

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS



## VIGA VIERENDEEL DE MADEIRA

Eng<sup>o</sup> ESTEVÃO V. C. MONTEIRO DE PAULA

*Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.*

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. João Cesar Hellmeister-Orientador (EESC-USP)

Prof. Dr. Victor Manuel de Souza Lima - (EPUSP)

Prof. Dr. Walter Abraão Nimir - (EESC-USP)

SÃO CARLOS, Junho de 1982

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho  
à minha esposa Margaret  
e à Juliana, minha filha.

## AGRADECIMENTOS

Ao terminar este trabalho de pesquisa sinto-me na obrigação de expressar os meus agradecimentos a algumas pessoas e instituições, sem a ajuda das quais este estudo não poderia ser concluído.

Ao Prof. João Cesar Hellmeister, orientador desta dissertação, cujo encorajamento, apoio e amizade sempre pude contar desde que cheguei a São Carlos.

Ao Programa Institucional de Capacitação de Docentes-PICD-IUA pela ajuda financeira em parte deste trabalho.

Aos colegas e funcionários do LaMEM pela contribuição e troca de informações.

Lucia Pereira da Silva, pela ajuda na parte ao tratamento estatístico e que sempre tão prontamente esclareceu as dúvidas surgidas nesse setor.

Norman Barros Logsdon, Soely Messias Barbosa e Flavio A. Cantisani de Carvalho, pela colaboração, incentivo e amizade no decorrer desta pesquisa.

Ao Valdemar e Fatinha Sguissardi pelo exemplo de amizade e carinho.

Aos meus pais Edgar e Helena e aos pais de minha mulher Mario e Thereza que mesmo de tão longe sempre ajudaram no que se fez necessário e foram tão presentes.

Aos meus irmãos Edgar, Evandro e Eduardo pelo incentivo, apoio e compreensão, durante o desenvolvimento deste trabalho.

## RESUMO

Estudando as coberturas de madeira e principalmente os telhados Shed, pareceu ser de grande interesse usar a "Viga Vierendeel de Madeira", por causa de suas células sem diagonal, tendo em vista melhorar a iluminação, a ventilação e a beleza da construção.

Ampla revisão bibliográfica para a avaliação das teorias de Vierendeel e de Magnel, para cálculo aproximado e das teorias mais recentes, baseadas na compatibilidade de deslocamentos, utilizando o método de Cross generalizado e o programa Stress (Structural Engineering System Solver), precedeu metucioso estudo experimental da ligação de peças de madeira por adesivos, submetida a cisalhamento por torção da película do adesivo.

O estudo se completou com o cálculo, dimensionamento comparativo, construção e exaustiva experimentação de um modelo feito em Peroba Rosa, utilizando adesivo à base de fenol-resorcinol-formaldeído.

O resultado amplamente favorável do estudo das ligações teve confirmação de sua validade no estudo teórico e experimental da viga Vierendeel para telhados.

A diferença estatisticamente nula entre os resultados teóricos e os resultados experimentais indicam a validade da Viga Vierendeel de Madeira.

## ABSTRACT

Studying wooden roofs and mostly the shed covers, appeared to be very interesting to use the Vierendeel beams, made of wood, because of their cells without diagonal, in order to improve illumination, ventilation and building beauty.

Extensive literature revue form appreciation of the Vierendeel and Magnel theories, for the approximate calculus, and of the more recent theories, based on the displacement compatibility, using Cross generalized method and the Stress program (Structural Engineering Sistem Solver), preceded meticulous experimental study of the connection of the wooden parts by adhesives, subjected to torsion shear on the film of adhesive.

This study was followed by the comparative calculus, construction and exhaustive experimentation of the beam model made of "Peroba Rosa", using a phenol-resorcinol-formaldehyde adhesive.

The results amply favorable of the study of the connections had their validity confirmed in the theoretical and experimental study of the Vierendeel beam for roofs.

The statistically null differences between the experimental and theoretical results suggest the validity of the Vierendeel wooden beam.

## SUMÁRIO

	p.
1 - REVISÃO HISTÓRICA E BIBLIOGRÁFICA.....	01
1.1 - Introdução.....	01
1.2 - Princípios do Sistema Vierendeel.....	03
1.3 - Vantagens do Sistema Vierendeel.....	04
1.3.1 - Vantagens Teóricas.....	05
1.3.2 - Vantagens Técnicas.....	05
1.3.3 - Vantagens Comerciais.....	05
1.3.4 - Vantagens Estéticas.....	06
1.4 - Ensaio de Vierendeel.....	06
1.5 - Desenvolvimento Teórico.....	08
2 - REVISÃO TEÓRICA.....	10
2.1 - Generalidades.....	10
2.2 - Ponto de Inflexão.....	11
2.3 - Carregamento.....	13
2.4 - Cálculo Aproximado.....	14
2.4.1 - Método de Vierendeel.....	14
2.4.1.1 - Cálculo de Esforço Cortante no Banzo...	14
2.4.1.2 - Cálculo de Esforço Axial no Banzo.....	15
2.4.1.3 - Cálculo de Esforço Momento Fletor no Banzo.....	15
2.4.1.4 - Cálculo de Esforço Cortante no Montante	16
2.4.1.5 - Cálculo de Esforço Axial no Montante...	16
2.4.1.6 - Cálculo do Momento Fletor no Montante..	16
2.4.2 - Método de Magnel.....	17
2.4.2.1 - Cálculo do Ponto de Inflexão.....	19
2.4.2.2 - Cálculo de Esforço Cortante no Montante (z).....	20
2.4.2.2.1 - Aplicação da Equação de Z.....	26
2.4.2.3 - Cálculo de Esforço Normal no Montante..	27
2.4.2.4 - Cálculo de Esforço Cortante nos Banzos.	30

## SUMÁRIO

	P.
2.4.3 - Método Aproximado de Magnel.....	31
2.4.3.1 - Cálculo dos Momentos nos Banzos.....	31
2.4.3.2 - Cálculo dos Esforços Cortante nos Banzos.	36
2.4.3.3 - Cálculo dos Esforços Normal nos Montantes	37
2.4.3.4 - Cálculo do Momento nos Montantes.....	38
2.4.3.5 - Cálculo do Esforço Cortante nos Montantes	39
3 - EXPERIMENTAÇÃO PRELIMINAR.....	40
4 - ESTUDO DAS LIGAÇÕES.....	42
4.1 - Escolha do Adesivo.....	43
4.2 - Utilização do Adesivo.....	44
4.3 - Estudo Teórico das Ligações.....	45
4.4 - Dimensionamento da Ligação Colada.....	47
4.5 - Índice de Rigidez da Ligação.....	49
4.6 - Experimentação.....	51
4.6.1 - Cisalhamento nas Ligações Coladas.....	51
4.6.1.1 - Desenvolvimento da Experimentação.....	51
4.6.1.2 - Validade da Equação de Hankinson.....	54
4.6.2 - Ensaio da Ligação.....	58
4.6.2.1 - Esquema de Ensaio.....	58
4.6.2.2 - Corpo de Prova.....	60
4.6.2.3 - Descrição do Ensaio.....	63
4.6.2.4 - Interpretação Teórica da Experimentação..	63
4.6.2.5 - Desenvolvimento do Ensaio.....	65
5 - DIMENSIONAMENTO DA VIGA VIERENDEEL.....	88
5.1 - Geometria da Viga.....	88
5.2 - Esquema Estático.....	90
5.3 - Cálculo dos Esforços Solicitantes.....	90
5.3.1 - Cálculo Aproximado.....	90
5.3.1.1 - Método Vierendeel.....	91
5.3.1.2 - Método de Magnel.....	94

## SUMÁRIO

	p.
5.3.2 - Cálculo dos Esforços Utilizando-se o Programa Stress.....	99
5.4 - Dimensionamento.....	101
5.4.1 - Dimensionamento das Peças Solicitadas a Flexo - Compressão.....	101
5.4.2 - Dimensionamento das Peças Solicitadas a Flexo - Tração.....	102
5.4.3 - Dimensionamento das Peças Solicitadas ao Cisalhamento.....	103
5.4.4 - Verificação da Flecha Devido ao Carregamento...	105
5.4.5 - Dimensionamento das Ligações.....	105
5.4.5.1 - Cálculo de $H_{m\acute{a}x}$ .....	106
5.4.5.2 - Cálculo da Dimensionamento A.....	106
6 - EXPERIMENTAÇÃO.....	107
6.1 - Preparação do Protótipo.....	107
6.1.1 - Características Geométricas do Modelo da Viga Vierendeel.....	107
6.2 - Construção da Viga.....	109
6.3 - Ligação.....	111
6.4 - Equipamento de Ensaio.....	115
6.4.1 - Sistema de Carga.....	115
6.4.2 - Aplicação de Carga - Sistema de Carregamento.....	115
6.4.3 - Contraventamento.....	118
6.4.4 - Extensômetros Elétricos.....	118
6.4.5 - Leitura dos Deslocamentos.....	123
6.4.5.1 - Localização dos Transdutores Indutivos.	125
6.4.5.2 - Fixação dos Transdutores Indutivos.....	126
6.5 - Realização dos Ensaios.....	128
6.5.1 - Determinação das Tensões.....	128



## SUMÁRIO

	p.
6.6 - Comparação entre Resultados Teóricos e Experimentais.....	132
6.6.1 - Método de Vierendeel e Magerl.....	132
6.6.2 - Método de Cross.....	133
6.6.3 - Cálculo Utilizando o Programa Stress.....	140
6.6.4 - Diagrama de Tensões.....	141
6.6.5 - Análise de Resultados.....	143
6.7 - Deslocamentos Experimentais.....	146
6.8 - Ruptura .....	147
7 - CONCLUSÕES.....	152

## 1 - REVISÃO HISTÓRICA E BIBLIOGRAFIA

### 1.1 - Introdução:

Arthur Vierendeel, em 1896, {1} propôs uma nova solução para a construção de vigas metálicas em arcadas para pontes. Acreditando no custo muito elevado das pontes em arco e na ineficiência das pontes suspensas, apresentou um modelo construtivo em arcadas simples, (fig. 1.1) e outro em arcadas dupla, (fig. 1.2).

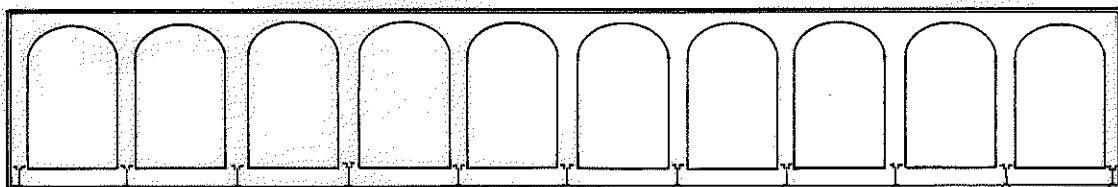


Fig. 1.1 - Viga Vierendeel em Arcadas Simples. Op. cit. pl. XXXVIII.

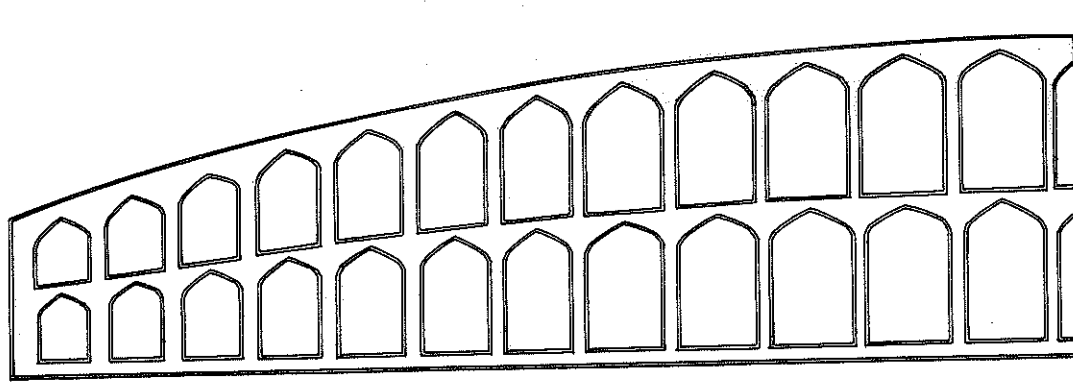


Fig. 1.2 - Viga Vierendeel em Arcadas Dupla. Op. cit Pl. XXXXI.

As vigas em treliça, introduzidas cinquenta anos antes (1850), tornaram economicamente possíveis grandes pontes metálicas. Entretanto seu aspecto é menos estético e as arcadas são mais decorativas. Vierendeel considerou dispensáveis as diagonais das treliças, com economia de 15 a 25% de material, economia de mão de obra, menores superfícies expostas à corrosão, mediana flexibilidade, maior segurança, sensibilidade aos efeitos dinâmi-

{1} - *VIERENDEEL, A. - Ponts en Arcades - Annales des travaux Publics de Belgique, tome I, Octobre, 1896, p. 725-766.*

cos reduzida notavelmente, ligações em menor número e mais robustas, importância dos rebites reduzida ao mínimo e perigo do deslocamentos das ligações completamente descartado. {2}.

Lambin e Christophe {3}, apresentaram um relatório sobre o ensaio realizado por Vierendeel até a ruptura, de uma ponte metálica de 31,50 m com vigas em arcadas, (fig. 1.3).

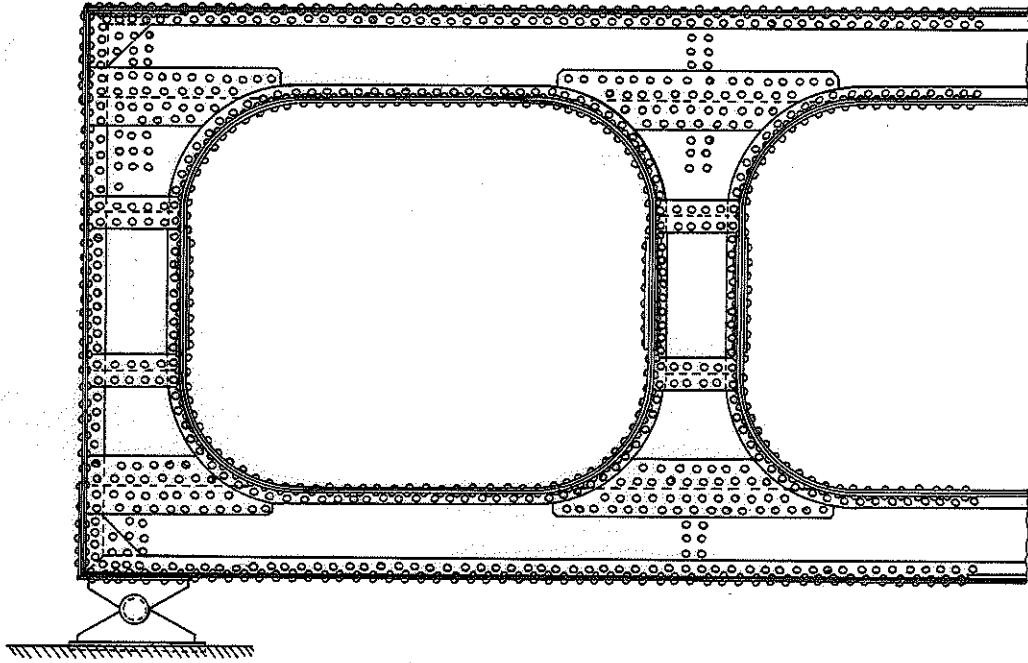


Fig. 1.3 - Primeiro Painel da Viga em Arcadas, Ensaída por Vierendeel em 1898.

O tipo da viga preconizada por Vierendeel é uma solução intermediária entre a viga de alma cheia e a viga em treliça. Distingue-se da primeira pela presença de uma série de forma elíptica ou retangular que reduzem a alma a uma série de montantes verticais. Comparada com as pontes em treliça, em N, é caracterizada pela supressão das diagonais.

Esta ponte foi objeto de um primeiro ensaio por ocasião da Exposição Internacional de Bruxelas. Vierendeel fez construir uma ponte de 31,50 m de comprimento, calculada para suportar uma via férrea, no Parque de Tervueren, Bruxelas, submetida a

---

{2} - VIERENDEEL, A. - *Op. cit.* p. 728.

{3} - LAMBIN, Albert & CHISTOPHE, Paul - Le Pont Vierendeel. Rapport - Annales des Travaux Publics de Belgique, tome III, Fevrier, 1898 . p. 53-139.

duas séries de ensaios. No primeiro ensaio a carga prevista no cálculo permaneceu sobre a ponte durante 20 (vinte) dias. Após a descarga o segundo carregamento foi executado aumentando-se a carga continuamente até a ruptura {4} (fig. 1.4).

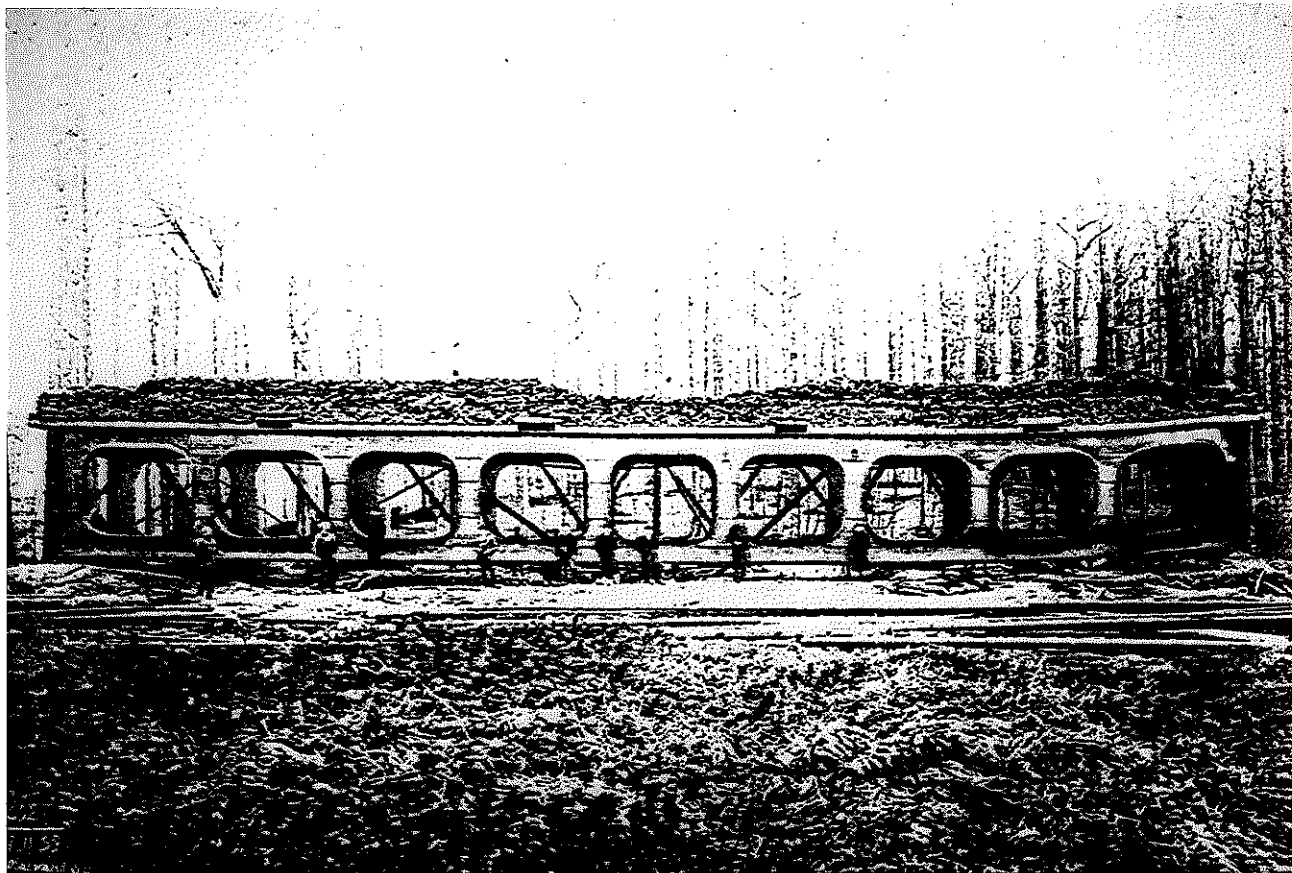


Fig. 1.4 - Vista da Viga Ensaçada por Vierendeel

#### 1.2 - Princípios do Sistema Vierendeel {5}:

Vierendeel partindo da idéia das treliças metálicas com ligações rebitadas não serem articuladas, nem constituírem um sistema isostático, mas, um sistema hiperestático, concluiu haver barras superabundantes, propõe a supressão das diagonais ao mesmo tempo utiliza a rigidez das ligações, reforça e aumenta as dimensões das extremidades dos montantes fixados nos banzos.

---

{4} - LAMBIN & CHRISTOPHE - *Op. cit.* p. 55.

{5} - LAMBIN & CHRISTOPHE *Op. cit.* p. 58-59.

Para manter a indeformabilidade, pela retirada da diagonal e para reforçar as ligações, Vierendeel propôs o arredondamento dos cantos, transformando o retângulo em elipse ou em círculo, (fig. 1.5). As barras da Vierendeel foram assim submetidas a esforços de flexão.

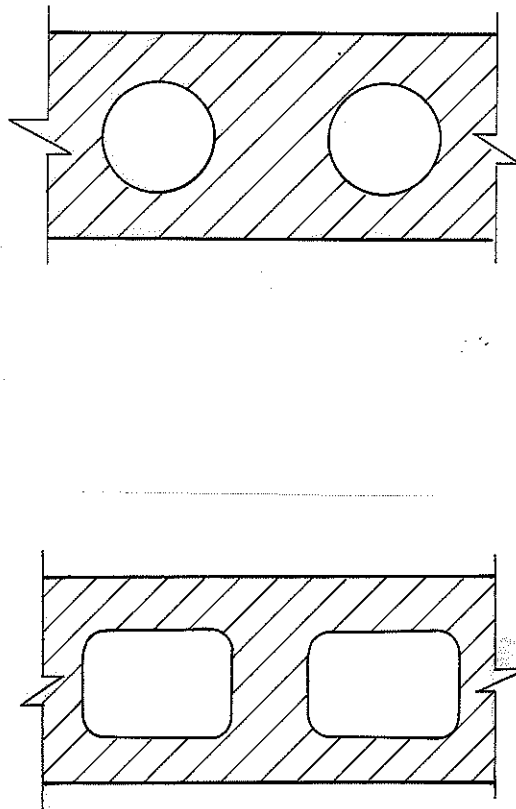


Fig. 1.5 - Vistas Frontais

### 1.3 - Vantagens do Sistema Vierendeel:

Vierendeel atribuiu a seu sistema de vigas metálicas várias vantagens:

### 1.3.1 - Vantagens Teóricas {6}:

Como vantagem teórica Vierendeel apontou a invalidez, demonstrada pela experiência, das hipóteses de cálculo da viga em treliça. Por outro lado o cálculo da viga em arcadas, é baseado nas deformações, e a experiência demonstrou ser praticamente exato, nos limites de elasticidade do metal.

Como vantagem de cálculo, este é considerado mais simples e corrente.

Os montantes da Viga Vierendeel são menos sujeitos à flambagem quando comparados com os das treliças em arcadas quando a via é superior os montantes são comprimidos e quando a via é inferior os montantes são tracionados, mas, com esforços menores do que os esforços dos montantes das treliças.

A forma das peças constituintes da viga Vierendeel é mais racional.

### 1.3.2 - Vantagens Técnicas {7}:

As vigas em arcadas são menos flexíveis que as vigas em treliça e tem a mesma flexibilidade das vigas de alma cheia assim sendo, o efeito das cargas rolantes é menos acentuado. A ligação dos montantes, mais rígidas, é menos sujeita a deslocamentos. Os banzos e os montantes apresentam melhores condições para resistir aos choques.

A maior simplicidade do conjunto torna-o menos sujeito à corrosão, assegurando maior durabilidade.

A montagem da viga Vierendeel é mais fácil e mais precisa.

### 1.3.3 - Vantagens Comerciais {8}.

A viga em arcadas é mais econômica pois seu cálculo feito por Vierendeel admitindo tensões mais elevadas:  $7,6 \text{ kg/mm}^2$

---

{6} - LAMBIN & CHRISTOPHE - *Op. cit.* p. 61-62.

{7} - LAMBIN & CHRISTOPHE - *Op. cit.* p. 62-63.

{8} - LAMBIN & CHRISTOPHE - *Op. cit.* p. 63

em vez de  $6,5 \text{ kg/mm}^2$  de projetos anteriores, deu como resultado 16,2% de redução do peso das vigas em favor das vigas em arcadas e 8,9 em relação ao peso total ponte de Tervueren, de 31,50 m de vão.

Em projeto posterior, sem prejuízo da segurança, para ponte em arcadas de 72,6 m de vão, adotou  $8,3 \text{ kg/mm}^2$ , conseguindo economia calculada em 21,4%, de peso das vigas e 14,4% do peso total.

Além da redução de peso Vierendeel indicou a simplicidade de montagem devido à redução dos perfis necessários.

#### 1.3.4 - Vantagens Estética {9}:

A ponte em arcadas é mais agradável à vista e Vierendeel apresentou uma série de exemplos de decoração de pontes em arcada.

#### 1.4 - Ensaio de Vierendeel:

Vierendeel, teve a oportunidade de ensaiar uma ponte metálica de 31,5 m de vão livre constituída por duas vigas, 9 painéis com montantes a cada 3,5 m. Esta ponte construída especialmente para ser ensaiada, foi projetada para suportar uma via férrea na sua parte superior. O tabuleiro para receber as cargas de ensaio foi feito de pranchas de sapin. {10}.

A ponte recebeu carga distribuída de 404 toneladas. A carga permanente da ponte foi avaliada em 70 toneladas. O carregamento demorou três dias. Com o aumento da carga, até 404 t, ocorreu a ruptura. As flechas foram lidas utilizando-se um nível d'água baseado no princípio dos vasos comunicantes. Foi lida uma flecha de 13,5 mm devida ao peso próprio da ponte. Com o carregamento de 304 t, foi atingida uma flecha central de 61,7mm. Não se conseguiu a leitura das flechas seguintes e a ruptura se deu com a carga de 404 t {11}.

---

{9} - LAMBIN & CHRISTOPHE - *Op. cit.* p. 63.

{10}- LAMBIN & CHRISTOPHE - *Op. cit.* p. 67.

{11}- LAMBIN & CHRISTOPHE - *Op. cit.* p. 80.

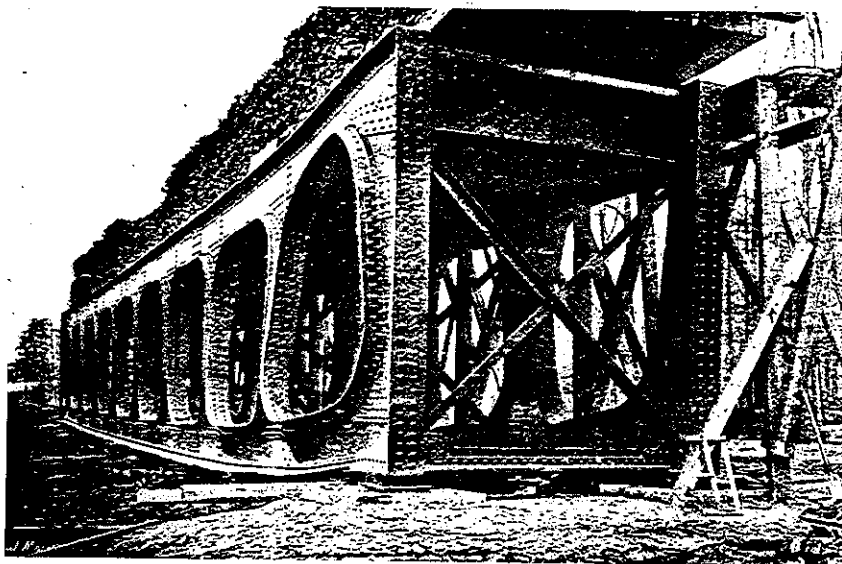


Fig. 1.6 - Viga Vierendeel - Lambin - p. 97. Op. cit.

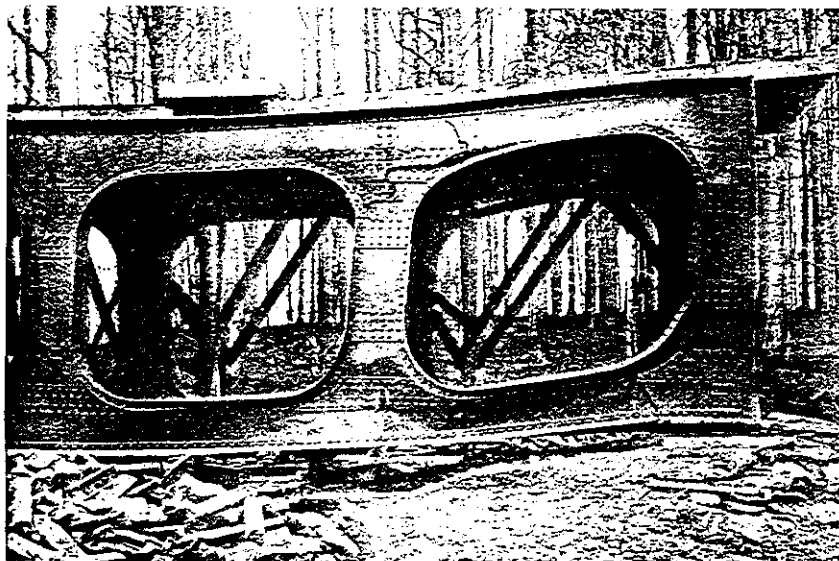


Fig. 1.7 - Viga Vierendeel - Lambin - p. 97. Op. cit.

Pode-se notar a ruptura no banzo superior, próximo ao apoio e no segundo montante, fig.(1.7).

Lambin e Christophe após o exame do ensaio de Vierendeel admitem: "no atual estado de conhecimentos a viga em arcadas é sensivelmente equivalente à viga em treliça". [12]

---

{12} - LAMBIN & CHRISTOPHE - Op. cit. p. 139.



### 1.5 - Desenvolvimento Teórico:

Não obstante os desenvolvimentos provocados pela proposta de Vierendeel, sua viga interessou a muitos pesquisadores, daí resultando a apresentação de vários métodos de cálculo, tendo em vista diminuir as dúvidas iniciais.

Vianello, 1905, mencionado por Guido {13}, estudando estruturas de aço, sugeriu soluções expeditas para o cálculo das vigas Vierendeel, imaginando a existência de rótulas no meio dos montantes e dos banzos, em cada painel. Guido, entretanto, critica esta hipótese, e indica a possibilidade de ultrapassar os limites de aproximação em algumas barras.

Guido acompanhou, entretanto, a orientação do método de cálculo de Engesser, 1913, através do qual se obtém em uma primeira fase uma solução aproximada e em fase sucessivas às correções necessárias para se chegar à solução exata. O método de cálculo de Engesser conduz a uma série de equações de solução trabalhosa.

A contribuição de Guido, 1921, consistiu na simplificação da solução destas equações, pela adoção de cargas unitárias nos montantes da viga Vierendeel.

Hardy Cross, {14}, no período de 1929 a 1932, apresentou o método de distribuição de momentos, até hoje muito utilizado, e sua aplicação para o caso de Viga Vierendeel tornou-se usual, apesar de muito trabalhoso.

Dana Young, 1936 {15} apresentou um processo de cálculo baseado no princípio dos trabalhos virtuais. Seguindo-se este método surgem também equações de solução trabalhosa. Young, entretanto, conseguiu a simplificação dos cálculos pelos simples rearranjo das equações e da ordem dada à solução destas equações.

Magnel, 1934 {16}, apresentou um trabalho a respeito da Viga Vierendeel, aperfeiçoando o processo de cálculo apresentado por Vierendeel.

---

{13} - GUIDO, C. - Lezioni Sulla Scienza delle Costruzioni. Torino, Vincenzo Bona, 1920. v. 2, p. 199.

{14} - GERE, James M. - Distribucion de Momentos. México, Continental, 1965. 412 p.

{15} - AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. In: Young D. - Analysis of Vierendeel Trusses: 883-859, Aug. 1936.

{16} - MAGNEL, G. - Cours de Stabilité des Constructions. 3.ème. Édition. Belgique, Fêcheyr Gand, 1948. v. 1, p. 233.

Mensch, 1936, {17}, considerando o caráter prático das equações de Vierendeel justificou o seu desconhecimento entre os engenheiros americanos pela dificuldade de acompanhar a análise teórica do método de cálculo e pela existência de um número asustador de incógnitas. Mensch critica, entretanto, a análise de Young pela falta de diagramas mostrando as deformações.

A partir da utilização do método de Cross foram desenvolvidos diversos processos para facilitar o cálculo da Viga Vierendeel.

{17} - AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. In: Mensch, L.J. et alii - Analysis of Vierendeel Trusses - Discussion: 1434 - 1458, Nov. 1936.

## 2 - REVISÃO TEÓRICA

### 2.1 - Generalidades:

Com a retirada das diagonais de uma viga treliçada plana, formam-se estruturas de quadros fechados. (Fig. 2.1).

Embora conhecendo-se as reações deste quadro fechado não é possível determinar os esforços solicitantes em cada seção utilizando-se apenas as equações de equilíbrio, por ser o quadro uma estrutura internamente hiperestática.

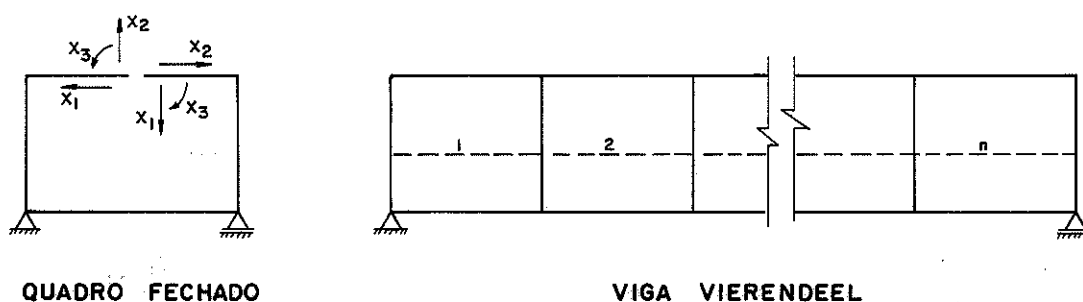


Fig. 2.1 - Viga Vierendeel

Utilizando-se os métodos usuais de cálculo de estrutura hiperestática, para cada incógnita constituída por um esforço (deslocamento) existe uma equação a ser desenvolvida em função desta incógnita.

Esta equação exprime a condição de deformação nula em função dos esforços seccionais, ou a condição do esforço nulo em função do deslocamento.

A Viga Vierendeel, é uma estrutura plana formada por diversos quadros (células). Se  $n$  for o número de quadros haverá 3 ( $n$ ) equações de compatibilidade entre deslocamentos (ou esforços) para determinação dos esforços seccionais da estrutura, tornando-se uma solução muito trabalhosa para uma viga constituída de muitos quadros.

Chama-se (fig. 2.1), banzo superior à barra colocada acima de um eixo que corta as barras verticais da viga num plano perpendicular a elas, e banzo inferior à barra situada abaixo deste eixo. Entende-se por montantes como sendo as barras verticais.

Para eliminar o trabalho de cálculo devido ao acen- tuado grau de hiperestaticidade da Viga Vierendeel, foram desen- volvidos diversos métodos de cálculo com hipóteses que venham di- minuir este trabalho: são os conhecidos métodos aproximados.

As hipóteses simplificadoras entre os métodos de cálculo aproximado apresentados não diferenciam muito; entretanto cada um baseia-se em diferentes métodos "clássicos" de cálculo de estrutura hiperestática.

Estes métodos "clássicos" tais como, processo de energia de deformação, processo dos esforços, processo dos deslocamentos, princípio dos trabalhos virtuais, processo de Cross e suas "ramificações", etc, sem hipóteses simplificadoras, e ainda, o cálculo dos esforços da viga utilizando-se computadores, são conhecidos como métodos de cálculo exato.

## 2.2 - Ponto de Inflexão:

Quando uma barra bi-engastada sofre um deslocamento  $\Delta$ , no apoio, ela deforma-se provocando o esforço de momento fletor ao longo da viga, mas existe um ponto na barra no qual o momento é nulo. Este ponto é conhecido como ponto de inflexão da elástica (momento nulo) (fig. 2.2).

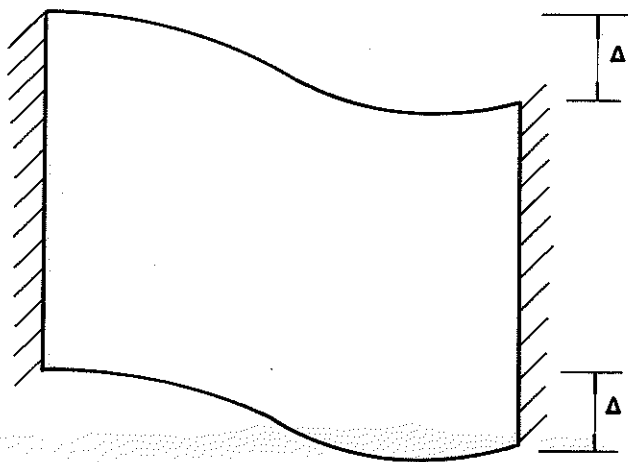


Fig. 2.2 - Deformação na Barra AB

A viga Vierendeel, composta de diversas barras bi-engastadas, ao ser carregada, deforma-se, e em cada barra existe um ponto no qual o momento é nulo, isto é, um ponto de inflexão, fig.(2.3).

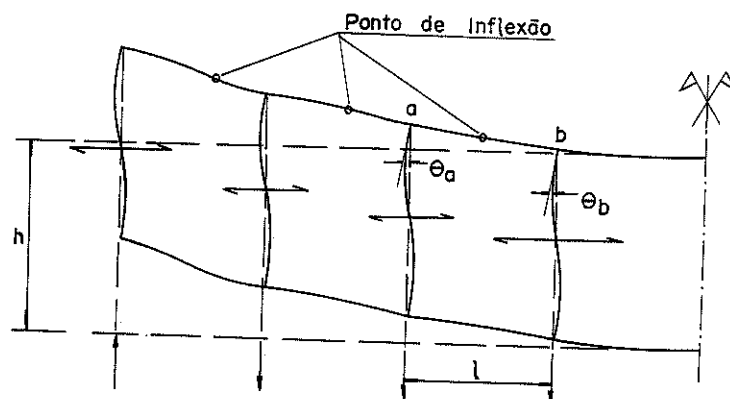


FIG. 2.3

Com base na posição do ponto de inflexão, tem-se desenvolvido todos os métodos de cálculo aproximados, que adotam uma posição para este ponto. Quanto mais próximo da posição real, se adotar o ponto de inflexão mais corretos estarão os esforços solicitantes.

Desde o início do seu estudo, Vierendeel [18], admitiu a possibilidade da existência de um ponto de inflexão em cada montante. E, este ponto, quando os banzos são paralelos e de mesmo momento de inércia está situado no ponto médio da altura da viga. Quando os banzos tem momento de inércia diferentes, os pontos de inflexão ocorrem na relação:

$$\frac{h_u}{h_l} = \frac{I'}{I''}$$

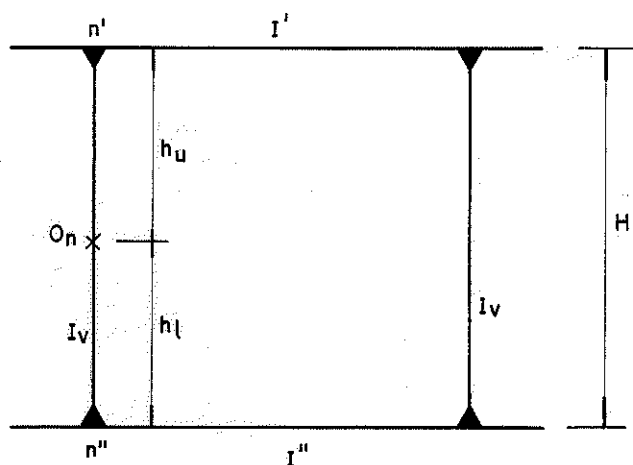


Fig. 2.4 - Célula de uma Viga Vierendeel

Sendo:  $I'$  - Momento de inércia do banzo superior.  
 $I''$  - Momento de inércia do banzo inferior.  
 $h_u$  - Distância do ponto de inflexão ao banzo superior  
 $h_l$  - Distância do ponto de inflexão ao banzo inferior

Através da experimentação, utilizando fotoelasticidade, Baes [18], encontrou uma expressão para fixar aproximadamente o ponto de inflexão dos montantes, dado por:

$$\frac{h_u}{h_l} = \frac{\frac{1}{H} \cdot \frac{I_v}{I''} + C}{\frac{1}{H} \cdot \frac{I_v}{I'} + C}$$

Sendo:

$I_v$  - Momento de inércia dos montantes

$H$  - Altura da viga Vierendeel

$C$  - Constante obtida experimentalmente, sendo igual a 2,5 para os montantes situados próximo da extremidade, e 6 para os montantes centrais.

Jermann [19], experimentando recentemente (1981) diversas vigas Vierendeel de concreto, concluiu que o ponto de inflexão dificilmente tem uma distância apreciável do centro de cada barra vertical com carregamento nodais.

### 2.3 - Carregamento

No caso particular deste trabalho considera-se o carregamento atuante apenas nos nós como nas treliças o que satisfaz a maioria dos casos práticos de estruturas de madeira.

---

{18} - AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. In: Baes, Lous - Rigid Frames Whithout Diagonals (The Vierendeel Trusses): p 93-106, Jan. 1941.

{19} - DANIN, Cláudio Miranda - Vigas Vierendeel em Concreto Armado. Rio de Janeiro, PUC/RJ, Novembro de 1978 (Tese de Mestrado).

## 2.4 - Cálculo Aproximado:

### 2.4.1 - Método de Vierendeel:

Vierendeel [20] apresentou um método para calcular os esforços atuantes na viga Vierendeel, baseando-se na existência do ponto de inflexão nos banzos. Admitiu os banzos articulados a distâncias iguais.

Considerando dois cortes, passando por dois pontos de inflexão em duas arcadas sucessivas (Fig. 2.5), correspondente a um montante genérico, apresentou as seguintes equações:

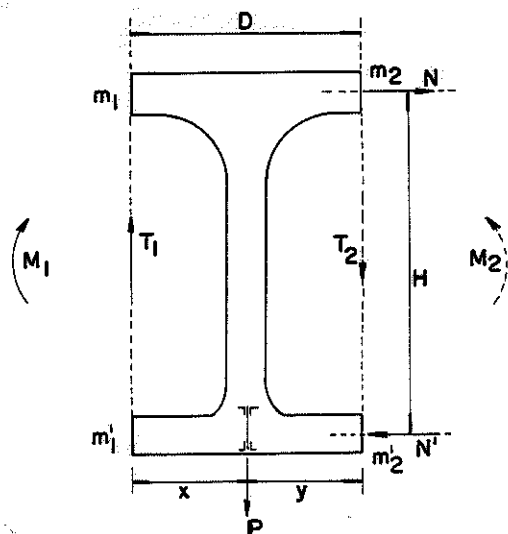


Fig. 2.5 - Esforço nas Seções entre dois Painéis em Arcadas Sucessivas.

#### 2.4.1.1 - Cálculo do Esforço Cortante no Banzo:

Aplicando-se às condições de equilíbrio (Fig. 2.5) no centro de cada célula.

$$T_2(x + y) + P \cdot x - M_2 + M_1 \pm m_1 \pm m_2 \pm m_1' \pm m_2' = 0 \dots (2.1)$$

$$T_1(x + y) - P \cdot y - M_2 + M_1 \pm m_1 \pm m_2 \pm m_1' \pm m_2' = 0 \dots (2.2)$$

Sendo:

$M_1$  e  $M_2$  - momentos externo atuantes nas células 1, 2 respectivamente.

---

[20] - VIERENDEEL, A. - *Op. cit.* p. 731-734.

$T_1$  e  $T_2$  - esforços cortantes nas células 1, 2 respectivamente.

$m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_1'$  e  $m_2'$  - momentos atuante nos banzos.

$D$  - distância entre dois montantes.

Vierendeel, admitiu uma distribuição linear de momento entre dois montantes consecutivos, com um ponto de inflexão localizado aproximadamente a uma distância  $\frac{D}{2}$ , logo:

para  $x = y = \frac{D}{2}$  resulta:

nas equações (2.1) e (2.2), tem-se:

$$T_2 = \frac{M_2 - M_1}{D} - \frac{P}{2}$$

$$T_1 = \frac{M_2 - M_1}{D} + \frac{P}{2}$$

Estes esforços cortantes, se repartem igualmente entre os banzos (inferior e superior), caso tenham a mesma inércia.

2.4.1.2 - Cálculo do Esforço Axial no Banzo:

Da fig. 2.5 conclue-se:  $N = \pm \frac{M}{H}$  ..... (2.5)

2.4.1.3 - Cálculo do Momento Fletor no Banzo:

Para uma seção genérica (B) do banzo da (fig. 2.6) a equação do momento atuante no banzo é dada por:

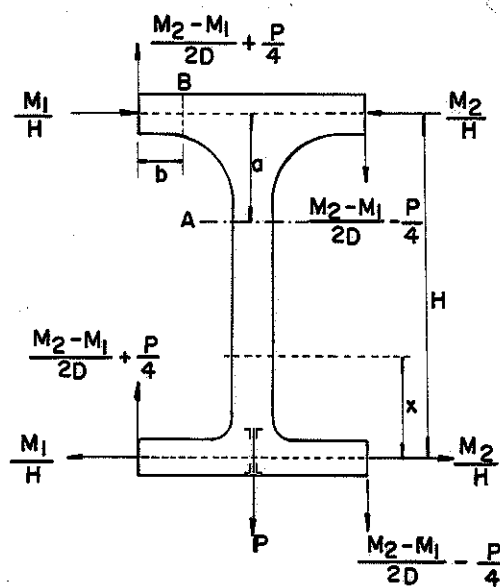


Fig. 2.6 - Esforços Atuantes nos Banzos



$$m_1 = \left( \frac{M_2 - M_1}{2D} + \frac{P}{4} \right) \cdot b \dots \dots \dots (2.6)$$

2.4.1.4 - Cálculo do Esforço Cortante no Montante:

Da fig. 2.6, por equilíbrio, o esforço cortante atuante no montante  $\bar{e}$ :

$$Q = \frac{M_2 - M_1}{H} \dots \dots \dots (2.7)$$

2.4.1.5 - Cálculo do Esforço Axial no Montante:

Da fig. 2.5, por equilíbrio, o esforço axial atuante no montante  $\bar{e}$ :

$$N = \frac{T_2 - T_1}{2} \dots \dots \dots (2.8)$$

Sendo:

$T_1$  e  $T_2$  fornecido pela equação (2.3) e (2.4) respectivamente.

2.4.1.6 - Cálculo do Momento Fletor no Montante:

Seja (A), uma seção genérica, (fig. 2.6), a equação do momento nesta seção  $\bar{e}$ :

$$M_a = \left( \frac{M_2 - M_1}{2D} + \frac{P}{4} \right) \frac{D}{2} + \left( \frac{M_2 - M_1}{2D} - \frac{P}{4} \right) \frac{D}{2} + \frac{M_1}{H} \cdot a - \frac{M_2}{H} \cdot a \dots \dots \dots (2.9)$$

Para  $a = \frac{H}{2} \rightarrow M_a = 0$ , portanto Vierendeel justificou que o momento atuante no meio do montante  $\bar{e}$  zero.

Seccionando-se o montante ao meio, verifica-se as solicitações atuantes em cada semi-célula, como indica a fig.(2.7).

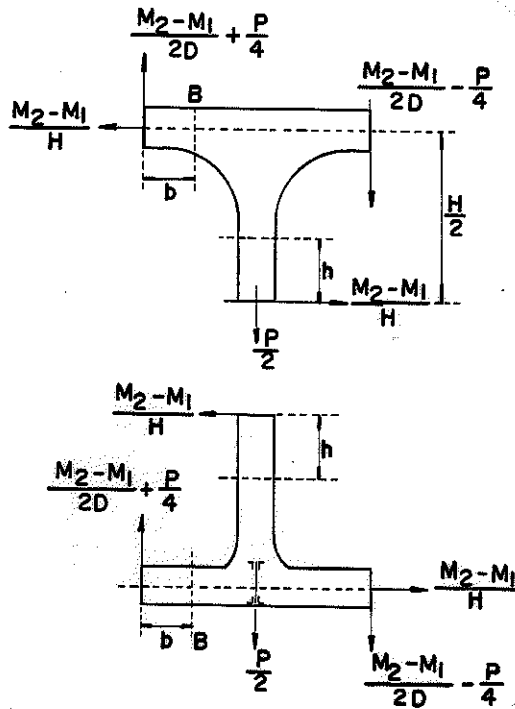


Fig. 2.7 - Esforços Atuantes nas Seções Médias dos Montantes e Banzos

O momento fletor, atuante em uma seção genérica, distante  $h$  do seu ponto de inflexão, é dada pela equação:

$$M = \left( \frac{M_2 - M_1}{H} \right) \cdot h \dots\dots\dots (2.10)$$

Deve-se notar que os momentos fletores nos banzos e montantes aumentam com os valores de  $b$  e  $h$  respectivamente. Daí a justificativa de Vierendeel para utilização das arcadas, para obter seções maiores junto aos nós.

2.4.2 - Método de Magnel {23}:

Magnel {21} e {22}, em 1934, desenvolveu intenso estudo sobre a viga Vierendeel, apresentando um método de cálculo dos esforços para este tipo de estruturas, assim como, a aplicação deste método para solução aproximada.

{21} - MAGNEL, G. - Le Calcul Pratique des Poutres Vierendeel. Gand, van Rysselberghe & Rombaut, 1934. 120 p.

{22} - MAGNEL, L.G. - Op. cit. - p.23.

Apresentou um método de cálculo para a viga Vienren - deel, admitindo a existência do ponto de inflexão nos montantes, (fig. 2.8), reduzindo assim o grau de hiperestaticidade da estrutura.

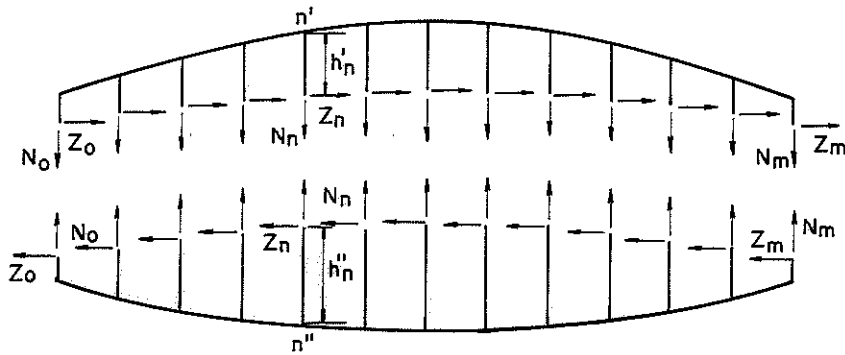
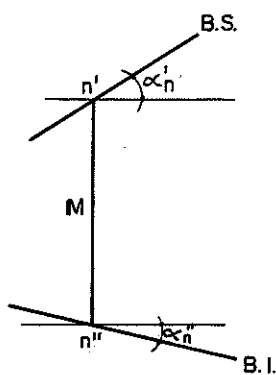


Fig. 2.8 - Viga Vienrendeel, com os Montantes Cortados no seu Ponto de inflexão.

Convenções adotadas: os efeitos no banzo superior se se rão representados pelo símbolo com um apóstrofe, e os do banzo in ferior, com dois apóstrofes. Os símbolos sem apóstrofe refere-se aos montantes. A indicação do ângulo dos banzos sobre a normal ao eixo do mantante, são positivo quando, (fig. 2.9):



Sendo:

$\alpha_n^i$  = positivo no sentido anti-horário e abaixo do banzo superior.

$\alpha_n''$  = positivo no sentido horário e acima do banzo inferior.

Fig. 2.9 - Indicação dos Banzos da Viga Vienrendeel

2.4.2.1 - Cálculo do Ponto de Inflexão:

Magnel [23], admitiu também, como hipótese a indeformabilidade axial das barras, conseqüentemente as elásticas dos banzos são idênticas:

$$\text{Banzo superior: } \frac{d v^2}{d x^2} = \frac{- M'}{E I' \cos \alpha'}$$

$$\text{Banzo inferior: } \frac{d v^2}{d x^2} = \frac{- M''}{E I'' \cos \alpha''}$$

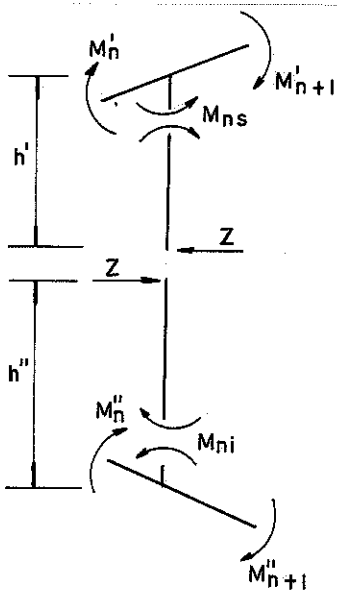
$$\frac{- M'}{E I' \cos \alpha'} = \frac{- M''}{E I'' \cos \alpha''}, \text{ sendo de mesmo material}$$

$$\frac{- M'}{I' \cos \alpha'} = \frac{- M''}{I'' \cos \alpha''}$$

$$M' = \frac{I' \cos \alpha' M''}{I'' \cos \alpha''} \dots \dots \dots (2.11)$$

$$M'' = \frac{I'' \cos \alpha'' M'}{I' \cos \alpha'} \dots \dots \dots (2.12)$$

Considerando o montante genérico, figura (2.10), tem-se:



$$M_{ns} = M'_{n+1} + M'_n$$

$$M_{ns} = Z \cdot h' \text{ logo:}$$

$$Z = \frac{M'_{n+1}}{h'} + \frac{M'_n}{h'} \dots \dots \dots (2.13)$$

$$M_{ni} = M''_{n+1} + M''_n$$

$$M_{ni} = Z \cdot h'' \text{ logo:}$$

$$Z = \frac{M''_{n+1}}{h''} + \frac{M''_n}{h''}$$

$$M''_{n+1} + M''_n = Z h'' \dots \dots \dots (2.14)$$

Fig. 2.10 - Montante (n), Seccionado no seu Ponto de Inflexão.

{23} - MAGNEL, G. - Op. cit, p . 235

Substituindo a equação (2.11) em (2.13) resulta:

$$Z = \frac{M''_{n+1}}{h'} \cdot \frac{I' \cos \alpha'}{I'' \cos \alpha''} + \frac{M''_n}{h'} \cdot \frac{I' \cos \alpha'}{I'' \cos \alpha''}$$

$$Z = \frac{I' \cos \alpha'}{I'' \cos \alpha''} \cdot \frac{1}{h'} (M''_{n+1} + M''_n) \dots\dots\dots (2.15)$$

Substituindo a equação (2.14) em (2.15), resulta:

$$\frac{I' \cos \alpha'}{I'' \cos \alpha''} \cdot \frac{1}{h'} = \frac{1}{h''}$$

$$\frac{h'}{I' \cos \alpha'} = \frac{h''}{I'' \cos \alpha''} \dots\dots\dots (2.16)$$

Sendo  $H = h' + h''$ , substituindo na equação (2.14) e adotando-se:

$$a' = I' \cos \alpha'$$

$$a'' = I'' \cos \alpha'' \quad , \quad \text{tem-se:}$$

$$\frac{h'}{H - h'} = \frac{a'}{a''} \quad , \quad \text{portanto } h' = H \frac{a'}{a' + a''} \dots\dots\dots (2.17)$$

Determina-se assim, o ponto de inflexão (eq. 2.17), no montante.

$$\text{Se } a' = a'' \quad , \quad \text{então } h' = h'' = \frac{H}{2} \dots\dots\dots (2.18)$$

2.4.2.2 - Cálculo do Esforço Cortante no Montante (Z):

Magnel {24}, para o cálculo do esforço cortante Z, apresentou um painel (célula) n, formada pelos pontos:  $A'_{n-1}$ ,  $A'_{n'}$ ,  $A''_{n-1}$  e  $A''_n$ , sofrendo um deslocamento para a posição  $1'$ ,  $2'$ ,  $1''$  e  $2''$ , seguindo de uma deformação sobre a base  $1''$  e  $2''$ , tendo como posição final  $1''$ ,  $2''$  e  $II'$ , (fig. 2.11).

---

{24} - MAGNEL, G. - Op. cit. p . 236.

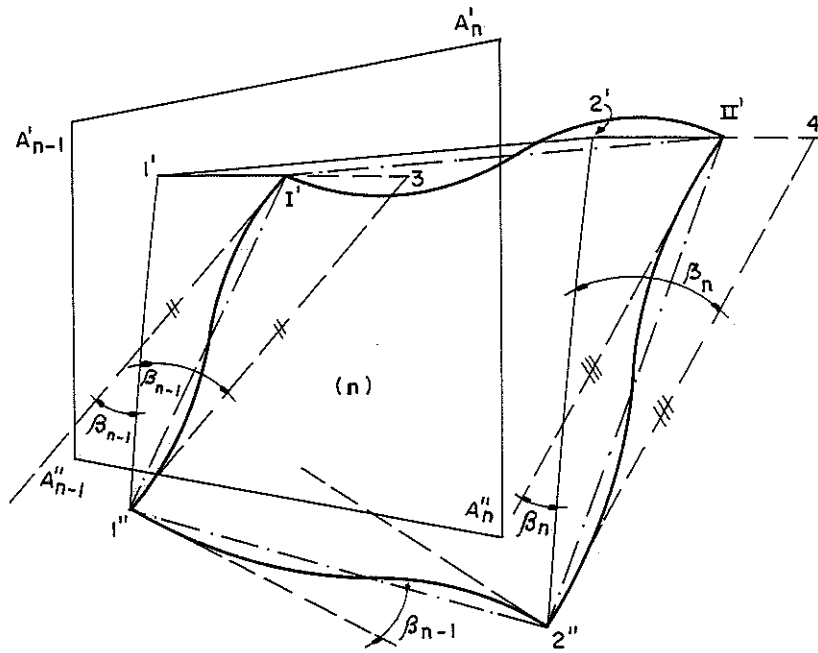
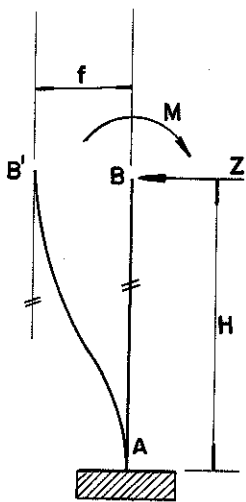


Fig. 2.11 - Célula n, e suas Deformações

O que caracteriza a deformação é a igualdade dos deslocamentos horizontais.

$$1'I' = 2'II' \dots\dots\dots (2.19)$$

Observando a fig. 2.11, Magnel, fez uma analogia dos deslocamentos com a flecha de uma viga engastada em A, solicitada pelos esforços Z e M de tal forma que a tangente em B' seja paralela a AB, (fig. 2.12).



$M = \frac{H \cdot Z}{2}$  , valor obtido através da condição de paralelismo, entre as tangentes no ponto B' e A.

Portanto:

$$f = \frac{H^3 \cdot Z}{12 E I}$$

Fig. 2.12 - Viga Engastada

Observando-se a célula n, pode-se escrever:

$$1'I' = 1'3 - I'3 = \beta_{n-1} \cdot H_{n-1} - \frac{H_{n-1}^3 \cdot Z_{n-1}}{12 E \cdot I_{n-1}}$$

$$2'II' = 2'4 - II'4 = \beta_n \cdot H_n - \frac{H_n^3 \cdot Z_n}{12 E I_n}$$

Como 1'I' = 2'II', tem-se:

$$H_n^3 \cdot \frac{Z_n}{I_n} - H_{n-1}^3 \cdot \frac{Z_{n-1}}{I_{n-1}} = 12 E \cdot (\beta_n H_n - \beta_{n-1} \cdot H_{n-1}) \dots (2.20)$$

Admitindo-se uma viga reta apoiada em dois apoios com momentos aplicados nos extremos, (fig. 2.13).



Fig. 2.13 - Viga bi-apoiada Solicitada a Momento

Os giros: devido a  $M_g$  e  $M_d$  são:

$$\alpha_g = \frac{l}{6 E I} [2 M_g - M_d] \dots \dots \dots (2.21)$$

$$\alpha_d = \frac{l}{6 E I} [-M_g + 2 M_d] \dots \dots \dots (2.22)$$

Fazendo  $A = \frac{2 E I}{l}$ , e substituindo nas equações

2.21 e 2.22, resulta:

$$M_g = A(2 \alpha_g + \alpha_d)$$

$$M_d = A(\alpha_g + 2 \alpha_d)$$

Aplicando esta teoria no banzo superior da viga Viendeel, tem-se:

$$M'_g = \frac{2 E I'_n \cdot \cos \alpha'_n}{\lambda} (2 \beta_{n-1} + \beta_n)$$

$$M'_d = \frac{2 E I'_n \cos \alpha'_n}{\lambda} (\beta_{n-1} + 2 \beta_n)$$

ou:

$$\beta_n = \frac{\lambda}{6 E I'_n \cos \alpha'_n} (- M'_g + 2 M'_d)$$

e:

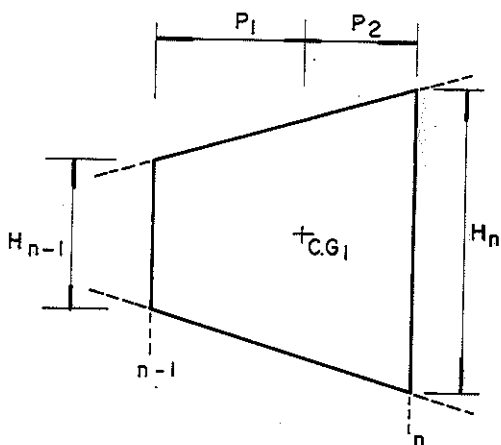
$$\beta_{n-1} = \frac{\lambda}{6 E I'_n \cos \alpha'_n} (2 M'_g - M'_d)$$

Substituindo os valores de  $\beta_n$  e  $\beta_{n-1}$ , na equação 2.20, tem-se:

$$H_n^3 \frac{Z_n}{I_n} - H_{n-1}^3 \frac{Z_{n-1}}{I_{n-1}} = \frac{2 \lambda}{I'_n \cos \alpha'_n} \left[ M'_d (2 H_n + H_{n-1}) - M'_g (H_n + 2 H_{n-1}) \right].$$

..... (2.23)

O centro de gravidade de uma célula (n), divide a distância entre os dois montantes, n-1 e n, em duas partes:  $P_1, P_2$



$$P_1 = \frac{2 H_n + H_{n-1}}{3(H_n + H_{n-1})} \cdot \lambda \dots\dots (2.24)$$

$$P_2 = \frac{H_n + 2 H_{n-1}}{3(H_n + H_{n-1})} \cdot \lambda \dots\dots (2.25)$$

sendo:

$$\lambda = P_1 + P_2$$

Fig. 2.14 - Célula da Viga Vierendeel.

O momento  $M'_n$  no banço superior, em um ponto determinado por uma reta paralela aos montantes, passando pelo centro de gravidade da célula (fig. 2.15) é:



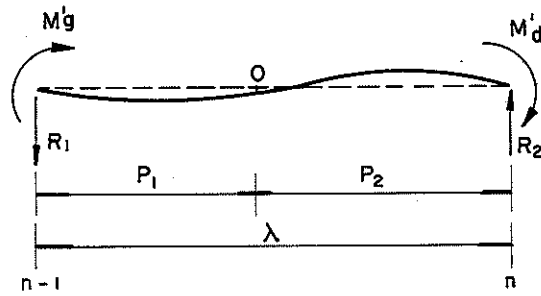


FIG. 2.15

$$\Sigma M_O = M'_n$$

$$R_1 \cdot P_1 - M'_g = M'_n$$

sendo:

$$R_1 = \frac{M'_d + M'_g}{\lambda}$$

e:

$$\lambda = P_1 + P_2 ; \text{ resulta:}$$

$$M'_n = M'_d \cdot \frac{P_1}{\lambda} - M'_g \cdot \frac{P_2}{\lambda} \dots\dots\dots (2.26)$$

substituindo-se as equações (2.24) e (2.25) em (2.26), tem-se:

$$M'_d (2 H_n + H_{n-1}) - M'_g (H_n + 2 H_{n-1}) = 3 M'_n (H_n + H_{n-1}) \dots\dots\dots (2.27)$$

substituindo-se a equação (2.27) na equação (2.23) obtem-se:

$$H_n^3 \frac{Z_n}{I_n} - H_{n-1}^3 \cdot \frac{Z_{n-1}}{I_{n-1}} = \frac{6\lambda (H_n + H_{n-1})}{a_n'} \cdot M'_n \dots\dots\dots (2.28)$$

como  $H = h' + h''$ , e sabendo-se que  $\frac{M'_n}{M''_n} = \frac{h'}{h''}$ , resulta:

$$H = \frac{M'_n h' + M''_n h''}{M'_n} \dots\dots\dots (2.29)$$

Substituindo a equação 2.17 em 2.29, resulta:

$$M'_n = (M'_n + M''_n) \frac{a'_n}{a'_n + a''_n}, \text{ e substituindo em (2.28),}$$

tem-se:

$$H_n^3 \frac{Z_n}{I_n} - H_{n-1}^3 \frac{Z_{n-1}}{I_{n-1}} = \frac{6\lambda(H_n + H_{n-1})}{a'_n + a''_n} (M'_n + M''_n) \dots (2.30).$$

Magnel [25] fêz um corte vertical passando no centro de gravidade da cêlula, conforme fig.(2.16).

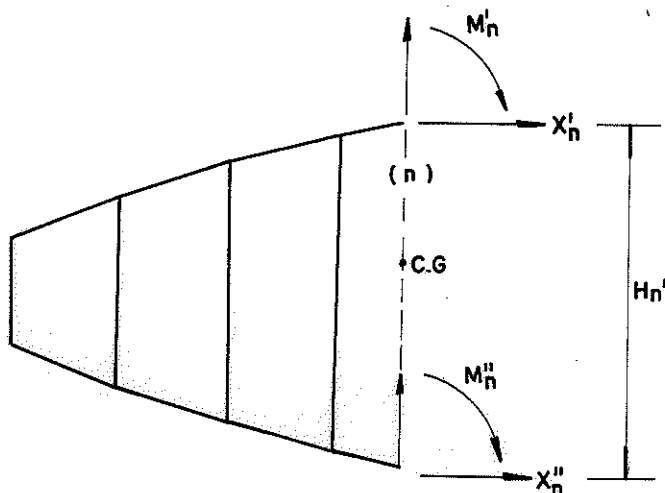


Fig. 2.16 - Viga Vierendeel Seccionada por um Plano Vertical no C.G. de uma Cêlula.

Por equilíbrio, tem-se  $M_n = M'_n + M''_n + X'_n H'_n \dots (2.31)$

Sendo  $M_n$ , o momento fletor externo atuando no C. G. da cêlula n. Cortando a viga por uma linha que passa pelos pontos de inflexão dos montantes (fig. 2.17) tem-se:

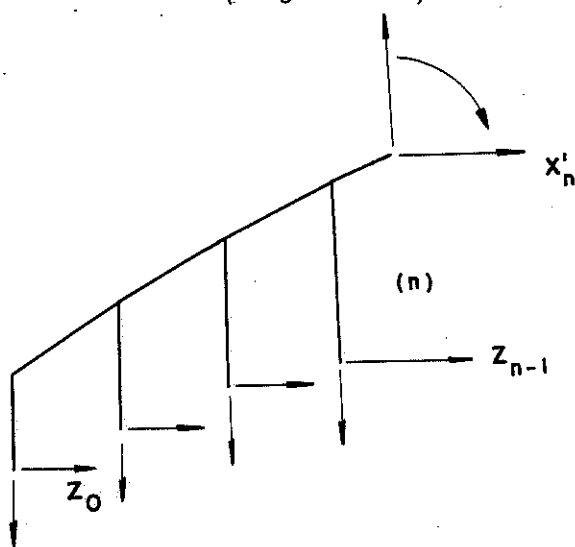


Fig. 2.17 - Viga Vierendeel Cortada por um Plano que Passa pelo Ponto de Inflexão dos Montantes.

[25] - MAGNEL, G. - *Op. cit.*, p.238.

por equilíbrio:  $\Sigma F_n = 0 \rightarrow X'_n + \sum_0^{n-1} Z = 0$ , logo:  $X'_n = - \sum_0^{n-1} Z$

substituindo em 2.31, tem-se:

$$M'_n + M''_n = M_n + H'_n \sum_0^{n-1} Z,$$

logo, à equação (2.30) resultará:

$$H_n^3 \frac{Z_n}{I_n} - H_{n-1}^3 \cdot \frac{Z_{n-1}}{I_{n-1}} = \frac{6\lambda (H_n + H_{n-1})}{a'_n + a''_n} \cdot (M_n + H'_n \sum_0^{n-1} Z) \dots \dots (2.32)$$

2.4.2.2.1 - Aplicação da Equação de Z

Seja por exemplo uma viga Vierendeel de m painéis (fig. 2.18)

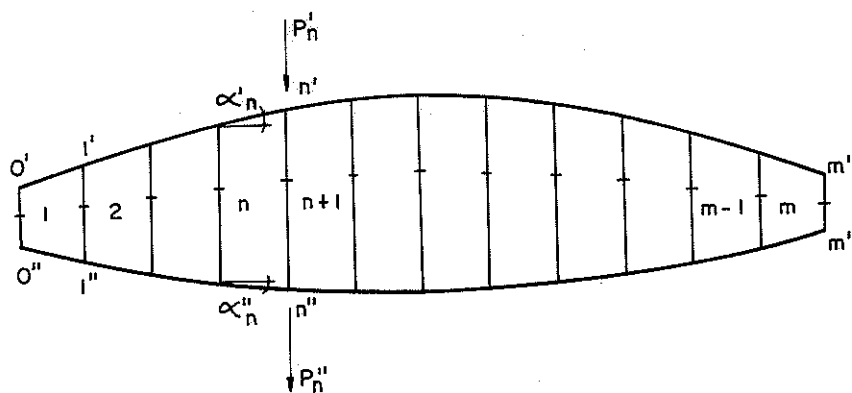


Fig. 2.18 - Viga Vierendeel

adotando:

$$K_n = \frac{H_n^3}{I_n}; \text{ e } C_n = \frac{6\lambda (H_n + H_{n-1})}{a'_n + a''_n}, \text{ e aplicando a}$$

equação (2.32), tem-se:

$$K_n Z_n - K_{n-1} \cdot Z_{n-1} = C_n (M_n + H'_n \sum_0^{n-1} Z) \dots \dots (2.33)$$

para  $n = 1$

$$K_1 Z_1 - K_0 Z_0 = C_1 (M_1 + H'_1 Z_0)$$

para  $n = 2$

$$K_2 Z_2 - K_1 Z_1 = C_2 [M_2 + H'_2 (Z_0 + Z_1)]$$

para  $n = 3$

$$K_3 Z_3 - K_2 Z_2 = C_3 \left[ M_3 + H_3' (Z_0 + Z_1 + Z_2) \right]$$

para  $n = m$

$$K_m Z_m - K_{m-1} \cdot Z_{m-1} = C_m \left[ M_m + H_m' (Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{m-1}) \right]$$

### 2.4.2.3 - Cálculo do Esforço Normal no Montante

Para o cálculo dos esforços normais atuantes nos montantes, Magnel [26], dividiu o mesmo em duas partes (fig. 2.19).

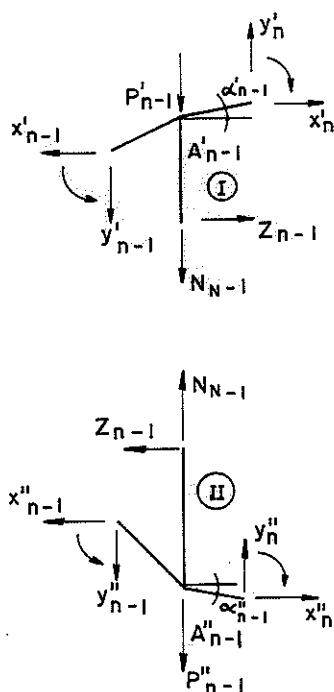


Fig. 2.19 - Montante (n-1), Dividido em duas Partes.

$$\Sigma F_v = 0$$

Trecho I

$$N_{n-1} = Y'_n - Y'_{n-1} - P'_{n-1}$$

Trecho II

$$N_{n-1} = -y''_n + y''_{n-1} + P''_{n-1}$$

Somando as duas equações acima:

$$N_{n-1} = \frac{P''_{n-1} - P'_{n-1}}{2} + \frac{y''_{n-1} - y'_{n-1}}{2} - \frac{y''_n - y'_n}{2}$$

ou:

$$N_{n-1} = \frac{P''_{n-1} - P'_{n-1}}{2} + \beta_{n-1} - \beta_n$$

sendo:

$$\beta_{n-1} = \frac{y''_{n-1} - y'_{n-1}}{2}$$

e:

$$\beta_n = \frac{y''_n - y'_n}{2}$$

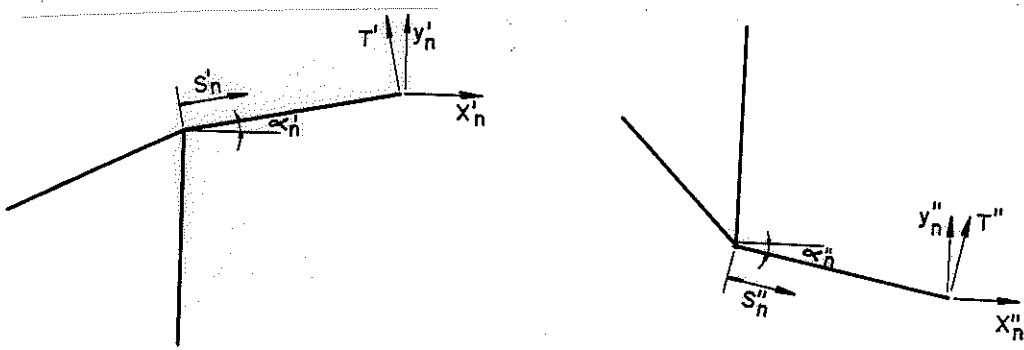


Fig. 2.20 - Esforço Atuante no Banzo

Cálculo de  $\beta_n$ :

$$T'_n = Y'_n \cos \alpha'_n - X'_n \sin \alpha'_n$$

$$T''_n = y''_n \cos \alpha''_n + X''_n \sin \alpha''_n$$

Dividindo-se as duas equações, obtem-se:

$$\frac{T'_n}{T''_n} = \frac{y'_n \cos \alpha'_n - X'_n \sin \alpha'_n}{y''_n \cos \alpha''_n + X''_n \sin \alpha''_n} \dots \dots \dots (2.34)$$

$$\frac{d M'_n}{ds'_n} = T'_n \text{ e por analogia } \frac{d M''_n}{ds''_n} = T''_n$$

$$\frac{T'_n}{T''_n} = \frac{d M'_n}{ds'_n} \div \frac{d M''_n}{ds''_n} \dots \dots \dots (2.35)$$

$$M_n^I = \frac{M_n^{II} \cdot a_n^I}{a_n^{II}} \quad \text{e} \quad S_n^I = S_n^{II} \cdot \frac{\cos \alpha_n^{II}}{\cos \alpha_n^I}$$

$$\frac{d M_n^I}{d S_n^I} = \frac{d M_n^{II} \cdot \frac{a_n^I}{a_n^{II}}}{d S_n^{II} \cdot \frac{\cos \alpha_n^I}{\cos \alpha_n^{II}}} = \frac{a_n^I \cos \alpha_n^I}{a_n^{II} \cos \alpha_n^{II}} \cdot \frac{d M_n^{II}}{d S_n^{II}} \quad \text{Substituindo em (2.33)}$$

$$\frac{T_n^I}{T_n^{II}} = \frac{a_n^I \cos \alpha_n^I}{a_n^{II} \cos \alpha_n^{II}}, \quad \text{igualando-se à equação (2.34), tem-se:}$$

$$\frac{a_n^I}{a_n^{II}} \cdot \frac{\cos \alpha_n^I}{\cos \alpha_n^{II}} = \frac{Y_n^I \cos \alpha_n^I - X_n^I \operatorname{sen} \alpha_n^I}{Y_n^{II} \cos \alpha_n^{II} + X_n^{II} \operatorname{sen} \alpha_n^{II}}$$

$$\frac{a_n^I}{a_n^{II}} = \frac{Y_n^I \frac{\cos \alpha_n^I}{\cos \alpha_n^I} - X_n^I \frac{\operatorname{sen} \alpha_n^I}{\cos \alpha_n^I}}{Y_n^{II} \frac{\cos \alpha_n^{II}}{\cos \alpha_n^{II}} + X_n^{II} \frac{\operatorname{sen} \alpha_n^{II}}{\cos \alpha_n^{II}}}$$

Logo:

$$\frac{Y_n^I - X_n^I \operatorname{tg} \alpha_n^I}{Y_n^{II} + X_n^{II} \operatorname{tg} \alpha_n^{II}} = \frac{a_n^I}{a_n^{II}}$$

$$a_n^{II} \cdot Y_n^I - a_n^I \cdot Y_n^{II} = a_n^{II} \cdot \operatorname{tg} \alpha_n^I \cdot X_n^I + a_n^I \cdot \operatorname{tg} \alpha_n^{II} \cdot X_n^{II}$$

$$\text{como } X_n^I = -\sum_0^{n-1} Z \quad \text{e} \quad X_n^{II} = \sum_0^{n-1} Z, \quad \text{tem-se:}$$

$$a_n^{II} Y_n^I - a_n^I Y_n^{II} = - (a_n^{II} \operatorname{tg} \alpha_n^{II} - a_n^I \operatorname{tg} \alpha_n^I) \sum_0^{n-1} Z \dots \dots \dots (2.36)$$

como:

$$Y_n^I + Y_n^{II} = T_n \dots \dots \dots (2.37)$$

Resolvendo o sistema, formado pelas equações (2.36) e (2.37), obtém-se:

$$Y_n^I = \frac{a_n^I}{a_n^I + a_n^{II}} T_n - \frac{a_n^{II} \operatorname{tg} \alpha_n^I - a_n^I \operatorname{tg} \alpha_n^{II}}{a_n^I + a_n^{II}} \sum_0^{n-1} Z \dots \dots \dots (2.38)$$

$$Y_n'' = \frac{a_n''}{a_n' + a_n''} T_n + \frac{a_n'' \operatorname{tg} \alpha_n' - a_n' \operatorname{tg} \alpha_n''}{a_n' + a_n''} \sum_0^{n-1} Z \dots\dots\dots (2.39)$$

substituindo os valores de  $Y_n'$  e  $Y_n''$  na equação de  $B_n$ , logo:

$$B_n = \frac{a_n'' - a_n'}{a_n' + a_n''} \cdot \frac{T_n}{2} + \frac{a_n'' \operatorname{tg} \alpha_n' - a_n' \operatorname{tg} \alpha_n''}{a_n' + a_n''} \sum_0^{n-1} Z \dots\dots\dots (2.40)$$

para  $B_{n-1}$ , basta substituir o índice  $n$ , por  $n-1$

No caso particular da Viga Vierendeel, ter uma altura constante, tem-se:

$$H_n = H_{n-1} = H_n' = H \dots\dots\dots (2.41)$$

Para  $\alpha = 0$ , tem-se  $a' = I'$  e  $a'' = I''$ ; substituindo estes valores e a equação (2.41) na equação (2.32), obtem-se:

$$\frac{Z_n}{I_n} - \frac{Z_{n-1}}{I_{n-1}} = \frac{12\lambda}{H^2(I_n' + I_n'')} (M_n + H \sum_0^{n-1} Z) \dots\dots\dots (2.42)$$

para o valor do esforço normal:

$$B_n = \frac{a_n'' - a_n'}{a_n' + a_n''} \cdot \frac{T_n}{2} \text{ e como:}$$

$$N_{n-1} = \frac{P_{n-1}'' - P_{n-1}'}{2} + B_{n-1} - B_n, \text{ obtem-se:}$$

$$N_{n-1} = \frac{P_{n-1}' - P_{n-1}''}{2} + \frac{I_{n-1}'' - I_{n-1}'}{I_{n-1}' + I_{n-1}''} \cdot \frac{T_{n-1}}{2} - \frac{I_n'' - I_n'}{I_n' + I_n''} \cdot \frac{T_n}{2} \dots\dots\dots (2.43)$$

#### 2.4.2.4 - Cálculo do Esforço Cortante nos Banzos

Da figura 2.20 o esforço cortante atuante nos banzos é:

$$T_n' = Y_n' \cos \alpha_n' - X_n' \operatorname{sen} \alpha_n' \dots\dots\dots (2.44)$$

$$T_n'' = Y_n'' \cos \alpha_n'' + X_n'' \operatorname{sen} \alpha_n'' \dots\dots\dots (2.45)$$

Substituindo-se:

$$X'_n = - \sum_0^{n-1} Z \quad \text{e} \quad X''_n = \sum_0^{n-1} Z \quad \text{e as equações (2.38)}$$

e (2.39) nas equações (2.44) e (2.45), obtem-se os esforços constantes atuantes nos banzos.

2.4.3 - Método Aproximado de Magnel {27}

2.4.3.1 - Cálculo dos Momentos nos Banzos

Baseado na teoria por ele desenvolvida, Magnel, com a finalidade de facilitar o cálculo da Viga Vierendeel, apresentou um método aproximado de cálculo.

Na hipótese de que os montantes tenham rigidez infinita, a célula m se deforma, sem entretanto, deformar os montantes (fig. 2.21).

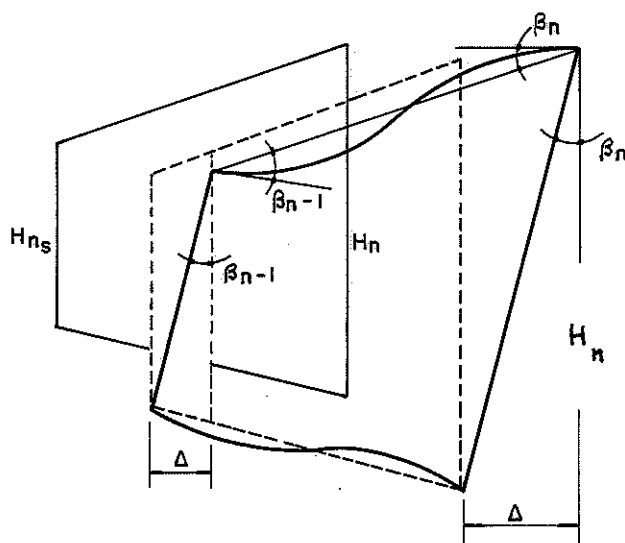


Fig. 2.21 - Célula (m) Deformada:

Da fig. 2.21, tem-se:  $\beta_n = \frac{\Delta}{H_n}$ ,  $\beta_{n-1} = \frac{\Delta}{H_{n-1}}$ , logo:

$$\beta_{n-1} \cdot H_{n-1} = \beta_n H_n \dots\dots\dots (2.46)$$

de acôrdo com a fig. 2.22:

$$M'_g = A(2 \alpha_g + \alpha_d) \quad \text{e} \quad M'_d = A(\alpha_g + 2 \alpha_d)$$

---

{27} - MAGNEL, G., - Op. cit, p. 271



Logo,

$$\beta_{n-1} = \frac{1}{3A} (2 M'_g - M'_d)$$

$$\beta_n = \frac{1}{3A} (2 M'_d - M'_g)$$

Substituindo-se na equação 2.46, obtem-se:

$$M'_d (H_{n-1} + 2 H_n) - M'_g (2 H_{n-1} + H_n) = 0, \dots (2.47)$$

que é o segundo termo da equação (2.23)

Seja uma peça de comprimento  $\lambda$ , sujeita a momentos nas extremidades (fig. 2.22):

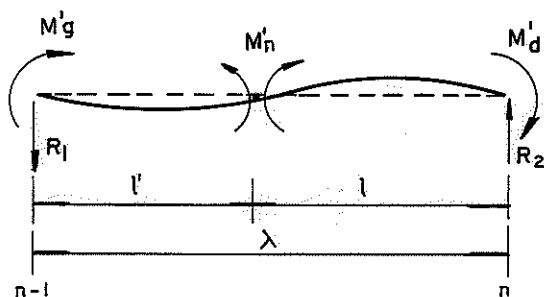


Fig. 2.22 -

O momento no ponto  $n$  é:

$$M'_n = M'_g - \frac{M'_d}{\lambda} z' - \frac{M'_g}{\lambda} z'$$

Se:

$$M'_n = 0, \quad M'_d = + M'_g \left( \frac{\lambda - z'}{z'} \right)$$

Substituindo na equação (2.47), obtem-se:

$$z' = \frac{\lambda}{3} \frac{(H_{n-1} + 2 H_n)}{(H_{n-1} + H_n)} = P_1 \dots \dots \dots (2.48)$$

Portanto, os momentos ( $M'_n$  e  $M''_n$ ) atuantes nos banzos são nulos no ponto determinado por uma reta paralela ( $A' A''$ ) aos montantes passando pelo centro de gravidade da célula  $n$ . (Fig.2.23)

sabê-se que:

$$M'_n + M''_n = M_n + H'_n \sum_0^{n-1} Z \dots\dots\dots (2.49)$$

para:

$$H'_n = A' A'',$$

tem-se:

$$M'_n = 0 \quad e$$

$$M'' = 0 \quad , \quad \text{consequentemente:}$$

$$M'_n + M''_n = 0$$

$$M_n + H'_n \sum_0^{n-1} Z = 0$$

portanto:

$$H'_n \sum_0^{n-1} Z = - M_n$$

Na intersecção de dois banzos  $H'_n = 0$ , logo:

$$M'_n + M''_n = M_n$$

Para cargas aplicadas nos nós, em uma viga Vierendeel (fig. 2.23),  $M'_n + M''_n$  varia linearmente no comprimento de cada célula.

Conclue-se então, unindo-se os pontos B' e N (sendo N o ponto onde  $M'_n + M''_n = 0$ ), as ordenadas compreendidas entre as retas  $\overline{B'N}$  e M é o valor do momento  $M'_n + M''_n$ .

Sendo M, a linha de momentos fletores, devido às cargas externas atuantes na viga Vierendeel (fig. 2.23).

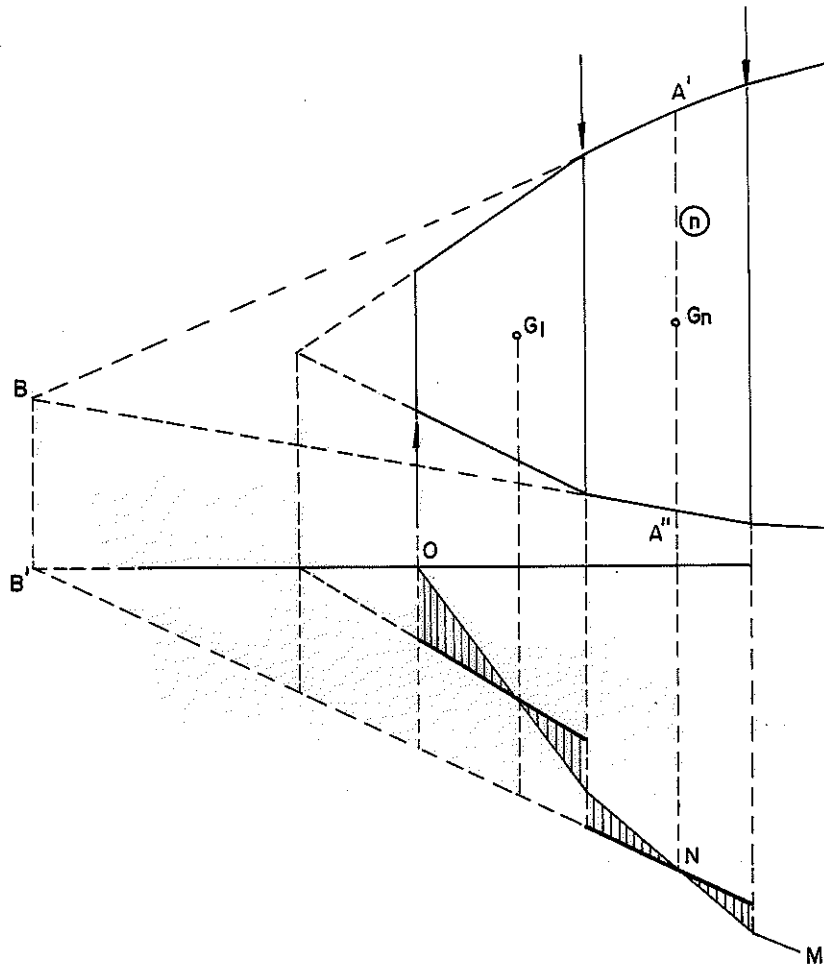


Fig. 2.23 - Viga Vierendeel e Diagrama de Momento Fletor

No caso de uma viga com altura constante a determinação dos momentos nos banzos é muito mais simples, sendo suficiente traçar horizontais que corte a reta de  $M$  em um ponto equivalente ao centro de gravidade da célula (fig. 2.24).

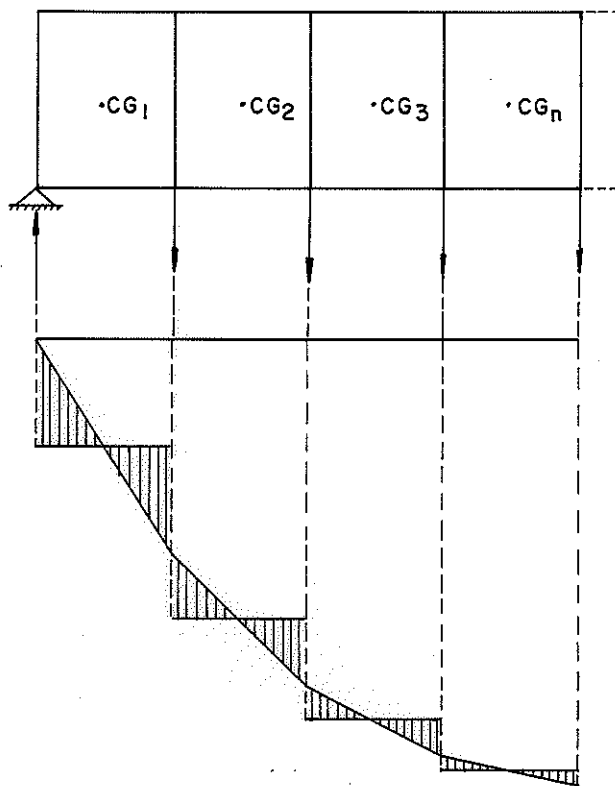


Fig. 2.24 - Viga Vierendeel com Altura Constante e Diagrama de Momento Fletor

Os valores de  $M_n^I$  e  $M_n^{II}$  são corrigidos por:

$$M_n^I = (M_n^I + M_n^{II}) \frac{a_n^I}{a_n^I + a_n^{II}}$$

Se a altura for constante e os banzos tiverem o mesmo momento de inércia,  $M_n^I = \left( \frac{M_n^I + M_n^{II}}{2} \right)$

2.4.3.2 - Cálculo do Esforço Cortante nos Banzos

Isolando-se o montante compreendido entre as células n e n + 1 (fig. 2.25), estão atuando no montante e nos banzos, os seguintes esforços:

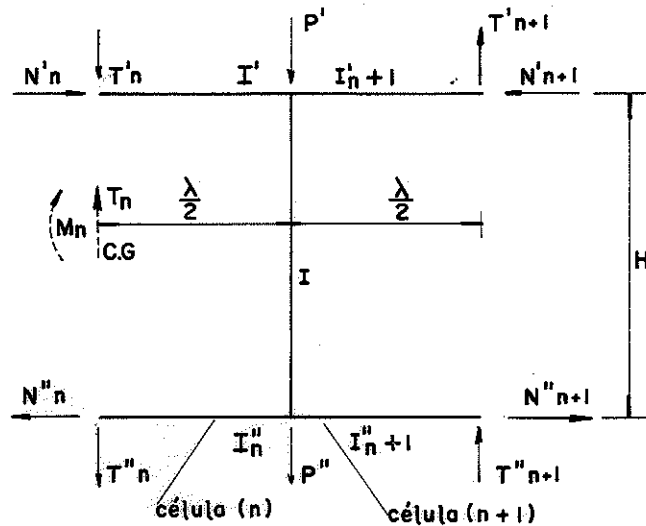


Fig. 2.25 - Esforços Atuantes

O esforço cortante  $T_n$ , é absorvido pelo banzo superior e inferior proporcionalmente ao seu momento de inércia, portanto:

$$\frac{T'_n}{I'_n} = \frac{T''_n}{I''_n} \dots \dots \dots (2.50)$$

Por equilíbrio, tem-se:

$$T_n = T'_n + T''_n, \text{ substituindo em (2.50), obtem-se:}$$

$$T'_n = T_n \cdot \frac{I'_n}{I'_n + I''_n} \quad \text{e} \quad T''_n = T_n \cdot \frac{I''_n}{I'_n + I''_n}$$

sendo  $T_n$  força cortante devido a carga externa, atuando no centro de gravidade da célula.

Para simplificar, adota-se:

$$C' = \frac{I'_n}{I'_n + I''_n} \dots \dots \dots (2.51)$$

$$C'' = \frac{I_n''}{I_n' + I_n''} \dots\dots\dots (2.52)$$

portanto tem-se:

$$T_n' = T_n \cdot C' \dots\dots\dots (2.53)$$

$$T_n'' = T_n \cdot C'' \dots\dots\dots (2.54)$$

2.4.3.3 - Cálculo do Esforço Normal nos Montantes

Seja P' uma carga atuando no n̄o do banzo superior, sendo que P' divide-se em duas parcelas, P<sub>s</sub> e P<sub>i</sub> atuando no banzo superior e inferior respectivamente.

$$P' = P_s + P_i \dots\dots\dots (2.55)$$

Da hipótese de que os banzos possuem a mesma elástica (f' = f''):

$$f' = \frac{P_s \cdot f(c)}{E I'} \quad e \quad f'' = \frac{P_i \cdot f(c)}{E I''}$$

onde:

f(c) é função do carregamento

Portanto, igualando-se as elásticas, obtem-se:

$$\frac{P_s}{I'} = \frac{P_i}{I''} \dots\dots\dots (2.56)$$

Da equação (2.51) e (2.52), sabe-se:

$$I' = C' (I' + I'') \dots\dots\dots (2.57)$$

$$I'' = C'' (I' + I'') \dots\dots\dots (2.58)$$

Substituindo na equação (2.56), tem-se:

$\frac{P_s}{C'} = \frac{P_i}{C''}$ , substituindo o valor de P' da equação (2.55), tem-se:

$$\frac{P_s (C' + C'')}{C' C''} = \frac{P'}{C''}, \text{ como } C' + C'' = 1 ; \text{ logo:}$$

$$P_s = P' \cdot C' \quad \text{e} \quad P_i = P' \cdot C''$$

Quando atuar somente  $P''$  no n.º inferior, a barra do banzo inferior suportará uma parcela desta carga  $C'' \cdot P''$ , o restante tracionará o montante com uma força  $C' \cdot P''$ .

Portanto, se as duas cargas estiverem atuando simultaneamente, o esforço axial no montante, será:

$$N = C' P'' - C'' \cdot P' \dots\dots\dots (2.59)$$

2.4.3.4 - Cálculo do Momento nos Montantes

Em um montante  $n$ , tem-se a seguinte distribuição de momentos:

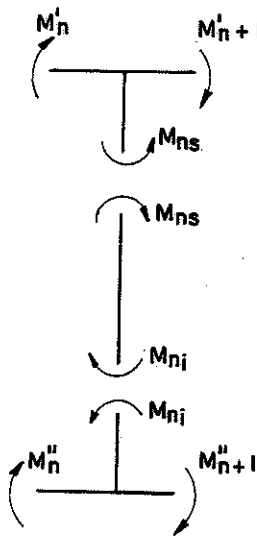


Fig. 2.26 - Distribuição de Momentos no Montante entre duas Células

Os momentos no montante  $n$ ,  $M_{ns}$  e  $M_{ni}$  são calculados por equilíbrio de n.º.

$$M_{ns} = M_n' + M_{n+1}' \dots\dots\dots (2.60)$$

$$M_{ni} = M_n'' + M_{n+1}'' \dots\dots\dots (2.61)$$

2.4.3.5 - Cálculo do Esforço Cortante nos Montantes:

O esforço cortante  $T_n$  do montante, é calculado partindo-se dos momentos atuantes nas extremidades do mesmo, (fig. 2.27).

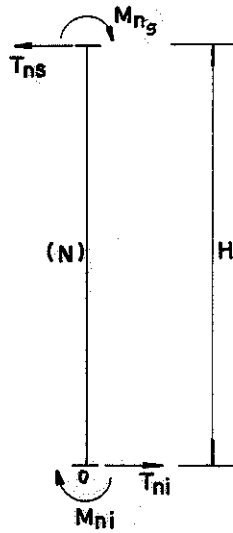


FIG. 2.27 - MONTANTE n, SOLICITADO A MOMENTO E CORTANTE

$$\Sigma M_o = 0$$

$$T_{n_s} H - M_{n_s} - M_{n_i} = 0$$

$$T_{n_s} = \frac{M_{n_s} + M_{n_i}}{H} \dots\dots\dots (2.62)$$

$$\Sigma F h = 0$$

$$T_{n_s} = T_{n_i}$$

$$T_{n_i} = \frac{M_{n_s} + M_{n_i}}{H} \dots\dots\dots (2.63)$$



### 3 - EXPERIMENTAÇÃO PRELIMINAR

Em toda literatura obtida para o estudo da viga Viendeel não se encontrou referência à viga de madeira. Sentiu-se, pois, a necessidade de uma avaliação preliminar de sua viabilidade através da experimentação de um modelo simplificado.

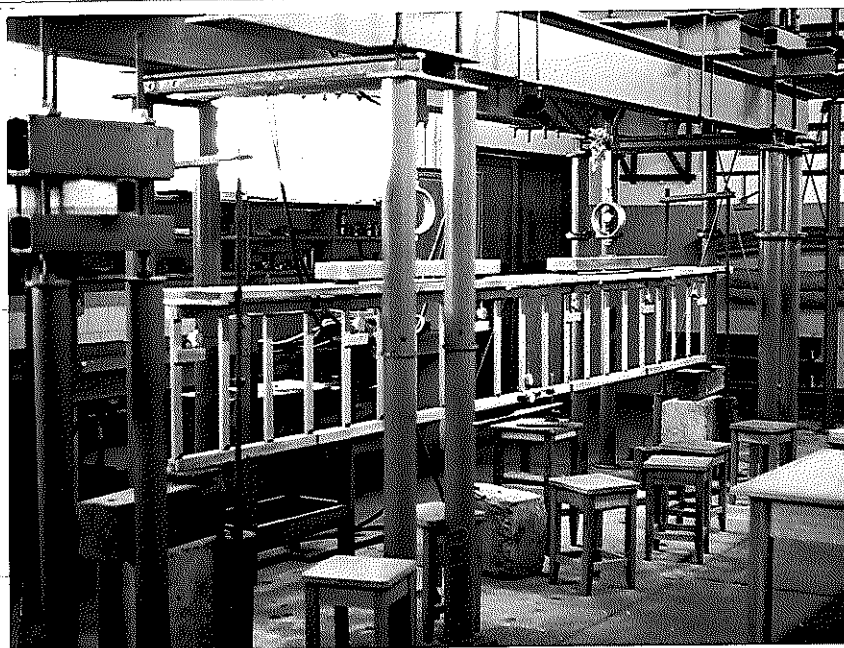


Fig. 3.1 - Ensaio Preliminar de uma Viga Viendeel

A viga experimentada, de Peroba Rosa, composta de 21 montantes, espaçados entre si de 0,25 m, e altura igual a duas vezes a distância entre montantes.

Dois cilindros hidráulicos, dispostos simetricamente em relação ao centro da viga, permitiram a aplicação de 4 (quatro) cargas, iguais, simultaneamente, em quatro montantes, figura 3.2.

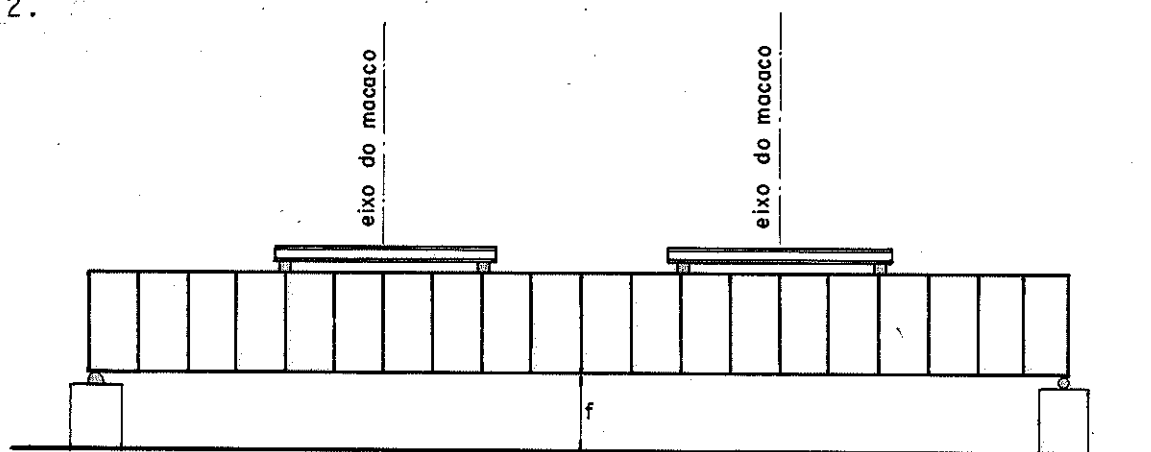


Fig. 3.2 - Esquema do Ensaio

Na sua construção utilizaram-se sarrafos de 1,5 cm x 5,5 cm, um em cada montante e dois ao longo dos banzos superior e inferior.

Sob o ponto de vista de tensões, a viga experimental comportou-se satisfatoriamente, apresentando no entanto excessiva deformação. A partir da interpretação deste comportamento julgou-se imprescindível um estudo experimental da ligação das peças coladas da viga Vierendeel.

#### 4 - ESTUDO DAS LIGAÇÕES

Para reduzir a deformabilidade da viga Vierendeel de madeira, a solidarização de banzos e montantes deve ser tal que proporcione a maior rigidez possível na viga.

Para evitar estas deformações, deve-se adotar o tipo de ligação mais eficiente possível.

A ligação por adesivos tem por característica principal a distribuição dos esforços em áreas relativamente grandes, daí resultando pequenas deformações, tensões mais baixas e consequentemente maior rigidez do conjunto.

Mateus {28}, apresenta um gráfico (fig. 4.1) no qual se evidencia a eficiência da ligação colada em comparação com outros tipos de ligação.

A cola aerolite é uma resina à base de uréia formaldeído; o diagrama apresenta elevado coeficiente angular, mantendo-se retilíneo até a ruptura, destacando o caráter frágil da ruptura e a reduzida deformabilidade da ligação.

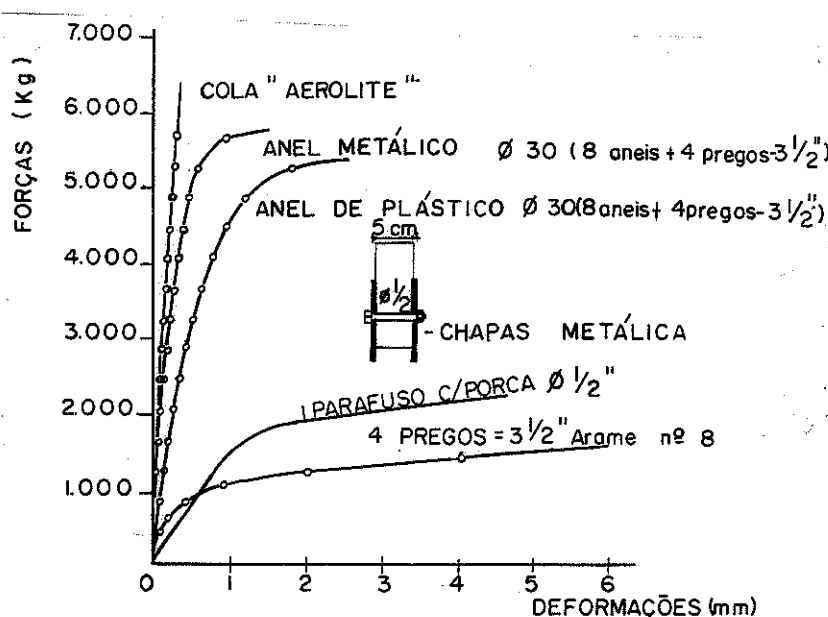


Fig. 4.1 - Diagrama de Deformação x Carga

{28} - MATEUS, Tomás J.E. - Bases para o dimensionamento de estrutura de madeira. Lisboa, LNEC, 1961. 306 p. .

#### 4.1 - Escolha do Adesivo

Experimentação realizada no Laboratório de Madeiras e de Estruturas de Madeira (LaMEM), utilizando três espécies de madeira, Eucalipto Citriodora, Pinho do Paraná e Peroba Rosa e três adesivos diferentes, apresentou os resultados comparativos indicados na tabela 4.1.

TABELA 4.1 - Tensão Admissível de Cisalhamento nas Ligações Coladas.

MADEIRA	CASCOPHEN		RESINA VINÍLICA		RESINA EPOXI	
	SÊCA $\bar{\tau}$ kgf/cm <sup>2</sup>	VERDE $\bar{\tau}$ kgf/cm <sup>2</sup>	SÊCA $\bar{\tau}$ kgf/cm <sup>2</sup>	VERDE $\bar{\tau}$ kgf/cm <sup>2</sup>	SÊCA $\bar{\tau}$ kgf/cm <sup>2</sup>	VERDE $\bar{\tau}$ kgf/cm <sup>2</sup>
Eucalipto Citriodora	9,47	9,72	3,96	0,97	8,28	0,78
Peroba Rosa	10,95	12,60	6,03	1,10	8,32	3,78
Pinho do Paraná	9,22	7,20	9,83	0,51	4,55	2,08

A utilização do Cascophen se destaca através destes resultados como a mais eficiente e daí sua escolha para as ligações da viga Vierendeel de madeira.

O adesivo Cascophen (RS-216-M) da Alba S/A, é descrito como uma resina sintética, a base de fenol, resorcinol, formaldeído, em solução de álcool e água, especialmente recomendada para colagem resistente a água fria ou quente, a muitos solventes orgânicos, aos fungos, ao calor, à umidade, etc...

O fabricante recomenda o uso do Cascophen RS-216 - M em conjunto com o catalizador em pó FM-60-M nas seguintes proporções:

Cascophen RS-216-M..... 100 gramas  
Catalizador FM-60-M..... 20 gramas

Misturando-se o catalizador com a resina até alcançar dispersão homogênea, o adesivo está pronto para ser aplicado. A cola preparada a temperatura de 20°C terá uma vida útil de aproximadamente cinco horas e a 32°C de uma hora e quarenta e cinco minutos.

O tempo compreendido entre o espalhamento do adesivo na superfície e a aplicação de pressão, afim de permitir a penetração da cola é designado como tempo de colagem, sendo maior pa-

ra a montagem fechada ou seja, a aplicação seguida da justaposição instantânea das peças, tabela 4.2.

TABELA 4.2 - Tempo de Colagem e de Prensagem

	TEMPERATURA DE COLAGEM			
	20°C	27°C	32°C	38°C
Tempo máximo de colagem (min)				
a- Montagem aberta.....	15	10	7	5
b- Montagem fechada.....	60	40	25	15
Tempo mínimo de prensagem (horas).....	8 a 10	6 a 8	4 a 6	4 a 5

#### 4.2 - Utilização do Adesivo

Uma ligação colada é eficiente quando, a resistência do adesivo é aproximadamente igual a resistência da madeira.

A adesão é um fenômeno físico-químico.

A cola ao endurecer forma ligações microscópicas entre as fibras mais próximas da linha de colagem.

A força de atração entre o adesivo e a superfície da madeira é influenciada pela polaridade do adesivo e do aderente.

A madeira é um material polar. A celulose, apresenta ligações, através de pontes de hidrogênio. Ligações deste tipo podem ocorrer com adesivos à base de fenol-resorcinol-formaldeído e outros constituídos também por moléculas polares, garantindo assim a união entre as peças coladas.

A qualidade de qualquer ligação com adesivo depende da seleção do adesivo, das condições de utilização e da espécie de madeira.

Apesar do processo geral de colagem ser parecido para adesivos diferentes, recomenda-se o atendimento às instruções do fabricante, atendendo as condições próprias de colagem.

As madeiras não podem ser coladas verdes: isto é, com umidade acima do ponto de saturação. A água livre presente na madeira pode diluir o adesivo, depois de espalhado no aderente, causando uma diluição adicional, daí resultando uma ligação insatisfatória, além disto todas as possíveis ligações através das

pontes de hidrogênio estarão realizadas com moléculas de água.

A umidade ideal para colagem deve ser próxima da umidade de equilíbrio da madeira das peças coladas.

A madeira deve ser preparada para ter a superfície de contacto tão lisa e limpa quanto possível. A preparação da madeira deve ser feita imediatamente antes da colagem, para não ocorrer variação de umidade provocando empenamento e fenda na área a ser colada {29} e {30}.

A maioria dos adesivos tende a perder suas características durante armazenagem muito longa, devendo ser guardados em ambientes próprios, atendendo às instruções do fabricante.

O principal propósito da pressão no processo de colagem é manter os dois aderentes com contacto próximo, até o adesivo desenvolver suficiente resistência para garantir a ligação. A pressão distribuirá o adesivo uniformemente sobre a superfície a ser colada {31}.

#### 4.3 - Estudo Teórico das Ligações

Existem diversos estudos teóricos e experimentais na literatura internacional, relativos a ligação de peças de madeira por adesivos. Na maioria destes estudos tem sido avaliadas as ligações submetidas ao cisalhamento.

---

{29} - KARLSEN, G.G. - Wooden Structures. Moscou, Mir Publishers, 1967. 638 p.

{30} - FRÉAS, A.D. & SELBO, M.L. - Fabrication and Design of Glued Laminated Wood Structural Members, Tech. Boletim n° 1069, Washington, D.C. - Feb. 1954.

{31} - GILLESPIE, Robert H. ; COUNTRYMAN, David ; BLOMQUIST, Richard F. - Adhesives in Building Construction. USDA - FS, Mad., Wis., Feb. 1978. 160 p. (Agriculture Handbook, 516).

Em um programa conjunto, entre Purdue Wood Research Laboratory e Small Homes Council, University of Illinois, fêz-se um estudo de treliças para pequenos vãos, tendo as peças principais de madeira maciça e as peças de ligação de compensado, coladas e pregadas {32} ; {33} e {34}.

Percival {35} estudou o mesmo tipo de treliça utilizando madeiras de qualidade inferior, resistência das ligações, preparação da superfície a ser colada, e variação da umidade.

O dimensionamento das ligações coladas baseia-se na capacidade desta resistir ao esforço de cisalhamento, introduzindo-se um coeficiente de ampliação da área colada, para aumentar a segurança para resistir a momento fletor {32} ; {33} e {34}.

Suddarth {36}, apresenta um procedimento analítico para o cálculo da ligação colada, feita com cobrejuntas de compensado. Apresentou equações e gráficos para o cálculo da resistência da ligação colada em função de suas dimensões.

---

{32} - RADCLIFFE, B.M. & SUDDART, S. K. - The Purdue Illinois Nail - Glued Truss with a Pitch for 2:12 for Span of 24'8". Lafayette, Indiana, Purdue University; Agricultural Experiment Station, Set. 1954. p.15. 25 p.

{33} - RADCLIFFE, B.M & SUDDART, S.K. - The Purdue - Illinois - Glued Roof Truss with a Pitch of 2:12 and 4:12 for Span of 24 Feet 8 Inch and 28 Feet 8 Inch. Lafayette, Indiana, Purdue University; Agricultural Experiment Station, Aug. 1955. 22p. (Station Bulletin 629).

{34} - RADCLIFFE, B.M & H. GRANUM - A New Load Pitched Roof Truss With Nail-Glued Connection. Lafayette, Indiana Purdue University; Agricultural Experiment Station, Jan. 1955. - 22p. (Station Bulletin 617).

{35} - PERCIVAL, Donald H. - Nail-Glued Roof Trusses from Low - Grade Hardwood Lumber. Lafayette, Indiana, Purdue University; Agricultural Experiment Station, Mar. 1957. 26p. (Station Bulletin 649).

{36} - SUDDARTH, Stanley K. - The Design of Glued Joints for Wood Trusses an Frames. Lafayette, Indiana, Purdue University; Agricultural Experiment Station, Dec. 1961. 15 p. (Research Bulletin nº 727).

#### 4.4 - Dimensionamento da Ligação Colada

Inicialmente pensou-se em deduzir uma equação para o cálculo da ligação colada considerando-se momento fletor ( $m$ ) e esforços cortante ( $Q$ ) e normal ( $N$ ).

Admite-se para esta dedução:

- A tensão atuante varia linearmente ao longo da área colada, com tensão máxima nas periferia da seção.

- O adesivo comporta-se elasticamente e a tensão de cisalhamento não varia com a espessura da cola.

- Ligação colada, com dimensões  $A \times B$ , resistindo a dois esforços atuando perpendicularmente entre si e a momento fletor atuando no centro de gravidade da área (fig. 4.2).

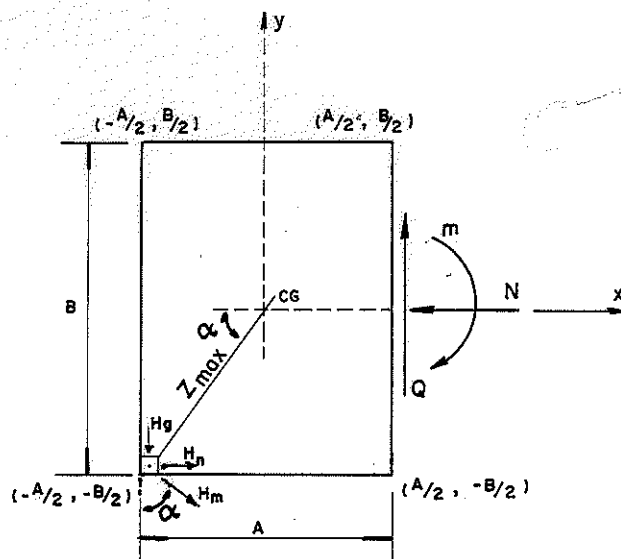


Fig. 4.2 - Ligação Colada:

Dividindo-se a área colada em pequenas áreas elementares nas quais atuam três tensões: (fig. 4.2):

$H_n$  = Tensão devida aos esforços normais.

$H_q$  = Tensão devida às forças cortantes

$H_m$  = Tensão devida ao Momento fletor, atuando no centro de gravidade de área colada.

$H_m$  = Tem valor variável em direção e módulo.

$H_n$  e  $H_q$  são simplesmente calculados por:



$$H_n = \frac{N}{A \cdot B} \dots\dots\dots (4.1)$$

$$H_q = \frac{Q}{A \cdot B} \dots\dots\dots (4.2)$$

Considerando-se  $H_m$  proporcional a distância da área elementar ao centro de gravidade da área colada (fig. 4.3), tem-se:

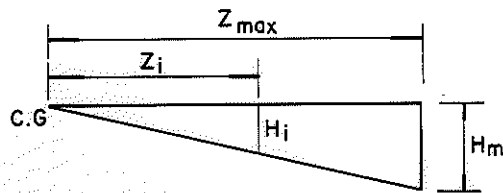


Fig. 4.3 - Diagrama de Tensão na Área Colada

$$H_i = \frac{H_m}{z_{max}} \cdot z_i \dots\dots\dots (4.3)$$

O momento atuante é:

$$m = \int^s H_i \cdot z_i \cdot d_s$$

$$m = \int_0^{B/2} \int_0^{A/2} H_i \sqrt{x^2 + y^2} d_x \cdot d_y, \text{ substituindo}$$

do o valor de  $H_i$  na equação 4.3, tem-se:

$$m = \int_0^{B/2} \int_0^{A/2} \frac{H_m}{z_{max}} (x^2 + y^2) d_x \cdot d_y \dots\dots (4.4)$$

A distância máxima do centro de gravidade da área colada até o extremo é:

$$z_{max} = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2}, \text{ substituindo em (4.4) obtêm-se:}$$

$$m = \int_0^{B/2} \int_0^{A/2} \frac{2 H_m}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, d_x \cdot d_y, \text{ de-}$$

envolvendo a integral, resulta:

$$m = \frac{H_m}{24} \frac{A^3 \cdot B + B^3 \cdot A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ para um quarto de \u00e1rea co-}$$

tada.

Para \u00e1rea total, o valor de  $H_m$  \u00e9:

$$H_m = 6m \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{A^3 \cdot B + B^3 \cdot A} \dots\dots\dots (4.5)$$

No exemplo, percebe-se a exist\u00eancia de tens\u00f5es  $H_m$ , de mesmo m\u00f3dulo mas de dire\u00e7\u00f5es diferentes em cada canto.

A tens\u00e3o m\u00e1xima na cola,  $H_{max}$ , \u00e9 a soma vetorial das tens\u00f5es devidas aos esfor\u00e7os normal, cortante e momento fle- tor, por estar contido no mesmo plano.

$$H_{max} = \sqrt{(H_m \cos \alpha + H_q)^2 + (H_m \sin \alpha + H_n)^2} \dots(4.6)$$

sendo:

$\alpha$  = \u00e2ngulo formado pela dire\u00e7\u00e3o de  $H_m$  e com o eixo y

#### 4.5 - \u00cdndice de Rigidez da Liga\u00e7\u00e3o

Uma liga\u00e7\u00e3o \u00e9 r\u00edgida, quando as pe\u00e7as concorrentes sofrem uma mesma rota\u00e7\u00e3o relativa.

Nem todas as liga\u00e7\u00f5es "r\u00edgidas" apresentam restri\u00e7\u00e3o total ao giro e nem todas as liga\u00e7\u00f5es "rotuladas" permitem giro livre.

Os m\u00e9todos de c\u00e1lculo "cl\u00e1ssicos" admitem as liga - \u00e7\u00f5es totalmente r\u00edgidas, entretanto, para estruturas submetidas a momentos fletores elevados, \u00e9 conveniente pensar-se na eventualidade das liga\u00e7\u00f5es serem semi-r\u00edgidas, isto \u00e9, nem r\u00edgidas e nem rotuladas.

Uma caracter\u00edstica importante nas liga\u00e7\u00f5es \u00e9 a rela \u00e7\u00e3o entre o momento aplicado M e a rota\u00e7\u00e3o relativa  $\theta$  entre as fa \u00e7es de contacto da liga\u00e7\u00e3o. Esta rela\u00e7\u00e3o pode ser apresentada gr\u00e1 ficamente, por meio da curva momentos fletores e rota\u00e7\u00e3o do n\u00f3.

Na figura 4.4, inicialmente, a ligação se comporta elasticamente e a reta OA apresenta um coeficiente angular  $M/\theta$ , designado como constante rotacional do nã conhecido por mōdulo do nã ou índice de rigidez da ligação {37}.

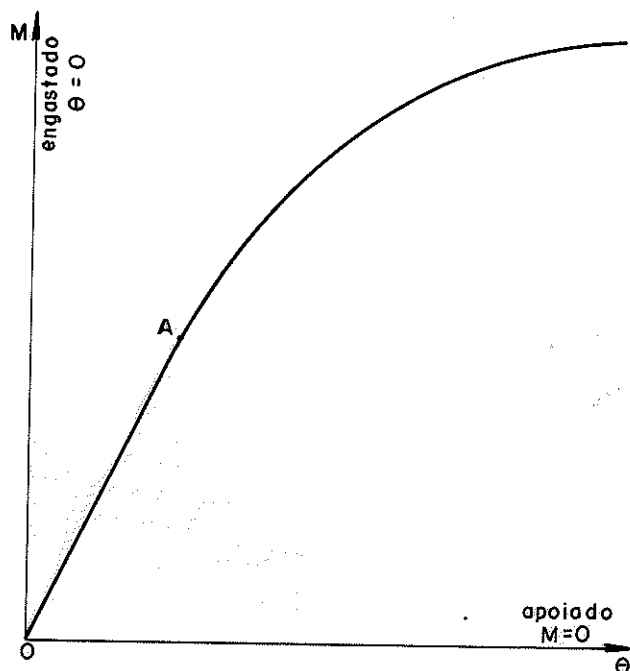


Fig. 4.4 - Curva Típica Momento-Rotação

Para cargas maiores, a ligação deforma-se inelasticamente e o ângulo de rotação aumenta rapidamente.

Para as cargas normais de trabalho, o comportamento das ligações em quase todas as estruturas pode ser representado pela reta OA.

Nas ligações perfeitamente rígidas a reta OA coincidiria com o eixo dos momentos e nas ligações perfeitamente rotuladas, esta reta, concediria com o eixo dos  $\theta$ .

Portanto, quanto maior for o coeficiente angular da reta OA, mais eficiente será a ligação quanto a rigidez angular.

Desde o início deste século, com a introdução da viga Vierendeel, alguns pesquisadores se preocuparam com a rigidez das ligações. Em consequência, existem dados experimentais suficientes para estimar o mōdulo do nã para ligações metálicas {38}.

---

{37} - GERE, James M. - *Op. cit.* p.

{38} - GERE, James M. - *Op. cit.*

Existem poucos estudos sobre rigidez das ligações de madeira. Entretanto, Perkins {39}, analisando o giro de uma ligação, sujeita a momento, em um estudo preliminar sobre a rigidez da ligação colada, de valor máximo  $240 \cdot 10^{-6}$  radianos, o considerou negligenciável face a deformação elástica da madeira. Admitiu portanto, a ligação colada como sendo rígida.

Na falta de melhores informações bibliográficas e com o objetivo de conhecer o comportamento da viga Vierendeel, desenvolveu-se um método de ensaio para determinar as características da ligação colada, submetida a momento fletor.

#### 4.6 - Experimentação

Devido a natureza complexa da adesão, dos adesivos e dos aderentes, as ligações coladas de peças de madeira devem ser estudadas experimentalmente, antes de se adotarem as hipóteses de cálculo.

##### 4.6.1 - Cisalhamento nas Ligações Coladas:

A complexidade da ligação em estudo, devido a ocorrência de diversos tipos de esforços atuantes simultaneamente e provocando tensões de cisalhamento em todas as direções no plano da seção colada, indicando a conveniência de pesquisar a tensão de cisalhamento da peça colada variando a direção das fibras da madeira em relação a direção da carga.

##### 4.6.1.1 - Desenvolvimento da Experimentação:

Para o estudo da variação da direção entre as fibras das peças coladas foram escolhidas 6 (seis) peças de Peroba Rosa. Foram retiradas 20 amostras, para cada peça, sendo 10 cortadas com ângulo  $\theta$  entre as faces laterais e as fibras, e 10 com as fibras paralelas às faces laterais.

---

{39} - PERKINS, R.H.; SUDDARTH, S.K; DALE, A. C. - Rotational resistance of three - membered nailed joints subjected to bending moment. Lafayette, Indiana, Purdue University; Agricultural Experiment Station, Dec. 1962. 12p. (Research Bulletin nº 753).

Cada amostra com as fibras em ângulo foi colada com uma de fibras paralelas, formando corpos de prova apresentando fibras inclinadas junto aos planos de colagem, fig.4.5.

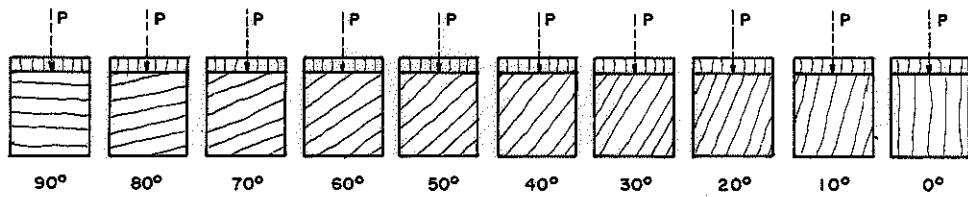


Fig. 4.5 - Variação do ângulo Formado entre as Fibras e a Direção da Carga.

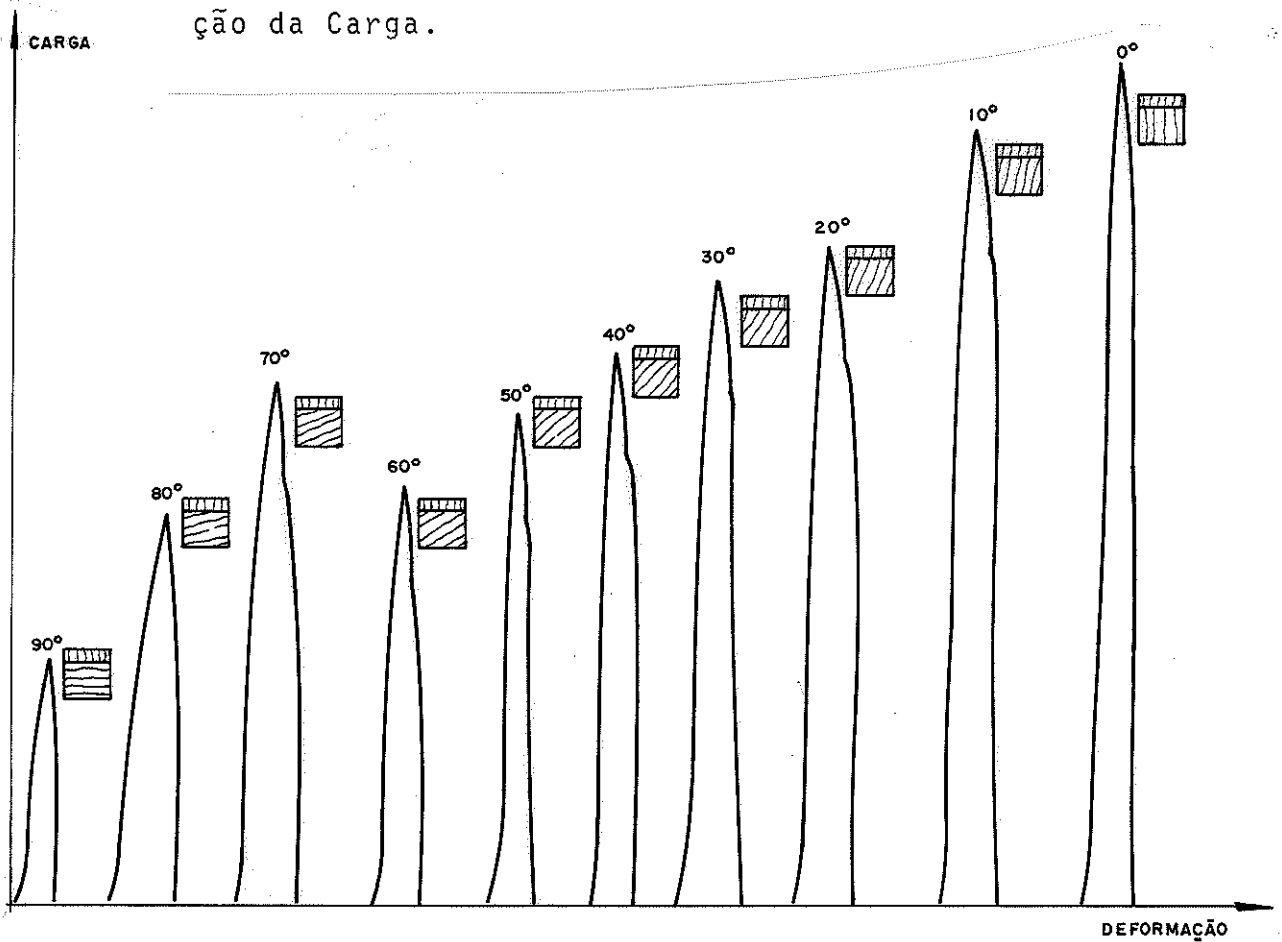


Fig. 4.6 - Gráfico Experimental de uma Série de Amostra Retiradas de uma mesma Peça de Madeira.

Realizando-se os ensaios de cisalhamento, obtiveram-se os resultados indicados na Tabela 4.2. Através dos resultados experimentais, evidencia-se a influência dos ângulos das fibras em relação a direção da carga, na capacidade de carga da ligação, (fig. 4.6).

TABELA 4.2 - Tensão de Cisalhamento de Ligação Colada

	$\rho$	U%	$\tau_{90^\circ}$	$\tau_{80^\circ}$	$\tau_{70^\circ}$	$\tau_{60^\circ}$	$\tau_{50^\circ}$	$\tau_{40^\circ}$	$\tau_{30^\circ}$	$\tau_{20^\circ}$	$\tau_{10^\circ}$	$\tau_{0^\circ}$
C.P. 1	0,74	11,4	58,27	63,23	73,83	71,41	51,83	72,19	86,75	78,52	115,42	119,85
C.P. 2	0,69	12,1	56,60	46,36	52,60	56,62	57,72	91,25	61,61	120,26	106,58	153,44
C.P. 3	0,79	11,80	60,99	72,55	83,57	70,29	100,34	88,90	115,54	116,43	161,08	152,76
C.P. 4	0,75	11,60	76,67	89,16	77,21	108,38	121,90	115,37	131,99	128,58	101,37	133,00
C.P. 5	0,73	11,70	83,48	71,16	47,95	64,70	82,83	62,50	84,65	118,79	48,15	115,95
C.P. 6	0,72	11,80	44,00	71,76	92,21	74,27	88,24	97,95	116,69	121,07	140,83	150,88
$\tau_{exp.}$ médio	0,73	11,73	63,34	69,03	71,22	74,28	90,47	88,02	99,52	113,94	112,24	137,65

$\rho$  - Densidade  $g/cm^3$

U - Umidade em porcentagem

$\tau_\theta$  - Tensão de cisalhamento da ligação colada ( $kgf/cm^2$ )

#### 4.6.1.2 - Validade de Equação de Hankinson

A madeira, sendo um material anisotrópico, sua resistência mecânica varia com o ângulo formado entre as fibras e a direção da carga {40}.

Hankinson, estudando esta variação obteve uma equação relacionando as tensões de compressão inclinada com as tensões de compressão paralela e normal.

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_c \cdot \sigma_n}{\sigma_c \cdot \text{sen}^2 \theta + \sigma_n \cdot \text{cos}^2 \theta}$$

$\sigma_{\theta}$  - Tensão de compressão inclinada

$\sigma_c$  - Tensão de compressão paralela às fibras ( $\theta = 0^\circ$ )

$\sigma_n$  - Tensão de compressão normal às fibras ( $\theta = 90^\circ$ )

Outras características da madeira, como tração paralela e compressão normal apresentam comportamento plenamente compatível com a equação de Hankinson e com o diagrama de Sholten.

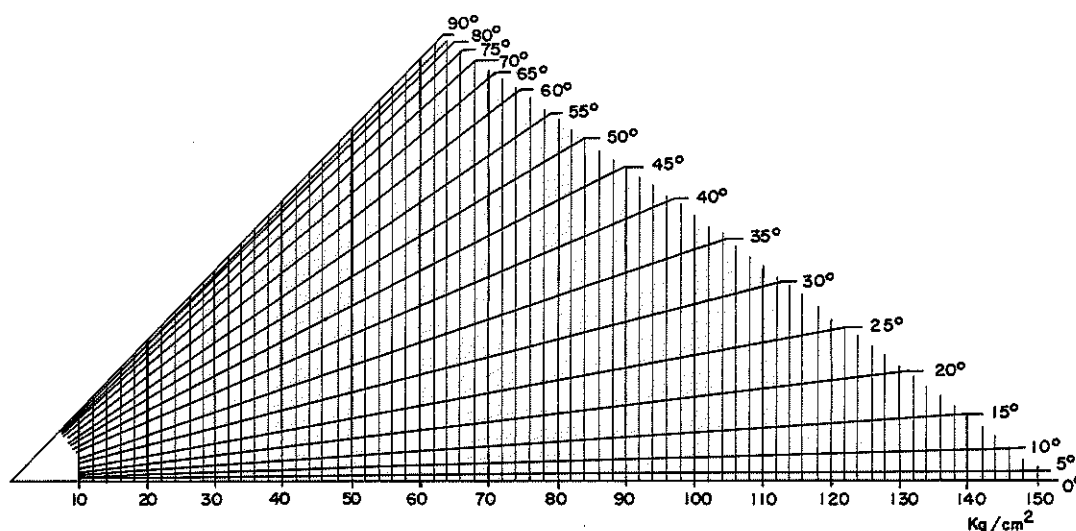


Fig. 4.7 - Diagrama de Sholten

---

{40} - HELLMEISTER, J.C. - Estruturas de Madeira.  
2.ed. 4. reimpr. rev. e corrig. São Carlos, EESC-USP. 1977.  
113p. (Notas de Aula).

Para avaliar a validade da aplicação da equação de Hankinson,  $\sigma_c$  é a média dos resultados obtidos na experimentação para o ângulo  $\theta = 0^\circ$ , e  $\sigma_n$  é a média dos valores obtidos experimentalmente para o ângulo  $\theta = 90^\circ$ . As tensões intermediárias são calculadas através da equação de Hankinson e a seguir comparadas com as obtidas experimentalmente.

A equação de Hankinson foi apresentada graficamente por Sholten.

Para verificar a compatibilidade da utilização da equação de Hankinson no caso do cisalhamento inclinando, fez-se uma análise das diferenças {41} entre as tensões inclinadas obtidas experimentalmente e as obtidas da equação de Hankinson, admitindo-se como conhecidos apenas  $\tau_{00}$ ,  $\tau_{90}$  que substitue  $\sigma_c$  e  $\sigma_n$  respectivamente na expressão de Hankinson e os ângulos de  $10^\circ$  a  $80^\circ$ , tabela 1.4.

TABELA 4.3 - Tensões Inclinadas de Cisalhamento

$\theta$	$\tau_{exp.}$	$\tau_{teór.}$	Diferença D $\tau_{exp} - \tau_{teór.}$	$d = D - \bar{d}$	$d^2$
10°	112,24	132,94	- 20,70	- 18,06	326,12
20°	113,94	121,94	- 7,10	- 4,45	19,88
30°	99,52	106,43	- 6,90	- 4,26	18,14
40°	88,02	92,71	- 4,69	- 2,05	4,20
50°	90,47	81,52	8,95	11,59	134,35
60°	74,28	73,22	1,06	3,70	13,70
70°	71,22	67,60	3,60	6,24	38,95
80°	69,03	64,38	4,65	7,29	53,16
$\Sigma$			- 21,13	0	608,50

A partir dos elementos apresentados na tabela 4.3 pode-se estimar o intervalo da diferença média entre os valores do cisalhamento experimental e o calculado segundo a equação de Hankinson para o cisalhamento inclinado (cisalhamento provocado por uma carga, a qual forma um ângulo com a fibra).

{41} - SNEDECOR, George W. - *Statistical methods: applied to experiments in agriculture and biology*. 5.ed. Ames, Iowa State University, c 1956. 534p.



A diferença média  $\bar{d}$  é:

$$\bar{d} = \frac{\sum D}{n} = - \frac{21,13}{8} = -2,64$$

O desvio padrão  $s_D$  é:

$$s_D = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n-1}} = 9,32$$

O erro padrão  $s_{\bar{d}}$  é:

$$s_{\bar{d}} = \frac{s_D}{\sqrt{n}} = 3,30$$

O valor de  $t$  de Student para obter o intervalo de confiança com 95% de probabilidade  $t_{.05}$ , para  $df = n - 1$  é:  $t_{.05} = 2.365$  e o intervalo da diferença média  $\mu_D$  é:

$$\bar{d} - t_{.05} s_{\bar{d}} \leq \mu_D \leq \bar{d} + t_{.05} s_{\bar{d}}, \text{ sendo:}$$

$$t_{.05} s_{\bar{d}} = 7,8, \text{ tem-se:}$$

$$- 10,44 \leq \mu_D \leq 5,16$$

$$H_0 \rightarrow \frac{\bar{d}}{s_{\bar{d}}} = 0,80 < t_{.05}, \text{ não significativo.}$$

O intervalo de confiança da diferença média contém o zero, portanto estatisticamente a diferença entre  $\tau_{exp.}$  e  $\tau_{teór}$  pode ser nula. A equação de Hankinson pode ser utilizada.

As diferenças entre os valores experimentais e os valores obtidos através da equação de Hankinson (resíduos) são apresentados no diagrama, fig. 4.8.

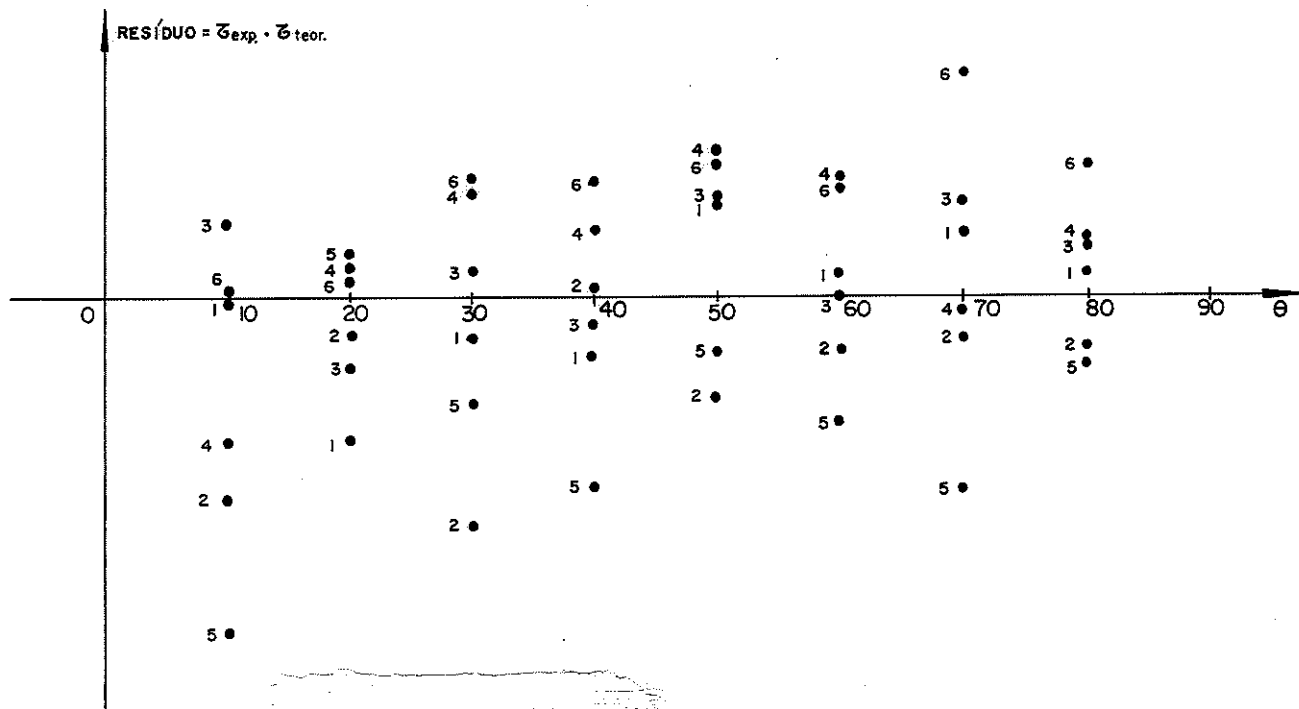


Fig. 48 - Gráfico de Resíduos

Observando-se o gráfico de resíduos x ângulo, verifica-se ser compatível a dispersão dos erros com a hipótese de média nula ou seja a não tendenciosidade da equação de Hankinson e variabilidade constante, confirmando a validade da aplicação da equação de Hankinson para o cisalhamento inclinado.

#### 4.6.2 - Ensaio da Ligação

Nas ligações coladas sujeitas a momento fletor, atuam tensões de cisalhamento em todas as direções do plano de colagem. Admitindo-se a validade do diagrama de Scholten e da equação desenvolvida para o dimensionamento da ligação colada (item 4.4), procura-se determinar qual o ângulo das fibras em relação à direção da carga quando ocorrer a ruptura.

##### 4.6.2.1 - Esquema de Ensaio

Os resultados de uma experimentação são podem ser corretamente interpretados quando o comportamento do esquema experimental for bem conhecido.

O esquema experimental mais frequente tem sido externamente isostático.

O esquema de ensaio adotado, para o ensaio das ligações, figura 4.9 e 4.10, além de representar com fidelidade uma ligação típica de uma viga Vierendel, permite determinar com segurança o valor dos esforços  $M$ ,  $N$ ,  $Q$ , figura 4.9 e os deslocamentos consequentes.

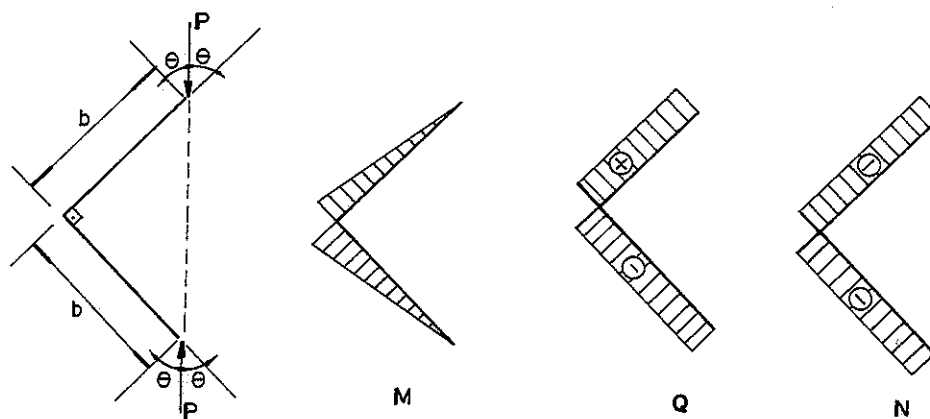


Fig. 4.9 - Esquema de Ensaio da Ligação e Diagrama de Esforços.

Os esforços atuantes são:

$$\text{Momento fletor: } M = P b \cos \theta$$

$$\text{Esforço normal: } N = P \sin \theta$$

$$\text{Esforço cortante: } Q = P \cos \theta$$

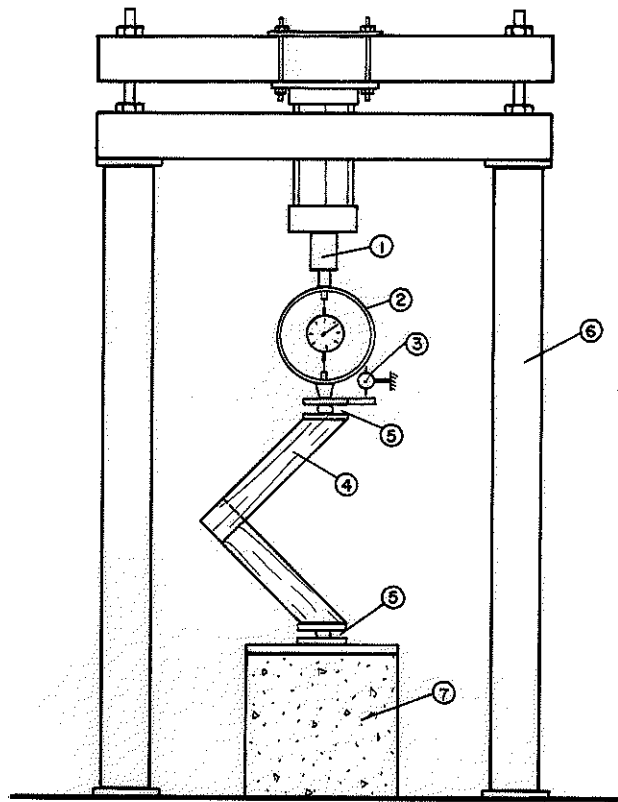


Fig. 4.10 - Esquema Experimental

- 1)- Cilindro hidráulico com capacidade de carga de 4.000 kgf.
- 2)- Anel dinamométrico com capacidade de carga de 2.000 kgf e constante igual a 1,83 kgf/divisão.
- 3)- Relógio comparador com precisão de centésimo de milímetro.
- 4)- Corpo de prova.
- 5)- Junta universal.
- 6)- Estrutura de suporte.
- 7)- Bloco de apoio.

#### 4.6.2.2 - Corpo de Prova

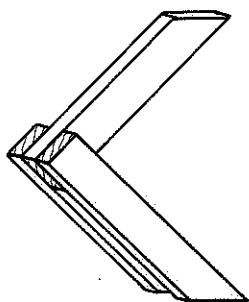
Para os ensaios de ligações coladas adotou-se a mesma espécie de madeira a ser utilizada na viga Vierendeel; Peroba Rosa (*Aspidosperma polymneuron*).

As ligações foram construídas em três séries de ensaios, aumentando-se sucessivamente o número de peças coladas utilizando-se uma peça entre duas fig. 4.11.a ; 4.11.b , duas peças entre três, fig. 4.11.c , três peças entre quatro fig. 4.11.d ou seja, duas, quatro e seis áreas coladas respectivamente. As extremidades das peças foram cortadas segundo um plano a 45° com o eixo longitudinal das tabuas; tornado-se assim possível a realização dos ensaios conforme fig. 4.10.

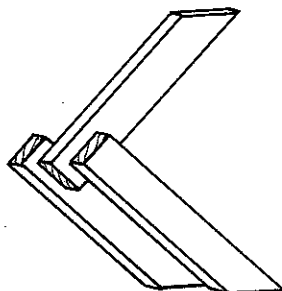
Os comprimentos das peças e as dimensões das áreas coladas, estão indicados na tabela 4.5.

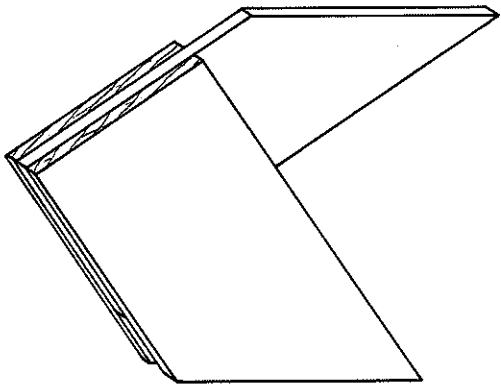
O Adesivo Cascophen, RS-216-M, à base de fenol-resorcinol-formaldeído, foi utilizado obedecendo-se às recomendações do fabricante. A pressão de colagem foi aplicada utilizando-se grampos, sargentos ou parafusos com porcas. Neste caso o ajuste das porcas foi medido com torquímetro, procurando-se atingir a pressão de  $10 \text{ kgf/cm}^2$ , mantida durante 48 horas.

Com a finalidade de se verificar somente o comportamento da ligação e a influência das dimensões das áreas coladas em relação à rigidez, na experimentação verificou-se as dimensões da área colada e o comportamento das barras da ligação (tabela 4.5).

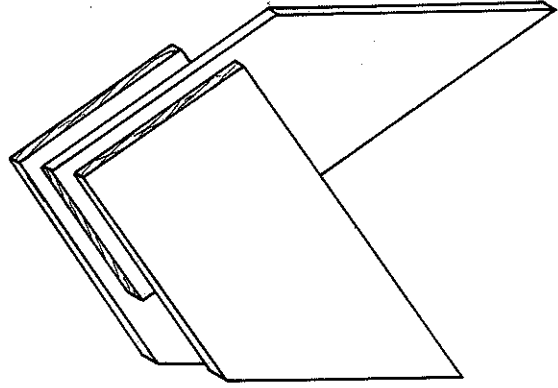


(a)

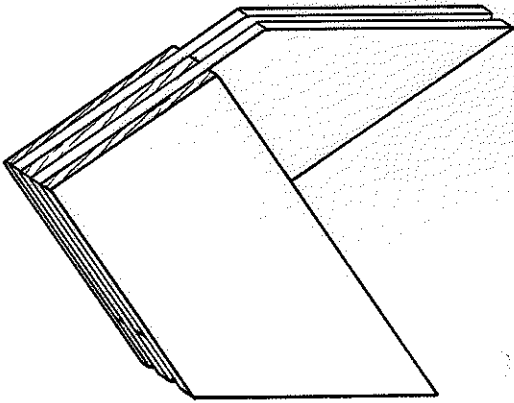




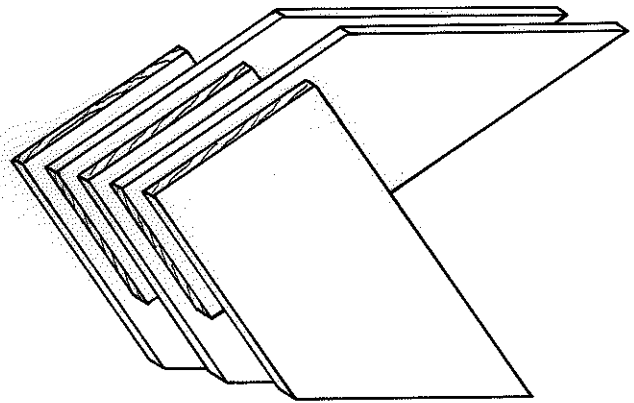
(b)



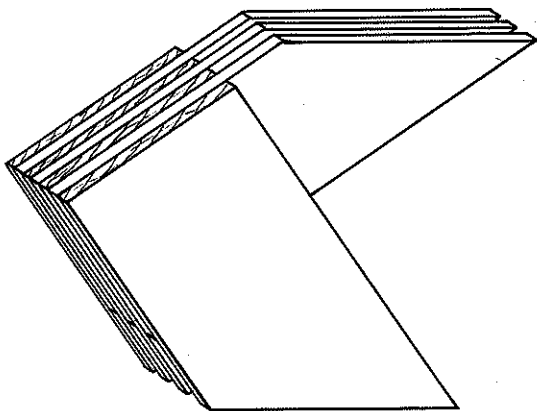
(b)



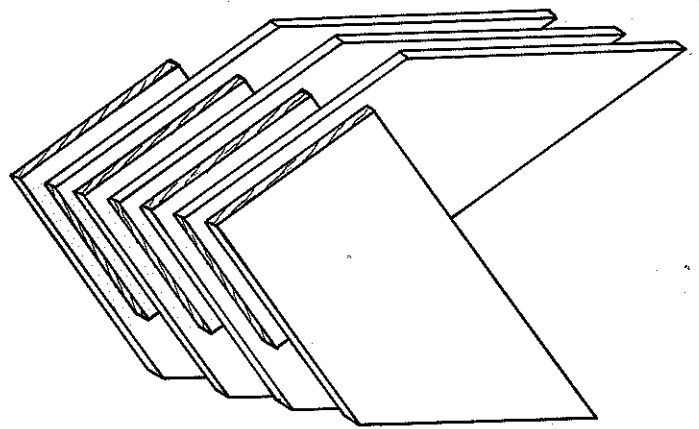
(c)



(c)



(d)



(d)

Fig. 4.11

TABELA 4.4 - Dimensões e Área das Ligações

C.P.	Dimensões (cm)			Seção Colada (cm <sup>2</sup> )	Série de Ensaio	OBS
	A	B	b			
1 : 9	5,5	5,5	30,0	60,50	I	D U A S  Á R E A S  C O L A D A S
10 e 11	5,5	5,5	26,0	60,50	II	
12	5,5	5,5	20,0	60,50		
13	5,5	5,5	18,0	60,50		
14	5,5	5,5	16,0	60,50		
15	5,5	5,5	31,0	60,50		
16 e 17	11,0	4,5	25,0	99,00	III	
18	11,0	5,3	25,0	116,60		
19	11,0	3,0	25,0	66,00		
20	11,0	5,0	25,0	110,00		
21	3,5	14,0	25,0	98,00		
22	5,5	7,4	25,0	81,40		
23	5,5	14,5	25,0	159,50		
24	10,0	3,0	25,0	60,00		
25	4,5	7,5	25,0	67,50		
26	4,5	14,5	25,0	130,50		
27	5,7	7,4	25,0	84,36		
28	3,4	7,5	22,0	51,00		
29	6,0	11,0	25,0	132,00		

Diagrama de uma ligação colada em forma de T. A dimensão A representa a largura da base, B a largura do topo, e b a largura da alma. O diagrama mostra a seção transversal da peça com as dimensões indicadas por linhas tracejadas e setas.

#### 4.6.2.3 - Descrição do Ensaio

Cada corpo de prova foi submetido a uma carga lenta, crescente a partir de zero. Ao atingir a carga de aproximadamente 18 kgf, (dez divisões do anel dinamométrico) fêz-se a leitura do deslocamento relativo dos pontos A e A', utilizando-se relógios comparadores com precisão de centésimo de milímetro, repetindo-se o procedimento a cada novo incremento de carga, até a ruptura. (fig. 4.12).

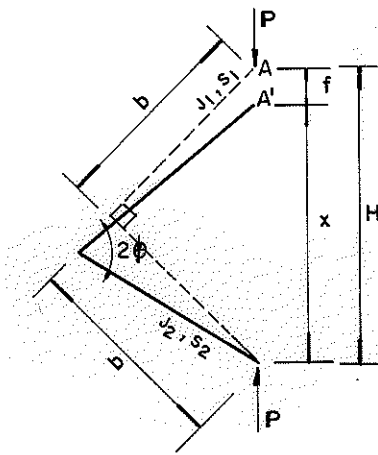


Fig. 4.12 - Ensaio de Ligação Colada.

#### 4.6.2.4 - Interpretação Teórica da Experimentação

Na fig. 4.13 é apresentado o deslocamento vertical do ponto A, admitindo-se inicialmente, um comportamento rígido das barras, para a avaliação da rigidez da ligação.

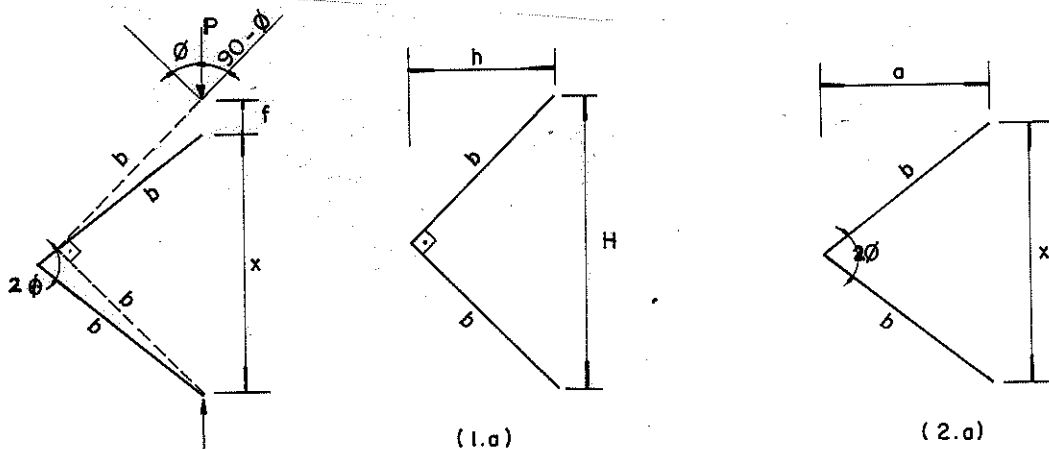


Fig. 4.13 - Giro das Ligações  $\phi$



da fig. 4.13.a, tem-se:

$$H = b \cdot \sqrt{2} \dots\dots\dots (4.7)$$

da fig. 4.13.b, tem-se:

$$\text{sen } \phi = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{f_{\text{giro}}}{2b} \rightarrow f_{\text{giro}} = -2b \text{ sen } \phi + b\sqrt{2} \dots (4.8)$$

Admitindo-se a existência da deformação na barra devido à carga tem-se a fig. 4.14.

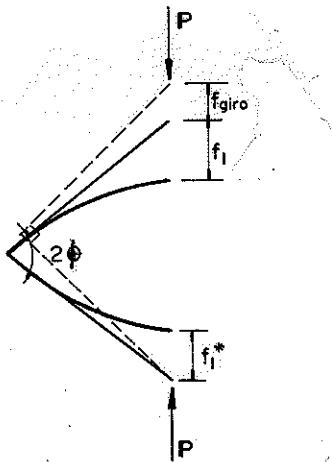


Fig. 4.14 - Ligação Deformada com o Diagrama de Esforços

Aplicando-se o Princípio do Trabalho Virtual, obtêm-se as flechas atuantes nas barras da ligação.

$$f_1 = \int_0^s \frac{M \bar{M}}{E_1 J_1} ds + \int_0^s \frac{N \bar{N}}{E_1 S_1} ds \dots\dots\dots (4.9)$$

$$f_1^* = \int_0^s \frac{M \bar{M}}{E_2 J_2} ds + \int_0^s \frac{N \bar{N}}{E_2 S_2} ds \dots\dots\dots (4.10)$$

Substituindo-se os valores de M,  $\bar{M}$ , N e  $\bar{N}$  nas equações (4.9) e (4.10), obtém-se:

$$f_1 = \frac{P b^3}{3 E_1 \bar{J}_1} \cos^2 \phi + \frac{P b}{S_1 E_1} \sin^2 \phi \dots\dots\dots (4.11)$$

$$f_1^* = \frac{P b^3}{3 E_2 \bar{J}_2} \cos^2 \phi + \frac{P b}{E_2 S_2} \sin^2 \phi \dots\dots\dots (4.12)$$

Da fig. 4.14. conclue-se:

$$f_{\text{exp}} = f_{\text{giro}} + f_1 + f_1^* \dots\dots\dots (4.13)$$

Substituindo-se as equações (4.8), (4.11) e (4.12) na equação (4.13), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \text{Sen}^2 \phi \left\{ \frac{P b}{E} \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} - \frac{b^2}{3 J_1} - \frac{b^2}{3 J_2} \right) \right\} - \text{sen} \phi (2b) + \\ & + \frac{P b^3}{3 E} \left( \frac{1}{\bar{J}_1} + \frac{1}{\bar{J}_2} \right) + b\sqrt{2} - f_{\text{exp}} = 0 \dots\dots\dots (4.14) \end{aligned}$$

Substituindo-se os valores obtidos nas experimentações obtém-se o giro  $\phi$  da ligação.

4.6.2.5 - Desenvolvimento do Ensaio

Na (I) série de ensaio foram ensaiados, como avaliação prévia, 9 corpos de prova, tendo a mesma seção de colagem e mesmo comprimento (b) das peças constituintes.

Através da equação (4.14), obtém-se o valor de giro  $\phi$  da ligação, tabela 4.6 e figura 4.15.

Com os valores de momento e giro traçou-se a curva  $M \times \phi$  de cada ensaio. Esta série, bastante homogênea, de corpos de prova, destinou-se ao estudo da relação  $M \times \phi$  a caracterização prévia e experimental do índice de rigidez do  $\bar{n}$ .

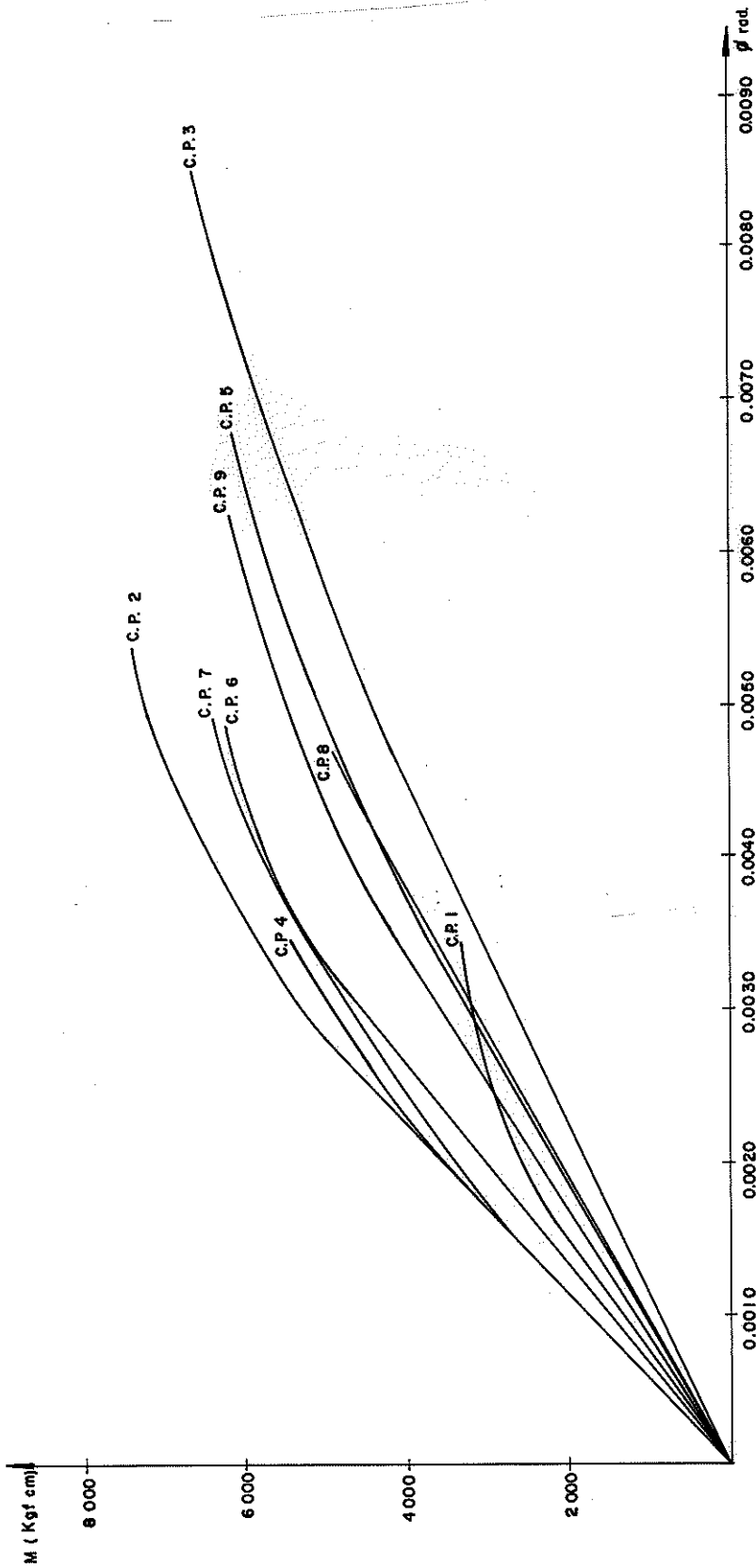


FIG. 4.15 - CURVA  $M \times \phi$  1ª SÉRIE DE ENSAIO

TABELA 4.5 - I série de Ensaio da Ligação Colada

C.P. 1		C.P. 2		C.P. 3	
M	$\phi$	M	$\phi$	M	$\phi$
368,79	0,00029	372,67	0,00015	375,26	0,00045
737,58	0,00056	745,35	0,00032	750,52	0,00092
1106,37	0,00082	1118,02	0,00051	1125,78	0,00136
1475,17	0,00108	1490,62	0,00068	1501,04	0,00176
1843,96	0,00137	1863,37	0,00090	1876,30	0,00213
2212,75	0,00170	2236,04	0,00111	2251,56	0,00257
2581,59	0,00216	2608,71	0,00140	2626,83	0,00294
2950,33	0,00275	2981,39	0,00150	3002,09	0,00340
3819,12	0,00344	3354,06	0,00176	3377,35	0,00375
		3726,74	0,00200	3752,61	0,00420
		4099,41	0,00216	4127,87	0,00471
		4472,08	0,00245	4503,13	0,00521
		4844,76	0,00264	4878,40	0,00574
		5217,43	0,00290	5253,66	0,00638
		5590,10	0,00323	5628,92	0,00698
		5962,79	0,00353	6004,18	0,00790
		6335,45	0,00391	6378,44	0,00932
		6708,12	0,00426	6754,70	0,00943
		7080,80	0,00473		
		7453,47	0,00539		

M (kgf/cm<sup>2</sup>)

$\phi$  (rd)

cont.

TABELA 4.5 - I Série de Ensaio da Ligação Colada

C.P. 4		C.P. 5		C.P. 6	
M	$\phi$	M	$\phi$	M	$\phi$
388,20	0,00029	341,61	0,00035	375,26	0,00020
776,40	0,00049	-	-	750,52	0,00041
1164,60	0,00069	1024,82	0,00092	1125,78	0,00056
1552,80	0,00089	-	-	1501,04	0,00079
1941,00	0,00110	1708,08	0,00148	1876,30	0,00104
2329,20	0,00130	-	-	2251,56	0,00122
2717,40	0,00154	2391,32	0,00215	2626,83	0,00151
3105,60	0,00176	-	-	3002,09	0,00176
3443,80	0,00198	3074,55	0,00281	3377,35	0,00196
3882,00	0,00231	-	-	3752,61	0,00226
4270,20	0,00264	3757,79	0,00358	4127,81	0,00253
4658,40	0,00285	-	-	4503,13	0,00282
5046,66	0,00312	4441,02	0,00439	4878,40	0,00311
5434,80	0,00344	-	-	5253,66	0,00347
		5465,87	0,00580	5628,92	0,00388
		5807,49	0,00627	6004,18	0,00425
		6149,11	0,00678	6379,44	0,00472

M(kgf/cm<sup>2</sup>)

cont.

$\phi$  (rd)

TABELA 4.5 - I Série de Ensaio da Ligação Colada

C.P. 7		C.P. 8		C.P. 9	
M	$\phi$	M	$\phi$	M	$\phi$
0	0	0	0	0	0
370,09	0,00016	284,68	-	280,80	0,00040
740,17	0,00035	569,36	-	561,60	0,00067
1110,26	0,00051	854,04	0	842,40	0,00081
1480,34	0,00052	1138,72	0,00050	1123,20	0,00118
1850,43	0,00097	1423,41	0,00078	1404,00	0,00145
2220,51	0,00120	1708,09	0,00093	1684,80	0,00166
2590,00	0,00148	1992,77	0,00122	1965,54	0,00193
2960,68	0,00176	2277,45	0,00143	2246,39	0,00251
3330,77	0,00202	2562,13	0,00178	2527,19	0,00236
3700,86	0,00227	2846,81	0,00193	3088,79	0,00266
4070,94	0,00257	3131,49	-	3650,39	0,00296
4811,11	0,00277	3416,17	0,00249	3931,19	0,00323
5181,20	0,00312	3700,80	0,00268	4211,99	0,00350
5551,20	0,00344	3985,54	0,00296	4492,79	0,00386
5921,37	0,00372	4270,16	0,00320	4773,59	0,00422
6291,45	0,00435	4554,84	0,00348	5054,39	0,00458
6661,54	0,00487	4839,52	0,00379	5335,19	0,00527
		5124,20	0,00407	5615,10	0,00533
		5408,88	0,00438	5896,78	0,00579
		5693,54	0,00468	6177,55	0,00624

M (kgf/cm<sup>2</sup>)

$\phi$  (rd)

Na (II) s̄erie de ensaio, seis corpos de prova com áreas de colagem iguais, mas comprimento (b) diferentes, foram en-  
saiados com a finalidade de se verificar a influência deste com-  
primento na avalia o do giro, e da capacidade de carga da liga-  
o.

Obtidos os resultados experimentais, tabela 4.6, tra-  
oou-se o diagrama Momento x  $\phi$  de cada corpo de prova, figura  
4.16.

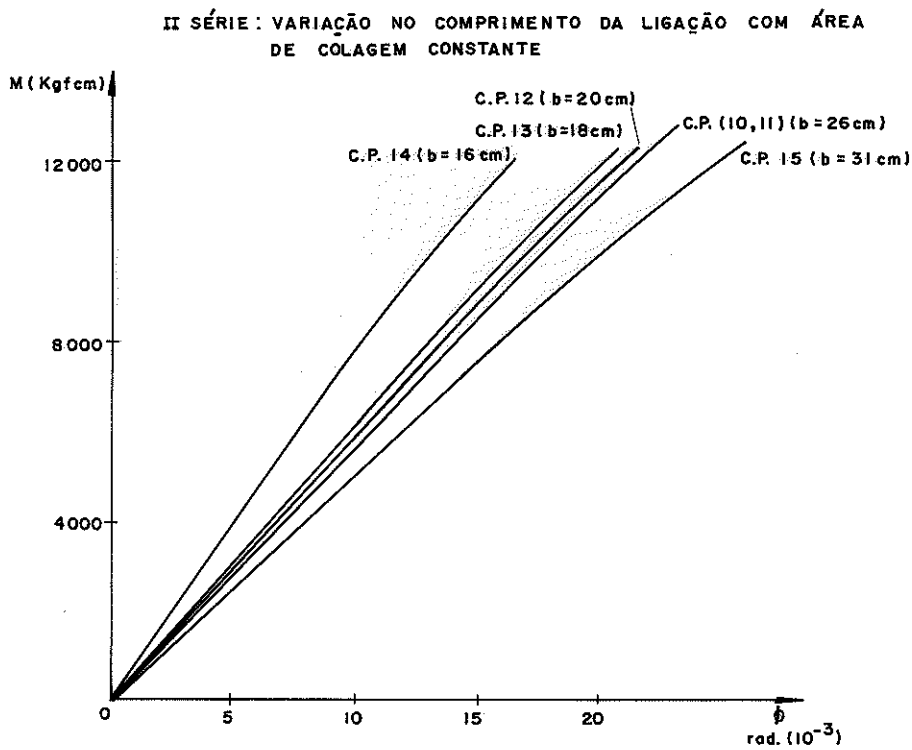


Fig. 4.16 - Influência do Comprimento na rigidez da Liga o

TABELA 4.6 - II Sêrie de Ensaio da Ligação Colada

C.P. 10		C.P. 11		C.P. 12	
M	$\phi$	M	$\phi$	M	$\phi$
0	0	0	0	0	0
673,00	0,00105	673,00	0,0011	518,00	0,00073
1346,00	0,00230	1346,00	0,0023	1135,00	0,00170
2019,00	0,00350	2019,00	0,0037	1553,00	0,00270
2692,00	0,0048	2692,00	0,0049	2070,00	0,00360
3364,00	0,0060	3364,00	0,0060	2588,00	0,00460
4037,00	0,0072	4037,00	0,0073	3106,00	0,00540
4710,00	0,0084	4710,00	0,0084	3623,00	0,00640
5893,00	0,0098	5383,00	0,0097	4141,00	0,00730
6056,00	0,0112	6056,00	0,0110	4658,00	0,00820
6729,00	0,0125	6729,00	0,0122	5176,00	0,00940
7402,00	0,0130	7402,00	0,0123	5694,00	0,00980
8075,00	0,0150	8075,00	0,0151	6211,00	0,01160
8748,00	0,0174	8747,00	0,0172	6729,00	0,01300
				7247,00	0,01380

M (kgf/cm<sup>2</sup>)

cont.

$\phi$  (rd)



TABELA 4.6 - II Sērie de Ensaio da Ligaçāo Colada

C.P. 13		C.P. 14		C.P. 15	
M	$\phi$	M	$\phi$	M	$\phi$
0	0	0	0	0	0
466,00	0,00054	414,00	0,0005	807,00	0,0015
932,00	0,0015	828,00	0,0010	1615,00	0,0031
1398,00	0,0017	1242,00	0,0017	2422,00	0,0048
1863,00	0,0032	1656,00	0,0022	3829,00	0,0064
2329,00	0,0041	2070,00	0,0025	4037,00	0,0080
2795,00	0,0050	2484,00	0,0034	4845,00	0,0090
3261,00	0,0051	2899,00	0,0037	5652,00	0,0115
3727,00	0,0066	3313,00	0,0041	6460,00	0,0134
4193,00	0,0075	3727,00	0,0049	7267,00	0,0154
4658,00	0,0081	4141,00	0,0054	8077,00	0,0175
5124,00	0,0089	4555,00	0,0059		
5590,00	0,0096	4969,00	0,0063		
6056,00	0,0101	5383,00	0,0071		
6522,00	0,0104	5797,00	0,0078		
6988,00	0,0116	6211,00	0,0083		
7454,00	0,0122	6625,00	0,0090		
7920,00	0,0130	7039,00	0,0097		
8386,00	0,0149	7453,00	0,0100		
8852,00	0,0161	7867,00	0,0113		

M (kgf/cm<sup>2</sup>)

$\phi$  (rd)

Aparentemente, o coeficiente angular  $i = \frac{M}{\phi}$ , aumenta com a diminuição de b. Na realidade, aumentando-se o comprimento de b, aumenta-se a flexibilidade do conjunto e diminui-se o comprimento de b, tende-se a alcançar e eliminar a flexibilidade das barras, restando apenas a rigidez da ligação.

Portanto, para se aumentar a rigidez da estrutura de ve-se diminuir o comprimento b.

Na (III) série de ensaio, foram ensaiados 13 corpos de prova de ligação colada, tendo comprimentos aproximadamente iguais, e áreas de seção coladas diferentes.

Com os resultados experimentais, tabela 4.7, traçou-se o diagrama Momento x giro, de cada ligação colada; fig. 4.17.

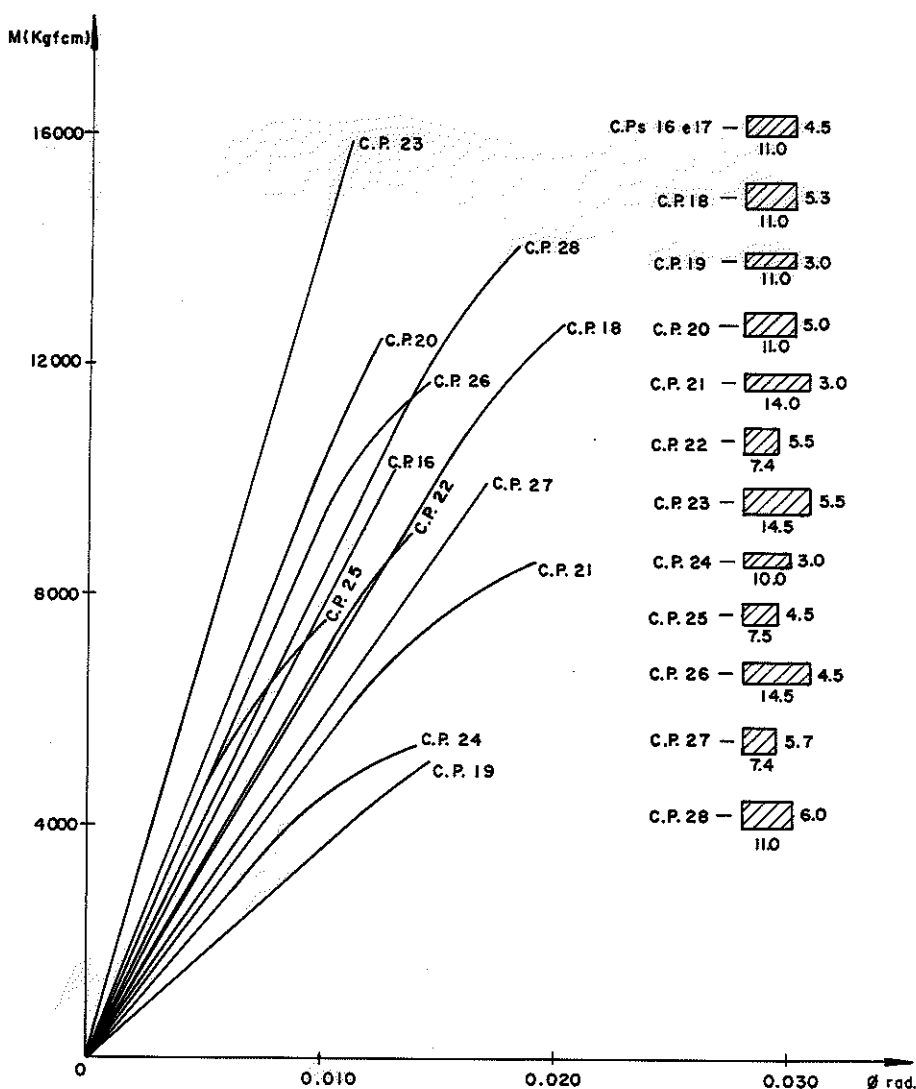


Fig. 4.17 - Curva M x φ - III Série de Ensaio

TABELA 4.7 - III Série de Ensaio da Ligação Colada

C.P. 16		C.P. 17		C.P. 18		C.P. 19	
M	$\phi$	M	$\phi$	M	$\phi$	M	$\phi$
0	0	0	0	0	0	0	0
727,17	0,0017	730,53	0,0001	722,13	0,0001	708,70	0,0010
1454,34	0,0026	1461,06	0,0002	1444,26	0,0008	1417,40	0,0026
2185,51	0,0035	2191,59	--	2166,39	0,0018	2126,10	0,0037
2908,68	0,0044	2922,12	0,0030	2888,52	0,0029	2834,80	0,0048
3635,85	0,0052	3652,65	0,0046	3610,65	0,0041	3543,50	0,0058
4363,03	0,0061	4383,18	0,0056	4332,78	0,0053	4252,20	0,0069
5090,20	0,0071	5113,71	0,0068	5054,91	0,0064	4960,90	0,0078
5817,37	0,0079	5844,24	0,0081	5777,04	0,0080	5669,60	0,0086
6544,54	0,0087	6574,77	0,0094			6378,30	0,0096
7271,71	0,0095	7305,30	0,0110			7087,00	0,0105
7998,88	0,0103	8035,83	0,0126			7795,70	0,0116
8726,05	0,0112	8766,36	0,0147			8504,40	0,0126
9453,22	0,0122	9496,89	0,0171			9213,10	0,0137
10180,39	0,0132	10227,42	0,0200			9921,80	0,0149
		10957,95	0,0250			10630,50	0,0159
						11339,20	0,0174
						12047,90	0,0187
						12756,60	0,0205

cont.

M (kgf/cm<sup>2</sup>)

$\phi$  (rd)

TABELA 4.7 - III Série de Ensaio da Ligação Colada

C.P. 20		C.P. 21		C.P. 22		C.P. 23	
M	$\phi$	M	$\phi$	M	$\phi$	M	$\phi$
0	0	0	0	0	0	0	0
732,21	0,0020	735,57	0,0010	717,43	0,0014	597,86	0,0011
1464,42	0,0040	1471,14	0,0016	1434,86	0,0027	1159,72	0,0019
2196,63	0,0060	2206,70	0,0023	2152,29	0,0040	1739,58	0,0029
2928,84	0,0080	2942,27	0,0030	2869,72	0,0054	2319,44	0,0036
3661,05	0,0100	3677,84	0,0038	3587,15	0,0066	2899,30	0,0044
4393,26	0,0122	4413,41	0,0045	4304,58	0,0079	3479,16	0,0052
5125,47	0,0146	5148,97	0,0052	5022,01	-	4059,02	0,0060
		5884,54	0,0058	5739,44	0,0105	4638,88	0,0069
		6620,11	0,0060	6456,87	0,0121	5218,74	0,0074
		7355,68	0,0073	7174,30	0,0138	5798,60	0,0084
		8091,25	0,0080	7891,73	0,0158	6378,46	0,0093
		8826,81	0,0086	8609,16	0,0192	6958,32	0,0101
		9562,88	0,0093			7538,18	0,0110
		10297,95	0,0101			8118,04	0,0120
		11033,52	0,0109			8697,90	0,0131
		11769,12	0,0118				
		12504,69	0,0126				
		13240,26	0,0138				

M (kgf/cm<sup>2</sup>)

$\phi$  (rd)

cont.

TABELA 4.7 - III Sêrie de Ensaio da Ligação Colada

C.P. 24		C.P. 25		C.P. 26	
M	$\phi$	M	$\phi$	M	$\phi$
0	0	0	0	0	0
665,03	0,0025	611,29	0,0011	614,50	0,0000
1330,06	0,0034	1222,58	0,0026	1229,30	0,0008
1995,12	0,0041	1833,87	0,0039	1843,95	0,0015
2660,12	0,0047	2445,16	0,0048	2458,60	0,0023
3325,15	0,0052	3056,45	0,0066	3073,25	0,0031
3990,18	0,0058	3667,74	0,0078	3687,90	0,0038
4655,21	0,0063	4279,03	0,0093	4302,55	0,0045
5320,24	0,0069	4890,32	0,0106	4917,20	0,0054
5985,27	0,0072	5501,11	0,0151	5531,85	0,0058
6650,30	0,0077			6141,50	0,0070
7315,33	0,0082			6761,15	0,0080
7980,36	0,0086			7375,80	0,0095
8645,39	0,0091				
9310,42	0,0095				
9975,45	0,0099				
10640,48	0,0104				
11305,51	0,0109				
11970,54	0,0115				
12635,57	0,0118				
13300,60	0,0123				
13965,63	0,0128				
14630,66	0,0133				
15295,69	0,0138				
15960,72	0,0144				

M (kgf/cm<sup>2</sup>)

$\phi$  (rd)

cont.

TABELA 4.7 - III Série de Ensaio da Ligação Colada

C.P. 27		C.P. 28		C.P. 29	
M	$\phi$	M	$\phi$	M	$\phi$
0	0	0	0	0	0
688,54	0,0010	777,21	0,0013	503,37	0,0007
1377,08	0,0020	1554,42	0,0028	1006,71	0,0013
2065,62	0,0027	2331,63	0,0043	1510,11	0,0019
2754,16	0,0034	3108,84	0,0057	2013,48	0,0025
3442,70	0,0041	3886,05	0,0070	2516,85	0,0032
4131,24	0,0047	4663,26	0,0084	3020,22	0,0037
4819,78	0,0054	5440,47	0,0096	3523,59	0,0043
5508,32	0,0060	6217,68	0,0108	4026,96	0,0048
6196,86	0,0068	6994,89	0,0120	4530,33	0,0053
6885,40	0,0075	7772,10	0,0134	5033,70	0,0059
7573,94	0,0082	8549,31	0,0147	5537,07	0,0065
8262,48	0,0089	9325,52	0,0160	6040,44	0,0071
8951,02	0,0097	10103,73	0,0170	6543,81	0,0077
9639,56	0,0105			7047,18	0,0083
10328,10	0,0114			7550,55	0,0088
11016,64	0,0123			8053,92	0,0094
11705,18	0,0148			8557,29	0,0101
				9060,66	0,0108
				9564,03	0,0115
				10067,40	0,0120
				10570,77	0,0127
				11064,14	0,0134
				11577,51	0,0142
				12080,88	0,0149

M (kgf/cm<sup>2</sup>)

$\phi$  (rd)

As curvas da figura 4.17, evidenciam a influência da área de colagem na rigidez da ligação. Quanto maior a área, maior a rigidez, entretanto não se pretende assumir esta situação como definitiva por se julgar necessário uma renovada configuração experimental.

Nesta série de ensaio, foi possível constatar também a influência da variação das dimensões (A x B) das área coladas.

De fato, comparando-se os resultados obtidos para diferentes valores (A x B) da seção de colagem foi possível construir o diagrama na fig. 4.18.

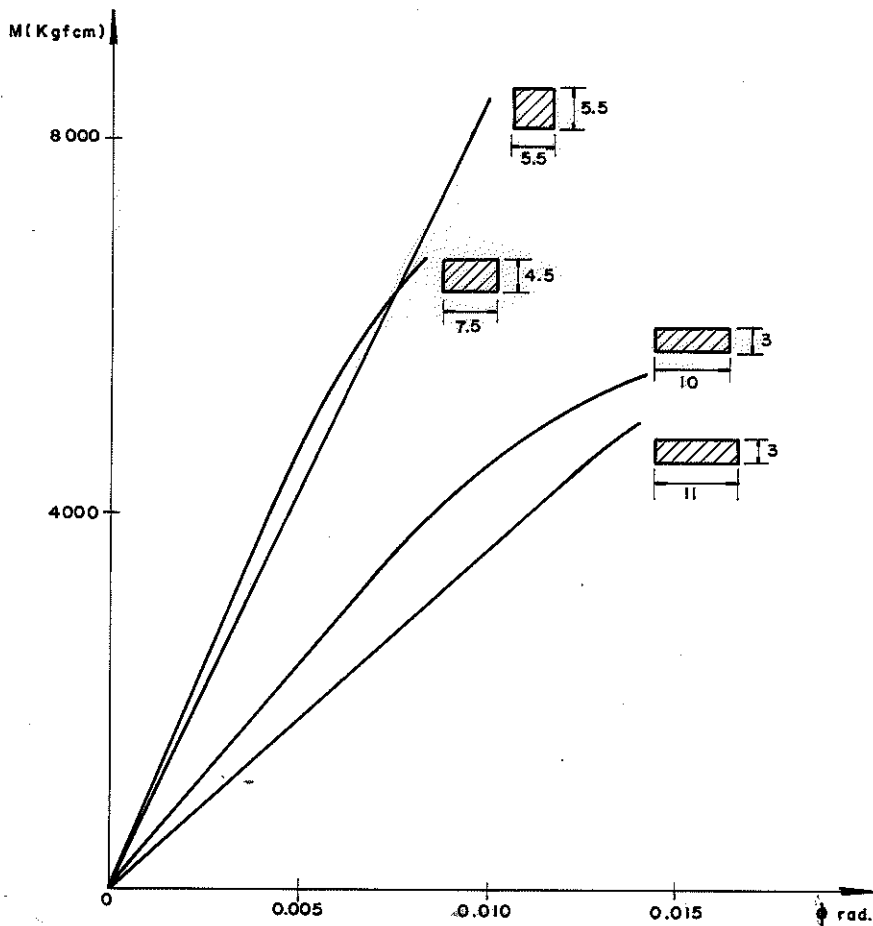


Fig. 4.18 - Influência da Variação das Dimensões da Área de Colagem na Rigidez

As curvas da figura 4.18, evidenciam o aumento de rigidez da ligação para as seções com dimensões iguais e a redução da rigidez quando as dimensões da seção colada são diferentes.

Nas três séries de ensaios já apresentadas foi mencionada a avaliação da capacidade de carga da ligação.

Na tabela 4.9, são apresentados os resultados obtidos utilizando-se os dados experimentais e as equações (4.1), (4.2), (4.5) e (4.6).

TABELA 4.8 - Tensão Máxima de Cisalhamento no Regime Elástico, na Seção Colada.

SÉRIE	Nº C.P.	Área Colada (cm <sup>2</sup> )	Esforços Atuantes		Tensões Atuantes (kgf/cm <sup>2</sup> )			
			M	N = Q	H <sub>n</sub>	H <sub>q</sub>	H <sub>m</sub>	H <sub>máx</sub>
I	1	30,25	1100	37,80	1,37	1,37	32,13	68,14
	2	30,25	2340	81,25	2,68	2,68	59,67	63,47
	3	30,25	2080	71,72	2,37	2,37	53,04	56,39
	4	30,25	1920	60,00	1,98	1,98	48,96	51,76
	5	30,25	1800	58,33	1,90	1,90	39,27	41,96
	6	30,25	1700	58,62	1,94	1,94	43,35	46,09
	7	30,25	2500	102,86	3,40	3,40	73,44	78,25
	8	30,25	1900	90,41	2,99	2,99	48,45	52,68
	9	30,25	2100	100,00	3,30	3,30	53,55	58,22
II	10	30,25	2146	82,52	2,73	2,73	54,74	58,58
	11	30,25	2146	82,52	2,73	2,73	54,72	58,58
	12	30,25	2255	112,73	3,73	3,73	57,50	62,77
	13	30,25	2036	113,13	3,74	3,74	51,92	57,21
	14	30,25	2473	154,55	5,11	5,11	63,06	70,29
	15	30,25	2436	78,59	2,60	2,60	62,12	65,59
III	16	49,50	5090,20	212,09	4,28	4,28	51,91	57,55
	17	49,50	4333,18	182,63	3,69	3,69	44,70	49,56
	18	58,30	5315,25	217,71	3,73	3,73	44,80	49,80
	19	33,00	2888,52	120,36	3,65	3,65	46,06	50,60
	20	55,00	5148,98	214,54	3,90	3,90	46,49	51,69
	21	49,00	3228,44	134,52	2,75	2,75	27,39	31,06
	22	40,70	3800,00	152,00	3,73	3,73	60,66	65,99
	23	79,75	7600,00	304,00	3,81	3,81	36,87	41,84
	24	30,00	2080,00	83,20	2,52	2,52	33,17	36,31
	25	37,50	2520,00	100,80	2,99	2,99	51,22	55,33
	26	65,25	5324,05	221,84	3,40	3,40	32,25	36,57
	27	42,18	4662,76	194,28	4,61	4,61	71,01	77,47
	28	66,00	6287,13	261,96	3,97	3,97	45,62	51,02

M = kgfcm

N = Q = kgf



A tensão máxima de cisalhamento nas ligações coladas submetidas a momento fletor não pode corresponder a tensão convencional de cisalhamento paralelo às fibras, nem a tensão de cisalhamento normal às fibras, mas sim, a uma tensão de cisalhamento inclinado.

Poder-se-ia portanto admitir a viabilidade da existência de um ângulo  $\theta$ , para comparação da resistência da ligação colada submetida a momento fletor com a resistência ao cisalhamento devido à força cortante em função da inclinação das fibras, segundo Hankinson ou Sholten.

Na figura 4.7 são apresentadas as tensões de ruptura para  $\tau \times \theta$ , para o cisalhamento do corpo de prova de Peroba Rosa, colados com Cascophen.

No ensaio de cisalhamento não se faz usualmente o traçado da curva carga x deformação, pois a ruptura típica por cisalhamento tem caráter frágil. Não se tem assim, possibilidade de definir módulo de elasticidade nem de determinar a tensão limite de proporcionalidade.

Entretanto, na série de ensaios de cisalhamento simples na ligação colada, (item 4.6.1), realizada para o desenvolvimento deste estudo, utilizou-se um dispositivo traçador de diagramas da máquina - universal de ensaios Amsler, de 25 t, obtendo-se o diagrama carga x deformação para todos os corpos de prova. fig. 4.6. estes diagramas foram utilizados para determinação dos limites de proporcionalidade.

O exame dos resultados obtidos, permitiu a determinação de uma constante ( $f_c$ ) relacionando as tensões de ruptura com as tensões no limite de proporcionalidade.

Este coeficiente apresentou comportamento diferente para cada inclinação  $\theta$ . Utilizando-se estes coeficientes fez-se a determinação dos valores das tensões limite de proporcionalidade (tabela 4.10).

Para verificar a compatibilidade da utilização da Equação de Hankinson, no caso de cisalhamento inclinado, com tensões no limite de proporcionalidade, fez-se uma análise das diferenças entre as duas tensões: teórica (Hankinson) e experimental (no limite de proporcionalidade).

TABELA 4.8

ÂNGULO	f.c.	Tensão Experimental		$\tau_{teór.}$	Diferença $D = \tau_{LP} - \tau_{tór.}$	$d = D - \bar{d}$	$d^2$
		$\tau_{rup.}$	$\tau_{LP}$				
0º	0,91	137,65	125,26	137,65	-	-	-
10º	0,91	112,24	102,14	117,50	- 15,36	- 17,25	297,61
20º	0,87	113,94	99,13	99,72	- 0,59	- 2,48	6,16
30º	0,79	99,52	78,62	80,95	- 2,33	- 4,22	17,82
40º	0,78	88,02	68,66	65,66	3,00	1,11	1,23
50º	0,76	50,47	68,76	54,82	13,94	12,05	145,17
60º	0,71	74,28	52,69	47,41	5,28	3,39	11,48
70º	0,68	71,22	48,43	42,70	5,73	3,84	14,74
80º	0,66	69,03	45,56	40,10	5,46	3,57	12,74
90º	0,62	63,34	39,27	63,34	-	-	-
$\Sigma$					15,13	0	506,94

A diferença média  $\bar{d}$  é:

$$\bar{d} = \frac{\Sigma D}{n} = 1,89$$

O desvio padrão  $s_D$  é:

$$s_D = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n - 1}} = 8,51$$

O erro padrão  $s_{\bar{d}}$  é:

$$s_{\bar{d}} = \frac{s_D}{\sqrt{n}} = 3,00$$

O valor de  $t$  de Student, para obter um intervalo de confiança com 95% de probabilidade,  $t_{.05}$ , para  $d_f = n - 1$  e  $t_{.05} = 2,365$ .

$$\bar{d} \cdot t_{.05} \cdot S_{\bar{d}} \leq \mu_D < \bar{d} + t_{.05} \cdot S_{\bar{d}}$$

$$H_0 \neq t = 1,59 < t_{.05}, \text{ não significativos}$$

Portanto, calculando-se as tensões no limite de proporcionalidade, tendo  $\tau_{00}$ ,  $\tau_{90}$  e a equação de Hankinson, foi possível admitir a validade da aplicação da mesma no limite de proporcionalidade.

Na figura 4.19, são apresentadas as tensões de cisalhamento, de ruptura (reta O'B) e as tensões no limite de proporcionalidade (reta OA), para os corpos de prova de Peroba Rosa, em função do ângulo das fibras.

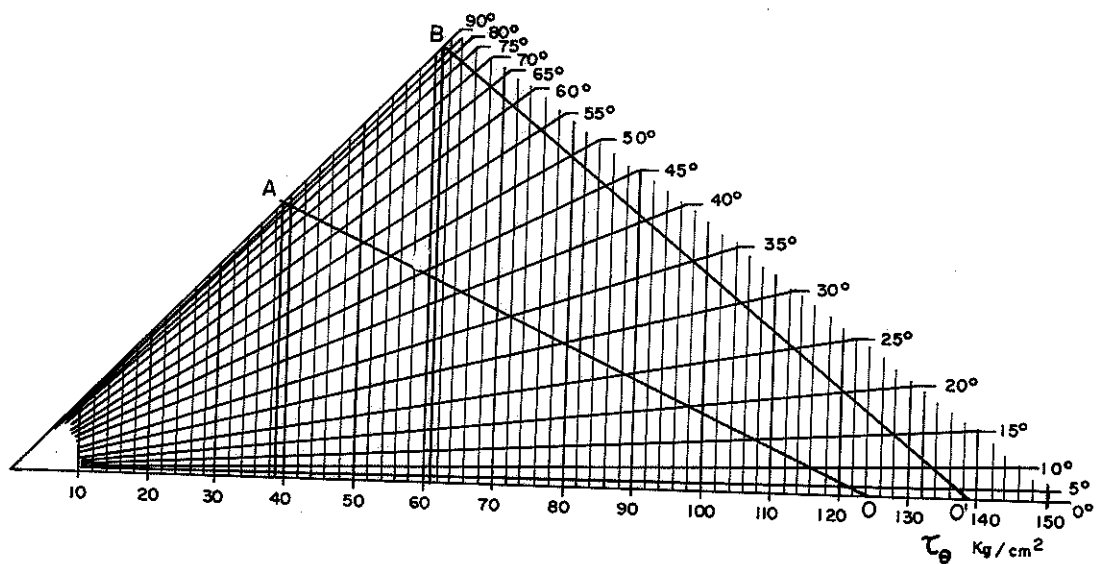


Fig. 4.19 - Diagrama de Sholten

Na ligação ensaiada, a ruptura ocorrerá por cisalhamento, na direção da máxima tensão de cisalhamento atuante ( $H_{max}$ ) dada por:

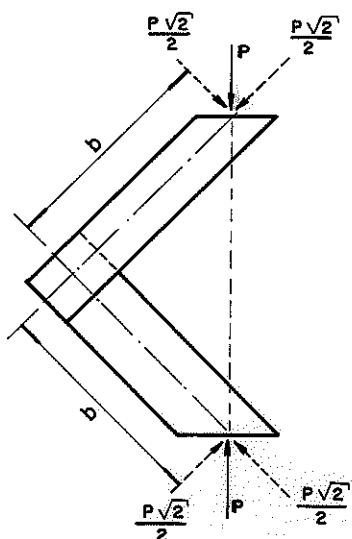


FIG. 4.20 - LIGAÇÃO COLADA

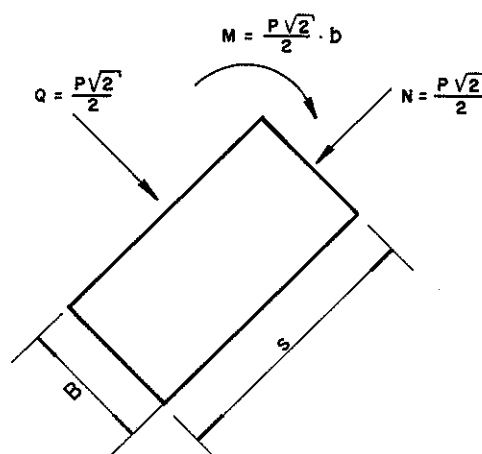


FIG. 4.21 - ESFORÇOS ATUANTES NA SEÇÃO COLADA

As tensões cisalhantes provocadas pelo momento fletor atuante na ligação ( $H_m$ ) são visivelmente afetadas pelo comprimento da barra ( $b$ ), ao passo que as tensões cisalhantes provocadas pelo esforço normal ( $H_n$ ) e as provocadas pelo esforço cortante ( $H_q$ ) não o são.

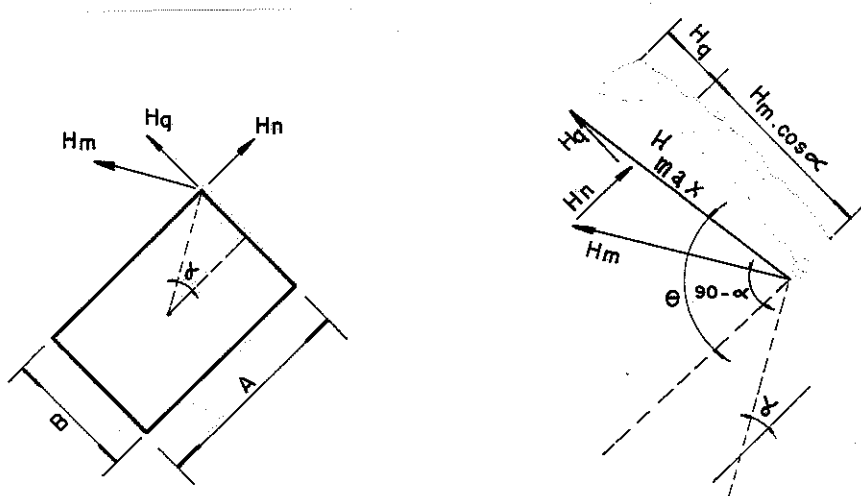


FIG. 4.22 - TENSÕES ATUANTES NA SEÇÃO COLADA

Da figura 4.22, tem-se:

$$\text{sen } \theta = \frac{H_q + H_m \cdot \cos \alpha}{H_{\max}} \dots\dots\dots (4.15)$$

A tensão máxima cisalhante ( $H_{\max}$ ) ocorre na direção do ângulo  $\theta$ , devendo ser comparada à tensão resistente ao cisalhamento nesta direção, ou na sua complementar, pois a direção da  $H_{\max}$ , forma um ângulo  $\theta$  com as fibras de uma das peças da ligação e  $(90 - \theta)$  com a outra peça.

Com os valores de  $\theta$  teóricos, em função de  $H_{\max}$ ,  $H_q$  e  $H_m$ , obtidos da equação (4.15), determinou-se no diagrama de Sholten a tensão de cisalhamento  $\tau_{\theta}$  no limite de proporcionalidade, comparando-se a tensão de cisalhamento das ligações submetidas a momento fletor  $H_{\max}$  com a tensão de cisalhamento  $\tau_{\theta}$ , fazendo a seguir a análise das diferenças, tabela 4.9.

TABELA 4.9 - Análise de Diferença entre Cisalhamento na Ligação,  $H_{máx}$ , e cisalhamento  $\tau_e$

C.P.	SEÇÃO		$H_{máx}$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	$\tau_{teór.}$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	DIFERENÇA	D - $\bar{d}$	d <sup>2</sup>
	(cm)	(cm)			D = $H_{máx} - \tau_e$		
1	5,5	5,0	34,00	57,00	- 23,00	- 24,89	619,51
2	5,5	5,5	63,46	59,00	4,46	2,57	6,61
3	5,5	5,5	56,39	59,00	- 2,61	- 4,50	20,23
4	5,5	5,5	51,76	59,00	- 7,24	- 9,13	83,32
5	5,5	5,5	41,96	59,00	- 17,04	- 18,93	358,27
6	5,5	5,5	46,09	59,00	- 12,91	- 14,80	218,98
7	5,5	5,5	78,25	59,00	19,25	17,36	301,44
8	5,5	5,5	52,68	59,00	- 6,63	- 8,52	72,56
9	5,5	5,5	58,23	59,00	- 0,77	- 2,66	7,07
10	5,5	5,5	58,58	59,00	- 0,42	- 2,31	5,33
11	5,5	5,5	58,58	59,00	- 0,42	- 2,31	5,33
12	5,5	5,5	62,77	59,00	3,77	1,88	3,54
13	5,5	5,5	57,21	59,00	- 1,79	- 3,68	13,53
14	5,5	5,5	70,29	59,00	11,29	9,40	88,40
15	5,5	5,5	65,59	59,00	6,59	4,70	22,11
16	11,0	4,5	57,55	44,00	13,55	11,66	136,00
17	11,0	4,5	49,56	44,00	5,56	3,67	13,48
18	11,0	5,3	49,80	46,00	3,80	1,91	3,66
19	11,0	3,0	50,60	42,00	8,60	6,71	45,05
20	11,0	5,0	51,69	46,50	5,19	3,30	10,90
21	14,0	3,0	-	-	-	-	-
22	7,4	5,5	65,99	52,50	13,49	11,60	134,60
23	14,5	5,5	41,84	46,00	- 4,52	- 6,41	41,06
24	11,0	3,0	-	-	-	-	-
25	7,5	4,5	55,33	47,00	8,33	6,44	41,50
26	14,5	4,5	36,57	42,00	- 5,43	- 7,32	53,55
27	7,4	5,7	77,47	53,50	23,97	22,08	487,61
28	11,0	6,0	51,02	47,00	4,02	2,13	4,55

Para  $n = 26$  e  $\Sigma D = 49,14$  tem-se:

$$\bar{d} = \frac{\Sigma D}{n} = 1,89$$

Para  $\Sigma d^2 = 2798,10$ , o desvio padrão  $\bar{s}_d$  é:

$$s_d = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n-1}} = 10,58$$

O erro padrão  $\bar{s}$  é:

$$s_{\bar{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{n}} = 2,07$$

O valor de  $t$  de Student para obter o intervalo da diferença média ao nível 95% de probabilidade,  $t_{.05}$  para  $d_f = n - 1$  é:

$t_{.05} = 2,06$  e o intervalo da diferença média  $\mu_D$  é:

$$\bar{d} - t_{.05} s_{\bar{d}} \leq \mu_D \leq \bar{d} + t_{.05} \cdot s_{\bar{d}}, \text{ sendo}$$

$$t_{.05} \cdot s_{\bar{d}} = 4,27, \text{ tem-se:}$$

$$- 2,38 \leq \mu_D \leq 6,16$$

$$H_0 \rightarrow t = 1,0952 < t_{.05}, \text{ não significativa}$$

O intervalo de confiança da diferença média contém o zero, portanto estatisticamente a diferença entre  $H_{\max}$  e as tensões de cisalhamento inclinado, no limite de proporcionalidade, podem ser nula. Logo a aplicação das equações (4.1), (4.2), (4.5) e (4.6), para o cálculo das tensões na ligação colada, sujeita a esforços de momento fletor, cortante e normal é válida para o dimensionamento destas ligações.

Sabendo-se que o índice de rigidez é definido pela relação  $M/\phi$ , sendo  $M$  o momento atuante na ligação e  $\phi$  o giro da ligação.

De acordo com a equação (4.5) a tensão de cisalhamento ( $H_m$ ), varia linearmente com o número de seções coladas.

$$H_m = \frac{6m \sqrt{A^2 + B^2}}{A^3 B + B^3 A}, \text{ sendo } (m) \text{ o momento atuante em}$$

cada área colada, dada por:

$m = \frac{M}{n}$ , sendo (n) o número de áreas coladas. Portanto:

$$H_m = \frac{6 M (\sqrt{A^2 + B^2})}{n(A^3 B + B^3 A)}, \text{ e substituindo-se na equação}$$

do índice de rigidez, tem-se:

$$i = \frac{M}{\phi} = n \left( \frac{H_m (A^3 B + B^3 A)}{6 \phi (\sqrt{A^2 + B^2})} \right) \dots \dots \dots (4.16)$$

Desta forma, para ligações coladas de mesmas dimensões, a rigidez da ligação aumenta com o número de áreas coladas.

Uma quarta série de ensaio foi realizada para evidenciar a contribuição do número de áreas coladas na rigidez da ligação.

Não se fez uma análise estatística dos resultados por se julgar incompletas as informações obtidas. Entretanto, estes resultados indicaram satisfatoriamente a validade da equação (4.16) daí resultando projetar-se a ligação das peças da viga Viendeel em 6 (seis) áreas coladas.

Em aproximação preliminar os montantes de viga a ensaiar seriam constituídos por 2 (duas) peças 6 x 18 cm e quatro áreas coladas. Na solução adotada, foram utilizadas nos montantes 4 (peças) de 3 x 18 cm e 6 (seis) áreas coladas.

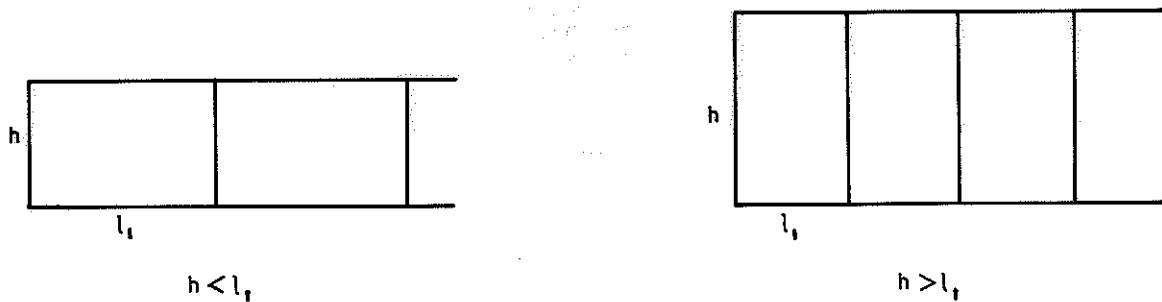


## 5 - DIMENSIONAMENTO DA VIGA VIERENDEEL

### 5.1 - Geometria da Viga

Dois modelos experimentais foram ensaiados anteriormente. Um tendo altura dos montantes menor do que a distância entre os mesmos e outro com a altura maior do que a distância entre os montantes.

Os dois modelos apresentaram grande deformabilidade, dando uma evidência inicial da possível irrelevância da diferença entre as dimensões consideradas e da provável importância da obtenção da maior rigidez possível nas ligações.



Embora não se tenha procurado alcançar conclusão definitiva nos dois ensaios, restou a impressão da viabilidade da realização do ensaio utilizando painéis quadrados:  $l_1 = h$ .

Adotou-se a seguir para o planejamento do ensaio da viga Vierendeel o comprimento 20 (vinte) m, daí resultando como esquema geométrico da viga, 10 (dez) painéis de 2 x 2 m.

Utilizando-se em caráter especulativo o programa Stress, calculou-se a flecha para diferentes alturas da viga, mantidas as demais características, os dados básicos desta análise são apresentados no diagrama, figura 5.1.

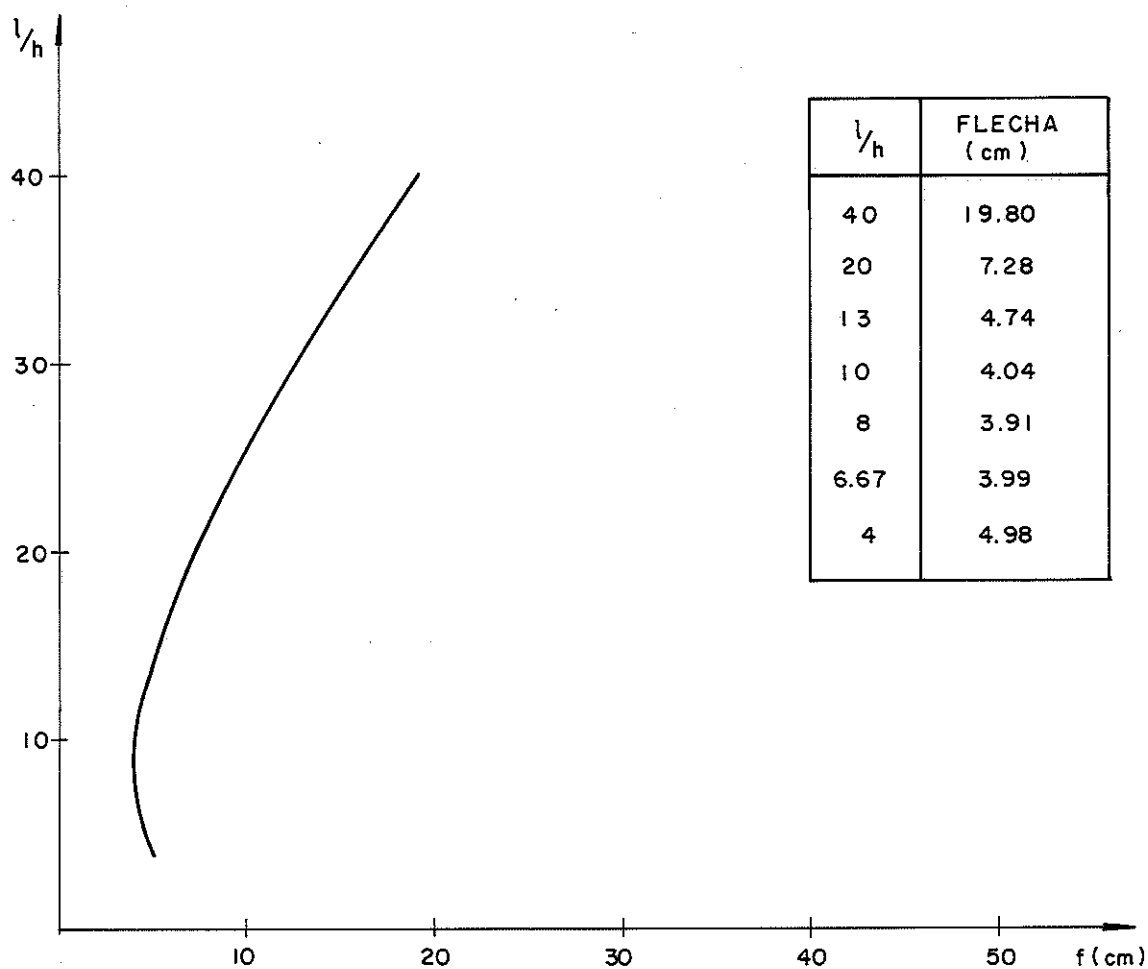


Fig. 5.1 - Gráfico da Flecha x  $l/h$

Estes resultados evidenciam a conveniência da adoção de valores  $l/h$  menores, para a obtenção de flechas pequenas.

Segundo a NB-11 {42} a flecha admissível para as estruturas de madeira é:

$$\bar{f} = \frac{l}{350}$$

Sendo  $l$ , o vão livre da viga.

{42} - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - Cálculo e Execução de Estruturas de Madeira - NB-11. Rio de Janeiro, ABNT, 1951.

Adotando-se a relação  $l/h = 10$ , para os 20 (vinte) m de vão livre, a altura de 2 (dois) m, dá origem a 10 (dez) painéis quadrados, e a ocorrência teórica de uma flecha central pouco menor do que a admissível.

Para a relação  $l/h = 8$  e altura de 2,5 m, a viga de 20 m teria 8 painéis quadrados. Entretanto é mais adequado o emprego de peças mais curtas, por isto, adotou-se a relação  $\frac{l}{h} = 10$ .

Admitindo-se esta relação e pensando-se na viabilidade do ensaio de uma viga de 10 (dez) m de vão livre, adotou-se este comprimento e a altura de 1 (um) m.

## 5.2 - Esquema Estático

Estudou-se a viga simplesmente apoiada, com cargas concentradas atuantes em nós, alternados, figura 5.2.

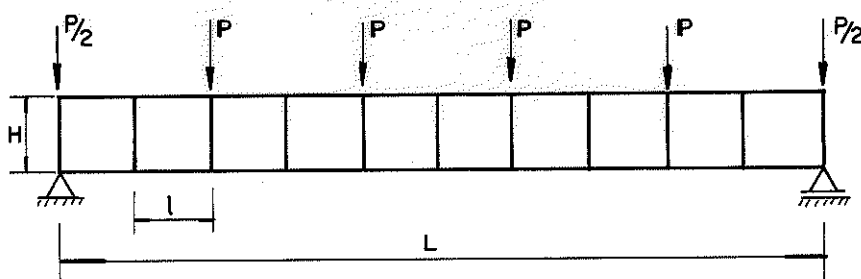


Fig. 5.2 - Viga Simplesmente Apoiada, Submetida a Carregamento Externo.

$P = 600 \text{ kgf}$  = carga concentrada atuante nos nós, admissível como carga para a viga Vierendeel de um telhado Shed, utilizando telhas de cimento-amianto.

Os banzos superior e inferior da viga Vierendeel serão considerados com o mesmo momento de inércia e a mesma área.

## 5.3 - Cálculo dos Esforços Solicitantes

### 5.3.1 - Cálculo Aproximado

Para o cálculo aproximado, utilizam-se os métodos descritos no capítulo 2.

5.3.1.1 - Método Vierendeel

Como a viga é simétrica, pode-se dimensionar apenas a sua metade.

A figura (5.3), mostra os diagramas de momento fletor, atuante na viga Vierendeel.

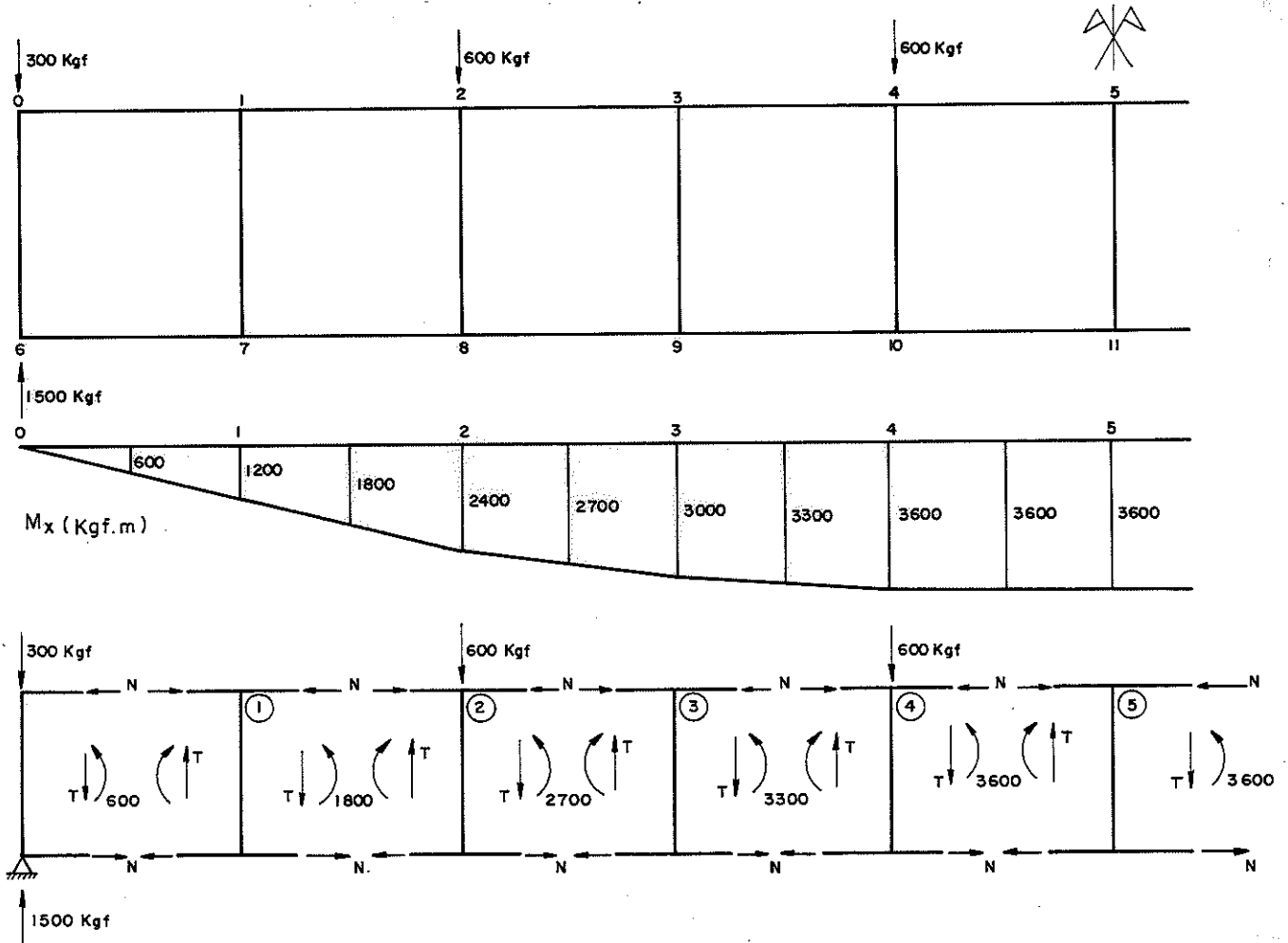


Fig. 5.4 - Momento Fletor Externo Atuante na Viga Vierendeel

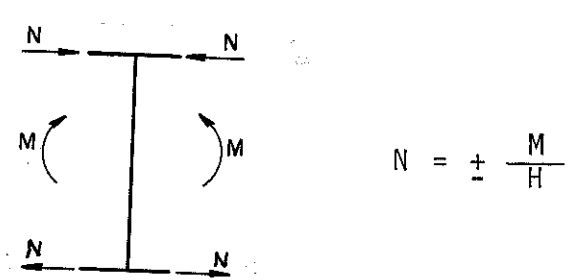
a)- Cálculo dos esforços solicitantes nos banzos

a.1)- Esforço cortante, atuante nos banzos

BARRA	SUPERIOR	INFERIOR	OBSERVAÇÃO
0-1/6-7	600	600	$T_2 = \frac{M_2 - M_1}{D} - \frac{P}{2}$ $T_1 = \frac{M_2 - M_1}{D} + \frac{P}{2}$
1-2/7-8	600	600	
2-3/8-9	300	300	
3-4/9-10	300	300	
4-5/10-11	0	0	

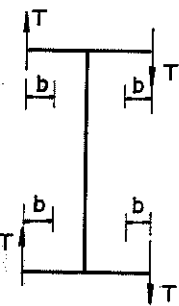
\$Q\$ (kgf)

a.2) - Esforço Normal Atuante, nos Banzos

BARRA	SUPERIOR	INFERIOR	OBSERVAÇÃO
0-1/6-7	600	- 600	 $N = \pm \frac{M}{H}$
1-2/7-8	1800	- 1800	
2-3/8-9	2700	- 2700	
3-4/9-10	3300	- 3300	
4-5/10-11	3600	- 3600	

N(kgf)

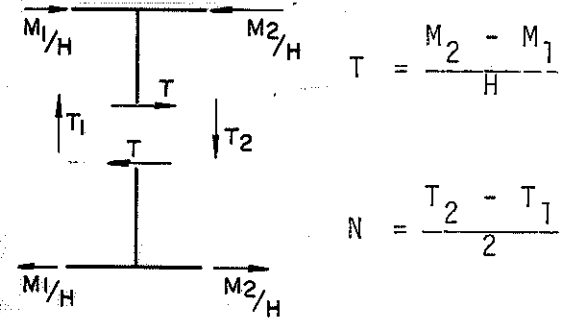
a.3) - Momento Fletor, Atuante nos Banzos

BARRA	Nº	SUPERIOR	INFERIOR	OBSERVAÇÃO
0 - 1	0 e 6	300	300	$M = \pm \left( \frac{M_2 - M_1}{20} - \frac{P}{4} \right) \cdot b$ 
e				
6 - 7	1 e 7	- 300	- 300	
1 - 2	1 e 7	300	300	
e				
7 - 8	2 e 8	- 300	- 300	
2 - 3	2 e 8	150	150	
e				
8 - 9	3 e 9	- 150	- 150	
3 - 4	3 e 9	150	150	
e				
9 - 10	4 e 10	- 150	- 150	
4 - 5	4 e 10	0	0	
e				
10 - 11	10 e 11	0	0	

M (kgf.m)

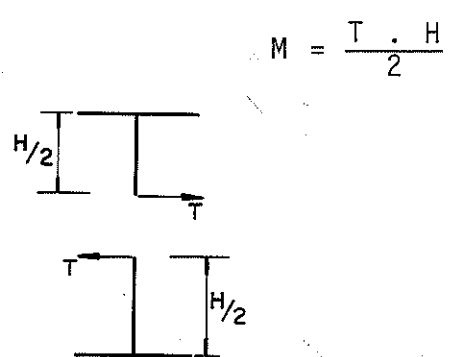
b)- Cálculo dos Esforços Solicitantes nos Montantes

b.1)- Esforços Cortante e Normal, Atuantes nos Montantes

BARRA	ESFORÇO CORTANTE	ESFORÇO NORMAL	OBSERVAÇÃO
0 - 6	600	- 900	 $T = \frac{M_2 - M_1}{H}$ $N = \frac{T_2 - T_1}{2}$
1 - 7	1200	0	
2 - 8	900	- 300	
3 - 9	600	0	
4 - 10	300	- 300	
5 - 11	0	0	

Q, N (kgf)

b.2) - Momento Fletor, Atuante nos Montantes

BARRA	ESFORÇO CORTANTE	ESFORÇO NORMAL	OBSERVAÇÃO
0 - 6	0	300	 $M = \frac{T \cdot H}{2}$
	6	- 300	
1 - 7	1	600	
	7	- 600	
2 - 8	2	450	
	8	- 450	
3 - 9	3	300	
	9	- 300	
4 - 10	4	150	
	10	- 150	
5 - 11	5	0	
	11	0	

M (kgf . m)

5.3.1.2 - Método de Magnel

O diagrama da figura (5.4), fornece os valores dos momentos fletores atuantes na viga Vierendeel.

a)- Cálculo dos esforços solicitantes nos banzos.

a.1)- Cálculo do momento fletor.

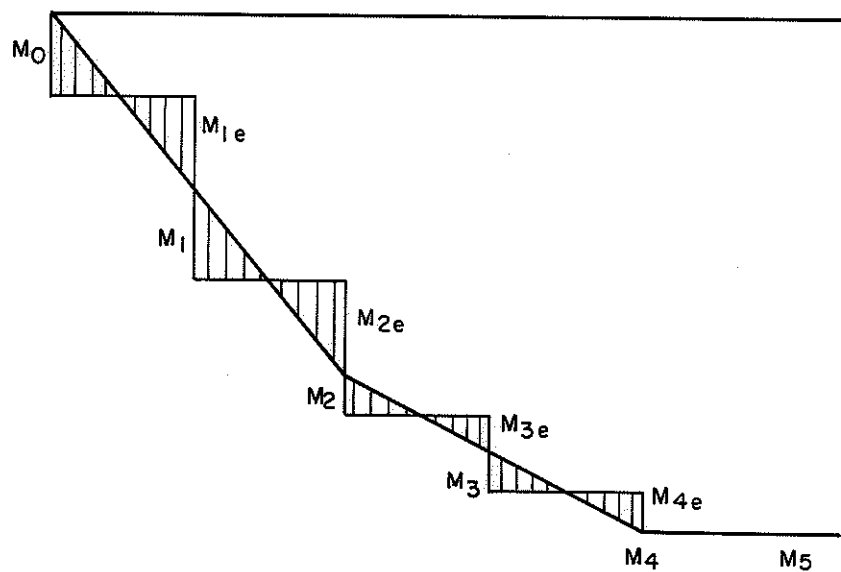
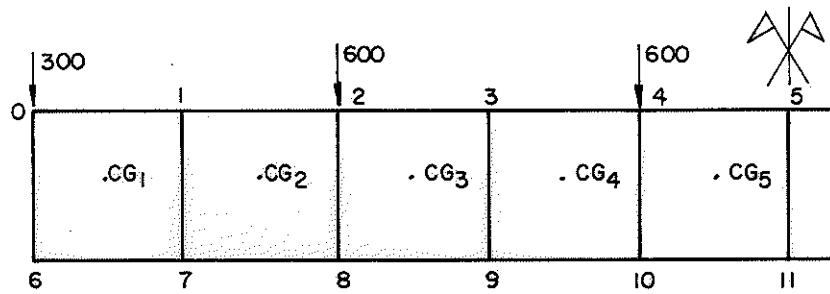


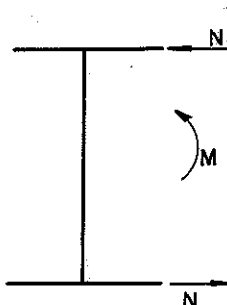
Fig. 5.4 - Diagrama de Momento

Do diagrama de momento fletor obtem-se os esforços atuantes nos banzos.

BARRA	Nº	SUPERIOR	INFERIOR	OBSERVAÇÃO
0 - 1 e	0 e 6	300	300	$M' = M \frac{a'}{a' + a''}$
6 - 7	1 e 7	- 300	- 300	
1 - 2 e	1 e 7	300	300	$M'' = M \frac{a''}{a' + a''}$ ; onde:
7 - 8	2 e 8	- 300	- 300	
2 - 3 e	2 e 8	150	150	$M' =$ momento fletor atuante no banzo superior
8 - 9	3 e 9	- 150	- 150	
3 - 4 e	3 e 9	150	150	$M'' =$ momento fletor atuante no banzo inferior
9 - 10	4 e 10	- 150	- 150	
4 - 5 e	4 e 10	0	0	
10 - 11	10 e 11	0	0	

M (kgf m)

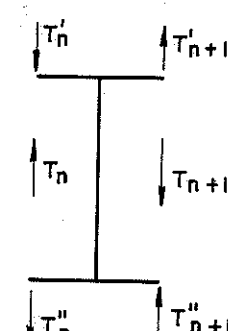
a.2) Esforço Normal nos Banzos

BARRA	SUPERIOR	INFERIOR	OBSERVAÇÃO
0-1/6-7	600	600	 $N = \pm \frac{M}{H}$
1-2/7-8	1800	1800	
2-3/8-9	2700	2700	
3-4/9-10	3300	3300	
4-5/10-11	3600	3600	

N(kgf)




a.3) Esforço Cortante nos Banzos

BARRA	SUPERIOR	INFERIOR	OBSERVAÇÃO
0-1/7-6	600	600	 $T' = T_n \frac{I'_n}{I'_n + I''_n}$ $T'' = T_n \frac{I''_n}{I'_n + I''_n}$ $I'_n = I''_n \quad T'_n = T''_n$
1-2/7-8	600	600	
2-3/8-9	300	300	
3-4/9-10	300	300	
4-5/10-11	0	0	

Q (kgf)

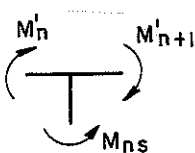
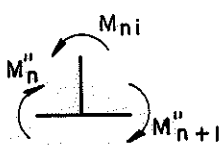
b) - Cálculo dos Esforços Solicitantes nos Montantes

b.1) Esforços Normais, nos Montantes

BARRA	ESFORÇOS NORMAIS	OBSERVAÇÃO
0 - 6	- 900	 $N = C' P'' - C'' P'$ $C' = \frac{I'}{I' + I''}$ $C'' = \frac{I''}{I' + I''}$ $I' = I''$ $N = \frac{1}{2} (P'' - P')$
1 - 7	0	
2 - 8	- 300	
3 - 9	0	
4 - 10	- 300	
5 - 11	0	

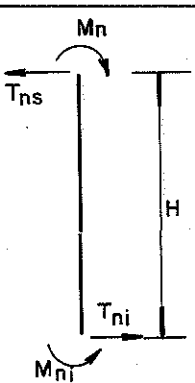
Q, N (kgf)

b.2) - Momento Fletor, nos Montantes

BARRA	Nº	ESFORÇO	OBSERVAÇÃO	
0- 6	0	300	 $M_{ns} = M'_n + M''_{n+1}$	
	6	- 300		
1- 7	1	600		
	7	- 600		
2- 8	2	450		
	8	- 450		
3- 9	3	300		 $M_{ni} = M''_n + M''_{n+1}$
	9	- 300		
4-10	4	150		
	10	- 150		
10-11	10	0		
	11	0		

M (kgf m)

b.3 - Esforço Cortante nos Montantes

BARRA	ESFORÇO CORTANTE	OBSERVAÇÃO
0 - 6	600	 $T_{ns} = \frac{M_{ns} + M_{ni}}{H}$ $T_{ni} = \frac{M_{ns} + M_{ni}}{H}$
1 - 7	1200	
2 - 8	900	
3 - 9	600	
7 - 10	300	
5 - 11	0	

Utilizando os resultados obtidos no cálculo dos esforços atuantes na viga Vierendeel, calculados pelos métodos de Vierendeel e de Magnel, foram traçados os seguintes diagramas: figuras (5.5), (5.6) e (5.7).

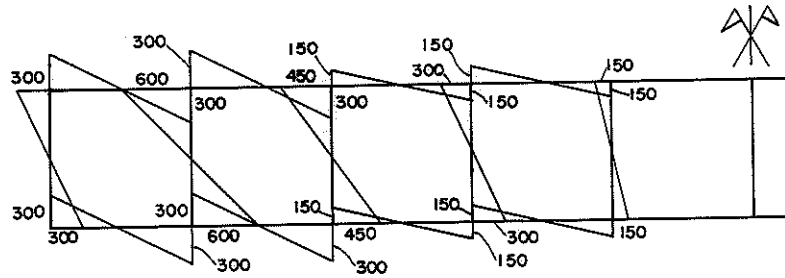


Fig. 5.5 - Diagrama de Momento Fletor (kgf m)

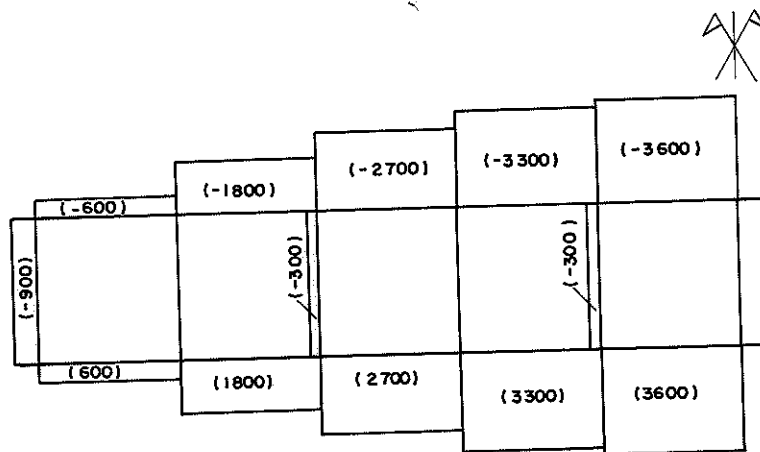


Fig. 5.6 - Diagrama de Esforço Normal (kgf)

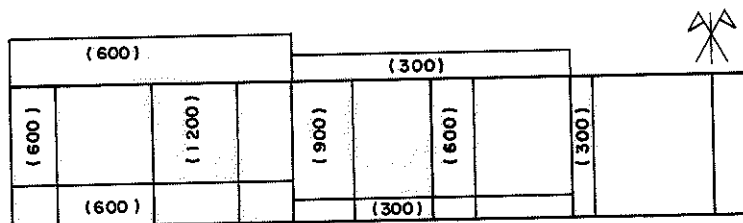


Fig. 5.7 - Diagrama de Esforço Cortante (kgf)

5.3.2 - Cálculo dos Esforços Utilizando-se o Programa Stress

Para o cálculo dos esforços na viga Vierendeel utilizou-se também o programa Stress (Structural Engineering Systems Solver), seguindo os padrões existentes para utilização do computador IBM 1130 existente na Escola de Engenharia de São Carlos. [43].

Com os resultados obtidos através do programa STRESS foram traçados os diagramas das figuras (5.8), (5.9) e (5.10).

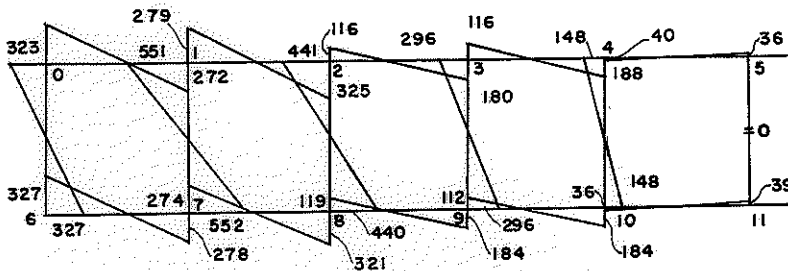


Fig. 5.8 - Diagrama de Momento Fletor (kgf m)

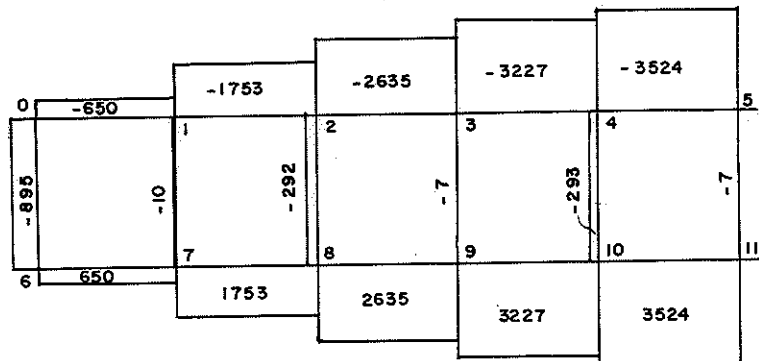


Fig. 5.9 - Diagrama de Esforço Normal (kgf)

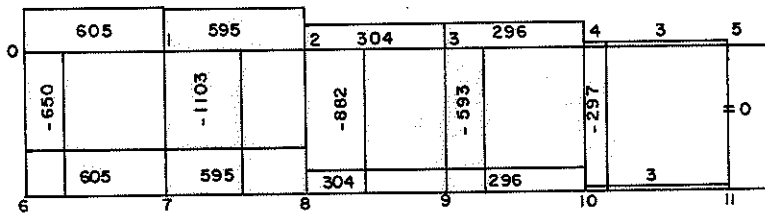


Fig. 5.10 - Diagrama de Esforço Cortante (kgf)

[43] - ANTUNES, J.C.O.S. & ANTUNES, H.M.C.C. - Estática das Estruturas (Temas Complementares). S.Carlos, EESC-USP, 1976.

Na tabela 5.1 são apresentados os resultados finais do cálculo dos esforços utilizando-se os métodos de Vierendeel e Magnel e Stress.

BARRA	N <sup>o</sup>	MOMENTO FLETOR (kgf.m)		NORMAL (kgf)		CORTANTE (kgf)	
		Vierendeel e Magnel	Stress	Vierendeel e Magnel	Stress	Vierendeel e Magnel	Stress
0- 1	0	300	323	600	- 650	600	605
	1	- 300	- 272				
1- 2	1	300	279	- 1800	- 1753	600	595
	2	- 300	- 325				
2- 3	2	150	116	- 2700	- 2635	300	304
	3	- 150	- 180				
3- 4	3	150	116	- 3300	- 3227	300	296
	4	- 150	- 188				
4- 5	4	0	- 40	- 3600	- 3524	0	3
	5	0	- 36				
6- 7	6	300	327	600	650	- 600	605
	7	- 300	- 278				
7- 8	7	300	274	1800	1753	600	595
	8	- 300	- 321				
8- 9	8	150	119	2700	2635	300	304
	9	- 150	- 184				
9-10	9	150	112	3300	3227	300	296
	10	- 150	- 184				
10-11	10	0	- 36	3600	3524	0	3
	11	0	39				
0- 6	0	300	323	- 900	- 895	- 600	- 650
	6	- 300	- 327				
1- 7	1	600	551	0	- 10	-1200	- 1103
	7	- 600	- 552				
2- 8	2	450	441	- 300	- 252	- 900	- 882
	8	- 450	- 440				
3- 9	3	300	300	0	- 7	- 600	- 593
	9	- 300	- 296				
4-10	4	150	148	- 300	- 293	- 300	- 297
	10	- 150	- 148				
5-11	5	0	0	0	- 7	0	0
	11	0	0				

#### 5.4 - Dimensionamento

O dimensionamento das barras (banzos e montantes) das estruturas de madeira obedecem às exigências da NB-11.

No cálculo dos esforços solicitantes da viga Vieren-deel, as barras são submetidas aos seguintes esforços: banzo superior e montantes - flexo-compressão, e banzo inferior - à flexo-tração.

##### 5.4.1 - Dimensionamento das Peças Solicitadas à Flexo-Compressão, ( $\sigma_{fc}$ )

De acordo com a NB-11/1951, o cálculo das tensões atuantes nas bordas comprimidas é dado por:

$$\bar{\sigma}_{fc} = \bar{\sigma}_{fl} + (\bar{\sigma}_f - \bar{\sigma}_{fl}) \epsilon$$
 , (NB-11 - 52.a) para peças intermediárias ou seja com  $40 \leq \lambda \leq \lambda_0$  , sendo:

$\bar{\sigma}_{fl}$  = tensão admissível da madeira, na compressão simples de peças esbeltas (tensão de flambagem).

$\lambda_0$  = índice de esbeltez acima do qual é aplicável a equação de Euler.

$\bar{\sigma}_f$  = tensão admissível da madeira, na flexão simples na borda comprimida da seção transversal (NB-11 - 54.a).

$\bar{\sigma}_{fc}$  = tensão admissível da madeira na flexão composta na borda comprimida da seção transversal.

$$\epsilon = \frac{6 e}{d + 6 e} \quad \text{seção retangular onde:}$$

e = excentricidade de uma força normal.

$$e = \frac{|M|}{|N|}$$

d = altura da seção transversal.

Para uma peça submetida a flexo-compressão a tensão resultante é: figura 5.12.

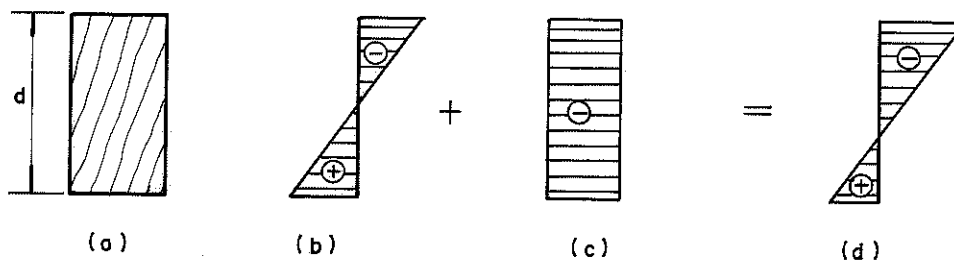


Fig. 5.12 - Diagramas de Tensões Atuantes na Seção Transversal

Fig. 5.5a = Seção transversal da viga

Fig. 5.5b = Tensão de flexão devido ao momento  $M$  ( $\sigma_f$ )

Fig. 5.5c = Tensão normal de compressão ( $\sigma_c$ )

Fig. 5.5d = Tensão de flexo-compressão

tem-se:

$$\sigma_{fc} = \sigma_f + \sigma_n$$

A tensão atuante  $\sigma_{fc}$ , deve ser:

$$\sigma_{fc} \leq \bar{\sigma}_{fc}$$

#### 5.4.2 - Dimensionamento das Peças Solicitadas a Flexo-Tração.

De acordo com a NB-11/1951, as tensões na borda tração de peças solicitada a flexo-tração ( $\sigma_{ft}$ ), não devem ultrapassar a tensão admissível a flexão estática ( $\bar{\sigma}_t$ ).

$$\sigma_{ft} \leq \bar{\sigma}_t \quad (\text{NB-11 - 58}).$$

### 5.4.3 - Dimensionamento das Peças Solicitadas ao Cisalhamento

O esforço cortante, nas vigas fletidas, provoca tensões de cisalhamento. Estas devem ser menores que a tensão admissível ao cisalhamento na flexão.

A máxima tensão de cisalhamento, na flexão é dada por:

$$\tau = \frac{Q \cdot M_s}{b \cdot J} \leq \bar{\tau}_f \text{ (NB-11 - 24a).}$$

$\tau$  = tensão de cisalhamento atuante na linha neutra da seção considerada.

$Q$  = esforço cortante na seção considerada.

$M_s$  = momento estático da seção em relação à linha neutra.

$b$  = largura da seção na linha neutra.

$J$  = momento de inércia da seção em relação à linha neutra.

$\bar{\tau}_f$  = tensão admissível de cisalhamento, da madeira à flexão.

Na tabela 5.2, são apresentados os valores das tensões atuantes, bem como as tensões admissíveis para cada tipo de solicitação.



TABELA 5.2 - Tensões Atuantes e Tensões Admissíveis

BARRA	SEÇÃO	ESFORÇOS ATUANTES			TENSÃO ATUANTE	ε	λ	CLASSIF. DA PEÇA	TENSÃO ATUANTE (kgf/cm <sup>2</sup> )	TENSÃO ADMISSIVEL (kgf/cm <sup>2</sup> )	TENSÃO DE CISALHAMENTO	
		M kgfcm	N kgf	Q kgf							ATUANTES (kgf/cm <sup>2</sup> )	ADMISSIVEL (kgf/cm <sup>2</sup> )
0-1	S <sub>y</sub> = 118,8 cm <sup>2</sup>	30000	600	605	FLEXO - COMPRESSION	0,94	55	INTERMEDIÁRIA	89	131	7,58	12,1
1-2		30000	1800	600		99			125	7,58		
2-3		15000	2700	300		65			111	3,79		
3-4		15000	3300	300		70			108	3,79		
4-5	J <sub>x-x</sub> = 3207,60 cm <sup>4</sup>	0	3600	0	COMPR	-		30	67	-	12,1	
6-7	J <sub>y-y</sub> = 1581,23 cm <sup>4</sup>	30000	600	600	FLEXO - TRACAO	-		INTERMEDIÁRIA	89	135	7,58	12,1
7-8		30000	1800	600		99			135	7,58		
8-9		15000	2700	300		65			135	3,79		
9-10		15000	3300	300		70			135	3,79		
10-11	M <sub>s</sub> = 267,30 cm <sup>3</sup>	0	3600	0	TRACAO	-		30	135	-	12,1	
0-6	S = 158,40 cm <sup>2</sup>	30000	900	600	FLEXO - COMPRESSION	0,92	42	INTERMEDIÁRIA	69	131	5,68	12,1
1-7		60000	0	1200		127			135	11,36		
2-8		45000	300	900		97			134	8,52		
3-9		30000	0	600		63			135	5,68		
4-10		15000	300	300		33			132	2,84		
5-11	M <sub>s</sub> = 356,40 cm <sup>3</sup>	0	0	0		-		0	0	0	0	

#### 5.4.4 - Verificação da Flecha Devido ao Carregamento

Além das condições relativas às tensões admissíveis, as estruturas de madeira não devem apresentar flechas maiores do que a flecha admissível,  $\bar{f}$ .

$$\bar{f} = \frac{\ell}{350} \quad (\text{NB-11 - 69b})$$

A flecha da viga Vierendeel, no meio do vão, obtida através do programa Stress é:

$$f = 1,81 \text{ cm} < \bar{f} = 2,36 \text{ cm}$$

#### 5.4.5 - Dimensionamento das Ligações

Para o dimensionamento das ligações foram utilizadas as equações desenvolvidas no capítulo 4.

Sendo  $A = B$ , e substituindo nas equações (4.1), (4.2) e (4.5), obtêm-se as seguintes equações.

$$\text{De (4.1): } H_n = \frac{N}{A^2}$$

$$\text{De (4.2): } H_q = \frac{Q}{A^2}$$

$$\text{De (4.5): } H_m = \frac{3 \text{ m} \sqrt{2}}{A^3}$$

Substituindo-se na equação (4.6), tem-se:

$$A^6 H_{\text{máx}}^2 + A^2(N^2 + Q^2) + A \cdot 6\text{m} (N + Q) + 18 \text{ m}^2 = 0 \dots (5.1)$$

#### 5.4.5.1 - Cálculo de $H_{m\bar{a}x}$

Para  $\alpha = 45^\circ$ , pela fig. 4.19, a tensão de proporcionalidade é:

$$\tau_{prop.} = 60 \text{ kgf/cm}^2$$

A tensão admissível será dada por  $\bar{\tau} = \tau_{prop.} \cdot k$ , sendo  $k$  um coeficiente de redução. Segundo a NB-11, o coeficiente de redução da tensão média de ruptura, de corpos de prova de cisalhamento é 0,15, para o cisalhamento nas ligações. Neste trabalho há interesse na utilização da tensão média de cisalhamento no limite de proporcionalidade. O coeficiente de redução poderia ser  $k > 0,15$ . adotou-se, entretanto  $k = 0,15$ . Assim sendo:

$$H_{m\bar{a}x} = \bar{\tau} = 0,15 \tau_{pro} = 0,15 \cdot 60 = 9 \text{ kgf/cm}^2$$

#### 5.4.5.2 - Cálculo da Dimensão A

Pela uniformidade das dimensões das peças que compõe a viga Vierendeel, todas as ligações em estudo, tem as mesmas dimensões e o mesmo número de áreas coladas. Portanto, basta calcular a tensão atuante para a ligação mais solicitada.

Substituindo-se na equação (5.1), os valores  $H_{m\bar{a}x} = 9 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $M_T = 60000 \text{ kgf.cm}$  e admitindo-se seis áreas coladas, o momento atuante em cada área será:  $m = 10000 \text{ kgf.cm}$ .

$$Q_T = 1200 \text{ kgf}; \text{ para cada área colada: } Q = 200 \text{ kgf.}$$

$N = 0$ , por interação obtém-se:

$A \cong 17,26 \text{ cm} < 18 \text{ cm}$ . Portanto a tensão atuante na ligação para uma área de  $(18 \times 18 \text{ cm})$  é menor que a tensão admissível.

## 6. - EXPERIMENTAÇÃO

A experimentação é uma das maneiras mais eficientes de analisar o comportamento da estrutura e avaliar sua segurança.

Para uma análise mais criteriosa da capacidade estrutural da viga Vierendeel de madeira bem como para a avaliação dos métodos de cálculo utilizados neste trabalho construiu-se no Laboratório de Madeiras e de Estruturas de Madeira (LaMEM) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para o ensaio, uma viga Vierendeel de madeira.

No cálculo aproximado, a consideração do ponto de inflexão das barras que compõe a viga Vierendeel é o fator mais discutido para a confiabilidade nos resultados obtidos.

Procurou-se determinar experimentalmente a distância do ponto de inflexão às ligações, em cada barra.

### 6.1 - Preparação do Protótipo

O modelo da viga Vierendeel foi construído com peças da madeira de Peroba Rosa, de dimensões comerciais.

As peças foram retiradas de um lote de madeira em escolha aleatória, procurando-se desta forma levar em consideração diferenças de valores das propriedades físicas (por exemplo, módulo de elasticidade) normais na madeira, inclusive entre peças de uma mesma espécie.

A viga Vierendeel é composta de 4 (quatro) células iguais formadas pelos montantes adjacentes, banzo superior e banzo inferior.

#### 6.1.1 - Características Geométricas do Modelo da Viga Vierendeel

- Comprimento total: 4,98 m.
- Vão livre:  $\ell = 4,8$  m.
- Altura de eixo a eixo:  $h = 1,20$  m.
- Distância entre eixos dos montantes:  $\ell_m = 1,20$  m.
- Montantes: formados por 4 (quatro) peças de dimensões 2,2 x 18 x 138 cm.

- Banzo inferior e superior: compostos por 3 (três) peças de dimensões 2,2 x 18 x 498 cm.

A figura 6. , fornece mais detalhes da viga.

No cálculo teórico de uma estrutura, tem sido adotado um módulo de elasticidade médio.

As características físicas variam, entretanto, de peça para peça de madeira.

A adoção, poderá fornecer resultados imprecisos, pois as deformações lidas são proporcionais ao módulo de elasticidade. Por este motivo as peças utilizadas na construção da viga Vierendeel foram classificadas através de ensaios de flexão, obtendo-se o módulo de elasticidade de cada peça, figura 6.1.

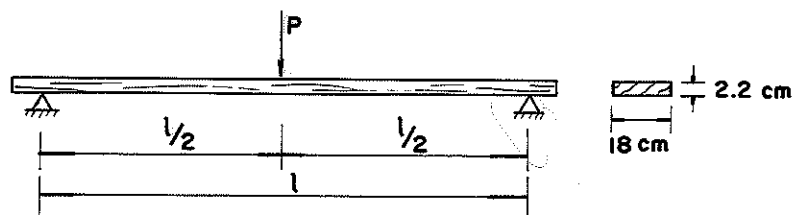


Fig. 6.1 - Ensaios de Flexão para Classificação das Peças

Para os ensaios de classificação considerou-se a velocidade de carregamento, de 100 kgf/cm<sup>2</sup>.min (MB-26).

a)- Cálculo do Tempo de Aplicação da Carga

a1)- Peças de Montagem dos Montantes

$$J_{x-x} = 15,97 \text{ cm}^4$$

$$\text{vão livre} = 110 \text{ cm}$$

$$\text{Velocidade de carregamento} = 100 \text{ kgf}/(\text{cm}^2 \cdot \text{min})$$

Para uma carga de 24 kgf.

$$\sigma_{at} = 45 \text{ kgf}/\text{cm}^2$$

$$\text{Tempo de duração da carga} = 25 \text{ seg.}$$

a.2)- Peças de Montagem dos Banzos

$$J_{x-x} = 15,97 \text{ cm}^4$$

$$\ell = 470 \text{ cm}$$

$$\text{Velocidade de carregamento} = 100 \text{ kgf}/(\text{cm}^2 \cdot \text{min})$$

Para uma carga de 2 kgf

$$\sigma_{at} = 16,18 \text{ kgf}/\text{cm}^2$$

Tempo de aplicação da carga  $\approx$  10 seg.

b)- Cálculo do Módulo de Elasticidade de cada Peça

Aplicada uma carga única ( $\Delta P$ ), no fim do tempo calculado, tem-se a flecha ( $\Delta f$ ) no relógio comparador e utilizando-se a equação da flecha devida à carga concentrada no meio do vão, da viga simplesmente apoiada, obtêm-se o módulo de elasticidade:  $E$  para cada peça:

$$E = \frac{\Delta P \ell^3}{48 \Delta f J}$$

6.2 - Construção da Viga

Foi feito um gabarito no piso do Laboratório, localizando-se as coordenadas dos centros das ligações, instalando-se a seguir os dispositivos de pressão para a colagem, figura 6.2.



Fig. 6.2 - Início de Montagem

As peças já classificadas e aparelhadas, foram colocadas nas posições definidas pelo gabarito: inicialmente as dos montantes, em seguida as dos banzos sobre os montantes e assim, sucessivamente até a última fileira de montantes. Antes da superposição de cada peça tem-se a aplicação do adesivo nas áreas de ligação, figura 6.3.

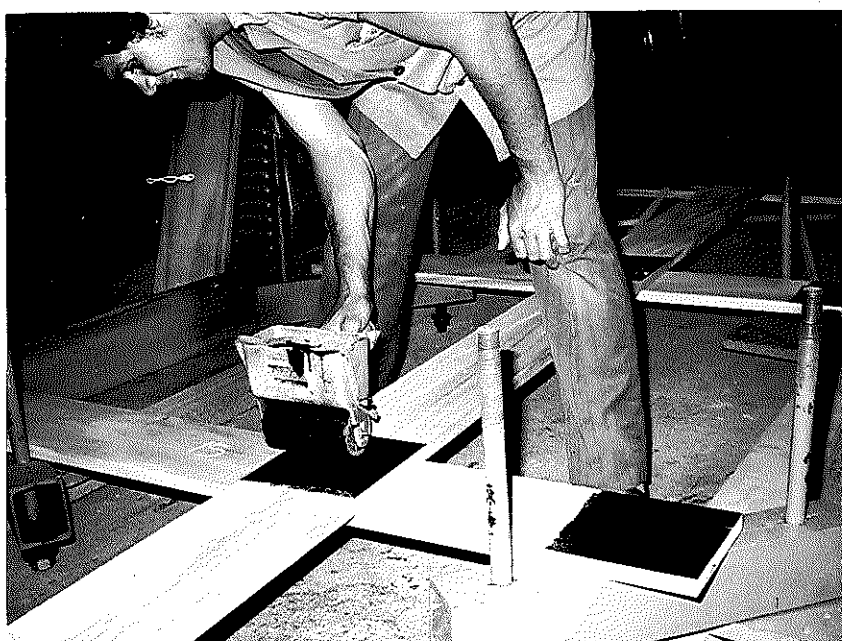


Fig. 6.3 - Aplicação do Adesivo para a Ligação

A cada peça colada, confere-se sua posição com esquadro e para evitar qualquer deslizamento, utilizou-se dois pregos em cada junção, figura 6.4.



Fig. 6.4 - Verificação de Perpendicularidade e Fixações com dois pregos

O processo de montagem das peças foi concluído em aproximadamente 2 horas, com a participação de 4 pessoas.

### 6.3 - Ligações

Na colagem das ligações utiliza-se o adesivo conhecido comercialmente como Cascophen, o mesmo usado nos ensaios preliminares das ligações coladas e com os mesmos procedimentos.

Para se garantir a eficiência das ligações, um pouco antes do início da montagem, as áreas das peças onde o adesivo é aplicado são cuidadosamente lixadas, evitando-se assim, a presença de substâncias estranhas à madeira, usualmente prejudiciais à ação do adesivo.

Em cada uma destas áreas, livres de quaisquer resíduos, aplica-se normalmente camadas de cola (aproximadamente 300g/m<sup>2</sup>), com o emprego de um rolo apropriado, figura 6.5.





Fig. 6.5 - Aplicação do Adesivo

Feita a aplicação da cola e unindo as peças dos montantes e banzos, as ligações estão prontas para receberem a pressão de colagem, figura 6.6.

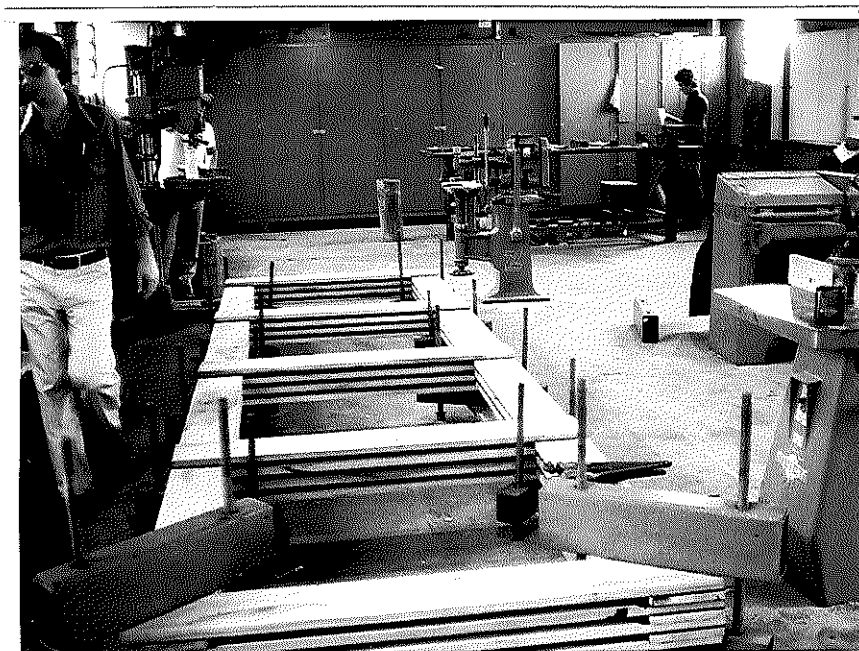


Fig. 6.6 - Início de Aplicação de Pressão de Colagem

De acordo com recomendações do fabricante, aplicando-se uma pressão de colagem de  $10 \text{ kg/cm}^2$ , usando-se para isto, um dispositivo de aperto através de parafusos, controlando-se a pressão requerida, por intermédio de um torquímetro de catraca previamente calibrado para esta aplicação, figura 6.7.



Fig. 6.7 - Adesivo de Pressão Utilizando-se Torquímetro

Para não ocorrer esmagamento na peça devido a compressão normal, a pressão de colagem deve ser inferior à tensão de compressão normal às fibras.

$$\bar{\sigma}_n = 25,5 \text{ kgf/cm}^2 \text{ para a Peroba Rosa}$$

$$\bar{\sigma}_n > \text{pressão de colagem}$$

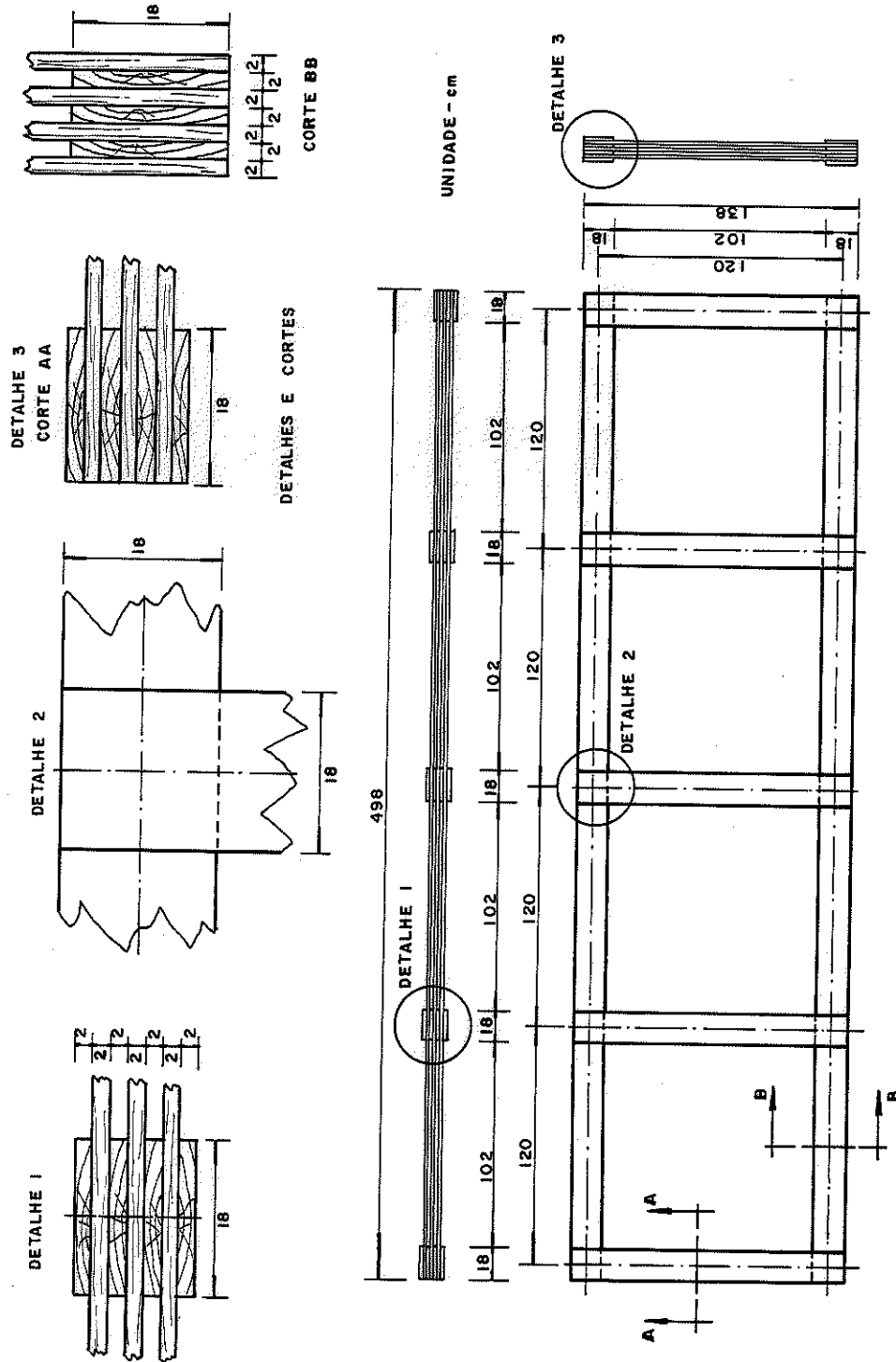
O tempo de permanência das ligações sob pressão é de 48 horas.

Na figura 6.8 é apresentada a viga pronta.



Fig. 6.8 - Viga Vierendeel Pronta

Detalhes da Viga Vierendeel



## 6.4 - Equipamento de Ensaio

### 6.4.1 - Sistema de Carga

Para a aplicação de carga na Viga Vierendeel, fêz-se montagem especial utilizando-se o sistema estrutural do Laboratório de Madeiras e de Estruturas de Madeira (LaMEM).

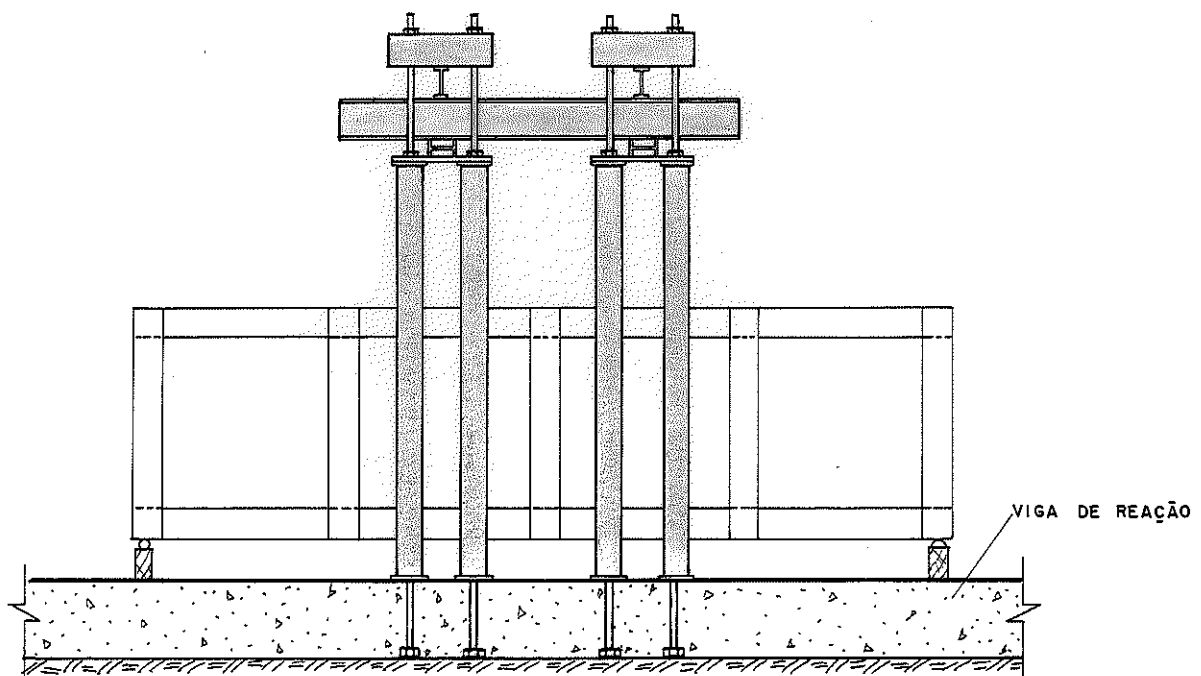


Fig.6.9 - Esquema Utilizado para Aplicação de Carga

### 6.4.2 - Aplicação de Carga - Sistema de Carregamento

As cargas foram aplicadas na Viga Vierendeel utilizando dois cilindros hidráulicos com capacidade de 20 tf cada um tendo as leituras feitas através de anéis dinamométricos ou de células de carga, construídas no LaMEM, figura 6.10.

Para carregamento de um montante tem-se a aplicação de carga através de um cilindro hidráulico, figura 6.10.



Fig. 6.10 - Anel Dinamométrico para Leitura da Carga

Para o carregamento dos três montantes centrais utilizam-se duas vigas metálicas, figura 6.11.

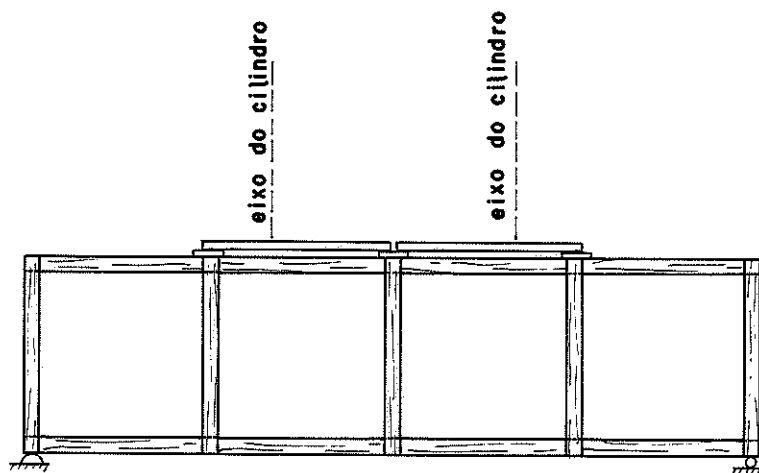


Fig. 6.11 - Distribuição das Cargas Aplicadas Simultaneamente por dois Cilindros em Três Montantes.

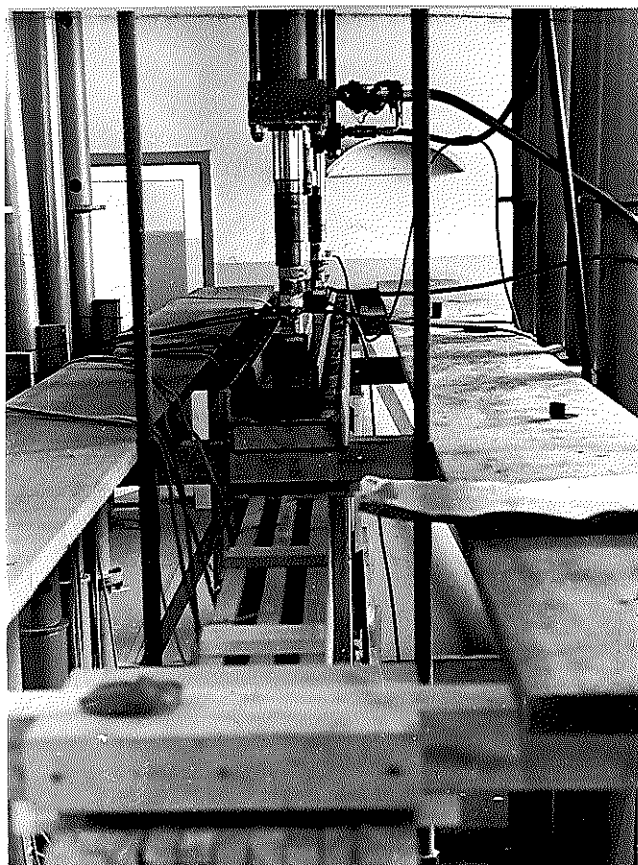
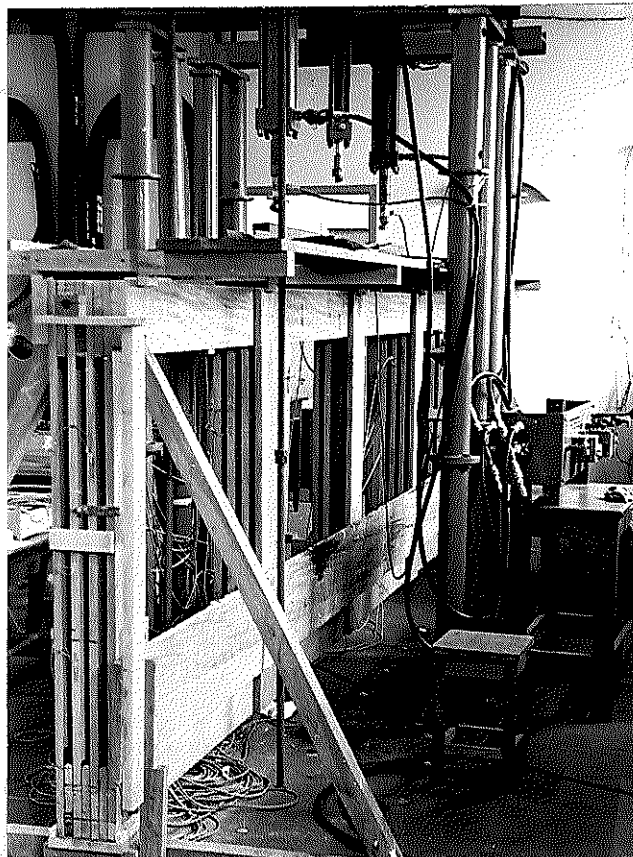


Fig. 6.12 - Aplicação da Carga

### 6.4.3 - Contraventamento

Para se garantir a estabilidade da viga durante o ensaio utilizam-se contraventamentos, procurando-se representar o mesmo na utilização prática da viga.

Os contraventamentos, encaixam-se simplesmente na viga, oferecendo rigidez somente no plano transversal ao plano da viga (fig. 6.13).

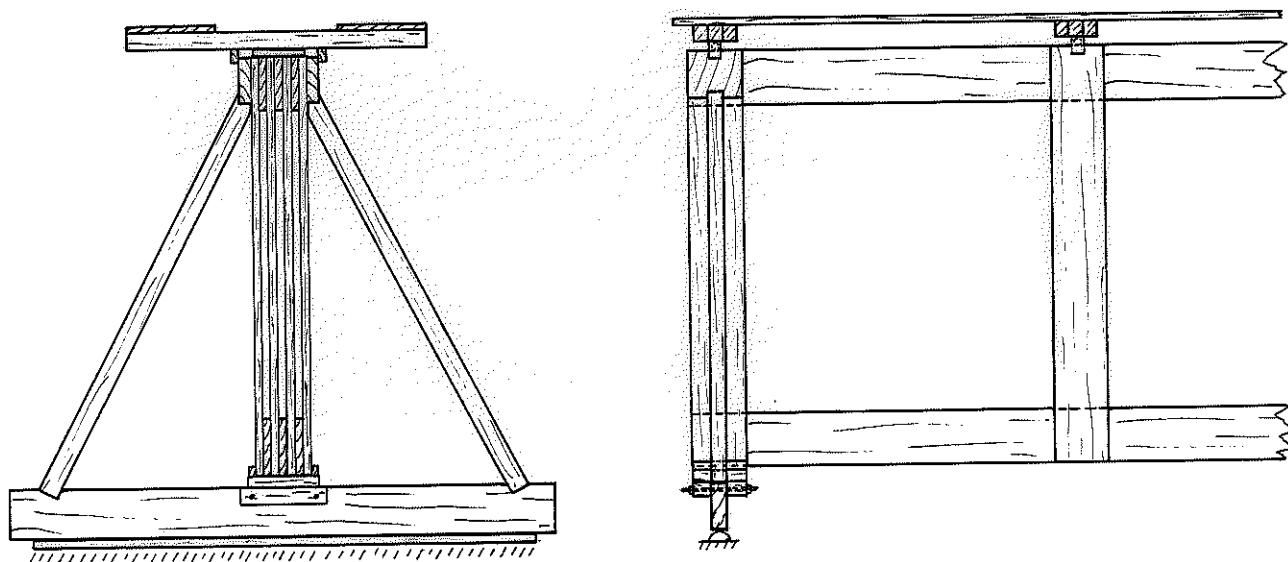


Fig. 6.13 - Contraventamento Utilizado na Experimentação da Viga Vierendeel.

### 6.4.4 - Extensômetros Elétricos

Para a determinação das deformações na Viga Vierendeel foram utilizados extensômetros elétricos de resistência (strain gage), fabricado pela Kyowa, 10 mm, com "gage factor" de 1,91, em muitos pontos da viga.

#### a)- Colocação dos extensômetros elétricos.

A escolha dos pontos de colocação dos extensômetros elétricos, foi um dos itens peculiares deste trabalho.

A viga Vierendeel ensaiada, é formada por diversas peças de madeira independentes, cada uma com as suas características próprias. Considerando a importância da obtenção de resultado experimental válido, introduziu-se na experimentação a variação das características de cada peça utilizada na montagem da viga.

Por outro lado analisando-se a viga Vierendeel, carregada, observa-se:

- Aplicando-se carga nos nós, a distribuição de tensão de flexão é linear ao longo da barra.

- Pela simetria da estrutura e carregamento, os esforços simétricos são iguais.

$$\sigma_{AB} = \sigma_{ED}$$

$$\sigma_{BC} = \sigma_{DC} \quad , \quad \text{etc.... figura 6.14.}$$

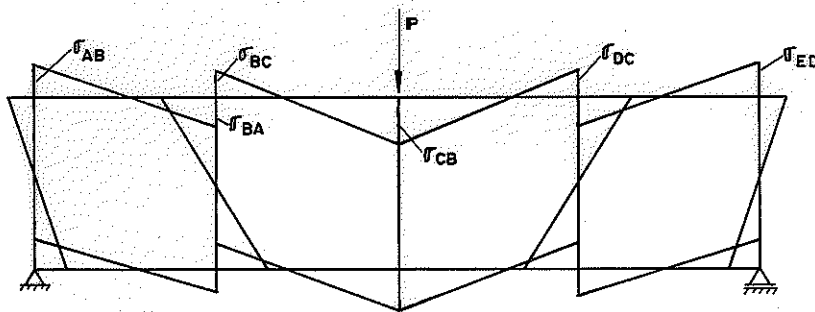


Fig. 6.14 - Diagrama de Tensões na Borda Superior da Viga Vierendeel

Foram colocados ao longo de cada barra, em pontos sorteados ao acaso, extensômetros elétricos, evitando-se os pontos coincidentes nas barras simétricas e nas bordas das peças. Portanto, pode-se determinar a reta do diagrama de tensões atuantes nas bordas de cada barra, com um número diminuto de extensômetros elétricos. Assim mesmo foram utilizados 52 (cincoenta e dois) extensômetros elétricos, figura 6.15.



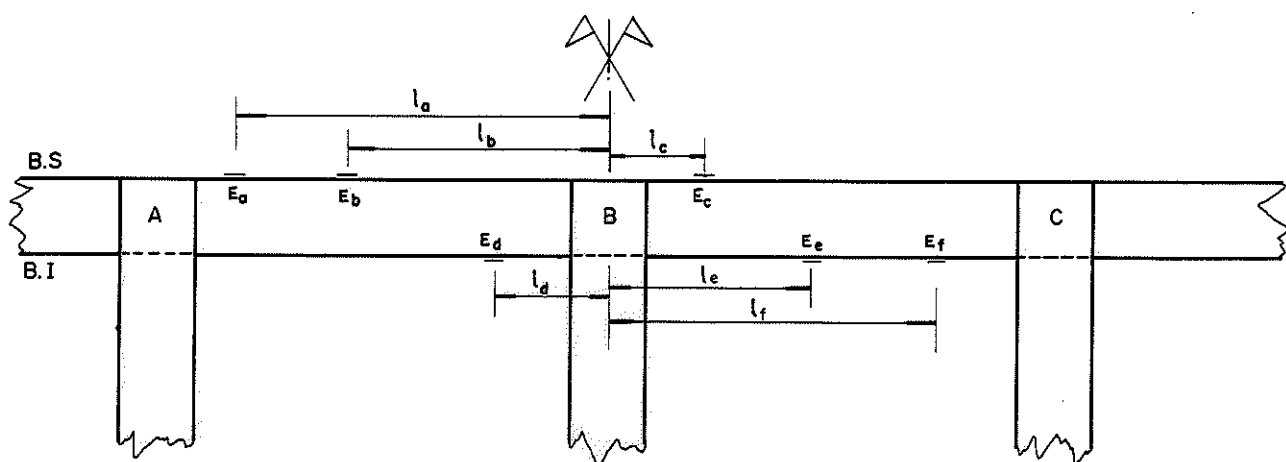


Fig.6.15. - Diagrama de Tensão em uma Barra

$E_a$  = extensômetro elétrico a, distante  $l_a$  de um eixo

$E_b$  = extensômetro elétrico b, distante  $l_b$  de um eixo

$E_c$  = extensômetro elétrico c, distante  $l_c$  de um eixo

$E_d$  = extensômetro elétrico d, distante  $l_d$  de um eixo

$E_e$  = extensômetro elétrico e, distante  $l_e$  de um eixo

$E_f$  = extensômetro elétrico f, distante  $l_f$  de um eixo

$B_s$  = borda superior

$B_i$  = borda inferior

Presumindo-se a simetria de tensões, apesar das diferenças inerentes a madeira, pode-se sobrepor os efeitos correspondentes de barras simétricas, obtendo-se em cada borda das barras o dobro de pontos de leitura de deformação, melhorando sensivelmente as condições de análise das tensões reais nas barras, figura 6.16.

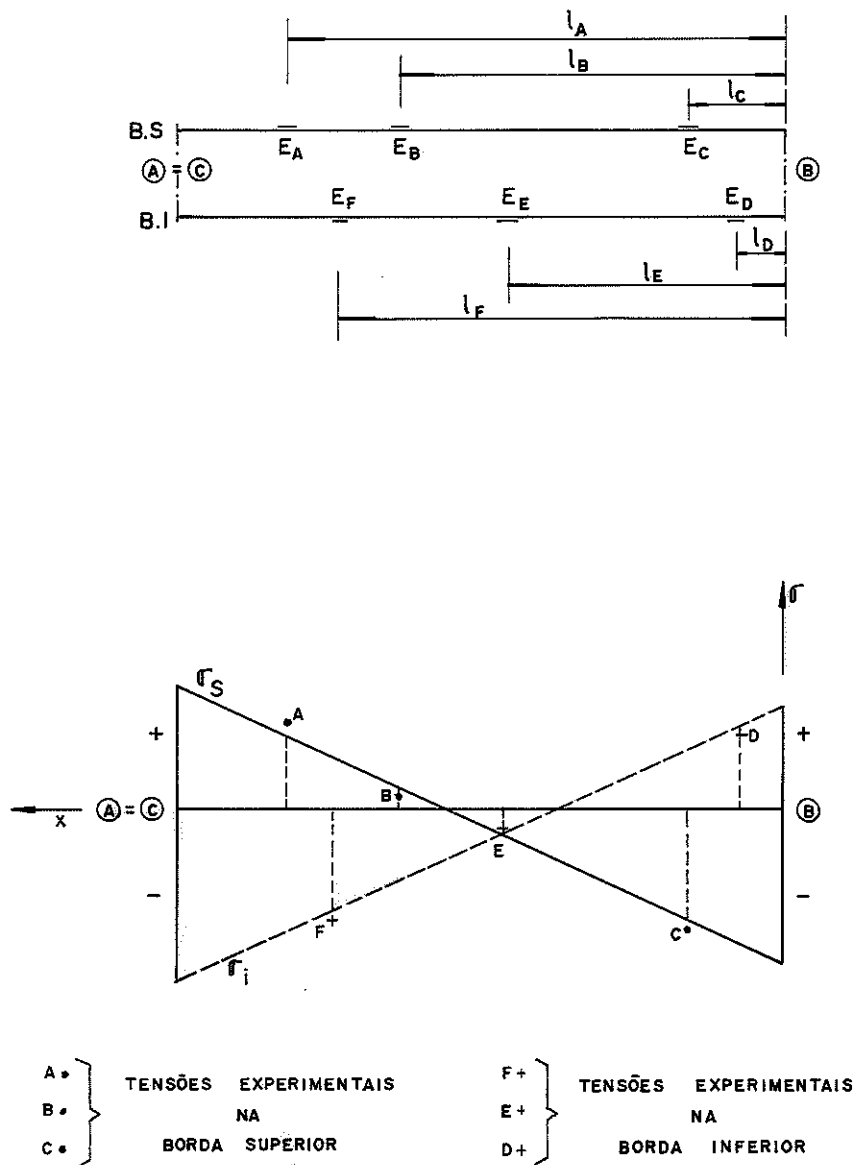


Fig. 6.16 - Diagrama de Tens\~ao em uma Barra

$\sigma_s$  = reta definida pelas tens\~oes te\~oricas na borda superior da barra.

$\sigma_i$  = reta definida pelas tens\~oes te\~oricas na borda inferior da barra.

Os 52 (cincoenta e dois) extens\~ometros el\~etricos utilizados para o ensaio da viga Vierendeel est\~ao representados na figura 6.17.



b)- Leitura das Deformações

Os extensômetros elétricos, são ligados através dos cabos, a um comutador, e através deste ao indicador de deformações (Static Strain Indicator) para a leitura das deformações específicas, com precisão de  $10^{-6}$ , figura 6.18.

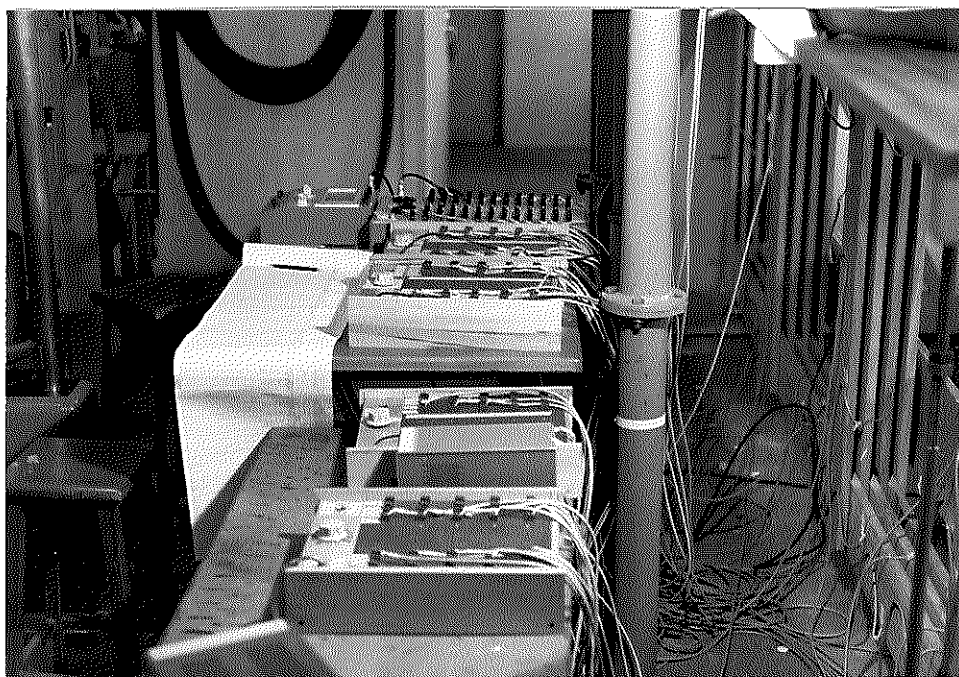


Fig. 6.18 - Instrumentos Utilizados para Leitura das Deformações

6.4.5 - Leitura dos Deslocamentos

Os deslocamentos na viga Vierendeel, foram medidos através de transdutores indutivos, DC - DT, 24 - 500, da Hewlett Packard. Estes são ligados a um comutador de fabricação do LaMEM e os valores são lidos no voltímetro digital, HP 3480 A, com excitação através do dispositivo de fornecimento de corrente contínua HP 6224 B, figura 6.19.

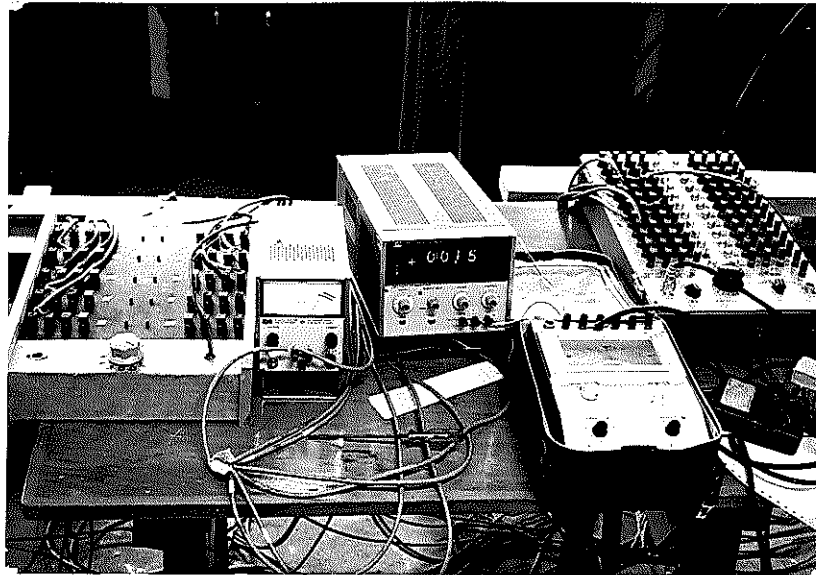


Fig. 19 - Equipamento para Leitura de Deformações e de Deslocamentos.

Antes da utilização dos transdutores indutivos procedeu-se a sua calibração. A calibração foi feita, relacionando-se os deslocamentos das hastes dos indutivos, medidos com um Palmer de precisão 0,01 mm, a variação da diferença de potencial correspondente, lida no voltímetro digital da Hewlett Packard.

Para cada indutivo, traçou-se o diagrama de deslocamento (mm) x (volt), obtendo-se as constantes em mm/volt, figura 6.19.

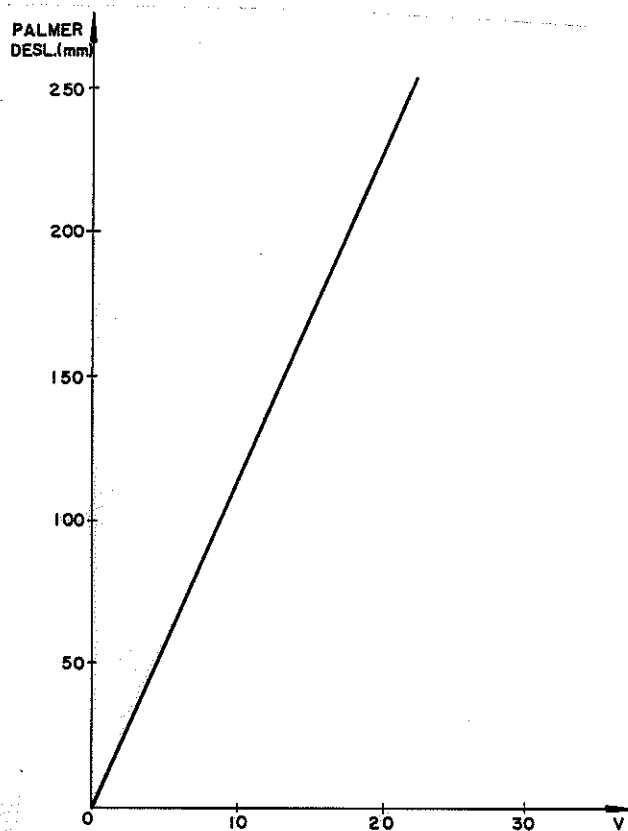


Fig. 6.20 - Diagrama de Aferição do Transdutor Indutivo

Foram utilizados 10 transdutores indutivos. Na tabela 6.1 são apresentadas as constantes obtidas na sua calibração.

TABELA 6.1

TRANSDUTOR INDUTIVO	CONSTANTE (mm/v)
A	1,070
B	1,043
C	1,114
D	1,070
E	1,086
F	1,000
G	1,060
H	1,111
I	1,052
J	1,092

6.4.5.1 - Localização dos Transdutores Indutivos

A localização dos transdutores indutivos foi determinada tendo em vista detectar os deslocamentos verticais, horizontais e o giro das ligações, figura 6.21.

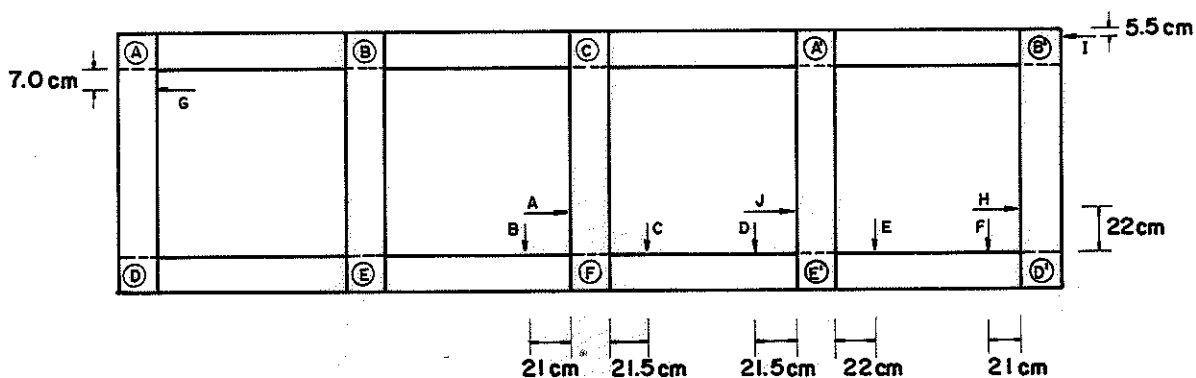


Fig. 6.21 - Localização dos Transdutores Indutivos

#### 6.4.5.2 - Fixação dos Transdutores Indutivos

Para a fixação dos indutivos, fêz-se uma tábua de suporte, apoiada nos montantes das extremidades da viga, sem a possibilidade de influir nas tensões e deslocamentos da viga.

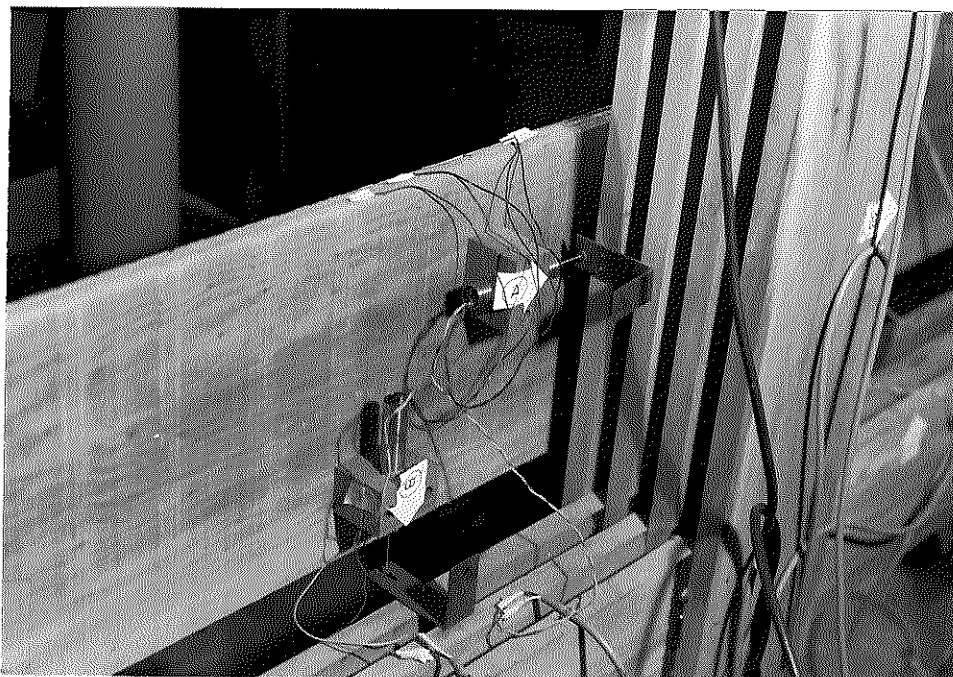


Fig. 6.22a - Indutivo Adaptado nas Barras CF e EF

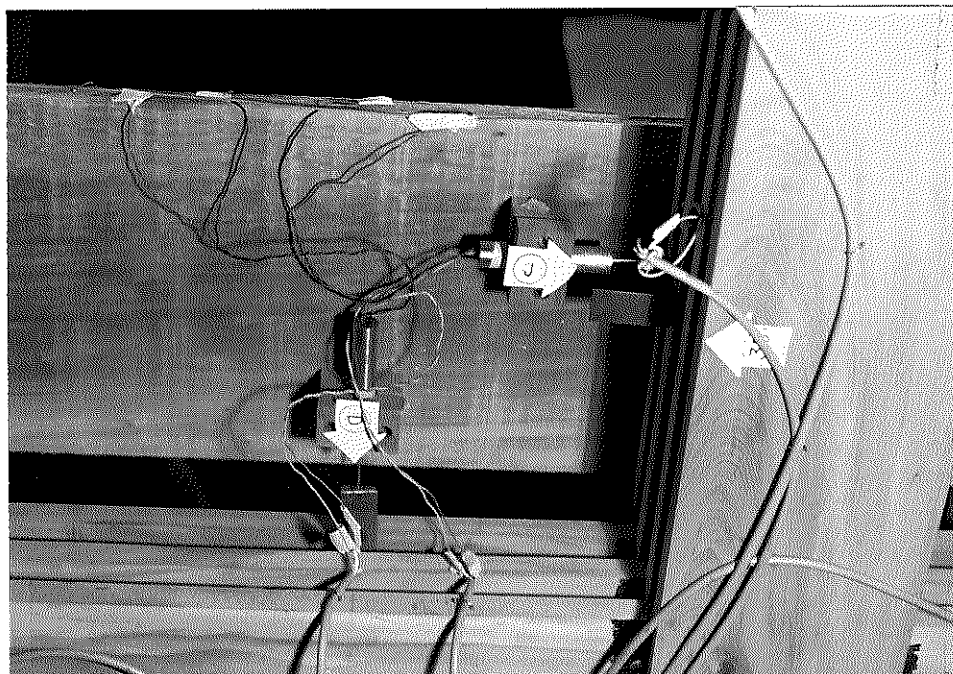


Fig. 6.22b - Indutivo Adaptados nas Barras A'D' e F'D'

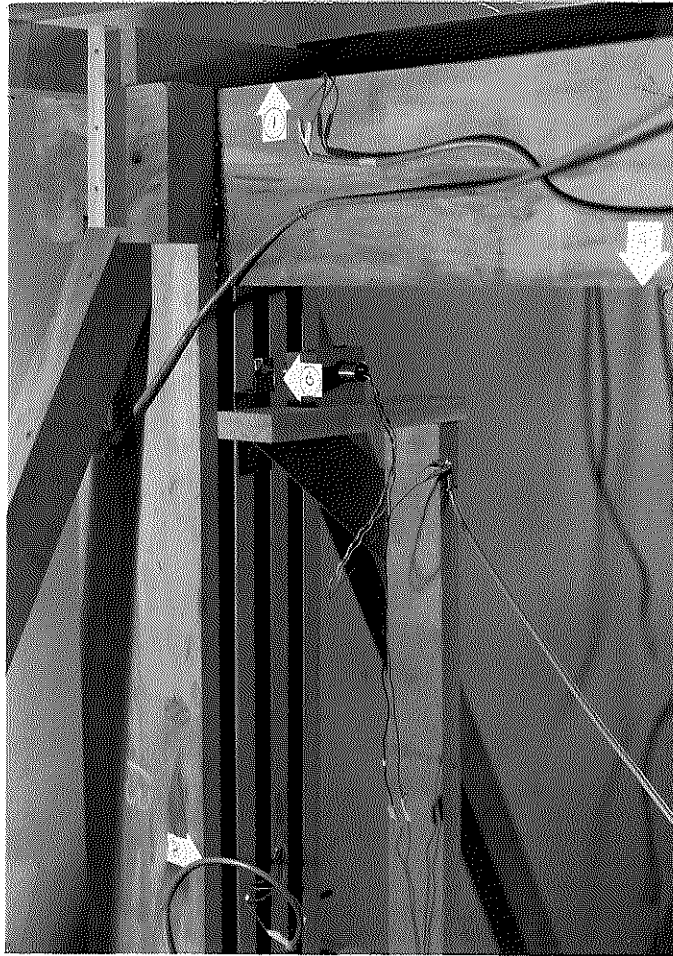


Fig. 6.22c - Indutivos Adaptados na Barra AD

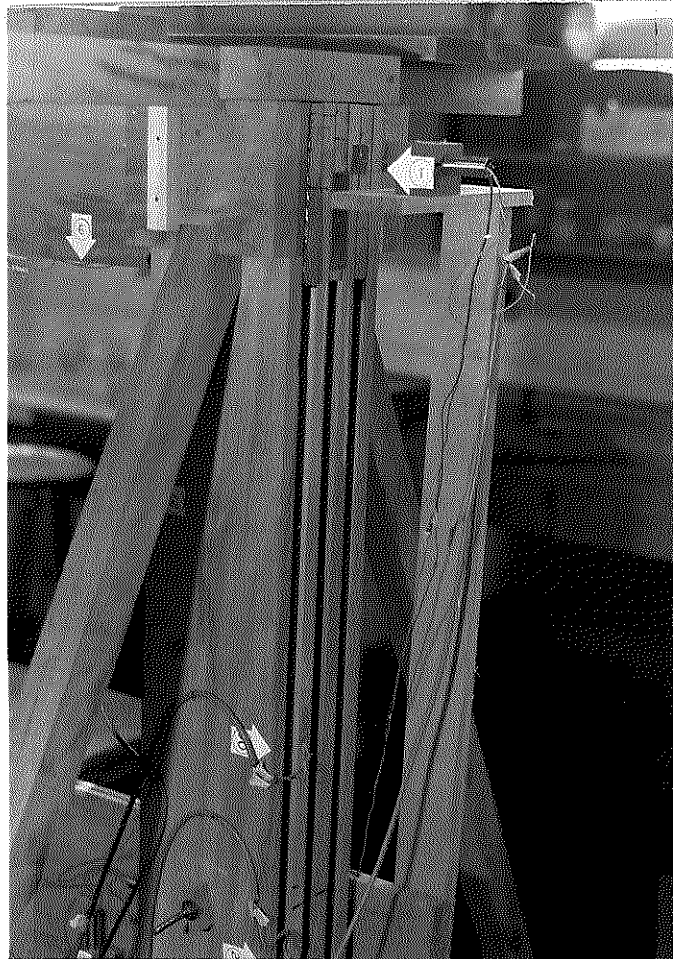


Fig. 6.22d - Indutivos Adaptados na Barra B'E'



### 6.5 - Realização dos Ensaios

A viga Vierendeel foi ensaiada tendo como carga permanente o peso próprio, o peso do contraventamento e o peso das peças metálicas de aplicação de carga nas ligações.

As leituras de deformações e deslocamentos foram feitas gerando-se as leituras iniciais, anotando-se as deformações e deslocamentos correspondentes aos acréscimos de carga aplicados nas ligações.

Os ensaios com aplicação de uma única carga ou de três cargas nodais, foram repetidas três vezes, com crescimento da carga em intervalos de carregamento. Em cada intervalo, mantinha-se a carga constante, anotando-se as deformações fornecida e os deslocamentos. Havendo muitos pontos para ler, a cada vinte pontos de leitura de deformação, conferia-se a carga aplicada para constatar a não existência de perda de carga. O carregamento prosseguia até o maior deslocamento vertical atingir o valor da flecha admissível, retirando-se em seguida a carga aplicada.

No caso de haver novo carregamento, zeravam-se novamente todos os instrumentos, e retomando-se o mesmo procedimento de ensaio.

#### 6.5.1 - Determinação das Tensões

A cada nível de carregamento, eram anotadas as deformações e os deslocamentos.

Durante o carregamento a leitura de deformação de cada ponto da estrutura, fornecia um valor. Para a determinação da deformação, adotou-se como deformação média para carga unitária, para cada ponto (i), o valor  $\epsilon_i$  ;

$$\epsilon_i = \left( \frac{\epsilon_{11}}{P_{11}} + \dots + \frac{\epsilon_{1n}}{P_{1n}} \right) + \left( \frac{\epsilon_{21}}{P_{21}} + \dots + \frac{\epsilon_{2n}}{P_{2n}} \right) + \dots + \left( \frac{\epsilon_{k1}}{P_{k1}} + \dots + \frac{\epsilon_{kn}}{P_{kn}} \right) \frac{1}{n \cdot k}$$

Nesta expressão:  $\epsilon_{11}$  é a deformação lida no ponto i, carregamento 1, carga 1.

$\epsilon_{1n}$  é a deformação lida no ponto i, carregamento 1, carga n.

$\epsilon_{k1}$  é a deformação lida no ponto i, carregamento k, carga 1.

$\epsilon_{kn}$  é a deformação lida no ponto i, carregamento k, carga n.

k: número de carregamento feitos na estrutura

n: número de leitura feita em cada carregamento

Hã necessidade de determinar a deformação média  $\epsilon_i$  pa  
ra cada ponto, em cada tipo de ensaio, devido à variação ocasional  
notada durante as leituras.

Com as deformações unitárias determinadas e o mōdulo  
de elasticidade da peça, a tensão unitária no ponto onde está loca  
lizado o extensōmetro,  $\bar{\epsilon}$ :

$$\sigma_i = K \cdot E \cdot \epsilon_i \cdot 10^{-6}$$

$\sigma_i$  = tensão atuante para carga unitária

K = constante do extensōmetro (gage factor).

E = mōdulo de elasticidade da peça.

$\epsilon_i$  = deformação média para carga unitária, obtida expe-  
rimentalmente.

A tabela 6.2, apresenta os pontos de localização dos  
extensōmetros elētricos em, seis barras, a distância (x) do ponto  
ao eixo da ligaçōe e o mōdulo de elasticidade da barra na qual se  
encontra o extensōmetro elētrico.

TABELA 6.2

BARRA A - B					BARRA B - C				
BARRA	BORDA	EXTENS. Nº	x (cm)	E kg/cm <sup>2</sup>	BARRA	BORDA	EXTENS. Nº	x (cm)	E kg/cm <sup>2</sup>
A - B	B - S	1	105	116490,72	B - C	B - S	13	96	116490,72
		3	71				14	66	
		2	41				15	41	
		45	27				43	35	
	B - I	39	105			B - I	18	101	
		6	101				42	80	
		44	85				17	71	
		4	66				16	29	
		5	35						

TABELA 6.2

BARRA D - E					BARRA E - F				
BARRA	BORDA	EXTENS. Nº	x (cm)	E kgf/cm <sup>2</sup>	BARRA	BORDA	EXTENS. Nº	x (cm)	E kgf/cm <sup>2</sup>
D - E	B - S	7	90	133989,32	E - F	B - S	19	90	133989,32
		46	79				20	56	
		8	56				48	39	
		9	20				21	26	
	B - I	12	86			B - I	24	86	
		11	50				23	50	
		47	30				49	30	
		10	26				22	20	

BARRA A - D					BARRA - B - E				
BARRA	BORDA	EXTENS. Nº	x (cm)	E kgf/cm <sup>2</sup>	BARRA	BORDA	EXTENS. Nº	x (cm)	E kgf/cm <sup>2</sup>
A - D	B. Ext.	28	101	122967,48	A - D	B. Ext.	33	86	159080,86
		40	86	136986,35			32	52	204507,04
		30	61	114127,02			51	40	159080,86
		29	34	114127,02			31	26	204507,04
	B. Int.	27	86	136986,36		B. Int.	52	94	159080,86
		26	56	146644,45			34	101	161448,14
		41	34	114127,02			50	91	157236,45
		25	26	146644,45			36	61	157236,45
							35	34	157236,45

TABELA 6.3 - Tensões Experimentais

BARRA	BORDA	EXTENS. Nº	x (cm)	$\sigma$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	BARRA	BORDA	EXTENS. nº	x (cm)	$\sigma$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	BARRA	BORDA	EXTENS. Nº	x (cm)	$\sigma$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	BARRA	EXTENS. Nº	x (cm)	$\sigma$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	
A - B	B.S	1	105	89,49	B - C	B.S	13	96	7,12	A - D	B.S	28	101	59,44	C - F	EXTENS. Nº	37	82	7,46
		3	71	17,40			14	66	21,30			40	86	41,91					
		2	41	27,80			15	41	44,41			30	61	5,91					
		45	27	83,18			43	35	56,44			29	34	46,05					
B.S	B.S	39	105	110,11	B - C	B.S	18	105	16,90	A - D	B.S	27	86	39,50	C - F	EXTENS. Nº	38	32	4,98
		6	101	97,99			42	90	10,24			26	56	6,27					
		44	85	49,26			17	71	4,68			41	34	41,61					
		4	66	20,87			16	29	35,01			25	26	48,56					
		5	35	45,07			-	-	-			52	94	62,01					
B.S	B.S	7	90	67,19	E - F	B.S	19*	90	-	B - E	B.S	33	86	60,00	EXTENS. Nº	32	56	12,56	
		46	79	29,13			20	56	13,90			32	56	43,56					
		8	56	0,26			48	39	27,27			51	40	84,50					
		9	20	72,95			21	26	32,50			31	26	-					
B.S	B.S	12	86	40,37	E - F	B.S	24	86	14,56	B - E	B.S	34	101	79,34	EXTENS. Nº	35	34	52,68	
		11	50	22,33			23	50	42,22			50	91	59,41					
		47	30	69,76			49	30	59,97			36	61	3,22					
		10	26	39,35			22	20	62,12			35	34	-					

NOMENCLATURA ADOTADA

B.S = borda superior

B.I = borda inferior, borda interna (montante).

B.E = borda do montante, no lado mais externo do viga.

x = distância do extensômetro até o eixo da ligação.

$\sigma$  = tensão atuante na viga

\* = extensômetro 19 eliminado por apresentar defeito.

### 6.6 - Comparação entre Resultados Teóricos e Experimentais

Para a avaliação da validade do estudo teórico e experimental da viga Vierendeel de madeira fez-se a comparação dos valores obtidos através dos cálculos teóricos com o valor obtido na experimentação, para cada ponto ensaiado.

#### 6.6.1 - Método de Vierendeel e Magnel

O cálculo utilizando os métodos de Vierendeel e de Magnel apresentam os mesmos resultados numéricos.

Calculando-se uma viga Vierendeel, com características idênticas às da viga ensaiada e com as mesmas condições de carregamento, constroem-se os diagramas dos esforços figuras (6.23), (6.24) e (6.25).

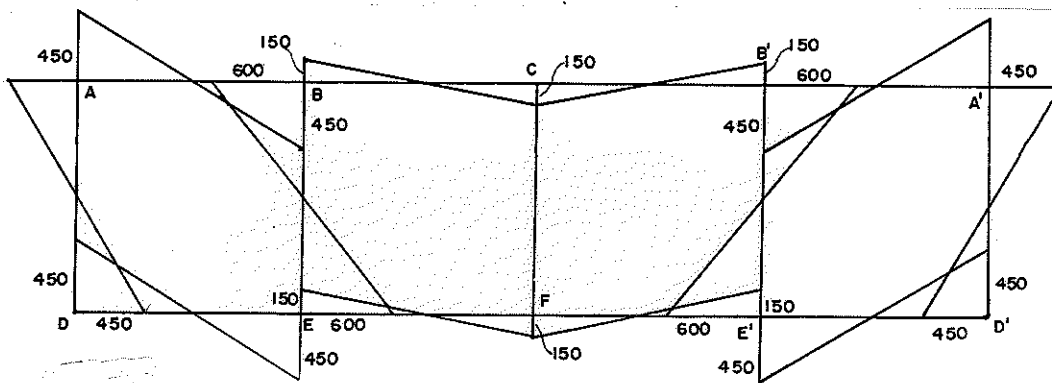


Fig. 6.23 - Diagrama de Momento Fletor (kgf m)

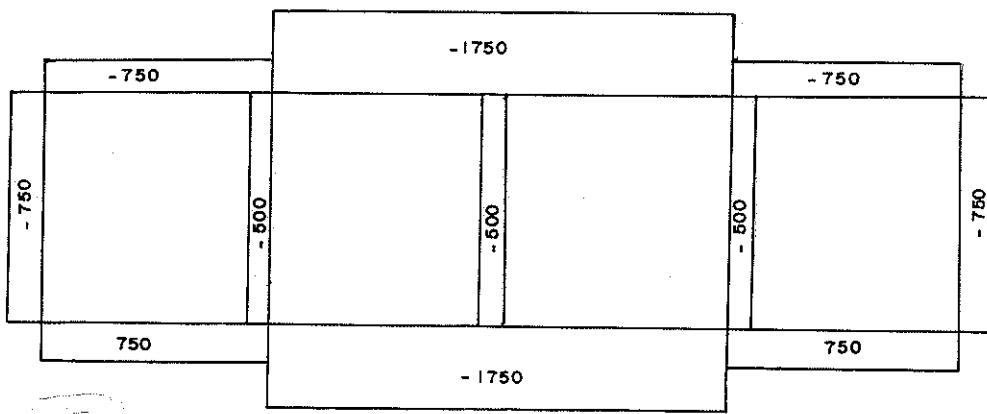


Fig. 6.24 - Diagrama de Esforço Normal (kgf)

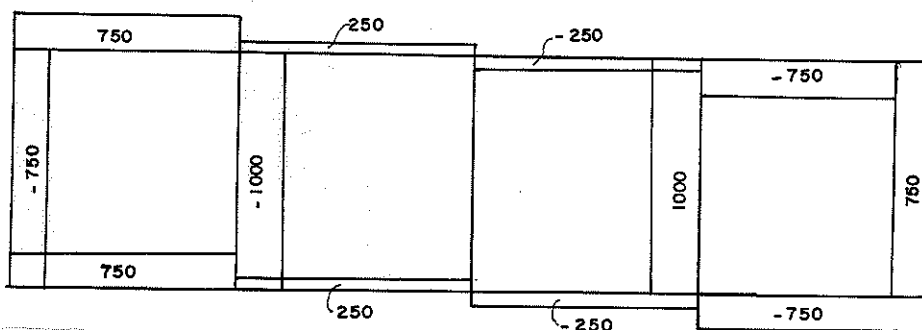


Fig. 6.25 - Diagrama de Esforço Cortante (kgf)

6.6.2 - Método de Cross

Para o cálculo dos esforços de uma viga Vierendeel, pode-se utilizar o método de Cross.

Pela facilidade de aplicação, o método de Cross, tem sido intensamente utilizado para resolução de estruturas formadas por quadros fechados. Entretanto no cálculo de estruturas muitas vezes deslocáveis, como no caso da viga Vierendeel este método, embora de aplicação simples, torna-se bastante trabalhoso.

Para reduzir este trabalho Silva Jr. e S. Lima {44}, apresentam uma sistematização de método do Cross, para o cálculo de vigas Vierendeel, baseando-se no seguinte princípio: "na estrutura real, deslocável, os momentos das diversas extremidades devem satisfazer a determinadas relações afim de que, na resolução do problema, não se introduzam outras forças externas além da aquelas que efetivamente foram aplicadas".

Portanto, fez-se a determinação dos esforços teóricos, atuantes em uma viga Vierendeel, com características geométricas e condições de carregamento idênticas às da viga ensaiada, utilizando-se este processo.

a) - Esquema Estático

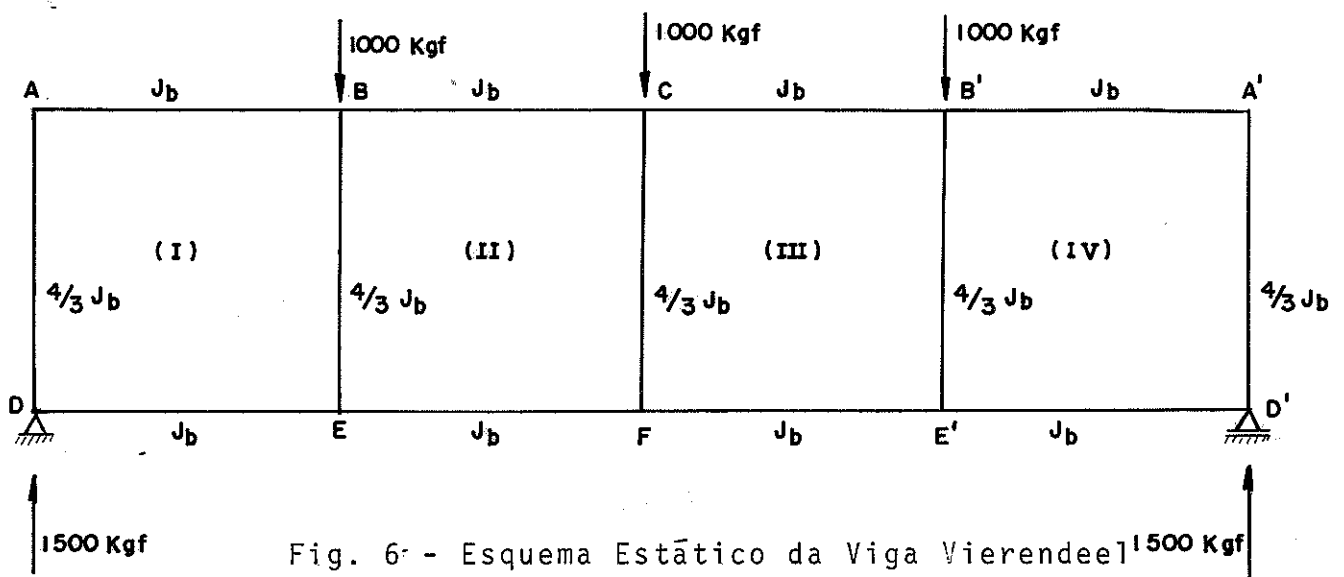
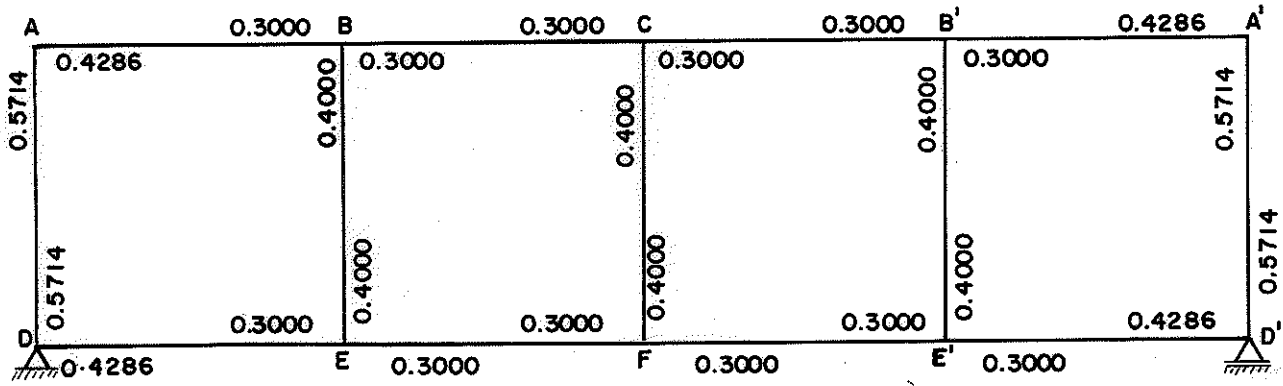


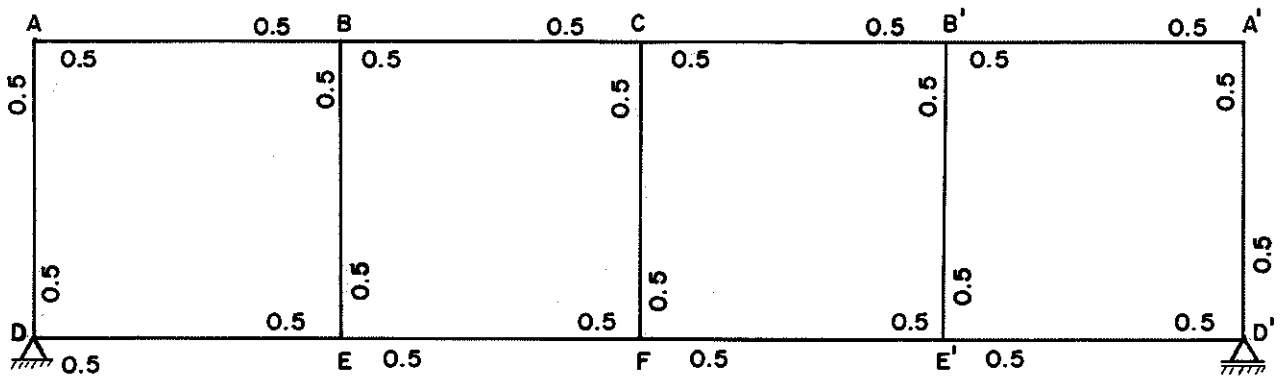
Fig. 6 - Esquema Estático da Viga Vierendeel

{44} - SILVA Jr., J.F. da & LIMA, V.M. Souza - Vigas Vierendeel. Sep. de: Engenharia, (122 - 125), Out. 1952 a Jan. 1953. São Paulo, Escola Politécnica, 1953. (Publicação nº 10)

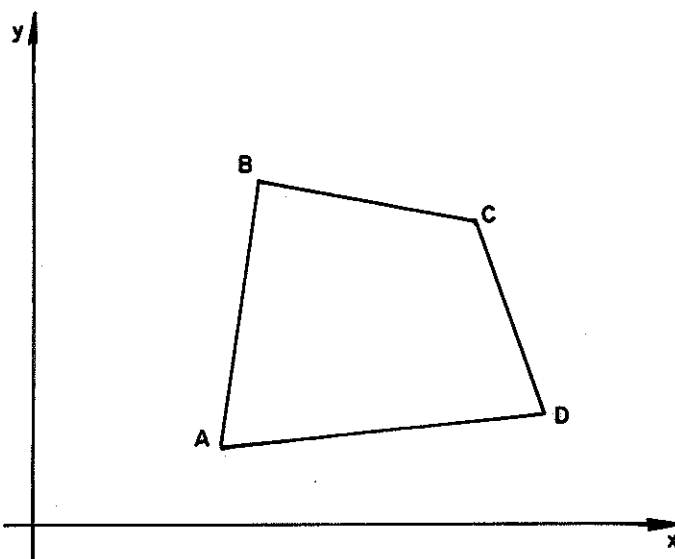
b)- Coeficiente de Distribuição,  $\mu$



c)- Coeficiente de Propagação,  $\alpha$



d)- Compatibilidade de Deslocamento



Admitindo-se serem constantes os comprimentos das barras, existem duas relações entre os deslocamentos angular  $\Psi$  das barras {45}.

$$(y_B - y_A) \Psi_{AB} + (y_C - y_B) \Psi_{BC} + (y_D - y_C) \Psi_{CD} + (y_A - y_D) \Psi_{DA} = 0$$

$$(x_B - x_A) \Psi_{AB} + (x_C - x_B) \Psi_{BC} + (x_D - x_C) \Psi_{CD} + (x_A - x_D) \Psi_{DA} = 0$$

Para painéis com banzos paralelos:

$$y_C = y_B \quad \text{e} \quad y_A = y_D$$

$$(y_B - y_A) \Psi_{AB} + (y_D - y_C) \Psi_{CD} = 0$$

$$\text{se: } |(y_B - y_A)| = |(y_D - y_C)| = \ell \quad \text{tem-se: } \Psi_{AB} - \Psi_{CD} = 0$$

$$x_D = x_C \quad \text{e} \quad x_B = x_A$$

$$(x_C - x_B) \Psi_{BC} + (x_A - x_D) \Psi_{DA} = 0 \quad \therefore \Psi_{BC} - \Psi_{DA} = 0$$

---

{ 45 } - SILVA Jr., J.F e LIMA, V.M. Souza - Op. cit. pg. 10



Logo, as equações de compatibilidade de deslocamento são dadas por:

Célula I

$$\Psi_{AB} = \Psi_{DE}$$

$$\Psi_{AD} = \Psi_{BE}$$

Célula II

$$\Psi_{BC} = \Psi_{EF}$$

$$\Psi_{BE} = \Psi_{CF}$$

Célula III

$$\Psi_{CB'} = \Psi_{FE'}$$

$$\Psi_{CF} = \Psi_{B'E'}$$

Célula IV

$$\Psi_{B'A'} = \Psi_{E'D'}$$

$$\Psi_{B'E'} = \Psi_{A'D'}$$

Como  $M' = \frac{6 EJ \cdot \Delta}{\ell^2}$  e  $\Delta = \Psi \ell$ ; tem-se:

$\Psi = \frac{M' \ell}{6 EJ}$ , obtendo-se as relações:

$$M'_{AB} = M'_{DE} \quad \dots (6.1)$$

$$M'_{AD} = M'_{BE} \quad \dots (6.2)$$

$$M'_{BC} = M'_{EF} \quad \dots (6.3)$$

$$M'_{BE} = M'_{CF} \quad \dots (6.4)$$

$$M'_{CB'} = M'_{FE'} \quad \dots (6.5)$$

$$M'_{CF} = M'_{B'E'} \quad \dots (6.6)$$

$$M'_{B'A'} = M'_{E'D'} \quad \dots (6.7)$$

$$M'_{B'E'} = M'_{A'D'} \quad \dots (6.8)$$

Tem-se, oito equações a treze incógnitas. As outras necessárias para a determinação dos momentos  $M'$ , são obtidas considerando-se as relações existentes entre os momentos finais.

e)- Relações entre os montantes finais

Aplicando-se as condições de equilíbrio, para os esforços cortantes, obtem-se:

$$M_{AB} + M_{BA} + M_{DE} + M_{ED} = 1800 \dots \dots \dots (6.9)$$

$$M_{BC} + M_{CB} + M_{EF} + M_{FE} = 600 \dots \dots \dots (6.10)$$

$$M_{CB'} + M_{B'C} + M_{FE'} + M_{E'F} = - 600 \dots \dots \dots (6.11)$$

$$M_{B'A'} + M_{A'B'} + M_{E'D'} + M_{D'E'} = - 1800 \dots \dots \dots (6.12)$$

$$M_{AD} + M_{DA} + M_{BE} + M_{EB} + M_{CF} + M_{FC} + M_{B'E'} + M_{E'B'} + \\ + M_{A'D'} + M_{D'A'} = 0 \dots \dots \dots (6.13)$$

A somat6ria dos momentos em cada c6lula, n6o se alterar6, porque o m6todo apenas redistribui os momentos, ficando as somas dos momentos de engastamento perfeito iguais 6 soma dos momentos finais.

Chamando-se de  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  e  $S_5$  a soma dos momentos, tem-se:

$$M'_{AB} + M'_{BA} + M'_{DE} + M'_{ED} = S_1$$

$$M'_{BC} + M'_{CB} + M'_{EF} + M'_{FE} = S_2$$

$$M'_{CB} + M'_{BC} + M'_{FE'} + M'_{E'F} = S_3$$

$$M'_{B'A'} + M'_{A'B'} + M'_{E'D'} + M'_{D'E'} = S_4$$

$$M'_{AD} + M'_{DA} + M'_{BE} + M'_{EB} + M'_{CF} + M'_{FC} + M'_{B'E'} + \\ + M'_{E'B'} + M'_{A'D'} + M'_{D'A'} = S_5$$

Levando-se em conta as rela76es (6.1) a (6.8), obt6m-se:

$$M'_{AB} = \frac{S_1}{4}$$

$$M'_{B'A'} = \frac{S_4}{4}$$

$$M'_{BC} = \frac{S_2}{4}$$

$$M'_{AD} = \frac{S_5}{10}$$

$$M'_{CB'} = \frac{S_3}{4}$$

f)- Compensação e Diagramas

Determina-se as relações existentes entre os momentos dinais, a serem calculados, a fim de não se introduzirem forças de fixação na estrutura real, procedeu-se a compensação de momentos.

Esta compensação de momentos é feita pelo método de Cross usual mas, no fim de cada propagação e distribuição de momento, verifica-se o atendimento ou não das relações de momentos finais. Em caso negativo acrescentam-se a estes momentos, outros momentos (indicados com asterisco) os quais, juntamente com os anteriores, além de satisfazerem a estas relações, correspondam a uma deslocabilidade possível da estrutura, admitindo-se sempre os nós bloqueados.

0.5714	0.4286	0.3	0.4	0.30	0.30	0.40	0.30	0.30	0.40	0.30	0.4286	0.5714
0*	450*	450*	0*	150*	150*	0*	-150*	-150*	0*	-450*	-450*	0*
-257	-193	-180	-240	-180	0	0	0	180	240	180	193	257
-129	-90	-97	-120	0	-90	0	90	0	120	97	90	129
0*	280*	280*	0*	135*	135*	0*	-135*	-135*	0*	-280*	-280*	0*
-34	-27	-59	-80	-59	0	0	0	59	80	59	27	34
-17	-30	-14	-40	0	-30	0	30	0	40	14	30	17
0*	65*	65*	0*	45*	45*	0*	-45*	-45*	0*	-65*	-65*	0*
-10	-8	-17	-22	-17	0	0	0	17	22	17	8	10
-5	-9	-4	-11	0	-9	0	9	0	11	4	9	5
0*	19*	19*	0*	13*	13*	0*	-13*	-13*	0*	-19*	-19*	0*
-3	-2	-5	-7	-5	0	0	0	5	7	5	2	3
-2	-3	-1	-4	0	-3	0	3	0	4	1	3	2
0*	6*	6*	0*	4*	4*	0*	-4*	-4*	0*	-6*	-6*	0*
-1	0	-2	-1	-2	0	0	0	2	1	2	0	1
0	-1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	1	0
0*	2*	2*	0*	2*	2*	0*	-2*	-2*	0*	-2*	-2*	0*
-1	0	-1	-2	-1	0	0	0	1	2	1	0	1
0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*
-459	459	442	-528	85	216	0	-216	-85	528	-442	-459	459

0.5714	0.4286	0.3	0.4	0.30	0.30	0.40	0.30	0.30	0.40	0.30	0.4286	0.5714
0*	450*	450*	0*	150*	150*	0*	-150*	-150*	0*	-450*	-450*	0*
-257	-193	-180	-240	-180	0	0	0	180	240	180	193	257
-129	-90	-97	-120	0	-90	0	90	0	120	97	90	129
0*	280*	280*	0*	135*	135*	0*	-135*	-135*	0*	-280*	-280*	0*
-34	-27	-59	-80	-59	0	0	0	59	80	59	27	34
-17	-30	-14	-40	0	-30	0	30	0	40	14	30	17
0*	65*	65*	0*	45*	45*	0*	-45*	-45*	0*	-65*	-65*	0*
-10	-8	-17	-22	-17	0	0	0	17	22	17	8	10
-5	-9	-4	-11	0	-9	0	9	0	11	4	9	5
0*	19*	19*	0*	13*	13*	0*	-13*	-13*	0*	-19*	-19*	0*
-3	-2	-5	-7	-5	0	0	0	5	7	5	2	3
-2	-3	-1	-4	0	-3	0	3	0	4	1	3	2
0*	6*	6*	0*	4*	4*	0*	-4*	-4*	0*	-6*	-6*	0*
-1	0	-2	-1	-2	0	0	0	2	1	2	0	1
0	-1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	1	0
0*	2*	2*	0*	2*	2*	0*	-2*	-2*	0*	-2*	-2*	0*
-1	0	-1	-2	-1	0	0	0	1	2	1	0	1
0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*	0*
-459	459	442	-528	85	216	0	-216	-85	528	-442	-459	459

Fig. 6.27

Da figura 6.27, tiram-se os momentos para traçar o diagrama, de momento fletor, e conseqüentemente, os diagramas de esforços normais e de esforços cortantes, figuras (6.18), (6.29) e (6.30).

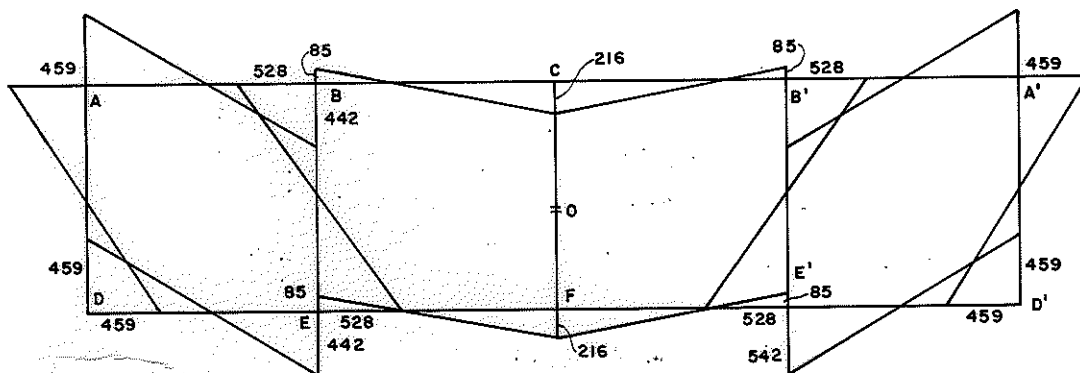


Fig. 6.18 - Diagrama de Momento Fletor (kgf m)

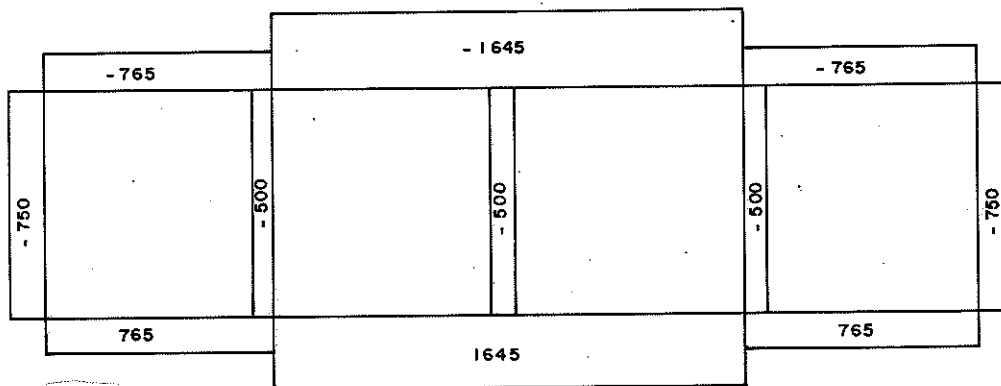


Fig. 6.19 - Diagrama de Esforço Normal (kgf)

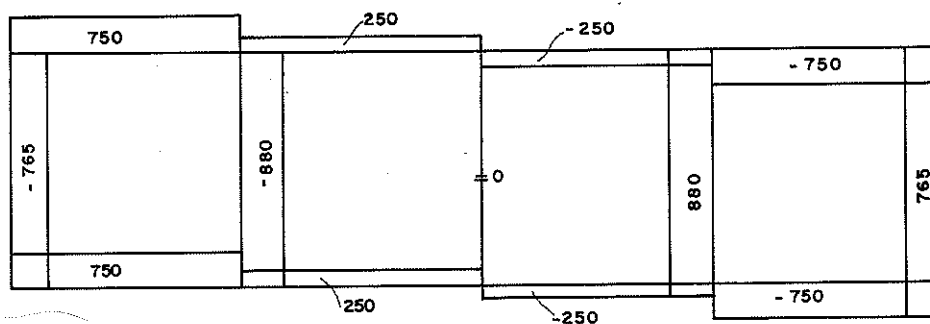


Fig. 6.20 - Diagrama de Esforço Cortante (kgf)

### 6.6.3 - Cálculo Utilizando o Programa Stress

Utilizou-se o programa Stress, para o cálculo dos esforços da viga Vierendeel de características idênticas às da viga ensaiada, obtêm-se os momentos fletores e os esforços para traçar os diagramas correspondentes, figuras (6.31), (6.32) e (6.33).

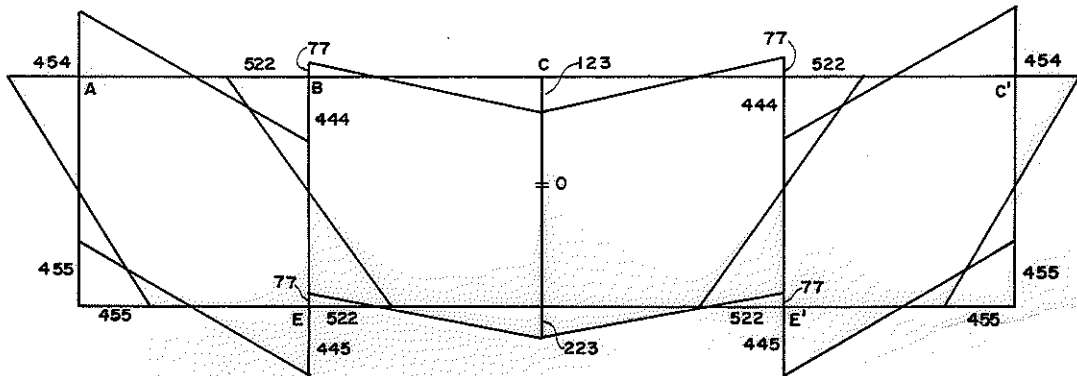


Fig. 6.31 - Diagrama de Momento Fletor (kgf m)

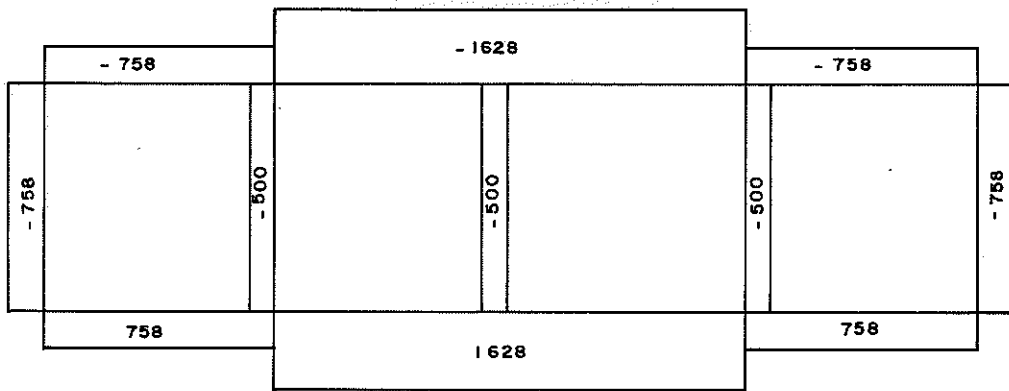


Fig. 6.32 - Diagrama de Esforço Normal (kgf)

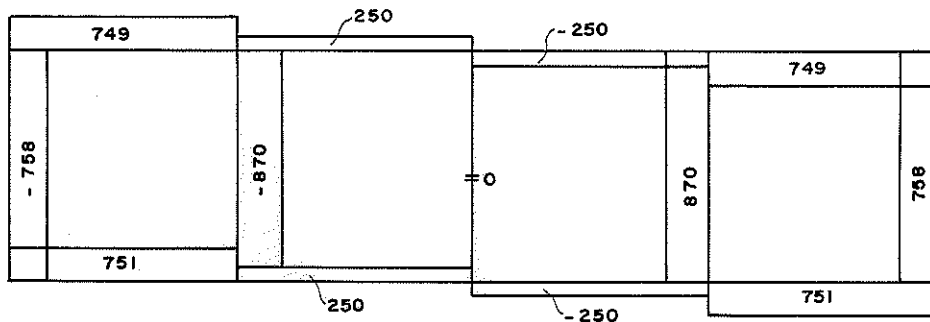


Fig. 6.33 - Diagrama de Esforço Cortante (kaf)

### 6.6.4 - Diagramas de Tensões

Utilizando-se diferentes métodos de cálculos, e os resultados obtidos no cálculo dos momentos e dos esforços fêz-se o traçado dos diagramas de tensões para cada método. Fêz-se o lançamento, nestes diagramas, das tensões obtidas experimentalmente, indicadas através dos números dos extensômetros elétricos.

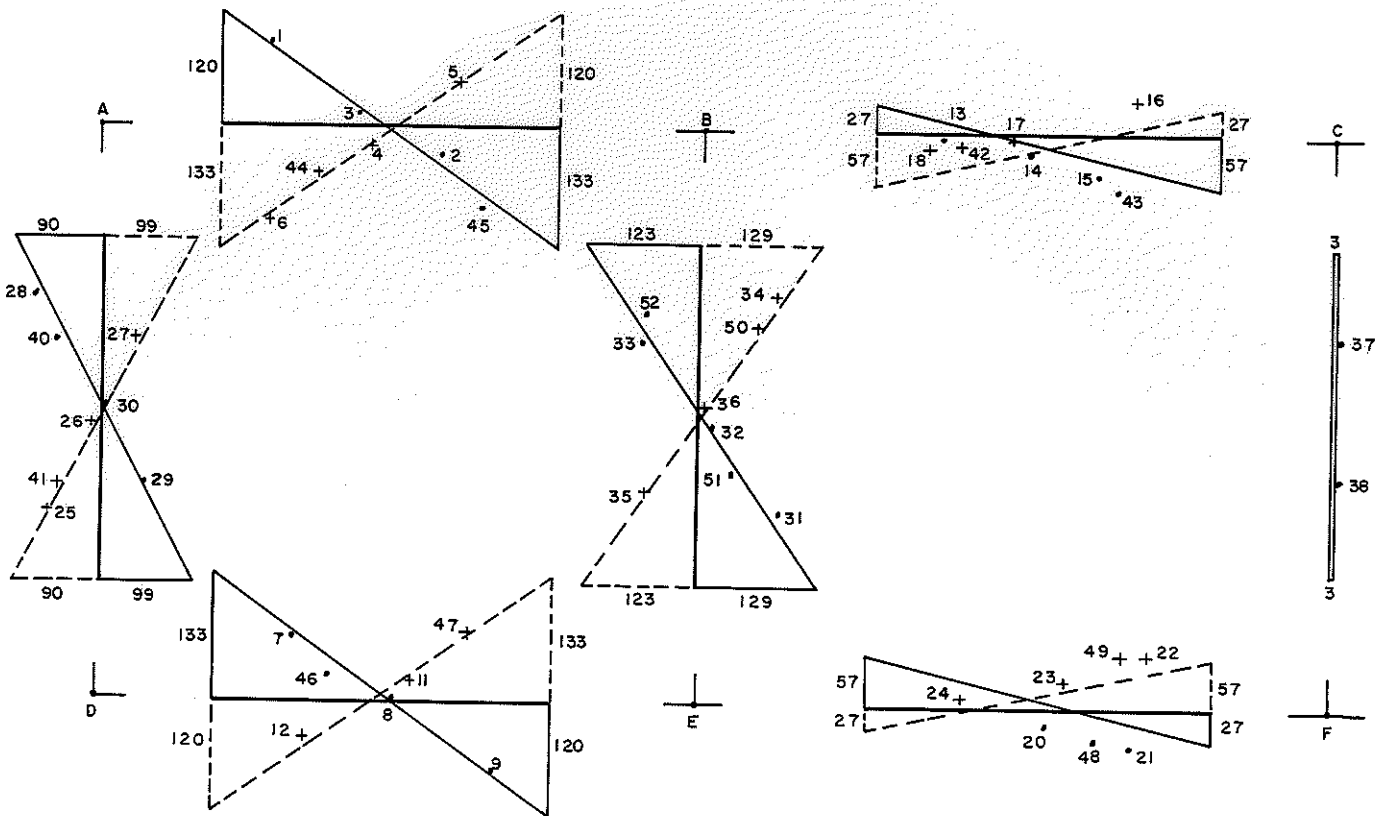


Fig. 6.34 - Diagrama de Tensões - Teóricas - Conforme Vierendeel - Magnel e Tensões Experimentais

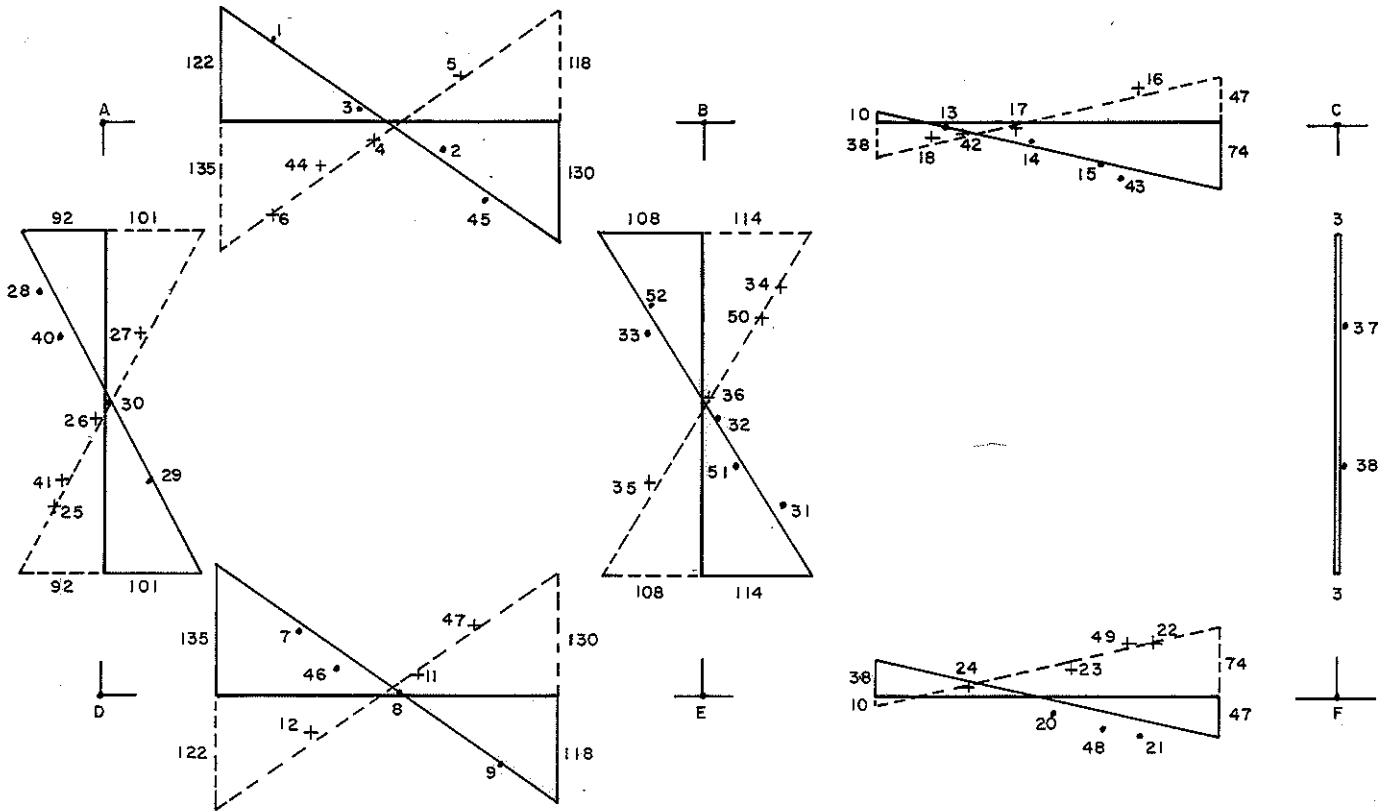


Fig. 6.35 - Diagrama de Tensões Teóricas - Segundo Cross e Tensões Experimentais

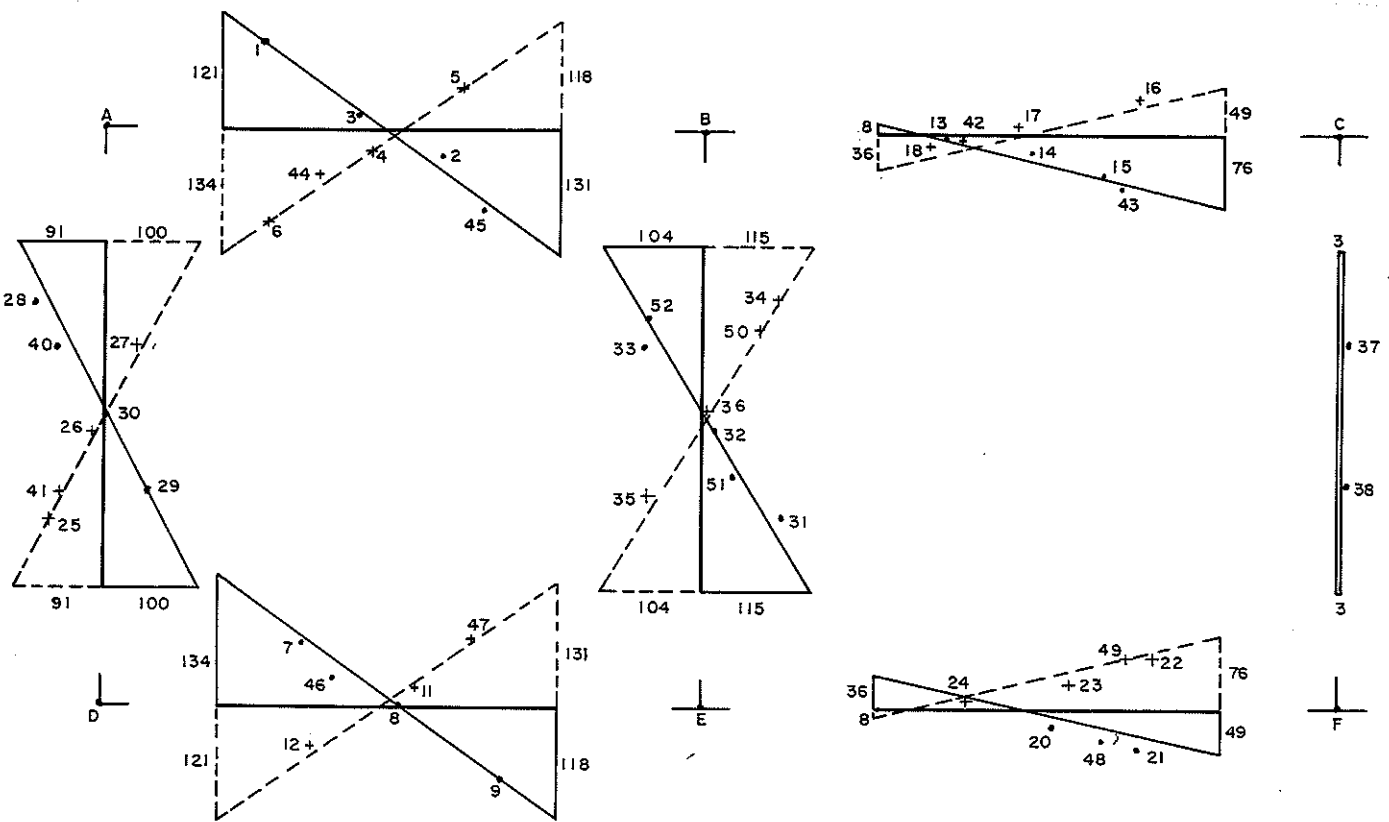


Fig. 6.36 - Diagrama de Tensões Teóricas Através do Programa Stress e Tensões Experimentais.

6.6.5 - Análise de Resultados

Na tabela 6.5 são apresentadas as tensões obtidas na experimentação e as tensões teóricas determinadas nos itens anteriores.

TABELA 6.4 - Tensões

Nº DE EXTENSOMETRO ELÉTRICO	$\sigma$ EXPERIMENTAL	$\sigma$ TEÓRICO (MAGNEL - VIERENDEEL)	$\sigma$ TEÓRICO (CROSS)	$\sigma$ TEÓRICO (STRESS)
1	89,49	88,38	90,50	89,50
3	17,40	16,69	19,10	18,10
2	- 27,80	- 46,56	- 43,90	- 44,90
45	- 83,18	- 76,08	- 73,30	- 74,30
6	- 97,94	- 92,94	- 94,94	- 94,10
44	- 49,96	- 59,21	- 61,21	- 60,50
4	- 20,87	- 19,15	- 21,15	- 20,60
5	45,07	46,21	44,21	44,50
7	67,19	49,75	71,75	71,00
46	29,14	46,56	48,56	47,90
8	- 0,26	- 1,93	0,07	- 0,40
9	- 72,95	- 77,83	- 75,83	- 76,00
12	- 40,37	- 48,32	- 50,60	- 49,60
11	22,33	27,58	25,00	26,00
47	69,76	49,75	67,00	68,00
13	- 7,12	10,15	- 6,80	- 8,80
14	- 21,29	- 10,80	- 27,80	- 29,80
15	- 44,40	- 28,30	- 45,30	- 47,30
43	- 56,44	- 32,50	- 49,50	- 51,50
18	- 16,90	- 43,70	- 24,54	- 22,54

Continua



Continuação.

TABELA 6.4 - Tensões

Nº DE EXTENSOMETRO ELÉTRICO	$\sigma$ EXPERIMENTAL	$\sigma$ TEÓRICO (MGNEL - VIERENDEEL)	$\sigma$ TEÓRICO (CROSS)	$\sigma$ TEÓRICO (STRESS)
42	- 10,24	- 36,00	- 16,75	- 14,75
17	4,68	- 22,70	- 3,29	- 1,29
16	35,01	6,70	26,46	28,46
20	- 13,90	12,20	- 7,33	- 9,33
48	- 27,27	0,30	- 19,38	- 21,38
21	- 32,50	- 8,80	- 28,50	- 30,58
24	14,56	- 3,20	13,80	15,80
23	42,22	22,00	39,00	41,00
49	59,97	36,00	53,00	55,00
22	62,12	43,00	60,00	62,00
28	59,44	60,08	61,44	60,76
40	41,91	36,45	37,32	36,88
30	- 5,91	- 2,93	- 2,89	- 2,91
29	- 46,05	- 45,45	- 46,32	- 45,88
27	- 39,50	- 45,45	- 46,32	- 45,88
26	6,27	1,80	1,93	1,87
41	41,81	36,45	37,32	36,88
25	48,56	49,05	50,18	49,62
33	60,00	51,60	45,10	41,95
32	- 12,36	- 11,40	- 10,40	- 12,80
51	- 43,20	- 45,00	- 40,00	- 42,00
31	- 84,90	- 74,40	- 65,90	- 67,55
34	- 79,34	- 89,10	- 78,85	- 76,33
50	- 59,41	- 68,10	- 60,35	- 58,08
36	- 3,22	- 5,10	- 4,85	- 3,32
35	52,88	51,60	45,10	45,95
37	- 7,46	- 3,00	- 3,00	- 3,00
38	- 4,98	- 3,00	- 3,00	- 3,00
39	- 110,11	- 101,37	- 103,38	- 102,50
52	62,01	74,40	59,90	56,55

Comparação entre as tensões experimentais e as tensões teóricas correspondentes, indicam haver diferenças muito pequenas. Análise estatística permite admitir serem estatisticamente nulas estas diferenças.

De fato o cálculo das diferenças segundo Snedecor {46} fornece:

a)- Tensões Experimentais x Tensões Teóricas Segundo Vierendeel - Magnel.

$$- 23,41 \leq \mu_D \leq 27,12$$

b)- Tensões Experimentais x Tensões Teóricas através do Método de Cross.

$$- 13,04 \leq \mu_D \leq 14,62$$

c)- Tensões Experimentais x Tensões Teóricas através do Programa Stress.

$$- 13,26 \leq \mu_D \leq 14,58$$

Os intervalos, a 95% de confiança, contêm o zero, portanto as diferenças médias podem ser estatisticamente nulas.

Os métodos considerados exatos apresentaram intervalos menores para a média das diferenças. Os diagramas de tensões figuras (6.34), (6.35) e (6.36) já permitiam pressentir este resultado, através da aproximação existente entre os pontos de inflexão e os pontos médios dos banzos e dos montantes.

Nos banzos centrais os métodos exatos apresentaram pontos de inflexão afastados do meio das barras, mas, boa concordância com os resultados experimentais.

A discrepância entre as tensões experimentais e as tensões segundo Vierendeel - Magnel para as barras dos banzos invalidam, neste caso a hipótese destes pesquisadores da coincidência do ponto de inflexão com o centro de gravidade das células.

---

{46} - SNEDECOR, George W. - *Op. cit.* p. 50.

6.7 - Deslocamentos Experimentais

Através dos transdutores indutivos, foram obtidos os seguintes deslocamentos, apresentados na tabela 6.6.

CARGA kg \ INDUT.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1147	-0,001	0,285	0,321	0,255	0,078	0,049	-0,001	-0,009	0,003	-0,007
1530	0,004	0,365	0,392	0,307	0,140	0,054	-0,001	-0,007	0,014	0,018
2406	0,001	0,622	0,661	0,520	0,194	0,091	-0,001	-0,014	0,017	0,0015
3658	0,017	0,949	1,014	0,792	0,251	0,138	-0,007	-0,019	0,025	-0,0028
4953	0,072	1,250	1,339	1,045	0,376	0,179	-0,016	-0,024	0,034	0,0048
5270	0,089	1,333	1,421	1,115	0,427	0,191	-0,019	-0,031	0,037	0,0070

A flecha admissível foi atingida com aplicação da carga 5270 kgf, distribuída nas três ligações centrais e com a carga 3250 kgf na ligação central.

A elástica do banzo inferior da viga Vierendeel é apresentada na figura 6.37.

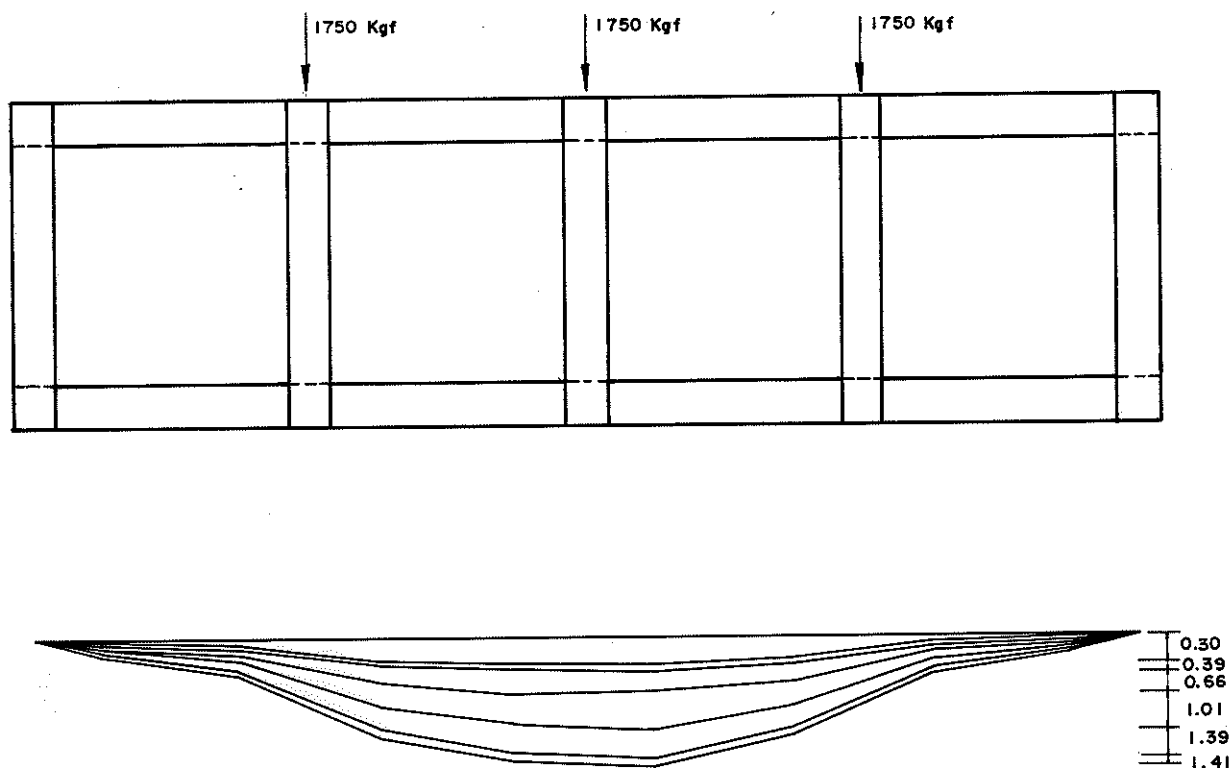


Fig. 6.37 - Flechas Experimentais na Viga Vierendeel/cm

Os valores dos deslocamentos nos montantes não são suficientes para permitir conclusões. Todavia, seu valor diminuto parece estar associado à sua maior rigidez relativa.

#### 6.8 - Ruptura

Para se ter uma idéia a respeito da ruptura, tentou-se inicialmente o carregamento nas três ligações centrais, mas optou-se em seguida pelo carregamento da ligação central. Fez-se o último carregamento da viga até a ruptura.

A viga não sofreu colapso, mas, sofreu ruptura em 4 (quatro) ligações. Estas rupturas tiveram a característica básica das rupturas frágeis: atingindo a carga exigida, a ruptura foi instantânea.

A carga de ruptura atingiu o valor 14.330 kgf. A flecha admissível foi atingida com 3240 kgf, indicando um coeficiente 4 (quatro) de redução entre a carga máxima e a de proporcionalidade.

No início da ruptura, apareceram em dois banzos simétricos (AB - A'B), próximos do centro das barras, ruptura com características de cisalhamento (Foto 1).

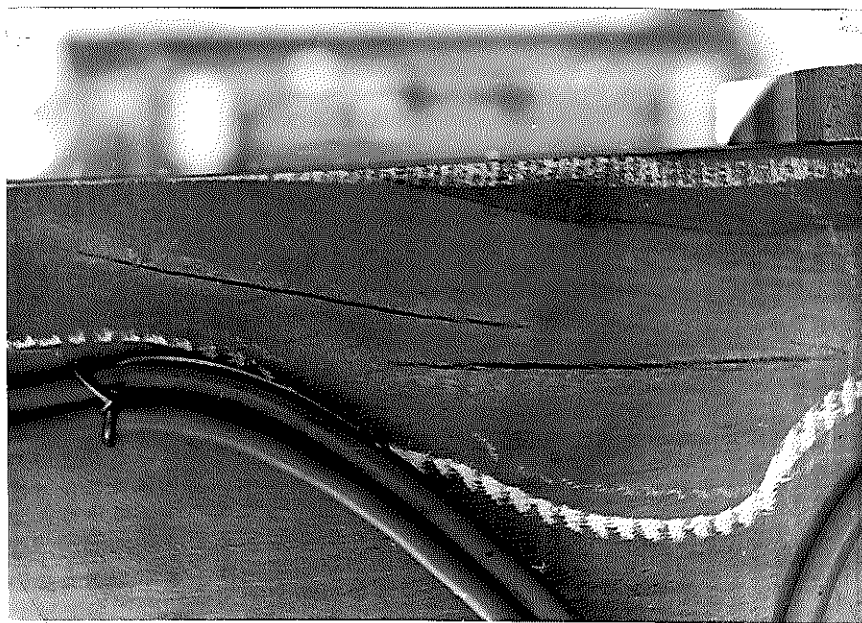


FOTO 1

A ligação D, apresentou uma ruptura típica de fendimento. (Foto 2).



FOTO 2

Em seguida ocorreu a ruptura no montante BE, em um dos lados da ligação E; na linha de colagem. (Foto 3).



FOTO 3

Enfraquecendo-se um lado da viga, as outras peças da ligação perderam a estabilidade. (Foto 4).



FOTO 4

Entretanto a ligação B, permaneceu "intacta", e na barra AB, pode-se ver com clareza o efeito do momento nesta barra. Próximo à ligação B (foto 5), verificou-se ruptura por tração na borda inferior, e próximo à ligação A (foto 6) ruptura por tração na borda superior.

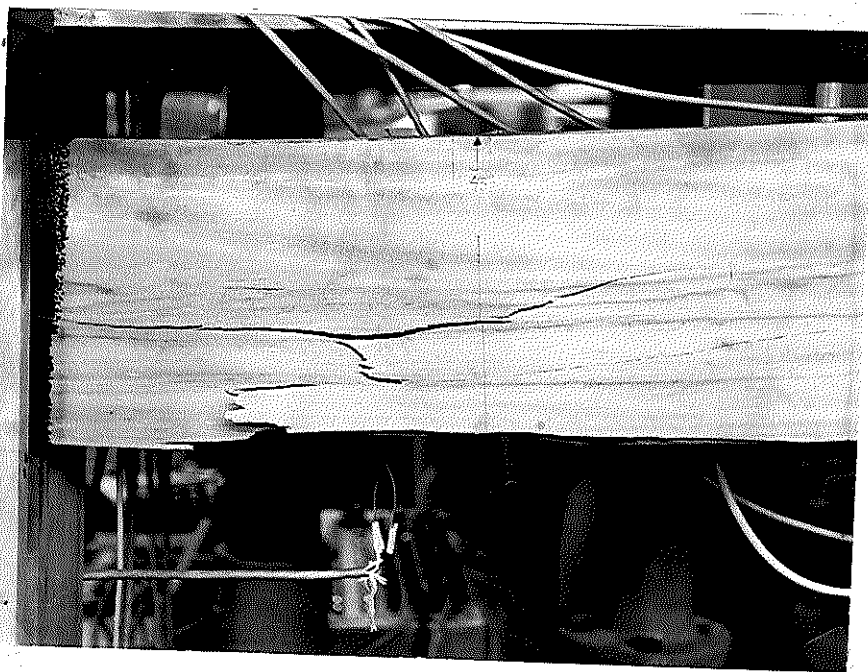


FOTO 5

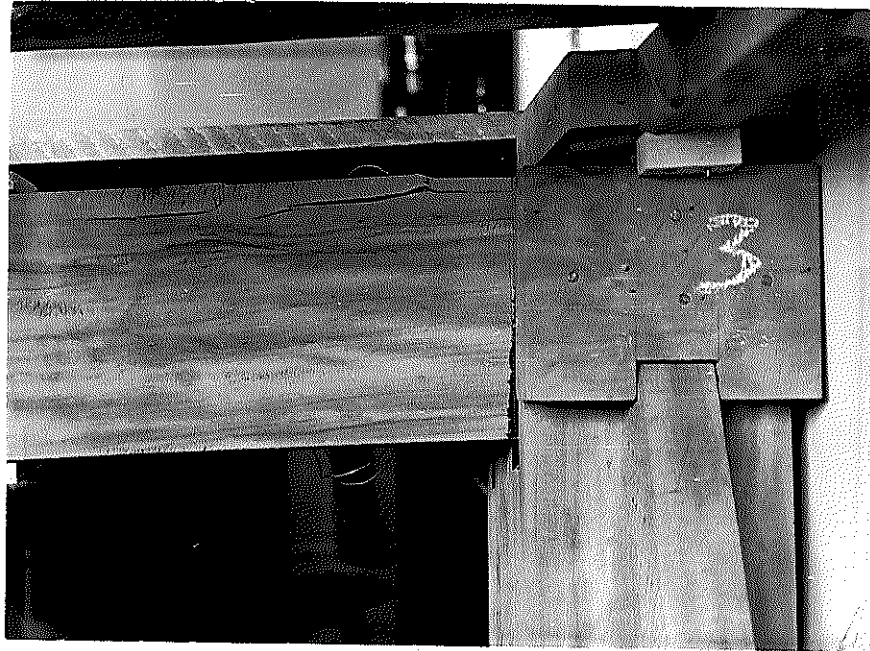


FOTO 6

Na ligação D, verificam-se ruptura por fendilhamento e por tração. (Foto 7) (Foto 8).



FOTO 7

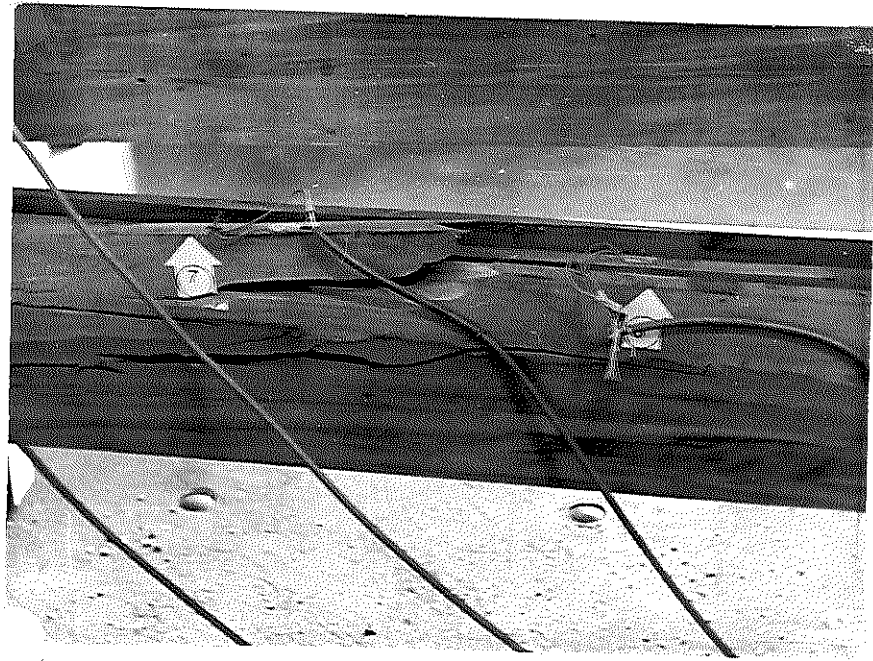


FOTO 8



7 - CONCLUSÕES

Os cálculos teóricos aproximados, segundo Vierendeel e Magnel, apresentam naturalmente resultados idênticos. A comparação destes resultados com os resultados correspondentes obtidos experimentalmente apresenta diferenças estatisticamente nulas. Ressalvadas as diferenças ligeiramente maiores nos banzos centrais, evidenciou-se a validade da utilização dos cálculos aproximados para o pre-dimensionamento da viga Vierendeel de madeira.

A diferença estatisticamente nula entre os resultados teóricos obtidos através de processos exatos (Cross e Stress) e os resultados experimentais correspondentes evidenciou a validade da utilização dos processos exatos no dimensionamento da viga Vierendeel de Madeira.

A utilização de peças compostas na montagem dos banzos e montantes da viga Vierendeel é de grande valor teórico e experimental para a obtenção de maior número de áreas coladas e do maior enrijecimento das ligações.

A utilização de adesivo à base de fenol-resorcinol - formaldeído é plenamente satisfatória para a ligação das peças de Peroba Rosa utilizadas na viga Vierendeel.

## BIBLIOGRAFIA

- 1- AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. In: Baes, Lous - Rigid frames without diagonals (the Vierendeel trusses): 93-106, Jan. 1941.
- 2- \_\_\_\_\_ In: Mensch, L.J. et alii - Analysis of Vierendeel trusses - Discussion: 1434-1958, Nov. 1936.
- 3- \_\_\_\_\_ In: Youngs, D. - Analysis of Vierendeel trusses: 838-859, Aug. 1936.
- 4- ANTUNES, J.C.O.S. & ANTUNES, H.C.C. - Estática das estruturas (temas complementares). São Carlos, EESC-USP, 1967.
- 5- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - Cálculo e execução de estruturas de madeira - NB-11. Rio de Janeiro, ABNT, 1951.
- 6- DANIN, Cláudio Miranda - Vigas Vierendeel em concreto armado. Rio de Janeiro, PUC, Novembro, 1978. (Tese de Mestrado)
- 7- FREAS, A.D. & SELBO, M.L.- Fabrication and design of glued laminated wood structural members. Washington, D.C., Feb. 1954. (Technical Bulletin, 1069).
- 8- GERE, James M.- Distribucion de momentos. México, Continental, 1965. 412p.
- 9- GILLESPIE, Robert Robert H.; COUNTRYMAN, David; BLOMQUIST, Richard F.- Adhesives in building construction. USDA-FS, Mad., Wis., Feb. 1978. 160p. (Agriculture Handbook, 516).
- 10- GUIDO, C.- Lezioni sulla scienza delle costruzioni. Torino, Vincenzo Bona, 1920. v.2.
- 11- HELLMEISTER, João Cesar- Estruturas de Madeira. 2.ed. 4. reimpr. rev. e corrig. São Carlos, EESC-USP, 1977. 113p. (Notas de Aula).

- 12- KARLSEN, G.G.- Wooden structures. Moscou, Mir Publishers, 1967. 638p.
- 13- LAMBIN, Albert & CHRISTOPHE, Paul- Le pont Vierendeel. Rapport - Annales des Travaux Publics de Belgique, tome III, Fevrier, 1898.
- 14- MAGNEL, G.- Cours de stabilité des constructions. 3. ed. Belgique, Fecheyr Gand, 1948. v.1.
- 15- \_\_\_\_\_ - Le calcul pratique des poutres Vierendeel. Gand, Van Ryselberghe & Rombaut, 1934. 120p.
- 16- MATEUS, Tomás J.E.- Bases para o dimensionamento de estruturas de madeira. Lisboa, LNEC, 1961. 306p.
- 17- PERCIVAL, Donald H.- Nail-glued roof trusses from low-grade hardwood lumber. Lafayette, Indiana, Purdue University; Agricultural Experiment Station, Mar. 1957. 26p. (Station Bulletin, 649).
- 18- PERKINS, R.H.; SUDDARTH, S.K.; DALE, A.C.- Rotational resistance of three-membered nailed joints subjected to bending moment. Lafayette, Indiana, Purdue University; Agricultural Experiment Station, Dec. 1962. 12p. (Research Bulletin, 753).
- 19- RADCLIFFE, B.M. & GRANUM, H.- A new load pitched roof truss with nail-glued connection. Lafayette, Indiana, Purdue University; Agricultural Experiment Station, Jan. 1955. 22p. (Station Bulletin, 617).
- 20- RADCLIFFE, B.M. & SUDDARTH, S.K.- The Purdue Illinois nail-glued truss with a pitch for 2:12 for span of 24'8". Lafayette, Indiana, Purdue University; Agricultural Experiment Station, Set. 1954. 25p.

- 21- RADCLIFFE, B.M. & SUDDARTH, S.K.- The Purdue Illinois - glued roof truss with a pitch of 2:12 and 4:12 for span of 24 feet 8 inch and 28 feet 8 inch. Lafayette, Indiana, Purdue University; Agricultural Experiment Station, Aug. 1955. 22p. (Station Bulletin, 629).
- 22- SILVA JR., J.F. da & LIMA, V.M. Souza- Vigas Vierendeel. Sep. de: Engenharia, (112-125), Out. 1952 a Jan. 1953. São Paulo, Escola Politécnica, 1953. (Publicação nº 10).
- 23- SNEDECOR, George W.- Statistical methods: applied to experiments in agriculture and biology. 5. ed. Ames, Iowa State University, c1956. 534p.
- 24- SUDDARTH, Stanley K.- The design of glued joints for wood trusses an frames. Lafayette, Indiana, Purdue University; Agricultural Experiment Station, Dec. 1961. 15p. (Research Bulletin, 727).
- 25- VIERENDEEL, A.- Ponts en arcades. Annales des Travaux Publics de Belgique, tome I, Octobre, 1896.