retirada do vínculo correspondente a τ_A e com um momento μ, contrário a τ_A aplicado na mesma posisção onde atua τ_A.

O Teorema de Betti, aplicado aos dois estados fornece:

$$- \tau_A \cdot \theta_A + P \cdot z(\varphi') = 0 \qquad \text{.....(3.5.1)}$$

donde:

$$\eta^{P}_{\tau_A} = \frac{\tau_A}{P} = \frac{z(\varphi')}{\theta_A} \qquad \text{.....(3.5.2)}$$

A expressão (3.5.2) diz que a ordenada $\eta^{P}_{\tau_A}$ da L.I. de τ_A para carga móvel P = 1 em cada ponto de coordenada φ' é igual ao deslocamento vertical $z(\varphi')$ por unidade de rotação θ_A, no apoio A da estrutura isostática (estado II), mas rotação essa com sentido contrário ao de τ_A.

Para encontrar a L.I. de τ_A devido a T = 1, deve-se no estado II, encontrar para cada coordenada φ as rotações de torção $\theta_x(\varphi)$ obtendo-se analogamente:

$$\eta^{T}_{\tau_A} = \frac{\tau_A}{T} = \frac{\theta_x(\varphi')}{\theta_A} \qquad \text{.....(3.5.3)}$$

A obtenção das L.Is. $^{P}_{\tau_A}$ e $^{T}_{\tau_A}$ recai então no problema já definido no parágrafo 2.7 de determinação da elástica $\theta_x(\varphi')$, $z(\varphi')$, do estado II, e do cálculo do valor $\theta_A = -\theta_x(0)$.

Para obter a elástica no estado II, observe-se que neste estado, os esforços solicitantes que interessam são:

$$M_T = -\mu \qquad \text{.....(3.5.4)}$$

$$M_F = 0 \qquad \text{.....(3.5.5)}$$

Levando essas últimas expressões (de equilíbrio) nas equações 2.7.1 e 2.7.2 (compatibilidade + constitutivas) e com as condições de contorno:

$$z(0) = 0 \qquad \text{.....(3.5.6)}$$

$$z(\phi) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.5.7)$$

$$\theta_x(\phi) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.5.8)$$

chega-se à elástica:

$$\theta_x(\varphi') = -\frac{\mu R \phi}{GJ_t}\left(\cos\varphi' - \frac{\operatorname{sen}\varphi'}{\tan\phi}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots(3.5.9)$$

$$z(\varphi') = -\frac{\mu R^2 \phi}{GJ_t}\left(1 - \cos\varphi' + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\tan\phi} - \frac{\varphi}{\phi}\right) \qquad \ldots(3.5.10)$$

sendo na extremidade esquerda:

$$\theta_A = -\theta_x(0) = \frac{\mu R \phi}{GJ_t} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.5.11)$$

Levando essas expressões em (3.5.2) e (3.5.3) obtém-se as L.Is. de τ_A devidas as P = 1 e a T = 1:

$$\boxed{\eta^P_{\tau_A} = -R\left(1 - \cos\varphi' + \frac{\operatorname{sen}\varphi'}{\tan\phi} - \frac{\varphi'}{\phi}\right)} \qquad \ldots(3.5.12)$$

$$\boxed{\eta^T_{\tau_A} = -\frac{\operatorname{sen}\varphi'}{\tan\phi} + \cos\varphi'} \qquad \ldots\ldots(3.5.13)$$

Pode-se agora, por considerações de simetria, obter também as L.Is. de τ_B, na mesma viga da FIG. 3.5.1, com 1 grau de hiperestaticidade. Também com considerações de simetria pode-se estender o cálculo para vigas com curvatura negativa. Esses resultados estão mostrados nas tabelas 3.5.1 e 3.5.2.

Quando se desejar as L.Is. para qualquer esforço ou reação na viga da FIG. 3.5.1 pode-se fazer a conhecida superposição de efeitos baseada no Processo dos Esforços:

$$\eta_E = \eta_{E(isost.)} + x \cdot \eta_{\tau_A} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.5.14)$$

onde: E = é o esforço para o qual se quer calcular a L.I.

η_E = é a linha de influência para o esforço E na es

trutura hiperestática.

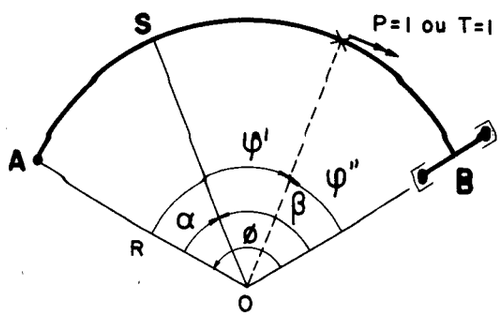
$\eta_{E(isost.)}$ = é a linha de influência para o esforço E na viga isostática obtida pela retirada do vínculo correspondente a τ_A na estrutura hiperestática.

η_{τ_A} = é a L.I., já conhecida, de reação τ_A na estrutura hiperestática.

χ = valor do esforço E, na estrutura isostática quando carregada com $\tau_A = 1$.

TABELA 3.4.1

LINHAS DE INFLUÊNCIA NA VIGA CURVA CIRCULAR ISOSTÁTICA BIAPOIADA CÔNCAVA COM O APOIO DIREITO ENGASTADO À TORÇÃO

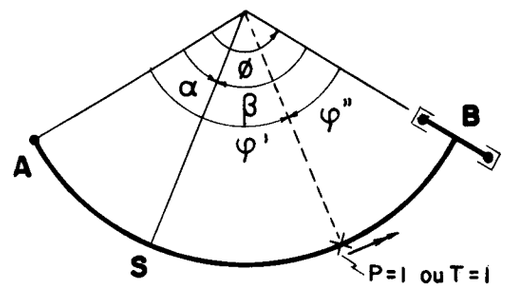


OBS: NAS EXPRESSÕES DA TABELA AS GRANDEZAS $\phi, \alpha, \beta, \varphi'$ E φ'' SÃO POSITIVAS SE COMO NA FIGURA.

			$\varphi' \leq \alpha$	$\varphi' \geq \alpha$
L.I$_s$. DE ESFORÇOS SOLICITANTES	Q	P=1	$\frac{\text{sen}\,\varphi''}{\text{sen}\,\phi} - 1$	$\frac{\text{sen}\,\varphi''}{\text{sen}\,\phi}$
		T=1	$\frac{\text{sen}\,\varphi''}{R\,\text{sen}\,\phi}$	$-\frac{\text{sen}\,\varphi''}{R\,\text{sen}\,\phi}$
	M_F	P=1	$R.\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\phi}.\text{sen}\,\varphi'$	$R.\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\phi}.\text{sen}\,\varphi''$
		T=1	$-\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\phi}\text{sen}\,\varphi'$	$-\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\phi}.\text{sen}\,\varphi''$
	M_T	P=1	$R\left[1-\cos(\alpha-\varphi')-\frac{(1-\cos\alpha)}{\text{sen}\,\phi}\text{sen}\,\varphi''\right]$	$-R.\frac{(1-\cos\alpha)}{\text{sen}\,\phi}.\text{sen}\,\varphi''$
		T=1	$\frac{(1-\cos\alpha)}{\text{sen}\,\phi}\text{sen}\,\varphi''+\cos(\alpha-\varphi')$	$\frac{(1-\cos\alpha)}{\text{sen}\,\phi}\text{sen}\,\varphi''$
L.I$_s$. DE REAÇÕES DE APOIO	V_A	P=1	$\frac{\text{sen}\,\varphi''}{\text{sen}\,\phi}$	
		T=1	$-\frac{\text{sen}\,\varphi''}{R\,\text{sen}\,\phi}$	
	V_B	P=1	$1-\frac{\text{sen}\,\varphi''}{\text{sen}\,\phi}$	
		T=1	$\frac{\text{sen}\,\varphi''}{R\,\text{sen}\,\phi}$	
	$\mathfrak{M}_B$	P=1	$-R\left[1-\cos\varphi''-\tan\left(\frac{\phi}{2}\right).\text{sen}\,\varphi''\right]$	
		T=1	$-\frac{\cos(\varphi''-\phi/2)}{\cos(\phi/2)}$	

TABELA 3.4.2

LINHAS DE INFLUÊNCIA NA VIGA CURVA CIRCULAR ISOSTÁTICA BIAPOIADA CONVEXA COM O APOIO DIREITO ENGASTADO À TORÇÃO.

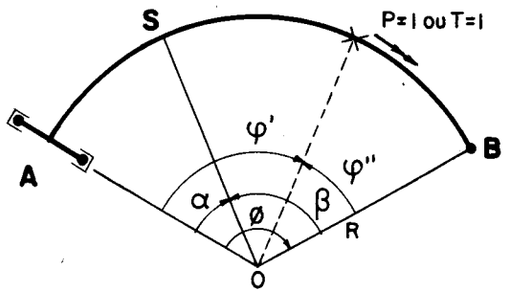


OBS: NAS EXPRESSÕES DA TABELA AS GRANDEZAS Ø, α, β, φ' E φ" SÃO POSITIVAS SE COMO NA FIGURA.

			$\varphi' \leq \alpha$	$\varphi' \geq \alpha$
L.I.s. DE ESFORÇOS SOLICITANTES	Q	P=1	$\frac{\text{sen}\,\varphi''}{\text{sen}\,\emptyset} - 1$	$\frac{\text{sen}\,\varphi''}{\text{sen}\,\emptyset}$
		T=1	$\frac{\text{sen}\,\varphi''}{R\,\text{sen}\,\emptyset}$	$\frac{\text{sen}\,\varphi''}{R\,\text{sen}\,\emptyset}$
	M_F	P=1	$R.\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\emptyset}\cdot\text{sen}\,\varphi'$	$R\cdot\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\emptyset}\cdot\text{sen}\,\varphi''$
		T=1	$\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\emptyset}\,\text{sen}\,\varphi'$	$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\emptyset}\cdot\text{sen}\,\varphi''$
	M_T	P=1	$-R\left[1-\cos(\alpha-\varphi')-\frac{(1-\cos\alpha)}{\text{sen}\,\emptyset}\,\text{sen}\,\varphi''\right]$	$R\cdot\frac{(1-\cos\alpha)}{\text{sen}\,\emptyset}\cdot\text{sen}\,\varphi''$
		T=1	$\frac{(1-\cos\alpha)}{\text{sen}\,\emptyset}\,\text{sen}\,\varphi''+\cos(\alpha-\varphi')$	$\frac{(1-\cos\alpha)}{\text{sen}\,\emptyset}\,\text{sen}\,\varphi''$
L.I.s. DE REAÇÕES DE APOIO	V_A	P=1	$\frac{\text{sen}\,\varphi''}{\text{sen}\,\emptyset}$	
		T=1	$\frac{\text{sen}\,\varphi''}{R\,\text{sen}\,\emptyset}$	
	V_B	P=1	$1-\frac{\text{sen}\,\varphi''}{\text{sen}\,\emptyset}$	
		T=1	$-\frac{\text{sen}\,\varphi''}{R\,\text{sen}\,\emptyset}$	
	τ_B	P=1	$R\left[1-\cos\varphi''-\tan\left(\frac{\emptyset}{2}\right).\text{sen}\,\varphi''\right]$	
		T=1	$-\frac{\cos(\varphi''-\emptyset/2)}{\cos(\emptyset/2)}$	

TABELA 3.4.3

LINHAS DE INFLUÊNCIA NA VIGA CURVA CIRCULAR ISOSTÁTICA BIAPOIADA CÔNCAVA COM O APOIO ESQUERDO ENGASTADO À TORÇÃO.

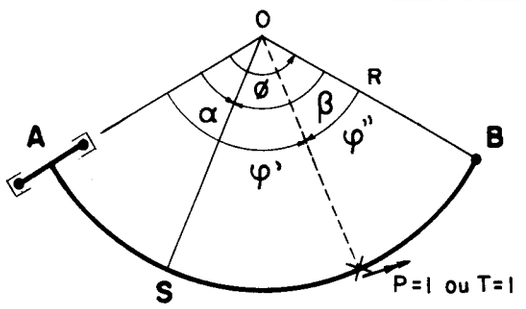


OBS: NAS EXPRESSÕES DA TABELA AS GRANDEZAS Ø, α, β, φ' E φ'' SÃO POSITIVAS SE COMO NA FIGURA.

			$\varphi' \leq \alpha$ $(\varphi'' \geq \beta)$	$\varphi' \geq \alpha$ $(\varphi'' \leq \beta)$
L.I$_s$. DE ESFORÇOS SOLICITANTES	Q	P=1	$-\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\varnothing}$	$1-\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\varnothing}$
		T=1	$\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{R\operatorname{sen}\varnothing}$	$\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{R\operatorname{sen}\varnothing}$
	M_F	P=1	$R.\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\varnothing}.\operatorname{sen}\varphi'$	$R.\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\varnothing}.\operatorname{sen}\varphi''$
		T=1	$-\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\varnothing}\operatorname{sen}\varphi'$	$-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\varnothing}\cdot\operatorname{sen}\varphi''$
	M_T	P=1	$R.\dfrac{(1-\cos\beta)}{\operatorname{sen}\varnothing}\operatorname{sen}\varphi'$	$-R\left[1-\cos(\beta-\varphi'')-\dfrac{(1-\cos\beta)}{\operatorname{sen}\varnothing}\operatorname{sen}\varphi'\right]$
		T=1	$-\dfrac{(1-\cos\beta)}{\operatorname{sen}\varnothing}\operatorname{sen}\varphi'$	$-\dfrac{(1-\cos\beta)}{\operatorname{sen}\varnothing}\operatorname{sen}\varphi'-\cos(\beta-\varphi'')$
L.I$_s$. DE REAÇÕES DE APOIO	V_A	P=1	$\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\varnothing}$	
		T=1	$-\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{R\operatorname{sen}\varnothing}$	
	V_B	P=1	$1-\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\varnothing}$	
		T=1	$\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{R\operatorname{sen}\varnothing}$	
	$\mathcal{T}_A$	P=1	$-R\left(1-\cos\varphi'-\tan\left(\dfrac{\varnothing}{2}\right).\operatorname{sen}\varphi'\right)$	
		T=1	$-\dfrac{\cos(\varphi'-\varnothing/2)}{\cos(\varnothing/2)}$	

TABELA 3.4.4

LINHAS DE INFLUÊNCIA NA VIGA CURVA CIRCULAR ISOSTÁTICA BIAPOIADA CONVEXA COM O APOIO ESQUERDO ENGASTADO À TORÇÃO.

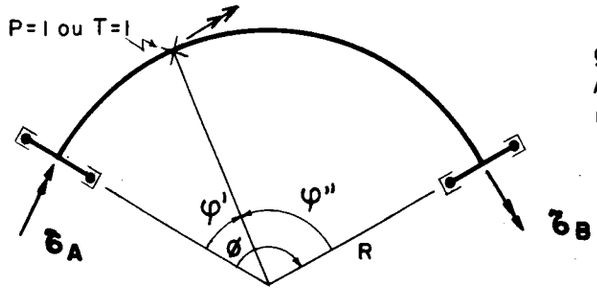


OBS: NAS EXPRESSÕES DA TABELA AS GRANDEZAS Ø, α, β, φ' E φ'' SÃO POSITIVAS SE COMO NA FIGURA.

			$\varphi' \leq \alpha$	$\varphi' \leq \alpha$
L.I$_s$. DE ESFORÇOS SOLICITANTES	Q	P=1	$-\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\varnothing}$	$1-\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\varnothing}$
		T=1	$-\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{R\operatorname{sen}\varnothing}$	$-\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{R\operatorname{sen}\varnothing}$
	M_F	P=1	$R\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\varnothing}\cdot\operatorname{sen}\varphi'$	$R\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\varnothing}\cdot\operatorname{sen}\varphi''$
		T=1	$\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\varnothing}\operatorname{sen}\varphi'$	$\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\varnothing}\operatorname{sen}\varphi''$
	M_T	P=1	$-R\cdot\dfrac{(1-\cos\beta)}{\operatorname{sen}\varnothing}\operatorname{sen}\varphi'$	$-R\left[1-\cos(\beta-\varphi'')-\dfrac{(1-\cos\beta)}{\operatorname{sen}\varnothing}\operatorname{sen}\varphi'\right]$
		T=1	$-\dfrac{(1-\cos\beta)}{\operatorname{sen}\varnothing}\operatorname{sen}\varphi'$	$-\dfrac{(1-\cos\beta)}{\operatorname{sen}\varnothing}\operatorname{sen}\varphi'-\cos(\beta-\varphi'')$
L.I$_s$. DE REAÇÕES DE APOIO	V_A	P=1	$\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\varnothing}$	
		T=1	$\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{R\operatorname{sen}\varnothing}$	
	V_B	P=1	$1-\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\varnothing}$	
		T=1	$-\dfrac{\operatorname{sen}\varphi'}{R\operatorname{sen}\varnothing}$	
	$\mathfrak{M}_A$	P=1	$R\left[1-\cos\varphi'-\tan\left(\dfrac{\varnothing}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\varphi\right]$	
		T=1	$-\dfrac{\cos(\varphi'-\varnothing/2)}{\cos(\varnothing/2)}$	

TABELA 3.5.1

LINHAS DE INFLUÊNCIA DE REAÇÃO DE TORÇÃO NA VIGA CURVA CIRCULAR BIAPOIADA CÔNCAVA COM OS APOIOS RESISTENTES À TORÇÃO.

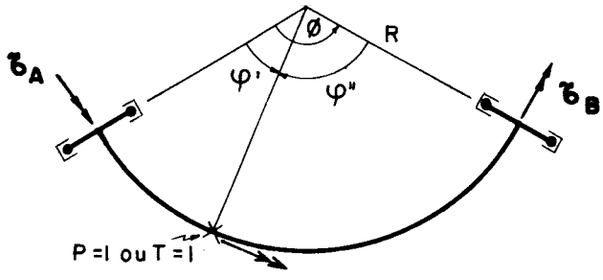


OBS: NAS EXPRESSÕES DA TABELA AS GRANDEZAS ϕ, φ' E φ'' SÃO POSITIVAS SE COMO NA FIGURA.

L.I$_s$. DE REAÇÃO DE TORÇÃO			
	τ_A	P=1	$-R\left(1-\cos\varphi' + \frac{\operatorname{sen}\varphi'}{\tan\phi} - \frac{\varphi'}{\phi}\right)$
		T=1	$\frac{\operatorname{sen}\varphi'}{\tan\phi} - \cos\varphi'$
	τ_B	P=1	$-R\left(1-\cos\varphi'' + \frac{\operatorname{sen}\varphi''}{\tan\phi} - \frac{\varphi''}{\phi}\right)$
		T=1	$\frac{\operatorname{sen}\varphi''}{\tan\phi} - \cos\varphi''$

TABELA 3.5.2

LINHAS DE INFLUÊNCIA DE REAÇÃO DE TORÇÃO NA VIGA CURVA CIRCULAR BIAPOIADA CONVEXA COM OS APOIOS RESISTENTES À TORÇÃO.



OBS: NAS EXPRESSÕES DA TABELA AS GRANDEZAS ϕ, φ' E φ'' SÃO POSITIVAS SE COMO NA FIGURA.

L.I$_s$. DE REAÇÃO DE TORÇÃO			
	τ_A	P=1	$R\left(1-\cos\varphi' + \frac{\operatorname{sen}\varphi'}{\tan\phi} - \frac{\varphi'}{\phi}\right)$
		T=1	$\frac{\operatorname{sen}\varphi'}{\tan\phi} - \cos\varphi'$
	τ_B	P=1	$R\left(1-\cos\varphi'' + \frac{\operatorname{sen}\varphi''}{\tan\phi} - \frac{\varphi''}{\phi}\right)$
		T=1	$\frac{\operatorname{sen}\varphi''}{\tan\phi} - \cos\varphi''$

CAPÍTULO 4

ESTUDO ANALÍTICO DA BARRA CURVA BIENGASTADA

4.1 - INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é estabelecer um procedimento que possibilite a obtenção da matriz de rigidez, dos esforços solicitantes e do vetor dos esforços de engastamento perfeito devido à cargas atuando em uma barra curva biengastada.

São válidas as hipóteses admitidas no capítulo 2.

Nas vigas contínuas planas, de eixo curvo horizontal, para obter as linhas de influência, objeto deste trabalho, será necessário considerar apenas dois tipos de carregamento:

1) força vertical concentrada P = 1

2) momento de torção concentrado T = 1.

A FIG. 4.1.1 mostra os sentidos positivos das cargas concentradas P e T, que podem atuar na barra curva. A mesma figura mostra os sentidos positivos, assim como a numeração dos esforços e deslocamentos nas 2 extremidades da barra. A numeração em cada extremidade corresponde à sequência torçor, fletor, cortante. Note-se que na extremidade esquerda os esforços concentrados co

incidem em valor e sinal com os esforços solicitantes, enquanto na direita trocam o sinal. Os vetores indicados nos pontos A e B: 1, 2, 3, 4, 5, 6 dão a direção e sentido do Sistema de Coordenadas Local.

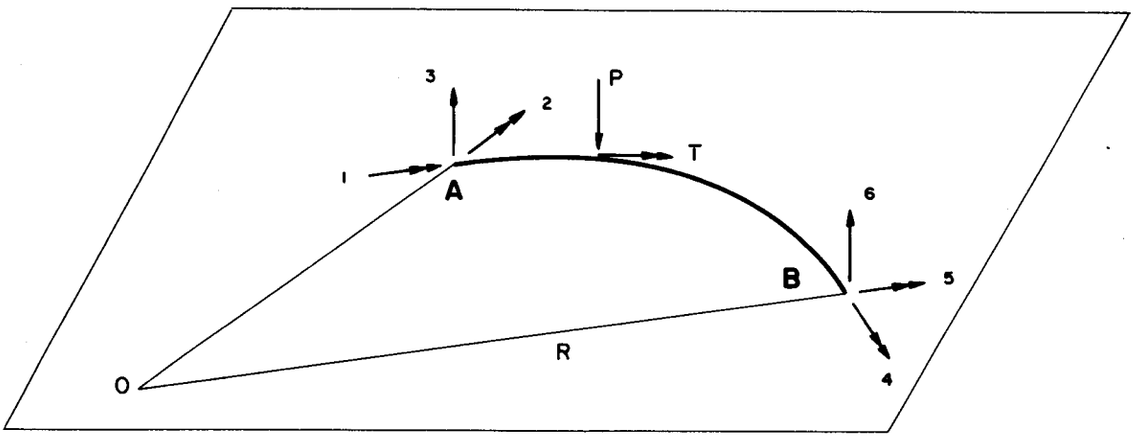


FIG. 4.1.1.- CARGAS E ESFORÇOS DE EXTREMIDADE POSITIVOS (SISTEMA DE COORDENADAS LOCAL).

Se forem conhecidas as matrizes de rigidez de cada barra e estabelecido um procedimento de cálculo que dê os esforços de engastamento perfeito para os dois tipos de carga (P e T), será possível obter as linhas de influência de esforços e deslocamentos em toda a viga contínua.

Os coeficientes de rigidez da barra curva poderiam ser calculados explicitamente usando as equações (2.7.11) e (2.7.12) do capítulo 2, impondo a elas condições de contorno em deslocamentos. Cada coeficiente a ser determinado levaria a um sistema literal de 6 equações e 6 incógnitas, envolvendo extensas expressões trigonométricas.

No presente trabalho a matriz de rigidez da viga curva será obtida apenas numericamente, usando-se um outro procedimento: primeiramente, usando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, calcula-se a matriz de flexibilidade relativa a 3 deslocamentos na extremidade livre de uma viga em balanço. A inversa, de ordem (3x3), desta matriz, será uma sub-matriz da matriz de rigidez da mesma

barra, relativa aos 6 deslocamentos de extremidades (referentes ao Sistema de Coordenadas Local). Os demais coeficientes da matriz serão calculados considerando equações de equilíbrio e considerando também a reciprocidade expressa pelo teorema de Maxwell.

Os esforços de engastamento perfeito devido ao carregamento atuando ao longo do eixo da viga curva também serão obtidos apenas numericamente, usando-se o Processo dos Esforços.

Os esforços solicitantes numa seção interna da viga serão encontrados à partir dos esforços de extremidade.

4.2 - ESFORÇOS SOLICITANTES NA VIGA EM BALANÇO COM A EXTREMIDADE ESQUERDA LIVRE

Os esforços solicitantes momentos torçor e fletor que aparecem na viga em balanço com a extremidade esquerda livre, numa seção genérica de coordenada angular φ, devidos respectivamente à cargas unitárias aplicadas na extremidade A, na direção das coordenadas locais 1, 2 e 3, devidos à força vertical concentrada P, e devidos a momento de torção concentrado T, sendo P e T aplicados num ponto do eixo, de coordenada angular φ_c, conforme FIG. 4.2.1, valem:

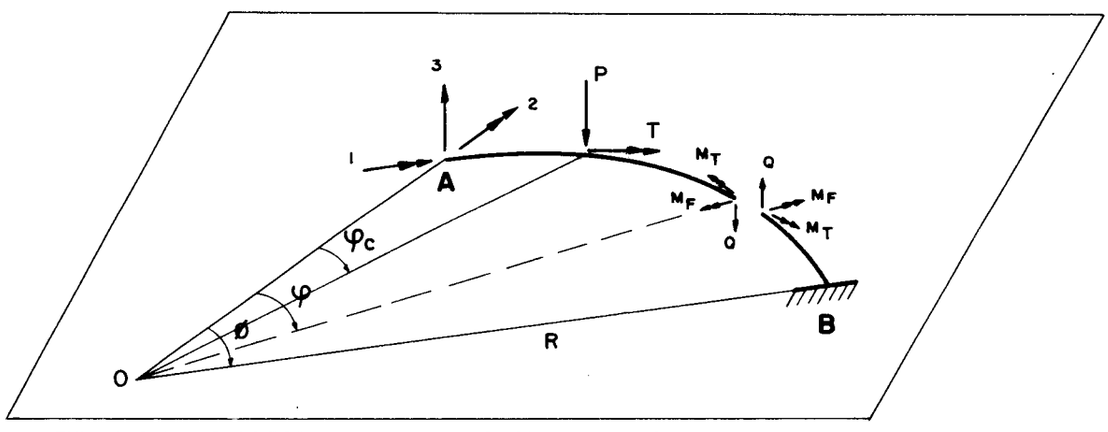


FIG. 4.2.1 - CARREGAMENTOS E ESFORÇOS SOLICITANTES NA VIGA CURVA EM BALANÇO.

a) momento de torção unitário aplicado na direção da coordenada 1:

$$M_T = \cos\varphi \qquad \text{.....(4.2.1)}$$

$$M_F = \operatorname{sen}\varphi \qquad \text{.....(4.2.2)}$$

b) momento de flexão unitário aplicado na direção da coordenada 2:

$$M_T = -\operatorname{sen}\varphi \qquad \text{.....(4.2.3)}$$

$$M_F = \cos\varphi \qquad \text{.....(4.2.4)}$$

c) força vertical unitária aplicada na direção da coordenada 3:

$$M_T = -R(1-\cos\varphi) \qquad \text{.....(4.2.5)}$$

$$M_F = R\operatorname{sen}\varphi \qquad \text{.....(4.2.6)}$$

d) força vertical concentrada P aplicada no ponto de coordenada angular φ_c:

$$M_T = \begin{cases} 0 \;;\; \text{p/ } \varphi \leq \varphi_c & \text{.....(4.2.7)} \\ PR\left[1-\cos(\varphi-\varphi_c)\right] \;;\; \text{p/ } \varphi_c < \varphi \leq \phi & \text{....(4.2.8)} \end{cases}$$

$$M_F = \begin{cases} 0 \;;\; \text{p/ } \varphi \leq \varphi_c & \text{.....(4.2.9)} \\ -PR\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_c) \;;\; \text{p/ } \varphi_c < \varphi \leq \phi & \text{.....(4.2.10)} \end{cases}$$

e) momento de torção concentrado T aplicado no ponto de coordenada angular φ_c:

$$M_T = \begin{cases} 0 \;;\; \text{p/ } \varphi \leq \varphi_c & \text{.....(4.2.11)} \\ T\cos(\varphi-\varphi_c) \;;\; \text{p/ } \varphi_c < \varphi \leq \phi & \text{.....(4.2.12)} \end{cases}$$

$$M_F = \begin{cases} 0 \;;\; \text{p/ } \varphi \leq \varphi_c & \text{.....(4.2.13)} \\ T\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_c) \;;\; \varphi_c < \varphi \leq \phi & \text{.....(4.2.14)} \end{cases}$$

4.3 - MATRIZES DE EQUILÍBRIO DE ESFORÇOS NUMA BARRA

Com a finalidade de se escrever expressões mais compactas nos parágrafos e capítulos que se seguem, procurar-se-á estabelecer aqui um procedimento matricial para, conhecidos os esforços de extremidade em uma barra, curva ou reta, se calcular os esforços solicitantes M_T, M_F e Q em qualquer seção e para o relacionamento entre os esforços de extremidade, na barra curva.

4.3.1 - Matriz de equilíbrio que relaciona os esforços de extremidade na barra curva

Os esforços nas extremidades de uma barra curva podem ser relacionados por uma matriz de equilíbrio [E] , cujos coeficientes são fáceis de serem expressos analiticamente, já que são provenientes das 3 equações de equilíbrio escritas para a viga.

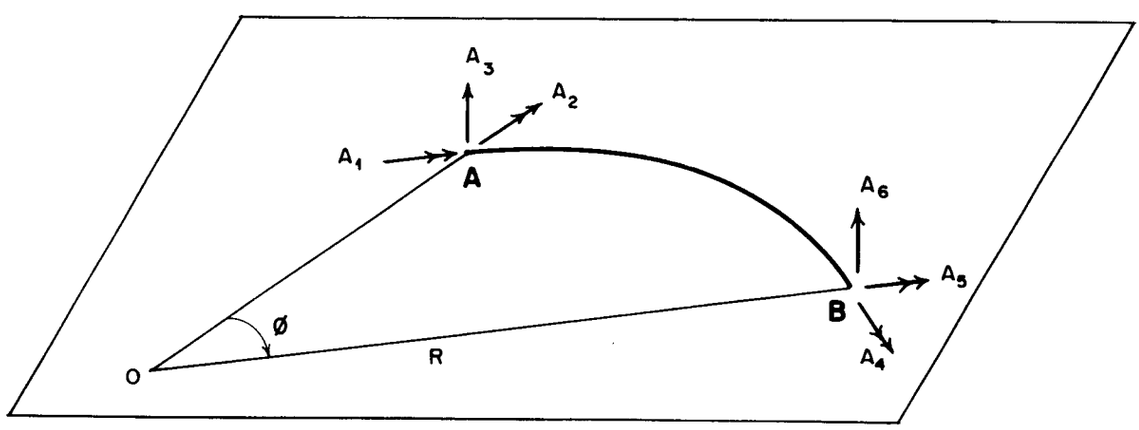


FIG. 4.3.1 - ESFORÇOS EM EQUILÍBRIO NAS EXTREMIDADES DA VIGA CURVA.

Assim, supondo a inexistência de algum outro carregamento entre A e B, pode-se escrever entre as ações A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 (vide FIG. 4.3.1) a relação:

$$\begin{Bmatrix} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\phi & \operatorname{sen}\phi & R(1-\cos\phi) \\ -\operatorname{sen}\phi & -\cos\phi & -R\operatorname{sen}\phi \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \quad \ldots.(4.3.1)$$

Em (4.3.1) tem-se 3 equações exprimindo o equilíbrio de momentos em relação ao eixo tangente que passa por B, o equilíbrio de momentos em relação ao eixo radial que passa por B e o equilíbrio de forças verticais.

Então:

$$\begin{Bmatrix} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots.(4.3.2)$$

onde:

$$[E] = \begin{bmatrix} -\cos\phi & \operatorname{sen}\phi & R(1-\cos\phi) \\ -\operatorname{sen}\phi & -\cos\phi & -R\operatorname{sen}\phi \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \ldots.(4.3.3)$$

A matriz [E] , de ordem (3 x 3) é a <u>matriz de equilíbrio</u> que relaciona os esforços da extremidade inicial com os esforços da extremidade final, supondo a inexistência de cargas ao longo da barra.

4.3.2 - <u>Matrizes de Equilíbrio para o Cálculo dos Esforços Solicitantes a Partir das Forças de Extremidade</u>

No presente trabalho, o carregamento atuante é sempre uma única carga concentrada. Sendo assim, será possível calcular os esforços solicitantes em qualquer seção S, a partir dos esforços de uma das extremidades, sem necessidade de envolver esse carregamento concentrado. Basta calcular-se os esforços solicitantes na seção S, a partir do equilíbrio de forças escrito para o lado da viga que não contém o carregamento concentrado (vide FIG. 4.3.2).

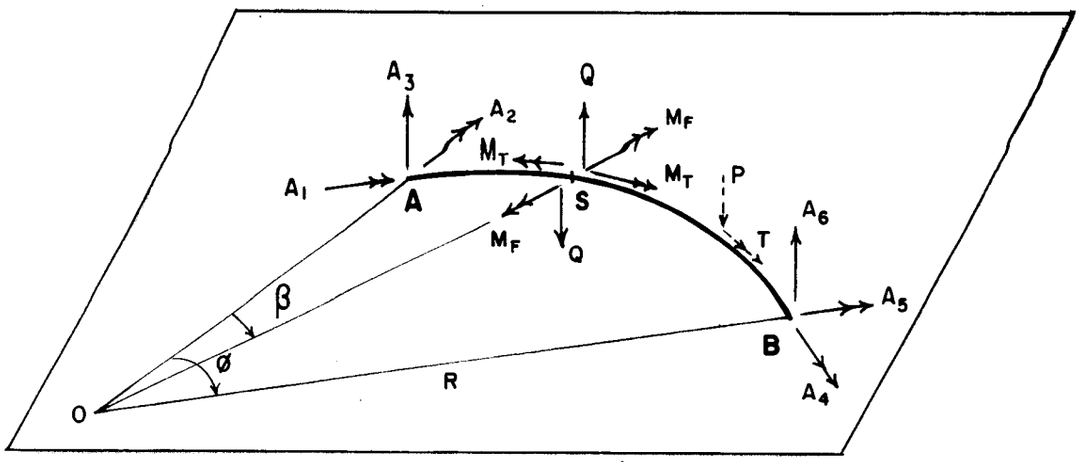


FIG. 4.3.2. - VIGA CURVA CARREGADA EM EQUILÍBRICO

Consideram-se portanto 2 casos:

a) a partir dos esforços da extremidade esquerda:

$$\begin{Bmatrix} M_T \\ M_F \\ Q \end{Bmatrix} = \left[T_{AS} \right] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \qquad \text{.....(4.3.4)}$$

sendo $\left[T_{AS} \right]$ uma matriz de equilíbrio, de ordem (3 x 3), que relaciona os esforços da extremidade com o vetor dos esforços solicitantes na seção S.

Na viga curva, de raio R, abertura ϕ, e seção S de coordenada angular φ_s (vide FIG. 4.3.2), a matriz $\left[T_{AS} \right]$ tem a forma:

$$\left[T_{AS} \right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_s & -\operatorname{sen}\varphi_s & -R(1-\cos\varphi_s) \\ \operatorname{sen}\varphi_s & \cos\varphi_s & R\operatorname{sen}\varphi_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.....(4.3.5)

Quando se tratar de barra reta, definida pelo comprimento ℓ, a seção S fica determinada pela coordenada linear a_s e a matriz $\left[T_{AS}\right]$ tem a forma:

$$\left[T_{AS}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.3.6)$$

b) a partir da extremidade direita:

$$\begin{Bmatrix} M_T \\ M_F \\ Q \end{Bmatrix} = \left[T_{BS}\right] \begin{Bmatrix} A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{Bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.3.7)$$

sendo $\left[T_{BS}\right]$ uma matriz de equilíbrio, de ordem (3 x 3), que relaciona os esforços da extremidade B com o vetor dos esforços solicitantes.

Na viga curva, de abertura ϕ e raio R, sendo a seção S definida pela coordenada angular φ_s, a matriz $\left[T_{BS}\right]$ vale:

$$\left[T_{BS}\right] = \begin{bmatrix} -\cos(\phi - \varphi_s) & -\operatorname{sen}(\phi - \varphi_s) & R\,[1 - \cos(\phi - \varphi_s)] \\ \operatorname{sen}(\phi - \varphi_s) & -\cos(\phi - \varphi_s) & R \operatorname{sen}(\phi - \varphi_s) \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots(4.3.8)$$

Para barra reta, de comprimento ℓ, com a seção S dada pela coordenada linear a_s, a matriz $\left[T_{BS}\right]$ tem a forma:

$$\left[T_{BS}\right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (\ell - a_s) \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots(4.3.9)$$

4.4 - DESLOCAMENTOS NA EXTREMIDADE LIVRE DA VIGA CURVA EM BALANÇO

Seja a viga curva em balanço, com a extremidade esquerda livre, com 3 coordenadas nodais 1, 2 e 3 no extremo A, conforme FIG. 4.3.1.

Cada um dos 5 carregamentos independentes considerados no parágrafo 4.2, causam nas direções 1, 2 e 3, deslocamentos δ_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3) e Δ_{ik} (i = 1, 2, 3; k = 1, 2). Os deslocamentos δ_{ij} que aparecem na direção da coordenada i devido a um carregamento unitário na coordenada j, são os coeficientes de flexibilidade que formam a matriz de flexibilidade da viga em balanço, relativamente às coordenadas 1, 2 e 3. Os deslocamentos Δ_{ik} aparecem na direção das coordenadas 1, 2 ou 3, devidos ao carregamento P ou T aplicados numa seção de coordenada φ_c.

A prática mostra que o instrumento eficiente para o cálculo dos deslocamentos δ_{ij} ou Δ_{ik} é o Princípio dos Trabalhos Virtuais, da mesma maneira como faz VREDEN[17,18]. Assim, basta levar as expressões dos esforços solicitantes (4.2.1) a (4.2.14) na equação do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Tem-se então, desprezando as deformações por esforço cortante:

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EJ} \cdot \int_{est} M_F^i \cdot M_F^j \cdot ds + \frac{1}{GJ_t} \cdot \int_{est} M_T^i \cdot M_T^j \cdot ds \quad \ldots (4.4.1)$$

$$\Delta_{ik} = \frac{1}{EJ} \cdot \int_{est} M_F^i \cdot M_F^k \cdot ds + \frac{1}{GJ_t} \cdot \int_{est} M_T^i \cdot M^k \cdot ds \quad \ldots (4.4.2)$$

onde os índices i referem-se aos estados de carregamentos unitários relativos às direções 1, 2 e 3; os índices j referem-se aos estados de deslocamentos devidos à cargas unitárias na extremidade, e os índices k referem-se aos estados de deslocamentos devidos às cargas P e T.

Para os momentos torçores e fletores expressos em termos da coordenada angular φ, chega-se à:

$$\delta_{ij} = \frac{R}{EJ} \int_0^{\phi} (M_F^i \cdot M_F^j + \lambda M_T^i \cdot M_T^j) \, d\varphi \quad \ldots\ldots (4.4.3)$$

$$\Delta_{ik} = \frac{R}{EJ}\int_{\varphi_c}^{\phi} (M_F^i \cdot M_F^k + \lambda M_T^i \cdot M_T^k)\, d\varphi \qquad .....(4.4.4)$$

Segue-se o cálculo dos δ_{ij} e Δ_{ik}, sendo indicados, em cada caso, os respectivos estados de deslocamentos e carregamentos utilizados para se aplicar a equação do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

A carga P ou T estará aplicada num ponto de coordenada $\varphi_c = \alpha$, tal que $\beta = \phi - \varphi_c = \phi - \alpha$.

4.4.1 - Cálculo de δ_{11}

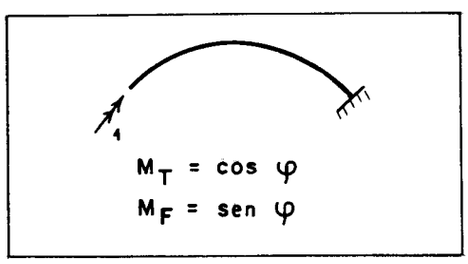


FIG. 4.4.1a - ESTADO DE DESLOCAMENTO PARA CÁLCULO DE δ_{11}

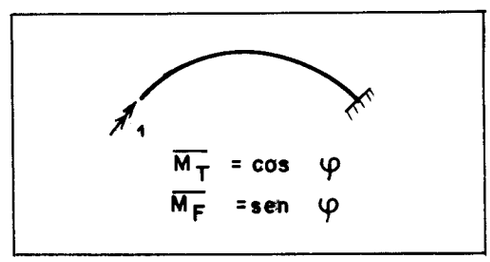


FIG. 4.4.1b - ESTADO DE CARREGAMENTO PARA CÁLCULO DE δ_{11}

$$\delta_{11} = \frac{R}{EJ}\int_0^{\phi} (\text{sen}\varphi \cdot \text{sen}\varphi + \lambda \cos\varphi \cdot \cos\varphi)\, d\varphi \qquad ....(4.4.5)$$

$$\delta_{11} = \frac{R}{EJ}\left[\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\text{sen}\,2\varphi}{4}\right) + \lambda\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\text{sen}\,2\varphi}{4}\right)\right]_0^{\phi} \qquad ..(4.4.6)$$

$$\boxed{\delta_{11} = \frac{R}{EJ}\left[\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\phi - \left(\frac{1-\lambda}{4}\right) \cdot \text{sen}\,2\phi \right]} \qquad ..(4.4.7)$$

4.4.2 - Cálculo de δ_{22}

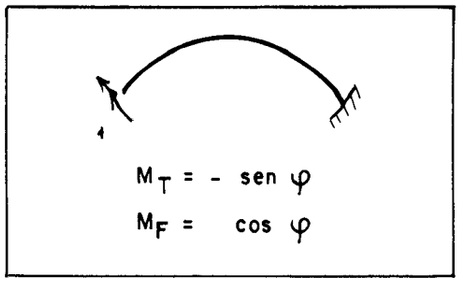


FIG. 4.4.2a - ESTADO DE DESLOCAMENTO PARA CÁLCULO DE δ_{22}

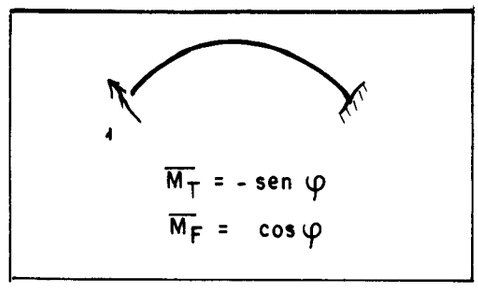


FIG. 4.4.2b - ESTADO DE CARREGAMENTO PARA CÁLCULO DE δ_{22}

$$\delta_{22} = \frac{R}{EJ}\int_0^{\phi} [\cos\varphi \ \cos\varphi + \lambda\,(-\,\text{sen}\varphi)(-\,\text{sen}\varphi)]\ d\varphi \quad ..(4.4.8)$$

$$\delta_{22} = \frac{R}{EJ}\left[\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\text{sen}\,2\varphi}{4}\right) + \lambda\left(\frac{\varphi}{2} - \text{sen}\,2\varphi\right)\right]_0^{\phi} \quad ....(4.4.9)$$

$$\boxed{\delta_{22} = \frac{R}{EJ}\left[\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\phi + \left(\frac{1-\lambda}{4}\right)\text{sen}\ 2\ \phi\right]} \quad ...(4.4.10)$$

4.4.3 - Cálculo de δ_{33}

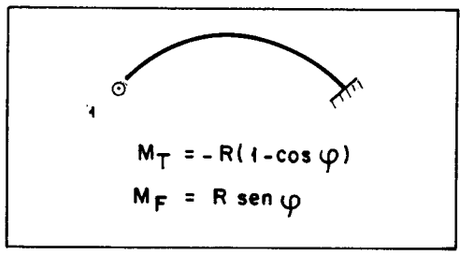


FIG. 4.4.3a - ESTADO DE DESLOCAMENTO PARA CÁLCULO DE δ_{33}

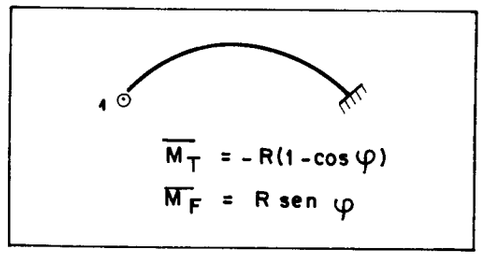


FIG. 4.4.3b - ESTADO DE CARREGAMENTO PARA CÁLCULO DE δ_{33}

$$\delta_{33} = \frac{R}{EJ}\int_0^{\phi} \{R\,\mathrm{sen}\varphi \,.\, R\,\mathrm{sen}\varphi + \lambda\,[-R\,(1-\cos\varphi)]\,[-R(1-\cos\varphi)]\}\; d\varphi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.4.11)$$

$$\delta_{33} = \frac{R^3}{EJ}\int_0^{\phi} [\mathrm{sen}^2\varphi + \lambda(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)]\; d\varphi \qquad \ldots\ldots(4.4.12)$$

$$\delta_{33} = \frac{R^3}{EJ}\left[\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,2\varphi}{4}\right) + \lambda\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,2\varphi}{4}\right) + \lambda\varphi - 2\lambda\,\mathrm{sen}\varphi\right]_0^{\phi} \ldots(4.4.13)$$

$$\boxed{\delta_{33} = \frac{R^3}{EJ}\left[\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\phi - \left(\frac{1-\lambda}{4}\right)\mathrm{sen}\,2\phi - \lambda(2\,\mathrm{sen}\,\phi - \phi)\right]} \qquad \ldots(4.4.14)$$

4.4.4 - Cálculo de δ_{12} e δ_{21}

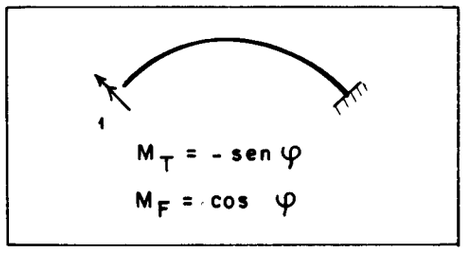


FIG. 4.4.4a - ESTADO DE DESLOCAMENTO PARA CÁLCULO DE δ_{12}

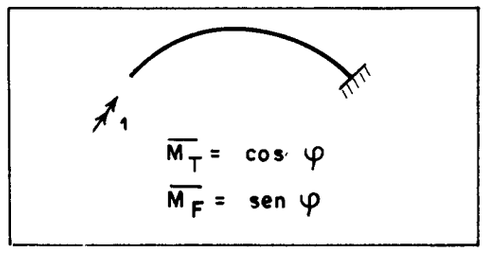


FIG. 4.4.4b - ESTADO DE CARREGAMENTO PARA CÁLCULO DE δ_{12}

$$\delta_{12} = \frac{R}{EJ}\int_0^{\phi} [\cos\varphi \,.\, \mathrm{sen}\varphi + \lambda\,(-\mathrm{sen}\varphi)\,\cos\varphi]\; d\varphi \qquad \ldots\ldots(4.4.15)$$

$$\delta_{12} = \frac{R}{EJ}\,(1-\lambda)\int_0^{\phi} \mathrm{sen}\varphi\;\cos\varphi\;\; d\varphi \qquad \ldots\ldots(4.4.16)$$

$$\delta_{12} = \frac{R}{EJ}\,(1-\lambda)\,.\,\left.\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{2}\right|_0^{\phi} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.4.17)$$

$$\boxed{\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{R}{EJ}\,.\,\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\,.\,\mathrm{sen}^2\,\phi} \qquad \ldots\ldots(4.4.18)$$

4.4.5 - Cálculo de δ_{13} e δ_{31}

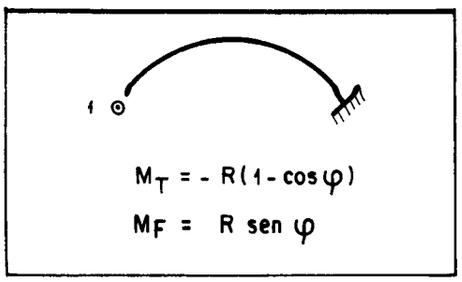


FIG. 4.4.5a - ESTADO DE DESLOCAMENTO PARA CÁLCULO DE δ_{13}

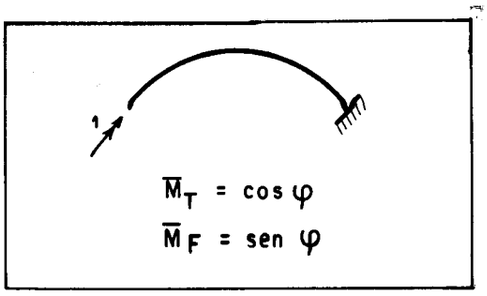


FIG. 4.4.5b - ESTADO DE CARREGAMENTO PARA CÁLCULO DE δ_{13}

$$\delta_{13} = \frac{R}{EJ}\int_0^{\phi} \{R.\operatorname{sen}\varphi.\operatorname{sen}\varphi + \lambda\,[-R\,(1-\cos\varphi)]\,\cos\varphi\}\,d\varphi \quad ..(4.4.19)$$

$$\delta_{13} = \frac{R^2}{EJ}\int_0^{\phi} [\operatorname{sen}^2\varphi + \lambda\,(\cos^2\varphi - \cos\varphi\,)]\,d\varphi \quad .....(4.4.20)$$

$$\delta_{13} = \frac{R^2}{EJ}\left[\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{4}\right) + \lambda\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\varphi}{4}\right) - \lambda\operatorname{sen}\varphi\right]_0^{\phi} \quad ....(4.4.21)$$

$$\boxed{\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{R^2}{EJ}\left[\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\phi - \left(\frac{1-\lambda}{4}\right)\operatorname{sen}2\phi - \lambda\operatorname{sen}\phi\right]} \quad ..(4.4.22)$$

4.4.6 - Cálculo de δ_{23} e δ_{32}

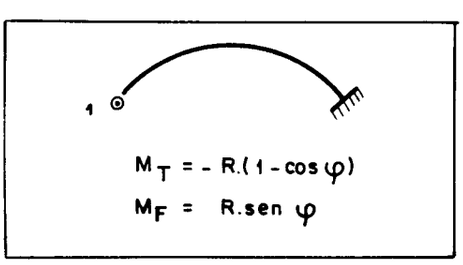


FIG. 4.4.6a - ESTADO DE DESLOCAMENTO PARA CÁLCULO DE δ_{23}

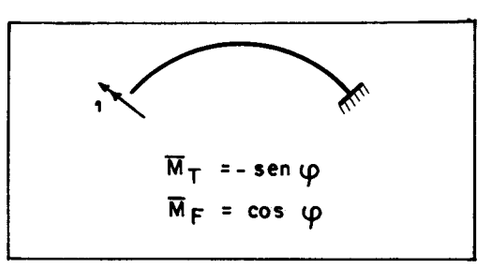


FIG. 4.4.6b - ESTADO DE CARREGAMENTO PARA CÁLCULO DE δ_{23}

$$\delta_{23} = \frac{R}{EJ}\int_0^{\phi} \{R \,.\, \text{sen}\varphi \,.\, \cos\varphi + \lambda\,[-R\,(1-\cos\varphi)(-\text{sen}\varphi)]\}\, d\varphi \quad ..(4.4.23)$$

$$\delta_{23} = \frac{R^2}{EJ}\int_0^{\phi} [(1-\lambda)\ \text{sen}\,\varphi\ \cos\varphi\ + \lambda\ \text{sen}\varphi]\ d\varphi \quad .....(4.4.24)$$

$$\delta_{23} = \frac{R^2}{EJ}\left[(1-\lambda)\ \frac{\text{sen}^2\varphi}{2}\ - \lambda\ \cos\varphi\right]_0^{\phi} \quad .....(4.4.25)$$

$$\boxed{\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{R^2}{EJ}\left[\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\ \text{sen}^2\ \phi + \lambda(1-\cos\ \phi)\right]} \quad ...(4.4.26)$$

4.4.7 - Cálculo de Δ_{11} (deslocamento na direção da coordenada 1, devido a carga P aplicada no ponto de coordenada $\varphi_c = \alpha$)

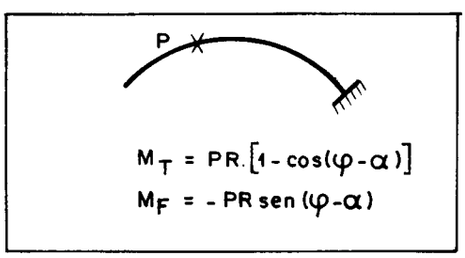


FIG. 4.4.7a - ESTADO DE DESLOCAMENTO PARA CÁLCULO DE Δ_{11}.

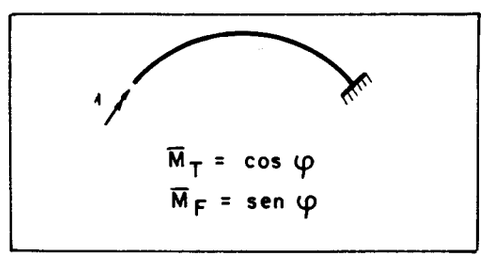


FIG. 4.4.7b - ESTADO DE CARREGAMENTO PARA CÁLCULO DE Δ_{11}.

$$\Delta_{11} = \frac{R}{EJ}\int_{\alpha}^{\phi} \{-PR\ \text{sen}(\varphi-\alpha)\ .\ \text{sen}\varphi + \lambda\,PR\,[1-\cos(\varphi-\alpha)]\ .\ \cos\varphi\}\ d\varphi$$

$$.....(4.4.27)$$

$$\Delta_{11} = \frac{PR^2}{EJ}\int_{\alpha}^{\phi} [-\text{sen}\varphi\ .\ \text{sen}(\varphi-\alpha) - \lambda\cos\varphi\ .\cos(\varphi-\alpha) + \lambda\cos\varphi]\ d\varphi$$

$$.....(4.4.28)$$

$$\Delta_{11} = \frac{PR^2}{EJ}\left[-\frac{1}{2}\varphi\cos\ \alpha + \frac{1}{2}\ \text{sen}\varphi\ \cos\ (\varphi-\alpha) - \frac{\lambda}{2}\varphi\ \cos\ \alpha\ -\right.$$

$$\left. -\frac{\lambda}{2}\ \text{sen}\varphi\ \cos(\varphi-\alpha) + \lambda\ \text{sen}\varphi\right]_{\alpha}^{\phi} \quad .....(4.4.29)$$

$$\Delta_{11} = \frac{PR^2}{EJ}\left[-\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)(\phi-\alpha)\cos\alpha + \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)[\operatorname{sen}\phi\cos(\phi-\alpha) - \operatorname{sen}\alpha] + \right.$$

$$\left. + \lambda(\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\alpha)\right] \qquad \ldots\ldots\ldots(4.4.30)$$

Tendo-se que:

$$\beta = \phi - \varphi_c = \phi - \alpha \qquad \ldots\ldots\ldots(4.4.31)$$

$$\Delta_{11} = \frac{PR^2}{EJ}\left[-\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\beta\cos\alpha + \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)[\operatorname{sen}\phi\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha] + \lambda(\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\alpha)\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots(4.4.32)$$

ou:

$$\boxed{\Delta_{11} = \frac{PR^2}{EJ}\left[-\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\beta\cos\alpha + \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\operatorname{sen}\beta\cos\phi + \lambda(\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\alpha)\right]}$$

$$\ldots\ldots\ldots(4.4.33)$$

4.4.8 - Cálculo de Δ_{21} (deslocamento na direção da coordenada 2, devido à carga P aplicado no ponto de coordenada $\varphi_c = \alpha$)

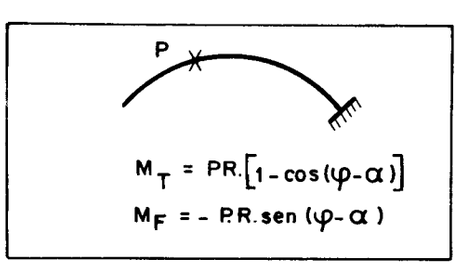


FIG. 4.4.8a - ESTADO DE DESLOCAMENTO PARA CÁLCULO DE Δ_{21}

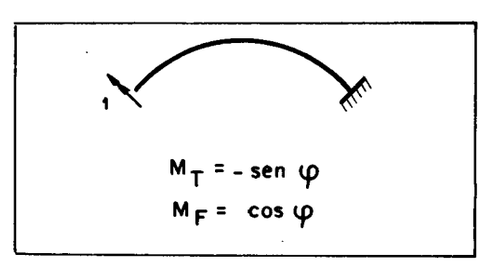


FIG. 4.4.8b - ESTADO DE CARREGAMENTO PARA CÁLCULO DE Δ_{21}

$$\Delta_{21} = \frac{R}{EJ}\int_{\alpha}^{\phi}\left\{[-PR\,\mathrm{sen}(\varphi-\alpha)]\cos\varphi + \lambda PR[1-\cos(\varphi-\alpha)]\ (-\mathrm{sen}\varphi)\right\} d\varphi$$

.....(4.4.34)

$$\Delta_{21} = \frac{PR^2}{EJ}\int_{\alpha}^{\phi}[-\ \mathrm{sen}\ (\varphi-\alpha)\ \cos\varphi + \lambda\cos(\varphi-\alpha)\ \mathrm{sen}\varphi - \lambda\ \mathrm{sen}\varphi\ ]\ d\varphi$$

.....(4.4.35)

$$\Delta_{21} = \frac{PR^2}{EJ}\left[-\frac{1}{2}\ \mathrm{sen}\ (\varphi-\alpha)\ \mathrm{sen}\varphi + \frac{1}{2}\varphi\ \ \mathrm{sen}\ \alpha + \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{sen}\ (\varphi-\alpha)\ \mathrm{sen}\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{2}\varphi\ \ \mathrm{sen}\ \alpha + \lambda\ \cos\varphi\right]_{\alpha}^{\phi}$$ .....(4.4.36)

$$\Delta_{21} = \frac{PR^2}{EJ}\left[-\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\mathrm{sen}\ \phi\ \mathrm{sen}(\phi-\alpha) + \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)(\phi-\alpha)\ \mathrm{sen}\ \alpha + \lambda(\cos\phi-\cos\alpha)\right]$$

.....(4.4.37)

$$\boxed{\Delta_{21} = \frac{PR^2}{EJ}\left[-\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\mathrm{sen}\ \phi\ \mathrm{sen}\ \beta + \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\ \beta\ \mathrm{sen}\ \alpha + \lambda(\cos\ \phi - \cos\ \alpha)\right]}$$

.....(4.4.38)

4.4.9 - Cálculo de Δ_{31} (deslocamento na direção da coordenada 3, devido à carga P aplicada no ponto de coordenada $\varphi_c = \alpha$)

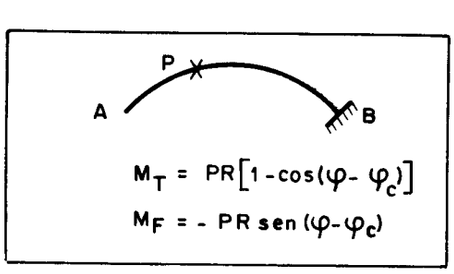


FIG. 4.4.9a - ESTADO DE DESLOCAMENTO PARA CÁLCULO DE Δ_{31}

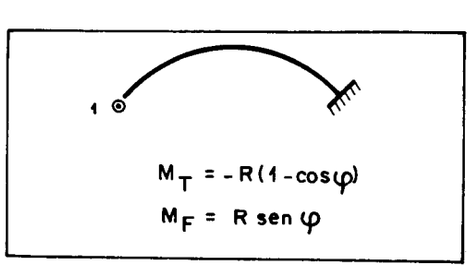


FIG. 4.4.9b - ESTADO DE CARREGAMENTO PARA CÁLCULO DE Δ_{31}

$$\Delta_{31} = \frac{R}{EJ}\int_{\alpha}^{\phi} \{- PR \text{ sen } (\varphi - \alpha) R \text{sen}\varphi + \lambda PR [1 - \cos (\varphi - \alpha)] [- R (1 - \cos\varphi)]\} \, d\varphi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.4.39)$$

$$\Delta_{31} = \frac{PR^3}{EJ}\int_{\alpha}^{\phi} [- \text{sen}(\varphi - \alpha) \text{ sen}\varphi - \lambda + \lambda \cos\varphi + \lambda \cos(\varphi - \alpha) - \lambda \cos(\varphi - \alpha) \cos \varphi] \, d\varphi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.4.40)$$

$$\Delta_{31} = \frac{PR^3}{EJ} \left[- \frac{1}{2} \varphi \cos \alpha + \frac{1}{2} \text{sen}\varphi \cos(\varphi - \alpha) - \lambda \varphi + \lambda \text{sen}\varphi + \lambda \text{sen}(\varphi - \alpha) - \frac{\lambda}{2} \varphi \cos \alpha - \frac{\lambda}{2} \text{sen}\varphi \cos(\varphi - \alpha)\right]_{\alpha}^{\phi} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.4.41)$$

$$\Delta_{31} = \frac{PR^3}{EJ} \left[- (\frac{1+\lambda}{2})(\phi - \alpha) \cos \alpha + (\frac{1-\lambda}{2})[\text{sen}\phi \cos(\phi - \alpha) - \text{sen}\alpha] - \lambda(\phi - \alpha) + \lambda (\text{sen}\phi - \text{sen}\alpha) + \lambda \text{sen} (\phi - \alpha)\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.4.42)$$

$$\Delta_{31} = \frac{PR^3}{EJ} \left[- (\frac{1+\lambda}{2}) \beta \cos \alpha + (\frac{1-\lambda}{2})(\text{sen}\phi \cos\beta - \text{sen}\alpha) + \lambda (\text{sen}\phi + \text{sen}\beta - \text{sen}\alpha - \beta)\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.4.43)$$

$$\boxed{\Delta_{31} = \frac{PR^3}{EJ} \left[- (\frac{1+\lambda}{2}) \beta \cos \alpha + (\frac{1-\lambda}{2}) \text{sen}\beta \cos \phi + \lambda (\text{sen}\phi + \text{sen}\beta - \text{sen}\alpha - \beta)\right]} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.4.44)$$

4.4.10 - <u>Cálculo de Δ_{12}</u> (deslocamento na direção da coordenada 1, devido à carga T aplicada no ponto de coordenada $\varphi_c = \alpha$)

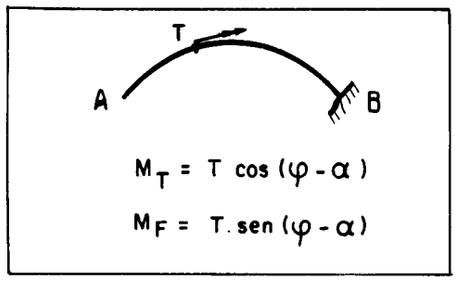


FIG. 4.4.10a - ESTADO DE DESLOCAMENTO PARA CÁLCULO DE Δ_{12}

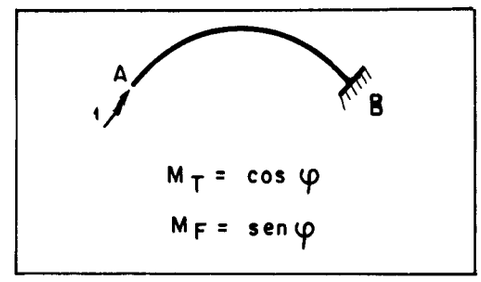


FIG. 4.4.10b - ESTADO DE CARREGAMENTO PARA CÁLCULO DE Δ_{12}

$$\Delta_{12} = \frac{R}{EJ}\int_{\alpha}^{\phi} [\, T \,\text{sen}\,(\varphi - \alpha)\,\text{sen}\,\varphi + \lambda\, T \cos(\varphi - \alpha)\cos\varphi\,]\, d\varphi \quad ..(4.4.45)$$

$$\Delta_{12} = \frac{TR}{EJ}\int_{\alpha}^{\phi} [\,\text{sen}(\varphi - \alpha)\,\text{sen}\,\varphi + \lambda \cos(\varphi - \alpha)\cos\varphi\,]\, d\varphi \quad ....(4.4.46)$$

$$\Delta_{12} = \frac{TR}{EJ}\left[\frac{1}{2}\varphi\cos\alpha - \frac{1}{2}\,\text{sen}\varphi\cos(\varphi - \alpha) + \frac{\lambda}{2}\varphi\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{2}\,\text{sen}\varphi\cos(\varphi - \alpha)\right]_{\alpha}^{\phi} \quad .....(4.4.47)$$

$$\Delta_{12} = \frac{TR}{EJ}\left[\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)(\phi - \alpha)\cos\alpha - \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)[\,\text{sen}\,\phi\cos(\phi - \alpha) - \text{sen}\,\alpha]\right] ..(4.4.48)$$

$$\Delta_{12} = \frac{TR}{EJ}\left[\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\beta\cos\alpha - \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)(\text{sen}\,\phi\cos\beta - \text{sen}\,\alpha)\right] \quad .....(4.4.49)$$

$$\boxed{\Delta_{12} = \frac{TR}{EJ}\left[\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\beta\cos\alpha - \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\text{sen}\,\beta\cos\phi\right]} \quad ...(4.4.50)$$

4.4.11 - Cálculo de Δ_{22} (deslocamento na direção da coordenada 2, devido à carga T aplicada no ponto de coordenada $\varphi_c = \alpha$)

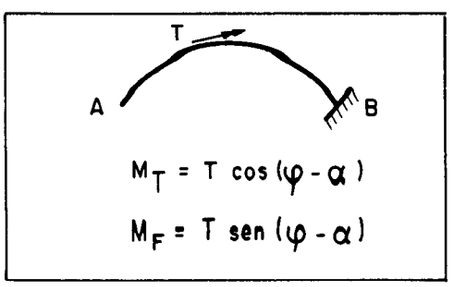


FIG. 4.4.11a - ESTADO DE DESLOCAMENTO PARA CÁLCULO DE Δ_{22}

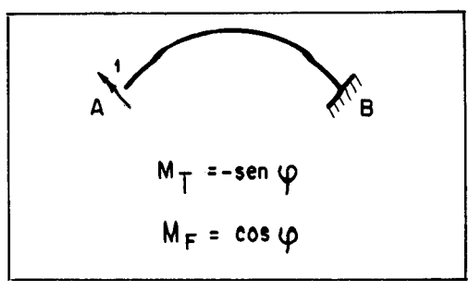


FIG. 4.4.11a - ESTADO DE CARREGAMENTO PARA CÁLCULO DE Δ_{22}

$$\Delta_{22} = \frac{R}{EJ}\int_{\alpha}^{\phi}\left[T \operatorname{sen}(\varphi-\alpha)\cos\varphi + \lambda T \cos(\varphi-\alpha)(-\operatorname{sen}\varphi)\right] d\varphi \qquad \ldots\ldots\ldots(4.4.51)$$

$$\Delta_{22} = \frac{TR}{EJ}\int_{\alpha}^{\phi}\left[\operatorname{sen}(\varphi-\alpha)\cos\varphi - \lambda\cos(\varphi-\alpha)\operatorname{sen}\varphi\right] d\varphi \qquad \ldots.(4.4.52)$$

$$\Delta_{22} = \frac{TR}{EJ}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}(\varphi-\alpha) - \frac{1}{2}\varphi\operatorname{sen}\alpha - \frac{\lambda}{2}\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}(\varphi-\alpha) - \frac{\lambda}{2}\varphi\operatorname{sen}\alpha\right]_{\alpha}^{\phi}$$

$$\Delta_{22} = \frac{TR}{EJ}\left[\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}(\phi-\alpha) - \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)(\phi-\alpha)\operatorname{sen}\alpha\right] \qquad \ldots\ldots.(4.4.54)$$

$$\boxed{\Delta_{22} = \frac{TR}{EJ}\left[\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\beta - \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\beta\operatorname{sen}\alpha\right]} \qquad \ldots.(4.4.55)$$

4.4.12 - Cálculo de Δ_{32} (deslocamento na direção da coordenada 3, devido à carga T aplicada no ponto de coordenada $\varphi_c = \alpha$)

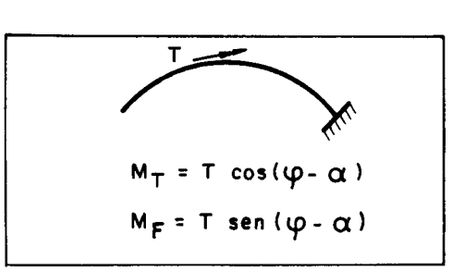


FIG. 4.4.12a- ESTADO DE DESLOCAMENTO PARA CÁLCULO DE Δ_{32}

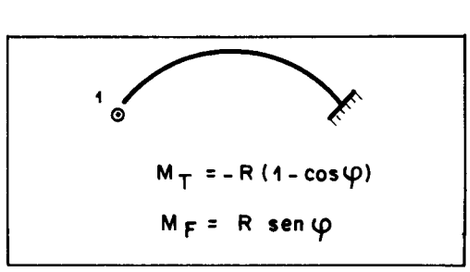


FIG. 4.4.12a- ESTADO DE CARREGAMENTO PARA CÁLCULO DE Δ_{32}

$$\Delta_{32} = \frac{R}{EJ} \int_{\alpha}^{\phi} \{ T\,\mathrm{sen}(\varphi-\alpha)\, R\,\mathrm{sen}\,\varphi + \lambda\, T\cos(\varphi-\alpha)\,[-R(1-\cos\varphi)]\}\, d\varphi \quad .(4.4.56)$$

$$\Delta_{32} = \frac{TR^2}{EJ} \int_{\alpha}^{\phi} [\mathrm{sen}(\varphi-\alpha)\,\mathrm{sen}\,\varphi + \lambda\cos(\varphi-\alpha)\cos\varphi - \lambda\cos(\varphi-\alpha)]\, d\varphi \quad .(4.4.57)$$

$$\Delta_{32} = \frac{TR^2}{EJ} \left[\frac{1}{2}\varphi\cos\alpha - \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\varphi\cos(\varphi-\alpha) + \frac{\lambda}{2}\varphi\cos\alpha + \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos(\varphi-\alpha) - \right.$$

$$\left. - \lambda\,\mathrm{sen}\,(\varphi-\alpha) \right]_{\alpha}^{\phi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.4.58)$$

$$\Delta_{32} = \frac{TR^2}{EJ} \left[\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)(\phi-\alpha)\cos\alpha - \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)[\mathrm{sen}\,\phi\,\cos(\phi-\alpha) - \mathrm{sen}\,\alpha] - \lambda\,\mathrm{sen}(\phi-\alpha) \right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(4.4.59)$$

$$\Delta_{32} = \frac{TR^2}{EJ} \left[\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\beta\cos\alpha - \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)(\mathrm{sen}\,\phi\,\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha) - \lambda\,\mathrm{sen}\,\beta \right] \quad \ldots.(4.4.60)$$

$$\boxed{\Delta_{32} = \frac{TR^2}{EJ} \left[\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\beta\cos\alpha - \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\mathrm{sen}\,\beta\cos\phi - \lambda\,\mathrm{sen}\,\beta \right]} \quad \ldots.(4.4.61)$$

4.5 - MATRIZ DE FLEXIBILIDADE DA VIGA CURVA EM BALANÇO

A matriz de flexibilidade relativa aos 3 deslocamentos na extremidade esquerda livre A, da viga curva em balanço (vide FIG. 4.2.1), tem a forma:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{32} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots.(4.5.1)$$

sendo δ_{ij} os coeficientes de flexibilidade, calculados como no parágrafo 4.4.

4.6 - MATRIZ DE RIGIDEZ DA VIGA CURVA

Seja a viga curva de raio R e abertura ϕ, com um sistema de coordenadas locais formado por 3 coordenadas na extremidade A e 3 coordenadas na extremidade B, conforme FIG. 4.6.1

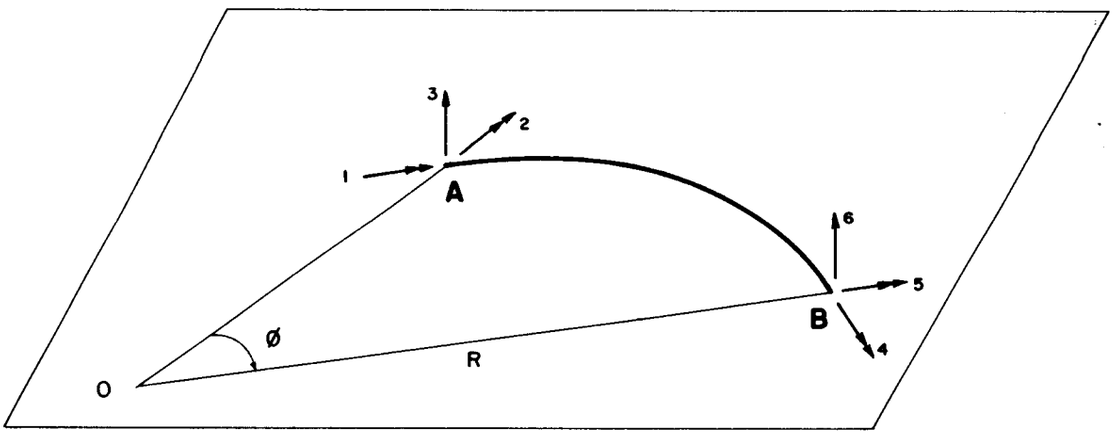


FIG. 4.6.1. - SISTEMA DE COORDENADA LOCAL NA VIGA CURVA.

A matriz de rigidez da viga curva, correspondente aos 6 deslocamentos nas extremidades A e B tem a forma:

$$\overset{(6x6)}{[k]} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ \hline k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{array}\right] \qquad \ldots.(4.6.1)$$

Os coeficientes da matriz de rigidez $[k]$, de ordem (6 x 6), serão obtidos apenas numericamente. Os coeficientes de $[k]$ podem ser agrupados em 4 sub-matrizes de ordem (3 x 3), tal que:

$$\overset{(6\times 6)}{\left[k\right]} = \left[\begin{array}{c|c} \overset{(3\times 3)}{\left[k_{AA}\right]} & \overset{(3\times 3)}{\left[k_{AB}\right]} \\ \hline \overset{(3\times 3)}{\left[k_{BA}\right]} & \overset{(3\times 3)}{\left[k_{BB}\right]} \end{array}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots(4.6.2)$$

onde cada sub-matriz de (4.6.2) indica a influência de uma extremidade da viga curva sobre a outra.

A sub-matriz $\left[k_{AA}\right]$, influência dos deslocamentos da extremidade esquerda A sobre si mesma pode ser conseguida invertendo-se a matriz de flexibilidade da viga em balanço de mesmas características geométricas, com a extremidade esquerda livre.

$$\left[k_{AA}\right] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \left[\delta\right]^{-1} \qquad \ldots\ldots(4.6.3)$$

A matriz $\left[\delta\right]^{-1}$ é a inversa da matriz de flexibilidade da viga curva em balanço, calculada conforme (4.5.1).

As outras sub-matrizes são calculadas como a seguir:

Pelo equilíbrio:

$$\left[k_{BA}\right] = \left[E\right]\left[k_{AA}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots(4.6.4)$$

onde $\left[E\right]$, de ordem (3 x 3) é a matriz de equilíbrio que transforma esforços da extremidade esquerda para a extremidade direita, calculada conforme (4.3.3).

Pela reciprocidade de Maxwell:

$$\left[k_{AB}\right] = \left[k_{BA}\right]^{T} = \left[k_{AA}\right]\left[E\right]^{T} \qquad \ldots\ldots\ldots(4.6.5)$$

onde o índice superior T significa transposta da matriz.

Novamente pelo equilíbrio:

$$\left[k_{BB}\right] = \left[E\right]\left[k_{AB}\right] = \left[E\right]\left[k_{AA}\right]\left[E\right]^{T} \qquad \ldots\ldots(4.6.6)$$

Note-se que, efetuando-se as operações matriciais indicadas em (4.6.5), chega-se à:

$$\begin{bmatrix} k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} & k_{13} \\ -k_{21} & k_{22} & -k_{23} \\ k_{31} & -k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad \ldots.(4.6.7)$$

A igualdade indicada em (4.6.7) pode também ser mostrada por considerações de simetria e antimetria, conforme explicado no capítulo 3. Resta dizer que essas igualdades são importantes por serem os únicos testes disponíveis para o cálculo da matriz de rigidez [k] , cujos coeficientes só foram obtidos numericamente. Nos programas elaborados o presente teste foi aplicado e sempre verificado, até os últimos algarismos significativos do computador.

4.7 - MATRIZ DE RIGIDEZ DA VIGA RETA

Como nas vigas contínuas a serem tratadas no programa automático poderão aparecer alguns tramos retos é apresentada também a matriz de rigidez da barra reta, com J e J_t constantes.

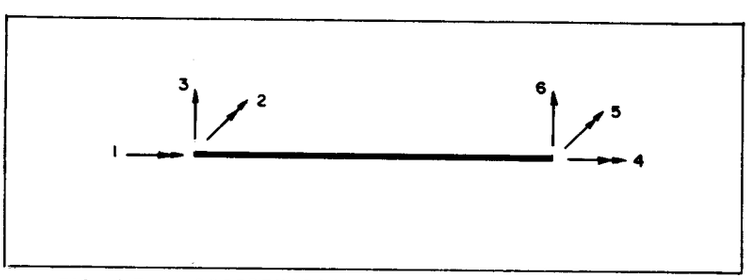


FIG. 4.7.1- COORDENADAS LOCAIS NA BARRA RETA

O programa de cálculo identificará a barra reta e dará a ela um tratamento distinto, abandonando as expressões (4.6.3), (4.6.4) e (4.6.5) para o cálculo da matriz de rigidez.

A matriz de rigidez da barra reta é dada aqui, explicitamente, sem demonstração, por ser suficientemente conhecida:

$$
\overset{(6x6)}{[k]} = \begin{bmatrix}
\frac{GJ_t}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{GJ_t}{\ell} & 0 & 0 \\
0 & \frac{4\,EJ}{\ell} & \frac{-6\,EJ}{\ell^2} & 0 & \frac{2\,EJ}{\ell} & \frac{6\,EJ}{\ell^2} \\
0 & -\frac{6\,EJ}{\ell^2} & \frac{12\,EJ}{\ell^3} & 0 & -\frac{6\,EJ}{\ell^2} & -\frac{12\,EJ}{\ell^3} \\
-\frac{GJ_t}{\ell} & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{\ell} & 0 & 0 \\
0 & \frac{2\,EJ}{\ell} & \frac{-6\,EJ}{\ell^2} & 0 & \frac{4\,EJ}{\ell} & \frac{6\,EJ}{\ell^2} \\
0 & \frac{6\,EJ}{\ell^2} & \frac{-12\,EJ}{\ell^3} & 0 & \frac{6\,EJ}{\ell^2} & \frac{12\,EJ}{\ell^3}
\end{bmatrix}
$$

.....(4.7.1)

onde EJ é a rigidez a flexão vertical e GJ_t é a rigidez à torção e ℓ é o comprimento da barra reta.

4.8 - ESFORÇOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO NA VIGA CURVA DEVIDOS À CARGAS P OU T

Seja a viga curva de raio R e abertura ϕ, com uma única carga concentrada P ou T, aplicada no ponto de coordenada $\varphi_c = \alpha$, tal que $\beta = \phi - \varphi_c$. Os esforços de engastamento perfeito segundo as 6 coordenadas locais nas extremidades A e B (vide FIG. 4.8.1.a e 4.8.1.b) serão encontrados numericamente, aplicando-se o Processo dos Esforços.

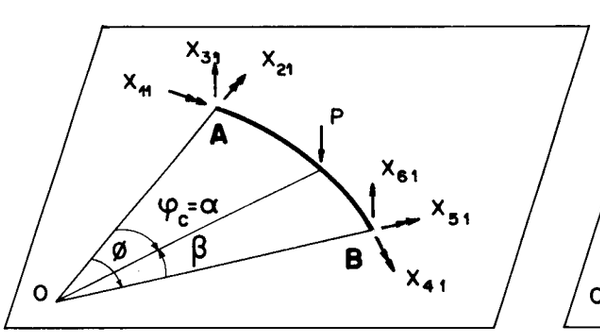


FIG. 4.8.1a - ESFORÇOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO DEVIDO A P.

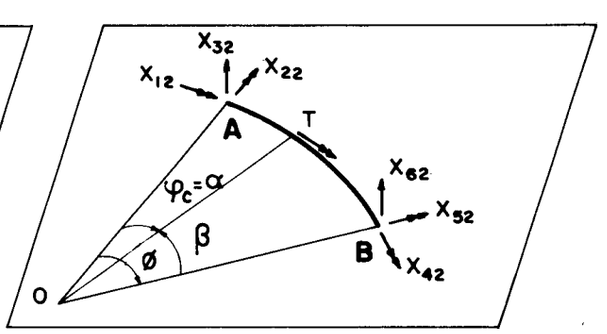


FIG. 4.8.1b - ESFORÇOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO DEVIDO A T.

Trata-se de resolver uma estrutura 3 vezes hiperestática. Será utilizado como estrutura isostática fundamental a viga em balanço engastada em B, tomando-se para incógnitas hiperestáticas os esforços de engastamento perfeito na extremidade A e com o carregamento P e T (independentes) atuando no ponto de coordenada φ_c .

É possível escrever-se a seguinte equação de compatibilidade de deslocamentos para o ponto A:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{.....(4.8.1)}$$

onde:

- A matriz da primeira parcela contém os deslocamentos Δ_{ik}, na extremidade livre da viga em balanço, devidos à carga P ou T aplicada ao longo do eixo. A primeira coluna contém os deslocamentos devidos a P, calculados de acordo com as equações (4.4.33), (4.4.38) e (4.4.44). A segunda coluna contém os deslocamentos devidos a T, calculados de acordo com as equações (4.4.50), (4.4.55) e (4.4.61).

- A matriz dos δ_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3) é a matriz de flexibilidade da viga em balanço, calculada conforme (4.5.1).

- A matriz de ordem (3 x 2) com os coeficientes X_{ij} (i = 1, 2 e 3; j = 1, 2) contém os hiperestáticos. A primeira coluna refere-se a P e a segunda coluna refere-se a T.

Compactamente, ter-se-ia:

$$\left[X_A \right] = -\left[\delta \right]^{-1} \left[\Delta \right] \qquad \text{.....(4.8.2)}$$

onde $\left[X_A \right]$, de ordem (3 x 2) contém os esforços de engastamento perfeito na extremidade A e $[\Delta]$ contém os deslocamentos na extremidade livre da viga em balanço devidos a P e T.

Os esforços de engastamento na extremidade B são calculados pela superposição de efeitos subentendida no Processo dos Esforços:

a) parcela devido ao equilíbrio do carregamento:

$$\begin{bmatrix} X^0_{41} & X^0_{42} \\ X^0_{51} & X^0_{52} \\ X^0_{61} & X^0_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -PR(1-\cos\beta) & -T\cos\beta \\ PR\,\text{sen}\,\beta & -T\,\text{sen}\,\beta \\ P & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots.(4.8.3)$$

onde a primeira coluna refere-se ao equilíbrio do carregamento P e a segunda coluna é devida ao equilíbrio do carregamento T.

b) parcela devido ao equilíbrio das forças de extremidade (hiperestáticos)

$$\begin{bmatrix} X^*_{41} & X^*_{42} \\ X^*_{51} & X^*_{52} \\ X^*_{61} & X^*_{62} \end{bmatrix} = [E] \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots(4.8.4)$$

onde $[E]$, de ordem (3 x 3) é a matriz de equilíbrio, calculada conforme (4.3.3) e χ_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2) são as incógnitas hiperestáticas, calculados conforme (4.8.1).

Os esforços de engastamento perfeito na extremidade B são a soma das reações parciais, calculadas em (4.8.3) e (4.8.4):

$$\begin{bmatrix} X_{41} & X_{42} \\ X_{51} & X_{52} \\ X_{61} & X_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^0_{41} & X^0_{42} \\ X^0_{51} & X^0_{52} \\ X^0_{61} & X^0_{62} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X^*_{41} & X^*_{42} \\ X^*_{51} & X^*_{52} \\ X^*_{61} & X^*_{62} \end{bmatrix} \quad \ldots(4.8.5)$$

Resumindo-se numa única matriz $\left[X\right]$, de ordem (6 x 2), os 6 esforços de engastamento perfeito devidos a P (índice de coluna 1) e os 6 esforços de engastamento perfeito devidos a T (índice de coluna 2) tem-se:

$$\overset{(6x2)}{\left[X\right]} = \left[\begin{array}{cc} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \\ \hline X_{41} & X_{42} \\ X_{51} & X_{52} \\ X_{61} & X_{62} \end{array}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots (4.8.6)$$

4.9 - ESFORÇOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO NA BARRA RETA DEVIDOS A P OU T

Para as barras retas os esforços de engastamento perfeito devidos a P ou T são apresentados aqui, sem demonstração, pois também são suficientemente conhecidos.

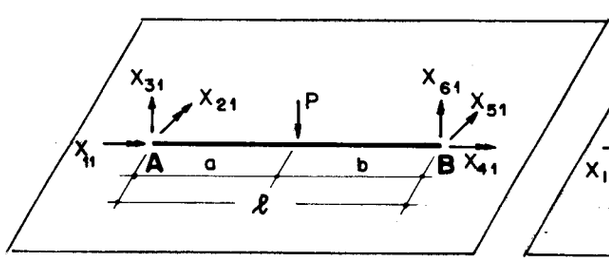


FIG. 4.9.1a - VIGA RETA CARREGADA COM CARGA VERTICAL P.

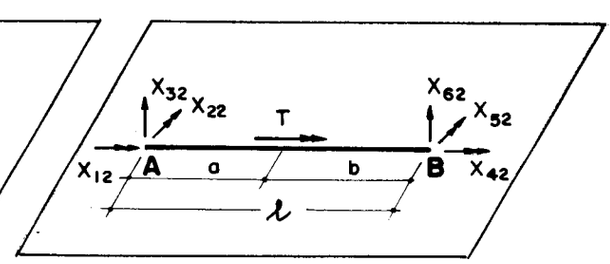


FIG. 4.9.1b - VIGA RETA CARREGAMENTO COM MOMENTO DE TORÇÃO T.

Os esforços de engastamento perfeito, nas 6 coordenadas do sistema de coordenadas local, devidos a cargas P ou T (independentes) aplicados no ponto de abcissa a a partir da extremidade A, tal que $b = \ell - a$, valem:

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \\ X_{41} & X_{42} \\ X_{51} & X_{52} \\ X_{61} & X_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -T\,b/\ell \\ P\,a\,b^2/\ell^2 & 0 \\ P\,b^2(3a+b)/\ell^3 & 0 \\ 0 & -T\,a/\ell \\ P\,a^2\,b/\ell^2 & 0 \\ P\,a^2(3b+a)/\ell^3 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots(4.9.1)$$

A primeira coluna refere-se à carga P e a segunda coluna refere-se à carga T.

CAPÍTULO 5

CÁLCULO DE ORDENADAS DE LINHAS DE INFLUÊNCIA EM VIGAS CONTÍNUAS CURVAS COM APOIOS RETOS

5.1 - INTRODUÇÃO

Considerando que pretende-se resolver numericamente o problema da obtenção de linhas de influência, as explicações inseridas neste capítulo e nos próximos, serão sempre acompanhadas de explanações sobre computação. As considerações teóricas, seguidas de detalhes sobre "índices de linha e coluna", "tamanho de matrizes", etc., são necessárias visto que o presente trabalho tem característica, sobretudo, de resolver dificuldades computacionais que aparecem no cálculo e armazenamento das L.Is., visando um programa mais amplo, dentro da linha de pesquisa implantada, da qual, este é o primeiro de uma série, como já foi dito no capítulo 1.

Interessa relembrar a definição de Linha de Influência:

> "Linha de Influência de um esforço Z, numa seção S, para uma carga móvel P, é um diagrama traçado sobre o eixo da estrutura, de tal maneira que a ordenada, em cada ponto do eixo, é igual ao valor do esforço Z na seção S, produzido pela carga unitária P = 1 atuando no ponto".

Quando se estuda a viga contínua curva torna-se necessário obter linhas de influência para carga móvel força vertical concentrada P = 1 e também para o carregamento móvel momento de torção concentrado T = 1.

Nos parágrafos seguintes convém se ter em mente que, para cada ponto do eixo da estrutura, os efeitos separados de P = 1 e T = 1 são calculados simultaneamente. O cálculo simultâneo é interessante para economia de tempo de computação. Muitas matrizes que teriam apenas uma coluna se a carga móvel fosse de um só tipo, terão então duas colunas, a primeira referente a P = 1 e a segunda referindo-se a T = 1.

O procedimento aqui adotado para calcular os deslocamentos, reações de apoio e esforços solicitantes que constituem as ordenadas das linhas de influência, baseia-se na aplicação do Processo dos Deslocamentos em sua formulação matricial.

Neste trabalho procurou-se obter primeiramente as L.Is. deslocamentos nos apoios, as L.Is. de reações de apoio e as L.Is. de esforços solicitantes seccionais, considerando vigas com apoios retos. Nos próximos capítulos os cálculos serão estendidos para se obter L.Is. de deslocamentos nos meios de vãos, estudando-se também vigas com apoios esconsos.

5.2 - VIGA CONTÍNUA - CONCEITUAÇÃO E CONVENÇÕES

Para se estudar a viga contínua curva, conforme se a entende para os fins deste trabalho, convém apresentar conceitos e convenções necessárias ao cálculo usual pelo Processo dos Deslocamentos.

A viga contínua é uma sucessão de tramos, os quais devem ser entendidos aqui, como a região compreendida entre dois apoios. Cada tramo pode ser constituído por mais de uma barra.

As barras curvas apresentam raio R e abertura ϕ, positivos ou negativos (vide parágrafo 2.2), enquanto que as barras retas possuem comprimento ℓ sempre positivo.

A numeração das barras é sequencial de 1 até n, a partir de uma extremidade da viga contínua.

Todas as barras possuem $EJ = cte$ e $GJ_t = cte$, resultando também $\lambda = cte$.

Cada ponto de conexão de duas barras vizinhas é um

nó. Uma viga contínua com n barras possui $n_j = n+1$ nós, numerados sequencialmente de 1 até n_j. Todo ponto onde existir vínculos impedindo um dos deslocamentos possíveis (θ_x, θ_y e z, conforme parágrafo 2.2) será obrigatoriamente um nó. Assim, os apoios só podem ocorrer em nós, não sendo porém, todo nó, obrigatoriamente um apoio. Os balanços, se existentes, são considerados barras, com um nó na extremidade.

Por enquanto, neste parágrafo, serão permitidos apenas apoios retos. Em outras palavras, nos apoios onde houver rotações livres, essas podem ser:

a) uma só rotação θ_x (de vetor representativo, tangencial)

b) uma só rotação θ_y (de vetor representativo radial)

c) duas rotações θ_x e θ_y independentes (nas direções radial e tangencial)

Essa limitação será superada no capítulo 7.

Cada barra, reta ou curva, tem um sistema de coordenadas local, numeradas de 1 a 6, conforme FIG. 5.2.1, relativamente ao qual se calculam as matrizes de rigidez, os esforços de engastamento perfeito, e se faz referência a deslocamentos e esforços na extremidade da barra.

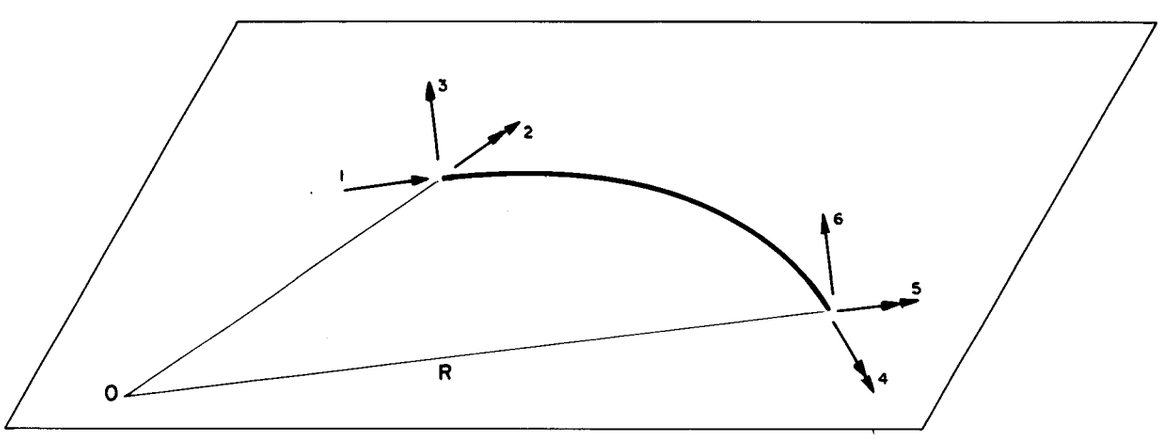


FIG. 5.2.1 - SISTEMA DE COORDENADAS LOCAL PARA A BARRA CURVA.

Também para a viga contínua deve-se supor uma posição convencionada para o observador. Admite-se que o mesmo está situado de um dos lados do eixo total da viga contínua, precisamente daquele lado em que vê a extremidade início da primeira barra à sua esquerda e o final dessa mesma barra a sua direita. A viga contínua resultará da sucessão de todas as barras, de tal modo que o mesmo observador vê as extremidades início de todas as barras à sua esquerda e as extremidades fim à direita. Com isso as barras estão conectadas de maneira que as coordenadas locais 4, 5 e 6 de uma barra, coincidem com as coordenadas locais 1, 2 e 3 da barra seguinte.

Adota-se, para a estrutura como um todo, um sistema de coordenadas global para deslocamentos e esforços, com 3 coordenadas por nó, conforme FIG. 5.2.2. Em cada nó i, onde estão conectadas as barras $i-1$ e i, as direções e sentidos das 3 coordenadas globais, numeradas como $3i-2$, $3i-1$ e $3i$, coincidem respectivamente com as direções 4, 5 e 6 das coordenadas locais da barra $i-1$ com as direções 1, 2 e 3 das coordenadas locais da barra i.

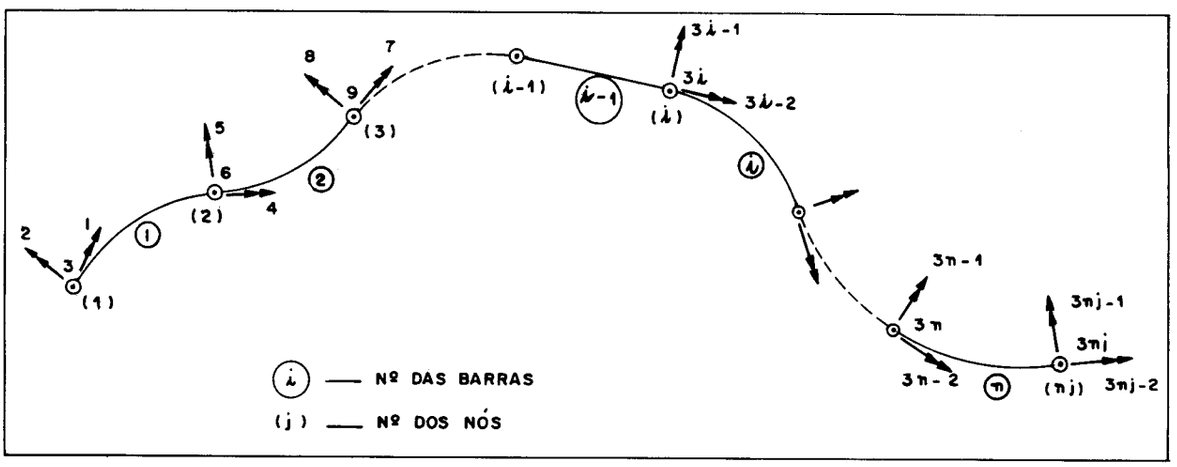


FIG. 5.2.2 - SISTEMA DE COORDENADAS GLOBAL PARA A VIGA CONTINUA CURVA.

Em cada nó existirão, na direção das coordenadas globais, 3 deslocamentos possíveis, podendo, alguns ou todos, serem impedidos, consubstanciando, então, um apoio.

As considerações anteriores permitem tratar a viga contínua curva, carregada transversalmente ao seu plano, semelhantemente ao problema de grelhas com 3 deslocamentos por nó (duas rota

ções verticais, perpendiculares entre si, e uma translação, também vertical), aproveitando técnicas bastante divulgadas da Análise Matricial, sem necessidade de se realizar rotações de coordenadas (na transformação global → local e vice-versa), quer nos esforços de engastamento perfeito, quer nas matrizes de rigidez de cada barra.

5.3 - POSIÇÕES DAS CARGAS MÓVEIS P = 1 e T = 1

Para a determinação das linhas de influência, as cargas móveis P = 1 e T = 1 deverão percorrer todo o eixo da viga contínua.

Em cada barra considera-se 17 pontos de seu eixo, numerados da esquerda para a direita, igualmente espaçados, sobre os quais as cargas móveis podem atuar. Esses pontos são determinados supondo a barra dividida em 16 partes iguais. Deve-se imaginar que o ponto 1 está ligeiramente à direita do nó início da barra e que o ponto 17 está ligeiramente à esquerda do nó fim da barra. Assim, todos os pontos onde as cargas móveis podem atuar (numerados de 1 a 17 em cada barra) são tratados como pontos internos das barras. Com essa hipótese evitar-se-á cargas concentradas nos nós da estrutura e será possível encontrar para algumas L.Is., os "saltos" de ordenadas que porventura venham a ocorrer nos apoios.

A barra onde atua o carregamento será sempre designada por j e o ponto sobre a barra onde estão aplicados P = 1 e T = 1 será designado por k.

Numa barra curva j, a coordenada angular φ_c (FIG. 4.8.1.a e b), correspondente a um ponto k (k = 1, 2, 3, ... 17) onde as cargas P = 1 e T = 1 podem atuar é dada por:

$$\varphi_c = \frac{\phi_j}{16}(k - 1) \qquad \text{.....(5.3.1)}$$

sendo ϕ_j o ângulo de abertura da barra j.

Quando a barra carregada j for reta, o ponto k (k = 1, 2, 3, ... 17) onde o carregamento atua é definido pela coordenada linear a_c (FIG. 4.9.1.a e b) que vale:

$$a_c = \frac{\ell_j}{16}(k - 1) \qquad \text{.....(5.3.2)}$$

sendo ℓ_j o comprimento da barra reta j.

Numa viga contínua de n barras, as cargas móveis concentradas poderão atuar em $(17 \times n)$ pontos distintos sobre o eixo. Na estrutura inteira esses pontos podem ser numerados em sequência, 17 em cada barra. Assim o ponto k $(1 \leq k \leq 17)$, da barra j $(1 \leq j \leq n)$, terá sua posição indicada internamente no programa de cálculo, pelo índice de posição da carga, i_{pc}, dado por:

$$i_{pc} = 17(j - 1) + k \qquad \text{.....(5.3.3)}$$

Para varrer em sequência, todos os pontos de índices i_{pc}, ao longo da viga contínua, assume-se na equação (5.3.3):

$$\left| \begin{array}{ll} (k = 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ 17) & \text{.....(5.3.4)} \\ (j = 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ n) & \text{.....(5.3.5)} \end{array} \right.$$

A obtenção das ordenadas das L.Is., em 17 pontos distintos de cada barra, é feita internamente no programa de cálculo deste trabalho. Porém, na saída de resultados, isto é, externamente, o programa fornecerá ordenadas das L.Is. nos 9 pontos ímpares de cada barra, suficientes para o traçado gráfico.

5.4 - ESFORÇOS REATIVOS PARA OS QUAIS SÃO DETERMINADAS AS LINHAS DE INFLUÊNCIA

Conforme já salientado, os apoios que podem aparecer na estrutura, por ora não podem ser esconsos. Em cada apoio, a a vinculação deve ser idealizada de maneira a impedir ou translação vertical, ou rotação com vetor representativo tangencial, ou rotação com vetor representativo radial, ou ainda, qualquer combinação destes casos.

Suponha-se a carga P = 1 ou T = 1 aplicada num ponto interno de uma barra qualquer. Os vínculos possíveis em cada nó, poderão aplicar sobre a estrutura, as reações R_T, R_M e R_V, como mostrado na FIG. 5.4.1. Os sentidos positivos dessas reações são os mesmos das coordenadas globais no nó.

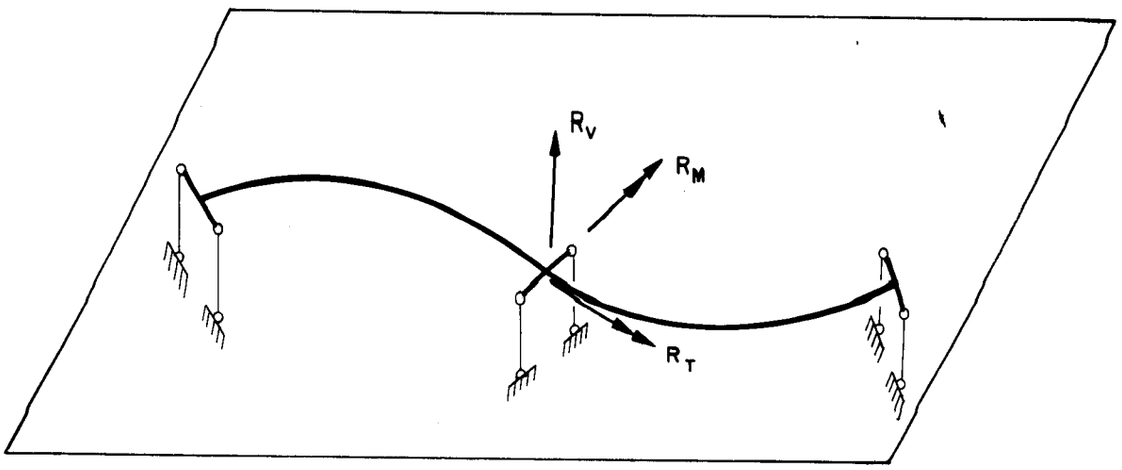


FIG. 5.4.1 - ESFORÇOS REATIVOS POSSÍVEIS EM NÓ DA VIGA CONTÍNUA.

Um nó onde se calcula o esforço reativo será sempre designado por i e o vínculo correspondente ao esforço por r (r = 1, 2, 3 conforme se trate de R_T, R_M ou R_V).

O programa elaborado usa, internamente, uma numeração sequencial dos vínculos possíveis, em número de 3 por nó. Dessa maneira, no nó i, o vínculo correspondente à reação r (r = 1, 2 ou 3), é identificado internamente pelo <u>índice de numeração de vínculos</u>, i_{nv}, calculado em (5.4.1).

$$i_{nv} = 3(i - 1) + r \qquad \text{.....(5.4.1)}$$

Para varrer sequencialmente todos os $3\,n_j$ vínculos possíveis, assume-se na equação (5.4.1):

$$\left| \begin{array}{ll} (r = 1,\ 2,\ 3 \qquad) & \text{.....(5.4.2)} \\ (i = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ n_j) & \text{.....(5.4.3)} \end{array} \right.$$

Os vínculos realmente <u>existentes</u> serão especificados para cada nó, na entrada de dados do programa.

Visando uma sistematização de cálculos as L.Is. serão calculadas internamente, para todos os vínculos possíveis, existentes ou inexistentes, resultando sempre reações nulas para os vínculos inexistentes (portanto, L.Is. identicamente nulas). Resultarão $6\,n_j$ linhas de influência de reação de apoio para a viga contínua.

As reações possíveis em um nó i, como efeitos sepa-

rados de P = 1 e T = 1 atuando num ponto qualquer, podem ser colecionados numa matriz $[\rho^i]$ de ordem (3 x 2):

$$[\rho^i] = \begin{bmatrix} R_T^P & R_T^T \\ R_M^P & R_M^T \\ R_V^P & R_V^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11}^i & \rho_{12}^i \\ \rho_{21}^i & \rho_{22}^i \\ \rho_{31}^i & \rho_{32}^i \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots(5.4.4)$$

sendo os primeiros índices 1, 2 e 3 correspondentes a R_T, R_M e R_V, e os segundos índices 1 e 2 referentes a P = 1 ou T = 1.

5.5 - SEÇÕES DA VIGA PARA AS QUAIS SÃO DETERMINADAS AS LINHAS DE INFLUÊNCIA DE ESFORÇOS SOLICITANTES

As linhas de influência para os esforços solicitantes seccionais (exceptuam-se as reações de apoio) são em número de 6 por seção, pois, em cada seção, é possível obter-se L.Is. para os esforços solicitantes M_T, M_F e Q para as cargas móveis P = 1 e T = 1.

As linhas de influência serão determinadas para esses esforços solicitantes, em 9 seções internas de cada barra, localizadas em pontos bem definidos do eixo, obtidos pela divisão do comprimento de cada barra em 8 partes iguais. Portanto, no presente trabalho, as seções para as quais se determinam L.Is. em cada barra, estarão nos pontos carregados de numeração ímpar na barra.

A primeira seção de cada barra é também suposta ligeiramente à direita do nó início e a seção 9 é tomada ligeiramente à esquerda do nó final da mesma barra. Deste modo, todas as seções são internas às barras.

Para facilidade de programação, internamente, no programa de cálculo, as seções são numeradas em cada barra, da mesma maneira que as posições da carga (de 1 a 17). Tenha-se em vista, no entanto, que apenas as de número ímpar são consideradas para o cálculo dos esforços solicitantes. Assim, para o usuário do programa, em cada barra, existem apenas 9 seções, numeradas externamente de 1 a 9, mas com numeração interna (no programa automático), na se-

quência correspondente 1, 3, 5, ... 17, conforme FIG. 5.5.1

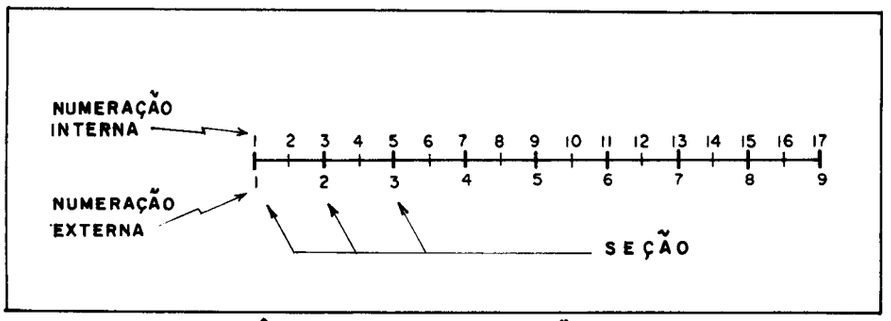


FIG. 5.5.1 - EQUIVALÊNCIA ENTRE A NUMERAÇÃO EXTERNA E INTERNA DAS 9 SEÇÕES DE UMA BARRA.

A barra onde se situa a seção na qual se procura esforços solicitantes será sempre designada por i e o ponto coincidente com a seção será designado por s ou m, conforme seja a numeração externa ou interna.

Na barra i, a seção ou número externo s ($s = 1, 2, 3 \ldots 9$), coincidente com os respectivos números internos ímpares $m = 2s - 1$ ($m = 1, 3, 5 \ldots, 17$) é definida pela coordenada angular φ_s, ou pela coordenada linear a_s, conforme a barra i seja curva ou reta:

$$\varphi_s = \frac{\phi_i}{8}(s-1) \ldots\ldots (5.5.1) \qquad a_s = \frac{\ell_i}{8}(s-1) \ldots\ldots\ldots (5.5.2)$$

sendo ϕ_i o ângulo de abertura da barra curva i, e ℓ_i o comprimento da barra reta i.

Numa viga contínua de n barras, as $(9 \times n)$ seções podem ser indicadas no programa segundo uma numeração sequencial. Assim, a seção de número externo s, de uma barra i, terá sua posição indicada pelo <u>índice de posição da seção</u>, i_{ps}

$$i_{ps} = 17(i-1) + 2s - 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (5.5.3)$$

Para varrer sequencialmente, todas as $(9 \times n)$ seções da viga contínua, onde se calculam L.Is., assume-se na equação (5.5.3):

$$\left| \begin{array}{l} (s = 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ 9) \\ (i = 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ n) \end{array} \right. \qquad \begin{array}{r} \ldots\ldots\ldots(5.5.4) \\ \ldots\ldots\ldots(5.5.5) \end{array}$$

Então, serão calculadas 6 x 9 = 54 linhas de influência de esforços solicitantes para cada barra e (54 x n) linhas de influência na viga contínua. Os balanços recebem o mesmo tratamento das demais barras.

Os esforços solicitantes numa seção s da barra i devidos às cargas P = 1 e T = 1 atuando num ponto qualquer podem ser colecionados numa matriz $\left[\mu^{i,s}\right]$ de ordem (3 x 2):

$$\left[\mu^{i,s}\right] = \begin{bmatrix} M_T^P & M_T^T \\ M_F^P & M_F^T \\ Q^P & Q^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{11}^{i,s} & \mu_{12}^{i,s} \\ \mu_{21}^{i,s} & \mu_{22}^{i,s} \\ \mu_{31}^{i,s} & \mu_{32}^{i,s} \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots(5.5.6)$$

sendo os primeiros índices 1, 2 e 3 referentes a M_T, M_F e Q e os segundo índices 1 e 2 referentes a P = 1 e T = 1.

5.6 - MATRIZ DE RIGIDEZ DA VIGA CONTÍNUA

As grandezas geométricas R, ϕ, ℓ, E, J, G, e J_t de todas as barras já estão dados ou calculados.

Pelo fato de coincidirem as direções das coordenadas locais das barras, com as direções das coordenadas globais nos nós, não há necessidade de se fazer rotações de coordenadas. As forças e/ou deslocamentos em um nó são obtidos das mesmas grandezas nas extremidades das barras.

A matriz de rigidez $\left[k^i\right]$ de ordem (6 x 6), de cada barra, reta ou curva, em relação a seu sistema local de coordenadas é dado pelas equações (4.7.1) ou (4.6.2).

Tanto as barras quanto os nós recebem numeração sequencial. Para os raciocínios que se seguem não haverá inconveniente de se esquematizar a viga contínua como uma sucessão de tramos retos, como na FIG. 5.6.1.

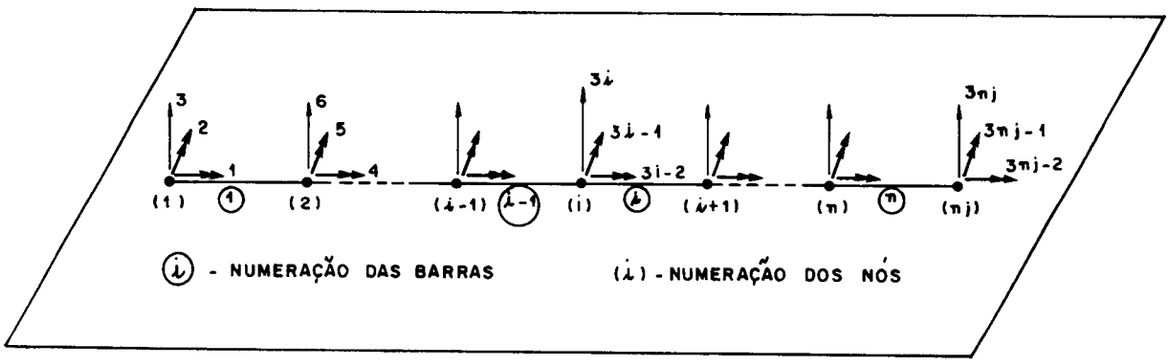
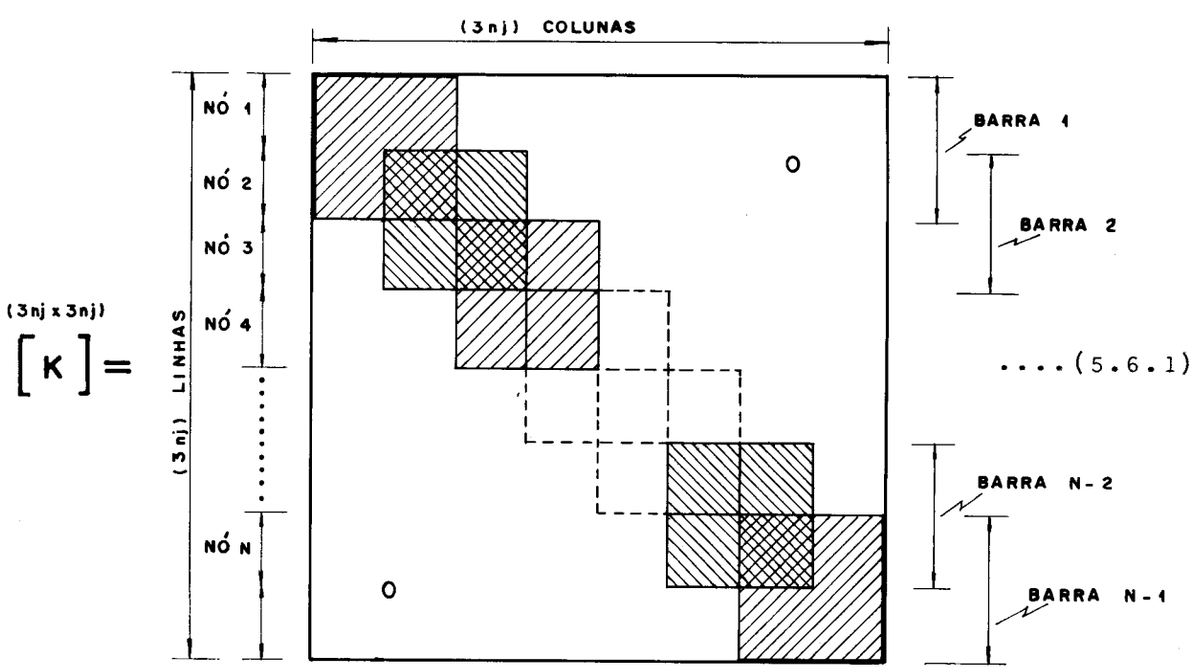


FIG. 5.6.1 - VIGA CONTÍNUA "CURVA" (ESQUEMA) COM n BARRAS E nj=n+1 NÓS.

Na viga contínua curva com n barras e $n_j = n + 1$ nós, a matriz de rigidez $[K]$, de ordem $(3\,n_j \times 3\,n_j)$, é obtida superpondo as matrizes $\left[k^i\right]$ das barras, da maneira sugerida na equação (5.6.1). No segundo membro dessa equação, os quadrados hachurados (6 x 6) representam as matrizes de rigidez $\left[k^i\right]$ das barras. Estas se superpõem para produzir a matriz $[K]$. Nas regiões onde os hachurados se cobrem, os elementos das duas matrizes superpostas são somados. Os demais elementos, não hachurados, são nulos.



....(5.6.1)

Esta técnica de obtenção da matriz de rigidez é bastante conhecida, resultando $[K]$ de ordem $(3\,n_j \times 3\,n_j)$. A equação (5.6.1) mostra, no 2º membro, a correspondência entre deslocamentos das barras e deslocamentos nos nós da estrutura.

As matrizes de rigidez $\left[k^i\right]$ de cada barra devem ser calculadas apenas uma vez, ficando armazenadas para posterior utilização.

5.7 - CÁLCULOS EFETUADOS COM A MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

As operações realizadas em sequência são as seguintes:

a) Matriz de rigidez modificada (para as condições de contôrno)

Na matriz de rigidez global $[K]$ (equação (5.6.1)), colocam-se primeiramente zeros em todas as linhas e colunas correspondentes a deslocamentos impedidos (vínculos existentes). Em seguida colocam-se 1 (hum) nos elementos da diagonal principal correspondentes a essas linhas e colunas. Resultará a matriz de rigidez modificada (para as condições de contôrno).

Se a estrutura original não for hipostática, resultará uma matriz de rigidez modificada, não singular.

b) Inversão da matriz de rigidez modificada

Usando-se uma subrotina de inversão de matrizes que siga o método de Gauss-Jordan, sem pivotamento, a matriz de rigidez pode ser invertida, resultando uma matriz inversa que possue inalterados, os elementos unitários colocados anteriormente na diagonal principal e, também inalterados, os demais elementos nulos nas linhas e colunas correspondentes a deslocamentos impedidos. A permanência dos elementos nulos é sempre assegurada se os comandos da subrotina, onde aparecem divisões e multiplicações, são escritos de maneira que a multiplicação seja feita por último.

c) Matriz global de flexibilidade

Essa matriz só terá significado se a estrutura for pelo menos isostática.

Na inversa da matriz de rigidez modificada, obtida como no ítem b), substituem-se os elementos unitários da diagonal principal, correspondentes aos deslocamentos impedidos, por zero. A matriz $[\Delta]$, de ordem $(3\,n_j \times 3\,n_j)$ assim obtida, será chamada "Matriz Global de Flexibilidade" da viga contínua.

Algumas explanações devem ser dadas sobre as matrizes que resultam nos ítens b) e c).

Um vetor de cargas concentradas de ordem $(3\,n_j \times 1)$ se pré-multiplicado pela inversa da matriz de rigidez modificada (ítem b), forneceria os deslocamentos que ocorrem na estrutura, nas direções globais, desde que, no vetor de cargas se substituisse por zeros as cargas concentradas atuando nas direções impedidas. Isso leva à cálculos e armazenamentos desnecessários.

Por outro lado, qualquer vetor de cargas concentradas nodais, sem a necessidade de se substituir por zeros as cargas concentradas das direções impedidas, fornece os deslocamentos das direções globais, se pré-multiplicado pela matriz global de flexibilidade $[\Delta]$. Deverão aparecer valores nulos para os deslocamentos nas direções impedidas.

Uma vez terminado os cálculos do ítem c), a matriz global de flexibilidade $[\Delta]$ fica armazenada, disponível para o cálculo da viga contínua com os numerosos carregamentos.

5.8 - PROCEDIMENTO PARA O CÁLCULO DAS L.Is.

Os cálculos que dependem apenas dos dados da estrutura estão representados pela matriz global de flexibilidade $[\Delta]$, de ordem $(3\,n_j \times 3\,n_j)$, que é calculada uma única vez, como no parágrafo anterior, ficando armazenada.

Será chamado de estado i_{pc} o estado da estrutura correspondente ao carregamento P = 1 e T = 1 atuando no ponto de

índice i_{pc} (índice de posição da carga).

O índice i_{pc} assumirá todos os valores possíveis (17 posições em cada barra) com as expressões:

$$i_{pc} = 17(j-1) + k \qquad \text{.....(5.8.1)}$$

$$k = 1,\ 2,\ 3\ \ldots 17 \qquad \text{.....(5.8.2)}$$

$$j = 1,\ 2\ \ldots\ldots\ n \qquad \text{.....(5.8.3)}$$

onde j designa o número da barra e k indica a posição de um dos 17 pontos equidistantes no eixo.

A coordenada angular φ_c ou a coordenada linear a_c, correspondente ao ponto k de aplicação do carregamento sendo a barra curva ou reta será conforme parágrafo 5.3:

$$\varphi_c = \frac{\phi_i}{16}(k-1) \text{.....(5.8.4)} \qquad a_c = \frac{\ell_j}{16}(k-1) \text{ .....(5.8.5)}$$

onde ϕ_j é o ângulo de abertura se a barra j carregada for curva e ℓ_j o comprimento da barra j se a mesma for reta.

O procedimento escolhido para o cálculo das L.Is. que leva à maior economia de tempo de computação é o de calcular, para cada <u>estado i_{pc}</u>, todas as ordenadas das L.Is. de todas as reações e esforços em todas as seções.

Em cada <u>estado i_{pc}</u>, usando-se o Processo dos Deslocamentos, devem ser realizados os seguintes cálculos intermediários:

a) Esforços de engastamento perfeito e cargas equivalentes nos nós da estrutura.
b) Deslocamentos nos nós da estrutura.
c) Esforços nas extremidades das barras.
d) Reações de apoio em <u>todos os nós</u>.
e) Esforços solicitantes em <u>todas as seções</u> internas em <u>todas as barras</u>.

Os ítens a), b) e c) são usuais no Processo dos Deslocamentos, sendo que no presente trabalho os efeitos de P = 1 e

T = 1 atuando separados, são feitos simultaneamente.

No ítem d) (que é executado para cada estado i_{pc}), para varrer em sequência todos os vínculos possíveis, individualizados pelo índice i_{nv} (índice de numeração dos vínculos), usam-se as expressões:

$$i_{nv} = 3(i-1) + r \qquad \text{.....(5.8.6)}$$

$$r = 1,\ 2,\ 3 \qquad \text{.....(5.8.7)}$$

$$i = 1,\ 2....,\ n_j \qquad \text{.....(5.8.8)}$$

onde i designa o número do nó e r indica um dos 3 vínculos de cada nó.

No ítem e) (executado sempre para cada estado i_{pc}), para varrer em sequência todas as seções onde se calculam os esforços solicitantes (9 em cada barra), indivudualizadas pelo índice i_{ps} (índice de posição da seção) usam-se as expressões:

$$i_{ps} = 17(i-1) + 2s - 1 \qquad \text{.....(5.8.9)}$$

$$s = 1,\ 2,\ 3.....9 \qquad \text{.....(5.8.10)}$$

$$i = 1,\ 2.....n \qquad \text{.....(5.8.11)}$$

onde i indica o número da barra que contém a seção e s é o índice de numeração externa (de 1 a 9) das seções em cada barra.

A coordenada angular φ_s ou a coordenada linear a_s, correspondente à seção s de uma barra i, conforme esta barra seja curva ou reta será:

$$\varphi_s = \frac{\phi_i}{8}(s-1) \text{.....(5.8.12)} \qquad a_s = \frac{\ell_i}{8}(s-1) \text{.....(5.8.13)}$$

sendo φ_i o ângulo de abertura da barra curva i, ou ℓ_i o comprimento da barra i, caso esta seja reta.

A descrição mais detalhada dos ítens a) até e) é

apresentada em sequência nos parágrafos 5.9 até 5.14.

5.9 - ESFORÇOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO E AÇÕES EQUIVALENTES NOS NÓS PARA CARGAS P = 1 E T = 1 ATUANDO NA BARRA j

Os cálculos explicados neste parágrafo correspondem ao ítem a) do parágrafo 5.8 e são realizados para cada estado i_{pc}.

I - Esforços de Engastamento Perfeito

Os esforços de engastamento perfeito podem assumir valores não nulos apenas na barra j carregada (no estado i_{pc}).

Com a ordenada φ_c ou a_c (equações 5.8.4 ou 5.8.5) do carregamento P = 1 ou T = 1 podem ser calculados os esforços de engastamento perfeito para os dois tipos de carga (equações 4.8.6 ou 4.9.1, conforme a barra j seja curva ou reta).

Os esforços de engastamento perfeito devidos a P = 1 e T = 1 podem ser colecionados numa matriz $[X]$, de ordem (6 x 2):

$$[X] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \\ \hline X_{41} & X_{42} \\ X_{51} & X_{52} \\ X_{61} & X_{62} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{extremidade início A} \\ \\ \\ \\ \text{extremidade final B} \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5.9.1)$$

onde os primeiros índices 1, 2 e 3 referem-se à extremidade esquerda A da barra j, enquanto 4, 5 e 6 referem-se à extremidade direita B da mesma barra. Os segundos índices 1 e 2 referem-se à P = 1 e T = 1.

No cálculo da matriz $[X]$ (equação 5.9.1) poderá ser necessário utilizar a matriz de rigidez $[k^j]$ de ordem (6 x 6), caso à barra j carregada seja curva. Nesta altura do cálculo, as

matrizes de rigidez $\left[k^{i}\right]$ de todas as barras (retas ou curvas), já estão calculadas e encontram-se permanentemente armazenadas.

A matriz $[X]$ (equação 5.9.1) após calculada, deve permanecer armazenada durante os cálculos do <u>estado i_{pc}</u> pois será utilizada também nos cálculos do ítem c) (parágrafo 5.8).

II - <u>Ações equivalentes nos nós</u>

No estado i_{pc}, <u>a matriz $[A_E]$ de cargas equivalentes nos nós</u>, atuando nas direções globais de <u>toda</u> a estrutura, de ordem $(3\,n_j \times 2)$, tem a forma:

$$(3nj \times 2)\quad [A_E] = \begin{array}{c} \text{nó 1} \\ \text{nó 2} \\ \\ \text{nó j} \\ \text{nó j+1} \\ \\ \text{nó n} \\ \text{nó nj=n+1} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \\ X_{41} & X_{42} \\ X_{51} & X_{52} \\ X_{61} & X_{62} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{BARRA 1} \\ \text{BARRA 2} \\ \\ \text{j - ésima BARRA} \\ \\ \\ \text{n - ésima BARRA} \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots(5.9.2)$$

onde os primeiros índices 1, 2, 3....$3\,n_j$ correspondem aos números das coordenadas globais (3 por nó) e os segundos ín-

dices (1 e 2) referem-se às cargas P = 1 e T = 1.

A única parte não obrigatoriamente nula no segundo membro de (5.9.2) são as 6 linhas correspondentes à barra j carregada.

Como mostrado na equação (5.9.2) os elementos da linha t da matriz $[X]$ (equação 5.9.1) são levados, com o sinal trocado, para as linhas q da matriz $[A_E]$, através da correspondência:

$$q = 3(j-1) + t \qquad \text{.....(5.9.3)}$$

$$t = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots 6 \qquad \text{.....(5.9.4)}$$

sendo j o número da barra carregada.

5.10 - ORDENADAS DAS LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA DESLOCAMENTOS NAS DIREÇÕES GLOBAIS DA VIGA CONTÍNUA CURVA

Os cálculos explicados neste parágrafo correspondem ao ítem b) do parágrafo 5.8 e são realizados para cada estado i_{pc}. Supõe-se as cargas P = 1 e T = 1 atuando na barra j.

Conforme visto no parágrafo 5.7, os deslocamentos nas direções globais da viga contínua serão calculados pré-multiplicando a matriz $[A_E]$ (equação 5.9.2), pela matriz global de flexibilidade $[\Delta]$ (parágrafo 5.7.c):

$$\overset{(3nj \times 2)}{[D]} = \overset{(3nj \times 3nj)}{[\Delta]}\ \overset{(3nj \times 2)}{[A_E]} \qquad \text{.....(5.10.1)}$$

notando-se que a primeira coluna de D referir-se-á à carga P = 1 e a segunda coluna à carga T = 1.

A matriz $[D]$, de ordem $(3\,n_j \times 2)$ tem a forma indicada na equação (5.10.2):

$$
(3nj \times 2)\quad
\begin{array}{c|c|c|c}
 & P=1 & T=1 & \\
\hline
\text{nó } 1 & D_{11} & D_{12} & \text{BARRA } 1 \\
 & D_{21} & D_{22} & \\
 & D_{31} & D_{32} & \\
\hline
\text{nó } 2 & D_{41} & D_{42} & \text{BARRA } 2 \\
 & D_{51} & D_{52} & \\
 & D_{61} & D_{62} & \\
\hline
 & \vdots & \vdots & \\
\hline
\text{nó } i & D_{inv,1} & D_{inv,2} & \text{BARRA } i \\
 & D_{inv+1,1} & D_{inv+1,2} & \\
 & D_{inv+2,1} & D_{inv+2,2} & \\
\hline
\text{nó } i+1 & D_{inv+3,1} & D_{inv+3,2} & \\
 & D_{inv+4,1} & D_{inv+4,2} & \\
 & D_{inv+5,1} & D_{inv+5,2} & \\
\hline
 & \vdots & \vdots & \\
\hline
\text{nó } n & D_{3nj-5,1} & D_{3nj-5,2} & \text{BARRA } n \\
 & D_{3nj-4,1} & D_{3nj-4,2} & \\
 & D_{3nj-3,1} & D_{3nj-3,2} & \\
\hline
\text{nó } nj=n+1 & D_{3nj-2,1} & D_{3nj-2,2} & \\
 & D_{3nj-1,1} & D_{3nj-1,2} & \\
 & D_{3nj-,1} & D_{3nj-,2} &
\end{array}
\qquad \ldots\ldots (5.10.2)
$$

Para varrer todos os índices i_{nv} de linhas da matriz [D] , observe-se que esses índices estão relacionados com os números i dos nós (n_j nós) e com os índices r de deslocamentos de cada nó (3 deslocamentos por nó), através da correspondência.

$$
\left|
\begin{array}{ll}
i_{nv} = 3(i-1) + r & \ldots\ldots\ldots (5.10.3) \\
r = 1,\ 2,\ 3 & \ldots\ldots\ldots (5.10.4) \\
i = 1,\ 2,\ 3\ldots,\ n_j & \ldots\ldots\ldots (5.10.5)
\end{array}
\right.
$$

onde i_{nv} coincide com a numeração de vínculo possível (equação 5.4.1), e assume valores de 1 até $3\,n_j$

À rigor, para se evitar armazenamentos desnecessá-

rios e multiplicação por zeros, os elementos da matriz $[D]$ podem ser calculados sem a necessidade de se construir a matriz $[A_E]$ (equação 5.9.2), mas, tomando-se apenas os seus elementos não nulos, colecionados a menos de sinal na matriz $[X]$ (equação 5.9.1) e os multiplicando pelas colunas correspondentes de $[\Delta]$.

Os índices q de colunas da matriz global de flexibilidade $[\Delta]$, correspondentes às linhas t (t = 1, 2, 3....6) da matriz $[X]$ valem:

$$q = 6(j - 1) + t \qquad \text{.....(5.10.6)}$$

sendo j o número da barra carregada.

Baseando-se nas equações (5.10.3) até (5.10.6) pode-se varrer todas as linhas i_{nv} de $[D]$, obtendo-se os elementos dessa matriz:

$$D_{i_{nv},1} = \sum_{t=1}^{6} \Delta_{i_{nv},q} \cdot X_{t,1} \qquad \text{.....(5.10.7)}$$

$$D_{i_{nv},2} = \sum_{t=1}^{6} \Delta_{i_{nv},q} \quad X_{t,2} \qquad \text{.....(5.10.8)}$$

sendo i_{nv} dado pelas equações (5.10.3) à (5.10.5) e q dado pela equação (5.10.6).

A matriz $[D]$ é calculada para cada estado i_{pc}, permanecendo armazenada para ser utilizada no ítem c) (parágrafo 5.8).

Observe-se que os elementos da matriz $[D]$ (equação 5.10.2) são ordenadas das L.Is. de deslocamentos nos apoios nas direções globais, para as cargas P = 1 e T = 1 na posição i_{pc}.

Após os cálculos em cada i_{pc} os valores $[D]$ são transferidos para outras posições de memória onde estão armazenadas L.Is., ficando os espaços livres para cálculo de nova matriz $[D]$, relativa à outra posição da carga.

Convém ressaltar que o deslocamento vertical de translação de cada nó, é positivo quando para cima, e será por isso chamado de w, para evitar-se confundí-los com a flecha z, con-

vencionada positiva para baixo.

5.11 - ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS PARA CARGAS P = 1 e T = 1 ATUANDO NA BARRA j

Os cálculos explicados neste parágrafo referem-se ao ítem c) do parágrado 5.8 e também são realizados para cada estado $\underline{i}_{pc}$.

Associados aos deslocamentos [D] (equações 5.10.1 e 5.10.2) aparecem deslocamentos e esforços nas direções locais (FIG. 5.2.1) nas extremidades de todas as barras.

Os deslocamentos na extremidade da barra i, aparecem como submatriz de ordem (6 x 2) no segundo membro da equação (4.10.2) e constituem uma matriz $\left[D^{i}\right]$.

$$\left[D^{i}\right] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} D^{i}_{11} & D^{i}_{12} \\ D^{i}_{21} & D^{i}_{22} \\ D^{i}_{31} & D^{i}_{32} \\ \hline D^{i}_{41} & D^{i}_{42} \\ D^{i}_{51} & D^{i}_{52} \\ D^{i}_{61} & D_{62} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{extremidade A} \\ \\ \text{extremidade B} \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots(5.11.1)$$

Os elementos de $\left[D^{i}\right]$ (equação 5.11.1) podem ser obtidos diretamente da matriz [D] (equação 5.10.2) com as seguintes expressões:

$$D^{i}_{t,\,1} = D_{3(i-1)\,+\,t,\,1} \qquad \ldots\ldots\ldots(5.11.2)$$

$$D^{i}_{t,\,2} = D_{3(i-1)\,+\,t,\,2} \qquad \ldots\ldots\ldots(5.11.3)$$

$$(t = 1,\ 2,\ 3\ldots\ldots6) \qquad \ldots\ldots\ldots(5.11.4)$$

sendo i o número da barra da qual se deseja os deslocamentos na ex

tremidade.

O carregamento da barra j produz nas extremidades da barra i (seções à esquerda do ponto 1 e à direita do ponto 17), os esforços de extremidade representados na matriz $\left[A^i\right]$, de ordem (6 x 2), que é calculada considerando os 2 casos possíveis:

a) $i \neq j$ (carregamento e esforços de extremidade tomados em barras distintas)

Neste caso tem-se:

$$\overset{(6 \times 2)}{\left[A^i\right]} = \overset{(6 \times 6)}{\left[k^i\right]} \; \overset{(6 \times 2)}{\left[D^i\right]} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5.11.5)$$

Como não existem cargas na barra i, os esforços de extremidade são funções exclusivas dos deslocamentos do início e final da barra. Na equação (5.11.5), $\left[k^i\right]$ é a matriz de rigidez da barra i, que já se encontra calculada e armazenada, enquanto que $\left[D^i\right]$ é a matriz dada em (5.11.1), dos deslocamentos de extremidade da mesma barra i.

b) $i = j$ (carregamento e esforços de extremidade tomados na mesma barra)

É sabido, do Processo dos Deslocamentos, que:

$$\overset{(6 \times 2)}{\left[A^i\right]} = \overset{(6 \times 2)}{\left[X\right]} + \overset{(6 \times 6)}{\left[k^i\right]} \; \overset{(6 \times 2)}{\left[D^i\right]} \qquad \ldots\ldots\ldots (5.11.6)$$

onde $\left[X\right]$ é a matriz, já calculada e armazenada, dos esforços de engastamento perfeito na barra carregada $i = j$, e as demais matrizes possuem os mesmos significados que na equação (5.11.5).

Em qualquer dos casos a) ou b) a matriz $\left[A^i\right]$, de esforços resultantes na extremidade da barra i, tem a forma:

$$\overset{(6\times 2)}{\left[A_i\right]} = \begin{bmatrix} \overset{(3\times 2)}{\left[A_A^i\right]} \\ \hline \overset{(3\times 5)}{\left[A_B^i\right]} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i \\ A_{31}^i & A_{32}^i \\ \hline A_{41}^i & A_{42}^i \\ A_{51}^i & A_{52}^i \\ A_{61}^i & A_{62}^i \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{extremidade} \\ \text{início A} \\ \\ \\ \text{extremidade} \\ \text{final B} \end{array} \qquad \ldots\ldots(5.11.7)$$

sendo $\left[A_A^i\right]$ e $\left[A_B^i\right]$, de ordem (3 x 2), correspondendo respectivamente aos esforços na extremidade início A e na extremidade final B da barra i, de acordo com as direções locais (FIG. 5.2.1).

Neste <u>estado i_{pc}</u> de carregamento, os esforços de extremidade aparecem em todas as barras, e podem então, ser colecionados na matriz $[A]$ de ordem $(6n \times 2)$:

$$\overset{(6n\times 2)}{[A]} = \begin{bmatrix} [A^1] \\ \hline [A^2] \\ \hline \vdots \\ \hline [A^i] \\ \hline \vdots \\ \hline [A^n] \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{barra 1} \\ \text{barra 2} \\ \\ \text{barra } i \\ \\ \text{barra n} \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(5.11.8)$$

sendo as submatrizes A^i como (5.11.7) e correspondendo à cada barra i (i = 1, 2.....n).

A matriz $[A]$ é obtida realizando o cálculo de todas as matrizes $\left[A^i\right]$ conforme equações (5.11.5) e (5.11.6) e levando-as

para a posição devida em (5.11.8). Essa matriz fica armazenada para ser utilizada nos ítens d) e e) (parágrafo 5.8).

A correspondência estre os índices de linha q da matriz $[A]$, e as linhas t da matriz $\left[A^{i}\right]$ permite calcular a contribuição de todas as barras em $[A]$:

$$A_{q,1} = A^{i}_{t,1} \qquad \text{.....(5.11.9)}$$

$$A_{q,2} = A^{i}_{t,2} \qquad \text{.....(5.11.10)}$$

$$q = 6(i-1) + t \qquad \text{.....(5.11.11)}$$

$$(t = 1,\ 2,\ 3....6) \qquad \text{.....(5.11.12)}$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3....n) \qquad \text{.....(5.11.13)}$$

5.12 - ORDENADAS DAS LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA REAÇÕES DE APOIO NA VIGA CONTÍNUA CURVA

Os cálculos explanados neste parágrafo referem-se ao ítem d) do parágrafo 5.8 e são realizados para cada estado i_{pc}.

Nesse estágio, os esforços nas extremidades de cada barra i, representados por $[A^{i}]$, com a configuração dada na equação (5.11.7), encontram-se calculados e dispostos na matriz $[A]$, como mostrado na equação (5.11.8).

Lembrando que não existem cargas aplicadas diretamente sobre os nós, o equilíbrio de forças permite obter as reações de apoio no nó i, como definido na equação (5.4.4):

$$\overset{(3\times 2)}{\left[\rho^{i}\right]} = \begin{bmatrix} \rho^{i}_{11} & \rho^{i}_{12} \\ \rho^{i}_{21} & \rho^{i}_{22} \\ \rho^{i}_{31} & \rho^{i}_{32} \end{bmatrix} = \overset{(3\times 2)}{\left[A_{B}^{i-1}\right]} + \overset{(3\times 2)}{\left[A_{A}^{i}\right]} \qquad \text{...(5.12.1)}$$

onde $\left[A_{A}^{i}\right]$ contém os esforços na extremidade esquerda da barra i, e $\left[A_{B}^{i-1}\right]$ contém os esforços na extremidade direita da barra $i-1$,

concorrentes no nó i.

No último membro da equação (5.12.1) a primeira parcela deve ser omitida quando $i = 1$ (primeiro nó) e a segunda parcela não existirá se $i = n_j$ (último nó).

Em cada estado i_{pc} devem ser determinadas as reações indicadas por $\left[\rho^i\right]$ (equação 5.12.1) em todos os nós i (i = 1, 2, 3....n_j).

As reações de cada nó, podem ser colecionadas na matriz [R] de ordem ($3n_j$ x 2):

$$\overset{(3nj\times 2)}{\left[R\right]} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \left[\rho^1\right] \\ \hline \left[\rho^2\right] \\ \hline \vdots \\ \hline \left[\rho^i\right] \\ \hline \vdots \\ \hline \left[\rho^{nj}\right] \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{nó } 1 \\ \text{nó } 2 \\ \\ \text{nó } i \\ \\ \text{nó } nj \end{array} \qquad \text{.....(5.12.2)}$$

A maneira mais prática de se obter a matriz [R] (equação 5.12.2) é basear-se na soma indicada em (5.12.1), e na correspondência dos índices i_{nv} (i_{nv} = 1, 2, 3....$3n_j$) de linhas da matriz [R], com os índices t (t = 1, 2....6) de linhas das matrizes $\left[A^i\right]$ (equação 5.11.7).

Os elementos de [R] podem ser calculados com as contribuições dos elementos de $\left[A^i\right]$ de cada barra i:

$$\rho_{i_{nv},1} = A^i_{t,1} + \text{contribuição das outras barras} \quad \text{..(5.12.3)}$$

$$\rho_{i_{nv},2} = A^i_{t,2} + \text{contribuição das outras barras} \quad \text{..(5.12.4)}$$

$$i_{nv} = 3(i-1) + t \quad \text{.....(5.12.5)}$$

$$(t = 1, 2, 3 \ldots 6) \quad \text{.....(5.12.6)}$$

$$(i = 1, 2, 3 \ldots n) \quad \text{.....(5.12.7)}$$

onde i varre todas as barras da viga contínua.

Observe-se que, de acôrdo com a definição de linha de influência, as reações contidas na matriz [R] (equação 5.12.2) são as ordenadas das L.Is. de reações de apoio para o ponto i_{pc} do eixo, no estado i_{pc}.

5.13 - ORDENADAS DAS LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA ESFORÇOS SOLICITANTES NAS SEÇÕES DA VIGA CONTÍNUA

Os cálculos explicados neste parágrafo referem-se ao ítem e) do parágrafo 5.8 e também são realizados para cada estado i_{pc}.

No estado i_{pc} deve-se varrer todas as seções da viga contínua, variando o índice i_{ps}.

$$i_{ps} = 17(i - 1) + 2s - 1 \qquad \text{.....(5.13.1)}$$

$$(s = 1, 2, 3 \ldots\ldots 9) \qquad \text{.....(5.13.2)}$$

$$(i = 1, 2, 3 \ldots\ldots n) \qquad \text{.....(5.13.3)}$$

e calcular os esforços solicitantes em todas as seções.

Cada seção s ($s = 1, 2, 3 \ldots 9$), na barra i, é definida pela coordenada angular φ_s ou pela coordenada linear a_s, conforme a barra i seja curva ou reta:

$$\varphi_s = \frac{\phi_i}{8}(s - 1) \text{.....(5.13.4)} \qquad a_s = \frac{\ell_i}{8}(s - 1) \text{.....(5.13.5)}$$

onde ϕ_i é o ângulo de abertura da barra i, caso esta seja curva, ou ℓ_i é o comprimento da barra reta i, que contém a seção s.

Em cada seção se calculam os esforços solicitantes M_T, M_F e Q, para cargas P = 1 e T = 1, que já serão ordenadas das correspondentes L.Is. no estado i_{pc}.

É preciso notar que, se a posição i_{ps} da seção onde se calculam os esforços solicitantes, não coincide com a posição i_{pc} da carga concentrada, esses esforços são únicos na seção e podem ser representados na matriz $[\mu^{i,s}]$, conforme parágrafo 5.5:

$$\left[\mu^{i,s}\right] = \begin{bmatrix} \mu_{1,1}^{i,s} & \mu_{1,2}^{i,s} \\ \mu_{2,1}^{i,s} & \mu_{2,2}^{i,s} \\ \mu_{3,1}^{i,s} & \mu_{3,2}^{i,s} \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots(5.13.6)$$

sendo que os elementos de $\left[\mu^{i,s}\right]$ representam as <u>ordenadas</u> das L.Is. que podem ser calculadas para a seção e, já que são únicas, podem ser interpretadas como <u>ordenadas à esquerda</u> da seção.

Por outro lado, se a carga concentrada está sobre a seção, haverá distinção entre os esforços solicitantes à direita e à esquerda da mesma seção. Nesse caso em que $i_{pc} = i_{ps}$ deverão ser calculados <u>ordenadas à esquerda</u> da seção, colecionadas em $\left[\mu^{i,s}\right]$ e <u>ordenadas à direita</u> da seção, calculadas em $\left[\nu^{i,s}\right]$.

$$\left[\mu^{i,s}\right] = \begin{bmatrix} \mu_{11}^{i,s} & \left(\mu_{12}^{i,s}\right) \\ \mu_{21}^{i,s} & \mu_{22}^{i,s} \\ \left(\mu_{31}^{i,s}\right) & \mu_{32}^{i,s} \end{bmatrix} \ldots(5.13.7) \qquad \left[\nu^{i,s}\right] = \begin{bmatrix} \nu_{11}^{i,s} & \left(\nu_{12}^{i,s}\right) \\ \nu_{21}^{i,s} & \nu_{22}^{i,s} \\ \left(\nu_{31}^{i,s}\right) & \nu_{32}^{i,s} \end{bmatrix} .(5.13.8)$$

Deve-se notar que as <u>ordenadas à esquerda</u> são os esforços solicitantes à direita (da carga ou seção coincidentes) e que as <u>ordenadas à direita</u> são os esforços solicitantes à esquerda.

As ordenadas à esquerda e à direita da seção s, armazenadas respectivamente em $\left[\mu^{i,s}\right]$ (equação 5.13.7) e em $\left[\nu^{i,s}\right]$ (equação 5.13.8), quando a carga atua sobre a seção, podem ser diferentes entre si, o que mais precisamente ocorre na L.I. de Q para P = 1 e na L.I. de M_T para T = 1, cujas ordenadas são as representadas entre parenteses nas equações (5.13.7) e (5.13.8).

As ordenadas de L.Is. de esforços solicitantes são calculadas considerando os dois casos possíveis, lembrando-se novamente que a seção está na barra i, e a carga atua na barra j:

a) $i \neq j$ (seção e cargas em barras distintas)

Calcula-se apenas as ordenadas $\left[\mu^{i,s}\right]$ (equação 5.3.6) na seção. Pode-se usar os esforços resultantes na extremidade esquerda da barra i:

$$\overset{(3\times 2)}{\left[\mu^{i,s}\right]} = \overset{(3\times 3)}{\left[T^{i}_{AS}\right]} \overset{(3\times 2)}{\left[A^{i}_{A}\right]} \qquad \text{.....(5.13.9)}$$

sendo $\left[T^{i}_{AS}\right]$ uma matriz de equilíbrio, de ordem (3 x 3), dada como visto no parágrafo 4.3, que permite o cálculo dos esforços solicitantes numa seção, a partir de cargas concentradas à esquerda.

A matriz $\left[A^{i}_{A}\right]$ da equação (5.13.9), de ordem (3 x 2), contém os esforços na extremidade esquerda da barra i, que podem ser tirados da matriz $[A]$ (equação 5.11.8), conforme segundo membro de (5.11.7). Os elementos de linha t de $\left[A^{i}_{A}\right]$, correspondem aos elementos de linha q da matriz $[A]$, conforme já visto no parágrafo 5.11.

$$A^{i}_{t,1} = A_{q,1} \qquad \text{.....(5.13.10)}$$

$$A^{i}_{t,2} = A_{q,2} \qquad \text{.....(5.13.11)}$$

$$q = 6(i-1) + t \qquad \text{.....(5.13.12)}$$

$$(t = 1, 2, 3) \qquad \text{.....(5.13.13)}$$

b) $i = j$ (carga e seção na mesma barra)

Esse caso permite 3 sub-casos:

b.1) $i_{ps} < i_{pc}$ (seção à esquerda da carga)

Calcula-se apenas as ordenadas $\left[\mu^{i,s}\right]$ na seção, a partir dos esforços resultantes da extremidade esquerda da barra i. Utiliza-se a mesma equação (5.13.9).

b.2) $i_{ps} > i_{pc}$ (seção à direita da carga)

Calcula-se apenas as ordenadas $\left[\mu^{i,s}\right]$ na seção, a partir dos esforços resultantes, da extremidade direita da barra i.

$$\overset{(3\times 2)}{\left[\mu^{i,s}\right]} = \overset{(3\times 3)}{\left[T_{BS}^{i}\right]} \overset{(3\times 2)}{\left[A_{B}^{i}\right]} \qquad \text{.....(5.13.14)}$$

sendo $\left[T_{BS}^{i}\right]$, uma matriz de equilíbrio como visto no parágrafo 4.3, e $\left[A_{B}^{i}\right]$ a matriz dos esforços na extremidade direita da barra i, tirados da matriz $\left[A\right]$ (equação 5.11.8), conforme segundo membro da equação (5.11.7).

Os elementos de linha t da matriz $\left[A_{B}^{i}\right]$ são retirados dos elementos de linha q da matriz $\left[A\right]$ através da correspondência já vista no parágrafo 5.11:

$$A_{t,1}^{i} = A_{q,1} \qquad \text{.....(5.13.15)}$$

$$A_{t,2}^{i} = A_{q,2} \qquad \text{.....(5.13.16)}$$

$$q = 6(i-1) + 3 + t \qquad \text{.....(5.13.17)}$$

$$t = 1,\ 2,\ 3) \qquad \text{.....(5.13.18)}$$

b.3) $i_{ps} = i_{pc}$ (carga sobre a seção)

Calcula-se as <u>ordenadas à esquerda</u> $\left[\mu^{i,s}\right]$ com os esforços resultantes da extremidade direita da barra i, e as <u>ordenadas à direita</u> $\left[\nu^{i,s}\right]$ com os esforços resultantes da extremidade esquerda da barra i:

$$\overset{(3\times 2)}{\left[\mu^{i,s}\right]} = \overset{(3\times 3)}{\left[T_{BS}^{i}\right]} \overset{(3\times 2)}{\left[A_{B}^{i}\right]} \qquad \text{.....(5.13.19)}$$

e

$$\overset{(3\times 2)}{\left[\nu^{i,s}\right]} = \overset{(3\times 3)}{\left[T_{AS}^{i}\right]} \overset{(3\times 2)}{\left[A_{A}^{i}\right]} \qquad \text{.....(5.13.20)}$$

com as matrizes dos segundos membros tendo os mesmos significados que nas equações (5.13.9) e (5.13.14).

É interessante salientar que, para economia de memória, os valores $\left[\mu^{i,s}\right]$, e quando necessário $\left[\nu^{i,s}\right]$, calculados para i_{ps}, são imediatamente transferidos para outras posições con

venientes da memória, e que armazenam as ordenadas das L.Is.. Assim, ao variar i_{pc}, os espaços reservados para armazenar $\left[\mu^{i,s}\right]$ e $\left[\nu^{i,s}\right]$ estão livres para colecionar os esforços solicitantes relativos à outra seção.

CAPÍTULO 6

ARMAZENAMENTO DAS LINHAS DE INFLUÊNCIA DE VIGA CONTÍNUA

6.1 - INTRODUÇÃO

A presente forma de armazenamento das linhas de influência foi concebida dentro do espírito que este trabalho terá prosseguimento e que os resultados serão posteriormente utilizados no carregamento das linhas de influência segundo as normas vigentes.

No parágrafo 5.8 viu-se que o cálculo de todas as linhas de influência de deslocamentos nos apoios, de reações nos apoios e de esforços solicitantes em todas as seções é realizado variando-se a posição i_{pc} do carregamento concentrado P = 1 e T = 1:

$$i_{pc} = 17(j-1)+k \qquad \ldots\ldots\ldots(6.1.1)$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots\ldots 17) \qquad \ldots\ldots\ldots(6.1.2)$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots n) \qquad \ldots\ldots\ldots(6.1.3)$$

Para cada posição i_{pc} (chamado estado i_{pc}), chega-se aos resultados do ítem b) e d) do parágrafo 5.8, resumidos pelas matrizes [D] e [R] :

$$
\overset{(3nj\times 2)}{[D]} = \left[\begin{array}{cc}
D_{11} & D_{12} \\
D_{21} & D_{22} \\
D_{31} & D_{32} \\
\hline
D_{inv,1} & D_{inv,2} \\
D_{inv+1,1} & D_{inv+1,2} \\
D_{inv+2,1} & D_{inv+2,2} \\
\hline
D_{3nj-2,1} & D_{3nj-2,2} \\
D_{3nj-1,1} & D_{3nj-1,2} \\
D_{3nj,1} & D_{3nj,2}
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\text{nó } 1 \\ \\ \text{nó } i \\ \\ \text{nó } nj
\end{array}
\qquad \ldots\ldots\ldots(6.1.4)
$$

$$
\overset{(3nj\times 2)}{[R]} = \left[\begin{array}{cc}
P_{11} & P_{12} \\
P_{21} & P_{22} \\
P_{31} & P_{32} \\
\hline
P_{inv,1} & P_{inv,2} \\
P_{inv+1,1} & P_{inv+1,2} \\
P_{inv+2,1} & P_{inv+2,2} \\
\hline
P_{3nj-2,1} & P_{3nj-2,2} \\
P_{3nj-1,1} & P_{3nj-1,2} \\
P_{3nj,1} & P_{3nj,2}
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\text{nó } 1 \\ \\ \text{nó } 2 \\ \\ \text{nó } 3
\end{array}
\qquad \ldots\ldots\ldots(6.1.5)
$$

A matriz [D] contém todos os deslocamentos nos nós, enquanto [R] contém todas as reações de apoio no estado i_{pc}, nas direções i_{nv} de todos os vínculos possíveis, existentes e inexistentes. Os índices de numeração dos vínculos são varridos como segue:

$$
\left|\begin{array}{ll}
i_{nv} = 3(i - 1) + r & \ldots\ldots\ldots(6.1.6) \\
(r = 1,\ 2,\ 3) & \ldots\ldots\ldots(6.1.7) \\
i = 1,\ 2,\ 3 \ldots n_j) & \ldots\ldots\ldots(6.1.8)
\end{array}\right.
$$

sendo i o índice do nó da viga contínua e r o número do vínculo possível (r = 1, 2, 3 conforme corresponda a θ_x, θ_y e w, ou R_T, R_M, R_V).

Em seguida, para cada posição i_{pc} da carga concen-

trada, variando-se todas as seções s (s = 1, 2.....9) em todas as barras i, com índice i_{ps}, chega-se ao resultado do ítem f do parágrafo 5.8, resumido nas matrizes $\left[\mu^{i,s}\right]$ e $\left[\nu^{i,s}\right]$:

$$\left[\mu^{i,s}\right] = \begin{bmatrix} \mu^{i,s}_{11} & \mu^{i,s}_{12} \\ \mu^{i,s}_{21} & \mu^{i,s}_{22} \\ \mu^{i,s}_{31} & \mu^{i,s}_{32} \end{bmatrix} \quad \ldots.(6.1.9) \qquad \left[\nu^{i,s}\right] = \begin{bmatrix} \nu^{i,s}_{11} & \nu^{i,s}_{12} \\ \nu^{i,s}_{21} & \nu^{i,s}_{22} \\ \nu^{i,s}_{31} & \nu^{i,s}_{32} \end{bmatrix} \quad ..(6.1.10)$$

que contêm ordenadas à esquerda e ordenadas à direita das L.Is. para esforços na seção s da barra i. Lembre-se a matriz $\left[\nu^{i,s}\right]$ só é calculada e necessária quando $i_{ps} = i_{pc}$.

Os índices i_{ps} são varridos por:

$$\left|\begin{array}{ll} i_{ps} = 17(i - 1) + m & \ldots\ldots\ldots(6.1.11) \\ m = 2s - 1 & \ldots\ldots\ldots(6.1.12) \\ s = 1,\ 2,\ 3\ldots.9 & \ldots\ldots\ldots(6.1.13) \\ i = 1,\ 2\ldots\ldots.n & \ldots\ldots\ldots(6.1.14) \end{array}\right.$$

sendo s o número externo da seção, m o número interno da seção da barra e i o número da barra onde se calculam ordenadas de L.Is.

Pretende-se mostrar em seguida como são transferidas e armazenadas as ordenadas, em cada estado i_{pc}, para comporem todas as linhas de influência de Deslocamentos de nó, Reações de apoio e Esforços solicitantes, que ficarão armazenados para posterior utilização.

6.2 - ARMAZENAMENTO DAS L.Is. DESLOCAMENTOS E REAÇÕES NOS APOIOS

Como as reações de apoio e os deslocamentos globais são em mesma quantidade, já que considerados nas direções e sentidos dos vínculos possíveis (existentes e inexistentes), nota-se que os armazenamentos dessas L.Is. podem ser realizados em duas matrizes de mesmas dimensões e com o mesmo significado nos índices.

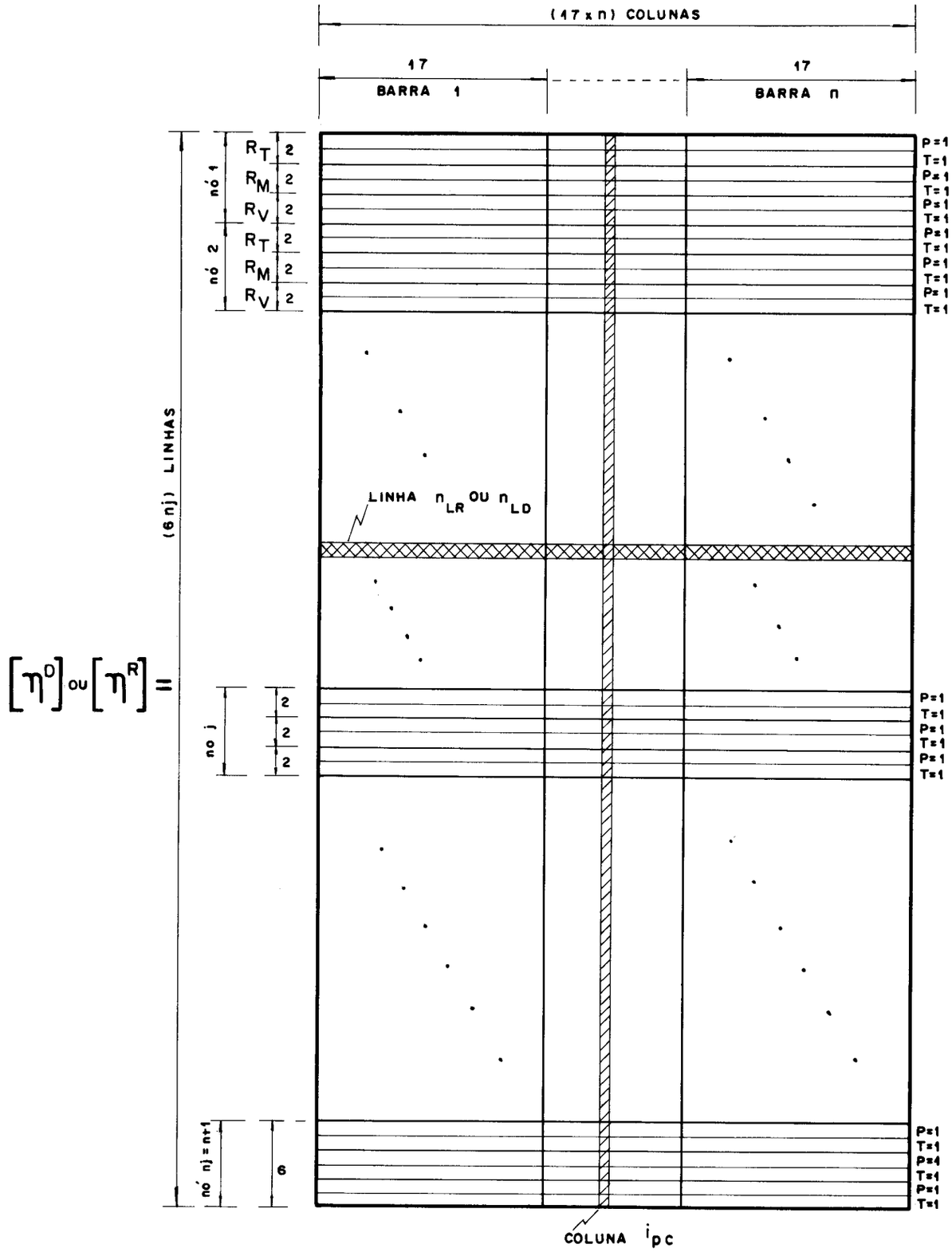


FIG. 6.2.1 - ARMAZENAMENTO DAS L.I$_S$. DESLOCAMENTOS E REAÇÕES NOS APOIOS.

As L.Is. de deslocamentos nas direções globais serão armazenados numa matriz $\left[\eta^D\right]$, enquanto as L.Is. de reações de apoio numa matriz $\left[\eta^R\right]$, ambas de ordem ($6n_j$ x $17n$) esquematizados na FIG. 6.2.1.

Fixe-se, então a atenção nas reações de apoio:

As posições i_{pc} da carga, dadas pela equação (6.1.1) são em número de 17 por barra e correspondem às colunas de $\left[\eta^R\right]$ (FIG. 6.2.1). Em cada linha será armazenada uma L.I. de reação de apoio.

As L.Is. nos vínculos i_{nv}, dados pela equação (6.1.4) são em número de 6 por nó (R_T, R_M e R_V devidas a P = 1 e T = 1) e pode-se fazer corresponder os índices i_{nv} aos índices de linha da matriz $\left[\eta^R\right]$.

Para estabelecer esta correspondência deve-se observar na FIG. 6.2.1 que as L.Is., em cada coluna de $\left[\eta^R\right]$, são armazenadas em sequência, em grupo de 6 por nó. Dentro de cada grupo existem 3 pares de L.Is., correspondendo cada par aos esforços reativos R_T, R_M e R_V, nessa ordem. Para cada par de L.Is., a primeira refere-se à carga móvel P = 1 e a segunda à carga móvel T = 1.

A L.I. de reação de apoio, correspondente à reação r(r = 1, 2, 3, conforme tratar-se de R_T, R_M ou R_V) no nó i(i = 1, 2, 3... n_j), para carga móvel c(c = 1, 2 conforme tratar-se de P = 1 ou T = 1) será armazenada na linha de $\left[\eta^R\right]$ que pode ser acessada com o índice n_{LR} (número da L.I. de reação de apoio)

$$n_{LR} = 6(i - 1) + 2(r - 1) + c \qquad \text{.....(6.2.1)}$$

Então, os estados i_{pc} (colunas i_{pc} de $\left[\eta^R\right]$) são variados pelas equações (6.1.1) a (6.1.3). Os vínculos i_{nv} possíveis são varridos, dentro de cada estado i_{pc}, pelas equações (6.1.5) à (6.1.8). Calcula-se em correspondência à i_{pc} e à todos os i_{nv}, a matriz $\left[R\right]$ (equação 6.1.5). Em seguida transfere-se os elementos de $\left[R\right]$ para a coluna i_{pc} da matriz $\left[\eta^R\right]$ através de:

$$\eta^{R}_{n_{LR},i_{pc}} = \rho_{i_{nv},c} \qquad \text{.....(6.2.2)}$$

$$n_{LR} = 6(i-1) + 2(r-1) + c \qquad \text{.....(6.2.3)}$$

$$(i_{nv} = 1,\ 2,\ 3\ \ldots.\ 3n_j) \qquad \text{.....(6.2.4)}$$

$$(c = 1,\ 2) \qquad \text{.....(6.2.5)}$$

sendo $\rho_{i_{nv},c}$ os elementos da matriz [R] (equação 6.1.5), em cada estado i_{pc}.

Desejando-se armazenar as L.Is. de deslocamentos nas direções globais, procede-se igualmente, bastando substituir, na equação (6.2.2) $\rho_{i_{nv},c}$ por $D_{i_{nv},c}$, sendo $D_{i_n,c}$ os elementos da matriz [D] (equação 6.1.4) em cada estado i_{pc}.

6.3 - ARMAZENAMENTO DAS L.Is. DE ESFORÇOS SOLICITANTES

Para o armazenamento das L.Is. de esforços solicitantes nas seções, serão utilizadas no programa a matriz $[\eta]$, de ordem ($54n$ x $17n$) e o vetor $\{\eta'\}$ de dimensão ($54n$ x 1), ambos esquematizados na FIG. 6.3.1.

As posições i_{pc} das cargas concentradas, dadas pela equação (6.1.1) são em número de 17 por barra e correspondem às colunas da matriz $[\eta]$ (FIG. 6.3.1).

Em cada linha da matriz $[\eta']$ será armazenada uma linha de influência de esforço solicitante, e como existe a possibilidade de aparecerem saltos (descontinuidade) em certas L.Is., nos pontos $i_{ps} = i_{pc}$, haverá necessidade de armazenar a ordenada à esquerda e a ordenada à direita nesses pontos. As ordenadas, quando únicas, e as ordenadas à esquerda das seções, são armazenadas em $[\eta]$ e as ordenadas à direita das seções serão armazenadas no vetor $\{\eta'\}$

No ponto $i_{ps} = i_{pc}$, isto é, sobre a seção para a qual se calcula a L.I., serão sempre calculadas 2 ordenadas, uma à esquerda, armazenada em $[\eta]$ e outra à direita armazenada em $\{\eta'\}$. O

vetor $\{\eta'\}$ contém então, ordenadas à direita de todas as seções, que poderão ser iguais ou diferentes das ordenadas à esquerda das seções e que estão armazenadas nas diferentes colunas de $[\eta]$. Entre os 6 tipos possíveis, as L.Is. que possuem descontinuidade serão somente as L.Is. de momento torçor M_T para carga T = 1 e as L.Is. de força cortante Q para carga móvel P = 1.

Para estabelecer a correspondência entre as L.Is. de esforços solicitantes e as linhas de $[\eta]$ e $\{\eta'\}$, observe-se na FIG. 6.3.1, que as L.Is. estão armazenadas em grupos de 6 para cada seção, constituindo 3 pares, correspondendo cada par aos esforços M_T, M_F e Q, nessa ordem. Em cada par, a primeira L.I. corresponde à L.I. devido a P = 1 e a segunda L.I. é devida à T = 1.

A L.I. do esforço solicitante e (e = 1, 2, 3 conforme trate-se de M_T, M_F ou Q), na seção s (s = 1, 2, 3... 9) da barra i (i = 1, 2, 3... n), para a carga móvel c (c = 1, 2 conforme trate-se de P = 1 ou T = 1), estará armazenada na linha n_{LE} (<u>número da L.I. de esforço solicitante</u>):

$$n_{LE} = 54(i - 1) + 6(s - 1) + 2(e - 1) + c \quad .....(6.3.1)$$

Então, ao calcular-se todas as L.Is. de esforços, primeiramente varre-se todos os estados i_{pc}, pelas equações (6.1.1) à (6.1.3). As seções possíveis i_{ps}, em cada estado i_{pc}, são varridos com as equações (6.1.11) a (6.1.14). Em correspondência a i_{ps} e i_{pc}, calcula-se a matriz $\left[\mu^{i,s}\right]$ (equação 6.1.9) e, quando $i_{ps} = i_{pc}$, também a matriz $\left[\nu^{i,s}\right]$ (equação 6.1.10).

Em seguida transfere-se os elementos de $\left[\mu^{i,s}\right]$ para a coluna i_{pc} de $[\eta]$ e no caso $i_{ps} = i_{pc}$ transfere-se os elementos de $\left[\nu^{i,s}\right]$ para $\{\eta'\}$, através de:

$$\eta_{n_{LE},i_{pc}} = \mu^{i,s}_{e,c} \quad .....(6.3.2) \quad ; \quad \begin{cases} \eta'_{n_{LE}} = \nu^{i,s}_{e,c} & .....(6.3.3) \\ \text{p/ } i_{pc} = i_{ps} & .....(6.3.4) \end{cases}$$

$$n_{LE} = 54(i - 1) + 6(s - 1) + 2(e - 1) + c \qquad \ldots\ldots(6.3.5)$$

$$(e = 1,\ 2,\ 3) \qquad \ldots\ldots\ldots(6.3.6)$$

$$(c = 1,\ 2) \qquad \ldots\ldots\ldots(6.3.7)$$

$$(s = 1,\ 2,\ 3\ldots\ldots\ldots 9) \qquad \ldots\ldots\ldots(6.3.8)$$

$$(i = 1,\ 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n) \qquad \ldots\ldots\ldots(6.3.9)$$

sendo $\mu^{i,s}_{e,c}$ e $\nu^{i,s}_{e,c}$ os elementos das matrizes (6.1.9) e (6.1.10) em cada estado i_{pc}.

Observe-se na FIG. 6.3.1, os diversos grupos de 6 elementos hachurados e negros, dispostos numa mesma vertical da matriz $[\eta]$. Esses elementos são as ordenadas à esquerda das seções para as quais se calcula as L.Is. ($i_{ps} = i_{pc}$), sendo que as ordenadas à direita correspondentes, estão armazenadas nas mesmas linhas no vetor $\{\eta'\}$.

Os 6 elementos em cada grupo de ordenadas de L.Is. relativos a uma seção referem-se à:

1) L.I. de M_T para P = 1

2) L.I. de M_T para T = 1

3) L.I. de M_F para P = 1

4) L.I. de M_F para T = 1

5) L.I. de Q para P = 1

6) L.I. de Q para T = 1

Os saltos só poderão ocorrer nos pontos $i_{pc} = i_{ps}$, nas L.Is. dos tipos 2 e 5. Na FIG. 6.3.1 estas ordenadas estão representadas em negro. A descontinuidade tem o valor da carga, isto é, para essas L.Is. as ordenadas à esquerda e à direita da seção diferem de 1.

Também a matriz $[\eta]$ é preenchida por coluna. Uma coluna de $[\eta]$ é toda preenchida para a carga numa posição i_{pc}. Aproveita-se o mesmo passo do cálculo para se "preencher" uma coluna da matriz $[\eta^R]$ com L.Is. de reações de apoio, uma coluna da matriz $[\eta^D]$ com L.Is. de deslocamentos nos apoios e para se preencher a mesma coluna da matriz $[\eta]$, com L.Is. de esforços solicitantes. Assim, o carregamento realmente, percorre uma só vez a estrutura, economizando bastante tempo de computação.

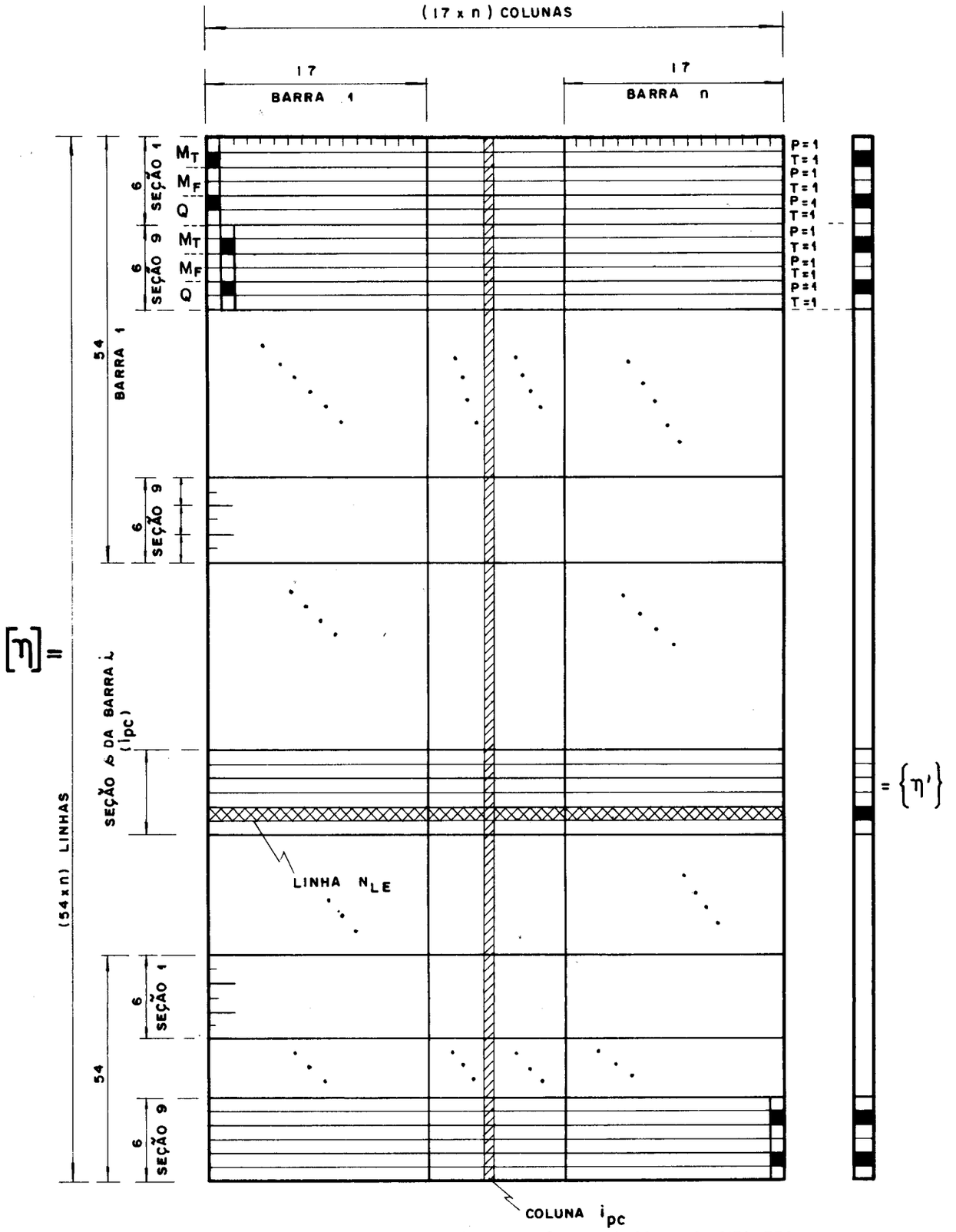


FIG. 6.3.1 - ARMAZENAMENTO DAS L.I$_S$. DE ESFORCOS SOLICITANTES

6.4 - SAÍDA DE RESULTADOS

Uma vez armazenadas as L.Is. o programa de cálculo tem na memória, disponível para posterior acesso ou utilização, as seguintes matrizes e vetores:

a) L.Is. de deslocamentos nos nós (matriz $\left[\eta^D\right]$)

b) L.Is. de reações de apoio (matriz $\left[\eta^R\right]$)

c) L.Is. de esforços solicitantes (matriz $[\eta]$ e vetor $\{\eta'\}$)

Resultam armazenadas $(6 \times n_j)$ L.Is. de deslocamentos, $(6 \times n_j)$ L.Is. de reações de apoio, e $(54 \times n)$ L.Is. de esforços solicitantes, sendo n_j o número de nós e n o número de barras.

Para se imprimir as L.Is. referentes a deslocamentos num nó, basta fornecer o número i do nó desejado, e serão impressas todas as 6 L.Is. referentes à deslocamentos naquele nó (3 para P = 1 e 3 para T = 1). Elas são obtidas da matriz $\left[\eta^D\right]$, nas linhas acessadas pelo índice n_{LD}:

$$n_{LD} = 6(i - 1) + 2(r - 1) + c \qquad \text{.....(6.4.1)}$$

$$(c = 1,\ 2) \qquad \text{.....(6.4.2)}$$

$$(r = 1,\ 2,\ 3) \qquad \text{.....(6.4.3)}$$

sendo i o número do nó, c o número da carga (P ou T) e r (r = 1, 2, 3) conforme tratar-se dos deslocamentos θ_x, θ_y ou w.

Para se imprimir as L.Is. referentes as reações possíveis num apoio, basta fornecer o número i do nó desejado e serão impressas todas as 6 L.Is. referentes àquele nó. Elas são obtidas da matriz $\left[\eta^R\right]$ nas linhas acessadas pelo índice n_{LR}.

$$n_{LR} = 6(i - 1) + 2(r - 1) + c \qquad \text{.....(6.4.4)}$$

$$(c = 1,\ 2) \qquad \text{.....(6.4.5)}$$

$$(r = 1,\ 2,\ 3) \qquad \text{.....(6.4.6)}$$

sendo i o número do nó, c (c = 1, 2) o número de carga (P ou T) e r (r = 1, 2, 3) conforme tratar-se da reação R_T, R_M ou R_V.

As L.Is. de esforços solicitantes numa seção serão impressas ao se fornecer ao programa o número s da seção ($1 \leq s \leq 9$) e o número i da barra que contém a seção. Elas são obtidas da matriz $[\eta]$ e do vetor $\{\eta'\}$, nas linhas acessadas pelo índice n_{LE}:

$$n_{LE} = 54(i-1) + 6(s-1) + 2(e-1) + c \qquad \ldots\ldots(6.4.7)$$

$$(c = 1,\ 2) \qquad \ldots\ldots(6.4.8)$$

$$(e = 1,\ 2,\ 3) \qquad \ldots\ldots(6.4.9)$$

sendo i o número da barra que contém a seção; s é o número da seção; e ($e = 1, 2, 3$) conforme seja L.I. de M_T, M_F ou Q e c ($c = 1, 2$) a carga P ou T.

Em qualquer caso as L.Is. são impressas em partes, barra por barra.

Quando se deseja L.Is. de esforços <u>solicitantes nos apoios</u> deve-se solicitar L.Is. na seção 1 da barra à direita do apoio, ou na seção 9 da barra à esquerda do apoio.

A impressão dos resultados foi programada de modo que nas seções onde houverem "saltos" de ordenadas, isto é, descontinuidade do diagrama, sejam impressos as ordenadas à esquerda e à direita da seção, exceptuando-se o caso da seção ser a primeira ou última de cada tramo, onde isso não teria sentido.

CAPÍTULO 7

LINHAS DE INFLUÊNCIA EM VIGAS CONTÍNUAS CURVAS COM APOIOS INCLINADOS

7.1 - INTRODUÇÃO

Nos capítulos 5 e 6 foi descrito em procedimento que possibilita a obtenção de linhas de influência em vigas contínuas em que os apoios deveriam ser considerados retos, isto é, as rotações, quando impedidas num apoio, eram radiais e ou tangenciais. É o mesmo que dizer que as rotações, livres ou impedidas, estão de acordo com o sistema de coordenadas mostrado na FIG. 5.2.2.

Seguindo aquele procedimento resultaram as matrizes $\left[\eta^D\right]$ (FIG. 6.2.1), $\left[\eta^R\right]$ (FIG. 6.2.1), $[\eta]$ (FIG. 6.3.1), com o correspondente vetor $\{\eta'\}$, onde estão contidas respectivamente as L. Is. de deslocamentos nos apoios, L.Is. de reações de apoio e L.Is. de esforços solicitantes em 9 seções por barra, $[\eta]$ considerando-se vigas contínuas com apoios retos.

É possível no entanto, em vigas contínuas de pontes, que ocorram apoios resistentes à momentos inclinados em relação às direções tangenciais e radiais da viga.

O problema foi tratado por VREDEN[17,18], sem uso de cálculo matricial.

A solução do problema de determinação das L.Is. quando os apoios são esconsos à direção radial torna-se simples, como se verá, se for usado o cálculo matricial.

A cautela que se deve tomar, de ordem prática, é que os ângulos de inclinações dos apoios devem ser pequenos, para que seja válido o cálculo de linha (O'CONNOR)[12] . Ainda assim, na fase de dimensionamento, será necessário considerar as perturbações que ocorrem nas vizinhanças dos apoios esconsos.

7.2 - SISTEMA DE COORDENADAS NOVO E ANTIGO

O problema da viga contínua curva está sendo estudado considerando-se 3 deslocamentos por nó: duas componentes de rotação, perpendiculares entre si, e uma translação vertical.

As componentes de rotação, nos capítulos anteriores, deveriam ter direção radial e tangencial. Aqui, os vetores que representam as rotações, quando da existência de apoios inclinados, estão girados em relação às direções radial e tangencial no nó.

Para que se possa expressar com exatidão quais os deslocamentos impedidos, define-se um novo sistema global de coordenadas, conforme mostrado na FIG. 7.2.1, também com 3 coordenadas por nó, onde as coordenadas relativas aos deslocamentos de rotação, estejam girados em relação às direções originais, da mesma inclinação da esconcidade do apoio.

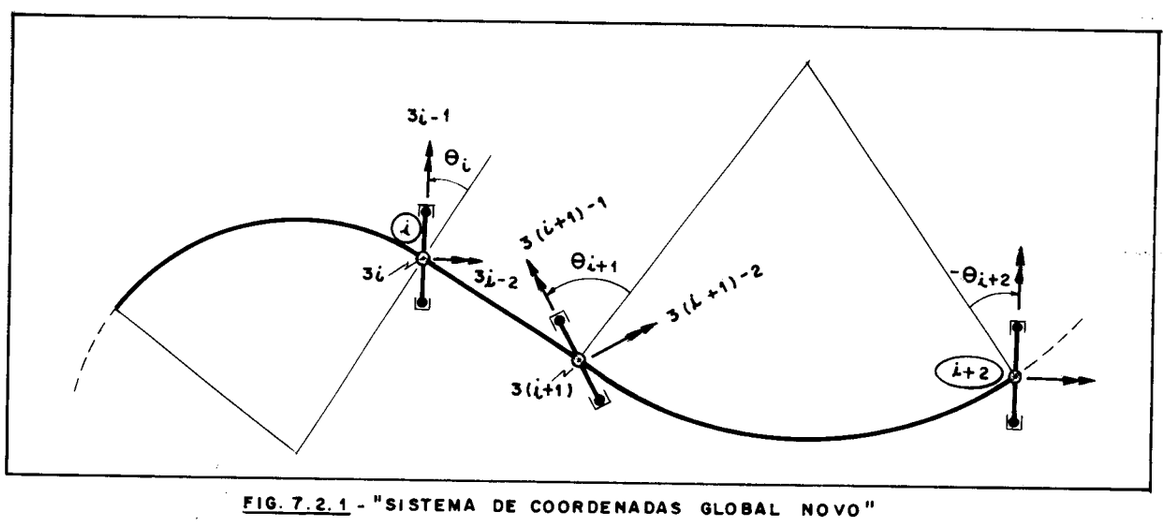


FIG. 7.2.1 - "SISTEMA DE COORDENADAS GLOBAL NOVO"

Os deslocamentos globais e forças segundo a numeração convencionada na FIG. 7.2.1 serão ditos no SISTEMA DE COORDENADAS NOVO enquanto que os deslocamentos globais e forças convencionados e numerados como na FIG. 5.2.2 são ditos no SISTEMA DE COORDENADAS ANTIGO.

7.3 - VETOR ROTAÇÃO DOS APOIOS

Para definir o SISTEMA DE COORDENADAS NOVO basta fornecer ao programa de cálculo o vetor $\{\theta\}$, de ordem $(n_j \times 1)$:

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_{nj} \end{Bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (7.3.1)$$

com $n_j = n + 1$ sendo o número de nós da estrutura.

Supor-se-á que os deslocamentos globais, quando impedidos, se-los-ão nas direções novas.

7.4 - MATRIZ DE ROTAÇÃO EM CADA NÓ i

A matriz $\left[R_\theta^i\right]$, de ordem 3×3, que faz a rotação de deslocamentos num nó i, passando do Sistema de coordenadas Novo para o Sistema de Coordenadas Antigo será:

$$\left[R_\theta^i\right] = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots (7.4.1)$$

sendo θ_i elemento do vetor $\{\theta\}$ (equação 7.3.1) correspondente ao nó i.

7.5 - MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO NA BARRA i

Uma barra i tem sempre em correspondência os nós i e $i+1$ como extremidades esquerda e direita.

Com isso a matriz $\left[T_\theta^i\right]$ de ordem 6 x 6, que transforma os 6 deslocamentos na extremidade da barra do Sistema de Coordenadas Novo para o Antigo será:

$$\left[T_\theta^i\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i & 0 & & & \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & \cos\theta_{i+1} & -\operatorname{sen}\theta_{i+1} & 0 \\ & 0 & & \operatorname{sen}\theta_{i+1} & \cos\theta_{i+1} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \ldots\ldots(7.5.1)$$

onde θ_i corresponde à inclinação do apoio possível no nó i e θ_{i+1} corresponde à inclinação do apoio possível no nó $i+1$.

7.6 - ALTERAÇÕES NECESSÁRIAS NO PROCEDIMENTO DE CÁLCULO DAS L.Is. (CAPÍTULOS 5 e 6) QUANDO OCORREREM APOIOS INCLINADOS.

a) Parágrafo 5.6 - capítulo 5

Na equação (5.6.1), as matrizes $\left[k^i\right]$, de ordem (6 x 6) que se superpõem produzindo a matriz de rigidez [K] da estrutura devem ser substituídas pelas matrizes de rigidez $\left[k_N^i\right]$, também de ordem (6 x 6) correspondente ao Sistema Novo, que valem:

$$\left[k_N^i\right] = \left[T_\theta^i\right]^T \left[k^i\right]\left[T_\theta^i\right] \qquad \ldots\ldots(7.6.1)$$

sendo $\left[T_\theta^{i}\right]$ a matriz de transformação dada em (7.5.1) e $\left[T_\theta^{i}\right]^T$ a transposta de $\left[T_\theta^{i}\right]$.

A matriz $\left[K_N^{i}\right]$ de cada barra fica armazenada disponível para futuros cálculos.

b) Parágrafo 5.9-I - capítulo 5

Os esforços de engastamento perfeito após calculados como descrito no parágrafo 5.9-I, e contidos na matriz $[X]$ (equação 5.9.1), devem ser passados para o Sistema Novo, e armazenados na matriz $[X_N]$ de ordem (6 x 2):

$$[X_N] = [T_\theta^{i}]^T \; [X] \qquad \ldots\ldots\ldots(7.6.2)$$

Em seguida os elementos de $[X_N]$ (equação 7.6.2) são usados da mesma maneira como são usados os elementos de $[X]$ (equação 5.9.1) para compor a matriz $[A_E]$ (equação 5.9.2).

c) Parágrafo 5.10 - capítulo 5

Os deslocamentos segundo todas as coordenadas, calculados conforme a equação (5.10.1), ou segundo o procedimento de (5.10.7) e (5.10.8), estão armazenados numa matriz $[D]$ de ordem $(3n_j \times 2)$, conforme (5.10.2). Estes deslocamentos estão no Sistema de Coordenadas Novo.

Conforme já foi dito no capítulo 5, os deslocamentos, contidos na matriz $[D]$, são relativos a um estado i_{pc} de posição da carga e já correspondem às ordenadas (relativas a esse i_{pc}) das linhas de influência de deslocamentos nos apoios, sendo armazenadas conforme sugerido no capítulo 6 (equações 6.2.2 a 6.2.5). Tem-se portanto que as L.Is. de deslocamentos nos apoios referem-se ao Sistema de Coordenadas Novo.

d) Parágrafo 5.11 - capítulo 5

Os deslocamentos na extremidade de cada barra i, contidos na matriz $[D^i]$ (equação 5.11.1) de ordem 6 x 2, e calculados como em (5.11.2) a (5.11.4) resultarão considerados no sistema novo.

Os esforços na extremidade de cada barra serão relativos ao Sistema de Coordenadas Novo. Deve-se substituir nas equações (5.11.5) e (5.11.6) a matriz $[A^i]$ de ordem 6 x 2, pela matriz $[A_N^i]$ também de ordem 6 x 2. Nas mesmas equações a matriz de rigidez relativa a barra i será a matriz $[K_N^i]$ já armazenada. Os esforços de engastamento perfeito, parcela de (5.11.6) agora são aqueles contidos na matriz $[X_N]$.

Assim as equações que dão os esforços na extremidade de cada barra passam a ser as seguintes:

a) $i \neq j$ (carregamento e esforços de extremidade em barras distintas)

$$[A_N^i] = [K_N^i]\,[D^i] \qquad \text{.....(7.6.3)}$$

b) $i = j$ (carregamento e esforços na mesma barra)

$$[A_N^i] = [X_N] + [K_N^i]\,[D^i] \qquad \text{.....(7.6.4)}$$

A matriz $[A]$ (equação 5.11.8) que contém esforços na extremidade de todas as barras será relativa ao Sistema de Coordenadas Novo.

e) Parágrafo 5.12 - capítulo 5

A matriz $[\rho^i]$ de ordem (3 x 2), como sugerido em (5.12.1) conteria as reações de apoio no nó i, em relação ao Sistema de Coordenadas Novo. Em cada estado i_{pc} as reações nos nós são calculadas como indicado em (5.12.3) à (5.12.7), como contribuição dos elementos de $[A_N^i]$ de cada barra i.

f) Parágrafo 5.13 - capítulo 5

Os esforços solicitantes em cada seção são calculados a partir dos esforços de extremidade da barra que contém a seção. Estes estão contidos na matriz $[A]$ (equação 5.11.8) cujos coeficientes são os esforços nas extremidades de todas as barras, relativamente ao Sistema de Coordenadas Novo.

Para se usar as mesmas equações do parágrafo 5.13 no cálculo dos esforços solicitantes, é preciso voltar os esforços da extremidade da barra i, obtidos pelas equações (5.13.10) a (5.13.13), para o Sistema de Coordenadas Antigo, armazenado-os numa matriz $[A_V^i]$ de ordem (6 x 2).

$$[A_V^i] = [T_\theta^i]\ [A_N^i] \qquad \text{.....(7.6.5)}$$

As sub-matrizes $[A_A^i]$ e $[A_B^i]$ relativas às extremidades A e B da barra i referem-se agora à matriz $[A_V^i]$.

As demais equações e passagens deste parágrafo têm o mesmo significado.

g) Parágrafo 6.2 e 6.3 - capítulo 6

As matrizes $[\eta^D]$ e $[\eta^R]$ dadas na FIG. 6.2.1, conterão L.Is. de deslocamentos nos apoios e reações de apoio no Sistema Novo, isto é, relativas aos apoios inclinados.

As matrizes $[\eta]$ e $\{\eta'\}$ (FIG. 6.3.1) ficam inalteradas contendo L.Is. de esforços solicitantes nas direções axial, radial e vertical, relativas a cada seção das barras da viga contínua.

CAPÍTULO 8

LINHAS DE INFLUÊNCIA PARA DESLOCAMENTOS NOS PONTOS MÉDIOS DAS BARRAS

8.1 - INTRODUÇÃO

Supõe-se que neste estágio do cálculo já foram encontradas todas as L.Is. de deslocamentos nos apoios e esforços solicitantes, armazenadas como descrito no capítulo 6. As L.Is. de deslocamentos, em relação ao Sistema de Coordenadas Novo (descrito no capítulo 7), estão armazenadas na matriz $\left[\eta^D\right]$ (FIG. 6.2.1), enquanto as L.Is. de esforços solicitantes estão armazenadas na matriz $[\eta]$ e vetor $\{\eta'\}$, conforme FIG. 6.3.1.

Note-se que tanto $\left[\eta^D\right]$ como $[\eta]$ possuem $17 \times n$ colunas, onde n é o número de barras da viga contínua, correspondendo cada coluna à uma posição i_{pc} da carga concentrada móvel P = 1 ou T = 1.

As L.Is. que se pretende calcular neste capítulo, de deslocamentos nos pontos médios das barras, serão em número de 6 por barra: rotação de torção $\bar{\theta}_x$, rotação de flexão $\bar{\theta}_y$, e deslocamentos vertical $\bar{w}$, positivo para cima, calculados para P = 1 e T = 1.

8.2 - ARMAZENAMENTO DAS L.Is. DE DESLOCAMENTOS NOS PONTOS MÉDIOS

Convém desde já estabelecer como serão armazenadas essas linhas de influência.

Utilizar-se-á uma matriz $[\overline{\eta}]$ (FIG. 8.2.1), de ordem $6n$ x $17n$), sendo n o número de barras. As colunas correspondem, cada uma, à posição i_{pc} da carga móvel:

$$i_{pc} = 17(j - 1) + k \qquad \text{.....(8.2.1)}$$

$$(k = 1, 2, 3.....17) \qquad \text{.....(8.2.2)}$$

$$(j = 1, 2, 3.....n) \qquad \text{.....(8.2.3)}$$

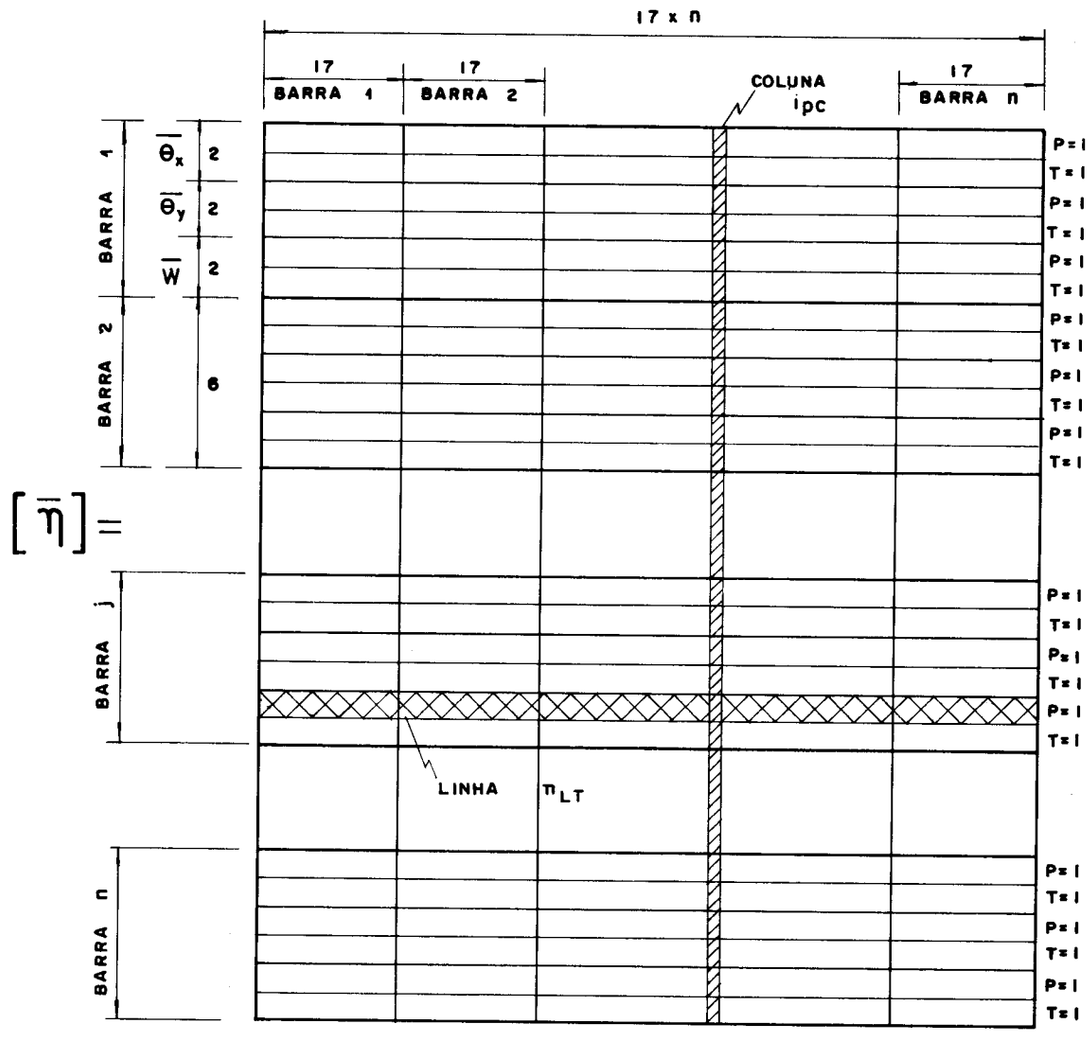


FIG. 8.2.1 - ARMAZENAMENTO DAS L.Is. DE DESLOCAMENTOS NOS PONTOS MÉDIOS DAS BARRAS.

A L.I. de deslocamento no ponto médio, correspondendo ao deslocamento d (d = 1, 2, 3, conforme tratar-se de $\bar{\theta}_x$, $\bar{\theta}_y$ ou $\bar{w}$) na barra i (i = 1, 2, 3.....n) para a carga móvel c (c = 1 , 2 conforme tratar-se de P = 1 ou T = 1) será armazenada em $[\bar{\eta}]$ na linha $\bar{n}_{L_T}$ (número da L.I. de deslocamento no ponto médio):

$$\bar{n}_{L_T} = 6(i - 1) + 2(d - 1) + c \qquad ...(8.2.1)$$

8.3 - CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS NOS PONTOS MÉDIOS PARA CADA ESTADO i_{pc}

O estado i_{pc} define apenas a posição da carga concentrada, que na realidade corresponde a dois carregamentos simultâneos, mas independentes, P = 1 e T = 1.

Os elementos da coluna i_{pc} das L.Is. de deslocamentos nos pontos médios das barras, a serem armazenados em $[\bar{\eta}]$ (FIG. 8.2.1) podem ser calculados tomando apenas elementos já determinados, ocupando a mesma coluna i_{pc} das L.Is. de deslocamentos nos apoios e esforços solicitantes no meio das barras, armazenadas em $[\eta^D]$ (FIG. 6.2.1) e $[\eta]$ (FIG. 6.3.1). Antes porém algumas explicações que valem para os 2 deslocamentos são necessárias:

Os deslocamentos no ponto médio M da barra i, em um dos carregamentos do estado i_{pc} podem ser calculados considerando a semi-barra direita se $i \neq j$ (j é a barra carregada), ou uma das semi-barras (esquerda ou direita); justamente aquela metade que não contém a carga, quando $i = j$ (vide FIG. 8.3.1.a e b).

Os deslocamentos nos pontos médios são integrados de duas parcelas deslocamentos: uma parcela de corpo rígido devido aos deslocamentos no apoio e outra parcela elástica devido aos esforços solicitantes no meio da barra.

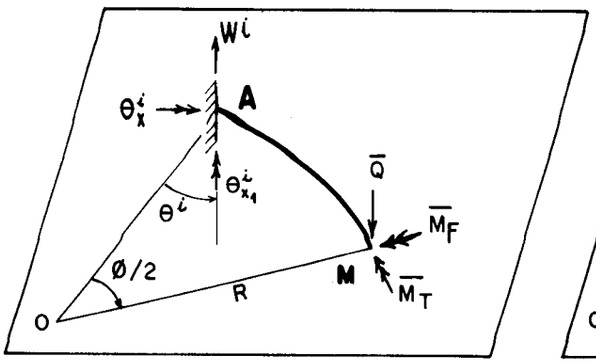


FIG. 8.3.1a - SEMI BARRA ESQUERDA COM DESLOCAMENTOS NA EXTREMIDADE A E ESFORÇOS SOLICITANTES NO PONTO MÉDIO.

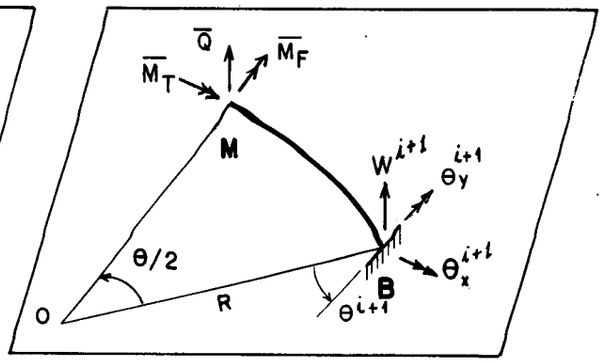


FIG. 8.3.1b - SEMI BARRA DIREITA COM DESLOCAMENTOS NA EXTREMIDADE B E ESFORÇOS SOLICITANTES NO PONTO MÉDIO.

No estado i_{pc}, os 3 deslocamentos, na ordem, θ_x, θ_y e w, que ocorrem nos pontos A e B (FIG. 7.3.1.a e b) encontram-se armazenados na matriz $\left[\eta^D\right]$ (FIG. 6.2.1), com índice de coluna i_{pc} e com índices na linha valendo:

no ponto A: $m_1 = 6(i - 1) + c$ .....(8.3.1)

$m_2 = m_1 + 2$ .....(8.3.2)

$m_3 = m_1 + 4$ .....(8.3.3)

no ponto B: $m_4 = m_1 + 6$ .....(8.3.4)

$m_5 = m_1 + 8$ .....(8.3.5)

$m_6 = m_1 + 10$ .....(8.3.6)

sendo i = número da barra cujo ponto médio é considerado
$c = 1, 2$ (conforme P = 1 ou T = 1)

No mesmo estado i_{pc}, os 3 esforços solicitantes na ordem $\overline{M}_T$, $\overline{M}_F$, $\overline{Q}$, no ponto médio da barra, encontram-se armazenadas na matriz $[\eta]$ (FIG. 6.3.1), com índice de coluna i_{pc} e índices de linha valendo:

$n_1 = 54(i - 1) + 24 + c$ .....(8.3.7)

$n_2 = n_1 + 2$ .....(8.3.8)

$n_3 = n_1 + 4$ .....(8.3.9)

com i = número da barra cujo ponto médio é considerado
$c = 1, 2$ (conforme P = 1 ou T = 1)

Consideram-se então, no ponto médio, as parcelas:

a) <u>Parcela de corpo rígido na semi-barra direita</u>

$$\begin{Bmatrix} \Delta\bar{\eta}_{m_1,i_{pc}} \\ \Delta\bar{\eta}_{m_2,i_{pc}} \\ \Delta\bar{\eta}_{m_3,i_{pc}} \end{Bmatrix}^{r} = \left[T_B^{i}\right] \begin{Bmatrix} \eta^D_{m_4,i_{pc}} \\ \eta^D_{m_5,i_{pc}} \\ \eta^D_{m_6,i_{pc}} \end{Bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots(8.3.10)$$

onde:

- o índice r refere-se à corpo rígido
- os símbolos $\bar{\eta}$ referem-se à matriz $[\bar{\eta}]$ (FIG. 8.2.1)
- os símbolos η^D referem-se à matriz $\left[\eta^D\right]$ (FIG. 6.2.1)
- os índices m_1 a m_6 são calculados conforme (8.3.1) a (8.3.6)
- $\left[T_B^{i}\right]$ é a matriz de transformação de deslocamentos de corpo rígido do nó B para o ponto médio da barra i, onde se está calculando os deslocamentos. A matriz $\left[T_B\right]$ vale:

<u>barras curvas</u>:

$$\left[T_B^{i}\right] = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\phi}{2} - \theta_{i+1}) & \operatorname{sen}(\frac{\phi}{2} - \theta_{i+1}) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\frac{\phi}{2} - \theta_{i+1}) & \cos(\frac{\phi}{2} - \theta_{i+1}) & 0 \\ -R\ 1 - \cos(\frac{\phi}{2} - \theta_{i+1}) & R\operatorname{sen}(\frac{\phi}{2} - \theta_{i+1}) & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots(8.3.11)$$

onde R e ϕ são respectivamente o raio e o ângulo de abertura da barra i e θ_{i+1}^{i+1} é a inclinação do apoio do nó B.

<u>barras retas</u>:

$$\left[T_B^{i}\right] = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i+1} & -\operatorname{sen}\theta_{i+1} & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_{i+1} & \cos\theta_{i+1} & 0 \\ \frac{\ell}{2}\cdot\operatorname{sen}\theta_{i+1} & \frac{\ell}{2}\cos\theta_{i+1} & 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots(8.3.12)$$

sendo ℓ o comprimento da barra i e θ_{i+1} a inclinação do apoio do nó B.

b) Parcela de corpo rígido na semi-barra esquerda

$$\begin{Bmatrix} \Delta\bar{\eta}_{m_1,i_{pc}} \\ \Delta\bar{\eta}_{m_2,i_{pc}} \\ \Delta\bar{\eta}_{m_3,i_{pc}} \end{Bmatrix}^{r} = \left[T_A^{i}\right] \begin{Bmatrix} \eta^D_{m_1,i_{pc}} \\ \eta^D_{m_2,i_{pc}} \\ \eta^D_{m_3,i_{pc}} \end{Bmatrix} \qquad \text{.....(8.3.13)}$$

tendo os símbolos os mesmos significados que na equação (7.3.10) e sendo a matriz $\left[T_A^{i}\right]$ de transformação de deslocamentos na barra i, do nó A para o ponto médio.

barras curvas:

$$\left[T_A^{i}\right] = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\phi}{2}+\theta_i) & -\operatorname{sen}(\frac{\phi}{2}+\theta_i) & 0 \\ \operatorname{sen}(\frac{\phi}{2}+\theta_i) & \cos(\frac{\phi}{2}+\theta_i) & 0 \\ -R\ 1-\cos(\frac{\phi}{2}+\theta_i) & -R\operatorname{sen}(\frac{\phi}{2}+\theta_i) & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{....(8.3.14)}$$

onde R e ϕ são respectivamente o raio e o ângulo de abertura da barra i e θ_i é a inclinação do apoio do nó A.

barras retas:

$$\left[T_A^{i}\right] = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ \frac{-\ell}{2}\operatorname{sen}\theta_i & \frac{-\ell}{2}\cos\theta_i & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{.....(8.3.15)}$$

sendo ℓ o comprimento da barra i e θ_i a esconsidade do apoio do nó A.

c) Parcela elástica na semi-barra direita

$$\begin{Bmatrix} \Delta\bar{\eta}_{m_1,i_{pc}} \\ \Delta\bar{\eta}_{m_2,i_{pc}} \\ \Delta\bar{\eta}_{m_3,i_{pc}} \end{Bmatrix}^{e} = \left[\bar{\delta}_B\right] \begin{Bmatrix} \eta_{n_1,i_{pc}} \\ \eta_{n_2,i_{pc}} \\ \eta_{n_3,i_{pc}} \end{Bmatrix} \qquad \text{.....(8.3.16)}$$

onde:

- o índice e refere-se à deformação elástica.
- os símbolos $\bar{\eta}$ referem-se à matriz $[\bar{\eta}]$ (FIG. 8.2.1).
- os símbolos η referem-se à matriz $[\eta]$ (FIG. 6.3.1).
- os índices m_1, m_2, m_3 são dados pelas equações (8.3.1) a (8.3.3).
- os índices n_1, n_2, n_3 são dados pelas equações (8.3.7) a (8.3.9).

A matriz $\left[\bar{\delta}_B\right]$ que aparece na equação (8.3.16) é a matriz de flexibilidade da semi-barra direita, engastada em B.

A matriz $\left[\bar{\delta}_B\right]$ tem a forma:

$$\left[\bar{\delta}_B\right] = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11} & \bar{\delta}_{12} & \bar{\delta}_{13} \\ \bar{\delta}_{21} & \bar{\delta}_{22} & \bar{\delta}_{23} \\ \bar{\delta}_{31} & \bar{\delta}_{32} & \bar{\delta}_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{.....(8.3.17)}$$

Nas barras curvas esses coeficientes de flexibilidade $\bar{\delta}_{\alpha\beta}$ são calculados numa viga em balanço engastada na direita, de mesmo raio e mesmas propriedades que a barra i, com ângulo de abertura igual à metade da abertura ϕ da barra i, através das equações (8.3.18) a (8.3.23):

$$\bar{\delta}_{11} = \frac{R}{EJ}\left[\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)\phi - \left(\frac{1-\lambda}{4}\right)\operatorname{sen}\phi\right] \qquad \text{.....(8.3.18)}$$

$$\bar{\delta}_{22} = \frac{R}{EJ}\left[\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)\phi + \left(\frac{1-\lambda}{4}\right)\operatorname{sen}\phi\right] \qquad \text{.....(8.3.19)}$$

$$\bar{\delta}_{33} = \frac{R^3}{EJ}\left[\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)\phi - \left(\frac{1+\lambda}{4}\right)\operatorname{sen}\phi - \lambda\left(2\operatorname{sen}\frac{\phi}{2} - \frac{\phi}{2}\right)\right] \quad \ldots(8.3.20)$$

$$\bar{\delta}_{12} = \bar{\delta}_{21} = \frac{R}{EJ}\left[\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\operatorname{sen}^2\frac{\phi}{2}\right] \quad \ldots\ldots(8.3.21)$$

$$\bar{\delta}_{13} = \bar{\delta}_{31} = \frac{R^2}{EJ}\left[\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)\phi - \left(\frac{1-\lambda}{4}\right)\operatorname{sen}\phi - \lambda\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\right] \quad \ldots(8.3.22)$$

$$\bar{\delta}_{23} = \bar{\delta}_{32} = \frac{R^2}{EJ}\left[\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\operatorname{sen}^2\frac{\phi}{2} + \lambda\left(1-\cos\frac{\phi}{2}\right)\right] \quad \ldots\ldots(8.3.23)$$

Nas <u>barras retas</u> a matriz $[\delta_B]$ da equação (8.3.17) tem os coeficientes conforme segue:

$$[\delta_B] = \frac{1}{EJ}\begin{bmatrix} \frac{\lambda\ell}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell}{2} & \frac{\ell^2}{8} \\ 0 & \frac{\ell^2}{8} & \frac{\ell^3}{24} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots(8.3.24)$$

onde ℓ é o comprimento da barra i e λ é um parâmetro elástico definido em 2.2.1.

d) <u>Parcela elástica na semi-barra esquerda</u>

$$\begin{Bmatrix} \Delta\, m_{1,i_{pc}} \\ \Delta\, m_{2,i_{pc}} \\ \Delta\, m_{3,i_{pc}} \end{Bmatrix}^{e} = -\left[\bar{\delta}_A\right] \begin{Bmatrix} n_{1,i_{pc}} \\ n_{2,i_{pc}} \\ n_{3,i_{pc}} \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(8.3.25)$$

sendo os símbolos envolvidos na equação (8.3.25) os mesmos significados que na equação (8.3.16).

A matriz $\left[\bar{\delta}_A\right]$, de ordem 3 x 3, é a matriz de flexibilidade da semi-barra esquerda engastada no ponto A.

A matriz $\left[\bar{\delta}_A\right]$, por considerações de simetria, conforme parágrafo 3.4, do capítulo 3, podem ser escritos em função dos coeficientes de flexibilidade da semi-barra direita.

$$\left[\bar{\delta}_A\right] = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11} & -\bar{\delta}_{12} & \bar{\delta}_{13} \\ -\bar{\delta}_{21} & \bar{\delta}_{22} & -\bar{\delta}_{23} \\ \bar{\delta}_{31} & -\bar{\delta}_{32} & \bar{\delta}_{33} \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots(8.3.26)$$

Os coeficientes $\left[\bar{\delta}_{\alpha,\beta}\right]$ são calculados para a semi-barra direita. Para barras curvas são dados pelas equações (8.3.18) a (8.3.23), e para barras retas esses coeficientes estão contidos na matriz $\left[\delta_B\right]$ dada pela equação (8.3.24).

8.4 - SEQUÊNCIA DE CÁLCULO DAS L.Is. DE DESLOCAMENTOS NO PONTO MÉDIO DAS BARRAS

A matriz $\left[\bar{\eta}\right]$ é preenchida, coluna por coluna, correspondendo cada uma ao estado i_{pc} varrido por:

$$i_{pc} = 17(j - 1) + k \qquad \ldots\ldots\ldots(8.4.1)$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3\ldots\ldots17) \qquad \ldots\ldots\ldots(8.4.2)$$

$$(j = 1,\ 2,\ 3\ldots\ldots n) \qquad \ldots\ldots\ldots(8.4.3)$$

sendo j a barra carregada e k o número do ponto $(1 \leq k \leq 17)$ onde se situa a carga concentrada $P = 1$ e $T = 1$.

Para cada estado i_{pc}, (ou coluna de $\left[\bar{\eta}\right]$) varre-se a posição dos pontos médios de todas as barras através do índice i_{ps}:

$$i_{ps} = 17(i - 1) + 9 \qquad \ldots\ldots\ldots(8.4.4)$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3\ldots\ldots n) \qquad \ldots\ldots\ldots(8.4.5)$$

sendo i a barra onde se situa o ponto médio.

Ter-se-á então 2 casos possíveis:

a) $i \neq j$ (ponto médio e cargas em barras distintas)

Toma-se da barra i a semi-barra direita.

Calcula-se a parcela de corpo rígido pela equação (.3.10).

Soma-se a parcela elástica dada pela equação (8.3.16).

Pelas equações especificadas resultam 6 ordenadas de L.Is.

b) $i = j$ (ponto médio e cargas na mesma barra)

Esse caso permite dois sub-casos:

b.1) $i_{ps} \geq i_{pc}$

Toma-se da barra i a semi-barra direita. Os cálculos são os mesmos do ítem a) anterior.

b.2) $i_{ps} < i_{pc}$

Toma-se da barra i a semi-barra esquerda.

Calcula-se a parcela de corpo rígido pela equação (8.3.13).

Soma-se a parcela elástica pela equação (8.3.25).

Pelas equações especificadas resultam 6 ordenadas de L.Is.

8.5 - SAÍDA DOS RESULTADOS DAS L.Is. DESLOCAMENTOS NOS PONTOS MÉDIOS

As linhas de influência para deslocamentos nos pontos médios das barras são em número de 6 por barra ($\bar{\theta}_x$, $\bar{\theta}_y$ e $\bar{w}$ para P = 1 e T = 1).

Para uma barra i o programa imprimirá as 6 L.Is. de deslocamentos no ponto médio, obtidas nas linhas $\bar{n}_{L_T}$ da matriz $[\bar{\eta}]$ fazendo-se:

$$\bar{n}_{L_T} = 6(i - 1) + 2(d - 1) + c \qquad \text{.....(8.5.1)}$$

$$d = 1,\ 2,\ 3 \qquad \text{.....(8.5.2)}$$

$$c = 1,\ 2 \qquad \text{.....(8.5.3)}$$

sendo i (i = 1, 2.....n) o número da barra d (d = 1, 2, 3, conforme refira-se à $\bar{\theta}_x$ $\bar{\theta}_y$ e $\bar{w}$) o número do deslocamento e c (c = 1, 2, conforme seja P = 1 ou T = 1) o número da carga móvel.

A saída de resultados será impressa em partes, barra por barra. As L.Is. de deslocamentos nos pontos médios não possuem descontinuidade em nenhum ponto.

CAPÍTULO 9

EXEMPLOS

9.1 - INTRODUÇÃO

De acordo com as hipóteses descritas nos capítulos anteriores deste trabalho, é possível obter-se linhas de influência devidos cargas móveis unitárias P = 1 (força vertical) e T = 1 (momento de torção), em vigas contínuas constituídas de barras de eixo curvo horizontal. No capítulo 3 mostrou-se como obter L.Is. para estruturas isostáticas. Nos capítulos posteriores foram dados subsídios que possibilitaram a elaboração de um programa automático, para utilização em computadores que permitem o cálculo de L.Is. para vigas contínuas.

Deve-se salientar que as linhas de influência têm unidades, que podem ser encontradas dividindo-se a dimensão do efeito pela dimensão da causa.

Foram analisadas algumas estruturas simples, cujos resultados são possíveis de se prever de antemão, para comprovar a eficiência do programa de cálculo.

Foram analisados também, alguns exemplos contidos na literatura da bibliografia, para a comparação de resultados.

9.2 - EXEMPLO Nº 1

Seja a viga curva circular $\overline{AB}$ em balanço, com a extremidade direita B engastada, carregada com uma força vertical concentrada P, aplicada no ponto C, de coordenada φ_c . As características da viga e do carregamento estão indicados na FIG. 9.2.1.

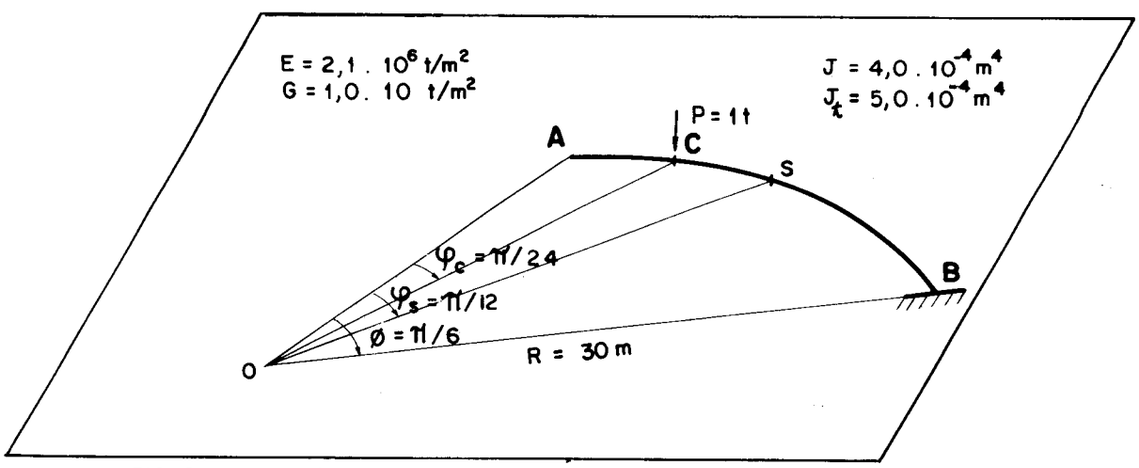


FIG. 9.2.1 - VIGA CURVA EM BALANÇO CARREGADA COM FORÇA CONCENTRADA P.

Para efeito de comparação são calculados os esforços solicitantes M_T, M_F e Q, e a rotação de torção na seção S, ponto médio da viga em balanço.

a) esforços solicitantes na seção S:

$$M_{T_S} = P\,R\left[1-\cos(\varphi_s-\varphi_c)\right] = 30\left[1-\cos(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{24})\right] \qquad \ldots\ldots(9.2.1)$$

$$\boxed{M_{T_S} = 0{,}2567\text{tf.m}} \qquad \ldots\ldots(9.2.2)$$

$$M_{F_S} = -\,P\,R\,\text{sen}(\varphi_s-\varphi_c) = -30\ \text{sen}(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{24}) \qquad \ldots\ldots(9.2.3)$$

$$\boxed{M_{F_S} = -\,3{,}9158\text{tf.m}} \qquad \ldots\ldots(9.2.4)$$

$$Q_S = -P = -1 \qquad \ldots\ldots\ldots(9.2.5)$$

$$\boxed{Q_S = -1tf} \qquad \ldots\ldots\ldots(9.2.6)$$

b) deslocamento rotação de torção na seção S:

A rotação θx_s pode ser calculada aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, usando-se para estados de deslocamento e carregamento a viga carregada conforme as FIGs. 9.2.2.a e b.

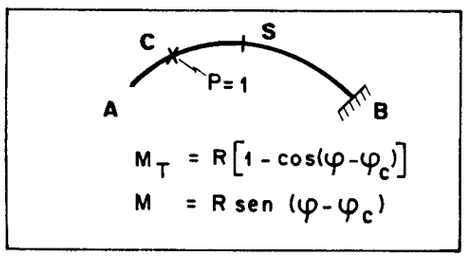


FIG. 9.2.2a - ESTADO DE DESLOCAMENTO

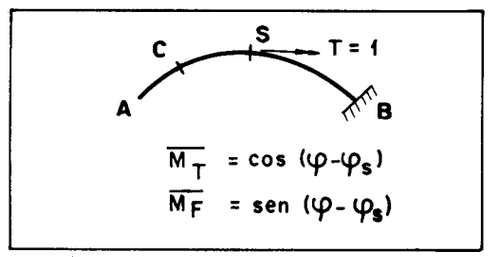


FIG. 9.2.2b - ESTADO DE CARREGAMENTO

$$1\,\theta x_S = \frac{R}{EJ}\int_{\varphi_s}^{\phi}(M_F\,\overline{M}_F\,d\varphi + \lambda\,M_T\,\overline{M}_T)\,d\varphi \qquad \ldots\ldots(9.2.7)$$

$$\theta x_S = \frac{R}{EJ}\int_{\varphi_s}^{\phi}\{-R\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_c)\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_s) + \lambda R[1-\cos(\varphi-\varphi_c)]\cos(\varphi-\varphi_s)\}\,d\varphi \qquad \ldots\ldots\ldots(9.2.8)$$

$$\theta x_S = \frac{R^2}{EJ}\int_{\varphi_s}^{\phi}[-\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_s)\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_c) - \lambda\cos(\varphi-\varphi_c)\cos(\varphi-\varphi_s) + \lambda\cos(\varphi-\varphi_s)] \qquad \ldots\ldots\ldots(9.2.9)$$

$$\theta x_S = \frac{R^2}{EJ}\left[-\frac{1}{2}\varphi\cos(\varphi_s-\varphi_c)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi\cos(\varphi-\varphi_s-\varphi_c)-\right.$$

$$\left.-\lambda\varphi\cos(\varphi_s-\varphi_c)-\frac{\lambda}{2}\operatorname{sen}\varphi\cos(\varphi-\varphi_s-\varphi_c)+\lambda\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_s)\right]_{\varphi_s}^{\phi}$$

.....(9.2.10)

$$\theta x_S = \frac{R^2}{EJ}\left[-\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)(\phi-\varphi_s)\cos(\varphi_s-\varphi_c)+\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\left[\operatorname{sen}\phi\cos(\phi-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\varphi_s-\varphi_c)-\operatorname{sen}\varphi_s\cos\varphi_c\right]+\lambda\operatorname{sen}(\phi-\varphi_s)\right]$$ .....(9.2.11)

Aplicando-se os dados numéricos do exemplo em questão, na expressão (9.2.11):

$$\lambda = \frac{EJ}{GJ_t} = \frac{2,1\ .\ 10^6\ .\ 4\ .\ 10^{-4}}{1,0\ .\ 10^6\ .\ 5\ .\ 10^{-4}} = 1,68$$ .....(9.2.12)

$$\theta x_S = \frac{30^2}{2,1\ .\ 10^6\ .\ 4\ .\ 10^{-4}}\left\{-\left(\frac{1+1,68}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{24}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{1-1,68}{2}\right)\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{24}\right)-\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{24}\right]+1,68\ .$$

$$\left.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}\right)\right\}$$ .....(9.2.13)

$$\boxed{\theta_{x_S} = 0,0061\ \text{rad}}$$ .....(9.2.14)

A mesma estrutura, analisada pelo programa de cálculo de linhas de influência, apresentou para a seção S, os seguintes resultados:

LINHAS DE INFLUENCIA DE ESFORCOS SOLICITANTES NA SECAO 5 DA BARRA 1

BARRA	SECAO	K S I	MOMENTO TORCOR P=1	MOMENTO TORCOR T=1	MOMENTO FLETOR P=1	MOMENTO FLETOR T=1	FORCA CORTANTE P=1	FORCA CORTANTE T=1
1	1	.000	1.02223	0.96593	-7.76457	0.25882	-1.00000	-0.00000
1	2	.125	0.57644	0.98079	-5.85271	0.19509	-1.00000	0.00000
1	3	.250	0.25665	0.99144	-3.91579	0.13053	-1.00000	-0.00000
1	4	.375	0.06423	0.99786	-1.96209	0.06540	-1.00000	-0.00000
1	5	.500E	-0.00000	1.00000	0.00000	-0.00000	-1.00000	0.00000
1	5	.500D	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000
1	6	.625	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000
1	7	.750	-0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	-0.00000
1	8	.875	0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	9	1.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

LINHAS DE INFLUENCIA DE DESLOCAMENTOS NO MEIO DA BARRA 1

BARRA	SECAO	K S I	direcao 1 P=1	direcao 1 T=1	direcao 2 P=1	direcao 2 T=1	direcao 3 P=1	direcao 3 T=1
1	1	.000	0.02116	0.01482	-0.11147	0.00167	-0.47859	0.01059
1	2	.125	0.01267	0.01511	-0.09296	0.00105	-0.40846	0.00825
1	3	.250	0.00611	0.01533	-0.07431	0.00043	-0.33727	0.00588
1	4	.375	0.00153	0.01548	-0.05561	-0.00019	-0.26532	0.00348
1	5	.500	-0.00107	0.01556	-0.03693	-0.00081	-0.19293	0.00107
1	6	.625	-0.00180	0.01166	-0.02065	-0.00123	-0.42440	-0.06652
1	7	.750	-0.00133	0.00774	-0.00910	-0.00123	-0.19114	-0.05223
1	8	.875	-0.00046	0.00384	-0.00225	-0.00082	-0.04829	-0.03023
1	9	1.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Os esforços solicitantes na seção S, para a carga móvel P = 1 aplicada a $\frac{1}{4}$ do vão, correspondem às ordenadas das L. Is. de esforços solicitantes no ponto ξ = 0,25, que estão salientadas na saída de resultados gerada pelo programa. Vê-se que os valores encontrados são idênticos àqueles calculados manualmente,

indicados nas expressões (9.2.2), (9.2.4) e (9.2.6).

O deslocamento de rotação θ_x da seção S, para a carga P = 1 aplicada no ponto C, a $\frac{l}{4}$ do vão da viga, corresponde à ordenada da L.I. de deslocamento no meio do vão salientada na saída de resultado, correspondente ao ponto $\xi = 0,25$. Vê-se que o resultado é o mesmo daquele obtido aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, e indicado na expressão (9.2.14).

9.3 - EXEMPLO Nº 2

A estrutura deste exemplo 2 é uma viga curva circular, com dois apoios resistentes à torção, de grau de hiperestaticidade 1, mostrada na FIG. 9.3.1.

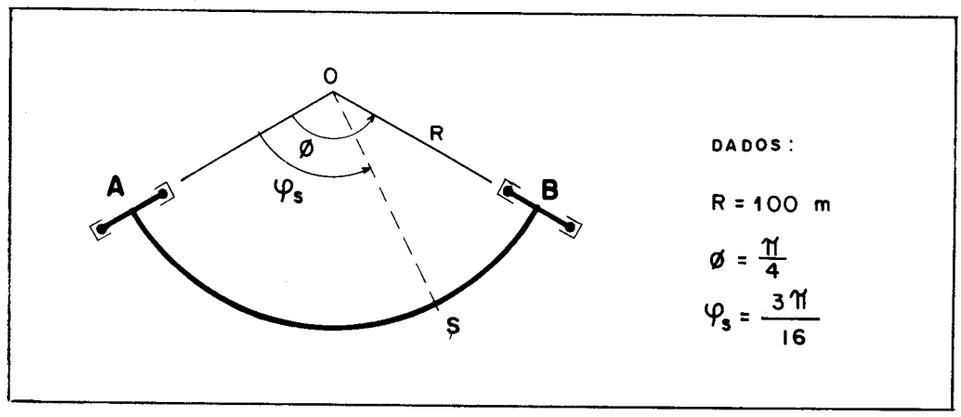


FIG. 9.3.1 - VIGA CURVA CIRCULAR COM 2 APOIOS RESISTENTES À TORÇÃO.

Para analisar esta viga usando-se o programa automático, deve-se estipular características elásticas arbitrárias para a viga. Deve-se também, na entrada de dados, adotar raio e abertura negativos, conforme já explicado no capítulo 5.

Escolhendo-se a seção S à $\frac{3}{4}$ do vão para ser analisada, apresenta-se a seguir as 6 linhas de influência de esforços solicitantes nesta seção.

LINHAS DE INFLUENCIA DE ESFORCOS SOLICITANTES NA SECAO 7 DA BARRA 1

BARRA	SECÃO	KSI	MOMENTO TORCOR P=1	MOMENTO TORCOR T=1	MOMENTO FLETOR P=1	MOMENTO FLETOR T=1	FORCA CORTANTE P=1	FORCA CORTANTE T=1
1	1	.000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000
1	2	.125	1.09537	0.13595	2.70429	0.02704	-0.12500	0.00000
1	3	.250	2.05980	0.27060	5.38253	0.05383	-0.25000	-0.00000
1	4	.375	2.76364	0.40264	8.00894	0.08009	-0.37500	0.00000
1	5	.500	3.07972	0.53080	10.55821	0.10558	-0.50000	-0.00000
1	6	.625	2.88461	0.65385	13.00581	0.13006	-0.62500	-0.00000
1	7	.750E	2.05980	0.77060	15.32815	0.15328	-0.75000	0.00000
1	7	.750D	2.05981	-0.22940	15.32815	0.15328	0.25000	0.00000
1	8	.875	0.97440	-0.11526	7.70116	0.07701	0.12500	-0.00000
1	9	1.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

A partir dos resultados calculados pelo computador são traçadas as 6 L.Is. correspondentes à seção S, ou seja: L. I. de M_T para P = 1 e T = 1 (vide FIG. 9.3.2.a), L.I. de M_T para P = 1 e T = 1 (vide FIG. 9.3.2.b) e L.I. de Q para P = 1 e T = 1 (vide FIG. 9.3.2.c).

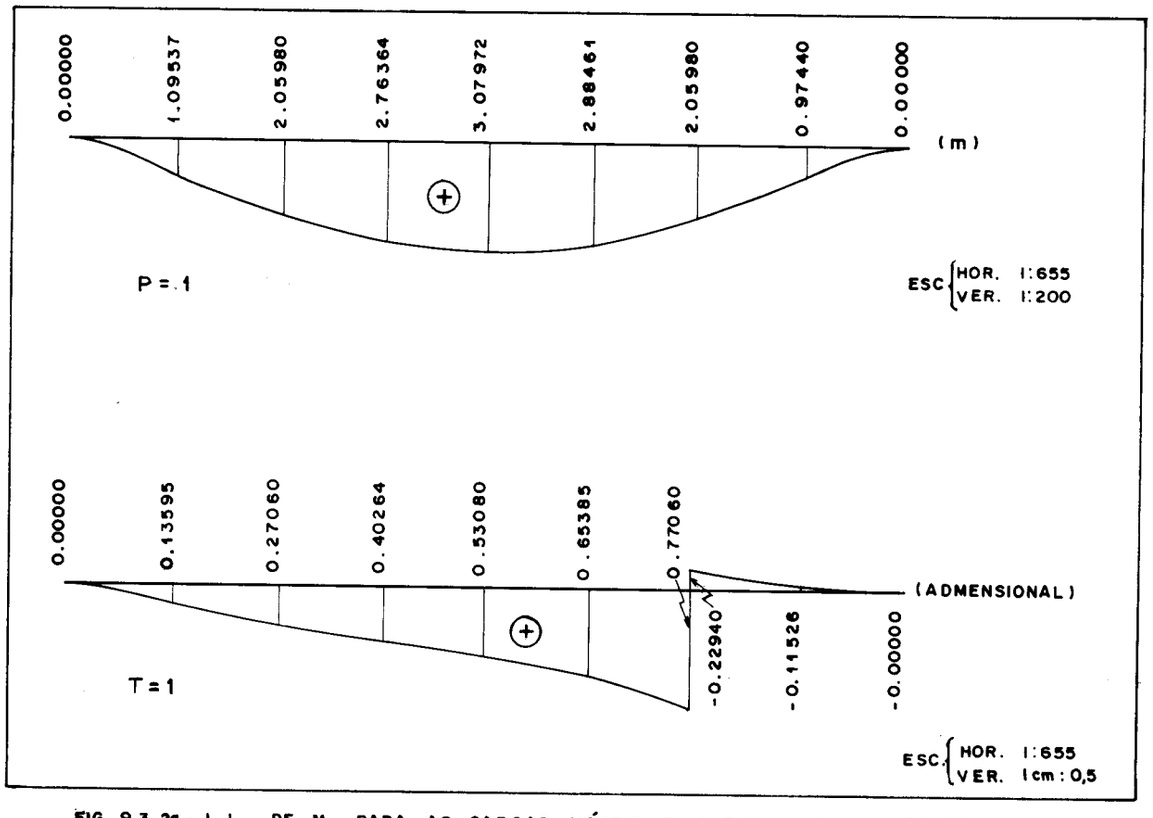


FIG. 9.3.2a - L.I$_S$ DE M_T PARA AS CARGAS MÓVEIS P = 1 E T=1 NA VIGA DO EXEMPLO 2 PARA A SEÇÃO À 3/4 DO VÃO.

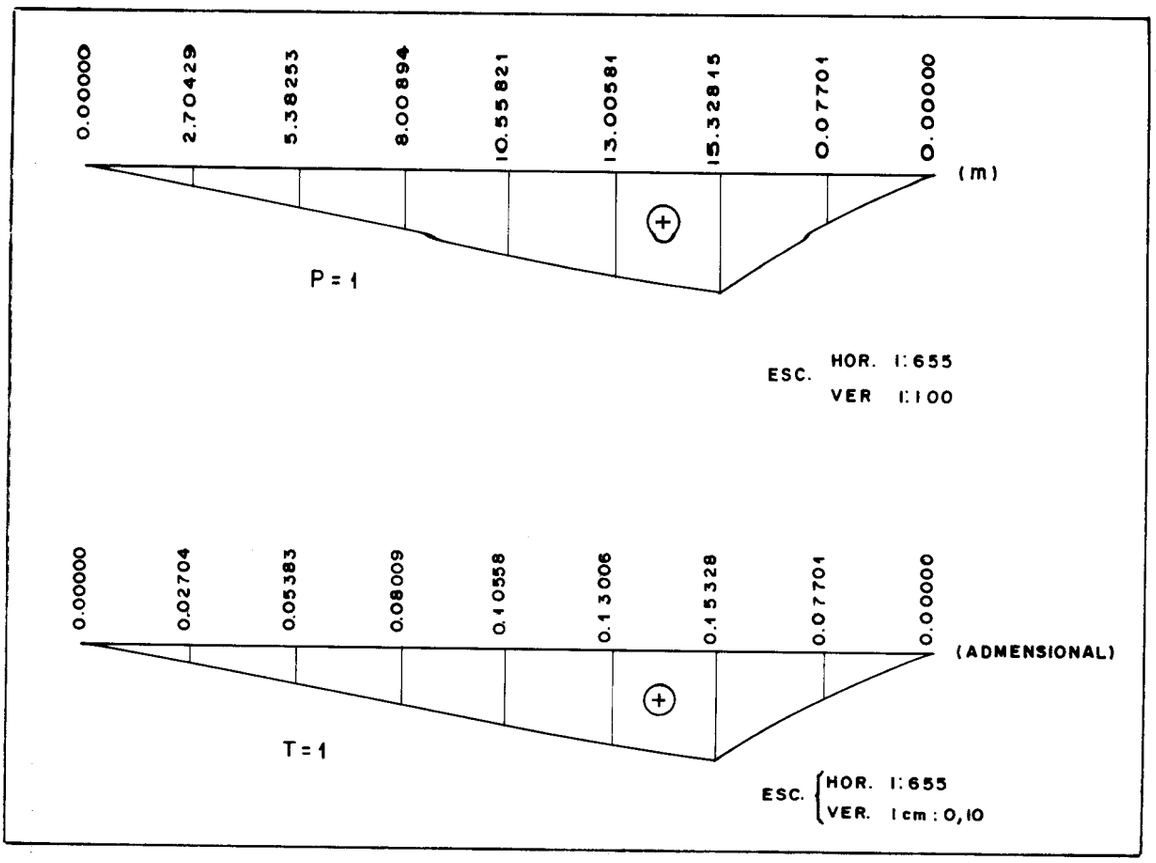


FIG. 9.3.2b - L.Is DE M_F PARA AS CARGAS MÓVEIS P = 1 E T = 1 NA VIGA DO EXEMPLO 2 PARA A SEÇÃO À 3/4 DO VÃO.

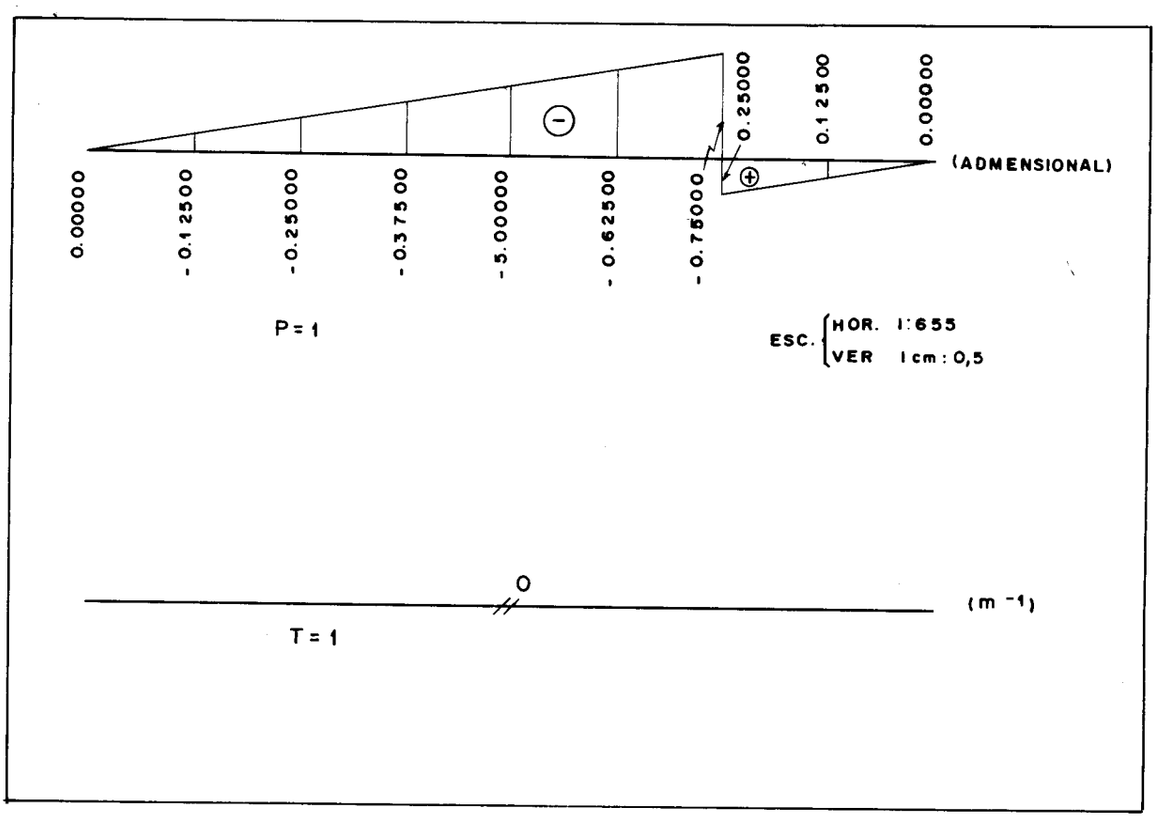


FIG. 9.3.2c - L.Is. DE Q PARA AS CARGAS MÓVEIS P = 1 E T = 1 NA VIGA DO EXEMPLO 2 PARA A SEÇÃO À 3/4 DO VÃO.

No capítulo 3 foi indicado um procedimento cinemático de obtenção de L.Is. de estruturas hiperestáticas e adotado como exemplo a viga de características idênticas às deste problema aqui analisado.

A expressão (3.5.14) do capítulo 3 indica como obter as L.Is. de um esforço qualquer, depois de levantanda a hiperestaticidade.

$$\boxed{\eta_E(\text{hiper.}) = \eta_E(\text{isost.}) + \chi\,\eta_{\tau_A}} \qquad \ldots\ldots(9.3.1)$$

Na tabela (3.4.2) do capítulo 3, estão indicadas as L.Is. isostáticas na estrutura obtida pela retirada do vínculo correspondente à torção no apoio A.

Na tabela (3.5.1) do mesmo capítulo 3 estão dadas as L.Is. de reação de torção nas extremidades A e B da estrutura em análise.

O coeficiente χ que aparece em (9.3.1) é o <u>esforço solicitante na seção S</u>, na viga isostática obtida conforme explicações contidas no parágrafo 3.5, quando se aplica um momento de torção unitário no ponto A.

$$\chi_{MT} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(9.3.2)$$

$$\chi_{MF} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(9.3.3)$$

$$\chi_Q = \frac{1}{R} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(9.3.4)$$

Assim:

$$\eta_Q^P = \frac{\operatorname{sen}\varphi''}{\operatorname{sen}\phi} - 1 + \frac{1}{R}\left[R\left(1 - \cos\varphi' + \frac{\operatorname{sen}\varphi'}{\tan\phi} - \frac{\varphi'}{\phi}\right)\right] \qquad \ldots\ldots(9.3.5)$$

$$\text{p/ } \varphi' < \varphi_s \qquad \ldots\ldots\ldots(9.3.6)$$

$$\eta_Q^P = \frac{\operatorname{sen}\varphi''}{\operatorname{sen}\phi} + \frac{1}{R}\left[R\left(1 - \cos\varphi' + \frac{\operatorname{sen}\varphi'}{\tan\phi} - \frac{\varphi'}{\phi}\right)\right] \qquad \ldots\ldots\ldots(9.3.7)$$

$$\text{p/ } \varphi' > \varphi_s \qquad \ldots\ldots\ldots(9.3.8)$$

Nas expressões (9.3.5) e (9.3.7), φ' e φ'' são as coordenadas angulares do ponto de aplicação da carga móvel.

Para efeito de comparação de resultados, utilizando-se as expressões (9.3.5) e (9.3.7) tem-se a L.I. de Q_S para P = 1 (móvel), obtida pelo processo cinemático (vide FIG. 9.3.3).

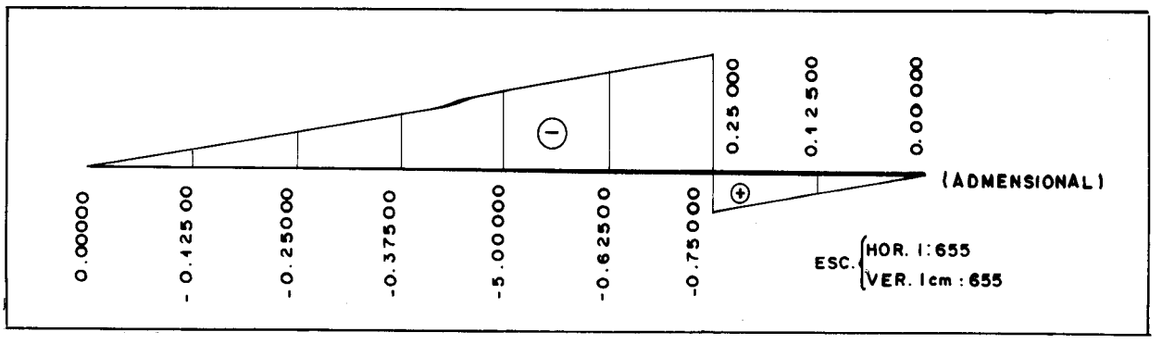


FIG. 9.3.3.- L.I$_S$. DE Q PARA A CARGA MÓVEL P=1 NA VIGA DO EXEMPLO 2 PARA A SEÇÃO À 3/4 DO VÃO.

Os resultados são os mesmos daquele obtido pelo programa.

As expressões que dão a L.I. de momento fletor contém apenas a parcela referente à estrutura isostática.

Deste modo:

$$\eta^P_{M_F} = R\,\frac{\operatorname{sen}(\phi - \varphi_s)}{\operatorname{sen}\phi}\,.\,\operatorname{sen}\varphi' \qquad \text{.....(9.3.9)}$$

$$\text{p/}\quad \varphi' \leq \varphi \qquad \text{.....(9.3.10)}$$

$$\eta^P_{M_F} = R\,\frac{\operatorname{sen}\varphi_s}{\operatorname{sen}\phi}\,.\,\operatorname{sen}\varphi'' \qquad \text{.....(9.3.11)}$$

$$\text{p/}\quad \varphi' \geq \varphi \qquad \text{.....(9.3.12)}$$

Aplicando-se as expressões (9.3.9) e (9.3.11) tem-se a L.I. de M_F para carga P = 1 (móvel) obtida pelo processo cinemático (vide FIG. 9.3.4).

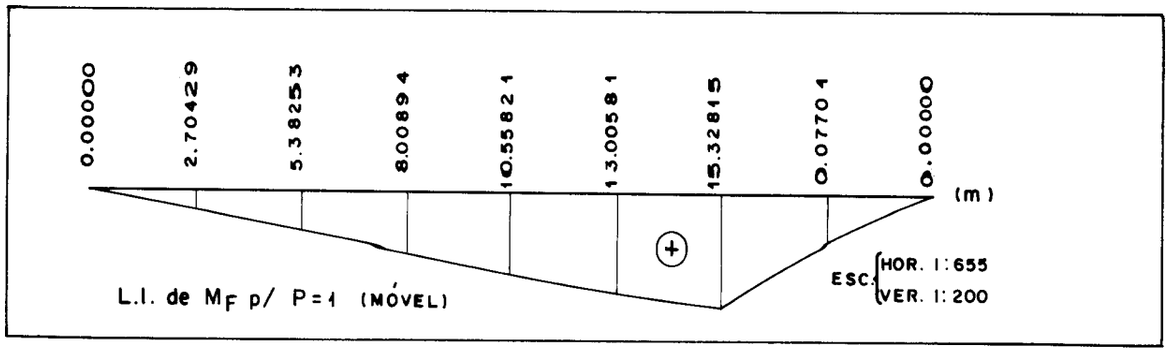


FIG. 9.3.3.- L.I$_S$. DE M_F PARA A CARGA MÓVEL P = 1 NA VIGA DO EXEMPLO 2 PARA A SEÇÃO À 3/4 DO VÃO.

9.4 - EXEMPLO Nº 3

A terceira estrutura analisada trata-se de uma viga isostática, sob 2 apoios, sendo o apoio esquerdo não resistente à torção e flexão, e o apoio direito não resistente à flexão. O apoio direito apresenta esconsidade em relação à direção radial. VREDEN[17,18] faz um estudo estático desta estrutura submetida à vários casos de carregamentos.

Na FIG. 9.4.1 está mostrada a viga, com apoio esconso, submetido à uma carga P concentrada.

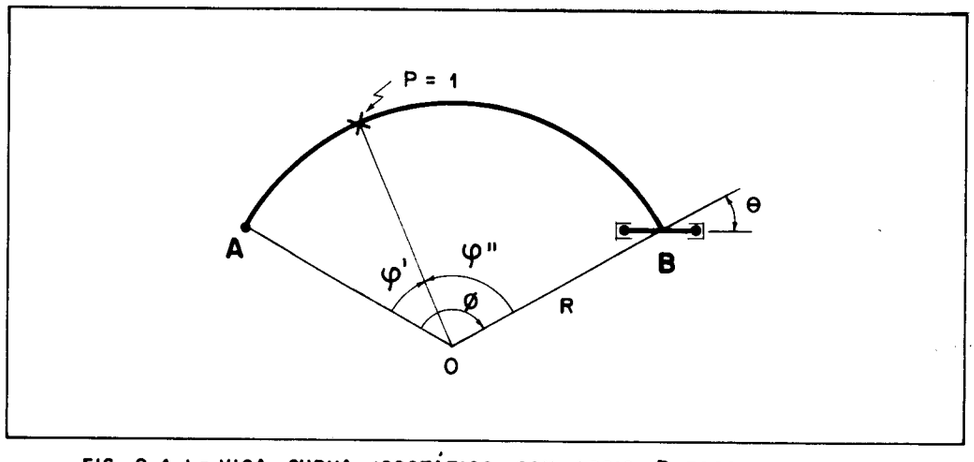


FIG. 9.4.1 - VIGA CURVA ISOSTÁTICA, COM APOIO B ESCONSO, SUBMETIDA À CARGA P.

A expressão obtida por VREDEN[17,18], que dá a reação vertical no apoio A, é a seguinte:

$$V_A = \frac{P\ \text{sen}(\varphi'' + \theta) - \text{sen}\ \theta}{2\ \text{sen}\frac{\phi}{2}\ \cos(\frac{\phi}{2} + \theta)} \qquad \ldots\ldots\ldots(9.4.1)$$

A expressão (9.4.1), dá o valor da reação vertical no apoio A para a carga P numa posição genérica. Fazendo-se P = 1 (móvel) tem-se a L.I. de V_A para carga vertical P = 1:

$$\eta_{V_A} = \frac{\text{sen}(\varphi'' + \theta) - \text{sen}\ \theta}{2\ \text{sen}\frac{\phi}{2}\ \cos(\frac{\phi}{2} + \theta)} \qquad \ldots\ldots\ldots(9.4.2)$$

Admitindo-se valores numéricos para as grandezas geométricas envolvidas, R = 30m, $\phi = 50^o$, $\theta = 5^o$ no sentido horário tem-se a linha de influência de reação de apoio cujo diagrama está mostrado na FIG. 9.4.2.

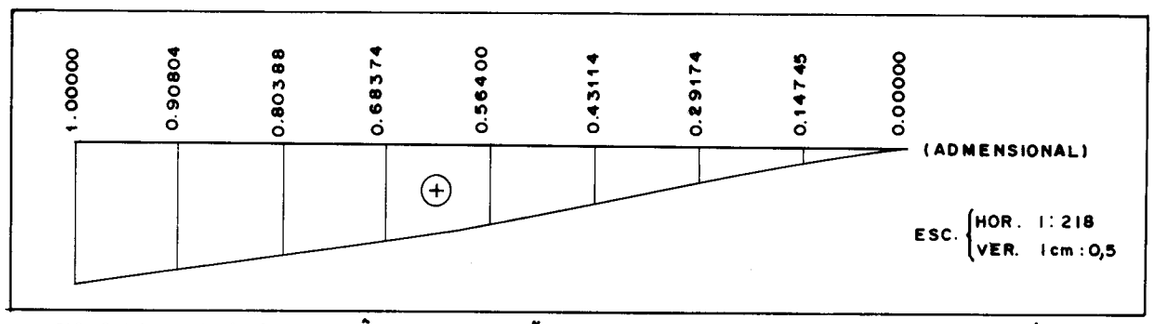


FIG. 9.4.2 - LINHA DE INFLUÊNCIA DE REAÇÃO VERTICAL NO APOIO A, P/ CARGA P=1 (MÓVEL), NA VIGA CURVA DO EXEMPLO 3

Analisando-se, a viga do exemplo 3, com as características geométricas já admitidas, e estimando-se ainda, valores para J e J_t, obteve-se o mesmo resultado para a L.I. de reação no apoio A.

São apresentadas também a listagem dos dados gerada no programa, salientando o fato que a esconsidade deve ser fornecida em graus, positiva no sentido anti-horário. No presente exemplo, portanto, esse dado tem valor negativo.

DADOS DA ESTRUTURA

NUMERO DE BARRAS	=	1	
NUMERO DE APOIOS INCLINADOS	=	1	
MODULO DE ELASTICIDADE	=	0.200000E+01	[FL-2]
MODULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL	=	0.100000E+01	[FL-2]

DADOS RELATIVOS AOS NOS

NO	LISTA DE RESTRICOES Rest.1	Rest.2	Rest.3	ESCONSIDADE (grau)
1	0	0	1	0.000
2	1	0	1	-5.000

CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DAS BARRAS

BARRA	TIPO	ABERTURA (grau)	RAIO [L]	COMPRIMENTO [L]	MOMENTOS DE FLEXAO [L4]	INERCIA TORCAO [L4]
1	CURVA	50.000	30.0000	26.1799	.100000E+01	.100000E+01

LINHAS DE INFLUENCIA DE REACOES NO APOIO 1

BARRA	SECAO	KSI	direcao 1 P=1	direcao 1 T=1	direcao 2 P=1	direcao 2 T=1	direcao 3 P=1	direcao 3 T=1
1	1	.000	-0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	-0.03730
1	2	.125	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.90804	-0.03424
1	3	.250	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.80388	-0.03076
1	4	.375	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.68874	-0.02693
1	5	.500	0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000	0.56400	-0.02277
1	6	.625	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	0.43114	-0.01834
1	7	.750	0.00000	-0.00000	0.00000	-0.00000	0.29174	-0.01369
1	8	.875	0.00000	-0.00000	0.00000	-0.00000	0.14745	-0.00888
1	9	1.000	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00397

O resultado assinalado na listagem é a L.I. de V_A, idêntica àquela traçada à partir da expressão (9.4.2), mostrada na FIG. 9.4.2.

9.5 - EXEMPLO Nº 4

A estrutura em análise é idêntica à estrutura usada como exemplo para a utilização do programa CCC[2], no trabalho "Calcul des Efforts Dans les Caissons Courbes Continuous".

São apresentadas algumas L.Is. de esforços solicitantes na seção imediatamente à direita do apoio 2 e reações no apoio 2.

A FIG. 9.5.1 mostra a estrutura viga contínua de 3 tramos analisada:

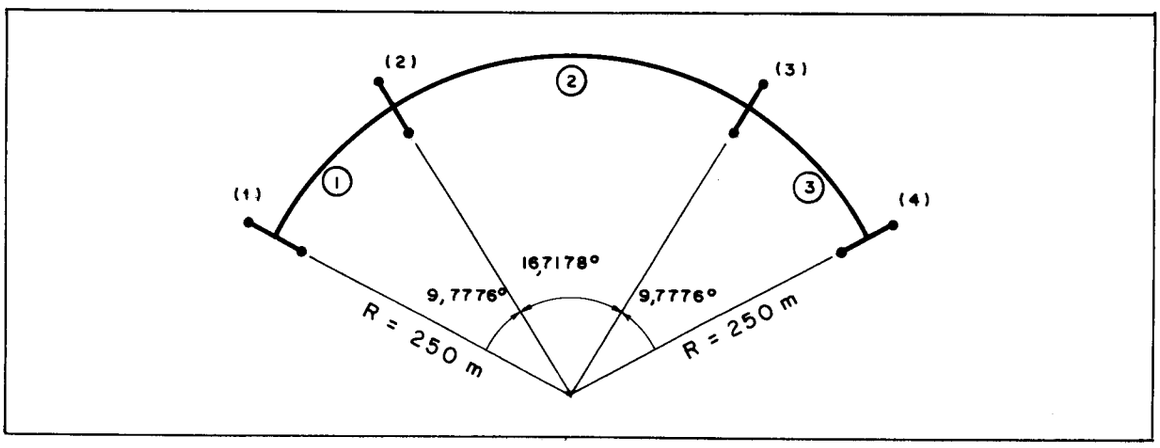


FIG. 9.5.1 - VIGA CONTINUA DE 3 TRAMOS COM OS APOIOS RESISTENTES À TORÇÃO.

No exemplo mostrado no trabalho CCC[2], as barras que compõe a viga contínua guardam entre si uma relação constante $\frac{E}{G} = 0,4$.

Como só serão calculadas L.Is. de esforços e reações aqui também não é necessário fornecer os valores corretos de E e G. Basta adotá-los arbitrariamente de tal modo que tenham entre si a mesma relação 0,4.

a) L.Is. de reações no apoio 2

LINHAS DE INFLUENCIA DE REACOES NO APOIO 2

BARRA	SECÇÃO	KSI	direcao 1 P=1	direcao 1 T=1	direcao 2 P=1	direcao 2 T=1	direcao 3 P=1	direcao 3 T=1
1	1	.000	-0.00000	-0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000
1	2	.125	0.00005	-0.12490	0.00000	-0.00000	0.16965	-0.00021
1	3	.250	0.00013	-0.24981	0.00000	0.00000	0.33504	-0.00040
1	4	.375	0.00023	-0.37474	0.00000	-0.00000	0.49190	-0.00054
1	5	.500	0.00035	-0.49970	0.00000	-0.00000	0.63598	-0.00063
1	6	.625	0.00046	-0.62470	0.00000	-0.00000	0.76305	-0.00064
1	7	.750	0.00052	-0.74974	0.00000	0.00000	0.86887	-0.00055
1	8	.875	0.00041	-0.87484	0.00000	0.00000	0.94924	-0.00035
1	9	1.000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000
2	1	.000	0.00000	-1.00000	-0.00000	0.00000	1.00000	0.00000
2	2	.125	-0.00155	-0.87451	0.00000	0.00000	1.01293	-0.00064
2	3	.250	-0.00335	-0.74922	0.00000	0.00000	0.94652	-0.00091
2	4	.375	-0.00463	-0.62409	0.00000	0.00000	0.82057	-0.00091
2	5	.500	-0.00502	-0.49910	0.00000	0.00000	0.65507	-0.00072
2	6	.625	-0.00446	-0.37423	0.00000	0.00000	0.47011	-0.00044
2	7	.750	-0.00315	-0.24944	0.00000	0.00000	0.28586	-0.00017
2	8	.875	-0.00149	-0.12471	0.00000	0.00000	0.12246	0.00001
2	9	1.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
3	1	.000	0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000
3	2	.125	0.00058	-0.00000	0.00000	0.00000	-0.04571	0.00021
3	3	.250	0.00092	-0.00000	0.00000	0.00000	-0.07319	0.00034
3	4	.375	0.00107	-0.00000	0.00000	0.00000	-0.08500	0.00040
3	5	.500	0.00106	-0.00000	0.00000	-0.00000	-0.08373	0.00039
3	6	.625	0.00091	-0.00000	0.00000	0.00000	-0.07198	0.00034
3	7	.750	0.00066	-0.00000	0.00000	0.00000	-0.05236	0.00024
3	8	.875	0.00035	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.02749	0.00013
3	9	1.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Esses resultados, comparados àqueles encontrados no trabalho CCC[2] apresentam uma variação média de resultados menor que 3%.

São indicadas nas FIGs. 9.5.2.a e b as L.Is. de reação de torção e reação vertical no apoio 2, usando as escalas marcadas no próprio desenho.

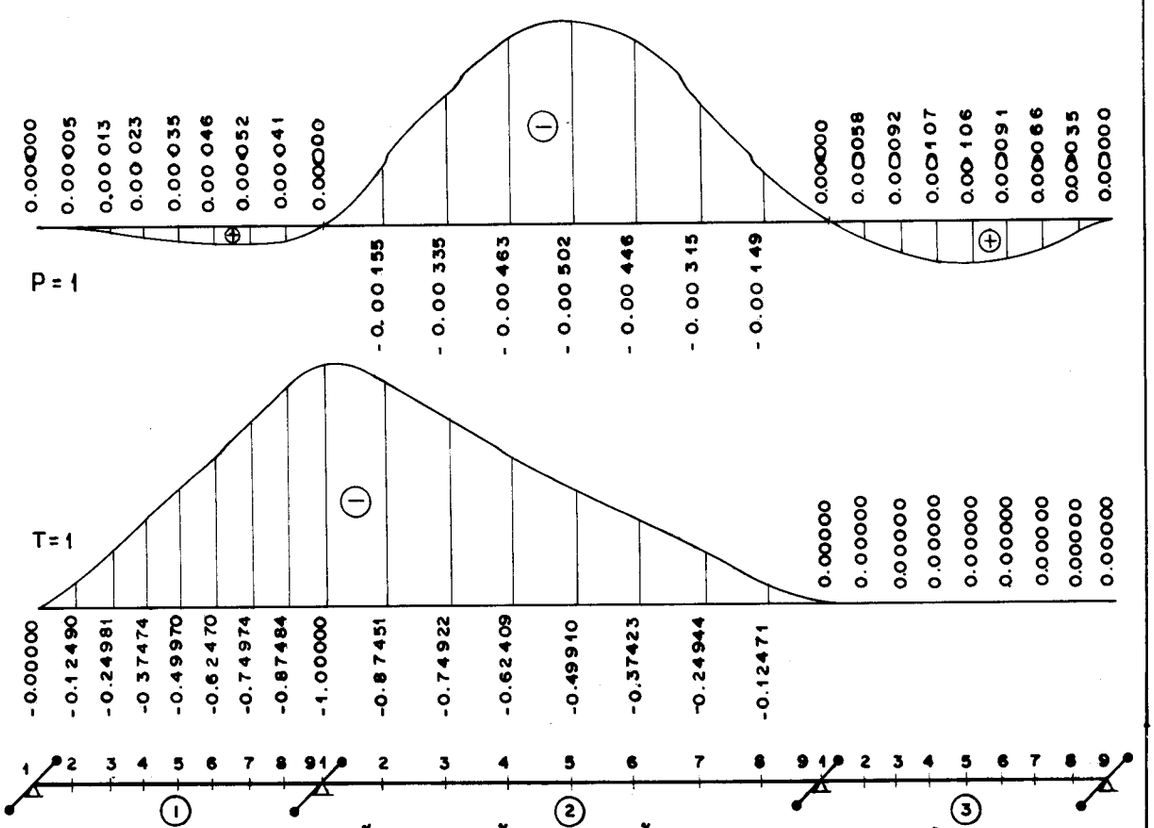


FIG. 9.5.2a - L.I$_S$, DE REAÇÃO DE TORÇÃO NA DIREÇÃO TANGENCIAL DEVIDAS ÀS CARGAS MÓVEIS P=1 E T=1 NA VIGA DO EXEMPLO 4.

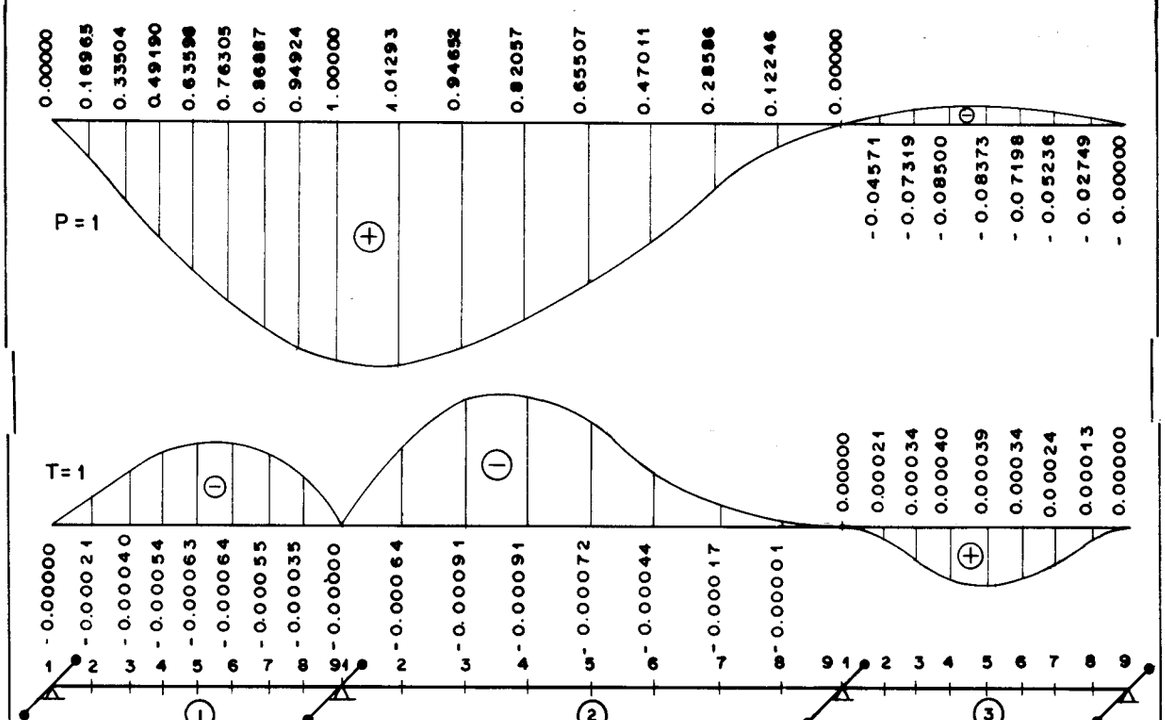


FIG. 9.5.2b. L.I. DE REAÇÃO VERTICAL NO APOIO 2 DEVIDAS ÀS CARGAS MÓVEIS P=1 E T=1 NA VIGA DO EXEMPLO 4.

b) L.Is. de esforços solicitantes na seção 1 da barra 2

LINHAS DE INFLUENCIA DE ESFORCOS SOLICITANTES NA SECAO 1 DA BARRA 2

BARRA	SECAO	KSI	MOMENTO TORCOR P=1	MOMENTO TORCOR T=1	MOMENTO FLETOR P=1	MOMENTO FLETOR T=1	FORCA CORTANTE P=1	FORCA CORTANTE T=1
1	1	.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000
1	2	.125	-0.08825	0.00041	-1.07455	0.00500	0.01944	-0.00009
1	3	.250	-0.16806	0.00078	-2.04642	0.00953	0.03702	-0.00017
1	4	.375	-0.23103	0.00108	-2.81316	0.01310	0.05089	-0.00024
1	5	.500	-0.26874	0.00125	-3.27236	0.01524	0.05919	-0.00028
1	6	.625	-0.27282	0.00127	-3.32202	0.01547	0.06009	-0.00028
1	7	.750	-0.23492	0.00109	-2.86051	0.01332	0.05174	-0.00024
1	8	.875	-0.14673	0.00068	-1.78667	0.00832	0.03232	-0.00015
1	9	1.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	1	.000	0.00000	-1.00000	0.00001	-0.00000	1.00000	0.00000
2	2	.125	0.24127	-0.87564	-4.26516	0.01985	0.91284	-0.00018
2	3	.250	0.36841	-0.75095	-6.53002	0.03038	0.79328	-0.00020
2	4	.375	0.40417	-0.62599	-7.18075	0.03341	0.65206	-0.00013
2	5	.500	0.37118	-0.50085	-6.60817	0.03074	0.50000	0.00000
2	6	.625	0.29195	-0.37561	-5.20661	0.02421	0.34794	0.00013
2	7	.750	0.18886	-0.25033	-3.37275	0.01568	0.20672	0.00020
2	8	.875	0.08417	-0.12510	-1.50455	0.00699	0.08715	0.00018
2	9	1.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
3	1	.000	-0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000
3	2	.125	-0.03192	0.00015	0.57082	-0.00266	-0.03232	0.00015
3	3	.250	-0.05111	0.00024	0.91391	-0.00426	-0.05174	0.00024
3	4	.375	-0.05935	0.00028	1.06135	-0.00494	-0.06009	0.00028
3	5	.500	-0.05846	0.00027	1.04549	-0.00487	-0.05919	0.00028
3	6	.625	-0.05026	0.00023	0.89877	-0.00418	-0.05089	0.00024
3	7	.750	-0.03656	0.00017	0.65381	-0.00304	-0.03702	0.00017
3	8	.875	-0.01920	0.00009	0.34330	-0.00160	-0.01944	0.00009
3	9	1.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Para efeito de comparação de resultados, na FIG. 9.5.3 são mostrados os diagramas da L.I. de momento fletor sobre o apoio 2, devido a carga força vertical P = 1, traçados à partir das respostas encontradas no programa e daquela encontrada por CCC[2].

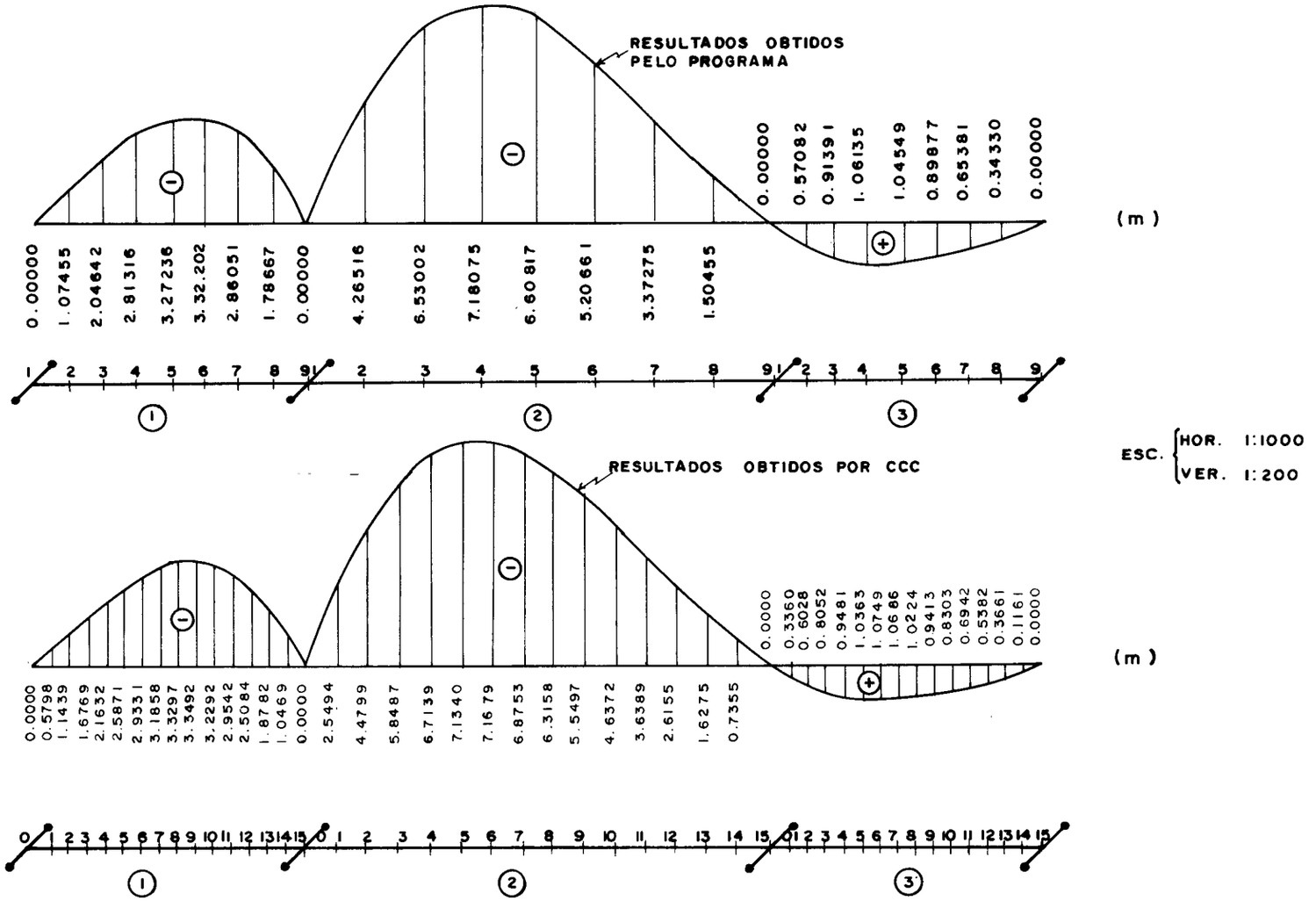


FIG. 9.5.3 - L.I$_s$. DE M_F SOBRE O APOIO 2 DEVIDAS À CARGA MÓVEL P=1 (RESULTADOS OBTIDOS PELO PROGRAMA E POR CCC.)

9.6 - EXEMPLO Nº 5

Neste exemplo é analisada uma viga contínua de 5 tramos, que também foi apresentada por VREDEN[17,18].

A FIG. 9.6.1 contém o esquema da viga:

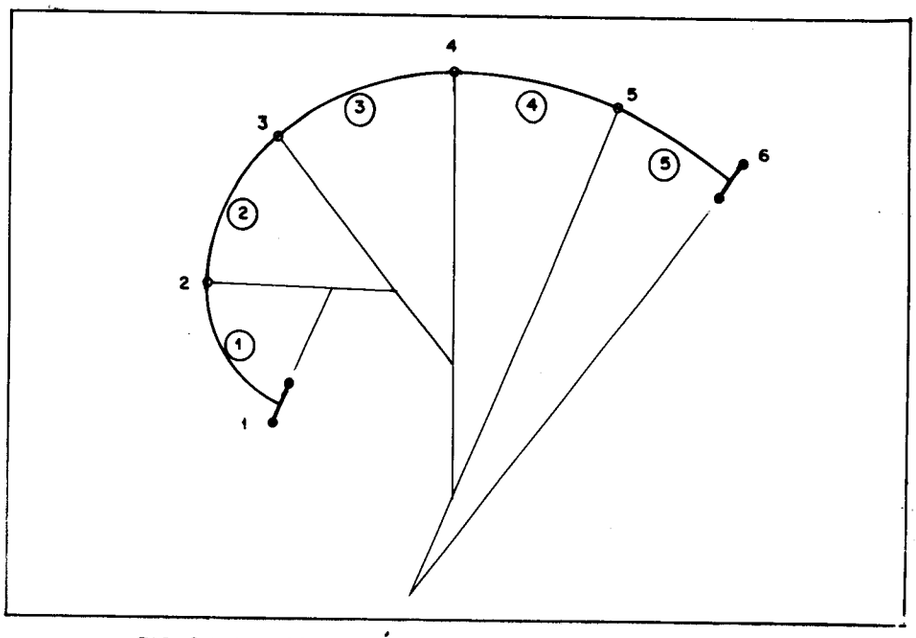


FIG. 9.6.1 - VIGA CONTÍNUA CONSTITUIDA DE 5 TRAMOS

Em todos os nós existem apoios que resistem à força vertical. Nos nós de extremidade os apoios também resistem a momento de torção na direção tangencial ao eixo.

Apresenta-se a seguir os dados de entrada e o traçado de algumas L.Is. relativas à viga contínua deste exemplo nº 5.

Os valores J, J_t, E e G são fictícios, pois, para se obter apenas L.Is. de esforços, só interessa a relação λ entre eles. No exemplo $\lambda = 1,04$.

a) dados de entrada

BARRA	φ	R(m)	J	J_t	E
1	$65^{o}00'$	26,50	1,0939	2,0995	2
2	$50^{o}20'$	38,75	1,0939	2,0995	
3	$38^{o}00'$	58,50	1,0939	2,0995	G
4	$23^{o}00'$	86,00	1,0939	2,0995	1
5	$14^{o}40'$	108,50	1,0939	2,0995	

b) L.I. de momento fletor sobre o apoio 3 devido a P = 1

São apresentados na FIG. 9.6.2 os diagramas da L.I. de M_F devidos a P = 1 traçado a partir de resultados do programa automático e de resultados indicados por VREDEN[17,18]. O programa automático fornece ordenadas do diagrama em 9 pontes equidistantes de cada barra. O resultado indicado por VREDEN refere-se a pontos equidistantes de cada tramo com ângulos de abertura variando de dois em dois graus. Pela análise dos resultados vê-se que os mesmos têm uma diferença muito pequena entre si.

c) L.I. de momento fletor sobre o apoio 3 devidos a T = 1

Da mesma forma que no ítem b, são apresentados na FIG. 9.6.3, os diagramas de L.I. de M_F devidos a T = 1 para uma seção sobre o apoio 3, indicando-se as ordenadas encontradas no programa automático e resultados encontrados por VREDEN[17,18].

d) L.Is. de força cortante na seção à esquerda do apoio 3 devidas a P = 1 e T = 1.

Nas FIGs. 9.6.4.a e b são apresentadas as L.Is. de Q na seção à esquerda do apoio 3, devidas respectivamente a P = 1 e T = 1, traçadas à partir dos resultados do programa de cálculo.

e) L.Is. de momento fletor na seção média da barra 3 devidas a P = 1 e T = 1.

Nas FIGs. 9.6.5.a e 9.6.5.b são apresentadas as L.Is. de M_T na seção média da barra 3 devidas respectivamente a P = 1 e T = 1, traçadas à partir dos resultados do programa de cálculo.

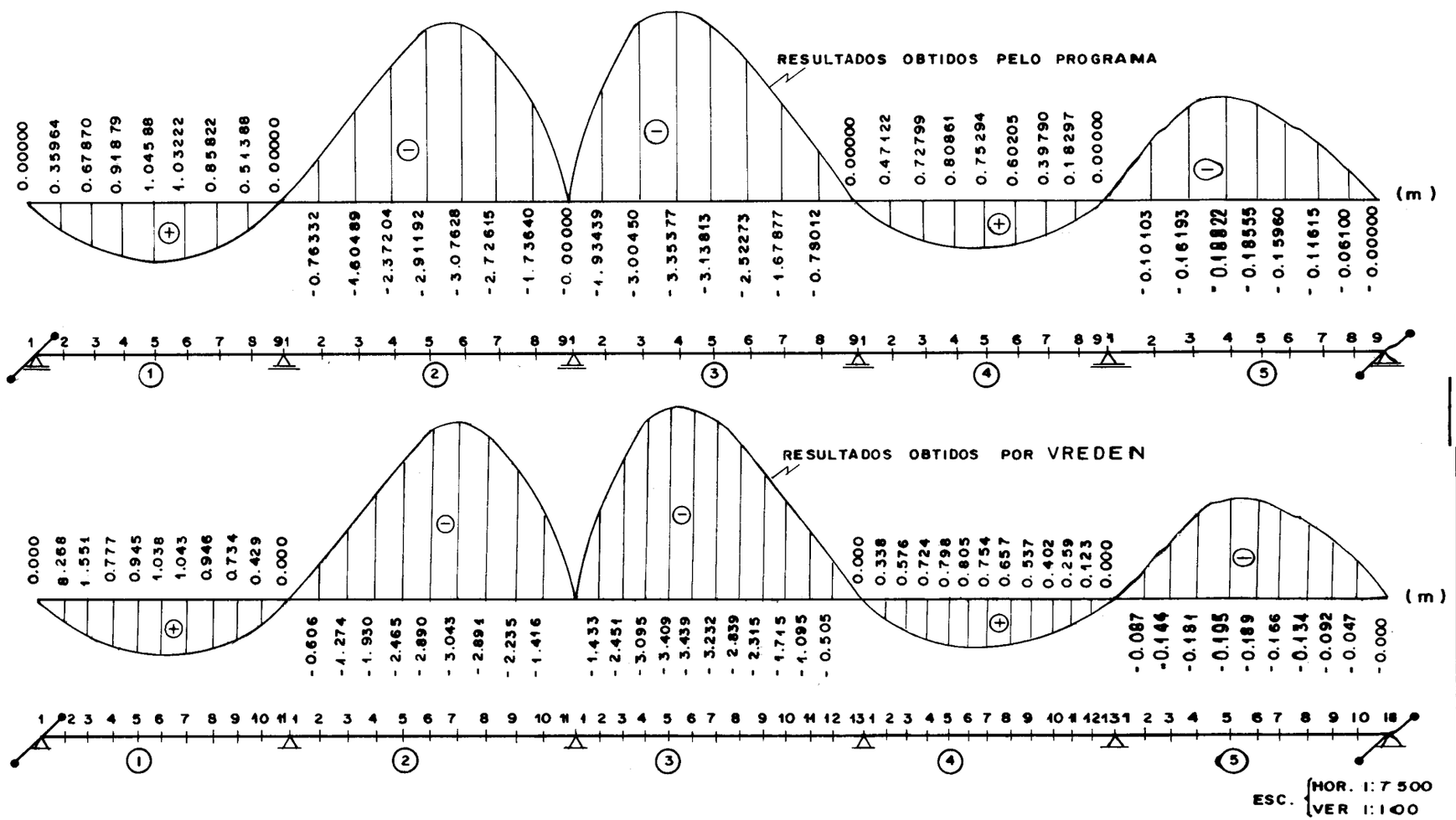


FIG. 9.6.2- L.I$_s$. DE M_F SOBRE O APOIO 3 DEVIDOS A CARGA MÓVEL P= 1 (RESULTADOS OBTIDOS PELO "PROGRAMA" E RESULTADOS OBTIDOS POR VREDEN.)

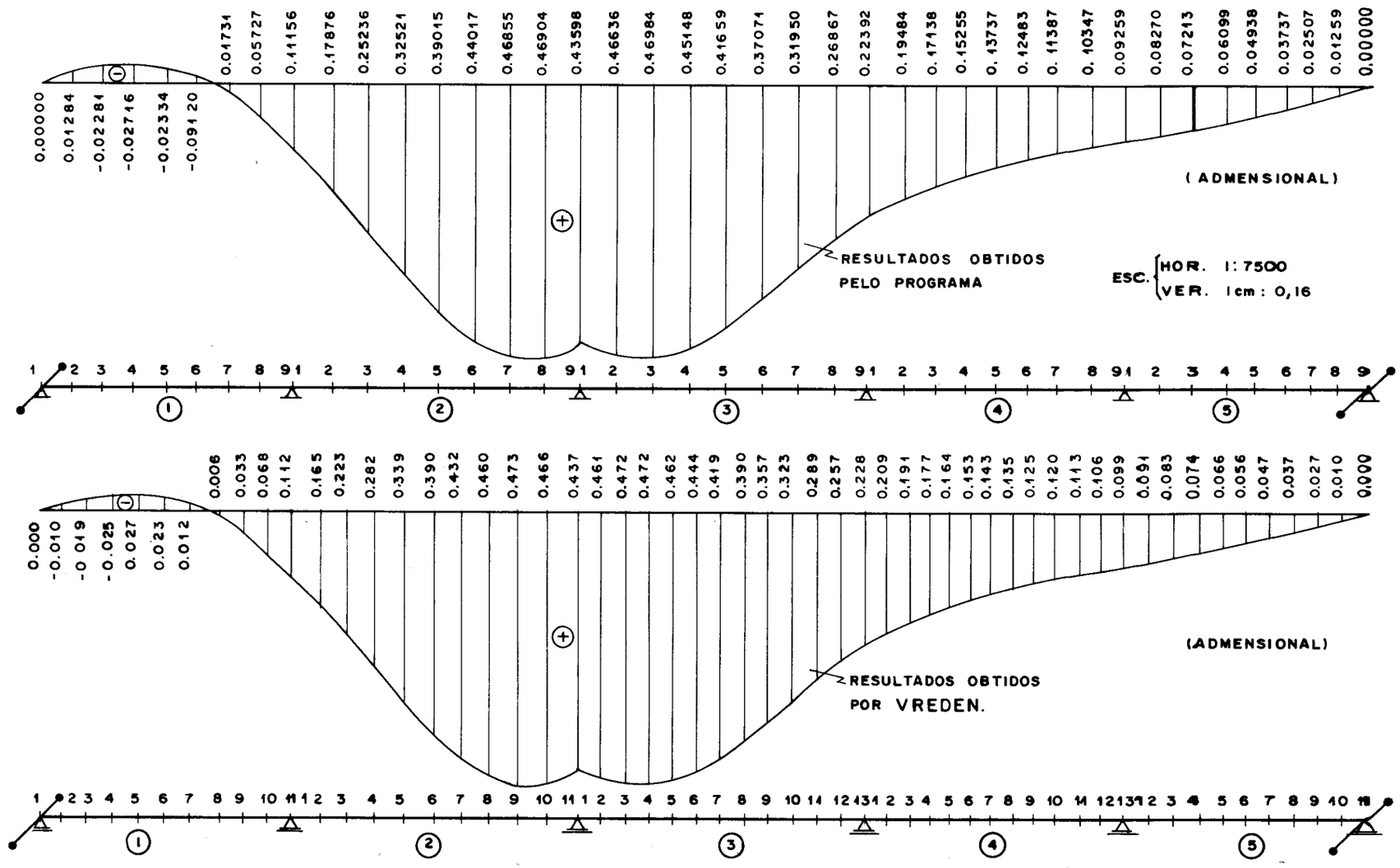


FIG. 9.6.3. - L.I$_S$. DE M_F SOB O APOIO 3 DEVIDAS À CARGA MÓVEL T = 1 (RESULTADOS OBTIDOS PELO PROGRAMA E POR VREDEN.

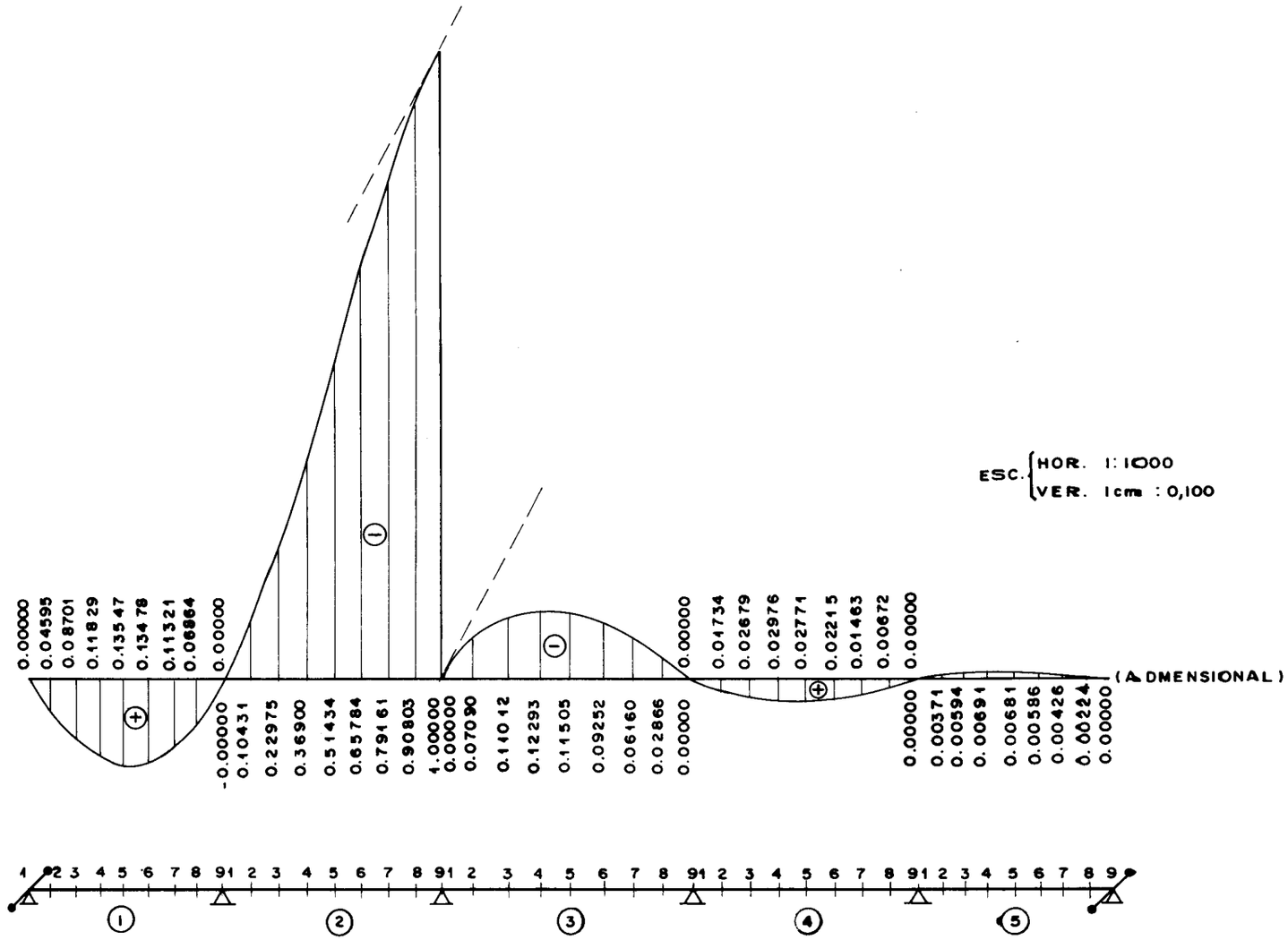


FIG. 9.6.4a. - L.I. DE Q NA SEÇÃO A ESQUERDA DO APOIO 3 PARA P=1 NA VIGA DO EXEMPLO 5.

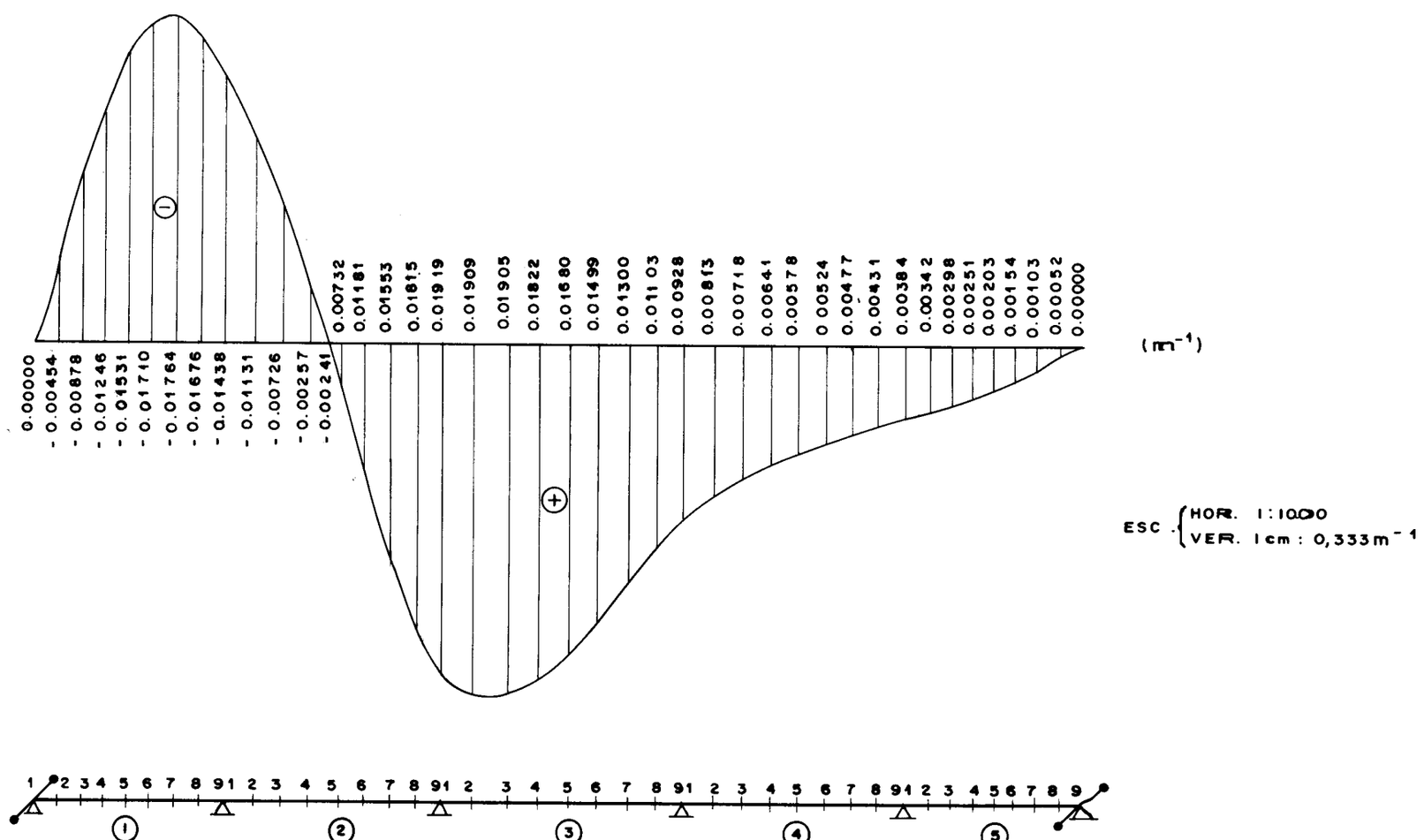


FIG. 9.6.4b.- L.I. DE Q NA SEÇÃO A ESQUERDA DO APOIO 3 PARA T=1 NA VIGA DO EXEMPLO 5.

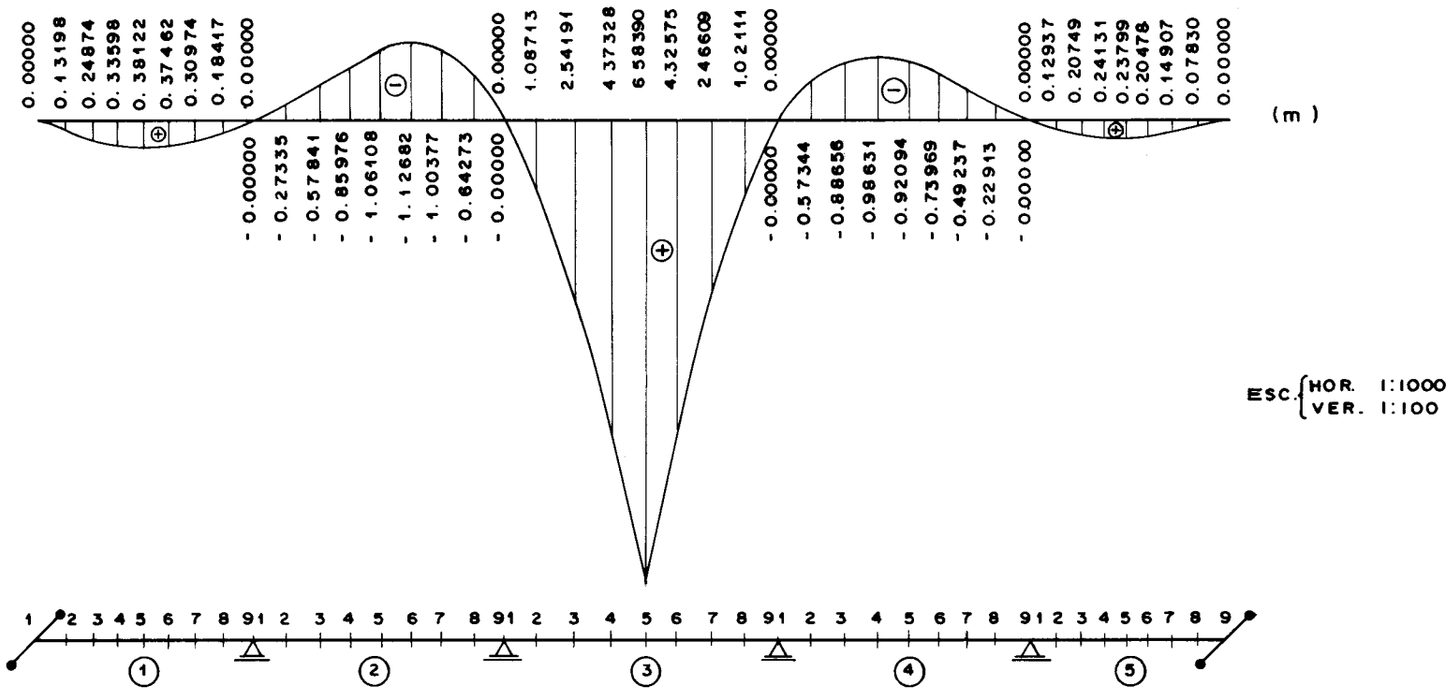


FIG. 9.6.5a. L.I DE M_F NA SEÇÃO MEDIA DA BARRA 3 PARA CARGA P=1 NA VIGA DO EXEMPLO 5.

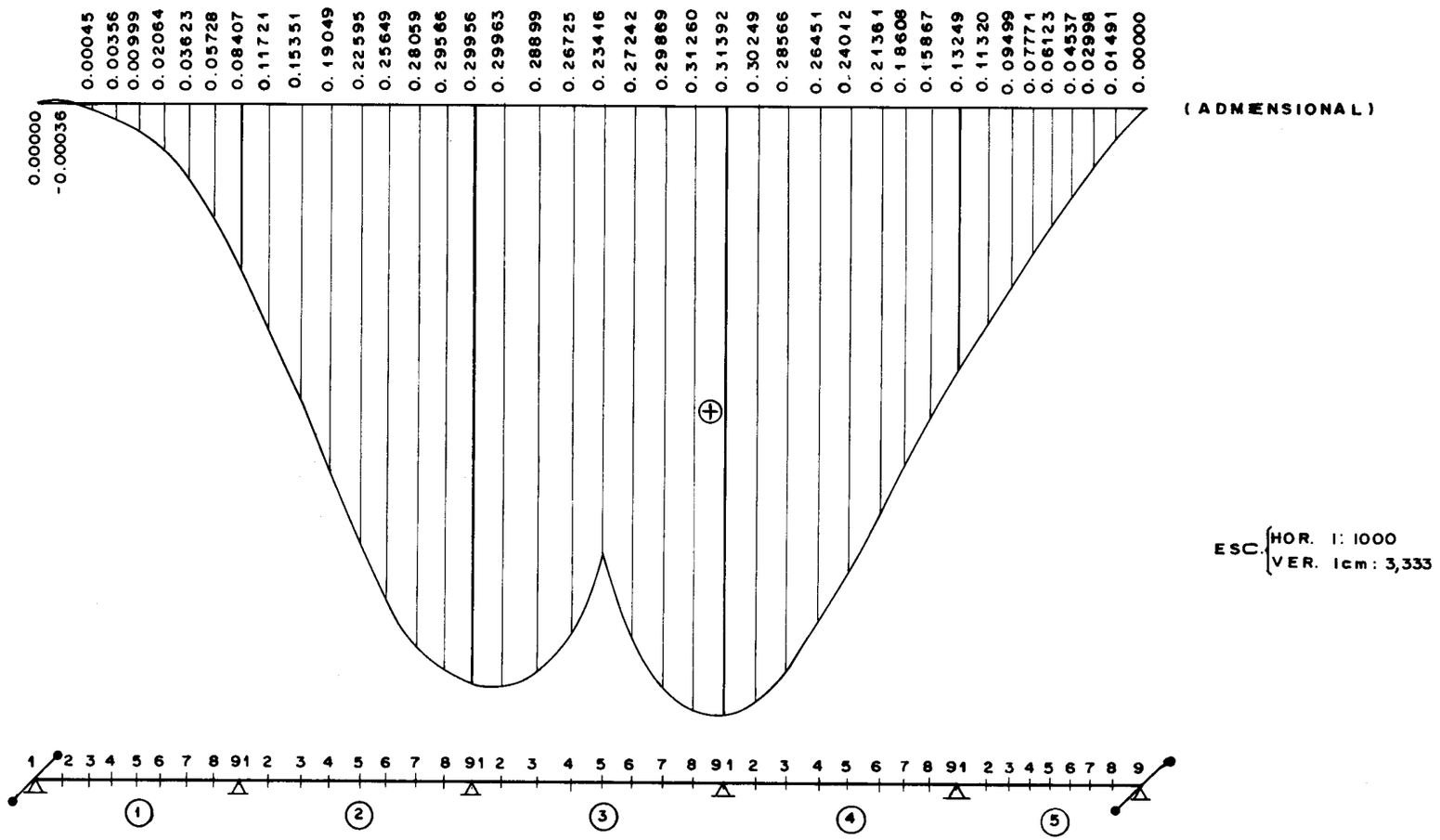


FIG. 9.6.5b. L.I. DE M_F NA SEÇÃO MÉDIO DA BARRA 3 PARA CARGA T = 1 NA VIGA DO EXEMPLO 5.

9.7 - EXEMPLO Nº 6

A estrutura estudada neste último exemplo é uma viga contínua composta de 3 barras, sobre 4 apoios, sendo que os extremos são engastados, e os internos são resistentes à torção. Serão analisadas 2 hipóteses: a primeira delas, considerando os apoios retos, isto é, na direção radial em cada nó; a segunda, imaginando-se os apoios inclinados com a direção radial.

A viga central é reta.

9.7.1 - Viga contínua de 3 tramos com apoios retos

A FIG. 9.7.1 mostra a forma da viga contínua bem como indica as suas características elásticas e geométricas.

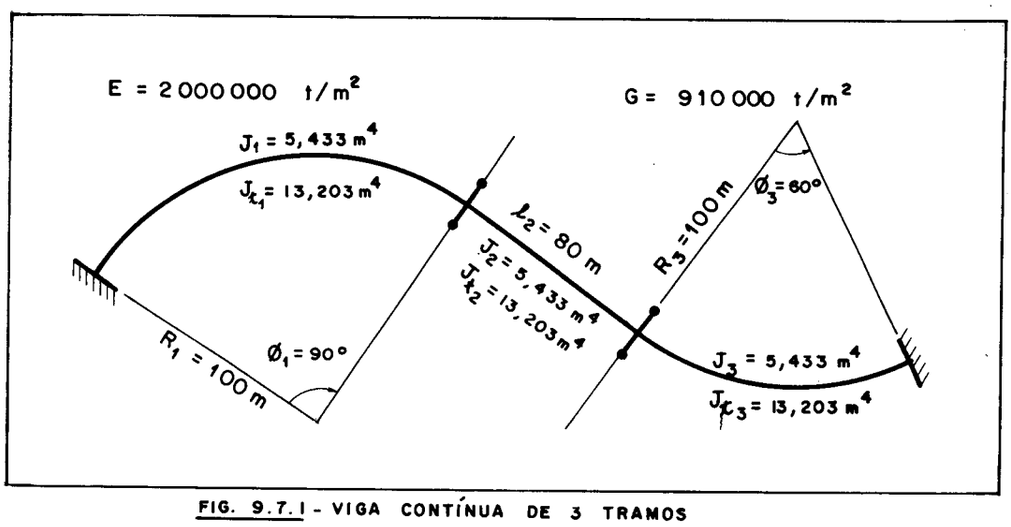


FIG. 9.7.1 - VIGA CONTÍNUA DE 3 TRAMOS

As L.Is. de esforços solicitantes na seção média do primeiro tramo (seção nº 5 no programa de cálculo) foram as seguintes:

LINHAS DE INFLUENCIA DE ESFORCOS SOLICITANTES NA SECAO 5 DA BARRA 1

BARRA	SECAO	K SI	MOMENTO TORCOR P=1	MOMENTO TORCOR T=1	MOMENTO FLETOR P=1	MOMENTO FLETOR T=1	FORCA CORTANTE P=1	FORCA CORTANTE T=1
1	1	.000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000
1	2	.125	-0.26181	0.12005	1.15740	0.06151	-0.03169	-0.00162
1	3	.250	-0.63909	0.24651	4.87223	0.07632	-0.12169	-0.00218
1	4	.375	-0.48969	0.37152	11.30317	0.04193	-0.25803	-0.00193
1	5	.500E	0.83919	0.48701	20.32667	-0.04052	-0.42421	-0.00117
1	5	.500D	0.83918	-0.51299	20.32667	-0.04052	0.57579	-0.00117
1	6	.625	2.05176	-0.39575	12.03210	0.02886	0.39912	-0.00026
1	7	.750	1.86159	-0.26555	6.02013	0.05566	0.23210	0.00046
1	8	.875	0.94895	-0.13083	2.13531	0.04377	0.09375	0.00064
1	9	1.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	1	.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	2	.125	-0.30269	0.00000	-0.58308	0.00000	-0.02734	0.00000
2	3	.250	-0.46885	0.00000	-0.90317	0.00000	-0.04235	0.00000
2	4	.375	-0.52351	0.00000	-1.00846	0.00000	-0.04728	0.00000
2	5	.500	-0.49168	0.00000	-0.94716	0.00000	-0.04441	0.00000
2	6	.625	-0.39840	0.00000	-0.76746	0.00000	-0.03598	0.00000
2	7	.750	-0.26868	0.00000	-0.51757	0.00000	-0.02427	0.00000
2	8	.875	-0.12754	0.00000	-0.24568	0.00000	-0.01152	0.00000
2	9	1.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
3	1	.000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000
3	2	.125	0.11521	0.00207	0.22193	0.00398	0.01041	0.00019
3	3	.250	0.17226	0.00306	0.33184	0.00589	0.01556	0.00028
3	4	.375	0.18169	0.00318	0.35000	0.00614	0.01641	0.00029
3	5	.500	0.15623	0.00270	0.30095	0.00520	0.01411	0.00024
3	6	.625	0.11015	0.00186	0.21219	0.00358	0.00995	0.00017
3	7	.750	0.05863	0.00095	0.11294	0.00182	0.00530	0.00009
3	8	.875	0.01698	0.00024	0.03271	0.00046	0.00153	0.00002
3	9	1.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

9.7.2 - Viga contínua de 3 tramos sob apoios inclinados (esconsos)

As características elásticas, bem como as dimensões da viga analisada neste exemplo são as mesmas daquela do parágrafo 9.7.1. Os apoios centrais estão inclinados em relação às direções radiais das barras 1 e 3. O valor das esconsidades está indicado no desenho da FIG. 9.7.2.

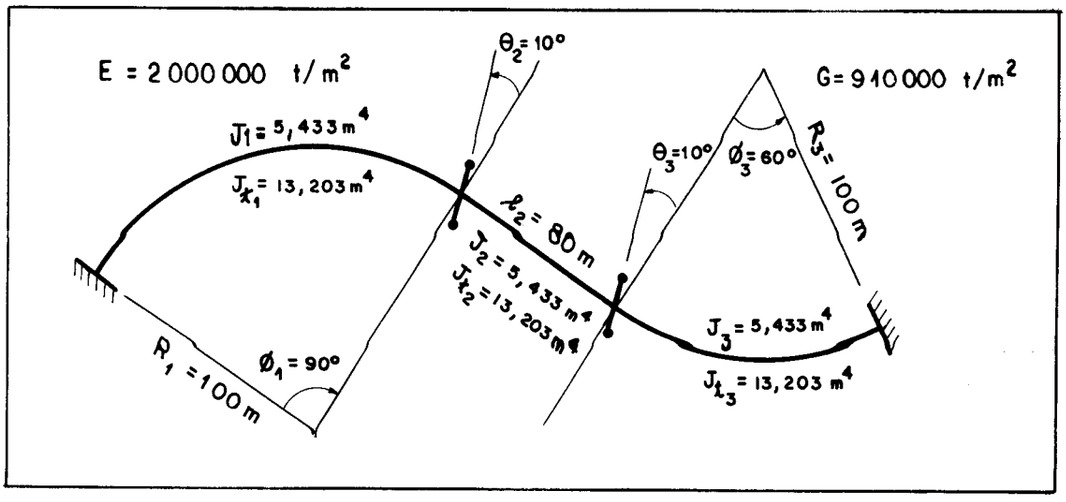


FIG. 9.7.2 - VIGA CONTÍNUA DE 3 TRAMOS COM OS APOIOS CENTRAIS ESCONSO

As L.Is. de esforços solicitantes na seção média do primeiro tramo foram as seguintes:

LINHAS DE INFLUENCIA DE ESFORCOS SOLICITANTES NA SECAO 5 DA BARRA 1

BARRA	SECAO	KSI	MOMENTO TORCOR P=1	MOMENTO TORCOR T=1	MOMENTO FLETOR P=1	MOMENTO FLETOR T=1	FORCA CORTANTE P=1	FORCA CORTANTE T=1
1	1	.000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000
1	2	.125	-0.30638	0.12073	1.17903	0.06257	-0.03122	-0.00157
1	3	.250	-0.79493	0.24917	4.94674	0.07790	-0.12009	-0.00208
1	4	.375	-0.78457	0.37679	11.44174	0.04385	-0.25512	-0.00179
1	5	.500E	0.42024	0.49477	20.51963	-0.03800	-0.42023	-0.00099
1	5	.500D	0.42024	-0.50523	20.51963	-0.03800	0.57977	-0.00099
1	6	.625	1.56631	-0.38631	12.25052	0.03263	0.40350	-0.00001
1	7	.750	1.40552	-0.25593	6.21980	0.06164	0.23599	0.00080
1	8	.875	0.64840	-0.12312	2.26271	0.05320	0.09614	0.00111
1	9	1.000	0.00000	0.00331	0.00000	0.01426	0.00000	0.00063
2	1	.000	0.00000	0.00331	0.00000	0.01426	0.00000	0.00063
2	2	.125	-0.14968	0.00278	-0.64450	0.01197	-0.02841	0.00053
2	3	.250	-0.23145	0.00225	-0.99661	0.00967	-0.04393	0.00043
2	4	.375	-0.25789	0.00171	-1.11046	0.00738	-0.04895	0.00033
2	5	.500	-0.24157	0.00118	-1.04016	0.00509	-0.04585	0.00022
2	6	.625	-0.19505	0.00065	-0.83985	0.00280	-0.03702	0.00012
2	7	.750	-0.13090	0.00012	-0.56363	0.00050	-0.02485	0.00002
2	8	.875	-0.06169	-0.00042	-0.26564	-0.00179	-0.01171	-0.00008
2	9	1.000	0.00000	-0.00095	0.00000	-0.00408	0.00000	-0.00018
3	1	.000	-0.00000	-0.00095	-0.00000	-0.00408	-0.00000	-0.00018
3	2	.125	0.05515	0.00019	0.23747	0.00082	0.01047	0.00004
3	3	.250	0.08254	0.00080	0.35542	0.00345	0.01567	0.00015
3	4	.375	0.08714	0.00099	0.37520	0.00426	0.01654	0.00019
3	5	.500	0.07498	0.00087	0.32286	0.00376	0.01423	0.00017
3	6	.625	0.05290	0.00058	0.22779	0.00251	0.01004	0.00011
3	7	.750	0.02817	0.00025	0.12131	0.00108	0.00535	0.00005
3	8	.875	0.00816	0.00001	0.03516	0.00005	0.00155	0.00000
3	9	1.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Para efeito de comparação de resultados, nas FIGs. 9.7.3.a e b mostra-se os diagramas das L.Is. de momento fletor e força cortante devidos a P = 1 obtidas para os dois exemplos analisados neste parágrafo: viga com apoios retos e com apoios esconsos.

Também para dar uma idéia do comportamento da viga contínua, na FIG. 9.7.4 são traçadas as L.Is. para deslocamento vertical no ponto médio da barra 1 (convencionado positivo para cima), devidos a força vertical P = 1 (móvel). São indicadas nesta figura as linhas de influência para os dois exemplos deste parágrafo.

Verifica-se que a presença da esconsidade de 10° nos apoios centrais fez alterar apenas ligeiramente o valor das ordenadas de linhas de influência, tanto de esforços solicitantes quanto de deslocamentos nos pontos médios.

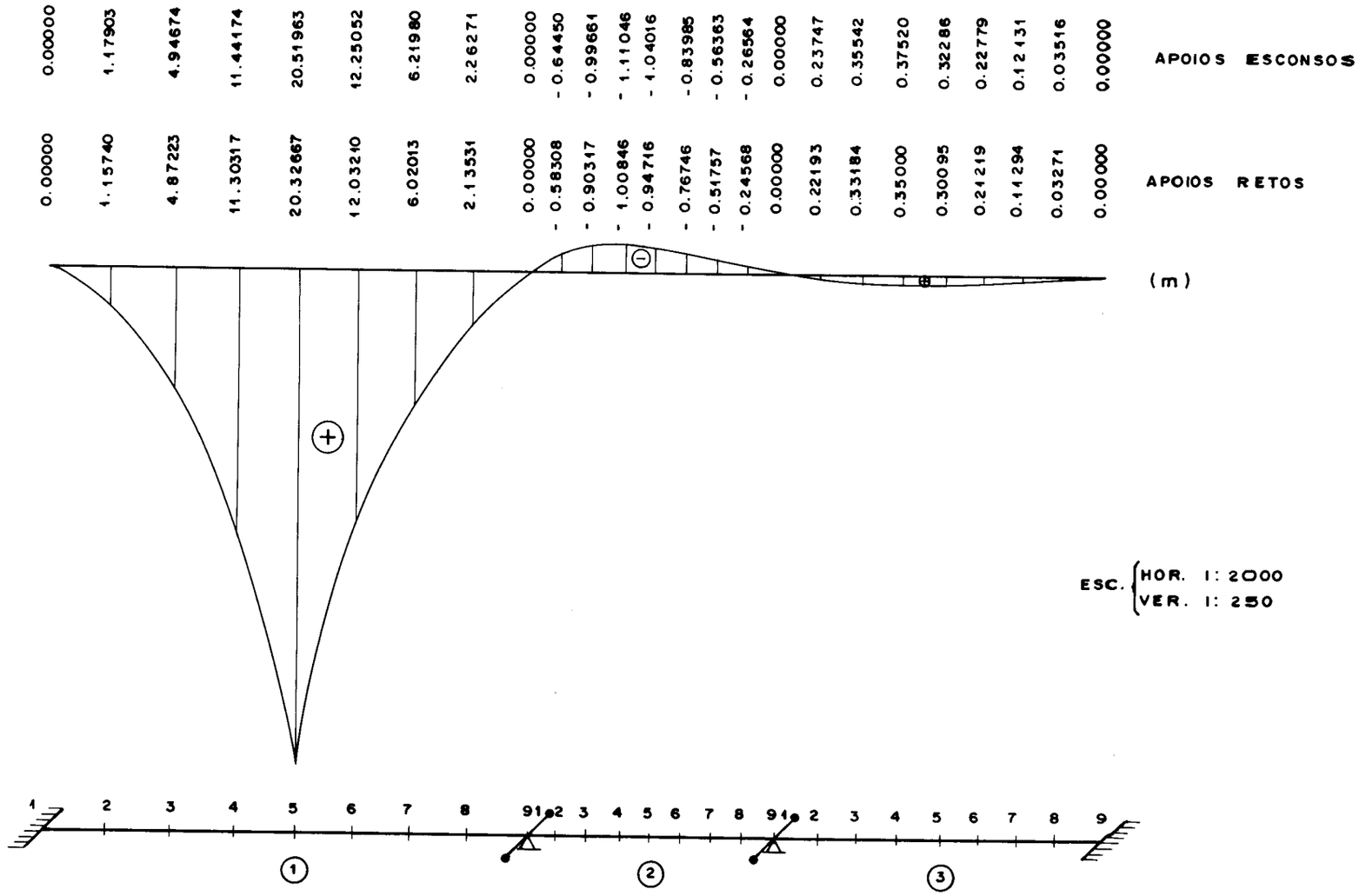


FIG. 9.7.3a - $L.I_S$ DE M_F NA SEÇÃO MÉDIA DA BARRA 1 PARA CARGA P=1. (RESULTADOS NA VIGA COM APOIOS RETOS E NA VIGA COM APOIOS CENTRAIS ESCONSOS.

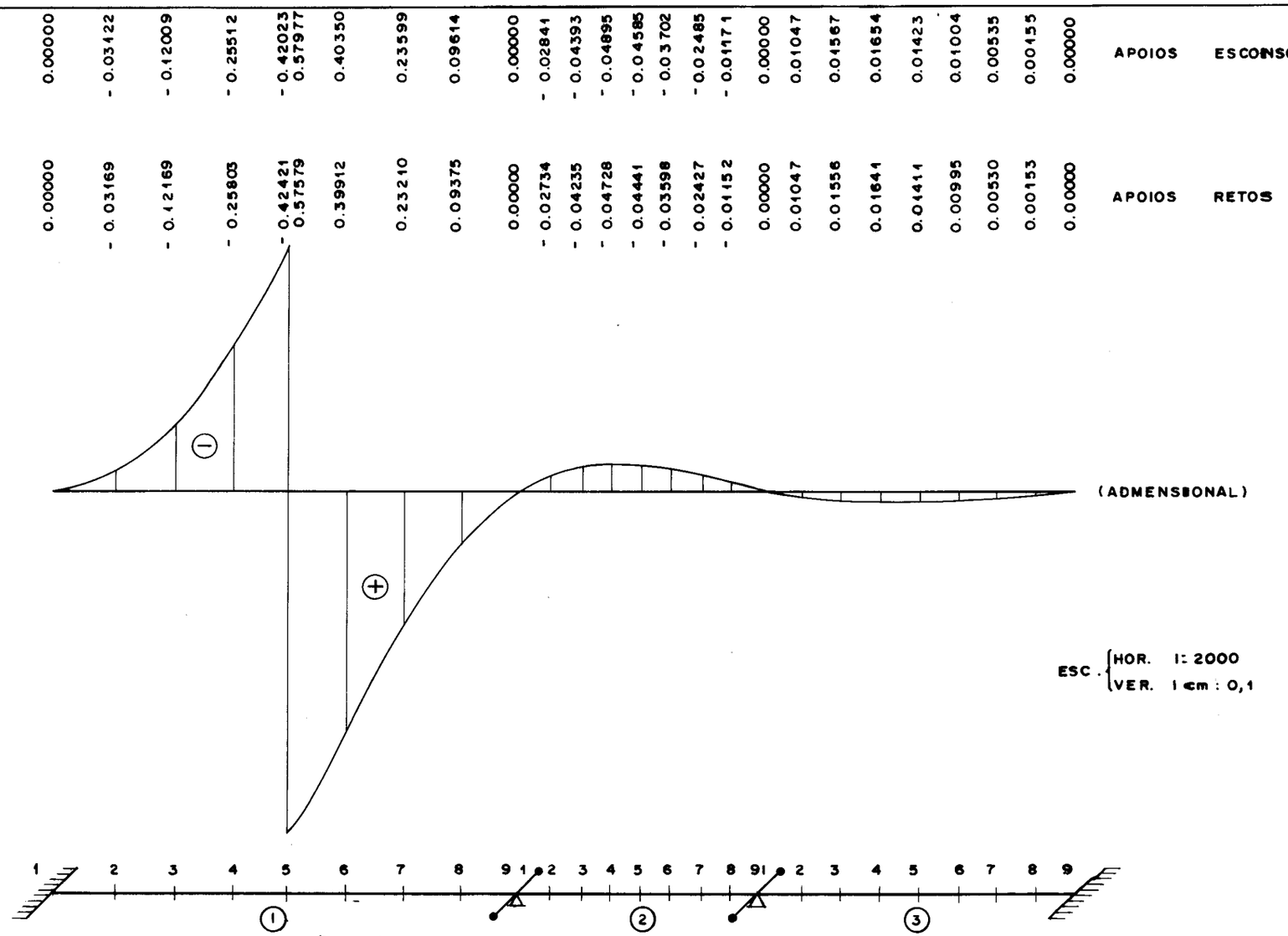


FIG. 9.7.3b - L.I$_S$. DE Q NA SEÇÃO MÉDIA DA BARRA 1 PARA CARGA P=1 (RESULTADOS NA VIGA COM APOIOS RETOS E NA VIGA COM APOIOS CENTRAIS ESCONSOS)

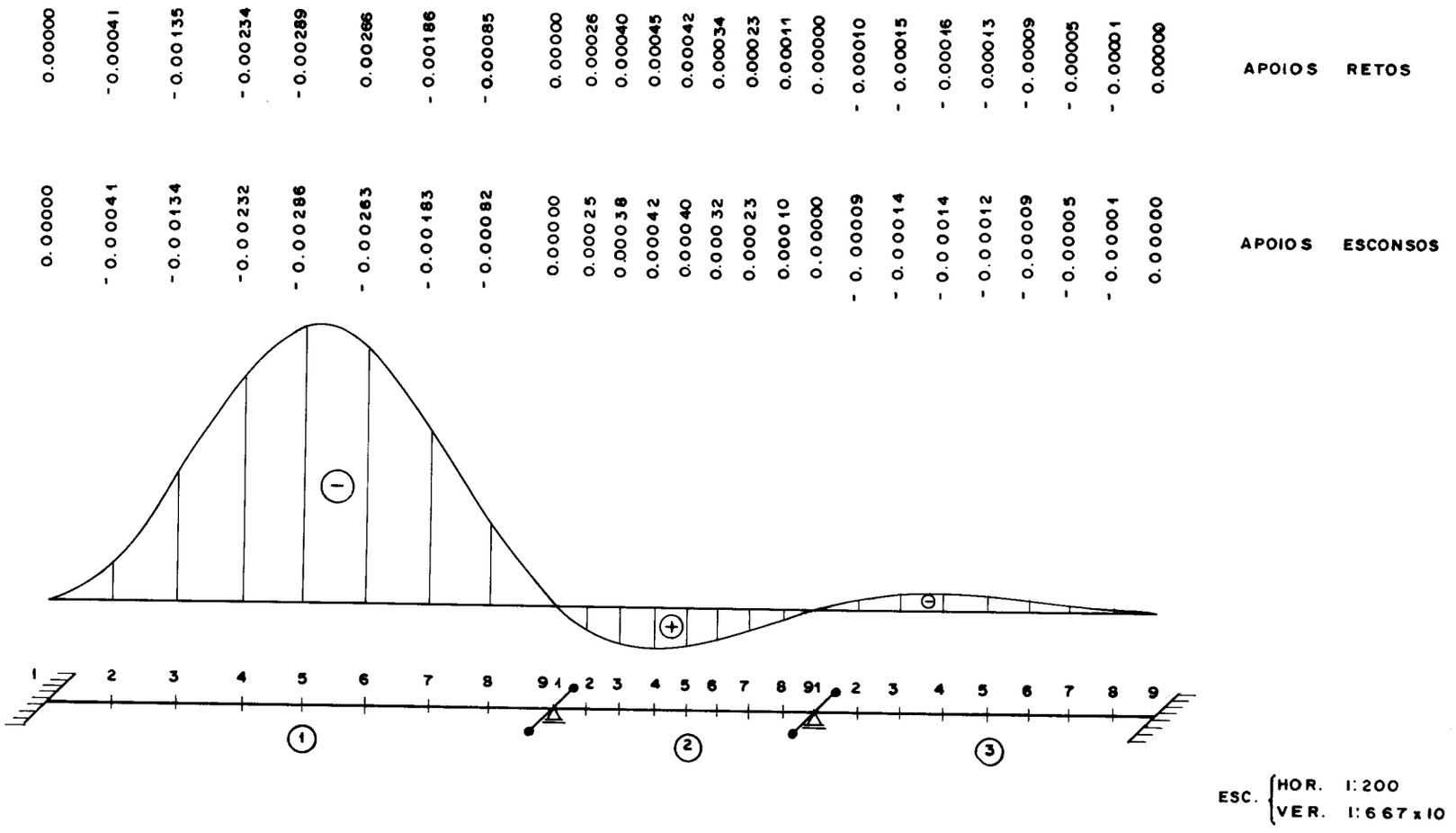


FIG. 9.7.4. - L.I. DE DESLOCAMENTO VERTICAL NO PONTO MÉDIO DA BARRA 1 PARA CARGA MÓVEL P=1 NA VIGA DO EXEMPLO 6.

CAPÍTULO 10

PROGRAMA PARA O CÁLCULO AUTOMÁTICO

10.1 - INTRODUÇÃO

Para a aplicação dos procedimentos descritos nos capítulos anteriores no cálculo de linhas de influência de vigas contínuas constituídas de barras de eixo curvo circular, foi escrito um programa de cálculo, em linguagem FORTRAN-IV, que foi processado no computador DEC SYSTEM-10, com 256K de memória, pertencente à UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, utilizando-se um terminal instalado na FACULDADE DE ENGENHARIA DE LIMEIRA.

A seguir são dadas as características do programa, o fluxograma esquemático do programa, a forma de entrada de dados, a listagem do programa e uma explicação suscinta dos seus principais passos, identificando-os com as equações dos capítulos anteriores.

10.2 - LIMITAÇÕES DO PROGRAMA

O programa escrito só executa o cálculo de linhas de influência em vigas contínuas constituídas de barras retas e ou curvas de eixo circular.

Em vigas onde houverem esconsidades nos apoios, as

eventuais perturbações localizadas, na vizinhança dos nós, não são levadas em conta pelo presente programa, devido às hipóteses simplificadoras adotadas (Cálculo de linha). Devem entretanto sempre merecer atenção especial do usuário.

O programa escrito utiliza apenas "a memória rápida" do computador. Pode-se com pequenas alterações, adaptá-lo para a utilização de "discos". Com isso abre-se a possibilidade de utilizar um computador com menos disponibilidade de memória.

O número máximo de barras previsto é 6. Essa limitação pode ser facilmente modificada, alterando no programa as dimensões das variáveis vetores ou matrizes utilizadas. Foram colocados cartões comentários no início do programa indicando as dimensões mínimas que devem ser reservadas.

As barras devem ter momento de inércia a flexão e torção constantes, podendo-se variar de tramo para tramo.

As seções para as quais se calculam L.Is. são préfixadas, em 9 pontos equidistantes de cada barra. Caso se necessite L.Is. para outras seções pode-se recorrer ao artifício de desdobrar uma barra em duas, prevendo-se a existência de um nó na seção onde se quer a L.I..

São fornecidas na impressão dos resultados, ordenadas em 9 pontos por barra. Caso se necessite de mais ordenadas, pode-se recorrer ao artifício de imaginar a viga contínua como constituída de mais barras, adicionando-se mais nós a estrutura.

São calculadas todas as L.Is. possíveis, prevendo-se que este programa será continuado por outros que possibilitarão o carregamento das L.Is..

10.3 - ORGANIZAÇÃO DO PROGRAMA

O programa principal faz uso de 7 subrotinas cujas funções são as seguintes:

INVGJ - Faz a inversão de matriz quadrada pelo método de Gauss-Jordan sem pivotamento.

FLXCUR - Calcula a matriz de flexibilidade da viga curva em balanço, com a extremidade esquerda livre.

RIGCUR - Calcula a matriz de rigidez da viga curva, no Sistema de Coordenadas Local.

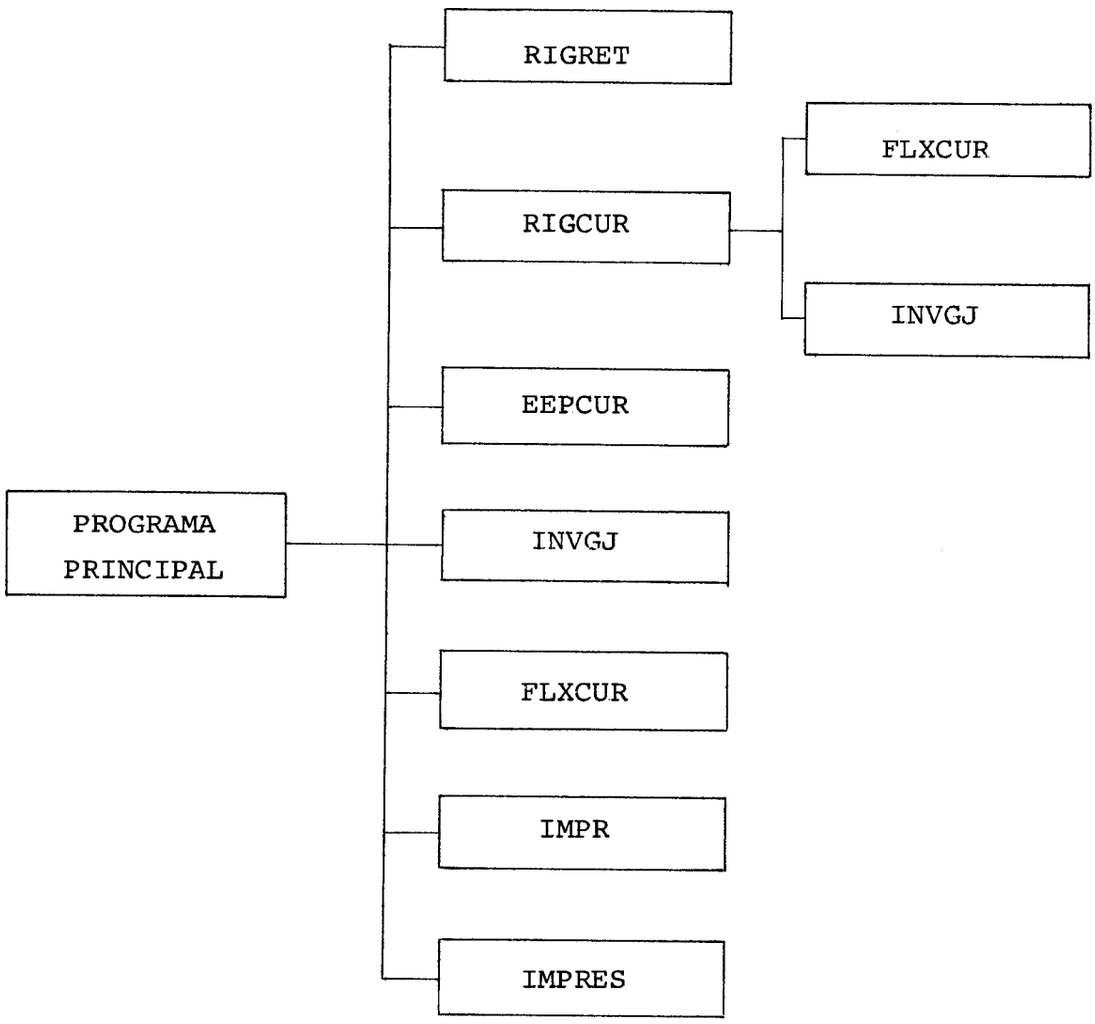
RIGRET - Calcula a matriz de rigidez da viga reta, no Sistema de Coordenadas Local.

EEPCUR - Calcula os esforços de engastamento perfeito para cargas P = 1 e T = 1 atuando na viga curva no Sistema de Coordenadas Local.

IMPR - Imprime linhas de influência de deslocamentos nos nós, reações nos apoios e deslocamentos nos pontos médios das barras.

IMPRES - Imprime linhas de influência de esforços solicitantes em seção ao longo das barras.

As FIGs. 10.3.1 e 10.3.2 mostram esquematicamente o funcionamento do programa.



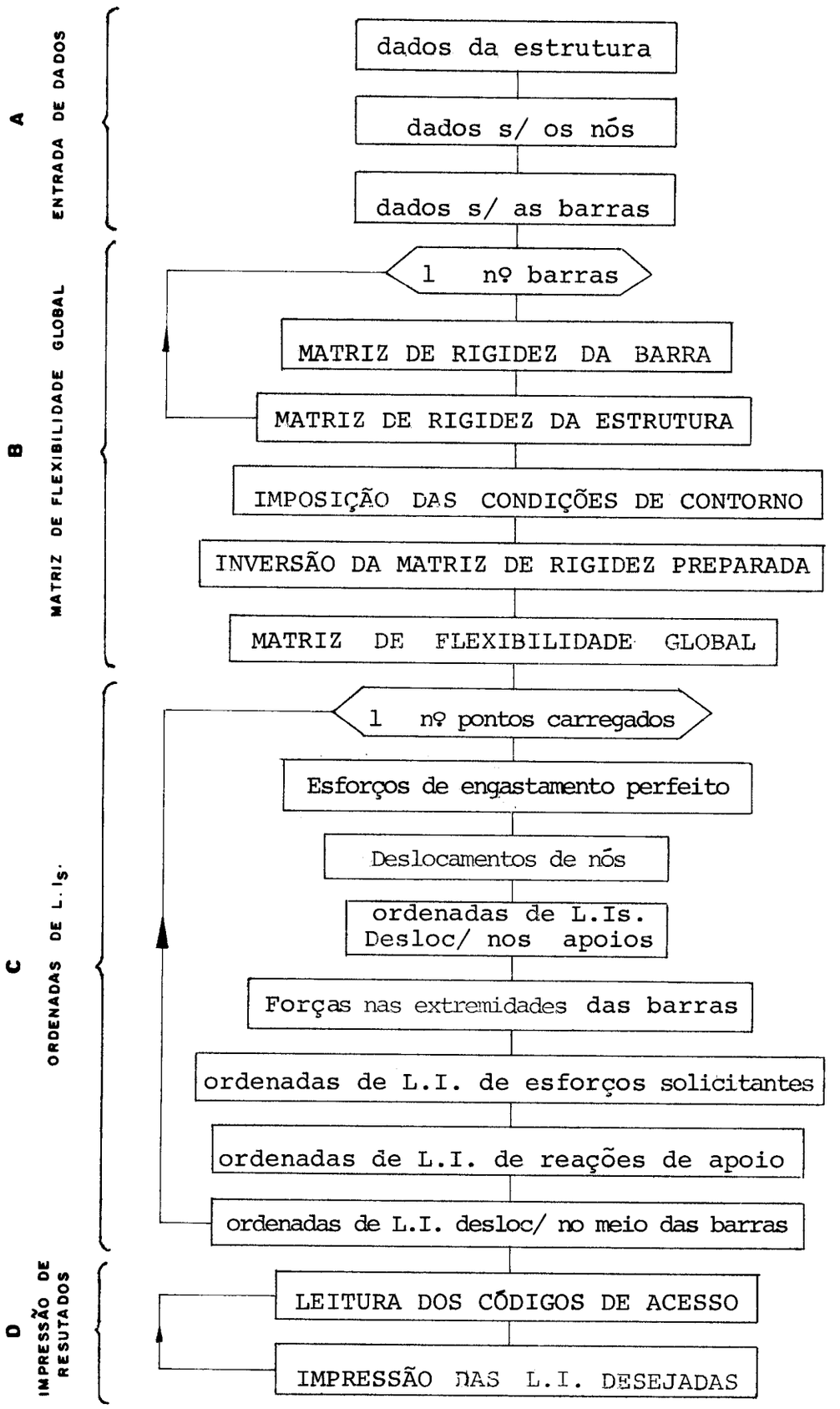


FIG. 10.3.2 - FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DO PROGRAMA AUTOMÁTICO

10.4 - PREPARAÇÃO DOS DADOS PARA O PROGRAMA

Deve ser fornecido ao computador um arquivo contendo os dados que serão lidos pelo programa. Esse arquivo pode ser criado diretamente no terminal do usuário no momento da execução do programa, pode estar residente do disco, ou ainda ser fornecido através de uma leitura de cartões.

O programa lê os dados em formato livre. Basta que os dados relativos a cada leitura estejam separados por pelo menos um espaço em branco.

Na tabela 10.4.1 são apresentados a forma de entrada de dados que tem no máximo 16 linhas (ou 16 cartões).

TABELA 10.4.1

Nº DO CARTÃO	FORMATO	VARIÁVEIS A SEREM LIDAS	DESCRIÇÃO	VIDE OBS
1	2F, 2I	E,G,N,NNAE	Módulo de Elasticidade E; Módulo de Elasticidade Transversal G; Número de Barras N; Número de nós c/ apoios Esconsos NNAE	
2	7(I, F)	((K,TETA(K)),I=1,NJ)	7 conjuntos (Número do nó, Esconsidade θ) p/ se fornecer as esconsidades dos nós onde existam	1
3	7(3I)	(LR(INV),INV=1,NJ3)	Lista de restrições	2
4	6F	(FI(I),I=1,N)	Ângulo de abertura (em graus) p/ as N barras	3
5	6F	(AUX(I),I=1,N)	Raio de curvatura (p/ Barras Curvas) ou Comprimento (p/ Barras Retas)	4
6	6F	(JF(I),I=1,N)	Momento de inércia a flexão das N barras	5
7	6F	(JT(I),I=1,N)	Momento de inércia a torção das N barras	5
8	A2, 10I	KTL,(IMP(I),I=1,10)	"DA" 1 2 3 ..... N_j	6
9	A2, 10I	KTL,(IMP(I),I=1,10)	"RA" 1 2 3 ..... N_j	7
10	A2, 10I	KTL,(IMP(I),I=1,10)	"DM" 1 2 3 ..... N_j	8
11	A2, 10I	KTL,(IMP(I),I=1,10)	ES 1 1 2 3 4 9	9
12	A2, 10I	KTL,(IMP(I),I=1,10)	ES 2 1 2 9	9
13	A2, 10I	KTL,(IMP(I),I=1,10)	ES 3 1 2 9	9
14	A2, 10I	KTL,(IMP(I),I=1,10)	ES 4 1 2 9	9
15	A2, 10I	KTL,(IMP(I),I=1,10)	ES 5 1 2 9	9
16	A2, 10I	KTL,(IMP(I),I=1,10)	ES 6 1 2 3 4 9	9

Algumas observações a respeito da entrada de dados devem ser feitas:

1 - O registro (cartão) 2 só deve existir se NNAE $\neq$ 0, isto é, se houver algum apoio com esconsidade. Esta deve ser dada em graus, positivo se anti-horária.

2 - O registro (cartão) 3 contém a lista de restrições nas 3 direções de todos os NJ nós. Devem ser fornecidos os códigos 1 ou 0 para indicar se existe ou não vínculo que impede o movimento na direção de cada uma das 3 coordenadas do nó. A restrição de movimento se refere ao Sistema de Coordenadas Novo, conforme descrito no capítulo 8.

3 - A abertura ϕ e o raio R de cada barra curva têm sinal, conforme já explicado no capítulo 5. Quando a barra for concava são ambos positivos; se a barra for convexa são ambos negativos (depende da posição do observador).

4 - No registro (cartão) 5 deve ser fornecido para cada uma das n barras, o raio de curvatura se a barra for curva, ou o comprimento da barra se esta for reta.

5 - Nos registros (cartões) 6 e 7, quando os momentos de inércia J ou J_t forem os mesmos em todas as barras, basta fornecer o da primeira barra, que o programa adotará os demais iguais a este.

6 - O registro (cartão) 8 é opcional. Deve ser colocado quando se deseja a impressão de L.Is. deslocamentos de nó, em algum nó. Deve ser fornecido os caracteres D e A nas colunas 1 e 2 do registro (cartão), seguidos dos números dos nós para os quais se quer as L.Is.

7 - O registro (cartão) 9 é opcional. Deve ser colocado quando se deseja a impressão de L.Is. de reações em algum nó. Deve ser fornecidos os caracteres R e A nas colunas 1 e 2 do registro (cartão), seguidos dos números dos nós para os quais se quer as L.Is.

8 - O registro (cartão) 10 também é opcional. Deve ser colocado quando se quer a impressão das L.Is. de deslocamento no ponto médio de alguma barra.

9 - Os registros (cartões) 11 a 16 são opcionais cada um deles deve ou não ser colocado quando se quer imprimir L.Is. de esforço solicitante em alguma(s) seções de cada barra. Para cada barra, deve ser colocado um desses "cartões", com as colunas 1 e 2 ocupadas pelos caracteres E e S, seguidos do número da barra, e pelos números das seções ($1 \leq s \leq 9$) daquela barra, para as quais se deseja L.Is. de esforços solicitantes.

Caso as "dimensões" dos vetores e matrizes sejam modificados, de tal modo a possibilitar o processamento de vigas com mais barras, o número de registros (cartões) relativos à impressão de L.Is. de esforços solicitantes deverá aumentar, pois, da maneira como o programa foi escrito, se necessita um registro (cartão) por barra, para esse fim.

Mostra-se a seguir a entrada de dados relativas ao exemplo 6-b, do capítulo 9, viga contínua constituída por 3 barras, sendo a central reta e as extremas curvas, com os apoios extremos totalmente engastados e os centrais resistentes à torção e apresentando esconsidade em relação à direção radial (vide Tabela 10).

T A B E L A 10.4.2

Arquivo de dados do exemplo 6-b do capítulo 9

```
2000000. 910000. 3 2
2 10 3 10
1 1 1   1 0 1   1 0 1   1 1 1
90 0 -60
100 80 -100
5.433
13.203
ES 1 5
DM 1 2
```

10.5 - EXPLANAÇÃO PARA O PROGRAMA DE CÁLCULO DE LINHAS DE INFLUÊNCIA

São dadas a seguir algumas explicações suscintas dos principais comandos do programa principal e das 7 subrotinas escritas em linguagem FORTRAN-IV, cujas listagens são apresentadas no final deste capítulo.

Programa principal contém 385 comandos. A subrotina INVGJ possui 13 comandos. A subrotina FLXCUR possui 16 comandos. A subrotina EEPCUR possui 40 comandos. A subrotina RIGCUR possui 25 comandos. A subrotina RIGRET possui 28 comandos. A subrotina IMPR possui 17 comandos. A subrotina IMPRES possui 29 comandos.

PROGRAMA PRINCIPAL

LINHA	DESCRIÇÃO
1	Constante para passagem de grau para radiano.
2 a 5	Entrada e impressão de dados sobre a estrutura.
6	Testa se o número de barras é maior que o máximo. Em caso afirmativo imprime mensagem de erro e interrompe o programa.
7	Testa se o número de barras é negativo ou nulo. Em caso afirmativo imprime mensagem de erro e interrompe a a execução.
8	Testa se o módulo de elasticidade E ou o módulo de elasticidade transversal G são negativos ou nulos. Em caso afirmativo interrompe a execução do programa, imprimindo mensagem de erro.
9 a 10	Calcula variáveia auxiliares.
11	Testa se o número de nós com apoios esconsos é nulo. Em caso afirmativo salta a leitura de dados sobre a esconsidade.
12 e 13	Lê, num único cartão, o conjunto de dados número de nó e inclinação de apoio para os NNAE nós com apoios esconsos.
14 e 15	Lê, num único cartão a lista de restrições. (Refere-se ao Sistema de Coordenadas Novo, conforme explicado no capítulo 7).

16 a 19	Imprime dados relativos aos nós.
20 a 24	Transforma os dados que foram lidos para as esconsidades de grau para radiano, calculando também os valores auxiliares seno e cosseno da inclinação dos apoios esconsos.
25 e 26	Testa novamente se algum dos nós tem apoio esconso. Em caso afirmativo imprime mensagem de advertência.
27 e 28	Imprime cabeçalho relativo às barras.
29 a 57	Lê e imprime dados relativos às barras, caracterizando o tipo das barras: reta ou curva; calcula também o comprimento das barras quando curva. Calcula também nesses passos parâmetros auxiliares λ de cada barra.
58 a 97	Calcula a matriz de rigidez da estrutura, no Sistema de Coordenadas Novo, a partir da matriz de rigidez dos elementos.
60	Identifica o tipo da barra.
61 a 67	Prepara variáveis auxiliares e chama a subrotina que calcula a matriz de rigidez da barra curva, conforme equação 4.6.1 do capítulo 4.
68 a 70	Prepara variáveis auxiliares e chama a subrotina EEPRET que calcula a matriz de rigidez da barra reta, conforme equação 4.7.1 do capítulo 4.
71	Testa se a barra é ligada a algum apoio esconso. Em caso afirmativo deve-se fazer rotação de coordenadas, obtendo-se nova matriz de rigidez do elemento, conforme explicado no ítem a) do parágrafo 7.6 do capítulo 7.
72 a 81	Calcula a matriz de rotação conforme equação 7.5.1 do parágrafo 7.
82 a 91	Calcula a nova matriz de rigidez da barra no Sistema de Coordenada Novo, conforme equação 7.6.1 do capítulo 7.
92 a 97	Calcula a matriz de rigidez da estrutura a partir da matriz de rigidez dos elementos (já no Sistema de Coordenada Novo), conforme sugerido na equação 5.6.1 do capítulo 5. Armazena-se para cálculo futuro, a matriz de rigidez de cada barra.
98 a 104	Calcula a matriz de rigidez modificada, impondo as condições de vinculação, conforme indicado no ítem a) do parágrafo 5.7, do capítulo 5.

105	Faz a inversão da matriz de rigidez modificada, conforme sugerido no ítem b) do parágrafo 5.7, do capítulo 5, chamando a subrotina INVGJ.
106 a 108	Calcula a "Matriz de Flexibilidade Global" da estrutura conforme indicado no ítem c) do parágrafo 5.7, do capítulo 5.
109 a 375	Calcula e armazena as L.Is. de deslocamentos em todos os nós (no Sistema de Coordenadas Novo), calcula e armazena L.Is. de esforços solicitantes em todas as seções, calcula e armazena L.Is. de deslocamentos nos pontos médios de todas as barras e L.Is. de reações em todos os apoios (no Sistema de Coordenadas Novo).
109	Abre o "DO" que faz as cargas percorrerem todas as barras.
110 a 114	Calcula variáveis auxiliares quando a barra carregada estiver ligado a algum apoio com esconsidade.
115	Identifica o tipo da barra carregada.
116 a 126	Calcula as variáveis auxiliares.
127	Abre o "DO" que faz as cargas percorrerem todos os pontos possíveis na barra carregada, conforme sugerido em 5.3.4.
128	Calcula o índice de posição da carga, conforme equação 5.3.3 do capítulo 5.
129	Identifica se a barra carregada é reta ou curva.
130	Calcula, para o caso da barra ser curva, a coordenada angular da seção carregada, conforme equação 5.3.1 do capítulo 5.
131 a 134	Calcula a matriz dos Esforços de Engastamento devido à cargas atuando na barra tipo curva, conforme indicado em 5.9.1. Usa-se para isso a matriz de rigidez da barra carregada, que já se encontra armazenada. A matriz [X] dos esforços de engastamento perfeito na barra curva é calculada no Sistema de Coordenadas Local, usando-se procedimento indicado no parágrafo 4.8. No programa chama-se linha 133 a subrotina EEPCUR que faz esse cálculo.
135	Calcula a coordenada angular do ponto carregado se a barra for reta. Usa-se a expressão 5.3.2 do capítulo 5.

136 a 145	Calcula a matriz [X] dos esforços de engastamento perfeito na barra reta, no Sistema Local de Coordenadas, usando-se as expressões contidas em 4.9.1 do capítulo 4.
146	Testa se a barra carregada está ligada em algum apoio esconso. Em caso positivo deve-se passar os esforços de engastamento perfeito para o Sistema de Coordenadas Novo.
147 a 155	Calcula a nova matriz de esforços de engastamento perfeito, conforme indicado em 7.6.2 do capítulo 7.
156 a 164	Calcula a matriz [D] de deslocamentos em todos os nós, devido à cargas em i_{pc}. É a operação indicada na equação 5.10.1 do capítulo 5. Resultam deslocamentos no Sistema de Coordenadas Novo.
165	Calcula e armazena as ordenadas das L.Is. de deslocamentos em todos os nós, relativos à posição i_{pc} da carga, conforme sugerido nas equações 6.2.2 a 6.2.5 do capítulo 6.
172 a 267	Calcula ordenadas das linhas de influência de esforços solicitantes em todas as seções e também as ordenadas das L.Is. de deslocamentos nos pontos médios das barras.
172	Abre o "DO" que percorre as barras que conterão as seções.
172 a 180	Calcula esforços na extremidade da barra i à partir dos deslocamentos na extremidade dessa barra, conforme equação 5.11.1 do capítulo 5, e das equações 5.11.5 ou 5.11.6, que referem-se ao Sistema Novo, conforme equações 7.6.3 e 7.6.4.
181	Calcula a contribuição de cada barra na formação da matriz das reações de apoio conforme equações 5.12.3 a 5.12.7 do capítulo 5.
182	Testa se a barra é ligada a algum nó que possui esconsidade. Em caso positivo será necessário retomar os esforços de extremidade para o Sistema de Coordenadas Antigo.
183 a 191	Faz a rotação de coordenadas passando-se os esforços de extremidade da barra i para o Sistema de Coordenadas Antigo, conforme indicado em 7.6.5 do capítulo 7.

192	Testa se a barra i (que contém as seções) é reta ou curva.
193 a 233	Efetua os cálculos de esforços solicitantes e ordenadas de L.Is. para todas as seções da barra i curva.
197	Calcula o índice de posição da seção i_{ps}.
200 a 201	Testa se a posição relativa entre i_{ps} e i_{pc}.
202 a 208	Calcula os esforços solicitantes na seção S à partir dos esforços da extremidade direita, conforme indicado na expressão 5.13.14 ou 5.3.19 do capítulo 5.
209 a 213	Armazena as ordenadas da L.I. de reação na seção s conforme equações 6.2.2 a 6.2.5 do capítulo 6.
214 a 220	Calcula os esforços solicitantes na seção da barra i à partir dos esforços da extremidade esquerda, conforme indicado na expressão 5.13.9 do capítulo 5.
220 a 226	Calcula os esforços solicitantes na seção S, para cargas à direita da seção quando $i_{ps} = i_{pc}$, conforme equação 5.13.20 do capítulo 5.
227 a 230	Armazena as ordenadas à direita da seção S, conforme indicado nas equações 6.3.5 a 6.3.9 do capítulo 6.
234 a 266	Efetua os cálculos de esforços solicitantes e ordenadas de L.Is. para todas as seções da barra i, caso essa seja reta. A sequência de cálculo é a mesma indicada no caso da barra curva, usando-se as equações do parágrafo 5.13 do capítulo 5.
268 a 274	Armazena as ordenadas das linhas de influência de reação de apoio, nas posições indicadas pelas equações 6.3.5 a 6.3.9 do capítulo 6.
275 a 375	Calcula e armazena ordenadas das linhas de influência de deslocamentos dos pontos médios das barras.
275	Abre o "DO" para varrer todas as barras que conterão as seções médias em estudo.
276	Calcula o índice de posição da seção média de cada barra.
277 e 278	Calcula variáveis auxiliares.
279	Testa se a barra é reta ou curva.
280 a 324	Efetua os cálculos de ordenadas das L.Is. de deslocamentos na barra curva.
280 a 283	Calcula variáveis auxiliares.

284	Chama a subrotina FLXCUR para calcular os coeficientes de flexibilidade da semi-barra direita conforme equações 8.3.18 a 8.3.23 do capítulo 8.
285 a 286	Testa a posição relativa da posição da seção média e do ponto carregado.
287 a 305	Calcula as ordenadas das L.Is. de deslocamentos no ponto médio da barra curva à partir da extremidade direita.
288 a 296	Calcula índices auxiliares de endereçamento para retirar das matrizes $[\eta^D]$ e $[\eta]$ as ordenadas de L.I. necessárias, conforme expressões 8.3.1 a 8.3.9.
297 a 298	Calcula variáveis auxiliares.
299 a 301	Calcula a parcela de corpo rígido, à partir da direita conforme equação 8.3.10 do capítulo 8, usando a matriz de transformação dada em 8.3.11.
302 a 304	Calcula a parcela elástica, à partir da direita, conforme equação 8.3.16 do capítulo 8.
306 a 324	Calcula as ordenadas de deslocamentos nos pontos médios da barra curva à partir da extremidade esquerda.
306 a 308	Calcula a matriz de flexibilidade da semi-barra esquerda, à partir da semi-barra direita, conforme 8.3.26 do capítulo 8.
309	Calcula as ordenadas das L.Is. de deslocamentos à partir da extremidade esquerda.
311 a 315	Calcula índices auxiliares de endereçamento para retirar das matrizes $[\eta^D]$ e $[\eta]$ as ordenadas de L.Is. necessárias, conforme 8.3.1 a 8.3.9.
316 e 317	Calcula variáveis auxiliares.
318 a 320	Calcula a parcela de corpo rígido à partir da extremidade esquerda, usando a equação 8.3.13 do capítulo 8 e matriz de transformação 8.3.14 do mesmo capítulo.
321 a 323	Calcula a parcela elástica, à partir da extremidade esquerda, conforme 8.3.25 do capítulo 8.
325 a 375	Efetua os cálculos de ordenadas das L.Is. de deslocamentos na barra reta.
326 a 334	Calcula a matriz de flexibilidade da semi-barra (reta) direita, conforme 8.3.24 do capítulo 8.
335 e 336	Testa a posição relativa da posição da seção média e do ponto carregado.

337 a 356	Calcula as ordenadas das L.Is. de deslocamento no ponto médio da barra reta, à partir da semi-barra direita.
337 a 346	Calcula índices auxiliares de endereçamento para retirar das matrizes $[\eta^D]$ e $[\eta]$ as ordenadas de L.I. necessárias conforme 8.3.1 e 8.3.9 do capítulo 8.
349 a 351	Calcula a parcela de corpo rígido à partir da extremidade direita, conforme equações 8.3.10 e 8.3.12 do capítulo 8.
352 a 354	Calcula a parcela elástica à partir da extremidade direita, conforme equações 8.3.16 a 8.3.24 do capítulo 8.
356 a 374	Calcula as ordenadas de deslocamentos nos pontos médios da barra reta, à partir da extremidade esquerda.
356 a 358	Calcula a matriz de flexibilidade da semi-barra reta esquerda, à partir da matriz de flexibilidade da semi-barra direita, conforme equação 8.3.26 do capítulo 8.
359 a 374	Calcula as ordenadas das L.Is. de deslocamentos no ponto médio da barra reta, à partir da semi-barra esquerda.
360 a 365	Calcula índices auxiliares de endereçamento para retirar das matrizes $[\eta^D]$ e $[\eta]$ as ordenadas de L.I. necessárias, conforme 8.3.1 e 8.3.9 do capítulo 8.
366 e 367	Calcula variáveis auxiliares.
368 a 370	Calcula parcela de corpo rígido à partir da extremidade esquerda, conforme 8.3.13 e 8.3.15 do capítulo 8.
371 a 373	Calcula parcela elástica à partir da extremidade esquerda, conforme 8.3.25, 8.2.4 e 8.3.26 do capítulo 8.
376 e 377	Faz leitura dos pedidos de impressão de linhas de influência.
378 a 384	Identifica a natureza das L.Is. desejadas e chama a subrotina IMP ou IMPRES para executar a impressão. Armazena no disco todos os resultados disponíveis para utilização em outros programas.

SUBROTINA FLXCUR

LINHA	DESCRIÇÃO
1 a 7	Calcula parâmetros auxiliares.
8 a 16	Calcula a matriz de flexibilidade, da viga curva em balanço, com a extremidade esquerda livre, conforme equações 4.4.5 a 4.4.26 do capítulo 4.

SUBROTINA EEPCUR

LINHA	DESCRIÇÃO
1 a 9	Calcula parâmetros auxiliares.
10 a 16	Calcula os deslocamentos na extremidade livre da viga em balanço devidos a P = 1 e T = 1 atuando no ponto de coordenada angular $\varphi_c = \alpha$, conforme equações 4.4.27 a 4.4.61 do capítulo 4.
17 a 21	Calcula os esforços de engastamento perfeito na extremidade esquerda da viga bi-engastada, conforme equação 4.8.2 do capítulo 4.
22 a 30	Calcula matriz de equilíbrio que transforme os esforços da extremidade esquerda para a direita, conforme equação 4.3.1 do capítulo 4.
31 a 35	Calcula a parcela devido aos esforços da extremidade direita, conforme equações 4.8.4 do capítulo 4.
36 a 40	Superpõe a parcela devido ao efeito isostático do carregamento de acordo com a equação 4.8.3.

SUBROTINA RIGRET

LINHA	DESCRIÇÃO
1 a 5	Calcula parâmetros auxiliares.
6 a 8	Zera a matriz K[,] para receber a matriz de rigidez da barra reta.
9 a 28	Calcula os coeficientes da matriz de rigidez da barra reta, conforme equação 4.7.1 do capítulo 4.

SUBROTINA RIGCUR

LINHA	DESCRIÇÃO
1	Chama a subrotina FLXCUR que calcula a matriz de flexibilidade da viga em balanço (estrutura isostática fundamental).
2 a 5	Calcula a sub-matriz $[k_{AA}]$, inversa da matriz de flexibilidade, de acordo com a equação 4.6.3 do capítulo 4, chamando-se a subrotina INVGJ.
6 a 14	Calcula a matriz de equilíbrio que transfere esforços de uma extremidade para outra, conforme equação 4.3.1 do capítulo 4.
15 a 19	Calcula a sub-matriz $[K_{BA}]$, de acordo com a equação 4.6.4 e utilizando a matriz de equilíbrio dada em 4.3.1 do capítulo 4.
20	Calcula a sub-matriz $[K_{AB}]$, de acordo com a equação 4.6.5 do capítulo 4.
21 a 25	Calcula a sub-matriz $[K_{BB}]$, de acordo com a equação 4.6.6 do capítulo 4.

10.6 - LISTAGEM DO PROGRAMA FORTRAN

PROGRAMA PRINCIPAL

```
      PROGRAM F A M
C
C      Para alterar as dimensoes dos vetores e matrizes
C      do Programa basta alterar as constantes terminadas
C      em MAX do comando PARAMETER
C
C      .........NMAX  = numero maximo de barras
C      .........NJMAX = numero maximo de nos
C      .........NJ3MAX= 3 vezes o numero maximo de nos
C      .........LESMAX= 54 vezes o numero maximo de barras
C      .........LDAMAX= 6 vezes o numero maximo de nos
C      .........LRAMAX= 6 vezes o numero maximo de nos
C      .........LDMMAX= 6 vezes o numero maximo de barras
C      .........IPCMAX= 17 vezes o numero maximo de barras
C
      PARAMETER LPT=5,LEIT=2,NMAX=6,NJMAX=7,NJ3MAX=21,
     $LESMAX=324,LDAMAX=42,LRAMAX=42,LDMMAX=36,IPCMAX=102
C
      INTEGER S,LR(NJ3MAX),LBAE(NMAX),IMP(10)
      REAL L(NMAX), RAIO(NMAX), FI(NMAX),CFI(NMAX),
     $SFI(NMAX),TIPO(NMAX),JF(NMAX),JT(NMAX),LBD(NMAX),
     $TETA(NJMAX),CTET(NJMAX),STET(NJMAX),ROT(6,6),
     $X(6,2),XN(6,2),AI(6,2),ANI(6,2),MI(3,2),NI(3,2),
     $KAA(3,3),FLX(3,3),KB(6,6),KAUX(6,6),KBAUX(6,6,NMAX),
     $KS(NJ3MAX,NJ3MAX),D(NJ3MAX,2),RN(NJ3MAX,2),AUX(6)
      REAL ETAL(LESMAX),ETA(LESMAX,IPCMAX),
     $ETAD(LDAMAX,IPCMAX),ETAR(LRAMAX,IPCMAX),ETAT(LDMMAX,
     $IPCMAX)
      REAL LI,LJ,LBDI,LBDJ,JFI,JFJ,JTI,JTJ
      EQUIVALENCE (XN(1),X(1)),(ANI(1),AI(1)),
     $(FLX(1),AUX(1)),(MI(1),NI(1))
      DATA NUL 0,ZERO/0,0.0/
C
1     CTE= ASIN ( 1.0 )/90.
C
C*****************************************************************
C
C                    ENTRADA DE DADOS
C
C*****************************************************************
C
2     READ (LEIT,1)    E,G,N,NNAE
3   1 FORMAT(2F,2I)
4     WRITE (LPT,2)    N,NNAE,E,G
5   2 FORMAT(1H1///1X,69('=')/20X'DADOS DA ESTRUTURA'/1X,
     $69('-')/5X'NUMERO DE BARRAS'23X'='12X,I1/5X        ,
     $'NUMERO DE APOIOS INCLINADOS'12X'='12X,I1/5X       ,
     $'MODULO DE ELASTICIDADE'17X'='E13.6,3X'EFL-2)'/5X,
```

```
      $'MODULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL      ='E13.6,3X ,
      $'TFL-2J')
 6     IF ( N  .GT.  NMAX ) STOP  ' ERRO:    N > Nmax'
 7     IF ( N  .LE. NULO ) STOP  'ERRO: N <= ZERO'
 8     IF (E .LE. ZERO .OR. G .LE. ZERO )
      $  STOP' ERRO: E ou G nulos'
 9     NJ=N+1
10     NJ3=3*NJ
11     IF ( NNAE  .EQ.  NULO )    GO TO 4
12     READ (LEIT,3)   ((K,TETA(K)),I=1,NNAE)
13   3 FORMAT(7(I,F))
14   4 READ (LEIT,5)   (LR(INV),INV=1,NJ3)
15   5 FORMAT(7(3I))
16     WRITE (LPT,6)
17   6 FORMAT(/1X,69('=')/20X'DADOS RELATIVOS AOS NOS'/1X
      $,69('-')/5X'NO    LISTA DE RESTRICOES'12X,
      $'ESCONSIDADE'/9X'Rest.1  Rest.2  Rest.3'13X'(grau)'/
      $1X,69('-'))
18     WRITE (LPT,7)   ((I,LR(3*I-2),LR(3*I-1),LR(3*I),
      $TETA(I)),I=1,NJ)
19   7 FORMAT(5X,I1,5X,I1,7X,I1,7X,I1,14X,F8.3)
20     DO 8 I=1,NJ
21     TETA(I)=CTE*TETA(I)
22     CTET(I)=COS(TETA(I))
23     STET(I)=SIN(TETA(I))
24   8 CONTINUE
25     IF ( NNAE .NE. NULO )  WRITE (LPT,9)
26   9 FORMAT(// ' atencao: Deve ser feito um estudo localizado
      $ na regiao dos apoios'//)
27     WRITE (LPT,10)
28  10 FORMAT(/1X,69('=')/15X'CARACTERISTICAS GEOMETR
      $ICAS DAS BARRAS'/1X,69('-')/' B   T'/' A   I   ABE
      $RTURA'6X'RAIO'6X'COMPRI-    MOMENTOS   DE     INER
      $CIA'/' R   F'28X'MENTO'8X'FLEXAO'8X'TORCAO'/
      $' R   O'4X'(grau)'7X'EL]'9X'EL]',2(10X'EL4J')/1X
      $,69('-'))
29     READ (LEIT,11)   (FI(I),I=1,N)
30  11 FORMAT(6F)
31     READ (LEIT,11)   (AUX(I),I=1,N)
32     READ (LEIT,11)   (JF(I),I=1,N)
33     READ (LEIT,11)   (JT(I),I=1,N)
34     JFI=JF(1)
35     JTI=JT(1)
36     IF ( JFI  .EQ.  ZERO  .OR.  JTI  .EQ.  ZERO ) STOP
      $ ' J ou JT nulo'
37     DO 15 I=1,N
38     IF ( TETA(I)  .NE.  ZERO  .OR.  TETA(I+1)  .NE.  ZERO )
      $    LBAE(I) = 1
39     IF ( JF(I)  .EQ.  ZERO )    JF(I)=JFI
40     IF ( JT(I)  .EQ.  ZERO )    JT(I)=JTI
41     IF ( FI(I)  .EQ.  ZERO )    GO TO 13
42     IF ( FI(I)*AUX(I)  .LT.  ZERO ) STOP
      $ ' R e FI de sinais opostos'
43     FIG=FI(I)
44     FI(I)=CTE*FIG
45     CFI(I)=COS(FI(I))
46     SFI(I)=SIN(FI(I))
47     RAIO(I)=AUX(I)
```

```
      TIPO(I)='CURVA'
      L(I)=RAIO(I)*FI(I)
      WRITE (LPT,12)I,TIPO(I),FIG,RAIO(I),L(I),JF(I),JT(I)
   12 FORMAT(1X,I1,1X,A5,F8.3,2F12.4,1X,2(2X,E12.6))
      GO TO 15
   13 TIPO(I)='RETA'
      L(I)=AUX(I)
      WRITE (LPT,14)   I,TIPO(I),L(I),JF(I),JT(I)
   14 FORMAT(1X,I1,2X,A4,20X,F12.4,1X,2(2X,E12.6))
   15 LBD(I)=E*JF(I)/G/JT(I)
C
C*****************************************************************
C
C          MATRIZ DE FLEXIBILIDADE "GLOBAL"
C
C*****************************************************************
C
      DO 21 I=1,N
      JFI=JF(I)
      IF ( TIPO(I)  .EQ.  'RETA' )    GO TO 16
      RAIOI=RAIO(I)
      LBDI=LBD(I)
      ANGI=FI(I)
      CFII=CFI(I)
      SFII=SFI(I)
      CALL RIGCUR (E,LBDI,JFI,RAIOI,ANGI,CFII,SFII,  KB   )
      GO TO 17
   16 LI=L(I)
      JTI=JT(I)
      CALL RIGRET (E,G,LI,JFI,JTI,   KB    )
   17 IF( LBAE(I)  .EQ.  NULO )    GO TO 20
      ROT(1,1)= CTET(I   )
      ROT(2,1)= STET(I   )
      ROT(1,2)=-STET(I   )
      ROT(2,2)= CTET(I   )
      ROT(3,3)= 1.
      ROT(4,4)= CTET(I+1)
      ROT(5,4)= STET(I+1)
      ROT(4,5)=-STET(I+1)
      ROT(5,5)= CTET(I+1)
      ROT(6,6)= 1.
      DO 18 IL=1,6
      DO 18 IC=1,6
      KAUX(IL,IC)=ZERO
      DO 18 IK=1,6
   18 KAUX(IL,IC)=KAUX(IL,IC)+KB(IL,IK)*ROT(IK,IC)
      DO 19 IL=1,6
      DO 19 IC=I,6
      KB(IL,IC)=ZERO
      DO 19 IK=1,6
   19 KB(IL,IC)=KB(IL,IC)+ROT(IK,IL)*KAUX(IK,IC)
   20 DO 21 IL=1,6
      ILS=3*(I-1)+IL
      DO 21 IC=1,6
      ICS=3*(I-1)+IC
      KBAUX(IL,IC,I)=KB(IL,IC)
   21 KS(ILS,ICS)=KS(ILS,ICS)+KB(IL,IC)
      DO 23 ILS=1,NJ3
```

```
      IF ( LR(ILS)  .EQ.  NULO )     GO TO 23
      DO 22 ICS=1,NJ3
      KS(ILS,ICS)=ZERO
   22 KS(ICS,ILS)=ZERO
      KS(ILS,ILS)=1.0
   23 CONTINUE
      CALL INVGJ (   KS    ,NJ3MAX,NJ3)
      DO 24 ILS=1,NJ3
      IF ( LR(ILS)  .EQ.  1 )     KS(ILS,ILS)=ZERO
   24 CONTINUE
C
C*****************************************************************
C
C           CALCULO DE ORDENADAS DE L.Is.
C
C*****************************************************************
      DO 76 J=1,N
      IF ( LBAE(J)  .EQ.  NULO )     GO TO 25
      CTI=CTET(J)
      CTF=CTET(J+1)
      STI=STET(J)
      STF=STET(J+1)
   25 IF ( TIPO(J)  .EQ.  'RETA' )     GO TO 27
      ANGJ=FI(J)
      JFJ=JF(J)
      RAIOJ=RAIO(J)
      CFIJ=CFI(J)
      SFIJ=SFI(J)
      LBDJ=LBD(J)
      DO 26 IL=1,3
      DO 26 IC=1,3
   26 KAA(IL,IC)=KBAUX(IL,IC,J)
      GO TO 28
   27 LJ=L(J)
   28 DO 76 K=1,17
      IPC=17*(J-1)+K
      IF ( TIPO(J)  .EQ.  'RETA' )     GO TO 29
      FIC=ANGJ*(K-1)/16.
      CFIC=COS(FIC)
      SFIC=SIN(FIC)
      CALL EEPCUR (E,LBDJ,JFJ,RAIOJ,ANGJ,CFIJ,SFIJ,
     +FIC,CFIC,SFIC,KAA,X)
      GO TO 31
   29 AC=LJ*(K-1)/16.
      BC=LJ-AC
      DO 30 IL=1,6
      DO 30 IC=1,2
   30 X(IL,IC)=ZERO
      X(2,1)=-AC*BC**2/LJ**2
      X(3,1)= BC**2*(3.*AC+BC)/LJ**3
      X(5,1)= AC**2*BC/LJ**2
      X(6,1)= AC**2*(3.*BC+AC)/LJ**3
      X(1,2)=-BC/LJ
      X(4,2)=-AC/LJ
   31 IF (LBAE(J)  .EQ.  NULO )     GO TO 33
      DO 32 IC=1,2
      A1=X(1,IC)
      A2=X(2,IC)
```

```
      XN(1,IC)= A1*CTI+A2*STI
      XN(2,IC)=-A1*STI+A2*CTI
      A1=X(4,IC)
      A2=X(5,IC)
      XN(4,IC)= A1*CTF+A2*STF
   32 XN(5,IC)=-A1*STF+A2*CTF
   33 DO 34 INV=1,NJ3
      RN(INV,1)=ZERO
      RN(INV,2)=ZERO
      D(INV,1)=ZERO
      D(INV,2)=ZERO
      DO 34 IC=1,6
      ICS=3*(J-1)+IC
      D(INV,1)=D(INV,1) - KS(INV,ICS)*XN(IC,1)
   34 D(INV,2)=D(INV,2) - KS(INV,ICS)*XN(IC,2)
      DO 35 I=1,NJ
      DO 35 IR=1,3
      NLAUX=6*(I-1)+2*(IR-1)
      INV=3*(I-1)+IR
      DO 35 IC=1,2
      NLD=NLAUX+IC
   35 ETAD(NLD,IPC)=D(INV,IC)
      DO 61 I=1,N
      ILB=6*(I-1)
      INV=3*(I-1)
      IK=MINO(I,J)/MAXO(I,J)
      DO 37 IC=1,2
      DO 37 IL=1,6
      ANI(IL,IC)=IK*XN(IL,IC)
      DO 36 ICS=1,6
   36 ANI(IL,IC)=ANI(IL,IC)+KBAUX(IL,ICS,I)*D(INV+ICS,IC)
   37 RN(INV+IL,IC)=RN(INV+IL,IC)+ANI(IL,IC)
      IF (LBAE(I)  .EQ.  NULO )    GO TO 39
      DO 38 IC=1,2
      A1=ANI(1,IC)
      A2=ANI(2,IC)
      AI(1,IC)=A1*CTET(I  )-A2*STET(I  )
      AI(2,IC)=A1*STET(I  )+A2*CTET(I  )
      A1=ANI(4,IC)
      A2=ANI(5,IC)
      AI(4,IC)=A1*CTET(I+1)-A2*STET(I+1)
   38 AI(5,IC)=A1*STET(I+1)+A2*CTET(I+1)
   39 IF ( TIPO(I)  .EQ.  'RETA' )    GO TO 50
      ANGI=FI(I)
      RAIOI=RAIO(I)
      DO 49 S=1,9
      M=2*S-1
      IPS=17*(I-1)+M
      NLAUX=54*(I-1)+6*(S-1)
      FIS=ANGI*(S-1)/8.
      IF ( I .NE.  J )    GO TO 44
      IF ( IPS-IPC )    44 , 46 , 40
   40 FID=ANGI-FIS
      CFID=COS(FID)
      SFID=SIN(FID)
      DO 41 IC=1,2
      MI(1,IC)=-AI(4,IC)*CFID-AI(5,IC)*SFID
     4          +AI(6,IC)*RAIOI*(1.-CFID)
```

```
      MI(2,IC)= AI(4,IC)*SFID-AI(5,IC)*CFID
     $          +AI(6,IC)*RAIOI*SFID
   41 MI(3,IC)=-AI(6,IC)
   42 DO 43 IE=1,3
      DO 43 IC=1,2
      NLE=NLAUX+2*(IE-1)+IC
   43 ETA(NLE,IPC)=MI(IE,IC)
      GO TO 49
   44 CFIS=COS(FIS)
      SFIS=SIN(FIS)
      DO 45 IC=1,2
      MI(1,IC)= AI(1,IC)*CFIS-AI(2,IC)*SFIS
     $          -AI(3,IC)*RAIOI*(1.-CFIS)
      MI(2,IC)= AI(1,IC)*SFIS+AI(2,IC)*CFIS
     $          +AI(3,IC)*RAIOI*SFIS
   45 MI(3,IC)= AI(3,IC)
      GO TO 42
   46 CFIS=COS(FIS)
      SFIS=SIN(FIS)
      DO 47 IC=1,2
      NI(1,IC)= AI(1,IC)*CFIS-AI(2,IC)*SFIS
     $          -AI(3,IC)*RAIOI*(1.-CFIS)
      NI(2,IC)= AI(1,IC)*SFIS+AI(2,IC)*CFIS
     $          +AI(3,IC)*RAIOI*SFIS
   47 NI(3,IC)= AI(3,IC)
      DO 48 IE=1,3
      DO 48 IC=1,2
      NLE=NLAUX+2*(IE-1)+IC
   48 ETAL(NLE)=NI(IE,IC)
      GO TO 40
   49 CONTINUE
      GO TO 61
   50 LI=L(I)
      DO 60 S=1,9
      M=2*S-1
      IPS=17*(I-1)+M
      NLAUX=54*(I-1)+6*(S-1)
      AS=LI*(S-1)/8.
      IF (  I  .NE.  J )    GO TO 55
      IF (  IPS-IPC )    55 , 57 , 51
   51 BS=LI-AS
      DO 52 IC=1,2
      MI(1,IC)=-AI(4,IC)
      MI(2,IC)=-AI(5,IC)+AI(6,IC)*BS
   52 MI(3,IC)=-AI(6,IC)
   53 DO 54 IE=1,3
      DO 54 IC=1,2
      NLE=NLAUX+2*(IE-1)+IC
   54 ETA(NLE,IPC)=MI(IE,IC)
      GO TO 60
   55 DO 56 IC=1,2
      MI(1,IC)= AI(1,IC)
      MI(2,IC)= AI(2,IC)+AI(3,IC)*AS
   56 MI(3,IC)= AI(3,IC)
      GO TO 53
   57 DO 58 IC=1,2
      NI(1,IC)= AI(1,IC)
      NI(2,IC)= AI(2,IC)+AI(3,IC)*AS
```

```
260      58 NI(3,IC)= AI(3,IC)
261         DO 59 IE=1,3
262         DO 59 IC=1,2
263         NLE=NLAUX+2*(IE-1)+IC
264      59 ETAL(NLE)=NI(IE,IC)
265         GO TO 51
266      60 CONTINUE
267      61 CONTINUE
268         DO 62 I=1,N
269         DO 62 IR=1,3
270         NLAUX=6*(I-1)+2*(IR-1)
271         INV=3*(I-1)+IR
272         DO 62 IC=1,2
273         NLR=NLAUX+IC
274      62 ETAR(NLR,IPC)=RN(INV,IC)
275         DO 75 I=1,N
276         IPS=17*(I-1)+9
277         LBDI=LBD(I)
278         JF1=JF(I)
279         IF ( TIPO(I)  .EQ.  'RETA' )     GO TO 68
280         FIS=FI(I)/2.
281         CFIS=COS(FIS)
282         SFIS=SIN(FIS)
283         RAIOI=RAIO(I)
284         CALL FLXCUR (E,LBDI,JF1,RAIOI,FIS,CFIS,SFIS, FLX    )
285         IF ( I  .NE.  J )     GO TO 63
286         IF ( IPS-IPC )     65,63,63
287      63 DO 64 IC=1,2
288         M1=6*(I-1)+IC
289         M2=M1+2
290         M3=M1+4
291         M4=M1+6
292         M5=M1+8
293         M6=M1+10
294         N1=54*(I-1)+24+IC
295         N2=N1+2
296         N3=N1+4
297         CFIS=COS(FIS-TETA(I+1))
298         SFIS=SIN(FIS-TETA(I+1))
299         ETAT(M1,IPC)= ETAD(M4,IPC)*CFIS+ETAD(M5,IPC)*SFIS
300         ETAT(M2,IPC)=-ETAD(M4,IPC)*SFIS+ETAD(M5,IPC)*CFIS
301         ETAT(M3,IPC)=-ETAD(M4,IPC)*RAIOI*(1.-CFIS)
           $              +ETAD(M5,IPC)*RAIOI*SFIS
           $              +ETAD(M6,IPC)
302         ETAT(M1,IPC)= ETAT(M1,IPC)+FLX(1,1)*ETA(N1,IPC)
           $                          +FLX(1,2)*ETA(N2,IPC)
           $                          +FLX(1,3)*ETA(N3,IPC)
303         ETAT(M2,IPC)= ETAT(M2,IPC)+FLX(2,1)*ETA(N1,IPC)
           $                          +FLX(2,2)*ETA(N2,IPC)
           $                          +FLX(2,3)*ETA(N3,IPC)
304      64 ETAT(M3,IPC)= ETAT(M3,IPC)+FLX(3,1)*ETA(N1,IPC)
           $                          +FLX(3,2)*ETA(N2,IPC)
           $                          +FLX(3,3)*ETA(N3,IPC)
305         GO TO 75
306      65 DO 66 IL=1,3
307         DO 66 IC=1,3
308      66 FLX(IL,IC)=(-1)**(IL+IC)*FLX(IL,IC)
309         DO 67 IC=1,2
```

```
      M1=6*(I-1)+IC
      M2=M1+2
      M3=M1+4
      N1=54*(I-1)+24+IC
      N2=N1+2
      N3=N1+4
      CFIS=COS(FIS+TETA(I))
      SFIS=SIN(FIS+TETA(I))
      ETAT(M1,IPC)= ETAD(M1,IPC)*CFIS-ETAD(M2,IPC)*SFIS
      ETAT(M2,IPC)= ETAD(M1,IPC)*SFIS+ETAD(M2,IPC)*CFIS
      ETAT(M3,IPC)=-ETAD(M1,IPC)*RAIOI*(1.-CFIS)
     $              -ETAD(M2,IPC)*RAIOI*SFIS
     $              +ETAD(M3,IPC)
      ETAT(M1,IPC)= ETAT(M1,IPC)-FLX(1,1)*ETA(N1,IPC)
     $                          -FLX(1,2)*ETA(N2,IPC)
     $                          -FLX(1,3)*ETA(N3,IPC)
      ETAT(M2,IPC)= ETAT(M2,IPC)-FLX(2,1)*ETA(N1,IPC)
     $                          -FLX(2,2)*ETA(N2,IPC)
     $                          -FLX(2,3)*ETA(N3,IPC)
   67 ETAT(M3,IPC)= ETAT(M3,IPC)-FLX(3,1)*ETA(N1,IPC)
     $                          -FLX(3,2)*ETA(N2,IPC)
     $                          -FLX(3,3)*ETA(N3,IPC)
      GO TO 75
   68 LI=L(I)
      DO 69 IL=1,3
      DO 69 IC=1,3
   69 FLX(IL,IC)=ZERO
      EJ=E*JFI
      FLX(1,1)=LBDI*LI/EJ/2.0
      FLX(2,2)=LI/EJ/2.0
      FLX(3,2)=LI**2/EJ
      FLX(2,3)=FLX(3,2)
      FLX(3,3)=LI**3/EJ/24.0
      IF ( I  .NE.  J )    GO TO 70
      IF ( IPS-IPC )    72,70,70
   70 DO 71 IC=1,2
      M1=6*(I-1)+IC
      M2=M1+2
      M3=M1+4
      M4=M1+6
      M5=M1+8
      M6=M1+10
      N1=54*(I-1)+24+IC
      N2=N1+2
      N3=N1+4
      CFIS=COS(TETA(I+1))
      SFIS=SIN(TETA(I+1))
      ETAT(M1,IPC)= ETAD(M4,IPC)*CFIS-ETAD(M5,IPC)*SFIS
      ETAT(M2,IPC)= ETAD(M4,IPC)*SFIS+ETAD(M5,IPC)*CFIS
      ETAT(M3,IPC)= ETAD(M4,IPC)*SFIS*LI/2.0
     $              +ETAD(M5,IPC)*CFIS*LI/2.0
     $              +ETAD(M6,IPC)
      ETAT(M1,IPC)= ETAT(M1,IPC)+FLX(1,1)*ETA(N1,IPC)
      ETAT(M2,IPC)= ETAT(M2,IPC)+FLX(2,2)*ETA(N2,IPC)
     $                          +FLX(2,3)*ETA(N3,IPC)
   71 ETAT(M3,IPC)= ETAT(M3,IPC)+FLX(3,2)*ETA(N2,IPC)
     $                          +FLX(3,3)*ETA(N3,IPC)
      GO TO 75
```

```
   72 DO 73 IL=1,3
      DO 73 IC=1,3
   73 FLX(IL,IC)=(-1)**(IL+IC)*FLX(IL,IC)
      DO 74 IC=1,2
      M1=6*(I-1)+IC
      M2=M1+2
      M3=M1+4
      N1=54*(I-1)+24+IC
      N2=N1+2
      N3=N1+4
      CFIS=COS(TETA(I))
      SFIS=SIN(TETA(I))
      ETAT(M1,IPC)= ETAD(M1,IPC)*CFIS-ETAD(M2,IPC)*SFIS
      ETAT(M2,IPC)= ETAD(M1,IPC)*SFIS+ETAD(M2,IPC)*CFIS
      ETAT(M3,IPC)=-ETAD(M1,IPC)*SFIS*LI/2.0
     $              -ETAD(M2,IPC)*CFIS*LI/2.0
     $              +ETAD(M3,IPC)
      ETAT(M1,IPC)= ETAT(M1,IPC)-FLX(1,1)*ETA(N1,IPC)
      ETAT(M2,IPC)= ETAT(M2,IPC)-FLX(2,2)*ETA(N2,IPC)
     $                          -FLX(2,3)*ETA(N3,IPC)
   74 ETAT(M3,IPC)= ETAT(M3,IPC)-FLX(3,2)*ETA(N2,IPC)
     $                          -FLX(3,3)*ETA(N3,IPC)
   75 CONTINUE
   76 CONTINUE
C
C*************************************************************
C
C            IMPRESSAO DE RESULTADOS
C
C*************************************************************
C
   77 READ ( LEIT,78,END=80 )   KTL,IMP
   78 FORMAT(A2,10I)
      IF ( KTL .EQ.  'DA' )
     $CALL IMPR($77,1,LDAMAX,IPCMAX,NJ,N,LPT,IMP,ETAD)
      IF ( KTL.EQ. 'RA')
     $CALL IMPR($77,2,LRAMAX,IPCMAX,NJ,N,LPT,IMP,ETAR)
      IF( KTL .EQ. 'DM' )
     $CALL IMPR($77,3,LDMMAX,IPCMAX,N,N,LPT,IMP,ETAT)
      IF( KTL .EQ. 'ES' )
     $CALL IMPRES($77,LESMAX,IPCMAX,N,LPT,IMP,ETA,ETAL)
      TYPE 79
   79 FORMAT(' ERRO -TIPO DE IMPRESSAO ERRADO (IGNORADO)')
      GO TO 77
   80 CONTINUE
C
C     .........armazenaria no disco p/ posterior
C     .........utilizacao
C
*       WRITE(1)ETA,ETAL,ETAD,ETAR,ETAT
      CALL EXIT
      END
```

SUBROTINA INVGJ

```
      SUBROUTINE INVGJ(S,L1,N)
      DIMENSION S(L1,L1)
      DO4 I=1,N
      AUX=1./S(I,I)
      S(I,I)=1.
      DO 1 J=1,N
    1 S(I,J)=AUX*S(I,J)
      DO 4 K=1,N
    P IF(K-I)2,4,2
    2 AUX=S(K,I)
      S(K,I)=0.0
      DO 3 M=1,N
    3 S(K,M)=S(K,M)-AUX*S(I,M)
    4 CONTINUE
      RETURN
      END
```

SUBROTINA FLXCUR

```
      SUBROUTINE FLXCUR (E,LBD,JF,R,FI,C,S,   FLX    )
      REAL JF,LBD,K1,K2,K3,K4,FLX(3,3)
c
c     Parametros auxiliares
c
      CTE=R/(E*JF)
      K1=(1.+LBD)/2.
      K2=(1.-LBD)/2.
      K3=K1/2.
      K4=K2/2.
      S2=SIN(2.*FI)
      SS=S**2
c
c     Calculo da Matriz de Flexibilidade
c     da viga em balanco com a extremidade esquerda livre
c
      FLX(1,1)= CTE*(K1*FI-K4*S2)
      FLX(2,1)= CTE*K2*SS
      FLX(3,1)= CTE*R*(K1*FI-K4*S2-LBD*S)
      FLX(1,2)= FLX(2,1)
      FLX(2,2)= CTE*(K1*FI+K4*S2)
      FLX(3,2)= CTE*R*(K2*SS+LBD*(1.-C))
      FLX(1,3)= FLX(3,1)
      FLX(2,3)= FLX(3,2)
      FLX(3,3)= CTE*R*R*(K1*FI-K4*S2-LBD*(2.*S-FI))
c
      RETURN
      END
```

SUBROTINA EEPCUR

```
      SUBROUTINE EEPCUR (E,LBD,JF,R,FI,C,S,
     $FIC,CFIC,SFIC,  KAA  ,  X )
      REAL JF,LBD,K1,K2,D(3,2),EQ(3,3),KAA(3,3),X(6,2)
c
c     Parametros auxiliares
c
      CTE=R*R/(E*JF)
      K1=(1.+LBD)/2.
      K2=(1.-LBD)/2.
      A=FIC
      B=FI-FIC
      SA=SFIC
      SB=SIN(B)
      CA=CFIC
      CB=COS(B)
c
c     Calculo dos deslocamentos devidos a P e T
c     na extremidade livre da visa curva em balanco
c
      D(1,1)= CTE*(-K1*B*CA+K2*SB*C+LBD*(S-SA))
      D(2,1)= CTE*(-K2*S*SB+K1*B*SA+LBD*(C-CA))
      D(3,1)= CTE*R*(-K1*B*CA+K2*SB*C+LBD*(S+SB-SA-B))
      CTE=CTE/R
      D(1,2)= CTE*(K1*B*CA-K2*SB*C)
      D(2,2)= CTE*(K2*S*SB-K1*B*SA)
      D(3,2)= CTE*R*(K1*B*CA-K2*SB*C-LBD*SB)
c
c     Calculo dos esforcos de ensastamento perfeito
c     extremidade esquerda
c
      DO 1 IL=1,3
      DO 1 IC=1,2
      X(IL,IC)=0.0
      DO 1 IK=1,3
    1 X(IL,IC)=X(IL,IC) - KAA(IL,IK)*D(IK,IC)
c
c     Calculo da matriz de equilibrio que transfere
c     os esforcos da extremidade esquerda p/ direita
c
      EQ(1,1)=-C
      EQ(2,1)=-S
      EQ(3,1)=0.
      EQ(1,2)= S
      EQ(2,2)=-C
      EQ(3,2)=0.
      EQ(1,3)=R*(1.-C)
      EQ(2,3)=-R*S
      EQ(3,3)=-1.
c
c     Calculo dos esforcos de ensastamento perfeito
```

```
c       extremidade direita
c
c       1.- Efeito dos esforcos da extremidade esquerda:
c
        DO 2 IL=1,3
        DO 2 IC=1,2
        X(IL+3,IC)=0.0
        DO 2 IK=1,3
      2 X(IL+3,IC)=X(IL+3,IC)+EQ(IL,IK)*X(IK,IC)
c
c       2.- Superposicao do efeito do carregamento P=1 e T=1
c
        X(4,1)=X(4,1)-R*(1.-CB)
        X(5,1)=X(5,1)+R*SB
        X(6,1)=X(6,1)+1.
        X(4,2)=X(4,2)-CB
        X(5,2)=X(5,2)-SB
c
        RETURN
        END
```

SUBROTINA RIGRET

```
      SUBROUTINE RIGRET ( E,G,L,JF,JT,   K    )
c
      REAL L,JF,JT,K(6,6)
c
c     Parametros auxiliares
c
      A1=G*JT/L
      A2=4.*E*JF/L
      A3=6.*E*JF/L**2
      A4=12.*E*JF/L**3
      A5=2.*E*JF/L
c
      DO 1 IL=1,6
      DO 1 IC=1,6
    1 K(IL,IC)=0.0
c
c     Matriz de Risidez da Barra Reta Biensastada
c
      K(1,1)= A1
      K(4,1)=-A1
      K(2,2)= A2
      K(3,2)=-A3
      K(5,2)= A5
      K(6,2)= A3
      K(2,3)=-A3
      K(3,3)= A4
      K(5,3)=-A3
      K(6,3)=-A4
      K(1,4)=-A1
      K(4,4)= A1
      K(2,5)= A5
      K(3,5)=-A3
      K(5,5)= A2
      K(6,5)= A3
      K(2,6)= A3
      K(3,6)=-A4
      K(5,6)= A3
      K(6,6)= A4
c
      RETURN
      END
```

SUBROTINA RIGCUR

```
      SUBROUTINE RIGCUR (E,LBD,JF,R,FI,C,S,  K   )
      REAL JF,LBD,FLX(3,3),EQ(3,3),K(6,6)
c
c      Matriz de flexibilidade da viga em balanco
c      com a extremidade
c      esquerda livre
c
      CALL FLXCUR (E,LBD,JF,R,FI,C,S,   FLX   )
c
c     Calculo da sub-matriz [kaa]
c     - inversa da matriz de flexibilidade
c
      CALL INVGJ ( FLX ,3,3)
      DO 1 IL=1,3
      DO 1 IC=1,3
    1 K(IL,IC)=FLX(IL,IC)
c
c     Matriz de equilibrio - transfere esforcos de A p/ B
c
      EQ(1,1)=-C
      EQ(2,1)=-S
      EQ(3,1)=0.0
      EQ(1,2)= S
      EQ(2,2)=-C
      EQ(3,2)=0.0
      EQ(1,3)=R*(1.-C)
      EQ(2,3)=-R*S
      EQ(3,3)=-1.
c
c     Calculo da sub-matriz [kBA]=[EQ].[kAA]
c
      DO 3 IL=1,3
      DO 3 IC=1,3
      K(IL+3,IC)=0.0
      DO 2 IK=1,3
    2 K(IL+3,IC)=K(IL+3,IC)+EQ(IL,IK)*K(IK,IC)
c
c     Calculo dos coeficientes da sub-matriz [kAB]
c     -transposta de [kBA]
c
    3 K(IC,IL+3)=K(IL+3,IC)
c
c     Calculo da sub-matriz [kBB]=[EQ].[kAB]
c
      DO 4 IL=1,3
      DO 4 IC=4,6
      K(IL+3,IC)=0.0
      DO 4 IK=1,3
    4 K(IL+3,IC)=K(IL+3,IC)+EQ(IL,IK)*K(IK,IC)
c
      RETURN
      END
```

SUBROTINA IMPR

```
      SUBROUTINE IMPR($,KT,NLIN,IPCMAX,NLIM,N,LPT,IMP,MAT)
      DIMENSION TITULO(12,3),ESF(12),DIR(12),IMP(10)
      REAL MAT(NLIN,IPCMAX)
      data
     $TITULO/'              LINHAS DE INFLUENCIA DE DESLOCAM
     $ENTOS NO APOIO ',
     $       '                      LINHAS DE INFLUENCIA DE R
     $EACES NO APOIO ',
     $       '    LINHAS DE INFLUENCIA DE DESLOCAMENTOS NO
     $ MEIO DA BARRA '/,
     $DIR/'  d i r e c a o  1    d i r e c a o  2    d i r
     $  e c a o  3'/,
     $ESF/'   MOMENTO TORCOR       MOMENTO FLETOR       FORC
     $A CORTANTE'/
      DO 4 IL=1,NLIM
      I=IMP$IL)
      IF ( I  .EQ.  0  .OR.  I  .GT.  NLIM )  return 1
      NLAUX=6*(I-1)
      WRITE (LPT,1)  (TITULO(IAUX,KT),IAUX=1,12),I,DIR
    1 FORMAT(1H1///,69('=')/12A5,I1/1X,69('-')/' B S'/' A
     $E   K',T12,12A5/' R C   S'/' R A   I'1X,3('     P=1
     $       T=1  ')/' A O'/1X,69('-'))
      DO 4 J=1,N
      DO 2 K=1,17,2
      IPC=17*(J-1)+K
      KINT=(K+1)/2
      CTE=0.125*(KINT-1)
    2 WRITE (LPT,3)J,KINT,CTE,(MAT(NLE,IPC),NLE=NLAUX+1,NLAUX
    3 FORMAT(1X,I1,1X,I1,1X,F5.3,6F10.5)
    4 WRITE (LPT,5)
    5 FORMAT( )
      return 1
      END
```

SUBROTINA IMPRES

```
      SUBROUTINE IMPRES($,LESMAX,IPCMAX,N,LPT,IMP,ETA,ETAL)
      DIMENSION ESF(12),IMP(10),
     $ETA(LESMAX,IPCMAX),ETAL(LESMAX)
      INTEGER S
      data
     $ESF/'   MOMENTO TORCOR       MOMENTO FLETOR       FORC
     $A CORTANTE'/
      I=IMP(1)
      NLAUX=54*(I-1)
      DO 8 IL=1,9
      S=IMP(IL+1)
      IF ( S  .EQ.  0 )return 1
      IPS=17*(I-1)+2*S-1
      WRITE (LPT,1) S,I,ESF
    1 FORMAT(1H1///1X,69('=')/2X'LINHAS DE INFLUENCIA DE E
     $SFORCOS SOLICITANTES NA SECAO 'I1' DA BARRA 'I1/1X,6
     $9('-')/' B S'/' AE   K',T12,12A5/' R C   S'/' R A
     $   I'1X,3('      P=1        T=1   ')/' A 0'/1X,69('-'))
      M=NLAUX+6*(S-1)
      DO 8 J=1,N
      DO 7 K=1,17,2
      IPC=17*(J-1)+K
      KINT=(K+1)/2
      CTE=0.125*(KINT-1)
      IF ( IPS  .NE.  IPC )  GO TO 4
      IF (   K  .EQ.    1 )  GO TO 6
      IF (   K  .EQ.   17 )  GO TO 4
      WRITE (LPT,2)J,KINT,CTE,(ETA(NLE,IPC),NLE=M+1,M+6)
    2 FORMAT(1X,I1,1X,I1,1X,F5.3,'E',F9.5,5F10.5)
      WRITE(LPT,3)J,KINT,CTE,(ETAL(NLE),NLE=M+1,M+6)
    3 FORMAT(1X,I1,1X,I1,1X,F5.3,'D',F9.5,5F10.5)
      GO TO 7
    4 WRITE (LPT,5)J,KINT,CTE,(ETA(NLE,IPC),NLE=M+1,M+6)
    5 FORMAT(1X,I1,1X,I1,1X,F5.3,6F10.5)
      GO TO 7
    6 WRITE (LPT,5)J,KINT,CTE,(ETAL(NLE),NLE=M+1,M+6)
    7 CONTINUE
    8 WRITE (LPT,9)
    9 FORMAT( )
      return 1
      END
```

CAPÍTULO 11

CONCLUSÕES

Considera-se que o presente trabalho se constitui em boa introdução teórica para o estudo de vigas contínuas curvas em nosso meio.

Teve como objetivo principal a obtenção de linhas de influência em vigas contínuas de eixo curvo horizontal.

Além da apresentação do procedimento baseado no Processo dos Deslocamentos, que permitiu a elaboração de um programa automático, com o qual se consegue a obtenção numérica das ordenadas das L.Is., foi indicada uma maneira analítica de se obter linhas de influência de vigas contínuas curvas, baseada num Processo Cinemático.

O Processo Cinemático de obtenção de linhas de influência, de uso tradicional em vigas retas, pôde também ser aplicado em vigas curvas. Em vigas curvas isostáticas a sua aplicação leva à cadeias cinemáticas com 1 grau de liberdade cujo movimento é definido por equações simples, de fácil obtenção, e que são também as equações das linhas de influência. Para estruturas hiperestáticas o problema recai em resolver-se sistemas lineares de equações, cujos coeficientes necessitam das equações diferenciais da elástica da viga curva, trabalho desencorajador, visto a extensão

das expressões trigonométricas envolvidas.

As equações diferenciais da elástica da barra curva, observadas as simplificações assumidas nas hipóteses, foram deduzidas à partir das equações diferenciais de equilíbrio de esforços e das equações de compatibilidade de deformações. As mesmas equações diferenciais da elástica, para efeito de comprovação teórica, foram encontradas também através de cálculo variacional.

A resolução dos exemplos mostrou que o programa FORTRAN escrito, baseado no Processo dos Deslocamentos, é eficiente no cálculo de linhas de influência de vigas curvas, com resultados precisos dentro das hipóteses simplificadoras adotadas.

O tempo de computação máximo gasto para resolver uma viga contínua constituída por 5 barras, calculando-se todas as linhas de influência possíveis: 36 linhas de influência de deslocamentos nos nós, 36 linhas de influência de reações de apoio, 30 linhas de influência de deslocamento nos meios das barras e 270 linhas de influência de esforços solicitantes foi de 9.7 segundos, utilizando-se o computador DEC-10 da UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas). Para armazená-las em disco, disponível para próximos programas gastou-se mais 27 segundos. Para imprimir-se os resultados o equipamento utilizado gastou, para o exemplo de 5 barras, a média de 15 segundos por linha de influência.

Da maneira como elaborado o programa sempre calcula e permite o armazenamento de "todas" as L.Is. relativas a uma estrutura; resultados que ficam prontos para serem utilizados por outros programas, já em fase de elaboração dentro da linha de pesquisa implantada na Faculdade de Engenharia de Limeira. Caso se queira utilizar o programa apenas para o cálculo e impressão das ordenadas de algumas linhas de influência, deve-se proceder pequenas modificações razoavelmente simples no programa, mantendo a sua estrutura básica.

Os resultados para esforços solicitantes e reações de apoios, quando comparados àqueles já obtidos por outros autores, mostraram-se praticamente os mesmos. Em linhas de influência de deslocamento nos pontos médios das barras, quando analisado um exemplo simples, os resultados encontrados pelo programa são idênticos aos obtidos através de cálculo manual, utilizando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais.

A existência de apoios inclinados, com pequena es-

considade em relação à direção radial, para os exemplos analisados, alterou apenas ligeiramente os resultados em relação àqueles obtidos considerando as estruturas sem esconsidade. Isto se deve à hipótese de "cálculo de linha". A região na vizinhança dos apoios deve ser analisada com detalhe devido à perturbações que a inclinação dos apoios traz. Sugere-se que em próximos estudos, o nó onde exista apoio inclinado tenha "dimensão finita", encurtando-se o comprimento dos tramos ligados a esse "macro nó".

Mesmo com as hipóteses simplificadoras adotadas o programa de cálculo escrito não deve ser considerado definitivo. Inúmeros melhoramentos podem ser inseridos: o cálculo automático das características geométricas momentos de inércia à flexão e torção; possibilidade de se considerar um ou mais deslocamentos "liberados" em alguma seção; a possibilidade de poder variar o número de pontos carregados em cada barra, isto é, o número de ordenadas a ser calculado em cada barra pode ser variável a critério do usuário do programa, são alguns dos aperfeiçoamentos possíveis.

Outras hipóteses poderão vir a ser consideradas em próximos estudos. A variação dos momentos de inércia ao longo de cada barra que constitui a viga contínua, a consideração do empenamento da seção, são algumas sugestões que se deixa para futuros trabalhos.

Espera-se que o programa FORTRAN escrito, cuja listagem foi apresentada, seja de fácil entendimento e esteja pronto para ser utilizado pelos interessados, sem grandes modificações.

Considera-se que o presente trabalho atingiu o objetivo a que se propôs.

CAPÍTULO 12

BIBLIOGRAFIA

1 - BREBBIA, C.A.; FERRANTE, A. - "The finite element technique; an introduction for engineers" - Editora da URGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1975.

2 - CCC-69 - Calcul des efforts dans les Caissons courbes continus SETRA - Ministere de l'Equipement e du logement - France - 1970.

3 - DOUGLAS, T.R.; ASCE, A.M. e GAMBRELL, S.C. Jr. - "Theoretical Analysis of Curved Girder Bridges". Proceeding of the ASCE. Journal of Engineering Mechanics Division, 1974, 100 (5): 991-1003.

4 - DEMARZO, M.A. - "Cálculo automático de vigas contínuas e grelhas constituídas por barras curvas". Dissertação de Mestrado junto à EESC (não publicado).

5 - ELSGOLTS, L. - "Ecuaciones Diferenciales y calculo variacional. Editorial Mir - Moscou, 1969.

6 - ENGEL, S. - "Structural Analysis of Circular Beams". Proceeding of the ASCE. Journal of the Structures Division, fevereiro/1967, pág. 221.

7 - FRANCO, M. - "Análise Estática de Pontes Curvas". Escola de Engenharia de São Carlos - 1977.

8 - GERE e WEAVER - "Análise de Estruturas Reticuladas". Traduzido por Carlos M. P. Ferreira Pinto. Editora Guanabara Dois. Rio de Janeiro, 1981.

9 - HEINS, C.; SPATES, K. - "Behavior of single horizontally curved girder". Proceeding of the ASCE. Journal Structural Division ST 7 - vol. 96, july 1970, pág. 1511 - 1524.

10 - McMANUS, P., et.al., "Horizontally Curved Girders-State-of-the-Art". Proceeding of the ASCE. Journal of the Structural Division. Vol. 95, Nº ST5, Proc. Paper 6546, Maio, 1969, pp. 853-870.

11 - MONTANARI, I. - "Protensão em Vigas com Torção" - Escola de Engenharia de São Carlos, 1980.

12 - O'CONNOR, C. - "Pontes: superestruturas"; tradutor: Maria de Lourdes Campos Campello; revisor técnico: Pedro Paulo Barreto. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos; São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 1975.

13 - RODRIGUES PAZOS, M.P.A.M. - "Análise de Estruturas Reticuladas Espaciais com barras de eixo curvo e seção variável". Dissertação de Mestrado - COPPE, Rio de Janeiro, 1973, publicação disponível na biblioteca da COPPE.

14 - RUBINSTEIN, M.F. - "Matrix computer analysis of structures". Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1966

15 - STAMATO, M.C. - "Introdução ao Processo de Cross. Escola de Engenharia de São Carlos, 1974, reimpressão.

16 - VELUTINI, B. - "Analysis of continuous circular beams". Journal of the ACI, vols 22, nº 47, novembro - 1950, pp. 217-228.

17 - VREDEN, W. - "Die Berechnung des gekrümmter Diuchlauftrager", (calculation of curved continuous girders). Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin - München.

18 - VREDEN, W. - "Neues allgemeines Berechnungsverfahren beliebig gelagerter gekrümmter Träger". Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin - München.

19 - WEAVER, W. Jr. - "Computer Programs for Structural Analysis" D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, New Jersey, 1970.

20 - "Analysis and Design of Horizontally Curved Steel Bridge Girders". Structural Report United States Steel Corp., Bethlhem, Pa. sept. 1963.