

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
Departamento de Estruturas

# Efeitos de Cargas Verticais em Estruturas de Edifícios Altos

Eng.º Flávio Alberto Cantisani de Carvalho

São Carlos, novembro de 1982

EFEITOS DE CARGAS VERTICAIS  
EM ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS ALTOS

ENG. FLÁVIO ALBERTO CANTISANI DE CARVALHO

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

ORIENTADOR:

PROF. DR. EDDIE MANCINI

BANCA EXAMINADORA:

PROF. DR. EDDIE MANCINI

PROF. DR. ILIO MONTANARI

PROF. DR. PAULO SELEGHIN

SUPLENTES

PROFA. DRA. HELENA M.C. CARMO ANTUNES

PROF. DR. JOÃO LIRANI

## NOTA

Na análise de instabilidade de estruturas de edifícios altos, apresentada neste trabalho, os processos de cálculo empregados são aproximados, uma vez que são utilizadas hipóteses simplificadoras que alteram os valores das cargas críticas de instabilidade.

Sabe-se que no caso de painel plano constituído de dois pilares-parede iguais unidos por vigas (sendo a estrutura de geometria uniforme com a altura), a influência dos deslocamentos axiais dos pilares nas deflexões laterais e portanto na rigidez lateral do painel como um todo, esta influência, de modo geral, em exemplos observados, é bastante considerável em painéis de altura até mesmo moderada ou no caso de vigas horizontais muito rígidas, embora existam estruturas especiais deste tipo de painel em que esta influência é maior.

Pórticos planos possuem leis próprias que regem a importância dos deslocamentos axiais dos pilares na rigidez lateral (ver V Murashev, E. Sigalov, V. Baikov - Design of Reinforced Concrete Structures - MIR Publishers, Moscou, 1971).

A desconsideração dos deslocamentos axiais dos pilares levará a uma superestimação das cargas críticas o que é contra a segurança.

A meus pais:

Júlio e Olga.

A meus irmãos

Anastácio e Fredson,

E à Auxiliadora.

À minha avó  
(in memoriam)

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Eddie Mancini, por sua orientação capaz e segura ao longo de todo este trabalho.

Ao Estevão M. de Paula pela demonstração de amizade.

À Fundação Universidade do Amazonas por tornar possível a realização deste trabalho.

Aos funcionários do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Wilma Provinciali Vall e João Paulo/Sylvia Helena Morette, pela presteza com que executaram os serviços de datilografia e desenho, respectivamente.

Ao Centro de Processamento de Dados da Escola de Engenharia de São Carlos, pela utilização de seus equipamentos.

E, em especial, aos amigos.

## R E S U M O

Este trabalho, dividido em duas partes, analisa alguns efeitos de cargas verticais em estruturas de edifícios altos. À primeira é reservada considerações sobre a perda de estabilidade de associações planas e tridimensionais de painéis, com o objetivo de determinar a carga crítica. A segunda parte trata da influência dos lintéis na distribuição de esforços em associações planas de paredes com vínculos elásticos na base. Em ambas as propostas utiliza-se a Técnica do Meio Contínuo, que consiste basicamente em considerarem-se os elementos horizontais que conectam os painéis, uniformemente distribuídos na altura.

As considerações para a determinação da carga crítica das estruturas levam a uma equação ou a um sistema de equações diferenciais homogêneas, de terceira ordem, com coeficientes variáveis. Considera-se a solução aproximada por Série de Potências, e o uso do computador é essencial.

Na segunda parte a técnica conduz a uma equação diferencial de segunda ordem, não homogênea, e a coeficientes constantes. Aqui a solução encontrada é exata.

Em todo o trabalho, no final da formulação de cada modelo estrutural, resolve-se um exemplo numérico.

## A B S T R A C T

The analysis of some effects of the vertical load in multi-storey buildings is presented in this work.

Firstly, considering the elastic instability in bi and tri-dimensional association of shear walls and frames, the critical vertical buckling load is determined.

After, is treated the lintel's influence when occur the transfer of stresses between two or more walls, that are connected by beams, when they are subjected to different axial stresses. It is assumed that the walls have elastic foundations.

In both cases, are used the Continuous Medium Techniques, which consist of considering uniformly distributed along the height.

At the first part, the techniques leads to a differential equation or a system of three homogeneous differential equations with variable coefficients. The chosen solution is the one through Power Series and the use of computer is essential for solving it.

At the second, the techniques leads to a non homogeneous second order differential equation with constant coefficients and the exact solution is obtained.

In the whole work numerical examples are showed for the studied cases.



## Í N D I C E

I - <u>INTRODUÇÃO</u> .....	I-1
II - <u>INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS ALTOS</u>	
II.1 - INTRODUÇÃO .....	II-1
II.2 - PAINEL PAREDE .....	II-1
II.3 - PAINEL PÓRTICO .....	II-5
II.4 - ASSOCIAÇÃO PAREDE-PÓRTICO LIGADOS POR BARRAS BI-ARTICULADAS .....	II-7
- EXEMPLO NUMÉRICO II.1 .....	II-9
II.5 - ASSOCIAÇÃO PAREDE-PÓRTICO UNIDOS POR LINTÉIS .....	II-12
- EXEMPLO NUMÉRICO II.2 .....	II-15
II.6 - ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAREDES E PÓRTICOS .....	II-20
- EXEMPLO NUMÉRICO II.3 .....	II-34
II-7 - NÚCLEO DE PAREDES DE SEÇÃO ABERTA CON- TRAVENTADA POR LINTÉIS .....	II-40
- EXEMPLO NUMÉRICO II.4 .....	II-52
III - <u>INFLUÊNCIA DOS LINTÉIS NA DISTRIBUIÇÃO DE CARGA       VERTICAL ENTRE PAINÉIS-PAREDES COM VÍNCULOS E-       LÁSTICOS</u>	
III.1 - INTRODUÇÃO .....	III-1
III.2 - ASSOCIAÇÃO PLANA DE DUAS PAREDES LI- GADAS POR LINTÉIS .....	III-2
- EXEMPLO NUMÉRICO III.1 .....	III-13
- EXEMPLO NUMÉRICO III.2 .....	III-23
III.3 - ASSOCIAÇÃO PLANA DE TRÊS PAREDES LI- GADAS POR DOIS TRAMOS DE LINTÉIS ...	III-31

III.3.a	- CARREGAMENTO SIMÉTRICO ...	III-32
	- EXEMPLO NUMÉRICO III.3 ...	III-36
III.3.b	- CARREGAMENTO ANTI-MÉTRICO	III-42
	- EXEMPLO NUMÉRICO III.4 ...	III-48
III.4	- ASSOCIAÇÃO PLANA DE QUATRO PAREDES LIGADAS POR LINTÉIS .....	III-51
IV -	<u>CONSIDERAÇÕES FINAIS</u> .....	IV-1
	<u>APÊNDICE A</u> - RIGIDEZ DE UM PÓRTICO À FORÇA CORTANTE .....	A-1
	<u>APÊNDICE B</u> - RIGIDEZ "S" DO PÓRTICO E COEFI- CIENTES $p_1$ e $p_2$ .....	B-1
	<u>APÊNDICE C</u> - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS .....	C-1
	<u>APÊNDICE D</u> - SOLUÇÃO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE SEGUNDA ORDEM .....	D-1
V -	<u>BIBLIOGRAFIA</u> .....	V-1

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Nos grandes centros urbanos, a carência de espaço físico tem direcionado engenheiros e arquitetos a projetarem estruturas de edifícios altos. Com a elevação da altura destas estruturas, somou-se à engenharia estrutural as responsabilidades inerentes ao caso, sobretudo no que diz respeito à estabilidade e segurança de tais construções. Essa preocupação se evidencia, principalmente, pelas constantes contribuições recebidas nos últimos anos.

Referentes à perda de estabilidade de estruturas de edifícios altos destacam-se vários colaboradores, dentre os quais, GLUCK and GELLERT(1). No nosso meio, ANTUNES(8), CARVALHO(11), entre outros aqui não mencionados, porém de reconhecido valor.

Quanto às contribuições relativas à segurança das estruturas, por exemplo, às pesquisas preocupadas em equacionar a distribuição de esforços entre os elementos estruturais dos edifícios, somam-se os trabalhos de ROSMAN(2), JORDAAN(3), MACLEOD and HOSNY(4). Entre nós citam-se STAMATO(5), MANCINI(6)(7), FERREIRA(12), BARBOSA(10), entre outros.

Neste trabalho as considerações sobre a perda de estabilidade das estruturas serão dirigidas para a determinação da carga crítica de associações planas e tridimensionais de painéis. Como segundo objetivo, estuda-se a influência dos lintéis na distribuição de esforços entre paredes associadas. Em ambas as propostas, restringe-se apenas aos casos de cargas verticais uniformemente distribuídas ao longo da altura.

Reservado à análise de instabilidade de estruturas para a obtenção de cargas críticas, o Capítulo II considera inicialmente painéis isolados, para em seguida tratar de associações planas e tridimensionais de paredes e pórticos, além de um núcleo estrutural com dois eixos de simetria. Para as associações planas, as ligações entre os painéis são tratadas em dois casos: primeiro com barras bi-articuladas e depois com vigas.

Em todos os casos, as vinculações são consideradas rígidas na base e utiliza-se a técnica do meio contínuo, processo que consiste basicamente em substituírem-se os elementos de conexões horizontais, no caso, lintéis e lajes, por um meio contínuo de rigidez equivalente uniformemente distribuída ao longo de toda a altura do edifício.

As lajes são consideradas diafragmas horizontais, com rigidez infinita no seu plano e nula transversalmente, de modo que só transmitem esforços horizontais aos painéis. Por lintéis entendem-se vigas bi-engastadas resistentes ao momento fletor e à força cortante.

O emprego da Técnica do Meio Contínuo conduz a um tratamento mais expedito do problema, pois torna-se reduzido o número de parâmetros envolvidos.

A interpretação do comportamento de cada estrutura é feita por uma equação diferencial de terceira ordem, homogênea com coeficientes variáveis.

Excetuando-se os casos de painéis isolados, no final da formulação de cada modelo estrutural apresenta-se um exemplo numérico.

Nos Apêndices A e B, são determinados alguns parâmetros relativos às paredes e aos pórticos, cujas obtenções são feitas segundo MANCINI(7).

No Apêndice C, apresenta-se as condições de contorno e a solução da equação diferencial de terceira ordem, desenvolvida por Série de Potências. O valor da carga crítica é obtido mediante a utilização de computadores digitais. Apresenta-se também a listagem do programa que resolve a série, cuja elaboração deve-se a CARVALHO(11).

No terceiro capítulo, analisa-se a influência dos lintéis na distribuição de esforços entre paredes sujeitas a tensões normais que produzem deslocamentos axiais relativos. Tais deslocamentos solicitam os lintéis, que proporcionam transferência de carga da parede "mais carregada" para aquela "menos carregada".

A análise desenvolve-se através de três modelos estruturais constituídos por duas, três e quatro paredes associadas em série e com vínculos elásticos na base.

Como no Capítulo II, também utiliza-se a técnica do meio contínuo, onde todos os modelos estruturais escolhidos são considerados dividindo-se a estrutura em paredes isoladas e aplicando-se às mesmas, equações de equilíbrio e de compatibilidade de deslocamentos. Esta técnica conduz a uma equação diferencial de segunda ordem, não homogênea com coeficientes constantes.

No final da formulação de cada modelo, apresenta-se um exemplo numérico, considerando-se dois tipos de vinculação: rígida e elástica. Os resultados são apresentados em gráficos acompanhados de comentários.

No Apêndice D, apresentam-se as condições de contorno e a solução da equação diferencial de segunda ordem a coeficientes constantes.

Finalmente, no Capítulo IV, expõem-se algumas considerações sobre o trabalho.

CAPÍTULO IIINSTABILIDADE DE ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS ALTOS

## II.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo aborda a perda de estabilidade de estruturas de edifícios altos.

São analisados seis modelos estruturais, sendo eles: paredes e pórticos isoladamente, associação plana de paredes e pórticos ligados por barras bi-articuladas e por vigas, associação tri-dimensional de paredes e pórticos, e por fim, um núcleo estrutural.

Em todos estes modelos escolhidos, considerados rigidamente engastados na base, utiliza-se a técnica do meio contínuo, uma vez que, as estruturas mantêm suas características elasto-geométricas constantes ao longo da altura. Dependendo do seu formato em planta, o processo leva a uma equação ou a um sistema de equações diferenciais de terceira ordem com coeficientes variáveis, cujas condições de contorno e solução desenvolvidos por Série de Potências, constam do Apêndice C. A solução por séries é obtida mediante a utilização de computador IBM-1130.

## II.2 - PAINEL PAREDE

Chamar-se-á parede, aos painéis planos com rigidez transversal desprezível, supostos perfeitamente rígidos à força cortante e deformáveis a momento fletor. As pa

redes são consideradas com seção transversal constante ao longo da altura.

Define-se um sistema de eixos  $Oxz$ , contido no plano do painel, sendo o eixo  $Ox$  horizontal positivo da esquerda para a direita e o eixo  $Oz$  vertical orientado da base para o topo.

Utiliza-se o índice "w" para identificar os parâmetros relativos à parede.

O carregamento é constituído de carga vertical  $\alpha_w p$ , uniformemente distribuída ao longo da altura  $z$ , e aplicada no centro de gravidade da seção transversal da parede.

A convenção de esforços positivos é a indicada na Fig. II.1.b.

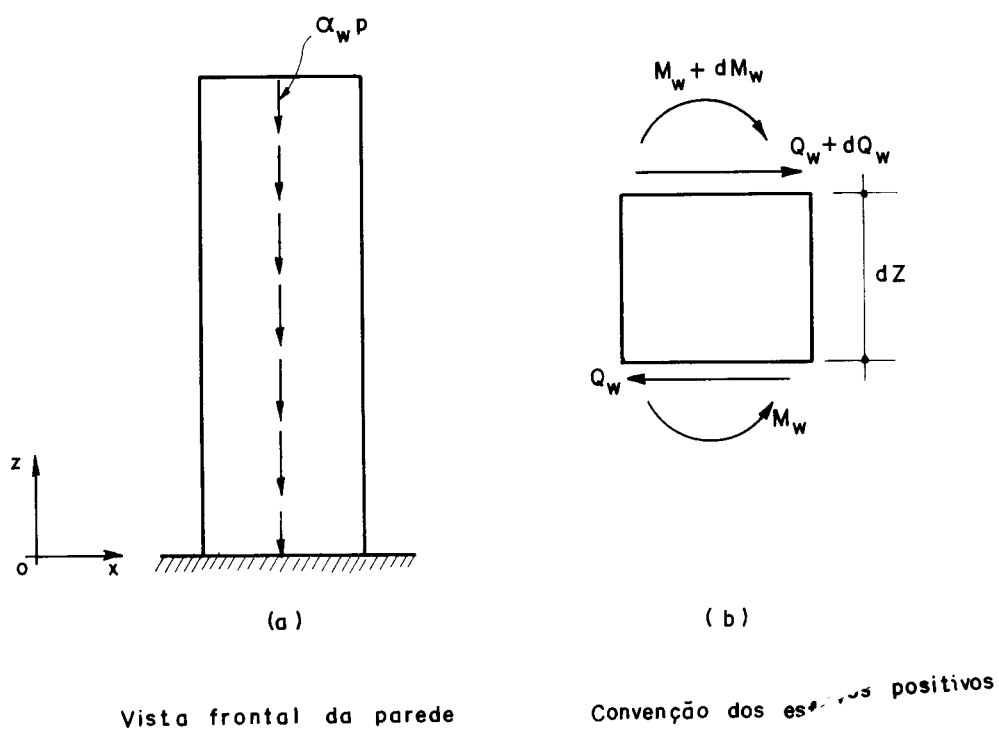


FIG. II.1 - PAREDE ISOLADA

Do equilíbrio no elemento  $dz$  da Fig. II.1.b, obtem-se:

$$\frac{dM_w}{dz} = - Q_{w,int} \quad \dots \text{II.1}$$

onde  $Q_{w,int}$  é o esforço cortante interno na parede.

Na equação da linha elástica do painel, considerando-se apenas a influência do momento fletor, tem-se:

$$M_w = E J_w u_w'' \quad \dots \text{II.2}$$

onde:

- a)  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal da parede.
- b)  $J_w$  é o momento de inércia da parede em relação a um eixo passando pelo centro de gravidade da seção transversal e perpendicular ao plano da figura.
- c)  $u_w$  é o deslocamento na direção do eixo  $Ox$ , no plano da parede.

Combinando as equações II.1 e II.2, pode-se escrever:

$$Q_{w,int} = -j_w u_w''' \quad \dots \text{II.3}$$

onde  $j_w$  representa o produto de rigidez à flexão  $EJ_w$  da parede.

Na consideração dos esforços externos, quando a parede estiver submetida a um carregamento capaz de provocar sua instabilidade, ela passará a ocupar uma nova posição de equilíbrio, conforme a Fig. II.2.a. A componente da carga externa numa cota  $z$  na direção da cortante  $Q_{w,ext}$ , vale:



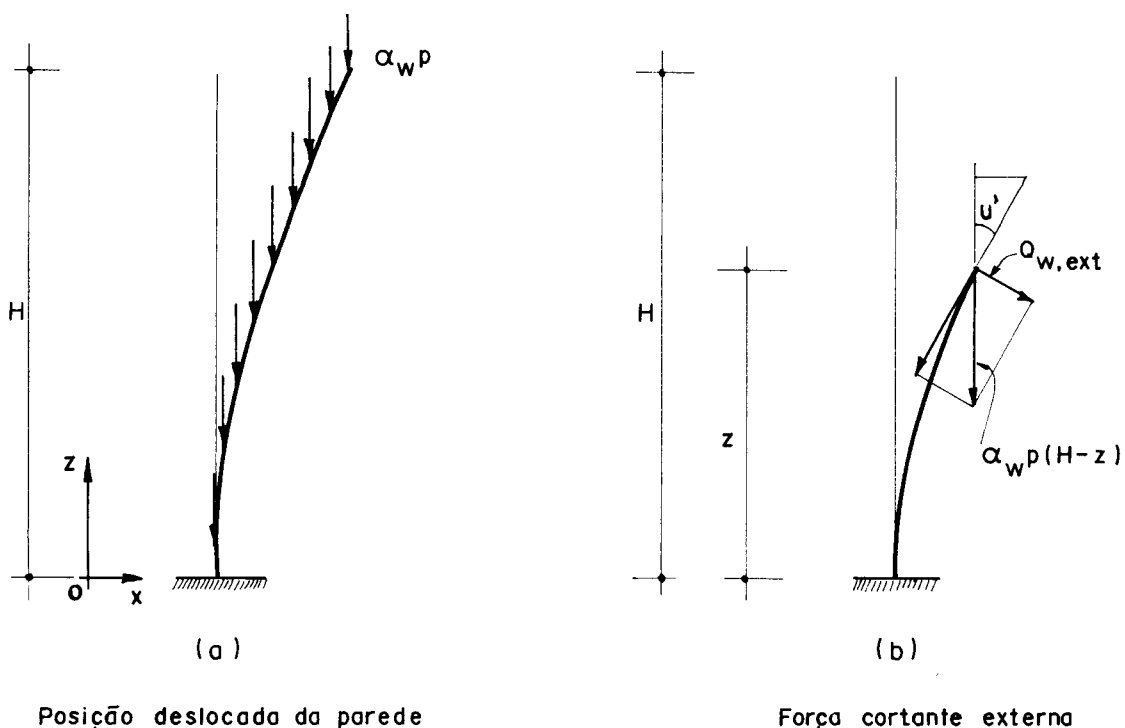


FIG. II-2 - CARREGAMENTO DA PAREDE

$$Q_{w,ext} = \alpha_w p(H-z)u'_w \quad \dots \text{II.4}$$

A condição de equilíbrio à força cortante na parede, permite igualar as equações II.3 e II.4, obtendo-se:

$$j_w u''_w + \alpha_w p(H-z)u'_w = 0 \quad \dots \text{II.5}$$

Com a finalidade de baixar a ordem da equação diferencial II.5, adota-se:

$$\epsilon = \frac{z}{H} \quad \dots \text{II.6.a}$$

$$u' = d(\epsilon) \quad \dots \text{II.6.b}$$

a partir da equação II.6.b, pode-se escrever:

$$u''' = \frac{1}{H^2} d''(\epsilon) \quad \dots \text{II.6.c}$$

Substituindo as equações II.6 na equação II.5, tem-se

$$j_w d''(\epsilon) + \alpha_{wp} H^3 (1-\epsilon) d(\epsilon) = 0 \quad \dots \text{II.7}$$

As condições de contorno e a solução da equação II.7, que permite obter a carga crítica da parede, são mostradas no Apêndice C.

### II.3 - PAINEL PÓRTICO

Chamar-se-á pórtico aos painéis planos com rigidez transversal desprezível, supostos perfeitamente rígidos ao momento fletor e deformáveis à força cortante.

As características elasto-geométricas do pórtico são consideradas constantes ao longo da altura.

Define-se um sistema de eixos  $Oxz$ , coincidente com o que se usou no item anterior.

Utiliza-se o índice "f" para identificar os parâmetros relativos ao pórtico.

O carregamento  $\alpha_{fp}$  é constituído de carga vertical uniformemente distribuída ao longo da altura  $z$ , e assemelhada como aplicada nos pilares do pórtico.

A convenção dos esforços positivos é a indicada na Fig. II.3.b.

Conforme STAMATO(5), a equação diferencial da linha elástica do pórtico, em função do esforço cortante interno é:

$$u_f' = \frac{Q_{f,int}}{s_f} \quad \dots \text{II.8}$$

sendo :

- a)  $s_f$  a rigidez do pórtico à força cortante, estimado conforme, por exemplo, MANCINI( 7 ).
- b)  $u_f$  o deslocamento na direção do eixo Ox, no plano do painel.

Devido à carga externa, a força cortante que a tua no pórtico na posição deformada, é obtida de modo idên tico ao que se fez no parágrafo anterior, de modo que:

$$Q_{f,ext} = \alpha_f p(H-z)u'_f \quad \dots \text{II.9}$$

onde :

$$\alpha_f = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \dots \text{II.10}$$

e os parâmetros  $\alpha_i$  ( $i=1,2$ ) representam a parcela de carga absorvida pelo pilar  $i$  do pórtico.

Novamente, a equação de equilíbrio do pórtico à força cortante permite escrever a partir da equação II.8 e II.9 a seguinte expressão:

$$\left[ s_f - \alpha_f p (H-z) \right] u'_f = 0 \quad \dots \text{II.11}$$

Neste caso, a solução da equação II.11 que fornece a carga crítica do pórtico, é imediata.

$$P_{\text{crit}} = \frac{s_f}{\alpha_f H} \quad \dots \text{II.12}$$

#### II.4 - ASSOCIAÇÃO PAREDE-PÓRTICO LIGADOS POR BARRAS BI-ARTICULADAS

A Fig. II.4, mostra uma associação plana de parede-pórtico ligados por barras bi-articuladas ao nível dos andares.

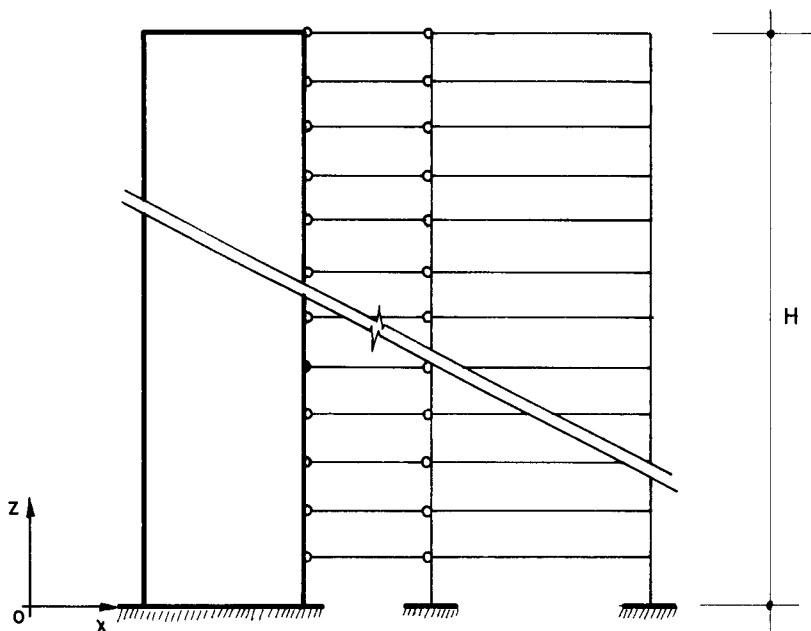


FIG. II-4 - ASSOCIAÇÃO DE PAINÉIS COM BARRAS BI-ARTICULADAS.

Estas barras são assimiladas como rígidas axialmente, de modo a garantir uma elástica única para o conjunto, e por se tratar da técnica do meio contínuo são consideradas continuamente distribuídas ao longo da altura  $z$ .

O sistema de eixos utilizados, o carregamento e a convenção dos esforços positivos, coincidem com os adotados nos itens II.2 e II.3 para a parede e o pórtico, respectivamente.

A força cortante interna da estrutura é dada pela soma das forças cortantes internas que atuam em cada painel isoladamente. Então, somando-se as equações II.3 e II.8, obtém-se:

$$Q_{int} = -j_w u''' + s_f u' \quad \dots \text{II.13}$$

Do mesmo modo, a força cortante externa que atua na estrutura na posição deformada será igual à soma das equações II.4 e II.9. Portanto pode-se escrever

$$Q_{ext} = \alpha_w p(H-z)u' + \alpha_f p(H-z)u' \quad \dots \text{II.14}$$

ou

$$Q_{ext} = \alpha p(H-z)u' \quad \dots \text{II.15}$$

onde

$$\alpha = \alpha_w + \alpha_f \quad \dots \text{II.16}$$

A condição de equilíbrio à força cortante, permite igualar as equações II.13 e II.15, de modo a obter-se:

$$j_w u''' - [s_f - \alpha p(H-z)] u' = 0 \quad \dots \text{II.17}$$

Com a finalidade de baixar a ordem da equação diferencial II.7, usa-se as equações II.6, obtendo-se:

$$j_w d''(\epsilon) - H^2 s_f d(\epsilon) + \alpha p H^3 (1-\epsilon) d(\epsilon) = 0 \quad \dots \text{II.18}$$

As condições de contorno, bem como a solução da equação II.18, que permite obter a carga crítica do sistema estrutural constam no Apêndice C.

#### EXEMPLO NUMÉRICO - II.1

Pretende-se conhecer a carga crítica uniformemente distribuída ao longo da altura, da associação estrutural da Fig. II.4. A associação é constituída de parede e pórtico ligados através de barras bi-articuladas ao nível dos andares.

O conjunto mantém suas características elasto-geométricas constantes ao longo da altura.

A parede tem seção transversal de 150x20cm, os pilares e vigas do pórtico de 40x40cm e 20x40cm, respectivamente. O comprimento das barras bi-articuladas é 200 cm e o das vigas do pórtico, 400 cm.

A associação tem 20 andares e a altura por andar mede 300cm. Para E toma-se o valor  $E = 2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ .

a) Determinação de  $j_w$

$$J_w = \frac{0,20 \times 1,50^3}{12} = 5,625 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$j_w = E J_w = 1,125 \times 10^5 \text{ tfm}^2$$

b) Determinação de  $s_f$

De acordo com a equação A.6, do Apêndice A, tem-se:

$$s_f = \frac{12 E}{h} \sum_{n \cdot a} \left[ k_{p \cdot n} \frac{\sum v \cdot n k}{\sum b \cdot n k} \right]$$

$$J_p = \frac{0,40 \times 0,40^3}{12} = 2,13 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

e

$$k_p = \frac{2,13 \times 10^{-3}}{3,0} = 7,11 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$J_v = \frac{0,20 \times 0,40^3}{12} = 1,067 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$k_v = \frac{1,067 \times 10^{-3}}{4,0} = 2,67 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$s_f = \frac{12 \times 2,0 \times 10^6}{3,0} 2 \left[ 7,11 \times 10^{-4} \frac{2,67 \times 10^{-4}}{2 \times 7,11 \times 10^{-4} + 2,67 \times 10^{-4}} \right]$$

$$s_f = 1798 \text{ tf}$$

c) Montagem da equação diferencial da estrutura

De acordo com a equação II.17, tem-se:

$$112500 u''' - [1798 - p(60-z)] u' = 0$$

onde considerou-se  $\alpha = 1$ .

d) Apresenta-se na Tabela II.1, os resultados da equação diferencial acima, resolvida por Série de Potências.

TABELA II.1

Nº de Termos da Série	Grau do Polinômio	Menor Raiz Real Positiva	Nº de Termos da Série	Grau do Polinômio	Menor Raiz Real Positiva
3	1º	31,00	21	10º	112,37
4	1º	93,02	22	10º	50,13
5	2º	*	23	11º	54,56
6	2º	33,36	24	11º	94,11
7	3º	44,5	25	12º	54,50
8	3º	*	26	12º	55,77
9	4º	35,92	27	13º	83,14
10	4º	41,71	28	13º	57,64
11	5º	99	29	14º	57,28
12	5º	39,70	30	14º	59,11
13	6º	41,77	31	15º	58,21
14	6º	70,72	32	15º	58,01
15	7º	282,47	33	16º	58,27
16	7º	43,40	34	16º	58,20
17	8º	60,52	35	17º	58,17
18	8º	150,57	36	17º	58,19
19	9º	46,27	37	18º	58,19
20	9º	55,62	38	18º	58,19
			39	19º	58,19

\* O polinômio não possui raiz real positiva

logo,

$$P_{crit} = 58,19 \text{ tf/m}$$



## II.5 - ASSOCIAÇÃO PAREDE-PÓRTICO UNIDOS POR LINTÉIS

Um outro tipo de associação entre parede e pórtico é aquele cuja ligação entre os mesmos efetua-se através de lintéis. A Fig. II.5.a mostra essa associação.

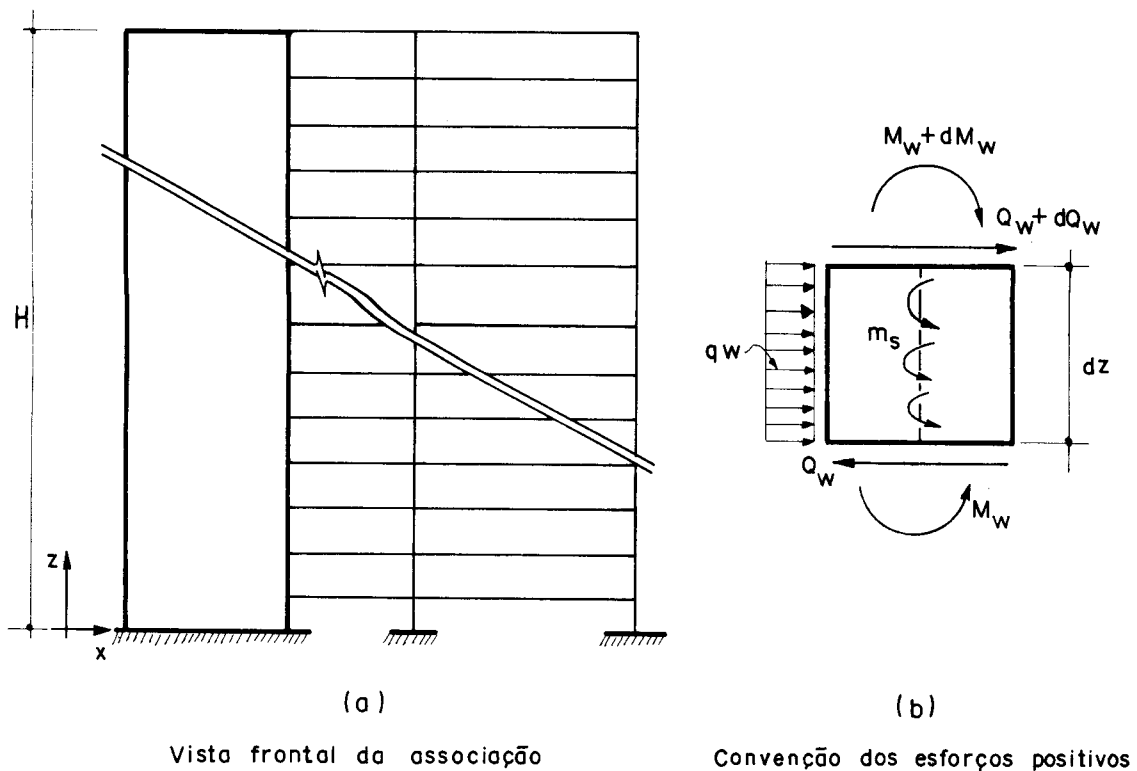


FIG. II-5 - ASSOCIAÇÃO DE PAINÉIS LIGADOS COM LINTÉIS.

Neste caso, o pórtico reage com esforços sobre a parede, a nível de cada andar, através dos lintéis. Por tratar-se da técnica do meio contínuo, esses esforços são considerados continuamente distribuídos ao longo da altura.

Na Fig. II.5.b, está representada a convenção dos esforços positivos sobre o elemento  $dz$  da parede, onde " $m_s$ " é o momento distribuído aplicado no eixo da parede, devido à presença dos lintéis.

Admitindo que os lintéis são rígidos em sua direção axial, os deslocamentos " $u_w$ " e " $u_f$ " são iguais e aqui chamados de " $u$ " simplesmente.

O sistema de eixos utilizado e o carregamento  $a$  dotado, são os mesmos considerados em todo este trabalho.

Do equilíbrio no elemento  $dz$  da parede, Fig. II. 5.b, e usando-se as equações II.1 e II.2, chega-se a:

$$Q_{w,int} = -j_w u'' + m_s \quad \dots \text{II.19}$$

sendo  $m_s$  determinado segundo, por exemplo, MANCINI(7). Definindo  $\phi_B$  e  $\phi_s$  como as rotações em uma seção genérica da parede, devidos ao momento fletor e à força cortante, respectivamente, tem-se:

$$m_s = p_1 \phi_B + p_2 \phi_s \quad \dots \text{II.20}$$

onde os coeficientes "p<sub>1</sub>" e "p<sub>2</sub>" são determinados de acordo com MANCINI(7), conforme demonstra-se no Apêndice B. Para maior clareza  $\phi_B$  e  $\phi_s$  são mostrados nas Figs. B.1 e B.2 deste Apêndice.

Chamando  $\phi = \phi_B + \phi_s$ , e adotando a expressão aproximada

$$\phi_s = \frac{3 Q_w}{AE} \quad \dots \text{II.21}$$

onde:

- a) A é a área da seção transversal da parede.
- b) E é o módulo de elasticidade longitudinal.

Usando a equação II.21 em II.20, obtém-se:

$$m_s = p_1 \phi + \frac{3 Q_w}{AE} (p_2 - p_1) \quad \dots \text{II.22}$$

ou, adotando-se " $\phi$ " igual a " $u'$ ", tem-se:

$$m_s = p_1 u' + \frac{3 Q_w}{AE} (p_2 - p_1) \quad \dots \text{II.23}$$

Levando a equação II.23 em II.19 e definindo

$$\gamma = 1 - \frac{3}{AE} (p_2 - p_1) \quad \dots \text{II.24}$$

obtém-se:

$$Q_{w,int} = - \frac{j_w}{\gamma} u''' + \frac{p_1}{\gamma} u' \quad \dots \text{II.25}$$

A força cortante no pórtico, obedecendo a mesma convenção para esforços positivos da Fig. II.5.b, vale:

$$Q_{f,int} = s u' \quad \dots \text{II.26}$$

onde "s", a rigidez do pórtico à força cortante, é estimado no Apêndice B, conforme, por exemplo, MANCINI(7).

A força cortante interna total da associação é a soma das equações II.25 e II.26

$$Q_{int} = - \frac{j_w}{\gamma} u''' + \left( \frac{p_1}{\gamma} + s \right) u' \quad \dots \text{II.27}$$

ou

$$Q_{int} = -j_a u''' + s_a u' \quad \dots \text{II.28}$$

onde

$$a) \quad j_a = \frac{j_w}{\gamma} \quad \dots \text{II.29.a}$$

$$b) \quad s_a = \frac{p_1}{\gamma} + s \quad \dots \text{II.29.b}$$

A força cortante externa na estrutura, é obtida de modo idêntico ao item II.4, portanto, expressa pela equação II.15. Para maior clareza, repete-se esta última equação.

$$Q_{ext} = \alpha p(H-z)u' \quad \dots \text{II.15}$$

onde " $\alpha$ " é dado pela equação II.16 do item anterior.

Do mesmo modo, o equilíbrio da estrutura é obtido igualando-se a equação II.28 com a II.15. Escrevendo de um modo conveniente, tem-se:

$$j_a u''' - \left[ s_a - \alpha p(H-z) \right] u' = 0 \quad \dots \text{II.30}$$

Como nos casos anteriores, com o objetivo de baixar a ordem da equação diferencial da estrutura, usa-se as equações II.6 em II.30, de modo a obter:

$$j_a d''(\epsilon) - H^2 s_a d(\epsilon) + \alpha p H^3 (1-\epsilon) d(\epsilon) = 0 \quad \dots \text{II.31}$$

As condições de contorno e a solução da equação II.31 para a obtenção da carga crítica da associação estrutural constam do Apêndice C.

#### EXEMPLO NUMÉRICO - II.2

Considere a associação parede-pórtico da Fig. II.5.a, em que se deseja determinar a carga crítica.

O conjunto coincide suas características elasto-geométricas com aquele do exemplo numérico II.1, exceto que as barras bi-articuladas são substituídas por lintéis de igual comprimento e seção transversal de 20 x 40 cm.

##### a) Determinação da rigidez $s$ do pórtico

De acordo com a Fig. B.2 do Apêndice B, pode-se escrever:

$$a_1 = 2,00 \text{ m}$$

$$b_1 = 1,50 \text{ m}$$

$$J_1 = J_3 = 2,13 \times 10^{-3} \text{ m}^4, \quad k_1 = k_3 = 7,11 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$J_2 = 1,067 \times 10^{-3} \text{ m}^4, \quad k_2 = 2,67 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$J_4 = 1,067 \times 10^{-3} \text{ m}^4, \quad k_4 = 5,34 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

e usando as equações B.8, obtém-se:

$$\theta = \frac{(12 \times 7,11 + 4 \times 2,67 + 4 \times 5,34) \times 10^{-4}}{2 \times 2,67 \times 10^{-4}} = 21,978$$

e

$$\varphi = \frac{(12 \times 7,11 + 4 \times 2,67) \times 10^{-4}}{2 \times 2,67 \times 10^{-4}} = 17,978$$

substituindo os valores de  $\theta$  e  $\varphi$  acima, nas equações B.9, encontra-se:

$$\omega = \frac{12(7,11 - 7,11 \times 21,978) \times 10^{-4} - 2 \times 5,34 \times 10^{-4} (1 + 3 \times 1,50/2 \times 2)}{2 \times 2,67 \times 10^{-4} - 21,978 \times (12 \times 7,11 + 4 \times 2,67) \times 10^{-4}}$$

$$\omega = 8,612 \times 10^{-1}$$

e

$$\beta = \frac{12 \times 7,11 \times 10^{-4} - 17,978 \times 12 \times 7,11 - 2 \times 5,34 (1 + 3 \times 1,50/2 \times 2) \times 10^{-4}}{2 \times 2,67 \times 10^{-4} - 17,978 (12 \times 7,11 + 4 \times 2,67 + 4 \times 5,34) \times 10^{-4}}$$

$$\beta = 4,944 \times 10^{-1}$$

e segundo as equações B.12 do Apêndice B, tem-se:

$$s_A = \frac{12 \times 2,0 \times 10^6 \times 7,11 \times 10^{-4}}{3} (1 - 8,612 \times 10^{-1})$$

$$s_A = 789,49 \text{ tf}$$

e

$$s_B = \frac{12 \times 2,0 \times 10^6 \times 7,11 \times 10^{-4}}{3} (1 - 4,944 \times 10^{-1})$$

$$s_B = 2875,85 \text{ tf}$$

portanto, pela equação B.13, vem:

$$s = s_A + s_B \approx 3665 \text{ tf}$$

b) Determinação de  $p_1$ ,  $p_2$  e  $\gamma$

Segundo o Apêndice B, e de acordo com a equação B.16, tem-se:

$$p_1 = \frac{2,0 \times 10^6 \times 5,34 \times 10^{-4}}{3} \left[ 4 + 2 \times 4,944 \times 10^{-1} + \frac{3 \times 1,50}{2} (2 + 4,944 \times 10^{-1} + \frac{1,50}{2}) \right]$$

$$p_1 = 4374,77 \text{ tf}$$

e pela equação B.19, onde  $\beta$  agora é dado por B.20.b, ou seja,

$$\beta = \frac{12 \times 7,11 \times 10^{-4} - 17,978 (12 \times 7,11 - 2 \times 5,34) \times 10^{-4}}{2 \times 2,67 \times 10^{-4} - 17,978 (12 \times 7,11 + 4 \times 5,34 + 4 \times 2,67) \times 10^{-4}}$$

$$\beta = 5,97 \times 10^{-1}$$

encontra-se  $p_2$ :

$$p_2 = \frac{2,0 \times 10^6 \times 5,34 \times 10^{-4}}{3} \left[ 4 + 2 \times 5,97 \times 10^{-1} \left( 1 + \frac{3 \times 1,50}{2 \times 2,0} \right) + \frac{3 \times 1,5}{2,0} \right]$$

$$p_2 = 3128,26 \text{ tf}$$

de acordo com a equação II.24, tem-se

$$\gamma = 1 - \frac{3}{0,3 \times 2,0 \times 10^6} (3128,26 - 4374,77) = 1,0062$$

c) Determinação dos parâmetros de rigidez do painel

$$J_w = \frac{0,20 \times 1,50^3}{12} = 5,625 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$j_w = EJ_w = 1,125 \times 10^5 \text{ tfm}^2$$

utilizando as equações II.29, obtém-se:

$$j_a \approx 111807 \text{ tfm}^2$$

e

$$s_a \approx 8013 \text{ tf}$$

d) Montagem da equação diferencial da estrutura

Substituindo os resultados encontrados acima na equação II.30, com  $\alpha = 1$ , tem-se a equação diferencial do sistema estrutural dada por:

$$111807 u''' - \left[ 8013 - p(60-z) \right] u' = 0$$

e) A solução da equação diferencial anterior, por Série de Potências, forneceu os resultados apresentados na Tabela II.2.

TABELA II.2

Nº de Termos da Série	Grau do Polinômio	Menor Raiz Real Positiva	Nº de Termos da Série	Grau do Polinômio	Menor Raiz Real Positiva
3	1º	134,58	28	13º	162,26
4	1º	403,75	29	14º	179,30
5	2º	*	30	14º	233,97
6	2º	136,98	31	15º	167,40
7	3º	172,63	32	15º	178,31
8	3º	*	33	16º	224,38
9	4º	139,22	34	16º	174,29
10	4º	161,72	35	17º	179,70
11	5º	282,10	36	17º	216,82
12	5º	141,69	37	18º	290,88
13	6º	157,43	38	18º	182,90
14	6º	228,22	39	19º	210,04
15	7º	144,69	40	19º	276,33
16	7º	155,64	41	20º	186,88
17	8º	207,10	42	20º	200
18	8º	148,75	43	21º	264,63
19	9º	155,35	44	21º	190,27
20	9º	195,31	45	22º	193,51
21	10º	156,52	46	22º	193,32
22	10º	156,34	47	23º	191,96
23	11º	187,71	48	23º	192,65
24	11º	265,65	49	24º	192,67
25	12º	158,61	50	24º	192,43
26	12º	182,53	51	25º	192,54
27	13º	246,91	52	25º	192,55

\* O polinômio não possui raiz real positiva.

logo,

$$P_{crit} = 192,57 \text{ tf/m}$$



## II.6 - ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAREDES E PÓRTICOS

Considere-se a Fig. II.6, onde representa-se em planta, uma associação de painéis planos constituída de paredes e pórticos ligados através de lajes.

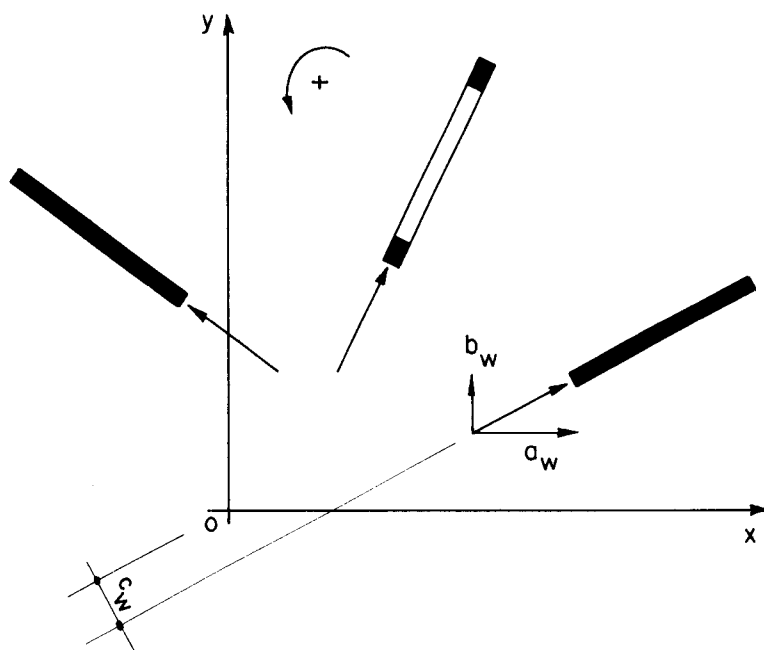


FIG. II-6 - PLANTA TÉRREA DA ASSOCIAÇÃO

É definido um sistema global de referência  $Oxyz$ , sendo o eixo  $Oz$  vertical orientado da base para o topo do edifício.

Em cada painel, define-se um sistema local de referência  $Ox'y'z'$ , sendo  $Oz'$  vertical contido no plano do painel e com o ponto  $O$  na base do edifício. Um vetor unitário na direção do plano da parede ou do pórtico define a posição dos mesmos, através das coordenadas  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  e  $\underline{c}$  indexadas por "w" no caso de paredes ou por "f" no caso de pórticos) onde  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  são os cossenos diretores deste vetor em

relação a  $O_x$  e  $O_y$ , respectivamente, enquanto  $c$  é o momento em relação ao eixo  $O_z$ , positivo se for dextrorso.

No plano do painel, o deslocamento " $u_i$ " e os esforços  $M_i$  e  $Q_i$  (para  $i$  igual a "w" ou "f", no caso de parede ou pórtico, respectivamente) obedecem as convenções de sinais adotadas nos itens anteriores.

O carregamento em cada painel é constituído de carga vertical uniformemente distribuída na altura  $z$ , tal como nos itens II.2 e II.3.

Os deslocamentos do diafragma genérico numa cota  $z$ , em relação ao sistema global de referência, serão:

$u$  - deslocamento do ponto  $\bar{O}z$  no sentido de  $O_x$ .

$v$  - deslocamento do ponto  $\bar{O}z$  no sentido de  $O_y$ .

$\theta$  - rotação do diafragma em torno do eixo  $O_z$ .

onde o ponto  $\bar{O}z$  situa-se na intersecção do eixo  $O_z$  com o diafragma genérico.

#### a) Determinação de $Q_{int}$

As forças cortantes nas direções de  $O_x$ ,  $O_y$  e o momento em torno do eixo  $O_z$  podem ser escritos:

$$Q_{int,x} = - \sum j_w u_w'' a_w + \sum s_f u_f' a_f \quad \dots \text{II.32.a}$$

$$Q_{int,y} = - \sum j_w u_w'' b_w + \sum s_f u_f' b_f \quad \dots \text{II.32.b}$$

$$Q_{int,z} = - \sum j_w u_w'' c_w + \sum s_f u_f' c_f \quad \dots \text{II.32.c}$$

onde:

a)  $j_w$  representa o produto de rigidez à flexão  $EJ_w$  de cada parede.

b)  $s_f$  é a rigidez à força cortante de cada pórtico individualmente.

Escrevendo " $u_w$ " e " $u_f$ " em termos dos deslocamentos dos diafragmas, tem-se:

$$u_w = a_w u + b_w v + c_w \theta \quad \dots \text{II.33.a}$$

$$u_f = a_f u + b_f v + c_f \theta \quad \dots \text{II.33.b}$$

substituindo as derivadas correspondentes das equações II.33 em II.32, resulta:

$$Q_{int,x} = -\sum_j j_w a_w (a_w u''' + b_w v''' + c_w \theta''') + \sum_s s_f a_f (a_f u' + b_f v' + c_f \theta') \quad \dots \text{II.34.a}$$

$$Q_{int,y} = -\sum_j j_w b_w (a_w u''' + b_w v''' + c_w \theta''') + \sum_s s_f b_f (a_f u' + b_f v' + c_f \theta') \quad \dots \text{II.34.b}$$

$$Q_{int,z} = -\sum_j j_w c_w (a_w u''' + b_w v''' + c_w \theta''') + \sum_s s_f c_f (a_f u' + b_f v' + c_f \theta') \quad \dots \text{II.34.c}$$

ou, em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} Q_{int,x} \\ Q_{int,y} \\ Q_{int,z} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ba} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ca} & J_{cb} & J_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} \\ S_{ba} & S_{bb} & S_{bc} \\ S_{ca} & S_{cb} & S_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad \dots \text{II.35}$$

onde:

$$J_{gh} = \sum_w j_w g_w h_w \quad \dots \text{II.36.a}$$

$$S_{gh} = \sum_f s_f g_f h_f \quad \dots \text{II.36.b}$$

com "g" e "h" representando qualquer uma das coordenadas "a", "b" e "c".

A equação II.35, escrita numa forma mais compacta, fica:

$$\{Q_{int}\} = - [J] \{U''\} + [S] \{U'\} \quad \dots \text{II.37}$$

onde:

- a)  $\{Q_{int}\}$  - vetor das forças cortantes internas nas três direções.

$$\{Q_{int}\} = \begin{Bmatrix} Q_{int,x} \\ Q_{int,y} \\ Q_{int,z} \end{Bmatrix} \quad \dots \text{II.38.a}$$

- b)  $[J]$  - matriz de rigidez à flexão

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ba} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ca} & J_{cb} & J_{cc} \end{bmatrix} \quad \dots \text{II.38.b}$$

- c)  $S$  - matriz de rigidez à força cortante

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} \\ S_{ba} & S_{bb} & S_{bc} \\ S_{ca} & S_{cb} & S_{cc} \end{bmatrix} \quad \dots \text{II.38.c}$$

d)  $\{U\}$  - vetor dos deslocamentos do diafragma genérico.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad \dots \text{II.38.d}$$

b) Determinação de  $Q_{ext}$

Para cada um dos três deslocamentos possíveis dos diafragmas aparecem forças cortantes externas segundo as direções de  $Ox$  e  $Oy$ , e momento em torno do eixo  $Oz$ . Esse momento e essas forças cortantes são determinadas a seguir, considerando-se separadamente cada um dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$ .

b.1) Deslocamento na direção "u"

Seja na Fig. II.7, o deslocamento "u" do diafragma, positivo na direção e sentido do eixo  $Ox$ .

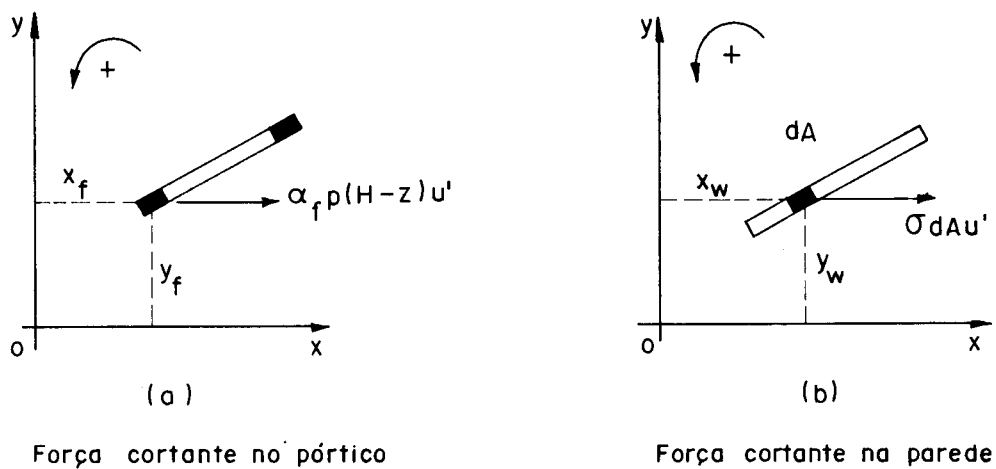


FIG. II-7 - DESLOCAMENTO NA DIREÇÃO "u"

As forças cortantes externas nas direções  $Ox$ ,  $Oy$  e o momento em torno do eixo  $Oz$ , serão positivos quando, respectivamente, coincidirem com o sentido dos eixos  $Ox$  e  $Oy$  e provocarem momentos em relação a  $Oz$  no sentido anti-horário para um observador olhando do topo para a base.

Chamando de  $(x_f, y_f)$  e  $(x_w, y_w)$  as coordenadas do pilar do pórtico genérico e do elemento infinitesimal de área  $dA$  da parede genérica, respectivamente, as forças cortantes em uma altura  $z$ , que aparecem nas três direções são:

b.1.1) Para o pórtico

$$Q_{f,ext,x} = \alpha_f p(H-z) u' \quad \dots \text{II.39.a}$$

$$Q_{f,ext,y} = 0 \quad \dots \text{II.39.b}$$

$$Q_{f,ext,z} = -\alpha_f p(H-z) y_f u' \quad \dots \text{II.39.c}$$

onde  $H$  é a altura do edifício.

b.1.2) Para o elemento infinitesimal  $dA$  da parede

$$d Q_{w,ext,x} = \sigma dA u' \quad \dots \text{II.40.a}$$

$$d Q_{w,ext,y} = 0 \quad \dots \text{II.40.b}$$

$$d Q_{w,ext,z} = -\sigma dA y_w u' \quad \dots \text{II.40.c}$$

onde

$$\sigma = \frac{\alpha_w p(H-z)}{A} \quad \dots \text{II.41}$$

Integrando as equações II.40 e usando II.41, ob-  
tém-se:

$$Q_{w,ext,x} = \alpha_w p(H-z) u' \quad \dots \text{II.42.a}$$

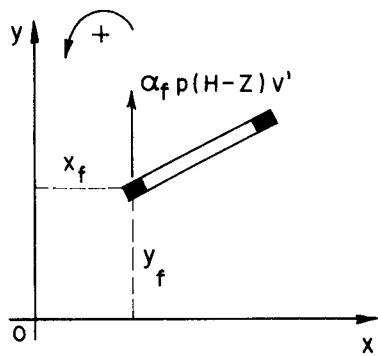
$$Q_{w,ext,y} = 0 \quad \dots \text{II.42.b}$$

$$Q_{w,ext,z} = -\alpha_w p(H-z) y_{cg} u' \quad \dots \text{II.42.c}$$

onde  $y_{cg}$  é a ordenada segundo o eixo Oy do centro de gravi-  
dade da seção transversal da parede.

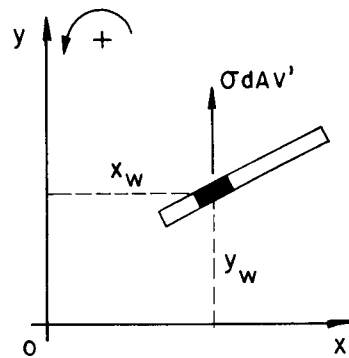
b.2) Deslocamento na direção "v"

Impondo o deslocamento "v" positivo na direção  
e sentido do eixo Oy, Fig. II.8, e conservando as conven-  
ções de sinais e nomenclatura da figura anterior, tem-se:



(a)

Força cortante no pórtico



(b)

Força cortante na parede

FIG II- 8 - DESLOCAMENTO NA DIREÇÃO " v " .

b.2.1) Para o pórtico

$$Q_{f,ext,x} = 0 \quad \dots \text{II.43.a}$$

$$Q_{f,ext,y} = \alpha_f p(H-z) v' \quad \dots \text{II.43.b}$$

$$Q_{f,ext,z} = \alpha_f p(H-z) x_f v' \quad \dots \text{II.43.c}$$

b.2.2) Para o elemento infinitesimal  $dA$  da parede

$$d Q_{w,ext,x} = 0 \quad \dots \text{II.44.a}$$

$$d Q_{w,ext,y} = \sigma dA v' \quad \dots \text{II.44.b}$$

$$d Q_{w,ext,z} = \sigma dA x_w v' \quad \dots \text{II.44.c}$$

Integrando as equações II.44, e usando novamente II.41 chega-se a:

$$Q_{w,ext,x} = 0 \quad \dots \text{II.45.a}$$

$$Q_{w,ext,y} = \alpha_w p(H-z) v' \quad \dots \text{II.45.b}$$

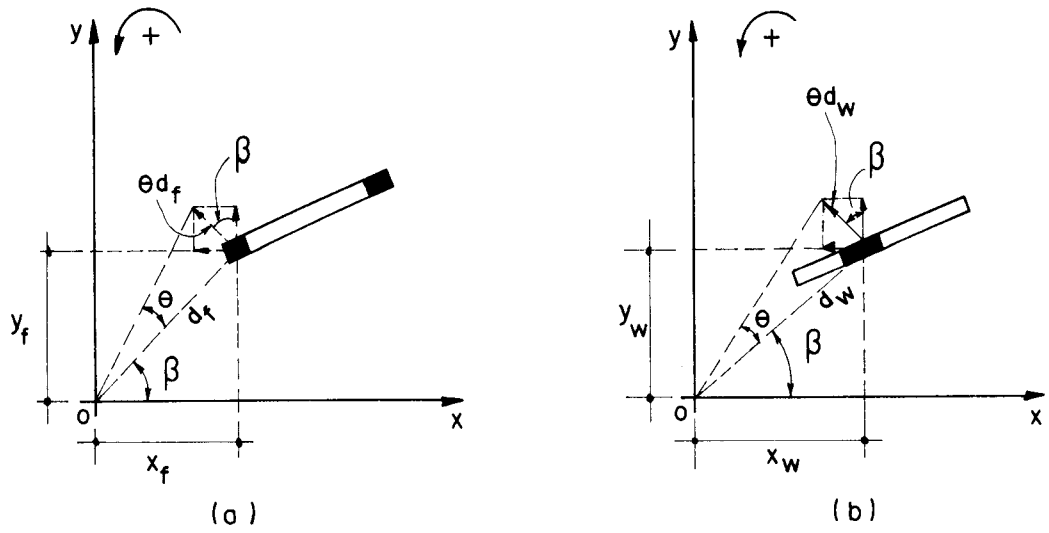
$$Q_{w,ext,z} = \alpha_w p(H-z) x_{cg} v' \quad \dots \text{II.45.c}$$

onde  $x_{cg}$  é a ordenada segundo o eixo  $Ox$  do centro de gravidade da seção transversal da parede.

b.3) Deslocamento na direção " $\theta$ "

Para a rotação " $\theta$ " imposta, fig. II.9, mantendo-se ainda as mesmas considerações adotadas nas figuras II.7 e II.8, tem-se:





Força cortante no pórtico

Força cortante na parede

FIG. II-9 - DESLOCAMENTO NA DIREÇÃO "θ"

b.3.1) Para o pórtico

$$Q_{f,ext,x} = -\alpha_f p(H-z) \theta' d_f \sin \beta \quad \dots \text{II.46.a}$$

$$Q_{f,ext,y} = \alpha_f p(H-z) \theta' d_f \cos \beta \quad \dots \text{II.46.b}$$

$$Q_{f,ext,z} = \alpha_f p(H-z) \theta' d_f^2 \quad \dots \text{II.46.c}$$

a partir da Fig. II.9 obtém-se as seguintes relações:

$$y_f = d_f \sin \beta \quad x_f = d_f \cos \beta \quad \dots \text{II.47.a}$$

$$y_w = d_w \sin \beta \quad x_w = d_w \cos \beta \quad \dots \text{II.47.b}$$

levando as equações II.47.a nas equações II.46, resulta:

$$Q_{f,ext,x} = -\alpha_f p(H-z) y_f \theta' \quad \dots \text{II.48.a}$$

$$Q_{f,ext,y} = \alpha_f p(H-z) x_f \theta' \quad \dots \text{II.48.b}$$

$$Q_{f,ext,z} = \alpha_f p(H-z) d_f^2 \theta' \quad \dots \text{II.48.c}$$

b.3.2) Para o elemento infinitesimal  $dA$  da parede

$$d Q_{w,ext,x} = -\sigma dA \theta' d_w \text{ sen } \beta \quad \dots \text{II.49.a}$$

$$d Q_{w,ext,y} = \sigma dA \theta' d_w \text{ cos } \beta \quad \dots \text{II.49.b}$$

$$d Q_{w,ext,z} = \sigma dA \theta' d_w^2 \quad \dots \text{II.49.c}$$

usando as equações II.47.b, fica

$$d Q_{w,ext,x} = -\sigma \theta' y_w dA \quad \dots \text{II.50.a}$$

$$d Q_{w,ext,y} = \sigma \theta' x_w dA \quad \dots \text{II.50.b}$$

$$d Q_{w,ext,z} = \sigma \theta' d_w^2 dA \quad \dots \text{II.50.c}$$

integrando as equações II.50, usando a equação II.41, e lembrando ainda a definição de momento de inércia, obtém-se:

$$Q_{w,ext,x} = -\alpha_w p(H-z) y_{cg} \theta' \quad \dots \text{II.51.a}$$

$$Q_{w,ext,y} = \alpha_w p(H-z) x_{cg} \theta' \quad \dots \text{II.51.b}$$

$$Q_{w,ext,z} = \alpha_w p(H-z) \frac{J_x + J_y}{A} \theta' \quad \dots \text{II.51.c}$$

Somando os efeitos para os três deslocamentos tem-se:

b.4) Nos pórticos

$$Q_{f,ext,x} = \alpha_f p(H-z)u' - \alpha_f p(H-z)y_f \theta' \quad \dots \text{II.52.a}$$

$$Q_{f,ext,y} = \alpha_f p(H-z)v' + \alpha_f p(H-z)x_f \theta' \quad \dots \text{II.52.b}$$

$$Q_{f,ext,z} = -\alpha_f p(H-z)y_f u' + \alpha_f p(H-z)x_f v' + \alpha_f p(H-z)d_f^2 \theta' \quad \dots \text{II.52.c}$$

Para o conjunto dos pórticos, em forma matricial, vem:

$$\begin{Bmatrix} Q_{f,ext,x} \\ Q_{f,ext,y} \\ Q_{f,ext,z} \end{Bmatrix} = \sum_f \alpha_f p(H-z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_f \\ 0 & 1 & x_f \\ -y_f & x_f & d_f^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad \dots \text{II.53}$$

ou

$$\{Q_{f,ext}\} = \sum_f \alpha_f p(H-z) [P_f] \{U'\} \quad \dots \text{II.54}$$

onde:

a)  $\{Q_{f,ext}\}$  o vetor das forças cortantes externas de vidas aos pórticos, é

$$\{Q_{f,ext}\} = \begin{Bmatrix} Q_{f,ext,x} \\ Q_{f,ext,y} \\ Q_{f,ext,z} \end{Bmatrix} \quad \dots \text{II.55.a}$$

$$b) \quad [P_f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_f \\ 0 & 1 & x_f \\ -y_f & x_f & d_f^2 \end{bmatrix} \quad \dots \text{II.55.b}$$

e  $\{U'\}$  é dado pela derivada primeira do vetor dos deslocamentos do diafragma genérico, equação II.38.d.

b.5) Nas paredes

$$Q_{w,ext,x} = \alpha_w p(H-z)u' - \alpha_w p(H-z)y_{cg} \theta' \quad \dots \text{II.56.a}$$

$$Q_{w,ext,y} = \alpha_w p(H-z)v' + \alpha_w p(H-z)x_{cg} \theta' \quad \dots \text{II.56.b}$$

$$Q_{w,ext,z} = -\alpha_w p(H-z)y_{cg} u' + \alpha_w p(H-z)x_{cg} v' + \alpha_w p(H-z) \frac{J_x + J_y}{A} \theta' \quad \dots \text{II.56.c}$$

do mesmo modo, para o conjunto de paredes, tem-se, em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} Q_{w,ext,x} \\ Q_{w,ext,y} \\ Q_{w,ext,z} \end{Bmatrix} = \sum_w \alpha_w p(H-z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_{cg} \\ 0 & 1 & x_{cg} \\ -y_{cg} & x_{cg} & \frac{J_x + J_y}{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad \dots \text{II.57}$$

ou

$$\{Q_{w,ext}\} = \sum_w \alpha_w p(H-z) [P_w] \{U'\} \quad \dots \text{II.58}$$

onde:

a)  $\{Q_{w,ext}\}$  o vetor das forças cortantes externas de vidas às paredes, é:

$$\{Q_{w,ext}\} = \begin{Bmatrix} Q_{w,ext,x} \\ Q_{w,ext,y} \\ Q_{w,ext,z} \end{Bmatrix} \quad \dots \text{ II.59.a}$$

b)

$$[P_w] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_{cg} \\ 0 & 1 & x_{cg} \\ -y_{cg} & x_{cg} & \frac{J_x + J_y}{A} \end{bmatrix} \quad \dots \text{ II.59.b}$$

e  $\{U'\}$  é dado pela derivada primeira da equação II.38.d.

A força cortante externa total na estrutura é a soma das equações II.54 e II.58.

$$\{Q_{ext}\} = \sum_f \alpha_f p(H-z) [P_f] \{U'\} + \sum_w \alpha_w p(H-z) [P_w] \{U'\} \quad \dots \text{ II.60}$$

definindo

$$[P_{tf}] = \sum_f \alpha_f p [P_f] \quad \dots \text{ II.61}$$

e

$$[P_{tw}] = \sum_w \alpha_w p [P_w] \quad \dots \text{ II.62}$$

substituindo-se as equações II.61 e II.62 em II.60, ob  
tém-se:

$$\{Q_{ext}\} = (H-z) [P_{tf}] \{U'\} + (H-z) [P_{tw}] \{U'\} \dots \text{II.63}$$

ou

$$\{Q_{ext}\} = (H-z) [P_T] \{U'\} \dots \text{II.64}$$

onde

$$[P_T] = [P_{tf}] + [P_{tw}] \dots \text{II.65}$$

A condição de equilíbrio é obtida igualando-se as equações II.37 e II.64 que, escrita de uma forma conveniente, fica:

$$[J] \{U'''\} - [S] \{U'\} + (H-z) [P_T] \{U'\} = \{0\} \dots \text{II.66}$$

Com a finalidade de baixar a ordem do sistema de equação diferencial II.66, define-se:

$$\{d(\epsilon)\} = \{U'\} \dots \text{II.67.a}$$

de onde, pode-se escrever

$$\{U'''\} = \frac{1}{H^2} \{d(\epsilon)\} \dots \text{II.67.b}$$

sendo  $\epsilon$  dado por II.6.a.

Usando as equações II.67 em II.66, obtém-se:

$$[J] \{d''(\epsilon)\} - H^2 [S] \{d(\epsilon)\} + H^3 (1-\epsilon) [P_T] \{d(\epsilon)\} = \{0\} \dots \text{II.68}$$

As condições de contorno, bem como a solução da equação II.68 que levam à obtenção da carga crítica do sistema, constam do Apêndice C.

## EXEMPLO NUMÉRICO - II.3

Deseja-se determinar a carga crítica do sistema estrutural da Fig. II.10, constituído de paredes e pórticos. Os números inscritos em círculos identificam os painéis, e os inscritos em quadrados identificam os pilares dos pórticos.

Os painéis mantêm suas características elasto-geométricas constantes ao longo da altura.

As seções transversais dos painéis 5, 6 e 7 medem, respectivamente, 25x200cm, 25x200cm e 25x250cm; enquanto as seções dos pilares dos painéis 1, 2 e 3 medem 40x40cm. As seções transversais das vigas destes painéis medem 20x40cm.

As setas no desenho indicam o sentido positivo dos deslocamentos. O edifício tem 20 andares com 3 metros de altura por andar. Para E tomou-se o valor de  $2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ .

Em benefício da clareza, deixou-se de enumerar o painel 4.

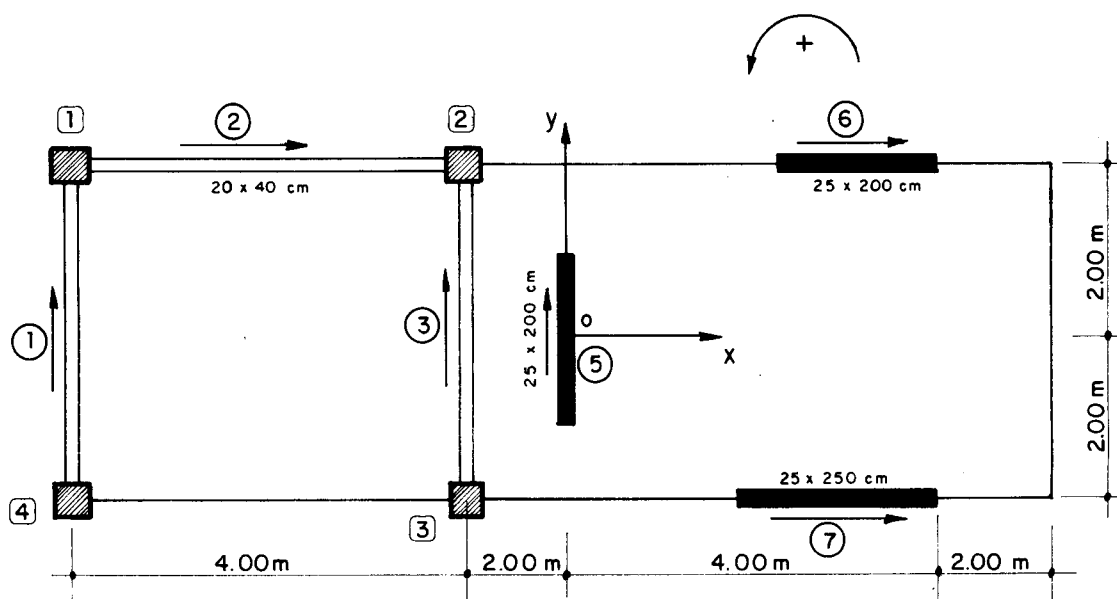


FIG.II-10-ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAREDES E PÓRTICO

a) Momentos de inércia das paredes

a.1) Painéis 5 e 6

$$J_5 = J_6 = \frac{0,25 \times 2,00^3}{12} = 1,67 \times 10^{-1} \text{ m}^4$$

ou

$$j_5 = j_6 = 3,34 \times 10^5 \text{ tfm}^2$$

a.2) Painel 7

$$J_7 = \frac{0,25 \times 2,5^3}{12} = 3,26 \times 10^{-1} \text{ m}^4$$

ou

$$j_7 = 6,52 \times 10^5 \text{ tfm}^2$$

b) Momentos de inércia relativos aos pórticos

b.1) Pilares

$$J_p = \frac{0,40 \times 0,40^3}{12} = 2,134 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

ou

$$k_p = \frac{J_p}{\ell} = \frac{2,134 \times 10^{-3}}{3,0} = 7,11 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$



## b.2) Vigas

$$J_v = \frac{0,20 \times 0,40^3}{12} = 1,067 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

ou

$$k_v = \frac{J_v}{l} = \frac{1,067 \times 10^{-3}}{4,0} = 2,67 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

## c) Rigidez do pórtico

Segundo a equação A.6 do Apêndice A tem-se:

$$s_f = \frac{12 \times 2,0 \times 10^6}{3,0} \times 2 \left[ 7,11 \times 10^{-4} \frac{2,67 \times 10^{-4}}{2 \times 7,11 \times 10^{-4} + 2,67 \times 10^{-4}} \right]$$

$$s_f \cong 1798 \text{ tf}$$

## d) Características das paredes

Painel	$a_w$	$b_w$	$c_w$	$j_w$
5	0	+1,0	0	$3,34 \times 10^5$
6	+1,0	0	-2,0	$3,34 \times 10^5$
7	+1,0	0	+2,0	$6,52 \times 10^5$

## e) Características dos pórticos

Painel	$a_f$	$b_f$	$c_f$	$s_f$
1	0	+1,0	-6,0	1798
2	+1,0	0	-2,0	1798
3	0	+1,0	-2,0	1798

Os elementos da matriz de rigidez à flexão e da matriz de rigidez à força cortante, são obtidos usando-se as equações II.38, de tal modo que:

$$[J] = \begin{bmatrix} 986 & 0 & 636 \\ 0 & 334 & 0 \\ 636 & 0 & 3944 \end{bmatrix} \times 10^3 ; [S] = \begin{bmatrix} 1798 & 0 & -3596 \\ 0 & 3596 & -14384 \\ -3596 & -14384 & 79112 \end{bmatrix}$$

f) Determinação das matrizes posição dos pilares dos pórticos

Pela equação II.55.b, obtém-se:

$$[P_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2,0 \\ 0 & 1 & -6,0 \\ -2,0 & -6,0 & 40,0 \end{bmatrix} \quad [P_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2,0 \\ 0 & 1 & -2,0 \\ -2,0 & -2,0 & 8,0 \end{bmatrix}$$

$$[P_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2,0 \\ 0 & 1 & -2,0 \\ 2,0 & -2,0 & 8,0 \end{bmatrix} \quad [P_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2,0 \\ 0 & 1 & -6,0 \\ 2,0 & -6,0 & 40,0 \end{bmatrix}$$

g) Determinação das matrizes posição das paredes

Pela equação II.59.b, obtém-se:

$$[P_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,334 \end{bmatrix} \times p \quad [P_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2,0 \\ 0 & 1 & 3,0 \\ -2,0 & 3,0 & 13,34 \end{bmatrix} \times p$$

$$[P_7] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2,0 \\ 0 & 1 & 2,75 \\ 2,0 & 2,75 & 12,10 \end{bmatrix} \times p$$

h) Para os quinhões de carga para cada painel, tomou-se os seguintes valores de  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0,125 & \alpha_5 &= 0,292 \\ \alpha_2 &= 0,094 & \alpha_6 &= 0,1875 \\ \alpha_3 &= 0,042 & \alpha_7 &= 0,1875 \\ \alpha_4 &= 0,072 & & \end{aligned}$$

Então, usando as equações II.61, II.62 e II.65, obtém-se:

$$[P_T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,21 \\ 0 & 1 & -0,0885 \\ -0,21 & -0,0885 & 11,531 \end{bmatrix}$$

i) Montagem do sistema de equação diferencial da estrutura

De acordo com a equação II.66, o sistema estrutural da Fig. II.10 fica representado por:

$$\begin{bmatrix} 986 & 0 & 636 \\ 0 & 334 & 0 \\ 636 & 0 & 3944 \end{bmatrix} \times 10^3 \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1798 & 0 & -3596 \\ 0 & 3596 & -14384 \\ -3596 & -14384 & 79112 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix}$$

$$+ (60-z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,21 \\ 0 & 1 & -0,0885 \\ -0,21 & -0,0885 & 11,531 \end{bmatrix} \times p \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} = \{0\}$$

j) A solução simultânea do sistema de equação diferencial acima, por Série de Potências, forneceu os resultados a apresentados na Tabela II.3.

TABELA II.3

Nº de Termos da Série	Grau do Polinômio	Menor Raiz Real Positiva	Nº de Termos da Série	Grau do Polinômio	Menor Raiz Real Positiva
3	3º	12,06	13	18º	32,34
4	3º	36,20	14	18º	57,39
5	6º	*	15	21º	102,67
6	6º	18,90	16	21º	36,15
7	9º	24,60	17	24º	37,93
8	9º	*	18	24º	38,02
9	12º	28,00	19	27º	37,45
10	12º	27,64	20	27º	37,69
11	15º	88,45	21	30º	37,72
12	15º	96,72	22	30º	37,70

\* O polinômio não possui raiz real positiva

logo,

$$P_{crit} = 37,70 \text{ tf/m}$$

II.7 - NÚCLEO DE PAREDES DE SEÇÃO ABERTA CONTRAVENTADAS  
POR LINTÉIS

Seja a Fig. II.11, onde mostra-se um núcleo estrutural com dois eixos de simetria, compostos de duas paredes de seção aberta contraventadas por lintéis ao nível dos andares.

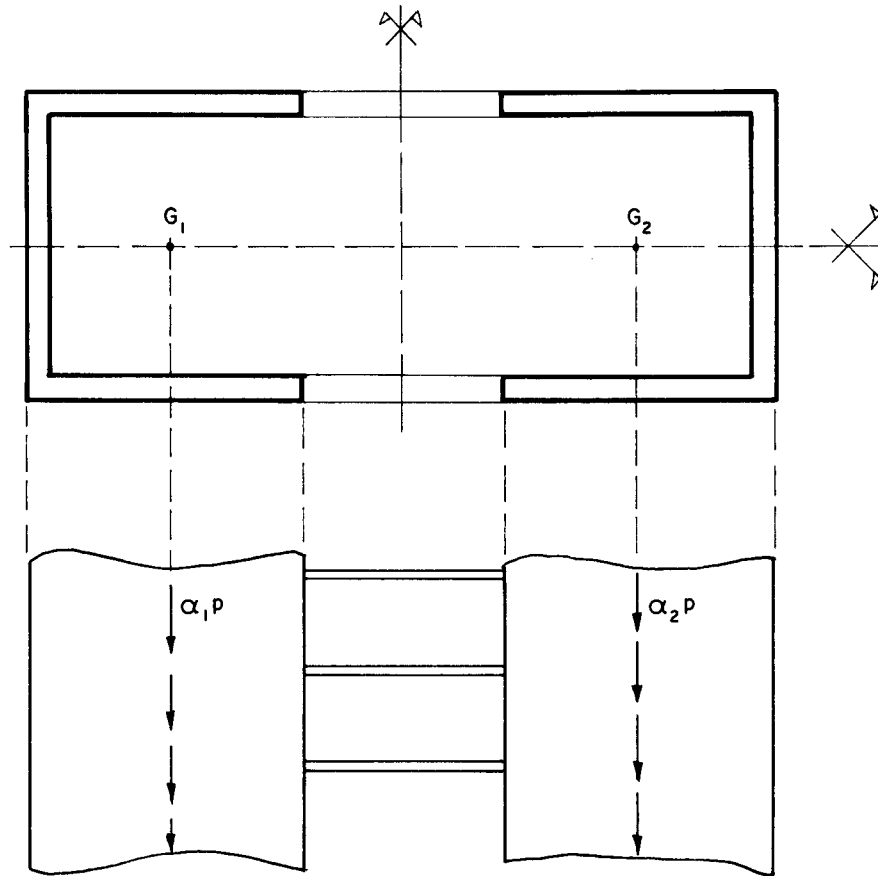


FIG. II- 11- ESTRUTURA A SER ANALISADA

Para melhor definir a estrutura, considera-se os sistemas de referências, conforme Fig. II.12.

- I) Sistema local de referência  $O_i x_i y_i z_i$  em cada parede, sendo os eixos  $O_i x_i$  e  $O_i y_i$  coincidentes com os eixos

principais de inércia da seção transversal de cada parede, e o eixo  $O_i z_i$  vertical orientado da base para o topo da parede.

II) Um sistema global de referência  $Oxyz$ , sendo os eixos  $Ox$  e  $Oy$  coincidentes com os eixos de simetria da seção transversal do núcleo, e o eixo  $Oz$  vertical orientado da base para o topo.

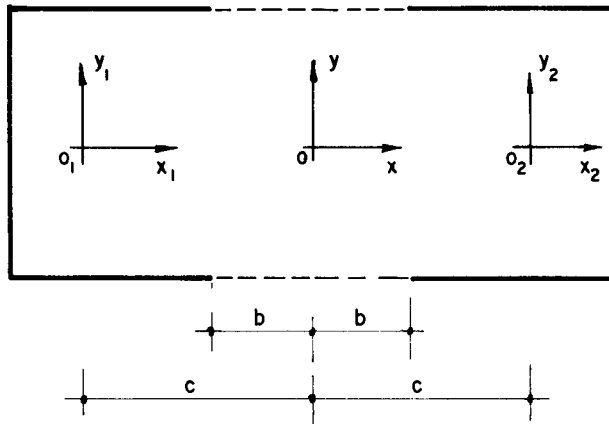


FIG. II-12- SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Na Fig. II.12, "b" é a distância do ponto médio do lintel até sua extremidade engastada com a parede e "c" a distância entre o centro de gravidade do núcleo e o centro de gravidade de cada parede.

Os deslocamentos positivos são aqueles indicados na Fig. II.13; para a rotação considera-se o observador olhando do topo para a base do edifício.

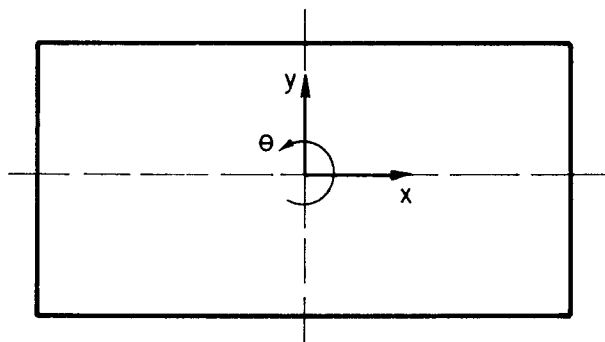


FIG. II- 13- CONVENÇÃO DOS DESLOCAMENTOS POSITIVOS

As cargas uniformemente distribuídas ao longo da altura,  $\alpha_1 p$  e  $\alpha_2 p$ , estão aplicadas nos centros de gravidade das seções transversais de cada parede.

Para calcular o valor  $p_{crit}$ , que produz a perda de estabilidade do conjunto, o cálculo será feito desenvolvendo inicialmente as expressões dos esforços internos na estrutura como um todo, isto é, serão calculados a força cortante segundo  $x$ , a força cortante segundo  $y$  e o momento de torção segundo  $\theta$ , em toda a seção horizontal da estrutura.

Devido à simetria conclui-se que:

- a) Para deslocamentos  $u$  segundo  $x$ , tem-se apenas força cortante  $Q_x$ .
- b) Para deslocamentos  $v$  segundo  $y$ , tem-se apenas força cortante  $Q_y$ .
- c) Para deslocamento  $\theta$  segundo  $z$ , tem-se apenas momento de torção  $Q_z$ .

Passa-se à determinação das equações de equilíbrio segundo  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Esta determinação é encontrada na bibliografia (7), (10) e (11), também utilizando a técnica do meio contínuo. É também suposto que os pontos médios das vigas dos andares são pontos de momento nulo.

a) Deslocamento na direção  $x$

MANCINI(7) utilizando a técnica do meio contínuo e desprezando os deslocamentos axiais dos pilares individuais e usando o equilíbrio no elemento  $dz$  do núcleo, Fig. II.14, encontra a seguinte equação:

$$Q_{x_1} = -j_{y_1} u'' + 2qc \quad \dots \text{II.69}$$

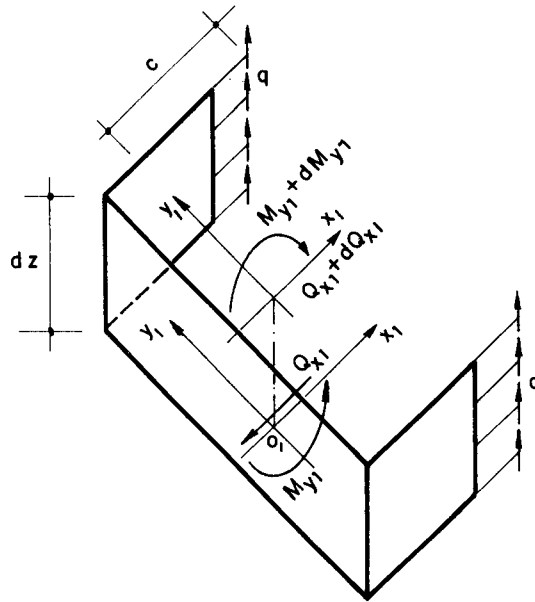


FIG.II-14 - ESFORÇOS NO ELEMENTO  $dz$  DO NÚCLEO

onde :

- a)  $Q_{x1}$  é o esforço cortante na direção  $x_1$  na parede 1
- b)  $j_{y1}$  é o produto de inércia da parede 1 isoladamente, em relação ao eixo  $O_1y_1$ , passando pelo seu centro de gravidade.
- c) As forças cortantes que aparecem nos lintéis, são consideradas uniformemente distribuídas ao longo do espaçamento entre os lintéis, e aqui chamadas de  $q$ .

O valor de  $q$  é determinado compatibilizando os deslocamentos nos pontos de momento nulo dos lintéis.

A equação de compatibilidade para tais deslocamentos é:

$$u'c - q \frac{hb^3}{3Ei} = -u'c + q \frac{hb^3}{3Ei} \quad \dots \text{II.70}$$

onde :

- a)  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal.



b)  $i$  é o momento de inércia do lintel.

c)  $h$  é a altura dos andares.

Na equação II.70, foram desprezadas as deformações devidas à força normal nas paredes e à força cortante nos lintéis.

Escrevendo a equação II.70 de um modo conveniente, tem-se:

$$q = \frac{3E}{2h} \left[ i \frac{2c}{b^3} \right] u' \quad \dots \text{II.71}$$

substituindo a equação II.71 em II.69, encontra-se:

$$Q_{x_1} = -j_{y_1} u''' + \frac{3E}{2h} \left[ i \frac{(2c)^2}{b^3} \right] u' \quad \dots \text{II.72}$$

Como são duas paredes o esforço cortante total na direção  $x$  é:

$$Q_x = -2j_{y_1} u''' + \frac{3E}{2h} \left[ 2 i \frac{(2c)^2}{b^3} \right] u' \quad \dots \text{II.73.a}$$

b) Deslocamento na direção  $y$

A força cortante  $Q_y$ , na direção  $y$ , é determinada de modo análogo ao que se procedeu para a força cortante na direção  $x$ . Entretanto, deve-se observar que neste caso, os lintéis não trabalham e a equação de  $Q_y$  fica somente:

$$Q_y = -2 j_{x_1} v''' \quad \dots \text{II.73.b}$$

onde  $j_{x_1}$  é o produto de inércia de cada uma das paredes em relação ao eixo  $O_1 x_1$ .

c) Deslocamento na direção  $\theta$

O equilíbrio à rotação na seção transversal do núcleo, permite obter conforme BARBOSA(10) e segundo a Fig. II.15.

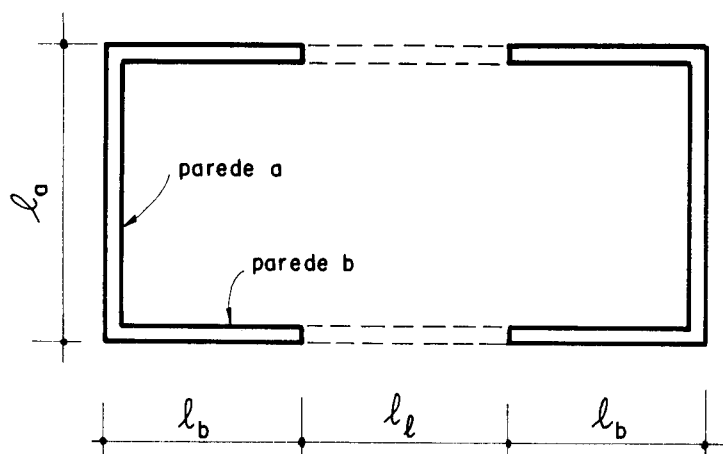


FIG. II-15- SEÇÃO TRANSVERSAL DO NÚCLEO

$$Q_z = -J^* \theta''' + S^* \theta' \quad \dots \text{II.73.c}$$

onde:

$$J^* = \frac{EA_b}{4} l_a^2 (3l_b + l_l)^2 + \frac{1}{2} \left[ 2j_b l_a^2 + j_a (2l_b + l_l)^2 \right] \quad \dots \text{II.74.a}$$

$$S^* = \frac{24Ei}{h l_l^3} (2l_b + l_l)^2 l_a^2 + 2G(2J_{tb} + J_{ta}) \quad \dots \text{II.74.b}$$

Nas expressões II.74 o índice "a" refere-se à parede "a" assim designada na Fig. II.15; da mesma forma, o índice "b" refere-se à parede "b".

Ainda nas expressões II.74 tem-se:

- a) E é o módulo de elasticidade longitudinal.
- b) A é a área da seção transversal.

- c)  $j$  é o produto de inércia  $EJ$ .
- d)  $i$  é o momento de inércia da seção transversal dos lintéis.
- e)  $h$  é a altura dos andares.
- f)  $G$  é o módulo de elasticidade transversal.
- g)  $J_t$  é o momento de inércia à torção.

As equações II.73 representam a força cortante interna do núcleo, e podem ser escritas da seguinte forma:

$$Q_x = -2j_{y_1} u''' + 2s_g u' \quad \dots \text{II.75.a}$$

$$Q_y = -2j_{x_1} v''' \quad \dots \text{II.75.b}$$

$$Q_z = -J^* \theta''' + S^* \theta' \quad \dots \text{II.75.c}$$

onde:

$$s_g = \frac{3Ei}{2hb^3} (2c)^2 \quad \dots \text{II.76}$$

Passa-se agora à determinação das forças cortantes externas, devidas ao efeito de segunda ordem, quando são impostos separadamente os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $\theta$ .

Para o deslocamento " $u$ " segundo o eixo  $Ox$  tem-se:

$$Q_x = \alpha p(H-z)u' \quad \dots \text{II.77.a}$$

onde  $\alpha$  é dado pela expressão:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \dots \text{II.78}$$

e  $H$  é a altura do edifício.

Tem-se ainda para este deslocamento:

$$Q_y = 0 \quad \dots \text{II.77.b}$$

$$Q_z = 0 \quad \dots \text{II.77.c}$$

Impondo o deslocamento  $v$ , obtém-se:

$$Q_x = 0 \quad \dots \text{II.79.a}$$

$$Q_y = (\alpha_1 + \alpha_2)p(H-z)v' \quad \dots \text{II.79.b}$$

$$Q_z = (\alpha_2 - \alpha_1)p(H-z)v'c \quad \dots \text{II.79.c}$$

na equação II.79.c, o momento de torção positivo  $Q_z$  é aquele no sentido anti-horário.

Para a rotação imposta  $\theta$ , considera-se inicialmente um elemento infinitesimal da parede à direita (parede 2), conforme Fig. II.16.

A força cortante elementar na parede 2, é:

$$dQ = \frac{\alpha_2 p}{A_2} (H-z) dA_2 \theta' r \quad \dots \text{II.80}$$

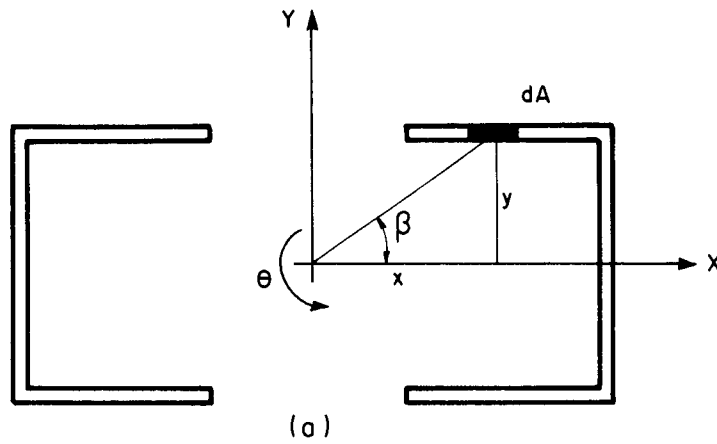
que decomposta nas três direções dos deslocamentos fornece:

$$dQ_{\text{ext},x} = - \frac{\alpha_2 p}{A_2} (H-z) dA_2 \theta' y \quad \dots \text{II.81.a}$$

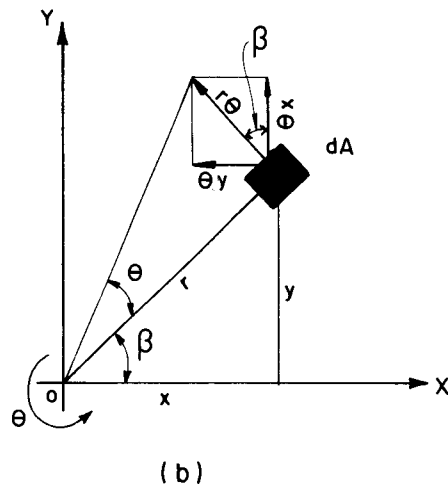
$$dQ_{\text{ext},y} = \frac{\alpha_2 p}{A_2} (H-z) dA_2 \theta' x \quad \dots \text{II.81.b}$$

$$dQ_{\text{ext},z} = \frac{\alpha_2 p}{A_2} (H-z) dA_2 \theta' r^2 \quad \dots \text{II.81.c}$$

integrando as equações II.81, tem-se para a parede 2:



Posição do elemento infinitesimal dA



Deslocamento do elemento infinitesimal dA

FIG. II-16 - DESLOCAMENTO NA DIREÇÃO "θ"

$$Q_{ext,x} = - \frac{\alpha_2 P}{A_2} (H-z) \theta' \int y dA_2 \quad \dots \text{ II.82.a}$$

$$Q_{ext,y} = \frac{\alpha_2 P}{A_2} (H-z) \theta' \int x dA_2 \quad \dots \text{ II.82.b}$$

$$Q_{ext,z} = \frac{\alpha_2 P}{A_2} (H-z) \theta' \int r^2 dA_2 \quad \dots \text{ II.82.c}$$

da mesma forma, para a parede 1, obtém-se:

$$Q_{\text{ext},x} = - \frac{\alpha_1 p}{A_1} (H-z) \theta' \int y dA_1 \quad \dots \text{II.83.a}$$

$$Q_{\text{ext},y} = \frac{\alpha_1 p}{A_1} (H-z) \theta' \int x dA_1 \quad \dots \text{II.83.b}$$

$$Q_{\text{ext},z} = \frac{\alpha_1 p}{A_1} (H-z) \theta' \int r^2 dA_1 \quad \dots \text{II.83.c}$$

observa-se que na equação II.83.b, os valores de  $x$  para a parede 1 são negativos.

Somando as forças nas duas paredes, observando que o momento estático da seção em relação ao eixo  $x$  é nulo, e por simetria, que  $A_2 = A_1 = A$ , resulta:

$$Q_{\text{ext},x} = 0 \quad \dots \text{II.84.a}$$

$$Q_{\text{ext},y} = (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{p}{A} (H-z) \theta' \int_{\text{parede 2}} x dA \quad \dots \text{II.84.b}$$

$$Q_{\text{ext},z} = (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{p}{A} (H-z) J_{z_2} \theta' \quad \dots \text{II.84.c}$$

ou, de outra forma:

$$Q_{\text{ext},x} = 0 \quad \dots \text{II.85.a}$$

$$Q_{\text{ext},y} = (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{p}{A} (H-z) M_s \theta' \quad \dots \text{II.85.b}$$

$$Q_{\text{ext},z} = (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{p}{A} (H-z) J_{z_2} \theta' \quad \dots \text{II.85.c}$$

onde:

- a)  $M_s$  é o momento estático da seção da parede 2 em relação ao eixo  $Oy$ .

b)  $J_{z_2}$  é o momento polar de inércia da parede 2 em relação ao eixo vertical  $Oz$ .

Portanto a força cortante externa total, é dada, a partir das equações II.77, II.79 e II.85.

$$Q_{ext,x} = \alpha p (H-z) u' \quad \dots \text{II.86.a}$$

$$Q_{ext,y} = \alpha p (H-z) v' + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{p}{A} (H-z) M_s \theta' \quad \dots \text{II.86.b}$$

$$Q_{ext,z} = (\alpha_2 - \alpha_1) p (H-z) v' c + \alpha \frac{p}{A} (H-z) J_{z_2} \theta' \quad \dots \text{II.86.c}$$

onde nota-se que  $\frac{M_s}{A} = c$ .

A condição de equilíbrio permite igualar as equações II.75 com II.86. Escrevendo em forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} -2j_{y_1} & 0 & 0 \\ 0 & -2j_{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & -J^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2s_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} - p(H-z) \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & (\alpha_2 - \alpha_1)c \\ 0 & (\alpha_2 - \alpha_1)c & \frac{\alpha J_{z_2}}{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \dots \text{II.87}$$

ou

$$[J] \{U'''\} - [S] \{U'\} + p(H-z) [P_T] \{U'\} = \{0\} \quad \dots \text{II.88}$$

onde

$$[J] = \begin{bmatrix} 2j_{y_1} & 0 & 0 \\ 0 & 2j_{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & J^* \end{bmatrix} \quad \dots \text{II.89.a}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 2s_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^* \end{bmatrix} \quad \dots \text{II.89.b}$$

$$[P_T] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & (\alpha_2 - \alpha_1)c \\ 0 & (\alpha_2 - \alpha_1)c & \frac{\alpha J z_2}{A} \end{bmatrix} \quad \dots \text{II.89.c}$$

e

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad \dots \text{II.89.d}$$

Utilizando II.6.a, II.67.a e II.67.b em II.88



com o objetivo de diminuir a ordem da equação diferencial do núcleo, fica:

$$[J]\{d'''(\epsilon)\} - H^2[S]\{d(\epsilon)\} + H^3(1-\epsilon)[P_T]\{d(\epsilon)\} = \{0\} \quad \dots \text{II.90}$$

A condição de contorno, bem como a solução da equação II.90, que fornece a carga crítica do sistema, constam no Apêndice C.

#### EXEMPLO NUMÉRICO - II.4

Determinar a carga crítica do núcleo estrutural da Fig. II.17. O núcleo, composto de duas paredes de seção aberta contraventadas por lintéis, fornece dois eixos de simetria e é rigidamente angastado na base.

A estrutura mantém suas características elasto-geométricas constantes ao longo da altura e suas dimensões são indicadas na Fig. II.17. As vigas têm seção transversal de 15 x 30 cm.

O carregamento, constituído de carga vertical uniformemente distribuída ao longo da altura, atuando nos centros de gravidade das paredes.

O núcleo tem 60 metros de altura com 3 metros para cada andar.

Para E toma-se o valor  $2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ .

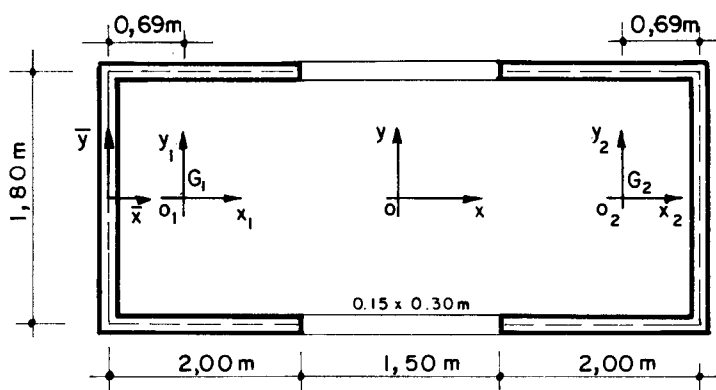


FIG. II-17 - DIMENSÕES DA SEÇÃO TRANSVERSAL DO NÚCLEO

a) Posição do centro de gravidade das paredes

Sendo o eixo  $O_1x_1$  de simetria, conclui-se facilmente que o centro de gravidade está sobre o referido eixo, logo:

$$\bar{y} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{(2,00 \times 0,15 \times 1,00) \times 2}{2(2,00 \times 0,15) + 1,80 \times 0,15} = 0,69 \text{ m}$$

b) Momento de inércia das paredes 1 e 2

$$J_{x_1} = J_{x_2} = \frac{0,15 \times 1,80^3}{12} + 2 \left( \frac{2,00 \times 0,15^3}{12} + 2,00 \times 0,15 \times 0,90^2 \right)$$

$$J_{x_1} = J_{x_2} = 0,560025 \text{ m}^4$$

e

$$j_{x_1} = j_{x_2} = EJ_{x_1} = 1.120.050 \text{ tf} \cdot \text{m}^2$$

$$J_{y_1} = J_{y_2} = \left( \frac{0,15 \times 2,00^3}{12} + 2,00 \times 0,15 \times 0,31^2 \right) \times 2 + \left( \frac{1,80 \times 0,15^3}{12} + 1,80 \times 0,15 \times 0,69^2 \right)$$

$$J_{y_1} = J_{y_2} = 0,38671325 \text{ m}^4$$

e

$$j_{y_1} = j_{y_2} = EJ_{y_1} = 773426,50 \text{ tf} \cdot \text{m}^2$$

c) Momento de inércia do lintel

$$i = \frac{0,15 \times 0,30^3}{12} = 3,375 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

d) Momento de inércia à torção

$$J_{tb} = \frac{1}{3} \times 0,15^3 \times 2,0 = 2,25 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$J_{ta} = \frac{1}{3} \times 0,15^3 \times 1,80 = 2,025 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$J_t = 2J_{tb} + J_{ta} = 6,525 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

e) Momento polar de inércia

$$J_{z_2} = J_{x_2} + J_{y_2}$$

$$J_{z_2} = 0,560025 + 0,38671325 = 0,94673825 \text{ m}^4$$

f) Determinação de S\*

$$A_b = 2,00 \times 0,15 = 0,30 \text{ m}^2$$

$$j_b = 2,0 \times 10^6 \times \frac{0,15 \times 2,00^3}{12} = 2 \times 10^5 \text{ tfm}^2$$

$$j_a = 2,0 \times 10^6 \times \frac{0,15 \times 1,80^3}{12} = 1,458 \times 10^5 \text{ tfm}^2$$

$$l_b = 2,00 \text{ m}$$

$$l_l = 1,50 \text{ m}$$

$$l_a = 1,80 \text{ m}$$

$$G = 8,0 \times 10^5 \text{ tf/m}^2$$

Usando a equação II.74.b, tem-se:

$$S^* = \frac{24 \times 2,0 \times 10^6 \times 3,375 \times 10^{-4}}{3,0 \times 1,50^3} (2 \times 2,00 + 1,50)^2 \times 1,80^2 +$$

$$+ 2 \times 8 \times 10^5 \times 6,525 \times 10^{-3}$$

$$S^* = 167256 \text{ tf} \cdot \text{m}^2$$

g) Determinação de  $s_g$

Pela equação II.76, obtém-se:

$$s_g = \frac{3 \times 2,0 \times 10^6 \times 3,375 \times 10^{-4}}{2 \times 3,0 \times 0,75^3} (2 \times 2,06)^2$$

$$s_g = 13579,52 \text{ tf}$$

h) Determinação de  $J^*$

Pela equação II.74.a, tem-se

$$J^* = \frac{2 \times 10^6 \times 0,30}{4} 1,80^2 (3 \times 2,00 + 1,50)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ 2 \times 2 \times 10^5 \times 1,80^2 + 1,458 \times 10^5 (2 \times 2,00 + 1,50)^2 \right]$$

$$J^* = 30190725 \text{ tf} \cdot \text{m}^4$$

i) Montagem do sistema de equação diferencial

Utilizando as equações II.89, e tomando **para**  
 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$ , chega-se a:

$$[J] = \begin{bmatrix} 1546853 & 0 & 0 \\ 0 & 2240100 & 0 \\ 0 & 0 & 30190725 \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 27159 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 167256 \end{bmatrix}$$

$$[P_T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0882 \end{bmatrix}$$

Portanto o sistema de equações diferenciais do núcleo estrutural, conforme II.88, fica:

$$\begin{bmatrix} 1546853 & 0 & 0 \\ 0 & 2240100 & 0 \\ 0 & 0 & 30190725 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 27159 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 167256 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} + (60-z) p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0882 \end{bmatrix} = \{0\}$$

j) A solução simultanea do sistema de equação diferencial acima, por Série de Potências, forneceu os resultados da Tabela II.4.

TABELA II.4

Nº de Termos da Série	Grau do Polinômio	Menor Raiz Real Positiva	Nº de Termos da Série	Grau do Polinômio	Menor Raiz Real Positiva
3	3º	20,74	13	18º	80,35
4	3º	62,23	14	18º	81,46
5	6º	*	15	21º	81,35
6	6º	50,12	16	21º	81,24
7	9º	57,94	17	24º	81,28
8	9º	*	18	24º	81,28
9	12º	79,54	19	27º	81,28
10	12º	73,06	20	27º	81,28
11	15º	87,66	21	30º	81,28
12	15º	82,14	22	30º	81,28

\* O polinômio não possui raiz real positiva

portanto,

$$P_{crit} = 81,28 \text{ tf/m}$$

CAPÍTULO IIIINFLUÊNCIA DOS LINTÉIS NA DISTRIBUIÇÃO DE CARGA VERTICAL  
ENTRE PAINÉIS-PAREDES COM VÍNCULOS ELÁSTICOS

## III.1 - INTRODUÇÃO

As associações planas de paredes unidas por lintéis, sujeitas a carga vertical, despertam interesse especial, para os casos de carregamentos que produzem deslocamentos axiais relativos entre as paredes, ocasionando, devido a presença de lintéis, uma transferência de carga da parede "mais carregada" para aquela "menos carregada".

Três modelos estruturais de associação parede-parede ligadas por lintéis, com engastamentos elásticos são considerados. Como no capítulo II, utiliza-se a técnica do meio contínuo em todos os três modelos, onde as lajes e os lintéis são assimilados admitindo-se as mesmas hipóteses anteriores. Os lintéis, por serem rígidos axialmente, gantem uma elástica única para o conjunto.

As paredes e os lintéis, com características elasto-geométricas constantes ao longo da altura, são identificados por numeros inscritos em círculos e quadrados, respectivamente.

Define-se um sistema de eixo Oxz no plano da parede, sendo o eixo Ox horizontal, positivo da esquerda para a direita e o eixo Oz vertical, orientado da base para o topo.

A técnica utilizada conduz a uma equação diferencial de segunda ordem, não homogênea e a coeficientes constantes, cuja solução consta dos Apêndices deste trabalho.

### III.2 - ASSOCIAÇÃO PLANA DE DUAS PAREDES LIGADAS POR LINTÉIS

O primeiro modelo a ser considerado, está representado na Fig. III.1, formado por duas paredes ligadas entre si através de lintéis.

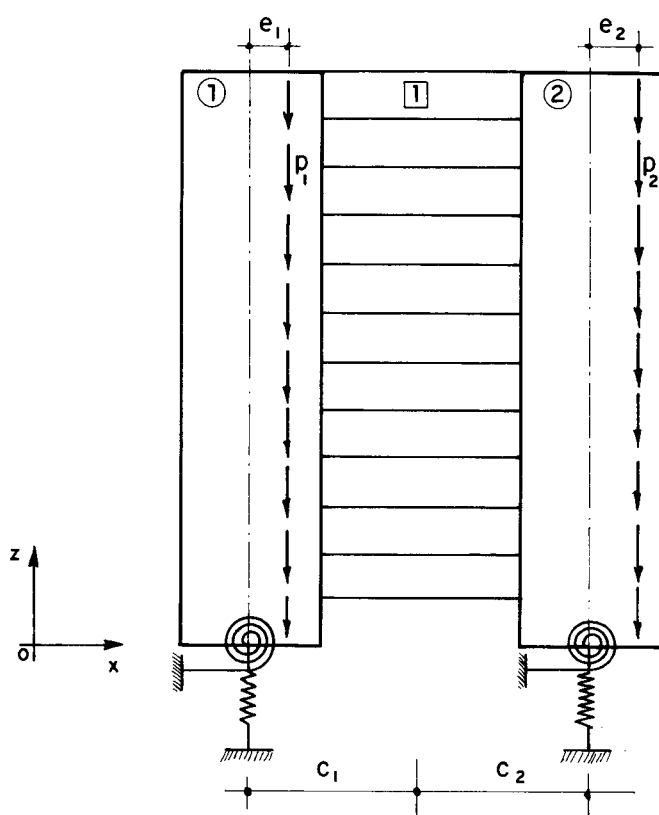


FIG. III-1 - ASSOCIAÇÃO DE PAREDES COM VÍNCULOS ELÁSTICOS

Conforme mostra a figura acima, o carregamento é constituído de cargas verticais  $p_1$  e  $p_2$  uniformemente distribuídas com excentricidade  $e_1$  e  $e_2$ , respectivamente. A distância dos pontos médios dos vãos dos lintéis ao centro de gravidade da seção transversal de cada parede "i" é denominada  $c_i$ .

Indica-se na Fig. III.2, a convenção dos esforços positivos, onde  $q$  é a força cortante distribuída que



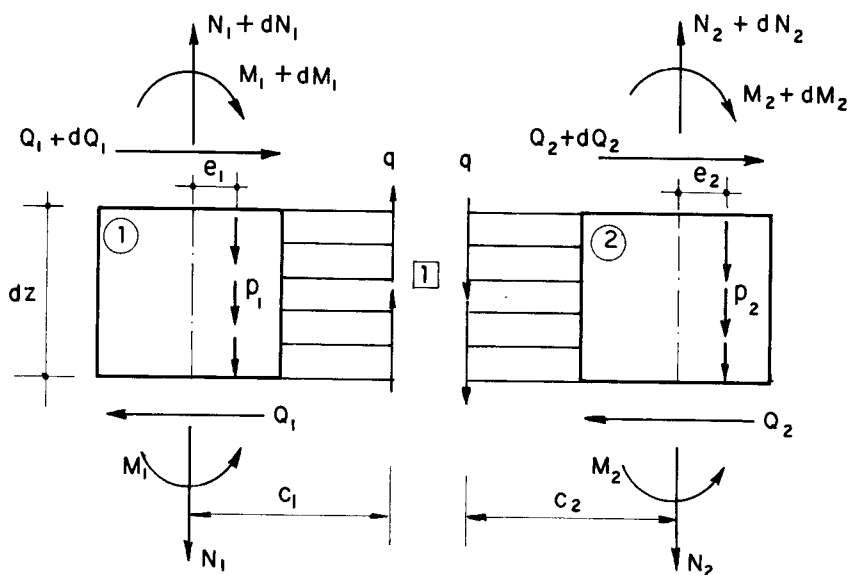


FIG. III-2 - CONVENÇÃO DOS ESFORÇOS POSITIVOS .

atua nos pontos médios dos lintéis, considerados pontos de momento nulo.

Do equilíbrio a rotação e a translação vertical no elemento infinitesimal da parede 1 da Fig. III.2, escrevem-se:

$$Q_1 = -j_1 u''' + q c_1 - p_1 e_1 \quad \dots \text{III.1}$$

$$\frac{dN_1}{dz} = p_1 - q \quad \dots \text{III.2}$$

onde:

- a)  $j_1$  é o produto de rigidez à flexão  $EJ_1$
- b)  $q$  é a força cortante distribuída que atua nos pontos médios dos lintéis.
- c)  $u$  é o deslocamento horizontal.

Procedendo de modo análogo no elemento infinitesimal  $dz$  da parede 2, obtém-se:

$$Q_2 = -j_2 u'''' + q c_2 - p_2 e_2 \quad \dots \text{ III.3}$$

$$\frac{dN_2}{dz} = p_2 + q \quad \dots \text{ III.4}$$

a)  $j_2$  é o produto de rigidez à flexão  $EJ_2$ .

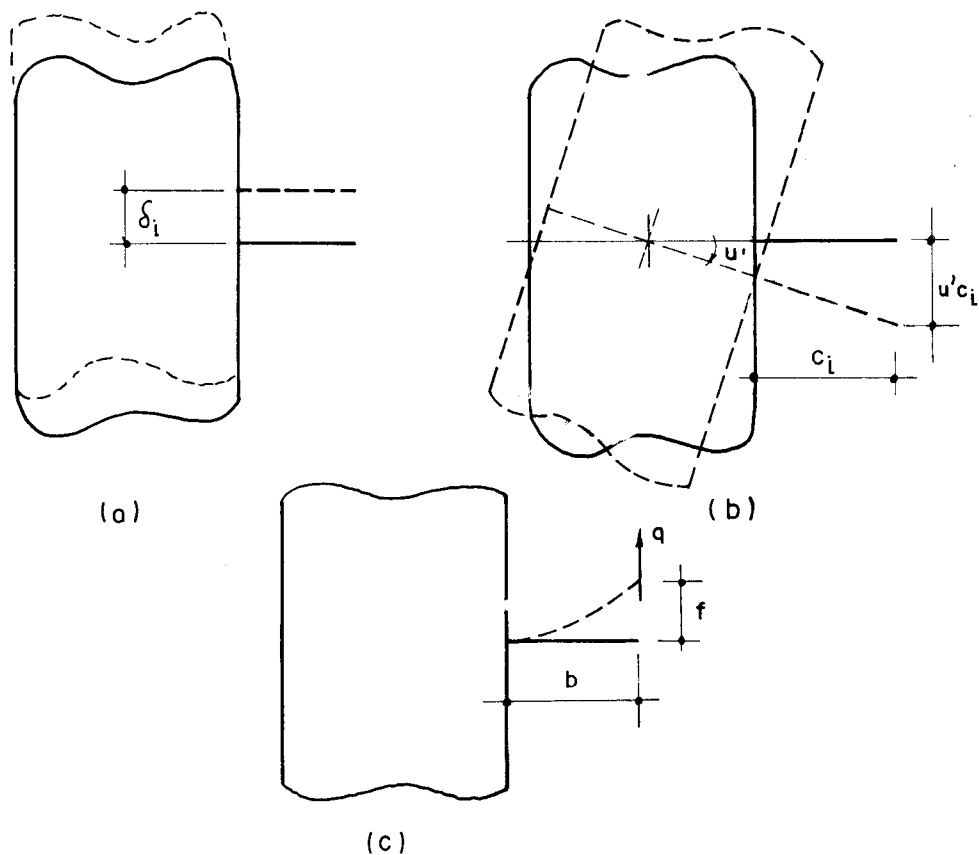


FIG. III-3 - DESLOCAMENTO DO PONTO MÉDIO DOS LINTÉIS

A equação de compatibilidade de deslocamento no ponto médio do lintel, obtida a partir da Fig. III.3, é levada a efeito considerando-se os deslocamentos devido à: deformação da parede  $i$  por força normal ( $\delta_i$ ), Fig. III.3.a; flexão da parede  $i$  ( $u'c_i$ ), Fig. III.3.b; e à deformação do lintel por flexão ( $f$ ), Fig. III.3.c.

Com a convenção de serem positivos os deslocamen

tos da base para o topo, obtém-se:

$$\delta_1 - u'c_1 + f = \delta_2 + u'c_2 - f \quad \dots \text{III.5}$$

Escrevendo "f" em função do esforço cortante distribuído "q", Fig. III.3.c, tem-se:

$$f = \frac{q h b^3}{3 E i} \quad \dots \text{III.6}$$

onde:

- a) h é a distância entre dois lintéis consecutivos.
- b) b é a distância do ponto médio do vão do lintel à extremidade engastada com a parede.
- c) E é o módulo de elasticidade longitudinal.
- d) i é o momento de inércia da seção transversal do lintel.

Substituindo a equação III.6 na equação III.5, e escrevendo de um modo conveniente, obtém-se:

$$\frac{2 h b^3}{3 E i} q = u'(c_1 + c_2) + \delta_2 - \delta_1 \quad \dots \text{III.7}$$

derivando duas vezes em relação a z, fica:

$$\frac{2 h b^3}{3 E i} q'' = u'''(c_1 + c_2) + \delta_2'' - \delta_1'' \quad \dots \text{III.8}$$

A condição de equilíbrio à força cortante permite escrever:

$$Q_1 + Q_2 = 0 \quad \dots \text{III.9}$$

Substituindo as equações III.1 e III.3 em III.9,

e tirando o valor de  $u''$ , obtém-se:

$$u'' = \frac{c}{j} q - \frac{m}{j} \quad \dots \text{III.10}$$

onde:

$$j = j_1 + j_2 \quad \dots \text{III.11.a}$$

$$c = c_1 + c_2 \quad \dots \text{III.11.b}$$

$$m = m_1 + m_2 \quad \dots \text{III.11.c}$$

$$m_i = p_i e_i \quad \dots \text{III.11.d}$$

Usando as equações III.2 e III.4 e lembrando a relação  $N = EA\delta'$ , chega-se a:

$$\delta_1'' = \frac{1}{EA_1} (p_1 - q) \quad \dots \text{III.12.a}$$

$$\delta_2'' = \frac{1}{EA_2} (p_2 + q) \quad \dots \text{III.12.b}$$

Substituindo as equações III.12 e III.10 na equação III.8, e escrevendo adequadamente, obtém-se:

$$\frac{2}{3} \frac{h b^3}{E i} q'' = \left( \frac{c^2}{j} + \frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} \right) q + \frac{p_2}{EA_2} - \frac{p_1}{EA_1} - \frac{mc}{j} \quad \dots \text{III.13}$$

ou de outra forma:

$$t_0 q'' - t_1 q = t_2 \quad \dots \text{III.14}$$

onde:

$$t_0 = \frac{2 h b^3}{3 E i} \quad \dots \text{III.15.a}$$

$$t_1 = \frac{c^2}{j} + \frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} \quad \dots \text{III.15.b}$$

$$t_2 = \frac{P_2}{EA_2} - \frac{P_1}{EA_1} - \frac{mc}{j} \quad \dots \text{III.15.c}$$

As condições de contorno, bem como a solução da equação III.14, são mostradas no Apêndice D. Então, conforme equação D.11, tem-se:

$$q = \left( \frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0} \right) \operatorname{sech} \lambda H \operatorname{ch} \lambda(H-z) - \frac{t_2}{t_1} \quad \dots \text{III.16}$$

onde:

- a)  $\Delta$  cuja determinação efetua-se em momento oportuno, vale

$$\Delta = u'(0) c + \delta_2(0) - \delta_1(0) \quad \dots \text{III.17}$$

- b)  $\lambda$  é uma constante definida por:

$$\lambda = \sqrt{\frac{t_1}{t_0}} \quad \dots \text{III.18}$$

A resultante do esforço cortante no ponto médio do lintel numa seção qualquer é dada por:

$$T = \int_z^H q \, dz \quad \dots \text{III.19}$$

que usando a equação III.16 na equação acima, e integrando obtém-se:

$$\tau = \left( \frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0} \right) \left[ \frac{\operatorname{sech} \lambda H}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda(H-z) \right] - \frac{t_2}{t_1}(H-z)$$

.... III.20

a) Momentos fletores

As equações dos momentos fletores nas paredes 1 e 2, são obtidas a partir de:

$$\frac{dM_1}{dz} = j_1 u''' \quad \text{.... III-21.a}$$

e

$$\frac{dM_2}{dz} = j_2 u''' \quad \text{.... III.21.b}$$

Substituindo a equação III.10 nas equações III.21 e integrando, obtém-se:

$$M_1 = \frac{j_1}{j} \left[ -Tc + m(H-z) \right] \quad \text{.... III.22.a}$$

e

$$M_2 = \frac{j_2}{j} \left[ -Tc + m(H-z) \right] \quad \text{.... III.22.b}$$

b) Esforços cortantes

De maneira análoga, substituindo a equação III.10 nas equações III.1 e III.3, obtém-se para os esforços cortantes:

$$Q_1 = \frac{c_1 j_2 - c_2 j_1}{j} q + \frac{m_2 j_1 - m_1 j_2}{j} \quad \text{.... III.23.a}$$

e

$$Q_2 = - \frac{c_1 j_2 - c_2 j_1}{j} q - \frac{m_2 j_1 - j_2 m_1}{j} \quad \dots \text{III.23.b}$$

## c) Esforços Normais

As equações para os esforços normais nas paredes 1 e 2 são imediatas, a partir da integração de III.2 e III.4.

$$N_1 = -p_1(H-z) + T \quad \dots \text{III.24.a}$$

$$N_2 = -p_2(H-z) - T \quad \dots \text{III.24.b}$$

d) Determinação da constante  $\Delta$ .

Usando a equação III.17, e lembrando que:

$$u'(0) = \frac{M(0)}{k_\theta} \quad \dots \text{III.25.a}$$

$$\delta_1(0) = \frac{N_1(0)}{k v_1} \quad \dots \text{III.25.b}$$

$$\delta_2(0) = \frac{N_2(0)}{k v_2} \quad \dots \text{III.25.c}$$

onde:

- a)  $M(0)$  é a soma dos momentos fletores na base das paredes 1 e 2, portanto

$$M(0) = M_1(0) + M_2(0) \quad \dots \text{III.26.a}$$

- b)  $k_\theta$  é a soma das rigidezes à rotação dos engastamentos elásticos, dado por

$$k_\theta = k_{\theta_1} + k_{\theta_2} \quad \dots \text{III.26.b}$$

de modo que, " $k_{\theta_1}$ " e " $k_{\theta_2}$ ", obedecem a relação abaixo:

$$\frac{k_{\theta_1}}{J_1} = \frac{k_{\theta_2}}{J_2} = \dots = \frac{k_{\theta_n}}{J_n} \quad \dots \text{ III.26.c}$$

A equação III.26.c, decorre de

$$u'_1 = \frac{M_1}{k_{\theta_1}}$$

$$u'_2 = \frac{M_2}{k_{\theta_2}}$$

como o deslocamento da parede 1 é igual ao deslocamento da parede 2, pode-se escrever:

$$\frac{M_1}{k_{\theta_1}} = \frac{M_2}{k_{\theta_2}}$$

lembrando que  $M_i = (EJ_i / EJ)M$ , e substituindo na equação acima, chega-se à equação III.26.c

c)  $kv_i$  é a rigidez vertical da fundação da parede  $i$ .

Utilizando as equações III.22 e III.24 em III.25, para  $z = 0$  tem-se:

$$u'(0) = \frac{-T(0)c + mH}{k_{\theta}} \quad \dots \text{ III.27.a}$$

$$\delta_1(0) = \frac{-p_1 H + T(0)}{kv_1} \quad \dots \text{ III.27.b}$$

$$\delta_2(0) = \frac{-p_2 H - T(0)}{kv_2} \quad \dots \text{ III.27.c}$$



levando as equações III.27 em III.17, obtém-se:

$$\Delta = \frac{(-T(o)c+mH)c}{k_{\theta}} + \frac{-p_2H-T(o)}{kv_2} - \frac{-p_1H+T(o)}{kv_1} \quad \dots \text{III.28.a}$$

ou

$$\Delta = -(\beta_{\theta}c^2 + \beta_2 + \beta_1)T(o) + (\beta_{\theta}mc - \beta_2p_2 + \beta_1p_1)H \quad \dots \text{III.28.b}$$

onde:

$$\beta_{\theta} = \frac{1}{k_{\theta}} \quad \dots \text{III.28.c}$$

$$\beta_i = \frac{1}{kv_i} \quad \dots \text{III.28.d}$$

e de acordo com as equações III.20, tem-se:

$$T(o) = \frac{t_2}{t_1} \left( \frac{\text{tgh } \lambda H}{\lambda} - H \right) + \frac{\Delta}{t_o} \frac{\text{tgh } \lambda H}{\lambda} \quad \dots \text{III.29.a}$$

ou

$$T(o) = \varphi + \eta \Delta \quad \dots \text{III.29.b}$$

onde:

$$\varphi = \frac{t_2}{t_1} \left( \frac{\text{tgh } \lambda H}{\lambda} - H \right) \quad \dots \text{III.30.a}$$

$$\eta = \frac{\text{tgh } \lambda H}{t_o \lambda} \quad \dots \text{III.30.b}$$

levando a equação III.29.b em III.28.b, e escrevendo convenientemente, fica:

$$\Delta \left[ 1 + (\beta_{\theta} c^2 + \beta_1 + \beta_2) \eta \right] = -(\beta_{\theta} c^2 + \beta_1 + \beta_2) \varphi +$$

$$+ (\beta_{\theta} m c + \beta_1 p_1 - \beta_2 p_2) H \quad \dots \text{ III.31.a}$$

ou

$$\Delta = \frac{(\beta_{\theta} m c + \beta_1 p_1 - \beta_2 p_2) H - (\beta_{\theta} c^2 + \beta_1 + \beta_2) \varphi}{1 + (\beta_{\theta} c^2 + \beta_1 + \beta_2) \eta} \quad \dots \text{ III.31.b}$$

## e) Equação da linha elástica

A equação da linha elástica é obtida, substituindo a equação III.16 em III.10, obtendo-se:

$$u''' = \left( \frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0} \right) \frac{c}{j} \operatorname{sech} \lambda H \operatorname{ch} \lambda(H-z) - \frac{t_2}{t_1} \frac{c}{j} - \frac{m}{j}$$

$$\dots \text{ III.32}$$

ou

$$u''' = u_1 \operatorname{ch} \lambda(H-z) - u_2 \quad \dots \text{ III.33}$$

onde:

$$u_1 = \left( \frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0} \right) \frac{c \operatorname{sech} \lambda H}{j} \quad \dots \text{ III.34.a}$$

$$u_2 = \frac{1}{j} \left( \frac{t_2}{t_1} c + m \right) \quad \dots \text{ III.34.b}$$

integrando a equação III.33 três vezes em relação a "z", e usando as condições de contorno abaixo

$$u(0) = 0 \quad \dots \text{ III.35.a}$$

$$u'(0) = M(0)/k_{\theta} \quad \dots \text{ III.35.b}$$

$$u''(H) = 0 \quad \dots \text{ III.35.c}$$

onde "M(o)" é dado pela equação III.26.a, obtém-se:

$$u = \frac{u_1}{\lambda^3} \left[ \text{sh } \lambda H (1 - \text{ch } \lambda z) + \text{ch } \lambda H (\text{sh } \lambda z - \lambda z) \right] -$$

$$+ u_2 \left( \frac{z^3}{6} - H \frac{z^2}{2} \right) + \frac{M(o)}{k_\theta} z \quad \dots \text{ III.36}$$

EXEMPLO NUMÉRICO - III.1

Considere-se a estrutura da Fig. III.4, formada por duas paredes ligadas por lintéis de seção transversal 20x40cm com 200cm de vão.

O conjunto de 20 andares com 3,00m por andar, mantém suas características elasto-geométricas constantes com a altura.

As seções transversais das paredes 1 e 2 medem 20x180cm e 20x250cm, respectivamente.

O carregamento é constituído de carga vertical uniformemente distribuída  $p_1 = 2,00 \text{ tf/m}$  e  $p_2 = 3,80 \text{ tf/m}$ , atuantes nas paredes 1 e 2, respectivamente. Para E tomou-se o valor  $2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ .

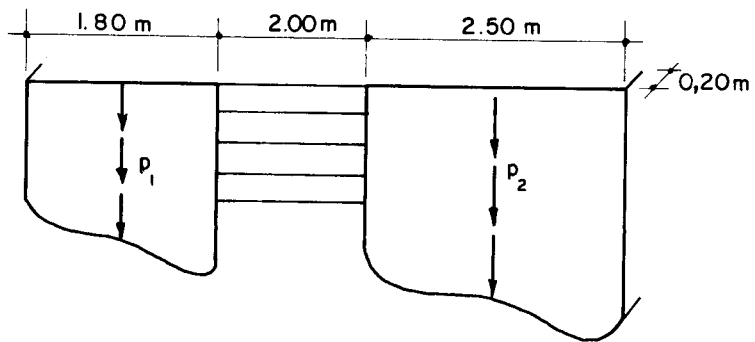


FIG. III-4 - PAREDES COM CARGAS AXIAIS

a) Dados

$$b = 1,00 \text{ m}$$

$$h = 3,00 \text{ m}$$

$$c_1 = 1,90 \text{ m}$$

$$H = 60,00 \text{ m}$$

$$c_2 = 2,25 \text{ m}$$

$$E = 2,0 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$$

$$p_1 = 2,00 \text{ tf/m}$$

$$p_2 = 3,80 \text{ tf/m}$$

a.1) Seções transversais das paredes

$$A_1 = 0,36 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 0,50 \text{ m}^2$$

a.2) Momentos de inércia das paredes e dos lintéis

$$J_1 = 9,72 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$J_2 = 2,60 \times 10^{-1} \text{ m}^4$$

$$i = 1,067 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

e portanto

$$j = E(J_1 + J_2) = 7,144 \times 10^5 \text{ tf} \cdot \text{m}^2$$

b) Outras constantes

De acordo com as equações III.15, obtém-se:

$$t_0 = 9,372 \times 10^{-4} \text{ tf}^{-1} \times \text{m}^2$$

$$t_1 = 2,65 \times 10^{-5} \text{ tf}^{-1}$$

$$t_2 = 1,022 \times 10^{-6} \quad \text{m}^{-1}$$

que, substituídos em III.14, resulta:

$$9,372 \times 10^{-4} q'' - 2,65 \times 10^{-5} q = 1,022 \times 10^{-6}$$

c) De acordo com a consideração feita na equação III.26.c, e usando o momento de inércia da sapata,  $J_{s1}$ , igual a sete vezes o momento de inércia da parede 1, tem-se:

$$J_{s1} = 7 J_1 = 0,68 \text{ m}^4$$

$$J_{s2} = 7 J_2 = 1,82 \text{ m}^4$$

Considerando a rigidez do solo,  $C_\phi = 80 \text{ kgf/cm}^3$ , obtém-se:

$$k_{\theta_1} = C_\phi J_{s1} = 544 \times 10^2 \text{ tf}\cdot\text{m}$$

$$k_{\theta_2} = C_\phi J_{s2} = 1456 \times 10^2 \text{ tf}\cdot\text{m}$$

$$k_\theta = k_{\theta_1} + k_{\theta_2} = 2 \times 10^5 \text{ tf}\cdot\text{m}$$

e ainda

$$k_{v1} = C_\phi \bar{A}_1 = 72 \times 10^3 \text{ tf/m}$$

$$k_{v2} = C_\phi \bar{A}_2 = 100 \times 10^3 \text{ tf/m}$$

onde  $\bar{A}_1 = 0,9 \text{ m}^2$  e  $\bar{A}_2 = 1,253 \text{ m}^2$ , são as áreas das sapatas 1 e 2, respectivamente.

De acordo com III.28, tem-se:

$$\beta_0 = 5 \times 10^{-6} \quad \text{tf}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\beta_1 = 1,388 \times 10^{-5} \quad \text{m/tf}$$

$$\beta_2 = 1 \times 10^{-5} \quad \text{m/tf}$$

usando os valores acima na equação III.31.b, obtém-se:

$$\Delta = -0,2268 \times 10^{-3} \quad \text{m}$$

Utilizando a equação III.16 tem-se como solução:

$$q = -1,689 \times 10^{-5} \text{ ch } \lambda(H-z) - 3,857 \times 10^{-2}$$

Seguem gráficos dos esforços e deslocamentos correspondentes, identificados pela letra c.

d) Para o caso de fundação rígida, tem-se:

$$\beta_0 = 0$$

$$\beta_1 = 0$$

$$\beta_2 = 0$$

que substituídos na equação III.31.b, encontra-se:

$$\Delta = 0$$

de modo análogo ao item c, obtém-se:

$$q = 3,203 \times 10^{-6} \text{ ch } \lambda(H-z) - 3,857 \times 10^{-2}$$

Seguem gráficos de esforços e deslocamentos correspondentes, identificados pela letra d.

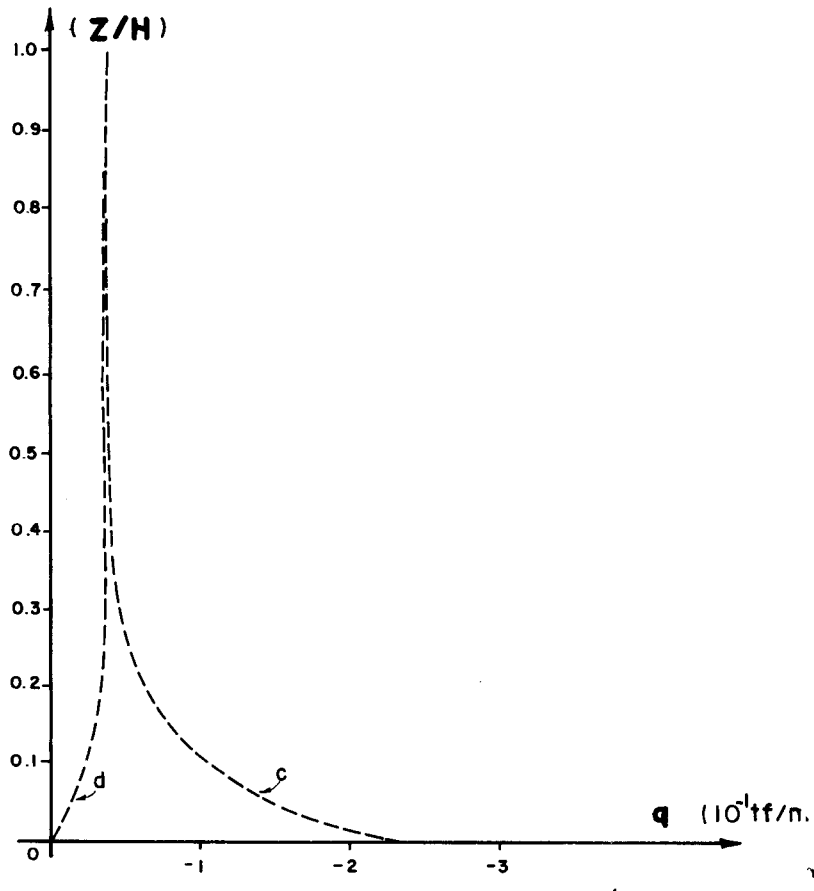


FIG. III - 5 - FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDA NOS LINTEIS

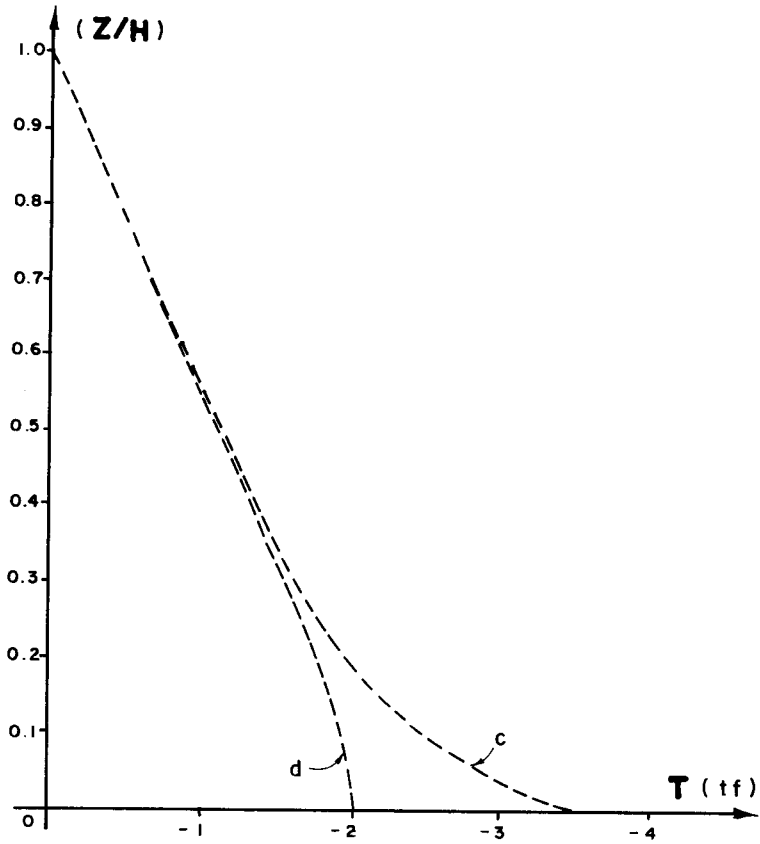


FIG. III - 6 - RESULTANTE DA FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDA NOS LINTEIS

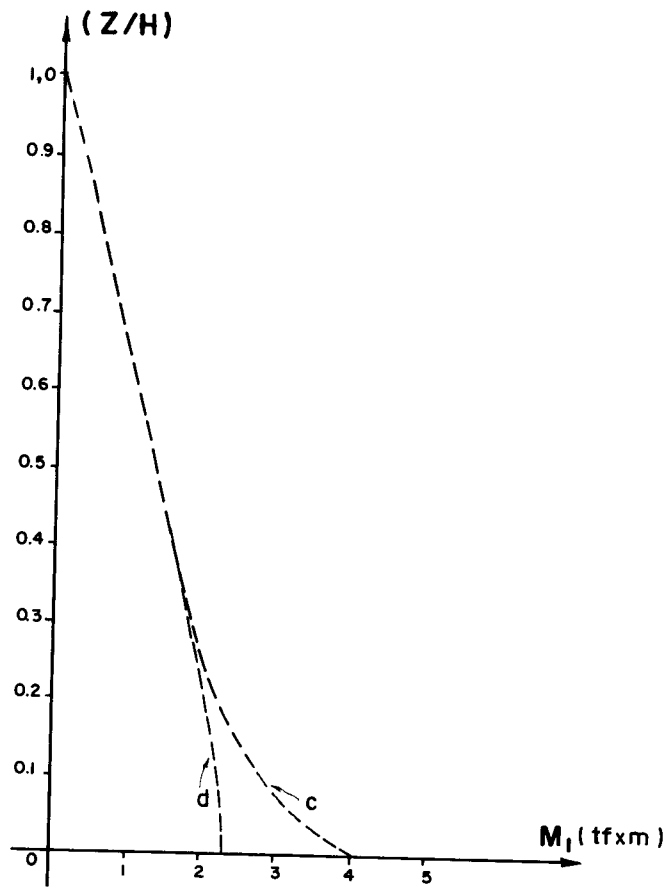


FIG. III-7 - MOMENTO FLETOR NA PAREDE 1

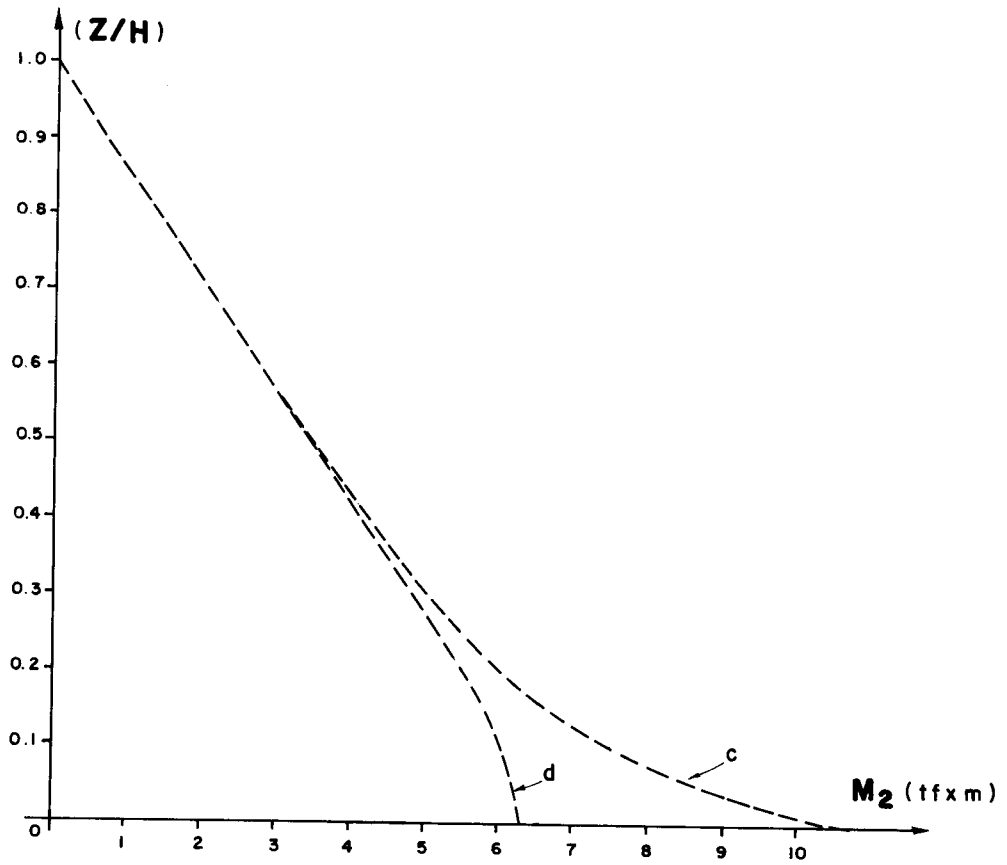


FIG. III-8 - MOMENTO FLETOR NA PAREDE 2



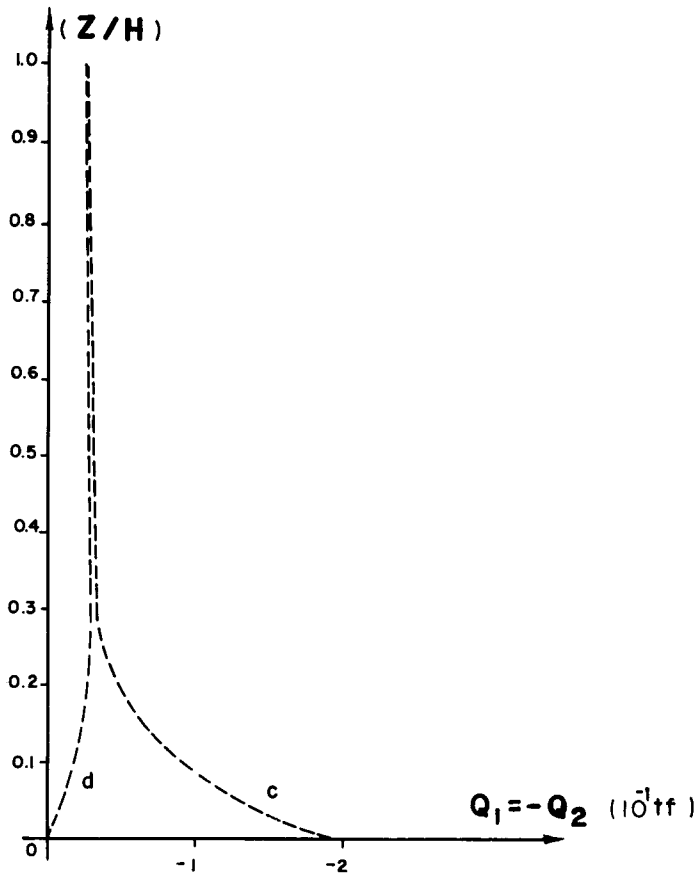


FIG. III-9 - ESFORÇO CORTANTE NA PAREDE 1

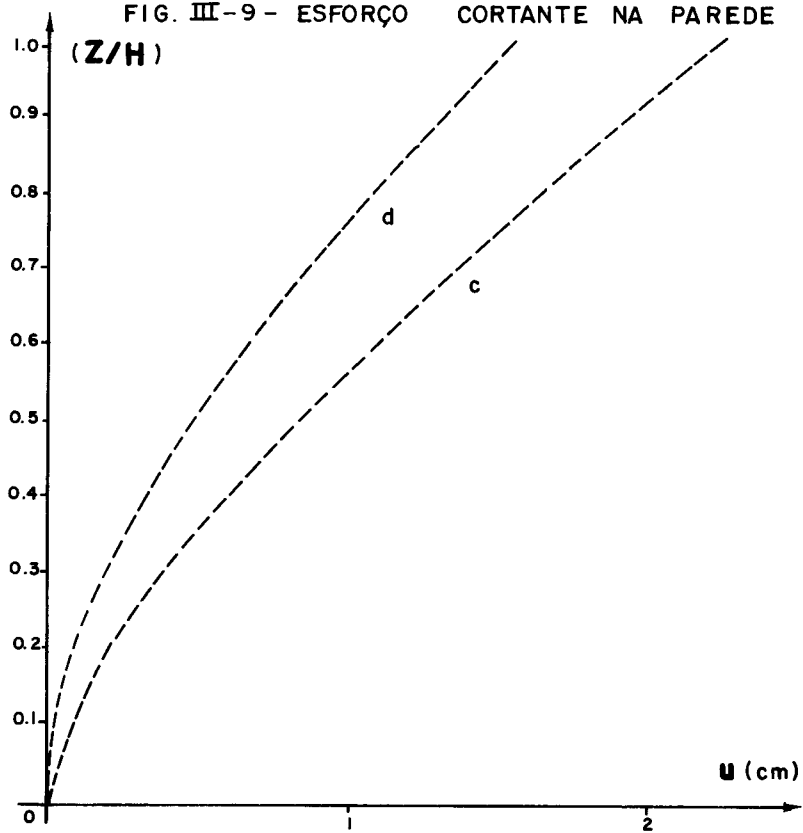


FIG. III-10 - DESLOCAMENTO DA ASSOCIAÇÃO

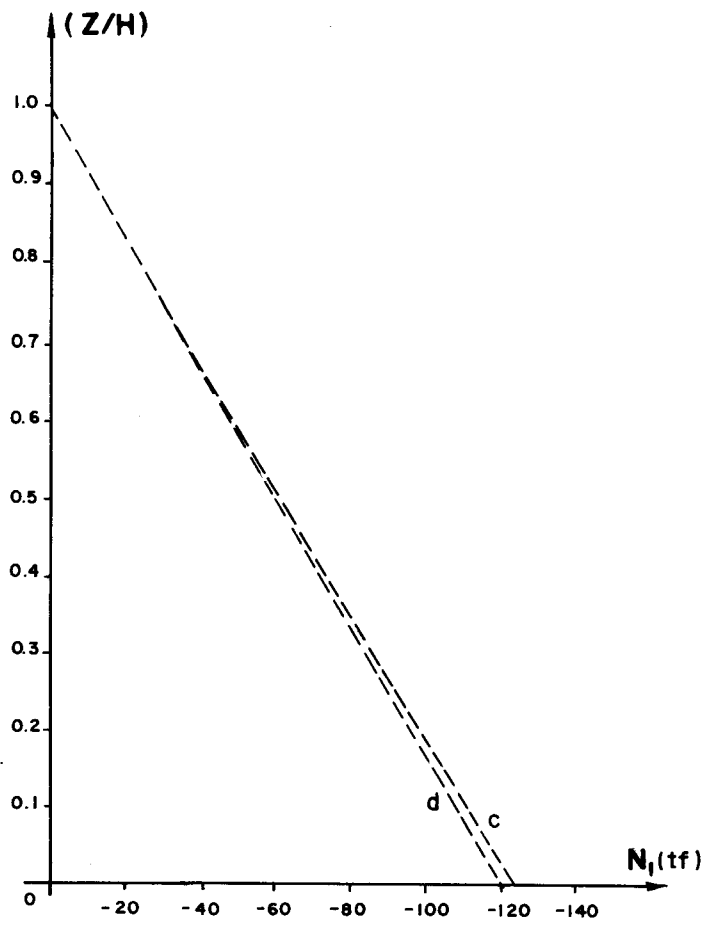


FIG. III-11 - ESFORÇO NORMAL NA PAREDE 1

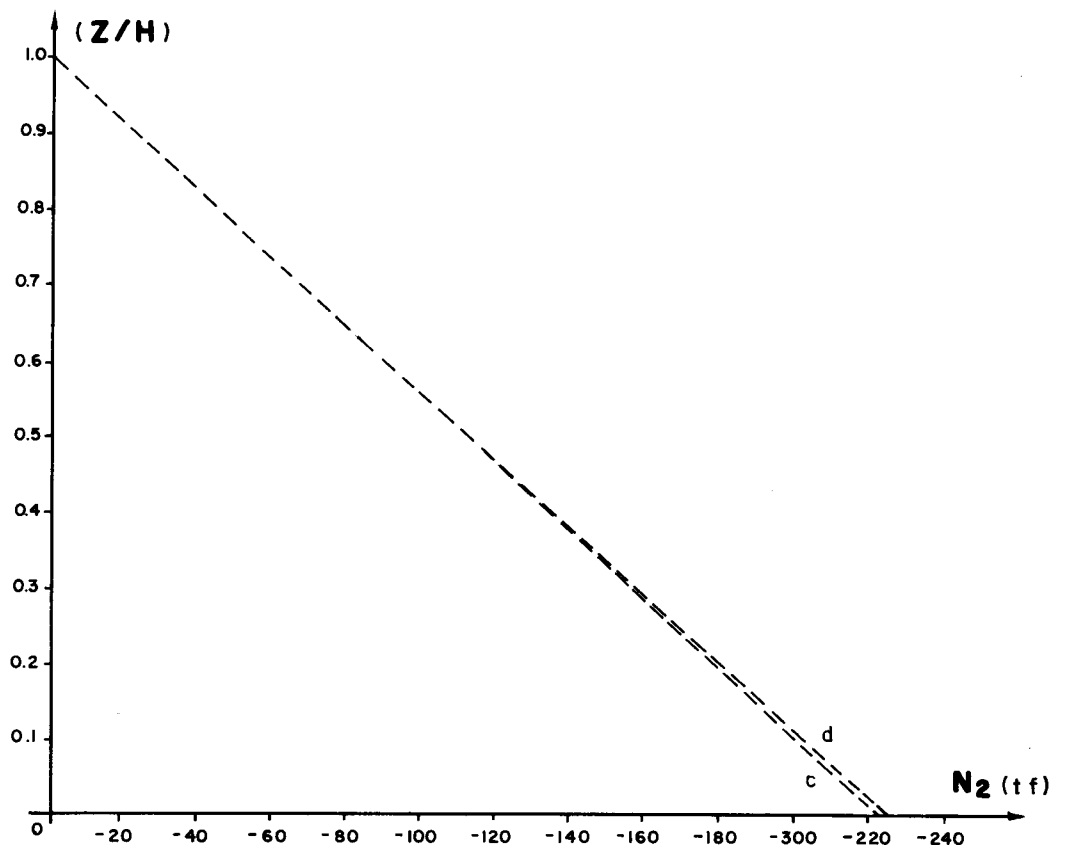


FIG. III-12 - ESFORÇO NORMAL NA PAREDE 2

Observa-se no caso de fundação flexível, curva do tipo "c", que a força cortante distribuída nos pontos médios dos vãos dos lintéis, nos andares mais próximos da base, é maior (o sinal negativo só indica que o sentido é contrário ao da convenção adotada) que nos casos de fundação rígida, curva do tipo "d", Fig. III.5. Isto se justifica pelo fato da fundação flexível permitir movimento de translação e rotação, a nível da fundação, de uma parede em relação a outra, o que provoca portanto, maior solicitação no lintel (embora negativa) do que no caso de fundação rígida.

A partir da Fig. III.5 e lembrando a equação III.19, torna-se evidente os resultados da Fig. III.6, que substituídos nas equações III.22 com  $m=0$ , resultam em momentos fletores nas paredes de fundação flexível, maiores que os momentos fletores nas paredes de fundação rígida, e evidentemente, nas seções mais próximas da base.

É claro que a comparação do caso de fundação com flexibilidade só à rotação com o de fundação rígida, forneceu momentos fletores na base das paredes, maiores no segundo caso do que no primeiro. Entretanto, os resultados obtidos no exemplo se referem ao caso de flexibilidade não só à rotação, mas também à translação vertical. Neste caso, o maior momento na base é explicado através da força cortante nos lintéis, conforme dito anteriormente.

É importante afirmar também, que embora não apresentados, considerou-se quatro casos de flexibilidade nas fundações, ou seja:

TABELA III.1

CASO	$\beta_1$ (m/TF)	$\beta_2$ (m/TF)	$\beta_\theta$ (m/TF)
A	$1,388 \times 10^{-5}$	$1,0 \times 10^{-5}$	0
B	0	0	$5 \times 10^{-6}$
C	$1,388 \times 10^{-5}$	$1,0 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-6}$
D	0	0	0

Para os casos de flexibilidade da Tabela III.1, obteve-se os seguintes valores para os momentos fletores e esforços normais na base das paredes 1 e 2.

TABELA III.2

Esforços		$M_1(o)$ (tf.m)	$M_2(o)$ (tf.m)	$N_2(o)$ (tf)	$N_1(o)$ (tf)	$\bar{M}(o)$ (tf.m)
C A S O S	A	5,865	15,698	-222,804	-125,196	946,20
	B	1,522	4,073	-226,652	-121,348	946,20
	C	3,978	10,646	-224,476	-123,524	946,20
	D	2,353	6,298	-225,915	-122,085	946,20

onde  $\bar{M}(o)$  é a somatória dos momentos em relação a um ponto qualquer da seção transversal da associação, por exemplo, em relação ao centro de gravidade da seção transversal da parede 1, na cota  $z = 0$ . Neste caso, tem-se:

$$\bar{M}(o) = M_1(o) + M_2(o) - N_2(o) c$$

Como se pode observar na Tabela III.2,  $\bar{M}(o)$  mantém-se constante qualquer que seja a flexibilidade da vinculação adotada, além do que, é equilibrado pelo momento fletor em relação ao centro de gravidade da parede 1 na cota  $z = 0$ , devido à carga externa.

Pela análise do formulário percebe-se a influência dos lintéis na distribuição dos esforços na estrutura.

Como último comentário, nota-se para os dois casos de vinculação apresentados, que os resultados aproximam-se à medida que as seções se afastam da base.

## EXEMPLO NUMÉRICO - III.2

Seja a mesma associação estrutural da Fig. III.4. O conjunto mantém suas condições elasto-geométricas e de carregamento, coincidentes com aquelas do exemplo numérico III.1, exceto que as cargas  $p_1$  e  $p_2$  apresentam excentricidades  $e_1 = 20\text{cm}$  e  $e_2 = 50\text{cm}$ , respectivamente, conforme mostra a Fig. III.13.

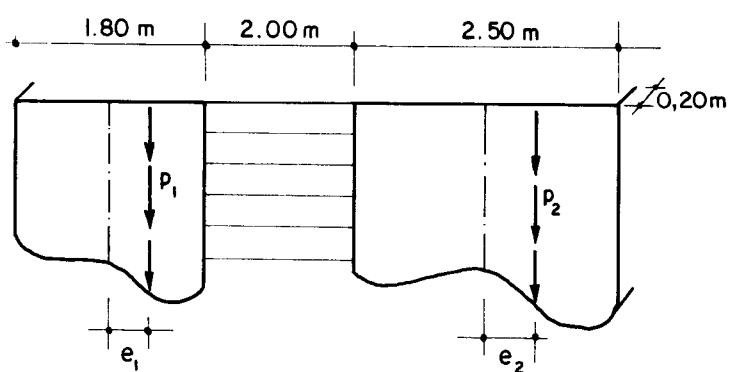


FIG.III-13 - PAREDES COM CARGAS EXCÊNTRICAS

a) Dados:

$b = 1,00 \text{ m}$	$e_1 = 0,20 \text{ m}$
$c_1 = 1,90 \text{ m}$	$e_2 = 0,50 \text{ m}$
$c_2 = 2,25 \text{ m}$	$E = 2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$
$p_1 = 2,00 \text{ tf/m}$	$m_1 = 0,40 \text{ tfm/m}$
$p_2 = 3,80 \text{ tf/m}$	$m_2 = 1,9 \text{ tfm/m}$
$H = 60,00 \text{ m}$	$h = 3,00 \text{ m}$

a.1) Seções transversais das paredes

$$A_1 = 0,36 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 0,50 \text{ m}^2$$

a.2) Momentos de inércia das paredes e dos lintéis

$$J_1 = 9,72 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$J_2 = 2,60 \times 10^{-1} \text{ m}^4$$

$$i = 1,067 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

e portanto,

$$j = E(J_1 + J_2) = 7,144 \times 10^5 \text{ tf} \cdot \text{m}^2$$

b) Outras constantes

Usando as equações III.15, obtém-se os seguintes valores:

$$t_0 = 9,372 \times 10^{-4} \text{ tf}^{-1} \cdot \text{m}^2$$

$$t_1 = 2,65 \times 10^{-5} \text{ tf}^{-1}$$

$$t_2 = -1,23 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$$

que, substituídos em III.14, resulta na equação abaixo:

$$9,372 \times 10^{-4} q'' - 2,65 \times 10^{-5} q = -1,23 \times 10^{-5}$$

c) Como no exemplo III.1, usa-se os seguintes valores:

$$\beta_1 = 1,388 \times 10^{-5} \quad \text{m/TF}$$

$$\beta_2 = 1 \times 10^{-5} \quad \text{m/TF}$$

$$\beta_\theta = 5 \times 10^{-6} \quad \text{m/TF}$$

para a mesma rigidez do solo,  $C_\phi = 80 \text{ kgf/cm}^3$ . Utilizando a equação III.31.b, encontra-se

$$\Delta = -0,3005 \times 10^{-3} \quad \text{m}$$

Usando a equação III.16, pode-se escrever:

$$q = -6,517 \times 10^{-5} \text{ ch } \lambda(H-z) + 0,464$$

A seguir apresenta-se os gráficos dos esforços e deslocamentos correspondentes, identificados pela letra c.

d) Para o caso de fundação rígida, tem-se:

$$\beta_1 = 0$$

$$\beta_2 = 0$$

$$\beta_\theta = 0$$

que, levados na equação III.31.b, resulta:

$$\Delta = 0$$

de modo análogo ao item c, obtém-se:

$$q = -3,855 \times 10^{-5} \operatorname{ch} \lambda(H-z) + 0,464$$

Seguem gráficos de esforços e deslocamentos correspondentes, identificados pela letra d.

Pelos mesmos motivos do exemplo anterior, a força cortante distribuída nos pontos médios dos vãos dos lintéis, nos andares mais próximos da base, para a fundação flexível é maior (o sinal negativo só indica que é contrário à convenção adotada) que nos casos de fundação rígida, Fig. III.14. A partir desta figura e lembrando a equação III.19, torna-se evidente os resultados apresentados na Fig. III.15, que substituídos nas equações III.22, agora com  $m \neq 0$ , resultam em momentos fletores nas paredes de fundação flexível maiores que os momentos fletores nas paredes de fundação rígida, principalmente nas seções mais próximas da base.

Os resultados para os dois casos de vinculação apresentados também são próximos à medida que as seções se afastam da base.

Embora não comentados, aqui também realizou-se verificações semelhantes àsquelas do exemplo anterior.

A influência dos lintéis na distribuição dos esforços internos da estrutura, torna-se evidente pela simples análise da formulação do caso.



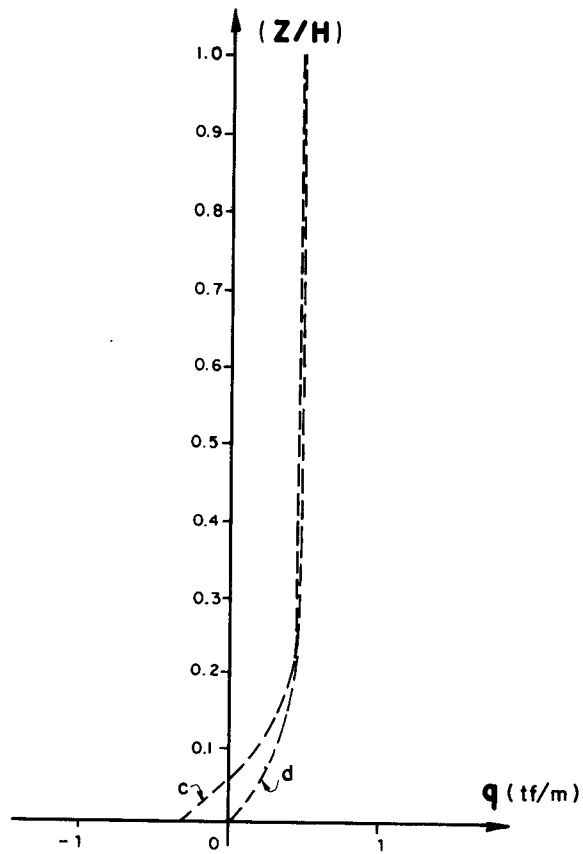


FIG. III-14- FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDA NOS LINTÉIS

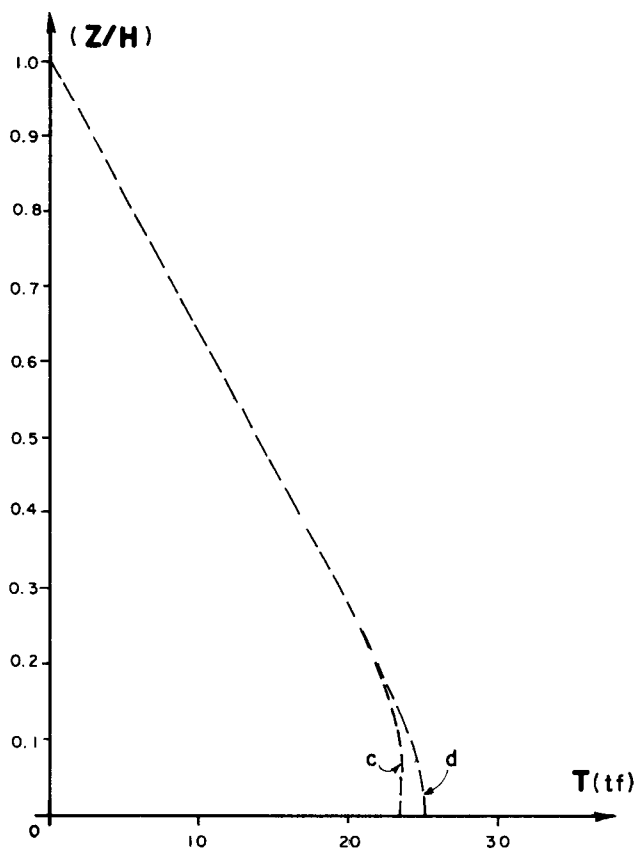


FIG. III-15- RESULTANTE DA FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDA NOS LINTÉIS

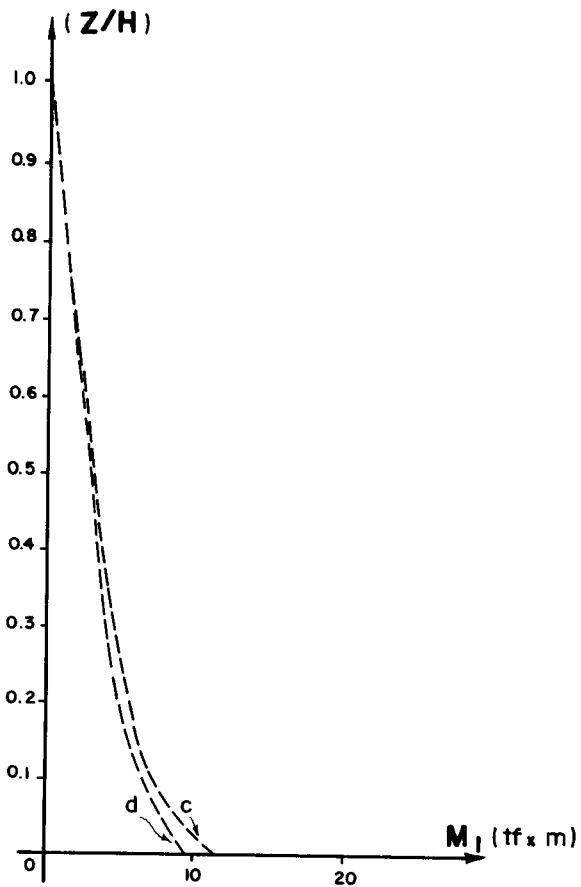


FIG. III-16- MOMENTO FLETOR DA PAREDE 1

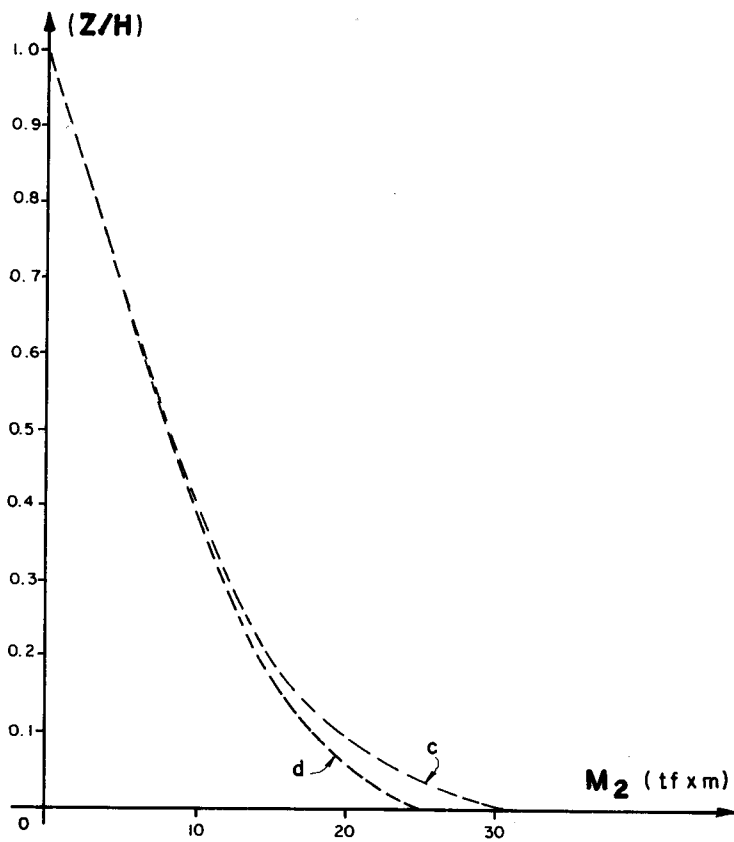


FIG. III-17- MOMENTO FLETOR NA PAREDE 2

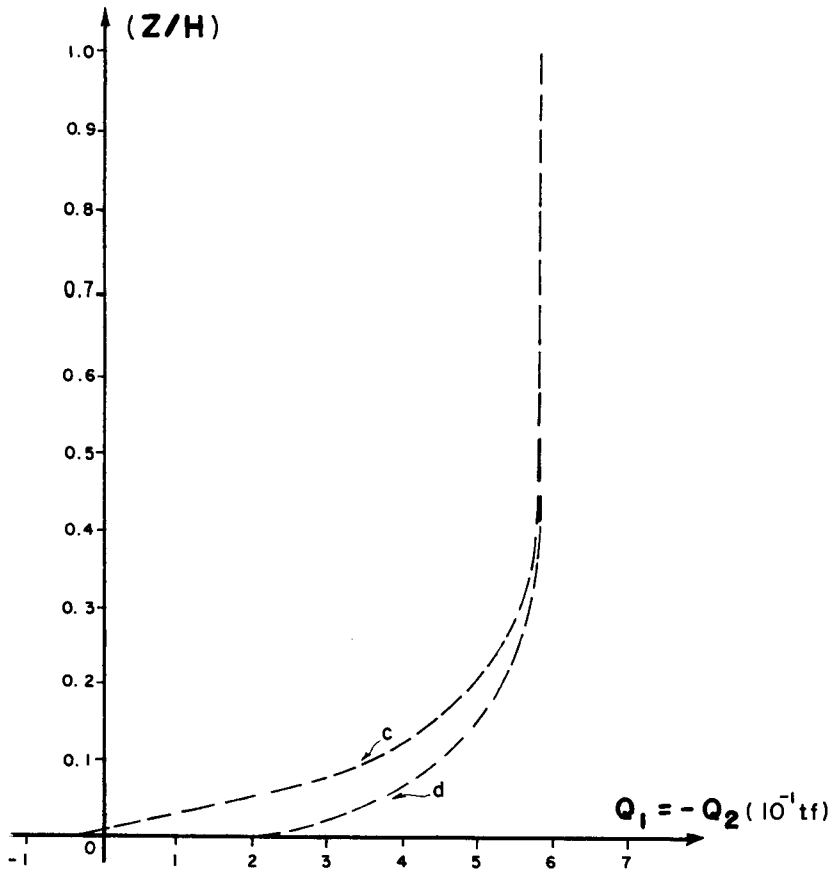


FIG. III-18 - ESFORÇO CORTANTE NA PAREDE 1

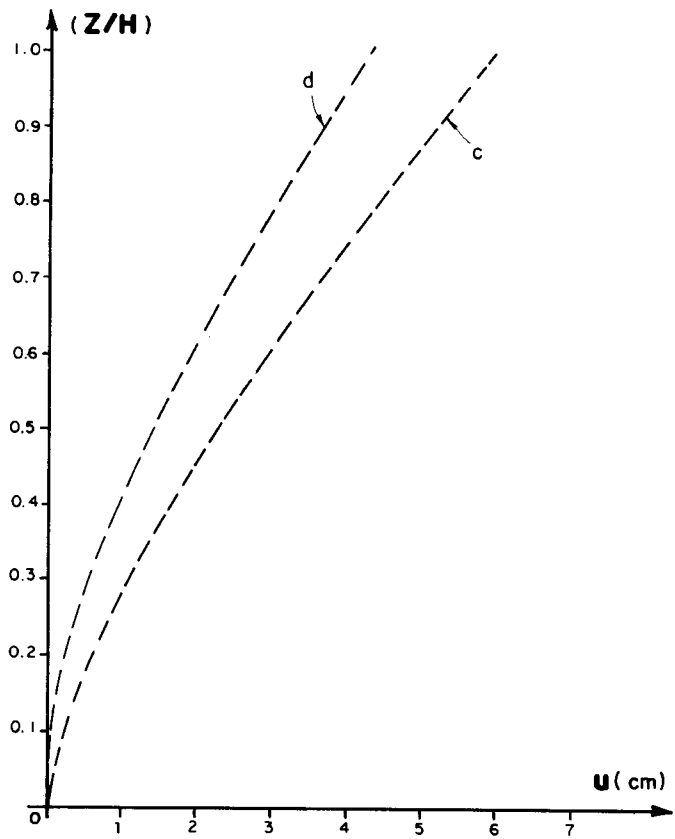


FIG. III-19 - DESLOCAMENTO DA ASSOCIAÇÃO

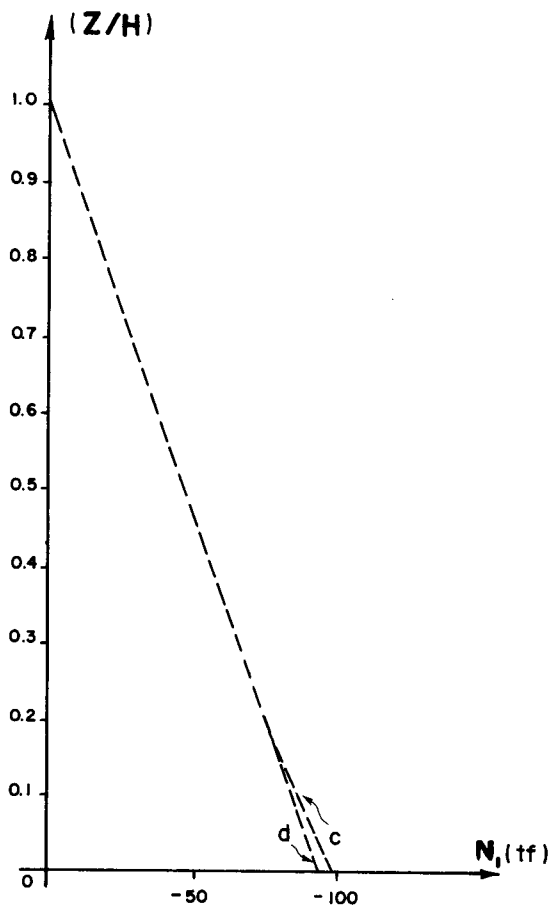


FIG. III-20 - ESFORÇO NORMAL NA PAREDE 1

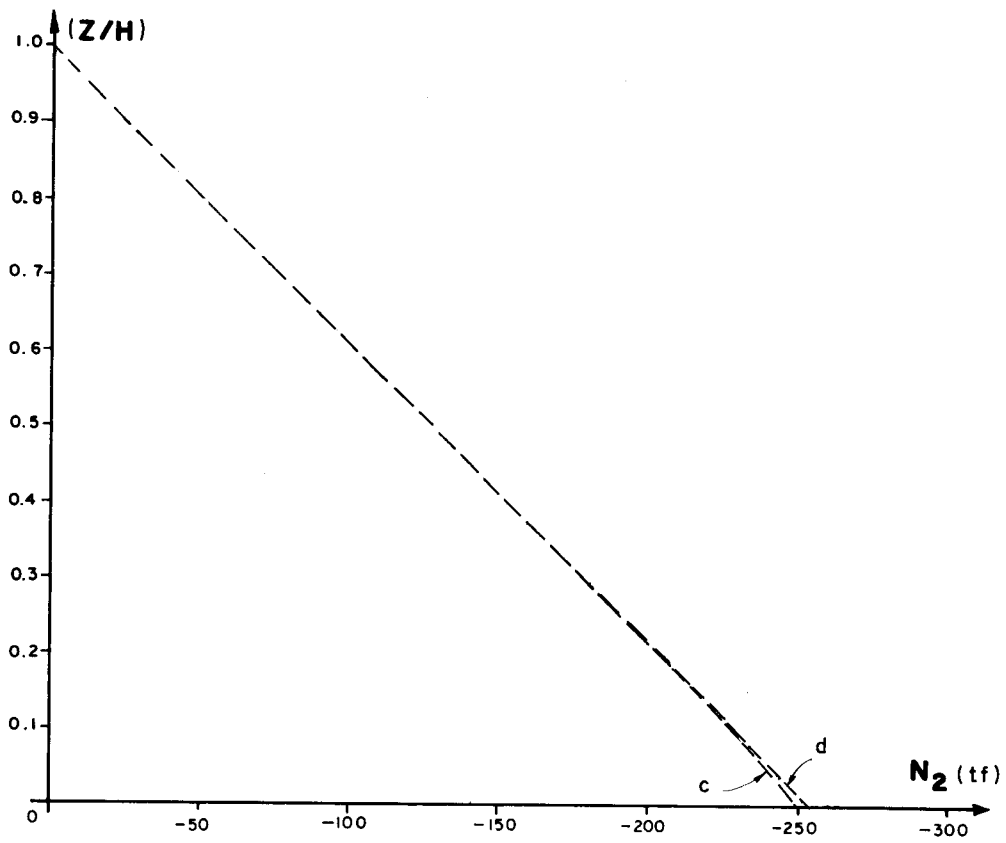


FIG. III-21 - ESFORÇO NORMAL NA PAREDE 2

### III.3 - ASSOCIAÇÃO PLANA DE TRÊS PAREDES LIGADAS POR DOIS TRAMOS DE LINTÉIS

Um outro modelo estrutural a ser analisado é a aquele constituído de três paredes ligadas por dois tramos de lintéis, conforme mostra a Fig. III.22.

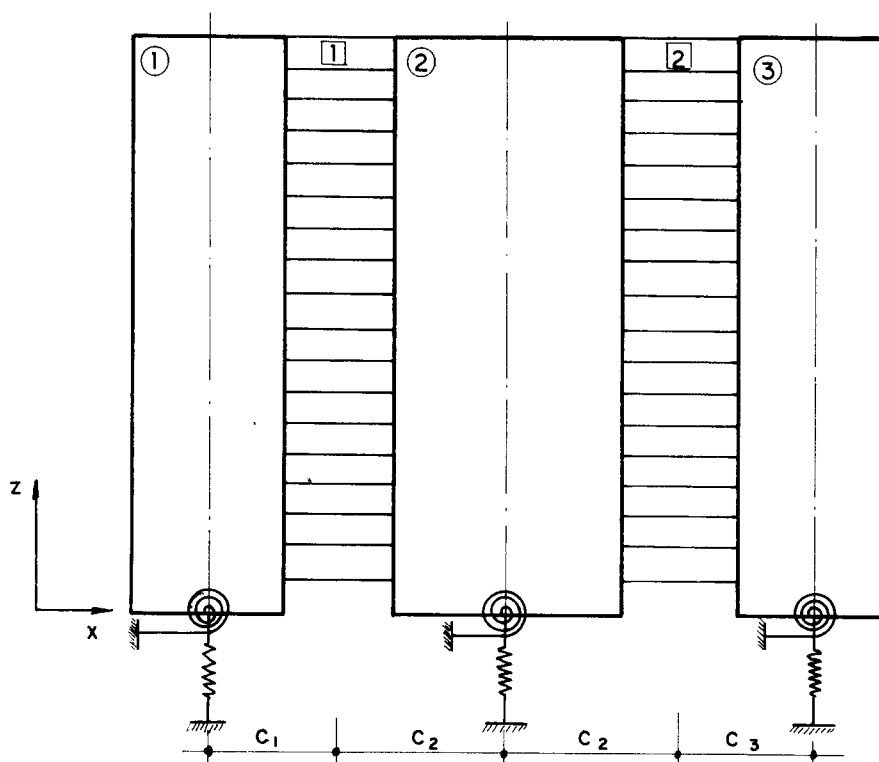


FIG. III- 22 - ASSOCIAÇÃO DE PAREDES COM VÍNCULOS ELÁSTICOS

O modelo estrutural, geométricamente simétrico, é abordado considerando-se dois casos: inicialmente com carregamento simétrico e depois com carregamento antimétrico.

As constantes  $c_1$  têm o mesmo significado daquele do item anterior.

Por condições de simetria geométrica pode-se a firmar:

- a) as distâncias  $c_1$  e  $c_3$  são iguais;

- b) os momentos de inércia das paredes 1 e 3, em relação a um eixo passando pelo centro de gravidade da seção transversal e perpendicular ao plano da figura, são iguais.

a) Carregamento simétrico

Considere-se a estrutura simétrica da Fig. III.23, carregada de tal modo que nas paredes 1 e 3 atuam cargas verticais  $p_1$  uniformemente distribuídas com excentricidade  $e_1$ , enquanto na parede 2, atua, no centro de gravidade de sua seção transversal, uma carga vertical  $p_2$ , também uniformemente distribuída.

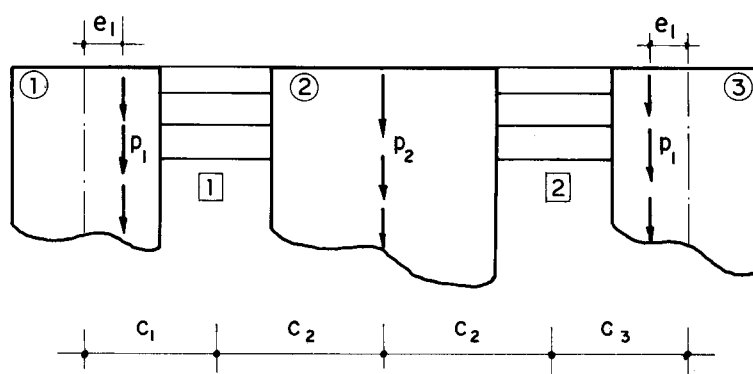


FIG. III-23 - PAREDES COM CARREGAMENTO SIMÉTRICO

Devido à simetria de geometria e de carregamento do conjunto, é evidente que:

- A estrutura não sofre deslocamento lateral.
- As forças cortantes nas paredes 1 e 3 são iguais e de sentido opostos.
- Os esforços cortantes uniformemente distribuídos nos pontos médios dos lintéis 1 e 2 são iguais.

Indica-se na Fig. III.24, a convenção dos esforços positivos, com base nas conclusões da página anterior.

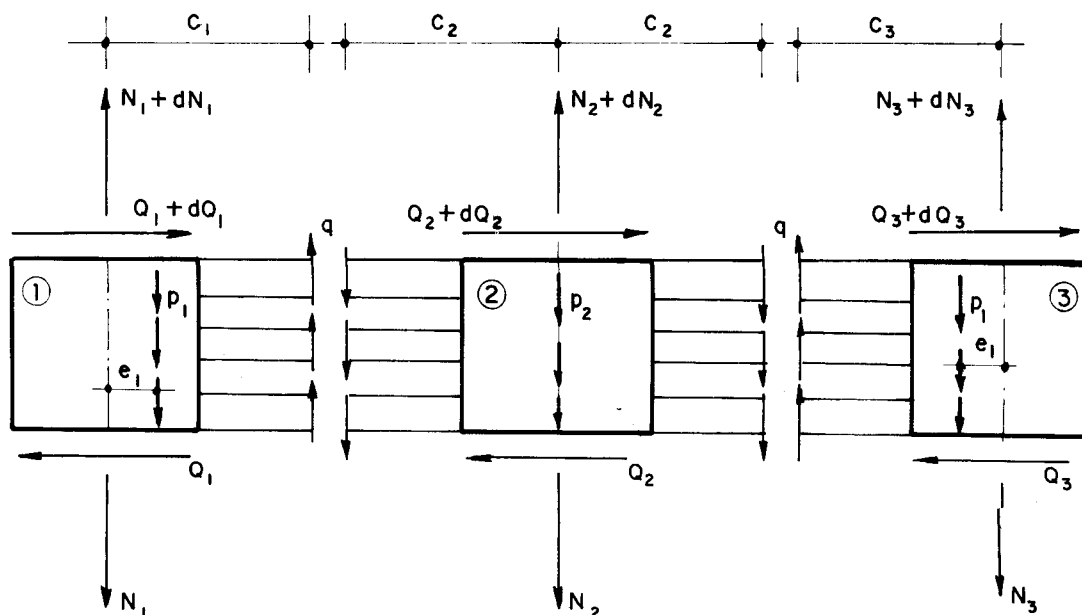


FIG. III-24 - CONVENÇÃO DOS ESFORÇOS POSITIVOS

Do equilíbrio à rotação nos elementos infinitesimais das três paredes, obtém-se:

$$Q_1 = Q_3 = q c_1 - p_1 e_1 \quad \dots \text{ III.37}$$

e

$$Q_2 = 0 \quad \dots \text{ III.38}$$

da mesma forma, o equilíbrio à translação vertical nas paredes 1, 2 e 3, fornece:

$$\frac{dN_1}{dz} = \frac{dN_3}{dz} = p_1 - q \quad \dots \text{ III.39}$$

$$\frac{dN_2}{dz} = p_2 + 2q \quad \dots \text{III.40}$$

Ainda, como consequência da dupla simetria, as equações de compatibilidade do ponto médio dos lintéis são iguais. Em vista disso, considera-se apenas o lintel que liga as paredes 1 e 2.

Conservando a convenção de deslocamentos positivos, aqueles realizados da base para o topo e usando a condição de deslocamento lateral nulo, obtém-se a equação de compatibilidade a partir de III.7, ou seja:

$$\frac{2 h b^3}{3 E i} q = \delta_2 - \delta_1 \quad \dots \text{III.41}$$

derivando duas vezes em relação a z, tem-se:

$$\frac{2 h b^3}{3 E i} q'' = \delta_2'' - \delta_1'' \quad \dots \text{III.42}$$

Usando a relação  $N = EA\delta'$  e as equações III.39 e III.40, pode-se escrever:

$$\delta_1'' = \delta_3'' = \frac{1}{EA_1}(p_1 - q) \quad \dots \text{III.43.a}$$

e

$$\delta_2'' = \frac{1}{EA_2}(p_2 + 2q) \quad \dots \text{III.43.b}$$

substituindo as equações III.43 em III.42, obtém-se:

$$\frac{2 h b^3}{3 E i} q'' = \left( \frac{1}{EA_1} + \frac{2}{EA_2} \right) q + \frac{p_2}{EA_2} - \frac{p_1}{EA_1} \quad \dots \text{III.44}$$

ou



$$t_0 q'' - t_1 q = t_2 \quad \dots \text{III.45}$$

onde

$$t_0 = \frac{2 h b^3}{3 E i} \quad \dots \text{III.46.a}$$

$$t_1 = \frac{1}{EA_1} + \frac{2}{EA_2} \quad \dots \text{III.46.b}$$

$$t_2 = \frac{p_2}{EA_2} - \frac{p_1}{EA_1} \quad \dots \text{III.46.c}$$

A solução da equação III.45, bem como suas condições de contorno mostradas no Apêndice D, fornecem a equação III.16, aqui repetida por conveniência.

$$q = \left( \frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0} \right) \text{sech } \lambda H \text{ ch } \lambda(H-z) - \frac{t_2}{t_1} \quad \dots \text{III.16}$$

onde  $\Delta$  e  $\lambda$  conservam seus significados e são obtidos a partir das equações III.17 e III.18, respectivamente.

Do mesmo modo, a resultante do esforço cortante no ponto médio do lintel numa cota  $z$  é:

$$T = \left( \frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0} \right) \left[ \frac{\text{sech } \lambda H}{\lambda} \text{sh } \lambda(H-z) \right] - \frac{t_2}{t_1} (H-z) \quad \dots \text{III.20}$$

a) Momentos fletores

Como o deslocamento lateral da estrutura é nulo, tem-se:

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0 \quad \dots \text{III.47}$$

## b) Esforços cortantes

Os esforços cortantes nas paredes são dados pelas equações III.37 e III.38.

## c) Esforços normais

Integrando as equações III.39 e III.40, obtém-se:

$$N_1 = N_3 = -p_1(H-z) + T \quad \dots \text{III.48.a}$$

$$N_2 = -p_2(H-z) - 2T \quad \dots \text{III.48.b}$$

d) Determinação da constante  $\Delta$ 

Partindo da equação III.17, e considerando que a estrutura não sofre deslocamentos lateral, obtém-se de modo análogo ao caso anterior

$$\Delta = \frac{(\beta_1 p_1 - \beta_2 p_2)H - (\beta_1 + 2\beta_2)\varphi}{1 + (\beta_1 + 2\beta_2)\eta} \quad \dots \text{III.49}$$

## EXEMPLO NUMÉRICO - III.3

Seja a Fig. III.23, formada por três paredes, sendo as duas das extremidades geometricamente iguais, ligadas por lintéis de seção transversal 20x40cm com 200 cm de vão.

O conjunto estrutural de 20 andares, com 3,00 metros por andar, mantém suas características elasto-geométricas constantes com a altura.

As seções transversais das paredes 1 e 3, medem 20x180 cm, enquanto que a da parede 2, mede 20x250cm.

O carregamento é constituído de carga vertical uniformemente distribuída,  $p_1 = 2,0$  tf/m atuando nas paredes 1 e 3 com excentricidade  $e_1 = 20$ cm e  $p_2 = 3,80$  tf/m, centrada, agindo na parede 2. Para E toma-se o valor  $E = 2 \times 10^6$  tf/m<sup>2</sup>.

a) Dados retirados da figura

$$\begin{array}{ll} b = 1,00 \text{ m} & e_1 = 0,20 \text{ m} \\ c_1 = c_3 = 1,90 \text{ m} & e_2 = 0 \\ c_2 = 2,25 & E = 2,0 \times 10^6 \text{ tf/m}^2 \\ p_1 = 2,0 \text{ tf/m} & m_1 = 0,40 \text{ tf}\cdot\text{m/m} \\ p_2 = 3,80 \text{ tf/m} & m_2 = 0 \\ H = 60,00 \text{ m} & h = 3,00 \text{ m} \end{array}$$

a.1) Seções transversais das paredes

$$\begin{array}{l} A_1 = A_3 = 0,36 \text{ m}^2 \\ A_2 = 0,50 \text{ m}^2 \end{array}$$

a.2) Momentos de inércia dos lintéis

$$i = \frac{0,20 \times 0,40^3}{12} = 1,067 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

b) Outras constantes

Utilizando as equações III.46, encontra-se:

$$\begin{array}{ll} t_0 = 9,372 \times 10^{-4} & \text{tf}^{-1} \text{m}^2 \\ t_1 = 3,388 \times 10^{-6} & \text{tf}^{-1} \end{array}$$

$$t_2 = 1,022 \times 10^{-6} \quad \text{m}^{-1}$$

que substituídos em III.45, resulta:

$$9,372 \times 10^{-4} q'' - 3,388 \times 10^{-6} q = 1,022 \times 10^{-6}$$

c) Como no exemplo anterior estima-se os seguintes valores:

$$\beta_1 = 1,388 \times 10^{-5} \quad \text{m/tf}$$

$$\beta_2 = 1 \times 10^{-5} \quad \text{m/tf}$$

onde considerou-se a rigidez do solo como sendo  $80 \text{ kg/cm}^3$ .  
Usando a equação III.49, obtém-se:

$$\Delta = -0,106 \times 10^{-3} \quad \text{m}$$

utilizando a equação III.16 tem-se como solução:

$$q = 1,022 \times 10^{-2} \text{ ch } \lambda(H-z) - 3,017 \times 10^{-1}$$

e seguem-se gráficos dos esforços e deslocamento correspondentes, identificados pela letra c.

d) Para o caso de fundação rígida tem-se

$$\beta_1 = 0$$

$$\beta_2 = 0$$

que substituídos na equação III.49, resulta:

$$\Delta = 0$$

de modo semelhante ao item c, obtém-se:

$$q = 1,642 \times 10^{-2} \operatorname{ch} \lambda(H-z) - 3,017 \times 10^{-1}$$

e seguem os gráficos de esforços e deslocamentos correspondentes, identificados pela letra d.

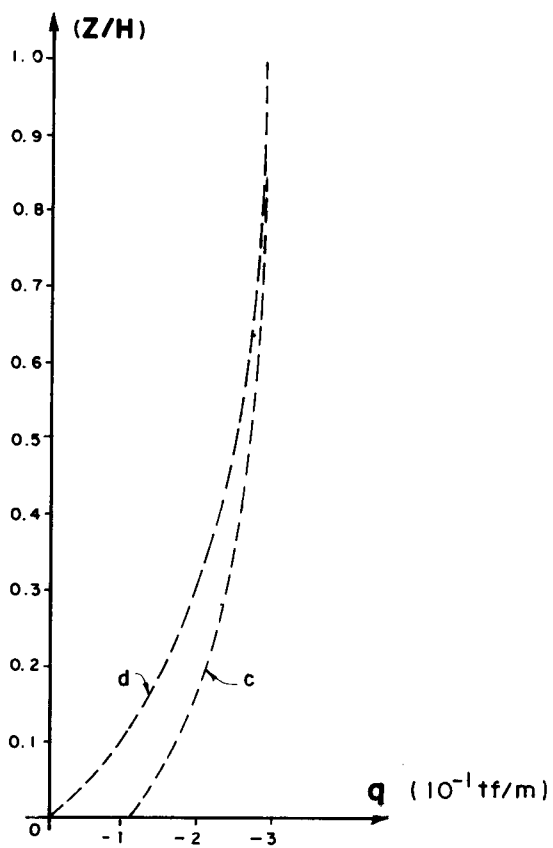


FIG.III-25- FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDA NOS LINTÉIS

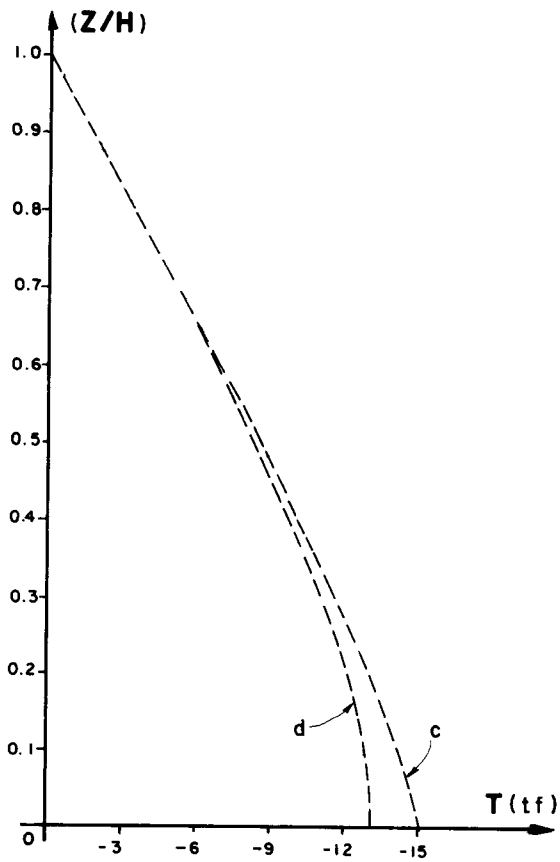


FIG. III-26 - RESULTANTE DA FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDA NOS LINTÉIS

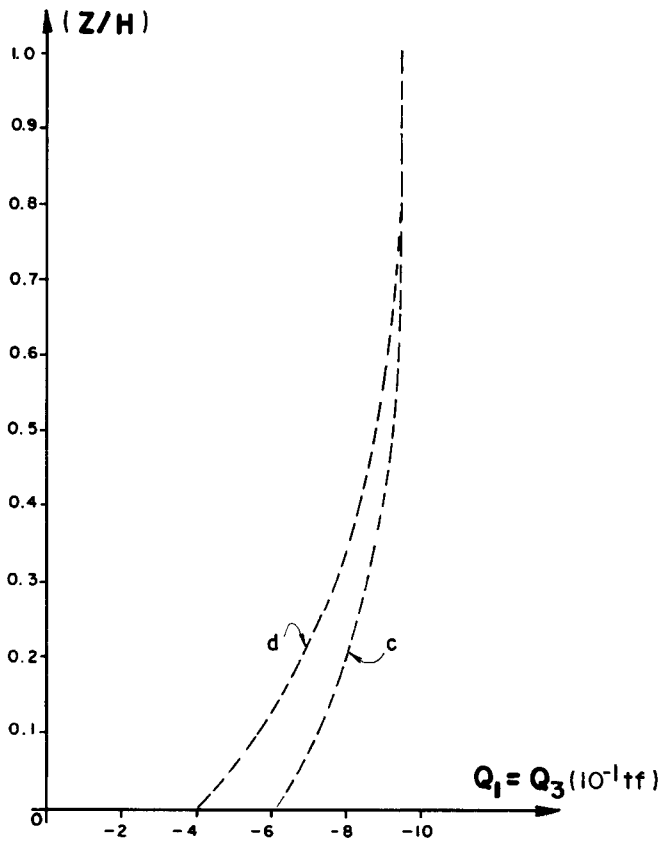


FIG. III-27 - ESFORÇO CORTANTE NA PAREDE 1

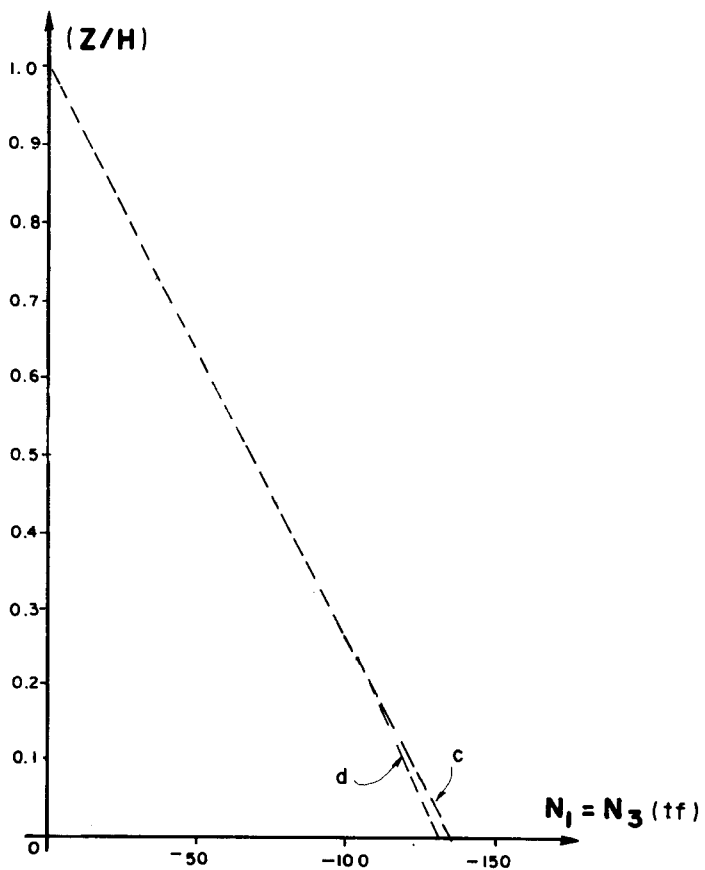


FIG. III- 28 - ESFORÇO NORMAL NA PAREDE 1

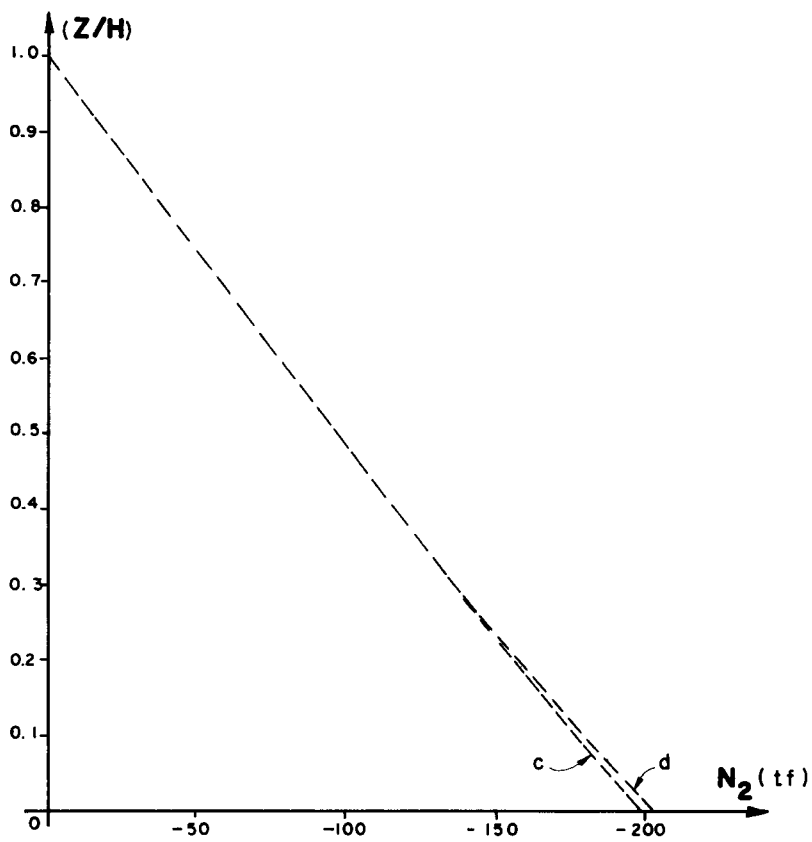


FIG. III- 29 - ESFORÇO NORMAL NA PAREDE 2

## b) Carregamento Anti-métrico

A Fig. III.30 apresenta uma estrutura de geometria simétrica e anti-métrica de carregamento.

Nas paredes 1 e 3 atuam cargas de sentidos opostos  $p_1$ , uniformemente distribuídas, e com excentricidades  $e_1$ . A parede 2 não é carregada.

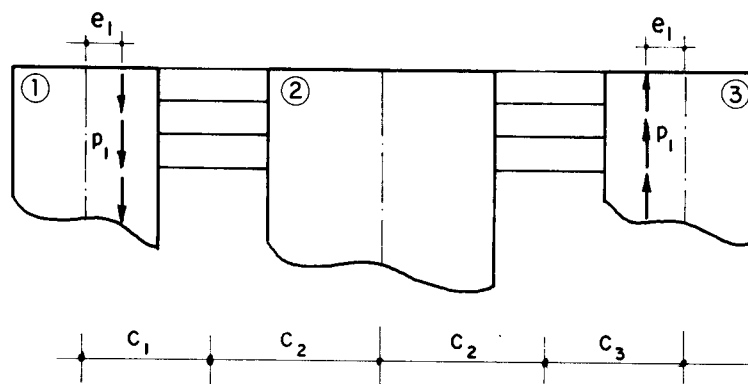


FIG. III-30 - ASSOCIAÇÃO DE PAREDES- CARREGAMENTO ANTIMÉTRICO.

Pelas condições de simetria da estrutura e anti-metria de carregamento, conclui-se:

- que as forças cortantes nas paredes 1 e 3 são iguais e de mesmo sentido.
- as forças cortantes uniformemente distribuídas nos pontos médios dos dois tramos de lintéis são iguais e opostas.
- a força normal na parede 2 é nula, e nas paredes 1 e 3 são iguais e de sentidos opostos.

Indica-se na Fig. III.31 a convenção dos esforços positivos nas paredes 1, 2 e 3, conforme as considerações acima.



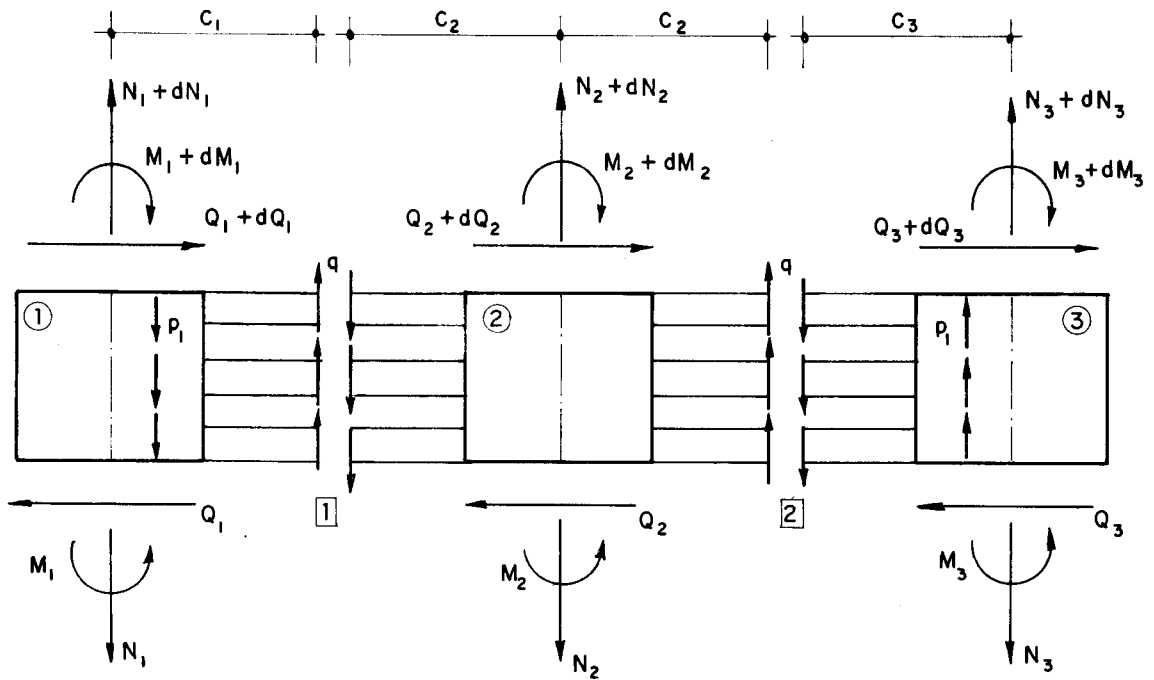


FIG. III-31 - CONVENÇÃO DOS ESFORÇOS POSITIVOS

Do equilíbrio à rotação no elemento  $dz$  das paredes 1 e 2 e devido às considerações de simetria e antissimetria, escrevem-se:

$$Q_1 = Q_3 = -j_1 u''' + q c_1 - p_1 e_1 \quad \dots \text{III.50}$$

e

$$Q_2 = -j_2 u''' + 2 q c_2 \quad \dots \text{III.51}$$

Para o equilíbrio à translação vertical, tem-se:

$$\frac{dN_1}{dz} = \frac{-dN_3}{dz} = p_1 - q \quad \dots \text{III.52}$$

e

$$\frac{dN_2}{dz} = 0 \quad \dots \text{III.53}$$

Mantendo as convenções de sinais para os deslocamentos positivos, e com base nas condições de simetria da estrutura e antimetria do carregamento, conclui-se que as equações de compatibilidade nos pontos médios dos lintéis 1 e 2, são iguais. Portanto, considerando-se o lintel 1, tem-se:

$$\frac{2 h b^3}{3 E i} q = u'(c_1 + c_2) - \delta_1 \quad \dots \text{III.54}$$

onde os termos da equação acima já têm significados conhecidos.

Utilizando a relação  $N = EA\delta'$ , as equações III.52 e III.53, levam a:

$$\delta_1'' = -\delta_3'' = \frac{1}{EA_1} (p_1 - q) \quad \dots \text{III.55.a}$$

e

$$\delta_2'' = 0 \quad \dots \text{III.55.b}$$

Derivando a equação III.54 duas vezes em relação a  $z$ , tem-se:

$$\frac{2 h b^3}{3 E i} q'' = u'''(c_1 + c_2) - \delta_1'' \quad \dots \text{III.56}$$

Usando as equações III.50 e III.51, a partir da condição de equilíbrio à força cortante, obtém-se:

$$u''' = \frac{2c}{j} q - \frac{2m_1}{j} \quad \dots \text{III.57}$$

onde

$$j = 2j_1 + j_2 \quad \dots \text{III.58.a}$$

$$c = c_1 + c_2 \quad \dots \text{III.58.b}$$

$$m_1 = p_1 e_1 \quad \dots \text{III.58.c}$$

Utilizando as equações III.55.a e III.57 em III.56, tem-se:

$$\frac{2 h b^3}{3 E i} q'' = \left( \frac{2c^2}{j} + \frac{1}{EA_1} \right) q - \frac{2cm_1}{j} - \frac{p_1}{EA_1} \dots \text{III.59}$$

ou, de uma forma mais compacta:

$$t_0 q'' - t_1 q = t_2 \quad \dots \text{III.60}$$

onde:

$$t_0 = \frac{2 h b^3}{3 E i} \quad \dots \text{III.61.a}$$

$$t_1 = \frac{2c^2}{j} + \frac{1}{EA_1} \quad \dots \text{III.61.b}$$

$$t_2 = \frac{2cm_1}{j} - \frac{p_1}{EA_1} \quad \dots \text{III.61.c}$$

A solução da equação III.60, assim como as condições de contorno da equação são apresentados no Apêndice D, que fornece a solução dada pela equação abaixo:

$$q = \left( \frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0} \right) \text{sech } \lambda H \text{ ch } \lambda(H-z) - \frac{t_2}{t_1} \dots \text{III.16}$$

Como nos casos anteriores, a resultante do esforço cortante nos pontos médios dos lintéis em uma cota  $z$  qualquer é dada pela equação III.19, ou de outro modo, pela equação III.20, já referenciada em itens anteriores. Por conveniência repete-se esta equação:

$$T = \left( \frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0} \right) \left[ \frac{\operatorname{sech} \lambda H}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda(H-z) - \frac{t_2}{t_1} (H-z) \right] \quad \dots \text{III.20}$$

a) Momentos fletores

De modo análogo aos casos anteriores, obtém-se as equações dos momentos fletores utilizando as equações III.21 e III.57.

$$M_1 = M_3 = \frac{j_1}{j} \left[ -2Tc + 2m_1(H-z) \right] \quad \dots \text{III.62.a}$$

e

$$M_2 = \frac{j_2}{j} \left[ -2Tc + 2m_1(H-z) \right] \quad \dots \text{III.62.b}$$

b) Esforços cortantes

Substituindo a equação III.57 em III.50 e III.51, tem-se:

$$Q_1 = Q_3 = \frac{c_1 j_2 - 2c_2 j_1}{j} q - \frac{j_2}{j} m_1 \quad \dots \text{III.63.a}$$

$$Q_2 = - \frac{2(c_1 j_2 - 2c_2 j_1)}{j} q + \frac{2j_2}{j} m_1 \quad \dots \text{III.63.b}$$

c) Esforços normais

Integrando as equações III.52 e III.53, obtém-se

$$N_1 = -N_3 = -p_1(H-z) + T \quad \dots \text{III.64.a}$$

$$N_2 = 0 \quad \dots \text{III.64.b}$$

d) Determinação da constante  $\Delta$ 

Para este caso  $\Delta = u'(0) c - \delta_1(0)$ , e procedendo como nos casos anteriores, obtém-se:

$$\Delta = \frac{(2\beta_\theta m_1 c + \beta_1 p_1)H - (2\beta_\theta c^2 + \beta_1)\varphi}{1 + (2\beta_\theta c^2 + \beta_1)\eta} \quad \dots \text{III.65}$$

onde as constantes desta equação conservam suas definições anteriores.

## e) Equação da linha elástica

Substituindo a equação III.16 em III.57, tem-se:

$$u''' = \left(\frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0}\right) \frac{2c}{j} \operatorname{sech} \lambda H \operatorname{ch} \lambda(H-z) - \frac{2c}{j} \frac{t_2}{t_1} - \frac{2m_1}{j} \quad \dots \text{III.66}$$

ou

$$u''' = u_1 \operatorname{ch} \lambda(H-z) - u_2 \quad \dots \text{III.67}$$

onde

$$u_1 = \left(\frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0}\right) \frac{2c}{j} \operatorname{sech} \lambda H \quad \dots \text{III.68.a}$$

$$u_2 = \frac{2}{j} \left(\frac{t_2}{t_1} c + m_1\right) \quad \dots \text{III.68.b}$$

integrando três vezes em relação a  $z$  e usando as condições de contorno abaixo,

$$u(0) = 0 \quad \dots \text{III.69.a}$$

$$u'(0) = M(0)/K_\theta \quad \dots \text{III.69.b}$$

$$u''(H) = 0 \quad \dots \text{III.69.c}$$

onde

$$a) \quad M(o) = 2 M_1(o) + M_2(o) \quad \dots \text{III.70.a}$$

$$b) \quad K_\theta = 2 k_{\theta_1} + k_{\theta_2} \quad \dots \text{III.70.b}$$

obtém-se a equação da linha elástica dada por:

$$u = \frac{u_1}{\lambda^3} \left[ \text{sh } \lambda H (1 - \text{ch } \lambda z) + \text{ch } \lambda H (\text{sh } \lambda z - \lambda z) \right] -$$

$$+ u_2 \left( \frac{z^3}{6} - \frac{Hz^2}{2} \right) + \frac{M(o)}{k_\theta} z \quad \dots \text{III.36}$$

#### EXEMPLO NUMÉRICO - III.4

Considere a associação estrutural da Fig.III.30, formada por três paredes, sendo as duas das extremidades geometricamente iguais, ligadas por lintéis de seções transversais 20 x 40 cm com 200 cm de vão.

O conjunto estrutural é formado por 20 andares com 3 metros de altura por andar.

As seções transversais das paredes 1 e 3, medem 20 x 180 cm, enquanto que a da parede 2 mede 20 x 250 cm.

O carregamento é constituído de carga vertical uniformemente distribuída  $p_1 = 2,0 \text{ tf/m}$ , atuando na parede 1 no sentido contrário ao eixo Oz com excentricidade  $e_1 = 20 \text{ cm}$ , na parede 3 no sentido do eixo Oz com excentricidade  $e_1 = -20 \text{ cm}$ . Na parede 2 não existe carga aplicada. Para E toma-se o valor  $E = 2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ .

a) Dados retirados da figura.

$$\begin{aligned}
 b &= 1,00 \text{ m} & e_1 &= 0,20 \text{ m} \\
 c_1 &= c_3 = 1,90 \text{ m} & m_1 &= 0,40 \text{ tf}\cdot\text{m}/\text{m} \\
 c_2 &= 2,25 \text{ m} & E &= 2 \times 10^6 \text{ tf}/\text{m}^2 \\
 p_1 &= 2,0 \text{ tf}/\text{m} & h &= 3,00 \text{ m} \\
 H &= 60,00 \text{ m}
 \end{aligned}$$

a.1) Seções transversais das paredes

$$A_1 = A_3 = 0,36 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 0,50 \text{ m}^2$$

a.2) Momentos de inércia das paredes e dos lintéis

$$J_1 = J_3 = 9,72 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$J_2 = 2,60 \times 10^{-1} \text{ m}^4$$

o produto de rigidez à flexão do conjunto é:

$$j = E(J_1 + J_2 + J_3) = 9,088 \times 10^5 \text{ t}\cdot\text{m}^2$$

e o momento de inércia dos lintéis vale:

$$i = \frac{0,20 \times 0,40^3}{12} = 1,067 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

b) Outras constantes

Usando as equações III.60, obtém-se:

$$t_0 = 9,372 \times 10^{-4} \quad t_f^{-1} \cdot m^2$$

$$t_1 = 3,929 \times 10^{-5} \quad t_f^{-1}$$

$$t_2 = -6,43 \times 10^{-6} \quad m^{-1}$$

que levados em III.60, resulta:

$$9,372 \times 10^{-4} q'' - 3,929 \times 10^{-5} q = -6,43 \times 10^{-6}$$

c) Para  $\beta_1$  e  $\beta_\theta$ , usa-se os valores:

$$\beta_1 = \frac{1}{k_{v_1}} = 1,388 \times 10^{-5} \quad m/t$$

$$\beta_\theta = \frac{1}{2k_{\theta_1} + k_{\theta_2}} = 3,931 \times 10^{-6} \quad m/t$$

que levados na equação III.65, encontra-se:

$$\Delta = 0,620 \times 10^{-3} \quad m$$

utilizando a equação III.16, tem-se:

$$q = 4,613 \times 10^{-6} \quad \text{ch } \lambda(H-z) + 1,64 \times 10^{-1}$$

e seguem os gráficos dos esforços e deslocamentos corres  
pondentes, identificados pela letra c.

d) Para o caso de engastamento rígido, tem-se:

$$\beta_1 = 0$$

$$\beta_\theta = 0$$

que, analogamente ao item c, encontra-se:



$$\Delta = 0$$

de onde pode-se escrever:

$$q = -1,52 \times 10^{-6} \operatorname{ch} \lambda(H-z) + 1,64 \times 10^{-1}$$

e seguem os gráficos dos esforços e deslocamentos correspondentes, identificados pela letra d.

Os valores da força cortante distribuída nos pontos médios dos vãos dos lintéis, apresentados em gráfico na Fig. III.32, são justificados pelos mesmos motivos dos exemplos anteriores. A partir desta figura e lembrando a equação III.19, é evidente os resultados da Fig. III.33, que substituídos nas equações III.62, resultam em momentos fletores nas paredes de fundação flexível maiores que os momentos fletores nas paredes de fundação rígida, principalmente nas seções mais próximas da base.

Ainda aqui, os resultados para os dois casos de vinculação apresentados, são próximos à medida que as seções se afastam da base.

Foram realizadas verificações semelhantes àquelas dos exemplos anteriores.

A influência dos lintéis na distribuição dos esforços torna-se evidente pela análise do formulário.

#### III.4 - ASSOCIAÇÃO PLANA DE QUATRO PAREDES LIGADAS POR LINTÉIS

Por último, verifica-se o caso de uma associação plana de quatro paredes ligadas por três tramos de lintéis, de tal modo que o conjunto possui um eixo de simetria conforme mostra a Fig. III.40.

Os carregamentos, coincidem com os dos casos anteriores, isto é, são constituídos de cargas  $p_1$  e  $p_2$ , uniformemente distribuídas, com excentricidade  $e_1$  e  $e_2$ , respectivamente.

Devido à simetria de geometria e carregamento,

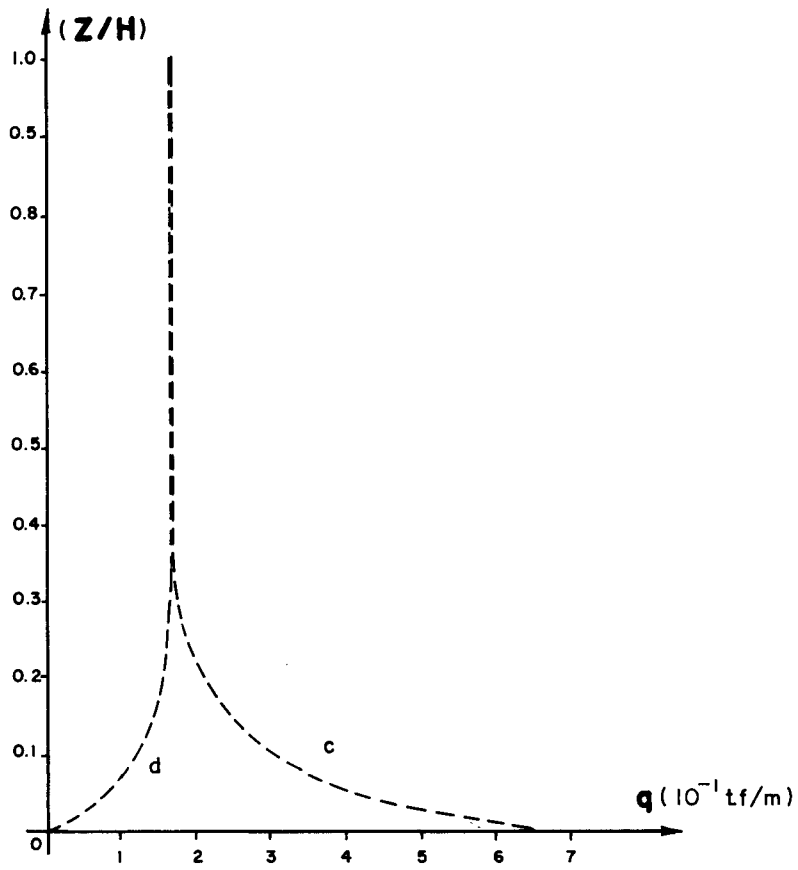


FIG. III-32 - FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDA NOS LINTÉIS

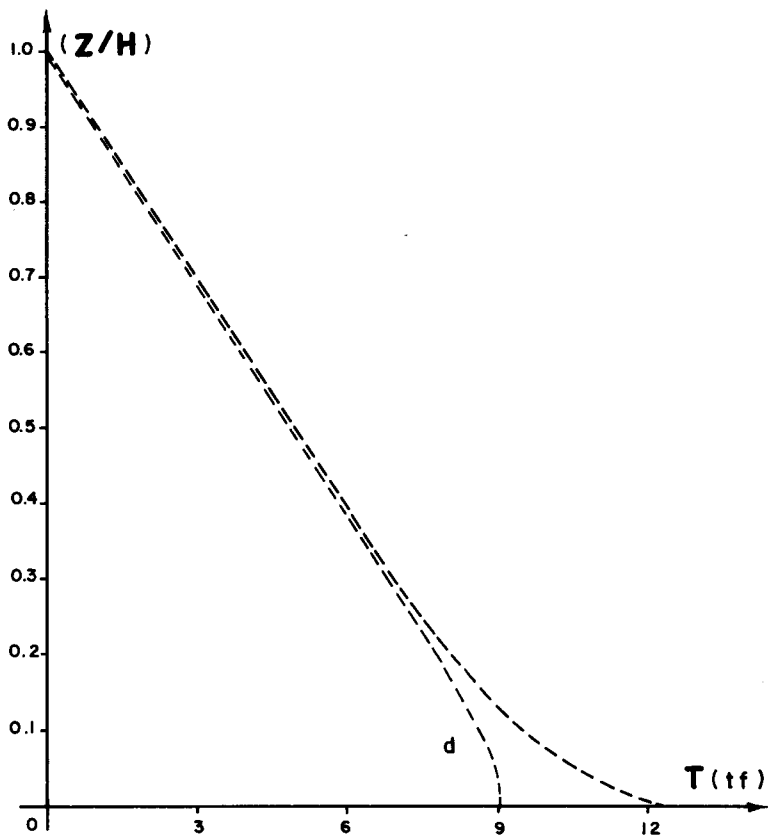


FIG. III-33 - RESULTANTE DA FORÇA CORTANTE DISTRIBUÍDA NOS LINTÉIS

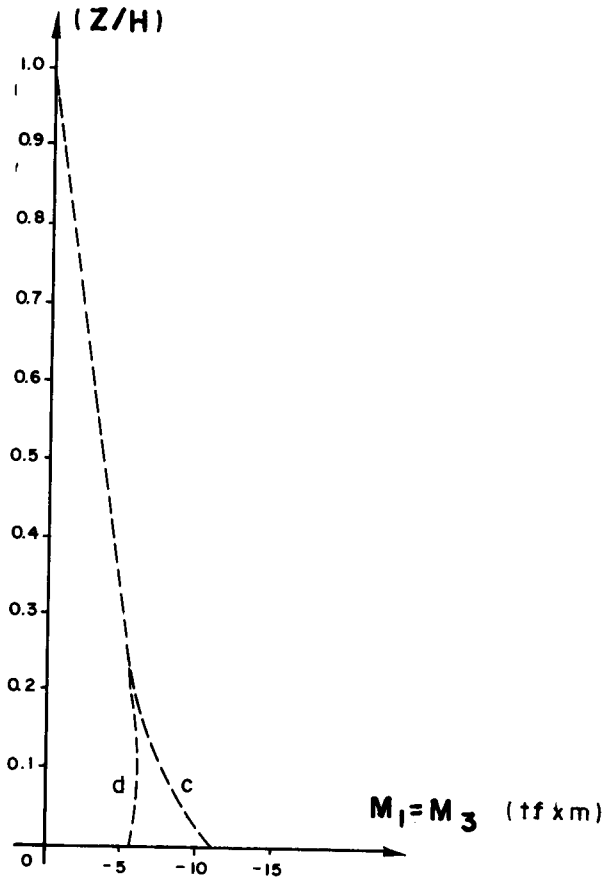


FIG. III-34- MOMENTO FLETOR NA PAREDE 1

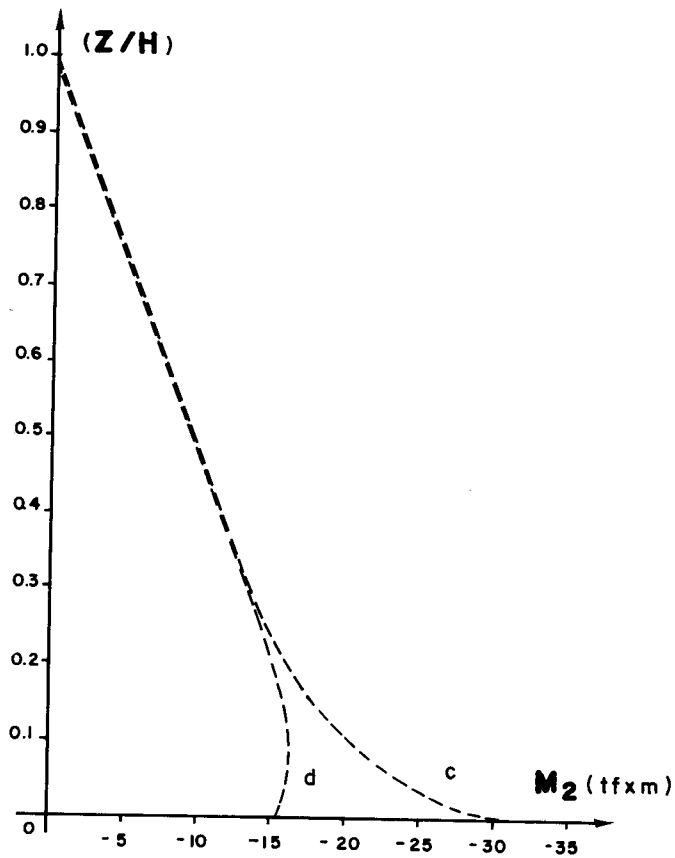


FIG. III - 35- MOMENTO FLETOR NA PAREDE 2

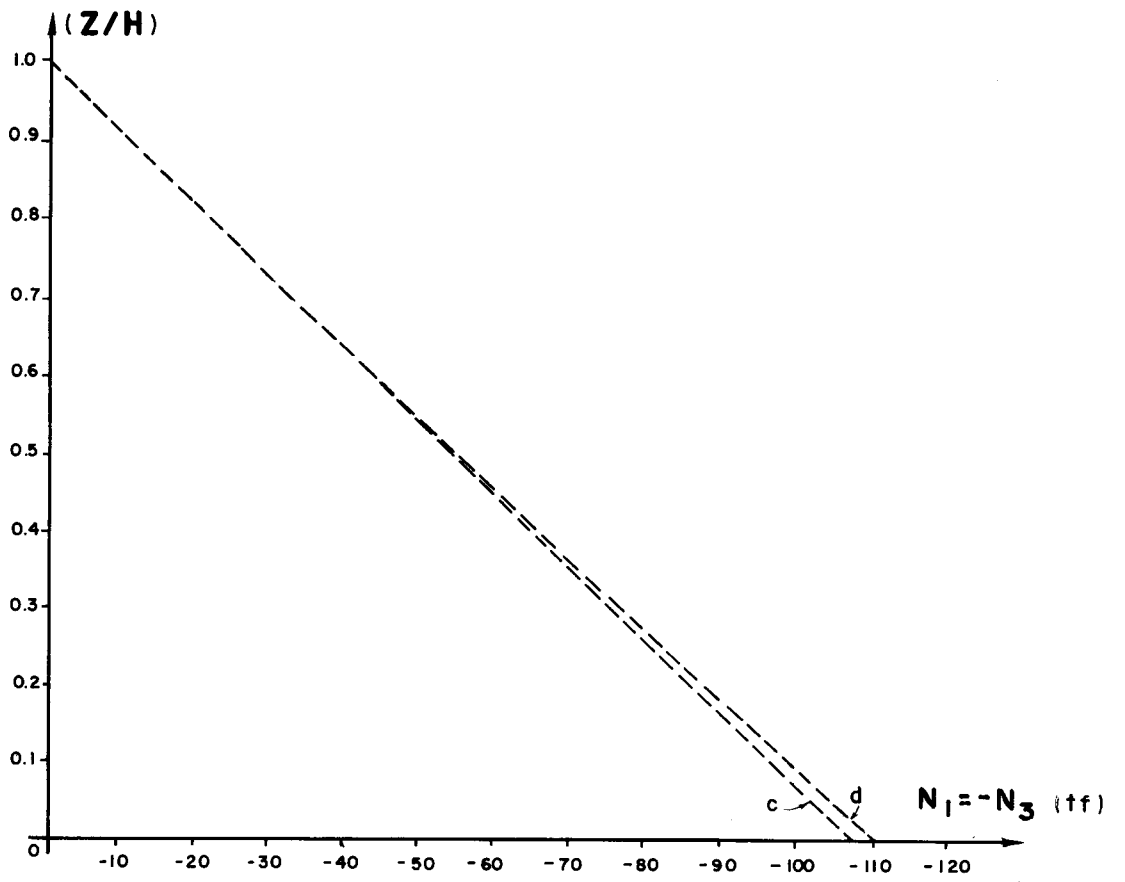


FIG. III-36 - ESFORÇO NORMAL NA PAREDE 1

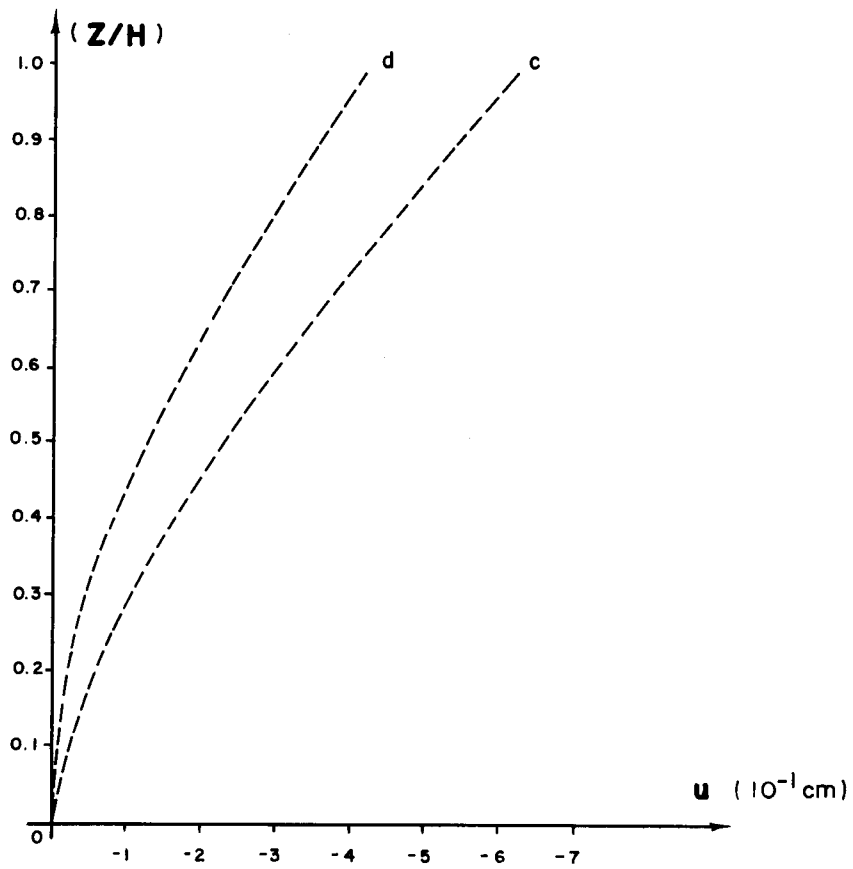


FIG. III-37 - DESLOCAMENTO DA ASSOCIAÇÃO

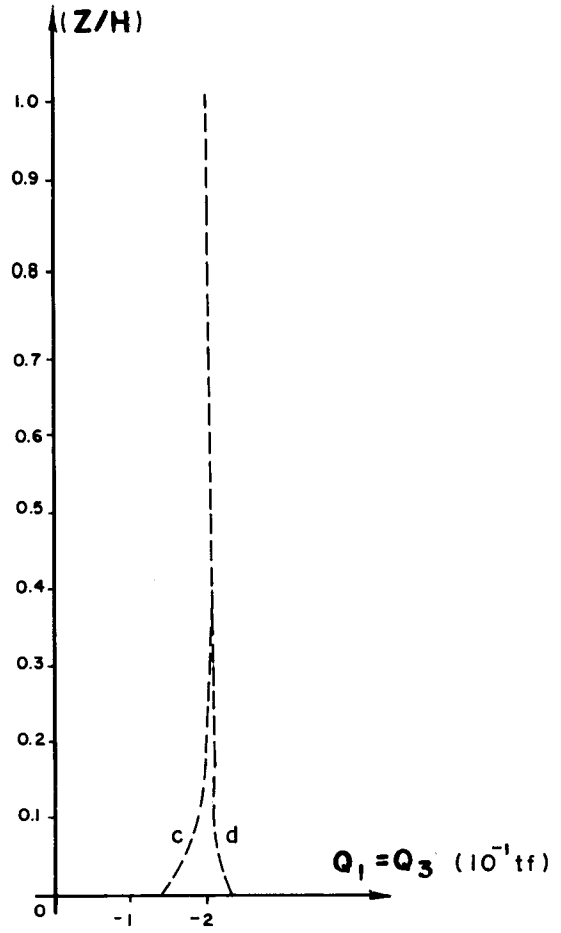


FIG. III-38- ESFORÇO CORTANTE NA PAREDE 1

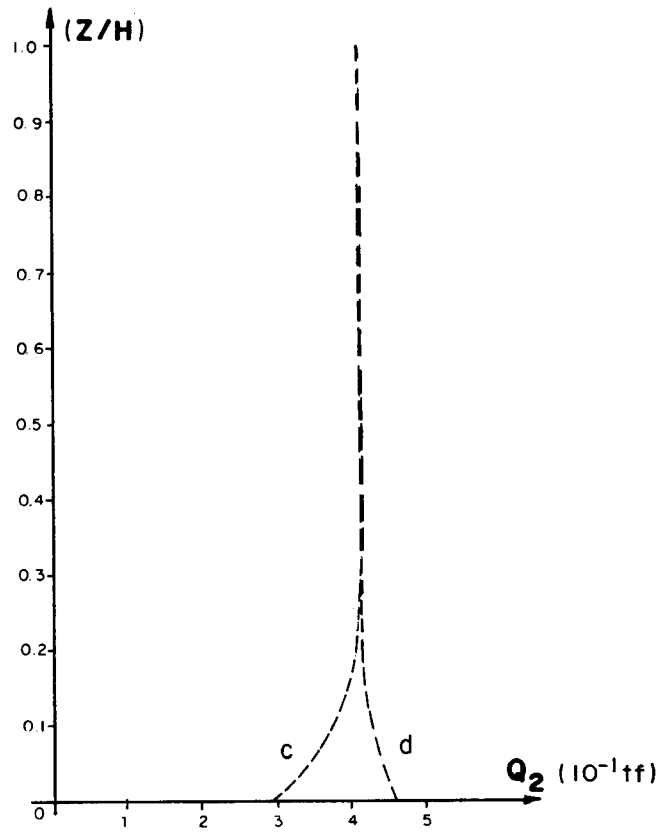


FIG. III-39- ESFORÇO CORTANTE NA PAREDE 2

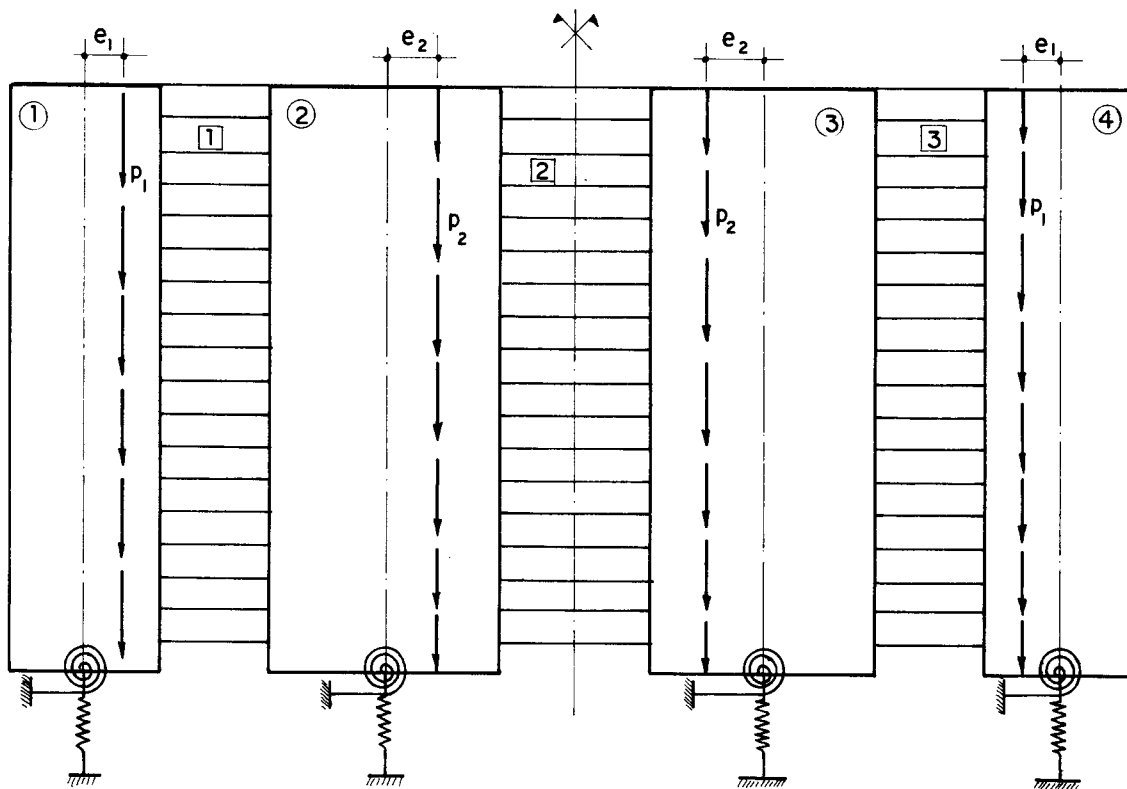


FIG. III - 40 - ASSOCIAÇÃO DE PAREDES COM VÍNCULOS ELÁSTICOS

é evidente afirmar que:

- o conjunto possui deslocamento lateral nulo, isto é:  
 $u = 0$ .
- não há transferência de carga da parede 2 para a parede 3, conseqüentemente, a força cortante distribuída, que atua nos pontos médios dos lintéis 2, é nula.
- as forças cortantes distribuídas que atuam nos pontos médios dos lintéis 1 e 3, são iguais.
- as forças cortantes nas paredes 1 e 4, assim como nas paredes 2 e 3, são iguais e opostas.

Segundo as conclusões de simetria acima, repre

sentá-se na Fig. III.41, por ser suficiente, somente a convenção dos esforços positivos para as paredes 1 e 2.

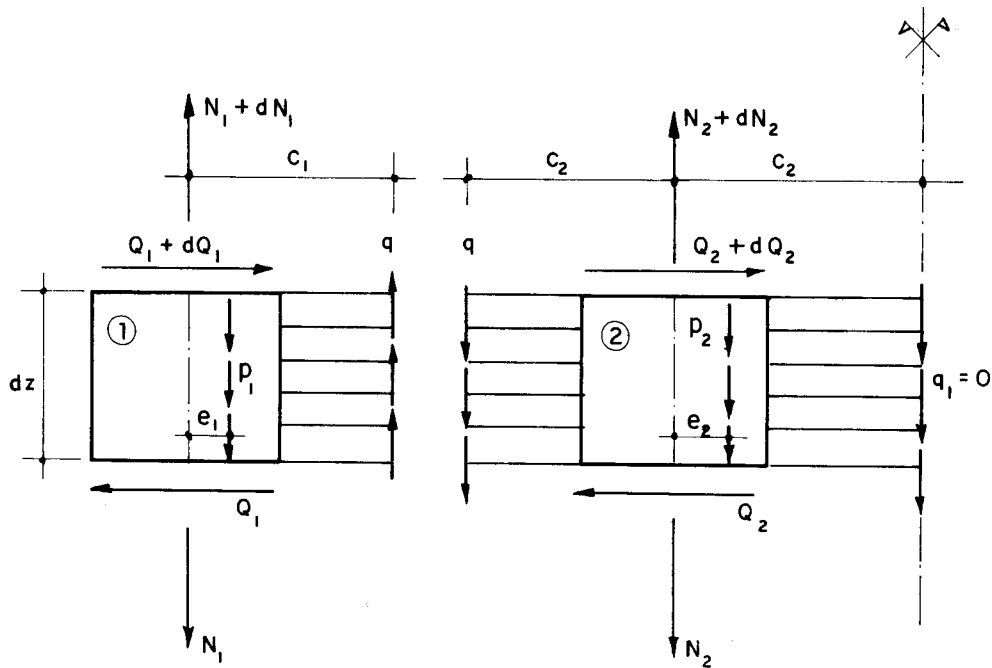


FIG. III - 41 - CONVENÇÃO DOS ESFORÇOS POSITIVOS

Convém observar que a estrutura recai no modelo do item III.2, sendo resolvida portanto, usando as equações daquele item, desde que, se considere o deslocamento lateral nulo.

CAPÍTULO IV

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O emprego da Técnica do Meio Contínuo nas considerações sobre a perda de estabilidade de estruturas, conduz a uma equação ou a um sistema de equações diferenciais de terceira ordem com coeficientes variáveis. A solução aproximada por Séries de Potências, leva a resultados considerados de boa precisão, conforme comparações realizadas por CARVALHO(11), utilizando o programa de RACHID(9), que analisa a carga crítica em barras de seção delgada pela técnica dos elementos finitos. Os resultados obtidos, considerado de excelente aproximação, viabilizaram neste trabalho, o uso do programa elaborado pelo primeiro.

Como segunda observação, confirma-se a elevada contribuição dos lintéis para a rigidez da estrutura, fato verificado pela comparação dos resultados apresentados nos exemplos numéricos II.1 e II.2. Esse enrijecimento deve-se à ação de flexão dos lintéis sobre as paredes.

No Capítulo III, utilizando novamente a Técnica do Meio Contínuo, para verificar a influência dos lintéis na distribuição de esforços entre paredes associadas com carregamentos que produzem deslocamentos axiais relativos, obtém-se uma equação diferencial de segunda ordem não homogênea a coeficientes constantes, cuja solução encontrada é exata.

A formulação apresentada, permite também obter os esforços internos na estrutura para os casos de recalques diferenciais entre as paredes.



Como observação importante, revela-se os momentos fletores nas paredes de fundações flexíveis maiores (o sinal negativo só indica que o sentido é contrário ao da convenção adotada) que os momentos fletores nas paredes de fundação rígida. Tal fato é justificado, pelo efeito da flexibilidade da fundação na força cortante distribuída, nos pontos médios dos vãos dos lintéis, conforme comentários realizados por ocasião dos exemplos numéricos. É necessário afirmar, que entende-se por fundação flexível a aquela com flexibilidade não só à rotação, mas também ao movimento de translação.

Como última observação, verifica-se que os valores dos esforços internos são bem próximos, à medida que as seções transversais se afastam da base da estrutura.

APÊNDICE A

1. RIGIDEZ DE UM PÓRTICO À FORÇA CORTANTE: COEFICIENTE  $s_f$  -  
SEGUNDO, POR EXEMPLO, MANCINI( 7 )

Para a determinação da rigidez à força cortante em pórticos regulares sujeitos a carga vertical, como nos casos em que o pórtico é sujeito à carga lateral, admite-se que os pontos de momentos nulos localizam-se nos centros de vãos de pilares e vigas, ou seja, supõe-se próximas as rotações de todos os nós da viga do andar e também as rotações de nós consecutivos de uma mesma prumada de pilar.

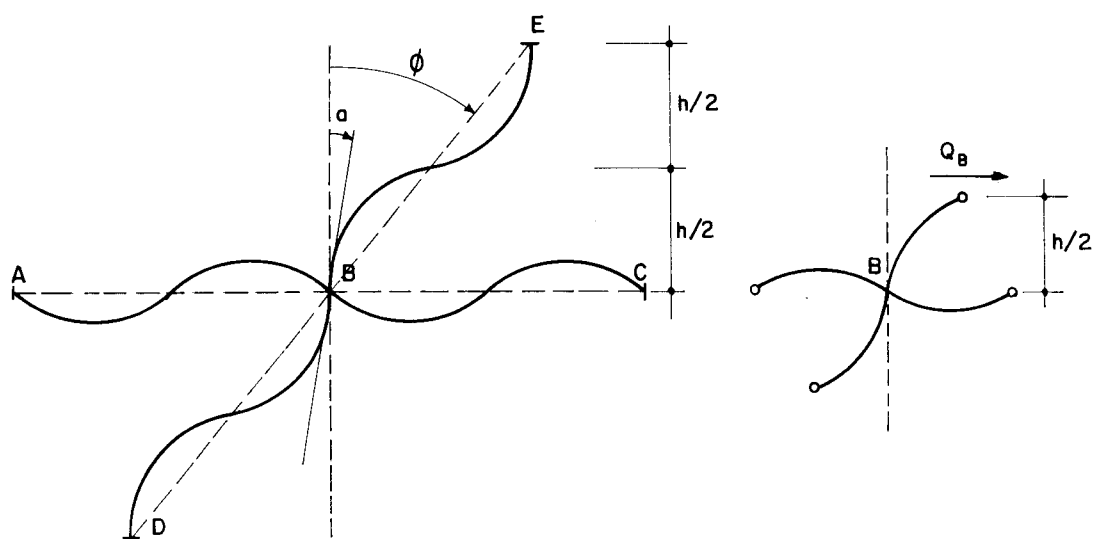


FIG. A.1 - RIGIDEZ DE PÓRTICO

Na Fig. A.1 representa-se o nó B e os nós vizinhos A, C, E e D, com a distorção do andar e a rotação do nó B. Os momentos que as barras aplicam ao nó B, positivos no sentido horário, são expressos por

$$M_{BE} = 6 E k_E (\phi - a)$$

$$M_{BD} = 6 E k_D (\phi - a)$$

$$M_{BA} = -6 E k_A a$$

$$M_{BC} = -6 E k_C a \quad \dots A.1$$

onde:

- a)  $\phi$  representa a distorção do andar.
- b)  $a$  representa a rotação do nó B.
- c)  $k$  representa as relações  $J_i / \ell_i$  das barras.

Pelo equilíbrio do nó, tem-se:

$$a = \frac{k_E + k_D}{k_A + k_C + k_E + k_D} \phi \quad \dots A.2$$

Como a força cortante no pilar B é dada por

$$Q_B = \frac{2 M_{BE}}{h} \quad \dots A.3$$

segue pelas equações A.1 e A.2, que:

$$Q_B = \frac{12 E}{h} k_E \frac{\sum \kappa}{\sum_b \kappa} \phi \quad \dots A.4$$

onde:

- a) o índice "v" na somatória indica ser estendida às vigas que concorrem ao nó.
- b) o índice "b" na somatória indica ser estendida à totalidade das barras que concorrem ao nó.

Da equação A.4 conclui-se que a rigidez do pilar B vale:

$$s_B = \frac{12 E}{h} k_E \frac{\sum_v k}{\sum_b k} \quad \dots A.5$$

Para obter a rigidez do pórtico somam-se as contribuições de cada pilar, então:

$$s_f = \frac{12 E}{h} \sum_{na} \left[ k_{p.n} \frac{\sum_{v.n.} k}{\sum_{b.n.} k} \right] \quad \dots A.6$$

onde:

- a) n.a - somatória estendida a todos os nós do andar considerado.
- b)  $k_{p.n}$  - relação  $J/l$  do pilar acima do nó considerado.
- c) v.n - somatória estendida aos tramos de viga que concorrem no nó.
- d) b.n - somatória estendida a todas as barras (2, 3 ou 4 barras) que concorrem no nó.

$$q = \frac{M_{BI} + M_{IB}}{a_1 h} \quad \dots B.1$$

e

$$m = \frac{M_{IB}}{h} + q \frac{b_1}{2} \quad \dots B.2$$

Os momentos aplicados ao nó A (positivos no sentido horário), supondo iguais as rotações de três nós consecutivos de um mesmo pilar, são expressos por:

$$M_{AC} = 6 E k_1 (\phi_B - a) \quad \dots B.3.a$$

$$M_{AD} = 6 E k_1 (\phi_B - a) \quad \dots B.3.b$$

$$M_{AB} = -4 E k_2 a - 2 E k_2 b \quad \dots B.3.c$$

onde:

- a) a é a rotação do nó A
- b) b é a rotação do nó B
- c)  $k_1$  representa as relações  $J_1/\ell_1$  indicadas em círculos na Fig. B.1.

e pelo equilíbrio do nó segue:

$$(12k_1 + 4k_2)a + 2k_2 b = 12 k_1 \phi_B \quad \dots B.4$$

Do mesmo modo, supondo iguais as rotações dos nós B, E e F do pilar B, os momentos aplicados ao nó B (positivos no sentido horário) são:

$$M_{BE} = 6 E k_3 (\phi_B - b)$$

$$M_{BF} = 6 E k_3 (\phi_B - b)$$

$$M_{BA} = -4 E k_2 b - 2 E k_2 a$$

$$M_{BI} = -4 E k_4 b - 2 E k_4 \phi_B - 6 E k_4 \phi_B \frac{b_1}{2 a_1}$$

..... B.5

pelo equilíbrio do nó resulta:

$$2k_2 a + (12k_3 + 4k_2 + 4k_4) b = \left[ 12k_3 - 2k_4 \left( 1 + \frac{3b_1}{2a_1} \right) \right] \phi_B$$

..... B.6

Partindo das equações B.4 e B.6, encontram-se as seguintes equações para as rotações dos nós A e B,

$$a = \omega \phi_B \quad \text{..... B.7.a}$$

$$b = \beta \phi_B \quad \text{..... B.7.b}$$

com

$$\theta = \frac{12k_3 + 4k_2 + 4k_4}{2 k_2} \quad \text{..... B.8.a}$$

e

$$\varphi = \frac{12k_1 + 4k_2}{2 k_2} \quad \text{..... B.8.b}$$

onde

$$\omega = \left[ 12(k_3 - k_1 \theta) - 2k_4 \left( 1 + \frac{3b_1}{2a_1} \right) \right] / \left[ 2k_2 - \theta(12k_1 + 4k_2) \right]$$

..... B.9.a

e

$$\beta = \left\{ 12k_1 - \varphi \left[ 12k_3 - 2k_4 \left( 1 + \frac{3b_1}{2a_1} \right) \right] \right\} / \left[ 2k_2 - \varphi(12k_3 + \right.$$

$$+ 4k_2 + 4k_4) \quad ] \quad \dots B.9.b$$

Se um pilar possui as relações  $J_i/\ell_i$  diferentes, abaixo e acima do andar considerado, o valor  $k$  correspondente a introduzir nas expressões de  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$  e  $\beta$  é a média destas relações.

A força cortante no pilar A no andar considerado é dada por

$$Q_A = \frac{2 M_{AC}}{h} \quad \dots B.10.a$$

e no pilar B por

$$Q_B = \frac{2 M_{BE}}{h} \quad \dots B.10.b$$

de onde, tendo em conta as equações B.3, B.5 e B.7, resulta:

$$Q_A = \frac{12 E k_1}{h} (1-\omega) \phi_B \quad \dots B.11.a$$

$$Q_B = \frac{12 E k_3}{h} (1-\beta) \phi_B \quad \dots B.11.b$$

Negligenciando o giro  $\phi_s$  da parede devido à força cortante tem-se o giro total  $\phi = \phi_B$  e portanto as rigidez dos pilares à força cortante serão

$$s_A = \frac{12 E k_1}{h} (1-\omega) \quad \dots B.12.a$$

e

$$s_B = \frac{12 E k_3}{h} (1-\beta) \quad \dots B.12.b$$

A rigidez total do pórtico à força cortante é obtida pela soma

$$s = s_A + s_B = \frac{12 E}{h} \left[ k_1 (1-\omega) + k_3 (1-\beta) \right] \quad \dots B.13$$

O momento distribuído  $\underline{m}$  é expresso pela função linear

$$m = p_1 \phi_B \quad \dots B.14$$

Tendo em conta a expressão

$$M_{IB} = 4 E k_4 \phi_B + 2 E k_4 b + 6 E k_4 \phi_B \frac{b_1}{2 a_1} \quad \dots B.15$$

e a relação de  $\underline{m}$  da equação B.2 e pela equação B.7.b, resulta

$$p_1 = \frac{E k_4}{h} \left[ 4 + 2\beta + \frac{3 b_1}{a_1} \left( 2 + \beta + \frac{b_1}{a_1} \right) \right] \quad \dots B.16$$

Para a determinação de  $p_2$  considere-se a Fig. B.2 onde está apresentada, a deformação do painel corresponde à rotação  $\phi_s$ , devido à força cortante.

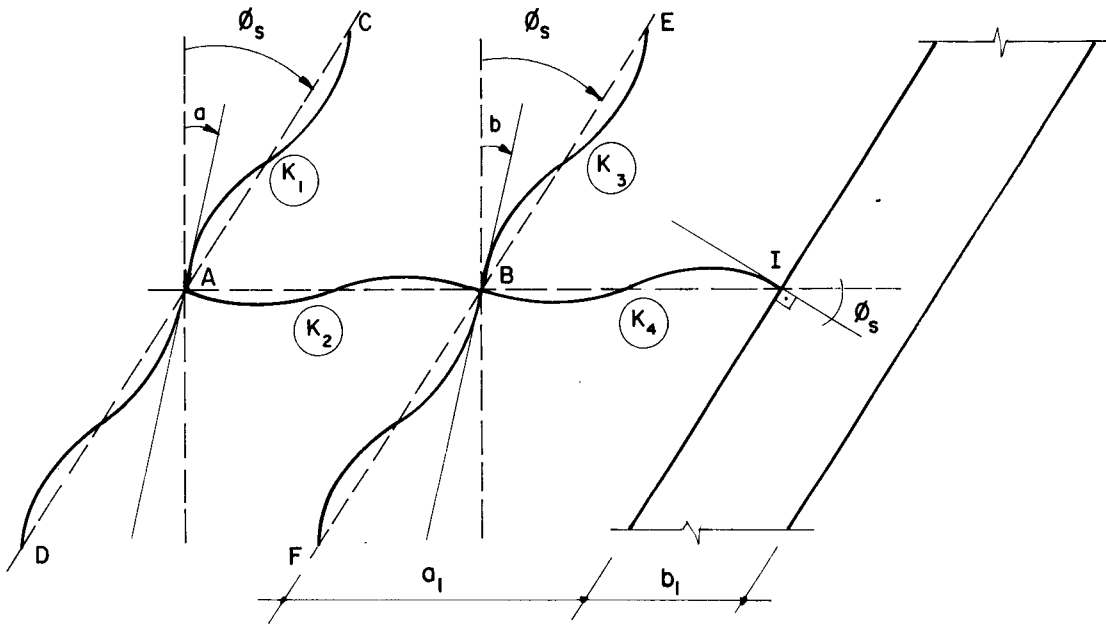
Na estrutura da Fig. B.2, o momento distribuído  $\underline{m}$  aplicado ao eixo da parede quando este sofre a rotação  $\phi_s$  é dado por:

$$m = p_2 \phi_s \quad \dots B.17$$

Com a hipótese de serem iguais as rotações de três nós consecutivos de um mesmo pilar, pelo equilíbrio dos nós A e B à rotação, tendo em conta a equação B.17 e a notação da Fig. B.2, chega-se a:

$$a = \omega \phi_s \quad \dots B.18.a$$



FIG. B.2 - DEFORMAÇÃO DO PAINEL DEVIDO A " $\phi_s$ "

$$b = \beta \phi_s \quad \dots B.18.b$$

e

$$p_2 = \frac{Ek_4}{h} \left[ 4 + 2\beta \left( 1 + \frac{3b_1}{2a_1} \right) + \frac{3b_1}{a_1} \right] \quad \dots B.19$$

com  $\theta$  e  $\varphi$  dados pelas equações B.8 e  $\omega$  e  $\beta$  dados por:

$$\omega = \frac{12(k_3 - k_1\theta) - 2k_4}{2k_2 - (12k_1 + 4k_2)\theta} \quad \dots B.20.a$$

e

$$\beta = \frac{12k_1 - \varphi(12k_3 - 2k_4)}{2k_2 - (12k_3 + 4k_4 + 4k_2)\varphi} \quad \dots B.20.b$$

APÊNDICE C

## 1. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS, USANDO SÉRIE DE POTÊNCIAS, SEGUNDO CARVALHO(11)

Considere a equação

$$[K]\{d''(\epsilon)\} - H^2[S]\{d(\epsilon)\} + H^3(1-\epsilon)[P]\{d(\epsilon)\} = \{0\} \quad \dots C.1$$

a solução por série de potências será:

$$\{d(\epsilon)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n\} \epsilon^n \quad \dots C.2$$

onde  $\{A_n\}$  é um vetor constante dado por:

$$\{A_n\} = \begin{Bmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{3n} \end{Bmatrix} \quad \dots C.3$$

Derivando duas vezes a equação C.2, obtém-se:

$$\{\delta''(\epsilon)\} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \{A_n\} \epsilon^{n-2} \quad \dots C.4$$

Levando as equações C.2 e C.4 na equação C.1, tem-se:

$$[K] \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \{A_n\} \epsilon^{n-2} - H^2[S] \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n\} \epsilon^n +$$

$$+ H^3(1-\epsilon) [P_T] \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n\} \epsilon^n = \{0\} \quad \dots C.5$$

ou escrevendo de outra forma, tem-se;

$$\begin{aligned} & [K] \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \{A_n\} \epsilon^{n-2} - H^2 [S] \sum_{n=2}^{\infty} \{A_{n-2}\} \epsilon^{n-2} + \\ & + H^3 [P_T] \sum_{n=2}^{\infty} \{A_{n-2}\} \epsilon^{n-2} - H^3 [P_T] \sum_{n=2}^{\infty} \{A_{n-2}\} \epsilon^{n-1} = \{0\} \quad \dots C.6 \end{aligned}$$

Multiplicando todos os termos da equação C.6 pela inversa da matriz  $[K]$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \{A_n\} \epsilon^{n-2} - H^2 [K]^{-1} [S] \sum_{n=2}^{\infty} \{A_{n-2}\} \epsilon^{n-2} + \\ & + H^3 [K]^{-1} [P_T] \sum_{n=2}^{\infty} \{A_{n-2}\} \epsilon^{n-2} - H^3 [K]^{-1} [P_T] \sum_{n=2}^{\infty} \{A_{n-2}\} \epsilon^{n-1} = \{0\} \quad \dots C.7 \end{aligned}$$

Devido ao engastamento perfeito na base do edifício, a primeira condição de contorno é dada por:

$$u'(0) = 0 \quad \dots C.8.a$$

$$v'(0) = 0 \quad \dots C.8.b$$

$$\theta'(0) = 0 \quad \dots C.8.c$$

de onde pode-se afirmar:

$$\{\delta(0)\} = \{0\} \quad \dots C.9$$

onde  $\delta(0)$  representa o vetor deslocamento na base do edifício.

Combinando-se as equações C.2 e C.9, resulta:

$$\{A_0\} = \{0\} \quad \dots \text{C.10}$$

A condição necessária para que a equação C.2 seja solução da equação diferencial C.1, é que a soma dos coeficientes de potências iguais de  $\underline{\epsilon}$  sejam **todos** nulos, possibilitando assim, a determinação de  $\{A_n\}$ .

Desenvolvendo a equação C.7 para os valores iniciais de  $n = 2, 3$  e  $4$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & 2(2-1)\{A_2\}\epsilon^0 - H^2[K]^{-1}[S]\{A_0\}\epsilon^0 + H^3[K]^{-1}[P_T]\{A_0\}\epsilon^0 - \\ & + H^3[K]^{-1}[P_T]\{A_0\}\epsilon^1 + 3(3-1)\{A_3\}\epsilon^1 - H^2[K]^{-1}[S]\{A_1\}\epsilon^1 + \\ & + H^3[K]^{-1}[P_T]\{A_1\}\epsilon^1 - H^3[K]^{-1}[P_T]\{A_1\}\epsilon^2 + 4(4-1)\{A_4\}\epsilon^2 - \\ & + H^2[K]^{-1}[S]\{A_2\}\epsilon^2 + H^3[K]^{-1}[P_T]\{A_2\}\epsilon^2 - H^3[K]^{-1}[P_T]\{A_2\}\epsilon^3 + \\ & + \sum_{n=5}^{\infty} n(n-1)\{A_n\}\epsilon^{n-2} - H^2[K]^{-1}[S]\sum_{n=5}^{\infty} \{A_{n-2}\}\epsilon^{n-2} + \\ & + H^3[K]^{-1}[P_T]\sum_{n=5}^{\infty} \{A_{n-2}\}\epsilon^{n-2} - H^3[K]^{-1}[P_T]\sum_{n=5}^{\infty} \{A_{n-2}\}\epsilon^{n-1} = \{0\} \end{aligned} \quad \dots \text{C.11}$$

Anulando-se o termo de potência zero  $\epsilon^0$  da equação C.11 e tendo em vista a equação C.10, obtém-se:

$$2(2-1)\{A_2\} = \{0\} \quad \dots \text{C.12}$$

ou

$$\{A_2\} = \{0\} \quad \dots \text{C.13}$$

Do mesmo modo, anulando-se o termo de potência 1 ( $\epsilon^1$ ) da equação C.11, resulta:

$$\left\{ -H^3 [K]^{-1} [P_T] \{A_0\} + 3(3-1) \{A_3\} - H^2 [K]^{-1} [S] \{A_1\} + \right. \\ \left. + H^3 [K]^{-1} [P_T] \{A_1\} \right\} \epsilon^1 = \{0\} \quad \dots \text{C.14}$$

Extraíndo-se o valor de  $\{A_3\}$  da equação C.14, obtém-se:

$$\{A_3\} = \frac{1}{3(3-1)} \left[ (H^2 [K]^{-1} [S] - H^3 [K]^{-1} [P_T]) \{A_1\} + \right. \\ \left. + H^3 [K]^{-1} [P_T] \{A_0\} \right] \quad \dots \text{C.15}$$

Fazendo

$$[C_1] = -H^2 [K]^{-1} [S] + H^3 [K]^{-1} [P_T] \quad \dots \text{C.16.a}$$

e

$$[C_2] = [K]^{-1} [P_T] H^3 \quad \dots \text{C.16.b}$$

Estas equações são chamadas de relação de recorrência (ou equações de diferenças finitas) e podem ser usadas para exprimir  $A_n$  para  $n \geq 3$ . Desta forma, combinando-se as equações C.16 com a equação C.15, obtém-se:

$$\{A_3\} = \frac{1}{3(3-1)} ([C_2] \{A_0\} - [C_1] \{A_1\}) \quad \dots \text{C.17}$$

A partir da anulação do termo de potências 2 ( $\epsilon^2$ ) da equação C.11, obtém-se:

$$\left\{ -H^3 [K]^{-1} [P_T] \{A_1\} + 4(4-1) \{A_4\} - H^2 [K]^{-1} [S] \{A_2\} + \right. \\ \left. + H^3 [K]^{-1} [P_T] \{A_2\} \right\} = \{0\} \quad \dots \text{C.18}$$

Extraindo o valor de  $\{A_4\}$  e tendo em vista as e quações C.16, resulta:

$$\{A_4\} = \frac{1}{4(4-1)} ([C_2]\{A_1\} - [C_1]\{A_2\}) \quad \dots C.19$$

Desenvolvendo a equação C.7 até seu enésimo ter mo, conclui-se que:

$$\{A_n\} = \frac{1}{n(n-1)} ([C_2]\{A_{n-3}\} - [C_1]\{A_{n-2}\}) \quad \dots C.20$$

Fazendo-se

$$\{A_n\} = [\phi_n] \{A_1\} \quad \dots C.21$$

Tendo em vista as equações C.10, C.13 e C.21, ob têm-se:

$$[\phi_0] = [0] \quad \dots C.22.a$$

$$[\phi_1] = [I] \quad \dots C.22.b$$

$$[\phi_2] = [0] \quad \dots C.22.c$$

onde  $[I]$  é a matriz identidade. O valor da matriz  $[\phi_n]$  pa ra  $n \geq 3$ , fica determinado por

$$[\phi_n] = \frac{1}{n(n-1)} ([C_2][\phi_{n-3}] - [C_1][\phi_{n-2}]) \quad \dots C.23$$

Substituindo-se a equação C.21 na equação C.2 e tendo em vista a equação C.10

$$\{d(\epsilon)\} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} [\phi_n] \epsilon^n \right) \{A_1\} \quad \dots C.24$$

Como no topo do edifício não existe momentos fletores aplicados, nem bimomentos, a segunda condição de contorno é facilmente deduzida como

$$\{\delta'(1)\} = \{0\} \quad \dots \text{C.25}$$

onde  $\{\delta'(1)\}$  corresponde à primeira derivada do vetor  $\{\delta(\epsilon)\}$  no topo do edifício.

Derivando-se uma vez a equação C.24, obtém-se:

$$\{\delta'(\epsilon)\} = ([\phi_1] + 2[\phi_2]\epsilon + \dots + n[\phi_n]\epsilon^{n-1})\{A_1\} \dots \text{C.26}$$

No topo do edifício, tem-se:

$$\{\delta'(1)\} = ([\phi_1] + 2[\phi_2] + \dots + n[\phi_n])\{A_1\} \quad \dots \text{C.27}$$

Combinando-se a equação C.25 com a equação C.27, resulta:

$$([\phi_1] + 2[\phi_2] + \dots + n[\phi_n])\{A_1\} = \{0\} \quad \dots \text{C.28}$$

Fazendo-se:

$$[C(p)] = \sum_{n=1}^{\infty} n [\phi_n] \quad \dots \text{C.29}$$

A equação C.28 escreve-se:

$$[C(p)] \{A_1\} = \{0\} \quad \dots \text{C.30}$$

Tendo em vista que o vetor  $\{A_1\}$  é diferente de zero e a matriz  $[C(p)]$  é função da carga crítica  $p$ , o valor desta é determinado como:

a) Se a ordem da matriz  $[C(p)]$  for  $1 \times 1$ , com a anulação de  $C(p)$ , isto é,

$$C(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n \phi_n = 0 \quad \dots C.31$$

b) Se a ordem da matriz  $[C(p)]$  for diferente de  $1 \times 1$ , com a anulação do determinante de  $[C(p)]$ , o que garante a existência de solução diferente da trivial, isto é:

$$\det [C(p)] = 0 \quad \dots C.32$$

#### DESCRIÇÃO DO PROGRAMA USADO POR CARVALHO( ).

Programa escrito em linguagem FORTRAN para computador IBM-1130 com 32k de memória interna, com a finalidade de resolver, por Série de Potências, a equação diferencial ou sistemas de equações diferenciais deduzidas no capítulo II.

O programa faz uso de 3 subrotinas: RAPOL - subrotina baseada na subrotina científica POLRT do manual de programas da IBM: 1130 Scientific Subroutine Package. Tem por finalidade achar todas as raízes reais e complexas de polinômios no máximo de 36º grau. Esta subrotina apresenta um código de erro interpretado na tabela C.1.

TABELA C.1 - TABELA DE ERROS

Nº DO ERRO - IER	CAUSA DO ERRO
0	Não houve erro.
1	Grau do polinômio é menor que 1.
2	Grau do polinômio é maior que 36.
3	Incapaz de calcular a raiz com 500 iterações para 5 valores iniciais.
4	Coeficiente do termo maior grau é zero.



INV - Inverte a matriz quadrada pelo método de GAUSS-JORDAN.

PRMAT - efetua o produto de duas matrizes quadradas.

Segue identificação das principais variáveis que figuram no programa.

NE - ordem das matrizes coeficientes do sistema de equações diferenciais. Pode assumir os valores  $1 \leq NE \leq 3$ .

H - altura total da estrutura.

KMA - matriz de rigidez da estrutura à flexo-torção  $[K]$  de ordem 1,  $(2 \times 2)$  ou  $(3 \times 3)$

KMI - matriz de rigidez, imposta pelos pórticos ou pelos lintéis,  $[S]$  de ordem 1,  $(2 \times 2)$  ou  $(3 \times 3)$ .

KT - neste caso, matriz nula.

P - matriz posição  $[P_T]$  multiplicada pelo esforço externo  $\underline{p}$ , de ordem 1,  $(2 \times 2)$  ou  $(3 \times 3)$ .

N - número de termos da série.

FN - matriz  $[\phi_n]$  conforme a equação C.23 do Apêndice C.

C - matriz  $[C(p)]$  conforme equação C.32 do Apêndice C.

ALFA - vetor contendo os coeficientes do polinômio gerado pelo cálculo do determinante da matriz  $[C(p)]$ .

PCRT - vetor contendo as raízes reais do polinômio.

PCRTI - vetor contendo as raízes imaginárias do polinômio.

Os cartões de dados para o programa devem ser fornecidos na forma e na ordem da tabela C.2.

TABELA C.2 - TABELA DE DADOS

DADOS	Nº DE CARTÕES	VARIÁVEIS POR CARTÕES	FORMATO
Ordem das matrizes coeficientes do sistema de equações diferenciais	1	NE	I1
Altura da estrutura	1	H	3F15.0
Matriz [K]	NE	cada linha da matriz	3F15.0
Matriz [S]	NE	cada linha da matriz	3F15.0
Matriz nula [KT]	NE	cada linha da matriz	3F15.0
Matriz [P]	NE	cada linha da matriz	3F15.0
Cartão em branco			

A cada "N" considerado são impressos o número de termos da série, o grau e coeficientes do polinômio gerado pelo cálculo do determinante de  $[C(p)]$ , o código de erro na resolução do polinômio e as raízes reais e complexos do polinômio.

Segue a listagem do programa.

\*\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*\*

```

// JOB T
// FOR
// LIST SOURCE PROGRAM
// ONE WORD INTEGERS
// EXTENDED PRECISION
C --- INICIO DA SUBROTINA RAPDL
SUBROUTINE RAPDL(XCOF,CDF,M,ROOTR,ROOTI,IER)
DIMENSION XCOF(1),CDF(1),ROOTR(1),ROOTI(1)
IFIT=0
N=M
IER=0
IF(XCOF(N+1)) 10,25,10
10 IF(N)15,15,32
C --- SET ERROR CODE TO 1
15 IER=1
RETURN
C --- SET ERROR CODE TO 4
20 IER=4
GO TO 2
C --- SET ERROR CODE TO 2
30 IER=2
GO TO 2
40 IF(N=36)35,35,36
45 NX=N
NXX=N+1
N2=1
KJ1 = N+1
DO 4 L=1,KJ1
MT=KJ1-L+1
40 CDF(MT)=XCOF(L)
C --- SET INITIAL VALUES
45 XC=.05 101
YC=.01 10101
C --- ZERO INITIAL VALUE COUNTER
IN=0
50 X=XC
C --- INCREMENT INITIAL VALUES AND COUNTER
XC=-10. *Y0
YC=-10. *X
C --- SET X AND Y TO CURRENT VALUE
X=XC
Y=Y0
IN=IN+1
GO TO 50
60 IFIT=1
XPR=X
YPR=Y
C --- EVALUATE POLYNOMIAL AND DERIVATIVES
50 ICT=0
60 UX=0.0
UY=0.0
V =0.0
YT=0.0

```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

```

XT=1.0
U=COF(N+1)
IF(U) 65,130,65
65 DO 7, I=1,N
   L =N-I+1
   XT2=X*XT-Y*YT
   YT2=X*YT+Y*XT
   U=U+COF(L )*XT2
   V=V+COF(L )*YT2
   FI=I
   UX=UX+FI*XT*COF(L )
   UY=UY-FI*YT*COF(L )
   XT=XT2
70  YT=YT2
   SUMSQ=UX*UX+UY*UY
   IF(SUMSQ) 75,110,75
75  DX=(V*UY-U*UX)/SUMSQ
   X=X+DX
   DY=-(U*UY+V*UX)/SUMSQ
   Y=Y+DY
   IF(ABS(DY)+ABS(DX)-1.0E-02) 100,80,80
C --- STEP ITERATION COUNTER
80  ICT=ICT+1
   IF(ICT-500) 60,85,85
85  IF(IFIT) 100,90,100
90  IF(IN-5) 50,95,95
C --- SET ERROR CODE TO 3
95  IER=3
   GO TO 2
100 DO 15 L=1,NXX
   MT=KJ1-L+1
   TEMP=XCOF(MT)
   XCOF(MT)=COF(L)
   ITEMP=N
   N=NX
105 COF(L)=TEMP
   NX=ITEMP
   IF(IFIT) 120,55,120
110 IF(IFIT) 115,50,115
115 X=XPR
   Y=YPR
120 IFIT=0
   IF(X) 122,125,122
122 IF(ABS(Y)-ABS(X)*1.0E-04) 135,125,125
125 ALPHA=X+X
   SUMSQ=X*X+Y*Y
   N=N-2
   GO TO 140
130 X=0.0
   NX=NX-1
   NXX=NXX-1
135 Y=0.0
   SUMSQ=0.0

```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

```

      ALPHA=X
      N=N-1
140  L1=1
      L2=2
      COF(L2)=COF(L2)+ALPHA*COF(L1)
      DO 150 L=2,N
150  COF(L+1)=COF(L+1)+ALPHA*COF(L)-SUMSQ*COF(L-1)
155  ROOT1(N2)=Y
      RCOTR(N2)=X
      N2=N2+1
      IF (SUMSQ) 160,165,160
160  Y=-Y
      SUMSQ=0.0
      GO TO 155
165  IF(N) 20,20,45
      END

// CUP
*STORE      WS  UA  RAPDL
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
      SUBROUTINE INV(A,N)
      DIMENSION A(3,3)
C
C      INVERSAO DE MATRIZ
C
      IF(N-1)8,9,8
9      A(1,1)=1./A(1,1)
      GO TO 1
8      DO 11 I=1,N
      AUX=1/(I,I)
      A(I,I)=1.
      DO 12 J=1,N
12     A(I,J)=A(I,J)/AUX
      DO 13 K=1,N
      IF(I-K)14,13,14
14     AUX=A(K,I)
      A(K,I)=1.
      DO 15 M=1,N
      A(K,M)=A(K,M)-AUX*A(I,M)
15     CONTINUE
13     CONTINUE
11     CONTINUE
8      RETURN
      END

// CUP
*STORE      WS  UA  INV
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
      SUBROUTINE PRMAT(A,B,C,N)

```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

```

DIMENSION A(3,3),B(3,3),C(3,3)
C
C   PRODUTO DE MATRIZES
C
      DO 8 I=1,N
      DO 8 J=1,N
      C(I,J)=0.
      DO 8 K=1,N
      C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
      RETURN
      END
// EUP
*PTCR   WS   UA   PRMAT
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*KEY WORD INTEGERS
*DCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,1403PRINTER)
*EXTENDED PRECISION
C
C   PROGRAMA PRINCIPAL
C
      REAL KMA(3,3),KMI(3,3),KT(3,3)
      DIMENSION C1(3,3),C2(3,3),C(3,3,26),FN1(3,3,26),
      *FN2(3,3,26),FN3(3,3,26),FN(3,3,26),P(3,3),
      *AUX(3,3),A(3,3),ALFA(37),CDF(37),PCR(36),PCRI(36)
      NCE=2
      NCS=6
      READ(NDS,4)NE
      4   FORMAT(I1)
      READ(NDE,5)H1
      5   FORMAT(F15.0)
      DO 1 I=1,NE
      1   READ(NDE,6)(KMA(I,J),J=1,NE)
      6   FORMAT(3F15.0)
      DO 2 I=1,NE
      2   READ(NDE,7)(KMI(I,J),J=1,NE)
      7   FORMAT(3F15.0)
      DO 3 I=1,NE
      3   READ(NDE,8)(KT(I,J),J=1,NE)
      8   FORMAT(3F15.0)
      DO 10 I=1,NE
      10  READ(NDE,9)(P(I,J),J=1,NE)
      9   FORMAT(3F15.0)
C
C   CALCULO DA RELACAO DE RECURRENCIA
C
      CALL INV(KMA,NE)
      CALL PRMAT(KMA,P,C1,NE)
      DO 50 I=1,NE
      DO 50 J=1,NE
      C1(I,J)=C1(I,J)*H1**3
      AUX(I,J)=KMI(I,J)+KT(I,J)
      CALL PRMAT(KMA,AUX,C2,NE)

```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

```

      CC 55 I=1,NE
      CC 55 J=1,NE
55    C2(I,J)=C2(I,J)*H1**2
      CC 56 N=3,26
      NN=(N+1)/2
      M1=N1*(N1-1)
      CC 60 I=1,NE
      CC 60 J=1,NE
      CC 60 K=1,NN
60    C(I,J,K)=0.
      FN3(I,J,1)=0.
      FN2(I,J,1)=0.
61    FN1(I,J,1)=0.
      CC 62 I=1,NE
      FN2(I,I,1)=1.
63    C(I,I,1)=1.
      WRITE(NES,61)N
61    FORMAT('1',2EX,'NUMERO DE TERMOS DA SERIE =',I2,5('/))
      CC 70 IN=3,N
      N3=(IN-2)/2
      N2=(IN-1)/2
      N1=IN/2
      NC=(IN+1)/2
      CC 75 I=1,N1
      CC 75 J=1,NE
      CC 75 K=1,N0
75    FN(I,J,K)=0.
      CC 80 L=1,N3
      CC 80 I=1,NE
      CC 80 J=1,NE
      CC 80 K=1,NE
80    FN(I,J,L+1)=FN(I,J,L+1)+C1(I,K)*FN3(K,J,L)
      CC 85 I=1,NE
      CC 85 L=1,N2
      CC 85 J=1,NE
      CC 85 K=1,NE
      FN(I,J,L+1)=FN(I,J,L+1)-C1(I,K)*FN2(K,J,L)
85    FN(I,J,L)=FN(I,J,L)+C2(I,K)*FN2(K,J,L)
      CC 90 I=1,NE
      CC 90 J=1,NE
      CC 90 K=1,N0
      FN(I,J,K)=FN(I,J,K)/(IN*(IN-1))
90    C(I,J,K)=C(I,J,K)+IN*FN(I,J,K)
      CC 105 I=1,NE
      CC 105 J=1,NE
      CC 105 K=1,N2
110    FN3(I,J,K)=FN2(I,J,K)
      CC 115 K=1,N1
115    FN2(I,J,K)=FN1(I,J,K)
      CC 125 K=1,N0
125    FN1(I,J,K)=FN(I,J,K)
70    CONTINUE
C --- DETERMINANTE DA MATRIZ C

```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

```

      IF(N4=2) 201,202,203
171 WRITE(NDS,200)M1
200 FORMAT(21X,'COF. DO POLINOMIO DE GRAU =',I2,/)
      DO 205 K1=1,NN
      ALFA(K1)=C(1,1,K1)
105 WRITE(NDS,204)K1,ALFA(K1)
204 FORMAT(/,20X,'ALFA',I3,'=',E15.7)
      GO TO 21
202 N4=2*NN
      WRITE(NDS,136)M1
136 FORMAT(21X,'COF. DO POLINOMIO DE GRAU =',I2,/)
      DO 120 K=2,N4
      K1=K-1
      ALFA(K1)=C.
      DO 125 J1=1,NN
      DO 125 J2=1,NN
      M=J1+J2
      IF(M=K) 125,130,125
130 DO 135 I=1,NE
      A(I,1)=C(I,1,J1)
135 A(I,2)=C(I,2,J2)
      C=A(1,1)*A(2,2)
      D=C-A(1,2)*A(2,1)
      ALFA(K1)=ALFA(K1)+D
125 CONTINUE
      WRITE(NDS,140)K1,ALFA(K1)
140 FORMAT(/,21X,'ALFA',I3,'=',E15.7)
120 CONTINUE
      GO TO 210
203 N4=3*NN
      WRITE(NDS,137)M1
137 FORMAT(21X,'COF. DO POLINOMIO DE GRAU =',I2,/)
      DO 121 K=3,N4
      K1=K-2
      ALFA(K1)=C.
      DO 126 J1=1,NN
      DO 126 J2=1,NN
      DO 126 J3=1,NN
      M=J1+J2+J3
      IF(M=K) 126,127,126
127 DO 128 I=1,3
      A(I,1)=C(I,1,J1)
      A(I,2)=C(I,2,J2)
128 A(I,3)=C(I,3,J3)
      D=A(1,1)*A(2,2)*A(3,3)
      C=D+A(1,2)*A(2,3)*A(3,1)
      E=D+A(1,3)*A(3,2)*A(2,1)
      F=D-A(1,3)*A(2,2)*A(3,1)
      G=D-A(1,2)*A(2,1)*A(3,3)
      H=D-A(1,1)*A(3,2)*A(2,3)
      ALFA(K1)=ALFA(K1)+D
126 CONTINUE
      WRITE(NDS,142)K1,ALFA(K1)

```



\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

```
142 FORMAT(/,21X,'ALFA',I3,'=',E15.7)
121 CONTINUE
217 CALL RAPOL(ALFA,COF,M1,PCR,PCRI,IER)
142 FORMAT(/,21X,'ALFA',I3,'=',E15.7)
121 CONTINUE
218 CALL RAPOL(ALFA,COF,M1,PCR,PCRI,IER)
WRITE(NDS,141)IER
141 FORMAT(3(/),21X,'CODIGO DE ERRO IER =',I2,3(/),21X,'RAIZES DO PO
*LINDMID',3(/))
DO 56 I=1,M1
WRITE(NDS,146)PCR(I),PCRI(I)
146 FORMAT(/,21X,'PCRT =',E15.7,4X,E15.7)
56 CONTINUE
CALL EXIT
END
// X86
```

APÊNDICE D1. SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE SEGUNDA ORDEM,  
NÃO HOMOGÊNEA E A COEFICIENTES CONSTANTES

Considere-se a equação diferencial

$$t_0 q'' - t_1 q = t_2 \quad \dots D.1$$

a) Solução particular

$$q_p = - \frac{t_2}{t_1} \quad \dots D.2$$

onde  $q_p$  é a solução particular da equação D.1.

b) Solução da equação homogênea

$$q_h = C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z} \quad \dots D.3$$

onde:

b.1)  $\lambda$  é uma constante definida por:

$$\lambda = \sqrt{\frac{t_1}{t_0}} \quad \dots D.4$$

b.2)  $C_1$  e  $C_2$  constantes a serem determinadas com auxílio das condições de contorno.

Portanto, a solução geral é:

$$q = c_1 e^{\lambda z} + c_2 e^{-\lambda z} - \frac{t_2}{t_1} \quad \dots D.5$$

### CONDIÇÕES DE CONTORNO

- 1) De acordo com as vinculações na base das paredes, e a partir da equação de compatibilidade no ponto médio do lintel, equação III.17, tem-se:

$$q(0) = \frac{\Delta}{t_0} \quad \dots D.6.a$$

onde:

$$a) \Delta = u'(0) c + \delta_2(0) - \delta_1(0) \quad \dots D.7.a$$

com

$$c = c_1 + c_2 \quad \dots D.7.b$$

vale observar, que no caso de engastamento rígido na base, tem-se  $\Delta = 0$ .

$$b) t_0 = \frac{2 h b^3}{3 E i} \quad \dots D.7.c$$

- 2) Como não existe momento fletor aplicado no topo da parede e a força normal para  $z = H$  é nula, pode-se afirmar

$$q'(H) = 0 \quad \dots D.6.b$$

Aplicando a primeira condição de contorno na equação D.5, obtém-se:

$$c_1 + c_2 = \frac{\Delta}{t_0} + \frac{t_2}{t_1} \quad \dots D.8$$

Aplicando a segunda condição de contorno, tem-se:

$$C_1 = \frac{e^{-\lambda H}}{e^{\lambda H} + e^{-\lambda H}} \left( \frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0} \right) \quad \dots D.9$$

Substituindo D.9 em D.8, chega-se a:

$$C_2 = \frac{e^{\lambda H}}{e^{\lambda H} + e^{-\lambda H}} \left( \frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0} \right) \quad \dots D.10$$

levando D.9 e D.10 em D.5, pode-se escrever:

$$q = \frac{e^{-\lambda H}}{e^{\lambda H} + e^{-\lambda H}} \left( \frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0} \right) e^{\lambda z} + \frac{e^{\lambda H}}{e^{\lambda H} + e^{-\lambda H}} \left( \frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0} \right) e^{-\lambda z} - \frac{t_2}{t_1}$$

ou ainda:

$$q = \left( \frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0} \right) \left[ \frac{e^{-\lambda(H-z)}}{e^{\lambda H} + e^{-\lambda H}} + \frac{e^{\lambda(H-z)}}{e^{\lambda H} + e^{-\lambda H}} \right] - \frac{t_2}{t_1}$$

ou

$$q = \left( \frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0} \right) \left[ \frac{2}{e^{\lambda H} + e^{-\lambda H}} \cdot \frac{e^{\lambda(H-z)} + e^{-\lambda(H-z)}}{2} \right] - \frac{t_2}{t_1}$$

e finalmente

$$q = \left( \frac{t_2}{t_1} + \frac{\Delta}{t_0} \right) \operatorname{sech} \lambda H \operatorname{ch} \lambda(H-z) - \frac{t_2}{t_1} \quad \dots D.11$$

BIBLIOGRAFIA

1. GLUCK, J. and GELLERT, M. - Buckling of Lateral Restrained Thin-Walled Cantilevers of Open Cross Section. Journal of the Structure Division, ASCE. 98 (9):2031-2042 sept. 1972.
2. ROSMAN, R. - Pierced walls subject to gravity loads. Concrete, Vol. 2, June 1968, 252 p.
3. JORDAAN, I.J. - Unequal axial stresses in coupled walls. The Structural Engineer, Vol. 49, January 1971/Nº 1, 55 p.
4. MAC LEOD, I.A. and HOSNY, H. - The distribution of vertical load in shear wall buildings. The Structural Engineer, Vol. 54, February 1976/Nº 2, 67 p.
5. STAMATO, M.C. - Associação Contínua de Painéis de Contraventamento. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1980, 72 p. (Publ. nº 157).
6. MANCINI, E. - Associação Contínua Tridimensional de Pórticos e Paredes com Engastamentos Elásticos. Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1972, 105 p. (Publ.nº 166).
7. MANCINI, E. - Análise Contínua de Estruturas de Edifícios Elevados Sujeitas à Ação do Vento, Tese de Doutoramento, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1973, 140 p. (Publ. nº 184).

8. ANTUNES, H.M.C.C. - Instabilidade Elástica de Estruturas Lineares Planas Usuais, Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1972, 101 p. (Publ. nº 165).
9. RACHID, M. - Instabilidade de Barras de Seção Delgada, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1975, 119 p.
10. BARBOSA, J.A. - Edifícios com Paredes de Seção Aberta Contraventadas por Lintéis, sob Carga Lateral, Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1978, 342 p.
11. CARVALHO, F.A.C. - Instabilidade de Edifícios com Paredes de Seção Aberta Contraventada por Lintéis, Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1980, 142 p.
12. FERREIRA, L.F.O. - Associação Plana de Pórticos com Pilares Paredes, Dissertação de Mestrado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1979.
13. TIMOSHENKO, S.P. and GERE, J.M. - Theory of Elastic Stability - McGraw-Hill, New York, 1961.
14. KREIDER, D.L.; KULLER, R.G. e OSTBERG, D.R. - Equações Diferenciais - São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda. 1972, 279-322 p.